Prof. Dr. Dimitri Kuzmin
Dipl.-Math. Justus Klipstein
Numerische Mathematik für Physiker und Ingenieure

Abgabe der **Aufgaben bis Donnerstag, 21.06.2018, 16:15 Uhr vor der Vorlesung** (einzeln, zu zweit oder dritt) in den Briefkasten Ihrer Übungsgruppe:

Gruppe	Termin	Übungsleiter	Briefkasten
2	Montag 10:00-12:00	Korinna Rosin	107
3	Montag 12:00-14:00	Mirco Arndt	108
4	Montag 14:00-16:00	Marina Bangert	109
5	Montag 16:00-18:00	Marina Bangert	109
6	Dienstag 14:00-16:00	Justus Klipstein	108
7	Dienstag 16:00-18:00	Dr. Fatma Ibrahim	110

Die Briefkästen befinden sich im Foyer des Mathematikgebäudes. Bitte vermerken Sie unbedingt auf jeder Abgabe Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe. Eine Abgabe der theoretischen Übungsaufgaben per E-Mail ist nicht möglich.
Abgabe der **Programmieraufgaben bis Donnerstag, 21.06.2018, 24:00 Uhr** digital im Moodle-Arbeitsraum der Veranstaltung. Bei Abgabe zu zweit oder dritt bitte nur einmal einreichen und im Kommentar den Namen und E-Mail Adresse des/der Koautors/Koautorin/Koautoren nennen. Sie können die Aufgaben in MATLAB bzw. OCTAVE schreiben. Bitte den "Header" als Kommentar in die Programme einfügen.
Übungsgruppe 5 am 18.6.18 um 16-18Uhr fällt aus.

Aufgabe 7.1 (Fixpunktsatz von Banach | 4 + 6 + 2 Punkte)

Sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$h(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{3}x^2 - x + \frac{1}{6}.$$

a) Begründen Sie (ohne die Nullstellen von h explizit zu berechnen), dass h im Intervall $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ *genau eine* Nullstelle x^* hat.

b) Wandeln Sie das Problem in ein Fixpunktproblem um und begründen Sie die Konvergenz der Fixpunktiterationsfolge mittels Fixpunktsatz von Banach.
Hinweis: Zur Anwendung des Fixpunktsatzes von Banach muss gezeigt werden, dass die Fixpunktabbildung selbstabbildend und *eine Kontraktion ist.*

c) Schätzen Sie die Anzahl der Iterationsschritte N a priori ab, die man benötigt, damit $|x_N - x^*| \leq 10^{-3}$ gilt (mit Startwert $x_0 = 0$).

Aufgabe 7.2 (Fixpunktsatz von Banach | 4 + 6 Punkte)

Gesucht ist die Lösung $z \in [0.5,\ 0.62]$ der Gleichung $x + \ln x = 0$.

a) Begründen Sie, dass im betrachteten Intervall genau eine Lösung z von $x + \ln x = 0$ exitiert.

b) Untersuchen Sie mit Hilfe des Fixpunktsatzes von Banach, ob die folgenden Iterationen zur Lösung der Gleichung $x + \ln x = 0$ geeignet sind:

1. $x_{t+1} = -\ln x_t =: g_1(x_t)$,
2. $x_{t+1} = e^{-x_t} =: g_2(x_t)$,
3. $x_{t+1} = \frac{1}{2}\left(x_t + e^{-x_t}\right) =: g_3(x_t)$.

Überlegen Sie dabei insbesondere, ob die Iterationen zur Ausgangsgleichung äquivalent sind (also das Problem $x + \ln x = 0$ lösen).

Programmieraufgabe 7.1 (Newton-Verfahren | 4 + 2 + 1 Punkte)

Zur Approximation einer Nullstelle einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soll das Newton-Vverfahren getestet werden. Gehen Sie davon aus, dass die Funktion f sowie deren Ableitung f' als `function_handle` `f` bzw. `df` vorliegen. Das Verfahren soll abbrechen, sobald eine Genauigkeit von

$$|x_k - x_{k-1}| < 10^{-12}$$

erreicht wurde.

a) Schreiben Sie eine Funktion `[x,e,v]=myNewton(f,df,x0)`, welche mit Hilfe des *Newton-Verfahrens* eine Nullstelle von f berechnet. Das Verfahren soll spätestens nach 50 Iterationen abbrechen und jeweils einen Vektor $\mathbf{x}$ der Iterierten x_k, einen Vektor $\mathbf{e}$ der Fehler $|x_k - x_{k-1}|$ und einen Vektor $\mathbf{v}$ der Funktionswerte $f(x_k)$ zurückgeben.

b) Erstellen Sie nun einen `function_handle` `f` für die Funktion

$$f(x) = \cos^2(2x) - x^2 \ ,$$

sowie `df` für deren Ableitung. Testen Sie nun die Funktion aus **a)**. Wählen Sie dafür als Startwert $x_0 = 0.75$ und erstellen Sie einen Plot `PA8.1.fig` mit dem absoluten Fehler $|x_k - x_{k-1}|$ (y-Achste) gegen die Anzahl der Iterationsschritte (x-Achse). Die y-Achse soll logarithmisch skaliert werden, verwenden Sie dazu den Befehl `semilogy`. Der Plot soll auch den Fehlerverlauf des Bisektionsverfahren aus Programmieraufgabe 6.1 enthalten.

c) Stimmt die im Plot aus Teilaufgabe **b)** beobachtbare numerische Konvergenzrate mit der aus der Theorie zu erwartenden Konvergenzgeschwindigkeit überein?