Fachbereich 10
Mathematik und Informatik

Modellreduktion und partielle Differentialgleichungen

Mitschrift der Tafelnotizen

Tobias Wedemeier

19. Oktober 2015
gelesen von
Dr. Smetana

Hierbei handelt es sich um eine Mitschrift der Tafelnotizenvon **Dr. Smetana**, WWU Münster, aus der Vorlesung **Modellreduktion und partielle Differentialgleichungen** im Wintersemester 2015/16. Dies ist kein Skript der Vorlesung und keine eigene Arbeit des Autors.

Für Fehler in der Mitschrift wird keine Haftung übernommen. Hinweise auf Fehler sind gerne gesehen, hierfür kann man mich in der Uni ansprechen oder alternativ eine e-Mail an: *tobias.wedemeier@gmx.de* Auch ist eine Mitarbeit über Github möglich.

Wenn Teile aus der Vorlesung selber fehlen, können diese gerne an meine e-Mail versandt werden. Ich werde diese dann einarbeiten.

Inhaltsverzeichnis

1 Einletung und Motivation

1.1 Parameterabhängige PDGL

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ein polygonales Gebiet. Zu einem Parametervektor $\mu \in P \subseteq \mathbb{R}^d$ aus einer Menge von 'erlaubten' Parametern ist eine Funktion, z.B. 'Temperatur'

$$u(\mu) : \Omega \to \mathbb{R}$$

gesucht, so dass $-\nabla(\kappa(\mu)\nabla u(\mu)) = q(\mu)$ in Ω, wobei $u(\mu) = 0$ auf $\partial\Omega$, mit $\kappa(\mu) : \Omega \to \mathbb{R}$ dem 'Wärmeleitkoeffizient' und $q(\mu)$ eine 'Wärmequelle', z.B. $q(\mu) = 1$. Weiter kann eine Augabe erwünscht sein, z.B.

$$s(\mu) = \frac{1}{|\Omega_s|} \int \lim_{\Omega_s} u(x, \mu)\mathrm{d}x,$$

die mittlere Temperatur auf Ω_s.

1.2 Definition (schwache Formulierung in Hilberträumen)

Sei X ein reeller Hilbertraum. Zu $\mu \in P$ ist gesucht ein $u(\mu) \in X$ und eine Ausgabe $s(\mu) \in \mathbb{R}$, so dass

$$b(u(\mu), v; \mu) = f(v; \mu),\ s(\mu) = l(u(\mu); \mu)\ \forall v \in X$$

für eine Bilinearform $b(\cdot, \cdot; \mu) : X \times X \to \mathbb{R}$ und linearen Funktionalen $f(\cdot; \mu), l(\cdot; \mu) : X \to \mathbb{R}$.
Die schwache Formulierung für Beispiel 1.1 lautet:

$$X := H_0^1(\Omega) = \left(f \in L^2(\Omega)\ : + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_1} f \in L^2(\Omega),\ f|_{\partial\Omega = 0} \right)$$

Dann kann man die Bilinearform über

$$b(u(\mu), v; \mu) := \int\limits_{\Omega} \kappa(\mu)\nabla u(\mu)\nabla v \mathrm{d}x; f(v; \mu) := \int \lim_{\Omega} q(\mu) v \mathrm{d}x$$

ausdrücken und

$$s(\mu) = \frac{1}{|\Omega_s|} \int \lim_{\Omega_s} u(x; \mu)\mathrm{d}x =: l(u(\mu); \mu)$$

ABER: Für sehr wenige PDGL's können wir die Lösung analytisch bestimmen. Daher sind wir an einer numerische Approximation interessiert. Ein weit verbreitetes Diskretisierungsverfahren ist die Finite Elemente Methode. Diese Methode basiert auf obiger schwacher Formulierung.

1.3 Definition (hochdimensionales, diskretes Modell)

Sei $X_h \subseteq X$ mit $\dim(X_h) = N_h < \infty$. Der Index h bezeichnet hier die Gitterweite. Zu $\mu \in P$ ist gesucht ein $u_h(\mu) \in X_h$ und eine Ausgabe $s_h(\mu) \in \mathbb{R}$, so dass

$$b(u_h(\mu), v_h; \mu) = f(v_h; \mu),\ s_h(\mu) = l_h(v_h(\mu); \mu)\ \forall v_h \in X_h. \tag{1.1}$$

Anwendungen für die Standarddiskretisierungsverfahren sehr teuer oder zu teuer sind:

many-query context

- Parameterstudien
- Design
- Parameteridentifikation / inverse Probleme

- Optimierung
- Statistische Analyse

schnelle Simulationsantwort

- Echtzeit-Steuerung technischer Geräte
- interaktive Benutzeroberflächen

1.4 Parameterabhängige Lösungsmenge

Sei $\mu := \{u(\mu) \ : \ \mu \in P\} \subseteq P$ für $P \in \mathbb{R}^p$ ist die durch μ parametrisierte Lösungsmenge. X ist die im Allgemeinen unendlichdimensional. $\Rightarrow$ Motivation für die Suche nach einem 'niedrigdimensionalen' Teilraum $X_N \subseteq X$ zur Approximation von M und einer Approximation $u_N(\mu) \approx u(\mu),\ u_N \in X_N$. Eine Möglichkeit eine reduzierte Basis zu generieren besteht darin geschickt Parameterwerte $\mu_1, \dots, \mu_N \in P$ zu wählen und den Raum als $X_N := \operatorname{span}\{u(\mu_1), \dots, u(\mu_N)\}$ zu definieren. Eine Lösung $u(\mu_i)$ für einen Parameterwert $\mu \in P$ wird auch **Snapshot** genannt.

1.5 Beispiel

Gesucht ist $u(\cdot;\mu) \in C^2([0,1])$ mit $(1+\mu)u'' = 1$ auf $(0,1)$ und $u(0) = u(1) = 1$ für den Parameter $\mu \in P := [0,1] \subseteq \mathbb{R}$. **Snapshots:**
$\mu_1 = 0 \Rightarrow u_1 := u(\cdot;\mu_1) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1,\ \mu_2 = 0 \Rightarrow u_2 := u(\cdot;\mu_2) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x + 1$ und $X_N := \operatorname{span}\{u_1, u_2\}$. Dann ist die reduzierte Lösung $u_N(\mu) \in X_N$ gegeben durch

$$u_N(\mu) = \alpha_1(\mu)u_1 + \alpha_2(\mu)u_2,$$

mit $\alpha_1 = \frac{2}{\mu+1} - 1$ und $\alpha_2 = 2 - \frac{2}{\mu-1}$. Diese erfüllt folgende Fehleraussage und ist somit exakt:

$$\|u_N(\mu) - u(\mu)\|_\infty = \sup_{\lambda \in [0,1]} |U_N(x;\mu) - u(x;\mu)| = 0$$

Da $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ und $0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq 1$ ist M die Menge der Konvexkombinationen von u_1 und u_2.

1.6 Definition (reduziertes Modell)

Sei $X_N \subseteq X$ ein reduzierter Basisraum mit $\dim(X_N) < \infty$. Zu $\mu \in P$ ist gesucht ein $u_N(\mu) \in X_N$ und eine Ausgabe $s_N(\mu) \in \mathbb{R}$, so dass

$$b(u_N(\mu), v_N; \mu) = f(v_N; \mu),\ \ s_N(\mu) = l_N(u_N(\mu); \mu)\ \forall v_N \in X_N \tag{1.2}$$

Abbildungsverzeichnis