NA_1

P_1

a

f 不连续:

假设 $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 1, & x>0\end{cases}$

取 $x_1=-1$，$x_2=1$，不存在 ξ 使得 $f(\xi)=\frac{1}{2}f(x_1)+\frac{1}{2}f(x_2)$

f 连续:

$\because\ \max\{f(a),f(b)\}\ge\frac{1}{2}f(x_1)+\frac{1}{2}f(x_2)\ge\min\{f(a),f(b)\}$

$\therefore$ 由中值定理：至少存在一个 ξ 使得 $f(\xi)=\frac{1}{2}f(x_1)+\frac{1}{2}f(x_2)$

b

由a知：f 不连续下该结果不成立

对于 f 连续:

设 $A=\frac{c_1f(x_1)}{c_1+c_2}+\frac{c_2f(x_2)}{c_1+c_2}=\frac{c_1}{c_1+c_2}f(x_1)+\frac{c_2}{c_1+c_2}f(x_2)$

$$\because\ \begin{cases}\dfrac{c_1}{c_1+c_2}<1\\ \dfrac{c_2}{c_1+c_2}<1\\ \dfrac{c_1+c_2}{c_1+c_2}=1\end{cases}$$

$\therefore\ \min\{f(x_1),f(x_2)\}\le A\le\max\{f(x_1),f(x_2)\}$

$\therefore$ 由中值定理：至少存在一个 ξ 使得 $f(\xi)=\frac{c_1f(x_1)}{c_1+c_2}+\frac{c_2f(x_2)}{c_1+c_2}$

c

取 $f(x)=x$，$x_1=1$，$x_2=2$，$c_1=1$，$c_2=-10001$

则 $A=\frac{c_1f(x_1)}{c_1+c_2}+\frac{c_2f(x_2)}{c_1+c_2}=2.0001$

$\because\ f(x)\in[1,2]$

$\therefore$ 不存在 ξ 使得 $f(\xi)=\frac{c_1f(x_1)}{c_1+c_2}+\frac{c_2f(x_2)}{c_1+c_2}$

P_2

a

存在 $a\,(x_0 \le a \le x_0+\epsilon)$ 使得 $f'(a) = \frac{f(x_0+\epsilon)-f(x_0)}{\epsilon}$

$\therefore |f(x_0) - \tilde{f}(x_0)| = |f(x_0+\epsilon) - f(x_0)| \approx |\epsilon f'(x_0)|$

$\frac{|f(x_0)-\tilde{f}(x_0)|}{|f(x_0)|} = \frac{|f(x_0+\epsilon)-f(x_0)|}{|f(x_0)|} \approx \frac{|\epsilon f'(x)|}{|f(x)|}$

b

i

存在 $a\,(x_0 \le a \le x_0+\epsilon)$ 使得 $f'(a) = \frac{f(x_0+\epsilon)-f(x_0)}{\epsilon}$

对于绝对误差:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \frac{f(x_0+\epsilon)-f(x_0)}{\epsilon} \\ e^a\epsilon &= |f(x_0+\epsilon)-f(x_0)| \end{aligned}$$

$\because\ y = e^x\epsilon$ 在 $x_0 \le x \le x_0+\epsilon$ 上单调递增

$\therefore\ e^{x_0}\epsilon \le e^a\epsilon \le e^{x_0+\epsilon}\epsilon$

$\Rightarrow 5\times10^{-6}e \le |f(x_0+\epsilon)-f(x_0)| \le 5\times10^{-6}e^{1.000005}$

对于相对误差:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \frac{f(x_0+\epsilon)-f(x_0)}{\epsilon} \\ e^{a-x_0}\epsilon &= \frac{|f(x_0+\epsilon)-f(x_0)|}{|f(x_0)|} \end{aligned}$$

$\because\ y = e^{x-x_0}\epsilon$ 在 $x_0 \le x \le x_0+\epsilon$ 上单调递减

$\therefore\ \epsilon \le e^{a-x_0}\epsilon \le \epsilon e^{\epsilon}$

$\Rightarrow 5\times10^{-6} \le \frac{|f(x_0+\epsilon)-f(x_0)|}{|f(x_0)|} \le 5\times10^{-6}e^{5\times10^{-6}}$

ii

存在 $a\,(x_0 \le a \le x_0+\epsilon)$ 使得 $f'(a) = \frac{f(x_0+\epsilon)-f(x_0)}{\epsilon}$

对于绝对误差:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \frac{f(x_0+\epsilon)-f(x_0)}{\epsilon} \\ \epsilon\cos a &= |f(x_0+\epsilon)-f(x_0)| \end{aligned}$$

$\because\ y = \epsilon\cos x$ 在 $x_0 \le x \le x_0+\epsilon$ 上单调递减

$\therefore\ \epsilon\cos(x_0+\epsilon) \le \epsilon\cos a \le \epsilon\cos(x_0)$

$\Rightarrow 5\times10^{-6}\cos(1.000005) \le |f(x_0+\epsilon)-f(x_0)| \le 5\times10^{-6}\cos(1)$

对于相对误差:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \frac{f(x_0+\epsilon)-f(x_0)}{\epsilon} \\ \frac{\epsilon\cos a}{\sin x_0} &= \frac{|f(x_0+\epsilon)-f(x_0)|}{|f(x_0)|} \end{aligned}$$

$\because\ y = \frac{\epsilon \cos a}{\sin x_0}$ 在 $x_0 \le x \le x_0 + \epsilon$ 上单调递减

$\therefore\ \frac{\epsilon \cos(x_0+\epsilon)}{\sin x_0} \le \frac{\epsilon \cos a}{\sin x_0} \le \frac{\epsilon \cos \epsilon}{\sin x_0}$
$\Rightarrow \frac{5\times10^{-6}\cos(1.000005)}{\sin(1)} \le \frac{|f(x_0+\epsilon)-f(x_0)|}{|f(x_0)|} \le \frac{5\times10^{-6}\cos(1)}{\sin(1)}$

c

i

存在 a ($x_0 \le a \le x_0 + \epsilon$) 使得 $f'(a) = \frac{f(x_0+\epsilon)-f(x_0)}{\epsilon}$

对于绝对误差:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \frac{f(x_0+\epsilon)-f(x_0)}{\epsilon} \\ e^a\epsilon &= |f(x_0+\epsilon)-f(x_0)| \end{aligned}$$

$\because\ y = e^x\epsilon$ 在 $x_0 \le x \le x_0 + \epsilon$ 上单调递增

$\therefore\ e^{x_0}\epsilon \le e^a\epsilon \le e^{x_0+\epsilon}\epsilon$
$\Rightarrow 5\times10^{-5}e^{10} \le |f(x_0+\epsilon)-f(x_0)| \le 5\times10^{-5}e^{1.000005\times10^1}$

对于相对误差:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \frac{f(x_0+\epsilon)-f(x_0)}{\epsilon} \\ e^{a-x_0}\epsilon &= \frac{|f(x_0+\epsilon)-f(x_0)|}{|f(x_0)|} \end{aligned}$$

$\because\ y = e^{x-x_0}\epsilon$ 在 $x_0 \le x \le x_0 + \epsilon$ 上单调递减

$\therefore\ \epsilon \le e^{a-x_0}\epsilon \le \epsilon e^{\epsilon}$
$\Rightarrow 5\times10^{-5} \le \frac{|f(x_0+\epsilon)-f(x_0)|}{|f(x_0)|} \le 5\times10^{-5}e^{5\times10^{-5}}$

ii

存在 a ($x_0 \le a \le x_0 + \epsilon$) 使得 $f'(a) = \frac{f(x_0+\epsilon)-f(x_0)}{\epsilon}$

对于绝对误差:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \frac{f(x_0+\epsilon)-f(x_0)}{\epsilon} \\ \epsilon\cos a &= |f(x_0+\epsilon)-f(x_0)| \end{aligned}$$

$\because\ y = \epsilon\cos x$ 在 $x_0 \le x \le x_0 + \epsilon$ 上单调递增

$\therefore\ \epsilon\cos(x_0+\epsilon) \le \epsilon\cos a \le \epsilon\cos(x_0)$
$\Rightarrow 5\times10^{-5}\cos(1.000005\times10^1) \le |f(x_0+\epsilon)-f(x_0)| \le 5\times10^{-5}\cos(10)$

对于相对误差:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \frac{f(x_0+\epsilon)-f(x_0)}{\epsilon} \\ |\frac{\epsilon\cos a}{\sin x_0}| &= \frac{|f(x_0+\epsilon)-f(x_0)|}{|f(x_0)|} \end{aligned}$$

$\because\ y = |\frac{\epsilon \cos a}{\sin x_0}|$ 在 $x_0 \le x \le x_0 + \epsilon$ 上单调递减

$\therefore \ \frac{\epsilon \cos(x_0+\epsilon)}{\sin x_0} \le \frac{\epsilon \cos a}{\sin x_0} \le \frac{\epsilon \cos x_0}{\sin x_0}$
$\Rightarrow \ \frac{5\times10^{-5} \cos(1.000005\times10^{1})}{\sin(10)} \le \frac{|f(x_0+\epsilon)-f(x_0)|}{|f(x_0)|} \le \frac{5\times10^{-5} \cos(10)}{\sin(10)}$

P_3

i

a:

$$\frac{4}{5}+\frac{1}{3}=\frac{17}{15}$$

b:

$$(\frac{1}{3}+\frac{3}{11})-\frac{3}{20}=\frac{20}{33}-\frac{3}{20}=\frac{301}{660}$$

ii

a:

$$\frac{4}{5}+\frac{1}{3}=0.800+0.333=1.13$$

b:

$$(\frac{1}{3}+\frac{3}{11})-\frac{3}{20}=(0.333+0.272)-0.150=0.605-0.150=4.55\times10^{-1}$$

iii

a:

$$\frac{4}{5}+\frac{1}{3}=0.800+0.333=1.13$$

b:

$$(\frac{1}{3}+\frac{3}{11})-\frac{3}{20}=(0.333+0.273)-0.150=0.606-0.150=4.56\times10^{-1}$$

iv

对于 ii:

a的相对误差:

$$\frac{|\frac{17}{15}-1.13|}{|\frac{17}{15}|}\approx 2.941\times10^{-3}$$

b的相对误差:

$$\frac{|\frac{301}{660}-4.55\times10^{-1}|}{|\frac{301}{660}|}\approx 2.326\times10^{-3}$$

对于 iii：

a的相对误差：

$$\frac{|\frac{17}{15}-1.13|}{|\frac{17}{15}|}\approx 2.941\times10^{-3}$$

b的相对误差：

$$\frac{|\frac{301}{660}-4.56\times10^{-1}|}{|\frac{301}{660}|}\approx 1.329\times10^{-4}$$

P_4

a

$\because\ F_1(x)=L_1+O(x^\alpha),\ F_2(x)=L_2+O(x^\beta)$

$\therefore$ 存在 K_1，$K_2\ (K_1>0, K_2>0)$ 使得 $|F_1(x)-L_1|\le K_1|x^\alpha|,\ |F_2(x)-L_2|\le K_2|x^\beta|$

取 $c=\max(|c_1|,|c_2|,1)$，$K=\max(K_1,K_2)$，$\delta=\max(\alpha,\beta)$，$\gamma=\min(\alpha,\beta)$

由于 $\delta-\gamma\ge 0$，对于足够小的 x：$|x|^{\delta-\gamma}\le 2\Rightarrow |x|^\delta\le 2|x|^\gamma$

$\therefore$ 在 x 足够小时：

$$\begin{aligned}|F(x)-c_1L_1-c_2L_2|&=|c_1(F_1(x)-L_1)+c_2(F_2(x)-L_2)|\\&\le|c_1(F_1(x)-L_1)|+|c_2(F_2(x)-L_2)|\\&\le cK[|x|^\alpha+|x|^\beta]\\&\le cK[|x|^\gamma+|x|^\delta]\\&\le cK[|x|^\gamma+2|x|^\gamma]\\&=3cK|x|^\gamma\end{aligned}$$

$\because 3cK$ 为常数

$\therefore\ F(x)=c_1L_1+c_2L_2+O(x^\gamma)$

b

分别用 c_1x_1，c_2x 替代 $F_1(x)$，$F_2(x)$ 中的 x：

$$F_1(c_1x)=L_1+O((c_1x)^\alpha),\ F_2(c_2x)=L_2+O((c_2x)^\beta)$$

$\therefore$ 存在 K_1，$K_2\ (K_1>0, K_2>0)$ 使得
$|F_1(c_1x)-L_1|\le K_1|(c_1x)^\alpha|,\ |F_2(c_2x)-L_2|\le K_2|(c_2x)^\beta|$

由于 $\delta-\gamma\ge 0$，对于足够小的 x：$|x|^{\delta-\gamma}\le 2\Rightarrow |x|^\delta\le 2|x|^\gamma$

$\therefore$ 在 x 足够小时：

$$
\begin{aligned}
|G(x)-L_1-L_2| &= |(F_1(c_1x)-L_1)+(F_2(c_2x)-L_2)| \\
&\leq |(F_1(c_1x)-L_1)+(F_2(c_2x)-L_2)| \\
&\leq K_1|c_1x|^{\alpha}+K_2|c_2x|^{\beta} \\
&\leq Kc^{\delta}[|x|^{\alpha}+|x|^{\beta}] \\
&\leq Kc^{\delta}[|x|^{\gamma}+|x|^{\delta}] \\
&\leq Kc^{\delta}[|x|^{\gamma}+2|x|^{\gamma}] \\
&= 3Kc^{\delta}|x|^{\gamma}
\end{aligned}
$$

$\because 3cK$ 为常数

$\therefore\ G(x)=L_1+L_2+O(x^{\gamma})$

P_5

由c语言完成

a

```c
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#define Max_Iterations 10000

//设定待求解的函数
double Func(double x){
    double y = exp(x)-x*(x-3)-2;
    return y;
}

int main(){
    double e, p, a, b,FP,FA;
    int i = 1;
    //二分法迭代
    a = 0;
    b = 1;
    FA = Func(a);
    while(i<Max_Iterations){
        p = a + (b-a) / 2;
        //打印第i次迭代结果
        printf("p%d: %.6lf\n",i,p);
        FP = Func(p);
        if(FP == 0 || (b-a) / 2 < 0.00001){
            //打印最终结果
            printf("x = p%d = %.6lf\n",i,p);
            return 0;
        }
        if(FA*FP>0){
            a = p ;
            FA = FP;
        }
        else
            b = p;
        i++;
    }
    //判断迭代次数超过上限，若超过，则迭代失败
    if(i>=Max_Iterations)
```

```
        printf("Failed after %d iterations",i);
    return 0;
}

/**************************
输出（gcc version 8.2.0）：
p1: 0.500000
p2: 0.250000
p3: 0.375000
p4: 0.312500
p5: 0.281250
p6: 0.265625
p7: 0.257813
p8: 0.253906
p9: 0.255859
p10: 0.256836
p11: 0.257324
p12: 0.257568
p13: 0.257446
p14: 0.257507
p15: 0.257538
p16: 0.257523
p17: 0.257530
x = p17 = 0.257530
**************************/
```

b

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#define Max_Iterations 10000

//设定待求解的函数
double Func(double x){
    double y = x*cos(x)-x*(2*x-3)-1;
    return y;
}

//二分法求解
void Bisection(double a,double b){
    double e, p,FP,FA;
    int i = 1;
    FA = Func(a);
    while(i<Max_Iterations){
        p = a + (b-a) / 2;
        //打印第i次迭代结果
        printf("p%d: %.6lf\n",i,p);
        FP = Func(p);
        if(FP == 0 || (b-a) / 2 < 0.00001){
            //打印最终结果
            printf("x = p%d = %.6lf\n",i,p);
            break;
        }
        if(FA*FP>0){
            a = p ;
```

```
            FA = FP;
        }
        else
            b = p;
        i++;
    }
    //判断迭代次数超过上限，若超过，则迭代失败
    if(i>=Max_Iterations)
        printf("Failed after %d iterations",i);
}

int main(){
    //用二分法求解[0.2, 0.3]区间上的解
    printf("##########\n[0.2, 0.3]\n");
    Bisection(0.2,0.3);

    //用二分法求解[1.2, 1.3]区间上的解
    printf("##########\n[1.2, 1.3]\n");
    Bisection(1.2,1.3);
    return 0;
}

/***************************
输出（gcc version 8.2.0）：
##########
[0.2, 0.3]
p1: 0.250000
p2: 0.275000
p3: 0.287500
p4: 0.293750
p5: 0.296875
p6: 0.298438
p7: 0.297656
p8: 0.297266
p9: 0.297461
p10: 0.297559
p11: 0.297510
p12: 0.297534
p13: 0.297522
p14: 0.297528
x = p14 = 0.297528
##########
[1.2, 1.3]
p1: 1.250000
p2: 1.275000
p3: 1.262500
p4: 1.256250
p5: 1.259375
p6: 1.257813
p7: 1.257031
p8: 1.256641
p9: 1.256445
p10: 1.256543
p11: 1.256592
p12: 1.256616
p13: 1.256628
p14: 1.256622
x = p14 = 1.256622
```

```
**************************/
```

P_6

由c语言完成

a

由题知：取 $p_0 = 1$

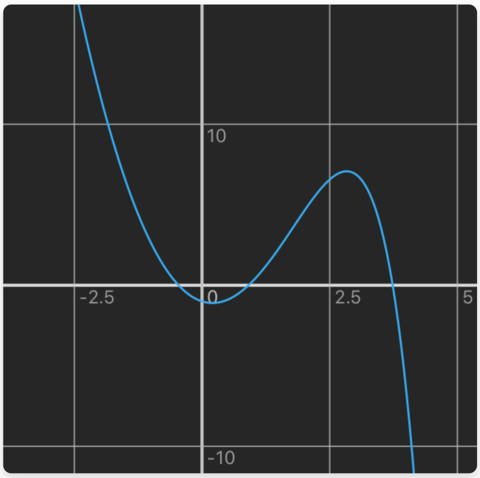
```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#define PI 3.1415926535898
#define Max_Iterations 10000

//设定待求解的函数
double g(double x){
    //为使不动点迭代方法下该过程可以收敛，将原函数左右两端除以4后再加x
    double y = sin(PI*x)/2+x/4+x;
    return y;
}

int main(){
    //不动点方法求解
    double p, p0 = 1;
    int i = 1;
    while(i<Max_Iterations){
        p  = g(p0);//计算得到pi
        //打印第i次迭代结果
        printf("p%d: %.3lf\n",i,p);
        if(fabs(p-p0)<0.01){
            //打印最终结果
            printf("x = p%d = %.3lf\n",i, p);
            return 0;
        }
        i++;
        p0 = p;//更新p0
    }
    //判断迭代次数超过上限，若超过，则迭代失败
    if(i>=Max_Iterations)
        printf("Failed after %d iterations",i);
    return 0;
}

/**************************
输出（gcc version 8.2.0）：
p1: 1.250
p2: 1.209
p3: 1.206
x = p3 = 1.206
**************************/
```

b

设 $f(x) = 3x^2 - e^x$

$\therefore\ f'(x) = 6x - e^x$，$f''(x) = 6 - e^x$，$f'''(x) = -e^x$

对函数以及其导函数进行分析，其大致图像如图所示：



当 $x > 4$ 后：

$\because\ f''(x) < 0$，$f'(4) < 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) < 0$

$\therefore$ 在该区间无零点

当 $x < -1$ 后：

$\because\ f'(x) < 0$，$f(-1) > 0 \Rightarrow f(x) > 0$

$\therefore$ 在该区间无零点

$\because f(-1) > 0$，$f(0) < 0$，$f(0.5) < 0$，$f(1.5) > 0$，$f(3 > 0)$，$f(4) < 0$

$\therefore$ 大致估计，该方程分别在 $[-1, 0]$，$[0.5, 1.5]$，$[3, 4]$ 上各有一解：

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#define Max_Iterations 10000

//设定待求解的函数
double g(double x,double c){
    //为使不动点迭代方法下该过程可以收敛，将原方程f(x)=0变换为f(x)/c+x=x
    //对于不同范围的根求解需要设定相应的c值
    double y = 3*x*x / c - exp(x) / c + x;
    return y;
}

//不动点方法求解
void FP(double p0,double c){
    double p;
    int i = 1;
    while(i<Max_Iterations){
        p = g(p0,c);//计算得到pi
        //打印第i次迭代结果
        printf("p%d: %.3lf\n",i,p);
        if(fabs(p-p0)<0.01){
```

```
            //打印最终结果
            printf("x = p%d = %.3lf\n",i, p);
            break;
        }
        i++;
        p0 = p;//更新p0
    }
    //判断迭代次数超过上限，若超过，则迭代失败
    if(i>=Max_Iterations)
        printf("Failed after %d iterations",i);
}

int main(){
    //计算[-1, 0]内的解
    printf("##########\n[-1, 0]\n");
    FP(0, 3);//设定c为3，使其能收敛

    //计算[0.5, 1.5]内的解
    printf("##########\n[0.5, 1.5]\n");
    FP(0.5,-3);//设定c为-3，使其能收敛

    //计算[3, 4]内的解
    printf("##########\n[3, 4]\n");
    FP(3,15);////设定c为15，使其能收敛
    return 0;
}

/**************************
输出（gcc version 8.2.0）：
##########
[-1, 0]
p1: -0.333
p2: -0.461
p3: -0.459
x = p3 = -0.459
##########
[0.5, 1.5]
p1: 0.800
p2: 0.902
p3: 0.910
x = p3 = 0.910
##########
[3, 4]
p1: 3.461
p2: 3.733
p3: 3.733
x = p3 = 3.733
**************************/
```

P_7

由题知：$|g'(p)|>1$，即：$\lim_{p_0\to p}\frac{|g(p_0)-g(p)|}{|p_0-p|}=A>1$

$\therefore$ 对于 $\forall\epsilon>0$，总存在 $\delta>0$，使得当 $0<|p_0-p|<\delta$ 时，都有 $|\frac{|g(p_0)-g(p)|}{|p_0-p|}-A|<\epsilon$ 成立

取 $\epsilon < A - 1$:

此时存在 $\delta > 0$，使得当 $0 < |p_0 - p| < \delta$ 时，有 $|\frac{|g(p_0)-g(p)|}{|p_0-p|} - A| < \epsilon$

即：$\frac{|g(p_0)-g(p)|}{|p_0-p|} > A - \epsilon > 1$

$\therefore\ |p_0 - p| < |p_1 - p|$

因此，不管初始值 P_o 离 P 有多近，迭代后的 p_1 会偏离 p，当 $p_0 \neq p$ 时，不动点迭代不会收敛。