Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Fachbereich 10 Mathematik und Informatik

Höhere Algebra II

gelesen von Prof. Dr. Lutz Hille

Mitschrift von Phil Steinhorst

Wintersemester 2014/2015

Stand: 15. Oktober 2014

Vorwort

Der vorliegende Text ist eine Mitschrift zur Vorlesung Höhere Algebra II, gelesen von Prof. Dr. Lutz Hille an der WWU Münster im Wintersemester 2014/2015. Der Inhalt entspricht weitestgehend dem Tafelanschrieb während der Vorlesung. Für die Korrektheit des Inhalts wird keinerlei Garantie übernommen. Bemerkungen, Korrekturen und Ergänzungen kann man folgenderweise loswerden:

- persönlich durch Überreichen von Notizen oder per E-Mail
- durch Abändern der entsprechenden TeX-Dateien und Versand per E-Mail an mich
- direktes Mitarbeiten via GitHub. Dieses Skript befindet sich im `latex-wwu`-Repository von Jannes Bantje:

https://github.com/JaMeZ-B/latex-wwu

Themenübersicht

Hier kommt eine Themenübersicht hin – oder vielleicht auch nicht.

Literatur

- T. A. Springer: Linear Algebraic Groups
- H. Kraft: Geometrische Methoden in der Invariantentheorie (Aspekte der Mathematik)
- W. Crawley-Boevey: Lectures on representations of quivers

Vorlesungswebsite

Folgt noch.

Phil Steinhorst
p.st@wwu.de

Inhaltsverzeichnis

0 Einführung

13.10. 1. Wir betrachten die algebraische Gruppe $\mathrm{GL}_n = \mathrm{GL}_n(k)$; meist ist $k = \mathbb{C}$ oder allgemeiner $k = \overline{k}$ algebraisch abgeschlossen und $\mathrm{char}(k) = 0$. $\mathrm{GL}_n = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \subseteq M_n(\mathbb{C})$ ist (bzgl. der üblichen Topologie) eine offene Teilmenge. Später betrachten wir die viel gröbere **Zariski-Topologie**.
Sei $m = n^2$ und $\mathbb{A}^m \subseteq \mathbb{C}^m$ ein m-dimensionaler affiner Vektorraum. Wir können $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ auch folgendermaßen charakterisieren:

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) = M_n(\mathbb{C}) \setminus V(\det = 0),$$

wobei $V(f = 0) = \{x \in \mathbb{A}^m : f(x) = 0\}$ die Nullstellenmenge oder **Verschwindungsmenge** der polynomialen Funktion $f\colon \mathbb{A}^m \to \mathbb{C}$, $f \in k[x_1, \dots, x_m]$ bezeichnet.

2. **Beispiel:** Sei $\mathbb{A}^m = M_n(\mathbb{C})$. $G := \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ist eine Gruppe. Können wir die Gruppenverknüpfung, die Inversenbildung und das neutrale Element als polynomiale Funktion auffassen?

$$\begin{aligned} \mu\colon G \times G &\longrightarrow G \\ (g,h) &\longmapsto gh \end{aligned} \qquad \begin{aligned} i\colon G &\longrightarrow G \\ g &\longmapsto g^{-1} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} e\colon \{x\} &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto e = \mathbb{1}_n \end{aligned}$$

e ist offensichtlich polynomial und μ auch (vgl. Matrixmultiplikation). Jedoch ist i nicht polynomial, da nach Cramerscher Regel gilt:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \mathrm{adj}(A)$$

Daher müssen wir auch Quotienten polynomialer Abbildungen mit Nenner ungleich 0 zulassen.

Idee

Eine lineare algebraische Gruppe ist abgeschlossen in GL_n und die Gruppenabbildungen sind Quotienten polynomialer Abbildungen, sodass folgende Eigenschaften erfüllt sind (d.h. die folgenden Diagramme sind kommutativ):

Assoziativität: $\mu \circ (\mu, \mathrm{id}) = \mu \circ (\mathrm{id}, \mu)$

$$\begin{tikzcd} G \times G \times G \arrow[r, "(\mu,\mathrm{id})"] \arrow[d, "(\mathrm{id},\mu)"] & G \times G \arrow[d, "\mu"] \\ G \times G \arrow[r, "\mu"] & G \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (g,h,l) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (gh,l) \arrow[d, mapsto] \\ (g,hl) \arrow[r, mapsto] & g(hl) \overset{!}{=} (gh)l \end{tikzcd}$$

Inverse: $e \circ p = \mu \circ (\mathrm{id}, i) \circ \Delta$ bzw. $e \circ p = \mu \circ (i, \mathrm{id}) \circ \Delta$

$$\begin{tikzcd} & G \times G \arrow[d, "(\mathrm{id},i)"] \\ G \arrow[ur, "\Delta"] \arrow[r] \arrow[d, "p"] & G \times G \arrow[d, "\mu"] \\ \{x\} \arrow[r, "e"] & G \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & (g,g) \arrow[d, mapsto] \\ g \arrow[ur, mapsto] \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (g,g^{-1}) \arrow[d, mapsto] \\ e \arrow[r, mapsto] & e \overset{!}{=} g \cdot g^{-1} \end{tikzcd}$$

Neutrales Element: $\mu \circ (e, \mathrm{id}) = \mathrm{id} = \mu \circ (\mathrm{id}, e)$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "(e,\mathrm{id})"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}"'] & G \times G \arrow[r, "\mu"] & G \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} g \arrow[r, mapsto] \arrow[rr, bend right, mapsto] & (e,g) \arrow[r, mapsto] & eg \overset{!}{=} g \end{tikzcd}$$

Definition 0.1 (polynomiale und rationale Funktion)

- $f\colon \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$ heißt **polynomial** bzw. **Morphismus affiner Varietäten**, falls
$$\big(f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_m(x_1,\dots,x_n)\big) = f(x_1,\dots,x_n)$$
mit $f_j \in k[x_1,\dots,x_n]$ für alle $j \in \{1,\dots,n\}$.

- Sei $U \subseteq \mathbb{A}^n$ offen (im klassischen Sinne oder bzgl. Zariski-Topologie). $f\colon U \to \mathbb{A}^m$ heißt **polynomial**, falls $f = \frac{h}{g}$ mit $h, g \in k[x_1,\dots,x_n]$ und $g(x) \neq 0$ für alle $x \in U$. $\lceil f_j = \frac{h_j}{g_j}$ komponentenweise$\rfloor$

- f wie oben heißt **rational**, fall $f = \frac{h}{g}$ wie oben mit $g \not\equiv 0$ auf U. f ist im Allgemeinen keine Abbildung, sondern nur auf $U \setminus V(g=0)$ definiert.

Beispiel 0.2 (Beispiele für polynomiale und rationale Funktionen)

- $\mathrm{GL}_n \to \mathrm{GL}_n$ mit $g \mapsto g^{-1}$ ist polynomial, $M_n \to M_n$ mit „$g \mapsto g^{-1}$“ ist rational.

- $\det\colon \mathrm{GL}_n \to \mathbb{C}$ und $\det\colon M_n \to \mathbb{C}$ ist polynomial.

- $\det^{-1}\colon M_n \to \mathbb{C}$ ist rational und $\det^{-1}\colon \mathrm{GL}_n \to \mathbb{C}$?

- $\mathbb{A}^1 = \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$ mit $z \mapsto e^{2\pi i z}$ ist nicht polynomial.

Index

Liste der Sätze und Definitionen