



WESTFÄLISCHE
WILHELMS-UNIVERSITÄT
MÜNSTER



FACHBEREICH 10
MATHEMATIK UND
INFORMATIK

Skript Differentialformen und Mannigfaltigkeiten

Mitschrift der Vorlesung „Differentialformen und Mannigfaltigkeiten“ von
Prof. Dr. Kai Zehmisch

Jannes Bantje

21. Februar 2015

Aktuelle Version verfügbar bei



<https://github.com/JaMeZ-B/latex-wwu>

GitHub ist eine Internetplattform, auf der viele OpenSource-Projekte gehostet werden. Diese Plattform nutzen wir zur Zusammenarbeit, also findet man hier neben den PDFs auch die \TeX -Dateien. Außerdem ist über diese Plattform auch direktes Mitarbeiten möglich, siehe nächste Seite.



<https://uni-muenster.sciebo.de/public.php?service=files&t=965ae79080a473eb5b6d927d7d8b0462>

Sciebo ist ein Dropbox-Ersatz der Hochschulen in NRW, der von der Uni Münster in leitender Position auf Basis der OpenSource-Software Owncloud aufgebaut wurde. Wenn man auf den Link klickt, kann man die Freigabe zum eigenen Speicher hinzufügen und hat dann immer automatisch die aktuellste Version.



B6WH2DISQ5QVYIRYIEZSF4ZR2IDVKPN3I

BTSync ist ein peer-to-peer Dateisynchronisations-Tool. Dabei werden die Dateien nur auf den Computern der Teilnehmer an einer Freigabe gespeichert. Ein Mini-Computer ist permanent online, sodass jederzeit die aktuellste Version verfügbar ist. Clients gibt es für jedes Betriebssystem. Zugang ist über das obige „Secret“ bzw. den QR-Code möglich




Vorlesungshomepage


<http://wwwmath.uni-muenster.de/u/kai.zehmisch/>

Hier ist ein Link zur offiziellen Vorlesungshomepage.

Vorwort — Mitarbeit am Skript


Dieses Dokument ist eine Mitschrift aus der Vorlesung „Differentialformen und Mannigfaltigkeiten, SoSe 2014“, gelesen von Prof. Dr. Kai Zehmisch. Der Inhalt entspricht weitestgehend dem Tafelanschrieb. Für die Korrektheit des Inhalts übernehme ich keinerlei Garantie! Für Bemerkungen und Korrekturen – und seien es nur Rechtschreibfehler – bin ich sehr dankbar. Korrekturen lassen sich prinzipiell auf drei Wegen einreichen:

- Persönliches Ansprechen in der Uni, Mails an [✉ j.bantje@wwu.de](mailto:j.bantje@wwu.de) (gerne auch mit annotieren PDFs) oder Kommentare auf <https://github.com/JaMeZ-B/latex-wwu> .
- *Direktes* Mitarbeiten am Skript: Den Quellcode poste ich auf GitHub (siehe oben), also stehen vielfältige Möglichkeiten der Zusammenarbeit zur Verfügung: Zum Beispiel durch Kommentare am Code über die Website und die Kombination Fork + Pull Request. Wer sich verdient macht oder ein Skript zu einer Vorlesung, die ich nicht besuche, beisteuern will, dem gewähre ich gerne auch Schreibzugriff.

Beachten sollte man dabei, dass dazu ein Account bei github.com  notwendig ist, der allerdings ohne Angabe von persönlichen Daten angelegt werden kann. Wer bei GitHub (bzw. dem zugrunde liegenden Open-Source-Programm „git“) – verständlicherweise – Hilfe beim Einstieg braucht, dem helfe ich gerne weiter. Es gibt aber auch zahlreiche empfehlenswerte Tutorials im Internet.¹

- *Indirektes* Mitarbeiten: \TeX -Dateien per Mail verschicken.

Dies ist nur dann sinnvoll, wenn man einen ganzen Abschnitt ändern möchte (zB. einen alternativen Beweis geben), da ich die Änderungen dann per Hand einbauen muss! Ich freue mich aber auch über solche Beiträge!

¹zB. <https://try.github.io/levels/1/challenges/1> , ist auf Englisch, aber dafür interaktives LearningByDoing

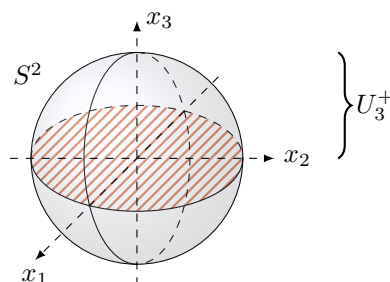
Inhaltsverzeichnis

1 Mannigfaltigkeiten	1
1.1 Sphären	1
1.1.1 Definition: Differenzierbarkeit auf S^n	1
1.2 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten	2
1.2.1 Definition: n -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit	2
1.2.2 Definition: Atlas und Kartenwechsel	2
1.2.3 Definition: Differenzierbarer Atlas	2
1.2.4 Definition: Kompatibilität von Karten	3
1.2.5 Definition: Maximaler Atlas, differenzierbare Struktur und Mannigfaltigkeit	3
1.3 Beispiel: Der reell projektive Raum	3
1.4 Differenzierbare Funktionen	6
1.4.1 Definition: Differenzierbarkeit einer Abbildung $f : M \rightarrow N$	6
1.4.2 Definition: Diffeomorphismus	6
1.5 Der Tangentialraum	7
1.5.1 Definition: Tangentialraum (geometrisch)	7
1.5.2 Definition: Tangentialraum (algebraisch)	8
1.5.3 Definition: Differential (algebraisch)	8
1.5.4 Satz 1: Die partiellen Ableitungen bilden eine Basis des $T_0\mathbb{R}^m$	8
1.5.5 Lemma von Morse	9
1.5.6 Definition: Differential (geometrisch)	9
1.5.7 Satz 3: In lokalen Koordinaten ist das Differential durch die Jacobi-Matrix gegeben	9
1.5.8 Definition: Tangentialvektor (Physiker-Variante)	10
1.5.9 Äquivalenz der geometrischen und der algebraischen Definition	10
2 Vektorfelder	11
2.1 Vektorfelder und Lie-Klammer	11
2.1.1 Definition: Vektorfeld	11
2.1.2 Lemma 4: Differenzierbarkeit eines Vektorfeldes	11
2.1.3 Bemerkung: Modul der differenzierbaren Vektorfelder auf einer Mannigfaltigkeit	11
2.1.4 Definition: Lie-Klammer	11
2.1.5 Lemma 5: Die Lie-Klammer ist ein Vektorfeld	11
2.1.6 Beispiel: Lie-Klammer im \mathbb{R}^2	12
2.2 Integralkurven	12
2.3 Satz von Picard-Lindelöf	13
2.3.1 Satz 6: (Picard-Lindelöf)	13
2.3.2 Bemerkung (Quantisierung)	14
2.3.3 Bemerkung (höhere Regularität)	15
2.4 Flüsse und die Lie-Ableitung	16
2.4.1 Definition: lokaler Fluss	16
2.4.2 Satz 7: Verkettung von lokalen Flüssen	16
2.4.3 Definition: Lie-Ableitung	16
2.4.4 Satz 8: Identitäten der Lie-Ableitung	16
2.4.5 Notation für Pushforward	17
2.4.6 Beispiel zu 2.4.5: Vektorfeld aus einem Diffeomorphismus und einem Vektorfeld	17
2.4.7 Lemma 9: Fluss des Pushforwards eines Vektorfeldes	18
2.4.8 Satz 10: Zusammenhang zwischen Flüssen von Vektorfeldern und der Lie-Klammer	18
2.5 Dynamische Systeme	18
2.5.1 Definition: Dynamisches System	18

2.5.2	Beispiele für dynamische Systeme	19
2.5.3	Einparameterfamilie von Diffeomorphismen	21
2.5.4	Nach M parametrisierte Kurvenscharen	21
2.5.5	Bemerkung: Zerlegung von M in ihre Bahnen	21
2.5.6	Notation: Derivation definiert durch eine Kurve	21
2.5.7	Satz 11: Eigenschaften von Flusslinien	21
2.5.8	Definition: lokaler Fluss	22
2.5.9	Beispiel: Lokaler Fluss in \mathbb{R}	23
2.5.10	Satz 12: Jedes Vektorfeld ist Geschwindigkeitsfeld genau eines maximalen Flusses	23
3	Teilung der Eins	25
3.1	Parakompaktheit	25
3.1.1	Satz 13: Differenzierbare Mannigfaltigkeiten sind parakompakt	25
3.1.2	Definition: Untergeordnete Teilung der Eins	26
3.1.3	Lemma 13b	26
3.1.4	Satz 14	27
3.2	Riemannsche Metriken	28
3.2.1	Definition	28
3.2.2	Satz 15	28
3.3	Sternförmige Gebiete	28
3.3.1	Definition: Sternförmiges Gebiet	28
3.3.2	Beispiel: Der Einheitsball ist diffeomorph zum \mathbb{R}^n	28
3.3.3	Satz 16: Jede offene sternförmige Teilmenge des \mathbb{R}^n ist diffeomorph zu \mathbb{R}^n	28
3.4	Existenz globaler Flüsse	30
3.4.1	Satz 17	30
3.4.2	Satz 18	30
4	Vektorraumbündel	32
4.1	Das Tangentialbündel	32
4.1.1	Definition: Tangentialbündel	32
4.2	Das Kotangentialbündel	33
4.2.1	Definition: 1-Form	33
4.2.2	Definition: Totales Differential	34
4.3	Vektorraumbündel	34
4.3.1	Definition: Vektorraumbündel	34
4.3.2	Definition: Bündelmorphismus	35
4.3.3	Definition: Bündeläquivalenz	35
4.3.4	Produktbündel: $\xi \times \eta$	37
4.3.5	Whitney-Summe: $\xi \oplus \eta$	37
4.3.6	Einschränkung eines Bündels	37
4.3.7	Definition: Schnitt von Bündeln	38
4.3.8	Definition: Bündelatlas	38
5	Formen	40
5.1	Alternierende Formen	40
5.1.1	Definition: Alternierende k -Form	40
5.1.2	Definition: Äußeres Produkt, Dachprodukt	40
5.1.3	Lemma 20: Basis des Vektorraumes $\Lambda^k V^*$	41
5.1.4	Lemma 21 (Antikommutativität)	41
5.1.5	Lemma 22	41

5.2	Differentialformen	42
5.2.1	Definition: Differentialform	42
5.2.2	Bemerkung	42
5.2.3	Lemma 23 (Tensorialitätseigenschaft)	43
5.2.4	Definition: Induzierte Abbildung	44
5.3	Das äußere Differential	44
5.3.1	Satz 24	44
5.3.2	Folgerung 25 (Natürlichkeit)	46
5.4	Orientierung	47
5.4.1	Definition: Orientierung von Vektorräumen	47
5.4.2	Definition: Orientierung einer Mannigfaltigkeit	47
5.4.3	Lemma 26	48
5.4.4	Beispiel	49
5.5	Integration	50
5.5.1	Definition: Messbare Teilmenge einer Mannigfaltigkeit	50
5.5.2	Lemma 27	50
5.5.3	Definition: Integrierbarkeit und das Integral einer k -Form	51
5.5.4	Satz 28	51
5.5.5	Folgerung 29	52
5.5.6	Folgerung 30	53
5.5.7	Folgerung 31	53
5.5.8	Folgerung 32 (Transformationsformel)	53
6	Topologie des deRham-Komplexes	55
6.1	Der Satz von Stokes	55
6.1.1	Einschub: Untermannigfaltigkeit	56
6.1.2	Satz 33 (Gauß-Stokes)	58
6.1.3	Folgerung 34 (Fixpunktsatz von Brouwer)	59
6.2	Homotopieinvarianz	60
6.2.1	Definition: Homotopie	60
6.2.2	Satz 34 (Monotoniesatz)	60
6.2.3	Satz vom Igel	61
6.3	Das Poincaré-Lemma	61
6.3.1	Satz 35 (Kettenhomotopie)	61
6.3.2	Poincaré-Lemma	62
6.4	Die deRham-Kohomologie	62
6.4.1	Poincaré-Dualität	63
	Index	A
	Abbildungsverzeichnis	C
	Todo list	C

1 Mannigfaltigkeiten



$$h_3^+(U_3^+) = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}$$

Abbildung 1: Die dreidimensionale Sphäre S^2 mit dem Bild eines Kartengebiets

1.1 Sphären

Die n -Sphäre ist gegeben durch

$$S^n := \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

Für $i = 1, \dots, n+1$ betrachten wir die (bzgl. der Relativtopologie) offenen Teilmengen

$$U_i^\pm = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n \mid \pm x_i > 0\}$$

und lokale Karten (\hat{x}_i heißt, dass diese Koordinate entfällt)

$$h_i^\pm : U_i^\pm \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1})$$

Die h_i^\pm sind Homöomorphismen auf ihrem Bild mit Inversen (etwa $x_i > 0$)

$$(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1}) \text{ mit } \sum_{k \neq i} x_k^2 < 1 \xrightarrow{(h_i^\pm)^{-1}} \left(x_1, \dots, \sqrt{1 - \sum_{k \neq i} x_k^2}, \dots, x_{n+1} \right) \in S^n$$

Wir wollen differenzierbare Funktionen auf S^n erklären. Dazu betrachte (für $x_j > 0$, $i < j$) die Komposition $h_j^+ \circ (h_i^+)^{-1}$. Diese bildet $(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1})$ nach $(x_1, \dots, \sqrt{1 - \sum_{k \neq i} x_k^2}, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_{n+1})$ ab und ist auf $h_i^+(U_i^+ \cap U_j^+)$ (beliebig oft) differenzierbar. Daher sagen wir:

1.1.1 Definition: Differenzierbarkeit auf S^n

Eine Funktion $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist **differenzierbar**, falls alle Abbildungen

$$f \circ (h_i^\pm)^{-1} : h_i^\pm(U_i^\pm) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\} \rightarrow \mathbb{R}$$

(beliebig oft) differenzierbar sind. Diese Definition ist korrekt, da

$$f \circ (h_j^\pm)^{-1} = f \circ (h_i^\pm)^{-1} \circ \underbrace{h_i^\pm \circ (h_j^\pm)^{-1}}_{\in C^\infty}.$$

1.2 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

1.2.1 Definition: n -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit

Eine **n -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit** M ist ein Hausdorff-Raum mit abzählbarer Basis der Topologie, der lokal homöomorph zum \mathbb{R}^n ist.

lokal homöomorph zum \mathbb{R}^n : $\forall p \in M : \exists$ offene Umgebung $U \subset M$ um p und einen Homöomorphismus $h : U \rightarrow U' \subset \mathbb{R}^n$ auf eine offene Teilmenge U' des \mathbb{R}^n .

Hausdorffsch: Zu je zwei Punkten $p, q \in M$ mit $p \neq q$ gibt es offene Umgebungen U, V von p bzw. q , für die $U \cap V = \emptyset$ gilt.

Bsp.: Jeder metrische Raum ist Hausdorffsch: $U := \{x \in M \mid d(x, p) < \frac{1}{3}d(p, q)\}$, analog für V .

Basis einer Topologie: Ist ein System \mathcal{B} offener Mengen des topologischen Raumes M , sodass sich jede offene Menge in M als Vereinigung von Mengen aus dem System \mathcal{B} schreiben lässt.

Beispiel: Basis des \mathbb{R}^n : offene Bälle $B_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| < r\}$, $a \in \mathbb{R}^n, r \in (0, \infty)$. Eine abzählbare Basis des \mathbb{R}^n :

$$\mathcal{B} := \{B_r(a) \mid a \in \mathbb{Q}^n, r \in (0, \infty) \text{ rational}\}$$

Beispiel (topologische Mannigfaltigkeit)

- offene Teilmengen des \mathbb{R}^n
- Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^{n+k}

(Näheres dazu in der ersten Übung)

Bemerkung

Die Hausdorff-Eigenschaft folgt *nicht* aus der lokalen Homöomorphie zum \mathbb{R}^n ! Betrachte dazu die Topologie auf $M = \mathbb{R} \cup \{p\}$ definiert durch:

U ist offen in M , falls

- $U \subset \mathbb{R}$ offen
- $U = V \setminus \{0\} \cup \{p\}$ mit $V \subset \mathbb{R}$ offen und $0 \in V$
- oder Vereinigung solcher Mengen

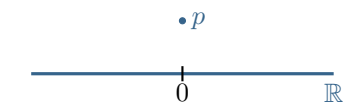


Abbildung 2: Beispiel einer Nicht-Hausdorffmenge

1.2.2 Definition: Atlas und Kartenwechsel

h heißt **Karte**, U das zugehörige **Kartengebiet**. Eine Menge von Karten $\{h_\alpha : U_\alpha \rightarrow U'_\alpha \subset \mathbb{R}^n \mid \alpha \in A\}$ heißt **Atlas** von M , falls $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$. Ein **Kartenwechsel** ist ein Homöomorphismus

$$h_{\beta\alpha} := h_\beta \circ h_\alpha^{-1} : h_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow h_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

1.2.3 Definition: Differenzierbarer Atlas

Ein Atlas einer topologischen Mannigfaltigkeit heißt **differenzierbar**, falls alle Kartenwechsel (beliebig oft) differenzierbar sind.

Beispiele

- Für $U \subset \mathbb{R}^n$ offen ist $\{\text{id} : U \rightarrow U\}$ ein Atlas. Ein Beispiel für ein solches U ist $Gl(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \subset \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$.

Bemerkung: Die Hausdorff-Eigenschaft folgt zum Beispiel daraus, dass U ein metrischer Raum ist. Eine topologische Mannigfaltigkeit mit einem abzählbaren Atlas hat eine abzählbare Basis der Topologie.

- S^n mit Atlas $\{h_i^\pm : U_i^\pm \rightarrow \mathbb{R}^n \mid i = 1, \dots, n+1\}$
- S^n mit Atlas $\{h^\pm : S^n \setminus \{(0, \dots, 0, \pm 1)\} \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n\}$ (**stereographische Projektion**, siehe Blatt 1).

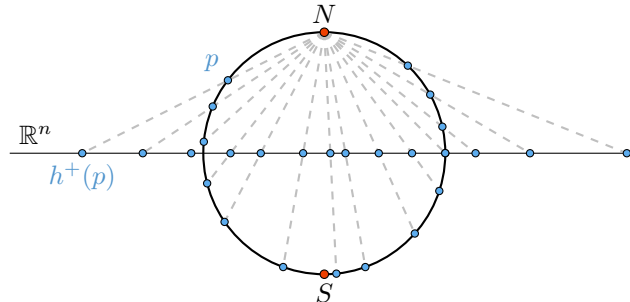


Abbildung 3: Stereografische Projektion

1.2.4 Definition: Kompatibilität von Karten

Zwei Karten (U_α, h_α) und (U_β, h_β) einer topologischen Mannigfaltigkeit heißen **kompatibel**, falls der Kartenwechsel $h_{\beta\alpha} = h_\beta \circ h_\alpha^{-1}$ ein Diffeomorphismus ist, d.h. $h_{\beta\alpha}$ ist differenzierbar und $h_{\alpha\beta}$ ebenfalls.

Die n -Sphäre hat zwei Atlanten $\{h_i^\pm\}$ und $\{h^\pm\}$. Die beiden sind jeweils miteinander kompatibel, siehe Blatt 1. Wir wollen daher die beiden Atlanten $\{h_i^\pm\}$ und $\{h^\pm\}$ als ein und dieselbe differenzierbare Mannigfaltigkeit auffassen.

1.2.5 Definition: Maximaler Atlas, differenzierbare Struktur und Mannigfaltigkeit

Ein differenzierbarer Atlas \mathcal{A} heißt **maximal**, falls jede Karte von M , die mit allen Karten von \mathcal{A} kompatibel ist, selbst bereits zu \mathcal{A} gehört. Eine **differenzierbare Struktur** auf einer topologischen Mannigfaltigkeit ist ein maximaler differenzierbarer Atlas. Eine **differenzierbare Mannigfaltigkeit** ist eine topologische Mannigfaltigkeit mit einer differenzierbaren Struktur.

Bemerkung

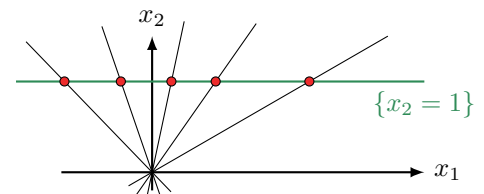
Jeder differenzierbare Atlas ist in einem eindeutig bestimmten maximalen Atlas enthalten, den man durch Hinzunahme aller kompatiblen Karten erhält. Zur Angabe einer differenzierbaren Struktur genügt es daher, einen differenzierbaren Atlas zu beschreiben (siehe Blatt 2).

1.3 Beispiel: Der reell projektive Raum

Der reell projektive Raum ist definiert durch:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}P^n &:= \frac{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}{x \sim y \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : y = \lambda x} \\ &= \text{Menge aller Ursprungsgeraden im } \mathbb{R}^{n+1} \\ &= S^n / x \sim -x \end{aligned}$$

Für $n = 1$ gilt: Jede Ursprungsgerade außer $\{x_2 = 0\}$ entspricht genau einem Punkt auf der affinen Gerade $\{x_2 = 1\}$; $\infty := \{x_2 = 0\}$. $\mathbb{R}P^1 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Abb. 4: Der eindimensionale projektive Raum $\mathbb{R}P^1$

Für $n = 2$ gilt: Jede Ursprungsgerade im \mathbb{R}^3 , die nicht in der x_1 - x_2 -Ebene liegt, entspricht genau einem Punkt in der affinen Ebene $\{x_3 = 1\}$. Die Ursprungsgeraden in der x_1 - x_2 -Ebene bilden einen $\mathbb{R}P^1$. Also gilt $\mathbb{R}P^2 = \mathbb{R}^2 \cup \mathbb{R}P^1$.

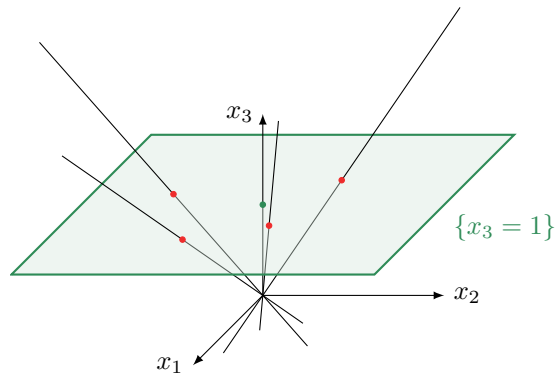


Abbildung 5: Der 2-dimensionale projektive Raum $\mathbb{R}P^2$ (projektive Ebene)

Quotientenabbildung

Wir betrachten folgende Quotientenabbildung.

$$\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}P^n, \quad x \mapsto [x] \text{ (Ursprungsgerade durch } x\text{)}$$

Damit definieren wir nun eine Topologie und eine differenzierbare Struktur auf $\mathbb{R}P^n$.

(i) **Topologie auf $\mathbb{R}P^n$:**

$$U \subset \mathbb{R}P^n \text{ offen} :\Leftrightarrow \pi^{-1}(U) \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \text{ offen}$$

Dies ist die **Quotiententopologie**. Mit dieser Topologie ist π stetig.

Hausdorff-Eigenschaft: Seien $[x] \neq [y]$ im $\mathbb{R}P^n$. Dann gibt es disjunkte offene Mengen X, Y im $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, die aus Ursprungsgeraden bestehen (ohne 0) und die die Ursprungsgeraden durch x und y (mit 0 entfernt) erhalten:

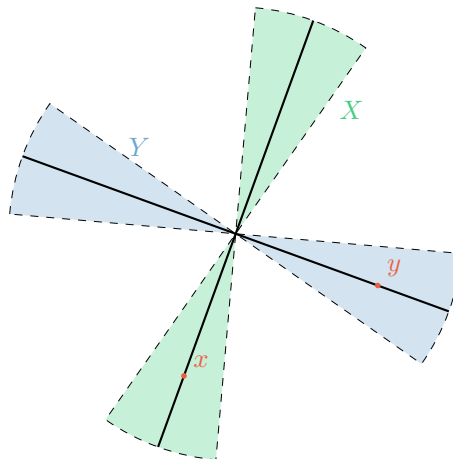
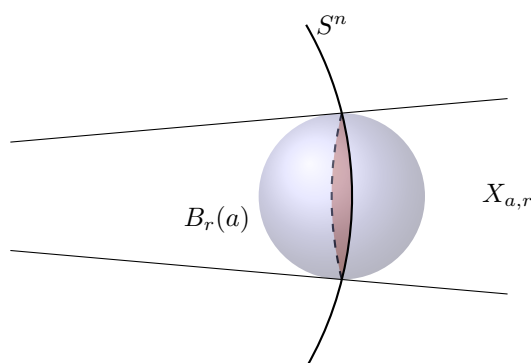


Abbildung 6: Zeichnung zur Hausdorffeigenschaft von $\mathbb{R}P^n$

Dann gilt: $\pi^{-1}(\pi(X)) = X$ und $\pi^{-1}(\pi(Y)) = Y$. Also sind $\pi(X), \pi(Y)$ offene disjunkte Umgebungen von $[x]$ bzw. $[y]$.

Abzählbare Basis der Topologie: $\mathcal{B} = \{\pi(X_{a,r}) \mid a \in \mathbb{Q}^n, r \in (0, \infty) \cap \mathbb{Q}\}$

Abbildung 7: Basis der Topologie von $\mathbb{R}P^n$

Dabei ist $X_{a,r}$ der Kegel ohne 0, der als Schnitt von S^n mit dem rationalen Ball $B_r(a)$ definiert ist.

Damit ist $\mathbb{R}P^n$ eine topologische Mannigfaltigkeit.

- (ii) **Differenzierbare Struktur auf $\mathbb{R}P^n$:** $[x_0 : x_1 : \dots : x_n] \in \mathbb{R}P^n$ sei die Ursprungsgerade durch $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Dies sind die sogenannten **homogenen Koordinaten**.

$$[x_0 : \dots : x_n] = [\lambda x_0 : \dots : \lambda x_n] \quad \text{mit } \lambda \neq 0$$

Setze $U_i := \{[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{R}P^n \mid x_i \neq 0\}$ für $i = 0, 1, \dots, n$. Dann ist

$$\pi^{-1}(U_i) = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \mid x_i \neq 0\} \quad \text{offen.}$$

Also ist U_i offen. Betrachte nun folgende Karte

$$h_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad [x_0 : \dots : x_n] \mapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{\widehat{x_i}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right)$$

Folgendes ist erfüllt:

- Die Definition hängt nicht von der Wahl des Repräsentanten ab.
- h_i ist bijektiv mit Inverser $h_i^{-1}(y_1, \dots, y_n) = [y_1 : \dots : y_i : 1 : y_{i+1} : \dots : y_n]$
- h_i^{-1} ist stetig: $h_i^{-1} : (y_1, \dots, y_n) \xrightarrow{\text{stetig}} (y_1, \dots, 1, \dots, y_n) \xrightarrow{\pi} [y_1 : \dots : 1 : \dots : y_n]$
- h_i ist stetig:

λ kürzen

Einfügen nach i -ter Stelle!

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \supset \pi^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\tilde{h}_i} & \mathbb{R}^n \\ \downarrow \pi & & \downarrow \text{id} \\ \mathbb{R}P^n \supset U_i & \xrightarrow{h_i} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

Es gilt $\tilde{h}_i(x_0, \dots, x_n) = \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{\widehat{x_i}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right)$. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Also ist $\pi^{-1}(h_i^{-1}(U)) = \tilde{h}_i^{-1}(U)$ offen, da \tilde{h}_i stetig ist. Nach der Quotiententopologie ist dann auch $h_i^{-1}(U)$ offen.

- $\{(U_i, h_i)\}_{i=0, \dots, n}$ ist ein differenzierbarer Atlas (\Rightarrow abzählbare Basis der Topologie): Es gilt

$\bigcup_{i=0,\dots,n} U_i = \mathbb{R}P^n$. Weiter ist

$$h_j \circ h_i^{-1}(y_1, \dots, y_n) = h_j([y_1 : \dots : \frac{1}{y_i} : \dots : y_n])$$

$$= \begin{cases} \left(\frac{y_1}{y_j}, \dots, \frac{1}{y_j}, \dots, \frac{y_j}{y_j}, \dots, \frac{y_n}{y_j} \right), & \text{falls } i < j \\ \left(\frac{y_1}{y_{j+1}}, \dots, \frac{y_{j+1}}{y_{j+1}}, \dots, \frac{1}{y_{j+1}}, \dots, \frac{y_n}{y_{j+1}} \right), & \text{falls } i > j \end{cases}$$

C^∞ auf

$$h_i(U_i \cap U_j) = \begin{cases} \{y \in \mathbb{R}^n \mid y_j \neq 0\}, & \text{falls } i < j \\ \{y \in \mathbb{R}^n \mid y_{j+1} \neq 0\}, & \text{falls } i > j \end{cases}$$

1.4 Differenzierbare Funktionen

1.4.1 Definition

Eine stetige Abbildung $f : M \rightarrow N$ zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten heißt **differenzierbar** in $p \in M$, falls für zwei Karten

$$h : U \xrightarrow{\cong_p} U' \quad \text{und} \quad k : V \xrightarrow{\cong_{f(p)}} V'$$

$k \circ f \circ h^{-1}$ ist definiert
auf $h(f^{-1}(V) \cap U)$

die Abbildung $k \circ f \circ h^{-1}$ in $h(p) \in U'$ (beliebig oft) differenzierbar ist.

$$\begin{array}{ccc} M \supseteq U & \xrightarrow{f} & V \subseteq N \\ \downarrow h & & \downarrow k \\ \mathbb{R}^m \supseteq U' & \xrightarrow{k \circ f \circ h^{-1}} & V' \subseteq \mathbb{R}^n \end{array}$$

- Die Stetigkeit von f wird vorausgesetzt, um sicherzustellen, dass $f^{-1}(V)$ und damit auch $h(f^{-1}(V) \cap U)$ eine offene Menge ist.
- Wie in 1.1 erklärt, ist die Definition eines differenzierbaren Atlases gerade so gewählt, dass die obige Definition unabhängig von der Wahl der lokalen Karten ist.

Wir setzen:

$$C^\infty(M, N) := \{(\text{in jedem Punkt}) \text{ differenzierbare Abbildungen } M \rightarrow N\}$$

$$C^\infty(M) := C^\infty(M, \mathbb{R}),$$

wobei (\mathbb{R}, id) eine differenzierbare Struktur auf \mathbb{R} definiert. Mit $V = \mathbb{R}$ muss man in diesem Spezialfall die Stetigkeit von f *nicht* voraussetzen, da $f^{-1}(\mathbb{R}) = M$ offen ist. Differenzierbare Funktionen sind stetig.

1.4.2 Definition

Ein **Diffeomorphismus** ist ein differenzierbarer Homöomorphismus mit differenzierbarer Inverser.

Beispiel

Sei M der topologische Raum \mathbb{R} . Die Homöomorphismen: $h_1 = \text{id}$ und $h_2(x) = x^3$ definieren differenzierbare Strukturen auf \mathbb{R} . Wegen

$$h_1 \circ h_2^{-1} : x \mapsto \sqrt[3]{x}$$

(nicht in 0 differenzierbar!) sind diese differenzierbare Strukturen *nicht* gleich. Sie sind aber diffeomorph:

$$\begin{array}{ccc} (M, \mathcal{A}_1) & \xrightarrow{x \mapsto \sqrt[3]{x}} & (M, \mathcal{A}_2) \\ \downarrow h_1 & & \downarrow h_2 \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{\text{id} = h_2 \circ f \circ h_1^{-1}} & \mathbb{R} \end{array}$$

Es ist sinnvoll differenzierbare Mannigfaltigkeiten bis auf Diffeomorphie zu klassifizieren. Auf \mathbb{R}^n , $n \neq 4$ gibt es bis auf Diffeomorphie genau eine differenzierbare Struktur. Auf \mathbb{R}^4 gibt es überabzählbar viele verschiedene. Auf S^n mit $n \leq 6$ genau eine. Auf S^7 genau 28.

mind = blown

1.5 Der Tangentialraum

Sei $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar. Das **Differential** von f ist in $p \in \mathbb{R}^m$ ist eine lineare Abbildung $T_p \mathbb{R}^m \rightarrow T_{f(p)} \mathbb{R}^n$ gegeben durch die Jacobi-Matrix

$$J_f(p) = \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}(p) \right)_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}, \quad f = (f^1, \dots, f^n)$$

Der **Geschwindigkeitsvektor** in p einer Kurve durch p wird auf den Geschwindigkeitsvektor der Bildkurve in $f(p)$ abgebildet.

$T_p \mathbb{R}^m$ heißt der **Tangentialraum** und ist der Raum aller solchen Geschwindigkeitsvektoren, der hier kanonisch isomorph zu \mathbb{R}^m ist.

Ziel: Differential einer Abbildung $f : M \xrightarrow{\text{diff.}} N$ erklären.

Idee: • Tangentialebene $T_p M$ einer Fläche $M \subset \mathbb{R}^3$

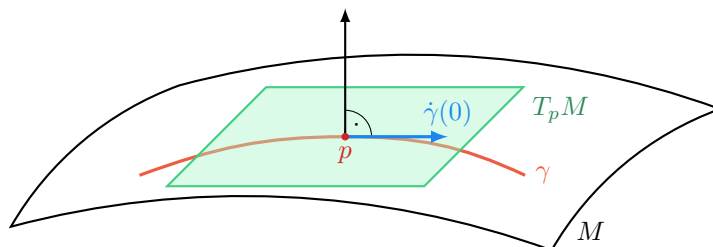


Abbildung 8: Tangentialebene im \mathbb{R}^3

= Raum aller Geschwindigkeitsvektoren $\dot{\gamma}(0)$ von Kurven $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ mit $\gamma(0) = p$.

- Für $v, w \in T_0 \mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^m$ gilt $v = w$ genau dann, wenn für die Richtungsableitungen aller $f \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ gilt:

$$D_v f(0) = D_w f(0)$$

1.5.1 Definition (des Geometers)

Ein **Tangentialvektor** im Punkt $p \in M$ ist eine Äquivalenzklasse $[\gamma]$ von differenzierbaren Wegen $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ mit $\gamma(0) = p$ und $\varepsilon = \varepsilon(p) > 0$ unter der Äquivalenzrelation:

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 : \Leftrightarrow \quad \forall \varphi \in C^\infty(M) : \quad \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_1)(0) = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_2)(0)$$

*Testfunktionen be-
zeichnen wir meist mit
 φ*

$X_\gamma(\varphi) := \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma)(0)$ ist Richtungsableitung von φ in Richtung des Tangentialvektors $[\gamma]$. Es gilt

Linearität: Für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $\varphi, \psi \in C^\infty(M)$ ist

$$X_\gamma(\lambda \cdot \varphi + \mu \cdot \psi) = \lambda \cdot X_\gamma(\varphi) + \mu \cdot X_\gamma(\psi)$$

$\gamma(0) = p$ **Leibnizsche Produktregel:** $\forall \varphi, \psi \in C^\infty(M)$ gilt

$$X_\gamma(\varphi \cdot \psi) = X_\gamma(\varphi) \cdot \psi(p) + \varphi(p) \cdot X_\gamma(\psi)$$

Beispiele:

- $X(1) = X(1 \cdot 1) = X(1) \cdot 1 + 1 \cdot X(1) \Rightarrow X(1) = 0$
- $X(c) = c \cdot X(1) = 0$ für alle $c \in \mathbb{R}$ aufgefasst als konstante Funktionen.

1.5.2 Definition (des Algebraikers)

Eine Abbildung $X : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$, die linear ist und der Leibnizschen Produktregel genügt (siehe oben), heißt **Derivation** (in $p \in M$). Der **Tangententialraum** $T_p M$ der differenzierbaren Mannigfaltigkeit M in $p \in M$ ist der Vektorraum der Derivationen in p . Die Vektorraumstruktur auf $T_p M$ ist gegeben durch:

$$(a_1 X_{\gamma_1} + a_2 X_{\gamma_2})(\varphi) := a_1 X_{\gamma_1}(\varphi) + a_2 X_{\gamma_2}(\varphi)$$

1.5.3 Definition (des Algebraikers)

Das **Differential** $T_p f$ einer differenzierbaren Abbildung $f : M \rightarrow N$ in p ist die lineare Abbildung $T_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ definiert durch

$$(T_p f)(X)(\varphi) = X(\varphi \circ f)$$

für $\varphi \in C^\infty(N)$.

Behauptung

hängt von Karte ab

$T_p M$ ist ein m -dimensionaler Vektorraum. Dazu genügt es $T_0 \mathbb{R}^m$ zu betrachten, vgl. Blatt 3.

1.5.4 Satz 1

Die Derivationen $\frac{\partial}{\partial x^i} : C^\infty(\mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}$ für $i = 1, \dots, m$

$$\varphi \mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}(0)$$

bilden eine Basis des $T_0 \mathbb{R}^m$.

Beweis

- $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}$ sind linear unabhängig: Falls $\sum_{i=1}^m a^i \frac{\partial}{\partial x^i} = 0$, wobei $a^i \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$0 = \left(\sum_{i=1}^m a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) (x^k) = a^k, \quad k = 1, \dots, m$$

- Sei $X \in T_0 \mathbb{R}^m$. Setze $a^i := X(x^i)$. Behauptung: $X = \sum_{i=1}^m a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$.

Schreibe $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ als $\varphi = \varphi(0) + \sum_{k=1}^m x^k \varphi_k$ nach Lemma 2 (1.5.5). Setze nun $Y := X - \sum_{i=1}^m a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Y ist eine Derivation und es gilt

$$\begin{aligned} Y(\varphi) &= \underbrace{Y(\varphi(0))}_{=0} + \sum_{k=1}^m Y(x^k) \cdot \underbrace{\varphi_k(0)}_{=0} + \underbrace{x^k(0)}_{=0} \cdot Y(\varphi_k) \\ &= \sum_{k=1}^m \left(a^k - \sum_{i=1}^m a^i \delta_i^k \right) \cdot \varphi_k(0) = 0. \end{aligned} \quad (\text{Leibniz})$$

Da φ beliebig war, folgt $X = \sum_i a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. □

1.5.5 Lemma 2 (Morse)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^m$ konvex mit $0 \in U$ und $f \in C^\infty(U)$. Dann gibt es $f_1, \dots, f_m \in C^\infty(U)$, sodass

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^m x^i f_i(x).$$

Beweis

$$\begin{aligned} f(x) - f(0) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} (f(t \cdot x^1, \dots, t \cdot x^m)) dt & (\text{MWS}) \\ &= \sum_{i=1}^m x^i \underbrace{\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i} (t \cdot x^1, \dots, t \cdot x^m) dt}_{=: f_i(x)} \end{aligned} \quad \square$$

1.5.6 Definition (des Geometers)

Das **Differential** $T_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ einer differenzierbaren Abbildung $f : M \rightarrow N$ in $p \in M$ ist definiert durch

$$T_p f([\gamma]) = [f \circ \gamma]$$

Dies ist wohldefiniert, da

$$\frac{d}{dt}(\varphi \circ f \circ \gamma_1)(0) = \frac{d}{dt}(\varphi \circ f \circ \gamma_2)(0)$$

nach Definition von "[.]".

1.5.7 Satz 3

In lokalen Koordinaten ist das Differential einer differenzierbaren Abbildung $f : M \rightarrow N$ durch die Jacobi-Matrix gegeben.

Beweis

Mit $q = f(p)$ und lokalen Karten erhalten wir

$$\begin{array}{ccc} (M, p) & \xrightarrow{f} & (N, q) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathbb{R}^m, 0) & \xrightarrow{f'} & (\mathbb{R}^n, 0) \end{array}$$

Schreibe für die induzierte Abbildung f' wieder f .

$$(y^1, \dots, y^n) = (f^1(x^1, \dots, x^m), \dots, f^n(x^1, \dots, x^m))$$

Dann gilt für alle $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$:

$$T_0 f \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) (\varphi) = \frac{\partial}{\partial x^i} (\varphi \circ f)(0) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial y^j}(0) \cdot \frac{\partial f^j}{\partial x^i}(0)$$

folgt aus Kettenregel,
 $\nabla(\varphi \circ f)$ berechnen,
 siehe Ana II. 7.7

Wir erhalten also beim Einsetzen des i -ten Basisvektors die i -te Spalte der Jacobi-Matrix:

$$T_0 f \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f^j}{\partial x^i}(0) \frac{\partial}{\partial y^j} \quad \square$$

1.5.8 Definition (des Physikers ...)

Ein **Tangentialvektor** im Punkt $p \in M$ ist eine Zuordnung, die jeder Karte $h : (M, p) \rightarrow (\mathbb{R}^m, 0)$ um p einen Vektor $v \in \mathbb{R}^m$ so zuordnet, dass der Karte $k : (M, p) \rightarrow (\mathbb{R}^m, 0)$ der Vektor

$$J_{k \circ h^{-1}}(0)(v)$$

zugeordnet wird.

1.5.9 Äquivalenz der geometrischen und der algebraischen Definition

$$T_p^{\text{geom}} M \rightarrow T_p^{\text{alg}} M, [\gamma] \mapsto X_\gamma$$

Wegen $X_\gamma(\varphi) = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma)(0)$ und der Definition von $[\gamma]$ ist diese Abbildung wohldefiniert und injektiv. Die Abbildung ist auch surjektiv: In lokalen Koordinaten sei $\gamma(t) = (a^1 t, \dots, a^m t)$. Dann gilt

$$X_\gamma = \sum_{i=1}^m a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Mit dieser Bijektion übertragen wir die Vektorraumstruktur von $T_p^{\text{alg}} M$ auf $T_p^{\text{geom}} M$. Auch die Definitionen der Differentiale sind miteinander verträglich.

$$\begin{array}{ccc} [\gamma] & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & [f \circ \gamma] \\ \downarrow \wr & \begin{array}{ccc} T_p^{\text{geom}} M & \xrightarrow{T_p^{\text{geom}} f} & T_{f(p)}^{\text{geom}} N \\ \downarrow & & \downarrow \\ T_p^{\text{alg}} M & \xrightarrow{T_p^{\text{alg}} f} & T_{f(p)}^{\text{alg}} N \end{array} & \downarrow \wr \\ X_\gamma & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & X_{f \circ \gamma} \end{array}$$

Zu zeigen: $T_p^{\text{alg}} f(X_\gamma) = X_{f \circ \gamma}$. Es gilt für $\varphi \in C^\infty(N)$

$$X_{f \circ \gamma}(\varphi) = \frac{d}{dt}(\varphi \circ f \circ \gamma)(0) = X_\gamma(\varphi \circ f) = T_p^{\text{alg}} f(X_\gamma)(\varphi)$$

□

2 Vektorfelder

2.1 Vektorfelder und Lie-Klammer

2.1.1 Definition

Ein (differenzierbares) **Vektorfeld** X auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M ist eine Abbildung, die jedem Punkt $p \in M$ einen Tangentialvektor $X_p \in T_p M$ so zuordnet, dass in lokalen Koordinaten $(U, (x^1, \dots, x^m))$ gilt

Wir unterdrücken das p oft in der Notation!

$$X|_U = \sum_{i=1}^m a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

mit $a^i \in C^\infty(U)$ für $i = 1, \dots, n$.

2.1.2 Lemma 4

Die Differenzierbarkeit eines Vektorfeldes X ist äquivalent zu der Aussage:

$$X(\varphi) \in C^\infty(M) \quad \forall \varphi \in C^\infty(M), \text{ wobei } X(\varphi)(p) := X_p(\varphi)$$

Beweis

" \Rightarrow ": Für $a^i \in C^\infty(U)$ gelte lokal: $X|_U = \sum_{i=1}^m a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Damit folgt

$$X(\varphi)|_U = \sum_{i=1}^m a^i \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \in C^\infty(U)$$

$$\Rightarrow X(\varphi) \in C^\infty(M).$$

" \Leftarrow ": Sei $X(\varphi) \in C^\infty(M)$ für alle $\varphi \in C^\infty(M)$. Schreibe lokal $X|_U = \sum_{i=1}^m a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Sei $p \in U$ ein Punkt. Sei $\varphi \in C^\infty(M)$ eine Testfunktion mit $\varphi \equiv x^k$ in einer Umgebung V von p in U .

$$a^k|_V = X(\varphi)|_V \in C^\infty(V)$$

$$\Rightarrow a^i \in C^\infty(U).$$

□

2.1.3 Bemerkung

Die differenzierbaren Vektorfelder auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M bilden einen Modul über $C^\infty(M)$. Die Verknüpfungen sind wie folgt definiert:

$$(X + Y)_p = X_p + Y_p \quad (fX)_p = f(p) \cdot X_p \quad f \in C^\infty(M)$$

2.1.4 Definition


Die **Lie-Klammer**² zweier Vektorfelder X, Y auf M ist das Vektorfeld, das durch

$$[X, Y]_p \varphi := X_p(Y\varphi) - Y_p(X\varphi)$$

definiert ist, wobei $\varphi \in C^\infty(M)$.

2.1.5 Lemma 5

Die Lie-Klammer $[X, Y]$ ist ein Vektorfeld.

²genau genommen ist dies die Lie-Klammer für Vektorfelder, für eine allgemeinere Definition siehe: <https://de.wikipedia.org/wiki/Lie-Klammer> 

Beweis

mit $X(\varphi + \psi) = X(\varphi) + X(\psi)$

- $[X, Y]\varphi$ ist \mathbb{R} -linear in φ .

- $[X, Y]\varphi \in C^\infty(M)$

- Leibnizregel:

$$\begin{aligned} [X, Y]_p(\varphi \cdot \psi) &= X_p(Y(\varphi \cdot \psi)) - Y_p(X(\varphi \cdot \psi)) && \text{(Leibniz)} \\ &= X_p(Y\varphi \cdot \psi + \varphi \cdot Y\psi) - Y_p(X\varphi \cdot \psi + \varphi \cdot X\psi) && \text{(linear+Leibniz)} \\ &= X_p(Y\varphi) \cdot \psi(p) + \underbrace{(Y\varphi)(p) \cdot X_p\psi}_{\text{Leibniz}} + \underbrace{X_p\varphi \cdot (Y\psi)(p)}_{\text{Leibniz}} + \varphi(p)X_p(Y\psi) \\ &\quad - Y_p(X\varphi) \cdot \psi(p) - \underbrace{(X\varphi)(p) \cdot Y_p\psi}_{\text{Leibniz}} - \underbrace{Y_p\varphi \cdot (X\psi)(p)}_{\text{Leibniz}} - \varphi(p) \cdot Y_p(X\psi) \\ &= [X, Y]_p\varphi \cdot \psi(p) + \varphi(p) \cdot [X, Y]_p\psi \end{aligned} \quad \square$$

Achtung: $\varphi \mapsto X_p(Y\varphi)$ definiert im Allgemeinen *kein* Vektorfeld, da die Leibniz-Regel verletzt ist.

2.1.6 Beispiel

Sei $M = \mathbb{R}^2$. Dann ist $\left[x \frac{\partial}{\partial y}, xy \frac{\partial}{\partial x} \right] = x^2 \frac{\partial}{\partial x} - xy \frac{\partial}{\partial y}$.

2.2 Integralkurven

Sei $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ eine differenzierbare Kurve. Für den dadurch in $\gamma(t)$ definierten Tangentialvektor $[\gamma]_{\gamma(t)} \in T_{\gamma(t)}M$ schreiben wir auch einfach $\dot{\gamma}(t)$. Ein Vektorfeld X auf M definiert eine Differentialgleichung erster Ordnung durch

$$\dot{\gamma} = X(\gamma),$$

$\varepsilon = \varepsilon(p)$ d.h. für jeden Punkt $p \in M$ erhält man

$$\gamma_p : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \dot{\gamma}_p(t) = X_{\gamma_p(t)}, & t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \\ \gamma_p(0) = p \end{cases}$$

Die Kurve γ_p heißt **Integralkurve** von X durch p . In lokalen Koordinaten:

$$\begin{aligned} X &= X^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \\ \gamma(t) &= (\gamma^1(t), \dots, \gamma^m(t)) \\ \dot{\gamma}^i(t) &= X^i(\gamma(t)) \quad , \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

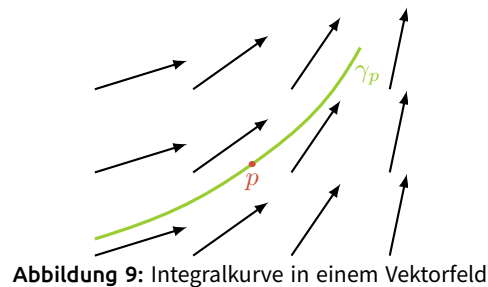


Abbildung 9: Integralkurve in einem Vektorfeld

2.3 Satz von Picard-Lindelöf

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen der sogenannte **Phasenraum**. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein nichtleeres offenes Intervall, das **Zeitintervall**. $X : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei ein stetiges, zeitabhängiges Vektorfeld auf U . Für eine Anfangszeit $t_0 \in I$ und einen Anfangspunkt $x_0 \in U$ suchen wir eine C^1 -Lösung $u : I_1 \rightarrow U$ der Differentialgleichung

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = X(t, u(t)) \\ u(t_0) = x_0 \end{cases}$$

für alle $t \in I_1$, wobei $I_1 := I \cap (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ für ein geeignetes $\varepsilon > 0$. Ändert man den Anfangspunkt x in $U_1 = U \cap B_r(x_0)$, so soll die gefundene C^1 -Lösung $u = u_x$, $u_x(t_0) = x$, stetig von $x \in U_1$ abhängen. Also:

$$u \in C^0(I_1 \times U_1, U) \quad u(t, x) = u_x(t)$$

2.3.1 Satz 6

Wenn X der folgenden **Lipschitz-Bedingung** genügt

$$\exists L > 0 : \forall x_1, x_2 \in U : \forall t \in I : |X(t, x_1) - X(t, x_2)| \leq L \cdot |x_1 - x_2|$$

dann gibt es $\varepsilon > 0, r > 0$ und eine eindeutig bestimmte Lösung $u = u_x : I_1 \rightarrow U$ von $\dot{u}(t) = X(t, u(t))$, $u(t_0) = x$ für jedes $x \in B_r(x_0)$. Die Abbildung $u : I_1 \times U_1 \rightarrow U$ ist stetig.

Bemerkung

X ist also lokal eindeutig lösbar und die Lösung hängt stetig von den Anfangspunkten ab.

Beweis

Betrachte den folgenden Operator

$$(Tu)(t, x) = x + \int_{t_0}^t X(s, u(s, x)) \, ds$$

Ist u ein Fixpunkt des Operators T , d.h. $Tu = u$, so ist u stetig differenzierbar und es gilt: $\frac{d}{dt} u(t, x) = X(t, u(t, x))$ und $u(t_0, x) = x$. Durch Ersetzen von U und I durch eventuell kleinere Umgebungen von x_0 und t_0 können wir annehmen:³

$$\exists K > 0 : |X| < K \text{ auf } I \times U$$

Wähle $R > 0$, so dass $B_{2R}(x_0) \subset U$. Sei $r \leq R$. Damit eine C^1 -Kurve $u : I_1 \rightarrow U$ mit Anfangspunkt $u(t_0) \in B_r(x_0)$ und Geschwindigkeit $|\dot{u}| \leq K$ immer im $B_{2R}(u(x_0))$ bleibt, wählen wir $\varepsilon < \frac{R}{K}$.⁴ Denn dann gilt nach dem Mittelwertsatz:

$$|u(t) - u(t_0)| \leq K \cdot |t - t_0| < K \cdot \varepsilon < R$$

$$\text{D.h. } |u(t) - x_0| < R + |u(t_0) - x_0| \leq 2R.$$

Ziel: lokal eindeutige Lösbarkeit von

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = X(t, u(t)) \\ u(t_0) = x \in B_r(x_0) \end{cases}$$

³Geschwindigkeit in beliebigen Punkten in $I \times U$ beschränkt

⁴ ε für verkürztes Zeitintervall I_1

Sei A der Raum aller stetigen Funktionen $u : I_1 \times B_r(x_0) \rightarrow B_{2R}(x_0)$ mit $u(t_0, x) = x \quad \forall x \in B_r(x_0)$.
Versehen mit der Metrik

$$d(u, v) = \|u - v\| := \sup_{(t, x) \in I_1 \times B_r(x_0)} |u(t, x) - v(t, x)|$$

ist A vollständig. Es gilt $T(A) \subset A$, da

$$|(Tu)(t, x) - x| = \left| \int_{t_0}^t X(s, u(s, x)) \, ds \right| \leq |t - t_0| \cdot \sup_{I \times U} |X| < \varepsilon \cdot K < R$$

Also $(Tu)(t, x) \in B_{2R}(x_0)$ für alle $x \in B_r(x_0)$. T ist kontrahierend, da für alle $u, v \in A$ gilt

$$\begin{aligned} |(Tu)(t, x) - (Tv)(t, x)| &= \left| \int_{t_0}^t X(s, u(s, x)) \, ds - \int_{t_0}^t X(s, v(s, x)) \, ds \right| \\ &\leq |t - t_0| \cdot L \cdot \sup_{I_1 \times B_r(x_0)} |u - v| \end{aligned}$$

d.h. $\|Tu - Tv\| \leq \varepsilon \cdot L \cdot \|u - v\|$. Wir wählen⁵ $\varepsilon < \frac{1}{L}$, sodass T kontrahierend ist. Nach dem Banachschen Fixpunktsatz hat $Tu = u$ genau eine Lösung. Damit haben wir gezeigt, dass X lokal eine Lösung hat. Diese hängt stetig vom Anfangspunkt ab.

Um zu zeigen, dass diese Lösung eindeutig ist, wiederhole man den Beweis mit Abbildungen u , die in t aber *nicht* notwendig in x stetig sind (vgl. Definition von A). \square

2.3.2 Bemerkung (Quantisierung)

Sei $X : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \times B_{2R}(x_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und erfülle eine Lipschitz-Bedingung bezüglich x mit $L > 0$. Sei weiter $|X| < K$, $\varepsilon < \frac{R}{K}$ und $r < R$. Dann ist X für alle Anfangspunkte in $B_r(x_0)$ lokal eindeutig lösbar. Die Bedingung $\varepsilon < \frac{1}{L}$ aus dem Beweis ist dazu *nicht* notwendig.

In der Tat: Sei $u^0(t, x) := x$ und definiere iterativ $u^{\nu+1} := Tu^\nu \quad \forall \nu \in \mathbb{N}$. Es gilt dann die Kontraktionsabschätzung

$$\|u^{\nu+1} - u^\nu\| \leq \frac{K \cdot L^\nu \cdot \varepsilon^{\nu+1}}{(\nu+1)!},$$

wie eine Induktion zeigt. Ein Vergleich mit der Exponentialreihe zeigt, dass die Folge u^ν gleichmäßig gegen ein u konvergiert. (Teleskopsumme: $u^0 - u^1 + u^1 - u^2 + u^2 \pm \dots - u^\nu$) Der Reihenrest kann durch

$$\|u^\nu - u\| < \frac{K}{L} \cdot \frac{(L \cdot \varepsilon)^{\nu+1}}{(\nu+1)!} \cdot e^{L \cdot \varepsilon}$$

abgeschätzt werden. Also ist wegen

$$Tu = \lim_{\nu \rightarrow \infty} Tu^\nu = \lim_{\nu \rightarrow \infty} u^\nu = u$$

u ein Fixpunkt von T . Alternativ führt man den Beweis auch mit der Norm

$$\|u\|' := \sup_{(t, x)} \left(e^{-2 \cdot L \cdot |t - t_0|} \cdot |u(t, x)| \right) \quad \rightsquigarrow \varepsilon L \leftrightarrow \frac{1}{2}$$

Bezüglich $\|\cdot\|'$ ist T dann kontrahierend mit Konstante $\frac{1}{2}$.

⁵wir haben schon $\varepsilon < \frac{R}{K}$, also $\varepsilon < \min\left\{\frac{R}{K}, \frac{1}{L}\right\}$

In Aufgabe 2 von Blatt 5 wurden diese Schritte detailliert ausgeführt

T ist (Lipschitz)-stetig

2.3.3 Bemerkung (höhere Regularität)

Sei $X : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ beliebig oft differenzierbar, $u : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \times B_r(x_0) \rightarrow U$ die lokale Lösung bestimmt durch (t_0, x_0) . Auf $B_{2R}(x_0)$ ist X zusammen mit allen Ableitungen beschränkt (uniform in t). Wir wollen zeigen, dass u eine C^∞ -Abbildung ist. Wegen

$$\frac{d}{dt}u(t, x) = X(t, u(t, x))$$

ist $t \mapsto u(t, x)$ beliebig oft differenzierbar für alle x . Ist u auch bezüglich x beliebig oft differenzierbar, dann gilt

$$\frac{d}{dt}D_x u(t, x) = D_x X(t, u(t, x)) \cdot D_x u(t, x) \quad D_x u(t_0, x) = \text{id}$$

Mit anderen Worten: $D_x u(t, x)$ löst die linearisierte Gleichung

$$\frac{d}{dt}v(t, x) = D_x X(t, u(t, x)) \cdot v(t, x) \quad v(t_0, x) = \text{id}_{n \times n}$$

für Matrix-wertige Abbildungen v . Um die Differenzierbarkeit von u nach x zu sehen, gehen wir wie folgt vor: Sei $h \in \mathbb{R}^n$ mit $|h|$ klein ($|h| \searrow 0$). Setze

$$\Delta u(t, h) := u(t, x + h) - u(t, x) \quad , \quad Y_{t,h} := \int_0^1 D_x X(t, u(t, x) + s\Delta u(t, h)) \, ds$$

Der Parameter x ist in der Notation unterdrückt. Die Ortsvariable ist h . Beachte: $Y(t, 0) = D_x X(t, u(t, x))$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{d}{dt}\Delta u(t, h) &= X(t, u(t, x + h)) - X(t, u(t, x)) = \int_0^1 \frac{d}{ds} X(t, u(t, x) + s\Delta u(t, h)) \, ds \\ &= Y(t, h) \cdot \Delta u(t, h) \end{aligned}$$

$\Delta u(t_0, h) = h$. Das lineare Problem für unbekannte Matrizen ($n \times n$)

$$\begin{cases} \dot{V}(t, h) = Y(t, h) \cdot V(t, h) \\ V(t_0, h) = \text{id}_{n \times n} \end{cases}$$

hat lokal genau eine Lösung V , die stetig in x (Parameter) und h (Ortsvariable, hier als Parameter) ist. vgl. Satz 6 & Blatt 5
 Das lineare Problem für unbekannte Vektoren

$$\begin{cases} \dot{v}(t, h) = Y(t, h) \cdot v(t, h) \\ v(t_0, h) = h \end{cases}$$

wird dann von $v(t, h) = V(t, h) \cdot h$ gelöst. Die Eindeutigkeit liefert

$$\Delta u(t, h) = V(t, h) \cdot h$$

Damit ist $x \mapsto u(t, x)$ von der Klasse C^1 für alle t und $D_x u(t, x) = V(t, 0)$ löst das linearisierte Problem. Um zu zeigen, dass u von der Klasse C^2 ist, betrachten wir nun direkt das System

$$\dot{u}(t, x) = X(t, u(t, x)), \quad \dot{v}(t, x) = D_x X(t, u(t, x)) \cdot v(t, x), \quad u(t_0, x) = x, \quad v(t_0, x) = \text{id}_{n \times n}$$

(Beachte: Rechte Seite ist nur C^1 !) Mit dem eben gezeigten (C^1 reicht!) ist die Lösung $(u, D_x u)$ von der Klasse C^1 , also u selbst C^2 . Durch Wiederholen dieser Argumentation erhält man $u \in C^3$ usw. und somit $u \in C^\infty$. □

2.4 Flüsse und die Lie-Ableitung

Sei X ein differenzierbares Vektorfeld auf M . Aus dem Satz von Picard-Lindelöf folgt, dass für jedes $p \in M$ eine offene Umgebung U von p und ein $\varepsilon > 0$ so existiert, dass für alle $q \in U$ die Integralkurve $\gamma_q(t)$ von X auf $(-\varepsilon, \varepsilon)$ eindeutig bestimmt ist. Die Abbildung $(q, t) \mapsto \gamma_q(t)$ ist differenzierbar.

2.4.1 Definition

Die Abbildung $(q, t) \mapsto \gamma_q(t) =: \Phi_t(q)$ heißt **lokaler Fluss** von X .

2.4.2 Satz 7

Da wo definiert, gilt

$$\Phi_t \circ \Phi_s(q) = \Phi_{t+s}(q).$$

Beweis

$t \mapsto \gamma_q(t+s)$ und $t \mapsto \gamma_{\Phi_s(q)}(t)$ sind Integralkurven von X mit identischem Anfangspunkt, da für $t = 0$ gilt

$$\gamma_q(s) = \Phi_s(q).$$

Die Eindeutigkeitsaussage im Satz von Picard-Lindelöf (2.3) impliziert

$$\gamma_q(t+s) = \gamma_{\Phi_s(q)}(t),$$

also muss $\Phi_{t+s}(q) = \Phi_t \circ \Phi_s(q)$ gelten. □

Wegen $\Phi_t \circ \Phi_{-t} = \Phi_0 = \text{id} = \Phi_{-t} \circ \Phi_t$ ist $\Phi_t : M \rightarrow M$ (falls global definiert) ein Diffeomorphismus mit Inverser $(\Phi_t)^{-1} = \Phi_{-t}$.

2.4.3 Definition

Sei X ein Vektorfeld auf M , Φ_t ein lokaler Fluss zu X . Für Funktionen $f \in C^\infty(M)$ setze

$$\mathcal{L}_X f := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f \circ \Phi_t - f) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ \Phi_t)$$

\mathcal{L}_X heißt die **Lie-Ableitung**. Für Vektorfelder Y auf M definieren wir

$$(\mathcal{L}_X Y)_p := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (T\Phi_{-t}(Y_{\Phi_t(p)}) - Y_p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (T\Phi_{-t}(Y_{\Phi_t(p)}))$$

2.4.4 Satz 8

a) $\mathcal{L}_X f = X(f)$

b) $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$

Beweis

vgl. 1.5.1 **zu a):** Da $t \mapsto \Phi_t(p) = \gamma_p(t)$ Integralkurve von X ist, also $\dot{\Phi}_t = X_{\Phi_t}$, gilt nach Definition

$$\mathcal{L}_X f = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ \Phi_t) = X(f).$$

zu b): In lokalen Koordinaten: $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$. Betrachte zunächst nur einen Basisvektor

$$\mathcal{L}_X \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} T\Phi_{-t} \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) \stackrel{\text{Ana II, 7.7}}{=} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \frac{\partial \Phi_{-t}^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} = - \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Φ_{-t} ist der Fluss zu $-X$

In Analogie zur Produktregel für die gewöhnliche Ableitung für reellwertige Funktionen zeigt man:

siehe Blatt 6, Aufgabe 1

$$\mathcal{L}_X(fY) = (\mathcal{L}_X f)Y + f \cdot \mathcal{L}_X Y$$

Daraus folgt

$$\mathcal{L}_X \left(Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \mathcal{L}_X Y^j \cdot \frac{\partial}{\partial x^j} + Y^j \cdot \mathcal{L}_X \frac{\partial}{\partial x^j} \stackrel{a)}{=} X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} = [X, Y]$$

vgl. Blatt 4

□

2.4.5 Notation für Diffeomorphismen (Pushforward⁶)

Sei $f : M \xrightarrow{\cong} N$ ein Diffeomorphismus und X ein Vektorfeld auf M . Dann erhält man ein neues Vektorfeld auf N in $q \in N$ durch

$$(f_* X)_q := T_{f^{-1}(q)} f(X_{f^{-1}(q)})$$

Damit können wir die Lie-Ableitung schreiben als

$$\mathcal{L}_X Y = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\Phi_{-t})_* Y$$

2.4.6 Beispiel

Sei $M = N = \mathbb{R}^2$. $f(x, y) = (x, x^2 + y) \Rightarrow f^{-1}(x, y) = (x, -x^2 + y)$ ist ein Diffeomorphismus zwischen M und N . Sei weiter ein Vektorfeld definiert durch $X_{x,y} = y \frac{\partial}{\partial x} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}$.

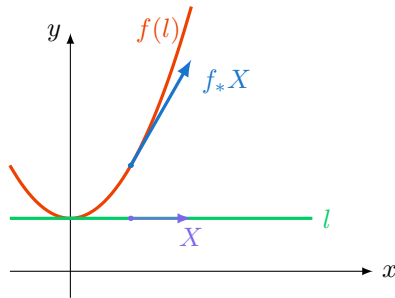


Abbildung 11: Zeichnung zu Beispiel 2.4.6 mit $l(t) = 1$

Es gilt $T_{(x,y)}(f) = J_f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2x & 1 \end{pmatrix}$. Damit folgt

$$\begin{aligned} (f_* X)_{(x,y)} &= T_{(x,-x^2+y)} f(X_{(x,-x^2+y)}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2x & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -x^2+y \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= (-x^2+y) \begin{pmatrix} 1 \\ 2x \end{pmatrix} = (-x^2+y) \left(\frac{\partial}{\partial x} + 2x \frac{\partial}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

⁶„[...] push tangent vectors on M forward to tangent vectors on N “, [https://en.wikipedia.org/wiki/Pushforward_\(differential\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Pushforward_(differential)) ↗

2.4.7 Lemma 9

Ist $f : M \xrightarrow{\cong} N$ ein Diffeomorphismus und Φ_t der (lokale) Fluss eines Vektorfeldes X auf M , so ist $f \circ \Phi_t \circ f^{-1}$ der Fluss von f_*X auf N .

Beweis

Es gilt

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\Phi_t \circ f^{-1}(q)) = X_{f^{-1}(q)}$$

Damit folgt

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ \Phi_t \circ f^{-1}(q)) = T_{f^{-1}(q)} f (X_{f^{-1}(q)}) = (f_*X)_q \quad \square$$

Insbesondere gilt für $M = N$:

$$f_*X = X \iff \forall t : \Phi_t \circ f = f \circ \Phi_t$$

2.4.8 Satz 10

Seien X, Y Vektorfelder auf M mit Fluss Φ_t bzw. Ψ_s . Dann gilt:

$$[X, Y] = 0 \iff \forall s, t : \Phi_t \circ \Psi_s = \Psi_s \circ \Phi_t$$

Beweis

" \Leftarrow ": Es gelte $\Phi_t \circ \Psi_s = \Psi_s \circ \Phi_t$. Dann gilt auch

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \Phi_t \circ \Psi_s(p) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \Psi_s \circ \Phi_t(p)$$

d.h. $T_p \Phi_t(Y_p) = Y_{\Phi_t(p)}$ für alle p, t und $(\Phi_{-t})_* Y = Y$ für alle t . Dann erhalten wir

$$[X, Y] = \mathcal{L}_X Y = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\Phi_{-t})_* Y = 0$$

" \Rightarrow ": Es gelte $[X, Y] = 0$. Nach Lemma 9 (2.4.7) ist zu zeigen, dass $(\Phi_t)_* Y = Y$ für alle t . Es gilt

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} (\Phi_{-t})_* Y = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\Phi_{-t_0-t})_* Y = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\Phi_{-t_0})_* (\Phi_{-t})_* Y = (\Phi_{-t_0})_* \underbrace{\mathcal{L}_X Y}_{=[X,Y]=0} = 0 \quad \square$$

2.5 Dynamische Systeme

2.5.1 Definition

Eine differenzierbare Abbildung $\Phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ heißt **dynamisches System** oder ein **globaler Fluss** auf der differenzierbaren Mannigfaltigkeit M , wenn für alle $s, t \in \mathbb{R}$ und $p \in M$ gilt:

- $\Phi(0, p) = p$
- $\Phi(s + t, p) = \Phi(s, \Phi(t, p))$

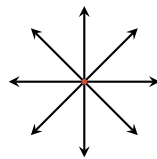
2.5.2 Beispiel

Betrachte $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. $\dot{x} = Ax$ hat den Fluss $\Phi(t, x) = e^{A \cdot t} \cdot x$, wobei

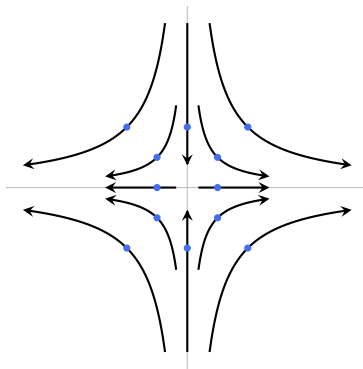
Matrixexponential,
 $M = \mathbb{R}^n$

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$$

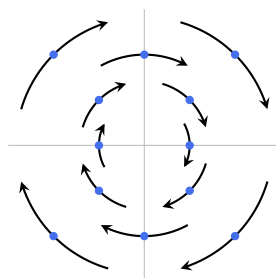
Für $A = \text{id}$ entspricht dies einer Skalierung um e^t , da $e^{A \cdot t} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$:



Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ergibt sich $e^{A \cdot t} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$. Startpunkte $\hat{=}$ \bullet und $t \in [-1, 1]$



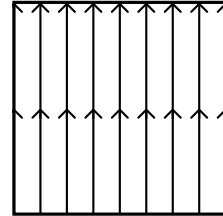
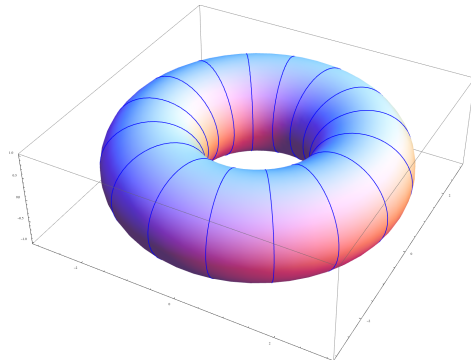
Für $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ergibt sich $e^{A \cdot t} = \begin{pmatrix} 1 & e^t \\ e^{-t} & 1 \end{pmatrix}$. Startpunkte $\hat{=}$ \bullet und $t \in [-1/2, 1/2]$



Betrachte den 2-Torus $S^1 \times S^1 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ mit dem Fluss

$$\Phi(t, (z_1, z_2)) = (e^{it} z_1, e^{ait} z_2), \quad a \in \mathbb{R}$$

Für $a = 0$ ergibt sich:



$$a = \sqrt{11}$$



Torus + Fundamentalgebiet zum zweiten



Rotation um die r -Achse

”Schwingen” einer Ebene um den Nordpol des S^2



”Schwingen” einer Ebene um den Nordpol des S^2

2.5.3 Einparameterfamilie von Diffeomorphismen

Betrachte die Abbildung $\Phi_t : M \rightarrow M, p \mapsto \Phi(t, p)$ mit

- $\Phi_0 = \text{id}_M$
- $\Phi_s \circ \Phi_t = \Phi_{s+t}$

Daraus folgt $(\Phi_t)^{-1} = \Phi_{-t}$. Eine differenzierbare Abbildung $\Phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ ist ein dynamisches System, falls

$$(\mathbb{R}, +) \rightarrow (\{\text{Diffeomorphismen auf } M\}, \circ), t \mapsto \Phi(t, \cdot)$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

2.5.4 Nach M parametrisierte Kurvenscharen

$$\gamma_p : \mathbb{R} \rightarrow M, t \mapsto \Phi(t, p)$$

γ_p heißt **Flusslinie, Integralkurve, Lösungskurve**. $\gamma(\mathbb{R})$ heißt **Orbit** oder **Bahn** durch p .

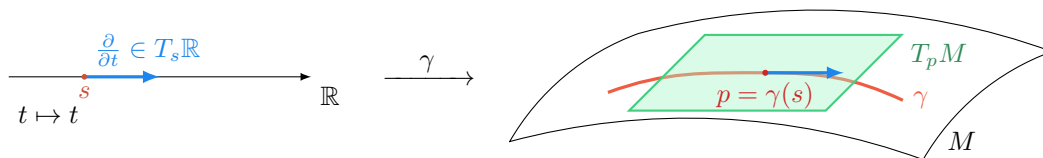
2.5.5 Bemerkung

Ein dynamisches System zerlegt eine Mannigfaltigkeit disjunkt in ihre Bahnen:

$$q \sim p \Leftrightarrow q = \gamma_p(t) \text{ für ein } t$$

Die Bahnen entsprechen genau den Äquivalenzklassen.

2.5.6 Notation



$\dot{\gamma}(s)$ steht für die Derivation, die durch $\dot{\gamma}(s)(\varphi) = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma)(s)$, $\varphi \in C^\infty(M)$ gegeben ist. Es gilt $\dot{\gamma}(s) = T_s \gamma \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)$. (mehr auf Blatt 6)

2.5.7 Satz 11

Eine Flusslinie eines dynamischen Systems $\gamma = \gamma_p : \mathbb{R} \rightarrow M$ ist

- entweder **konstant**, d.h. $\gamma(t) = p \ \forall t$ oder **regulär**, d.h. $\dot{\gamma}(t) \neq 0 \ \forall t$
- entweder injektiv oder **periodisch**, d.h. $\exists \pi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $\gamma(t) = \gamma(t + \pi) \ \forall t$

Beweis

($\gamma = \gamma_p$) Es gilt

$$\gamma(s+t) = \Phi_{s+t}(p) = \Phi_s(\Phi_t(p)) = \Phi_s(\gamma(t))$$

Also

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(s) &= T_0 \gamma(s + \cdot) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = T_0(\Phi_s \circ \gamma) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = T_{\gamma(0)} \Phi \circ T_0 \gamma \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \\ &= T_{\gamma(0)} \Phi_s (\dot{\gamma}(0)) \end{aligned}$$

Da Φ_s ein Diffeomorphismus ist, gilt entweder $\dot{\gamma}(t) = 0 \quad \forall t$ oder $\dot{\gamma}(t) \neq 0 \quad \forall t$. Ist γ nicht injektiv, so gibt es $r < s$ mit $\gamma(r) = \gamma(s)$, d.h. $\Phi_r(p) = \Phi_s(p)$, also

$$\gamma(t) = \Phi_t(p) = \Phi_{t+s-r}(p) = \gamma(t + (s - r)) \quad \forall t$$

□

Sei $U \subseteq M$ offen. Die Flusslinien brauchen *nicht* ganz in U zu verlaufen! Da $\Phi^{-1}(U)$ offen in $\mathbb{R} \times M$ ist, verlaufen die Flusslinien $\gamma_p, p \in U$ wenigstens für ein kleines Intervall (a_p, b_p) um $0 \in \mathbb{R}$.

2.5.8 Definition

Ein **lokaler Fluss** auf M ist eine differenzierbare Abbildung $\Phi : D \rightarrow M$, definiert auf einer $\{0\} \times M$ enthaltener offenen Teilmenge von $D \subset \mathbb{R} \times M$, sodass für jeden Punkt $p \in M$ die Menge $D \cap (\mathbb{R} \times \{p\})$ ein Intervall ist. Weiter gelte $\Phi(0, p) = p$ und $\Phi(s + t, p) = \Phi(s, \Phi(t, p))$ für alle s, t, p , für die beide Seiten erklärt sind.

Auf $\{t\} \times M$ ist Φ_t kein Diffeomorphismus auf M , da Φ_t nicht überall erklärt ist.

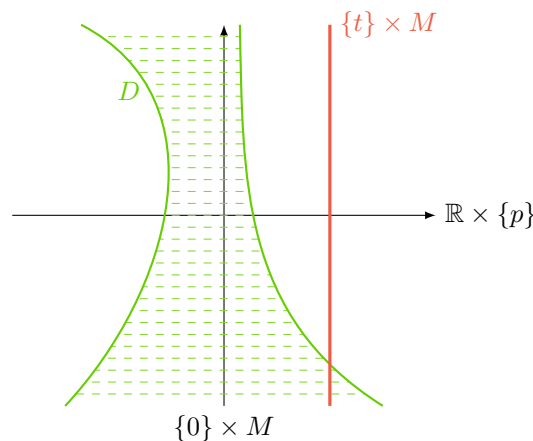


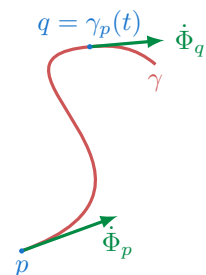
Abbildung 12: Veranschaulichung zu lokalen Flüssen

Bemerkung

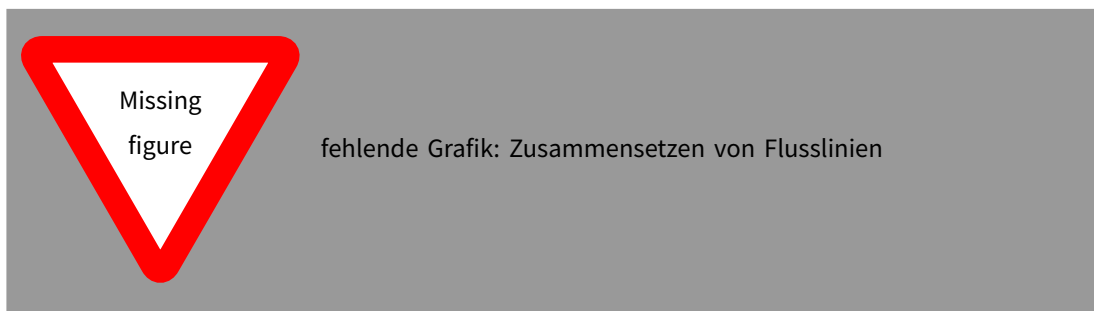
- Gilt $D = \mathbb{R} \times M$, so ist Φ ein globaler Fluss.
- Das Vektorfeld $\dot{\Phi}$ gegeben durch $p \mapsto X_{\gamma(p)} \equiv \dot{\gamma}(0)$ ist das **Geschwindigkeitsfeld** des Flusses Φ . Da

$$q = \gamma_p(t) \Rightarrow \gamma_q(s) = \gamma_p(s + t) \Rightarrow \dot{\gamma}_q(0) = \dot{\gamma}_p(t)$$

gilt $\dot{\gamma}_p(t) = \dot{\gamma}_q(0) = \dot{\Phi}_{\gamma_q(0)}$ für alle $t \in (a_p, b_p)$. (Und nicht nur für $t = 0$ wie in der Definition angegeben.)



- Der Fluss eines Vektorfeldes ist ein (lokaler) Fluss. Zwei Flusslinien $\gamma_p^1 : I_1 \rightarrow M$ und $\gamma_p^2 : I_2 \rightarrow M$, die durch $\gamma_p^1(0) = p = \gamma_p^2(0)$ verlaufen, stimmen auf $I_1 \cap I_2$ überein. Dies gilt, da aus Stetigkeitsgründen die Menge aller t , auf der beide Lösungen übereinstimmen, abgeschlossen ist. Nach dem Satz von Picard-Lindelöf ist sie auch offen. Auf der Vereinigung aller Definitionsbereiche aller Lösungskurven γ_p ist die eindeutig bestimmte **maximale** Lösungskurve gegeben. Wir wollen mit D stets den maximalen Definitionsbereich eines Flusses angeben, d.h. es gelte stets $D \cap (\mathbb{R} \times \{p\})$ ist das maximale Definitionsintervall der maximalen Lösungskurve.

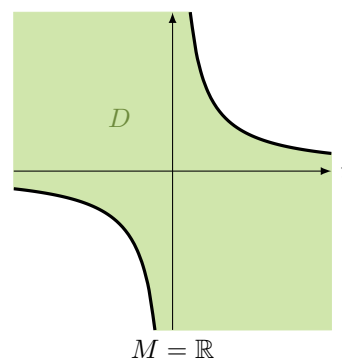
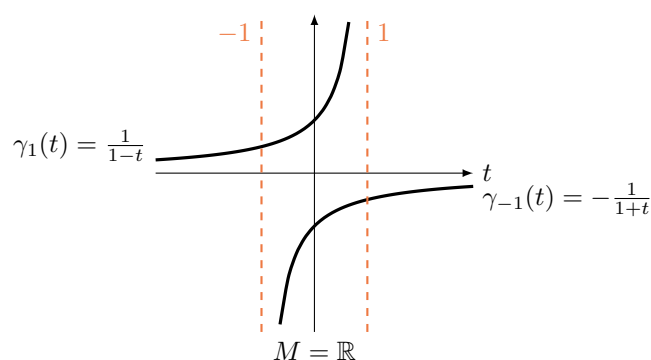


2.5.9 Beispiel

Betrachte die Mannigfaltigkeit \mathbb{R} mit dem Vektorfeld $x^2 \frac{\partial}{\partial x}$. Dann ist $\Phi(t, x) = \frac{x}{1-tx}$ ein lokaler Fluss. Es gilt

$$\begin{cases} \Phi(0, x) = x \\ \dot{\Phi}(t, x) = -\frac{(-x)x}{(1-tx)^2} = \left(\frac{x}{1-tx}\right)^2 \frac{\partial}{\partial x} = (\Phi(t, x))^2 \frac{\partial}{\partial x} \end{cases}$$

$$\gamma_1(t) = \Phi(t, 1) = \frac{1}{1-t}$$



Definitionsbereich: $1 - tx = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{t}$

Bemerkung

Enthält D eine Teilmenge der Form $(-\varepsilon, \varepsilon) \times M$, dann auch eine Teilmenge der Form $(-2\varepsilon, 2\varepsilon) \times M$. Φ kann auf $(-2\varepsilon, 2\varepsilon) \times M$ durch

$$\Phi(t, p) := \Phi\left(\frac{t}{2}, \Phi\left(\frac{t}{2}, p\right)\right)$$

ausgedehnt werden. Da D maximal ist, enthält D also $\mathbb{R} \times M$, d.h. Φ ist global (vollständig). Dies ist beispielsweise der Fall, wenn der Träger $\{X \neq 0\}$ des Φ erzeugenden Vektorfeldes X kompakt ist. (Beispiel: M kompakt)

Analog sieht man, dass jedes auf \mathbb{R}^n definierte und beschränkte Vektorfeld global integrierbar ist. (Blatt 7)

2.5.10 Satz 12

Jedes Vektorfeld ist Geschwindigkeitsfeld genau eines maximalen Flusses.

Beweis

Sei X ein Vektorfeld auf M , Φ der zugehörige Fluss (lokal). Sei $p \in M$ und (a_p, b_p) maximales Definitionsintervall der Lösungskurve γ_P . Dann ist $D = \bigcup_{p \in M} (a_p, b_p) \times \{p\}$. Es reicht zu zeigen: D ist offen und $\Phi : D \rightarrow M$ ist differenzierbar.

Sei $I_p \subset [0, \infty)$ ein Intervall bestehend aus allen $t > 0$, sodass D eine Umgebung von $[0, t] \times \{p\}$ enthält, auf der Φ differenzierbar ist.

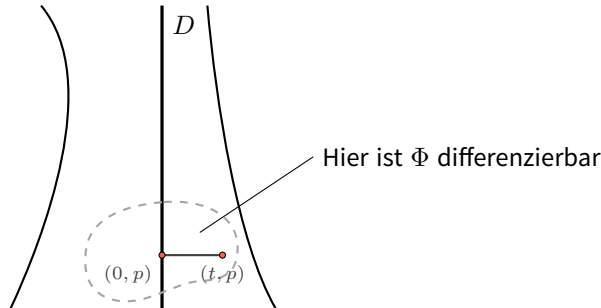


Abbildung 13: Das Intervall I_p , das in einer Umgebung liegt, in der Φ differenzierbar ist

$\Rightarrow I_p$ ist offen.

I_p ist **nicht leer**: Für jeden Punkt $p \in M$ gibt es $\varepsilon > 0$ und eine Umgebung U von p , sodass

$$\Phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \rightarrow M$$

differenzierbar ist. Wegen der Eindeutigkeit enthält D eine Umgebung von $\{0\} \times M$ auf der Φ differenzierbar ist $\Rightarrow I_p \neq \emptyset$.

I_p ist **abgeschlossen**: Sei t_0 Häufungspunkt von I_p in $[0, b_p)$. Sei $q := \gamma_p(t_0)$. Nach Definition von I_p gibt es eine Umgebung V von p , $\varepsilon > 0$ mit $t_0 - 2\varepsilon > 0$, sodass D eine Umgebung von $[0, t_0 - \varepsilon] \times U$ enthält, auf der Φ erklärt und differenzierbar ist. Dabei ist U eine Umgebung von q , sodass (für ein eventuell kleineres $\varepsilon > 0$) Φ auf $(t_0 - 2\varepsilon, t_0 + 2\varepsilon) \times U$ definiert und differenzierbar ist.

Zeichnung vervollständigen



Setze: $W := \Phi_{-(t_0-\varepsilon)}(\Phi_{-\varepsilon}(U))$. Also ist Φ in einer Umgebung von $[0, t_0 + \varepsilon] \times W \supset [0, t_0] \times \{p\}$ erklärt und differenzierbar, wenn die Abbildung

$$(t_0 - 2\varepsilon, t_0 + 2\varepsilon) \times W \rightarrow M \quad (t, r) \mapsto \Phi(t - t_0, \Phi(t_0, r))$$

setzt aufgrund der Eindeutigkeit die auf $[0, t_0 - \varepsilon] \times W$ durch Φ gegebene Lösungskurven richtig fort. Damit folgt $t_0 \in I_p$ und somit ist I_p abgeschlossen. Argumentiert man für $(a_p, 0]$ analog, so folgt $I_p = (a_p, b_p)$. \square

3 Teilung der Eins

Ziel

Konstruktion globaler Objekte aus lokalen Daten.

3.1 Parakompaktheit

Wir setzen für $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$C(r) := \text{offener Würfel der Kantenlänge } 2r = \{x \in \mathbb{R}^m \mid |x_1|, \dots, |x_m| < r\}$$

3.1.1 Satz 13

Sei $\mathcal{U} = \{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ eine offene Überdeckung einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M . Dann gibt es einen Atlas

$$\mathcal{A} = \left\{ h_j : V_j \xrightarrow{\cong} C(3) \mid j \in \mathbb{N} \right\}$$

von M , sodass

- $\{V_j\}$ ist **lokal endliche Verkleinerung** von $\{U_\alpha\}$, d.h. jeder Punkt von M hat eine Umgebung, die nur endlich viele der V_j nicht trivial schneidet, und für jedes j existiert ein $\alpha(j)$ mit $V_j \subset U_{\alpha_j}$.
- $M = \bigcup_j h_j^{-1}(C(1))$

Die Existenz einer lokal endlichen Verfeinerung zu jeder gegebenen offenen Überdeckung bezeichnet man als **Parakompaktheit** des Raumes M . \mathcal{A} heißt einer der Überdeckung \mathcal{U} **untergeordneter guter Atlas**.

Beweis

M ist **lokalkompakt**⁷, da M lokal homöomorph zu \mathbb{R}^n ist. Weiter hat M eine abzählbare Basis der Topologie⁸. Daraus folgt: Es gibt eine offene Überdeckung $B_1, B_2, \dots, B_l, \dots$ $l \in \mathbb{N}$ von M mit $\overline{B_l}$ kompakt für alle $l \in \mathbb{N}$.

Dazu kommt noch eine Übungsaufgabe

Sei $A_1 := \overline{B_1}$. Seien A_1, \dots, A_i induktiv konstruiert. Sei $k \in \mathbb{N}$ die kleinste Zahl mit

$$A_i \subset B_1 \cup \dots \cup B_k, \quad k = k(i)$$

Setze $A_{i+1} := \overline{B_1 \cup \dots \cup B_k}$.

(Dieser Prozess endet genau dann nach endlich vielen Schritten, wenn M kompakt ist.)

Nach Konstruktion gilt nun

- $A_i \subset \text{Int}(A_{i+1})$
- A_i ist kompakt.
- $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

Int für „interior“

d.h. $\{A_i\}$ ist eine **kompakte Ausschöpfung** von M .

⁷d.h. jeder Punkt hat eine kompakte Umgebung

⁸Siehe auch 1.2.1

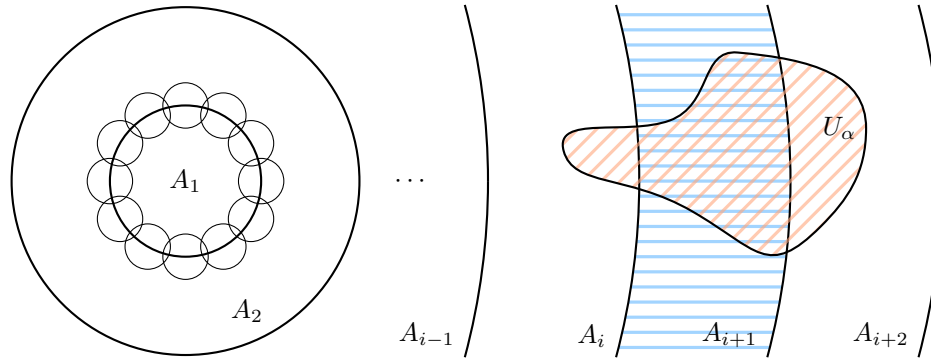


Abbildung 14: Konstruktion in Satz 13 (3.1.1)

$\text{Int}(A_{i+1}) \setminus A_{i-1}$ ist offene Überdeckung der kompakten Menge $A_{i+1} \setminus \text{Int}(A_i)$. Also gibt es endlich viele Karten $h_j : V_j \xrightarrow{\cong} C(3)$, $j = j(i)$, sodass

- $V_i \subset \text{Int}_{A_{i+2}} \setminus A_{i-1}$
- die $h_j^{-1}(C(1))$ überdecken $A_{i+1} \setminus \text{Int}(A_i)$
- $V_j \subset U_\alpha$ für ein geeignetes α .

Man erhält also abzählbar viele Mengen V_j . Jede kompakte Umgebung eines Punktes ist für hinreichend großes i in einem A_i enthalten. Daher schneiden nur endlich viele der V_j diese Umgebung. \square

3.1.2 Definition

Eine \mathcal{U} **untergeordnete Teilung der Eins** ist eine Familie $\{\varphi_i : M \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R} \mid i \in I\}$ differenzierbarer Funktionen mit:

- Das Mengensystem der **Träger** $\{\text{supp } \varphi_i \mid i \in I\}$ ist lokal endlich, wobei $\text{supp } \varphi := \overline{\{p \in M \mid \varphi(p) \neq 0\}}$.
- $\forall i : \exists \alpha : \text{supp } \varphi_i \subset U_\alpha$
- $\varphi_i \geq 0$ und $\sum_{i \in I} \varphi_i(p) = 1 \quad \forall p \in M$. Die Summe ist endlich, da $\{\text{supp } \varphi_i\}$ lokal endlich ist.

3.1.3 Lemma 13b

Es gibt eine offene Überdeckung $B_1, B_2, \dots, B_l, \dots$ $l \in \mathbb{N}$ von M mit $\overline{B_l}$ kompakt für alle l .

Beweis

Für jeden Punkt $p \in M$ wählen wir eine Karte (h_p, U_p) mit $p \in U_p$. Für $\varepsilon_p > 0$ so klein gewählt, dass $\overline{B_{\varepsilon_p}(0)} \subset h_p(U_p)$ setzen wir

$$\Omega_p := h_p^{-1}(B_{\varepsilon_p}(0)).$$

$\{\Omega_p\}_{p \in M}$ ist eine offene Überdeckung von M , so dass $\overline{\Omega_p}$ kompakt in M ist. Da M eine abzählbare Basis der Topologie hat, gibt es eine offene Überdeckung $\{B_l\}_{l \in \mathbb{N}}$ mit:

- $\forall l \in \mathbb{N} : \exists p = p(l) : B_l \subset \Omega_p$. Damit ist insbesondere $\overline{B_l}$ kompakt.
- $\Omega_p = \bigcup_{B_l \subset \Omega_p} B_l$. Damit ist B_l a posteriori eine Überdeckung. \square

3.1.4 Satz 14

Zu jeder offenen Überdeckung \mathcal{U} von M gibt es eine abzählbare untergeordnete Teilung der Eins.

Beweis

Es gibt eine differenzierbare Funktion ψ auf \mathbb{R}^m , sodass

- $\psi \geq 0$, $\psi \leq 1$,
- $\psi = 1$ auf $\overline{C(1)}$,
- $\psi = 0$ auf $\mathbb{R}^m \setminus C(2)$

Betrachte:

$$f(t) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}}, & \text{falls } t > 0 \\ 0, & \text{falls } t \leq 0 \end{cases}$$

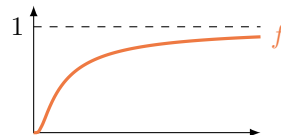


Abbildung 15: Funktion f aus 3.1.3

$$g(t) := \frac{f(t)}{f(t) + f(1-t)}$$

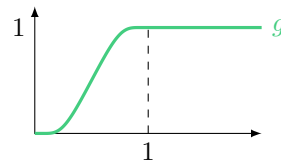


Abbildung 16: Funktion g aus 3.1.3

$$h(t) := g(t+2)g(2-t)$$

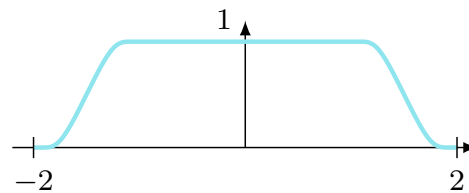
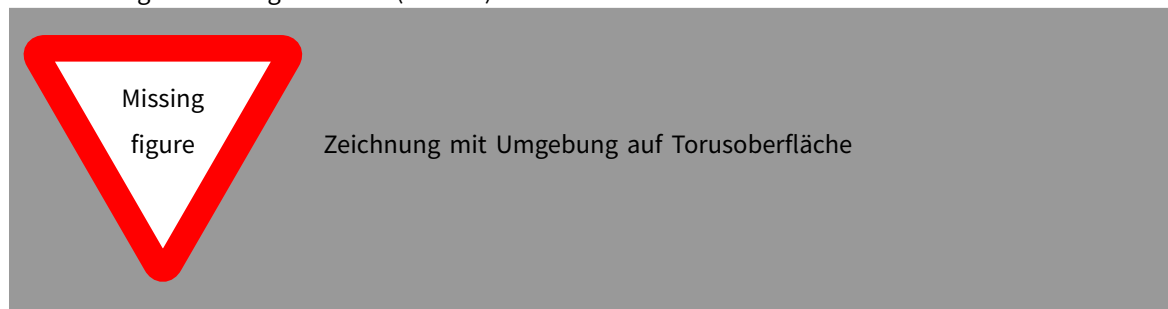


Abbildung 17: Funktion h aus 3.1.3

Für den mehrdimensionalen Fall setze: $\psi(x) := h(|x_1|) \cdot h(|x_2|) \cdot \dots \cdot h(|x_m|)$. Sei

$$\left\{ h_j : V_j \xrightarrow{\cong} C(3) \mid j \in \mathbb{N} \right\}$$

ein \mathcal{U} untergeordneter guter Atlas (Satz 13).



Setze $\psi_j := \begin{cases} \psi \circ h_j, & \text{auf } V_j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$. Dann gilt

$$\varphi_j := \frac{\psi_j}{\sum_k \psi_k}$$

□

3.2 Riemannsche Metriken

3.2.1 Definition

Eine **Riemannsche Metrik** auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M ist eine Zuordnung eines Skalarproduktes $\langle \cdot | \cdot \rangle$ auf $T_p M$ zu jedem Punkt $p \in M$, das differenzierbar von p abhängt. D.h. in jeder lokalen Karte sind die **metrischen Koeffizienten**

$$g_{ij}(p) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i} \middle| \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle_p$$

differenzierbare Funktionen in p .

3.2.2 Satz 15

Jede differenzierbare Mannigfaltigkeit besitzt eine Riemannsche Metrik.

Beweis

Sei $\{(U_\alpha, h_\alpha)\}$ ein Atlas von M und $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ eine untergeordnete Teilung der Eins. Das Standardskalarprodukt des \mathbb{R}^m induziert eine Riemannsche Metrik $\langle \cdot | \cdot \rangle_\alpha$ auf allen Kartengebieten U_α . Für jedes $j \in \mathbb{N}$ wähle ein $\alpha(j)$ mit $\text{supp } \varphi_j \subset U_{\alpha(j)}$. Dann ist

$$\langle \cdot | \cdot \rangle_p := \sum_j \varphi_j(p) \langle \cdot | \cdot \rangle_{\alpha(j)}$$

eine Riemannsche Metrik auf M , da Symmetrie und positive Definitheit konvexe Eigenschaften sind. \square

3.3 Sternförmige Gebiete

3.3.1 Definition

Eine Teilmenge M des \mathbb{R}^n heißt **sternförmig** (mit Zentrum 0), falls mit jedem Punkt $x \in M$ auch die Strecke $\{t \cdot x \mid t \in [0, 1]\}$ in M enthalten ist.

3.3.2 Beispiel

$$\varphi : B_1(0) \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n,$$

$$x \mapsto \begin{cases} \tan\left(\frac{\pi}{2} \cdot |x|\right) \cdot \frac{x}{|x|}, & \text{falls } x \neq 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

$\tan\left(\frac{\pi}{2} \cdot |x|\right) \cdot \frac{1}{|x|}$ ist Potenzreihe mit geraden Potenzen in $|x|$. Die Umkehrfunktion ist

$$\frac{2}{\pi} \arctan(|y|) \frac{y}{|y|} \longleftarrow y$$

Es gilt

$$\mathbb{R}^n \cong B_1^{n_1}(0) \times \dots \times B_1^{n_k}(0) \quad , \quad \sum_i n_i = n$$

3.3.3 Satz 16

Jede offene sternförmige Teilmenge des \mathbb{R}^n ist diffeomorph zu \mathbb{R}^n .

Beweis

M offen, sternförmig, Zentrum 0. Ziel: Konstruiere einen Diffeomorphismus $\mathbb{R}^n \rightarrow M$, der die Strahlen $\{t \cdot x \mid t \in [0, \infty)\}$ auf ihren Durchschnitt mit M abbildet. Diese Strahlen sind die Orbits des Vektorfeldes $X(x) = x$ auf \mathbb{R}^n .

Idee: Finde eine positive Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, sodass das Vektorfeld $Y = f \cdot X$ auf M einen globalen Fluss definiert. Wir bilden dann die Orbits von X auf die von Y ab.

Umparametrisierung

Sei γ eine Integralkurve von X , also $\dot{\gamma} = X(\gamma)$. $s : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ist so zu bestimmen, dass gilt

$$(\gamma \circ s)'(t) = \dot{\gamma}(s(t)) \dot{s}(t) \stackrel{!}{=} X_{(\gamma \circ s)(t)} \cdot f((\gamma \circ s)(t)) = Y_{(\gamma \circ s)(t)}$$

also $\gamma \circ s$ Lösung von $Y = f \cdot X$ ist. Nach dem Satz von Picard-Lindelöf existiert solch eine Lösung von $\dot{s}(t) = f((\gamma \circ s)(t))$ zumindest lokal. Es werden dieselben Orbits mit Geschwindigkeit $|fX|$ statt $|X|$ in gleicher Richtung durchlaufen.

Genauer: $\mathbb{C} : M \supset K := \overline{B_1(0)}$. Wir suchen $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ positiv und **eigentlich**, d.h. für jedes $j \in \mathbb{N}$ ist $g^{-1}([0, j])$ kompakt. Sei $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ eine Teilung der Eins auf M mit kompaktem Träger, $\text{supp } \varphi_j$. Setze

$$g := \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot \varphi_j$$

Sei $K_{1+\delta}$ kompakte δ -Umgebung von K , die noch in M enthalten ist.

$$f := \begin{cases} 1, & \text{auf } K \\ e^{-\langle \text{grad } g \mid x \rangle^2}, & \text{sonst} \end{cases}$$

Definiere $Y(x) := f(x) \cdot x$ für alle $x \in M \subseteq \mathbb{R}^n$. Sei Φ der zugehörige (lokale) Fluss auf M .

$$\varphi : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\cong} M, \quad x \mapsto \begin{cases} \Phi_{\log|x|}\left(\frac{x}{|x|}\right), & \text{falls } x \neq 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

• φ ist wohldefiniert:

- auf K : $Y(x) = x$ mit Fluss $(t, x) \mapsto e^t \cdot x$, also $\varphi(x) = e^{\log|x|} \cdot \frac{x}{|x|} = x$
- Φ_t ist für alle Zeiten t definiert ($\mathbb{C}t > 0$). Auf einer Flusslinie γ von $Y = f \cdot X$ gilt:

$$\left| (g \circ \gamma)' \right| = \left| \langle \text{grad } g \mid \dot{\gamma} \rangle \right| = f(x) \cdot \left| \langle \text{grad } g \mid x \rangle \right| = e^{-\langle \text{grad } g \mid x \rangle^2} \cdot \left| \langle \text{grad } g \mid x \rangle \right| \leq 1$$

Benutzt: $\dot{\gamma} = f(\gamma)X(\gamma) = f(x) \cdot x \Big|_{\gamma}$. Daraus folgt (für alle t , für die $\gamma(t)$ existiert)

$$\int_0^t \left| (g \circ \gamma)'(s) \right| ds \leq t,$$

also

$$\left| g(\gamma(t)) - g(\gamma(0)) \right| = \left| \int_0^t (g \circ \gamma)'(s) ds \right| \leq t$$

Wäre $(-\infty, b)$ das maximale Lösungsintervall von γ für ein $b \in (0, \infty)$, so

$$\left| g(\gamma(t)) - g(\gamma(0)) \right| \leq b \text{ für alle } t \in (-\infty, b)$$

Da g eigentlich ist, verlief γ in einem Kompaktum K' . Dann gäbe es ein $\varepsilon > 0$, so dass sich die Lösung $\gamma = \gamma(t)$ an jedem Punkt des Orbits $\gamma((-\infty, b))$ um $\varepsilon > 0$ fortsetzen ließe. Damit wäre also $b = +\infty$.
 (vgl. mit Bemerkung 2.5.9)

Also ist Φ_t für alle Zeiten t definiert, d.h. Φ ist global.

- φ ist ein Diffeomorphismus: φ ist Komposition von

$$\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \times S^{n-1}, \quad x \mapsto \left(\log|x|, \frac{x}{|x|} \right) \quad e^t \cdot x \mapsto (t, x)$$

und $\psi : \mathbb{R} \times S^{n-1} \rightarrow M \setminus \{0\}$, $(t, x) \mapsto \Phi_t(x)$, $\left(t(y), \frac{y}{|y|}\right) \mapsto y$. Wegen $\frac{\partial}{\partial t} \Phi_t(x) = Y(x) = f(x) \cdot x$ und $f > 0$ ist die Funktion: $t \mapsto |\Phi_t(x)|$ streng monoton wachsend für alle $x \neq 0$. Die Umkehrfunktion bezeichnen wir mit $y \mapsto t(y)$. Also ist ψ surjektiv. Mit einem analogen Argument sieht man, dass ψ auch injektiv ist, da $M \setminus \{0\}$ disjunkt in die Bahnen von Φ ($\hat{=}$ offene Strahlen) zerlegt ist, welche monoton wachsend durchlaufen werden. Dies und die Flusseigenschaft sichern, dass ψ ein Diffeomorphismus ist (Implizite-Funktionen-Theorem). \square

3.4 Existenz globaler Flüsse

Im Abschnitt 3.3 haben wir gesehen: Existiert eine Flusslinie nur für endliche Zeit, so verlässt sie jedes Kompaktum. Damit erhalten wir analog zu Satz 16 (3.3.3) den folgenden Satz 17

3.4.1 Satz 17

Zu jedem Vektorfeld X auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M gibt es ein **vollständig integrables Vektorfeld** (d.h. der erzeugte Fluss ist global), dessen Orbits mit den Orbits von X übereinstimmen.

Beweis (wie bei Satz 16)

$g := \sum_{j=1}^{\infty} g \cdot \varphi_j$, $\{\varphi_j\}$ Teilung der Eins auf M . $\Rightarrow g$ ist eigentlich. Setze $f := e^{-(Xg)^2} \in (0, 1]$, $Y := f \cdot X$. Behauptung Y ist vollständig integrabel. Entlang einer Flusslinie γ von Y gilt:

$$(g \circ \gamma)' = T_{\gamma} g(\dot{\gamma}) = f(\gamma) \cdot (Xg)_{\gamma}$$

$$\Rightarrow |(g \circ \gamma)'| \leq 1$$

$$\Rightarrow |g(\gamma(t)) - g(\gamma(0))| \leq \int_0^{|t|} |(g \circ \gamma)'| \leq |t|$$

Da g eine eigentlich Abbildung ist, bliebe die Lösungskurve γ in einem Kompaktum, falls γ nur für endliche Zeiten existiert. Da dies *nicht* möglich ist, ist der Fluss von Y global. \square

Auf einer vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) kann man die Vollständigkeit von Flüssen durch die Beschränktheit der integrierenden Vektorfelder erzwingen: Sei

- M eine zusammenhängende differenzierbare Mannigfaltigkeit
- g eine Riemannsche Metrik auf M


$$d(p, q) := \inf_{\gamma} \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| \, dt$$

definiert eine Metrik d auf M , wobei das Infimum über alle stückweisen C^1 -Kurven γ , die $p = \gamma(a)$ mit $q = \gamma(b)$ verbinden, erstreckt wird.

Nach dem Satz von Hopf-Rinow⁹ ist eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) **vollständig** genau dann, wenn im metrischen Raum (M, d) die abgeschlossenen und beschränkten Mengen kompakt sind. ($\Leftrightarrow (M, d)$ ist vollständig.)

3.4.2 Satz 18

Jedes beschränkte Vektorfeld auf einer vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeit ist vollständig integrabel.

⁹Sollen wir anscheinend kennen: https://de.wikipedia.org/wiki/Satz_von_Hopf-Rinow 

Beweis

Sei (M, g) eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit, X ein beschränktes Vektorfeld auf M , d.h.

$$\exists K > 0 : |X| := \sqrt{g(X, X)} < K.$$

Wegen

$$d(\gamma(t), \gamma(0)) \leq \int_0^{|t|} |\dot{\gamma}(s)| \, ds \leq K \cdot |t| \quad \text{da } \dot{\gamma} = X_{\gamma}$$

und der Kompaktheit von $\overline{B_{K \cdot |t|}(\gamma(0))}$ kann man wie in Satz 17 (3.4.1) argumentieren. \square

4 Vektorraumbündel

4.1 Das Tangentialbündel

Die Gesamtheit der Tangentialräume einer m -dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeit hat die Struktur einer $2m$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit und die eines sogenannten Vektorraumbündels.

$$TM := \bigsqcup_{p \in M} T_p M$$

Es existiert eine Projektion $\pi : TM \rightarrow M$, $X \mapsto p$, falls $X \in T_p M$. Betrachte den Atlas $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, h_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ für M mit $h_\alpha = (x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^m)$. Wir wollen die Karten definieren, die TM zu einer Mannigfaltigkeit machen:

4.1.1 Definition

Setze für $\tilde{h}_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow \mathbb{R}^{2m} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$

$$X \mapsto (h_\alpha(\pi(X)); X(x_\alpha^1), \dots, X(x_\alpha^m))$$

D.h. mit $p \in U_\alpha$ und $X \in T_p M$, $h_\alpha(p) = (x^1, \dots, x^m)$ und $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ gilt:

$$\tilde{h}_\alpha(X) = ((x^1, \dots, x^m), X^1, \dots, X^m)$$

dadurch sind \tilde{h}_α und π stetig

Topologie auf TM : Wird erzeugt von $\{\tilde{h}_\alpha^{-1}(U) \mid U \subseteq \mathbb{R}^{2m} \text{ offen}, (U_\alpha, h_\alpha) \in \mathcal{A}\}$, d.h. die offenen Mengen von TM sind genau Vereinigungen von endlichen Durchschnitten solcher Mengen.

Atlas für TM : $\tilde{\mathcal{A}} = \{(\pi^{-1}(U_\alpha), \tilde{h}_\alpha) \mid \alpha \in A\}$

Kartenwechsel: Sei $y \in \mathbb{R}^m$, $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Die Kartenwechsel

$$\tilde{h}_\beta \circ \tilde{h}_\alpha^{-1} \left(y; \begin{pmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^m \end{pmatrix} \right) = \left(h_\beta \circ h_\alpha^{-1}; J_y(h_\beta \circ h_\alpha^{-1}) \begin{pmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^m \end{pmatrix} \right)$$

sind differenzierbar.

Die $2m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit TM heißt das **Tangentialbündel** von M . Die Abbildung $\pi : TM \rightarrow M$ ist eine surjektive **Submersion**, d.h. eine differenzierbare Abbildung mit surjektivem Differential in jedem Punkt. Für jedes $p \in M$ ist $\pi^{-1}(p) = T_p M$ ein m -dimensionaler Vektorraum. Daher ist TM ein Beispiel eines sogenannten **Vektorraumbündels**.

Ein Vektorfeld X auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit ist ein **Schnitt** des Tangentialbündels, d.h. eine differenzierbare Abbildung $X : M \rightarrow TM$ mit $\pi \circ X = \text{id}_M$. Wir üblich schreiben wir $X_p := X(p) \in T_p M$,

$$X(\varphi)(p) := X_p(\varphi) \quad , \quad \varphi \in C^\infty(M)$$

$\Gamma(TM) := \{\text{Vektorfelder auf } M\}$ ist ein reeller Vektorraum und ein Modul über dem Ring $C^\infty(M)$.

4.2 Das Kotangentialbündel

Wir erinnern uns an die Definition des Dualraumes aus LA II:

$$\begin{aligned} T_p^* M &:= (T_p M)^* = \text{Hom}(T_p M, \mathbb{R}) = \text{Vektorraum dual zu } T_p M \\ &= \text{Vektorraum aller Linearformen (oder 1-Formen) auf } T_p M \end{aligned}$$

Wir setzen $T^* M := \bigsqcup_{p \in M} T_p^* M$. Sei weiter $\pi^{(*)} : T^* M \rightarrow M$ mit $\omega \mapsto p$, falls $\omega \in T_p^* M$. Ein Atlas $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, h_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ definiert eine differenzierbare Struktur auf $T^* M$ analog zum Tangentialbündel:

Karten: $\tilde{h}_\alpha^{(*)} : (\pi^{(*)})^{-1}(U_\alpha) \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$,

$$\omega \mapsto \left(h_\alpha \left(\pi^{(*)}(\omega) \right); \omega \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right), \dots, \omega \left(\frac{\partial}{\partial x^m} \right) \right)$$

Sei dx^1, \dots, dx^m die zu $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}$ duale Basis definiert durch $dx^i \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \delta_{ij}$ und $\omega = \omega_i dx^i$. Dann ist

$$\tilde{h}_\alpha^{(*)}(\omega) = (x^1, \dots, x^m, \omega_1, \dots, \omega_m)$$

Kartenwechsel: Eine differenzierbare Abbildung $f : M \rightarrow N$ induziert eine lineare Abbildung $f^* : T_{f(p)}^* N \rightarrow T_p^* M$ definiert durch

$$(f^* \omega)(X) := \omega(T_p f(X)) \quad \omega \in T_{f(p)}^* N, \quad X \in T_p M$$

In lokalen Koordinaten ist diese Abbildung durch die Transponierte $J(f)^T$ der Jacobischen gegeben:

siehe auch 1.5.7

$$\begin{aligned} (f^*(dy^j)) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) &= dy^j \left(T f \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) \right) = dy^j \left(\frac{\partial f^k}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^k} \right) = \frac{\partial f^k}{\partial x^i} dy^j \left(\frac{\partial}{\partial y^k} \right) = \frac{\partial f^j}{\partial x^i} \\ &= \underbrace{\frac{\partial f^k}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^k}}_{\frac{\partial f^j}{\partial x^i}} \end{aligned}$$

Damit folgt $f^* dy^j = \frac{\partial f^j}{\partial x^i} dx^i$, wobei j der Zeilenindex und i der Spaltenindex ist. Wie für die Kartenwechsel für TM sehen wir, dass die Kartenwechsel von $T^* M$ in den ersten m -Komponenten durch die Kartenwechsel auf M gegeben sind. In den zweiten m Komponenten durch die Transponierte der Jacobischen dieser Kartenwechsel.

4.2.1 Definition

Eine **1-Form** ω auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M ist ein differenzierbarer Schnitt des Kotangentialbündels, d.h. $\omega \in C^\infty(M, T^* M)$ mit $\pi^{(*)} \circ \omega = \text{id}_M$. Wir definieren wieder $\Gamma(T^* M) := \{1\text{-Formen auf } M\}$.

Sei $f \in C^\infty(M)$. Betrachte Testfunktion auf \mathbb{R} : $\mathbb{R} \ni t \xrightarrow{\text{id}} t \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$T_p f(X)(\text{id}) = X(\text{id} \circ f) = X(f)$$

d.h. lokal gilt $T_p f(X) = X(f) \frac{\partial}{\partial t}$.

4.2.2 Definition

Für $f \in C^\infty(M)$ sei $df(X) := X(f)$. Also $(df)_p(X_p) = X_p f$. Dies ist das **totale** oder **äußere Differential**. df ist eine 1-Form auf M . Seien (x^1, \dots, x^m) lokale Koordinaten, dann gilt

$$dx^i \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \frac{\partial}{\partial x^i} x^j = \delta_{ij}$$

Ist also verträglich mit der Eigenschaft duale Basis zu sein. Insbesondere für $f \in C^\infty(M)$ lokal:

$$df_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p (f) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$$

d.h. $df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$ ist das **totale Differential**.

4.3 Vektorraumbündel

4.3.1 Definition

Ein (n -dimensionales reelles topologisches) **Vektorraumbündel** über B ist ein Tripel (E, π, B) mit

- E, B sind Hausdorff-Räume.
- $\pi : E \rightarrow B$ ist stetige Surjektion, sodass jede **Faser** $E_b := \pi^{-1}(b)$ für $b \in B$ die Struktur eines n -dimensionalen Vektorraumes hat, und sodass
- **lokale Trivialität** gilt: Für jedes $b \in B$ gibt es eine Umgebung U von b und einen Homöomorphismus $\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$, sodass

$$\varphi_{b'} := \varphi|_{E_{b'}} : E_{b'} \rightarrow \{b'\} \times \mathbb{R}^n$$

ein Vektorraumisomorphismus für jedes $b' \in U$ ist.

E heißt der **Totalraum**, π die **Bündelprojektion**, B die **Basis**, n der **Rang** des Bündels und (U, φ) **Bündelkarte**.

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi} & U \times \mathbb{R}^n \\ \downarrow \pi & \swarrow \text{pr}_1 & \\ U & & \end{array}$$

Ein Bündel heißt **trivial**, falls es eine (globale) Bündelkarte (B, φ) gibt, d.h.

$$\varphi : E \xrightarrow{\cong} B \times \mathbb{R}^n$$

Beispiele

- $B \times \mathbb{R}^n$ triviales Bündel
- $(TM, \pi, M), (T^*M, \pi^{(*)}, M)$

- Möbiusband:  $\not\cong S^1 \times \mathbb{R}$

Mischwesen aus Diagramm und Zeichnung vervollständigen

Bündelstruktur im Möbiusband hervorheben

- $B = \mathbb{R}P^1 = S^1 / x \sim -x$, $E = \{([x], \lambda x) \in \mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}^2 \mid x \in S^1, \lambda \in \mathbb{R}\}$ **Kanonisches Bündel**, $\pi : E \rightarrow B$ mit $([x], \lambda x) \mapsto [x]$. Dann ist $E_{[x]}$ eine Gerade durch x aufgefasst als Vektorraum.

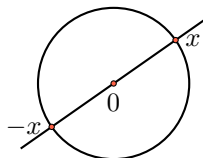


Abbildung 18: Kanonisches Geradenbündel

4.3.2 Definition

Ein **Bündelmorphismus** $(E, \pi, B) \rightarrow (E', \pi', B')$ ist ein Paar (f, \bar{f}) stetiger Abbildungen $f : E \rightarrow E'$ und $\bar{f} : B \rightarrow B'$ mit $\bar{f} \circ \pi = \pi' \circ f$, d.h.

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E' \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi' \\ B & \xrightarrow{\bar{f}} & B' \end{array}$$

und mit $f_b := f|_{E_b} : E_b \rightarrow E'_{\bar{f}(b)}$ linear für alle $b \in B$.

Bemerkung

Da π surjektiv ist, ist \bar{f} durch f und durch $\bar{f} \circ \pi = \pi' \circ f$ eindeutig festgelegt. Daher schreiben wir auch $f : E \rightarrow E'$ für einen Bündelmorphismus.

Beispiele

- Das Differential $Tf : TM \rightarrow TN$ einer differenzierbaren Abbildung $f : M \rightarrow N$ ist ein Bündelmorphismus.
- Falls $f : M \xrightarrow{\cong} N$, dann ist die induzierte Abbildung $f^* : T^*N \rightarrow T^*M$, $\omega \mapsto \omega \circ Tf$ ein Bündelmorphismus.

4.3.3 Definition

Eine **Bündeläquivalenz** ist ein Bündelmorphismus mit $B = B'$, $\bar{f} = \text{id}_B$ und f_b ein Isomorphismus für jedes $b \in B$.

Beispiel

(E, π, B) gegebenes Bündel. $f : B_0 \rightarrow B$ stetige Abbildung. Dann gibt es ein Bündel $(f^*E, f^*\pi, B_0)$ und einen faserweisen isomorphen Bündelmorphismus $(\tilde{f}, f) : (f^*E, f^*\pi, B_0) \rightarrow (E, \pi, B)$

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \xrightarrow{\tilde{f}} & E \\ \downarrow f^*\pi & & \downarrow \pi \\ B_0 & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Dieses Bündel ist eindeutig bis auf Bündeläquivalenz.

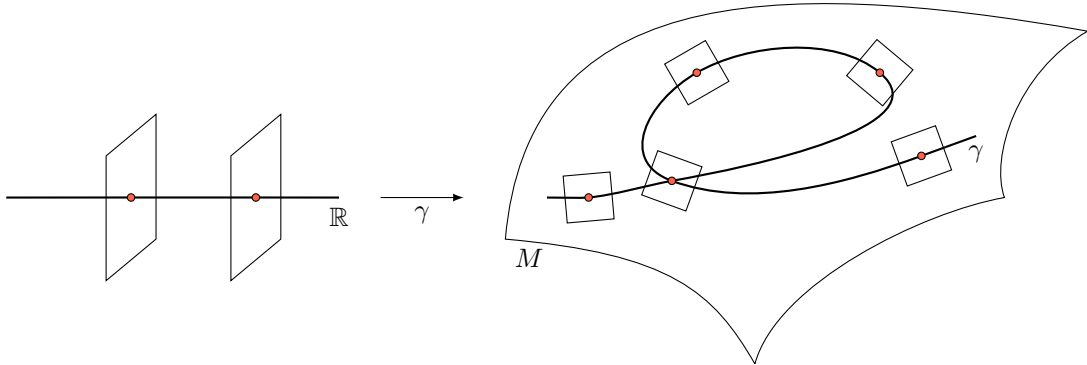


Abbildung 19: Beispiel für das induzierte Bündel

Konstruktion

Setze

$$f^*E := \{(b_0, e) \in B_0 \times E \mid f(b_0) = \pi(e)\}$$

$f^*\pi : f^*E \rightarrow B_0, (b_0, e) \mapsto b_0$ und $\tilde{f} : f^*E \rightarrow E, (b_0, e) \mapsto e$. Es gilt

$$f \circ f^*\pi(b_0, e) = f(b_0) = \pi(e) = \pi \circ \tilde{f}(b_0, e),$$

d.h. \tilde{f} ist ein Bündelmorphismus, falls f^*E ein Bündel ist, der faserweise isomorph ist:

$$\{(b_0, e) \mid \pi(e) = f(b_0)\} = (f^*E)_{b_0} \xrightarrow{\cong} E_{f(b_0)}, (b_0, e) \mapsto e$$

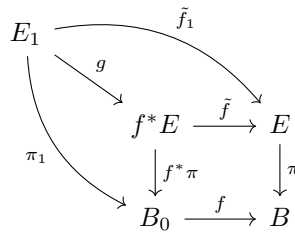
f^*E ist lokal trivial: Für einen Punkt in B_0 wählen wir eine Umgebung $U_0 \subset B$, sodass $f(U_0) \subset U$ für eine Bündelkarte (U, φ) für E . Das heißt $\varphi : \pi^{-1}(u) \xrightarrow{\cong} U \times \mathbb{R}^n$ und

$$\varphi_b = \varphi|_{\pi^{-1}(b)} : \pi^{-1}(b) \xrightarrow[\text{linear}]{\cong} \{b\} \times \mathbb{R}^n$$

Wir setzen: $\varphi_0 : \pi^{-1}(U_0) \rightarrow U_0 \times \mathbb{R}^n, (b_0, e) \mapsto (b_0, \text{pr}_2 \circ \varphi_{f(b_0)}(e))$, wobei pr_2 die Projektion auf die zweite Komponente ist. φ_0 ist faserweise isomorph. Die Inverse ist

$$(b_0, \varphi^{-1}(f(b_0), v)) \leftrightarrow (b_0, v)$$

Eindeutigkeit: Sei mit \tilde{f}_1 faserweise isomorph



wobei $g(e_1) = (\pi_1(e_1), \tilde{f}_1(e_1))$. Das Diagramm ist kommutativ.

4.3.4 Produktbündel: $\xi \times \eta$

$$\begin{aligned}\xi &:= (E(\xi), \pi(\xi), B(\xi)) \\ \eta &:= (E(\eta), \pi(\eta), B(\eta))\end{aligned}$$

Wir setzen:

$$\begin{aligned}E(\xi \times \eta) &:= E(\xi) \times E(\eta) \\ B(\xi \times \eta) &:= B(\xi) \times B(\eta) \\ \pi_{\xi \times \eta}(e, f) &:= (\pi_\xi(e), \pi_\eta(f))\end{aligned}$$

4.3.5 Whitney-Summe: $\xi \oplus \eta$

Seien ξ, η Bündel über B . Definiere nun die **Diagonalabbildung**

$$\Delta : B \rightarrow B \times B \quad b \mapsto (b, b)$$

Setze nun $\xi \oplus \eta := \Delta^*(\xi \times \eta)$. Dann gilt $E_b(\xi \oplus \eta) = E_b(\xi) \oplus E_b(\eta)$. Weiter gilt auch

$$\xi \oplus \eta \cong \eta \oplus \xi \quad , \quad (\xi \oplus \eta) \oplus \zeta \cong \xi \oplus (\eta \oplus \zeta)$$

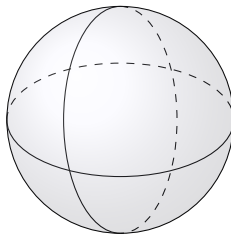
4.3.6 Einschränkung eines Bündels

Sei $B_0 \subset B(\xi)$. Dann betrachte

$$\xi|_{B_0} = (\pi^{-1}(B_0), \pi|_{\pi^{-1}(B_0)}, B_0)$$

Für die Inklusionsabbildung $i : B_0 \hookrightarrow B$ gilt: $i^*\xi = \xi|_{B_0}$ ist ein Bündel.

Beispiel: $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$



Zeichnung vervollständigen!

Es gibt drei Bündel: $\mathbb{R}^3|_{S^2}$, $\mathbb{R}\underline{n}$, TS^2 . Sei ε^k das triviale, k -dimensionale Bündel (hier über S^2). Es gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^3|_{S^2} &= \varepsilon^3 = S^2 \times \mathbb{R}^3 \\ \mathbb{R}\underline{n} &= \varepsilon^1 = S^2 \times \mathbb{R} \\ TS^2 &\neq \varepsilon^2\end{aligned}$$

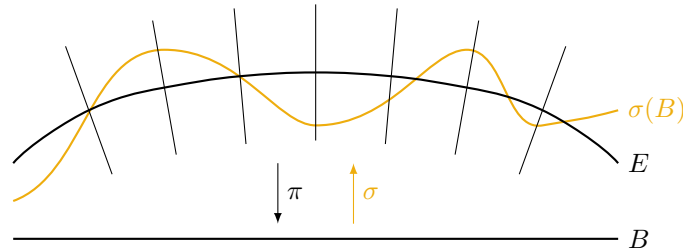
Nun gilt

$$TS^2 \oplus \varepsilon^1 \cong T\mathbb{R}^3|_{S^2} \cong \varepsilon^3 \cong \varepsilon^2 \oplus \varepsilon^1$$

4.3.7 Definition

Eine stetige Abbildung $\sigma : B \rightarrow E$ mit $\pi \circ \sigma = \text{id}_B$ heißt **Schnitt** des Bündels (E, π, B) .

Zeichnung v
vollständige



4.3.8 Definition

Eine Menge $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ von Bündelkarten für (E, π, B) heißt **Bündelatlant**, falls $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = B$. Die stetigen Abbildungen

$$\varphi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow Gl(k, \mathbb{R}) \quad , \quad b \longmapsto \varphi_{\beta,b} \circ \varphi_{\alpha,b}^{-1}$$

$$\left(\varphi_{\alpha,b} := (\text{pr}_2 \circ \varphi_\alpha)|_{E_b} : E_b \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^k \right)$$

heißen **Übergangsfunktionen**.

Beispiel

$h_\beta \circ h_\alpha^{-1}$ Kartenwechsel einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M . Dann ist $J_{h_\beta \circ h_\alpha^{-1}}$ sind die Übergangsfunktionen von $T_p M$.

Ein Bündelatlant eines Bündels über einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit heißt **differenzierbar**, falls also Übergangsfunktionen differenzierbar sind. Ein **differenzierbares Vektorbündel** ist ein Vektorbündel mit einem maximalen differenzierbaren Bündelatlant. \Rightarrow Der Totalraum eines differenzierbaren \mathbb{R}^k -Bündels über M^m ist in kanonischer Weise eine $m + k$ -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit.

Mittels der Übergangsfunktionen lässt sich der Totalraum E auch wie folgt darstellen:

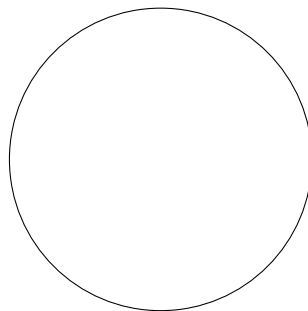
$$E := \frac{\bigsqcup_{\alpha \in A} U_\alpha \times \mathbb{R}^k}{(x, v) \sim (x, \varphi_{\alpha\beta}(x) \cdot v)}$$

wobei $(x, v) \in U_\alpha \times \mathbb{R}^k$, $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ und $(x, \varphi_{\alpha\beta}(x) \cdot v) \in U_\beta \times \mathbb{R}^k$

Beispiel

Bis auf Äquivalenz gibt es genau zwei \mathbb{R}^k -Bündel über S^1 , da $Gl(k, \mathbb{R})$ zwei Zusammenhangskomponenten hat.

Zeichnung ver-
vollständigen



Anwendung

Whitney-Summe: Betrachte

$$\{(U_\alpha \cap V_\beta, \varphi_\alpha \oplus \psi_\beta)\}$$

Dann gilt

$$E(\xi \oplus \eta) = \frac{\bigsqcup_{\alpha, \beta} (U_\alpha \cap V_\beta) \times (\mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^l)}{(x, (v, w)) \sim (x, (\varphi_{\alpha\alpha'}(x) \cdot v, \psi_{\beta\beta'}(x) \cdot w))}$$

wobei $(x, (v, w)) \in (U_\alpha \cap V_\beta) \times (\mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^l)$ und $(x, (\varphi_{\alpha\alpha'}(x) \cdot v, \psi_{\beta\beta'}(x) \cdot w)) \in (U_{\alpha'} \cap V_{\beta'}) \times (\mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^l)$.Analog: $\xi \otimes \eta, \xi^*, \text{Hom}(\xi, \eta), \eta \subseteq \xi: \xi/\eta, \dots$

5 Formen

5.1 Alternierende Formen

5.1.1 Definition

Eine (alternierende) k -Form auf einem n -dimensionalen Vektorraum V ist eine multilineare Abbildung

$$\omega : \underbrace{V \times \dots \times V}_{k\text{-mal}} \rightarrow \mathbb{R},$$

die in folgendem Sinne **alternierend** ist:

$$\forall v_1, \dots, v_k \in V : \forall \pi \in S_k : \omega(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}) = \text{sgn}(\pi) \cdot \omega(v_1, \dots, v_k)$$

Beispiel: Die Determinante als multilineare Abbildung in ihren Spalten (Zeilen) ist eine n -Form. $\Lambda^k V^*$ ist der reelle Vektorraum der k -Formen auf V . Es ist $\Lambda^1 V^* = V^*$, $\Lambda^0 V^* := \mathbb{R}$.

5.1.2 Definition

Das **äußere Produkt** (oder auch **Dachprodukt**) zweier Formen ist eine bilineare Abbildung

$$\Lambda^k V^* \times \Lambda^l V^* \rightarrow \Lambda^{k+l} V^*, \quad (\omega, \sigma) \mapsto \omega \wedge \sigma$$

das wie folgt erklärt ist: $\forall v_1, \dots, v_{k+l} \in V :$

$$(\omega \wedge \sigma)(v_1, \dots, v_{k+l}) = \frac{1}{k! \cdot l!} \sum_{\pi \in S_{k+l}} \text{sgn}(\pi) \cdot \omega(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}) \cdot \sigma(v_{\pi(k+1)}, \dots, v_{\pi(k+l)})$$

Bemerkung

Die rechte Seite ist gleich

$$\sum_{\pi \in S_{k+l}} \text{sgn}(\pi) \cdot \omega(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}) \cdot \sigma(v_{\pi(k+1)}, \dots, v_{\pi(k+l)})$$

wobei die Summe über alle Permutationen mit $\pi(1) < \dots < \pi(k)$, $\pi(k+1) < \dots < \pi(k+l)$ erstreckt wird. In der alternierenden Summe der Definition kommen genau diejenigen Summanden mehrfach vor, deren Permutationen gewisse Zerlegungen

$$\{1, \dots, k+l\} = \{\pi(1), \dots, \pi(k)\} \sqcup \{\pi(k+1), \dots, \pi(k+l)\}$$

erhalten. Fasst man diese in Äquivalenzklassen zusammen, in sogenannte **Zerlegungen** $[\pi] \in \mathcal{Z}_{k+l}$, so hat jede solche Klasse $k! \cdot l!$ Vertreter. In der Summe der Bemerkung haben wir einen solchen Vertreter ausgezeichnet.

Das äußere Produkt ist assoziativ:

$$(\omega \wedge \sigma) \wedge \tau = \omega \wedge (\sigma \wedge \tau)$$

Dazu betrachte man Zerlegungen aus $\mathcal{Z}_{k,l,m}$ und stellt fest, dass beide Seiten angewandt auf (v_1, \dots, v_{k+l+m}) geben:

$$\sum_{\pi \in S_{k+l+m}} \text{sgn}(\pi) \cdot \omega(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}) \cdot \sigma(v_{\pi(k+1)}, \dots, v_{\pi(k+l)}) \cdot \tau(v_{\pi(k+l+1)}, \dots, v_{\pi(k+l+m)})$$

5.1.3 Lemma 20

Sei e_1^*, \dots, e_n^* eine Basis von V^* , dann ist

$$\{e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^* \mid i_1 < \dots < i_k\} = \{e_I^* \mid I = (i_1 < \dots < i_k)\}$$

eine Basis von $\Lambda^k V^*$.

Beweis

Sei e_1, \dots, e_n die duale Basis von V ($e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$). Sei ω eine k -Form. Setze

$$\omega_{i_1, \dots, i_k} := \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$$

Dann gilt

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1, \dots, i_k} e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*$$

\Rightarrow die e_I^* erzeugen $\Lambda^k V^*$. Aus $0 = \sum_I \omega_I e_I^*$ folgt durch Auswerten auf $e_{i_1}, \dots, e_{i_k} : \omega_I = 0 \forall I$. Also sind die e_I^* linear unabhängig. \square

Also ist $\dim \Lambda^k V^* = \binom{n}{k}$.

5.1.4 Lemma 21 (Antikommutativität)

Sei $\omega \in \Lambda^k V^*$, $\sigma \in \Lambda^l V^*$. Dann gilt

$$\omega \wedge \sigma = (-1)^{kl} \sigma \wedge \omega$$

Beweis

Beide Seiten sind linear in ω und σ . Damit reicht es die Behauptung für alle Basiselemente zu zeigen. Dies folgt aus der entsprechenden Behauptung für 1-Formen: $\omega \wedge \sigma = -\sigma \wedge \omega$. Dies folgt nun mit:

$$\omega \wedge \sigma(v, w) = \omega(v) \cdot \sigma(w) - \omega(w) \cdot \sigma(v)$$

ist antisymmetrisch in ω und σ . \square

Sei nun $\omega \in \Lambda^k V^*$, wobei k ungerade ist. Dann ist $\omega \wedge \omega = 0$. Dies führt zu:

5.1.5 Lemma 22

Sind $\omega_1, \dots, \omega_k$ 1-Formen, so gilt $\forall v_j \in V$:

$$(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k)(v_1, \dots, v_k) = \det(\omega_i(v_j))$$

Beweis

Beide Seiten sind multilinear und in gleicher Weise alternierend. OE: $\omega_j = e_j^*$, $v_j = e_j$. Dann gilt

$$e_1^* \wedge \dots \wedge e_k^*(e_1, \dots, e_k) = 1 = \det(\delta_{ij}) = \det(e_i^*(e_j)). \quad \square$$

$\Lambda V^* = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Lambda^k V^*$ ist, versehen mit dem äußeren Produkt, eine reelle, graduierte, assoziative, antikommutative, 2^n -dimensionale, unitale Algebra, die **äußere Algebra** (oder auch die **Graßmann-Algebra**).

Betrachte nun $f : V \rightarrow W$ linear. Die **induzierte Abbildung** ist eine Abbildung

$$f^* : \Lambda W^* \rightarrow \Lambda V^*, \quad \omega \mapsto f^* \omega$$

wobei ω eine k -Form ist, gegeben durch

$$(f^* \omega)(v_1, \dots, v_k) := \omega(f(v_1), \dots, f(v_k))$$

f^* ist ein Algebrenhomomorphismus:

$$f^*(\omega \wedge \sigma) = (f^*\omega) \wedge (f^*\sigma)$$

Betrachtet man nun $f : V \rightarrow V$, wobei $\dim V = n$ und eine nichttriviale n -Form ω , d.h. $\omega \in \Lambda^n V^* \setminus \{0\}$ ($\dim \Lambda^n V^* = 1$), eine sogenannte **Volumenform**. $\det f$ ist die eindeutig bestimmte reelle Zahl, für die gilt: $(f^*\omega) = \det(f) \cdot \omega$. Dies hängt nicht von der Wahl der Volumenform ab! Sei e_1, \dots, e_n eine Basis von V , e_1^*, \dots, e_n^* die duale Basis und $\omega = e_1^* \wedge \dots \wedge e_n^*$. Dann ist f durch die Matrix

$$A = (a_{ij}) = [f(e_1), \dots, f(e_n)]$$

gegeben. Damit:

$$\begin{aligned} (f^*\omega)(e_1, \dots, e_n) &= \omega(f(e_1), \dots, f(e_n)) = e_1^* \wedge \dots \wedge e_n^* \left(\sum_k a_{k1} e_k, \dots, \sum_k a_{kn} e_k \right) \\ &= \det \left(e_i^* \left(\sum_k a_{kj} e_k \right) \right) \\ &= \det(a_{ij}) = \det A \end{aligned}$$

$\Rightarrow \det f$ stimmt mit der Determinante der Matrix A überein. Diese koordinatenfreie Definition wird es uns erlauben, einen Integralbegriff auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten einzuführen.

5.2 Differentialformen

5.2.1 Definition

Eine **Differentialform** vom Grad k (oder k -Form) auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M ist eine Zuordnung einer k -Form ω_p auf $T_p M$ zu jedem Punkt der Mannigfaltigkeit, die differenzierbar von p abhängt, d.h. in jeder lokalen Karte (U, x^1, \dots, x^m) hängen die Komponentenfunktionen

$$\omega_{i_1, \dots, i_k} := \omega \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_k}} \right) : U \longrightarrow \mathbb{R}$$

differenzierbar von p ab. Wir setzen:

$$\begin{aligned} \Omega^k M &:= \mathbb{R}\text{-Vektorraum aller } k\text{-Formen auf } M; C^\infty(M)\text{-Modul} \\ \Omega^0 M &:= C^\infty(M) \end{aligned}$$

5.2.2 Bemerkung

Das **äußere Bündel** $\Lambda^k(T^*M)$ habe die Fasern $\Lambda^k(T_p^*M)$ für alle $p \in M$. Die Übergangsfunktionen entsprechen dem komponentenweisen Anwenden von $J_{h_\beta \circ h_\alpha^{-1}}^T$ auf das k -fache äußere Produkt von 1-Formen. Ein Element $\omega \in \Lambda^k(T^*M)$ lässt sich in lokalen Koordinaten durch

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

eindeutig darstellen. Eine k -Form auf M ist ein differenzierbarer Schnitt in $\Lambda^k(T^*M)$

$$\begin{aligned} \Omega^k M &= \Gamma(\Lambda^k(T^*M)) && \text{Schnitte in } \Lambda^k T^*M \\ \Omega^1 M &= \Gamma(T^*M) \\ \Omega^0 M &= C^\infty(M) = \Gamma(\varepsilon^1 = M \times \mathbb{R}) \end{aligned}$$

vgl. Riemannsche Metrik

Das äußere Produkt $\omega \wedge \sigma$ zweier Differentialformen ist punktweise durch

$$(\omega \wedge \sigma)_p := \omega_p \wedge \sigma_p \quad \forall p \in M$$

gegeben. $\Omega M := \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Omega^k M$ ist die **Graßmann-Algebra**.

5.2.3 Lemma 23 (Tensorialitätseigenschaft)

k -Formen auf M entsprechen genau den $C^\infty(M)$ -multilinearen alternierenden Abbildungen

$$\underbrace{\Gamma(TM) \times \dots \times \Gamma(TM)}_{k\text{-mal}} \longrightarrow$$

Beweis

" \Rightarrow ": Sei ω eine k -Form, X_1, \dots, X_k Vektorfelder. Betrachte

$$(\omega(X_1, \dots, X_k))(p) := \omega_p(X_{1p}, \dots, X_{kp})$$

Dies definiert eine alternierende $C^\infty(M)$ -multilineare Abbildung.

" \Leftarrow ": Sei OE $k = 1$. Sei $\omega : \Gamma(TM) \rightarrow C^\infty(M)$, $x \mapsto \omega(x)$ eine $C^\infty(M)$ -lineare Abbildung. Wir wollen eine 1-Form auf M erklären durch

$$p \mapsto (\omega_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}) \quad \omega_p(v) := (\omega(X))(p)$$

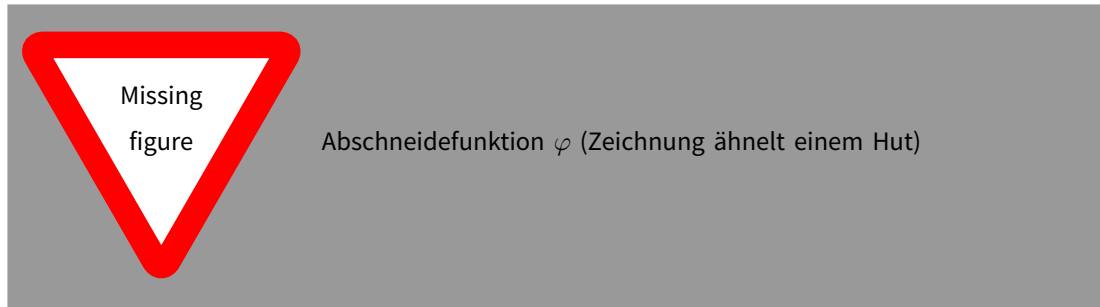
Dabei ist X ein Vektorfeld auf M mit $X_p = v$. Gilt für ein weiteres X' $X'_p = v$, so folgt

$$\omega(X - X')(p) = \omega(X)(p) - \omega(X')(p)$$

Behauptung: Sei Y ein Vektorfeld auf M mit $Y_p = 0$, dann gilt $\omega(Y)(p) = 0$

Mit $Y := X - X'$ folgt dann die Unabhängigkeit der Definition von der Wahl des Vektorfeldes X .

Betrachte dazu die Abschneidefunktion $\varphi \in C^\infty(M)$ mit $\text{supp } \varphi \subset U$



Sei (U, x^1, \dots, x^m) eine Karte mit $p \equiv 0$. Schreibe $Y = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y^i(0) = 0$ und setze

$$Y_i := \varphi \frac{\partial}{\partial x^i} \in \Gamma(TM) \quad a_i := \varphi Y^i \in C^\infty(M)$$

Dann gilt $\sum_i a_i Y_i = \varphi^2 Y$ und es folgt $Y = \sum_i a_i Y_i + (1 - \varphi^2)Y$. Wir erhalten

$$\omega(Y)(p) = \left(\sum_i a_i \omega(Y_i) + (1 - \varphi^2) \omega(Y) \right)(p) = 0$$

da $a_i(p) = 0$ und $\varphi(p) = 1$. Durch Einsetzen von Vektorfeldern Y_i in ω folgt die Differenzierbarkeit der Zuordnung $p \mapsto \omega_p$. \square

Damit lassen sich alle natürlichen Konzepte für alternierende k -Formen auf differenzierbare k -Formen übertragen:

5.2.4 Definition

- Sei $f : M \rightarrow N$ differenzierbar. Die **induzierte Abbildung** $f^* : \Omega^k N \rightarrow \Omega^k M$ ist durch

$$(f^*\omega)(X_1, \dots, X_k) := \omega(Tf(X_1), \dots, Tf(X_k))$$

für Vektorfelder X_1, \dots, X_k erklärt. Mit Lemma 23 5.2.3 erhält man:

$$(f^*\omega)_p(v_1, \dots, v_k) = \omega_{f(p)}(T_p f(v_1), \dots, T_p f(v_k))$$

für alle $v_1, \dots, v_k \in T_p M$ und $p \in M$. Die Zuordnung $p \mapsto (f^*\omega)_p$ ist in der Tat differenzierbar.

- $f^*(\omega \wedge \sigma) = (f^*\omega) \wedge (f^*\sigma)$
- Aus der Kettenregel: $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$ für $g : L \rightarrow M$ differenzierbar. (siehe Blatt 10, Aufgabe 1)

5.3 Das äußere Differential

Sei $f \in C^\infty(M)$, X ein Vektorfeld auf M . Das äußere Differential von f war $df(X) = X(f)$. Lokal:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

Die äußere Ableitung ist eine \mathbb{R} -lineare Abbildung $d : C^\infty(M) \rightarrow \Omega^1(M)$, $f \mapsto df$, die wegen

$$\begin{aligned} X(f \cdot g) &= X(f) \cdot g + f \cdot X(g) \\ d(f \cdot g) &= df \cdot g + f \cdot dg \end{aligned}$$

der Leibnizregel genügt. Ziel: $d : \Omega^{k+1} \rightarrow \Omega^k$

5.3.1 Satz 24

Auf jeder differenzierbaren Mannigfaltigkeit M gibt es genau eine \mathbb{R} -lineare Abbildung

$$d : \Omega M \rightarrow \Omega M$$

vom Grad 1, so dass gilt

- $d|_{C^\infty(M)}$ stimmt mit der äußeren Ableitung für Funktionen überein,
- $d \circ d = 0$, (Komplexwertigkeit)
- Für $\omega \in \Omega^k M$, $\sigma \in \Omega^l M$ gilt

$$d(\omega \wedge \sigma) = d\omega \wedge \sigma + (-1)^k \omega \wedge d\sigma$$

$d\omega$ ist die **äußere Ableitung**

$$0 \rightarrow \Omega^0 M \xrightarrow{d} \Omega^1 M \xrightarrow{d} \Omega^2 M \rightarrow \dots$$

heißt der **deRham-Komplex**.

Beweis

Schritt I: U Kartengebiet (x^1, \dots, x^m) . Sei ω eine k -Form auf M , also $\omega \stackrel{\text{auf } U}{=} \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$. Falls es einen solchen Operator d gibt, so gilt

$$d\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} d\omega_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

\Rightarrow Eindeutigkeit. Um die Existenz zu zeigen, legen wir obige Darstellung als Definition für d zugrunde. Damit ist d \mathbb{R} -linear und stimmt mit dem äußeren Differential für Funktionen überein.

Produktregel: \mathfrak{E}

$$\begin{aligned}\omega &= f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\ \sigma &= g dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l}\end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}d(\omega \wedge \sigma) &= d(f \cdot g) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l} \\ &= (df \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) \wedge (g dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l}) \\ &\quad + (-1)^k (f dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l}) \wedge (dg \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) \\ &= d\omega \wedge \sigma + (-1)^k \omega \wedge d\sigma\end{aligned}$$

Komplexeigenschaft: Es reicht zu zeigen; $ddf = 0$ für alle $f \in C^\infty(M)$

$$dd\omega = d \sum_I d\omega_I \wedge dx^I = \sum_I d(d\omega_I \wedge dx^I)$$

Es gilt

$$ddf = d\left(\frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^j \wedge dx^i$$

Die Hessesche von f ist symmetrisch; das äußere Produkt ist antisymmetrisch. Daher verschwindet die Summe auf der rechten Seite.

Schritt II: Allgemeiner Fall: Sei ω eine k -Form auf M , (U, h) eine Karte, $i : U \hookrightarrow M$ Inklusion. Setze

$$\omega|_{TU} := i^* \omega$$

Für $p \in U$, mit d_u Differential aus Schritt I für (U, h)

$$(d\omega)_p := (d_u \omega|_{TU})_p$$

Dies ist wohldefiniert: Sei also (V_k) eine zweite Karte mit $p \in V$. Dann gilt

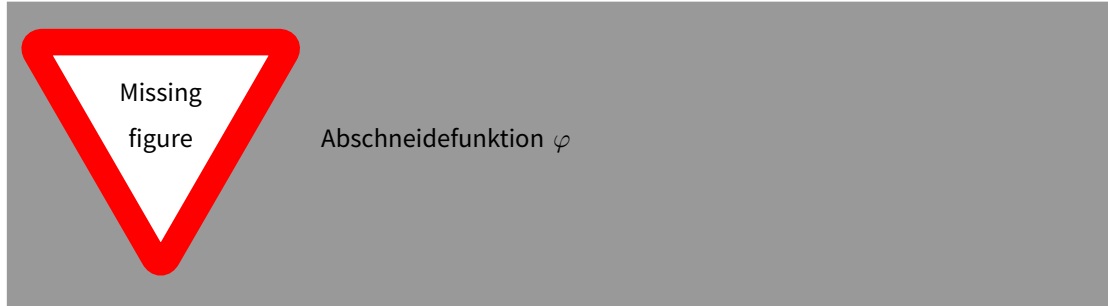
$$\begin{aligned}d_u \omega|_{T(U \cap V)} &\stackrel{\text{lokale Def.}}{=} \sum_I d\omega_I \wedge dh^I|_{T(U \cap V)} \\ &\stackrel{\text{lokale Def.}}{=} d_{U \cap V} \omega|_{T(U \cap V)} \\ &\stackrel{\text{lokale Def.}}{=} \sum_I d\tilde{\omega}_I \wedge dk^I|_{T(U \cap V)} \\ &\stackrel{\text{lokale Def.}}{=} d_V \omega|_{T(U \cap V)}.\end{aligned}$$

\Rightarrow Wir erhalten einen Operator $d : \Omega^k M \rightarrow \Omega^{k+1} M$ wie im Satz.

Eindeutigkeit: Sei d' ein weiterer Operator wie im Satz, (U, h) Karte, $p \in U$.

$$\Rightarrow \omega|_{TU} = \sum^I \omega_{i_1, \dots, i_k} dh^{i_1} \wedge \dots \wedge dh^{i_k}.$$

Betrachte die Abschneidefunktion $\varphi \in C^\infty(M, [0, 1])$



Setze $\tilde{\omega}_{i_1, \dots, i_k} := \varphi \cdot \omega_{i_1, \dots, i_k}$ und $\tilde{h}^{i_j} := \varphi \cdot h^{i_j}$. Dies sind globale Funktionen durch Null auf ganz M fortgesetzt. Wir erhalten eine globale k -Form $(d' \tilde{\omega})_p = (d_U \tilde{\omega})_p = (d_U \omega)_p$

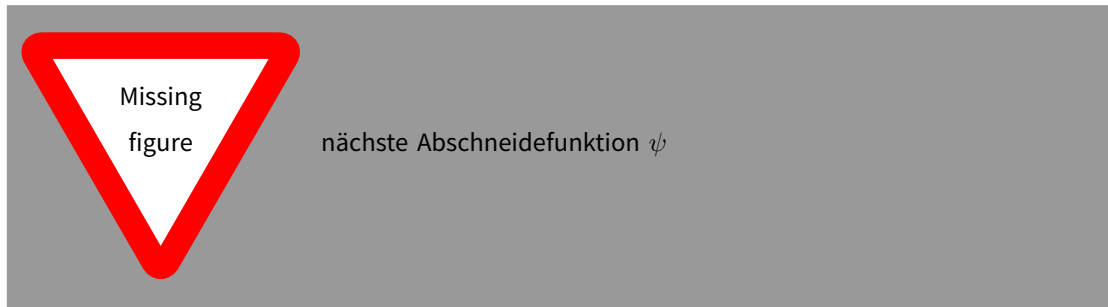
$$\tilde{\omega} := \sum^I \tilde{\omega}_{i_1, \dots, i_k} d\tilde{h}^{i_1} \wedge \dots \wedge d\tilde{h}^{i_k}$$

$\Rightarrow d' \tilde{\omega} = \sum^I d\omega_{i_1, \dots, i_k} \wedge d\tilde{h}^{i_1} \wedge \dots \wedge d\tilde{h}^{i_k}$. Mit Schritt I und $\omega = \tilde{\omega}$ auf V folgt

$$(d' \tilde{\omega})_p \stackrel{(!)}{=} (d_U \tilde{\omega})_p = (d_U \omega)_p$$

Wir wollen $(d' \omega)_p = (d' \tilde{\omega})_p$ zeigen: (denn dann $(d' \omega)_p = (d_U \omega)_p = (d\omega)_p$)

Wähle wieder eine Abschneidefunktion $\psi \in C^\infty(M, [0, 1])$



Da $\omega = \tilde{\omega}$ auf V : $\psi(\tilde{\omega} - \omega) = \tilde{\omega} - \omega$. Dann folgt

$$(d' \tilde{\omega})_p - (d' \omega)_p = d'(\psi(\tilde{\omega} - \omega))|_p = (d' \psi)_p \wedge \underbrace{(\tilde{\omega} - \omega)_p}_{=0} + \underbrace{\psi(p)}_{=0} d'(\tilde{\omega} - \omega) = 0$$

□

5.3.2 Folgerung 25 (Natürlichkeit)

Sei $f : M \rightarrow N$ eine differenzierbare Abbildung, $\omega \in \Omega^k(N)$. Dann gilt

$$f^*(d\omega) = d(f^*\omega)$$

Beweis

Ist $\omega = g : N \rightarrow \mathbb{R}$, dann ist die Behauptung eine Umformulierung der Kettenregel:

$$dg_f(Tf(\cdot)) = d(g \circ f)(\cdot)$$

$$\begin{cases} dh(Y) = Y(h) \\ Y(h) \frac{\partial}{\partial t} = Th(Y) \end{cases}, \quad h : M \rightarrow \mathbb{R} \ni t$$

Sei ω eine beliebige k -Form, $k > 0$. $i : U \hookrightarrow N$ Inklusion einer Karte (U, h) .

$$i^*(d\omega) = (d\omega)|_{TU} = d(\omega|_{TU}) = d(i^*\omega)$$

Wir können daher $N = U$ und $f = f|_{f^{-1}(U)}$ annehmen. $\mathfrak{E}: f : M \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$.

$$\omega = \sum' \omega_{i_1, \dots, i_k} dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_k}$$

Dann ist $d\omega = \sum' d\omega_{i_1, \dots, i_k} \wedge dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_k}$. Dann gilt weiter

$$\begin{aligned} f^*\omega &= \sum' f^*\omega_{i_1, \dots, i_k} f^*dy^{i_1} \wedge \dots \wedge f^*dy^{i_k} \\ f^*d\omega &= \sum' f^*d\omega_{i_1, \dots, i_k} f^*dy^{i_1} \wedge \dots \wedge f^*dy^{i_k} \end{aligned}$$

Da $f^*dy^j = df^*y^j \implies df^*dy^j = dd^f y^j = 0$ folgt

$$\begin{aligned} df^*\omega &= \sum' \underbrace{df^*\omega_{i_1, \dots, i_k}}_{f^*d\omega_{i_1, \dots, i_k}} \wedge f^*dy^{i_1} \wedge \dots \wedge f^*dy^{i_k} \\ &= f^*d\omega \end{aligned}$$

□

5.4 Orientierung**5.4.1 Definition**

Eine **Orientierung** eines n -dimensionalen Vektorraumes V ist eine Äquivalenzklasse geordneter Basen $b = (b_1, \dots, b_n)$ von V mit

$b \sim b' :\Leftrightarrow$ Die Basistransformation $T : V \rightarrow V$ mit $T(b) = b'$ hat positive Determinante.

- Es gibt genau zwei Orientierungen auf V , da $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ aus zwei Zusammenhangskomponenten besteht.
- $\{0\}, \pm 1$.
- Im Fall von \mathbb{R}^n ist $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ die **Standardorientierung**.

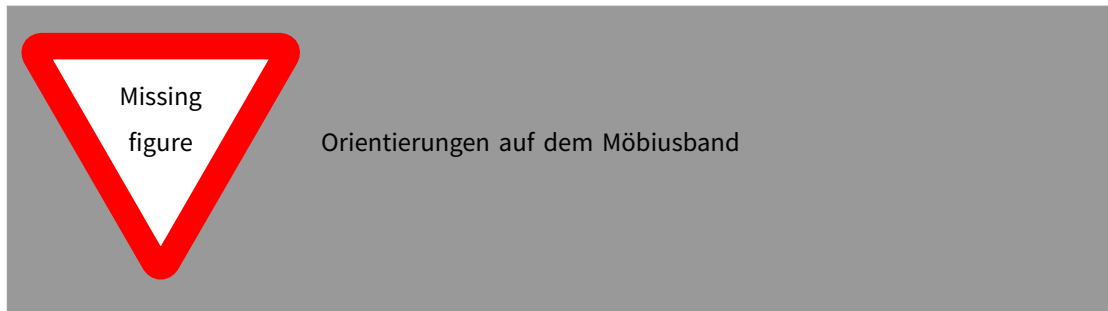
5.4.2 Definition

Eine **Orientierung** einer m -dimensionalen Mannigfaltigkeit M ist die Wahl einer Orientierung für jeden Tangentialraum $T_p M$, sodass ein Atlas $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, h_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ so existiert, dass für alle $p \in U_\alpha$ und für alle $\alpha \in A$ die Abbildung

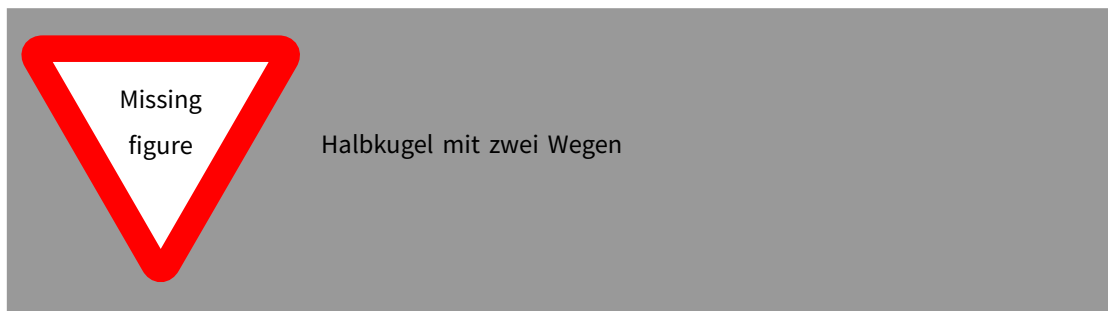
$$T_p h_\alpha : T_p M \rightarrow T_{h_\alpha(p)} \mathbb{R}^m \equiv \mathbb{R}^m$$

orientierungstreu ist, d.h. die gewählte Orientierung auf $T_p M$ auf die Standardorientierung des \mathbb{R}^m abbildet. \mathcal{A} heißt dann ein **orientierter Atlas**.

- Ein Atlas ist genau dann orientiert, wenn die Jacobische aller Kartenwechsel positive Determinante hat.
- Eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit hat entweder keine oder genau zwei Orientierungen. (Eine Karte (U, h) orientiert die Mannigfaltigkeit auf ganz U vermöge des Differentials Th , welches TM auf U trivialisiert.)
- Das Möbiusband ist *nicht* orientierbar:



- \mathbb{RP}^2 ist *nicht* orientierbar, da \mathbb{RP}^2 ein Möbiusband erhält.



5.4.3 Lemma 26

Eine m -dimensionale Mannigfaltigkeit ist genau dann orientierbar, wenn es auf ihr eine nirgends verschwindende m -Form gibt.

$$\omega \in \Gamma(\Lambda^m T^*M \setminus \{0\})$$

heißt dann **Volumenform**.

Beweis

Sei ω eine Volumenform. Sei $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, h_\alpha)\}$ ein Atlas. Betrachte

$$(h_\alpha^1, \dots, h_\alpha^m) : U_\alpha \xrightarrow{\cong} U'_\alpha \subset \mathbb{R}^m(x^1, \dots, x^m)$$

Auf $\mathbb{R}^m(x^1, \dots, x^m)$ haben wir die m -Form $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$. Es gilt

$$h_\alpha^*(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m) = f_\alpha \omega|_{TU_\alpha}$$

Durch eventuelles Tauschen zweier Komponentenfunktionen können wir annehmen, dass $f_\alpha > 0$. Behauptung: $\{(U_\alpha, h_\alpha)\}_\alpha$ ist dann ein orientierter Atlas.

$$\begin{aligned} (h_\beta \circ h_\alpha^{-1})^*(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m) &= (h_\alpha^{-1})^* \underbrace{f_\beta \cdot \omega}_{\frac{f_\beta}{f_\alpha} h_\alpha^*(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m)} \\ &= \underbrace{\left(\frac{f_\beta}{f_\alpha} \circ h_\alpha^{-1}\right)}_{>0} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m \end{aligned}$$

$\det J_{h_\beta \circ h_\alpha^{-1}} > 0$. Sei umgekehrt $\{(U_\alpha, h_\alpha)\}$ ein orientierter Atlas

$$\omega_\alpha := h_\alpha^*(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m) \in \Omega^m(U_\alpha)$$

Da die Jacobischen aller Kartenwechsel positive Determinante haben, zeigt obige Rechnung

$$(h_\beta \circ h_\alpha^{-1})^* dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m = f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$$

für eine positive Funktion $f \equiv f_{\alpha\beta} \in C^\infty(h_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta))$. Wir erhalten

$$\omega_\beta = h_\beta^*(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m) = (f \circ h_\alpha) h_\alpha^*(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m) = \underbrace{(f \circ h_\alpha)}_{>0} \omega_\alpha.$$

Sei $(\varphi_i)_{i \in I}$ eine untergeordnete Teilung der Eins mit $\text{supp } \varphi_i \subset U_{\alpha(i)}$. Setze

$$\omega := \sum_{i \in I} \varphi_i \omega_{\alpha(i)}$$

Behauptung: ω ist nullstellenfrei: Fixiere $p \in U_{\alpha_0}$

$$\omega_p = \left(\sum_i \phi_i(p) f_{\alpha_0 \alpha_i}(p) \right) \underbrace{(\omega_{\alpha_0})_p}_{\neq 0}$$

Konvexkombination positiver reeller Zahlen, ist also positiv. □

5.4.4 Beispiel

(i) Q^n Mannigfaltigkeit. $\lambda = p_i dq^i$ (lokal) Liouville 1-Form auf T^*Q

$$\omega = d\lambda \quad d\omega = 0, \omega^n \neq 0$$

Es ist lokal $\omega^n = (dp_i \wedge dq^i)^n = n! dp_1 \wedge dq^1 \wedge \dots \wedge dp_n \wedge dq^n \Rightarrow T^*Q$ (als Mannigfaltigkeit!) ist orientiert. Ist nun g eine Metrik auf Q , so ist

$$TQ \xrightarrow{\cong} T^*Q; X \mapsto g(X, \cdot)$$

$\Rightarrow TQ$ ist (als Mannigfaltigkeit) orientierbar.

(ii) Auf \mathbb{R}^n sei $\tau(x) := -x$ (Involution). Dann gilt

$$\tau^*(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n) = (-1)^n dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

$\Rightarrow \tau$ ist orientierungstreu, falls n gerade, sonst umkehrend. Sei nun $\tau : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ die induzierte Antipodenabbildung.



Antipodenabbildung τ und Teilmenge von S^{n-1}

$$\omega_p(v_1, \dots, v_{n-1}) = \det(p, v_1, \dots, v_{n-1})$$

ω ist Volumenform auf S^{n-1} . $\tau^* \omega = (-1)^n \omega$. Also ist τ orientierungstreu ($\tau : S^m \rightarrow S^m, m = n - 1$), wenn m ungerade ist, sonst umkehrend.

Betrachte $\mathbb{R}P^m = S^m / \tau$

$$\begin{array}{ccc} S^m & \xrightarrow{\tau} & S^m \\ 2:1 \downarrow & \swarrow 2:1 & \\ \mathbb{R}P^m & & \end{array}$$

m ungerade $\exists!$ eine Orientierung auf $\mathbb{R}P^m$, sodass $\pi : S^m \rightarrow \mathbb{R}P^m$ orientierungstreu ist.

$$\alpha_{[x]}(v_1, \dots, v_m) := \omega_x((T_x \pi)^{-1} v_1, \dots, (T_x \pi)^{-1} v_m)$$

($\tau^* \omega = \omega$), α ist Volumenform auf $\mathbb{R}P^m$.

m gerade $\tau^* \omega = \omega$. Wäre α eine Volumenform auf $\mathbb{R}P^m$, so gibt es eine positive Funktion f mit $\pi^* \alpha = f \omega$. Da $\pi^* \alpha$ invariant unter π^* ist, folgt

$$f \omega = \pi^* \alpha = \tau^* \pi^* \alpha = (f \circ \tau) \tau^* \omega = -(f \circ \tau) \omega \quad \nexists$$

□

5.5 Integration

Betrachte einen Diffeomorphismus $\varphi : U \xrightarrow{\cong} V$ für $U, V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen. Sei $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar. Dann ist

$$f \circ \varphi \cdot |\det J_\varphi| : U \rightarrow \mathbb{R}$$

integrierbar. Es gilt nach dem Transformationssatz

$$\int_{V=\varphi(U)} f \, dx = \int_U (f \circ \varphi) |\det J_\varphi| \, dx$$

Insbesondere sind diffeomorphe Bilder messbarer Mengen wieder messbar (analoges für Nullmengen).

5.5.1 Definition

Sei $A \subseteq M$, M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, heißt **messbar**, wenn für eine Überlagerung von Karten (U, h) alle

$$h(U \cap A) \subset \mathbb{R}^m$$

messbar sind. Analoges für Nullmengen.

5.5.2 Lemma 27

Jede Mannigfaltigkeit ist abzählbare Vereinigung messbarer Teilmengen, die in einem Kartengebiet enthalten sind.

Beweis

Sei $\{(U_i, h_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ ein abzählbarer Atlas (Lemma 13b, 3.1.3). Setze

$$A_1 := U_1 \quad \text{und} \quad A_{i+1} := U_{i+1} \setminus \bigcup_{k=1}^i A_k, \quad i \geq 1$$

$$\Rightarrow M = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i. \quad \square$$

Eine eventuell unstetige k -Form ist eine Abbildung $\omega : M \rightarrow \Lambda^k T^*M$ mit $\pi^{(*)} \circ \omega = \text{id}_M$.

5.5.3 Definition

Sei ω eine eventuell unstetige m -Form auf M , wobei M^m eine differenzierbare, orientierte Mannigfaltigkeit. ω heißt **integrierbar**, falls:

- \exists Zerlegung $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von M in abzählbar viele messbare Mengen,
- \exists orientierten Atlas $\{(U_i, h_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ mit $A_i \subset U_1$ (vgl. Lemma 27 (5.5.2)), sodass gilt: Die Abbildungen

$$h_i(U_i) \xrightarrow{a_i := \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}\right) \circ h_i^{-1}} \mathbb{R}$$

sind für alle $i \in \mathbb{N}$ über $h_i(A_i)$ Lebesgue-integrierbar und es gilt:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_{h_i(A_i)} |a_i(x)| \, dx < \infty$$

Das **Integral** von ω ist dann:

$$\int_M \omega := \sum_{i=1}^{\infty} \int_{h_i(A_i)} a_i(x) \, dx$$

5.5.4 Satz 28

Die Definition ist unabhängig von der Wahl der Zerlegung in messbare Teilmengen und der Wahl des orientierten Atlases.

Beweis

Sei (B_j) eine weitere Zerlegung. (V_j, k_j) orientierte Karten, $B_j \subset V_j$. Weiter seien $k_j(V_j) \rightarrow \mathbb{R}$; $b_j := \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}\right) \circ k_j^{-1}$. Behauptung:

- b_j ist über $k_j(B_j)$ integrierbar $\forall j$
- $\sum_{j=1}^{\infty} \int_{k_j(B_j)} |b_j| \, dx < \infty$
- $\sum_{i=1}^{\infty} \int_{h_i(A_i)} a_i(x) \, dx = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{k_j(B_j)} b_j(x) \, dx$

$\forall i \in \mathbb{N}$ setze $a_{ij} := a_i|_{h_i(A_i \cap B_j)}$. Dann sind die a_{ij} für alle j über $h_i(A_i \cap B_j)$ integrierbar. Also ist auch

$$f_n := \sum_{j=1}^n a_{ij}$$

integrierbar und es gilt:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = a_i|_{h_i(A_i)}$
- $|f_n| \leq |a_i|$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Mit dem Konvergenzsatz von Lebesgue folgt

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_{h_i(A_i \cap B_j)} a_i \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, dx = \int_{h_i(A_i)} a_i \, dx$$

Analog für $|a_i|$ statt a_i . Setze

$$\varphi := h_i \circ k_j^{-1} : \underset{=k_j(u_i \cap V_j)}{U} \rightarrow \underset{=h_i(U_i \cap V_j)}{V}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} b_j dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m &= (k_j^{-1})^* \omega = (h_i^{-1} \circ h_i \circ k_j^{-1})^* \omega = \varphi^* \circ (h_i^{-1})^* \omega \\ &= \varphi^* (a_i dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m) \\ &= (a_i \circ \varphi) \det(J_\varphi) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m \end{aligned}$$

Da $\det(J_\varphi) > 0$, gilt auf U

$$b_j = (a_i \circ \varphi) |\det J_\varphi| \quad \text{analog } |b_j|, |a_i|$$

$\Rightarrow b_j$ ist auf $k_j(A_i \cap B_j)$ integrierbar (nach der Transformationsformel) und es gilt

$$\int_{k_j(A_i \cap B_j)} b_j \, dx = \int_{k_j(A_i \cap B_j)} (a_i \circ \varphi) |\det J_\varphi| \, dx = \int_{h_i(A_i \cap B_j)} a_i \, dx$$

(Analog mit „ $|\cdot|$ “). Es folgt

$$\infty > \sum_{i=1}^{\infty} \int_{h_i(A_i)} |a_i| = \sum_{i,j} \int_{h_i(A_i \cap B_j)} |a_i| \, dx = \sum_{i,j} \int_{k_j(A_i \cap B_j)} |b_j| \, dx$$

Mit dem Konvergenzsatz von Lebesgue folgt: $|b_j|$ ist über $k_j(B_j)$ integrierbar (wie oben) und

$$\int_{k_j(B_j)} b_j \, dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{k_j(A_i \cap B_j)} b_j \, dx \quad \text{Analog für } |b_j|$$

Also gilt

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_{k_j(B_j)} |b_j| \, dx < \infty$$

und Punkt 3 der Auzählung gilt. Die Integrale sind gleich. \square

5.5.5 Folgerung 29

jede stetige m -Form mit kompaktem Träger $\text{supp } \omega := \overline{\{p \in M \mid \omega_p \neq 0\}}$ ist integrierbar.

Beweis

- alle „lokalen“ Integrale existieren.
- die Reihe wird zu einer Summe

□

Sei $\{(U_\alpha, h_\alpha)\}$ ein orientierter Atlas, $\{\varphi_i\}$ eine Zerlegung der Eins, $\text{supp } \varphi_i \subset U_{\alpha(i)}$. Dann setze $\omega_i := \varphi_i \cdot \omega$. Dann ist $\omega = \sum_i \omega_i$ lokal endlich zerlegt. ω ist integrierbar

$$\iff \forall i : h_{\alpha(i)}(U_{\alpha(i)}) \xrightarrow{a_i := \omega_i \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m} \circ h_{\alpha(i)}^{-1} \right)} \mathbb{R} \text{ integrierbar und} \\ \sum_i \int_{h_{\alpha(i)}(U_{\alpha(i)})} |a_i| dx < \infty$$

$$\text{Es gilt } \int_M \omega = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{h_{\alpha(i)}(U_{\alpha(i)})} a_i dx$$

5.5.6 Folgerung 30

$$\int_{-M} \omega = - \int_M \omega$$

($-M$ ist die Mannigfaltigkeit M mit der umgekehrten Orientierung)

5.5.7 Folgerung 31

Sei $\varphi : M \xrightarrow{\cong} M$ ein orientierungstreuer Diffeomorphismus. Dann ist mit $\omega \in \Omega^m(M)$, $m = \dim M$, auch $\varphi^* \omega$ integrierbar und es gilt die Transformationsformel

$$\int_{M=\varphi(M)} \omega = \int_M \varphi^* \omega$$

Beweis

Benutze zur Berechnung von $\int_M \varphi^* \omega$ die Zerlegung $M = \bigcup_i \varphi^{-1}(A_i)$ und Karten $(\varphi^{-1}(u_i), h_i \circ \varphi)$ □

Analog für $A \subset M$ messbar: $\int_A \omega := \int_M \mathbb{1}_A \cdot \omega$

5.5.8 Folgerung 32 (Transformationsformel)

$$\int_A \varphi^* \omega = \int_{\varphi(A)} \omega$$

Sei Ω eine Volumenform auf M . $\mu(A) := \int_A \Omega$ ein Maß auf der σ -Algebra der messbaren Mengen von M . $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ ist **integrierbar**, falls $f\Omega$ integrierbar ist und es gilt

$$\int_M f d\mu = \int_M f \Omega$$

\leadsto Maßraum (M, \mathfrak{M}, μ) .

Sei (M^m, g) eine orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit: lokal:

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i} \left| \frac{\partial}{\partial x^j} \right. \right\rangle, \quad g := \det(g_{ij}), \quad \Omega := \sqrt{g} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$$

ist wohldefiniert: Sei T die Jacobische eines Kartenwechsels

$$(\tilde{g}_{ij}) = T^T g_{ij} T$$

(Ähnlichkeitstransformation symmetrischer Bilinearformen) \Rightarrow da $\det T > 0$: $\sqrt{\tilde{g}} = \det(T)\sqrt{g}$.

$$\Rightarrow \sqrt{g} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m = \sqrt{\tilde{g}} dy^1 \wedge \dots \wedge dy^m$$

□

6 Topologie des deRham-Komplexes

6.1 Der Satz von Stokes

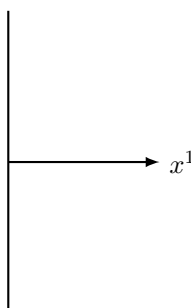
$$f \in C^1[a, b]$$

$$\text{-----} \mathbb{R}^1$$

$\partial[a, b] = b \cup -a$. Mit dem Hauptsatz gilt

$$\int_a^b f'(t) dt = \int_{[a, b]} df = \int_{\partial[a, b]} f = f(b) - f(a)$$

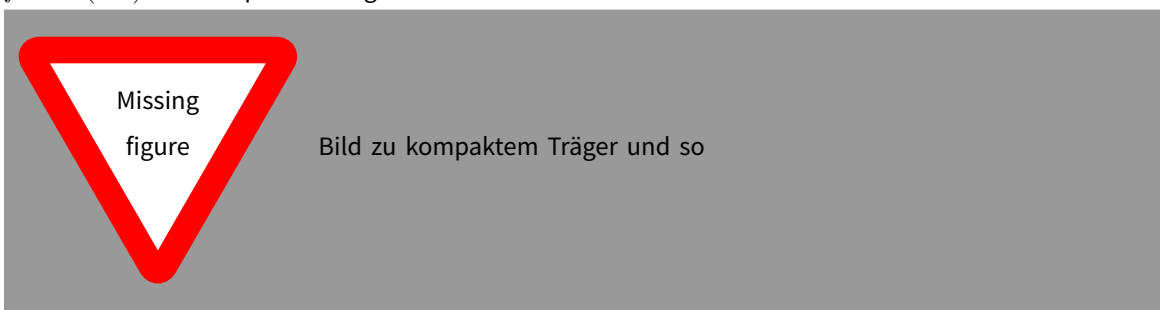
Ziel: Verallgemeinerung auf berandete Gebiete in Mannigfaltigkeiten. Definiere $\mathbb{R}_-^n = \{x^1 \leq 0\}$



$$\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1} \equiv \partial \mathbb{R}_-^n$$

$$i_{\frac{\partial}{\partial x^1}} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n$$

$f \in C^1(\mathbb{R}_-^n)$ mit kompakten Träger.



$$\omega = f dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n \in \Omega^{n-1}(\mathbb{R}_-^n). \Rightarrow d\omega = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}_-^n} d\omega = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^0 \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 \right)}_{f(0, x^2, \dots, x^n)} dx^2 \dots dx^n = \int_{\partial \mathbb{R}_-^n} \omega$$

Analog für $\omega = \omega_i dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n$.

Sei nun M eine m -dimensionale orientierte Mannigfaltigkeit. ω eine $(m-1)$ -Form mit kompaktem Träger. Sei $\{(U_j, h_j)\}_{j=1, \dots, k}$ eine endliche Überdeckung von $\text{supp } \omega$ durch Karten. Sei φ_j eine untergeordnete Teilung der Eins. Es gilt

$$\omega = \omega_1 + \dots + \omega_k \quad , \quad \omega_j = \varphi_j \cdot \omega$$

hat Träger in U_j . Es gilt $(d(h_j^{-1})^*\omega_j)$ hat kompakten Träger in \mathbb{R}^n

$$\begin{aligned}\int_{U_j} d\omega_j &= \int_{h_j(U_j) \subset \mathbb{R}^m} \overbrace{(h_j^{-1})^* d\omega_j}^{=d(h_j^{-1})^*\omega_j} = 0 \\ \Rightarrow \int_M d\omega &= \sum_{j=1}^k \int_{U_j} d\omega_j = 0\end{aligned}$$



Donut in Schokoladensoße

Sei N n -dimensionale Mannigfaltigkeit. $L \subset N$ Untermannigfaltigkeit, die Rand einer offenen Teilmenge U und deren Abschluss wir mit M bezeichnen. $M \neq N$.

6.1.1 Einschub: Untermannigfaltigkeit

$L \subset N$ heißt **Untermannigfaltigkeit** von N , wenn es zu jedem Punkt $p \in L$ eine Karte (U, h) von N gibt mit

$$h(U \cap L) = h(U) \cap \mathbb{R}^l.$$

l ist die Dimension von L und $n - l$ ist die **Kodimension** von $L \subseteq N$. L ist eine Mannigfaltigkeit.



Zeichnung zu Untermannigfaltigkeiten

Sei nun Ω eine Volumenform auf N , X ein Vektorfeld auf N , welches entlang $L = \partial M$ aus M herauszeigt:



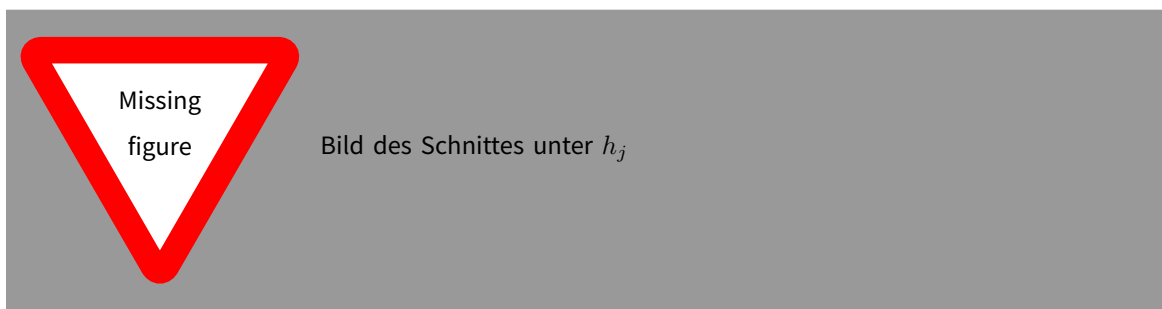
Vektorfeld auf Torusstueck mit Karte

Konstruktion von X mit Teilung der Eins und orientierten Atlas. $\Rightarrow (i_X \Omega)|_{T\partial M}$ ist Volumenform auf ∂M . Sei nun $\omega \in \Omega^{n-1}N$ mit kompaktem Träger und $\{(U_j, h_j)\}$ orientierte Karten von N , die entlang ∂M Untermannigfaltigkeits-Karten sind und $\text{supp } \omega$ überdecken. Sei φ_j wieder eine Teilung der Eins.

$$\omega = \omega_1 + \dots + \omega_k, \quad \omega_j := \varphi_j \cdot \omega$$

Dann gilt:

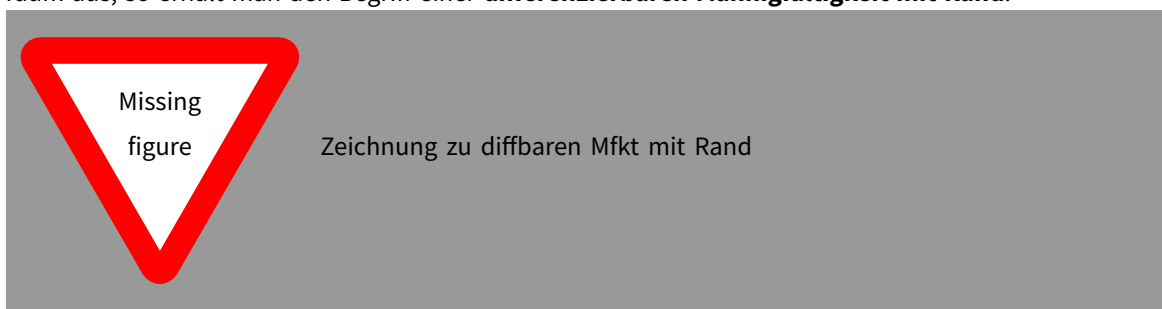
$$\int_{U_j \cap M} d\omega_j = \int_{h_j(U_j \cap M)} d(h_j^{-1})^* \omega_j = \int_{h_j(U_j \cap \partial M)} (h_j^{-1})^* \omega_j = \int_{U_j \cap \partial M} \omega_j$$



$$\Rightarrow \int_M d\omega = \sum_{j=1}^k \int_{\partial M \cap U_j} \varphi_j \cdot \omega$$

$\varphi_j|_{\partial M}$ ist Teilung der Eins auf ∂M

Tauscht man in der Definition einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit die Karten durch Karten im Halbraum aus, so erhält man den Begriff einer **differenzierbaren Mannigfaltigkeit mit Rand**.



- $\mathbb{R}_-^m = \{x^1 \leq 0\}$ hat Teilraumtopologie
- $U \subset \mathbb{R}_-^m$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ist dann differenzierbar, wenn f eine differenzierbare Fortsetzung besitzt, deren Definitionsbereich eine Umgebung von $\partial U := U \cap \partial \mathbb{R}_-^m$ im \mathbb{R}^m enthält.



- Ein **Diffeomorphismus** zwischen offenen Teilmengen von \mathbb{R}^n ist eine in beide Richtungen differenzierbare Bijektion. Dieser bildet dann Randpunkte auf Randpunkte, innere Punkte auf innere Punkte ab.

$p \in \partial M : T_p M := T_p^{\text{alg}} \equiv T_p^{\text{Phys}}$. Sei X ein Vektorfeld auf M , welches entlang ∂M mit der "äußeren Normalen" übereinstimmt



Zeichnung dazu, mit Fluss auf einer Umgebung des Randes

Sei also Φ ein lokaler Fluss zu X . $\Rightarrow \exists$ Umgebung $U \subset (-\infty, 0] \times \partial M$ von $\{0\} \times \partial M$, sodass

$$U \longrightarrow M, \quad (t, p) \mapsto \Phi(t, p)$$

ein Diffeomorphismus auf das Bild (Einbettung) ist, der auf $\{0\} \times \partial M = \partial M$ die Identität ist.



Und noch eine Zeichnung ...

$$N := M \cup_{\Phi} ([0, \infty) \times \partial M)$$



Ergebnis der Verklebung

6.1.2 Satz 33 (Gauß-Stokes)

Sei M eine orientierte m -dimensionale berandete Mannigfaltigkeit und ω eine $(m-1)$ -Form auf M mit kompaktem Träger. Dann gilt:

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

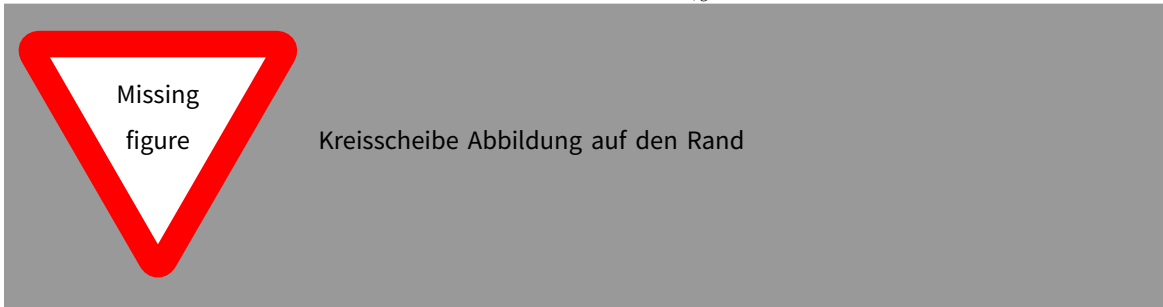
□

6.1.3 Folgerung 34 (Fixpunktsatz von Brouwer)

Jede (differenzierbare, stetige) Abbildung der abgeschlossenen n -dimensionalen Scheibe $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\}$ in sich, hat einen Fixpunkt.

Beweis (indirekt)

Betrachte $f : D^n \rightarrow D^n$ fixpunktfrei $\Rightarrow \rho : D^n \rightarrow S^{n-1}$ mit $\rho|_{\partial} = \text{id}_{S^{n-1}}$ (Retraktion).



Sei η positive Volumenform auf S^{n-1} und $i : S^{n-1} \hookrightarrow D^n$ die Inklusion, also $\rho \circ i = \text{id}$ und $i^* \rho^* = (\rho \circ i)^* = \text{id}^*$

$$0 < \int_{\partial D^n} \eta = \int_{\partial D^n} \rho^* \eta \stackrel{6.1.2}{=} \int_{D^n} d\rho^* \eta = \int_{D^n} \rho^* d\eta = 0 \nmid$$

($d\eta = 0$ aus Gradgründen)

□

6.2 Homotopieinvarianz

6.2.1 Definition

Sei $I = [0, 1]$, $f_0, f_1 : M \rightarrow N$ differenzierbar. Eine differenzierbare Abbildung $F : I \times M \rightarrow N$ heißt eine **Homotopie** zwischen f_0 und f_1 , falls

$$F(0, \cdot) = f_0 \quad , \quad F(1, \cdot) = f_1$$

Wir schreiben dann $f_0 \sim f_1$



Idealisiertes Bild zur Homotopie

6.2.2 Satz 34 (Monotoniesatz)

Sei M orientiert, geschlossen (kompakt, ohne Rand). Sei $\alpha \in \Omega^m(N)$, $d\alpha = 0$ (α geschlossen) und $f_0 \sim f_1$. Dann gilt

$$\int_M f_0^* \alpha = \int_M f_1^* \alpha$$

Beweis

Sei $I \times M$ kompakte Mannigfaltigkeit mit Rand. Sei ω eine Volumenform auf M . Dann ist $dt \wedge \omega$ Volumenform auf $I \times M$



einfache Zeichnung mit Zylinder und Orientierung

Es gilt $\partial(I \times M) = -\{0\} \times M \cup \{1\} \times M$, $f_0 \stackrel{F}{\sim} f_1$. Es gilt

$$d\alpha \Rightarrow 0 = F^* d\alpha = dF^* \alpha.$$

Stokes liefert

$$0 = \int_{I \times M} dF^* \alpha \stackrel{\text{Satz 33}}{=} \int_{\partial(I \times M)} F^* \alpha = \int_M f_1^* \alpha - \int_M f_0^* \alpha \quad \square$$

$\pi : M \rightarrow p \in M$, $\text{id} : M \rightarrow M$. M heißt **zusammenziehbar** (kontrahierbar), falls $\text{id} \sim \pi$. Beispiel: \mathbb{R}^n, D^n , sternförmige Gebiete.

$\xrightarrow{\text{Satz 34}} M$ kompakt ohne Rand, orientiert $\Rightarrow M$ ist nicht zusammenziehbar: ω Volumenform: $0 < \int_M \text{id}^* \omega$.

$$T\pi = 0 \Rightarrow \pi^* \omega \Rightarrow \int_M \pi^* \omega = 0$$

Beispiel $S^n, T^n, \mathbb{R}P^{2m+1}$.

Fundamentalsatz der Algebra: Sei $g(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ ein \mathbb{C} -Polynom. g habe keine Nullstellen:
 $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$\varphi : \mathbb{C} \rightarrow S^1 = \{|z| = 1\} \subset \mathbb{C} \quad , \quad \varphi(z) := \frac{g(z)}{|g(z)|}$$

$\varphi|_{S^1}$ ist homotop (via $F(z, t) = \varphi(t \cdot z)$) zu $\pi : S^1 \rightarrow \frac{a_n}{|a_n|}$. Weiter ist $\varphi|_{S^1}$ homotop zu

$$f : S^1 \rightarrow S^1 \quad , \quad z \mapsto z^n$$

via

$$F(z, t) = \varphi\left(\frac{z}{t}\right) = \frac{z^n + ta_1 z^{n-1} + \dots + t^n a_n}{|z^n + ta_1 z^{n-1} + \dots + t^n a_n|}$$

Es gilt

$$0 = \int_{S^1} \pi^* \alpha = \int_{S^1} \varphi^* \alpha = \int_{S^1} f^* \alpha = n \cdot \int_{S^1 = \partial D^2} \alpha = n \cdot \int_D d\alpha = n \cdot \pi$$

mit $\alpha := \frac{1}{2}(x dy - y dx) \Rightarrow d\alpha = dx \wedge dy$. Es folgt $n = 0$. Also gilt $g(z) = a_n = a_0$.

6.2.3 Satz vom Igel

Die Antipodenabbildung $\tau : S^n \rightarrow S^n, x \mapsto -x$ ist genau dann homotop zur Identität, wenn n ungerade ist und genau dann gibt es ein nullstellenfreies Vektorfeld auf S^n .

Beweis

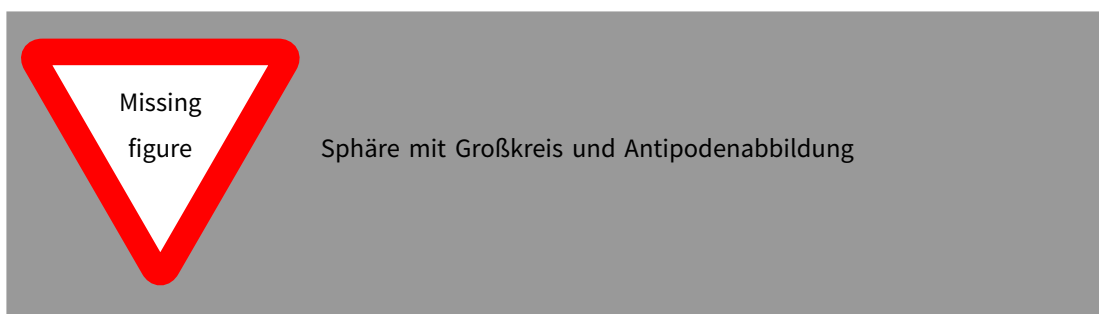
$\tau \sim \text{id}$: Sei ω eine Volumenform auf $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. $\omega_x(v_1, \dots, v_n) = \det(x, v_1, \dots, v_n)$

$$0 \neq \int_{S^n} \omega \stackrel{\text{Satz 33}}{=} \int_{S^n} \tau^* \omega = (-1)^{n+1} \int_{S^n} \omega$$

 $\Rightarrow n$ ungerade

$n = 2m - 1$: $S^{2m-1} \subset \mathbb{C}^m = \mathbb{R}^{2m} (z_j = x_j + iy_j)$. $X(z) = i \cdot z \perp z, |X| = 1$ ist nullstellenfreies Vektorfeld auf S^n .

X ist ein Vektorfeld auf $S^n, |X| = 1$. $X : S^n \rightarrow S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Es gilt $x \perp X(x)$.



$F(x, t) = (\cos \pi t)x + (\sin \pi t)X(x)$ liefert $\text{id} \stackrel{F}{\sim} \tau$. □

6.3 Das Poincaré-Lemma**6.3.1 Satz 35 (Kettenhomotopie)**

Sei $f_0, f_1 : M \rightarrow N$ mit $f_0 \sim f_1$. $\exists \mathbb{R}$ -lineare Abbildung $K : \Omega^k N \rightarrow \Omega^{k-1} M$ mit $f_1^* - f_0^* = dK + Kd$.

Beweis

$f_0 \stackrel{F}{\sim} f_1$. Es gilt also

$$\begin{array}{ccc} I \times M & \xrightarrow{F} & M \\ i_0, i_1 \uparrow & \nearrow f_0, f_1 & \\ M & & \end{array}$$

Bemerkung: $\exists K$ wie oben: $K : \Omega^k(I \times M) \rightarrow \Omega^{k-1}M$, $i_1^* - i_0^* = dK + Kd$. $\tilde{K} := K \circ F^* \leadsto$ Satz.

$$f_1^* - f_0^* = (F \circ i_1)^* - (F \circ i_0)^* = (i_1 - i_0)^* \circ F^* = (dK + Kd) \circ F^* = d\tilde{K} + \tilde{K}d.$$

Beweis der Behauptung: $\alpha \in \Omega^k(I \times M)$, $K_\alpha = \int_0^1 \left(i_{\frac{\partial}{\partial t}} \alpha \right) dt$. $\mathfrak{A}M = \mathbb{R}^n$

(i) $\alpha = f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \Rightarrow dK\alpha = 0$.

$$Kd\alpha = K(df \wedge dx^{i_1} \wedge \dots) = \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t} dt \right) \cdot dx^{i_1} \wedge \dots = (i_1^* - i_0^*)\alpha$$

(ii) $\alpha = f dt \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k-1}}$. Dann ist

$$i_{1,0}^* dt = 0 \Rightarrow i_0^* \alpha = 0 = i_1^* \alpha$$

$$dK\alpha = \sum_j \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^j} dt \right) dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots$$

$$\Rightarrow Kd\alpha = K \left(-\frac{\partial f}{\partial x^j} dt \wedge dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \right) = -dK\alpha. \quad \square$$

$d\alpha = 0$, α geschlossen.

$$f_1^* \alpha - f_0^* \alpha = d(K\alpha) \equiv d\beta \Rightarrow \text{Satz 34}$$

α ist **exakt** $\iff k \geq 1$ und $\exists \beta \in \Omega^{k-1}(M)$ mit $d\beta = \alpha$. β heißt **Primitive** (oder Potential).

6.3.2 Poincaré-Lemma

Sei M zusammenziehbar. Dann ist jede geschlossene Form exakt.

Beweis

(mit Satz 35).

6.4 Die deRham-Kohomologie

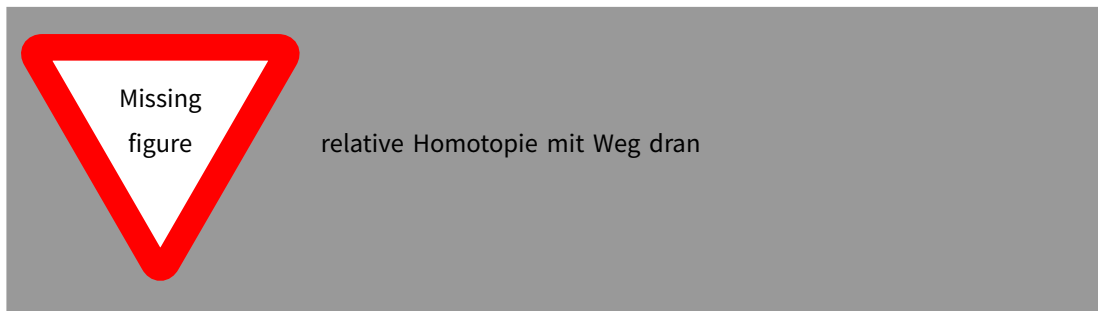
$$H_{\text{dR}}^k M := Z^k M / B^k M$$

$Z^k M$ = geschlossene k -Formen auf M . $B^k M$ = exakte k -Formen auf M .

$$H_{\text{dR}}^0 M = \mathbb{R}^{\# \text{ Zusammenhangskomponenten}}$$

- M heißt 1-fach zusammenhängend, falls M 0-zusammenhängend ist und jede Abbildung $S^1 \rightarrow M$ homotop zu $S^1 \rightarrow *$ $\in M$ ist ($\Rightarrow M$ orientierbar).

$\Rightarrow H_{\text{dR}}^1 M = 0$, $\alpha \in Z^1$, $f(p) = \int_0^1 \gamma_p^* \alpha$. wobei γ_p ein Weg von O nach p ist. Ist OK nach Stokes



$$df(v) = \alpha(v)$$

Beispiele S^n für $n \geq 2$, \mathbb{R}^n

- $f; : M \rightarrow N$ d $\circ f^* = f^* \circ d \leadsto f^* : H_{dR}^k N \rightarrow H_{dR}^k M. \Rightarrow f_0 \sim f_1$ dann ist $f_0^* = f_1^*$ auf H_{dR}^* .


6.4.1 Poincaré-Dualität

$H_{dR}^k M \simeq H_{dR}^{n-k} M$, falls M geschlossen, orientiert und von Dimension n ist. Insbesondere:

$$H_{dR}^n M \xrightarrow[\int_M]{\cong} \mathbb{R},$$

M zusammenhängend. $H_{dR}^{2m}(\mathbb{R}P^{2m}) = 0$, $H_{dR}^n(M \text{ nicht orientierbar}) = 0$.

Index

Die **Seitenzahlen** sind mit **Hyperlinks** zu den entsprechenden Seiten versehen, also anklickbar 

1-Form, 33

alternierend, 40

Atlas, 2
 differenzierbarer, 2
 orientiert, 47

Bahn, 21

Basis, 34

Basis einer Topologie, 2

Bündelatlas, 38
 differenzierbar, 38

Bündelkarte, 34

Bündelmorphismus, 35

Bündelprojektion, 34

Bündeläquivalenz, 35

Dachprodukt, 40

deRham-Komplex, 44

Derivation, 8

Diagonalabbildung, 37

Diffeomorphismus, 6, 58

Differential, 7–9
 totales/äußeres, 34

Differentialform, 42

differenzierbar, 1

differenzierbare Mannigfaltigkeit, 3

differenzierbare Struktur, 3

differenzierbaren Mannigfaltigkeit mit Rand, 57

Differenzierbarkeit auf Mannigfaltigkeiten, 6

dynamisches System, 18

eigentlich, 29

exakt, 62

Faser, 34

Flusslinie, 21

Geschwindigkeitsfeld, 22

Geschwindigkeitsvektor, 7

globaler Fluss, 18

Graßmann-Algebra, 41, 43

Hausdorffsch, 2

homogenen Koordinaten, 5

Homotopie, 60

induzierte Abbildung, 41, 44

Integral, 51

Integralkurve, 12, 21

integrierbar, 51, 53

Kanonisches Bündel, 35

Karte, 2

Kartengebiet, 2

Kartenwechsel, 2

Kodimension, 56

kompakte Ausschöpfung, 25

kompatible Karten, 3

konstant, 21

Leibnizsche Produktregel, 8

Lie-Ableitung, 16

Lie-Klammer, 11

Lipschitz-Bedingung, 13

lokal endliche Verkleinerung, 25

lokal homöomorph, 2

lokale Trivialität, 34

lokaler Fluss, 16, 22

lokalkompakt, 25

Lösungskurve, 21

maximal, 3

maximale, 22

messbar, 50

metrischen Koeffizienten, 28

n -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit, 2

Orbit, 21

Orientierung, 47

orientierungstreu, 47

Parakompaktheit, 25

periodisch, 21

Phasenraum, 13

Primitive, 62

Produktbündel, 37

Quotiententopologie, 4

Rang, 34

regulär, 21

Riemannsche Metrik, 28

Schnitt, 32

Schnitt eines Bündels, 38
Standardorientierung, 47
stereographische Projektion, 3
sternförmig, 28
Submersion, 32

Tangentialbündel, 32
Tangentialraum, 7, 8
Tangentialvektor
 für Algebraiker, 8
 für Geometer, 7
 für Physiker, 10
totale Differential, 34
Totalraum, 34
triviales Bündel, 34
Träger, 26

untergeordnete Teilung der Eins, 26
untergeordneter guter Atlas, 25
Untermannigfaltigkeit, 56

Vektorbündel
 differenzierbar, 38
Vektorfeld, 11
Vektorraumbündel, 32, 34
vollständig, 30
vollständig integrables Vektorfeld, 30
Volumenform, 42, 48

Whitney-Summe, 37

Zeitintervall, 13
Zerlegungen, 40
zusammenziehbar, 60

Übergangsfunktionen, 38
äußere Ableitung, 44
äußere Algebra, 41
äußere Bündel, 42
äußere Produkt, 40

Abbildungsverzeichnis

1 Die dreidimensionale Sphäre S^2 mit dem Bild eines Kartengebiets	1
2 Beispiel einer Nicht-Hausdorffmenge	2
3 Stereografische Projektion	3
4 Der eindimensionale projektive Raum $\mathbb{R}P^1$	3
5 Der 2-dimensionale projektive Raum $\mathbb{R}P^2$ (projektive Ebene)	4
6 Zeichnung zur Hausdorff-Eigenschaft von $\mathbb{R}P^n$	4
7 Basis der Topologie von $\mathbb{R}P^n$	5
8 Tangentialebene im \mathbb{R}^3	7
9 Integralkurve in einem Vektorfeld	12
10 Zeichnung zum Beweis von Picard-Lindelöf	13
11 Zeichnung zu Beispiel 2.4.6 mit $l(t) = 1$	17
12 Veranschaulichung zu lokalen Flüssen	22
13 Das Intervall I_p aus Satz 12 (2.5.10)	24
14 Konstruktion in Satz 13 (3.1.1)	26
15 Funktion f aus 3.1.3	27
16 Funktion g aus 3.1.3	27
17 Funktion h aus 3.1.3	27
18 Kanonisches Geradenbündel	35
19 Beispiel für das induzierte Bündel	36

Todo's und andere Baustellen

RevChap2	15
Figure: Torus + Fundamentalgebiet zum zweiten	20
Figure: Rotation um die r -Achse	20
Figure: "Schwingen" einer Ebene um den Nordpol des S^2	20
Figure: fehlende Grafik: Zusammensetzen von Flusslinien	22

Zeichnung vervollständigen	24
Figure: Zeichnung mit Umgebung auf Torusoberfläche	27
Mischwesen aus Diagramm und Zeichnung vervollständigen	34
Bündelstruktur im Möbiusband hervorheben	34
Zeichnung vervollständigen!	37
Zeichnung vervollständigen!	38
Zeichnung vervollständigen	38
Figure: Abschneidefunktion φ (Zeichnung ähnelt einem Hut)	43
Figure: Abschneidefunktion φ	46
Figure: nächste Abschneidefunktion ψ	46
Figure: Orientierungen auf dem Möbiusband	48
Figure: Halbkugel mit zwei Wegen	48
Figure: Antipodenabbildung τ und Teilmenge von S^{n-1}	49
Figure: Bild zu kompaktem Träger und so	55
Figure: Donut in Schokoladensoße	56
Figure: Zeichnung zu Untermannigfaltigkeiten	56
Figure: Vektorfeld auf Torusstueck mit Karte	56
Figure: Bild des Schnittes unter h_j	57
Figure: Zeichnung zu diffbaren Mfkt mit Rand	57
Figure: Rand von U	57
Figure: Zeichnung dazu, mit Fluss auf einer Umgebung des Randes	58
Figure: Und noch eine Zeichnung ...	58
Figure: Ergebnis der Verklebung	58
Figure: Kreisscheibe Abbildung auf den Rand	59
Figure: Idealisiertes Bild zur Homotopie	60
Figure: einfache Zeichnung mit Zylinder und Orientierung	60
Figure: Sphäre mit Großkreis und Antipodenabbildung	61
Figure: relative Homotopie mit Weg dran	62