Prof. Dr. Dimitri Kuzmin
Dipl.-Math. Justus Klipstein
Numerische Mathematik für Physiker und Ingenieure

Abgabe der **Aufgaben bis Donnerstag, 10.05.2018, 16:15 Uhr vor der Vorlesung** (einzeln, zu zweit oder dritt) in den Briefkasten Ihrer Übungsgruppe:

Gruppe	Termin	Übungsleiter	Briefkasten
2	Montag 10:00-12:00	Korinna Rosin	107
3	Montag 12:00-14:00	Mirco Arndt	108
4	Montag 14:00-16:00	Marina Bangert	109
5	Montag 16:00-18:00	Marina Bangert	109
6	Dienstag 14:00-16:00	Justus Klipstein	108
7	Dienstag 16:00-18:00	Dr. Fatma Ibrahim	110

Die Briefkästen befinden sich im Foyer des Mathematikgebäudes. Bitte vermerken Sie unbedingt auf jeder Abgabe Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe. Eine Abgabe der theoretischen Übungsaufgaben per E-Mail ist nicht möglich.
Abgabe der **Programmieraufgaben bis Donnerstag, 10.05.2018, 24:00 Uhr** digital im Moodle-Arbeitsraum der Veranstaltung. Bei Abgabe zu zweit oder dritt bitte nur einmal einreichen und im Kommentar den Namen und E-Mail Adresse des/der Koautors/Koautorin/Koautoren nennen. Sie können die Aufgaben in MATLAB bzw. OCTAVE schreiben. Bitte den "Header" als Kommentar in die Programme einfügen.

Aufgabe 2.1 (Gleitpunktzahlen | 1 Punkte)

a) Bestimmen Sie alle dualen dreistelligen Gleitpunktzahlen mit einstelligem Exponenten sowie ihren dezimalen Wert.
b) Welchen dezimalen Wert haben die folgenden Gleitpunktzahlen des Dualsystems als Dezimalzahl?

$$x_1 = 0.1111 \cdot 2^{11}, \quad x_2 = 0.1101 \cdot 2^{-11}.$$

Aufgabe 2.2 (Konditionierung | 3 Punkte)

Bestimmung der Konditionierung für das Berechnen der kleineren der beiden Nullstellen des quadratischen Polynoms

$$y^2 - 2x_1 y + x_2 = 0, \quad \text{wobei} \quad x_1^2 > x_2$$

für dessen Parameter x_1 und x_2 angenommen wird.
Hinweis: Betrachten Sie dazu die Lösungsfunktion dieses Problems,

$$y = f(x_1, x_2) = x_1 - \sqrt{x_1^2 - x_2}.$$

Aufgabe 2.3 (Konditionierung | 4 Punkte)

a) Gegeben sei eine Funktion $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$\varphi(x, y) = \begin{bmatrix} x + y \\ e^{2x/y} \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie die vier Konditionszahlen k_{ij}, $1 \leq i, j \leq 2$. Wann ist das Problem gut konditioniert?

b) Untersuchen Sie die Konditionierung der folgenden Rechenoperationen:

1. Division: $f(x) = \frac{x}{y}$, $y \neq 0$,
2. Potenzbildung: $f(x, y) = x^y$, $x > 0$, speziell $f(x) = \sqrt{x}$.

Wie groß ist der maximale relative Fehler $\frac{|\Delta f|}{|f|}$ im Ergebnis, ausgedrück in der Form $\alpha\varepsilon + \mathbf{O}(\varepsilon^2)$, wenn die relativen Fehler $\frac{|\Delta x_i|}{|x_i|}$ in den Argumenten durch ε beschränkt sind?

Aufgabe 2.4 (Lagrange-Interpolation | 4+2 Punkte)

a) Die Funktion

$$f(x) = 5\sin(3\pi x) + 36x^2$$

soll mittels eines quadratischen Interpolationspolynoms an den Stützstellen

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{12} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{1}{6}$$

interpoliert werden. Bestimmen Sie das Lagrangesche-Interpolationspolynom $p \in P_2$ und werten Sie es für $p\left(\frac{1}{24}\right)$ aus. **Hinweis:** $\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

b) Geben Sie eine Abschätzung für den maximalen Fehler

$$\max_{x \in [0, \frac{1}{6}]} |f(x) - p(x)|$$

an, indem Sie die Abschätzung [Satz (Interpolationsfehler)] aus der Vorlesung verwenden, und eine möglichst scharfe (d.h. möglichst kleine) obere Schranke für den Term

$$\prod_{j=0}^{n} |x - x_j|$$

finden. Bestimmen Sie $|f(\frac{1}{24}) - p(\frac{1}{24})|$, und vergleichen Sie das Ergebnis mit der Fehlerschranke aus Ihrer Abschätzung.

Programmieraufgabe 2.1 (Interpolation | 4 + 6 Punkte)

In dieser Aufgabe wollen wir das Verhalten der Interpolierenden der Runge-Funktion für $n \to \infty$, sowie den Einfluss einer geschickten Wahl von Stützstellen numerisch untersuchen.

a) Schreiben Sie eine Funktion `[c]=myNewtonInterpol(x,f)`, die zu gegebenen Stützstellen $x_0, \dots, x_n$ und den zugehörigen Werten $f_0, \dots, f_n$ die Koeffizienten c_i des Newtonschen Interpolationspolynoms $p \in P_n$ berechnet.

b) Erstellen Sie ein Skript `myNewtonInterpolTest()`, welches für $n = 7, 12, 17$ das Newtonsche Interpolationspolynom zur **Runge-Funktion**

$$f(x) := \frac{1}{1 + 25x^2}$$

mit

- äquidistanten Knoten $x_i = -1 + \frac{2i}{n}$, $i = 0, \dots, n$ und
- Tschebyscheff-Knoten $x_i = \cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{2n+2}\right)$, $i = 0, \dots, n$

berechnet. Das Skript soll für jedes n in je einer eigenen `figure` folgende Plots für das Interval $[-1, 1]$ erstellen:

- die Runge-Funktion als durchgezogener, grüner Polygonzug,
- die äquidistanten Knoten als rote $*$ Markierungen,
- die Tschebyscheff-Knoten als blaue $*$ Markierungen,
- das zu den äquidistanten Stützstellen gehörige Interpolationspolynom als durchgezogener, roter Polygonzug und
- das entsprechende Tschebyscheff-Interpolationspolynom als durchgezogener, blauer Polygonzug.

Was beobachten Sie? Vergleichen Sie die Ergebnisse mit äquidistanten Stützstellen mit denen der Tschebyscheff-Stützstellen. Speichern Sie die drei Abbildungen jeweils als `PA2-1-N7.fig`, `PA2-1-N12.fig` und `PA2-1-N17.fig` ab. Das Skript soll schließlich noch den maximalen Fehler

$$\max_{\xi \in \Delta} |f(\xi) - p(\xi)|$$

auf einem feinen Gitter $\Delta = \{-1 + 2j/m,\ j = 0, \dots, m\}$ für $m = 100$ für die berechneten Interpolationspolynome p ausgeben.