Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Fachbereich 10 Mathematik und Informatik

Skript Topologie I.

Mitschrift der Vorlesung „Topologie I.“ von Prof. Dr. Arthur Bartels

Jannes Bantje

13. Oktober 2014

Aktuelle Version verfügbar bei:

GitHub (inklusive Sourcecode)
https://github.com/JaMeZ-B/latex-wwu

Bittorrent Sync
B6WH2DISQ5QVYIRYIEZSF4ZR2IDVKPN3I

Vorwort — Mitarbeit am Skript

Dieses Dokument ist eine Mitschrift aus der Vorlesung „Topologie I., WiSe 2014/2015“, gelesen von Prof. Dr. Arthur Bartels. Der Inhalt entspricht weitestgehend dem Tafelanschrieb. Für die Korrektheit des Inhalts übernehme ich keinerlei Garantie! Für Bemerkungen und Korrekturen – und seien es nur Rechtschreibfehler – bin ich sehr dankbar. Korrekturen lassen sich prinzipiell auf drei Wegen einreichen:

- Persönliches Ansprechen in der Uni, Mails an `j.bantje@wwu.de` (gerne auch mit annotieren PDFs)
- *Direktes* Mitarbeiten am Skript: Den Quellcode poste ich auf GitHub (siehe oben), also stehen vielfältige Möglichkeiten der Zusammenarbeit zur Verfügung: Zum Beispiel durch Kommentare am Code über die Website und die Kombination Fork + Pull Request. Wer sich verdient macht oder ein Skript zu einer Vorlesung, die ich nicht besuche, beisteuern will, dem gewähre ich gerne auch Schreibzugriff.

  Beachten sollte man dabei, dass dazu ein Account bei `github.com` notwendig ist, der allerdings ohne Angabe von persönlichen Daten angelegt werden kann. Wer bei GitHub (bzw. dem zugrunde liegenden Open-Source-Programm „`git`“) – verständlicherweise – Hilfe beim Einstieg braucht, dem helfe ich gerne weiter. Es gibt aber auch zahlreiche empfehlenswerte Tutorials im Internet.[1]
- *Indirektes* Mitarbeiten: TeX-Dateien per Mail verschicken.

  Dies ist nur dann sinnvoll, wenn man einen ganzen Abschnitt ändern möchte (zB. einen alternativen Beweis geben), da ich die Änderungen dann per Hand einbauen muss!

Vorlesungshomepage

`https://wwwmath.uni-muenster.de/reine/u/topos/lehre/WS2014-2015/Topologie1/Topologie1.html`

[1] zB. `https://try.github.io/levels/1/challenges/1`, ist auf Englisch, aber dafür interaktives LearningByDoing

Inhaltsverzeichnis

1 Kategorien, Funktoren und natürliche Transformationen

1.1 Definition

Eine **Kategorie** $\mathcal{C}$ besteht aus: 13. Okt

i) Einer Klasse $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Die Elemente von $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ heißen die **Objekte** von $\mathcal{C}$.

ii) Zu je zwei Objekten A, B aus $\mathcal{C}$ einer einer Menge $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$. Die Elemente von $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ heißen **Morphismen** von $\mathcal{C}$.

iii) Zu je drei Objekten A, B, C aus $\mathcal{C}$ einer Abbildung:

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C) \times \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, C) \quad , \quad (f, g) \mapsto f \circ g$$

genannt die **Komposition** in $\mathcal{C}$.

Dabei müssen folgende Axiome erfüllt sein:

(i) Die Komposition ist **assoziativ**: Für Objekte A, B, C, D von $\mathcal{C}$ und $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C, D), g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C)$, $h \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ gilt:

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

(ii) Die Komposition ist **unital**: Für jedes Objekt A von $\mathcal{C}$ gilt es $\mathrm{id}_A \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, A)$ mit:

$$\forall f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, A) : \mathrm{id}_A \circ f = f \quad , \quad \forall f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) : f \circ \mathrm{id}_A = f$$

1.2 Beispiele

(1) Die Kategorie TOP. Die Objekte sind topologische Räume. Die Morphismen sind die stetigen Abbildungen.

(2) Sei K ein Körper. Die Kategorie $K - \mathrm{VR}$: Objekte sind die K-Vektorräume und die Morphismen sind die K-linearen Abbildungen. $K - \mathrm{VR}$ ist unschön

(3) Sei R ein Ring. Die Kategorie $R - \mathrm{MOD}$: Objekte sind die R-Moduln, Morphismen sind die R-lineare Abbildungen.

(4) Die Kategorie der Mengen MENGEN. Objekte sind die Mengen und Morphismen sind die Abbildungen.

(5) Die Kategorie der C^∞-Mannigfaltigkeiten: $C^\infty - \mathrm{MAN}$. Objekte sind C^∞-Mannigfaltigkeiten und Morphismen sind C^∞-Abbildungen.

(6) Die Kategorie $\mathrm{TOP}_\bullet$: Objekte sind die punktiert-topologischen Räume und Morphismen sind die punktiert-stetigen Abbildungen.

(7) Die Kategorie HTOP: Die Objekte sind topologische Räume und die Morphismen sind Homotopieklassen von stetigen Abbildungen.

(8) Die Kategorie $\mathrm{HTOP}_\bullet$

(9) Sei G eine Gruppe. Dann ist $\mathcal{C}_G$ eine Kategorie durch:

Objekte: Genau ein Objekt $*$. $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}_G}(*, *) = G$. Komposition in $\mathcal{C}_G$ = Verknüpfung in G.

(10) Ist $\mathcal{C}$ eine Kategorie, so ist $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ eine Kategorie, wobei $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}) = \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ und

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(A, B) := \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, A)$$

Komposition: $f \circ^{\mathrm{op}} g := g \circ f$.

1.3 Bemerkung

(i) Eine Kategorie heißt **klein**, wenn ihre Objekte eine Menge bilden.

(ii) Statt $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ schreiben wir oft $f : A \to B$ oder $A \xrightarrow{f} B$.

1.4 Definition

Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien: Ein **Funktor** $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ordnet jedem Objekt C von $\mathcal{C}$ ein Objekt $F(C)$ von

hässlicher Zeilenabstand

$\mathcal{D}$ und ordnet jedem Morphismus $C \xrightarrow{f} C'$ in $\mathcal{C}$ einen Morphismus $F(C) \xrightarrow{F(f)} F(C')$ in $\mathcal{D}$ zu. Dabei muss gelten:

$$F(f \circ g) = F(f) \circ F(g) \quad \text{und} \quad F(\mathrm{id}_C) = \mathrm{id}_{F(C)}$$

1.5 Beispiele

(1) Es gibt offensichtliche „Vergiss"-Funktoren:

$$\begin{aligned} K-\mathrm{VR} &\longrightarrow \mathrm{MENGEN} \\ R-\mathrm{MOD} &\longrightarrow \mathrm{MENGEN} \\ \mathrm{TOP} &\longrightarrow \mathrm{MENGEN} \\ \mathrm{TOP}_\bullet &\longrightarrow \mathrm{MENGEN} \\ \mathrm{TOP}_\bullet &\longrightarrow \mathrm{TOP} \end{aligned}$$

(2) Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und C ein Objekt von $\mathcal{C}$. Der durch C **dargestellte Funktor** $F_C : \mathcal{C} \to \mathrm{MENGEN}$ ist definiert durch

$$\begin{array}{ll} F_C(A) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C, A) & \text{für } A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \\ F_C(f) : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C, A) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C, A'), g \mapsto f \circ g & \text{für } f : A \to A' \text{ in } \mathcal{C} \end{array}$$

(3) Die Fundamentalgruppe definiert einen Funktor

$$\pi_1 : \mathrm{HTOP}_\bullet \longrightarrow \mathrm{GRUPPEN}$$

Bemerkung

- Ist $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor so schreiben wir oft kürzer und ungenauer $f_* = F(f)$.
- Kategorien und Funktoren bilden die Kategorie KAT.

1.6 Definition

Seien $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ zwei Funktoren. Eine **natürliche Transformation** $\tau : F \to G$ ordnet jedem $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ einen Morphismus $\tau_C : F(C) \to G(C)$ in $\mathcal{D}$ zu, sodass für jedes $f : C \to C'$ in $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd} F(C) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\tau_C"] & F(C') \arrow[d, "\tau_{C'}"] \\ G(C) \arrow[r, "G(f)"] & G(C') \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Bemerkung

Natürliche Transformationen lassen sich komponieren. Für $\tau : F \to G$, $\eta : G \to H$ ist $\eta \circ \tau : F \to H$ gegeben durch

$F, G, H : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$

$$(\eta \circ \tau)_C := \eta_C \circ \tau_C : F(C) \to H(C)$$

Genauer: Für festes $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ bilden die Funktoren $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ mit den natürlichen Transformationen eine Kategorie $\mathrm{FUN}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$

2 Kombinatorische Beschreibungen topologischer Räume

3 Simpliziale Homologie

Index

Die Seitenzahlen *sind mit Hyperlinks zu den entsprechenden Seiten versehen, also anklickbar*

Abbildungsverzeichnis