Вариант 9 ИДЗ 18-1

№1.9

$n = 10$

$P_{10} = 10! = 3628800$

Ответ: 3628800

№2.9

$P(A) = \frac{m}{n}$

$n = C_{10}^4 = \frac{10!}{4!6!} = 210$ - вар. взять 4 кольца

$m = C_3^2 \cdot C_7^2 = 3 \cdot \frac{7!}{5!2!} = 63$ - вар взять 2 кольца вост и взять 2 кольца не вост.

$P(A) = \frac{63}{210} = 0,3$

Ответ: 0,3

№3.9

$P(H_1) = 0,2$

$P(H_2) = 0,3$

$P(H_3) = 0,5$

$P(A_1) = 0,2 \cdot 0,3 \cdot 0,5 \cdot C_3^1 \cdot C_2^1 \cdot C_1^1 = 0,18$

$P(A_2) = 0,5^3 \cdot 1! = 0,125$

$P(A_3) = 0,5^2 \cdot (1-0,5) \cdot 3 = 0,375$

$A_1 = \{ПВТ, ПТВ, ТВП, ВПТ, ВТП, ТПО\}$

$A_2 = \{ТТТ\}$

$A_3 = \{\bar{Т}ТТ, Т\bar{Т}Т, ТТ\bar{Т}\}$

Ответ: а) 0,18 ; б) 0,125 ; в) 0,375

№4.9

$P(H_1) = \frac{5}{11}$ - шар из 5 ящиков взят

$P(H_2) = \frac{6}{11}$ - шар из 6 ящиков взят.

Вытащим из ящиков, в которых 30 шаров (5):

$P_5 = \frac{5 \cdot 5}{30 \cdot 5} = \frac{1}{6}$

m - кол-во красных

n - всего шаров

$P(P_5 / H_1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{11} = \frac{5}{66}$

Вытащили из 6 ящиков по 20 шаров (4):

$$P_6 = \frac{4 \cdot 6}{20 \cdot 6} = \frac{1}{5}$$

$$P(P_6 / H_2) = \frac{1}{5} \cdot \frac{6}{11} = \frac{6}{55}$$

а) $P(P_6/H_2) + P(P_5/H_1) = \frac{6}{55} + \frac{5}{66} = \frac{61}{330} \approx 0,1848$

б) $P = \dfrac{P(P_5/H_1)}{P(P_6/H_2)+P(P_5/H_1)} = \dfrac{5 \cdot 330}{66 \cdot 61} = \dfrac{25}{61} \approx 0,4098$

Ответ: а) 0,1848 ; б) 0,4098

№5.9

$p = 0,8 \quad n = 6$

По формуле Бернули:

а) $P(K=5) = C_6^5 \cdot 0,8^5 \cdot 0,2^1 = 6 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right) = 6 \cdot \frac{1024}{15625} = \frac{6144}{15625} \approx 0,3932$

б) $P(K \geqslant 5) = P(k=5) + P(k=6) = P(k=5) + C_6^6 \cdot 0,8^6 = P(k=5) + \frac{4096}{15625} =$

$= \frac{6144}{15625} + \frac{4096}{15625} = \frac{10240}{15625} = \frac{2048}{3125} \approx 0,65536$

в) $P(K \leqslant 5) = 1 - P(K=6) = \frac{11529}{15625} \approx 0,737856$

Ответ: а) 0,3932 ; б) 0,6554 ; в) 0,7379

№6.9

$p = 0,3 \quad K_1 = 225 \quad K_2 = 250 \quad n = 800$

По формуле (интеграл) Муавра-Лапласа:

$$P(225 \leq m \leq 250) = \Phi_2(X_2) - \Phi_1(X_1)$$

$$X_1 = \frac{225 - 800 \cdot 0,3}{\sqrt{800 \cdot 0,3 \cdot 0,7}} = \frac{-15}{2\sqrt{42}} \approx -1,16$$

$$X_2 = \frac{250 - 800 \cdot 0,3}{\sqrt{800 \cdot 0,3 \cdot 0,7}} = \frac{10}{2\sqrt{42}} \approx 0,77$$

$$P = \Phi_2(0,77) - \Phi_1(-1,16) = 0,2794 + 0,3770 = 0,6564$$

по таблице

Ответ: 0,6564

ИДЗ 18-2

№1.9

1) Дискретное распределение X, биномиальное

$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$

$P_4(0) = C_4^0 \cdot 0,8^0 \cdot 0,2^4 = 0,0016$

$P_4(1) = C_4^1 \cdot 0,8^1 \cdot 0,2^3 = 0,0256$

$P_4(2) = C_4^2 \cdot 0,8^2 \cdot 0,2^2 = 0,1536$

$P_4(3) = C_4^3 \cdot 0,8^3 \cdot 0,2^1 = 0,4096$

$P_4(4) = C_4^4 \cdot 0,8^4 \cdot 0,2^0 = 0,4096$

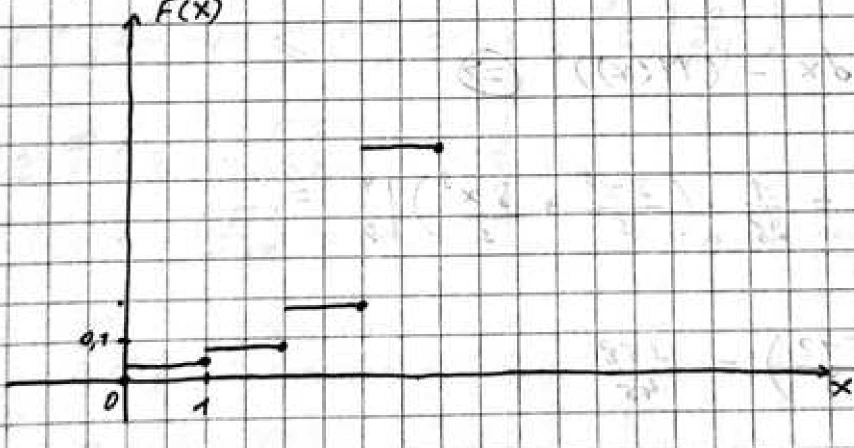
2) $M(x) = np = 4 \cdot 0,8 = 3,2$

3) $D(x) = npq = 4 \cdot 0,8 \cdot 0,2 = 0,64$

4) $\sigma(x) = \sqrt{npq} = 0,8$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0 \\ 0,0016, & \text{если } 0 < x \leq 1 \\ 0,0272, & \text{если } 1 < x \leq 2 \\ 0,1808, & \text{если } 2 < x \leq 3 \\ 0,5904, & \text{если } 3 < x \leq 4 \\ 1, & \text{если } x > 4 \end{cases}$$

5) график:



Ответ: $M(x) = 3,2$

$D(x) = 0,64$

$\sigma(x) = 0,8$

№ 2.9

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \text{при} \quad x < 0 \\ \frac{1}{96}(x^3 + 8x) & , \text{при} \quad 0 \leq x \leq 4, \quad a = 0, \ b = 2 \\ 1 & , \text{при} \quad x > 4 \end{cases}$$

1) Плотность распределения вероятности $f(x)$:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & , \text{при} \quad x < 0 \\ \frac{1}{96}(3x^2 + 8) & , \text{при} \quad 0 \leq x \leq 4 \\ 1 & , \text{при} \quad x > 4 \end{cases}$$

2) Математическое ожидание:

$$M(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\, dx = \int_0^4 x \cdot \frac{1}{96} \cdot (3x^2 + 8)\, dx =$$

$$= \frac{1}{96} \int_0^4 (3x^3 + 8x)\, dx = \frac{1}{96}\left(\frac{3x^4}{4} + 4x^2\right)\Bigg|_0^4 =$$

$$= \frac{1}{96}\left(\frac{3 \cdot 256}{4} + 4 \cdot 16\right) = \frac{256}{96} \approx 2\frac{2}{3}$$

3) Дисперсия:

$$D(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx - (M(x))^2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{96}\int_0^4 (3x^4 + 8x^2)\, dx = \frac{1}{96} \cdot \left(\frac{3x^5}{5} + \frac{8x^3}{3}\right)\Bigg|_0^4 =$$

$$= \frac{1}{96} \cdot \left(\frac{3 \cdot 1024}{5} + \frac{512}{3}\right) = \frac{368}{45}$$

$$\Rightarrow \frac{368}{45} - \left(\frac{8}{3}\right)^2 = \frac{368}{45} - \frac{64}{9} = \frac{48}{45}$$

4) Вероятность попадания на отрезке $[a, b]$:

$$P(0 \leq x \leq 2) = \int_0^2 \frac{1}{96}(3x^2 + 8)\, dx = \frac{1}{96}(8 + 16) = 0{,}25$$

Ответ: $M(x) = 2\frac{2}{3}$ $\qquad P(0 \leq x \leq 2) = 0{,}25$

$D(x) = \frac{48}{45}$

№3.9

$D = 0{,}81$ см^2 — С помощью интег. формулы Лапласа

$M = 5$ см

$P(4 \leq x \leq 7) = \Phi_2(X_2) - \Phi_1(X_1)$

$$X_1 = \frac{x_1 - m}{\sqrt{D}} = \frac{4-5}{\sqrt{0{,}81}} = \frac{-1}{0{,}9} = \frac{-10}{9} \approx -1{,}111\ldots$$

$$X_2 = \frac{x_2 - m}{\sqrt{D}} = \frac{7-5}{\sqrt{0{,}81}} = \frac{2}{0{,}9} = \frac{20}{9} \approx 2{,}222\ldots$$

$$\left.\begin{aligned} \Phi_2(2{,}22) &= 0{,}4868 \\ \Phi_1(-1{,}11) &= -0{,}3665 \end{aligned}\right\} \text{по таблице}$$

$P(4 \leq x \leq 7) = 0{,}4868 + 0{,}3665 = 0{,}8533$

Ответ: $P = 0{,}8533$

№4.9

$p = 0{,}4$ $\quad P = 0{,}9$

$\varepsilon = 0{,}1$

Оценка отклонения относительной частоты от постоянной вероятности:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$$

$\Phi(x)$ - интег. ф-ция Лапласа

$$2\Phi\left(0{,}1 \cdot \sqrt{\frac{n}{0{,}24}}\right) = 0{,}9$$

$$0{,}1 \cdot \sqrt{\frac{n}{0{,}24}} = 1{,}65 \leftarrow \text{по таблице}$$

$$\frac{n}{0{,}24} = 272{,}25$$

$$n = 65{,}34$$

Ответ: 65

Глава 1

№1

$P(A) = \frac{1}{6}$ – вероятность выпадения „1" на 1 кости

$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = \frac{5}{6}$

$P(B) = P(B(1)) + P(B(2)) = C_2^1 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^1 + C_2^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 =$

$= \frac{11}{36}$

$P(A \cdot \bar{B}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{36}$

Ответ: $\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{11}{36}, \frac{5}{36}$

№2

n-книг

$(n-1)$ – считаем 2 тома, как 1 книгу

$2(n-1)$ – 2 тома могут быть $\{1,2;2,1\}$

$P_n = n!$ – кол-во перестановок без повторения

$P = \frac{2(n-1)!}{n!} = \frac{2(n-1)!}{(n-1)! \cdot n} = \frac{2}{n}$

Ответ: $\frac{2}{n}$

№3

$n!$ – кол-во перестановок

$C_n^3 \cdot (n-3)!$ – перестановок „1,2,3"

$P = \frac{C_n^3 \cdot (n-3)!}{n!} = \frac{n! \cdot (n-3)!}{3! \cdot (n-3)! \cdot n!} = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$

Ответ: $\frac{1}{6}$ (по аналогии 2 задачи.)

№4

$|\Omega| = 10^n \quad n = 3$

A – все числа одинаковые $\quad i = j = k \in \{0 \dots 9\} \quad m = 10$

$P(A) = \frac{10}{10^3} = 0{,}01$

B – все числа разные $\quad i \neq j \neq k \quad i \in \{0 \dots 9\} \quad k \in \{2 \dots 9\}$

$j \in \{1 \dots 9\}$

$P(B) = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{10^3} = 0,72$

C - среди выписанных чисел ровно два совпадают.

$\left.\begin{array}{ll} i = j \neq k & i = k \neq j \\ i \neq j = k & \end{array}\right\}$ 3 комбинации

у каждой комбинации есть возможность выбрать от $\{0$ до $9\}$, а у третьей цифры $10-1$

$P(C) = \frac{3 \cdot 10 \cdot 9}{10^3} = 0,27$

Ответ: $0,01$; $0,72$; $0,27$

№5

$|\Omega| = 10^n$

а) i_1 - четное, $0 \leq i_k \leq 9$, $k = 2 \ldots n$ $\Rightarrow |A| = 5 \cdot 10^{n-1}$

$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{5 \cdot 10^{n-1}}{10^n} = \frac{5}{10} = 0,5$

б) $B = \{(\ldots, j_1, j_2, \ldots, j_m) : j_k \in \{0, 3, 6, 9\}, 1 \leq k \leq m,$ остальные не делятся на $3\}$

$|B| = 4^m \cdot 6^{n-m} \cdot C_n^m$ (формула Бернулли)

$P(B) = 0,4^m \cdot 0,6^{n-m} \cdot C_n^m$

в) случай C сводится к случаю B. Значит:

$P(C) = 0,4^{m+2} \cdot 0,6^{n-m-2} \cdot C_{n-2}^m$

Ответ: $0,5$; $0,4^m \cdot 0,6^{n-m} \cdot C_n^m$, $0,4^{m+2} \cdot 0,6^{n-m-2} \cdot C_{n-2}^m$

№6

а) найдем вероятность, что выпало хоть „1" и отличное от 1

$p = \frac{5}{6}$ $n = 4$

$P(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0,5177$

б) при бросании двух костей, вероятность, что выпадет две „1" $= \frac{1}{36}$

Значит по аналогии примера а) делаем и этот

$$P(B) = 1 - \left(1 - \frac{1}{36}\right)^{24} \approx 0,4914$$

Ответ: событие а) вероятнее, чем событие б)

№8

$n = 100$

$m = 90$ - исправных

$K = 10$ - бракованных

а) ровно 1 брак. среди 10 продан.

C_{90}^{9} - способов выбрать исправных

C_{10}^{1} - способов выбрать браков

C_{100}^{10} - способов выбрать 10 дет.

$$P(A) = \frac{C_{10}^{1} \cdot C_{90}^{9}}{C_{100}^{10}} \approx 0,408$$

б) нет бракованных:

$$P(B) = \frac{C_{90}^{10}}{C_{100}^{10}} \approx 0,33048$$

Ответ: 0,408 ; 0,3305

№9

$N = 1000$, $M = 10$

$A_K = \{K$-й и $K+1$-й интервал заняты тяж. поездами$\}$

$$P(A_K) = \frac{C_{N-2}^{M-2}}{C_N^M} = \frac{(N-2)!}{(M-2)!\cancel{(N-M)!}} \cdot \frac{M!\cancel{(N-M)!}}{N!} = \frac{M(M-1)}{N(N-1)}$$

$A_1 + A_2 + \ldots A_{N-1}$ - $\{$хотя бы 1 пара соседних интервалов занята тяж. поездами$\}$

$P(A_1+A_2) = P(A_1)+P(A_2) - P(A_1A_2) \leq P(A_1)+P(A_2)$

$P(A_1+A_2+\dots A_{N-1}) \leq P(A_1)+\dots P(A_{N-1}) =$

$= (N-1)\cdot P(A_1) = \frac{M(M-1)}{N} = \frac{10\cdot 9}{1000} = 0{,}09$

Ответ: 0,09

№ 12

$n = 12^{12}$

$m = 12!$

$P = \frac{m}{n} = \frac{12!}{12^{12}}$ (задача с кр)

Ответ: $\frac{12!}{12^{12}}$

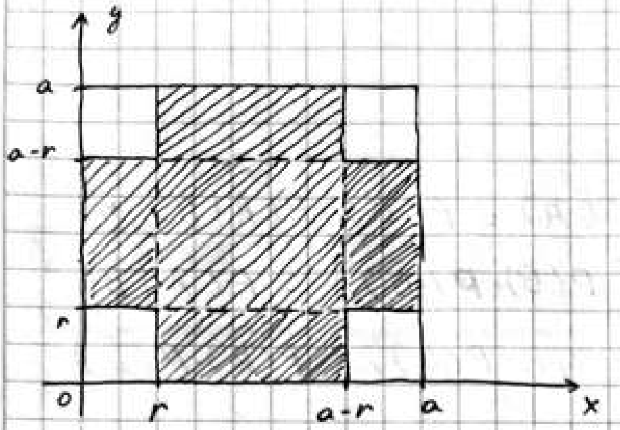
№ 18

Пусть (x, y) - координаты центра упавшей монеты. В силу бесконечности шахматной доски можно считать, что элементарные исходы данного экспере-мента полностью определяется положением цент-ра упавшей монеты относительно вершин квадрата, содержащего этот центр. Помещая начало координат в одну из вершин указанного квадрата можно записать множество элементарных исходов в виде $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$. Множество, соответствующее событию A: $x \geq r$, $y \leq a-r$, т.е является квадратом со стороной $a-2r$.

а) $S_b = (a-2r)^2$; $S = a^2$; $P = \frac{(a-2r)^2}{a^2}$

б) $S_b = a^2 - 4r^2$, $S = a^2$, $P = \frac{a^2-4r^2}{a^2} = 1 - \frac{4r^2}{a^2}$

(смотреть рисунок примера)



Ответ: $P(A) = \dfrac{(a-2r)^2}{a^2}$; $P(B) = 1 - \dfrac{4r^2}{a^2}$

Глава 3.

№1

$A = \{(1,2), (1,5), (2,4), (6,6), (3,6), (4,5)\}$

$B = \{(3,3)\}$

$|A| = 2 \cdot 6$ (те же комбинации в другом порядке)

$|B| = 1$

$|\Omega| = 36$

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{1}{12}$$

Ответ: $\dfrac{1}{12}$

№2

Найдем, что выпало 0 или 1 „1".

$n=10$, $p = \dfrac{1}{6}$, $q = \dfrac{5}{6}$, m – кол-во выпавш. единиц.

$$P(m=0) = \left(\frac{5}{6}\right)^{10}$$

$$P(m \geq 1) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{10}$$

$$P(m=0) + P(m=1) = \left(\frac{5}{6}\right)^{10} + C_{10}^{1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{1} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{9} =$$

$$= \left(\frac{5}{6}\right)^{10} + 10 \cdot \frac{5^9}{6^{10}}$$

$$P(m \geq 2) \; 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{10} - 10 \cdot \frac{5^9}{6^{10}}$$

$$P(m \geq 2 \mid m \geq 1) = \frac{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{10} - 10 \cdot \frac{5^9}{6^{10}}}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{10}} \approx 0{,}61477$$

Ответ: 0,61477

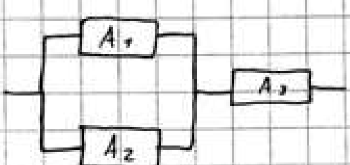
№5

Из определения $AB \cdot A\bar{B} = A$, объед. множества не пересекаются =>

=> $P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB) = P(A) \cdot (1 - P(B)) = P(A) \cdot P(\bar{B})$

Ответ: независимы.

№10



Пусть A_k означ. событие, что k-й элем не работает.

A – проходит ток

$A = (\bar{A}_1 + \bar{A}_2) \cdot \bar{A}_3$

$P(A) = P(\bar{A}_1 + \bar{A}_2) \cdot P(\bar{A}_3) = (1 - p_3) \cdot (1 - p_1 + 1 - p_2 - (1-p_1)(1-p_2)) =$

$= (1 - p_1 p_2)(1 - p_3)$

Ответ: $(1 - p_1 p_2)(1 - p_3)$

№11

3 - белых, 5 - черных, $n = 8$

$P(A_1) = \frac{3}{8}$, $P(A_2) = \frac{3}{8}$ – если не зависит от A_1

$P(A_1 A_2) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{3}{28}$

Ответ: $\frac{3}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{3}{28}$

№13

2 - белых, 4 - черных ; 3 - белых, 1 - черный

а) вариантов взять 2 шара из 1 урны $C_6^2 = 15$

б) вариантов взять 2 белых из 1 урны $C_2^2 = 1$

с) $C_4^2 = 6$ - (черных два)

Один белый, другой черный $15 - 6 - 1 = 8$

$P_1 = \frac{6}{15} + \frac{1}{15} + \frac{8}{15} = 1$

	белые	черные	
а)	3	3	во второй
б)	5	1	урне
с)	4	2	

$P_2 = \frac{3}{6}; \frac{5}{6}; \frac{4}{6}$

Чтобы найти вероятность перемножим и сложим

$P = \frac{6}{15} \cdot \frac{3}{6} + \frac{1}{15} \cdot \frac{5}{6} + \frac{4}{6} \cdot \frac{8}{15} = \frac{11}{18}$ - белый у второй урны после переклад.

Ответ: $\frac{11}{18}$

№ 9

$P(A_1 \bar{A}_3 A_4) = p_1(1 - p_3)p_4$

$P(A_1 + A_2) = p_1 + p_2 - p_1 p_2$

$P((A_1 + A_2)(A_3 + A_4)) = (p_1 + p_2 - p_1 p_2)(p_3 + p_4 - p_3 p_4)$

№ 15

B - человек дальтоник

H_1 - выбрали муж. $P(H_1) = P(H_2) = 0{,}5$

H_2 - выбрали жен.

Для нахождения искомой вероятности воспользуемся формулой Бейеса.

$$P(H_1 / B) = \frac{P(H_1) P(B / H_1)}{P(B)} = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}05}{0{,}02625} = \frac{20}{21}$$

По условию $P(B / H_1) = 0{,}05$, $P(B / H_2) = 0{,}0025$

$P(B) = 0{,}5 \cdot 0{,}05 + 0{,}5 \cdot 0{,}0025 = 0{,}02625$

Ответ: $\frac{20}{21}$

№ 16

$P(AAAA / ABCA) = \{P(AAAA) P(ABCA / AAAA)\} \div \{P(AAAA) P(ABCA / AAAA)$

$+ P(BBBB) P(ABCA / BBBB) + P(CCCC) P(ABCA / CCCC)\} =$

$$= \frac{0{,}3 \cdot (0{,}6 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}6)}{0{,}3 \cdot (0{,}6 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}6) + 0{,}4 (0{,}2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2) + 0{,}3 \cdot (0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}2)}$$

$= \frac{9}{16}$ Ответ: $\frac{9}{16}$

№ 12

β_k - отбраковывается норм. изделие

α_k - принимается брак

а) $P(A_1) = \alpha_1 \cdot \alpha_2$

б) $P(A_2) = \beta_1 + \beta_2 - \beta_1 \beta_2$

} Ответ.

Глава 4.

№ 1

2 - белых, 4 - черных

Б - вытащ. белый, Ч - вытащ. черный

$A = \{ Б, ЧЧБ, ЧЧЧЧБ \}$

$P(A) = \frac{2}{6} + \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2} = \frac{3}{5}$

Ответ: 0,6

№ 3

M - белых, N - M - черных.

а) $P(A_k) = \frac{M}{(N}$

б) $P(B_{k,l}) = \frac{M(M-1)}{N(N-1)}$ - Ответы

в) $P(C_{k,l}) = \frac{(N-M)}{N} \cdot \frac{M}{(N-1)}$

№ 4

$n = 10$, $m = 4$ 3 - кости

Вероятность выпадения двух „6" - $P(A_1)$

$P(A_1) = C_3^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right) = \frac{5}{72}$

Искомая вероятность:

$P(A) = C_{10}^4 \cdot \left(\frac{5}{72}\right)^4 \cdot \left(1 - \frac{5}{72}\right)^6 \approx 0,00317$

Ответ: 0,00317

№ 5

$p = 0{,}01$, $q = 0{,}99$, m - кол-во искаж. , $n = 5$

а) $P(m=0) = C_5^0 \cdot 0{,}99^5 = 0{,}951$

б) $P(m=1) = C_5^1 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}99^4 \approx 0{,}048$

в) $P(m \geqslant 2) = 1 - P(0) - P(1) \approx 0{,}001$

Ответ: 0,951 ; 0,048 ; 0,001

№ 6

$p = \frac{1}{10}$ - вероятность выпадения „6"

$q = 1 - p = \frac{9}{10}$ - вероятность не выпадения „6"

$P_1 = 0{,}7$, $P_2 = 0{,}9$ - требуемая вероятность

$1 - q^n$ - вероятность заданного события в зависимость от числа бросаний

$1 - q^n \geqslant P$

$q^n \leqslant 1 - P$

$\ln q^n \leqslant \ln(1-P)$

$$n \geqslant \frac{\ln(1-P)}{\ln q}$$

а) $n_1 \geqslant \frac{\ln(1-0{,}7)}{\ln(0{,}9)}$ б) $n_2 \geqslant \frac{\ln(1-0{,}9)}{\ln(0{,}9)}$

$n_1 \geqslant 11{,}427$ $n_2 \geqslant 21{,}8544$

Ответ: $n_1 = 12$

$n_2 = 22$

№ 10

Двое бросают монету по n раз. Число гербов одинак

$P = C_{2n}^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$ - Ответ:

$2n$ - всего бросков , $p = \frac{1}{2}$

№ 12

A - искомое событие

B_1 - 2 точки в $[0;2]$

B_2 - 1 точки в $[2;3]$

B_3 - 2 точки в $[3;10]$

$P(A) = P(B_1 \cdot B_2 \cdot B_3) = P(B_1) \cdot P(B_2 | B_1) \cdot P(B_3 | B_1 B_2) \Rightarrow$

$P(B_1) = C_5^2 \cdot \left(\frac{2}{10}\right)^2 \cdot \left(\frac{8}{10}\right)^3 = \frac{128}{625}$ $\qquad p_1 = \frac{2-0}{10-0} = \frac{2}{10}$

$P(B_2 | B_1) = C_3^1 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^1 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^2 = \frac{147}{512}$ $\qquad p_2 = \frac{3-2}{10-2} = \frac{1}{8}$

$P(B_3 | B_1 B_2) = C_2^2 \cdot \left(\frac{7}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{0}{7}\right)^0 = 1$ $\qquad p_3 = \frac{10-3}{10-3} = 1$

$P(A) = \frac{\cancel{128}^{1}}{625} \cdot \frac{147}{\cancel{512}_{4}} = \frac{147}{2500} = 0{,}0588$

Ответ: 0,0588

№ 13

$S_\square = 2r^2$ - вписан в круг $\qquad n = 10$

$S_O = \pi r^2$

$p_1 = \frac{S_\square}{S_O} = \frac{2r^2}{\pi r^2} = \frac{2}{\pi}$ $\qquad p_{2,\dots,10} = \left(\frac{1 - \frac{2}{\pi}}{4}\right)$

$P(A) = \frac{10!}{4!\,3!\,1!\,1!\,1!} \cdot \left(\frac{2}{\pi}\right)^4 \cdot \left(\frac{1-\frac{2}{\pi}}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{1-\frac{2}{\pi}}{4}\right)^3 \approx$

$\approx 0{,}0093063$

Ответ: 0,0093063

№ 16

$p = 0{,}01$ - выпадение пары „01" (для 1 цифры 0,1)

$n = 200$

Нужно посчитать $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$ и отнять от 1

По формуле Пуассона:

$P(0) = \frac{(200 \cdot 0{,}01)^0}{0!} \cdot e^{-200 \cdot 0{,}01} = \frac{1}{e^2} \approx 0{,}135335$

$P(1) = \frac{2^1}{1!} \cdot e^{-2} = \frac{2}{e^2} \approx 0{,}270671$

$P(2) = \frac{2^2}{2!} \cdot e^{-2} = \frac{2}{e^2} \approx 0{,}270671$

$P(K \geqslant 3) = 1 - (P(0) + P(1) + P(2)) = 0{,}323323$

Ответ: 0,323323

№17

$n = 6$, $p = \frac{1}{6}$

1) $P(m \geqslant 1) = 1 - P(0) = 1 - C_6^0 \cdot \frac{5}{6}^6 \approx 0{,}665102$

$P(m \geqslant 1) = 1 - P(0) = 1 - \frac{(6 \cdot \frac{1}{6})^0}{0!} \cdot e^{-1} = 1 - \frac{1}{e} \approx 0{,}632121$

2) $P(m = 1) = C_6^1 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}^5 \approx 0{,}401878$

$P(m = 1) = \frac{(6 \cdot \frac{1}{6})^1}{1!} \cdot e^{-1} \approx 0{,}367879$

3) $P(m = 2) = C_6^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0{,}200939$

$P(m = 2) = \frac{1^2}{2!} \cdot e^{-1} \approx 0{,}18394$

№18

$p = 0{,}99$ $n - ?$ $m \geqslant 1$

По формуле Пуассона:

$1 - \frac{(0{,}99n)^0}{0!} \cdot e^{-0{,}99n} \geqslant 0{,}99$

$e^{-0{,}99n} \leqslant 0{,}01$

$-0{,}99n \leqslant -2\ln(10)$

$n \geqslant \frac{200}{99} \cdot \ln(10) \approx 4{,}652$

Ответ: $n = 5$

Глава 5

№2

$[0;1]$

$$F_{\eta_1}(x) = P(2\xi + 1 < x) = P\left(\xi < \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right) = F_\xi\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

производ.

$$p_{\eta_1}(x) = \frac{1}{2} \quad (x \in [1;3])$$

$$F_{\eta_2}(x) = P(-\ln(1-\xi) < x) = P(\xi < 1 - e^{-x}) = F_\xi(1 - e^{-x})$$

производ.

$$p_{\eta_2}(x) = e^{-x} \quad (x \geqslant 0)$$

№3

$$F_\xi(x) = \int_0^x p(t)\,dt = 1 - e^{-\alpha x}$$

1) $$F_{\eta_1}(x) = P(\sqrt{\xi} < x) = P(\xi < x^2) = F_\xi(x^2)$$

$$p_{\eta_1}(x) = 2x\alpha e^{-\alpha x^2}, \quad (x > 0)$$

2) $$F_{\eta_2}(x) = P(\xi^2 < x) = P(\xi < \sqrt{x}) = F_\xi(\sqrt{x})$$

$$p_{\eta_2}(x) = \frac{\alpha}{2\sqrt{x}} \cdot e^{-\alpha\sqrt{x}}, \quad (x > 0)$$

3) $$F_{\eta_3}(x) = P\left(\frac{1}{\alpha}\ln|\xi| < x\right) = P(\xi < e^{\alpha x}) = F_\xi(e^{\alpha x})$$

$$p_{\eta_3}(x) = \alpha^2 e^{-\alpha e^{\alpha x} + \alpha x}, \quad (x > -\infty,\ x < +\infty)$$

4) $$F_{\eta_4}(x) = P(1 - e^{-\alpha\xi} < x) = P\left(\xi < -\frac{\ln(1-x)}{\alpha}\right) =$$

$$= F_\xi\left(-\frac{\ln(1-x)}{\alpha}\right)$$

$$p_{\eta_4}(x) = (1 - e^{\ln(1-x)})' = 1, \quad (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

№4

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$\sigma^2 = 1$, $a = 0$

1) $F_{\eta_1}(x) = P(\xi^2 < x) = P(\xi < \sqrt{x}) = F_\xi(\sqrt{x})$

$$p_{\eta_1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \cdot e^{-\frac{x}{2}}, \quad (x > 0)$$

2) $F_{\eta_2}(x) = P(e^\xi < x) = P(\xi < \ln(x)) = F_\xi(\ln(x))$

$$p_{\eta_2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, x} \cdot e^{\frac{-\ln^2 x}{2}}$$

№9

а) $\eta_1 = \xi_1^2 + \xi_1^2$

$$p_{\xi_1}(x) = p_{\xi_2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$F_{\eta_1}(x) = P(\xi_1^2 + \xi_2^2 < x) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{u_1^2+u_2^2<x} e^{-\frac{u_1^2+u_2^2}{2}} du_1 du_2 =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\sqrt{x}} d\rho \int_0^{2\pi} \rho e^{\frac{-\rho^2}{2}} d\varphi = 1 - e^{-\frac{x}{2}} \qquad \begin{matrix} u_1 = \rho\cos\varphi \\ u_2 = \rho\sin\varphi \end{matrix}$$

$$p_{\eta_1}(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}}, \quad (x > 0)$$

б) $\eta_2 = \operatorname{arctg}\left(\frac{\xi_1}{\xi_2}\right)$

$$F_{\eta_2}(x) = P\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{\xi_1}{\xi_2}\right)\right) = P(\xi_1/\xi_2 < \operatorname{tg} x) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\frac{u_1}{u_2} < \operatorname{tg} x} e^{-\frac{u_1^2+u_2^2}{2}} du_1 du_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \rho e^{-\frac{\rho^2}{2}} d\rho \int\limits_{\operatorname{ctg}\varphi < \operatorname{tg} x} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}-\varphi) < x} d\varphi = \frac{x}{\pi} + \frac{1}{2}$$

$$p_{\eta_2} = \frac{1}{\pi}, \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

в) $F_{\eta_1\eta_2}(x_1,x_2) = P(\eta_1 < x_1, \eta_2 < x_2) =$

$$= \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\substack{u_1^2+u_2^2<x \\ \frac{u_1}{u_2}<tg\,x}} e^{-\frac{u_1^2+u_2^2}{2}}\,du_1\,du_2 =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\sqrt{x}} \rho e^{-\frac{\rho^2}{2}} d\rho \int\limits_{ctg\,\varphi < tg\,x} d\varphi = F_{\eta_1}(x_1)\,F_{\eta_2}(x_2)$$

$$p_{\eta_1\eta_2}(x_1,x_2) = p_{\eta_1}(x_1)\cdot p_{\eta_2}(x_2)$$

№ 13

$\xi_1 + \xi_2$ может принимать только $0, 1, 2, 3, \ldots$

$p_k = P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}$ $(k = 0, 1, 2, 3, \ldots)$ – вероятности,

с корой сумма будет принимать значения

$$p_n = P(\xi_1+\xi_2 = n) = \sum_{k=0}^{n} P(\xi_1 = k, \xi_2 = n-k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} P(\xi_1 = k)\,P(\xi_2 = n-k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_1}\cdot\frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda_2} =$$

$$= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!}\cdot\sum_{k=0}^{n} C_n^k \lambda_1^k \lambda_2^{n-k}$$

Применение формулы бинома Ньютона позволяет получить окончат. результат.

$$p_n = \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$$

Ответ: $\xi_1+\xi_2$ имеет распределение Пуассона с параметрами $\lambda_1+\lambda_2$

№ 14

τ - в схеме Бернулли до получения успеха включит.

Значит:

$P(\tau) = (1-p)^{\tau-1} \cdot p \quad , \quad (\tau \geqslant 1)$ - Ответ

№ 17

Возможные значения v : $n = 1, 2, 3, \ldots$

Возможные значения θ : $m = 1, 2, 3, 4 \qquad p = \frac{4}{6} \qquad q = \frac{2}{6}$

$P(v = n, \theta = m) = P(v = m) \cdot P(\theta = m \mid v = n) = q^{n-1} \cdot \frac{p}{4} =$

$= \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6}$ - Ответ

$P(v = n) = q^{n-1} p \quad , \quad P(\theta = m) = \frac{1}{4}$

$P(v = n, \theta = m) = P(v = n) P(\theta = m)$ - независимы

№ 18

а) Пусть ξ - случ. время обработки детали отдельным станком, тогда $F(x) = P(\xi < x)$ - вероятность того, что деталь за время x будет сделана. $P(\xi > x) = 1 - F(x)$ - вероятность того, что деталь за время x не будет сделана.

Пусть η - случ. время до получения первой обработ. детали, тогда $(\eta > x)$ представляет событие, состоящее в том, что ни одна деталь не будет сделана за время x.

$P(\eta > x) = (1 - F(x))^n = e^{-n\alpha x}$

$P(\eta < x) = 1 - P(\eta > x) = 1 - e^{-n\alpha x}$

$p_\eta(x) = n\alpha e^{-n\alpha x}$ - Ответ.

б) Пусть t - случ. время до окончания обработки всех деталей.

Тогда $P(t < x) = (F(x))^n$

$p_t(x) = nF^{n-1}$

$p_t(x) = n\alpha(1 - e^{-\alpha x})^{n-1} e^{-\alpha x}$ – Ответ

№20

$n = 10000$ $n_1 = 1000$ $n_2 = 2000$ $n_3 = 7000$

$p_1 = 0{,}0003$ $p_2 = 0{,}0005$ $p_3 = 0{,}0001$

Пусть A_k - событие, что неисправлены k деталей 1-го рода.

B_k - 2-го рода, C_k - 3-го рода

$A = A_0B_0C_0 + A_0B_0C_1 + A_0B_1C_0 + A_1B_0C_0$ – машина работает

$P(A) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}(1 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$, $\lambda_1 = 0{,}3$

$\lambda_2 = 1$

$\lambda_2 = 0{,}7$

$P(A) = 3e^{-2} = 0{,}406$

$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 0{,}594$

Ответ: 0,594

№23

$(v, \theta) \sim (1,1), (1,2), (1,3), (2,3), (2,2), (1,1), (1,3), (2,3), (1,4), (1,3)$

Частоты: $v = 1 - 0{,}7$ $\theta = 1 - 0{,}2$

$v = 2 - 0{,}3$ $\theta = 2 - 0{,}2$

$\theta = 3 - 0{,}5$

$\theta = 4 - 0{,}1$

Глава 6

№1

$P(\tau = k) = p\,q^{k-1}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$

$$M_\tau = \sum_{k=1}^{\infty} k P(\tau = k) = p \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} = p\Big(\sum_{k=1}^{\infty} q^k\Big)' =$$

$$= p\Big(\frac{q}{1-q}\Big)' = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}$$

№8

ξ_1 - случ. величина, значения которой совпадают с первой цифрой карты, ξ_2 - со второй

$P(\xi_1 = k) = P(\xi_2 = k) = 0{,}1, \quad k = 0, 1, \ldots, 9$

ξ_1 и ξ_2 - независимы.

$$M_{\xi_1} = M_{\xi_2} = \sum_{k=0}^{9} k P(\xi_1 = k) = 0{,}1 \cdot 45 = 4{,}5$$

$$M_{\xi_1^2} = \sum_{k=0}^{9} k^2 \cdot P(\xi_1 = k) = 28{,}5$$

$$D_{\xi_1} = D_{\xi_2} = M_{\xi_1^2} - M^2_{\xi_1} = 28{,}5 - 4{,}5^2 = 8{,}25$$

$$M_{\eta_1}(\xi_1 + \xi_2) = 9$$

$$M_{\eta_2} = M(\xi_1 \xi_2) = 20{,}25$$

$$D_{\eta_1} = D(\xi_1 + \xi_2) = 16{,}5$$

$$D_{\eta_2} = M_{\eta_2^2} - M^2_{\eta_2} = 28{,}5^2 - 20{,}25^2 = 402{,}1875$$

Ответ: $M_{\eta_1} = 9$

$M_{\eta_2} = 20{,}25$

$D_{\eta_1} = 16{,}5$

$D_{\eta_2} = 402{,}1875$

№9

$\xi_1 \setminus \xi_2$	-1	0	1
-1	$1/8$	$1/12$	$7/24$
1	$5/24$	$1/6$	$1/8$

$$M_{\xi_1} = -1\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{7}{24}\right) + 1\left(\frac{5}{24} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8}\right) = 0$$

$$M_{\xi_2} = -1\left(\frac{1}{8} + \frac{5}{24}\right) + 1 \cdot \left(\frac{7}{24} + \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{12}$$

$$D_{\xi_1} = M_{\xi_1^2} - M^2_{\xi_1} = 1 - 0 = 1$$

$$D_{\xi_2} = M_{\xi_2^2} - M^2_{\xi_2} = \frac{3}{4} - \frac{1}{144} = \frac{107}{144}$$

$$cov(\xi_1, \xi_2) = -1\left(-\frac{1}{8} + \frac{7}{24}\right) + 1\left(-\frac{5}{24} + \frac{1}{8}\right) - 0 \cdot \frac{1}{12} = -\frac{1}{4}$$

Ответ: $M_{\xi_1} = 0$ $\quad D_{\xi_1} = 1$ $\quad cov(\xi_1, \xi_2) = -\frac{1}{4}$

$M_{\xi_2} = \frac{1}{12}$ $\quad D_{\xi_2} = \frac{107}{144}$

№11

$D_{\xi_1} = \sigma^2$, $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5$ - независимы

а) $cov(\xi_1 + \xi_2, \xi_3 + \xi_4 + \xi_5) = 0$

б) $cov(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3, \xi_3 + \xi_4 + \xi_5) = cov(\xi_3, \xi_3) =$

$= D_{\xi_3} = \sigma^2$

$$D = (\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) = D(\xi_3 + \xi_4 + \xi_5) = 3\sigma^3$$

$$\rho(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3, \xi_3 + \xi_4 + \xi_5) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{3\sigma^2 \cdot 3\sigma^2}} = \frac{1}{3}$$

Ответ: а) 0

б) $\frac{1}{3}$

№ 24

$$P(\xi_k = \sqrt{k}) = P(\xi_k = -\sqrt{k}) = \frac{1}{2\sqrt{k}}, \quad P(\xi_k = 0) = 1 - \frac{1}{\sqrt{k}}$$

$$M_{\xi_k} = (-\sqrt{k}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{k}} + 0 \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right) + \sqrt{k} \cdot \frac{1}{2\sqrt{k}} = 0$$

$$M_{\xi_k^2} = k \cdot \frac{1}{2\sqrt{k}} + k \cdot \frac{1}{2\sqrt{k}} = \sqrt{k}$$

$$D_{\xi_k} = \sqrt{k}$$

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} D_{\xi_k}}{n^2} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}}{n^2} < \frac{n\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0, \text{ при } n \to \infty$$

Ответ: Закон больших чисел применим

№ 16

$|\Omega| = n!$

Нужно распределить так письма, чтобы ни одно из них не попало по нужному адресу. Можно сделать методом включения - исключения.

Все перестановки можно разбить на группы (потенциально пересекающиеся) (возможно такая ситуация, что хотя бы какие-то из групп пересекаются) вида $N(\{a_1, a_2, \ldots, a_k\})$, где $a_1, a_2, \ldots a_k$ - это числ. элементов от 1 до n. $N(\ldots)$ - число перестановок, в которых $a_1, \ldots a_k$ гарантированно стоят на своих местах

Тогда способов расставить n элементов на n мест таким образом, чтобы ни один элемент не стоял на своём месте:

$$S = N(\varnothing) - (N(\{1\}) + N(\{2\}) + \ldots + N(\{n\})) + (N(\{1,2\}) + N(\{1,3\}) + \ldots + N(\{n-1, n\})) - (N(\{1,2,3\}) + N(\{1,2,4\}) + \ldots + N(\{n-2, n-1, n\})) + \ldots$$

$+ \ldots + (-1)^n \cdot N(\{1, 2, 3, \ldots, n\})$

Можно сгруппировать слагаемые в этой сумме по мощности множества $A\{a_1, a_2, \ldots a_n\}$, являющ. аргументом функции $N(A)$. То есть первое множество с мощностью k равно $\{1, 2, \ldots, k\}$, а последнее $\{n-k+1, n-k, n\}$

Всего таких множеств C_n^k. При фиксированном множестве оставшиеся элементы распределяются равно $(n-k)!$ способами. Поэтому сумма слагаемых в группе с мощностью аргумента, равной k, равна

$$C_n^k (n-k)! = \frac{n!(n-k)!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!}$$

Значит сумма S преобразуется к виду:

$$S = \frac{n!}{0!} - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^n n!}{n!}$$ ($n!$ можно вынести)

Число способов распределить n элементов, на n мест так, чтобы хотябы один элемент стоял на своём месте равно:

$$N(\varnothing) - S = n!\left(1 - \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right)\right)$$

$$P = \frac{n!\left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right)}{n!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

$$\lim_{n \to \infty} p = \lim_{n \to \infty} 1 - \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right) =$$

$$= \lim_{n \to \infty} 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1 - e^{-1}$$ (через ряд Маклорена разложения функц. e^x)

Ответ: $1 - e^{-1} \approx 0,63212$

№34

Выпишем 50 значений из таблицы 7. Значения от 0 до 9, которые одинаково распределены с одной и той же вероятностью, равной 0,1

$$\left.\begin{matrix} 6 & 6 & 0 & 6 & 5 & 7 & 4 & 7 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 0 & 6 & 0 & 1 & 0 & 8 & 0 & 5 \\ 8 & 5 & 2 & 6 & 9 & 7 & 7 & 6 & 0 & 2 \\ 6 & 3 & 5 & 7 & 3 & 3 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 7 & 3 & 7 & 9 & 6 & 4 & 5 & 7 & 5 & 3 \end{matrix}\right\} x \in \{x_1, \dots, x_{50}\}$$

1) $\bar{x} = \sum_{i=1}^{50} x_i \cdot \frac{1}{50} = \frac{219}{50} = 4,38$

2)

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
кол-во	6	4	3	7	2	7	8	9	2	2
$p_i = \frac{\text{кол-во}}{n}$	0,12	0,08	0,06	0,14	0,04	0,14	0,16	0,18	0,04	0,04

$M(x) = \sum_{i=0}^{9} i \cdot p_i = 4,38$

$\bar{x} = M(x)$ – Ответ

№23

$P(|\xi - \alpha| > 2\sigma)$ $\qquad \alpha = M(\xi)$

1) По неравенству Чебышева: $\qquad \sigma^2 = D(\xi)$

$P(|\xi - M(\xi)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(\xi)}{\varepsilon^2}$

Из этого следует:

$\varepsilon = 2\sigma$, тогда $\frac{D(\xi)}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{4\sigma^2} = \frac{1}{4} = 0,25$

$P(|\xi - \alpha| > 2\sigma) \leq 0,25$

2) Точное значение вероятности:

$P(|\xi - a| > 2\sigma) = 1 - P(\frac{|\xi - a|}{\sigma} \leq 2)$

$\eta = \frac{\xi - a}{\sigma}$ - имеет стандартное норм. распределение,

тогда:

$1 - P(|\eta| \leq 2) = 1 - 2\Phi(2) = 1 - 2(0{,}47725\ldots) =$

$= 0{,}0455\ldots$

Ответ: 0,25

0,0455...

№ 18

По определению мат. ож.:

$M(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi(\omega_k) \cdot P_k$

Число ν брошенных шаров можно представить в виде суммы времени между заполнениями новых ящиков, тогда мат. ожидание будет суммой от $k=1$ до $k=N$, где N - число ящиков

P_k - вер. попадения шара в один из K ящиков, тогда $P_K = \frac{1}{K}$

$\xi(\omega_k)$ - множество элемент. исходов, но по условию шары будут кидать до тех пор, пока не заполнятся все N ящиков, то есть $\xi(\omega_k) = N$

Значит:

$M_\nu = \sum_{k=1}^{N} N \cdot \frac{1}{K} = N \cdot \sum_{K=1}^{N} \frac{1}{K}$ - Ответ.

№10

$P(\xi_1 = 0, \xi_2 = 1) = P(\xi_1 = 0, \xi_2 = -1) =$

$= P(\xi_1 = 1, \xi_2 = 0) = P(\xi_1 = -1, \xi_2 = 0) = 0,25$

$P(\xi_1 = 0) = 0,25 + 0,25 = 0,5$ $\quad P(\xi_2 = 0) = 0,25 + 0,25 = 0,5$

$P(\xi_1 = 1) = 0,25$ $\quad P(\xi = 1) = 0,25$

$P(\xi_1 = -1) = 0,25$ $\quad P(\xi = -1) = 0,25$

$M(\xi_1) = 0 \cdot 0,5 + 1 \cdot 0,25 + \cdot(-1) \cdot 0,25 = 0$

$M(\xi_2) = 0 \cdot 0,5 + 1 \cdot 0,25 + (-1) \cdot 0,25 = 0$

$\Big| \; M(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi(w_k) \cdot P_k$

$D(\xi_1) = 0,25 + 0,25 = 0,5$

$D(\xi_2) = 0,25 + 0,25 = 0,5$

$\Big| \; D(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi)$

$cov(\xi_1, \xi_2) = M(\xi_1 \xi_2) - M(\xi_1) \cdot M(\xi_2)$

$cov(\xi_1, \xi_2) = 0 + 0 + 0 + 0 - 0 \cdot 0 = 0$

Проверим зависимость:

$P(\xi_1 = 0, \xi_2 = 1) = 0,25$

$P(\xi_1 = 0) = 0,5$

$P(\xi_2 = 1) = 0,25$

$P(\xi_1) \cdot P(\xi_2) = 0,5 \cdot 0,25 \neq P(\xi_1 = 0, \xi_2 = 1) = 0,25$

значит события зависимы

Ответ: $M(\xi_1) = M(\xi_2) = cov(\xi_1, \xi_2) = 0$

$D(\xi_1) = D(\xi_2) = 0,5$

случай. события зависимы