Dies ist ein Übungszettel ohne Abgabe. Er ist als training für die Klausur gedacht und ergänzt ein Kriterium, das hinreichend für die Konergenz von einigen Iterativen Verfahren ist

Def.: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt strikt (streng oder stark) diagonaldominant, falls die Beträge ihrer Diagonalelemente a_{ii} jeweils echt größer sind als die Summe der Beträge der restlichen jeweiligen Zeileneinträge a_{ij}, d.h wenn für alle $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|$$

gilt. Dieses Kriterium wird auch als starkes Zeilensummenkriterium bezeichnet.

Anwendung des starken Zeilensummenkriteriums:
Gesucht sei die Lösung von $Ax = b, \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Falls A strikt diagonaldominant ist, konvergieren das Jacobi-, Gauß-Seidel- und SOR-Verfahren für beliebige Startwerte aus $x \in \mathbb{R}^n$.

Hinweis: Beachte, dies ist ein hinreichendes Kriterium welches die Systemmatrix A betrachtet. Die anderen hinreichenden Kriterien wie Spektralradius < 1, oder abgeleitete Matrix-Normen < 1 betrachten die Iterationsmatrix der Verfahren.

Aufgabe 11.1 (Alte Klausuraufgabe)

Überprüfen Sie folgende Behauptungen auf "wahr" oder "falsch" **und begründen Sie Ihre Antwort, wenn die Behauptung "falsch" ist.**

a) Für eine beliebige Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $m > n$ und $\operatorname{rang}(A) = n$ gilt: die Matrix $A^\top A$ ist symmetrisch und positiv definit.

b) Eine beliebige interpolatorische Quadraturformel $I^n(f) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \int_a^b L_k^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x$ mit $n+1$ Stützstellen ist exakt für alle Polynome $n+1$-ten Grades.

c) Das Jacobi-Verfahren zur Lösung von $Ax = b$ mit Iterationsmatrix J divergiert, falls der Spektralradius von A größer 1 ist ($\operatorname{spr}(A) > 1$).

d) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und es gelte $f(a) \cdot f(b) < 0$, dann konvergiert das Bisektionsverfahren immer gegen eine Nullstelle von f.

e) Wenn das Newton-Verfahren konvergiert, so konvergiert es automatisch quadratisch.

Aufgabe 11.2 (Alte Klausuraufgabe)

Bestimmen Sie das Interpolationspolynom $\varphi \in P_2$, welches die gegebenen Werte y_i an den Stützstellen x_i, $i = 1, 2, 3$, interpoliert. Geben Sie dazu die zugehörigen Lagrange-Basisfunktionen explizit an. Berechnen Sie nun $\varphi(1)$ und $\varphi(2)$.

x_i	-2	0	1
y_i	-10	2	5

Aufgabe 11.3 (Alte Klausuraufgabe)

Berechnen Sie zu gegebenem $k \in \mathbb{N}$ den exakten Wert des Integrals

$$I := \int_0^1 x^k \, \mathrm{d}x,$$

sowie eine numerische Approximation I^{Trapez} mit der Trapezregel. Bestimmen Sie eine möglichst kleine, nicht von k abhängige obere Schranke C für den Quadraturfehler, so daß $|I - I^{\text{Trapez}}| \leq C$ für alle k gilt.

Aufgabe 11.4 (Alte Klausuraufgabe)

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 6 & -2 \\ 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung $A = LR$.

b) Berechnen Sie die $\det(A)$ unter Verwendung der LR-Zerlegung.

c) Lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ durch Vorwärts- und Rückwärtssubstitution.

Aufgabe 11.5 (Alte Klausuraufgabe)

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = 10 - x - \frac{1}{2}\cos(x)$$

a) Begründen Sie, dass f **genau** eine Nullstelle auf $\mathbb{R}$ besitzt.

b) Wandeln Sie das Problem in ein Fixpunktproblem um, und begründen Sie, warum die Fixpunktiteration für jeden Startwert konvergiert.

Aufgabe 11.6 (Alte Klausuraufgabe)

Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie die Iterationsmatrix und Iterationsvorschrift des Jacobi-Verfahrens zur Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b, \quad b \in \mathbb{R}^3$ **explizit** an.

b) Ist das Jacobi-Verfahren bezüglich A konvergent?

Aufgabe 11.7 (Alte Klausuraufgabe)

Berechnen Sie die erste Iteration des Gradientenverfahrens zur Minimierung der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

Verwenden Sie als Startvektor $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1)^\top$.