Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

Fachbereich 10
Mathematik und
Informatik

Skript Grundlagen der Analysis, Topologie, Geometrie

Mitschrift der Vorlesung „Grundlagen der Analysis, Topologie, Geometrie“ von Prof. Dr. Arthur Bartels

Jannes Bantje

16. Juni 2014

Aktuelle Version verfügbar bei:

GitHub (inklusive Sourcecode)
`https://github.com/JaMeZ-B/latex-wwu`

Bittorrent Sync
`B6WH2DISQ5QVYIRYIEZSF4ZR2IDVKPN3I`

Vorwort — Mitarbeit am Skript

Dieses Dokument ist eine Mitschrift aus der Vorlesung „Grundlagen der Analysis, Topologie, Geometrie, SoSe 2014", gelesen von Prof. Dr. Arthur Bartels. Der Inhalt entspricht weitestgehend dem Tafelanschrieb. Für die Korrektheit des Inhalts übernehme ich keinerlei Garantie! Für Bemerkungen und Korrekturen – und seien es nur Rechtschreibfehler – bin ich sehr dankbar. Korrekturen lassen sich prinzipiell auf drei Wegen einreichen:

- Persönliches Ansprechen in der Uni, Mails an j.bantje@wwu.de (gerne auch mit annotieren PDFs)
- *Direktes* Mitarbeiten am Skript: Den Quellcode poste ich auf GitHub (siehe oben), also stehen vielfältige Möglichkeiten der Zusammenarbeit zur Verfügung: Zum Beispiel durch Kommentare am Code über die Website und die Kombination Fork + Pull Request. Wer sich verdient macht oder ein Skript zu einer Vorlesung, die ich nicht besuche, beisteuern will, dem gewähre ich auch Schreibzugriff.

  Beachten sollte man dabei, dass dazu ein Account bei `github.com` notwendig ist, der allerdings ohne Angabe von persönlichen Daten angelegt werden kann. Wer bei GitHub (bzw. dem zugrunde liegenden Open-Source-Programm „`git`") – verständlicherweise – Hilfe beim Einstieg braucht, dem helfe ich gerne weiter. Es gibt aber auch zahlreiche empfehlenswerte Tutorials im Internet[1].
- *Indirektes* Mitarbeiten: TeX-Dateien per Mail verschicken.

  Dies ist nur dann sinnvoll, wenn man einen ganzen Abschnitt ändern möchte (zB. einen alternativen Beweis geben), da ich die Änderungen dann per Hand einbauen muss!

Vorlesungshomepage

`https://wwwmath.uni-muenster.de/reine/u/topos/lehre/SS2014/AnaTopGeo/anatopgeo.html`

[1] zB. `https://try.github.io/levels/1/challenges/1`, ist auf Englisch, aber dafür interaktives LearningByDoing

Inhaltsverzeichnis

1 Topologische Räume

1.1 Definition

Ein **metrischer Raum** (X, d) ist eine Menge X mit einer Abbildung $d : X \times X \to [0, \infty)$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\forall x, y \in X : d(x, y) = d(y, x)$

(ii) $\forall x, y \in X : d(x, y) = 0 \iff x = y$

(iii) $\forall x, y, z \in X : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Dreiecksungleichung)

1.2 Definition

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine **Norm** auf V ist eine Abbildung $\|.\| : V \to [0, \infty)$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\forall v \in V, \lambda \in \mathbb{R} : \|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$

(ii) $\forall v, w \in V : \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (Dreiecksungleichung)

(iii) $\forall v \in V : \|v\| = 0 \iff v = 0$

Durch $d(v, w) := \|v - w\|$ erhalten wir eine Metrik auf V.

1.3 Beispiel

Auf $\mathbb{R}^n$ gibt es verschiedene Normen und damit auch verschiedene Metriken: Für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

(i) $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$

(ii) $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$

(iii) $\|x\|_\infty = \max\{|x_i| \,|\, i = 1, \ldots, n\}$

1.4 Beispiele

(i)
$$S^1 := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$$
mit $d(z, z') := \min\{|\theta| \,\big|\, \theta \in \mathbb{R} : z = e^{i\theta} z'\}$

(ii) Ist X ein metrischer Raum und A eine Teilmenge von X, so wird A durch die Einschränkung der Metrik auf A zu einem metrischen Raum. Wir sagen dann A ist ein Unterraum von X.

(iii) Sei X eine beliebige Menge. Durch
$$d(x, y) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x = y \\ 1, & \text{falls } x \neq y \end{cases}$$
wir auf X eine Metrik (die **diskrete Metrik**) definiert.

(iv) Sei p eine Primzahl. Jedes $x \neq 0 \in \mathbb{Q}$ lässt sich eindeutig schreiben als $x = \frac{a}{b} p^n$ mit $n, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ und a, b, p paarweise teilerfremd. Dann heißt
$$|x|_p := p^{-n}$$
der p**-adische Betrag** von x, ($|0|_p := 0$). Durch $d_p(x, y) := |x - y|_p$ erhält man die p-adische Metrik auf $\mathbb{Q}$.

1.5 Definition

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) zwei metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt eine **Isometrie**, falls gilt:

$$\forall x, x' \in X : d_Y\big(f(x), f(x')\big) = d_X(x, x')$$

f heißt **stetig**, falls für alle $x_0 \in X$ gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : d_X(x, x_0) < \delta \Longrightarrow d_Y\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon$$

1.6 Definition

Eine Teilmenge U eines metrischen Raums X heißt **offen**, falls gilt

$$\forall x \in U \exists \delta > 0 \text{ mit } B_\delta(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < \delta\} \subseteq U$$

1.7 Lemma

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung zwischen metrischen Räumen. Dann sind äquivalent:

(i) f ist stetig

(ii) Urbilder (unter f) offener Mengen in Y sind offen in X. ($\forall U \subseteq Y$ offen ist $f^{-1}(U) \subseteq X$ offen)

Beweis
Analysis II. $\square$

1.8 Definition

Ein **topologischer Raum** $(X, \mathcal{O})$ ist eine Menge X zusammen mit einer Familie $\mathcal{O}$ von Teilmengen von X so dass gilt:

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{O}$

(ii) $U, V \in \mathcal{O} \Longrightarrow U \cap V \in \mathcal{O}$

(iii) Ist I eine Indexmenge und $U_i \in \mathcal{O}$ für $i \in I$, so gilt $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{O}$.

$\mathcal{O}$ heißt dann eine **Topologie** auf X. $U \subseteq X$ heißt **offen**, falls $U \in \mathcal{O}$. $A \subseteq X$ heißt **abgeschlossen**, falls $X \setminus A$ offen ist.

1.9 Beispiele

(i) Jeder metrische Raum wird durch $\mathcal{O} := \{U \subseteq X \mid U \text{ ist offen}\}$ zu einem topologischen Raum.

(ii) Sei X eine beliebige Menge.
   - (i) Die **grobe Topologie** ist $\mathcal{O}_{\text{grob}} := \{\emptyset, X\}$
   - (ii) Die **diskrete Topologie** ist $\mathcal{O}_{\text{diskret}} := \mathcal{P}(X)$
   - (iii) Die **koendliche Topologie** ist $\mathcal{O}_{\text{koendl.}} := \{U \subseteq X \mid X \setminus U \text{ endlich}\} \cup \{\emptyset\}$

1.10 Definition

Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen heißt **stetig**, wenn Urbilder von offener Mengen offen sind.

1.11 Lemma

Seien $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ stetige Abbildungen. Dann ist auch $g \circ f : X \to Z$ stetig.

Beweis
Sei $U \subseteq Z$ offen. Dann ist $g^{-1}(U) \subseteq Y$ offen, da g stetig ist. Da auch f stetig ist, gilt $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}\big(g^{-1}(U)\big) \subseteq X$ offen. □

1.12 Definition

Seien X, Y topologische Räume. Eine bijektive stetige Abbildung $f : X \to Y$ heißt ein **Homöomorphismus**, falls auch ihre Umkehrabbildung $f^{-1} : Y \to X$ stetig ist.

Gibt es einen solchen Homöomorphismus, so heißen X und Y **homöomorph** und wir schreiben $X \cong Y$, andernfalls $X \ncong Y$.

1.13 Beispiel

(i) $(0,1) \cong (0,\infty) \cong (-\infty,0) \cong \mathbb{R}$ (einfach)

(ii) $(0,1) \ncong [0,1) \ncong [0,1] \ncong (0,1)$ (Übung)

(iii) $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m \iff n = m$ (schwer)

1.14 Definition

Sei X ein topologischer Raum. Eine Familie $\mathcal{U}$ von offenen Teilmengen von X heißt eine **Basis der Topologie**, falls für jede Teilmenge $W \subseteq X$ äquivalent sind:

(1) W ist offen

(2) $\forall x \in W : \exists U \in \mathcal{U}$ mit $x \in U \subseteq W \iff W = \bigcup_{\substack{u \in \mathcal{U} \\ u \subseteq W}} u$

Man sagt X erfüllt das **zweite Abzählbarkeitsaxiom**, falls X eine abzählbare Basis der Topologie besitzt.

1.15 Beispiel

Sei X ein metrischer Raum. Dann ist $\{B_\delta(x) \mid x \in X, \delta > 0\}$ eine Basis der Topologie von X. Gibt es eine abzählbare dichte Teilmenge $X_0 \subseteq X$, so ist $\big\{B_{1/n}(x) \,\big|\, x \in X_0, n \in \mathbb{N}\big\}$ eine abzählbare Basis der Topologie von X und X erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom.

1.16 Proposition

Sei X eine Menge und $\mathcal{U}$ eine Familie von Teilmengen von X mit $X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$. Dann ist $\mathcal{U}$ genau dann die Basis einer Topologie $\mathcal{O}$ auf X, wenn $\mathcal{U}$ folgende Bedingungen erfüllt:

$$\forall U, V \in \mathcal{U} : \forall x \in U \cap V : \exists W \in \mathcal{U} \text{ mit } x \in W \subseteq U \cap V \tag{$\star$}$$

Beweis
Sei $\mathcal{U}$ die Basis der Topologie $\mathcal{O}$ und $U, V \in \mathcal{U}$. $\Rightarrow$ U, V offen, also ist auch $U \cap V$ offen. Da $\mathcal{U}$ eine Basis der Topologie ist, gibt es zu jedem $x \in U \cap V$ ein $W \in \mathcal{U}$ mit $x \in W \subseteq U \cap V$. Daher gilt $(\star)$

Sei umgekehrt $(\star)$ erfüllt. Definiere $\mathcal{O}$ durch

$$W \in \mathcal{O} :\iff \forall x \in W : \exists U \in \mathcal{U} : x \in U \subseteq W.$$

Dann $\emptyset \in \mathcal{O}$. Wegen $X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ gilt auch $X \in \mathcal{O}$. Weiter ist $\mathcal{O}$ unter Vereinigungen abgeschlossen. Seien $W_1, W_2 \in \mathcal{O}$. Sei $x \in W_1 \cap W_2$. Dann gilt

$$\begin{aligned} x \in W_1, W_1 \text{ offen } &\Rightarrow \exists U_1 \in \mathcal{U} : x \in U_1 \subseteq W_1 \\ x \in W_2, W_2 \text{ offen } &\Rightarrow \exists U_2 \in \mathcal{U} : x \in U_2 \subseteq W_2 \end{aligned}$$

Also $x \in U_1 \cap U_2$. Mit $(\star)$ folgt: $\exists W \in \mathcal{U}$ mit $x \in W \subseteq U_1 \cap U_2 \subseteq W_1 \cap W_2$. □

1.17 Bemerkung

Die Topologie $\mathcal{O}$ in der Proposition 1.16 wird eindeutig durch $\mathcal{U}$ bestimmt.

1.18 Beispiel

- Sei $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller reellen Folgen. Für $\delta > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ sei

  $$U_{n,\delta,\alpha_1,\ldots,\alpha_n} := \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \,|\, |x_i - \alpha_i| < \delta \text{ für } i = 1, \ldots, n\}$$

  Dann erfüllt $\mathcal{U} := U_{n,\delta,\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$ die Bedingung $(\star)$ und ist die Basis der **Topologie der punktweisen Konvergenz**.

- Sei $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller stetigen Abbildungen. Zu $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig sei

  $$U_{a,b,\delta,g} := \big\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ stetig} \,\big|\, \forall t \in [a, b] : \big|f(t) - g(t)\big| < \delta \big\}.$$

  Dann erfüllt $\mathcal{U} := \{U_{a,b,\delta,g}\}$ $(\star)$ und ist die Basis der **Topologie der gleichmäßigen Konvergenz** auf kompakten Intervallen.

1.19 Definition

Sei Y eine Teilmenge eines topologischen Raums X.

$$\begin{aligned} \mathring{Y} &:= \{y \in Y \,|\, \exists U \subseteq X \text{ offen mit } y \in U \subseteq Y\} \text{ heißt das **Innere** von } Y \\ \overline{Y} &:= \{x \in X \,|\, \forall U \subseteq X \text{ offen mit } x \in U : U \cap Y \neq \emptyset\} \text{ heißt **Abschluss von** } Y \\ \partial Y &:= \overline{Y} \setminus \mathring{Y} \text{ heißt der **Rand** von } Y. \end{aligned}$$

1.20 Bemerkung

1) $\mathring{Y} = X \setminus (\overline{X \setminus Y})$, $\overline{Y} = X \setminus (X \setminus Y)^\circ$.
2) $\mathring{Y} = \bigcup_{\substack{U \subseteq Y \\ U \text{ offen}}} U$ ist offen.
3) $\overline{Y} = \bigcap_{\substack{A \supseteq Y \\ A \text{ abgeschlossen}}} A$ ist abgeschlossen.
4) $\partial Y = \overline{Y} \setminus \mathring{Y}$ ist abgeschlossen.

1.21 Definition

Sei X ein topologischer Raum, $x \in X$. $V \subseteq X$ heißt eine **Umgebung** von x, falls es $U \subseteq X$ offen gibt mit $x \in U \subseteq V$. Ist V offen, so heißt V eine **offene Umgebung** von x.

1.22 Definition

Ein topologischer Raum X heißt **hausdorffsch** (oder eine **Hausdorffraum**), falls es zu jedem Paar $x, y \in X, x \neq y$ offene Umgebungen U von x und V von y gibt mit $U \cap V = \emptyset$.

Beispiel

- Metrische Räume sind hausdorffsch.
- Ist $|X| \geq 2$ so ist $(X, \mathcal{O}_{\text{grob}})$ nicht hausdorffsch.

1.23 Definition

Ein Hausdorffraum M, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, heißt eine **topologische Mannigfaltigkeit** der Dimension n (oder eine n-Mannigfaltigkeit), falls er lokal homöomorph zum $\mathbb{R}^n$ ist; d.h. $\forall x \in M \exists$ offene Umgebung U von x mit $U \cong \mathbb{R}^n$.

2 Konstruktion topologischer Räume

2.1 Definition

Sei X ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ eine Teilmenge. Die **Spurtopologie** auf A besteht aus allen Teilmengen von A der Form $A \cap U$ mit $U \subseteq X$ offen. Mit dieser Topologie heißt A ein Unterraum von X.

Achtung: $U \subseteq A$ offen $\not\Rightarrow U \subseteq X$ offen!

2.2 Bemerkung

Sei $i : A \to X$ die Inklusion.

(i) i ist stetig.

(ii) Ist Y ein weiterer topologischer Raum und $f : Y \to A$ eine Abbildung. Dann gilt:

$$f \text{ stetig} \iff i \circ f : Y \to X \text{ ist stetig}$$

2.3 Definition

Seien X, Y topologische Räume. Eine Basis für die **Produkttopologie** auf $X \times Y$ ist

$$\mathcal{U} := \{U \times V \mid U \subseteq X \text{ offen }, V \subseteq Y \text{ offen}\}.$$

2.4 Definition

Seien X_i für $i \in I$ topologische Räume. Die Produkttopologie auf ihrem Produkt

$$\prod_{i \in I} X_i = \{(x_i)_{i \in I} \mid x_i \in X_i\}$$

hat als Basis alle Mengen der Form $\prod_{i \in I} U_i$ mit

1) $U_i \subseteq X_i$ ist offen

2) Für fast alle i ist $U_i = X_i$.

2.5 Bemerkung

Seien $p_j : \prod_{i \in I} X_i \to X_j$ die Projektionen.

(i) Die p_j sind stetig.

(ii) Ist Y ein weiterer topologischer Raum und $f : Y \to \prod_{i \in I} X_i$ eine Abbildung, so gilt:
f ist stetig $\iff \forall j$ ist $f_j := p_j \circ f$ stetig.

2.6 Bemerkung

Die übliche Topologie auf $\mathbb{R}^n = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{R}$ stimmt mit der Produkttopologie überein.

2.7 Beispiel

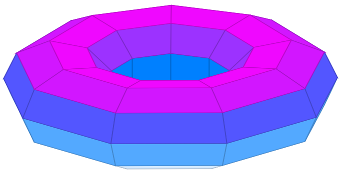


Abbildung 1: Der Torus T^2, Quelle

$T^n := \underbrace{S^1 \times \ldots \times S^1}_{n} = \prod_{i=1}^n S1$ heißt der n-Torus. Der n-Torus ist eine n-Mannigfaltigkeit.

2.8 Definition

Seien X und Y topologische Räume und $(f_t)_{t\in[0,1]}$ eine Familie von stetigen Abbildungen $f_t : X \to Y$. Wir sagen, dass die f_t stetig von t abhängen, falls

$$H : X \times [0,1] \to Y \text{ mit } H(x,t) = f_t(x)$$

stetig bezüglich der Produkttopologie ist. In diesem Fall heißen f_0 und f_1 **homotop** und H eine **Homotopie** zwischen f_0 und f_1.

Beispiel
Je zwei Abbildungen $f, g : X \to \mathbb{R}^n$ sind homotop; eine Homotopie wird gegeben durch $H(x,t) := (1-t) \cdot f(x) + t \cdot g(x)$. Wir werden später sehen, dass $\mathrm{id} : S^1 \to S^1$ nicht homotop zu einer konstanten Abbildung ist.

2.9 Definition

Sei X ein topologischer Raum, M eine Menge und $q : X \to M$ eine surjektive Abbildung. Die offenen Mengen der **Quotiententopologie** auf M (bezüglich q) sind alle $U \subseteq M$ für die $q^{-1}(U) \subseteq X$ offen ist.

Bemerkung

(i) $q : X \to M$ ist stetig.

(ii) Ist Y ein weiterer topologischer Raum und $f : M \to Y$ eine Abbildung, so gilt

$$f \text{ ist stetig} \iff f \circ q \text{ ist stetig}$$

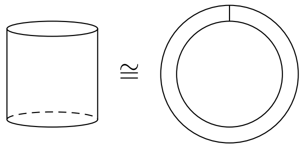
Bemerkung
Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf dem topologischen Raum X. Dann ist die Äquivalenzklassenabbildung $q : X \to X/\sim$, $x \mapsto [x]_\sim$ surjektiv. Insbesondere wird $X/\sim$ durch die Quotiententopologie zu einem topologischen Raum.

2.10 Beispiele

$X = [0,1] \times [0,1]$: Definiere

(i) $(s,t) \sim (s',t') :\Leftrightarrow (s = s' \text{ und } t = t')$ oder $(s = 0, s' = 1, t = t')$. Dann

"Zusammenkleben" der Seiten

$X/\sim \;\cong$ 

(ii) $(s,t) \sim (s',t') :\Leftrightarrow (s = s' \text{ und } t = t')$ oder $(s = 0, s' = 1 \text{ und } t = 1 - t')$. Dann

Möbiusband: Verdrehen und dann Zusammenkleben

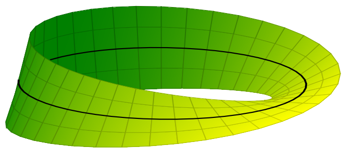
$X/\sim \quad \cong$ 

Abbildung 2: Möbius-Band, Quelle

(iii) Sei $\mathbb{R}P^n$ die Menge aller 1-dimensionalen Unterräume des $\mathbb{R}^{n+1}$. Wir erhalten eine surjektive Abbildung

$$q : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}P^n \quad , \quad q(v) := \langle v \rangle >$$

$\mathbb{R}P^n$ mit der Quotiententopologie bezüglich q heißt der **reell projektive Raum** der Dimension n. Er ist eine n-Mannigfaltigkeit.

(iv) Betrachte auf $\mathbb{R}$ die Relation $x \sim y :\Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$. Der Raum der Äquivalenzklassen bezeichnen wir mit $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$. Dann ist $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ mit der Quotiententopologie nicht hausdorffsch, obwohl $\mathbb{R}$ natürlich hausdorffsch ist.
(Übung: Die Quotiententopologie auf $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ ist die grobe Topologie.)

(v) Sei $f : X \to X$ eine stetige Abbildung. Betrachte auf $X \times [0,1]$ die Äquivalenzrelation

$$(x,t) \sim (x',t') :\Leftrightarrow (x = x' \text{ und } t = t') \text{ oder } (t = 0, t' = 1 \text{ und } x' = f(x))$$

Der Quotient $T_f := X \times [0,1]/\sim$ heißt der **Abbildungstorus** von f.

3 Konvergenz

3.1 Definition

Sei X ein topologischer Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Dann sagen wir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $x \in X$, falls gilt: Zu jeder offenen Umgebung V von x, gibt es $N \in \mathbb{N}$, sodass $x_n \in V$ für alle $n \geq N$. Wir schreiben dann $x_n \to x$ oder $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$. x heißt ein Grenzwert von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Bemerkung
Bezüglich der groben Topologie ist jeder Punkt Grenzwert jeder Folge.

Beispiel
Betrachte die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Teilmengen auf dem Raum $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Dann gilt für Folgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von stetigen Abbildungen $f_n \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

$$f_n \to f \iff \forall a < b \text{ konvergiert } f_n|_{[a,b]} \to f_{[a,b]} \text{ gleichmäßig.}$$

3.2 Lemma (Eindeutigkeit von Grenzwerten)

Sei X hausdorffsch. Gilt $x_n \to x$ und $x_n \to y$, so folgt $x = y$.

Beweis
Übung!

3.3 Definition

Eine nichtleere Menge Λ mit einer Relation "$\leq$" heißt **gerichtet**, falls gilt

(i) $\forall \lambda \in \Lambda : \lambda \leq \lambda$

(ii) $\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \Lambda : \lambda_1 \leq \lambda_2 \wedge \lambda_2 \leq \lambda_3 \Rightarrow \lambda_1 \leq \lambda_3$ (transitiv)

(iii) $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda : \exists \mu : \lambda_1 \leq \mu \wedge \lambda_2 \leq \mu$

3.4 Definition

Sei X ein topologischer Raum. Ein **Netz** $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ in X besteht aus einer gerichteten Menge Λ und Elementen $x_\lambda \in X$ für $\lambda \in \Lambda$. Für $x \in X$ sagen wir $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ konvergiert gegen x, falls gilt:

$$\forall \text{ Umgebungen } U \text{ von } x : \exists \lambda_0 \in \Lambda : \forall \lambda \in \Lambda \text{ mit } \lambda \geq \lambda_0 \text{ gilt } x_\lambda \in U$$

Wir schreiben dann $x_\lambda \xrightarrow{\lambda\to\infty} x$ oder $x_\lambda \to x$.

Beispiel
Sei X ein topologischer Raum und $x \in X$. Dann ist $\Lambda := \{U \mid U \text{ ist offene Umgebung von } x\}$ gerichtet bezüglich

$$U \leq V :\Leftrightarrow V \subseteq U$$

Ist nun $x_U \in U$ für alle $U \in \Lambda$ so $x_U \to x$.

3.5 Lemma (Eindeutigkeit von Grenzwerten)

Sei X hausdorffsch. Gilt $x_\lambda \to x$ und $x_\lambda \to y$, so folgt $x = y$.

Beweis
Angenommen $x \neq y$. Da X hausdorffsch ist existiert eine Umgebung U von x und V von y mit $U \cap V = \emptyset$.

$$\begin{aligned} x_\lambda \to x \Rightarrow \exists \lambda_U : x_\lambda \in U : \forall \lambda \geq \lambda_U \\ x_\lambda \to y \Rightarrow \exists \lambda_V : x_\lambda \in V : \forall \lambda \geq \lambda_V \end{aligned}$$

Sei nun $\mu \in \Lambda$ mit $\mu \geq \lambda_U$, $\mu \geq \lambda_V$. Dann folgt $x_\mu \in U \cap V = \emptyset$ ↯ □

3.6 Definition

Sei $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ein Netz in X. Ein **Teilnetz** von $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ist eine gerichtete Menge Λ' mit einer Abbildung $f : \Lambda' \to \Lambda$, so dass gilt

i) $\lambda_1' \leq \lambda_2' \Rightarrow f(\lambda_1') \leq f(\lambda_2')$ (f erhält $\leq$)

ii) $\forall \lambda \in \Lambda : \exists \lambda' \in \Lambda'$ mit $\lambda \leq f(\lambda')$ (f ist kofinal)

Oft schreiben wir $\left(x_{f(\lambda')}\right)_{\lambda' \in \Lambda'}$ für ein Teilnetz.

Bemerkung
Ein Teilnetz einer Folge ist *nicht* notwendig eine Teilfolge.

4 Kompakte Räume

4.1 Definition

Eine Familie $\mathcal{U}$ von offenen Teilmengen von X heißt eine **offene Überdeckung**, falls

$$\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U = X.$$

$\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ heißt eine **Teilüberdeckung**, falls immer noch $X \subseteq \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V$.

4.2 Definition

Ein topologischer Hausdorffraum X heißt **kompakt**, wenn jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

4.3 Definition

Eine Familie $\mathcal{A}$ von abgeschlossenen Teilmengen von X hat die **endliche Durchschnittseigenschaft**, wenn für jedes $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$ mit $|\mathcal{A}_0| < \infty$ gilt

$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}_0} A \neq \emptyset.$$

4.4 Lemma

Sei X ein Hausdorffraum. Dann ist X genau dann kompakt, wenn gilt: Hat eine Familie $\mathcal{A}$ von abgeschlossenen Teilmengen von X die endliche Durchschnittseigenschaft, so gilt

$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \neq \emptyset$$

Beweis
Ist $\mathcal{U}$ eine Familie von offenen Teilmengen, so ist $\mathcal{A} := \{X \setminus U \,|\, U \in \mathcal{U}\}$ eine Familie von abgeschlossenen Teilmengen. Ist umgekehrt $\mathcal{A}$ eine Familie von abgeschlossenen Teilmengen, so ist

$$\mathcal{U} := \{X \setminus A \,|\, A \in \mathcal{A}\}$$

eine Familie von offenen Teilmengen. Dann gilt:

- $\mathcal{U}$ hat eine endliche Teilüberdeckung $\iff$ $\mathcal{A}$ hat nicht die endliche Durchschnittseigenschaft.
- $\mathcal{U}$ ist eine Überdeckung $\iff$ $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \emptyset$. □

4.5 Satz

Sei X ein Hausdorffraum. Dann sind äquivalent:

1) X ist kompakt.

2) Jedes Netz in X besitzt ein konvergentes Teilnetz.

Beweis

"1) $\Rightarrow$ 2)": Sei $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ein Netz in X. Für $\lambda\in\Lambda$ sei $A_\lambda := \overline{\{x_{\lambda'}\,|\,\lambda'\geq\lambda\}}$.

Behauptung($\star$): $\mathcal{A} := \{A_\lambda\,|\,\lambda\in\Lambda\}$ hat die endliche Durchschnittseigenschaft. Sei $\mathcal{A}_0\subseteq\mathcal{A}$ endlich, also $\mathcal{A}_0 = \{A_\lambda\,|\,\lambda\in\Lambda_0\}$ für ein $\Lambda_0\subseteq\Lambda$ endlich. Da Λ gerichtet ist, gibt es $\lambda\in\Lambda$ mit $\lambda\geq\mu$ für alle $\mu\in\Lambda_0$. Es folgt $x_\lambda\in\{x_{\lambda'}\,|\,\lambda'\geq\mu\}$ für alle $\mu\in\Lambda_0$. Insbesondere folgt aus

$$x_\lambda \in \bigcap_{\mu\in\Lambda_0} A_\mu$$

Da X kompakt ist, folgt aus ($\star$)

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \neq \emptyset.$$

Wähle $x\in\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$. Sei $\mathcal{U}$ die Menge aller offenen Umgebungen von x. Sei

$$\Lambda_{\mathcal{U}} := \{(\lambda,U)\,|\,\lambda\in\Lambda, x_\lambda\in U\in\mathcal{U}\}$$

Durch $(\lambda,U)\leq(\lambda',U') :\Leftrightarrow \lambda\leq\lambda'$ und $U\supseteq U'$ wird $\Lambda_{\mathcal{U}}$ zu einer gerichteten Menge: Sei (λ_1,U_1) und $(\lambda_2,U_2)\in\Lambda_{\mathcal{U}}$. Sei $U := U_1\cap U_2$. Wähle $\lambda\in\Lambda$ mit $\lambda\geq\lambda_1$ und $\lambda\geq\lambda_2$. Da $x\in A_\lambda = \overline{\{x_{\lambda'}\,|\,\lambda'\geq\lambda\}}$ gibt es $\lambda'\geq\lambda$ mit $x_{\lambda'}\in U$. Also $(\lambda',U)\in\Lambda_{\mathcal{U}}$ und (λ_1,U_1), $(\lambda_2,U_2)\leq(\lambda',U)$. Mit $x_{(\lambda,U)} = x_\lambda$ ist $(x_{\lambda,U})_{(\lambda,U)\in\Lambda_{\mathcal{U}}}$ das gesuchte Teilnetz.

"2) $\Rightarrow$ 1)": Sei $\mathcal{A}$ eine Familie von abgeschlossenen Teilmengen mit der endlichen Durchschnittseigenschaft. Sei $\Lambda := \{\mathcal{A}_0\subseteq\mathcal{A}\,|\,\mathcal{A}_0 \text{ ist endlich}\}$. Λ ist gerichtet bezüglich $\mathcal{A}_0\leq\mathcal{A}_1 :\Leftrightarrow \mathcal{A}_0\subseteq\mathcal{A}_1$. Zu $\mathcal{A}_0\in\Lambda$ wähle

$$x_{\mathcal{A}_0} \in \bigcap_{A\in\mathcal{A}_0} A \neq \emptyset$$

Sei nun $(x_{f(\lambda)})_{\lambda\in\Lambda'}$ mit $f:\Lambda'\to\Lambda$ ein konvergentes Teilnetz von $(x_{\mathcal{A}_0})_{\mathcal{A}_0\in\Lambda}$. Sei x der Grenzwert von $(x_{f(\lambda')})_{\lambda'\in\Lambda'}$.

Behauptung: $x\in\bigcap_{A\in\mathcal{A}_0} A$.
Sei $A\in\mathcal{A}_0$ und $U = X\setminus A$. Angenommen $x\in U$. Da U eine offene Umgebung von x ist und $x_{f(\lambda')}\to x$ gilt, gibt es $\lambda'_0\in\Lambda$ mit $x_{f(\lambda')}\in U$ für alle $\lambda'\geq\lambda'_0$. Zu $\{A\}\in\Lambda$ gibt es $\mu\in\Lambda'$ mit $f(\mu)\geq\{A\}$. Da Λ' gerichtet ist, gibt es $\mu'\geq\mu$ und $\mu'\geq\lambda'_0$. Es folgt $A\in f(\mu')$ und damit $x_{f(\mu')}\in A$, aber andererseits $x_{f(\mu')}\in U = X\setminus A$, da $\mu'\geq\lambda'_0$ $\lightning$ $\square$

4.6 Bemerkung

Sei X ein metrischer Raum. Dann sind äquivalent:

1) X ist kompakt.
2) Jede Folge in X besitzt eine konvergente Teilfolge.

4.7 Satz von Tychonov

Sei $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie von kompakten topologischen Räumen. Dann ist auch $X := \prod_{i\in I} X_i$ kompakt.

Beweis
(unter Benutzung der nachfolgenden Punkte)
Ist $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ein Netz in $\prod_i X_i$, so besitzt dieses Netz ein universelles Teilnetz $(x_{f(\mu)})_{\mu\in\Lambda'}$. Für jedes i ist dann $p_i(x_{f(\mu)})_{\mu\in\Lambda'}$ ein universelles Netz in X_i und nach dem Lemma 4.11 konvergent. Daher ist $(x_{f(\mu)})_{\mu\in\Lambda'}$ bezüglich der Produkttopologie konvergent

4.8 Beispiel

Seien $(X_i, d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ kompakte metrische Räume. Dann gibt es eine Metrik d auf $\prod X_i$, so dass die zugehörige Topologie die Produkttopologie ist. (Übung)

Beweis
Sei $p_j : \prod_i X_i \to X_j$ die Projektion auf den j-ten Faktor. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\prod_i X_i$. Wähle induktiv $\mathbb{N} = N_0 \supseteq N_1 \supseteq N_2 \supseteq \ldots$ mit

(i) $|N_i| = \infty$

(ii) $(p_i(x_n))_{n\in N_i}$ ist eine konvergente Folge in X_i.

(Dies ist möglich, da X_i kompakt ist.) Wähle nun $n_k \in N_k$ induktiv, so dass $n_k > n_{k-1}$. Dann ist $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Für $i \in \mathbb{N}$ ist $\big(p_i\big(x_{n_k}\big)\big)_{k\in\mathbb{N},k\geq i}$ eine Teilfolge der konvergenten Folge $(p_i(x_n))_{n\in N_i}$ und daher konvergent. Damit konvergiert auch $(p_i(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ für jedes i. Daher konvergiert $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ punktweise, also in der Produkttopologie (Übung). □

4.9 Definition

Sei $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ein Netz in X und $A \subseteq X$. Wir sagen $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ist **immer wieder in** A, falls gilt:

$$\forall \lambda \in \Lambda : \exists \mu \in \Lambda \text{ mit } \mu \geq \lambda \text{ und } x_\mu \in A$$

Wir sagen $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ist **schließlich in** A, falls gilt

$$\exists \lambda \in \Lambda : \forall \mu \in \Lambda \text{ mit } \mu \geq \lambda \text{ gilt } x_\mu \in A$$

Bemerkung
$x_\lambda \to X \iff$ Für jede Umgebung U von x ist x_λ schließlich in U.

4.10 Definition

Ein Netz $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ in X heißt **universell**, falls für jede Teilmenge $A \subseteq X$ gilt: Entweder ist $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ schließlich in A *oder* schließlich in $X \setminus A$.

Bemerkung
- Ist $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ universell und immer wieder in A, dann ist $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ schließlich in A.
- Ist $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ein universelles Netz in X und $f : X \to Y$ eine Abbildung, so ist auch $(f(x_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ ein universelles Netz in Y.

4.11 Lemma

Ist X kompakt und $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ein universelles Netz in X, so konvergiert $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ in X.

Beweis
Sei X kompakt und $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ein universelles Netz in X. Angenommen $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ konvergiert nicht in X. Dann gibt es zu jedem $x \in X$ genau eine offene Umgebung U_x von x, so dass $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ nicht schließlich in U_x ist. Da $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ universell ist, ist $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ schließlich in $X\setminus U_x$. Da $X = \bigcup_{x\in X} U_x$ und X kompakt ist, gibt es $x_1, \ldots, x_k \in X$ mit $X = U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_k}$. Für jedes $i \in \{1, \ldots, k\}$ sei $\lambda_i \in \Lambda$ mit $x_\mu \in X\setminus U_{x_i}$ für $\mu \geq \lambda_i$. Sei nun $\mu \in \Lambda$ mit $\mu \geq \lambda_i$ für $i = 1, \ldots, k$. Es folgt

$$x_\mu \in \bigcap_{i=1}^{k} (X \setminus U_{x_i}) = X \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k} U_{x_i}\right) = X \setminus X = \emptyset \ \lightning$$

□

4.12 Proposition

Jedes Netz besitzt ein universelles Teilnetz.

Beweis
Sei $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ein Netz in X. Sei

$$\mathfrak{M} := \left\{ \mathfrak{B} \subseteq \mathcal{P}(X) \,\middle|\, \begin{array}{ll} (1) & B \in \mathfrak{B} \Rightarrow (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \text{ ist immer wieder in } B \\ (2) & B, B' \in \mathfrak{B} \Rightarrow B \cap B' \in \mathfrak{B} \end{array} \right\}$$

Dann ist $\{X\} \in \mathfrak{M}$, insbesondere $\mathfrak{M} \neq \emptyset$. Ist $\mathfrak{M}_0 \subseteq \mathfrak{M}$ mit

$$\mathfrak{B}, \mathfrak{B}' \in \mathfrak{M}_0 \Rightarrow \mathfrak{B} \subseteq (B)' \text{ oder } \mathfrak{B}' \subseteq \mathfrak{B}$$

so gilt $\bigcup_{\mathfrak{B}\in\mathfrak{M}_o} \mathfrak{B} \in \mathfrak{M}$. Nach dem Zornschen Lemma enthält $\mathfrak{M}$ ein maximales Element $\mathfrak{B}$. Da $\mathfrak{B}$ maximal ist, ist $X \in \mathfrak{B}$. Sei

$$\Lambda' := \{(B, \lambda) \,|\, B \in \mathfrak{B}, \lambda \in \Lambda, x_\lambda \in B\}.$$

Durch $(B,\lambda) \leq (B',\lambda') :\Leftrightarrow B \supseteq B', \lambda \leq \lambda'$ wird Λ' gerichtet.
Behauptung: $(x_\lambda)_{(B,\lambda)\in\Lambda'}$ ist universell.

Hilfssatz
Sei $(x_\lambda)_{(B,\lambda)\in\Lambda'}$ immer wieder in S. Dann gilt $S \in \mathfrak{B}$.
Beweis: Wir zeigen: $\mathfrak{B}^+ := \mathfrak{B} \cup \{S \cap B \,|\, B \in \mathfrak{B}\} \in \mathfrak{M}$. Da $\mathfrak{B}$ maximal ist und $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{B}^+$ folgt $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}^+$ und $S \in \mathfrak{B}^+ = \mathfrak{B}$. Offenbar erfüllt $\mathfrak{B}^+$ (2). Es bleibt (1) zu zeigen.
Da $\mathfrak{B} \in \mathfrak{M}$ bleibt zu zeigen: $\forall B \in \mathfrak{B}$ ist $(x_\lambda)_{(\lambda\in\Lambda}$ immer wieder in $B \cap S$. Sei $\lambda \in \Lambda$. Gesucht ist nun $\mu \geq \lambda$ mit $x_\mu \in B \cap S$. Da $B \in \mathfrak{B} \in \mathfrak{M}$ gibt es $\lambda' \in \Lambda$, $\lambda' \geq \lambda$ mit $x_{\lambda'} \in B$. Also $(B, \lambda') \in \Lambda'$. Da $(x_\lambda)_{(B,\lambda)\in\Lambda'}$ immer wieder in S ist, gibt es

$$\Lambda' \ni (A, \mu) \geq (B, \lambda')$$

mit $x_\mu \in S$. Da $(A,\mu) \in \Lambda'$ ist $x_\mu \in A \overset{(\star)}{\subseteq} B$. Sei $S \subseteq X$. Ist $(x_\lambda)_{(B,\lambda)\in\Lambda'}$ weder schließlich in S noch schließlich in $X \setminus S$, so ist $(x_\lambda)_{(B,\lambda)\in\Lambda'}$ immer wieder in S und immer wieder in $X \setminus S$. Mit dem Hilfssatz folgt $S, X \setminus S \in \mathfrak{B} \Rightarrow \emptyset = S \cap (X \setminus S) \in \mathfrak{B}$ ↯ □

4.13 Definition

Sei $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller beschränkten Abbildungen $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$.

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(n)| \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$$

ist eine Norm auf $\ell^\infty(\mathbb{Z})$.

4.14 Satz (Mittelbarkeit von $\mathbb{Z}$)

Es gibt eine Abbildung $M : \ell^\infty(\mathbb{Z}) \to \mathbb{R}$ mit

a) M ist $\mathbb{R}$-linear

b) M ist positiv: $f \geq 0 \Rightarrow M(f) \geq 0$

c) $M(\mathbb{1}) = 1$ für $\mathbb{1} : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ mit $\mathbb{1}(n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{Z}$

d) M ist $\mathbb{Z}$-invariant: Für $f \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$ sei $Tf \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$ mit $(Tf)(n) = f(n+1)$, dann gilt $M(f) = M(Tf)$.

Beweis
Sei $\mathfrak{M} := \{M : \ell^\infty(\mathbb{Z}) \to \mathbb{R} \mid M \text{ erfüllt a), b), c)}\}$. Sei $M_n \in \mathfrak{M}$ mit $M_n(f) = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^n f(i)$. Dann gilt für $f \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$

$$M_n(f) = M_n(Tf) = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^n f(i) - Tf(i) = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^n \big(f(i) - f(i+1)\big)$$
$$= \frac{1}{n+1}\big(f(0) - f(n+1)\big)$$

Es folgt $|M_n(f) - M_n(Tf)| \leq \frac{2\cdot\|f\|_\infty}{n+1}$. Wir konstruieren nun eine kompakte Topologie auf $\mathfrak{M}$, dann können wir anschließend ein konvergentes Teilnetz der Folge $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ betrachten. Sei

$$X := \prod_{f\in\ell^\infty(\mathbb{Z})} [-\|f\|_\infty, \|f\|_\infty]$$

Aus a), b), c) folgt für $f \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$, $M \in \mathfrak{M}$ $M(f) \in \big[-\|f\|_\infty, \|f\|_\infty\big]$. Mittels

$$\mathfrak{M} \ni M \mapsto \big(M(f)\big)_{f\in\ell^\infty(\mathbb{Z})} \in X$$

wird $\mathfrak{M}$ zu einem abgeschlossenen Unterraum von X. $\mathfrak{M}$ ist kompakt bezüglich der Produkttopologie auf X, also bezüglich punktweiser Konvergenz.

Sei nun $\alpha : \Lambda \to \mathbb{N}$, sodass $M_{\alpha(\lambda)} \to M \in \mathfrak{M}$ (existiert da $\mathfrak{M}$ kompakt). Es folgt

$$\forall f \in \ell^\infty(\mathbb{Z}) : M_{\alpha(\lambda)}(f) \to M(f)$$

Wegen $M_{\alpha(\lambda)}(f) - M_{\alpha(\lambda)}(Tf) \xrightarrow{\lambda\to\infty} M(f) - M(Tf)$ und

$$\big|M_{\alpha(\lambda)}(f) - M_{\alpha(\lambda)}(Tf)\big| \leq \frac{2\cdot\|f\|_\infty}{\alpha(\lambda)+1} \to 0$$

folgt $M(f) = M(Tf)$ für alle $f \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$. $\square$

5 Kompaktifizierungen

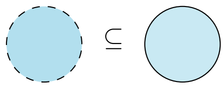
5.1 Definition

Sei X ein topologischer Raum. Ein kompakter Raum $\overline{X}$ heißt eine **Kompaktifizierung** von X, falls er X als offenen, dichten Unterraum enthält. (Oft heißt $\partial X := \overline{X} \setminus X$ der Rand der Kompaktifizierung)

5.2 Beispiele

(i) $(-1,1) \subseteq [-1,1]$

(ii) $\mathring{D}^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 < 1\} \subseteq D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 \leq 1\}$. Für $n = 2$:



$\partial D^n = S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1\}$

(iii) $f : \mathbb{R}^n \to \mathring{D}^n$, $f(x) := \frac{x}{1+\|x\|_2}$ ist ein Homöomorphismus. Daher können wir $\mathbb{R}^n$ zu

$$\overline{\mathbb{R}^n} := \mathbb{R}^n \dot{\cup} (S^{n-1} \times \{\infty\}) \cong D^n$$

kompaktifizieren.

(iv) Definiere auf $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ folgende Topologie

$$\mathcal{O} := \{U \,|\, U \subseteq \mathbb{R}^n \text{ ist offen}\} \cup \{U \cup \{\infty\} \,|\, U \subseteq \mathbb{R}^n \text{ offen und } \exists R > 0 : \mathbb{R}^n \setminus B_R(0) \subseteq U\}$$

Dann ist $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ eine weitere Kompaktifizierung von $\mathbb{R}^n$. Übung: $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\} \cong S^n$

5.3 Definition

Ein Hausdorffraum X heißt **lokalkompakt**, wenn für jedes $x \in X$ und jede offene Umgebung U von x eine kompakte Umgebung K von x existiert mit $K \subseteq U$.

5.4 Beispiel

(i) $\mathbb{R}^n$ ist lokalkompakt: Sei $x \in \mathbb{R}^n$ und $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von x. U offen $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq U$. Es folgt $\overline{B_{\varepsilon/2}}(x) \subseteq B_\varepsilon(x) \subseteq U$. Dann ist $\overline{B}_{\varepsilon/2}(x)$ eine kompakte Umgebung von x, die in U liegt.

(ii) Topologische Mannigfaltigkeiten sind lokalkompakt.

(iii) Offene Teilräume von lokalkompakten Räumen sind lokalkompakt.

5.5 Proposition

Sei K kompakt und $W \subseteq K$ offen. Dann ist W lokalkompakt. Insbesondere sind kompakte Räume auch lokalkompakt.

Beweis
Sei $x \in W$ und U eine offene Umgebung von x in W. K Hausdorff $\Rightarrow \forall y \in K \setminus U$ gibt es offene Umgebungen V_y von y und W_y von x mit $V_y \cap W_y = \emptyset$. Dann ist $\{V_y \,|\, y \in K \setminus U\}$ eine offene Überdeckung von $K \setminus U$. Da mit K auch $K \setminus U$ kompakt ist, gibt es $Y_0 \subseteq K \setminus U$ endlich mit

$$K \setminus U \subseteq \bigcup_{y \in Y_0} V_y$$

Nun ist $L := K \setminus \bigcup_{y \in Y_0} V_y$ kompakt. Da $\bigcap_{y \in Y_0} W_y \cap U$ offen ist und $\left(\bigcap_{y \in Y_0} W_y\right) \cap U \subseteq L$ ist L eine Umgebung von x. $\square$

5.6 Definition

Sei X lokalkompakt. Die **Einpunktkompaktifizierung** (EPK) von X ist $\mathrm{EPK}(X) := X \cup \{\infty\}$ mit der folgenden Topologie:

$$U \subseteq X \cup \{\infty\} \text{ offen } :\Leftrightarrow U \subseteq X \text{ ist offen oder } U = (X \setminus K) \cup \{\infty\} \text{ mit } K \subseteq X \text{ kompakt}$$

5.7 Proposition

$\mathrm{EPK}(X)$ ist kompakt. Ist X nicht kompakt, so ist $\mathrm{EPK}(X)$ eine Kompaktifizierung von X.

Beweis
Sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von $\mathrm{EPK}(X)$. Sei $U_0 \in \mathcal{U}$ mit $\infty \in U_0$. Dann existiert $K \subseteq X$ kompakt mit $U_0 = (X \setminus K) \cup \{\infty\}$. Da K kompakt ist, gibt es $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ mit $K \subseteq U_1 \cup \ldots \cup U_n$. Dann ist $U_0, U_1, \ldots, U_n$ eine endliche Teilüberdeckung von $\mathrm{EPK}(X)$.

Zu zeigen: $\mathrm{EPK}(X)$ ist Hausdorff. Seien $x, y \in \mathrm{EPK}(X), x \neq y$. Gilt $x \neq \infty \neq y$ so gibt es $U, V \subseteq X$ mit $x \in U, y \in V$ und $U \cap V = \emptyset$, da X hausdorffsch ist. Nach Definition sind dann U, V auch offen in $\mathrm{EPK}(X)$. Andernfalls sei o.B.d.A. $x = \infty$. Da X lokalkompakt ist, gibt es eine Umgebung K von y mit $K \subseteq X$ kompakt. Dann sind $U := \mathring{K}$ und $V := (X \setminus K) \cup \{\infty\}$ disjunkte offene Umgebungen von x und y.

Insgesamt gezeigt: $\mathrm{EPK}(X)$ ist kompakt. Sei X nicht kompakt. Ist U eine Umgebung von $\infty \in \mathrm{EPK}(X)$, so gibt es $K \subseteq X$ kompakt mit $U = (X \setminus K) \cup \{\infty\}$. Dann ist $U \cap X = X \setminus K$. Da X nicht kompakt ist, ist $X \neq K$, also $X \setminus K \neq \emptyset$. Daher hat jede Umgebung von $\infty \in \mathrm{EPK}(X)$ einen nicht-trivialen Schnitt mit X. Also ist $X \subseteq \mathrm{EPK}(X)$ dicht. $\square$

5.8 Frage

Sei $f : X \to Y$ stetig, X, Y lokalkompakt. Gibt es dann eine stetige Fortsetzung $\overline{f} : \mathrm{EPK}(X) \to \mathrm{EPK}(Y)$ mit $\overline{f}(\infty) = \infty$?

Beispiel

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) \equiv 0$. Dann ist $\overline{f} : \mathrm{EPK}(\mathbb{R}) \to \mathrm{EPK}(\mathbb{R})$ mit

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x) = 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R} \\ \infty, & \text{falls } x = \infty \end{cases}$$

sicher nicht stetig. Natürlich ist aber $\tilde{f} : \mathrm{EPK}(\mathbb{R}) \to \mathrm{EPK}(\mathbb{R})$ mit $\tilde{f}(x) = 0 \, \forall x \in \mathrm{EPK}(\mathbb{R})$ stetig.

(ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \geq 1 \\ x, & \text{falls } x \in [0,1] \\ 0, & \text{falls } x \leq 0 \end{cases}$$

Dann gibt es keine stetige Fortsetzung $\overline{f} : \mathrm{EPK}(\mathbb{R}) \to \mathrm{EPK}(\mathbb{R})$, denn die Folge $x_n = n$ konvergiert in $\mathrm{EPK}(\mathbb{R})$ gegen ∞. Da $f(x_n) = 1 \, \forall n$ müsste $\overline{f}(\infty) = 1$ sein. Die Folge $y_n = -n$ konvergiert in $\mathrm{EPK}(\mathbb{R})$ auch gegen ∞. Da $f(y_n) = 0 \, \forall n$ müsste $\overline{f}(\infty) = 0$ sein $\lightning$.

5.9 Definition

Seien X und Y lokalkompakt. Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ heißt **eigentlich**, wenn für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq Y$ auch $f^{-1}(K) \subseteq X$ kompakt ist.

5.10 Satz

Seien X, Y lokalkompakt und $f : X \to Y$ stetig. Dann sind äquivalent:

(1) f ist eigentlich

(2) $\overline{f} : \mathrm{EPK}(X) \to \mathrm{EPK}(Y)$ mit

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \in X \\ \infty, & \text{falls } x = \infty \end{cases}$$

ist stetig

Beweis

"(1)⇒(2)": Sei $U \subseteq \mathrm{EPK}(Y)$ offen. Ist $\infty \notin U$, so ist $\bar{f}^{-1}(U) = f^{-1}(U)$ offen, da f stetig ist. Ist $\infty \in U$, so gibt es $K \subseteq Y$ mit $U = (X \setminus K) \cup \{\infty\}$. Da f eigentlich ist, ist auch $L := f^{-1}(K) \subseteq X$ kompakt und $\bar{f}^{-1}(U) = (X \setminus L) \cup \{\infty\}$ ist offen in $\mathrm{EPK}(X)$.

"(2)⇒(1)": Sei $K \subseteq Y$ kompakt. Dann ist $U = (Y \setminus K) \cup \{\infty\} \subseteq Y$ offen. Da $\bar{f}$ stetig ist, ist auch $\bar{f}^{-1}(U) = \big(X \setminus f^{-1}(K)\big) \cup \{\infty\}$ offen. Damit ist $f^{-1}(K) \subseteq X$ kompakt. □

6 Der Approximationssatz von Stone-Weierstraß

6.1 Definition

Sei X ein lokalkompakter Raum. Eine stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ **verschwindet** im Unendlichen, falls für jedes $\varepsilon > 0$

$$K_\varepsilon := \{x \in X \,|\, |f(x)| \geq \varepsilon\}$$

kompakt ist. Die **Algebra** aller solchen Funktionen bezeichnen wir mit $C_0(X)$ und für $f \in C_0(X)$ setzen wir

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in X} |f(x)| = \max_{x \in X} |f(x)|$$

$\|.\|_\infty$ ist eine Norm auf $C_0(X)$.

Bemerkung

$f : X \to \mathbb{R}$ liegt in $C_0(X) \iff \overline{f} : \mathrm{EPK}(X) \to \mathbb{R}$ mit $\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \in X \\ 0, & \text{falls } x = \infty \end{cases}$ ist stetig.

6.2 Definition

Sei $\mathcal{B} \subseteq C_0(X)$. Wir sagen, dass $\mathcal{B}$ die Punkte von X **streng trennt**, falls es zu $x, y \in X, x \neq y$ ein $f \in \mathcal{B}$ gibt mit $0 \neq f(x) \neq f(y) \neq 0$.

Bemerkung
Sei $\mathcal{A} \subseteq C_0(X)$ eine Unteralgebra. Gilt

a) $\forall x, y \in X : \exists f \in \mathcal{A} : f(x) \neq f(y)$

b) $\forall x \in X : \exists g \in \mathcal{A} : g(x) \neq 0$

so trennt $\mathcal{A}$ die Punkte von X streng.

Beispiel
Sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Sei $\mathcal{A} := \{x \mapsto p(x) \,|\, p \in R[t]\} \subseteq C_0([a, b])$. Dann trennt $\mathcal{A}$ die Punkte von $[a, b]$ streng.

6.3 Satz (Stone-Weierstraß)

Sei X ein lokalkompakter Raum und sei $\mathcal{A} \subseteq C_0(X)$ eine Unteralgebra, die die Punkte von X streng trennt. Dann ist $\mathcal{A} \subseteq C_0(X)$ dicht bezüglich $\|.\|_\infty$.

Beweis (mit Lemma 1, 2, 3)
Sei $h \in C_0(X)$ beliebig. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Zu zeigen: $\exists f \in \bar{\mathcal{A}} : \|f - h\|_\infty < \varepsilon$

Schritt 1: Wir konstruieren für $y \in X$ $f_y \in \bar{\mathcal{A}}$ mit

a) $f_y(y) = h(y)$

b) $f_y(z) \geq h(z) - \varepsilon$ für alle $z \in X$

Zu $x \in X$ gibt es nach Lemma 3 (6.9) $g_x \in \mathcal{A}$ mit

$$g_x(y) = h(y) \quad \text{und} \quad g_x(x) = h(x).$$

Sei $U_x := \{z \in X \,|\, g_x(z) > h(z) - \varepsilon\}$. Da g_x und h stetig sind, ist U_x offen. Da g_x und h in ∞ verschwinden, ist $X \setminus U_x$ kompakt. Wegen $g_x(x) = h(x)$ ist $x \in U_x$. Zu festem $x_1 \in X$ gibt es dann $x_2, \ldots, x_k$ mit $X \setminus U_{x_1} \subseteq \bigcup_{i=2}^k U_{x_i}$. Dann gilt auch

$$X \subseteq \bigcup_{i=2}^k U_{x_i}$$

$f_y := \max\{g_{x_1}, \ldots, g_{x_k}\}$ ist die gesuchte Funktion. Wegen Lemma 2 (6.7) bzw. der Bemerkung 6.8 gilt $f_y \in \bar{\mathcal{A}}$.

Schritt 2: Konstruktion von f. Zu $y \in X$ sei $V_y := \{z \in X \mid f_y(z) < h(z) + \varepsilon\}$. Wieder ist V_y offen, $X \setminus V_y$ kompakt und $y \in V_y$. Also gibt es wieder $y_1, \ldots, y_l$ mit $X = \bigcup_{i=1}^l V_{y_i}$. Für $f := \min\{f_{y_1}, \ldots, f_{y_l}\}$ gilt dann

$$h(z) - f(z) = \max_i h(z) - f_{y_i}(z) < \varepsilon$$

da $f_{y_i}(z) \geq h(z) - \varepsilon \overset{\text{a)}}{\Rightarrow} h(z) - f_{y_i}(z) \leq \varepsilon$ für jedes i. Weiter gilt

$$f(z) - h(z) = \min_i f_{y_i}(z) - h(z) < \varepsilon$$

nach Definition der V_{y_i}. Also $\|f - h\|_\infty < \varepsilon$. □

6.4 Satz von Dini

Sei $(f_n : [0,1] \to \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}}$ eine punktweise monoton wachsende Folge stetiger Funktionen, die punktweise gegen die stetige Funktion f konvergiert. Dann $f_n \to f$ gleichmäßig, d.h. $\|f_n - f\|_\infty \to 0$.

Beweis
Sei $\varepsilon > 0$. Zu jedem $t \in [0,1]$ gibt es n_t mit

$$\forall n \geq n_t : f(t) \geq f_n(t) \geq f_{n_t}(t) \geq f(t) - \varepsilon.$$

Da f und f_{n_t} stetig sind, ist $U_t := \{s \in [0,1] \mid f(s) - f_{n_t}(s) < \varepsilon\}$ offen. Da $[0,1]$ kompakt ist, gibt es $t_0, \ldots, t_k \in [0,1]$ mit

$$[0,1] = U_{t_0} \cup \ldots \cup U_{t_k}$$

Für alle $n \geq \max\{n_{t_0}, \ldots, n_{t_k}\}$ folgt $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$. □

6.5 Lemma 1

Sei $g(t) = \sqrt{t}$ für $t \in [0,1]$. Es gibt eine Folge $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von reellen Polynomen so dass $p_n \to g$ gleichmäßig auf $[0,1]$ und $p_n(0) = 0$.

Beweis
Sei $p_0 \equiv 0$ und für $n > 0$

$$p_{n+1}(t) := p_n(t) - \frac{1}{2} \cdot \left(p_n(t)^2 - t\right)$$

Dann $p_n(0) = 0$. Per Induktion nach n zeigen wir: $0 \leq p_n(t) \leq \sqrt{t}$ für alle $t \in [0,1]$

$n = 0$ ✓

$n \mapsto n+1$

$$\begin{aligned} p_{n+1}(t) - \sqrt{t} = p_n(t) - \sqrt{t} - \frac{1}{2}\Big(p_n(t)^2 - t\Big) &= \Big(p_n(t) - \sqrt{t}\Big) - \frac{1}{2}\Big(p_n(t) - \sqrt{t}\Big)\Big(p_n(t) + \sqrt{t}\Big) \\ &= \underbrace{\Big(p_n(t) - \sqrt{t}\Big)}_{\leq 0} \underbrace{\Big(1 - \frac{1}{2}\underbrace{(p_n(t) + \sqrt{t})}_{\text{IV.: } \leq 2\sqrt{t}}\Big)}_{\geq 0} \end{aligned}$$

Also $p_{n+1}(t) - \sqrt{t} \leq 0$. Es folgt, dass $p_n(t)$ monoton wachsend ist für jedes t. Wegen $p_n(t) \leq \sqrt{t}$ existiert $\lim_{n\to\infty} p_n(t)$ für $t \in [0,1]$. Es folgt

$$0 = \lim_{n\to\infty} p_{n+1}(t) - \lim_{n\to\infty} p_n(t) = \lim_{n\to\infty} \big(p_{n+1}(t) - p_n(t)\big) = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{2}\big(p_n(t)^2 - t\big)$$
$$= -\frac{1}{2}\left(\Big(\lim_{n\to\infty} p_n(t)\Big)^2 - t\right)$$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} p_n(t) = \sqrt{t}$. Mit Dini (6.4) folgt $p_n \to g$ gleichmäßig. $\square$

6.6 Bemerkung

Sei $\mathcal{A} \subseteq C_0(X)$ eine Algebra. Ist $p \in \mathbb{R}[t]$ ein Polynom mit $p(0) = 0$ und $f \in \mathcal{A}$, so liegt auch $p \circ f \in \mathcal{A}$: $p = \sum_{i=1}^n a_i t^i$. Denn

$$p\big(f(t)\big) = \sum_{i=1}^n a_i f(t)^i = \left(\sum_{i=1}^n a_i f^i\right)(t) \in \mathcal{A}.$$

6.7 Lemma 2

Sei X lokalkompakt, $\mathcal{A} \subseteq C_0(X)$ eine Unteralgebra. Dann gilt: $f \in A \Rightarrow |f| \in \bar{\mathcal{A}}$
($\bar{\mathcal{A}}$:= Abschluss von $\mathcal{A}$ bezüglich $\|.\|_\infty$)

Beweis
Sei $f \in \mathcal{A}$. O.B.d.A. sei $f(X) \subseteq [-1,1]$. Dann $f(x)^2 \in [0,1]$ für alle $x \in X$. Seien die p_n die Polynome aus Lemma 1 (6.5). Dann

$$\left|p_n\big(f(x)^2\big) - \sqrt{f(x)^2}\right| = \big|p_n\big(f(x)^2\big) - |f(x)|\big| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

gleichmäßig in $x \in X$. Es folgt $\big\|p_n(f^2) - |f|\big\|_\infty \to 0$. Wegen $f \in \mathcal{A}$ gilt $f^2 \in \mathcal{A}$ und nach 6.6 $p_n(f^2) \in \mathcal{A}$. Also $|f| \in \bar{\mathcal{A}}$. $\square$

6.8 Bemerkung

(i) Für $f, g \in \mathcal{A}$ liegen

$$\max(f,g) = \frac{1}{2}\big(f + g + |f-g|\big) \quad , \quad \min(f,g) = \frac{1}{2}\big(f + g - |f-g|\big) \in \bar{\mathcal{A}}$$

(ii) Wegen $\bar{\mathcal{A}} = \bar{\bar{\mathcal{A}}}$ gilt auch $f, g \in \bar{\mathcal{A}} \Rightarrow \min(f,g), \max(f,g) \in \bar{\mathcal{A}}$.

6.9 Lemma 3

Sei X lokalkompakt, $\mathcal{A} \subseteq C_0(X)$ eine Unteralgebra, die die Punkte von X streng trennt. Zu $x, y \in X$, $x \neq y$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gibt es dann $f \in \mathcal{A}$ mit $f(x) = \alpha$, $f(y) = \beta$.

Beweis
Es gibt $g \in \mathcal{A}$ mit $0 \neq g(x) \neq g(y) \neq 0$. Ansatz: Für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ betrachte $f := \lambda g + \mu g^2$.

$$\begin{matrix} f(x) = \alpha \\ f(y) = \beta \end{matrix} \iff \begin{matrix} g(x)\lambda + g(x)^2\mu = \alpha \\ g(y)\lambda + g(y)^2\mu = \beta \end{matrix}$$

Da

$$\det\begin{pmatrix} g(x) & g(x)^2 \\ g(y) & g(y)^2 \end{pmatrix} = g(x)g(y)^2 - g(y)g(x)^2 = g(x)g(y)(g(y) - g(x)) \neq 0$$

gibt es $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, sodass das Gleichungssystem eine Lösung hat. $\square$

7 Metrisierbarkeit

7.1 Definition

Ein topologischer Raum X heißt **metrisierbar**, wenn es eine Metrik auf X gibt, so dass die zugehörige Topologie die Topologie von X ist.

Bemerkung
Ist X metrisierbar, so gibt es für jedes $x \in X$ eine abzählbare Umgebungsbasis $\mathcal{U}_x$ bei x, also eine abzählbare Menge von offenen Umgebungen von x, sodass jede Umgebung von x eine Menge aus $\mathcal{U}_x$ enthält.

Beispiel

$(X, \mathcal{O}_{\text{dis}})$ ist metrisierbar: $d_{\text{dis}}(x,y) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \neq y \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

7.2 Definition

Ein topologischer Hausdorffraum X heißt **normal**, wenn er die folgende Trennungseigenschaft hat: Sind $A, B \subseteq X$ abgeschlossen mit $A \cap B = \emptyset$, so gibt es $U, V \subseteq X$ offen mit $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ mit $U \cap V = \emptyset$.

Bemerkung
Metrisierbare Räume sind normal. (Übung)

7.3 Satz (Urysohn)

Sei X ein normaler Raum, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt (1.14). Dann ist X metrisierbar.

Beweis (mit Urysohns Lemma, 7.4)
Sei $\mathcal{U}$ eine abzählbare Basis der Topologie von X. Da X normal ist, gibt es zu jedem Paar $U, V \in \mathcal{U}$ mit $\overline{U} \subseteq V$ (also $\overline{U} \cap X \setminus V = \emptyset$) eine stetige Funktion $f_{U,V} : X \to [0,1]$ mit $f_{U,V}(x) = 0$ für $x \in \overline{U}$ und $f_{U,V}(y) = 1$ für $y \notin V$ (7.4). Da $\mathcal{U}$ abzählbar ist, ist das abzählbare Produkt

$$Z := \prod_{\substack{U,V \in \mathcal{U} \\ \overline{U} \subseteq V}} [0,1]$$

metrisierbar (Übung, Blatt 4). Wir definieren $F : X \to Z$ durch

$$F(x) := \Big(f_{U,V}(x) \Big)_{\substack{U,V \in \mathcal{U} \\ \overline{U} \subseteq V}}$$

Da die $f_{U,V}$ stetig sind, ist F bezüglich der Produkttopologie auf Z auch stetig. Es bleibt zu zeigen: $F : X \to F(X) \subseteq Z$ ist ein Homöomorphismus.

Sind $x, y \in X$ mit $x \neq y$, so gibt es $U, V \in \mathcal{U}$ mit $\overline{U} \subseteq V$, $x \in U$, $y \notin V$. Daher gilt $f_{U,V}(x) = 0 \neq 1 = f_{U,V}(y)$. Insbesondere ist F injektiv; durch Einschränkung auf das Bild also bijektiv. Es genügt nun zu zeigen, dass F offene Mengen von X auf offene Mengen in $F(X)$ abbildet. Sei $W \subseteq X$ offen, sei $x \in W$. Wir müssen eine offene Menge $O \subseteq Z$ finden mit $F(x) \in O$ und $F^{-1}(O) \subseteq W$.

Behauptung: $\exists U_0 \in \mathcal{U}$ mit $x \in U_0, \overline{U_0} \subseteq W$.

Sei $O := \prod_{\overline{U} \subseteq V} I_{U,V}$ mit

$$I_{U,V} = \begin{cases} [0,1), & \text{falls } U = U_0, V = W \\ [0,1], & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist $F^{-1}(O) = f_{U_0,W}^{-1}\big([0,1)\big) \subseteq W$ und $F(x) \in O$, da $f_{U_0,W}(x) = 0$.

Beweis der Behauptung
Da X Hausdorff ist, ist $\{x\}$ abgeschlossen. Da auch $X \setminus W$ abgeschlossen ist, gibt es offene mengen U_1 und V_1 mit $U_1 \cap V_1 = \emptyset$, $x \in U_1$ und $X \setminus W \subseteq V_1$. Insbesondere ist $\overline{U_1} \subseteq X \setminus V_1 \subseteq W$. Da $\mathcal{U}$ eine Basis ist, gibt es $U_0 \in \mathcal{U}$ mit $x \in U_0$ und $U_0 \subseteq U_1$. □

7.4 Urysohns Lemma

Sei X normal und $A, B \subseteq X$ abgeschlossen mit $A \cap B = \emptyset$. Dann gibt es eine stetige Funktion $f : X \to [0,1]$ mit $f(a) = 0$ für alle $a \in A$ und $f(b) = 1$ für alle $b \in B$.

Beweis
Sei $U_1 := X \setminus B$. Da X normal ist, gibt es $U_0 \subseteq X$ offen mit $A \subseteq U_0$ und $U_0 \cap B = \emptyset$, also $\overline{U_0} \subseteq U_1$.
($A \subseteq U_0$ und $V_0 \supseteq B$ mit $U_0 \cap V_0 = \emptyset \Rightarrow \overline{U_0} \cap B = \emptyset$ also $\overline{U_0} \subseteq U_1$)
Ebenso finden wir

- $U_{1/2} \subseteq X$ offen mit $\overline{U_0} \subseteq U_{1/2}$ und $\overline{U_{1/2}} \subseteq U_1$,
- $U_{1/4}, U_{3/4} \subseteq X$ offen mit $\overline{U_0} \subseteq U_{1/4}, \overline{U_{1/4}} \subseteq U_{1/2}$ und $\overline{U_{1/2}} \subseteq U_{3/4}$, $\overline{U_{3/4}} \subseteq U_1, \ldots$

Induktiv finden wir für jedes $r = \frac{m}{2^n}$ mit $0 \leq m \leq 2^n$ eine offene Menge $U_r \subseteq X$ so dass gilt: $\overline{U_r} \subseteq U_s$ für $r < s$ mit $A \subseteq U_0$ und $B = X \setminus U_1$. Sei nun $f : X \to [0,1]$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in B \\ \inf\{r \mid x \in U_r\}, & \text{falls } x \notin B \end{cases}$$

Für $\alpha \in [0,1]$ ist $f^{-1}\big([0,\alpha)\big) = \bigcup_{r<\alpha} U_r$ offen und

$$f^{-1}\big((\alpha,1]\big) = \bigcup_{r>\alpha} X \setminus U_r = \bigcup_{r>\alpha} X \setminus \overline{U_r}$$

offen. Damit ergibt sich leicht die Stetigkeit von f. □

8 Zusammenhängende topologische Räume

8.1 Definition

Sei X ein topologischer Raum.

(1) X heißt **zusammenhängend**, falls er nicht als die disjunkte Vereinigung von zwei nicht leeren offenen Mengen geschrieben werden kann.

(2) X heißt **wegzusammenhängend**, falls es zu allen $x, y \in X$ eine stetige Abbildung $\omega : [0,1] \to X$ gibt mit $\omega(0) = x$ und $\omega(1) = y$. ω heißt dann ein **Weg** von x nach y.

(3) X heißt **lokal zusammenhängend**, falls es für jedes $x \in X$ und jede offene Umgebung U von x eine zusammenhängende Umgebung V von x gibt mit $V \subseteq U$.

(4) X heißt **lokal wegzusammenhängend**, falls es für jedes $x \in X$ und jede offene Umgebung U von x eine wegzusammenhängende Umgebung V von x gibt mit $V \subseteq U$.

8.2 Bemerkung

(1) $\mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ ist nicht zusammenhängend und auch nicht wegzusammenhängend (ZWS!).

(2) $[0,1]$ ist zusammenhängend: Angenommen es wäre $[0,1] = U \cup V$ mit U, V offen, $U \cap V = \emptyset$. Dann sind $U = [0,1] \setminus V$ und $V = [0,1] \setminus U$ auch abgeschlossen. O.B.d.A. sei $0 \in U$. Dann liegt $\inf V$ sowohl in $\overline{V}$ als auch in $\overline{U}$. Also $U \cap V = \overline{U} \cap \overline{V} \neq \emptyset$ $\lightning$.

Natürlich ist $[0,1]$ auch wegzusammenhängend: Zu $x, y \in [0,1]$ ist $\omega : [0,1] \to [0,1]$ mit $\omega(t) = (1-t) \cdot x + t \cdot y$ ein stetiger Weg von x nach y.

(3) Ist $f : X \to Y$ stetig und surjektiv und$X$ zusammenhängend, so ist auch Y zusammenhängend: Ist $Y = U \dot\cup V$, so ist auch $X = f^{-1}(U) \dot\cup f^{-1}(V)$ und es gilt $U \neq \emptyset \iff f^{-1}(U) \neq \emptyset$ und $V \neq \emptyset \iff f^{-1}(V) \neq \emptyset$.

(4) Ist X wegzusammenhängend, so ist X auch zusammenhängend: Sei $X = U \cup V$ mit U, V offen und $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$. Sei $x \in U$ und $y \in V$. Da X wegzusammenhängend ist, gibt es einen Weg $\omega : [0,1] \to X$ von x nach y. Dann ist $[0,1] = \omega^{-1}(U) \cup \omega^{-1}(V)$. Es ist $0 \in \omega^{-1}(U)$ und $1 \in \omega^{-1}(V)$. Also $\omega^{-1}(U) \neq \emptyset \neq \omega^{-1}(V)$. Da $[0,1]$ nach (1) zusammenhängend ist, ist $\omega^{-1}(U) \cap \omega^{-1}(V) \neq \emptyset$. Damit ist auch $U \cap V \neq \emptyset$.

(5) Ist $f : X \to Y$ ein Homöomorphismus, so gelten:

$$\begin{aligned} X \text{ wegzusammenhängend} &\iff Y \text{ wegzusammenhängend} \\ X \text{ zusammenhängend} &\iff Y \text{ zusammenhängend} \end{aligned}$$

8.3 Beispiel

(i) Der sogenannte **Polnische Kreis** PK gegeben durch

Zeichnung hinzufügen

$$PK = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{lll} & (x \in [-1,1] & \wedge \quad y = 1) \\ \vee & (x \in \{-1,1\} & \wedge \quad y \in [0,1]) \\ \vee & (x \in [-1,0] & \wedge \quad y = 0) \\ \vee & (x = 0 & \wedge \quad y \in [-1/2, 1/2]) \\ \vee & (x \in (0,1] & \wedge \quad y = 1/2 \cdot \sin(\pi/x)) \end{array} \right\}$$

ist wegzusammenhängend, aber nicht lokal wegzusammenhängend.

(ii)

$$\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{ccc} & x = 0 & \wedge \quad y \in [-1/2, 1/2] \\ \vee & x \in (0,1] & \wedge \quad y = 1/2 \cdot \sin(\pi/x) \end{array} \right\}$$

ist zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend.

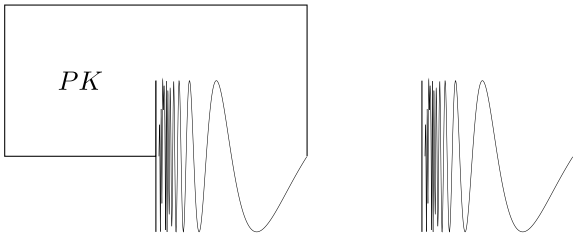


Abbildung 3: Der Polnische Kreis und eine nicht wegzusammenhängende Teilmenge davon

8.4 Satz (Topologische Invarianz der Dimension)

Es gilt: $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m \iff n = m$

Beweis für $n = 1$

Angenommen es gibt einen Homöomorphismus $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ mit $m \geq 2$. Durch Einschränkung von f erhalten wir dann auch einen Homöomorphismus $\mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^m \setminus \{f(0)\}$. Es ist aber $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ nicht wegzusammenhängend und für $m \geq 2$, $x \in \mathbb{R}^m$ ist $\mathbb{R}^m \setminus \{x\}$ wegzusammenhängend $\lightning$. $\square$

Bemerkung

Eine Variante dieses Arguments kann benutzt werden, um zu zeigen, dass $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m$ genau dann gilt, wenn $n = m$. Dafür benötigt man aber höher dimensionale Varianten des Begriffs wegzusammenhängend.

9 Die Fundamentalgruppe

9.1 Definition

Ein topologischer Raum X heißt **einfach zusammenhängend**, wenn jede stetige Abbildung $f : S^1 \to X$ eine stetige Fortsetzung $F : D^2 \to X$ besitzt.

Bemerkung
Ein topologischer Raum X ist genau dann wegzusammenhängend, wenn jede stetige Abbildung $f : S^0 \to X$ ein stetige Fortsetzung $F : D^1 \to X$ besitzt.

9.2 Bemerkung

(i) $\mathbb{R}^n$ ist einfach zusammenhängend: Sei $f : S^1 \to \mathbb{R}^n$ stetig. Definiere $F : D^2 \to \mathbb{R}^n$ durch:

$$F(t \cdot v) := t \cdot f(v) \qquad \text{für } t \in [0,1], v \in S^1$$

(ii) Ist $X \cong Y$ dann: X einfach zusammenhängend $\Leftrightarrow$ Y einfach zusammenhängend.

(iii) Später: $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist nicht einfach zusammenhängend.

9.3 Definition

Seien $\omega_0, \omega_1 : [0,1] \to X$ Wege in X. Eine Homotopie mit festen Endpunkten (oder relativ $\{0,1\}$) zwischen ω_0 und ω_1 ist eine stetige Abbildung $H : [0,1] \times [0,1] \to X$, so dass gilt:

(i) $H(s,0) = \omega_0(s) \ \ \forall s \in [0,1]$

(ii) $H(s,1) = \omega_1(s) \ \ \forall s \in [0,1]$

(iii) $H(0,t) = \omega_0(0) = \omega_1(0) \ \ \forall t \in [0,1]$

(iv) $H(1,t) = \omega_0(1) = \omega_1(1) \ \ \forall t \in [0,1]$

Durch

$$\omega_0 \sim \omega_1 :\Leftrightarrow \exists \text{ Homotopie relativ } \{0,1\} \text{ zwischen } \omega_0 \text{ und } \omega_1$$

wird eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Wege in X erklärt. Die Äquivalenzklassen heißen **Homotopieklassen**, wir schreiben $[\omega]$ für die Homotopieklasse von ω.

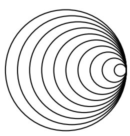
9.4 Definition

Ein Weg $\omega : [0,1] \to X$ heißt eine **Schleife** in X, falls $\omega(0) = \omega(1)$.

9.5 Lemma

X ist genau dann einfach zusammenhängend, wenn jede Schleife in X homotop relativ $\{0,1\}$ zu einer konstanten Schleife ist.

Beweis
Beweis per Zeichnung:



9.6 Notation

Für $x \in X$ bezeichne $c_x : [0,1] \to X$ die konstante Schleife bei x; $c_x(t) = x \ \ \forall t \in [0,1]$.

9.7 Definition

Seien ω und ω' Wege in X mit $\omega(1) = \omega'(0)$. Dann ist der **Kompositionsweg** $\omega * \omega' : [0,1] \to X$ definiert durch

$$\omega * \omega'(t) = \begin{cases} \omega(2t), & \text{falls } t \in [0,1/2] \\ \omega'(2t-1), & \text{falls } t \in [1/2,1] \end{cases}$$

9.8 Lemma

a) Seien $\omega, \omega', \omega''$ Wege in X mit $\omega(1) = \omega'(0)$ und $\omega'(1) = \omega''(0)$. Dann gilt

$$\big[(\omega * \omega') * \omega''\big] = \big[\omega * (\omega' * \omega'')\big]$$

b) Seien $\omega_0, \omega_0', \omega_1, \omega_1'$ Wege in X mit $\omega_0(1) = \omega_0'(0)$, $\omega_1(1) = \omega_1'(0)$ und $[\omega_0] = [\omega_1]$ und $[\omega_0'] = [\omega_1']$. Dann gilt

$$[\omega_0 * \omega_0'] = [\omega_1 * \omega_1']$$

c) Sei ω ein Weg in X. Sei $\overline{\omega} : [0,1] \to X$ der umgekehrte Weg, also $\overline{\omega}(t) := \omega(1-t)$. Dann gilt $[\omega * \overline{\omega}] = [c_{\omega(0)}]$, $[\overline{\omega} * \omega] = [c_{\omega(1)}]$.

d) Sei ω ein Weg in X. Dann gilt

$$[\omega * c_{\omega(1)}] = [\omega]$$

Beweis (nur a)
Sei $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ gegeben wie in Abbildung 4 gezeichnet.
Dann gilt

$$\Big(\omega * \big(\omega' * \omega''\big)\Big)(s) = \Big(\big(\omega * \omega'\big) * \omega''\Big)(\varphi(s))$$

Die gesuchte Homotopie mit festen Endpunkten wird durch

$$H(s,t) := \Big(\big(\omega * \omega'\big) * \omega''\Big)\big((1-t)s + t\varphi(s)\big)$$

definiert. □

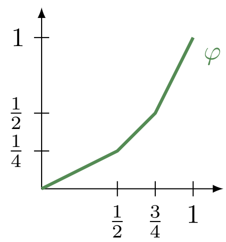


Abb. 4: Funktion φ aus dem Beweis zu 9.8

9.9 Korollar

Sei X ein topologischer Raum und $x_0 \in X$ fest. Dann wird

$$\pi_1(X, x_0) := \{[\omega] \,|\, \omega \text{ ist eine Schleife in } X \text{ mit } \omega(0) = x_0\}$$

durch die Komposition von Wegen zu einer Gruppe mit neutralem Element $e = [c_{x_0}]$.

9.10 Definition

$\pi_1(X, x_0)$ heißt die **Fundamentalgruppe** von X bezüglich des **Basispunktes** x_0.

Bemerkung
X ist genau dann einfach zusammenhängend, wenn $\pi_1(X, x_0)$ für alle $x_0 \in X$ die triviale Gruppe ist.

9.11 Bemerkung

Sei η ein Weg in X von x_1 nach x_0. Dann definiert

$$\pi_1(X,x_0) \ni [\omega] \xmapsto{\operatorname{conj}_\eta} [\eta * \omega * \overline{\eta}] \in \pi_1(X,x_1)$$

einen Isomorphismus zwischen $\pi_1(X,x_0)$ und $\pi_1(X,x_1)$. Wir zeigen nur: conj_η ist ein Gruppenhomomorphismus.

$$\begin{aligned}
\operatorname{conj}_\eta([\omega] * [\omega']) &= \operatorname{conj}_\eta\big([\omega * \omega']\big) = \Big[\big(\eta * (\omega * \omega')\big) * \overline{\eta}\Big] \\
\operatorname{conj}_\eta([\omega]) \cdot \operatorname{conj}_\eta([\omega']) &= \big[(\eta * \omega) * \overline{\eta}\big] \cdot \big[(\eta * \omega') * \overline{\eta}\big] = \Big[\big((\eta * \omega) * \overline{\eta}\big) * \big((\eta * \omega') * \overline{\eta}\big)\Big] \\
&\overset{\text{a)}}{=} \left[\Big(\eta * \big(\omega * (\overline{\eta} * \eta)\big) * \omega'\Big) * \overline{\eta}\right] \overset{\text{c)}}{=} \left[\Big(\eta * \big((\omega * c_{\omega(1)}) * \omega'\big)\Big) * \overline{\eta}\right] \\
&\overset{\text{d)}}{=} \Big[\big(\eta * (\omega * \omega')\big) * \overline{\eta}\Big]
\end{aligned}$$

Insbesondere hängt der Isomorphismus von $\pi_1(X,x_0)$ für wegzusammenhängende Räume nicht von der Wahl des Basispunktes ab.

10 Die Windungszahl

10.1 Frage

$$\pi_1\big(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, x_0\big) = ? \qquad \pi_1\big(S^1, x_0\big) = ?$$

10.2 Proposition

Sei $p : \mathbb{R} \to S^1$ definiert durch $p(t) = e^{2\pi i t}$. Sei $\omega : [0,1] \to S^1$ stetig und $t_0 \in \mathbb{R}$ mit $p(t_0) = \omega(0)$. Dann gibt es eine eindeutige stetige Abbildung. $\hat{\omega} : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $\hat{\omega}(0) = t_0$ und $p \circ \hat{\omega} = \omega$

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r, "t_0"] \arrow[d] & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\
{[0,1]} \arrow[r, "\omega"] \arrow[ur, dashed, "\hat{\omega}"] & S^1
\end{tikzcd}$$

Ist $\eta : [0,1] \to S^1$ mit $[\eta] = [\omega]$ und $\hat{\eta} : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $\hat{\eta}(0) = t_0$, $p \circ \hat{\eta} = \eta$ so gilt $\hat{\eta}(1) = \hat{\omega}(1)$.

Beweis
Homotopiehebungssatz (später) □

10.3 Definition

Sei $\omega : [0,1] \to S^1$ eine Schleife in S^1 mit $\omega(0) = \omega(1) = 1$. Sei $\hat{\omega} : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $p \circ \hat{\omega} = \omega$ und $\hat{\omega}(0) = 0$. Dann heißt $\hat{\omega}(1) \in \mathbb{Z} = p^{-1}(1)$ die **Windungszahl** von ω.

10.4 Satz

Die Windungszahl definiert einen Isomorphismus $d : \pi_1(S^1, 1) \to \mathbb{Z}$, $[\omega] \mapsto \hat{\omega}(1)$.

Beweis
Nach Proposition 10.2 ist d eine wohldefinierte Abbildung.

d **ist surjektiv:** Sei für $n \in \mathbb{Z}$ $\hat{\omega}_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $\hat{\omega}_n(t) = t \cdot n$. Dann ist

$$d([p \circ \hat{\omega}_n]) = \hat{\omega}_n(1) = n$$

d **ist Gruppenhomomorphismus:** Seien $\omega, \eta : [0,1] \to S^1$ Schleifen mit $\omega(0) = \eta(0) = 1$. Sei $\hat{\omega}, \hat{\eta} : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $\hat{\eta}(0) = 0, \hat{\omega}(0) = 0, p \circ \hat{\omega} = \omega, p \circ \hat{\eta} = \eta$. Also $d([\omega]) = \hat{\omega}(1)$ und $d([\eta]) = \hat{\eta}(1)$. Sei $\hat{\eta}_+ : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $\hat{\eta}_+(s) = \hat{\eta}(s) + \hat{\omega}(1)$. Dann ist $\hat{\omega} * \hat{\eta}_+$ definiert, $(\hat{\omega} * \hat{\eta}_+)(0) = 0$, $(\hat{\omega} * \hat{\eta}_+)(1) = \hat{\eta}(1) + \hat{\omega}(1)$. Also

$$d([\omega * \eta]) = (\hat{\omega} * \hat{\eta}_+)(1) = \hat{\eta}(1) + \hat{\omega}(1) = d([\omega]) + d([\eta])$$

d **ist injektiv:** Sei $\omega : [0,1] \to S^1$ eine Schleife mit $d([\omega]) = 0$. Dann gibt es $\hat{\omega} : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $\hat{\omega}(0) = 0 = \hat{\omega}(1)$ und $p \circ \hat{\omega} = \omega$. Nun ist $\hat{H} : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$\hat{H}(s,t) := (1-t) \cdot \hat{\omega}(s)$$

eine Homotopie mit festen Endpunkten zwischen $\hat{\omega}$ und c_0. Dann ist $p \circ H$ eine Homotopie mit festen Endpunkten zwischen ω und c_1. Also $[\omega] = e \in \pi_1(S^1, 1)$. □

10.5 Definition

Eine surjektive stetige Abbildung $p : \hat{X} \to X$ heißt eine **Überlagerung**, falls es zu jedem $x \in X$ eine Umgebung U gibt, so dass sich $p^{-1}(U)$ schreiben lässt als die disjunkte Vereinigung von offenen Mengen $U_i \subseteq \hat{X}$, sodass für jedes i die Einschränkung $p\big|_{U_i} : U_i \to U$ ein Homöomorphismus ist. Eine solche Umgebung U heißt eine **elementare Umgebung**.

10.6 Beispiel

(1) $p : \mathbb{R} \to S^1$, $t \mapsto e^{2\pi i t}$ ist eine Überlagerung.

(2) $p_n : S^1 \to S^1$, $z \mapsto z^n$ ist eine Überlagerung.

(3) Sind $p : \hat{X} \to X$, $q : \hat{Y} \to Y$ Überlagerungen, so ist $p \times q : \hat{X} \times \hat{Y} \to X \times Y$ eine Überlagerung.
zB: $\mathbb{R}^2 \to T^2 = S^1 \times S^1$

(4) $S^2 \to \mathbb{R}P^2 = {}^{S^2}\!/_{x \sim -x}$ ist eine Überlagerung. (Übung!)

10.7 Definition

Sei $p : \hat{X} \to X$ eine Überlagerung und $f : Z \to X$ eine stetige Abbildung. Eine **Hebung** von f (bezüglich p) ist eine stetige Abbildung $\hat{f} : Z \to \hat{X}$ mit $p \circ \hat{f} = f$

$$\begin{tikzcd} \hat{X} \arrow[dr, "p"] & \\ Z \arrow[u, dashed, "\hat{f}"] \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

10.8 Homotopiehebungssatz

Sei $\hat{p} : \hat{X} \to X$ eine Überlagerung, $H : Z \times [0,1] \to X$ eine Homotopie und $\hat{f} : Z \to \hat{X}$ eine Hebung von $f = H(-,0) := H\big|_{Z \times \{0\}}$. Dann gibt es eine *eindeutige* Hebung von H mit $\hat{H}(-,0) = \hat{f}$

$$\begin{tikzcd} Z \times \{0\} \arrow[r, "\hat{f}"] \arrow[d, hook, "i"'] & \hat{X} \arrow[d, "p"] \\ Z \times [0,1] \arrow[r, "H"] \arrow[ur, dashed, "\hat{H}"] & X \end{tikzcd}$$

Beweis
Sei $\mathcal{U}$ eine Überdeckung von X durch elementare Umgebungen. Wir können $\mathcal{U}$ mittels H zurückziehen und erhalten eine offene Überdeckung $H^{-1}(\mathcal{U}) := \{H^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{U}\}$ von $Z \times [0,1]$. Sei $z_0 \in Z$. Da $\{z_0\} \times [0,1]$ kompakt ist, gibt es $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ und $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ mit

$$H\big(\{z_0\} \times [t_i, t_{i+1}]\big) \subseteq U_i$$

Da die U_i offen sind gibt es zu jedem i eine offene Umgebung V_i von z_0 mit $H\big(V_i \times [t_i, t_{i+1}]\big) \subseteq U_i$. Sei $V := \bigcap_{i=1}^n V_i$, dann $H\big(V \times [t_i, t_{i+1}]\big) \subseteq U_i$. Da alle U_i elementar sind, finden wir induktiv eindeutige Hebungen $\hat{H}_i^V$ von $H\big|_{V \times [t_i, t_{i+1}]}$ mit

$$\hat{H}_1^V(-,0) = \hat{f}\big|_V \quad \text{und} \quad \hat{H}_i^V(-,t_{i-1}) = \hat{H}_{i-1}^V(-,t_{i-1}).$$

Nun erhalten wir mit $\hat{H}^V(z,t) := \hat{H}_i^V(z,t)$ für $z \in V$, $t \in [t_{i-1}, t_i]$ eine eindeutige Hebung von $H\big|_{V\times[0,1]}$ mit $\hat{H}^V(-,0) = \hat{f}\big|_V$. Dabei bleibt $\hat{H}^V$ eindeutig auch wenn wir V verkleinern. Nun finden wir für jedes $z \in Z$ eine Umgebung V_z und eine eindeutige Hebung $\hat{H}^{V_z}$ von $H\big|_{V_z\times[0,1]}$ mit $\hat{H}^{V_z}(-,0) = \hat{f}\big|_{V_z}$. Wegen der Eindeutigkeit gilt

$$\hat{H}^{V_z}(\xi,0) = \hat{H}^{V_{z'}}(\xi,t)$$

für $\xi \in V_z \cap V_{z'}$. Daher definiert $\hat{H}(z,t) := \hat{H}^{V_z}(z,t)$ die gesuchte eindeutige Hebung. $\square$

11 Induzierte Abbildungen

11.1 Lemma

Sei $f : X \to Y$ stetig mit $f(x_0) = y_0$. Dann definiert $f_*([\omega]) := [f \circ \omega]$ einen Gruppenhomomorphismus $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$.

Beweis
Wir zeigen nur, dass f_* wohldefiniert ist. Seien $\omega, \eta : [0,1] \to X$ Schleifen mit $\omega(0) = x_0 = \eta(0)$ und $[\omega] = [\eta]$. Dann gibt es eine Homotopie $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ mit festen Endpunkten zwischen ω und η. [2] Dann ist $f \circ H$ eine Homotopie mit festen Endpunkten zwischen $f \circ \omega$ und $f \circ \eta$. Also

$$f_*([\omega]) = [f \circ \omega] = [f \circ \eta] = f_*([\eta]) \text{ in } \pi_1(Y, y_0) \qquad \square$$

11.2 Definition

f_* heißt die von f **induzierte Abbildung**. Manchmal schreibt man auch $\pi_1(f)$ für f_*, um f_* von anderen induzierten Abbildungen zu unterscheiden.

Bemerkung
(i) $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$

(ii) $(\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{\pi_1(X, x_0)}$

11.3 Definition

Ein topologischer Raum X zusammen mit einem Basispunkt $x_0 \in X$, (X, x_0) heißt ein **punktierter Raum**. Eine **punktierte Abbildung** zwischen punktierten Räumen $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ ist eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ mit $f(x_0) = y_0$. Punktierte Abbildungen $f, g : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ heißen **punktiert homotop**, falls es eine Homotopie $H : X \times [0,1] \to Y$ von f nach g gibt mit $H(x_0, t) = y_0 \ \forall t \in [0,1]$.

11.4 Proposition (Homotopieinvarianz von π_1)

Seien $f, g : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ homotop. Dann gilt

$$f_* = g_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$$

Beweis
Sei H eine Homotopie zwischen f und g. Für $[\omega] \in \pi_1(X, x_0)$ ist $H \circ \omega$ eine Homotopie mit festen Endpunkten zwischen $f \circ \omega$ und $g \circ \omega$. Also

$$f_*([\omega]) = [f \circ \omega] = [g \circ \omega] = g_*([\omega]) \qquad \square$$

11.5 Definition

Seien X, Y topologische Räume. Dann heißen X und Y **homotopieäquivalent**, falls es stetige Abbildungen $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ gibt, so dass

$f \simeq g :\Leftrightarrow f$ homotop zu g

$$f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y \text{ und } g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$$

Wir schreiben dann $X \simeq Y$ oder $X \underset{\simeq}{\xrightarrow{f}} Y$. Entsprechendes benutzen wir auch für punktierte Räume. Falls $X \simeq \{0\}$, so sagen wir: X ist **zusammenziehbar**.

[2] $H(-,0) = \omega$, $H(-,1) = \eta$, $H(t,0) = H(t,1) = x_0$ für alle $t \in [0,1]$

11.6 Beispiel

(1) S^{n-1} ist homotopieäquivalent zu $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$: Benutze $i : S^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ die Inklusion und $p : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to S^{n-1}$, $v \mapsto \frac{v}{\|v\|}$. Dann gilt

$$p \circ i = \mathrm{id}_{S^{n-1}} \quad , \quad i \circ p \simeq \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$$

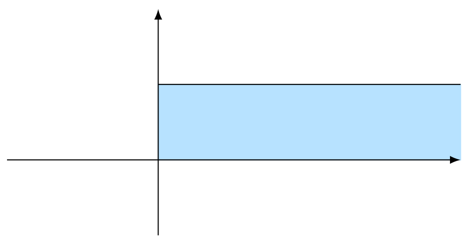
mit der Homotopie $H(v,t) = t + (1-t)\frac{v}{\|v\|}$.

(2) Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe Teilmenge und $x_0 \in K$. Dann ist (K, x_0) zusammenziehbar:

$$\begin{aligned} i : (\{x_0\}, x_0) &\to (K, x_0) \quad \text{die Inklusion} \\ p : (K, x_0) &\to (\{x_0\}, x_0) \quad \text{die konstante Abbildung} \end{aligned}$$

$p \circ i = \mathrm{id}_{(\{x_0\}, x_0)}$ und $i \circ p \simeq \mathrm{id}_{(K,x_0)}$ mit der Homotopie $H(k,t) = t \cdot k + (1-t)x_0$

(3) Auch $X := \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \,|\, x \in (0,\infty), y \in [0,1]\}$ ist kontrahierbar.



Setze $H := \{(x,y) \,|\, x \leq 0\}$. Dann ist $X \simeq H \simeq \{x_0\}$

11.7 Korollar

Ist $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ eine Homotopieäquivalenz, so ist $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ ein Isomorphismus. Insbesondere ist $\pi_1(X, x_0) = \{1\}$, falls (X, x_0) zusammenziehbar ist.

Beweis
Sei $g : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ eine Homotopieinverse zu f, also $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$, $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$. Dann ist $g_* = (f_*)^{-1}$ (und f_* ein Isomorphismus):

$$\begin{aligned} f_* \circ g_* &= (f \circ g)_* = (\mathrm{id}_Y)_* = \mathrm{id}_{\pi_1(Y,y_0)} \\ g_* \circ f_* &= (g \circ f)_* = (\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)} \end{aligned}$$

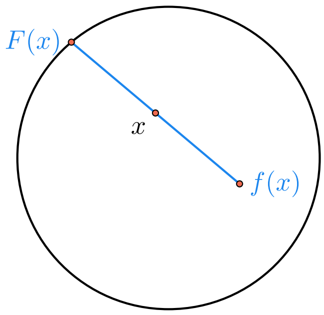
□

11.8 Fixpunktsatz von Brouwer

Jede stetige Abbildung $f : D^n \to D^n$ hat einen Fixpunkt.

Beweis
Für $n = 1$ ist dies eine Folgerung aus dem Zwischenwertsatz.

Angenommen $f : D^n \to D^n$ hat keinen Fixpunkt, also $f(x) \neq x$ für alle $x \in D^n$. Dann gibt es eine stetige Abbildung $F : D^n \to S^{n-1}$ mit $F\big|_{S^{n-1}} = \mathrm{id}_{S^{n-1}}$. Konstruktion von F



(i) $F(x) = t(x - f(x)) + x \ \ , t \geq 0$

(ii) $F(x) \in S^{n-1}$

Sei $x_0 \in S^{n-1}$. Wir haben also

$$\begin{tikzcd} (S^{n-1}, x_0) \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "i"] & (S^{n-1}, x_0) \\ (D^n, x_0) \arrow[ur, "F"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \pi_1(S^{n-1}, x_0) \arrow[r, "(\mathrm{id})_*=\mathrm{id}"] \arrow[d, "i_*"] & \pi_1(S^{n-1}, x_0) \\ \pi_1(D^n, x_0) \arrow[ur, "F_*"'] & \end{tikzcd}$$

Für $n = 2$ ist das zweite Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "(\mathrm{id})_*=\mathrm{id}"] \arrow[d, "i_*"] & \mathbb{Z} \\ \{e\} \arrow[ur, "F_*"'] & \end{tikzcd}$$

Daher folgt $\mathrm{id} = F_* \circ i_*$ =triviale Abbildung $\lightning$ $\square$

11.9 Proposition

Für $n \in \mathbb{Z}$ sei $f_n : S^1 \to S^1$, $z \mapsto z^n$. Dann ist $(f_n)_* : \pi_1(S^1, 1) \to \pi_1(S^1, 1)$ gegeben durch Multiplikation mit n:

$$(f_n)_*([\omega]) = n \cdot [\omega] \in \pi_1(S^1, 1) = \mathbb{Z}$$

Weiter sind die f_n paarweise nicht homotop zueinander.

Beweis
Sei $p : \mathbb{R} \to S^1$, $t \mapsto e^{2\pi i t}$. Zu jeder Schleife $\omega : [0,1] \to S^1$ mit $\omega(0) = \omega(1) = 1$ gibt es eine eindeutige Hebung $\hat{\omega} : [0,1] \to \mathbb{R}$ zu einem Weg mit $\hat{\omega}(0) = 0$. Der Isomorphismus $d : \pi_1(S^1, 1) \to \mathbb{Z}$ bildet $[\omega]$ auf $\hat{\omega}(1) \in \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ ab. Sei $\hat{f}_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto nt$. Dann gilt $p \circ \hat{f}_n = f_n \circ p$ und $\hat{f}_n(0) = 0$. Ist $\hat{\omega}$ eine Hebung von ω, so ist $\hat{f}_n \circ \hat{w}$ eine Hebung von $f_n \circ \omega$:

$$(\hat{f}_n \circ \omega)(0) = \hat{f}_n(0) = 0$$
$$p \circ \hat{f}_n \circ \hat{\omega} = f_n \circ p \circ \hat{\omega} = f_n \circ \omega$$

Es folgt

$$d([f_n \circ \omega]) = (\hat{f}_n \circ \hat{\omega})(1) = \hat{f}_n(\hat{\omega}(1)) = \hat{f}_n(d[\omega]) = n \cdot d[\omega]$$

Da d ein Isomorphismus ist, folgt die Behauptung.

Mit der Homotopieinvarianz von induzierten Abbildungen folgt, dass die $f_n : (S^1, 1) \to (S^1, 1)$ als punktierte Abbildungen nicht punktiert homotop sind. Mit dem nächsten Lemma folgt das die f_n paarweise nicht homotop sind. □

11.10 Lemma

Seien $f, g : (X, x_0) \to (S^1, 1)$ stetig. Sei $H : X \times [0, 1] \to S^1$ eine (unpunktierte) Homotopie zwischen f und g. Dann ist $\tilde{H} : X \times [0, 1] \to S^1$,

$$\tilde{H}(x, t) = \frac{H(x, t)}{H(x_0, t)}$$

ein punktierte Homotopie zwischen f und g.

11.11 Hauptsatz der Algebra

Jedes Polynom $p = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0 \in \mathbb{C}[X]$ von $\operatorname{grad} f = n \geq 1$ hat eine Nullstelle.

Beweis
Angenommen p hat keine Nullstelle. In den Übungen haben wir gezeigt, dass dann $f_n : S^1 \to S^1$ homotop zu einer konstanten Abbildung ist. Aus der Proposition 11.9 folgt dann aber $n = 0$. □

12 Eigentlich diskontinuierliche Wirkungen

12.1 Definition

Sei G eine Gruppe und X ein topologischer Raum.

(1) Eine Wirkung $G \curvearrowright X$ von G auf X ist eine Abbildung $G \times X \to X$, $(g, x) \mapsto g \cdot x$ so dass
- Für $g \in G$ ist $L_g : X \to X$, $x \mapsto g \cdot x$ stetig.
- Für $g, h \in G$ gilt $g \cdot (h \cdot x) = (g \cdot h) \cdot x$
- Für das neutrale Element $e \in G$ gilt $e \cdot x = x$ für alle $x \in X$

(2) Eine Wirkung heißt **frei**, falls $g \cdot x = x \Rightarrow g = e$

(3) Eine Wirkung heißt **eigentlich diskontinuierlich** (e.d.k.), falls es zu jedem $x \in X$ eine Umgebung U von x gibt mit $gU \cap U = \emptyset$ für alle $g \in G \setminus \{e\}$.

(4) Durch $x \sim y :\Leftrightarrow \exists g \in G : g \cdot x = y (\Leftrightarrow Gx = Gy)$ wird eine Äquivalenzrelation auf X erklärt. Die Äquivalenzklassen dieser Äquivalenzrelation sind genau die **Bahnen** $Gx = \{g \cdot x \,|\, g \in G\}$ der Wirkung. Die Menge der Äquivalenzklassen bezeichnen wir mit $G\backslash X := {}^X\!/\!_\sim$. Durch die Quotiententopologie bezüglich der Quotientenabbildung $X \to G\backslash X$, $x \mapsto Gx$ wird $G\backslash X$ zu einem topologischen Raum.

12.2 Lemma

Sei $G \curvearrowright X$ eine e.d.k Wirkung. Dann ist $p : X \to G\backslash X$, $x \mapsto Gx$ eine Überlagerung.

Beweis
Offenbar ist p surjektiv und stetig. Sei $\overline{x} := Gx \in G \setminus X$. Sei U eine offene Umgebung von $x \in X$ für die $gU \cap U = \emptyset$ für alle $g \neq e$ ist. Dann ist $p(U)$ eine elementare Umgebung von $\overline{x}$, denn

$$p^{-1}\big(p(U)\big) = \bigcup_{g \in G} gU$$

ist die disjunkte Vereinigung der gU, $g \in G$. □

12.3 Beispiel

(1) $\mathbb{Z}^n \curvearrowright \mathbb{R}^n$ mit $z \cdot x := x + z$ ist eine e.d.k. Wirkung: Ist $\varepsilon < \frac{1}{2}$ so gilt

$$B_\varepsilon(x) \cap B_\varepsilon(x) + z = B_\varepsilon(x) \cap B_\varepsilon(x + z) = \emptyset$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{Z}^n$. Da $\mathbb{Z}\backslash\mathbb{R} \cong S^1$ folgt $\mathbb{Z}^n\backslash\mathbb{R}^n = (\mathbb{Z}\backslash\mathbb{R})^n = (S^1)^n = T^n$. Wir erhalten eine Überlagerung $\mathbb{R}^n \to T^n$.

(2) Sei ${}^{\mathbb{Z}}\!/\!_2 = \{e, \tau\}$. Durch $\tau \cdot v := -v$ erhalten wir eine e.d.k. Wirkung ${}^{\mathbb{Z}}\!/\!_2 \curvearrowright S^n$. Dann gilt

$${}^{\mathbb{Z}}\!/\!_2 \backslash S^n \cong \mathbb{R}P^n$$

Wir erhalten eine Überlagerung $S^n \to \mathbb{R}P^n$.

(3) Zu $m, n \in \mathbb{Z}$ sei $f_{n,m} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f_{n,m}(x, y) = (x + n, (-1)^n y + m)$. Dann ist

$$G := \{f_{n,m} \,|\, n, m \in \mathbb{Z}\}$$

eine Gruppe bezüglich der Verknüpfung von Abbildungen. $f_{n,m} \circ f_{n',m'} = f_{n+n',m+(-1)^n m'}$. Die kanonische Wirkung von G auf $\mathbb{R}^2$ $f_{n,m} \cdot x := f_{n,m}(x)$ ist e.d.k., da

$$f_{n,m}\big(U_\varepsilon(x)\big) \cap f_{n',m'}\big(U_\varepsilon(x)\big) = \emptyset$$

für $(n,m) \neq (n',m')$ und $\varepsilon < \frac{1}{2}$. Der Quotient $G\backslash\mathbb{R}^2 =: K$ heißt die **Kleinsche Flasche**. Wir erhalten eine Wirkung $\mathbb{R}^2 \to K$. Übung: $K \cong T_{\substack{S^1 \to S^1 \\ z \mapsto -z}}$

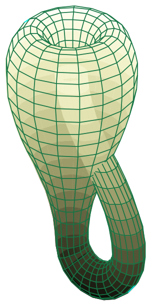


Abbildung 5: Kleinsche Flasche, Quelle

12.4 Satz

Sei X wegzusammenhängend und einfach zusammenhängend. Sei $G \curvearrowright X$ eine e.d.k. Wirkung. Für jedes $\overline{x}_0 \in G\backslash X$ ist dann

$$\pi_1(G\backslash X, \overline{x}_0) \cong G.$$

Beweis
Sei $x_0 \in X$ ein Urbild von $\overline{x}_0$, also $\overline{x}_0 = G \cdot x_0$. Zu jeder Schleife $\omega : [0,1] \to G\backslash X$ mit $\omega(0) = \omega(1) = \overline{x}_0$ gibt es eine Hebung $\hat{\omega} : [0,1] \to X$ mit $\hat{\omega}(0) = x_0$. Hier heben wir bezüglich der Überlagerung $p : X \to G\backslash X$, $x \mapsto Gx$, also $p \circ \hat{\omega} = \omega$.

Da $p(\hat{\omega}(1)) = \omega(1) = \overline{x}_0$ folgt $\omega(1) \in p^{-1}(\overline{x}_0) = G \cdot x_0$. Es gibt also $g_\omega \in G$ mit $g_\omega \cdot x_0 = \hat{\omega}(1)$. Wie im Fall der Überlagerung $\mathbb{R} \to S^1$ zeigt man mit Hilfe des Homotopiehebungssatzes, dass $[\omega] \mapsto g_\omega$ ein Gruppenhomomorphismus $\varphi : \pi_1(G\backslash X, \overline{x}_0) \to G$ definiert.

Surjektivität von φ : Sei $g \in G$. Sei $\hat{\omega} : [0,1] \to X$ ein Weg von x_0 nach $g \cdot x_0$ (Solch ein Weg gibt es, da X wegzusammenhängend ist). Dann ist $\hat{\omega}$ die Hebung von $\omega := p \circ \hat{\omega}$ und es folgt $\varphi([\omega]) = g_\omega = g$, da $\hat{\omega}(1) = g \cdot x_0$. Also $g \in \operatorname{Im}\varphi$.

Injektivität von φ : Sei $\omega : [0,1] \to G\backslash X$ eine Schleife und $\omega(0) = \omega(1) = x_0$ für die $\varphi([\omega]) = e$. Sei $\hat{\omega} : [0,1] \to X$ die Hebung von ω mit $\hat{\omega}(0) = x_0$. Da $\varphi([\omega]) = e$ gilt $\hat{\omega}(1) = x_0$, $\hat{\omega}$ ist also eine Schleife in X. Da X einfach zusammenhängend ist, ist $[\hat{\omega}] = e \in \pi_1(X, x_0)$. Es folgt

$$[\omega] = [p \circ \hat{\omega}] = p_*[\hat{\omega}] = p_*(e) = e. \qquad \square$$

12.5 Bemerkung

Für $n \geq 1$ ist S^n wegzusammenhängend. (einfache Übung)
Für $n \geq 2$ ist S^n einfach zusammenhängend. (weniger einfache Übung)

Nach Satz 12.4 ist daher $\pi_1(\mathbb{R}P^n, x_0) = \mathbb{Z}/2$ für $n \geq 2$. Es folgt $\mathbb{R}P^n \ncong S^n$ für $n \geq 2$. (Andererseits ist $\mathbb{R}P^1 \cong S^1$.)

12.6 Definition

Sei $p : \hat{X} \to X$ eine Überlagerung. Eine **Decktransformation** von p ist ein Homöomorphismus $f : \hat{X} \to \hat{X}$, sodass $p \circ f = p$. Die Decktransformationen von p bilden eine Gruppe $\Delta(p)$. Diese Gruppe wirkt in kanonischer Wiese auf $\hat{X}$.

12.7 Lemma

Sei $p : \hat{X} \to X$ eine Überdeckung wobei $\hat{X}$ wegzusammenhängend ist. Dann ist die Wirkung der Decktransformationsgruppe $\Delta(p)$ auf $\hat{X}$ eigentlich diskontinuierlich.

Beweis
Wir zeigen zunächst, dass die Wirkung frei ist. Sei $f \in \Delta(p)$ und $x \in \hat{X}$ mit $f(x) = x$. Zu zeigen: $f = \mathrm{id}_{\hat{X}}$. Sei $y \in \hat{X}$ und $\hat{\omega} : [0,1] \to \hat{X}$ ein Weg von x nach y. Dann sind $\hat{\omega}$ und $f \circ \hat{\omega}$ zwei Hebungen von $\omega := p \circ \hat{\omega}$. Da $\hat{\omega}(0) = x = f(x) = f \circ \hat{\omega}(0)$ folgt mit der Eindeutigkeit im Homotopiehebungssatz $\hat{\omega} = f \circ \hat{\omega}$ und insbesondere $y = f(y)$. Da y beliebig war, ist $f = \mathrm{id}_{\hat{X}}$.

Wir können nun zeigen, dass die Wirkung eigentlich diskontinuierlich ist. Sei $x \in \hat{X}$. Sei U eine elementare Umgebung von $p(x)$. Dann ist $p^{-1}(U)$ die disjunkte Vereinigung von offenen Mengen V, $V \in \mathcal{V}$ von denen jede homöomorph auf U abgebildet wird. Sei $V_0 \in \mathcal{V}$ mit $x \in V_0$. Sei $f \in \Delta(p)$, $f \neq \mathrm{id}$. Für $y \in V_0$ gilt dann $p(f(y)) = p(y)$, $f(y) \neq y$ folgt $f(y) \notin V_0$. Andernfalls wäre $p\big|_{V_0}$ nicht injektiv. Daher $f(V_0) \cap V_0 = \emptyset$. □

12.8 Bemerkung

Sei $p : \hat{X} \to X$ eine Überlagerung wobei $\hat{X}$ wegzusammenhängend ist. Sei $H \leq \Delta(p)$ eine Untergruppe. Dann ist auch die Wirkung $H \curvearrowright \hat{X}$ eigentlich diskontinuierlich und die Quotientenabbildung $q : \hat{X} \to H\backslash\hat{X}$ eine Überlagerung. Weiter ist $q' : H\backslash\hat{X} \to X$ mit $q'(Hx) := p(x)$ stetig, da $q' \circ q = p$ stetig ist. Ist $U \subseteq X$ elementar für p, so ist U auch elementar für q'. q' ist also auch eine Überlagerung. Insgesamt haben wir also jeder Untergruppe von $\Delta(p)$ eine Überlagerung $H\backslash\hat{X}$ zugeordnet, die zwischen $\hat{X}$ und X liegt.

$$\begin{tikzcd} \hat{X} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"] & X \\ H\backslash\hat{X} \arrow[ur, "q'"'] & \end{tikzcd}$$

12.9 Definition

Sei $p : \hat{X} \to X$ eine Überlagerung. Für $x \in X$ wirkt dann $\Delta(p)$ auf $p^{-1}(x)$. Die Überlagerung heißt **normal**, falls diese Wirkung transitiv ist, d.h. falls es zu $\hat{x}, \hat{y} \in p^{-1}(x)$ immer $f \in \Delta(p)$ gibt mit $f(\hat{x}) = \hat{y}$.

12.10 Proposition

Sei $\hat{X} \xrightarrow{p} X$ eine normale Überlagerung wobei $\hat{X}$ wegzusammenhängend ist. Dann ist die Abbildung $q' : \Delta(p)\backslash\hat{X} \to X$, $q'(\Delta(p)x) = p(x)$ ein Homöomorphismus.
Wenn zusätzlich $\hat{X}$ einfach zusammenhängend und wegzusammenhängend ist, dann gilt $\pi_1(X, x_0) \cong \Delta(p)$ für einen beliebigen Basispunkt $x_0 \in X$.

Beweis
Wir haben schon gesehen, dass q' eine Überlagerung ist. Unabhängig davon ob p normal ist. Ist p normal, so ist q' bijektive Überlagerung und daher Homöomorphismus. □

13 Klassifikation von Überlagerungen

13.1 Hebungssatz

Sei $p : \hat{X} \to X$ eine Überlagerung. Sei $x_0 \in X, \hat{x}_0 \in \hat{X}$, $p(\hat{x}_0) = x_0$. Sei Z wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Sei $z_0 \in Z$, $f : Z \to X$ stetig mit $f(z_0) = x_0$. Dann gibt es eine Hebung $\hat{f} : Z \to \hat{X}$ mit $\hat{f}(z_0) = \hat{x}_0$ genau dann, wenn

$$f_*\big(\pi_1(Z, z_0)\big) \subseteq p_*\big(\pi_1(\hat{X}, \hat{x}_0)\big) \tag{$\star$}$$

als Untergruppe von $\pi_1(X, x_0)$ gilt. In diesem Fall ist $\hat{f}$ eindeutig.

$$\begin{tikzcd} X & \hat{X} \arrow[l, "p"'] \\ Z \arrow[u, "f"] \arrow[ur, dashed, "\hat{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Beweis
Existiert $\hat{f}$, so folgt $(\star)$ aus $f_* = p_* \circ \hat{f}_*$. Sei umgekehrt $(\star)$ erfüllt. Sei $z \in Z$. Sei $\omega : [0,1] \to Z$ ein Weg von z_0 nach z. Sei $\hat{\omega} : [0,1] \to \hat{X}$ die eindeutige Hebung von $f \circ \omega$ mit $\hat{\omega}(0) = \hat{x}_0$ (Homotopiehebungssatz, 10.8). Existiert $\hat{f}$ so ist auch $\hat{f} \circ \omega$ eine Hebung von $f \circ \omega$ mit $\hat{f} \circ \omega(0) = \hat{f}(z_0) = \hat{x}_0$, also $\hat{\omega} = \hat{f} \circ \omega$ und insbesondere ist $\hat{f}(z) = \hat{f}\big(\omega(1)\big) = \hat{\omega}(1)$. Daher ist $\hat{f}$ eindeutig, falls es existiert.

Zur Existenz setzen wir $\hat{f}(z) := \hat{\omega}(1)$. Wir müssen zeigen:

Wohldefiniertheit: Sei $\eta : [0,1] \to Z$ ein zweiter Weg von z_0 nach z. Sei $\hat{\eta} : [0,1] \to \hat{X}$ die zugehörige Hebung. Zu zeigen: $\hat{\eta}(1) = \hat{\omega}(1)$. Betrachte die Schleife $\overline{\omega} * \eta$ in Z. Dann ist $\overline{\hat{\omega}} * \hat{\eta}$ eine Hebung von $f \circ (\overline{\omega} * \eta)$. Aus $(\star)$ folgt, dass $f \circ (\overline{\omega} * \eta)$ im Bild von $p_* : \pi_1(\hat{X}, \hat{x}_0) \to \pi_1(X, x_0)$ liegt. Mit dem Homotopiehebungssatz ergibt sich, dass auch $\overline{\hat{\omega}} * \hat{\eta}$ eine Schleife ist (Übung!). Damit folgt $\hat{\omega}(1) = \hat{\eta}(1)$

Stetigkeit: Sei $U \subseteq \hat{X}$ offen. Sei $z \in \hat{f}^{-1}(U)$. Sei V eine elementare Umgebung von $f(z)$. Indem wir V wenn nötig klein machen erhalten wir eine offene Umgebung V' von $\hat{f}(z)$, die unter p homöomorph auf V abgebildet wird. Da f stetig ist und Z lokal wegzusammenhängend ist, gibt es eine wegzusammenhängende Umgebung W von z mit $f(W) \subseteq V$. Sei nun $\omega : [0,1] \to Z$ ein Weg von z_0 nach z. Zu $z' \in W$ gibt es einen Weg $\eta : [0,1] \to W$ von z nach z' und $\omega * \eta$ ist ein Weg von z_0 nach z'. Insbesondere ist

$$\hat{f}(z') = \widehat{(\omega * \eta)}(1) = \hat{\omega} * p\big|_{V'}^{-1}(\eta)(1) = \left(p\big|_{V'}\right)^{-1}(\eta(1)) \in V$$

Also $\hat{f}(W) \subseteq V' \subseteq U$. $\square$

13.2 Klassifikationssatz (Eindeutigkeit)

Seien $p_1 : \hat{X}_1 \to X$, $p_2 : \hat{X}_2 \to X$ zwei Überlagerungen. Dabei seien $\hat{X}_1$ und $\hat{X}_2$ wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Seien $\hat{x}_1 \in \hat{X}_1$, $\hat{x}_2 \in \hat{X}_2$ mit $p_1(\hat{x}_1) = x_0 = p_2(\hat{x}_2)$. Dann sind äquivalent:

a) Es gibt einen Homöomorphismus $f : \hat{X}_1 \to \hat{X}_2$ mit $p_2 \circ f = p_1$ und $f(\hat{x}_1) = \hat{x}_2$.

b) $p_{1*}\Big(\pi_1\Big(\hat{X}_1, \hat{x}_1\Big)\Big) = p_{2*}\Big(\pi_1\Big(\hat{X}_2, \hat{x}_2\Big)\Big)$ als Untergruppen von $\pi_1(X, x_0)$

Beweis
a) $\Rightarrow$ b): Ist f wie in a), so ist $f_*: \pi_1\left(\hat{X}_1, \hat{x}_1\right) \to \pi_1\left(\hat{X}_2, \hat{x}_2\right)$ ein Isomorphismus und es folgt

$$(p_1)_*\left(\pi_1\left(\hat{X}_1, \hat{x}_1\right)\right) = (p_2 \circ f)_*\left(\pi_1\left(\hat{X}_1, \hat{x}_1\right)\right) = (p_2)_* \circ (f)_*\left(\pi_1\left(\hat{X}_1, \hat{x}_1\right)\right) = (p_2)_*\left(\pi_1\left(\hat{X}_2, \hat{x}_2\right)\right)$$

b) $\Rightarrow$ a): Betrachte

$$\begin{tikzcd} & \hat{X}_2 \arrow[d, "p_2"] \\ \hat{X}_1 \arrow[ur, dashed, "f"] \arrow[r, "p_1"] & X \end{tikzcd}$$

Hebungssatz $\Rightarrow \exists\, f : \hat{X}_1 \to \hat{X}_2$ mit $p_2 \circ f = p_1$, $f(\hat{x}_1) = \hat{x}_2$. Weiter ist

$$\begin{tikzcd} & \hat{X}_1 \arrow[d, "p_1"] \\ \hat{X}_2 \arrow[ur, dashed, "g"] \arrow[r, "p_2"] & X \end{tikzcd}$$

Wieder liefert der Hebungssatz: $\exists\, g : \hat{X}_2 \to \hat{X}_1$ mit $p_1 \circ g = p_2$, $g(\hat{x}_2) = \hat{x}_1$. Betrachte nun

$$\begin{tikzcd} & \hat{X}_1 \arrow[d, "p_1"] \\ \hat{X}_1 \arrow[ur, bend left, "g \circ f"] \arrow[ur, "\mathrm{id}_{\hat{X}_1}"'] \arrow[r, "p_1"] & X \end{tikzcd}$$

Die Eindeutigkeit im Hebungssatz liefert $g \circ f = \mathrm{id}_{\hat{X}_1}$. Analog folgt $f \circ g = \mathrm{id}_{\hat{X}_2}$ $\square$.

13.3 Satz (Universelle Überlagerung)

Sei X wegzusammenhängend, lokal wegzusammenhängend und lokal einfach zusammenhängend. Dann gibt es eine wegzusammenhängende und einfach zusammenhängende Überlagerung $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$

Konstruktionsskizze
Sei $x_0 \in X$. Sei $P = \{\omega : [0,1] \to X \text{ Weg} \mid \omega(0) = x_0\}$. Sei $\tilde{X} := P/_{\text{Homotopie mit festen Endpunkten}}$. Dann induziert $\omega \mapsto \omega(1)$ eine wohldefinierte Abbildung $p : \tilde{X} \to X$. Sei $\omega \in P$ und V eine wegzusammenhängende einfach zusammenhängende Umgebung von $\omega(1)$ in X. Setze

$$U(V, \omega) = \left\{ [\omega * \eta] \,\middle|\, \eta : [0,1] \to V \text{ Weg mit } \eta(0) = \omega(1) \right\}$$

Die $U(V, \omega)$ bilden die Basis der Topologie von $\tilde{X}$. Da V wegzusammenhängend und einfach zusammenhängend ist, ist

$$p\Big|_{U(V,\omega)} : U(V, \omega) \to V$$

bijektiv. Da X lokal wegzusammenhängend und lokal einfach zusammenhängend ist, ist $p\big|_{U(V,\omega)}$ sogar ein Homöomorphismus. Damit ist V eine elementare Umgebung von $\omega(1)$. Da X wegzusammenhängend ist, ist p auch surjektiv und $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung.

<u>$\tilde{X}$ ist wegzusammenhängend:</u> Sei $\tilde{x}_0 := [c_{x_0}] \in \tilde{X}$. Sei $\tilde{x} = [\omega] \in \tilde{X}$. Sei $\omega_s : [0,1] \to X$ mit

$$\omega_s(t) = \begin{cases} \omega(t), & \text{falls } t \leq s \\ \omega(s), & \text{falls } t \geq s \end{cases}$$

Dann ist $\alpha : [0,1] \to \tilde{X}$ mit $\alpha(s) = [\omega_s]$ ein Weg von $\tilde{x}_0$ nach $\tilde{x}$.

13.4 Definition

$\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ heißt die **universelle Überlagerung** von X.

13.5 Klassifikationssatz (Existenz)

Sei X wegzusammenhängend, lokal wegzusammenhängend und lokal einfach zusammenhängend. Sei $x_0 \in X$. Dann gibt es zu jeder Untergruppe $H \leq \pi_1(X, x_0)$ eine Überlagerung $q : \hat{X} \to X$ und $\hat{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ mit $q_*\Big(\pi_1(\hat{X}, \hat{x}_0)\Big) = H$

Beweis
Sei $p : \tilde{X} \to X$ die universelle Überlagerung. Der Hebungssatz impliziert, dass $p : \tilde{X} \to X$ normal ist. Es folgt $\Delta(p)\backslash\tilde{X} \cong X$ und $\pi_1(X, x_0) \simeq \Delta(p)$. Genauer: Zu $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ gibt es einen Isomorphismus $\varphi : \Delta(p) \to \pi_1(X, x_0)$ mit

$$\varphi(f) = [p \circ \tilde{\omega}_f]$$

wobei $\tilde{\omega} : [0, 1] \to \tilde{X}$ ein Weg von $\tilde{x}_0$ nach $f(\tilde{x}_0)$ ist. Setze $H_\Delta := \varphi^{-1}(H) \leq \Delta(p)$. Wir erhalten Überlagerungen $\tilde{X} \xrightarrow{q'} H_\Delta\backslash\tilde{X} \xrightarrow{q} X$ mit $q'(x) = H_\Delta x$, $q(H_\Delta x) = p(x)$. Da $\tilde{X}$ einfach zusammenhängend ist, ist $\pi_1\Big(H_\Delta\backslash\tilde{X}, H_\Delta\hat{x}_0\Big) \cong H_\Delta$. Sei $\hat{x}_0 := H_\Delta\tilde{x}_0$. Genauer gibt es einen Isomorphismus $\psi : H_\Delta \to \pi_1\Big(H_\Delta\backslash\tilde{X}, \hat{x}_0\Big)$ mit

$$\psi(f) = [q' \circ \omega_f]$$

Es folgt

$$q_*(\psi(f)) = q_*[q' \circ \omega_f] = [q \circ q' \circ \omega_f] = [p \circ \omega_f] = \psi(f)$$

Also $q_*\Big(\pi_1\Big(H_\Delta\backslash\tilde{X}, \hat{x}_0\Big)\Big) = H$. $\square$

14 Höhere Homotopiegruppen

Dieses Kapitel ist nur ein kleiner Exkurs zu einem Thema, das auch ganze Vorlesungsreihen füllen könnte.

14.1 Rückblick

Sei (X, x_0) ein punktierter Raum. Sei in diesem Abschnitt $I = [0, 1]$. Wegzusammenhängend: Punkte in $X \hat{=} I^0 = \{x\} \to X$. Wege in X sind dann Homotopien solcher Abbildungen. $\pi_0(X, x_0)$ ist dann die (punktierte) Menge der Homotopieklassen von Abbildungen $I^0 \to X$. Die Schleifen in X sind stetige Abbildungen $\omega : I \to X$ mit $\omega(0) = x_0 = \omega(1)$. $\pi_1(X, x_0)$ ist die Menge der Homotopieklassen von Schleifen und heißt die Fundamentalgruppe.

14.2 Definition

Seien $\omega_0, \omega_1 : I^n \to X$ stetige Abbildungen mit $\omega_0(\partial I^n) = \{x_0\} = \omega_1(\partial I^n)$. Eine **Homotopie** zwischen ω_0 und ω_1 ist eine stetige Abbildung $H : I^n \times [0, 1] \to X$ sodass Folgendes gilt:

- $H(s_1, \dots, s_n, 0) = \omega_0(s_1, \dots, s_n)$ für alle $(s_1, \dots, s_n) \in I^n$
- $H(s_1, \dots, s_n, 1) = \omega_1(s_1, \dots, s_n)$ für alle $(s_1, \dots, s_n) \in I^n$
- $H(s_1, \dots, s_n, t) = x_0$ für alle $t \in [0, 1]$, $(s_1, \dots, s_n) \in \partial I^n$

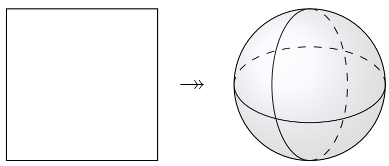
Bemerkung
Homotopie ist eine Äqivalenzrelation.

14.3 Definition

Sei (X, x_0) ein punktierter Raum. Definiere $\pi_n(X, x_0)$ also die Menge der Homotopieklassen von Abbildungen: $\omega : I^n \to X$ mit $\omega(\partial I^n) = \{x_0\}$. für $n > 0$

Bemerkung
Für $n = 2$ Rand auf einen Punkt kollabieren

$$\begin{tikzcd} I^2 \arrow[r, "\omega"] \arrow[d, two heads] & X \\ I^2/\partial I^2 \arrow[ur, dashed, "\exists"] & \end{tikzcd}$$



allgemein: Abbildung $\omega : I^n \to X$ mit $\omega(\partial I^n) = \{x_0\} \rightsquigarrow$ punktierte Abbildung $(S^n, s_0) \to (X, x_0)$.

14.4 Definition

Sei $1 \le k \le n$, $\omega_0, \omega_1 : I^n \to X$, $\omega_i(\partial I^n) = \{x_0\}$ für $i = 1, 2$. Definiere:

$$(\omega *_k \omega')(s_1, \dots, s_n) := \begin{cases} \omega(s_1, \dots, s_{k-1}, 2s_k, s_{k+1}, \dots, s_n), & \text{falls } 0 \le s_k, \le \frac{1}{2} \\ \omega(s_1, \dots, s_{k-1}, 1 - 2s_k, s_{k+1}, \dots, s_n), & \text{falls } \frac{1}{2} \le s_k \le 1 \end{cases}$$

14.5 Lemma (Eckmann-Hilton-Arguemnt)

Sei A eine Menge mit zwei inneren Verknüpfungen $\square, \diamond : A \times A \to A$, sodass gilt

a) Es gibt $e \in A$ mit $e \square a = a \square e = a = e \diamond a = a \diamond e$ für alle $a \in A$

b) Für alle $a, b, c, d \in A$ gilt $(a \square b) \diamond (c \square d) = (a \diamond c) \square (b \diamond d)$.

Dann stimmen $\square$ und $\diamond$ überein, sind assoziativ und kommutativ.

Beweis

$$
\begin{aligned}
a \square b &= (e \diamond a) \square (b \diamond e) = (e \square b) \diamond (a \square e) = b \diamond a \\
b \diamond a &= (b \square e) \diamond (e \square a) = (b \diamond e) \square (e \diamond a) = b \square a
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow \square = \diamond$ und ist kommutativ + Assoziativität. $\square$

14.6 Proposition

a) $1 \leq k \leq n$, $\omega_0, \omega_0', \omega_1, \omega_1' : I^n \to X$ stetig mit $\omega_i(\partial I^n) = \{x_0\} = \omega_i'(\partial I^n)$ für $i = 0, 1$. Es gelte $[\omega_0] = [\omega_1]$, $[\omega_0'] = [\omega_1']$ in $\pi_n(X, x_0)$. Dann gilt

$$[\omega_0 *_k \omega_0'] = [\omega_1 *_k \omega_1'] \in \pi_n(X, x_0)$$

Schreibe $\cdot_k$ für die induzierte Verknüpfung.

b) $1 \leq k, l \leq n$. Dann gilt $\cdot_k = \cdot_l$. Für $n \geq 2$ ist $\cdot$ kommutativ. Außerdem assoziativ.

c) $\pi_n(X, x_0)$ ist eine abelsche Gruppe für $n \geq 2$.

d) $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ stetig. Dann definiert $[\omega] \mapsto [f \circ \omega]$ einen Gruppenhomomorphismus $\pi_n(f) : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, y_0)$, falls $n \geq 1$.

e) $\pi_n(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{\pi_n(X, x_0)}$, $\pi_n(f \circ g) = \pi_n(f) \circ \pi_n(g)$

f) Ist f punktiert homotop zu g, so gilt $\pi_n(f) = \pi_n(g)$.

Zum Beweis

a) $\checkmark$

b) für $n = 2$

$$
\begin{matrix} (\omega *_1 \omega') \\ *_2 \\ (\omega'' *_1 \omega''') \end{matrix}
= \begin{array}{|c|c|} \hline \omega & \omega' \\ \hline \omega'' & \omega''' \\ \hline \end{array}
= \begin{pmatrix} \omega \\ *_2 \\ \omega'' \end{pmatrix} *_1 \begin{pmatrix} \omega' \\ *_2 \\ \omega''' \end{pmatrix}
$$

Mit Eckmann-Hilton-Argument folgt $\cdot_k = \cdot_l$ und für $n \geq 2$ kommutativ.

c) Gegeben $\omega : I^n \to X$, definiere $\overline{\omega}(s_1, \ldots, s_n) := \omega(1 - s_1, s_2, \ldots, s_n)$. Damit ist $[\overline{\omega}]$ Inverses von $[\omega]$

d) einfach

e) einfach

f) einfach $\square$

14.7 Korollar

$(X, x_0) \sim (Y, y_0) \Rightarrow \pi_n(X, x_0) \cong \pi_n(Y, y_0)$ für alle n. Insbesondere: (X, x_0) zusammenziehbar $\Rightarrow$ $\pi_n(X, x_0) = 0$ für $n \geq 2$.

14.8 Proposition

$p : \hat{X} \to X$ Überlagerung. $\hat{x}_0 \in \hat{X}, x_0 \in X$ mit $p(\hat{x}_0) = x_0$. Dann ist $\pi_n(p) : \pi_n(\hat{X}, \hat{x}_0) \to \pi_n(X, x_0)$ ein Isomorphismus für $n \geq 2$

Beweis
Übung.

14.9 Korollar

$\pi_n(S^1, s_0) = 0$ für $n \geq 2$

Beweis
Es gibt eine Überlagerung $R \to S^1$. □

14.10 Definition

Eine stetige Abbildung $p : E \to B$ heißt (Serre-)**Faserung**, falls sie folgende Homotopiehebungseigenschaft hat: Für jedes $n \geq 0$, jede Homotopie $H : I^n \times [0,1] \to B$ und jede partielle Hebung $\tilde{H} : I^n \times \{0\} \cup \partial I^n \times [0,1]$ existiert eine Hebung $\overline{H}$ von H entlang p, die $\tilde{H}$ fortsetzt. Nenne $p^{-1}(b)$ die **Faser** über b.

$$\begin{tikzcd}
I^n \times \{0\} \cup \partial I^n \times [0,1] \arrow[r, "\tilde{H}"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\
I^n \times [0,1] \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "\overline{H}"] & B
\end{tikzcd}$$

Beispiel
- Überlagerungen sind Faserungen (!)
- Die Projektion $B \times F \to B$ ist eine Faserung.

14.11 Satz

Sei $p : E \to B$ eine Faserung. Seien $b_0 \in B, e_0 \in E$ mit $p(e_0) = b_0$. Setze $F := p^{-1}(b)$. Sei $i : (F, e_0) \hookrightarrow (E, e_0)$ die Inklusion. Dann existiert eine lange exakte Sequenz

$$\ldots \pi_{n+1}(B, b_0) \xrightarrow{\partial_{n+1}} \pi_n(F, e_0) \xrightarrow{\pi_n(i)} \pi_n(E, e_0) \xrightarrow{\pi_n(p)} \pi_n(B, b_0) \xrightarrow{\partial_n} \pi_{n-1}(F, e_0) \ldots$$
$$\longrightarrow \pi_1(B, b_0) \xrightarrow{\partial_1} \pi_0(F, e_0) \xrightarrow{\pi_0(i)} \pi_0(E, e_0) \xrightarrow{\pi_0(p)} \pi_0(B, b_0)$$

D.h.

- ∂_n ist ein Homomorphismus für $n > 2$.
- $\ker \pi_n(p) = \operatorname{Im} \pi_n(i)$, $\ker(\partial_{n+1}) = \operatorname{Im} \pi_{n+1}(p)$, $\ker \pi_n(i) = \operatorname{Im} \partial_{n+1}$ für $n \geq 1$
- $\partial_1(x) = [e_0] \iff x \in \operatorname{Im} \pi_n(p)$
- $\pi_0(i)(x) = [e_0] \iff x \in \operatorname{Im} \partial_1$

- $\pi_0(p)(x) = [b_0] \iff x \in \operatorname{Im} \pi_0(i)$

Zum Beweis
Definition von ∂_n: Sei $\omega : I^n \to B, \omega(\partial I^n) = \{b_0\}$.

$$\begin{tikzcd}
I^{n-1} \times \{0\} \cup \partial I^{n-1} \times [0,1] \arrow[r, "\mathrm{const}_{e_0}"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\
I^{n-1} \times [0,1] \arrow[r, "\omega"] \arrow[ur, dashed, "\tilde{\omega}"] & B
\end{tikzcd}$$

$\tilde{\omega}\big|_{I^{n-1}\times\{1\}} : I^{n-1} \to F$, konstant auf ∂I^{n-1}. Definiere $\partial_n([\omega]) := \left[\tilde{\omega}\big|_{I^{n-1}\times\{1\}}\right]$. ∂_n ist wohldefiniert und Homomorphismus für $n > 2$.

14.12 Anwendung

Es gibt eine Faserung $S^3 \xrightarrow{p} S^2$, sodass $p^{-1}(s) \cong S^1$ („Hopf-Faserung"). Es gilt $\pi_1(S^n) = 1$ für $n \geq 2$, $\pi_2(S^3) = 0$ Betrachte:

$$\begin{aligned}
\ldots \longrightarrow \underbrace{\pi_3(S^1)}_{=0} \longrightarrow \pi_3(S^3) \longrightarrow \pi_3(S^2) \longrightarrow \underbrace{\pi_2(S^1)}_{=0} \\
\longrightarrow \underbrace{\pi_2(S^3)}_{=0} \longrightarrow \pi_2(S^2) \longrightarrow \pi_1(S^1) \longrightarrow \underbrace{\pi_1(S^3)}_{=1} \longrightarrow \ldots
\end{aligned}$$

Mit Exaktheit folgt $\pi_2(S^2) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ und $\pi_3(S^3) \cong \pi_3(S^2)$. Tatsache: $\pi_3(S^3) \cong \mathbb{Z}$.

Index

Die Seitenzahlen *sind mit Hyperlinks zu den entsprechenden Seiten versehen, also anklickbar*

Abbildungsverzeichnis