

Abgabe der **Aufgaben bis Donnerstag, 12.07.2018, 16:15 Uhr vor der Vorlesung** (einzeln, zu zweit oder dritt) in den Briefkasten Ihrer Übungsgruppe:

Gruppe	Termin	Übungsleiter	Briefkasten
2	Montag 10:00-12:00	Korinna Rosin	107
3	Montag 12:00-14:00	Mirco Arndt	108
4	Montag 14:00-16:00	Marina Bangert	109
5	Montag 16:00-18:00	Marina Bangert	109
6	Dienstag 14:00-16:00	Justus Klipstein	108
7	Dienstag 16:00-18:00	Dr. Fatma Ibrahim	110

Die Briefkästen befinden sich im Foyer des Mathematikgebäudes. Bitte vermerken Sie unbedingt auf jeder Abgabe Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe. Eine Abgabe der theoretischen Übungsaufgaben per E-Mail ist nicht möglich.

Aufgabe 10.1 (Gradienten-Verfahren | 6 Punkte)

Berechnen Sie die ersten drei Iterierten des Gradientenverfahrens zur Minimierung von

$$f(x) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top A \mathbf{x} - \mathbf{b}^\top \mathbf{x}$$

für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ und mit

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Verwenden Sie den Startvektor $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0)^\top$.

Bonusaufgaben

Die alten Klausuraufgaben zählen nicht zu den theoretischen Abgaben und die Bearbeitung ist freiwillig.

Aufgabe 10.2 (Alte Klausuraufgabe | 2 Bonuspunkte)

Beantworten Sie folgende Fragen und begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

- Kann man das Newton-Verfahren als Fixpunktiteration betrachten?
- “Für jede nicht-singuläre, quadratische Matrix A existiert eine LR -Zerlegung der Form $A = LR$ (L linke untere Dreiecksmatrix, R rechte obere Dreiecksmatrix).” Ist diese Behauptung wahr oder falsch?
- Es sollen die Daten $(x_0, f_0), \dots, (x_n, f_n)$ interpoliert werden. Welche Darstellung des Interpolationspolynoms ist bei einer möglichen, späteren Hinzunahme weiterer Datenpaare sinnvoll?

- d) Es soll das Integral $\int_a^b p(x)dx$ numerisch approximiert werden ($a, b \in \mathbb{R}$). "Die summierte Trapezregel ist stets exakt, wenn p ein Polynom vom Grade ≤ 2 ist." Ist die Behauptung wahr oder falsch?

Aufgabe 10.3 (Alte Klausuraufgabe | 2 Bonuspunkte)

Gegeben seien die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 7 \\ 2 & 5 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{und der Vektor} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 11 \end{bmatrix},$$

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit Hilfe der gegebenen LR -Zerlegung. *Hinweis: Alle anderen Lösungswege geben 0 Punkte.*

Aufgabe 10.4 (Alte Klausuraufgabe | 2 Bonuspunkte)

Betrachten Sie die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := x^3 - x.$$

Gesucht sind die Extrema von f .

- Berechnen Sie die Extrema von f .
- Formulieren Sie die Iterationsvorschrift des Newton-Verfahrens zur Berechnung eines Extremums von f .
Hinweis: Wenden Sie das Newton-Verfahren zur Berechnung einer Nullstelle der ersten Ableitung von f an.
- Führen Sie zwei Schritte des Newton-Verfahrens mit dem Startwert $x = 1$ durch.

Aufgabe 10.5 (Alte Klausuraufgabe | 2 Bonuspunkte)

Betrachten Sie die Datenpaare (x_i, y_i) , $i = 0, 1, 2, 3$, gegeben durch

i	0	1	2	3
x_i	-2	0	1	3
y_i	2	1	2	1

Es sei p_k , $k \in \{1, 2, 3\}$, das Polynom, welches die Daten (x_i, y_i) für $i = 0, \dots, k$ interpoliert. Berechnen Sie p_1 , p_2 und p_3 und geben Sie die Polynome jeweils bezüglich der NEWTON-Basis an.

