Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Fachbereich 10 Mathematik und Informatik

Skript Topologie I.

Mitschrift der Vorlesung „Topologie I.“ von Prof. Dr. Arthur Bartels

Jannes Bantje

30. Oktober 2014

Aktuelle Version verfügbar bei:

GitHub (inklusive Sourcecode)
https://github.com/JaMeZ-B/latex-wwu

Bittorrent Sync
B6WH2DISQ5QVYIRYIEZSF4ZR2IDVKPN3I

Vorwort — Mitarbeit am Skript

Dieses Dokument ist eine Mitschrift aus der Vorlesung „Topologie I., WiSe 2014/2015“, gelesen von Prof. Dr. Arthur Bartels. Der Inhalt entspricht weitestgehend dem Tafelanschrieb. Für die Korrektheit des Inhalts übernehme ich keinerlei Garantie! Für Bemerkungen und Korrekturen – und seien es nur Rechtschreibfehler – bin ich sehr dankbar. Korrekturen lassen sich prinzipiell auf drei Wegen einreichen:

- Persönliches Ansprechen in der Uni, Mails an `j.bantje@wwu.de` (gerne auch mit annotieren PDFs)
- *Direktes* Mitarbeiten am Skript: Den Quellcode poste ich auf GitHub (siehe oben), also stehen vielfältige Möglichkeiten der Zusammenarbeit zur Verfügung: Zum Beispiel durch Kommentare am Code über die Website und die Kombination Fork + Pull Request. Wer sich verdient macht oder ein Skript zu einer Vorlesung, die ich nicht besuche, beisteuern will, dem gewähre ich gerne auch Schreibzugriff.

  Beachten sollte man dabei, dass dazu ein Account bei `github.com` notwendig ist, der allerdings ohne Angabe von persönlichen Daten angelegt werden kann. Wer bei GitHub (bzw. dem zugrunde liegenden Open-Source-Programm „`git`“) – verständlicherweise – Hilfe beim Einstieg braucht, dem helfe ich gerne weiter. Es gibt aber auch zahlreiche empfehlenswerte Tutorials im Internet.[1]
- *Indirektes* Mitarbeiten: TeX-Dateien per Mail verschicken.

  Dies ist nur dann sinnvoll, wenn man einen ganzen Abschnitt ändern möchte (zB. einen alternativen Beweis geben), da ich die Änderungen dann per Hand einbauen muss!

Vorlesungshomepage

`https://wwwmath.uni-muenster.de/reine/u/topos/lehre/WS2014-2015/Topologie1/Topologie1.html`

[1]zB. `https://try.github.io/levels/1/challenges/1`, ist auf Englisch, aber dafür interaktives LearningByDoing

Inhaltsverzeichnis

1 Kategorien, Funktoren und natürliche Transformationen

1.1 Definition

Eine **Kategorie** $\mathcal{C}$ besteht aus:

i) Einer Klasse $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Die Elemente von $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ heißen die **Objekte** von $\mathcal{C}$.

ii) Zu je zwei Objekten A, B aus $\mathcal{C}$ einer Menge $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$. Die Elemente von $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ heißen **Morphismen** von $\mathcal{C}$.

iii) Zu je drei Objekten A, B, C aus $\mathcal{C}$ einer Abbildung:
$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C) \times \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, C) \ , \quad (f, g) \mapsto f \circ g$$
genannt die **Komposition** in $\mathcal{C}$.

Dabei müssen folgende Axiome erfüllt sein:

(i) Die Komposition ist **assoziativ**:
Für Objekte A, B, C, D von $\mathcal{C}$ und $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C, D), g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C), h \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ gilt immer
$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

(ii) Die Komposition ist **unital**: Für jedes Objekt A von $\mathcal{C}$ gibt es einen Morphismus $\mathrm{id}_A \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, A)$ so, dass
$$\forall f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, A) : \mathrm{id}_A \circ f = f \qquad \text{und} \qquad \forall f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) : f \circ \mathrm{id}_A = f$$

1.2 Beispiele

(1) Die Kategorie der Mengen MENGEN: Objekte sind Mengen und Morphismen sind Abbildungen.

(2) Die Kategorie der Gruppen $\mathrm{GRUPPEN}$: Objekte sind Gruppen und Morphismen sind Gruppenhomomorphismen.

(3) Die Kategorie der K-Vektorräume $K\text{-}\mathrm{VR}$: Objekte sind K-Vektorräume und die Morphismen sind K-lineare Abbildungen.

(4) Die Kategorie der R-Moduln $R\text{-}\mathrm{MOD}$: Objekte sind R-Moduln und Morphismen sind R-lineare Abbildungen.

(5) Die Kategorie der C^∞-Mannigfaltigkeiten $C^\infty\text{-}\mathrm{MAN}$: Objekte sind C^∞-Mannigfaltigkeiten und Morphismen sind C^∞-Abbildungen.

(6) Die Kategorie der topologischen Räume TOP: Objekte sind topologische Räume und Morphismen sind stetige Abbildungen.

(7) Die Kategorie der punktierten topologischen Räume $\mathrm{TOP}_\bullet$: Objekte sind punktiert-topologische Räume und Morphismen sind punktiert-stetige Abbildungen.

(8) Die Kategorie HTOP: Objekte sind topologische Räume und Morphismen sind Homotopieklassen von stetigen Abbildungen.

(9) Die Kategorie $\mathrm{HTOP}_\bullet$: Objekte sind punktiert-topologische Räume und Morphismen sind Homotopieklassen von punktiert-stetigen Abbildungen.

(10) Sei G eine Gruppe. Wir erhalten eine Kategorie $\mathcal{C}_G$ mit genau einem Objekt $*$ und $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}_G}(*, *) = G$. Die Komposition wird durch die Verknüpfung in der Gruppe festgelegt.

(11) Ist $\mathcal{C}$ eine Kategorie, so ist $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ eine Kategorie, wobei $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}) = \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ und $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(A, B) := \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, A)$. Die Komposition ist gegeben durch $f \circ^{\mathrm{op}} g := g \circ f$.

1.3 Bemerkung

(i) Eine Kategorie heißt **klein**, wenn ihre Objekte eine Menge bilden.

(ii) Statt $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ schreiben wir oft $f : A \to B$ oder $A \xrightarrow{f} B$.

1.4 Definition

Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien: Ein **Funktor** $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ordnet jedem Objekt C von $\mathcal{C}$ ein Objekt $F(C)$ von $\mathcal{D}$ und ordnet jedem Morphismus $f : C \to C'$ in $\mathcal{C}$ einen Morphismus $F(f) : F(C) \to F(C')$ in $\mathcal{D}$ zu. Dabei muss gelten:

$$F(f \circ g) = F(f) \circ F(g) \quad \text{und} \quad F(\mathrm{id}_C) = \mathrm{id}_{F(C)}$$

1.5 Beispiele

(1) Es gibt offensichtliche „Vergiss"-Funktoren:

$$\begin{aligned} K\text{-}\mathrm{VR} &\longrightarrow \mathrm{MENGEN} \\ R\text{-}\mathrm{MOD} &\longrightarrow \mathrm{MENGEN} \\ \mathrm{TOP} &\longrightarrow \mathrm{MENGEN} \\ \mathrm{TOP}_\bullet &\longrightarrow \mathrm{MENGEN} \\ \mathrm{TOP}_\bullet &\longrightarrow \mathrm{TOP} \end{aligned}$$

(2) Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und C ein Objekt von $\mathcal{C}$. Der durch C **dargestellte Funktor** $F_C : \mathcal{C} \to \mathrm{MENGEN}$ ist definiert durch

$$\begin{array}{ll} F_C(A) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C, A) & \text{für } A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \\ F_C(f) : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C, A) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C, A'), g \mapsto f \circ g & \text{für } f : A \to A' \text{ in } \mathcal{C} \end{array}$$

(3) Die Fundamentalgruppe definiert einen Funktor

$$\pi_1 : \mathrm{HTOP}_\bullet \longrightarrow \mathrm{GRUPPEN}$$

Bemerkung

- Ist $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor so schreiben wir oft kürzer und ungenauer $f_* := F(f)$.
- Kleine Kategorien und Funktoren bilden die Kategorie KAT.

1.6 Definition

Seien $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ zwei Funktoren. Eine **natürliche Transformation** $\tau : F \to G$ ordnet jedem $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ einen Morphismus $\tau_C : F(C) \to G(C)$ in $\mathcal{D}$ zu, sodass für jedes $f : C \to C'$ in $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd} F(C) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\tau_C"] & F(C') \arrow[d, "\tau_{C'}"] \\ G(C) \arrow[r, "G(f)"] & G(C') \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Bemerkung
Natürliche Transformationen lassen sich komponieren. Für $\tau : F \to G$, $\eta : G \to H$ ist $\eta \circ \tau : F \to H$ gegeben durch $F, G, H : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$

$$(\eta \circ \tau)_C := \eta_C \circ \tau_C : F(C) \to H(C)$$

Genauer: Für eine feste kleine Kategorie $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ bilden die Funktoren $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ mit den natürlichen Transformationen eine Kategorie $\mathrm{FUN}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$.

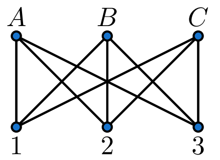
1.7 Ausblick

In der algebraischen Topologie werden topologische Fragen, wie zum Beispiel, wann $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ homöomorph sind, in algebraische Fragen übersetzt. Eine Möglichkeit für eine solche Übersetzung sind Funktoren von einer Kategorie von topologischen Räumen, z.B. $\mathrm{TOP}, \mathrm{TOP}_\bullet, \mathrm{HTOP}_\bullet$, in eine algebraisch Kategorie, z.B. $\mathrm{GRUPPEN}, K\text{-}\mathrm{VR}, \mathrm{ABEL.\,GRUPPEN}, R\text{-}\mathrm{MOD}$. Ein Beispiel für einen solchen Funktor ist die Fundamentalgruppe π_1. Ein Nachteil der Fundamentalgruppe ist, dass diese oft schwierig zu berechnen ist. Wir werden in dieser Vorlesung weitere Funktoren und Methoden für ihr Berechnung kennenlernen.

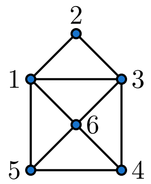
2 Kombinatorische Beschreibungen topologischer Räume

2.1 Beispiel

Graphen sind einerseits topologische Räume und andererseits kombinatorische Objekte:



$$\longleftrightarrow \quad \begin{aligned} V &= \{A, B, C, 1, 2, 3\} \\ E &= \big\{\{A,1\},\{A,2\},\{A,3\},\{B,1\},\{B,2\},\{B,3\},\{C,1\},\{C,2\},\{C,3\}\big\} \end{aligned}$$



$$\longleftrightarrow \quad \begin{aligned} V &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\ E &= \big\{\{1,2\},\{1,3\},\{1,5\},\{1,6\},\{2,3\},\{3,4\},\{3,6\},\{4,5\},\{4,6\},\{5,6\}\big\} \end{aligned}$$

2.2 Definition

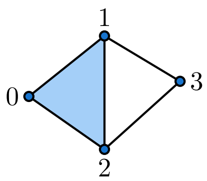
Ein **simplizialer Komplex** $K = (V, \Sigma)$ besteht aus einer Menge V und einer Menge Σ von nichtleeren, endlichen Teilmengen von V, sodass gilt

(i) $\{v\} \in \Sigma$ für alle $v \in V$

(ii) $\sigma \in \Sigma, \emptyset \neq \tau \subseteq \sigma \Longrightarrow \tau \in \Sigma.$ (Abgeschlossen bzgl. Teilmengenbildung)

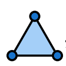
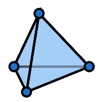
Die Elemente von V heißen die **Ecken** oder **Vertices** von K. Die Elemente von Σ heißen die **Simplizes** von K. Enthält $\sigma \in \Sigma$ genau $n+1$ Elemente, so heißt σ ein $\mathbf{n}$**-Simplex**. Ist $\tau \subseteq \sigma$ mit σ ein n-Simplex und τ ein $n-1$-Simplex, so heißt τ eine **Seite** von σ.
Ist V geordnet, so heißt K geordnet. Ist V endlich, so heißt K endlich.

2.3 Beispiel



$$\begin{aligned} V &= \{0, 1, 2, 3\} \\ E &= \big\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{0,1,2\}\big\} \end{aligned}$$

Ist σ eine endliche Menge, so heißt $\Delta^\sigma := \big(\sigma, \mathcal{P}(\sigma) \setminus \{\emptyset\}\big)$ der σ-Simplex. Für $\sigma = \{0, \ldots, n\}$ schreiben wir $\Delta^n := \Delta^{\{0,\ldots,n\}}$. Es ist

$\Delta^0 = \bullet$, $\Delta^1 =$ , $\Delta^2 =$ , $\Delta^3 =$ 

2.4 Definition

Sei $K = (V, \Sigma)$ ein simplizialer Komplex. Ein **Unterkomplex** von K ist ein simplizialer Komplex $K_0 = (V_0, \Sigma_0)$ mit $V_0 \subseteq V$ und $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$.

Beispiel
Sei $K = (V, \Sigma)$ ein endlicher simplizialer Komplex. Dann ist K ein Unterkomplex von Δ^V.

2.5 Definition

Eine **simpliziale Abbildung** $f : K_1 = (V_1, \Sigma_1) \to K_2(V_2, \Sigma_2)$ zwischen simplizialen Komplexen ist eine Abbildung $f : V_1 \to V_2$, sodass $f(\sigma_1) \in \Sigma_2$ für alle $\sigma_1 \in \Sigma_1$.

2.6 Definition

Sei σ eine endliche Menge. Sei $\mathbb{R}^\sigma = \prod_{v \in \sigma} \mathbb{R}$ mit der Produkttopologie. Sei nun

$$|\Delta^\sigma| := \left\{ x = (x_v)_{v \in \sigma} \in \mathbb{R}^\sigma \,\middle|\, \sum_{v \in \sigma} x_v = 1, x_v \in [0,1] \; \forall v \in \sigma \right\}$$

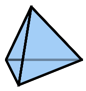
Ist $\tau \subseteq \sigma$, so erhalten wir eine Abbildung $\iota_\tau^\sigma : |\Delta^\tau| \to |\Delta^\sigma|$ indem wir $(x_v)_{v \in \tau} \in |\Delta^\tau|$ durch $x_v = 0$ für $v \in \sigma \setminus \tau$ zu $(x_v)_{v \in \sigma}$ auffüllen. Ist $\eta \subseteq \tau \subseteq \sigma$ so gilt $\iota_\eta^\sigma = \iota_\tau^\sigma \circ \iota_\eta^\tau$.
Sei $K = (V, \Sigma)$ ein simplizialer Komplex. Die **geometrische Realisierung** $|K|$ von K ist definiert als

$$|K| := \left. \coprod_{\sigma \in \Sigma} \{\sigma\} \times |\Delta^\sigma| \middle/ \sim \right.$$

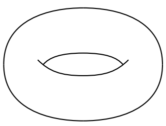
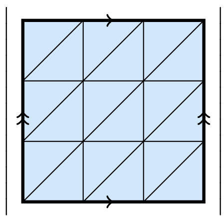
wobei $\sim$ die durch $(\tau, x) \sim \big(\sigma, \iota_\tau^\sigma(x)\big)$ für $\tau \subseteq \sigma$ erzeugte Äquivalenzrelation ist. Versehen mit der Quotiententopologie ist $|K|$ ein topologischer Raum.

2.7 Beispiel

- Sei $\partial\Delta^n := \Big(\{0, \ldots, n\}, \mathcal{P}\big(\{0, \ldots, n\}\big) \setminus \{\emptyset, \{0, \ldots, n\}\}\Big) =$ „$\Delta^n \setminus \{0, \ldots, n\}$". $\partial\Delta^n$ heißt der **Rand des n-Simplizes**. Es gilt

  $$\left|\partial\Delta^1\right| = \bullet\bullet \cong S^0$$
  $$\left|\partial\Delta^2\right| = \triangle \cong S^1$$
  $$\left|\partial\Delta^3\right| =$$
  
  $$\cong S^2$$

  Allgemein gilt $|\partial\Delta^n| \cong S^{n-1}$.

- $T^2 = S^1 \times S^1 \cong$  $\cong$ 

2.8 Definition

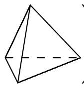
Ein topologischer Raum X heißt ein **Polyeder**, falls er homöomorph zur Realisierung eines simplizialen Komplexes ist.

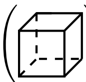
2.9 Definition

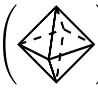
Sei $K = (V, \Sigma)$ ein endlicher simplizialer Komplex. Sei $a_n := \#\{\sigma \in \Sigma \,|\, \sigma \text{ ist ein } n\text{-Simplex von } K\}$. Dann heißt $\chi(K) := \sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n a_n$ die **Euler-Charakteristik** von K.

Beispiel

$$\chi\big(\triangle\big) = 3 - 3 = 0$$
$$\chi\big(\square\big) = 4 - 4 = 0$$
$$\chi\big([n\text{-Eck}]\big) = n - n = 0$$

$\chi\Big(\partial\Delta^3 =$  $\Big) = 4 - 6 + 4 = 2$

$\chi\Big($  $\Big) = 8 - 12 + 6 = 2$

$\chi\Big($  $\Big) = 6 - 12 + 8 = 2$

2.10 Satz

Seinen K und K' endliche simpliziale Komplexe. Gilt $|K| \cong |K'|$, so gilt

$$\chi(K) = \chi(K').$$

Bemerkung
Die Euler-Charakteristik ist also eine topologische Invariante von simplizialen Komplexen. Sie hängt nur von der topologischen Struktur von $|K|$ und nicht von der kombinatorischen Struktur von K ab.

3 Simpliziale Homologie

3.1 Definition

Sei S eine Menge.Sei R ein Ring. Der **freie R-Modul mit Basis** S, $R[S]$, besteht aus allen endlichen formalen R-Linearkombinationen

Ring mit Eins

$$\sum_{s\in S} r_s \cdot s \quad , r_s \in R, r_s \neq 0 \text{ für endliche viele } s \in S$$

Die R-Modulstruktur auf $R[S]$ ist definiert durch:

$$r \cdot \left(\sum_{s\in S} r_s \cdot s\right) := \sum_{s\in S} (r \cdot r_s) \cdot s \qquad \left(\sum_{s\in S} r_s \cdot s\right) + \left(\sum_{s\in S} r'_s s\right) := \sum_{s\in S} (r_s + r'_s) \cdot s$$

Bemerkung
Mittels $s = \sum_{s'\in S} \delta_{s,s'} \cdot s'$ fassen wir S als Teilmenge von $R[S]$ auf.

3.2 Lemma

Sei S eine Menge, R ein Ring. Es gilt

1) Ist M ein R-Modul und $i : S \to M$ eine Abbildung, so gibt es genau eine R-lineare Abbildung $\varphi : R[S] \to M$, die i fortsetzt.
2) Sei $f : R[S] \to M$ R-linear und $p : N \twoheadrightarrow M$ R-linear und surjektiv. Dann gibt es $\hat{f} : R[S] \to N$ mit $p \circ \hat{f} = f$.

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[d, two heads, "p"] \\ R[S] \arrow[ur, dashed, "\hat{f}"] \arrow[r, "f"] & M \end{tikzcd}$$

Beweis

1) Eine solche Abbildung ist gegeben durch $\varphi(\sum_{s\in S} r_s \cdot s) = \sum_{s\in S} r_s \cdot i(s)$. Ist φ' eine zweite, so gilt

$$\hat{\varphi}\left(\sum_{s\in S} r_s \cdot s\right) = \sum_{s\in S} r_s \cdot \hat{\varphi}(s) = \sum_{s\in S} r_s \cdot i(s)$$

2) Wähle für jedes $s \in S$ ein Urbild $j(s) \in N$ für $f(s) \in M$ unter $p : N \twoheadrightarrow M$. Nun wende 1) auf $j : S \to N$ an, um $\hat{f} : R[S] \to N$ mit $\hat{f}(s) = j(s)$ zu erhalten. Nun ist $p \circ \hat{f}(s) = f(s)$ für alle $s \in S$. Mit der Eindeutigkeit aus 1) folgt $p \circ \hat{f} = f$. $\square$

3.3 Beispiel

(i) Sei K ein Körper und V, M, N seien K-Vektorräume, $f : V \to M$, $p : N \to M$ seien K-linear, p surjektiv. Dann gibt es $\hat{f} : V \to N$ mit $p \circ \hat{f} = f$. Wir können Lemma 3.2 benutzen, da V eine Basis B hat, also $V \cong K[B]$.

(ii) Sei $R = \mathbb{Z}$, sei $V = {}^{\mathbb{Z}}/_{2\mathbb{Z}}$ und $M = {}^{\mathbb{Z}}/_{2\mathbb{Z}}$, sowie $f = \mathrm{id} : V \to M$, $N = \mathbb{Z}$ und $p : \mathbb{Z}n \to {}^{\mathbb{Z}}/_{2\mathbb{Z}}$ die Projektion mit $p(n) = n + 2\mathbb{Z}$. Dann gibt es keine $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung $\hat{f} : {}^{\mathbb{Z}}/_{2\mathbb{Z}} \to \mathbb{Z}$ mit $p \circ \hat{f} = f$. Ist $\hat{f}(1 + 2\mathbb{Z}) = n \in \mathbb{Z}$, so folgt

$$2n = 2 \cdot \hat{f}(1 + 2\mathbb{Z}) = \hat{f}\big(2 \cdot (1 + 2\mathbb{Z})\big) = \hat{f}(0 + 2\mathbb{Z}) = 0$$

also $n = 0$.

3.4 Definition

Sei $K = (V, \Sigma)$ ein simplizialer Komplex. Sei $\Sigma_n := \{\sigma \in \Sigma \mid \sigma \text{ ist ein } n\text{-Simplex}\}$. Sei R ein Ring. Der **$\mathbf{n}$-te Kettenmodul** von K über R ist definiert als

$$C_n(K; R) := R[\Sigma_n]$$

Ist $R = \mathbb{Z}$, so schreiben wir auch kurz $C_n(K) := C_n(K; \mathbb{Z})$.

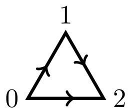
3.5 Definition

Sei $K = (V, \Sigma)$ ein geordneter simplizialer Komplex. Sei $\sigma = \{v_0, \ldots, v_n\}$ ein n-Simplex von K. Bezüglich der Ordnung von K sei dabei $v_0 < v_1 < \ldots < v_n$. Sei τ ein $(n-1)$-Simplex von K. Definiere

$$\varepsilon_\sigma^\tau := \begin{cases} (-1)^i, & \text{falls } \tau = \{v_0, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n\} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Bemerkung
$\varepsilon_\sigma^\tau \neq 0 \iff \tau$ ist eine Seite von σ.

Beispiel
Für den folgenden geordneten simplizialen Komplex gilt



$$\varepsilon_{\{0,1,2\}}^{\{0,1\}} = 1, \quad \varepsilon_{\{0,1,2\}}^{\{0,2\}} = -1, \quad \varepsilon_{\{0,1,2\}}^{\{1,2\}} = 1$$

3.6 Definition

Sei $K = (V, \Sigma)$ ein geordneter simplizialer Komplex. Die **$\mathbf{n}$-te Randabbildung**

$$\partial_n : \underbrace{C_n(K; R)}_{=R[\Sigma_n]} \to \underbrace{C_{n-1}(K; R)}_{=R[\Sigma_{n-1}]}$$

ist definiert durch

$$\partial_n(\sigma) = \sum_{\tau \in \Sigma_{n-1}} \varepsilon_\sigma^\tau \cdot \tau \qquad \text{für } \sigma \in \Sigma_n$$

3.7 Proposition

$$\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$$

Damit folgt $\operatorname{Im} \partial_n \subseteq \ker \partial_{n-1}$.

Beweis (mit Lemma 3.8)
Sei σ ein n-Simplex von K. Dann gilt

$$\begin{aligned} \partial_{n-1}\big(\partial_n(\sigma)\big) = \partial_{n-1}\left(\sum_{\tau \in \Sigma_{n-1}} \varepsilon_\sigma^\tau \cdot \tau\right) = \sum_{\tau \in \Sigma_{n-1}} \varepsilon_\sigma^\tau \cdot \partial_{n-1}(\tau) &= \sum_{\tau \in \Sigma_{n-1}} \varepsilon_\sigma^\tau \left(\sum_{\eta \in \Sigma_{n-2}} \varepsilon_\tau^\eta \cdot \eta\right) \\ &= \sum_{\eta \in \Sigma_{n-2}} \left(\sum_{\tau \in \Sigma_{n-1}, \eta \subseteq \tau \subseteq \sigma} \varepsilon_\tau^\eta \cdot \varepsilon_\sigma^\tau\right) \eta \\ &\overset{\text{Lemma 3.8}}{=} 0 \end{aligned}$$

□

3.8 Lemma

Sei σ ein n-Simplex. Sei $\eta \subseteq \sigma$ ein $(n-2)$-Simplex. Dann gibt es genau zwei $(n-1)$-Simplizes τ, τ' von K, die eine Seite von σ sind und η als Seite enthalten. Es gilt

$$\varepsilon_\tau^\eta \cdot \varepsilon_\sigma^\tau = -\varepsilon_{\tau'}^\eta \cdot \varepsilon_\sigma^{\tau'}$$

Beweis
Sei $\sigma = \{v_0, \ldots, v_n\}$ mit $v_0 < v_1 < \ldots < v_n$. Dann ist $\eta = \{v_0, \ldots, v_n\} \setminus \{v_i, v_j\}$ mit $i < j$. Dann sind $\tau = \{v_0, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n\}$ und $\tau' = \{v_0, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_n\}$ die gesuchten $(n-1)$-Simplizes und es gilt

$$\varepsilon_\sigma^\tau = (-1)^i \;,\; \varepsilon_\sigma^{\tau'} = (-1)^j \;,\; \varepsilon_\tau^\eta = (-1)^{j-1} \;,\; \varepsilon_{\tau'}^\eta = (-1)^i \qquad \square$$

3.9 Notation

Für $\sigma \in \Sigma_n$, $\sigma = \{v_0, \ldots, v_n\}$ mit $v_0 < \ldots < v_n$ schreiben wir

$$\delta^j \sigma := \{v_0, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_n\} \in \Sigma_{n-1}$$

Dann ist $\partial_n(\sigma) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \cdot \delta^j \sigma$. RevChap3

3.10 Definition

Sei K ein geordneter simplizialer Komplex. Der **n-te Homologiemodul** von K über R ist definiert als

$$H_n(K; R) := \frac{\ker \partial_n : C_n(K; R) \to C_{n-1}(K; R)}{\operatorname{Im} \partial_{n+1} : C_{n+1}(K; R) \to C_n(K; R)}$$

Für $n = 0$ interpretieren wir ∂_0 als die Nullabbildung. Daher gilt

$$H_0(K; R) = \frac{C_0(K; R)}{\operatorname{Im} \partial_1 : C_1(K; R) \to C_0(K; R)}$$

3.11 Beispiele

(1) Sei $K = \bullet$. Dann ist $C_0(K; R) \cong R$ und $C_i(K; R) = 0$ für $i > 0$. Weiter ist $H_0(K; R) = C_0(K; R) \cong R$ und $H_i(K; R) = 0$ für $i > 0$.

(2) Sein nun $K = K_n$ das n-Eck, wobei $n \geq 3$. Also

$$\begin{aligned} \Sigma_0 &= \{\tau_1 = \{1\}, \tau_2 = \{2\}, \ldots, \tau_n = \{n\}\} \\ \Sigma_1 &= \{\sigma_1 = \{1, 2\}, \ldots, \sigma_{n-1} = \{n_1, n\}, \sigma_n = \{n, 1\}\} \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} &C_0(K; R) = R[\Sigma_0] \cong R^n \\ &C_1(K; R) = R[\Sigma_1] \cong R^n \\ &C_i(K; R) = 0 \text{ für } i > 1 \text{, insbesondere } H_i(K; R) = 0 \text{ für } i > 1 \end{aligned}$$

Es ist dann $\partial_2 = \partial_3 = \ldots = 0$. Interessant ist $\partial_1 : C_1(K; R) \to C_0(K; R)$, denn es gilt

$$\partial_1(\sigma_i) = \begin{cases} \tau_{i+1} - \tau_i, & \text{falls } i = 1, \ldots, n-1 \\ \tau_n - \tau_1, & \text{falls } i = n \end{cases}$$

Mit $\sigma_1' := \sigma_1, \sigma_2' = \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}' := \sigma_{n-1}, \sigma_n' := -\sigma_n$ gilt dann

$$\partial_1(\sigma_i') = \tau_{i+1} - \tau_i$$

mit der Konvention $\tau_{n+1} = \tau_1$. Also gilt

$$\partial_1\left(\sum_{i=1}^n r_i\sigma_i'\right) = \sum_{i=1}^n r_i(\tau_{i+1} - \tau_i) = \sum_{i=1}^n (r_{i-1} - r_i)\tau_i$$

Es folgt

$$\ker \partial_1 = \left\{ \sum_{i=1}^n r_i\sigma_i' \,\middle|\, r_1 = r_2 = \ldots = r_n \right\} \subseteq C_1(K;R)$$

$$\operatorname{Im} \partial_1 = \left\{ \sum_{i=1}^n s_i\tau_i \,\middle|\, \sum_{i=1}^n s_i = 0 \right\} \subseteq C_0(K;R)$$

Ist $\sum_{i=1}^n s_i = 0$, so folgt für $r_n = 0, r_1 = -s_1, r_2 = -s_1 - s_2, \ldots, r_{n-1} = -s_1 - s_2 - \ldots - s_{n-1}$

$$\partial_1\left(\sum_{i=1}^n r_i\sigma_i'\right) = \sum_{i=1}^n s_i\tau_i$$

Es folgt $[K] \in H_1(K;R) = {}^{\ker \partial_1}/_{\operatorname{Im}\partial_2} = \ker \partial_1 \cong R \ni 1$ und

$$[\tau_i] = [p] \in H_0(K;R) = {}^{\ker \partial_0}/_{\operatorname{Im}\partial_1} = {}^{R[\Sigma_0]}/_{\{\sum_{i=1}^n s_i\tau_i \,|\, \sum_{i=1}^n s_i = 0\}} \cong R \ni 1$$

(via $\sum_{i=1}^n s_i\tau_i \longmapsto \sum_{i=1}^n s_i$)

3.12 Definition

Sei R ein Ring. Ein **$\mathbf{R}$-Kettenkomplex** (C_*, d_*) ist eine Folge von R-Moduln $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zusammen mit R-linearen Abbildungen $(d_n : C_n \to C_{n-1})_{n\geq 1}$, so dass $d_n \circ d_{n+1} = 0$. Die d_n heißen die **Randabbildungen** von (C_*, d_*), die C_n die **Kettenmoduln**. Die **$\mathbf{n}$-te Homologie** eines Kettenkomplexes (C_*, d_*) ist definiert als

$$H_n(C_*, d_*) := \frac{\ker d_n : C_n \to C_{n-1}}{\operatorname{Im} d_{n+1} : C_{n+1} \to C_n}$$

3.13 Bemerkung

(i) Oft werden auch Kettenkomplexe betrachtet, die $\mathbb{Z}$ statt $\mathbb{N}$ verwenden.

(ii) Ein Kettenkomplex (C_*, d_*) heißt endlich erzeugt, wenn alle C_n endlich erzeugte R-Moduln sind und $C_n \neq 0$ nur für endlich viele n ist.

3.14 Definition

Zu einem geordneten simplizialen Komplex K heißt $\big(C_*(K;R), \partial_*\big)$ der **simpliziale Kettenkomplex** von K über R.

Bemerkung
Ist K endlich, so ist $(C_*(K;R), \partial_*)$ endlich erzeugt.

4 Euler-Charakteristik von Kettenkomplexen

4.1 Wiederholung

Sei A eine abelsche Gruppe. Dann ist

$$TA := \left\{ a \in A \;\middle|\; \exists n \geq 1 : na = \underbrace{a + \ldots + a}_{n\text{-mal}} = 0 \right\}$$

die **Torsionsgruppe** von A. Ist A endlich erzeugt, so ist auch TA endlich erzeugt und es gibt Primzahlpotenzen $p_1^{n_1}, \ldots, p_k^{n_k}$ mit

$$TA \cong \mathbb{Z}/(p_1^{n_1}) \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}/(p_k^{n_k})$$

Weiter gibt es dann n mit $A \cong \mathbb{Z}^n \oplus TA$. $\operatorname{Rg} A := n$ ist der Rang von A.

4.2 Lemma

Sei A eine endlich erzeugte abelsche Gruppe. Dann gilt $\operatorname{Rg} A = \max\{m \mid \exists C \leq A, C \cong \mathbb{Z}^m\}$.

Beweis
Da $A \cong \mathbb{Z}^n \oplus TA$ genügt zu zeigen: Ist $\varphi : \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}^n \oplus TA$ ein injektiver Gruppenhomomorphismus, so ist $m \leq n$. Schreibe $\varphi = \varphi_0 \oplus \varphi_1$, also $\varphi(a) = \varphi_0(a) + \varphi_1(a)$ mit $\varphi_0 : \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}^n$, $\varphi_1 : \mathbb{Z}^m \to TA$.

Behauptung: φ_0 ist injektiv. Zu $v \in \mathbb{Z}^m$ wähle $k \geq 1$ mit $k \cdot \varphi_1(v) = 0 \in TA$. Dann ist $\varphi_1(kv) = k\varphi_1(v) = 0$. Ist $v \neq 0$, so ist $k \cdot v \neq 0 \in \mathbb{Z}^m$, also ist $\varphi(kv) \neq 0$ und damit $\varphi_0(kv) \neq 0$. Es folgt $\varphi_0(v) \neq 0$, da sonst $\varphi_0(k \cdot v) = k \cdot \varphi_0(v) = 0$. Damit ist die Behauptung gezeigt.

Gruppenhomomorphismen $\varphi_0 : \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}^n$ werden durch $n \times m$-Matrizen beschrieben: Es gibt $A = (a_{ij}) \in \mathbb{Z}^{n \times m}$ mit

$$\varphi_0 \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m a_{1j} z_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m a_{nj} z_j \end{pmatrix}$$

Ist $m > n$, so hat A, aufgefasst als Matrix über $\mathbb{Q}$, einen Kern. Es gibt also einen Vektor $w = \begin{pmatrix} a_1/b_1 \\ \vdots \\ a_m/b_m \end{pmatrix}$ mit $Aw = 0$, $w \neq 0$. Dann ist $(b_1, \ldots, b_m) \cdot w \in \mathbb{Z}^m$ und

$$\varphi_0\big((b_1, \ldots, b_m) \cdot w\big) = A \cdot \big((b_1, \ldots, b_m) \cdot w\big) = (b_1, \ldots, b_m) \cdot A \cdot w = 0$$

Also gilt $m \leq n$. ☐

4.3 Definition

Seien M_0, M_1, M_2 R-Moduln und $f_0 : M_0 \to M_1$, $f_1 : M_1 \to M_2$ R-lineare Abbildungen. Dann heißt

$$M_0 \xhookrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \qquad (\star)$$

eine **kurze exakte Sequenz**, wenn gilt:

(i) f_0 ist injektiv, (ii) $\operatorname{Im} f_0 = \ker f_1$, (iii) f_1 ist surjektiv.

Bemerkung
Oft sagt man $M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} M_2$ ist exakt in M_1, wenn $\operatorname{Im} f_0 = \ker f_1$ ist. Dann ist $(\star)$ eine kurze exakte Folge, wenn

$$0 \longrightarrow M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \longrightarrow 0$$

exakt in M_0, M_1 und M_2 ist.

4.4 Beispiele

1)

$$\begin{array}{ccccc} M_0 & \overset{i}{\hookrightarrow} & M_0 \oplus M_1 & \overset{p}{\twoheadrightarrow} & M_1 \\ v_0 & \overset{i}{\longmapsto} & (v_0, 0) \quad (v_0, v_1) & \overset{p}{\longmapsto} & v_1 \end{array}$$

ist eine kurze exakte Folge.

2) $\mathbb{Z} \overset{n\cdot}{\hookrightarrow} \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist eine kurze exakte Folge.

4.5 Bemerkung

Eine **Spaltung** für eine kurze exakte Folge $M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} M_2$ ist eine R-lineare Abbildung $s : M_2 \to M_1$ mit $f_1 \circ s = \mathrm{id}_{M_2}$. In diesem Fall erhalten wir einen Isomorphismus $M_0 \oplus M_2 \to M_1$, $(v_0, v_2) \mapsto f_0(v_0) + s(v_2)$.

Injektivität: Sei $(v_0, v_2) \in M_0 \oplus M_2$ mit $f_0(v_0) + s(v_2) = 0$. Dann gilt

$$0 = f_1\big(f_0(v_0) + s(v_2)\big) = v_2 \implies f_0(v_0) = 0 \implies v_0 = 0$$

Surjektivität: Sei $v_1 \in M_1$. Betrachte $v_2 := f_1(v_1)$. Dann ist $v_1 - s(v_2) \in \ker f_1 = \operatorname{Im} f_0$, also gibt es v_0 in M_0 mit $f_0(v_0) = v_1 - s(v_1)$. Damit ist $v_1 = f_0(v_0) + s(v_1)$.

4.6 Bemerkung

1) $\mathbb{Z} \overset{n\cdot}{\hookrightarrow} \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ spaltet nicht.

2) Ist $(\star)$ $M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} M_2$ eine kurze exakte Folge mit M_2 frei, also $M_2 \cong R[S]$, so spaltet $(\star)$. Siehe Lemma 3.2. Insbesondere ist $M_1 \cong M_0 \oplus M_2$.

4.7 Bemerkung

Der Rang für alle endlich erzeugten abelschen Gruppen ist additiv:

$$\operatorname{Rg}(A \oplus B) = \operatorname{Rg} A + \operatorname{Rg} B,$$

da $A \cong \mathbb{Z}^{\operatorname{Rg} A} \oplus TA$, $B \cong \mathbb{Z}^{\operatorname{Rg} B} \oplus TB$, also

$$A \oplus B \cong \mathbb{Z}^{\operatorname{Rg} A + \operatorname{Rg} B} \oplus \underbrace{TA \oplus TB}_{=T(A\oplus B)}$$

4.8 Proposition

Der Rang von endlich erzeugten abelschen Gruppen ist additiv für kurze exakte Folgen: Ist $(\star)$ $A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C$ eine kurze exakte Folge von endlich erzeugten abelschen Gruppen, so gilt $\operatorname{Rg} B = \operatorname{Rg} A + \operatorname{Rg} C$.

Beispiel
mit $\mathbb{Z}$

Beweis
Spaltet $(\star)$, so ist $B \cong A \oplus C$ und die Behauptung folgt aus der Bemerkung 4.7.

Wir können annehmen: $C = \mathbb{Z}^n \oplus TC$. Wir erhalten:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, equal] & p^{-1}(\mathbb{Z}^n) \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[d, hook, "i''"] & \mathbb{Z}^n \arrow[d, hook, "i'"] \\
A \arrow[r, "i"] & B \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[d, two heads, "p''"] & C \arrow[d, two heads, "p'"] \\
 & {}^{B}\!/\!_{p^{-1}(\mathbb{Z}^n)} \arrow[r, hook, two heads, "p' \circ p"] & TC
\end{tikzcd} \tag{$\star$}$$

Ist $p' \circ p(b) = 0$, so gibt es $v \in \mathbb{Z}^n$ mit $i'(v) = p(b)$. Nun gibt es $v' \in p^{-1}(\mathbb{Z}^n)$ mit $p(v') = v$. Es folgt

$$p(i''(v')) = p(b)$$

also $i''(v') - b \in \ker p = i(A)$. Da $i(A) \subseteq i''\big(p^{-1}(\mathbb{Z}^n)\big)$ folgt $b \in i''\big(p^{-1}(\mathbb{Z}^n)\big)$. In $(\star)$ sind die Spalten und Zeilen exakt. Da $\mathbb{Z}^n$ frei ist, spaltet $A \to p^{-1}(\mathbb{Z}^n) \to \mathbb{Z}^n$ und es gilt

$$\operatorname{Rg} A + \operatorname{Rg} C = \operatorname{Rg} A + n = \operatorname{Rg}\big(p^{-1}(\mathbb{Z}^n)\big)$$

Es bleibt zu zeigen: $\operatorname{Rg} B = \operatorname{Rg}\big(p^{-1}(\mathbb{Z}^n)\big)$.

Nebenbei: Ist $A' \subseteq B'$, so gilt $\operatorname{Rg} A' \leq \operatorname{Rg} B'$, denn

$$\operatorname{Rg} A' = \max\Big\{n' \,\Big|\, \mathbb{Z}^{n'} \cong C' \leq A'\Big\} \leq \max\Big\{n' \,\Big|\, \mathbb{Z}^{n'} \cong C' \leq B'\Big\} = \operatorname{Rg} B'.$$

Betrachte die kurze exakte Folge $p^{-1}(\mathbb{Z}^n) \to B \to {}^{B}\!/\!_{p^{-1}(\mathbb{Z}^n)}$. Wegen ${}^{B}\!/\!_{p^{-1}(\mathbb{Z}^n)} \cong TC$ gibt es ein k mit $k\big(b + p^{-1}(\mathbb{Z}^n)\big) = 0$ für alle $b \in B$. Also $kb \in p^{-1}(\mathbb{Z}^n)$. Es folgt $kB \leq p^{-1}(\mathbb{Z}^n) \leq B$. Ist $B \cong \mathbb{Z}^{\operatorname{Rg} B} + TB$, so ist $kB \cong (k\mathbb{Z})^{\operatorname{Rg} B} + T(kB)$ und $\operatorname{Rg} kB = n = \operatorname{Rg} B$. Mit der Nebenbemerkung folgt $\operatorname{Rg} p^{-1}(\mathbb{Z}^n) = \operatorname{Rg} B$. $\square$

Beweis mit Tensorprodukten (Skizze)

- $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z}\text{-}\mathrm{MOD} \to \mathbb{Q}\text{-}\mathrm{VR}$ ist ein Funktor.
- $\operatorname{Rg} A = \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} A$
  (a) $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} (X \oplus Y) = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} X \oplus \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} Y$
  (b) $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^n \cong \mathbb{Q}^n$
  (c) $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} T \cong 0$ für T ein Torsionsmodul.
- Ist $A \to B \to C$ eine kurze exakte Folge, so ist auch $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} A \to \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} B \to \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} C$ eine kurze exakte Folge.
- Jede kurze exakte Folge von $\mathbb{Q}$-Vektorräumen spaltet und es gilt $\dim_{\mathbb{Q}}(V \oplus W) = \dim_{\mathbb{Q}}(V) + \dim_{\mathbb{Q}}(W)$.

4.9 Definition

Sei (C_*, d_*) ein endlich erzeugter $\mathbb{Z}$-Kettenkomplex.

$$\chi(C_*, d_*) := \sum_{i=0}^{\infty} \operatorname{Rg}(C_i) = \sum_{i=0}^{n_0} \operatorname{Rg}(C_i)$$

heißt die **Eulercharakteristik** von (C_*, d_*). Dabei ist n_0 so gewählt, dass $C_n = 0$ für alle $n > n_0$.

4.10 Satz

Sei (C_*, d_*) ein endlich erzeugter $\mathbb{Z}$-Kettenkomplex. Dann gilt

$$\chi(C_*) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \operatorname{Rg} H_i(C_*, d_*).$$

Beweis
Sei $B_{n+1} := \operatorname{Im} \partial_{n+1} : C_{n+1} \to C_n$ und $Z_n := \ker \partial_n : C_n \to C_{n-1}$. Also $H_n(C_*, d_*) = {}^{Z_n}/_{B_{n+1}}$. Als Untermoduln von C_n sind Z_n und B_n endlich erzeugt (LA2). Insbesondere ist auch $H_n(C_*, d_*)$ endlich erzeugt und der Rang somit definiert. Auch B_{n+1} ist Untermodul des endlich erzeugten $\mathbb{Z}$-Moduls C_n und somit endlich erzeugt. Wir erhalten kurze exakte Folgen:

$$B_{n+1} \longrightarrow Z_n \longrightarrow H_n(C_*, d_*)$$

$$Z_n \hookrightarrow C_n \twoheadrightarrow B_n$$

Folglich gilt $\operatorname{Rg} Z_n = \operatorname{Rg} B_{n+1} + \operatorname{Rg} H_n(C_*, d_*)$ und $\operatorname{Rg} C_n = \operatorname{Rg} Z_n + \operatorname{Rg} B_n$. Also gilt

$$\begin{aligned}
\chi(C_*) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \operatorname{Rg} C_i &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \big(\operatorname{Rg} Z_i + \operatorname{Rg} B_i\big) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \Big(\operatorname{Rg} H_i(C_*, d_*) + \operatorname{Rg} B_{i+1} + \operatorname{Rg} B_i\Big) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \operatorname{Rg} H_i(C_*, d_*) + \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \operatorname{Rg} B_{i+1} + \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \operatorname{Rg} B_i \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \operatorname{Rg} H_i(C_*, d_*)
\end{aligned}$$ □

4.11 Korollar

Sei K ein endlicher, geordneter simplizialer Kettenkomplex. Dann gilt

$$\chi(K) = \sum_{i=1}^{\dim K} (-1)^i \operatorname{Rg} H_i(K; \mathbb{Z})$$

Beweis
Wende den Satz 4.10 auf den simplizialen Kettenkomplex von K an. Da

$$\operatorname{Rg} C_n(K; \mathbb{Z}) = \operatorname{Rg} \mathbb{Z}[\Sigma_n] = \#\ n\text{-Simplizes in } K$$

ist

$$\chi(K) = \chi\big(C_*(K; \mathbb{Z}), \partial_*\big) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \operatorname{Rg} H_i\big(C_*(K; \mathbb{Z}), \partial_*\big) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \operatorname{Rg} H_i(K; \mathbb{Z})$$ □

5 Singuläre Homologie

5.1 Definition

Sei X ein topologischer Raum. Sei $S_n(X)$ die Menge aller stetigen Abbildungen $\sigma : |\Delta^n| \to X$. Elemente von $S_n(X)$ heißen **singuläre Simplizes** in X. Sei R ein Ring. Der **$\mathbf{n}$-te (singuläre) Kettenmodul** von X über R ist

$$C_n(X;R) := R[S_n(X)]$$

5.2 Definition

Für $\sigma \in S_n(X)$ und $j \in \{0,\dots,n\}$ sei $\delta_j\sigma \in S_{n-1}(X)$ die Einschränkung von σ auf die j-te Seite von $|\Delta^n|$, also $\delta_j(\sigma) = \sigma \circ \iota_{n,j}$, wobei $\iota_{n,j} : \left|\Delta^{n-1}\right| \to |\Delta^n|$ die Inklusion der j-ten Seite ist:

$$\iota_{n,j}(x_0,\dots,x_{n-1}) = \big(x_0,\dots,x_{j-1},0,x_j,\dots,x_{n-1}\big)$$

5.3 Bemerkung

$\iota_{n,j} = |i_{n,j}|$ wobei $i_{n,j} : \Delta^{n-1} \to \Delta^n$ gegeben ist durch $i_{n,j}(k) = \begin{cases} k, & \text{falls } k < j \\ k+1, & \text{falls } k \geq j \end{cases}$

5.4 Definition

Die **$\mathbf{n}$-te singuläre Randabbildung** $\partial_n : C_n(X;R) \to C_{n-1}(X;R)$ ist definiert durch

$$\partial_n(\sigma) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \delta_j(\sigma).$$

5.5 Proposition

$$\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$$

Beweis

$$\begin{aligned}
\partial_{n-1}\partial_n(\sigma) = \partial_{n-1}\left(\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\delta_j(\sigma)\right) &= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n}(-1)^{j+k}\delta_k\delta_j(\sigma) \\
&= \sum_{0\leq k\leq j\leq n}(-1)^{k+j}\delta_k\delta_j(\sigma) + \sum_{0\leq j\leq k\leq n-1}(-1)^{k+j}\delta_k\delta_j(\sigma) \\
&\overset{\text{Lemma 5.6}}{=} \sum_{0\leq k\leq j\leq n}(-1)^{k+j}\delta_k\delta_j(\sigma) + \sum_{0\leq j\leq k\leq n-1}(-1)^{k+j}\delta_j\delta_{k+1}(\sigma) \\
&= \sum_{0\leq k\leq j\leq n}(-1)^{k+j}\delta_k\delta_j(\sigma) + \sum_{0\leq j\leq k\leq n}(-1)^{k-1+j}\delta_j\delta_k(\sigma) \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

5.6 Lemma

Für $0 \leq j \leq k \leq n-1$ und $\sigma \in S_n(X)$ ist $\delta_k\delta_j(\sigma) = \delta_j\delta_{k+1}(\sigma)$

Beweis
Es ist

$$\begin{aligned}\delta_k\delta_j(\sigma)(x,\dots,x_{n-2}) &= \delta_j(\sigma)\big(x_0,\dots,x_{k-1},0,x_k,\dots,x_{n-2}\big)\\ &= \big(x_0,\dots,x_{j-1},0,x_j,\dots,x_{k-1},0,x_k,\dots,x_{n-2}\big)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\delta_j\delta_{k+1}(\sigma)(x_0,\dots,x_{n-2}) &= \delta_{k+1}(\sigma)\big(x_0,\dots,x_{j-1},0,x_j,\dots,x_{n-2}\big)\\ &= \big(x_0,\dots,x_{j-1},0,x_j,\dots,x_{k-1},0,x_k,\dots,x_{n-2}\big)\end{aligned}$$ □

5.7 Definition

Sei X ein topologischer Raum. Die Homologie des **singulären Kettenkomplex** über R, $\big(C_*(X;R),\partial_*\big)$, heißt die **singuläre Homologie von** X mit Koeffizienten in R:

$$H_*(X;R) := H_*\big(C_*(X;R),\partial_*\big)$$

Für $R=\mathbb{Z}$ schreiben wir kürzer $C_*(X) := C_*(X;\mathbb{Z})$ und $H_*(X) := H_*(X;\mathbb{Z})$.

5.8 Definition

- Die Elemente von $C_n(X;R)$ heißen **$\mathbf{n}$-Ketten**.
- Die Elemente von $\operatorname{Im}\partial_{n+1} \subseteq C_N(X;R)$ heißen **$\mathbf{n}$-Ränder**.
- Die Elemente von $\ker\partial_n \subseteq C_N(X;R)$ heißen **$\mathbf{n}$-Zykel**.

Jeder n-Zykel $\sigma \in C_n(X;R)$ bestimmt eine **Homologieklasse** $[\sigma] := \sigma + \operatorname{Im}\partial_{n+1} \in H_n(X;R)$.

5.9 Beispiel

Ist $X = \{x_0\}$ der Ein-Punkt-Raum, so ist

$$H_*\big(\{x_0\};R\big) \cong \begin{cases} R, & \text{falls } *=0\\ 0, & \text{sonst}\end{cases}$$

Beweis
Es gibt für jedes n genau eine Abbildung $\sigma_n : |\Delta^n| \to \{x_0\}$ und diese ist stetig. Also $C_n(\{x_0\};R) = R[\sigma_n]$. Für alle j ist $\delta_j\sigma_n = \sigma_{n-1}$. Daher ist

$$\partial_n(\sigma_n) = \begin{cases} 0, & \text{falls } n \text{ ungerade}\\ \sigma_{n-1}, & \text{falls } n \text{ gerade}\end{cases}$$

Der singuläre Kettenkomplex von $\{x_0\}$ hat also folgende Gestalt:

$$C_0\big(\{x_0\};R\big) \xleftarrow{\;0\;} C_1\big(\{x_0\};R\big) \xleftarrow{\;\cong\;} C_2\big(\{x_0\};R\big) \xleftarrow{\;0\;} C_3\big(\{x_0\};R\big) \xleftarrow[\cong]{} \cdots$$

Es folgt

$$H_n\big(\{x_0\};R\big) \cong \begin{cases} R, & \text{falls } n=0\\ 0, & \text{sonst}\end{cases}$$ □

5.10 Proposition

1) Ist $X \neq \emptyset$, so ist $H_0(X) \neq 0$.

2) Ist X wegzusammenhängend, so gilt $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$

Beweis

1) Sei $\varepsilon : C_0(X) \to \mathbb{Z}$ definiert durch $\varepsilon\Big(\sum_{\sigma \in S_n(X)} r_\sigma \cdot \sigma\Big) = \sum_\sigma r_\sigma$. Dann ist $\varepsilon \circ \partial_1 : C_1(X) \to \mathbb{Z}$ trivial. Daher induziert ε eine Abbildung $\overline{\varepsilon} : H_0(X) \to \mathbb{Z}$. Ist $\sigma : \left|\Delta^0\right| \to X$ ein singulärer 0-Simplex, so gilt $\overline{\varepsilon}([\sigma]) = 1$. Daher ist $\overline{\varepsilon}$ surjektiv und $H_0(X) \neq 0$.

2) Sei $\sigma_0 : \left|\Delta^0\right| \to X$ ein fest gewählter singulärer 0-Simplex (also ein Punkt in X). Definiere $i : \mathbb{Z} \to C_0(X)$ durch $i(n) := n \cdot \sigma$ und $\overline{i} : \mathbb{Z} \to H_0(X)$ durch $\overline{i}(n) = [i(n)]$. Dann ist $\overline{\varepsilon} \circ \overline{i} = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$. Wir behaupten, dass auch $\overline{i} \circ \overline{\varepsilon} = \mathrm{id}_{H_0(X)}$. Dazu definieren wir $s : C_0(X) \to C_1(X)$ wie folgt:

   Zu jedem $\sigma \in C_0(X)$ wählen wir $s(\sigma) : \left|\Delta^1\right| \to X$ so, dass $\delta_0 s(\sigma) = \sigma$ und $\delta_1 s(\sigma) = \sigma_0$. Dies ist möglich, da X wegzusammenhängend ist: $s(\sigma)$ sei ein Weg von $\operatorname{Im} \sigma_0$ nach $\operatorname{Im} \sigma$. Es gilt nun

$$\partial \circ s(\sigma) = \sigma - \sigma_0 = \sigma - i \circ \varepsilon(\sigma)$$

   für jedes $\sigma \in S_0(X)$. Damit folgt $\partial \circ s = \mathrm{id}_{C_0(X)} - i \circ \varepsilon$. Also ist

$$\overline{i} \circ \overline{\varepsilon}(\sigma) = [i \circ \varepsilon(\sigma)] = \big[\sigma - \partial \circ s(\sigma)\big] = [\sigma]$$

   für jedes $\sigma \in C_0(X)$. Also $\overline{i} \circ \overline{\varepsilon} = \mathrm{id}_{H_0(X)}$. □

Index

Die Seitenzahlen *sind mit Hyperlinks zu den entsprechenden Seiten versehen, also anklickbar* ☝

Abbildungsverzeichnis

Todo's und andere Baustellen