Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Fachbereich 10 Mathematik und Informatik

Skript Differentialgeometrie I.

Mitschrift der Vorlesung „Differentialgeometrie I.“ von Frederik Witt

Arne Grauer

20. Oktober 2014

Aktuelle Version verfügbar bei:

GitHub (inklusive Sourcecode)
`https://github.com/JaMeZ-B/latex-wwu`

Bittorrent Sync
`B6WH2DISQ5QVYIRYIEZSF4ZR2IDVKPN3I`

Vorwort — Mitarbeit am Skript

Dieses Dokument ist eine Mitschrift aus der Vorlesung „Differentialgeometrie I., WiSe 2014“, gelesen von Frederik Witt. Der Inhalt entspricht weitestgehend dem Tafelanschrieb. Für die Korrektheit des Inhalts übernehme ich keinerlei Garantie! Für Bemerkungen und Korrekturen – und seien es nur Rechtschreibfehler – bin ich sehr dankbar. Korrekturen lassen sich prinzipiell auf drei Wegen einreichen:

- Persönliches Ansprechen in der Uni, Mails an `j.bantje@wwu.de` (gerne auch mit annotieren PDFs)
- *Direktes* Mitarbeiten am Skript: Den Quellcode poste ich auf GitHub (siehe oben), also stehen vielfältige Möglichkeiten der Zusammenarbeit zur Verfügung: Zum Beispiel durch Kommentare am Code über die Website und die Kombination Fork + Pull Request. Wer sich verdient macht oder ein Skript zu einer Vorlesung, die ich nicht besuche, beisteuern will, dem gewähre ich gerne auch Schreibzugriff.

  Beachten sollte man dabei, dass dazu ein Account bei `github.com` notwendig ist, der allerdings ohne Angabe von persönlichen Daten angelegt werden kann. Wer bei GitHub (bzw. dem zugrunde liegenden Open-Source-Programm „`git`“) – verständlicherweise – Hilfe beim Einstieg braucht, dem helfe ich gerne weiter. Es gibt aber auch zahlreiche empfehlenswerte Tutorials im Internet.[1]
- *Indirektes* Mitarbeiten: TeX-Dateien per Mail verschicken.

  Dies ist nur dann sinnvoll, wenn man einen ganzen Abschnitt ändern möchte (zB. einen alternativen Beweis geben), da ich die Änderungen dann per Hand einbauen muss!

Vorlesungshomepage

`https://wwwmath.uni-muenster.de/u/frederik.witt/diffgeoI.html`

Über die Differentialgeometrie

1. Differentialgeometrie Mannigfaltigkeiten $\Rightarrow$ Differentialtopologie

2. Riemannsche Geometrie Längen und Winkel messen $\rightsquigarrow$ Geodäte (lokal) kürzeste Verbindung zwischen 2 Punkten einer Mannigfaltigkeit.

Krümmung

Allgemeine Relativitätstheorie: Krümmung = Gravitation ist für solche Effekte verantwortlich

[1] zB. `https://try.github.io/levels/1/challenges/1`, ist auf Englisch, aber dafür interaktives LearningByDoing

Inhaltsverzeichnis

1 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Konvention: glatt = C^∞.
Wiederholung: Diffeomorphismus $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ glatt, bijektiv und f^{-1} glatt.

1.1 Untermannigfaltigkeiten

1.1.1 Definition

Eine Abbildung $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ glatt heißt **Submersion**/**Immersion**/**Étale** in $x \in U$, falls $\mathrm{d}_x f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ surjektiv/injektiv/Isomorphismus ist. . f heißt schlechthin **Submersion**/**Immersion**/**Étale**, falls f Submersion/Immersion/Étale für alle $x \in U$ ist.

Insbesondere $n \geq m/n \leq m/n = m$

1.1.2 Bemerkung

Submersiv/immersiv/étale sind offene Bedingungen, d.h. ist f Submersion/Immersion/Étale in x, so auch in einer hinreichend kleinen Umgebung von x (vergleiche auch Satz 15 unten)

1.1.3 Satz über inverse Funktionen (inverse function theorem)

Sei $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ étale in x. Dann existiert eine offene Menge $x \in V \subset U \subset \mathbb{R}^n$, sodass $f\big|_V$ ein Diffeomorphismus auf seinem Bild ist, d.h. $f\big|_V : V \xrightarrow{\sim} f(V)$ ist bijektiv und $f\big|_V$, $(f\big|_V)^{-1}$ glatt.

1.1.4 Satz über implizite Funktionen (implicit function theorem)

Sei $f : U \subset \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^n$ eine Submersion in 0 mit $f(0) = 0$. Dann existiert eine glatte Funktion g auf einer Umgebung von $0 \in \mathbb{R}^n$ mit Werten in $\mathbb{R}^k$, d.h.

$$g = g(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} g_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ g_k(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

mit

$$f\big(x_1, \dots, x_n, g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_k(x_1, \dots, x_n)\big) = f\big(x, g(x)\big) = 0$$

1.1.5 Satz (Normalenformen von Submersionen/Immersionen)

a) Sei $f : U \subseteq \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^n$ eine Submersion mit $f(0) = 0$. Dann existiert ein Diffeomorphismus $\varphi : 0 \in V \subset \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^{n+k}$ mit $\varphi(V) \subset U$ und $f \circ \varphi(x_1, \dots, x_{n+k}) = (x_1, \dots, x_n) = \pi_{\mathbb{R}^n}(x_1, \dots, x_{n+k})$, d.h. modulo einer Diffeomorphismus ist jede Submersion äquivalent zu einer Projektion.

b) Sei $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+k}$ eine Immersion in 0, $f(0) = 0$. Dann existiert ein Diffeomorphismus

$$\varphi : 0 \in V \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+k}$$

mit $\varphi(0) = 0$ und

$$\varphi \circ f(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0) = i(x_1, \dots, x_n)$$

d.h. modulo Diffeomorphismen ist f äquivalent zur kanonischen Einbettung von $\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+k}$.

Beweis

(i) Wähle Koordinaten $x_1, \dots, x_n$ mit $\mathrm{d}_0 f = (A\,B)$ mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{k\times n}$ mit $\det A \neq 0$. Definiere $F : U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ durch $(p,q) \mapsto (f(p,q), q)$. Dann gilt

$$\mathrm{d}_{(0,0)} F = \begin{pmatrix} \mathrm{d}_0 f & \\ 0 & \mathrm{id}_{k\times k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & \mathrm{id}_{k\times k} \end{pmatrix} \Longrightarrow \det \mathrm{d}_0 F \neq 0$$

Mit 1.1.3 folgt: $\varphi = F^{-1}$ Diffeomorphismus um $0 \in \mathbb{R}^{n+k}$ herum.

(ii) Definiere $F : U \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$. $F(p,q) = f(p) + (0,q)$.

$$\mathrm{d}_{(0,0)} F = \begin{pmatrix} \mathrm{d}_0 f & 0 \\ 0 & \mathrm{id}_{k\times k} \end{pmatrix},$$

also $\det \mathrm{d}_{(0,0)} F \neq 0$. $\Rightarrow \exists \varphi = F^{-1}$ um 0 mit $\varphi(f(p)) = \varphi \circ F(p,0) = (p,0) = i(p)$ □

Bemerkung

Durch Komposition mit Translationen können Submersionen/Immersionen mit $F(x) = y$ (nicht notwendigerweise $= 0$) behandelt werden.

1.1.6 Definition

$M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ heißt n-dimensionale **Untermannigfaltigkeit**, falls $\forall x \in M : \exists x \in U \subset \mathbb{R}^{n+k}$ Umgebung, sowie eine Submersion $f : U \to \mathbb{R}^k$ mit $U \cap M = f^{-1}(0)$.

Verallgemeinerung des n-dimensionalen Unterraumes

1.1.7 Beispiele

(i) Die n-**Sphäre** $S^n := \left\{ x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \,\middle|\, |x|^2 = 1 \right\}$ ist eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+1}$. Definiere $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ durch $f(x_1, \dots, x_{n+1}) = x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 - 1$. $\Rightarrow f^{-1}(0) = S^n$ nach Definition.

$$\mathrm{d}_x f = (2x_1, \dots, 2x_{n+1}) : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$$

(ii) Die hyperbolischen Räume $H_c^n := \left\{ x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \,\middle|\, -x_1^2 + \sum_{i=2}^{n+1} x_i^2 = c \right\}$

Hyperbolische Räume für c < 0,c > 0 und c = 0

Sei $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_c(x) = -x_1^2 + \sum_{i=2}^{n+1} x_i^2 - c$.
$\Rightarrow f$ ist glatt und $f_c^{-1}(0) = H_c^n$
Es bleibt zu zeigen, das f eine Submersion ist.

$$\mathrm{d}_x f = (-2x_1, 2x_2, \dots, 2x_{n+1}) : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$$

Es gilt $\mathrm{d}_x f(\nu) = 0 \forall \nu \in \mathbb{R}^{n+1} \Leftrightarrow x_i = 0 \;\forall i = 1, \dots, n+1$.
Das heißt $\exists i : x_i \neq 0 \Rightarrow \mathrm{d}_x f$ Submersion, wobei $\exists i : x_i \neq 0$ gilt, falls $x \in H_c^n, c \neq 0$. Also ist für $c \neq 0$ H_c^n eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Für $c = 0$ ist $H_0^n \backslash \{0\}$ eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit.

(iii) Der n-Torus $T^n = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n} \,|\, x_1^2 + x_2^2 = 1, \ldots, x_{2n-1}^2 + x_{2n}^2 = 1\}$

$$f : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 1 \\ \vdots \\ x_{2n-1}^2 + x_{2n}^2 - 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow f$ glatt, $f^{-1}(0) = T^n$

$$\mathrm{d}_x f = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2x_3 & 2x_4 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & & 2x_{2n-1} & 2x_{2n} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \mathrm{d}_x f$ ist eine Submersion.

(iv) Die orthogonale Gruppe $O(n) \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ ist eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $\frac{n(n-1)}{2}$.

$$O(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \,|\, AA^T = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} = f^{-1}(0)\},\ f(A) = AA^T - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$$

Es gilt $f(A)^T = {A^T}^T \cdot A^T - \mathrm{id}^T = AA^T - \mathrm{id} = f(A)$. Also $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathrm{Sym}(\mathbb{R}^{n\times n}) = \{A \subseteq \mathbb{R}^{n\times n} \,|\, A^T = A\}$.
$\Rightarrow f$ glatt, $f^{-1}(0) = O(n)$

$$\mathrm{d}_A f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathrm{Sym}(\mathbb{R}^{n\times n}),\ \mathrm{d}_A f = HA^T + AH^T$$

Sei $S \in \mathrm{Sym}(\mathbb{R}^{n\times})$. Setze $H = \frac{SA}{2} \Rightarrow \mathrm{d}_A f(\frac{SA}{2}) = \frac{1}{2}(SAA^T + ASA^T) = \frac{1}{2}(S + S) = S$
$\Rightarrow O(n)$ ist eine Untermannigfaltigkeit

1.1.8 Bemerkung

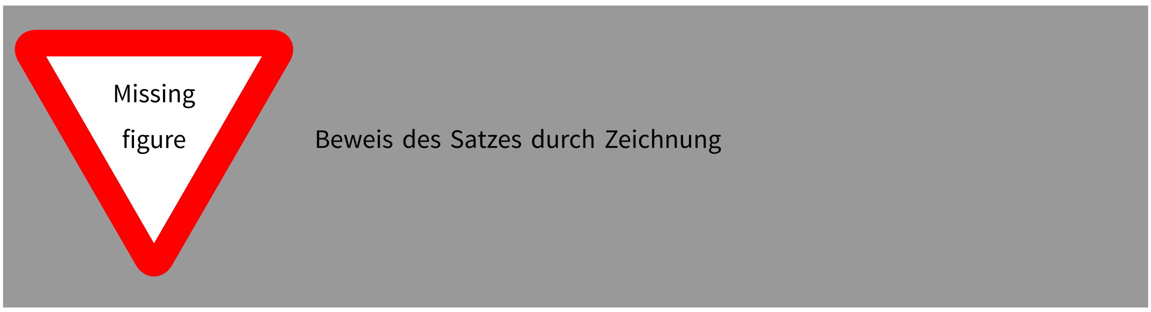
M kann von der Form $M = f^{-1}(0)$ sein, f glatt, aber keine Submersion. Zum Beispiel

$$M = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \in \mathbb{R}\} = f^{-1}(0),\ f(x, y) = x^3 + y^3$$

1.1.9 Satz

Es sind äquivalent:

1. $M^n \subset \mathbb{R}^{n+k}$ ist n-dim Untermannigfaltigkeit
2. $\forall x \in M^n\ \exists$ Umgebungen U und $V \subset \mathbb{R}^{n+k}$ von x und 0, und ein Diffeomorphismus $\phi : U \to V$ mit $\phi(M \cap U) \to \underbrace{(\mathbb{R}^n \times \{0\} \cap V)}_{=:W}$
3. $\forall x \in M^n\ \exists$ Umgebungen $U \subset \mathbb{R}^{n+k}$ und $W \subset \mathbb{R}^n$, sowie eine glatte Abbildung $g : W \to \mathbb{R}^{n+k}$, sodass g ein Homöomorphismus von W auf $M \cap U$ und eine Immersion ist. g nennt man eine **lokale Parametrisierung**



1.1.10 Beispiele

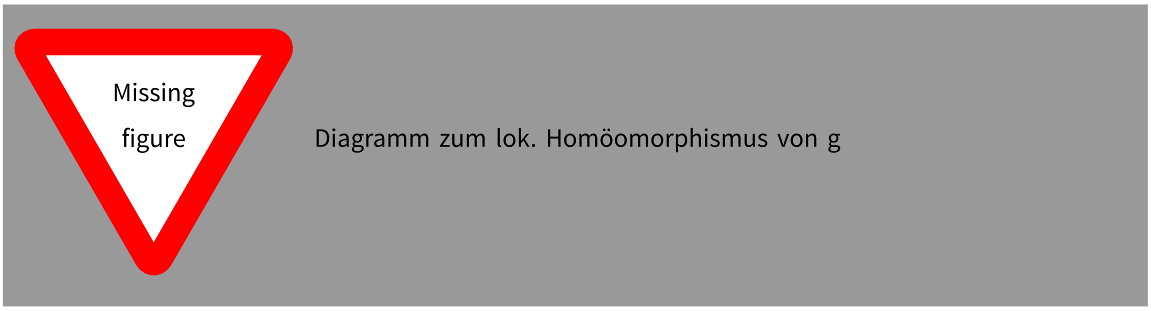
1. Der 2-Torus T^2 ist das Bild von

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \; g(x,y) = (\cos(x), \sin(x), \cos(y)\sin(y)) \subset T^2 \subset \mathbb{R}^4$$

g ist lokale Parametrisierung:

$$\mathrm{d}_{(x,y)}g = \begin{pmatrix} -\sin(x) & 0 \\ \cos(x) & 0 \\ 0 & -\sin(x) \\ 0 & \cos(y) \end{pmatrix}$$

$\mathrm{d}_{(x,y)}g$ hat somit immer vollen Rang 2, also ist $\mathrm{d}_{(x,y)}g$ injektiv. Es folgt somit, dass g eine Immersion ist.



$\Rightarrow$ $\hat{g}$ stetig (Qoutiententopologie), $\hat{g}$ bijektiv, T^2 kompakt
$\Rightarrow$ $\hat{g}$ Homöomorphimus
$\Rightarrow$ g lokaler Homöomorphismus

Abbildungsverzeichnis