

# Skript Topologie I.

Mitschrift der Vorlesung „Topologie I.“ von Prof. Dr. Arthur Bartels

Jannes Bantje

6. Januar 2015

Aktuelle Version verfügbar bei:



 **GitHub** (inklusive Sourcecode)  
<https://github.com/JaMeZ-B/latex-www>



 **Bittorrent Sync**  
B6WH2DISQ5QVYIRYIEZSF4ZR2IDVKPN3I

## Vorwort — Mitarbeit am Skript

Dieses Dokument ist eine Mitschrift aus der Vorlesung „Topologie I., WiSe 2014/2015“, gelesen von Prof. Dr. Arthur Bartels. Der Inhalt entspricht weitestgehend dem Tafelanschrieb. Für die Korrektheit des Inhalts übernehme ich keinerlei Garantie! Für Bemerkungen und Korrekturen – und seien es nur Rechtschreibfehler – bin ich sehr dankbar. Korrekturen lassen sich prinzipiell auf drei Wegen einreichen:

- Persönliches Ansprechen in der Uni, Mails an ✉ [j.bantje@wwu.de](mailto:j.bantje@wwu.de) (gerne auch mit annotieren PDFs)
- *Direktes* Mitarbeiten am Skript: Den Quellcode poste ich auf GitHub (siehe oben), also stehen vielfältige Möglichkeiten der Zusammenarbeit zur Verfügung: Zum Beispiel durch Kommentare am Code über die Website und die Kombination Fork + Pull Request. Wer sich verdient macht oder ein Skript zu einer Vorlesung, die ich nicht besuche, beisteuern will, dem gewähre ich gerne auch Schreibzugriff.

Beachten sollte man dabei, dass dazu ein Account bei [github.com](https://github.com) ✉ notwendig ist, der allerdings ohne Angabe von persönlichen Daten angelegt werden kann. Wer bei GitHub (bzw. dem zugrunde liegenden Open-Source-Programm „git“) – verständlicherweise – Hilfe beim Einstieg braucht, dem helfe ich gerne weiter. Es gibt aber auch zahlreiche empfehlenswerte Tutorials im Internet.<sup>1</sup>

- *Indirektes* Mitarbeiten:  $\text{\TeX}$ -Dateien per Mail verschicken.

Dies ist nur dann sinnvoll, wenn man einen ganzen Abschnitt ändern möchte (zB. einen alternativen Beweis geben), da ich die Änderungen dann per Hand einbauen muss!

## Vorlesungshomepage



<https://wwwmath.uni-muenster.de/reine/u/topos/lehre/WS2014-2015/Topologie1/Topologie1.html> ✉

---

<sup>1</sup>zB. <https://try.github.io/levels/1/challenges/1> ✉, ist auf Englisch, aber dafür interaktives LearningByDoing

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Kategorien, Funktoren und natürliche Transformationen</b>	<b>1</b>
1.1	Definition: Kategorie . . . . .	1
1.2	Beispiele für Kategorien . . . . .	1
1.3	Bemerkungen zu Kategorien . . . . .	2
1.4	Definition: Funktor . . . . .	2
1.5	Beispiele für Funktoren . . . . .	2
1.6	Definition: Natürliche Transformation . . . . .	2
1.7	Ausblick auf Kategorien und Funktoren in der algebraischer Topologie . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Kombinatorische Beschreibungen topologischer Räume</b>	<b>4</b>
2.1	Beispiel einer kombinatorischen Beschreibung eines Raumes . . . . .	4
2.2	Definition: Simplicialer Komplex . . . . .	4
2.3	Beispiel für simpliciale Komplexe . . . . .	4
2.4	Definition: Unterkomplex . . . . .	4
2.5	Definition: Simpliciale Abbildung . . . . .	5
2.6	Definition: Geometrische Realisierung . . . . .	5
2.7	Beispiel: Rand des $n$ -Simplizes und der Torus . . . . .	5
2.8	Definition: Polyeder . . . . .	5
2.9	Definition: Euler-Charakteristik . . . . .	6
2.10	Satz über die Euler-Charakteristik . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Simpliciale Homologie</b>	<b>7</b>
3.1	Definition: Freier $R$ -Modul mit Basis $S$ . . . . .	7
3.2	Lemma: Universale Eigenschaft von freien Moduln . . . . .	7
3.3	Beispiel für freie und nicht-freie Moduln . . . . .	7
3.4	Definition: $n$ -ter Kettenmodul . . . . .	8
3.5	Definition: Orientierung eines $(n - 1)$ -Simplizes als Teilmenge eines $n$ -Simplizes . . . . .	8
3.6	Definition: $n$ -te Randabbildung . . . . .	8
3.7	Proposition: $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$ . . . . .	8
3.8	Lemma: Ein $(n - 2)$ -Simplex ist Seite von genau zwei $(n - 1)$ -Simplizes . . . . .	9
3.9	Notation für das Weglassen eines Knotens . . . . .	9
3.10	Definition: $n$ -ter Homologiemodul . . . . .	9
3.11	Beispiele für Homologiemoduln . . . . .	9
3.12	Definition: $R$ -Kettenkomplex, $n$ -te Homologie eines $R$ -Kettenkomplexes . . . . .	10
3.13	Bemerkungen zu Kettenkomplexen . . . . .	10
3.14	Definition: Simplicialer Kettenkomplex . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Euler-Charakteristik von Kettenkomplexen</b>	<b>11</b>
4.1	Wiederholung: Torsionsgruppe . . . . .	11
4.2	Lemma: Rang einer endlich erzeugten abelschen Gruppe . . . . .	11
4.3	Definition: Kurze exakte Sequenz . . . . .	11
4.4	Beispiele für kurze exakte Folgen . . . . .	12
4.5	Bemerkung: Spaltung einer kurzen exakten Sequenz . . . . .	12
4.6	Bemerkung: Existenz einer Spaltung, wenn $M_2$ frei ist . . . . .	12
4.7	Bemerkung: Der Rang ist additiv . . . . .	12
4.8	Proposition: Der Rang ist für kurze exakte Folgen endl. erz., abelscher Gruppen additiv . . . . .	12
4.9	Definition: Eulercharakteristik von $\mathbb{Z}$ -Kettenkomplexen . . . . .	14
4.10	Satz: Eulercharakteristik eines endlich erzeugten $\mathbb{Z}$ -Kettenkomplexes . . . . .	14
4.11	Korollar: Die Eulercharakteristik eines simplicialen Komplexes . . . . .	14

<b>5</b>	<b>Singuläre Homologie</b>	<b>15</b>
5.1	Definition: Singuläre Simplizes und $n$ -ter singulärer Kettenmodul	15
5.2	Definition: Einschränkung eines singulären Simplizes auf eine Seite	15
5.3	Bemerkung zur Inklusion der $j$ -ten Seite	15
5.4	Definition: $n$ -te singuläre Randabbildung	15
5.5	Proposition: Für die Randabbildungen gilt $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$	15
5.6	Lemma: Hilfslemma für Proposition 5.5	15
5.7	Definition: Singuläre Homologie von $X$	16
5.8	Definition: $n$ -Ketten, $n$ -Ränder und $n$ -Zykel und Homologieklassen	16
5.9	Beispiel: Die Homologie des Ein-Punkt-Raumes	16
5.10	Proposition: Eigenschaften von $H_0(X)$ für $X \neq \emptyset$ und $X$ wegzusammenhängend	17
5.11	Bemerkung: Vorgehen, um später zu zeigen: $H_*(K; R) \cong H_*( K ; R)$	17
<b>6</b>	<b>Funktorialität</b>	<b>18</b>
6.1	Definition: $R$ -Kettenabbildung	18
6.2	Bemerkung: Induzierte Abbildung einer Kettenabbildung	18
6.3	Bemerkung: Homologie definiert einen Funktor	18
6.4	Definition: Induzierte Abbildung auf Kettenkomplexen	18
6.5	Proposition: Der singuläre Kettenkomplex über $R$ bildet einen Funktor	19
6.6	Korollar: Homologie ist ein Funktor $\text{Top} \rightarrow R\text{-Mod}$	19
6.7	Bemerkung: Notation für die auf Homologie induzierte Abbildung	19
6.8	Definition: Summe oder Koproduct von topologischen Räumen	19
6.9	Definition: Summe von $R$ -Moduln	20
6.10	Satz: Homologie des Koproductes topologischer Räume	20
<b>7</b>	<b>Homotopieinvarianz</b>	<b>21</b>
7.1	Bemerkung: Die induzierte Abbildung eines Homöomorphismus ist ein Isomorphismus	21
7.2	Definition: Homotopieäquivalenz und Homotopieinverse	21
7.3	Satz: Homotopieinvarianz der Homologie	21
7.4	Korollar: Die induzierte Abbildung einer Homotopieäquivalenz ist ein Isomorphismus	21
7.5	Korollar: Homologie eines kontrahierbaren Raumes	21
7.6	Definition: Kettenhomotopie	22
7.7	Prop.: induzierte Abbildungen von kettenhomotopen Kettenabbildungen sind gleich	22
7.8	Lemma: Reduktion von Satz 7.3 auf Beweis eines Spezialfalles	22
7.9	Bemerkung zum Vorgehen beim Beweis von [#]	22
7.10	Definition: Affin lineare Abbildungen zur Konstruktion der Kettenhomotopie	23
7.11	Lemma: Gleichungen für die Abbildungen aus 7.10	23
7.12	Beweis von [##]/Konstruktion der Kettenhomotopie	24
7.13	Bemerkung: Konstruktion einer Kettenhomotopie aus einer Homotopie	25
<b>8</b>	<b>Homologie von Paaren</b>	<b>26</b>
8.1	Definition: Paar von topologischen Räumen	26
8.2	Definition: Singulärer Kettenkomplex und Homologiemodul von Paaren	26
8.3	Definition: Der singuläre Kettenkomplex von Paaren definiert einen Funktor	26
8.4	Bemerkung: Topologische Räume als Paar auffassen	26
8.5	Frage: Können wir $H_n(X, A; R)$ durch $H_n(X; R)$ und $H_n(A; R)$ ausdrücken?	26
8.6	Beispiel: Homologie des Paares $( \Delta^n ,  \partial\Delta^n )$	26
8.7	Definition: Lange exakte Sequenz von $R$ -Moduln	27
8.8	Satz: Existenz der Paarsequenz	27
8.9	Korollar: Homologiemodul wenn $A$ kontraktibel ist	27
8.10	Definition: Kurze exakte Folge von Kettenkomplexen	28
8.11	Beispiel einer kurzen exakten Folge von Kettenkomplexen	28

8.12	Schlangenlemma . . . . .	28
8.13	Beweis von Satz 8.8 . . . . .	29
8.14	Bemerkung . . . . .	30
8.15	Fünfer-Lemma . . . . .	30
8.16	Lemma ("2 von 3") . . . . .	31
<b>9</b>	<b>Ausschneidung und die Mayer-Vietoris Folge</b>	<b>32</b>
9.1	Satz: Ausschneidungsisomorphismus . . . . .	32
9.2	Satz (Mayer-Vietoris Folge) . . . . .	32
9.3	Bemerkung zur Mayer-Vietoris-Folge . . . . .	33
9.4	Satz: Homologie der Sphäre $S^n$ . . . . .	33
9.5	Definition: Reduzierte Homologie . . . . .	34
9.6	Bemerkung: Die Aussage von Satz 9.4 in reduzierter Homologie . . . . .	34
9.7	Beweis von [##] . . . . .	34
<b>10</b>	<b>Anwendungen</b>	<b>36</b>
10.1	Satz: Invarianz der Dimension . . . . .	36
10.2	Fixpunktsatz von Brouwer . . . . .	36
10.3	Definition: Abbildungsgrad einer stetigen Abbildung $f: S^n \rightarrow S^n$ . . . . .	36
10.4	Proposition: Einfache Eigenschaften des Abbildungsgrades . . . . .	36
10.5	Beispiel: Abbildungsgrad der Spiegelung . . . . .	37
10.6	Beispiel: Grad der Punktspiegelung . . . . .	37
10.7	Erinnerung: Vektorfelder . . . . .	38
10.8	Satz: Es gibt ein Vektorfeld ohne Nullstellen auf $S^n \iff n$ ist ungerade . . . . .	38
10.9	Satz (Jordanscher Kurvensatz) . . . . .	38
10.10	Satz . . . . .	39
10.11	Proposition . . . . .	40
<b>11</b>	<b>CW-Komplexe</b>	<b>41</b>
11.1	Definition: Pushout . . . . .	41
11.2	Definition: CW-Komplex . . . . .	41
11.3	Bemerkungen zur Definition von CW-Komplexen . . . . .	42
11.4	Beispiele für CW-Komplexe . . . . .	42
11.5	Lemma: Kompaktheit von Teilmengen eines CW-Komplexes . . . . .	44
11.6	Korollar: Ein CW-Komplex ist genau dann kompakt, wenn er endlich ist. . . . .	44
<b>12</b>	<b>Zelluläre Homologie</b>	<b>45</b>
12.1	Definition: $n$ -ter zellulärer Kettenmodul und zelluläre Randabbildung . . . . .	45
12.2	Lemma . . . . .	45
12.3	Definition: Zellulärer Kettenkomplex und zelluläre Homologie . . . . .	45
12.4	Bemerkung: Funktorialität des zellulären Kettenkomplexes und der zellulären Homologie . . . . .	45
12.5	Lemma . . . . .	45
12.6	Bemerkung . . . . .	46
12.7	Definition: Natürlicher Isomorphismus . . . . .	47
12.8	Satz . . . . .	47
12.9	Lemma . . . . .	48
12.10	Korollar . . . . .	48
12.11	Bemerkung: $n$ -te Bettizahl . . . . .	49
12.12	Beispiel: Homologie von $\mathbb{C}P^n$ . . . . .	49
12.13	Beispiel: Homologie von $\mathbb{R}P^n$ . . . . .	49
12.14	Satz . . . . .	51

<b>13 Kleine Simplizes</b>	<b>52</b>
13.1 Satz: Ausschneidungs-Isomorphismus . . . . .	52
13.2 Definition: $\mathcal{U}$ -klein . . . . .	52
13.3 Satz über kleine Simplizes . . . . .	52
13.4 Bemerkung . . . . .	52
13.5 Beweis des Ausschneidungssatzes (13.1) . . . . .	52
13.6 Idee zum Beweis des Satzes über kleine Simplizes . . . . .	53
13.7 Definition . . . . .	53
13.8 Lemma . . . . .	53
13.9 Definition . . . . .	53
<b>Index</b>	<b>A</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>C</b>
<b>Todo list</b>	<b>C</b>

# 1 Kategorien, Funktoren und natürliche Transformationen

## 1.1 Definition

Eine **Kategorie**  $\mathcal{C}$  besteht aus:

- i) Einer Klasse  $\text{Ob}(\mathcal{C})$ . Die Elemente von  $\text{Ob}(\mathcal{C})$  heißen die **Objekte** von  $\mathcal{C}$ .
- ii) Zu je zwei Objekten  $A, B$  aus  $\mathcal{C}$  einer Menge  $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ . Die Elemente von  $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$  heißen **Morphismen** von  $\mathcal{C}$ .
- iii) Zu je drei Objekten  $A, B, C$  aus  $\mathcal{C}$  einer Abbildung:

$$\text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C) \times \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, C), \quad (f, g) \mapsto f \circ g$$

genannt die **Komposition** in  $\mathcal{C}$ .

Dabei müssen folgende Axiome erfüllt sein:

- (i) Die Komposition ist **assoziativ**:  
Für Objekte  $A, B, C, D$  von  $\mathcal{C}$  und  $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(C, D), g \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C), h \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$  gilt immer

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

- (ii) Die Komposition ist **unital**: Für jedes Objekt  $A$  von  $\mathcal{C}$  gibt es einen Morphismus  $\text{id}_A \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, A)$  so, dass

$$\forall f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, A) : \text{id}_A \circ f = f \quad \text{und} \quad \forall f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) : f \circ \text{id}_A = f$$

## 1.2 Beispiele

- (1) Die Kategorie der Mengen **MENGEN**: Objekte sind Mengen und Morphismen sind Abbildungen.
- (2) Die Kategorie der Gruppen **GRUPPEN**: Objekte sind Gruppen und Morphismen sind Gruppenhomomorphismen.
- (3) Die Kategorie der  $K$ -Vektorräume  **$K$ -VR**: Objekte sind  $K$ -Vektorräume und die Morphismen sind  $K$ -lineare Abbildungen.
- (4) Die Kategorie der  $R$ -Moduln  **$R$ -MOD**: Objekte sind  $R$ -Moduln und Morphismen sind  $R$ -lineare Abbildungen.
- (5) Die Kategorie der  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeiten  **$C^\infty$ -MAN**: Objekte sind  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeiten und Morphismen sind  $C^\infty$ -Abbildungen.
- (6) Die Kategorie der topologischen Räume **TOP**: Objekte sind topologische Räume und Morphismen sind stetige Abbildungen.
- (7) Die Kategorie der punktierten topologischen Räume **TOP<sub>\*</sub>**: Objekte sind punktiert-topologische Räume und Morphismen sind punktiert-stetige Abbildungen.
- (8) Die Kategorie **HTOP**: Objekte sind topologische Räume und Morphismen sind Homotopieklassen von stetigen Abbildungen.
- (9) Die Kategorie **HTOP<sub>\*</sub>**: Objekte sind punktiert-topologische Räume und Morphismen sind Homotopieklassen von punktiert-stetigen Abbildungen.
- (10) Sei  $G$  eine Gruppe. Wir erhalten eine Kategorie  $\mathcal{C}_G$  mit genau einem Objekt  $*$  und  $\text{Mor}_{\mathcal{C}_G}(*, *) = G$ . Die Komposition wird durch die Verknüpfung in der Gruppe festgelegt.
- (11) Ist  $\mathcal{C}$  eine Kategorie, so ist  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  eine Kategorie, wobei  $\text{Ob}(\mathcal{C}^{\text{op}}) = \text{Ob}(\mathcal{C})$  und  $\text{Mor}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(A, B) := \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, A)$ . Die Komposition ist gegeben durch  $f \circ^{\text{op}} g := g \circ f$ .

### 1.3 Bemerkung

- (i) Eine Kategorie heißt **klein**, wenn ihre Objekte eine Menge bilden.
- (ii) Statt  $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$  schreiben wir oft  $f : A \rightarrow B$  oder  $A \xrightarrow{f} B$ .

### 1.4 Definition

Seien  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{D}$  Kategorien: Ein **Funktor**  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ordnet jedem Objekt  $C$  von  $\mathcal{C}$  ein Objekt  $F(C)$  von  $\mathcal{D}$  und ordnet jedem Morphismus  $f : C \rightarrow C'$  in  $\mathcal{C}$  einen Morphismus  $F(f) : F(C) \rightarrow F(C')$  in  $\mathcal{D}$  zu. Dabei muss gelten:

$$F(f \circ g) = F(f) \circ F(g) \quad \text{und} \quad F(\text{id}_C) = \text{id}_{F(C)}$$

### 1.5 Beispiele

- (1) Es gibt offensichtliche „Vergiss“-Funkoren:

$$\begin{aligned} K\text{-VR} &\longrightarrow \text{MENGEN} \\ R\text{-MOD} &\longrightarrow \text{MENGEN} \\ \text{TOP} &\longrightarrow \text{MENGEN} \\ \text{TOP}_{\bullet} &\longrightarrow \text{MENGEN} \\ \text{TOP}_{\bullet} &\longrightarrow \text{TOP} \end{aligned}$$

- (2) Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie und  $C$  ein Objekt von  $\mathcal{C}$ . Der durch  $C$  **dargestellte Funktor**  $F_C : \mathcal{C} \rightarrow \text{MENGEN}$  ist definiert durch

$$\begin{aligned} F_C(A) &= \text{Mor}_{\mathcal{C}}(C, A) && \text{für } A \in \text{Ob}(\mathcal{C}) \\ F_C(f) : \text{Mor}_{\mathcal{C}}(C, A) &\rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}}(C, A'), g \mapsto f \circ g && \text{für } f : A \rightarrow A' \text{ in } \mathcal{C} \end{aligned}$$

- (3) Die Fundamentalgruppe definiert einen Funktor

$$\pi_1 : \text{HTOP}_{\bullet} \longrightarrow \text{GRUPPEN}$$

### Bemerkung

- Ist  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ein Funktor so schreiben wir oft kürzer und ungenauer  $f_* := F(f)$ .
- Kleine Kategorien und Funktoren bilden die Kategorie  $\text{KAT}$ .

### 1.6 Definition

Seien  $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  zwei Funktoren. Eine **natürliche Transformation**  $\tau : F \rightarrow G$  ordnet jedem  $C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  einen Morphismus  $\tau_C : F(C) \rightarrow G(C)$  in  $\mathcal{D}$  zu, sodass für jedes  $f : C \rightarrow C'$  in  $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccc} F(C) & \xrightarrow{F(f)} & F(C') \\ \downarrow \tau_C & & \downarrow \tau_{C'} \\ G(C) & \xrightarrow{G(f)} & G(C') \end{array}$$

kommutiert.



**Bemerkung**

Natürliche Transformationen lassen sich komponieren. Für  $\tau : F \rightarrow G$ ,  $\eta : G \rightarrow H$  ist  $\eta \circ \tau : F \rightarrow H$  gegeben durch

$$(\eta \circ \tau)_C := \eta_C \circ \tau_C : F(C) \rightarrow H(C)$$

$$F, G, H : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$$

Genauer: Für eine feste kleine Kategorie  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{D}$  bilden die Funktoren  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  mit den natürlichen Transformationen eine Kategorie  $\text{FUN}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ .

**1.7 Ausblick**

In der algebraischen Topologie werden topologische Fragen, wie zum Beispiel, wann  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{R}^m$  homöomorph sind, in algebraische Fragen übersetzt. Eine Möglichkeit für eine solche Übersetzung sind Funktoren von einer Kategorie von topologischen Räumen, z.B.  $\text{TOP}$ ,  $\text{TOP}_\bullet$ ,  $\text{HTOP}_\bullet$ , in eine algebraisch Kategorie, z.B.  $\text{GRUPPEN}$ ,  $K\text{-VR}$ ,  $\text{ABEL.GRUPPEN}$ ,  $R\text{-MOD}$ . Ein Beispiel für einen solchen Funktor ist die Fundamentalgruppe  $\pi_1$ . Ein Nachteil der Fundamentalgruppe ist, dass diese oft schwierig zu berechnen ist. Wir werden in dieser Vorlesung weitere Funktoren und Methoden für ihr Berechnung kennenlernen.

## 2 Kombinatorische Beschreibungen topologischer Räume

### 2.1 Beispiel

**Graphen** sind einerseits topologische Räume und andererseits kombinatorische Objekte:



### 2.2 Definition

Ein **simplicialer Komplex**  $K = (V, \Sigma)$  besteht aus einer Menge  $V$  und einer Menge  $\Sigma$  von nichtleeren, endlichen Teilmengen von  $V$ , sodass gilt

(i)  $\{v\} \in \Sigma$  für alle  $v \in V$

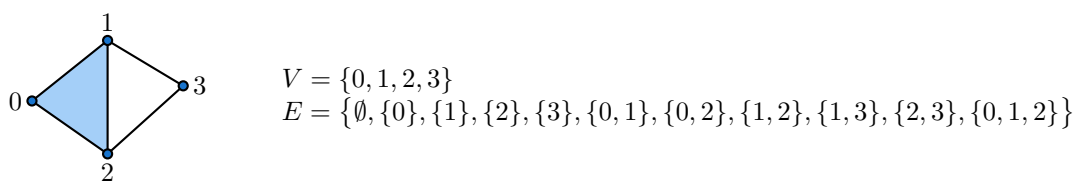
(ii)  $\sigma \in \Sigma, \emptyset \neq \tau \subseteq \sigma \implies \tau \in \Sigma$ .

(Abgeschlossen bzgl. Teilmengenbildung)

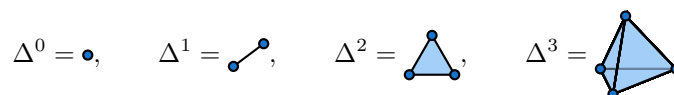
Die Elemente von  $V$  heißen die **Ecken** oder **Vertices** von  $K$ . Die Elemente von  $\Sigma$  heißen die **Simplizes** von  $K$ . Enthält  $\sigma \in \Sigma$  genau  $n + 1$  Elemente, so heißt  $\sigma$  ein **n-Simplex**. Ist  $\tau \subseteq \sigma$  mit  $\sigma$  ein  $n$ -Simplex und  $\tau$  ein  $n - 1$ -Simplex, so heißt  $\tau$  eine **Seite** von  $\sigma$ .

Ist  $V$  geordnet, so heißt  $K$  geordnet. Ist  $V$  endlich, so heißt  $K$  endlich.

### 2.3 Beispiel



Ist  $\sigma$  eine endliche Menge, so heißt  $\Delta^\sigma := (\sigma, \mathcal{P}(\sigma) \setminus \{\emptyset\})$  der  $\sigma$ -Simplex. Für  $\sigma = \{0, \dots, n\}$  schreiben wir  $\Delta^n := \Delta^{\{0, \dots, n\}}$ . Es ist



### 2.4 Definition

Sei  $K = (V, \Sigma)$  ein simplicialer Komplex. Ein **Unterkomplex** von  $K$  ist ein simplicialer Komplex  $K_0 = (V_0, \Sigma_0)$  mit  $V_0 \subseteq V$  und  $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ .

**Beispiel**

Sei  $K = (V, \Sigma)$  ein endlicher simplizialer Komplex. Dann ist  $K$  ein Unterkomplex von  $\Delta^V$ .

**2.5 Definition**

Eine **simpliziale Abbildung**  $f : K_1 = (V_1, \Sigma_1) \rightarrow K_2 = (V_2, \Sigma_2)$  zwischen simplizialen Komplexen ist eine Abbildung  $f : V_1 \rightarrow V_2$ , sodass  $f(\sigma_1) \in \Sigma_2$  für alle  $\sigma_1 \in \Sigma_1$ .

**2.6 Definition**

Sei  $\sigma$  eine endliche Menge. Sei  $\mathbb{R}^\sigma = \prod_{v \in \sigma} \mathbb{R}$  mit der Produkttopologie. Sei nun

$$|\Delta^\sigma| := \left\{ x = (x_v)_{v \in \sigma} \in \mathbb{R}^\sigma \mid \sum_{v \in \sigma} x_v = 1, x_v \in [0, 1] \ \forall v \in \sigma \right\}$$

Ist  $\tau \subseteq \sigma$ , so erhalten wir eine Abbildung  $\iota_\tau^\sigma : |\Delta^\tau| \rightarrow |\Delta^\sigma|$  indem wir  $(x_v)_{v \in \tau} \in |\Delta^\tau|$  durch  $x_v = 0$  für  $v \in \sigma \setminus \tau$  zu  $(x_v)_{v \in \sigma}$  auffüllen. Ist  $\eta \subseteq \tau \subseteq \sigma$  so gilt  $\iota_\eta^\sigma = \iota_\tau^\sigma \circ \iota_\eta^\tau$ .

Sei  $K = (V, \Sigma)$  ein simplizialer Komplex. Die **geometrische Realisierung**  $|K|$  von  $K$  ist definiert als

$$|K| := \coprod_{\sigma \in \Sigma} \{\sigma\} \times |\Delta^\sigma| / \sim$$

wobei  $\sim$  die durch  $(\tau, x) \sim (\sigma, \iota_\tau^\sigma(x))$  für  $\tau \subseteq \sigma$  erzeugte Äquivalenzrelation ist. Versehen mit der Quotiententopologie ist  $|K|$  ein topologischer Raum.

**2.7 Beispiel**

- Sei  $\partial\Delta^n := (\{0, \dots, n\}, \mathcal{P}(\{0, \dots, n\}) \setminus \{\emptyset, \{0, \dots, n\}\}) = \Delta^n \setminus \{0, \dots, n\}$ .  $\partial\Delta^n$  heißt der **Rand des  $n$ -Simplizes**. Es gilt

$$\begin{aligned} |\partial\Delta^1| &= \bullet \bullet \cong S^0 \\ |\partial\Delta^2| &= \triangle \cong S^1 \\ |\partial\Delta^3| &= \text{Dreieck} \cong S^2 \end{aligned}$$

Allgemein gilt  $|\partial\Delta^n| \cong S^{n-1}$ .

$$\bullet \quad T^2 = S^1 \times S^1 \cong \text{Torus} \cong \left| \begin{array}{c} \text{3x3 Gitter mit Randpfeilen} \end{array} \right|$$

**2.8 Definition**

Ein topologischer Raum  $X$  heißt ein **Polyeder**, falls er homöomorph zur Realisierung eines simplizialen Komplexes ist.

## 2.9 Definition

Sei  $K = (V, \Sigma)$  ein endlicher simplizialer Komplex. Sei  $a_n := \#\{\sigma \in \Sigma \mid \sigma \text{ ist ein } n\text{-Simplex von } K\}$ . Dann heißt  $\chi(K) := \sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n a_n$  die **Euler-Charakteristik** von  $K$ .

**Beispiel**

$$\chi(\triangle) = 3 - 3 = 0$$

$$\chi(\square) = 4 - 4 = 0$$

$$\chi([n\text{-Eck}]) = n - n = 0$$

$$\chi(\partial\Delta^3 = \text{Pyramide}) = 4 - 6 + 4 = 2$$

$$\chi(\text{Würfel}) = 8 - 12 + 6 = 2$$

$$\chi(\text{Oktaeder}) = 6 - 12 + 8 = 2$$

## 2.10 Satz

Seien  $K$  und  $K'$  endliche simpliziale Komplexe. Gilt  $|K| \cong |K'|$ , so gilt

$$\chi(K) = \chi(K').$$

**Bemerkung**

Die Euler-Charakteristik ist also eine topologische Invariante von simplizialen Komplexen. Sie hängt nur von der topologischen Struktur von  $|K|$  und nicht von der kombinatorischen Struktur von  $K$  ab.

### 3 Simpliziale Homologie

#### 3.1 Definition

Sei  $S$  eine Menge. Sei  $R$  ein Ring. Der **freie  $R$ -Modul mit Basis  $S$** ,  $R[S]$ , besteht aus allen endlichen formalen  $R$ -Linearkombinationen

Ring mit Eins

$$\sum_{s \in S} r_s \cdot s, \quad r_s \in R, r_s \neq 0 \text{ für endliche viele } s \in S$$

Die  $R$ -Modulstruktur auf  $R[S]$  ist definiert durch:

$$r \cdot \left( \sum_{s \in S} r_s \cdot s \right) := \sum_{s \in S} (r \cdot r_s) \cdot s \quad \left( \sum_{s \in S} r_s \cdot s \right) + \left( \sum_{s \in S} r'_s \cdot s \right) := \sum_{s \in S} (r_s + r'_s) \cdot s$$

#### Bemerkung

Mittels  $s = \sum_{s' \in S} \delta_{s,s'} \cdot s'$  fassen wir  $S$  als Teilmenge von  $R[S]$  auf.

#### 3.2 Lemma

Sei  $S$  eine Menge,  $R$  ein Ring. Es gilt

- 1) Ist  $M$  ein  $R$ -Modul und  $i : S \rightarrow M$  eine Abbildung, so gibt es genau eine  $R$ -lineare Abbildung  $\varphi : R[S] \rightarrow M$ , die  $i$  fortsetzt.
- 2) Sei  $f : R[S] \rightarrow M$   $R$ -linear und  $p : N \rightarrow M$   $R$ -linear und surjektiv. Dann gibt es  $\hat{f} : R[S] \rightarrow N$  mit  $p \circ \hat{f} = f$ .

$$\begin{array}{ccc} & & N \\ & \nearrow \hat{f} & \downarrow p \\ R[S] & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

#### Beweis

- 1) Eine solche Abbildung ist gegeben durch  $\varphi(\sum_{s \in S} r_s \cdot s) = \sum_{s \in S} r_s \cdot i(s)$ . Ist  $\varphi'$  eine zweite, so gilt

$$\hat{\varphi} \left( \sum_{s \in S} r_s \cdot s \right) = \sum_{s \in S} r_s \cdot \hat{\varphi}(s) = \sum_{s \in S} r_s \cdot i(s)$$

- 2) Wähle für jedes  $s \in S$  ein Urbild  $j(s) \in N$  für  $f(s) \in M$  unter  $p : N \rightarrow M$ . Nun wende 1) auf  $j : S \rightarrow N$  an, um  $\hat{f} : R[S] \rightarrow N$  mit  $\hat{f}(s) = j(s)$  zu erhalten. Nun ist  $p \circ \hat{f}(s) = f(s)$  für alle  $s \in S$ . Mit der Eindeutigkeit aus 1) folgt  $p \circ \hat{f} = f$ .  $\square$

#### 3.3 Beispiel

- (i) Sei  $K$  ein Körper und  $V, M, N$  seien  $K$ -Vektorräume,  $f : V \rightarrow M$ ,  $p : N \rightarrow M$  seien  $K$ -linear,  $p$  surjektiv. Dann gibt es  $\hat{f} : V \rightarrow N$  mit  $p \circ \hat{f} = f$ . Wir können Lemma 3.2 benutzen, da  $V$  eine Basis  $B$  hat, also  $V \cong K[B]$ .
- (ii) Sei  $R = \mathbb{Z}$ , sei  $V = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  und  $M = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , sowie  $f = \text{id} : V \rightarrow M$ ,  $N = \mathbb{Z}$  und  $p : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  die Projektion mit  $p(n) = n + 2\mathbb{Z}$ . Dann gibt es keine  $\mathbb{Z}$ -lineare Abbildung  $\hat{f} : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  mit  $p \circ \hat{f} = f$ . Ist  $\hat{f}(1 + 2\mathbb{Z}) = n \in \mathbb{Z}$ , so folgt

$$2n = 2 \cdot \hat{f}(1 + 2\mathbb{Z}) = \hat{f}(2 \cdot (1 + 2\mathbb{Z})) = \hat{f}(0 + 2\mathbb{Z}) = 0$$

also  $n = 0$ .

### 3.4 Definition

Sei  $K = (V, \Sigma)$  ein simplizialer Komplex. Sei  $\Sigma_n := \{\sigma \in \Sigma \mid \sigma \text{ ist ein } n\text{-Simplex}\}$ . Sei  $R$  ein Ring. Der  **$n$ -te Kettenmodul** von  $K$  über  $R$  ist definiert als

$$C_n(K; R) := R[\Sigma_n]$$

Ist  $R = \mathbb{Z}$ , so schreiben wir auch kurz  $C_n(K) := C_n(K; \mathbb{Z})$ .

### 3.5 Definition

Sei  $K = (V, \Sigma)$  ein geordneter simplizialer Komplex. Sei  $\sigma = \{v_0, \dots, v_n\}$  ein  $n$ -Simplex von  $K$ . Bezüglich der Ordnung von  $K$  sei dabei  $v_0 < v_1 < \dots < v_n$ . Sei  $\tau$  ein  $(n-1)$ -Simplex von  $K$ . Definiere

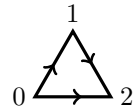
$$\varepsilon_\sigma^\tau := \begin{cases} (-1)^i, & \text{falls } \tau = \{v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n\} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

#### Bemerkung

$\varepsilon_\sigma^\tau \neq 0 \iff \tau$  ist eine Seite von  $\sigma$ .

#### Beispiel

Für den folgenden geordneten simplizialen Komplex gilt



$$\varepsilon_{\{0,1,2\}}^{\{0,1\}} = 1, \quad \varepsilon_{\{0,1,2\}}^{\{0,2\}} = -1, \quad \varepsilon_{\{0,1,2\}}^{\{1,2\}} = 1$$

### 3.6 Definition

Sei  $K = (V, \Sigma)$  ein geordneter simplizialer Komplex. Die  **$n$ -te Randabbildung**

$$\partial_n : C_n(K; R) \longrightarrow C_{n-1}(K; R)$$

$=_{R[\Sigma_n]} \qquad \qquad \qquad =_{R[\Sigma_{n-1}]}$

ist definiert durch

$$\partial_n(\sigma) = \sum_{\tau \in \Sigma_{n-1}} \varepsilon_\sigma^\tau \cdot \tau \quad \text{für } \sigma \in \Sigma_n$$

### 3.7 Proposition

$$\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$$

Damit folgt  $\text{Im } \partial_n \subseteq \ker \partial_{n-1}$ .

#### Beweis (mit Lemma 3.8)

Sei  $\sigma$  ein  $n$ -Simplex von  $K$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \partial_{n-1}(\partial_n(\sigma)) &= \partial_{n-1}\left(\sum_{\tau \in \Sigma_{n-1}} \varepsilon_\sigma^\tau \cdot \tau\right) = \sum_{\tau \in \Sigma_{n-1}} \varepsilon_\sigma^\tau \cdot \partial_{n-1}(\tau) = \sum_{\tau \in \Sigma_{n-1}} \varepsilon_\sigma^\tau \left(\sum_{\eta \in \Sigma_{n-2}} \varepsilon_\tau^\eta \cdot \eta\right) \\ &= \sum_{\eta \in \Sigma_{n-2}} \left(\sum_{\tau \in \Sigma_{n-1}, \eta \subseteq \tau \subseteq \sigma} \varepsilon_\tau^\eta \cdot \varepsilon_\sigma^\tau\right) \eta \\ &\stackrel{\text{Lemma 3.8}}{=} 0 \end{aligned} \quad \square$$

### 3.8 Lemma

Sei  $\sigma$  ein  $n$ -Simplex. Sei  $\eta \subseteq \sigma$  ein  $(n-2)$ -Simplex. Dann gibt es genau zwei  $(n-1)$ -Simplizes  $\tau, \tau'$  von  $K$ , die eine Seite von  $\sigma$  sind und  $\eta$  als Seite enthalten. Es gilt

$$\varepsilon_{\tau}^{\eta} \cdot \varepsilon_{\sigma}^{\tau} = -\varepsilon_{\tau'}^{\eta} \cdot \varepsilon_{\sigma}^{\tau'}$$

#### Beweis

Sei  $\sigma = \{v_0, \dots, v_n\}$  mit  $v_0 < v_1 < \dots < v_n$ . Dann ist  $\eta = \{v_0, \dots, v_n\} \setminus \{v_i, v_j\}$  mit  $i < j$ . Dann sind  $\tau = \{v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n\}$  und  $\tau' = \{v_0, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n\}$  die gesuchten  $(n-1)$ -Simplizes und es gilt

$$\varepsilon_{\sigma}^{\tau} = (-1)^i, \quad \varepsilon_{\sigma}^{\tau'} = (-1)^j, \quad \varepsilon_{\tau}^{\eta} = (-1)^{j-1}, \quad \varepsilon_{\tau'}^{\eta} = (-1)^i \quad \square$$

### 3.9 Notation

Für  $\sigma \in \Sigma_n$ ,  $\sigma = \{v_0, \dots, v_n\}$  mit  $v_0 < \dots < v_n$  schreiben wir

$$\delta^j \sigma := \{v_0, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n\} \in \Sigma_{n-1}$$

Dann ist  $\partial_n(\sigma) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \cdot \delta^j \sigma$ .

### 3.10 Definition

Sei  $K$  ein geordneter simplizialer Komplex. Der  **$n$ -te Homologiemodul** von  $K$  über  $R$  ist definiert als

$$H_n(K; R) := \frac{\ker \partial_n : C_n(K; R) \rightarrow C_{n-1}(K; R)}{\operatorname{Im} \partial_{n+1} : C_{n+1}(K; R) \rightarrow C_n(K; R)}$$

Für  $n = 0$  interpretieren wir  $\partial_0$  als die Nullabbildung. Daher gilt

$$H_0(K; R) = \frac{C_0(K; R)}{\operatorname{Im} \partial_1 : C_1(K; R) \rightarrow C_0(K; R)}$$

### 3.11 Beispiele

- (1) Sei  $K = \bullet$ . Dann ist  $C_0(K; R) \cong R$  und  $C_i(K; R) = 0$  für  $i > 0$ . Weiter ist  $H_0(K; R) = C_0(K; R) \cong R$  und  $H_i(K; R) = 0$  für  $i > 0$ .
- (2) Seien nun  $K = K_n$  das  $n$ -Eck, wobei  $n \geq 3$ . Also

$$\begin{aligned} \Sigma_0 &= \{\tau_1 = \{1\}, \tau_2 = \{2\}, \dots, \tau_n = \{n\}\} \\ \Sigma_1 &= \{\sigma_1 = \{1, 2\}, \dots, \sigma_{n-1} = \{n_1, n\}, \sigma_n = \{n, 1\}\} \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} C_0(K; R) &= R[\Sigma_0] \cong R^n \\ C_1(K; R) &= R[\Sigma_1] \cong R^n \\ C_i(K; R) &= 0 \text{ für } i > 1, \text{ insbesondere } H_i(K; R) = 0 \text{ für } i > 1 \end{aligned}$$

Es ist dann  $\partial_2 = \partial_3 = \dots = 0$ . Interessant ist  $\partial_1 : C_1(K; R) \rightarrow C_0(K; R)$ , denn es gilt

$$\partial_1(\sigma_i) = \begin{cases} \tau_{i+1} - \tau_i, & \text{falls } i = 1, \dots, n-1 \\ \tau_n - \tau_1, & \text{falls } i = n \end{cases}$$

Mit  $\sigma'_1 := \sigma_1, \sigma'_2 := \sigma_2, \dots, \sigma'_{n-1} := \sigma_{n-1}$  und  $\sigma'_n := -\sigma_n$  gilt dann

$$\partial_1(\sigma'_i) = \tau_{i+1} - \tau_i$$

mit der Konvention  $\tau_{n+1} = \tau_1$ . Also gilt

$$\partial_1\left(\sum_{i=1}^n r_i \sigma'_i\right) = \sum_{i=1}^n r_i (\tau_{i+1} - \tau_i) = \sum_{i=1}^n (r_{i-1} - r_i) \tau_i$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \ker \partial_1 &= \left\{ \sum_{i=1}^n r_i \cdot \sigma'_i \mid r_1 = r_2 = \dots = r_n \right\} \subseteq C_1(K; R) \\ \operatorname{Im} \partial_1 &= \left\{ \sum_{i=1}^n s_i \cdot \tau_i \mid \sum_{i=1}^n s_i = 0 \right\} \subseteq C_0(K; R) \end{aligned}$$

Ist  $\sum_{i=1}^n s_i = 0$ , so folgt für  $r_n = 0, r_1 = -s_1, r_2 = -s_1 - s_2, \dots, r_{n-1} = -s_1 - s_2 - \dots - s_{n-1}$

$$\partial_1\left(\sum_{i=1}^n r_i \sigma'_i\right) = \sum_{i=1}^n s_i \tau_i$$

Es folgt  $[K] \in H_1(K; R) = \ker \partial_1 / \operatorname{Im} \partial_2 = \ker \partial_1 \cong R \ni 1$  und

$$[\tau_i] = [p] \in H_0(K; R) = \ker \partial_0 / \operatorname{Im} \partial_1 = R[\Sigma_0] / \{\sum_{i=1}^n s_i \tau_i \mid \sum_{i=1}^n s_i = 0\} \cong R \ni 1$$

(via  $\sum_{i=1}^n s_i \tau_i \mapsto \sum_{i=1}^n s_i$  und Homomorphiesatz)

### 3.12 Definition

Sei  $R$  ein Ring. Ein **R-Kettenkomplex**  $(C_*, d_*)$  ist eine Folge von  $R$ -Moduln  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zusammen mit  $R$ -linearen Abbildungen  $(d_n : C_n \rightarrow C_{n-1})_{n \geq 1}$ , so dass  $d_n \circ d_{n+1} = 0$ . Die  $d_n$  heißen die **Randabbildungen** von  $(C_*, d_*)$ , die  $C_n$  die **Kettenmoduln**. Die **n-te Homologie** eines Kettenkomplexes  $(C_*, d_*)$  ist definiert als

$$H_n(C_*, d_*) := \frac{\ker d_n : C_n \rightarrow C_{n-1}}{\operatorname{Im} d_{n+1} : C_{n+1} \rightarrow C_n}$$

### 3.13 Bemerkung

- (i) Oft werden auch Kettenkomplexe betrachtet, die  $\mathbb{Z}$  statt  $\mathbb{N}$  verwenden.
- (ii) Ein Kettenkomplex  $(C_*, d_*)$  heißt endlich erzeugt, wenn alle  $C_n$  endlich erzeugte  $R$ -Moduln sind und  $C_n \neq 0$  nur für endlich viele  $n$  ist.

### 3.14 Definition

Zu einem geordneten simplizialen Komplex  $K$  heißt  $(C_*(K; R), \partial_*)$  der **simpliziale Kettenkomplex** von  $K$  über  $R$ .

#### Bemerkung

Ist  $K$  endlich, so ist  $(C_*(K; R), \partial_*)$  endlich erzeugt.



## 4 Euler-Charakteristik von Kettenkomplexen

### 4.1 Wiederholung

Sei  $A$  eine abelsche Gruppe. Dann ist

$$TA := \left\{ a \in A \mid \exists n \geq 1 : n \cdot a = \underbrace{a + \dots + a}_{n\text{-mal}} = 0 \right\}$$

die **Torsionsgruppe** von  $A$ . Ist  $A$  endlich erzeugt, so ist auch  $TA$  endlich erzeugt und es gibt Primzahlpotenzen  $p_1^{n_1}, \dots, p_k^{n_k}$  mit

$$TA \cong \mathbb{Z}/(p_1^{n_1}) \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/(p_k^{n_k})$$

abelsche Gruppen  
sind  $\mathbb{Z}$ -Moduln

Weiter gibt es dann  $n$  mit  $A \cong \mathbb{Z}^n \oplus TA$ .  $\text{Rg } A := n$  ist der **Rang** von  $A$ .

### 4.2 Lemma

Sei  $A$  eine endlich erzeugte abelsche Gruppe. Dann gilt  $\text{Rg } A = \max\{m \mid \exists C \leq A, C \cong \mathbb{Z}^m\}$ .

#### Beweis

Da  $A \cong \mathbb{Z}^n \oplus TA$  ist, genügt zu zeigen: Ist  $\varphi : \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^n \oplus TA$  ein injektiver Gruppenhomomorphismus, so ist  $m \leq n$ . Schreibe  $\varphi = \varphi_0 \oplus \varphi_1$ , also  $\varphi(a) = \varphi_0(a) + \varphi_1(a)$  mit  $\varphi_0 : \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^n$ ,  $\varphi_1 : \mathbb{Z}^m \rightarrow TA$ .

Behauptung:  $\varphi_0$  ist injektiv. Zu  $v \in \mathbb{Z}^m$  wähle  $k \geq 1$  mit  $k \cdot \varphi_1(v) = 0 \in TA$ . Dann ist  $\varphi_1(kv) = k\varphi_1(v) = 0$ . Ist  $v \neq 0$ , so ist  $k \cdot v \neq 0 \in \mathbb{Z}^m$ , also ist  $\varphi(kv) \neq 0$  und damit  $\varphi_0(kv) \neq 0$ . Es folgt  $\varphi_0(v) \neq 0$ , da sonst  $\varphi_0(k \cdot v) = k \cdot \varphi_0(v) = 0$ . Damit ist die Behauptung gezeigt.

Gruppenhomomorphismen  $\varphi_0 : \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^n$  werden durch  $n \times m$ -Matrizen beschrieben: Es gibt  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{Z}^{n \times m}$  mit

$$\varphi_0 \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m a_{1j} z_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m a_{nj} z_j \end{pmatrix}$$

Ist  $m > n$ , so hat  $A$ , aufgefasst als Matrix über  $\mathbb{Q}$ , einen Kern. Es gibt also einen Vektor  $w = \begin{pmatrix} a_1/b_1 \\ \vdots \\ a_m/b_m \end{pmatrix}$  mit  $Aw = 0$ ,  $w \neq 0$ . Dann ist  $(b_1, \dots, b_m) \cdot w \in \mathbb{Z}^m$  und

$$\varphi_0((b_1, \dots, b_m) \cdot w) = A \cdot ((b_1, \dots, b_m) \cdot w) = (b_1, \dots, b_m) \cdot A \cdot w = 0$$

Also gilt  $m \leq n$ . □

### 4.3 Definition

Seien  $M_0, M_1, M_2$   $R$ -Moduln und  $f_0 : M_0 \rightarrow M_1$ ,  $f_1 : M_1 \rightarrow M_2$   $R$ -lineare Abbildungen. Dann heißt

$$M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \quad (*)$$

eine **kurze exakte Sequenz**, wenn gilt:

- (i)  $f_0$  ist injektiv, (ii)  $\text{Im } f_0 = \ker f_1$ , (iii)  $f_1$  ist surjektiv.

#### Bemerkung

Oft sagt man  $M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} M_2$  ist exakt in  $M_1$ , wenn  $\text{Im } f_0 = \ker f_1$  ist. Dann ist  $(*)$  eine kurze exakte Folge, wenn

$$0 \longrightarrow M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \longrightarrow 0$$

exakt in  $M_0, M_1$  und  $M_2$  ist.

## 4.4 Beispiele

1)

$$\begin{aligned} M_0 &\xhookrightarrow{i} M_0 \oplus M_1 \xrightarrow{p} M_1 \\ v_0 &\xhookrightarrow{i} (v_0, 0) \quad (v_0, v_1) \xrightarrow{p} v_1 \end{aligned}$$

ist eine kurze exakte Folge.

2)  $\mathbb{Z} \xhookrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  ist eine kurze exakte Folge.

## 4.5 Bemerkung

Eine **Spaltung** für eine kurze exakte Folge  $M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} M_2$  ist eine  $R$ -lineare Abbildung  $s : M_2 \rightarrow M_1$  mit  $f_1 \circ s = \text{id}_{M_2}$ . In diesem Fall erhalten wir einen Isomorphismus  $M_0 \oplus M_2 \rightarrow M_1, (v_0, v_2) \mapsto f_0(v_0) + s(v_2)$ .

**Injektivität:** Sei  $(v_0, v_2) \in M_0 \oplus M_2$  mit  $f_0(v_0) + s(v_2) = 0$ . Dann gilt

$$0 = f_1(f_0(v_0) + s(v_2)) = v_2 \implies f_0(v_0) = 0 \implies v_0 = 0$$

**Surjektivität:** Sei  $v_1 \in M_1$ . Betrachte  $v_2 := f_1(v_1)$ . Dann ist  $v_1 - s(v_2) \in \ker f_1 = \text{Im } f_0$ , also gibt es  $v_0$  in  $M_0$  mit  $f_0(v_0) = v_1 - s(v_2)$ . Damit ist  $v_1 = f_0(v_0) + s(v_2)$ .

## 4.6 Bemerkung

1)  $\mathbb{Z} \xhookrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  spaltet nicht.

2) Ist  $M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} M_2$  eine kurze exakte Folge mit  $M_2$  frei, also  $M_2 \cong R[S]$ , so spaltet  $(\star)$ . Siehe Lemma 3.2. Insbesondere ist  $M_1 \cong M_0 \oplus M_2$ .

Moduln mit dieser Eigenschaft bezeichnet man als **projektiv**. Freie Moduln sind also projektiv.

## 4.7 Bemerkung

Der Rang für alle endlich erzeugten abelschen Gruppen ist additiv:

$$\text{Rg}(A \oplus B) = \text{Rg } A + \text{Rg } B,$$

da  $A \cong \mathbb{Z}^{\text{Rg } A} \oplus TA, B \cong \mathbb{Z}^{\text{Rg } B} \oplus TB$ , also

$$A \oplus B \cong \mathbb{Z}^{\text{Rg } A + \text{Rg } B} \oplus \underbrace{TA \oplus TB}_{=T(A \oplus B)}$$

## 4.8 Proposition

Der Rang von endlich erzeugten abelschen Gruppen ist additiv für kurze exakte Folgen: Ist

$$A \xhookrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \quad [\star]$$

eine kurze exakte Folge von endlich erzeugten abelschen Gruppen, so gilt  $\text{Rg } B = \text{Rg } A + \text{Rg } C$ .

**Beweis**

Spaltet  $[\star]$ , so ist  $B \cong A \oplus C$  und die Behauptung folgt aus der Bemerkung 4.7.

Wir können annehmen, dass  $C = \mathbb{Z}^n \oplus TC$  gilt. Wir erhalten folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xhookrightarrow{i} & p^{-1}(\mathbb{Z}^n) & \xrightarrow{p} & \mathbb{Z}^n \\
 \parallel & & \downarrow i'' & & \downarrow i' \\
 A & \xhookrightarrow{i} & B & \xrightarrow{p} & C \\
 & & \downarrow p'' & & \downarrow p' \\
 & & B/p^{-1}(\mathbb{Z}^n) & \xrightarrow{p' \circ p} & TC
 \end{array} \quad [\star]$$

Ist  $p' \circ p(b) = 0$ , so gibt es  $v \in \mathbb{Z}^n$  mit  $i'(v) = p(b)$ . Nun gibt es  $v' \in p^{-1}(\mathbb{Z}^n)$  mit  $p(v') = v$ . Es folgt

$$p(i''(v')) = p(b)$$

also  $i''(v') - b \in \ker p = i(A)$ . Da  $i(A) \subseteq i''(p^{-1}(\mathbb{Z}^n))$ , folgt  $b \in i''(p^{-1}(\mathbb{Z}^n))$ . In dem Diagramm sind die Spalten und Zeilen exakt. Da  $\mathbb{Z}^n$  frei ist, spaltet  $A \xhookrightarrow{i} p^{-1}(\mathbb{Z}^n) \xrightarrow{p} \mathbb{Z}^n$  und es gilt

$$\text{Rg } A + \text{Rg } C = \text{Rg } A + n = \text{Rg}(p^{-1}(\mathbb{Z}^n))$$

Es bleibt zu zeigen:  $\text{Rg } B = \text{Rg}(p^{-1}(\mathbb{Z}^n))$ .

Nebenbei: Ist  $A' \subseteq B'$ , so gilt  $\text{Rg } A' \leq \text{Rg } B'$ , denn

$$\text{Rg } A' = \max\{n' \mid \mathbb{Z}^{n'} \cong C' \leq A'\} \leq \max\{n' \mid \mathbb{Z}^{n'} \cong C' \leq B'\} = \text{Rg } B'.$$

Betrachte die kurze exakte Folge  $p^{-1}(\mathbb{Z}^n) \longrightarrow B \longrightarrow B/p^{-1}(\mathbb{Z}^n)$ . Wegen  $B/p^{-1}(\mathbb{Z}^n) \cong TC$  gibt es ein  $k$  mit  $k \cdot (b + p^{-1}(\mathbb{Z}^n)) = 0$  für alle  $b \in B$ . Also  $k \cdot b \in p^{-1}(\mathbb{Z}^n)$ . Es folgt  $kB \subseteq p^{-1}(\mathbb{Z}^n)$ . Ist  $B \cong \mathbb{Z}^{\text{Rg } B} + TB$ , so ist  $kB \cong (k\mathbb{Z})^{\text{Rg } B} + T(kB)$  und  $\text{Rg } kB = n = \text{Rg } B$ . Mit der Nebenbemerkung folgt  $\text{Rg } p^{-1}(\mathbb{Z}^n) = \text{Rg } B$  aus  $kB \subseteq p^{-1}(\mathbb{Z}^n) \subseteq B$ .  $\square$

**Beweis mit Tensorprodukten (Skizze)**

- $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z}\text{-Mod} \rightarrow \mathbb{Q}\text{-VR}$  ist ein Funktor.
- $\text{Rg } A = \dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} A)$ 
  - (a)  $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} (X \oplus Y) = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} X \oplus \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} Y$
  - (b)  $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^n \cong \mathbb{Q}^n$
  - (c)  $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} T \cong 0$  für  $T$  ein Torsionsmodul.
- Ist  $A \longrightarrow B \longrightarrow C$  eine kurze exakte Folge, so ist auch

$$\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} A \longrightarrow \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} B \longrightarrow \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} C$$

eine kurze exakte Folge.

- Jede kurze exakte Folge  $V_0 \longrightarrow V_1 \longrightarrow V_2$  von  $\mathbb{Q}$ -Vektorräumen spaltet und daher gilt  $V_1 \cong V_0 \oplus V_2$  und  $\dim_{\mathbb{Q}}(V \oplus W) = \dim_{\mathbb{Q}}(V) + \dim_{\mathbb{Q}}(W)$ .

## 4.9 Definition

Sei  $(C_*, d_*)$  ein endlich erzeugter  $\mathbb{Z}$ -Kettenkomplex.

$$\chi(C_*) := \sum_{i=0}^{\infty} \operatorname{Rg}(C_i) = \sum_{i=0}^{n_0} \operatorname{Rg}(C_i)$$

heißt die **Eulercharakteristik** von  $(C_*, d_*)$ . Dabei ist  $n_0$  so gewählt, dass  $C_n = 0$  für alle  $n > n_0$ .

## 4.10 Satz

Sei  $(C_*, d_*)$  ein endlich erzeugter  $\mathbb{Z}$ -Kettenkomplex. Dann gilt

$$\chi(C_*) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \operatorname{Rg} H_i(C_*, d_*).$$

### Beweis

Sei  $B_{n+1} := \operatorname{Im} d_{n+1} : C_{n+1} \rightarrow C_n$  und  $Z_n := \ker d_n : C_n \rightarrow C_{n-1}$ . Also  $H_n(C_*, d_*) = Z_n / B_{n+1}$ . Als Untermoduln von  $C_n$  sind  $Z_n$  und  $B_n$  endlich erzeugt (LA2). Insbesondere ist auch  $H_n(C_*, d_*)$  endlich erzeugt und der Rang somit definiert. Auch  $B_{n+1}$  ist Untermodul des endlich erzeugten  $\mathbb{Z}$ -Moduls  $C_n$  und somit endlich erzeugt. Wir erhalten kurze exakte Folgen:

$$\begin{aligned} B_{n+1} &\hookrightarrow Z_n \twoheadrightarrow H_n(C_*, d_*) \\ Z_n &\hookrightarrow C_n \twoheadrightarrow B_n \end{aligned}$$

Folglich gilt  $\operatorname{Rg} Z_n = \operatorname{Rg} B_{n+1} + \operatorname{Rg} H_n(C_*, d_*)$  und  $\operatorname{Rg} C_n = \operatorname{Rg} Z_n + \operatorname{Rg} B_n$ . Also gilt

$$\begin{aligned} \chi(C_*) &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \operatorname{Rg} C_i = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i (\operatorname{Rg} Z_i + \operatorname{Rg} B_i) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i (\operatorname{Rg} H_i(C_*, d_*) + \operatorname{Rg} B_{i+1} + \operatorname{Rg} B_i) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \operatorname{Rg} H_i(C_*, d_*) + \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \operatorname{Rg} B_{i+1} + \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \operatorname{Rg} B_i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \operatorname{Rg} H_i(C_*, d_*) \quad \square \end{aligned}$$

## 4.11 Korollar

Sei  $K$  ein endlicher, geordneter simplizialer Kettenkomplex. Dann gilt

$$\chi(K) = \sum_{i=1}^{\dim K} (-1)^i \operatorname{Rg} H_i(K; \mathbb{Z})$$

### Beweis

Wende den Satz 4.10 auf den simplizialen Kettenkomplex von  $K$  an. Da

$$\operatorname{Rg} C_n(K; \mathbb{Z}) = \operatorname{Rg} \mathbb{Z}[\Sigma_n] = \# \text{ } n\text{-Simplizes in } K$$

ist

$$\chi(K) = \chi(C_*(K; \mathbb{Z}), \partial_*) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \operatorname{Rg} H_i(C_*(K; \mathbb{Z}), \partial_*) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \operatorname{Rg} H_i(K; \mathbb{Z}) \quad \square$$

## 5 Singuläre Homologie

### 5.1 Definition

Sei  $X$  ein topologischer Raum. Sei  $S_n(X)$  die Menge aller stetigen Abbildungen  $\sigma : |\Delta^n| \rightarrow X$ . Elemente von  $S_n(X)$  heißen **singuläre Simplizes** in  $X$ . Sei  $R$  ein Ring. Der  **$n$ -te (singuläre) Kettenmodul** von  $X$  über  $R$  ist

$$C_n(X; R) := R[S_n(X)]$$

### 5.2 Definition

Für  $\sigma \in S_n(X)$  und  $j \in \{0, \dots, n\}$  sei  $\delta_j \sigma \in S_{n-1}(X)$  die Einschränkung von  $\sigma$  auf die  $j$ -te Seite von  $|\Delta^n|$ , also  $\delta_j(\sigma) = \sigma \circ \iota_{n,j}$ , wobei  $\iota_{n,j} : |\Delta^{n-1}| \rightarrow |\Delta^n|$  die Inklusion der  $j$ -ten Seite ist:

$$\iota_{n,j}(x_0, \dots, x_{n-1}) = (x_0, \dots, x_{j-1}, 0, x_j, \dots, x_{n-1})$$

### 5.3 Bemerkung

Es gilt  $\iota_{n,j} = |i_{n,j}|$  wobei  $i_{n,j} : \Delta^{n-1} \rightarrow \Delta^n$  gegeben ist durch

vergleiche Blatt 2,  
Aufgabe 2

$$i_{n,j}(k) = \begin{cases} k, & \text{falls } k < j \\ k+1, & \text{falls } k \geq j \end{cases}$$

### 5.4 Definition

Die  **$n$ -te singuläre Randabbildung**  $\partial_n : C_n(X; R) \rightarrow C_{n-1}(X; R)$  ist definiert durch

$$\partial_n(\sigma) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \cdot \delta_j(\sigma).$$

### 5.5 Proposition

$$\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$$

**Beweis (mit Lemma 5.6)**

$$\begin{aligned} \partial_{n-1} \partial_n(\sigma) &= \partial_{n-1} \left( \sum_{j=0}^n (-1)^j \delta_j(\sigma) \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^n (-1)^{j+k} \delta_k \delta_j(\sigma) \\ &= \sum_{0 \leq k < j \leq n} (-1)^{k+j} \delta_k \delta_j(\sigma) + \sum_{0 \leq j \leq k \leq n-1} (-1)^{k+j} \delta_k \delta_j(\sigma) \\ &\stackrel{\text{Lemma 5.6}}{=} \sum_{0 \leq k < j \leq n} (-1)^{k+j} \delta_k \delta_j(\sigma) + \sum_{0 \leq j \leq k \leq n-1} (-1)^{k+j} \delta_j \delta_{k+1}(\sigma) \\ &= \sum_{0 \leq k < j \leq n} (-1)^{k+j} \delta_k \delta_j(\sigma) + \sum_{0 \leq j < k \leq n} (-1)^{k-1+j} \delta_j \delta_k(\sigma) \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

### 5.6 Lemma

Für  $0 \leq j \leq k \leq n-1$  und  $\sigma \in S_n(X)$  ist  $\delta_k \delta_j(\sigma) = \delta_j \delta_{k+1}(\sigma)$ .

### Beweis

Es ist

$$\begin{aligned}\delta_k(\delta_j(\sigma))(x_0, \dots, x_{n-2}) &= \delta_j(\sigma)(x_0, \dots, x_{k-1}, 0, x_k, \dots, x_{n-2}) \\ &= (x_0, \dots, x_{j-1}, 0, x_j, \dots, x_{k-1}, 0, x_k, \dots, x_{n-2})\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\delta_j\delta_{k+1}(\sigma)(x_0, \dots, x_{n-2}) &= \delta_{k+1}(\sigma)(x_0, \dots, x_{j-1}, 0, x_j, \dots, x_{n-2}) \\ &= (x_0, \dots, x_{j-1}, 0, x_j, \dots, x_{k-1}, 0, x_k, \dots, x_{n-2})\end{aligned}\quad \square$$

### 5.7 Definition

Sei  $X$  ein topologischer Raum. Die Homologie des **singulären Kettenkomplex** über  $R$ ,  $(C_*(X; R), \partial_*)$ , heißt die **singuläre Homologie von  $X$**  mit Koeffizienten in  $R$ :

$$H_n(X; R) := H_n(C_*(X; R), \partial_*)$$

Für  $R = \mathbb{Z}$  schreiben wir kürzer  $C_*(X) := C_*(X; \mathbb{Z})$  und  $H_n(X) := H_n(X; \mathbb{Z})$ .

### 5.8 Definition

- Die Elemente von  $C_n(X; R)$  heißen **n-Ketten**.
- Die Elemente von  $\text{Im } \partial_{n+1} \subseteq C_n(X; R)$  heißen **n-Ränder**.
- Die Elemente von  $\ker \partial_n \subseteq C_n(X; R)$  heißen **n-Zykel**.

Jeder  $n$ -Zykel  $\sigma \in C_n(X; R)$  bestimmt eine **Homologieklass**  $[\sigma] := \sigma + \text{Im } \partial_{n+1} \in H_n(X; R)$ .

### 5.9 Beispiel

Ist  $X = \{x_0\}$  der Ein-Punkt-Raum, so ist

$$H_*(\{x_0\}; R) \cong \begin{cases} R, & \text{falls } * = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

### Beweis

Es gibt für jedes  $n$  genau eine Abbildung, nämlich die konstante,  $\sigma_n : |\Delta^n| \rightarrow \{x_0\}$  und diese ist stetig. Also  $C_n(\{x_0\}; R) = R[\sigma_n]$ . Für alle  $j$  ist  $\delta_j\sigma_n = \sigma_{n-1}$ . Daher ist

$$\partial_n(\sigma_n) = \begin{cases} 0, & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \sigma_{n-1}, & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

Der singuläre Kettenkomplex von  $\{x_0\}$  hat also folgende Gestalt:

$$\begin{array}{ccccccc} C_0(\{x_0\}; R) & \xleftarrow{0} & C_1(\{x_0\}; R) & \xleftarrow{\cong} & C_2(\{x_0\}; R) & \xleftarrow{0} & C_3(\{x_0\}; R) & \xleftarrow{\cong} & \dots \\ R & \xleftarrow{0} & R & \xleftarrow{\text{id}} & R & \xleftarrow{0} & R & \xleftarrow{\text{id}} & R \end{array}$$

Es folgt

$$H_n(\{x_0\}; R) \cong \begin{cases} R, & \text{falls } n = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}\quad \square$$

### 5.10 Proposition

- 1) Ist  $X \neq \emptyset$ , so ist  $H_0(X) \neq 0$ .
- 2) Ist  $X$  wegzusammenhängend, so gilt  $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$

#### Beweis

- 1) Sei  $\varepsilon : C_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$  definiert durch  $\varepsilon\left(\sum_{\sigma \in S_0(X)} r_\sigma \cdot \sigma\right) := \sum_{\sigma} r_\sigma$ . Dann ist  $\varepsilon \circ \partial_1 : C_1(X) \rightarrow \mathbb{Z}$  trivial, denn für  $\sigma \in S_1(X)$  ist  $\varepsilon \circ \partial_1(\sigma) = \varepsilon(\delta_0\sigma - \delta_1\sigma) = 0$ . Daher induziert  $\varepsilon$  eine Abbildung  $\bar{\varepsilon} : H_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ . Da  $X \neq \emptyset$  ist, gibt es einen singulären 0-Simplex  $\sigma : |\Delta^0| \rightarrow X$ . Für  $\sigma$  gilt  $\bar{\varepsilon}([\sigma]) = 1$  und daher ist  $\bar{\varepsilon}$  surjektiv und  $H_0(X) \neq 0$ .
- 2) Wir zeigen:  $\bar{\varepsilon} : H_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$  ist ein Isomorphismus, falls  $X$  wegzusammenhängend ist. Dazu zeigen wir  $\ker \varepsilon = \text{Im } \partial_1$ . Dazu definieren wir  $s : C_0(X) \rightarrow C_1(X)$  wie folgt: Sei  $\sigma_0$  ein fest gewählter singulärer 0-Simplex. Zu  $\sigma \in S_0(X)$  gibt es, da  $X$  wegzusammenhängend ist,  $s(\sigma) \in S_1(X)$  mit  $\delta_0 s(\sigma) = \sigma$ ,  $\delta_1 s(\sigma) = \sigma_0$ . Es gilt nun

$$\partial_1 \circ s(\sigma) = \sigma - \sigma_0 = (\text{id}_{C_0(X)} - i \circ \varepsilon)(\sigma)$$

wobei  $i : \mathbb{Z} \rightarrow C_0(X)$ ,  $n \mapsto n \cdot \sigma_0$ . Ist nun  $v \in \ker \varepsilon$ , so folgt

$$\partial_1 \circ s(v) = v - \underbrace{i \circ \varepsilon(v)}_{=0} = v$$

also  $v \in \text{Im } \partial_1$ . □

### 5.11 Bemerkung

Sei  $K = (V, \Sigma)$  ein geordneter simplizialer Komplex. Sei  $\sigma = \{v_0, \dots, v_n\} \in \Sigma_n$  ein  $n$ -Simplex von  $K$  mit  $v_0 < v_1 < \dots < v_n$ . Wir ordnen  $\sigma$  den singulären  $n$ -Simplex  $f_\sigma : |\Delta^n| \rightarrow |K|$  zu, wobei

$$f_\sigma\left(\sum_{i=0}^n t_i e_i\right) = \sum_{i=0}^n t_i v_i.$$

Nun erhalten wir eine Abbildung

$$C_*(K; R) \rightarrow C_*(|K|, R) \quad , \quad \sum_{\sigma \in \Sigma_n} r_\sigma \cdot \sigma \mapsto \sum_{\sigma \in \Sigma_n} r_\sigma \cdot f_\sigma.$$

Diese Abbildung induziert(!) eine weitere Abbildung  $H_*(K; R) \xrightarrow{\cong} H_*(|K|; R)$  von der wir später zeigen werden, dass sie ein Isomorphismus ist.

## 6 Funktorialität

### 6.1 Definition

Seien  $(C_*, d_*)$  und  $(C'_*, d'_*)$  zwei  $R$ -Kettenkomplexe. Eine  **$R$ -Kettenabbildung**  $f_*: (C_*, d_*) \rightarrow (C'_*, d'_*)$  ist eine Folge von  $R$ -linearen Abbildungen  $f_n: C_n \rightarrow C'_n$ , sodass

$$d'_n \circ f_n = f_{n-1} \circ d_n$$

für alle  $n \geq 1$  gilt. Also kommutiert folgendes Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} C_0 & \xleftarrow{d_1} & C_1 & \xleftarrow{d_2} & C_2 & \xleftarrow{d_3} & C_3 \xleftarrow{\quad} \dots \\ \downarrow f_0 & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 \\ C'_0 & \xleftarrow{d'_1} & C'_1 & \xleftarrow{d'_2} & C'_2 & \xleftarrow{d'_3} & C'_3 \xleftarrow{\quad} \dots \end{array}$$

### 6.2 Bemerkung

Ist  $f_*: (C_*, d_*) \rightarrow (C'_*, d'_*)$  eine Kettenabbildung, so erhalten wir eine induzierte Abbildung auf Homologie  $H_n(f_*): H_n(C_*, d_*) \rightarrow H_n(C'_*, d'_*)$  durch

$$H_n(f_*)([v]) := [f_n(v)]$$

für  $v \in \ker d_n$ . Dies ist wohldefiniert, denn:

- $d'_n(f_n(v)) = f_{n-1}(d_n(v)) = 0$ , also  $f_n(v) \in \ker d'_n$  für  $v \in \ker d_n$ .
- Ist  $[v] = [w]$ , mit  $v, w \in \ker d_n$ , so gibt es  $x \in C_{n+1}$  mit  $d_{n+1}(x) = v - w$ . Dann ist

$$d'_{n+1}(f_{n+1}(x)) = f_n(d_{n+1}(x)) = f_n(v) - f_n(w)$$

also  $[f_n(v)] = [f_n(w)] \in H_n(C'_*, d'_*)$ .

### 6.3 Bemerkung

a)  $R$ -Kettenkomplexe mit Kettenabbildungen bilden die Kategorie  $R\text{-KETTEN}$ .

b) Homologie definiert nun einen Funktor:  $H_n: R\text{-KETTEN} \rightarrow R\text{-MOD}$ .

Es gilt  $H_n(\text{id}_{(C_*, d_*)}) = \text{id}_{H_n(C_*, d_*)}$  und  $H_n(f \circ g) = H_n(f) \circ H_n(g)$ , da

$$H_n(f \circ g)([v]) = [f_n \circ g_n(v)] = [f_n(g_n(v))] = H_n(f)([g_n(v)]) = H_n(f)(H_n(g)(v))$$

c) Definiert man die Kategorie der **graduerten**  $R$ -Moduln als die Kategorie, deren Objekte Folgen  $(V_n)_n$  von  $R$ -Moduln sind und deren Morphismen Folgen von  $R$ -linearen Abbildungen  $(f_n)_n$  sind, so kann man die  $H_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  zu einem Funktor

$$H_*: R\text{-KETTEN} \longrightarrow \text{GR-}R\text{-MOD} \quad , \quad (C_*, d_*) \longmapsto (H_n(C_*, d_*))_n$$

zusammensetzen.

### 6.4 Definition

Sei  $f: X \rightarrow Y$  stetig. Wir definieren  $C_n(f; R): C_n(X; R) \rightarrow C_n(Y; R)$  durch

$$C_n(f; R) \left( \sum_{\sigma \in S_n(X)} r_\sigma \cdot \sigma \right) := \sum_{\sigma \in S_n(X)} r_\sigma \cdot (f \circ \sigma)$$

Dies ist wohldefiniert, denn für  $\sigma \in S_n(X)$  ist  $f \circ \sigma \in S_n(Y)$ .



## 6.5 Proposition

Mit dieser Definition von  $C_*(f; R)$  wird der singuläre Kettenkomplex über  $R$  zu einem Funktor

$$C_*(-; R): \text{TOP} \rightarrow R\text{-KETTEN}$$

### Beweis

(i)  $C_*(f; R)$  ist eine  $R$ -Kettenabbildung: Es gilt

$$\begin{aligned} C_{n-1}(f; R) \circ \partial_n(\sigma) &= C_{n-1}(f; R) \left( \sum_{l=0}^n (-1)^l \sigma \circ \iota_{n,l} \right) = \sum_{l=0}^n (-1)^l (f \circ \sigma) \circ \iota_{n,l} \\ &= \partial_n(f \circ \sigma) = \partial(C_n(f; R)(\sigma)). \end{aligned}$$

(ii) Zu zeigen:  $C_*(f \circ g; R) = C_*(f; R) \circ C_*(g; R)$ . Es gilt

$$C_n(f \circ g; R)(\sigma) = f \circ (g \circ \sigma) = C_n(f; R)(g \circ \sigma) = C_n(f; R)(C_n(g; R)(\sigma)).$$

(iii) Zu zeigen:  $C_*(\text{id}_X; R) = \text{id}_{C_*(X; R)}$ . Es gilt

$$C_n(\text{id}_X; R)(\sigma) = \text{id}_X \circ \sigma = \sigma$$

□

## 6.6 Korollar

Mit  $H_n(f; R) := H_n(C_*(f; R))$  wird  $H_n(-; R)$  zu einem Funktor:  $H_n(-; R): \text{TOP} \rightarrow R\text{-MOD}$ .

### Beweis

$H_n(-; R)$  ist die Komposition der Funktoren  $C_*(-; R): \text{TOP} \rightarrow R\text{-KETTEN}$  und  $H_*: R\text{-KETTEN} \rightarrow R\text{-MOD}$ . □

## 6.7 Bemerkung

• Oft schreiben wir kurz  $f_* = H_n(f; R)$ .

• Für  $\left[ \sum_{\sigma \in S_n(X)} r_\sigma \sigma \right] \in H_n(X; R)$  ist  $f_* \left( \left[ \sum_{\sigma \in S_n(X)} r_\sigma \sigma \right] \right) = \left[ \sum_{\sigma \in S_n(X)} r_\sigma f \circ \sigma \right] \in H_n(Y; R)$

## 6.8 Definition

Seien  $X_i, i \in I$  topologische Räume. Mit

$$X := \coprod_{i \in I} X_i$$

bezeichnen wir die **Summe** (oder auch das **Koprodukt**) der  $X_i$ . Als Menge ist  $X$  die disjunkte Vereinigung der  $X_i$ .  $U \subseteq X$  ist offen genau dann, wenn  $X_i \cap U \subseteq X_i$  offen ist für jedes  $i \in I$ . Für jedes  $i_0$  erhalten wir eine stetige Inklusion  $j_{i_0}: X_{i_0} \rightarrow \coprod_i X_i$ .

### Bemerkung

Für jedes  $i_0$  ist  $X_{i_0} \subseteq \coprod_i X_i$  offen und abgeschlossen.

## 6.9 Definition

Seien  $V_i, i \in I$   $R$ -Moduln. Mit

$$V := \bigoplus_{i \in I} V_i$$

bezeichnen wir die **Summe** (oder auch das **Koprodukt**) der  $V_i$ . Elemente von  $V$  sind  $I$ -Folgen  $(v_i)_{i \in I}$  mit  $v_i \in V_i$  und  $v_i = 0$  für alle bis auf endlich viele  $i$ . Die  $R$ -Modulstruktur ist erklärt durch:

$$(v_i)_{i \in I} + (w_i)_{i \in I} := (v_i + w_i)_{i \in I}, \quad r \cdot (v_i)_{i \in I} := (r \cdot v_i)_{i \in I}$$

Für jedes  $i_0 \in I$  erhalten wir eine  $R$ -lineare Abbildung  $j_{i_0}: V_{i_0} \rightarrow V$  mit

$$(j_{i_0}(v))_i = \begin{cases} v, & \text{falls } i = i_0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

### Bemerkung

Seien  $V_i, i \in I$   $R$ -Moduln. Sei  $W$  ein weiterer  $R$ -Modul. Dann gibt es zu jeder Folge  $f_i: V_i \rightarrow W$  von  $R$ -linearen Abbildungen eine  $R$ -lineare Abbildung  $\bigoplus_{i \in I} f_i: \bigoplus_{i \in I} V_i \rightarrow W$  mit

$$(\bigoplus_{i \in I} f_i)((v_i)_{i \in I}) = \sum_{i \in I} f_i(v_i)$$

Ist umgekehrt  $f: \bigoplus_{i \in I} V_i \rightarrow W$  eine  $R$ -lineare Abbildung, so ist  $f_i := f \circ j_i$  eine Folge von  $R$ -linearen Abbildungen mit  $f = \bigoplus_{i \in I} f_i$ .

## 6.10 Satz

Sei  $X = \coprod_{i \in I} X_i$ . Dann induzieren die Inklusionen  $j_i: X_i \rightarrow X$  einen Isomorphismus

$$\bigoplus_{i \in I} H_n(X_i; R) \xrightarrow{\bigoplus_{i \in I} (j_i)_*} H_n(X; R)$$

### Beweis

Da die  $X_i \subseteq X$  offen und abgeschlossen sind und  $|\Delta^n|$  zusammenhängend ist (sogar wegzusammenhängend), gibt es für jedes  $\sigma: |\Delta^n| \rightarrow X$  ein eindeutiges  $i$  mit  $\text{Im } \sigma \subseteq X_i$ . Es gilt also  $S_n(X) = \bigcup S_n(X_i)$ . Daher induzieren die  $j_i$  einen Isomorphismus

$$\bigoplus_{i \in I} C_n(j_i; R): \bigoplus_{i \in I} C_n(X_i; R) \xrightarrow{\cong} C_n(X; R)$$

Da diese Isomorphismen mit den Randabbildungen vertauschen, erhalten wir einen Isomorphismus von  $R$ -Kettenkomplexen

$$\varphi := \bigoplus_{i \in I} C_*(j_i; R): \bigoplus_{i \in I} C_*(X_i; R) \xrightarrow{\cong} C_*(X; R)$$

Da  $\bigoplus H_n(C_*(X_i; R)) \cong H_n(\bigoplus C_*(X_i; R))$  induzieren dann auch die  $(j_i)_*$  einen Isomorphismus

$$\bigoplus_{i \in I} (j_i)_*: \bigoplus_{i \in I} H_n(X_i; R) \xrightarrow{\cong} H_n(X; R) \quad \square$$

## 7 Homotopieinvarianz

### 7.1 Bemerkung

Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine Homöomorphismus. Dann ist

$$f_* : H_n(X; R) \longrightarrow H_n(Y; R)$$

ein Isomorphismus.

#### Beweis

Da Homologie ein Funktor ist, gilt

$$\begin{aligned} f_* \circ (f^{-1})_* &= (f \circ f^{-1})_* = (\text{id}_Y)_* = \text{id}_{H_n(Y; R)} & \text{und} \\ (f^{-1})_* \circ f_* &= (f^{-1} \circ f)_* = (\text{id}_X)_* = \text{id}_{H_n(X; R)} \end{aligned}$$

Also ist  $(f_*)^{-1} = (f^{-1})_*$ . Insbesondere ist  $f_*$  ein Isomorphismus. □

### 7.2 Definition

Eine stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  heißt eine **Homotopieäquivalenz**, falls es eine stetige Abbildung  $g : Y \rightarrow X$  gibt, so dass  $g \circ f$  homotop zu  $\text{id}_X$  ist und  $f \circ g$  homotop zu  $\text{id}_Y$  ist.  $g$  heißt dann eine **Homotopieinverse** zu  $f$ .

#### Bemerkung

- (i)  $f$  ist genau dann eine Homotopieäquivalenz, wenn  $[f]$  in  $\text{HTop}$  invertierbar ist. In  $\text{HTop}$  ist dann  $[f]^{-1} = [g]$ .
- (ii) Die Homotopieinverse ist eindeutig bis auf Homotopie.

### 7.3 Satz

Seien  $f, g : X \rightarrow Y$  stetige Abbildungen. Sind  $f$  und  $g$  homotop, so gilt  $H_n(f; R) = H_n(g; R)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

#### Beweis

Siehe 7.8, sowie 7.13 □

### 7.4 Korollar

Ist  $f : X \rightarrow Y$  eine Homotopieäquivalenz, so ist  $f_* : H_n(X; R) \rightarrow H_n(Y; R)$  ein Isomorphismus.

#### Beweis

Sei  $g : Y \rightarrow X$  ein Homotopieinverses zu  $f$ . Es folgt

$$\begin{aligned} f_* \circ g_* &\stackrel{\text{Funktor}}{=} (f \circ g)_* \stackrel{\text{Homotopieinvarianz}}{=} (\text{id}_Y)_* \stackrel{\text{Funktor}}{=} \text{id}_{H_n(Y; R)} \\ g_* \circ f_* &\stackrel{\text{Funktor}}{=} (g \circ f)_* \stackrel{\text{Homotopieinvarianz}}{=} (\text{id}_X)_* \stackrel{\text{Funktor}}{=} \text{id}_{H_n(X; R)} \end{aligned}$$

### 7.5 Korollar

Ist  $X$  **kontrahierbar**, d.h. es gibt eine Homotopie  $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$  mit  $H_0 = \text{id}_X$  und  $H_1$  konstant, so gilt

$$H_n(X; R) \cong \begin{cases} R, & \text{falls } n = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

### Beweis

Sei  $\{x_0\} = \text{Im } H_1$ . Dann ist die Inklusion  $\{x_0\} \rightarrow X$  eine Homotopieäquivalenz. Also gilt nach 7.4

$$H_n(X; R) \cong H_n(\{x_0\}; R) \stackrel{5.9}{=} \begin{cases} R, & \text{falls } n = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad \square$$

### Beispiel

$$H_n(\mathbb{R}^k; R) \cong \begin{cases} R, & \text{falls } n = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad H_n(D^k; R) \cong \begin{cases} R, & \text{falls } n = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

## 7.6 Definition

Seien  $(C_*, d_*)$  und  $(C'_*, d'_*)$   $R$ -Kettenkomplexe. Seien  $f_*, g_* : (C_*, d_*) \rightarrow (C'_*, d'_*)$   $R$ -Kettenabbildungen. Eine **Kettenhomotopie** von  $f_*$  nach  $g_*$  ist eine Folge von  $R$ -linearen Abbildungen  $h_n : C_n \rightarrow C'_{n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , sodass für alle  $n$  gilt:

$$d'_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ d_n = f_n - g_n$$

In diesem Fall heißen  $f_*$  und  $g_*$  **kettenhomotop**.

## 7.7 Proposition

Seien  $f_*, g_* : (C_*, d_*) \rightarrow (C'_*, d'_*)$  Kettenabbildungen. Sind  $f_*$  und  $g_*$  kettenhomotop, so gilt für alle  $n$

$$H_n(f_*) = H_n(g_*)$$

### Beweis

Sei  $x \in H_n(C_*, d_*)$ . Also  $x = [v]$  mit  $v \in \ker d_n : C_n \rightarrow C_{n-1}$ . Dann gilt, da  $v \in \ker d_n$

$$\begin{aligned} H_n(f_*)(x) &= H_n(f_*)([v]) = [f_n(v)] = \left[ g_n(v) + \underbrace{d'_{n+1} \circ h_n(v)}_{\in \text{Im } d'_{n+1}} + \underbrace{h_{n-1} \circ d_n(v)}_{=0} \right] \\ &= [g_n(v)] = H_n(g_*)([v]) = H_n(g_*)(x) \end{aligned} \quad \square$$

## 7.8 Lemma

Die Homotopieinvarianz von  $H_n(-; R)$  folgt aus folgenden Spezialfall:

$$\text{Seien } i_0, i_1 : X \hookrightarrow X \times [0, 1] \text{ Inklusionen mit } i_0(x) = (x, 0), i_1(x) = (x, 1). \implies (i_0)_* = (i_1)_* \quad [\#]$$

### Beweis

Sei  $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  eine Homotopie zwischen  $f, g : X \rightarrow Y$ , also  $f = H \circ i_0$  und  $g = H \circ i_1$ . Dann folgt mittels Funktorialität

$$f_* = (H \circ i_0)_* = H_* \circ (i_0)_* = H_* \circ (i_1)_* = (H \circ i_1)_* = g_* \quad \square$$

## 7.9 Bemerkung

Zum Beweis von  $[\#]$  werden wir eine explizite Kettenhomotopie  $h_*$  zwischen  $C_*(i_0; R)$  und  $C_*(i_1; R)$  konstruieren. Wir brauchen also  $h_n : C_n(X; R) \rightarrow C_{n+1}(X \times [0, 1]; R)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit

$$\partial_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ \partial_n = C_n(i_0; R) - C_n(i_1; R). \quad [\#\#]$$

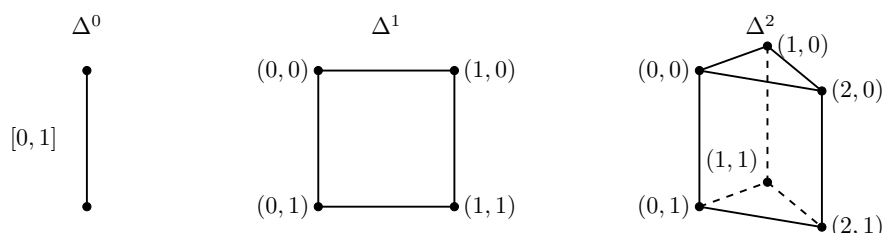
**"Ansatz"**

Für  $\sigma : |\Delta^n| \rightarrow X$  setze  $h_n(\sigma) = \sigma \times \text{id}_{[0,1]} : |\Delta^n| \times [0,1] \rightarrow X \times [0,1]$ . Dann ist " $h_{n-1}(\partial_n \sigma) = \partial_n \sigma \times \text{id}_{[0,1]}$ " und

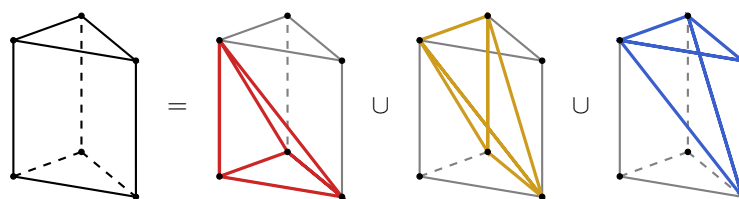
$$\partial_{n+1}(h_n \sigma) = \partial_{n+1}(\sigma \times \text{id}_{[0,1]}) = (\sigma \times \text{id}) \Big|_{\partial(|\Delta^n| \times [0,1])} = \partial_n \sigma \times \text{id}_{[0,1]} + i_0 \sigma + i_1 \sigma$$

da  $\partial(|\Delta^n| \times [0,1]) = \partial|\Delta^n| \times [0,1] \dot{\cup} |\Delta^n| \times \{0,1\}$ .

Um daraus Sinn zu machen, zerlegen wir  $|\Delta^n| \times [0,1]$  in eine Vereinigung von  $(n+1)$ -Simplizes.  $\Delta^n \times [0,1]$  hat die folgende Form für  $n \in \{0,1,2\}$ :

Abbildung 1:  $\Delta^n \times [0,1]$  für  $n = 0, 1, 2$ 

Die Zerlegung in 3-Simplizes ist für  $\Delta^2 \times [0,1]$  gegeben durch

Abbildung 2: Zerlegung von  $\Delta^2 \times [0,1]$  in 3-Simplizes

Diese verallgemeinern wir jetzt für beliebiges  $n \in \mathbb{N}$ :

**7.10 Definition**

Für  $j = 0, \dots, n$  seien  $k_{n,j} : |\Delta^{n+1}| \rightarrow |\Delta^n| \times [0,1]$  und  $\iota_{n,j} : |\Delta^{n-1}| \rightarrow |\Delta^n|$  die eindeutigen affin linearen Abbildungen, für die gilt:

$$\begin{aligned} k_{n,j}(e_0) &= (e_0, 0) & \iota_{n,j}(e_0) &= e_0 \\ k_{n,j}(e_1) &= (e_1, 0) \dots & \iota_{n,j}(e_1) &= e_1 \dots \\ k_{n,j}(e_j) &= (e_j, 0) & \iota_{n,j}(e_{j-1}) &= e_{j-1} \\ k_{n,j}(e_{j+1}) &= (e_j, 1) \dots & \iota_{n,j}(e_j) &= e_{j+1} \dots \\ k_{n,j}(e_{n+1}) &= (e_n, 1) & \iota_{n,j}(e_{n-1}) &= e_n \end{aligned}$$

$e_1, \dots, e_n$  sind  
wieder die  
Einheitsvektoren  
von  $\mathbb{R}^n$

**7.11 Lemma**

Es gelten folgende fünf Gleichungen für die Abbildungen  $k_{n,j}$  und  $\iota_{n,j}$ :

(i) Für  $0 \leq l < j \leq n$  gilt  $k_{n,j} \circ \iota_{n+1,l} = (\iota_{n,l} \times \text{id}_{[0,1]}) \circ k_{n-1,j-1}$

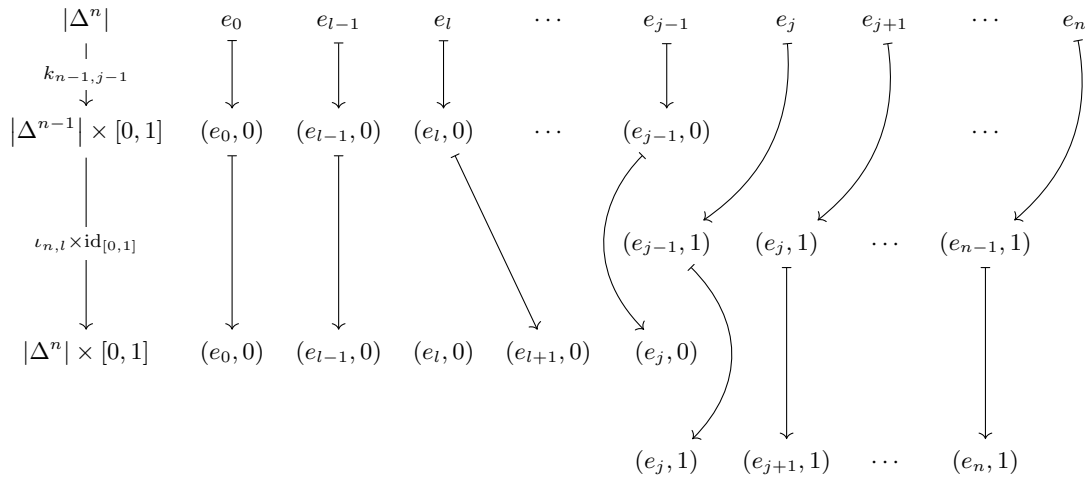
- (ii) Für  $1 \leq j+1 < l \leq n+1$  gilt  $k_{n,j} \circ \iota_{n+1,l} = (\iota_{n,l-1} \times \text{id}_{[0,1]}) \circ k_{n-1,j}$
- (iii) Für  $1 \leq j+1 = l \leq n$  gilt  $k_{n,j} \circ \iota_{n+1,l} = k_{n,j+1} \circ \iota_{n+1,l}$
- (iv) Für  $l=0, j=0$  ist  $k_{n,j} \circ \iota_{n+1,l} = i_1 : \Delta^n \rightarrow \Delta^n \times [0,1]$
- (v) Für  $l=n, j=n+1$  ist  $k_{n,j} \circ \iota_{n+1,l} = i_0 : \Delta^n \rightarrow \Delta^n \times [0,1]$

### Beweis

Wir zeigen hier nur exemplarisch die erste Gleichung: Die linke Seite der Gleichung entspricht



und die rechte Seite entspricht



Also folgt insgesamt die Gleichheit. Die anderen Gleichungen folgen genauso.  $\square$

### 7.12 Beweis von [##]

Sei  $h_n : C_n(X; R) \rightarrow C_{n+1}(X \times [0,1]; R)$  definiert durch

$$h_n(\sigma) := \sum_{j=0}^n (-1)^j \cdot (\sigma \times \text{id}) \circ k_{n,j}$$

$h_*$  ist die gesuchte Kettenhomotopie, da für  $n \in \mathbb{N}$  unter Anwendung der Gleichungen aus 7.12 gilt:

$$\begin{aligned}
 \partial_{n+1}(h_n(\sigma)) &= \partial_{n+1} \left( \sum_{j=0}^n (-1)^j \cdot (\sigma \times \text{id}) \circ k_{n,j} \right) \\
 &= \sum_{l=0}^{n+1} \sum_{j=0}^n (-1)^{j+l} \cdot (\sigma \times \text{id}) \circ k_{n,j} \circ \iota_{n+1,l} \quad (\text{nach Definition 5.2}) \\
 &= \sum_{0 \leq l < j \leq n} (-1)^{j+l} ((\sigma \circ \iota_{n,l}) \times \text{id}) \circ k_{n-1,j-1} + \sum_{1 \leq j+1 < l \leq n+1} (-1)^{j+l} ((\sigma \circ \iota_{n,l-1}) \times \text{id}) \circ k_{n-1,j} \\
 &\quad + \sum_{1 \leq j+1=l \leq n} (-1)^{j+l} (\sigma \times \text{id}) \circ k_{n,j+1} \circ \iota_{n+1,l} + \sum_{1 \leq j=l \leq n} (-1)^{j+l} (\sigma \times \text{id}) \circ k_{n,j} \circ \iota_{n+1,l} \\
 &\quad + \sum_{0=l=j} (-1)^{j+l} (\sigma \times \text{id}) \circ i_1 + \sum_{n+1=j+1=l} (-1)^{j+l} (\sigma \times \text{id}) \circ i_0 \\
 &= \sum_{0 \leq l \leq j \leq n-1} (-1)^{j+l+1} ((\sigma \circ \iota_{n,l}) \times \text{id}) \circ k_{n-1,j} + \sum_{1 \leq j+1 \leq l \leq n} (-1)^{j+l+1} ((\sigma \circ \iota_{n,l}) \times \text{id}) \circ k_{n-1,j} \\
 &\quad + \underbrace{\sum_{1 \leq j=l \leq n} (-1)^{j+l-1} (\sigma \times \text{id}) \circ k_{n,j} \circ \iota_{n+1,l} + \sum_{1 \leq j=l \leq n} (-1)^{j+l} (\sigma \times \text{id}) \circ k_{n,j} \circ \iota_{n+1,l}}_{=0} \\
 &\quad + \sum_{0=l=j} (-1)^{j+l} (\sigma \times \text{id}) \circ i_1 + \sum_{n+1=j+1=l} (-1)^{j+l} (\sigma \times \text{id}) \circ i_0 \\
 &= - \sum_{\substack{0 \leq l \leq n \\ 0 \leq j \leq n-1}} (-1)^{j+l} ((\sigma \circ \iota_{n,l}) \times \text{id}) \circ k_{n-1,j} + (\sigma \times \text{id}) \circ i_1 - (\sigma \times \text{id}) \circ i_0 \\
 &= - \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \sum_{l=0}^n (-1)^l ((\sigma \circ \iota_{n,l}) \times \text{id}) \circ k_{n-1,j} + \underbrace{(\sigma \times \text{id}) \circ i_1}_{=i_1 \circ \sigma} - \underbrace{(\sigma \times \text{id}) \circ i_0}_{=i_0 \circ \sigma} \\
 &= -h_{n-1}(\partial_n \sigma) + C_n(i_1; R)(\sigma) - C_n(i_0; R)(\sigma) \quad \square
 \end{aligned}$$

### 7.13 Bemerkung

Ist  $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$  eine Homotopie zwischen  $f$  und  $g$ , so erhalten wir eine Kettenhomotopie  $k$  zwischen  $C_*(f; R)$  und  $C_*(g; R)$  durch

$$k_n(\sigma) := C_{n+1}(H; R) \circ h_n = \sum_{j=0}^n (-1)^j H \circ (\sigma \times \text{id}) \circ k_{n,j}$$

## 8 Homologie von Paaren

### 8.1 Definition

Sei  $A$  ein Teilraum von  $X$ , dann heißt  $(X, A)$  ein **Paar von topologischen Räumen**. Eine Abbildung von Paaren  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  ist eine stetige Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  mit  $f(A) \subseteq B$ . Manchmal schreiben wir  $(f, f|_A): (X, A) \rightarrow (Y, B)$ .

Die Kategorie von Paaren von topologischen Räumen bezeichnen wir mit  $\text{Top}^2$ .

### 8.2 Definition

Sei  $(X, A)$  ein Paar. Dann definieren wir den **singulären Kettenkomplex** von  $(X, A)$  über  $R$  durch

$$C_n(X, A; R) := C_n(X; R) / C_n(A; R)$$

$$\partial_n(\sigma + C_n(A; R)) := \partial_n \sigma + C_{n-1}(A; R)$$

Dies ist wohldefiniert, da  $\partial_n(C_n(A; R)) \subseteq C_{n-1}(A; R)$ . Weiter heißt

$$H_n(X, A; R) := H_n(C_*(X, A; R), \partial_*)$$

der **n-te singuläre Homologiemodul** von  $(X, A)$  mit Koeffizienten in  $R$ .

### 8.3 Bemerkung

Der singuläre Kettenkomplex von Paaren definiert einen Funktor:  $\text{Top}^2 \rightarrow R\text{-KETTEN}$ . Durch Komposition mit Homologie (als Funktor  $R\text{-KETTEN} \rightarrow R\text{-MOD}$ ) erhalten wir einen Funktor

$$H_n(-, -; R) : \text{Top}^2 \longrightarrow R\text{-MOD}$$

### 8.4 Bemerkung

Via  $X \mapsto (X, \emptyset)$  können wir jeden Raum auch als Paar auffassen. Es gilt  $H_n(X, \emptyset; R) = H_n(X; R)$ .

### 8.5 Frage

Können wir  $H_n(X, A; R)$  durch  $H_n(X; R)$  und  $H_n(A; R)$  ausdrücken?

**Ansatz 1:**

$$H_n(X, A; R) \cong H_n(X; R) / H_n(A; R)$$

⚠ Problem:  $H_n(A; R)$  ist kein Untermodul von  $H_n(X; R)$

**Ansatz 2:** Ist  $H_n(X; R) \rightarrow H_n(X, A; R)$  surjektiv?

Sei  $x \in H_n(X, A; R)$ . Dann gibt es  $\sigma + C_n(A; R) \in C_n(X, A; R)$  mit  $\partial_n(\sigma + C_n(A; R)) = 0$  und  $x = [\sigma]$ . Es ist  $\sigma \in C_n(X; R)$ , aber wir wissen nur  $\partial_n \sigma \in C_{n-1}(A; R)$ , nicht  $\partial_n(\sigma) = 0$ . 😊

### 8.6 Beispiel

In  $C_n(|\Delta^n|, |\partial\Delta^n|; R)$  gilt für  $\sigma := \text{id}: |\Delta^n| \rightarrow |\Delta^n|$ , dass  $\partial_n([\sigma]) = 0$  ist, da  $\partial_n \sigma \in C_{n-1}(|\partial\Delta^n|; R)$ . Wir werden später sehen, dass  $[\sigma]$  den Homologiemodul

$$H_n(|\Delta^n|, |\partial\Delta^n|; R) \cong R$$

erzeugt.



## 8.7 Definition

Eine Folge von  $R$ -linearen Abbildungen zwischen  $R$ -Moduln  $M_i$

$$\cdots \longrightarrow M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_{n-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_0$$

heißt **lange exakte Folge**, wenn sie exakt an jeder Stelle  $M_i$  ist, d.h. für alle  $i$  gilt  $\text{Im } f_i = \ker f_{i-1}$ .

## 8.8 Satz

Es gibt eine natürliche Transformation  $\partial_n$  von  $(X, A) \mapsto H_n(X, A; R)$  nach  $(X, A) \mapsto H_{n-1}(A; R)$ , sodass für jedes Paar  $(X, A)$

$$\begin{aligned} \cdots &\xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(A; R) \xrightarrow{i_*} H_n(X; R) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A; R) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A; R) \longrightarrow \cdots \\ \cdots &\xrightarrow{\partial_1} H_0(A; R) \longrightarrow H_0(X; R) \longrightarrow H_0(X, A; R) \longrightarrow 0 \end{aligned} \quad [*]$$

eine lange exakte Folge ist. Dabei sind  $i : A \hookrightarrow X$  und  $j : (X, \emptyset) \hookrightarrow (X, A)$  die Inklusionen. Das bedeutet:

Für jedes Paar  $(X, A)$  haben wir eine  $R$ -lineare Abbildung  $\partial_n : H_n(X, A; R) \rightarrow H_{n-1}(A; R)$ , sodass für jede Abbildung  $(f, f|_A) : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  von Paaren folgendes Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} H_n(X, A; R) & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(A; R) \\ \downarrow (f, f|_A)_* & & \downarrow (f|_A)_* \\ H_n(Y, B; R) & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(B; R) \end{array}$$

### Beweis

siehe 8.13.

## 8.9 Korollar

- (1) Ist die Inklusion  $i : A \rightarrow X$  eine Homotopieäquivalenz, so ist  $H_n(X, A; R) = 0$  für alle  $n$ .
- (2) Sei  $A$  kontraktibel. Dann gilt für alle  $n \geq 1$ .  $H_n(X; R) \cong H_n(X, A; R)$

### Beweis

- (1) Betrachte den folgenden Ausschnitt aus der langen exakten Folge:

$$H_n(A; R) \xrightarrow{i_*} H_n(X; R) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A; R) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A; R) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(X; R)$$

Nach 7.4 ist  $i_* : H_n(A; R) \rightarrow H_n(X; R)$  ein Isomorphismus. Wegen der Exaktheit gilt  $\ker j_* = \text{Im } i_* = H_n(X; R)$ , also folgt  $j_* = 0$ . Da  $\text{Im } \partial_n = \ker i_* = 0$ , folgt  $\partial_n = 0$ . Nun ist

$$H_n(X, A; R) = \ker \partial_n = \text{Im } j_* = 0$$

- (2) Übung!

□

## 8.10 Definition

Seien

$$(C_*, d_*) \xrightarrow{i_*} (C'_*, d'_*) \xrightarrow{p_*} (C''_*, d''_*) \quad [\#]$$

$R$ -Kettenabbildungen. Ist für jedes  $n$  die Folge  $C_n \xrightarrow{i_n} C'_n \xrightarrow{p_n} C''_n$  kurz exakt, so heißt  $[\#]$  eine **kurze exakte Folge von Kettenkomplexen**.

## 8.11 Beispiel

Für jedes Paar  $(X, A)$  ist

$$(C_*(A; R), \partial_*) \xrightarrow{i_*} (C_*(X; R), \partial_*) \xrightarrow{j_*} (C_*(X, A; R), \partial_*)$$

eine kurze exakte Folge von  $R$ -Kettenkomplexen.

## 8.12 Schlangenlemma

Sei

$$(C_*, d_*) \xrightarrow{i_*} (C'_*, d'_*) \xrightarrow{p_*} (C''_*, d''_*)$$

eine kurze exakte Folge von  $R$ -Kettenkomplexen.

- a) Für jedes  $n$  gibt es eine eindeutige wohldefinierte  $R$ -lineare Abbildung  $\partial_n: H_n(C''_*, d''_*) \rightarrow H_{n-1}(C_*, d_*)$  mit: Für  $v' \in C'_n$  mit  $d''_n \circ p_n(v') = 0$  ist

$$\partial_n \left( \underbrace{[p_n(v')]}_{\in H_n(C''_*, d''_*)} \right) = [v] \in H_{n-1}(C_*, d_*)$$

wobei  $v \in C_{n-1}$  bestimmt ist durch  $i_{n-1}(v) = d'_n(v')$ .

b)

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & H_n(C_*, d_*) & \xrightarrow{i_*} & H_n(C'_*, d'_*) & \xrightarrow{p_*} & H_n(C''_*, d''_*) \\ & & & & & & \downarrow \partial_n \\ & & & & & & H_{n-1}(C_*, d_*) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(C'_*, d'_*) \xrightarrow{p_*} \dots \\ & & & & & & \downarrow \partial_1 \\ & & & & & & H_0(C_*, d_*) \xrightarrow{i_*} H_0(C'_*, d'_*) \xrightarrow{p_*} H_0(C''_*, d''_*) \longrightarrow 0 \end{array}$$

ist eine lange exakte Folge.

**Beweis**

$$\begin{array}{ccccc} C_{n+1} & \xrightarrow{i_{n+1}} & C'_{n+1} & \xrightarrow{p_{n+1}} & C''_{n+1} \\ \downarrow d_{n+1} & & \downarrow d'_{n+1} & & \downarrow d''_{n+1} \\ C_n & \xrightarrow{i_n} & C'_n & \xrightarrow{p_n} & C''_n \\ \downarrow d_n & & \downarrow d'_n & & \downarrow d''_n \\ C_{n-1} & \xrightarrow{i_{n-1}} & C'_{n-1} & \xrightarrow{p_{n-1}} & C''_{n-1} \\ \downarrow d_{n-1} & & \downarrow d'_{n-1} & & \downarrow d''_{n-1} \\ C_{n-2} & \xrightarrow{i_{n-2}} & C'_{n-2} & \xrightarrow{p_{n-2}} & C''_{n-2} \end{array}$$

Sei  $x'' \in H_n(C''_*, d''_*)$ , also  $x'' = [v'']$  mit  $v'' \in \ker d''_n$ . Da  $p_n$  surjektiv ist, existiert  $v' \in C'_n$  mit  $p_n(v') = v''$ . Es gilt

$$p_{n-1}d'_n(v') = d''_np_n(v') = d''_n(v'') = 0$$

$\Rightarrow v' \in \ker p_{n-1}$ . Weiter gilt  $\ker p_{n-1} = \text{Im } i_{n-1}$ , also  $\exists v \in C_{n-1} : i_{n-1}(v) = d'_n(v')$ . Dann gilt

$$i_{n-2}(d_{n-1}(v)) = d'_{n-1}(i_{n-1}(v)) = d'_{n-1}(d'_n(v')) = 0$$

Da  $i_{n-2}$  injektiv ist, folgt somit  $d_{n-1}(v) = 0$ . Setze  $\partial_n(x'') := [v]$ . Zu zeigen:  $[v] \in H_{n-1}(C_*, d_*)$  ist unabhängig von der Wahl von  $v''$  und  $v'$ . Seien  $w'' \in \ker d''_n$ ,  $w' \in C'_n$ ,  $w \in C_{n-1}$  mit  $x'' = [w'']$ ,  $p_n(w') = w''$  und  $i_{n-1}(w) = d'_n(w')$ .

$[v''] = [w'']$ , also folgt  $\exists a'' \in C''_{n+1} : d''_{n+1}(a'') = v'' - w''$ .  $p_{n+1}$  ist surjektiv, also existiert  $a' \in C'_{n+1}$  mit  $p_{n+1}(a') = a''$ . Es gilt

$$p_n(v' - w' - d'_{n+1}(a')) = v'' - w'' - \underbrace{d_{n+1}(p_{n+1}(a'))}_{v'' - w''} = 0$$

Mit  $\ker p_n = \text{Im } i_n$  folgt:  $\exists a \in C_n$  mit  $i_n(a) = v' - w' - d_{n+1}(a')$ . Es bleibt zu zeigen:  $d_n(-a) = v - w$ .

$$\begin{aligned} i_{n-1}(-d_n(a) - (v - w)) &= -i_{n-1}(d_n(a)) - i_{n-1}(v - w) \\ &= -d'_n(i_n(a)) - (d'_n(v') - d'_n(w')) \\ &= -d'_n(d'_{n+1}(a') - (v' - w')) - (d'_n(v') - d'_n(w')) \\ &= -d'_nd'_{n+1}(a') + d'_n(v' - w') - (d'_n(v') - d'_n(w')) = 0 \end{aligned}$$

da  $i_{n-1}$  injektiv ist, folgt  $-d_n(a) - (v - w) = 0$ , also  $d_n(-a) = (v - w)$ .

$\text{Im}(i_n)_* = \ker(p_n)_*$ : " $\subseteq$ ":  $(p_n)_* \circ (i_n)_* = (p_n - i_n)_* = (0)_* = 0$

" $\supseteq$ ": Sei  $x' \in \ker(p_n)_*$ . Sei  $x' = [v']$  mit  $v' \in C'_n$ ,  $d'_n(v') = 0$ . Da  $[p_n(v')] = (p_n)_*[x'] = 0$  gibt es  $a'' \in C''_{n+1}$  mit  $d''_{n+1}(a'') = p_n(v')$ . Da  $p_{n+2}$  surjektiv ist, existiert  $a' \in C'_{n+1}$  mit  $p_{n+1}(a') = a''$ . Dann gilt

$$p_n(v' - d'_{n+1}(a')) = p_n(v') - p_nd'_{n+1}(a') = p_n(v') - \underbrace{d''_{n+1}(p_{n+1}(a'))}_{=a''}_{p_n(v')} = 0$$

Da  $\ker p_n = \text{Im } i_n$  gibt es  $a \in C_n$  mit  $i_n(a) = v' - d'_{n+1}(a')$ . Nun ist

$$i_{n-1}(d_n(a)) = d'_n(i_n(a)) = d'_n(v' - d_{n+1}(a')) = d'_n(v') = 0$$

Da  $i_{n-1}$  injektiv ist, folgt  $d_n(a) = 0$ . Insbesondere  $[a] \in H_n((C_*, d_*))$ . Nun ist

$$(i_n)_*[a] = [i_n(a)] = [v' - d'_{n+1}(a')] = [v'] = x'$$

Also  $x' \in \text{Im}(i_n)_*$ .

$\text{Im } \partial_{n+1} = \ker(i_n)_*$ : " $\subseteq$ ":  $i_n(d_{n+1}(x'')) = 0$  ✓

" $\supseteq$ ": Sei  $x \in \ker(i_n)_*$ . Sei  $v \in C_n$ ,  $d_n(v) = 0$ ,  $[v] = x$ .  $\leadsto x = d_n[v'']$ .

### 8.13 Beweis von Satz 8.8

Für jedes Paar  $(X, A)$  ist die Folge der singulären Kettenkomplexe

$$(C_*(A; R), \partial_*^A) \xrightarrow{C_*(i; R)} (C_*(X; R), \partial_*^X) \xrightarrow{C_*(j; R)} (C_*(X, A; R), \partial_*^{(X, A)})$$

kurz exakt. Das Schlagenlemma 8.12 produziert  $\partial_n : H_n(X, A; R) \rightarrow H_{n-1}(A; R)$  und die lange exakte Sequenz  $[*]$ . Es bleibt zu zeigen, dass die Randabbildungen aus dem Schlagenlemma wie behauptet eine natürliche Transformation definieren: Sei  $(f, f|_A) : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  eine Abbildung von Paaren. Zu zeigen ist, dass

$$\begin{array}{ccc} H_n(X, A; R) & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(A; R) \\ \downarrow (f, f|_A)_* & & \downarrow (f|_A)_* \\ H_n(Y, B; R) & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(B; R) \end{array}$$

kommutiert. Sei  $x'' \in H_n(X, A; R)$ . Sei  $v' \in C_n(X; R)$  mit  $\partial_n^X(v') \in C_n(A; R)$  und  $[v' + C_n(A; R)] = x''$ . Dann ist  $\partial_n(x'') = [\partial_n^X(v')] \in H_n(A; R)$ . Dann ist

$$(f, f|_A)_*(x'') = (f, f|_A)_*[v' + C_n(A; R)] = [f(v') + C_n(B; R)] \in H_n(Y, B; R)$$

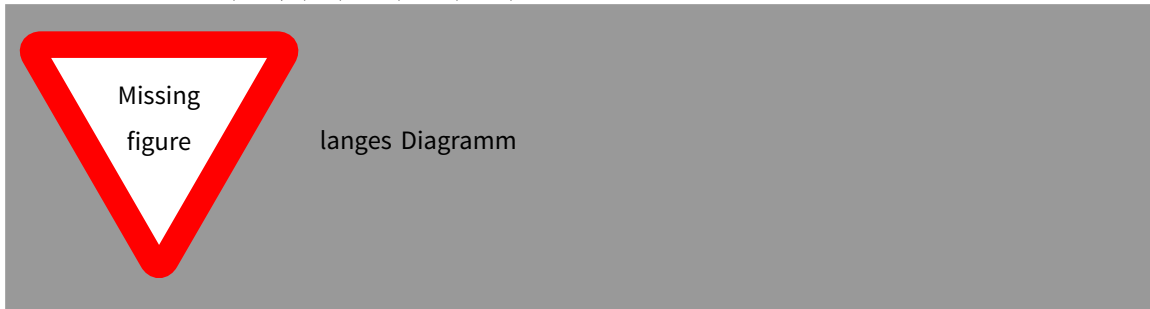
Es ist  $\partial_n^Y(f_*(v')) = (f|_A)_*\left(\underbrace{\partial_n^X(v')}_{\in C_n(A; R)}\right) \in C_n(B; R)$ . Also

$$\partial_n((f, f|_A)_*(x'')) = [\partial_n^Y(f_*(v'))] = [f_* \circ \partial_n^X(v')] = f_* \partial_n(x'')$$

□

## 8.14 Bemerkung

Für eine Abbildung  $(f, f|_A) : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  erhalten wir ein kommutierendes Diagramm:



## 8.15 Fünfer-Lemma

Seien die Zeilen in folgendem kommutativen Diagramm von  $R$ -Moduln exakt.

$$\begin{array}{ccccccccc} A_4 & \xrightarrow{\alpha_4} & A_3 & \xrightarrow{\alpha_3} & A_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & A_0 \\ f_4 \downarrow \cong & & f_3 \downarrow \cong & & f_2 \downarrow & & f_1 \downarrow \cong & & f_0 \downarrow \cong \\ B_4 & \xrightarrow{\beta_4} & B_3 & \xrightarrow{\beta_3} & B_2 & \xrightarrow{\beta_2} & B_1 & \xrightarrow{\beta_1} & B_0 \end{array}$$

Sind  $f_4, f_3, f_1$  und  $f_0$  Isomorphismen, so ist auch  $f_2$  ein Isomorphismus.

**Beweis**

**Injektivität:** Sei  $a_2 \in A_2$  und  $f_2(a_2) = 0$ .  $f_1(\alpha_2(a_2)) = \beta_2(f_2(a_2)) = \beta_2(0) = 0$ . Da  $f_1$  ein Isomorphismus ist, folgt  $\alpha_2(a_2) = 0$ .  $a_2 \in \ker \alpha_2 = \text{Im } \alpha_3$ , also existiert  $a_3 \in A_3$  mit  $\alpha_3(a_3) = a_2$ . Es gilt

$$\beta_3(f_3(a_3)) = f_2(\alpha_3(a_3)) = f_2(a_2) = 0$$

Also  $f_3(a_3) \in \ker \beta_3 = \operatorname{Im} \beta_4$ . Da  $f_4$  Isomorphismus ist, gibt es  $a_4 \in A_4$  mit  $\beta_4(f_4(a_4)) = f_3(a_3)$ . Nun gilt

$$f_3(\alpha_4(a_4) - a_3) = f_3(\alpha_4(a_4)) - f_3(a_3) = \beta_4(f_4(a_4)) - f_3(a_3) = f_3(a_3) - f_3(a_3) = 0$$

Da  $f_3$  ein Isomorphismus ist, folgt nun  $\alpha_4(a_4) = a_3$ . Nun ist

$$a_2 = \alpha_3(\alpha_3) = \alpha_3(\alpha_4(a_4)) = \underbrace{\alpha_3 \circ \alpha_4}_{=0}(a_4) = 0$$

**Surjektivität:** Sei  $b_2 \in B_2$ . Fall 1:  $\beta_2(b_2) = 0$ . Da  $\operatorname{Im} \beta_3 = \ker \beta_2$  und  $f_3$  Isomorphismus, folgt  $\exists a_3 \in A_3$  mit  $\beta_3(f_3(a_3)) = b_2$ . Also ist  $b_2 = \beta_3(f_3(a_3)) = f_2(\alpha_3(a_3)) \in \operatorname{Im} f_2$ .

Ist  $b_2$  beliebig, so genügt es zu zeigen:  $\exists a_2 \in A_2$  mit  $\beta_2(b_2 - f_2(a_2)) = 0$ .  $f_1$  ist ein Isomorphismus, also  $\exists a_1 \in A_1$  mit  $f_1(a_1) = \beta_2(b_2)$ . Dann folgt

$$f_0(\alpha_1(a_1)) = \beta_1(f_1(a_1)) = \beta_1(\beta_2(b_2)) = \underbrace{\beta_1 \circ \beta_2}_{=0}(b_2) = 0$$

Da  $f_0$  ein Isomorphismus ist, folgt  $\alpha_1(a_1) = 0$ . Da  $\ker \alpha_1 = \operatorname{Im} \alpha_2$ , folgt  $\alpha_2(a_2) = a_1$ . Es gilt nun

$$\begin{aligned} \beta_2(b_2 - f_2(a_2)) &= \beta_2(b_2) - \beta_2(f_2(a_2)) = \beta_2(b_2) - f_1(\alpha_2(a_2)) \\ &= \beta_2(b_2) - f_1(a_1) = \beta_2(b_2) - \beta_2(b_2) = 0 \quad \square \end{aligned}$$

## 8.16 Lemma ("2 von 3")

Sei  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  eine Abbildung von Paaren. Seien von den drei Abbildungen

- (i)  $(f|_A)_*: H_n(A; R) \rightarrow H_n(B; R)$
- (ii)  $f_*: H_n(X; R) \rightarrow H_n(Y; R)$
- (iii)  $(f, f|_A)_*: H_n(X, A; R) \rightarrow H_n(Y, B; R)$

zwei für jeweils alle  $n$  Isomorphismen. Dann ist auch die dritte für alle  $n$  ein Isomorphismus.

### Beweis

Da die Randabbildung in der Paarfolge eine natürliche Transformation ist, erhalten wir ein kommutatives Leiterdiagramm:

$$\begin{array}{ccccccccccc} H_{n+1}(A) & \longrightarrow & H_{n+1}(X) & \longrightarrow & H_{n+1}(X, A) & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & H_n(A) & \longrightarrow & H_n(X) & \longrightarrow & H_n(X, A) & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(A) \\ \downarrow (f|_A)_* & & \downarrow f_* & & \downarrow (f, f|_A)_* & & \downarrow (f|_A)_* & & \downarrow f_* & & \downarrow (f, f|_A)_* & & \downarrow (f|_A)_* \\ H_{n+1}(B) & \longrightarrow & H_{n+1}(Y) & \longrightarrow & H_{n+1}(Y, B) & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & H_n(B) & \longrightarrow & H_n(Y) & \longrightarrow & H_n(Y, B) & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(B) \end{array}$$

"R" aus  
 Platzgründen  
 weggelassen

Da die Zeilen lang exakt sind, folgt die Behauptung aus dem Fünfer-Lemma. □

## 9 Ausschneidung und die Mayer-Vietoris Folge

### 9.1 Satz

Sei  $(X, A)$  ein Paar und  $L \subseteq A$ , sodass der Abschluss  $\bar{L}$  von im Inneren  $\overset{\circ}{A}$  von  $A$  liegt. Dann induziert die Inklusion  $(X \setminus L, A \setminus L) \xrightarrow{j} (X, A)$  einen Isomorphismus  $j_*: H_n(X \setminus L, A \setminus L; R) \rightarrow H_n(X, A; R)$ .

RevChap9

### 9.2 Satz (Mayer-Vietoris Folge)

Seien  $A, B \subseteq X$  offen und  $X = A \cup B$ . Seien  $i_A: A \hookrightarrow X$ ,  $i_B: B \hookrightarrow X$ ,  $j_A: A \cap B \hookrightarrow A$  und  $j_B: A \cap B \hookrightarrow B$  die Inklusionen. Dann gibt es eine Randabbildung  $\partial_n = \partial_n^{X=A \cup B}: H_n(X; R) \rightarrow H_{n-1}(A \cap B; R)$ , sodass

"R" aus  
Platzgründen  
weggelassen

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(A \cap B) \xrightarrow{\begin{pmatrix} (j_A)_* \\ (j_B)_* \end{pmatrix}} \bigoplus_{H_n(B)} H_n(A) \xrightarrow{(i_A)_* - (i_B)_*} H_n(X) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A \cap B) \longrightarrow \cdots$$

eine lange exakte Folge ist. Die Randabbildung ist dabei eine natürlicher Transformation: Sei  $A', B' \subseteq X'$  offen mit  $X' = A' \cup B'$ . Ist  $f: X \rightarrow X'$  mit  $f(A) \subseteq A'$  und  $f(B) \subseteq B'$ , so kommutiert

$$\begin{array}{ccc} H_n(X; R) & \xrightarrow{\partial_n^{X=A \cup B}} & H_{n-1}(A \cap B; R) \\ \downarrow f_* & & \downarrow (f|_{A \cap B})_* \\ H_n(X'; R) & \xrightarrow{\partial_n^{X'=A' \cup B'}} & H_{n-1}(A' \cap B'; R) \end{array}$$

#### Beweis

Sei  $L := X \setminus B$ . Dann ist  $L$  abgeschlossen und  $L \subseteq A = \overset{\circ}{A}$ . Wir erhalten daher einen Ausschneideisomorphismus

$$H_n(B, A \cap B; R) = H_n(X \setminus L, A \setminus L; R) \xrightarrow{\cong} H_n(X, A; R)$$

"R" aus  
Platzgründen  
weggelassen

Betrachte das folgende kommutative Leiterdiagramm:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_{n+1}(B, A \cap B) & \xrightarrow{\partial_{n+1}^{B, A \cap B}} & H_n(A \cap B) & \xrightarrow{(j_B)_*} & H_n(B) \xrightarrow{(l_B)_*} H_n(B, A \cap B) \xrightarrow{\partial_n^{B, A \cap B}} H_{n-1}(A \cap B) \longrightarrow \cdots \\ & & \cong \downarrow (i_B, j_A)_* & & \downarrow (j_A)_* & & \downarrow (i_B)_* & & \cong \downarrow (i_B, j_A)_* & & \downarrow (j_A)_* \\ \cdots & \longrightarrow & H_{n+1}(X, A) & \xrightarrow{\partial_{n+1}^{X, A}} & H_n(A) & \xrightarrow{(i_A)_*} & H_n(X) \xrightarrow{(l_X)_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n^{X, A}} H_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots \end{array}$$

dabei sind  $l_B: (B, \emptyset) \rightarrow (B, A \cap B)$  und  $l_X: (X, \emptyset) \rightarrow (X, A)$  die Inklusionen von Paaren. Definiere nun  $\partial_n: H_n(X; R) \rightarrow H_{n-1}(A \cap B; R)$  durch

$$\partial_n := \partial_n^{B, A \cap B} \circ (i_B, i_A)_*^{-1} \circ (l_X)_*$$

Die Natürlichkeit von  $\partial_n^{B, A \cap B}$  impliziert die Natürlichkeit von  $\partial_n$ .

- Zu zeigen:  $\text{Im} \begin{pmatrix} (j_A)_* \\ (j_B)_* \end{pmatrix} = \ker((i_A)_* - (i_B)_*)$ :

" $\supseteq$ ": Sei  $(a, b) \in \ker((i_A)_* - (i_B)_*)$ . Also  $(i_A)_*(a) = (i_B)_*(b)$ . Es ist

$$(i_B, j_A)_*((l_B)_*(b)) = (l_X)_* \circ (j_B)_*(b) = \underbrace{(l_X)_* \circ (i_A)_*}_{=0}(a) = 0$$

$(i_B, j_A)_*$  ist ein Isomorphismus, also  $(l_B)_*(b) = 0$ .  $\ker(l_B)_* = \text{Im}(j_B)_*$ . Damit folgt  $\exists x \in H_n(A \cap B; R) : (j_B)_*(x) = b$ . Dann gilt

$$(i_A)_*(a - (j_A)_*(x)) = (i_A)_*(a) - i_B((j_B)_*(x)) = (i_A)_*(a) - (i_B)_*(b) = 0$$

Mit  $\ker(i_A)_* = \text{Im } \partial_n^{X,A}$  und  $(i_B, j_A)_*$  ist Isomorphismus, folgt  $\exists y \in H_{n+1}(B, A \cap B; R)$  mit

$$\partial_n^{X,A} \circ (i_B, j_A)_*(y) = a - (j_A)_*(x)$$

Es folgt für  $z := x + \partial_n^{B, A \cap B}(y)$ .

$$\begin{aligned} (j_B)_*(z) &= (j_B)_*(x) = b \\ (j_A)_*(z) &= (j_A)_*(x) + (j_A)_*(\partial_n^{B, A \cap B}(y))_n = (j_A)_*(x) + \partial_n^{X,A} \circ (i_B, j_A)_*(y) \\ &= (j_A)_*(x) + a - (j_A)_*(x) = a \end{aligned}$$

" $\subseteq$ ": Sei  $x \in H_n(A \cap B; R)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} ((i_A)_* - (i_B)_*) \begin{pmatrix} (j_A)_* \\ (j_B)_* \end{pmatrix} (x) &= (i_A)_* \circ (j_A)_*(x) - (i_B)_* \circ (j_B)_*(x) \\ &= (i_A \circ j_A)_*(x) - (i_B \circ j_B)_*(x) = 0 \end{aligned}$$

da  $i_A \circ j_A = i_B \circ j_B$ .

- Wir zeigen nun  $\text{Im}((i_A)_* - (i_B)_*) = \ker \partial_n$ :

" $\supseteq$ ": Sei  $v \in \ker \partial_n$ .

" $\subseteq$ ": Sei  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \bigoplus_{H_n(A)}^{H_n(B)}$ . Dann gilt

$$\partial_n((i_A)_* - (i_B)_*) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \partial_n((i_A)_*(a) - (i_B)_*(b)) = 0$$

- Noch zu zeigen:  $\text{Im } \partial_n = \ker \begin{pmatrix} (j_A)_* \\ (j_B)_* \end{pmatrix}$ .

Übung!

Rest hinzufügen

### 9.3 Bemerkung

Für die Mayer-Vietoris-Folge müssen  $A$  und  $B$  nicht notwendig offen sein. Es genügt, dass die Inklusion  $(B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$  einen Isomorphismus  $H_*(B, A \cap B; R) \rightarrow H_*(X, A; R)$  induziert.

### 9.4 Satz

$$H_k(S^n; R) \cong \begin{cases} R \oplus R, & \text{falls } k = n = 0 \\ R, & \text{falls } k = 0, n \neq 0 \\ R, & \text{falls } k = n \neq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad [\#]$$

## 9.5 Definition

Sei  $X$  ein nichtleerer topologischer Raum. Sei  $p: X \rightarrow \{\text{pt}\}$  die Projektion auf den Ein-Punkt-Raum. die **reduzierte singuläre Homologie** von  $X$  ist definiert durch

$$\tilde{H}_k(X; R) := \ker(p_* : H_k(X; R) \rightarrow H_k(\{\text{pt}\}; R))$$

### Bemerkung

- Es gilt  $\tilde{H}_k(X; R) = H_k(X; R)$  für  $k > 0$ , da  $H_k(\{\text{pt}\}; R) = 0$  ist für  $k > 0$  (5.9) und somit  $p_*$  die Nullabbildung ist.

Weiter gilt  $H_0(X; R) = R \oplus \tilde{H}_0(X; R)$ , da  $H_0(\{\text{pt}\}; R) = R$  frei ist.

- Es ist nicht schwer die Eigenschaften von singulärer Homologie auf die reduzierte singuläre Homologie zu übertragen. Insbesondere ist  $\tilde{H}_*$  homotopieinvariant und es gibt eine Mayer-Vietoris-Folge.
- Es ist  $\tilde{H}_k(\{\text{pt}\}) = 0$ .

## 9.6 Bemerkung

In reduzierter singulärer Homologie wird  $[\#]$  zu

$$\tilde{H}_k(S^n; R) \cong \begin{cases} R, & \text{falls } k = n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad [\#\#]$$

## 9.7 Beweis von $[\#\#]$

Per Induktion nach  $n$ :

**Induktionsanfang:**  $n = 0$ : Es gilt

$$H_k(S^0; R) \xleftarrow{\varphi} H_k(\{\text{pt}\}; R) \oplus H_k(\{\text{pt}\}; R) = \begin{cases} R \oplus R, & \text{falls } k = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Sei  $i_- : \{\text{pt}\} \hookrightarrow S^0$ ,  $i_+ : \{\text{pt}\} \hookrightarrow S^0$ . Im  $i_{pm} = \{\pm 1\}$ . Der Isomorphismus  $\varphi$  ist gegeben durch  $\varphi = (i_-)_* + (i_+)_*$ . Für  $(a, b) \in H_k(\{-1\}; R) \oplus H_k(\{+1\}; R)$  gilt dann

$$p_*(i_-(a), i_+(b)) = (p \circ i_-)_*(a) + (p \circ i_+)_*(b) = \text{id}_*(a) + \text{id}_*(b) = a + b$$

Also  $\ker p_* = \{(a, -a) \mid a \in H_k(\{\text{pt}\}; R)\}$ . Also

$$\tilde{H}_k(S^0) = \begin{cases} 0, & \text{falls } k \neq 0 \\ R, & \text{falls } k = 0 \end{cases}$$

**Induktionsschritt:**  $n - 1 \mapsto n$ : Sei  $D_n^+ = S^n \setminus \{(-1, 0, \dots, 0)\}$  und  $D_n^- = S^n \setminus \{(1, 0, \dots, 0)\}$ . Dann gilt  $S^n = D_n^+ \cup D_n^-$  und  $D_n^+, D_n^- \subseteq S^n$  offen und  $D_n^+ \simeq \{\text{pt}\}$  und  $D_n^- \simeq \{\text{pt}\}$  Weiter gilt

$$D_n^+ \cap D_n^- = \{x = (x_0, \dots, x_n) \in S^n \mid x_0 \notin \{\pm 1\}\} \simeq S^{n-1} = \{x = (0, x_1, \dots, x_n) \in S^n\}.$$

Betrachte nun die Mayer-Vietoris-Folge zu  $S^n = D_n^+ \cup D_n^-$ :

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{H}_k(D_n^+) \oplus \tilde{H}_k(D_n^-) & \longrightarrow & \tilde{H}_k(S^n) & \xrightarrow{\partial_k} & \tilde{H}_{k-1}(D_n^+ \cup D_n^-) & \longrightarrow & \tilde{H}_{k-1}(D_n^+) \oplus \tilde{H}_{k-1}(D_n^-) \\ \cong & & & & \uparrow & & \cong \\ & & & & (\iota_*) & & \\ & & & & \tilde{H}_{k-1}(S^{n-1}) & & \end{array}$$

"R" aus  
Platzgründen  
weggelassen



Es folgt  $\tilde{H}_k(S^n; R) \cong \tilde{H}_{k-1}(S^{n-1}; R) \stackrel{\text{IA}}{=} \begin{cases} R, & \text{falls } k = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$  □

## 10 Anwendungen

### 10.1 Satz (Invarianz der Dimension)

RevChap10

Sind  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{R}^m$  homöomorph, so gilt  $n = m$ .

#### Beweis

Sei  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  ein Homöomorphismus. Sei  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  beliebig. Dann erhalten wir auch einen Homöomorphismus  $k := h|_{\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}} : \mathbb{R}^n \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{h(x_0)\}$ . Nun ist  $\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}$  homotopieäquivalent zu  $S^{n-1}$  und  $\mathbb{R}^m \setminus \{h(x_0)\}$  ist homotopieäquivalent zu  $S^{m-1}$ . Da  $k$  ein Homöomorphismus ist, ist  $k_*$  ein Isomorphismus. Wir erhalten

$$H_*(S^{n-1}) \cong H_*(\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}) \cong H_*(\mathbb{R}^m \setminus \{h(x_0)\}) \cong H_*(S^{m-1})$$

Es ist aber  $H_*(S^{n-1}) \cong H_*(S^{m-1})$  genau dann, wenn  $n = m$ . □

### 10.2 Fixpunktsatz von Brouwer

Jede stetige Abbildung  $f : D^n \rightarrow D^n$  besitzt einen Fixpunkt.

#### Beweis

Durch Widerspruch: Angenommen es gibt  $f : D^n \rightarrow D^n$  ohne Fixpunkt. Aus dem letzten Semester wissen wir, dass es dann eine stetige Abbildung  $F : D^n \rightarrow S^{n-1}$  gibt mit  $F|_{S^{n-1}} = \text{id}_{S^{n-1}}$ . In Homologie erhalten wir folgendes kommutatives Diagramm

CE:  $n \geq 2$

$$\begin{array}{ccc} 0 = H_{n-1}(D^n) & \xrightarrow{(F)_*} & H_{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbb{Z} \\ \uparrow i_* & \nearrow (\text{id}_{S^{n-1}})_* = \text{id}_{H_{n-1}(S^{n-1})} & \\ H_{n-1}(S^{n-1}) & & \end{array}$$

wobei  $i : S^{n-1} \hookrightarrow D^n$  die Inklusion ist. Da  $F \circ i = \text{id}_{S^{n-1}}$  ist, gilt  $F_* \circ i_* = \text{id}_{H_{n-1}(S^{n-1})}$ . □

## Abbildungsgrad

### 10.3 Definition

Sei  $f : S^n \rightarrow S^n$  eine stetige Abbildung. Da  $\tilde{H}_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$  ist, gibt es eine ganze Zahl  $d(f)$ , so dass  $f_*(x) = d(f) \cdot x$  für alle  $x \in \tilde{H}_n(S^n)$ . Diese Zahl heißt der **Abbildungsgrad** von  $f$ .

### 10.4 Proposition

- a)  $d(\text{id}_{S^n}) = 1$ .
- b) Sind  $f$  und  $g$  homotop, so gilt  $d(f) = d(g)$ .
- c)  $d(f \circ g) = d(f) \cdot d(g)$ .

#### Beweis

- a)  $(\text{id}_{S^n})_*(x) = \text{id}(x) = x$ .
- b) Sind  $f$  und  $g$  homotop, so gilt  $f_* = g_*$ .
- c) Für alle  $x \in \tilde{H}_n(S^n)$  gilt:  $d(f \circ g) \cdot x = (f \circ g)_*(x) = f_* \circ g_*(x) = d(f) \cdot d(g) \cdot x$ . Da  $\tilde{H}_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$  folgt  $d(f \circ g) = d(f) \cdot d(g)$ . □

## 10.5 Beispiel

Sei  $i \in \{0, \dots, n\}$  und  $R_i: S^n \rightarrow S^n$  die Spiegelung  $R_i(x_0, \dots, x_n) = (x_0, \dots, -x_i, \dots, x_n)$ . Dann ist  $d(R_i) = -1$ .

### Beweis

Sei  $f: S^n \rightarrow S^n$  der Homöomorphismus, der die 0-te und die  $i$ -te Koordinate vertauscht:  $f(x_0, \dots, x_n) = (x_i, \dots, x_0, \dots, x_n)$ . Dann ist  $R_i = f \circ R_0 \circ f$ . Da  $f$  ein Homöomorphismus ist, ist  $f_*$  ein Isomorphismus und daher  $d(f)$  invertierbar, also  $d(f) \in \{\pm 1\}$  mit  $d(R_i) = d(f) \cdot d(R_0) \cdot d(f)$  folgt  $d(R_0) = d(R_i)$ . Es genügt also  $R_0$  zu betrachten.

Wir zeigen  $d(R_0) = -1$  durch Induktion nach  $n$ .

**Induktionsanfang:** Sei  $i_-: \{\text{pt}\} \rightarrow S^0$  mit  $\text{Im } i_- = \{-1\}$  und  $i_+: \{\text{pt}\} \rightarrow S^0$  mit  $\text{Im } i_+ = \{+1\}$ . Dann ist

$$\begin{aligned} H_0(S^0) &= \{(i_-)_*(a) + (i_+)_*(b) \mid a, b \in H_0(\{\text{pt}\})\} \quad \text{und} \\ \tilde{H}_-(S^0) &= \{(i_-)_*(a) - (i_+)_*(a) \mid a \in H_0(\{\text{pt}\})\} \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} (R_0)_*((i_-)_*(a) - (i_+)_*(a)) &= (R_0)_*(i_-)_*(a) - (R_0)_*(i_+)_*(a) = (R_0 \circ i_-)_*(a) - (R_0 \circ i_+)_*(a) \\ &= (i_+)_*(a) - (i_-)_*(a) \\ &= -((i_-)_*(a) + (i_+)_*(a)) \end{aligned}$$

Also folgt  $d(R_0) = -1$ .

**Induktionsschritt:** Sei

$$\begin{aligned} D_+^n &= \{(x_0, \dots, x_n) \in S^n \mid x_n \neq -1\} \\ D_-^n &= \{(x_0, \dots, x_n) \in S^n \mid x_n \neq +1\} \end{aligned}$$

Wir wissen schon, dass die Randabbildung aus der dazugehörigen Mayer-Vietoris-Folge  $\tilde{H}_n(S^1) \xrightarrow{\partial_n} \tilde{H}_{n-1}(D_+^n \cap D_-^n)$  ein Isomorphismus ist. Da die Randabbildung natürlich ist, erhalten wir ein kommutatives Diagramm

fertig stellen

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}_n(S^n) & \xrightarrow[\cong]{\partial_n} & \tilde{H}_n(D_-^n \cap D_+^n) \xleftarrow[\cong]{i_*} \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) \\ \downarrow (R_0)_* & & \downarrow (R_0|_{(D_-^n \cap D_+^n)})_* \\ \tilde{H}_n(S^n) & \xrightarrow[\cong]{\partial_n} & \tilde{H}_{n+1}(D_-^n \cap D_+^n) \quad H_{n-1}(S^{n-1}) \end{array}$$

dabei ist  $i: S^{n-1} \rightarrow D_-^n \cap D_+^n$  die Homotopieäquivalenz  $i(x_0, \dots, x_{n-1}) = (x_0, \dots, x_{n-1}, 0)$ . Nach Induktionsannahme ist  $(R_0|_{S^{n-1}})_*(y) = -y$  für alle  $y \in \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1})$ . Für  $x \in \tilde{H}_n(S^n)$  folgt

$$\begin{aligned} (R_0)_+(x) &= (\partial_n)^{-1} \circ (i_*) \circ (R_0|_{S^{n-1}})_*((i_*^{-1} \circ \partial_n) \cdot (x)) \\ &= (\partial_n)^{-1} \circ (i_*) \circ (-i_*^{-1}(\partial_n(x))) \\ &= -\partial_n^{-1} \circ (i_*) \circ (i_*)^{-1} \circ \partial_n(x) = -x \end{aligned}$$

Also  $d(R_0) = -1$ . □

## 10.6 Beispiel

Der Grad der Punktspiegelung  $R: S^n \rightarrow S^n$   $x \mapsto -x$  ist  $(-1)^{n+1}$ .

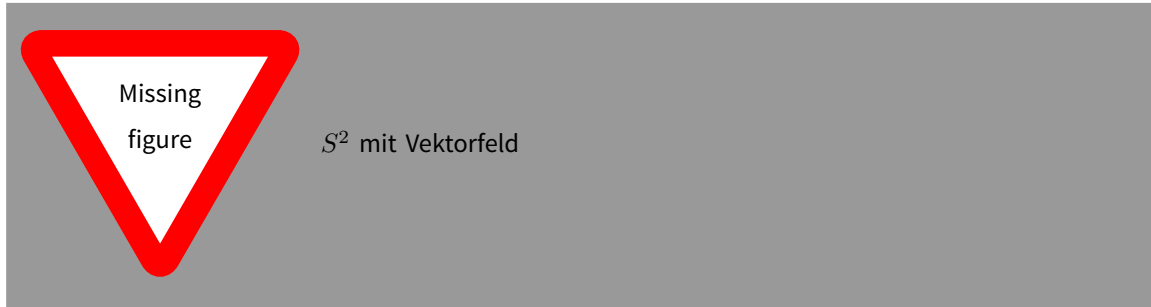
### Beweis

$$d(R) = d(R_0 \circ R_1 \circ \dots \circ R_n) = d(R_0) \cdot \dots \cdot d(R_n) = (-1)^{n+1}.$$

□

## 10.7 Erinnerung

Sei  $M$  eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit. Ein **Vektorfeld** auf  $M$  ist eine stetige Abbildung  $v: M \rightarrow TM$  mit  $v(x) \in T_x M$  für alle  $x \in M$ . Für  $M = S^n$  entspricht ein Vektorfeld genau einer stetigen Abbildung  $v: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  mit  $\langle v(x) | x \rangle = 0$  für alle  $x \in S^n$ .



## 10.8 Satz

Es gibt genau dann ein Vektorfeld ohne Nullstellen auf  $S^n$ , wenn  $n$  ungerade ist.

### Beweis

Ist  $n$  ungerade, so ist  $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{C}^k$  mit  $k = \frac{n+1}{2}$ . Punkte in  $S^n$  sind dann genau  $k$ -Tupel  $z = (z_1, \dots, z_k)$  mit  $|z_1|^2 + \dots + |z_k|^2 = 1$ . Ein Vektorfeld entspricht dann einer stetigen Abbildung  $v: S^n \rightarrow \mathbb{C}^k$ , so dass für das kanonische komplexe Skalarprodukt  $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbb{C}}$  auf  $\mathbb{C}^k$  gilt

$$\langle z | v(z) \rangle_{\mathbb{C}} \in i\mathbb{R}$$

Definiere nun  $v: S^n \rightarrow \mathbb{C}^k$  durch  $v(z) := iz$ . Dann  $iz \neq 0$  für alle  $z \in S^n$  und  $\langle z | iz \rangle = -i\|z\|_2^2 \in i\mathbb{R}$ . Sei umgekehrt  $v: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  ein Vektorfeld ohne Nullstellen. Zu zeigen:  $d(\text{Punktspiegelung } R) = 1$  (Da  $d(R) = (-1)^{n+1}$  folgt dann die Behauptung). Zeige dazu:  $R$  ist homotop zu  $\text{id}$ . Seien  $H, K: S^n \times [0, 1] \rightarrow S^n$  definiert durch

$$H(x, t) := \frac{tx + (1-t)v(x)}{\|tx + (1-t)v(x)\|} \quad \text{bzw.} \quad K(x, t) := \frac{-tx + (1-t)v(x)}{\|-tx + (1-t)v(x)\|}$$

Da  $\langle v(x) | x \rangle = 0$  folgt für alle  $x$  und  $v(x) \neq 0$  ist, folgt

$$\begin{aligned} \|tx + (1-t)v(x)\|^2 &= \|tx\|^2 + \|(1-t)v(x)\|^2 \neq 0 \\ \|-tx + (1-t)v(x)\|^2 &= \|-tx\|^2 + \|(1-t)v(x)\|^2 \neq 0 \end{aligned}$$

Also sind  $H$  und  $K$  wohldefiniert.  $H$  ist Homotopie zwischen  $\text{id}$  und  $x \mapsto \frac{v(x)}{\|v(x)\|}$  und  $K$  ist Homotopie zwischen  $-\text{id}$  und  $x \mapsto \frac{v(x)}{\|v(x)\|}$ . □

## 10.9 Satz (Jordanscher Kurvensatz)

Sei  $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine stetige, injektive Abbildung. Dann hat  $\mathbb{R}^2 \setminus f(S^1)$  genau zwei Wegzusammenhangskomponenten. Eine davon ist beschränkt, die andere nicht.

**Beweis (mit 10.10)**

Wir können  $f$  auch als injektive Abbildung  $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \subseteq S^2 = \mathbb{R}^1 \cup \{\infty\}$  auffassen. Nun ist  $\tilde{H}_0(S^2 \setminus f(S^1)) = \mathbb{Z}$ . Also  $H_0(S^2 \setminus f(S^1)) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ . Daher besteht  $S^2 \setminus f(S^1)$  aus zwei Wegzusammenhangskomponenten  $U_1$  und  $U_2$ . Sei  $\infty \in U_2$ . Dann sind  $U_1$  und  $U_2 \setminus \{\infty\}$  die Wegzusammenhangskomponenten von  $\mathbb{R}^2 \setminus f(S^1)$ .  $U_1$  ist beschränkt und  $U_2$  ist unbeschränkt.  $\square$

Warum ist  $U_2 \setminus \{\infty\}$  noch wegzusammenhängend?

**Antwort**

Seien  $x, y \in U_2$ , dann gibt es eine Umgebung  $V$  von  $\infty \in S^2$  mit  $V \setminus \{\infty\} \equiv D^2 \setminus \{0\}$ ,  $x, y \notin V$  und  $f(S^1) \cap V = \emptyset$

**10.10 Satz**

- a) Sei  $f: D^k \rightarrow S^n$  eine stetige, injektive Abbildung mit  $0 \leq k < n$ . Dann gilt  $\tilde{H}_i(S^n \setminus f(D^k)) = 0$  für alle  $i$ .
- b) Sei  $f: S^k \rightarrow S^n$  eine stetige, injektive Abbildung mit  $0 \leq k < n$ . Dann gilt

$$\tilde{H}_i(S^n \setminus f(S^k)) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{falls } i = n - k - 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

**Beweis (mit 10.11)**

- a) Durch Induktion nach  $k$ . Für  $k = 0$  ist  $S^n \setminus f(D^0)$  homöomorph zu  $\mathbb{R}^n$  und die Behauptung folgt. Induktionsschritt  $k \mapsto k + 1$ : Da  $D^{k+1}$  und  $[0, 1]^{k+1}$  homöomorph sind, können wir  $D^{k+1}$  durch  $[0, 1]^{k+1}$  ersetzen. Sei  $x \in \tilde{H}_i(S^n \setminus f([0, 1]^{k+1}))$ . Es ist

$$S^n \setminus f(\{1/2\} \times [0, 1]^k) = S^n \setminus f([0, 1/2] \times [0, 1]^k) \cup S^n \setminus f([1/2, 1] \times [0, 1]^k)$$

eine Vereinigung von offenen Mengen. Weiter ist

$$(S^n \setminus f([0, 1/2] \times [0, 1]^k)) \cap (S^n \setminus f([1/2, 1] \times [0, 1]^k)) = S^n \setminus f([0, 1]^{k+1})$$

Nun benutzen wir die zugehörige Mayer-Vietoris-Folge:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}_{i+1}(S^n \setminus f(\{1/2\} \times [0, 1]^k)) & \longrightarrow & \tilde{H}_i(S^n \setminus f([0, 1]^{k+1})) \\ \text{=0 nach I.A.} & & \downarrow \cong \\ & & \tilde{H}_i(S^n \setminus f([0, 1/2] \times [0, 1]^k)) \\ & & \oplus \\ & & \tilde{H}_i(S^n \setminus f([1/2, 1] \times [0, 1]^k)) \end{array} \longrightarrow \tilde{H}_i(S^n \setminus f(\{1/2\} \times [0, 1]^k))$$

=0 nach I.A.

Angenommen  $x \neq 0$ . Dann ist das Bild von  $x$  in  $\tilde{H}_i(S^n \setminus f([0, 1/2] \times [0, 1]^k))$  ungleich Null oder in  $\tilde{H}_i(S^n \setminus f([1/2, 1] \times [0, 1]^k))$  ungleich Null. Indem wir dieses Argument iterieren erhalten wir eine Folge von Intervallen

$$[0, 1] \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots \text{ mit } \bigcap_n I_n = \{t\}$$

und das Bild von  $x \in \tilde{H}_i(S^n \setminus f([0, 1]^{k+1}))$  unter der von der Inklusion  $i_a: S^n \setminus f([0, 1]^{k+1}) \rightarrow S^n \setminus f(I_a \times [0, 1]^k)$  induzierten Abbildung  $(i_a)_*: \tilde{H}_i(S^n \setminus f([0, 1]^{k+1})) \rightarrow \tilde{H}_i(S^n \setminus f(I_a \times [0, 1]^k))$  ungleich Null ist. Nun ist aber

$$\bigcup_a (S^n \setminus f(I_a \times [0, 1]^k)) = S^n \setminus f(\{t\} \times [0, 1]^k)$$

schöner machen

und wieder nach Induktionsannahme das Bild von  $x$  in  $\tilde{H}_i(S^n \setminus f(\{t\} \times [0, 1]^k)) = 0$  Null. Nach Proposition 10.11(2) muss  $x$  aber schon in einer  $\tilde{H}_i(S^n \setminus f(I_a \times [0, 1]^k))$  trivial sein.  $\nexists$

- b) Durch Induktion nach  $k$ . Für  $k = 0$  ist  $S^n \setminus f(S^0) \cong \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Da  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \simeq S^{n-1}$  folgt für  $k = 0$  die Behauptung.

Induktionsschritt  $k-1 \mapsto k$ : Seien  $D_+^k := \{(x_0, \dots, x_k) \mid x_k \geq 0\}$  und  $D_-^k := \{(x_0, \dots, x_k) \mid x_k \leq 0\}$ . Dann ist  $D_+^k \cap D_-^k = \{(x_0, \dots, x_k) \mid x_k = 0\} \cong S^{k-1}$ . Wieder ist

$$S^n \setminus f(D_+^k \cap D_-^k) = (S^n \setminus f(D_+^k)) \cup (S^n \setminus f(D_-^k))$$

eine offene Vereinigung mit  $(S^n \setminus f(D_+^k)) \cap (S^n \setminus f(D_-^k)) = S^n \setminus f(S^k)$ . Wegen a) ist die Randabbildung in der zugehörigen Mayer-Vietoris-Folge

$$\tilde{H}_i(S^n \setminus f(D_+^k \cap D_-^k)) \xrightarrow{\partial_i \cong} \tilde{H}_{i-1}(S^n \setminus f(S^k))$$

ein Isomorphismus. Die Behauptung folgt per Induktion.  $\square$

### 10.11 Proposition

Seien  $U_1 \subseteq U_2 \subseteq \dots \subseteq X$  offen mit  $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ . Seien  $i_{a,b}: U_a \hookrightarrow U_b$  für  $a < b$  und  $i_a: U_a \hookrightarrow X$  die Inklusionen.

- (1) Für jedes  $x \in H_k(X; R)$  gibt es  $a > 0$  und  $x_a \in H_k(U_a; R)$  mit  $(i_a)_*(x_a) = x$ .
- (2) Ist  $x_a \in H_k(U_a; R)$  mit  $(i_a)_*(x_a) = 0$ , so gibt es  $b > a$  mit  $(i_{a,b})_*(x_a) = 0$ .

#### Bemerkung

Diese Proposition gilt genauso für reduzierte Homologie.

#### Beweis

Sei  $\sigma: |\Delta^n| \rightarrow X$  ein singulärer Simplex in  $X$ . Dann ist  $\sigma^{-1}(U_a)$ ,  $a \in \mathbb{N}$  eine offene Überdeckung von  $|\Delta^n|$ . Da  $|\Delta^n|$  kompakt ist, gibt es  $a$  mit  $|\Delta^n| \subseteq \sigma^{-1}(U_a)$ , also  $\sigma(|\Delta^n|) \subseteq U_a$ . Da Elemente von  $C_n(X; R)$  endliche  $R$ -Linearkombinationen von singulären Simplizes sind, folgt

$$C_n(X; R) = \bigcup_a C_n(U_a; R).$$

Damit ergeben sich leicht (1) und (2).  $\square$

## 11 CW-Komplexe

### 11.1 Definition

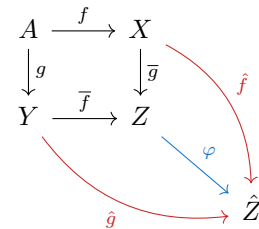
Ein kommutatives Diagramm von topologischen Räumen der Form

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow g & & \downarrow \bar{g} \\ Y & \xrightarrow{\bar{f}} & Z \end{array} \quad [\#]$$

heißt ein **Pushout**, falls es folgende universelle Eigenschaft hat:

$$\forall \hat{f}: X \rightarrow \hat{Z}, \hat{g}: Y \rightarrow \hat{Z} \text{ mit } \hat{f} \circ f = \hat{g} \circ g \text{ gilt:}$$

$$\exists! \varphi: Z \rightarrow \hat{Z} \text{ mit } \hat{f} = \varphi \circ \bar{g}, \hat{g} = \varphi \circ \bar{f}.$$



Wir sagen dann auch:  $[\#]$  ist der Pushout von  $\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow g & & \\ Y & & \end{array}$

#### Bemerkung

Jedes Diagramm  $\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow g & & \\ Y & & \end{array}$  lässt sich zu einem Pushout vervollständigen: Betrachte dazu den Raum

$X \cup_A Y := X \amalg Y / f(a) \sim g(a) \forall a \in A$  mit der Quotiententopologie. Sind  $\bar{f}: Y \rightarrow X \cup_A Y$  und  $\bar{g}: X \rightarrow X \cup_A Y$  die von den Inklusionen  $X \hookrightarrow X \amalg Y$  und  $Y \hookrightarrow X \amalg Y$  induzierten Abbildungen. So ist

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow g & & \downarrow \bar{g} \\ Y & \xrightarrow{\bar{f}} & X \cup_A Y \end{array}$$

Existenz und Eindeutigkeit aus der universellen Eigenschaft können benutzt werden um zu zeigen, dass der Pushout eindeutig bis auf kanonischen Homöomorphismus ist.

### 11.2 Definition

Ein **CW-Komplex** ist ein topologischer Raum  $X$  zusammen mit einer Filtrierung der Unterräume von  $X$ :

$$\emptyset = X^{(-1)} \subseteq X^{(0)} \subseteq X^{(1)} \subseteq X^{(2)} \subseteq \dots \subseteq X^{(n)} \subseteq X^{(n+1)} \subseteq \dots \subseteq X$$

sodass die folgenden zwei Eigenschaften erfüllt sind:

(i) **Zellstruktur:** Zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  gibt einen Pushout von topologischen Räumen

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{i \in I^{(n)}} S^{n-1} & \xrightarrow{\coprod_{i \in I^{(n)}} q_i^{(n)}} & X^{(n-1)} \\ \downarrow \coprod_{i \in I^{(n)}} j_i & & \downarrow k^{(n)} \\ \coprod_{i \in I^{(n)}} D^n & \xrightarrow{\coprod_{i \in I^{(n)}} Q_i^{(n)}} & X^{(n)} \end{array}$$

wobei  $j_i: S^{n-1} \hookrightarrow D^n$  und  $k_n: X^{(n-1)} \rightarrow X^{(n)}$  die Inklusionen sind.

- (ii) **Schwache Topologie:** Es ist  $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^{(n)}$  und  $U \subseteq X$  ist genau dann offen, wenn  $U \cap X^{(n)} \subseteq X^{(n)}$  für alle  $n$  offen ist.

Eine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  zwischen CW-Komplexen heißt **zellulär**, falls  $f(X^{(n)}) \rightarrow Y^{(n)}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

### 11.3 Bemerkung

- (i) Die Abbildungen  $q_i^{(n)}$  und  $Q_i^{(n)}$  sind *nicht* Teil der Struktur eines CW-Komplex. Nur die Existenz von  $q_i^{(n)}$  und  $Q_i^{(n)}$  wird gefordert – sie ist nicht notwendig eindeutig. Hat man  $q_i^{(n)}$  und  $Q_i^{(n)}$  gewählt, so heißen  $q_i^{(n)}$  die **anklebende Abbildung** der  $i$ -ten  $n$ -Zelle und  $Q_i^{(n)}$  die **charakteristische Abbildung** der  $i$ -ten  $n$ -Zelle.

- (ii) Sei  $\mathring{D}^n = D^n \setminus S^{n-1}$  das Innere von  $D^n$ . Die Abbildungen  $Q_i^{(n)}$  schränken sich zu einem Homöomorphismus  $\coprod_{i \in I^{(n)}} \mathring{D}^n \rightarrow X^{(n)} \setminus X^{(n-1)}$  ein. Insbesondere lässt sich  $I^{(n)}$  mit der Menge der Wegzusammenhangskomponenten von  $X^{(n)} \setminus X^{(n-1)}$  identifizieren. Die Wegzusammenhangskomponenten heißen die **offenen Zellen** von  $X$ . Damit ist jeder CW-Komplex die disjunkte Vereinigung seiner offenen Zellen.

⚠ Achtung: Jede offene  $n$ -Zelle ist offen in  $X^{(n)}$ , aber nicht notwendig in  $X$ .

- (iii) Der Abschluss einer offenen Zelle  $Q_i^{(n)}(\mathring{D}^n)$  ist  $Q_i^{(n)}(D^n)$  und insbesondere kompakt. Die  $Q_i^{(n)}(D^n)$  heißen die **abgeschlossenen Zellen** und sind als Abschluss von offenen Zellen unabhängig von der Wahl der  $q_i^{(n)}, Q_i^{(n)}$ .

⚠ Achtung: Abgeschlossene Zellen sind Bilder von  $D^n$  unter stetigen Abbildungen, aber nicht notwendig homöomorph zu  $D^n$ .

- (iv) Ein CW-Komplex  $X$  heißt **endlich**, wenn er nur aus endlich vielen Zellen besteht, also wenn  $I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I^{(n)}$  endlich ist. Insbesondere gibt es dann ein  $n$  mit  $X = X^{(n)}$ .

Die Dimension von  $X$  ist die maximale Dimension von Zellen von  $X$ :  $\dim X = N$ , falls  $X^{(N)} = X$ ,  $X^{(N-1)} \subsetneq X$ . Gibt es kein solches  $N$  so  $\dim X = \infty$ .

### 11.4 Beispiele

- (i)  $S^n$  mit

$$(S^n)^{(k)} = \begin{cases} \emptyset, & \text{falls } k = -1 \\ \{(1, 0, \dots, 0)\}, & \text{falls } k = 0, \dots, n-1 \\ S^n, & \text{falls } k \geq n \end{cases}$$

ist ein CW-Komplex via  $S^n \cong D^n / S^{n-1}$

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \longrightarrow & (S^n)^{(n-1)} = \{(1, 0, \dots, 0)\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^n & \longrightarrow & S^n \end{array}$$

- (ii)  $S^n$  mit  $(S^n)^{(k)} = \{(x_0, \dots, x_k, 0, \dots, 0) \in S^n\}$  ist ebenfalls eine CW-Struktur auf  $S^n$ .
- (iii) Sei  $K = (V, \Sigma)$  ein simplizialer Komplex. Es ist  $|\Delta^n| \cong D^n$  und  $|\partial \Delta^n| \cong S^{n-1}$ . Sei  $\Sigma^{(n)} := \Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup \dots \cup \Sigma_n$ . Dann wird  $|K|$  durch  $|K|^{(n)} := |(V, \Sigma^{(n)})|$  für  $n \geq 0$  zu einem CW-Komplex. Ist  $f: K \rightarrow L$  eine simpliziale Abbildung, so ist  $|f|: |K| \rightarrow |L|$  eine zelluläre Abbildung.



(iv) Der  $n$ -dimensionale reelle projektive Raum  $\mathbb{R}P^n$  kann definiert werden durch

$$\mathbb{R}P^n := \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} /_{x \sim \lambda x} = S^n /_{x \sim -x}$$

Punkte in  $\mathbb{R}P^n$  sind Äquivalenzklassen von  $(n+1)$ -Tupeln reeller Zahlen und werden als die sogenannten homogenen Koordinaten  $[x_0 : \dots : x_n]$  geschrieben. Es ist

$$\mathbb{R}P^n = \left\{ [x_0 : \dots : x_n] \mid (x_0, \dots, x_n) \in S^n \right\} = \left\{ [x_0 : \dots : x_n] \mid (x_0, \dots, x_n) \in S^n, x_n \geq 0 \right\}$$

Wir erhalten einen Homöomorphismus  $f^{(n)} : D^n /_{x \sim -x, x \in S^{n-1}} \rightarrow \mathbb{R}P^n$  mit

$$f(x_1, \dots, x_n) = \left[ x_1 : \dots : x_n : \sqrt{1 - \sum_{i=1}^n x_i^2} \right]$$

Ist  $Q^{(n)} : D^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$  die Komposition von  $f^{(n)}$  mit der Projektion  $D^n \rightarrow D^n /_{x \sim -x, x \in S^{n-1}}$  und  $q^{(n)} : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}P^{n-1}$  die Projektion, so erhalten wir einen Pushout

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \xrightarrow{q^{(n)}} & \mathbb{R}P^{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^n & \xrightarrow{Q^{(n)}} & \mathbb{R}P^n \end{array}$$

Induktiv erhalten wir einen CW-Struktur auf  $\mathbb{R}P^n$  mit genau einer  $k$ -Zelle für  $k = 0, \dots, n$  und

$$(\mathbb{R}P^n)^{(k)} \cong \mathbb{R}P^k$$

(v) Der  $n$ -dimensionale komplexe projektive Raum  $\mathbb{C}P^n$  kann definiert werden durch

$$\mathbb{C}P^n := \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} /_{z \sim \lambda z} = S^{2n+1} /_{z \sim \lambda z, \lambda \in S^1}$$

Punkte in  $\mathbb{C}P^n$  sind Äquivalenzklassen von  $(n+1)$ -Tupeln komplexer Zahlen und werden als die sogenannten homogenen Koordinaten  $[z_0 : \dots : z_n]$  geschrieben. Es ist

$$\mathbb{C}P^n = \left\{ [z_0 : \dots : z_n] \mid (z_0, \dots, z_n) \in S^{2n+1} \right\} = \left\{ [z_0 : \dots : z_n] \mid (z_0, \dots, z_n) \in S^{2n+1}, z_n \geq 0 \right\}$$

Wir erhalten einen Homöomorphismus  $f^{(n)} : D^{2n+1} /_{z \sim \lambda z, \lambda \in S^1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$  mit

$$f(z_1, \dots, z_n) = \left[ z_1 : \dots : z_n : \sqrt{1 - \sum_{i=1}^n |z_i|^2} \right]$$

Ist  $Q^{(2n)} : D^{2n} \rightarrow \mathbb{C}P^n$  die Komposition von  $f^{(n)}$  mit der Projektion  $D^{2n} \rightarrow D^{2n} /_{z \sim \lambda z, z \in S^{2n}}$  und  $q^{(n)} : S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^{n-1}$  die Projektion, so erhalten wir einen Pushout

$$\begin{array}{ccc} S^{2n-1} & \xrightarrow{q^{(n)}} & \mathbb{C}P^{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^{2n} & \xrightarrow{Q^{(n)}} & \mathbb{C}P^n \end{array}$$

Induktiv erhalten wir einen CW-Struktur auf  $\mathbb{C}P^n$  mit genau einer  $k$ -Zelle für  $k = 0, 2, \dots, 2n$  und

$$(\mathbb{C}P^n)^{(k)} \cong \mathbb{C}P^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}$$

## 11.5 Lemma

Sei  $X$  ein CW-Komplex und  $K \subseteq X$ . Dann ist  $K$  genau dann kompakt, wenn  $K$  abgeschlossen ist und  $K$  nur endlich viele offene Zellen von  $X$  schneidet.

### Beweis

Zunächst: Ist  $S \subseteq X$  ein Unterraum der jede offene Zelle höchstens in einem Punkt schneidet, so ist  $S$  diskret. Für  $S_0 \subseteq S$  ist  $S_0 \cap (X^{(n)} \setminus X^{(n-1)})$  abgeschlossen in  $X^{(n)}$ , da  $S_0$  jede offene  $n$ -Zelle von  $X$  höchstens in einem Punkt schneidet. Daher ist  $S_0 \cap X^{(n)} \subseteq X^{(n)}$  abgeschlossen für alle  $n$ . Damit ist auch  $S_0 \subseteq X$  abgeschlossen und  $S$  diskret.

Sei nun  $K \subseteq X$  kompakt. Dann ist  $K$  sicher abgeschlossen. Sei  $S \subseteq K$  ein Teilraum der aus jeder offenen Zelle von  $X$ , die  $K$  schneidet, genau einen Punkt enthält. Wegen der Vorüberlegung ist  $S$  diskret. Da  $S \subseteq K$  abgeschlossen und  $K$  kompakt ist, ist  $S$  auch kompakt. Damit ist  $S$  endlich und  $K$  schneidet nur endlich viele offene Zellen.

Ist nun umgekehrt  $K$  abgeschlossen und schneidet nur endlich viele offene Zellen, so ist  $K$  enthalten in einer endlichen Vereinigung von abgeschlossen Zellen von  $X$ . Da diese abgeschlossen Zellen kompakt sind, ist auch diese Vereinigung kompakt,  $K$  ist also eine abgeschlossener Teilraum eines kompakten Teilraums und damit selbst kompakt.  $\square$

## 11.6 Korollar

Ein CW-Komplex ist genau dann kompakt, wenn er endlich ist.

## 12 Zelluläre Homologie

### 12.1 Definition

Sei  $X$  ein CW-Komplex. Dann heißt

RevChap12

$$C_n^{\text{cell}}(X; R) := H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}; R)$$

der  **$n$ -te zelluläre Kettenmodul** von  $X$  mit Koeffizienten in  $R$ . Die  $n$ -te Randabbildung  $\partial_n^{\text{cell}} : C_n^{\text{cell}}(X; R) \rightarrow C_{n-1}^{\text{cell}}(X; R)$  wird durch die Komposition

$$\begin{array}{ccc} H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}; R) & \xrightarrow{\partial_n^{(X^{(n)}, X^{(n-1)})}} & H_{n-1}(X^{(n-1)}; R) \\ & & \downarrow (j^{(n-1)})_* \\ & & H_{n-1}(X^{(n-1)}, X^{(n-2)}; R) \end{array}$$

definiert. Dabei ist  $\partial_n^{(X^{(n)}, X^{(n-1)})}$  die Randabbildung aus der Paarfolge für  $(X^{(n)}, X^{(n-1)})$  und  $j^{(n-1)}$  die Inklusion  $(X^{(n-1)}, \emptyset) \hookrightarrow (X^{(n-1)}, X^{(n-2)})$ .

### 12.2 Lemma

$$\partial_{n-1}^{\text{cell}} \circ \partial_n^{\text{cell}} = 0$$

**Beweis**

$$\begin{array}{ccccccc} H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}) & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(X^{(n-1)}) & \longrightarrow & \dots \\ & & \parallel & & \\ & & H_{n-1}(X^{(n-1)}) & \xrightarrow{j_*^{(n-1)}} & H_{n-1}(X^{(n-1)}, X^{(n-2)}) & \xrightarrow{\partial_{n-1}} & H_{n-2}(X^{(n-2)}) \longrightarrow \dots \\ & & & & & & \parallel \\ & & & & & & H_{n-2}(X^{(n-2)}) \xrightarrow{j_*^{(n-2)}} H_{n-2}(X^{(n-2)}, X^{(n-3)}) \end{array}$$

Also  $\partial_{n-1}^{\text{cell}} \circ \partial_n^{\text{cell}} = 0$ , da schon  $\partial_{n-2} \circ j_*^{(n-1)} = 0$ . □

### 12.3 Definition

$(C_*^{\text{cell}}(X; R), \partial_*^{\text{cell}})$  heißt der **zelluläre Kettenkomplex** von  $X$  über  $R$ . Seine Homologie  $H_*^{\text{cell}}(X; R)$  heißt die **zelluläre Homologie** von  $X$ .

### 12.4 Bemerkung

Der zelluläre Kettenkomplex und die zelluläre Homologie sind Funktoren auf der Kategorie der CW-Komplexe und zellulären Abbildungen.

### 12.5 Lemma

Sei  $X$  ein CW-Komplex. Wähle  $q_i^{(n)}$  und  $Q_i^{(n)}$  für die Zellstruktur auf  $X$ .

a)

$$\left( \coprod_{i \in I^{(n)}} Q_i^{(n)}, \coprod_{i \in I^{(n)}} q_i^{(n)} \right) : \left( \coprod_i D^n, \coprod_i S^{n-1}; R \right) \longrightarrow \left( X^{(n)}, X^{(n-1)}; R \right)_*$$

induziert einen Isomorphismus in  $H_*$ .

b)

$$H_k \left( \coprod_i D^n, \coprod_i S^{n-1}; R \right) = \begin{cases} R[I^{(n)}], & \text{falls } k = n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

### Beweis

a) Sei  $D_0^n = D^n \setminus \{0\}$ ,  $\frac{1}{2}D^n = \{ \frac{x}{2} \mid x \in D^n \}$  und  $\frac{1}{2}D_0^n = \frac{1}{2}D^n \setminus \{0\}$ . Wir definieren

$$X_{++}^{(n-1)} := X^{(n)} \setminus \bigcup_{i \in I^{(n)}} Q_i^{(n)}(\{0\}) \quad \text{und} \quad X_+^{(n-1)} := X^{(n)} \setminus \bigcup_{i \in I^{(n)}} Q_i^{(n)} \left( \frac{1}{2}D^n \right)$$

Dann sind  $X^{(n-1)} \hookrightarrow X_{++}^{(n-1)} \hookrightarrow X_+^{(n-1)}$  Homotopieäquivalenzen. Betrachte:

$$\begin{array}{ccccc} (\coprod D^n, \coprod S^{n-1}) & \xrightarrow{(1)} & (\coprod D^n, \coprod D_0^n) & \xleftarrow{(2)} & (\coprod \frac{1}{2}D^n, \coprod_{i \in I^{(n)}} \frac{1}{2}D_0^n) \\ \downarrow (\coprod Q_i^{(n)}, \coprod q_i^{(n)}) & & \downarrow & & \downarrow (3) \\ (X^{(n)}, X^{(n-1)}) & \xrightarrow{(5)} & (X^{(n)}, X_{++}^{(n-1)}) & \xleftarrow{(4)} & (X^{(n)} \setminus X_+^{(n-1)}, X_{++}^{(n-1)} \setminus X_+^{(n-1)}) \end{array}$$

(1), (2), (5) sind Homotopieäquivalenzen und induzieren Isomorphismen in Homologie. (3) ist ein Homöomorphismus und induziert einen Isomorphismus in Homologie. (4) erfüllt die Voraussetzungen für den Ausschneideisomorphismus und induziert daher auch einen Isomorphismus in Homologie. Damit folgt a).

b) Es gilt

$$\begin{aligned} H_k \left( \coprod_i D^n, \coprod_i S^{n-1}; R \right) &\xleftarrow{\cong} \bigoplus_i H_k(D^n, S^{n-1}; R) \xrightarrow{\cong} \bigoplus_i \tilde{H}_{k-1}(S^{n-1}; R) \\ &\cong \bigoplus_i \begin{cases} R, & \text{falls } k = n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\ &\cong \begin{cases} R[I^{(n)}], & \text{falls } k = n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad \square \end{aligned}$$

### 12.6 Bemerkung

$$\begin{array}{ccc} C_n^{\text{cell}}(X; R) & \xrightarrow{\partial_n^{\text{cell}}} & C_{n-1}^{\text{cell}}(X; R) \\ \parallel & & \parallel \\ H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}; R) & \longrightarrow & H_{n-1}(X^{(n-1)}, X^{(n-2)}; R) \\ \parallel & & \parallel \\ R[I^{(n)}] & \longrightarrow & R[I^{(n)}] \end{array}$$

Die Randabbildung  $\partial_n^{\text{cell}}$  wird unter diesen Isomorphismen zu einer  $I^{(n-1)} \times I^{(n)}$ -Matrix. Für  $j \in I^{(n-1)}$  und  $k \in I^{(n)}$  ist der  $(j, k)$ -Eintrag dieser Matrix genau der Abbildungsgrad einer Selbstabbildung

der  $(n-1)$ -Sphäre. Diese  $(Q_i^{(n-1)}, q_i^{(n-1)})$  induzieren einen Homöomorphismus  $\coprod_i D^{n-1} / \coprod_i S^{n-2} \xrightarrow{\cong}$

$X^{(n)} / X^{(n-1)}$ . Durch Komposition mit der Projektion auf die  $j$ -te Zelle:  $\coprod_i D^{n-1} / \coprod_i S^{n-2} \xrightarrow{p_j^{(n-1)}} D^{n-1} / S^{n-2} \cong S^{n-1}$ . Der  $(j, k)$ -te Eintrag ist nun der Abbildungsgrad von

$$S^{n-1} \xrightarrow{q_k^{(n-2)}} X^{(n-1)} \longrightarrow X^{(n-1)} / X^{(n-2)} \xrightarrow{\cong} \coprod_i D^{n-1} / \coprod_i S^{n-2} \xrightarrow{p_j^{(n-1)}} S^{n-1}$$

## 12.7 Definition

Eine natürliche Transformation  $\tau$  zwischen Funktoren  $F, G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  heißt ein **natürlicher Isomorphismus**, wenn  $\tau_C: F(C) \rightarrow G(C)$  für alle Objekte  $C$  von  $\mathcal{C}$  ein Isomorphismus in  $\mathcal{D}$  ist.

## 12.8 Satz

Für CW-Komplexe gibt es einen natürlichen Isomorphismus  $\tau_X: H_*^{\text{cell}}(X; R) \xrightarrow{\cong} H_*(X; R)$ .

**Beweis (mit Lemma 12.9)**

Betrachte folgendes Diagramm

"R" aus  
 Platzgründen  
 weggelassen

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & H_n(X^{(n+1)}, X^{(n)}) \\
 & & & & = 0 \\
 & & & \nearrow & \\
 0 = H_n(X^{(n-1)}) & & & H_n(X^{(n+1)}) & \xrightarrow[\text{Lemma b)}]{\cong} & H_n(X) \\
 & \searrow & & \nearrow & & \\
 & & H_n(X^{(n)}) & & & \\
 & \nearrow & \searrow & & & \\
 H_{n+1}(X^{(n+1)}, X^{(n)}) & \xrightarrow{\partial_{n+1}^{\text{cell}}} & H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}) & \xrightarrow{\partial_n^{\text{cell}}} & H_{n-1}(X^{(n-1)}, X^{(n-2)}) \\
 & & \searrow & & \nearrow \\
 & & H_{n-1}(X^{(n-1)}) & & \\
 & \nearrow & \searrow & & \\
 & & H_{n-1}(X^{(n-2)}) \\
 & & = 0
 \end{array}$$

Additional arrows in the diagram:

- Red arrow from  $0 = H_n(X^{(n-1)})$  to  $H_n(X^{(n)})$ .
- Yellow arrow from  $H_n(X^{(n)})$  to  $H_n(X^{(n+1)})$ .
- Red arrow from  $H_n(X^{(n)})$  to  $H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)})$  labeled  $j_*^{(n)}$ .
- Red arrow from  $H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)})$  to  $H_{n-1}(X^{(n-1)}, X^{(n-2)})$  labeled  $\partial_n^{X^{(n)}, X^{(n-1)}}$ .
- Blue arrow from  $H_{n-1}(X^{(n-1)}, X^{(n-2)})$  to  $H_{n-1}(X^{(n-1)})$ .
- Blue arrow from  $H_{n-1}(X^{(n-1)})$  to  $H_{n-1}(X^{(n-2)})$ .

Es folgt, dass  $j_*^{(n)}$  ein Isomorphismus ist,  $H_n(X^{(n)}; R) \xrightarrow{\cong} \ker \partial_n^{\text{cell}}$  und  $\text{Im } \partial_{n+1}^{X^{(n+1)}, X^{(n)}} \xrightarrow{\cong} \text{Im } \partial_{n+1}^{\text{cell}}$ . Weiter erhalten wir einen Isomorphismus

$$H_n(X; R) \cong H_n(X^{(n+1)}; R) \xleftarrow{\cong} H_n(X^{(n)}; R) / \text{Im } \partial_{n+1}^{X^{(n+1)}, X^{(n)}}$$

Damit folgt die Behauptung. □

## 12.9 Lemma

Sei  $X$  ein CW-Komplex.

- a) Für  $k > n$  ist  $H_k(X^{(n)}; R) = 0$ .
- b) Für  $k < n$  induziert die Inklusion  $l_n : X^{(n)} \hookrightarrow X$  einen Isomorphismus  $(l_n)_* : H_k(X^{(n)}; R) \rightarrow H_k(X; R)$ .

### Beweis

- a) Ist  $k > n$ , so erhalten wir aus der Paarfolge einen Isomorphismus

$$H_{k+1}(X^{(n)}, X^{(n-1)}; R) \xrightarrow{=0} H_k(X^{(n-1)}; R) \xrightarrow{\cong} H_k(X^{(n)}; R) \xrightarrow{=0} H_k(X^{(n)}, X^{(n-1)}; R)$$

Da  $H_k(X^{(0)}; R) = 0$  für  $k > 0$  folgt a) nun durch endliche Induktion für  $n = 0, 1, \dots, k-1$ .

- b) Ist  $n > k$ , so erhalten wir

$$H_{k+1}(X^{(n+1)}, X^{(n)}; R) \xrightarrow{=0} H_k(X^{(n)}; R) \xrightarrow{\cong} H_k(X^{(n+1)}; R) \xrightarrow{=0} H_k(X^{(n+1)}, X^{(n)}; R)$$

Für  $m \geq n > k$  induziert die Inklusion  $X^{(n)} \hookrightarrow X^{(m)}$  daher einen Isomorphismus  $H_k(X^{(n)}; R) \rightarrow H_k(X^{(m)}; R)$ . Ist  $\dim X$  endlich, so folgt die Behauptung.

Für den allgemeinen Fall beobachten wir zunächst, dass es zu jeder stetigen Abbildung  $\sigma : |\Delta^j| \rightarrow X$  ein  $n$  gibt mit  $\text{Im } \sigma \subseteq X^{(n)}$ , da  $\text{Im } \sigma \subseteq X$  kompakt ist und daher nur endlich viele offene Zellen von  $X$  trifft (11.5).

$$\implies C_*(X; R) = \bigcup_n C_*(X^{(n)}; R)$$

Damit folgt

- (1)  $\forall x \in H_k(X; R) : \exists n : x \in \text{Im}(H_k(X^{(n)}; R) \rightarrow H_k(X; R))$
- (2)  $\forall x \in H_k(X^{(n)}; R)$  sodass das Bild von  $x$  in  $H_k(X; R)$  trivial ist, so  $\exists n \geq n$ , sodass das Bild von  $x$  in  $H_k(X^{(m)}; R)$  trivial ist.

Da für  $m \geq n > k$   $H_k(X^{(n)}; R) \rightarrow H_k(X^{(m)}; R)$  ein Isomorphismus ist, ergibt sich damit die Behauptung.  $\square$

## 12.10 Korollar

Die Eulercharakteristik eines endlichen simplizialen Komplexes ist eine topologische Invariante.

### Beweis

Sei  $a_n$  die Anzahl der  $n$ -Simplizes von  $K$ . Dann gibt es eine CW-Struktur auf  $|K|$ , die für jedes  $n$  genau  $a_n$  Zellen hat.

$$\chi(K) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i a_i = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \text{Rg } C_i^{\text{cell}}(|K|) \stackrel{\text{Kapitel 4}}{=} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \text{Rg } H_i^{\text{cell}}(|K|) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \text{Rg } H_i(|K_i|)$$

Da die  $H_i(|K_i|)$  eine topologische Invariante sind, ist auch  $\chi(K)$  eine topologische Invariante.  $\square$

## 12.11 Bemerkung

Ist  $X$  ein CW-Komplex mit endlich vielen  $n$ -Zellen, so ist  $H_n(X)$  ein endlich erzeugter  $\mathbb{Z}$ -Modul. Man definiert dann die  **$n$ -te Bettizahl** von  $X$  als  $b_n := \operatorname{Rg} H_n(X)$ . Ist  $X$  ein endlicher CW-Komplex, so definiert man die Eulercharakteristik von  $X$  als

$$\chi(X) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n.$$

Ist  $a_n$  die Anzahl der  $n$ -Zellen von  $X$ , so gilt  $\chi(X) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ .

## 12.12 Beispiel

Es gilt

$$H_k(\mathbb{C}P^n; R) \cong \begin{cases} R, & \text{falls } k = 0, 2, 4, \dots, 2n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

### Beweis

Aus Kapitel 11 wissen wir, dass es auf  $\mathbb{C}P^n$  eine CW-Struktur gibt mit genau einer Zelle in der Dimension  $0, 2, 4, \dots, 2n$  (und keine weiteren Zellen). Der zelluläre Kettenkomplex hat daher folgende Form:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 2n-1 & 2n & 2n+1 & \dots \\ R \longleftarrow 0 \longleftarrow R \longleftarrow 0 \longleftarrow R \longleftarrow \dots \longleftarrow 0 \longleftarrow R \longleftarrow 0 \longleftarrow \dots \end{array}$$

Alle Randabbildungen sind trivial und die Homologie von  $\mathbb{C}P^n$  stimmt mit den zellulären Kettenkomplexen überein.  $\square$

## 12.13 Beispiel

Es ist

$$H_k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{falls } k = 0 \text{ oder } (k = n \text{ und } k \text{ ungerade}) \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & \text{falls } 0 < k < n \text{ und } k \text{ ungerade} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

### Beweis

Aus Kapitel 11 wissen wir, dass es eine CW-Struktur auf  $\mathbb{R}P^n$  gibt, die für  $k = 0, \dots, n$  genau eine  $k$ -Zelle und keine weiteren Zellen besitzt. Der zelluläre Kettenkomplex von  $\mathbb{R}P^n$  (über  $\mathbb{Z}$ ) hat also die Form:

$$\mathbb{Z} \xleftarrow{\partial_1^{\text{cell}}} \mathbb{Z} \xleftarrow{\partial_2^{\text{cell}}} \mathbb{Z} \xleftarrow{\quad} \dots \xleftarrow{\quad} \mathbb{Z} \xleftarrow{\partial_n^{\text{cell}}} \mathbb{Z} \xleftarrow{\quad} 0$$

Wir müssen die Randabbildung verstehen. In der CW-Struktur können wir  $(\mathbb{R}P^n)^{(k)}$  mit  $\mathbb{R}P^k$  identifizieren. Die anklebende Abbildung  $q^{(k+1)}: S^k \rightarrow \mathbb{R}P^k$  der  $(k+1)$ -Zelle ist die Projektion  $(x_0, \dots, x_k) \mapsto [x_0 : \dots : x_k]$ . Die charakteristische Abbildung  $Q^{(k+1)}: D^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}P^{k+1}$  der  $(k+1)$ -Zelle ist gegeben durch

$$(x_0, \dots, x_k) \mapsto \left[ x_0 : \dots : x_k : \sqrt{1 - \|(x_1, \dots, x_k)\|_2^2} \right]$$

Betrachte folgendes kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
 C_{k+1}^{\text{cell}}(\mathbb{R}P^n) & \xrightarrow{\partial_{k+1}^{\text{cell}}} & C_k^{\text{cell}}(\mathbb{R}P^n) & & \\
 \parallel & & \parallel & & \\
 H_{k+1}(\mathbb{R}P^{k+1}, \mathbb{R}P^k) & \xrightarrow{\partial^{\mathbb{R}P^{k+1}, \mathbb{R}P^k}} & H_k(\mathbb{R}P^k) & \xrightarrow{\quad} & H_k(\mathbb{R}P^k, \mathbb{R}P^{k-1}) \\
 \uparrow (Q^{(k+1)}, q^{(k+1)})_* \cong & & \uparrow q_*^{(k+1)} & & \uparrow (q^{(k+1)}, q^{(k)})_* \\
 H_{k+1}(D^{k+1}, S^k) & \xrightarrow[\cong]{\partial^{D^{k+1}, S^k}} & \tilde{H}_k(S^k) & \xrightarrow{j_*} & H_k(S^k, S^{k-1})
 \end{array}$$

Das Bild von  $\partial_{k+1}^{\text{cell}}$  stimmt also mit dem Bild der Komposition

$$H_k(S^k) \xrightarrow{j_*} H_k(S^k, S^{k-1}) \xrightarrow{(q^{(k+1)}, q^{(k)})_*} H_k(\mathbb{R}P^k, \mathbb{R}P^{k-1})$$

überein. Sei  $i_{\pm}: D^k \rightarrow S^k$  definiert durch  $i_{\pm}(x) = (\pm x, \pm \sqrt{1 - \|x\|_2^2})$ . Sei  $l: S^{k-1} \rightarrow i_-(D^k)$  die Inklusion und  $R: S^k \rightarrow S^k$  die Punktspiegelung  $x \mapsto -x$ . Es ist  $i_+ = R \circ i_-$ . Betrachte

$$\begin{array}{ccc}
 & \tilde{H}_k(S^k) & \\
 & \downarrow j_* & \\
 \begin{array}{l} y_+ \in H_k(D^k, S^{k-1}) \\ \oplus \\ y_- \in H_k(D^k, S^{k-1}) \end{array} & \xrightarrow[\cong]{\begin{array}{c} (i_+, i_+|_{S^{k-1}}) \\ \oplus \\ (i_-, i_-|_{S^{k-1}}) \end{array}} & H_k(S^k, S^{k-1}) \xrightarrow[\cong]{\begin{array}{c} ((\text{id}_{S^k}, l)_*) \\ (R, R|_{S^{k-1}}) \end{array}} \begin{array}{l} H_k(S^k, i_-(D^k)) \ni x_+ \\ \oplus \\ H_k(S^k, i_-(D^k)) \ni x_- \end{array} \quad [\#] \\
 & \downarrow (q^{(k+1)}, q^{(k)})_* & \\
 & H_k(\mathbb{R}P^k, \mathbb{R}P^{k-1}) &
 \end{array}$$

Sei  $x \in \tilde{H}_k(S^k)$  ein Erzeuger. Seien  $(x_+, x_-)$  und  $(y_+, y_-)$  die Elemente, die  $j_+(x)$  unter den horizontalen Isomorphismen in  $[\#]$  entsprechen. Mit Hilfe der Paarfolge zu  $(S^k, i_-(D^k))$  sehen wir, dass  $x_+$  ein Erzeuger von  $H_k(S^k, i_-(D^k))$  ist. Es ist  $x_+ = (\text{id}_{S^k}, l)_*(j_*(x))$  und

$$x_- = (R, R|_{S^{k-1}})_* \circ j_*(x) = (\text{id}_{S^k}, l) \circ j_* \circ R_*(x) = (\text{id}_{S^k}, l)_* \circ j_*((-1)^{k+1}x) = (-1)^{k+1}x_+$$

Die Komposition der horizontalen Isomorphismen in  $[\#]$  ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} (i_+, l \circ i_+|_{S^{k-1}})_* & 0 \\ 0 & (R, R|_{S^{k-1}})_* \circ (i_-, i_-|_{S^{k-1}})_* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (i_+, l \circ i_+|_{S^{k-1}})_* & \\ & (i_+, l \circ i_+|_{S^{k-1}})_* \end{pmatrix}$$

Es folgt, dass  $y_+$  ein Erzeuger von  $H_k(D^k, S^{k-1})$  ist und  $y_- = (-1)^{k+1}y_+$  ist. In  $[\#]$  wird  $y_+$  auf  $(Q^{(k)}, q^{(k)})_*(y_+)$  abgebildet. Insbesondere wird  $y_+$  auf einen Erzeuger  $z_k \in H_k(\mathbb{R}P^k, \mathbb{R}P^{k-1})$  abgebildet. Es folgt

$$\begin{aligned}
 (q^{(k+1)}, q^{(k)})_*(j_*(x)) &= (q^{(k+1)}, q^{(k)})_* \left( (i_+, i_+|_{S^{k-1}})_*(y_+) + (i_-, i_-|_{S^{k-1}})_*(y_-) \right) \\
 &= (Q^{(k)}, q^{(k)})_*(y_+(-1)^{k+1}y_+) \\
 &= \begin{cases} 2z_k, & \text{falls } k \text{ ungerade} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}
 \end{aligned}$$



Es folgt

$$\operatorname{Im} \partial_{k+1}^{\text{cell}} = \begin{cases} 2 \cdot C_k^{\text{cell}}(X), & \text{falls } k \text{ ungerade} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Der zelluläre Kettenkomplex ist daher isomorph zu:

$$\mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \xleftarrow{2} \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \xleftarrow{\quad} \cdots \xleftarrow{\quad} \mathbb{Z} \xleftarrow{\quad} 0 \xleftarrow{\quad} 0$$

Für  $R = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  ist somit

$$H_k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & \text{falls } k = 0, \dots, n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad \square$$

## 12.14 Satz

Sei  $K$  ein geordneter simplizialer Komplex. Für  $\sigma = \{v_0, \dots, v_n\} \in \Sigma_n$  mit  $v_0 < v_1 < \dots < v_n$  sei  $f_\sigma: |\Delta^n| \rightarrow |K|$  gegeben durch  $f_\sigma(\sum_{i=0}^n t_i e_i) = \sum_{i=0}^n t_i v_i$ . Wir erhalten

$$[f_\sigma] \in H_n(|K|^{(n)}, |K|^{(n-1)}; R) = C_n^{\text{cell}}(|K|; R).$$

Diese Zuordnung definiert einen Isomorphismus zwischen dem simplizialen Kettenkomplex von  $K$  und dem zellulären Kettenkomplex von  $|K|$

$$\tau: C_*(K; R) \longrightarrow C_*^{\text{cell}}(|K|, R)$$

Insbesondere ist  $H_*(K; R) \cong H_*(|K|; R)$  eine topologische Invariante von  $K$ .

### Beweis

Betrachte

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_n} R & \xrightarrow{\cong} & \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_n} H_n(|\Delta^\sigma|, |\partial \Delta^\sigma|; R) \\ \cong \downarrow & & \cong \downarrow \\ C_n(K; R) & \xrightarrow{\tau} & H_n(|K|^{(n)}, |K|^{(n-1)}; R) \end{array}$$

Nun ist auch  $\tau$  ein Isomorphismus, da  $[f_\sigma]$  ein Erzeuger von  $H_n(|\Delta^\sigma|, |\partial \Delta^\sigma|; R)$  ist, siehe Übungen. Es bleibt zu zeigen, dass  $\sigma \mapsto [f_\sigma]$  mit den Randabbildungen vertauscht. Dies ergibt sich sofort aus  $f_{\partial_j \sigma} = \partial_j f_\sigma$ .  $\square$

## 13 Kleine Simplizes

### 13.1 Satz

Sei  $(X, A)$  ein Paar von topologischen Räumen. Sei  $L \subseteq A$  mit  $\bar{L} \subseteq \mathring{A}$ . Dann induziert die Inklusion  $(X \setminus L, A \setminus L) \hookrightarrow (X, A)$  den Ausschneidungs-Isomorphismus  $H_*(X \setminus L, A \setminus L; R) \xrightarrow{\cong} H_*(X, A; R)$ .  
Es ist

$$H_*(X, A; R) = H_*(C_*(X; R)/C_*(A; R), \partial_*) \text{ und } H_*(X \setminus L, A \setminus L; R) = H_*(C_*(X \setminus L; R)/C_*(A \setminus L; R), \partial_*)$$



### 13.2 Definition

Sei  $\mathcal{U}$  eine offene Überdeckung von  $X$ . Ein singulärer Simplex  $\sigma: |\Delta^n| \rightarrow X$  heißt  $\mathcal{U}$ -**klein**, falls es ein  $U \in \mathcal{U}$  gibt mit  $\text{Im } \sigma \subseteq U$ . Die  $\mathcal{U}$ -kleinen Simplizes erzeugen den Unterkettenkomplex  $(C_*^{\mathcal{U}}, \partial_*)$  des simplizialen Kettenkomplexes  $C_*(X; R)$ .

### 13.3 Satz über kleine Simplizes

Die Inklusion  $C_*^{\mathcal{U}}(X; R) \rightarrow C_*(X; R)$  induziert einen Isomorphismus in Homologie.

### 13.4 Bemerkung

Der Satz über kleine Simplizes lässt sich auf Paare von topologischen Räumen verallgemeinern. Für eine Überdeckung  $\mathcal{U}$  von  $X$  setzen wir

$$C_*^{\mathcal{U}}(X, A; R) := C_*^{\mathcal{U}}(X; R)/C_*(A; R) \cap C_*^{\mathcal{U}}(X; R)$$

Dann induziert die Inklusion  $C_*^{\mathcal{U}}(X, A; R) \rightarrow C_*(X, A; R)$  einen Isomorphismus in Homologie. Beweis mit Paarfolge und 5er-Lemma.

### 13.5 Beweis des Ausschneidungssatzes (13.1)

Seien  $\mathcal{U} := \{\mathring{A}, X \setminus \bar{L}\}$  und  $\mathcal{U}_L := \{\mathring{A} \setminus L, X \setminus \bar{L}\}$ . Dann gilt nach dem Satz über kleine Simplizes

$$\begin{array}{ccc} C_*^{\mathcal{U}_L}(X \setminus L, A \setminus L; R) & \xrightarrow{\cong} & C_*^{\mathcal{U}}(X, A; R) \\ \cong_{H_*} \downarrow & & \downarrow \cong_{H_*} \\ C_*(X \setminus L, A \setminus L; R) & \xrightarrow{(\star)} & C_*(X, A; R) \end{array}$$

Daher induziert auch die Inklusion  $(\star)$  einen Isomorphismus in  $H_*$ . □

### 13.6 Idee zum Beweis des Satzes über kleine Simplizes



### 13.7 Definition

$s_n := \left(\frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1}\right) \in |\Delta^n|$  heißt der **Schwerpunkt** von  $|\Delta^n|$ . Ist  $\sigma: |\Delta^p| \rightarrow |\Delta^n|$  ein singulärer  $p$ -Simplex, so definieren wir  $(K_{\Delta^n})(\sigma): |\Delta^{p+1}| \rightarrow |\Delta^n|$  durch

$$(K_{\Delta^n})(\sigma)(t_0, \dots, t_{p+1}) = t_0 \cdot s_n + (1 - t_0) \cdot \sigma\left(\frac{(t_1, \dots, t_{p+1})}{1 - t_0}\right)$$

Wir erhalten eine Abbildung  $(K_{\Delta^n})_p: C_p(|\Delta^n|; R) \rightarrow C_{p+1}(|\Delta^n|; R)$ .

### 13.8 Lemma

Sei  $p_n: |\Delta^n| \rightarrow |\Delta^n|$  die konstante Abbildung mit  $\text{Im } p_n = \{s_n\}$ . Dann ist  $(K_{\Delta^n})_*$  eine Kettenhomotopie zwischen  $\text{id}$  und  $(p_n)_*$ .

#### Beweis

Sei  $\sigma$  ein singulärer  $p$ -Simplex in  $|\Delta^n|$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \partial_{p+1} \circ (K_{\Delta^n})_p(\sigma) &= \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j (K_{\Delta^n})_p(\sigma) \circ \iota_{p+1,j} = \sigma + \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^j (K_{\Delta^n})_p(\sigma) \circ \iota_{p+1,j} \\ &= \sigma + \begin{cases} \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^j (K_{\Delta^n})_{p-1}(\sigma \circ \iota_{p+1,j}), & p \geq 1 \\ -c_{\{s_n\}}: |\Delta^0| \rightarrow \{s_n\}, & p = 0 \end{cases} \\ &= \sigma - \begin{cases} (K_{\Delta^n})_{p-1}(\partial_p \circ \sigma), & \text{falls } p \geq 1 \\ c_{\{s_0\}}, & \text{falls } p = 0 \end{cases} \quad \square \end{aligned}$$


### 13.9 Definition

Wir definieren induktiv natürliche Transformationen  $B_n: C_n(-; R) \rightarrow C_n(-; R)$  und  $H_n: C_n(-; R) \rightarrow C_{n+1}(-; R)$  wie folgt: Für  $n = 0$  setzen wir  $(B_0)_X = \text{id}$ . Sei  $B_k$  nun schon für  $k = 0, \dots, n-1$  definiert. Betrachte  $\text{id}_{|\Delta^n|} \in C_n(|\Delta^n|; R)$ . Setze

$$(B_n)_{|\Delta^n|}(\text{id}_{|\Delta^n|}) := (K_{\Delta^n})_{n-1} \circ (B_{n-1})_{|\Delta^n|} \circ \partial_n(\text{id}_{|\Delta^n|})$$



## Index

Die Seitenzahlen sind mit Hyperlinks zu den entsprechenden Seiten versehen, also anklickbar 

Abbildungsgrad, 36  
abgeschlossene Zelle, 42  
anklebende Abbildung, 42  
assoziativ, 1

charakteristische Abbildung, 42  
CW-Komplex, 41  
    endlicher, 42

Ecken, 4  
Euler-Charakteristik, 6  
    von  $\mathbb{Z}$ -Kettenkomplexen, 14

freier Modul, 7  
Funktork, 2  
    dargestellt, 2

geometrische Realisierung, 5  
graduierten, 18  
Graphen, 4

Homologiekategorie, 16  
Homotopieinverse, 21  
Homotopieäquivalenz, 21

Kategorie, 1  
    klein, 2  
kettenhomotop, 22  
Kettenhomotopie, 22  
Kettenmoduln, 10  
Komposition, 1  
kontrahierbar, 21  
Koproduct  
    topologischer Räume, 19  
    von  $R$ -Moduln, 20  
kurze exakte Folge von Kettenkomplexen, 28  
kurze exakte Sequenz, 11

lange exakte Folge, 27

Morphismen, 1

$n$ -Ketten, 16  
 $n$ -Ränder, 16  
 $n$ -Simplex, 4  
 $n$ -te Bettizahl, 49  
 $n$ -te Homologie, 10

$n$ -te Randabbildung  
    simplicial, 8  
    singulär, 15  
 $n$ -ter Homologiemodul  
    simplicial, 9  
    singulär, von Paaren, 26  
 $n$ -ter Kettenmodul  
    simplicial, 8  
    singulär, 15  
 $n$ -ter zelluläre Kettenmodul, 45  
 $n$ -Zykel, 16  
natürliche Transformation, 2  
natürlicher Isomorphismus, 47

Objekte, 1  
offene Zelle, 42

Paar von topologischen Räumen, 26  
Polyeder, 5  
projektiver Modul, 12  
Pushout, 41

$R$ -Kettenabbildung, 18  
 $R$ -Kettenkomplex, 10  
Rand des  $n$ -Simplizes, 5  
Randabbildungen, 10  
Rang einer abelschen Gruppe, 11  
reduzierte singuläre Homologie, 34

Schwache Topologie, 42  
Seite, 4  
Simplizes, 4  
simpliciale Abbildung, 5  
simplicialer Kettenkomplex, 10  
simplicialer Komplex, 4  
singuläre Homologie von  $X$ , 16  
singuläre Simplizes, 15  
singulärer Kettenkomplex, 16  
    von Paaren, 26  
Spaltung, 12  
Summe  
    topologischer Räume, 19  
    von  $R$ -Moduln, 20

Torsionsgruppe, 11

$\mathcal{U}$ -klein, 52  
unital, 1  
Unterkomplex, 4

Vektorfeld, 38

Vertices, 4

Zellstruktur, 41

zellulär, 42

zelluläre Homologie, 45

zelluläre Kettenkomplex, 45

## Abbildungsverzeichnis

1 $\Delta^n \times [0, 1]$ für $n = 0, 1, 2$	23
2 Zerlegung von $\Delta^2 \times [0, 1]$ in 3-Simplizes	23

## Todo's und andere Baustellen

RevChap8	28
Figure: langes Diagramm	30
RevChap9	32
Rest hinzufügen	33
RevChap10	36
fertig stellen	37
Figure: $S^2$ mit Vektorfeld	38
schöner machen	39
RevChap11	41
RevChap12	45
RevChap13	52
Figure: Skizze der Ausschneidung mit kleinen Simplizes	52
Figure: Zerteilung Simplex mit Bild in $X$	53