Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

Fachbereich 10
Mathematik und
Informatik

Finanzmathematik

Aufarbeitung der Übungen

Tobias Wedemeier

15. November 2014
gelesen von
PD Dr. Paulsen

Hierbei handelt es sich um eine Aufarbeitung der Übungenvon **PD Dr. Paulsen**, WWU Münster, aus der Vorlesung **Finanzmathematik** im Wintersemester 2014/15. Dies ist kein Skript der Vorlesung und keine eigene Arbeit des Autors.

Für Fehler in der Aufarbeitung wird keine Haftung übernommen. Hinweise auf Fehler sind gerne gesehen, hierfür kann man mich in der Uni ansprechen oder alternativ eine e-Mail an:
tobias.wedemeier@gmx.de
Auch ist eine Mitarbeit über Github möglich.

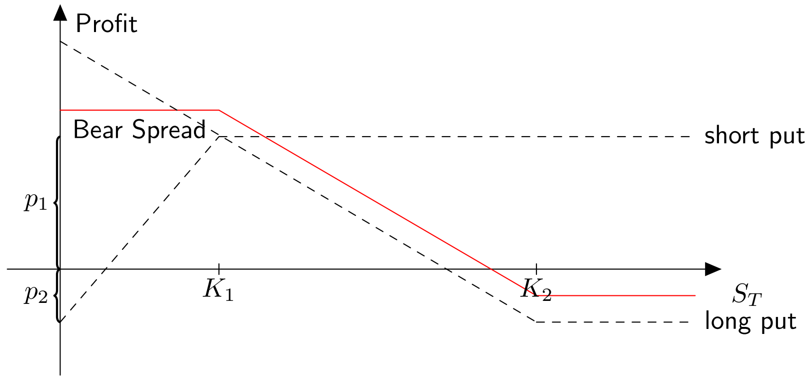
Die Beweise stammen größtenteils vom Autor oder anderen Kommilitonen, und sind teilweise nur verkürzt oder vereinfacht dargestellt. Sie dienen nur dem Verständnis.

Inhaltsverzeichnis

Aussagen aus den Übungen

Zettel 1

Aufgabe 1
Bear Spread:
long put, strike K_2, short put, strike $K_1 < K_2$



Profit: $(K_2 - S_T)^+ - p_2 + p_1 - (K_1 - S_T)^+ = (K_2 - K_1) + (p_1 - p_2)$

Aufgabe 3
Exchange-Option:
Analog zur Put-Call-Parität.

Zettel 2

Aufgabe 1
Eigenschaften des Put-Preises:

(i) innerer Wert: $P(S_0, T, K) \geq \max\{0, K \cdot B(0,T) - S_0\}$

(ii) obere Grenze: $P(S_0, T, K) < K$

(iii) Monoton im strike: $K_1 \leq K_2 \Rightarrow P(S_0, T, K_1) \leq P(S_0, T, K_2)$

(iv) $B(0,T)(K_2 - K_1) \geq P(K_2) - P(K_1) \quad \forall K_1 \leq K_2$

(v) Konvexität in K:

$$P(K_2) \leq \lambda P(K_1) + (1-\lambda) P(K_3) \quad \forall K_1 < K_2 < K_3 \text{ mit } \lambda = \frac{K_3 - K_2}{K_3 - K_1}$$

Beweise analog zum Call-Preis.

Aufgabe 2
Gelte No-Arbitrage und keine Deflation,d.h. $0 < B(0,T) < 1$.
Dann ist der Call-Preis monoton in der Zeit, also

$$T_1 < T_2: \quad C(T_1) \leq C(T_2)$$

Beweis:
folgt!

Aufgabe 4
Terminzinssatz
Der Kunde zahlt jedes Jahr $K£$ an die Versicherung, die dafür eine bestimmte, im voraus festgelegte Rendite R zusichert. Erstelle einen geeigneten Sparplan.
Annahme: Kunde zahlt immer am Jahresanfang. Die Versicherung muss heute, in t_0, $n \cdot K£$ anlegen um die garantierte Rendite zu gewährleisten.
in t_0 short in Zero-Bonds:

$$K \cdot B(t_0, 1), K \cdot B(t_0, 2), \cdot, K \cdot B(t_0, n-1)$$

Also zu jedem $j = 1, \ldots, n-1$ muss die Versicherung $K£$ an die Bank zurück zahlen, dies wird gerade durch die jährlichen Prämien der Kunden getilgt.
Also hat die Versicherung am Anfang ein Kapital von $K + \sum_{j=1}^{n-1} K \cdot B(t_0, j)$ zur Verfügung. Lege dies in Zero-Bonds an mit Laufzeit n Jahren an:

$$\left(K \cdot \sum_{j=1}^{n-1} K \cdot B(t_0, j) \right) \times \text{long in n-Zero-Bonds}$$

Daher Auszahlung bei $T = n$:

$$R = \left(K \cdot \left(1 + \sum_{j=1}^{n-1} B(t_0, j) \right) \right) \cdot \frac{1}{B(t_0, n)}$$

R ist dann die mögliche garantierte Auszahlung.

Abbildungsverzeichnis