Prof. Dr. Dimitri Kuzmin
Dipl.-Math. Justus Klipstein
Numerische Mathematik für Physiker und Ingenieure

Sommersemester 2018
Übungsblatt 1

Abgabe der **Aufgaben bis Donnerstag, 26.04.2018, 16:15 Uhr vor der Vorlesung** (einzeln, zu zweit oder dritt) in den Briefkasten Ihrer Übungsgruppe:

Gruppe	Termin	Übungsleiter	Briefkasten
2	Montag 10:00-12:00	Korinna Rosin	107
3	Montag 12:00-14:00	Mirco Arndt	108
4	Montag 14:00-16:00	Marina Bangert	109
5	Montag 16:00-18:00	Marina Bangert	109
6	Dienstag 14:00-16:00	Justus Klipstein	108
7	Dienstag 16:00-18:00	Dr. Fatma Ibrahim	110

Die Briefkästen befinden sich im Foyer des Mathematikgebäudes. Bitte vermerken Sie unbedingt auf jeder Abgabe Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe. Eine Abgabe der theoretischen Übungsaufgaben per E-Mail ist nicht möglich.
Abgabe der **Programmieraufgaben bis Donnerstag, 26.04.2018, 24:00 Uhr** digital im Moodle-Arbeitsraum der Veranstaltung. Bei Abgabe zu zweit oder dritt bitte nur einmal einreichen und im Kommentar den Namen und E-Mail Adresse des/der Koautors/Koautorin/Koautoren nennen. Sie können die Aufgaben in MATLAB bzw. OCTAVE schreiben. Bitte den "Header" als Kommentar in die Programme einfügen.

Die **Landauschen Symbole** zur quantitativen Beschreibung (Fehlerabschätzungen und Effizienzbetrachtungen) von Grenzprozessen wurden in der Vorlesung für $n \longrightarrow \infty$ eingeführt. Analog zu der in der Vorlesung angegebenen Definition der Landau-Symbole gilt

$$\begin{aligned} g(t) &= \mathbf{O}(h(t)) \quad (t \longrightarrow 0) \quad :\Longleftrightarrow |g(t)| \leq c\,|h(t)| \text{ für alle } t \in (0,t) \\ g(t) &= \mathbf{o}(h(t)) \quad (t \longrightarrow 0) \quad :\Longleftrightarrow |g(t)| \leq c(t)\,|h(t)| \text{ für alle } t \in (0,t) \text{ und } \lim_{t\to 0} c(t) = 0. \end{aligned}$$

und es sind folgende Definitionen äquivalent

$$\begin{aligned} f(x) = \mathbf{O}(g(x)) \text{ für } x \longrightarrow 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \text{es existiert eine (offene) Umgebung } B_\delta(0) \text{ und} \\ &\quad\quad C > 0, \text{ so dass } \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq C \;\text{ für alle } x \in B_\delta(0) \setminus \{0\} \\ &\Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to 0} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = C \neq 0, \quad (C: \text{ Konstante}) \end{aligned}$$

bzw.

$$f(x) = \mathbf{o}(g(x)) \text{ für } x \longrightarrow 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to 0} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \lim_{x\to 0} c(x) = 0.$$

Die Definitionen der Landau-Symbole für $x \longrightarrow \infty$ sind analog.

Bemerkung:

- Aus $f(x) = \mathbf{o}(g(x))$ für $x \longrightarrow 0$ folgt $f(x) = \mathbf{O}(g(x))$ für $x \longrightarrow 0$, aber im allgemeinen nicht die Umkehrung. Ein Gegenbeispiel ist $f(x) = 1$ und $g(x) = 1$.
- Das kleine $\mathbf{o}$ wird verwendet, um auszudrücken, dass ein Ausdruck vernachlässigbar klein gegenüber dem angegebene Ausdruck ist (asymptotisch vernachlässigbar).
- Man schreibt $f(n) = \mathbf{O}(g(n))$ für $n \longrightarrow \infty$ falls f nicht wesentlich schneller als g wächst. Das größe $\mathbf{O}$ wird verwendet, um eine maximale Größenordnung anzugeben (asymptotische obere Schranke).
- Die Landau-Symbole stehen immer auf der rechten Seite einer Gleichung.
- Formal steht $\mathbf{O}(g(x))$ für die Menge aller Funktionen, für die $C\,|g(x)|$ eine obere Schranke ist. Das Gleichheitszeichen steht also für eine Mengeninklusion, dies bedeutet

  $$\text{"}f(x) = \mathbf{O}(g(x))\text{" heißt eigentlich "}f(x) \in \mathbf{O}(g(x))\text{".}$$

  Die Mengeninklusion ist nicht symmetrisch und "'="' ist hier keine Äquivalenzrelation mehr! Dies gilt natürlich auch für $\mathbf{o}(g(x))$.

Aufgabe 1.1 (Landau-Symbole | 3 Punkte)

Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke in der Form $f(h) = \mathbf{O}(h^\alpha)$ und $f(h) = \mathbf{o}(h^\alpha)$, α maximal, $h \longrightarrow 0$ bzw. in der Form $g(n) = \mathbf{O}(n^\beta)$ und $g(n) = \mathbf{o}(h^\beta)$, β minimal, $n \longrightarrow +\infty$.

(a) $f(h) := 4\,(h^3 + h)^2 - h^4$,

(b) $f(h) := \frac{\sinh(h)}{h} - 1$

(c) $g(n) := 4\,(n^3 + n)^2 - n^4$.

Tipp: $\sinh(h) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{h^{2j+1}}{(2j+1)!}$.

Aufgabe 1.2 (Horner-Schema | 3 Punkte)

Erstellen Sie für das Polynom

$$p(x) = 11 + 7x - 5x^2 - 4x^3 + 2x^4,$$

an der Stelle $\xi = 2$ die Horner-Tabelle.

Aufgabe 1.3 (Interpolation | 4+2 Punkte)

a) Bestimmen Sie das Interpolationspolynom p zu den Stützpunkten

i	0	1	2	3
x_i	0	1	3	4
y_i	1	3	2	4

in Newton-Darstellung und skizzieren Sie es.

b) Fügen Sie den Stützpunkt $(x_4, y_4) = (6, 6)$ hinzu, und lösen Sie Teilaufgabe a).

Programmieraufgabe 1.1 (Auslöschung | 5 Punkte)

Erhöhen Sie in MatLab die Anzahl der Nachkommastellen für die Ausgabe auf dem Bildschirm mit `format long` und berechnen Sie Näherungswerte von

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \approx e^x$$

für $x = -5.5$ mit $n = 3, 6, 9, \ldots, 30$ auf die drei folgenden Arten:

a) Mit obiger Näherung.

b) Mit der Umformung $e^{-5.5} = \frac{1}{e^{5.5}}$ und obiger Näherung.

c) Mit der Umformung $e^{-5.5} = (e^{-0.5})^{11}$ und obiger Näherung.

Vergleichen Sie mit einem möglichst genauen Wert von $e^{-5.5} \approx 0.0040867714$. Wie sind die beobachteten Effekte zu erklären?

Programmieraufgabe 1.2 (Auslöschung | 5 Punkte)

Das Polynom

$$P_7(x) = x^7 - 7x^6 + 21x^5 - 35x^4 + 35x^3 - 21x^2 + 7x - 1 = (x-1)^7$$

hat eine einzige Nullstelle $x^* = 1$. Für $x > 1$ gilt $P_7(x) > 0$ und für $x < 1$ gilt $P_7(x) < 0$. Man wähle in MatLab den Datentyp `single` und plotte den Verlauf von $(x-1)^7$ für $x \in [0.8\,,\,1.2]$ in Schritten zu $5 \cdot 10^{-5}$. Nun werte man die sog. Horner-Form von P_7 aus

$$((((((x-7)x+21)x-35)x+35)x-21)x+7)x-1$$

und plotte das Ergebnis mit den gleichen Schrittweiten. Erklären Sie die Beobachtung.