



WESTFÄLISCHE  
WILHELMS-UNIVERSITÄT  
MÜNSTER



FACHBEREICH 10  
MATHEMATIK UND  
INFORMATIK

# Skript $K$ -Theorie und die Hopf-Invariante

Mitschrift der Vorlesung „ $K$ -Theorie und die Hopf-Invariante“ von Dr. Ulrich Penning

Jannes Bantje

13. April 2015

Aktuelle Version verfügbar bei



<https://github.com/JaMeZ-B/latex-wwu>

GitHub ist eine Internetplattform, auf der viele OpenSource-Projekte gehostet werden. Diese Plattform nutzen wir zur Zusammenarbeit, also findet man hier neben den PDFs auch die  $\text{T}_\text{E}$ X-Dateien. Außerdem ist über diese Plattform auch direktes Mitarbeiten möglich, siehe nächste Seite.



<https://uni-muenster.sciebo.de/public.php?service=files&t=965ae79080a473eb5b6d927d7d8b0462>

Sciebo ist ein Dropbox-Ersatz der Hochschulen in NRW, der von der Uni Münster in leitender Position auf Basis der OpenSource-Software Owncloud aufgebaut wurde. Wenn man auf den Link klickt, kann man die Freigabe zum eigenen Speicher hinzufügen und hat dann immer automatisch die aktuellste Version.



B6WH2DISQ5QVYIRYIEZSF4ZR2IDVKPN3I

BTSync ist ein peer-to-peer Dateisynchronisations-Tool. Dabei werden die Dateien nur auf den Computern der Teilnehmer an einer Freigabe gespeichert. Ein Mini-Computer ist permanent online, sodass jederzeit die aktuellste Version verfügbar ist. Clients gibt es für jedes Betriebssystem. Zugang ist über das obige „Secret“ bzw. den QR-Code möglich




## Vorlesungshomepage


<https://wwwmath.uni-muenster.de/reine/u/topos/lehre/SS2015/KTheorie-Hopf/Hopf.html>

Hier ist ein Link zur offiziellen Vorlesungshomepage.

## Vorwort — Mitarbeit am Skript

Dieses Dokument ist eine Mitschrift aus der Vorlesung „ $K$ -Theorie und die Hopf-Invariante, SoSe 2015“, gelesen von Dr. Ulrich Penning. Der Inhalt entspricht weitestgehend dem Tafelanschrieb. Für die Korrektheit des Inhalts übernehme ich keinerlei Garantie! Für Bemerkungen und Korrekturen – und seien es nur Rechtschreibfehler – bin ich sehr dankbar. Korrekturen lassen sich prinzipiell auf drei Wegen einreichen:


- Persönliches Ansprechen in der Uni, Mails an [✉ j.bantje@wwu.de](mailto:j.bantje@wwu.de) (gerne auch mit annotieren PDFs) oder Kommentare auf <https://github.com/JaMeZ-B/latex-wwu> .
- *Direktes* Mitarbeiten am Skript: Den Quellcode poste ich auf GitHub (siehe oben), also stehen vielfältige Möglichkeiten der Zusammenarbeit zur Verfügung: Zum Beispiel durch Kommentare am Code über die Website und die Kombination Fork + Pull Request. Wer sich verdient macht oder ein Skript zu einer Vorlesung, die ich nicht besuche, beisteuern will, dem gewähre ich gerne auch Schreibzugriff.

Beachten sollte man dabei, dass dazu ein Account bei [github.com](https://github.com)  notwendig ist, der allerdings ohne Angabe von persönlichen Daten angelegt werden kann. Wer bei GitHub (bzw. dem zugrunde liegenden Open-Source-Programm „git“) – verständlicherweise – Hilfe beim Einstieg braucht, dem helfe ich gerne weiter. Es gibt aber auch zahlreiche empfehlenswerte Tutorials im Internet.<sup>1</sup>

- *Indirektes* Mitarbeiten:  $\text{\TeX}$ -Dateien per Mail verschicken.

Dies ist nur dann sinnvoll, wenn man einen ganzen Abschnitt ändern möchte (zB. einen alternativen Beweis geben), da ich die Änderungen dann per Hand einbauen muss! Ich freue mich aber auch über solche Beiträge!

---

<sup>1</sup> zB. <https://try.github.io/levels/1/challenges/1> , ist auf Englisch, aber dafür interaktives LearningByDoing

## Inhaltsverzeichnis

<b>0. Einführung</b>	<b>1</b>
0.1. Definition: Reelle Divisionsalgebra . . . . .	1
0.2. Theorem 1.1 (Adams) . . . . .	1
0.3. Geplanter Verlauf der Vorlesung . . . . .	1
<b>1. Kohomologietheorien</b>	<b>2</b>
1.1. Definition: Kontravarianter Funktor . . . . .	2
1.2. Definition: Verallgemeinerte Kohomologietheorie . . . . .	2
1.3. Definition: Ko-Raumpaar und Kofaserung . . . . .	3
<b>2. Vektorbündel</b>	<b>4</b>
2.1. Definition: $K$ -Vektorbündel . . . . .	4
2.2. Definition: Vektorraumbündelmorphismus . . . . .	4
2.3. Definition: Pullback . . . . .	5
2.4. Lemma . . . . .	5
<b>A. Anhang</b>	<b>7</b>
A.1. Lokale Trivialität des Tangentialbündels auf $S^n$ . . . . .	7
<b>Index</b>	<b>A</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>B</b>
<b>Todo list</b>	<b>B</b>

## 0. Einführung

### 0.1. Definition

Eine  $\mathbb{R}$ -Algebra  $\mathcal{A}$  mit 1, die nicht notwendigerweise assoziativ ist, heißt **reelle Divisionsalgebra**, falls jedes Element  $a \neq 0$  invertierbar ist.

#### Beispiele

Die reellen Zahlen  $\mathbb{R}$ , die komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$ , die Quaternionen<sup>2</sup>  $\mathbb{H}$  und die sogenannten Cayley-Zahlen<sup>3</sup>  $\mathbb{O}$ . Dabei ist  $\mathbb{O} \cong \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$ , wobei die Multiplikation wie folgt definiert ist:

$$(a, b) \cdot (d, c) = (ac - d^*b, da + bc^*)$$

Dabei ist  $d = x + iy + jz + kw$  und  $d^* = x - iy - jz - kw$ .

### 0.2. Theorem 1.1 (Adams)


Folgende Aussagen sind äquivalent:


- (i)  $\mathbb{R}^n$  besitzt die Struktur einer reellen Divisionsalgebra.
- (ii) Entweder ist  $n = 1$  oder  $n \geq 2$  ist gerade und es gibt eine stetige Abbildung  $f: S^{2n-1} \rightarrow S^n$  mit der sogenannten **Hopf-Invariante** 1.
- (iii) Es gilt  $n \in \{1, 2, 4, 8\}$ .

### 0.3. Geplanter Verlauf der Vorlesung

Wir werden diesen Satz mit Hilfe der sogenannten  $K$ -Theorie beweisen. Dazu müssen wir aber einiges an Vorarbeit leisten:

1. Verallgemeinerte Kohomologietheorien
2. Vektorbündel
3.  $K$ -Theorie
  - 3.1. Produkte in  $K$ -Theorie
  - 3.2. Bott-Periodizität
  - 3.3. Thom-Isomorphismus
4. Hopf-Invariante und der Beweis des Satzes

<sup>2</sup> siehe auch <https://de.wikipedia.org/wiki/Quaternion> 

<sup>3</sup> auch Oktonionen oder reelle Oktaven; siehe [http://de.wikipedia.org/wiki/Oktave\\_\(Mathematik\)](http://de.wikipedia.org/wiki/Oktave_(Mathematik)) 

# 1. Kohomologietheorien

## 1.1. Definition

Seien  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{D}$  Kategorien. Ein **kontravarianter Funktor**  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$

- ordnet jedem Objekt  $c \in \text{Obj}(\mathcal{C})$  ein Objekt  $F(c) \in \text{Obj}(\mathcal{D})$  zu
- ordnet jedem Morphismus  $f: c \rightarrow c'$  in  $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(c, c')$  einen Morphismus  $F(f): F(c') \rightarrow F(c)$  zu

sodass folgende Eigenschaften gelten:

- Für  $f: c \rightarrow c'$  und  $g: c' \rightarrow c''$  gilt  $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$
- $F(\text{id}_c) = \text{id}_{F(c)}$

### Beispiel (Dualraumfunktor)

Sei  $K$  ein Körper. Sei  $\text{VEKT}_K$  die Kategorie der endlich dimensional  $K$ -Vektorräume und linearen Abbildungen. Sei  $*$ :  $\text{VEKT}_K \rightarrow \text{VEKT}_K$  gegeben durch  $V \mapsto \text{Hom}_K(V, K) = V^*$ . Für  $f: V \rightarrow W$  sei  $f^*: W^* \rightarrow V^*$ ,  $\varphi \mapsto \varphi \circ f$ . Dies ist ein kontravarianter Funktor. Insbesondere ist  $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$ .

## 1.2. Definition

Sei  $\text{Top}^2$  die Kategorie der Raumpaare  $(X, A)$ . Sei  $V: \text{Top}^2 \rightarrow \text{Top}^2$  der Funktor  $(X, A) \mapsto (A, \emptyset)$ . Sei  $R$  ein kommutativer Ring mit 1. Eine **verallgemeinerte Kohomologietheorie**  $h^* = (h^n, \partial^n)_{n \in \mathbb{Z}}$  mit Werten in  $R$ -Moduln ist ein kontravarianter Funktor  $h^*: \text{Top}^2 \rightarrow \text{Gr-}R\text{-Mod}$  zusammen mit einer natürlichen Transformation

$$\partial^*: h^* \circ V \rightarrow h^{*+1},$$

so dass die folgenden Eigenschaften gelten:

- a) **Homotopieinvarianz:** Seien  $f, g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  homotope Abbildungen von Raumpaaren. Dann gilt für alle  $n \in \mathbb{Z}$ :

$$h^n(f) = h^n(g)$$

- b) **Lange exakte Paarsequenz:** Sei  $(X, A)$  ein Raumpaar. Seien  $(A, \emptyset) \xrightarrow{i} (X, \emptyset)$  und  $j: (X, \emptyset) \rightarrow (X, A)$  die kanonischen Inklusionen. Dann ist die Folge

$$\dots \xrightarrow{\partial^{n-1}} h^n(X, A; R) \xrightarrow{h^n(j)} h^n(X, \emptyset; R) \xrightarrow{h^n(i)} h^n(A, \emptyset; R) \xrightarrow{\partial^n} h^{n+1}(X, A; R) \longrightarrow \dots$$

- c) **Ausschneidung:** Sei  $(X, A)$  ein Raumpaar,  $U \subset A$ , sodass  $\overline{U} \subseteq \mathring{A}$ . Dann ist die von der Inklusion  $\iota: (X \setminus U, A \setminus U) \hookrightarrow (X, A)$  induzierte Abbildung  $h^n(\iota): h^n(X, A; R) \rightarrow h^n(X \setminus U, A \setminus U; R)$  ein Isomorphismus.

### Bemerkungen

- (i) Wir schreiben kurz  $h^n(X, A)$  für  $h^n(X, A; \mathbb{Z})$  und  $f^*$  für  $h^n(f)$ , falls sich der Grad aus dem Kontext ergibt.

- (ii)  $h^n(\{\text{pt}\}) =: h^n$  heißen **Koeffizienten der Kohomologietheorie**.

- (iii) Einige Kohomologietheorien besitzen ein **externes Produkt**, das heißt eine natürliche Transformation

$$h^n(X, A; R) \times h^m(Y, B; R) \longrightarrow h^{n+m}((X, A) \times (Y, B); R)$$

die bilinear und assoziativ ist. Dabei ist  $(X, A) \times (Y, B) = (X \times Y, (A \times Y) \cup (X \times B))$ .

Diagramm hinzufügen

Falls ein externes Produkt für  $h^*$  existiert, dann ist  $h^*(X, A; R) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} h^n(X, A; R)$  ein **graduierter Ring** mit der Multiplikation

$$\begin{array}{ccc}
 h^n(X, A; R) \times h^m(X, A; R) & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & h^{n+m}(X, A; R) \\
 \searrow \times & & \nearrow h^{n+m}(\Delta) \\
 & h^{n+m}((X, A) \times (X, A); R) &
 \end{array}$$

### 1.3. Definition

Ein Raumpaard  $(X, A)$  heißt **Ko-Raumpaard**, falls

- $X$  ein kompakter Hausdorffraum ist
- $A \subset X$  abgeschlossen ist
- die Inklusion  $A \hookrightarrow X$  eine **Kofaserung** ist, das heißt für jede stetige Abbildung  $f: A \times I \cup X \times \{0\} \rightarrow Y$  existiert  $H: X \times I \rightarrow Y$ , sodass das folgende Diagramm kommutiert:

*Homotopieerweiterungseigenschaft*

$$\begin{array}{ccc}
 A \times I \cup X \times \{0\} & \xrightarrow{f} & Y \\
 \downarrow & \nearrow H & \\
 X \times I & & 
 \end{array}$$

Mit  $\text{Top}_{\text{Kof}}^2 \subseteq \text{Top}^2$  bezeichnen wir die Kategorie der Ko-Raumpaare und stetigen Abbildungen.

#### Beispiel

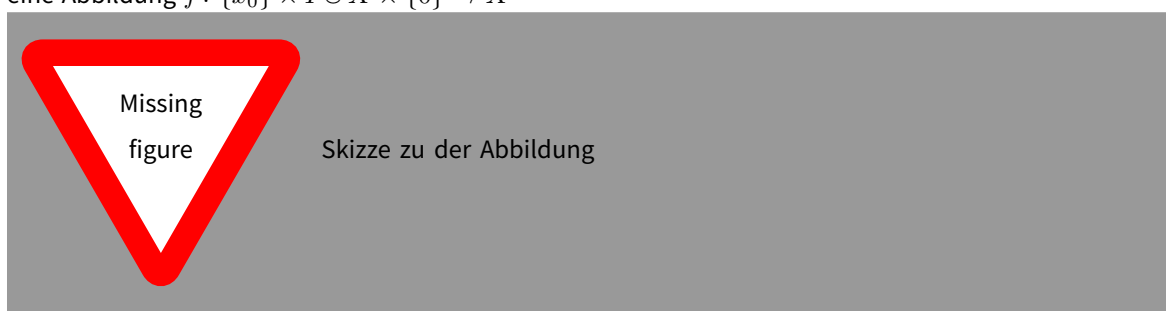
- Sei  $X$  ein kompakter CW-Komplex,  $A \subset X$  ein Unterkomplex. Dann ist  $\iota: A \hookrightarrow X$  eine Kofaserung.
- $X$  eine kompakte Mannigfaltigkeit,  $A$  eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit.

#### Bemerkung

Falls  $(X, \{x_0\})$  ein Objekt in  $\text{Top}_{\text{Kof}}^2$  ist, dann heißt  $X$  **wohlpunktisiert**.

#### Beispiel

$X = [-1, 1] \times [-1, 1]$ ,  $x_0 = (0, 0)$ ,  $Y = X$ . Sei  $\gamma: I \rightarrow X$  ein Pfad mit  $\gamma(0) = (0, 0) = x_0$ . Wir erhalten eine Abbildung  $f: \{x_0\} \times I \cup X \times \{0\} \rightarrow X$



Kofaserung heißt in diesem Fall, dass der Raum  $X$  entlang des Pfades „mitgezogen“ werden kann.

## 2. Vektorbündel

Sei für den Verlauf dieses Kapitels  $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ .

### 2.1. Definition

Sei  $X$  ein topologischer Raum. Eine stetige surjektive Abbildung  $p: E \rightarrow X$  heißt  $K$ -**Vektorbündel**, falls gilt:

- a)  $p^{-1}(\{x\}) =: E_x$  ist ein  $K$ -Vektorraum für alle  $x \in X$ .  $E_x$  heißt die **Faser** von  $E$  über  $x$ .
- b) Für alle  $x \in X$  gibt es eine Umgebung  $U$ , ein  $n \in \mathbb{N}$  und einen Homöomorphismus  $\varphi_U: p^{-1}(U) \rightarrow U \times K^n$ , sodass das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi_U} & U \times K^n \\ & \searrow p \quad \swarrow \text{pr}_U & \\ & U & \end{array}$$

und die Einschränkung  $\varphi_U|_{E_x}: E_x \rightarrow K^n$  für alle  $x \in U$  ein Isomorphismus von  $K$ -Vektorräumen ist. Diese Eigenschaft wird oft als **lokale Trivialität** bezeichnet.

#### Beispiel

- Sei  $X$  ein beliebiger topologischer Raum. Dann ist  $X \times K^n \xrightarrow{\text{pr}_X} X$  das **triviale Vektorbündel** über  $X$ .
- Betrachte  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ . Sei  $TS^n = \{(x, v) \in S^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, v \rangle = 0\}$ . Definiere  $p: TS^n \rightarrow S^n$  durch  $(x, v) \mapsto x$ . Damit erhalten wir ein  $\mathbb{R}$ -Vektorbündel über  $S^n$  (Tangentialbündel).

Übung: Zeige lokale Trivialität. Siehe Anhang A.1

#### Bemerkung

Die Abbildung  $x \mapsto \dim_K(E_x)$  ist stetig, also lokal konstant, das heißt über einem zusammenhängenden Raum hat ein Vektorbündel konstante Faserdimension.

### 2.2. Definition

Seien  $p: E \rightarrow X$  und  $p': E' \rightarrow X'$  zwei  $K$ -Vektorbündel. Ein **Morphismus von Vektorbündeln** oder **Vektorraumbündelmorphismus** von  $E$  nach  $E'$  ist ein Paar  $(f, \bar{f})$  von stetigen Abbildungen  $\bar{f}: E \rightarrow E'$  und  $f: X \rightarrow X'$ , sodass das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\bar{f}} & E' \\ p \downarrow & & \downarrow p' \\ X & \xrightarrow{f} & X' \end{array}$$

und sodass die Einschränkung  $\bar{f}|_{E_x}: E_x \rightarrow E'_{f(x)}$  für jedes  $x \in X$  ein  $K$ -Vektorraumhomomorphismus ist. Wir bezeichnen die Kategorie der endlich dimensionalen  $K$ -Vektorraumbündel über einem topologischen Raum  $X$  zusammen mit den Morphismen  $(\text{id}_X, \bar{f})$  mit  $\text{VEKT}_K(X)$ .



### 2.3. Definition

Seien  $X$  und  $Y$  topologische Räume. Sei  $f: Y \rightarrow X$  eine stetige Abbildung und sei  $p: E \rightarrow X$  ein Vektorbündel. Dann heißt

$$f^*E := \{(y, v) \in Y \times E \mid f(y) = p(v)\}$$

zusammen mit der Abbildung  $q: f^*E \rightarrow Y$ ,  $(y, v) \mapsto y$  der **Pullback** von  $p: E \rightarrow X$  entlang von  $f$ . Mit  $\bar{f}(y, v) = v$  kommutiert das folgende Diagramm

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \xrightarrow{\bar{f}} & E \\ q \downarrow & & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

### 2.4. Lemma

- $q: f^*E \rightarrow Y$  ist ein Vektorbündel und  $(\bar{f}, f)$  ist ein Morphismus von Vektorbündeln.
- $q: f^*E \rightarrow Y$  ist durch die folgende universelle Eigenschaft eindeutig (bis auf Isomorphie) charakterisiert:

Sei  $r: F \rightarrow Z$  ein Vektorbündel,  $(\bar{g}, g)$  ein Morphismus zwischen  $r: F \rightarrow Z$  und  $p: E \rightarrow X$ . Sei weiter  $g': Z \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung mit  $f \circ g' = g$ . Dann existiert genau ein  $G: F \rightarrow f^*E$ , so dass  $(G, g')$  ein Morphismus von Vektorbündeln ist und weiter  $(\bar{f}, f) \circ (G, g') = (\bar{g}, g)$  gilt.

$$\begin{array}{ccccc} F & & & & \\ \downarrow r & \searrow \exists! G & & \searrow \bar{g} & \\ Z & & f^*E & \xrightarrow{\bar{f}} & E \\ & \searrow g' & \downarrow q & \searrow g & \downarrow p \\ & & Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$




## A. Anhang

### A.1. Lokale Trivialität des Tangentialbündels auf $S^m$

Übung einfügen



## Index

Die **Seitenzahlen** sind mit *Hyperlinks* zu den entsprechenden Seiten versehen, also anklickbar 

Ausschneidung, 2

externes Produkt, 2

Faser, 4

graduierter Ring, 3

Homotopieinvarianz, 2

Hopf-Invariante, 1

Ko-Raumpaar, 3

Koeffizienten der Kohomologietheorie, 2

Kofaserung, 3

kontravarianter Funktor, 2

Lange exakte Paarsequenz, 2

Morphismus  
von Vektorbündeln, 4

reelle Divisionsalgebra, 1

Vektorbündel, 4

Vektorraumbündelmorphismus, 4

verallgemeinerte Kohomologietheorie, 2

wohlpunktiert, 3

## Abbildungsverzeichnis

### To-do's und andere Baustellen

Diagramm hinzufügen	2
Figure: Skizze zu der Abbildung	3
Übung einfügen	7