Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Fachbereich 10 Mathematik und Informatik

Übungen Einführung in die Algebra

Aufarbeitung der Übungsaufgaben

Tobias Wedemeier

15. November 2014
gelesen von
Prof. Dr. Kramer

Hierbei handelt es sich um eine Aufarbeitung der Übungsaufgabenvon **Prof. Dr. Kramer**, WWU Münster, aus der Vorlesung **Übungen Einführung in die Algebra** im Wintersemester 2014/15.

Für Fehler in der Aufarbeitung wird keine Haftung übernommen. Hinweise auf Fehler sind gerne gesehen, hierfür kann man mich in der Uni ansprechen oder alternativ eine e-Mail an:
tobias.wedemeier@gmx.de
Auch ist eine Mitarbeit über Github möglich.

Die Beweise sind größtenteils aus den Musterlösungen oder vom Autor selber und sind verkürzt oder vereinfacht, für die Korrektheit wird keine Haftung übernommen. Sie sind nur zum Verständnis gedacht.

Inhaltsverzeichnis

Zettel 1

Aufgabe 1.2

Sei G eine Gruppe. A, B Untergruppen von G.
Zz: Wenn $A \cup B$ eine Untergruppe ist, dann gilt: $A \subseteq B$ oder $b \subseteq A$.

Beweis:
Annahme: $A \not\subseteq B$. Also ex. ein $a \in A \backslash B$ und $b \in B$ beliebig. Betrachte $ab \in A \cup B$, da AB Untergruppe. Also ist $ab \in A$ oder $ab \in B$.
Sei $ab \in B$ und $b^{-1} \in B$, da B Untergruppe, folgt, dass $abb^{-1} = a \in B$. ↯ zur Annahme.
Also $ab \in A$ und $a^{-1} \in A$, da A Untergruppe, folgt, dass $a^{-1}ab = b \in A$. Da b beliebig war, folgt $B \subseteq A$. □

Aufgabe 1.4

Gruppe G. A, B Untergruppen.Wir definieren $AB := \{ab \mid a \in A, b \in B\}$.

(i) Die Menge AB ist im allgemeinen keine Untergruppe.

(ii) Wenn weiter gilt $AB = BA$, dann ist AB eine Untergruppe.

Beweise klar! (✓)

Zettel 2

Aufgabe 2.1

Eine Gruppe G hat **Exponent** k, wenn für jedes Gruppenelement $g \in G$ gilt: $g^k = e$.
ZZGruppen mit Exponent 2 sind abelsch.

Beweis:
Aus $g^2 = e$ folgt $g = g^{-1}$ $\forall g \in G$. $a, b \in G$ beliebig

$$ab = (ab)^{-1} \overset{\text{G Gruppe}}{=} b^{-1}a^{-1} = ba$$

□

Anmerkung: Gruppen mit Exponenten 3 sind im allgemeinen nicht abelsch.

Aufgabe 2.3

Menge X und $Sym(X)$. Der **Träger einer Permutation** $\sigma \in Sym(X)$ ist definiert wie folgt: $\operatorname{supp}(\sigma) := \{x \in X \mid \sigma(x) \neq x\}$.

(i) Wenn $\operatorname{supp}(\rho) \cap \operatorname{supp}(\sigma) = \emptyset$ für $\rho, \sigma \in Sym(X)$ gilt, dann folgt $\rho \circ \sigma = \sigma \circ \rho$.

(ii) Wenn $\operatorname{supp}(\rho) \cap \operatorname{supp}(\sigma) = \emptyset$ und $\rho \circ \sigma = \mathrm{id}$ für $\sigma, \rho \in Sym(X)$ gilt, dann folgt $\rho = \sigma = \mathrm{id}$.

Beweis:

(i) Es gilt: $\rho \circ \sigma = \begin{cases} x, & \text{wenn } x \notin \operatorname{supp}(\rho),\ \operatorname{supp}(\sigma) \\ \rho(x), & \text{wenn } x \in \operatorname{supp}(\rho) \\ \sigma(x), & \text{wenn } x \in \operatorname{supp}(\sigma) \end{cases}$ oder $\sigma \circ \rho = \begin{cases} x, & \text{wenn } x \notin \operatorname{supp}(\rho),\ \operatorname{supp}(\sigma) \\ \rho(x), & \text{wenn } x \in \operatorname{supp}(\rho) \\ \sigma(x), & \text{wenn } x \in \operatorname{supp}(\sigma) \end{cases}$

Da $\operatorname{supp}(\rho) \cap \operatorname{supp}(\sigma) = \emptyset$ gilt und somit x nicht von beiden Permutationen verändert wird. Da Permutationen bijektiv nach Definition sind, ist dies wohldefiniert.

(ii) Nach (i) gilt, dass $\rho \circ \sigma = \begin{cases} x, & \text{wenn } x \notin \operatorname{supp}(\rho),\ \operatorname{supp}(\sigma) \\ \rho(x), & \text{wenn } x \in \operatorname{supp}(\rho) \\ \sigma(x), & \text{wenn } x \in \operatorname{supp}(\sigma) \end{cases}$ gilt.

Also muss $\rho(x) = x$ gelten, da $\rho \circ \sigma$ gilt, analog $\sigma(x) = x$. Also folgt $\rho = \sigma = \mathrm{id}$.

Zettel 3

Aufgabe 3.1

Gegeben seinen Gruppen G und H.

(i) G abelsch $\Leftrightarrow f : G \to G,\ f(g) = g^{-1}$ ist Gruppenhomomorphismus.

(ii) Gruppenhomomorphismus $\phi : G \to H$. Weiter sei $g \in G$ mit $o(g) < \infty$.
Die Ordnung von $\phi(g)$ ist eine Teiler der Ordnung von g.

Beweis:
zu (i): $\Rightarrow$:

$$f(gh) = (gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1} = g^{-1}h^{-1} = f(g)f(h)$$

Also f ein Gruppenhomomorphismus.
$\Leftarrow$:Seien $g, h \in G$ bel. Da f ein Gruppenhomomorphismus ist gilt

$$gh = f((gh)^{-1}) = f(h^{-1}g^{-1}) = f(h^{-1})f(g^{-1}) = hg$$

Also ist G abelsch. □
zu (ii): Da $o(g) < \infty$, ex. ein $n \in \mathbb{N}$ mit $o(g) = n$. Wir haben also

$$e_H = \phi(e_G) = \phi(g^n) = \phi(g)^n$$

Also ist $o(\phi(g)) < \infty$, folglich ex. ein $m \in \mathbb{N}$ mit $o(\phi(g)) = m$. Angenommen $m \nmid n$. Dann ex. $k, l \in \mathbb{N},\ 1 \leq k < m$, so dass gilt: $n = l \cdot m + k$. Dann folgt

$$e_H = \phi(g^n) = \phi(g^{l\cdot m})\phi(g^k) = (\phi(g)^m)^l\phi(g)^k = \phi(g)^k \neq e_H \ ↯$$

□

Aufgabe 3.2

Sei G eine Gruppe und $H \subseteq G$ eine Untergruppe.

(i) Die Abbildung

$$\psi : \{gH \mid g \in G\} \to \{Hg \mid g \in G\},\ gH \mapsto Hg^{-1}$$

ist eine wohldefinierte Abbildung, die die Linksnebenklassen bijektiv auf die Rechtsnebenklassen abbildet.

(ii) Es gelte $[G : H] = 2$.
Die Untergruppe H ist ein Normalteiler in G.

Beweis:
zu (i): Wohldefiniertheit:
Gegeben sei $gH = g'H$. Zz: $Hg^{-1} = Hg'^{-1}$.

$$(gH)^{-1} = \{(gh)^{-1} \mid h \in H\} = \{h^{-1}g^{-1} \mid h \in H\} = \{hg^{-1} \mid h \in H\} = Hg^{-1}$$

Da $gH = g'H$ gilt, folgt $(gH)^{-1} = (g'H)^{-1}$ und mit der obigen Gleichung folgt $Hg^{-1} = Hg'^{-1}$. Also ist ψ wohldefiniert (oder mit $gH = g'H$ folgt $g \in g'H$, also $\exists h \in H$ mit $g = g'h$).
ψ injektiv: Sei $\psi(gH) = \psi(g'H)$. Also

$$\begin{aligned} Hg^{-1} = Hg'^{-1} &\Rightarrow g^{-1} \in Hg'^{-1} \Rightarrow \exists h \in H :\ g^{-1} = hg'^{-1} \\ &\Rightarrow g = g'h^{-1} \Rightarrow g \in g'H \Rightarrow gH = g'H \end{aligned}$$

Also ist ψ injektiv.
ψ surjektiv: Sei $Hg \in \{Hg \mid g \in G\}$ beliebig. Dann ist $g^{-1}H$ ein Urbild von Hg unter ψ.
Also ist ψ bijektiv. □

zu (ii):

Index

Die Seitenzahlen *sind mit Hyperlinks zu den entsprechenden Seiten versehen, also anklickbar!*

Abbildungsverzeichnis