НИУ ИТМО

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Направление подготовки 09.03.04 Программная инженерия

Дисциплина «Вычислительная математика»

Отчет

По лабораторной работе №2 «Численное интегрирование»

Вариант 27

Выполнил:

студент группы Р32131

Овсянников Роман Дмитриевич

Преподаватель:

Малышева Татьяна Алексеевна

Санкт-Петербург,

2023 г.

Цель работы:

Найти приближенное значение определенного интеграла с требуемой точностью различными численными методами.

Порядок выполнения:

Исходные данные:

1. Пользователь выбирает функцию, интеграл которой требуется вычислить (3-5 функций), из тех, которые предлагает программа.
2. Пределы интегрирования задаются пользователем.
3. Точность вычисления задается пользователем.
4. Начальное значение числа разбиения интервала интегрирования: n=4.
5. Ввод исходных данных осуществляется с клавиатуры.

Программная реализация задачи:

1. Реализовать в программе методы по выбору пользователя: Метод прямоугольников (3 модификации: левые, правые, средние) Метод трапеций Метод Симпсона
2. Методы должны быть оформлены в виде отдельной(ого) функции/класса.
3. Вычисление значений функции оформить в виде отдельной(ого) функции/класса.
4. Для оценки погрешности и завершения вычислительного процесса использовать правило Рунге.
5. Предусмотреть вывод результатов: значение интеграла, число разбиения интервала интегрирования для достижения требуемой точности.

Вычислительная реализация задачи:

1. Вычислить интеграл, приведенный в таблице 1, точно.
2. Вычислить интеграл по формуле Ньютона – Котеса при .
3. Вычислить интеграл по формулам средних прямоугольников, трапеций и Симпсона при .
4. Сравнить результаты с точным значением интеграла.
5. Определить относительную погрешность вычислений для каждого метода.
6. В отчете отразить последовательные вычисления.

Рабочие формулы методов:

Формула Ньютона-Котеса порядка n:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L_n(x)dx = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)c_n^i$$

Формулы методов прямоугольников:

$$\int_a^b f(x)dx = h\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1/2})$$

$$\int_a^b f(x)dx = h\sum_{i=1}^{n} y_{i-1}$$

$$\int_a^b f(x)dx = h\sum_{i=1}^{n} y_i$$

Формула метода трапеций:

$$\int_a^b f(x)dx = h\cdot\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right)$$

Формула метода Симпсона:

$$\int_a^b f(x) = \frac{h}{3}\left[(y_0 + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2}) + y_n)\right]$$

Правило Рунге:

$$I - I_{h/2} \approx \frac{I_{h/2} - I_h}{2^k - 1}$$

Листинг программы:

https://github.com/Ja1rman/Computational-Mathematics/tree/main/lab3

Результаты выполнения программы:

```
PS C:\Users\jairman\Desktop\вычмат> go run main.go
Лабораторная работа №3, Вариант 27, Численное интегрирование

Выберите номер функции
1 - 2x^3 - 3x^2 - 5x + 27
2 - x^2
3 - 1/x
1
Введите границы интервала через пробел: 1 2
Введите погрешность вычислений: 0.01

Выберите номер метода решения
1 - Метод прямоугольников
2 - Метод трапеций
3 - Метод Симпсона
2
Значение интеграла методом трапеций:  20.00390625 Число разбиений = 16
```

```
PS C:\Users\jairman\Desktop\вычмат> go run main.go
Лабораторная работа №3, Вариант 27, Численное интегрирование

Выберите номер функции
1 - 2x^3 - 3x^2 - 5x + 27
2 - x^2
3 - 1/x
2
Введите границы интервала через пробел: 0 3
Введите погрешность вычислений: 0.01

Выберите номер метода решения
1 - Метод прямоугольников
2 - Метод трапеций
3 - Метод Симпсона
1
Значение интеграла методом левых прямоугольников:  9.026384353637695 Число разбиений = 512
Значение интеграла методом правых прямоугольников:  8.9912109375 Число разбиений = 16
Значение интеграла методом средних прямоугольников:  8.9912109375 Число разбиений = 16
```

Вычисление заданного интеграла:

Заданный интеграл:

$$\int_3^5 (2x^3 - 3x^2 - 5x + 27)dx$$

1. Точное вычисление:

$$\int \left(2x^3 - 3x^2 - 5x + 27\right) \mathrm{d}x$$

$$2\int x^3 \,\mathrm{d}x - 3\int x^2 \,\mathrm{d}x - 5\int x \,\mathrm{d}x + 27\int 1 \,\mathrm{d}x$$

$$\frac{x^4}{2} - x^3 - \frac{5x^2}{2} + 27x + C$$

После подстановки получим **188**

2. Вычисление по формуле Ньютона – Котеса при n=5:
   по таблице получаем:

   $$\mathbf{c_5^0 = c_5^5 = \frac{19(b-a)}{288}} \quad \mathbf{c_5^1 = c_5^4 = \frac{75(b-a)}{288}} \quad \mathbf{c_5^2 = c_5^3 = \frac{50(b-a)}{288}}$$

   Точки: x0=3; x1=3.4; x2=3.8; x3=4.2; x4=4.6; x5=5
   Тогда: Получим 19/144*39 + 25/48*6741/125 + 25/72*9303/125 + 25/72*12657/125 + 25/48*16899/125 + 19/144*177 = **188**
   Δ = 188-188 = 0 (0%)
3. Вычисление по формулам средних прямоугольников, трапеций и Симпсона при n=10:
   Для метода средних прямоугольников получим: 0,2 * (42,252+49,704+58,5+68,736+80,508+93,912+109,044+126+144,876+165,768) = 0,2 * 939,3 = **187,86**
   Δ = 188-187.86 = 0.14 (0.074%)
   Для метода трапеций получим: 0.2 * ((39+177)/2 + 45.816 + 53.928 + 63.432 + 74.424 + 87 + 101.256 + 117.288 + 135.192 + 155.064) = 0.2 * 941.4 = **188.28**
   Δ = 188-188.28 = 0.28 (0.149%)
   Для метода Симпсона получим: 0.2 / 3 * (39 + 177 + 4*(45.816 + 63.432 + 87 + 117.288 + 155.064) + 2 * (53.928 + 74.424 + 101.256 + 135.192)) = 0.2 / 3 * 2820 = 188
   Δ = 188-188 = 0 (0%)

Вывод:

Во время выполнения лабораторной работы я познакомился с численными методами интегрирования и реализовал методы прямоугольников(левых, средних, правых), трапеций и Симпсона на языке программирования Go.