НИУ ИТМО

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Направление подготовки 09.03.04 Программная инженерия

Дисциплина «Вычислительная математика»

Отчет

По лабораторной работе №2 «Численное решение нелинейных уравнений и систем»

Вариант 27

Выполнил:

студент группы P32131

Овсянников Роман Дмитриевич

Преподаватель:

Малышева Татьяна Алексеевна

Санкт-Петербург,

2023 г.

Цель работы:

Изучить численные методы решения нелинейных уравнений и их систем, найти корни заданного нелинейного уравнения/системы нелинейных уравнений, выполнить программную реализацию методов.

Порядок выполнения:

Вычислительная реализация:

1. Отделить корни заданного нелинейного уравнения графически (вид уравнения представлен в табл. 6)
2. Определить интервалы изоляции корней.
3. Уточнить корни нелинейного уравнения (см. табл. 6) с точностью ε=10^-2.
4. Используемые методы для уточнения каждого из 3-х корней многочлена представлены в таблице 7.
5. Вычисления оформить в виде таблиц (1-5), в зависимости от заданного метода.

Для всех значений в таблице удержать 3 знака после запятой.

5.1 Для метода половинного деления заполнить таблицу 1.
5.2 Для метода хорд заполнить таблицу 2.
5.3 Для метода Ньютона заполнить таблицу 3.
5.4 Для метода секущих заполнить таблицу 4.
5.5 Для метода простой итерации заполнить таблицу 5.
6. Заполненные таблицы отобразить в отчете.

Программная реализация:

Для нелинейных уравнений:

1. Все численные методы (см. табл. 8) должны быть реализованы в виде отдельных подпрограмм/методов/классов.
2. Пользователь выбирает уравнение, корень/корни которого требуется вычислить (3-5 функций, в том числе и трансцендентные), из тех, которые предлагает программа.
3. Предусмотреть ввод исходных данных (границы интервала/начальное приближение к корню и погрешность вычисления) из файла или с клавиатуры по выбору конечного пользователя.
4. Выполнить верификацию исходных данных. Необходимо анализировать наличие корня на введенном интервале. Если на интервале несколько корней или они отсутствуют – выдавать соответствующее сообщение. Программа должна реагировать на некорректные введенные данные.
5. Для методов, требующих начальное приближение к корню (методы Ньютона, секущих, хорд с фиксированным концом), выбор начального приближения (a или b) вычислять в программе.

6. Для метода простой итерации проверять достаточное условие сходимости метода на введенном интервале.
7. Предусмотреть вывод результатов (найденный корень уравнения, значение функции в корне, число итераций) в файл или на экран по выбору конечного пользователя.
8. Организовать вывод графика функции, график должен полностью отображать весь исследуемый интервал (с запасом).

Для систем нелинейных уравнений:
1. Пользователь выбирает предлагаемые программой системы двух нелинейных уравнений (2-3 системы).
2. Организовать вывод графика функций.
3. Начальные приближения ввести с клавиатуры.
4. Для метода простой итерации проверить достаточное условие сходимости.
5. Организовать вывод вектора неизвестных: $x1$, $x2$.
6. Организовать вывод количества итераций, за которое было найдено решение.
7. Организовать вывод вектора погрешностей: $|xi^{(k)} - xi^{(k-1)}|$
8. Проверить правильность решения системы нелинейных уравнений.

Используемые формулы/методы:

Метод половинного деления

Идея метода: начальный интервал изоляции корня делим пополам, получаем начальное приближение к корню:

$$x_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$$

Вычисляем $f(x_0)$. В качестве нового интервала выбираем ту половину отрезка, на концах которого функция имеет разные знаки: $[a_0,x_0]$ либо $[b_0,x_0]$. Другую половину отрезка $[a_0, b_0]$, на которой функция $f(x)$ знак не меняет, отбрасываем. Новый интервал вновь делим пополам, получаем очередное приближение к корню: $x_1=(a_1+b_1)/2$. и т.д.

Рабочая формула метода: $\boldsymbol{x_i = \frac{a_i+b_i}{2}}$

Критерий окончания итерационного процесса: $|b_n - a_n| \leq \varepsilon$ или $|f(x_n)| \leq \varepsilon$.

Приближенное значение корня: $x^* = \frac{a_n+b_n}{2}$ или $x^* = a_n$ или $x^* = b_n$

Метод хорд

Идея метода: функция $y = f(x)$ на отрезке [a, b] заменяется хордой и в качестве приближенного значения корня принимается точка пересечения хорды с осью абсцисс.

Уравнение хорды, проходящей через точки $A\big(a, f(a)\big)$ и $B\big(b, f(b)\big)$:

$$\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)} = \frac{x-a}{b-a}$$

Точка пересечения хорды с осью абсцисс ($y = 0$): $\quad x = a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(a)$

Алгоритм метода:

0 шаг: Находим интервал изоляции корня $[a_0, b_0]$

1 шаг: Вычисляем x_0: $\quad x_0 = a_0 - \frac{b_0-a_0}{f(b_0)-f(a_0)} f(a_0)$

2 шаг: Вычисляем $f(x_0)$.

3 шаг: В качестве нового интервала выбираем ту половину отрезка, на концах которого функция имеет разные знаки: $[a_0,x_0]$ либо $[b_0,x_0]$.

4 шаг: Вычисляем x_1 и т.д (повторяем 1-3 шаги).

Рабочая формула метода:

$$\boldsymbol{x_i = \frac{a_i f(b_i) - b_i f(a_i)}{f(b_i) - f(a_i)}}$$

Критерий окончания итерационного процесса: $|x_i - x_{i-1}| \le \varepsilon$ или $|a_i - b_i| \le \varepsilon$ или $\boldsymbol{|f(x_i)| \le \varepsilon}$

Приближенное значение корня: $x^* = x_n$

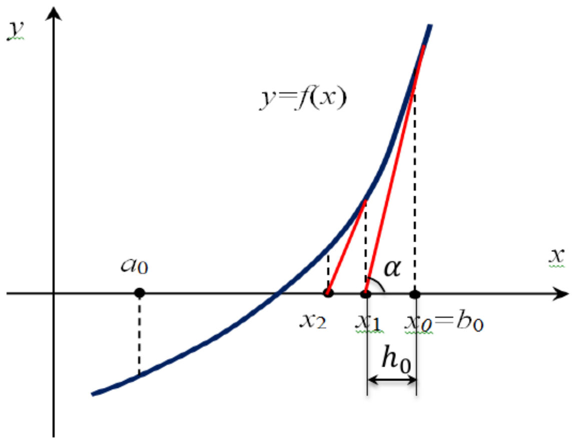
Метод Ньютона (касательных)

Идея метода: функция $y=f(x)$ на отрезке [a, b] заменяется касательной и в качестве приближенного значения корня $x^*=x_n$ принимается точка пересечения касательной с осью абсцисс.

$$x_1 = x_0 - h_0$$

$$h_0 = \frac{f(x_0)}{\tan\alpha} = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$



Рабочая формула метода:

$$\boldsymbol{x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}}$$

Критерий окончания итерационного процесса:

$$|x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon \quad \text{или} \quad \left|\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right| \le \varepsilon \quad \text{или} \quad |f(x_n)| \le \varepsilon$$

Приближенное значение корня: $x^* = x_n$

Метод секущих

Упростим метод Ньютона, заменив ***f'(x)*** разностным приближением:

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

Рабочая формула метода:

$$\boldsymbol{x_{i+1} = x_i - \frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})} f(x_i)} \qquad i = 1,2 \ldots$$

Метод секущих является *__двухшаговым__*, т.е. новое приближение x_{i+1} определяется двумя предыдущими итерациями x_i и x_{i-1}.

Выбор x_0 определяется как и в методе Ньютона, x_1- выбирается рядом с начальным самостоятельно.

Критерий окончания итерационного процесса:

$$|x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon \;\; \text{или} \;\; \boldsymbol{|f(x_n)| \le \varepsilon}$$

Приближенное значение корня: $x^* = x_n$

Метод простой итерации

Уравнение $f(x) = 0$ приведем к эквивалентному виду: $x = \varphi(x)$, выразив x из исходного уравнения.

Зная начальное приближение: $x_0 \in [a, b]$, найдем очередные приближения:

$x_1 = \varphi(x_0) \to x_2 = \varphi(x_1) \ldots$

Рабочая формула метода: $\boldsymbol{x_{i+1} = \varphi(x_i)}$

Условия сходимости метода простой итерации определяются следующей теоремой.

Теорема. Если на отрезке локализации $[a, b]$ функция $\varphi(x)$ определена, непрерывна и дифференцируема и удовлетворяет неравенству:

$|\varphi'(x)| < q$, где $0 \le q < 1$, то независимо от выбора начального приближения $x_0 \in [a, b]$ итерационная последовательность $\{x_n\}$ метода будет сходится к корню уравнения.

__Достаточное__ условие сходимости метода:

$|\varphi'(x)| \le q < 1$, где q – некоторая константа (коэффициент Липшица или коэффициент сжатия)

Чем меньше q, тем выше скорость сходимости.

Критерий окончания итерационного процесса:

$|x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon$ (при $0 < q \le 0{,}5$)

$|x_n - x_{n-1}| < \frac{1-q}{q}\varepsilon$ (при $0{,}5 < q < 1$)

Можно ограничиться: $|x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon$

Метод простой итерации

Способы преобразования уравнения:

$x^3 - x + 4 = 0$

3 способ (наиболее используемый):

Если непосредственное преобразование уравнения к виду $x = \varphi(x)$ не позволяет получить уравнение, для которого выполняются условия сходимости метода, применяем более общий прием введения параметра λ

1. преобразуем уравнение $f(x) = 0$ к равносильному (при $\lambda \neq 0$) $\lambda f(x) = 0$
2. прибавим x в обеих частях: $x = x + \lambda f(x)$
3. $\varphi(x) = x + \lambda f(x), \varphi'(x) = 1 + \lambda f'(x)$
4. высокая скорость сходимости обеспечивается при $q = \max\limits_{[a,b]}|\varphi'(x)| \approx 0$. Тогда

$\boldsymbol{\lambda = -\frac{1}{\max\limits_{[a,b]}|f'(x)|}}$

$f'(x) = 3x^2 - 1 \quad f'(-2) = 11 \quad f'(-1) = \mathbf{2} \qquad \lambda = -\frac{1}{\max\limits_{[a,b]}|f'(x)|} = -\frac{1}{11}$

$$x = x + \lambda f(x) \rightarrow x = x + \lambda(x^3 - x + 4) = \frac{12}{11}x - \frac{1}{11}x^3 - \frac{4}{11}$$

$$\varphi(x) = \frac{12}{11}x - \frac{1}{11}x^3 - \frac{4}{11}$$

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. МЕТОД НЬЮТОНА.

К основе метода лежит использование разложения функций $F_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в окрестности некоторой фиксированной точки в ряд Тейлора, причем члены, содержащие вторые (и более высоких порядков) производные, отбрасываются.

Пусть начальные приближения неизвестных системы (1) получены и равны соответственно $a_1, a_2, \dots, a_n$. Задача состоит в нахождении приращений (поправок) к этим значениям $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$, благодаря которым решение системы запишется в виде

$$x_1 = a_1 + \Delta x_1, \; x_2 = a_2 + \Delta x_2, \; \dots, x_n = a_n + \Delta x_n \qquad (2)$$

Проведем разложение левых частей уравнений (1) с учетом (2) в ряд Тейлора, ограничиваясь лишь линейными членами относительно приращений:

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \approx F_1(a_1, a_2, \dots, a_n) + \frac{\partial F_1}{\partial x_1}\Delta x_1 + \cdots \frac{\partial F_1}{\partial x_n}\Delta x_n \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \approx F_2(a_1, a_2, \dots, a_n) + \frac{\partial F_2}{\partial x_1}\Delta x_1 + \cdots \frac{\partial F_2}{\partial x_n}\Delta x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ F_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \approx F_n(a_1, a_2, \dots, a_n) + \frac{\partial F_n}{\partial x_1}\Delta x_1 + \cdots \frac{\partial F_n}{\partial x_n}\Delta x_n \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ.
МЕТОД НЬЮТОНА.

Итерационный процесс решения систем нелинейных уравнений методом Ньютона состоит в определении приращений $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ к значениям неизвестных на каждой итерации.

Критерий окончания итерационного процесса: $max|\Delta x_i \leq \varepsilon|$.

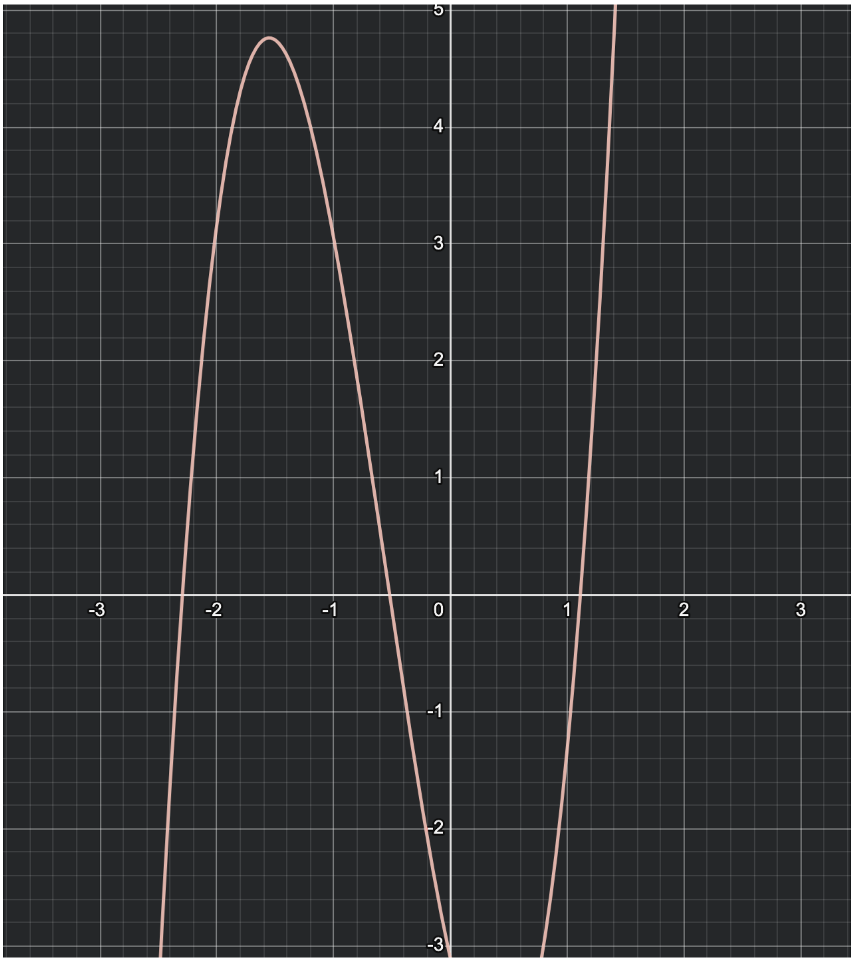
В методе Ньютона:

1. Важен удачный выбор начального приближения для обеспечения хорошей сходимости.
2. Сходимость ухудшается с увеличением числа уравнений системы.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}$$

Вычислительная реализация:

Функция: 2,335x^3 + 3,98x^2 − 4,52x −3,11



Крайний правый корень [1, 2]
Метод половинного деления
n=8 - число итераций для точности 10^-2

Уточнение корня уравнения методом половинного деления

№ шага	a	b	x	f(a)	f(b)	f(x)	|a-b|
1	1	2	1.5	-1.315	22.45	6.946	1
2	1	1.5	1.25	-1.315	6.946	2.019	0.5
3	1	1.25	1.125	-1.315	2.019	0.167	0.25
4	1	1.125	1.0625	-1.315	0.167	-0.619	0.125

5	1.0625	1.125	1.09375	-0.619	0.167	-0.237	0.0625
6	1.09375	1.125	1.1094	-0.237	0.167	-0.038	0.03125
7	1.1094	1.125	1.1172	-0.038	0.167	0.064	0.0156
8	1.1094	1.1172	**1.1133**	-0.038	0.064	**0.013**	0.0078

Правый корень уравнения: 1.1133 (точность 0.01)

Крайний левый корень [-3, -2]
Метод Ньютона

Уточнение корня уравнения методом Ньютона

№ итерации	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	x_{k+1}	$\lvert x_k - x_{k+1} \rvert$
1	-3	-16.775	34.645	-2.5158	0.4842
2	-2.5158	-3.7287	19.7907	-2.3274	0.1884
3	-2.3274	-0.4687	14.8984	-2.2959	0.03146
4	**-2.2959**	-0.01212	14.13	-2.295042	**0.000858**

Левый корень уравнения: -2.2959 (точность 0.01)

Центральный корень [-1, 0]
Метод простой итерации

Уточнение корня уравнения методом простой итерации

№ итерации	x_k	x_{k+1}	$f(x_{k+1})$	$\lvert x_k - x_{k+1} \rvert$
1	-1	-0.3242	-1.3056	0.6758

2	-0.3242	-0.613	0.6188	0.2888
3	-0.613	-0.4762	-0.3074	0.1368
4	-0.4762	-0.5442	0.1519	0.068
5	-0.5442	-0.5106	-0.07554	0.0336
6	-0.5106	**-0.5273**	0.03749	0.0167

Центральный корень уравнения: -0.5273 (точность 0.01)

2.335x^3+3.98x^2 - 4.52x -3.11

Программная реализация:
Решение нелинейных уравнений:
Метод хорд
Метод секущих
Метод простой итерации

Решение систем нелинейных уравнений:
Метод Ньютона

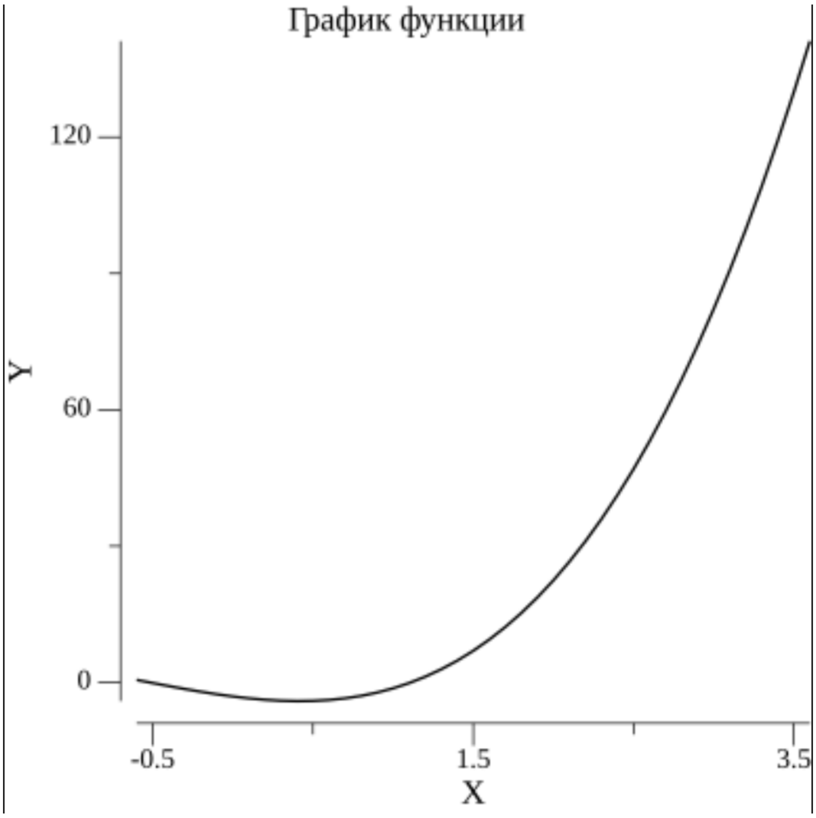
Код программы:
https://github.com/Ja1rman/Computational-Mathematics/tree/main/lab2

Примеры работы программы:

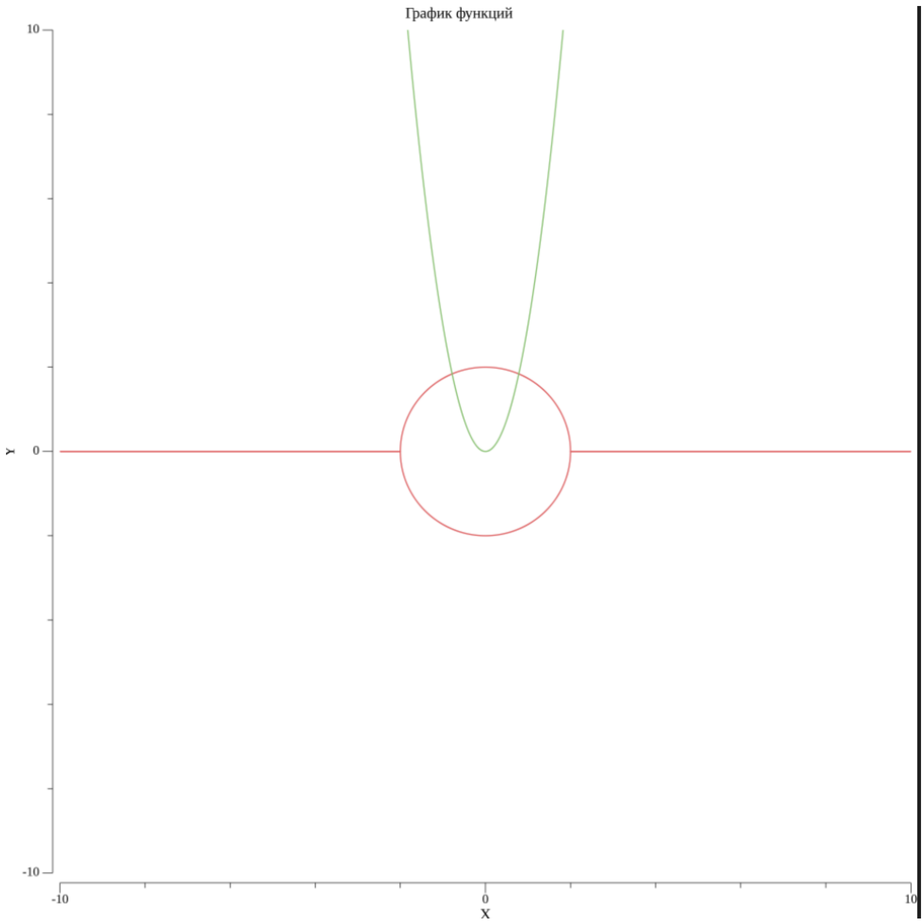
```
Лабораторная работа №2, Численное решение нелинейных уравнений и систем
Взять исходные данные из файла (+) или ввести с клавиатуры (-)?
-
Введите границы интервала через пробел: 0 3
Введите погрешность вычислений: 0.01
Вывести результат в файл (+) или в терминал (-)?
-

Выберите номер функции
1 - 2.335x^3 + 3.98x^2 - 4.52x - 3.11
2 - x^3 - x + 4
3 - sin(x) + 0.1
1

Выберите номер метода решения
1 - Метод хорд
2 - Метод секущих
3 - Метод простой итерации
1
Решение: 1.0890640650578385 -0.29593868212825214 14
```




```
Выберите номер системы линейных уравнений:
1 - x^2 + y^2 = 4; y = 3*x^2
2 - 2*x^2 - y^2 = 1; x - e^(y) = -1
1
Введите начальное приближение:
1 1
Вектор погрешностей: 3.3265306122448974 2.6054421768707483
Вектор погрешностей: 0.14565661971735933 1.3195442939637323
Вектор погрешностей: 0.013859819338728768 0.08010479907807054
Решение: [0.7832643908088742 1.8403627002429144]  Итераций: 3
```



Вывод:

Во время выполнения лабораторной работы я познакомился с несколькими методами, позволяющими решать нелинейные уравнения и системы нелинейных уравнений. Все методы довольно легко программируются и дают высокую точность и быструю сходимость при удачном выборе начального приближения.