Analiza szeregów trygonometrycznych

Jakub Zieliński

Twierdzenie wstępne

Jeżeli

$$\sum_{n}^{k}(\cos x + i\sin x)^n = a + bi$$

gdzie $a, b \in \mathbb{R}, i$ - jednostka urojona, to

$$\sum_{n}^{k}\cos nx = a$$

$$\sum_{n}^{k}\sin nx = b$$

Dowód

Korzystając z wzoru Eulera otrzymujemy:

$$\sum_{n}^{k}(\cos x + i\sin x)^n = \sum_{n}^{k}(e^{ix})^n = \sum_{n}^{k}e^{inx} =$$

$$\sum_{n}^{k}(\cos nx + i\sin nx) = \sum_{n}^{k}\cos nx + i\sum_{n}^{k}\sin nx = a + bi$$

A ostatnia powyższa równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\sum_{n}^{k}\cos nx = a$$

$$\sum_{n}^{k}\sin nx = b$$

Rozważmy szereg postaci

$$\sum_{n=1}^{4k} i^n \sin nx \tag{1}$$

gdzie $k \in N$, i - jednostka urojona

Zastanówmy się, dla jakich x szereg ten przyjmuje wartość rzeczywistą? Trywialną odpowiedzią byłoby 0 oraz wielokrotność π, ponieważ dla tych wartości całość jest równa 0. Zbadajmy jednak, czy urojona część takiej sumy posiada nietrywialne miejsca zerowe. Rozłożymy ją zatem na część rzeczywistą i urojoną, a następnie obliczymy sumę urojoną.

$$\sum_{n=1}^{4k} i^n \sin nx =$$

$$i\sum_{n=1}^{k} \sin(4n-3)x - i\sum_{n=1}^{k} \sin(4n-1)x - \sum_{n=1}^{k} \sin(4n-2)x + \sum_{n=1}^{k} \sin 4nx =$$

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{k} \sin 4nx - \sum_{n=1}^{k} \sin(4n-2)x}_{\text{część rzeczywista}} + \underbrace{i(\sum_{n=1}^{k} \sin(4n-3)x - \sum_{n=1}^{k} \sin(4n-1)x)}_{\text{część urojona}}$$

W takim wypadku szukamy $x \neq l\pi, l \in \mathbb{Z}$, dla którego suma tego wyrażenia jest równa $S = a + 0i, a \in \mathbb{R}$ - skorzystamy w tym celu z sumy geometrycznej $\sum_{n=1}^{2k}(\cos(4n-3)x + i\sin(4n-3)x) = \sum_{n=1}^{2k}(\cos x + i\sin x)^{4n-3}$ oraz $\sum_{n=1}^{2k}(\cos(4n-1)x + i\sin(4n-1)x)$:

$$S_1 = (\cos x + i\sin x) \cdot \frac{1-(\cos x + i\sin x)^{8k}}{1-(\cos x + i\sin x)^4} =$$

$$(\cos x + i\sin x) \cdot \frac{1-\cos 8kx - i\sin 8kx}{1-\cos 4x - i\sin 4x} =$$

$$(\cos x + i\sin x) \cdot \frac{1-\cos^2 4kx + \sin^2 4kx - 2i\sin 4kx\cos 4kx}{1-\cos^2 2x + \sin^2 2x - 2i\sin 2x\cos 2x} =$$

$$(\cos x + i\sin x) \cdot \frac{2\sin 4kx(\sin 4kx - i\cos 4kx)}{2\sin 2x(\sin 2x - i\cos 2x)} =$$

$$(\cos x + i\sin x) \cdot \frac{\sin 4kx}{\sin 2x} \cdot \frac{\cos 4kx + i\sin 4kx}{\cos 2x + i\sin 2x} =$$

$$\frac{\sin 4kx}{\sin 2x} \cdot (\cos(4kx-1) + i\sin(4kx-1)) =$$

$$\underbrace{\frac{\sin 4kx\cos(4kx-1)}{\sin 2x}}_{\text{część rzeczywista - suma cosinusów}} + \underbrace{i\frac{\sin 4kx\sin(4kx-1)}{\sin 2x}}_{\text{część urojona - suma sinusów}}$$

$$
\begin{gathered}
S_2 = (\cos x + i\sin x)^3 \cdot \frac{1-(\cos x + i\sin x)^{8k}}{1-(\cos x + i\sin x)^4} = \\
(\cos x + i\sin x)^3 \cdot \frac{\sin 4kx}{\sin 2x} \cdot \frac{\cos 4kx + i\sin 4kx}{\cos 2x + i\sin 2x} = \\
\frac{\sin 4kx}{\sin 2x} \cdot (\cos(4kx+1) + i\sin(4kx+1)) = \\
\underbrace{\frac{\sin 4kx\cos(4kx+1)}{\sin 2x}}_{\text{część rzeczywista - suma cosinusów}} + \underbrace{i\frac{\sin 4kx\sin(4kx+1)}{\sin 2x}}_{\text{część urojona - suma sinusów}}
\end{gathered}
$$

Szukając $x \neq l\pi, l \in \mathbb{Z}$ mamy:

$$
\begin{gathered}
\frac{\sin 4kx\sin(4kx+1)}{\sin 2x} - \frac{\sin 4kx\sin(4kx+1)}{\sin 2x} = 0 \\
\sin 4kx(\sin(4kx+1) - \sin(4kx-1)) = 0 \\
\sin(4kx+1) - \sin(4kx-1) = 0 \\
\sin 4kx\cos 1 + \cos 4kx\sin 1 - \sin 4kx\cos 1 + \cos 4kx\sin 1 = 0 \\
2\cos 4kx\sin 1 = 0
\end{gathered}
$$

$\sin 1 \neq 0$ a stąd:

$$
\begin{gathered}
\cos 4kx = 0 \\
4kx = \frac{(2l-1)\pi}{2}, l \in \mathbb{Z} \\
x = \frac{(2l-1)\pi}{8k}, l \in \mathbb{Z}
\end{gathered}
$$

Stąd wszystkie nietrywialne urojone miejsca zerowe tego szeregu spełniają powyższą równość dla dowolnego l i są różne od wielokrotności π.

Lemat 1

Wyrażenie $\sum_{n=1}^{4k} i^n \sin nx$ jest równe 0 dla wszystkich trywialnych urojonych miejsc zerowych i posiada wartość rzeczywistą różną od 0 dla wszystkich nietrywialnych urojonych miejsc zerowych.

Dowód

Najpierw za pomocą indukcji matematycznej udowodnijmy lemat dla trywialnych miejsc zerowych:

$$\sum_{n=1}^{4k} i^n \sin nl\pi = \sum_{n=1}^{4k} i^n \sin 0 = 0, l \in \mathbb{Z}$$
$$\sum_{n=1}^{4k} i^n \sin n(l+1)\pi = \sum_{n=1}^{4k} i^n \sin \pi(n+nl) = 0, l \in \mathbb{Z}$$

A teraz, ponieważ udowodniliśmy już, że dla $x = \frac{(2l-1)\pi}{8k}, l \in \mathbb{Z}$ część urojona jest równa 0, pozostaje udowodnić, że część rzeczywista jest różna od 0:

Ponownie, stosując metodę opisaną w Twierdzeniu wstępnym dla $\sum_{n=1}^{k} \sin 4nx - \sum_{n=1}^{k} \sin(4n-2)x$ otrzymujemy sumę różnicy tych ciągów równą:

$$S = \frac{\sin 2kx \sin(2kx+2)}{\sin 2x} - \frac{\sin^2 2kx}{\sin 2x} \neq 0$$
$$\sin 2kx(\sin(2kx+2) - \sin 2kx) \neq 0$$

Miejsca zerowe $\sin x$ to $x = l\pi \neq 2k \cdot \frac{(2l-1)\pi}{8k}, l \in \mathbb{Z}$, a zatem $\sin 2kx \neq 0$, czyli zostało do udowodnienia, że:

$$\sin(2kx+2) - \sin(2kx) \neq 0$$
$$\sin(2k\frac{(2l-1)\pi}{8k} + 2)) - \sin 2k\frac{(2l-1)\pi}{8k} \neq 0$$

Oznaczmy $2k\frac{(2l-1)\pi}{8k}$ jako α. Wtedy:

$$\sin(\alpha+2) - \sin\alpha \neq 0$$
$$\alpha + 2 \neq \alpha + lT, l \in \mathbb{Z}$$

gdzie T - okres funkcji $\cos x$, co jest prawdą, ponieważ:

$$T = 2l\pi \neq 2, l \in \mathbb{Z}$$

Lemat 2

Szereg $\sum_{n=1}^{k} \sin nx$ nigdy nie przyjmuje wartości równej 0 dla x takiego, że $\Re(x) = 0, \Im(x) \neq 0$, jednak istnieją zespolone x, takie, że $\Re(x), \Im(x) \neq 0$, dla których szereg jest równy 0

Dowód

Dla $x = li, l \in \mathbb{R}$ suma jest równa:

$$\sum_{n=1}^{k} \sin nli = \frac{i}{2}\sum_{n=1}^{k} e^{nl} - e^{-nl} = \frac{i}{2}(\sum_{n=1}^{k} e^{nl} - \sum_{n=1}^{k} e^{-nl})$$

$$\sum_{n=1}^{k} e^{nl} = e^{l} \cdot \frac{1-e^{kl}}{1-e^{l}}$$

$$\sum_{n=1}^{k} e^{-nl} = e^{-l} \cdot \frac{1-e^{-kl}}{1-e^{-l}} = \frac{1}{e^{l}} \cdot \frac{\frac{1-e^{kl}}{e^{kl}}}{\frac{1-e^{l}}{e^{l}}} = \frac{1-e^{kl}}{e^{kl}(1-e^{l})}$$

$$e^{l} \cdot \frac{1-e^{kl}}{1-e^{l}} = \frac{1}{e^{kl}} \cdot \frac{1-e^{kl}}{1-e^{l}}$$

$$e^{l(k+1)} = 1$$

$$k+1 \neq 0 \text{ więc } l = 0$$

Lemat 3

Średnia wartość sumy $\sum_{n=1}^{4k} i^n \sin nx$ w przedziale $[-a; a]$ jest równa 0.

Dowód

Weźmy średnią wartość sumy równą $\frac{1}{a-(-a)} \int_{-a}^{a} \sum_{n=1}^{4k} i^n \sin nxdx$:

$$\frac{1}{a-(-a)} \int_{-a}^{a} \sum_{n=1}^{4k} i^n \sin nxdx = \frac{1}{2a}(\sum_{n=1}^{4k} \int_{-a}^{a} i^n \sin nxdx) =$$

$$\frac{1}{2a}(\sum_{n=1}^{4k} i^n [-\frac{\cos nx}{n}]_{-a}^{a}) = \frac{1}{2a}(\sum_{n=1}^{4k}(-\frac{i^n}{n}(\cos na - \cos -na))) =$$

$$\frac{1}{2a}(\sum_{n=1}^{4k} -\frac{i^n}{n} \cdot 0) = 0$$

Rozpatrzmy jednak ten problem globalnie, dla wszystkich ciągów postaci:

$$\sum_{n=1}^{4k} i^{an} \sin bnx \tag{2}$$

gdzie: $a, b, k \in \mathbb{Z}$ Tutaj znowu trywialnymi urojonymi miejscami zerowymi są wielokrotności π, a poszukując nietrywialnych ponownie rozkładamy:

$$\sum_{n=1}^{4k} i^{an} \sin bnx = i^a \sum_{n=1}^{k} \sin b(4n-3)x + (-i)^a \sum_{n=1}^{k} \sin b(4n-1)x +$$
$$(-1)^a \sum_{n=1}^{k} \sin b(4n-2)x + (1)^a \sum_{n=1}^{k} \sin b4nx$$
$$= (-1)^a \sum_{n=1}^{k} \sin b(4n-2)x + \sum_{n=1}^{k} \sin b4nx + i^a (\sum_{n=1}^{k} \sin b(4n-3)x + (-1)^a \sum_{n=1}^{k} \sin b(4n-1)x)$$

Zauważmy, że dla $a = 2l, l \in \mathbb{Z}$ część urojona upraszcza się do wartości rzeczywistej, zatem w takim wypdaku wszystkie $x \in \mathbb{R}$ są urojonymi miejscami zerowymi. Stąd w dalszych obliczeniach załóżmy, że $a \neq l\pi, l \in \mathbb{Z}$:

$$S = \frac{\sin 2bkx \sin(2bkx + 4b - 2x)}{\sin 2bx} + (-1)^a \frac{\sin((2k-1)bx) \sin((2k-3)bx + 4b)}{\sin 2bx} +$$
$$i(\frac{\sin(\frac{(4k-3)bx}{2}) \sin(\frac{4(kb-1)-b}{2})x}{\sin 2bx} + (-1)^a \frac{\sin \frac{(4k-1)bx}{2} \sin x(\frac{(4k+5)b-4}{2})}{\sin 2bx}))$$

Lemat 4

Jeśli określimy funkcję rzeczywistą $s_k(x) = \sum_{n=1}^{k} a_n \sin nx, k \in \mathbb{N}, a_n \in \mathbb{R}$, to średnia wartość wyrażenia $s_k(x) \sin mx$, dla pewnego $m \leqslant k, m \in \mathbb{N}$ jest równa $\frac{a_m}{2}$, ponieważ wszystkie wyrazy tej sumy są równe 0 oprócz tego, w którym $m = n$;
innymi słowy:

$$\int_0^{\pi} \sin nx \sin mx dx = 0, n \neq m, n, m \in \mathbb{N}$$
$$\int_0^{\pi} \sin nx \sin mx dx = \frac{\pi}{2}, n = m, n, m \in \mathbb{N}$$

Dowód

Dla $n \neq m$:

$$\int_0^\pi \sin nx \sin mx dx =$$
$$\int_0^\pi \frac{\cos((n-m)x) - \cos((n+m)x)}{2} dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos((n-m)x) - \cos((n+m)x) dx =$$
$$\frac{1}{2}(\int_0^\pi \cos((n-m)x) - \int_0^\pi \cos((n+m)x)) = \frac{1}{2}([\frac{\sin((n-m)x)}{n-m}]_0^\pi - [\frac{\sin((n+m)x)}{n+m}]_0^\pi) =$$
$$\frac{1}{2}(\frac{\sin((n-m)\pi)}{n-m} - \frac{\sin((n-m)0)}{n-m} - \frac{\sin((n+m)\pi)}{n+m} + \frac{\sin((n+m)0)}{n+m}) =$$
$$\frac{1}{2}(\frac{\sin l\pi}{n-m} - \frac{\sin 0}{n-m} - \frac{\sin l\pi}{n+m} + \frac{\sin 0}{n+m}) = 0, l \in \mathbb{Z}$$

Dla $n = m$:
Stosując wzór na całkę oznaczoną iloczynu funkcji:

$$\int_0^\pi \sin nx \sin nx dx = [\sin nx(-\frac{\cos nx}{n})]_0^\pi - \int_0^\pi n \cos nx(-\frac{\cos nx}{n}) dx =$$
$$\sin n\pi(-\frac{\cos n\pi}{n}) - \sin 0(-\frac{\cos 0}{n}) + \int_0^\pi \cos^2 nx dx = \int_0^\pi \cos^2 nx dx =$$
$$[\frac{1}{2}(x + \frac{\sin(2xn)}{2n})]_0^\pi = \frac{1}{2}(\pi + \frac{\sin(2\pi n)}{2n} - 0 - \frac{\sin 0}{2n}) = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi s_k(x) \sin mx dx = \frac{1}{\pi}(0 + 0 + ... + a_m\frac{\pi}{2} + 0 + ... + 0) = \frac{a_m}{2} \qquad (3)$$

Co kończy dowód.
Ponadto, możemy z tego wyciągnąć wniosek, że:

$$a_m = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi s_k(x) \sin mx dx \qquad (4)$$

W naszym poszukiwaniu miejsc zerowych, korzystając z Lematu 3 wnioskujemy, że wartość $s_k(x) \sin mx$ jest równa 0 wtedy i tylko wtedy, gdy $a_m = 0$ (tu wstawić cosinusy)

Lemat 6

Zdefiniujmy funkcję $S_k : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, $S_k(x) = \sum_{n=1}^k c_n e^{inx}, c_n \in \mathbb{R}$. Wtedy, średnia wartość wyrażenia $S_k(x)e^{-imx}, m \leqslant k, m \in \mathbb{R}$ w przedziale $[-\pi, \pi]$ jest równa c_m. A to znaczy:

$$\int_{-\pi}^\pi c_n e^{inx} e^{-imx} dx = 0 \qquad (5)$$

$$\int_{-\pi}^\pi c_m e^{imx} e^{-imx} dx = 2\pi c_m \qquad (6)$$

Dowód

Dla $n \neq m$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} c_n e^{inx} e^{-imx} dx = \int_{-\pi}^{\pi} c_n e^{ix(n-m)} dx = [e^{ix(n-m)}]_{-\pi}^{\pi} =$$
$$e^{i\pi(n-m)} - e^{-i\pi(n-m)} = (-1)^{n-m} - (-1)^{n-m} = 0$$

Dla $n = m$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} c_n e^{imx} e^{-imx} dx = c_n \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{imx}}{e^{imx}} dx = c_n(\pi - (-\pi)) = 2\pi c_n$$