



WESTFÄLISCHE
WILHELMS-UNIVERSITÄT
MÜNSTER



FACHBEREICH 10
MATHEMATIK UND
INFORMATIK

Skript Differentialgeometrie I.

Mitschrift der Vorlesung „Differentialgeometrie I.“ von Frederik Witt

Arne Grauer

1. März 2015

Aktuelle Version verfügbar bei



<https://github.com/JaMeZ-B/latex-wwu>

GitHub ist eine Internetplattform, auf der viele OpenSource-Projekte gehostet werden. Diese Plattform nutzen wir zur Zusammenarbeit, also findet man hier neben den PDFs auch die \TeX -Dateien. Außerdem ist über diese Plattform auch direktes Mitarbeiten möglich, siehe nächste Seite.



<https://uni-muenster.sciebo.de/public.php?service=files&t=965ae79080a473eb5b6d927d7d8b0462>

Sciebo ist ein Dropbox-Ersatz der Hochschulen in NRW, der von der Uni Münster in leitender Position auf Basis der OpenSource-Software Owncloud aufgebaut wurde. Wenn man auf den Link klickt, kann man die Freigabe zum eigenen Speicher hinzufügen und hat dann immer automatisch die aktuellste Version.



B6WH2DISQ5QVYIRYIEZSF4ZR2IDVKPN3I

BTSync ist ein peer-to-peer Dateisynchronisations-Tool. Dabei werden die Dateien nur auf den Computern der Teilnehmer an einer Freigabe gespeichert. Ein Mini-Computer ist permanent online, sodass jederzeit die aktuellste Version verfügbar ist. Clients gibt es für jedes Betriebssystem. Zugang ist über das obige „Secret“ bzw. den QR-Code möglich




Vorlesungshomepage


<https://wwwmath.uni-muenster.de/u/frederik.witt/diffgeoI.html>

Hier ist ein Link zur offiziellen Vorlesungshomepage.

Vorwort — Mitarbeit am Skript

Dieses Dokument ist eine Mitschrift aus der Vorlesung „Differentialgeometrie I., WiSe 2014“, gelesen von Frederik Witt. Der Inhalt entspricht weitestgehend dem Tafelanschrieb. Für die Korrektheit des Inhalts übernehme ich keinerlei Garantie! Für Bemerkungen und Korrekturen – und seien es nur Rechtschreibfehler – bin ich sehr dankbar. Korrekturen lassen sich prinzipiell auf drei Wegen einreichen:

- Persönliches Ansprechen in der Uni, Mails an [✉ j.bantje@wwu.de](mailto:j.bantje@wwu.de) (gerne auch mit annotieren PDFs) oder Kommentare auf <https://github.com/JaMeZ-B/latex-wwu> .
- *Direktes* Mitarbeiten am Skript: Den Quellcode poste ich auf GitHub (siehe oben), also stehen vielfältige Möglichkeiten der Zusammenarbeit zur Verfügung: Zum Beispiel durch Kommentare am Code über die Website und die Kombination Fork + Pull Request. Wer sich verdient macht oder ein Skript zu einer Vorlesung, die ich nicht besuche, beisteuern will, dem gewähre ich gerne auch Schreibzugriff.


Beachten sollte man dabei, dass dazu ein Account bei github.com  notwendig ist, der allerdings ohne Angabe von persönlichen Daten angelegt werden kann. Wer bei GitHub (bzw. dem zugrunde liegenden Open-Source-Programm „git“) – verständlicherweise – Hilfe beim Einstieg braucht, dem helfe ich gerne weiter. Es gibt aber auch zahlreiche empfehlenswerte Tutorials im Internet.¹

- *Indirektes* Mitarbeiten: \TeX -Dateien per Mail verschicken.

Dies ist nur dann sinnvoll, wenn man einen ganzen Abschnitt ändern möchte (zB. einen alternativen Beweis geben), da ich die Änderungen dann per Hand einbauen muss! Ich freue mich aber auch über solche Beiträge!

Über die Differentialgeometrie

1. **Differentialgeometrie** Mannigfaltigkeiten \Rightarrow Differentialtopologie
2. **Riemannsche Geometrie** Längen und Winkel messen \leadsto Geodäte (lokal) kürzeste Verbindung zwischen 2 Punkten einer Mannigfaltigkeit.
Krümmung
Allgemeine Relativitätstheorie: Krümmung = Gravitation ist für solche Effekte verantwortlich

¹ zB. <https://try.github.io/levels/1/challenges/1> , ist auf Englisch, aber dafür interaktives LearningByDoing

Inhaltsverzeichnis

1 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten	1
1.1 Untermannigfaltigkeiten	1
1.1.1 Definition: Submersion, Immersion und Étale	1
1.1.2 Bemerkung: Submersiv/immersiv/étale sind offene Bedingungen	1
1.1.3 Satz über inverse Funktionen (inverse function theorem)	1
1.1.4 Satz über implizite Funktionen (implicit function theorem)	1
1.1.5 Satz (Normalenformen von Submersionen/Immersionen)	1
1.1.6 Definition: Untermannigfaltigkeit	2
1.1.7 Beispiele für Untermannigfaltigkeiten	2
1.1.8 Bemerkung:	3
1.1.9 Satz: lokale Parametrisierung von Untermannigfaltigkeiten	3
1.1.10 Beispiele zur lokalen Parametrisierung	4
1.1.11 Bemerkung	5
1.1.12 Satz: Wechsel lok. Parametrisierungen	5
1.2 Abstrakte Mannigfaltigkeit	6
1.2.1 Definition: Karte und Atlas	6
1.2.2 Definition: Abstrakte differenzierbare Mannigfaltigkeit	6
1.2.3 Beispiele für differenzierbare Mannigfaltigkeiten	6
1.2.4 Bemerkungen zu abstrakten Mannigfaltigkeiten	9
1.3 Glatte Abbildung	10
1.3.1 Definition: Glatte Funktionen zwischen zwei Mannigfaltigkeiten	10
1.3.2 Bemerkung	10
1.3.3 Definition	10
1.3.4 Beispiele	10
1.3.5 Definition	11
1.3.6 Theorem	11
1.3.7 Whitney Theorem	11
1.3.8 Bemerkung	11
1.4 Das Tangentialbündel einer Untermannigfaltigkeit	12
1.4.1 Definition	12
1.4.2 Satz: Vektorraumstruktur des Tangentialraumes	12
1.4.3 Satz	12
1.5 Das Tangentialbündel einer abstrakten Mannigfaltigkeit	13
1.5.1 Definition	13
1.5.2 Bemerkung	13
1.5.3 Definition	13
1.5.4 Bemerkung	14
1.5.5 Definition	14
1.5.6 Theorem	14
1.5.7 Lemma	14
1.5.8 Bemerkung	15
1.5.9 Definition: Vektorbündel	15
1.5.10 Beispiel	15
1.5.11 Bemerkung	16
1.6 Das Differential einer glatten Abbildung	16
1.6.1 Definition	16
1.6.2 Theorem: Kettenregel für Differentiale	16

1.7	Vektorfelder	17
1.7.1	Definition: Vektorfeld	17
1.7.2	Bemerkung: Vektorraumstruktur des $\Gamma(E)$	17
1.7.3	Beispiel	17
1.7.4	Satz: Parallelisierbarkeit des Tangentialbündels	17
1.7.5	Bemerkung	17
1.7.6	Definition	17
1.7.7	Bemerkung	17
1.7.8	Definition	18
1.7.9	Satz	18
1.7.10	Theorem	19
1.7.11	Definition: Derivation auf M	20
1.7.12	Bemerkung	20
1.7.13	Theorem	20
1.7.14	Definition und Satz	21
1.8	Der Fluß eines Vektorfeldes	21
1.8.1	Satz und Definition	21
1.8.2	Bemerkung	21
1.8.3	Satz und Definition	22
1.8.4	Beispiel	22
1.8.5	Definition	22
1.8.6	Proposition	22
1.8.7	Bemerkung	22
1.8.8	Satz	23
1.9	Verhalten von Vektorfeldern unter Diffeomorphismen	23
1.9.1	Proposition und Definition: Push-Forward	23
1.9.2	Bemerkung	24
1.9.3	Korollar	24
1.9.4	Proposition	24
1.9.5	Theorem	25
1.9.6	Korollar: Jacobi-Identität	25
1.9.7	Bemerkung	25
1.10	Tensorbündel	25
1.10.1	Wiederholung: Tensorprodukt von Vektorräumen	25
1.10.2	Beispiel	26
1.10.3	Tensorprodukt der linearen Abbildung	26
1.10.4	Tensorbündel	27
1.10.5	Kotangentialbündel von M	27
1.10.6	Tensorbündel	27
1.10.7	Operatoren für Tensoren	27
1.10.8	Beispiel	29
1.10.9	Satz	29
1.10.10	Lemma	30
1.10.11	Bemerkung	30
1.10.12	Definition	30
1.10.13	Satz: Funktionelle Eigenschaften	30
1.10.14	Bemerkung	30
1.10.15	Verkleben von Tensoren	30
1.10.16	Definition	31
1.10.17	Satz: Eigenschaften von \mathcal{L}_X	31
1.10.18	Korollar	31

1.11	Äußere Formen (Differentialformen)	31
1.11.1	Äußeres Produkt von Vektorräumen	31
1.11.2	Definition	32
1.11.3	Bemerkung	33
1.11.4	Satz/Definition	33
1.11.5	Korollar	34
1.11.6	Bemerkung	34
1.11.7	Beispiel	34
1.11.8	Proposition: Cartansche Formel	34
1.12	Volumenformen und Integration	34
1.12.1	Definition	34
1.12.2	Bemerkung	35
1.12.3	Integration auf Mannigfaltigkeiten	35
1.12.4	Bemerkung: Volumen von kompakten Mannigfaltigkeiten	35
1.12.5	Definition	35
1.12.6	Beispiel	35
1.12.7	Proposition	36
2	Riemannsche Geometrie	36
2.1	Riemannsche Metriken	36
2.1.1	Definition: Riemannsche Metrik	36
2.1.2	Bemerkung	37
2.1.3	Beispiele	37
2.1.4	Allgemeine Konstruktion	37
2.1.5	Satz	38
2.1.6	Musikalische Isomorphismen	38
2.2	Kovariante Abbildung	39
2.2.1	Definition	39
2.2.2	Beispiel	39
2.2.3	Bemerkung	40
2.2.4	Definition: kovariante Ableitung entlang γ	41
2.2.5	Beispiel	41
2.2.6	Bemerkung	41
2.2.7	Fortsetzung von ∇ auf $\Gamma(\mathcal{T}_q^p M)$	42
2.2.8	Definition	42
2.2.9	Bemerkung	42
2.2.10	Beispiel	42
2.2.11	Definition: Krümmung von ∇	42
2.2.12	Beispiel	42
2.2.13	Fundamentallemma der Riemannschen Geometrie	42
2.3	Riemannsche Distanzfunktion d^g	43
2.3.1	Definition	43
2.3.2	Definition: Länge einer stückweisen glatten Kurve	43
2.3.3	Lemma	44
2.3.4	Definition	44
2.3.5	Beispiel	44
2.3.6	Bemerkung: Durchmesser kompakter Mannigfaltigkeiten	44
2.3.7	Satz	44
2.4	Erste Variation der Bogenlänge und Geodäten	45
2.4.1	Definition	45
2.4.2	Bemerkung	45

2.4.3	Definition	45
2.4.4	Lemma	46
2.4.5	Satz: 1.Variation von L , glatter Fall	46
2.4.6	Theorem: 1. Variationsformel für L	47
2.4.7	Definition: Geodäte	47
2.4.8	Korollar	47
2.4.9	Beispiele	47
2.4.10	Bemerkung	48
2.4.11	Satz	48
2.5	Die Exponentialabbildung	48
2.5.1	Definition	48
2.5.2	Beispiele	49
2.5.3	Satz	49
2.5.4	Korollar	49
2.5.5	Bemerkung	49
2.5.6	Gauß-Lemma	50
2.5.7	Bemerkung	51
2.5.8	Korollar	51
2.6	Theorem von Hopf-Rinow	51
2.6.1	Definition	51
2.6.2	Beispiele	52
2.6.3	Theorem: Hopf-Rinow	52
2.6.4	Korollar	52
2.6.5	Satz	53
2.6.6	Beispiele	53
Index		A
Abbildungsverzeichnis		B

1 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Konvention: glatt = C^∞ .

Wiederholung: Diffeomorphismus $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ glatt, bijektiv und f^{-1} glatt.

1.1 Untermannigfaltigkeiten

1.1.1 Definition

Eine Abbildung $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ glatt heißt **Submersion/Immersion/Étale** in $x \in U$, falls $d_x f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ surjektiv/injektiv/Isomorphismus ist. f heißt schlechthin **Submersion/Immersion/Étale**, falls f Submersion/Immersion/Étale für alle $x \in U$ ist.

Insbesondere: $\mathbb{R}^n \xrightarrow{m/n \leq m/n} \mathbb{R}^m$

1.1.2 Bemerkung

Submersiv/immersiv/étale sind offene Bedingungen, d.h. ist f Submersion/Immersion/Étale in x , so auch in einer hinreichend kleinen Umgebung von x (vergleiche auch Satz 15 unten)

1.1.3 Satz über inverse Funktionen (inverse function theorem)

Sei $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ étale in x . Dann existiert eine offene Menge $x \in V \subset U \subset \mathbb{R}^n$, sodass $f|_V$ ein Diffeomorphismus auf seinem Bild ist, d.h. $f|_V : V \xrightarrow{\sim} f(V)$ ist bijektiv und $f|_V, (f|_V)^{-1}$ glatt.

1.1.4 Satz über implizite Funktionen (implicit function theorem)

Sei $f : U \subset \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine Submersion in 0 mit $f(0) = 0$. Dann existiert eine glatte Funktion g auf einer Umgebung von $0 \in \mathbb{R}^n$ mit Werten in \mathbb{R}^k , d.h.

$$g = g(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} g_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ g_k(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

mit

$$f(x_1, \dots, x_n, g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_k(x_1, \dots, x_n)) = f(x, g(x)) = 0$$

1.1.5 Satz (Normalenformen von Submersionen/Immersionen)

a) Sei $f : U \subseteq \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine Submersion mit $f(0) = 0$. Dann existiert ein Diffeomorphismus $\varphi : 0 \in V \subset \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ mit $\varphi(V) \subset U$ und $f \circ \varphi(x_1, \dots, x_{n+k}) = (x_1, \dots, x_n) = \pi_{\mathbb{R}^n}(x_1, \dots, x_{n+k})$, d.h. modulo einer Diffeomorphismus ist jede Submersion äquivalent zu einer Projektion.

b) Sei $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ eine Immersion in 0, $f(0) = 0$. Dann existiert ein Diffeomorphismus

$$\varphi : 0 \in V \subset \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$$

mit $\varphi(0) = 0$ und

$$\varphi \circ f(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0) = i(x_1, \dots, x_n)$$

d.h. modulo Diffeomorphismen ist f äquivalent zur kanonischen Einbettung von $\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+k}$.

Beweis

- (i) Wähle Koordinaten x_1, \dots, x_n mit $d_0 f = (A \ B)$ mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{k \times n}$ mit $\det A \neq 0$. Definiere $F : U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ durch $(p, q) \mapsto (f(p, q), q)$. Dann gilt

$$d_{(0,0)} F = \begin{pmatrix} d_0 f & \\ 0 & \text{id}_{k \times k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & \text{id}_{k \times k} \end{pmatrix} \implies \det d_0 F \neq 0$$

Mit 1.1.3 folgt: $\varphi = F^{-1}$ Diffeomorphismus um $0 \in \mathbb{R}^{n+k}$ herum.

- (ii) Definiere $F : U \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$. $F(p, q) = f(p) + (0, q)$.

$$d_{(0,0)} F = \begin{pmatrix} d_0 f & 0 \\ 0 & \text{id}_{k \times k} \end{pmatrix},$$

also $\det d_{(0,0)} F \neq 0 \implies \exists \varphi = F^{-1}$ um 0 mit $\varphi(f(p)) = \varphi \circ F(p, 0) = (p, 0) = i(p)$ □

Bemerkung

Durch Komposition mit Translationen können Submersionen/Immersionen mit $F(x) = y$ (nicht notwendigerweise $= 0$) behandelt werden.

1.1.6 Definition

$M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ heißt n -dimensionale **Untermannigfaltigkeit**, falls $\forall x \in M : \exists x \in U \subset \mathbb{R}^{n+k}$ Umgebung, sowie eine Submersion $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ mit $U \cap M = f^{-1}(0)$.

*Verallgemeinerung
des n -dimensionalen
Unterraumes*

1.1.7 Beispiele

- (i) Die n -**Sphäre** $S^n := \{x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x|^2 = 1\}$ ist eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^{n+1} . Definiere $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f(x_1, \dots, x_{n+1}) = x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 - 1$. $\implies f^{-1}(0) = S^n$ nach Definition.

$$d_x f = (2x_1, \dots, 2x_{n+1}) : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$$

- (ii) Die hyperbolischen Räume $H_c^n := \{x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid -x_1^2 + \sum_{i=2}^{n+1} x_i^2 = c\}$

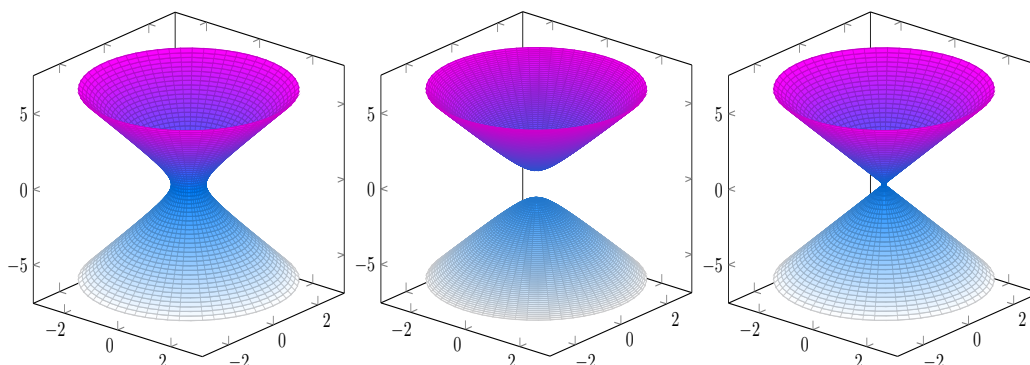


Abbildung 1: hyperbolischer Raum für $c > 0$, $c < 0$, $c = 0$

Sei $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f_c(x) = -x_1^2 + \sum_{i=2}^{n+1} x_i^2 - c$.

$\Rightarrow f$ ist glatt und $f_c^{-1}(0) = H_c^n$

Es bleibt zu zeigen, dass f eine Submersion ist.

$$d_x f = (-2x_1, 2x_2, \dots, 2x_{n+1}) : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$$

Es gilt $d_x f(\nu) = 0 \forall \nu \in \mathbb{R}^{n+1} \Leftrightarrow x_i = 0 \forall i = 1, \dots, n+1$.

Das heißt $\exists i : x_i \neq 0 \Rightarrow d_x f$ Submersion, wobei $\exists i : x_i \neq 0$ gilt, falls $x \in H_c^n, c \neq 0$. Also ist für $c \neq 0$ H_c^n eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Für $c = 0$ ist $H_0^n \setminus \{0\}$ eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit.

(iii) Der n -Torus $T^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_{2n-1}, x_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n} \mid x_1^2 + x_2^2 = 1, \dots, x_{2n-1}^2 + x_{2n}^2 = 1\}$

$$f : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 1 \\ \vdots \\ x_{2n-1}^2 + x_{2n}^2 - 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow f$ glatt, $f^{-1}(0) = T^n$

$$d_x f = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2x_3 & 2x_4 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & & 2x_{2n-1} & 2x_{2n} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow d_x f$ ist eine Submersion.

(iv) Die orthogonale Gruppe $O(n) \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ ist eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $\frac{n(n-1)}{2}$.

$$O(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid AA^T = \text{id}_{\mathbb{R}^n} = f^{-1}(0)\}, f(A) = AA^T - \text{id}_{\mathbb{R}^n}$$

Es gilt $f(A)^T = A^{TT} \cdot A^T - \text{id}^T = AA^T - \text{id} = f(A)$. Also $f : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \text{Sym}(\mathbb{R}^{n \times n}) = \{A \subseteq \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^T = A\}$.

$\Rightarrow f$ glatt, $f^{-1}(0) = O(n)$

$$d_A f : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \text{Sym}(\mathbb{R}^{n \times n}), d_A f = HA^T + AH^T$$

Sei $S \in \text{Sym}(\mathbb{R}^{n \times n})$. Setze $H = \frac{SA}{2} \Rightarrow d_A f(\frac{SA}{2}) = \frac{1}{2}(SAA^T + ASAT) = \frac{1}{2}(S + S) = S$

$\Rightarrow O(n)$ ist eine Untermannigfaltigkeit

1.1.8 Bemerkung

M kann von der Form $M = f^{-1}(0)$ sein, f glatt, aber keine Submersion. Zum Beispiel

$$M = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\} = f^{-1}(0), f(x, y) = x^3 + y^3$$

1.1.9 Satz

Es sind äquivalent:

- (i) $M^n \subset \mathbb{R}^{n+k}$ ist n -dim Untermannigfaltigkeit
- (ii) $\forall x \in M^n \exists$ Umgebungen U und $V \subset \mathbb{R}^{n+k}$ von x und 0 , und ein Diffeomorphismus $\phi : U \rightarrow V$ mit $\phi(M \cap U) \rightarrow \underbrace{(\mathbb{R}^n \times \{0\}) \cap V}_{=: W}$

- (iii) $\forall x \in M^n \exists$ Umgebungen $U \subset \mathbb{R}^{n+k}$ und $W \subset \mathbb{R}^n$, sowie eine glatte Abbildung $g : W \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$, sodass g ein Homöomorphismus von W auf $M \cap U$ und eine Immersion ist. g nennt man eine **lokale Parametrisierung**

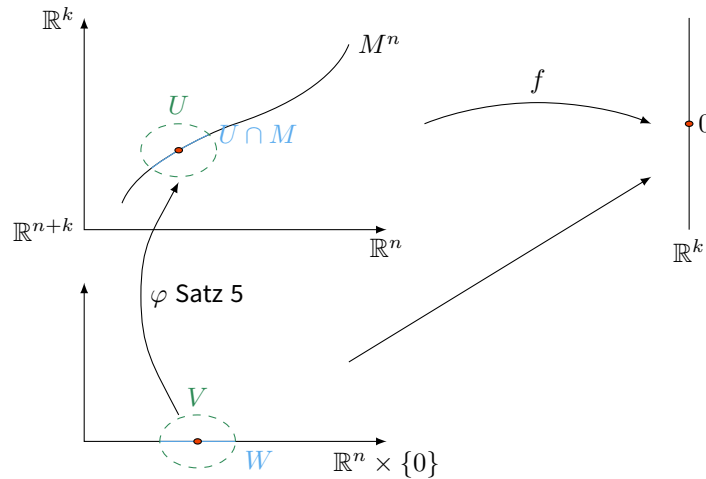


Abbildung 2: Beweis von 1.1.9

1.1.10 Beispiele

- (i) Der 2-Torus T^2 ist das Bild von

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4, g(x, y) = (\cos(x), \sin(x), \cos(y), \sin(y)) \in T^2 \subset \mathbb{R}^4$$

g ist lokale Parametrisierung:

$$d_{(x,y)}g = \begin{pmatrix} -\sin(x) & 0 \\ \cos(x) & 0 \\ 0 & -\sin(y) \\ 0 & \cos(y) \end{pmatrix}$$

$d_{(x,y)}g$ hat somit immer vollen Rang 2, also ist $d_{(x,y)}g$ injektiv. Es folgt somit, dass g eine Immersion ist.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\quad p \quad} & T^2 \subset \mathbb{R}^4 \\ & \searrow \hat{g} & \\ & (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^2 \simeq S^1 \times S^1 & \end{array}$$

Abbildung 3: Diagramm zum lok. Homöomorphismus von g

Sei X ein topologischer Raum, \sim eine Äquivalenzrelation. So ist X/\sim ein topologischer Raum versehen mit der Quotiententopologie, also $U \subset X/\sim$ offen $\Leftrightarrow p^{-1}(U)$ offen. Somit folgt für $X \xrightarrow{p} X/\sim$, dass p stetig und auch ein lokaler Homöomorphismus ist.

\hat{g} ist stetig (Quotiententopologie), \hat{g} bijektiv und T^2 kompakt. Damit folgt, dass \hat{g} ein Homöomorphismus und somit g ein lokaler Homöomorphismus ist.

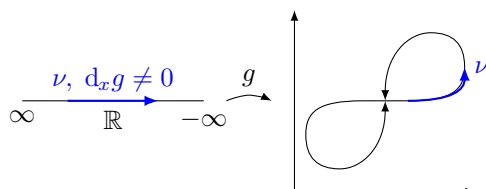
- (ii) Betrachte

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, g(x, y) = (\sin(x) \cos(y), \sin(x) \sin(y), \cos(x)) \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$$

g ist ein lokaler Homöomorphismus, jedoch ist $d_{(x,y)}$ nicht injektiv, das heißt keine lokale Parametrisierung nahe der Pole. Also müssen wir eine andere Parametrisierung wählen, zum Beispiel $g(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$

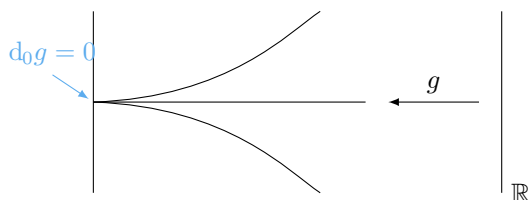
1.1.11 Bemerkung

(i) Betrachte:



g ist immersiv, hat aber keine Umkehrfunktion und ist somit kein Homöomorphismus.

(ii) Betrachte $C = \{(t^2, t^3) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\}$



g ist keine lokale Parametrisierung, da g nicht immersiv in 0 ist. $g(t) = (g_1(t), g_2(t)) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow g_1^2(t) = g_2^3(t) \Rightarrow d_0 g = 0$

1.1.12 Satz

Sei M^n eine n -dim glatte Untermannigfaltigkeit, $x \in M$, und seien U_1, U_2 Umgebungen von x in \mathbb{R}^{k+n} mit lok. Parametrisierung g_1 und g_2 von $U_1 \cap M$ und $U_2 \cap M$ definiert auf Ω_1 und Ω_2 (das heißt $g_i : \Omega_i \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$). Dann ist

$$g_2^{-1} \circ g_1 : \Omega_1 \cap g_1^{-1}(U_2) \xrightarrow{g_1} g_1(\Omega_1) \cap U_2 \xrightarrow{g_2^{-1}} \Omega_2 \cap g_2^{-1}(U_1)$$

ein C^∞ -Diffeomorphismus.

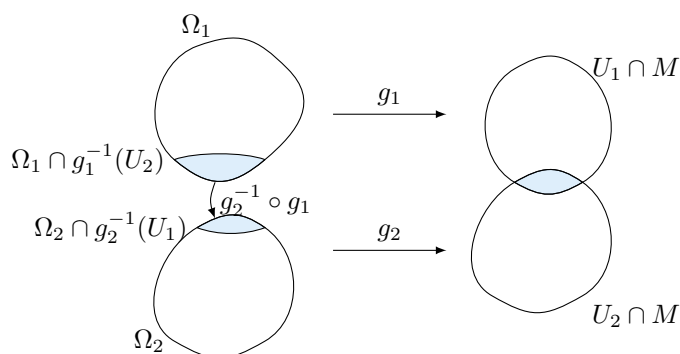


Abbildung 4: Veranschaulichung des Wechsel lok. Parametrisierung

Bemerkung

- $h : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ Homöomorphismus, offene Menge in $\Omega_1 \leftrightarrow$ offene Menge in Ω_2
- $\varphi : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ Diffeomorphismus, falls Homöom. und $C^\infty(\Omega_1) \leftrightarrow C^\infty(\Omega_2)$

1.2 Abstrakte Mannigfaltigkeit

1.2.1 Definition

Sei M ein topologischer Raum. Ein **Atlas** ist eine Familie $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ mit

- (i) $U_i \subset M$ offen, $M = \bigcup_{i \in I} U_i$ ($\{U_i\}$ offene Überdeckung)
- (ii) $\{\varphi_i : U_i \rightarrow \Omega_i \subset \mathbb{R}^n\}$ ist eine Familie von Homöomorphismen mit:

$$U_{ij} = U_i \cap U_j \neq \emptyset, \text{ dann ist } \varphi_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_{ij}) \rightarrow \varphi_i(U_{ij})$$

ein C^∞ -Diffeomorphismus.

Ein Paar (U_i, φ_i) heißt **Karte** und φ_{ij} heißt Übergangsfunktion oder .

1.2.2 Definiton

Sei M ein topologischer Raum.

- (i) Zwei Atlanten $\mathcal{A}_1 = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ und $\mathcal{A}_2 = \{(V_j, \psi_j)\}_{j \in J}$ sind äquivalent, genau dann wenn $\forall i \in I, j \in J$ mit $U_i \cap V_j \neq \emptyset$

$$\varphi_i \circ \psi_j^{-1} : \psi_j(U_i \cap V_j) \rightarrow \varphi_i(U_i \cap V_j)$$

ein C^∞ -Diffeomorphismus, das heißt die Vereinigung und $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ ist wieder ein Atlas von M .

- (ii) **Differenzierbare Struktur** auf M ist die Äquivalenzklasse eines Atlanten. Ein Hausdorffraum M mit einer differenzierbaren Struktur heißt **(abstrakte) differenzierbare Mannigfaltigkeit** oder Mannigfaltigkeit.

- (iii) Nehmen alle Karten eines Atlanten Werte in \mathbb{R}^n an, so heißt n die Dimension der Mannigfaltigkeit.

1.2.3 Beispiele

- (i) \mathbb{R}^n ist Mannigfaltigkeit der Dimension n , Atlas: $\{\mathbb{R}^n, \text{id}_{\mathbb{R}^n}\}$ und $U \subset \mathbb{R}^n$ ist Mannigfaltigkeit der Dimension n , Atlas: $\{U, \text{id}_{\mathbb{R}^n}|_U\}$

- (ii) Untermannigfaltigkeit im Sinne von Abschnitt 1.1 sind abstrakte Mannigfaltigkeiten.

- (iii) Mannigfaltigkeit $N \subset M$ ist eine Untermannigfaltigkeit von M , falls für alle $y \in N$ eine Karte (U, φ) von M um y existiert, sodass $\varphi(U \cap N)$ Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n im Sinne von Abschnitt 1.1 ist.

Dann gilt zum Beispiel $U \overset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}^n$ ist Untermannigfaltigkeit im "abstrakten" Sinne. Untermannigfaltigkeit $N \subset \mathbb{R}^n$ im Sinne von 1.1 ist Untermannigfaltigkeit im abstrakten Sinne.

(iv) Die n -Sphäre, z.B $n = 1$

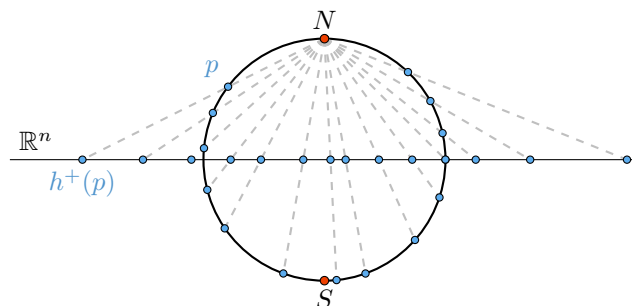


Abbildung 5: Stereografische Projektion

Allgemein: $U_N = S^n \setminus \{N\}$, $U_S = S^n \setminus \{S\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$

$$\varphi_N : U_N \rightarrow \mathbb{R}^n, (x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n)$$

$$\varphi_S : U_S \rightarrow \mathbb{R}^n, (x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto \frac{1}{1 + x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n)$$

$$\varphi_S \circ \varphi_N^{-1} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \mapsto \frac{x}{\|x\|^2}$$

Bemerkung

$\{(S^n, \text{id}_{\mathbb{R}^{n+1}}|_{S^n})\}$ ist kein Atlas, denn S^n ist nicht offen im \mathbb{R}^{n+1} .

(v) Der n -Torus T^n . Betrachte $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}^n, (x_1, \dots, x_n) \mapsto (\exp(ix_1), \dots, \exp(ix_n)) \in \underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_{n\text{-mal}} \subset$

$\mathbb{C} \times \dots \times \mathbb{C}$, so folgt $f(\mathbb{R}^n) = T^n$, $f(a_1, \cdot, a_n) = (e^{ia_1}, \cdot, e^{ia_n}) \in T^n$.

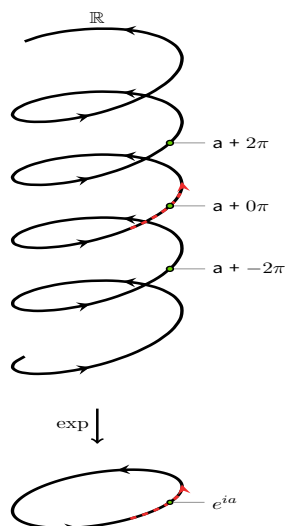


Abbildung 6: Veranschaulichung der Wahl der Karten

Schränke $f|_{(a_1-\epsilon, a_1+\epsilon) \times \dots \times (a_n-\epsilon, a_n+\epsilon)}$ auf sein Bild ein. $\varphi_a := f^{-1} : \underset{=U_a \subset T}{f(I_a)} \rightarrow I_a \overset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}^n$. Somit ist $\{(U_a, \varphi_a)\}_{a \in \mathbb{R}^n}$ eine Familie von Karten, die T^n überdeckt. Es bleibt zu zeigen, dass $\varphi_{ab} = \varphi_a \circ \varphi_b$ ein Diffeomorphismus ist, was wir an dieser Stelle dem Leser überlassen. Somit folgt, dass $\{(U_a, \varphi_a)\}_{a \in \mathbb{R}^n}$ ein Atlas ist.

(vi) Betrachte den Hyperbolischen Raum H^n . Veranschaulichung der Wahl der Karten H^n ist eine Mannigfaltigkeit mit einer Karte, gegeben durch stereographische Projektion. Man sagt daher, dass H^n diffeomorph zu \mathbb{R}^n

(vii) Würfel $Q \subset \mathbb{R}^n$

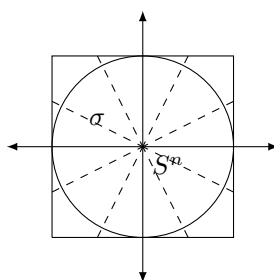


Abbildung 7: Der Würfel Q ist keine Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n !

Q ist jedoch eine abstrakte Mannigfaltigkeit, denn Q ist ein Hausdorffraum und bijektiv zu S^n durch Projektion *sigma*. So ist $\mathcal{A} := \{(\sigma^{-1}(U_N), \varphi_N \circ \sigma), (\sigma^{-1}(U_S), \varphi_S \circ \sigma)\}$ ein Atlas, da $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} = \varphi_S \circ \sigma \circ \sigma^{-1} \circ \varphi_N$ und somit ist Q eine abstrakte Mannigfaltigkeit.

(viii) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. So ist der **projektive Raum**

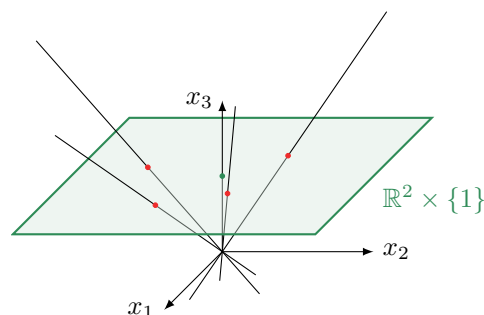
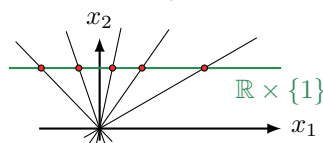
$$\begin{aligned} \mathbb{KP}^n &= \text{Menge der Ursprungsgraden in } \mathbb{K}^{n+1} \\ &= \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim, \quad x, y \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} \text{ seien äquivalent, } x \sim y \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} : x = \lambda y \\ &= \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} / \mathbb{K}^* \text{ wobei} \\ [x] &\in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} / \mathbb{K}^* \mapsto \langle x \rangle_{\mathbb{K}} \text{ lineare Erzeugnis von } x \text{ in } \mathbb{K}^{n+1} \end{aligned}$$

Wir schreiben $[x] = [x_0 : \dots : x_n]$, falls $x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$, "homogene Koordinaten".

Bemerkung

$$[x_0 : \dots : x_n] = [\lambda x_0 : \dots : \lambda x_n], \quad \lambda \in \mathbb{K}^{n+1}$$

(1) Betrachte $p : x \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} \mapsto [x] = p(x) \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$ so folgt, dass \mathbb{KP}^n versehen mit der Quotiententopologie ein Hausdorff-Raum ist.

Abbildung 8: Der 2-dimensionale projektive Raum $\mathbb{R}P^2$ (projektive Ebene)Abbildung 9: Der eindimensionale projektive Raum $\mathbb{R}P^1$

Aus Abbildung 3 bzw. 2 folgt somit $\mathbb{R}P^n = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cong S^2$ und analog $\mathbb{R}^2 \cup \{N\} \cong S^2$. Um zu zeigen, dass $\mathbb{K}P^n$ eine abstrakte Mannigfaltigkeit ist, muss die Existenz eines Atlanten gezeigt werden. Betrachte $U_i = \{[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{K}P^n \mid x_i \neq 0\}$. So folgt, dass $\bigcup_{i=0}^n U_i = \mathbb{K}P^n$, da $(0, \dots, 0) \notin \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$, also $\exists [0 : \dots : 0]$. Da $[x_0 : \dots : x_n] \in U_i \Rightarrow x_i \neq 0$, ist $\varphi_i : [x_0 : \dots : x_n] \mapsto [\frac{x_0}{x_i} : \dots : \frac{x_n}{x_i}] \xrightarrow{\varphi_i} [\frac{x_0}{x_i} : \dots : \frac{\hat{x}_i}{x_i} : \dots : \frac{x_n}{x_i}]$ wohldefiniert. Es bleibt als Übung zu zeigen, dass $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ ein Diffeomorphismus ist.

1.2.4 Bemerkung

- (i) Die Vereinigung aller äquivalenten Atlanten ist wieder ein Atlas, der sogenannte maximale Atlas (eindeutig bestimmt). In der Praxis arbeitet man mit konkreten Atlanten.
- (ii) Allgemein kann man C^p -Atlanten betrachten, das heißt $\varphi_{ij} : C^p$ -Diffeomorphismen $\rightarrow C^p$ -Mannigfaltigkeiten. Ebenso kann man Karten mit allgemeinen Zielräumen betrachten, wo der Begriff der Differenzierbarkeit/Diffeomorphismus Sinn hat. Zum Beispiel Banach- und Hilbertraum \rightarrow Banach- und Hilbertmannigfaltigkeiten oder Frécheraum \rightarrow Fréchemannigfaltigkeiten.
- (iii) Sei M ein topologischer Raum mit differenzierbarer Struktur, so ist er nicht automatisch Hausdorff! Zum Beispiel

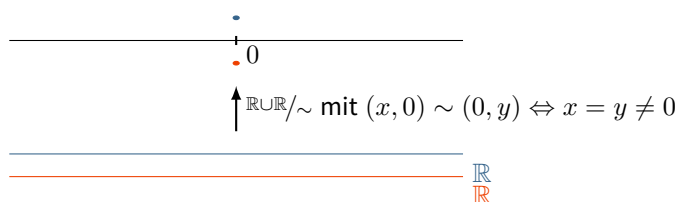


Abbildung 10: Beispiel einer Nichthausdorffmenge

Benutze Atlas $\{(U_1 = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}, \text{id}), (U_2 = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}, \text{id})\}$. Dies ist ein Atlas, da $U_1 \cap U_2 = M \setminus \{ \cdot \}$.

(iv) Wir nehmen künftig zwei zusätzliche Bedingungen für Mannigfaltigkeiten an:

- (a) M zusammenhängend \rightarrow jede Mannigfaltigkeit hat wohldefinierte Dimension schreibe M^n
- (b) M erfüllt das 2. Abzählbarkeitsaxiom. Für uns: \exists abzählbarer Atlas.

1.3 Glatte Abbildung

1.3.1 Definition

Seien M^n, N^m zwei Mannigfaltigkeiten und sei $f : M^n \rightarrow N^m$ eine stetige Abbildung. Dann heißt f glatt, falls für alle x Karten $(U, \varphi) \subset M$ und $(V, \psi) \subset N$ um x beziehungsweise $f^{-1}(x)$ existieren mit $f(U) \subset V$ und

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$$

$\subset \mathbb{R}^n \qquad \qquad \subset \mathbb{R}^m$

glatt ist. ("f in Karten gelesen ist glatt") Veranschaulichung der glatten Funktionen Wir schreiben $C^\infty(M, N) = \{f : M \rightarrow N \mid f \text{ glatt}\}$ und als Spezialfall $C^\infty(M) = C^\infty(M, \mathbb{R})$.

1.3.2 Bemerkung

Glattheit ist unabhängig von der Wahl der Karten! (\leadsto Diffeomorphismusbedingung!)

1.3.3 Definition

- (i) Eine glatte Abbildung $f : M \rightarrow N$ heißt Submersion/Immersion/étale, falls für ein Paar (und damit alle Karten) $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ eine Submersion/Immersion/étale ist.
- (ii) f ist Diffeomorphismus zwischen M und N (M und N sind "diffeomorph"), falls f bijektiv ist und f sowie f^{-1} glatt ist.
- (iii) $f : M \rightarrow N$ heißt Einbettung, falls f Immersion und Homöomorphismus auf sein Bild ist.

1.3.4 Beispiele

- (i) Wenn M eine Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^{n+k} , $f : \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^m$ glatte Funktion, dann ist auch $f|_M$ glatt.
 - $\{\mathbb{R}^n, \text{id}\}, \{\mathbb{R}^m, \text{id}\} \Rightarrow f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ glatt im Sinne von Definition 1.3.1 \Leftrightarrow glatt im üblichen Sinne
 - $x \in M$, Karte um x : $\varphi : U \subset \mathbb{R}^{n+k} \xrightarrow{\text{Diffeo.}} V = \varphi(U) \subset \mathbb{R}^{n+k}$ mit $\varphi(U \cap M) = U \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$ (aus 1.3.3), so gilt

$$f \circ \varphi^{-1} : V \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}) \xrightarrow{\varphi^{-1}|_{V \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})} \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+k})} M \cap U \xrightarrow{f \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+k}, \mathbb{R}^m)} \mathbb{R}^m$$

Somit folgt, dass $f|_M$ glatt ist. Veranschaulichung von f

- (ii) S^2 ist diffeomorph zu $\mathbb{CP}^1 = \{\text{Ursprungsgeraden in } \mathbb{C}^2\} = \mathbb{C} \setminus \{0\} / \mathbb{C}^*$. Definiere

$$f : S^2 \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{CP}^1, (x, y, z) \mapsto \begin{cases} z \neq -1 : [\frac{x+iy}{1+z} : 1] \\ z = -1 : [1 : 0] \end{cases}$$

Somit folgt

- (1) f ist bijektiv

(2) Wir lesen nun in Karten", wobei $U_1 = \{z_1 : z_2 \neq 0\} \xrightarrow{\psi_2} \frac{z_1}{z_2}$:

$$\psi \circ f \circ \varphi_S^{-1}(x, y) = \psi_2[x + iy : 1] = x + iy \stackrel{\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}}{=} (x, y)$$

Also ist $\psi \circ f \circ \varphi_S^{-1} = \text{id}$ und somit $f|_{S^2 \setminus \{S\}}$ ist C^∞ und f^{-1} auch C^∞ . Nun brauchen wir nur noch eine Karte um S ! Zum Beispiel φ_N . Hier $\varphi_N(S) = (0, 0)$. Es gilt:

$$f \circ \varphi_N^{-1}(x, y) = \begin{cases} (x, y) \neq (0, 0) : [\varphi_S \circ \varphi_N^{-1}(x, y) : 1] \stackrel{\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}}{=} [\frac{x+iy}{x^2+y^2} : 1] \in U_0 \\ [1 : 0] \in U_0 \end{cases}$$

Somit folgt:

$$\psi_1 \circ f \circ \varphi_N^{-1}(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{x+iy} = x - iy \\ 0 \end{cases} = (x, -y) \text{ glatt}$$

1.3.5 Definition

- (i) Eine Mannigfaltigkeit erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom, falls es einen abzählbaren Atlas besitzt.
- (ii) Seien M^n eine Mannigfaltigkeit. Eine Familie $\{f_i : M \rightarrow \mathbb{R}\}$ glatter Funktionen heißt **Zerlegung der Eins**, falls
 - $\text{supp } f_i = \overline{\{x \in M \mid f_i(x) \neq 0\}}$ Träger von f_i sind kompakt und bilden lokal endliche Familie" (das heißt, sei $K \subset M$ kompakt, so gilt $\text{supp } f_i \cap K = \emptyset$ außer für endlich viele $i \in I$)
 - $\forall x \sum_{i \in I} f_i(x) = 1$ (wohldefiniert, also \sum endlich, da lokal endlich)

1.3.6 Theorem

Sei $\{U_i\}_{i \in I}$ eine Überdeckung von M . Ist M zweifach abzählbar, so existiert eine Zerlegung der Eins, die \mathcal{U} untergeordnet ist, das heißt $\text{supp } f_i \subset U_i$. Dies ist nützlich um beliebig definierte Objekte zu globalen Objekten zu verkleben. Untergeordnete Zerlegung der Eins

1.3.7 Whitney Theorem

Sei M^n eine zweifach abzählbare Mannigfaltigkeit. Dann existiert eine Einbettung $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ von M (bzw. Immersion $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n-1}$) als Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^{2n} (bzw. \mathbb{R}^{2n-1})

1.3.8 Bemerkung

- (i) Können jede "abstrakte Mannigfaltigkeit M^n als eine Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^{2n-1} realisieren.

Aber

Die Einbettung ist nicht kanonisch (oder natürlich", das heißt gewisse Eigenschaften der Untermannigfaltigkeit entstehen durch die Einbettung und sind keine intrinsische Einbettung von M !

- (ii) Die Dimension $2n - 1$ des Bildraumes ist optimal im folgenden Sinne

\exists Mannigfaltigkeit M^n , die sich nicht in \mathbb{R}^N mit $N < 2n - 1$ einbetten lassen.

Beweisskizze

Wir nehmen an, dass die Mannigfaltigkeit M kompakt ist. So folgt mit 1.5.8, dass ein endlicher Atlas $\{(U_i, \varphi_i : U_i \rightarrow \Omega_i \subset \mathbb{R}^n)\}_{i=1}^n$ mit untergeordneter Zerlegung der Eins $\{f_i : M \rightarrow \mathbb{R}\}_{i=1}^n$, $\text{supp } f_i \subset U_i$ existiert. Definiere $\psi_i : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch $\psi_i(x) = \varphi_i(x)f_i(x)$, so folgt $\psi_i(x) \equiv 0$ für $x \in U_i^c$ und ψ_i ist glatt. Dann definiert $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+r}$, $\psi(x) = (\psi_1(x), \dots, \psi_r(x), f_1(x), \dots, f_r(x))$ eine Einbettung. Von jetzt an ist M^n stets eine glatte zweifach abzählbare Mannigfaltigkeit.

1.4 Das Tangentialbündel einer Untermannigfaltigkeit

1.4.1 Definition

Sei $M^n \subset \mathbb{R}^{n+k}$ eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Sei $x \in M$. $v \in \mathbb{R}^{n+k}$ ist tangential an M in x , falls eine C^∞ -Abbildung $c : 0 \in I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ existiert mit

- $c(I) \subset M$
- $c(0) = x$
- $c'(t) = v$

Notation

$T_x M^n$ = Menge der Tangentialvektoren v in x .

1.4.2 Satz

$T_x M^n$ ist ein n -dim Vektorraum $_{\mathbb{R}}$ ($\cong \mathbb{R}^n$)

Beweis

Sei M eine Untermannigfaltigkeit, $x \in M$, so existiert Umgebung $U \subset \mathbb{R}^{n+k}$ offen, $\varphi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^{n+k}$ diffeomorph mit $\varphi(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$. Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ ein Weg mit $c(I) \subset M \cap U$, so ist $\varphi \circ c$ ein Weg im $V \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$. Es folgt, dass $T_x M \cong d_{\varphi(x)} \varphi^{-1}(\mathbb{R}^n \times \{0\})$, das heißt $T_x M$ übernimmt die Vektorraumstruktur von $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ Beispiel eines Tangentialraumes am S^2

1.4.3 Satz

Sei $M^n \subset \mathbb{R}^{n+k}$ eine Untermannigfaltigkeit der Dimension n , $x \in M$ und $U \subset \mathbb{R}^{n+k}$ offene Umgebung um x .

- (i) $U \cap M = f^{-1}(0)$ für $f : \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine Submersion, so ist $T_x M^n = \ker d_x f$.
Sei zum Beispiel $M = S^2$. So ist $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ eine Submersion mit $S^2 = f^{-1}(0)$. Betrachte nun den Tangentialraum am Nordpol N . Es gilt $d_N f = (0, 0, z) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, also gilt für den Tangentialraum:

$$T_N S^2 = \ker d_N f = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

- (ii) Sei $\varphi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^{n+k}$ ein Diffeomorphismus mit $\varphi(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$, dann ist $T_x M = d_{\varphi(x)} \varphi^{-1}(\mathbb{R}^n \times \{0\})$
- (iii) Ist (Ω, g) eine Parametrisierung von $U \cap M$, so ist der Tangentialraum $T_{g(y)} M = d_y g(\mathbb{R}^n)$

Beweis

- (i) Sei $v \in T_x M$, das heißt $v = c'(0)$, $c(0) = x$. So gilt $f \circ c(t) = 0$, da $c(t) \subset M \cap U = f^{-1}(0)$. Somit folgt mit der Kettenregel, dass $d_{c(0)} f \circ c'(0) = d_x f(v) = 0$. Also ist $v \in \ker d_x f$ und es gilt $T_x M \subset \ker d_x f$. Da $T_x M$ und $\ker d_x f$ n -dimensional, folgt somit die Gleichheit.
- (ii) Siehe 1.7.2
- (iii) Sei $\tilde{c} \subset \Omega$ eine Kurve, $c := g \circ \tilde{c}$ Kurve durch $c(0) = g(\tilde{c}(0)) \in M$. So ist $c'(0) = d_{\tilde{c}(0)} g(\tilde{c}'(0)) \in T_{c(0)} M$. Also gilt $d_y g(\mathbb{R}^n) \subset T_{g(y)} M$ und die Gleichheit folgt wie in (i) durch die Dimension.

1.5 Das Tangentialbündel einer abstrakten Mannigfaltigkeit**1.5.1 Definition**

Sei M^n eine abstrakte Mannigfaltigkeit, $x \in M$. Ein **Tangentialvektor** von M in x ist eine Äquivalenzklasse von Kurven $\alpha : I \rightarrow M$ mit $\alpha(0) = x$. Dabei heißen $\alpha : I \rightarrow M$ und $\beta : J \rightarrow M$ äquivalent, falls eine Karte (U, φ) um x existiert mit

$$(\varphi \circ \alpha)'(0) = (\varphi \circ \beta)'(0)$$

Veranschaulichung der Definition

Notation

$T_x M$ = Raum der Tangentialvektoren

1.5.2 Bemerkung

- (i) Gilt die oben genannte Äquivalenzbedingung für eine Karte, dann gilt sie für alle.

Beweis

Sei (V, ψ) eine andere Karte. Es gilt

$$\begin{aligned} (\psi \circ \alpha)'(0) &= (\psi \circ \varphi^{-1} \varphi \circ \alpha)'(0) \\ &= d_{\varphi(\alpha(0))} (\psi \circ \varphi^{-1})((\varphi \circ \alpha)'(0)) \\ &= d_{\varphi(\beta(0))} (\psi \circ \varphi^{-1})((\varphi \circ \beta)'(0)) = (\psi \circ \beta)'(0) \end{aligned}$$

- (ii) $T_x M$ ist n -dimensionaler Vektorraum $_{|\mathbb{R}}$.

Beweis

Sei (U, φ) eine Karte um x . Sei $\Gamma_{(U, \varphi, x)} : T_x M \rightarrow \mathbb{R}^n$, $[\alpha] \mapsto (\varphi \circ \alpha)'(0)$. Aus der Äquivalenzrelation folgt, dass Γ wohldefiniert und bijektiv. Also können wir die Vektorraumstruktur auf $T_x M$ durch $\Gamma_{(U, \varphi, x)}$ erklären. Dies ist wohldefiniert, da $d_{\varphi(x)}(\psi \circ \varphi^{-1})$ für jede weitere Karte (V, ψ) um x ein linearer Isomorphismus ist. (Da $\psi \circ \varphi^{-1}$ Diffeomorphismus.)

1.5.3 Definition

Sei M eine Mannigfaltigkeit, $x \in M$, (U, φ) und (V, ψ) zwei Karten um x . Seien $u, v \in \mathbb{R}^n$. Als Äquivalenzrelation ist definiert:

$$u \sim v \stackrel{\text{Def.}}{\iff} v = d_{\varphi(x)}(\psi \circ \varphi^{-1})(u)$$

Ein **Tangentialvektor** in x auf M ist eine solche Äquivalenzklasse $[(U, \varphi, u)]$

1.5.4 Bemerkung

Sei $x \in M$, (U, φ) Karte um x . So ist

$$\Theta_{(U, \varphi, x)} : \begin{matrix} u \\ \in \varphi(x) + \mathbb{R}^n \end{matrix} \rightarrow [(U, \varphi, u)] \in T_x M$$

eine Bijektion, die wohldefiniert $VR|_{\mathbb{R}^n}$ auf $T_x M$ induziert.

1.5.5 Definition

$TM := \bigcup_{x \in M} T_x M$ ist das **Tangentialbündel** von M .

1.5.6 Theorem

TM^n trägt eine natürliche Differentialstruktur und hat die Dimension $2n$. (Beweis benutzt 1.8.2)

Beweis

Definiere $\pi : TM \rightarrow M$, $\xi \in T_x M \mapsto \pi(\xi) = x \in M$ Fußpunkt". π ist surjektiv. Wir wollen nun 1.8.3 anwenden. Für Karte (U, φ) um $x \in M$ definiere $(\pi^{-1}(U), \Phi_{(U, \varphi)})$ durch

$$\Phi_{(U, \varphi)}(\xi) = (\varphi \circ \pi(\xi), \Theta_{(U, \varphi, \pi(\xi))}^{-1}(\xi))$$

Θ aus 1.7.14. Wieso genügt es nicht, Φ als Θ⁻¹ zu erklären? Ich denke um zu gewährleisten, dass Φ bijektiv

Es gilt $\bigcup_{(U, \varphi)} \pi^{-1}(U) = TM$ und $\Phi_{(U, \varphi)}(\pi^{-1}(U)) = \varphi(U) \times \mathbb{R}^n \overset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ist eine Bijektion, da Θ bijektiv.

Verifiziere (i) und (ii):

(i)

$$\underbrace{\Phi_{(V, \psi)}^{-1} \left(\begin{matrix} a \\ \in \varphi(v) \end{matrix}, v \right)}_{T_{\psi^{-1}(a)} M} = \Theta_{(V, \psi, \psi^{-1}(a))}(v) \xrightarrow{\Phi_{(V, \psi)}} \left(\psi(\psi^{-1}(a)), \Theta_{(V, \psi, \psi^{-1}(a))}^{-1}(\Theta_{(V, \psi, \psi^{-1}(a))}(v)) \right)$$

Berechne Übergangsfunktion:

$$\Phi_{(U, \varphi)} \circ \Phi_{(V, \psi)}^{-1}(a, v) = \Phi_{(U, \varphi)}(\Theta_{(V, \psi, \psi^{-1}(a))}(v)) = (\varphi \circ \psi^{-1}(a), d_{\varphi(a)}(\varphi \circ \psi^{-1})(v))$$

(Beachte hierbei, das $T_{\varphi^{-1}(a)} \ni [(V, \psi, v)] = [(U, \varphi, d_{\psi(a)}(\varphi \circ \psi^{-1})(v))]$)

(ii) Seien $\xi, \eta \in TM$. Falls $\pi(\xi) = \pi(\eta)$, so sind $\xi, \eta \in \pi^{-1}(U)$ für eine Karte um x . Falls $\pi(\xi) = x$, $\pi(\eta) = y$, $x \neq y$, so ist $\xi \in \pi^{-1}(U)$, $\eta \in \pi^{-1}(V)$ für Karten U, V von x, y mit $U \cap V = \emptyset$, (diese existieren, da M Hausdorff). Also $\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V) = \emptyset$.

1.5.7 Lemma

Sei M eine Menge mit Überdeckung $\{U_i \subset M\}_{i \in I}$, das heißt $\bigcup_{i \in I} U_i = M$. Seien für alle $i \in I$ $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ Bijektionen mit offene Mengen $\varphi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^n$. Falls

(i) $\forall i, j \in I$ $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ ist glatt

(ii) $\forall x, y \in M$ gilt $\exists i \in I$ $x, y \in U_i$ oder $\exists i, j$ und $U_i \cap U_j = \emptyset$ mit $x \in U_i$ und $y \in U_j$

dann existiert eine eindeutig bestimmte Hausdorff-Topologie auf M und eine differenzierbare Struktur, für die $\{U_i, \varphi_i\}$ ein Atlas ist.

Beweis

(i) \leadsto Übergangsfunktion sind Diffeomorphismen

(ii) \leadsto Hausdorff

Siehe auch O'Neill.

1.5.8 Bemerkung

Ist M eine sogenannte C^p -Mannigfaltigkeit, das heißt die Übergangsfunktionen sind C^p , so folgt mit dem Beweis von 1.8.2, dass TM eine C^{p-1} -Mannigfaltigkeit ist.

TM ist ein spezielles Beispiel der folgenden Klasse an Mannigfaltigkeiten.

1.5.9 Definition

Seien E, B zwei Mannigfaltigkeiten und $\pi : E \rightarrow B$ glatt. (E, B, π) heißt **Vektorbündel** vom Rang r über B , falls

- (i) π surjektiv
- (ii) Es existiert eine offene Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ von B und Diffeomorphismen $\Phi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{R}^r$, sodass $\forall x \in U_i : \Phi_i(\pi^{-1}(x)) = \{x\} \times \mathbb{R}^r$.
- (iii) Die "Übergangsfunktionen"

$$\Phi_{ji} = \Phi_j \circ \Phi_i^{-1} : U_{ji} \times \mathbb{R}^r \rightarrow U_{ji} \times \mathbb{R}^r$$

sind von der Form $\Phi_{ji}(x, v) = (x, g_{ji}(x)v)$, wobei $g_{ji} : U_{ji} \rightarrow GL(r, \mathbb{R})$, das heißt $g_{ji} = ((u_{kl}(x)))_{k,l=1}^r$

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\Phi_i} & U_i \times \mathbb{R}^n \\ & \searrow \pi \quad \swarrow pr_1 & \\ & U_i & \end{array}$$

Insbesondere ist $\Phi_{ji}(x, \cdot) : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^r$ ein linearer Isomorphismus gegeben durch $g_{ji}(x) \in GL(r, \mathbb{R})$

Notation

- E Totalraum
- B Basis
- $\pi^{-1}(x)$ Faser über x

Vektorbündel

1.5.10 Beispiel

- (i) Sei M eine Mannigfaltigkeit. $E = M^n \times \mathbb{R}^r \xrightarrow{\pi=pr_1} M$ surjektiv und glatt, so ist dies ein triviales Bündel, $\Phi : \pi^{-1}(M) = M^n \times \mathbb{R}^r \xrightarrow{\text{id}} M^n \times \mathbb{R}^r$, $\Phi(x, \cdot) = \text{id} \in GL(r, \mathbb{R})$.

Allgemein sagen wir, dass (E, π, B) trivial ist, falls ein Diffeomorphismus $\Phi : E \rightarrow B \times \mathbb{R}^r$ existiert mit

$r = \text{Rang von } E$

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\Phi_i} & B \times \mathbb{R}^n \\ \pi \searrow & & \swarrow pr_1 \\ & B & \end{array}$$

kommutativ und $\forall x \in B$ ist $\Phi|_{\pi^{-1}(x)}$ ein linearer Isomorphismus.

(ii) $TM \rightarrow M$ ist ein Vektorbündel vom Rang $n = \dim M$. Vergleiche dazu Karten $\Phi_{(U,\varphi)}$ aus 1.8.1.

1.5.11 Bemerkung

(i) Insbesondere gilt für alle $x \in B$ ist $\pi^{-1}(x)$ Faser über x ein r -dim $VR|_{\mathbb{R}} \rightsquigarrow$ "Vektorbündel". So sei $\xi, \eta \in \pi^{-1}(x) \simeq \mathbb{R}^r$. Es gilt

$$\xi + \eta = \Phi^{-1} \left(\overbrace{\Phi(\xi) + \Phi(\eta)}^{=(x,u+v)} \right)$$

(ii) Ist B zusammenhängend, so ist E zusammenhängend. (Dies folgt aus der Tatsache das Fasern zusammenhängend sind und allgemeinen topologischen Argumenten.)

1.6 Das Differential einer glatten Abbildung

1.6.1 Definition

Das **Differential** einer glatten Abbildung $f : M \rightarrow N$ in $x \in M$ ist definiert durch

$$d_x : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N, \quad d_x f([(U, \varphi, u)]) = [(V, \psi, d_{\varphi(x)}(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(u))]$$

(kurz: $d_x f(u) = v \in T_x N$ für Karten (U, φ) um x und (V, ψ) um $f(x)$)

Dies ist wohldefiniert, denn sei $(\tilde{U}, \tilde{\varphi}, \tilde{u}) \sim (U, \varphi, u)$, so gilt mit der Kettenregel

$$d_{\tilde{\varphi}(x)}(\psi \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1})(\tilde{u}) = d_{\tilde{\varphi}(x)}(\psi \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1})(d_{\varphi(x)}(\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1})(u)) = d_{\varphi(x)}(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(u)$$

Genauso hängt das Bild nicht von ψ und φ ab, das heißt das Differential von f ist intrinsisch definiert.

Definition des Differentials nach 1.7.11

Veranschaulichung der Definition des Differentials nach 1.7.11 Sei $f : M \rightarrow N$ glatt, $[\alpha] \in T_x M$ im Sinne von 1.7.11, so gilt für das **Differential**

$$d_x f([\alpha]) = [f \circ \alpha] \in T_{f(x)} N$$

1.6.2 Theorem

Seien $f : M \rightarrow N$ und $g : N \rightarrow P$ zwei glatte Abbildungen in $x \in M$ bzw. $f(x) \in N$. Dann ist $g \circ f : M \rightarrow P$ glatt in x und

$$d_x(g \circ f) = d_{f(x)}g \circ d_xf : T_xM \rightarrow T_{f(x)}N \rightarrow T_{(g \circ f)(x)}P$$

Beweis Übung

1.7 Vektorfelder

Sei $E \xrightarrow{\pi} B$ ein Vektorbündel. Eine glatte Abbildung $\sigma : M \rightarrow E$ heißt Schnitt von E , falls $\pi \circ \sigma = \text{id}_M$.

($\sigma : U \xrightarrow{\text{offen}} M \rightarrow E$ glatt heißt lokaler Schnitt, falls $\pi \circ \sigma = \text{id}_U$.)

$\Gamma(U, E)$ = Raum der lokalen Schnitte, $\Gamma(M, E) = \Gamma(E)$ = Raum der (globalen) Schnitte. Veranschaulichung eines Schnittes

1.7.1 Definition

Ein **Vektorfeld** X ist ein Schnitt von TM , das heißt $X \in \Gamma(TM)(=: \mathcal{X}(M))$

Das X muss nicht
 anders aussehen..

1.7.2 Bemerkung

$\Gamma(TM)$ (allgemein $\Gamma(E)$ für E Vektorbündel) ist ein \mathbb{R} -Vektorraum. Es gilt

$$(X + Y)(x) := X(x) + Y(x) \in T_x M \xrightarrow{\pi} \{x\}$$

1.7.3 Beispiel

Betrachte TS^n : Vektorfelder auf S^1 $X \in \Gamma(TS^n)$ ist $X : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ glatt mit $g_0(X(x), x) = 0$, wobei g_0 das Skalarprodukt.

Übungsaufgabe

E ist genau dann trivial, wenn r Schnitte $\sigma_1(x), \dots, \sigma_r(x) \in \Gamma(E)$ existieren, die in jeden Punkt linear unabhängig sind, das heißt $\forall x \in M : \sigma_1(x), \dots, \sigma_r(x)$ Basis von $\pi^{-1}(x) =: E_x$

1.7.4 Satz

TM^n ist genau dann trivial, wenn n Vektorfelder X_1, \dots, X_n existieren, die in jeden Punkt linear unabhängig sind. Man nennt M^n dann auch **parallelisierbar**.

1.7.5 Bemerkung

Parallelisierbarkeit ist eine sehr starke Bedingung! So ist zum Beispiel der S^1 parallelisierbar, der S^2 jedoch nicht.

Wir beginnen nun den 3. Ansatz zur Definition des Tangentialraums vorzustellen, die Definition des Algebrikers.

1.7.6 Definition

Seien $x \in M$, U und V offene Umgebungen um x . Sei ferner $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ zwei glatte Funktionen. Wir sagen, dass f äquivalent zu g ist, falls offene Umgebung $W \subset U \cap V$ existiert mit $f|_W = g|_W$. Die Äquivalenzklasse heißt **Keim** von f in x und wird $[f, x]$ geschrieben (oder einfach nur $[f]$ falls x klar, oder sogar nur f). Die Menge der Keime in x wird mit $C_x^\infty(M)$ oder kurz C_x^∞ bezeichnet.

1.7.7 Bemerkung

(i) C_x^∞ ist (∞) -dimensionaler reeller Vektorraum: $[f] + [g] = [f + g]$. Es ist sogar eine Algebra.

In meiner Mitschrift steht $[f \circ \varphi]$ und nicht $[f \circ \varphi^{-1}]$, das macht jedoch keinen Sinn. Meinungen sind erwünscht.

(ii) Es gilt $C_x^\infty(M) \simeq C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Sei (U, φ) Karte um x mit $\varphi(x) = 0$. So ist $[f] \in C_x^\infty(M) \mapsto [f \circ \varphi^{-1}] \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ der gewünschte Isomorphismus. Aber: Dieses Isomorphismus ist nicht kanonisch, das heißt er hängt von φ ab!

- (iii) $U \subset M$ offen und $x \in U$, dann ist $C_x^\infty(U) = \{[f|_U] : f : U \rightarrow \mathbb{R} \text{ glatt}\} \simeq C_x^\infty(M)$.
 Klar: $[f] \in C_x^\infty(M) \hookrightarrow [f|_U] \in C_x^\infty(U)$. Bleibt die Surjektivität zu zeigen: Sei $[g] \in C_x^\infty(M)$, $g : U \rightarrow \mathbb{R}$. Sei $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Cut-Off Funktion, also mit $\text{supp } \psi \subset U$ und $\psi \equiv 1$ auf Umgebung W von x . So ist $\psi|_U \cdot g : U \rightarrow \mathbb{R}$ glatt und $(\psi|_U \cdot g)|_{U \cap (\text{supp } \psi)^c} \equiv 0$. Setze $\psi|_U \cdot g$ durch 0 auf U^c fort, es ergibt sich $\tilde{g} : M \rightarrow \mathbb{R}$ glatt mit $\tilde{g}|_W = \psi|_W \cdot g|_W = g|_W$, also $[\tilde{g}] \in C_x^\infty(M) \rightarrow [\tilde{g}|_U] = [g] \in C_x^\infty(U)$.

1.7.8 Definition

Eine **Derivation** auf $C_x^\infty(M)$ ist eine lineare Abbildung $\delta : C_x^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\delta(fg) = f(x)\delta(g) + \delta(f)g(x)$$

Notation

$D_x =$ Raum der Derivationen auf C_x^∞

1.7.9 Satz

Jede Derivation $\delta \in D_0(\mathbb{R}^n)$ ist von der Form

$$\delta(f) = \sum_{j=1}^n v^j \frac{\partial f}{\partial x^j}(0) \quad \text{für } v^j \in \mathbb{R}$$

Nochmal zur Erinnerung: v^j ist keine Potenz sondern ein Indize.

Beweis

- Sei $U \subset \mathbb{R}^n$. $f \mapsto \frac{\partial}{\partial x^j} f(0)$ ist eine Derivation, da $\frac{\partial}{\partial x^j} f(0)$ nur von $[f]$ abhängt.
- $\delta(c) = c \cdot \delta(1) = 0$, da $\delta(1) = \delta(1 \cdot 1) = \delta(1) + \delta(1) = 2\delta(1)$. Es folgt $\delta(f - f(0)) = \delta(f)$, wobei

$$f - f(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx) dt = \sum_{j=1}^n x^j \underbrace{\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x^j} f(tx) dt}_{h_j(x)}$$

Somit gilt

$$\delta(f) = \delta(f - f(0)) = \delta\left(\sum_{j=1}^n x^j h_j(x)\right) = \sum_{j=1}^n \delta(x^j) h_j(0) + x^j(0) \delta(h_j) \underset{=0}{=} \sum_{j=1}^n \delta(x^j) h_j(0) \underset{=: v^j = \frac{\partial}{\partial x^j}}{=}$$

Einschub

Wie schaut $\delta \in C_x^\infty(M)^*$ Derivation in der Karte φ aus?
 Sei $\varphi(x) = (x^1(x), \dots, x^n(x))$. Dann definiert

$$\frac{\partial}{\partial x^j}(x) : C_x^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \frac{\partial f}{\partial x^j}(x) := \frac{\partial}{\partial x^j} (f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))$$

δ lin. Abb. und $\delta : C_x^\infty \rightarrow \mathbb{R}$, also $\delta \in C_x^\infty(M)^*$

eine Derivation. Derivationen in der Karte Insbesondere gilt dann (vgl. 1.10.10), wobei $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$, also $x^j : U \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x^j}(x) = \sum_j \delta(x^j) \frac{\partial}{\partial x^j}(x)$$

Definiere für $v \in T_x M$ die Derivation:

$$\mathcal{L}_v f := d_x f(v) \in \mathbb{R}$$

das heißt $\mathcal{L}_v : C_x^\infty(M) \rightarrow (R)$.

1.7.10 Theorem

$v \in T_x M \rightarrow \mathcal{L}_v \in \mathcal{D}_x(M)$ ist ein linearer Isomorphismus.

Beweis

- Linearität klar
- Surjektivität: Sei $v = [(U, \varphi, u)] \in T_x M$, $f \in C_x^\infty(M)$. Es gilt

$$\mathcal{L}_v f = d_x f(v) = d_{\varphi(x)}(f \circ \varphi^{-1})(u) = \sum_{j=1}^n u^j \frac{\partial}{\partial x^j} (f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)) = \sum_{j=1}^n u^j \frac{\partial}{\partial x^j} f(x)$$

Ist also $\delta \in \mathcal{D}_x(M)$, dann $\delta = \mathcal{L}_{v_\delta} f$ mit $v_\delta = [U, \varphi, (\delta(x^1), \dots, \delta(x^n))]$

• Injektivität: Angenommen $\mathcal{L}_v f = 0$ für alle $f \in C_x^\infty(M)$ und $v = [(U, \varphi, u)]$ mit oBdA $u = \frac{\partial}{\partial x^1} (u^1, \dots, u^n)$, $u^1 \neq 0$. Sei g auf $\varphi(U)$ C^∞ mit $\partial_1 g(\varphi(x)) \neq 0$, $g \equiv g(x^1)$. Es folgt $\partial_j g(\varphi(x)) = 0$, $j \geq 2$. So ist

$$\mathcal{L}_v(g \circ \varphi) = \sum_{j=1}^n u^j \frac{\partial}{\partial x^j} g(\varphi(x)) = u^1 \frac{\partial}{\partial x^1} g(\varphi(x)) \neq 0 \neq$$

Also folgt aus $\mathcal{L}_v f = 0$ für alle $f \in C_x^\infty(M)$, das $v = 0$, das heißt Injektivität.

Insbesondere definiert $\frac{\partial}{\partial x^j}(x)$ für $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ Karte einen Vektor in $T_x M$.

Übungsaufgabe

(i) $x \in U \mapsto \frac{\partial}{\partial x^j}(x) \in T_x M$ glatt, das heißt $\frac{\partial}{\partial x^j} \in \Gamma(U, TM|_U)$ "Schnitt von TM über U" oder ein Vektorfeld auf U.

(ii) $\forall x \in U$ ist $(\partial_{x^1}, \dots, \partial_{x^n})$ eine Basis von $T_x M$.

Insbesondere folgt: Sind a^1, \dots, a^n glatte Funktionen auf $U \subset M$, (U, φ) Karte. So folgt

$$X(x) = \sum_i a^i(x) \partial_{x^i}(x) \in T_x M$$

ist ein glattes Vektorfeld auf U. Umgekehrt ist jedes $X \in \Gamma(U, TM)$ von dieser Form, das heißt ist $X \in \Gamma(TM)$, so gilt

$$X|_{(U, \varphi)} = \sum a^j(x) \partial_j(x) = \begin{pmatrix} a^1(x) \\ \vdots \\ a^n(x) \end{pmatrix} \quad \text{Vektor mit glatten Einträgen}$$

beschreibt Vektorfeld lokal.

1.7.11 Definition

Eine **Derivation** auf M ist eine Abbildung $\delta : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ mit

$$\delta(fg) = f\delta(g) + \delta(f)g$$

Beispiel

Sei $X \in \Gamma(TM)$, so definiert

$$\left(\mathcal{L}_X \underset{\in C^\infty(M)}{f} \right)(x) = \mathcal{L}_{X(x)}[f, x] = d_x f(X(x)) =: df(X)(x)$$

eine Derivation auf M .

1.7.12 Bemerkung

Eine Derivation auf M ist ein lokaler Operator $\delta : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$, das heißt ist $f \in C^\infty(M)$ mit $f|_U = 0$, so folgt $(\delta f)|_U = 0$. Sei nämlich $x \in U$. Dann nehme $\psi \in C^\infty(M)$ mit $\psi(x) = 1$, $\text{supp } \psi \subset U$, also $\psi|_{U^c} \equiv 0$. So gilt $\psi \cdot f \equiv 0$ auf M , das heißt $\delta(\psi f) = 0$. Es gilt

$$\delta(\psi f)(x) = \underbrace{\delta(\psi)(x)}_{=0} f(x) + \underbrace{\psi(x)}_{=1} \delta(f)(x) = \delta(f)(x)$$

für alle $x \in U$. Also $(\delta f)|_U = (\delta(\psi f))|_U = 0$.

1.7.13 Theorem

$\Gamma(TM) \rightarrow \mathcal{D}$, $X \mapsto \mathcal{L}_X$ ist ein Linearer Isomorphismus.

Beweis

- Abbildung ist wohldefiniert:

Sei $X|_U = \sum_j a^j \delta X_j$, so gilt $\mathcal{L}_{X(x)}[f, x] = \sum_j \underbrace{a^j(x)}_{C^\infty} \underbrace{\delta_j f(x)}_{C^\infty}$. Also $\mathcal{L}_X : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$.

- Abbildung injektiv:

Angenommen $\mathcal{L}_X f = 0$ für alle $f \in C^\infty(M)$, das heißt $\mathcal{L}_X = 0$. Es ist zu zeigen, dass $X = 0$. Dazu:

$$\mathcal{L}_X f(x) = \mathcal{L}_{X(x)}[f, x] = 0 \quad \forall [f, x] \in C_x^\infty(M)$$

In 1.7.10 wurde gezeigt, dass $T_x M \simeq D_x$, also aus $\mathcal{L}_v[f, x] = 0$ für alle $[f, x] \in C_x^\infty(M)$ folgt $v = 0$. Somit gilt $\mathcal{L}_X f(x) = 0 \quad \forall f \in C^\infty(M) \Rightarrow X(x) = 0 \quad \forall x$, also $X = 0$.

- Abbildung surjektiv:

Sei $\delta \in \mathcal{D}(M)$. Gesucht ist dann $X \in \Gamma(TM)$ mit $\mathcal{L}_X = \delta$. Dazu sei $\underbrace{X(x)}_{\in T_x M \simeq D_x} = \delta_x$ definiert durch

$\delta_x[f, x] = (\delta f)(x)$. Es muss gezeigt werden, dass δ_x wohldefiniert ist. Dafür nehmen wir $[f, x] = [g, x]$ an. Nach der Definition 1.10.7 der Keime existiert eine Umgebung V von x mit $f|_V = g|_V$, also $(f - g)|_V = 0$. Mit Bemerkung 1.7.12 folgt $\delta(f - g)|_V = 0$ und insbesondere $\delta(f)(x) = \delta(g)(x)$. Also ist die Definition von X wohldefiniert und es gilt $X : M \rightarrow TM$ mit $\pi \circ X = \text{id}_M$. Es bleibt zu zeigen, dass X glatt ist. Dazu gilt für geeignete Karte (U, φ)

$$\delta_x(f) \stackrel{1.10.10}{=} \sum_j \delta_x(x^j) \delta_{x^j} f(x) = \sum_j \delta(x^j)(x) \cdot \delta_x^j f(x)$$

Also

$$X(x) = \sum_j \delta_x(x^j) \delta_{x^j}(x) = \sum_j \underbrace{\delta(x^j)(x)}_{C^\infty} \cdot \delta_x^j(x)$$

das heißt X ist C^∞ .

Im nächsten Abschnitt wollen wir uns anschauen, wie \mathcal{L}_X und \mathcal{L}_Y sinnvoll verkettet werden können. So ist

$$\mathcal{L}_X \circ \mathcal{L}_Y : C^\infty(M) \xrightarrow{\mathcal{L}_Y} C^\infty(M) \xrightarrow{\mathcal{L}_X} C^\infty(M)$$

im Allgemeinen falsch, aber

1.7.14 Definition und Satz

Sei $X, Y \in \Gamma(TM) \rightarrow \mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y \in \mathcal{D}$. So ist

$$[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] := \mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X$$

der **Kommutator** bzw. die **Lie-Klammer** von X und Y eine Derivation von M . Das zugehörige Vektorfeld wird $[X, Y]$ geschrieben, das heißt $\mathcal{L}_{[X, Y]} = [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y]$

Beweis

Es ist zu zeigen, das $[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y]$ die Leibniz-Regel für $f, g \in C^\infty(M)$ erfüllt.

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y](fg) &= \mathcal{L}_X(f\mathcal{L}_Y g + g\mathcal{L}_X f) - (\mathcal{L}_Y)(f\mathcal{L}_X g) \\ &= \mathcal{L}_X f \mathcal{L}_Y g + f \mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y g + \mathcal{L}_X g \mathcal{L}_Y f + g \mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y f \\ &\quad - \mathcal{L}_Y f \mathcal{L}_X g - f \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X g - \mathcal{L}_Y g \mathcal{L}_X f - g \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X f \\ &= f[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y](g) + g[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y](f) \end{aligned}$$

1.8 Der Fluß eines Vektorfeldes

Frage: Existiert $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $c(0) = x$, $\frac{d}{dt} c(t) = c'(t) = X(c(t))$

Wir wissen aus Analysis (I-IV), das Lösung mit Startbedingung $c(0) = x$ lokal um 0 (das heißt $I = (-\epsilon, \epsilon)$) existieren und $\psi_X : U \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\psi(x, t) = c_x(t)$ glatte Abbildung. Wie sieht das auf Mannigfaltigkeiten aus?

1.8.1 Satz und Definition

Sei $X \in \Gamma(TM)$, $x \in M$. Dann existiert eine Kurve $c_X : 0 \in I \rightarrow M$ mit $c_x(0) = x$, $c'_x(t) := d_t c_x \left(\frac{d}{dt} \right) = X(c(t))$, die sogenannte **Integralkurve** von X durch x .

Beweis

Lesen in Karte + Standard ODE Theorie (\leadsto Berger-Gostiaux)

1.8.2 Bemerkung

Es folgt mit ODE - Theorie: Sind $c_x : I \rightarrow M$, $\tilde{c}_x : \tilde{I} \rightarrow M$ zwei Integralkurven von X durch x , dann gilt $\tilde{c}_x = c_x$ auf $\tilde{I} \cap I$. Es existiert ein maximales Intervall I_x mit Integralkurve $c_x : I_x \rightarrow M$

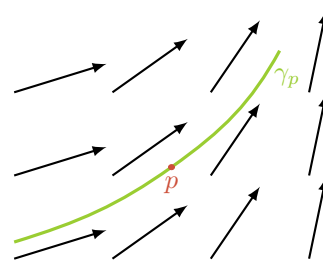


Abb. 11: Integralkurve in einem Vektorfeld des \mathbb{R}^2

Ausführlich wurde
 Picard - Lindelöf für
 Mfkt. in der Mitschrift
 zu Diffformen und
 Mfkt. aus dem 1. und 2.
 Semester behandelt

1.8.3 Satz und Definition

Für $x \in M$ existiert Umgebung U um x und I Intervall um 0, sodass die Abbildung

$$\psi_X : U \times I \rightarrow M, \psi_X(x, t) := c_x(t)$$

glatt ist. ψ_X heißt **lokaler Fluß** von X . (c_x kann auf I_X mit $I \subsetneq I_X$ definiert sein.)

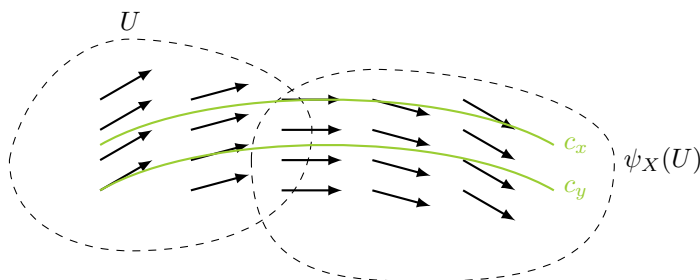
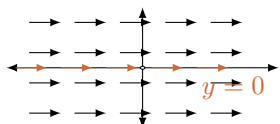


Abbildung 12: lokaler Fluß eines Vektorfeldes

1.8.4 Beispiel



Sei $X(x, y) = \partial_{x^1}(x, y)$ Vektorfeld auf \mathbb{R}^2 , so ist $c_{(x,y)} = (x, y) + (t, 0)$ eine Integralkurve von X , denn $c_{(x,y)}$ und $c'(t) = \partial_{x^1}(c(t)) = X(c(t))$.

Für $y \neq 0$ ist $c_{(x,y)}(t)$ auf ganz \mathbb{R}^2 definiert. Falls $y = 0$ ist $c_{(x,0)} : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$ für $x > 0$ und $c_{(x,0)} : (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}^2$ für $x < 0$.

Abb. 13: Vektorfeld auf \mathbb{R}^2

1.8.5 Definition

Sei $X \in \Gamma(TM)$, definiere

$$\mathcal{D}_X := \{(x, y) \mid x \in M, t \in I_X\} \stackrel{\text{offen}}{\subset}$$

wobei I_X max. Intervall von c_x . Die glatte Abbildung $\psi_X : \mathcal{D}_X \rightarrow M$, $(x, t) \mapsto \psi_X(x, t) = c_x(t)$ heißt **globaler Fluß**. X heißt vollständig, falls $\mathcal{D}_X = M \times \mathbb{R}$.

1.8.6 Proposition

Für einen vollständigen Fluß Ψ gilt. (Schreibweise $\Psi_t(x) = \Psi(x, t)$, $\Psi : M \rightarrow M$)

1. $\Psi_0 = \text{id}_M$
2. $\Psi_s \circ \Psi_t = \Psi_{s+t}$
3. Ψ_t ist ein Diffeomorphismus und $(\Psi_t)^{-1} = \Psi_{-t}$

Das heißt Ψ definiert einen Gruppenhomomorphismus $(\mathbb{R}, +) \rightarrow \text{Diff}(M)$. So etwas nennt man eine 1-Parametergruppe.

1.8.7 Bemerkung

1.10.17 gilt für lokale Flüsse, sofern die Ausdrücke definiert sind. Ein lokaler Fluß: $\Psi_t : U \rightarrow M$ ist ein Diffeomorphismus auf das Bild.

1.8.8 Satz

Jedes Vektorfeld mit kompakten Träger ist schon vollständig. Insbesondere ist jedes Vektorfeld auf kompakten Mannigfaltigkeiten vollständig.

Beweis

da $c'_x(t) = X(c(t))$
 (i) Sei $K = \text{supp } X = \overline{\{x \in M \mid X(x) \neq 0\}}$. Für $x \in K^c$ ist $c_x(t) = x \forall t \in \mathbb{R}$ die Integralkurve von X um x .

(ii) Es gibt eine endliche Überdeckung $K \subset \bigcup_j U_j$, sodass der lokale Fluss $\Psi^{(j)} : U_j \times (-\epsilon_j, \epsilon_j) \rightarrow M$ definiert ist. Setze $\epsilon = \min_j \epsilon_j > 0$, dann ist $M \times (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathcal{D}_X$.

(iii) Angenommen $c < \infty$, sodass $c_x(s) = \Psi_s(x)$ nur für $|s| < c$ existiert. Dann betrachte

$$c_{\Psi_s(x)}(t) = \Psi(\Psi_s(x), t) = \Psi_t(\Psi_s(x)) = \Psi_{t+s}(x)$$

definiert für $|t| < \epsilon$ (nach (ii)). Wähle s, t , sodass $s + t > c$. \nexists Also existiert $c_x(s)$ für alle $s \in \mathbb{R}$.

1.9 Verhalten von Vektorfeldern unter Diffeomorphismen

Abbildung zwischen Tangentialräumen

1.9.1 Proposition und Definition

Sei $\phi : M \rightarrow N$ ein Diffeomorphismus. $X \in \Gamma(TM)$, dann ist durch $y \mapsto \phi_* X(y) = d_{\phi^{-1}(y)} \phi(X(\phi^{-1}(y)))$ ein Vektorfeld auf N gegeben, der **Push-Forward** von X . Die assoziierte Derivation ist $(\mathcal{L}_{\phi_* X} f)(x) = \mathcal{L}_X(f \circ \phi)(\phi^{-1}(y))$ für $f \in C^\infty(N)$

Beweis

(i) Es ist zu zeigen, dass $\phi_* X$ ein Vektorfeld ist. Da $\phi_* X$ ein Schnitt auf $\Gamma(TN)$ ist, bleibt Glattheit von $\phi_* X$ zu zeigen. Wähle Karten $(U, \Phi = (x^1, \dots, x^n))$ um $\phi^{-1}(y) \in M$ und $(\phi(U), \Psi = \Phi \circ \phi = (y^1, \dots, y^n))$ um $y \in N$.

Step 1: Zeige zunächst $\phi_* \delta_{x^j} = \delta_{y^j}$. Es ist $\delta_{x^j} = [U, \Phi, e_j]$, $\delta_{y^j} = [\phi(U), \Psi, e_j]$ wobei e_j Standardbasis des \mathbb{R}^n . Nach Definition gilt

$$\begin{aligned} \phi_* \delta_{x^j}(\phi^{-1}(y)) &= d_{\phi^{-1}(y)} \phi([U, \Phi, e_j]) \\ &= [\phi(U), \Psi, d_{\Phi(\phi^{-1}(y))} (\underbrace{\Psi \circ \phi \circ \Phi^{-1}}_{\text{id}_{\mathbb{R}^n}})(e_j)] \\ &= [\phi(U), \Psi, e_j] = \delta_{y^j}(y) \end{aligned}$$

Step 2: Sei $X = \sum_j a^j \delta_{x^j}$, dann gilt

$$\phi_* X(y) = \sum_j a^j(\phi^{-1}(y)) \phi_* \delta_{x^j}(y) = \sum_j \underbrace{a^j(\phi^{-1}(y))}_{\text{glatt}} \delta_{y^j}(y)$$

Also ist $\phi_* X$ ein glattes Vektorfeld.

(ii) Mit der lokalen Form der Lie-Ableitung und der oben gezeigten Darstellung von $\phi_* X$ folgt

$$\mathcal{L}_{\phi_* X} f(y) = \sum_j a^j(\phi^{-1}(y)) \partial_{y^j} f(y)$$

für $f \in C^\infty(N)$. Nach 1.10.10 gilt

$$\begin{aligned}\partial_{y^j}(y) &= \sum_k \partial_{y^j} y^k(y) \partial_k (f \circ \Psi^{-1})(\Psi(y)) \\ &= \partial_j (f \circ \Psi^{-1})(\Psi(y)) = \partial_j (f \circ \phi \circ \Phi^{-1}) = \partial_{x^j} (f \circ \phi)(\phi^{-1}(y))\end{aligned}$$

Somit folgt

$$\mathcal{L}_{\phi_* X} f(y) = \sum_j a^j(\phi^{-1}(y)) \partial_{x^j} (f \circ \phi)(\phi^{-1}(y)) = \mathcal{L}_X (f \circ \phi)(\phi^{-1}(y))$$

1.9.2 Bemerkung

(i) Wir schreiben $\phi^* f = f \circ \phi$ für den **Pullback** von f . Dann ist

$$\mathcal{L}_{\phi_* X} = (\phi^{-1})^* \circ \mathcal{L}_X \circ \phi$$

(ii) Es ist $(\phi \circ \psi)^* f = f \circ \phi \circ \psi = \psi^*(f \circ \phi) = \psi^* \phi^* f$, das heißt der Pullback $(\phi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \phi^*$ ist kontravariant und der Push-Forward $(\phi \circ \psi)_* X = \phi_* \circ \psi_* X$ ist kovariant.

1.9.3 Korollar

Sei $\phi : M \rightarrow N$ ein Diffeomorphismus, X, Y Vektorfelder auf M . Dann gilt

$$\phi_*[X, Y] = [\phi_* X, \phi_* Y]$$

Beweis

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{[\phi_* X, \phi_* Y]} &= \mathcal{L}_{\phi_* X} \mathcal{L}_{\phi_* Y} - \mathcal{L}_{\phi_* Y} \mathcal{L}_{\phi_* X} \\ &= (\phi^{-1})^* \circ \mathcal{L}_X \circ \phi^* \circ (\phi^{-1})^* \circ \mathcal{L}_Y \circ \phi^* - (\phi^{-1})^* \circ \mathcal{L}_Y \circ \phi^* \circ (\phi^{-1})^* \circ \mathcal{L}_X \circ \phi^* \\ &= (\phi^{-1})^* \circ \mathcal{L}_X \circ \mathcal{L}_Y \circ \phi^* - (\phi^{-1})^* \circ \mathcal{L}_Y \circ \mathcal{L}_X \circ \phi^* \\ &= (\phi^{-1})^* \circ (\mathcal{L}_X \circ \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \circ \mathcal{L}_X) \circ \phi^* \\ &= (\phi^{-1})^* \circ \mathcal{L}_{[X, Y]} \circ \phi^* = \mathcal{L}_{\phi_*[X, Y]}\end{aligned}$$

1.9.4 Proposition

Für (lokale) Flüsse gilt:

$$\Psi_{\phi_* X, t} = \phi \circ \Psi_{X, t} \circ \phi^{-1}$$

Beweis

Es ist zu zeigen, dass für alle s , für die $\Psi_{X, s}(x)$ definiert ist, gilt:

$$\frac{d}{dt} \phi \circ \Psi_{X, t} \circ \phi^{-1} \Big|_{t=s} = \phi_* X(\phi \circ \Psi_{X, s} \circ \phi^{-1})$$

(i) Sei $s = 0$. Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \phi \circ \Psi_{X, t} \circ \phi^{-1}(y) \Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt} \phi(\Psi_{X, t} \circ \phi^{-1}(y)) \Big|_{t=0} \\ &= d_{\phi^{-1}(y)} \phi \left(\frac{d}{dt} \Psi_{X, t}(\phi^{-1}(y)) \Big|_{t=0} \right) \\ &= d_{\phi^{-1}(y)} \phi(X(\phi^{-1}(y))) \\ &= \phi_* X(y)\end{aligned}$$

(ii) Setze $r = t - s$, $\Psi_{X,t} = \Psi_{X,r} \circ \Psi_{X,s}$. Es gilt

$$\left. \frac{d}{dt} \phi \circ \Psi_{X,t} \circ \phi^{-1}(y) \right|_{t=s} = \left. \frac{d}{dr} \phi \circ \Psi_{X,r} \circ \Psi_{X,s} \circ \phi^{-1}(y) \right|_{r=0} = \phi_* X(\phi \circ \Psi_{X,s}(\phi^{-1}(y)))$$

1.9.5 Theorem

Seien $X, Y \in \Gamma(TM)$, Ψ_t sei der Fluss von Y . Dann gilt

$$\left. \frac{d}{dt} (\Psi_t^{-1})_* X \right|_{t=0} = [Y, X]$$

Beweis

siehe Skript

1.9.6 Korollar (Jacobi-Identität)

Seien $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$. Dann gilt

$$[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0$$

Beweis

Übungsaufgabe

1.9.7 Bemerkung

Sei V ein Vektorraum (in der Regel \mathbb{R} oder \mathbb{C}). Sei $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow V$ eine schiefsymmetrische bilineare Abbildung mit Jacobi-Identität, zum Beispiel $V = \Gamma(TM)$ mit $[\cdot, \cdot] = \text{Lie-Klammer}$. Dann heißt $(V, [\cdot, \cdot])$ Lie-Algebra. Ein weiteres Beispiel ist $\mathbb{R}^{n \times n}$ mit $[A, B] = AB - BA$ Matrixkommutator. Die Lie-Algebra ist ein zentrales Objekt der Darstellungstheorie von Lie-Gruppen, zum Beispiel $GL(n, \mathbb{R})$, $O(n)$, $SU(n)$

1.10 Tensorbündel

1.10.1 Wiederholung

Seien V, W (endlich) dimensionale VR $_{|\mathbb{R}}$. Dann existiert ein VR $_{|\mathbb{R}}$ mit folgender Eigenschaft. Ist U VR $_{|\mathbb{R}}$, dann

$$\underbrace{L_2(V \times W, U)}_{\text{bilineare Abb. } V \times W \rightarrow U} \cong \underbrace{L(V \otimes W, U)}_{\text{lineare Abb. } V \otimes W \rightarrow U}$$

Genauer:

$$\begin{array}{ccc} & & V \otimes W \\ & \nearrow L_2(V \times W, V \otimes W) \cong \otimes & \downarrow \hat{B} \\ V \times W & \xrightarrow{B} & U \end{array}$$

Abbildung 14: "universelle Eigenschaft" von \otimes

wobei $B \in L_2(V \times W, U) \simeq L(V \otimes W, U)$ gegeben durch $B \mapsto \hat{B}$. \hat{B} ist eindeutig bestimmt, das heißt $B(v, w) = \hat{B}(v \otimes w)$.

Im Allgemeinen:

$$\underbrace{L_n(V_1 \times \dots \times V_n, U)}_{\text{n-lineare Abbildung}} \simeq L(V_1 \otimes \dots \otimes V_n, U)$$

Es gilt $V \otimes W \cong W \otimes V$ und $(V \otimes W) \otimes U \cong V \otimes (W \otimes U)$, das heißt \otimes ist kommutativ und assoziativ.

Konkret

Ist $\{e_i\}_{i=1}^n, \{f_j\}_{j=1}^m$ Basis von V beziehungsweise W , so ist die Basis von $V \otimes W$ gegeben durch $\{e_i \otimes f_j\}_{i,j=1}^{n,m}$, wobei das Bild von (e_i, f_j) unter $\otimes: \otimes(e_i, f_j) = e_i \otimes f_j$. Insbesondere ist $\dim V \otimes W = \dim V \cdot \dim W$. Dann gilt für $v = \sum v^i e_i, w = \sum w^j f_j$.

$$\otimes(v, w) = v \otimes w = \otimes\left(\sum v^i e_i, \sum w^j f_j\right) = \sum_{i,j} v^i w^j e_i \otimes f_j$$

Bemerkung

(i) Seien $v, v' \in V, w \in W$, so ist $v \otimes w \in V \otimes W$ und

$$(v + v') \otimes w = \otimes(v + v', w) = \otimes(v, w) + \otimes(v', w) = v \otimes w + v' \otimes w$$

(ii) In der Regel lässt sich $t \in V \otimes W$ nicht als $v \otimes w$ für $v \in V, w \in W$ schreiben, denn sei $\{e_i \otimes f_j\}$

Basis von $V \otimes W$, das heißt $t = \sum t^{ij} e_i \otimes f_j$ für $t^{ij} \in \mathbb{R}$. Ist $t = v \otimes w = \sum_{i,j} (v^i e_i) \otimes (w^j f_j) \stackrel{(i)}{=} \sum v^i w^j e_i \otimes f_j$, das heißt $t^{ij} = v^i \cdot w^j, \forall i, j$ ist im Allgemeinen falsch.

Aber $\{v \otimes w \mid v \in V, w \in W\}$ ist ein Erzeugendensystem von $V \otimes W$

1.10.2 Beispiel

Seien $V, W \text{ VR}_{|\mathbb{R}}$, also V^*, W^* der zugehörige duale Vektorraum. Dann ist

$$V^* \otimes W^* \cong L_2(V \times W, \mathbb{R}) \cong L(V \otimes W, \mathbb{R}) = (V \otimes W)^* \\ \alpha \otimes \beta \in V^* \otimes W^* \mapsto ((v, w) \in V \times W \rightarrow \alpha(v)\beta(w) \in \mathbb{R}) \in L_2(V \times W, \mathbb{R})$$

Zum Beispiel

Sei $V = \mathbb{R}^2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, W = \mathbb{R}^3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. So ist

$$L_2(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \mid x_j, y_j \in \mathbb{R} \right\}, \quad (\alpha_1, \alpha_2) \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = B(v, w)$$

$B = x_1 e^1 \otimes f^1 + x_2 e^1 \otimes f^2 + x_3 e^1 \otimes f^3 + \sum_{j=2}^3 y^j e^2 \otimes f^j, \quad e^i, f^j$ duale Basis. Zum Beispiel

$$B\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \sum_{j=1}^3 (x_j e^1 \otimes f^j + y_j e^2 \otimes f^j)(e_1, f_2) = \sum_{j=1}^3 x_j \underbrace{e^1(e_1)}_1 \cdot \underbrace{f^j(f_2)}_0 + y_j e^2(e_1) f^j(f_2) = x_2$$

Übungsaufgabe: $L(V, W) \simeq W \otimes V^*$

1.10.3 Tensorprodukt der linearen Abbildung

Erinnerung: Sei V, W Vektorräume und V^*, W^* der zugehörige duale Vektorraum. Sei $f : V \rightarrow W$ linearer Morphismus, so ist $f^T : W^* \rightarrow V^*$ die Transponierte von f . Seien $a \in L(V, V'), b \in L(W, W')$, so ist $a \otimes b \in L(V \otimes W, V' \otimes W')$ das Tensorprodukt von a und b definiert durch $a \otimes (v \otimes w) = a(v) \otimes b(w) \in V' \otimes W'$ und setzen es linear fort.

$$a \otimes b(v \otimes w + v' \otimes w') = a \otimes b(v \otimes w) + a \otimes b(v' \otimes w')$$

etc. Zum Beispiel

$$a \otimes b(v \otimes w + v \otimes w') = a(v) \otimes b(w) + a(v) \otimes b(w') = a(v) \otimes (b(w) + b(w')) = a(v) \otimes b(w + w')$$

1.10.4 Tensorbündel

Wir betrachten Tensoren nun über Mannigfaltigkeiten M . Definiere

$$\bigotimes^p TM = \bigcup_{x \in M} \bigotimes^p T_x M \times \{x\}$$

wobei $\bigotimes^p T_x M = \underbrace{T_x M \otimes \dots \otimes T_x M}_{p\text{-mal}} = T_x M^{\otimes p}$, das p -te Tensorprodukt von $T_x M$. Dies ist ein Vektorbündel $\pi_{\bigotimes^p TM} : \bigotimes^p TM \rightarrow M$ von Rang $(\dim M)^p$

- $v \in T_x M^{\otimes p} \times \{x\} \mapsto x = \pi_{\bigotimes^p TM}(v) \in M$
- Sei (U, φ) Karte von M , $(\pi_{\bigotimes^p TM}^{-1}(U), \Theta_{U, \varphi}^{-1})$ Karten von $\bigotimes^p TM$, so ist $(\pi_{\bigotimes^p TM}^{-1}(U), \Theta_{U, \varphi}^{-1} \otimes \dots \otimes \Theta_{U, \varphi}^{-1})$ Karte von $\bigotimes^p TM$

1.10.5 Kotangentialbündel von M

Idee: Ersetze $T_x M$ durch $T_x^* M$ und erhalte das **Kotangentialbündel** $T^* M = \bigcup_{x \in M} T_x^* M \times \{x\}$. Atlas ist gegeben durch $(\pi_{\bigotimes^p TM}^{-1}(U), (\Theta_{U, \varphi}^{-1})^T)$. 1.10.4 und 1.10.5 können allgemein für jedes Vektorfeld durchgeführt werden, das heißt sind $E \rightarrow M, F \rightarrow M$ Vektorbündel über M , so können $E^* \rightarrow M, E \oplus F \rightarrow M, E \otimes F \rightarrow M$ etc. konstruiert werden. Insbesondere gilt: Ist x^1, \dots, x^n Koordinatensystem auf $U \subset M$, $\partial_{x^1}, \dots, \partial_{x^n}$ Basis von $TM|_U$, so ist $\partial_{x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \partial_{x^{i_p}}$ Basis von $TM^{\otimes p}$ und $(\partial_{x^i})^* =: dx^i$ Basis von $T^* M|_U$

1.10.6 Tensorbündel

Sei $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, so ist

$$\mathcal{T}_q^p M := TM^{\otimes p} \otimes T^* M^{\otimes q} \rightarrow M$$

Bündel der (p, q) -Tensoren, glatte Schnitte aus $\Gamma(\mathcal{T}_q^p M)$ heißen (p, q) -Tensor(felder).

Spezialfall

- $\mathcal{T}_0^0 M := M \times \mathbb{R}, \Gamma(\mathcal{T}_0^0) = C^\infty(M)$
- $\mathcal{T}_0^1 M := TM, \Gamma(TM)$ Vektorfelder
- $\mathcal{T}_1^0 M := T^* M, \Gamma(T^* M)$ 1-Formen
- $\mathcal{T}_0^p M := \mathcal{T}_0^p M$ kovariante Tensoren

1.10.7 Operatoren für Tensoren

Eine kleine Zeitreise zurück in die lineare Algebra.

- (i) **Tensorprodukt:** $\mathcal{T}_q^p V \times \mathcal{T}_{q'}^{p'} V \rightarrow \mathcal{T}_{q+q'}^{p+p'} V$ bilinear, definiert durch:

$$\begin{aligned} & \left(v_1 \otimes \dots \otimes v_p \otimes v^1 \otimes \dots \otimes v^p, w_1 \otimes \dots \otimes w_{p'} \otimes w^1 \otimes \dots \otimes w^{p'} \right) \\ & \mapsto v_1 \otimes \dots \otimes v_p \otimes w_1 \otimes \dots \otimes w_{p'} \otimes v^1 \otimes \dots \otimes v^p \otimes w^1 \otimes \dots \otimes w^{p'} \end{aligned}$$

\hat{v}_i bzw. \hat{v}^j das dies auslassen (ii) **Kontraktion ("Tensorverjüngung"):** $C_j^i : \mathcal{T}_q^p V \rightarrow \mathcal{T}_{q-1}^{p-1} V$, definiert durch:

$$\begin{aligned} & C_j^i(v_1 \otimes \dots \otimes v_i \otimes \dots \otimes v_p \otimes v^1 \otimes \dots \otimes v^i \otimes \dots \otimes v^q) \\ & = v^j(v_i) v_1 \otimes \dots \otimes \hat{v}_i \otimes \dots \otimes v_p \otimes v^1 \otimes \dots \otimes \hat{v}^i \otimes \dots \otimes v^q \end{aligned}$$

Beispiel

Spurbildung eines Endomorphismus $A \in \text{End}(V)$.

Ist e_1, \dots, e_n Basis von V , so können wir A also als $A = (A_j^i) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ betrachten und die Spur definieren $\text{Tr}(A) = \sum A_i^i$. Da $\text{Tr}(\Gamma A \Gamma^{-1}) = \text{Tr}(A)$ für $\Gamma \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$, ist die Definition der Spur unabhängig von der Basis.

Alternativ:

$\text{End}(V) \cong V \otimes V^*$, dann $\text{Tr}(A) = C_1^1(A)$. Zum Beispiel $v \otimes \alpha \cong A \cdot w \mapsto \alpha(w) \cdot v$, $\text{Tr}(A) = \alpha(v) \in \mathbb{R}$.

- (iii) Ein Spezialfall von (ii), das **innere Produkt** für kovariante Tensoren und Vektoren. Sei $v \in V$, $\alpha \in \mathcal{T}_q^0 V = \mathcal{T}_q V$.

$$i_v \alpha := C_1^1(\underbrace{v \otimes \alpha}_{\in \mathcal{T}_q^1 V}) \in \mathcal{T}_{q-1} V = \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{q-1\text{-mal}} \cong L_{q-1}(V \times \dots \times V, \mathbb{R})$$

Konkret $i_v \alpha(v_1, \dots, v_{q-1}) = \alpha(v, v_1, \dots, v_{q-1})$.

Dies induziert entsprechende Operationen auf Mannigfaltigkeiten indem man Tensoren durch Tensorfelder ersetzt und faserweise definiert. Sei zum Beispiel $S \in \Gamma(\mathcal{T}_q^p M)$, $S' \in \Gamma(\mathcal{T}_{q'}^{p'} M)$, so ist $S \otimes S' \in \Gamma(\mathcal{T}_{q+q'}^{p+p'} M)$ definiert durch $(S \otimes S')_{x \in M} = S_x \otimes S'_x \in \mathcal{T}_{q+q'}^{p+p'} T_x M$. Es bleibt zu zeigen, dass $S \otimes S'$ wirklich glatt ist. Dies ist klar, denn lokal gilt

$$S|_U = \sum S_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_p} \otimes dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_q}$$

$$S'|_U = \sum (S')_{k_1, \dots, k_{q'}}^{l_1, \dots, l_{p'}} \partial_{l_1} \otimes \dots \otimes \partial_{l_{p'}} \otimes dx^{k_1} \otimes \dots \otimes dx^{k_{q'}}$$

und somit folgt lokal für das Tensorprodukt $S \otimes S'$

$$S \otimes S'|_U = \sum \underbrace{S_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p}}_{\text{glatt}} \sum (S')_{k_1, \dots, k_{q'}}^{l_1, \dots, l_{p'}} \partial_{l_1} \otimes \dots \otimes \partial_{l_{p'} + l_p} \otimes dx^{k_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_q + k_{q'}}$$

oder sei $X \in \Gamma(TM) = \Gamma(\mathcal{T}_0^1 M)$, $\alpha \in \Gamma(\mathcal{T}_1^0 M) = \Gamma(T^* M)$ mit

$$i_x(\alpha) = C_1^1(X, \alpha) = \alpha(X) \in C^\infty(M), \quad a(X) \in M \underset{(x)}{=} \underset{\alpha_x}{T_x^* M} (X(x)) \in \mathbb{R}$$

so ist $\tilde{\alpha} : \Gamma(TM) \rightarrow C^\infty(M)$, definiert durch $X \mapsto \alpha(X) = i_X(\alpha)$ \mathbb{R} -linear und insbesondere auch $C^\infty(M)$ -linear.

$\Gamma(TM)$, allgemein $\Gamma(\mathcal{T}_q^p)$ sind

(a) \mathbb{R} -Vektorräume (punktweise Addition + Skalarmultiplikation)

(b) $\underbrace{C^p(M)}_{\text{Ring}}$ -Modul: $f \in C^\infty(M)$, $S \in \Gamma(\mathcal{T}_q^p M)$, so gilt $(fS)_x = f(x) \cdot S_x$

$$\text{Dann } \alpha(fX)(x) = \alpha_x(f(x) \cdot X(x)) \underset{\mathbb{R}\text{-linear}}{=} f(x) \underbrace{\alpha_x(X(x))}_{\alpha(X)(x)} = (f \cdot \alpha(X))(x).$$

Allgemein: Sei $S \in \Gamma(\mathcal{T}_q^p M) = \Gamma(\otimes^p TM \otimes \otimes^q T^* M)$, so ist

$$\tilde{S} : \Gamma(TM) \times \dots \times \Gamma(TM) \times \Gamma(T^* M) \times \dots \times \Gamma(T^* M) \rightarrow C^\infty(M)$$

mit $\tilde{S} \in L_{q+p}(\times^q \Gamma(TM) \times \times^p \Gamma(T^* M), C^\infty(M))$ definiert durch

$$\tilde{S}(X_1, \dots, X_q, \alpha^1, \dots, \alpha^p)(x) = \underset{\in \mathbb{R}}{S_x}(\alpha^1(x), \dots, \alpha^p(x), X_1(x), \dots, X_q(x))$$

Hier fehlt noch etwas

1.10.8 Beispiel

Betrachte Lie-Klammer als Abbildung

$$\Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(T^*M) \rightarrow C^\infty(M), \quad (X, Y, \alpha) \mapsto \alpha([X, Y]) = i_{[X, Y]}\alpha$$

Wobei beachte $L_r(V \times \dots \times V, W) \simeq L_r(V \times \dots \times W^*, \mathbb{R})$, zum Beispiel

$$L(V, W) \simeq L(V \times W^*, \mathbb{R}) = V \otimes W^*, \quad V \rightarrow W \simeq V \times W^* \rightarrow \mathbb{R}$$

für Mannigfaltigkeiten :

$$\Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \xrightarrow{[\cdot, \cdot]_{\mathbb{R}\text{-linear}}} \Gamma(TM) \cong \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(T^*M) \rightarrow C^\infty(M)$$

Dann ist $[\cdot, \cdot]$ nicht $C^\infty(M)$ -linear (aber natürlich \mathbb{R} -linear). Zum Beispiel sei $f \in C^\infty(M)$

$$\begin{aligned} (f \cdot X, Y, \alpha) &\mapsto \alpha(\underbrace{[fX, Y]}_{fX(Y) - Y(fX) = fX(Y) - Y(f)X - fY(X)}) = \alpha(-df(Y) \cdot X + f([X, Y])) \\ &= -df(Y)\alpha(X) + f\alpha([X, Y]) \\ &\neq f\alpha([X, Y]) \end{aligned}$$

1.10.9 Satz

Sei $\Lambda \in L_{p+q}(\times^p \Gamma(T^*M) \times \times^q \Gamma(TM), C^\infty(M))$. Dann ist Λ C^∞ -linear $\Leftrightarrow \Lambda = \tilde{S}$ für $S \in \Gamma(\mathcal{T}_q^p M)$.

Hier ist $\tilde{S} : \Gamma(T^*M) \times \dots \times \Gamma(T^*M) \times \Gamma(TM) \times \dots \times \Gamma(TM) \rightarrow C^\infty(M)$ definiert durch

$$\tilde{S}(\alpha^1, \dots, \alpha^p, X_1, \dots, X_q)(x) = S_x(\alpha_x^1, \dots, \alpha_x^p, X_1(x), \dots, X_q(x))$$

Beweis

- " \Leftarrow ":
- " \Rightarrow ": Sei Λ C^∞ -linear gegeben. Definiere $S_x \in \mathcal{T}_q^p T_x M \cong L_{p+q}(\times^p T_x^* M \times \times^q T_x M, \mathbb{R})$ durch

$$S_x(\alpha^1, \dots, \alpha^p, v_1, \dots, v_q) = \underbrace{\Lambda(\hat{\alpha}^1, \dots, \hat{\alpha}^p, \hat{v}_1, \dots, \hat{v}_q)}_{C^\infty(M)}(x) \in \mathbb{R}$$

mit $\hat{\alpha}_j \in \Gamma(T^*M)$, $\hat{v}_j \in \Gamma(TM)$ glatte Fortsetzung nach 1.10.10

- (a) Es ist zu zeigen, dass S ein wohldefinierter Schnitt ist, das heißt unabhängig von der Fortsetzung. Dazu obdA $\Lambda : \Gamma(TM) \rightarrow C^\infty(M)$ (allgemeiner Fall läuft genauso). Dann gilt Λ lokaler Operator. Stärker noch:

$$X(x) = 0 \Rightarrow \Lambda(X)(x) = 0$$

,denn

$$\Lambda(X)|_{U \text{ Karte}}(x) = \Lambda(X)|_U(x) \underset{\text{lok. Operator}}{=} \underbrace{\Lambda(X|_U)}_{\sum X^j \partial_j, X^j \in C^\infty(M)}(x) = \sum X^j(x) \Lambda(\partial_j)(x) = 0$$

da $X(x) = \sum X^j(x) \partial_j(x) = 0 \Leftrightarrow X^j(x) = 0$. Sei nun $X, X' \in \Gamma(TM)$ mit $X(x) = X'(x) = v$. So gilt $S_x(v) = \Lambda(X)(x) = \Lambda(X')(x)$, da $\Lambda(X - X')(x) = 0 = \Lambda(X)(x) - \Lambda(X')(x)$.

- (b) S also definiert als Schnitt mit: Ist $X \in \Gamma(TM)$, dann $S_x(X(x)) = \Lambda(X)(x)$. Also gilt lokal: $S|_U = \sum_j \Lambda(\partial_j) dx^j$ glatt, da Λ glatt.

1.10.10 Lemma

Sei $E \rightarrow B$ ein Vektorbündel, $x \in E_x$. Dann existiert ein glatter Schnitt $s_v \in \Gamma(E)$ mit $s_v(x) = v$. Anders gesagt: Jeder Schnitt $s : \{x\} \rightarrow E_x$ über einen Punkt kann glatt auf ganz M fortgesetzt werden.

Beweis

Übung

1.10.11 Bemerkung

In diesem Sinne sind $C^\infty(M)$ -lineare Abbildung nicht nur lokal (wie zum Beispiel $[\cdot, \cdot]$), sondern punktweise bestimmte Objekt, das heißt zum Beispiel für $\Lambda : \Gamma(TM) \rightarrow C^\infty(M)$ $C^\infty(M)$ -linear hängt $\Lambda(X)(x)$ nur von $X(x)$ ab.

1.10.12 Definition

Sei $f : M \rightarrow N$ glatte Abbildung, $S \in \Gamma(\mathcal{T}_q N)$. Der **Pullback** von S unter f ist der Tensor $f^*S \in \Gamma(\mathcal{T}_q M)$ definiert durch

$$(f^*S)_x(v_1, \dots, v_q) := S_{f(x)}(d_x f(v_1), \dots, d_x f(v_q))$$

$\in L_q(\times^q T_x M, \mathbb{R})$ $\in L_q(\times^q T_{f(x)} N, \mathbb{R})$ $T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$

1.10.13 Satz

- (i) Ist $f : M \rightarrow N, g : M \rightarrow N$ glatt, so ist $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$. ($f^* : \Gamma(\mathcal{T}_q N) \rightarrow \Gamma(\mathcal{T}_q M), g^* : \Gamma(\mathcal{T}_q P) \rightarrow \Gamma(\mathcal{T}_q N)$)
- (ii) Ist $S \in \Gamma(\mathcal{T}_q N), T \in \Gamma(\mathcal{T}_q N)$, so gilt

$$f^*(\underbrace{S \otimes T}_{\in \mathcal{T}_{q+q'} N}) = f^*S \otimes f^*T$$

1.10.14 Bemerkung

- (i) Ist $f : M \rightarrow N$ ein Diffeomorphismus, so kann man den **Pullback** auf kontravarianten Tensoren via dem **Push-Forward** definieren, nämlich ist zum Beispiel $X \in \Gamma(TN)$, so ist: $f^*X := (f^{-1})_*X \in \Gamma(TM)$. Also $f^* : \Gamma(\mathcal{T}_q^p N) \rightarrow \Gamma(\mathcal{T}_q^p M)$.
- (ii) f^* kommutiert mit C_j^i -Kontraktion

1.10.15 Verkleben von Tensoren

Sei (U_i, ϕ_i) Karten und $S \in \Gamma(\mathcal{T}_q^p M)$ Tensorfeld. Dann gilt für $S_i = (\phi_i^{-1})^*S \in \Gamma(\mathcal{T}_q^p U_i)$

$$(\phi_i \circ \phi_j^{-1})^* S_j \Big|_{\phi_j(U_j \cap U_i)} = S_i \Big|_{\phi_i(U_j \cap U_i)}$$

Sind Tensorfelder S_i gegeben, die diese Bedingung erfüllen, so lassen sie sich eindeutig zu einem Tensorfeld auf M verkleben.

Setzt damit nun \mathcal{L}_X Lie-Ableitung (definiert für $f \in C^\infty(M), Y \in \Gamma(TM)$) auf $\Gamma(\mathcal{T}_q^p M)$ fort.

1.10.16 Definition

Sei $X \in \Gamma(TM)$. Dann ist

$$\mathcal{L}_X : \Gamma(\mathcal{T}_q^p M) \rightarrow \Gamma(\mathcal{T}_q^p M)$$

definiert durch

$$\mathcal{L}_X S := \frac{d}{dt} \underbrace{\Psi_{X,t}^*}_{\text{Fluss von } X} S|_{t=0}$$

(Beachte $\Psi_{X,t} S$ Kurve in $\Gamma(\mathcal{T}_q^p M)$)

1.10.17 Satz

$$(i) \quad \mathcal{L}_X f = df(X) = \underbrace{X.f}_{f \text{ in Richtung } X \text{ ableiten}} \in C^\infty(M), \quad f \in C^\infty(M)$$

$$(ii) \quad \mathcal{L}_X Y = [X, Y], \quad Y \in \Gamma(TM)$$

$$(iii) \quad \mathcal{L}_X(S \otimes T) = \mathcal{L}_X S \otimes T + S \otimes \mathcal{L}_X T$$

$$(iv) \quad \mathcal{L}_X(C_j^i(S)) = C_j^i(\mathcal{L}_X S)$$

$$(v) \quad \underbrace{(\mathcal{L}_X \alpha)}_{\in \Gamma(T^*M)}(Y) = \underbrace{\mathcal{L}_X(\alpha(Y))}_{\in C^\infty(M)} - \underbrace{\alpha(\mathcal{L}_X Y)}_{\in C^\infty(M)} = X.(\alpha(Y)) - \alpha([X, Y])$$

Beweis

$$(i) \quad (\mathcal{L}_X f)(x) = \frac{d}{dt}(\Psi_{X,t}^* f)(x)|_{t=0} = \frac{d}{dt} f(\Psi_{X,t}(x))|_{t=0} = df\left(\frac{d}{dt} \Psi_{X,t}(x)|_{t=0}\right) = df(X(\Psi_{X,0}(x))) = df(X)(x)$$

(ii) Theorem 1.9.5

(iii) Leite die Identifikation $\Psi_{X,t}^*(S \otimes T) = \Psi_{X,t}^* S \otimes \Psi_{X,t}^* T$ und $C_j^i(\Psi_{X,t}^* S) = \Psi_{X,t}^* C_j^i(S)$ ab.

(iv) Siehe (iii)

(v) Sei $\alpha \in \Gamma(T^*M)$, Dann ist $C_1^1(Y \otimes \alpha) = \alpha(Y) \in C^\infty(M)$.

$$\begin{aligned} X.(\alpha(Y)) &= \mathcal{L}_X(\alpha(Y)) = \mathcal{L}_X(C_1^1(Y \otimes \alpha)) = C_1^1 \mathcal{L}_X(Y \otimes \alpha) \\ &= C_1^1(\mathcal{L}_X Y \otimes \alpha) + C_1^1(Y \otimes \mathcal{L}_X \alpha) = \alpha(\mathcal{L}_X Y) + (\mathcal{L}_X \alpha)(Y) \end{aligned}$$

1.10.18 Korollar

1. \mathcal{L}_X ist lokaler Operator, der durch die Eigenschaften (i) - (iv) in 1.10.18 eindeutig bestimmt ist.
2. $\mathcal{L}_{[X,Y]} = [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y]$ auf $\Gamma(\mathcal{T}_q^p M)$ (wissen dies bereits auf $\Gamma(\mathcal{T}_0^0 M) = C^\infty(M)$)

1.11 Äußere Formen (Differentialformen)**1.11.1 Äußeres Produkt von Vektorräumen**

Sei V ein n -dimensionaler Vektorraum. Auf $\otimes^p V$ definieren wir den **Antisymmetrisierungsoperator** A_p durch

$$A_p(v_1 \otimes \dots \otimes v_p) = \sum_{\sigma \in S_p} \text{sgn}(\sigma) v_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(p)}$$

Zum Beispiel:

$$\begin{aligned} A_2(v \otimes w) &= v \otimes w - w \otimes v \\ A_3(v \otimes w \otimes u) &= v \otimes w \otimes u + u \otimes v \otimes w + w \otimes u \otimes v \\ &\quad - v \otimes u \otimes w - u \otimes w \otimes v - w \otimes v \otimes u \end{aligned}$$

Definiere $\Lambda^p V = \text{Im } A_p \subset \otimes^p V$. Sei (e_i) eine Basis von V , so hat $\Lambda^p V$ die Basis $(\underbrace{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}}_{=A_p(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p})})_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n}$

Spezialfälle

- $\Lambda^0 V = \mathbb{R}$
- $\Lambda^1 V = V$

Alles auf einmal: $\Lambda^\bullet V := \bigoplus_p \Lambda^p V$, alternativ: $\Lambda^\bullet V = T^\bullet V / \text{Ideal erzeugt von } v \otimes v$. Auf $\Lambda^\bullet V$ definieren wir das **äußere (Wedge-, Dach-, Keil-,)Produkt**

$$\wedge : \Lambda^p V \times \Lambda^q V \rightarrow \Lambda^{p+q} V, \quad (a, b) \mapsto a \wedge b := \frac{1}{p!q!} A_{p+q}(a \otimes b)$$

Das Wedgeprodukt ist

- bilinear
- assoziativ: $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$
- graduiert kommutativ: $a \wedge b = (-1)^{pq} b \wedge a$, wenn $a \in \Lambda^p V, b \in \Lambda^q V$

Beispiel

Sei $\alpha \in \Lambda^1 V^*, \beta \in \Lambda^1 V^*$, so ist mit $(\alpha \otimes \beta)(v, w) = \alpha(v)\beta(w)$:

$$\begin{aligned} (\alpha \wedge \beta)(v, w) &= (\alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha)(v, w) \\ &= \alpha(v)\beta(w) - \beta(v)\alpha(w) \\ &= -(\alpha(w)\beta(v) - \beta(w)\alpha(v)) \\ &= -(\alpha \wedge \beta)(w, v) \end{aligned}$$

Für $\alpha : V \rightarrow V$ lineare Abbildung erhalten wir eine lineare Abbildung

$$\wedge^p \alpha : \Lambda^p V \rightarrow \Lambda^p V \text{ durch } \wedge^p \alpha(v_1 \wedge \dots \wedge v_p) = \alpha(v_1) \wedge \dots \wedge \alpha(v_p) \text{ für } v_i \in V$$

Übungsaufgabe

- $\Lambda^p V^* = (\Lambda^p V)^*$
- $\wedge^n \alpha$ ist die Multiplikation mit der Determinante von α

Für die Dimension von $\Lambda^p V$ gilt: $\dim \Lambda^p V = \binom{n}{p}$ (somit $\dim \Lambda^0 V = 1, \dim \Lambda^1 V = n, \dim \Lambda^n V = 1$).

1.11.2 Definition

Das Bündel der äußeren p -Formen (Differentialformen) ist das Vektorbündel $\Lambda^p T^* M$. Die glatten Schnitte heißen (äußere) p -Formen (Differentialformen), wir schreiben $\Omega^p(M) = \Gamma(\Lambda^p T^* M)$. Wir haben $\Lambda^0 T^* M = M \times \mathbb{R}$, $\Omega^0(M) = C^\infty(M)$. In lokalen Koordinaten (U, x^i) :

$$\alpha \in \Omega^p(M) \rightsquigarrow \alpha|_U = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \alpha_{i_1, \dots, i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$$

1.11.3 Bemerkung

Sei $f : M \rightarrow N$, so ist $f^* : \Omega^p(N) \rightarrow \Omega^p(M)$ definiert durch

$$(f^*\omega)(v_1, \dots, v_p) = \omega|_{f(x)}(df|_x(v_1), \dots, df|_x(v_p))$$

Es gilt:

- $(f \circ g)^* g^* \circ f^*$
- $f^*(\alpha \wedge \beta) = (f^*\alpha) \wedge (f^*\beta)$ für α, β Differentialformen
- $\mathcal{L}_X \alpha$ ist wieder eine Differentialformen

$$\mathcal{L}_X(\alpha \wedge \beta) = \mathcal{L}_X \alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \mathcal{L}_X \beta$$

- Es gilt das "innere Produkt": (innere Ableitung)

$$i_X : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{p-1}(M), \quad \omega \mapsto \omega(X, \cdot)$$

Für $\alpha \in \Omega^p(M), \beta \in \Omega^q(M)$ ist

$$i_X(\alpha \wedge \beta) = (i_X \alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge i_X(\beta)$$

1.11.4 Satz/Definition

Auf $\Omega^p(M)$ gibt es einen lokalen linearen Operator $d : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{p+1}(M)$, der durch folgende Eigenschaften eindeutig bestimmt ist:

- Für $p = 0$ ist $d : C^\infty(M) \rightarrow \Omega^1(M)$ das gewöhnliche Differential
- Für $f \in C^\infty(M)$ ist $d(df) = 0$
- Für $\alpha \in \Omega^p(M), \beta \in \Omega^q(M)$ ist:

$$d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge (d\beta)$$

Beweis:

- Eindeutigkeit: Sei (U, x^1, \dots, x^n) Karte, so gilt

$$\begin{aligned} (d\alpha)|_U &\stackrel{\text{lokal}}{=} d(\alpha|_U) \stackrel{\text{linear}}{=} \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_p \leq n} d(\alpha_{i_1, \dots, i_p} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}) \\ &\stackrel{(i), (ii), (iii)}{=} \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_p \leq n} \underbrace{d\alpha_{i_1, \dots, i_p}}_{\text{bekannt (i)}} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \quad (\star) \end{aligned}$$

- Lokal definieren durch (\star) (also auf $\Omega^p(V), V \stackrel{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}^n$. Dann ist zu zeigen, dass dies die Eigenschaften erfüllt.
- $\phi : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$ glatt $\leadsto \phi^* \circ d = d \circ \phi^*$
- Zusammenkleben mit Bemerkung 1.10.15 um d auf ganz M fortzusetzen.

1.11.5 Korollar

- $d \circ d = 0$
- Für $f : M \rightarrow N$ ist $d \circ f^* = f^* \circ d$

1.11.6 Bemerkung

1. Wir erhalten eine Folge

$$0 \rightarrow \Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega^n(M) \xrightarrow{d} 0$$

\leadsto Kettenkomplex

2. Es gibt auch eine explizite Formel ohne Koordinate für d für $\alpha \in \Omega^1(M)$:

$$d\alpha(X, Y) = X.\alpha(Y) - Y.\alpha(X) - \alpha([X, Y])$$

1.11.7 Beispiel

Für $\alpha \in \Omega^1(M)$, $\alpha = \sum \alpha_j dx^j$ gilt

$$(d\alpha)|_U = d(\alpha|_U) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \sum_j (\partial_j \alpha_{i_1, \dots, i_p}) dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$$

1.11.8 Proposition

Für $X \in \Gamma(TM)$:

$$\mathcal{L}_X = d \circ i_X + i_X \circ d$$

Beweis

Definiere $P_X = d \circ i_X + i_X \circ d$. Die ist eine linearer lokaler Operator, da Verknüpfung von lokalen linearen Operatoren. Sei $\alpha \in \Omega^p(M)$, so ist α von der Form:

$$\alpha|_U = \sum \alpha_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$$

Es genügt zu zeigen:

- (i) $\mathcal{L}_X = P_X$ gilt für 0-Formen und exakte 1-Formen

w exakt $\Leftrightarrow \exists \alpha : w = d\alpha$

- (ii) rechte Seite erfüllt Leibnizregel (selber Rechnen)

- (i) Für $f \in \Omega^0(M)$: $P_X f = (i_X \circ d)f = df(X) = \mathcal{L}_X f$

- (ii) Für $df \in \Omega^1(M)$: $P_X(df) = di_X df + i_X \underbrace{dd}_0 f$. Sei $Y \in \Gamma(TM)$, so gilt $(P_X df)(Y) = (di_X df)(Y) = d(df(X))(Y) = Y.X.f$. Außerdem gilt

$$(\mathcal{L}_X df)(Y) = \mathcal{L}_X(df(Y)) = df(\mathcal{L}_X Y) = X.Y.f - [X, Y].f = Y.X.f$$

1.12 Volumenformen und Integration

1.12.1 Definition

Eine **Volumenform** ist ein $\omega \in \Omega^n(M)$ ($n = \dim M$) mit $\omega_x \neq 0 \forall x \in M$

1.12.2 Bemerkung

Aus der Existenz einer Volumenform folgt $\Lambda^n T^*M = M \times \mathbb{R}$. Das ist nicht immer der Fall, das heißt nicht auf jedes Mannigfaltigkeit existiert eine Volumenform.

1.12.3 Integration auf Mannigfaltigkeiten

Sei $\omega \in \Omega^n(M^n)$ Volumenformen, (U, ϕ) Karte, $\phi^{-1*}\omega|_U = \omega_U dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$. Sei $f \in C_c^0(M)$ mit $\text{supp}(f) \subset U$. Setze

$$\Lambda_\omega(f) = \int_{\phi(U)} \phi^{-1*} f \omega_U \underbrace{dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n}_{dL^n}$$

Ist dies unabhängig von der Wahl der Karte? Dazu sei (V, ψ) Karte, $\text{supp } f \subset U \cap V$ mit $\psi^{-1*}\omega = \omega_V dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$. Setze $F := \phi \circ \psi^{-1}|_{\psi(U \cap V)}$ und wir nehmen zunächst an, dass $\det dF > 0$. Es gilt

Es gilt $\omega_V = \det d\psi^{-1} \omega_U$

$$\begin{aligned} \int_{\psi(U \cap V)} (f \circ \psi^{-1}) \cdot \omega_V dL^n &= \int_{\psi(U \cap V)} (f \circ \phi^{-1} \circ F) \cdot \det F \cdot \omega_U \circ F dL^n \\ &= \int_{F \circ \psi(U \cap V)} (f \circ \phi^{-1}) \cdot \omega_U dL^n \\ &= \int_{\phi(U \cap V)} (f \circ \phi^{-1}) \cdot \omega_U dL^n \end{aligned}$$

Also ist $\Lambda_\omega(f)$ unabhängig von der Wahl der Karten. Für beliebige $f \in C_c^0(M)$ wähle Atlas (U_i, ϕ_i) und eine untergeordnete Teilung der Eins (ρ_i) , das heißt $\text{supp } \rho_i \in U_i$. Dann setze

$$\Lambda_\omega f := \sum_i \Lambda_{\omega}(\rho_i \cdot f)$$

Die Unabhängigkeit von (ρ_i) und dem Atlas ist eine Übungsaufgabe. Mit dem Rieszischen Darstellungssatz folgt die Existenz des Radon-Maß ω auf M mit $\Lambda_\omega f = \int_M f d\omega$.

1.12.4 Bemerkung

Wenn M kompakt und alle Jacobideterminanten der Übergangsfunktion positiv sind, setze

$$\text{Vol}_\omega(M) = \int_M \omega$$

1.12.5 Definition

M heißt **orientierbar**, falls es einen Atlas mit positiven Jacobideterminanten der Übergangsfunktionen gibt. So ein Atlas heißt **Orientierungsatlas** von M .

1.12.6 Beispiel

TM ist immer orientierbar. Der angegebene Atlas hat Übergangsfunktion

$$\Phi_{ij}(x, v) = (\phi_i \circ \phi_j^{-1}(x), d_{\phi_j(x)}(\phi_i \circ \phi_j^{-1})(v))$$

, das heißt

$$d_{(x,v)} \Phi_{ij} = \begin{pmatrix} d_x \phi_{ij} & * \\ 0 & d_x \phi_{ij} \end{pmatrix}$$

Somit folgt, dass $\det d_{(x,v)} \Phi_{ij} > 0$.

1.12.7 Proposition

M ist orientierbar, genau dann wenn eine Volumenform auf M existiert.

Beweis

- "⇒": Sei ω Volumenform. Wähle Atlas mit (U_i, ϕ_i) mit $\phi_i^{-1*}\omega = \omega_i dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$, sodass $\omega_i > 0$. Das ist möglich, da $\omega_i(x) \neq 0 \forall x \in U_i$ und man für $\omega_i < 0$ die Karte ϕ_i mit der Abbildung $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ verknüpfen kann um eine neue Karte mit $\omega'_i > 0$ zu erhalten. Mit $\omega_V = \det dF(\omega_U \circ F)$ folgt, dass die Jacobideterminante der Übergangsfunktion größer 0 ist.
- "⇐": Wähle Orientierungsatlas (U_i, ϕ_i) und untergeordnete Teilung der Eins (ρ_i) . Setze $\omega_i = \phi_i^*(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n)$. Dann ist $\omega := \sum_i \rho_i \omega_i$ Volumenform auf M , da

$$\begin{aligned} \phi_k^{-1*}\omega &= \sum_i \rho_i \phi_k^{-1*} \phi_i^* (dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n) \\ &= \sum_i \rho_i (\phi_i \circ \phi_k^{-1})^* (dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n) \\ &= \underbrace{\sum_i \rho_i \det d\phi_{ik}}_0 (dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n) \\ &\geq \min_{\rho_i \neq 0} \det d\phi_{ik} \underbrace{\sum_i \rho_i}_{=1} > 0 \end{aligned}$$

2 Riemannsche Geometrie

2.1 Riemannsche Metriken

2.1.1 Definition

Riemannsche Metrik g ist ein symmetrischer positiv definiter $(0, 2)$ Tensor auf M , das heißt $g \in \Gamma(\mathcal{T}_2 M)$ (beziehungsweise $g : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow C^\infty(M)$) mit

- $g(X, Y) = g(Y, X) \quad \forall X, Y \in \Gamma(TM)$ (Symmetrie)
- $g_x(v, v) \geq 0$ mit Gleichheit genau dann wenn $v = 0$

das heißt $(T_x M, g_x)$ ist ein euklidischer Vektorraum.

- (M, g) ist eine Riemannsche Mannigfaltigkeit
- $\varphi \in \text{Diff}(M) = \{\varphi : M \rightarrow M \text{ Diffeomorphismus}\}$ heißt **Isometrie** von (M, g) , falls $\varphi^* g = g$
- Ist $\varphi : M \rightarrow M$ lokaler Diffeomorphismus mit $\varphi^* g = g$ heißt φ lokale Isometrie
- $\text{Isom}(M, g) = \text{Gruppe der Isometrien}$
- $(M, g), (N, h)$ Riemannsche Mannigfaltigkeiten heißen isometrisch, falls ein Diffeomorphismus $\varphi : M \rightarrow N$ existiert mit $\varphi^* h = g$ (insbesondere ist dann $(T_{\varphi(x)} N, h_{\varphi(x)})$ isometrisch als euklidischer Vektorraum zu $(T_x M, g_x)$)

2.1.2 Bemerkung

Sind x^1, \dots, x^n lokale Koordinaten, so gilt lokal

$$g|_U = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i \otimes dx^j, \quad (g_{ij}(x))_{i,j=1}^n \text{ sym. pos. def. Matrix für alle } x \in U$$

2.1.3 Beispiele

(i) $(\mathbb{R}^n, g_{\text{euk}} = \sum_i dx^i \otimes dx^i)$ flache"oder"euklidische Metrik".

(ii) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ Untermannigfaltigkeit, allgemein $M \subset (N, h)$ Untermannigfaltigkeit, so ist die **induzierte Metrik**

$$g = h|_U : \underbrace{\Gamma(TM)}_{\subset \Gamma(TN)|_M} \times \underbrace{\Gamma(TM)}_{\subset \Gamma(TN)|_M} \rightarrow C^\infty(M)$$

definiert durch $g(\underbrace{X, Y}_{\in \Gamma(TM) \times \Gamma(TM)}) = h(X, Y) \in C^\infty(M)$. (Vergleiche $V \subset (W, g)$ euklidischer Vektorraum $\leadsto (V, g|_V : V \times V \rightarrow \mathbb{R})$ euklidischer Vektorraum)

Zum Beispiel: $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}, g_{\text{euk}}|_{S^n} = g_{\text{rou}}$ runde Metrik

(iii) Betrachte $S^n \times \mathbb{R}_{>0} \simeq \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. $T_{\theta, r}(S^n \times \mathbb{R}_{>0}) = T_\theta S^n \oplus T_r \mathbb{R}_{>0}$ mit Metrik $r^2 g_{\text{rou}} + dt^2 \cong g_{\text{euk}}|_{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}$

(iv) Sei $f : M \rightarrow N$ Immersion in $x \in M$, das heißt $df_x : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ ist injektiv. Ist h Metrik auf N , so ist f^*h Metrik auf einer Umgebung von x . Nämlich

- Symmetrie: $f^*h \in \Gamma(\mathcal{T}_2 M)$ und $(f^*h)_x(v, w) = h_{f(x)}(df_x(v), df_x(w)) = h_{f(x)}(df_x(w), df_x(v)) = (f^*h)_x(w, v)$
- Positiv Definitheit: $(f^*h)_x(v, v) = h_{f(x)}(df_x(v), df_x(v)) \leq 0$
- $h_{f(x)}(df_x(v), df_x(v)) = 0 \Rightarrow df_x(v) = 0 \xrightarrow{f \text{ Immersion}} v = 0$

2.1.4 Allgemeine Konstruktion

(i) Eine Abbildung $p : M \rightarrow N$ heißt Überlagerung von N , falls für alle $y \in N$ eine Umgebung $y \in V \subset N$ existiert, sodass $p^{-1}(V) = \bigcup_j U_j$ disjunkte Vereinigung offener $U_j \subset M$ mit $p|_{U_j}$ ist Diffeomorphismus auf sein Bild. $S^n = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ Sei h eine Metrik auf N . Dann existiert eine eindeutig bestimmte Metrik g auf M , sodass p eine lokale Isometrie wird, nämlich $g = p^*h$. Im Allgemeinen nennt man eine Überlagerung $p : (M, g) \rightarrow (N, h)$ Riemannsch, falls p lokale Isometrie. Insbesondere existiert eine kanonische Riemannsche Metrik auf der sogenannten "universellen Überlagerung" \tilde{N} einer Riemannschen Mannigfaltigkeit.

(ii) Sei $G \subset \text{Diff}(M)$ Untergruppe.

$$G \times M \rightarrow M, (f, x) \mapsto f(x) \quad \text{Gruppenwirkung}$$

G wirkt **eigentlich**, falls für alle $x, y \in M$ gilt $x \notin G.y = \{f(y) \mid f \in G\}$ "Bahn von y unter G ". (zum Beispiel $S^1 \ni e^{i\theta}$ wirkt auf $y \in \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ durch Multiplikation $e^{i\theta}y$ Wirkung von S^1 auf \mathbb{R}^2 eine Umgebung U von x mit $U \cap G.y = \emptyset$)

Bemerkung

Diese Eigenschaft ist für nicht kompakte Gruppen interessant, zum Beispiel falls es eine dichte Bahn gibt. Dichte Bahn Die Wirkung ist **diskontinuierlich**, falls $\forall x \in M$ eine offene Umgebung

$x \in U_x$ existiert mit $f(U_x) \cap U_x = \emptyset$ außer für $f = \text{id}_M$. Diskontinuierliche Wirkung. Wirkt G auf M eigentlich diskontinuierlich, dann ist M/G eine Mannigfaltigkeit, sodass $p : M \rightarrow M/G, x \mapsto Gx$ eine Überlagerung ist.

Beispiel

\mathbb{Z}^n wirkt auf \mathbb{R}^n durch Diffeomorphismus, nämlich

$$(m^1, \dots, m^n) \in \mathbb{Z}^n, (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \mapsto (x^1 + m^1, \dots, x^n + m^n)$$

$$\mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$$

Bemerkung

Daraus, dass die Wirkung eigentlich ist, folgt, dass M/G Hausdorff ist. Darstellung der Hausdorff-Eigenschaft. Aus der Diskontinuierlichkeit der Wirkung, folgt die Existenz der Überlagerung $\mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Hier fehlt noch etwas

2.1.5 Satz

Auf jeder Mannigfaltigkeit existiert eine Riemannsche Metrik.

Beweis

Sei $\{(U_i, \varphi_i)\}$ Atlas, $\{\theta_i : M \rightarrow \mathbb{R}\}$ untergeordnete Zerlegung der Eins, $g_i := \varphi_i^* g_{\text{euc}}$ Metrik auf U_i . So ist $\theta_i g_i \in \Gamma(\mathcal{T}_2^* M)$ durch 0 fortgesetzter symmetrischer (0,2)-Tensor und damit $g = \sum_i \theta_i g_i$ Riemannsche Metrik, denn

- $g_x = \sum_{\text{endl.}} \theta_i g_i$ mit $x \in \text{supp } \theta_i$, also ist g wohldefiniert
- g ist symmetrisch und nicht negativ, da $\underbrace{(\theta_i g_i(v, v))}_{\geq 0} \geq 0$
- $g_x(v, v) = 0 \Rightarrow \theta_i g_i(v) = 0 \forall i \Rightarrow v = 0$ (für j mit $v \in U_j \Rightarrow g_j$ Riemannsche Metrik)

Metrik induziert mehrere Objekte

- kanonischen Isomorphismus $TM \simeq T^*M$
- kanonische ∇^g kovariante Ableitung
- kanonische Distanzfunktion d^g

2.1.6 Musikalische Isomorphismen

Sei g positiv definit, also insbesondere nicht ausgeartet, d.h. ist $g_x(v, w) = 0 \forall w \in T_x M \iff v = 0$. So können wir definieren

$$b : TM \rightarrow T^*M, b : v \in T_x M \mapsto (g_x(v, \cdot) : T_x M \rightarrow \mathbb{R} \text{ linear}) \in T_x^*M$$

b ist Bündelisomorphismus das heißt $b|_{T_x M}$ ist linearer Isomorphismus, denn angenommen $b(v) = 0$, das heißt $b(v)(w) = g(v, w) = 0 \forall w \in T_x M$, so folgt $v = 0$, das heißt b injektiv und damit $(\dim T_x^*M = \dim T_x M)$ Isomorphismus

Die Umkehrabbildung $\# : T^*M \rightarrow TM$ definiert durch $(\# \alpha_x)$, das definiert durch die Gleichung $g_x(\# \alpha_x, \omega) = \alpha_x(\omega)$ für $\omega \in T_x M$

Bezeichnung

Lokal ist Vektorfeld X bzw. 1-Form α durch

$$X|_U = \sum X^i \partial_i, \quad \alpha|_U = \sum \alpha_i dx^i$$

Also senkt b die Indizes von X ($b(X)$ ist 1-Form) und $\#$ hebt die Indizes von α ($\#(\alpha)$ ist Vektorfeld). In der Folge identifiziere TM oft mit T^*M , falls Metrik fixiert ist. Zum Beispiel induziert Metrik g eine Metrik g^* auf T^*M , in den man $g^*(\alpha, \beta) = g(\# \alpha, \# \beta)$ setzt.

2.2 Kovariante Abbildung**2.2.1 Definition**

Eine **kovariante Abbildung** auf M ist eine \mathbb{R} -lineare Abbildung

$$\nabla : \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM \otimes T^*M) = \Gamma(\text{End}(TM)) = \Gamma(\mathcal{T}_1^1 M)$$

mit $\nabla(f \cdot X) = X \otimes df + f \nabla X$ (Produkt - Regel)

Schreibweise

$$\nabla_X Y = C_1^1 \left(\underbrace{X \otimes \nabla Y}_{\in \Gamma(TM \otimes TM \otimes T^*M) = \Gamma(\mathcal{T}_1^2)} \right) \in \Gamma(TM)$$

Es gilt

$$\nabla Y \in \Gamma(TM \otimes T^*M) \leftrightarrow \nabla Y : \Gamma(T^*M) \times \Gamma(TM) \rightarrow C^\infty(M) \leftrightarrow \nabla Y : \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$$

das heißt $\nabla_X Y \in \Gamma(TM)$. Punktweise gilt:

$$(\nabla Y)_x \in T_x M \otimes T_x^* M \simeq \text{End}(T_x M), \quad (\nabla_v Y)_x := (\nabla Y)_x(v) \in T_x M$$

2.2.2 Beispiel

(i) Sei \mathbb{R}^n mit flacher kovarianter Ableitung. Sei $Y \in \Gamma(T\mathbb{R}^n)$

$$\sum Y^i \partial_i = \begin{pmatrix} Y^1 \\ \vdots \\ Y^n \end{pmatrix}, \quad Y^i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

So ist $\nabla_X Y \in \Gamma(T\mathbb{R}^n)$ definiert durch

$$\nabla_X Y = dY(X) = \begin{pmatrix} dY^1(X) \\ \vdots \\ dY^n(X) \end{pmatrix}$$

$dY(X)$ = Richtungsableitung von Y nach X

- \mathbb{R} -linear und $\nabla Y = dY(.) : \Gamma(T\mathbb{R}^n) \rightarrow \Gamma(T\mathbb{R}^n)$
- Leibniz-Regel:

$$\nabla_X(fY) = (Y \otimes df)(X) + f \nabla Y(X) = df(X) \cdot Y + f \nabla_X Y = df(X) \cdot Y + f dY(X)$$

Andererseits $\nabla_X(fY) = d(fY)(X) = df(X) \cdot Y + f dY(X)$ (Produktregel der Ableitung)

Intuition der kovarianten Ableitung $\nabla_X Y$ als Richtungsableitung von Y nach X .

(ii) ∇ induziert kovariante Ableitung $\nabla : \Gamma(\mathcal{T}_q^p M) \rightarrow \Gamma(\mathcal{T}_{q+1}^p)$ durch

- $\nabla_X f := df(X)$, $f \in C^\infty(M)$
- $(\nabla_X \alpha)(Y) = X \cdot \alpha(Y) - \alpha(\nabla_X Y)$ bestimmt $\nabla_X \alpha \in \Gamma(T^*M)$ gesehen als C^∞ -lineare Abbildung $\Gamma(TM) \rightarrow C^\infty(M)$
- $\nabla_X(S \otimes T) = \nabla_X S \otimes T + S \otimes \nabla_X T$

2.2.3 Bemerkung

(i) Sei $\nabla Y \in \Gamma(TM \otimes T^*M)$ das heißt $\nabla Y : \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$. $\nabla_X Y$ ist $C^\infty(M)$ -linear in X , das heißt $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y \forall f \in C^\infty(M)$. Anders gesagt $\nabla_X Y$ ist **tensoriell** in X (anders als $\mathcal{L}_X Y$). Insbesondere hängt $(\nabla_X Y)(x) \in T_x M$ nur von $X(x)$ ab! (Und nicht von der Umgebung von $X(x)$)

(ii) Abhängigkeit von Y ? Betrachte lokale Darstellung von $\nabla_X Y$:

$$X|_U = \sum X^i \partial_i, Y|_U = \sum Y^i \partial_i \text{ für lokale Koordinaten}$$

Es gilt:

Γ_{ij}^k sog. Christoffel-Symbole von ∇

$$\begin{aligned} (\nabla_X Y)(x) &= (\nabla_X Y|_U)(x) \\ &= \sum (\nabla_X Y^i) \partial_i + Y^i \nabla_X \partial_i \\ &= \sum_{i,j} (X^j \underbrace{\nabla_{\partial_j} Y^i}_{d^i(\partial_j)}) \partial_i + X^j Y^i \underbrace{\nabla_{\partial_j} \partial_i(x)}_{= \sum \Gamma_{ij}^k \partial_k \in \Gamma(TM|_U)} \\ &= \sum_k \left(\sum_j \left(X^j dY^k(\partial_j) + \sum_i X^j Y^i \Gamma_{i,j}^k \right) \right) \partial_k(x) \\ &= \sum_k \left(\sum_j \left(\underbrace{X^j(x) d_x Y^k(\partial_j)}_{d_x Y^k(\sum_j X^j(x) \partial_j) = d_x Y^k(X(x))} + \sum_i X^j(x) Y^i(x) \Gamma_{i,j}^k(x) \right) \right) \partial_k(x) \end{aligned}$$

Hängt nur von $X^j(x)$, $Y^j(x)$ und $d_x Y^k(X(x)) = \frac{d}{dt} Y^k(\alpha(t))$, das heißt von Y entlang einer Kurve α mit $\alpha(0) = x, \dot{\alpha}(0) = X(x)$.

(iii) Werden sehen: Kovariante Ableitungen existieren immer. Wie sieht der Raum der kovarianten Ableitungen aus? Angenommen ∇ ist kovariante Ableitung

$$A \in \underbrace{\Gamma(TM \otimes T^*M \otimes T^*M)}_{\text{End}(TM \otimes T^*M)} \hat{=} A : \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(\text{End } TM), X \mapsto A_X$$

$\Rightarrow \nabla^A = \nabla + A$ definiert durch

$$\nabla_X^A Y = \nabla_X Y + \underbrace{A_X Y}_{\in \Gamma(TM)}, \text{ wobei } A_X = C_2^1(X \otimes A)$$

kovariante Ableitung, da

$$\nabla_X^A(fY) = \nabla_X(fY) + \underbrace{A_X fY}_{\text{tensoriell in } X \text{ und } Y} = df(X)Y + f \nabla_X Y + f A_X Y = df(X)Y + f \nabla_X^A Y$$

Umgekehrt: Seien $\nabla, \tilde{\nabla}$ zwei kovariante Ableitungen

$$\nabla - \tilde{\nabla} : \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM \otimes T^*M) = \Gamma(\text{End}(TM))$$

C^∞ -linear? Falls ja, $A = \nabla - \tilde{\nabla} \in \Gamma(\text{End}(TM) \otimes T^*M)$, das heißt $\tilde{\nabla} = \nabla + A = \nabla^A$. Also ist der Raum der kovarianten Ableitungen ein affiner Vektorraum $\nabla + \Gamma(\text{End}(TM) \otimes T^*M)$. Tatsächlich

$$\begin{aligned}\nabla_X(fY) - \tilde{\nabla}_X(fY) &= df(X)Y + f\nabla_XY - df(X)Y - f\tilde{\nabla}_XY \\ &= f\nabla_XY - f\tilde{\nabla}_XY \\ &= f(\nabla_XY - \tilde{\nabla}_XY)\end{aligned}$$

2.2.4 Definition und Satz

Sei ∇ kovariante Ableitung auf M , $\gamma : I \rightarrow M$ Weg und $\Gamma_\gamma(TM) = \{Y : I \rightarrow TM \mid Y(t) \in T_{\gamma(t)}M\}$. Elemente aus $\Gamma_\gamma(TM)$ nennen wir "Vektorfelder entlang γ ". Dann existiert eine Abbildung, die sogenannte **kovariante Ableitung entlang γ**

$$\frac{\nabla}{dt} : \Gamma_\gamma(TM) \rightarrow \Gamma_\gamma(TM)$$

,die durch folgende Eigenschaften eindeutig bestimmt ist:

- (i) $\frac{\nabla}{dt}(fY) = \dot{f}(t)Y(t) + f(t)\frac{\nabla}{dt}Y(t)$ für $f \in C^\infty(I)$
- (ii) Ist $Y(t) = \bar{Y}(\gamma(t))$, wobei $\bar{Y} \in \Gamma(TM)$, so gilt $(\frac{\nabla}{dt}Y)(t) = (\nabla_{\dot{\gamma}(t)}\bar{Y})(\gamma(t))$

Beweis

- (a) Eindeutigkeit: Sei $Y \in \Gamma_\gamma(TM)$ und $\frac{\nabla}{dt}$ eine kovariante Ableitung entlang γ mit den oben genannten Eigenschaften. Sei $\gamma(t) \in U$ Karten mit lokalen Koordinaten x_1, \dots, x_n , so können wir lokal $Y|_U = \sum Y^i(t)\partial_i(\gamma(t))$ schreiben. Für $J \subset I$ mit $\gamma(J) \subset U$ gilt mit (i)

$$\begin{aligned}\frac{\nabla}{dt}Y|_J(t) &= \sum_i \dot{Y}^i(t)\partial_i(\gamma(t)) + Y^i(t)\left(\frac{\nabla}{dt}\partial_i\right)(t) \\ &\stackrel{(ii)}{=} \sum_i \dot{Y}^i(t)\partial_i(\gamma(t)) + Y^i(t)\nabla_{\dot{\gamma}(t)}\partial_i(\gamma(t))\end{aligned}$$

Somit ist $\frac{\nabla}{dt}Y$ durch ∇ eindeutig bestimmt.

- (a) Existenz: Definiere $(\frac{\nabla}{dt}Y)(t)$ wie oben auf $J \subset I$, sodass $\gamma(J) \subset U$. Aufgrund der oben gezeigten Eindeutigkeit müssen die so definierten $\frac{\nabla}{dt}$ auf $J_1 \cap J_2$ übereinstimmen. (Wobei man hierfür im Beweis der Eindeutigkeit noch die Unabhängigkeit der Kartenwahl zeigen müsste.)

2.2.5 Beispiel

Sei \mathbb{R}^n mit flacher kovarianter Ableitung gegeben, so folgt aus dem Beweis ?? direkt, dass für ein Vektorfeld $X : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ entlang γ gilt:

$$\frac{\nabla}{dt}X = \frac{d}{ds}X(s)|_t = \dot{X}(t)$$

2.2.6 Bemerkung

∇ wird durch die kovariante Ableitung $(\frac{\nabla}{dt})$ bereits bestimmt. Sei X, Y Vektorfelder und $\alpha : I \rightarrow M$ ein Weg mit $\alpha(0) = x$ und $\dot{\alpha}(0) = X(x)$, so gilt

$$(\nabla_X Y)(x) = (\nabla_{X(x)} Y)(x) = \frac{\nabla}{dt}(Y \circ \alpha)(0)$$

Verstehe ich momentan leider nicht, wie so der zweite Summand so aussieht

2.2.7 Fortsetzung von ∇ auf $\Gamma(\mathcal{T}_q^p M)$

Wurde schon in 2.2.2 behandelt.

2.2.8 Definition

Die **Torsion** von ∇ $T^\nabla \in \Gamma(\wedge^2 T^*M \otimes TM)$ ist definiert durch

$$T^\nabla(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

(gesehen als $\underbrace{\Gamma(TM) \times \Gamma(TM)}_{\text{schiefssymmetrisch}} \rightarrow \Gamma(TM)$). ∇ heißt **torsionsfrei**, falls $T^\nabla = 0$.

Für $f \in C^\infty(M)$ gilt:

$$T^\nabla(fX, Y) = T^\nabla(X, fY) = fT^\nabla(X, Y)$$

Somit folgt $T^\nabla \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M \otimes TM)$ und da $T^\nabla(X, Y) = -T^\nabla(Y, X)$ folgt $T^\nabla \in \Gamma(\wedge^2 T^*M \otimes TM)$.

2.2.9 Bemerkung

Lokal ist $T^\nabla(\partial_i, \partial_j) = \sum_k \Gamma_{ij}^{\nabla k} \partial_k$. Es gilt

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_i} \partial_j - \nabla_{\partial_j} \partial_i - [\partial_i, \partial_j] \\ = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k = 0 \end{aligned}$$

somit folgt, $\Gamma_{ij}^{\nabla k} = \Gamma_{ji}^k$, also misst T^∇ die Kommutativität der Christoffelsymbol in i und j.

2.2.10 Beispiel

Die flache kovariante Ableitung $\nabla = d$ auf \mathbb{R}^n ist torsionsfrei ($\Gamma_{ij}^k = 0$).

2.2.11 Definition

Die **Krümmung** von ∇ $R^\nabla \in \Gamma(\mathcal{T}_3^1 M)$ (gesehen als $R^\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$) ist definiert durch

$$R^\nabla(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[Y, X]} Z = (\nabla_{[X, Y]} - [\nabla_X, \nabla_Y])Z$$

(Eigentlich $R(X, Y, Z)$, aber wir sehen das hier als $R(X, Y) : \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$) Hier ist $[\nabla_X, \nabla_Y] = \nabla_X \circ \nabla_Y - \nabla_Y \circ \nabla_X$ der Abbildungskommutator. (vergleiche mit 1.10.18 : $\mathcal{L}_{[X, Y]} - [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] = 0$) ∇ ist **flach**, falls $R^\nabla = 0$

2.2.12 Beispiel

Die flache"kovariante Ableitung auf \mathbb{R}^n ist wirklich flach.

2.2.13 Fundamentallemma der Riemannschen Geometrie

Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann existiert eine eindeutig bestimmte kovariante Ableitung ∇^g die sogenannte **Levi-Civita kovariante Ableitung** mit folgenden Eigenschaften:

- ∇^g ist torsionsfrei
- ∇^g ist metrisch, das heißt $\nabla^g g = 0$

$\nabla_X^g Y$ wird durch die Koszul-Formel eindeutig bestimmt: Für alle $Z \in \Gamma(TM)$ gilt

$$2g(\nabla_X^g Y, Z) = X.g(Y, Z) + Y.g(X, Z) - Z.g(X, Y) + g([X, Y], Z) - g([X, Z], Y) - g([Y, Z], X)$$

(benutzt die Nicht-Degeneriertheit vgl. 2.1.6 Musikalische Isomorphismen).

$R^g = R^{\nabla^g}$ heißt Krümmungstensor bzgl. ∇^g und wir nennen g flach, falls ∇^g flach.

Beweis

- Eindeutigkeit: Angenommen ∇ erfüllt die oben genannten Eigenschaften (i) und (ii), also ∇ ist torsionsfrei und metrisch. Nach 2.2.8 und 2.2.7 ist dies äquivalent zu

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X \text{ bzw. } X.g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

(Für die zweite Äquivalent schaut man sich die Erweiterung von ∇ für $\Gamma(\mathcal{T}_2 M)$). Setzt man dies in die rechte Seite der Koszul-Formel ein erhält man

$$\begin{aligned} & X.g(Y, Z) + Y.g(X, Z) - Z.g(X, Y) + g([X, Y], Z) - g([X, Z], Y) - g([Y, Z], X) \\ &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) + g(\nabla_Y X, Z) + g(X, \nabla_Y Z) - g(\nabla_Z X, Y) - g(X, \nabla_Z Y) \\ &\quad + g([X, Y], Z) - g([X, Z], Y) - g([Y, Z], X) \\ &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, [X, Z]) - g([X, Z], Y) + g(X, [Y, Z]) - g([Y, Z], X) + g(\nabla_Y X, Z) + g([X, Y], Z) \\ &= 2g(\nabla_X Y, Z) \end{aligned}$$

Also erfüllt ∇ die Koszul-Formel, die durch g eindeutig bestimmt ist.

- Existenz: Definiere $F(X, Y, Z) =$ "der rechten Seite der Koszul-Formel". Für festes $X, Y: F(X, Y, \cdot) \in \Gamma(T^*M)$, also ist dies C^∞ -linear in Z . Das heißt für alle X, Y existiert $V \in \Gamma(TM)$ mit $b(V)(Z) = g(V, Z) = F(X, Y, Z)$. Also $b(V) = F(X, Y, \cdot)$. Dann definiere $\nabla_X^g Y := V$, wir behaupten, dass dies die kovariante Ableitung mit den Eigenschaften (i) und (ii) ist. Zum Beispiel: Leibnitz-Regel: $\nabla_X(fY) \stackrel{?}{=} df(X)Y + f\nabla_X^g Y$. Dafür rechnen wir $b(\nabla_X^g(fY))(Z) = F(X, fY, Z)$ (dafür benutzen wir $[X, fY] = (X.f)Y + f[X, Y]$ etc.). Es folgt $F(X, fY, Z) = g(df(X)Y + f\nabla_X^g Y, Z)$. Für den Rest: O'Neill

b ist der musikalische Iso. aus 2.1.6

2.3 Riemannsche Distanzfunktion d^g

2.3.1 Definition

Eine Kurve $\gamma: I = [a, b] \rightarrow M$ heißt **glatt**, wenn $\gamma = \tilde{\gamma}|_I$, $(a - \epsilon, b + \epsilon) \subset \tilde{I}$ für ein $\epsilon > 0$ und $\tilde{\gamma}: \tilde{I} \rightarrow M$ glatt. $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ heißt **stückweise glatt**, falls γ stetig ist und $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$ glatt mit $a = t_0 < \dots < t_n = b$. Insbesondere existiert $\dot{\gamma}(t)$ für alle $t \in T$, wobei es an den Stellen wie $t = t_i$ nicht eindeutig definiert ist. Für $x, y \in M$ ist $\Omega(x, y)$ der Raum der stückweise glatten Kurven mit $\gamma(a) = x$ und $\gamma(b) = y$.

2.3.2 Definition

Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Wir setzen für $v \in T_x M$

$$|v|_g = |v| := \sqrt{g_x(v, v)}$$

Sei $\gamma: I \rightarrow M$ stückweise glatt. Die **Länge** $L(\gamma)$ von γ ist definiert durch

$$L(\gamma) = \int_I |\dot{\gamma}| dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\dot{\gamma}|_{[t_i, t_{i+1}]} dt$$

2.3.3 Lemma

- (i) Sei $s : I \rightarrow I$ Reparametrisierung, das heißt s glatt, surjektiv und $\frac{ds}{dt}(t) \neq 0 \forall t \in I$, so folgt

$$L(\gamma \circ s) = L(\gamma)$$

- (ii) Falls $\dot{\gamma}(t) \neq 0 \forall t \in I$, so existiert eine Reparametrisierung s mit $\tilde{\gamma} = \gamma \circ s$ und $|\dot{\tilde{\gamma}}(t)| = \text{const.}$ Wir nennen $\tilde{\gamma}$ proportional zur Bogenlänge (pB). Eine pB - Kurve mit $|\dot{\gamma}| = 1$ heißt **normal**

2.3.4 Definition

- Die **Riemannsche Distanzfunktion** ist definiert durch

$$d^g : M \times M \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad d^g(x, y) = \inf_{\gamma \in \Omega(x, y)} L(\gamma) \geq 0$$

- Der **Durchmesser von** (M, g) ist

$$\rho(M, g) = \sup_{x, y \in M} d^g(x, y)$$

2.3.5 Beispiel

Sei $(\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}})$, so ist $d^{g_{\text{eukl}}}$ die übliche Distanzfunktion auf \mathbb{R}^n . Insbesondere ist $(\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}})$ der natürliche metrische Raum, die Topologie wird erzeugt durch metrische Bälle $B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid d^g(x, y) < r\}$. Diese Bälle haben den Durchmesser $\rho(B_r(x), g_{\text{eukl}}) = 2r$ und für den ganzen Raum gilt $\rho(\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}}) = \infty$

2.3.6 Bemerkung

Insbesondere kann der Durchmesser $\rho(M, g) = +\infty$ für nicht kompakte Mannigfaltigkeiten sein. (M kompakt $\Rightarrow \rho(M, g) < +\infty$, da d^g stetig \leadsto wichtige metrische Invariante)

2.3.7 Satz

Sei (M, g) Riemannsche Mannigfaltigkeit, so gilt

- (i) d^g ist Distanzfunktion (im Sinne der Topologie)
- (ii) Die Topologie die aus dem metrischen Raum entsteht ist äquivalent zur Topologie der Mannigfaltigkeit

Beweis

- (i) Der schwierige Punkt ist zu zeigen, dass $d^g(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$. Angenommen $x \neq y$. Bild zur Trennung von x und y So wähle lok. Koordinaten x^1, \dots, x^n auf U mit $x \in U$. So können wir die Metrik g darstellen $g|_U = \sum g_{ij} dx^i \otimes dx^j$. Definiere auf U zweite Metrik: $g_{\text{eukl}}|_U = \sum dx^i \otimes dx^j$. Betrachte einen Ball um x $B_r(x) = \{p \mid d^{g_{\text{eukl}}}(x, p) < r\}$, sodass $y \notin B_r(x)$ (hier wird die Hausdorff-Eigenschaft von M genutzt). Da g_{ij} eine symmetrische pos. def. Matrix für alle $x \in U$ existiert ein kleinste Eigenwert λ von g_{ij} und es folgt $|v|_g^2 = g(v, v) \geq \lambda g_{\text{eukl}}(v, v) = \lambda |v|_{g_{\text{eukl}}}^2$. Sei γ nun eine Kurve von x nach y . So verlässt diese Kurve zwingend $B_r(x)$ und es folgt somit

$$L(\gamma) = \int_I |\dot{\gamma}|_g dt \geq \lambda \int_I |\dot{\gamma}|_{g_{\text{eukl}}} dt \geq \lambda r$$

Somit folgt $d^g(x, y) > 0$ und somit der Widerspruch.

- (ii) Der interessante Punkt zu beweisen ist, dass aus $U \subset M$ offen folgt, dass $x \in U, \epsilon > 0$ existiert mit $B_\epsilon(x) = \{y \in M \mid d^g(x, y) < \epsilon\} \subset U$. Also "jede offene Menge $U \subset M$ enthält einen metrische Ball". Angenommen dies ist nicht der Fall, so existiert ein $x \in U$ und eine Folge $y_n \notin U$ mit $d^g(x, y_n) = \frac{1}{n}$. Nach Definition der Riemanschen Distanz existiert also eine Kurve $\gamma_n : I \rightarrow M$ mit $\gamma(a) = x$ und $\gamma(b) = y_n$, für die gilt $L(\gamma) < \frac{1}{n}$. Dies ist ein Widerspruch, da im ersten Teil gezeigt wurde, dass $L(\gamma) \geq c > 0$ für alle Kurven von $x \in U$ nach $y_n \notin U$.

2.4 Erste Variation der Bogenlänge und Geodäten

Seien x, y gegeben mit $x \neq y$. So stellt sich die Frage, ob eine Kurve von x nach y existiert, die das Infimum der Länge annimmt, also ob eine Kurve mit $L(\gamma) = d^g(x, y)$ existiert. Variationsrechnung liefert notwendige Bedingung an ein solches γ .

2.4.1 Definition

Sei $\gamma : [a, b] = I \rightarrow M$ (glatte) Kurve. Die **Variation** ist die glatte Abbildung

$$F : Q := (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$$

für festes $s \in (-\epsilon, \epsilon)$ def. wir die Kurve $\gamma_s := F(s, \cdot) : I \rightarrow M$. Für $s = 0$ folgt $\gamma = \gamma_0 = F(0, \cdot)$. Eine **Vektorfeld entlang von F** ist eine Abbildung $Y : Q \rightarrow TM$ mit $Y(q) \in T_{F(q)}M$. Die Menge der Vektorfelder entlang F bezeichnen wir mit $\Gamma(F^*TM)$

2.4.2 Bemerkung

Wir können uns den Raum der glatten Kurven von x nach y $\Omega_0(x, y)$ als unendlich-dimensionale Mannigfaltigkeit vorstellen. Hierbei ist der Tangentialraum $T_\gamma \Omega_0(x, y)$ vorstellbar als Raum der Derivationen $\frac{d\gamma_s}{ds}(0, t) = \frac{dF}{ds}(0, t)$ für eine Variation F von γ . Definiere $V(s, t) := \frac{d}{ds}F(s, t) \in \Gamma(F^*TM)$. Das **Variationsvektorfeld** ist dann gegeben durch $V_\gamma(t) := V(0, t) \in \Gamma_\gamma(TM)$. Es gilt $T_\gamma \Omega_0(x, y) \simeq \Gamma_\gamma(TM)$.

2.4.3 Definition

Sei F Variation von γ , $(Y : Q \rightarrow TM) \in \Gamma(F^*TM)$ glatt mit $Y(q) \in T_{F(q)}M$. So existiert

$$\nabla^F : \Gamma(TQ) \times \Gamma(F^*TM) \rightarrow \Gamma(F^*TM), \quad \nabla^F(X, Y) = \nabla_X^F V$$

mit folgenden Eigenschaften:

- tensoriell in X
- Leibnitz-Regel in V
- $\nabla_X^F V = \nabla_X^g V$, falls $V(q) = \tilde{V}(F(q))$, $\tilde{V} \in \Gamma(TM)$

In lokaler Betrachtung ist $V = \sum V^i(q) \partial_i(F(q))$ und somit folgt

$$(\nabla_X^F V)(q) = \sum d_q V^i(X(q)) \partial(F(q)) + V^i(q) (\nabla_{X(q)} \partial_i)(F(q))$$

Ein Vektorfeld $X \in \Gamma(TQ)$ induziert ein Vektorfeld entlang F durch $\bar{X}(q) = dF_q(X(q)) \in \Gamma(F^*TM)$. (Beachte $Y \in \Gamma(F^*TM)$ ist im Allgemeinen kein Vektorfeld auf $F(Q)$)

2.4.4 Lemma

Sei F Variation von γ . Seien $X, Y \in \Gamma(TQ)$, $V, W \in \Gamma(F^*TM)$. Dann gilt

$$(i) \quad \nabla_X^F \bar{Y} - \nabla_Y^F \bar{X} = \overline{[X, Y]}$$

$$(ii) \quad X \cdot \underbrace{g(V, W)}_{C^\infty(Q)} = g(\nabla_X^F V, W) + g(V, \nabla_X^F W), \text{ wobei } g(V, W)(q) = g_{F(q)}(V(q), W(q))$$

$$(iii) \quad \nabla_{[X, Y]}^F - [\nabla_X^F, \nabla_Y^F] = R^g(\bar{X}, \bar{Y})$$

2.4.5 Satz: 1. Variation von L , glatter Fall

Sei $\gamma : I \rightarrow M$ eine glatte Kurve, nach Bogenlänge parametrisiert mit $c = |\dot{\gamma}|$. Sei $F(s, t) = \gamma_s(t)$ eine Variation von $\gamma = \gamma_0$, das heißt $F(0, t) = \gamma_0(t) = \gamma(t)$ und sei V_γ das zugehörige Variationsvektorfeld ($V_\gamma \in \Gamma_\gamma(TM)$, $V_\gamma(t) = \bar{\partial}_s(0, t)$). Dann gilt

$$\frac{d}{ds} L(\gamma_s)|_{s=0} = \frac{1}{c} \left(g(V_\gamma, \dot{\gamma})|_a^b - \int_a^b g(V_\gamma, \frac{\nabla \gamma}{dt} \dot{\gamma}) dt \right)$$

Falls F Variation mit festen Endpunkten, also $F(s, 0) = \gamma(a)$ und $F(s, 1) = \gamma(b)$ für alle s , so gilt

$$\frac{d}{ds} L(\gamma_s)|_{s=0} = -\frac{1}{c} \int_a^b g(V_\gamma, \frac{\nabla \gamma}{dt} \dot{\gamma}) dt$$

Beweis

Seien $V = \bar{\partial}_s, T = \bar{\partial}_t$. (Bemerkung: $V, T \in \Gamma(F^*TM)$, $V(0, t) = \gamma(t)$, $T(s, t) = d_{(s,t)} F(s, t) = \dot{\gamma}$) Mit 2.4.4 folgt, dass $\partial_s g(\dot{\gamma}_s, \dot{\gamma}_s) = 2g(\nabla_{\bar{\partial}_s}^F T, T)$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} L(\gamma_s)|_{s=0} &= \int_a^b \partial_s \sqrt{g(\dot{\gamma}_s(t), \dot{\gamma}_s(t))}|_{s=0} dt \\ &= \int_a^b \frac{1}{|\dot{\gamma}|} g(\nabla_{\bar{\partial}_s}^F T, T)|_{s=0} dt \\ &= \frac{1}{c} \int_a^b g(\nabla_{\bar{\partial}_t}^F + \overline{[\partial_s, \partial_t]}, T)|_{s=0} dt \\ &= \frac{1}{c} \int_a^b g(\nabla_{\bar{\partial}_t}^F, T)|_{s=0} dt \\ &= \frac{1}{c} \int_a^b \partial_t g(V, T) - g(V, \nabla_{\bar{\partial}_t}^F T)|_{s=0} dt \\ &= \frac{1}{c} \underbrace{g(V, T)|_{s=0}}_{g(V_\gamma, \dot{\gamma}_0)} \Big|_a^b - \int_a^b g(V, \underbrace{\nabla_{\bar{\partial}_t}^F T(0, t)}_{\frac{\nabla \gamma}{dt} \dot{\gamma}(t)}) dt \end{aligned}$$

□

Letzten Endes wollen wir $\gamma \in \Omega(x, y)$ betrachten, das heißt stückweise stetige Kurven γ . So müssen wir auch stückweise glatte Variation betrachten, das heißt es existiert $a = t_0 < \dots < t_n = b$, $F|_{(-\epsilon, \epsilon) \times [t_i, t_{i+1}]}$ glatt und $F : Q \rightarrow M$ stetig. (O.B.d.A) haben F und γ die gleichen Bruchpunkte t_i

2.4.6 Theorem: 1. Variationsformel für L

Sei γ stückweise glatt, nach Bogenlänge parametrisiert, F stückweise glatte Variation von γ mit fixierten Endpunkten und $\Delta\dot{\gamma}(t_i) = \dot{\gamma}|_{[t_i, t_{i+1}]}(t_i) - \dot{\gamma}|_{[t_{i-1}, t_i]}(t_i)$. Dann gilt

$$\frac{d}{ds}L(\gamma_s)|_{s=0} = \frac{1}{c} \left(\sum_{i=1}^{N-1} g(V_\gamma, \Delta\dot{\gamma}(t_i)) - \int_a^b g\left(V_\gamma, \frac{\nabla^\gamma}{dt}\dot{\gamma}\right) dt \right)$$

Beweis

Folgt direkt aus 2.4.5.

2.4.7 Definition

Eine glatte, nach Bogenlänge parametrisierte Kurve $\gamma : I \rightarrow M$ heißt Geodäte, falls

$$\frac{\nabla^\gamma}{dt}\dot{\gamma} = 0$$

In lokalen Koordinaten x^1, \dots, x^n (vgl. 2.1.2) lautet die Bedingung

$$\frac{d^2}{dt^2}x^k \circ \gamma + \sum \Gamma_{ij}^k(\gamma) \frac{d}{dt}(x^i \circ \gamma) \frac{d}{dt}(x^j \circ \gamma) = 0 \quad \text{für } k = 1, \dots, n$$

2.4.8 Korollar

Für alle $x \in M, v \in T_x M$ existiert eine eindeutig bestimmte Geodäte $\gamma_v : (-\delta, \delta) \rightarrow M$ mit $\gamma_v(0) = x, \dot{\gamma}_v(0) = v$

2.4.9 Beispiele

- (i) Sei $(\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}})$ gegeben. Da \mathbb{R}^n mit der euklidischen Metrik versehen gilt $\Gamma_{ij}^k = 0$ und somit reduziert sich die Bedingung, damit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Geodäte ist, auf $\ddot{\gamma} = 0$. Also sind Geodäten Geraden auf $(\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}})$.
- (ii) Sei $M^n \subset \mathbb{R}^{n+k}$ eine n -dimensionale Riemannsche Untermannigfaltigkeit mit der Metrik $h = g_{\text{eukl}}|_M$. Es gilt

$$\left(\frac{\nabla^{h,\gamma}}{dt}\dot{\gamma} \right) = \left(\frac{\nabla^\gamma}{dt}\dot{\gamma} \right)^T = (\ddot{\gamma})^T$$

$(M^n \subset \mathbb{R}^{n+k} \Rightarrow T\mathbb{R}^{n+k}|_{M^n} = TM^n \oplus \underbrace{NM^n}_{\text{Normalenbündel}})$ Also heißt dies, dass γ Geodäte genau dann,

wenn die Beschleunigung $\ddot{\gamma}$ normal zu M ist.

- (iii) Zum Beispiel sind die Geodäten von $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $h = g_{\text{rou}} = g_{\text{eukl}}|_{S^n}$ Großkreise (nach Bogenlänge parametrisiert)
- (iv) Sei $H^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Veranschaulichung der Geodäten auf $H^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$
- (v) Sei $f : (M, g) \rightarrow (N, h)$ Isometrie, so gilt $f \circ \gamma$ Geodäte genau dann, wenn γ Geodäte. So ist zum Beispiel bei Riemannschen Überlagerungen, wie $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n = T^n$ Torus mit flacher Metrik die Geodäten nur Projektion der Geraden in \mathbb{R}^n .

2.4.10 Bemerkung

L ist invariant unter Reparametrisierung, aber nicht Geodäten. (nehme s mit $(\gamma \circ s) \neq \text{const.} \Rightarrow \frac{\nabla \gamma \circ s}{dt} \gamma \circ s \neq 0$ (nur für $s = \alpha t + \beta$ ist dies erfüllt))

2.4.11 Satz

Sei γ stückweise glatte nach Bogenlänge parametrisierte (insb. $|\dot{\gamma}| = \text{const.}$) Kurve. So ist γ ein kritischer Punkt von L genau dann, wenn γ Geodäte (insb. glatt)

Beweis

- " \Leftarrow ": klar
- " \Rightarrow ": Wir wollen primär die Glattheit von γ zeigen. Sei $\frac{d}{ds} L(\gamma_s)|_{s=0} = 0$ für alle Variationen von γ gegeben. Es ist zu zeigen, dass $\Delta \dot{\gamma}(t_i) = \dot{\gamma}(t_i+0) - \dot{\gamma}(t_i-0) = 0$. Da γ stückweise glatt ist $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$ glatt. Sei $v \in T_{\gamma(t)} M$ für $t \in (t_i, t_{i+1})$, wir erweitern dies zu einem Vektorfeld $V_\gamma \in \Gamma_\gamma(TM)$ mit Träger $\text{supp } V_\gamma \subset (t - \delta, t + \delta) \subset [t_i, t_{i+1}]$, wobei wir $\delta > 0$ so klein wählen, so dass $g(V_\gamma, \frac{\nabla \gamma}{dt} \dot{\gamma})$ nicht das Vorzeichen wechselt. Somit folgt mit der Annahme

$$0 = \frac{d}{ds} L(\gamma_s)|_{s=0} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} g(V_\gamma, \frac{\nabla \gamma}{dt} \dot{\gamma}) dt = \int_a^b g(V_\gamma, \frac{\nabla \gamma}{dt} \dot{\gamma}) dt$$

dass $\frac{\nabla \gamma}{dt} = 0$, also fehlt nur noch zu zeigen, dass γ glatt ist. Es folgt aus 2.4.6

$$0 = \frac{d}{ds} L(\gamma_s)|_{s=0} = \sum_{i=1}^{N-1} g(\Delta \dot{\gamma}(t_i), V_\gamma)$$

Daraus können wir folgern, dass $\Delta \dot{\gamma}(t_i) = 0$ für alle Bruchpunkte t_i . Somit ist $\gamma \in C^1$. Aus $\frac{d^2}{dt^2} \gamma^k + \sum \Gamma_{ij}^k(\gamma) \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j = 0$ folgt $\gamma \in C^2$ usw.

2.5 Die Exponentialabbildung

Im folgenden Teil stellen wir uns die Frage, wann Geodäten längenminimierend sind. Wir haben beobachtet, sei $v \in T_x M$ und γ_v eindeutig bestimmte Geodäte mit $\gamma_v(0) = x$ und $\dot{\gamma}_v(0) = v$. Seien $s \in \mathbb{R}$ und $\tilde{\gamma}(t) = \gamma_v(st)$ mit $\dot{\tilde{\gamma}} = sv$, so folgt aus der Eindeutigkeit $\gamma_v(st) = \tilde{\gamma}(t) = \gamma_{sv}(t)$. Insbesondere für $t = 1$: $\gamma_v(s) = \gamma_{sv}(1)$.

(Denn $\tilde{\gamma}(0) = \gamma_v(0) = x$ und $\dot{\tilde{\gamma}} = \frac{d}{dt} \gamma_v(st)|_{t=0} = s \frac{d}{dt} \gamma_v(t)|_{t=0} = sv \in T_x M$, also $\tilde{\gamma} = \gamma_{sv}$)

2.5.1 Definition

Für $x \in M$ setze $\mathcal{V}_x := \{v \in T_x M \mid \gamma_v(1) \text{ ist definiert}\}$

(i) **Exponentialabbildung in x**

$$\exp_x : \mathcal{V}_x \subset T_x M \rightarrow M, \quad v \mapsto \exp_x(v) := \gamma_v(1)$$

(ii) **Exponentialabbildung**

$$\exp : \mathcal{V} := \bigcup_{x \in M} \mathcal{V}_x \rightarrow M, \quad \exp(v) = \exp_{\pi(v)}(v)$$

(iii) **erweiterte Exponentialabbildung**

$$\widetilde{\exp} : \mathcal{V} \rightarrow M \times M, \quad \widetilde{\exp} = (\pi(v), \exp(v))$$

2.5.2 Beispiele

Die Exponentialabbildung am Nordpol des $S^2 \subset \mathbb{R}^3$

2.5.3 Satz

- (i) $\mathcal{V}_x \subset T_x M$ offen, enthält 0_x (Ursprung von $T_x M$) und \exp_x ist glatt. Außerdem $d_{0_x} \exp_x : T_{0_x} T_x M \simeq T_x M \rightarrow T_{\exp_x(0_x)} M$
- (ii) $\mathcal{V} \subset TM$ offen, enthält Nullschnitt $\{0_x \in T_x M \mid x \in M\}$ und $\exp : \mathcal{V} \rightarrow M$ glatt
- (iii) $\widetilde{\exp} \rightarrow M \times M$ ist glatt und für alle $x \in M$ ein lokaler Diffeomorphismus um 0_x .

2.5.4 Korollar

Sei $x \in M$. Dann existiert $\epsilon > 0$ und eine Umgebung U von x mit: Je zwei Punkte in U können durch eine Geodäte der Länge kleiner ϵ verbunden werden. Außerdem ist die Einschränkung von \exp_y auf $B_\epsilon(0_y)$ ein Diffeomorphismus auf das Bild.

Beweis

Nach 2.5.2 existiert eine Umgebung \mathcal{W} von 0_y in $T_x M$ mit $\widetilde{\exp}|_{\mathcal{W}}$ Diffeomorphismus auf das Bild. Außerdem existiert eine Umgebung W um x in M und $\epsilon > 0$, sodass $\mathcal{W}_\epsilon := \bigcup_{y \in W} B_\epsilon(0_y) \subset \mathcal{W}$. Da $(x, x) = \exp(0_x)$ gilt $(x, x) \in \widetilde{\exp}(\mathcal{W}_\epsilon)$ und somit existiert eine offene Menge $U \subset M$ um x , sodass $U \times U \subset \widetilde{\exp}(\mathcal{W}_\epsilon)$. Sind also $p, q \in U$, dann existiert ein (eindeutiges) $v \in \mathcal{W}_\epsilon$, sodass $(p, q) = (\pi(v), \exp_{\pi(v)} v)$. Schließlich folgt

$$L(\gamma_v|_{[0,1]}) = \int_0^1 |\dot{\gamma}_v| dt = |v| < \epsilon, \quad \text{da } v \in B_\epsilon(0_p)$$

Hier fehlt vllt. noch ein
kleiner Kommentar

2.5.5 Bemerkung

Seien x^1, \dots, x^n Normalkoordinaten um x . Dann

- (a) $g_{ij}(x) = \delta_{ij}$
- (b) $\Gamma_{ij}^k(x) = 0$ ($\nabla_{\partial_i}^g \partial_j(y) = \sum_k \Gamma_{ij}^k(y) \partial_k(y)$)

Beweis

- (a) Klar, da $g|_U = \sum_{ij} g_{ij} dx^i \otimes dx^j \Rightarrow g_{ij} := g(\partial_i, \partial_j)$, in $x : \partial_i(x) = e_i, (e_i)$ orthonormal
- (b) Falls x^1, \dots, x^n normale Koordinaten, für $v = \sum a^i e_i$ gilt $x^i(\exp_x(v)) = (\exp_x^{-1}(\gamma_v(1)))^i = a^i$. Da γ_v Geodäte erfüllt dies

$$\frac{d^2}{dt^2}(x^k \circ \gamma_v) + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(\gamma_v) \frac{d}{dt}(x^i \circ \gamma_v) \frac{d}{dt}(x^j \circ \gamma_v) = 0 \quad \text{für alle } k$$

Aus der Homogenität von der Geodäte γ_v folgt:

$$x^k(\gamma_v(t)) = x^k(\gamma_{tv}(1)) = ta^k$$

somit verschwindet der Term der zweiten Ableitung und es bleibt übrig:

$$\sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(\gamma_v(t)) \frac{d}{dt}(x^i \circ \gamma_v(t)) \frac{d}{dt}(x^j \circ \gamma_v(t)) = \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(\gamma_v(t)) a^i a^j = 0$$

Für $t = 0$ ist $\gamma_v(t) = x$ und somit unabhängig von der Wahl von v , also gilt

$$\sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(\gamma_v(t)) a^i a^j = 0 \quad \forall a^i \in \mathbb{R}$$

Damit folgt Γ_{ij}^k .

Aufgrund von Beispiel 2.5.2 können wir nicht annehmen, dass \exp_x eine Isometrie ist. Jedoch gilt für $d_v \exp_x : T_v T_x M \rightarrow T_{\exp_x(v)} M$

$$d_v \exp_x(v) = \frac{d}{dt} \exp_x((1+t)v)|_{t=0} = \frac{d}{dt} \gamma_{(1+t)v}(1)|_{t=0} = \frac{d}{dt} \gamma_v(1+t)|_{t=0} = \dot{\gamma}_v(1)$$

Somit folgt:

$$|d_v \exp_x(v)| = |\dot{\gamma}_v(1)| = |\dot{\gamma}_v(0)| = |v|$$

Also ist $d_v \exp_x$ Isometrie in radialer Richtung

2.5.6 Gauß-Lemma

Ist $w \in T_v T_x M$ orthogonal zu $v \in T_v T_x M$, so ist $d_v \exp_x(w)$ orthogonal zu $d_v \exp_x(v)$ in $T_{\gamma_v(1)} M$ (Orthogonalität zu radialen Richtungen bleibt erhalten)

Beweis

Es ist schwer $d_v \exp_x(w)$ auszurechnen, aber wir sind nur an $g(d_v \exp_x(v), d_v \exp_x(w))$ interessiert. Angenommen, wir hätten eine glatte Variation $\gamma_s(t)$ von $\gamma_0 = \gamma_v$ definiert auf $t \in [0, 1]$. Dann

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} L(\gamma_s)|_{s=0} &= \frac{1}{|v|} \left(g \left(\frac{d}{ds} \gamma_s(1)|_{s=0}, \dot{\gamma}_v(1) \right) - g \left(\frac{d}{ds} \gamma_s(0)|_{s=0}, \dot{\gamma}_v(0) \right) \right) \\ &= \frac{1}{|v|} \left(g \left(\frac{d}{ds} \gamma_s(1)|_{s=0}, d_v \exp(v) \right) - g \left(\frac{d}{ds} \gamma_s(0)|_{s=0}, v \right) \right) \end{aligned}$$

Somit folgt

$$g \left(\frac{d}{ds} \gamma_s(1)|_{s=0}, d_v \exp(v) \right) = g \left(\frac{d}{ds} \gamma_s(0)|_{s=0}, v \right)$$

Nun konstruieren wir eine Variation, sodass $\frac{d}{ds} \gamma_s(1)|_{s=0} = d_v \exp_x(w)$. Definiere die Kurve $\alpha : (-\delta, \delta) \rightarrow T_x M$ Kurve mit $\alpha(0) = v$ und $\dot{\alpha}(0) = w$, $\alpha \subset S_{|v|}^{n-1}$. Für $s \in (-\delta, \delta)$ sei $\rho_s(t)$ der Strahl von 0_x nach $\alpha(s)$, also $\rho_0(t) = tv$, $\rho_s(0) = 0_x$ und $\rho_s(1) = \alpha(s)$. Dann ist $\gamma_s(t) = \exp(\rho_s(t))$ die benötigte Variation. (Da $\gamma_0(t) = \exp(\rho_0(t)) = \exp(tv) = \gamma_t v(1) = \gamma_v(t)$) Es gilt

$$\frac{d}{ds} \gamma_s(1)|_{s=0} = \frac{d}{ds} \exp_x(\alpha(s))|_{s=0} = d_{\alpha(0)} \exp_x(\dot{\alpha}(0)) = d_v \exp_x(w)$$

Zusammen mit $\frac{d}{ds} \gamma_s(0)|_{s=0} = \frac{d}{ds} \exp_x(0_x)|_{s=0} = 0_x$ folgt dann, dass $d_v \exp_x(w)$ orthogonally zu $d_v \exp_x(v)$

2.5.7 Bemerkung

Äquivalent, gibt uns die Parametrisierung

$$(0, \epsilon) \times S^{n-1} \rightarrow \exp_x(B_\epsilon(0_x)) \setminus \{x\}, \quad (r, v) \mapsto \exp_x(rv)$$

gibt uns Polarkoordinaten auf $U \setminus \{x\}$ in diesen Koordinaten gilt

$$g_{(r,v)} = dr^2 + h_{(r,v)}$$

wobei $h_{(r,v)}$ die Metrik induziert auf $\exp_x(\{r\} \times S^{n-1})$

2.5.8 Korollar

Sei $\tilde{B} := B_r(0_x) \subset T_x M$ ein **normaler Koordinatenball**, das heißt $\exp_x|_{\tilde{B}}$ ist Diffeomorphismus auf sein Bild $B := \exp_x(\tilde{B})$. Dann: Sei $v \in \tilde{B}$, so ist die **Radialgeodäte** $\gamma_v : [0, 1] \rightarrow M$ die (bis auf Reparametrisierung) eindeutig bestimmte Kurve mit

$$d^g(x, \exp_x(v)) = L(\gamma_v) = \int_0^1 |\dot{\gamma}| dt = |v|$$

\tilde{B} und B nennen wir **Normalkoordinatenbälle mit Radius** $r > 0$. Insbesondere gilt $B = B_r(x) = \{y \in M \mid d^g(x, y) < r\}$

Beweis

- (a) Sei $c : [0, 1] \rightarrow M$ stückweise glatte Kurve mit $c(0) = x, c(1) = y$. Der Schlüssel zu zeigen ist die Existenz eines $t_1 \in [0, 1]$ mit

$$L(c) \geq |v| + \int_{t_1}^1 |\dot{c}| dt$$

Wähle Polarkoordinaten auf B , $c = (r(c), \theta^1(c), \dots, \theta^{n-1}(c))^t$, dann $\dot{c} = dr(\dot{c})\partial_r + \sum_i d\theta^i(\dot{c})\partial_{\theta^i}$. Mit dem Gauß Lemma folgt, dass $g(\dot{c}, \partial_r) \leq |\dot{c}|$, womit

$$L(c) \geq \int_0^{t_0} \frac{d}{dt} r(c)|_t dt + \int_{t_0}^1 |\dot{c}| dt = r(c(t_0)) + \int_{t_0}^1 |\dot{c}| dt$$

Aus der Definition von t_0 erhalten wir $r(c(t)) \geq |v|$. Mit dem Mittelwertsatz folgt die Existenz ein t_1 , sodass $r(c(t_1)) = |v|$. Somit ist $L(c) \geq |v| + \int_{t_1}^1 |\dot{c}| dt$ erfüllt. Im Besonderen $L(\gamma_v)$ erreicht das Minimum und ist dadurch gleich zur Distanz. Um Gleichheit zu erreichen, müssen wir zunächst $|\dot{c}(t)| = 0$ für $t \geq t_1$ und c an dieser Stelle glatt, also können wir annehmen, dass $t_1 = 1$, falls $L(c) = L(\gamma)$. Außerdem brauchen wir Gleichheit in $g_{c(t)}(\dot{c}(t), \partial_r) \leq |\dot{c}(t)|$, was genau dann gilt, wenn \dot{c} ist radial, das heißt $\dot{c} = dr(\dot{c})\partial_r$ immer wenn c glatt und $dr(\dot{c}) \geq 0$. Da c stetig, können keine nicht-trivialen Bruchpunkte existieren und somit ist c glatt und $c(t) = \gamma_v(r(c(t)))$, so dass c eine Reparametrisierung von γ_v ist.

- (b) Es ist klar, dass wir jeden Punkt $y \in B \subset B_r(0)$ mit x durch eine Geodäte mit Länge kleiner r verbinden kann. $B_r(0) \subset B$ zeigen wir, indem wir annehmen $y \notin B$ und dann zeigen wollen, dass $d^g(x, y) > r$. Dafür müssen wir zeigen: Falls c eine Kurve zwischen x und y , dann $L(c) > r$. Tatsächlich, da αB verlässt, schneidet es jede Sphäre $\exp_x(S_\epsilon)$, $\epsilon < r$. Da die kürzeste Verbindung c_ϵ von x zum Schnittpunkt von $\exp_x(S_\epsilon)$, gilt $L(c) \geq L(c_\epsilon) \geq \epsilon$. Also $L(c) \geq r$.

2.6 Theorem von Hopf-Rinow

2.6.1 Definition

(M, g) heißt **geodätisch vollständig**, falls jede Geodäte auf ganz \mathbb{R} definiert ist. Äquivalent $\exp : TM \rightarrow M$ auf ganz TM definiert.

2.6.2 Beispiele

- (i) $(\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}}), (S^n, g_{\text{rou}}), (H^n, g_{\text{hyp}})$ alle vollständig
- (ii) $(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, g_{\text{eukl}}|_{(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})})$ nicht vollständig, zum Beispiel $\gamma : (-\infty, -\epsilon] \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \gamma(t) = (t, 0)$.
- (iii) $(g_p)_x(v, v) = 4 \sum_i \frac{v_i^2}{(1-|x|^2)^2}$ definiert **Poincaré-Metrik** auf $B_1(0)$, $v = \sum v^i \partial_i$. $(B_1(0), g_p)$ vollständig.

2.6.3 Theorem: Hopf-Rinow

Sei $\exp_x : T_x M \rightarrow M$ auf ganz $T_x M$ definiert. Dann gilt: Für alle $y \in M$ existiert Geodäte γ , die x mit y verbindet und längenminimierend ist mit $L(\gamma) = d^g(x, y)$.
Insbesondere: Ist (M, g) geodätisch vollständig \Rightarrow Je zwei Punkte können durch eine minimierende Geodäte verbunden werden.

Beweis

Sei $B = B_r(x)$ normaler Koordinatenball.

- (a) Lemma: Falls $y \notin B$, dann existiert ein $z \in \partial B$ mit $d^g(x, y) = r + d^g(z, y)$. Veranschaulichung des Lemmas
- (b) Sei $y \in M$.
1. Schritt: Wähle $z \in \partial B$ mit $d := d^g(x, y) = d^g(x, z) + d^g(z, y)$. Sei γ die radiale Geodäte von x nach z , das heißt $|\dot{\gamma}| \equiv 1$, so gilt $d^g(x, z) = L(\gamma) = \int_0^r |\dot{\gamma}| dt = r$. Damit folgt $d = r + d^g(\gamma(t), y)$. Definiere $J = \{t \in \mathbb{R} \mid d = t + d^g(\gamma(t), y)\}$. Dies ist eine sinnvolle Definition, da γ auf ganz \mathbb{R} definiert ist. Außerdem ist J nach Definition abgeschlossen. Da $r \in J$ ist J nichtleer. Sei $y \notin B$, so folgt $r < d$ und somit $J \cap [0, d] \neq \emptyset$. $T = \sup(J \cap [0, d]) \in J$, da J abgeschlossen. Es gilt $T \leq d$. Behauptung: $T = d$. Angenommen dies ist nicht der Fall, also $T < d$, so folgt $\gamma(T) \neq y$. Mit dem Lemma aus (a) existiert $\tilde{r} > 0$ und $\tilde{z} \in M$, sodass $d^g(\gamma(T), \tilde{z}) = \tilde{r}$ und $d^g(\gamma(T), \tilde{z}) + d^g(\tilde{z}, y) = d^g(\gamma(T), y)$. Folglich ist $d^g(\tilde{z}, y) = d - T - \tilde{r}$, so dass

$$d > T + \tilde{r} = d^g(x, \gamma(T)) + d^g(\gamma(T), \tilde{z}) \geq d^g(x, \tilde{z}) \geq d - d^g(\tilde{z}, y) = T + \tilde{r}$$

Man sieht direkt, dass im oberen Ausdruck Gleichheit herrscht. Sei $\tilde{\gamma}$ normale radiale Geodäte von $\gamma(T)$ nach \tilde{z} , definiere

$$\sigma(t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{für } t \in [0, T] \\ \tilde{\gamma}(t - T) & \text{für } t \in [T, T + \tilde{r}] \end{cases}$$

so folgt $L(\sigma) = T + \tilde{r} = d(x, \tilde{z})$, also ist σ längenminimierend, somit σ Geodäte insbesondere glatt. Also ist σ glatte Fortsetzung von $\gamma|_{[0, T]}$ und damit $\sigma = \gamma|_{[0, T + \tilde{r}]}$, da γ auf \mathbb{R} definiert. Daraus folgt mit der oberen Gleichung, dass $d = T + \tilde{r} + d^g(\tilde{z}, y) = T + \tilde{r} + d^g(\gamma(T + \tilde{r}), y)$. Also ist $T + \tilde{r} \in J$ und es gilt $d > T + \tilde{r} > T$. Dies ist ein Widerspruch zu $T = \sup(J \cap [0, d])$. Also gilt $T \geq d$. ($T = d \Rightarrow d = d^g(x, y) = T + d^g(\gamma(T), y) \Rightarrow d^g(\gamma(d), y) = 0 \Rightarrow \gamma(d) = y$)

2.6.4 Korollar

Für eine riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) sind äquivalent:

- (MV) (M, d^g) ist vollständig (als metrischer Raum)
- (GV) (M, g) ist geodätisch vollständig
- (GV₁) $\exists x \in M \exp_x : T_x M \rightarrow M$ ist auf $T_x M$ definiert

(HB) Jede abgeschlossene, d^g -beschränkte Menge K ist kompakt

Beweis

- "(MV) \Rightarrow (GV)": Sei $\gamma : I \rightarrow M$ Geodäte (oBdA γ normal). Sei $t_n \in [0, b)$ eine Folge, die gegen b konvergiert. Es gilt $d^g(\gamma(t_n), \gamma(t_m)) \leq |t_n - t_m|$, also ist $\gamma(t_n)$ Cauchy-Folge. Da (M, d^g) vollständig, konvergiert $\gamma(t_n) \rightarrow y \in M$ (y unabhängig von $\gamma(t_n)$). Also lässt sich γ stetig auf $[0, b]$ fortsetzen. Also ist I abgeschlossen. Außerdem existiert ein $\epsilon > 0$, sodass jede normale Geodäte die in y startet auf $(-\epsilon, \epsilon)$ definiert ist. Damit ist I offen und somit, da \mathbb{R} zusammenhängend folgt, dass $I = \mathbb{R}$.

- "(GV) \Rightarrow (GV₁)": Klar

- "(GV₁) \Rightarrow (HB)": Sei $K \subset M$ abgeschlossen und beschränkt, so folgt aus Theorem ??, dass ein R existiert mit $K \subset B_R(x) := \exp_x(B_R(0_x))$. Sei nun $\tilde{K} := \exp^{-1}(\underbrace{K}_{\text{abg.}}) \subset B_R(0_x) \subset$

$T_x M$ abgeschlossen und beschränkt. Mit Heine-Borel folgt nun, dass \tilde{K} kompakt ist. ($T_x M$ ist ein endlich dimensionaler \mathbb{R} -VR). Da \exp_x stetig ist folgt somit, dass $\exp_x(\tilde{K}) = K$ kompakt ist.

- "(HB) \Rightarrow (MV)": Jede Cauchy-Folge ist beschränkt, also in K kompakt enthalten, also konvergent.

Insbesondere ist jede kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) (geod.) vollständig.


2.6.5 Satz

Sei $p : (M, g) \rightarrow (N, h)$ lokale Isometrie. (M, g) ist geodätisch vollständig genau dann, wenn p ist Riemannsche Überlagerung und (N, h) geodätisch vollständig.

2.6.6 Beispiele

- (i) $(\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}}) \rightarrow (T^n, g_{\text{eukl}})$ (Riemannsche Überlagerung) lok. Isometrie reicht, so ist (T^n, g_{eukl}) .
- (ii)
 - $S^n \rightarrow S^n / \mathbb{Z}_2 = \mathbb{R}P^n$ Riemannsche Überlagerung
 - $S^n \setminus \{N\} \xrightarrow{p} \mathbb{R}P^n$ lokale Isometrie, aber keine Riemannsche Überlagerung, denn $p^{-1}(p(S)) = \{S\}$, aber für alle anderen Punkte $y \in \mathbb{R}P^n$ hat $p^{-1}(y)$ zwei Elemente.

Index

Die **Seitenzahlen** sind mit **Hyperlinks** zu den entsprechenden Seiten versehen, also anklickbar 

(abstrakte) differenzierbare Mannigfaltigkeit, 6

Antisymmetrisierungsoperator, 34
Atlas, 6

Derivation, 20, 22
Differenzierbare Struktur, 6
Differential, 17, 18
diskontinuierlich, 41
Durchmesser von (M, g) , 48

eigentlich, 40
erweiterte Exponentialabbildung, 53
Exponentialabbildung, 53
Exponentialabbildung in x , 53

flach, 46

geodätisch vollständig, 56
glatt, 47
globaler Fluss, 24

Immersion, 1
induzierte Metrik, 40
innere Produkt, 30
Integralkurve, 23
Isometrie, 39

Karte, 6
Kartenwechsel, 6
Keim, 19
Kommutator, 23
Kontraktion, 30
Kotangentbündel, 29
kovariante Abbildung, 43
kovariante Ableitung entlang γ , 45
Krümmung von ∇ , 46

Levi-Civita kovariante Ableitung, 47
Lie-Klammer, 23
lokale Parametrisierung, 4
lokaler Fluß, 24
Länge, 48

normal, 48
normaler Koordinatenball, 56

Normalkoordinatenbälle mit Radius $r > 0$, 56

orientierbar, 38
Orientierungsatlas, 38

parallelisierbar, 19
Poincaré-Metrik, 56
projektive Raum, 8
Pullback, 26, 32, 33
Push-Forward, 25, 33

Radialgeodäte, 56
Riemannsche Distanzfunktion, 48
Riemannsche Metrik, 39

Sphäre, 2
stückweise glatt, 47
Submersion, 1

Tangentbündel, 15
Tangentvektor, 14
tensoriell, 44
Tensorprodukt, 30
Tensorverjüngung, 30
Torsion, 46
torsionsfrei, 46

Untermannigfaltigkeit, 2

Variation, 49
Variationsvektorfeld, 49
Vektorbündel, 16
Vektorfeld, 18
Vektorfeld entlang von F , 49
Volumenform, 37

Zerlegung der Eins, 11

Étale, 1
äußere (Wedge-, Dach-, Keil-,)Produkt, 34

Abbildungsverzeichnis

1	hyperbolischer Raum für $c > 0$, $c < 0$, $c = 0$	2
2	Beweis von 1.1.9	4
3	Diagramm zum lok. Homöomorphismus von g	4
4	Veranschaulichung des Wechsel lok. Parametrisierung	5
5	Stereografische Projektion	7
6	Veranschaulichung der Wahl der Karten	7
7	Der Würfel Q ist keine Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n !	8
8	Der 2-dimensionale projektive Raum $\mathbb{R}P^2$ (projektive Ebene)	9
9	Der eindimensionale projektive Raum $\mathbb{R}P^1$	9
10	Beispiel einer Nichthausdorffmenge	9
11	Integralkurve in einem Vektorfeld des \mathbb{R}^2	21
12	lokaler Fluß eines Vektorfeldes	22
13	Vektorfeld auf \mathbb{R}^2	22
14	”universelle Eigenschaft” von \otimes	25