Abgabe der **Aufgaben bis Donnerstag, 30.05.2018, 18:00** (einzeln, zu zweit oder dritt) in den Briefkasten Ihrer Übungsgruppe:

Gruppe	Termin	Übungsleiter	Briefkasten
2	Montag 10:00-12:00	Korinna Rosin	107
3	Montag 12:00-14:00	Mirco Arndt	108
4	Montag 14:00-16:00	Marina Bangert	109
5	Montag 16:00-18:00	Marina Bangert	109
6	Dienstag 14:00-16:00	Justus Klipstein	108
7	Dienstag 16:00-18:00	Dr. Fatma Ibrahim	110

Die Briefkästen befinden sich im Foyer des Mathematikgebäudes. Bitte vermerken Sie unbedingt auf jeder Abgabe Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe. Eine Abgabe der theoretischen Übungsaufgaben per E-Mail ist nicht möglich.
Abgabe der **Programmieraufgaben bis Donnerstag, 30.05.2018, 24:00 Uhr** digital im Moodle-Arbeitsraum der Veranstaltung. Bei Abgabe zu zweit oder dritt bitte nur einmal einreichen und im Kommentar den Namen und E-Mail Adresse des/der Koautors/Koautorin/Koautoren nennen. Sie können die Aufgaben in MatLab bzw. Octave schreiben. Bitte den "Header" als Kommentar in die Programme einfügen.

Aufgabe 3.1 (Summierte Quadraturformeln | 4 + 2 + 1 = 7 Punkte)

a) Ermitteln Sie approximativ einen Wert für das Integral

$$I(f) = \int_{-1}^{1} e^x + 1 \, dx = \left[e^x + x\right]_{-1}^{1} = e + 1 - \frac{1}{e} + 1 \approx 4.35040238728760$$

durch numerische Quadratur mit Hilfe der summierten Trapezregel in einer Genauigkeit von 10^{-2}.
b) Wie viele Funktionsauswertungen sind erforderlich, um die gleiche Genauigkeit bei Verwendung der summierten Simpson-Regel garantieren zu können?
c) [Nicht summierte Quadraturformeln] Der Fehler für die offene Newton-Cotes-Formel mit zwei Stützstellen ist

$$I(f) - I^{(1)}(f) = \frac{(b-a)^3}{108} f^{(2)}(\xi), \quad \text{für ein } \xi \in [a, b].$$

Begründen Sie warum der exakte Wert von $I(f)$ zwischen dem der Trapezregel und der offene Newton-Cotes-Formel mit zwei Stützstellen liegt.

Aufgabe 3.2 (Gauß-Quadraturformeln | 1 + 4 + 2 = 7 Punkte)

a) Ermitteln Sie den exakten Wert des Integrals

$$I(g) = \int_{0}^{1} g(x) \, dx, \quad g(x) = \sqrt{|x - 0.7|}$$

und skizzieren Sie die Funktion $g(x)$.

b) Ermitteln Sie approximativ einen Wert für das Integral

$$I(g) = \int_0^1 \sqrt{|x - 0.7|}\, dx$$

durch numerische Quadratur mit Hilfe der 3-Punkte Gauß-Quadraturformel $I^2(g)$.

c) Berechnen Sie erneut approximative Werte für $I(g)$ in dem Sie die Gauß-Quadraturformeln $I^2(g)$ und $I^0(g)$ (1-Punkte) jeweils auf den Teilintervallen $[0, 0.7]$ und $[0.7, 1]$ berechnen.

Berechnen Sie die Fehler $|I(g) - I^2(g; [0, 1])|$, $\quad |I(g) - (I^2(g; [0, 0.7]) + I^2(g; [0.7, 1]))|$ und $|I(g) - (I^0(g; [0, 0.7]) + I^0(g; [0.7, 1]))|$.

Wie kann man die unterschiedlichen Fehler erklären?

Aufgabe 3.3 (LR-Zerlegung ohne Pivotisierung 3 + 3 = 6 Punkte)

a) Formulieren Sie für folgendes Problem ein lineares Gleichungssystem und lösen Sie es mit Hilfe der LR-Zerlegung mittels Vorwärts und Rückwärtssubstitution:

"Wenn vier Ochsen und vier Schafe acht Taels Gold kosten, sowie drei Ochsen und sechs Schafe auch acht Taels, was ist dann der Preis eines jeden Tieres?"

b) Berechnen Sie die LR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 18 & 7 & 9 \\ 12 & 41/3 & 10 \\ 6 & 16/3 & 16/3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.4 (LR-Zerlegung mit Pivotisierung | 4 + 2 = 6 Punkte)

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 12 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 22 \\ -2 \\ 21 \end{pmatrix}$$

Lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$, indem Sie zunächst

a) die LR-Zerlegung von A mit Pivotisierung bestimmen, also P Permutationsmatrix, L untere Dreiecksmatrix mit Diagonale eins, R obere Dreiecksmatrix, sodass

$$PA = LR$$

gilt, und anschließend

b) das Gleichungssystem $Ax = b$ über den Zusammenhang $PAx = LRx = Pb$ mittels Vorwärts- und Rückwärtssubstitution lösen.

Programmieraufgabe 3.1 (Zusammengestzte Quadratur | 4 + 4 = 8 Punkte)

a) Implementieren Sie eine Funktion `[v]=myQuadraturSum1D(f,w,p,a,b,N)`, die eine zusammengestzte (summierte) Quadraturformel umsetzt. Dabei soll für die Eingabeargumente gelten:

- f ein function_handle der zu integrierenden Funktion;
- w ein Vektor der Dimension R welcher die Quadraturgewichte enthält;
- p ein Vektor der Dimension R welcher die Stützstellen der Quadraturformel auf dem Einheitsintervall enthält;
- a die untere Integrationsgrenze;
- b die obere Integrationsgrenze;
- N die Anzahl der Teilintervalle I_i, $i = 1, \dots, N$ mit $h = \frac{b-a}{N}$ und

$$I_i := [a + (i-1) \cdot h, a + i \cdot h].$$

Auf jedem Teilintervall I_i soll dann die durch w und p spezifizierte Quadraturformel umgesetzt und somit eine Näherung für

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{N} \int_{I_i} f(x)\mathrm{d}x$$

berechnet werden.

b) Testen Sie Ihre Implementierung für folgende Quadraturformeln:

- Summierte Trapezregel
- Summierte Simpson-Regel

und für die numerische Integration der Runge-Funktion

$$f(x) := \frac{1}{1 + 25x^2}$$

auf dem Interval $[-1, 1]$ und der Funktion

$$f(x) := e^x + 1$$

aus Programmieraufgabe 3.1 auf dem Interval $[0, 1]$. Erstellen Sie dazu zwei aussagekräftige Plots, welcher die drei Quadraturverfahren hinsichtlich des Fehlers gegenüber der exakten Lösung für $n = 1, 2, \dots, 1000$ vergleicht. Tragen Sie dabei den Fehler logarithmisch auf (mit dem Matlab-Befehl loglog).
Speichern Sie Ihren Test in einem Skript myQuadraturSum1DTest.m und zusätzlich den durch das Skript erstellten Plot als myQuadraturSum1DPlot.fig.