



WESTFÄLISCHE  
WILHELMS-UNIVERSITÄT  
MÜNSTER



FACHBEREICH 10  
MATHEMATIK UND  
INFORMATIK

# **Skript Topologie II.**

**Mitschrift der Vorlesung „Topologie II.“ von Prof. Dr. Arthur Bartels**

Jannes Bantje

19. Januar 2016

## Aktuelle Version verfügbar bei



<https://github.com/JaMeZ-B/latex-wwu>

GitHub ist eine Internetplattform, auf der viele OpenSource-Projekte gehostet werden. Diese Plattform nutzen wir zur Zusammenarbeit, also findet man hier neben den PDFs auch die  $\text{\TeX}$ -Dateien. Außerdem ist über diese Plattform auch direktes Mitarbeiten möglich, siehe nächste Seite.



<https://uni-muenster.sciebo.de/public.php?service=files&t=965ae79080a473eb5b6d927d7d8b0462>

Sciebo ist ein Dropbox-Ersatz der Hochschulen in NRW, der von der Uni Münster in leitender Position auf Basis der OpenSource-Software Owncloud aufgebaut wurde. Wenn man auf den Link klickt, kann man die Freigabe zum eigenen Speicher hinzufügen und hat dann immer automatisch die aktuellste Version.



B6WH2DISQ5QVYIRYIEZSF4ZR2IDVKPN3I

BTSync ist ein peer-to-peer Dateisynchronisations-Tool. Dabei werden die Dateien nur auf den Computern der Teilnehmer an einer Freigabe gespeichert. Ein RasPi ist permanent online, sodass stets die aktuellste Version verfügbar ist. Clients gibt es für jedes Betriebssystem. Zugang ist über das obige „Secret“ bzw. den QR-Code möglich.



## Vorlesungshomepage

<https://wwwmath.uni-muenster.de/reine/u/topos/lehre/WS2015-2016/Topologie2/>

Hier ist ein Link zur offiziellen Vorlesungshomepage.

## Vorwort — Mitarbeit am Skript

Dieses Dokument ist eine Mitschrift aus der Vorlesung „Topologie II., WiSe 2015“, gelesen von Prof. Dr. Arthur Bartels. Der Inhalt entspricht weitestgehend dem Tafelanschrieb. Für die Korrektheit des Inhalts übernehme ich keinerlei Garantie! Für Bemerkungen und Korrekturen – und seien es nur Rechtschreibfehler – bin ich sehr dankbar. Korrekturen lassen sich prinzipiell auf drei Wegen einreichen:

- ▶ Persönliches Ansprechen in der Uni, Mails an [j.bantje@wwu.de](mailto:j.bantje@wwu.de) (gerne auch mit annotierten PDFs) oder Kommentare auf <https://github.com/JaMeZ-B/latex-www>.
- ▶ *Direktes* Mitarbeiten am Skript: Den Quellcode poste ich auf GitHub (siehe oben), also stehen vielfältige Möglichkeiten der Zusammenarbeit zur Verfügung: Zum Beispiel durch Kommentare am Code über die Website und die Kombination Fork + Pull Request. Wer sich verdient macht oder ein Skript zu einer Vorlesung, die ich nicht besuche, beisteuern will, dem gewähre ich gerne auch Schreibzugriff.

Beachten sollte man dabei, dass dazu ein Account bei [github.com](https://github.com) notwendig ist, der allerdings ohne Angabe von persönlichen Daten angelegt werden kann. Wer bei GitHub (bzw. dem zugrunde liegenden Open-Source-Programm „git“) – verständlicherweise – Hilfe beim Einstieg braucht, dem helfe ich gerne weiter. Es gibt aber auch zahlreiche empfehlenswerte Tutorials im Internet.<sup>1</sup>

- ▶ *Indirektes* Mitarbeiten:  $\text{\TeX}$ -Dateien per Mail verschicken.

Dies ist nur dann sinnvoll, wenn man einen ganzen Abschnitt ändern möchte (zB. einen alternativen Beweis geben), da ich die Änderungen dann per Hand einbauen muss! Ich freue mich aber auch über solche Beiträge!

---

<sup>1</sup> zB. <https://try.github.io/levels/1/challenges/1>, ist auf Englisch, aber dafür interaktives LearningByDoing

## Inhaltsverzeichnis

1	Kohomologie	1
2	Die Paarung zwischen Kohomologie und Homologie	5
3	Produkte auf Kohomologie	7
4	Kommutativität des Cup-Produktes	11
5	Azyklische Kettenkomplexe	14
6	Das Cap-Produkt und die Poincaré-Dualitätsabbildung	17
7	Kohomologie mit kompaktem Träger	21
8	Poincaré-Dualität	26
9	Mannigfaltigkeiten mit Rand	29
10	Die Signatur	31
11	Projektive Auflösungen	34
12	Tor und Ext	37
13	Das Tensorprodukt und $\text{Hom}$ als Kettenkomplexe	41
14	Spektralfolgen	44
15	Die Spektralfolge zu einem filtrierten Kettenkomplex	47
16	Die Künnethformeln	50
	Index	A
	Abbildungsverzeichnis	B
	Todo list	B

# 1 Kohomologie

**1.1 Definition.** Sei  $R$  ein Ring. Ein  $R$ -Kokettenkomplex  $(C^*, d^*)$  ist eine Folge von  $R$ -Moduln  $(C^n)_n$  zusammen mit  $R$ -linearen Abbildungen  $d^n: C^n \rightarrow C^{n+1}$ , sodass  $d^{n+1} \circ d^n = 0$  gilt. Der  $n$ -te Kohomologiemodul von  $(C^*, d^*)$  ist definiert als

$$H^n(C^*, d^*) = \frac{\ker d^n: C^n \rightarrow C^{n+1}}{\operatorname{im} d^{n-1}: C^{n-1} \rightarrow C^n}$$

Sei  $(D^*, d^*)$  ein weiterer Kokettenkomplex. Eine **Kokettenabbildung** ist eine Folge von  $R$ -linearen Abbildungen  $f^n: C^n \rightarrow D^n$ , sodass  $d_D^n \circ f^n = f^{n+1} \circ d_C^n$  für alle  $n$  gilt. Ist auch  $g^n: C^n \rightarrow D^n$  eine Kokettenabbildung, so nennen wir eine  $R$ -lineare Abbildung  $h^n: C^n \rightarrow D^{n-1}$  mit

$$f^n - g^n = h^{n+1} \circ d_C^n + d_D^{n-1} \circ h^n$$

eine **Kokettenhomotopie** zwischen  $f$  und  $g$ . Zu jeder Kokettenabbildung  $f^n: C^n \rightarrow D^n$  gibt es eine **induzierte Abbildung** auf Kohomologie genau wie bei Homologie.

## 1.2 Bemerkung.

- i) Sei  $(C_*, d_*)$  ein  $R$ -Kettenkomplex und  $V$  ein  $R$ -Modul. Dann erhalten wir einen  $R$ -Kokettenkomplex  $(C^*, d^*)$  durch

$$C^n := \operatorname{Hom}_R(C_n, V)$$

und  $d^n: C^n \rightarrow C^{n+1}$  definiert durch  $\alpha \mapsto \alpha \circ d_{n+1}$ . Dieser Kokettenkomplex  $(C^*, d^*)$  heißt der  **$V$ -duale  $R$ -Kokettenkomplex** zu  $(C_*, d_*)$ . Ist  $V = R$ , so nennen wir ihn auch kürzer **dualer Kokettenkomplex**

- ii) Benutzen wir  $\mathbb{Z}$  statt  $\mathbb{N}$  als Indexmenge, so können wir durch  $(C^n, d^n) \rightsquigarrow (C_n := C^{-n}, d_n := d^{-n})$  jeden Kokettenkomplex einem Kettenkomplex zuordnen. Dieser Prozess ist offensichtlich umkehrbar.

**1.3 Beispiel.** Es sei  $(C_*, d_*) = (\mathbb{Z} \xleftarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xleftarrow{\cdot 2} 0 \xleftarrow{\cdot 2} \dots)$  ein Kettenkomplex. Dann ist

$$H_k(C_*, d_*) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & \text{falls } k = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Der  $\mathbb{Z}$ -duale Kokettenkomplex hat dann folgende Gestalt

$$\begin{array}{ccccccc} \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{d^0} & \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & & & \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{\cdot 2} & \mathbb{Z} & & & & \end{array}$$

Damit ist die Kohomologie  $H^k(C^*, d^*) = 0$  für  $k \neq 1$  und isomorph zu  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  für  $k = 1$ . Es gilt also nicht immer  $H^*(\operatorname{Hom}(C_*; R), d^*) = \operatorname{Hom}(H_*(C_*, d_*), R)$ .

**1.4 Definition.** Sei  $(X, A)$  ein Paar von topologischen Räumen und  $V$  eine abelsche Gruppe. Der **singuläre Kokettenkomplex** von  $(X, A)$  mit Koeffizienten in  $V$  ist definiert durch

$$C_{\text{sing}}^*(X, A; V) := \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_{\text{sing}}^*(X, A), V)$$

und  $d_{\text{sing}}^*(\alpha) := -(-1)^{|\alpha|} \cdot \alpha \circ d_{*+1}^{\text{sing}}$ . Dabei ist  $|\alpha| = n$  für  $\alpha \in C_{\text{sing}}^n(X, A; \mathbb{R})$ . Die Kohomologie von  $(C_{\text{sing}}^*(X, A; V), d_{\text{sing}}^*)$  heißt die **singuläre Kohomologie** von  $(X, A)$  mit Koeffizienten in  $R$ .

**1.5 Bemerkung.** Sei  $R$  ein kommutativer Ring und  $V$  ein  $R$ -Modul. Dann ist der singuläre Kokettenkomplex  $(C_{\text{sing}}^*(X, A; V), d_{\text{sing}}^*)$  isomorph zum  $V$ -dualen  $R$ -Kokettenkomplex des  $R$ -Kettenkomplexes  $(C_*^{\text{sing}}(X, A; R), d_*^{\text{sing}})$ , da  $C_*^{\text{sing}}(X, A; R) \cong R \otimes C_*^{\text{sing}}(X, A)$  und  $\text{hom}_{\mathbb{Z}}(W, V) \cong \text{hom}_R(R \otimes W, V)$  für jeden  $\mathbb{Z}$ -Modul  $W$ .

**1.6 Definition.** Sei  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  eine stetige Abbildung von Paaren. Dann erhalten wir eine Kokettenabbildung  $f^*: C_{\text{sing}}^*(Y, B; V) \rightarrow C_{\text{sing}}^*(X, A; V)$  durch

$$f^*(\alpha) := \alpha \circ f_*$$

**1.7 Bemerkung.** Ist  $g: (Y, B) \rightarrow (Z, C)$  eine weitere Abbildung von Paaren, so gilt  $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$ .

**1.8 Definition.** Seien  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{D}$  Kategorien. Ein *kontravarianter Funktor*  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ordnet jedem Objekt  $C$  in  $\mathcal{C}$  ein Objekt  $D$  in  $\mathcal{D}$  zu und jedem Morphismus  $f: C \rightarrow C'$  einem Morphismus  $F(f): F(C') \rightarrow F(C)$  in  $\mathcal{D}$  zu. Dabei muss gelten:

- i)  $F(\text{id}_C) = \text{id}_{F(C)}$
- ii) Für  $C \xrightarrow{f} C' \xrightarrow{f'} C''$  gilt  $F(f' \circ f) = F(f) \circ F(f')$ .

Kürzer ist ein *kontravarianter* Funktor  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  das selbe wie ein *kovarianter* Funktor  $\mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}$ .

**1.9 Beispiel.** Es gibt zahlreiche Beispiele für kontravariante Funktoren:

- i)  $\text{id}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^{\text{op}}$  ist kontravariant.
- ii) Sei  $V$  eine abelsche Gruppe. Wir erhalten einen kontravarianten Funktor

$$\text{Hom}(-, V): \mathbb{Z}\text{-MOD} \rightarrow \mathbb{Z}\text{-MOD}$$

- iii) Sei  $V$  eine abelsche Gruppe. Dann sind

$$\begin{aligned} C_{\text{sing}}^*(-, V): \text{Top}^2 &\rightarrow \mathbb{Z}\text{-KOKETTENKOMPLEXE} \\ H_{\text{sing}}^*(C_{\text{sing}}^*(-, V), d_{\text{sing}}^*): \text{Top}^2 &\rightarrow \text{GR-}\mathbb{Z}\text{-MOD} \end{aligned}$$

kontravariante Funktoren.

**1.10 Satz.** Singuläre Kohomologie hat die folgenden Eigenschaften:

- i) **Dimensionsaxiom:** Es gilt  $H_{\text{sing}}^n(\{\text{pt}\}; V) = V$ , falls  $n = 0$  ist und sonst  $0$ .
- ii) **Paarfolge:** Es gibt eine natürliche Transformation  $\partial^*: H^*(A; V) \rightarrow H^{*+1}(X, A; V)$  sodass für jedes Paar

$$0 \longrightarrow H^0(X, A; V) \longrightarrow H^0(X; V) \longrightarrow H^0(A; V) \xrightarrow{\partial} H^1(X, A; V) \longrightarrow \dots$$

eine lange exakte Folge ist.  $\partial$  bezeichnet man auch als *verbindende Abbildung*.

- iii) **Ausschneidung:** Sei  $L \subseteq A$  mit  $\bar{L} \subseteq \mathring{A}$ . Dann induziert die Inklusion  $i: (X \setminus L, A \setminus L) \hookrightarrow (X, A)$  einen Isomorphismus  $i^*: H^*(X, A; V) \rightarrow H^*(X \setminus L, A \setminus L; V)$ .
- iv) **Homotopieinvarianz:** Sind  $f, g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  homotope Abbildungen von Paaren, so gilt  $f^* = g^*$  für die induzierten Abbildungen in singulärer Kohomologie.

**BEWEIS:** Für singuläre Homologie haben wir die entsprechenden Aussagen schon bewiesen. In allen vier Fällen folgt die Aussage für Kohomologie aus schon bewiesenen Aussagen über den singulären Kettenkomplex.

Wir führen dies an dieser Stelle nur für iv) aus, die anderen Punkte wurden teilweise in den Übungen bewiesen. Seien  $f, g: X \rightarrow Y$  homotop. Dann gibt es eine Kettenhomotopie  $H: C_*^{\text{sing}}(X) \rightarrow C_{*+1}^{\text{sing}}(Y)$  zwischen den auf dem singulären Kettenkomplex induzierten Abbildungen  $f_*$  und  $g_*$ . Es gilt also

$$d_{n+1} \circ H + H \circ d_n = f_* - g_*$$

$H$  induziert  $H^\#: C_{\text{sing}}^*(Y; V) \rightarrow C_{\text{sing}}^{*-1}(X; V)$  mit  $H^\#(\alpha) := (-1)^{|\alpha|} \cdot \alpha \circ H$ . Es gilt nun für  $\alpha \in C_{\text{sing}}^n(Y; V)$

$$\begin{aligned} (d^{n-1} \circ H^\# + H^\# \circ d^n)(\alpha) &= d^{n-1} \circ H^\#(\alpha) + H^\# \circ d^n(\alpha) \\ &= d^{n-1}((-1)^n \cdot (\alpha \circ H)) - (-1)^n \cdot H^\#(\alpha \circ d_{n+1}) \\ &= (-1)^n \cdot ((-1)^n \alpha \circ H \circ d_n - (-1)^{n+1} \alpha \circ d_{n+1} \circ H) \\ &= \alpha \circ H \circ d_n + \alpha \circ d_{n+1} \circ H \\ &= \alpha(f_* - g_*) = f^*(\alpha) - g^*(\alpha) \end{aligned}$$

Damit ist  $f^* - g^* = 0$  in Kohomologie, da die linke Seite für  $\alpha \in \ker d^n$  im Bild von  $d^{n-1}$  liegt.  $\square$

**1.11 Bemerkung.** Sei  $(X, A)$  ein Paar von topologischen Räumen. Der Verbindungshomomorphismus  $\partial: H^n(A; V) \rightarrow H^{n+1}(X, A; V)$  kann wie folgt beschrieben werden: Sei  $\alpha: C_n(A) \rightarrow V$  ein Kozykel. Setze  $\hat{\alpha}$  durch  $\hat{\alpha}(\sigma) = 0$  für  $\sigma: |\Delta^n| \rightarrow X$ , im  $\sigma \not\subseteq A$  zu  $\hat{\alpha}: C_n(X) \rightarrow V$  fort. Dann ist

$$\partial[\alpha] = [d^n \hat{\alpha}] = [\hat{\alpha} \circ d_{n+1}] \in H^{n+1}(X, A; V)$$

**1.12 Beispiel.** Die Gruppe  $H^0(X; V)$  ist die Gruppe aller Abbildungen  $\xi: X \rightarrow V$ , die konstant auf Wegzusammenhangskomponenten sind. Die Gruppe  $H^0(X, A; V)$  besteht aus allen solchen Abbildungen, die zusätzlich auf  $A$  trivial sind.

**1.13 Definition.** Seien  $(V_i)_{i \in I}$   $R$ -Moduln. Mit  $V := \prod_{i \in I} V_i$  bezeichnen wir das **Produkt** der  $V_i$ . Element in  $V$  sind  $I$ -Folgen  $(v_i)_{i \in I}$  mit  $v_i \in V_i$ . Die  $R$ -Modulstruktur ist erklärt durch

$$\begin{aligned} (v_i)_{i \in I} + (w_i)_{i \in I} &:= (v_i + w_i)_{i \in I} \\ r \cdot (v_i)_{i \in I} &:= (r \cdot v_i)_{i \in I} \end{aligned}$$

Für jedes  $i_0 \in I$  erhalten wir eine  $R$ -lineare Abbildung  $\pi_{i_0}: V \rightarrow V_{i_0}$ ,  $(v_i)_{i \in I} \mapsto v_{i_0}$

**1.14 Bemerkung** (UNIVERSELLE EIGENSCHAFT DES PRODUKTES). Seien  $V_i$  für  $i \in I$   $R$ -Moduln. Sei  $W$  ein weiterer  $R$ -Modul. Dann gibt es zu jeder Folge  $(f_i: W \rightarrow V_i)_{i \in I}$  von  $R$ -linearen Abbildungen eine eindeutige  $R$ -lineare Abbildung  $f: W \rightarrow \prod_{i \in I} V_i$  mit  $f_i = \pi_i \circ f$ . Diese ist gegeben durch  $f(w) := (f_i(w))_{i \in I}$ .

**1.15 Bemerkung.** Ist  $I$  endlich, so gilt  $\bigoplus_{i \in I} V_i = \prod_{i \in I} V_i$ .

**1.16 Bemerkung.** Es seien  $V_i$  für  $i \in I$   $R$ -Moduln und  $W$  ein weiterer  $R$ -Modul. Seien  $j_{i_0}: V_{i_0} \rightarrow \bigoplus_{i \in I} V_i$  die Inklusionen  $v_{i_0} \mapsto (v_i)_{i \in I}$  mit  $v_i = v_{i_0}$  für  $i = i_0$  und 0 sonst. Dann erhalten wir einen Isomorphismus

$$\begin{aligned} \text{Hom}_R\left(\bigoplus_i V_i, W\right) &\xrightarrow{\cong} \prod_{i \in I} \text{Hom}_R(V_i, W) \\ f &\longmapsto (f \circ j_i)_{i \in I} \end{aligned}$$

**1.17 Satz.** Sei  $X = \coprod_{i \in I} X_i$  die Summe von topologischen Räumen  $X_i$ . Dann induzieren die Inklusionen  $j_i: X_i \rightarrow X$  einen Isomorphismus

$$\begin{aligned} H^*(X, V) &\xrightarrow{\cong} \prod_{i \in I} H^*(X_i, V) \\ \xi &\longmapsto ((j_i)^*(\xi))_{i \in I} \end{aligned}$$

**BEWEIS:** Die  $(j_i)_{i \in I}$  induzieren einen Isomorphismus von Kettenkomplexen  $\varphi: \bigoplus_{i \in I} C_*(X_i) \rightarrow C_*(X)$  mittels  $(a_i)_{i \in I} \mapsto \sum_{i \in I} (j_i)_*(a_i)$ . Wegen

$$\text{Hom}\left(\bigoplus_{i \in I} C_*(X_i), V\right) \cong \prod_{i \in I} \text{Hom}(C_*(X_i), V)$$

erhalten wir einen Isomorphismus von Kokettenkomplexen

$$\begin{aligned} C^*(X; V) &\xrightarrow{\cong} \prod_{i \in I} C^*(X_i; V) \\ \alpha &\longmapsto (j_i^*(\alpha))_{i \in I} \end{aligned}$$

Dieser induziert den behaupteten Isomorphismus in Kohomologie. □

**1.18 Definition.** Die reduzierte Kohomologie von  $X$ ,  $\tilde{H}^*(X; V)$  ist definiert als der Kokern von  $p^*: H^*(\{\text{pt}\}; V) \rightarrow H^*(X; V)$ , also als der Quotient  $H^*(X; V)/\text{im } p^*$ .

**1.19 Bemerkung.** Für reduzierte Kohomologie gilt analog zu reduzierter Homologie

$$H^n(X; V) \cong \begin{cases} \tilde{H}^n(X; V), & \text{falls } n \neq 0 \\ \tilde{H}^0(X; V) \oplus V, & \text{falls } n = 0 \end{cases}$$

**1.20 Beispiel.** Viele Berechnungen für Homologiegruppen lassen sich problemlos auf Kohomologie übertragen. Zum Beispiel ist die reduzierte Kohomologie der Sphäre gegeben durch

$$\tilde{H}^l(S^n; V) \cong H^l(D^n, S^{n-1}; V) \cong \begin{cases} V, & \text{falls } l = n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$



## 2 Die Paarung zwischen Kohomologie und Homologie

**2.1 Definition.** Sei  $V$  ein  $\mathbb{Z}$ -Modul,  $(X, A)$  ein Paar von topologischen Räumen. Wir definieren die *Paarung* zwischen Kohomologie und Homologie

$$H^n(X, A; V) \times H_n(X, A) \longrightarrow V, \quad (\xi, x) \longmapsto \xi(x)$$

wie folgt: Wähle  $\alpha \in C_{\text{sing}}^n(X, A; V)$  mit  $[\alpha] = \xi$  und  $a \in C_n^{\text{sing}}(X, A)$  mit  $[a] = x$ . Dann setze  $\xi(x) := \alpha(a)$ .

### 2.2 Bemerkung.

- Sei  $\beta \in C_{\text{sing}}^{n-1}(X, A; V)$  und  $b \in C_{n+1}^{\text{sing}}(X, A)$ . Für  $\alpha \in \ker d^n$ ,  $a \in \ker d_n$  folgt

$$(\alpha + d^{n-1}(\beta))(a + d_{n+1}(b)) = \alpha(a) \pm \underbrace{\alpha(d_{n+1}(b))}_{=0} + \underbrace{d^{n-1}(\beta)(a + d_{n+1}(b))}_{=0}$$

Damit folgt, dass die Paarung wohldefiniert ist.

- Für  $r \in \mathbb{Z}$ ,  $x, x' \in H_n(X, A)$ ,  $\xi, \xi' \in H^n(X, A; V)$  gelten folgende Regeln

$$(r \cdot \xi)(x) = r \cdot \xi(x) = \xi(r \cdot x) \quad (\xi + \xi')(x) = \xi(x) + \xi'(x) \quad \xi(x + x') = \xi(x) + \xi(x')$$

- Wir können  $(\xi, x) \mapsto \xi(x)$  auch als interpretieren als Homomorphismus

$$\begin{aligned} f: H^n(X, A; V) &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_n(X, A), V) \\ \xi &\longmapsto (x \mapsto \xi(x)) \end{aligned}$$

**2.3 Satz.** Für die eben definierte Abbildung  $f: H^n(X, A; V) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_n(X, A), V)$  gilt

- (i)  $f$  ist surjektiv
- (ii) Ist  $V$  ein  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum, so ist  $f$  auch injektiv.

Um den Satz beweisen zu können, benötigen wir zunächst zwei technische Aussagen:

**2.4 Lemma.** Untergruppen freier abelscher Gruppen sind frei.

**BEWEIS:** Sei  $C$  eine Untergruppe von  $\mathbb{Z}[S]$ . Sei  $\mathcal{M}$  die Menge der Tripel  $(T, R, \varphi)$  mit

- $T \subseteq R \subseteq S$ .
- $\varphi: \mathbb{Z}[T] \rightarrow \mathbb{Z}[R] \cap C$  ein Isomorphismus.

Wir definieren eine partielle Ordnung auf  $\mathcal{M}$  durch

$$(T, R, \varphi) \leq (T', R', \varphi') : \iff T \subseteq T', R \subseteq R', \varphi'|_T = \varphi$$

$\mathcal{M}$  ist nicht leer ( $T = R = \emptyset$ ) und jede aufsteigende Kette besitzt eine obere Schranke (Vereinigung der Kette) in  $\mathcal{M}$ . Das Lemma von Zorn liefert uns nun die Existenz eines maximalen Elements  $(T, R, \varphi) \in \mathcal{M}$ . Zu zeigen bleibt  $R = S$ .

Angenommen es existiert ein  $s \in S \setminus R$ . Ist  $C \cap \mathbb{Z}[R \cup \{s\}] = C \cap \mathbb{Z}[R]$ , so ist  $(T, R, \varphi) \leq (T, R \cup \{s\}, \varphi) \in \mathcal{M}$  im Widerspruch zur Maximalität von  $(T, R, \varphi)$ . Sei also  $\mathbb{Z}[R] \cap C \subsetneq \mathbb{Z}[R \cup \{s\}] \cap C$ . Betrachte nun das Diagramm in Abbildung 1. Es ist  $\mathbb{Z}[R] \cap C = \mathbb{Z}[R] \cap (\mathbb{Z}[R \cup \{s\}] \cap C)$  und damit muss auch der von  $i_0$  und  $i_1$  induzierte Homomorphismus  $i_2: \mathbb{Z}[R \cup \{s\}] \cap C / \mathbb{Z}[R] \cap C \rightarrow \mathbb{Z}[\{s\}]$  injektiv sein. Es folgt, dass im  $i_2 = m \cdot \mathbb{Z}[\{s\}]$  ist für ein  $m > 0$ . Sei  $c \in \mathbb{Z}[R \cup \{s\}] \cap C$  ein Urbild von  $m \cdot s$  unter  $p \circ i_1$ . Nun können wir  $\varphi$  durch  $s \mapsto c$  zu  $\varphi^+: \mathbb{Z}[T \cup \{s\}] \rightarrow \mathbb{Z}[R \cup \{s\}] \cap C$  fortsetzen. Es folgt, dass  $\varphi^+$  ein Isomorphismus ist im Widerspruch zur Maximalität von  $(T, R, \varphi)$ .  $\square$

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{Z}[T] & \hookrightarrow & \mathbb{Z}[T \cup \{s\}] & \twoheadrightarrow & \mathbb{Z}[\{s\}] \ni s \\
 \downarrow \cong \varphi & & \downarrow \varphi^+ & & \downarrow \cong \\
 \mathbb{Z}[R] \cap C & \xrightarrow{j} & \mathbb{Z}[R \cup \{s\}] \cap C & \twoheadrightarrow & \mathbb{Z}[R \cup \{s\}] \cap C / \mathbb{Z}[R] \cap C \\
 \downarrow i_0 & & \downarrow i_1 & & \downarrow i_2 \\
 \mathbb{Z}[R] & \xrightarrow{j'} & \mathbb{Z}[R \cup \{s\}] & \twoheadrightarrow & \mathbb{Z}[\{s\}] \ni m \cdot s
 \end{array}$$

Abbildung 1: Diagramm zum Beweis von Lemma 2.4

**2.5 Lemma.** Sei  $A_0$  eine Untergruppe der abelschen Gruppe  $A$ ,  $V$  ein  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum und  $\beta_0: A_0 \rightarrow V$  ein Gruppenhomomorphismus. Dann gibt es eine Fortsetzung  $\beta: A \rightarrow V$  von  $\beta_0$  zu einem Gruppenhomomorphismus.

**BEWEIS:** Die Inklusion  $i: A_0 \rightarrow A$  induziert nach Aufgabe 1 vom ersten Übungsblatt einen injektiven  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum-Homomorphismus

$$\mathbb{Q} \otimes i: \mathbb{Q} \otimes A_0 \longrightarrow \mathbb{Q} \otimes A, \quad q \otimes a_0 \mapsto q \otimes i(a_0)$$

Nun können wir die  $\mathbb{Q}$ -lineare Abbildung  $q \otimes a_0 \mapsto q \cdot \beta_0(a_0) \in V$  von  $\mathbb{Q} \otimes A_0$  zu  $\bar{\beta}: \mathbb{Q} \otimes A \rightarrow V$  fortsetzen. Dann ist  $a \mapsto \beta(1 \otimes a)$  die gesuchte Fortsetzung von  $\beta_0$ .  $\square$

**BEWEIS** (von Satz 2.3):

- (i) Sei  $\varphi: H_n(X, A) \rightarrow V$  gegeben. Sei  $p: \ker d_n \rightarrow H_n(X, A)$  die Projektion. Betrachte die kurze exakte Folge

$$\ker d_n \xhookrightarrow{i} C_n^{\text{sing}}(X, A) \xrightarrow{d_n} \text{im } d_n$$

Als Untermodul des freien Moduls  $C_{n-1}^{\text{sing}}(X, A)$  ist  $\text{im } d_n$  nach Lemma 2.4 frei, insbesondere spaltet die kurze exakte Sequenz und es gilt  $C_n^{\text{sing}}(X, A) \cong \ker d_n \oplus \text{im } d_n$ . Daher können wir  $\varphi \circ p: \ker d_n \rightarrow V$  zu  $\alpha: C_n^{\text{sing}}(X, A) \rightarrow V$  fortsetzen. Genauer: Sei  $s: \text{im } d_n \rightarrow C_n^{\text{sing}}(X, A)$  ein Spalt. Dann können wir  $\alpha: C_n^{\text{sing}}(X, A) \rightarrow V$  definieren durch  $\alpha(a) := \varphi \circ p(a - s(d_n(a)))$ . Es folgt

$$d^n(\alpha)(a) = \alpha \circ d_{n+1}(a) = \varphi \circ p(d_{n+1}(a) - d_{n+1}(s(d_n(a)))) = 0$$

und damit  $[\alpha] \in H^n(X, A; V)$  sowie  $f([\alpha]) = \varphi$ , womit die Surjektivität gezeigt ist.

- (ii) Sei  $\alpha \in C_n^{\text{sing}}(X, A; V)$  mit  $d^n(\alpha) = 0$ . Sei  $[\alpha] \in \ker f$ , also  $\alpha(a) = 0$  für alle  $a \in \ker d_n$ . Dann faktorisiert  $\alpha$  über  $\text{im } d_n \subseteq C_{n-1}(X, A)$ , denn  $\alpha$  liegt im Kern von  $d^n$  und induziert  $\beta_0: \text{im } d_n \rightarrow V$  mit  $\alpha = \beta_0 \circ d_n$  durch Einschränkung auf den Summanden  $\text{im } d_n$ .

Ist  $V$  ein  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum, so können wir  $\beta_0$  nach Lemma 2.5 zu  $\beta: C_{n-1}(X, A) \rightarrow V$  fortsetzen. Es folgt  $\alpha = \beta \circ d_n = \pm(d^{n-1}\beta) = 0$  und damit  $[\alpha] = 0$  in  $H^n(X, A; V)$ .  $\square$

**2.6 Korollar.** Für den Sonderfall der  $\mathbb{Q}$ -Vektorräume gilt  $H^n(X, A; \mathbb{Q}) \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_n(X, A); \mathbb{Q})$ .  $\square$

**2.7 Bemerkung.** Es gilt sogar  $H^n(X, A; \mathbb{Q}) \cong \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(H_n(X, A; \mathbb{Q}), \mathbb{Q})$ .

### 3 Produkte auf Kohomologie

**3.1 Definition.** Sei  $\sigma: |\Delta^n| \rightarrow X$  ein singulärer Simplex in  $X$ . Für  $0 \leq p \leq n$  definieren wir

$$\sigma|_{[0,\dots,p]}: |\Delta^p| \longrightarrow X, \quad \sigma|_{[p,\dots,n]}: |\Delta^{n-p}| \longrightarrow X$$

durch  $\sigma|_{[0,\dots,p]}(t_0, \dots, t_p) = \sigma(t_0, \dots, t_p, 0, \dots, 0)$  und  $\sigma|_{[p,\dots,n]}(t_p, \dots, t_n) = \sigma(0, \dots, 0, t_p, \dots, t_n)$ .

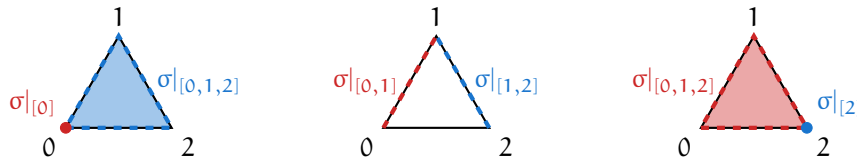


Abbildung 2: Einschränkung von singulären Simplizes am Beispiel des 2-Simplex.

**3.2 Bemerkung.** Wir schreiben auch  $\sigma|_{[0,\dots,\check{i},\dots,n]}$  für die  $i$ -te Seite von  $\sigma$ .

**3.3 Definition.** Sei  $R$  ein Ring und  $X$  ein topologischer Raum. Wir definieren das **Cup-Produkt** ( $\smile$ -Produkt) auf dem singulären Kokettenkomplex von  $X$

$$\smile: C_{\text{sing}}^p(X; R) \otimes C_{\text{sing}}^q(X; R) \longrightarrow C_{\text{sing}}^{p+q}(X; R)$$

durch  $(\alpha \smile \beta)(\sigma) := (-1)^{p \cdot q} \cdot \alpha(\sigma|_{[0,\dots,p]}) \cdot \beta(\sigma|_{[p,\dots,p+q]})$  für  $\sigma: |\Delta^{p+q}| \rightarrow X$ .

**3.4 Lemma.** Das  $\smile$ -Produkt hat folgende Eigenschaften:

- 1)  $d^{p+q}(\alpha \smile \beta) = d^p(\alpha) \smile \beta + (-1)^p \cdot \alpha \smile d^q(\beta)$
- 2) Das  $\smile$ -Produkt ist assoziativ.
- 3) Für  $f: X \rightarrow X'$  gilt  $f^*(\alpha \smile \beta) = f^*(\alpha) \smile f^*(\beta)$  für  $\alpha \in C_{\text{sing}}^p(X'; R)$ ,  $\beta \in C_{\text{sing}}^q(X'; R)$ .
- 4) Sei  $1_X \in C_{\text{sing}}^0(X; R)$  mit  $1_X(\sigma) = 1_R$  für alle  $\sigma: |\Delta^0| \rightarrow X$ . Dann gilt  $1_X \smile \alpha = \alpha = \alpha \smile 1_X$ .

**BEWEIS:** Übung bzw. Notizen auf Homepage

□

TeXen wenn  
Zeit

**3.5 Definition.** Die vom  $\smile$ -Produkt auf dem singulären Kokettenkomplex induzierte Abbildung in Kohomologie

$$\smile: H^p(X; R) \otimes H^q(X; R) \longrightarrow H^{p+q}(X; R)$$

ist das  $\smile$ -Produkt in Kohomologie  $[\alpha] \smile [\beta] := [\alpha \smile \beta]$ .

- ▶ Mit 1) folgt, dass das Cup-Produkt in Kohomologie wohldefiniert ist.
- ▶ Nach 2) ist es assoziativ und somit ist  $H^*(X) := \bigoplus_{p=0}^{\infty} H^p(X)$  ein Ring.
- ▶ Nach 3) sind induzierte Abbildungen in Kohomologie multiplikativ und somit Ringhomomorphismen.
- ▶ Nach 4) ist  $[1_X] \in H^0(X; R)$  ein Einselement bezüglich  $\smile$  in  $H^*$ .

**3.6 Definition.** Seien  $X$  und  $Y$  zwei topologische Räume. Seien  $p_X: X \times Y \rightarrow X$  und  $p_Y$  die Projektionen. Das **Kreuz-Produkt** ( $\times$ -Produkt)

$$\times: H^p(X; \mathbb{R}) \otimes H^q(Y; \mathbb{R}) \longrightarrow H^{p+q}(X \times Y; \mathbb{R})$$

ist definiert durch  $\xi \times \zeta := p_X^*(\xi) \smile p_Y^*(\zeta)$ .

**3.7 Bemerkung.** Das  $\smile$ -Produkt kann wie folgt aus dem  $\times$ -Produkt zurückgewonnen werden: Sei  $\Delta: X \rightarrow X \times X$  die Diagonalabbildung  $\Delta(x) := (x, x)$ , dann gilt für  $\xi \in H^p(X; \mathbb{R})$ ,  $\zeta \in H^q(X; \mathbb{R})$

$$\xi \smile \zeta = \Delta^*(\xi \times \zeta)$$

**3.8 Bemerkung.** Es gibt auch relative Versionen des  $\smile$ -Produkts und des  $\times$ -Produkts:

- (i) Sei  $A \subseteq X$  ein Unterraum. Für  $\alpha \in C^p(X, A; \mathbb{R})$  und  $\beta \in C^q(X; \mathbb{R})$  sind dann  $\alpha \smile \beta, \beta \smile \alpha \in C^{p+q}(X, A; \mathbb{R})$ . Wir erhalten relative  $\smile$ -Produkte

$$H^p(X, A; \mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} H^q(X; \mathbb{R}) \longrightarrow H^{p+q}(X, A; \mathbb{R})$$

$$H^p(X; \mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} H^q(X, A; \mathbb{R}) \longrightarrow H^{p+q}(X, A; \mathbb{R})$$

- (ii) Seien  $A \subseteq X$  und  $B \subseteq Y$  Unterräume. Dann erhalten wir relative  $\times$ -Produkte

$$H^p(X, A; \mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} H^q(Y; \mathbb{R}) \longrightarrow H^{p+q}(X \times Y, A \times Y; \mathbb{R})$$

$$H^p(X; \mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} H^q(Y, B; \mathbb{R}) \longrightarrow H^{p+q}(X \times Y, X \times B; \mathbb{R})$$

- (iii) Sind  $A, B \subseteq X$  offen, so kann man mit dem Satz über kleine Simples ein relatives  $\smile$ -Produkt

$$H^p(X, A; \mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} H^q(X, B; \mathbb{R}) \longrightarrow H^{p+q}(X, A \cup B; \mathbb{R})$$

konstruieren. Siehe Aufgabe 3 von Blatt 4.

- (iv) Sind  $A \subseteq X$  und  $B \subseteq Y$  offen, so erhält man ein relatives  $\times$ -Produkt

$$H^p(X, A; \mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} H^q(Y, B; \mathbb{R}) \longrightarrow H^{p+q}(X \times Y, X \times B \cup A \times Y; \mathbb{R})$$

**3.9 Beispiel.** Wir betrachten das  $\smile$ -Produkt auf in der 0-ten Kohomologie  $\smile: H^0(X; \mathbb{R}) \otimes H^0(X; \mathbb{R}) \rightarrow H^0(X; \mathbb{R})$ . Sei  $A, B \subseteq X$  beide Vereinigungen von Wegzusammenhangskomponenten von  $X$ . Seien  $1_A, 1_B \in C^0(X; \mathbb{R})$  definiert durch

$$1_A(\sigma) = \begin{cases} 1, & \text{falls im } \sigma \subseteq A \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und  $1_B$  analog. Dann ist  $[1_A] \smile [1_B] = [1_{A \cap B}]$ .

**3.10 Lemma.** Sei  $(X, A)$  ein Paar von topologischen Räumen und  $Y$  ein weiterer topologischer Raum. Seien  $\partial: H^p(A; \mathbb{R}) \rightarrow H^{p+1}(X, A; \mathbb{R})$  und  $\partial^\times: H^{p+q}(A \times Y; \mathbb{R}) \rightarrow H^{p+q+1}(X \times Y, A \times Y; \mathbb{R})$  die Verbindungshomomorphismen in den Paarfolgen. Dann gilt für  $\xi \in H^p(A; \mathbb{R})$  und  $\zeta \in H^q(X; \mathbb{R})$

$$\partial^\times(\xi \times \zeta) = (\partial\xi) \times \zeta$$

**BEWEIS:** Sei  $\xi = [\alpha]$  und  $\zeta = [\beta]$ . Setze  $\alpha: C_p(A) \rightarrow R$  durch  $\hat{\alpha}(\sigma) = 0$  für  $\sigma: |\Delta^p| \rightarrow X$  mit Bild nicht in  $A$  zu  $\hat{\alpha}: C_p(X) \rightarrow R$  fort. Dann ist  $[d^p \hat{\alpha}] = \partial[\alpha]$ . Weiter ist

$$\partial^\times(\xi \times \zeta) = \partial^\times(p_A^* \xi \sim p_Y^* \zeta) = \partial^\times[p_A^* \alpha \sim p_Y^* \beta] = (d^{p+q}(p_X^*(\hat{\alpha}) \sim p_Y^*(\hat{\beta})))$$

da  $p_X^*(\hat{\alpha}) \sim p_Y^*(\hat{\beta})$  eine Fortsetzung von  $p_A^*(\alpha) \sim p_Y^*(\beta)$  ist. Weiter gilt

$$\begin{aligned} &= [p_X^*(d^p \hat{\alpha}) \sim p_Y^*(\hat{\beta}) \pm p_X^*(\hat{\alpha}) \sim p_Y^*(d^q \hat{\beta})] \\ &= p_X^*[d^p(\hat{\alpha})] \sim p_Y^*[\hat{\beta}] = [d^p(\hat{\alpha})] \times [\hat{\beta}] \\ &= \partial \xi \times \zeta \end{aligned}$$

□

**3.11 Lemma.** Sei  $\xi \in H^1(D^1, \partial D^1; R)$  ein Erzeuger. Dann ist für jeden Raum  $X$  die Abbildung

$$\begin{aligned} H^p(X; R) &\longrightarrow H^{p+1}(D^1 \times X, \partial D^1 \times X; R) \\ \eta &\longmapsto \xi \times \eta \end{aligned}$$

ein Isomorphismus.

**BEWEIS:** Wir betrachten folgendes Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^0(D^1; R) \otimes H^p(X; R) & \xrightarrow{\times} & H^p(D^1 \times X; R) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^0(\partial D^1; R) \otimes H^p(X; R) & \xrightarrow{\times} & H^p(\partial D^1 \times X; R) \\ \downarrow & & \downarrow \partial \\ H^1(D^1, \partial D^1; R) \otimes H^p(X; R) & \xrightarrow{\times} & H^{p+1}(D^1 \times X, \partial D^1 \times X; R) \end{array}$$

Behauptung: Beide Spalten sind kurz exakt. Betrachte dazu folgenden Ausschnitt aus der Paarsequenz des Paares  $(D^1, \partial D^1)$ :

$$\underbrace{H^0(D^1, \partial D^1; R)}_{1 \stackrel{12}{=} 0} \longrightarrow H^0(D^1; R) \xrightarrow{j^*} H^0(\partial D^1; R) \longrightarrow H^1(D^1, \partial D^1; R) \longrightarrow 0$$

Seien  $j: \partial D^1 \hookrightarrow D^1$  und  $i_\pm: \{\pm 1\} \hookrightarrow \partial D^1$  die Inklusionen. Sei weiter  $p: D^1 \rightarrow \{-1\}$  die Projektion. Dann gilt  $p^* \circ i_-^* \circ j^* = \text{id}_{H^0(D^1; R)}$ . Insbesondere spaltet die Sequenz und bleibt exakt nach Anwenden des Funktors  $- \otimes H^p(X; R)$ . Genauso überlegt man sich, dass die Paarfolge

$$\dots \longrightarrow H^p(D^1 \times X, \partial D^1 \times X; R) \xrightarrow{j^*} H^p(D^1 \times X; R) \xrightarrow{i^*} H^p(\partial D^1 \times X; R) \longrightarrow \dots$$

in eine kurze exakte Folge

$$0 \longrightarrow H^p(D^1 \times X; R) \xrightarrow{i^*} H^p(\partial D^1 \times X; R) \xrightarrow{\partial} H^{p+1}(D^1 \times X, \partial D^1 \times X; R) \longrightarrow 0$$

$\swarrow \quad \searrow$   
 $s^*$

zerfällt: Sei dazu  $s: D^1 \times X \rightarrow \partial D^1 \times X$  gegeben durch  $(t, x) \mapsto (1, x)$  und  $i: \partial D^1 \times X \hookrightarrow D^1 \times X$  die Inklusion. Dann ist  $i \circ s$  homotop zu  $\text{id}_{D^1 \times X}$ , also  $s^* \circ i^* = \text{id}$  in Kohomologie und mit der Exaktheit folgt  $j^* = 0$ . Die gesuchte Spaltung ist  $s^*$ .

Die ersten zwei  $\times$ -Produkte sind Isomorphismen. Dies folgt für das erste aus  $H^0(D^1; R) \cong R$  und der Betrachtung des Erzeugers  $1_R \in R$ , denn für diesen gilt  $p_{D^1}^*(1_R) = 1_{D^1 \times X}$  und somit

$$p_{D^1}^*(1_R) \sim p_X^*(\eta) = p_X^*(\eta)$$

Für das zweite  $\times$ -Produkt betrachte folgendes Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 H^0(\{-1\}) \otimes H^p(X) & \xrightarrow[\cong]{\times} & H^p(\{-1\} \times X) \\
 \downarrow (p_{-1})^* \otimes \text{id} & & \downarrow (p_{-1} \times \text{id}_X)^* \\
 H^0(\partial D^1) \otimes H^p(X) & \xrightarrow{\times} & H^p(\partial D^1 \times X) \\
 \downarrow (i_{+1})^* \otimes \text{id} & & \downarrow (i_{+1} \times \text{id}_X)^* \\
 H^0(\{+1\}) \otimes H^p(X) & \xrightarrow[\cong]{\times} & H^p(\{+1\} \times X)
 \end{array}$$

„R“ aus Platzgrün-  
den weggelassen

Nach Lemma 3.10 kommutiert das erste Diagramm und damit ist auch das dritte  $\times$ -Produkt darin ein Isomorphismus, wie wir es zeigen wollten.

HATCHER [Hat02, Ex. 3.11] formuliert den Beweis dieser Aussage noch etwas anders, vielleicht hilft der Vergleich dem einen oder anderen.  $\square$

**3.12 Proposition.** Sei  $X$  ein topologischer Raum. Dann ist  $H^p(S^1 \times X; \mathbb{R}) \cong H^p(X; \mathbb{R}) \oplus H^{p-1}(X; \mathbb{R})$ .

**BEWEIS:** Die Paarfolge zu  $(S^1 \times X, \{\text{pt}\} \times X)$  zerfällt in kurze exakte Folgen

$$H^p(S^1 \times X, \{\text{pt}\} \times X; \mathbb{R}) \hookrightarrow H^p(S^1 \times X; \mathbb{R}) \xrightarrow{i^*} H^p(\{\text{pt}\} \times X; \mathbb{R})$$

$\swarrow \pi^*$

Die Surjektivität folgt, da  $\pi(\lambda, x) = (\text{pt}, x)$  einen Spalt induziert. Damit folgt  $H^p(S^1 \times X; \mathbb{R}) \cong H^p(X; \mathbb{R}) \oplus H^p(S^1 \times X, \{\text{pt}\} \times X; \mathbb{R})$ . Die Behauptung folgt mittels Ausschneidung und Homotopieinvarianz:

$$H^p(S^1 \times X, \{\text{pt}\} \times X; \mathbb{R}) \cong H^p(D^1 \times X, \partial D^1 \times X; \mathbb{R}) \stackrel{3.11}{\cong} H^{p-1}(X; \mathbb{R}) \quad \square$$

**3.13 Bemerkung.** Sei  $\xi \in H^1(S^1; \mathbb{R})$  ein Erzeuger und  $\pi_X: S^1 \times X \rightarrow X$  die Projektion. Dann ist der Isomorphismus aus Proposition 3.12 gegeben durch

$$H^p(X; \mathbb{R}) \oplus H^{p-1}(X; \mathbb{R}) \longrightarrow H^p(S^1 \times X; \mathbb{R}) \quad , \quad (\eta_1, \eta_2) \longmapsto (\pi_X^*(\eta_1) + \xi \times \eta_2)$$

## 4 Kommutativität des Cup-Produktes

**4.1 Definition.** Eine *graduierete Algebra* ist ein graduierter Modul  $A^* = \bigoplus_p A^p$  zusammen mit einer  $R$ -Algebrastruktur, für die das Produkt mit der Graduierung verträglich ist: Für  $a \in A^p$  und  $b \in A^q$  ist  $a \cdot b \in A^{p+q}$ . Sie heißt *graduieret-kommutativ*, falls

$$a \cdot b = (-1)^{p \cdot q} \cdot b \cdot a$$

für alle  $a \in A^p$  und  $b \in A^q$  gilt.

**4.2 Bemerkung.** Das  $\smile$ -Produkt auf  $C_{\text{sing}}^*(X; R)$  ist *nicht* graduieret kommutativ, was man direkt aus der Definition 3.3 ablesen kann.

**4.3 Lemma.** Für  $\sigma: |\Delta^p| \rightarrow X$  sei  $\bar{\sigma}: |\Delta^n| \rightarrow X$  definiert durch

$$\bar{\sigma}(t_0, \dots, t_p) := \sigma(t_p, \dots, t_0)$$

Sei  $\text{Sp}: C_p(X, A; R) \rightarrow C_p(X, A; R)$  definiert durch  $\text{Sp}(\sigma) := (-1)^{p(p+1)/2} \cdot \bar{\sigma}$ . Dann erhalten wir eine induzierte Abbildung  $\text{Sp}^*: C^p(X, A; R) \rightarrow C^p(X, A; R)$  definiert durch  $\text{Sp}^*(\alpha) := \alpha \circ \text{Sp}$ . Es gilt

- a)  $\text{Sp}$  ist eine Kettenabbildung und  $\text{Sp}^*$  ist eine Kokettenabbildung
- b) Ist  $R$  kommutativ, so gilt  $\beta \smile \alpha = (-1)^{p \cdot q} \cdot \text{Sp}^*(\text{Sp}^*(\alpha) \smile \text{Sp}^*(\beta))$

**BEWEIS:** a) Sei  $\sigma: |\Delta^p| \rightarrow X$  ein singulärer Simplex. Dann gilt

$$\begin{aligned} \text{Sp}(d_p \sigma) &= \text{Sp} \left( \sum_{i=0}^p (-1)^i \sigma|_{[0, \dots, \check{i}, \dots, p]} \right) = \sum_{i=0}^p (-1)^i \text{Sp}(\sigma|_{[0, \dots, \check{i}, \dots, p]}) \\ &= \sum_{i=0}^p (-1)^i \cdot (-1)^{\frac{p(p-1)}{2}} \sigma|_{[p, \dots, \check{i}, \dots, 0]} \end{aligned}$$

wobei  $\check{i}$  an der  $p-i$ -ten Stellen von vorn steht. Weiter ist

$$\begin{aligned} d_p(\text{Sp}(\sigma)) &= d_p \left( (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} \sigma|_{[p, \dots, 0]} \right) = (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} \sum_{i=0}^p (-1)^i \sigma|_{[p, \dots, p-\check{i}, \dots, 0]} \\ &= (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} \sum_{i=0}^p (-1)^{p-i} \sigma|_{[p, \dots, \check{i}, \dots, 0]} \end{aligned}$$

Nun ist  $\frac{p(p-1)}{2} \equiv \frac{p(p+1)}{2} + p$  und  $x+i \equiv x-i$  und es folgt die Gleichheit.

b) Es ist  $p = |\alpha|$ ,  $q = |\beta|$  und  $n = p + q$ . Für einen singulären Simplex  $\sigma: |\Delta^n| \rightarrow X$  gilt

$$\begin{aligned} (\text{Sp}^*(\text{Sp}^*(\alpha) \smile \text{Sp}^*(\beta)))(\sigma) &= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot (\text{Sp}^*(\alpha) \smile \text{Sp}^*(\beta))(\sigma|_{[n, \dots, 0]}) \\ &= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot (-1)^{p \cdot q} \cdot \text{Sp}^*(\alpha)(\sigma|_{[n, \dots, q]}) \cdot \text{Sp}^*(\beta)(\sigma|_{[q, \dots, 0]}) \\ &= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} (-1)^{p \cdot q} (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} (-1)^{\frac{q(q+1)}{2}} \alpha(\sigma|_{[q, \dots, n]}) \beta(\sigma|_{[0, \dots, q]}) \\ &= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} (-1)^{p \cdot q} (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} (-1)^{\frac{q(q+1)}{2}} \beta(\sigma|_{[0, \dots, q]}) \alpha(\sigma|_{[q, \dots, n]}) \\ &\stackrel{!}{=} (-1)^{p \cdot q} (\beta \smile \alpha)(\sigma) = \cancel{(-1)^{p \cdot q}} \cdot \cancel{(-1)^{p \cdot q}} \beta(\sigma|_{[0, \dots, q]}) \alpha(\sigma|_{[q, \dots, n]}) \end{aligned}$$

Weiter gilt nun

$$\begin{aligned} n(n+1)/2 + p(p+1)/2 + q(q+1)/2 &= (1 + \dots + n) + (1 + \dots + p) + (1 + \dots + q) \\ &\equiv ((p+1) + \dots + n) + (1 + \dots + q) \\ &= (n+1)q = (p+q+1)q = pq + q^2 + q \equiv p \cdot q \end{aligned}$$

da  $q^2 \equiv q$  und es folgt die Behauptung.  $\square$

**4.4 Lemma.**  $\text{Sp}: C_*(X, A) \rightarrow C_*(X, A)$  ist kettenhomotop zur Identität.

**BEWEIS:**  $\text{Sp}$  ist eine natürliche Transformation mit  $\text{Sp}_0 = \text{id}: C_0(X) \rightarrow C_0(X)$ . Nach Proposition 4.6 bzw. Korollar 4.7 ist  $\text{Sp}$  damit kettenhomotop zur Identität.  $\square$

**4.5 Satz.** Das  $\smile$ -Produkt in Kohomologie ist graduiert kommutativ.

**BEWEIS:** Seien  $\xi \in H^p(X, A; \mathbb{R}), \eta \in H^q(X, B; \mathbb{R})$ . Wähle  $\alpha \in C^p(X, A; \mathbb{R}), \beta \in C^q(X, B; \mathbb{R})$  mit  $\xi = [\alpha]$  und  $\eta = [\beta]$ . Dann ist – da mit  $\text{Sp}$  auch  $\text{Sp}^*$  kokettenhomotop zur Identität ist –

$$\begin{aligned} \xi \smile \eta &= [\alpha \smile \beta] \stackrel{4.3}{=} (-1)^{pq} \cdot [\text{Sp}^*(\text{Sp}^*(\beta) \smile \text{Sp}^*(\alpha))] = (-1)^{pq} \cdot [\text{Sp}^*(\beta) \smile \text{Sp}^*(\alpha)] \\ &= (-1)^{pq} \cdot [\text{Sp}^*(\beta)] \smile [\text{Sp}^*(\alpha)] \\ &= (-1)^{pq} \cdot [\beta] \smile [\alpha] = (-1)^{pq} \cdot \eta \smile \xi, \quad \square \end{aligned}$$

**4.6 Proposition.** Sei  $\tau_*: C_*^{\text{sing}} \rightarrow C_*^{\text{sing}}$  eine natürliche Transformation durch Kettenabbildungen. Induziert  $\tau$  die triviale Abbildung auf  $H_0(\{\text{pt}\})$ , so ist  $\tau_*$  kettenhomotop zur Nullabbildung, das heißt es gibt eine natürliche Transformation  $\eta_*: C_*^{\text{sing}} \rightarrow C_{*+1}^{\text{sing}}$  mit

$$d_{*+1}^{\text{sing}} \circ \eta_* + \eta_{*+1} \circ d_*^{\text{sing}} = \tau_*$$

**BEWEIS:** Da  $\tau$  auf  $H_0(\{\text{pt}\})$  trivial ist, ist  $\tau(\text{id}_{|\Delta^0|}) = 0$ . Es folgt für  $\sigma: |\Delta^0| \rightarrow X$

$$\tau(\sigma) = \tau(\sigma_*(\text{id}_{|\Delta^0|})) = \sigma_*(\tau(\text{id}_{|\Delta^0|})) = 0$$

Es folgt, dass  $\tau_0: C_0(X) \rightarrow C_0(X)$  trivial ist. Wir setzen  $\eta_0 = 0$  und definieren  $\eta_1, \eta_2, \dots$  induktiv: Seien  $\eta_1, \dots, \eta_{k-1}$  schon konstruiert mit  $d_{l+1}^{\text{sing}} \circ \eta_l + \eta_{l+1} \circ d_l^{\text{sing}} = \tau_l$  für  $l = 0, \dots, k-1$ . Es folgt

$$\begin{aligned} d_k^{\text{sing}}(\tau_k - \eta_{k-1} \circ d_k^{\text{sing}}) &= d_k^{\text{sing}} \circ \tau_k - d_k^{\text{sing}} \circ \eta_{k-1} \circ d_k^{\text{sing}} \\ &= \tau_{k-1} \circ d_k^{\text{sing}} - (\tau_{k-1} - \eta_{k-2} \circ d_{k-1}^{\text{sing}}) \circ d_k^{\text{sing}} = 0 \end{aligned}$$

Setze nun  $\text{id}_{|\Delta^k|} \in C_k^{\text{sing}}(|\Delta^k|)$  in die Formel ein. Da  $|\Delta^k|$  kontrahierbar ist, gilt  $H_k(|\Delta^k|) = 0$ . Außerdem gilt

$$d_k^{\text{sing}}(\tau_k(\text{id}_{|\Delta^k|}) - \eta_{k-1}(d_k^{\text{sing}}(\text{id}_{|\Delta^k|}))) = 0$$

und somit gibt es ein  $a_k \in C_{k+1}(|\Delta^k|)$ , sodass  $d_{k+1}^{\text{sing}}(a_k)$  das Innere der Klammer ist. Für einen singulären Simplex  $\sigma: |\Delta^k| \rightarrow X$  setzen wir nun  $\eta_k(\sigma) := \sigma_*(a_k)$ . Dann gilt

$$(d_{k+1}^{\text{sing}} \circ \eta_k + \eta_{k+1} \circ d_k^{\text{sing}} - \tau_k)(\sigma) = \sigma_*(d_{k+1}^{\text{sing}} \circ \eta_k + \eta_{k+1} \circ d_k^{\text{sing}} - \tau_k)(\text{id}_{|\Delta^k|}) = 0$$

nach Konstruktion. Damit ist  $d_{k+1}^{\text{sing}} \circ \eta_k + \eta_{k+1} \circ d_k^{\text{sing}} = \tau_k$  wie gewünscht und  $\eta_*$  ist die gesuchte Kettenhomotopie.  $\square$



**4.7 Korollar.** Seien  $\tau, \tau'$  zwei natürliche Transformationen  $C_*^{\text{sing}} \rightarrow C_*^{\text{sing}}$  durch Kettenabbildungen, sodass  $H_0(\tau) = H_0(\tau')$  für  $X = \{\text{pt}\}$  gilt. Dann sind  $\tau$  und  $\tau'$  kettenhomotop.

**BEWEIS:** Betrachte  $\tau - \tau'$  und wende Proposition 4.6 an.  $\square$

**4.8 Definition.** Sei  $R$  ein kommutativer Ring. Die *freie graduiert kommutative Algebra*<sup>1</sup> in Erzeugern  $a_1, \dots, a_k$  von Grad  $|a_1|, \dots, |a_k|$  über  $R$  ist die graduiert kommutative Algebra  $\Lambda_R[a_1, \dots, a_k]$ , deren Elemente von Grad  $N$  formale Linearkombinationen der Form

$$\sum_{\substack{i_1, \dots, i_n \geq 0 \\ i_1|a_1| + \dots + i_n|a_n| = N, i_j \in \{0,1\} \text{ für } |a_j| \text{ ungerade}}} r_{i_1, \dots, i_n} \cdot a_1^{i_1} \cdot a_2^{i_2} \cdots a_n^{i_n}$$

sind. Das Produkt ist das eindeutige  $R$ -lineare assoziative graduiert kommutative Produkt mit  $a_\lambda^j \cdot a_{\lambda'}^{j'} = a_\lambda^j a_{\lambda'}^{j'}$ , für  $\lambda < \lambda'$  und  $a_\lambda^j \cdot a_\lambda^{j'} = a_\lambda^{j+j'}$  für  $|a_\lambda|$  ungerade.

**4.9 Beispiel.** Sind alle  $|a_i|$  gerade, so ist  $\Lambda_R[a_1, \dots, a_n]$  der Polynomring über  $R$  in den Variablen  $a_1, \dots, a_n$ . Sind alle  $|a_i|$  ungerade, so ist  $\Lambda_R[a_1, \dots, a_n]$  die *äußere Algebra* in den Variablen  $a_1, \dots, a_n$ .

*Definition der äußeren Algebra aus [Hat02, Ex. 3.15]:* Die *äußere Algebra*  $\Lambda_R[a_1, a_2, \dots]$  über einem kommutativen Ring  $R$  ist der freie  $R$ -Modul, dessen Basis aus endlichen Produkten  $a_{i_1} \cdots a_{i_k}$  mit  $i_1 < \dots < i_k$  besteht, versehen mit der Multiplikation, die durch die Forderungen

$$a_i a_j = -a_j a_i \quad \text{und} \quad a_i^2 = 0$$

eindeutig bestimmt ist. Das leere Produkt der  $a_i$  liefert ein Einselement.

**4.10 Satz.** Sei  $R$  ein kommutativer Ring und  $\xi \in H^1(S^1; R)$  ein Erzeuger. Sei weiter  $p_i: T^n = (S^1)^n \rightarrow S^1$  die Projektion auf die  $i$ -te Koordinate. Wir setzen  $\xi_i := (p_i)^*(\xi) \in H^1(T^n; R)$ . Dann ist

$$H^*(T^n; R) \cong \Lambda_R[\xi_1, \dots, \xi_n]$$

als graduiert kommutative Ringe.

**BEWEIS:** Per Induktion nach  $n$ . Für  $n = 0, 1$  ist nichts zu zeigen. Nach Bemerkung 3.13 liefert  $(\eta_1, \eta_2) \mapsto (\pi^*(\eta_1) + \xi \times \eta_2)$  einen Isomorphismus  $H^p(T^n; R) \oplus H^{p-1}(T^n; R) \cong H^p(T^{n+1}; R)$ , wobei  $\pi: T^{n+1} \rightarrow T^n$  die Projektion auf die hinteren  $n$  Koordinaten ist. Es gilt dann  $\pi^*(\xi_i) = \xi_{i+1}$ . Nach Induktionsvoraussetzung können wir  $\eta_1 = \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_p}$  und  $\eta_2 = \xi_{j_1} \cdots \xi_{j_{p-1}}$  annehmen. Offensichtlich hat  $\pi^*(\eta_1)$  dann die gewünschte Form, da  $\pi^*$  mit  $\smile$  vertauscht. Mit

$$\xi \times \eta_2 = p_1^*(\xi) \smile \pi^*(\eta_2)$$

folgt dies auch für den zweiten Summanden. Insgesamt sieht man, dass  $H^*(T^n)$  die behauptete Struktur hat.  $\square$

**4.11 Beispiel.**  $\xi_1 \cdots \xi_n$  ist ein Erzeuger von  $H^n(T^n; R)$ . Jedes  $\eta \in H^k(T^n; R)$  für  $k > 0$  lässt sich schreiben als

$$\eta = \sum_{i_1 < \dots < i_k} r_{i_1, \dots, i_k} \xi_{i_1} \smile \dots \smile \xi_{i_k}$$

---

<sup>1</sup>  $a^2 = 0$  falls  $a$  ungerade

## 5 Azyklische Kettenkomplexe

**Frage.** Sei  $f: C_* \rightarrow D_*$  eine Kettenabbildung, die einen Isomorphismus in Homologie induziert. Ist dann  $f$  schon eine Kettenhomotopieäquivalenz?

**Frage.** Sei  $\mathcal{U}$  eine offene Überdeckung von  $X$ . Dann haben wir schon gesehen, dass die Inklusion  $i: C_*^{\mathcal{U}}(X; R) \hookrightarrow C_*^{\text{sing}}(X; R)$  einen Isomorphismus in Homologie induziert. Ist  $i$  eine Kettenhomotopieäquivalenz?

**5.1 Definition.** Ein  $R$ -Kettenkomplex heißt *azyklisch*, falls seine Homologiegruppen trivial sind, also falls der Kettenkomplex eine lange exakte Folge ist.

**5.2 Beispiel.** Unser altbekanntes Beispiel

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

ist ein azyklischer Kettenkomplex, der nicht kettenkontraktibel ist, da es keine nicht trivialen Abbildungen  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  gibt. Damit ist die Antwort auf die erste Frage „Nein“.

**5.3 Definition.** Ein  $R$ -Modul  $P$  heißt *projektiv*, falls es zu jeder surjektiven,  $R$ -linearen Abbildung  $f: M \rightarrow N$  und jeder  $R$ -linearen Abbildung  $\varphi: P \rightarrow N$  eine  $R$ -lineare Abbildung  $\hat{\varphi}: P \rightarrow M$  gibt mit  $\varphi = f \circ \hat{\varphi}$ . Anders ausgedrückt kommutiert folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} & M & \\ \hat{\varphi} \nearrow & \downarrow f & \\ P & \xrightarrow{\varphi} & N \end{array}$$

**5.4 Beispiel.** Freie Moduln sind projektiv, wie man durch Anwendung der universellen Eigenschaft eines freien Moduls sehr einfach sieht (wurde auch in Topologie I bewiesen).

**5.5 Satz.** Für einen  $R$ -Modul  $P$  sind äquivalent:

- i)  $P$  ist projektiv
- ii)  $P$  ist ein direkter Summand in einem freien  $R$ -Modul.

**BEWEIS:** Zur ersten Implikation:

$$\begin{array}{ccc} & R[P] & \\ i \nearrow & \downarrow p & \\ P & \xrightarrow{\text{id}} & P \end{array}$$

Mit  $R[S] \cong P \oplus \ker p$  folgt nun die gewünschte Aussage. Die zweite Implikation ergibt sich wie folgt: Nach Voraussetzung gibt es  $i: P \rightarrow F$  und  $p: F \rightarrow P$ , wobei  $F$  frei ist und  $p \circ i = \text{id}_P$  gilt. Seien nun  $M, N, f$  und  $\varphi$  wie in Definition 5.3. Wir erhalten folgendes Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\psi} & M \\ \downarrow p \quad \nearrow i & \searrow \psi = \varphi \circ p & \downarrow f \\ P & \xrightarrow{\varphi} & N \end{array}$$

Da  $F$  frei und insbesondere projektiv ist, existiert ein Homomorphismus  $\hat{\psi}$  mit  $f \circ \hat{\psi} = \psi$ . Wir setzen nun  $\hat{\phi} := \hat{\psi} \circ i$ . Dann gilt  $f \circ \hat{\phi} = f \circ \hat{\psi} \circ i = \varphi \circ p \circ i = \varphi$  und  $P$  ist projektiv. □

Revision 5

**5.6 Satz.** Sei  $C_*$  ein azyklischer  $R$ -Kettenkomplex. Sind alle Kettenmoduln  $C_n$  projektiv, so ist  $C_*$  kettenkontrahierbar.

**BEWEIS:** Wir konstruieren induktiv  $s_n: C_n \rightarrow C_{n+1}$ , sodass  $d_{n+1} \circ s_n + s_{n-1} \circ d_n = \text{id}_{C_n}$  gilt. Für  $n = 0$  gehen wir wie folgt vor: Da  $C_*$  azyklisch ist, ist  $d_1: C_1 \rightarrow C_0$  surjektiv und es gibt  $s_0: C_0 \rightarrow C_1$  mit  $d_1 \circ s_0 = \text{id}_{C_0}$ , weil  $C_0$  projektiv ist.

Zum Induktionsschritt  $(n-1) \mapsto n$ : Da  $C_+$  azyklisch ist, ist  $d_{n+1}: C_{n+1} \rightarrow \text{im } d_{n+1} = \ker d_n$  surjektiv. Wegen

$$\begin{aligned} d_n(\text{id}_{C_n} - s_{n-1} \circ d_n) &= d_n - \underbrace{d_n \circ s_{n-1}}_{= \text{id}_{C_{n-1}} - s_{n-2} \circ d_{n-1}} \circ d_n \\ &= d_n - (-s_{n-2} \circ d_{n-1} + \text{id}_{C_{n-1}}) \circ d_n = 0 \end{aligned}$$

liegt das Bild von  $\text{id}_{C_n} - s_{n-1} \circ d_n$  im Kern von  $d_n$ . Da  $C_n$  projektiv ist, gibt es  $s_n: C_n \rightarrow C_{n+1}$  mit  $d_{n+1} \circ s_n = \text{id}_{C_n} - s_{n-1} \circ d_n$ .

$$\begin{array}{ccc} & & C_{n+1} \\ & \nearrow s_n & \downarrow d_{n+1} \\ C_n & \xrightarrow{\text{id}_{C_n} - s_{n-1} \circ d_n} & \text{im } d_{n+1} = \ker d_n \end{array}$$

□

**5.7 Satz.** Sei  $f: C_* \rightarrow D_*$  eine Kettenabbildung. Seien alle Kettenmoduln von  $C_*$  und  $D_*$  projektiv. Dann sind äquivalent:

- (i)  $f$  ist eine Kettenhomotopieäquivalenz
- (ii)  $f$  induziert einen Isomorphismus in Homologie.

**BEWEIS:** Die Implikation (i)  $\Rightarrow$  (ii) ist klar (siehe Topologie I.) Die zweite Implikation besprechen wir später (siehe Seite 16). □

**5.8 Definition.** Sei  $f: C_* \rightarrow D_*$  eine Kettenabbildung. Der *Kegel*  $\text{Keg}(f)_*$  von  $f$  ist der Kettenkomplex, dessen  $n$ -ter Kettenmodul  $D_n \oplus C_{n-1}$  ist und dessen  $n$ -te Randabbildung gegeben ist durch

$$d_n^{\text{Keg}(f)} := \begin{pmatrix} d_n^D & f \\ 0 & -d_{n-1}^C \end{pmatrix}$$

Die *Einhängung*  $\Sigma C_*$  von  $C_*$  ist der Kettenkomplex, dessen  $n$ -ter Kettenmodul  $C_{n-1}$  ist und dessen  $n$ -te Randabbildung  $-d_{n-1}^C$  ist.

**5.9 Lemma.**  $f$  induziert genau dann einen Isomorphismus in Homologie, wenn  $\text{Keg}(f)_*$  azyklisch ist.

**BEWEIS:** Betrachte die lange exakte Folge zur kurzen exakten Folge von Kettenkomplexen

$$0 \longrightarrow D_* \xrightarrow{i} \text{Keg}(f)_* \xrightarrow{p} \Sigma C_* \longrightarrow 0$$

Der Verbindungshomomorphismus  $H_{n+1}(\Sigma C_*) \rightarrow H_n(D_*)$  entspricht unter  $H_{n+1}(\Sigma C_*) \cong H_n(C_*)$  genau der von  $f$  induzierten Abbildung.  $\square$

**5.10 Lemma.**  $f$  ist genau dann eine Kettenhomotopieäquivalenz, wenn  $\text{Keg}(f)_*$  kettenkontraktibel ist.

**BEWEIS:** Sei  $\begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_{n-1} \\ \gamma_n & \delta_{n-1} \end{pmatrix}$  eine Kettenkontraktion für  $\text{Keg}(f)$ . Es folgt

$$f_n \circ \gamma_n + d_{n+1}^D \circ \alpha_n + \alpha_{n-1} \circ d_n^D = \text{id}_{D_n} \quad (1)$$

$$d_{n+1}^D \circ \beta_{n-1} + f_n \circ \delta_{n-1} + d_{n-1} \circ f_{n-1} - \beta_{n-2} \circ d_{n-1}^C = 0 \quad (2)$$

$$-d_n^C \circ \gamma_n + \gamma_n \circ d_n^D = 0 \quad (3)$$

$$-d_n^C \circ \delta_{n-1} + \gamma_{n-1} \circ f_{n-1} - \delta_{n-2} \circ d_{n-1}^C = \text{id}_{C_{n-1}} \quad (4)$$

Daraus folgt

$$\gamma \text{ ist eine Kettenabbildung} \quad (1')$$

$$\text{id}_D \simeq f \circ g \text{ via } \alpha \quad (3')$$

$$\gamma \circ f \simeq \text{id}_C \text{ via } \delta \quad (4')$$

Es folgt, dass  $\gamma$  eine Kettenabbildung ist,  $\text{id}_D \simeq f \circ g$  via  $\alpha$  und  $\gamma \circ f \simeq \text{id}_C$  via  $\delta$ . Damit ist  $f$  eine Kettenhomotopieäquivalenz mit Kettenhomotopieinversen  $\gamma$ . Gelten umgekehrt (1'), (3') und (4'), so setzt man  $\hat{\delta} := \delta + \gamma \circ f - \delta \gamma f$  und  $\beta := \alpha f \gamma + \alpha^2 f + f \delta^2$  und

$$S := \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \hat{\delta} \end{pmatrix}$$

eine Kettenkontraktion für  $\text{Keg}(f)$ .  $\square$

**BEWEIS** (von Satz 5.7 zweite Implikation): Ist  $H_n(f)$  ein Isomorphismus, so ist  $\text{Keg}(f)$  azyklisch. Die direkte Summen von projektiven Moduln ist wieder projektiv sind, sind die Kettenabbildungen von  $\text{Keg}(f)$  projektiv, falls die von  $C_*$  und  $D_*$  projektiv sind. Daher ist  $\text{Keg}(f)$  kettenkontraktibel und  $f$  eine Kettenhomotopieäquivalenz.  $\square$

**5.11 Korollar.** Sei  $\mathcal{U}$  eine offene Überdeckung von  $X$ . Dann ist die Inklusion  $C_*^{\mathcal{U}}(X, A) \rightarrow C_*(X, A)$  eine Kettenhomotopieäquivalenz.  $\square$

**5.12 Korollar.** Singuläre Kohomologie erfüllt das Ausschneidungsaxiom.

**BEWEIS:** Für eine offene Überdeckung  $\mathcal{U}$  von  $X$  sei  $C_{\mathcal{U}}^*(X, A; V) := \text{Hom}(C_*^{\mathcal{U}}(X, A), V)$ . Da die Inklusion  $i: C_*^{\mathcal{U}}(X, A) \rightarrow C_*(X, A)$  eine Kettenhomotopieäquivalenz ist, ist auch  $i^*: C^*(X, A; V) \rightarrow C_{\mathcal{U}}^*(X, A; V)$  eine Kokettenhomotopieäquivalenz. Nun genauso wie für Homologie.  $\square$

## 6 Das Cap-Produkt und die Poincaré-Dualitätsabbildung

**6.1 Definition.** Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $R$  ein kommutativer Ring. Wir definieren das *Cap-Produkt* ( $\frown$ -Produkt)

Revision 6

$$\frown: C^p(X; R) \otimes_R C_{p+q}(X; R) \longrightarrow C_q(X; R)$$

durch  $\alpha \frown \sigma := (-1)^{pq} \cdot \alpha(\sigma|_{[q, \dots, p+q]}) \sigma|_{[0, \dots, p]}$  für  $\alpha \in C^p(X; R)$  und  $\sigma: |\Delta^{p+q}| \rightarrow X$ .

**6.2 Lemma.** Es gilt  $d_q(\alpha \frown \sigma) = d^p \alpha \frown \sigma + (-1)^p \alpha \frown d_{p+q} \sigma$

**BEWEIS:** Sei  $n := p + q$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} d_q(\alpha \frown \sigma) &= (-1)^{pq} \cdot \alpha(\sigma|_{[q, \dots, p+q]}) d_q \sigma|_{[0, \dots, p]} \\ &= \sum_{i=0}^q (-1)^{pq+i} \alpha(\sigma|_{[q, \dots, p+q]}) \sigma|_{[0, \dots, \check{i}, \dots, q]} \end{aligned}$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} d^p(\alpha) \frown \sigma &= (-1)^{(p+1)(q-1)} \cdot (d^p \alpha)(\sigma|_{[q-1, \dots, n]}) \sigma|_{[0, \dots, q-1]} \\ &= \underbrace{(-1)^{pq+p+q+1+1+p}}_{=(-1)^{pq+q}} \cdot \alpha(d_{p-1}(\sigma|_{[q-1, \dots, n]}) \sigma|_{[0, \dots, q-1]}) \\ &= \sum_{i=q-1}^n (-1)^{pq+q+i+(q+1)} \cdot \alpha(\sigma|_{[q-1, \dots, \check{i}, \dots, n]}) \sigma|_{[0, \dots, q-1]} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \alpha \frown d_{p+q}(\sigma) &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \alpha \frown \sigma|_{[0, \dots, \check{i}, \dots, n]} \\ &= \sum_{i=0}^{q-1} (-1)^{i+p(q-1)} \alpha(\sigma|_{[q, \dots, n]}) \sigma|_{[0, \dots, \check{i}, \dots, q]} \\ &\quad + \sum_{i=q}^n (-1)^{i+p(q-1)} \alpha(\sigma|_{[q-1, \dots, \check{i}, \dots, n]}) \sigma|_{[0, \dots, q-1]} \end{aligned}$$

Die Vorzeichen werden schon passen ...

□

**6.3 Lemma.** Sei  $A \subseteq X$ . Das  $\frown$ -Produkt auf  $C^*$  induziert folgende  $\frown$ -Produkte in  $H^*$

$$\begin{aligned} H^p(X; R) \otimes_R H_n(X; R) &\longrightarrow H_q(X; R) \\ H^p(X, A; R) \otimes_R H_n(X, A; R) &\longrightarrow H_q(X; R) \\ H^p(X; R) \otimes_R H_n(X, A; R) &\longrightarrow H_q(X, A; R) \end{aligned}$$

**BEWEIS:** Genauso wie beim  $\smile$ -Produkt.

□

**6.4 Bemerkung.**

► Sind  $A, B \subseteq X$  offen, so erhalten wir auch ein  $\frown$ -Produkt

$$H^p(X, A; R) \otimes_R H_n(X, A \cup B; R) \longrightarrow H_q(X, B; R)$$

► Sei  $\epsilon: H_0(X; R) \rightarrow R$  die *Augmentation*, also  $\epsilon(\sum_i r_i \sigma_i) = \sum_i r_i$ . Dann ist

$$\epsilon(\xi \frown x) = \xi(x)$$

für  $\xi \in H^p(X; R)$  und  $x \in H_p(X; R)$ .

**6.5 Lemma.** Für  $f: X \rightarrow Y$  stetig gilt  $\xi \frown f_*(x) = f_*(f^*\xi \frown x)$  für  $\xi \in H^p(Y; R)$  und  $x \in H_{p+q}(X; R)$ .

**6.6 Lemma.** Für  $\xi \in H^p(X; R)$  und  $\eta \in H^q(X; R)$ ,  $x \in H_{p+q+r}(X; R)$  gilt

$$(\xi \smile \eta) \frown x = \xi \frown (\eta \frown x)$$

**BEWEIS:** Sei  $\alpha \in C^p(X)$ ,  $\beta \in C^q(X)$  und  $\sigma: |\Delta^{p+q+r}| \rightarrow X$  ist

$$\begin{aligned} (\alpha \smile \beta) \frown \sigma &= (-1)^{(p+q)r} \cdot (\alpha \smile \beta)(\sigma|_{[r, \dots, n]})\sigma|_{[0, \dots, r]} \\ &= (-1)^{p r + q r + p q} \cdot \alpha(\sigma|_{[r, \dots, r+p]})\beta(\sigma|_{[r+q, \dots, n]})\sigma|_{[0, \dots, r]} \end{aligned}$$

Für die andere Seite der Formel gilt

$$\begin{aligned} \alpha \frown (\beta \frown \sigma) &= (-1)^{q(r+p)} \cdot \alpha \frown (\beta(\sigma|_{[r+q, \dots, n]})\sigma|_{[0, \dots, r+p]}) \\ &= (-1)^{q r + q p + r p} \cdot \alpha(\sigma|_{[r, \dots, r+p]})\beta(\sigma|_{[r+p, \dots, n]})\sigma|_{[0, \dots, r]} \end{aligned}$$

Damit folgt die Gleichheit. □

Ab jetzt:  $R$  kommutativ!

**6.7 Erinnerung.** Sei  $M$  eine  $R$ -orientierbare zusammenhängende geschlossene  $n$ -Mannigfaltigkeit. Dann ist  $H_n(M; R) \cong R$ .<sup>2</sup> Ein Erzeuger von  $H_n(M; R)$  heißt *Fundamentalklasse*. Jeder solcher hat die Eigenschaft, dass  $\mu|_x \in H_n(M, M \setminus \{x\}; R) \cong R$  ein Erzeuger ist. Die Wahl einer solchen Fundamentalklasse entspricht genau der Wahl einer  $R$ -Orientierung für  $M$ . Für  $R = \mathbb{F}_2$  ist jede  $n$ -Mannigfaltigkeit  $\mathbb{F}_2$ -orientierbar.  $M$  ist genau dann nicht  $R$ -orientierbar, wenn  $H_n(M; R) = 0$ .

**6.8 Satz** (DUALITÄTSSATZ VON POINCARÉ FÜR GESCHLOSSENE MANNIGFALTIGKEITEN). Sei  $M$  eine geschlossene zusammenhängende  $n$ -Mannigfaltigkeit und  $\mu \in H_n(M; R)$  eine Fundamentalklasse. Dann ist  $\frown \mu: H^p(M; R) \rightarrow H_{n-p}(M; R)$  ein Isomorphismus.

**6.9 Bemerkung.** Zum Beweis des Satzes werden wir eine Überdeckung von  $M$  durch offene Mengen, die homöomorph zu  $\mathbb{R}^n$  sind, und ein Mayer-Vietoris-Argument benutzen. Dazu werden wir die Aussage zunächst so verallgemeinern, dass sie auch für offene Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  richtig ist.

**6.10 Bemerkung.** Ist  $K$  ein Körper, so induziert die Paarung

$$\begin{aligned} C^*(X; K) \otimes C_*(X; K) &\longrightarrow K \\ \alpha \otimes a &\longmapsto \alpha(a) \end{aligned}$$

einen Isomorphismus  $H^n(X; K) \cong \text{Hom}_K(H_n(X; K), K)$ . Dies folgt einerseits aus dem universellen Koeffizienten-Theorem und andererseits aus Aufgabe 2 von Blatt 2.

<sup>2</sup> das sieht man zB. mit der Paarfolge

**6.11 Beispiel.** Es gilt

$$H^*(\mathbb{RP}^n; \mathbb{F}_2) = \begin{cases} \mathbb{F}_2 & \text{falls } * = 0, \dots, n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

**6.12 Bemerkung.** Ist  $H_{n-1}(X) = 0$ , so induziert die Paarung  $C^n(X) \otimes C_n(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $\alpha \otimes a \mapsto \alpha(a)$  einen Isomorphismus  $H^n(X) \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_n(X), \mathbb{Z})$ . Dies folgt auch wieder entweder aus universellen Koeffizienten-Theorem oder aus Aufgabe 3 von Blatt 3.

**6.13 Beispiel.** Es gilt

$$H^*(\mathbb{CP}^n; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } * = 0, 2, \dots, 2n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

**6.14 Satz.** Es gibt Isomorphismen von graduierten Ringen:

$$(i) \quad H^*(\mathbb{RP}^n, \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[\xi] / \xi^{n+1} = 0 \text{ mit } |\xi| = 1.$$

$$(ii) \quad H^*(\mathbb{CP}^n, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[\eta] / \eta^{n+1} = 0 \text{ mit } |\eta| = 2.$$

**BEWEIS:** Wir wissen schon, dass es solche Isomorphismen von graduierten Moduln gibt. Es bleibt das  $\smile$ -Produkt zu verstehen. Für  $n = 0, 1$  ist nichts zu zeigen. Per Induktion nehmen wir an, dass  $H^*(\mathbb{RP}^{n-1}; \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[\xi'] / (\xi')^n = 0$ , wobei  $\xi' := i^*(\xi)$  für  $i: \mathbb{RP}^{n-1} \rightarrow \mathbb{RP}^n$  die Inklusion ist und  $\xi \in H^1(\mathbb{RP}^n; \mathbb{F}_2)$  ein Erzeuger ist. Da  $i^*$  mit dem  $\smile$ -Produkt verträglich ist und für  $0 \leq * \leq n-1$  ein Isomorphismus ist, müssen wir nur noch zeigen, dass  $\xi^n \in H^n(\mathbb{RP}^n, \mathbb{F}_2)$  ein Erzeuger ist. Sei  $\mu \in H_n(\mathbb{RP}^n, \mathbb{F}_2)$  eine Fundamentalklasse. Wir müssen zeigen  $\xi^n(\mu) = \pm 1$ . Nach Induktionsannahme ist  $\xi^{n-1}$  ein Erzeuger von  $H^{n-1}(\mathbb{RP}^n; \mathbb{F}_2)$ . Nach Poincaré-Dualität ist  $\xi^{n-1} \smile \mu$  ein Erzeuger von  $H_1(\mathbb{RP}^n, \mathbb{F}_2)$ . Da  $\xi$  ein Erzeuger von  $H^1(\mathbb{RP}^n, \mathbb{F}_2)$  ist, ist also  $\xi(\xi^{n-1} \smile \mu) = \pm 1$ . Daher ist

$$\xi^n(\mu) = \epsilon(\xi^n \smile \mu) = \epsilon(\xi \smile (\xi^{n-1} \smile \mu)) = \xi(\xi^{n-1} \smile \mu) = \pm 1 \quad \square$$

**6.15 Satz.** Sei  $M$  eine geschlossene Mannigfaltigkeit,  $\dim M = n = 2d + 1$  ungerade. Sei  $M$  weiter homotopieäquivalent zu einem endlichen CW-Komplex.<sup>3</sup> Dann ist  $\chi_M = 0$ .

**BEWEIS:** Ohne Einschränkungen können wir annehmen, dass  $M$  zusammenhängend ist, da die Euler-Charakteristik additiv ist. Es ist nach Poincaré-Dualität

$$\chi_M = \sum_{k=0}^n (-1)^k \dim_{\mathbb{F}_2} H_k(M; \mathbb{F}_2) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \dim_{\mathbb{F}_2} H^{n-k}(M; \mathbb{F}_2)$$

<sup>3</sup> Dies ist keine Einschränkung, siehe zB. [Hat02, Cor. A.12]; die Umkehrung ist aber nicht richtig, wie Aufgabe 4 von Blatt 5 zeigt

Da  $M$  homotopieäquivalent zu einem CW-Komplex ist, ist  $\dim_{\mathbb{F}_2} H_k(M; \mathbb{F}_2) < \infty$  und insbesondere  $\dim_{\mathbb{F}_2} H_k(M; \mathbb{F}_2) = \dim_{\mathbb{F}_2} \operatorname{Hom}_{\mathbb{F}_2}(H_k(M; \mathbb{F}_2), \mathbb{F}_2) = \dim_{\mathbb{F}_2} H^k(M; \mathbb{F}_2)$  ist, folgt

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \dim_{\mathbb{F}_2} H_{n-k}(M; \mathbb{F}_2) \\
 &= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \dim_{\mathbb{F}_2} H_k(M; \mathbb{F}_2) \\
 &= - \sum_{k=0}^n (-1)^k \dim_{\mathbb{F}_2} H_k(M; \mathbb{F}_2) \\
 &= -\chi_M
 \end{aligned}$$

□



## 7 Kohomologie mit kompaktem Träger

**7.1 Bemerkung.** Am Beweis der Poincaré-Dualität hindern uns momentan noch folgende Probleme, die wir in diesem Kapitel durch eine Abwandlung von Kohomologie „umschiffen“ wollen:

- ▶ Für  $n > 0$  ist  $H^{n-*}(\mathbb{R}^n) \not\cong H_*(\mathbb{R}^n)$
- ▶ Es gibt keine Fundamentalklasse in  $H_n(\mathbb{R}^n)$ .

**7.2 Erinnerung.** Sei  $M$  eine (nicht notwendig kompakte)  $n$ -Mannigfaltigkeit und  $K \subseteq M$  eine kompakte Teilmenge. Dann gilt nach Lemma 16.13 aus Topologie I.:

- (i) Ist  $(\mu_x)_{x \in M}$  eine  $\mathbb{R}$ -Orientierung von  $M$ , so gibt es eine eindeutige Orientierungsklasse  $\mu_K \in H_n(M, M \setminus K; \mathbb{R})$  mit

$$\mu_K|_x = \mu_x \in H_n(M, M \setminus \{x\}; \mathbb{R})$$

für alle  $x \in K$ .

- (ii)  $H_l(M, M \setminus K; \mathbb{R}) = 0$  für  $l > n$ .

**7.3 Beispiel.** Sei  $B = B_r(x_0)$  ein kompakter Ball im  $\mathbb{R}^n$ . Dann ist  $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$  und jeder Erzeuger  $\mu_B \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B; \mathbb{R})$  ist eine Fundamentalklasse über  $B$ , also ist jede Einschränkung  $\mu_B|_x \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\}; \mathbb{R})$  ein Erzeuger für  $x \in B$ .

**7.4 Lemma.** Sei  $B \subseteq \mathbb{R}^n$  ein kompakter Ball und  $\mu_B \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B; \mathbb{R})$  ein Erzeuger. Dann ist

$$\cap \mu_B : H^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B; \mathbb{R}) \longrightarrow H_{n-k}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$$

ein Isomorphismus.

**BEWEIS:** Es genügt  $k = n$  zu betrachten, denn andernfalls sind beide Moduln trivial. Da die Auswertungsabbildung

$$H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B; \mathbb{R}) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B; \mathbb{R}), \mathbb{R})$$

immer surjektiv ist nach Satz 2.3, gibt es  $\xi \in H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B; \mathbb{R})$  mit  $\xi(\mu_B) = 1$ . Also ist  $e(\xi \cap \mu_B) = 1$  (siehe 6.4). Folglich ist  $\xi \cap \mu_B$  ein Erzeuger von  $H^0(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$  und  $\cap \mu_B$  ein Isomorphismus.  $\square$

**7.5 Definition.** Eine *gerichtete Menge* ist eine Menge  $\Lambda$  zusammen mit einer partiellen Ordnung „ $\leq$ “, sodass es für alle  $\lambda, \lambda' \in \Lambda$  ein  $\mu \in \Lambda$  existiert mit  $\lambda \leq \mu$  und  $\lambda' \leq \mu$ .

**7.6 Beispiel.** Es gibt zahlreiche Beispiele für gerichtete Mengen

- ▶  $(\mathbb{N}, \leq)$ ,  $(\mathbb{Z}, \leq)$ ,  $(\mathbb{Q}, \leq)$  und  $(\mathbb{R}, \leq)$  mit der üblichen Ordnung.
- ▶ Sei  $X$  ein topologischer Raum. Dann ist  $\mathcal{K}(X) = \{K \subseteq X \mid K \text{ kompakt}\}$  gerichtet durch „ $\subseteq$ “.

**7.7 Bemerkung.** Wir können jede gerichtete Menge  $(\Lambda, \leq)$  als eine kleine Kategorie auffassen: Die Menge der Objekte ist  $\Lambda$  und es gibt genau dann einen Morphismus  $i_{\lambda}^{\lambda'} : \lambda \rightarrow \lambda'$ , falls  $\lambda \leq \lambda'$  ist. Andernfalls gibt es keine Morphismen.

**7.8 Definition.** Sei  $(\Lambda, \leq)$  eine gerichtete Menge und  $F: (\Lambda, \leq) \rightarrow R\text{-Mod}$  ein Funktor. Der *gerichtete Kolimes* von  $F$  ist dann definiert als

$$\operatorname{colim}_{\Lambda} F := \coprod_{\lambda \in \Lambda} F(\lambda) / \sim, \quad \begin{array}{l} v \sim F(i_{\lambda'}^{\lambda})(v), \\ \text{für } v \in F(\lambda), \lambda \leq \lambda' \end{array}$$

Für  $\lambda_0 \in \Lambda$  sei  $s_{\lambda_0}: F(\lambda) \rightarrow \operatorname{colim}_{\Lambda} F$  die Komposition von der Inklusion  $F(\lambda) \hookrightarrow \coprod_{\lambda \in \Lambda} F(\lambda)$  mit der Projektion  $\coprod_{\lambda \in \Lambda} F(\lambda) \rightarrow \operatorname{colim}_{\Lambda} F$ . Durch

$$\begin{aligned} r \cdot s_{\lambda}(v) &:= s_{\lambda}(r \cdot v) \quad \text{und} \\ s_{\lambda}(v) + s_{\lambda'}(v') &:= s_{\mu}(F(i_{\lambda}^{\mu})(v) + F(i_{\lambda'}^{\mu})(v')) \end{aligned}$$

für  $\lambda, \lambda' \leq \mu$  erhalten wir eine  $R$ -Modulstruktur auf  $\operatorname{colim}_{\Lambda} F$ . Die Abbildungen sind dann  $R$ -linear.

**7.9 Bemerkung.**

- ▶ Nicht jede kleine Kategorie gehört zu einer gerichteten Menge:
  - (i) Die von der Gruppe  $\mathbb{Z}/2$  erzeugte Kategorie mit einem Objekt und den Gruppenelementen als Morphismen.
  - (ii) Die Kategorie bestehend aus zwei Objekten und keinem Morphismus, der nicht eine Identität ist.
- ▶ Der Kolimes über gerichtete Mengen ist eine Spezialfall des Kolimes über kleine Kategorien aus den Übungen. Insbesondere hat der Kolimes über gerichtete Mengen eine universelle Eigenschaft, die ihn charakterisiert.
- ▶ Sei  $v_{\lambda} \in F(\lambda)$ . Dann gilt  $s_{\lambda}(v_{\lambda}) = 0 \in \operatorname{colim}_{\Lambda} F \iff \exists \lambda': \lambda \leq \lambda', F(i_{\lambda}^{\lambda'})(v_{\lambda}) = 0 \in F(\lambda')$ .

**7.10 Definition.** Sei  $(\Lambda, \leq)$  eine gerichtete Menge.  $\Lambda_0 \subseteq \Lambda$  heißt *kofinal*, falls es zu jedem  $\lambda \in \Lambda$  ein  $\lambda_0 \in \Lambda_0$  gibt mit  $\lambda \leq \lambda_0$ .

**7.11 Lemma.** Sei  $\Lambda_0 \subseteq \Lambda$  kofinal. Dann ist die kanonische Abbildung (induziert von der Inklusion  $\coprod_{\lambda_0 \in \Lambda_0} F(\lambda_0) \hookrightarrow \coprod_{\lambda \in \Lambda} F(\lambda)$ )

$$c: \operatorname{colim}_{\lambda_0 \in \Lambda_0} F(\lambda_0) \longrightarrow \operatorname{colim}_{\lambda \in \Lambda} F(\lambda)$$

ein Isomorphismus.

**BEWEIS:** Surjektivität: Sei  $v \in \operatorname{colim}_{\Lambda} F(\lambda)$ . Wähle  $\lambda \in \Lambda$ ,  $v_{\lambda} \in F(\lambda)$  mit  $s_{\lambda}(v_{\lambda}) = v$ . Da  $\Lambda_0 \subseteq \Lambda$  kofinal ist, gibt es  $\lambda_0 \in \Lambda_0$  mit  $\lambda \leq \lambda_0$ . Dann ist

$$v = s_{\lambda_0}(F(i_{\lambda}^{\lambda_0})(v_{\lambda})) \in \operatorname{im} c$$

Injektivität: Sei  $v \in \ker c$ . Dann existieren  $\lambda_0 \in \Lambda_0$ ,  $v_{\lambda_0} \in F(\lambda_0)$  mit  $v = s_{\lambda_0}(v_{\lambda_0})$ . Da  $v \in \ker c$  ist, gibt es  $\lambda \in \Lambda$  mit  $\lambda_0 \leq \lambda$  und  $F(i_{\lambda_0}^{\lambda})(v_{\lambda_0}) = 0$ . Da  $\Lambda_0 \subseteq \Lambda$  kofinal ist, gibt es  $\lambda'_0 \in \Lambda_0$  mit  $\lambda \leq \lambda'_0$ . Es folgt

$$F(i_{\lambda'_0}^{\lambda})(v_{\lambda_0}) = F(i_{\lambda}^{\lambda'_0} \circ i_{\lambda_0}^{\lambda})(v_{\lambda_0}) = F(i_{\lambda}^{\lambda'_0})\left(\underbrace{F(i_{\lambda_0}^{\lambda})(v_{\lambda_0})}_{=0}\right) = 0$$

Es folgt  $v = 0$  und damit die Behauptung. □

**7.12 Korollar.** Gibt es  $\lambda_\infty \in \Lambda$  mit  $\lambda \leq \lambda_\infty$  für alle  $\lambda \in \Lambda$ , so ist  $\operatorname{colim}_\Lambda F = F(\lambda_\infty)$ .  $\square$

### 7.13 Beispiel.

- ▶ Sei  $\mathcal{P}_{\text{endl}}$  die Menge aller endlichen Teilmengen der Menge  $S$ . Bezüglich  $\subseteq$  ist  $\mathcal{P}_{\text{endl}}$  gerichtet. Sei  $F: (\mathcal{P}_{\text{endl}}, \subseteq) \rightarrow \mathbf{R}\text{-MOD}$  definiert durch  $F(S_0) = R[S_0]$  für  $S_0 \subseteq S$  endlich. Dann ist  $\operatorname{colim}_{\mathcal{P}_{\text{endl}}} F \cong R[S]$  und  $s_{S_0}: R[S_0] \rightarrow R(S)$  ist die von  $S_0 \subseteq S$  induzierte Abbildung.
- ▶ Sei  $F: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}\text{-MOD}$  definiert durch  $F(n) = \mathbb{Z}$  für alle  $n$  und  $F(i_n^{n'}): \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  ist Multiplikation mit  $2^{n'-n}$ . Es ergibt sich also folgendes Bild:

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \dots$$

Dann liefert  $(n, z) \mapsto \frac{z}{2^n}$  eine Abbildung

$$\operatorname{colim} F = \varinjlim \mathbb{Z} / \sim = \mathbb{N} \times \mathbb{Z} / \sim_{(n,z) \sim (n', 2^{n'-n}z), n < n'} \longrightarrow \mathbb{Z}[1/2] = \{a/2^n \mid a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$$

- ▶ Ist  $F$  konstant – also  $F(i_\lambda^{\lambda'}) = \operatorname{id}_{F(\lambda)}$  für alle  $\lambda \leq \lambda'$  – so ist  $\operatorname{colim}_\Lambda F \cong F(\lambda)$  für jedes  $\lambda \in \Lambda$ .
- ▶ Sei  $F(n) := R[\{n, n+1, n+2, \dots\}]$  und  $F(i_n^{n'}): R[\{n, n+1, \dots\}] \rightarrow R[\{n', n'+1, \dots\}]$  definiert durch

$$\sum_{k=n}^{\infty} r_k \cdot k \longmapsto \sum_{k=n'}^{\infty} r_k \cdot k$$

Dann ist  $\operatorname{colim}_{\mathbb{N}} F = 0$ , denn für jedes  $v \in F(n)$  gibt es  $n' > n$  mit  $F(i_n^{n'})(v) = 0$ .

**7.14 Bemerkung.** Sei  $\mathbf{FUN}((\Lambda, \leq), \mathbf{R}\text{-MOD})$  die Kategorie, deren Objekte Funktoren  $F: (\Lambda, \leq) \rightarrow \mathbf{R}\text{-MOD}$  sind und deren Morphismen natürliche Transformationen  $\tau: F \rightarrow G$  sind. Dann ist

$$\operatorname{colim}_\Lambda: \mathbf{FUN}((\Lambda, \leq), \mathbf{R}\text{-MOD}) \longrightarrow \mathbf{R}\text{-MOD}$$

ein Funktor: Ist  $\tau: F \rightarrow G$  eine natürliche Transformation, so induziert  $\varinjlim_{\lambda \in \Lambda} \tau_\lambda: \varinjlim_{\lambda \in \Lambda} F(\lambda) \rightarrow \varinjlim_{\lambda \in \Lambda} G(\lambda)$  eine  $R$ -lineare Abbildung  $\tau_* = \operatorname{colim}_\Lambda \tau: \operatorname{colim}_\Lambda F \rightarrow \operatorname{colim}_\Lambda G$

**7.15 Definition.** Eine Folge  $F \xrightarrow{\tau} F' \xrightarrow{\tau'} F''$  in der Funktorkategorie  $\mathbf{FUN}$  heißt *exakt*, wenn  $F(\lambda) \xrightarrow{\tau_\lambda} F'(\lambda) \xrightarrow{\tau'_\lambda} F''(\lambda)$  exakt ist.

**7.16 Satz (EXAKTHEIT GERICHTETER KOLIMITEN).** Sei  $(\Lambda, \leq)$  eine gerichtete Menge. Ist

$$0 \longrightarrow F \xrightarrow{\tau} F' \xrightarrow{\tau'} F'' \longrightarrow 0$$

exakt in  $\mathbf{FUN}((\Lambda, \leq), \mathbf{R}\text{-MOD})$  so ist auch folgende Sequenz exakt

$$0 \longrightarrow \operatorname{colim}_\Lambda F \xrightarrow{\operatorname{colim}_\Lambda \tau} \operatorname{colim}_\Lambda F' \xrightarrow{\operatorname{colim}_\Lambda \tau'} \operatorname{colim}_\Lambda F'' \longrightarrow 0$$

**BEWEIS:** Seien  $s_\lambda, s'_\lambda, s''_\lambda$  die Strukturabbildungen. Wir zeigen nur, dass  $\tau_* = \operatorname{colim}_\Lambda \tau$  injektiv ist. Für  $v \in \ker(\tau_*)$  wähle  $v_\lambda \in F(\lambda)$  mit  $s_\lambda(v_\lambda) = v$ . Dann ist  $\tau_*(v) = s'_\lambda(\tau_\lambda(v_\lambda))$ . Da  $\tau_*(v) = 0$  ist, gibt es  $\mu \geq \lambda$  mit

$$F'(i_\lambda^\mu)(s'_\lambda(\tau_\lambda(v_\lambda))) = 0$$

Da  $\tau$  eine natürliche Transformation ist, ist

$$0 = F'(i_\lambda^\mu)(\tau_\lambda(v_\lambda)) = \tau_\mu(F(i_\lambda^\mu)(v_\lambda))$$

Da  $\tau_\mu$  injektiv ist, folgt also  $F(i_\lambda^\mu)(v_\lambda) = 0$  und damit ist  $v = s_\lambda(v_\lambda) = 0$ .  $\square$

**7.17 Bemerkung.** Für eine natürliche Transformation  $\tau: F \rightarrow F'$  in  $\text{FUN}((\Lambda, \leq), \mathbf{R}\text{-MOD})$  können wir  $\ker \tau$  und  $\text{coker } \tau \in \text{FUN}((\Lambda, \leq), \mathbf{R}\text{-MOD})$  erklären durch  $\ker \tau(\lambda) = \ker \tau_\lambda$  und  $\text{coker } \tau(\lambda) = \text{coker } \tau_\lambda$ . Mit der Exaktheit vom  $\text{colim}_\Lambda$  folgt insbesondere

$$\text{colim}_\Lambda \ker \tau = \ker \text{colim}_\Lambda \tau \quad \text{und} \quad \text{colim}_\Lambda \text{coker } \tau = \text{coker } \text{colim}_\Lambda \tau$$

**7.18 Korollar.** Sei  $(\Lambda, \leq)$  gerichtet und  $C_*$  ein Funktor von  $(\Lambda, \leq)$  in die Kategorie der Kettenkomplexe und Kettenabbildungen. Dann ist  $H_*(\text{colim}_\Lambda C_*) = \text{colim}_\Lambda H_*(C_*)$ . Die gleiche Aussage gilt für Kokettenkomplexe.

**BEWEIS:** Sei  $d_n^\lambda: C_n(\lambda) \rightarrow C_{n-1}(\lambda)$  die Randabbildung von  $C_*(\lambda)$ . Wir fassen  $d_n$  als natürliche Transformation  $C_n \rightarrow C_{n-1}$  in  $\text{FUN}((\Lambda, \leq), \mathbf{R}\text{-MOD})$  auf. Da  $(\Lambda, \leq)$  gerichtet ist und daher  $\text{colim}_\Lambda$  exakt ist, folgen

$$\ker \left( d_*: \text{colim}_\Lambda C_n \rightarrow \text{colim}_\Lambda C_{n-1} \right) \cong \text{colim}_\Lambda (\ker d_n: C_n \rightarrow C_{n-1})$$

und

$$\underbrace{\text{coker} \left( d_*: \text{colim}_\Lambda C_{n+1} \rightarrow \text{colim}_\Lambda \ker d_n \right)}_{\cong H_n(\text{colim } C_*)} \cong \text{colim}_\Lambda \underbrace{\left( \text{coker } d_{n+1}: C_{n+1} \rightarrow \ker d_n \right)}_{\cong H_n(C_*)} \quad \square$$

**7.19 Definition.** Sei  $X$  ein topologischer Raum. Dann definieren wir die *singuläre Kohomologie von  $X$  mit kompaktem Träger* durch

$$H_c^*(X; \mathbb{R}) := \text{colim}_{K \in \mathcal{K}(X)} H^*(X, X \setminus K; \mathbb{R})$$

**7.20 Beispiel.** Es gilt  $H_c^k(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$  für  $k = 0$  und  $H_c^k(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}) = 0$  sonst.

**BEWEIS:** Die Menge  $\mathcal{B}$  der kompakten Bälle  $B_r(0) \subset \mathbb{R}^n$  ist kofinal in der gerichteten Menge aller kompakten Unterräume von  $\mathbb{R}^n$ . Daher ist nach Lemma 7.4

$$H_c^*(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}) = \text{colim}_{K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)} H^*(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K; \mathbb{R}) \cong \text{colim}_{B \in \mathcal{B}} H^*(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B; \mathbb{R}) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{falls } * = n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \square$$

**7.21 Beispiel.** Ist  $X$  kompakt, so ist  $H_c^*(X) = H^*(X)$ , denn für  $X$  kompakt ist  $X \in \mathcal{K}(X)$  ein maximal, also  $\text{colim}_{K \in \mathcal{K}(X)} H^*(X, X \setminus K) = H^*(X, X \setminus X) = H^*(X)$ .

**7.22 Definition.** Setze  $C_c^*(X) := \text{colim}_{K \in \mathcal{K}(X)} C^*(X, X \setminus K)$

**7.23 Korollar.** Es gilt  $H_c^*(X) = H^*(C_c^*(X))$ , da  $\text{colim}$  mit  $H^*$  vertauscht.  $\square$

**7.24 Lemma.**  $C_c^*(X)$  lässt sich mit dem Unterkomplex von  $C^*(X)$  identifizieren, der aus allen  $\alpha: C^*(X) \rightarrow \mathbb{R}$  besteht, für die es  $K \subseteq X$  kompakt gibt mit  $\alpha(\sigma) = 0$  für  $\sigma: |\Delta^n| \rightarrow X \setminus K$ .

**BEWEIS:** Für  $K \subseteq L$  ist  $C^*(X, X \setminus K) \rightarrow C^*(X, X \setminus L)$  injektiv. Nachdem wir jedes  $C^*(X, X \setminus K)$  mit einem Unterraum von  $C^*(X)$  identifizieren, wird der Kolimes über  $\mathcal{K}(X)$  einfach zur Vereinigung dieser Unterräume.  $\square$

**7.25 Bemerkung.** Sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit mit einer  $R$ -Orientierung. Für  $K \subseteq M$  kompakt sei  $\mu_K \in H_n(M, M \setminus K; R)$  die durch die  $R$ -Orientierung bestimmte (Orientierungs)-Klasse. Für  $K \subseteq L$ ,  $L$  auch kompakt ist dann  $\mu_L|_K = \mu_K$ . Daher kommutiert

$$\begin{array}{ccc} H^k(M, M \setminus K; R) & \xrightarrow{\cap \mu_K} & H_{n-k}(M; R) \\ \downarrow & & \parallel \\ H^k(M, M \setminus L; R) & \xrightarrow{\cap \mu_L} & H_{n-k}(M; R) \end{array}$$

Daher induzieren die  $\cap$ -Produkte mit den  $\mu_K$  eine Abbildung

$$PD_M: H_c^k(M; R) \longrightarrow H_{n-k}(M; R)$$

**7.26 Definition.**  $PD_M$  heißt die *Poincaré-Dualitäts-Abbildung* für  $M$ .

**7.27 Bemerkung.** Ist  $M$  kompakt, so ist  $PD_M = \cap \mu$ , wobei  $\mu$  die durch die Orientierung bestimmte Fundamentalklasse von  $M$  ist.

**7.28 Lemma.** Für  $M = \mathbb{R}^n$  ist die Poincaré-Dualitäts-Abbildung ein Isomorphismus.

**BEWEIS:** Ist  $B \subset \mathbb{R}^n$  ein kompakter Ball, so ist  $\cap \mu_B: H^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B, R) \rightarrow H_{n-k}(\mathbb{R}^n)$  ein Isomorphismus. Da die Menge der kompakten Bälle  $\mathcal{B}$  kofinal in allen kompakten Teilmengen ist, ist auch  $PD_M = \text{colim}_{\mathcal{B}} \cap \mu_B$  ein Isomorphismus.  $\square$

**7.29 Bemerkung.** Für nicht kompakte orientierte Mannigfaltigkeiten lässt sich die Fundamentalklasse in lokal endlicher Homologie definieren:

$$C_n^{\text{lf}}(M) = \left\{ \sum_{\sigma \in S_n(M)} r_\sigma \cdot \sigma \mid \begin{array}{l} \text{für jedes } K \subseteq M \text{ kompakt gibt es nur endlich viele } \sigma: |\Delta^n| \rightarrow M \\ \text{mit } r_\sigma \neq 0 \text{ und } \sigma(|\Delta^n|) \cap K \neq \emptyset \end{array} \right\}$$

## 8 Poincaré-Dualität

**8.1 Lemma.** Seien  $U, V \subseteq X$  offen. Sei  $C^*(X, U + V)$  der Unterkomplex von  $C^*(X)$ , der aus allen  $\varphi: C_*(X) \rightarrow \mathbb{R}$  besteht mit  $\varphi(\sigma) = 0$  für  $\sigma: |\Delta^n| \rightarrow X$  mit  $\text{im}(\sigma) \subseteq U$  oder  $\text{im}(\sigma) \subseteq V$ . Dann induziert die Inklusion  $C^*(X, U \cup V) \rightarrow C^*(X, U + V)$  einen Isomorphismus in Kohomologie.

**BEWEIS:** Sei  $C^*(U + V) := C_*^{[U, V]}(U \cup V)$ . Die Inklusion  $C_*(U + V) \rightarrow C_*(U \cup V)$  ist nach dem Satz über kleine Simplex eine Kettenhomotopieäquivalenz. Sei  $C^*(U + V) = \text{Hom}(C_*(U + V), \mathbb{R})$  der zu  $C_*(U + V)$  duale Kokettenkomplex. Dann ist auch  $C^*(U \cup V) \rightarrow C^*(U + V)$  eine Kokettenhomotopieäquivalenz. Betrachte nun

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C^*(X, U \cup V) & \longrightarrow & C^*(X) & \longrightarrow & C^*(U \cup V) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \parallel & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & C^*(X, U + V) & \longrightarrow & C^*(X) & \longrightarrow & C^*(U + V) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Die zweite und dritte Abbildung induzieren jeweils Isomorphismen in Kohomologie. Da das Diagramm kommutiert erhalten wir eine lange exakte Leiter mit den langen exakten Folgen in Kohomologie. Das 5er-Lemma impliziert nun, dass auch die erste Abbildungen einen Isomorphismus in Kohomologie induziert.  $\square$

**8.2 Satz.** Seien  $U, V \subseteq X$  offen. Dann gibt es eine lange exakte Mayer-Vietoris-Folge

$$\dots \longrightarrow H^n(X, U + V) \longrightarrow H^n(X, U) \oplus H^n(X, V) \longrightarrow H^n(X, U \cap V) \xrightarrow{\partial} H^{n+1}(X, U \cup V) \longrightarrow \dots$$

Der Verbindungshomomorphismus  $\partial$  kann wie folgt beschrieben werden: Sei  $\alpha \in C^n(X, U \cap V)$  mit  $d^n(\alpha) = 0$ . Dann lässt sich  $\alpha$  schreiben als  $\alpha = \alpha_U + \alpha_V$  mit  $\alpha_U \in C^n(X, U)$  und  $\alpha_V \in C^n(X, V)$  und es ist  $\partial[\alpha] = [d^n \alpha_U] = [d^n \alpha_V]$

**BEWEIS:** Benutze die kurze exakte Folge von Kokettenkomplexen:

$$0 \longrightarrow C^*(X, U + V) \longrightarrow C^*(X, U) \oplus C^*(X, V) \longrightarrow C^*(X, U \cup V) \longrightarrow 0$$

wobei die erste Abbildung  $\alpha \mapsto (\alpha, \alpha)$  und die zweite  $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha - \beta$  ist.

Es ist  $\alpha + \beta = 0$  in  $C^*(X, U \cap V) \subseteq C^*(X)$  für  $\alpha \in C^*(X, U) \subseteq C^*(X)$ ,  $\beta \in C^*(X, V) \subseteq C^*(X)$ . Also ist  $\alpha(\sigma) = -\beta(\sigma)$  für alle  $\sigma \subseteq X$ .

Die zugehörigen lange exakte Folge ist die gesuchte Mayer-Vietoris-Folge.  $\square$

**8.3 Satz.** Seien  $U, V \subseteq X$  offen. Sei  $X$  lokalkompakt und Hausdorffsch. Dann gibt es eine lange exakte Mayer-Vietoris-Folge

$$\dots \longrightarrow H_c^n(U \cap V) \longrightarrow H_c^n(U) \oplus H_c^n(V) \longrightarrow H_c^n(U \cup V) \xrightarrow{\partial} H_c^{n+1}(U \cap V) \longrightarrow \dots$$

**BEWEIS:** Seien  $K \subseteq U$ ,  $L \subseteq V$  kompakt. Es ist

$$\begin{aligned} (X \setminus K) \cup (X \setminus L) &= X \setminus (K \cap L) \\ (X \setminus K) \cap (X \setminus L) &= X \setminus (K \cup L) \end{aligned}$$

Wir erhalten eine lange exakte Folge

$$\dots \longrightarrow H^n(X, X \setminus (K \cap L)) \longrightarrow H^n(X, X \setminus K) \oplus H^n(X, X \setminus L) \longrightarrow H^n(X, X \setminus (K \cup L)) \longrightarrow \dots$$

Mit Ausschneidung ergibt sich eine lange exakte Folge

$$\dots \rightarrow H^n(U \cap V, U \cap V \setminus K \cap L) \rightarrow H^k(U, U \setminus K) \oplus H^k(C, V \setminus L) \rightarrow H^k(U \cup V, U \cup V \setminus K \cup L) \rightarrow \dots$$

Sei  $\mathcal{K}$  die gerichtete Menge der kompakten Unterräume von  $U$ ,  $\mathcal{L}$  die von  $V$ . Sei  $\Lambda = \mathcal{K} \times \mathcal{L}$  das Produkt der gerichteten Mengen  $\mathcal{K}$  und  $\mathcal{L}$ . Da  $\text{colim}_\Lambda$  exakt ist, erhalten wir auch im Kolimes eine lange exakte Folge. Dies ist die gesuchte lange exakte Folge. (Da  $X$  lokalkompakt und Hausdorffsch ist, ist jeder kompakter Teilraum  $M$  von  $U \cup V$  die Vereinigung von  $M = K \cup L$  mit  $(K, L) \in \Lambda$ .)  $\square$

**Erinnerung:** Seien  $U, V \subseteq X$  offen. Dann ist  $H_*(U \cup V) = H_*(C_*(U + V))$  und es gibt eine lange exakte Folge

$$\dots \longrightarrow H_n(U \cap V) \longrightarrow H_n(U) \oplus H_n(C) \longrightarrow H_n(U \cup V) \xrightarrow{\partial} \dots$$

Der Verbindungshomomorphismus kann wie folgt beschrieben werden: Sei  $x \in C_n(U + V)$  mit  $d_n x = 0$ . Dann ist  $x = x_U - x_V$  mit  $x_U \in C_n(U)$ ,  $x_V \in C_n(V)$  und es ist  $\partial[x] = [d_n x_U] = [d_n x_V]$ .

**BEWEIS:** Benutze

$$0 \longrightarrow C_*(U \cap V) \longrightarrow C_*(U) \oplus C_*(V) \longrightarrow C_*(U + V) \longrightarrow 0 \quad \square$$

**8.4 Proposition.** Seien  $U, V$  offene Teilmengen einer  $\mathbb{R}$ -orientierten  $n$ -Mannigfaltigkeit  $M$ . Dann bilden die Poincaré-Dualitätsabbildungen zusammen mit der Mayer-Vietorisfolge ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H_c^k(U \cap V) & \longrightarrow & H_c^k(U) \oplus H_c^k(V) & \longrightarrow & H_c^k(U \cup V) \xrightarrow{\partial} \dots \\ & & \downarrow \text{PD}_{U \cap V} & & \downarrow \text{PD}_U \oplus \text{PD}_V & & \downarrow \text{PD}_{U \cup V} \\ \dots & \longrightarrow & H_{n-k}(U \cap V) & \longrightarrow & H_{n-k}(U) \oplus H_{n-k}(V) & \longrightarrow & H_{n-k}(U \cup V) \longrightarrow \dots \end{array}$$

**BEWEIS:** Ohne Einschränkungen sei  $M = U \cup V$ . Die Kommutativität der ersten beiden folgt aus der Natürlichkeit des  $\smile$ -Produktes. Da  $\partial: H_c^k(M) \rightarrow H_c^{k+1}(U \cap V)$  der Kolimes der

$$H^k(M, M \setminus (K \cup L)) \xrightarrow{\partial} H^{k+1}(M, M \setminus (K \cap L))$$

für  $K \subseteq U, L \subseteq V$  kompakt ist, genügt es für die Kommutativität des dritten Quadrats die Kommutativität von folgendem Diagramm nachzurechnen.

$$\begin{array}{ccccc} H^k(M, (M \setminus K) \cap (M \setminus L)) & \xrightarrow{\partial} & H^{k+1}(M, (M \setminus K) \cup (M \setminus L)) & & \\ \parallel & & \parallel & & \\ H^k(M, M \setminus (K \cup L)) & \xrightarrow{\partial} & H^{k+1}(M, M \setminus (K \cap L)) & \xrightarrow{\cong} & H^{k+1}(U \cap V, U \cap V \setminus (K \cap L)) \\ \downarrow \smile_{K \cup L} & & & & \downarrow \smile_{K \cap L} \\ H_{n-k}(M) & \xrightarrow{\partial} & & & H_{n-k-1}(U \cap V) \end{array}$$

Sei  $\alpha \in C^k(M, M \setminus (K \cup L))$  mit  $d^k \alpha = 0$ ,  $\alpha = \alpha_K - \alpha_L$  mit  $\alpha_K \in C^k(M, M \setminus K)$  und  $\alpha_L \in C^k(M, M \setminus L)$ . Dann ist  $\partial[\alpha] = [d^k \alpha_K] = [d^k \alpha_L]$ . Wegen Ausschneidung finden wir  $x_K \in C_n(V \setminus K)$ ,  $x_L \in$

$$U \cup V = U \setminus L \cup V \setminus K \cup U \cap V$$

$C_n(U \setminus L)$  und  $x_{\cap} C_n(U \cap V)$  mit  $\mu_{K \cup L} = [x_{\cap} + x_K + x_L]$ . Es ist dann auch  $\mu_{K \cap L} = [x_{\cap}]$  und daher ist das Bild von  $\partial[\alpha]$  in  $H_{n-k-1}(U \cap V)$  gegeben durch  $[d^k \alpha_K \cap x_{\cap}]$ . Es ist andererseits

$$\begin{aligned} [\alpha] \cap \mu_{K \cup L} &= [(\alpha_K - \alpha_L) \cap (x_{\cap} + x_K + x_L)] \\ &= [\alpha_K \cap x_{\cap} + \underbrace{\alpha_K \cap x_K}_{=0} + \alpha_K \cap x_L - \alpha_L \cap x_{\cap} - \alpha_L \cap x_K - \underbrace{\alpha_L \cap x_L}_{=0}] \\ &= [\underbrace{\alpha_K \cap x_L}_{\in C_k(U)} + \underbrace{(\alpha_K \cap x_{\cap} - \alpha_L \cap x_{\cap})}_{\in C_k(U \cap V)} - \underbrace{\alpha_L \cap x_K}_{\in C_k(V)}] \end{aligned}$$

Damit haben wir  $\partial([\alpha] \cap \mu_{K \cup L}) = [d_{n-k}(\alpha_K \cap x_L)] = \left[ \underbrace{d^k \alpha_K \cap x_L}_{=+d^k \alpha_L \cap x_L=0} + (-1)^k \alpha_K \cap d_n x_L \right]$ . Mit

$d_n x_L = -d_n x_K - d_n x_{\cap}$  folgt

$$\begin{aligned} \partial([\alpha] \cap \mu_{K \cup L}) &= (-1)^{k+1} \left[ \underbrace{\alpha_K \cap d_n x_K}_{=0} + \alpha_K \cap d_n x_{\cap} \right] \\ &= (-1)^{k+1} [\alpha_K \cap d_n x_{\cap}] \end{aligned}$$

Wegen  $d_{n-k}(\alpha_K \cap x_{\cap}) = d^k \alpha_K \cap x_{\cap} + (-1)^k \alpha_K \cap d_n x_{\cap}$  folgt  $[\alpha_K \cap d_n x_{\cap}] = (-1)^{k+1} [d^k \alpha_K \cap x_{\cap}]$ . Also ist  $\partial([\alpha] \cap \mu_{K \cup L}) = [d^k \alpha_K \cap x_{\cap}]$ .  $\square$

**8.5 Satz.** Sei  $M$  eine  $\mathbb{R}$ -orientierbare  $n$ -Mannigfaltigkeit. Dann ist  $PD_M: H_c^k(M) \rightarrow H_{n-k}(M)$  ein Isomorphismus. Insbesondere ist, falls  $M$  sogar geschlossen ist,  $\cap \mu_M: H^k(M) \rightarrow H_{n-k}(M)$  ein Isomorphismus.

#### Referenz

**BEWEIS:** Für  $U \cong \mathbb{R}^n$  haben wir die Behauptung schon bewiesen. Da offene konvexe Unterräume im  $\mathbb{R}^n$  homöomorph zum  $\mathbb{R}^n$  sind, ist die Behauptung auch für solche richtig. Schnitte offener konvexer Teilräume des  $\mathbb{R}^n$  wieder offen und konvex sind, folgt mit den Mayer-Vietoris-Folgen die Behauptung für endliche Vereinigungen offener und konvexer Unterräume des  $\mathbb{R}^n$ . Mit Lemma 8.6 folgt die Behauptung auch für abzählbare Vereinigungen von offenen konvexen Unterräumen im  $\mathbb{R}^n$ . Da jeder offene Unterraum des  $\mathbb{R}^n$  die abzählbare Vereinigung offener konvexer Unterräume ist, folgt die Behauptung für beliebige Kartengebiete<sup>4</sup> in Mannigfaltigkeiten. Mit der Mayer-Vietoris-Folge folgt die Behauptung für endliche Vereinigungen von Kartengebieten in Mannigfaltigkeiten und mit Lemma 8.6 für abzählbare Vereinigungen von Kartengebieten. Da jede Mannigfaltigkeit die abzählbare Vereinigung von Kartengebieten ist, folgt die Behauptung.  $\square$

**8.6 Lemma.** Sei  $M$  eine  $\mathbb{R}$ -orientierte  $n$ -Mannigfaltigkeit. Seien  $U_1 \subseteq U_2 \subseteq \dots \subseteq M$  offen mit  $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ . Sind alle  $PD_{U_i}$  Isomorphismen, so ist auch  $PD_M$  ein Isomorphismus.

**BEWEIS:** Jeder singuläre Simplex in  $M$  liegt schon in einem  $U_i$ . Das heißt  $C_*(M) = \text{colim}_{i \in \mathbb{N}} C_*(U_i)$  und  $H_*(M) = \text{colim}_{i \in \mathbb{N}} H_*(U_i)$ . Ebenso liegt jede kompakte Teilmenge von  $M$  schon in einem  $U_i$ . Daher ist  $H_c^*(M) = \text{colim}_{i \in \mathbb{N}} H_c^*(U_i)$ . Nun ist  $PD_M = \text{colim}_{i \in \mathbb{N}} PD_{U_i}$  ein Isomorphismus.  $\square$

<sup>4</sup>  $U \subseteq M$  mit  $\varphi: U \xrightarrow{\cong} V \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  offen



## 9 Mannigfaltigkeiten mit Rand

**9.1 Definition.** Eine  $n$ -Mannigfaltigkeit mit Rand  $M$  ist ein topologischer Hausdorffraum, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt und folgende lokale Eigenschaft hat: Zu jedem Punkt  $x \in M$  gibt es eine Umgebung  $U \subseteq M$ , die homöomorph ist zu einer offenen Teilmenge in  $\mathbb{R}^{n-1} \times [0, \infty)$  ist. Die Punkte  $x$ , für die  $U$  homöomorph zu einer offenen Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  gewählt werden kann, heißen *innere Punkte*; alle anderen *Randpunkte*. Wir schreiben  $\mathring{M} \subseteq M$  für die inneren Punkte und  $\partial M := M \setminus \mathring{M}$ .

Revision 9

**9.2 Bemerkung.**  $\mathring{M}$  ist eine  $n$ -Mannigfaltigkeit und  $\partial M$  ist eine  $(n-1)$ -Mannigfaltigkeit.

**9.3 Beispiel.** Sei  $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ . Dann ist  $\partial D^n = S^{n-1}$ . Für  $M \times D^n$  ist  $\partial(M \times D^n) = M \times S^{n-1}$ , wenn  $M$  eine Mannigfaltigkeit ohne Rand ist.

**Frage.** Welche geschlossenen  $n$ -Mannigfaltigkeiten sind Rand einer kompakten  $(n+1)$ -Mannigfaltigkeit?

**9.4 Satz (KRAGENSATZ).** Sei  $M$  eine kompakte Mannigfaltigkeit mit Rand  $\partial M$ . Dann gibt es eine offene Umgebung  $U \subseteq M$  von  $\partial M$  und einem Homöomorphismus  $\varphi: \partial M \times [0, 1] \rightarrow U$  mit  $\varphi(x, 0) = x$ .

**BEWEIS (Skizze):** Sei  $M' := M \cup_{\partial M} (\partial M \times [0, 1])$ . Es genügt einen Homöomorphismus  $M \cong M'$  mit  $x \mapsto (x, 0)$  für  $x \in \partial M$  zu finden. Da  $M$  kompakt ist, gibt es  $\varphi_1, \dots, \varphi_l: \partial M \rightarrow [0, 1]$ , sodass die  $\varphi_i^{-1}((0, 1])$  eine offene Überdeckung von  $\partial M$  bilden und jedes  $V_i$  in einer zu  $\mathbb{R}^{n-1} \times [0, \infty)$  homöomorphen offenen Menge in  $M$  liegt. Nach Normalisierung können wir annehmen, dass  $\varphi_1 + \dots + \varphi_l = 1$  ist. Für  $0 \leq k \leq l$  sei  $\psi_k := \varphi_1 + \dots + \varphi_k$  und

$$M_k := M \cup \{(x, t) \mid x \in \partial M, t \leq \psi_k(x)\}$$

Nun zeigt man  $M_{k-1} \cong M_k$  für  $k = 1, \dots, l$ . □

**9.5 Bemerkung.** Sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit mit Rand. Eine  $R$ -Orientierung von  $M$  ist eine  $R$ -Orientierung von  $\mathring{M}$ . Zu einer  $R$ -Orientierung  $\{\mu_x\}_{x \in \mathring{M}}$  gibt es, falls  $M$  kompakt ist, eine eindeutige Orientierungsklasse  $\mu \in H_n(M, \partial M)$  mit  $\mu|_x = \mu_x$  für alle  $x \in \mathring{M}$ .

**9.6 Lemma.** Sei  $M$  eine  $R$ -orientierbare kompakte Mannigfaltigkeit mit Rand. Dann ist auch  $\partial M$   $R$ -orientierbar.

**BEWEIS:** Sei  $N$  eine Zusammenhangskomponente von  $\partial M$ . Mit  $M$  ist nach dem Kragensatz auch  $N \times [0, 1]$  orientierbar. Nun betrachte einen Teil der Paarfolge zu  $(N \times [0, 1], \partial(N \times [0, 1]))$

$$\begin{array}{ccccccc} H_n(N \times [0, 1]) & \longrightarrow & H_n(N \times [0, 1], N \times \{0, 1\}) & \longrightarrow & H_{n-1}(N \times \{0, 1\}) & \longrightarrow & H_{n-1}(N \times [0, 1]) \\ \text{= } H_n(N) \text{= } 0 & & \neq 0 & & \text{= } H_{n-1}(N) \oplus H_{n-1}(N) \neq 0 & & \end{array}$$

Damit ist  $H_n(N) \neq 0$  und  $N$  ist  $R$ -orientierbar. □

**9.7 Satz (POINCARÉ-DUALITÄT FÜR MANNIGFALTIGKEITEN MIT RAND).** Sei  $M$  eine kompakte  $R$ -orientierbare  $n$ -Mannigfaltigkeit, deren Rand  $\partial M$  die Vereinigung von zwei  $(n-1)$ -Mannigfaltigkeiten  $\partial_0 M$  und  $\partial_1 M$  entlang ihres gemeinsamen Randes

$$\partial(\partial_0 M) = \partial(\partial_1 M) = \partial_0 M \cap \partial_1 M$$

ist. Sei  $\mu \in H_n(M, \partial M)$  eine Orientierungsklasse für  $M$ . Dann erhalten wir einen Isomorphismus

$$\cap \mu: H^k(M, \partial_0 M) \xrightarrow{\cong} H_{n-k}(M, \partial_1 M)$$

**BEWEIS:** Sei zunächst  $\partial_1 M = \emptyset$ , also  $\partial_0 M = \partial M$ . Betrachte

$$\begin{array}{ccc} H_c^k(M \setminus \partial M) = \operatorname{colim}_{K \subseteq M \setminus \partial M, \text{ kpt.}} H^k(M, M \setminus K) & \xrightarrow[\star]{\cong} & H^k(M, \partial M) \\ \downarrow \cong \text{PD}_{M \setminus \partial M} & & \downarrow \cap \mu \\ H_{n-k}(M \setminus \partial M) & \xrightarrow[\text{Kragensatz}]{\cong} & H_{n-k}(M) \end{array}$$

zu  $(\star)$ : Wähle einen Kragen  $\partial M \subseteq U \xrightarrow{\varphi} \partial M \times [0, 1]$  und setze  $K_\varepsilon := M \setminus \varphi(\partial M \times [0, \varepsilon))$ . Dann sind die  $K_\varepsilon$  in der gerichteten Menge aller kompakten Teilmengen von  $M \setminus \partial M$  kofinal, also

$$\operatorname{colim}_{K \subseteq M \setminus \partial M, \text{ kpt.}} H^k(M, M \setminus K) = \operatorname{colim}_{\varepsilon \rightarrow 0} H^k(M, M \setminus K_\varepsilon) \cong H^k(M, \partial M)$$

Für  $\partial_1 M \neq \emptyset$  benutzen wir die Paar- sowie die Tripelfolge:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H^k(M, \partial M) & \longrightarrow & H^k(M, \partial_0 M) & \longrightarrow & H^k(\partial M, \partial_0 M) \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow \cong \cap \mu & & \downarrow \cong \cap \mu & & \downarrow \cong \text{PD}_{\partial M} \\ & & H_{n-k}(M) & \longrightarrow & H_{n-k}(M, \partial_1 M) & \longrightarrow & H_{n-k-1}(\partial_1 M) \longrightarrow \dots \end{array}$$

wobei der Isomorphismus oben rechts durch Ausschneidung und Kragensatz zustande kommt.  $\square$

## 10 Die Signatur

**10.1 Definition.** Sei  $M$  eine  $R$ -orientierte geschlossene  $n$ -Mannigfaltigkeit mit Fundamentalklasse  $\mu_M \in H_n(M; R)$ . Die Abbildung

$$\begin{aligned} \langle \mid \rangle_R : H^k(M) \otimes H^{n-k}(M) &\longrightarrow R \\ \xi \otimes \eta &\longmapsto (\xi \smile \eta)(\mu_M) \end{aligned}$$

heißt die *Schnittform* von  $M$ .

Revision 10

**10.2 Bemerkung.** Eine kurze Begründung des Namens „Schnittform“:

Seien für  $i = 0, 1$   $N_i$  geschlossene  $K$ -orientierte  $k_i$ -Mannigfaltigkeiten mit Fundamentalklasse  $\mu_i \in H_{k_i}(N_i; K)$ . Seien  $f_i : N_i \rightarrow M$  stetige Abbildungen in eine geschlossene  $K$ -orientierte  $(n = k_0 + k_1)$ -Mannigfaltigkeit. Seien  $\xi_i \in H^{n-k_i}$  die zu  $(f_i)_*(\mu_i)$  Poincaré-dualen Kohomologieklassen. Dann „gilt“

$$\langle \xi_1 \mid \xi_2 \rangle = \#f_1(N_1) \cap f_2(N_2)$$

nachdem  $f_1(N_1)$  und  $f_2(N_2)$  in  $M$  in „allgemeiner Lage“ sind und  $\#$  zählt die Schnittpunkte mit Vorzeichen.

**10.3 Lemma.** Es gilt:

(i) Die Schnittform ist bilinear.

(ii)  $\langle \xi \mid \eta \rangle_R = (-1)^{|\xi| \cdot |\eta|} \langle \eta \mid \xi \rangle_R$

**Beweis:** Folgt aus den entsprechenden Eigenschaften des  $\smile$ -Produktes.  $\square$

**10.4 Satz.** Ist  $R = K$  ein Körper, so ist die Schnittform *regulär*, das heißt  $\xi \mapsto (\eta \mapsto \langle \xi \mid \eta \rangle_K)$  definiert einen Isomorphismus  $H^k(M; K) \rightarrow \text{Hom}_K(H^{n-k}(M; K), K)$ .

**Beweis:** Wir haben einen Isomorphismen

$$\begin{aligned} H^k(M; K) &\cong \text{Hom}_K(H_k(M; K), K) & \xi &\longmapsto (x \mapsto \xi(x)) \\ \text{Hom}_K(H_k(M; K), K) &\cong \text{Hom}_K(H^{n-k}(M; K), K) & \varphi &\longmapsto (\eta \mapsto \varphi(\eta \frown \mu)) \end{aligned}$$

Ihre Komposition bildet  $\xi \in H^k(M; K)$  auf die Abbildung

$$\eta \longmapsto \xi(\eta \frown \mu) \stackrel{6.4}{=} \epsilon(\xi \frown (\eta \frown \mu)) = \epsilon((\xi \smile \eta) \frown \mu) = (\xi \smile \eta)(\mu) = \langle \xi \mid \eta \rangle_K$$

ab und es folgt die Behauptung.  $\square$

**10.5 Korollar.** Für  $K$ -orientierbare geschlossene Mannigfaltigkeiten sind die Kohomologiemoduln  $H^*(M; K)$  (und auch die Homologiemoduln  $H_*(M; K)$ ) endlich dimensional.

**Beweis:** Wir benutzen, dass Vektorräume genau dann endlich dimensional sind, wenn sie isomorph sind zu ihrem Bidualraum sind. Wegen

$$H^k(M; K) \cong \text{Hom}_K(H^{n-k}(M; K), K) \cong \text{Hom}_K(\text{Hom}_K(H^k(M; K), K), K)$$

folgt  $\dim_K H^k(M; K) < \infty$ .  $\square$

**10.6 Lemma.** Sei  $\varphi: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  eine symmetrische reguläre Bilinearform auf einem endlich dimensionalen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $V$ . Dann gibt es Unterräume  $V_+$  und  $V_-$  mit  $\varphi|_{V_{\mp} \times V_{\mp}}$  negativ/positiv definit und  $\varphi|_{V_- \times V_+} = 0$  und  $V = V_- \oplus V_+$ . Die Zahlen  $n_- := \dim_{\mathbb{R}} V_-$  und  $n_+ := \dim_{\mathbb{R}} V_+$  hängen nur von  $\varphi$  ab.

**BEWEIS:** Sei  $B$  eine Basis von  $V$  und  $f: V \rightarrow V$  bestimmt durch  $f(b) = \sum_{b' \in B} \varphi(b, b') \cdot b'$ . Dann ist die zugehörige Matrix  $A = (\varphi(b, b'))_{b, b' \in B}$  symmetrisch und  $V$  hat eine Basis aus Eigenvektoren von  $f$ . Sei  $V_- \leq V$  von Eigenvektoren zu negativen Eigenwerten erzeugt und  $V_+ \leq V$  von Eigenvektoren zu positiven Eigenwerten erzeugt. Da  $\varphi$  regulär ist, ist 0 kein Eigenwert von  $f$  und daher ist  $V = V_+ \oplus V_-$ . Seien  $v, v'$  Eigenvektoren mit Eigenwerten  $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$ . Dann ist

$$\begin{aligned} (\lambda')^{-1} \sum \varphi(v, b) \varphi(v', b) &= \varphi\left(v, (\lambda')^{-1} \sum \varphi(v', b) b\right) \\ &= \varphi(v, v') \\ &= \varphi\left(\lambda^{-1} \sum \varphi(v, b) b, v'\right) = \lambda^{-1} \sum \varphi(v, b) \varphi(b, v') \end{aligned}$$

Also ist  $\lambda = \lambda'$  oder  $\varphi(v, v') = 0$ . Für die Eindeutigkeit der Dimensionen sei  $V = W_- \oplus W_+$  eine zweite solche Zerlegung, so gilt  $V_- \cap W_+ = 0$  also  $\dim V_- + \dim W_+ \leq n$ , bzw.  $V_+ \cap W_- = 0$  also  $\dim V_+ + \dim W_- \leq n$ . Mit  $\dim V_- + \dim V_+ = \dim W_- + \dim W_+ = n$  folgt  $\dim V_{\mp} = \dim W_{\mp}$ .  $\square$

**10.7 Definition.** Die *Signatur* von  $\varphi$  ist definiert als  $\text{sig}(\varphi) := n_+ - n_-$ .

**10.8 Korollar.** Es gibt eine Basis  $v_1, \dots, v_{n_-}, w_1, \dots, w_{n_+}$  von  $V$  mit

$$\varphi(v_i, v_j) = -\delta_{ij} \quad , \quad \varphi(w_i, w_j) = \delta_{ij} \quad , \quad \varphi(v_i, w_j) = 0$$

**BEWEIS:** Wähle eine Orthonormalbasis von  $V_-$  bezüglich  $-\varphi$  und eine Orthonormalbasis bezüglich  $\varphi$ .  $\square$

**10.9 Lemma.** Die Signatur von  $\varphi$  ist genau dann 0, wenn es  $L \leq V$  gibt mit  $\varphi|_{L \times L} = 0$  und  $\dim L = \frac{1}{2} \dim V$ .

oder doch Lemma?

**BEWEIS:** Sei  $\text{sig}(\varphi) = 0$ . Dann wählen wir eine Basis  $v_1, \dots, v_l, w_1, \dots, w_l$  wie im Korollar. Dann hat  $L := \langle v_1 + w_1, \dots, v_l + w_l \rangle$  die gesuchte Eigenschaft.

Sei umgekehrt  $L \leq V$  mit  $\varphi|_{L \times L} = 0$  und  $\dim L = \frac{1}{2} \dim V$ . Dann ist  $L \cap V_- = 0$ , also  $\dim L + \dim V_- \leq \dim V$  und genauso  $L \cap V_+ = 0$ , also  $\dim L + \dim V_+ \leq \dim V$ . Damit folgt  $\dim L = \dim V_- = \dim V_+ = \frac{1}{2} \dim V$ .  $\square$

**10.10 Definition.** Sei  $M$  eine  $4k$ -dimensionale geschlossene orientierte Mannigfaltigkeit. Dann ist  $\langle \mid \rangle_{\mathbb{R}}: H^{2k}(M; \mathbb{R}) \otimes H^{2k}(M; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  eine reguläre symmetrische Bilinearform. Wir definieren die *Signatur*  $\text{sig}(M)$  von  $M$  als die Signatur dieser Bilinearform.

**10.11 Bemerkung.**

- Es ist  $H_n(M; \mathbb{R}) \cong H_n(M; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{R}$ . Insbesondere bestimmt jede  $\mathbb{Z}$ -Orientierung von  $M$  eine  $\mathbb{R}$ -Orientierung von  $M$ .
- Für eine orientierte Mannigfaltigkeit  $M$  bezeichnen wir mit  $-M$  die Mannigfaltigkeit  $M$  mit der umgekehrten Orientierung (also  $\mu_{-M} = -\mu_M$ ). Ist  $M$  geschlossen mit  $\dim M = 4k$ , so gilt  $\text{sig}(M) = -\text{sig}(-M)$ .

**10.12 Beispiel.** Sei  $\alpha \in H^2(\mathbb{CP}^{2k})$  ein Erzeuger. Wir wählen die Orientierung  $\mu \in H_{4k}(\mathbb{CP}^{2k})$  für die  $\alpha^{2k}(\mu) = 1$ . Mit dieser Orientierung ist  $\text{sig}(\mathbb{CP}^{2k}) = 1$ .

**10.13 Satz.** Sei  $W$  eine kompakte orientierte Mannigfaltigkeit mit Rand. Falls  $\dim W = 4k + 1$  ist, so gilt  $\text{sig}(\partial W) = 0$ .

**BEWEIS:** Sei  $L := \text{im}(i^*: H^{2k}(W; \mathbb{R}) \hookrightarrow H^{2k}(\partial W; \mathbb{R}))$ . Es gilt

a)  $(i^*\xi \smile i^*\eta)(\mu_{\partial W}) = (i^*(\xi \smile \eta))(\mu_{\partial W}) = (\xi \smile \eta)(i_*\mu_{\partial W}) = 0$ , da  $\mu_{\partial W} = \partial(\mu_{W, \partial W})$ , wobei  $\mu_{W, \partial W} \in H^{4k+1}(W, \partial W)$  die Orientierungsklasse von  $W$  relativ zu  $\partial W$  ist.

b) Zu zeigen:  $\dim L = \frac{1}{2} \dim H^{2k}(\partial W; \mathbb{R})$ .

Betrachte

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & H^{2k}(W) & \xrightarrow{i^*} & H^{2k}(\partial W) & \xrightarrow{\partial} & H^{2k+1}(W, \partial W) \longrightarrow \dots \\
 & & \downarrow \cong \cap \mu_{W, \partial W} & & \downarrow \cong \cap \mu_{\partial W} & & \downarrow \cong \cap \mu_{W, \partial W} \\
 \dots & \longrightarrow & H_{2k+1} & \xrightarrow{\partial} & H_{2k}(\partial W) & \longrightarrow & H_{2k}(W) \longrightarrow \dots
 \end{array}$$

Die Kommutativität benutzt wieder  $\partial(\mu_{W, \partial W}) = \mu_{\partial W}$ . Es gilt


$$\dim \text{im } i^* = \dim \ker i_* = \dim \ker (\text{Hom}(i_*, \mathbb{R})) = \dim \ker i^*$$

Da  $\dim H^{2k}(\partial W) = \dim \ker i^* + \dim \text{im } i^*$ , folgt  $\dim \text{im } i^* = \frac{1}{2} \dim H^{2k}(\partial W)$ .

Mit dem Lemma 10.9 folgt die Behauptung. □

**10.14 Korollar.**  $\mathbb{CP}^{2k}$  ist nicht Rand einer orientierten kompakten Mannigfaltigkeit. □

**10.15 Ausblick.** Nach dem Satz von FREEDMAN<sup>5</sup> werden einfach zusammenhängende geschlossene orientierte 4-Mannigfaltigkeiten bis auf Homöomorphismus durch die ganzzahlige Schnittform auf  $H^2(M; \mathbb{Z})$  und eine  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -wertige Invariante klassifiziert. Jede ganzzahlige reguläre Schnittform wird realisiert.

<sup>5</sup> [https://de.wikipedia.org/wiki/Michael\\_Freedman](https://de.wikipedia.org/wiki/Michael_Freedman) 

## 11 Projektive Auflösungen

**11.1 Definition.** Sei  $M$  ein  $R$ -Modul. Eine *projektive Auflösung* von  $M$  ist eine lange exakte Folge

$$0 \longleftarrow M \xleftarrow{\epsilon} P_0 \xleftarrow{d_0} P_1 \xleftarrow{d_1} P_2 \longleftarrow \dots$$

wobei die  $P_i$  projektive  $R$ -Moduln sind. Wir schreiben oft  $(P_*, \epsilon)$  für eine solche Auflösung, wobei  $P_*$  ein Kettenkomplex projektiver Moduln ist,  $H_k(P_*) = 0$  für  $k > 0$  und  $H_0(P_*) \cong M$  via  $\epsilon$  ist.

Revision 11

**11.2 Satz.** Sei  $M$  ein  $R$ -Modul. Dann gilt

- a)  $M$  besitzt eine projektive Auflösung.
- b) Sind  $(P_*, \epsilon)$  und  $(P'_*, \epsilon')$  zwei projektive Auflösungen, so gibt es eine Kettenhomotopieäquivalenz  $f: P_* \rightarrow P'_*$  mit  $H_0(f) = (\epsilon')^{-1} \circ \epsilon$ .

**BEWEIS:** a) Die  $P_n$  werden induktiv definiert. Sei  $0 \longleftarrow M \xleftarrow{\epsilon} P_0 \xleftarrow{d_0} P_1 \xleftarrow{d_1} P_2 \longleftarrow \dots \xleftarrow{d_n} P_n$  bereits definiert und  $S$  ein Erzeugendensystem von  $\ker d_n$ . Wir setzen  $P_{n+1} := R[S]$  und definieren  $d_{n+1}: P_{n+1} \rightarrow P_n$  als die Fortsetzung der Inklusion  $S \subseteq P_n$  zu einer  $R$ -linearen Abbildung  $R[S] \rightarrow P_n$ .

b) Folgt aus der folgenden Proposition 11.3. □

**11.3 Proposition.** Seien  $A_*$  und  $P_*$  zwei Kettenkomplexe mit

- Die Kettenmoduln von  $P_*$  sind projektiv.
- $H_*(A_*) = 0$  für  $* \geq 1$ .

Dann definiert  $f \mapsto H_0(f)$  einen Isomorphismus zwischen Kettenhomotopieklassen von Kettenabbildungen  $f: P_* \rightarrow A_*$  und  $R$ -linearen Abbildungen  $\varphi: H_0(P_*) \rightarrow H_0(A_*)$ .

**BEWEIS:** Sei  $\varphi: H_0(P_*) \rightarrow H_0(A_*)$  gegeben. Wir konstruieren  $f_n: P_n \rightarrow A_n$  induktiv: Seien entsprechende Abbildungen  $f_0, \dots, f_n$  bereits konstruiert, sodass folgendes Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccccccc} H_0(P_*) & \xleftarrow{\quad} & P_0 & \xleftarrow{\quad} & P_1 & \xleftarrow{\quad} & \dots \xleftarrow{d_n} P_n \xleftarrow{d_{n+1}} P_{n+1} \\ \downarrow \varphi & & \downarrow f_0 & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_n \quad \quad \downarrow f_{n+1} \\ H_0(A_*) & \xleftarrow{\quad} & A_0 & \xleftarrow{d'_1} & A_1 & \xleftarrow{\quad} & \dots \xleftarrow{d'_n} A_n \xleftarrow{d'_{n+1}} A_{n+1} \end{array}$$

Wir erhalten

$$\begin{array}{ccc} & & A_{n+1} \\ & \nearrow & \downarrow d'_{n+1} \\ P_{n+1} & \xrightarrow{f_n \circ d_{n+1}} & \ker d'_n \end{array}$$

Da  $P_{n+1}$  projektiv ist, gibt es  $f_{n+1}: P_{n+1} \rightarrow A_{n+1}$  mit  $d'_{n+1} \circ f_{n+1} = f_n \circ d_{n+1}$ .

Für die Injektivität seien  $f, g: P_* \rightarrow A_*$  Kettenabbildung mit  $H_0(f) = H_0(g)$ . Wir konstruieren eine Kettenhomotopie  $s_n: P_n \rightarrow A_{n+1}$  induktiv. Seien  $s_0, \dots, s_{n-1}$  schon konstruiert mit  $f_i - g_i =$

$s_{i-1}d_i + d_{i+1}s_i$  für  $i = 0, \dots, n$ .

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 H_0(P_*) & \longleftarrow & P_0 & \longleftarrow & P_1 & \longleftarrow & P_2 & \longleftarrow & \dots & \longleftarrow & P_{n-1} & \longleftarrow & P_n & \longleftarrow & P_{n+1} \\
 \downarrow 0 & & \downarrow f_0 - g_0 & \searrow s_0 & \downarrow f_1 - g_1 & \searrow s_1 & \downarrow f_2 - g_2 & & \downarrow f_{n-1} - g_{n-1} & \searrow s_{n-1} & \downarrow f_n - g_n & \searrow s_n & & & \\
 H_0(A_*) & \longleftarrow & A_0 & \longleftarrow & A_1 & \longleftarrow & A_2 & \longleftarrow & \dots & \longleftarrow & A_{n-1} & \longleftarrow & A_n & \longleftarrow & A_{n+1}
 \end{array}$$

Wir erhalten

$$\begin{array}{ccc}
 & & A_{n+1} \\
 & \nearrow & \downarrow d_{n+1} \\
 P_n & \xrightarrow{(f_n - g_n) - s_{n-1}d_n} & \ker d_n
 \end{array}$$

Da  $P_n$  projektiv ist, gibt es  $s_n: P_n \rightarrow A_{n+1}$  mit  $d'_{n+1} \circ s_n = (f_n - g_n) - s_{n-1} \circ d_n$ .  $\square$

**11.4 Definition.** Sei  $R$  ein Ring. Die **projektive Dimension** von  $R$  ist das kleinste  $n$ , sodass jeder  $R$ -Modul eine projektive Auflösung der Länge  $n$  hat, also eine Auflösung der Form

$$M \longleftarrow P_0 \longleftarrow P_1 \longleftarrow P_2 \longleftarrow \dots \longleftarrow P_n \longleftarrow 0$$

Gibt es kein solches  $n \in \mathbb{N}$ , so sagen wir die projektive Dimension von  $R$  ist  $\infty$ .

**11.5 Beispiel.** Ist  $R = K$  ein Körper, so ist jeder  $K$ -Modul, also jeder  $K$ -Vektorraum, frei. Daher ist die projektive Dimension 0.

**11.6 Satz.** Für Hauptidealringe ist die projektive Dimension immer  $\leq 1$ .

**BEWEIS:** Ist  $M$  ein  $R$ -Modul, so gibt es einen freien  $R$ -Modul  $P_0$  mit einer surjektiven Abbildung  $\epsilon: P_0 \rightarrow M$ . Ist  $R$  ein Hauptidealring, so ist  $P_1 := \ker \epsilon$  als Untermodul eines freien Moduls wieder frei und wir erhalten eine projektive Auflösung  $M \leftarrow P_0 \leftarrow P_1$  der Länge 1.  $\square$

Referenz

**11.7 Lemma.** Sei

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} M' \xrightarrow{f'} M'' \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von  $R$ -Moduln. Dann gilt

- a) Sind  $\epsilon: P \rightarrow M$ ,  $\epsilon'': P'' \rightarrow M''$  surjektiv, wobei  $P''$  projektiv, so gibt es  $\epsilon': P \oplus P'' \rightarrow M'$  surjektiv, sodass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & P & \hookrightarrow & P \oplus P'' & \twoheadrightarrow & P'' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \epsilon & & \downarrow \epsilon' & & \downarrow \epsilon'' \\
 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{f} & M' & \xrightarrow{f'} & M'' \longrightarrow 0
 \end{array}$$

- b) Es gibt projektive Auflösungen  $(P_*, \epsilon)$ ,  $(P'_*, \epsilon')$  und  $(P''_*, \epsilon'')$  von  $M$ ,  $M'$  und  $M''$  und eine kurze exakte Folge von Kettenkomplexen

$$0 \longrightarrow P_* \xrightarrow{F} P'_* \xrightarrow{F'} P''_* \longrightarrow 0$$

sodass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc}
 H_0(P_*) & \xrightarrow{H_0(F)} & H_0(P'_*) & \xrightarrow{H_0(F')} & H_0(P''_*) \\
 \cong \downarrow \epsilon & & \cong \downarrow \epsilon' & & \cong \downarrow \epsilon'' \\
 M & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M''
 \end{array}$$

**BEWEIS:** a) Da  $f': M' \rightarrow M''$  surjektiv und  $P''$  projektiv ist, gibt es  $\hat{\epsilon}'': P'' \rightarrow M'$  mit  $\epsilon'' = f' \circ \hat{\epsilon}''$ . Nun können wir  $\epsilon': P \oplus P'' \rightarrow M'$  durch  $\epsilon'(p, p'') := f(\epsilon(p)) + \hat{\epsilon}''(p'')$  definieren. Noch zu zeigen:  $\epsilon'$  ist surjektiv. Sei  $v' \in M'$ . Da  $\epsilon''$  surjektiv ist, gibt es  $x'' \in P''$  mit  $\epsilon''(x'') = f'(v')$ . Dann gilt

$$f'(v' - \hat{\epsilon}''(x'')) = f'(v') - \underbrace{f'(\hat{\epsilon}''(x''))}_{= \epsilon''(x'')} = 0$$

Daher gibt es  $v \in M$  mit  $f(v) = v' - \hat{\epsilon}''(x'')$ . Sei nun  $x \in P$  mit  $\epsilon(x) = v$ . Dann ist  $\epsilon'(x, x'') = v'$ .

b) Wähle projektive Auflösungen  $(P_*, \epsilon)$  von  $M$  und  $(P'', \epsilon'')$  von  $M''$ . Sei  $P'_n := P_n \oplus P''_n$ . Durch induktive Anwendung von a) erhalten wir Abbildungen  $\epsilon'_i: P'_i \rightarrow M'$ ,  $d'_i: P'_i \rightarrow P'_{i-1}$ , sodass  $P_* \rightarrow P'_* \rightarrow P''_*$  eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen ist und das Diagramm aus der Behauptung kommutiert.  $\square$



## 12 Tor und Ext

### Revision 12

**Frage.** Sei  $V$  ein  $\mathbb{Z}$ -Modul und  $V''$  ein  $R$ -Modul. Ist  $H_*(X; V) \cong H_*(X) \otimes V$ ?

$$H_*(V' \otimes_R C_*(X; R)) = H_*(X; V') \cong V' \otimes_R H_*(X; R)$$

Sei  $W$  ein  $R$ -Modul. Gilt dann

$$H^*(X; V) \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_*(X), V) \quad H^*(X; W) \cong \text{Hom}_R(H_*(X; R), W)$$

Genauso für Kettenkomplexe: Sei  $C_*$  ein  $\mathbb{Z}$ -Kettenkomplex und  $C'_*$  ein  $R$ -Kettenkomplex. Gilt dann

$$H_*(V \otimes_{\mathbb{Z}} C_*) \cong V \otimes_{\mathbb{Z}} H_*(C_*) \quad H_*(V' \otimes_R C'_*) \cong V' \otimes_R H_*(C'_*)$$

und wie sieht es hiermit aus:

$$H^*(\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_*, V)) \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_*(C_*), V) \quad H^*(\text{Hom}_R(C'_*, W)) \cong \text{Hom}_R(H_*(C'_*), W)$$

**12.1 Konvention.** Moduln sind – wie gewohnt – immer Linksmoduln, außer wir sprechen explizit von Rechtsmoduln

**12.2 Definition.** Seien  $R$  und  $S$  Ringe. Ein Funktor  $F: R\text{-MOD} \rightarrow S\text{-MOD}$  heißt  $\mathbb{Z}$ -linear, wenn für  $f, g: M \rightarrow M'$  gilt  $F(f + g) = F(f) + F(g)$ .

Ein solcher Funktor heißt *exakt*, wenn er kurze exakte Folgen von  $R$ -Moduln auf kurze exakte Folgen von  $S$ -Moduln abbildet.

**12.3 Bemerkung.** Sei  $C_*$  ein  $R$ -Kettenkomplex. Ist  $F: R\text{-MOD} \rightarrow S\text{-MOD}$  exakt, so gilt

$$\begin{aligned} H_*(F(C_*)) &= F_*(H_*(C_*)) && \text{falls } F \text{ kovariant ist} \\ H^*(F(C_*)) &= F(H^*(C_*)) && \text{falls } F \text{ kontravariant ist} \end{aligned}$$

**12.4 Beispiel.** (i) Sei  $V$  ein  $R$ -Rechtsmodul. Dann erhalten wir einen  $\mathbb{Z}$ -linearen Funktor

$$V \otimes_R: R\text{-MOD} \rightarrow \mathbb{Z}\text{-MOD}$$

(ii) Sei  $W$  ein  $R$ -Modul. Dann erhalten wir einen  $\mathbb{Z}$ -linearen Funktor

$$\text{Hom}_R(-, W): R\text{-MOD} \rightarrow \mathbb{Z}\text{-MOD}$$

(iii) Für  $R = \mathbb{Z}$  und  $V = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  sind weder  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes$  noch  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  exakt:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

wird nach Tensorieren zu

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

und nach Anwenden von  $\text{Hom}(-, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  zu

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xleftarrow{\cong} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longleftarrow 0$$

**12.5 Lemma.** Sei  $V$  ein  $R$ -Rechtsmodul und  $W$  ein  $R$ -Modul. Sei  $0 \rightarrow M \rightarrow M' \rightarrow M'' \rightarrow 0$  eine kurze exakte Folge von  $R$ -Moduln. Dann sind folgende Sequenzen exakt:

- (i)  $V \otimes_R M \longrightarrow V \otimes_R M' \longrightarrow V \otimes_R M'' \longrightarrow 0$
- (ii)  $\text{Hom}_R(M, W) \longleftarrow \text{Hom}_R(M', W) \longleftarrow \text{Hom}_R(M'', W) \longleftarrow 0$

**BEWEIS:** Übungsaufgabe 2 von Blatt 5. □

**12.6 Lemma.** Sei  $V$  ein  $R$ -Rechtsmodul,  $W$  und  $M$   $R$ -Moduln. Sei  $\epsilon: P_* \rightarrow M$  eine projektive Auflösung. Dann sind die (Ko)-Kettenkomplexe  $V \otimes_R P_*$  und  $\text{Hom}_R(P_*, W)$  bis auf (Ko)-Kettenhomotopieäquivalenz unabhängig von der Wahl der Auflösung  $P_*$  und es gilt

$$H_0(V \otimes_R P_*) = V \otimes_R M \quad \text{und} \quad H^0(\text{Hom}_R(P_*, W)) = \text{Hom}_R(M, W)$$

Hier fehlt noch was ... insbesondere kann sich die Nummerierung noch ändern

**12.7 Definition.** Wir setzen

$$\text{Tor}_n^R(V, M) := H_n(V \otimes_R P_*) \quad \text{und} \quad \text{Ext}_R^n(M, W) := H^n(\text{Hom}_R(P_*, W))$$

**12.8 Bemerkung.** Es gilt  $\text{Tor}_0^R(V, M) = V \otimes_R M$  und  $\text{Ext}_R^0(M, W) = \text{Hom}_R(M, W)$ . Unter einigen zusätzlichen Annahmen, haben wir folgende einfache Schlussfolgerungen für Tor und Ext:

- (i) Ist  $M$  projektiv, so ist  $\text{Tor}_n^R(V, M) = 0$  und  $\text{Ext}_R^n(M, W) = 0$  für  $n > 0$ .
- (ii) Ist  $K$  ein Körper, so ist  $\text{Tor}_n^K(V, M) = 0$  und  $\text{Ext}_K^n(M, W) = 0$  für  $n > 0$ .
- (iii) Ist  $R$  ein Hauptidealring, so ist  $\text{Tor}_n^R(V, M) = 0$  und  $\text{Ext}_R^n(M, W) = 0$  für  $n > 1$ .

$\text{Tor}_n^R$  und  $\text{Ext}_R^n$  sind Funktoren in  $V, M$  für Tor (kovariant) und  $M$  (kontravariant),  $W$  (kovariant) für Ext.

**12.9 Satz.** Sei  $0 \rightarrow M \rightarrow M' \rightarrow M'' \rightarrow 0$  eine kurze exakte Folge von  $R$ -Moduln. Dann gibt es lange exakte Folgen

(i) 
$$\dots \longrightarrow \text{Tor}_n^R(V, M) \longrightarrow \text{Tor}_n^R(V, M') \longrightarrow \text{Tor}_n^R(V, M'') \longrightarrow \dots$$

$$\text{Tor}_{n-1}^R(V, M) \longrightarrow \dots \longrightarrow \text{Tor}_1^R(V, M'')$$

$$V \otimes_R M \longrightarrow V \otimes_R M' \longrightarrow V \otimes_R M'' \longrightarrow 0$$

(ii) 
$$\dots \longleftarrow \text{Ext}_R^n(M, W) \longleftarrow \text{Ext}_R^n(M', W) \longleftarrow \text{Ext}_R^n(M'', W) \longleftarrow \dots$$

$$\text{Ext}_R^{n-1}(M, W) \longleftarrow \dots$$

$$\text{Hom}_R(M, W) \longleftarrow \text{Hom}_R(M', W) \longleftarrow \text{Hom}_R(M'', W) \longleftarrow 0$$

Verbindungshomomorphismen hinzufügen

**BEWEIS:** Wir können Auflösungen  $(P_*, \epsilon)$ ,  $(P'_*, \epsilon')$  und  $(P''_*, \epsilon'')$  von  $M$ ,  $M'$  und  $M''$  wählen, so dass wir eine kurze exakte Folge  $0 \rightarrow P_* \rightarrow P'_* \rightarrow P''_* \rightarrow 0$  erhalten, für die folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc} P_* & \longrightarrow & P'_* & \longrightarrow & P''_* \\ \downarrow \epsilon & & \downarrow \epsilon' & & \downarrow \epsilon'' \\ M & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M'' \end{array}$$

Da  $P''_n$  projektiv ist, spaltet  $0 \rightarrow P_n \rightarrow P'_n \rightarrow P''_n \rightarrow 0$  für jedes  $n$  und

$$0 \longrightarrow V \otimes_R P_* \longrightarrow V \otimes_R P'_* \longrightarrow V \otimes_R P''_* \longrightarrow 0$$

sowie

$$0 \longleftarrow \text{Hom}_R(P_*, W) \longleftarrow \text{Hom}_R(P'_*, W) \longleftarrow \text{Hom}_R(P''_*, W) \longleftarrow 0$$

sind immer noch kurz exakt. Die lange exakte Folge in (i) und (ii) sind die zugehörigen langen exakten Folgen in Homologie bzw. Kohomologie.  $\square$

**12.10 Bemerkung.** Es gibt natürliche Isomorphismen für Tor:

$$\bigoplus_{i \in I} \text{Tor}_n^R(V_i, M) \cong \text{Tor}_n^R\left(\bigoplus_{i \in I} V_i, M\right) \quad \text{und} \quad \bigoplus_{i \in I} \text{Tor}_n^R(V, M_i) \cong \text{Tor}_n^R\left(V, \bigoplus_{i \in I} M_i\right)$$

und für Ext:

$$\text{Ext}_R^n\left(\bigoplus_{i \in I} M_i, W\right) \cong \prod_{i \in I} \text{Ext}_R^n(M_i, W) \quad \text{und} \quad \text{Ext}_R^n\left(M, \prod_{i \in I} W_i\right) \cong \prod_{i \in I} \text{Ext}_R^n(M, W_i)$$

**12.11 Bemerkung.** Sei  $R$  ein Hauptidealring. Seien  $a, b \in R \setminus \{0\}$  und  $d$  ein größter gemeinsamer Teiler von  $a$  und  $b$ . Sei  $M$  ein  $R$ -Modul. Dann gilt

- |  |   |
|--|---|
| (i) $R/(a) \otimes_R R/(b) \cong R/(d)$          | (vi) $\text{Hom}_R(R, M) \cong M$                           |
| (ii) $\text{Hom}_R(R/(a), R/(b)) \cong R/(d)$    | (vii) $\text{Tor}_1^R(R, M) \cong \text{Tor}_1^R(M, R) = 0$ |
| (iii) $\text{Tor}_1^R(R/(a), R/(b)) \cong R/(d)$ | (viii) $\text{Ext}_R^1(R, M) = 0$                           |
| (iv) $\text{Ext}_R^1(R/(a), R/(b)) \cong R/(d)$  | (ix) $\text{Hom}_R(R/(a), R) = 0$                           |
| (v) $M \otimes_R R \cong R \otimes_R M \cong M$  | (x) $\text{Ext}_R^1(R/(a), R) = 0$                          |

**12.12 Bemerkung.** Sei  $(P_*, \epsilon)$  eine projektive Auflösung von  $V$  durch projektive  $R$ -Rechtsmoduln. Dann gilt

$$\text{Tor}_n^R(V, M) \cong H_n(P_* \otimes M)$$

Beweis kommt später noch.

Referenz wenn  
soweit

**12.13 Korollar.** Für  $R$  kommutativ gilt:  $\text{Tor}_n^R(V, M) \cong \text{Tor}_n^R(M, V)$ .  $\square$

**12.14 Definition.** Ein  $R$ -Modul  $I$  heißt *injektiv*, falls es zu jedem  $j: M \hookrightarrow N$  und  $f: M \rightarrow I$  ein  $\hat{f}: N \rightarrow I$  gibt mit  $f = \hat{f} \circ j$ , also

$$\begin{array}{ccc} & & N \\ & \nearrow \hat{f} & \uparrow j \\ I & \xleftarrow{f} & M \end{array}$$

**12.15 Bemerkung.** Jede kurze exakte Folge  $0 \rightarrow M \rightarrow M' \rightarrow M'' \rightarrow 0$  mit  $M$  injektiv spaltet.

**12.16 Satz.** Sei  $M$  ein  $R$ -Modul. Dann gibt es einen injektiven  $R$ -Modul  $I$  mit einer injektiven Abbildung  $M \hookrightarrow I$ .

**12.17 Definition.** Eine injektive Auflösung einer  $R$ -Moduls  $M$  ist eine lange exakte Folge

$$0 \longrightarrow M \hookrightarrow I_0 \xrightarrow{\partial_0} I_1 \xrightarrow{\partial_1} \dots$$

mit  $I_i$  injektiv.

**12.18 Korollar.** Zu jedem  $M$  gibt es eine injektive Auflösung. □

**12.19 Bemerkung.** Sei  $(I_*, j)$  eine injektive Auflösung von  $W$ . Dann gilt

$$\mathrm{Ext}_R^n(M, W) \cong H^n(\mathrm{Hom}_R(M, I_*))$$

## 13 Das Tensorprodukt und Hom als Kettenkomplexe

### Revision 13

**13.1 Definition.** Sei  $R$  ein Ring,  $C_*$  ein Kettenkomplex von  $R$ -Rechtsmoduln und  $D_*$  ein Kettenkomplex von  $R$ -Linksmoduln. Dann definieren wir den  $\mathbb{Z}$ -Kettenkomplex  $(C \otimes_R D)_*$  durch

$$(C \otimes_R D)_n := \bigoplus_{p+q=n} C_p \otimes_R D_q$$

mit Randabbildung definiert durch  $\partial^{C \otimes D}(c \otimes d) := \partial^C(c) \otimes d + (-1)^{|c|} c \otimes \partial^D(d)$ .

### 13.2 Bemerkung.

- ▶ Sind  $C$  und  $D$   $\mathbb{N}$ -graduiert, so ist  $C \otimes_R D$  auch  $\mathbb{N}$ -graduiert.
- ▶ Ist  $R$  kommutativ, so ist  $C \otimes_R D$  ein  $R$ -Kettenkomplex.

**13.3 Definition.** Sei  $C_*$  ein  $R$ -Kettenkomplex und  $\tilde{D}^*$  ein  $R$ -Kokettenkomplex. Wir definieren den  $\mathbb{Z}$ -Kokettenkomplex  $\text{Hom}_R(C, \tilde{D})^*$  durch

$$(\text{Hom}_R(C, \tilde{D}))^n := \bigoplus_{p+q=n} \text{Hom}_R(C_p, \tilde{D}^q)$$

und die Randabbildung durch  $\partial f = \partial^{\tilde{D}} \circ f - (-1)^{|f|} f \circ \partial^C$ .

### 13.4 Bemerkung.

- ▶ Sind  $C$  und  $\tilde{D}$   $\mathbb{N}$ -graduiert, so ist  $\text{Hom}_R(C, \tilde{D})$  auch  $\mathbb{N}$ -graduiert.
- ▶ Ist  $R$  kommutativ, so ist  $\text{Hom}_R(C, \tilde{D})$  ein  $R$ -Kokettenkomplex.

**13.5 Lemma.** Sei  $C_*$  ein  $R$ -Kettenkomplex ( $\mathbb{N}$ -graduiert), dessen Kettenmodule projektiv sind. Sei  $V$  ein  $R$ -Rechtsmodul und  $(P_*, \epsilon)$  eine projektive Auflösung von  $V$  durch  $R$ -Rechtsmoduln. Dann induziert  $\epsilon \otimes \text{id}: P_* \otimes_R C_* \rightarrow V \otimes_R C_*$  einen Isomorphismus in Homologie.

**BEWEIS:** Sei  $v \in (P \otimes C)_n$ . Dann schreiben wir  $v = \sum_{i=0}^n v_i$  mit  $v_i \in P_i \otimes C_{n-i}$ . Die  $v_i$  sind durch  $v$  eindeutig bestimmt. Es ist

$$\partial^{P \otimes C}(v) = \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{(-1)^i \text{id} \otimes \partial^C(v_i) + (\partial^P \otimes \text{id})(v_{i+1})}_{\in P_i \otimes C_{n-1-i}}$$

die eindeutige Darstellung von  $\partial^{P \otimes C}(v)$ . Insbesondere gilt:

$$\partial^{P \otimes C} v = 0 \iff (-1)^{i+1} (\text{id} \otimes \partial^C)(v_i) = (\partial^P \otimes \text{id})(v_{i+1}) \quad [\#]$$

Da die  $C_i$  projektiv sind, ist  $\otimes_R C_i$  exakt und für jedes  $i$  ist

$$V \otimes_R C_i \xleftarrow{\epsilon \otimes \text{id}} P_0 \otimes_R C_i \xleftarrow{\partial^P \otimes \text{id}} P_1 \otimes_R C_i \xleftarrow{\partial^P \otimes \text{id}} \dots \quad [\S]$$

exakt. Sei  $x \in H_n(V \otimes C_*)$ . Sei  $a \in V \otimes C_n$  mit  $\text{id} \otimes \partial^C(a) = 0$  und  $x = [a]$ . Wähle  $v_0 \in P_0 \otimes C_n$  mit  $\epsilon \otimes \text{id}(v_0) = a$ . Behauptung: Es gibt  $v_i \in P_i \otimes C_{n-i}$  mit  $\partial^{P \otimes C}(\sum_{i=0}^n v_i) = 0$ . Wir beweisen dies

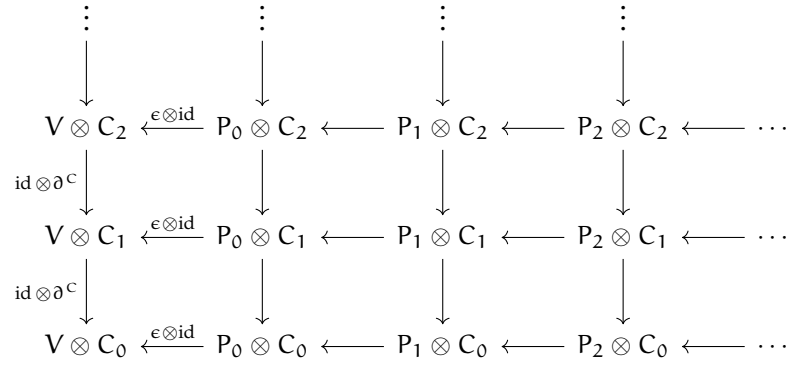


Abbildung 3: Diagramm zum Beweis von Lemma 13.5

per Induktion: Seien  $v_0, \dots, v_j$  bereits konstruiert mit  $\#$  für  $i < j$ . Dann ist  $(\partial^P \otimes \text{id})(\text{id} \otimes \partial^C)(v_j) = \pm(\partial^P \otimes \text{id})(\partial^P \otimes \text{id})(v_{j-1}) = 0$ . Wegen  $\S$  gibt es  $v_{j+1} \in P_{j+1} \otimes C_{n-j-1}$  mit

$$(\partial^P \otimes \text{id})(v_{j+1}) = (\text{id} \otimes \partial^C)(v_j)$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. Es folgt  $(\epsilon \otimes \text{id})_*([\sum_{i=0}^n v_i]) = [a]$ . Daher ist  $(\epsilon \otimes \text{id})_*$  surjektiv. Die Injektivität erhält man genauso.  $\square$

**13.6 Lemma.** Sei  $C_*$  ein  $R$ -Kettenkomplex ( $\mathbb{N}$ -graduiert), dessen Kettenmodule projektiv sind. Sei  $(I^*, j)$  eine injektive Auflösung des  $R$ -Moduls  $W$ . Dann induziert  $j$  einen Isomorphismus

$$H^*(\text{Hom}_R(C_*, W)) \rightarrow H^*(\text{Hom}_R(C_*, I^*))$$

**13.7 Bemerkung.** Für den Isomorphismus  $H_*(P \otimes_R C_*) \rightarrow H_*(V \otimes_R C_*)$  war es wichtig, dass die Homologie von  $(P_* \otimes C_i, \partial^P \otimes \text{id})$  in Grad 0 konzentriert ist und damit genau  $V \otimes C_i$  ist (dies entspricht den Spalten in Abbildung 3). Umgekehrt ist die Homologie von  $(P_p \otimes C_*, \text{id} \otimes \partial^C)$  isomorph zu  $P_p \otimes H_*(C_*)$ . Wir erhalten also Komplexe  $(P_* \otimes H_n(C_*), \partial^P \otimes \text{id})$  deren Homologie genau  $\text{Tor}_*^R(V, H_n(C_*))$  ist. Dies stellt einen Zusammenhang zwischen  $H_*(V \otimes C_*)$  und  $\text{Tor}_*^R(V, H_*(C_*))$  her.

vertikal, horizontal

**13.8 Definition.** Ein  $R$ -Doppelkomplex  $C_{**}$  ist eine Folge von  $R$ -Moduln  $C_{p,q}$  zusammen mit  $R$ -linearen Abbildungen  $\partial^h: C_{p,q} \rightarrow C_{p-1,q}$  und  $\partial^v: C_{p,q} \rightarrow C_{p,q-1}$ , für die gelten:

$$\partial^h \circ \partial^h = 0 \quad \partial^v \circ \partial^v = 0 \quad \partial^v \circ \partial^h + \partial^h \circ \partial^v = 0$$

Der **Totalkomplex** von  $(C_{**}, \partial^v, \partial^h)$  ist der Kettenkomplex  $T(C_{**})$  mit  $T(C_{**})_n := \bigoplus_{p+q=n} C_{p,q}$  und  $\partial^T := \partial^v + \partial^h$ .

**13.9 Beispiel.** Das Tensorprodukt von Kettenkomplexen  $C_*$  und  $D_*$  ist der Totalkomplex eines Doppelkomplexes, dessen  $(p, q)$ -ter Modul  $C_p \otimes_R D_q$  ist mit  $\partial^v = \partial^C \otimes \text{id}$ ,  $\partial^h = \pm \text{id} \otimes \partial^D$ .

**13.10 Definition.** Sei  $C_*$  ein Kettenkomplex. Eine **Filtrierung** auf  $C_*$  ist eine Folge

$$0 = F_0 C_* \subseteq F_1 C_* \subseteq F_2 C_* \subseteq \dots \subseteq F_n C_* \subseteq \dots \subseteq C_*$$

von Unterkettenkomplexen mit  $\bigcup_p F_p C_* = C_*$ .

**13.11 Beispiel.**

- ▶ Ist  $X$  ein CW-Komplex, so erhalten wir eine Filtrierung auf dem singulären Kettenkomplex mit  $F_p(C_*^{\text{sing}}(X; R)) := C_*^{\text{sing}}(X^{(\leq p)}; R)$ .
- ▶ Sei  $C_{**}$  ein Doppelkomplex. Dann erhalten wir zwei Filtrierungen  $F^v$  und  $F^h$  auf  $T(C_{**})$  mit

$$F_p^v(T(C_{**})) = T(C_{*\leq p, *}) \quad F_p^h(T(C_{**})) := T(C_{*, *\leq p})$$

**13.12 Bemerkung.** Sei  $(C_{**}, \partial^v, \partial^h)$  ein Doppelkomplex. Sei  $E_{**}^0 = C_{**}$ .  $\partial^v$  ist eine Randabbildung auf jedem  $C_{p*}$ . Wir setzen  $E_{p*}^1 := H_*(E_{p*}^0, \partial^v)$ .  $\partial^h$  induziert eine Randabbildung  $\overline{\partial^h}$  auf jedem  $E_{*,q}^1$ . Wir setzen also

$$E_{*,q}^2 := H_*(E_{*,q}^1, \overline{\partial^h})$$

Wir erhalten weitere Randabbildungen  $d_{p,q}^2: E_{p,q}^2 \rightarrow E_{p-2,q+1}^2$  wie folgt: Sei  $z \in E_{p,q}^2$ , also  $z = [x]$  mit  $x \in E_{p,q}^0$  und

- (i)  $\partial^v x = 0$
- (ii) Es existiert ein  $x' \in E_{p-1,q+1}^0$  mit  $\partial^v x' = \partial^h x$

Setze nun  $d_{p,q}^2(z) := [\partial^h x'] \in E_{p-2,q+1}^2$ .

## 14 Spektralfolgen

### Revision 14

**14.1 Definition.** Eine *homologische Spektralfolge* (im 1ten Quadranten) von  $R$ -Moduln besteht aus folgenden Daten:

1. Eine Folge von  $R$ -Moduln  $E_{p,q}^r$  für  $r, p, q \geq 0$
2.  $R$ -lineare Abbildungen  $d_{p,q}^r: E_{p,q}^r \rightarrow E_{p-r,q+r-1}^r$  mit  $d_{p-r,q+r-1}^r \circ d_{p,q}^r = 0$
3. Isomorphismen zwischen  $E_{p,q}^{r+1}$  und der Homologie von  $E_{*,*}^r$  bezüglich  $d_{*,*}^r$  genauer:

$$E_{p,q}^{r+1} \cong \frac{\ker d_{p,q}^r: E_{p,q}^r \rightarrow E_{p-r,q+r-1}^r}{\operatorname{im} d_{p+r,q-r+1}^r: E_{p+r,q-r+1}^r \rightarrow E_{p,q}^r}$$

$E_{*,*}^r$  heißt die  $r$ -Seite der Spektralfolge.

### 14.2 Bemerkung.

- Spektralfolgen bilden eine Kategorie, in der ein Morphismen

$$f = (f_{p,q}^r): (E_{p,q}^r, d_{p,q}^r) \longrightarrow (E_{p,q}'^r, d_{p,q}'^r)$$

aus einer Folge von  $R$ -linearen Abbildungen  $f_{p,q}^r: E_{p,q}^r \rightarrow E_{p,q}'^r$  besteht, sodass  $d_{p,q}^r \circ f_{p,q}^r = f_{p-r,q+r-1}^r \circ d_{p,q}^r$  und  $f_{p,q}^{r+1} = H_*(f_{p,q}^r)$  für alle  $r, p, q \geq 0$ .

- Für  $r > \max p, q + 1$  sind  $d_{p,q}^r$  und  $d_{p+r,q-r+1}^r$  trivial und daher gilt

$$E_{p,q}^r \cong E_{p,q}^{r+1} \cong E_{p,q}^{r+2} \cong \dots$$

Wir schreiben oft  $E_{p,q}^\infty$  für diesen stabilen Wert von  $E_{p,q}^r$ .

**14.3 Definition.** Wir sagen eine Spektralfolge  $(E_{p,q}^r, d_{p,q}^r)$  *konvergiert* gegen den graduierten  $R$ -Modul  $A_*$ , falls es eine Filtrierung  $F_s A_*$  von  $A_*$  gibt mit

$$0 = F_{-1} A_n \subseteq F_0 A_n \subseteq \dots \subseteq F_n A_n = A_n$$

und  $E_{p,q}^\infty \cong F_p A_{p+q} / F_{p-1} A_{p+q}$ . Kurz schreiben wir  $E_{p,q}^r \Rightarrow A_{p+q}$  (oder  $E_{p,q}^2 \Rightarrow A_{p+q}$ ).

**14.4 Satz (ABBILDUNGSLEMMA).** Sei  $f: E_{p,q}^r \rightarrow E_{p,q}'^r$  eine Abbildung von Spektralfolgen. Gibt es  $r_0$ , sodass  $f_{p,q}^{r_0}$  für alle  $p, q \geq 0$  ein Isomorphismus ist, so ist  $f_{p,q}^r$  für alle  $r \geq r_0$  ein Isomorphismus. Insbesondere ist  $f_{p,q}^\infty: E_{p,q}^\infty \rightarrow E_{p,q}'^\infty$  ein Isomorphismus.

**BEWEIS:** Folgt direkt aus der Definition. □

**14.5 Bemerkung.** Eine Spektralfolge *kollabiert* bei  $E^r$ , falls es auf der  $r$ -Seite  $E_{p,q}^r$  genau eine Spalte  $E_{p_0,*}^r$  oder eine Zeile  $E_{*,q_0}^r$  gibt, sodass alle Moduln  $E_{p,q}^r$  außerhalb dieser Spalte bzw. Zeile trivial sind. Gilt  $E_{p,q}^r \Rightarrow A_{p+q}$ , so folgt

$$A_n \cong E_{p_0,n-p_0}^r \quad \text{bzw.} \quad A_n \cong E_{n-q_0,q_0}^r$$



**14.6 Lemma.** Sei  $E_{p,q}^r$  eine Spektralfolge, die gegen  $A_n$  konvergiert.

(i) Angenommen  $E_{p,q}^2 = 0$  für  $p \geq 2$  (Zwei Spalten). Dann gibt es eine kurze exakte Folge

$$0 \longrightarrow E_{1,n-1}^2 \longrightarrow A_n \longrightarrow E_{0,n}^2 \longrightarrow 0$$

(ii) Angenommen  $E_{p,q}^2 = 0$  für  $g \geq 2$  (Zwei Zeilen). Dann gibt es eine lange exakte Folge

$$\dots \longrightarrow A_{p+1} \longrightarrow E_{p+1,0}^2 \xrightarrow{d_{p+1,0}^2} E_{p-1,1}^2 \longrightarrow A_p \longrightarrow E_{p,0}^2 \longrightarrow \dots$$

**BEWEIS:** Sei  $F_s A_n \subseteq A_n$  die zur Konvergenz gehörige Filtrierung. Dann ist  $F_n A_n / F_{n-1} A_n \cong E_{n,0}^\infty \cong E_{n,0}^2$ ,  $F_{n-1} A_n / F_{n-2} A_n \cong E_{n-1,1}^\infty \cong E_{n-1,1}^2$  und  $F_{n-2} A_n / F_{n-3} A_n \cong F_{n-3} A_n / F_{n-4} A_n \cong \dots \cong 0$ . Insbesondere ist  $0 = F_{-1} A_n = \dots = F_{n-2} A_n \subseteq F_{n-1} A_n \subseteq A_n$ . Damit ergibt sich

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & F_{n-1} A_n & \longrightarrow & F_n A_n & \longrightarrow & F_n A_n / F_{n-1} A_n \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ & & E_{n-1,1}^2 & & A_n & & E_{n,0}^2 \end{array}$$

(ii) verbleibt als Übung. □

**14.7 Satz (VERGLEICHSSATZ).** Sei  $f: E_{p,q}^r \rightarrow E_{p,q}^{r'}$  eine Abbildung von Spektralfolgen. Seien  $E_{p,q}^2 \Rightarrow A_{p+q}$  und  $E_{p,q}^{r'} \Rightarrow A'_{p+q}$  mit zugehörigen Filtrierungen  $F_s A_n \subseteq A_n$  und  $F'_s A'_n \subseteq A'_n$ . Sei  $h: A_n \rightarrow A'_n$  mit  $h(F_s A_n) \subseteq F'_s A'_n$ . Angenommen  $f: E_{p,q}^\infty \rightarrow E_{p,q}^{r'}$  stimmt mit der von  $h$  induzierten Abbildung

$$\begin{array}{ccc} F_p A_{p+q} / F_{p-1} A_{p+q} & \xrightarrow{h} & F'_p A'_{p+q} / F'_{p-1} A'_{p+q} \\ \parallel & & \parallel \\ E_{p,q}^\infty & \xrightarrow{f} & E_{p,q}^{r'} \end{array}$$

überein. Gibt es ein  $r_0$  mit  $f_{p,q}^{r_0}: E_{p,q}^{r_0} \rightarrow E_{p,q}^{r'}$  ist ein Isomorphismus für alle  $p, q$ , so ist auch  $h: A_n \rightarrow A'_n$  ein Isomorphismus.

**BEWEIS:** Das Abbildungslemma impliziert, dass auch  $f: E_{p,q}^\infty \rightarrow E_{p,q}^{r'}$  ein Isomorphismus ist. Folglich induziert  $h$  Isomorphismen  $F_p A_{p+q} / F_{p-1} A_{p+q} \rightarrow F'_p A'_{p+q} / F'_{p-1} A'_{p+q}$ . Nun benutzen wir

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & F_s A_n & \longrightarrow & F_{s+1} A_n & \longrightarrow & F_{s+1} A_n / F_s A_n \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & F'_s A'_n & \longrightarrow & F'_{s+1} A'_n & \longrightarrow & F'_{s+1} A'_n / F'_s A'_n \longrightarrow 0 \end{array}$$

um per Induktion über  $s = -1, 0, 1, 2, \dots, n$  zu zeigen, dass  $h|_{F_s A_n}: F_s A_n \rightarrow F'_s A'_n$  ein Isomorphismus ist. □

**14.8 Definition.** Eine *kohomologische Spektralfolge* (im 1. Quadranten) von  $R$ -Moduln besteht aus folgenden Daten:

1. Einer Folge von  $R$ -Moduln  $E_r^{p,q}$  für  $r, p, q \geq 0$ ,
2.  $R$ -linearen Abbildungen  $d_r^{p,q}: E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p+r, q-r+1}$  mit  $d_r^{p+r, q-r+1} \circ d_r^{p,q} = 0$  und

3. Isomorphismen zwischen  $E_r^{p,q}$  und der Kohomologie von  $E_r^{*,*}$  bezüglich  $d_r^{*,*}$ , also

$$E_r^{p,q} \cong \frac{\ker d_r^{p,q}}{\operatorname{im} d_r^{p-r,q+r-1}}$$

## 15 Die Spektralfolge zu einem filtrierten Kettenkomplex

### Revision 15

**15.1 Satz.** Sei  $C_*$  ein Kettenkomplex mit einer Filtrierung von Kettenkomplexen  $F_s C_* \subseteq C_*$ , sodass

$$0 = F_{-1} C_n \subseteq F_0 C_n \subseteq \dots \subseteq F_n C_n = C_n$$

Dann bestimmt die Filtrierung eine Spektralfolge  $(E_{p,q}^r, d_{p,q}^r)$  mit  $E_{p,q}^0 = F_p C_{p+q} / F_{p-1} C_{p+q}$  und  $E_{p,q}^2 \Rightarrow H_{p+q}(C_*)$ .

Wir erhalten folgende Kette von  $R$ -Moduln zwischen  $F_{p-q} C_n \subseteq F_p C_n$ :

$$\begin{aligned} F_{p-1} C_n &\subseteq d(F_0 C_{n+1}) \cap F_p C_n + F_{p-1} C_n \subseteq d(F_1 C_{n+1}) \cap F_p C_n + F_{p-1} C_n \\ &\subseteq \dots \\ &\subseteq \underbrace{d(F_{n+1} C_{n+1})}_{=\text{im } d} \cap F_p C_n + F_{p-1} C_n \\ &\subseteq \underbrace{d^{-1}(F_{-1} C_{n-1})}_{=\text{ker } d} \cap F_p C_n + F_{p-1} C_n \\ &\subseteq d^{-1}(F_0 C_{n-1}) \cap F_p C_n + F_{p-1} C_n \\ &\subseteq \dots \\ &\subseteq d^{-1}(F_{n-2} C_{n-1}) \cap F_p C_n + F_{p-1} C_n \subseteq F_p C_n \end{aligned}$$

eventuell könnte man die  $C_s$  weglassen, um das ganze übersichtlicher zu machen

Wir setzen

$$E_{p,q}^r := \frac{d^{-1}(F_{p-r} C_{p+q-1}) \cap F_p C_{p+q} + F_{p-1} C_{p+q}}{d(F_{p+r-1} C_{p+q+1}) \cap F_p C_{p+q} + F_{p-1} C_{p+q}}$$

Die Filtrierung  $F_s C_*$  auf  $C_*$  induziert eine Filtrierung auf  $H_n(C_*)$  mit

$$F_s H_n(C_*) := \text{im}(H_n(F_s C_*) \rightarrow H_n(C_*))$$

**15.2 Lemma.** Für  $r > p, q + 1$  ist  $E_{p,q}^r \cong E_{p,q}^{r+1} \cong \dots \cong F_p H_{p+q}(C_*) / F_{p-1} H_{p+q}(C_*)$ .

**BEWEIS:** Für  $r > p, q + 1$  ist  $E_{p,q}^r = \frac{\text{ker } d \cap F_p C_{p+q} + F_{p-1} C_{p+q}}{\text{im } d \cap F_p C_{p+q} + F_{p-1} C_{p+q}}$ . Es ist  $F_p H_{p+q}(C_*) = \frac{\text{ker } d \cap F_p C_{p+q}}{\text{im } d \cap F_p C_{p+q}}$  und es folgt

$$\frac{F_p H_{p+q}(C_*)}{F_{p-1} H_{p+q}(C_*)} \cong \frac{\text{ker } d \cap F_p C_{p+q}}{\text{im } d \cap F_p C_{p+q} + \text{ker } d \cap F_{p-1} C_{p+q}}$$

Es ist weiter  $\text{ker } d \cap F_p C_{p+q} \subseteq \text{ker } d \cap F_p C_{p+q} + F_{p-1} C_{p+q}$  und somit erhalten wir

$$\text{ker } d \cap F_p C_{p+q} \longrightarrow \frac{\text{ker } d \cap F_p C_{p+q} + F_{p-1} C_{p+q}}{\text{im } d \cap F_p C_{p+q} + F_{p-1} C_{p+q}}$$

Diese Abbildung ist surjektiv und ihr Kern ist  $(\text{ker } d \cap F_p C_{p+q}) \cap (\text{im } d \cap F_p C_{p+q} + F_{p-1} C_{p+q})$ . Wir müssen jetzt nur noch zeigen, dass

$$\text{im } d \cap F_p C_{p+q} + \text{ker } d \cap F_{p-1} C_{p+q} = (\text{ker } d \cap F_p C_{p+q}) \cap (\text{im } d \cap F_p C_{p+q} + F_{p-1} C_{p+q})$$

Die Inklusion „ $\subseteq$ “ ist dabei sofort klar. Für die umgekehrte sei  $x$  in der rechten Menge. Dann ist  $x = x' + x''$  mit  $x' \in \text{im } d \cap F_p C_{p+q}$ ,  $x'' \in F_{p-1} C_{p+q}$  und  $x \in \text{ker } d \cap F_p C_{p+q}$ . Es folgt  $x'' = x - x' \in \text{ker } d \cap F_{p-1} C_{p+q}$  und somit ist  $x$  auch in der linken Menge enthalten.  $\square$

Wir definieren nun die Randabbildung

$$\begin{array}{ccc} E_{p,q}^r & \xrightarrow{d^r} & E_{p-r,q+r-1}^r \\ \parallel & & \parallel \\ \frac{d^{-1}(F_{p-r}C_{p+q-1}) \cap F_p C_{p+q} + F_{p-1} C_{p+q}}{d(F_{p+r-1}C_{p+q+1}) \cap F_p C_{p+q} + F_{p-1} C_{p+q}} & & \frac{d^{-1}(F_{p-2r}C_{p+q-2}) \cap F_{p-r} C_{p+q-1} + F_{p-r-1} C_{p+q-1}}{d(F_{p-1}C_{p+q}) \cap F_{p-r} C_{p+q-1} + F_{p-r-1} C_{p+q-1}} \end{array}$$

wie folgt: Sie  $x \in E_{p,q}^r$ . Wähle  $a \in d^{-1}(F_{p-r}C_{p+q-1}) \cap F_p C_{p+q}$  mit  $[a] = x$ . Dann gilt

$$d(a) \in F_{p-r}C_{p+q-1} \cap \ker d \subseteq d^{-1}(F_{p-2r}C_{p+q-2}) \cap F_{p-r}C_{p+q-1}$$

Wir setzen  $d^r x := [da] \in E_{p-r,q+r-1}^r$ . Wir müssen zeigen, dass dies unabhängig von der Wahl von  $a$  ist. Sei  $b \in d^{-1}(F_{p-r}C_{p+q-1}) \cap F_p C_{p+q}$  mit  $[a] = [b] \in E_{p,q}^r$ , also  $a - b \in d(F_{p+r-1}C_{p+q+1}) \cap F_p C_{p+q} + F_{p-1} C_{p+q}$ . Das heißt  $a - b = dc + c'$  mit  $c \in F_{p+r-1}C_{p+q+1}$ ,  $c' \in F_{p-1}C_{p+q}$  und  $dc \in F_p C_{p+q}$ . Dann  $d(a - b) = dc' \in d(F_{p-1}C_{p+q})$ , da  $da - db \in F_{p-r}C_{p+q-1}$ . Es folgt  $d(a - b) = dc' \in d(F_{p-1}C_{p+q}) \cap F_{p-r}C_{p+q-1}$ .

**15.3 Lemma.** Es gilt

$$E_{p,q}^{r+1} \cong \frac{\ker d_{p,q}^r: E_{p,q}^r \rightarrow E_{p-r,q+r-1}^r}{\operatorname{im} d_{p+r,q-r+1}^r: E_{p+r,q-r+1}^r \rightarrow E_{p,q}^r}$$

**BEWEIS:** Sei  $x \in \ker d_{p,q}^r$ , also  $x = [a]$  mit  $a \in d^{-1}(F_{p-r}C_{p+q-1}) \cap F_p C_{p+q}$  und  $da \in d(F_{p-1}C_{p+q}) \cap F_{p-r}C_{p+q-1} + F_{p-r-1}C_{p+q-1}$ . Sei  $da = dx + c'$  mit  $c \in F_{p-1}C_{p+q}$ ,  $dc \in F_{p-r}C_{p+q-1}$  und  $c' \in F_{p-r-1}C_{p+q-1}$ . Dann  $\tilde{a} := a - c \in d^{-1}(F_{p-r}C_{p+q-1}) \cap F_p C_{p+q}$  und  $a - \tilde{a} = c \in F_{p-1}C_{p+q}$ , insbesondere  $[a] = [\tilde{a}] \in E_{p,q}^r$  mit  $\tilde{a} \in d^{-1}(F_{p-r}C_{p+q-1}) \cap F_p C_{p+q}$  und  $d\tilde{a} = da - dx = c' \in F_{p-r-1}C_{p+q-1}$ . Wir erhalten  $y := [\tilde{a}] \in E_{p,q}^{r+1}$ .

Behauptung:  $x \mapsto y$  ist wohldefiniert und liefert den gesuchten Isomorphismus. Sei also  $\tilde{b} \in d^{-1}(F_{p-r-1}C_{p+q-1}) \cap F_p C_{p+q}$  mit  $x = [\tilde{a}] = [\tilde{b}]$ . Also

$$\tilde{a} - \tilde{b} \in d(F_{p+r-1}C_{p+q+1}) \cap F_p C_{p+q} + F_{p-1}C_{p+q} \subseteq d(F_{p+r}C_{p+q-1}) \cap F_p C_{p+q} + F_{p-1}C_{p+q}$$

Damit ist  $[\tilde{a}] = [\tilde{b}] \in E_{p,q}^{r+1}$ . Damit ist die Abbildung – ohne den Quotienten – wohldefiniert.

Sei nun  $x \in \operatorname{im} d_{p+r,q-r+1}^r$ , also  $x = d^r z$  mit  $z \in E_{p+r,q-r+1}^r$ . Sei  $z = [b]$  mit  $b \in d^{-1}(F_p C_{p+q}) \cap F_{p+r}C_{p+q+1}$ . Dann ist  $x = d^r z = [db] \in E_{p,q}^r$ . Es ist  $d^2(db) = 0$  und  $db \in F_p C_{p+q}$ , da  $b \in d^{-1}(F_p C_{p+q})$ , also  $db \in d^{-1}(F_{p-r-1}C_{p+q-1}) \cap F_p C_{p+q}$ . Also  $x \mapsto [db] \in E_{p,q}^{r+1}$  unter der eben definierten Abbildung. Zu zeigen:  $db \in d(F_{p+r}C_{p+q+1}) \cap F_p C_{p+q} + F_{p-1}C_{p+q}$ . Da  $b \in F_{p+r}C_{p+q+1}$  folgt  $db \in d(F_{p+r}C_{p+q+1})$  und da  $b \in d^{-1}(F_p C_{p+q})$  folgt  $db \in F_p C_{p+q}$ . Damit ist die Abbildung insgesamt wohldefiniert.

Zur Injektivität: Sei  $x = [\tilde{a}] \in \ker d^r$ , also  $\tilde{a} \in d^{-1}(F_{p-r-1}C_{p+q-1}) \cap F_p C_{p+q}$  mit  $[\tilde{a}] = 0 \in E_{p,q}^{r+1}$ , also  $\tilde{a} \in d(F_{p+r}C_{p+q+1}) \cap F_p C_{p+q} + F_{p-1}C_{p+q}$ . Seien  $c \in F_{p+r}C_{p+q+1}$ ,  $c' \in F_{p-1}C_{p+q}$  mit  $dc \in F_p C_{p+q}$  und  $\tilde{a} = dc + c'$ . Also  $x = [\tilde{a}] = [dc]$ . Da  $x \in d^{-1}(F_p C_{p+q}) \cap F_{p+r}C_{p+q+1}$ , ist dann  $[dc] = d^r([c])$ . Also ist  $x \in \operatorname{im} d_{p+r,q-r+1}^r$ .

Zur Surjektivität: Sei  $y \in E_{p,q}^{r+1}$  und  $\tilde{a} \in d^{-1}(F_{p-r-1}C_{p+q-1}) \cap F_p C_{p+q}$  mit  $y = [\tilde{a}] \in E_{p,q}^{r+1}$ . Dann ist auch  $\tilde{a} \in d^{-1}(F_{p-r}C_{p+q-1}) \cap F_p C_{p+q}$  und  $x := [\tilde{a}] \in E_{p,q}^r$  ist ein Urbild für  $y$  unter der Abbildung. Es bleibt zu zeigen, dass  $x = [\tilde{a}] \in E_{p,q}^r$  im Kern von  $d_{p,q}^r$  liegt:

$$d_{p,q}^r x = [d\tilde{a}] \in E_{p-r,q+r-1}^r$$

Zu zeigen:  $[d\tilde{a}] = 0 \in E_{p-r,q+r-1}^r$ , also  $d\tilde{a} \in d(F_{p-r}C_{p+q}) \cap F_{p-r}C_{p+q-1} + F_{p-r-1}C_{p+q-1}$ . Da  $\tilde{a} \in d^{-1}(F_{p-r-1}C_{p+q-1}) \cap F_p C_{p+q} \subseteq d^{-1}F_{p-r-1}C_{p+q-1}$  ist  $d\tilde{a} \in F_{p-r-1}C_{p+q-1}$ .  $\square$

darauf soll  $x$   
doch abgebildet  
werden ...

**15.4 Proposition.** Sei  $(C_{*,*}, d^v, d^h)$  ein Doppelkomplex. Seien nun  $F_s^v T(C_{*,*}) := T(C_{*\leq s,*})$  und  $F_s^h T(C_{*,*}) := T(C_{*,*\leq s})$  die vertikale und die horizontale Filtrierung des Totalkomplexes von  $C_{*,*}$ . Dann gilt für die zugehörige Spektralfolgen  ${}^v E_{p,q}^r$  und  ${}^h E_{p,q}^r$  folgendes:

- a)  ${}^v E_{p,q}^1 = H_q(C_{p,*}, d^v)$ ,  ${}^v d^1$  wird von  $d^h$  induziert.
- b)  ${}^h E_{p,q}^1 = H_p(C_{*,q}, d^h)$ ,  ${}^h d^1$  wird von  $d^v$  induziert.

**BEWEIS:** ...

□

**15.5 Korollar.** Sei  $(C_{*,*}, d^v, d^h)$  ein Doppelkomplex, dessen Zeilen (oder Spalten) exakt sind. Dann ist  $H_*(T(C_{*,*})) = 0$

**BEWEIS:** Sind die Zeilen exakt, so ist  ${}^v E_{p,q}^1 = 0$  für alle  $p, q$  und damit  $E_{p,q}^\infty = 0$ . Da die  ${}^v E_{p,q}^r \Rightarrow H_{p+q}(T(C_{*,*}))$  folgt  $H_{p+q}(T(C_{*,*})) = 0$ . Für Spalten folgt die Aussage genauso mittels der horizontalen Spektralfolge. □

## 16 Die Künnethformeln

**16.1 Proposition.** Sei  $R$  ein Ring,  $C_*$  ein Kettenkomplex von  $R$ -Rechtsmoduln und  $D_*$  ein Kettenkomplex von  $R$ -Linksmoduln.

- a) Sind die Kettenmoduln von  $C_*$  projektiv, so gibt es eine Spektralfolge mit

$$E_{p,q}^2 = H_p(C_* \otimes_R H_q(D_*))$$

die gegen  $H_*(C_* \otimes_R D_*)$  konvergiert.

- b) Sind die Kettenmoduln von  $D_*$  projektiv, so gibt es eine Spektralfolge mit

$$E_{p,q}^2 = H_p(H_q(C_*) \otimes_R D_*)$$

die gegen  $H_*(C_* \otimes_R D_*)$  konvergiert.

**BEWEIS:**

- a) Wir benutzen die vertikale Spektralfolge des Doppelkomplexes  $C_* \otimes_R D_*$ . Dann ist  $E_{p,q}^1 = H_q(C_p \otimes_R D_*, \text{id} \otimes \partial^D)$  und  $d^1$  wird von  $\partial^C \otimes \text{id}$  induziert. Da  $C_p$  projektiv ist und daher  $C_p \otimes_R -$  ein exakter Funktor ist, ist die kanonische Abbildung

$$C_p \otimes_R H_q(D_*, \partial^D) \longrightarrow H_q(C_p \otimes_R D_*, \text{id} \otimes \partial^D)$$

ein Isomorphismus. Also

$$E_{p,q}^2 \cong H_p(C_* \otimes_R H_q(D_*), \partial^C \otimes \text{id}) \cong H_p(C_* \otimes_R H_q(D_*))$$

- b) analog. □

**16.2 Satz (ZERLEGUNGSSATZ).** Sei  $C_*$  ein Kettenkomplex über einem Hauptidealring. Seien die Kettenmodule von  $C_*$  frei. Dann gibt es Kettenkomplexe  $C_*^{[i]}$ ,  $i \in \mathbb{N}$  mit

- ▶  $C_*^{[i]} = 0$  für  $* \in \{i, i+1\}$
- ▶  $H_i(C_*^{[i]}) = H_i(C_*)$
- ▶  $H_{i+1}(C_*^{[i]}) = 0$  (insbesondere ist  $\partial_{i+1}^{[i]}: C_{i+1}^{[i]} \rightarrow C_i^{[i]}$  injektiv)

und einen Isomorphismus von Kettenkomplexen  $C_* \cong \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} C_*^{[i]}$ .

## Index

Die *Seitenzahlen* sind mit Hyperlinks versehen und somit anklickbar

Augmentation, 18  
Ausschneidung, 2  
azyklischer Kettenkomplex, 14

Cap-Produkt,  $\frown$ -Produkt, 17  
Cup-Produkt,  $\smile$ -Produkt, 7

Dimensionsaxiom, 2  
Doppelkomplex, 42  
dualer Kokettenkomplex, 1

Einhängung, 15  
exakt, 23

Filtrierung, 42  
freie graduiert kommutative Algebra, 13  
Fundamentalklasse, 18  
Funktork  
     $\mathbb{Z}$ -linearer, 37  
    exakter, 37

gerichtete Menge, 21  
gerichteter Kolimes, 22  
graduiert-kommutativ, 11  
graduierte Algebra, 11

homologische Spektralfolge, 44  
Homotopieinvarianz, 2

induzierte Abbildung  
    Kohomologie, 1  
    singuläre Kokettenkomplexe, 2  
injektiver Modul, 39  
innere Punkte, 29

Kegel, 15  
kofinal, 22  
Kohomologie mit kompaktem Träger, 24  
Kohomologiemodul, 1  
kohomologische Spektralfolge, 45  
Kokettenabbildung, 1  
Kokettenhomotopie, 1  
Kokettenkomplex, 1  
     $V$ -dualer Kokettenkomplex, 1  
kontravarianter Funktor, 2  
Kreuz-Produkt,  $\times$ -Produkt, 8

Mannigfaltigkeit mit Rand, 29

Paarfolge, 2  
Paarung, 5  
Poincaré-Dualitäts-Abbildung, 25  
Produkt, 3  
projektive Auflösung, 34  
projektive Dimension, 35  
projektiver Modul, 14

Randpunkte, 29  
regulär, 31

Schnittform, 31  
Signatur  
    Mannigfaltigkeit, 32  
    symmetrische reguläre Bilinearform, 32  
singuläre Kohomologie, 1  
singuläre Kokettenkomplex, 1  
Spektralfolge  
    kollabierende, 44  
    konvergente, 44  
    Seite, 44

Totalkomplex, 42

verbindende Abbildung, 2

uere Algebra, 13

## Literatur

[Hat02] Allen HATCHER. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002 (siehe S. 10, 13, 19).

## Abbildungsverzeichnis

1 Diagramm zum Beweis von Lemma 2.4	6
2 Einschränkung von singulären Simplizes am Beispiel des 2-Simplex.	7
3 Diagramm zum Beweis von Lemma 13.5	42

## To-do's und andere Baustellen

T <sub>E</sub> Xen wenn Zeit	7
Revision 5	15
Revision 6	17
Revision 7	24
Referenz	28
Revision 9	29
Revision 10	31
oder doch Lemma?	32
Revision 11	34
Referenz	35
Revision 12	37
Hier fehlt noch was ...insbesondere kann sich die Nummerierung noch ändern	38
Verbindungshomomorphismen hinzufügen	38
Referenz wenn soweit	39
Revision 13	41
Revision 14	44
Revision 15	47
eventuell könnte man die Cs weglassen, um das ganze übersichtlicher zu machen	47
darauf soll $x$ doch abgebildet werden ...	48