Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

Fachbereich 10
Mathematik und
Informatik

Skript Einführung in die Funktionalanalysis

Mitschrift der Vorlesung „Einführung in die Funktionalanalysis“ von Prof. Dr. Wilhelm Winter

Jannes Bantje

9. Dezember 2014

Aktuelle Version verfügbar bei:

GitHub (inklusive Sourcecode)
`https://github.com/JaMeZ-B/latex-wwu`

Bittorrent Sync
`B6WH2DISQ5QVYIRYIEZSF4ZR2IDVKPN3I`

Vorwort — Mitarbeit am Skript

Dieses Dokument ist eine Mitschrift aus der Vorlesung „Einführung in die Funktionalanalysis, WiSe 2014“, gelesen von Prof. Dr. Wilhelm Winter. Der Inhalt entspricht weitestgehend dem Tafelanschrieb. Für die Korrektheit des Inhalts übernehme ich keinerlei Garantie! Für Bemerkungen und Korrekturen – und seien es nur Rechtschreibfehler – bin ich sehr dankbar. Korrekturen lassen sich prinzipiell auf drei Wegen einreichen:

- Persönliches Ansprechen in der Uni, Mails an `j.bantje@wwu.de` (gerne auch mit annotieren PDFs)
- *Direktes* Mitarbeiten am Skript: Den Quellcode poste ich auf GitHub (siehe oben), also stehen vielfältige Möglichkeiten der Zusammenarbeit zur Verfügung: Zum Beispiel durch Kommentare am Code über die Website und die Kombination Fork + Pull Request. Wer sich verdient macht oder ein Skript zu einer Vorlesung, die ich nicht besuche, beisteuern will, dem gewähre ich gerne auch Schreibzugriff.

  Beachten sollte man dabei, dass dazu ein Account bei `github.com` notwendig ist, der allerdings ohne Angabe von persönlichen Daten angelegt werden kann. Wer bei GitHub (bzw. dem zugrunde liegenden Open-Source-Programm „`git`“) – verständlicherweise – Hilfe beim Einstieg braucht, dem helfe ich gerne weiter. Es gibt aber auch zahlreiche empfehlenswerte Tutorials im Internet.[1]
- *Indirektes* Mitarbeiten: TeX-Dateien per Mail verschicken.

  Dies ist nur dann sinnvoll, wenn man einen ganzen Abschnitt ändern möchte (zB. einen alternativen Beweis geben), da ich die Änderungen dann per Hand einbauen muss!

Vorlesungshomepage

`https://wwwmath.uni-muenster.de/u/wilhelm.winter/wwinter/funktionalanalysis.html`

[1] zB. `https://try.github.io/levels/1/challenges/1`, ist auf Englisch, aber dafür interaktives LearningByDoing

Inhaltsverzeichnis

1. Metrische Räume und der Satz von Baire 1

1.1. Definition: Metrischer Raum . . . 1
1.2. Definition: Offen, abgeschlossen und Abschluss . . . 1
1.3. Definition: Stetigkeit, gleichmäßige Stetigkeit, Isometrie . . . 1
1.4. Definition: Cauchy-Folge und Vollständigkeit . . . 1
1.5. Satz: Existenz einer eindeutigen Vervollständigung metrischer Räume . . . 2
1.6. Definition: Raum der beschränkten, stetigen Abbildungen . . . 3
1.7. Bemerkung: $d_{W,X}$ als Metrik auf $C(W, X)$ . . . 3
1.8. Proposition: X vollständig $\Rightarrow C - B(W, X)$ und $C8W, X$ vollständig . . . 3
1.9. Proposition über eine Folge von Bällen . . . 4
1.10. Satz von Baire . . . 4
1.11. Bemerkungen zum Satz von Baire . . . 5
1.12. Korollar: Satz der gleichmäßigen Beschränktheit . . . 6

2. Normierte Räume, Hahn-Banach Sätze 7

2.1. Definition: Topologischer Vektorraum . . . 7
2.2. Proposition: Unterräume topologischer Vektorräume sind topologische Vektorräume . . . 7
2.3. Proposition: Normierte Vektorräume sind topologische Vektorräume . . . 7
2.4. Proposition: Stetigkeit einer linearen Abbildung zwischen topologischen Vektorräumen 7
2.5. Definition: Stetige Funktionale und Operatoren . . . 8
2.6. Bemerkung: Vektorraumstruktur auf $\mathcal{L}(X, Y)$, Algebrastruktur auf $\mathcal{L}(X, X)$ . . . 8
2.7. Proposition: Stetigkeit linearer Abbildungen mittels Normabschätzung . . . 8
2.8. Definition: Operatornorm . . . 9
2.9. Propostion: $\mathcal{L}(X, Y)$ ist ein normierter Raum mit der Operatornorm . . . 9
2.10. Definition: Normierte $\mathbb{K}$-Algebra . . . 9
2.11. Beispiele für normierte Algebren . . . 9
2.12. Proposition: Norm auf dem Produkt normierter Räume . . . 10
2.13. Proposition und Definition: Norm auf dem Quotientenraum . . . 10
2.14. Definition: Banachraum und Banachalgebra . . . 11
2.15. Beispiel für eine Banachalgebra . . . 11
2.16. Proposition: Produkte und Quotienten von Banachräumen . . . 11
2.17. Definition: Sublineare Abbildung . . . 11
2.18. Beispiele für sublineare Abbildungen . . . 12
2.19. Proposition: Die sublinearen Abbildungen $\mathcal{S}(X)$ sind nach unten induktiv geordnet . . . 12
2.20. Propostion: Minimale Elemente in $\mathcal{S}(X)$ sind genau die lineare Abbildungen . . . 12
2.21. Satz von Hahn-Banach . . . 13
2.22. Satz (Hahn-Banach): Existenz einer linearen Fortsetzung . . . 13
2.23. Satz . . . 13
2.24. Satz . . . 14
2.25. Definition: Konvexe Teilmenge eines $\mathbb{K}$-Vektorraums . . . 14
2.26. Satz . . . 14
2.27. Satz . . . 15

3. Operatoren zwischen Banachräumen, Satz von der offenen Abbildung 16

3.1. Proposition: Y vollständig $\Rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ ist vollständig . . . 16
3.2. Corollar: Dualraum ist vollständig und $\mathcal{L}(X, X)$ ist Banachalgebra, falls X Banachraum 16
3.3. Definition und Proposition: lineare Isometrie $\iota_X : X \to X^{**}$ . . . 16
3.4. Definition und Proposition: Die transponierte Abbildung . . . 17
3.5. Satz: Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit für Banachräume . . . 18

3.6. Corollar . . . 18
3.7. Corollar . . . 18
3.8. Satz: Prinzip der offenen Abbildung . . . 19
3.9. Corollar: Satz von der inversen Abbildung . . . 19
3.10. Corollar . . . 20
3.11. Corollar . . . 20

4. L^p-Räume und der Satz von Riesz-Fischer **21**
4.1. Erinnerung: $L^1(\mu)$ ist ein Banachraum . . . 21
4.2. Beispiele für L^1-Räume . . . 21
4.3. Definition und Proposition: Der Raum $L^p(\mu)$ . . . 21
4.4. Proposition: Speziallfall der Youngschen Ungleichung . . . 22
4.5. Satz: Höldersche Ungleichung . . . 22
4.6. Satz: Minkowskische Ungleichung . . . 23
4.7. Corollar: $L^p(\mu)$ ist ein normierter Vektorraum für $1 \leqslant p < \infty$ . . . 23
4.8. Definition und Proposition: Der normierte Raum $L^\infty(\mu)$ und . . . 23
4.9. Beispiele für L^p-Räume . . . 24
4.10. Proposition: Lineare Isometrie $\iota_p : L^p(\mu) \to L^q(\mu)^*$ . . . 24
4.11. Satz von Riesz-Fischer . . . 24

5. Schwache Topologien, Reflexivität **26**
5.1. Definition: Schwache Topologie . . . 26
5.2. Bemerkungen zu schwachen Topologie . . . 26
5.3. Proposition: Die schwache Topologie ist Hausdorffsch . . . 26
5.4. Proposition: Äquivalenz zu schwacher Konvergenz . . . 26
5.5. Corollar . . . 27
5.6. Beispiel: Konvergenz impliziert schwache Konvergenz, aber nicht umgekehrt . . . 27
5.7. Proposition . . . 27
5.8. Definition: Die w^*-Topologie auf X^* . . . 27
5.9. Bemerkungen zur w^*-Topologie auf X^* . . . 27
5.10. Satz (Banach-Alaoglu) . . . 28
5.11. Erinnerung: separabel, 1. abzählbar, 2. abzählbar . . . 29
5.12. Satz: Metrisierbarkeit von $\overline{B_{X^*}(0,1)}$ bezüglich der w^*-Topologie . . . 29
5.13. Definition: Reflexiver normierter Raum . . . 30
5.14. Proposition: Abgeschlossene Unterräume von reflexiven Banachräumen sind reflexiv . . 30
5.15. Proposition: Für Banachräume gilt: X reflexiv $\iff$ X^* reflexiv . . . 30
5.16. Satz: Die Einheitskugel eines Banachraumes X liegt w^*-dicht in der Einheitskugel von X^{**} . . . 31
5.17. Corollar . . . 32
5.18. Satz . . . 32
5.19. Bemerkung . . . 32

6. Gleichmäßig konvexe Räume, noch einmal L^p **33**
6.1. Definition und Proposition: Gleichmäßig konvexer Raum . . . 33
6.2. Beispiel für gleichmäßig konvexe Räume . . . 33
6.3. Definition und Proposition: Strikt konvexer Raum . . . 34
6.4. Proposition . . . 34
6.5. Bemerkung . . . 35
6.6. Proposition: Jensensche Ungleichung . . . 35
6.7. Proposition . . . 35
6.8. Satz: Für $1 < p < \infty$ ist $L^p(\mu)$ gleichmäßig konvex . . . 36
6.9. Satz . . . 36

A. Anhang **37**
A.1. Vierecksungleichung 37

Index **A**

Abbildungsverzeichnis **B**

Todo list **B**

1. Metrische Räume und der Satz von Baire

1.1. Definition

Ein **metrischer Raum** ist ein Paar (X, d), wobei X eine Menge und $d : X \times X \to [0, \infty)$ ist, sodass *14 Okt*

1) $d(x, y) = 0 \iff x = y \; \forall x, y \in X$
2) $d(x, y) = d(y, x) \; \forall x, y \in X$
3) $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z) \; \forall x, y, z \in X$

1.2. Definition

Sei (X, d) ein metrischer Raum

- Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt **offen**, falls für jedes $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass
$$B(x, \varepsilon) := \{y \in X \,|\, d(x, y) < \varepsilon\} \subset U$$
- Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt **abgeschlossen**, falls $X \setminus A$ offen ist (als Teilmenge von X).
- $\mathcal{T}X := \{U \subset X \,|\, U \text{ offen}\}$ ist die Topologie auf X (die von der Metrik d induziert wird)
- Falls $W \subset X$ eine Teilmenge ist, dann bezeichnet $\overline{W}$ den **Abschluss** von W, d.h. die kleinste abgeschlossene Teilmenge von X, die W enthält. Es gilt
$$\overline{W} = \bigcap_{A \subset X \text{ abg.}, W \subset A} A$$

Für metrische Räume gilt: $\overline{W} = \{\lim_n x_n \,|\, (x_n)_n \subset W \text{ konvergente Folge}\}$. Warum gilt $W \subset \overline{W}$?

1.3. Definition

Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen zwei metrischen Räumen (X, d_X) und (Y, d_Y) heißt

- **stetig in** $x \in X$, falls $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x' \in X : d_X(x, x') < \delta \Longrightarrow d_Y\big(f(x), f(x')\big) < \varepsilon$
- **stetig**, falls f in jedem Punkt $x \in X$ stetig ist.
(Äquivalent: Für jede offene Menge V in Y ist $f^{-1}(V)$ offen in X)
- **gleichmäßig stetig**, falls $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x, x' \in X : d_X(x, x') < \delta \Longrightarrow d_Y\big(f(x), f(x')\big) < \varepsilon$.
- f heißt **Isometrie**, falls $\forall x, x' \in X : d_X(x, x') = d_Y\big(f(x), f(x')\big)$. *automatisch injektiv*
- f heißt **isometrischer Isomorphismus**, falls f bijektiv und isometrisch ist. *f^{-1} auch*

1.4. Definition

Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum (X, d) heißt **Cauchy-Folge**, falls
$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, k > N : d(x_n, x_k) < \varepsilon.$$

(X, d) heißt **vollständig**, falls jede Cauchy-Folge in X konvergiert.

1.5. Satz

Sei (X,d) ein metrischer Raum. Dann existiert ein vollständiger metrischer Raum $(\tilde{X},\tilde{d})$ und eine Isometrie $\iota : X \hookrightarrow \tilde{X}$, sodass $\overline{\iota(X)} = \tilde{X}$ (d.h. $\iota(X)$ ist dicht in $\tilde{X}$). $(\tilde{X},\tilde{d})$ heißt **Vervollständigung** von (X,d) und ist eindeutig bis auf isometrische Isomorphie.

Beweis

Eindeutigkeit: Angenommen, $(\hat{X},\hat{d})$ ist ein weiterer vollständiger metrischer Raum und $\kappa : X \to \hat{X}$ eine Isometrie mit $\overline{\kappa(X)} = \hat{X}$. Definiere $\gamma : \hat{X} \to \tilde{X}$ wie folgt: Falls $y \in \hat{X}$, wähle eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X, sodass $y = \lim_{n\to\infty} \kappa(x_n)$. Setze nun

$$\gamma(y) := \lim_{n\to\infty} \iota(x_n) \in \tilde{X}$$

Achtung Wortspiel: Beweis *vervollständigen* ;-D

Zu zeigen: γ ist ein isometrischer Isomorphismus.

Injektivität: Seien $y, y' \in \hat{X}$ mit $\gamma(y) = \gamma(y')$. Dann existieren Folgen $(x_n)_n, (x'_n)_n$ in X mit

$$\lim_{n\to\infty} \iota(x_n) = \lim_{n\to\infty} \iota(x'_n)$$

Existenz: Konstruktion von $(\tilde{X},\tilde{d})$: Setze $Y := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (x_n)_n \text{ ist Cauchy-Folge in } X\}$. Definiere

$$(x_n)_n \sim (x'_n) :\iff \lim_{n\to\infty} d(x_n, x'_n) = 0$$

$\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf Y. Definiere nun $\tilde{X} := {}^{Y}\!/\!_{\sim}$ und $\tilde{d} : \tilde{X} \times \tilde{X} \to [0,\infty)$ durch

$$\tilde{d}\big([(x_n)_n],[(x'_n)_n]\big) := \lim_{n\to\infty} d(x_n, x'_n)$$

$\tilde{d}$ ist eine wohldefiniert, d.h. falls $[(x_n)_n] = [(y_n)_n]$ und $[(x'_n)_n] = [(y'_n)_n]$, dann ist

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x'_n) = \lim_{n\to\infty} d(y_n, y'_n). \qquad \text{(leichte Übung)}$$

Weiter ist $\big(d(x_n x'_n)\big)_n$ eine Cauchy-Folge in dem vollständigen Raum $[0,\infty)$ und somit konvergent: Sei dazu $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $d(x_n, x_m) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ und $d(x'_n, x'_m) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n, m \geqslant N$. Dann gilt nach der Vierecksungleichung (siehe Anhang A.1)

$$\left|d(x_n, x'_n) - d(x_m, x'_m)\right| \leqslant d(x_n, x_m) + d(x'_n, x'_m) \leqslant \varepsilon$$

Einbettung von X **:** Definiere nun $\iota : X \to \tilde{X}$ durch $x \mapsto [(x,x,x,\ldots)] \in \tilde{X}$. ι ist Isometrie, da

$$\tilde{d}\big(\iota(x),\iota(y)\big) = \lim_{n\to\infty} d(x,y) = d(x,y)$$

Sei nun $[(x_n)_n] \in \tilde{X}$ und $\varepsilon > 0$. Da $(x_n)_n$ eine Cauchy-Folge ist, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n, m \geqslant N$ gilt $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Dann gilt

$$\tilde{d}\big(\iota(x_N),[(x_n)_n]\big) = \lim_{n\to\infty} d(x_N, x_n) < \varepsilon$$

$\overline{x} \in \tilde{X}$

Vollständigkeit von $(\tilde{X},\tilde{d})$: Sei $(\overline{x}^m)_m$ eine Cauchyfolge in $\tilde{X}$.

$$\implies \forall \varepsilon > 0 : \exists M(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall m, m' > M : \tilde{d}\left(\overline{x}^m, \overline{x}^{m'}\right) < \frac{\varepsilon}{3}$$

Wenn $\overline{x}^m = [(x_n^m)_n]$ und $\overline{x}^{m'} = \left[(x_n^{m'})_n\right]$, dann gilt also für alle $m, m' > M(\varepsilon)$

$$\lim_{n\to\infty} d\left(x_n^m, x_n^{m'}\right) < \frac{\varepsilon}{3} \qquad [*]$$

Für alle m ist $(x_n^m)_n$ eine Cauchyfolge, also gilt

$$\forall m : \exists N(m) : \forall n, n' \geqslant N(m) : d(x_n^m, x_{n'}^m) < \frac{1}{m} \qquad \textbf{[**]}$$

Setze nun $z_n := x_{N(n)}^n$. Behauptung: $(z_n)_n$ ist eine Cauchyfolge. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt für $n, m > N = \max\{M(\varepsilon), \frac{3}{\varepsilon}\}$ für ein $k > N(m), N(n)$

$d(z_n, z_m)$ ist unabhängig von k, also kann man k beliebig groß wählen

$$d(z_n, z_m) = d\left(x_{N(n)}^n, x_{N(m)}^m\right) \leqslant \underbrace{d\left(x_{N(n)}^n, x_k^n\right)}_{\overset{[**]}{<} \frac{1}{n} < \frac{1}{N} \leqslant \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{d\left(x_k^n, x_k^m\right)}_{\overset{[*]}{\leqslant} \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{d\left(x_k^m, x_{N(m)}^m\right)}_{\overset{[**]}{<} \frac{1}{m} < \frac{1}{N} \leqslant \frac{\varepsilon}{3}} < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ $(z_n)_n$ ist eine Cauchyfolge, also

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N_z(\varepsilon) : \forall n, m > N_z(\varepsilon) : d(z_n, z_m) < \varepsilon \qquad \textbf{[\#]}$$

Es bleibt zu zeigen: $\lim_{m\to\infty} \overline{x}^m = [(z_n)_n]$. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Dann gilt für $m \geqslant \max\{\frac{2}{\varepsilon}, N_z(\varepsilon)\}$

$$\tilde{d}\left(\overline{x}^m, [(z_n)_n]\right) = \lim_{n\to\infty} d\left(x_n^m, x_{N(n)}^n\right) \leqslant \lim_{n\to\infty} \left(\underbrace{d\left(x_n^m, x_{N(m)}^m\right)}_{\overset{[**]}{<} \frac{1}{m} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{d\left(x_{N(m)}^m, x_{N(n)}^n\right)}_{= d(z_m, z_n) \overset{[\#]}{<} \frac{\varepsilon}{2}} \right) < \varepsilon$$

Also gilt $\overline{x}^m \xrightarrow{m\to\infty} [(z_n)_n]$ und $(\tilde{X}, \tilde{d})$ ist vollständig. □

1.6. Definition

Sei $(W, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und (X, d) ein metrischer Raum. Sei

$$C_b(W, X) = \{f : W \to X \mid f \text{ stetig und beschränkt}\}$$

versehen mit der Metrik $d_{W,X}$, definiert durch

$$d_{W,X}(f, g) = \sup_{t \in W} d\big(f(t), g(t)\big)$$

1.7. Bemerkung

Auf $C(W, X) = \{f : W \to X \text{ stetig}\}$ ist $d_{W,X}$ eine **erweiterte Metrik**, d.h. der Wert ∞ ist möglich. $\tilde{d}_{W,X} := \min\{1, d_{W,X}\}$ ist eine „echte" Metrik auf $C(W, X)$.

1.8. Proposition

Falls X vollständig ist, dann sind $C_b(W, X)$ und $C(W, X)$ vollständig (bezüglich $d_{W,X}$ bzw. $\tilde{d}_{W,X}$).

Beweis
Sei $(f_n)_n$ eine Cauchy-Folge in $C_b(W, X)$, also

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m > N : \sup_{t \in W} d\big(f_n(t), f_m(t)\big) < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ für alle t ist $\big(f_n(t)\big)_n$ eine Cauchyfolge in X. Da X vollständig ist, existiert ein $x_t \in X$ sodass $f_n(t) \xrightarrow{n\to\infty} x_t$. Definiere $f(t) := x_t$ punktweise.

Vorbereitung: Es gilt $\forall \varepsilon > 0 : \exists N_t$ sodass $d(x_t, f_{N_t}(t)) \leqslant \varepsilon$. Weiter ist

$$\sup_{t \in W} d\big(f_n(t), f_m(t)\big) \leqslant \varepsilon \;\; \forall n, m \geqslant N_t$$

$$\Rightarrow \forall t : d(f_n(t), f_m(t)) \leqslant \varepsilon \;\; \forall n, m \geqslant N$$

Beweis zu Ende führen

1.9. Proposition

Sei (X,d) ein vollständiger metrischer Raum und $\left(\overline{B}(x_n,\varepsilon_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\overline{B}(x_{n+1},\varepsilon_{n+1})\subseteq\overline{B}(x_n,\varepsilon_n)$ und $\varepsilon_n\xrightarrow{n\to\infty}0$. Dann existiert genau ein Punkt in $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{B}(x_n,\varepsilon_n)$.

Beweis

Existenz: Behauptung: Die Folge der Mittelpunkte $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge: Sei $\varepsilon>0$. Finde $N\in\mathbb{N}$, sodass $\varepsilon_n\leqslant\varepsilon$ für alle $n\geqslant N$. Dann gilt für alle $n\geqslant m\geqslant N$

$$d(x_n,x_m)\leqslant\varepsilon_m\leqslant\varepsilon,$$

da $x_n\in\overline{B}(x_m,\varepsilon)$ ist. Da X vollständig ist, existiert ein $x\in X$ mit $x_n\xrightarrow{n\to\infty}x$.

Behauptung: $x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{B}(x_n,\varepsilon_n)$. Wähle dazu ein $N\in\mathbb{N}$. Dann ist $(x_n)_{n\geqslant N}$ eine Cauchy-Folge in $\overline{B}(x_N,\varepsilon_N)$. $\overline{B}(x_N,\varepsilon_N)$ ist ein abgeschlossener Teilraum von X und somit vollständig. Also ist $x\in\overline{B}(x_N,\varepsilon_N)$. Da N beliebig war, gilt $x\in\overline{B}(x_n,\varepsilon_n)$ für jedes $n\in\mathbb{N}$.

Eindeutigkeit: Es seien $x,y\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{B}(x_n,\varepsilon_n)$, also $x,y\in\overline{B}(x_n,\varepsilon_n)$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Dann gilt

$$d(x,y)\leqslant d(x,x_n)+d(x_n,y)\leqslant 2\cdot\varepsilon_n\xrightarrow{n\to\infty}0$$

für jedes $n\in\mathbb{N}$ und somit $d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$. □

1.10. Satz von Baire[2]

Es gelten folgende äquivalente Formulierungen:

a) Sei (X,d) ein vollständiger metrischer Raum und $A_0,A_1,\dots$ eine Folge abgeschlossener Teilmengen. Falls $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n$ eine offene Kugel enthält, so auch eines der A_n.

b) In einem vollständigen metrischen Raum hat eine abzählbare Vereinigung von abgeschlossenen Mengen ohne innere Punkte keine inneren Punkte.

c) In einem vollständigen metrischen Raum ist ein abzählbarer Durchschnitt von dichten offenen Mengen wieder dicht.

Beweis
Zunächst die Äquivalenz:

a)⇒b): Klar, da b) Kontraposition von a) ist.

b)⇒c): Sei $U_n\subseteq X$ offen und dicht $\Rightarrow X\setminus U_n\subseteq X$ abgeschlossen und hat somit keine inneren Punkte. Aus b) folgt nun

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}X\setminus U_n=X\setminus\bigcap_{n\in\mathbb{N}}U_n$$

hat keine inneren Punkte. Also ist $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}U_n$ dicht in X.

c)⇒a): ebenso.

Wir wollen nun a) durch Widerspruch beweisen, d.h. wir nehmen an, dass gilt: Jede offene Kugel schneidet $X\setminus A_k$ für jedes $k\in\mathbb{N}$. Dazu wollen wir Folgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\subset X$, $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}\subset(0,1]$ finden mit

(i) $\varepsilon_k<\frac{1}{k+1}$,

(ii) $\overline{B}(x_{k+1},\varepsilon_{k+1})\subset(X\setminus A_k)\cap B(x_k,\varepsilon_k)\subset\overline{B}(x_k,\varepsilon_k)$,

[2] nach René Louis Baire, https://de.wikipedia.org/wiki/René_Louis_Baire

(iii) $\overline{B}(x_k, \varepsilon_k) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$

für $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \overset{\text{(iii),(ii)}}{\supset} \bigcap \overline{B}(x_k, \varepsilon_k) \overset{\text{(ii)}}{\subset} \bigcap_{k\in\mathbb{N}} (X \setminus A_k) \cap B(x_k, \varepsilon_k) \subset \bigcap_{k\in\mathbb{N}} X \setminus A_k = X \setminus \left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \right)$$

Aber wegen (i) und (ii) existiert nach Proposition 1.9 ein $x \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \overline{B}(x_k, \varepsilon_k)$. ↯

Wir suchen also eine Abbildung $\overline{c} : \mathbb{N} \to X \times (0,1], k \mapsto (x_k, \varepsilon_k)$ mit (i),(ii),(iii) für $k \in \mathbb{N}$. Setze

$$P_m := \left\{ c : \{0, \dots, m\} \to X \times (0,1] \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{(i),(iii) gilt für } k \in \{0, \dots, m\}, \\ \text{(ii) gilt für } k \in \{0, \dots, m-1\} \end{array} \right\}$$
$$P_\infty := \left\{ c : \mathbb{N} \to X \times (0,1] \;\middle|\; \text{(i),(ii),(iii) gilt für } k \in \mathbb{N} \right\}$$

Die Menge $P := \left(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} P_m\right) \cup P_\infty$ ist partiell geordnet bezüglich $\prec$:

$$c \prec c' \text{ falls } m \leqslant m' \text{ und } c'\big|_{\{0,\dots,m\}} = c, \text{ bzw.} c' = c \text{ falls } m = m' = \infty$$

P ist nicht leer, denn nach Vorraussetzung existiert (x_0, ε_0) mit $0 < \varepsilon_0 < 1$ und $\overline{B}(x_0, \varepsilon_0) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, d.h. $0 \mapsto (x_0, \varepsilon_0) \in P_0$. Jede total geordnete Teilmenge $\emptyset \neq \Gamma$ von P besitzt eine obere Schranke:

- Falls Γ ein $c \in P_\infty$ enthält, so ist c obere Schranke. *warum?*
- Ebenso falls Γ ein $c \in P_{\overline{m}}$ enthält und $\Gamma \cap P_{m'} = \emptyset$ für alle $\overline{m} < m' \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.
- Falls $\Gamma \subset \bigcup_{\mathbb{N}} P_m$, aber $\Gamma \not\subset \bigcup_{m \leqslant \overline{m}} P_m$ für jedes $\overline{m}$, so definieren wir eine obere Schranke in P_∞ durch Einschränkung. *wie genau?*

Mit dem Lemma von Zorn folgt, dass P ein maximales Element $\overline{c}$ besitzt. Behauptung: $\overline{c} \in P_\infty$ wie gewünscht:

Falls $\overline{c} \in P_m$ für ein $m \in \mathbb{N}$, so gilt nach Annahme, dass $(X \setminus A_m) \cap B(x_m, \varepsilon_m) \neq \emptyset$. Dann existiert aber $(x_{m+1}, \varepsilon_{m+1}) \in X \times (0,1]$ mit $\varepsilon_{m+1} < \frac{1}{m+2}$ und

$$\overline{B}(x_{m+1}, \varepsilon_{m+1}) \subset (X \setminus A_m) \cap B(x_m, \varepsilon_m)$$

Definiere $\overline{\overline{c}} : \{0, \dots, m+1\} \to X \times (0,1]$ durch

$$k \longmapsto \begin{cases} (x_k, \varepsilon_k), & \text{falls } k = m+1 \\ \overline{c}(k), & \text{falls } k \in \{0, \dots, m\} \end{cases},$$

dann gilt $\overline{c} \prec \overline{\overline{c}} \in P_{m+1}$. ↯ zur Maximalität von $\overline{c}$. □

1.11. Bemerkungen

(i) Die Aussage gilt auch für lokalkompakte Hausdorffräume. (Übung)

(ii) Tatsächlich genügt eine schwächere Form des Auswahlaxioms(DC); das abzählbare Auswahlaxiom jedoch nicht.

(iii) Falls X **separabel** ist (d.h. falls eine abzählbare dichte Teilmenge von X existiert), dann lässt sich der Satz auch ohne (AC) beweisen. (Übung)

1.12. Korollar: Satz der gleichmäßigen Beschränktheit

Sei (X,d) ein vollständiger metrischer Raum. Sei $F \subset C(X,\mathbb{R})$ eine Menge, die **punktweise gleichmäßig beschränkt** ist, d.h. für jedes $x \in X$ existiert $K_x \in \mathbb{R}$, sodass

$$|f(x)| \leqslant K_x \;\; \forall f \in F.$$

Dann existieren $\emptyset \neq U \subset X$ offen und $K \in \mathbb{R}$ so, dass

$$|f(x)| \leqslant K \;\; \forall x \in U, f \in F$$

Beweis
Definiere

$$X \supset A_n := \big\{ x \in X \,\big|\, |f(x)| \leqslant n \forall f \in F \big\} = \bigcap_{f \in F} f^{-1}\big([-n,n]\big)$$

Also sind die $A_n \subset X$ abgeschlossen. Es ist $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = X$, wegen der Voraussetzung von punktweiser gleichmäßiger Beschränktheit. Außerdem enthält dies eine nichtleere offene Menge. Also existiert ein n und $U \subset X$ nichtleer und offen mit $U \subset A_n$. $\square$

2. Normierte Räume, Hahn-Banach Sätze

2.1. Definition

Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit einer Topologie $\mathcal{T}$. Wir sagen, X ist ein **topologischer Vektorraum**, falls Addition und Skalarmultiplikation stetig sind:

$$\begin{aligned} + : X \times X \to X \quad &, \quad (x,y) \mapsto x+y \\ \cdot : \mathbb{K} \times X \to X \quad &, \quad (\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x \end{aligned}$$

2.2. Proposition

Sei X ein topologischer $\mathbb{K}$-Vektorraum und $Y \subset X$ ein Untervektorraum. Dann sind Y und $\overline{Y}$ topologische Vektorräume mit der Unterraumtopologie.

Beweis

- Klar für Y.
- Zu zeigen: $\overline{Y}$ ist ein Untervektorraum. Seien $x_0, y_0 \in \overline{Y}$ und sei U eine offene Menge in X mit $x_0 + y_0 \in U$. Dann existieren offene Mengen V, W von X mit $x_0 \in V$, $y_0 \in W$ und $V + W \subset U$, da die Addition stetig ist. Da $x_0 \in \overline{Y}$ und $x_0 \in V$, existiert $x_1 \in Y$ mit $x_1 \in V$. Analog existiert $y_1 \in Y$ mit $y_1 \in W$. Daher ist $x_1 + y_1 \in Y \cap U$. Da U eine beliebige offene Umgebung um $x_0 + y_0$ ist, folgt $x_0 + y_0 \in \overline{Y}$.

  Skalarmultiplikation genauso. □

2.3. Proposition

Ein normierter Vektorraum $(X, \|\cdot\|)$ ist ein topologischer Vektorraum bezüglich der von $\|\cdot\|$ induzierten Topologie.

Beweis
Es gilt

$$\|(x+y) - (x'+y')\|_X \leqslant \|x - x'\|_X + \|y - y'\|_X$$

Daher ist $+ : X \times X \to X$ gleichmäßig stetig bezüglich der Norm $\|(z, z')\|_{X \times X} := \|z\|_X + \|z'\|_X$ auf $X \times X$. Ähnlich folgt

$$\|\lambda x - \lambda' x'\|_X = \|\lambda(x - x') + (\lambda - \lambda')x'\|_X \leqslant |\lambda| \cdot \|x - x'\|_X + |\lambda - \lambda'| \cdot \|x'\|_X$$

Daher ist $\cdot : \mathbb{K} \times X \to X$ stetig, denn falls $(\lambda_i)_{i \in I}$ ein Netz in $\mathbb{K}$ und $(x_i)_{i \in I}$ ein Netz in X ist mit $\lambda_i \to \lambda$, $x_i \to x$, dann gilt $\lambda_i x_i \to \lambda x$, also $\|\lambda_i x_i - \lambda x\|_X \to 0$. □

2.4. Proposition

Seien X, Y topologische Vektorräume, $T : X \to Y$ linear. Dann sind äquivalent:

(1) T ist stetig.

(2) T ist stetig in 0.

(3) T ist stetig in einem Punkt $\overline{x}$.

Beweis
(1) ⇒ (2) ⇒ (3) ist klar. Wir zeigen (3) ⇒ (1):

Für $y \in X$ definiere $L_y : X \to X$, $x \mapsto y + x$. Dann ist L_y bijektiv und stetig. Da auch L_{-y} stetig ist, ist L_y ein Homöomorphismus. Sei nun T in $\overline{x}$ stetig. Sei $x_0 \in X$. Wir zeigen: T ist stetig in x_0. Setze $y := \overline{x} - x_0$. Dann ist

$$T(x_0) = T(x_0 + y - y) = T(-y) + T(x_0 + y) = L_{T(-y)} \circ T \circ L_y(x_0)$$

Da $L_y(x_0) = \overline{x}$, T stetig in $\overline{x}$ ist und L_y, $L_{T(-y)}$ stetig sind, ist somit T stetig in x_0. □

2.5. Definition

Für topologische Vektorräume X, Y definieren wir

$$\mathcal{L}(X, Y) = \{T : X \to Y \mid T \text{ linear und stetig}\}$$

Wir schreiben $X^* := \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ für den **Dualraum** von X. Die Elemente von X^* heißen (stetige) **Funktionale**.[3] Die Elemente von $\mathcal{L}(X, X)$ heißen (stetige) **Operatoren** auf X.

2.6. Bemerkung

$\mathcal{L}(X, Y)$ und $\mathcal{L}(X, \mathbb{K}) = X^*$ sind Vektorräume, wobei die Vektorraumstruktur punktweise definiert ist. $\mathcal{L}(X, X)$ ist sogar eine Algebra mittels Komposition.

2.7. Proposition

Seien X, Y normierte Vektorräume, $T : X \to Y$ linear. Dann ist T stetig genau dann, wenn ein $\mu \geqslant 0$ existiert, sodass

$$\|T(x)\|_Y \leqslant \mu \cdot \|x\|_X \quad \forall x \in X$$

Ein stetiger Operator zwischen normierten Vektorräumen heißt deswegen auch **beschränkt**.

Beweis

„⇐“: Klar: Wenn $x_n \to 0$, dann $T(x_n) \to 0$, denn $\|T(x_n)\| \leqslant \mu\|x_n\| \to 0$. Also ist T stetig in 0 und nach 2.4 überall.

„⇒“: Angenommen T ist stetig. Dann setzen wir

$$\mu := \sup\left\{ \frac{1}{\|x\|_X} \cdot \|T(x)\|_Y \;\middle|\; x \in X \setminus \{0\} \right\}$$

Falls $\mu = \infty$, dann existieren $x_n \in X$ mit $\frac{1}{\|x_n\|_X} \cdot \|T(x_n)\|_Y \geqslant n$. Betrachte $x_n' := \frac{1}{n \cdot \|x_n\|_X} \cdot x_n$, dann $\|x_n'\| = \frac{1}{n}$, also $x_n' \to 0$. Aber es gilt $T(x_n') \not\longrightarrow 0$, denn

$$\|T(x_n')\|_Y = \frac{1}{n \cdot \|x_n\|_X} \cdot \|T(x_n)\|_Y \geqslant 1$$

für alle n, ↯ zur Stetigkeit von T. Also $\mu < \infty$. □

[3] Aus der linearen Algebra: $X^* = \mathrm{Hom}(X, \mathbb{R}) = \{T : X \to Y \mid T \text{ linear}\}$. Die Elemente von X^* heißen Funktionale.

2.8. Definition

Seien X, Y normierte Vektorräume, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Die **Norm** (oder **Operatornorm**) von T ist

$$\|T\| = \sup\left\{ \frac{1}{\|x\|_X} \cdot \|T(x)\|_Y \,\middle|\, x \in X \setminus \{0\} \right\} = \sup\left\{ \|T(x)\|_Y \,\middle|\, x \in X \text{ mit } \|x\|_X = 1 \right\}$$

Nach 2.7 ist $\|T\| < \infty$ und $\|Tx\|_Y \leqslant \|T\| \cdot \|x\|_X$ für alle $x \in X$.

2.9. Proposition

Seien X, Y normierte Räume, betrachte $\mathcal{L}(X, Y)$ mit $\|\cdot\|$. Dann ist $\mathcal{L}(X, Y)$ ein normierter Raum.

Beweis

- $\|T\| \geqslant 0$ für alle $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.
- Es gilt

$$\begin{aligned} \|T\| = 0 \iff \forall x \in X, \|x\|_X = 1 : \|Tx\|_Y = 0 &\iff \forall x \in X, \|x\|_X = 1 : Tx = 0 \\ &\iff \forall x \in X : Tx = 0 \\ &\iff T = 0 \end{aligned}$$

- Sei $\lambda \in \mathbb{K}$, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Dann gilt

$$\|\lambda \cdot T\| = \sup_{\|x\|_X=1} \|\lambda \cdot T(x)\|_Y = \sup_{\|x\|_X=1} |\lambda| \cdot \|Tx\|_Y = |\lambda| \cdot \sup_{\|x\|_X=1} \|Tx\|_Y = |\lambda| \cdot \|T\|$$

- Seien $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(X, Y)$ und $x \in X$ mit $\|x\|_X = 1$. Dann gilt

$$\|(T_1 + T_2)(x)\|_Y = \|T_1 x + T_2 x\|_Y \leqslant \|T_1 x\|_Y + \|T_2 x\|_Y$$

  Damit folgt weiter

$$\begin{aligned} \|T_1 + T_2\| = \sup_{\|x\|_X=1} \|(T_1 + T_2)(x)\|_Y &\leqslant \sup_{\|x\|_X=1} (\|T_1 x\|_Y + \|T_2 x\|_Y) \\ &\leqslant \sup_{\|x\|_X=1} \sup_{\|x'\|_X=1} (\|T_1 x\|_Y + \|T_2 x'\|_Y) \\ &= \|T_1\| + \|T_2\| \end{aligned}$$

□

2.10. Definition

Eine $\mathbb{K}$-Algebra heißt **normiert**, falls A mit einer Norm $\|\cdot\|$ versehen ist, so dass $(A, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum und

$$\|ab\| \leqslant \|a\| \cdot \|b\| \quad \forall a, b \in A$$

Falls A unital ist, d.h. es existiert ein Einselement 1_A, dann gilt $\|1_A\| \leqslant 1$.

Bemerkung
Wenn $\|1_A\| < 1$, dann $\|1_A\| = \|1_A \cdot 1_A\| \leqslant \|1_A\| \cdot \|1_A\| \Rightarrow \|1_A\| = 0$. Also $1_A = 0$ und damit $A = \{0\}$. Rev Chap 2

2.11. Beispiele

(i) $C(\Omega, \mathbb{K})$, wobei Ω ein kompakter Hausdorffraum und die Multiplikation punktweise ist. Betrachte $\|.\|_\infty$. Für $f, g : \Omega \to K$ gilt dann $\|f \cdot g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \cdot \|g\|_\infty$

(ii) $\mathcal{L}(X, X)$ für einen normierten Raum X mit $\|.\|$. Für $S, T \in \mathcal{L}(X, X)$ gilt

$$\|ST\| = \sup_{\|x\|_X=1} \|S(T(x))\|_X \leqslant \sup_{\|x\|_X=1} \big(\|S\| \cdot \|Tx\|_X\big) = \|S\| \cdot \|T\|.$$

2.12. Proposition

Seien X, Y normierte Räume. Dann ist $X \times Y$ ein normierter Raum mit

$$\|(x,y)\|_1 := \|x\|_X + \|y\|_Y \quad \text{für } (x,y) \in X \times Y$$
$$\text{oder} \quad \|(x,y)\|_\infty := \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\}$$

Beide Normen sind äquivalent.

2.13. Proposition und Definition

Sei X ein normierter Raum und $Y \subseteq X$ ein abgeschlossener Unterraum. Dann ist ${}^X\!/_Y = \{x + Y \mid x \in X\}$ ein normierter Raum mit

$$\|x + Y\|_{X/Y} := \inf\{\|x + y\|_X \mid y \in Y\}$$

Die Quotientenabbildung $q : X \twoheadrightarrow {}^X\!/_Y$, $x \mapsto x + Y$ ist stetig, linear und $\|q\| \leqslant 1$ und offen, d.h. bildet offene Mengen in X auf offene Mengen in ${}^X\!/_Y$ ab.

Bemerkung
Daraus folgt, dass Normtopologie und Quotiententopologie auf ${}^X\!/_Y$ gleich sind.

Beweis

a) ${}^X\!/_Y$ ist ein Vektorraum mit $(x + Y) + (x' + Y) = (x + x') + Y$.

b) Sei $\overline{x} = x + Y \in {}^X\!/_Y$. Es gilt
   - $\|\overline{x}\| \geqslant 0$ ist klar für alle $\overline{x} \in {}^X\!/_Y$
   - Angenommen $\|\overline{x}\|_{X/Y} = 0$, d.h. $\inf_{y \in Y} \|x + y\|_X = 0$. Also existiert eine Folge $(y_n)_n \subset Y$ mit $\|x + y_n\|_X \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow y_n \xrightarrow{n\to\infty} -x$. Also ist $-y$ und damit auch y in Y, da Y abgeschlossen ist. Damit ist $\overline{x} = 0$

c) Sei $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$, $x \in X$. Dann gilt

$$\|\lambda \cdot \overline{x}\|_{X/Y} = \inf_{y \in Y} \|\lambda x + y\|_X = \inf_{y \in Y} \|\lambda x + \lambda y\|_X = \inf_{y \in Y} |\lambda| \cdot \|x + y\|_X = |\lambda| \cdot \|\overline{x}\|_{X/Y}$$

d) Seien $\overline{x}, \overline{y} \in {}^X\!/_Y$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\|\overline{x} + \overline{y}\|_{X/Y} = \inf_{z \in Y} \|x + y + z\|_X = \inf_{z,z' \in Y} \|x + y + z + z'\|_X &\leqslant \inf_{z,z' \in Y} \Big(\|x + z\|_X + \|y + z'\|_X\Big) \\ &= \|\overline{x}\|_{X/Y} + \|\overline{y}\|_{X/Y}\end{aligned}$$

Damit ist $\|.\|_{X/Y}$ eine Norm auf ${}^X\!/_Y$.

e) Linearität von q ist klar. Es gilt

$$\|\overline{x}\|_{X/Y} = \inf_{y \in Y} \|x + y\|_X \leqslant \|x\|_X$$

Also

$$\|q\| = \sup_{\|x\|_X = 1} \|q(x)\|_{X/Y} \leqslant \sup_{\|x\|_X = 1} \|x\|_X = 1$$

f) Zu zeigen: q ist offen. Sei $x \in X$, $\varepsilon > 0$. Betrachte die offene Kugel $B(x, \varepsilon) \subset X$. Wir zeigen $B(\overline{x}, \varepsilon) \subset q(B(x, \varepsilon))$. Sei also $\overline{z} = z + Y$ in $B(\overline{x}, \varepsilon)$. Dann gilt $\|\overline{x} - \overline{z}\|_{X/Y} < \varepsilon$, worauf folgt

$$\inf_{y \in Y} \|x - z + y\|_X < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ es existiert $y \in Y : \|x - z + y\|_X < \varepsilon$. Es gilt $\overline{z} = \overline{z - y} \in q(B(x, \varepsilon))$, da $z - y \in B(x, \varepsilon)$.
Sei $V \subset X$ offen, zeige $q(V) \subset {}^X\!/_Y$ offen. Für $x \in V$ finde $\varepsilon > 0$, sodass $B(x, \varepsilon) \subset V$. Dann folgt $B(\overline{x}, \varepsilon) \subseteq q\big(B(x, \varepsilon)\big) \subseteq q(V)$. □

2.14. Definition

Ein **Banachraum** ist ein vollständiger, normierter Raum. Eine **Banachalgebra** ist eine vollständige normierte Algebra.

2.15. Beispiel

$C(\Omega, \mathbb{K})$, wobei Ω ein kompakter Hausdorffraum ist, ist eine Banachalgebra.

2.16. Proposition

Produkte und Quotienten (nach abgeschlossenen Unterräumen) von Banachräumen sind wieder Banachräume.

Beweis

Produkt $X \times Y$**:** Es gilt $\|(x,y)\|_\infty = \max\{\|x\|, \|y\|\}$. Sei $((x_n, y_n))_n \subset X \times Y$ eine Cauchyfolge. Dann sind $(x_n)_n$ und $(y_n)_n$ Cauchyfolgen und es gilt $x_n \to x$ und $y_n \to y$ und somit auch $(x_n, y_n) \to (x, y)$.

Quotient ${}^X/_Y$**:** Sei X ein Banachraum und $Y \subseteq X$ ein abgeschlossener Unterraum.

Falls $\overline{x}, \overline{y} \in {}^X/_Y$, so existiert $y' \in X$, sodass $\overline{y} = \overline{y'}$ und

$$\|x - y'\|_X \leqslant 2 \cdot \|\overline{x} - \overline{y}\|_{X/Y}$$

Sei nun $(\overline{x}_n)_n$ eine Cauchyfolge in ${}^X/_Y$. Es gibt eine Teilfolge $(\overline{x}_{n_k})_k$, sodass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\|\overline{x}_{n_{k-1}} - \overline{x}_{n_k}\right\|_{X/Y} < \infty$$

Falls $(\overline{x}_{n_k})_k$ konvergiert, dann auch $(\overline{x}_n)_n$. Wir dürfen also Œannehmen, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \|\overline{x}_{n-1} - \overline{x}_n\| < \infty$. Wähle $x_1' \in \overline{x}_1$. Wähle induktiv $x_n' \in X$ mit

$$\left\|x_{n-1}' - x_n'\right\|_X \leqslant 2 \cdot \left\|\overline{x_{n-1} - x_n}\right\|_{X/Y}$$

und $x_n' \in \overline{x}_n$. Dann gilt $\sum_{n=1}^{\infty} \left\|x_{n-1}' - x_n'\right\|_X < \infty$. Daher ist $(x_n')_n$ eine Cauchyfolge in X. Also existiert $x \in X$ mit $x_n \to x$. Dann $\overline{x}_n \to \overline{x}$. □

2.17. Definition

Sei X ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine Abbildung $\varphi : X \to \mathbb{R}$ heißt **sublinear**, falls gilt:

(i) $\varphi(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot \varphi(x)$, für $x \in X$, $\lambda \in [0, \infty)$

(ii) $\varphi(x + y) \leqslant \varphi(x) + \varphi(y)$, für $x, y \in X$.

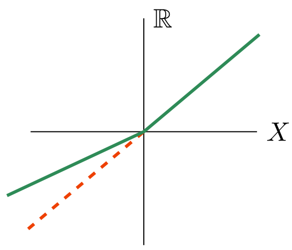
Setze $\mathcal{S}(X) := \{\varphi : X \to \mathbb{R} \,|\, \varphi \text{ sublinear}\}$. $\mathcal{S}(X)$ ist partiell geordnet mit

$$\varphi \leqslant \psi :\iff \varphi(x) \leqslant \psi(x), \quad x \in X$$

2.18. Beispiele

(i) Halbnormen sind sublinear.

(ii)



$0 = \varphi(0) = \varphi(x - x) \leqslant \varphi(x) + \varphi(-x).$

2.19. Proposition

Sei X ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. $\mathcal{S}(X)$ ist nach unten induktiv geordnet, d.h. jede nichtleere total geordnete Teilmenge besitzt eine untere Schranke.

Beweis
Sei $\emptyset \neq (\varphi_i)_I \subseteq \mathcal{S}(X)$ total geordnet. Setze $\varphi(x) := \inf_{i \in I} \varphi_i(x)$, dann gilt

$$-\varphi_i(-x) \leqslant \varphi_i(x) \implies -\varphi(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant \varphi_i(x) < \infty$$

ebenso $-\varphi(x) \leqslant \varphi(-x) \leqslant \varphi_i(-x)$ für $x \in X$, $i \in I$. Insbesondere gilt $-\infty < \varphi(x) < \infty$, $x \in X$. Die Sublinearität von φ und $\varphi \leqslant \varphi_i$, $i \in I$ sind klar (Warum?). □

2.20. Proposition

Sei X ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\varphi \in \mathcal{S}(X)$. Dann ist φ in $\mathcal{S}(X)$ minimal genau dann, wenn φ linear ist.

Beweis
"$\Leftarrow$": Sei $\psi \leqslant \varphi$ mit ψ sublinear und φ linear. Dann folgt $\psi(x) \leqslant \varphi(x)$ und $\psi(-x) \leqslant \varphi(-x)$ für $x \in X$.

$$\implies -\psi(x) \leqslant \psi(-x) \leqslant \varphi(-x) = -\varphi(x)$$

Daraus folgt $\varphi(x) \leqslant \psi(x)$ und somit muss $\varphi = \psi$ gelten. Also ist φ minimal.

"$\Rightarrow$": Sei $\varphi \in \mathcal{S}(X)$ minimal. Zu $\overline{x} \in X$ definiere $\varphi_{\overline{x}} : X \to \mathbb{R}$ durch

$$\varphi_{\overline{x}}(x) := \inf_{\lambda \geqslant 0} \Big(\varphi(x + \lambda \cdot \overline{x}) - \lambda \cdot \varphi(\overline{x}) \Big)$$

mit (ii) aus 2.17

Es gilt $\varphi_{\overline{x}}(x) \in (-\infty, \infty)$, denn für $x \in X, \lambda \geqslant 0$ ist

$$-\varphi(-x) \leqslant \varphi(x + \lambda \cdot \overline{x}) - \lambda \cdot \varphi(\overline{x}) \leqslant \varphi(x)$$

$\varphi_{\overline{x}}$ ist sublinear:

(i) Sei $\mu > 0$. Dann gilt für $x \in X$.

$$\begin{aligned}\varphi_{\overline{x}}(\mu \cdot x) = \inf_{\lambda \geqslant 0} \Big(\varphi(\mu \cdot x + \lambda \cdot \overline{x}) - \lambda \cdot \varphi(\overline{x}) \Big) &= \inf_{\lambda \geqslant 0} \mu \cdot \left(\varphi\left(x + \frac{\lambda}{\mu} \cdot \overline{x}\right) - \frac{\lambda}{\mu} \cdot \varphi(\overline{x}) \right) \\ &= \mu \cdot \inf_{\lambda' \geqslant 0} \Big(\varphi(x + \lambda' \cdot \overline{x}) - \lambda' \varphi(\overline{x}) \Big) \\ &= \mu \cdot \varphi_{\overline{x}}(x)\end{aligned}$$

$\varphi_{\overline{x}}(0 \cdot x) = 0$ ist klar.

(ii) Zu $x, y \in X$, $\varepsilon > 0$ wähle $\lambda_x, \lambda_y \geqslant 0$ mit

$$\varphi_{\overline{x}}(x) \geqslant \varphi(x + \lambda_x \cdot \overline{x}) - \lambda_x \cdot \varphi(\overline{x}) - \varepsilon$$
$$\varphi_{\overline{x}}(y) \geqslant \varphi(y + \lambda_y \cdot \overline{x}) - \lambda_y \cdot \varphi(\overline{x}) - \varepsilon$$

Setze $\lambda := \lambda_x + \lambda_y$, dann gilt

$$\begin{aligned}\varphi_{\overline{x}}(x) + \varphi_{\overline{x}}(y) &\geqslant \varphi(x + \lambda_x \cdot \overline{x}) + \varphi(y + \lambda_y \cdot \overline{x}) - \lambda \cdot \varphi(\overline{x}) - 2\varepsilon \\ &\geqslant \varphi(x + y + \lambda \cdot \overline{x}) - \lambda \cdot \varphi(\overline{x}) - 2\varepsilon \\ &\geqslant \varphi_{\overline{x}}(x + y) - 2\varepsilon\end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, gilt $\varphi_{\overline{x}}(x) + \varphi_{\overline{x}}(y) \geqslant \varphi_{\overline{x}}(x + y)$. Also ist $\varphi_{\overline{x}}$ sublinear.

$\varphi_{\overline{x}} \leqslant \varphi$ ist klar. Da φ minimal ist, folgt $\varphi_{\overline{x}} = \varphi$. Wir erhalten

$$\varphi(x) + 1 \cdot \varphi(\overline{x}) \leqslant \varphi(x + 1 \cdot \overline{x}) \leqslant \varphi(x) + 1 \cdot \varphi(\overline{x})$$

für jedes $x, \overline{x} \in X$. Also ist φ additiv und somit linear. □

2.21. Satz von Hahn-Banach

Sei X ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\varphi \in \mathcal{S}(X)$. Dann existiert $\psi : X \to \mathbb{R}$ linear mit $\psi \leqslant \varphi$.

X ist nicht zwangsweise endlich-dimensional!

Beweis
Sei $\mathcal{S}_\varphi := \{\varphi' \in \mathcal{S}(X) \mid \varphi' \leqslant \varphi\} \ni \varphi$. Nach Proposition 2.19 ist $\mathcal{S}(X)$ und damit auch $\mathcal{S}_\varphi$ nach unten induktiv geordnet. Nach dem Lemma von Zorn enthält $\mathcal{S}_\varphi$ ein minimales Element ψ. ψ ist auch minimal in $\mathcal{S}(X)$ (Warum?)
Also ist ψ linear nach Proposition 2.20. □

Wichtige Folgerungen: Fortsetzungs- und Trennungssätze.

2.22. Satz

Sei X ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\varphi : X \to \mathbb{R}$ sublinear. Sei $Y \subset X$ ein linearer Unterraum und $\psi : Y \to \mathbb{R}$ linear mit $\psi \leqslant \varphi|_Y$. Dann existiert $\overline{\psi} : X \to \mathbb{R}$ linear mit $\overline{\psi}|_Y = \psi$ und $\overline{\psi} \leqslant \varphi$.

Beweis
Definiere $\tilde{\varphi} : X \to \mathbb{R}$ durch $\tilde{\varphi}(x) := \inf_{y \in Y} \big(\varphi(x - y) + \psi(y)\big)$, $x \in X$. Es gilt

$$\varphi(x - y) + \psi(y) \geqslant \varphi(-y) - \varphi(-x) - \psi(-y) \geqslant -\varphi(-x) > -\infty \qquad \forall x \in X, y \in Y$$

Also ist $\tilde{\varphi}$ wohldefiniert. $\tilde{\varphi}$ ist sublinear: vergleiche 2.20. Nach Satz von Hahn-Banach (2.21) existiert ein $\overline{\psi} : X \to \mathbb{R}$ linear mit $\overline{\psi} \leqslant \tilde{\varphi}$. Aus 2.20 folgt, dass $\overline{\psi}$ minimal in $\mathcal{S}(X)$ ist. Ebenso ist $\overline{\psi}|_Y$ minimal in $\mathcal{S}(Y)$. Also gilt

$$\overline{\psi} \leqslant \tilde{\varphi}|_Y \leqslant \psi \quad \Rightarrow \quad \psi = \overline{\psi}|_Y$$ □

2.23. Satz

Sei nun X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $p : X \to \mathbb{R}$ eine Halbnorm. Sei $Y \subset X$ ein Untervektorraum und $\psi : Y \to \mathbb{K}$ linear mit $|\psi(y)| \leqslant p(y)$ für $y \in Y$. Dann existiert $\overline{\psi} : X \to \mathbb{K}$ linear mit $\overline{\psi}|_Y = \psi$ und

$$\left|\overline{\psi}(x)\right| \leqslant p(x) \quad \text{für } x \in X$$

Beweis
Sei zunächst $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. p ist sublinear und es gilt $\psi \leqslant p\big|_Y$. Nach 2.22 existiert eine lineare Fortsetzung $\overline{\psi} : X \to \mathbb{R}$ mit $\overline{\psi} \leqslant p$. Es gilt auch

$$-\overline{\psi}(x) = \overline{\psi}(-x) \leqslant p(-x) = p(x) \quad \Longrightarrow \quad \left|\overline{\psi}(x)\right| \leqslant p(x) \quad \text{für } x \in X$$

Sei nun $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Definiere $\psi_1 := \mathrm{Re}(\psi) : Y \to \mathbb{R}$. ψ_1 ist $\mathbb{R}$-linear (warum?). Es gilt $|\psi_1(y)| \leqslant |\psi(y)| \leqslant p(y)$, $y \in Y$. Es existiert also ein $\overline{\psi}_1 : X \to \mathbb{R}$ $\mathbb{R}$-linear mit

$$\overline{\psi}_1(y) = \psi_1(y), \;\; y \in Y \quad \text{und} \quad \left|\overline{\psi}_1(x)\right| \leqslant p(x), \;\; x \in X$$

Definiere jetzt $\overline{\psi} : X \to \mathbb{C}$ durch $\overline{\psi}(x) := \overline{\psi}_1(x) - i \cdot \overline{\psi}_1(i \cdot x)$, $x \in X$. Dann ist $\overline{\psi}$ $\mathbb{C}$-linear (warum?). Weiter gilt $\overline{\psi}(y) = \psi(y)$ für $y \in Y$. ($\mathrm{Re}(\overline{\psi}\big|_Y) = \mathrm{Re}(\psi)$ und $\overline{\psi}\big|_Y$ und ψ sind beide $\mathbb{C}$-linear).
Zu $x \in X$ wähle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| = 1$ und

$$\left|\overline{\psi}(x)\right| = \lambda \cdot \overline{\psi}(x) = \overline{\psi}(\lambda \cdot x) = \overline{\psi}_1(\lambda \cdot x) \leqslant p(\lambda \cdot x) = |\lambda| \cdot p(x) = p(x)$$ □

2.24. Satz

Sei X ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum, $Y \subset X$ ein Unterraum und $\psi : Y \to \mathbb{K}$ linear und stetig. Dann existiert eine lineare Fortsetzung $\overline{\psi} : X \to \mathbb{K}$ mit $\left\|\overline{\psi}\right\|_{\mathcal{L}(X,\mathbb{K})} = \|\psi\|_{\mathcal{L}(Y,\mathbb{K})}$.

Beweis
Definiere eine Halbnorm durch $p(x) := \|x\| \cdot \|\psi\|$. Nach Satz 2.23 besitzt ψ eine lineare Fortsetzung $\overline{\psi}$ mit $\left|\overline{\psi(x)}\right| \leqslant p(x) = \|\psi\| \cdot \|x\|$, $x \in X$. Es folgt $\left\|\overline{\psi}\right\| \leqslant \|\psi\|$. $\|\psi\| \leqslant \left\|\overline{\psi}\right\|$ ist trivial, da $\psi\big|_Y = \overline{\psi}$. □

2.25. Definition

Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Sei $M \subset X$ eine Teilmenge. M heißt **konvex**, falls für $a, b \in M$, $\lambda \in [0,1]$ gilt

$$(1-\lambda) \cdot a + \lambda \cdot b \in M$$

Ist X ein topologischer Vektorraum und $M \subset X$ konvex, so ist auch $\overline{M}$ konvex. (warum?)
Ist $N \subset X$ eine beliebige Teilmenge, so ist

$$\mathrm{conv}(N) := \bigcap_{\substack{N \subset M \subset X \\ M \text{ konvex}}} M$$

$\mathrm{conv}(N)$ ist konvex. (warum?)

2.26. Satz

Sei X ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, $\emptyset \neq M \subset X$ konvex, $\varphi \in \mathcal{S}(X)$. Dann existiert $\psi : X \to \mathbb{R}$ linear mit $\psi \leqslant \varphi$ und

$$\inf_{y \in M} \varphi(y) = \inf_{y \in M} \psi(y) \qquad [*]$$

Beweis
Setze $\mu := \inf_{y \in M} \varphi(y)$. Falls $\mu = -\infty$, so folgt die Behauptung aus dem Satz von Hahn-Banach 2.21. [*] ist trivialerweise erfüllt. Sei also $\mu \in \mathbb{R}$. Definiere $\tilde{\varphi} : X \to \mathbb{R}$ durch

$$\tilde{\varphi}(x) := \inf_{y \in M, \lambda \geqslant 0} \big(\varphi(x + \lambda \cdot y) - \lambda \cdot \mu\big), \quad x \in X$$

Es gilt $\varphi(x + \lambda \cdot y) - \lambda \cdot \mu \geqslant -\varphi(-x)$, $x \in X$, $y \in M$, $\lambda \geqslant 0$. Also ist $\tilde{\varphi}(x) \geqslant -\varphi(-x) > -\infty$. $\tilde{\varphi}$ ist sublinear:

(i) $\tilde{\varphi}(\gamma \cdot x) = \gamma \cdot \tilde{\varphi}(x)$, für $x \in X$, $\gamma \in \geqslant 0$, wie in 2.22.

(ii) Seien $x, z \in X$ und $\varepsilon > 0$. Wähle $y_x, y_z \in M$, $\lambda_x, \lambda_y \geqslant 0$ mit

$$\tilde{\varphi}(x) \geqslant \varphi(x + \lambda_x \cdot y_x) - \lambda_x \cdot \mu - \varepsilon \quad \text{und} \quad \tilde{\varphi}(x) \geqslant \varphi(z + \lambda_z \cdot y_z) - \lambda_z \cdot \mu - \varepsilon$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi}(x) + \tilde{\varphi}(z) &\geqslant \varphi\big(x + z + \lambda_x \cdot y_x + \lambda_z \cdot y_z\big) - (\lambda_x + \lambda_z) \cdot \mu - 2\varepsilon \\
&= \varphi\left(x + z + (\lambda_x + \lambda_z) \cdot \underbrace{\left(\frac{\lambda_x}{\lambda_x + \lambda_z} \cdot y_x + \frac{\lambda_z}{\lambda_x + \lambda_z} \cdot y_z\right)}_{\in M}\right) - (\lambda_x + \lambda_z) \cdot \mu - 2\varepsilon \\
&\geqslant \tilde{\varphi}(x + z) - 2\varepsilon
\end{aligned}$$

Nach Hahn-Banach (2.21) existiert $\psi : X \to \mathbb{R}$ linear mit $\psi \leqslant \tilde{\varphi} \leqslant \varphi$. Für $y \in M$ gilt

$$-\psi(y) = \psi(-y) \leqslant \tilde{\varphi}(-y) \leqslant \varphi(-y + 1 \cdot y) - 1 \cdot \mu = -\mu$$

also $\mu \leqslant \psi(y) \leqslant \varphi(y)$, woraus [*] folgt. □

2.27. Satz

Sei X ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum und $A, B \subset X$ nichtleere konvexe Teilmengen mit

$$\operatorname{dist}(A, B) := \inf\{\|a - b\| \mid a \in A, b \in B\} > 0$$

Dann existiert $\psi : X \to \mathbb{R}$ stetig und linear mit $\psi(A) \cap \psi(B) = \emptyset$.

Beweis
$A - B := \{a - b \mid a \in A, b \in B\} \subset X$ ist konvex. (Warum?) Nach Satz 2.26 existiert $\psi : X \to \mathbb{R}$ linear mit $\psi \leqslant \|.\|$ und

$$0 < \operatorname{dist}(A, B) = \inf_{y \in A - B} \|y\| = \inf_{y \in A - B} \psi(y) = \inf_{a \in A} \psi(a) - \sup_{b \in B} \psi(b).$$ □

3. Operatoren zwischen Banachräumen. Die Sätze von der offenen Abbildung und vom abgeschlossenen Graphen

3.1. Proposition

RevChap3

Seien X, Y normierte Vektorräume, Y vollständig. Dann ist $\mathcal{L}(X,Y)$ vollständig bezüglich $\|.\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$.

Beweis
Sei $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}(X,Y)$ eine Cauchy-Folge bezüglich $\|.\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$. Für $x \in X$ ist dann auch $(T_n x)_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ Cauchy bezüglich $\|.\|_Y$. (Warum?)[4] Da Y ein Banachraum ist, folgt $T_n x \xrightarrow{n\to\infty} y$ für ein $y \in Y$. Wir definieren $T: X \to Y$ durch $T(x) := \lim_{n\to\infty} T_n(x)$ für $x \in X$. T ist linear: Klar (Warum?).

T ist stetig: $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy, also auch $(\|T_n\|)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Cauchyfolge (Warum?)[5]. Dann existiert $C \geqslant 0$ mit $\|T_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leqslant C$, $n \in \mathbb{N}$, also gilt $\|Tx\|_Y \leqslant C \cdot \|x\|$, $x \in X$, woraus $\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leqslant C$ und die Stetigkeit von T folgt. Also ist $T \in \mathcal{L}(X,Y)$.
Falls $\varepsilon > 0$, so existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\|T_n - T_m\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \varepsilon$ für $n, m \geqslant n_0$. Insbesondere:

$$\|(T_n - T_m)x\|_Y \leqslant \|T_n - T_m\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \cdot \|x\|_X < \varepsilon \cdot \|x\|_X$$

für $n, m \geqslant n_0$, $x \in X$. Weiter gilt

$$\begin{aligned}\|(T_n - T)x\|_Y \leqslant \|(T_n - T_m)x\|_Y + \|(T_m - T)x\|_Y &\leqslant \|T_n - T_m\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \cdot \|x\|_X + \|(T_m - T)x\|_Y \\ &\leqslant \varepsilon \cdot \|x\|_X + \varepsilon \cdot \|x\|_X\end{aligned}$$

für $n, m \geqslant n_0$ und m groß genug, $x \in X$. Damit folgt nun $\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leqslant \varepsilon$ für$n \geqslant n_0$, also $T_n \to T$ bezüglich $\|.\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$. □

3.2. Corollar

(i) Der Dualraum X^* eines normierten $\mathbb{K}$-Vektorraumes X ist vollständig.

(ii) Falls $\{0\} \neq X$ ein Banachraum ist, so ist $\mathcal{L}(X,X)$ eine Banachalgebra.

Beweis

(i) $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ und $\mathbb{K}$ ist vollständig. Wende 3.1 an.

(ii) $\mathcal{L}(X,X)$ ist ein Banachraum nach 3.1. $\mathcal{L}(X,X)$ ist eine normierte Algebra:
  - $\|\mathrm{id}_X\|_{\mathcal{L}(X,X)} = 1$ (Warum?)
  - Für $S, T \in \mathcal{L}(X,X)$, $x \in X$ gilt

  $$\|(S \circ T)x\|_X \leqslant \|S\| \cdot \|Tx\|_X \leqslant \|S\| \cdot \|T\| \cdot \|x\|_X$$

  Also ist $\|S \circ T\| \leqslant \|S\| \cdot \|T\|$. □

3.3. Definition und Proposition

Sei X ein normierter Raum. Definiere $\iota_X : X \to X^{**}$ $\left(= (X^*)^*\right)$ durch

$$x \longmapsto (\varphi \mapsto \varphi(x))$$

für $x \in X$. Die Abbildung ι_X ist eine lineare Isometrie.

[4] mit $\|T_n x - T_m x\|_Y \leqslant \|T_n - T_m\| \cdot \|x\|$
[5] mit $\|T_n\| = \|T_n - T_{n_0} + T_{n_0}\| \leqslant \|T_n - T_{n_0}\| + \|T_{n_0}\|$

Beweis
Wohldefiniertheit: Die Linearität von $\iota_X(x)$ ist klar. Mit

$$|\iota_X(x)(\varphi)| = |\varphi(x)| \leqslant \|\varphi\|_{X^*} \cdot \|x\|_X = \|x\|_X \cdot \|\varphi\|_{X^*}$$

folgt $\varphi \in X^*$ und somit $\|\iota_X(x)\|_{X^{**}} \leqslant \|x\|_X$, also ist $\iota_X(x)$ stetig.

ι_X ist linear: Für $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $x, y \in X$, $\varphi \in \mathcal{L}(X, \mathbb{K}) = X^*$ gilt

$$\begin{aligned}\iota_X(\alpha \cdot x + \beta \cdot y)(\varphi) = \varphi(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) = \alpha \circ \varphi(x) + \beta \cdot \varphi(y) &= \alpha \cdot \iota_X(x)(\varphi) + \beta \cdot \iota_X(y)(\varphi) \\ &= \big(\alpha \cdot \iota_X(x) + \beta \cdot \iota_X(y)\big)(\varphi)\end{aligned}$$

Isometrie: Es bleibt zu zeigen: $\|\iota_X(x)\|_{X^{**}} \geqslant \|x\|_X$ für $0 \neq x \in X$. Sei $Y := \mathbb{K} \cdot x$ und $\psi : Y \to \mathbb{K}$ gegeben durch $\psi(\alpha \cdot x) := \alpha \cdot \|x\|_X$. Dann ist $Y \subset X$ ein linearer Unterraum und $\psi(Y) \to \mathbb{K}$ linear mit $\|\psi\| = 1$. Nach Satz 2.24 existiert $\overline{\psi}.X \to \mathbb{K}$ linear mit $\overline{\psi}(x) = \psi(x) = \|x\|_X$ und $\|\overline{\psi}\| = \|\psi\| = 1$. Es gilt

$$\|\iota_X(x)\|_{X^{**}} \geqslant \left|\iota_X(x)(\overline{\psi})\right| = \left|\overline{\psi}(x)\right| = \|x\|_X. \qquad \square$$

3.4. Definition und Proposition

Seien X, Y normierte Räume. Definiere eine Abbildung $.^{\mathrm{tr}} : \mathcal{L}(X, Y) \to \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ durch $T \mapsto T^{\mathrm{tr}} = (\varphi \mapsto \varphi \circ T)$. $.^{\mathrm{tr}}$ ist eine lineare Isometrie und das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\iota_X} & X^{**} \\ \big\downarrow T & & \big\downarrow T^{\mathrm{tr\,tr}} = (T^{\mathrm{tr}})^{\mathrm{tr}} \\ Y & \xrightarrow{\iota_Y} & Y^{**} \end{array}$$

kommutiert für jedes $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Für $\iota_{X^*} : X^* \to X^{***}$ und $\iota_X^{\mathrm{tr}} : X^{***} \to X^*$ gilt $\iota_X^{\mathrm{tr}} \circ \iota_{X^*} = \mathrm{id}_{X^*}$.

Beweis

(i) Für $T, S \in \mathcal{L}(X, Y)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\varphi \in Y^*$ gilt

$$\begin{aligned}(\alpha \cdot T + \beta \cdot S)^{\mathrm{tr}}(\varphi) = \varphi \circ (\alpha \cdot T + \beta \cdot S) \overset{\text{linear}}{=} \alpha \cdot (\varphi \circ T) + \beta \cdot (\varphi \circ S) &= \alpha \cdot T^{\mathrm{tr}}(\varphi) + \beta \cdot S^{\mathrm{tr}}(\varphi) \\ &= \big(\alpha \cdot T^{\mathrm{tr}} + \beta \cdot S^{\mathrm{tr}}\big)(\varphi)\end{aligned}$$

(ii) Für $x \in X$, $\psi \in Y^*$ gilt $\big(\iota_Y T(x)\big)(\psi) = \psi\big(T(x)\big)$; weiter gilt

$$\begin{aligned}(T^{\mathrm{tr\,tr}} \iota_X(x))(\psi) = ((T^{\mathrm{tr}})^{\mathrm{tr}} \iota_X(x))(\psi) = \big(\iota_X(x) \circ T^{\mathrm{tr}}\big)(\psi) &= \iota_X(x)\big(T^{\mathrm{tr}}(\psi)\big) \\ &= T^{\mathrm{tr}}(\psi)(x) = \psi \circ T(x) \\ &= \iota_Y\big(T(x)\big)(\psi)\end{aligned}$$

$\Rightarrow T^{\mathrm{tr\,tr}} \iota_X(x) = \iota_Y\big(T(x)\big) = \iota_Y \circ T(x)$. Also $T^{\mathrm{tr\,tr}} \circ \iota_X = \iota_Y \circ T$. Also kommutiert das Diagramm.

(iii) Es ist $|(T^{\mathrm{tr}}\psi)(x)| = |\psi T(x)| \leqslant \|\psi\|_{Y^*} \cdot \|Tx\|_Y \leqslant \|\psi\|_{Y^*} \cdot \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \cdot \|x\|_X$. Also ist $\|T^{\mathrm{tr}}\psi\|_{X^*} \leqslant \|\psi\|_{Y^*} \cdot \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$ und damit folgt

$$\left\|T^{\mathrm{tr}}\right\|_{\mathcal{L}(Y^*,X^*)} \leqslant \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$$

Ebenso ist $\|T^{\mathrm{tr\,tr}}\|_{\mathcal{L}(X^{**},Y^{**})} \leqslant \|T^{\mathrm{tr}}\|_{\mathcal{L}(Y^*,X^*)} \leqslant \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$. Andererseits gilt $\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leqslant \|T^{\mathrm{tr\,tr}}\|_{\mathcal{L}(X^{**},Y^{**})}$ nach 3.3 und da das Diagramm kommutiert (Warum?).

$$\Rightarrow \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leqslant \left\|T^{\mathrm{tr}}\right\|_{\mathcal{L}(Y^*,X^*)} \leqslant \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$$

also ist $.^{\mathrm{tr}}$ eine Isometrie.

(iv) Für $\varphi \in X^*$, $x \in X$ gilt

$$\big(\iota_X^{\mathrm{tr}} \circ \iota_{X^*}(\varphi)\big)(x) = \iota_{X^*}(\varphi) \circ \iota_X(x) = \iota_X(x)(\varphi) = \varphi(x)$$

$\Rightarrow \iota_X^{\mathrm{tr}} \circ \iota_{X^*}(\varphi) = \varphi$, also $\iota_X^{\mathrm{tr}} \circ \iota_{X^*} = \mathrm{id}_{X^*}$. □

3.5. Satz: Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit für Banachräume

Sei X ein Banachraum und Y ein normierter Raum. Sei $M \subset \mathcal{L}(X,Y)$, sodass die Menge

$$\Big\{ x \mapsto \|Tx\|_Y \,\Big|\, T \in M \Big\} \subset C(X, \mathbb{R})$$

punktweise gleichmäßig beschränkt ist, d.h. für $x \in X$ existiert $C_x \geqslant 0$ mit $\|Tx\|_Y \leqslant C_x$, $T \in M$. Dann existiert $C \geqslant 0$ mit $\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leqslant C$, $T \in M$.

Beweis
Nach Corollar 1.12 (Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit für metrische Räume) existieren eine offene Kugel $\emptyset \neq B(x_0, \varepsilon) \subset X$ und $K \geqslant 0$ mit $\|Tx\|_Y \leqslant K$ für $x \in B(x_0,\varepsilon)$, $T \in M$. Für $x \in X$ mit $\|x\| \leqslant 1$ gilt

$$\begin{aligned}
\|Tx\|_X = \frac{e}{\varepsilon} \cdot \Big\| T\Big(\frac{\varepsilon}{2} \cdot x\Big)\Big\|_Y &= \frac{2}{\varepsilon} \cdot \Big\| T\Big(\frac{\varepsilon}{2} \cdot x + x_0 - x_0\Big)\Big\|_Y \\
&\leqslant \frac{2}{\varepsilon} \cdot \left(\Big\| T\Big(\underbrace{\frac{\varepsilon}{2} \cdot x + x_0}_{\in B(x_0,\varepsilon)}\Big)\Big\|_Y + \Big\| T\Big(\underset{\in B(x_0,\varepsilon)}{x_0}\Big)\Big\|_Y \right) \\
&\leqslant \frac{2}{\varepsilon}(K+K) = \frac{4K}{\varepsilon}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leqslant \frac{4K}{\varepsilon} =: C$. □

3.6. Corollar

Sei Z ein metrischer Raum und $N \subset Z$ eine Teilmenge, so dass gilt: Für alle $\varphi \in Z^*$ existiert $C_\varphi \geqslant 0$ mit $|\varphi(z)| \leqslant C_\varphi$, $z \in N$. Dann ist N beschränkt.

Beweis
$\iota_Z : Z \to Z^{**}$ ist eine Isometrie nach 3.3. Wende Satz 3.5 an mit $X = Z^*$, $Y = \mathbb{K}$ und $M = \iota_Z(N) \subset Z^{**} = \mathcal{L}(Z^*, \mathbb{K})$. Für $\varphi \in X = Z^*$ existiert $C_\varphi \geqslant 0$ mit $|T\varphi| = |\iota_Z(z)(\varphi)| = |\varphi(z)| \leqslant C_\varphi$, wo $T = \iota_Z(z) \in M$ für ein $z \in N$. Nach 3.5 folgt: Es existiert ein $C \geqslant 0$ mit $\|z\|_Z = \|\iota_Z(z)\|_{Z^{**}} \leqslant C$, $z \in N$. □

3.7. Corollar

Sei X ein Banachraum und Z ein normierter Raum. $M \subset \mathcal{L}(X,Z)$ eine Teilmenge, so dass gilt: Für alle $\varphi \in Z^*$ und $x \in X$ existiert $C_{x,\varphi} \geqslant 0$ mit

$$\big|\varphi\big(T(x)\big)\big| \leqslant C_{x,\varphi}, \quad T \in M$$

Dann ist M beschränkt.

Beweis
Für jedes $x \in X$ folgt aus Corollar 3.6 mit $N := \{T(x) \,|\, T \in M\}$, dass N beschränkt ist. Es folgt, dass $\{x \mapsto \|T(x)\| \,|\, T \in M\}$ ist punktweise gleichmäßig beschränkt. Mit Satz 3.5 folgt: M ist beschränkt. □

3.8. Satz: Prinzip der offenen Abbildung

Seien X, Y Banachräume, $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ surjektiv. Dann ist T offen, d.h. für eine offene Menge $U \subset X$ ist $T(U) \subset Y$ offen.

Beweis

(i) Sei $0 \in W \subset X$ offen, dann existiert $\emptyset \neq V \subset Y$ offen mit $V \subset \overline{T(W)}$: $0 \in W \subset X \Rightarrow B(0,\varepsilon) \subset W$ für ein $\varepsilon > 0$. Dann gilt

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} n \cdot B(0,\varepsilon) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} n \cdot W$$

Aus der Surjektivität von T folgt $Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} n \cdot T(W) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} n \cdot \overline{T(W)}$. Nach dem Satz von Baire (1.10) folgt: Ein $n \cdot \overline{T(W)}$ enthält eine nichtleere offene Teilmenge, also auch $\overline{T(W)}$.

(ii) Sei $=\in M \subset X$ offen, dann ist 0 ein innerer Punkt von $\overline{T(M)}$:

Die Abbildung $X \times X \to X$, $(x_1, x_2) \mapsto x_1 - x_2$ ist stetig.[6] $\Rightarrow$ es gibt $0 \in W \subset X$ offen mit

$$W - W = \{x_1 - x_2 \,|\, x_1, x_2 \in W\} \subset M$$

Es folgt

$$\overline{T(M)} \supset \overline{T(W-W)} = \overline{T(W) - T(W)} \overset{\text{(Warum?)}}{\supset} \overline{T(W)} - \overline{T(W)} \overset{\text{(i)}}{\supset} V - V$$

für $\emptyset \neq V$ offen in Y wie in (i). Aber $0 \in V - V = \bigcup_{y\in V}\{y\} - V$ ist offen in Y. Also ist 0 ein innerer Punkt von $\overline{T(M)}$.

(iii) Ist $0 \in N \subset X$ offen, so existiert $0 \in Z \subset Y$ offen mit $Z \subset T(M)$:

Sei $\varepsilon_0 > 0$. Wähle $\varepsilon_i > 0$, $1 \leqslant i \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i < \varepsilon_0$. Nach (ii) gilt: Zu ε_i, $i \in N$ existiert ein $\delta_i > 0$ mit $B_Y(0,\delta_i) \subset \overline{T(B_X(0,\varepsilon_i))}$. Es gilt $\delta_i \xrightarrow{i\to\infty} 0$. Sei nun $y \in B_Y(0,\delta_0) =: Z$. Dann gilt $y \in \overline{T(B_X(0,\varepsilon_0))}$. $\Rightarrow$ es existiert $x_0 \in B_X(0,\varepsilon)$ mit $\|y - T(x_0)\|_Y < \delta_1$. Folglich existiert $x_1 \in B_X(0,\varepsilon_1)$ mit $\|y - T(x_0) - T(x_1)\|_Y < \delta_2$. Per Induktion folgt

$$\exists x_i \in B_X(0,\varepsilon_i) \text{ mit } \left\| y - \sum\nolimits_{j=0}^{i} T(x_i) \right\|_Y < \delta_{i+1}, \qquad i \in \mathbb{N}$$

$\sum_{i\in\mathbb{N}} x_i$ konvergiert in X und $\left\|\sum_{i\in\mathbb{N}} x_i\right\|_X < 2 \cdot \varepsilon_0$, es gilt $T\big(\sum_{i\in\mathbb{N}} x_i\big) = y$. ($x_i \in N$, falls $B(0, 2\varepsilon_0) \subset N$)

(iv) Sei $U \subset X$ offen. Dann ist $T(U) \subset Y$ offen:

Zu $x \in U$ existiert $0 \in N \subset X$ offen mit $x + N \subset U$, also $T(x) + T(N) \subset T(U)$. Nach (iii) existiert $0 \in Z \subset Y$ offen mit $Z \subset T(N)$, also $T(x) + Z \subset T(U)$. Aber $T(x) \in T(x) + Z$ ist offen in Y und $T(U)$ ist Umgebung von $T(x)$. $x \in U$ war beliebig, also ist $T(U)$ offen. □

3.9. Corollar: Satz von der inversen Abbildung

Seien X, Y Banachräume, $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ bijektiv. Dann gilt $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$, d.h. T ist ein Homöomorphismus.

Beweis

Nach Satz 3.8 ist T offen und somit ist T^{-1} stetig. □

[6] Banachräume sind topologische Vektorräume

3.10. Corollar

Sei X ein Vektorraum und seien $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ zwei Topologien auf X, die durch Banachraumnormen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ induziert sind. Falls $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$, so gilt bereits $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.

Beweis
$\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2 \Rightarrow (X, \mathcal{T}_1) \xrightarrow{\mathrm{id}_X} (X, \mathcal{T}_2)$ ist stetig und bijektiv, also ist id_X nach 3.9 ein Homöomorphismus. □

3.11. Corollar

Sei X ein Banachraum mit abgeschlossenen Teilräumen X_1, X_2, sodass $X_1 \cap X_2 = \{0\}$ und $X = X_1 + X_2$. Dann sind X und $X_1 \times X_2$ als topologische Vektorräume isomorph.

Beweis
Die Abbildung $X_1 \times X_2 \to X$, $(x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$ ist linear und bijektiv. Sie ist stetig, wegen

$$\|x_1 + x_2\|_X \leqslant \|x_1\|_X + \|x_2\|_X = \|(x_1, x_2)\|_{1, X_1 \times X_2}$$

Mit Corollar 3.9 folgt die Behauptung. □

4. L^p-Räume und der Satz von Riesz-Fischer

RevChap4

4.1. Erinnerung

Sei (X, Σ, μ) ein **Maßraum.**[7] $f : X \to (-\infty, \infty]$ heißt **messbar**, falls $f^{-1}(E) \in \Sigma$ gilt für $E \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (Borelmengen). $s : X \to (-\infty, \infty]$ heißt **einfach**, falls $s(X)$ endlich. Für $f : X \to [0, \infty]$ messbar setze

Def. hinzufügen

$$\int f \,\mathrm{d}\mu := \sup\left\{ \int s \,\mathrm{d}\mu \,\middle|\, s \text{ einfach, messbar }, 0 \leqslant s \leqslant f \right\}$$

Für $f : X \to (-\infty, \infty]$ messbar setze $\int f \,\mathrm{d}\mu := \int f_+ \,\mathrm{d}\mu - \int f_- \,\mathrm{d}\mu$, falls $\int f_- \,\mathrm{d}\mu < \infty$. Betrachte

$$\mathcal{L}^1(\mu) := \left\{ f : X \to \mathbb{R} \text{ messbar} \,\middle|\, \int |f| \,\mathrm{d}\mu < \infty \right\}$$

mit der Halbnorm $\|f\|_1 := \int |f| \,\mathrm{d}\mu$. Setze nun $\mathcal{N}^1 := \{ f : X \to \mathbb{R} \text{ messbar} \mid \int |f| \,\mathrm{d}\mu = 0 \}$. $L^1(\mu)$ ist ein topologischer Vektorraum (Topologie induziert durch $\|\cdot\|_1$) und $\mathcal{N}^1 \subset \mathcal{L}^1(\mu)$ ist ein abgeschlossener Untervektorraum (Übung). Definiere

$$L^1(\mu) := {}^{\mathcal{L}^1}\!/\!_{\mathcal{N}^1}$$

$\|\cdot\|_1$ induziert eine Norm $\|\cdot\|_1$ auf $L^1(\mu)$ via

$$\left\|f + \mathcal{N}^1\right\|_1 := \|f\|_1 \quad , \quad f \in \mathcal{L}^1(\mu) \qquad \text{(Übung)}$$

$(L^1(\mu), \|\cdot\|_1)$ ist ein Banachraum (Ana III, 9.23).

CopyPaste aus Ana3

4.2. Beispiele

(i) $L^1(\mathbb{R}^n) := L^1(\mathbb{R}^n, \Lambda, \lambda)$, wobei Λ die Lebesgue-messbaren Mengen sind und λ das Lebesgue-Maß ist.

(ii) $\ell^1(\mathbb{N}) = L^1(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \delta) = \{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \sum |f(n)| < \infty \}$, wobei δ das Zählmaß[8] ist.

4.3. Definition und Proposition

Für einen Maßraum (X, Σ, μ) definiere

$$\mathcal{L}^p(\mu) := \left\{ f : X \to \mathbb{R} \text{ messbar} \,\middle|\, \int |f|^p \mathrm{d}\mu < \infty \right\}$$
$$\mathcal{N}^p := \left\{ f : X \to \mathbb{R} \text{ messbar} \,\middle|\, \int |f|^p \mathrm{d}\mu = 0 \right\}$$

$\mathcal{L}^p(\mu)$ und $\mathcal{N}^p$ sind Vektorräume; wir setzen

$$L^p(\mu) := {}^{\mathcal{L}^p(\mu)}\!/\!_{\mathcal{N}^p}$$

Definiere $\|\cdot\|_p : \mathcal{L}^p(\mu) \to [0, \infty)$ durch $\|f\|_p := \left(\int |f|^p \mathrm{d}\mu\right)^{1/p}$. $\|\cdot\|_p$ induziert eine Abbildung $\|\cdot\|_p : L^P(\mu) \to [0, \infty)$ via $\|f + \mathcal{N}^p\|_p := \|f\|_p$, für $f \in \mathcal{L}^p$.

[7] X Menge, Σ eine σ-Algebra, μ Maß
[8] siehe auch http://de.wikipedia.org/wiki/Zählmaß_(Maßtheorie)

Beweis
$\mathcal{L}^p(\mu)$ **ist Vektorraum:** Für $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\int |\alpha \cdot f + \beta \cdot g|^p \mathrm{d}\mu \leqslant \int \big(|\alpha \cdot f| + |\beta \cdot g|\big)^p \mathrm{d}\mu &\leqslant \int \big(2 \cdot \sup\{|\alpha \cdot f|, |\beta \cdot g|\}\big)^p \mathrm{d}\mu \\ &\leqslant \int \Big(2^p \cdot \sup\Big\{|\alpha \cdot f|^p, |\beta \cdot g|^p\Big\}\Big) \mathrm{d}\mu \\ &\leqslant \int 2^p \cdot \big(|\alpha \cdot f|^p + |\beta \cdot g|^p\big) \mathrm{d}\mu < \infty\end{aligned}$$

$\mathcal{N}^p$ **ist Vektorraum:** Übung.

$\|\cdot\|_p$ **wohldefiniert auf** $L^p(\mu)$**:** Übung. □

4.4. Proposition

Für $\alpha, \beta \geqslant 0$, $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt

$$\alpha \cdot \beta \leqslant \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q} \qquad [\#]$$

Dies ist ein Spezialfall der Youngschen Ungleichung, `Wikipedia-Link`.

Beweis

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \iff p + q = pq \iff (p-1)(q-1) = 1 \iff p(q-1) = q \iff q(p-1) = p$$

Falls $\beta = \alpha^{p-1}$, so gilt $\alpha \cdot \beta = \alpha^p$ und

$$\frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q} = \frac{\alpha^p}{p} + \frac{(\alpha^{p-1})^q}{q} = \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\alpha^p}{q} = \alpha^p = \alpha \cdot \beta$$

Also gilt Gleichheit in [#]. Für festes $\alpha \geqslant 0$ betrachte $f_\alpha : [0, \infty) \to [0, \infty)$ gegeben durch $f_\alpha(\beta) := \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q} - \alpha \cdot \beta$. Dann ist f_α stetig auf $[0, \infty)$ und differenzierbar auf $(0, \infty)$. Es gilt $f_\alpha'(\beta) = \beta^{q-1} - \alpha$ und weiter

$$f_\alpha'(\beta) = 0 \iff \beta^{q-1} = \alpha \iff \beta = \alpha^{p-1}$$

$f_\alpha''(\alpha^{p-1}) \geqslant 0$, also hat f_α bei $\beta = \alpha^{p-1}$ ein lokales Minimum. Es gilt $f_\alpha(\alpha^{p-1}) = 0 \leqslant f_\alpha(0)$, also hat f_α bei $\beta = \alpha^{p-1}$ ein globales Minimum. $\Rightarrow$ [#]. □

4.5. Satz: Höldersche Ungleichung

Sei (X, Σ, μ) ein Maßraum. Seien $p, q \geqslant 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, $g \in \mathcal{L}^q(\mu)$. Dann gilt $f \cdot g \in \mathcal{L}^1\mu$ und

$$\|f \cdot g\|_1 \leqslant \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

Die entsprechenden Aussagen gelten dann auch für $L^p(\mu)$, $L^q(\mu)$, $L^1(\mu)$.

Beweis
Klar, falls $\|f\|_p = 0$ oder $\|g\|_q = 0$ (Warum?). Sei also $\|f\|_p, \|g\|_q \neq 0$. Nach Proposition 4.4 gilt für $x \in X$

$$0 \leqslant \underbrace{\underbrace{\frac{|f(x)|}{\|f\|_p}}_{=\alpha} \cdot \underbrace{\frac{|g(x)|}{\|g\|_q}}_{=\beta}}_{\text{messbar}} \leqslant \underbrace{\frac{1}{p} \cdot \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}}_{\text{integrierbar}}$$

$|f|^p, |g|^q \in \mathcal{L}^1(\mu)$, also $|f \cdot g| \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Es gilt

$$\frac{\int |f \cdot g| \mathrm{d}\mu}{\|f\|_p \cdot \|g\|_q} \leqslant \frac{1}{p} \cdot \frac{\int |f|^p \mathrm{d}\mu}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{\int |g|^q \mathrm{d}\mu}{\|g\|_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$\Rightarrow \inf |f \cdot g| \mathrm{d}\mu \leqslant \|f\|_p \cdot \|g\|_q$. □

4.6. Satz: Minkowskische Ungleichung

Für $1 \leqslant p < \infty$, $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ (bzw. $L^p(\mu)$) gilt

$$\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$$

Beweis
Sei $\|f + g\|_p > 0$ (sonst trivial). Es gilt

$$|f + g|^p = |f + g|^{p-1} \cdot |f + g| \leqslant |f + g|^{p-1}(|f| + |g|)$$

Sei $q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Es gilt $|f + g|^{p-1} \in \mathcal{L}^q(\mu)$, da $|f + g|^{(p-1)q} = |f + g|^p \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Nach Hölder 4.5 gilt

$$\begin{aligned}\int |f + g|^p \mathrm{d}\mu \leqslant \int |f + g|^{p-1} |f| \mathrm{d}\mu + \int |f + g|^{p-1} |g| \mathrm{d}\mu &\leqslant \|f\|_p \cdot \left\| |f + g|^{p-1} \right\|_q + \|g\|_p \cdot \left\| |f + g|^{p-1} \right\|_q \\ &= \left(\|f\|_p + \|g\|_p\right) \cdot \left(\int |f + g|^{(p-1)q} \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\|f\|_p + \|g\|_p\right) \cdot \left(\int |f + g|^p \mathrm{d}\mu\right)^q\end{aligned}$$

Also gilt

$$\left(\int |f + g|^p \mathrm{d}\mu\right)^{1 - \frac{1}{q}} = \left(\int |f + g|^p \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$$ □

4.7. Corollar

$L^p(\mu)$ ist ein normierter Vektorraum für $1 \leqslant p < \infty$.

4.8. Definition und Proposition

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^\infty(\mu) &:= \{f : X \to \mathbb{R} \text{ messbar} \mid \exists C \geqslant 0 : |f| \leqslant C \text{ fast überall}\} \\ \mathcal{N}^\infty &:= \{f : X \to \mathbb{R} \mid f = 0 \text{ fast überall}\}\end{aligned}$$

Wir definieren $L^\infty(\mu) := \mathcal{L}^\infty(\mu) / \mathcal{N}^\infty$. Wir definieren eine Norm auf $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ durch

$$\|f\|_\infty := \inf\{C \mid |f| \leqslant C \text{ fast überall}\} \quad , \qquad f \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$$

Dies induziert wieder eine Norm auf $L^\infty(\mu)$ durch $\|f + \mathcal{N}\|_\infty := \|f\|_\infty$. Damit ist $(L^\infty(\mu), \|\cdot\|_\infty)$ ein normierter Vektorraum. Für $f \in L^1\mu$, $g \in L^\infty(\mu)$ gilt $f \cdot g \in L^1(\mu)$ und $\|f \cdot g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \cdot \|g\|_\infty$

Beweis
Übung. □

4.9. Beispiele

(i) $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$, $1 \leqslant p < \infty$, also $X = \{1, \dots, n\}, \Sigma = \mathcal{P}(X), \mu =$ Zählmaß.

(ii) $\left(\ell^p(\mathbb{N}), \|\cdot\|_p\right)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, also $X = \mathbb{N}, \Sigma = \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu =$ Zählmaß. Dabei ist

$$\ell^p(\mathbb{N}) = \left\{ (a_n)_n \;\middle|\; a_n \in \mathbb{R}, \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^p < \infty \right\}$$

für $p < \infty$ bzw. $\ell^p(\mathbb{N}) = \{\text{beschränkte Folgen}\}$ für $p = \infty$.

4.10. Proposition

Sei (X, Σ, μ) ein Maßraum, $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, bzw. $p = 1$, $q = \infty$. Die Abbildung $\iota_p : L^p(\mu) \to L^q(\mu)^*$, gegeben durch

$$\iota_p(f)(g) := \int f \cdot g \,\mathrm{d}\mu$$

ist eine lineare Isometrie.

Beweis
$\iota_p(f) : L^q(\mu) \to \mathbb{R}$ **ist linear und wohldefiniert:** Übung!

ι_p **linear und wohldefiniert:** Übung!

$\iota_p(f)$ ist beschränkt durch $\|f\|_p$ nach Hölder (4.5), also ist ι_p beschränkt durch 1. Noch zu zeigen: Zu $f \in L^p(\mu)$ existiert $g \in L^q(\mu)$ mit $|\iota_p(f)(g)| = \|f\|_p \cdot \|g\|_q$. (Denn dann $\|\iota_p(f)\|_{L^q(\mu)^*} \geqslant \|f\|_p$)
Gegeben $f \in L^p(\mu)$, setze $g := \operatorname{sgn}(f) \cdot |f|^{p-1}$. Dann ist $|g|^q = |f|^p$, also $g \in L^q(\mu)$. Weiter gilt

$$\int f \cdot g \,\mathrm{d}\mu = \int |f \cdot g| \mathrm{d}\mu = \int |f|^p \mathrm{d}\mu = \left(\int |f|^p \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int |f|^p \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

Für $p = 1$ und $q = \infty$ Übung. □

4.11. Satz von Riesz-Fischer

Sei (X, Σ, μ) ein Maßraum. $L^p(\mu)$ ist vollständig für $p \in [1, \infty]$.

Beweis
Für $p = \infty$: Übung. Sei also $p < \infty$ und sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p(\mu)$ Cauchy.

Behauptung: Es gibt $E_l \subset X$, $l \in \mathbb{N}$, messbare Teilmenge mit $\mu(E_l) < \infty$ und sodass für $E := \bigcup_{l \in \mathbb{N}} E_l$ gilt $\chi_{X \setminus E} \cdot f_n = 0$ in $L^p(\mu)$ für $n \in \mathbb{N}$. Beweis: Übung!

Wähle $n_0 < n_1 < \dots$ mit $\|f_n - f_{n_k}\|_p < \frac{1}{2^k}$ für $n > n_k$, $k \in \mathbb{N}$. Für jedes $l, k \in \mathbb{N}$ gilt $\left|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right| \in L^p(\mu)$ und $\chi_{E_l} \in L^q(\mu)$ (wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), also ist nach Hölder (4.5) auch $\left|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right| \cdot \chi_{E_l} \in L^1(\mu)$. Weiter gilt für $j \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{j} \left\| \left| f_{n_{jk+1}} - f_{n_k} \right| \cdot \chi_{E_l} \right\|_1 \leqslant \sum_{k=0}^{j} \left\| f_{n_{k+1}} - f_{n_k} \right\|_p \cdot \|\chi_{E_l}\|_q \leqslant \sum_{k=0}^{j} \frac{1}{2^k} \cdot \|\chi_{E_l}\|_q$$

$\left(\sum_{k=0}^{j}\left|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right| \cdot \chi_{E_l}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ ist aufsteigende Folge von integrierbaren Funktionen. Nach dem Satz von Lebesgue über monotone Konvergenz gilt: $\sum_{k=0}^{\infty}\left|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right|$ konvergiert auf E_l fast überall. Da abzählbare Vereinigungen von Nullmengen Nullmengen sind, folgt: $\sum_{k=0}^{\infty}\left|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right|$ konvergiert auf E fast überall. Also konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty}\left|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right|$ auf X fast überall. $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} f_{n_{k+1}} - f_{n_k}$ konvergiert auf X fast überall. Also konvergiert auch $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ auf X fast überall. Setze

vlt strukturiert übereinander?

$$f(x) := \begin{cases} \lim_{k\to\infty} f_{n_k}, & \text{falls der Limes existiert} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

f ist messbar (Limes messbarer Funktionen). Weiter gilt $|f_{n_k}|^p \to |f|^p$ fast überall.

Noch zu zeigen: $f \in L^p(\mu)$: Die Folge $\|f_{n_k}\|_p^p$ ist beschränkt, da $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge bezüglich $\|\cdot\|_p$ ist. Es gilt

$$\int |f|^p \mathrm{d}\mu \leqslant \liminf_{k\to\infty} \int |f_{n_k}|^p \mathrm{d}\mu < \infty$$

$|f|^p \overset{f.ü.}{=} \liminf |f_{n_k}|^p$

nach dem Lemma von Fatou. Also gilt $f \in L^p(\mu)$. Noch zu zeigen: $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ bezüglich $\|\cdot\|_p$. Sei dazu $j \in \mathbb{N}$. Sei $n \geqslant n_j$. Für $i > j$ gilt

$$\|f_n - f_{n_i}\|_p \leqslant \left\|f_n - f_{n_j}\right\|_p + \left\|f_{n_j} - f_{n_i}\right\|_p < 2 \cdot \frac{1}{2^j}$$

Weiter gilt $|f_n - f_{n_i}|^p \xrightarrow{i\to\infty} |f_n - f|^p$ fast überall. Mit dem Lemma von Fatou folgt

$$\int |f_n - f|^p \mathrm{d}\mu \leqslant \liminf \int |f_n - f_{n_i}|^p \mathrm{d}\mu \leqslant \left(2 \cdot \frac{1}{2^j}\right)^p$$

$\Rightarrow \|f_n - f\|_p \leqslant 2 \cdot \frac{1}{2^j}$, falls $n \geqslant n_j$, also $\|f_n - f\|_p \xrightarrow{n\to\infty} 0$. □

5. Schwache Topologien, Reflexivität

5.1. Definition

RevChap5

Sei X ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum. Die **schwache Topologie** $\mathcal{T}_X^{\mathrm{w}}$ ist die gröbste[9] Topologie auf X, sodass alle $\varphi \in X^*$ stetig sind.

5.2. Bemerkung

(i) Jedes $\varphi \in X^*$ ist (nach Definition von $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$) stetig bezüglich $\mathcal{T}_X^{\|\cdot\|}$, d.h. $\mathcal{T}_X^{\mathrm{w}} \subset \mathcal{T}_X^{\|\cdot\|}$. Mit anderen Worten: Die Abbildung $\mathrm{id}_X : \left(X, \mathcal{T}_X^{\|\cdot\|}\right) \to \left(X, \mathcal{T}_X^{\mathrm{w}}\right)$ ist stetig.

(ii) Mengen der Form $\varphi^{-1}(U)$ für $U \subset K$ offen, $\varphi \in X^*$ bilden eine Subbasis für $\mathcal{T}_X^{\mathrm{w}}$. Mengen der Form

$$\bigcap_{i=1}^{n} \varphi_i^{-1}(U_i) \quad , \qquad U_i \subset \mathbb{K} \text{ offen}, \varphi_i \in X^*$$

bilden eine Basis für $\mathcal{T}_X^{\mathrm{w}}$.

5.3. Proposition

$(X, \mathcal{T}_X^{\mathrm{w}})$ ist Hausdorffsch.

Beweis
Seien $x \neq y \in X$. Nach Hahn-Banach existiert $\varphi \in X^*$ mit $\varphi(x) \neq \varphi(y)$. Setze $\varepsilon := \frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{2} > 0$, dann sind $\varphi^{-1}\big(B_{\mathbb{K}}(\varphi(x), \varepsilon)\big)$ und $\varphi^{-1}\big(B_{\mathbb{K}}(\varphi(y), \varepsilon)\big)$ disjunkte offene Umgebungen von x bzw. y. $\square$

5.4. Proposition

Sei X ein normierter Raum, $x \in X$, $(x_\lambda)_\Lambda \subset X$ ein Netz. Dann sind äquivalent:

(i) $x_\lambda \xrightarrow{\mathrm{w}} x$, d.h. $x_\lambda \to x$ in $\mathcal{T}_X^{\mathrm{w}}$

(ii) $\varphi(x_\lambda) \to \varphi(x)$ für alle $\varphi \in X^*$.

Beweis
(i)⇒(ii): Sei $\varphi \in X^*$, $\varepsilon > 0$. $\varphi(x) \in B_{\mathbb{K}}\big(\varphi(x), \varepsilon\big) \subset \mathbb{K}$ offen. φ stetig bezüglich $\mathcal{T}_X^{\mathrm{w}}$

$$\Rightarrow x \in \varphi^{-1}\Big(B_{\mathbb{K}}\big(\varphi(x), \varepsilon\big)\Big) \underset{\text{w-offen}}{\subset} X$$

$x_\lambda \xrightarrow{\mathrm{w}} x \Rightarrow \exists \overline{\lambda} \in \Lambda$ mit $x_\lambda \in \varphi^{-1}\big(B_{\mathbb{K}}(\varphi(x), \varepsilon)\big)$, falls $\lambda \geqslant \overline{\lambda}$. Dann folgt $\varphi(x_\lambda) \in B_{\mathbb{K}}(\varphi(x), \varepsilon)$ falls $\lambda \geqslant \overline{\lambda}$, also $\varphi(x_\lambda) \to \varphi(x)$ in $\mathbb{K}$.

(ii)⇒(i): Sei $x \in V \subset X$ w-offen. Nach 5.2(ii) existieren $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in X^*$, $U_1, \ldots, U_m$ offen in $\mathbb{K}$ mit

$$x \in \phi_1^{-1}(U_1) \cap \ldots \cap \varphi_m^{-1}(U_m) \subset V$$

Wegen (ii) existieren $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \Lambda$ mit $\varphi_i(x_\lambda) \in U_i$, falls $\lambda \geqslant \lambda_i$, $i = 1, \ldots, m$. Wähle $\overline{\lambda} \in \Lambda$ mit $\overline{\lambda} \geqslant \lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Dann gilt $\varphi_i(x_\lambda) \in U_i$, falls $\lambda \geqslant \overline{\lambda}$, $i = 1, \ldots, m$. Damit ist $x_\lambda \in \varphi_i^{-1}(U_i)$, falls $\lambda \geqslant \overline{\lambda}$, $i = 1, \ldots, m$. Also gilt $x_\lambda \in \bigcap_{i=1}^m \varphi_i^{-1}(U_i) \subset V$, falls $\lambda \geqslant \overline{\lambda}$. $\square$

[9] auch: ”dollste”

5.5. Corollar

Wenn $x_\lambda \xrightarrow{\text{w}} x$, dann gilt $(x_\lambda)_\Lambda \subset X$ ist beschränkt.

Beweis
Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit (siehe 3.5). □

5.6. Beispiel

Im Allgemeinen gilt

$$x_\lambda \xrightarrow{\|\cdot\|} \quad \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \quad x_\lambda \xrightarrow{\text{w}} x$$

Betrachte $X = \ell^2(\mathbb{N})$ mit $\|\cdot\|_2$. Sei $e_n \in \ell^2(\mathbb{N})$ gegeben durch $e_n(m) := \delta_{n,m}$. Dann gilt $e_n \not\to 0$ für $n \to \infty$ in $\mathcal{T}^{\|\cdot\|_2}$, denn $\|e_n - 0\|_2 = \|e_n\|_2 \equiv 1 \not\to 0$. Aber $e_n \xrightarrow{\text{w}} 0$ für $n \to \infty$: Kronecker-Delta

Wir werden später sehen, dass $\ell^2(\mathbb{N})^* \cong \ell^2(\mathbb{N})$ via $\langle a \,|\, b\rangle = \sum \overline{a}(k)b(k)$. Es gilt aber

$$\langle a \,|\, e_n\rangle = \sum \overline{a(k)} e_n(k) = \overline{a(n)} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

$\Rightarrow e_n \xrightarrow{\text{w}} 0$ für $n \to \infty$.
Direktes Argument: Übung.

5.7. Proposition

Seien X, Y metrische Räume, $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ ein beschränkter (d.h. normstetiger) linearer Operator. Dann ist T auch stetig bezüglich der schwachen Topologie auf X und Y.

Beweis
Zu zeigen: Falls $U \subset Y$ schwach-offen ist, so ist $T^{-1}(U)$ schwach-offen in X. Wir können annehmen, dass U von der Form $\varphi^{-1}(B_\mathbb{K}(\lambda,\varepsilon))$, $\varphi \in Y^*, \lambda \in \mathbb{K}, \varepsilon > 0$ ist, da diese Mengen eine Subbasis bilden. Es gilt nun

$$T^{-1}\Big(\varphi^{-1}\big(B_\mathbb{K}(\lambda,\varepsilon)\big)\Big) = \Big(\underbrace{\varphi \circ T}_{\in X^*}\Big)^{-1}\big(B_\mathbb{K}(\lambda,\varepsilon)\big) \underset{\text{w-offen}}{\subset} X$$ □

5.8. Definition

Sei X ein normierter Raum. Die **w^*-Topologie** $\mathcal{T}^{\mathrm{w}^*}$ ist die gröbste Topologie auf X^*, sodass alle $\iota_X(x) \in X^{**}$ stetig sind.

5.9. Bemerkung

(i) Es gilt $\mathcal{T}^{\mathrm{w}^*}_{X^*} \subset \mathcal{T}^{\mathrm{w}}_{X^*} \subset \mathcal{T}^{\|\cdot\|_{X^*}}_{X^*}$

(ii) Mengen der Form $W(\varphi, x\varepsilon) := \{\psi \in X^* \,|\, |\psi(x) - \varphi(x)| < \varepsilon\}$ bilden eine Subbasis für $\mathcal{T}^{\mathrm{w}^*}_{X^*}$. Mengen der Form $\{\psi \,|\, \psi(x) \in U\}, U \subseteq \mathbb{K}$ offen, bilden ebenfalls eine Subbasis für $\mathcal{T}^{\mathrm{w}^*}_{X^*}$.

(iii) Ein Netz $(\varphi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset X^*$ konvergiert w^* gegen $\varphi \in X^*$ genau dann, wenn $\iota_X(x)(\varphi_\lambda) = \varphi_\lambda(x) \xrightarrow{\lambda} \varphi(x) = \iota_X(x)(\varphi)$ für jedes $x \in X$.

(iv) $\mathcal{T}^{\mathrm{w}^*}_{X^*}$ ist Hausdorff. Beweis: Übung.

5.10. Satz (Banach-Alaoglu)

Sei X ein normierter Raum. Dann ist die abgeschlossene Einheitskugel in X^*

$$\overline{B_{X^*}(0,1)} = \{\varphi \in X^* \mid \|\varphi\|_{X^*} \leqslant 1\}$$

w^*-kompakt.

Beweis
Für $x \in X$ setze $F_x := \mathbb{K}$ und $F := \prod_{x\in X} F_x$. Wir versehen F mit der Produkttopologie $\mathcal{T}_F^\Pi$. Definiere eine Abbildung $\kappa : X^* \to F$ durch $\kappa(\varphi)_x := \varphi(x)$, $x \in X$. Dann ist κ injektiv (warum?) und $\mathcal{T}^{\mathrm{w}^*}$ stimmt überein mit der durch κ und $\mathcal{T}_F^\Pi$ induzierten Topologie auf X^*. Diese besteht aus den Mengen $\left\{\kappa^{-1}(U) \,\middle|\, U \in \mathcal{T}_F^\Pi\right\}$. Eine Basis für $\mathcal{T}_F^\Pi$ sind Mengen der Form

$$\prod_{x\in X} U_x, \quad U_x \subset \mathbb{K} \text{ offen}$$

mit $U_x = \mathbb{K}$ für alle bis auf endlich viele $x \in X$. Eine Basis, für die durch κ und $\mathcal{T}_F^\Pi$ induzierte Topologie auf X^* sind Mengen der Form

$$\kappa^{-1}\left(\prod_{x\in X} U_x\right) = \underbrace{\bigcap_{i=1}^n \{\varphi \mid \varphi(x_i) \in U_{x_i}\}}_{\text{bilden Basis für } \mathcal{T}_{X^*}^{\mathrm{w}^*}\text{, 5.9(ii)}}$$

mit U_x wie oben. Dabei erhalten wir die x_i durch $\kappa^{-1}\left(\prod_{x\in X} V_x\right) = \{\varphi \mid \varphi(x_i) \in U_{x_i}\}$, wobei

$$V_x = \begin{cases} \mathbb{K}, & \text{falls } x \neq x_i \\ U_{x_i}, & \text{falls } x = x_i \end{cases}$$

Falls $\|\varphi\| \leqslant 1$, so gilt $|\varphi(x)| \leqslant \|x\|_X$, also

$$\kappa\left(\overline{B_{X^*}(0,1)}\right) \subset \underbrace{\prod_{x\in X} \overline{B_{\mathbb{K}}(0,\|x\|)}}_{\text{kompakt nach Tychonov}} \subset F$$

Bleibt zu zeigen: $\kappa\left(\overline{B_{X^*}(0,1)}\right) \subset F$ ist abgeschlossen. Sei $f \in \overline{\kappa\left(\overline{B_{X^*}(0,1)}\right)}$. Dies definiert eine Abbildung $\varphi_f : X \to \mathbb{K}$ durch $\varphi_f(x) := f_x$. Falls nun φ_f linear und stetig ist mit $\|\varphi_f\| \leqslant 1$, so gilt $\kappa(\varphi_f) = f$, denn $\kappa(\varphi_f)(x) = \varphi_f(x) = f_x$. Damit folgt $f \in \kappa\left(\overline{B_{X^*}(0,1)}\right)$ und damit $\overline{B_{X^*}(0,1)}$ kompakt.

Additivität: Seien $y, z \in X$, $\varepsilon > 0$. Dann ist

$$W_\varepsilon := \left\{ g \in \prod_{x\in X} \overline{B_{\mathbb{K}}(0,\|x\|)} \,\middle|\, \begin{array}{r} |g_{y+z} - f_{y+z}| < \varepsilon \\ |g_y - f_y| < \varepsilon \\ |g_z - f_z| < \varepsilon \end{array} \right\} \underset{\text{offen}}{\subset} \prod_{x\in X} \overline{B_{\mathbb{K}}(0,\|x\|)}$$

$f \in \overline{\kappa\left(\overline{B_{X^*}(0,1)}\right)} \Rightarrow \exists g \in W_\varepsilon \cap \kappa\left(\overline{B_{X^*}(0,1)}\right)$. Sei $g' \in \overline{B_{X^*}(0,1)}$ mit $\kappa(g') = g$. $g' \in X^*$ ist linear, also gilt auch $g_{y+z} = g_y + g_z$ und daher

$$|f_{y+z} - (f_y + f_z)| < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon$$

$\varepsilon > 0$ war beliebig, also $f_{y+z} = f_y + f_z$ und $\varphi_f(y+z) = \varphi_f(y) + \varphi_f(z)$. Also ist φ additiv;

Skalarmultiplikation: analog.

Es gilt $|\varphi_f(x)| = |f_x| \leqslant \|x\|$, $x \in X$, also $\|\varphi_f\|_{X^*} \leqslant 1$. □

5.11. Erinnerung

(a) Ein topologischer Raum heißt

(i) **separabel**, falls X eine abzählbare dichte Teilmenge enthält.

(ii) **1. abzählbar**, falls gilt: Jedes $x \in X$ besitzt abzählbar viele Umgebungen U_i, $i \in \mathbb{N}$, sodass jede Umgebung V von x wenigstens ein U_i enthält.

(iii) **2. abzählbar**, falls gilt: $\mathcal{T}_X$ besitzt eine abzählbare Basis, d.h. es gibt offene Mengen W_i, $i \in N$, sodass für jedes $V \subset X$ offen gilt: $V = \bigcup_{W_i \subset V} W_i$.

(b) 2. abzählbar $\Rightarrow$ 1. abzählbar und separabel.

(c) Ist X kompakt und 1. abzählbar, so besitzt jede Folge in X eine konvergente Teilfolge.

Beweisskizze: $(x_n)_{\mathbb{N}} \subset X$, setze $A_n := \overline{\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}}$. Dann ist $\bigcap_{\mathbb{N}} A_n$ nichtleer wegen Kompaktheit, also hat $(x_n)_{\mathbb{N}}$ einen Häufungspunkt. Benutze nun 1. abzählbar.

(d) Sei X kompakt und Hausdorff. Dann ist X metrisierbar $\iff$ X ist 2. abzählbar.

"$\Longrightarrow$" ist eine einfache Übung. "$\Longleftarrow$" Urysohn, Metrisierungssätze. Den Satz von Urysohn hatten wir auch in "Grundlagen der Analysis, Topologie und Geometrie" im letzen Semester bewiesen.

5.12. Satz

Sei X ein separabler normierter Raum. Dann ist $\overline{B_{X^*}(0,1)}$ bezüglich $\mathcal{T}_{X^*}^{\mathrm{w}^*}$ metrisierbar. Insbesondere ist $\overline{B_{X^*}(0,1)}$ bezüglich $\mathcal{T}_{X^*}^{\mathrm{w}^*}$ 2. abzählbar und kompakt, und jede Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beweis
Sei $\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} \subset B_X(0,1)$ dicht. Definiere eine Abbildung $d : X^* \times X^* \to [0,\infty)$ durch

$$d(\varphi,\psi) := \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \cdot \big|\varphi(x_n) - \psi(x_n)\big|$$

Dann ist d eine Metrik: d ist offensichtlich symmetrisch und erfüllt die Dreiecksungleichung. Zu zeigen: d ist definit: $\varphi \neq \psi \Rightarrow \exists x \in B_X(0,1)$ mit $\varphi(x) \neq \psi(x)$. Also existiert x_n mit $\varphi(x_n) \neq \psi(x_n)$. Dann ist $d(\varphi,\psi) \neq 0$.

Sei nun $(\varphi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset \overline{B_{X^*}(0,1)}$ ein Netz und $\varphi \in \overline{B_{X^*}(0,1)}$. Es genügt zu zeigen

$$\varphi_\lambda \xrightarrow{\mathrm{w}^*} \varphi \quad \iff \quad d(\varphi_\lambda,\varphi) \longrightarrow 0$$

denn dann stimmen $\mathcal{T}_{X^*}^{\mathrm{w}^*}$ und $\mathcal{T}_{X^*}^{d}$ überein. (Warum?)

"$\Rightarrow$": Es gelte $\varphi_\lambda \xrightarrow{\mathrm{w}^*} \varphi$, also $\varphi_\lambda(x_n) \to \varphi(x_n)$ für $n \in \mathbb{N}$ (nach 5.9(iii)). Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{n\geqslant n_0} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{4}$. Wähle $\overline{\lambda} \in \Lambda$ mit $|\varphi_\lambda(x_n) - \varphi(x_n)| < \frac{\varepsilon}{4}$ falls $n < n_0$, $\lambda \geqslant \overline{\lambda}$. Dann gilt für $\lambda \geqslant \overline{\lambda}$

$$\begin{aligned} d(\varphi_\lambda,\varphi) &\leqslant \sum_{n<n_0} \frac{1}{2^n} \cdot \big|\varphi_\lambda(x_n) - \varphi(x_n)\big| + \sum_{n\geqslant n_0} \frac{1}{2^n} \cdot \underbrace{\big|\varphi_\lambda(x_n) - \varphi(x_n)\big|}_{\leqslant 2} \\ &< 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} + 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon \end{aligned}$$

"$\Leftarrow$": Übung mit: $\forall n. \varphi_\lambda(x_n) \to \varphi(x_n)$ und $\{x_n\}$ dicht $\Rightarrow \varphi_\lambda(x) \to \varphi(x)$ für jedes $x \in X$. $\square$

Nachtrag (zum Beweis von 5.12)

Topologien sind durch Konvergenz von Netzen bestimmt: Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.

$$\begin{aligned}
U \subset X \text{ offen} &\iff \forall x \in U : \exists x \in V \subset U, V \in \mathcal{T} \\
U \subset X \text{ nicht offen} &\iff \exists x \in U : \text{ für jedes } x \in V \underset{\text{offen}}{\subset} X \text{ gilt } V \cap (X \setminus U) \neq \emptyset \\
&\overset{(\#)}{\iff} \exists x \in U, \exists \text{ Netz } (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subset X \setminus U \text{ mit } x_\lambda \to x
\end{aligned}$$

$\overset{(\#)}{\Longleftarrow}$ ist trivial. $\overset{(\#)}{\Longrightarrow}$: $\Lambda := \{V \mid x \in V \subset X \text{ offen}\}$ ist gerichtet bezüglich "$\subset$". Zu jedem $V \in \Lambda$ wähle $x_V \in (X \setminus U) \cap V$. Dann gilt $(x_v)_{v \in \Lambda} \subset X \setminus U$ und $x_v \to x$.

Auswahlaxiom nötig!

5.13. Definition

Der normierte Raum X heißt **reflexiv**, falls die kanonische Abbildung $\iota_X : X \to X^{**}$ ein Isomorphismus ist. (ι_X ist Isomorphismus genau dann, wenn ι_X surjektiv ist.)

5.14. Proposition

Sei X ein reflexiver Banachraum und $Y \subset X$ ein abgeschlossener Teilraum. Dann ist Y reflexiv.

Beweis
Sei $\kappa : Y \hookrightarrow X$ die Inklusion. Dann ist $\kappa \in \mathcal{L}(Y, X)$ und nach 3.4 kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, hook, "\iota_Y"] \arrow[d, hook, "\kappa"'] & Y^{**} \arrow[d, "\kappa^{\mathrm{tr}\,\mathrm{tr}}"] \\
X \arrow[r, hook, "\iota_X", "\cong"'] & X^{**}
\end{tikzcd}$$

Sei $f \in Y^{**}$, dann existiert $x \in X$ mit $\iota_X(x) = \kappa^{\mathrm{tr}\,\mathrm{tr}}(f)$. Für $\varphi \in X^*$ gilt

$$\varphi(x) = \iota_X(x)(\varphi) = \kappa^{\mathrm{tr}\,\mathrm{tr}}(f)(\varphi).$$

Aber $(\kappa^{\mathrm{tr}})^{\mathrm{tr}}(f) = f \circ \kappa^{\mathrm{tr}}$ und $\kappa^{\mathrm{tr}}(\varphi) = \varphi \circ \kappa = \varphi|_Y$, also $\varphi(x) = f(\varphi|_Y)$ für jedes $\varphi \in X^*$. Falls $x \notin Y$, so existiert nach Hahn-Banach ein $\psi \in X^*$ mit $\psi|_Y = 0$, $\psi(x) \neq 0$. Damit folgt

$$0 \neq \varphi(x) = f(\psi|_Y) = 0 \quad \lightning$$

also gilt $x \in Y$. Weiter gilt $\iota_Y(x) = f$, denn $\kappa^{\mathrm{tr}\,\mathrm{tr}}$ ist injektiv. Andernfalls existiert $0 \neq g \in Y^{**}$ mit $\kappa^{\mathrm{tr}\,\mathrm{tr}}(g) = 0$, also existiert $\sigma \in Y^*$ mit $g(\sigma) \neq 0$. Nach Hahn-Banach existiert $\rho \in X^*$ mit $\rho|_Y = \sigma$. Nun gilt

$$0 = \kappa^{\mathrm{tr}\,\mathrm{tr}}(g) = g(\rho|_Y) = \rho(g) \neq 0 \quad \lightning$$

$\Rightarrow \kappa^{\mathrm{tr}\,\mathrm{tr}}$ ist injektiv. □

5.15. Proposition

Für einen Banachraum X gilt: X reflexiv $\iff$ X^* reflexiv.

Beweis
"$\Rightarrow$": $\iota_X : X \xrightarrow{\cong} X^{**}$ ist ein isometrischer Isomorphismus. Nach Blatt 6, Aufgabe 2 ist $\iota_X^{\mathrm{tr}} : X^{***} \to X^*$ auch ein isometrischer Isomorphismus. Nach 3.4 gilt $\iota_X^{\mathrm{tr}} \circ \iota_{X^*} = \mathrm{id}_{X^*}$, also ist $(\iota_X^{\mathrm{tr}})^{-1} = \iota_{X^*}$ ebenfalls ein isometrischer Isomorphismus.

"$\Leftarrow$": genauso ✓ □

5.16. Satz

Sei X ein Banachraum. Dann gilt

$$\overline{B_X(0,1)} \underset{\text{w}^*\text{-dicht}}{\subset} \overline{B_{X^{**}}(0,1)}$$

Beweis
Zu zeigen: Zu $f \in \overline{B_{X^{**}}(0,1)}$ und $\varepsilon > 0$, $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in X^*$, existiert $x \in \overline{B_X(0,1)}$ mit $|f(\varphi_i) - \varphi_i(x)| < \varepsilon$ für $i = 1, \dots, n$. Behauptung: Es gilt (gegeben $f, \varphi_1, \dots, \varphi_n$)

$$\inf_{x \in \overline{B_X(0,1)}} \sum_{i=1}^n \left| f(\varphi_i) - \varphi_i(x) \right|^2 = 0$$

Sei $h(x) := \sum_{i=1}^n |f(\varphi_i) - \varphi_i(x)|^2$ und $\inf_{x\in\overline{B_X(0,1)}} h(x) =: \mu \geqslant 0$. Wähle $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \overline{B_X(0,1)}$ mit $\lim_{k\to\infty} h(x_k) = \mu$. Nach Übergang zu einer Teilfolge dürfen wir annehmen, dass $\big(\varphi_i(x_k)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen $\gamma_i \in \mathbb{K}$ konvergiert für $i = 1, \dots, n$. Setze $\delta_i := f(\varphi_i) - \gamma_i$, dann gilt $\mu = \sum_{i=1}^n |\delta_i|^2$. Für $y \in \overline{B_X(0,1)}$, $t \in [0,1]$ gilt

$$\begin{aligned}
\mu \leqslant h\Big(\underbrace{(1-t)\cdot x_k + t\cdot y}_{\in \overline{B_X(0,1)}}\Big) &= \sum_{i=1}^n \Big| f(\varphi_i) - (1-t)\cdot\varphi_i(x_k) - t\cdot\varphi_i(y)\Big|^2 \\
&= \sum_{i=1}^n \Big| f(\varphi_i) - \varphi(x_k) - t\cdot\big(\varphi_i(y) - \varphi_i(x_k)\big)\Big|^2 \\
&= \sum_{i=1}^n \left| f(\varphi_i) - \varphi_i(x_k)\right|^2 + t^2 \cdot \sum_{i=1}^n \left|\varphi_i(y) - \varphi_i(x_k)\right|^2 \\
&\quad - 2t\cdot\operatorname{Re}\sum_{i=1}^n \big(\varphi_i(y) - \varphi_i(x_k)\big)\cdot\overline{\big(f(\varphi_i) - \varphi_i(x_k)\big)} \\
&\xrightarrow{k\to\infty} \underbrace{\sum_{i=1}^n \left|f(\varphi_i) - \gamma_i\right|^2}_{=\mu} + t^2\cdot\sum_{i=1}^n \left|\varphi_i(y) - \gamma_i\right|^2 - 2t\cdot\operatorname{Re}\sum_{i=1}^n \big(\varphi_i(y) - \gamma_i\big)\cdot\overline{\delta_i}
\end{aligned}$$

Nach Abziehen von μ folgt für $t > 0$

$$\begin{aligned}
& 0 \leqslant t\cdot\sum_{i=1}^n \left|\varphi_i(y) - \gamma_i\right|^2 - 2\cdot\operatorname{Re}\sum_{i=1}^n \big(\varphi_i(y) - \gamma_i\big)\cdot\overline{\delta_i} \\
\overset{t\searrow 0}{\Longrightarrow}\ & 2\cdot\operatorname{Re}\sum_{i=1}^n \big(\varphi_i(y) - \gamma_i\big)\cdot\overline{\delta_i} \leqslant 0 \text{ für alle } y \in \overline{B_X(0,1)}
\end{aligned}$$

Für $y \in \overline{B_X(0,1)}$ gilt $\operatorname{Re}\sum_{i=1}^n (\varphi_i(y) - \gamma_i)\cdot\overline{\delta_i} \leqslant 0$. Definiere $\varphi := \sum_{i=1}^n \overline{\delta_i}\cdot\varphi_i \in X^*$, dann gilt für $y \in \overline{B_X(0,1)}$

$$\operatorname{Re}\varphi(y) \leqslant \operatorname{Re}\sum_{i=1}^n \gamma_i\overline{\delta_i}$$

also $\|\varphi\|_{X^*} \leqslant \operatorname{Re}\sum_{i=1}^n \gamma_i\cdot\overline{\delta_i}$. Aber

$$\varphi(x_k) = \sum_{i=1}^n \overline{\delta_i}\cdot\varphi_i(x_k) \xrightarrow{k\to\infty} \sum_{i=1}^n \overline{\delta_i}\cdot\gamma_i,$$

das heißt $\left|\sum_{i=1}^n \overline{\delta_i}\cdot\gamma_i\right| \leqslant \|\varphi\| \leqslant \mathrm{Re}\sum_{i=1}^n \gamma_i\cdot\overline{\delta_i}$ und somit $\sum_{i=1}^n \overline{\delta_i}\cdot\gamma_i = \|\varphi\|_{X^*}$. Wir erhalten

$$\mu = \sum_{i=1}^n \overline{\delta_i}\delta_i = \sum_{i=1}^n \overline{\delta_i}\big(f(\varphi_i)-\gamma_i\big) = f(\varphi) - \|\varphi\|_{X^*} \leqslant 0$$ □

5.17. Corollar

Sei X ein Banachraum, $f \in \overline{B_{X^{**}}(0,1)}$, $\varphi_1,\ldots,\varphi_n \in X^*$. Falls $\overline{B_X(0,1)}$ w-kompakt ist, so existiert $x \in \overline{B-X(0,1)}$ mit $f(\varphi_i) = \varphi_i(x)$, $i = 1,\ldots,n$.

Beweis
Definiere $h : X \to \mathbb{R}$ durch $h(x) := \sum_{i=1}^n |f(\varphi_i) - \varphi_i(x)|^2$ ist stetig auf X bezüglich $\mathcal{T}_X^{\mathrm{w}}$, nimmt also auf $\overline{B_X(0,1)}$ ihr Minimum an. □

5.18. Satz

Sei X ein Banachraum. Dann sind äquivalent:

(i) X ist reflexiv.

(ii) $\overline{B_X(0,1)}$ ist w^*-kompakt.

(iii) $\mathcal{T}_{X^*}^{\mathrm{w}} = \mathcal{T}_{X^*}^{\mathrm{w}^*}$.

Beweis
(i)⇒(ii): $\overline{B_{X^{**}}(0,1)}$ ist w^*-kompakt nach 5.10. Nach 5.15 ist X^* reflexiv, daher stimmen auf X^{**} die w^*- und die w-Topologie überein. ⇒ $\overline{B_{X^{**}}(0,1)}$ ist w-kompakt. Aber unter $X \cong X^{**}$ stimmen die jeweiligen w-Topologien überein; ebenso $\overline{B_X(0,1)} \cong \overline{B_{X^{**}}(0,1)}$.

(ii)⇒(i): Es gilt $(X, \mathcal{T}_X^{\mathrm{w}}) \subset (X^{**}, \mathcal{T}_{X^{**}}^{\mathrm{w}^*})$ in der Relativtopologie (warum?). $\overline{B_X(0,1)}$ kompakt ⇒ $\overline{B_X(0,1)} \subset \overline{B_{X^{**}}(0,1)}$ w^*-abgeschlossen und w^*-dicht. Also folgt $\overline{B_X(0,1)} = \overline{B_{X^{**}}(0,1)}$ und somit $X = X^{**}$.

(iii)⇒(i): $\overline{B_{X^*}(0,1)}$ ist w^*-kompakt nach Banach-Alaoglu (5.10). Mit (iii) folgt, dass $\overline{B_{X^*}(0,1)}$ w-kompakt ist. Da (ii)⇒(i) folgt, dass X^* reflexiv ist und somit ist nach 5.16 auch X reflexiv.

(i)⇒(iii): klar. □

5.19. Bemerkung

a) Sei X ein normierter Raum. Falls X^* separabel (bezüglich $\mathcal{T}_{X^*}^{\|\cdot\|}$) ist, so ist X separabel (bezüglich $\mathcal{T}_X^{\|\cdot\|}$)

b) Für einen Banachraum X gilt: X reflexiv $\iff$ $\overline{B_X(0,1)}$ ist folgenkompakt bezüglich $\mathcal{T}_X^{\mathrm{w}}$.

Beweis
a) Übung.

b) **"⇒":** leicht.
"⇐": nicht so leicht.

6. Gleichmäßig konvexe Räume, noch einmal L^p

6.1. Definition und Proposition

Ein normierter Raum X heißt **gleichmäßig konvex**, falls eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

(i) Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$, sodass für $x, y \in X$ mit $\|x\|, \|y\| \leqslant 1$ gilt:

$$\|x-y\| \geqslant \varepsilon \implies \left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\| \leqslant 1-\delta$$

(ii) Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$, sodass für $x, y \in X$ mit $\|x\|, \|y\| = 1$ gilt:

$$\|x-y\| \geqslant \varepsilon \implies \left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\| \leqslant 1-\delta$$

(iii) Für $(x_n)_{\mathbb{N}}, (y_n)_{\mathbb{N}} \subset X$ mit $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \left\|\frac{1}{2}(x_n+y_n)\right\| = 1 \implies \lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0$$

(iv) Für $(x_n)_{\mathbb{N}}, (y_n)_{\mathbb{N}} \subset X$ mit $\limsup_n \|x_n\| = \limsup_n \|y_n\| = 1$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \left\|\frac{1}{2}(x_n+y_n)\right\| = 1 \implies \lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0$$

Beweis
(i)⇒(ii)⇒(iii): trivial.

(iii)⇒(iv): einfach. Zeige zunächst: Aus $\limsup\|x_n\|, \limsup\|y_n\| \leqslant 1$ und $\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{1}{2}(x_n+y_n)\right\| = 1$ folgt $\lim_{n\to\infty}\|x_n\| = \lim_{n\to\infty}\|y_n\| = 1$.

(iv)⇒(i): Angenommen (i) gilt nicht, d.h. $\exists \varepsilon > 0$ und für jedes $\delta_n = \frac{1}{n+1}$ existieren $x_n, y_n \in X$ mit $\|x_n\|, \|y_n\| \leqslant 1$, $\|x_n - y_n\| \geqslant \varepsilon$ und $\left\|\frac{1}{2}(x_n+y_n)\right\| > 1 - \frac{1}{n+1}$. $\lightning$ zu (iv). □

6.2. Beispiel

$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ ist gleichmäßig konvex für $1 < p < \infty$ aber nicht für $p = 1, p = \infty$

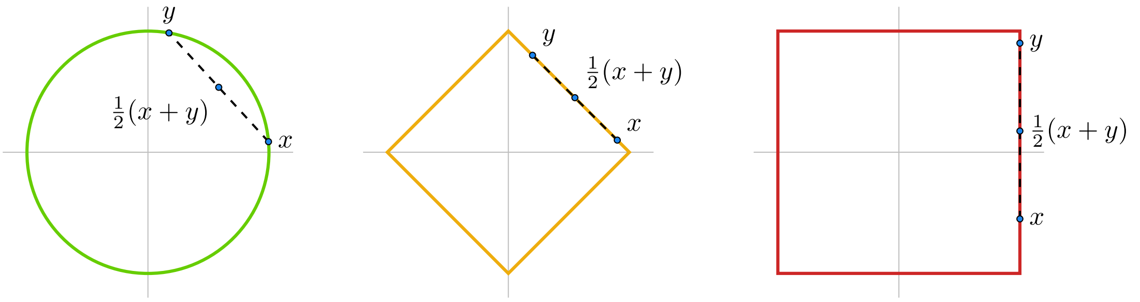


Abbildung 1: Einheitskugel für $p = 2$, $p = 1$ und $p = \infty$. Nur für $p \notin \{1, \infty\}$ ist (ii) aus 6.1 erfüllt. Anschaulich gesprochen bedeutet dies, dass nur in gleichmäßig konvexen Räumen Bälle auch tatsächlich „rund“ sind.

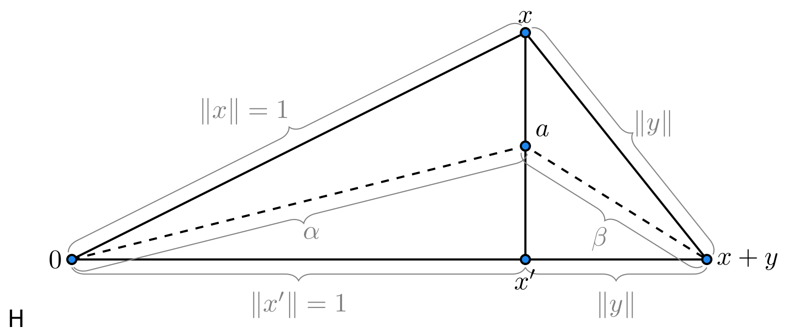


Abbildung 2: Die Tatsache, dass $\|x\|$ und $\|x'\|$ in dieser Zeichnung nicht gleich sind, weißt schon darauf hin, dass diese Zeichnung in Wahrheit „degeneriert“.

6.3. Definition und Proposition

Ein gleichmäßig konvexer normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum ist **strikt konvex**, d.h. für alle $0 \neq x, y \in X$ mit $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ existiert $\lambda > 0$ mit $x = \lambda \cdot y$.

Beweis
Seien x, y wie angegeben; Œ$\|x\| = 1$. Setze $x' := \frac{x+y}{\|x+y\|}$, $a := \frac{x+x'}{2}$, $\alpha := \|a\|$, $\beta := \|x + y - a\|$ Es gilt

$$\|x + y - x'\| = \left(1 - \frac{1}{\|x + y\|}\right) \cdot \|x + y\| = \|x + y\| - 1 = 1 + \|y\| - 1 = \|y\|$$

also $\beta = \|x + y - a\| \leqslant \left\|\frac{x+y-x}{2}\right\| + \left\|\frac{x+y-x'}{2}\right\| \leqslant \frac{\|y\|}{2} + \frac{\|y\|}{2} = \|y\|$. Weiter gilt $\alpha = \|a\| \leqslant \frac{\|x\|}{2} + \frac{\|x'\|}{2} = 1$ und

$$1 + \|y\| = \|x + y\| \leqslant \|a\| + \|x + y - a\| = \alpha + \beta \leqslant 1 + \|y\|$$

also $1 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Wegen $\|x\| = 1$, $\|x'\| = 1$ und $\left\|\frac{1}{2}(x + x')\right\| = \|a\| = \alpha = 1 > 1 - \delta$ für jedes $\delta > 0$ erhalten wir aus gleichmäßiger Konvexität $\|x - x'\| \leqslant \varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0 \Rightarrow x = x'$ und $y = \|y\| \cdot x$. $\square$

6.4. Proposition

Sei X ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum, $a \in X$, $W \subset X$ konvex und abgeschlossen.

(i) Ist W strikt konvex, so existiert höchstens ein $x \in W$ mit $\|a - x\| = \inf_{y \in W} \|a - y\|$.

(ii) Ist X vollständig und gleichmäßig konvex, so existiert genau ein $x \in W$ mit $\|a - x\| = \inf_{y \in W} \|a - y\|$

Beweis
Wir dürfen ohne Einschränkungen $a = 0$ annehmen. Für $a \in W$ ist nichts zu beweisen; für $a \notin W$ gilt $\inf_{y \in W} \|a - y\| > 0$ (denn W ist abgeschlossen). Ohne Einschränkungen dürfen wir außerdem $\inf_{y \in W} \|a - y\| = 1$ annehmen.

(i) Sei $x, x' \in W$ mit $\|a - y\| = \|a - x'\| = \inf_{y \in W} \|a - y\|$, also $\|x\| = \|x'\| = 1$. Dann gilt

$$1 = \inf_{y \in W} \|a - y\| \leqslant \Bigg\|\underbrace{\frac{1}{2}(x + x')}_{\in W}\Bigg\| \leqslant \frac{1}{2}\|x\| + \frac{1}{2}\|x'\| = 1$$

Es folgt aus strikter Konvexität, dass $x = \lambda \cdot x'$ für ein $\lambda \geqslant 0$. Wegen $\|x\| = \|x'\| = 1$ folgt $\lambda = 1$ und $x = x'$.

(ii) Wähle eine Folge $(x_n)_\mathbb{N} \subset W$ mit Œwieder $a = 0$

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \lim_{n\to\infty} \|a - x_n\| = \inf_{y\in W} \|a - y\| = 1$$

Behauptung: Diese Folge ist Cauchy. W ist konvex, also folgt $\frac{1}{2}(x_n + x_m) \in W$. Es gilt dann

$$1 \leqslant \left\| \frac{1}{2}(x_n + x_m) \right\| \leqslant \frac{1}{2}\left(\|x_n\| + \|x_m\|\right) \quad \text{für } n, m \in \mathbb{N} \tag{\#}$$

Angenommen $(x_n)_\mathbb{N}$ sei nicht Cauchy. Dann existiert $\varepsilon > 0$, so dass gilt: Für jedes $N \in \mathbb{N}$ existieren $n, m > N$ mit $\|x_n + x_m\| > \varepsilon$. Wir können daher Teilfolgen $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, $(x_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ bilden mit $\liminf_k \|x_{n_k} - x_{m_k}\| \geqslant \varepsilon$. Es gilt aber $\lim_{k\to\infty} \|x_{n_k}\| = \lim_{k\to\infty} \|x_{n_k}\| = 1$ und wegen [#] gilt $\lim_{k\to\infty} \left\| \frac{1}{2}(x_{n_k} + x_{m_k}) \right\| = 1$ ↯ zu 6.1 (iv). □

6.5. Bemerkung

Der Beweis von (ii) zeigt auch: Sei X gleichmäßig konvex und $(x_n)_\mathbb{N} \subset X$ eine Folge mit $\limsup_n \|x_n\| \leqslant 1$ und $\lim_{n,m\to\infty} \left\| \frac{1}{2}(x_n + x_m) \right\| = 1$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 1$ und $(x_n)_\mathbb{N}$ ist Cauchy.

6.6. Proposition: Jensensche Ungleichung

Für $\alpha, \beta \geqslant 0$, $p \geqslant r > 0$ gilt $(\alpha^p + \beta^p)^{\frac{1}{p}} \leqslant (\alpha^r + \beta^r)^{\frac{1}{r}}$.

Beweis
Setze $A := (\alpha^r + \beta^r)^{\frac{1}{r}}$ ($\neq 0$ oBdA). Dann gilt

$$1 = \frac{1}{A^r} \cdot (\alpha^r + \beta^r) = \underbrace{\left(\frac{\alpha}{A}\right)}_{\leqslant 1}{}^r + \underbrace{\left(\frac{\beta}{A}\right)}_{\leqslant 1}{}^r \geqslant \left(\frac{\alpha}{A}\right)^p + \left(\frac{\beta}{A}\right)^p$$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{A^p} \cdot (\alpha^p + \beta^p)\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant 1 = \left(\frac{1}{A^r}(\alpha^r + \beta^r)\right)^{\frac{1}{r}}$. Kürzen von $\frac{1}{A}$ liefert die Behauptung. □

6.7. Proposition

Sei (X, Σ, μ) ein Maßraum, $1 < p, q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $f, g \in L^p(\mu)$.

(i) Falls $p \geqslant 2$, so gilt $\|f + g\|_p^p + \|f - g\|_p^p \leqslant 2^{p-1}\left(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\right)$.

(ii) Falls $p < 2$, so gilt $\|f + g\|_p^q + \|f - g\|_p^q \leqslant 2 \cdot \left(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\right)^{q-1}$.

Beweis
(i) Nach 6.6 gilt für $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$

$$\left(|\gamma + \delta|^p + |\gamma - \delta|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(|\gamma + \delta|^2 + |\gamma - \delta|^2\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\gamma^2 + \delta^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{*}$$

$[p > 2]$ Sei $r := \frac{p}{p-2}$, sodass $\frac{1}{\frac{p}{2}} + \frac{1}{r} = 1$. Die Höldersche Ungleichung (4.5) für $\mathbb{R}^2$ liefert für (γ^2, δ^2) und $(1, 1)$

$$\gamma^2 \cdot 1 + \delta^2 \cdot 1 \leqslant \left((\gamma^2)^{\frac{p}{2}} + (\delta^2)^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{2}{p}} \cdot (1^r + 1^r)^{\frac{1}{r}} = \left(|\gamma|^p + |\delta|^p\right)^{\frac{2}{p}} \cdot 2^{\frac{p-2}{p}}$$

Es folgt

$$\sqrt{2}\cdot\left(\gamma^2+\delta^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant 2^{\frac{p}{2p}}\cdot\left(|\gamma|^p+|\delta|^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot 2^{\frac{p-2}{2p}} = 2^{\frac{p-1}{p}}\cdot\left(|\gamma|^p+|\delta|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Mit [*] folgt $|\gamma+\delta|^p+|\gamma-\delta|^p \leqslant 2^{p-1}\cdot\left(|\gamma|^p+|\delta|^p\right)$. Integration liefert (i).

Für $p=2$ folgt die Aussage mit Pythagoras.

(ii) Übung. □

6.8. Satz

Sei (X,Σ,μ) ein Maßraum, $1<p<\infty$. Dann ist $L^p(\mu)$ gleichmäßig konvex.

Beweis
Seien $(f_n)_{\mathbb{N}},(g_n)_{\mathbb{N}}\subset L^P(\mu)$ Folgen mit $\|f_n\|_p=\|g_n\|_p=1$ für $n\in\mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{1}{2}(f_n+g_n)\right\|_p=1$. Zu zeigen: $\|f_n-g_n\|_p\xrightarrow{n\to\infty}0$, dann gilt 6.1(iii). Nach 6.7 gilt

$$\underbrace{\|f_n+g_n\|_p^p}_{\xrightarrow{n\to\infty}2^p}+\|f_n-g_n\|_p^p\leqslant 2^p$$

Falls $p\geqslant 2$ bzw. für $p<2$

$$\underbrace{\|f_n+g_n\|_p^q}_{\xrightarrow{n\to\infty}2^q}+\|f_n-g_n\|_p^q\leqslant 2^q$$

Also folgt $\|f_n-g_n\|_p^p\xrightarrow{n\to\infty}0$ bzw. $\|f_n-g_n\|_p^q\xrightarrow{n\to\infty}0$. Also gilt $\|f_n-g_n\|_p\xrightarrow{n\to\infty}0$. □

6.9. Satz

Sei X ein gleichmäßig konvexer Banachraum. Dann ist X reflexiv.

Beweis
Sei $f\in X^{**}$, $\|f\|_{X^{**}}=1$. Zu zeigen: $f\in\iota(X)$. Wir wählen $\varphi_n\in X^*$ mit $\|\varphi_n\|_{X^*}=1$ und $f(\varphi_n)>1-\frac{1}{n+1}$ für $n\in\mathbb{N}$. Nach (dem Beweis von) 5.16 gilt für $n\in\mathbb{N}$

$$\inf_{x\in\overline{B}_X(0,1)}\sum_{i=0}^{n}\left|f(\varphi_i)-\varphi_i(x)\right|^2=0$$

$\Rightarrow\exists x_n\in X$ für $n\in\mathbb{N}$ mit $\|x_n\|_X=1$, $|f(\varphi_i)-\varphi_i(x_n)|<\frac{1}{2(n+1)}$ und $1-\frac{3}{2(n+1)}<\varphi_i(x_n)\leqslant 1$ für $0\leqslant i\leqslant n$.

A. Anhang

A.1. Vierecksungleichung

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $x, y, u, v \in X$. Dann gilt

$$\big|d(x,y) - d(u,v)\big| \leqslant d(x,u) + d(y,v)$$

Beweis
Einerseits gilt nach der Dreiecksungleichung

$$d(x,y) \leqslant d(x,u) + d(u,v) + d(v,y) \qquad \Longrightarrow \qquad d(x,y) - d(u,v) \leqslant d(x,u) + d(y,v)$$

Andererseits aber auch

$$d(u,v) \leqslant d(u,x) + d(x,y) + d(y,v) \qquad \Longrightarrow \qquad d(u,v) - d(x,y) \leqslant d(x,u) + d(y,v)$$

Insgesamt folgt also die Behauptung. □

Index

Die Seitenzahlen *sind mit Hyperlinks zu den entsprechenden Seiten versehen, also anklickbar* ☝

1. abzählbar, 29
2. abzählbar, 29

abgeschlossen, 1
Abschluss, 1

Banachalgebra, 11
Banachraum, 11

Cauchy-Folge, 1

Distanz dist, 15
Dualraum, 8

einfach, 21
erweiterte Metrik, 3

Funktionale, 8

gleichmäßig konvex, 33
gleichmäßig stetig, 1

Homöomorphismus, 19

Isometrie, 1
isometrischer Isomorphismus, 1

konvex, 14

Maßraum, 21
messbar, 21
metrischer Raum, 1

normierte $\mathbb{K}$-Algebra, 9

offen, 1
Operator
    beschränkter Operator, 8
Operatoren, 8
Operatornorm, 9

punktweise gleichmäßig beschränkt, 6

reflexiv, 30

schwache Topologie, 26
separabel, 5, 29
stetig, 1
strikt konvex, 34

sublinear, 11

topologischer Vektorraum, 7

Vervollständigung, 2
vollständig, 1

w^*-Topologie, 27

Abbildungsverzeichnis

1. Einheitskugel für $p = 2$, $p = 1$ und $p = \infty$ 33
2. Zeichnung zum Beweis von 6.3 34

Todo's und andere Baustellen

Achtung Wortspiel: Beweis *vervollständigen* ;-D 2
Beweis zu Ende führen 3
Rev Chap 2 9
RevChap3 16
RevChap4 21
Def. hinzufügen 21
CopyPaste aus Ana3 21
vlt strukturiert übereinander? 25
RevChap5 26