OM - Teoria Liczb - Ćwiczenia

1 NWD, NWW, podzielność

Zadanie 1.
Udowodnij, że dla dowolnej naturalnej liczby n, liczba:

$$5^{5^{n+1}} + 5^{5^n} + 1$$

jest złożona.

Zadanie 2.
Udowodnij, że liczba:

$$\frac{5^{125} - 1}{5^{25} - 1}$$

nie jest pierwsza.

Zadanie 3.
Niech a, b będą względnie pierwszymi liczbami większymi niż 1. Udowodnij, że dla dowolnego $n \geqslant 0$, liczba $a^{2n} + b^{2n}$ nie jest podzielna przez $a + b$

Zadanie 4.
Załóżmy, że $m \geqslant n \geqslant 1$. Udowodnij, że $\frac{NWD(m,n)}{m}\binom{m}{n}$ należy do liczb całkowitych.

Zadanie 5.
Udowodnij, że istnieje nieksończenie wiele liczb naturalnych n takich, że $n \mid 2^n + 1$

Zadanie 6.
Udowodnij, że istnieje nieksończenie wiele liczb naturalnych n takich, że $n \mid 2^n + 2$

Zadanie 7.
Udowodnij, że dla wszystkich $a, m, n \in N, a > 1, m, n > 0$ zachodzi równość:

$$NWD(n^a - 1, n^b - 1) = n^{NWD(a,b)} - 1$$

Zadanie 8.
Udowodnij, że nie istnieje wielomian $P(x)$ o współczynnikach całkowitych taki, że $P(7) = 5$ oraz $P(15) = 9$

Zadanie 9.
Udowodnij, że dla naturalnych a, b liczba $(36a + b)(a + 36b)$ nie może być n-tą potęgą liczby 2.

Zadanie 10.
Niech:

$$(x - z)(y - z)(z - x) = x + y + z$$

dla $x, y, z \in N$. Udowodnij, że $27 \mid x + y + z$

2 Liczby pierwsze, rozkład na czynniki pierwsze

Zadanie 1.
Rozłóż $5^{1985} - 1$ na trzy czynniki, z czego każdy większy niż 5^{100}.

Zadanie 2.
Udowodnij, że iloczyn dwóch kolejnych liczb naturalnych nigdy nie będzie sześcianem ani kwadratem innej liczby naturalnej

Zadanie 3.
Niech $a, b, c, d, e, f \in N, S = a+b+c+d+e+f$. Załóżmy, że $S \mid abc+def$ oraz $S \mid ab + bc + ca - de - ef - fd$. Udowodnij, że S jest złożone.

Zadanie 4.
Udowodnij, że dla wszystkich naturalnych n, w rozkładzie na czynniki liczby $3^{3^n} + 1$ występuje co najmniej $2n + 1$ niekoniecznie różnych liczb pierwszych.

3 Równania nieoznaczone

Zadanie 1.
Znajdź wszystkie liczby naturalne spełniające równanie:

$$(x - 1)! = x^y - 1$$

Zadanie 2.
Znajdź wszystkie rozwiązania w liczbach całkowitych:

$$x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 8(x^2 + xy + y^2 + 1)$$

Zadanie 3.
Znajdź wszystkie liczby naturalne x takie, że x jest podzielny przez wszystkie liczby mniejsze lub równe $\sqrt{x}$

Zadanie 4.
Udowodnij, że w liczbach całkowitych dodatnich, dla $x < y < z$, poniższa równość ma nieskończenie wiele rozwiązań:

$$x! \cdot y! = z!$$

4 Małe Twierdzenie Fermata, Tocjent Eulera

Zadanie 1.
Udowodnij, że dla każdej liczby pierwszej $p > 17$ liczba $p^{32} - 1$ jest wielokrotnością 16320.

Zadanie 2.

5 Zadania do powtórzenia

Zadanie 1.
Udowodnij, że dla naturalnej $a > 1$ zbiór:

$$a^2 + a - 1, a^3 + a^2 - 1, a^4 + a^3 - 1, ...$$

posiada nieskończenie wiele elementów względnie pierwszych parami.

Zadanie 2.
Znajdź NWD$(n! + 1, (n + 1)!)$ dla każdego naturalnego n.