Prof. Dr. Dimitri Kuzmin
Dipl.-Math. Justus Klipstein
Numerische Mathematik für Physiker und Ingenieure

Abgabe der **Aufgaben bis Donnerstag, 14.06.2018, 16:15 Uhr vor der Vorlesung** (einzeln, zu zweit oder dritt) in den Briefkasten Ihrer Übungsgruppe:

Gruppe	Termin	Übungsleiter	Briefkasten
2	Montag 10:00-12:00	Korinna Rosin	107
3	Montag 12:00-14:00	Mirco Arndt	108
4	Montag 14:00-16:00	Marina Bangert	109
5	Montag 16:00-18:00	Marina Bangert	109
6	Dienstag 14:00-16:00	Justus Klipstein	108
7	Dienstag 16:00-18:00	Dr. Fatma Ibrahim	110

Die Briefkästen befinden sich im Foyer des Mathematikgebäudes. Bitte vermerken Sie unbedingt auf jeder Abgabe Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe. Eine Abgabe der theoretischen Übungsaufgaben per E-Mail ist nicht möglich.
Abgabe der **Programmieraufgaben bis Donnerstag, 14.06.2018, 24:00 Uhr** digital im Moodle-Arbeitsraum der Veranstaltung. Bei Abgabe zu zweit oder dritt bitte nur einmal einreichen und im Kommentar den Namen und E-Mail Adresse des/der Koautors/Koautorin/Koautoren nennen. Sie können die Aufgaben in MatLab bzw. Octave schreiben. Bitte den "Header" als Kommentar in die Programme einfügen.

Aufgabe 6.1 (Newton-Verfahren | 2+2+2+2 = 8 Punkte)

a) Ermitteln Sie eine Nullstelle der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^4 - 4x^2 + 4$ durch Anwendung des Newton-Verfahrens mit Startwert $x_0 = 1.1$. Berechnen Sie die ersten 6 Iterierten auf mind. 8 Stellen genau.

b) Berechnen Sie nun die Nullstellen von f analytisch (d. h. exakt).

c) Vergleichen Sie die Geschwindigkeit mit der des Newton-Verfahrens für $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) := x^4 - 5x^2 + 6$ bei gleichem Startwert.

d) Begründen Sie die unterschiedliche Konvergenzgeschwindigkeit der Verfahren aus **a)** und **c)**.
Hinweis: siehe Aufgabe 8.2.

Aufgabe 6.2 (Newton-Verfahren und mehrfache Nullstellen | 2+4+3 =7 Punkte)

Die Konvergenz des Newton-Verfahrens kann bei mehrfachen Nullstellen durch folgenden Ansatz verbessert werden:

$$\Phi(x^{(k)}) := x^{(k)} - \gamma \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}, \; \gamma \in \mathbb{R}$$

Wir betrachten den Fall einer doppelten Nullstelle x^*, also $f(x^*) = f'(x^*) = 0$, $f''(x^*) \neq 0$. Im Folgenden kann ohne Einschränkung angenommen werden, dass $f'(x) \neq 0$ in einer Umgebung U von x^* und dass f zweimal stetig differenzierbar ist.

a) Wie ist $\Phi(x^*)$ zu setzen, damit Φ stetig ist?

b) Bestimmen Sie $\Phi'(x)$ für $x \in U$, sowie $\Phi'(x^*)$.

c) Berechnen Sie $\lim_{x \to x^*} \Phi'(x)$ (l'Hôpital). Wie muss also γ gewählt sein, so dass das Verfahren lokal quadratisch gegen x^* konvergieren kann?
Hinweis: Nutzen Sie Satz 5.2 im Skript von Rolf Rannacher.

Programmieraufgabe 6.1 (Bisektionsverfahren | 4 + 2 + 1 = 7 Punkte)

Zur Approximation einer Nullstelle einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soll das Bisektionsverfahren (Intervallschachtelungsverfahren) getestet werden. Gehen Sie davon aus, dass die Funktion f als `function_handle` `f` vorliegt. Das Verfahren soll abbrechen, sobald eine Genauigkeit von

$$|x_k - x_{k-1}| < 10^{-12}$$

erreicht wurde.

a) Schreiben Sie eine Routine `[x,e,v]=mybisect(f,x00,x0)`, welche mit Hilfe des *Bisektionsverfahrens* (Intervallschachtelungsverfahrens) eine Nullstelle von f berechnet. Die Routine soll jeweils einen Vektor $\mathbf{x}$ der Iterierten x_k, einen Vektor $\mathbf{e}$ der Fehler $|x_k - x_{k-1}|$ und einen Vektor $\mathbf{v}$ der Funktionswerte $f(x_k)$ zurückgeben.

b) Erstellen Sie nun in einem Skript `myBisectTest` einen `function_handle` `f` für die Funktion

$$f(x) = \cos^2(2x) - x^2.$$

Testen Sie damit die Routine aus **a)**: Wählen Sie als Startwerte $x_0 = 0.75$ und $x_{00} = 0$ und erstellen Sie einen Plot `PA7.1.fig` mit dem absoluten Fehler $|x_k - x_{k-1}|$ (y-Achse) gegen die Anzahl der Iterationsschritte (x-Achse). Die y-Achse soll logarithmisch skaliert werden, verwenden Sie dazu den Befehl `semilogy`.

c) Stimmt die im Plot aus Teilaufgabe **b)** beobachtbare numerische Konvergenzrate mit der aus der Theorie zu erwartenden Konvergenzgeschwindigkeit überein?