



WESTFÄLISCHE  
WILHELMS-UNIVERSITÄT  
MÜNSTER



FACHBEREICH 10  
MATHEMATIK UND  
INFORMATIK

# Skript Operatoralgebren

Mitschrift der Vorlesung „Operatoralgebren“ von Prof. Dr. Wilhelm Winter

Jannes Bantje

20. Oktober 2015

## Aktuelle Version verfügbar bei



<https://github.com/JaMeZ-B/latex-wwu>

GitHub ist eine Internetplattform, auf der viele OpenSource-Projekte gehostet werden. Diese Plattform nutzen wir zur Zusammenarbeit, also findet man hier neben den PDFs auch die  $\text{\TeX}$ -Dateien. Außerdem ist über diese Plattform auch direktes Mitarbeiten möglich, siehe nächste Seite.



<https://uni-muenster.sciebo.de/public.php?service=files&t=965ae79080a473eb5b6d927d7d8b0462>

Sciebo ist ein Dropbox-Ersatz der Hochschulen in NRW, der von der Uni Münster in leitender Position auf Basis der OpenSource-Software Owncloud aufgebaut wurde. Wenn man auf den Link klickt, kann man die Freigabe zum eigenen Speicher hinzufügen und hat dann immer automatisch die aktuellste Version.



B6WH2DISQ5QVYIRYIEZSF4ZR2IDVKPN3I

BTSync ist ein peer-to-peer Dateisynchronisations-Tool. Dabei werden die Dateien nur auf den Computern der Teilnehmer an einer Freigabe gespeichert. Ein RasPi ist permanent online, sodass stets die aktuellste Version verfügbar ist. Clients gibt es für jedes Betriebssystem. Zugang ist über das obige „Secret“ bzw. den QR-Code möglich.



## Vorlesungshomepage

<https://wwwmath.uni-muenster.de/u/wilhelm.winter/wwinter/operatoralgebren.html>

Hier ist ein Link zur offiziellen Vorlesungshomepage.

## Vorwort — Mitarbeit am Skript

Dieses Dokument ist eine Mitschrift aus der Vorlesung „Operatoralgebren, WiSe 2015“, gelesen von Prof. Dr. Wilhelm Winter. Der Inhalt entspricht weitestgehend dem Tafelanschrieb. Für die Korrektheit des Inhalts übernehme ich keinerlei Garantie! Für Bemerkungen und Korrekturen – und seien es nur Rechtschreibfehler – bin ich sehr dankbar. Korrekturen lassen sich prinzipiell auf drei Wegen einreichen:

- ▶ Persönliches Ansprechen in der Uni, Mails an [j.bantje@wwu.de](mailto:j.bantje@wwu.de) (gerne auch mit annotieren PDFs) oder Kommentare auf <https://github.com/JaMeZ-B/latex-wwu>.
- ▶ *Direktes* Mitarbeiten am Skript: Den Quellcode poste ich auf GitHub (siehe oben), also stehen vielfältige Möglichkeiten der Zusammenarbeit zur Verfügung: Zum Beispiel durch Kommentare am Code über die Website und die Kombination Fork + Pull Request. Wer sich verdient macht oder ein Skript zu einer Vorlesung, die ich nicht besuche, beisteuern will, dem gewähre ich gerne auch Schreibzugriff.

Beachten sollte man dabei, dass dazu ein Account bei [github.com](https://github.com) notwendig ist, der allerdings ohne Angabe von persönlichen Daten angelegt werden kann. Wer bei GitHub (bzw. dem zugrunde liegenden Open-Source-Programm „git“) – verständlicherweise – Hilfe beim Einstieg braucht, dem helfe ich gerne weiter. Es gibt aber auch zahlreiche empfehlenswerte Tutorials im Internet.<sup>1</sup>

- ▶ *Indirektes* Mitarbeiten:  $\text{\TeX}$ -Dateien per Mail verschicken.

Dies ist nur dann sinnvoll, wenn man einen ganzen Abschnitt ändern möchte (zB. einen alternativen Beweis geben), da ich die Änderungen dann per Hand einbauen muss! Ich freue mich aber auch über solche Beiträge!

## Anmerkung

Innerhalb dieser Mitschrift wird man öfter den Ausdruck „Warum?“ finden. Dies sind vom Dozenten bewusst weggelassene Details, die zu verstärktem Mitdenken beim Lesen animieren sollen. Oftmals sind dies schon aus vorherigen Semestern bekannte Sachverhalte. Nur an wenigen Stellen habe ich die fehlenden Details hinzugefügt.

---

<sup>1</sup> zB. <https://try.github.io/levels/1/challenges/1>, ist auf Englisch, aber dafür interaktives LearningByDoing

## Inhaltsverzeichnis

<b>1 Spektraltheorie in Banachalgebren</b>	<b>1</b>
<b>Index</b>	<b>A</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>B</b>
<b>Todo list</b>	<b>B</b>

# 1 Spektraltheorie in Banachalgebren

**1.1 Definition.** Eine *Banachalgebra* ist eine vollständige normierte Algebra. Es gilt also stets  $\|ab\| \leq \|a\| \cdot \|b\|$ . Wir betrachten in dieser Vorlesung fast ausschließlich Algebren über  $\mathbb{C}$ . Eine Banachalgebra heißt *unital*, falls sie ein Einselement  $1$  mit  $\|1\| = 1$  enthält.

**1.2 Definition.** Für eine unitale  $\mathbb{C}$ -Algebra  $A$  setzen wir

$$\begin{aligned} \text{Inv}(A) &:= \{a \in A \text{ invertierbar}\} \\ \sigma(a) &:= \sigma_A(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda \cdot 1 - a \notin \text{Inv}(A)\} \end{aligned}$$

$\sigma(a)$  heißt *Spektrum* von  $a$ .

**1.3 Bemerkung.** Sei  $A$  wie oben und  $a, b \in A$ . Dann gilt

$$1 - ab \in \text{Inv}(A) \iff 1 - ba \in \text{Inv}(A)$$

**BEWEIS:** Durch simplex Nachrechnen verifiziert man, dass  $(1 - ba)^{-1} = 1 + b(1 - ab)^{-1}a$  gilt.  $\square$

**1.4 Satz.** Sei  $A$  eine unitale  $\mathbb{C}$ -Algebra und  $a \in A$  mit  $\sigma(a) \neq \emptyset$ . Sei weiter  $p \in \mathbb{C}[Z]$  ein Polynom. Dann gilt

$$\sigma(p(a)) = p(\sigma(a))$$

**BEWEIS:** Die Aussage ist trivial, falls  $p$  konstant ist. Sei also  $p$  nicht konstant. Zu  $\mu \in \mathbb{C}$  existieren  $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$  mit  $\lambda_0 \neq 0$  und  $p(z) - \mu = \lambda_0 \cdot (z - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (z - \lambda_n)$ , also

$$p(a) - \mu = \lambda_0 \cdot (a - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (a - \lambda_n)$$

Damit gilt:  $p(a) - \mu$  ist genau dann invertierbar, wenn  $a - \lambda_1, \dots, a - \lambda_n$  invertierbar sind. Also

$$\begin{aligned} \mu \in \sigma(p(a)) &\iff \lambda_i \in \sigma(a) \text{ für ein } i \in \{1, \dots, n\} \\ &\iff p(\lambda) - \mu = 0 \text{ für ein } \lambda \in \sigma(a) \\ &\iff p(\lambda) = \mu \text{ für ein } \lambda \in \sigma(a) \end{aligned}$$

Somit folgt dann  $\sigma(p(a)) = p(\sigma(a))$ .  $\square$

**1.5 Satz.** Sei  $A$  eine unitale Banachalgebra und  $a \in A$ . Falls  $\|a\| < 1$ , so ist  $1 - a$  invertierbar und

$$(1 - a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \quad (\text{Neumannsche Reihe})$$

**BEWEIS:** Die Folge der Partialsummen  $(\sum_{n=0}^k a^n)_{k \in \mathbb{N}} \subset A$  ist eine Cauchyfolge (warum?), sodass die unendliche Summe existiert. Es gilt dann

$$(1 - a) \left( \sum_{n=0}^{\infty} a^n \right) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (1 - a) \left( \sum_{n=0}^k a^n \right) = 1 - a^{k+1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1$$

Die Summe ist also ein Rechtsinverses. Genauso folgt, dass es auch ein Linksinverses ist.  $\square$

**1.6 Korollar.** Für eine unitale Banachalgebra  $A$  gilt  $\text{Inv}(A) \subset A$  offen.

**BEWEIS:** Falls  $a \in \text{Inv}(A)$  und  $\|b - a\| < \|a^{-1}\|^{-1}$ , so gilt  $\|ba^{-1} - 1\| \leq \|b - a\| \|a^{-1}\| < 1$ , also ist  $-(1 - (ba^{-1} - 1)) = ba^{-1}$  invertierbar nach Satz 1.5 und damit auch  $b \in \text{Inv}(A)$ , denn  $b$  ist ein Linksinverses für  $a^{-1}(ba^{-1})^{-1} \in \text{Inv}(A)$ .  $\square$

**1.7 Definition.** Sei  $A$  eine unitale Banachalgebra. Für  $a \in A$  definieren wir den *Spektralradius* durch

$$r(a) := \sup_{\lambda \in \sigma(a)} |\lambda|$$

**1.8 Proposition.** Seien  $A, a$  wie oben. Dann ist  $\sigma(a)$  kompakt und  $r(a) \leq \|a\|$ .

**BEWEIS:** Angenommen  $|\lambda| > \|a\|$ , dann gilt  $\|\lambda^{-1} \cdot a\| < 1$ , also ist  $1 - \lambda^{-1} \cdot a$  invertierbar nach Satz 1.5 und  $\lambda - a \in \text{Inv}(A)$ . Damit ist  $\lambda \notin \sigma(a)$ . Damit folgt, dass  $r(a) \leq \|a\|$  ist. Es ist  $\mathbb{C} \setminus \sigma(a) \subset \mathbb{C}$  offen, da  $\text{Inv}(A) \subset A$  offen ist. Damit muss  $\sigma(a)$  kompakt sein.  $\square$

**1.9 Satz.** Sei  $A$  eine unitale Banachalgebra. Für jedes  $a \in A$  ist  $\sigma(a)$  nichtleer.

**BEWEIS:** Falls  $|\lambda| > \|a\|$ , so existiert  $(1 - \lambda^{-1}a)^{-1}$ , also  $(\lambda - a)^{-1}$  und es gilt

$$(\lambda - a)^{-1} = \lambda^{-1}(1 - \lambda^{-1}a)^{-1} = \lambda^{-1} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} a^n \right)$$

Es folgt

$$\|(\lambda - a)^{-1}\| \leq |\lambda^{-1}| \cdot \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (|\lambda^{-1}| \cdot \|a\|)^n}_{\leq 2, \text{ falls } |\lambda| > 2\|a\|} \xrightarrow{|\lambda| \rightarrow \infty} 0 \quad [*]$$

Sei nun  $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \sigma(a)$  und  $|\lambda - \lambda_0| < \|(\lambda - \lambda_0)^{-1}\|^{-1}$ . Dann gilt

$$\|(\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_0)^{-1}\| \leq \|\lambda - \lambda_0\| \|(\lambda - \lambda_0)^{-1}\| < 1$$

also  $(1 - (\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_0)^{-1})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n (\lambda - \lambda_0)^{-n}$  und

$$\begin{aligned} - \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n (\lambda - \lambda_0)^{-(n+1)} &= (\lambda - \lambda_0)^{-1} ((\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_0)^{-1} - 1)^{-1} \\ &= \left( (\lambda - \lambda_0) \underbrace{(\lambda - \lambda_0)^{-1} (\lambda - \lambda_0)}_{=1} - (\lambda - \lambda_0) \right)^{-1} = (\lambda - a)^{-1} \end{aligned}$$

Für ein stetiges Funktional  $\varphi \in A^*$  erhalten wir

$$\varphi((\lambda - a)^{-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} -\varphi((\lambda - \lambda_0)^{-(n+1)}) \cdot (\lambda - \lambda_0)^n$$

falls  $|\lambda - \lambda_0| < \|(\lambda - \lambda_0)^{-1}\|^{-1}$ . Daher ist  $\lambda \mapsto \varphi((\lambda - a)^{-1})$  holomorph auf  $\mathbb{C} \setminus \sigma(a)$ . Falls  $\sigma(a) = \emptyset$ , so ist  $\lambda \mapsto \varphi((\lambda - a)^{-1})$  ganz. Wegen [\*] und dem Satz von Liouville<sup>2</sup> ist dann  $\varphi((\lambda - a)^{-1}) = 0$  für alle  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Aber  $\varphi \in A^*$  war beliebig, und wegen Hahn-Banach gilt  $(\lambda - a)^{-1} = 0$ . Dies ist ein Widerspruch.  $\square$

<sup>2</sup> siehe [https://de.wikipedia.org/wiki/Satz\\_von\\_Liouville\\_%28Funktionentheorie%29](https://de.wikipedia.org/wiki/Satz_von_Liouville_%28Funktionentheorie%29)

## Index

Die *Seitenzahlen* sind mit Hyperlinks versehen und somit anklickbar

Banachalgebra, 1

Neumannsche Reihe, 1

Spektralradius, 2

Spektrum, 1

unital, 1

## Abbildungsverzeichnis

### To-do's und andere Baustellen