Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

Fachbereich 10
Mathematik und
Informatik

Höhere Algebra II

gelesen von Prof. Dr. Lutz Hille

Mitschrift von Phil Steinhorst

Wintersemester 2014/2015

Stand: 18. Oktober 2014

Vorwort

Der vorliegende Text ist eine Mitschrift zur Vorlesung Höhere Algebra II, gelesen von Prof. Dr. Lutz Hille an der WWU Münster im Wintersemester 2014/2015. Der Inhalt entspricht weitestgehend dem Tafelanschrieb während der Vorlesung. Für die Korrektheit des Inhalts wird keinerlei Garantie übernommen. Bemerkungen, Korrekturen und Ergänzungen kann man folgenderweise loswerden:

- persönlich durch Überreichen von Notizen oder per E-Mail
- durch Abändern der entsprechenden TeX-Dateien und Versand per E-Mail an mich
- direktes Mitarbeiten via GitHub. Dieses Skript befindet sich im `latex-wwu`-Repository von Jannes Bantje:

  `https://github.com/JaMeZ-B/latex-wwu`

Themenübersicht

Hier kommt eine Themenübersicht hin – oder vielleicht auch nicht.

Literatur

- T. A. Springer: Linear Algebraic Groups
- H. Kraft: Geometrische Methoden in der Invariantentheorie (Aspekte der Mathematik)
- W. Crawley-Boevey: Lectures on representations of quivers

Vorlesungswebsite

Folgt noch.

Phil Steinhorst
p.st@wwu.de

Inhaltsverzeichnis

0 Einführung

13.10. 1. Wir betrachten die algebraische Gruppe $\mathrm{GL}_n = \mathrm{GL}_n(k)$; meist ist $k = \mathbb{C}$ oder allgemeiner $k = \overline{k}$ algebraisch abgeschlossen und $\mathrm{char}(k) = 0$. $\mathrm{GL}_n = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \subseteq M_n(\mathbb{C})$ ist (bzgl. der üblichen Topologie) eine offene Teilmenge. Später betrachten wir die viel gröbere **Zariski-Topologie**.
Sei $m = n^2$ und $\mathbb{A}^m \subseteq \mathbb{C}^m$ ein m-dimensionaler affiner Vektorraum. Wir können $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ auch folgendermaßen charakterisieren:
$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) = M_n(\mathbb{C}) \setminus V(\det = 0),$$
wobei $V(f = 0) = \{x \in \mathbb{A}^m : f(x) = 0\}$ die Nullstellenmenge oder **Verschwindungsmenge** der polynomialen Funktion $f\colon \mathbb{A}^m \to \mathbb{C}$, $f \in k[x_1, \dots, x_m]$ bezeichnet.

2. **Beispiel:** Sei $\mathbb{A}^m = M_n(\mathbb{C})$. $G := \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ist eine Gruppe. Können wir die Gruppenverknüpfung, die Inversenbildung und das neutrale Element als polynomiale Funktion auffassen?
$$\begin{aligned} \mu\colon G \times G &\longrightarrow G \\ (g,h) &\longmapsto gh \end{aligned} \qquad \begin{aligned} i\colon G &\longrightarrow G \\ g &\longmapsto g^{-1} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} e\colon \{x\} &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto e = \mathbb{1}_n \end{aligned}$$
e ist offensichtlich polynomial und μ auch (vgl. Matrixmultiplikation). Jedoch ist i nicht polynomial, da nach Cramerscher Regel gilt:
$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \mathrm{adj}(A)$$
Daher müssen wir auch Quotienten polynomialer Abbildungen mit Nenner ungleich 0 zulassen.

Idee

Eine lineare algebraische Gruppe ist abgeschlossen in GL_n und die Gruppenabbildungen sind Quotienten polynomialer Abbildungen, sodass folgende Eigenschaften erfüllt sind (d.h. die folgenden Diagramme sind kommutativ):

Assoziativität: $\mu \circ (\mu, \mathrm{id}) = \mu \circ (\mathrm{id}, \mu)$

$$\begin{tikzcd} G \times G \times G \arrow[r, "{(\mu,\mathrm{id})}"] \arrow[d, "{(\mathrm{id},\mu)}"] & G \times G \arrow[d, "\mu"] \\ G \times G \arrow[r, "\mu"] & G \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (g,h,l) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (gh,l) \arrow[dr, mapsto] & \\ (g,hl) \arrow[r, mapsto] & g(hl) \overset{!}{=} (gh)l \end{tikzcd}$$

Inverse: $e \circ p = \mu \circ (\mathrm{id}, i) \circ \Delta$ bzw. $e \circ p = \mu \circ (i, \mathrm{id}) \circ \Delta$

$$\begin{tikzcd} & G \times G \arrow[d, "{(\mathrm{id},i)}"] \\ G \arrow[ur, "\Delta"] \arrow[r] \arrow[d, "p"] & G \times G \arrow[d, "\mu"] \\ \{x\} \arrow[r, "e"] & G \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & (g,g) \arrow[d, mapsto] \\ g \arrow[ur, mapsto] \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (g,g^{-1}) \arrow[d, mapsto] \\ e \arrow[r, mapsto] & e \overset{!}{=} g \cdot g^{-1} \end{tikzcd}$$

Neutrales Element: $\mu \circ (e, \mathrm{id}) = \mathrm{id} = \mu \circ (\mathrm{id}, e)$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "{(e,\mathrm{id})}"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}"'] & G \times G \arrow[r, "\mu"] & G \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} g \arrow[r, mapsto] \arrow[rr, bend right, mapsto] & (e,g) \arrow[r, mapsto] & eg \overset{!}{=} g \end{tikzcd}$$

Definition 0.1 (polynomiale und rationale Funktion)

- $f\colon \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$ heißt **polynomial** bzw. **Morphismus affiner Varietäten**, falls
$$\big(f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_m(x_1,\dots,x_n)\big) = f(x_1,\dots,x_n)$$
mit $f_j \in k[x_1,\dots,x_n]$ für alle $j \in \{1,\dots,n\}$.

- Sei $U \subseteq \mathbb{A}^n$ offen (im klassischen Sinne oder bzgl. Zariski-Topologie). $f\colon U \to \mathbb{A}^m$ heißt **polynomial**, falls $f = \frac{h}{g}$ mit $h, g \in k[x_1,\dots,x_n]$ und $g(x) \neq 0$ für alle $x \in U$. $\lceil f_j = \frac{h_j}{g_j}$ komponentenweise$\rfloor$

- f wie oben heißt **rational**, fall $f = \frac{h}{g}$ wie oben mit $g \not\equiv 0$ auf U. f ist im Allgemeinen keine Abbildung, sondern nur auf $U \setminus V(g=0)$ definiert.

Beispiel 0.2 (Beispiele für polynomiale und rationale Funktionen)

- $\mathrm{GL}_n \to \mathrm{GL}_n$ mit $g \mapsto g^{-1}$ ist polynomial, $M_n \to M_n$ mit „$g \mapsto g^{-1}$“ ist rational.

- $\det\colon \mathrm{GL}_n \to \mathbb{C}$ und $\det\colon M_n \to \mathbb{C}$ ist polynomial.

- $\det^{-1}\colon M_n \to \mathbb{C}$ ist rational und $\det^{-1}\colon \mathrm{GL}_n \to \mathbb{C}$?

- $\mathbb{A}^1 = \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$ mit $z \mapsto e^{2\pi i z}$ ist nicht polynomial.

Definition 0.3 (Zariski-Topologie)

Seien $g_1,\dots,g_m \in k[x_1,\dots,x_n]$ und $I = \langle g_1,\dots,g_m\rangle$ das von $g_1,\dots,g_m$ erzeugte Ideal in $k[x_1,\dots,x_n]$. 16.10.
$M \subseteq \mathbb{A}^n$ heißt abgeschlossen bzgl. der **Zariski-Topologie**, falls gilt:
$$M = V(I) = \{x \in \mathbb{A}^n : g_i(x) = 0 \text{ für } 1 \leq i \leq m\}$$

Beispiel

- Es ist $V(0) = \mathbb{A}^n$ und $V(1) = \emptyset$.

- $GL_n(\mathbb{C})$ ist offen in $M_n(\mathbb{C})$.

- $GL_n(\mathbb{C})$ lässt sich jedoch auch ”abschließen” vermöge:
$$\begin{aligned} \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) &\hookrightarrow M_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C} \\ A &\mapsto \left(A, \frac{1}{\det(A)}\right) \end{aligned}$$

Ab jetzt immer, wenn nichts anderes gesagt, offen und abgeschlossen bezüglich Zariski-Topologie!

Definition 0.4 (Lie-Algebra und Lie-Klammer)

Sei V ein (endlichdimensionaler) k-Vektorraum. Eine Abbildung
$$\begin{aligned} [\cdot,\cdot]\colon V \times V &\longrightarrow V \\ (v,w) &\longmapsto [v,w] \end{aligned}$$
heißt **Lie-Klammer**, falls sie folgende Eigenschaften erfüllt:

1) bilinear

2) schiefsymmetrisch, d.h. $[v,w] = -[w,v]$

3) **Jacobi-Identität**: $[[u,v],w]+[[v,w],u]+[[w,u],v]=0$

Das Paar $(V,[\cdot,\cdot])$ heißt **Lie-Algebra**.

Beispiele

- Der k-Vektorraum V mit der trivialen Lie-Klammer $[v,w]:=0$ heißt abelsche Lie-Algebra.
- Die allgemeine lineare Lie-Algebra $\mathfrak{gl}_n(k):=M_n(k)$ mit der Lie-Klammer $[A,B]:=AB-BA$.
- Die spezielle lineare Lie-Algebra $\mathfrak{sl}_n(k):=\mathrm{SL}_n(k)$ als Lie-Unter-Algebra von $\mathfrak{gl}_n(k)$, zum Beispiel für $n=2$ und $k=\mathbb{C}$:

$$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}):=\{A\in M_2(\mathbb{C}):\mathrm{tr}(A)=0\}=\left\langle h=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}, e=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, f=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right\rangle$$

Es ist $[h,e]=2e,[h,f]=-2f$ und $[e,f]=h$, also besitzt die Abbildung $[h,\cdot]\colon V\to V$ die Eigenwerte 2 und -2.

Definition 0.5 (lineare algebraische Gruppe)
Sei $G\leq\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ eine abgeschlossene Untergruppe, dann heißt G **lineare algebraische Gruppe**.

Ab jetzt: "algebraische Gruppe" = "lineare algebraische Gruppe" = "affine algebraische Gruppe"

Zu einer algebraischen Gruppe G definieren wir die zugehörige Lie-Algebra durch

$$\mathrm{Lie}(G):=\mathfrak{g}:=T_eG,$$

wobei T_eG den Tangentialraum in $e\in G$ bezeichnet.

$$T_eV(f_1,\dots,f_n)=\left\{x\in\mathbb{A}^n:\frac{d}{dt}f_i(e+tx)\Big|_{t=0}=0\right\}\text{ über }k=\mathbb{C}$$

Beispiel

- Betrachte $f=x_1^2-x_2$ in $\mathbb{A}^2$, dann ist

$$\begin{aligned}T_{(0,0)}V(f)&=\left\{x\in\mathbb{A}^2:\frac{d}{dt}f((0,0)+t(x_1,x_2))\big|_{t=0}=0\right\}=\left\{x\in\mathbb{A}^2:\frac{d}{dt}(tx_1)^2-tx_2\big|_{t=0}=0\right\}\\&=\left\{x\in\mathbb{A}^2:2tx_1-x_2\big|_{t=0}=0\right\}=\{x\in\mathbb{A}^2:x_2=0\}\\T_{(1,1)}V(f)&=\{x\in\mathbb{A}^2:2x_1-x_2=0\}\end{aligned}$$

- $T_E\,\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})=\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})=\left\{A\in M_n(\mathbb{C}):\frac{d}{dt}\det(E+tA)-1\big|_{t=0}=0\right\}=\{A\in M_n(\mathbb{C}):\mathrm{tr}(A)=0\}$, denn:

$$\det(E+tA)=\det\underbrace{\begin{pmatrix}1+ta_{11}&&ta_{ij}\\&\ddots&\\ta_{ij}&&1+ta_{nn}\end{pmatrix}}_{=:(c_ij)_{ij}}=\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)\prod_{i=1}^n c_{i,\sigma(i)}=1+t\cdot\mathrm{tr}(A)+t^2\dots+t^n$$

$$\Rightarrow\frac{d}{dt}\det(E+tA)\big|_{t=0}=\mathrm{tr}(A)$$

Index

Liste der Sätze und Definitionen