



WESTFÄLISCHE
WILHELMS-UNIVERSITÄT
MÜNSTER



FACHBEREICH 10
MATHEMATIK UND
INFORMATIK

Höhere Algebra II

gelesen von Prof. Dr. Lutz Hille

Mitschrift von Phil Steinhorst

Wintersemester 2014/2015

Vorwort

Der vorliegende Text ist eine Mitschrift zur Vorlesung Höhere Algebra II, gelesen von Prof. Dr. Lutz Hille an der WWU Münster im Wintersemester 2014/2015. Der Inhalt entspricht weitestgehend dem Tafelanschrieb während der Vorlesung. Für die Korrektheit des Inhalts wird keinerlei Garantie übernommen. Bemerkungen, Korrekturen und Ergänzungen kann man folgenderweise loswerden:

- persönlich durch Überreichen von Notizen oder per E-Mail
- durch Abändern der entsprechenden TeX-Dateien und Versand per E-Mail an mich
- direktes Mitarbeiten via GitHub. Dieses Skript befindet sich im latex-wwu-Repository von JaMeZ-B:

<https://github.com/JaMeZ-B/latex-wwu>

Themenübersicht

Hier kommt eine Themenübersicht hin – oder vielleicht auch nicht.

Literatur

- T. A. Springer: Linear Algebraic Groups
- H. Kraft: Geometrische Methoden in der Invariantentheorie (Aspekte der Mathematik)
- W. Crawley-Boevey: Lectures on representations of quivers

Vorlesungswebsite

Folgt noch.

Phil Steinhorst
p.st@wwu.de

Inhaltsverzeichnis

0 Einführung	4
Index	6

0 Einführung

13.10.

1. Wir betrachten die algebraische Gruppe $GL_n = GL_n(k)$; meist ist $k = \mathbb{C}$ oder allgemeiner $k = \bar{k}$ algebraisch abgeschlossen und $\text{char}(k) = 0$. $GL_n = GL_n(\mathbb{C}) \subseteq M_n(\mathbb{C})$ ist (bzgl. der üblichen Topologie) eine offene Teilmenge. Später betrachten wir die viel größere **Zariski-Topologie**.

Sei $m = n^2$ und $\mathbb{A}^m \subseteq \mathbb{C}^m$ ein m -dimensionaler affiner Vektorraum. Wir können $GL_n(\mathbb{C})$ auch folgendermaßen charakterisieren:

$$GL_n(\mathbb{C}) = M_n(\mathbb{C}) \setminus V(\det = 0),$$

wobei $V(f = 0) = \{x \in \mathbb{A}^m : f(x) = 0\}$ die Nullstellenmenge oder **Verschwindungsmenge** der polynomialen Funktion $f: \mathbb{A}^m \rightarrow \mathbb{C}$, $f \in k[x_1, \dots, x_m]$ bezeichnet.

2. **Beispiel:** Sei $\mathbb{A}^m = M_n(\mathbb{C})$. $G := GL_n(\mathbb{C})$ ist eine Gruppe. Können wir die Gruppenverknüpfung, die Inversenbildung und das neutrale Element als polynomiale Funktion auffassen?

$$\begin{array}{lll} \mu: G \times G \longrightarrow G & i: G \longrightarrow G & e: \{x\} \longrightarrow G \\ (g, h) \longmapsto gh & g \longmapsto g^{-1} & x \longmapsto e = \mathbb{1}_n \end{array}$$

e ist offensichtlich polynomial und μ auch (vgl. Matrixmultiplikation). Jedoch ist i nicht polynomial, da nach Cramerscher Regel gilt:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A)$$

Daher müssen wir auch Quotienten polynomialer Abbildungen mit Nenner ungleich 0 zulassen.

Idee

Eine lineare algebraische Gruppe ist abgeschlossen in GL_n und die Gruppenabbildungen sind Quotienten polynomialer Abbildungen, sodass folgende Eigenschaften erfüllt sind (d.h. die folgenden Diagramme sind kommutativ):

- Assoziativität: $\mu \circ (\mu, \text{id}) = \mu \circ (\text{id}, \mu)$

$$\begin{array}{ccc} G \times G \times G & \xrightarrow{(\mu, \text{id})} & G \times G \\ \downarrow (\text{id}, \mu) & & \downarrow \mu \\ G \times G & \xrightarrow{\mu} & G \end{array} \quad \begin{array}{ccc} (g, h, l) & \longmapsto & (gh, l) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (g, hl) & \longmapsto & g(hl) \stackrel{!}{=} (gh)l \end{array}$$

- Inverse: $e \circ p = \mu \circ (\text{id}, i) \circ \Delta$ bzw. $e \circ p = \mu \circ (i, \text{id}) \circ \Delta$

$$\begin{array}{ccc} & & G \times G \\ & \nearrow \Delta & \downarrow (\text{id}, i) \\ G & \longrightarrow & G \times G \\ \downarrow p & & \downarrow \mu \\ \{x\} & \xrightarrow{e} & G \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & & (g, g) \\ & \nearrow & \downarrow \\ g & \longrightarrow & (g, g^{-1}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ e & \longmapsto & e \stackrel{!}{=} g \cdot g^{-1} \end{array}$$

- Neutrales Element: $\mu \circ (e, \text{id}) = \text{id} = \mu \circ (\text{id}, e)$

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{(e, \text{id})} & G \times G \xrightarrow{\mu} G \\ & \searrow \text{id} & \uparrow \\ & & G \end{array} \quad \begin{array}{ccc} g & \longmapsto & (e, g) \longmapsto eg \stackrel{!}{=} g \\ & \searrow & \uparrow \\ & & G \end{array}$$

Definition 0.1 (polynomiale und rationale Funktion)

$f: \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^m$ heißt **polynomial** bzw. **Morphismus affiner Varietäten**, falls

$$(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)) = f(x_1, \dots, x_n)$$

mit $f_j \in k[x_1, \dots, x_n]$ für alle $j \in \{1, \dots, m\}$.

Sei $U \subseteq \mathbb{A}^n$ offen (im klassischen Sinne oder bzgl. Zariski-Topologie). $f: U \rightarrow \mathbb{A}^m$ heißt **polynomial**, falls $f = \frac{h}{g}$ mit $h, g \in k[x_1, \dots, x_n]$ und $g(x) \neq 0$ für alle $x \in U$. [$f_j = \frac{h_j}{g_j}$ komponentenweise]

f wie oben heißt **rational**, falls $f = \frac{h}{g}$ wie oben mit $g \not\equiv 0$ auf U . f ist im Allgemeinen keine Abbildung, sondern nur auf $U \setminus V(g=0)$ definiert.

Beispiel 0.2 (Beispiele für polynomiale und rationale Funktionen)

- $\mathrm{GL}_n \rightarrow \mathrm{GL}_n$ mit $g \mapsto g^{-1}$ ist polynomial, $M_n \rightarrow M_n$ mit " $g \mapsto g^{-1}$ " ist rational.
- $\det: \mathrm{GL}_n \rightarrow \mathbb{C}$ und $\det: M_n \rightarrow \mathbb{C}$ ist polynomial
- $\det^{-1}: M_n \rightarrow \mathbb{C}$ ist rational und $\det^{-1}: \mathrm{GL}_n \rightarrow \mathbb{C}$?
- $\mathbb{A}^1 = \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ mit $z \mapsto e^{2\pi iz}$ ist nicht polynomial

Index

Morphismus

 affiner Varietäten, 5

polynomiale Funktion, 5

rationale Funktion, 5

Verschwindungsmenge, 4

Zariski-Topologie, 4

Liste der Sätze und Definitionen

Definition 0.1	polynomiale und rationale Funktion	5
----------------	--	---