Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

Fachbereich 10
Mathematik und
Informatik

Skript Analysis 2

Mitschrift der Vorlesung „Analysis 2“ von Prof. Ebert

Tim Keil

7. Mai 2015

Vorwort — Mitarbeit am Skript

Dieses Dokument ist eine Mitschrift aus der Vorlesung „Analysis 2, SoSe 2015“, gelesen von Prof. Ebert. Der Inhalt entspricht weitestgehend dem Tafelanschrieb. Für die Korrektheit des Inhalts übernehme ich keinerlei Garantie! Für Bemerkungen und Korrekturen – und seien es nur Rechtschreibfehler – bin ich sehr dankbar. Korrekturen bitte durch persönliches Ansprechen oder per Mail an keil.menden@web.de.

Inhaltsverzeichnis

I. Normierte und metrische Räume

$\mathbb{R} \quad \rightarrow \quad \mathbb{R}^n \quad \rightarrow$ Normierte Vektorräume $\rightarrow$ Metrische Räume

I.1. Der $\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| x_i \in \mathbb{R} \right\}$$

Der $\mathbb{R}^n$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) = n$.
Sei

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-ter Eintrag}$$

$(e_1, \ldots, e_n)$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^n$ und heißt **Standardbasis**.
Ist $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, so gilt $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

I.1.1. Definition

Das **Skalarprodukt** auf $\mathbb{R}^n$ ist die Abbildung

$$\langle\, .\,, .\, \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

mit

$$x = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \in \mathbb{R}$$

es gilt:

(S1) (Bilinearität) $\forall x_0, x_1, y_0, y_1, \in \mathbb{R}^n \ \forall a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \langle x_0 + x_1\, , \, y_0 + y_1 \rangle &= \langle x_0\, , \, y_0 \rangle + \langle x_1\, , \, y_1 \rangle + \langle x_1\, , \, y_0 \rangle + \langle x_1\, , \, y_1 \rangle \\ \langle a x_0\, , \, b y_0 \rangle &= ab \langle x_0\, , \, y_0 \rangle \end{aligned}$$

(S2) (Symmetrie) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt $\langle x\, , \, y \rangle = \langle y\, , \, x \rangle$

(S3) (positive Definitheit) $\forall x \in \mathbb{R}$ gilt $\langle x\, , \, x \rangle \geq 0$ und $\langle x\, , \, x \rangle = 0$ nur dann, wenn $x = 0$

Desweiteren gilt $\langle e_i\, , \, e_j \rangle = \delta_y := \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ (Kronecker-Symbol)

Ist

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in \mathbb{R}^n \qquad (x_i \in \mathbb{R})$$

so ist

$$\langle x\,,\, e_j\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i\,,\, e_j\rangle \overset{(S1)}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i \langle e_i\,,\, e_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \delta_{ij} = x_j$$
$$\Rightarrow x = \sum_{j=1}^{n} \langle x\,,\, e_j\rangle e_j$$

I.1.2. Definition

Sei $x \in \mathbb{R}^n$. Die l^2-Norm von x ist die Zahl

$$\|x\|_2 := \sqrt{\langle x\,,\, x\rangle}$$

Schreibweise manchmal auch: $\|x\|_2 = \|x\|$

I.2. Euklidsche und normierte Vektorräume

I.2.1. Definition

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Ein **Skalarprodukt** auf V ist eine Abbildung $\langle .\,,\, .\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$, welche die Axiome S1,S2,S3 erfüllt.
Ein **euklidscher Vektorraum** ist ein Paar $(V, \langle\,,\,\rangle)$. V ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\langle\,,\,\rangle$ ist Skalarprodukt auf V.
Ist $(V, \langle\,,\,\rangle)$ ein eukdlischer Vektorraum, so ist die durch $\langle\,,\,\rangle$ induzierte Norm definiert als

$$\|v\| = \sqrt{\langle v\,,\, v\rangle} \qquad v \in V$$

I.2.2. Beispiele

- $\mathbb{R}^n$ mit Standardskalarprodukt
- Die Abbildung

$$\begin{aligned} &\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R} \\ &(z, w) \mapsto Re(\bar{z} \cdot w) \end{aligned}$$

  ist ein Skalarprodukt. Die induzierte Norm ist der Absolutbetrag.

I.2.3. Definition

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine **Norm** auf V ist eine Abbildung $\|.\| : V \to \mathbb{R}, v \mapsto \|v\|$ mit

(N1) $\|v\| \geq 0 \qquad \forall\, v \in V$

(N2) $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$

(N3) $\|av\| = |a| \cdot \|v\| \qquad \forall\, v \in V, a \in \mathbb{R}$

(N4) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \qquad \forall\, v, w \in V$ (Dreiecksungleichung)

Ein normierter Vektorraum ist ein Paar $(V, \|.\|)$ bestehend aus einem $\mathbb{R}$-VR V und einer Norm auf V.

I.2.4. Satz

Sei $(V, \langle\,,\,\rangle)$ ein euklidscher Vektorraum. Für $v \in V$ setzte $\|v\| = \sqrt{\langle v\,,\,v\rangle}$
Dann gilt:

1. $\|.\|$ ist eine Norm auf V

2. $\forall\, v, w \in V$ gilt die **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**:

$$|\langle v\,,\,w\rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

Beweis:

1. N1: $\|v\| = \sqrt{\underbrace{\langle v\,,\,v\rangle}_{\geq 0}} \geq 0$

   N2: $\|v\| = \sqrt{\langle v\,,\,v\rangle} = 0 \Rightarrow \langle v\,,\,v\rangle = 0 \overset{\text{S3}}{\Rightarrow} v = 0$

   N3: $a \in \mathbb{R}, v \in V$

$$\|av\| = \sqrt{\langle av\,,\,av\rangle} \overset{\text{S1}}{=} \sqrt{a^2\langle v\,,\,v\rangle} = \sqrt{a^2}\sqrt{\langle v\,,\,v\rangle} = |a|\|v\|$$

2. CS-Ungleichung ist trivial, wenn $w = 0$
   Ann.: $w \neq 0$: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} f(t) &= \langle v + tw\,,\,v + tw\rangle \\ &= \langle v\,,\,v\rangle + 2t\langle v\,,\,w\rangle + t^2\langle w\,,\,w\rangle \\ &= \|v\|^2 + 2t\underbrace{\langle v\,,\,w\rangle}_{\in\mathbb{R}} + t^2\|w\|^2 \end{aligned}$$

   aus S3 folgt $f(t) \geq 0$. f ist Polynom

$$\begin{aligned} f'(t) = 0 \Leftrightarrow t_0 &= -\frac{\langle v\,,\,w\rangle}{\|w\|^2} \\ f''(t) = 2\|w\|^2 &> 0 \end{aligned}$$

   $\Rightarrow f$ nimmt bei t_0 globales Minimum an

$$\begin{aligned} 0 \leq f(t_0) = \|v\|^2 - \frac{2\langle v\,,\,w\rangle^2}{\|w\|^2} + \frac{\langle v\,,\,w\rangle^2}{\|w\|^4}\|w\|^2 &= \|v\|^2 - \frac{\langle v\,,\,w\rangle^2}{\|w\|^2} \\ \Rightarrow \frac{\langle v\,,\,w\rangle^2}{\|w\|^2} &\leq \|v\|^2 \\ \Rightarrow \langle v\,,\,w\rangle^2 &\leq \|v\|^2\|w\|^2 \\ \Rightarrow |\langle v\,,\,w\rangle| = \sqrt{\langle v\,,\,w\rangle^2} &\leq \sqrt{\|v\|^2\|w\|^2} = \|v\| \cdot \|w\| \end{aligned}$$

$\square$

Schließlich könnnen wir N4 zeigen:

N4:

$$\begin{aligned}\|v+w\|^2 &= \langle v+w\,,\,v+w\rangle \\ &\overset{\text{S1}}{=} \|v\|^2 + 2\langle v\,,\,w\rangle + \|w\|^2 \\ &\leq \|v\| + 2|\langle v\,,\,w\rangle| + \|w\|^2 \\ &\overset{\text{CS}}{\leq} \|v\|^2 + 2\|v\|\|w\| + \|w\|^2 \\ &= (\|v\|+\|w\|)^2\end{aligned}$$

Wurzel ziehen zeigt N4 □

I.2.5. Weitere Beispiele für Normen auf $\mathbb{R}$

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \qquad x_i \in \mathbb{R}$$

- l^1-Norm $\quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$
- l^∞-Norm $\quad \|x\|_\infty = \max\{|x_i| \mid i = 1,\ldots,n\}$
- Ist $p \in [1,\infty)$, so ist die l^p-Norm

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \text{(Beweis Schwer)}$$

I.2.6. Definition

V $\mathbb{R}$-VR , $\|.\|_0, \|.\|_1$ Normen auf V. Die Normen $\|.\|_0, \|.\|_1$ heißen **äquivalent**, falls $C, c > 0$ existieren, so dass für alle $v \in V$ gilt:

$$c\|v\|_0 \leq \|v\|_1 \leq C\|v\|_0$$

Bemerkung:
Das ist eine Äquivalenzrelation

- **Reflexiv**: klar
- **Symmetrie**:

$$\begin{aligned} c\|v\|_0 \leq \|v\|_1 \leq C\|v\|_0 \\ \Rightarrow \frac{1}{c}\|v\|_1 \leq \|v\|_0 \leq \frac{1}{C}\|v\|_1\end{aligned}$$

- **Transitiv**:

$$c\|v\|_0 \leq \|v\|_1 \leq C\|v\|_0 \quad \text{und} \quad d\|v\|_1 \leq \|v\|_2 \leq D\|v\|_1 \qquad (C, c, D, d > 0)$$

$$\Rightarrow cd\|v\|_0 \leq CD\|v\|_0$$

I.2.7. Beispiel

Die l^1, l^2 und l^∞-Norm auf $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent und zwar gilt:

$$\|v\|_\infty \leq \|v\|_2 \leq \|v\|_1 \leq n\|v\|_\infty \qquad \text{(Beweis Übung)}$$

I.3. Metrische Räume

I.3.1. Definition

$(V, \|.\|)$ normierter Vektorraum, $v, w \in V$
Der **Abstand** von v und w ist

$$d(v,w) := \|v - w\|$$

I.3.2. Definition

Sei X eine Menge
Eine **Metrik** (oder Abstandsfunktion) ist eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto d(x,y)$, sodass gilt:

(M1) $\forall\, x, y \in X : \qquad d(x,y) \geq 0$

(M2) $\forall\, x, y \in X : \qquad d(x,x) = 0$ und $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$

(M3) $\forall\, x, y \in X : \qquad d(x,y) = d(y,x)$

(M4) $\forall\, x, y, z \in X : \qquad d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ **(Dreiecksungleichung)**

Ein **Metrischer Raum** ist ein Paar (X, d), X Menge, d Metrik auf X

Beispiele:

- Ist $(V, \|.\|)$ normierter Vektorraum, so ist durch $d(v,w) := \|v - w\|$ eine Metrik auf V gegeben.

$$v, w, u \in V \qquad \begin{aligned} d(v,u) &= \|v-u\| = \|v - w + w - u\| \\ &\overset{\triangle\text{-Ungl.}}{\leq} \|v-w\| + \|w-u\| \\ &= d(v,w) + d(w,u) \end{aligned}$$

  Unterbeispiel:

  $V = \mathbb{R}$. Dann ist $x \mapsto |x|$ eine Norm auf $\mathbb{R}$ und die induzierte Metrik auf $\mathbb{R}$ ist $d(x,y) = \|x - y\|$

- (X, d_X) metrischer Raum $Y \subseteq X$ Teilmenge. Dann ist (Y, d_y) ein metrischer Raum, wobei für $y_0, y_1 \in Y$ gilt, dass $d_y(y_0, y_1) := d_x(y_0, y_1)$
  Vereinbarung: Ist $X \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge, so ist X immer mit der durch das Standardskalarprodukt induzierte Metrik versehen. (es sei denn, etwas anderes ist gesagt)

Konvergenz
Erinnerung (Ana I): $(x_n)_n$ Folge in $\mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$. Dann

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x :\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, n_0\, \forall\, n \geq n_0 : |x - x_1| < \varepsilon$$

I.3.3. Definition

(X, d) metrischer Raum, $(x_n)_n$ Folge in X (d.h eine Abbildung $x : \mathbb{N} \to X$) $y \in X$. Dann Konvergiert die Folge $(x_n)_n$ gegen $y :\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, n_0 : \forall\, n \geq n_0\, d(x_n, y) < \varepsilon$
Äquivalent: Die Folge (in $\mathbb{R}$) $d(x_n, y)$ ist eine Nullfolge.

I.3.4. Beispiel

$X = \mathbb{R}^n$ mit Metrik, die durch l^1-l^2- oder l^∞- Norm induziert wird. Folge $k \mapsto x(k) \in \mathbb{R}^n$.

$$x(k) = \sum_{i=1}^n x_i(k) e_i \qquad e_i \text{ Standard-Basisvektor} \qquad x_i(k) \in \mathbb{R} \qquad x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$$

Dann sind äquivalent

1. für alle $i = 1, \dots, n$ gilt $\lim\limits_{k\to\infty} x_i(k) = x_i$
2. $\lim\limits_{k\to\infty} \|x(k) - x\|_1 = 0$
3. $\lim\limits_{k\to\infty} \|x(k) - x\|_2 = 0$
4. $\lim\limits_{k\to\infty} \|x(k) - x\|_\infty = 0$

Beweis:
<u>$1 \to 2$:</u>

$$\|x(k) - x\|_1 := \sum_{i=1}^n \underbrace{|x_i(k) - x_i|}_{\overset{(\text{wg } 1)}{\to} 0} \longrightarrow 0$$

<u>$2 \to 3 \to 4$:</u> Benutze Ungleichungen $(y \in \mathbb{R}^n)$

$$\|y\|_\infty \le \|y\|_2 \le \|y\|_1 \le n \cdot \|y\|_\infty$$

also

$$\begin{aligned} &\lim_{k\to\infty} \|x(k) - x\|_1 = 0 \\ \Rightarrow &\lim_{k\to\infty} \|x(k) - x\|_2 = 0 \\ \Rightarrow &\lim_{k\to\infty} \|x(k) - x\|_\infty = 0 \end{aligned}$$

<u>$4 \to 1$:</u>

$$\|x(k) - x\|_\infty = \max\{|x_i(k) - x| \, |i = 1, \dots, n\} \Rightarrow \text{für alle } i\text{: } |x_i(k) - x_i| \le \|x(k) - x\|_\infty$$

Also

$$\left[\|x(k) - x\|_\infty \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0\right] \qquad \Rightarrow \qquad [\forall\, i = 1, \dots, n \quad |x_i(k) - x_i| \longrightarrow 0]$$

$\Rightarrow 1)$ $\square$

Bemerkung:
X metrischer Raum $(x_n)_n, (y_n)_n$ Folgen in X $\quad \lim_{n\to\infty} x_n = x$ und $\lim_{n\to\infty} y_n = y$

$$\Rightarrow d(x, y) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \qquad \text{(Blatt 2, Aufgabe 2)}$$

Daraus folgt:
Ist $(x_n)_n$ Folge in X und gilt $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ sowie $\lim_{n\to\infty} x_n = x'$ dann ist $x = x'$
Denn

$$d(x, x') = \lim_{n\to\infty} \underbrace{d(x_n, x_n)}_{=0} = 0$$

$$\overset{(\text{M2})}{\Rightarrow} x = x'$$

$\square$

I.3.5. Definition

Sei (X, d) metrischer Raum und $(x_n)_n$ Folge in X. Dann heißt $(x_n)_n$ **Cauchyfolge**, falls gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, n_0\, \forall\, n, m \geq n_0 :\ d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Bemerkung:
(X, d) metrischer Raum $(x_n)_n$ Folgen in X, $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in X$.
Dann ist $(x_n)_n$ Cauchyfolge, denn
Sei $\varepsilon > 0$. Wähle n_0, sodass

$$\forall\, n \geq n_0\, d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Falls $n, m \geq n_0$

$$d(x_n, y_n) \leq \underbrace{d(x_n, x)}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{d(x, y_n)}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

I.3.6. Definition

(X, d) metrischer Raum. Dann heißt X **vollständig**, falls jede Cauchy-Folge $(x_n)_n$ in X gegen ein $x \in X$ konvergiert (Ana I)

Bsp:
$(0, 1) \subseteq \mathbb{R}$. $x_n = \frac{1}{n}$ Folge in X ist Cauchyfolge.
$(x_n)_n$ konvergiert nicht in X, denn der einzig möglicher Grenzwert (0) liegt nicht in X.

I.3.7. Satz

$\mathbb{R}^n$, mit der durch die Norm $\|.\|_p \qquad p = 1, 2, \infty$ induzierten Metrik ist vollständig

Beweis:
$p = \infty$: Sei $x(k)$ l^∞-Cauchyfolge in $\mathbb{R}^n$. Dann gilt für $i = 1, \dots, n$:

$$|x_i(k) - x_i(l)| \leq \|x(k) - x(l)\|_\infty$$

Da $(x(k))_k$ l^∞-Cauchyfolge, ist $(x_i(k))_k$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ für alle $1 \leq i \leq n$
Nach dem Cauchy-Kriterium aus Analysis I sind die Folgen $(x_i(k))_k$ Konvergent. $x_i = \lim_{k\to\infty} x_i(k) \in \mathbb{R}$

$$x := \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in \mathbb{R}^n$$

Dann gilt

$$\|x(k) - x\|_\infty = \max\{\underbrace{|x_i(k) - x_i|}_{\to 0} | i = 1, \dots, n\} \longrightarrow 0$$

also

$$\lim_{k\to\infty} \|x(k) - x\|_\infty = 0$$

$p = 2$: $x(k)$ l^2-Cauchyfolge, weil $\|x(k) - x(l)\|_\infty \leq \|x(k) - x(l)\|_2$
Ist $(x_k)_k$ eine l^∞-Cauchfolge, so gibt es ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\lim_{k\to\infty} \|x(k) - x\|_\infty = 0$$

$$\Rightarrow \|x(k) - x\|_2 \leq n \cdot \underbrace{\|x(k) - x\|_\infty}_{\to 0} \longrightarrow 0$$

$p = 1$: Analog zum Fall $p = 1$, benutze $\|y\|_\infty \leq \|y\|_1 \leq n \cdot \|y\|_\infty$ $\square$

I.3.8. Definition

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung sowie $x \in X$.

(i) f heißt ε-δ-**stetig** (oder **stetig**) bei x, wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, \delta > 0 \, \forall x' \in X \text{ mit } d_X(x, x') < \delta \text{ gilt: } d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$$

(ii) f heißt **folgenstetig** in x :⇔ Ist $(x_n)_n$ eine Folge in X mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$$

f ist stetig (folgenstetig) auf X, wenn f stetig (folgenstetig) bei x ist für alle $x \in X$.

I.3.9. Satz

f stetig in x ⇔ f folgenstetig in x

Beweis
wie in Analysis I, wird bald nachgeliefert

I.3.10. Satz

(X, d_X) , (Y, d_Y), (Z, d_Z) metrische Räume.

$$f : X \to Y \qquad g : Y \to Z \qquad x \in X$$

Falls f stetig bei x und stetig bei $f(x)$ so ist $g \circ f$ stetig bei x.

Beweis:
Siehe Analysis I

I.3.11. Beispiele

$$\begin{aligned} &\mu : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad \mu(x,y) := \; xy \qquad &&\text{(Multiplikation)} \\ &\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad \alpha(x,y) := x + y \qquad &&\text{(Addition)} \\ &q : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus 0 \to \mathbb{R} \qquad q(x,y) := \frac{x}{y} \qquad &&\text{(Division)} \end{aligned}$$

sind auf ihrem gesamten Definitionsbereich stetig.

Beweis:
z. B q: q ist folgenstetig, denn:
Sei $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (d.h $y \neq 0$) und (x_n, y_n) Folge in $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (x, y)$$

Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ und } \lim_{n\to\infty} y_n = y \neq 0$$

$$\Rightarrow q(x_n, y_n) = \frac{x_n}{y_n} \overset{\text{Grenzwertsätze}}{\longrightarrow} \frac{x}{y} = q(x, y)$$

$$\Rightarrow q \text{ ist folgenstetig}$$

α, μ analog. □

Bsp:
Sei X metrischer Raum, $f, g : X \to \mathbb{R}$ stetig
$\Rightarrow$ Die Funktion

$$\begin{array}{rccl} (f,g): & X & \to & \mathbb{R}^2 \\ & x & \mapsto & (f(x), g(x)) \in \mathbb{R}^2 \end{array}$$

ist stetig.
Denn, $(x_n)_n$ Folge in X, $x_n \to x \in X$

$$\Rightarrow f(x_n) \to f(x) \text{ und } g(x_n) \to g(x) \qquad (f, g \text{ stetig})$$

$$\overset{\text{Tatsache}}{\Rightarrow} (f,g)(x_n) = (f(x_n), g(x_n)) \to (f(x), g(x)) \in \mathbb{R}^2$$

$$\Rightarrow (f,g) \text{ stetig}$$

Betrachte Kompositionen

$$\begin{array}{ccccc} X & \overset{(f,g)}{\to} & \mathbb{R}^2 & \overset{\mu}{\to} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (f(x), g(x)) & \mapsto & f(x)g(x) \end{array}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\underbrace{\mu}_{\text{stetig}} \circ \underbrace{(f,g)}_{\text{stetig}}}_{\Rightarrow \text{ stetig}} = fg$$

$\Rightarrow$ Produkte stetiger Funktionen sind wieder stetig

Analog
Summen Quotienten stetiger Funktionen sind stetig

I.3.12. Definition

$(X, d_X), (Y, d_y)$ metrische Räume $f : X \to Y$ heißt **Lipschitz-stetig** $:\Leftrightarrow \exists\, L \leq 0,$ so dass gilt:

$$\forall\, x, x' \in X : \qquad d_Y(f(x), f(x')) \leq L d_X(x, x')$$

Bem:
ist f Lipschitz-stetig, so ist f stetig:
sei $\varepsilon > 0$ Wähle δ, so dass $\delta\, L \leq \varepsilon$
Dann:

$$\text{Ist } d_X(x, x') < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) \leq L \cdot d_X(x, x') < \delta L \leq \varepsilon \qquad \Rightarrow f \text{ stetig.}$$

I.3.13. Beispiel

Betrachte $\mathbb{R}^n$ mit der durch die l^p-Normen induzierten Metrik $p \in \{1, 2, \infty\}$
Dann gilt: Sind $p, q \in \{1, 2, \infty\}$, so ist

$$\text{id}:(\mathbb{R}^n, \|.\|_p) \to (\mathbb{R}^n, \|.\|_q)$$

Lipschitz-stetig.

Grund:
$\forall\, x \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n \cdot \|x\|_\infty$$

I.3.14. Satz

Jede lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist Lipschitz-stetig.

Beweis:
Aus LA I ist bekannt:
Es gibt genau ein $A \in$ Mat$_{m,n}(\mathbb{R})$, so dass $f(x) = Ax \qquad (\forall\, x \in \mathbb{R}^n)$

$$\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R}) = \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$$

Beh:
$\exists\, L = L_A$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\|Ax\|_2 \leq L\|x\|_2$$

Es gilt

$$\|Ax\|_2 \leq \|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^{m} |(Ax)_i| = \sum_{i=1}^{m} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right|$$

nach Cauchy-Schwarz gilt:

$$\left| \sum_{j=1}^{n} y_j z_j \right| = |\langle y\,,\, z\rangle| \overset{\text{CS}}{\leq} \|y\|_2 \cdot \|z\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{m} y_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{m} z_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Also

$$\Rightarrow \left| \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \right| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{\|x\|_2}$$

$$\Rightarrow \|Ax\|_2 \leq \sum_{i=1}^{n} \left(\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 y \right)^{\frac{1}{2}} \|x\|^2 \right) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{=L} \|x\|_2$$

$\square$

I.3.15. Korollar:

$A \in$ Mat$_{m,n}(\mathbb{R})$
Dann ist

$$\|A\| := \sup_{\|x\|_2 \leq 1} \|Ax\|_2 < \infty$$

Beweis:
Ist $L \geq 0$ mit $\|Ax\|_2 \leq L \cdot \|x\|_2 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n$
so gilt für $\|x\| \leq 1$: $\|Ax\|_2 \leq L$

$$\Rightarrow \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|_2 \leq L < \infty$$

$\square$

I.3.16. Definition

Die Zahl $\|A\|$ heißt **Operatornorm** von A
Es gilt: Die Operatornorm ist eine Norm auf dem $\mathbb{R}$-VR Mat$_{m,n}(\mathbb{R})$ (Übung)
Es gibt keine einfache Formel für $\|A\|$

I.4. Topologische Grundbegriffe

I.4.1. Definition

(X, d) sei metrischer Raum, $\varepsilon > 0$ und $x \in X$. Der ε-**Ball** in X um x ist

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in X | d(x, y) < \varepsilon\}$$

in $\mathbb{R}$:

$$B_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$$

I.4.2. Definition

(X, D) metrischer Raum $Y \subseteq X, x \in X$

1. x heißt **innerer Punkt** von Y

   $$\exists\, \delta > 0 \text{ mit } B_\delta(x) \subseteq Y$$

   In diesem Fall heißt eine **Umgebung** von x in X

2. $x \in X$ heißt **Berührpunkt** von Y

   $$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, y \in Y \text{ mit } d(x, y) < \varepsilon$$

   (Äquivalent: $\forall\, \varepsilon > 0 \qquad B_\varepsilon(x) \cap \neq \emptyset$)

$$\mathring{Y} = \{x \in X \,|\, x \text{ innerer Punkt von } Y\}$$
$$\overline{Y} = \{x \in X \,|\, x \text{ ist Berührpunkt von } Y\}$$

I.4.3. Definition

1. (X, d) metrischer Raum, $Y \subseteq X$. Dann heißt Y **offen** in $X \Leftrightarrow$ jedes $x \in Y$ ist innerer Punkt von Y ($\Leftrightarrow \forall\, x \in Y\, \exists\, \delta > 0 :\, B_\delta \subseteq Y$)

2. Y heißt **abgeschlossen** in X $:\Leftrightarrow$ Das Komplement $X - Y$ ist offen in X

Bsp:
$X = \mathbb{R}$

1. Offene Intervalle $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ sind offen in $\mathbb{R}$,denn

   $$x \in (a, b)\,,\; \delta = \min\{x - a.b - x\} > 0$$
   $$\Rightarrow (x - \delta, x + \delta) \subseteq (a, b)$$

2. Abgeschlossene Intervalle $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ sind abgeschlossen:

   $$\mathbb{R} \setminus [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$$
   $$\Rightarrow (x - \delta, x + \delta) \subseteq \mathbb{R} \setminus [a, b]$$
   $$\Rightarrow x > b \text{ innerer Punkt von } \mathbb{R} \setminus [a, b]$$
   $$\text{analog } x < a \text{ ist innerer Punkt von } \mathbb{R} \setminus [a, b]$$
   $$\Rightarrow \mathbb{R} \setminus [a, b] \text{ offen in } \mathbb{R} \Rightarrow [a, b] \text{ abgeschlossen in } \mathbb{R}$$

Warnung:
Offenheit ist eine Eigenschaft von Teilmengen metrischer Räum, nicht der Mengen selber. 'Y offen' sinnlos ! 'Y offen in X' sinnvoll! Analog für Abgeschlossen
$X = \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
&Z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\} \\
&Y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0, 0 < x < 1\} \\
&Y \text{ offen in } Z \\
&Y \text{ nicht offen in } X
\end{aligned}$$

I.4.4. Beispiel

X metrischer Raum, $x \in X$,$\varepsilon > 0$. Dann ist $B_\varepsilon^X(x)$ offen in X

Beweis:
zu zeigen: für jedes $y \in B_\varepsilon(x) \exists\, \delta > 0 : B_\delta(y) \subseteq B_\varepsilon(x)$

$$d(x,y) < \varepsilon \Rightarrow \exists\, \delta > 0 : d(x,y) + \delta < \varepsilon$$

Beh: $B_\delta(y) \subseteq B_\varepsilon(x)$
Das ist wahr, denn

$$z \in B_\delta(y) \Rightarrow d(y,z) < \delta$$

Ferner:

$$d(z,x) \leq d(z,y) + d(y,x) < \delta + d(y,x) < \varepsilon, \text{d.h.} z \in B_\varepsilon(x)$$

I.4.5. Satz

Es sei (X,d) metrischer Raum.
Dann gilt:

1. $\emptyset$ und X sind offen in X
2. Falls U_0, U_1 offen in X sind, so auch $U_0 \cap U_1$
3. Falls $(U_i)_{i\in I}$ eine durch I induzierte Familie von Teilmengen von X ist, so ist $\bigcup\limits_{i\in I} U_i$ offen in X
   'beliebige Vereinigungen offener Mengen sind offen'
4. $\emptyset, X$ sind abgeschlossen in X
5. A_0, A_1 abgeschlossen in X, dann ist $A_0 \cup A_1$ abgeschlossen in X
6. $(A_i)_{i\in I}$, A_i abgeschlossen in X, so ist $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$ abgeschlossen in X

Beweis:

1. $\emptyset \subseteq X$ offen trivial
   $X \subseteq X$ offen trivial
2. Sei $x \in U_0 \cap U_1$ Dann existieren Bälle
   $$B_{\varepsilon_1}^X(x) \subseteq U_1 \qquad B_{\varepsilon_0}^X(x) \subseteq U_0$$
   Wähle nun $\varepsilon = \min\{\varepsilon_0, \varepsilon_1\} > 0$
   $$\begin{aligned} &\Rightarrow B_\varepsilon(x) \subseteq U_0 \cap U_1 \\ &\Rightarrow x \text{ innerer Punkt von } U_0 \cap U_1 \end{aligned}$$
3. Sei $x \in \bigcup\limits_{i \in I} U_i \subseteq X$
   $$\Rightarrow \exists\, i \in I : x \in U_i, \text{ weil } U_i \subseteq X \text{ offen, gibt es } \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \in U_i.$$
   Aber
   $$U_i \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i, \text{ daher: } B_\varepsilon(x) \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$$
4. $$\emptyset = X \setminus \underbrace{X}_{\text{offen nach 1)}} \qquad \Rightarrow \emptyset \text{ abgeschlossen in } X$$
   $$X = X \setminus \underbrace{\emptyset}_{\text{offen}} \qquad \Rightarrow X \subseteq X \text{ abgeschlossen}$$
5. $$X \setminus (A_0 \cup A_1) = \underbrace{\underbrace{(X \setminus A_0)}_{\text{offen in } X} \cap \underbrace{(X \setminus A_1)}_{\text{offen in } X}}_{\text{offen in } X}$$
   $$\Rightarrow A_0 \cup A_1 \subseteq X \text{ abgeschlossen}$$
6. $$X \setminus \bigcap_{i \in I} A_i = \underbrace{\bigcup_{i \in I} \underbrace{X \setminus A_i}_{\text{offen in } X}}_{\text{offen nach 3)}}$$
   $$\Rightarrow \bigcap_{i \in I} A_i \text{ abgeschlossen in } X$$

Bemerkung:
Beliebige Durchschnitte offener Mengen sind i.A. nicht offen

Beispiel:

$$U_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \text{ ist offen in } \mathbb{R}$$
$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n = \{0\} \text{ ist nicht offen in } \mathbb{R}$$

I.4.6. Satz

X metrischer Raum, $Y \subseteq X$. Dann sind Äquivalent:

1. $Y \subseteq X$ abgeschlossen in X
2. Für jede Folge (y_n) mit $y_n \subseteq Y$, welche in X konvergiert, gilt
$$\lim_{n\to\infty} y_n \in Y$$

Beweis:
Vorbemerkung:
$y \in X$ ist genau dann ein Berührpunkt von $Y \subseteq X$, wenn es eine Folge $(y_n)_n$ gibt mit $(y_n) \in Y$ und $\lim_{n\to\infty} y_n = y$

Beweis der Vorbemerkung:
"$\Leftarrow$": Ist $\lim_{n\to\infty} y_n = y \qquad y_n \in Y$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, n : d(y, y_n) < \varepsilon\\ &\Rightarrow \forall\, \varepsilon > 0\, y_n \in B_\varepsilon(y) \cap Y \neq \emptyset\\ &\Rightarrow y \text{ ist Berührpunkt von } Y\end{aligned}$$

"$\Rightarrow$":

$$\begin{aligned}&y \text{ Berührpunkt von } Y\\ &\Rightarrow \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, y' \in Y : d(y, y') < \varepsilon\end{aligned}$$

Wähle für $n \in \mathbb{N}$ ein $y_n \in Y$ mit $d(y, y_n) < \frac{1}{n}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \underbrace{y_n}_{\in y} = y$$

□

Beweis des Satzes:
Sei 1) nicht erfüllt. Dann:

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow \quad Y \subseteq X \text{ nicht abgeschlossen in } X\\ &\Leftrightarrow \quad X \setminus Y \text{ nicht offen in } X\\ &\Leftrightarrow \quad \exists\, y \in X \setminus Y,\, y \text{ kein innerer Punkt von } X \setminus Y\\ &\Leftrightarrow \quad \exists\, y \in X \setminus Y,\, \forall\, \varepsilon > 0 \qquad B_\varepsilon(y) \not\subseteq X \setminus Y\\ &\Leftrightarrow \quad \exists\, y \in X \setminus Y,\, \forall\, \varepsilon > 0 \qquad B_\varepsilon(y) \cap Y \neq \emptyset\\ &\Leftrightarrow \quad \exists\, y \in X \setminus Y,\, y \text{ ist Berührpunkt von } Y\\ &\overset{\text{Vorbem.}}{\Leftrightarrow} \quad \exists \text{ Folge } y_n \text{ in } Y, y_n \to y \notin Y\end{aligned}$$

und dazu ist Äquivalent, dass 2) nicht erfüllt ist. □

I.4.7. Satz

(X, d_X),(Y, d_Y) metrischer Räume, $f : X \to Y$ Abbildung. Dann sind Äquivalent:

1. f ist folgenstetig.
2. Für jede abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq Y$ ist $f^{-1}(A) \subseteq X$ abgeschlossen.
3. Für jede offene Teilmenge $U \in Y$ ist $f^{-1}(U)$ offen in X
4. f ist ε-δ-stetig

Beweis:
$\underline{1 \Rightarrow 2}$: Sei f folgenstetig, $A \subseteq Y$ abgeschlossen.
zu zeigen: (wegen I.4.7) ist $x_n \in f^{-1}(A)$ und $x_n \to x$, so gilt $x \in f^{-1}(A)$

$$\begin{aligned} & x_n \to x \Rightarrow \underbrace{f(x_n)}_{\in A} \to \underbrace{f(x)}_{\in y} \qquad (f \text{ ist folgenstetig}) \\ & A \subseteq Y \text{ abgeschlossen } \Rightarrow f(x) \in A \\ & \Rightarrow x \in f^{-1}(A) \end{aligned}$$

$\underline{2 \Rightarrow 3}$:

$$\begin{aligned} & U \subseteq Y \text{ offen } \Rightarrow Y \setminus U \subseteq Y \text{ abgeschlossen} \\ & \overset{2)}{\Rightarrow} f^{-1}(Y \setminus U) \subseteq X \text{ abgeschlossen.} \\ & f^{-1}(Y \setminus U) = X \setminus f^{-1}(U) \Rightarrow f^{-1}(U) \subseteq X \text{ offen} \end{aligned}$$

$\underline{3 \Rightarrow 4}$: Sei $x \in X$, $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} & \Rightarrow B_\varepsilon^Y(f(x)) \subseteq Y \text{ offen in } Y \\ & \overset{3)}{\Rightarrow} f^{-1}(B_\varepsilon^Y(f(x))) \subseteq X \text{ offen} \\ & \overset{\text{def. offen}}{\Rightarrow} \exists\, \delta > 0\, B_\delta^X(x) \subseteq f^{-1}(B_\varepsilon^Y(f(x))) \end{aligned}$$

Das heißt: ist $x' \in X$ mit $d(x, x') < \delta$

$$\Rightarrow d(f(x), f(x')) < \varepsilon$$

$\underline{4 \Rightarrow 1}$: Sei f ε-δ-stetig und $(x_n)_n$ Folge in x. $x_n \to x \in X$. Dann gilt $f(x_n) \to f(x)$, denn:
Sei $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} & \Rightarrow \exists\, \delta > 0 : x' \in X\, d(x, x') < \delta \\ & \Rightarrow d(f(x), f(x')) < \varepsilon \Rightarrow \text{weil } x_n \to x : \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : d(x, x_n) < \delta \\ & \Rightarrow \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : d(f(x), f(x_n)) < \varepsilon \text{ d.h. } f(x_n) \to f(x) \end{aligned}$$

I.4.8. Beispiel

$(V, \|.\|)$ normierter Vektorraum

$$\|.\| : V \to \mathbb{R} \text{ stetig, denn } \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$$

Also sind die Mengen (für $x \in V$, $r \geq 0$)

$$\{y \in V \mid \|x - y\| \leq r\} \subseteq V \text{ und } \{y \in V \mid \|x - y\| = r\} \subseteq V$$

abgeschlossen.

I.5. Kompaktheit

Erinnerung: Satz von Bolzano-Weierstraß
'Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ besitzt eine konvergente Teilfolge'

- $\to$ Cauchy-Konvergenzkriterium

- $\rightarrow$ Satz vom Minimum und Maximum (Wenn $f : A \rightarrow B$ stetig, dann gilt: f nimmt Minimum und Maximum an)
- $\rightarrow$ Mittelwertsatz der Differentialrechnung
- $\rightarrow$ Satz: $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow$ f ist gleichmäßig stetig.
  $\Rightarrow$ stetige Funktionen sind Riemann-integrierbar

I.5.1. Satz von Bolzano-Weierstraß im $\mathbb{R}^n$

Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}^n$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beweis:
Sei $(x(k))_k$ Folge in $\mathbb{R}^n$, $\|x(k)\|_2 \leq C \quad \forall\, k$.
$x_i(k) \quad i = 1, \dots, n$ Komponenten

$$\Rightarrow \underbrace{|x_i(k)|}_{\text{Folge in } \mathbb{R}} \leq \|x(k)\|^2 \leq C$$

Nach Bolzano-Weierstraß gibt es eine Teilfolge $(x(k_l))_l$ von $x(k)$, so dass $x_1(k_l)$ (in $\mathbb{R}$) Konvergiert Nenne

$$x(1,l) = x(k_l)$$

$$\begin{array}{ccc}
\text{1. Komponente} & \text{2. Komponente} & n\text{-te Komponente} \\
x(k_1 = x(1,1) & x(2,1) & x(n,1) \\
x(k_2) = x(1,2) & x(2,2) & x(n,2) \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
\text{Teilfolge} & (x(1,k))_k & (x_1(1,k)_k) \text{ Konvergiert} \\
\text{Teilfolge} & (x(2,k))_k & (x_2(2,k)_k) \text{ Konvergiert} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\text{Teilfolge} & (x(n,k))_k & (x_n(n,k)_k) \text{ Konvergiert}
\end{array}$$

$\Rightarrow$ Alle Komponentenfolgen von $(x(n,k))_k$ konvergieren
$\Rightarrow (x(n,k))_k$ ist Konvergent

$\square$

I.5.2. Definition

Ein metrischer Raum X heißt **folgenkompakt**, falls für jede Folge $(x_n)_n$ in X eine konvergente Teilfolge hat.
Eine Teilmenge $Y \subseteq Y$ eines metrischen Raumes heißt folgenkompakt, falls jede Folge in $(y_n)_n$ in Y eine (in Y!) konvergente Teilfolge besitzt.

($\Leftrightarrow Y$ mit der von X eingeschränkten Metrik, ist folgenkompakt)

I.5.3. Beispiel:

1. $[a,b]$ folgenkompakt

2. $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 \leq C\}$ ist folgenkompakt: $(x_k)_k$ Folge in X

$$\overset{I.5.1}{\Rightarrow} \exists \text{ TF } x_k \to x \in \mathbb{R}^n$$

aber $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ist abgeschlossen, also $x \in X$

3. $(0,1)$,$(0,1]$ nicht folgenkompakt (betrachte Folge $(\frac{1}{n})_n$)

4. $\mathbb{R}$ nicht folgenkompakt (Die Folge $(n)_n$ hat keine Konvergente TF)

5. $\mathbb{Q} \cap [0,1] \subseteq \mathbb{R}$ nicht folgenkompakt.

$$\text{Ist } x \in [0,1], \text{ so gibt es eine Folge } x_n \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \text{ mit } x_n \to x$$

Dann hat x_n keine in $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ konvergente Teilfolge (falls x irrational)

I.5.4. Satz

X metrischer Raum

1. Ist X folgenkompakt, so ist X vollständig
2. X folgenkompakt, $Y \subseteq X$ abgeschlossen $\Rightarrow$ Y folgenkompakt
3. $Y \subseteq X$, Y folgenkompakt $\Rightarrow$ $Y \subseteq X$ abgeschlossen

Beweis:

1. Sei $(x_n)_n$ Cauchyfolge in X

$$X \text{ folgenkompakt } \Rightarrow \text{ es gibt konvergente Teilfolge } x_{n_k} \to x \in X$$

Beh.

$x_n \to x$
Denn

$$d(x, x_n) \leq d(x, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_n)$$

Sei $\varepsilon > 0$ Wähle $n_0 \quad \forall n, m \geq n_0 : d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$
Wähle $k: \quad n_k \geq n_0$

$$\text{für } n \geq n_k \quad d(x, x_n) \leq \underbrace{d(x, x_{n_k})}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{d(x_{n_k}, x)}_{<\frac{\varepsilon}{2}} y\varepsilon$$

2. Sei $(y_n)_n$ Folge in $Y \subseteq X$

$$X \text{ folgenkompakt } \Rightarrow \exists \text{ TF } y_{n_k}, \text{ welche gegen ein } x \in X \text{ konvergiert}$$

Weil $Y \subseteq X$ abgeschlossen, gilt

$$x = \lim_{k \to \infty} y_{n_k} \in Y \qquad \Rightarrow \qquad (y_{n_k})_k \text{ ist in } Y \text{ konvergent}$$

$\Rightarrow Y$ folgenkompakt

3. <u>zu zeigen:</u> Ist $(y_n)_k$ Folge in Y. $y_n \to x \in X \Rightarrow x \in Y$
(y_n) ist Cauchyfolge.
Nach 1) ist Y vollständig, dh $\exists z \in y : \quad y_n \in z$

$$\Rightarrow x = z, \text{ daher } x \in Y$$

I.5.5. Satz von Heine-Borel

Eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ist folgenkompakt $\Leftrightarrow$ X ist beschränkt und abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$

Beweis:
'$\Rightarrow$': Sei X folgenkompakt. Dann folgt aus I.5.4 3): $X \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen
Wäre X nicht beschränkt, dann gäbe es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in X$ mit $\|x\|_2 \geq n$
Die Folge (x_n) kann dann keine konvergente Teilfolge enthalten, also kann X nicht folgenkompakt sein!

'$\Leftarrow$': Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt und abgeschlossen
Sei $(x_n)_n$ Folge in X.
Die Folge $(x_n)_n$ ist beschränkt.

$$\overset{I.5.1}{\Rightarrow} \text{ es gibt konvergente Teilfolge } x_{n_k} \to x \in \mathbb{R}^n$$

Weil X abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$, ist $x \in X$

$$\Rightarrow X \text{ folgenkompakt}$$

□

Beispiele:
- $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossene Einheitskugel
- $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^n$ Einheitssphäre

$\Rightarrow$ D^n,S^{n-1} folgenkompakt, denn D^n,S^{n-1} beschränkt und:

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \|x\|_2 \qquad f \text{ stetig}$$
$$D^n = f^{-1}(\underbrace{[0,1]}_{\text{abg. in } \mathbb{R}}) \qquad S^{n-1} = f^{-1}(\underbrace{\{1\}}_{\text{abg. in } \mathbb{R}})$$

$\Rightarrow$ D^n,S^{n-1} abgeschlossen

I.5.6. Satz

X,Y metrische Räume, $f : X \to Y$ stetig. Sei X folgenkompakt

$$\Rightarrow f(X) \subseteq Y \text{ ist folgenkompakt}$$

Beweis:
Sei y_n Folge in $f(X)$

$$\forall\, n\, \exists\, x_n \in X \text{ mit } f(x_n) = y_n$$

$(x_n)_n$ Folge in X

$$X \text{ folgenkompakt } \Rightarrow \exists \text{ konvergente Teilfolge } x_{n_k} \to x \in X$$
$$f \text{ stetig } \Rightarrow y_{n_k} = f(x_{n_k}) \to f(x) \in f(X)$$

Damit folgt die Behauptung □

I.5.7. Satz vom Minimum und Maximum

X folgenkompakt, $f : X \to \mathbb{R}$ stetig.
Dann existieren $x_{\text{min}}, x_{\text{max}} \in X$, so dass für alle $x \in X$ gilt:

$$f(x_{\text{min}}) \leq f(x) \leq x_{\text{max}}$$

Beweis:
$f(X) \subseteq \mathbb{R}$ ist folgenkompakt (Satz I.5.6)
Nach I.5.5 ist $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen und beschränkt.
Seien $c, C \in \mathbb{R}$ definiert durch

$$c := \inf f(x)$$
$$C := \sup f(x)$$

Dann sind nach Ana I c, C Berührpunkte um $f(x)$

$$f(x) \text{ abgeschlossen } \Rightarrow c, C \in f(x)$$

Wähle nun $x_{\text{min}}, x_{\text{max}} \in X$ mit

$$f(x_{\text{min}}) = c\,,\; f(x_{\text{max}}) = C$$

□

I.5.8. Satz

Je zwei Normen auf $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent

Beweis:
Da die Äquivalenz von Normen die Äquivalenzrelation ist, genügt es zu zeigen, dass jede Norm auf $\mathbb{R}^n$ zur l^2-Norm äquivalent ist.
Sei $\|.\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diese Norm.
zu zeigen: $\exists\, c, C > 0 \forall\, x \in \mathbb{R}^n$: $\quad c\|x\|_2 \leq \|x\| \leq C\|x\|_2$
Sei

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \qquad , x_i \in \mathbb{R}$$

Dann gilt:

$$\|x\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|x_i e_i\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|\,\|e_i\| \leq \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}}_{\|x\|_2} \cdot \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \|e_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}}}_{=:C>0} = C\|x\|_2$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} \|.\| : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \|x\| \end{aligned}$$

ist stetig, denn $(\|x\| - \|y\|) \leq \|x - y\| \leq C\|x - y\|_2$
Nach dem Satz vom Minimum und Maximum gibt es $x_{\text{min}} \in S^{n-1}$ mit:

$$\forall\, x \in S^{n-1} : \|x\| \geq \|x_{\text{min}}\| =: c > 0 \text{ (da } x_{\text{min}} \neq 0)$$

Sei $y \in \mathbb{R}^n$ beliebig aber $y \neq 0$. Dann folgt:

$$\|y\| = \left\| \underbrace{\|y\|_2}_{\in\mathbb{R}} \underbrace{\frac{y}{\|y\|_2}}_{\in S^{n-1}} \right\| = \|y\|_2 \cdot \left\|\frac{y}{\|y\|_2}\right\| \geq \|y\|_2 \cdot \|x_{\text{min}}\| = c \cdot \|y\|_2$$

□

I.5.9. Erinnerung/Definition

X metrischer Raum, $f : X \to \mathbb{R}$ heißt **gleichmäßig stetig**, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, x' \in X : \|x - x'\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x')\| < \varepsilon$$

Behauptung:
X folgenkompakt, $f : X \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow$ f ist gleichmäßig stetig

$$X \xrightarrow{f} \mathbb{R} \text{ stetig, } \varepsilon > 0$$

$$x \in X : \qquad U_x = \{x' \in X \,|\, |f(x') - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\} = f^{-1}((f(x) - \frac{\varepsilon}{2}, f(x) + \frac{\varepsilon}{2})) \overset{\text{offen, } f \text{ stetig}}{\subseteq} X$$

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{x}$
Um zu beweisen, dass f glm stetig ist, brauchen wir:

$$\exists \delta > 0 \forall y \in X \text{ gibt es } x \in X : \qquad B_\delta(y) \subseteq U_x$$

Denn

$$\begin{aligned} d(y, y') < \delta &\Rightarrow y' \in B_\delta(y) \subseteq U_x \\ &\Rightarrow |f(y') - f(y)| \leq \underbrace{|f(y') - f(x)|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|f(x) - f(y)|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon \end{aligned}$$

I.5.10. Definition

X metrischer Raum, Eine **offene Überdeckung** von X ist eine Familie $U = (U_i)_{i \in I}$, $U_i \subseteq X$ offen für alle $i \in I$ und es gilt:

$$\bigcup_{i \in I} U_i = X$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} &f : X \to \mathbb{R} \text{ stetig, } x \in X, \varepsilon > 0 \\ &U_x = \{x' \in X \,|\, |f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2}\} \subseteq X \\ &(U_x)_{x \in X} = U \text{ offene Überdeckung von } X \end{aligned}$$

I.5.11. Satz Lebesgue-Lemma

Sei X ein folgenkompakter, metrischer Raum und $U = (U_i)_{i \in I}$ offene Überdeckung von X. Dann existiert $\delta > 0$, so dass gilt:

$$\forall x \in X \exists i \in I : \qquad B_\delta(x) \subseteq U_i$$

Ein solches δ heißt **Lebesgue Zahl** der Überdeckung von U

Beweis:
Durch Wiederspruch:
Annahme: X folgenkompakt, $U = (U_i)_{i \in I}$ offene Überdeckung, welche keine Lebesgue-Zahl hat
$\Rightarrow \forall \delta > 0 \exists x \in X : B_\delta(x)$ ist in keiner der Mengen U_i enthalten
$\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in X : B_{\frac{1}{n}}(x_n)$ ist in keinem $U_i, i \in I$ enthalten.
Da X folgenkompakt ist, gibt es eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_k$ so dass $B_{\frac{1}{n_k}}(x_{n_k})$ in keinem U_i enthalten ist.

$$x = \lim_{k \to \infty} x_{n_k} \in X \Rightarrow \exists i_0 \in I \qquad , x \in U_{i_0} \subseteq X \text{ offen} \qquad \exists \varepsilon > 0 \qquad B_\varepsilon(x) \subseteq U_{i_0}$$

Das ist ein Widerspruch, denn
Wähle h so, dass $\frac{1}{n_k} < \varepsilon$ und $d(x, x_{n_k}) < \frac{\varepsilon}{2}$
$\Rightarrow B_{\frac{1}{n_k}}(x_{n_k}) \subseteq B_\varepsilon(x) = U_{i_0}$

$$d(y, x_{n_k}) < \frac{1}{n_k} \Rightarrow d(y, x) \leq d(y, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) < \frac{1}{n_k} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \lightning$$

□

I.5.12. Korollar

X folgenkompakt

$$f : X \to \mathbb{R} \text{ stetig } \Rightarrow f \text{ gleichmäßig stetig}$$

Beweis:
s.o

I.5.13. Definition

X metrischer Raum, $U = (U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung. Eine **Teilüberdeckung von U** ist eine offene Überdeckung $V = (V_j)_{j \in J}$ von X, so dass gilt:

$$\forall j \in J \, \exists i \in I : V_j = U_i$$

I.5.14. Definition

Ein metrischer Raum heißt **überdeckungskompakt** (oder **Kompakt**) falls **jede** offene Überdeckung $U = (U_i)_{i \in I}$ eine endliche Teilüberdeckung $V = (V_j)_{j \in J}$ besitzt. (d.h die Indexmenge J ist endlich)

I.5.15. Satz von Heine-Borel

X metrischer Raum. Dann sind äquivalent:

1. X folgenkompakt
2. X ist überdeckungskompakt

Beweis:
$\underline{2 \Rightarrow 1}$: Wir zeigen nun:

$$\text{überdeckungskompakt} \Rightarrow \text{folgenkompakt}$$

Durch Widerspruch: Sei X überdeckungskompakt, und $(x_n)_n$ Folge in X, welche keine konvergente Teilfolge hat.
Beobachte: $(x_n)_n$ hat keine Konvergente Teilfolge

$$\Rightarrow \forall x \in X \, \exists \varepsilon > 0, \text{ so dass } x_n \in B_\varepsilon(x) \text{ nur für endlich viele } n \text{ gilt}$$

$$\Rightarrow \forall x \in X \, \exists \varepsilon_x > 0 \text{ ,so dass } x_n \in B_\varepsilon(x) \text{ nur für unendliche viele } n \in \mathbb{N} \text{ golt.}$$

Dann ist:

$$U = (B_{\varepsilon_x}(x))_{x \in X}$$

eine offene Überdeckung von X
Weil X Überdeckungskompakt ist, gibt es endliche Teilüberdeckung

$$\Rightarrow \exists \, y_1, \ldots, y_r \in X \text{ mit:}$$

$$X = B_{\varepsilon_{y_1}}(y_1) \cup \ldots \cup B_{\varepsilon_{y_r}}(y_r)$$

□

Bemerkung:
X metrischer Raum. Man kann zeigen, dass folgendes äquivalent ist:

1. X kompakt
2. X ist vollständig und total beschränkt
3. X hat folgende Eigenschaft:

Sind $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$ abgeschlossene Teilmengen von X und $A_n \neq 0 \,\forall\, n$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$$

ohne Beweis

$\underline{1 \Rightarrow 2}$: Wir setzen hierfür Lemma I.5.16 voraus. X folgenkompakt, $U = (U_i)_{i \in I}$ offene Überdeckung von X
zu zeigen: Es gibt endliche Teilüberdeckung $V = (V_j)_{j \in J}$
Sei $\delta > 0$ eine Lebesgue-Zahl von U (existiert nach I.5.11)

$$5.16 \Rightarrow \exists\, x_1, \dots, x_r \in X \qquad \bigcup_{j=1}^{r} B_\delta(x_j) = X$$

$$\Rightarrow \forall\, j = 1, \dots, n \,\exists\, i, j \in I : \qquad B_\delta(x_j) \subseteq U_{ij}$$

$$\Rightarrow X = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_1}$$

□

I.5.16. Lemma

X folgenkompakter metrischer Raum.
Dann ist X **total beschränkt**, d.h. $\forall\, \varepsilon > 0$ gibt es endlich viele $x_1, \dots, x_r \in X$, so dass:

$$\bigcup_{i=1}^{r} B_\varepsilon(x_i) = X$$

Beweis:
Wir zeigen:

X nicht total beschränkt $\Rightarrow X$ nicht folgenkompakt

Sei X also nicht total beschränkt. $\Rightarrow \exists > 0$, so dass gilt:

Sind $x_1, \dots, x_r \in X$ beliebig

$$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{r} B_\varepsilon(x_i) \neq X$$

$$\Rightarrow X \setminus \bigcup_{i=1}^{r} B_\varepsilon(x_i) \neq \emptyset$$

Wähle $x_1 \in X \Rightarrow X \setminus B_\varepsilon(x_1) \neq \emptyset$
Wähle $x_2 \in X \setminus B_{\varepsilon(x_1)} \Rightarrow X \setminus (B_\varepsilon(x_1) \cup (B_\varepsilon(x_2))) \neq \emptyset$

Wähle $x_3 \dots$
Wähle $x_r \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{r-1} B_\varepsilon(x_i)$

$$\Rightarrow (X_r)_r \text{ Folge in } X$$

Für $n \neq m$ gilt:

$$d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$$

Dann ist $n > m$,so ist nach Konstruktion $x_n \notin B_\varepsilon(x_m)$ und dann kann keine Teilfolge von $(x_r)_r$ eine Cauchyfolge sein.

$$\Rightarrow (x_r)_r \text{ hat keine Konvergente Teilfolge}$$

$$X \text{ nicht folgenkompakt}$$

□

II. Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$

II.1. Die Definition

Ziel: $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^m$
Wann heißt f differenzierbar?
Was ist die Ableitung von f?

II.1.1. Notation

$U \subseteq \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$.

$$x + U = \{x + y \,|\, y \in U\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

Analysis I: $n = m = 1$, $U \subseteq \mathbb{R}$ offen, $f : U \to \mathbb{R}\,, x \in U$. f diffbar :⇔ der Grenzwert

$$f'(x) = \lim_{h\to\infty} \frac{1}{h}(f(x+h) - f(x)) \in \mathbb{R}$$

existiert.
Verallgemeinerung: $\mathbb{R} \supseteq U \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$ ohne Problem.
n>1 problematisch, denn man kann nicht durch Elemente $h \in \mathbb{R}^n$ dividieren.
Umformulierung:(aus Analysis I)
$U \subseteq \mathbb{R}$ offen, $x \in U$, $f : U \to \mathbb{R}$

$$A : -x + U \to \mathbb{R} \qquad (-x + U = \{h \in \mathbb{R} \,|\, h + x \in U\})$$

definiert durch:

$$A(h) := \begin{cases} \frac{1}{n} f(x+h) - f(x), & \text{falls } h \neq 0 \\ f(x), & \text{falls } h = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow A$ stetig bei 0

$$\forall\, h \in -x + U \qquad f(x+h) = f(x) + A(h)h$$

Umgekehrt: Nimm an, es gibt Funktion $A : -x + U \to \mathbb{R}$,so dass

1. A stetig bei 0
2. $f(x+h) = f(x) + A(h)h$

$\Rightarrow f$ differenzierbar bei x, und $f'(x) = A(0)$

Beweis:

$$\frac{1}{h}(f(x+h) - f(x)) = \frac{1}{h}(f(x) + A(h)h - f(x)) = \frac{1}{h}A(h)h = A(h) \xrightarrow{h\to 0} A(0)$$

II.1.2. Bemerkung

1. für $n = m = 1$ erhält man den bekannten Begriff aus Ana I
2. hier ist $\mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$ isomorph zu $\mathbb{R}^{m\times n}$ mit irgendeiner Norm ausgestattet (welche, ist gleichgültig, weil alle Normen Äquivalent sind)
3. $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$ $f : U \to \mathbb{R}$
   f diffbar bei $x \Leftrightarrow f$ diffbar bei x $(\forall\, i \in \{1, \dots, m\})$

und

$$Df(x) = \begin{pmatrix} Df_1(x) \\ \vdots \\ Df_n(x) \end{pmatrix} \qquad Df(x) \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$$

4. Wir identifizieren Matrizen und lineare Abbildungen mittels Isomorphismen

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R}) &\to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m) \\ A &\mapsto (x \mapsto A \cdot x) \end{aligned}$$

II.1.3. Definition

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^m$ $x \in U$. f heißt **differenzierbar** bei x, falls eine Funktion $A : -x + U \to \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$ existiert, so dass gilt:

1. A stetig bei 0
2. $\forall\, h \in -x + U$:

$$\underbrace{f(x+h)}_{\in \mathbb{R}^m} = \underbrace{f(x)}_{\in \mathbb{R}^m} + \underbrace{\underbrace{A(h)}_{\in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})} \underbrace{h}_{\in \mathbb{R}^n}}_{\in \mathbb{R}^m}$$

Die Matrix $A(0) \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$ heißt **Ableitung** von f in x und wird mit

$$Df(x) \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$$

bezeichnet
Alternative Bezeichnung: 'total differenzierbar'

$$Df(x) = \text{'Totales Diferential'}$$

II.1.4. Satz

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $x \in U$,$f : U \to \mathbb{R}^m$ sei differenzierbar. Sei $v \in \mathbb{R}^n$
setze $g_v(t) = f(x + tv)$ mit

$$g_v : \{t \in \mathbb{R} \,|\, x + tv \in U\} \to \mathbb{R}^m$$

Dann gilt:

$$Df(x)v = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(g_v(t) - g_v(0))$$

Beweis:
Schreibe $f(x+h) = f(x) + A(h)h$. A stetig bei 0 und $A(0) = Df(x)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{t}(g_v(t) - g_v(0)) &= \frac{1}{t}(f(x+tv) - f(x)) \\ &= \frac{1}{t}(f(x) + A(tv)tv - f(x)) \\ &= \frac{1}{t}A(tv)tv \\ &= \frac{1}{t}tA(tv)v = A(tv)v \longrightarrow A(0)v = Df(x)v \end{aligned}$$

$$t \mapsto A(tv)v \text{ ist stetig bei } 0$$

□

Bemerkung:
In Def II1.2 ist $A(h)$ **nicht** eindeutig durch f bestimmt. Aber $A(0)$ ist eindeutig bestimmt, nach II.1.3

II.1.5. Definition

U, x, f, v wie in Satz II.1.3. Dann heißt $Df(x)v$ die **Richtungsableitung** von f in Richtung v.

$$D_v f(x) = Df(x)v$$

Bemerkung:
Ist f diffbar bei x, so ist $v \mapsto g_v'(0) = D_v f(x)$ linear.

Beispiel:

$$f(x) = \langle x\,,\, x\rangle = \|x\|_2^2$$

$$f(x+h) = \langle x\,,\, x\rangle + \langle h\,,\, h\rangle + 2\langle x\,,\, h\rangle = f(x) + \langle h\,,\, h\rangle + 2\langle x\,,\, h\rangle$$

$A(h) \in \mathsf{Mat}_{n,m}(\mathbb{R})$

$$A(h)h = \langle h\,,\, h\rangle + 2\langle x\,,\, h\rangle$$

II.1.6. Satz

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $x \in U$, $f : U \to \mathbb{R}^m$. $C \in \mathsf{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$. *die Numerierung ist hier nicht richtig*
Es sind Äquivalent:

1. f ist differenzierbar bei x, und $Df(x) = C$
2. Es gilt:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - C\cdot h\|}{\|h\|} = 0$$

2 besagt, dass $h \mapsto f(x) + C \cdot h$ eine gute Approximation an $h \mapsto f(x+h)$ ist)
Außerdem liefern Satz II.1.8 und II.1.5 ein 'Kochrezept' um die differenzierbarkeit von f nachzuprüfen:

1. Berechne $D_v f(x)$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$
2. Finde Matrix $C \in \mathsf{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$ mit $(v = D_v f(x), \forall\, v \in \mathbb{R}^n)$
3. Prüfe

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{\|h\|} \|f(x+h) - f(x) - C\cdot h\| = 0$$

$$\Rightarrow Df(x) = C$$

Beweis:
<u>$1 \Rightarrow 2$</u>: Sei $A :\ -x + U \to \mathsf{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$ mit

$$f(x+h) = f(x) + A(h)h \qquad (\forall\, h)$$

A stetig bei 0 und $A(0) = C$

$$\Rightarrow \frac{\|f(x+h) - f(x) - C\cdot h\|}{\|h\|} = \frac{A(h)h - C\cdot h}{\|h\|} \le \underbrace{\|A(h) - C\|}_{\substack{\to 0 \\ \text{für } h\to 0 \\ (A \text{ stetig bei } 0)}} \frac{\|h\|}{\|h\|}$$

$2 \Rightarrow 1$:
Vorbemerkung: $h \in \mathbb{R}^n$,$v \in \mathbb{R}^n$,$h \neq 0$. Dann ist durch

$$y \mapsto \frac{\langle h\,,\,y\rangle}{\|h\|^2} v, \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

eine lineare Abbildung gegeben, welche mit $h \mapsto v$
Setze $\varphi(h) = f(x+h) - f(x) - C \cdot h, \varphi : -x + U \to \mathbb{R}^m$
Nach Voraussetzung 2) gilt:

$$\frac{\|\varphi(h)\|}{\|h\|} \xrightarrow{h \to 0} 0$$

Definiere Funktion $A : -x + U \to \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$, $A(0) = C \qquad h \neq 0$
Sei $A(h)$ die Matrix, welche die lineare Abbildung

$$y \mapsto C \cdot y + \frac{\langle h\,,\,y\rangle}{\|h\|^2} \varphi(h)$$

darstellt. wobei $\varphi(h) = A(h)y$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow f(x) + A(h)h &= f(x) + C \cdot h + \frac{\langle h\,,\,h\rangle}{\|h\|^2} \varphi(h) \\
&= f(x) + C \cdot h + \varphi(h) \\
&= f(x+h)
\end{aligned}$$

Ferner ist A stetig bei 0 ,denn

$$\begin{aligned}
\|A(h) - A(0)\| &= \sup_{\|y\| \leq 1} \|A(h)y - A(0)y\| \\
&= \sup_{\|y\| \leq 1} \left\| Cy + \frac{\langle h\,,\,y\rangle}{\|h\|^2} \varphi(h) - Cy \right\| \\
&= \sup_{\|y\| \leq 1} \frac{|\langle h\,,\,y\rangle|}{\|h\|^2} \|\varphi(h)\| \\
&\leq \sup_{\|y\| \leq 1} \frac{\|h\|\|y\|}{\|h\|^2} \|\varphi(h)\| \\
&= \frac{\|\varphi(h)\|}{\|h\|} \xrightarrow{h \to 0} 0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow f \text{ differenzierbar bei } x$$
$$Df(x) = C$$

II.1.7. Definition

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $x \in U$, $f : \to \mathbb{R}^m$. Die i-**te partielle Ableitung von** f bei x ist

$$D_i f(x) := D_{e_i} f(x) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

Man schreibt oft auch

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(x) := D_i f(x)$$

Es gilt folgendes:
Wenn f differenzierbar bei x ist, so gilt:
Der (i,j)te Eintrag von $Df(x)$ ist

$$(Df(x))_{i,j} = D_j f_i(x) \qquad i = 1,\dots,m, j = 1,\dots,n$$

$$Df(x) = \begin{pmatrix} D_1 f_1(x) & \dots & D_n f_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ D_1 f_m(x) & \dots & D_n f_m(x) \end{pmatrix} \text{ (Jacobi-Matrix)}$$

Wie berechnet man $D_j f_i(x)$?

$$D_j f_i(x) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} f_i(x + te_j) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} f_i(x_1,\dots,x_{j-1},x_j+t,x_{j+1},\dots,x_n)$$

Beispiel:
$U = \left\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_2 \neq 0\right\}$ offen in $\mathbb{R}^2$

$$q(x_1,x_2) = \frac{x_1}{x_2}$$

Berechnung der partiellen Ableitungen:

$$D_1 q(x_1,x_2) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} q(x_1+t,x_2) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \frac{x_1+t}{x_2} = \frac{1}{x_2} \left(= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_2}\frac{x_1}{x_2}\right)$$

$$D_2 q(x_1,x_2) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} q(x_1,x_2+t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \frac{x_1}{x_2+t} = \frac{-x_1}{(x_2+t)^2}\Big|_{t=0} = -\frac{x_1}{x_2} \left(= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_2}\frac{x_1}{x_2}\right)$$

$\Rightarrow$ falls q diffbar ist, so muss

$$Dq(x_1,x_2) = \left(\frac{1}{x_2}, -\frac{x_1}{x_2}\right)$$

Ist q diffbar?
$x = (x_1,x_2) \in U$ fest, $h = (h_1,h_2) \in -x + U$. Setze

$$A_x(h) := \left(\frac{1}{x_2+h_2}, \frac{-x_1}{x_2(x_2+h_2)}\right)$$

Dann gilt $q(x+h) = q(x) + A_x(h)h$, denn

$$\begin{aligned} q(x) + A_x(h)h &= \frac{x_1}{x_2} + \left(\frac{h_1}{x_2+h_2} - \frac{x_1 h_1}{x_2(x_2+h_2)}\right) \\ &= \frac{x_1(x_2+h_2) + x_2 h_1 - x_1 h_2}{x_2(x_2+h_2)} \\ &= \frac{x_1 x_2 + x_2 h_1}{x_2(x_2+h_2)} \\ &= \frac{x_1+h_1}{x_2+h_2} \\ &= q(x+h) \end{aligned}$$

$h \mapsto A_x(h)$ stetig bei 0, denn

$$A_x(h) = \Bigg(\underbrace{\frac{1}{x_2+h_2}}_{\to \frac{1}{x_2}}, \underbrace{-\frac{x_1}{x_2(x_2+h_2)}}_{\to \frac{-x_1}{x_2^2}}\Bigg)$$

Beispiel:
$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \langle x\,,\, x\rangle$.
Wir haben gesehen, dass f differenzierbar ist mit

$$D_v f(x) = 2\langle x\,,\, v\rangle \qquad \forall\, x, v \in \mathbb{R}^n$$

$$\begin{aligned} D_v f(x) &= \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} \langle x + tv\,,\, x + tv\rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} \left(\langle x\,,\, x\rangle^2 + 2\langle x\,,\, v\rangle + t^2\langle v\,,\, v\rangle\right) \\ &= 2\langle x\,,\, v\rangle \end{aligned}$$

Somit folgt, dass gilt:

$$D_i f(x) = 2\langle x\,,\, e_i\rangle = 2x_i$$

$$Df(x) = (2x_1, \dots, 2x_n)$$

Dieses hätte man auch sehen können, wenn man

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

betrachtet mit

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(x) = 2x_i$$

II.1.8. Satz

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $x \in U$ und $f : U \to \mathbb{R}^n$. Falls die partiellen Ableitungen $D_1 f, \dots, D_n f$ auf ganz U existieren, und stetig sind (also Funktionen $D_i f : U \to \mathbb{R}^m$) dann ist f differenzierbar in x

Beweis:
Weil f genau dann differenzierbar ist, wenn alle $f_1, \dots, f_n : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar sind, genügt es den Fall $m = 1$ zu betrachten.

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= f(x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n) - f(x_1, \dots, x_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_1 + h_1, \dots, x_i + h_i, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1 + h_1, \dots, x_{i-1} + h_{i-1}, x_i, \dots, x_n)\right) \end{aligned}$$

Nach dem Mittelwertsatz gibt es $\theta_1, \dots, \theta_n \in (0, 1)$, so dass

$$\begin{aligned} &f(x_1 + h_1, \dots, x_{i-1} + h_{i-1}, x_i + h_i, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1 + h_1, \dots, x_{i-1} + h_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \\ &\qquad = D_i f(x_1 + h_1, \dots, x_{i-1} + h_{i-1}, x_i + \theta_i h_i, x_{i+1}, \dots, x_n) h_i \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x+h) - f(x) = \sum_{i=1}^{n} D_i f(x_1 + h_1, \dots, x_{i-1} + h_{i-1}, x_i + \theta_i h_i, x_{i+1}, \dots, x_n) h_i$$

Setze $A(h) \in \mathrm{Mat}_{n,m}(\mathbb{R})$ mit

$$A(h) := D_i f(x_1 + h_1, \dots, x_{i-1} + h_{i-1}, x_i + \theta_i h_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

$$\Rightarrow f(x+h) = f(x) - A(h)h$$

Weil $D_i f$ stetig bei x ist, gilt

$$A(h) \stackrel{h\to 0}{\longrightarrow} A(0)$$

□

Wir haben gesehen:

$$f \text{ diffbar } \Rightarrow f \text{ partiell diffbar}$$

$$f \text{ stetig partiell diffbar } \Rightarrow f \text{ diffbar}$$

II.1.9. Definition

$f : U \to \mathbb{R}^m$ heißt **stetig differenzierbar**, falls f differenzierbar ist und falls $Df : U \to \mathrm{Mat}_{n,m}(\mathbb{R})$ stetig ist.

II.1.10. Kettenregel

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \to V\mathbb{R}^m$, $g : V \to \mathbb{R}^p$, $x \in U$, $y = f(x) \in V$. Falls f differenzierbar ist, dann ist $g \circ f : U \to \mathbb{R}^p$ differenzierbar, und es gilt:

$$D(g \circ f)(x) = Dg(f(x))Df(x)$$

Beweis:
Sei $A : -x + U \to \mathrm{Mat}_{n,m}(\mathbb{R})$ und $f(x+h) = f(x) + A(h) \cdot h$ für alle h. A stetig in 0
$B : -y + V \to \mathrm{Mat}_{p,m}(\mathbb{R})$ und $g(y+k) = g(y) + B(k) \cdot k$ für alle $k \in -y + V$. B stetig in 0

$$\Rightarrow g \circ f(x+h) = g(\underbrace{f(x)}_{=y} + \underbrace{A(h)h}_{=k}) = g(f(x)) + B(A(h)h)A(h)h =: g(f(x)) + C(h)h$$

wobei

$$C(h) := \underbrace{\underbrace{B(A(h)h)}_{\in \mathrm{Mat}_{p,m}(\mathbb{R})} \quad \underbrace{A(h)}_{\in \mathrm{Mat}_{n,m}(\mathbb{R})}}_{\mathrm{Mat}_{p,n}(\mathbb{R})}$$

$$\begin{aligned} C(0) &= B(A(0)0)A(0) \\ &= B(0)A(0) \\ &= Dg(y)Df(x) \\ &= Dg(f(x))Df(x) \end{aligned}$$

Außerden ist die Funktion

$$\begin{aligned} C : -x + U &\to \mathrm{Mat}_{p,n}(\mathbb{R}) \\ h &\mapsto C(h) \end{aligned}$$

stetig. □

Formulierung der Kettenregel mit partiellen Ableitungen:
f, g wie in II.1.14

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} \qquad g = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_p \end{pmatrix}$$

Dann gilt:

$$Dg(f(x)) = \begin{pmatrix} D_1g_1(f(x)) & \dots & D_mg_1(f(x)) \\ \vdots & & \vdots \\ D_1g_p(f(x)) & \dots & D_mg_p(f(x)) \end{pmatrix}$$

$$Df(x) = \begin{pmatrix} D_1f_1(x) & \dots & D_nf_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ D_1f_m(x) & \dots & D_nf_m(x) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow D(g \circ f)(x) = \begin{pmatrix} D_1g_1 & \dots & D_mg_1 \\ \vdots & & \vdots \\ D_1g_p & \dots & D_mg_p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D_1f_1(x) & \dots & D_nf_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ D_1f_m(x) & \dots & D_nf_m(x) \end{pmatrix}$$

Der (k,l)-te Eintrag von $D(g \circ f)(x)$ ist

$$\sum_{j=1}^{m} D_jg_k(f(x))D_lf_g(x) = D_lg_k(f(x)) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g_k}{\partial y_g}(f(x))\frac{\partial f_g}{\partial x_l}(x)$$

Beispiele für Kettenregel:
$U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$, $g : U \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ seien differenzierbar.

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} : U \to \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$$
$$x \mapsto \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix}$$

ist differenzierbar, und

$$D(\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} D_1f(x) & \dots & D_nf(x) \\ D_1g(x) & \dots & D_ng(x) \end{pmatrix}$$

Die Funktion

$$q : \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}$$
$$(y,z) \mapsto \frac{y}{z}$$

ist differenzierbar mit

$$Dq(y,z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{z} & -\frac{y}{z^2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow q \circ \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} : U \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$$

ist differenzierbar.

$$\begin{aligned} D\left(q \circ \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}\right) &= Dq\left(\begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix}\right) D\left(\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}\right)(x) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{g(x)} & -\frac{f(x)}{g(x)^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D_1f(x) & \dots & D_nf(x) \\ D_1g(x) & \dots & D_ng(x) \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{D_1f(x)}{g(x)} - \frac{f(x)D_1g(x)}{g(x)^2}, \dots, \frac{D_nf(x)}{g(x)} - \frac{f(x)D_nf(x)}{g(x)^2}\right) \\ &= \left(\frac{D_1f(x)g(x) - f(x)D_1g(x)}{g(x)^2}, \dots, \frac{D_nf(x)g(x) - f(x)D_ng(x)}{g(x)^2}\right) \end{aligned}$$

Analog erhält man durch Betrachtung der Funktion $\mu : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\mu(y,z) = yz$, die **Produktregel**

Beispiel:
$A \in \mathsf{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$, $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $F(x) = A \cdot x$

$$\Rightarrow F \text{ ist differenzierbar und es gilt } DF(x) = A$$

Beweis:

$$F(x+h) = A(x+h) = Ax + Ah = F(x) + Ah$$

□

$U \subseteq \mathbb{R}^p$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar.
$\overset{\text{Kettenregel}}{\Rightarrow}$ $F \circ f : U \to \mathbb{R}^m$ ist differenzierbar, und

$$D(f \circ f)(x) = DF(f(x))Df(x) = A \cdot Df(x)$$

wobei

$$F \circ f(x) = A \cdot f(x)$$

Das heißt Differenzieren vertauscht mit linearen Abbildungen.

Beispiel:
$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \in \mathsf{Mat}_{1,2}(\mathbb{R})$

$$f : U \to \mathbb{R}^2 \qquad f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$$

$$Af = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)$$

$$\Rightarrow D(Af)(x) = ADf(x) = (a_1 D_1 f_1(x) + a_2 D_1 f_2(x), \dots, a_1 D_n f_1 + a_2 D_n f_2(x)) = a_1 Df_1 + a_2 Df_2(x)$$

Dieses ist die Summenregel

Bemerkung:
X, Y endliche-dimensionale $\mathbb{R}$-VR. Dann gibt es Normen auf X und Y.
(z.B $(v_1, \dots, v_n)$ Basis von X und $x = \sum_{i=1}^n x_i v_i \in X$, $x_i \in \mathbb{R}$ wobei $\|x\| := \sum_{i=1}^n |x_i|$)
Je zwei Normen auf X sind äquivalent (weil $\dim X < \infty$).
Also gibt es die Begriffe 'Konvergente Folge','Stetigkeit','offene Mengen', etc, unabhängig von der Wahl der Norm.

II.1.11. Definition

X, Y endlich-dimensionale $\mathbb{R}$-VR, $U \subseteq X$ offen, $x \in U$,$f : U \to Y$ heißt **differenzierbar** bei x, falls gilt: es gibt eine Abbildung $A : -x + U \to \mathsf{Hom}(X, Y)$, so dass gilt:

1. $f(x+h) = f(x) + \underbrace{A(h)}_{\in \mathsf{Hom}(X,Y)} (h) \in Y$ für alle $h \in -x + U$
2. A stetig bei 0 (Diese Aussage ist wohldefiniert, weil $\mathsf{Hom}(X, Y)$ ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-VR ist)

$$A(0) = Df(x)$$