Задание 1 (Лаб №4, аппроксимация)

Ссылка на лекцию:
https://vk.com/doc162314205_593613211?hash=e37f03fd81b917c298&dl=dd2683263cae81c8b9

- Линейная y = ax+b

Линейная аппроксимация

Введем обозначения:

$SX = \sum_{i=1}^{n} x_i$, $SXX = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, $SY = \sum_{i=1}^{n} y_i$, $SXY = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

Получим систему уравнений для нахождения параметров *a* и *b*:

$$\begin{cases} aSXX + bSX = SXY \\ aSX + bn = SY \end{cases},$$

из которой находим:

$$\Delta = SXX \cdot n - SX \cdot SX$$
$$\Delta_1 = SXY \cdot n - SX \cdot SY$$
$$\Delta_2 = SXX \cdot SY - SX \cdot SXY$$
$$a = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad b = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

$$a_0 = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \sum_{i=1}^{N} (y_i \cdot x_i) \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i}{N \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i \right)^2}$$

$$a_1 = \frac{N \cdot \sum_{i=1}^{N} (y_i \cdot x_i) - \sum_{i=1}^{N} y_i \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i}{N \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i \right)^2}$$

a1 = a, a0 = b

Определим меру отклонения: $S = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = 1{,}3459$

E = y(x) - fi(x)
fi - функция, которую мы нашли

- Полинофункция y = ax^2 + bx + c

Сумма квадратов отклонений запишется следующим образом:

$$S = S(a_0, a_1, a_2) = \sum_{i=1}^{n} (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i)^2 \rightarrow min$$

Вычислим:

$\sum_{i=1}^{n} x_i = 31{,}3$ $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 172{,}09$ $\sum_{i=1}^{n} x_i^3 = 1049{,}05$ $\sum_{i=1}^{n} x_i^4 = 6779{,}43$

$\sum_{i=1}^{n} y_i = 64$ $\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i = 368{,}03$ $\sum_{i=1}^{n} x_i^2\, y_i = 2355{,}72$

Получим систему линейных уравнений, решив которую, определим значения коэффициентов эмпирической формулы:

$$\begin{cases} 7a_0 + 31{,}3a_1 + 172{,}09a_2 = 64 \\ 31{,}3a_0 + 172{,}09a_1 + 1049{,}05a_2 = 368{,}03 \\ 172{,}09a_0 + 1049{,}05a_1 + 6779{,}43a_2 = 2355{,}72 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_0 = 6{,}365 \\ a_1 = -2{,}687 \\ a_2 = 0{,}602 \end{cases}$$

- Степенная функция y = a * x^b

Вид функции	Табличный X	Табличный Y
Степенная	Ln X	Ln Y
Экспоненциальная	X	Ln Y
Логарифмическая	Ln X	Y

$$\ln(a) = \frac{\sum_{i=1}^{N} \ln(y_i) \cdot \sum_{i=1}^{N} (\ln(x_i))^2 - \sum_{i=1}^{N} (\ln(y_i) \cdot \ln(x_i)) \cdot \sum_{i=1}^{N} \ln(x_i)}{N \cdot \sum_{i=1}^{N} (\ln(x_i))^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} \ln(x_i)\right)^2}$$

$$b = \frac{N \cdot \sum_{i=1}^{N} (\ln(y_i) \cdot \ln(x_i)) - \sum_{i=1}^{N} \ln(y_i) \cdot \sum_{i=1}^{N} \ln(x_i)}{N \cdot \sum_{i=1}^{N} (\ln(x_i))^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} \ln(x_i)\right)^2}$$

- Экспоненциальная функция a*e^(bx)

Вид функции	Табличный X	Табличный Y
Степенная	Ln X	Ln Y
Экспоненциальная	X	Ln Y
Логарифмическая	Ln X	Y

$$\ln(a) = \frac{\sum_{i=1}^{N} \ln(y_i) \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \sum_{i=1}^{N} (\ln(y_i) \cdot x_i) \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i}{N \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2}$$

$$b = \frac{N \cdot \sum_{i=1}^{N} (\ln(y_i) \cdot x_i) - \sum_{i=1}^{N} \ln(y_i) \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i}{N \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2}$$

- Логарифмическая функция a*ln(x) + b

Вид функции	Табличный X	Табличный Y
Степенная	Ln X	Ln Y
Экспоненциальная	X	Ln Y
Логарифмическая	Ln X	Y

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i \cdot \sum_{i=1}^{N} (\ln(x_i))^2 - \sum_{i=1}^{N} (y_i \cdot \ln(x_i)) \cdot \sum_{i=1}^{N} \ln(x_i)}{N \cdot \sum_{i=1}^{N} (\ln(x_i))^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} \ln(x_i)\right)^2}$$

$$b = \frac{N \cdot \sum_{i=1}^{N} (y_i \cdot \ln(x_i)) - \sum_{i=1}^{N} y_i \cdot \sum_{i=1}^{N} \ln(x_i)}{N \cdot \sum_{i=1}^{N} (\ln(x_i))^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} \ln(x_i)\right)^2}$$

a - это b

b - это a

- Коэффициент корреляции

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}$$

Средние значения *x* и *y:*

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$$

При $r = 0$ - связь между переменными отсутствует (в данном случае линейная).

$r < 0{,}3$ - связь слабая

$r = 0{,}3 \div 0{,}5$ - связь умеренная

$r = 0{,}7 \div 0{,}7$ - связь заметная

$r = 0{,}7 \div 0{,}9$ - связь высокая

$r = 0{,}9 \div 0{,}99$ - связь весьма высокая

- Решатель

Задание 2 (Лаб №5, интерполяция)

Ссылка на лекцию: https://vk.com/doc162314205_594898213?hash=b73e40375b5f2e3408&dl=56d977ca43de78e361

- Многочлен Лагранжа

При глобальной интерполяции на всем интервале $[a,b]$ строится единый многочлен. Одной из форм записи интерполяционного многочлена для глобальной интерполяции является многочлен Лагранжа:

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i \cdot l_i(x) \qquad (3.11)$$

где $l_i(x)$ – базисные многочлены степени n:

$$l_i(x)=\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)} \qquad (3.12)$$

То есть многочлен Лагранжа можно записать в виде:

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} \qquad (3.13)$$

Многочлен $l_i(x)$ удовлетворяет условию $l_i(x_j)=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$. Это условие означает, что многочлен равен нулю при каждом x_j кроме x_i, то есть $x_0, x_1, \ldots x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots x_n$ – корни этого многочлена. Таким образом, степень многочлена $L_n(x)$ равна n и при $x \neq x_i$ обращаются в ноль все слагаемые суммы, кроме слагаемого с номером $i=j$, равного y_i.

Пример

Пример 2. Найти приближенное значение функции y=f(x) при x=0,35 для заданной таблицы с помощью многочлена Лагранжа.

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
y	1,25	2,38	3,79	5,44	7,14

Решение:

$$l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)} = \frac{(0{,}35-0{,}2)(0{,}35-0{,}3)(0{,}35-0{,}4)(0{,}35-0{,}5)}{(0{,}1-0{,}2)(0{,}1-0{,}3)(0{,}1-0{,}4)(0{,}1-0{,}5)}$$
$$= 0{,}0234375 * y_0 = 0{,}0234375 * 1{,}25 = 0{,}029297$$

$$l_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} = \frac{(0{,}35-0{,}1)(0{,}35-0{,}3)(0{,}35-0{,}4)(0{,}35-0{,}5)}{(0{,}2-0{,}1)(0{,}2-0{,}3)(0{,}2-0{,}4)(0{,}2-0{,}5)}$$
$$= (-0{,}15625) * y_1 = (-0{,}15625) * 2{,}38 = -0{,}37187$$

$$l_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} = \frac{(0{,}35-0{,}1)(0{,}35-0{,}2)(0{,}35-0{,}4)(0{,}35-0{,}5)}{(0{,}3-0{,}1)(0{,}3-0{,}2)(0{,}3-0{,}4)(0{,}3-0{,}5)}$$
$$= 0{,}703125 * y_2 = 0{,}703125 * 3{,}79 = 2{,}66485$$

$$l_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)} = \frac{(0{,}35-0{,}1)(0{,}35-0{,}2)(0{,}35-0{,}3)(0{,}35-0{,}5)}{(0{,}4-0{,}1)(0{,}4-0{,}2)(0{,}4-0{,}3)(0{,}4-0{,}5)}$$
$$= 0{,}46875 * y_3 = 0{,}46875 * 5{,}44 = 2{,}55$$

$$l_4(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)} = \frac{(0{,}35-0{,}1)(0{,}35-0{,}2)(0{,}35-0{,}3)(0{,}35-0{,}4)}{(0{,}5-0{,}1)(0{,}5-0{,}2)(0{,}5-0{,}3)(0{,}5-0{,}4)}$$
$$= -0{,}0390625 * y_3 = -0{,}0390625 * 7{,}14 = -0{,}27891$$

$$\boldsymbol{L_4(0,35) = l_0(x) + l_1(x) + l_2(x) + l_3(x) + l_4(x) = 4,59336}$$

Пример 3. Построить многочлен Лагранжа, если функция $y = f(x)$задана таблицей:

x	1	2	3	4
y	0	3	5	7

n=3

$$L_3(\mathrm{x}) = 0 \cdot \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)} + 3 \cdot \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)} + 5 \cdot \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)} +$$
$$7 \cdot \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)} = \frac{x^3}{6} - \frac{9}{6}x^2 + \frac{38}{6}x - 5$$

Пример 4: Вычислить, пользуясь интерполяционной формулой Лагранжа, $\sqrt{105}$ и оценить погрешность.

Решение: Рассмотрим функцию $\boldsymbol{y = \sqrt{x}}$

x	100	121	144
y	10	11	12

n=2

$$\mathrm{L}_2(\mathrm{x}) = 10 \cdot \frac{(105-121)(105-144)}{(100-121)(100-144)} + 11 \cdot \frac{(105-100)(105-144)}{(121-100)(121-144)} + 12 \cdot \frac{(105-100)(105-121)}{(144-100)(144-121)} = 10{,}245624$$

Оценим $R_2(x)$:

$$R_2(x) \le \frac{\max\limits_{x\in[x_0;x_n]} f'''(x)}{(3)!} |(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)|$$

$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\quad y'' = \frac{1}{4\sqrt{x^3}}$ $\quad y''' = \frac{3}{8\sqrt{x^5}}$

$$\max_{x\in[100;144]} y'''(x) = \left|\frac{3}{8\sqrt{100^5}}\right| = \frac{3}{8}10^{-5}$$

$$R_2(x) < \frac{1}{3!} \cdot \frac{3}{8} \cdot 10^{-5} \, |(105-100)(105-121)(105-144)| \approx 1{,}95 \cdot 10^{-3}$$

- [Решатель]

- Многочлен Ньютона с разделенными разностями:

Определение. **Разделенные разности первого порядка** называют величины (определяются через разделенные разности нулевого порядка):

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}, \quad f(x_1, x_2) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \quad f(x_i, x_{i+1}) = \frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i}$$

Разделенные разности второго порядка называют величины (определяются через разделенные разности первого порядка):

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_1,x_2)-f(x_0,x_1)}{x_2-x_0}, \quad f(x_1, x_2, x_3) = \frac{f(x_2,x_3)-f(x_1,x_2)}{x_3-x_1}$$

$$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) = \frac{f(x_{i+1},x_{i+2})-f(x_i,x_{i+1})}{x_{i+2}-x_i}$$

Разделенные разности *k*-го порядка определяются через разделенные разности порядка *k*-1:

$$f(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}) = \frac{f(x_{i+1}, \dots, x_{i+k}) - f(x_i, x_{i+k-1})}{x_{i+k} - x_i}$$

$$N_n(x) = f(x_0) + f(x_0,\ x_1)\cdot(x-x_0) + f(x_0,\ x_1, x_2)\cdot(x-x_0)\cdot(x-x_1) + \dots + f(x_0,\ x_1, \dots, x_n)\cdot(x-x_0)\cdot(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})$$

$$N_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} f(x_0, x_1, \dots, x_k) \prod_{j=0}^{k-1}(x-x_j)$$

Пример:

Пример 5. Используя интерполяционную формулу Ньютона для неравноотстоящих узлов найти приближенное значение функции ***для x=0,22***. При вычислениях учитывать только разделенные разности первого и второго порядков. Вычисления провести дважды, используя различные узлы.

x	0,15	0,2	0,33	0,47	0,62
y	1,25	2,38	3,79	5,44	7,14

Решение: Вычисления произведем по формуле:

$$Nn(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1) \cdot (x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2) \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1)$$

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \quad f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0}$$

Для вычисления значение функции при x=0,22 за x_0 возьмем сначала 0,15, затем 0,2.

Для $x_0 = 0{,}15$

$$f(x_0, x_1) = \frac{2{,}38 - 1{,}25}{0{,}2 - 0{,}15} = 22{,}6$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{3{,}79 - 2{,}38}{0{,}33 - 0{,}2} = 10{,}846$$

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{10{,}846 - 22{,}6}{0{,}33 - 0{,}15} = -65{,}3$$

$$y(0{,}22) = 1{,}25 + 22{,}6 \cdot (0{,}22 - 0{,}15) - 65{,}3 \cdot (0{,}22 - 0{,}15) \cdot (0{,}22 - 0{,}2) = 2{,}74058$$

Для $x_0 = 0{,}2$:

$$f(x_0, x_1) = \frac{3{,}79 - 2{,}38}{0{,}33 - 0{,}2} = 10{,}846$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{5{,}44 - 3{,}79}{0{,}47 - 0{,}33} = 11{,}786$$

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{11{,}786 - 10{,}846}{0{,}47 - 0{,}2} = 3{,}482$$

$$y(0{,}22) = 2{,}38 + 10{,}846 \cdot (0{,}22 - 0{,}2) + 3{,}482 \cdot (0{,}22 - 0{,}2) \cdot (0{,}22 - 0{,}33) = 2{,}58926$$

Принимаем $y(0{,}22) = \frac{2{,}74058 + 2{,}58926}{2} = 2{,}66492.$

Решатель

или https://planetcalc.ru/9023/

- Многочлен Ньютона для равноотстоящих узлов:

Конечными разностями первого порядка называют величины:

$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i, \ i = 0, 1, \dots, n-1$

Конечными разностями второго порядка называют величины:

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$$

Конечными разностями k-го порядка называют величины:

$\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i$

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$	$\Delta^6 y_i$
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$	$\Delta^5 y_0$	$\Delta^6 y_0$
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	$\Delta^4 y_1$	$\Delta^5 y_1$	
x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_2$	$\Delta^4 y_2$		
x_3	y_3	Δy_3	$\Delta^2 y_3$	$\Delta^3 y_3$			
x_4	y_4	Δy_4	$\Delta^2 y_4$				
x_5	y_5	Δy_5					
x_6	y_6						

Если значение в левой половине:

Введем обозначение: $t = (x - x_0)/h$. Тогда получим формулу Ньютона, которая называется **первой интерполяционной формулой Ньютона для интерполирования вперед:**

$$Nn(x) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \dots + \frac{t(t-1)\dots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0$$

Полученное выражение может аппроксимировать функцию на всем отрезке изменения аргумента $[x_0, x_n]$. Однако более целесообразно (с точки зрения повышения точности расчетов) использовать эту формулу для $x_0 \le x \le x_1$. При этом за x_0 может приниматься любой узел интерполяции x_k. Например, для $x_1 \le x \le x_2$, вместо x_0 надо взять значение x_1. Тогда интерполяционный многочлен Ньютона:

$$\boldsymbol{Nn(x) = y_i + t\Delta y_i + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_i + \dots + \frac{t(t-1)\dots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_i} \quad (**)$$

Если значение в правой половине:

Для правой половины отрезка разности вычисляют справа налево: $t = (x - x_n)/h$. Тогда получим формулу Ньютона, которая называется **второй интерполяционной формулой Ньютона для интерполирования назад:**

$$\boldsymbol{Nn(x) = y_n + t\Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \cdots + \frac{t(t+1)\ldots(t+n-1)}{n!}\Delta^n y_0}$$

Пример:

Пример 6. Используя первую или вторую интерполяционную формулу Ньютона найти приближенное значение функции для x=0,15, x=0,22 и x=0,47 по заданной таблице.

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
y	1,25	2,38	3,79	5,44	7,14

Решение:

№	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
0	$0,1$	$1,25$	$\Delta y_0 = 1,13$	$\Delta^2 y_0 = 0,28$	$\Delta^3 y_0 = -0,04$	$\Delta^4 y_0 = -0,15$
1	$0,2$	$2,38$	$\Delta y_1 = 1,41$	$\Delta^2 y_1 = 0,24$	$\Delta^3 y_1 = -0,19$	
2	$0,3$	$3,79$	$\Delta y_2 = 1,65$	$\Delta^2 y_2 = 0,05$		
3	$0,4$	$5,44$	$\Delta y_3 = 1,7$			
4	$0,5$	$7,14$				

Воспользуемся формулой Ньютона для интерполирования вперед, т.к. *x=0,15 x=0,22* лежат в левой половине отрезка.

Для x=0,15: $t = \frac{(x-x_0)}{h} = \frac{0,15-0,1}{0,1} = 0,5$

$$N_4(x) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{4!}\Delta^4 y_0$$

$$y(0{,}15) \approx 1{,}25 + 0{,}5 \cdot 1{,}13 + \frac{0{,}5(-0{,}5)}{2} \cdot 0{,}28 + \frac{0{,}5(-0{,}5)(-1{,}5)}{6} \cdot (-0{,}04) + \frac{0{,}5(-0{,}5)(-1{,}5)(-2{,}5)}{24} \cdot (-0{,}15) \approx 1{,}78336$$

Для x=0,22: $t = \frac{(x-x_1)}{h} = \frac{0,22-0,2}{0,1} = 0,2$

$$N_3(x) = y_1 + t\Delta y_1 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_1 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_1$$

$$y(0{,}22) \approx 2{,}38 + 0{,}2 \cdot 1{,}41 + \frac{0{,}2(-0{,}8)}{2} \cdot 0{,}24 + \frac{0{,}2(-0{,}8)(-1{,}8)}{6} \cdot (-0{,}19) \approx 2{,}63368$$

Воспользуемся формулой Ньютона для интерполирования назад, т.к. *x=0,47* лежит в второй половине отрезка.

Для *x*=0,47: $t = \frac{(x-x_n)}{h} = \frac{0,47-0,5}{0,1} = -0,3$

$$N_4(x) = y_4 + t\Delta y_3 + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_2 + \frac{t(t+1)(t+2)}{3!}\Delta^3 y_1 + \frac{t(t+1)(t+2)(t+3)}{4!}\Delta^4 y_0$$

$$y(0,47) = 7,14 - 0,3 \cdot 1,7 + \frac{-0,3(-0,3+1)}{2!}0,05 + \frac{-0,3(-0,3+1)(-0,3+2)}{3!}(-0,19) + \frac{-0,3(-0,3+1)(-0,3+2)(-0,3+3)}{4!}(-0,15) \approx 6,64208$$

Решатель

или https://planetcalc.ru/9023/

Задание 3 (Лаб №6, задача Коши)

Ссылка на лекцию Малышевой:
https://vk.com/doc162314205_595570919?hash=2f05f41590877528b6&dl=81abdc8881144863d0

Ссылка на норм лекцию:
http://saue.kdu.edu.ua/upload/subjects/mmm/mmm-7.pdf

f(x,y) = y’(x)

- Метод Эйлера

Тогда получаем **формулу Эйлер:**

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

- Усовершенствованный метод Эйлера

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_i + hf(x_i, y_i))], \ i = 0, 1 \dots$$

- Метод Рунге-Кутта 4- го порядка

Широко распространен **метод Рунге-Кутта четвертого порядка**, часто без уточнений называемый просто методом Рунге – Кутты.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \tag{13}$$

$$k_1 = h \cdot f(x_i, y_i)$$
$$k_2 = h \cdot f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2})$$
$$k_3 = h \cdot f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2})$$
$$k_4 = h \cdot f(x_i + h, y_i + k_3)$$

- Метод Адамса

Ньютона. В случае постоянного шага h конечные разности для правой части в узле x_i имеют вид:

$$\Delta f_i = f_i - f_{i-1}$$
$$\Delta^2 f_i = f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}$$
$$\Delta^3 f_i = f_i - 3f_{i-1} + 3f_{i-2} - f_{i-3}$$

Тогда разностную схему четвертого порядка метода Адамса можно записать после необходимых преобразований в виде:

$$y_{i+1} = y_i + hf_i + \frac{h^2}{2}\Delta f_i + \frac{5h^3}{12}\Delta^2 f_i + \frac{3h^4}{8}\Delta^3 f_i \tag{17}$$

Первые 4 члена находим по формуле РунгеКутта4Порядка:

Выражая $P_k(x)$ через конечные разности до третьего порядка используя формулу Ньютона для интерполяции назад, получим экстраполяционную формулу Адамса-Башфорта

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3})$$

Здесь используются значения функции f_i в точках $x_i, x_{i-1}, x_{i-2}, x_{i-3}$, предшествующих отрезку интегрирования.

После вычисления y_{i+1}, определяют $f_{i+1} = f(x_{i+1}, y_{i+1})$, а затем уточняют y_{i+1} по следующей интерполяционной формуле Адамса-Мултона:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(9f_{i+1} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2})$$

- Метод Милна
  1. По четырем предыдущим точкам предсказываем следующее значение y_{i+1}:

$$y_{i+1}{}^{\text{пред.}} = y_{i-3} + \frac{4}{3}h(2f_i - f_{i-1} + 2f_{i-2})$$

где $f_i = f(x_i, y_i)$; $(i = 3, 4, 5, \dots)$

  2. Вычисляем значение правой части уравнения

$$f_{i+1}{}^{\text{пред.}} = f(x_{i+1}, y_{i+1}{}^{\text{пред.}})$$

  3. Корректируем значение y_{i+1}

$$y_{i+1}{}^{\text{кор.}} = y_{i-1} + \frac{h}{3}(f_{i-1} + 4f_i + 2f_{i+1}{}^{\text{пред.}}) \qquad (i = 3, 4, 5, \dots)$$

Предельная абсолютная погрешность значения y_i в методе Милна равна

$$\varepsilon = \frac{1}{29}|y_i{}^{\text{пред.}} - y_i{}^{\text{кор.}}|$$

Выбираем по правилу: acc < abs(y_cor - y_pred)/29:
acc - должно быть указано в задании иначе придётся наугад
y(xi) = y_cor
Иначе: y(xi) = y_pred

Решатели

- Адамса/Милна
- РунгеКутта4степени
- Эйлера
- КрутогоЭйлера (усовершенствованный)