

Metody Bayesowskie w Odtwarzaniu Obrazów: Teoria i Eksperymenty

Jan Gąska
Kacper Trębacz

8 czerwca 2025

Spis Treści

- 1 Wprowadzenie Teoretyczne
- 2 Przegląd Literatury
- 3 Konfiguracje Eksperimentalne
- 4 Eksperymenty na mapach binarnych
- 5 Proste mapy 3-kanałowe
- 6 Odszumianie zdjęć o trzech kanałach
- 7 Podsumowanie + wnioski

Podstawy Metod Bayesowskich

- Cel: Odtworzenie oryginalnego obrazu x z jego zaszumionej obserwacji y .
- Model obserwacji:

$$y = \mathcal{D}(x) + n$$

gdzie \mathcal{D} to degradacja, n to szum (w projekcie: addytywny).

- Podejście Bayesowskie: Obraz x jest traktowany jako zmienna losowa.
Twierdzenie Bayesa:

$$P(x|y) \propto P(y|x)P(x)$$

- $P(x|y)$ – rozkład a posteriori: nasz cel; rozkład x po obserwacji y .
- $P(y|x)$ – funkcja wiarygodności: modeluje proces szumienia/degradacji.
- $P(x)$ – rozkład a priori: wiedza o typowych właściwościach obrazów.

Funkcja Wiarygodności $P(y|x)$

- W eksperymetach zakładamy addytywny szum gaussowski iid (niezależny i o identycznym rozkładzie) dla każdego piksela (i,j) :

$$P(y|x) \propto \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i,j} (y_{i,j} - x_{i,j})^2\right)$$

- Człon danych w samplerach ('lambda_r*(v - x_obs)**2') odpowiada temu założeniu, modelując koszt odchylenia od obserwacji.

Modele Priori $P(x)$: Wprowadzenie

- Modele a priori $P(x)$ wprowadzają informację o oczekiwanej strukturze obrazu, np. gładkości regionów czy charakterystyce krawędzi.
- Pomagają wybrać bardziej "naturalne" rozwiązania spośród wielu możliwych pasujących do danych.
- W projekcie analizujemy dwa popularne modele:
 - Model Potts'a
 - Ucięta kwadratowa funkcja energii

Model Priori: Model Potts'a

- Definicja:

$$P(x) \propto \exp \left(-\beta \sum_{(i,j) \sim (k,l)} (1 - \delta(x_{i,j}, x_{k,l})) \right)$$

gdzie $\delta(a, b) = 1$ gdy $a = b$, i 0 w przeciwnym przypadku. Suma po sąsiadujących pikselach.

- Charakterystyka:

- Promuje obrazy składające się z jednolitych obszarów ("plam").
- Silnie i jednakowo karze za każdą różnicę między sąsiednimi pikselami, niezależnie od jej wielkości.

Model Priori: Ucięta Funkcja Kwadratowa

- Definicja:

$$P(x) \propto \exp \left(-\beta \sum_{(i,j) \sim (k,l)} \min\{\lambda^2 (x_{i,j} - x_{k,l})^2, \alpha\} \right)$$

- Charakterystyka:

- Kara za różnice między sąsiadami rośnie kwadratowo (jak w modelu Gaussa), ale jest ucinana na poziomie α .
- Pozwala na zachowanie silnych krawędzi (gdy kwadrat różnicy przekracza α/λ^2), jednocześnie wygładzając mniejsze różnice.
- Parametr α kontroluje próg ucięcia, wpływając na stopień zachowania krawędzi.

Estymator MAP (Maximum A Posteriori)

- Definicja:

$$\hat{x}_{\text{MAP}} = \arg \max_x P(x|y) = \arg \max_x P(y|x)P(x)$$

- Wybiera obraz, który jest najbardziej prawdopodobny przy danych obserwacjach i wiedzy a priori.
- Odpowiada minimalizacji funkcji energii $E(x) = -\log(P(y|x)P(x))$.
- W eksperymentach: estymowany przy użyciu Symulowanego Wyżarzania (SA).

Estymator MMSE (Minimum Mean Square Error)

- Definicja:

$$\hat{x}_{\text{MMSE}} = \mathbb{E}[X|Y = y]$$

(wartość oczekiwana obrazu x względem rozkładu a posteriori)

- Minimalizuje średni błąd kwadratowy $\mathbb{E}[||X - \hat{x}||^2|Y = y]$.
- Zazwyczaj daje gładsze, bardziej "uśrednione" wyniki niż MAP, co może redukować artefakty, ale też lekko rozmywać krawędzie.
- W eksperymentach: estymowany przez uśrednianie próbek z Próbnika Gibbса po okresie "burn-in".

Algorytm: Próbnik Gibbsa (Gibbs Sampler)

- Algorytm MCMC (Markov Chain Monte Carlo) do generowania próbek z rozkładu a posteriori $P(x|y)$.
- Działanie (uproszczone):
 - ➊ Rozpocznij od losowego obrazu $x^{(0)}$.
 - ➋ Iteracyjnie, dla każdego piksela $x_{i,j}$: próbuj nową wartość z rozkładu warunkowego $P(x_{i,j}|x_{\text{reszta}}^{(t)}, y)$, tzn. przy ustalonych pozostałych pikselach i obserwacji.
- Po okresie "wypalania" (burn-in), generowane próbki $x^{(t)}$ pochodzą z docelowego rozkładu.
- Zastosowanie w projekcie:
 - Generowanie próbek do obliczenia estymatora MMSE.
 - Mechanizm generowania nowych stanów w algorytmie Symulowanego Wyżarzania (dla MAP).

Algorytm: Symulowane Wyżarzanie (SA)

- Metoda optymalizacji globalnej, używana do znalezienia minimum funkcji energii $E(x)$.
- W projekcie zastosowano wariant, w którym Próbniak Gibbsa jest używany jako mechanizm generowania stanów, a temperatura kontroluje jego dynamikę.
- Działanie (zgodnie z dokumentacją projektu):
 - ➊ Rozpocznij od obrazu X_0 i zdefiniuj malejący ciąg temperatur (harmonogram chłodzenia) $T_1 > T_2 > \dots > T_M > 0$.
 - ➋ Dla $n = 1, 2, \dots, M$:
 - Wykonaj "duży krok" (jedną pełną iterację po wszystkich pikselach) Próbnika Gibbsa przy aktualnej temperaturze T_n .
 - W tym kroku, prawdopodobieństwo wylosowania nowej wartości a dla piksela s jest proporcjonalne do $\exp(-E_s(a)/T_n)$, gdzie $E_s(a)$ to lokalna energia dla tego piksela.
 - Wynikiem jest nowy obraz X_n .
 - ➌ Po M iteracjach, końcowy obraz X_M jest estymatorem MAP.

Spis Treści

- 1 Wprowadzenie Teoretyczne
- 2 Przegląd Literatury**
- 3 Konfiguracje Eksperymentalne
- 4 Eksperymenty na mapach binarnych
- 5 Proste mapy 3-kanałowe
- 6 Odszumianie zdjęć o trzech kanałach
- 7 Podsumowanie + wnioski

Stochastyczne odszumianie obrazu (Wong et al., 2011) – ilustracja



Stochastic image denoising based on Markov-chain Monte Carlo sampling

Alexander Wong*, Akshaya Mishra, Wen Zhang, Paul Fieguth, David A. Clausi

Vision and Image Processing (VIP) Research Group, Department of Systems Design Engineering, University of Waterloo, Waterloo, Canada N2L 3G1

ARTICLE INFO

Article history:

Received 12 May 2010
Received in revised form
26 March 2011
Accepted 28 March 2011
Available online 8 April 2011

Keywords:

Image denoising
Markov-chain Monte Carlo

ABSTRACT

A novel stochastic approach based on Markov-chain Monte Carlo sampling is investigated for the purpose of image denoising. The additive image denoising problem is formulated as a Bayesian least squares problem, where the goal is to estimate the denoised image given the noisy image as the measurement and an estimated posterior. The posterior is estimated using a nonparametric importance-weighted Markov-chain Monte Carlo sampling approach based on an adaptive Geman-McClure objective function. By learning the posterior in a nonparametric manner, the proposed Markov-chain Monte Carlo denoising (MCMCD) approach adapts in a flexible manner to the underlying image and noise statistics. Furthermore, the computational complexity of MCMCD is relatively low when compared to other published methods with similar denoising performance. The effectiveness of the MCMCD method at image denoising was investigated using additive Gaussian noise, and was found to achieve state-of-the-art denoising performance in terms of both peak signal-to-noise ratio (PSNR) and mean structural similarity (SSIM) metrics when compared to other published methods.

© 2011 Elsevier B.V. All rights reserved.

Rysunek: Proces próbkowania MCMC w algorytmie odszumiania.

Stochastyczne odszumianie obrazu (Wong et al., 2011)

- Cel: Nieparametryczne odszumianie przez MCMC.
- Model Bayesowski:

$$y = x + n, \quad n \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

$$P(x | y) \propto P(y | x) P(x).$$

- Schemat MCMC:
 - Dla każdego piksela s generujemy łańcuch s_0, s_1, \dots, s_m z rozkładu Gaussa.
 - Funkcja celu: adaptacyjna kryterium Geman–McClure wokół s .
 - Akceptacja według $\alpha(s_k | s_{k-1}) = \min\left(1, \frac{f(s_k | s_0)}{f(s_{k-1} | s_0)}\right)$.
 - Po $m = 200$ iteracjach: histogram posteriori $\rightarrow \mathbb{E}[x_s | y]$.
- Wprowadzone metryki PSNR/SSIM.
- Złożoność per-pixel: $\approx 49 \times 200 = 9800$.

MRF i próbkowanie Gibbsa (Yue, Stanford EE367, 2018) – ilustracja

Markov Random Fields and Gibbs Sampling for Image Denoising

Chang Yue
Electrical Engineering
Stanford University
changyue@stanford.edu

Abstract

This project applies Gibbs Sampling based on different Markov Random Fields (MRF) structures to solve the image denoising problem. Compared with methods like gradient ascent, one important advantage that Gibbs Sampling has is that it provides balances between exploration and exploitation. This project also tested behaviors of different MRF structures, such as the high-order MRFs, various loss functions when defining energy, different norms for sparse gradient prior, and the idea of ‘window-wise product’. I finally generated an output which is an ensemble of many structures. It is visually good, and comparable to some state-of-art methods.

MRF model. Therefore, a seemingly high-value pixel might find itself improves the whole picture's loss after it got a chance to be sampled to a low-value. It is proved that after enough iteration passes, Gibbs Sampling will converge to the stationary distribution of the Markov Chain, no matter what the initialization is. This is shared by all Metropolis-Hastings algorithms, but Gibbs Sampling, a special case of Metropolis-Hastings, has a big advantage in image denoising applications, when the conditional distribution of each variable is known and is easy to sample from.

Markov Random Field (MRF) is a set of random variables (i.e., pixel values) having a Markov property described by an undirected graph [8]. It represents undirected dependencies between nodes. For a single node, we can compute its probability distribution given evidence of its

Rysunek: Graf parzysty MRF i schemat Gibbs Sampling.

MRF i próbkowanie Gibbsa (Yue, Stanford EE367, 2018)

- Cel: Odszumianie obrazu przez różne MRF i Gibbs Sampling.
- Model:

$$y_{i,j} = x_{i,j} + n_{i,j}, \quad n_{i,j} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2),$$

$$\max_x P(x | y) \propto P(y | x) P(x).$$

- MRF – energia:

$$E(x) = \sum_{(i,j)} \rho(x_{i,j} - y_{i,j}) + \lambda_r \sum_{s \sim t} \|x_s - x_t\|^p - \lambda_w \sum_{k=1}^r \alpha_k (f_k \cdot w_{i,j}).$$

- ρ : L1/L2/Lorentziana.
- „Window-wise”: PCA na oknach.
- Gibbs Sampling:
 - 1 Inicjalizacja $X^{(0)}$.
 - 2 Dla każdej iteracji i piksela s : $P(x_s | x_{\partial s}, y) \propto \exp(-E_s(x | y))$.
 - 3 Losowanie x_s z rozkładu warunkowego.
- Warianty i wyniki:
 - Sąsiedztwo: 4, 8, 24 pixele.
 - Funkcje utraty: Lorentziana lepsza niż L1/L2.
 - „Window-wise” + PCA: +0.6 dB.

Spis Treści

- 1 Wprowadzenie Teoretyczne
- 2 Przegląd Literatury
- 3 Konfiguracje Eksperymentalne
- 4 Eksperymenty na mapach binarnych
- 5 Proste mapy 3-kanałowe
- 6 Odszumianie zdjęć o trzech kanałach
- 7 Podsumowanie + wnioski

Podsumowanie Konfiguracji Eksperymentalnych

Przeprowadzono odszumianie przy użyciu czterech wariantów metod (dla dwóch głównych wariantów eksperymentów) Bayesowskich:

① MAPE + SA + Priori Kwadratowy:

- Estymator: Maximum A Posteriori.
- Optymalizacja: Symulowane Wyżarzanie.
- Model Priori: Ucięta kwadratowa funkcja energii.

② MAPE + SA + Priori Pottsa:

- Jak wyżej, ale Model Priori: Model Potts'a.

③ MMSE + Próbnik Gibbsa + Priori Kwadratowy:

- Estymator: Minimum Mean Square Error.
- Algorytm: Próbnik Gibbsa.
- Model Priori: Ucięta kwadratowa funkcja energii.

④ MMSE + Próbnik Gibbsa + Priori Pottsa:

- Jak wyżej, ale Model Priori: Model Potts'a.

Celem jest porównanie jakości odszumionych obrazów.

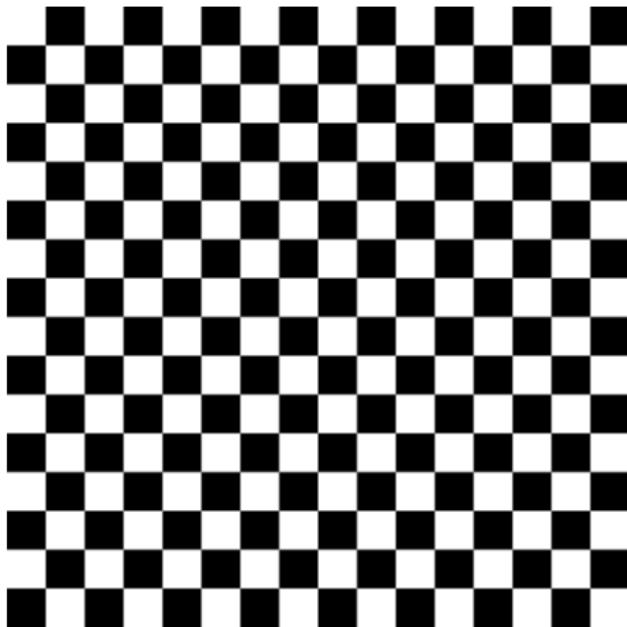
Spis Treści

- 1 Wprowadzenie Teoretyczne
- 2 Przegląd Literatury
- 3 Konfiguracje Eksperimentalne
- 4 Eksperymenty na mapach binarnych
- 5 Proste mapy 3-kanałowe
- 6 Odszumianie zdjęć o trzech kanałach
- 7 Podsumowanie + wnioski

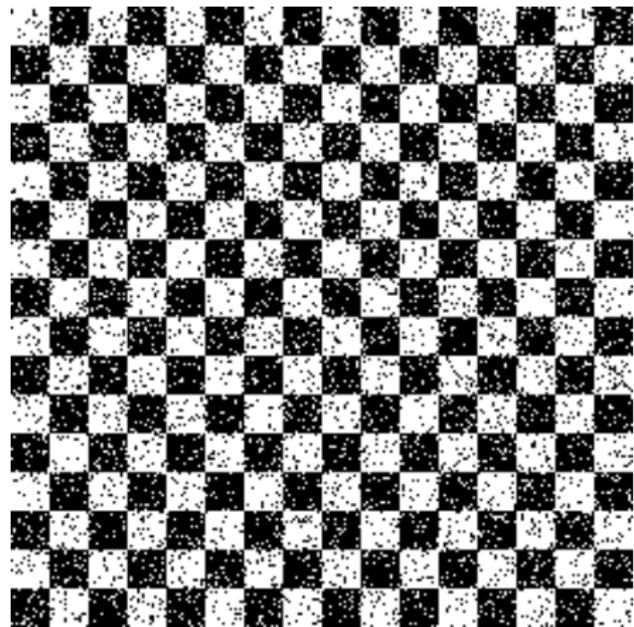
Eksperymenty na mapach binarnych

- Przeprowadzono testy na losowo generowanych mapach binarnych (piksele o wartościach o dwóch wartościach), każda o rozmiarze 256×256 (16×16 pól szachownicy).
- Nałożono szum (zmiana pikseli z pewnym prawdopodobieństwem) $\text{flip_prob} = 0.10$.
- 4 metody odszumiania (jak wcześniej, łatwe benchmarkowanie)
- Na kolejnym slajdzie – przykład jednej dwukolorowej mapy: oryginał vs. zaszumiona.

Przykład: Oryginał vs. Zaszumiona mapa binarna

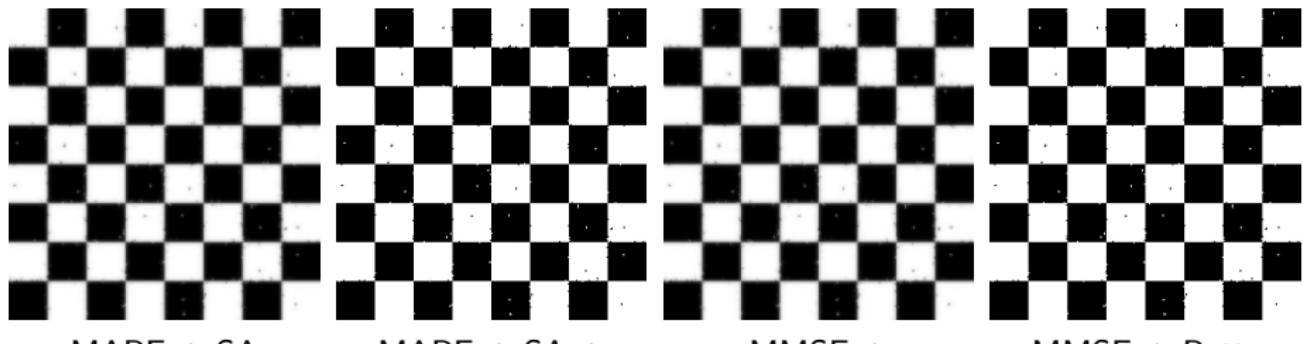


Oryginał
(256×256 szachownica)



Zaszumiona
($\text{flip_prob} = 0.10$)

Odszumianie binarne: Cztery podejścia



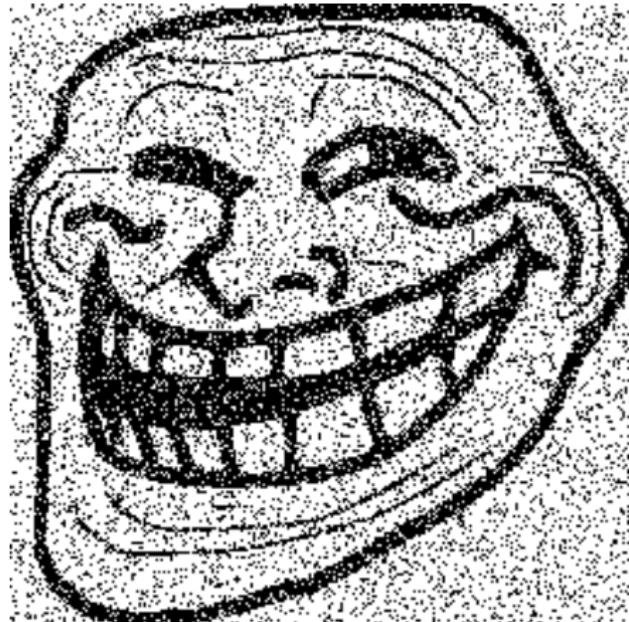
MAPE + SA + Kwadratowa MAPE + SA + Potts MMSE + Kwadratowa MMSE + Potts

- MAPE + SA + Kwadratowa: bardzo wyraźne krawędzie dzięki MAPE; lekkie artefakty na granicach.
- MAPE + SA + Potts: zachowuje większą spójność obszarów jednolitych; drobny szum przy krawędziach.
- MMSE + Kwadratowa: gładkie przejścia między polami, ale krawędzie mogą być nieznacznie rozmyte.
- MMSE + Potts: równowaga między redukcją szumu a zachowaniem blokowych krawędzi; mniej artefaktów niż w MAPE + SA.

Przykład: Oryginał vs. Zaszumiona mapa binarna (większe zaszumienie)

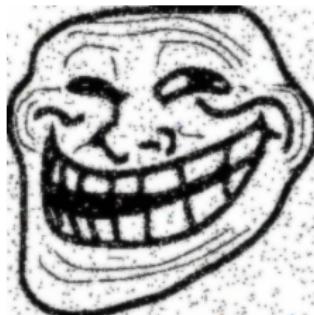


Oryginał
(256×256 Troll face)

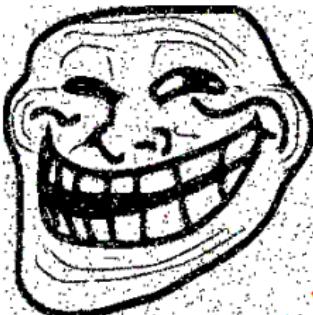


Zaszumiona
($\text{flip_prob} = 0.10$)

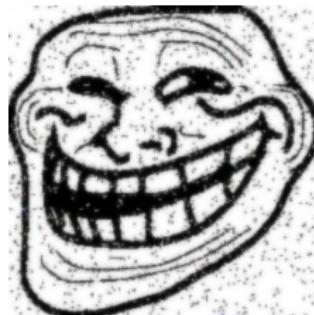
Odszumianie binarne (Troll Face): Cztery podejścia



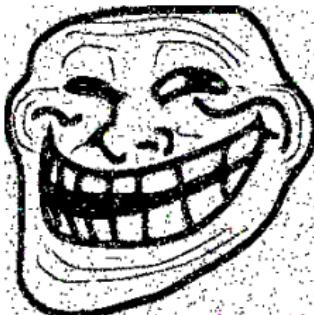
MAPE + SA +
Kwadratowa



MAPE + SA +
Potts

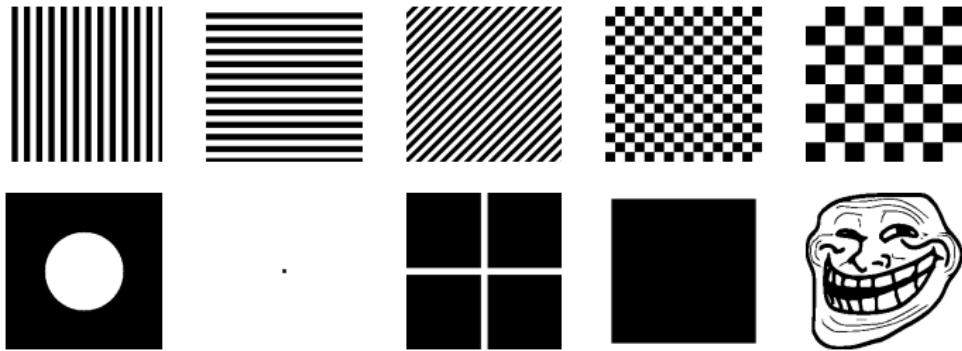


MMSE +
Kwadratowa

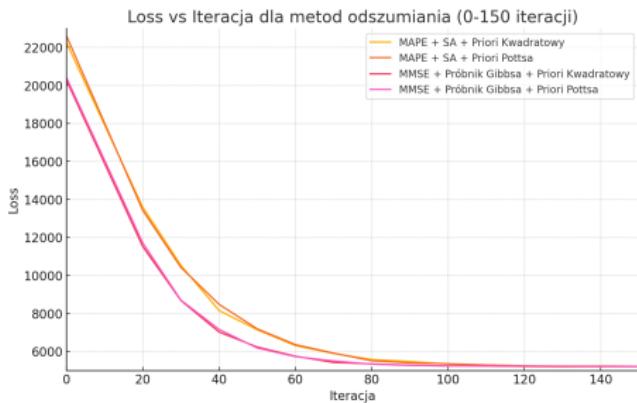


MMSE + Potts

- MAPE + SA + Kwadratowa: bardzo wyraźne kontury, ale widoczny drobny szum.
- MAPE + SA + Potts: spójne wypełnienie jasnych i ciemnych obszarów, minimalne rozmycie.
- MMSE + Kwadratowa: gładzsze odcienie, kosztem subtelnego rozmycia krawędzi.
- MMSE + Potts: dobry balans między redukcją szumu a ostrymi granicami, niemal bez artefaktów.



Odszumianie map binarnych: Strata vs Epoka (maks. 150)



Rysunek: Krzywe strat dla czterech metod odszumiania.

- Metody MMSE z próbnikiem Gibbsa (zarówno z priorem kwadratowym, jak i Pottsa) zaczynają od niższej wartości straty i szybciej ją redukują w pierwszych 50 iteracjach w porównaniu do MAPE+SA.
- Różnice między priorem kwadratowym a Pottsa są niewielkie; priorytet Pottsa minimalnie przewyższa kwadratowy w kryterium stratowym, zwłaszcza w metodzie MMSE+Gibbs, ale w okolicach 100–150 iteracji wszystkie cztery krzywe stabilizują się

Bezpośrednie porównanie wyników na mapach binarnych

- Testy na 100 losowych mapach binarnych (256×256).
- MAPE + SA + Priori Kwadratowy:
 - Średnie L1 ≈ 74.81 , MSE ≈ 42.15
- MMSE + Próbnik Gibbsa + Priori Kwadratowy:
 - Średnie L1 ≈ 74.33 , MSE ≈ 42.34
- MAPE + SA + Priori Pottsa:
 - Średnie L1 ≈ 1.08 , MSE ≈ 0.14
- MMSE + Próbnik Gibbsa + Priori Pottsa:
 - Średnie L1 ≈ 0.63 , MSE ≈ 0.01

Metoda	L1 ↓	MSE ↓
MAPE + SA + Priori Kwadratowy	74.81	42.15
MMSE + Próbnik Gibbsa + Priori Kwadratowy	74.33	42.34
MAPE + SA + Priori Pottsa	1.08	0.14
MMSE + Próbnik Gibbsa + Priori Pottsa	0.63	0.01

Tabela: Porównanie średnich strat L1 i MSE po 200 iteracjach.

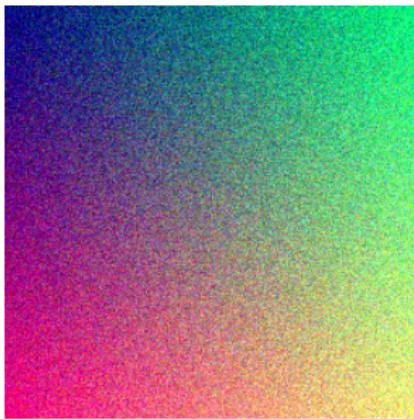
Spis Treści

- 1 Wprowadzenie Teoretyczne
- 2 Przegląd Literatury
- 3 Konfiguracje Eksperymentalne
- 4 Eksperymenty na mapach binarnych
- 5 Proste mapy 3-kanałowe
- 6 Odszumianie zdjęć o trzech kanałach
- 7 Podsumowanie + wnioski

Odszumianie map kolorowych: oryginał i zaszumiona



Oryginał
(syntetyczny gradient RGB
256 × 256)



Zaszumiona
(Gauss $\sigma = 30$)



Mape +Sa + quadratic
(na każdym kanale)

Bezpośrednie porównanie wyników na mapach kolorowych

- Testy na 100 losowych mapach RGB (256×256 ; syntetyczne i rzeczywiste).
- Metryki: średni L1 oraz MSE (mniejsze wartości lepsze) na zbiorze testowym.
- MAPE + SA + Priori Kwadratowy:
 - Średnie L1 ≈ 128.84 , MSE ≈ 44.03
- MMSE + Próbnik Gibbsa + Priori Kwadratowy:
 - Średnie L1 ≈ 128.82 , MSE ≈ 47.55
- MAPE + SA + Priori Pottsa:
 - Średnie L1 ≈ 128.81 , MSE ≈ 82.94
- MMSE + Próbnik Gibbsa + Priori Pottsa:
 - Średnie L1 ≈ 126.04 , MSE ≈ 88.34

Metoda	L1 ↓	MSE ↓
MAPE + SA + Priori Kwadratowy	128.84	44.03
MMSE + Próbnik Gibbsa + Priori Kwadratowy	128.82	47.55
MAPE + SA + Priori Pottsa	128.81	82.94
MMSE + Próbnik Gibbsa + Priori Pottsa	126.04	88.34

Tabela: Porównanie średnich strat L1 i MSE na kolorowym zbiorze testowym.

Spis Treści

- 1 Wprowadzenie Teoretyczne
- 2 Przegląd Literatury
- 3 Konfiguracje Eksperymentalne
- 4 Eksperymenty na mapach binarnych
- 5 Proste mapy 3-kanałowe
- 6 Odszumianie zdjęć o trzech kanałach
- 7 Podsumowanie + wnioski

Wyniki dla postarzanego obrazu Lena



Oryginalny



MAPE+SA+Kwadratowy



MAPE+SA+Potts



MMSE+Kwadratowy



MMSE+Potts

Wyniki dla życiowego use-case



Oryginał



Odszumianie przez specjalistyczną firmę



MAPE+SA+Potts



MAPE+SA+Kwadratowy

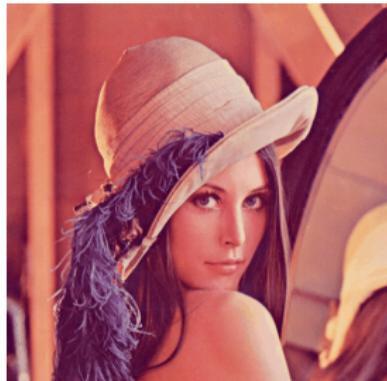


MMSE+Potts



MMSE+Kwadratowy

Wyniki dla Obrazu Lena



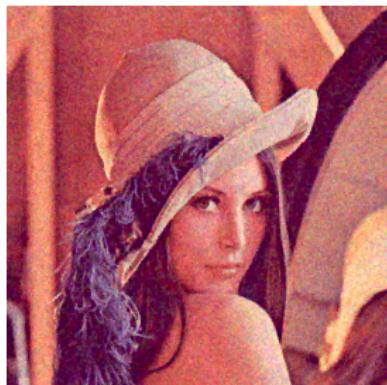
Oryginalny



Zaszumiony



MAPE+SA+Kwadratowy



MAPE+SA+Potts



MMSE+Kwadratowy



MMSE+Potts

Wyniki dla Obrazu Parrot



Oryginalny



Zaszumiony



MAPE+SA+Kwadratowy



MAPE+SA+Potts



MMSE+Kwadratowy



MMSE+Potts

Parametry



MMSE+Kwadratowy



Małe α (225)

Parametry



MMSE+Kwadratowy



Za duże β

Parametry



MMSE+Potts



Duże β (50000)

Metryki

MSE:

	photo	mape_sa_quad	mmse_quad	mape_sa_potts	mmse_potts	noisy
parrot	35.76		45.83	81.67	83.55	93.00
lena	47.93		53.26	84.32	85.83	93.45

PSNR:

	photo	mape_sa_quad	mmse_quad	mape_sa_potts	mmse_potts	noisy
parrot	29.47		28.92	22.98	22.66	20.22
lena	28.59		28.36	22.53	22.28	20.21

Spis Treści

- 1 Wprowadzenie Teoretyczne
- 2 Przegląd Literatury
- 3 Konfiguracje Eksperymentalne
- 4 Eksperymenty na mapach binarnych
- 5 Proste mapy 3-kanałowe
- 6 Odszumianie zdjęć o trzech kanałach
- 7 Podsumowanie + wnioski

Wnioski

- Dla obrazów binarnych zalecany priorytet Pottsa (w MAPE+SA lub MMSE+Gibbs) – spójne, jednolite obszary bez artefaktów.
- W przypadku zdjęć kolorowych i portretów najlepiej działa ucięta kwadratowa funkcja energii. Trochę lepiej MAP niż MMSE
- Parametry priorytetów ustawić na podstawie próbnych fragmentów obrazu:
 - Ucieta funkcja kwadratowa: zbyt niskie α duże zaszumienie, zbyt wysokie – utrata ochrony krawędzi.
- Najczęściej wystarczające 100–150 iteracji; równoległe przetwarzanie kanałów przyspiesza obliczenia.

Bibliografia I

- [1] Wong, A., Mishra, A., Zhang, W., Fieguth, P., Clausi, D. A., "Stochastic image denoising based on Markov-chain Monte Carlo sampling," *Signal Processing* 91 (2011) 2112–2120
- [2] Yue, C., "Markov Random Fields and Gibbs Sampling for Image Denoising," EE367 Report, Stanford University (2018)
- [3] Benton, J., Shi, Y., De Bortoli, V., Deligiannidis, G., Doucet, A., "From denoising diffusions to denoising Markov models," *Journal of the Royal Statistical Society Series B: Statistical Methodology* 86(2) (2024) 286–301