Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

Zusammenfassung Zusammenfassung Analysis II

Zusammenfassung mit ausgewählten Beweisen

Jannes Bantje

11. August 2013

Erstellt mit LaTeX

Inhaltsverzeichnis

1 Funktionenfolgen und Potenzreihen

1.1 Definition: Konvergenz von Funktionenfolgen

Sei M eine Menge und $f : M \to \mathbb{C}$, $f_n : M \to \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ Funktionen

a) $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ **punktweise**, falls für jedes $x \in M$ $f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$ gilt. D.h.

$$\forall x \in M \, \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

b) $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ **gleichmäßig**, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} : \forall x \in M, n \geq N : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

c) **Supremumsnorm:** $\|f\|_{\infty,M} := \sup \{ |f(x)| \mid x \in M \} \in [0, \infty)$

Weiter gilt:

- Gleichmäßige Konvergenz $\Longrightarrow$ punktweise Konvergenz
- $\|f\|_{\infty,M} < \infty \iff f$ beschränkt
- $\boxed{f_n \xrightarrow{n\to\infty} f \text{ gleichmäßig} \iff \|f_n - f\|_{\infty,M} \xrightarrow{n\to\infty} 0}$

1.2 Der Grenzwert eine stetigen gleichmäßig konvergierenden Funktionenfolge ist stetig

Sei $M \subset \mathbb{C}$ eine Menge und $f : M \to \mathbb{C}$, $f_n : M \to \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ Funktionen. Falls die f_n stetig sind und gleichmäßig gegen f konvergieren, so ist f stetig.

Beweis
Sei $x_0 \in M$. Sei $\varepsilon > 0$. $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ gleichmäßig $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall x \in M : |f_N(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. f_N ist stetig in x_0

$$\Rightarrow \exists \delta > 0 : |f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}, \text{ falls } |x - x_0| < \delta$$

Für $x \in M$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

1.3 Konvergenz von Reihen basierend auf Funktionenfolgen

Sei M eine Menge. Seien $f_k : M \to \mathbb{C}, k \in \mathbb{N}$ Funktionen mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_{\infty,M} < \infty$$

Dann konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ absolut und gleichmäßig gegen eine Funktion $f : M \to \mathbb{C}$, d.h. $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ konvergiert absolut für jedes $x \in M$ und $\sum_{k=0}^{n} f_k \xrightarrow{n\to\infty} f$ gleichmäßig.

1.4 Gleichmäßige Konvergenz ist verträglich mit Integration

Seien $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ stetig. f_n konvergiere gleichmäßig gegen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \left(= \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x \right)$$

Beweis
Nach 1.2 ist f stetig, also integrierbar. Es gilt

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x \right| = \left| \int_a^b \big(f(x) - f_n(x)\big)\,\mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)|\,\mathrm{d}x$$
$$\leq \int_a^b \|f - f_n\|_{\infty,[a,b]}\,\mathrm{d}x = \|f - f_n\|_{\infty,[a,b]}\,(b-a) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \qquad \square$$

1.5 Stetige Differenzierbarkeit des Grenzwertes einer Funktionenfolge

Seien $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ stetig differenzierbar. f_n konvergiere gegen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und f_n' konvergiere gleichmäßig gegen ein $g : [a,b] \to \mathbb{R}$. Dann ist f stetig differenzierbar und es gilt

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) = g(x) \qquad \text{für } x \in [a,b]$$

d.h.

$$\frac{\mathrm{d}\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n\right)}{\mathrm{d}x}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{d}f_n}{\mathrm{d}x}(x)$$

1.6 Definition: Potenzreihe und Konvergenzradius

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n} \qquad r := \sup \left\{ |z - z_0| \,\middle|\, \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \text{ konvergiert }, z \in \mathbb{C} \right\} \in [0,\infty)$$

heißt **Potenzreihe** mit Mittelpunkt z_0 und Koeffizienten $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. r heißt **Konvergenzradius** der Potenzreihe.

1.7 Absolute gleichmäßige Konvergenz innerhalb des Konvergenzradius

Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ habe den Konvergenzradius $r > 0$. Sei $0 < \rho < r$. Dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ absolut gleichmäßig auf

$$\overline{B}(z_0, \rho) := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq \rho \}$$

punktweise auf $\mathring{B}(z_0, r)$

D.h. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ konvergiert absolut für $z \in \overline{B}(z_0,\rho)$ und $\sum_{n=0}^{k} a_n (z-z_0)^n$ konvergiert gleichmäßig für $k \to \infty$.

1.8 Differenzierbarkeit einer Potenzreihe innerhalb des Konvergenzradius

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$. Dann ist $f : (x_0 - r, x_0 + r) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ unendlich oft differenzierbar; es gilt

Ableitung erfolgt gliedweise

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (x-x_0)^{n-1} \qquad \text{und} \qquad a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

Wenn f durch eine Potenzreihe definiert ist, entspricht dies direkt der Taylorreihe.

1.9 Abelscher Grenzwertsatz

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Wenn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ für alle $x \in [0,1]$ und ist stetig auf $[0,1]$.

Anwendungen:

- Für $-1 < x \leq 1$ gilt: $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \mp \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$
- Für $|x| \leq 1$ gilt: $\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \mp \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$

  Insbesondere $\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \mp \ldots$

1.10 Taylorformel und Taylorreihe

Sei I ein Intervall. $f : I \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal stetig differenzierbar. Dann gilt für $x, x_0 \in I$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_{n+1}(x)$$

wo

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t) \,\mathrm{d}t$$

Außerdem existiert ein ξ zwischen x und x_0 mit

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Für eine glatte Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ und einen Punkt $x_0 \in I$ ergibt sich damit die **Taylorreihe** von f mit dem Entwicklungspunkt x_0

oft ist der Entwicklungspunkt 0

$$\boxed{T_f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k}$$

Dabei ist folgendes zu beachten:

- T_f konvergiert nicht unbedingt und selbst wenn muss nicht $T_f(x) = f(x)$ gelten
- $T_f(x) = f(x) \iff R_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$
- Falls $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ gilt für $x \in I$, so ist $T_f(x) = f(x)$, denn $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ siehe Ableitung einer Potenzreihe, Seite 2
- Mit der Taylorentwicklung folgt für $x \in \mathbb{R}$ zum Beispiel die Reihenentwicklung von $\exp, \sin$ und $\cos$:

$$\exp(x) = T_{\exp}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \sin(x) = T_{\sin}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$\cos(x) = T_{\cos}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

2 Metrische Räume, Topologie

2.1 Definition: Metrischer Raum

d ist stetig

Sei X eine Menge. Eine Metrik d auf X ist eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ mit

(i) $d(x, y) = 0 \iff x = y$, $x, y \in X$

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$, $x, y \in X$

(iii) $d(x, z) \le d(x, y) + d(y, z)$, $x, y, z \in X$

(X, d) heißt **metrischer Raum**.
Einige Normen, die Metriken induzieren für $\underline{x} \in \mathbb{K}^n$, sowie die diskrete Metrik:

- $\|\underline{x}\|_{\max} := \max \{|x_1|, \dots, |x_n|\}$
- $\|\underline{x}\|_p := (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ für $1 \le p < \infty$ (für $p \in (0, 1)$ ist die Dreieckungleichung nicht erfüllt)
- normierter Vektorraum $\left(l([0,1]), \|.\|_p\right)$ mit $\|f\|_p := \left(\int_0^1 |f(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

  Menge d. integrierbaren Fkt. auf $[0,1]$?
- Sei X eine Menge, dann definiere die **diskrete Metrik** auf X durch $d(x, y) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x = y \\ 1, & \text{falls } x \neq y \end{cases}$

2.2 Äquivalenz von Metriken

äquivalente Metriken erzeugen die gleiche Topologie

Zwei Metriken $d_1, d_2 : X \times X \to \mathbb{R}$ heißen **äquivalent**, falls $\alpha, \beta > 0$ existieren, so dass für alle $x, y \in X$ und analog für Normen gilt

$$\alpha \cdot d_1(x, y) \le d_2(x, y) \le \beta \cdot d_1(x, y) \qquad \alpha \cdot \|x\| \le \|x\|' \le \beta \cdot \|x\|$$

Alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent!

2.3 Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \le \|\underline{x}\|_2 \, \|\underline{y}\|_2$$

Gleichheit $\Rightarrow$ linear abhängig

Allgemeiner gilt für euklidische oder unitäre Vektorräume[1]

$$\left| \langle x \mid y \rangle \right|^2 \le \langle x \mid x \rangle \cdot \langle y \mid y \rangle = \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \qquad \text{(mit } \|x\| := \sqrt{\langle x \mid x \rangle}\text{)}$$

2.4 Definition: Kugel, Umgebung und Offenheit in metrischen Räumen

Sei (X, d) ein metrischer Raum.

(i) $B(x, r) := \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$ heißt **offene Kugel** von x mit Radius r.

(ii) $\overline{B}(x, r) := \{y \in X \mid d(x, y) \le r\}$ heißt **abgeschlossene Kugel** von x mit Radius r.

(iii) $U \subset X$ heißt **Umgebung** von $x \in X$, falls gilt: $\exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subset U$

(iv) $U \subset X$ heißt **offen**, falls gilt: $\forall x \in U \;\; \exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subset U$ (d.h. U ist eine Umgebung für jedes $x \in U$)

(v) $A \subset X$ ist **abgeschlossen**, falls $X \setminus A$ offen ist.

[1] siehe http://de.wikipedia.org/wiki/Cauchy-Schwarzsche_Ungleichung

2.5 Beweis, dass eine offene Kugel tatsächlich offen ist

Zu zeigen: $\forall y \in B(x,r) \exists \varepsilon > 0 : B(y,\varepsilon) \subset B(x,r)$

Sei also $y \in B(x,r)$ gegeben. Setze $\varepsilon := r - d(x,y) > 0$, nach Definition von $B(x,r)$. Es gilt $B(y,\varepsilon) \subset B(y,r)$, denn:

$$z \in B(y,\varepsilon) \Rightarrow d(z,y) < \varepsilon \implies d(z,x) \leq d(z,y) + d(y,x) < \varepsilon + d(y,x) = r$$

Also $z \in B(x,r)$ □

2.6 Definition: Topologie und topologischer Raum

Sei X eine Menge. Ein System $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen von X heißt **Topologie** auf X, falls gilt:

$\mathcal{A}$ System der abgeschlossenen Mengen

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$ $\qquad$ $\emptyset, X \in \mathcal{A}$

(ii) $U, V \in \mathcal{T} \Longrightarrow U \cap V \in \mathcal{T}$ $\qquad$ $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

(iii) $(U_i)_{i\in I} \subset \mathcal{T} \Longrightarrow \bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$ $\qquad$ $(A_i)_{i\in I} \subset \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$

$(X,\mathcal{T})$ heißt **topologischer Raum**. Die Elemente von $\mathcal{T}$ heißen offene Teilmengen von X.

$A \subset X$ heißt **abgeschlossen**, falls $X \setminus A \in \mathcal{T}$. $Y \subset X$ heißt **Umgebung** von $x \in X$, falls gilt

$$\exists U \in \mathcal{T} : x \in U \subset Y$$

Metriken induzieren Topologien, durch 2.4 (iv)

2.7 Jeder metrrische Raum ist Hausdorffsch

Jeder metrische Raum ist **Hausdorffsch**, d.h.

möglich. Aufgaben: Punktmenge abgeschlossen, Grenzwerte eindeutig

$$\forall x,y \in X, x \neq y : \exists U,V \subset X \text{ offen } : x \in U,\, y \in V,\, U \cap V = \emptyset$$

Beweis

Gegeben $x \neq y \in X$. Dann ist $\frac{d(x,y)}{2} > 0$. Setze $U := B(x, \frac{d(x,y)}{2})$, $V := B(y, \frac{d(x,y)}{2})$. Dann gilt $x \in U, y \in V$. Falls $z \in U \cap V$, so gilt

$$d(x,y) \leq \underbrace{d(x,z)}_{<\frac{d(x,y)}{2}} + \underbrace{d(z,y)}_{<\frac{d(x,y)}{2}} < 2 \cdot \frac{d(x,y)}{2} = d(x,y) \qquad ↯$$

2.8 Definition: Rand, Inneres und Abschluss

Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum. $Y \subset X$. Wir definieren den **Rand**

$\partial Y := \{x \in X \mid$ für jede Umgeb. U von $x : U \cap Y \neq \emptyset$ und $U \cap (X \setminus Y) \neq \emptyset\}$ (abgeschlossen)

$\mathring{Y} := Y \setminus \partial Y$ heißt das **Innere** von Y (offen)

$\overline{Y} := Y \cup \partial Y$ heißt der **Abschluss** von Y (abgeschlossen)

Beispiel für $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ mit Standardmetrik: $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, $\mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset$

2.9 Beispiele für offene und abgeschlossene Mengen

- $(a,b) \subset \mathbb{R}$ ist offen, $[a,b] \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen, $(a,b) \subset \mathbb{C}$ ist nicht(!) offen
- halboffene Intervalle in $\mathbb{R}$ sind weder offen noch abgeschlossen, genauso $\left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n = 1,2,3,\ldots \right\} \subset \mathbb{R}$
- abgeschlossen sind auch $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{R}$ und $\left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^* \right\} \cup \{0\}$
- Betrachte $[a,b)$ als metrischen Unterraum von $\mathbb{R}$. Dann ist $[d,b) \subset [a,b)$ abgeschlossen und $[a,d) \subset [a,b)$ offen.
- Sei X Menge, dann ist $\{X, \emptyset\}$ im Allg. von keiner Metrik induziert; $\mathcal{P}(X)$ von der diskreten Metrik.

2.10 Definition von Konvergenz und Cauchyfolgen in metrischen Räumen

Sei (X,d) ein metrischer Raum, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ eine Folge. Wir sagen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $x \in X$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, falls einer der folgenden Punkte gilt:

- $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : d(x,x_n) < \varepsilon$ bzw. $d(x,x_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$
- Zu jeder Umgebung U von x existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in U$ für $n \geq N$ auch für Topologien!

natürlich ist auch wieder jede konvergente Folge eine Cauchyfolge

Sei (X,d) ein metrischer Raum, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ heißt **Cauchyfolge**, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall m,n \geq N : d(x_m,x_n) < \varepsilon$$

Ein metrischer Raum heißt **vollständig**, falls in ihm jede Cauchyfolge konvergiert. Ein vollständig normierter Vektorraum heißt **Banachraum**.

2.11 Der Grenzwert jeder konvergenten Folge in $A \iff A \subset X$ abgeschlossen

Sei (X,d) ein metrischer Raum, $A \subset X$. Dann gilt:

$$A \underset{\text{abgschl.}}{\subset} X \iff \text{Für jede Folge } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A, \text{ konvergent in } X : \lim_{n\to\infty} x_n \in A$$

2.12 Proposition: „Intervallschachtelungsprinzip“ in metrischen Räumen

Sei (X,d) ein vollständiger metrischer Raum. Sei $A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ eine absteigende Folge nichtleerer abgeschlossener Teilmengen mit $\operatorname{diam}(A_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ (wo $\operatorname{diam} A_n := \sup \{ d(x,y) \mid x,y \in A_n \}$).
Dann gibt es genau einen Punkt in $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. (vgl. mit Intervallschachtelungsprinzip)

2.13 In $\mathbb{R}^n$ konvergiert eine Folge $\iff$ alle Koordinaten konvergieren

Betrachte $(\mathbb{R}^n, d_2)$ (d_2 induziert durch $\|.\|_2$). Sei $\underline{x} = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ und $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$, $\underline{x}_k = (x_{k,1},\ldots,x_{k,n})$. Dann gilt:

$$\lim_{k\to\infty} \underline{x}_k = \underline{x} \iff \lim_{k\to\infty} x_{k,i} = x_i \quad i \in \{1,\ldots,n\}$$

2.14 $(\mathbb{R}^n, d_2)$ ist vollständig

$C^1([0,1])$, Raum stetig diff'bar ist nicht vollständig bzgl. sup-Norm mit Betrag verschoben

$(\mathbb{R}^n, d_2)$ ist vollständig.

Beweis
Sei $(\underline{x}_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ Cauchyfolge. Es gilt

$$\|\underline{x}_k - x_l\|_2 \geq |x_{k,i} - x_{l,i}|$$

$i = 1,\ldots,n$, daher ist $(x_{k,i})_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ Cauchyfolge, also konvergent $\overset{2.13}{\Longrightarrow}$ $(\underline{x}_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ konvergent. $\square$

3 Stetigkeit

3.1 Definition: Stetigkeit in metrischen Räumen

Seien (X, d_X), (Y, d_Y) metrische Räume, $f : X \to Y$ eine Abbildung. f heißt stetig in $\overline{x} \in X$, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in B_{d_X}(\overline{x}, \delta) : f(x) \in B_{d_Y}(f(\overline{x}), \varepsilon)$$

D.h. $d_X(x, \overline{x}) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(\overline{x})) < \varepsilon$ $\quad$ f heißt stetig falls gilt: f ist stetig in jedem Punkt $x \in X$.

Äquivalente Charakterisierungen von Stetigkeit in $\overline{x}$

(i) Für jede Umgebung V von $f(\overline{x})$ existiert eine Umgebung U von $\overline{x}$ mit $f(U) \subset V$

(ii) Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \overline{x}$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(\overline{x})$. $\quad$ d.h. $\lim\limits_{x\to\overline{x}} f(x) = f(\overline{x})$

Außerdem äquivalent zu "f ist stetig":

(a) $\forall V \in \mathcal{T}_{d_Y} : f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_{d_X}$

(b) $\forall A \underset{\text{abgschl.}}{\subset} Y : f^{-1}(A) \underset{\text{abgschl.}}{\subset} X$

(i) und (a) definieren **<u>Stetigkeit in topologischen Räumen</u>**

3.2 Die Komposition stetiger Funktionen ist stetig

Seien $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y), (Z, \mathcal{T}_Z)$ topologische Räume, $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ stetig. Dann ist $g \circ f : X \to Z$ auch stetig.

Beweisskizze
Es gilt $f^{-1}\Big(g^{-1}(U)\Big) \underset{\text{offen}}{\subset} X$. Zeige $f^{-1}\Big(g^{-1}(U)\Big) = (g \circ f)^{-1}(U)$

3.3 Punktweise und gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen

Seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume, $f : X \to Y$, $f_n : X \to Y$, $n \in \mathbb{N}$

(i) $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ punktweise, falls gilt: $\forall x \in X : f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$

(ii) $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ gleichmäßig, falls gilt: $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall x \in X, n \geq N : d_Y\big(f_n(x), f(x)\big) < \varepsilon$

Auch hier gilt: Wenn die f_n stetig sind und $f_n \xrightarrow{\text{glm.}} f$, so ist f stetig (Beweis siehe 1.2)

3.4 Stetigkeit eine linearen Abbildung zwischen normierten Vektorräumen

Seien V, W normierte Vektorräume, $f : V \to W$ linear. Dann sind äquivalent:

Blatt 5: Lineare, aber nicht stetige Funktion auf $C^1([0,1])$, $\varphi(f) = f(0)$, Norm $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| \,\mathrm{d}x$

a) f ist stetig

b) $\|f\| := \sup\{\, \|f(v)\|_W \mid v \in V, \|v\|_V \leq 1\} < \infty$

c) $\exists C \in \mathbb{R}_+ : \|f(v)\| \leq C \cdot \|v\|$, für alle $v \in V$

Man kann damit zeigen, dass $\varphi : V \to \mathbb{R}$ mit

$$\varphi(f) := \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x$$

stetig ist. Mit c) folgt auch, dass $D : \underbrace{\ell^1([a,b])}_{\text{1-mal stetig diff.bar}} \to \ell([a,b])$, gegeben durch $Df := f'$, nicht stetig ist bezüglich $\|.\|_{\infty,[0,1]}$. (Gegenbeispiel $f(x) = x^n$)

Außerdem haben wir gezeigt, dass für $V := C([a,b]) := \{f : [a,b] \to R \text{ stetig}\}$ mit $\|.\|_{\infty,[a,b]}$ der normierte Vektorraum $(V, \|.\|_{\infty,[a,b]})$ vollständig ist.

4 Kompaktheit

4.1 Definition: Überdeckung und Teilüberdeckung

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $Y \subset X$. Eine offene **Überdeckung** von Y ist eine Familie $(U_i)_{i\in I} \subset \mathcal{T}$ mit $Y \subset \bigcup_{i\in I} U_i$. Falls $J \subset I$ und $Y \subset \bigcup_{i\in J} U_i$, so heißt $(U_i)_{i\in J}$ **Teilüberdeckung**. $(U_i)_{i\in J}$ heißt endlich, falls J endlich ist.

4.2 Definition: Kompaktheit

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. $K \subset X$ heißt **kompakt**, falls gilt: Zu jeder offenen Überdeckung von K existiert eine endliche Teilüberdeckung. D.h. Für jede offene Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von K existieren $i_0, \ldots, i_n$ mit

$$K \subset \bigcup_{l=0}^{n} U_{i_l}$$

Kompaktheit ist eine intrinsische Eigenschaft

Es gilt: K ist kompakt bezüglich $\mathcal{T} \iff K$ kompakt bezüglich $\mathcal{T}_k := \{U \cap K \mid U \in \mathcal{T}\}$
Beispiel: Sei (X, d) ein metrischer Raum, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{x}$. Dann ist $K := \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\overline{x}\}$ kompakt. Ohne den Grenzwert ist das im Allgemeinen nicht der Fall!

4.3 K kompakt in metrischem Raum $\Rightarrow$ K ist beschränkt und abgeschlossen

Sei (X, d) ein metrischer Raum, $K \subset X$ kompakt. Dann ist K beschränkt und abgeschlossen. (d.h. $K \subset B(x, R)$ für ein $x \in X$, $R \in \mathbb{R}$). Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

Beweisskizze
Beschränktheit: $\big(B(\overline{x}, n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung von K. Abgeschlossenheit: $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n = X \setminus \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{B}(x, \frac{1}{n+1})\right) = X \setminus \{x\}$. Argumentation mit $N := \max\{n_0, \ldots, n_l\}$.

4.4 In $(X, \mathcal{T}_X)$: A abgeschlossen in X, $A \subset K$, K kompakt $\Rightarrow$ A kompakt

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $K \subset X$ kompakt. Sei $A \underset{\text{abg.}}{\subset} X$, $A \subset K$. Dann ist auch A kompakt.

4.5 Satz von Heine-Borel

$A \subset \mathbb{R}^n$ ist kompakt $\iff$ A ist beschränkt und abgeschlossen.

4.6 Satz von Bolzano-Weierstraß

$\Rightarrow$ Jeder kompakte metrische Raum ist vollständig

Sei (X, d) ein metrischer Raum, $K \subset X$ kompakt. $\Rightarrow$ jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ hat konvergente Teilfolge.

4.7 Zusammenhänge zwischen Stetigkeit und Kompaktheit

- Seien $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume. $f : X \to Y$ stetig, $K \subset X$ kompakt. Dann ist $f(K) \subset Y$ kompakt.
- Sei $(X, \mathcal{T})$ ein kompakter topologischer Raum, $f : X \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f ihr Minimum und ihr Maximum an.
- Seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume, X kompakt, $f : X \to Y$ stetig. Dann ist f auch gleichmäßig stetig. (Gleichmäßige Stetigkeit wie erwartet, siehe auch 3.1)

Blatt 6

- Eine kompakte Teilmenge eines top. Raumes ist abgeschlossen, falls die Topologie Hausdorff ist.

5 Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^m$

5.1 Definition: Kurve und Stetigkeit einer Kurve

Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall mit mindestens zwei Punkten (d.h. ein echtes Intervall). Eine stetige Abbildung $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ heißt **Kurve** in$\mathbb{R}^n$.

$\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n), \gamma_i : I \to \mathbb{R}$. Dann gilt: γ ist stetig $\iff$ γ_i ist stetig für $i = 1, \ldots, n$. (folgt z.B. aus 3.1 und 2.13)

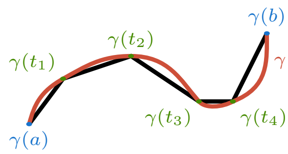
5.2 Definition: Differenzierbarkeit, Tangentialvektor, Geschwindigkeit und reguläre Kurve

Eine Kurve $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ heißt (stetig) differenzierbar, falls ihre Koordinatenfunktionen $\gamma_i : I \to \mathbb{R}$ (stetig) differenzierbar sind. In diesem Fall heißt $\gamma'(t) := (\gamma_1'(t), \ldots, \gamma_n'(t))$ **Tangentialvektor** von γ in $t \in I$, und $\|\gamma'(t)\|_2$ heißt **Geschwindigkeit**. Für $\gamma'(t) \neq 0$ ist $\frac{1}{\|\gamma'(t)\|_2}\gamma'(t)$ der **Tangentialeinheitsvektor**. γ heißt **regulär**, falls γ stetig differenzierbar und $\gamma'(t) \neq 0 \ \forall t \in I$. Wenn γ differenzierbar ist, so gilt:

$$\gamma'(t) = \left(\lim_{h \to 0} \frac{\gamma_1(t+h) - \gamma_1(t)}{h}, \ldots, \lim_{h \to 0} \frac{\gamma_n(t+h) - \gamma_n(t)}{h} \right) = \lim_{h \to 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h}$$

5.3 Rektifizierbare Kurven und Bestimmung der Länge

Eine Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ heißt **rektifizierbar** mit der Länge L, falls gilt: Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$ mit folgender Eigenschaft: Für jede Unterteilung $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ mit $|t_j - t_{j-1}| < \delta$ für $j = 1, \ldots, n$ gilt:



$$\left| \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|_2}_{\text{Länge des Polygonzugs}} - L \right| < \varepsilon$$

Beachte: γ stetig $\not\Rightarrow$ γ rektifizierbar. Mit dem Mittelwertsatz und 4.7 kann man zeigen:
Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Zu $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$ sodass für alle $\bar{t} \neq t \in [a,b]$ mit $|\bar{t} - t| < \delta$, gilt

$$\left\| \frac{1}{\bar{t} - t} \big(\gamma(\bar{t}) - \gamma(t)\big) - \gamma'(\bar{t}) \right\|_2 < \varepsilon$$

Dies lässt sich benutzen, um zu beweisen, dass für $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar gilt: γ ist rektifizierbar mit der Länge

$$\boxed{L = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_2 \, \mathrm{d}t}$$

5.4 Parametertransformation

Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve, $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ bijektiv und stetig. Dann heißt φ **Parametertransformation** und $\zeta := \gamma \circ \varphi : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ ist eine Kurve.
Falls $\gamma, \varphi, \varphi^{-1}$ stetig differenzierbar sind, so gilt:

a) $\varphi'(t) \neq 0$ für $t \in [c,d]$ und $(\varphi^{-1})'(t) \neq 0$ für $t \in [a,b]$

b) $\zeta'(t) = \varphi'(t) \cdot \gamma'\big(\varphi(t)\big)$ für $t \in [c,d]$ insbesondere ist ζ stetig differenzierbar.

c) $\int_a^b \|\gamma'(t)\|_2 \, \mathrm{d}t = \int_c^d \|\zeta'(t)\|_2 \, \mathrm{d}t$

6 Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$

6.1 Definition: Partielle Differenzierbarkeit und Gradient

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ und $f : U \to \mathbb{R}$ eine Abbildung.

(i) automatisch erfüllt, wenn U offen in $\mathbb{R}^n$

a) Für $\underline{x} \in U$, $i \in \{1, \dots, n\}$ heißt f **partiell differenzierbar** in $\underline{x}$ bezüglich der i-ten Koordinate, falls gilt:

   (i) Es gibt eine Folge $(h_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^*$ mit $\lim_{k\to\infty} h_k = 0$ und $\underline{x} + h_k \cdot \underline{e}_i \in U$, wobei $k \in \mathbb{N}$

   (ii) Der Limes
$$D_i f(\underline{x}) := \lim_{\substack{h\to 0, h\neq 0\\ \underline{x}+h\underline{e}_i\in U}} \frac{f(\underline{x} + h \cdot \underline{e}_i) - f(\underline{x})}{h} \in \mathbb{R}$$
   existiert. (Dabei ist $\underline{e}_i = (0, \dots, \overset{i}{1}, \dots, 0)$). Wir schreiben auch $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ für $D_i f$.

b) f heißt partiell differenzierbar, falls f für jedes $\underline{x} \in U$ und jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ partiell differenzierbar in $\underline{x}$ bezüglich der i-ten Koordinate ist.

   f heißt stetig partiell differenzierbar, falls außerdem $D_i f : U \to \mathbb{R}$ stetig ist für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$

Der **Gradient**[2] von f in $\underline{x}$ ist
$$\operatorname{grad} f(\underline{x}) = (D_1 f(\underline{x}), \dots, D_n f(\underline{x})) \in \mathbb{R}^n$$
Wir schreiben auch $\nabla f(\underline{x})$ für $\operatorname{grad} f(\underline{x})$.

6.2 Definition: Vektorfeld und Divergenz

div ordnet jedem Vektor eine Zahl/Skalar zu

Ein **Vektorfeld** auf $U \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung $\underline{v} : U \to \mathbb{R}^n$. $\underline{v}$ heißt partiell differenzierbar, wenn alle Komponenten $v_1, \dots, v_n : U \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar sind. In diesem Fall heißt
$$\operatorname{div} \underline{v} := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \qquad \text{oder} \qquad \operatorname{div} \underline{v} = \langle \nabla \mid \underline{v} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \right\rangle$$
Divergenz von $\underline{v}$ in $\underline{x}$.

6.3 Definition: k-mal partiell differenzierbar

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ und $f : U \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar. f heißt zweimal partiell differenzierbar, falls alle partiellen Ableitungen $D_i f : U \to \mathbb{R}$ wieder partiell differenzierbar sind. Induktiv definieren wir: f heißt $(k + 1)$ mal partiell differenzierbar, falls f k-mal partiell differenzierbar ist und alle partiellen Ableitungen k-ter Ordnung
$$D_{i_k} \dots D_{i_2} D_{i_1} f : U \to \mathbb{R}$$
partiell differenzierbar sind. f heißt k-mal stetig partiell differenzierbar, falls f k-mal partiell differenzierbar ist und alle partiellen Ableitungen der Ordung $\leq k$ stetig sind. Wir schreiben auch
$$D_{i_k} \dots D_{i_1} f = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \cdot \ldots \cdot \partial x_{i_2} \cdot \partial x_{i_1}} \qquad D_i D_i f = D_i^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

[2] „Interpretiert man beispielsweise die Reliefkarte einer Landschaft als eine Funktion $h(x, y)$ die jedem Ort die Höhe an dieser Stelle zuordnet, dann ist der Gradient von h an der Stelle (x, y) ein Vektor in der xy-Ebene, der in die Richtung des steilsten Anstiegs von h an dieser Stelle zeigt und dessen Länge ein Maß für die Steilheit (Steigung) ist"– von http://de.wikipedia.org/wiki/Gradient_(Mathematik)

6.4 Zweimal stetig partiell differenzierbar ⇒ Reihenfolge von zwei partiellen Ableitungen irrelevant

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar. Dann gilt für $\underline{a} \in U$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$ Satz von Schwarz

$$D_i D_j f(\underline{a}) = D_j D_i f(\underline{a})$$

6.5 Beispiele mit der Rotation rot und dem Laplace-Operator Δ

(i) Sei $U \subset \mathbb{R}^3$, $\underline{v} : U \to \mathbb{R}^3$ ein partiell differenzierbares Vektorfeld. Wir definieren ein Vektorfeld

$$\operatorname{rot} \underline{v} := \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \qquad \text{(Rotation von } \underline{v}\text{)}$$

Wir schreiben für die Rotation[3] auch

eventuell kennt man das Kreuzprodukt noch aus der Schule

$$\operatorname{rot} \underline{v} = \nabla \times \underline{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Falls $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar ist, so gilt

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \nabla \times \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2}, \dots, \dots \right) = 0$$

nach Satz 6.4

(ii) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar. Setze $\langle \nabla \,|\, \nabla f \rangle$

$$\Delta f := \operatorname{div} \operatorname{grad} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ heißt **Laplaceoperator**.

Die **Laplace-Gleichung** für $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ lautet $\Delta U = 0$, also

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} = 0$$

[3] „Als Rotation bezeichnet man in der Vektoranalysis, einem Teilgebiet der Mathematik, einen bestimmten Differentialoperator, der einem Vektorfeld im dreidimensionalen euklidischen Raum mit Hilfe der Differentiation ein neues Vektorfeld zuordnet. Handelt es sich beispielsweise um ein Strömungsfeld, so gibt die Rotation für jeden Ort das Doppelte der Winkelgeschwindigkeit an, mit der ein mitschwimmender Körper rotiert, also wie schnell und um welche Achse er sich dreht. Dieser Zusammenhang ist namensgebend."– deswegen also der Name, von http://de.wikipedia.org/wiki/Rotation_(Mathematik)

7 Abbildungen von $\mathbb{R}^m$ nach $\mathbb{R}^n$

7.1 Definition: Totale Differenzierbarkeit, Differential, Jacobimatrix

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung.

(i) f heißt differenzierbar in $\underline{x} \in U$, falls gilt: Es gibt $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ linear und $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ mit

$$\boxed{f(\underline{x}+\underline{\xi}) = f(\underline{x}) + A(\underline{\xi}) + \varphi(\underline{\xi})}$$

für alle $\underline{\xi}$ in einer Umgebung von 0 und mit

d.h. $\varphi(\underline{\xi})$ geht „schneller“ gegen 0 als $\left\|\underline{\xi}\right\|_2$

$$\lim_{\underline{\xi}\to 0, \underline{\xi}\neq 0} \frac{1}{\left\|\underline{\xi}\right\|_2}\varphi(\underline{\xi}) = 0$$

Es genügt, wenn das φ in einer Umgebung von 0 definiert ist. (warum?)

(ii) f heißt differenzierbar , falls f in jedem Punkt $\underline{x} \in U$ differenzierbar ist.

(iii) $A(= A(\underline{x}))$ heißt **<u>Ableitung</u>** oder **<u>Differential</u>** von f in $\underline{x}$, oft schreiben wir auch $Df(x)$.
Wir werden gleich sehen, dass A nicht von der Wahl von φ abhängt.

Die zugehörige Matrix $(a_{ij}) \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ heißt auch **<u>Jacobimatrix</u>** oder **<u>Funktionalmatrix</u>**.

7.2 Total Differenzierbar impliziert Stetigkeit und partiell differenzierbare Koordinatenfunktionen

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar in $\underline{x} \in U$. Dann gilt

(i) f ist stetig in $\underline{x}$

(ii) Die Koordinatenfunktionen $f_i : U \to \mathbb{R}$ für $i = 1, \dots, n$ sind partiell differenzierbar und

$$Df(\underline{x}) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\underline{x})\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}} \in M_{n\times m}(\mathbb{R}) \qquad \text{(Jacobimatrix)}$$

Beweisskizze

(i) Definition, $\underline{\xi} \to 0$ und Folgenkriterium für Stetigkeit

(ii) Betrachte Koordinatenabbildungen für $i = 1, \dots, n$

$$f_i(\underline{x}+\underline{\xi}) = f_i(\underline{x}) + \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\xi_i + \varphi_i(\underline{\xi}) \quad\Longrightarrow\quad f_i(\underline{x}+h\cdot e_j) = f_i(\underline{x}) + a_{ij}\cdot h + \varphi_i(h\cdot e_j)$$

Dann Differentialquotient nach 6.1.

7.3 Stetig partiell differenzierbar impliziert Differenzierbarkeit und Stetigkeit

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar. Dann ist f differenzierbar (insbesondere stetig).

7.4 Kettenregel

Seien $U \subset \mathbb{R}^m, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $g : U \to V$, $f : V \to \mathbb{R}^k$ Abbildungen. g sei differenzierbar in $\underline{x} \in U$. f sei differenzierbar in $\underline{y} := g(\underline{x}) \in V$. Dann ist $f \circ g : U \to \mathbb{R}^k$ differenzierbar in $\underline{x}$ mit

$$D(f \circ g)(\underline{x}) = Df\big(g(\underline{x})\big) \cdot Dg(\underline{x}) \qquad (R^m \to \mathbb{R}^k \text{ linear})$$

Damit lässt sich zeigen: Sei $U \subset \mathbb{R}^m, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $g : U \to V$, $f : V \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ g)(\underline{x}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_j}\big(g(\underline{x})\big) \cdot \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(\underline{x}) \qquad i = 1, \dots, n$$

7.5 Definition: Richtungsableitung

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$, $\underline{x} \in U$, $\underline{v} \in \mathbb{R}^m$ mit $\|v\|_2 = 1$. Falls

vgl. part. Ableitung

$$D_{\underline{v}} f(\underline{x}) := \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(\underline{x} + t \cdot \underline{v}) - f(\underline{x})}{t}$$

existiert, so heißt $D_{\underline{v}} f(\underline{x})$ **Richtungsableitung** von f in $\underline{x}$ in Richtung $\underline{v}$. (Es gilt $D_{\underline{e}_i} f(\underline{x}) = D_i f(\underline{x})$).

7.6 Richtungsableitung einer stetig (partiell) differenzierbaren Funktion

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ stetig (partiell) differenzierbar. Dann gilt für $\underline{x} \in U$ und $\underline{v} \in \mathbb{R}^m$ mit $\|v\|_2 = 1$ falls $\operatorname{grad} f(\underline{x}) \neq 0$

$$D_{\underline{v}} f(\underline{x}) = \langle \underline{v} \,|\, \operatorname{grad} f(\underline{x}) \rangle \; (= \|\operatorname{grad} f(\underline{x})\|_2 \cdot \cos\theta) \qquad (\theta = \text{Winkel zwischen } \underline{v} \text{ und } \operatorname{grad} f(\underline{x}))$$

Beweisskizze
Definiere $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ durch $g(t) := \underline{x} + t \cdot \underline{v}$. Dann Richtungableitung bilden und Kettenregel anwenden.

7.7 Definition: Integral einer Funktion $[a, b] \to M_{n \times m}(\mathbb{R})$

Sei $A : [a, b] \to M_{n \times m}(\mathbb{R})$ stetig[4]. Dann sind $A_{ij} : [a, b] \to \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$ stetig. Wir setzen

$$\int_a^b A(t)\,\mathrm{d}t := \left(\int_a^b A_{ij}(t)\,\mathrm{d}t \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$$

7.8 Mittelwertsatz für vektorwertige Funktionen mehrerer Variablen

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Sei $\underline{x} \in U$, $\underline{\xi} \in \mathbb{R}^m$ so, dass $\left\{ \underline{x} + t\underline{\xi} \,\middle|\, t \in [0, 1] \right\} \subset U$. Dann gilt

$$\boxed{f\left(\underline{x} + \underline{\xi}\right) - f(\underline{x}) = \left(\int_0^1 Df(\underline{x} + t \cdot \underline{\xi})\,\mathrm{d}t \right) \cdot \underline{\xi}}$$

Außerdem gilt folgende Normabschätzung

$$\boxed{\left\| f(\underline{x} + \underline{\xi}) - f(\underline{x}) \right\|_2 \leq \sup\left\{ \left\| Df(\underline{x} + t \cdot \underline{\xi}) \right\| \,\middle|\, t \in [0, 1] \right\} \left\| \underline{\xi} \right\|_2}$$

[4] Zum Beispiel mit Operatornorm: $\|B\| := \sup\left\{ \|B\underline{x}\|_2 \,\middle|\, \underline{x} \in \mathbb{R}^m, \|\underline{x}\|_2 = 1 \right\}$

7.9 Taylorformel

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $\underline{x} \in U$ und $\delta > 0$ mit $\overline{B}(\underline{x}, \delta) \subset U$. Sei $f : U \to \mathbb{R}$ $(k+1)$-mal stetig (partiell) differenzierbar. Dann existiert $R_{k+1} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ mit

$$\boxed{f(\underline{x}+\underline{\xi}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^m, |\alpha| \le k} \frac{D^\alpha f(\underline{x})}{\alpha!} \cdot \underline{\xi}^\alpha + R_{k+1}(\underline{\xi})} \quad \text{für } \|\xi\|_2 \le \delta \text{ und } \quad \lim_{\underline{\xi} \to 0, \underline{\xi} \neq 0} \frac{R_{k+1}(\underline{\xi})}{\|\underline{\xi}\|_2^k} = 0$$

(Hierfür genügt es, wenn f nur k-mal stetig differenzierbar ist.). Für jedes $\underline{\xi} \in \mathbb{R}^m$ mit $\|\underline{\xi}\|_2 \le \delta$ existiert ein $\theta \in [0,1]$ mit

$$R_{k+1}(\underline{\xi}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^m, |\alpha| = k+1} \frac{D^\alpha f(\underline{x} + \theta \cdot \underline{\xi})}{\alpha!} \cdot \underline{\xi}^\alpha$$

Die **Entwicklung bis zum zweiten Glied**, hat die folgende Form:
Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $\underline{x} \in U$, $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Dann gilt

$$f(\underline{x}+\underline{\xi}) = f(\underline{x}) + \left\langle \operatorname{grad} f(\underline{x}) \,\middle|\, \underline{\xi} \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle \underline{\xi} \,\middle|\, \mathrm{Hess} f(\underline{x}) \underline{\xi} \right\rangle + R_3(\underline{\xi})$$

für ξ in einer Umgebung von 0. Dabei ist

$$\boxed{\mathrm{Hess} f(\underline{x}) := (D_i D_j f(\underline{x}))_{i,j \in \{1,\dots,m\}}} \quad \in M_{m \times m}(\mathbb{R})$$

7.10 Lokale Extrema, isolierte Extrema und Eigenschaft eines Extremums

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$, $f : U \to \mathbb{R}$, $\underline{x} \in U$. f besitzt in $\underline{x}$ ein **lokales Maximum (Minimum)**, falls $\underline{x} \in V \underset{\text{offen}}{\subset} U$ existiert mit $f(\underline{y}) \le f(\underline{x})$ für alle $\underline{y} \in V$ (bzw. $f(\underline{y}) \ge f(\underline{x})$ für alle $\underline{y} \in V$). Ein **lokales Extremum** ist ein lokales Maximum oder Minimum. Das Maximum (Minimum) ist **isoliert** , falls $f(\underline{y}) < f(\underline{x})$ (bzw. $f(\underline{y}) > f(\underline{x})$) für $\underline{x} \neq \underline{y} \in V$.

Eine **notwendige Bedingung** ist: Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar. Falls f in $\underline{x} \in U$ ein lokales Extremum besitzt, so gilt

$$\operatorname{grad} f(\underline{x}) = 0$$

7.11 Hinreichende Bedingung zum Bestimmen eines isolierten Extremums

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, $\underline{x} \in U$ mit $\operatorname{grad} f(\underline{x}) = 0$.

(i) Wenn $\mathrm{Hess}\, f(\underline{x})$ positiv definit ist, dann hat f in $\underline{x}$ ein isoliertes Minimum.

(ii) Wenn $\mathrm{Hess}\, f(\underline{x})$ negativ definit ist, dann hat f in $\underline{x}$ ein isoliertes Maximum.

(iii) Falls $\mathrm{Hess}\, f(\underline{x})$ echt positive und echt negative Eigenwerte besitzt, so hat f in $\underline{x}$ kein Extremum.

Die **Definitheit** lässt sich folgendermaßen bestimmen:
Sei $A \in M_{m \times m}(\mathbb{R})$ symmetrisch, dann existiert $T \in M_{m \times m}(\mathbb{R})$ unitär (orthogonal) mit

$$T^{-1} A T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{pmatrix}$$

alternativ: Hauptminorenargument

$\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ Eigenwerte (zu Eigenvektoren $T\underline{e}_1, \dots, Te_m$). A heißt **positiv definit** (**negativ definit**), falls alle λ_i echt positiv (echt negativ) sind. In diesem Fall gilt $\left\langle \underline{\xi} \,\middle|\, A\underline{\xi} \right\rangle > 0$ (< 0) für alle $\underline{\xi} \in \mathbb{R}^m$.

8 Implizite Funktionen

8.1 Satz über implizit definierte Funktionen

Seien $\underline{a} \in U_1 \underset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}^k$, $\underline{b} \in U_2 \underset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}^m$, $\underline{c} \in \mathbb{R}^m$. $F : U_1 \times U_2 \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar, sodass $F\binom{\underline{a}}{\underline{b}} = \underline{c}$ und $\frac{\partial F}{\partial \underline{y}}\binom{\underline{a}}{\underline{b}} \in M_{m\times m}(\mathbb{R})$ invertierbar ist. Dann existieren $\underline{a} \in V_1 \underset{\text{offen}}{\subset} U_1$, $\underline{b} \in V_2 \underset{\text{offen}}{\subset} U_2$ und $g : V_1 \to V_2$ stetig differenzierbar mit

$$Dg(\underline{a}) = -\left(\frac{\partial F}{\partial \underline{y}}\begin{pmatrix}\underline{a}\\ \underline{b}\end{pmatrix}\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial \underline{x}}\begin{pmatrix}\underline{a}\\ \underline{b}\end{pmatrix}$$

und $N_F(\underline{c}) \cap (V_1 \times V_2) = \left\{ \binom{\underline{x}}{g(\underline{x})} \,\middle|\, \underline{x} \in V_1 \right\}$, wo $N_F(\underline{c}) = \left\{ \binom{\underline{x}}{\underline{y}} \in U_1 \times U_2 \,\middle|\, F\binom{\underline{x}}{\underline{y}} = \underline{c} \right\}$. Insbesondere gilt $F\binom{\underline{x}}{g(\underline{x})} = \underline{c}$ für $\underline{x} \in V_1$ und $\underline{b} = g(\underline{a})$.

8.2 Satz von der Umkehrabbildung

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Sei $\underline{b} \in U$, sodass $Df(\underline{b})$ invertierbar ist. Dann existiert $\underline{b} \in V \underset{\text{offen}}{\subset} U$ und $f(\underline{b}) \in W \underset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}^n$, sodass $f\big|_V : V \to W$ bijektiv ist und die **Umkehrabbildung** $f^{-1} : W \to V$ stetig differenzierbar ist mit

vgl. Analysis I, Satz 12.6: $g'(f(\underline{x})) = \frac{1}{f'(\underline{x})}$

$$D(f^{-1})\big(f(\underline{b})\big) = \big(Df(\underline{b})\big)^{-1}$$

8.3 Lagrangemultiplikator

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $\underline{d} \in M := \{\underline{x} \in U \mid f(\underline{x}) = 0\}$ mit $\operatorname{grad} f(\underline{d}) \neq 0$. Sei $h : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, sodass $h\big|_M : M \to \mathbb{R}$ in $\underline{d}$ ein lokales Extremum hat. Dann existiert $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\operatorname{grad} h(\underline{d}) = \lambda \cdot \operatorname{grad} f(\underline{d})$$

9 Parameterabhängige Integrale

9.1 Proposition

Seien $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^m$, $f : [a,b] \times U \to \mathbb{R}$ stetig. Sei $(\underline{y}_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset U$ konvergent mit $\underline{\overline{y}} := \lim_{k\to\infty} \underline{y}_k \in U$. Definiere $F_k, F : [a,b] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$F_k(x) := f\begin{pmatrix} x \\ \underline{y}_k \end{pmatrix} \quad F(x) := f\begin{pmatrix} x \\ \underline{\overline{y}} \end{pmatrix}$$

Dann gilt $F_k \xrightarrow{k\to\infty} F$ gleichmäßig.

9.2 Stetigkeit einer per Integral definierten Funktion

Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^m$, $f : [a,b] \times U \to \mathbb{R}$ stetig. Definiere $g : U \to \mathbb{R}$ durch

$$g(\underline{y}) = \int_a^b f\begin{pmatrix} x \\ \underline{y} \end{pmatrix} \mathrm{d}x$$

Dann ist g stetig.

9.3 Differentialquotient und partielle Ableitung

Seien $[a,b], [c,d] \subset \mathbb{R}$, $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ stetig. f sei stetig partiell differenzierbar nach der zweiten Variablen, d.h. $\frac{\partial f}{\partial y}\binom{x}{y}$ existiert und ist stetig in $\binom{x}{y}$ für alle $\binom{x}{y}$. Sei $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset [c,d]$ mit $y_k \to \overline{y} \in [c,d]$ und $y_k \neq \overline{y}$, für $k \in \mathbb{N}$. Definiere $F_k, F : [a,b] \to \mathbb{R}$ durch

$$F_k(x) := \frac{f\binom{x}{y_k} - f\binom{x}{\overline{y}}}{y_k - \overline{y}}, \qquad F(x) := \frac{\partial f}{\partial y}\begin{pmatrix} x \\ \overline{y} \end{pmatrix}$$

Dann gilt $F_k \xrightarrow{k\to\infty} F$ gleichmäßig.

9.4 Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert über das Integral einer Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Beweis mit 9.3

Seien $[a,b], [c,d] \subset \mathbb{R}$, $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ stetig. f sei stetig partiell differenzierbar nach der zweiten Variablen. Definiere $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ durch $g(y) := \int_a^b f\binom{x}{y} \mathrm{d}x$. Dann ist g stetig differenzierbar mit

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}y}(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mathrm{d}x$$

9.5 Satz von Fubini

Seien $[a,b], [c,d] \subset \mathbb{R}$, $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:

$$\boxed{\int_c^d \left(\int_a^b f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x}$$

(Die Funktion $y \mapsto \int_a^b f\binom{x}{y} \mathrm{d}x$ und $x \mapsto \int_c^d f\binom{x}{y} \mathrm{d}y$ sind stetig nach 9.2, daher existieren beide Seiten)

10 Diverses aus den Übungen und dem letzten Semester

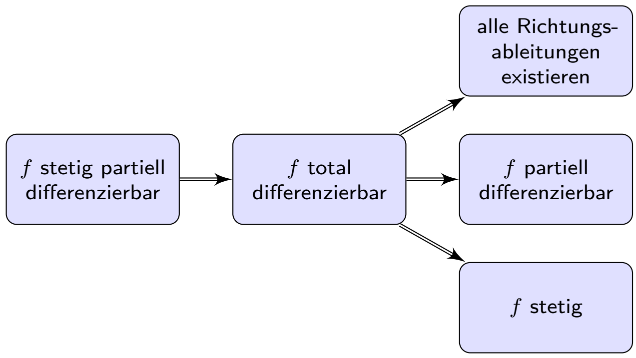
10.1 Weierstraß-Funktion, Teufelsleiter und Cantormenge

- Die Weierstraß-Funktion ist überall stetig, aber nirgends differenzierbar
- Die Teufelsleiter ist „fast überall“differenzierbar mit Ableitung 0, aber dennoch nicht konstant

10.2 Zusammenhänge aus den Kapiteln 6 und 7

Richtungsableitung nach v in $\underline{x}$, wenn f total differenzierbar:

$$Df(\underline{x}) \cdot v$$



10.3 Werkzeuge

- Polarkoordinaten bei Stetigkeit
- Richtungsvektoren: $v = \binom{\cos\varphi}{\sin\varphi}$
- L'Hospital: $\lim\limits_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ wenn oberer und unterer Grenzwert jeweils 0 oder ∞, auf (a,b), f,g diff'bar.

10.4 Wiederholung partielle Integration und Integration per Substitution

$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x$$

$I, [a,b] \subset \mathbb{R}$ Intervalle. $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, $g : [a,b] \to I$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_a^b f\big(g(x)\big)g'(x)\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\mathrm{d}x$$

10.5 Uneigentliche Integrale

Sei $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ Funktion, die auch jedem Teilintervall $[a+\varepsilon, b]$ eine Regelfunktion ist. Wenn der Grenzwert $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existiert, dann heißt das Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergent und man definiert

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

10.6 Mittelwertsatz der Integralrechnung

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $g \in \mathcal{R}([a, b]), g \geq 0$. Dann existiert $\overline{x} \in [a, b]$ mit :

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\overline{x}) \cdot \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

10.7 Über Homöomorphismen

Seien X, Y topologische Räume mit X kompakt und Y Hausdorff und sei $f : X \to Y$ stetig und bijektiv. Dann ist f sogar ein **Homöomorphismus**, das heißt die Umkehrfunktion ist stetig.

10.8 Totale Differenzierbarkeit zeigen

Gleichung aus der Definition umstellen

$$\varphi(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - A \cdot h$$

$A = Df(x_0)$ besteht dabei aus den partiellen Ableitungen an der Stelle x_0.

- $Df(x_0)$ berechnen

Index

Die Seitenzahlen *sind mit Hyperlinks zu den entsprechenden Seiten versehen, also anklickbar!*