Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

Fachbereich 10
Mathematik und
Informatik

Skript Operatoralgebren

Mitschrift der Vorlesung „Operatoralgebren“ von Prof. Dr. Wilhelm Winter

Jannes Bantje

23. Oktober 2015

Aktuelle Version verfügbar bei

GitHub

`https://github.com/JaMeZ-B/latex-wwu`

GitHub ist eine Internetplattform, auf der viele OpenSource-Projekte gehostet werden. Diese Plattform nutzen wir zur Zusammenarbeit, also findet man hier neben den PDFs auch die TeX-Dateien. Außerdem ist über diese Plattform auch direktes Mitarbeiten möglich, siehe nächste Seite.

sciebo die Campuscloud

`https://uni-muenster.sciebo.de/public.php?service=files&t=965ae79080a473eb5b6d927d7d8b0462`

Sciebo ist ein Dropbox-Ersatz der Hochschulen in NRW, der von der Uni Münster in leitender Position auf Basis der OpenSource-Software Owncloud aufgebaut wurde. Wenn man auf den Link klickt, kann man die Freigabe zum eigenen Speicher hinzufügen und hat dann immer automatisch die aktuellste Version.

Bittorrent Sync

`B6WH2DISQ5QVYIRYIEZSF4ZR2IDVKPN3I`

BTSync ist ein peer-to-peer Dateisynchronisations-Tool. Dabei werden die Dateien nur auf den Computern der Teilnehmer an einer Freigabe gespeichert. Ein RasPi ist permanent online, sodass stets die aktuellste Version verfügbar ist. `Clients` gibt es für jedes Betriebssystem. Zugang ist über das obige „Secret“ bzw. den QR-Code möglich.

Vorlesungshomepage

`https://wwwmath.uni-muenster.de/u/wilhelm.winter/wwinter/operatoralgebren.html`

Hier ist ein Link zur offiziellen Vorlesungshomepage.

Vorwort — Mitarbeit am Skript

Dieses Dokument ist eine Mitschrift aus der Vorlesung „Operatoralgebren, WiSe 2015“, gelesen von Prof. Dr. Wilhelm Winter. Der Inhalt entspricht weitestgehend dem Tafelanschrieb. Für die Korrektheit des Inhalts übernehme ich keinerlei Garantie! Für Bemerkungen und Korrekturen – und seien es nur Rechtschreibfehler – bin ich sehr dankbar. Korrekturen lassen sich prinzipiell auf drei Wegen einreichen:

- Persönliches Ansprechen in der Uni, Mails an `j.bantje@wwu.de` (gerne auch mit annotieren PDFs) oder Kommentare auf `https://github.com/JaMeZ-B/latex-wwu`.

- *Direktes* Mitarbeiten am Skript: Den Quellcode poste ich auf GitHub (siehe oben), also stehen vielfältige Möglichkeiten der Zusammenarbeit zur Verfügung: Zum Beispiel durch Kommentare am Code über die Website und die Kombination Fork + Pull Request. Wer sich verdient macht oder ein Skript zu einer Vorlesung, die ich nicht besuche, beisteuern will, dem gewähre ich gerne auch Schreibzugriff.

  Beachten sollte man dabei, dass dazu ein Account bei `github.com` notwendig ist, der allerdings ohne Angabe von persönlichen Daten angelegt werden kann. Wer bei GitHub (bzw. dem zugrunde liegenden Open-Source-Programm „`git`“) – verständlicherweise – Hilfe beim Einstieg braucht, dem helfe ich gerne weiter. Es gibt aber auch zahlreiche empfehlenswerte Tutorials im Internet.[1]

- *Indirektes* Mitarbeiten: TeX-Dateien per Mail verschicken.

  Dies ist nur dann sinnvoll, wenn man einen ganzen Abschnitt ändern möchte (zB. einen alternativen Beweis geben), da ich die Änderungen dann per Hand einbauen muss! Ich freue mich aber auch über solche Beiträge!

Anmerkung

Innerhalb dieser Mitschrift wird man öfter den Ausdruck „Warum?“ finden. Dies sind vom Dozenten bewusst weggelassene Details, die zu verstärktem Mitdenken beim Lesen animieren sollen. Oftmals sind dies schon aus vorherigen Semestern bekannte Sachverhalte. Nur an wenigen Stellen habe ich die fehlenden Details hinzugefügt.

[1] zB. `https://try.github.io/levels/1/challenges/1`, ist auf Englisch, aber dafür interaktives LearningByDoing

Inhaltsverzeichnis

1 Spektraltheorie in Banachalgebren

1.1 Definition. Eine *Banachalgebra* ist eine vollständige normierte Algebra. Für die Multiplikation gilt also $\|ab\| \leqslant \|a\| \cdot \|b\|$ Wir betrachten in dieser Vorlesung fast ausschließlich Algebren über $\mathbb{C}$. Eine Banachalgebra heißt *unital*, falls sie ein Einselement 1 mit $\|1\| = 1$ enthält.

1.2 Definition. Für eine unitale $\mathbb{C}$-Algebra A setzen wir

$$\begin{aligned} \operatorname{Inv}(A) &:= \{a \in A \text{ invertierbar}\} \\ \sigma(a) := \sigma_A(a) &:= \big\{\lambda \in \mathbb{C} \,\big|\, \lambda \cdot 1 - a \notin \operatorname{Inv}(A)\big\} \end{aligned}$$

$\sigma(a)$ heißt *Spektrum* von a. Revision

1.3 Bemerkung. Sei A wie oben und $a, b \in A$. Dann gilt

$$1 - ab \in \operatorname{Inv}(A) \iff 1 - ba \in \operatorname{Inv}(A)$$

Beweis: Durch simplex Nachrechnen verifiziert man, dass $(1-ba)^{-1} = 1 + b(1-ab)^{-1}a$ gilt. □

1.4 Satz. Sei A eine unitale $\mathbb{C}$-Algebra und $a \in A$ mit $\sigma(a) \neq \emptyset$. Sei weiter $p \in \mathbb{C}[Z]$ ein Polynom. Dann gilt

$$\sigma\big(p(a)\big) = p\big(\sigma(a)\big)$$

Beweis: Die Aussage ist trivial, falls p konstant ist. Sei also p nicht konstant. Zu $\mu \in \mathbb{C}$ existieren $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ mit $\lambda_0 \neq 0$ und $p(z) - \mu = \lambda_0 \cdot (z - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (z - \lambda_n)$, also

$$p(a) - \mu = \lambda_0 \cdot (a - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (a - \lambda_n)$$

Damit gilt: $p(a) - \mu$ ist genau dann invertierbar, wenn $a - \lambda_1, \dots, a - \lambda_n$ invertierbar sind. Also

$$\begin{aligned} \mu \in \sigma\big(p(a)\big) &\iff \lambda_i \in \sigma(a) \text{ ist für ein } i \in \{1, \dots, n\} \\ &\iff p(\lambda) - \mu = 0 \text{ für ein } \lambda \in \sigma(a) \\ &\iff p(\lambda) = \mu \text{ für ein } \lambda \in \sigma(a) \end{aligned}$$

Somit folgt dann $\sigma(p(a)) = p(\sigma(a))$. □

1.5 Satz. Sei A eine unitale Banachalgebra und $a \in A$. Falls $\|a\| < 1$, so ist $1 - a$ invertierbar und

$$(1-a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \qquad \textit{(Neumannsche Reihe)}$$

Beweis: Die Folge der Partialsummen $\big(\sum_{n=0}^{k} a^n\big)_{k \in \mathbb{N}} \subset A$ ist eine Cauchyfolge (warum?), sodass die unendliche Summe existiert. Es gilt dann

$$(1-a)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a^n\right) \xleftarrow{k \to \infty} (1-a)\left(\sum_{n=0}^{k} a^n\right) = 1 - a^{k+1} \xrightarrow{k \to \infty} 1$$

Die Summe ist also ein Rechtsinverses. Genauso folgt, dass es auch ein Linksinverses ist. □

1.6 Korollar. Für eine unitale Banachalgebra A gilt $\operatorname{Inv}(A) \subset A$ offen.

Beweis: Falls $a \in \mathrm{Inv}(A)$ und $\|b-a\| < \left\|a^{-1}\right\|^{-1}$, so gilt $\left\|ba^{-1}-1\right\| \leqslant \|b-a\|\left\|a^{-1}\right\| < 1$, also ist $-\big(1-\big(ba^{-1}-1\big)\big) = ba^{-1}$ invertierbar nach Satz 1.5 und damit auch $b \in \mathrm{Inv}(A)$, denn b ist ein Linksinverses für $a^{-1}(ba^{-1})^{-1} \in \mathrm{Inv}(A)$. $\square$

1.7 Definition. Sei A eine unitale Banachalgebra. Für $a \in A$ definieren wir den *Spektralradius* durch

$$r(a) := \sup_{\lambda \in \sigma(a)} |\lambda|$$

1.8 Proposition. Seien A, a wie oben. Dann ist $\sigma(a)$ kompakt und $r(a) \leqslant \|a\|$.

Beweis: Angenommen $|\lambda| > \|a\|$, dann gilt $\left\|\lambda^{-1}\cdot a\right\| < 1$, also ist $1-\lambda^{-1}\cdot a$ invertierbar nach Satz 1.5 und $\lambda - a \in \mathrm{Inv}(A)$. Damit ist $\lambda \notin \sigma(a)$. Damit folgt, dass $r(a) \leqslant \|a\|$ ist. Es ist $\mathbb{C}\setminus\sigma(a) \subset \mathbb{C}$ offen, da $\mathrm{Inv}(A) \subset A$ offen ist. Damit muss $\sigma(a)$ kompakt sein. $\square$

1.9 Satz. Sei A eine unitale Banachalgebra. Für jedes $a \in A$ ist $\sigma(a)$ nichtleer.

Beweis: Falls $|\lambda| > \|a\|$, so existiert $\big(1-\lambda^{-1}a\big)^{-1}$, also $(\lambda-a)^{-1}$ und es gilt

$$(\lambda-a)^{-1} = \lambda^{-1}\big(1-\lambda^{-1}a\big)^{-1} = \lambda^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{-n}a^n\right)$$

Es folgt

$$\left\|(\lambda-a)^{-1}\right\| \leqslant \left|\lambda^{-1}\right| \cdot \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\big(\left|\lambda^{-1}\right|\cdot\|a\|\big)^n}_{\leqslant 2\text{ , falls } |\lambda|>2\|a\|} \xrightarrow{|\lambda|\to\infty} 0 \qquad [*]$$

Sei nun $\lambda_0 \in \mathbb{C}\setminus\sigma(a)$ und $|\lambda-\lambda_0| < \left\|(a-\lambda_0)^{-1}\right\|^{-1}$. Dann gilt

$$\left\|(\lambda-\lambda_0)(a-\lambda_0)^{-1}\right\| \leqslant \|\lambda-\lambda_0\|\left\|(a-\lambda_0)^{-1}\right\| < 1$$

also $\big(1-(\lambda-\lambda_0)(a-\lambda_0)^{-1}\big)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^n(a-\lambda_0)^n$ und

$$\begin{aligned} -\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^n(a-\lambda_0)^{-(n+1)} &= (a-\lambda_0)^{-1}\big((\lambda-\lambda_0)(a-\lambda_0)^{-1}-1\big)^{-1} \\ &= \Big((\lambda-\lambda_0)\underbrace{(a-\lambda_0)(a-\lambda_0)^{-1}}_{=1}-(a-\lambda_0)\Big)^{-1} = (\lambda-a)^{-1} \end{aligned}$$

Für ein stetiges Funktional $\varphi \in A^*$ erhalten wir

$$\varphi\big((\lambda-a)^{-1}\big) = \sum_{n=0}^{\infty} -\varphi\Big((a-\lambda_0)^{-(n+1)}\Big)\cdot(\lambda-\lambda_0)^n$$

falls $|\lambda-\lambda_0| < \left\|(a-\lambda_0)^{-1}\right\|^{-1}$. Daher ist $\lambda \mapsto \varphi\big((\lambda-a)^{-1}\big)$ *holomorph* auf $\mathbb{C}\setminus\sigma(a)$. Falls $\sigma(a) = \emptyset$, so ist $\lambda \mapsto \varphi\big((\lambda-a)^{-1}\big)$ *ganz*. Wegen [$*$] und dem Satz von Liouville[1] ist dann $\varphi\big((\lambda-a)^{-1}\big) = 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$. Aber $\varphi \in A^*$ war beliebig, und wegen Hahn-Banach gilt $(\lambda-a)^{-1} = 0$. Dies ist ein Widerspruch. $\square$

[1] siehe https://de.wikipedia.org/wiki/Satz_von_Liouville_%28Funktionentheorie%29

1.10 Satz. Sei A eine unitale Banachalgebra. Für $a \in A$ gilt dann

$$r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$$

Beweis: Sei $\varphi \in A^*$ ein stetiges Funktional. Wir haben im Beweis von Satz 1.9 gesehen, dass die Zuordnung $\lambda \mapsto \varphi\big((\lambda - a)^{-1}\big)$ analytisch ist für $\lambda \notin \sigma(a)$. Insbesondere gilt dies für $|\lambda| > r(a)$. Dann ist auch $\lambda \mapsto \varphi\big((\lambda^{-1} - a)^{-1}\big)$ analytisch für $0 < |\lambda| < {}^1\!/\!_{r(a)}$, ebenso $\lambda \mapsto \varphi\big((1 - \lambda \cdot a)^{-1}\big)$. Die Singularität bei 0 ist hebbar, also definiert $f(\lambda) := \varphi\big((1 - \lambda \cdot a)^{-1}\big)$ eine analytische Funktion für $|\lambda| < {}^1\!/\!_{r(a)}$. Dann existiert eine Folge $(\alpha_n)_{n\in N} \subset \mathbb{C}$ mit $f(\lambda) = \sum_{n=0}^\infty \alpha_n \cdot \lambda^n$ für $|\lambda| < r(a)$. Die Konvergenz ist absolut und gleichmäßig, also gilt insbesondere $|\alpha_n \cdot \lambda^n| \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Falls $|\lambda| < {}^1\!/\!_{\|a\|} \leqslant {}^1\!/\!_{r(a)}$ ist, so gilt

$$f(\lambda) = \varphi\big((1 - \lambda \cdot a)^{-1}\big) \overset{1.5}{=} \varphi\left(\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi\big((\lambda a)^n\big) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(a^n) \cdot \lambda^n$$

also $\alpha_n = \varphi(a^n)$ für $n \in N$. Es gilt $\varphi(a^n) \cdot \lambda^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Aber $\varphi \in A^*$ war beliebig, also ist für jedes $\varphi \in A^*$ die Folge $(\varphi(\lambda^n a^n))_{\mathbb{N}} = (\varphi(a^n) \cdot \lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt für $|\lambda| < {}^1\!/\!_{r(a)}$.

Nach dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit ist dann $(\lambda^n a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt für jedes λ mit $|\lambda| < {}^1\!/\!_{r(a)}$. Damit existiert für $0 < |\lambda| < {}^1\!/\!_{r(a)}$ ein $M \geqslant 0$ mit $\|\lambda^n a^n\| \leqslant M$, $n \in \mathbb{N}$, also

$$\|a^n\|^{1/n} \leqslant \frac{M^{1/n}}{|\lambda|} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{|\lambda|}$$

Es folgt $\limsup_n \|a^n\|^{1/n} \leqslant r(a)$. Falls $\lambda \in \sigma(a)$, so gilt nach Satz 1.4 $\lambda^n \in \sigma(a^n)$ und wegen Proposition 1.8 $|\lambda^n| \leqslant \|a^n\|$, also $|\lambda| \leqslant \|a^n\|^{1/n}$ und es folgt insgesamt

$$r(a) \leqslant \inf_n \|a^n\|^{1/n} \leqslant \liminf_n \|a^n\|^{1/n} \leqslant \limsup_n \|a^n\|^{1/n} \leqslant r(a)$$

und damit $\lim_n \|a^n\|^{1/n} = r(a)$. □

1.11 Proposition. Sei A eine abelsche unitale Banachalgebra. Falls A einfach[2] ist, so ist $A \cong \mathbb{C}$.

Beweis: Sei $a \in A$, $\alpha \in \sigma(a)$. Dann ist $J := \overline{(a - \alpha \cdot 1) \cdot A} \lhd A$ ein abgeschlossenes Ideal. Für jedes $b \in A$ ist $(a - \alpha)b$ nicht invertierbar. Damit folgt dann $\|(a - \alpha)b - 1\| \geqslant 1$ für jedes $b \in A$. Damit ist auch $\operatorname{dist}((a - \alpha \cdot 1) \cdot A, 1) \geqslant 1$. Also ist $1 \notin J$ und damit $j \neq A$. Da A einfach ist, folgt $J = \{0\}$, also muss $a - \alpha \cdot 1 = 0$ und weiter $a \in \mathbb{C} \cdot 1$ gelten. Damit ist $A = \mathbb{C} \cdot 1 \cong \mathbb{C}$. □

1.12 Definition. Sei A eine abelsche unitale Banachalgebra. Eine lineare, multiplikative, nicht verschwindende Abbildung $\chi\colon A \to \mathbb{C}$ heißt *Charakter* auf A. Es gilt dann $\chi(1) = 1$. Wir setzen $\Omega(A) := \{\chi \mid \chi \text{ Charakter auf } A\}$ (*Charakterspektrum* oder einfach nur *Spektrum* von A).

Die *Geldfanddarstellung* ist definiert als $a \mapsto \hat{a}\colon \Omega(A) \to \mathbb{C}, \chi \mapsto \chi(a)$.

1.13 Satz. Sei A eine abelsche unitale Banachalgebra. Dann gilt

(i) Jeder Charakter auf A ist stetig mit Norm 1.

(ii) Die Abbildung $\chi \mapsto \ker \chi$ definiert eine Bijektion zwischen

$$\Omega(A) \to J_{max} := \big\{J \mid J \subsetneq A \text{ ist maximales Ideal}\big\}$$

[2] besitzt keine nichttrivialen Ideale

Beweis:

(i) Sei $a \in A$ mit $\|a\| < 1$ und $\chi(a) = 1$. Setze $b = \sum_{n=1}^{\infty} a^n$, dann ist $1+b = \sum_{n=0}^{\infty} a^n = (1-a)^{-1}$. Also ist $1 = (1+b)(1-a) = 1+b-a-ab$ und damit $ab+a = b$. Es folgt $\chi(a)\chi(b)+\chi(a) = \chi(b)$. Dies ist ein Widerspruch. Also muss $\|\chi\| \leqslant 1$ sein. Mit $\chi(1) = 1$ folgt $\|\chi\| = 1$.

(ii) Für jedes $\chi \in \Omega(A)$ ist $\ker\chi \lhd A$ ein Ideal. Weiter ist der Kern abgeschlossen in A, da χ stetig ist. Wir zeigen, dass $\ker\chi$ maximal ist. $\ker\chi \neq A$, denn $\chi \neq 0$. Falls $c \in A \setminus \ker\chi$, so gilt $\chi(c)^{-1} \cdot c - 1 \in \ker\chi$. Also ist $\ker\chi + \mathbb{C} \cdot c = \ker\chi + \mathbb{C} \cdot 1 = A$, da $a - \chi(a) \cdot 1 \in \ker\chi$ und damit $a = (a - \chi(a) \cdot 1) + \chi(a) \cdot 1 \in \ker\chi + \mathbb{C} \cdot 1$. Damit ist der Kern von χ maximal.

Zur Injektivität: Es seien $\chi_1, \chi_2 \in \Omega(A)$ mit $\ker\chi_1 = \ker\chi_2$. Dann gilt für $a \in A$

$$\chi_1(a) - \chi_2(a) = \chi_1\Big(\underbrace{a - \chi_2(a) \cdot 1}_{\in \ker\chi_2 = \ker\chi_1}\Big) = 0$$

Also ist $\chi_1 = \chi_2$. Für die Surjektivität betrachten wir ein maximales, nichttriviales Ideal $J \subsetneq A$. Dann ist $\operatorname{dist}(J, 1) = 1$, denn $\mathring{B}_A(1,1) \subset \operatorname{Inv}(A)$ nach Satz 1.5. Dann ist $1 \notin \overline{J} \lhd A$. Da J maximal ist, folgt $J = \overline{J}$. Damit ist ${}^A/_J$ eine einfache, abelsche, unitale Banachalgebra. Mit Proposition 1.11 folgt ${}^A/_J \cong \mathbb{C}$. Damit ist $\chi\colon A \to {}^A/_J \cong \mathbb{C}$ ein Charakter mit $\ker\chi = J$. □

Einsen auseinanderhalten

Index

Die *Seitenzahlen* sind mit Hyperlinks versehen und somit anklickbar

Abbildungsverzeichnis

To-do's und andere Baustellen