



WESTFÄLISCHE  
WILHELMS-UNIVERSITÄT  
MÜNSTER



FACHBEREICH 10  
MATHEMATIK UND  
INFORMATIK

# Finanzmathematik

Tobias Wedemeier

11. November 2014

gelesen von

PD Dr. Paulsen

Hierbei handelt es sich um eine Mitschrift der Vorlesung von **PD Dr. Paulsen**, WWU Münster, aus der Vorlesung **Finanzmathematik** im Wintersemester 2014/15. Dies ist kein Skript der Vorlesung und keine eigene Arbeit des Autors.

Für Fehler in der Mitschrift wird keine Haftung übernommen. Hinweise auf Fehler sind gerne gesehen, hierfür kann man mich in der Uni ansprechen oder alternativ eine e-Mail an: [tobias.wedemeier@gmx.de](mailto:tobias.wedemeier@gmx.de)  
Auch ist eine Mitarbeit über Github möglich.

Wenn Teile aus der Vorlesung selber fehlen, können diese gerne an meine e-Mail versandt werden. Ich werde diese dann einarbeiten.

Zum Anhang: Aussagen aus den Übungen. Die Beweise stammen vom Autor und sind teilweise verkürzt oder vereinfacht und nur zum Verständnis gedacht. Für die Korrektheit wird keine Haftung übernommen.

# Inhaltsverzeichnis

<b>Prolog</b>	<b>1</b>
Ziel . . . . .	1
Schlagwörter . . . . .	1
Hilfsmittel . . . . .	1
Themen . . . . .	1
<b>1 Informelle Einführung</b>	<b>2</b>
1.1 Option . . . . .	2
1.2 long, short . . . . .	2
1.3 Payoff und Profit Diagramme . . . . .	3
1.4 Strategien . . . . .	5
1.5 Arbitrage . . . . .	7
1.6 Replikationsprinzip . . . . .	7
1.7 Nullkuponanleihe . . . . .	8
1.8 Put-Call Parität . . . . .	8
1.9 forward . . . . .	9
1.10 Digitale Position . . . . .	9
1.11 Eigenschaften des Call-Preises . . . . .	9
1.12 Zinsmethoden . . . . .	10
1.13 Festzinsanleihe . . . . .	12
1.14 Variabelverzinsliche Anleihe . . . . .	13
1.15 Swaps . . . . .	14
<b>2 Aktuarielle Bewertung von Zahlungsströmungen</b>	<b>14</b>
2.1 Zahlungsströme und deren Bewertung . . . . .	15
2.2 Personenversicherung und deren Bewertung . . . . .	15
2.3 Klassische Beispiele . . . . .	16
2.4 Deckungskapital . . . . .	19
2.5 Beispiele Deckungskapital . . . . .	20
2.6 Personengemeinschaften, verbundene Leben . . . . .	22
2.7 Konkurrierende Ausscheideursachen . . . . .	23
<b>3 Exkurs stochastische Prozesse</b>	<b>26</b>
3.1 Definitionen . . . . .	26
3.2 Das N-Perioden CRR-Modell . . . . .	26
3.3 Random-Walk . . . . .	26
3.4 Bedingter Erwartungswert . . . . .	26
3.5 Existenz & Eindeutigkeit . . . . .	27
3.6 Faktorisierter bedingter Erwartungswert . . . . .	28
3.7 Stochastischer Kern . . . . .	28
3.8 bedingte W'keit und bedingte Verteilungen . . . . .	29
3.9 Beispiel: diskrete Zufallsvariablen . . . . .	29
3.10 Lebesgue-Dichten . . . . .	30
<b>Aussagen aus den Übungen</b>	<b>A</b>
<b>Index</b>	<b>C</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>E</b>



## Prolog

### Ziel

- Bewertung von Finanzderivaten, dies entspricht der Bewertung von Finanzmarktrisiken
- aktuarielle Bewertung von Risiken, biometrische Risiken ( Rente, . . . )  $\leftrightarrow$  Personenversicherungen, sonstige Risiken ( Unfall, . . . )  $\leftrightarrow$  Schadenversicherungen

### Schlagwörter

- Black-Scholes Formel
- äquivalentes Martingalmaß
- Hedging, Replizieren durch Handel
- Arbitrage
- Äquivalenzprinzip
- Risikoausgleich im Kollektier

### Hilfsmittel

Theorie der stochastischen Prozesse

- mathem. Modellierung von zeitlich abhängigen Zufallsphänomenen
- notwendig zur Beschreibung von Finanzmärkten

### Themen

- diskrete und kontinuierliche Martingaltheorie
- diskrete und kontinuierliche Markov-Prozesse
- Wiener-Prozess, Brownsche Bewegung
- geometrische Brownsche Bewegung als Modell für Aktienkurse

# 1 Informelle Einführung

(i) Zweiteilung von Finanzgütern in:

- (1) Basisfinanzgüter
- (2) derivative Finanzgüter

(ii) zu (1) gehören:

- Aktien
- festverzinsliche Wertpapiere, Bonds
- Rohstoffe, Agrarprodukte

diese werden gehandelt auf:

- Aktienmärkte
- Rentenmärkte
- Warenmärkte

Diese werden als Kassamärkte bezeichnet.

(iii) zu (2) gehören:

- Optionen auf Aktien
- Swaps (Zinsderivate)
- futures und forwards

## 1.1 Option

Unterscheidung in Kauf- und Verkaufsoptionen

- Eine Kaufoption (**Call**) gibt das Recht ein Basisfinanzgut (**Underlying**), zu einem im Voraus bestimmten fixen Preis, dem Ausübungspreis (**strike**, Basis), während (**amerikanische Option**) oder nur am Ende der Laufzeit der Option (**europäische Option**) zu kaufen.
- Eine Verkaufsoption (**Put**) gibt das Recht ein Basisfinanzgut (Underlying), zu einem im Voraus bestimmten fixen Preis, dem Ausübungspreis (strike, Basis), während (amerikanische Option) oder nur am Ende der Laufzeit der Option (europäische Option) zu verkaufen.

Dies sind **unbestimmte Termingeschäfte**, da keinerlei Verpflichtung zum Kauf bzw. Verkauf besteht.

## 1.2 long, short

In der Regel nimmt der Käufer eines Finanzgutes eine **long-Position** ein, der Verkäufer eine **short-Position**. Der Verkäufer wird auch als writer (Zeichner) bezeichnet, da er die Option 'zeichnet'. Man kann zu jeder Zeit eine long oder short Position eingehen, insbesondere auch wenn man die Aktie gar nicht besitzt. Dies wird auch als **Leerverkauf** (short selling) bezeichnet, hierbei leiht man sich die Aktie von der Bank um sie zu verkaufen.

### 1.3 Payoff und Profit Diagramme

- Positionen in Finanzgütern bergen Chancen und Risiken.
- Payoff**: Wert der Position wird gegen den Preis des Underlyings aufgetragen
- Profit**: analog zum Payoff, unter Berücksichtigung von Kosten (Anfangswert der Position)
- Beispiele: Option mit Laufzeit  $T \in \mathbb{N}$ , Underlying mit Preis  $S_T$  in  $T$ 
  - (a) long call: strike  $K$   
Payoff:  $(S_T - K)^+$   
 $S_T \leq K$  keine Ausübung,  $S_T > K$  Ausübung der Option (Ablauf: leihe Geld, kaufe Aktie, verkaufe Aktie, zahle Geld zurück)

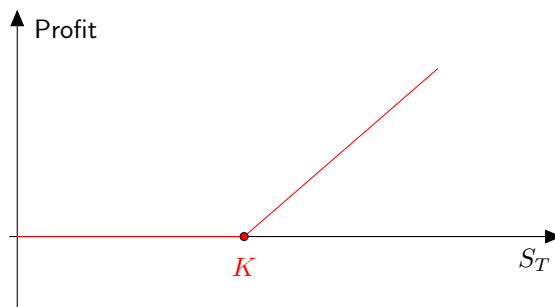


Abbildung 1: Payoff long call

Kosten: Anfangspreis des Calls  $c > 0$ . Profit:  $(S_T - K)^+ - c$

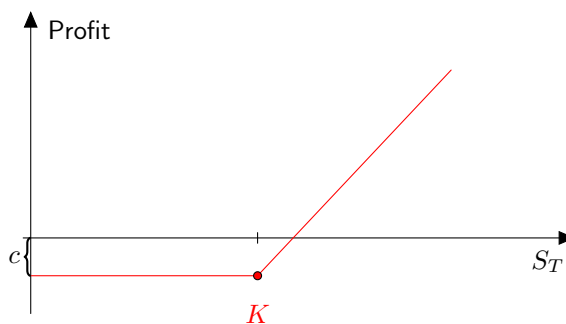


Abbildung 2: Profit long call

(b) long put: strike  $K$

Payoff:  $(K - S_T)^+$

$S_T > K$  keine Ausübung,  $S_T \leq K$  Ausübung der Option (Ablauf: leihe Aktie, verkaufe Aktie, kaufe Aktie, gebe Aktie zurück)



Abbildung 3: Payoff long put

Kosten: Anfangspreis der Option  $p > 0$ . Profit:  $(K - S_T)^+ - p$

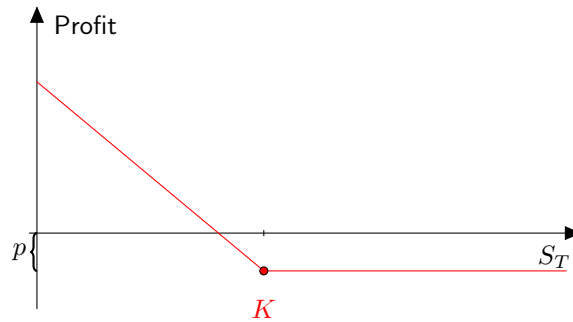


Abbildung 4: Profit long put

(c) short call:

Payoff:  $-(S_T - K)^+$ , Profit:  $c - (S_T - K)^+$

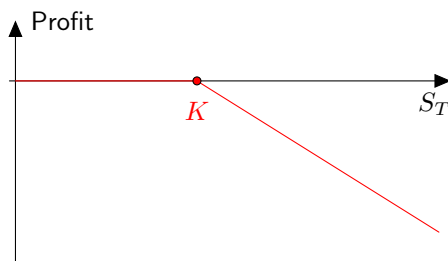


Abbildung 5: Payoff short call

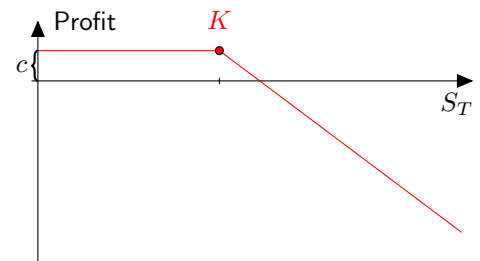


Abbildung 6: Profit short call



(d) short put:

Payoff:  $-(K - S_T)^+$ , Profit:  $p - (K - S_T)^+$

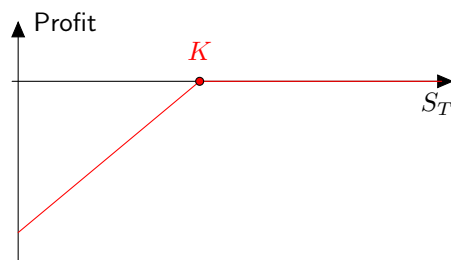


Abbildung 7: Payoff short put

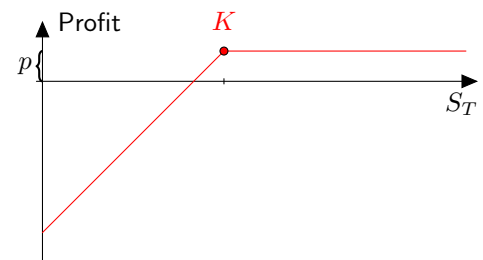


Abbildung 8: Profit short put

## 1.4 Strategien

Durch Kombination von einfachen Positionen bildet man **Strategien**.

**Bsp**

- Absicherung einer Aktie:
  - Aktie zum heutigen Kurs kaufen mit strike  $K$
  - zur Absicherung gegen Kursverlust in  $T$  wird eine Putoption zum strike  $K$  gekauft

▪ Gesamtposition:

	long Aktie	long put	Gesamt
Kosten	$K$	$p$	$K + p$
Payoff	$S_T$	$(K - S_T)^+$	$S_T + (K - S_T)^+ = \max\{K, S_T\}$

▪ Profit:

$$S_T + (K - S_T)^+ - (K + p) = (S_T - K) + (K - S_T)^+ - p = -p\mathbb{1}_{\{S_T \leq K\}} + (S_T - (K + p))\mathbb{1}_{\{S_T > K\}}$$

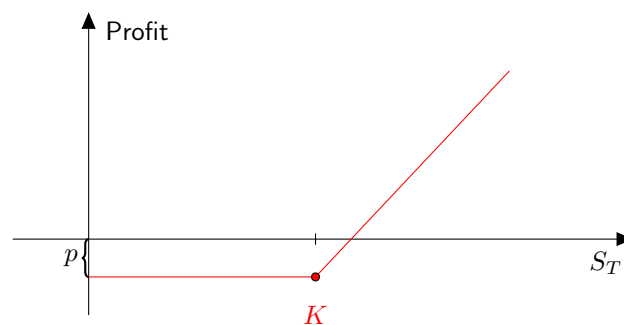


Abbildung 9: Bsp. Profit Diagramm

## long straddle

- Idee: Spekulation auf eine starke Kursänderung

	long call	long put	Gesamt
Kosten	$c$	$p$	$c + p$
Payoff	$(S_T - K)^+$	$(K - S_T)^+$	$ S_T - K $

Profit:  $|S_T - K| - (c + p)$



Abbildung 10: long straddle

## Bullish Vertical Spread

Idee: Risikoarme Spekulation auf ein Anziehen des Kurses

Je kleiner der  
strike, desto  
teurer ist der  
call.

	long call mit strike $K_1$	short call mit strike $K_2 > K_1$	Gesamt
Kosten	$c_1$	$-c_2$	$c_1 - c_2 > 0$
Payoff	$(S_T - K_1)^+$	$-(S_T - K_2)^+$	$(S_T - K_1)\mathbb{1}_{\{K_1 < S_T < K_2\}} + (K_2 - K_1)\mathbb{1}_{\{S_T > K_2\}}$

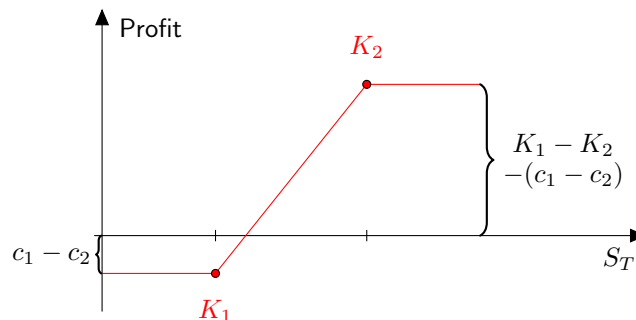


Abbildung 11: Bullish Vertical Spread

## Butterfly Spread

Idee: Risikoarme Spekulation auf eine Seitwärtsbewegung des Kurses

strike:  $K_1 < K_2 < K_3$

	long call strike $K_1$	long call strike $K_3$	$2 \times$ short call strike $K_2$	
Kosten	$c_1$	$c_3$	$-2c_2$	$c_1 + c_3 - 2c_2$
Payoff	$(S_T - K_1)\mathbb{1}_{\{K_1 < S_T < K_2\}} + (2K_2 - K_1 - S_T)\mathbb{1}_{\{K_2 < S_T < K_3\}} + 2K_2 - (K_1 + K_3)\mathbb{1}_{\{S_T > K_3\}}$			

Fall  $K_2 = \frac{1}{2}(K_1 + K_3) \Rightarrow c_1 + c_3 - 2c_2 > 0$

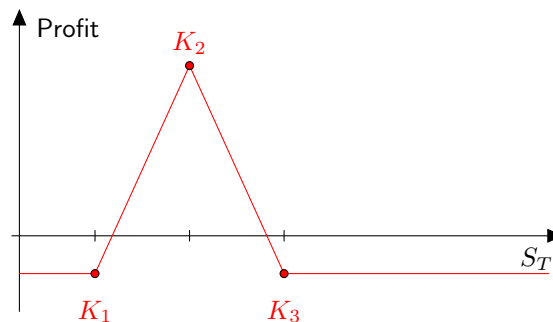


Abbildung 12: long Butterfly Spread

Für weitere Strategien klicken Sie [hier](#).

## 1.5 Arbitrage

- Ein **Arbitrage** ist eine Möglichkeit durch Handel mit Finanzgütern einen risikolosen Profit zu erzielen.

- Bsp**

	New York	Frankfurt
Aktie	130 \$	100 €
Wechselkurs	1,27 \$ $\hat{=}$ 1 €	

- Arbitragemöglichkeit:  
leihe 100 €  $\rightsquigarrow$  kaufe Aktie in Frankfurt  $\rightsquigarrow$  verkaufe Aktie in New York  
 $\rightsquigarrow$  tausche 127 \$ in 100 €  $\rightsquigarrow$  100 € zurück zahlen  $\rightsquigarrow$  risikolosen Profit von 3 \$
- Grundannahme:  
Im Handel mit Finanzgütern gibt es keine Arbitragen. Dies ist das sogenannte **No-Arbitrage Prinzip**.
- Aus dem No-Arbitrage Prinzip kann das **Replikationsprinzip** gefolgert werden.

## 1.6 Replikationsprinzip

Haben zwei verschiedene Kombinationen  $K, L$  von ausschüttungsfreien Finanzgütern zu einem zukünftigen Zeitpunkt  $T \in \mathbb{R}$  immer den gleichen Wert, so haben sie auch zum gegenwärtigen Zeitpunkt den gleichen Wert.

Die Kombination  $K$  repliziert den Payoff der Kombination  $L$ , und umgekehrt.

### Argumentation:

$K, L$  habe den Anfangswert  $V_0, W_0 \in \mathbb{R}$  und den zufälligen Wert  $V_T, W_T \in \mathbb{R}$  in  $T$ .

Es gelte:  $V_T = W_T$ :

Beh.:  $V_0 = W_0$

### A

1.Fall:  $V_0 > W_0$ .

Dann kann durch short selling von  $K$  ein Arbitrage erzielt werden:

- short selling in  $K$

- gehe long in  $L$

$\Rightarrow$  am Anfang Gewinn  $V_0 - W_0 > 0$

- handeln entsprechend  $L$  bis  $T$

in  $T$ :

- verkaufe  $L$ , erhalte  $W_T = V_T$
- kaufe  $K$  für  $V_T$  und gebe die Position  $K$  zurück

Am Ende: Glattstellen der Positionen  $W_T - V_T = 0 \nless$

2.Fall:  $W_0 > V_0$ . Analog.

□

## 1.7 Nullkuponanleihe

festverzinsliches Wertpapier:

- Fälligkeit  $T$  (Maturity)
- Zahlung von 1 Euro
- keine Kuponzahlung während der Laufzeit

$B(t, T)$  bezeichne den Preis dieser Anleihe zum Zeitpunkt  $t < T$ .  $0 < B(t, T) < 1$  ist der Regelfall.

## 1.8 Put-Call Parität

Seien  $c, p$  die Anfangspreise einer Call- bzw. Putoption mit Laufzeit  $T$  und strike  $K$ .

Sei  $S_0$  und  $S_T$  die Preise des Underlyings heute und in  $T$ .

Dann gilt:

$$S_0 + p = c + K \cdot B(0, T)$$

### Argumentation:

Betrachte folgende Kombinationen:

I: long Aktie, long put

II: long call,  $K \cdot$  long in eine Nullkuponanleihe mit Fälligkeit in  $T$

Wert zum Zeitpunkt  $T$ :

$$\text{I: } S_T + (K - S_T)^+ = \max\{S_T, K\}$$

$$\text{II: } (S_T - K)^+ + K = \max\{S_T, K\}$$

Replikationsprinzip liefert:

$$S_0 + p = c + K \cdot B(0, T)$$

□

## 1.9 forward

Ein **forward** ist ein unbedingtes Termingeschäft mit Ausübungszeitpunkt  $T$  (Maturity), für ein Underlying mit Preisen  $S_0$  heute und  $S_T$  in  $T$ . Zwei Parteien A und B mit festem Terminpreis  $F_T$  zum Vertragsabschluss. In  $T$ : A zahlt an B den Terminpreis  $F_T$ , B liefert das Underlying  
A hat die long-Position im forward, B die short-Position. Zusammenhang zwischen Termin- und Spotpreis des Underlyings.

$S_0$  - gegenwärtiger Preis, **Spotpreis**

$F_T$  - Terminpreis zum Termin  $T$

Dann gilt:

$$F_T \cdot B(0, T) = S_0$$

### Argumentation:

Betrachte folgende Kombinationen:

I: long im forward zum Zeitpunkt  $T$ ,  $F_T$  long in einer Nullkuponanleihe mit Fälligkeit  $T$

II: long im Underlying

Wert zum Zeitpunkt  $T$ : I:  $\underbrace{S_T - F_T}_{\text{forward}} + \underbrace{F_T}_{\text{Nullkuponanleihe}} = S_T$

II:  $S_T$

Replikationsprinzip liefert:

$$F_T \cdot B(0, T) = S_0$$

zum Beispiel bei  
Agrargütern

## 1.10 Digitale Position

Recht auf Auszahlung eines festen Geldbetrags (etwa 1 €) bei Eintreten eines auslösenden Ereignisses (**bedingtes Termingeschäft**).

z.B.

digitaler call    digitaler put

$$\mathbb{1}_{\{S_T \geq K\}} \quad \mathbb{1}_{\{S_T \leq K\}}$$

## 1.11 Eigenschaften des Call-Preises

Sei  $C(S_0, T, K)$  der Preis eines Calls auf ein Underlying mit Laufzeit  $T$ , strike  $K$  und Anfangspreis  $S_0$ . Dann gilt:

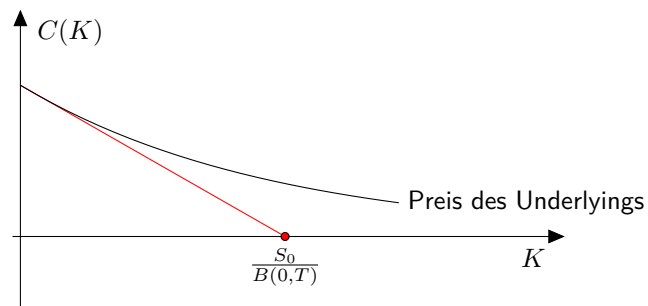
$$(i) \ C(S_0, T, K) \geq \max\{0, S_0 - K \cdot B(0, T)\} \text{ innerer Wert des Calls}$$

$$(ii) \ C(S_0, T, K) \leq S_0 \text{ obere Grenze des Calls}$$

$$(iii) \ K_1 \leq K_2 \Rightarrow C(S_0, T, K_1) \geq C(S_0, T, K_2)$$

$$(iv) \ B(0, T)(K_2 - K_1) \geq C(S_0, T, K_1) - C(S_0, T, K_2) \ \forall K_1 < K_2$$

$$(v) \ C(S_0, T, K_2) \leq \frac{K_3 - K_2}{K_3 - K_1} \cdot C(S_0, T, K_1) + \frac{K_2 - K_1}{K_3 - K_1} \cdot C(S_0, T, K_3) \ \forall K_1 < K_2 < K_3 \text{ Konvexität in } K$$



### Abbildung 13: Konvexität in K

#### Argumentation:

- (i) Falls  $C(S_0, T, K) < 0$  gehe long im Call und halte bis  $T$ . Risikolosen Gewinn von  $|C(S_0, T, K)| > 0$  am Anfang.  $\nexists$  No-Arbitrage  
Genauso sieht man ein, dass  $P(S_0; T, K) \geq 0$   
Put-Call Parität liefert:

$$\begin{aligned} C(S_0, T, K) &= S_0 + P(S_0, T, K) - K \cdot B(0, T) \\ &\geq S_0 - K \cdot B(0, T) \end{aligned}$$

- (ii) Falls  $C(S_0, T, K) > S_0$ .  
long Aktie, short im call  
am Anfang: Gewinn von  $C(S_0, T, K) - S_0 > 0$ , benutze die Aktie um die Verpflichtung des Calls zu erfüllen:  $S_T - (S_T - K)^+ \geq 0$   $\nexists$  No-Arbitrage
- (iii) Sei  $K_1 \leq K_2$ :  
Falls  $C(K_1) < C(K_2)$  gehe short in  $K_2$  und long in  $K_1$ .  
am Anfang:  $C(K_2) - C(K_1) > 0$   
am Ende:  $(S_T - K_1)^+ - (S_T - K_2)^+ = (S_T - K_1) \mathbb{1}_{\{K_1 \leq S_T \leq K_2\}} - (K_2 - K_1) \mathbb{1}_{\{S_T > K_2\}} > 0$   $\nexists$  No-Arbitrage
- (iv) Sei  $K_1 < K_2$ .  
Falls  $C(K_1) - C(K_2) > (K_2 - K_1) \cdot B(0, T)$  gehe short in  $K_1$ , long in  $K_2$ , long  $(K_2 - K_1) \times$  Nullkuponanleihe  
am Anfang:  $C(K_1) - C(K_2) - (K_2 - K_1) \cdot B(0, T) > 0$   
am Ende:  $(S_T - K_2)^+ - (S_T - K_1)^+ + K_2 - K_1 \geq 0$   $\nexists$  No-Arbitrage
- (v)  $K_1 < K_2 < K_3$ ;  $K_2 = \lambda K_1 + (1 - \lambda) K_3$  mit  $\lambda = \frac{K_3 - K_2}{K_3 - K_1}$   
Falls  $C(K_2) > \lambda C(K_1) + (1 - \lambda) C(K_3)$ , gehe short in  $K_2$ ,  $\lambda \times$  long in  $K_1$ ,  $(1 - \lambda) \times$  long in  $K_3$ .  
am Anfang:  $C(K_2) - \lambda C(K_1) - (1 - \lambda) C(K_3) > 0$   
am Ende:

$$\begin{aligned} \lambda(S_T - K_1)^+ + (1 - \lambda)(S_T - K_3)^+ - (S_T - K_2)^+ &= \lambda(S_T - K_1) \mathbb{1}_{\{K_1 < S_T < K_2\}} \\ &\quad + [\lambda(S_T - K_1) - (S_T - K_2)] \mathbb{1}_{\{K_2 < S_T < K_3\}} \\ &\quad + \underbrace{[K_2 - (\lambda K_1 + (1 - \lambda) K_3)] \mathbb{1}_{\{S_T > K_3\}}}_{=0} \end{aligned}$$

da

$$\begin{aligned} \lambda(S_T - K_1) + (K_2 - S_T) &= K_2 - \lambda K_1 - (1 - \lambda) S_T \\ &= \lambda K_1 + (1 - \lambda) K_3 - \lambda K_1 - (1 - \lambda) S_T \\ &= (1 - \lambda)(K_3 - S_T) \geq 0 \\ &\nexists \text{ No-Arbitrage} \end{aligned}$$

## 1.12 Zinsmethoden

Frage: Wie kann man Kapitalrenditen durch annualisierte **Zinssätze** beschreiben?

Antwort: Man vereinbart eine **Zinsmethoden** und eine **Zählkonvention** (Anzahl der Tage eines Jahres).

Genauer: Kapital  $N$  wird zum Zeitpunkt  $t$  in eine Nullkuponanleihe mit Fälligkeit in  $T$  angelegt.

Zählkonvention  
für uns nicht  
wichtig



in  $t$ : erhalte für  $N$ :

$\frac{N}{B(t,T)}$   $T$ -Bonds {Nullkuponanleihe mit Fälligkeit in  $T$ }

in  $T$ : die Position hat einen Wert von  $\frac{N}{B(t,T)}$

Gewinn:  $\frac{N}{B(t,T)} - N = N \left( \frac{1}{B(t,T)} - 1 \right)$

$R(t,T) = \frac{1}{B(t,T)} - 1$  kann als Kapitalrendite interpretiert werden, die ein Investment zwischen  $t$  und  $T$  hervorbringt:

Ziel: Beschreibung durch einen jährlichen Zinssatz:

(a) **lineare Zinsmethode:**

lineare Verteilung der jährlichen Zinsen auf die Laufzeit  $R(t,T) = \underbrace{(T-t)}_{\text{Laufzeit}} \cdot r_{lin}$ ,  $r_{lin}$  ist der jährliche

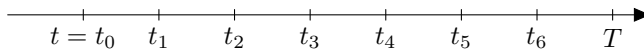
Zinssatz bei linearer Zinsmethode.

**Bsp.**

Anlage Zeitraum ein Monat

- Rendite von  $0.5\% = 50 \text{ bp}$  (ein Basispunkt  $\hat{=}$   $0,01\%$ )
- $r_{lin} = 0.5\% \cdot 12 = 6\%$

(b) **periodische Zinsmethode:**



setzte  $t_i = t + i \cdot \frac{T-t}{m}$ ,  $i = 0, \dots, m$

Ein jährlicher Zins  $r$  wird linear verteilt auf die Periodenlänge. Das Kapital wird unter Berücksichtigung von Zinseszinsen verzinst.

Verzinsung:

$$K_m(r, t, T) := \left( 1 + r \cdot \frac{T-t}{m} \right)^m = 1 + R(t, T)$$

(c) **stetige Zinsmethode:**

(i) Konstante Zinsrate  $r$

erhält man als Grenzübergang für  $m \rightarrow \infty$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} K_m(r, t, T) = e^{r(T-t)} = 1 + R(t, T)$$

(ii) nicht konstante Zinsrate

$r : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  liefert eine Kapitalentwicklung der Form:

$$K(r, t, T) = e^{\int_t^T r(s) ds}$$

zwischen  $t$  und  $T$ .

### Veranschaulichung:

$r : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t_i = t + i \cdot \frac{T-t}{m}$ ,  $i = 0, \dots, m$

1 € in  $t_0$  ergibt bei Zinsrechnung:

$$\begin{aligned} K_m(r, t, T) &= (1 + r(t_0)\Delta t) \cdots (1 + r(t_m)\Delta t) \\ \log K_m(r, t, T) &= \sum_{i=1}^m \log(1 + r(t_{i-1})\Delta t) \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^m r(t_{i-1})\Delta t}_{\int_t^T r(s)ds} + \underbrace{\mathcal{O}(\Delta t)}_{\Delta t \rightarrow 0 \rightarrow 0} \end{aligned}$$

## 1.13 Festzinsanleihe

- festverzinsliches Wertpapier
- Nominal  $N$
- Fälligkeit  $T$
- Zinstermine  $t_1 < t_2 < \dots < t_m \leq T$
- Koupens  $K_1, K_2, \dots, K_m$

In der Regel werden Koupens als Zins auf das Nominal gezahlt, d.h.  $K_i = N \cdot R$ ,  $R$  Zinssatz.

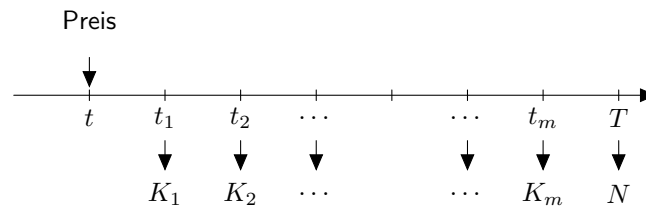


Abbildung 14: Ablauf Festzinsanleihe

Bewertung zu Zeitpunkt  $t < t_1$ :

Mit Hilfe einer Modifikation des Replikationsprinzips:

I: long in die festzinsanleihe

II: long in  $K_i \times T_i$ -Bonds,  $i = 1, \dots, m$ , long in  $N$   $T$ -Bonds

Beide Strategien erzeugen den gleichen Zahlungsstrom an Ausschüttungen:

$$K_1 \text{ in } t_1, K_2 \text{ in } t_2, \dots, K_m \text{ in } t_m$$

und haben den gleichen Endwert  $N$  in  $T$ .

Replikationsprinzip liefert, dass die Preise in  $t < t_1$  übereinstimmen müssen, d.h.

Preis der Festzinsanleihe in  $t < t_1$  ist

$$\sum_{i=1}^m K_i \cdot B(t, t_i) + N \cdot B(t, T)$$



## 1.14 Variabelverzinsliche Anleihe

### **Floater FRN** (Floating Rate Note)

- Nominal  $N$
- Fälligkeit  $T$
- Startpunkt  $t_0$
- Zinszahlungstermine  $t_0 < t_1 < \dots < t_m = T$
- **nachschüssige Kuponzahlungen**  $K_1, K_2, \dots, K_m$  entsprechend dem für die Periode geltendem Marktzins

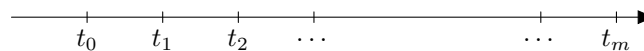
$$F(t_{i-1}, t_{i-1}, t_i) = \frac{1}{t - t_{i-1}} \cdot \left( \frac{1}{B(t_{i-1}, t)} - 1 \right)$$

also

$$\begin{aligned} K_i &= N \cdot F(t_{i-1}, t_{i-1}, t_i)(t_i - t_{i-1}) \\ &= N \left( \frac{1}{B(t_{i-1}, t_i)} - 1 \right), \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

- Bewertung in  $t_0$  durch folgende replizierende Handelsstrategie:  
**Rollierende Anlage** des Nominals bis zum jeweiligen nächsten Zinstermin.

Genauer:



- in  $t_0$ : Kaufe  $\frac{N}{B(t_0, t_1)}$   $t_1$ -Bonds und halte bis  $t_1$
- in  $T t_1$ :
  - Reinvestition von  $N$  in die 2.-Zinsperiode durch Kauf von  $\frac{N}{B(t_1, t_2)}$   $t_2$ -Bonds
  - Ausschüttung der Zinszahlung von  $\frac{N}{B(t_0, t_1)} - N = N \cdot F(t_0, t_0, t_1)(t_1 - t_0) = K_1$
- ...
- ...
- in  $t_m$ :
  - Rückzahlung von  $N$
  - Ausschüttung der letzten Zinszahlung  $\frac{N}{B(t_{m-1}, t_m)} - N = K_m$

Das Halten der variabel verzinslichen Anleihe und das Durchführen der rollierenden Handelsstrategie liefern den gleichen Zahlungsstrom an Zinszahlungen und haben zur Fälligkeit das Nominal als Endwert. Für die Handelsstrategie wird in  $t_0$  ein Kapital von  $N$  benötigt. Desgalb ist der Preis der variabel verzinslichen Anleihe in  $t_0$  durch  $N$  gegeben.

In  $t < t_0$  ist der Preis  $N \cdot B(t, t_0)$ , denn durch Kauf von  $N$   $t_0$ -Bonds in  $t$  kann die rollierende Handelsstrategie von  $t$  beginnend durchgeführt werden.

## 1.15 Swaps

Ein **Zinsswap** liefert die Möglichkeit das **Zinsänderungsrisiko** einer Festzinsanleihe zu vermeiden:

- Tauschgeschäft
- beim Zinsswap werden feste gegen variable Zinsen getauscht
- **Tenorstruktur**  $t_0 < t_1 < \dots < t_m$
- jährlichen Festzinssatz
- Nominal  $N$ , das nur zur Berechnung der Zinsen dient
- Unterscheidung in **Payer- und Reciever-Swaps** ausgehend von der Festzinsseite

Am Ende einer jeden Periode werden die festen Zinsen  $N \cdot R(t_i - t_{i-1})$  gegen die variablen  $N \cdot F(t_{i-1}, t_{i-1}, t_i)(t_i - t_{i-1})$  getauscht.

Dies führt zum Zahlungsstrom

$$N(t_i - t_{i-1})(F(t_{i-1}, t_{i-1}, t_i) - R), \quad 1 \leq i \leq m$$

beim Payer-Swap und

$$N(t_i - t_{i-1})(R - F(t_{i-1}, t_{i-1}, t_i))$$

beim Reciever-Swap.

Ein Payer-Swap kann repliziert werden durch eine long-Position in der FRN, short in die Festzinsanleihe zum Nominal  $N$  und Zinszahlungsterminen passend zur Tenorstruktur.

Deshalb gilt für den Preis Payerswap( $t$ ) in  $t \leq t_0$ :

$$\begin{aligned} \text{Payerswap}(t) &= \underbrace{N \cdot B(t, t_0)}_{\text{FRN in } t} - \underbrace{\left( \sum_{i=1}^m N \cdot R(t_{i-1} - t_i) \cdot B(t, t_i) + N \cdot B(t, t_m) \right)}_{\text{Festzinspreis}} \\ &= N \left( B(t, t_0) - B(t, t_m) - \sum_{i=1}^m R \cdot B(t_{i-1}, t_i) \right) \end{aligned}$$

Der "faire" Festzinspreis  $R$  liegt dann in  $t$  vor, wenn Payer-Swap( $t$ )=0, also wenn

$$R = \frac{B(t, t_0) - B(t, t_m)}{\sum_{i=1}^m B(t, t_i)(t_i - t_{i-1})}$$

$R$  ist dann die sogenannte **Swaprate** in  $t$ .

## 2 Aktuarielle Bewertung von Zahlungsströmungen

**Ziel:** Bewertung von Zahlungsverpflichtungen, die durch biometrische Risiken verursacht werden. Biometrische Risiken sind zum Beispiel Todesfall, Invalidität,...

## 2.1 Zahlungsströme und deren Bewertung

- zeitdiskrete periodische Sichtweise, Zeit wird in Jahren gemessen

### Definition

- Ein Zahlungsstrom  $Z$  ist eine Folge  $(Z(n))_{n \in \mathbb{N}}$  von nicht negativen reellen Zahlen,  $Z(n) \hat{=}$  Auszahlung zum Zeitpunkt  $n$
- Frage: Was ist der Kapitalwert, der durch den Zahlungsstrom der verursachten Zahlungsverpflichtungen entsteht?
- Antwort: Summe der **abdiskontierten** Zahlungen
- Genauer: Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  gibt  $B(k, n)$ , den Preis des  $n$ -Bonds zum Zeitpunkt  $k$ , den Wert einer in  $n$  fälligen Zahlungsverpflichtung von 1€ an.
- Deshalb definieren wir:

$$V_0(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} Z(n) \cdot B(0, n)$$

Summe aller auf den Anfang abdiskontierten Zahlungsverpflichtungen, Kapitalwert von heute.  
Und

$$V_m(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} Z(m+k) \cdot B(m, m+k)$$

Summe aller nach  $m$  fälligen auf den Zeitpunkt  $m$  abdiskontierten Zahlungsverpflichtungen.

- $V_m(Z)$  ist das Kapital, das zum Zeitpunkt  $m$  benötigt wird, um die zukünftigen Zahlungsverpflichtungen erfüllen zu können.
- Praxis: Periodische Rendite  $r$ , periodische **Diskontfaktor**

$$v = \frac{1}{1+r} \Rightarrow B(m, n) = v^{n-m} \quad \forall 0 \leq m \leq n$$

## 2.2 Personenversicherung und deren Bewertung

### Ziel:

Mathematische Beschreibung und Analyse einer Personenversicherung

### Definition:

Eine Personenversicherung ist ein Quartett  $\Gamma = (t, s, b, T)$  mit Zahlungsströmen  $(t(n))_{n \in \mathbb{N}_0}$ ,  $(s(n))_{n \in \mathbb{N}_0}$ ,  $(b(n))_{n \in \mathbb{N}_0}$  und  $(0, \infty)$ -wertiger Zufallsvariabel  $T$ .

### Interpretation:

- $T$  ist eine zufällige Ausfallzeit (etwa Restlebensdauer)
- **Todesfallspektrum**  $(t(n))_{n \in \mathbb{N}_0}$

$t(n) \geq 0 \hat{=}$  Auszahlung in  $n$  bei Ausfall in der  $n$ -ten Periode

- **Erlebensspektrum**  $(s(n))_{n \in \mathbb{N}_0}$

$s(n) \geq 0 \hat{=}$  Auszahlung in  $n$ , wenn  $n$  erreicht wird

▪ **Beitragsspektrum**  $(b(n))_{n \in \mathbb{N}_0}$

$b(n) \geq 0 \triangleq$  Premienzahlung in  $n$ , wenn  $n$  erreicht wird

Aus Sicht des Versicherungsunternehmens erzeugt eine Personenversicherung die folgenden zufälligen Zahlungsströme:

Ausgabenstrom:

$$A(n) = s(n)\mathbb{1}_{\{T > n\}} + t(n)\mathbb{1}_{\{n-1 < T \leq n\}} \\ \forall n \in \mathbb{N}_0, \quad A(0) = s(0)$$

Bewertung aus heutiger Sicht durch

Einnahmestrom:

$$I(n) = b(n)\mathbb{1}_{\{T > n\}} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

$$V_0(A) = s(0) + \sum_{n=1}^{\infty} s(n)\mathbb{1}_{\{T > n\}}B(0, n) + \sum_{n=1}^{\infty} t(n)\mathbb{1}_{\{n-1 < T \leq n\}}B(0, n) \\ V_0(I) = \sum_{n=0}^{\infty} b(n)\mathbb{1}_{\{T > n\}}B(0, n)$$

$V_0(A) \triangleq$  heutiger Kapitalwert des zufälligen Zahlungsstroms

$EV_0(A) \triangleq$  mittlerer Kapitalwert der zukünftigen Zahlungsverpflichtung

$EV_0(I) \triangleq$  mittlerer Kapitalwert der Einnahmen

**Definition:**

$EV_0(A)$  heißt **Barwert** der durch die Versicherung induzierten Zahlungsverpflichtungen.  $EV_0(I)$  heißt **Barwert** der durch die Versicherung induzierten Einnahmen.

Eine Personenversicherung heißt **ausgewogen** oder **fair**, wenn  $EV_0(A) = EV_0(I)$  gilt und beide endlich sind.

Ist  $EV_0(A) < \infty$  oder?  $EV_0(I) < \infty$ , so ist  $EV_0(A) - EV_0(I)$  der Barwert der Versicherung.

Dies ist als Ausgangspreis zu interpretieren, den ein Versicherungsunternehmen verlangt.

**Äquivalenzprinzip:**

Man wähle  $(t, s, b)$  so, dass die Versicherung fair ist.

## 2.3 Klassische Beispiele

- versichert wird eine Person
- biometrisches Risiko ist das Todesfallrisiko
- Ausfallzeit ist deshalb die Restlebensdauer der Person

(a) **Todesfallversicherung:**

- Todesfallsumme  $M$
- Laufzeit  $n$
- konstante periodische Prämienzahlung

$$t(k) = M \quad \forall k = 1, \dots, n \quad t(k) = 0 \text{ sonst}$$

$$s(k) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$$

$$b(k) = p \quad \forall k = 0, \dots, n-1 \quad b(k) = 0 \text{ sonst}$$

■ Induzierte Zahlungsströme:

$$A(k) = M \cdot \mathbb{1}_{\{k-1 < T \leq k\}}, \quad k = 1, \dots, n \quad A(k) = 0 \text{ sonst}$$

$$I(k) = p \cdot \mathbb{1}_{\{T > k\}}, \quad k = 0, \dots, n-1 \quad I(k) = 0 \text{ sonst}$$

$$V_0(A) = \sum_{k=1}^n M \cdot B(0, k) \mathbb{1}_{\{k-1 < T \leq k\}}$$

$$V_0(I) = \sum_{k=0}^{n-1} p \cdot B(0, k) \mathbb{1}_{\{T > k\}}$$

$$\text{Also } \mathbb{E}V_0(A) = \sum_{k=1}^n M \cdot B(0, k) \mathbb{P}(k-1 < T \leq k)$$

$$\mathbb{E}V_0(I) = p \cdot \sum_{k=0}^{n-1} B(0, k) \mathbb{P}(T > k)$$

■ Praxis:

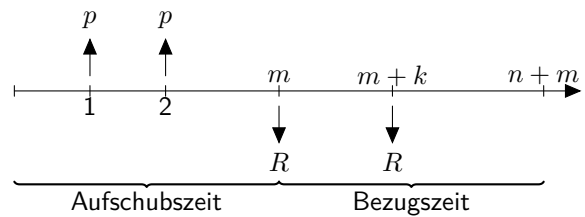
- Restlebenszeit wird durch das Alter bestimmt  $T_x$  Restlebenszeit eines x-Jährigen
- Stationaritätsannahme  $\mathbb{P}(T_x > t + s \mid T_x > s) = \mathbb{P}(T_{x+s} > t)$
- $q_x = \mathbb{P}(T_x \leq 1)$  1-jährige Sterbew'keit eines x-Jährigen
- $p_x = 1 - q_x = \mathbb{P}(T_x > 1)$  1-jährige Überlebensw'keit eines x-Jährigen
- ${}_k p_x := \mathbb{P}(T_x > k) = \mathbb{P}(T_x > 1) \mathbb{P}(T_x > k \mid T_x > 1) \stackrel{\text{Stationarität}}{=} p_x \mathbb{P}(t_{x+1} > k-1)$   
 $= \dots = p_x p_{x+1} \dots p_{x+k-1}$
- ${}_k q_x = 1 - {}_k p_x = \mathbb{P}(T_x \leq k)$
- Bezeichnung für  $M = 1$ , Eintrittsalter  $x$   
 ${}_n A_x = \sum_{k=1}^n r^k \mathbb{P}(k-1 < T_x \leq k)$   
für  $p = 1$ :  
 $\ddot{a}_{x:n} = \sum_{k=0}^{n-1} r^k \mathbb{P}(T_x > k)$   
Die Todesfallversicherung ist fair, wenn  $M \cdot {}_n A_x = p \cdot \ddot{a}_{x:n}$   
 $n \rightarrow +\infty$  entspricht Todesfallversicherung ohne zeitliche Beschränkung
- Bezeichnung

$$A_x = \sum_{k=1}^{\infty} v^k \mathbb{P}(k-1 < T_x \leq k)$$

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \mathbb{P}(T_x > k)$$

## (b) aufgeschobene Rentenversicherung

- Eintrittsalter  $x$
- Aufschubszeit  $m$  Jahre
- Bezugszeit  $n$  Jahre
- Rentenhöhe  $R$
- Beitragshöhe  $p$



Modellierung:

- $T = T_x$  Restlebenszeit eines  $x$ -Jährigen
- $t(k) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$
- $s(k) = 0 \quad k = 0, \dots, m-1, \quad s(m+k) = R \quad k = 0, \dots, n-1$
- $b(k) = p \quad k = 0, \dots, m-1, \quad b(k) = 0$  sonst

Induzierte Zahlungsströme:

- Ausgaben:  $A(m+k) = R \cdot \mathbb{1}_{\{T > m+k\}} \quad k = 0, \dots, n-1, \quad A(k) = 0$  sonst
- Einnahmen:  $I(k) = p \cdot \mathbb{1}_{\{T > k\}} \quad k = 0, \dots, m-1 \quad I(k) = 0$  sonst
- Barwert der Ausgaben:  $\mathbb{E}V_0(A) = \sum_{k=0}^{n-1} R \cdot v^{m+k} \mathbb{P}(T > m+k)$
- Barwert der Einnahmen:  $\mathbb{E}V_0(I) = p \underbrace{\sum_{k=0}^{m-1} v^k \mathbb{P}(T > k)}_{\ddot{a}_{x:m}}$
- Bezeichnung für  $R = 1$ :  ${}_m|_n\ddot{a}_x := \sum_{k=0}^{n-1} v^{m+k} \mathbb{P}(T > m+k)$
- Die Versicherung ist fair, wenn  $R \cdot {}_m|_n\ddot{a}_x = p \cdot \ddot{a}_{x:m}$
- Für  $n = \infty$ , lebenslange Rente:  ${}_m|\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+m} \mathbb{P}(T > m+k)$

## (c) Erlebensfallversicherung

- Eintrittsalter  $x$
- Laufzeit  $n$  Jahre
- **Erlebensfallsumme**  $M$ , Auszahlung bei Überleben von  $n$  Jahren
- konst. Prämie  $p$ , während der Laufzeit

Modellierung:

- $T = T_x$  Restlebenszeit
- $t(k) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$
- $s(k) = \begin{cases} M, & k = n \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$
- $b(k) = \begin{cases} p, & k = 0, \dots, n-1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

Induzierte Zahlungsströme:

- Ausgaben:  $A(m) = M \cdot \mathbb{1}_{\{T > m\}}$ ,  $A(k) = 0$  sonst
- Einnahmen:  $I(k) = p \cdot \mathbb{1}_{\{T > k\}}$ ,  $k = 1, \dots, n-1$

Bewertung:

$$\mathbb{E}V_0(A) = M \underbrace{v^n \mathbb{P}(T > n)}_{= {}_nE_x} = M \cdot {}_nE_x$$

$$\mathbb{E}V_0(I) = p \cdot \ddot{a}_{x:n|}$$

- Versicherung ist fair, wenn  $M \cdot {}_nE_x = p \ddot{a}_{x:n|}$

(d) **gemischte Versicherung** (Kapitalgebundene Lebensvers.)

- Kombination aus Todesfall- und Erlebensversicherung
  - Eintrittsalter  $x$
  - Laufzeit  $n$
  - Versicherungssumme  $M$ , fällig bei Tod während der Laufzeit oder bei Überleben der Laufzeit
  - konst. Prämie  $p$ , während der Laufzeit
- Modellierung:
- $T = T_x$  Restlebenszeit
  - $t(k) = M$ ,  $k = 1, \dots, n$ ,  $t(k) = 0$  sonst
  - $s(n) = M$ ,  $s(k) = 0$  sonst
  - $b(k) = p$ ,  $k = 0, \dots, n-1$ ,  $b(k) = 0$  sonst

Induzierte Zahlungsströme:

$$\begin{aligned} A(k) &= M \cdot \mathbb{1}_{\{k-1 < T \leq k\}}, & k &= 1, \dots, n-1 \\ A(n) &= M \cdot (\mathbb{1}_{\{n-1 < T \leq n\}} + \mathbb{1}_{\{T > n\}}), & A(k) &= 0 \text{ sonst} \\ I(k) &= p \cdot \mathbb{1}_{\{T > k\}}, & k &= 0, \dots, n-1 \end{aligned}$$

Bewertung:

$$\mathbb{E}V_0(A) = M({}_nA_x + {}_nE_x) \quad \mathbb{E}V_0(I) = p \ddot{a}_{x:n|}$$

Versicherung ist fair, wenn  $M({}_nA_x + {}_nE_x) = p \ddot{a}_{x:n|}$

## 2.4 Deckungskapital

Betrachtet wird nur der Fall einer **deterministischen Zinsentwicklung**, z.B.  $B(k, n) \in (0, 1)$  det.  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $k < n$

### Beobachtung:

Anfangs sind die Prämieinnahmen pro Jahr höher, als die zu erwartenden Ausgaben pro Jahr. Dies führt zum Aufbau einer **Prämienreserve**. Gegen Ende sind die zu erwartenden Leistungen pro Jahr höher, als die Prämien pro Jahr und werden durch die aufgebaute Prämienreserve finanziert.

Der **Deckungskapitalverlauf** spiegelt den Auf- und Abbau der Prämienreserve wieder.

### Definition:

Gegeben sei eine allgemeine Prämienversicherung  $\Gamma = (t, s, b, T)$ . Sei  $(A(n))_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(I(n))_{n \in \mathbb{N}}$  der Zahlungsstrom der Ausgaben und Einnahmen. Das nach  $m$  Jahren gebildete Deckungskapital  $\mathcal{D}(m)$  ist definiert, als die Differenz der Barwerte, der dann zukünftigen Ausgaben und Einnahmen, wobei die Diskontierung auf das Ende des  $n$ -ten Jahres vorgegeben wird.

In mathematischen Formeln:

$$\mathcal{D}(m) = \mathbb{E}(V_m(A) \mid \underbrace{T > m}_{\text{die nach } m \text{ noch leben}}) - \mathbb{E}(V_m(I) \mid T > m) \quad \forall m \in \mathbb{N}_0$$

Dies ist die Definition des sogenannten **prospektiven Deckungskapitals** (vorausschauende Methode). Für  $m = 0$  ist  $\mathcal{D}(0)$  der Barwert der Versicherung.  $\mathcal{D}(0) = 0$  liegt bei einer fairen Versicherung vor.

Anfang und Ende bezieht sich auf die Versicherung, bzw. viele Versicherungen zum selben Zeitpunkt

**Bemerkung:**

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(V_m(A) \mid T > m) &= \mathbb{E} \left( \sum_{k=0}^{\infty} A(m+k) \underbrace{B(m, m+k)}_{=v^k} \mid (T > m) \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} t(k+m) B(m, m+k) \mathbb{P}(m+k-1 < T < m+k \mid T > m) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\infty} s(k+m) B(m, m+k) \mathbb{P}(T > m+k \mid T > m)\end{aligned}$$

$$\text{Da } A(m+k) = t(k+m) \cdot \mathbb{1}_{\{m+k-1 < T \leq m+k\}} + s(k+m) \cdot \mathbb{1}_{\{T > m+k\}}$$

Analog:

$$\mathbb{E}(V_m(I) \mid T > m) = \sum_{k=0}^{\infty} b(m+k) B(m, m+k) \mathbb{P}(T > m+k \mid T > m)$$

## 2.5 Beispiele Deckungskapital

periodischen konst. Diskontfaktor  $v$

(a) Todesfallversicherung:

- Eintrittsalter  $x$

$$A(k) = \mathbb{1}_{\{k-1 < T_x \leq k\}}, \quad k = 1, \dots, n$$

- VS  $M = 1$

$$I(k) = p \cdot \mathbb{1}_{\{T_x > k\}}, \quad k = 0, \dots, n-1 \text{ mit } p = \frac{{}_nA_x}{\ddot{a}_{x:n}}$$

- Laufzeit  $n$  Jahre

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_x(m) &= \sum_{k=1}^{n-m} v^k \mathbb{P}(m+k-1 < T_x \leq m+k \mid T_x > m) - p \sum_{k=0}^{n-m-1} v^k \mathbb{P}(T_x > m+k \mid T_x > m) \\ &= \sum_{k=1}^{n-m} v^k \mathbb{P}(k-1 < T_{x+m} \leq k) - p \sum_{k=0}^{n-m-1} v^k \mathbb{P}(T_{x+m} > k) \\ &= {}_{|n-m}A_{x+m} - p \cdot \ddot{a}_{x+m:n-m}\end{aligned}$$

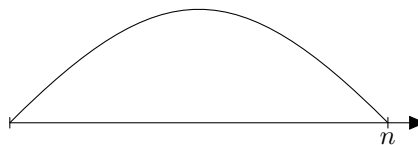


Abbildung 15: Deckungskapital: Todesfall, begrenzt

(b) Todesfallversicherung, unbegrenzte Laufzeit

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_x(m) &= \sum_{k=1}^{\infty} v^k \mathbb{P}(m+k-1 < T_x \leq m+k \mid T_x > m) - p \sum_{k=0}^{\infty} v^k \mathbb{P}(T_x > m+k \mid T_x > m) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} v^k \mathbb{P}(k-1 < T_{x+m} \leq k) - p \sum_{k=0}^{\infty} v^k \mathbb{P}(T_{x+m} > k) \\ &= A_{x+m} - p \cdot \ddot{a}_{x+m} \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad p \text{ erfüllt } A_x = p \ddot{a}_x\end{aligned}$$



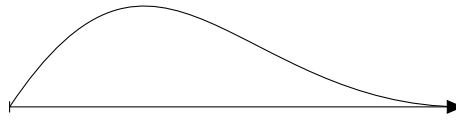


Abbildung 16: Deckungskapital: Todesfall, unbegrenzt

(c) Erlebensfallversicherung:

- Eintrittsalter  $x$
  - Laufzeit  $n$
  - Versicherungssumme 1
- Deckungskapitalverlauf:

$$A(k) = \mathbb{1}_{\{T_x > k\}} \text{ für } k = n$$

$$A(k) = 0 \text{ sonst}$$

$$I(k) = p \mathbb{1}_{\{T_x > k\}} \quad k = 0, \dots, n-1$$

$$\mathcal{D}_x(m) = v^{n-m} \mathbb{P}(T_x > n \mid T_x > n+m) - p \sum_{k=0}^{n-m-1} v^k \mathbb{P}(T_x > m+k \mid T_x > m)$$

$$\begin{aligned} \text{Stationarität} \Rightarrow &= v^{n-m} \mathbb{P}(T_{x+m} > n-m) - p \sum_{k=0}^{n-m-1} v^k \mathbb{P}(T_{x+m} > k) \\ &= {}_{n-m}E_{x+m} - p \ddot{a}_{x+m:n-m} \end{aligned}$$

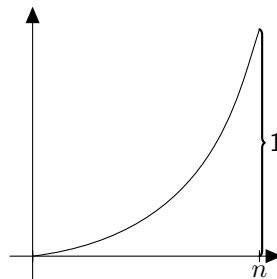


Abbildung 17: Deckungskapital: Erlebensfall

(d) gemischte Versicherung:

- Todesfall + Erlebensfall
- Deckungskapitalverlauf als Summe der Deckungskapitalien der einzelnen Versicherungen
- in Formeln:  $\cdot$  Laufzeit  $n$   $\cdot$  Eintrittsalter  $x$

$$\mathcal{D}_x(m) = A_{x+m:n-m} - p \ddot{a}_{x+m:n-m} \text{ mit } A_{x+m:n-m} = p \ddot{a}_{x+m:n-m}$$

Wobei  $A_{x:n} = {}_nA_x + {}_nE_x$  Barwert der gemischten Versicherung

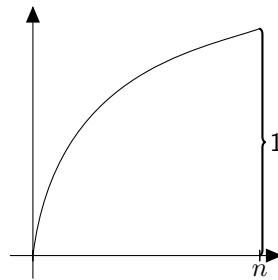


Abbildung 18: Deckungskapital: gemischte Versicherung

(e) Aufgeschobene Rentenversicherung:

▪ Eintrittsalter  $x$

▪ Aufschubszeit  $n$

▪ Rentenbezugszeit bis zum Tod

▪ Rentenhöhe 1

▪ Ausgaben:

$$A(n+k) = \mathbb{1}_{\{T_x > n+k\}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

▪ Einnahmen:

$$I(k) = p \mathbb{1}_{\{T_x > k\}}, \quad k = 0, \dots, n-1$$

Versicherung ist fair, wenn  $p\ddot{a}_{x:n} = {}_n\ddot{a}_x$

Deckungskapitalverlauf:

$$m = 0, \dots, n-1 : \mathcal{D}_x(m) = \sum_{k=0}^{\infty} v^{n-m+k} \mathbb{P}(T_{x+m} > n-m+k) - p \sum_{k=0}^{n-m-1} v^k \mathbb{P}(T_{x+m} > k)$$

$$= {}_{n-m}\ddot{a}_{x+m} - p\ddot{a}_{x+m:n-m}$$

$$m = n : \mathcal{D}_x(n) = \ddot{a}_{x+n}$$

$$m > n : \mathcal{D}_x(m) = \ddot{a}_{x+m}$$

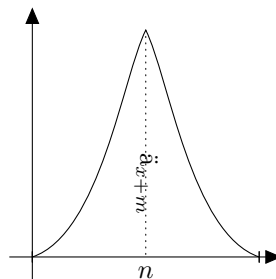


Abbildung 19: Deckungskapital: Rentenversicherung

Weitere Beispiele für Personenversicherungen bei denen die Ausfallzeiten nicht durch die Restlebenszeit einer einzelnen Person gegeben ist:

## 2.6 Personengemeinschaften, verbundene Leben

- $n$  Personen mit Restlebensdauer  $T_1, \dots, T_n$
- Aus diesen wird eine Ausfallzeit der Gemeinschaft definiert durch  $\Gamma = f(T_1, \dots, T_n)$  für eine geeignete Funktion  $f$
- Bsp:  $n = 2$   $T = \min\{T_1, T_2\} = T_1 \wedge T_2$  oder  $T = \max\{T_1, T_2\} = T_1 \vee T_2$

- **Bem:** Bei unabhängigen  $T_1, \dots, T_n$  kann die Verteilung von  $\max\{T_1, \dots, T_n\}$  bzw.  $\min\{T_1, \dots, T_n\}$  ausgerechnet werden, denn

$$\mathbb{P}(\max\{T_1, \dots, T_n\} \leq t) = \mathbb{P}(T_1 \leq t, \dots, T_n \leq t) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(T_i \leq t)$$

$$\mathbb{P}(\min\{T_1, \dots, T_n\} > t) = \mathbb{P}(T_1 > t, \dots, T_n > t) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(T_i > t)$$

- **Beispiel:** Todesfallversicherung eines Ehepaares

- Eintrittsalter erste Person  $x$ , zweite Person  $y$
- Laufzeit  $n$  Jahre
- Versicherungssumme  $M$  wird fällig, wenn eine der beiden Personen stirbt (1. Tod)
- konst. Prämie solange wie beiden leben

- **Modell:**

Setze  $T_{xy} = T_x \cap T_y$ .

$t(m) = M, \quad m = 1, \dots, n; \quad b(m) = p, \quad m = 0, \dots, n-1; \quad s(m) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$

Dann beschreibt  $\Gamma = (t, s, b, T_{xy})$  diese Versicherung.

Bestimmung von  $p$ :

$$A(k) = m \mathbb{1}_{\{k-1 < T_{xy} < k\}}, \quad k = 1, \dots, n$$

$$I(K) = p \mathbb{1}_{\{T_{xy} < k\}}, \quad k = 0, \dots, n-1$$

Fair, wenn

$$p \sum_{k=0}^{n-1} v^k \mathbb{P}(T_{xy} > k) = M \sum_{k=1}^n v^k \mathbb{P}(k-1 < T_{xy} \leq k)$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_{xy} > k) &= \mathbb{P}(T_{xy} > k \mid T_{xy} > k-1) \mathbb{P}(T_{xy} > k-1) \\ &= \mathbb{P}(T_{x+k-1, y+k-1} > 1) \mathbb{P}(T_{xy} > k-1) \\ &= \mathbb{P}_{x+k-1}^{(1)} \mathbb{P}_{y+k-1}^{(2)} \mathbb{P}(T_{xy} > k-1) = \mathbb{P}_{x+k-1}^{(1)} \mathbb{P}_{y+k-1}^{(2)} \cdots \mathbb{P}_x^{(1)} \mathbb{P}_y^{(2)} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(k-1 < T_{xy} \leq k) &= \mathbb{P}(T_{xy} \leq k \mid T_{xy} > k-1) \mathbb{P}(T_{xy} > k-1) \\ &= \mathbb{P}(T_{x+k-1, y+k-1} \leq 1) \mathbb{P}(T_{xy} > k-1) \\ &= (1 - \mathbb{P}_{x+k-1}^{(1)} \mathbb{P}_{y+k-1}^{(2)}) \mathbb{P}(T_{xy} > k-1) \end{aligned}$$

## 2.7 Konkurrierende Ausscheideursachen

- Ausfallzeit  $T$
- mehrere konkurrierende Ausscheideursachen. Welche Ursache zum Ausscheiden führt ist zufällig und wird durch eine  $\{1, \dots, m\}$ -wertige Zufallsvariable  $J$  beschrieben.
- Leistung bei Ausfall hängt von der Ausscheideursache ab
- Modellierung erfolgt dadurch, dass die Todesfallleistung ersetzt bzw. modifiziert wird durch Ausfallleistungen.

- **Definition:** Sei  $T$  eine  $(0, \infty)$ -wertige ZV und  $J$  eine  $\{1, \dots, m\}$ -wertige ZV. Seien  $(t_j)_{j=1, \dots, m}$ ,  $s$ ,  $b$  Zahlungsströme.
- Dann heißt  $\Gamma = ((t_j)_{j=1, \dots, m}, s, b, T, J)$  Personenversicherung unter  $m$  konkurrierenden Risiken
- **Interpretation:** Anfangszustand

$T \triangleq$  Verweilzeit im Anfangszustand  
 $J \triangleq$  zufällige Wahl einer Ausscheideursache  
 $t_j(n) \triangleq$  Leistung bei Ausfall in der  $n$ -ten Periode, wegen Ursache  $j$   
 $s(n) \triangleq$  Leistung bei einer Verweildauer größer als  $n$   
 $b(n) \triangleq$  Beitrag bei Ausfall nach  $n$

- **Zahlungsströme:**

$$A(n) = \sum_{j=1}^m t_j(n) \mathbb{1}_{\{n-1 < T \leq n, J=j\}} + s(n) \mathbb{1}_{\{T > n\}}$$

$$I(n) = b(n) \mathbb{1}_{\{T > n\}}$$

- **Bewertung:**

$$\begin{aligned} \mathbb{E}V(A) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^m t_j(n) v^n \mathbb{P}(n-1 < T \leq n, J=j) \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} s(n) v^n \mathbb{P}(T > n) \\ \mathbb{E}V(A) &= \sum_{n=0}^{\infty} b(n) v^n \mathbb{P}(T > n) \end{aligned}$$

Für eine praktische Berechnung muss die Stationaritätsannahme geeignet modifiziert werden.

- **Definition:**  $((T_x)_{x \in \mathbb{N}_0}, J)$  ist stationär, falls gilt

$$\mathbb{P}(T_x \leq n+k, J=j \mid T_x > n) = \mathbb{P}(T_{x+n} \leq k, J=j) \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{N}, j \in \{1, \dots, m\}$$

### Definition

$((T_x)_{x \in \mathbb{N}_0}, J)$  ist stationär, falls gilt

$$\mathbb{P}(T_X \leq n+k, J=j \mid T_x > n) = \mathbb{P}(T_{x+n} \leq k, J=j) \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{N}, j \in \{1, \dots, m\}$$

### Lemma

Ist  $((T_x)_{x \in \mathbb{N}_0}, J)$  stationär, so ist auch  $(T_x)_{x \in \mathbb{N}_0}$  stationär. Es gilt also

$$\mathbb{P}(T_x \leq n+k \mid T_x > n) = \mathbb{P}(T_{x+n} \leq k)$$

### Beweis:

$$\mathbb{P}(T_x \leq n+k \mid T_x > n) = \sum_{j=1}^m \mathbb{P}(T_x \leq n+k, J=j \mid T_x > n) = \sum_{j=1}^m \mathbb{P}(T_{x+n} \leq k, J=j) = \mathbb{P}(T_{x+n} \leq k)$$

Setze  $q_{x,j} = \mathbb{P}(T_x \leq 1, J=j)$  als W'keit eines  $x$ -Jährigen im nächsten Jahr wegen Ursache  $j$  auszuscheiden.

$$q_x = \mathbb{P}(T_x \leq 1) = \sum_{j=1}^m q_{x,j}.$$

$p_x = 1 - q_x$  einjährige Verweildauer eines  $x$ -Jährigen.

Wegen der Stationaritätsannahme gilt dann:

$$\mathbb{P}(T_x > n) = \mathbb{P}(T_x > n \mid T_x > n-1) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(T_x > 1) = p_{x+n-1} \cdot \dots \cdot p_x$$

bzw.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(n-1 < T_x \leq n, J = j) &= \mathbb{P}(n-1 < T_x \leq n, J = j \mid T_x > n-1) \mathbb{P}(T_x > n-1) \\ &= \mathbb{P}(T_{x+n-1} \leq 1, J = j) \mathbb{P}(T_x > n-1) \\ &= q_{x+n-1,j} \mathbb{P}(T_x > n-1) \end{aligned}$$

Für eine Berechnung der Barwerte genügt es also die  $q_{x,j}$  zu spezifizieren.

Bsp: Invaliditätsrente:

- Eintrittsalter  $x$
- Grundzustand aktiv (a)
- $n$  Restlaufzeit zur gesetzlichen Rente
- mögliche Ausscheideursachen
  - Invalidität
  - Tod

Bei Invalidität wird eine lebenslange Rente der Höhe  $R$  gezahlt.

Modell:

$$\begin{aligned} T_x &\hat{=} \text{Verweilzeit im Zustand a} \\ \mathbb{P}(T_x > k) &\hat{=} \text{als aktiver } k \text{ Jahre zu überleben} \\ J = 1 &\hat{=} \text{Invalidität} \\ J = 2 &\hat{=} \text{Tod} \\ t_1(k) &= R \cdot \ddot{a}_{x+k} \hat{=} \text{Leistung bei Invalidisierung im } k\text{-ten Jahr, Barwert des Rentenanspruchs,} \\ &\quad k = 1, \dots, n \\ t_2(k) &= 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0, \quad s(k) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0, \quad b(k) = p, \quad k = 0, \dots, n-1 \end{aligned}$$

Bewertung:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}V(A) &= R \sum_{k=1}^n \ddot{a}_{x+k} v^k \mathbb{P}(k-1 < T_x \leq k, J = j) \\ &= R \sum_{k=1}^n \ddot{a}_{x+k} v^k q_{x+k-1} \mathbb{P}(T_x > k-1) \\ \mathbb{E}V(I) &= p \sum_{k=0}^{n-1} v^k \mathbb{P}(T_x > k) \end{aligned}$$

$i(y) := q_{y,1}$  einjährige Invalidisierungsw'keit eines  $y$ -Jährigen

$q_y^a := q_{y,2}$  einjährige Sterbew'keit eines aktiven

$q_y = q_y^a + i(y)$  W'keit eines aktiven  $y$ -Jährigen im nächsten Jahr auszuscheiden.

$p_y = 1 - q_y$

## 3 Exkurs stochastische Prozesse

### 3.1 Definitionen

Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  ein W'Raum. Sei  $T \subseteq \mathbb{R}$  eine Zeitparametermenge. Sei  $(E, \mathcal{E})$  ein messbarer Raum als Zustandsraum. Eine Familie  $(X_t)_{t \in T}$  von  $E$ -wertigen ZV'en heißt **stochastischer Prozess**.

Eine Familie  $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$  von Unter- $\sigma$ -Algebren von  $\mathcal{F}$  heißt **Filtration**, wenn

$$\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \quad \forall s \leq t, \quad s, t \in T$$

$(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$  gibt ein Informationsverlauf wieder.  $\mathcal{F}_t \triangleq \text{Informatio}$ , die bis zum Zeitpunkt  $t$  verfügbar ist.

$(X_t)_{t \in T}$  heißt **adaptiert** bzgl. der Filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ , falls gilt  $X_t$  ist messbar bzgl.  $\mathcal{F}_t \quad \forall t \in T$ . In der Regel:  $T \subseteq \mathbb{N}_0$  oder  $T \subseteq [0, \infty)$ ,  $E = \mathbb{R}^d$ ,  $\mathcal{E} = \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$

Beispiel:

Die Preisentwicklung von  $d$  Finanzgütern kann man durch einen stochastischen Prozess  $(X_t)_{t \in T}$  mit Werten in  $\mathbb{R}^d$  beschreiben.

### 3.2 Das N-Perioden CRR-Modell

(Anmerkung: CRR steht für Coxe-Ross-Rubinstein)

$\Omega = \{0, 1\}^N$ ,  $\mathcal{F} = \mathbb{P}(\Omega)$ ,  $0 < d < u$

$Y_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad \omega \mapsto u^{\omega_n} d^{1-\omega_n} = \begin{cases} u, & \text{falls } \omega_n = 1 \\ d, & \text{falls } \omega_n = 0 \end{cases}$

$S_n = Y_1 Y_2 \cdots Y_n$  Preis nach  $n$ -Perioden,  $(S_n)_{n=0, \dots, N}$  Verlauf einer Aktie über  $N$  Perioden.

Zusätzlich zur Aktie betrachtet man ein **Geldmarktkonto** mit konst. periodischer Verzinsung  $r$ .

$\left( \frac{(1+r)^n}{S_n} \right)_{n=0, \dots, N}$  beschreibt im **CRR-Modell** den Verlauf der Preise dieser beiden Basisfinanzgüter.

Anmerkung zur Abbildung 20: bei sehr kleinen Zeitsprüngen ist es möglich anzunehmen, dass das Finanzgut nur einen kleinen Sprung nach oben oder unten machen kann (zetliche Darstellung der Black-Scholes Formel).

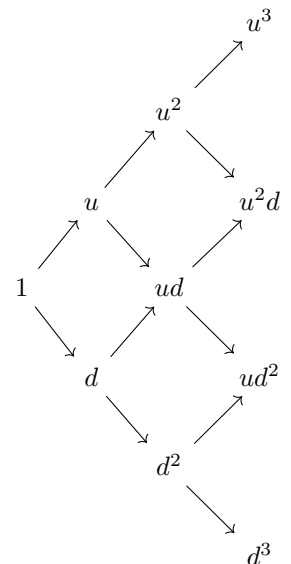


Abbildung 20: CRR-Modell

### 3.3 Random-Walk

Sei  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von iid ZV'en. Sei  $Y_0$  unabhängig von  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Durch  $S_n = Y_0 + \sum_{k=1}^n Y_k$ ,  $n \in \mathbb{N}$  wird ein sogenannter **Random-Walk** definiert.

Durch  $S_n = Y_0 \cdot \prod_{k=0}^n Y_k$ ,  $n \in \mathbb{N}$  wird ein **geometrischer Random-Walk** definiert. Die Aktie im CRR-Modell ist ein geom. Random-Walk.

### 3.4 Bedingter Erwartungswert

Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  ein W'Raum.  $\mathcal{G}$  Unter- $\sigma$ -Algebra von  $\mathcal{F}$ .  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  sei messbar bzgl.  $\mathcal{F}$  und es existiert  $\mathbb{E}X$ .

Dann heißt  $Z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine Version des **bedingten Erwartungswertes** von  $X$  bzgl.  $G$ , wenn gilt:

(i)  $Z$  ist messbar bzgl.  $G$

(ii)  $\int_A Z d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P} \quad \forall A \in G$

Schreibweise  $Z = \mathbb{E}(X | G)$ ; ist  $G = \sigma(Y)$  für eine ZV  $Y$ , so schreibt man  $\mathbb{E}(X | G) = \mathbb{E}(X | Y)$

### 3.5 Existenz & Eindeutigkeit

Gegeben seien die Bezeichnungen von 3.4. Dann existiert der bedingte Erwartungswert von  $X$  bzgl.  $G$  und ist  $\mathbb{P}$ -f.s. eindeutig bestimmt, d.h. erfüllen  $Z_1, Z_2$  die Bedingungen (i),(ii) aus 3.4, so gilt  $Z_1 = Z_2$ ,  $\mathbb{P}$ -f.s.

**Beweis:**

Existenz: 1.Fall:  $X \geq 0$

$\mu(A) = \int_A X d\mathbb{P}$ ,  $A \in G$  definiert ein  $\sigma$ -endliches Maß auf  $(\Omega, G)$  mit  $\mu \ll \mathbb{P}$ .

Satz von Radon-Nikodym liefert ein  $G$ -messbares  $Z$  mit  $\mu(A) = \int_A Z d\mathbb{P}$ . Also  $Z = \mathbb{E}(X | G) \quad \forall A \in G$

2.Fall:  $X = X^+ - X^-$

$\mathbb{E}(X^+ | G)$ ,  $\mathbb{E}(X^- | G)$  existiert nach Fall 1.

$$\begin{aligned} \int_A X d\mathbb{P} &= \int_A X^+ d\mathbb{P} - \int_A X^- d\mathbb{P} \\ &= \int_A \mathbb{E}(X^+ | G) d\mathbb{P} - \int_A \mathbb{E}(X^- | G) d\mathbb{P} \\ &= \int_A (\mathbb{E}(X^+ | G) - \mathbb{E}(X^- | G)) d\mathbb{P} \quad A \in G \end{aligned}$$

Also ist  $\mathbb{E}(X^+ | G) - \mathbb{E}(X^- | G)$  der bedingte Erwartungswert von  $X$  bzgl.  $G$ .

Eindeutigkeit:  $Z_1, Z_2$  bedingte EW. Sei  $A = \{Z_1 - Z_2 > \frac{1}{n}\}$ , ist  $G$  messbar.

$$\int_A Z_1 - Z_2 d\mathbb{P} \stackrel{Z_1, Z_2 \text{ EW}}{=} \int_A X d\mathbb{P} - \int_A X d\mathbb{P} = 0$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(Z_1 - Z_2 > \frac{1}{n}) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(Z_1 - Z_2 > 0) = 0$$

$$\text{Genauso folgt } \mathbb{P}(Z_2 - Z_1 > 0) = 0$$

□

**Beispiel**

$X_1, \dots, X_n$  iid ZV'en, sei  $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$ .

Frage: Was ist  $\mathbb{E}(X_1 | S_n)$ ?

Vermutung:  $\mathbb{E}(X_1 | S_n) = \mathbb{E}(X_2 | S_n) = \dots = \mathbb{E}(X_n | S_n)$

Dann gilt:

$$n\mathbb{E}(X_1 | S_n) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i | S_n) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i | S_n\right) = \mathbb{E}(S_n | S_n) = S_n$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(X_1 | S_n) = \frac{1}{n} S_n$$

Wieso ist  $\mathbb{E}(X_1 | S_n) = \mathbb{E}(X_k | S_n)$ ?

$$\mathbb{Z}: \int_{\{S_n \in B\}} X_1 d\mathbb{P} = \int_{\{S_n \in B\}} X_k d\mathbb{P} \quad \forall B \in \mathcal{L}$$

Da die  $X_1, \dots, X_n$  stochastisch unabhängig sind, ist die Verteilung durch  $\mathbb{P}^{(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(n)})}$  gegeben. Daher folgt

$$\int_{\{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i \in B\}} X_1 \mathbb{P}^{(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(n)})} d(x_1, \dots, x_n)$$

Betrachte Permutation  $\pi$  mit  $\pi(1) = k$ , dann folgt

$$= \int_{\{S_n \in B\}} X_k d\mathbb{P}$$

### 3.6 Faktorisierte bedingter Erwartungswert

Sei  $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{L})$  eine Zufallsvariable,  $Y : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (E, \mathcal{E})$  messbar.

Sei  $G = \sigma(Y)$ . Dann gilt:

Eine Zufallsvariable  $Z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ist  $G$ -messbar genau dann, wenn es eine  $\mathcal{E}$ -messbare Abbildung  $h : E \rightarrow \mathbb{R}$  gibt mit  $Z = h \circ Y$

Falls  $Z$  eine Version der bedingten Erwartung von  $X$  gegeben  $Y$  ist, so gibt es also ein  $h : E \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $Z = h \circ Y$ .

Schreibweise  $h(y) = \mathbb{E}(X | Y = y)$ ,  $h$  heißt Version der **faktorisierten** bedingten Erwartung von  $X$  gegeben  $Y$ .

Sind  $h_1, h_2$  Versionen der bedingten Erwartung von  $X$  gegeben  $Y$ , so gilt

$$h_1(y) = h_2(y) \text{ für } \mathbb{P}^Y\text{-f.a. } y \in E$$

$y \mapsto \mathbb{E}(X | Y = y)$  ist eindeutig festgelegt für  $\mathbb{P}^Y$ -f.a.  $y$  durch

$$\mathbb{E} 1_{\{Y \in B\}} = \int_{\{Y \in B\}} \mathbb{E}(X | Y) d\mathbb{P}$$

$$\int_{\{Y \in B\}} hY d\mathbb{P} = \int_B h(y) \mathbb{P}^Y(dy) \quad \forall B \in \mathcal{L}$$

Ausrechnen des bedingten Erwartungswertes erfolgt häufig durch Spezifikation der bedingten Verteilung.

### 3.7 Stochastischer Kern

Seien  $(\Omega, \mathcal{F}), (E, \mathcal{E})$  messbare Räume. Ein **stochastischer Kern** ist eine Abbildung  $K : \mathbb{E} \times K \rightarrow [0, 1]$  mit folgenden Eigenschaften:

- (i)  $K(y, \cdot)$  ist ein W-Maß für alle  $y \in E$
- (ii)  $K(\cdot, A)$  ist messbar für alle  $A \in \mathcal{F}$



### 3.8 bedingte W'keit und bedingte Verteilungen

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  ein W'Raum,  $G$  Unter- $\sigma$ -Algebra von  $\mathcal{F}$ . Für jedes  $\Gamma \in \mathcal{F}$  heißt  $\mathbb{E}(\mathbb{1}_\Gamma \mid G)$  **bedingte Wahrscheinlichkeit** von  $\Gamma$  gegeben  $G$

Schreibweise:

$$\mathbb{P}(\Gamma \mid G) := \mathbb{E}(\mathbb{1}_\Gamma \mid G)$$

Seien  $X : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (E_1, \mathcal{E}_1)$ ,  $Y : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (E_2, \mathcal{E}_2)$  messbare Abbildungen.

Die **bedingte Verteilung** von  $X$  gegeben  $Y$  ist ein stochastischer Kern  $K : E_2 \times \mathcal{E}_1 \rightarrow [0, 1]$  derart, dass  $y \mapsto K(y, A)$  eine Version der faktorisierten bedingten Erwartung von  $\mathbb{P}(X \in A \mid Y)$  ist für alle  $A \in \mathcal{E}_1$ .

Schreibweise:

$$K(y, A) = \mathbb{P}(X \in A \mid Y = y)$$

Durch Erweiterungsschluss kann man zeigen

$$\mathbb{E}(f(X) \mid Y = y) = \int f(x) K(Y, dx)$$

für jedes messbare  $f : E_1 \rightarrow (\Omega, \mathcal{L})$ .

### 3.9 Beispiel: diskrete Zufallsvariablen

Sei  $(E_1, \mathcal{E}_1)$  messbar,  $E_2$  abzählbar

$$\mathcal{E}_2 = \mathcal{P}(E_2)$$

$$X : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (E_2, \mathcal{E}_2) \text{ messbar}$$

$$Y : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (E_2, \mathcal{E}_2) \text{ messbar}$$

Die bedingte Verteilung von  $X$  gegeben  $Y = y$  ist definiert durch

$$\mathbb{P}(X \in A \mid Y = y) = \frac{\mathbb{P}(X \in A, Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)} \quad \forall y \in E_2 \text{ mit } \mathbb{P}(Y = y) > 0$$

Definiere den stochastischen Kern  $K : E_2 \times \mathcal{E}_1 \rightarrow [0, 1]$

$$K(y, A) = \begin{cases} \frac{\mathbb{P}(X \in A, Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)} & \forall A \in \mathcal{E}_1, y \in E_2 \text{ mit } \mathbb{P}(Y = y) > 0 \\ \text{irgendwie} & \text{d.h. wähle W'Maß auf } (E_1, \mathcal{E}_1) \\ & \text{und setze } K(y, A) = \mu(A) \quad \forall A \in \mathcal{E}_1 \end{cases}$$

Dann ist  $K$  die bedingte Verteilung von  $X$  gegeben  $Y$ .

### 3.10 Lebesgue-Dichten

Sei  $(X, Y)$  ein zweidimensionaler Zufallsvektor mit Lebesgue-Dichte  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) &= \int_{A \times B} h(x, y) \lambda^2(dx, dy) \\ &= \int_A \int_B h(x, y) \lambda(dy) \lambda(dx) \quad \forall B \in \mathcal{L}\end{aligned}$$

Setze  $f(y) = \int_{\mathbb{R}} h(x, y) dx$ .

Dann ist  $f$  messbar wegen Fubini und die Lebesgue-Dichte von  $Y$ , denn:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y \in B) &= \mathbb{P}(Y \in B, X \in \mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R} \times B} h(x, y) d(x, y) \\ &= \int_B \underbrace{\int_{\mathbb{R}} h(x, y) dx}_{f(y)} dy \quad \forall B \in \mathcal{L}\end{aligned}$$

Definiere den stochastischen Kern  $K : \mathbb{R} \times \mathcal{L} \rightarrow [0, 1]$  durch  $\begin{cases} \int_A \frac{h(x, y)}{f(y)} \lambda(dx) & \text{falls } f(y) > 0 \\ \text{irgendwie} & \text{sonst} \end{cases}$

$$\frac{\mathbb{P}(X \in A, Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)} \stackrel{X \text{ diskret}}{=} \frac{\sum_{x \in A} \mathbb{P}(X = x, Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)}$$

Dann ist  $K$  eine bedingte Verteilung von  $Y$ , denn

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) &= \int_{A \times B} h(x, y) \lambda^2(dx, dy) \\ &= \int_B \int_A h(x, y) dx dy \\ &= \int_{B \cap \{f > 0\}} \int_A \frac{h(x, y)}{f(y)} dx \cdot f(y) dy \\ &= \int_{B \cap \{f > 0\}} K(y, A) f(y) dy \\ &= \int_B K(y, A) \mathbb{P}^y(dy)\end{aligned}$$

Also gilt:  $\omega \mapsto K(Y(\omega), A)$  ist eine Version von  $\mathbb{P}(X \in A, Y)$   
 $\Rightarrow y \mapsto K(y, A)$  ist eine Version von  $\mathbb{P}(X \in A \mid Y = y)$

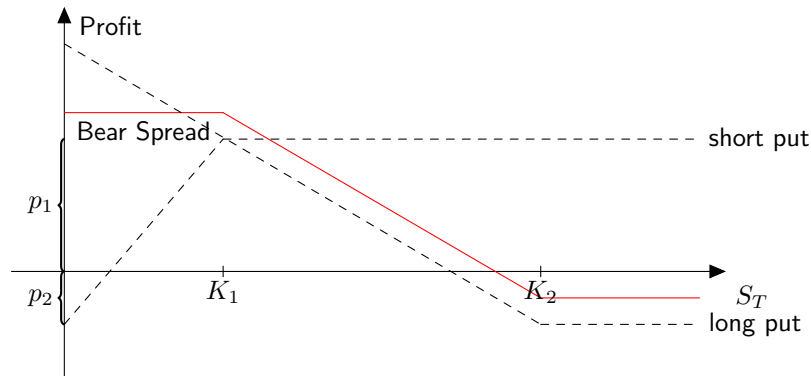
## Aussagen aus den Übungen

### Zettel 1

#### Aufgabe 1

##### Bear Spread:

long put, strike  $K_2$ , short put, strike  $K_1 < K_2$



$$\text{Profit: } (K_2 - S_T)^+ - p_2 + p_1 - (K_1 - S_T)^+ = (K_2 - K_1) + (p_1 - p_2)$$

#### Aufgabe 3

##### Exchange-Option:

Analog zur Put-Call-Parität.

### Zettel 2

#### Aufgabe 1

##### Eigenschaften des Put-Preises:

- (i) innerer Wert:  $P(S_0, T, K) \geq \max\{0, K \cdot B(0, T) - S_0\}$
- (ii) obere Grenze:  $P(S_0, T, K) < K$
- (iii) Monoton im strike:  $K_1 \leq K_2 \Rightarrow P(S_0, T, K_1) \leq P(S_0, T, K_2)$
- (iv)  $B(0, T)(K_2 - K_1) \geq P(K_2) - P(K_1) \quad \forall K_1 \leq K_2$
- (v) Konvexität in  $K$ :

$$P(K_2) \leq \lambda P(K_1) + (1 - \lambda)P(K_3) \quad \forall K_1 < K_2 < K_3 \text{ mit } \lambda = \frac{K_3 - K_2}{K_3 - K_1}$$

Beweise analog zum Call-Preis.

#### Aufgabe 2

Gelte No-Arbitrage und keine Deflation, d.h.  $0 < B(0, T) < 1$ .

Dann ist der Call-Preis monoton in der Zeit, also

$$T_1 < T_2 : \quad C(T_1) \leq C(T_2)$$

##### Beweis:

folgt!

## Aufgabe 4

### Terminzinssatz

Der Kunde zahlt jedes Jahr  $K\text{€}$  an die Versicherung, die dafür eine bestimmte, im voraus festgelegte Rendite  $R$  zusichert. Erstelle einen geeigneten Sparplan.

Annahme: Kunde zahlt immer am Jahresanfang. Die Versicherung muss heute, in  $t_0$ ,  $n \cdot K\text{€}$  anlegen um die garantierte Rendite zu gewährleisten.

in  $t_0$  short in Zero-Bonds:

$$K \cdot B(t_0, 1), K \cdot B(t_0, 2), \dots, K \cdot B(t_0, n-1)$$

Also zu jedem  $j = 1, \dots, n-1$  muss die Versicherung  $K\text{€}$  an die Bank zurück zahlen, dies wird gerade durch die jährlichen Prämien der Kunden getilgt.

Also hat die Versicherung am Anfang ein Kapital von  $K + \sum_{j=1}^{n-1} K \cdot B(t_0, j)$  zur Verfügung. Lege dies in Zero-Bonds an mit Laufzeit  $n$  Jahren an:

$$\left( K \cdot \sum_{j=1}^{n-1} K \cdot B(t_0, j) \right) \times \text{long in } n\text{-Zero-Bonds}$$

Daher Auszahlung bei  $T = n$ :

$$R = \left( K \cdot \left( 1 + \sum_{j=1}^{n-1} B(t_0, j) \right) \right) \cdot \frac{1}{B(t_0, n)}$$

$R$  ist dann die mögliche garantierte Auszahlung.

## Index

*Die Seitenzahlen sind mit Hyperlinks zu den entsprechenden Seiten versehen, also anklickbar!*

abdiskontierten, 15

adaptiert, 26

amerikanische Option, 2

Anleihe

    Festzins-, 12

    Nullkoupon-, 8

    Variabelverzinsliche, 13

        Floater FRN, 13

Arbitrage, 7

    No-, 7

aufgeschobene Rentenversicherung, 18

ausgewogen, 16

Barwert, 16

Basispunkt, 11

bedingte Verteilung, 29

bedingte Wahrscheinlichkeit, 29

bedingter Erwartungswert, 27

    faktorierte bed. EW, 28

Beitragsspektrum, 16

Call, 2

CRR-Modell, 26

Deckungskapital, 19

    -verlauf, 19

    prospektives, 19

deterministischen Zinsentwicklung, 19

Digitale Position, 9

Diskontfaktor, 15

Erlebensfallsumme, 18

Erlebensfallversicherung, 18

Erlebensspektrum, 15

europäische Option, 2

Exchange-Option, A

fair, 16

Filtration, 26

forward, 9

Geldmarktkonto, 26

gemischte Versicherung, 19

innerer Wert, 9

Konvexität in  $K$ , 9

Lebesgue-Dichte, 29

Leerverkauf, 2

nachschüssige Kuponzahlungen, 13

obere Grenze, 9

Payoff, 3

Personengemeinschaften, 22

Position

    long, 2

    short, 2

Prämienreserve, 19

Profit, 3

Put, 2

Random-Walk, 26

    geometrischer, 26

Replikationsprinzip, 7

Rollierende Anlage, 13

Spotpreis, 9

stochastischer Kern, 28

stochastischer Prozess, 26

Strategien, 5

    Bear Spread, A

    Bullish Vertical Spread, 6

    Butterfly Spread, 6

    long straddle, 6

strike, 2

Swaprate, 14

Swaps

    Payer-, 14

    Receiver-, 14

    Zinsswap, 14

Tenorstruktur, 14

Termingeschäft

    bedingtes, 9

    unbestimmtes, 2

Todesfallspektrum, 15

Todesfallversicherung, 16

Underlying, 2

Zählkonvention, 10

Zahlungsströme, 15

Zinsänderungsrisiko, 14

Zinsmethoden, 10

    lineare, 11

periodische, 11  
stetige, 11  
    konstant, 11  
    nicht konstant, 11  
Zinssatz, 10

## Abbildungsverzeichnis

1	Payoff long call . . . . .	3
2	Profit long call . . . . .	3
3	Payoff long put . . . . .	4
4	Profit long put . . . . .	4
5	Payoff short call . . . . .	4
6	Profit short call . . . . .	4
7	Payoff short put . . . . .	5
8	Profit short put . . . . .	5
9	Bsp. Profit Diagramm . . . . .	5
10	long straddle . . . . .	6
11	Bullish Vertical Spread . . . . .	6
12	long Butterfly Spread . . . . .	7
13	Konvexität in K . . . . .	9
14	Ablauf Festzinsanleihe . . . . .	12
15	Deckungskapital: Todesfall, begrenzt . . . . .	20
16	Deckungskapital: Todesfall, unbegrenzt . . . . .	21
17	Deckungskapital: Erlebensfall . . . . .	21
18	Deckungskapital: gemischte Versicherung . . . . .	22
19	Deckungskapital: Rentenversicherung . . . . .	22
20	CRR-Modell . . . . .	26