

# **Relatório do Projeto MDIO**

Filipa Faria (a79973)      João Pimentel (a80874)  
Rodolfo Silva (a81716)      Pedro Gonçalves (a82313)

Dezembro 2018

Universidade do Minho  
Mestrado Integrado em Engenharia Informática  
Métodos Determinísticos de Investigação Operacional

## Conteúdo

<b>1</b>	<b>Resolução</b>	<b>3</b>
1.1	Questão 1 . . . . .	3
1.2	Questão 2 . . . . .	11
1.3	Questão 3 . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Análise Crítica</b>	<b>24</b>
<b>3</b>	<b>Anexos</b>	<b>25</b>

# 1 Resolução

## 1.1 Questão 1

a) Considere uma rede com  $n$  nodos, o conjunto de arcos  $A$ , e tempos de propagação no arco  $ij$  de  $c_{ij}, \forall ij \in A$ . Apresente um modelo de programação linear que permita determinar o instante de chegada do fogo a cada nodo, assumindo que o nodo de ignição é o nodo 1. Exemplifique com a instância em anexo.

Sabendo que o fogo começa a propagar-se no nodo 1, o tempo de propagação até este é zero. Além disso, o tempo de chegar a um nodo  $j$ , ligado a um nodo  $i$ , é o tempo de chegar a  $i$  adicionando o custo de ir para  $j$ . Fora isto, a função objetivo tem de garantir que se chega a todos os nodos da instância o mais depressa possível. Posto isto, seria de esperar que fosse um problema de minimização, no entanto, tenha-se o seguinte exemplo para justificar a escolha de maximização no problema:

$$x_2 \leq x_1 + 4 \equiv x_2 \leq 4$$

$$x_2 \leq x_3 + 5 \equiv x_2 \leq 8$$

Como era possível  $x_2$  tomar o valor zero e validar ambas as restrições, o problema não seria resolvido. Assim, garantindo que  $x_i$  é máximo, é assegurado que, no exemplo,  $x_2$  toma o valor pretendido para o problema, ou seja, 4.

### Parâmetros:

$C_{ij}$  - Custo de efetuar uma deslocação da célula  $i$  para  $j$

### Variáveis de Decisão:

$x_i$  - Instante em que o fogo chega à célula  $i$

### Função Objetivo:

$$Max Z = \sum_{i=1}^N x_i$$

### Sujeito a:

$$x_1 = 0$$

$$x_j \leq x_i + C_{ij}, \forall ij \in A$$

$$x_i \geq 0, \forall i \in \{1..N\}$$

Para a instância em estudo, tem-se:

$$Max Z = \sum_{i=1}^{49} x_i$$

### Sujeito a:

$$x[1] = 0$$

$$x[8] \leq x[1] + 6$$

$$x[1] \leq x[8] + 10$$

$$x[2] \leq x[1] + 4$$

$$x[1] \leq x[2] + 4$$

$$x[9] \leq x[2] + 5$$

$$x[2] \leq x[9] + 9$$

$$x[3] \leq x[2] + 5$$

$$x[2] \leq x[3] + 2$$

$$x[10] \leq x[3] + 6$$

$$x[3] \leq x[10] + 10$$

$$x[4] \leq x[3] + 3$$

$$x[3] \leq x[4] + 4$$

$$x[11] \leq x[4] + 5$$

$$x[4] \leq x[11] + 9$$

$$x[5] \leq x[4] + 4$$

$$x[4] \leq x[5] + 3$$

$$x[12] \leq x[5] + 4$$

$$\begin{array}{lll}
x[5] \leq x[12] + 11 & x[26] \leq x[19] + 5 & x[32] \leq x[33] + 5 \\
x[6] \leq x[5] + 3 & x[19] \leq x[26] + 9 & x[40] \leq x[33] + 10 \\
x[5] \leq x[6] + 2 & x[20] \leq x[19] + 4 & x[33] \leq x[40] + 5 \\
x[13] \leq x[6] + 5 & x[19] \leq x[20] + 4 & x[34] \leq x[33] + 2 \\
x[6] \leq x[13] + 9 & x[27] \leq x[20] + 4 & x[33] \leq x[34] + 5 \\
x[7] \leq x[6] + 4 & x[20] \leq x[27] + 11 & x[41] \leq x[34] + 11 \\
x[6] \leq x[7] + 3 & x[21] \leq x[20] + 3 & x[34] \leq x[41] + 4 \\
x[14] \leq x[7] + 5 & x[20] \leq x[21] + 3 & x[35] \leq x[34] + 4 \\
x[7] \leq x[14] + 11 & x[28] \leq x[21] + 4 & x[34] \leq x[35] + 6 \\
x[15] \leq x[8] + 4 & x[21] \leq x[28] + 10 & x[42] \leq x[35] + 11 \\
x[8] \leq x[15] + 9 & x[29] \leq x[22] + 6 & x[35] \leq x[42] + 6 \\
x[9] \leq x[8] + 3 & x[22] \leq x[29] + 9 & x[43] \leq x[36] + 10 \\
x[8] \leq x[9] + 2 & x[23] \leq x[22] + 3 & x[36] \leq x[43] + 3 \\
x[16] \leq x[9] + 5 & x[22] \leq x[23] + 2 & x[37] \leq x[36] + 3 \\
x[9] \leq x[16] + 10 & x[30] \leq x[23] + 5 & x[36] \leq x[37] + 5 \\
x[10] \leq x[9] + 3 & x[23] \leq x[30] + 9 & x[44] \leq x[37] + 10 \\
x[9] \leq x[10] + 4 & x[24] \leq x[23] + 5 & x[37] \leq x[44] + 3 \\
x[17] \leq x[10] + 5 & x[23] \leq x[24] + 2 & x[38] \leq x[37] + 2 \\
x[10] \leq x[17] + 9 & x[31] \leq x[24] + 6 & x[37] \leq x[38] + 6 \\
x[11] \leq x[10] + 4 & x[24] \leq x[31] + 9 & x[45] \leq x[38] + 10 \\
x[10] \leq x[11] + 3 & x[25] \leq x[24] + 5 & x[38] \leq x[45] + 3 \\
x[18] \leq x[11] + 5 & x[24] \leq x[25] + 4 & x[39] \leq x[38] + 4 \\
x[11] \leq x[18] + 10 & x[32] \leq x[25] + 5 & x[38] \leq x[39] + 6 \\
x[12] \leq x[11] + 4 & x[25] \leq x[32] + 9 & x[46] \leq x[39] + 9 \\
x[11] \leq x[12] + 4 & x[26] \leq x[25] + 3 & x[39] \leq x[46] + 4 \\
x[19] \leq x[12] + 4 & x[25] \leq x[26] + 3 & x[40] \leq x[39] + 3 \\
x[12] \leq x[19] + 11 & x[33] \leq x[26] + 4 & x[39] \leq x[40] + 5 \\
x[13] \leq x[12] + 5 & x[26] \leq x[33] + 9 & x[47] \leq x[40] + 11 \\
x[12] \leq x[13] + 3 & x[27] \leq x[26] + 4 & x[40] \leq x[47] + 5 \\
x[20] \leq x[13] + 6 & x[26] \leq x[27] + 4 & x[41] \leq x[40] + 4 \\
x[13] \leq x[20] + 9 & x[34] \leq x[27] + 4 & x[40] \leq x[41] + 4 \\
x[14] \leq x[13] + 3 & x[27] \leq x[34] + 11 & x[48] \leq x[41] + 11 \\
x[13] \leq x[14] + 3 & x[28] \leq x[27] + 5 & x[41] \leq x[48] + 5 \\
x[21] \leq x[14] + 6 & x[27] \leq x[28] + 3 & x[42] \leq x[41] + 3 \\
x[14] \leq x[21] + 11 & x[35] \leq x[28] + 5 & x[41] \leq x[42] + 5 \\
x[22] \leq x[15] + 5 & x[28] \leq x[35] + 10 & x[49] \leq x[42] + 10 \\
x[15] \leq x[22] + 10 & x[36] \leq x[29] + 5 & x[42] \leq x[49] + 5 \\
x[16] \leq x[15] + 5 & x[29] \leq x[36] + 11 & x[44] \leq x[43] + 4 \\
x[15] \leq x[16] + 2 & x[30] \leq x[29] + 4 & x[43] \leq x[44] + 4 \\
x[23] \leq x[16] + 6 & x[29] \leq x[30] + 4 & x[45] \leq x[44] + 4 \\
x[16] \leq x[23] + 11 & x[37] \leq x[30] + 4 & x[44] \leq x[45] + 3 \\
x[17] \leq x[16] + 3 & x[30] \leq x[37] + 10 & x[46] \leq x[45] + 2 \\
x[16] \leq x[17] + 3 & x[31] \leq x[30] + 3 & x[45] \leq x[46] + 4 \\
x[24] \leq x[17] + 5 & x[30] \leq x[31] + 4 & x[47] \leq x[46] + 4 \\
x[17] \leq x[24] + 11 & x[38] \leq x[31] + 4 & x[46] \leq x[47] + 3 \\
x[18] \leq x[17] + 5 & x[31] \leq x[38] + 5 & x[48] \leq x[47] + 3 \\
x[17] \leq x[18] + 2 & x[32] \leq x[31] + 3 & x[47] \leq x[48] + 4 \\
x[25] \leq x[18] + 4 & x[31] \leq x[32] + 6 & x[49] \leq x[48] + 4 \\
x[18] \leq x[25] + 10 & x[39] \leq x[32] + 9 & x[48] \leq x[49] + 4 \\
x[19] \leq x[18] + 5 & x[32] \leq x[39] + 4 & \\
x[18] \leq x[19] + 2 & x[33] \leq x[32] + 3 & 
\end{array}$$

**b) Apresente o modelo dual da alínea anterior. Exemplifique com a mesma instância.**

Graças ao auxílio dos apontamentos teóricos da disciplina, foi fácil notar que o modelo dual do problema anterior se tratava de um problema de fluxo de custo mínimo, relativo a um *Simplex* de rede [1].

**Variáveis de Decisão:**

$C_{ij}$  - Custo de efetuar uma deslocação da célula  $i$  para  $j$

$Y_{ij}$  - Número de vezes que um arco  $ij$  ocorre no caminho mais curto.

**Função Objetivo:**

$$\text{Min } W = \sum_{ij \in A} C_{ij} Y_{ij}$$

**Sujeito a:**

$$\sum_{ir \in A} Y_{ir} - \sum_{rj \in A} Y_{rj} \geq 1, \forall r \in \{2..N\}$$

$$\forall_{ij} \in A, Y_{ij} \geq 0$$

No caso da instância em estudo, tem-se:

$$\begin{array}{ll} 1 \leq \sum_{i2 \in A} Y_{i2} - \sum_{2j \in A} Y_{2j} & 1 \leq \sum_{i,14 \in A} Y_{i,14} - \sum_{14,j \in A} Y_{14,j} \\ 1 \leq \sum_{i3 \in A} Y_{i3} - \sum_{3j \in A} Y_{3j} & 1 \leq \sum_{i,15 \in A} Y_{i,15} - \sum_{15,j \in A} Y_{15,j} \\ 1 \leq \sum_{i4 \in A} Y_{i4} - \sum_{4j \in A} Y_{4j} & 1 \leq \sum_{i,16 \in A} Y_{i,16} - \sum_{16,j \in A} Y_{16,j} \\ 1 \leq \sum_{i5 \in A} Y_{i5} - \sum_{5j \in A} Y_{5j} & 1 \leq \sum_{i,17 \in A} Y_{i,17} - \sum_{17,j \in A} Y_{17,j} \\ 1 \leq \sum_{i6 \in A} Y_{i6} - \sum_{6j \in A} Y_{6j} & 1 \leq \sum_{i,18 \in A} Y_{i,18} - \sum_{18,j \in A} Y_{18,j} \\ 1 \leq \sum_{i7 \in A} Y_{i7} - \sum_{7j \in A} Y_{7j} & 1 \leq \sum_{i,19 \in A} Y_{i,19} - \sum_{19,j \in A} Y_{19,j} \\ 1 \leq \sum_{i8 \in A} Y_{i8} - \sum_{8j \in A} Y_{8j} & 1 \leq \sum_{i,20 \in A} Y_{i,20} - \sum_{20,j \in A} Y_{20,j} \\ 1 \leq \sum_{i9 \in A} Y_{i9} - \sum_{9j \in A} Y_{9j} & 1 \leq \sum_{i,21 \in A} Y_{i,21} - \sum_{21,j \in A} Y_{21,j} \\ 1 \leq \sum_{i,10 \in A} Y_{i,10} - \sum_{10,j \in A} Y_{10,j} & 1 \leq \sum_{i,22 \in A} Y_{i,22} - \sum_{22,j \in A} Y_{22,j} \\ 1 \leq \sum_{i,11 \in A} Y_{i,11} - \sum_{11,j \in A} Y_{11,j} & 1 \leq \sum_{i,23 \in A} Y_{i,23} - \sum_{23,j \in A} Y_{23,j} \\ 1 \leq \sum_{i,12 \in A} Y_{i,12} - \sum_{12,j \in A} Y_{12,j} & 1 \leq \sum_{i,24 \in A} Y_{i,24} - \sum_{24,j \in A} Y_{24,j} \\ 1 \leq \sum_{i,13 \in A} Y_{i,13} - \sum_{13,j \in A} Y_{13,j} & 1 \leq \sum_{i,25 \in A} Y_{i,25} - \sum_{25,j \in A} Y_{25,j} \end{array}$$

$$\begin{aligned}
1 &\leq \sum_{i,26 \in A} Y_{i,26} - \sum_{26,j \in A} Y_{26,j} \\
1 &\leq \sum_{i,27 \in A} Y_{i,27} - \sum_{27,j \in A} Y_{27,j} \\
1 &\leq \sum_{i,28 \in A} Y_{i,28} - \sum_{28,j \in A} Y_{28,j} \\
1 &\leq \sum_{i,29 \in A} Y_{i,29} - \sum_{29,j \in A} Y_{29,j} \\
1 &\leq \sum_{i,30 \in A} Y_{i,30} - \sum_{30,j \in A} Y_{30,j} \\
1 &\leq \sum_{i,31 \in A} Y_{i,31} - \sum_{31,j \in A} Y_{31,j} \\
1 &\leq \sum_{i,32 \in A} Y_{i,32} - \sum_{32,j \in A} Y_{32,j} \\
1 &\leq \sum_{i,33 \in A} Y_{i,33} - \sum_{33,j \in A} Y_{33,j} \\
1 &\leq \sum_{i,34 \in A} Y_{i,34} - \sum_{34,j \in A} Y_{34,j} \\
1 &\leq \sum_{i,35 \in A} Y_{i,35} - \sum_{35,j \in A} Y_{35,j} \\
1 &\leq \sum_{i,36 \in A} Y_{i,36} - \sum_{36,j \in A} Y_{36,j} \\
1 &\leq \sum_{i,37 \in A} Y_{i,37} - \sum_{37,j \in A} Y_{37,j}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1 &\leq \sum_{i,38 \in A} Y_{i,38} - \sum_{38,j \in A} Y_{38,j} \\
1 &\leq \sum_{i,39 \in A} Y_{i,39} - \sum_{39,j \in A} Y_{39,j} \\
1 &\leq \sum_{i,40 \in A} Y_{i,40} - \sum_{40,j \in A} Y_{40,j} \\
1 &\leq \sum_{i,41 \in A} Y_{i,41} - \sum_{41,j \in A} Y_{41,j} \\
1 &\leq \sum_{i,42 \in A} Y_{i,42} - \sum_{42,j \in A} Y_{42,j} \\
1 &\leq \sum_{i,43 \in A} Y_{i,43} - \sum_{43,j \in A} Y_{43,j} \\
1 &\leq \sum_{i,44 \in A} Y_{i,44} - \sum_{44,j \in A} Y_{44,j} \\
1 &\leq \sum_{i,45 \in A} Y_{i,45} - \sum_{45,j \in A} Y_{45,j} \\
1 &\leq \sum_{i,46 \in A} Y_{i,46} - \sum_{46,j \in A} Y_{46,j} \\
1 &\leq \sum_{i,47 \in A} Y_{i,47} - \sum_{47,j \in A} Y_{47,j} \\
1 &\leq \sum_{i,48 \in A} Y_{i,48} - \sum_{48,j \in A} Y_{48,j} \\
1 &\leq \sum_{i,49 \in A} Y_{i,49} - \sum_{49,j \in A} Y_{49,j}
\end{aligned}$$

c) Para a mesma instância, obtenha as soluções ótimas primal e dual através da resolução do modelo primal.

Através do uso do programa *IBM ILOG CPLEX Optimization Studio*, foi possível obter os seguintes resultados para a solução primal:

$$Z = 1252$$

$x_1 = 0$	$x_{18} = 21$	$x_{35} = 38$
$x_2 = 4$	$x_{19} = 24$	$x_{36} = 26$
$x_3 = 9$	$x_{20} = 28$	$x_{37} = 27$
$x_4 = 12$	$x_{21} = 31$	$x_{38} = 29$
$x_5 = 16$	$x_{22} = 15$	$x_{39} = 33$
$x_6 = 19$	$x_{23} = 18$	$x_{40} = 36$
$x_7 = 23$	$x_{24} = 22$	$x_{41} = 40$
$x_8 = 6$	$x_{25} = 25$	$x_{42} = 43$
$x_9 = 9$	$x_{26} = 28$	$x_{43} = 36$
$x_{10} = 12$	$x_{27} = 32$	$x_{44} = 37$
$x_{11} = 16$	$x_{28} = 35$	$x_{45} = 39$
$x_{12} = 20$	$x_{29} = 21$	$x_{46} = 41$
$x_{13} = 24$	$x_{30} = 23$	$x_{47} = 45$
$x_{14} = 27$	$x_{31} = 26$	$x_{48} = 48$
$x_{15} = 10$	$x_{32} = 29$	$x_{49} = 52$
$x_{16} = 14$	$x_{33} = 32$	
$x_{17} = 17$	$x_{34} = 34$	

Ainda com auxílio da ferramenta mencionada, foi possível saber o resultado do problema dual através da resolução do problema primal:

$$W = 1252$$

$Y_{1,8} = 22$	$Y_{5,12} = 6$	$Y_{9,10} = 10$	$Y_{13,14} = 1$
$Y_{8,1} = 0$	$Y_{12,5} = 0$	$Y_{10,9} = 0$	$Y_{14,13} = 0$
$Y_{1,2} = 26$	$Y_{5,6} = 4$	$Y_{10,17} = 2$	$Y_{14,21} = 0$
$Y_{2,1} = 0$	$Y_{6,5} = 0$	$Y_{17,10} = 0$	$Y_{21,14} = 0$
$Y_{2,9} = 12$	$Y_{6,13} = 2$	$Y_{10,11} = 7$	$Y_{15,22} = 20$
$Y_{9,2} = 0$	$Y_{13,6} = 0$	$Y_{11,10} = 0$	$Y_{22,15} = 0$
$Y_{2,3} = 13$	$Y_{6,7} = 1$	$Y_{11,18} = 6$	$Y_{15,16} = 0$
$Y_{3,2} = 0$	$Y_{7,6} = 0$	$Y_{18,11} = 0$	$Y_{16,15} = 0$
$Y_{3,10} = 0$	$Y_{7,14} = 0$	$Y_{11,12} = 0$	$Y_{16,23} = 0$
$Y_{10,3} = 0$	$Y_{14,7} = 0$	$Y_{12,11} = 0$	$Y_{23,16} = 0$
$Y_{3,4} = 12$	$Y_{8,15} = 21$	$Y_{12,19} = 5$	$Y_{16,17} = 0$
$Y_{4,3} = 0$	$Y_{15,8} = 0$	$Y_{19,12} = 0$	$Y_{17,16} = 0$
$Y_{4,11} = 0$	$Y_{8,9} = 0$	$Y_{12,13} = 0$	$Y_{17,24} = 1$
$Y_{11,4} = 0$	$Y_{9,8} = 0$	$Y_{13,12} = 0$	$Y_{24,17} = 0$
$Y_{4,5} = 11$	$Y_{9,16} = 1$	$Y_{13,20} = 0$	$Y_{17,18} = 0$
$Y_{5,4} = 0$	$Y_{16,9} = 0$	$Y_{20,13} = 0$	$Y_{18,17} = 0$

$Y_{18,25} = 5$	$Y_{25,32} = 0$	$Y_{32,39} = 0$	$Y_{39,46} = 0$
$Y_{25,18} = 0$	$Y_{32,25} = 0$	$Y_{39,32} = 0$	$Y_{46,39} = 0$
$Y_{18,19} = 0$	$Y_{25,26} = 4$	$Y_{32,33} = 0$	$Y_{39,40} = 3$
$Y_{19,18} = 0$	$Y_{26,25} = 0$	$Y_{33,32} = 0$	$Y_{40,39} = 0$
$Y_{19,26} = 0$	$Y_{26,33} = 3$	$Y_{33,40} = 0$	$Y_{40,47} = 0$
$Y_{26,19} = 0$	$Y_{33,26} = 0$	$Y_{40,33} = 0$	$Y_{47,40} = 0$
$Y_{19,20} = 4$	$Y_{26,27} = 0$	$Y_{33,34} = 2$	$Y_{40,41} = 2$
$Y_{20,19} = 0$	$Y_{27,26} = 0$	$Y_{34,33} = 0$	$Y_{41,40} = 0$
$Y_{20,27} = 1$	$Y_{27,34} = 0$	$Y_{34,41} = 0$	$Y_{41,48} = 0$
$Y_{27,20} = 0$	$Y_{34,27} = 0$	$Y_{41,34} = 0$	$Y_{48,41} = 0$
$Y_{20,21} = 2$	$Y_{27,28} = 0$	$Y_{34,35} = 1$	$Y_{41,42} = 1$
$Y_{21,20} = 0$	$Y_{28,27} = 0$	$Y_{35,34} = 0$	$Y_{42,41} = 0$
$Y_{21,28} = 1$	$Y_{28,35} = 0$	$Y_{35,42} = 0$	$Y_{42,49} = 0$
$Y_{28,21} = 0$	$Y_{35,28} = 0$	$Y_{42,35} = 0$	$Y_{49,42} = 0$
$Y_{22,29} = 3$	$Y_{29,36} = 2$	$Y_{36,43} = 1$	$Y_{43,44} = 0$
$Y_{29,22} = 0$	$Y_{36,29} = 0$	$Y_{43,36} = 0$	$Y_{44,43} = 0$
$Y_{22,23} = 16$	$Y_{29,30} = 0$	$Y_{36,37} = 0$	$Y_{44,45} = 0$
$Y_{23,22} = 0$	$Y_{30,29} = 0$	$Y_{37,36} = 0$	$Y_{45,44} = 0$
$Y_{23,30} = 15$	$Y_{30,37} = 12$	$Y_{37,44} = 1$	$Y_{45,46} = 4$
$Y_{30,23} = 0$	$Y_{37,30} = 0$	$Y_{44,37} = 0$	$Y_{46,45} = 0$
$Y_{23,24} = 0$	$Y_{30,31} = 2$	$Y_{37,38} = 10$	$Y_{46,47} = 3$
$Y_{24,23} = 0$	$Y_{31,30} = 0$	$Y_{38,37} = 0$	$Y_{47,46} = 0$
$Y_{24,31} = 0$	$Y_{31,38} = 0$	$Y_{38,45} = 5$	$Y_{47,48} = 2$
$Y_{31,24} = 0$	$Y_{38,31} = 0$	$Y_{45,38} = 0$	$Y_{48,47} = 0$
$Y_{24,25} = 0$	$Y_{31,32} = 1$	$Y_{38,39} = 4$	$Y_{48,49} = 1$
$Y_{25,24} = 0$	$Y_{32,31} = 0$	$Y_{39,38} = 0$	$Y_{49,48} = 0$

Em *Anexo* é possível visualizar um exemplo gráfico dos resultados obtidos.



d) Para a mesma instância, obtenha as soluções óptimas primal e dual através da resolução do modelo dual. Confirme que as soluções são as mesmas que as obtidas na alínea anterior, ou, caso não sejam, apresente uma justificação.

Com o uso do mesmo programa, foram obtidos os seguintes resultados para o problema dual:

$$W = 1252$$

$Y_{1,8} = 40$	$Y_{11,10} = 0$	$Y_{20,21} = 2$	$Y_{31,30} = 0$
$Y_{8,1} = 0$	$Y_{11,18} = 6$	$Y_{21,20} = 0$	$Y_{31,38} = 0$
$Y_{1,2} = 8$	$Y_{18,11} = 0$	$Y_{21,28} = 1$	$Y_{38,31} = 0$
$Y_{2,1} = 0$	$Y_{11,12} = 6$	$Y_{28,21} = 0$	$Y_{31,32} = 1$
$Y_{2,9} = 0$	$Y_{12,11} = 0$	$Y_{22,29} = 3$	$Y_{32,31} = 0$
$Y_{9,2} = 0$	$Y_{12,19} = 5$	$Y_{29,22} = 0$	$Y_{32,39} = 0$
$Y_{2,3} = 7$	$Y_{19,12} = 0$	$Y_{22,23} = 16$	$Y_{39,32} = 0$
$Y_{3,2} = 0$	$Y_{12,13} = 0$	$Y_{23,22} = 0$	$Y_{32,33} = 0$
$Y_{3,10} = 0$	$Y_{13,12} = 0$	$Y_{23,30} = 15$	$Y_{33,32} = 0$
$Y_{10,3} = 0$	$Y_{13,20} = 0$	$Y_{30,23} = 0$	$Y_{33,40} = 0$
$Y_{3,4} = 6$	$Y_{20,13} = 0$	$Y_{23,24} = 0$	$Y_{40,33} = 0$
$Y_{4,3} = 0$	$Y_{13,14} = 1$	$Y_{24,23} = 0$	$Y_{33,34} = 2$
$Y_{4,11} = 0$	$Y_{14,13} = 0$	$Y_{24,31} = 0$	$Y_{34,33} = 0$
$Y_{11,4} = 0$	$Y_{14,21} = 0$	$Y_{31,24} = 0$	$Y_{34,41} = 0$
$Y_{4,5} = 5$	$Y_{21,14} = 0$	$Y_{24,25} = 0$	$Y_{41,34} = 0$
$Y_{5,4} = 0$	$Y_{15,22} = 20$	$Y_{25,24} = 0$	$Y_{34,35} = 1$
$Y_{5,12} = 0$	$Y_{22,15} = 0$	$Y_{25,32} = 0$	$Y_{35,34} = 0$
$Y_{12,5} = 0$	$Y_{15,16} = 0$	$Y_{32,25} = 0$	$Y_{35,42} = 0$
$Y_{5,6} = 4$	$Y_{16,15} = 0$	$Y_{25,26} = 4$	$Y_{42,35} = 0$
$Y_{6,5} = 0$	$Y_{16,23} = 0$	$Y_{26,25} = 0$	$Y_{36,43} = 1$
$Y_{6,13} = 2$	$Y_{23,16} = 0$	$Y_{26,33} = 3$	$Y_{43,36} = 0$
$Y_{13,6} = 0$	$Y_{16,17} = 2$	$Y_{33,26} = 0$	$Y_{36,37} = 0$
$Y_{6,7} = 1$	$Y_{17,16} = 0$	$Y_{26,27} = 0$	$Y_{37,36} = 0$
$Y_{7,6} = 0$	$Y_{17,24} = 1$	$Y_{27,26} = 0$	$Y_{37,44} = 1$
$Y_{7,14} = 0$	$Y_{24,17} = 0$	$Y_{27,34} = 0$	$Y_{44,37} = 0$
$Y_{14,7} = 0$	$Y_{17,18} = 0$	$Y_{34,27} = 0$	$Y_{37,38} = 10$
$Y_{8,15} = 21$	$Y_{18,17} = 0$	$Y_{27,28} = 0$	$Y_{38,37} = 0$
$Y_{15,8} = 0$	$Y_{18,25} = 5$	$Y_{28,27} = 0$	$Y_{38,45} = 5$
$Y_{8,9} = 18$	$Y_{25,18} = 0$	$Y_{28,35} = 0$	$Y_{45,38} = 0$
$Y_{9,8} = 0$	$Y_{18,19} = 0$	$Y_{35,28} = 0$	$Y_{38,39} = 4$
$Y_{9,16} = 3$	$Y_{19,18} = 0$	$Y_{29,36} = 2$	$Y_{39,38} = 0$
$Y_{16,9} = 0$	$Y_{19,26} = 0$	$Y_{36,29} = 0$	$Y_{39,46} = 0$
$Y_{9,10} = 14$	$Y_{26,19} = 0$	$Y_{29,30} = 0$	$Y_{46,39} = 0$
$Y_{10,9} = 0$	$Y_{19,20} = 4$	$Y_{30,29} = 0$	$Y_{39,40} = 3$
$Y_{10,17} = 0$	$Y_{20,19} = 0$	$Y_{30,37} = 12$	$Y_{40,39} = 0$
$Y_{17,10} = 0$	$Y_{20,27} = 1$	$Y_{37,30} = 0$	$Y_{40,47} = 0$
$Y_{10,11} = 13$	$Y_{27,20} = 0$	$Y_{30,31} = 2$	$Y_{47,40} = 0$

$Y_{40,41} = 2$	$Y_{42,41} = 0$	$Y_{44,45} = 0$	$Y_{47,46} = 0$
$Y_{41,40} = 0$	$Y_{42,49} = 0$	$Y_{45,44} = 0$	$Y_{47,48} = 2$
$Y_{41,48} = 0$	$Y_{49,42} = 0$	$Y_{45,46} = 4$	$Y_{48,47} = 0$
$Y_{48,41} = 0$	$Y_{43,44} = 0$	$Y_{46,45} = 0$	$Y_{48,49} = 1$
$Y_{41,42} = 1$	$Y_{44,43} = 0$	$Y_{46,47} = 3$	$Y_{49,48} = 0$

A solução primal, respetiva é:

$$Z = 1252$$

$x_1 = 0$	$x_{18} = 21$	$x_{35} = 38$
$x_2 = 4$	$x_{19} = 24$	$x_{36} = 26$
$x_3 = 9$	$x_{20} = 28$	$x_{37} = 27$
$x_4 = 12$	$x_{21} = 31$	$x_{38} = 29$
$x_5 = 16$	$x_{22} = 15$	$x_{39} = 33$
$x_6 = 19$	$x_{23} = 18$	$x_{40} = 36$
$x_7 = 23$	$x_{24} = 22$	$x_{41} = 40$
$x_8 = 6$	$x_{25} = 25$	$x_{42} = 43$
$x_9 = 9$	$x_{26} = 28$	$x_{43} = 36$
$x_{10} = 12$	$x_{27} = 32$	$x_{44} = 37$
$x_{11} = 16$	$x_{28} = 35$	$x_{45} = 39$
$x_{12} = 20$	$x_{29} = 21$	$x_{46} = 41$
$x_{13} = 24$	$x_{30} = 23$	$x_{47} = 45$
$x_{14} = 27$	$x_{31} = 26$	$x_{48} = 48$
$x_{15} = 10$	$x_{32} = 29$	$x_{49} = 52$
$x_{16} = 14$	$x_{33} = 32$	
$x_{17} = 17$	$x_{34} = 34$	

Como é visível, os valores das soluções dos problemas duais e primais são iguais, exceto os valores do número de vezes que um arco  $ij$  ocorre no caminho ideal. Isto deve-se ao facto de existir mais que um caminho ideal, ou seja, existe mais que um caminho que permite resolver o problema de forma ótima. Esta situação é retratada em *Anexo*, sendo exemplo disso o custo de ir do nodo 1 até 9. Se o caminho for  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 9$  ou  $1 \rightarrow 8 \rightarrow 9$ , terá igual custo.

## 1.2 Questão 2

Considere agora que existe um conjunto de recursos para o combate ao incêndio (e.g. equipas de bombeiros) cuja localização pode ser escolhida (no máximo, um recurso por célula).

Pretende-se que o instante de chegada do fogo a uma determinada célula seja o mais tarde possível, sabendo-se que se tem disponíveis  $b$  recursos.

A presença de um recurso numa célula implica que o tempo de propagação para as células adjacentes é retardado numa constante dada, representada por  $\Delta$ .

a) Apresente um modelo de programação inteira mista (PIM). Para além de definir a notação, defina claramente as variáveis de decisão e justifique a função objetivo e cada restrição.

Sabendo que o fogo começa a propagar-se no nodo 1, o tempo de propagação até este é zero. Além disso, o tempo de chegar a um nodo  $j$ , ligado a um nodo  $i$ , é o tempo de chegar a  $i$  adicionando o custo de ir para  $j$  mais o tempo de retardamento associado a uma possível utilização de um recurso na célula  $i$ . É, também, necessário garantir que não são utilizados mais do que  $b$  recursos na totalidade da instância, tendo, ainda, em conta a restrição da utilização de apenas um recurso por nodo.

Além disso, como se quer garantir que o tempo de chegada a uma certa célula é o mais tardio possível, a função objetivo tem de maximizar o instante de chegada à mesma.

**Parâmetros:**

$$R_i = \begin{cases} 1 & \text{se recurso é utilizado na célula } i \\ 0 & \text{Caso contrário,} \end{cases}$$

$C_{ij}$  - Tempo que o fogo demora a chegar ao nodo  $j$ , vindo de  $i$

$b$  - Número de recursos disponíveis para utilização

$t$  - Célula que se pretende maximizar o tempo de chegada

**Variáveis de Decisão:**

$x_i$  - Instante em que o fogo chega à célula  $i$

**Função Objetivo:**

$$\text{Max } Z = x_t$$

**Sujeito a:**

$$\sum_{i=1}^N R_i \leq b$$

$$x_1 = 0$$

$$x_j \leq x_i + (c_{ij} + r_i \Delta), \forall_{ij} \in A$$

$$x_i \geq 0, \forall_i \in \{1..N\}$$

$$C_{ij} \geq 0, \forall_{ij} \in A$$

$$R_i \in \{0, 1\}, \forall_i \in \{1..N\}$$

b) Para a instância de sete por sete células e os tempos de propagação em anexo, obtenha uma solução através do IBM ILOG CPLEX Optimization Studio com uma ignição na célula (1,1) e pretendendo-se proteger a célula (7,7). Represente a solução de forma adequada e interprete-a.

Através do uso do programa *IBM ILOG CPLEX Optimization Studio*, foi possível obter os seguintes resultados para a solução do problema:

$Z = 84$  unidades de tempo para atingir a célula (7,7)

$x_1 = 0$	$x_{18} = 39$	$x_{35} = 56$
$x_2 = 12$	$x_{19} = 41$	$x_{36} = 48$
$x_3 = 25$	$x_{20} = 44$	$x_{37} = 51$
$x_4 = 29$	$x_{21} = 47$	$x_{38} = 53$
$x_5 = 33$	$x_{22} = 39$	$x_{39} = 56$
$x_6 = 36$	$x_{23} = 42$	$x_{40} = 59$
$x_7 = 39$	$x_{24} = 46$	$x_{41} = 63$
$x_8 = 14$	$x_{25} = 43$	$x_{42} = 66$
$x_9 = 25$	$x_{26} = 46$	$x_{43} = 57$
$x_{10} = 36$	$x_{27} = 48$	$x_{44} = 61$
$x_{11} = 34$	$x_{28} = 51$	$x_{45} = 63$
$x_{12} = 37$	$x_{29} = 43$	$x_{46} = 65$
$x_{13} = 41$	$x_{30} = 47$	$x_{47} = 69$
$x_{14} = 44$	$x_{31} = 50$	$x_{48} = 72$
$x_{15} = 26$	$x_{32} = 47$	$x_{49} = 84$
$x_{16} = 38$	$x_{33} = 50$	
$x_{17} = 41$	$x_{34} = 52$	

$R_1 = 1$	$R_{18} = 0$	$R_{35} = 0$
$R_2 = 1$	$R_{19} = 0$	$R_{36} = 0$
$R_3 = 1$	$R_{20} = 0$	$R_{37} = 0$
$R_4 = 0$	$R_{21} = 0$	$R_{38} = 0$
$R_5 = 0$	$R_{22} = 0$	$R_{39} = 0$
$R_6 = 0$	$R_{23} = 0$	$R_{40} = 0$
$R_7 = 0$	$R_{24} = 0$	$R_{41} = 0$
$R_8 = 1$	$R_{25} = 0$	$R_{42} = 1$
$R_9 = 1$	$R_{26} = 0$	$R_{43} = 0$
$R_{10} = 0$	$R_{27} = 0$	$R_{44} = 0$
$R_{11} = 0$	$R_{28} = 0$	$R_{45} = 0$
$R_{12} = 0$	$R_{29} = 0$	$R_{46} = 0$
$R_{13} = 0$	$R_{30} = 0$	$R_{47} = 0$
$R_{14} = 0$	$R_{31} = 0$	$R_{48} = 1$
$R_{15} = 1$	$R_{32} = 0$	$R_{49} = 0$
$R_{16} = 0$	$R_{33} = 0$	
$R_{17} = 0$	$R_{34} = 0$	

Transformando os resultados obtidos na sua representação gráfica, obtém-se a Figura 1. Note-se que as células com retardadores estão a laranja e as restantes a azul.

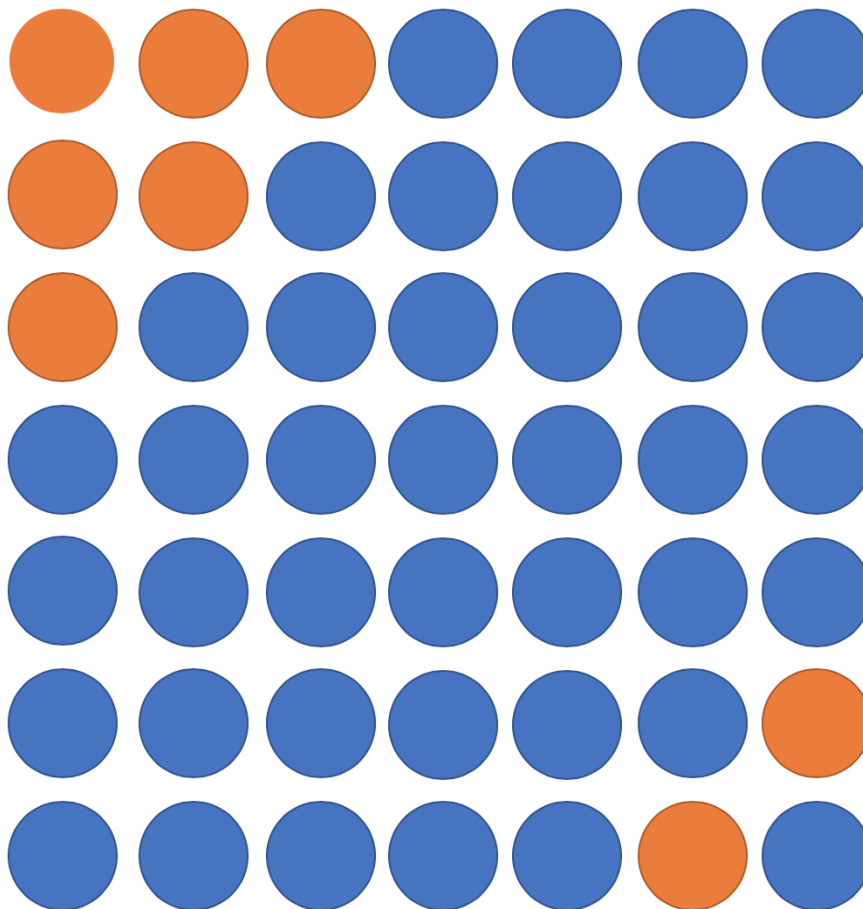


Figura 1 - Solução para o problema da instância exemplo.

Como é possível observar na Figura 1, os recursos de retardamento são aplicados nos nodos iniciais e finais, circundando os pontos onde é certo o fogo passar, sendo garantido que o fogo será retardado mais do que uma vez. Sendo assim, a eficiência no retardamento do incêndio é garantida.

c) Represente graficamente o tempo de chegada do fogo à célula de proteção em função do número de recursos usados. Interprete e comente.

Tabela 1 - Dados que relacionam o número de recursos utilizados com o tempo de chegada ao nodo final

Nº de recursos usados	Tempo de chegada ao nodo
0	52
5	76
8	84
10	91
15	101
20	110
25	119
30	127
35	134
40	140
45	147
49	148

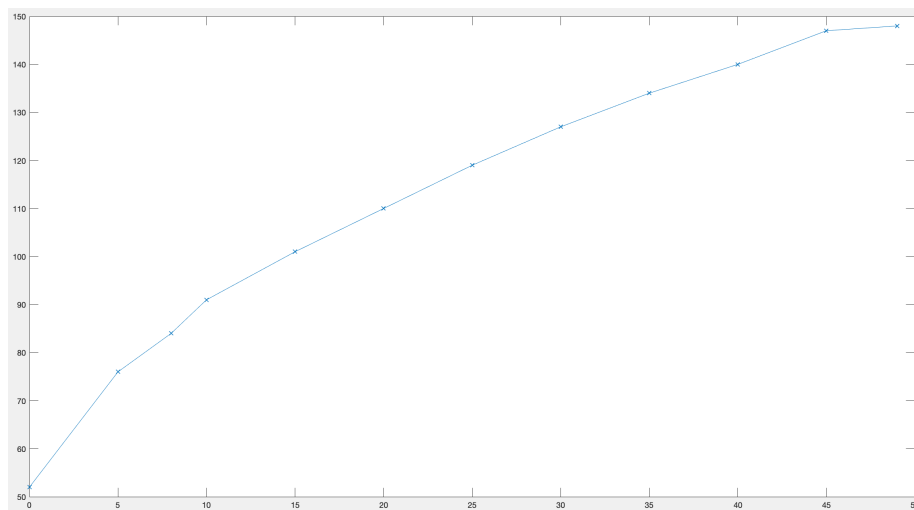


Figura 2 - Relação entre o tempo de atingir a célula 49 (eixo  $Y$ ) e o número de recursos (eixo  $X$ ).

Como se verifica na Figura 1, consoante se aumenta o número de retardadores disponíveis para utilização na instância, o tempo de chegada do fogo à célula 49 também aumenta, como era de esperar. Isto valida que o modelo corresponde ao problema proposto.

### 1.3 Questão 3

Considere agora que se pretende decidir onde localizar  $b$  recursos com objectivo de minimizar o valor esperado da área ardida ao fim de um intervalo de tempo. Considere que são conhecidas as probabilidades de ignição em cada célula.

a) Apresente um modelo de programação inteira mista (PIM). Para além de definir a notação, defina as variáveis de decisão claramente e justifique a função objetivo e cada restrição.

Com o auxílio de um artigo disponibilizado pelo docente da disciplina que aborda a otimização de locais de tratamento para criar oportunidades de controlo contra futuros incêndios [2], tem-se o seguinte modelo.

Assumindo que existe apenas uma célula de ignição do fogo, a sua probabilidade de ignição é conhecida, e que a ignição da mesma acontece no instante de tempo zero.

O tempo de chegada do fogo a célula  $j$ , ligada pelo caminho mais curto com a célula  $k$ , é o tempo de chegar desde a célula de ignição  $i$  até  $k$ , adicionando o custo de ir de  $k$  até  $j$  mais o tempo de retardamento ( $\Delta$ ) caso a célula  $k$  tenha presente um recurso.

É, também, necessário garantir que uma célula  $j$  apenas será atingida com o fogo caso o instante de chegada do fogo a célula  $j$  desde a célula de ignição  $i$  for menor que o intervalo de tempo a considerar ( $d$ ).

Por fim, tem que ser garantido que não se ultrapassa o número de recursos disponíveis, valor indicado pela letra  $b$ .

Assim, o modelo aloca os recursos nas células de forma a minimizar o valor esperado da área ardida (células atingidas pelo fogo) para qualquer que seja a célula de ignição do fogo, tendo em conta a sua probabilidade de ignição.

#### Parâmetros:

$N$  - Número de células

$c_{ij}$  - Custo de efetuar uma deslocação da célula  $i$  para a  $j$ ,  $\forall_{ij} \in A$

$\Delta$  - Constante de retardamento do instante de chegada do fogo às células adjacentes na presença de um recurso numa célula

$b$  - Número de recursos disponíveis

$p_i$  - Probabilidade de ignição do fogo na célula  $i$ ,  $\forall_i \in \{1..N\}$

$d$  - Intervalo de tempo a considerar para a duração do fogo

#### Variáveis de Decisão:

$R_i$  -  $\begin{cases} 1 & \text{se recurso é utilizado na célula } i \\ 0 & \text{Caso contrário, } \forall_{ij} \in A \end{cases}$

$A_{ij}$  -  $\begin{cases} 1 & \text{se a célula } j \text{ ardeu sendo } i \text{ a célula de ignição} \\ 0 & \text{Caso contrário, } \forall_{ij} \in A \end{cases}$

$x_{ij}$  - instante de chegada do fogo à célula  $j$  a partir da célula de ignição  $i$ ,  $\forall_{ij} \in \{1..N\}$

**Função Objetivo:**

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^N (p_i \times \sum_{j=1}^N A_{ij})$$

**Sujeito a:**

$$x_{ii} = 0, \forall_i \in 1..n$$

$$x_{ij} \leq x_{ik} + c_{kj} + R_i \Delta, \forall_i \in 1..N, \forall_{kj} \in A$$

$$A_{ij} \geq \frac{(d-x_{ij})}{d}, \forall_{i,j} \in 1..N$$

$$\sum_{j=1}^N R_j \leq b, \forall_j \in 1..N$$

$$\sum_{i=1}^N p_i \leq 1$$

$$x_{ij} \geq 0, \forall_{i,j} \in 1..N$$

$$C_{ij} \geq 0, \forall_{ij} \in A$$

$$p_i \geq 0, \forall_i \in \{1..N\}$$

$$R_i \in \{0, 1\}, \forall_i \in \{1..N\}$$

$$A_{ij} \in \{0, 1\}, \forall_{ij} \in A$$



b) Para a instância em anexo, obtenha uma solução através do *IBM ILOG CPLEX Optimization Studio* com probabilidade de ignição na célula  $(i,j)$  dada por  $(14 - i - j)/500$  e intervalo de 12 unidades de tempo. Represente a solução de forma adequada e interprete-a.

Para a instância apresentada em anexo, o valor esperado de área ardida é de 3.716 nodos.

$$Z = 3.716$$

Adicionalmente, as variáveis de decisão que representam a localização dos recursos são:

$R_1 = 0$	$R_{18} = 1$	$R_{35} = 0$
$R_2 = 1$	$R_{19} = 0$	$R_{36} = 0$
$R_3 = 0$	$R_{20} = 0$	$R_{37} = 0$
$R_4 = 1$	$R_{21} = 0$	$R_{38} = 0$
$R_5 = 0$	$R_{22} = 0$	$R_{39} = 0$
$R_6 = 0$	$R_{23} = 0$	$R_{40} = 0$
$R_7 = 0$	$R_{24} = 1$	$R_{41} = 0$
$R_8 = 0$	$R_{25} = 0$	$R_{42} = 0$
$R_9 = 0$	$R_{26} = 0$	$R_{43} = 0$
$R_{10} = 1$	$R_{27} = 0$	$R_{44} = 0$
$R_{11} = 0$	$R_{28} = 0$	$R_{45} = 0$
$R_{12} = 1$	$R_{29} = 0$	$R_{46} = 0$
$R_{13} = 0$	$R_{30} = 1$	$R_{47} = 0$
$R_{14} = 0$	$R_{31} = 0$	$R_{48} = 0$
$R_{15} = 0$	$R_{32} = 0$	$R_{49} = 0$
$R_{16} = 1$	$R_{33} = 0$	
$R_{17} = 0$	$R_{34} = 0$	

Estas variáveis representam onde devem ser alocados os recursos, seja qual for a célula de ignição, tendo em conta a probabilidade de ignição de cada célula, de forma a minimizar o valor esperado de células ardidas, como visível na Figura 3. De notar que as células amarelas contém o recurso retardador.

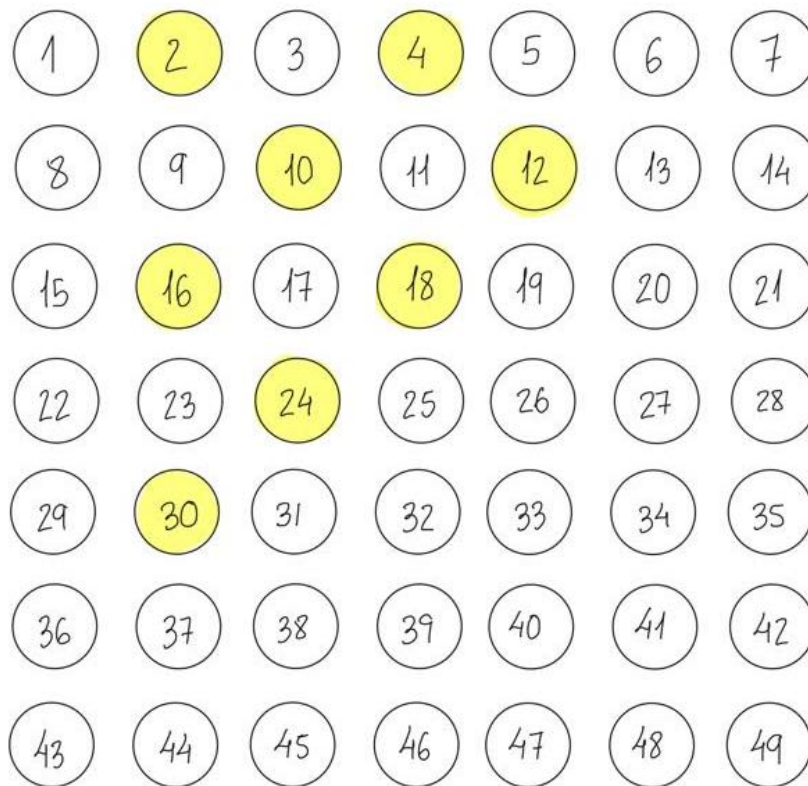


Figura 3 - Representação Gráfica da Solução do Problema 3.

Apresentam-se, ainda, os resultados obtidos para as restantes variáveis aplicadas ao nodo de ignição 21 e representa-se a interpretação desses dados graficamente na Figura 4.

$A[21][1] = 0$	$A[21][12] = 0$	$A[21][23] = 0$
$A[21][2] = 0$	$A[21][13] = 0$	$A[21][24] = 0$
$A[21][3] = 0$	$A[21][14] = 1$	$A[21][25] = 0$
$A[21][4] = 0$	$A[21][15] = 0$	$A[21][26] = 1$
$A[21][5] = 0$	$A[21][16] = 0$	$A[21][27] = 1$
$A[21][6] = 0$	$A[21][17] = 0$	$A[21][28] = 1$
$A[21][7] = 0$	$A[21][18] = 1$	$A[21][29] = 0$
$A[21][8] = 0$	$A[21][19] = 1$	$A[21][30] = 0$
$A[21][9] = 0$	$A[21][20] = 1$	$A[21][31] = 0$
$A[21][10] = 0$	$A[21][21] = 1$	$A[21][32] = 0$
$A[21][11] = 0$	$A[21][22] = 0$	$A[21][33] = 0$

$$\begin{aligned}
A[21][34] &= 1 \\
A[21][35] &= 1 \\
A[21][36] &= 0 \\
A[21][37] &= 0 \\
A[21][38] &= 0 \\
A[21][39] &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A[21][40] &= 0 \\
A[21][41] &= 0 \\
A[21][42] &= 0 \\
A[21][43] &= 0 \\
A[21][44] &= 0 \\
A[21][45] &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A[21][46] &= 0 \\
A[21][47] &= 0 \\
A[21][48] &= 0 \\
A[21][49] &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x[21][1] &= 12 \\
x[21][2] &= 12 \\
x[21][3] &= 12 \\
x[21][4] &= 12 \\
x[21][5] &= 12 \\
x[21][6] &= 12 \\
x[21][7] &= 12 \\
x[21][8] &= 12 \\
x[21][9] &= 12 \\
x[21][10] &= 12 \\
x[21][11] &= 12 \\
x[21][12] &= 12 \\
x[21][13] &= 12 \\
x[21][14] &= 11 \\
x[21][15] &= 12 \\
x[21][16] &= 12 \\
x[21][17] &= 12
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x[21][18] &= 6 \\
x[21][19] &= 7 \\
x[21][20] &= 3 \\
x[21][21] &= 0 \\
x[21][22] &= 12 \\
x[21][23] &= 12 \\
x[21][24] &= 12 \\
x[21][25] &= 12 \\
x[21][26] &= 9 \\
x[21][27] &= 7 \\
x[21][28] &= 4 \\
x[21][29] &= 12 \\
x[21][30] &= 12 \\
x[21][31] &= 12 \\
x[21][32] &= 12 \\
x[21][33] &= 12 \\
x[21][34] &= 9
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x[21][35] &= 9 \\
x[21][36] &= 12 \\
x[21][37] &= 12 \\
x[21][38] &= 12 \\
x[21][39] &= 12 \\
x[21][40] &= 12 \\
x[21][41] &= 12 \\
x[21][42] &= 12 \\
x[21][43] &= 12 \\
x[21][44] &= 12 \\
x[21][45] &= 12 \\
x[21][46] &= 12 \\
x[21][47] &= 12 \\
x[21][48] &= 12 \\
x[21][49] &= 15
\end{aligned}$$

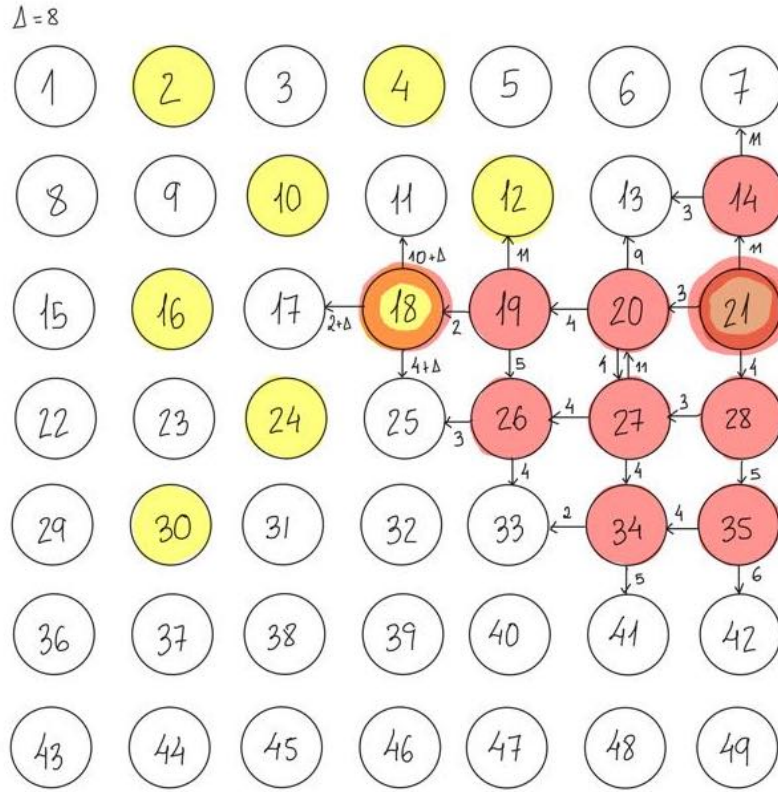


Figura 4 - Representação da alocação de recursos e das células atingidas pelo fogo (células a vermelho), partindo do nodo de ignição 21 (célula a vermelho escuro).

Os seguintes valores representam os resultados obtidos para as restantes variáveis aplicadas ao nodo de ignição 11, seguida da sua representação gráfica na Figura 5.

$A[11][1] = 0$	$A[11][11] = 1$	$A[11][21] = 0$
$A[11][2] = 0$	$A[11][12] = 1$	$A[11][22] = 0$
$A[11][3] = 0$	$A[11][13] = 0$	$A[11][23] = 0$
$A[11][4] = 1$	$A[11][14] = 0$	$A[11][24] = 0$
$A[11][5] = 0$	$A[11][15] = 0$	$A[11][25] = 0$
$A[11][6] = 0$	$A[11][16] = 0$	$A[11][26] = 0$
$A[11][7] = 0$	$A[11][17] = 0$	$A[11][27] = 0$
$A[11][8] = 0$	$A[11][18] = 1$	$A[11][28] = 0$
$A[11][9] = 0$	$A[11][19] = 0$	$A[11][29] = 0$
$A[11][10] = 1$	$A[11][20] = 0$	$A[11][30] = 0$

$A[11][31] = 0$	$A[11][38] = 0$	$A[11][45] = 0$
$A[11][32] = 0$	$A[11][39] = 0$	$A[11][46] = 0$
$A[11][33] = 0$	$A[11][40] = 0$	$A[11][47] = 0$
$A[11][34] = 0$	$A[11][41] = 0$	$A[11][48] = 0$
$A[11][35] = 0$	$A[11][42] = 0$	$A[11][49] = 0$
$A[11][36] = 0$	$A[11][43] = 0$	
$A[11][37] = 0$	$A[11][44] = 0$	
$x[11][1] = 12$	$x[11][18] = 5$	$x[11][35] = 12$
$x[11][2] = 12$	$x[11][19] = 12$	$x[11][36] = 12$
$x[11][3] = 12$	$x[11][20] = 12$	$x[11][37] = 12$
$x[11][4] = 9$	$x[11][21] = 12$	$x[11][38] = 12$
$x[11][5] = 12$	$x[11][22] = 12$	$x[11][39] = 12$
$x[11][6] = 12$	$x[11][23] = 12$	$x[11][40] = 12$
$x[11][7] = 12$	$x[11][24] = 12$	$x[11][41] = 12$
$x[11][8] = 12$	$x[11][25] = 12$	$x[11][42] = 12$
$x[11][9] = 12$	$x[11][26] = 12$	$x[11][43] = 12$
$x[11][10] = 3$	$x[11][27] = 12$	$x[11][44] = 12$
$x[11][11] = 0$	$x[11][28] = 16$	$x[11][45] = 12$
$x[11][12] = 4$	$x[11][29] = 12$	$x[11][46] = 12$
$x[11][13] = 12$	$x[11][30] = 12$	$x[11][47] = 12$
$x[11][14] = 12$	$x[11][31] = 12$	$x[11][48] = 12$
$x[11][15] = 12$	$x[11][32] = 12$	$x[11][49] = 15$
$x[11][16] = 12$	$x[11][33] = 12$	
$x[11][17] = 12$	$x[11][34] = 12$	

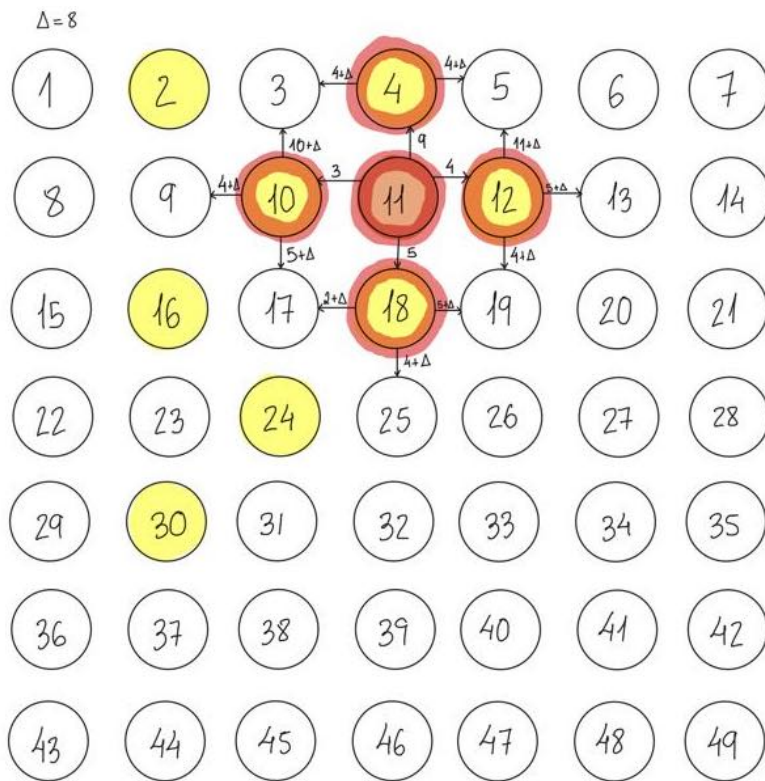


Figura 5 - Representação da alocação de recursos e das células atingidas pelo fogo (células a vermelho), partindo do nodo de ignição 11 (célula a vermelho escuro).

c) Represente graficamente o valor esperado da área ardida em função do intervalo de tempo considerado. Interprete e comente

Tabela 2 - Dados que relacionam o tempo de duração do fogo com o valor esperado da área ardida

Duração do fogo	Valor esperado da área ardida
8	2.108
12	3.716
14	4.690
18	6.996
21	9.018
23	10.288
25	11.589
28	13.412



Figura 6 - Relação entre o tempo de duração do fogo e o valor esperado de área ardida.

Como é possível verificar à medida que o intervalo de tempo aumenta, o valor esperado da área ardida também aumenta. Desta forma, juntamente com a observação do gráfico, é possível concluir que o valor esperado da área ardida varia de forma proporcional ao intervalo de tempo.

## 2 Análise Crítica

O desenvolvimento deste projeto permitiu um aumento no conhecimento relativamente aos paradigmas da programação linear e inteira, fortalecendo a noção da sua utilidade na resolução de diversos problemas.

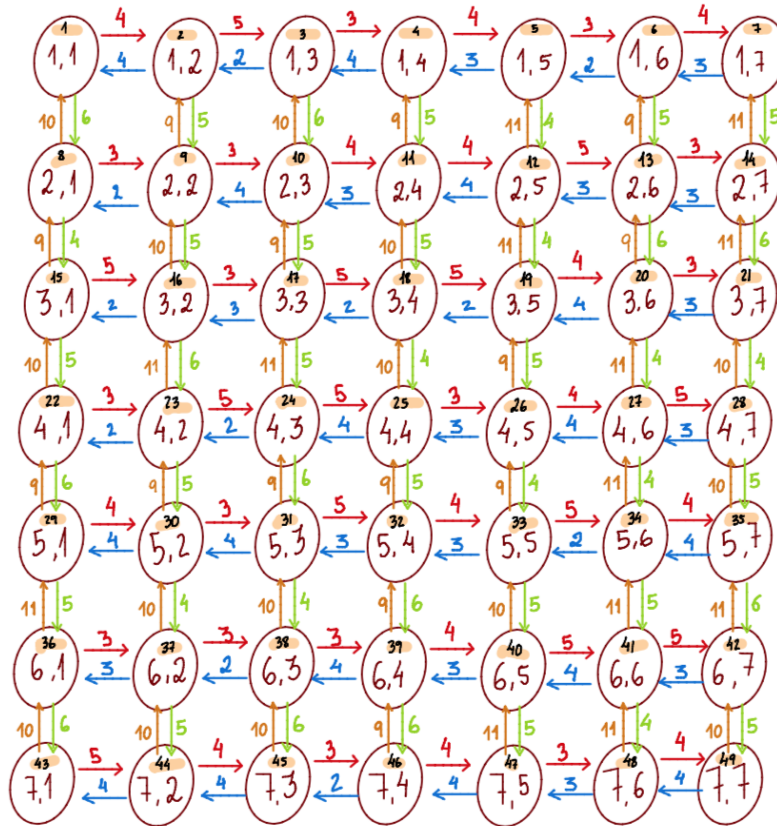
Tendo em conta que todos os problemas propostos foram resolvidos de forma sólida, sendo conseguidas as soluções ótimas, o grupo considera o projeto como um sucesso.

Em suma, foi possível resolver problemas relacionados com a prevenção de incêndios, mostrando a utilidade da investigação operacional em diversos campos do quotidiano, bem como a sua solidez nas soluções obtidas.



### 3 Anexos

$g, 10, 11$   
 $4, 5, 6$   
 $3, 4, 5, 6$   
82313



$\Delta$  - tempo de retardamento  
 $b$  - número de recursos  
 $g$  - constante de proteção  
 $\Delta = b = 8$   
 $g = 12 + 1 = 13$

Figura 7 - Instância em estudo.

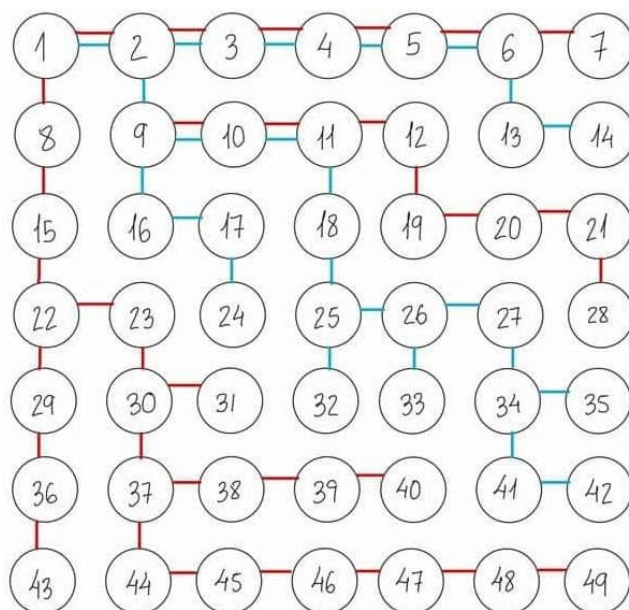


Figura 8 - Possível solução do problema primal da questão 1 para a instância em estudo.

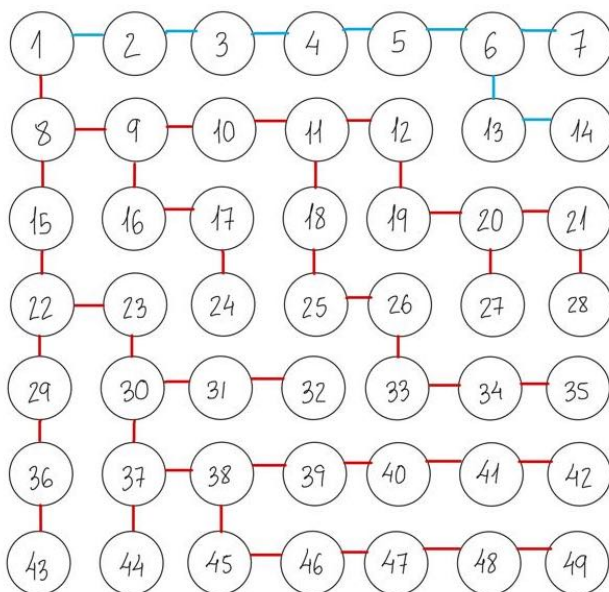


Figura 9 - Possível solução do problema dual da questão 1 para a instância em estudo.

# Código *OPL* relativo aos dados

```

1 N = 49;
2 delta = 8;
3 d = 12;
4 b = 8;
5 Arcos = {
6     <1,8>, <8,1>, <1,2>, <2,1>, <2,9>, <9,2>, <2,3>, <3,2>, <3,10>,
7         <10,3>,
8     <3,4>, <4,3>, <4,11>, <11,4>, <4,5>, <5,4>, <5,12>, <12,5>,
9         <5,6>, <6,5>,
10    <6,13>, <13,6>, <6,7>, <7,6>, <7,14>, <14,7>, <8,15>, <15,8>,
11        <8,9>, <9,8>,
12    <9,16>, <16,9>, <9,10>, <10,9>, <10,17>, <17,10>, <10,11>,
13        <11,10>, <11,18>,
14    <18,11>, <11,12>, <12,11>, <12,19>, <19,12>, <12,13>, <13,12>,
15        <13,20>,
16    <20,13>, <13,14>, <14,13>, <14,21>, <21,14>, <15,22>, <22,15>,
17        <15,16>,
18    <16,15>, <16,23>, <23,16>, <16,17>, <17,16>, <17,24>, <24,17>,
19        <17,18>,
20    <18,17>, <18,25>, <25,18>, <18,19>, <19,18>, <19,26>, <26,19>,
21        <19,20>,
22    <20,19>, <20,27>, <27,20>, <20,21>, <21,20>, <21,28>, <28,21>,
23        <22,29>,
24    <29,22>, <22,23>, <23,22>, <23,30>, <30,23>, <23,24>, <24,23>,
25        <24,31>,
26    <31,24>, <24,25>, <25,24>, <25,32>, <32,25>, <25,26>, <26,25>,
27        <26,33>,
28    <33,26>, <26,27>, <27,26>, <27,34>, <34,27>, <27,28>, <28,27>,
29        <28,35>,
30    <35,28>, <29,36>, <36,29>, <29,30>, <30,29>, <30,37>, <37,30>,
31        <30,31>,
32    <31,30>, <31,38>, <38,31>, <31,32>, <32,31>, <32,39>, <39,32>,
33        <32,33>,
34    <33,32>, <33,40>, <40,33>, <33,34>, <34,33>, <34,41>, <41,34>,
35        <34,35>,
36    <35,34>, <35,42>, <42,35>, <36,43>, <43,36>, <36,37>, <37,36>,
37        <37,44>,
38    <44,37>, <37,38>, <38,37>, <38,45>, <45,38>, <38,39>, <39,38>,
39        <39,46>,
40    <46,39>, <39,40>, <40,39>, <40,47>, <47,40>, <40,41>, <41,40>,
41        <41,48>,
42    <48,41>, <41,42>, <42,41>, <42,49>, <49,42>, <43,44>, <44,43>,
43        <44,45>,
44    <45,44>, <45,46>, <46,45>, <46,47>, <47,46>, <47,48>, <48,47>,
45        <48,49>,
46    <49,48>
47 };
48 Custos = [
49     6 10 4 4 5 9 5 2 6 10 3 4 5 9 4 3 4 11 3 2 5 9 4 3 5 11 4 9 3 2
50     5 10 3 4 5 9 4 3 5 10 4 4 4 11 5 3 6 9 3 3 6 11 5 10 5 2 6 11 3
51     3 5
52     11 5 2 4 10 5 2 5 9 4 4 4 11 3 3 4 10 6 9 3 2 5 9 5 2 6 9 5 4 5
53     9 3
54     3 4 9 4 4 4 11 5 3 5 10 5 11 4 4 4 10 3 4 4 5 3 6 9 4 3 5 10 5
55     2 5
56     11 4 4 6 11 6 10 3 3 5 10 3 2 6 10 3 4 6 9 4 3 5 11 5 4 4 11 5

```

```

34      3 5 10
35      5 4 4 4 3 2 4 4 3 3 4 4 4
36    ];
37    p = [0.024 0.022 0.020 0.018 0.016 0.014 0.012 0.022
38          0.020 0.018 0.016 0.014 0.012 0.010 0.020 0.018
39          0.016 0.014 0.012 0.010 0.008 0.018 0.016 0.014
40          0.012 0.010 0.008 0.006 0.016 0.014 0.012 0.010
41          0.008 0.006 0.004 0.014 0.012 0.010 0.008 0.006
42          0.004 0.002 0.012 0.010 0.008 0.006 0.004 0.002 0.000
43    ];

```

Código *OPL* relativo à questão 1a)

```

1  int N = ...;
2  {int} Nodos = asSet(1..N);
3
4  tuple Arco {
5      int i;
6      int j;
7  }
8
9  {Arco} Arcos with i in Nodos, j in Nodos = ...;
10
11 float Custos[Arcos] = ...;
12
13 dvar float+ x[Nodos];
14
15 maximize sum(i in Nodos) x[i];
16
17 subject to {
18     m: x[1] == 0;
19
20     forall (<i,j> in Arcos) n:
21         x[j] <= x[i] + Custos[<i,j>];
22 }

```

Código *OPL* relativo à questão 1b)

```

1  int N = ...;
2  {int} Nodos = asSet(1..N);
3
4  tuple Arco {
5      int i;
6      int j;
7  }
8
9  {Arco} Arcos with i in Nodos, j in Nodos = ...;
10
11 float Custos[Arcos] = ...;
12
13 dvar float+ y[Arcos];
14
15 minimize sum(<i,j> in Arcos) Custos[<i,j>] * y[<i,j>];
16
17 subject to {
18     forall (k in 2..N) m:
19         sum(<i,k> in Arcos) y[<i,k>] - sum(<k,j> in Arcos) y[<k,j>]
20         >= 1;
21 }

```

Código *OPL* relativo à questão 2

```
1  int N = ...;
2  {int} Nodos = asSet(1..N);
3
4  tuple Arco {
5      int i;
6      int j;
7  }
8
9  {Arco} Arcos with i in Nodos, j in Nodos = ...;
10 float Custos[Arcos] = ...;
11
12 int s = 1;
13 int t = 49;
14
15 int b = 8;
16 int delta = 8;
17
18 dvar float+ x[Nodos];
19 dvar boolean y[Nodos];
20
21 maximize x[t];
22
23 subject to {
24     x[s] == 0;
25
26     forall (<i,j> in Arcos)
27         x[j] <= x[i] + Custos[<i,j>] + delta * y[i];
28
29     sum(i in Nodos) y[i] <= b;
30 }
```

Código *OPL* relativo à questão 3

```
1  int N = ...;
2
3  {int} Nodos = asSet(1..N);
4
5  tuple Arco{
6      int i;
7      int j;
8  }
9
10 {Arco} Arcos with i in Nodos, j in Nodos = ...;
11
12 float Custos[Arcos] = ...;
13
14 int delta=...;
15 int b=...;
16 int d=...;
17 float p[Nodos]=...;
18
19
20 dvar boolean R[Nodos];
21 dvar int tempo[Nodos][Nodos];
22 dvar boolean A[Nodos][Nodos];
23
24
25 minimize sum (i in Nodos, j in Nodos) p[i]*A[i][j];
26
27 subject to {
28
29     forall(i in Nodos) tempo[i][i] == 0;
30
31     forall (i in Nodos){
32         forall(<k,j> in Arcos) tempo[i][j] <= tempo[i][k] + Custos
33             [<k,j>] + delta*R[k];
34     }
35
36     forall (i in Nodos){
37         forall (j in Nodos) A[i][j] >= (d-tempo[i][j])/d;
38     }
39
40     sum (j in Nodos) R[j] <=b;
41 }
```

## Referências

- [1] Alvelos, F.: Investigação Operacional - Modelos Determinísticos de Optimização, Métodos e Software (2009)
- [2] Wei, Y.: Optimize landscape fuel treatment locations to create control opportunities for future fires. Canadian Journal of Forest Research, 42(6), 1002-1014 (2012)