Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Fachbereich 10 Mathematik und Informatik

Skript Analysis II.

Mitschrift der Vorlesung „Analysis II." von Prof. Dr. Wilhelm Winter

Jannes Bantje

1. Januar 2016

Aktuelle Version verfügbar bei

GitHub

`https://github.com/JaMeZ-B/latex-wwu`

GitHub ist eine Internetplattform, auf der viele OpenSource-Projekte gehostet werden. Diese Plattform nutzen wir zur Zusammenarbeit, also findet man hier neben den PDFs auch die TeX-Dateien. Außerdem ist über diese Plattform auch direktes Mitarbeiten möglich, siehe nächste Seite.

sciebo die Campuscloud

`https://uni-muenster.sciebo.de/public.php?service=files&t=965ae79080a473eb5b6d927d7d8b0462`

Sciebo ist ein Dropbox-Ersatz der Hochschulen in NRW, der von der Uni Münster in leitender Position auf Basis der OpenSource-Software Owncloud aufgebaut wurde. Wenn man auf den Link klickt, kann man die Freigabe zum eigenen Speicher hinzufügen und hat dann immer automatisch die aktuellste Version.

Bittorrent Sync

`B6WH2DISQ5QVYIRYIEZSF4ZR2IDVKPN3I`

BTSync ist ein peer-to-peer Dateisynchronisations-Tool. Dabei werden die Dateien nur auf den Computern der Teilnehmer an einer Freigabe gespeichert. Ein RasPi ist permanent online, sodass stets die aktuellste Version verfügbar ist. `Clients` gibt es für jedes Betriebssystem. Zugang ist über das obige „Secret“ bzw. den QR-Code möglich.

Vorlesungshomepage

`http://wwwmath.uni-muenster.de/u/wilhelm.winter/wwinter/analysis_II.html`

Hier ist ein Link zur offiziellen Vorlesungshomepage.

Vorwort — Mitarbeit am Skript

Dieses Dokument ist eine Mitschrift aus der Vorlesung „Analysis II., SoSe 2013“, gelesen von Prof. Dr. Wilhelm Winter. Der Inhalt entspricht weitestgehend dem Tafelanschrieb. Für die Korrektheit des Inhalts übernehme ich keinerlei Garantie! Für Bemerkungen und Korrekturen – und seien es nur Rechtschreibfehler – bin ich sehr dankbar. Korrekturen lassen sich prinzipiell auf drei Wegen einreichen:

- Persönliches Ansprechen in der Uni, Mails an `j.bantje@wwu.de` (gerne auch mit annotieren PDFs) oder Kommentare auf `https://github.com/JaMeZ-B/latex-wwu`.

- *Direktes* Mitarbeiten am Skript: Den Quellcode poste ich auf GitHub (siehe oben), also stehen vielfältige Möglichkeiten der Zusammenarbeit zur Verfügung: Zum Beispiel durch Kommentare am Code über die Website und die Kombination Fork + Pull Request. Wer sich verdient macht oder ein Skript zu einer Vorlesung, die ich nicht besuche, beisteuern will, dem gewähre ich gerne auch Schreibzugriff.

  Beachten sollte man dabei, dass dazu ein Account bei `github.com` notwendig ist, der allerdings ohne Angabe von persönlichen Daten angelegt werden kann. Wer bei GitHub (bzw. dem zugrunde liegenden Open-Source-Programm „`git`“) – verständlicherweise – Hilfe beim Einstieg braucht, dem helfe ich gerne weiter. Es gibt aber auch zahlreiche empfehlenswerte Tutorials im Internet.[1]

- *Indirektes* Mitarbeiten: TeX-Dateien per Mail verschicken.

  Dies ist nur dann sinnvoll, wenn man einen ganzen Abschnitt ändern möchte (zB. einen alternativen Beweis geben), da ich die Änderungen dann per Hand einbauen muss! Ich freue mich aber auch über solche Beiträge!

[1] zB. `https://try.github.io/levels/1/challenges/1`, ist auf Englisch, aber dafür interaktives LearningByDoing

Inhaltsverzeichnis

1 Funktionenfolgen und Potenzreihen

1.1 Definition Sei M eine Menge und $f : M \to \mathbb{C}$, $f_n : M \to \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ Funktionen

a) $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ punktweise, falls für jedes $x \in M$ $f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$ gilt. D.h.

$$\forall x \in M \, \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

b) $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ gleichmäßig, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} : \forall x \in M, n \geqslant N : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

c) $\|f\|_{\infty,M} := \sup \{|f(x)| \mid x \in M\} \in [0, \infty)$

1.2 Bemerkung

(i) gleichmäßige Konvergenz $\Longrightarrow$ punktweise Konvergenz

(ii) $\|f\|_{\infty,M} < \infty \iff f$ beschränkt

(iii) $\|.\|_{\infty,M}$ ist eine Norm auf $\{f : M \to \mathbb{C} \mid f$ beschränkt$\}$ (Übung)

V Vektorraum über $\mathbb{K}$. $\|.\| : V \to \mathbb{R}_+$ ist eine ***Norm*** falls gilt:

(i) $\|v\| = 0 \iff v = 0$

(ii) $\|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$

(iii) $\|v + w\| \leqslant \|v\| + \|w\|$

(iv) $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ gleichmäßig $\iff \|f_n - f\|_{\infty,M} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ (Übung)

1.3 Beispiele

(i) f_n aus Abb. 1 konvergiert punktweise gegen 0, aber f_n konvergiert nicht gleichmäßig gegen 0, denn

$$\|f_n - 0\|_{\infty,M} = 1 \;\; \forall n \in \mathbb{N}^*$$

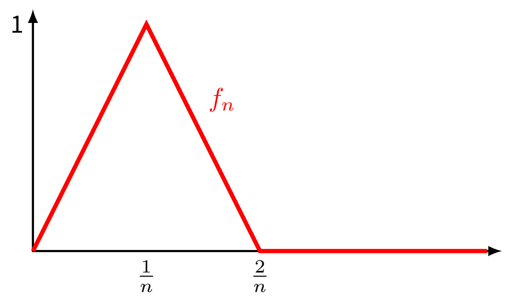


Abbildung 1: punktweise konvergierende Funktionenfolge

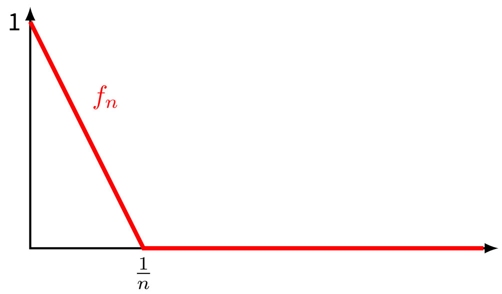
(ii) f_n aus Abb.2 konvergiert punktweise gegen f, wo

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x > 0 \\ 1, & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

f_n konvergiert nicht gleichmäßig gegen f (warum?)

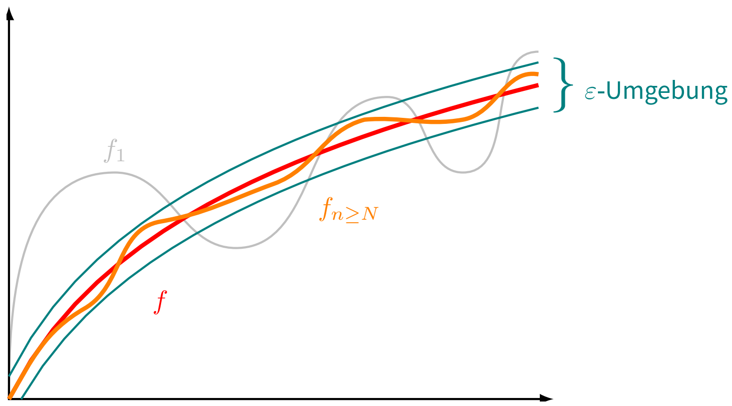
f_n sind stetig, f ist nicht stetig!

Abbildung 2: Folge stetiger Funktionen



(iii)

Abbildung 3: Veranschaulichung von gleichmäßiger Konvergenz



1.4 Satz Sei $M \subset \mathbb{C}$ eine Menge und $f : M \to \mathbb{C}$, $f_n : M \to \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ Funktionen. Falls die f_n stetig sind und gleichmäßig gegen f konvergieren, so ist f stetig.

Beweis: Sei $x_0 \in M$. Sei $\varepsilon > 0$. $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ gleichmäßig $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall x \in M : |f_N(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. f_N ist stetig in x_0

$$\Rightarrow \exists \delta > 0 : |f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}, \text{ falls } |x - x_0| < \delta$$

Für $x \in M$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leqslant |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

□

1.5 Satz Sei M eine Menge. Seien $f_k : M \to \mathbb{C}, k \in \mathbb{N}$ Funktionen mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_{\infty,M} < \infty$$

Dann konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ absolut und gleichmäßig gegen eine Funktion $f : M \to \mathbb{C}$, d.h. $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ konvergiert absolut für jedes $x \in M$ und $\sum_{k=0}^{n} f_k \xrightarrow{n\to\infty} f$ gleichmäßig.

Beweis: Für $x \in M$ gilt $|f_k(x)| \leqslant \|f_k\|_{\infty,M} \forall k \in \mathbb{N}$. Nach Majorantenkriterium konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ absolut. Definiere $f : M \to \mathbb{C}$ durch $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \in \mathbb{C}$. Sei $\varepsilon > 0$.

$$\exists N \in \mathbb{N} : \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_{\infty,M} < \varepsilon \text{ falls } n \geqslant N$$

Für $x \in M$ und $n \geqslant N$ gilt dann

$$\left| -\sum_{k=0}^{n} f_k(x) + f(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_{\infty,M} < \varepsilon$$ □

1.6 Beispiel Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2}$ konvergiert absolut und gleichmäßig auf $\mathbb{R}$, denn

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\| \frac{\cos(kx)}{k^2} \right\|_{\infty,\mathbb{R}} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$$

1.7 Satz Seien $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ stetig. f_n konvergiere gleichmäßig gegen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \left(= \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x \right)$$

Beweis: Nach 1.4 ist f stetig, also integrierbar. Es gilt

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x \right| &= \left| \int_a^b \big(f(x) - f_n(x)\big)\,\mathrm{d}x \right| \\
&\leqslant \int_a^b |f(x) - f_n(x)|\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_a^b \|f - f_n\|_{\infty,[a,b]}\,\mathrm{d}x \\
&= \|f - f_n\|_{\infty,[a,b]}(b-a) \xrightarrow{n\to\infty} 0
\end{aligned}$$ □

1.8 Satz Seien $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ stetig differenzierbar. f_n konvergiere gegen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und f_n' konvergiere gleichmäßig gegen ein $g : [a,b] \to \mathbb{R}$. Dann ist f stetig differenzierbar und es gilt

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) = g(x) \qquad \text{für } x \in [a,b]$$

d.h.

$$\frac{\mathrm{d}\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n\right)}{\mathrm{d}x}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{d}f_n}{\mathrm{d}x}(x)$$

Beweis: Nach Satz 1.4 ist g stetig, also integrierbar. Für $x \in [a,b]$ gilt

$$f(x) - f(a) \xleftarrow{n\to\infty} f_n(x) - f_n(a) = \int_a^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow{n\to\infty} \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$$

$\Rightarrow$ Hauptsatz

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{also} \qquad f'(x) = g(x) \qquad\qquad \text{für } x \in [a,b]$$

1.9 Definition Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

heißt ***Potenzreihe*** mit Mittelpunkt z_0 und Koeffizienten $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$r := \sup\left\{ |z-z_0| \;\middle|\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \text{ konvergiert }, z \in \mathbb{C} \right\} \in [0,\infty]$$

heißt ***Konvergenzradius*** der Potenzreihe.

1.10 Satz Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ habe den Konvergenzradius $r > 0$. Sei $0 < \rho < r$. Dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ absolut gleichmäßig auf

$$\overline{B}(z_0,\rho) := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z-z_0| \leqslant \rho \}$$

D.h. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ konvergiert absolut für $z \in \overline{B}(z_0,\rho)$ und $\sum_{n=0}^{k} a_n(z-z_0)^n$ konvergiert gleichmäßig für $k \to \infty$. (siehe auch 1.5)

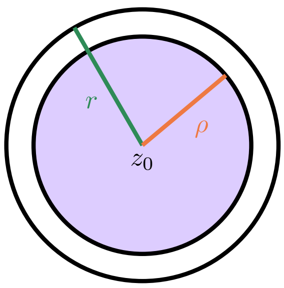


Abbildung 4: Veranschauchlichung von 1.10 in der komplexen Ebene

Beweis: $\rho < r = \sup\{|z-z_0| \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \text{ konvergiert}\}$

$$\Rightarrow \exists z_1 \in \mathbb{C} \text{ mit } |z_1 - z_0| > \rho \text{ und } \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_1-z_0)^n \text{ konvergiert}$$

$\Rightarrow \exists K \in \mathbb{R}_+$ mit $|a_n(z_1-z_0)^n| \leqslant K$ für $n \in \mathbb{N}$. Für $z \in \overline{B}(z_0,\rho)$ gilt nun

$$\begin{aligned} |a_n(z-z_0)^n| &= |a_n(z_1-z_0)^n| \cdot \frac{|z-z_0|^n}{|z_1-z_0|^n} \\ &\leqslant K \cdot \frac{\rho^n}{|z_1-z_0|^n} \\ &= K \cdot \theta^n \qquad \text{mit } \theta := \frac{\rho}{|z_1-z_0|} < 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \|a_n(z-z_0)^n\|_{\infty,\overline{B}(z_0,\rho)} \leqslant K\cdot\theta^n$. Nach dem Majorantenkriterium folgt dann

$$\sum_{n=0}^{\infty}\|a_n(z-z_0)^n\|_{\infty,\overline{B}(z_0,\rho)} < \infty$$

Satz 1.5 $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ konvergiert absolut und gleichmäßig auf $\overline{B}(z_0,\rho)$. □

1.11 Satz Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r>0$. Dann ist $f:(x_0-r,x_0+r)\to\mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ unendlich oft differenzierbar; es gilt

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cdot n\cdot(x-x_0)^{n-1} \qquad \text{und} \qquad a_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)$$

Ableitung erfolgt gliedweise

Beweis: Sei $\overline{x} \in (x_0-r,x_0+r)$. Wähle $0<\rho<r$ mit $\overline{x}\in(x_0-\rho,x_0+\rho)$. Wähle $x_1\in\mathbb{R}$ mit $\rho<|x_0-x_1|<r$. Sei $K\in\mathbb{R}$ wie im Beweis 1.10, d.h. mit $|a_n(x_1-x_0)^n|\leqslant K, n\in\mathbb{N}$. Dann gilt für $x\in\overline{B}(x_0,\rho)$

$$\begin{aligned}\left|n\cdot a_n(x-x_0)^{n-1}\right| &= \frac{|n\cdot a_n(x_1-x_0)^n|}{|x_1-x_0|}\cdot\frac{|x-x_0|^{n-1}}{|x_1-x_0|^{n-1}}\\ &\leqslant \frac{n\cdot K}{\rho}\left(\frac{\rho}{|x_1-x_0|}\right)^{n-1} =: \theta^{n-1} < 1\end{aligned}$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left\|n\cdot a_n(x-x_0)^{n-1}\right\|_{\infty,\overline{B}(x_0,\rho)} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot K}{\rho}\theta^{n-1} < \infty$ (Quotientenkriterium)
Mit Satz 1.5 folgt: $\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot a_n(x-x_0)^{n-1}$ konvergiert absolut und gleichmäßig auf $[x_0-\rho,x_0+\rho]$.
Mit Satz 1.8 folgt weiter

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a_n(x-x_0)^n) = \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot a_n(x-x_0)^{n-1}$$

Rest: Induktion und Einsetzen $(x\rightsquigarrow x_0)$. □

1.12 Satz (Abelscher Grenzwertsatz) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}$. Wenn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ für alle $x\in[0,1]$ und ist stetig auf $[0,1]$.

Beweis: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hat Konvergenzradius $r\geqslant 1$, denn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n 1^n$ konvergiert. Aus Satz 1.10 folgt: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergiert gleichmäßig auf $[0,1-\gamma]$ für jedes $\gamma>0$.
$\Longrightarrow f:[0,1]\to\mathbb{R}$ mit $x\mapsto\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ist wohldefiniert und $f|_{[0,1-\gamma]}$ ist stetig für jedes $\gamma>0$. Dann gilt auch $f|_{[0,1)}$ ist stetig.

Es bleibt zu zeigen: f ist stetig in 1. Setze $s_k := \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$ für $k\geqslant -1$. Dann $s_{-1}=f(1)$ und $s_k - s_{k-1} = \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n - \sum_{n=k}^{\infty} a_n = -a_k$, $k\in\mathbb{N}$. Außerdem gilt: $\lim_{k\to\infty} s_k = 0$ (denn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert). Also existiert $S\in\mathbb{R}_+^*$ mit $|s_k|\leqslant S, k\in\mathbb{N}$.

$$\Rightarrow \left|\sum_{k=0}^{\infty} s_k x^k\right| \overset{\text{Majorantenkrit.}}{\leqslant} \sum_{k=0}^{\infty} S|x|^k = S\cdot\sum_{k=0}^{\infty}|x|^k \overset{\text{geom. Reihe}}{<} \infty \quad \text{für } |x|<1$$

Dann gilt für $|x| < 1$:

$$
\begin{aligned}
(1-x)\left(\sum_{k=0}^{\infty} s_k x^k\right) &= \sum_{k=0}^{\infty} s_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} s_k x^{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} s_k x^k - \sum_{k=1}^{\infty} s_{k-1} x^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} s_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} s_{k-1} x^k + s_{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{(s_k - s_{k-1})} -a_k x^k + \underbrace{s_{-1}} f(1) \\
&= -f(x) + f(1)
\end{aligned}
$$

Sei nun $\varepsilon > 0$, O.E. $\varepsilon \leqslant 1$. Wähle $K \in \mathbb{N}^*$ so dass $|s_k| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ für $k \geqslant K$ und setze $\delta := \frac{\varepsilon}{2S \cdot K}$. Für $x \in (1-\delta, 1)$ gilt dann

$$
\begin{aligned}
|f(1) - f(x)| = \left|(1-x)\sum_{k=0}^{\infty} s_k x^k\right| &\leqslant (1-x)\sum_{k=0}^{\infty} |s_k| x^k \\
&= (1-x)\left(\sum_{k=0}^{K-1} |s_k| x^k + \sum_{k=K}^{\infty} |s_k| x^k\right) \\
&\leqslant (1-x)\left(K \cdot S + \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=K}^{\infty} x^k\right) \\
&\leqslant (1-x)\left(K \cdot S + \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right) \\
&= (1-x)K \cdot S + \frac{\varepsilon}{2}(1-x)\sum_{k=0}^{\infty} x^k \\
&= (1-x)K \cdot S + \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \delta \cdot K \cdot S + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2SK} \cdot K \cdot S + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}
$$

□

1.13 Beispiele

(i) Für $-1 < x \leqslant 1$ gilt

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \mp \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$$

Insbesondere $\ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \mp \ldots$

Beweis: Für $|x| < 1$ gilt

da $t \leqslant 1$

$$\ln(1+x) = \ln(1+x) - \ln(1+0) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1}{1-(-t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n\right)\mathrm{d}t$$

Nach Satz 1.10 konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n$ gleichmäßig auf $\big[-|x|, |x|\big]$ (Konvergenzradius $\leqslant 1$)
Nach Satz 1.7 gilt für $|x| < 1$

$$\begin{aligned}
\ln(1+x) &= \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n\right)\mathrm{d}t = \int_0^x \left(\lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{k}(-1)^n t^n\right)\mathrm{d}t \\
&= \lim_{k\to\infty}\left(\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{k}(-1)^n t^n\right)\mathrm{d}t\right) = \lim_{k\to\infty}\left(\sum_{n=0}^{k}(-1)^n \int_0^x t^n\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \lim_{k\to\infty}\left(\left|\sum_{n=0}^{k}(-1)^n \frac{1}{n+1} t^{n+1}\right|_0^x\right) \\
&= \lim_{k\to\infty}\left(\sum_{n=0}^{k}(-1)^n \frac{1}{n+1} x^{n+1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}
\end{aligned}$$

Für $x = 1$: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$ konvergiert $\overset{\text{Satz 1.12}}{\Longrightarrow}$ $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$ ist stetig auf $[0,1]$ aber $\ln(1+x)$ ist ebenfalls stetig auf $[0,1]$ und $f(x) = \ln(1+x)$ auf $[0,1)$. Dann gilt auch

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \mp \ldots = f(1) = \ln(1+1) = \ln(2)$$

$\square$

(ii) Für $|x| \leqslant 1$ gilt

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \mp \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$$

Insbesondere $\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \mp \ldots$

Beweis: Für $|x| < 1$ gilt nach Analysis I, 13.16(v):

$$\begin{aligned}
\arctan(x) &= \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1}{1-(-t^2)}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}\right)\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^x t^{2n}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left|\frac{1}{2n+1}t^{2n+1}\right|_0^x \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1}
\end{aligned}$$

Für $x = 1$ gilt: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ konvegiert $\overset{1.12}{\Leftrightarrow}$ $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$ ist stetig auf $[0,1]$

$$a_m = \begin{cases} 0, & \text{falls } m \text{ gerade} \\ \frac{(-1)^n}{2n+1}, & \text{falls } m = 2n+1 \text{ ungerade} \end{cases} \qquad f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$$

aber $\arctan(x)$ ist auch stetig auf $[0,1]$ und $f(x) = \arctan(x)$ auf $[0,1)$. Daher gilt auch

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \mp \ldots = f(1) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

Für $x = -1$ gilt: $f(-1) = -f(1) = -\arctan(1) = \arctan(-1)$. (vgl. AnaI, Beispiel 7.8) $\square$

1.14 Satz (Taylorformel) Sei I ein Intervall. $f : I \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal stetig differenzierbar. Dann gilt für $x, x_0 \in I$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_{n+1}(x)$$

wo

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t) \,\mathrm{d}t$$

Außerdem existiert ein ξ zwischen x und x_0 mit

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Beweis:

I.A. ($n=0$): $f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(t)\,\mathrm{d}t$ nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

I.S. ($n \to n+1$): $(*)$ gelte für ein $n \in \mathbb{N}$. Partielle Integration liefert

$$\begin{aligned}
R_{n+1}(x) &= \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} \underbrace{(x-t)^n}_{u'(t)} \underbrace{f^{(n+1)}(t)}_{v(t)} \,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{1}{n!} \cdot \frac{(-1)}{n+1}(x-t)^{n+1} f^{(n+1)}(t)\right]_{x_0}^{x} - \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} \frac{(-1)}{n+1}(x+t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} f^{(n+1)}(x_0) + \frac{1}{(n+1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} + R_{n+2}(x)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow (*)$ für $n+1 \in \mathbb{N}$

Zweiter Teil $g(t) := (x-t)^n$ wechselt nicht das Vorzeichen zwischen x und x_0.
Mittelwertsatz d. Integralrechnung $\Longrightarrow \exists \xi$ zwischen x und x_0 mit

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} \underbrace{(x-t)^n}_{g} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi) \int_{x_0}^{x}(x-t)^n\,\mathrm{d}t \\
&= f^{(n+1)}(\xi)\frac{1}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}
\end{aligned}$$

□

1.15 Definition Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar, $x_0 \in I$.

$$T_f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

heißt ***Taylorreihe*** von f mit Entwicklungspunkt x_0.

1.16 Bemerkung

(i) Der Konvergenzradius von T_f ist nicht notwendig > 0

(ii) Auch wenn T_f konvergiert, gilt nicht immer $T_f(x) = f(x)$

(iii) $T_f(x) = f(x)$ genau dann, wenn $R_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$

(iv) Falls $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ gilt für $x \in I$, so ist $T_f(x) = f(x)$.
(folgt aus Satz 1.11, denn $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$)

1.17 Beispiel

(i) $\exp(x) = T_{\exp}(x)$

(ii) $\sin(x) = T_{\sin}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $\qquad$ $\cos(x) = T_{\cos}(x)$

2 Metrische Räume, Topologie

2.1 Definition Sei X eine Menge. Eine Metrik d auf X ist eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ mit

(i) $d(x, y) = 0 \iff x = y$, $x, y \in X$

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$, $x, y \in X$

(iii) $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$, $x, y, z \in X$

(X, d) heißt ***metrischer Raum***.

2.2 Beispiele

(i) $(\mathbb{K}, d)$ mit $d(x, y) := |x - y|$

(ii) „französische Eisenbahnmetrik": $d(x, y) :=$ Strecke$(x \to$ Paris$) +$ Strecke$($Paris $\to y)$

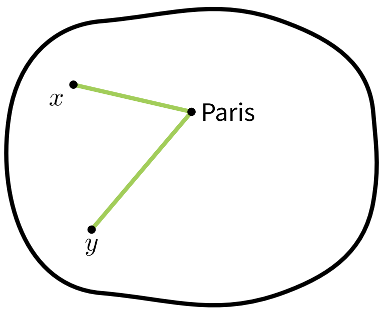


Abbildung 5: eine exakte Darstellung von Frankreich …

(iii) (X, d) metrischer Raum, $A \subset X$. Dann ist $(A, d|_{A \times A})$ wieder ein metrischer Raum. Wir schreiben oft auch (A, d).

(iv) $(V, \|.\|)$ normierter Vektorraum, dann ist (V, d) ein metrischer Raum mit

$$d(x, y) := \|x - y\|$$

(v) $(\mathbb{K}^n, \|.\|_{\max})$ mit $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$

$$\|\underline{x}\|_{\max} := \max\left\{|x_1|, \dots, |x_n|\right\}$$

ist normierter Raum (Übung)

(vi) $(\mathbb{K}^n, \|.\|_1)$ mit

$$\|\underline{x}\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

ist normierter Raum (Übung)

(vii) $(\mathbb{K}^n, \|.\|_2)$ mit

$$\|\underline{x}\|_2 := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

ist normierter Raum:

1.

$$\|\underline{x}\|_2 = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 = 0 \Leftrightarrow |x_i| = \ldots = |x_n| = 0 \Leftrightarrow x_1 = \ldots = x_n = 0 \Leftrightarrow \underline{x} = 0$$

2.

$$\|\lambda \underline{x}\|_2 = |\lambda| \cdot \|\underline{x}\|_2, \lambda \in \mathbb{K}, \underline{x} \in \mathbb{K}^n$$

3. $\triangle$-Ungleichung:

A. $0 \neq \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{K}^n$ mit $\|\underline{u}\|_2 = \|\underline{v}\|_2 = 1$

$$\Rightarrow 0 \leqslant \sum_{i=1}^{n} (|u_i| - |v_i|)^2 = \sum_{i=2}^{n} |u_i|^2 - 2\sum_{i=1}^{n} |u_i| \cdot |v_i| + \sum_{i=1}^{n} |v_i|^2 = 1 - 2\sum_{i=1}^{n} |u_i| \cdot |v_i| + 1$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |u_i| \cdot |v_i| \leqslant 1$$

B. $0 \neq \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{K}^n$ beliebig.
$\Rightarrow$ für $\underline{u} := \frac{1}{\|\underline{x}\|_2} \cdot \underline{x}$, $\underline{v} := \frac{1}{\|\underline{y}\|_2} \cdot \underline{y}$ gilt

$$\|\underline{u}\|_2 = \|\underline{v}\|_2 = 1 \Longrightarrow \left| \sum_{1=1}^{n} \frac{x_i}{\|\underline{x}\|_2} \frac{y_i}{\|\underline{y}\|_2} \right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i|}{\|\underline{x}\|_2} \frac{|y_i|}{\|\underline{y}\|_2} \leqslant 1$$

Cauchy-Schwarz-Ungleichung (trivial für $\underline{x} = 0$ oder $\underline{y} = 0$):

$$\left| \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right| \leqslant \|\underline{x}\|_2 \|\underline{y}\|_2$$

C.

$$\begin{aligned}
\|\underline{x} + \underline{y}\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i|^2 &\leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 + 2|x_i||y_i| + |y_i|^2 \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 + 2 \cdot \|\underline{x}\|_2 \|\underline{y}\|_2 + \sum_{i=1}^{n} |y_i|^2 \\
&= \|\underline{x}\|_2 + 2 \cdot \|\underline{x}\|_2 \|\underline{y}\|_2 + \|\underline{y}\|_2 \\
&= \left(\|\underline{x}\|_2 + \|\underline{y}\|_2\right)^2 \Longrightarrow \|\underline{x} + \underline{y}\|_2 < \|\underline{x}\|_2 + \|\underline{y}\|_2
\end{aligned}$$

(viii) $(\mathbb{K}^n, \|.\|_p)$ mit $\|\underline{x}\|_p := (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ für $1 \leqslant p < \infty$ ist ein normierter Raum (Übung?)

(ix) $\left(l([0,1]), \|.\|_p\right)$ mit $\|f\|_p := \left(\int_0^1 |f(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ (Übung)

(x) Betrachte $(\mathbb{K}^n, \|.\|_p)$ für $1 \leqslant p \leqslant \infty$ in Abbildung 6:

$$B(0,r) := \left\{\underline{x} \in \mathbb{K}^n \,\middle|\, \|\underline{x}\|_p < r\right\}$$

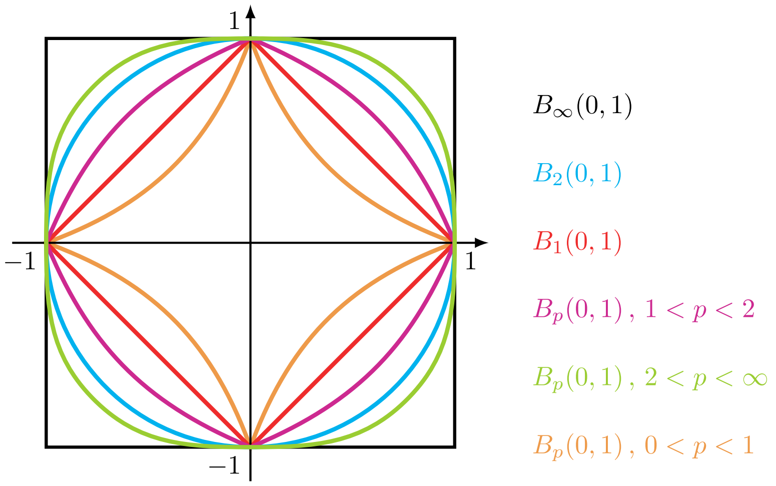


Abbildung 6: zu 2.2 (x): Geometrische Interpretation verschiedener Normen

(xi) Sei X eine Menge, dann definiere

$$d(x,y) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x = y \\ 1, & \text{falls } x \neq y \end{cases}$$

Dies ist die ***diskrete Metrik*** auf X.

2.3 Definition Sei (X,d) ein metrischer Raum.

(i) $B(x,r) := \{y \in X \mid d(x,y) < r\}$ heißt ***offene Kugel*** von x mit Radius r.

(ii) $\overline{B}(x,r) := \{y \in X \mid d(x,y) \leqslant r\}$ heißt ***abgeschlossene Kugel*** von x mit Radius r.

(iii) $U \subset X$ heißt ***Umgebung*** von $x \in X$, falls gilt:

$$\exists \varepsilon > 0 : B(x,\varepsilon) \subset U$$

(iv) $U \subset X$ heißt ***offen***, falls gilt:

$$\forall x \in U \;\; \exists \varepsilon > 0 : B(x,\varepsilon) \subset U$$

(d.h. U ist eine Umgebung für jedes $x \in U$)

(v) $A \subset X$ ist abgeschlossen, falls $X \setminus A$ offen ist.

2.4 Bemerkung $B(x,r)$ ist offen:

$$\text{Zu zeigen: } \forall y \in B(x,r) \exists \varepsilon > 0 : B(y,\varepsilon) \subset B(x,r)$$

Sei also $y \in B(x,r)$ gegeben. Setze $\varepsilon := r - d(x,y) > 0$, nach Definition von $B(x,r)$. Es gilt $B(y,\varepsilon) \subset B(y,r)$, denn:

$$\begin{aligned} z \in B(y,\varepsilon) &\Rightarrow d(z,y) < \varepsilon \\ \Rightarrow d(z,x) \leqslant d(z,y) + d(y,x) &< \varepsilon + d(y,x) = r \end{aligned}$$

Also $z \in B(x,r)$ □

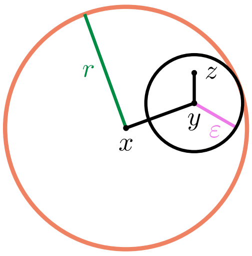


Abbildung 7: Veranschaulichung des Vorgehens in 2.4

2.5 Proposition Sei (X,d) ein metrischer Raum. Dann gilt:

(i) $\emptyset, X$ sind offen.

(ii) U,V offen $\Rightarrow U \cap V$ ist offen.

(iii) Für jede Familie $(U_i)_{i\in I}$ von offenen Mengen gilt

$$\bigcup_{i\in I} U_i \text{ ist offen}$$

Beweis:

(i) $\forall x \in \emptyset \exists \varepsilon > 0 : B(x,\varepsilon) \subset \emptyset$ gilt trivialerweise $\emptyset$ ist offen.
Für $x \in X$ wähle $\varepsilon = 1$, dann gilt immer

$$B(x,\varepsilon) \subset X$$

$\Rightarrow X$ ist offen.

(ii) Seien U,V offen. Sei $x \in U \cap V$. U,V offen $\Rightarrow \exists \varepsilon_U, \varepsilon_V > 0$ mit:

$$B(x,\varepsilon_U) \subset U \quad , \quad B(x,\varepsilon_V) \subset V$$

Setze $\varepsilon := \min\{\varepsilon_U, \varepsilon_V\} > 0$

$$\Rightarrow B(x,\varepsilon) \subset \underbrace{B(x,\varepsilon_U) \cap B(x,\varepsilon_V)}_{\subset U \cap V}$$

(iii) Sei $x \in \bigcup_{i\in I} U_i$, dann ist $x \in U_{\bar{\imath}}$ für ein $\bar{\imath} \in I$. $U_{\bar{\imath}}$ offen

$$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : B(x,\varepsilon) \subset U_{\bar{\imath}} \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$$

□

2.6 Definition Sei X eine Menge. Ein System $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen von X heißt ***Topologie*** auf X, falls gilt:

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$

(ii) $U, V \in \mathcal{T} \Longrightarrow U \cap V \in \mathcal{T}$

(iii) $(U_i)_{i\in I} \subset \mathcal{T} \Longrightarrow \bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$

$(X, \mathcal{T})$ heißt ***topologischer Raum***. Die Elemente von $\mathcal{T}$ heißen offene Teilmengen von X.
$A \subset X$ heißt abgeschlossen, falls $X \setminus A \in \mathcal{T}$. $Y \subset X$ heißt ***Umgebung*** von $x \in X$, falls gilt

$$\exists U \in \mathcal{T} : x \in U \subset Y$$

2.7 Bemerkung Sei (X, d) ein metrischer Raum. Wir definieren:

$$\mathcal{T}_d := \{U \subset X \mid U \text{ ist offen im Sinne von (2.3)(iv)}\}$$

nach Proposition 2.5 ist $\mathcal{T}_d$ eine Topologie auf X, die von d induzierte Topologie.

2.8 Proposition und Definition Jeder metrische Raum ist ***Hausdorffsch***, d.h.

$$\forall x, y \in X, x \neq y : \exists U, V \subset X \text{ offen } : x \in U,\, y \in V,\, U \cap V = \emptyset$$

Beweis: Gegeben $x \neq y \in X$. Dann ist $\frac{d(x,y)}{2} > 0$. Setze $U := B(x, \frac{d(x,y)}{2})$, $V := B(y, \frac{d(x,y)}{2})$. Dann gilt $x \in U, y \in V$. Falls $z \in U \cap V$, so gilt

$$d(x, y) \leqslant \underbrace{d(x, z)}_{< \frac{d(x,y)}{2}} + \underbrace{d(z, y)}_{< \frac{d(x,y)}{2}} < 2 \cdot \frac{d(x, y)}{2} = d(x, y) \qquad ↯$$

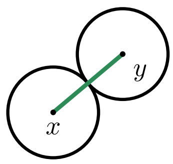


Abbildung 8: Veranschaulichung des Vorgehens im Beweis von 2.8

2.9 Definition Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. $Y \subset X$. Wir definieren den ***Rand***

$$\partial Y := \{x \in X \mid \text{ für jede Umgebung } U \text{ von } x \text{ gilt} : U \cap Y \neq \emptyset \text{ und } U \cap (X \setminus Y) \neq \emptyset\}$$
$$\mathring{Y} := Y \setminus \partial Y \text{ heißt das } \textbf{\textit{Innere}} \text{ von } Y$$
$$\overline{Y} := Y \cup \partial Y \text{ heißt der } \textbf{\textit{Abschluss}} \text{ von } Y$$

2.10 Proposition Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. $Y \subset X$. Dann gilt:

(i) $\mathring{Y}$ ist offen

(ii) $\overline{Y}$ ist abgeschlossen

(iii) ∂Y ist abgeschlossen

Beweis:

(i) $y \in \mathring{Y} \Rightarrow \exists U_y$ offen mit ($U_y \cap Y = \emptyset$ oder) $U_y \cap (X \setminus Y) = \emptyset$
$\Rightarrow U_y \subset Y$

$$\Rightarrow \mathring{Y} \subset \bigcup_{y \in \mathring{Y}} \underbrace{U_y}_{\text{offen}} \subset Y$$

$$y' \in \bigcup_{y \in \mathring{Y}} U_y \subset Y \Rightarrow y' \notin \partial Y$$

$$\Rightarrow \bigcup_{y \in \mathring{Y}} U_y \subset Y \setminus \partial Y = \mathring{Y} \Rightarrow \mathring{Y} \subset \bigcup_{y \in \mathring{Y}} U_y \subset \mathring{Y} \Rightarrow \mathring{Y} = \bigcup_{y \in \mathring{Y}} U_y \text{ offen}$$

(ii) Übung

(iii) Übung

2.11 Beispiele

(i) (a,b) ist offen in $\mathbb{R}$ (mit Standardmetrik $d(x,y) = |x-y|$). Für $x \in (a,b)$ setze

$$\varepsilon := \min\{x-a, b-x\} > 0$$

Dann $B(x,\varepsilon) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset (a,b)$. $\Rightarrow$ (a,b) ist offen im Sinne von 2.3.

(a,∞) und $(-\infty,b)$ sind ebenfalls offen. (warum?)

alternativ:

$$(a,\infty) = \underbrace{\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \underbrace{(a, a+k)}_{\text{offen}}}_{\text{offen}}$$

(ii) $[a,b) \subset \mathbb{R}$ ist nicht offen (für $a < b$).
Für $a \in [a,b)$ existiert kein $\varepsilon > 0$ mit $B(a,\varepsilon) \subset [a,b)$. (Denn $a - \frac{\varepsilon}{2} \notin [a,b)$)

(iii) $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ist nicht offen. Siehe ((ii))
$[a,b]$ ist abgeschlossen:

$$\mathbb{R} \setminus [a,b] = (-\infty,a) \cup (b,\infty) \quad \text{offen}$$

(iv) $(a,b] \subset \mathbb{R}$ (für $a < b$) ist nicht abgeschlossen. Betrachte: $\mathbb{R} \setminus (a,b]$ und argumentiere wie in ((ii))

(v)
- $\mathbb{N}, \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ sind abgeschlossen (warum?)
- $\left\{\frac{1}{n} \,\middle|\, n = 1,2,3,\dots\right\} \cup \{0\}$ ist abgeschlossen (warum?)
- $\left\{\frac{1}{n} \,\middle|\, n = 1,2,3,\dots\right\}$ ist weder offen noch abgeschlossen (warum?)

(vi) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ist weder offen noch abgeschlossen. (warum?)

(vii) $(a,b) \subset \mathbb{C}$ (mit Standardmetrik $d(x,y) = |x-y|$) ist nicht(!) offen: $x + \underbrace{\frac{\varepsilon}{2} i}_{\in (a,b)} \in B(x,\varepsilon)$

(viii) Betrachte $[a,b)$ als metrischen Unterraum von $\mathbb{R}$. Dann ist $[d,b) \subset [a,b)$ abgeschlossen und $[a,d) \subset [a,b)$ offen.

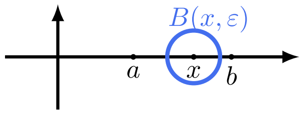


Abbildung 9: Veranschaulichung von 2.11 (vii)

(ix) allgemeiner: $(X,\mathcal{T})$ topologischer Raum, $Y\subset X$, dann ist $(Y,\mathcal{T}_Y)$ ein topologischer Raum mit

$$\mathcal{T}_Y := \{U\cap Y \mid U\in\mathcal{T}\} = \{V\subset Y \mid \exists U\in\mathcal{T} : V = U\cap Y\}$$

(vii) und (viii) zeigen:

$$U\subset Y \text{ offen in } Y \not\Rightarrow U \text{ offen in } X$$

aber für $U\subset Y$ gilt:

$$U \text{ offen in } Y \Leftarrow U \text{ offen in } X$$

Schreibweise: $U \underset{\text{offen}}{\subset} Y$ und $U \underset{\text{offen}}{\subset} X$

(x) $(X,\mathcal{P}(X))$ ist topologischer Raum für jede Menge X; $\mathcal{P}(X)$ wird induziert durch d_{diskret}, die diskrete Metrik.

(xi) Sei X eine Menge, dann ist $\{X,\emptyset\}$ eine Topologie; im Allgemeinen nicht induziert von einer Metrik.

(xii) $\mathbb{C}$ mit Standardmetrik, dann:

$$\partial B(0,1) = S^1 = \{z \mid |z| = 1\}$$

$$\underbrace{\overline{B(0,1)}}_{B(0,1)\cup\partial B(0,1)} = \underbrace{\overline{B}(0,1)}_{\{z \mid |z|\leqslant 1\}}$$

(xiii) $\mathbb{R}$ mit Standardmetrik, dann:

$$\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}\;,\; \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}\;,\; \mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset$$

2.12 Definition Sei (X,d) ein metrischer Raum, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset X$ eine Folge. Wir sagen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $x\in X$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, falls gilt:

$$\forall\varepsilon>0\exists N\in\mathbb{N} : \forall n\geqslant N : d(x,x_n)<\varepsilon$$

äquivalent:

$d(x,x_n)\xrightarrow{n\to\infty} 0$

Zu jeder Umgebung U von x existiert ein $N\in\mathbb{N}$ mit $x_n\in U$ für $n\geqslant N$

2.13 Definition Sei (X,d) ein metrischer Raum, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset X$ heißt ***Cauchyfolge***, falls gilt:

$$\forall\varepsilon>0\exists N\in\mathbb{N} : \forall m,n\geqslant N : d(x_m,x_n)<\varepsilon$$

2.14 Bemerkung Jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge.

Beweis: Sei $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$, sodass für $n \geqslant N$ gilt $d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$. Für $n, m \geqslant N$ gilt:

$$d(x_m, x_n) \leqslant d(x_m, x) + d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad \square$$

2.15 Definition Ein metrischer Raum heißt ***vollständig***, falls in ihm jede Cauchyfolge konvergiert.

2.16 Definition Ein vollständig normierter Vektorraum heißt ***Banachraum***.

2.17 Proposition Sei (X, d) ein metrischer Raum, $A \subset X$. Dann sind äquivalent:

(i) $A \underset{\text{abgschl.}}{\subset} X$

(ii) Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$, welche in X konvergiert, gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in A$.

Beweis:

(i)⇒(ii): Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ konvergent in X, sei $\overline{x} := \lim_{n\to\infty} x_n \in X$. Falls $\overline{x} \in X \setminus A \underset{\text{offen}}{\subset} X$, so existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in X \setminus A$ falls $n \geqslant N$ (benutzt: $\star\star\star$ aus 2.12) $\lightning$

(ii)⇒(i) Sei $x \in X \setminus A$. Zu zeigen: $\exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$.
Falls nicht, so existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in B(x, \frac{1}{n+1}) \cap A$. Dann folgt $x_n \in A, d(x, x_n) < \frac{1}{n+1}$. Wir haben jetzt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ mit $d(x, x_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$, also $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Nach Vorraussetzung (ii) gilt: $x \in A$ $\lightning$ $\square$

2.18 Proposition Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum. Sei $A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ eine absteigende Folge nichtleerer abgeschlossener Teilmengen mit $\operatorname{diam}(A_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ (wo $\operatorname{diam} A_n := \sup\{d(x, y) \,|\, x, y \in A_n\}$).
Dann gibt es genau einen Punkt in $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. (vgl. mit Intervallschachtelungsprinzip)

Beweis: Für $n \in \mathbb{N}$ wähle $x_n \in A_n$. Falls $\varepsilon > 0$, wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $\operatorname{diam}(A_n) < \varepsilon$, falls $n \geqslant N$. Falls $n, m \geqslant N$, so gilt:

$$d(x_n, x_m) \leqslant \operatorname{diam}(A_N) < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchyfolge. Da (X, d) vollständig: $\overline{x} := \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in X$ existiert. Für $k \in \mathbb{N}$ gilt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}, n>k} \subset A_k$. Dann folgt mit 2.17 $\overline{x} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in A_k$. Also gilt $\overline{x} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Sei nung $y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ein weiterer Punkt.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow d(\overline{x}, y) \leqslant \operatorname{diam} A_n \xrightarrow{n\to\infty} 0 \\
&\Rightarrow d(\overline{x}, y) = 0 \Rightarrow \overline{x} = y
\end{aligned} \qquad \square$$

2.19 Proposition Betrachte $(\mathbb{R}^n, d_2)$ (d_2 induziert durch $\|.\|_2$). Sei $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ und $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$, $\underline{x}_k = (x_{k,1}, \ldots, x_{k,n})$. Dann gilt:

$$\lim_{k\to\infty} \underline{x}_k = \underline{x} \iff \lim_{k\to\infty} x_{k,i} = x_i \quad i \in \{1, \ldots, n\}$$

Beweis:

"$\Rightarrow$": Für $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt:

$$|x_{k,i} - x_i| = \left(|x_{k,i} - x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} |x_{k,j} - x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|\underline{x}_k - \underline{x}\|_2 \xrightarrow{k \to \infty} 0$$

"$\Leftarrow$": Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Für $i \in \{1, \dots, n\}$ existiert $N_i \in \mathbb{N}$ mit: $|x_{k,i} - x_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$, falls $k \geqslant N_i$. Setze $N := \max\{N_i \mid i = 1, \dots, n\}$, dann gilt für $k \geqslant N$:

$$d_2(\underline{x}, \underline{x}_k) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_{k,i} - x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\varepsilon^2\right)^{\frac{1}{2}} = \varepsilon \qquad \square$$

2.20 Corollar $(\mathbb{R}^n, d_2)$ ist vollständig.

Beweis: Sei $(\underline{x}_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ Cauchyfolge. Es gilt

$$\|\underline{x}_k - x_l\|_2 \geqslant |x_{k,i} - x_{l,i}|$$

Sei $i = 1, \dots, n$, daher ist $(x_{k,i})_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ Cauchyfolge, also konvergent $\overset{2.19}{\Longrightarrow}$ $(\underline{x}_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ konvergent.
$\square$

3 Stetigkeit

3.1 Definition Seien (X, d_X), (Y, d_Y) metrische Räume, $f : X \to Y$ eine Abbildung. f heißt stetig in $\overline{x} \in X$, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 : \forall x \in B_{d_X}(\overline{x}, \delta) : f(x) \in B_{d_Y}(f(\overline{x}), \varepsilon)$$

D.h. $d_X(x, \overline{x}) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(\overline{x})) < \varepsilon$
f heißt stetig falls gilt: f ist stetig in jedem Punkt $x \in X$.

3.2 Proposition Seien (X, d_X), (Y, d_Y) metrische Räume, $f : X \to Y$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent:

(i) f ist stetig in $\overline{x} \in X$

(ii) Für jede Umgebung V von $f(\overline{x})$ existiert eine Umgebung U von $\overline{x}$ mit $f(U) \subset V$

(iii) Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \overline{x}$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(\overline{x})$.
d.h. $\lim\limits_{x\to\overline{x}} f(x) = f(\overline{x})$

Außerdem sind äquivalent:

(a) f ist stetig

(b) $\forall V \in \mathcal{T}_{d_Y} : f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_{d_X}$

(c) $\forall A \underset{\text{abgschl.}}{\subset} Y : f^{-1}(A) \underset{\text{abgschl.}}{\subset} X$

Beweis:

(i)⇒(ii): Sei V Umgebung von $f(\overline{x})$. Dann:

$$\exists \varepsilon > 0 : B_{d_Y}\big(f(\overline{x}), \varepsilon\big) \subset V$$

Da f stetig in $\overline{x}$: $\exists \delta > 0 : \forall x \in B_{d_X}(\overline{x}, \delta) : f(x) \in B_{d_Y}(f(\overline{x}), \varepsilon)$. Setze $U := B_{d_X}(\overline{x}, \delta)$, dann gilt:

$$f(U) \subset B_{d_Y}(f(\overline{x}), \varepsilon) \subset V \qquad \square$$

(ii)⇒(iii): Sei $(x_n)_{\mathbb{N}} \subset X$ eine Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \overline{x}$. Zu zeigen: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(\overline{x})$. Sei $\varepsilon > 0$. Setze $V := B_{d_Y}(f(\overline{x}), \varepsilon)$, nach ((ii)) existiert eine Umgebung U von $\overline{x}$ mit $f(U) \subset V$. $\Rightarrow \exists \delta > 0 : B_{d_X}(\overline{x}, \delta) \subset U$. Da $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \overline{x}$ gilt:

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N : x_n \in B_{d_X}(\overline{x}, \delta)$$

$\Rightarrow$ falls $n \geqslant N$, so gilt:

$$f(x_n) \in V = B_{d_Y}(f(\overline{x}), \varepsilon) \qquad \square$$

(iii)⇒(i); Angenommen ((i)) gelte nicht, d.h.

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta : \exists x \in B_{d_X}(\overline{x}, \delta) : f(x) \notin B_{d_Y}(f(\overline{x}), \varepsilon)$$

Insbesondere existiert für $\delta = \frac{1}{n+1}$ ein $x_n \in B_{d_X}(\overline{x}, \frac{1}{n+1})$ mit $d_Y(f(x_n), f(\overline{x})) \geqslant \varepsilon$. Dann gilt für $(x_n)_{\mathbb{N}} \subset X$: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \overline{x}$, aber $\big(f(x_n)\big)_{\mathbb{N}}$ konvergiert nicht gegen $f(\overline{x})$ $\lightning$

(a)⇒(b): Sei $V \underset{\text{offen}}{\subset} Y$. Falls $x \in f^{-1}(V)$, so ist V Umgebung von $f(x)$. f stetig (in x) $\overset{\text{((ii))}}{\Rightarrow}$ es existiert eine Umgebung U von x mit $f(U) \subset V$. Dann gilt $x \in U \subset f^{-1}(V)$, also ist auch $f^{-1}(V)$ Umgebung von x. $x \in f^{-1}(V)$ war beliebig $\Rightarrow f^{-1}(V) \underset{\text{offen}}{\subset} X$. □

(b)⇒(a): Sei $x \in X$ und $V \subset Y$ eine Umgebung von $f(x)$. Dann existiert $W \underset{\text{offen}}{\subset} Y$ mit $f(x) \in W \subset V$. Aus (b) folgt $f^{-1}(W) \underset{\text{offen}}{\subset} X \Rightarrow U := f^{-1}(W)$, dann ist U eine Umgebung von x mit $f(U) = f\big(f^{-1}(W)\big) \subset W \subset V$. Aus (ii) folgt f ist stetig in x.

(b)⇔(c) klar mit

$$f^{-1}(Y \setminus V) = X \setminus f^{-1}(V)$$

3.3 Definition Seien $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume, $f : X \to Y$ eine Abbildung. f heißt stetig in $\overline{x} \in X$, falls 3.2(ii) gilt. f heißt stetig, falls 3.2(b) gilt.
(Äquivalent: f ist stetig in jedem Punkt) (warum?)

3.4 Proposition Seien $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y), (Z, \mathcal{T}_Z)$ topologische Räume, $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ stetig. Dann ist $g \circ f : X \to Z$ auch stetig.

Beweis: $U \underset{\text{offen}}{\subseteq} Z$. Da g stetig ist gilt: $g^{-1}(U) \underset{\text{offen}}{\subseteq} Y$. Da f stetig ist:

$$\begin{aligned} f^{-1}\Big(g^{-1}(U)\Big) &\underset{\text{offen}}{\subseteq} X \\ &= \big\{x \in X \,\big|\, f(x) \in g^{-1}(U)\big\} \\ &= \{x \in X \,|\, g(f(x)) \in U\} \\ &= \{x \in X \,|\, (g \circ f)(x) \in U\} \\ &= (g \circ f)^{-1}(U) \end{aligned}$$

□

3.5 Definition Seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume, $f : X \to Y$, $f_n : X \to Y$, $n \in \mathbb{N}$

(i) $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ punktweise, falls gilt: $\forall x \in X : f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$

(ii) $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ gleichmäßig, falls gilt: $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall x \in X, n \geqslant N : d_Y\big(f_n(x), f(x)\big) < \varepsilon$

3.6 Satz Seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume, $f : X \to Y$, $f_n : X \to Y$, $n \in \mathbb{N}$. Falls die f_n stetig sind und $f_n \to f$ gleichmäßig, so ist f stetig

Beweis: Wie in 1.4 □

3.7 Beispiele

(i) Seien V, W normierte Vektorräume, $f : V \to W$ linear. Dann sind äquivalent:

a) f ist stetig

b) $\|f\| := \sup\{\|f(v)\|_W \mid v \in V, \|v\|_V \leqslant 1\} < \infty$

c) $\exists C \in \mathbb{R}_+ : \|f(v)\| \leqslant C \cdot \|v\|$, für alle $v \in V$

Beweis:

(a)⇒(b): f ist stetig in $0 \in V$, daher gilt: Zu $\varepsilon := 1$ existiert $\delta > 0$:

$$\|v - 0\| < \delta \Rightarrow \|f(v) - f(0)\| < \varepsilon = 1$$

Falls $\|v\| \leqslant 1$, so gilt (für $v \neq 0$): $\|\frac{\delta}{2} \cdot v\| < \delta$, also $\frac{\delta}{2}\|f(v)\| = \|f(\frac{\delta}{2}v)\| < 1$ und $\|f(v)\| < \frac{2}{\delta}$.

(b)⇒(c): Setze $C := \|f\|$, dann gilt (für $v \neq 0$)

$$\|f(v)\| = \|v\| \cdot \left\|\frac{1}{\|v\|} \cdot f(v)\right\| = \|v\| \cdot \left\|f\left(\frac{1}{\|v\|} \cdot v\right)\right\| \leqslant C \cdot \|v\|$$

(c)⇒(a): Klar, falls $C = 0$. Falls $C \neq 0$: Gegeben $\varepsilon > 0$. Setze $\delta := \frac{\varepsilon}{C}$.

$$\|v - v'\| < \delta \Longrightarrow \|f(v) - f(v')\| = \|f(v - v')\| \leqslant C\|v - v'\| < \varepsilon$$ □

(ii) $V := \ell([a,b]) := \{f : [a,b] \to R \text{ stetig}\}$ mit $\|.\|_{\infty,[a,b]}$ ist ein normierter Vektorraum: Stetige Funktionen auf $[a,b]$ sind beschränkt nach Analysis I 9.12; $\|.\|_{\infty,[a,b]}$ ist Norm auf

$$V \underset{\text{Untervektorraum}}{\subset} \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ beschränkt}\} \qquad \text{nach 1.2(iii)}$$

(iii) $(V, \|.\|_{\infty,[a,b]})$ ist vollständig.

Beweis: Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ eine Cauchyfolge. Dann gilt für $x \in [a,b]$:

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \|f_n - f_m\|_{\infty,[a,b]}$$

Daher ist $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Cauchyfolge, also konvergent (warum?)
Definiere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ durch $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Es gilt nach Definition $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ punktweise; tatsächlich gilt sogar $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ gleichmäßig (Übung). $\Rightarrow \|f_n - f\|_{\infty,[a,b]} \xrightarrow{n\to\infty} 0$.
Dann folgt mit Satz 1.4, dass f stetig ist. □

(iv) Sei $(V, \|.\|_{\infty,[a,b]})$ wie in ((ii)). Definiere $\varphi : V \to \mathbb{R}$ durch

$$\varphi(f) := \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Dann ist φ wohldefiniert und linear (Analysis I). Es gilt

$$|\varphi(f)| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b \|f\|_{\infty,[a,b]}\,\mathrm{d}x = \underbrace{(b-a)}_{=:C} \cdot \|f\|_{\infty,[a,b]}$$

3.7(i) c) $\Rightarrow \varphi$ stetig.

(v) Sei

$$D : \overset{\text{1-mal stetig diff.bar}}{\ell^1([a,b])} \to \ell([a,b]) \qquad a = 0, b = 1$$

gegeben durch $Df := f'$. D ist nicht stetig bezüglich $\|.\|_{\infty,[0,1]}$:
Sei $f_n \in \ell^1([0,1])$ gegeben durch $f_n(x) := x^n$, $n \in \mathbb{N}$, dann ist $\|f_n\|_{\infty,[0,1]} = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, aber

$$\|Df_n\|_{\infty,[0,1]} = \|n \cdot f_{n-1}\|_{\infty,[0,1]} = n \quad , n \in \mathbb{N}$$

Also gilt für kein $C \in \mathbb{R}_+$

$$n = \|Df_n\|_{\infty,[0,1]} \leqslant C \cdot \|f_n\|_{\infty,[0,1]} = C \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\overset{\text{3.7 (i) c)}}{\Longrightarrow}$ D ist nicht stetig.

(vi) Sei (X,d) eine metrischer Raum, $\overline{x} \in X$. Definiere $f : X \to \mathbb{R}_+$ durch $f(x) := d(x, \overline{x})$. Dann ist f stetig. (Übung)

4 Kompaktheit

4.1 Definition Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $Y \subset X$. Eine offene ***Überdeckung*** von Y ist eine Familie $(U_i)_{i\in I} \subset \mathcal{T}$ mit $Y \subset \bigcup_{i\in I} U_i$. Falls $J \subset I$ und $Y \subset \bigcup_{i\in J} U_i$, so heißt $(U_i)_{i\in J}$ ***Teilüberdeckung***. $(U_i)_{i\in J}$ heißt endlich, falls J endlich ist.

4.2 Definition Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. $K \subset X$ heißt ***kompakt***, falls gilt: Zu jeder offenen Überdeckung von K existiert eine endliche Teilüberdeckung.

D.h. Für jede offene Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von K existieren $i_0, \ldots, i_n$ mit

$$K \subset \bigcup_{l=0}^{n} U_{i_l}$$

4.3 Beispiel

(i) Sei (X, d) ein metrischer Raum, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{x}$. Dann ist $K := \{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} \cup \{\overline{x}\}$ kompakt.

Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von K. Dann existiert $\overline{\imath} \in I$ mit $\overline{x} \in U_{\overline{\imath}}$. $U_{\overline{\imath}}$ ist offen, daher existiert $N \in \mathbb{N}$, so dass gilt: $x_n \in U_{\overline{\imath}}$ falls $n \geqslant N$. Wähle $i_0, \ldots, i_{N-1} \in I$ mit $x_n \in U_{i_n}$, $n \in \{0, \ldots, N-1\}$. Dann ist $\big(U_{i_0}, U_{i_1}, \ldots, U_{i_{N-1}}, U_{\overline{\imath}}\big)$ eine endliche Teilüberdeckung. $\square$

(ii) $(X, d), (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie oben, dann ist $\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ im Allgemeinen nicht kompakt.

Gegenbeispiel: Sei $x_n \in [0, 1]$ gegeben durch $x_n = \frac{1}{n+1}$, dann gilt $x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ und $\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht kompakt. $U_n := (\frac{1}{n+2}, 1] \subset [0, 1]$ offen,

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n = (0, 1] \supset \{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$$

$(U_n)_{\mathbb{N}}$ ist also eine offene Überdeckung, besitzt aber keine endliche Teilüberdeckung. (warum?)

4.4 Proposition Sei (X, d) ein metrischer Raum, $K \subset X$ kompakt. Dann ist K beschränkt und abgeschlossen. (d.h. $K \subset B(x, R)$ für ein $x \in X$, $R \in \mathbb{R}$).
Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht. (Übung)

Beweis: Sei $\overline{x} \in X$ beliebig, dann ist $\big(B(\overline{x}, n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung von K. Da K kompakt ist, existieren $n_0, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ mit $K \subset \bigcup_{l=0}^{k} B(\overline{x}, n_l)$. Sei $N := \max\{n_l \,|\, l = 0, \ldots, k\}$. Dann ist

$$K \subset \bigcup_{l=0}^{k} B(\overline{x}, n_l) \subset B(\overline{x}, N)$$

also ist K beschränkt. Sei nun $x \in X \setminus K$ beliebig. Setze

$$U_n := \left\{ y \in X \,\middle|\, d(y, x) > \frac{1}{n+1} \right\} = \underbrace{X \setminus \underbrace{\overline{B}(x, \frac{1}{n+1})}_{\text{abgeschlossen}}}_{\text{offen}}$$

Es gilt $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n = X \setminus \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{B}(x, \frac{1}{n+1})\right) = X \setminus \{x\}$. Da $x \notin K$ folgt: $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine offene Überdeckung von K. Da K kompakt ist, existieren $n_0, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ mit $K \subset \bigcup_{l=0}^{k} U_{n_l}$. Sei $N := \max\{n_0, \ldots, n_k\}$, dann ist $K \subset X \setminus \overline{B}(x, \frac{1}{N+1})$, also

$$B\left(x, \frac{1}{N+1}\right) \cap K = \emptyset \implies B\left(x, \frac{1}{N+1}\right) \subset X \setminus K$$

$\Rightarrow X \setminus K$ ist Umgebung von x. x war beliebig, also $X \setminus K \underset{\text{offen}}{\subset} X$. Also K abgeschlossen in X. $\square$

4.5 Proposition Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $K \subset X$ kompakt. Sei $A \underset{\text{abg.}}{\subset} X$, $A \subset K$. Dann ist auch A kompakt.

Beweis: Sei $(U_i)_I$ eine offene Überdeckung von A. Dann gilt

$$K \subset \bigcup_{i\in I} U_i \cup \underbrace{X \setminus A}_{\text{offen in } X}$$

Da K kompakt ist, existieren $i_0, \ldots, i_k \in I$ mit $K \subset \bigcup_{l=0}^{k} U_{i_l} \cup X \setminus A$. Also $(U_{i_0}, \ldots, U_{i_k})$ ist eine endliche Teilüberdeckung für A, da $A \subset K$.

4.6 Bemerkung Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. $K \subset X$. Dann gilt: K ist kompakt bezüglich $\mathcal{T} \iff K$ kompakt bezüglich $\mathcal{T}_k$ (warum?)
Wir schreiben daher oft

$$\underset{\text{kompakt}}{K} \subset X$$

4.7 Satz von Heine-Borel $A \subset \mathbb{R}^n$ ist kompakt $\iff$ A ist beschränkt und abgeschlossen.

Beweis:

„$\Rightarrow$“: Proposition 4.4

„$\Leftarrow$“: A beschränkt $\Rightarrow A \subset K$ wo $K = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid -L \leqslant x_i \leqslant L,\, i = 1, \ldots, n\}$ für ein $L \in \mathbb{R}_+$. Es genügt zu zeigen, dass K kompakt ist, denn dann ist auch A kompakt nach 4.5.

Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von K. Annahme: $(U_i)_{i\in I}$ besitzt keine endliche Teilüberdeckung für K. Wir konstruieren induktiv

$$\mathbb{R}^n \supset K_0 \supset K_1 \supset K_2 \supset \ldots$$

und $I_{m,i} \subset \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $I_{m,i}$ ist ein abgeschlossenes Intervall der Länge $2^{-m+1} \cdot L,\ m \in \mathbb{N}, i \in \{1, \ldots, n\}$

(ii) $K_m = I_{m,1} \times \ldots \times I_{m,n}$, $m \in \mathbb{N}$

(iii) $(U_i)_{i\in I}$ besitzt keine endliche Teilüberdeckung für K_m, $m \in \mathbb{N}$

Setze $K_0 := K$, $I_{0,i} := [-L, L]$, $i = 1, \ldots, n$ dann sind (i), (ii), (iii) erfüllt.

Seien nun $K_m, I_{m,i}$ bereits konstruiert. Schreibe $I_{m,i} := \bigcup_{j\in\{0,1\}} I_{m,i}^{(j)}$, wo $I_{m,i}^{(j)} \subset \mathbb{R}$ abgeschlossene Intervalle sind mit der Länge $\frac{1}{2}|I_{m,i}| = 2^{-(m+1)+1}L$. Dann gilt:

$$K_m = I_{m,1} \times \ldots \times I_{m,n} = \bigcup_{(j_1,\ldots,j_n)\in\{0,1\}^n} I_{m,1}^{(j_1)} \times \ldots \times I_{m,n}^{(j_n)}$$

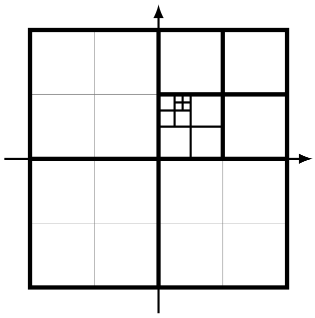


Abbildung 10: Veranschaulichung vom Beweis zu 4.7 in $\mathbb{R}^2$

Da $(U_i)_i$ keine endliche Teilüberdeckung von K_m hat, existiert $(\bar{\jmath}_1, \ldots, \bar{\jmath}_n) \in \{0,1\}^n$ so dass

$$I_{m,1}^{(\bar{\jmath}_1)} \times \ldots \times I_{m,n}^{(\bar{\jmath}_n)} =: K_{m+1}$$

keine endliche Teilüberdeckung von U_i zulässt. Dann $I_{m+1,l} := I_{m,l}^{(\bar{\jmath}_l)}$ und es gilt

$$|I_{m+1,l}| = \frac{1}{2}|I_{m,l}| = \frac{1}{2}2^{-m+1}L = 2^{-(m+1)+1}L$$

Da $\operatorname{diam}(K_m) = \sqrt{n} \cdot 2^{-m+1}L \xrightarrow{m\to\infty} 0$, gilt nach 2.18

(anwendbar, da $\mathbb{R}^n$ vollständig)

$$\bigcap_{m=0}^{\infty} K_m = \{\overline{x}\}$$

Da $(U_i)_{i\in I}$ Überdeckung von K ist, und $\overline{x} \in K$, existiert ein $i \in I$ sodass $\overline{x} \in U_i$. Dann existiert $\varepsilon > 0$ sodass $\overline{x} \in B(\overline{x}, \varepsilon) \subset U_i$. Für m groß genug gilt $\operatorname{diam}(K_m) < \varepsilon$. Also $\overline{x} \in K_m \subset B(\overline{x}, \operatorname{diam}(K_m)) \subset B(\overline{x}, \varepsilon) \subset U_i$ ↯ zu (iii) □

4.8 Satz (Bolzano-Weierstraß) Sei (X,d) ein metrischer Raum, $K \subset X$ kompakt. Dann besitzt jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ eine konvergente Teilfolge.

Beweis: Angenommen, für alle $x \in K$ konvergiert keine Teilfolge von $(x_n)_n$ gegen x.

$$\Rightarrow \forall x \in K \; \exists c_x > 0 : B(x, c_x) \cap \{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} \text{endlich}$$

$\Rightarrow \{B(x, c_x)\}_{x\in K}$ ist offene Überdeckung von K

$$\overset{K \text{ kompakt}}{\Longrightarrow} \exists x^{(1)}, \ldots, x^{(l)} \in K : K \subset B(x^{(1)}, c_{x^{(1)}}) \cup \ldots \cup B(x^{(l)}, c_{x^{(l)}})$$

Dann

$$\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} \subset K \subset \bigcup_{j=1}^{l} B\Big(x^{(j)}, c_{x^{(j)}}\Big)$$

also

endliche Vereinigung endlicher Mengen ist endlich

$$\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} = \underbrace{\bigcup_{j=1}^{l} \underbrace{\Big(\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} \cap B\big(x^{(j)}, c_{x^{(j)}}\big)\Big)}_{\text{endlich}}}_{\text{endlich}}$$

also tritt mindestens ein x_n unendlich oft auf, es existiert also eine konstante Teilfolge ↯ □

4.9 Satz Seien $(X,\mathcal{T}_X),(Y,\mathcal{T}_Y)$ topologische Räume. $f:X\to Y$ stetig, $K\subset X$ kompakt. Dann ist $f(K)\subset Y$ kompakt.

Beweis: Seien $(U_i)_{i\in I}\subset\mathcal{T}_Y$, sodass $f(K)\subset\bigcup_{i\in I}U_i$. Da f stetig ist gilt: $(f^{-1}(U_i))_{i\in I}$ ist offene Überdeckung von K. Da weiter K kompakt ist gilt:

$$\exists i_0,\ldots,i_m\in I: K\subset\bigcup_{j=0}^m f^{-1}(U_{i_j})$$

$\Rightarrow f(K)\subset f\Big(\bigcup_{j=0}^m f^{-1}(U_{i_j})\Big)=\bigcup_{j=0}^m f\big(f^{-1}(U_{i_j})\big)\subset\bigcup_{j=0}^m U_{i_j}$ □

4.10 Korollar Sei $(X,\mathcal{T})$ ein kompakter topologischer Raum, $f:X\to\mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f ihr Minimum und ihr Maximum an.

Beweis: Nach 4.9 ist $f(X)\subset\mathbb{R}$ kompakt. Nach 4.4 ist $f(X)\subset\mathbb{R}$ beschränkt und abgeschlossen. Es folgt $\sup f(X)<\infty$ und $\inf f(X)>-\infty$. Es existiert also eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset f(X)$, $y_n\xrightarrow{n\to\infty}\sup f(X)$, da $f(X)$ abgeschlossen ist, ist $\sup f(X)\in f(X)$.

4.11 Beispiel Sei (X,d) metrischer Raum $A\subset X$ abgeschlossen, $K\subset X$ kompakt, $A\cap K=\emptyset$. $x\mapsto\operatorname{dist}(x,A)$ ist stetig nach Übung.

Nach 4.10 nimmt diese Funktion ihr Minimum auf K an, d.h. es existiert

$$\overline{x}\in K:\operatorname{dist}(\overline{x},A)=\inf_{x\in K}\operatorname{dist}(x,A)=:\operatorname{dist}(K,A)$$

$\operatorname{dist}(K,A)=\operatorname{dist}(\overline{x},A)>0$: Da $X\setminus A$ offen ist, existiert $\varepsilon>0$ sodass $\overline{x}\in B(\overline{x},\varepsilon)\subset X\setminus A\Rightarrow\operatorname{dist}(\overline{x},A)\geqslant\varepsilon>0$
D.h. aus A abgeschlossen, K kompakt und $A\cap K=\emptyset$ folgt $\operatorname{dist}(K,A)>0$.
Dies gilt nicht für zwei abgeschlossene Mengen A,B.

$$A=\left\{(x,\frac{1}{x})\,\middle|\,x>0\right\}\subset\mathbb{R}^2$$
$$B=\{(x,0)\,|\,x\in\mathbb{R}\}\subset\mathbb{R}^2$$

Dann gilt $A\cap B=\emptyset$, aber $\operatorname{dist}(A,B)=0$. Begründung:

$$\operatorname{dist}(A,B)=\inf_{a\in A,b\in B}d(a,b)\quad a_n=(n,\frac{1}{n})\in A\;\; b_n=(n,0)\in B\;\;\Rightarrow d(a_n,b_n)=\frac{1}{n}$$

$\Rightarrow\operatorname{dist}(A,B)=\inf_{n\in\mathbb{N}_+}d(a_n,b_n)=0$

4.12 Definition Seien $(X,d_X),(Y,d_Y)$ metrische Räume, $f:X\to Y$ heißt ***gleichmäßig stetig***, falls

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0:\forall x,x'\in X:d_X(x,x')<\delta\Rightarrow d_Y\big(f(x),f(x')\big)<\varepsilon$$

4.13 Satz Seien $(X,d_X),(Y,d_Y)$ metrische Räume, X kompakt, $f:X\to Y$ stetig. Dann ist f auch gleichmäßig stetig.

Beweis: Angenommen f sei nicht gleichmäßig stetig. D.h.

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 : \exists x, x' \in X : d_X(x, x') < \delta \wedge d_Y(f(x), f(x')) \geqslant \varepsilon$$

insbesondere für $\delta = \frac{1}{n+1}$ existieren $x_n, x_n' \in X$ mit

$$d_X(x_n, x_n') < \frac{1}{n+1}$$

aber $d(f(x_n), f(x_n')) \geqslant \varepsilon$. nach 4.8 existiert eine Teilfogle $(x_{n_k})_k$ mit $x_{n_k} \xrightarrow{n\to\infty} \overline{x}$ da $d(x_{n_k}, x'_{n_k}) = \frac{1}{n_k+1} \xrightarrow{k\to\infty} 0$ gilt auch $x'_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} \overline{x}$

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) &= f(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}) \\ &= f(\lim_{k\to\infty} x'_{n_k}) \\ &= \lim_{k\to\infty} f(x'_{n_k}) \end{aligned}$$

Also $d_Y(f(x_{n_k}, x'_{n_k})) \xrightarrow{k\to\infty} 0$ $\lightning$ zu $d_Y(f(x_{n_k}), f(x'_{n_k})) \geqslant \varepsilon$ $\square$

5 Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^n$

5.1 Definition Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall mit mindestens zwei Punkten (d.h. ein echtes Intervall). Eine stetige Abbildung $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ heißt ***Kurve*** in$\mathbb{R}^n$.

5.2 Bemerkung $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n), \gamma_i : I \to \mathbb{R}$. Dann gilt: γ ist stetig $\iff$ γ_i ist stetig für $i = 1, \dots, n$. (folgt z.B. aus Proposition 3.2 und Proposition 2.19)

5.3 Definition Eine Kurve $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ heißt (stetig) differenzierbar, falls ihre Koordinatenfunktionen $\gamma_i : I \to \mathbb{R}$ (stetig) differenzierbar sind. In diesem Fall heißt $\gamma'(t) := (\gamma_1'(t), \dots, \gamma_n'(t))$ ***Tangentialvektor*** von γ in $t \in I$, und $\|\gamma'(t)\|_2$ heißt ***Geschwindigkeit***. Für $\gamma'(t) \neq 0$ ist $\frac{1}{\|\gamma'(t)\|_2}\gamma'(t)$ der ***Tangentialeinheitsvektor***.

γ heißt ***regulär***, falls γ stetig differenzierbar und $\gamma'(t) \neq 0 \ \forall t \in I$.

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= \left(\lim_{h\to 0} \frac{\gamma_1(t+h) - \gamma_1(t)}{h}, \dots, \lim_{h\to 0} \frac{\gamma_n(t+h) - \gamma_n(t)}{h} \right) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h} \end{aligned}$$

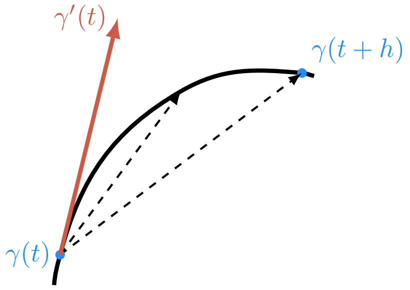


Abbildung 11: Bestimmung des Tangentialvektors durch den Limes des Differenzenquotienten in 5.4

5.4 Bemerkung

5.5 Beispiele

1) $\underline{a}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$, $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ $\gamma(t) = \underline{a} + t \cdot \underline{v}$.
Dann ist $\gamma'(t) = \underline{v}$

$$\begin{aligned} \gamma(t+h) &= \underline{a} + (t+h)\underline{v} \\ \gamma(t+h) - \gamma(t) &= h\underline{v} \\ \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h} &= \underline{v} \xrightarrow{h\to 0} \underline{v} \end{aligned}$$

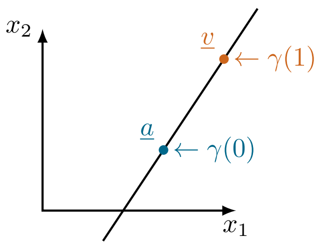


Abbildung 12: Darstellung der Kurve aus 5.5 1))

2) $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) = (r \cdot \sin t, r \cdot \cos t)$ mit $r \in (0, \infty)$. γ ist regulär

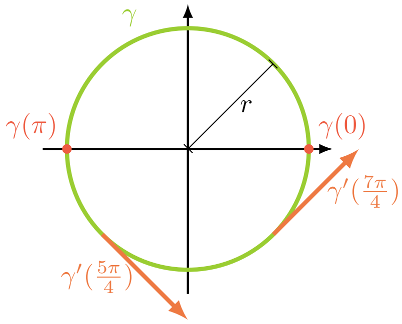


Abbildung 13: Graph aus 5.5 2)) mit zwei Tangentialvektoren; Kreis mit Radius r

3) Kurve $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ mit $\gamma(t) = (r \cdot \cos t, r \cdot \sin t, c \cdot t)$, $r \in (0, \infty)$
γ ist regulär.

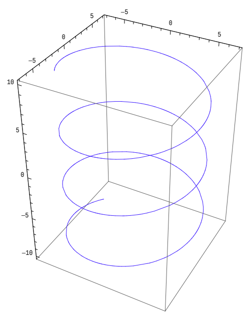


Abbildung 14: Schraubenlinie aus 5.5 3))

4) $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$. (Zykloid)

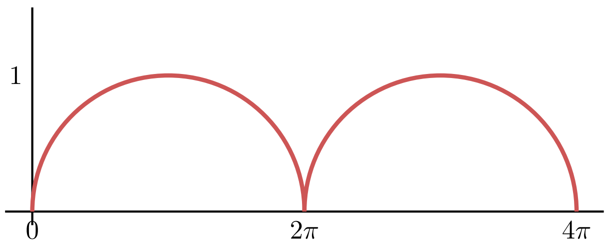


Abbildung 15: Graph der Kurve aus 5.5 4)) (Zykloid)

5.6 Definition Eine Kurve $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ heißt ***rektifizierbar*** mit der Länge L, falls gilt: Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$ mit folgender Eigenschaft: Für jede Unterteilung $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ mit $|t_j - t_{j-1}| < \delta$ für $j = 1, \ldots, n$ gilt:

$$\left| \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|_2}_{\text{Länge des Polygonzugs}} - L \right| < \varepsilon$$

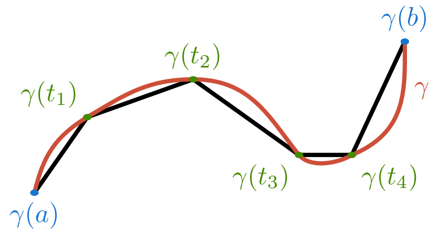


Abbildung 16: Polygonzug für ein rektifizierbares γ

5.7 Bemerkung γ stetig $\not\Rightarrow \gamma$ rektifizierbar

5.8 Lemma Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Zu $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$ sodass für alle $\bar{t} \neq t \in [a,b]$ mit $\left|\bar{t} - t\right| < \delta$, gilt

$$\left\| \frac{1}{\bar{t} - t}\big(\gamma(\bar{t}) - \gamma(t)\big) - \gamma'(\bar{t}) \right\|_2 < \varepsilon$$

Beweis: Für $i \in \{1, \ldots, n\}$ ist $\gamma_i' : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, nach Satz 4.13 also gleichmäßig stetig. D.h. $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta_i > 0 :$ für $s, \bar{t} \in [a,b]$ mit $\left|s - \bar{t}\right| < \delta_i$ gilt: $\left|\gamma_i'(s) - \gamma_i'(\bar{t})\right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$. Setze nun: $\delta := \min\{\delta_i, \ldots, \delta_n\} > 0$. Für $\bar{t} \neq t$ mit $\left|\bar{t} - t\right| < \delta$ existiert nach dem Mittelwertsatz ein s_i zwischen $\bar{t}$ und t mit

$$\gamma_i'(s_i) = \frac{\gamma_i(\bar{t}) - \gamma_i(t)}{\bar{t} - t}$$

Dann

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{1}{\bar{t} - t}\big(\gamma(\bar{t}) - \gamma(t)\big) - \gamma'(\bar{t}) \right\|_2 &\leqslant \sqrt{n} \cdot \max_{i \in \{1,\ldots,n\}} \left| \frac{1}{\bar{t} - t}\big(\gamma_i(\bar{t}) - \gamma_i(t)\big) - \gamma_i'(\bar{t}) \right| \\
&= \sqrt{n} \cdot \max_{i \in \{1,\ldots,n\}} \left|\gamma_i'(s_i) - \gamma_i'(\bar{t})\right| \\
&\leqslant \sqrt{n} \cdot \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

□

5.9 Satz Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Dann ist γ rektifizierbar mit der Länge

$$L = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_2 \, \mathrm{d}t$$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir wollen $\delta > 0$, so dass für $a = t_0 < \ldots < t_k = b$ mit $|t_j - t_{j-1}| < \delta$ gilt

$$\left| \sum_{j=1}^{k} \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|_2 - \int_a^b \|\gamma'(t)\|_2 \, \mathrm{d}t \right| < \varepsilon$$

Nach 5.8 gibt es $\delta_1 > 0$ sodass für $a = t_0 < \ldots < t_k = b$ mit $|t_j - t_{j-1}| < \delta_1$ gilt:

$$\left\| \frac{1}{t_j - t_{j-1}}\big(\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\big) - \gamma'(t_j) \right\|_2 < \frac{\varepsilon}{2|b-a|}$$

$$\Rightarrow \left| \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|_2 - \|\gamma'(t_j)\|_2 \cdot |t_j - t_{j-1}| \right| < \frac{\varepsilon}{2|b-a|} \cdot |t_j - t_{j-1}|$$

Da $f : t \mapsto \|\gamma'(t)\|_2$ gleichmäßig stetig ist, existiert $\delta_2 > 0$ sodass für $a = t_0 < \ldots < t_k = b$ mit $|t_j - t_{j-1}| < \delta_2$ gilt:

$$\left\| \|\gamma'(t_1)\|_2 \cdot \mathbb{1}_{[t_0,t_1]} + \sum_{j=2}^{k} \|\gamma'(t_j)\|_2 \cdot \mathbb{1}_{(t_{j-1},t_j]} - f \right\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2|b-a|}$$

$$\Rightarrow \left| \sum_{j=1}^{k} \|\gamma'(t_j)\|_2 \cdot |t_j - t_{j-1}| - \int_a^b \|\gamma'(t)\|_2 \,\mathrm{d}t \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Für $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ gilt: Für jede Unterteilung $a = t_0 < \ldots < t_k = b$ mit $|t_j - t_{j-1}| < \delta$ gilt:

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{j=1}^{k} \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|_2 - \int_a^b \|\gamma'(t)\|_2 \,\mathrm{d}t \right| \\
&\leqslant \left| \sum_{j=1}^{k} \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|_2 - \sum_{j=0}^{k} \|\gamma'(t_j)\|_2 \cdot |t_j - t_{j-1}| \right| + \left| \sum_{j=1}^{k} \|\gamma'(t_j)\|_2 |t_j - t_{j-1}| - \int_a^b \|\gamma'(t)\|_2 \,\mathrm{d}t \right| \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{k} \frac{\varepsilon}{2|b-a|} \cdot |t_j - t_{j-1}| + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

5.10 Proposition und Definition Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve, $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ bijektiv und stetig. Dann heißt φ ***Parametertransformation*** und $\zeta := \gamma \circ \varphi : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ ist eine Kurve.
Falls $\gamma, \varphi, \varphi^{-1}$ stetig differenzierbar sind, so gilt:

a) $\varphi'(t) \neq 0$ für $t \in [c,d]$ und $(\varphi^{-1})'(t) \neq 0$ für $t \in [a,b]$

b) $\zeta'(t) = \varphi'(t) \cdot \gamma'\big(\varphi(t)\big)$ für $t \in [c,d]$ insbesondere ist ζ stetig differenzierbar.

c) $\int_a^b \|\gamma'(t)\|_2 \,\mathrm{d}t = \int_c^d \|\zeta'(t)\|_2 \,\mathrm{d}t$

Beweis: $\gamma \circ \varphi$ ist stetig nach Proposition 3.4, also eine Kurve.

a) $\varphi \circ \varphi^{-1} = \mathrm{id}_{[c,d]}$ und

$$\begin{aligned}
1 = (\mathrm{id}_{[c,d]})'(t) = (\varphi^{-1} \circ \varphi)'(t) = \big(\varphi^{-1}\big)'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \\
\Rightarrow \varphi'(t) \neq 0 \text{ für } t \in [c,d], \quad \big(\varphi^{-1}\big)'(t) \neq 0 \text{ analog}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\zeta'(t) = (\gamma \circ \varphi)'(t) = \big((\gamma_1 \circ \varphi)'(t), \ldots, (\gamma_n \circ \varphi)'(t)\big) &= \Big(\varphi'(t) \cdot \gamma_1'(\varphi(t)), \ldots, \varphi'(t) \cdot \gamma_n'(\varphi(t))\Big) \\
&= \varphi'(t) \cdot (\gamma_1'(\varphi(t)), \ldots, \gamma_n'(\varphi(t))) \\
&= \varphi'(t) \cdot \gamma'(\varphi(t))
\end{aligned}$$

c) $\varphi'(t) \neq 0$ für $t \in [c,d]$, φ' stetig. Daraus folgt (1)$\varphi'(t) > 0$ für $t \in [c,d]$ oder (2)$\varphi'(t) < 0$ für $t \in [c,d]$ (nach Zwischenwertsatz). Wir betrachten (1); (2) geht analog

$\varphi'(t) > 0$ für alle $t \Rightarrow \varphi$ streng monoton wachsend und $\varphi(c) = a$, $\varphi(d) = b$. Es gilt

$$\begin{aligned}\int_c^d \|\zeta'(t)\|_2 \,\mathrm{d}t &= \int_c^d \|\varphi'(t)\cdot\gamma'(\varphi(t))\|_2 \,\mathrm{d}t = \int_c^d \varphi'(t)\cdot\|\gamma'(\varphi(t))\|_2 \,\mathrm{d}t \\ &= \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} \|\gamma'(n)\|_2 \,\mathrm{d}n \\ &= \int_a^b \|\gamma'(t)\|_2 \,\mathrm{d}t \qquad \square\end{aligned}$$

5.11 Beispiel Sei $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ ein ***Zykloid***. Dann gilt: $\gamma'(t) = (1 - \cos t, \sin t)$ und

$$\begin{aligned}\|\gamma'(t)\|_2 &= \big((1-\cos t)^2 + (\sin t)^2\big)^{\frac{1}{2}} = \big(1 - 2\cos t + (\cos t)^2 + (\sin t)^2\big)^{\frac{1}{2}} \\ &= (2 - 2\cos t)^{\frac{1}{2}} = (2\cdot(1-\cos t))^{\frac{1}{2}} = \left(2\cdot 2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= 2\sin\left(\frac{t}{2}\right) \qquad t \in [0, 2\pi]\end{aligned}$$

benutzt: $\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

$$L = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\|_2 \,\mathrm{d}t = 2\int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t \overset{n=\frac{t}{2}}{=} 4\int_0^{2\pi} \sin n \,\mathrm{d}n = 4\big(-\cos(n)\big)\Big|_0^{\pi} = 8$$

6 Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$

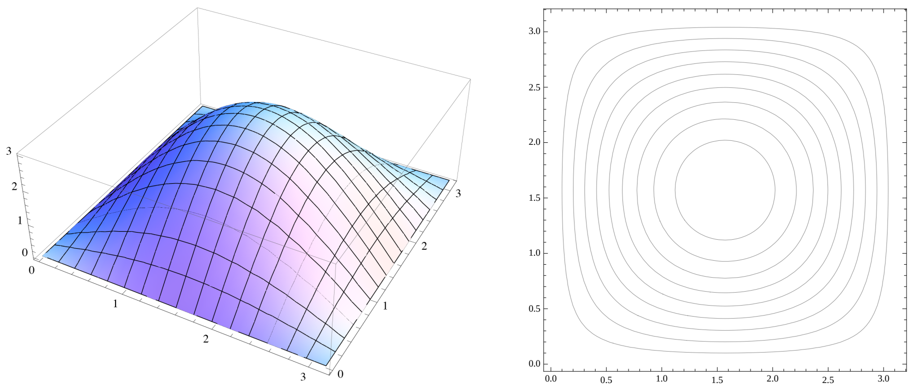


Abbildung 17: Darstellung einer Abbildung $f : U \to \mathbb{R}$ mit $U \subset \mathbb{R}^2$ als 3D-Plot und als Niveaulinien

6.1 Definition Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ und $f : U \to \mathbb{R}$ eine Abbildung.

a) Für $\underline{x} \in U$, $i \in \{1, \dots, n\}$ heißt f ***partiell differenzierbar*** in $\underline{x}$ bezüglich der i-ten Koordinate, falls gilt:

(i) Es gibt eine Folge $(h_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^*$ mit $\lim_{k\to\infty} h_k = 0$ und $\underline{x} + h_k \cdot \underline{e}_i \in U$, wobei $k \in \mathbb{N}$

(ii) Der Limes

$$D_i f(\underline{x}) := \lim_{\substack{h\to 0, h\neq 0 \\ \underline{x}+h\underline{e}_i \in U}} \frac{f(\underline{x} + h \cdot \underline{e}_i) - f(\underline{x})}{h} \in \mathbb{R}$$

existiert. (Dabei ist $\underline{e}_i = (0, \dots, \overset{i}{1}, \dots, 0)$). Wir schreiben auch $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ für $D_i f$.

b) f heißt partiell differenzierbar, falls f für jedes $\underline{x} \in U$ und jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ partiell differenzierbar in $\underline{x}$ bezüglich der i-ten Koordinate ist.

f heißt stetig partiell differenzierbar, falls außerdem $D_i f : U \to \mathbb{R}$ stetig ist für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$

Der ***Gradient*** von f in $\underline{x}$ ist

$$\operatorname{grad} f(\underline{x}) = (D_1 f(\underline{x}), \dots, D_n f(\underline{x})) \in \mathbb{R}^n$$

Wir schreiben auch $\nabla f(\underline{x})$ für $\operatorname{grad} f(\underline{x})$.

6.2 Bemerkung

(i) Die Bedingung 6.1 (a)(i) ist automatisch erfüllt, falls $U \subset \mathbb{R}^n$ offen ist. (warum?)

(ii) Für $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ definiere $f_i : U_i \to \mathbb{R}$ durch $f_i(\xi) = f((x_1, \dots, \xi, \dots, x_n))$, wo

$$U_i := U \cap \underbrace{\{(x_1, \dots, \xi, \dots, x_n) \,|\, \xi \in \mathbb{R}\}}_{\sim\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}^n$$

Es gilt

$$D_i f(\underline{x}) = \lim_{h\to 0, h\neq 0} \frac{f_i(x_i + h) - f_i(x_i)}{h} = f_i'(x_i)$$

6.3 Definition Ein ***Vektorfeld*** auf $U \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung $\underline{v} : U \to \mathbb{R}^n$. $\underline{v}$ heißt partiell differenzierbar, wenn alle Komponenten $v_1, \ldots, v_n : U \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar sind. In diesem Fall heißt

$$\operatorname{div} \underline{v} := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$$

Divergenz von $\underline{v}$ in $\underline{x}$. Wir schreiben auch

$$\operatorname{div} \underline{v} = \langle \nabla \,|\, \underline{v} \rangle = \langle \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \rangle$$

6.4 Beispiel

(i) Betrachte $r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $r(\underline{x}) := \|\underline{x}\|_2$. Niveaumengen sind $N_r(c) := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, r(\underline{x}) = c\}$ für $c > 0$ also ***Sphären*** mit Radius c.

r ist auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} := U$ stetig partiell differenzierbar: Für $0 \neq \underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ definiere $r_i : U_i \to \mathbb{R}$ durch $r_i(\xi) := r((x_1, \ldots, x_{i-1}, \xi, x_{i+1}, \ldots, x_n)) = (x_1^2 + \ldots + x_{i-1}^2 + \xi^2 + x_{i+1}^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$ Dann ist

$$D_i r(\underline{x}) = \frac{\partial r}{\partial x_i}(\underline{x}) = r_i'(x_i) = 2x_i \cdot \frac{1}{2} \cdot (x_1^2, \ldots, x_{i-1}^2, x_i^2, x_{i+1}^2, \ldots, x_n^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{x_i}{r(\underline{x})}$$

(ii) Sei r wie oben und $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann ist $f \circ r : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar. Es gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ r)(\underline{x}) = f'(r(\underline{x}))\frac{\partial r}{\partial x_i}(\underline{x}) = f'(r(\underline{x})) \cdot \frac{x_i}{r(\underline{x})}$$

(iii) Sei $n \geqslant 2$. Definiere $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch

$$g(\underline{x}) := \begin{cases} \frac{(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n) =: e}{r(\underline{x})^{2n} =: \frac{1}{d}}, & \text{falls } \underline{x} \neq 0 \\ 0, & \text{falls } \underline{x} = 0 \end{cases}$$

g ist auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ partiell differenzierbar mit (Produktregel)

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(\underline{x}) = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{i-1} \cdot x_{i+1} \cdot \ldots \cdot x_n \cdot r(\underline{x})^{-2n} + x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot r(\underline{x})^{-2n-1} \cdot \frac{x_i}{r(\underline{x})} \cdot (-2n)$$

g ist in 0 partiell differenzierbar:

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(0) = \lim_{h \to 0, h \neq 0} \frac{g(0 + h \cdot \underline{e}_i) - g(0)}{h} = 0$$

D.h. g ist auf $\mathbb{R}^n$ partiell differenzierbar. Aber g ist nicht stetig in 0: Es gilt $\mathbb{R}^n \ni \left(\frac{1}{k}, \ldots, \frac{1}{k}\right) \xrightarrow{k \to \infty} 0$ aber

$$g\left(\left(\frac{1}{k}, \ldots, \frac{1}{k}\right)\right) = \frac{\frac{1}{k^n}}{\left(\left(n \cdot \frac{1}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{2n}} = \frac{\frac{1}{k^n}}{n^n \cdot \frac{1}{k^{2n}}} = \left(\frac{k}{n}\right)^n \xrightarrow{k \to \infty} \infty$$

D.h. partielle Differenzierbarkeit impliziert nicht Stetigkeit.

(iv) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar, dann ist $\operatorname{grad} f : U \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld. Es gilt

Jeder Vektor wird also normiert/zu einem Einheitsvektor

$$\operatorname{grad} r(\underline{x}) = \left(\frac{\partial r}{\partial x_1}(\underline{x}), \dots, \frac{\partial r}{\partial x_n}(\underline{x})\right) = \left(\frac{x_1}{r(\underline{x})}, \dots, \frac{x_n}{r(\underline{x})}\right) = \frac{1}{r(\underline{x})} \cdot \underline{x}$$

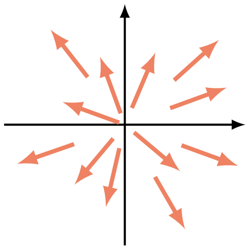


Abbildung 18: Vektorfeld aus 6.4(iv) (Man beachte, dass alle Vektoren Einheitsvektoren sind)

(v)

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\operatorname{grad} r)(\underline{x}) = \operatorname{div}\left(\frac{1}{r(\underline{x})} \cdot \underline{x}\right) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{r(\underline{x})} \cdot x_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{r(\underline{x})}\right) \cdot x_i + \frac{1}{r(\underline{x})} \cdot 1\right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^n - \frac{1}{r(\underline{x})^2} \cdot \frac{x_i}{r(\underline{x})} \cdot x_i\right) + \frac{n}{r(\underline{x})} \\
&= -\frac{1}{r(\underline{x})} \cdot \underbrace{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{r(\underline{x})^2}}_{=1} + \frac{n}{r(\underline{x})} = (n-1) \cdot \frac{1}{r(\underline{x})}
\end{aligned}$$

Formaler (vgl. mit Produktregel):

$$\langle \nabla \,|\, \frac{1}{r(\underline{x})} \cdot \underline{x} \rangle = \operatorname{div}\left(\frac{1}{r(\underline{x})} \cdot \underline{x}\right) = \langle \nabla \frac{1}{r(\underline{x})} \,|\, \underline{x} \rangle + \frac{1}{r(\underline{x})} \cdot \underbrace{\langle \nabla \,|\, \underline{x} \rangle}_{=n}$$

Allgemeiner: $\langle \nabla \,|\, f \cdot \underline{v} \rangle = \langle \nabla f \,|\, \underline{v} \rangle + f \langle \nabla \,|\, \underline{v} \rangle$

6.5 Definition Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ und $f : U \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar. f heißt zweimal partiell differenzierbar, falls alle partiellen Ableitungen $D_i f : U \to \mathbb{R}$ wieder partiell differenzierbar sind. Induktiv definieren wir: f heißt $(k+1)$ mal partiell differenzierbar, falls f k-mal partiell differenzierbar ist und alle partiellen Ableitungen k-ter Ordnung

$$D_{i_k} \dots D_{i_2} D_{i_1} f : U \to \mathbb{R}$$

partiell differenzierbar sind. f heißt k-mal stetig partiell differenzierbar, falls f k-mal partiell differenzierbar ist und alle partiellen Ableitungen der Ordung $\leqslant k$ stetig sind. Wir schreiben auch

$$D_{i_k} \dots D_{i_1} f = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \cdot \ldots \cdot \partial x_{i_2} \cdot \partial x_{i_1}}$$

$$D_i D_i f = D_i^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

6.6 Satz Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar. Dann gilt für $\underline{a} \in U$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$

$$D_i D_j f(\underline{a}) = D_j D_i f(\underline{a})$$

Beweis: O.E. sei $n = 2$, $i = 1$ und $j = 2$ (warum?). Aus $U \subset \mathbb{R}^2$ offen folgt: Es existiert ein $\delta > 0$ mit $[a_1 - \delta, a_1 + \delta] \times [a_2 - \delta, a_2 + \delta] \subset U$. Betrachte $(\overline{x}_1, \overline{x}_2) \in [a_1 - \delta, a_1 + \delta] \times [a_2 - \delta, a_2 + \delta]$ mit $\overline{x}_1 \neq a_1, \overline{x}_2 \neq a_2$. Definiere

$$F : [a_1 - \delta, a_1 + \delta] \to \mathbb{R} \quad \text{durch } F(x_1) := f((x_1, \overline{x}_2)) - f((x_1, a_2))$$

F ist stetig differenzierbar, da f stetig differenzierbar ist. Nach dem Mittelwertsatz existiert ξ zwischen $\overline{x}_1$ und a_1 mit

$$\begin{aligned} f(\overline{x}_1, \overline{x}_2) - f(\overline{x}_1, a_2) - (f(a_1, \overline{x}_2) - f(a_1, a_2)) = F(\overline{x}_1) - F(a_1) &= (\overline{x}_1 - a_1) \cdot F'(\xi) \\ &= (\overline{x}_1 - a_1)(D_1 f(\xi, \overline{x}_2) - D_1 f(\xi, a_2)) \end{aligned}$$

Definiere $G : [a_2 - \delta, a_2 + \delta] \to \mathbb{R}$ durch $G(x_2) := D_1 f(\xi, x_2)$. G ist stetig differenzierbar. Nach dem Mittelwertsatz existiert η zwischen $\overline{x}_2$ und a_2 mit

$$D_1 f(\xi, \overline{x}_2) - D_1 f(\xi, a_2) = G(\overline{x}_2) - G(a_2) = (\overline{x}_2 - a_2) \cdot G'(\eta) = (\overline{x}_2 - a_2) \cdot D_2 D_1 f(\xi, \eta)$$

Es folgt

$$f(\overline{x}_1, \overline{x}_2) - f(\overline{x}_1, a_2) - f(a_1, \overline{x}_2) + f(a_1, a_2) = (\overline{x}_1 - a_1) \cdot (\overline{x}_2 - a_2) \cdot D_2 D_1 f(\xi, \eta)$$

Definiere nun $\tilde{F} : [a_2 - \delta, a_2 + \delta] \to \mathbb{R}$ durch $\tilde{F}(x_2) := f(\overline{x}_1, x_2) - f(a_1, x_2)$. Dann ist $\tilde{F}$ stetig differenzierbar. Nach dem Mittelwertsatz existiert ein $\tilde{\eta}$ zwischen $\overline{x}_2$ und a_2 mit

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\overline{x}_2) - \tilde{F}(a_2) &= (\overline{x}_2 - a_2) \cdot \tilde{F}'\tilde{\eta} \\ f(\overline{x}_1, \overline{x}_2) - f(a_1, \overline{x}_2) - (f(\overline{x}_1 - a_2) - f(a_1, a_2)) = \quad &= (\overline{x}_2 - a_2)(D_2 f(\overline{x}_1, \tilde{\eta}) - D_2 f(a_2, \tilde{\eta})) \end{aligned}$$

Definiere $\tilde{G} : [a_1 - \delta, a_1 + \delta] \to \mathbb{R}$ durch $\tilde{G}(x_1) := D_2 f(x_1, \tilde{\eta})$. $\tilde{G}$ ist stetig differenzierbar. Nach dem Mittelwertsatz existiert $\tilde{\xi}$ zwischen a_1 und $\overline{x}_1$ mit:

$$D_2 f(\overline{x}_1, \tilde{\eta}) - D_2 f(a_1, \tilde{\eta}) = \tilde{G}(\overline{x}_1) - \tilde{G}(a_1) = (\overline{x}_1 - a_1)\tilde{G}\left(\tilde{\xi}\right) = (\overline{x}_1 - a_1) \cdot D_1 D_2 f\left(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}\right)$$

Es folgt

$$f(\overline{x}_1, \overline{x}_2) - f(a_1, \overline{x}_2) - f(\overline{x}_1, a_2) + f(a_1, a_2) = (\overline{x}_1 - a_1)(\overline{x}_2 - a_2) D_1 D_2 f\left(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}\right)$$

$$\overset{(\star)}{\Longrightarrow} D_1 D_2 f\left(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}\right) = D_2 D_1 f(\xi, \eta)$$

$$\begin{aligned} D_1 D_2 f\left(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}\right) &\xrightarrow[]{\substack{\overline{x}_1 \to a_1 \\ \overline{x}_2 \to a_2}} D_1 D_2 f(a_1, a_2) \\ D_2 D_1 f(\xi, \eta) &\xrightarrow[]{\substack{\overline{x}_1 \to a_1 \\ \overline{x}_2 \to a_2}} D_2 D_1 f(a_1, a_2) \end{aligned}$$

wegen Stetigkeit von $D_1 D_2 f$ und $D_2 D_1 f$. ☐

6.7 Beispiele

(i) Sei $U \subset \mathbb{R}^3$, $\underline{v} : U \to \mathbb{R}^3$ ein partiell differenzierbares Vektorfeld. Wir definieren ein Vektorfeld

$$\operatorname{rot} \underline{v} := \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right)$$

Wir schreiben auch

eventuell kennt man das Kreuzprodukt noch aus der Schule

$$\operatorname{rot} \underline{v} = \nabla \times \underline{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Falls $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar ist, so gilt

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \nabla \times \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2}, \dots, \dots \right) = 0$$

nach Satz 6.6

(ii) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar. Setze

$$\Delta f := \operatorname{div} \operatorname{grad} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ heißt ***Laplaceoperator***.

Sei $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ eine zeitabhängige Temperaturverteilung, d.h. $h(x_1, \dots, x_n, t)$ ist Temperatur in $(x_1, \dots, x_n)$ zum Zeitpunkt t. Dann erfüllt h die Wärmeleitungsgleichung

$$\Delta h - \lambda \cdot \frac{\partial h}{\partial t} = 0$$

mit $\frac{1}{\lambda}$ Wärmeleitfähigkeit.

7 Abbildungen von $\mathbb{R}^m$ nach $\mathbb{R}^n$: Differenzierbarkeit

7.1 Definition Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung.

(i) f heißt differenzierbar in $\underline{x} \in U$, falls gilt: Es gibt $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ linear und $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ mit

$$\boxed{f(\underline{x} + \underline{\xi}) = f(\underline{x}) + A(\underline{\xi}) + \varphi(\underline{\xi})}$$

für alle $\underline{\xi}$ in einer Umgebung von 0 und mit

d.h. $\varphi(\underline{\xi})$ geht „schneller" gegen 0 als $\left\|\underline{\xi}\right\|_2$

$$\lim_{\underline{\xi} \to 0, \underline{\xi} \neq 0} \frac{1}{\left\|\underline{\xi}\right\|_2} \varphi(\underline{\xi}) = 0$$

Es genügt, wenn das φ in einer Umgebung von 0 definiert ist. (warum?)

(ii) f heißt differenzierbar , falls f in jedem Punkt $\underline{x} \in U$ differenzierbar ist.

(iii) $A(= A(\underline{x}))$ heißt ***Ableitung*** oder ***Differential*** von f in $\underline{x}$, oft schreiben wir auch $Df(x)$.

Wir werden gleich sehen, dass A nicht von der Wahl von φ abhängt.

Die zugehörige Matrix $(a_{ij}) \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ heißt auch ***Jacobimatrix*** oder ***Funktionalmatrix***.

7.2 Bemerkung Sei $U \subset \mathbb{R}$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$, $\overline{x} \in U$. Nach Analysis I 12.2 (iv) gilt: f ist differenzierbar in $\overline{x} \in U$ (im Sinne von Analysis I) $\iff$ $\exists \psi : U \to \mathbb{R}$ stetig in $\overline{x}$ mit

$$f(\overline{x} + \xi) = f(\overline{x}) + \xi \cdot \psi(\overline{x} + \xi) = f(\overline{x}) + \underbrace{\psi(\overline{x})}_{f'(\overline{x})} \xi + \underbrace{\big(\psi(\overline{x} + \xi) - \psi(\overline{x})\big)\xi}_{=:\varphi(\xi)}$$

$$\lim_{\xi \to 0, \xi \neq 0} \left| \frac{1}{|\xi|} \varphi(\xi) \right| = \lim_{\xi \to 0, \xi \neq 0} |\psi(\overline{x} + \xi) - \psi(\overline{x})| \overset{\psi \text{ stetig in } \overline{x}}{=} 0$$

$\Rightarrow$ f ist auch differenzierbar im Sinne von 7.1.

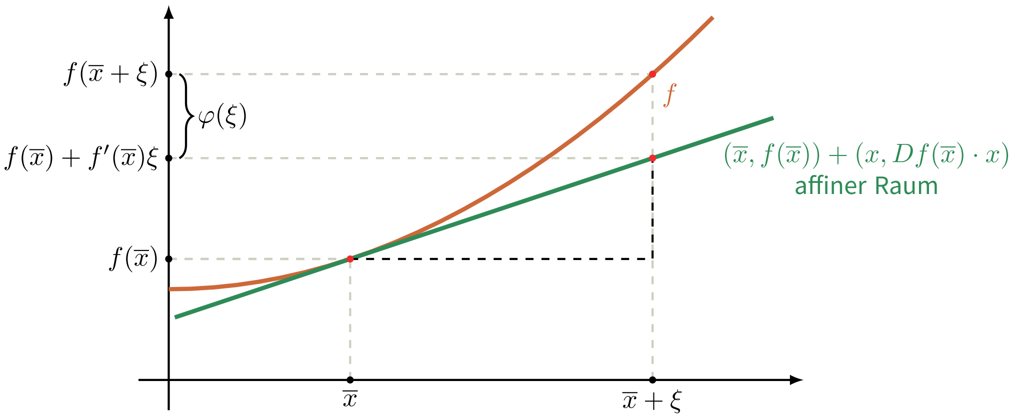


Abbildung 19: Veranschauchlichung von Bemerkung 7.2

7.3 Beispiel Sei $C \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ symmetrisch ($C = C^t$). Definiere $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch

$$f(\underline{x}) := \langle \underline{x} \,|\, C \cdot \underline{x} \rangle$$

(quadratische Form). Für $\underline{x}, \underline{\xi} \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\begin{aligned} f(\underline{x}+\underline{\xi}) = \langle \underline{x}+\underline{\xi} \,|\, C\underline{x} + C\underline{\xi} \rangle &= \langle \underline{x} \,|\, C\underline{x} \rangle + \langle \underline{x} \,|\, C\underline{\xi} \rangle + \langle \underline{\xi} \,|\, C\underline{x} \rangle + \langle \underline{\xi} \,|\, C\underline{\xi} \rangle \\ &= \langle \underline{x} \,|\, C\underline{x} \rangle + 2\langle \underline{x} \,|\, C\underline{\xi} \rangle + \langle \underline{\xi} \,|\, C\underline{\xi} \rangle \\ &= f(\underline{x}) + A \cdot \underline{\xi} + \varphi(\underline{\xi}) \end{aligned}$$

da C symm. $\Rightarrow C$ Matrix von selbstadjungiertem Endmorphismus

mit $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\underline{\eta} \mapsto 2\langle \underline{x} \,|\, C\underline{\eta} \rangle$ und $\varphi : \mathbb{R}^n \to R$ gegeben durch $\underline{\eta} \mapsto \langle \underline{\eta} \,|\, C\underline{\eta} \rangle$. Damit ist A linear.

$$\left| \frac{1}{\|\underline{\xi}\|_2} \cdot \varphi(\underline{\xi}) \right| \leqslant \frac{1}{\|\underline{\xi}\|_2} \cdot \|C\| \cdot \|\underline{\xi}\|_2^2 = \|C\| \cdot \|\underline{\xi}\|_2 \xrightarrow{\xi \to 0} 0$$

Also ist f differenzierbar.

7.4 Satz Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar in $\underline{x} \in U$. Dann gilt

(i) f ist stetig in $\underline{x}$

(ii) Die Koordinatenfunktionen $f_i : U \to \mathbb{R}$ für $i = 1, \ldots, n$ sind partiell differenzierbar und

$$Df(\underline{x}) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\underline{x}) \right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant m}} \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$$

Dabei betrachten wir die kanonische Identifizierung

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) = L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) & \longleftarrow & M_{n\times m}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{pmatrix} \mapsto \left(\sum_{j=1}^m a_{ij}\xi_j \right)_{1\leqslant i\leqslant n} & \longleftarrow\!\shortmid & (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant m}} \\ A & \longmapsto & ? \end{array}$$

Beweis:

(i) Es gilt (für ξ in einer Umgebung von 0) für ein $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ mit $\lim_{\underline{\xi}\to 0} \frac{1}{\|\underline{\xi}\|_2} \cdot \varphi(\underline{\xi}) = 0$

$$f(\underline{x}+\underline{\xi}) = f(\underline{x}) + Df(\underline{x})\underline{\xi} + \varphi(\underline{\xi})$$

wir erhalten

$$Df(\underline{x})\underline{\xi} \xrightarrow{\xi\to 0} 0 \quad \text{und} \quad \varphi(\underline{\xi}) \xrightarrow{\xi\to 0} 0$$

also $f(\underline{x}+\underline{\xi}) \xrightarrow{\xi\to 0} f(\underline{x}) + 0 + 0 = f(\underline{x})$ (vgl. Folgenkriterium)

(ii) Sei $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant m}} \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ die zu $Df(\underline{x})$ gehörige Matrix, d.h.

$$Df(\underline{x})\underline{\xi} = \left(\sum_{j=1}^m a_{ij}\xi_j \right)_{1\leqslant i\leqslant n}$$

Sei φ wie oben. Dann gilt für die Koordinatenabbildungen

$$f_i(\underline{x}+\underline{\xi}) = f_i(\underline{x}) + \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\xi_i + \varphi_i(\underline{\xi}) \qquad i = 1,\dots,n$$

also

$$f_i(\underline{x}+h\cdot e_j) = f_i(\underline{x}) + a_{ij}\cdot h + \varphi_i(h\cdot e_j)$$

siehe auch Definition 6.1

Daher

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\underline{x}) = \lim_{h\to 0, h\neq 0} \frac{f_i(\underline{x}+h\cdot \underline{e}_j) - f_i(\underline{x})}{h} &= \lim_{h\to 0, h\neq 0} \frac{a_{ij}\cdot h + \varphi_i(h\cdot \underline{e}_j)}{h} \\ &= a_{ij} + \underbrace{\lim_{h\to 0, h\neq 0} \frac{\varphi_i(h\cdot \underline{e}_j)}{h}}_{=0} = a_{ij}\end{aligned}$$

□

7.5 Satz Sei $U\subset\mathbb{R}^m$ offen, $f: U\to\mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar. Dann ist f differenzierbar (insbesondere stetig).

Beweis: Sei $\underline{x}\in U$. U offen $\Rightarrow \exists\delta > 0 : B_{\|\cdot\|_{\max}}(x,\delta)\subset U$. Für $\underline{\xi}\in\mathbb{R}^m$ mit $\|\xi\|_{\max} < \delta$ setze

$$\underline{z}^{(i)} := \underline{x} + \sum_{j=0}^{i} \xi_j\cdot \underline{e}_j \qquad \text{für } i = 0,\dots,m$$

dann ist $\underline{z}^{(0)} = \underline{x}$, $\underline{z}^{(m)} = \underline{x}+\underline{\xi}$. Definiere $g^{(i)} : [0,1]\to\mathbb{R}$ durch

$$g^{(i)}(t) := f\Big(z^{(i-1)} + t\cdot\xi_i\cdot\underline{e}_i\Big) \qquad i\in\{1,\dots,m\}$$

dann ist $g^{(i)}$ differenzierbar (warum?) mit $(g^{(i)})'(t) = D_i f(z^{(i-1)} + t\cdot\xi_i\cdot\underline{e}_i)\cdot\xi_i$. Nach dem Mittelwertsatz existiert $\theta_i\in[0,1]$ mit

$$\begin{aligned} g^{(i)}(1) - g^{(i)}(0) &= (1-0)\cdot\Big(g^{(i)}\Big)'(\theta_i) \\ f\Big(z^{(i)}\Big) - f\Big(z^{(i-1)}\Big) = \qquad &= D_i f(z^{(i-1)} + \theta_i\cdot\xi_i\cdot\underline{e}_i)\cdot\xi_i\end{aligned}$$

Wir erhalten

(Teleskopsumme)

$$f(\underline{x}+\underline{\xi}) - f(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{m}\Big(f(z^{(i)}) - f(z^{(i-1)})\Big) = \sum_{i=1}^{m} D_i f\Big(z^{(i-1)} + \theta_i\cdot\xi_i\cdot\underline{e}_i\Big)\cdot\xi_i$$

also

0 ergänzt

$$\begin{aligned} f(\underline{x}+\underline{\xi}) &= f(\underline{x}) + \underbrace{\sum_{i=1}^{m} D_i f(\underline{x})\xi_i}_{=:A\xi_i} + \underbrace{\sum_{i=1}^{m}\Big(D_i f\Big(z^{(i-1)} + \theta_i\cdot\xi_i\cdot\underline{e}_i\Big) - D_i f(\underline{x})\Big)\xi_i}_{=:\varphi(\underline{\xi})} \\ &= f(\underline{x}) + A\underline{\xi} + \varphi(\underline{\xi})\end{aligned}$$

Definiere $\lambda_i \in \mathbb{R}$ durch $\lambda_i := D_i f(\underline{x})$ für $i = 1, \dots, m$
Definiere $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ durch

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_m \end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \eta_i = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_m \end{pmatrix} = \langle \operatorname{grad} f(\underline{x}) \,|\, \underline{\eta} \rangle$$

Für φ gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\|\underline{\xi}\|_2} \cdot \left|\varphi(\underline{\xi})\right| &\leqslant \frac{1}{\|\underline{\xi}\|_2} \cdot m \cdot \max_i \left| D_i f\left(z^{(i-1)} + \theta_i \xi_i \underline{e}_i\right) - D_i f(\underline{x}) \right| \cdot \max_i |\xi_i| \\
&\leqslant \frac{1}{\|\underline{\xi}\|_2} \cdot m \cdot \max_i \left| D_i f\left(z^{(i-1)} + \theta_i \xi_i \underline{e}_i\right) - D_i f(\underline{x}) \right| \cdot \|\underline{\xi}\|_2 \\
&= m \cdot \max_i \left| D_i f \underbrace{\left(z^{(i-1)} + \theta_i \xi_i \underline{e}_i\right)}_{\xrightarrow{\underline{\xi} \to 0} \underline{x}} - D_i f(\underline{x}) \right| \xrightarrow{\underline{\xi} \to 0} 0 \qquad \text{(da } D_i f \text{ stetig)} \quad \square
\end{aligned}$$

7.6 Satz (Kettenregel) Seien $U \subset \mathbb{R}^m, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $g : U \to V$, $f : V \to \mathbb{R}^k$ Abbildungen. g sei differenzierbar in $\underline{x} \in U$. f sei differenzierbar in $\underline{y} := g(\underline{x}) \in V$. Dann ist $f \circ g : U \to \mathbb{R}^k$ differenzierbar in $\underline{x}$ mit

$$D(f \circ g)(\underline{x}) = Df\big(g(\underline{x})\big) \cdot Dg(\underline{x})$$

Beweis: nach Vorraussetzung existieren $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $\psi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ mit

$$\lim_{\underline{\xi} \to 0, \underline{\xi} \neq 0} \frac{1}{\|\underline{\xi}\|_2} \cdot \varphi(\underline{\xi}) = 0$$
$$\lim_{\underline{\eta} \to 0, \underline{\eta} \neq 0} \frac{1}{\|\underline{\eta}\|_2} \cdot \psi(\underline{\eta}) = 0$$

und

$$\begin{aligned}
g(\underline{x} + \underline{\xi}) &= g(\underline{x}) + D_g(\underline{x})\underline{\xi} + \varphi(\underline{\xi}) \\
f(\underline{y} + \underline{\eta}) &= f(\underline{y}) + D_f(\underline{y})\underline{\xi} + \psi(\underline{\eta})
\end{aligned}$$

Definiere $\chi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ durch

$$\chi(\underline{\xi}) := Df(\underline{y})\varphi(\underline{\xi}) + \psi\big(D_g(\underline{x})\underline{\xi} + \varphi(\underline{\xi})\big)$$

dann gilt

$$\begin{aligned}
(f \circ g)(\underline{x} + \underline{\xi}) &= f\Big(\underbrace{g(\underline{x})}_{\underline{y}} + \underbrace{g(\underline{x} + \underline{\xi}) - g(\underline{x})}_{\underline{\eta}}\Big) \\
&= f(g(\underline{x})) + Df\big(g(\underline{x})\big)\Big(g(\underline{x} + \underline{\xi}) - g(\underline{x})\Big) + \psi\Big(g(\underline{x} + \underline{\xi}) - g(\underline{x})\Big) \\
&= f(g(\underline{x})) + Df(g(\underline{x}))\big(Dg(\underline{x})\underline{\xi} + \varphi(\underline{\xi})\big) + \psi\big(Dg(\underline{x})\underline{\xi} + \varphi(\underline{x})\big) \\
&= f(g(\underline{x})) + Df(g(\underline{x}))Dg(\underline{x})\underline{\xi} + \underbrace{Df(g(\underline{x}))\varphi(\underline{\xi}) + \psi(Dg(\underline{x})\underline{\xi} + \varphi(\underline{\xi}))}_{\chi(\xi)} \\
&= f \circ g(\underline{x}) + Df(g(\underline{x})) \circ Dg(\underline{x})\underline{\xi} + \chi(\underline{\xi})
\end{aligned}$$

Wegen (*) existieren ein $K > 0$ und $\delta > 0$ mit $\left\|\varphi(\underline{\xi})\right\|_2 \leqslant K \cdot \|\xi\|_2$ für alle $\xi \in B(0,\delta)$ (warum?)
Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\|\xi\|_2} \cdot \left\|\psi(Dg(\underline{x})\xi + \varphi(\underline{\xi}))\right\|_2 &= \frac{\left\|Dg(\underline{x})\underline{\xi} + \varphi(\underline{\xi})\right\|_2}{\|\xi\|_2 \cdot \left\|Dg(\underline{x})\underline{\xi} + \varphi(\underline{\xi})\right\|_2} \left\|\psi(Dg(\underline{x})\xi + \varphi(\underline{\xi}))\right\|_2 \\
&\leqslant \frac{\left\|Dg(\underline{x})\underline{\xi}\right\|_2 + \left\|\varphi(\underline{\xi})\right\|_2}{\|\xi\|_2 \cdot \left\|Dg(\underline{x})\underline{\xi} + \varphi(\underline{\xi})\right\|_2} \left\|\psi(Dg(\underline{x})\xi + \varphi(\underline{\xi}))\right\|_2 \\
&\leqslant \frac{\left(\left\|Dg(\underline{x})\underline{\xi}\right\|_2 + K\left\|\underline{\xi}\right\|_2\right)}{\|\xi\|_2 \cdot \left\|Dg(\underline{x})\underline{\xi} + \varphi(\underline{\xi})\right\|_2} \left\|\psi(Dg(\underline{x})\xi + \varphi(\underline{\xi}))\right\|_2 \\
&\leqslant \frac{(\|Dg(\underline{x})\| + K)\left\|\underline{\xi}\right\|_2}{\|\xi\|_2 \cdot \left\|Dg(\underline{x})\underline{\xi} + \varphi(\underline{\xi})\right\|_2} \left\|\psi(\underbrace{Dg(\underline{x})\xi + \varphi(\underline{\xi})}_{\xrightarrow{\xi\to 0} 0})\right\|_2 \\
&\xrightarrow{\xi \to 0} 0
\end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$\frac{1}{\|\xi\|_2}\left\|Df(g(\underline{x}))\varphi(\underline{\xi})\right\|_2 \leqslant \|Df(g(\underline{x}))\| \cdot \frac{\left\|\varphi(\underline{\xi})\right\|_2}{\left\|\underline{\xi}\right\|_2} \xrightarrow{\xi\to 0} 0$$

also

$$\frac{1}{\left\|\underline{\xi}\right\|_2}\left\|\chi(\underline{\xi})\right\|_2 \leqslant \frac{1}{\|\underline{xi}\|_2}\left(\left\|Df(g(\underline{x}))\varphi(\underline{\xi})\right\|_2 + \left\|\psi(Dg(\underline{x})\underline{\xi} + \varphi(\underline{\xi}))\right\|_2\right) \xrightarrow{\xi\to 0} 0$$ □

7.7 Beispiel $U \subset \mathbb{R}^m, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $g : U \to V$, $f : V \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ g)(\underline{x}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_j}\big(g(\underline{x})\big) \cdot \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(\underline{x})$$

denn

$$\begin{aligned}
\nabla(f \circ g)(\underline{x}) = \left(\frac{\partial(f\circ g)}{\partial x_1}(\underline{x}), \dots, \frac{\partial(f\circ g)}{\partial x_m}(\underline{x})\right) &= D(f\circ g)(\underline{x}) \\
&\overset{7.6}{=} Df\big(g(\underline{x})\big) \cdot Dg(\underline{x}) \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\big(g(\underline{x})\big), \dots, \frac{\partial f}{\partial y_n}\big(g(\underline{x})\big)\right) \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\underline{x}) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_m}(\underline{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1}(\underline{x}) & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_m}(\underline{x}) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$\langle \nabla f(\underline{x}), \underline{v}\rangle \leftrightarrow Df(\underline{x})(\underline{v}) = (\dots)\begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix}$

7.8 Definition Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$, $\underline{x} \in U$, $\underline{v} \in \mathbb{R}^m$ mit $\|v\|_2 = 1$. Falls

$$D_{\underline{v}} f(\underline{x}) := \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{f(\underline{x} + t\cdot\underline{v}) - f(\underline{x})}{t}$$

existiert, so heißt $D_{\underline{v}} f(\underline{x})$ ***Richtungsableitung*** von f in $\underline{x}$ in Richtung $\underline{v}$.
(Es gilt $D_{\underline{e}_i} f(\underline{x}) = D_i f(\underline{x})$)

7.9 Satz Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ stetig (partiell) differenzierbar. Dann gilt für $\underline{x} \in U$ und $\underline{v} \in \mathbb{R}^m$ mit $\|v\|_2 = 1$

$$D_{\underline{v}} f(\underline{x}) = \langle \underline{v} \mid \operatorname{grad} f(\underline{x}) \rangle (= \|\operatorname{grad} f(\underline{x})\|_2 \cdot \cos\theta)$$

falls $\operatorname{grad} f(\underline{x}) \neq 0$.

Beweis: Definiere $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ durch $g(t) := \underline{x} + t \cdot \underline{v}$, dann existiert $\varepsilon > 0$ mit $g((-\varepsilon, \varepsilon)) \subset U$ (warum?) und $f \circ g : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ ist definiert. Es gilt

$$\begin{aligned} D_{\underline{v}} f(\underline{x}) = \lim_{t\to 0, t\neq 0} \frac{f(\underline{x} + t \cdot \underline{v}) - f(\underline{x})}{t} &= \lim_{t\to 0, t\neq 0} \frac{f\big(g(t)\big) - f\big(g(0)\big)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0, t\neq 0} \frac{(f\circ g)(t) - (f \circ g)(0)}{t} \\ &= D(f\circ g)(0) = Df\big(g(0)\big) \circ Dg(0) \\ &= \big\langle \operatorname{grad} f\big(g(0)\big), \underline{v} \big\rangle \end{aligned}$$

□

7.10 Definition Sei $A : [a,b] \to M_{n\times m}(\mathbb{R})$ stetig[1]. Dann sind $A_{ij} : [a,b] \to \mathbb{R}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant m$ stetig. Wir setzen

$$\int_a^b A(t)\,\mathrm{d}t := \left(\int_a^b A_{ij}(t)\,\mathrm{d}t \right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j \leqslant m}} \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$$

7.11 Satz Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Sei $\underline{x} \in U$, $\underline{\xi} \in \mathbb{R}^m$ so, dass $\big\{ \underline{x} + t\underline{\xi} \,\big|\, t \in [0,1] \big\} \subset U$. Dann gilt

$$f\big(\underline{x} + \underline{\xi}\big) - f(\underline{x}) = \left(\int_0^1 Df(\underline{x} + t\cdot\underline{\xi})\,\mathrm{d}t \right) \cdot \underline{\xi}$$

Außerdem gilt

$$\big\| f(\underline{x} + \underline{\xi}) - f(\underline{x}) \big\|_2 \leqslant \sup\big\{ \big\| Df(\underline{x} + t \cdot \underline{\xi}) \big\| \,\big|\, t \in [0,1] \big\} \big\| \underline{\xi} \big\|_2$$

Beweis: Für $1 \leqslant i \leqslant n$ definieren $g_i : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch $g_i(t) := f_i(\underline{x} + t \cdot \underline{\xi})$, dann gilt $g_i'(t) = Df_i(\underline{x} + t\cdot\underline{\xi}) \cdot \underline{\xi}$ und

$$\begin{aligned} f_i(\underline{x} + \underline{\xi}) - f_i(\underline{x}) = g_i(1) - g_i(0) = \int_0^1 g_i'(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 \big(Df_i(\underline{x} + t\cdot\underline{\xi})\underline{\xi} \big)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\underline{x} + t \cdot \underline{\xi}) \cdot \xi_j \right) \mathrm{d}t \\ &= \sum_{j=1}^m \left(\int_0^1 \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\underline{x} + t\cdot\underline{\xi})\,\mathrm{d}t \right) \xi_j \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} f(\underline{x} + \underline{\xi}) - f(\underline{x}) = \left(\sum_{j=1}^m \left(\int_0^1 \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\underline{x} + t\cdot\underline{\xi})\,\mathrm{d}t \right) \xi_j \right)_{1\leqslant i \leqslant n} &= \left(\int_0^1 \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\underline{x} + t\underline{\xi})\,\mathrm{d}t \right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant m}} \underline{\xi} \\ &= \left(\int_0^1 Df(\underline{x} + t\underline{\xi})\,\mathrm{d}t \right) \underline{\xi} \end{aligned}$$

[1] Zum Beispiel mit Operatornorm: $\|B\| := \sup\big\{ \|B\underline{x}\|_2 \,\big|\, \underline{x} \in \mathbb{R}^m, \|\underline{x}\|_2 = 1 \big\}$

Normabschätzung:

$$\begin{aligned}\left\|f(\underline{x}+\underline{\xi})-f(\underline{x})\right\|_2 = \left\|\left(\int_0^1 Df(\underline{x}+t\underline{\xi})\,\mathrm{d}t\right)\underline{\xi}\right\|_2 &= \left\|\int_0^1 \left(Df(\underline{x}+t\underline{\xi})\underline{\xi}\right)\mathrm{d}t\right\|_2 \\ &\leqslant \int_0^1 \left\|Df(\underline{x}+t\underline{\xi})\underline{\xi}\right\|_2 \mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_0^1 \left\|Df(\underline{x}+t\underline{\xi})\right\| \cdot \left\|\underline{\xi}\right\|_2 \mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_0^1 \left\|Df(\underline{x}+t\underline{\xi})\right\| \mathrm{d}t \cdot \left\|\underline{\xi}\right\|_2 \\ &\leqslant \sup\left\{\left\|Df(\underline{x}+t\underline{\xi})\right\| \,\middle|\, t\in[0,1]\right\} \cdot \left\|\underline{\xi}\right\|_2\end{aligned}$$

Für (*) benutzt :

$$\left\|\int_0^1 \underline{v}(t)\,\mathrm{d}t\right\|_2 \leqslant \int_0^1 \|\underline{v}(t)\|_2\,\mathrm{d}t$$

für $\underline{v} : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ stetig. (Übung) □

α bezeichnet man auch als Mulitindex

7.12 Notation Für $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{N}^m$ setzen wir

$$\begin{aligned}|\alpha| &:= \alpha_1 + \ldots + \alpha_m \\ \alpha! &:= \alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_m!\end{aligned}$$

Für $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ sei

$$\underline{x}^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_m^{\alpha_m}$$

Für $f : U \to \mathbb{R}$ ($U \subset \mathbb{R}^m$ offen): $|\alpha|$-mal partiell differenzierbar sei

$$D^\alpha f := D_1^{\alpha_1} \ldots D_m^{\alpha_m} f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}}$$

7.13 Proposition Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ k-mal stetig partiell differenzierbar. Sei $\underline{x} \in U$ und $\underline{\xi} \in \mathbb{R}^m$ mit $\left\{\underline{x}+t\underline{\xi} \,\middle|\, t \in [0,1]\right\} \subset U$. Dann ist $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(t) := f(\underline{x}+t\underline{\xi})$ auch k-mal stetig differenzierbar mit

$$\frac{\partial^k g}{\partial t^k}(t) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^m, |\alpha| = k} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha f(\underline{x}+t\underline{\xi})\underline{\xi}^\alpha$$

Beweis: Behauptung:

$$\frac{d^l g}{dt^l}(t) = \sum_{i_1, \ldots i_k \in \{1, \ldots, m\}} D_{i_l} \ldots D_{i_1} f(\underline{x}+t\underline{\xi})\xi_{i_1} \ldots \xi_{i_l}$$

für $l = 1, \ldots, k$.

I.A. $\frac{\partial^1 g}{dt}(t) = \frac{\partial g}{\partial t}(t) = Df\left(\underline{x}+t\underline{\xi}\right) \cdot \underline{\xi} = \sum_{i=1}^m D_i f(\underline{x}+t\underline{\xi}) \cdot \xi_i$

I.S. Es gelte $(\star)$ für $l \in \{1,\dots,k-1\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^{l+1}}{\partial t^{l+1}} g(t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{d^l}{dt^l} g(t)\right) &= \frac{d}{dt}\left(\sum_{i_1,\dots,i_l \in \{1,\dots,m\}} D_{i_l}\dots D_{i_1} f(\underline{x}+t\underline{\xi})\xi_{i_1}\dots\xi_{i_l}\right) \\
&= \sum_{i=1,\dots,m} D_i \left(\sum_{i_1,\dots,i_l \in \{1,\dots,m\}} D_{i_l}\dots D_{i_1} f(\underline{x}+t\underline{\xi})\xi_{i_1}\dots\xi_{i_l}\right)\xi_i \\
&= \sum_{i_{l+1}\in\{1,\dots,m\}} \sum_{i_1,\dots,i_l \in \{1,\dots,m\}} D_{i_{l+1}} D_{i_l}\dots D_{i_1} f(\underline{x}+t\underline{\xi})\xi_{i_1}\dots\xi_{i_l}\cdot\xi_{i_{l+1}} \\
&= \sum_{i_1,\dots i_{l+1} \in \{1,\dots,m\}} D_{i_{l+1}}\dots D_{i_1} f(\underline{x}+t\underline{\xi})\xi_{i_1}\dots\xi_{i_{l+1}}
\end{aligned}$$

per Induktion folgt die Behauptung

Falls $(i_1,\dots,i_k) \in \{1,\dots,m\}^k$ dem Index i α_i-mal enthält (für $i = 1,\dots,m$), so gilt nach Satz 6.6

$$\begin{aligned}
D_{i_k}\dots D_{i_1} f(\underline{x}+t\underline{\xi})\xi_{i_1}\dots\xi_{i_k} &= D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2}\dots D_m^{\alpha_m} f(\underline{x}+t\underline{\xi})\xi_1^{\alpha_2}\cdot\xi_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot\xi_m^{\alpha_m} \\
&= D^\alpha f(\underline{x}+t\cdot\underline{\xi})\underline{\xi}^\alpha
\end{aligned}$$

dabei ist $|\alpha| = k$.
Weiter gilt für $\alpha \in \mathbb{N}^m$ mit $|\alpha|)k$

$$\#\left\{(i_1,\dots,i_k) \in \{1,\dots,m\}^k \,\middle|\, \text{Index } i \text{ kommt } \alpha_i\text{-mal vor, für } i = 1,\dots,m\right\} = \frac{k!}{\alpha_1!\cdot\ldots\cdot\alpha_m!} = \frac{k!}{\alpha!}$$

Es folgt

$$\sum_{(i_1,\dots,i_k)\in\{1,\dots,m\}^k} D_{i_k}\dots D_{i_1} f(\underline{x}+t\underline{\xi})\xi_{i_1}\dots\xi_{i_k} = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^m, |\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha f(\underline{x}+t\underline{\xi})\underline{\xi}^\alpha \qquad \square$$

7.14 Satz: Taylorformel Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $\underline{x} \in U$ und $\delta > 0$ mit $\overline{B}(\underline{x},\delta) \subset U$. Sei $f : U \to \mathbb{R}$ $(k+1)$-mal stetig (partiell) differenzierbar. Dann existiert $R_{k+1} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ mit

$$f(\underline{x}+\underline{\xi}) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^m, |\alpha|\leqslant k} \frac{D^\alpha f(\underline{x})}{\alpha!}\cdot\underline{\xi}^\alpha + R_{k+1}(\underline{\xi})$$

und

$$\lim_{\underline{\xi}\to 0, \underline{\xi}\neq 0} \frac{R_{k+1}(\underline{\xi})}{\|\underline{\xi}\|_2^k} = 0$$

(Hierfür genügt es, wenn f nur k-mal stetig differenzierbar ist.). Für jedes $\underline{\xi} \in \mathbb{R}^m$ mit $\|\underline{\xi}\|_2 \leqslant \delta$ existiert ein $\theta \in [0,1]$ mit

$$R_{k+1}(\underline{\xi}) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^m, |\alpha|=k+1} \frac{D^\alpha f(\underline{x}+\theta\cdot\underline{\xi})}{\alpha!}\cdot\underline{\xi}^\alpha$$

Beweis: Sei $\underline{\xi} \in \overline{B}(0,\delta)$. Definiere $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch $g(t) := f(\underline{x} + t \cdot \underline{\xi})$. Nach 7.13 ist g $(k+1)$-mal stetig differenzierbar; nach 1.14 existiert ein $\theta \in [0,1]$ mit

0 als Entwicklungspunkt in 1.14

$$\begin{aligned}
g(1) = g(0+1) &\overset{1.14}{=} \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{l!}\frac{d^l}{dt^l} g(0)(1-0)^l + \frac{1}{(k+1)!}\frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} g(\theta)1^{k+1} \\
&= \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{l!}\frac{d^l}{dt^l} g(0) + \frac{1}{(k+1)!}\frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} g(\theta) \\
&\overset{7.13}{=} \sum_{l=0}^{k} \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^m, |\alpha|=l} \frac{l!}{l!\cdot\alpha!} D^\alpha f(\underline{x} + 0\underline{\xi})\underline{\xi}^\alpha + \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^m,|\alpha|=k+1} \frac{(k+1)!}{(k+1)!\cdot\alpha!} D^\alpha f(\underline{x} + \theta\underline{\xi})\underline{\xi}^\alpha \\
&= R_{k+1}(\underline{\xi}) \qquad \Rightarrow (\star)
\end{aligned}$$

Für $\alpha \in \mathbb{N}^m$ mit $|\alpha| = k+1$ ist $D^\alpha f = D_1^{\alpha_1} \dots D_m^{\alpha_m} f : U \to \mathbb{R}$ stetig, also beschränkt auf $\overline{B}(x,\delta) \subset U$ (da $\overline{B}(x,\delta)$ kompakt). Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\|\underline{\xi}\|_2^k} \cdot \left|\underline{\xi}^\alpha\right| = \frac{1}{\|\underline{\xi}\|_2^k} \cdot |\xi_1|^{\alpha_1} \dots |\xi_m|^{\alpha_m} &\leqslant \frac{1}{\|\underline{\xi}\|_2^k} \cdot \|\underline{\xi}\|_2^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \|\underline{\xi}\|_2^{\alpha_m} \\
&= \frac{1}{\|\underline{\xi}\|_2^k} \|\underline{\xi}\|_2^{|\alpha|} \\
&= \|\underline{\xi}\|_2 \xrightarrow{\underline{\xi}\to 0} 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \frac{1}{\|\underline{\xi}\|_2^k} \cdot R_{k+1}(\underline{\xi}) \xrightarrow{\underline{\xi}\to 0} 0.$ ☐

7.15 Corollar Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $\underline{x} \in U$, $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Dann gilt

$$f(\underline{x} + \underline{\xi}) = f(\underline{x}) + \langle \operatorname{grad} f(\underline{x}) \,|\, \underline{\xi} \rangle + \frac{1}{2} \langle \underline{\xi} \,|\, \operatorname{Hess} f(\underline{x})\underline{\xi} \rangle + R_3(\underline{\xi})$$

für ξ in einer Umgebung von 0. Dabei ist $\operatorname{Hess} f(\underline{x}) := (D_i D_j f(\underline{x}))_{i,j\in\{1,\dots,m\}} \in M_{m\times m}(\mathbb{R})$

Beweis: Nach 7.14 gilt:

$$f(\underline{x} + \underline{\xi}) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^m, |\alpha|\leqslant 2} \frac{D^\alpha f(\underline{x})}{\alpha!} \underline{\xi}^\alpha + R_3(\underline{\xi})$$

- $\boxed{|\alpha| = 0}$: $\alpha = (0,\dots,0)$ und

$$\frac{D^\alpha f(\underline{x})}{\alpha!} \underline{\xi}^\alpha = \frac{D^0 f(\underline{x})}{\alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_m!} \xi_1^0 \cdots \xi_m^0 = f(\underline{x})$$

- $\boxed{|\alpha| = 1}$: $\alpha = (0,\dots,0,\underset{i}{1},0,\dots,0)$, $i \in \{1,\dots,m\}$

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^m, |\alpha|=1} \frac{D^\alpha f(\underline{x})}{\alpha!} \underline{\xi}^\alpha = \sum_{i=1}^{m} \frac{D_i f(\underline{x})}{0! \cdots 1! \cdots 0!} \xi_1^0 \cdots \xi_i^1 \cdots \xi_m^0 = \sum_{i=1}^{m} D_i f(\underline{x}) \xi_i = \langle \operatorname{grad} f(\underline{x}) \,|\, \underline{\xi} \rangle$$

- $\boxed{|\alpha| = 2}$: $\alpha = (0, \dots, \underset{i}{2}, \dots, 0)$ für $1 \leqslant i \leqslant m$ oder $\alpha = (0, \dots, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0, \underset{j}{1}, 0, \dots, 0)$ für $1 \leqslant i < j \leqslant m$.

$$\frac{D^\alpha f(\underline{x})}{\alpha!} \underline{\xi}^\alpha = \frac{D_i^2 f(\underline{x})}{2} \xi_1^2 \qquad \Bigg| \qquad \frac{D^\alpha f(\underline{x})}{\alpha!} \underline{\xi}^\alpha = \frac{D_i D_j f(\underline{x})}{1} \xi_i \xi_j$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^m, |\alpha| = 2} \frac{D^\alpha f(\underline{x})}{\alpha!} \underline{\xi}^\alpha &= \sum_{i \in \{1, \dots, m\}} \frac{D^2 f(\underline{x})}{2} \xi_1^2 + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant m} D_i D_j f(\underline{x}) \xi_i \xi_j \\ &= \frac{1}{2} \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant m, i = j} D_i D_j f(\underline{x}) \xi_i \xi_j + \frac{1}{2} \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant m, i \neq j} D_i D_j f(\underline{x}) \xi_i \xi_j \\ &= \frac{1}{2} \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant m} D_i D_j f(\underline{x}) \xi_i \xi_j = \langle \underline{\xi} \,|\, \mathrm{Hess}\, f(\underline{x}) \underline{\xi} \rangle \end{aligned}$$ $\square$

7.16 Definition Sei $U \subset \mathbb{R}^m$, $f : U \to \mathbb{R}$, $\underline{x} \in U$. f besitzt in $\underline{x}$ ein ***lokales Maximum (Minimum)***, falls $\underline{x} \in V \underset{\text{offen}}{\subset} U$ existiert mit $f(\underline{y}) \leqslant f(\underline{x})$ für alle $\underline{y} \in V$ (bzw. $f(\underline{y}) \geqslant f(\underline{x})$ für alle $\underline{y} \in V$). Ein ***lokales Extremum*** ist ein lokales Maximum oder Minimum. Das Maximum (Minimum) ist ***isoliert*** , falls $f(\underline{y}) < f(\underline{x})$ (bzw. $f(\underline{y}) > f(\underline{x})$) für $\underline{x} \neq \underline{y} \in V$.

7.17 Propositon Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar. Falls f in $\underline{x} \in U$ ein lokales Extremum besitzt, so gilt

$$\mathrm{grad}\, f(\underline{x}) = 0$$

Beweis: Für $\varepsilon > 0$ klein genug und $i \in \{1, \dots, m\}$ definiere $g_i : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ mit $g_i(t) := f(\underline{x} + t \cdot \underline{e}_1)$. Dann ist g_i differenzierbar und hat in 0 ein lokales Extremum (warum?). Es gilt nach Analysis I: $0 = g_i'(0) = D_i f(\underline{x})$, also

$$\mathrm{grad}\, f(\underline{x}) = (D_1 f(\underline{x}), \dots, D_m f(\underline{x})) = 0$$ $\square$

7.18 Erinnerung Sei $A \in M_{m \times m}(\mathbb{R})$ symmetrisch, dann existiert $T \in M_{m \times m}(\mathbb{R})$ unitär (orthogonal) mit

$$T^{-1} A T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{pmatrix}$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ Eigenwerte (zu Eigenvektoren $T\underline{e}_1, \dots, T e_m$). A heißt positiv definit (negativ definit), falls alle λ_i echt positiv (echt negativ) sind. In diesem Fall gilt $\langle \underline{\xi} \,|\, A\underline{\xi} \rangle > 0$ (< 0) für alle $\underline{\xi} \in \mathbb{R}^m$.

7.19 Satz Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, $\underline{x} \in U$ mit $\mathrm{grad}\, f(\underline{x}) = 0$.

(i) Wenn $\mathrm{Hess}\, f(\underline{x})$ positiv definit ist, dann hat f in $\underline{x}$ ein isoliertes Minimum.

(ii) Wenn $\mathrm{Hess}\, f(\underline{x})$ negativ definit ist, dann hat f in $\underline{x}$ ein isoliertes Maximum.

(iii) Falls $\mathrm{Hess}\, f(\underline{x})$ echt positive und echt negative Eigenwerte besitzt, so hat f in $\underline{x}$ kein Extremum.

Beweis:

(i) Nach Corollar 7.15 gilt für $\underline{\xi}$ in einer Umgebung von 0.

$$f(\underline{x}+\underline{\xi}) = f(\underline{x}) + \underbrace{\langle \operatorname{grad} f(\underline{x}) \,|\, \underline{\xi}\rangle}_{=0} + \frac{1}{2}\langle \underline{\xi} \,|\, \operatorname{Hess} f(\underline{x})\rangle + R_3(\underline{\xi})$$

Wegen $\frac{R_3(\xi)}{\|\xi\|_2^2} \xrightarrow{\xi\to 0, \xi\neq 0} 0$ existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit: $\|\underline{\xi}\|_3 < \delta \Rightarrow |R_3(\underline{\xi})| < \varepsilon\|\underline{\xi}\|_2$. Dann ist $S^{m-1} := \left\{\underline{\eta} \in \mathbb{R}^m \,\middle|\, \|\underline{\eta}\|_2 = 1\right\} \subset \mathbb{R}^m$ kompakt und $\underline{\eta} \mapsto \langle \underline{\eta} \,|\, \operatorname{Hess} f(\underline{x})\underline{\eta}\rangle$ ist stetig, nimmt also auf S^{m-1} ihr Minimum an. Dann gilt $\langle \underline{\eta} \,|\, \operatorname{Hess} f(\underline{x})\underline{\eta}\rangle > 0$ für alle $\underline{\eta} \in S^{m-1}$, gilt

$$\alpha := \inf\left\{\langle \underline{\eta} \,|\, \operatorname{Hess} f(\underline{x})\underline{\eta}\rangle \,\middle|\, \underline{\eta} \in S^{m-1}\right\} > 0$$

Für $\underline{\xi} \in \mathbb{R}^m$ gilt nun

$$\langle \underline{\xi} \,|\, \operatorname{Hess} f(\underline{x}\underline{\xi})\rangle \geqslant \alpha\|\underline{\xi}\|_2^2$$

Sei nun $\varepsilon := \frac{\alpha}{4}$, wähle $\delta > 0$ wie eben.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow f(\underline{x}+\underline{\xi}) &\geqslant f(\underline{x}) + \frac{1}{2}\langle \underline{\xi} \,|\, \operatorname{Hess} f(\underline{x})\underline{\xi}\rangle - R_3(\underline{\xi}) \\
&\geqslant f(\underline{x}) + \frac{\alpha}{2}\|\underline{\xi}\|_2^2 - \frac{\alpha}{4}\|\xi\|_2^2 \\
&> f(\underline{x})
\end{aligned}$$

(ii) analog

(iii) Übung

□

7.20 Beispiel $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f\binom{x}{y} = c + x^2 + y^2$, $c \in \mathbb{R}$. Taylorformel:

$$\begin{aligned}
f\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} &= f\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + \langle \nabla f\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \,|\, \begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}\rangle + \frac{1}{2}\langle\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} \,|\, (\operatorname{Hess} f)\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}\rangle + R_3\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} \\
\nabla f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}D_x f\binom{x}{y}\\ D_y f\binom{x}{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x\\2y\end{pmatrix} \\
\operatorname{Hess} f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}D_xD_x f\binom{x}{y} & D_xD_y f\binom{x}{y}\\ D_xD_y f\binom{x}{y} & D_yD_y f\binom{x}{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$\operatorname{Hess} f\binom{0}{0} = \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ ist positiv definit. Gesamt folgt:

$$\Rightarrow f\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} = c + \xi^2 + \eta^2 + R_3\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}$$

und f hat in $\binom{0}{0}$ ein isoliertes Minimum.

8 Implizite Funktionen

8.1 Motivation Sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenzierbar.

Abbildung 20: Hier kommt noch ein Bild mit Niveaulinien hin

* Wann ist $N_f(c)$ lokal von der Form $\left\{ \binom{x}{g(x)} \,\middle|\, x \in I \right\}$ für ein $g : I \to \mathbb{R}$?
* Was lässt sich über g sagen?
* Wo liegen die Extrema von $F|_Z$?

8.2 Satz Seien $\underline{a} \in \mathbb{R}^k$, $\underline{b}, \underline{c} \in \mathbb{R}^m$, $r_1, r_2 > 0$. $U_1 := B(a, r_1) \subset \mathbb{R}^k, U_2 := B(b, r_2) \subset \mathbb{R}^m$. Sei

$$F : U_1 \times U_2 \to \mathbb{R}^m \quad , \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{pmatrix} \mapsto F \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{pmatrix}$$

Eine Abbildung mit $F\binom{\underline{a}}{\underline{b}} = \underline{c}$. F sei in $\binom{\underline{a}}{\underline{b}}$ differenzierbar und $\frac{\partial F}{\partial \underline{y}} \binom{\underline{a}}{\underline{b}} \in M_{m \times m}(\mathbb{R})$ sei invertierbar. Es sei $g : U_1 \to U_2$ stetig mit $g(\underline{a}) = \underline{b}$ und $F\binom{\underline{x}}{g(\underline{x})} = \underline{c}$ für $\underline{x} \in U_1$.

Dann ist g in $\underline{a}$ differenzierbar und

$$Dg(\underline{a}) = -\left(\frac{\partial F}{\partial \underline{y}} \begin{pmatrix} \underline{a} \\ \underline{b} \end{pmatrix} \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial \underline{x}} \begin{pmatrix} \underline{a} \\ \underline{b} \end{pmatrix}$$

Dabei ist

$$\frac{\partial F}{\partial \underline{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_k} \end{pmatrix} , \quad \frac{\partial F}{\partial \underline{y}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

Also $DF = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial \underline{x}} & \frac{\partial F}{\partial \underline{y}} \end{pmatrix}$

Beweis: Ohne Einschränkungen: $\binom{\underline{a}}{\underline{b}} = \binom{0}{0} \in \mathbb{R}^{k+m}$ (warum?). F ist differenzierbar in $\binom{\underline{a}}{\underline{b}}$, d.h. für $\binom{\underline{x}}{\underline{y}} \in U_1 \times U_2$ gilt

$$F \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{pmatrix} = \underbrace{F \begin{pmatrix} \underline{a} \\ \underline{b} \end{pmatrix}}_{=c} + \underbrace{\left(DF \begin{pmatrix} \underline{a} \\ \underline{b} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{pmatrix}}_{= \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{x}} \binom{\underline{a}}{\underline{b}} \right) \underline{x} + \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{y}} \binom{\underline{a}}{\underline{b}} \right) \underline{y}} + \varphi \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{pmatrix}$$

wo $\varphi : \mathbb{R}^{k+m} \to \mathbb{R}^m$ ein Abbildung ist mit

$$\lim_{\binom{\underline{x}}{\underline{y}} \to 0, \binom{\underline{x}}{\underline{y}} \neq 0} \frac{1}{\left\| \binom{\underline{x}}{\underline{y}} \right\|_2} \cdot \varphi \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{pmatrix}$$

Dann gilt für $\underline{x} \in U_1$

$$\underline{c} = F\begin{pmatrix} \underline{x} \\ g(\underline{x}) \end{pmatrix} = \underline{c} + \frac{\partial F}{\partial \underline{x}}\begin{pmatrix} \underline{a} \\ \underline{b} \end{pmatrix} + \frac{\partial F}{\partial \underline{y}}\begin{pmatrix} \underline{a} \\ \underline{b} \end{pmatrix} g(\underline{x}) + \varphi\begin{pmatrix} \underline{x} \\ g(\underline{x}) \end{pmatrix}$$

also

$$g(\underline{x}) = \underbrace{-\left(\frac{\partial F}{\partial \underline{y}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial \underline{x}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{lin. Abb. } \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m} \underline{x} - \underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial \underline{y}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)^{-1} \varphi\begin{pmatrix} \underline{x} \\ g(\underline{x}) \end{pmatrix}}_{=:\psi(\underline{x})}$$

Bleibt zu zeigen:

$$\frac{1}{\|\underline{x}\|_2} \|\psi(\underline{x})\|_2 \xrightarrow{\underline{x}\to 0, \underline{x}\neq 0} 0$$

Sei $0 < \varepsilon < 1$. Setze $M := \left\| \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{y}} \binom{0}{0} \right)^{-1} \right\|$ und $N := 2\left\| \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{y}} \binom{0}{0} \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial \underline{x}} \binom{0}{0} \right\| + 1$.
Wegen (*) existieren $0 < \delta_1 < r_1$ und $0 < \delta_2 < r_2$ sodass für $\binom{\underline{x}}{\underline{y}} \in U_1 \times U_2$ mit $\|\underline{x}\|_1 < \delta_1$, $\|\underline{y}\|_2 < \delta_2$ gilt

$$\left\|\varphi\begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{pmatrix}\right\|_2 \leqslant \left\|\begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{pmatrix}\right\|_2 \cdot \frac{1}{2M} \frac{\varepsilon}{1+N} \leqslant \frac{\|\underline{x}\|_2 + \|\underline{y}\|_2}{2M} \cdot \frac{\varepsilon}{1+N}$$

Da g stetig ist, gilt $g(0) = 0 \Rightarrow \exists 0 < \delta < \delta_1$ sodass für $\underline{x} \in U_1$ mit $\|\underline{x}\|_2 < \delta$ gilt $\|g(\underline{x})\|_2 < \delta_2$. Für $\underline{x} \in U_1$ mit $\|\underline{x}\|_2 < \delta$ gilt daher

$$\left\|\varphi\begin{pmatrix} \underline{x} \\ g(\underline{x}) \end{pmatrix}\right\|_2 \leqslant \frac{\|\underline{x}\|_2 + \|g(\underline{x})\|_2}{2M} \cdot \frac{\varepsilon}{1+N} \leqslant \frac{\|\underline{x}\|_2 + \|g(\underline{x})\|_2}{2M}$$

Also

$$\begin{aligned}
\|g(\underline{x})\|_2 &\overset{(**)}{\leqslant} \left\| \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{y}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial \underline{x}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \|\underline{x}\|_2 + M \cdot \left\|\varphi\begin{pmatrix} \underline{x} \\ g(\underline{x}) \end{pmatrix}\right\|_2 \\
&\overset{(****)}{\leqslant} \left\| \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{y}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial \underline{x}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \|\underline{x}\|_2 + M \cdot \frac{\|\underline{x}\|_2 + \|g(\underline{x})\|_2}{2M} \\
&= \left\| \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{y}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial \underline{x}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \|\underline{x}\|_2 + \frac{\|\underline{x}\|_2}{2} + \frac{\|g(\underline{x})\|_2}{2}
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
\frac{\|g(\underline{x})\|_2}{2} &\leqslant \left(\left\| \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{y}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial \underline{x}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| + \frac{1}{2} \right) \|\underline{x}\|_2 \\
&\Longrightarrow \|g(\underline{x})\|_2 \leqslant N \|\underline{x}\|_2 \quad \text{für } \|\underline{x}\|_2 < \delta
\end{aligned}$$

Wir erhalten für $0 < \|\underline{x}\|_2 < \delta$

$$\frac{1}{\|\underline{x}\|_2} \cdot \|\psi(\underline{x})\|_2 \overset{(**)}{\leqslant} \frac{M}{\|\underline{x}\|_2} \cdot \left\|\varphi\begin{pmatrix} \underline{x} \\ g(\underline{x}) \end{pmatrix}\right\|_2 \overset{(****)\&(*****)}{\leqslant} \frac{M}{\|\underline{x}\|_2} \cdot \frac{\|\underline{x}\|_2(1+N)}{2M} \cdot \frac{\varepsilon}{1+N} < \varepsilon$$

$\Rightarrow (***)$ □

8.3 Satz Seien $\underline{a} \in U_1 \underset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}^k$, $\underline{b} \in U_2 \underset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}^m$, $\underline{c} \in \mathbb{R}^m$. $F : U_1 \times U_2 \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar, sodass $F\binom{\underline{a}}{\underline{b}} = \underline{c}$ und $\frac{\partial F}{\partial \underline{y}}\binom{\underline{a}}{\underline{b}} \in M_{m\times m}(\mathbb{R})$ invertierbar ist. Dann existieren $\underline{a} \in V_1 \underset{\text{offen}}{\subset} U_1$, $\underline{b} \in V_2 \underset{\text{offen}}{\subset} U_2$ und $g : V_1 \to V_2$ stetig differenzierbar mit

$$Dg(\underline{a}) = -\left(\frac{\partial F}{\partial \underline{y}}\begin{pmatrix}\underline{a}\\ \underline{b}\end{pmatrix}\right)^{-1}\frac{\partial F}{\partial \underline{x}}\begin{pmatrix}\underline{a}\\ \underline{b}\end{pmatrix}$$

und $N_F(\underline{c}) \cap (V_1 \times V_2) = \left\{\binom{\underline{x}}{g(\underline{x})} \,\middle|\, \underline{x} \in V_1\right\}$, wo $N_F(\underline{c}) = \left\{\binom{\underline{x}}{\underline{y}} \in U_1 \times U_2 \,\middle|\, F\binom{\underline{x}}{\underline{y}} = \underline{c}\right\}$. Insbesondere gilt $F\binom{\underline{x}}{g(\underline{x})} = \underline{c}$ für $\underline{x} \in V_1$ und $\underline{b} = g(\underline{a})$.

Beweis: OhneEinschränkungen: $\binom{\underline{a}}{\underline{b}} = \binom{0}{0} \in \mathbb{R}^{k+m}$. Definiere $G : U_1 \times U_2 \to \mathbb{R}^m$ durch

$$G\begin{pmatrix}\underline{x}\\ \underline{y}\end{pmatrix} := \underline{y} - \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{y}}\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\right)^{-1}\left(F\begin{pmatrix}\underline{x}\\ \underline{y}\end{pmatrix} - \underline{c}\right)$$

verschwindet, wenn hinterer Vektor 0

dann ist G stetig differenzierbar und

$$\frac{\partial G}{\partial \underline{y}}\begin{pmatrix}\underline{x}\\ \underline{y}\end{pmatrix} = \underset{\text{Einheitsmatrix}}{1_m} - \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{y}}\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\right)^{-1}\frac{\partial F}{\partial \underline{y}}\begin{pmatrix}\underline{x}\\ \underline{y}\end{pmatrix}$$

also

$$\frac{\partial G}{\partial \underline{y}}\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} = 1_m - \underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial \underline{y}}\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\right)^{-1}\frac{\partial F}{\partial \underline{y}}\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}}_{=1_m} = 0$$

$\frac{\partial G}{\partial \underline{y}}$ ist stetig, daher existieren $0 \in W_1 \underset{\text{offen}}{\subset} U_1$, $0 \in W_2 \underset{\text{offen}}{\subset} U_2$, sodass für $\binom{\underline{x}}{\underline{y}} \in W_1 \times W_2$ gilt

$$\left\|\frac{\partial G}{\partial \underline{y}}\begin{pmatrix}\underline{x}\\ \underline{y}\end{pmatrix}\right\| \leqslant \frac{1}{2}$$

$0 \in W_2 \underset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}^m \Rightarrow \exists r > 0 : V_2 := B(0,r) \subset W_2 \subset \mathbb{R}^m$. Wegen $G\binom{0}{0} = 0$ existiert $0 \in V_1 \underset{\text{offen}}{\subset} W_1$ mit

$$\alpha := \sup\left\{\left\|G\begin{pmatrix}\underline{x}\\ 0\end{pmatrix}\right\|_2 \,\middle|\, \underline{x} \in V_1\right\} < \frac{r}{2}$$

Wir definieren induktiv stetige Abbildungen $g_j : V_1 \to V_2 \quad, n \in \mathbb{N}$ mit

(i) $g_0(\underline{x}) = 0$, $\underline{x} \in V_1$

(ii) $\sup\{\|g_{j+1}(\underline{x}) = g_j(\underline{x})\|_2 \,|\, \underline{x} \in V_1\} \leqslant 2^{-j} \cdot \alpha \quad j \in \mathbb{N}$

(iii) $g_{j+1}(\underline{x}) = G\binom{\underline{x}}{g_j(\underline{x})}$, $\underline{x} \in V_1$

I.A.: $g_0 \equiv 0$ gegeben durch (i)

I.S.: Seien $g_0,\dots,g_l : V_1 \to V_2$ stetig bereits definiert, sodass (ii) und (iii) für $j \in \{0,\dots,l-1\}$ gelten. Für $\underline{x} \in V_1$ haben wir

$$\begin{aligned}\|g_l(\underline{x})\|_2 = \left\| \sum_{j=0}^{l-1} g_{j+1}(\underline{x}) - g_j(\underline{x}) \right\| &\leqslant \sum_{j=0}^{l-1} \|g_{j+1}(\underline{x}) - g_j(\underline{x})\| \\ &\leqslant \sum_{j=0}^{l-1} 2^{-j}\alpha \\ &\leqslant 2\alpha \\ &< r\end{aligned}$$

$\Rightarrow g_l(\underline{x}) \in V_2$. Also ist $g_l(V_1) \subset V_2$ und wir können $g_{l+1} : V_1 \to \mathbb{R}^m$ durch (iii) definieren. Müssen noch zeigen:

- $g_{l+1}(V_1) \subset V_2$
- (ii) mit l anstelle von j
- g_{l+1} ist stetig

Nach Satz 7.11(Mittelwertsatz) gilt für $\underline{x} \in V_1$, $\underline{y}', \underline{y}'' \in V_2$

$$\left\| G\begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y}' \end{pmatrix} - G\begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y}'' \end{pmatrix} \right\|_2 \leqslant \sup_{\underline{y} \in V_2} \left\| \frac{\partial G}{\partial \underline{y}} \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{pmatrix} \right\| \cdot \|\underline{y}' - \underline{y}''\|_2$$

also

$$\begin{aligned}\|g_{l+1}(\underline{x}) - g_l(\underline{x})\|_2 \overset{\text{(iii)}}{=} \left\| G\begin{pmatrix} \underline{x} \\ g_l(\underline{x}) \end{pmatrix} - G\begin{pmatrix} \underline{x} \\ g_{l-1}(\underline{x}) \end{pmatrix} \right\|_2 &\overset{(\star\star\star),(\star\star)}{\leqslant} \frac{1}{2} \cdot \|g_l(\underline{x}) - g_{l-1}(\underline{x})\|_2 \\ &\overset{\text{(ii)}}{\leqslant} \frac{1}{2} 2^{-(l-1)}\alpha = 2^{-l}\alpha\end{aligned}$$

und es gilt (ii) mit $j = l$.

Weiter gilt für $\underline{x} \in V_1$

$$\|g_{l+1}(\underline{x})\|_2 \leqslant \sum_{j=0}^{l} \|g_{j+1}(\underline{x}) - g_j(\underline{x})\|_2 \overset{\text{(ii)}}{\leqslant} \sum_{j=0}^{l} 2^{-j} \cdot \alpha = 2\alpha < r$$

also $g_{l+1}(V_1) \subset V_2$.

g_{l+1} ist stetig wegen (iii) und Stetigkeit von g_l und G. Die Induktion liefert $g_j, j \in \mathbb{N}$ wie gewünscht.

Hier ist die Induktion beendet

Nach Satz 1.5 konvergiert $\sum_{j=0}^{\infty} g_{j+1} - g_j$ absolut und gleichmäßig gegen eine Abbildung $g : V_1 \to \mathbb{R}^m$. (Wende 1.5 auf jede Koordinaten einzeln an). Nach Satz 1.4 ist g stetig (in jeder Koordinate gleichmäßiger Limes stetiger Funktionen). Es gilt für $\underline{x} \in V_1$

$$\|g(\underline{x})\|_2 \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} \|g_{j+1}(\underline{x}) - g_j(\underline{x})\|_2 \overset{\text{(ii)}}{\leqslant} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j}\alpha = 2\alpha < r$$

$\Rightarrow g(V_1) \subset V_2$.

Wegen (iii) und Stetigkeit von g, g_j, G gilt für $\underline{x} \in V_1$ gilt:

$$g(\underline{x}) \lim_{j\to\infty} g_{j+1}(\underline{x}) = \lim_{j\to\infty} G\begin{pmatrix} \underline{x} \\ g_j(\underline{x}) \end{pmatrix} = G\begin{pmatrix} \underline{x} \\ \lim_{j\to\infty} g(\underline{x}) \end{pmatrix} = G\begin{pmatrix} \underline{x} \\ g(\underline{x}) \end{pmatrix}$$

und wegen $(\star)$ gilt $F\binom{\underline{x}}{g(\underline{x})} = \underline{c}$, also

$$\left\{ \begin{pmatrix} \underline{x} \\ g(\underline{x}) \end{pmatrix} \middle| \underline{x} V_1 \right\} \subset N_F(\underline{c}) \cap (V_1 \times V_2)$$

Sei nun $\binom{\underline{x}}{\underline{y}} \in N_F(\underline{c}) \cap (V_1 \times V_2)$. Dann gilt nach $(\star)$ $G\binom{\underline{x}}{\underline{y}} = \underline{y}$ und

$$\left\| \underline{y} - g(\underline{x}) \right\|_2 = \left\| G\begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{pmatrix} - G\begin{pmatrix} \underline{x} \\ g(\underline{x}) \end{pmatrix} \right\|_2 \overset{(\star\star\star),(\star\star)}{\leqslant} \frac{1}{2} \cdot \left\| \underline{y} - g(\underline{x}) \right\|_2$$

$\Rightarrow \left\| \underline{y} - g(\underline{x}) \right\|_2 = 0 \Rightarrow \underline{y} = g(\underline{x})$.
Nach Satz 8.2 $\Rightarrow$ g ist differenzierbar in $\underline{a} \in \mathbb{R}^k$ mit

$$Dg(\underline{a}) = \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{y}} \begin{pmatrix} \underline{a} \\ \underline{b} \end{pmatrix} \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial \underline{x}} \begin{pmatrix} \underline{a} \\ \underline{b} \end{pmatrix}$$

g ist stetig differenzierbar: Verkleinere V_1, V_2 so dass $\frac{\partial F}{\partial \underline{y}} \binom{\tilde{\underline{a}}}{\tilde{\underline{b}}}$ invertierbar ist für $\binom{\tilde{\underline{a}}}{\tilde{\underline{b}}} \in V_1 \times V_2$. Variiere $\tilde{\underline{a}}, \tilde{\underline{b}}$

8.4 Corollar (Satz von der Umkehrabbildung) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Sei $\underline{b} \in U$, sodass $Df(\underline{b})$ invertierbar ist. Dann existiert $\underline{b} \in V \underset{\text{offen}}{\subset} U$ und $f(\underline{b}) \in W \underset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}^n$, sodass $f\big|_V : V \to W$ bijektiv ist und die ***Umkehrabbildung*** $f^{-1} : W \to V$ stetig differenzierbar ist mit

(vgl. Analysis I, Satz 12.6)

$$D(f^{-1})(f(\underline{b})) = \big(Df(\underline{b})\big)^{-1}$$

Beweis: Definiere $F : \mathbb{R}^m \times U \to \mathbb{R}^n$ durch $F\binom{\underline{x}}{\underline{y}} := \underline{x} - f(\underline{y})$. Dann gilt $F\binom{f(\underline{b})}{\underline{b}} = 0$ und F ist stetig differenzierbar mit

$$\frac{\partial F}{\partial \underline{y}} \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{pmatrix} = -Df(\underline{y}) \quad , \underline{y} \in$$

und $-Df(\underline{b}) = \frac{\partial F}{\partial \underline{y}} \binom{f(\underline{b})}{\underline{b}}$ ist invertierbar. Nach Satz 8.3 (mit $\underline{a} = f(\underline{b})$, $\underline{c} = 0$) existieren $f(\underline{b}) \in W \subset \mathbb{R}^n$, $\underline{b} \in V' \underset{\text{offen}}{\subset} U$ und $g : W \to V'$ stetig differenzierbar mit

$$Dg\big(f(\underline{b})\big) = \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{y}} \begin{pmatrix} f(\underline{b}) \\ \underline{b} \end{pmatrix} \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial \underline{x}} \begin{pmatrix} f(\underline{b}) \\ \underline{b} \end{pmatrix} = (-Df(\underline{b}))^{-1} \cdot 1_n = -Df(\underline{b})^{-1}$$

und

$$\left\{ \begin{pmatrix} \underline{x} \\ g(\underline{x}) \end{pmatrix} \middle| \underline{x} \in W \right\} = N_F(0) \cap (W \times V') = \left\{ \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{pmatrix} \in W \times V' \middle| \underline{x} = f(\underline{y}) \right\}$$

Aus „$\subset$“ folgt $\forall \underline{x} \in W : \underline{x} = f\big(g(\underline{x})\big)$. Setze

Urbild

$$V := \underbrace{V' \cap f^{-1}(W)}_{=\{\underline{y} \in V' \,|\, f(\underline{y}) \in W\}} \underset{\text{offen}}{\subset} V' \subset U$$

Dann ist $f(V) \subset W$ und $g(W) \subset V$. Begründung: $\forall \underline{x} \in W : g(\underline{x}) \in V', \underline{x} = f(g(\underline{x})) \Rightarrow g(\underline{x}) \in f^{-1}(W)$. Für $\underline{y} \in V$ gilt $\binom{f(\underline{y})}{\underline{y}} \in W \times V'$, also wegen „$\supset$"

$$\begin{pmatrix} f(\underline{x}) \\ \underline{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\underline{x}) \\ g\big(f(\underline{y})\big) \end{pmatrix}, \quad \text{also } \underline{y} = g\big(f(\underline{y})\big) \Rightarrow f \circ g = \mathrm{id}_W \wedge g \circ f = \mathrm{id}_V \qquad \square$$

8.5 Corollar (Lagrangemultiplikator) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $\underline{d} \in M := \{\underline{x} \in U \mid f(\underline{x}) = 0\}$ mit $\operatorname{grad} f(\underline{d}) \neq 0$. Sei $h : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, sodass $h\big|_M : M \to \mathbb{R}$ in $\underline{d}$ ein lokales Extremum hat. Dann existiert $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\operatorname{grad} h(\underline{d}) = \lambda \cdot \operatorname{grad} f(\underline{d})$$

Abbildung 21: Hier kommt noch ein Bild hin

Beweis: O.E. sei $\frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{d}) \neq 0$. Setze $\underline{a} := \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\underline{b} := d_n \in \mathbb{R}^1$. Dann existieren $\underline{a} \in U_1 \underset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}^{n-1}$, $\underline{b} \in U_2 \underset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}$ mit $U_1 \times U_2 \subset U$. Nach Satz 8.3 mit $F := f\big|_{U_1 \times U_2} : U_1 \times U_2 \to \mathbb{R}$ (es ist $\frac{\partial F}{\partial \underline{y}}\binom{\underline{a}}{\underline{b}} = \frac{\partial \mho}{\partial x_n}(\underline{d}) \neq 0$, also invertierbar) existieren $\underline{a} \in V_1 \underset{\text{offen}}{\subset} U_1$, $\underline{b} \in V_2 \underset{\text{offen}}{\subset} U_2$ und $g : V_1 \to V_2$ stetig differenzierbar mit

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ g(x_1, \dots, x_{n-1}) \end{pmatrix} = 0 \quad \text{für } \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \in V_1, \text{d.h.} \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ g(x_1, \dots, x_{n-1}) \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \in V_1 \right\} \subset M \text{ sowie } \underline{b} = g(\underline{a})$$

Dann gilt für $i \in \{1, \dots, n-1\}$

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x_i}\begin{pmatrix} \underline{a} \\ \underline{b} \end{pmatrix} \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial x_n}\begin{pmatrix} \underline{a} \\ \underline{b} \end{pmatrix} \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}(\underline{a}) \qquad \text{(*) (warum?)}$$

Definiere $H : V_1 \to \mathbb{R}$ durch $H\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} := h\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ g(x_1,\dots,x_{n-1}) \end{pmatrix}$. $h\big|_M$ besitzt in $\underline{d} = \binom{\underline{a}}{b} = \binom{\underline{a}}{g(\underline{a})}$ ein lokales Extremum, also auch H in $\underline{a}$. Für $i \in \{1,\dots,n-1\}$ folgt

$$0 = \frac{\partial H}{\partial x_i}(\underline{a}) = \frac{\partial h}{\partial x_i}\begin{pmatrix} \underline{a} \\ g(\underline{a}) \end{pmatrix} \cdot 1 + \frac{\partial h}{\partial x_i}\begin{pmatrix} \underline{a} \\ g(\underline{a}) \end{pmatrix} \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}(\underline{a})$$

Setze

$$\lambda := \frac{\partial h}{\partial x_n}\begin{pmatrix} \underline{a} \\ g(\underline{a}) \end{pmatrix}\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\begin{pmatrix} \underline{a} \\ g(\underline{a}) \end{pmatrix}\right)^{-1}$$

dann folgt mit (*),(**),(***)

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}\begin{pmatrix} \underline{a} \\ g(\underline{a}) \end{pmatrix} = \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}\begin{pmatrix} \underline{a} \\ g(\underline{a}) \end{pmatrix} \qquad i = 1,\dots,n-1,n$$

□

8.6 Beispiel

(i) Sei $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $\binom{r}{\varphi} \mapsto \binom{r\cos\varphi}{r\sin\varphi}$. Dann ist

$$Df\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r}\binom{r}{\varphi} & \frac{\partial f_1}{\partial \varphi}\binom{r}{\varphi} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r}\binom{r}{\varphi} & \frac{\partial f_2}{\partial \varphi}\binom{r}{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$\det(Df\binom{r}{\varphi}) = r \neq 0$, also ist $Df\binom{r}{\varphi}$ invertierbar und f ist lokal invertierbar. Für $r > 0, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ gilt $f^{-1}\binom{x}{y} = \binom{\sqrt{x^2+y^2}}{\arctan\frac{y}{x}}$

(ii) Sei $A = (a_{ij})_{i,j\in\{1,\dots,n\}} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ symmetrisch. $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$h(\underline{x}) := \langle \underline{x} \,|\, A\underline{x} \rangle = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j$$

$M := S^{n-1} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\underline{x}\|_2 = 1\} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\underline{x}) = 0\}$ wo $f(\underline{x}) = 1 - \langle \underline{x} \,|\, \underline{x} \rangle$. M ist kompakt $\Rightarrow h|_M$ nimmt in $\xi_{\max}$ ihr Maximum an; in $\xi_{\min}$ ihr Minimum. Es ist $\frac{\partial f}{\partial x_l}(\underline{x}) = -2x_l$, also

$$\operatorname{grad} f(\underline{x}) = -2\underline{x} \neq 0 \quad \text{für } \underline{x} \in M$$

also

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial x_l}(\underline{x}) = \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\sum_{i,j}^n a_{ij}x_ix_j\right) &= \sum_{i,j}^n a_{ij}\frac{\partial x_i}{\partial x_l}x_j + \sum_{i,j}^n a_{ij}x_i\frac{\partial x_j}{\partial x_l} = \sum_{j=1}^n a_{lj}\cdot x_j + \sum_{i=1}^n a_{il}\cdot x_i \\ &= 2\cdot\sum_{j=1}^n a_{lj}\cdot x_j = 2(A\underline{x})_l\end{aligned}$$

also $\operatorname{grad} h(\underline{x}) = 2A\underline{x}$. Mit Corollar 8.5 folgt:

$$\exists \lambda_{\substack{\max \\ (\min)}} \in \mathbb{R} : -2\cdot\lambda_{\substack{\max \\ (\min)}} \cdot \underline{\xi}_{\substack{\max \\ (\min)}} = 2A\underline{\xi}_{\substack{\max \\ (\min)}}$$

Es folgt: $\underline{\xi}_{\substack{\max \\ (\min)}}$ ist ein Eigenvektor von A mit Eigenwert $-\lambda_{\substack{\max \\ (\min)}}$
Also besitzt A mindestens einen reellen Eigenwert und A ist diagonalisierbar.

Es gilt

$$-\lambda_{\max} = -\lambda_{\max}\cdot\langle \underline{\xi}_{\max} \,|\, \underline{\xi}_{\max} \rangle = \langle \underline{\xi}_{\max} \,|\, A\cdot\underline{\xi}_{\max} \rangle = h(\underline{\xi}_{\max})$$

9 Parameterabhängige Integrale

9.1 Proposition Seien $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^m$, $f : [a,b] \times U \to \mathbb{R}$ stetig. Sei $(\underline{y}_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset U$ konvergent mit $\overline{y} := \lim_{k\to\infty} \underline{y}_k \in U$. Definiere $F_k, F : [a,b] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$F_k(x) := f\begin{pmatrix} x \\ \underline{y}_k \end{pmatrix} \quad F(x) := f\begin{pmatrix} x \\ \overline{y} \end{pmatrix}$$

Dann gilt $F_k \xrightarrow{k\to\infty} F$ gleichmäßig.

Beweis: Setze $M := \left\{\underline{y}_k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\} \cup \{\overline{y}\}$. Dann ist M kompakt nach 4.3 (i); $[a,b] \times M \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ist beschränkt und abgeschlossen, also auch kompakt. Nach 4.13 ist $f|_{[a,b]\times M} : [a,b] \times M \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $\delta > 0$, sodass für $\binom{x}{y}, \binom{x'}{y'} \in [a,b] \times M$ mit $\left\|\binom{x}{y} - \binom{x'}{y'}\right\|_2 < \delta$ gilt $\left|f\binom{x}{y} - f\binom{x'}{y'}\right| < \varepsilon$. Wegen $\underline{y}_k \to \overline{y}$ existiert ein $K \in \mathbb{N}$ mit $\left\|\overline{y} - \underline{y}_k\right\|_2 < \delta$ falls $k \geqslant K$. Für $x \in [a,b], k \geqslant K$ gilt

$$\left\|\begin{pmatrix} x \\ \underline{y}_k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ \overline{y} \end{pmatrix}\right\|_2 = \left\|\underline{y}_k - \overline{y}\right\|_2 < \delta$$

also

$$|F_k(x) - F(x)| = \left|f\begin{pmatrix} x \\ \underline{y}_k \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} x \\ \overline{y} \end{pmatrix}\right| < \varepsilon$$ □

9.2 Satz Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^m$, $f : [a,b] \times U \to \mathbb{R}$ stetig. Definiere $g : U \to \mathbb{R}$ durch

$$g(\underline{y}) = \int_a^b f\begin{pmatrix} x \\ \underline{y} \end{pmatrix} \mathrm{d}x$$

Dann ist g stetig.

Beweis: Sei $(\underline{y}_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset U$ mit $\underline{y}_k \xrightarrow{k\to\infty} \overline{y} \in U$. Dann ist (mit F_k, F wie in 9.1)

$$g(\underline{y}_k) = \int_a^b f\begin{pmatrix} x \\ \underline{y}_k \end{pmatrix} \mathrm{d}x = \int_a^b F_k(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad g(\overline{y}) = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x$$

Nach 9.1 gilt $F_k \xrightarrow{k\to\infty} F$ gleichmäßig und nach 1.7 gilt

$$\lim_{k\to\infty} g(\underline{y}_k) = \lim_{k\to\infty} \int_a^b F_k(x)\,\mathrm{d}x \overset{1.7}{=} \int_a^b (\lim_{k\to\infty} F_k(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = g(\overline{y})$$

Nach 3.2 (Folgenkriterium) ist g also stetig. □

9.3 Proposition Seien $[a,b], [c,d] \subset \mathbb{R}$, $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ stetig. f sei stetig partiell differenzierbar nach der zweiten Variablen, d.h. $\frac{\partial f}{\partial y}\binom{x}{y}$ existiert und ist stetig in $\binom{x}{y}$ für alle $\binom{x}{y}$. Sei $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset [c,d]$ mit $y_k \to \overline{y} \in [c,d]$ und $y_k \neq \overline{y}$, für $k \in \mathbb{N}$. Definiere $F_k, F : [a,b] \to \mathbb{R}$ durch

$$F_k(x) := \frac{f\binom{x}{y_k} - f\binom{x}{\overline{y}}}{y_k - \overline{y}}, \qquad F(x) := \frac{\partial f}{\partial y}\begin{pmatrix} x \\ \overline{y} \end{pmatrix}$$

Dann gilt $F_k \xrightarrow{k\to\infty} F$ gleichmäßig.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. $\frac{\partial f}{\partial y} : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ ist stetig, also gleichmäßig stetig nach 4.13; daher existiert ein $\delta > 0$, sodass für $y, y' \in [c,d]$ mit $|y - y'| < \delta$ gilt $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\binom{x}{y} - \frac{\partial f}{\partial y}\binom{x}{y'}\right| < \varepsilon$ für $x \in [a,b]$. Nach dem Mittelwertsatz exisitert für $x \in [a,b], k \in \mathbb{N}$ ein $\theta_{k,x}$ zwischen $\overline{y}$ und y_k mit

$$F_k(x) = \frac{f\binom{x}{y_k} - f\binom{x}{\overline{y}}}{y_k - \overline{y}} = \frac{\partial f}{\partial y}\begin{pmatrix} x \\ \theta_{k,x} \end{pmatrix}$$

Wegen $y_k \xrightarrow{k \to \infty} \overline{y}$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $|\overline{y} - y_k| < \delta$ falls $k \geqslant N$. Für $k \geqslant N$ gilt dann $|\overline{y} - \theta_{k,x}| < \delta$ also

$$|F(x) - F_k(x)| = \left|\frac{\partial f}{\partial y}\begin{pmatrix} x \\ \overline{y} \end{pmatrix} - \frac{\partial f}{\partial y}\begin{pmatrix} x \\ \theta_{k,x} \end{pmatrix}\right| < \varepsilon$$

für alle $x \in [a,b]$. □

9.4 Satz Seien $[a,b], [c,d] \subset \mathbb{R}$, $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ stetig. f sei stetig partiell differenzierbar nach der zweiten Variablen. Definiere $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ durch $g(y) := \int_a^b f\binom{x}{y}\,\mathrm{d}x$. Dann ist g stetig differenzierbar mit

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}y}(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\mathrm{d}x$$

Beweis: Sei $\overline{y} \in [c,d], (y_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset [c,d]$ mit $y_k \xrightarrow{k\to\infty} \overline{y}, y_k \neq \overline{y} \forall k \in \mathbb{N}$. Definiere $F_k, F : [a,b] \to \mathbb{R}$ wie in Proposition 9.3, sodass $F_k \xrightarrow{k\to\infty} F$ gleichmäßig. Dann gilt

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} \frac{g(y_k) - g(\overline{x})}{y_k - \overline{y}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\int_a^b \left(f\binom{x}{y_k} - f\binom{x}{\overline{y}}\right)\mathrm{d}x}{y_k - \overline{y}} = \lim_{k\to\infty} \int_a^b F_k(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \overline{y}}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

□

9.5 Satz von Fubini Seien $[a,b], [c,d] \subset \mathbb{R}$, $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:

$$\int_c^d \left(\int_a^b f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

(Die Funktion $y \mapsto \int_a^b f\binom{x}{y}\,\mathrm{d}x$ und $x \mapsto \int_c^d f\binom{x}{y}\,\mathrm{d}y$ sind stetig nach 9.2, daher existieren beide Seiten)

Beweis: Definiere $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ durch

$$g(y) := \int_a^b \underbrace{\left(\int_c^y f\begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix}\mathrm{d}s\right)}_{\substack{\text{stetig bezüglich } x \text{ nach 9.2} \\ \text{stetig diffbar. bzgl. } y}}\mathrm{d}x$$

Nach Satz 9.4 gilt

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}y}(y) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial y}\left(\int_c^y f\begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix}\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}x = \int_a^b f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\mathrm{d}x$$

Wir erhalten:

$$\int_c^d \left(\int_a^b f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_c^d \frac{\partial g}{\partial y}(y)\,\mathrm{d}y = g(d) - \underbrace{g(c)}_{=0} = g(d) = \int_a^b \left(\int_c^d f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

□

10 Anwendungen

10.1 Physikalische (mechanische) Systeme Zu einem physikalischen (mechanischen) System assoziiert man eine sogenannte ***Lagrangefunktion***

$$L : [a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \begin{pmatrix} t \\ q \\ p \end{pmatrix} \mapsto L \begin{pmatrix} t \\ q \\ p \end{pmatrix}$$

Dabei ist zB. t die Zeit, q der Ort (eines Teilchens) und p seine Geschwindigkeit (bzw. sein Impuls). Für $q(a), q(b)$ sind oft Randbedingungen vorgegeben. Das ***Prinzip der kleinsten Wirkung*** besagt, dass für einen physikalischen Zustand die Größe

$$S(q) := \int_a^b L \begin{pmatrix} t \\ q(t) \\ \dot{q}(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}t$$

minimal wird.

Problem:: Finde Bedingungen an q dafür, dass $S(q)$ minimal ist.

10.2 Satz (Euler-Lagrange-Gleichungen) Sei $L : [a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $q : [a,b] \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar mit $q(a) = \alpha, q(b) = \beta$ und $S(q) = \inf\big\{ S(g) \,\big|\, g \in C^2([a,b]), g(a) = \alpha, g(b) = \beta \big\}$. Dann gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial p} \begin{pmatrix} t \\ q(t) \\ \dot{q}(t) \end{pmatrix} \right) = \frac{\partial L}{\partial q} \begin{pmatrix} t \\ q(t) \\ \dot{q}(t) \end{pmatrix}$$

Beweis: Für jedes $h \in C^2([a,b])$ mit $h(a) = h(b) = 0 \;\; (\star)$ gilt für $r \in \mathbb{R}$

$$S(q) \leqslant S(q + r \cdot h) = \int_a^b L \begin{pmatrix} t \\ q(t) + r \cdot h(t) \\ \dot{q}(t) + r \cdot \dot{h}(t) \end{pmatrix}$$

Definiere $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $F(r) := S(q + r \cdot h)$. F hat in 0 ein Minimum, also $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r}(0) = 0 \;\; (\star\star)$ Nach Satz 9.4 gilt

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r}(r) &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial r} \left(L \begin{pmatrix} t \\ q(t) + r \cdot h(t) \\ \dot{q}(t) + r \cdot \dot{h}(t) \end{pmatrix} \right) \mathrm{d}t \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial q} \begin{pmatrix} t \\ q(t) + r \cdot h(t) \\ \dot{q}(t) + r \cdot \dot{h}(t) \end{pmatrix} \cdot h(t) + \frac{\partial L}{\partial p} \begin{pmatrix} t \\ q(t) + r \cdot h(t) \\ \dot{q}(t) + r \cdot \dot{h}(t) \end{pmatrix} \cdot \dot{h}(t) \right) \mathrm{d}t \end{aligned}$$

Partielle Integration liefert:

$$\int_a^b \frac{\partial L}{\partial p} \begin{pmatrix} t \\ q(t) + r \cdot h(t) \\ \dot{q}(t) + r \cdot \dot{h}(t) \end{pmatrix} \cdot \dot{h}(t) \, \mathrm{d}t = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial p}(\ldots) h(t) \Big|_a^b}_{=0 \text{ nach } (\star)} - \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial p}(\ldots) \right) h(t) \mathrm{d}t$$

Dann gilt

$$0 \overset{(\star\star)}{=} \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r}(0) = \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial q} \begin{pmatrix} t \\ q(t) \\ \dot{q}(t) \end{pmatrix} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial p} \begin{pmatrix} t \\ q(t) \\ \dot{q}(t) \end{pmatrix} \right) \right) h(t)\,\mathrm{d}t$$

da $h \in C^2([a,b])$ mit $(\star)$ beliebig folgt:

$$\frac{\partial L}{\partial q} \begin{pmatrix} t \\ q(t) \\ \dot{q}(t) \end{pmatrix} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial p} \begin{pmatrix} t \\ q(t) \\ \dot{q}(t) \end{pmatrix} \right) = 0$$

Dabei bemutzt: $f \in C[a,b]$ mit $\int_a^b f(t)h(t)\,\mathrm{d}t = 0$ für jedes $h \in C^2([a,b])$ mit $h(a) = h(b) = 0 \Rightarrow f(t) = 0$ für alle $t \in [a,b]$ □

Abbildung 22: hier kommt ein Bild von einem ebenen Pendel hin …

10.3 Ebenes Pendel Potentielle Energie: $E_{pot} = m \cdot g \cdot z(t) = m \cdot g \cdot l \cdot (1 - \cos\varphi(t))$
Kinetische Energie: $E_{kin} = \frac{m}{2} \cdot \left(\dot{z}(t)^2 + \dot{x}(t)^2\right) = \frac{m}{2} l^2 \cdot \dot{\varphi}(t)^2$

m Masse, g Erdbeschleunigung

$$L \begin{pmatrix} t \\ \varphi(t) \\ \dot{\varphi}(t) \end{pmatrix} = E_{kin} - E_{pot} = \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}(t)^2 + m \cdot g \cdot l \cos\varphi(t) - m \cdot g \cdot l$$

Ist die Lagrangefunktion und

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial p} \right) \begin{pmatrix} t \\ \varphi(t) \\ \dot{\varphi}(t) \end{pmatrix} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(m \cdot l^2 \dot{\varphi}(t) \right) = m \cdot l^2 \cdot \ddot{\varphi}(t)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} \begin{pmatrix} t \\ \varphi(t) \\ \dot{\varphi}(t) \end{pmatrix} = -m \cdot g \cdot l \cdot \sin\varphi(t)$$

$\Rightarrow$ Für eine Pendelbewegung gilt

$$\begin{aligned} m \cdot l^2 \ddot{\varphi}(t) &= -mgl \sin\varphi(t) \\ \Leftrightarrow \qquad \ddot{\varphi}(t) &= -\frac{g}{l} \sin\varphi(t) \end{aligned}$$

Für ein kleines φ ist $\sin\varphi(t) \approx \varphi(t)$ (Taylor). Wir erhalten:

$$\ddot{\varphi}(t) = -\frac{g}{l} \varphi(t)$$

Lösung: $\varphi(t) = \lambda \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t\right) + \mu \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t\right)$. Eindeutigkeit? $\rightsquigarrow$ Analysis III

10.4 Kettenlinie Gesucht: Kurve des Seils mit Länge l in der Gleichgewichtslage: $E_{kin} = 0$ (Seil beliebig biegsam mit homogener Massengewichtung) (Masse/Länge)
$\mathrm{d}m = \rho \cdot \mathrm{d}s$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} &= \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \right)^2} \mathrm{d}x \\ &= \sqrt{1 + y'(x)^2} \mathrm{d}x \end{aligned}$$

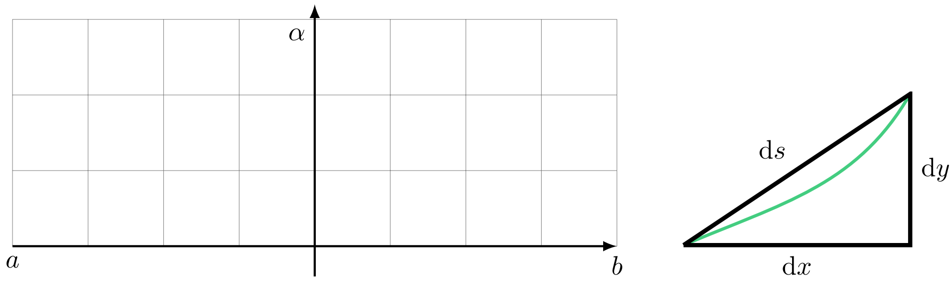


Abbildung 23: hier kommt eine Zeichnung der Kettenlinie hin, irgendwann …

potentielle Energie von $\mathrm{d}m$ ist $y \cdot g \cdot \mathrm{d}m = \rho \cdot g \cdot y(x)$. Länge:

$$l = \int_a^b \underbrace{\sqrt{1 + y'(x)^2}}_{=:H\begin{pmatrix} x \\ y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix}} \mathrm{d}x$$

Wir müssen

$$S(y) = \int_a^b L\begin{pmatrix} x \\ y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} \mathrm{d}x = \rho \cdot g \cdot \int_a^b y(x) \cdot \sqrt{1 + y'(x)^2}\,\mathrm{d}x$$

mit $y(a) = y(b) = \alpha$ minimal unter den Nebenbedingungen $l = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2}\,\mathrm{d}x$. Sei nun $\overline{y} \in C^2([a,b])$ eine Lösung. Seien $h_1, h_2 \in C^2([a,b])$ mit $h_i(a) = h_i(b) = 0$. Definiere $\overline{S}, \overline{K} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$\overline{S}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} := S(\overline{y} + r_1 h_1 + r_2 h_2)$$
$$\overline{K}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} := K(\overline{y} + r_1 h_1 + r_2 h_2)$$

$K(y) = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2}\,\mathrm{d}x = \int_a^b H\begin{pmatrix} x \\ y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} \mathrm{d}x$. Dann hat $\overline{S}$ ein lokales Minimum in $\binom{0}{0}$ unter den Nebenbedingungen $\overline{K} - l = 0$. Nach Corollar 8.5 exisiter $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$0 = \operatorname{grad} \overline{S}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \lambda \operatorname{grad} \overline{K}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \operatorname{grad}\big(\overline{S} - \lambda \overline{K}\big)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Man kann zeigen: Falls h_1, h_2 linear unabhängig sind, ist dieses Minimum isoliert und gegeben als lokales isoliertes Minimum von $\overline{S} - \lambda \cdot \overline{K}$ (jetzt ohne Nebenbedingung). Mit der modifizierten Lagrangefunktion

$$\tilde{L}\begin{pmatrix} x \\ y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} = L\begin{pmatrix} x \\ y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} - \lambda H\begin{pmatrix} x \\ y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix}$$

minimiere jetzt $\tilde{S}(y) = \int_a^b \tilde{L} \begin{pmatrix} x \\ y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} \mathrm{d}x = (y(x) - \lambda) \cdot \sqrt{1 + y'(x)^2}$. Satz 10.2 liefert die Bedingung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial p} \right) \begin{pmatrix} x \\ y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q} \begin{pmatrix} x \\ y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix}$$

Trick:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\tilde{L} \begin{pmatrix} x \\ y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial p} \begin{pmatrix} x \\ y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} \cdot y'(x) \right) \overset{\text{kleine Rechnung}}{\underset{\cdots}{=}} \underbrace{\left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial q} \begin{pmatrix} x \\ y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial p} \right) \begin{pmatrix} x \\ y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} \right)}_{\text{mit } (\star) \;\; =0} \cdot y'(x)$$

$\Rightarrow \tilde{L} \begin{pmatrix} x \\ y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial p} \begin{pmatrix} x \\ y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} \cdot y'(x) \equiv C$ ist konstant. Nach einer kleinen Rechnung erhält man

$$= \frac{y(x) - \lambda}{\sqrt{1 + y'(x)^2}}$$

$\Rightarrow \boxed{y'(x)^2 = \frac{1}{c^2}(y(x) - \lambda)^2 - 1}$ Eine Lösung ist $y(x) = \lambda + c \cdot \cosh\left(\frac{x}{c}\right)$ wo $\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$

Index

Die Seitenzahlen *sind mit Hyperlinks zu den entsprechenden Seiten versehen, also anklickbar*

Abbildungsverzeichnis