Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

Skript Analysis II

Mitschrift der Vorlesung „Analysis II“ von Prof. Dr. Wilhelm Winter

Jannes Bantje

19. Januar 2014

Erstellt mit LaTeX

Inhaltsverzeichnis

1 Funktionenfolgen und Potenzreihen

1.1 Definition

Sei M eine Menge und $f : M \to \mathbb{C}$, $f_n : M \to \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ Funktionen

a) $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ punktweise, falls für jedes $x \in M$ $f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$ gilt. D.h.

$$\forall x \in M \, \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

b) $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ gleichmäßig, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} : \forall x \in M, n \geq N : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

c) $\|f\|_{\infty,M} := \sup \big\{ |f(x)| \mid x \in M \big\} \in [0, \infty)$

1.2 Bemerkung

(i) gleichmäßige Konvergenz $\Longrightarrow$ punktweise Konvergenz

(ii) $\|f\|_{\infty,M} < \infty \iff f$ beschränkt

(iii) $\|.\|_{\infty,M}$ ist eine Norm auf $\{f : M \to \mathbb{C} \mid f \text{ beschränkt}\}$ (Übung)

V Vektorraum über $\mathbb{K}$. $\|.\| : V \to \mathbb{R}_+$ ist eine **Norm** falls gilt:

(i) $\|v\| = 0 \iff v = 0$

(ii) $\|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$

(iii) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

(iv) $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ gleichmäßig $\iff \|f_n - f\|_{\infty,M} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ (Übung)

1.3 Beispiele

(i) f_n aus Abb. 1 konvergiert punktweise gegen 0, aber f_n konvergiert nicht gleichmäßig gegen 0, denn

$$\|f_n - 0\|_{\infty,M} = 1 \;\; \forall n \in \mathbb{N}^*$$

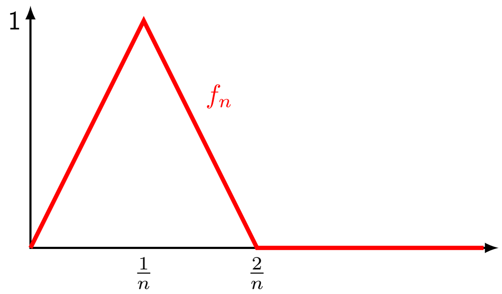


Abbildung 1: punktweise konvergierende Funktionenfolge

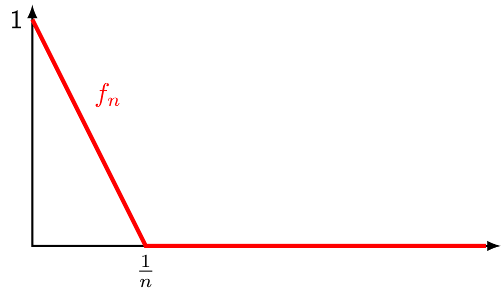
(ii) f_n aus Abb.2 konvergiert punktweise gegen f, wo

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x > 0 \\ 1, & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

f_n konvergiert nicht gleichmäßig gegen f (warum?)

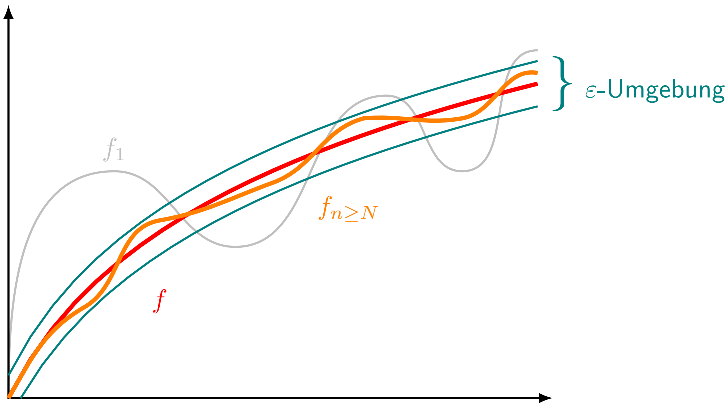
f_n sind stetig, f ist nicht stetig!

Abbildung 2: Folge stetiger Funktionen



(iii)

Abbildung 3: Veranschaulichung von gleichmäßiger Konvergenz



1.4 Satz

Sei $M \subset \mathbb{C}$ eine Menge und $f : M \to \mathbb{C}$, $f_n : M \to \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ Funktionen. Falls die f_n stetig sind und gleichmäßig gegen f konvergieren, so ist f stetig.

Beweis
Sei $x_0 \in M$. Sei $\varepsilon > 0$. $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ gleichmäßig $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall x \in M : |f_N(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. f_N ist stetig in x_0

$$\Rightarrow \exists \delta > 0 : |f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}, \text{ falls } |x - x_0| < \delta$$

Für $x \in M$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

□

1.5 Satz

Sei M eine Menge. Seien $f_k : M \to \mathbb{C}, k \in \mathbb{N}$ Funktionen mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_{\infty,M} < \infty$$

Dann konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ absolut und gleichmäßig gegen eine Funktion $f : M \to \mathbb{C}$, d.h. $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ konvergiert absolut für jedes $x \in M$ und $\sum_{k=0}^{n} f_k \xrightarrow{n\to\infty} f$ gleichmäßig.

Beweis
Für $x \in M$ gilt $|f_k(x)| \le \|f_k\|_{\infty,M}\ \forall k \in \mathbb{N}$. Nach Majorantenkriterium konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ absolut. Definiere $f : M \to \mathbb{C}$ durch $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \in \mathbb{C}$. Sei $\varepsilon > 0$.

$$\exists N \in \mathbb{N} : \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_{\infty,M} < \varepsilon \text{ falls } n \ge N \qquad \text{(warum?)}$$

Für $x \in M$ und $n \ge N$ gilt dann

$$\left|-\sum_{k=0}^{n} f_k(x) + f(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\right| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_{\infty,M} < \varepsilon$$

□

1.6 Beispiel

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2}$ konvergiert absolut und gleichmäßig auf $\mathbb{R}$, denn

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\|\frac{\cos(kx)}{k^2}\right\|_{\infty,\mathbb{R}} \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty \qquad \text{(harmonische Reihe)}$$

1.7 Satz

Seien $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ stetig. f_n konvergiere gleichmäßig gegen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \left(= \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

Beweis
Nach 1.4 ist f stetig, also integrierbar. Es gilt

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_a^b \big(f(x) - f_n(x)\big)\,\mathrm{d}x\right| \\ &\le \int_a^b |f(x) - f_n(x)|\,\mathrm{d}x \\ &\le \int_a^b \|f - f_n\|_{\infty,[a,b]}\,\mathrm{d}x \\ &= \|f - f_n\|_{\infty,[a,b]}(b-a) \xrightarrow{n\to\infty} 0\end{aligned}$$

□

1.8 Satz

Seien $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ stetig differenzierbar. f_n konvergiere gegen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und f_n' konvergiere gleichmäßig gegen ein $g : [a,b] \to \mathbb{R}$. Dann ist f stetig differenzierbar und es gilt

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) = g(x) \qquad \text{für } x \in [a,b]$$

d.h.

$$\frac{\mathrm{d}\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n\right)}{\mathrm{d}x}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{d}f_n}{\mathrm{d}x}(x)$$

Beweis
Nach Satz 1.4 ist g stetig, also integrierbar. Für $x \in [a,b]$ gilt

$$f(x) - f(a) \xleftarrow{n\to\infty} f_n(x) - f_n(a) = \int_a^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow{n\to\infty} \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{(Satz 1.7)}$$

$\Rightarrow$ Hauptsatz

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{also} \qquad f'(x) = g(x) \qquad \text{für } x \in [a,b]$$

1.9 Definition

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

heißt **Potenzreihe** mit Mittelpunkt z_0 und Koeffizienten $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$r := \sup\left\{ |z-z_0| \,\middle|\, \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \text{ konvergiert }, z \in \mathbb{C} \right\} \in [0,\infty]$$

heißt **Konvergenzradius** der Potenzreihe.

1.10 Satz

Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ habe den Konvergenzradius $r > 0$. Sei $0 < \rho < r$. Dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ absolut gleichmäßig auf

$$\overline{B}(z_0,\rho) := \{ z \in \mathbb{C} \,|\, |z-z_0| \le \rho \}$$

D.h. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ konvergiert absolut für $z \in \overline{B}(z_0,\rho)$ und $\sum_{n=0}^{k} a_n(z-z_0)^n$ konvergiert gleichmäßig für $k \to \infty$. (siehe auch 1.5)

Beweis
$\rho < r = \sup\{ |z-z_0| \,|\, \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \text{ konvergiert}\}$

$$\Rightarrow \exists z_1 \in \mathbb{C} \text{ mit } |z_1 - z_0| > \rho \text{ und } \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_1-z_0)^n \text{ konvergiert}$$

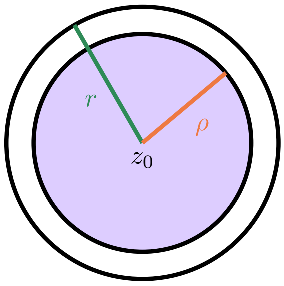


Abbildung 4: Veranschauchlichung von 1.10 in der komplexen Ebene

$\Rightarrow \exists K \in \mathbb{R}_+$ mit $|a_n(z_1 - z_0)^n| \leq K$ für $n \in \mathbb{N}$. Für $z \in \overline{B}(z_0, \rho)$ gilt nun

$$\begin{aligned} |a_n(z - z_0)^n| &= |a_n(z_1 - z_0)^n| \cdot \frac{|z - z_0|^n}{|z_1 - z_0|^n} \\ &\leq K \cdot \frac{\rho^n}{|z_1 - z_0|^n} \\ &= K \cdot \theta^n \qquad \text{mit } \theta := \frac{\rho}{|z_1 - z_0|} < 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \|a_n(z - z_0)^n\|_{\infty, \overline{B}(z_0,\rho)} \leq K \cdot \theta^n$. Nach dem Majorantenkriterium folgt dann

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n(z - z_0)^n\|_{\infty, \overline{B}(z_0,\rho)} < \infty \qquad \text{(geometrische Reihe)}$$

Satz 1.5 $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ konvergiert absolut und gleichmäßig auf $\overline{B}(z_0, \rho)$. $\square$

1.11 Satz

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$. Dann ist $f : (x_0 - r, x_0 + r) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ unendlich oft differenzierbar; es gilt

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (x - x_0)^{n-1} \qquad \text{und} \qquad a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

Ableitung erfolgt gliedweise

Beweis
Sei $\overline{x} \in (x_0 - r, x_0 + r)$. Wähle $0 < \rho < r$ mit $\overline{x} \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$. Wähle $x_1 \in \mathbb{R}$ mit $\rho < |x_0 - x_1| < r$. Sei $K \in \mathbb{R}$ wie im Beweis 1.10, d.h. mit $|a_n(x_1 - x_0)^n| \leq K, n \in \mathbb{N}$. Dann gilt für $x \in \overline{B}(x_0, \rho)$

$$\begin{aligned} \left|n \cdot a_n(x - x_0)^{n-1}\right| &= \frac{|n \cdot a_n(x_1 - x_0)^n|}{|x_1 - x_0|} \cdot \frac{|x - x_0|^{n-1}}{|x_1 - x_0|^{n-1}} \\ &\leq \frac{n \cdot K}{\rho} \left(\frac{\rho}{|x_1 - x_0|}\right)^{n-1} \quad =: \theta^{n-1} < 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left\|n \cdot a_n(x - x_0)^{n-1}\right\|_{\infty, \overline{B}(x_0,\rho)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot K}{\rho} \theta^{n-1} < \infty$ (Quotientenkriterium)
Mit Satz 1.5 folgt: $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n(x - x_0)^{n-1}$ konvergiert absolut und gleichmäßig auf $[x_0 - \rho, x_0 + \rho]$.
Mit Satz 1.8 folgt weiter

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} (a_n(x - x_0)^n) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n(x - x_0)^{n-1}$$

Rest: Induktion und Einsetzen $(x \rightsquigarrow x_0)$. $\square$

1.12 Satz (Abelscher Grenzwertsatz)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Wenn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ für alle $x \in [0,1]$ und ist stetig auf $[0,1]$.

Beweis
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hat Konvergenzradius $r \geq 1$, denn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n 1^n$ konvergiert. Aus Satz 1.10 folgt: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergiert gleichmäßig auf $[0, 1-\gamma]$ für jedes $\gamma > 0$.
$\Longrightarrow f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ist wohldefiniert und $f|_{[0,1-\gamma]}$ ist stetig für jedes $\gamma > 0$. Dann gilt auch $f|_{[0,1)}$ ist stetig.

Es bleibt zu zeigen: f ist stetig in 1. Setze $s_k := \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$ für $k \geq -1$. Dann $s_{-1} = f(1)$ und $s_k - s_{k-1} = \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n - \sum_{n=k}^{\infty} a_n = -a_k$, $k \in \mathbb{N}$. Außerdem gilt: $\lim_{k\to\infty} s_k = 0$ (denn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert). Also existiert $S \in \mathbb{R}_+^*$ mit $|s_k| \leq S, k \in \mathbb{N}$.

$$\Rightarrow \left|\sum_{k=0}^{\infty} s_k x^k\right| \overset{\text{Majorantenkrit.}}{\leq} \sum_{k=0}^{\infty} S\,|x|^k = S \cdot \sum_{k=0}^{\infty} |x|^k \overset{\text{geom. Reihe}}{<} \infty \quad \text{für } |x| < 1$$

Dann gilt für $|x| < 1$:

$$\begin{aligned}
(1-x)\left(\sum_{k=0}^{\infty} s_k x^k\right) &= \sum_{k=0}^{\infty} s_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} s_k x^{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} s_k x^k - \sum_{k=1}^{\infty} s_{k-1} x^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} s_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} s_{k-1} x^k + s_{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{(s_k - s_{k-1})}_{-a_k} x^k + \underbrace{s_{-1}}_{f(1)} \\
&= -f(x) + f(1)
\end{aligned}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$, O.E. $\varepsilon \leq 1$. Wähle $K \in \mathbb{N}^*$ so dass $|s_k| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ für $k \geq K$ und setze $\delta := \frac{\varepsilon}{2S\cdot K}$. Für $x \in (1-\delta, 1)$ gilt dann

$$\begin{aligned}
|f(1) - f(x)| = \left|(1-x)\sum_{k=0}^{\infty} s_k x^k\right| &\leq (1-x)\sum_{k=0}^{\infty} |s_k|\, x^k \\
&= (1-x)\left(\sum_{k=0}^{K-1} |s_k|\, x^k + \sum_{k=K}^{\infty} |s_k|\, x^k\right) \\
&\leq (1-x)\left(K \cdot S + \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=K}^{\infty} x^k\right) \\
&\leq (1-x)\left(K \cdot S + \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right) \\
&= (1-x)K\cdot S + \frac{\varepsilon}{2}(1-x)\sum_{k=0}^{\infty} x^k \qquad \text{(geometrische Reihe)} \\
&= (1-x)K\cdot S + \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \delta \cdot K \cdot S + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2SK}\cdot K \cdot S + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

□

1.13 Beispiele

(i) Für $-1 < x \leq 1$ gilt

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \mp \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$$

Insbesondere $\ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \mp \dots$

Beweis

Für $|x| < 1$ gilt

$$\ln(1+x) = \ln(1+x) - \ln(1+0) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1}{1-(-t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n\right) \mathrm{d}t \qquad \text{da } t \leq 1$$

Nach Satz 1.10 konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n$ gleichmäßig auf $\big[-|x|, |x|\big]$ (Konvergenzradius ≤ 1)
Nach Satz 1.7 gilt für $|x| < 1$

$$\begin{aligned}
\ln(1+x) = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n\right) \mathrm{d}t &= \int_0^x \left(\lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} (-1)^n t^n\right) \mathrm{d}t \\
&= \lim_{k\to\infty} \left(\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{k} (-1)^n t^n\right) \mathrm{d}t\right) = \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{n=0}^{k} (-1)^n \int_0^x t^n \,\mathrm{d}t\right) \\
&= \lim_{k\to\infty} \left(\left| \sum_{n=0}^{k} (-1)^n \frac{1}{n+1} t^{n+1} \right|_0^x \right) \\
&= \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{n=0}^{k} (-1)^n \frac{1}{n+1} x^{n+1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}
\end{aligned}$$

Für $x = 1$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ konvergiert $\overset{\text{Satz 1.12}}{\Longrightarrow}$ $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$ ist stetig auf $[0,1]$ aber $\ln(1+x)$ ist ebenfalls stetig auf $[0,1]$ und $f(x) = \ln(1+x)$ auf $[0,1)$. Dann gilt auch

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \mp \dots = f(1) = \ln(1+1) = \ln(2)$$

□

(ii) Für $|x| \leq 1$ gilt

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \mp \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

Insbesondere $\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \mp \dots$

Beweis

Für $|x| < 1$ gilt nach Analysis I, 13.16(v):

$$\begin{aligned}
\arctan(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1}{1-(-t^2)}\,\mathrm{d}t &= \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}\right) \mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left| \frac{1}{2n+1} t^{2n+1} \right|_0^x \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}
\end{aligned}$$

Für $x = 1$ gilt: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ konvegiert $\overset{1.12}{\Leftrightarrow}$ $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ ist stetig auf $[0,1]$

$$a_m = \begin{cases} 0, & \text{falls } m \text{ gerade} \\ \frac{(-1)^n}{2n+1}, & \text{falls } m = 2n+1 \text{ ungerade} \end{cases} \qquad f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$$

aber $\arctan(x)$ ist auch stetig auf $[0,1]$ und $f(x) = \arctan(x)$ auf $[0,1)$. Daher gilt auch

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \mp \ldots = f(1) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

Für $x = -1$ gilt: $f(-1) = -f(1) = -\arctan(1) = \arctan(-1)$. (vgl. Anal, Beispiel 7.8) □

1.14 Satz (Taylorformel)

Sei I ein Intervall. $f : I \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal stetig differenzierbar. Dann gilt für $x, x_0 \in I$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_{n+1}(x)$$

wo

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \tag{*}$$

Außerdem existiert ein ξ zwischen x und x_0 mit

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \tag{**}$$

Beweis
I.A. ($n = 0$): $f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(t)\,\mathrm{d}t$ nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

I.S. ($n \to n+1$): $(*)$ gelte für ein $n \in \mathbb{N}$. Partielle Integration liefert

$$\begin{aligned}
R_{n+1}(x) &= \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} \underbrace{(x-t)^n}_{u'(t)} \underbrace{f^{(n+1)}(t)}_{v(t)}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{1}{n!}\cdot\frac{(-1)}{n+1}(x-t)^{n+1} f^{(n+1)}(t)\right]_{x_0}^{x} - \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}\frac{(-1)}{n+1}(x+t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} f^{(n+1)}(x_0) + \frac{1}{(n+1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} + R_{n+2}(x)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow (*)$ für $n+1 \in \mathbb{N}$

Zweiter Teil $g(t) := (x-t)^n$ wechselt nicht das Vorzeichen zwischen x und x_0.
Mittelwertsatz d. Integralrechnung $\Longrightarrow \exists \xi$ zwischen x und x_0 mit

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}\underbrace{(x-t)^n}_{g} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)\int_{x_0}^{x}(x-t)^n\,\mathrm{d}t \\
&= f^{(n+1)}(\xi)\frac{1}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}
\end{aligned}$$

□

1.15 Definition

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar, $x_0 \in I$.

$$T_f(x) := \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

heißt **Taylorreihe** von f mit Entwicklungspunkt x_0.

1.16 Bemerkung

(i) Der Konvergenzradius von T_f ist nicht notwendig > 0

(ii) Auch wenn T_f konvergiert, gilt nicht immer $T_f(x) = f(x)$

(iii) $T_f(x) = f(x)$ genau dann, wenn $R_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$

(iv) Falls $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ gilt für $x \in I$, so ist $T_f(x) = f(x)$.
(folgt aus Satz 1.11, denn $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$)

1.17 Beispiel

(i) $\exp(x) = T_{\exp}(x)$

(ii) $\sin(x) = T_{\sin}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $\qquad \cos(x) = T_{\cos}(x)$

2 Metrische Räume, Topologie

2.1 Definition

Sei X eine Menge. Eine Metrik d auf X ist eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ mit

(i) $d(x, y) = 0 \iff x = y \ , \ x, y \in X$

(ii) $d(x, y) = d(y, x) \ , \ x, y \in X$

(iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \ , \ x, y, z \in X$

(X, d) heißt **metrischer Raum**.

2.2 Beispiele

(i) $(\mathbb{K}, d)$ mit $d(x, y) := |x - y|$

(ii) „französische Eisenbahnmetrik“: $d(x, y) :=$ Strecke($x \to$ Paris) + Strecke(Paris $\to y$)

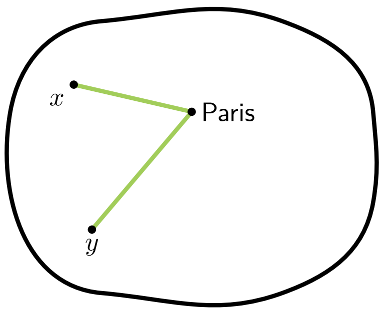


Abbildung 5: eine exakte Darstellung von Frankreich ...

(iii) (X, d) metrischer Raum, $A \subset X$. Dann ist $(A, d|_{A\times A})$ wieder ein metrischer Raum. Wir schreiben oft auch (A, d).

(iv) $(V, \|.\|)$ normierter Vektorraum, dann ist (V, d) ein metrischer Raum mit

$$d(x, y) := \|x - y\|$$

(v) $(\mathbb{K}^n, \|.\|_{\max})$ mit $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$

$$\|\underline{x}\|_{\max} := \max\left\{|x_1|, \dots, |x_n|\right\}$$

ist normierter Raum (Übung)

(vi) $(\mathbb{K}^n, \|.\|_1)$ mit

$$\|\underline{x}\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

ist normierter Raum (Übung)

(vii) $(\mathbb{K}^n, \|.\|_2)$ mit

$$\|\underline{x}\|_2 := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

ist normierter Raum:

1.
$$\|\underline{x}\|_2 = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 = 0 \Leftrightarrow |x_i| = \ldots = |x_n| = 0 \Leftrightarrow x_1 = \ldots = x_n = 0 \Leftrightarrow \underline{x} = 0$$

2.
$$\|\lambda \underline{x}\|_2 = |\lambda| \cdot \|\underline{x}\|_2, \lambda \in \mathbb{K}, \underline{x} \in \mathbb{K}^n$$

3. $\triangle$-Ungleichung:

   A. $0 \neq \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{K}^n$ mit $\|\underline{u}\|_2 = \|\underline{v}\|_2 = 1$
   $$\Rightarrow 0 \leq \sum_{i=1}^{n} (|u_i| - |v_i|)^2 = \sum_{i=2}^{n} |u_i|^2 - 2\sum_{i=1}^{n} |u_i| \cdot |v_i| + \sum_{i=1}^{n} |v_i|^2 = 1 - 2\sum_{i=1}^{n} |u_i| \cdot |v_i| + 1$$
   $$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |u_i| \cdot |v_i| \leq 1$$

   B. $0 \neq \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{K}^n$ beliebig.
   $\Rightarrow$ für $\underline{u} := \frac{1}{\|\underline{x}\|_2} \cdot \underline{x}$, $\underline{v} := \frac{1}{\|\underline{y}\|_2} \cdot \underline{y}$ gilt
   $$\|\underline{u}\|_2 = \|\underline{v}\|_2 = 1 \Longrightarrow \left| \sum_{1=1}^{n} \frac{x_i}{\|\underline{x}\|_2} \frac{y_i}{\|\underline{y}\|_2} \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i|}{\|\underline{x}\|_2} \frac{|y_i|}{\|\underline{y}\|_2} \leq 1$$
   Cauchy-Schwarz-Ungleichung (trivial für $\underline{x} = 0$ oder $\underline{y} = 0$):
   $$\left| \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right| \leq \|\underline{x}\|_2 \|\underline{y}\|_2$$

   C.
   $$\begin{aligned} \|\underline{x} + \underline{y}\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i|^2 &\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 + 2|x_i||y_i| + |y_i|^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 + 2 \cdot \|\underline{x}\|_2 \|\underline{y}\|_2 + \sum_{i=1}^{n} |y_i|^2 \\ &= \|\underline{x}\|_2 + 2 \cdot \|\underline{x}\|_2 \|\underline{y}\|_2 + \|\underline{y}\|_2 \\ &= \left(\|\underline{x}\|_2 + \|\underline{y}\|_2\right)^2 \Longrightarrow \|\underline{x} + \underline{y}\|_2 < \|\underline{x}\|_2 + \|\underline{y}\|_2 \end{aligned}$$

(viii) $(\mathbb{K}^n, \|.\|_p)$ mit $\|\underline{x}\|_p := (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ für $1 \leq p < \infty$ ist ein normierter Raum (Übung?)

(ix) $\left(l([0,1]), \|.\|_p\right)$ mit $\|f\|_p := \left(\int_0^1 |f(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ (Übung)

(x) Betrachte $(\mathbb{K}^n, \|.\|_p)$ für $1 \leq p \leq \infty$ in Abbildung 6:
$$B(0,r) := \left\{ \underline{x} \in \mathbb{K}^n \,\middle|\, \|\underline{x}\|_p < r \right\}$$

(xi) Sei X eine Menge, dann definiere
$$d(x,y) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x = y \\ 1, & \text{falls } x \neq y \end{cases}$$
Dies ist die **diskrete Metrik** auf X.

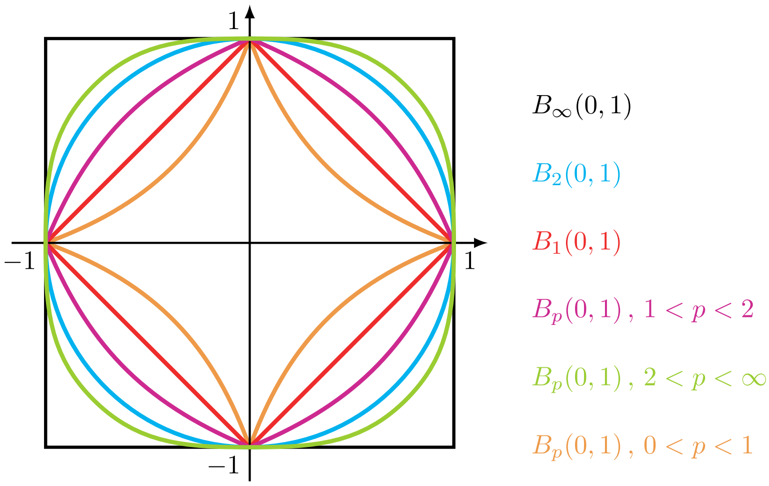


Abbildung 6: zu 2.2 (x) : Geometrische Interpretation verschiedener Normen

2.3 Definition

Sei (X,d) ein metrischer Raum.

(i) $B(x,r) := \{y \in X \,|\, d(x,y) < r\}$ heißt **offene Kugel** von x mit Radius r.

(ii) $\overline{B}(x,r) := \{y \in X \,|\, d(x,y) \le r\}$ heißt **abgeschlossene Kugel** von x mit Radius r.

(iii) $U \subset X$ heißt **Umgebung** von $x \in X$, falls gilt:

$$\exists \varepsilon > 0 : B(x,\varepsilon) \subset U$$

(iv) $U \subset X$ heißt **offen**, falls gilt:

$$\forall x \in U \;\; \exists \varepsilon > 0 : B(x,\varepsilon) \subset U$$

(d.h. U ist eine Umgebung für jedes $x \in U$)

(v) $A \subset X$ ist abgeschlossen, falls $X \setminus A$ offen ist.

2.4 Bemerkung

$B(x,r)$ ist offen:

$$\text{Zu zeigen:} \quad \forall y \in B(x,r) \exists \varepsilon > 0 : B(y,\varepsilon) \subset B(x,r)$$

Sei also $y \in B(x,r)$ gegeben. Setze $\varepsilon := r - d(x,y) > 0$, nach Definition von $B(x,r)$. Es gilt $B(y,\varepsilon) \subset B(y,r)$, denn:

$$z \in B(y,\varepsilon) \Rightarrow d(z,y) < \varepsilon$$
$$\Rightarrow d(z,x) \le d(z,y) + d(y,x) < \varepsilon + d(y,x) = r$$

Also $z \in B(x,r)$ □

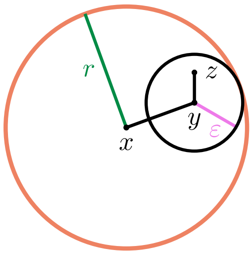


Abbildung 7: Veranschaulichung des Vorgehens in 2.4

2.5 Proposition

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann gilt:

(i) $\emptyset, X$ sind offen.

(ii) U, V offen $\Rightarrow U \cap V$ ist offen.

(iii) Für jede Familie $(U_i)_{i \in I}$ von offenen Mengen gilt

$$\bigcup_{i \in I} U_i \text{ ist offen}$$

Beweis

(i) $\forall x \in \emptyset \exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subset \emptyset$ gilt trivialerweise $\emptyset$ ist offen.
Für $x \in X$ wähle $\varepsilon = 1$, dann gilt immer

$$B(x, \varepsilon) \subset X$$

$\Rightarrow X$ ist offen.

(ii) Seien U, V offen. Sei $x \in U \cap V$. U, V offen $\Rightarrow \exists \varepsilon_U, \varepsilon_V > 0$ mit:

$$B(x, \varepsilon_U) \subset U \quad , \quad B(x, \varepsilon_V) \subset V$$

Setze $\varepsilon := \min\{\varepsilon_U, \varepsilon_V\} > 0$

$$\Rightarrow B(x, \varepsilon) \subset \underbrace{B(x, \varepsilon_U) \cap B(x, \varepsilon_V)}_{\subset U \cap V}$$

(iii) Sei $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$, dann ist $x \in U_{\bar{\imath}}$ für ein $\bar{\imath} \in I$. $U_{\bar{\imath}}$ offen

$$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subset U_{\bar{\imath}} \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$$

□

2.6 Definition

Sei X eine Menge. Ein System $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen von X heißt **Topologie** auf X, falls gilt:

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$

(ii) $U, V \in \mathcal{T} \Longrightarrow U \cap V \in \mathcal{T}$

(iii) $(U_i)_{i \in I} \subset \mathcal{T} \Longrightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$

$(X, \mathcal{T})$ heißt **topologischer Raum**. Die Elemente von $\mathcal{T}$ heißen offene Teilmengen von X.
$A \subset X$ heißt abgeschlossen, falls $X \setminus A \in \mathcal{T}$. $Y \subset X$ heißt **Umgebung** von $x \in X$, falls gilt

$$\exists U \in \mathcal{T} : x \in U \subset Y$$

2.7 Bemerkung

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Wir definieren:

$$\mathcal{T}_d := \{U \subset X \mid U \text{ ist offen im Sinne von (2.3)(iv)}\}$$

nach Proposition 2.5 ist $\mathcal{T}_d$ eine Topologie auf X, die von d induzierte Topologie.

2.8 Proposition und Definition

Jeder metrische Raum ist **Hausdorffsch**, d.h.

$$\forall x, y \in X, x \neq y : \exists U, V \subset X \text{ offen } : x \in U,\, y \in V,\, U \cap V = \emptyset$$

Beweis
Gegeben $x \neq y \in X$. Dann ist $\frac{d(x,y)}{2} > 0$. Setze $U := B(x, \frac{d(x,y)}{2})$, $V := B(y, \frac{d(x,y)}{2})$. Dann gilt $x \in U, y \in V$. Falls $z \in U \cap V$, so gilt

$$d(x, y) \leq \underbrace{d(x, z)}_{<\frac{d(x,y)}{2}} + \underbrace{d(z, y)}_{<\frac{d(x,y)}{2}} < 2 \cdot \frac{d(x, y)}{2} = d(x, y) \qquad \lightning$$

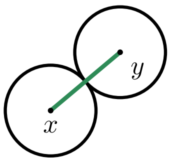


Abbildung 8: Veranschaulichung des Vorgehens im Beweis von 2.8

2.9 Definition

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. $Y \subset X$. Wir definieren den **Rand**

$$\partial Y := \{x \in X \mid \text{ für jede Umgebung } U \text{ von } x \text{ gilt} : U \cap Y \neq \emptyset \text{ und } U \cap (X \setminus Y) \neq \emptyset\}$$
$$\mathring{Y} := Y \setminus \partial Y \text{ heißt das } \textbf{Innere} \text{ von } Y$$
$$\overline{Y} := Y \cup \partial Y \text{ heißt der } \textbf{Abschluss} \text{ von } Y$$

2.10 Proposition

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. $Y \subset X$. Dann gilt:

(i) $\mathring{Y}$ ist offen

(ii) $\overline{Y}$ ist abgeschlossen

(iii) ∂Y ist abgeschlossen

Beweis

(i) $y \in \mathring{Y} \Rightarrow \exists U_y$ offen mit ($U_y \cap Y = \emptyset$ oder) $U_y \cap (X \setminus Y) = \emptyset$
$\Rightarrow U_y \subset Y$

$$\Rightarrow \mathring{Y} \subset \bigcup_{y \in \mathring{Y}} \underbrace{U_y}_{\text{offen}} \subset Y$$

$$y' \in \bigcup_{y \in \mathring{Y}} U_y \subset Y \Rightarrow y' \notin \partial Y$$

$$\Rightarrow \bigcup_{y \in \mathring{Y}} U_y \subset Y \setminus \partial Y = \mathring{Y} \Rightarrow \mathring{Y} \subset \bigcup_{y \in \mathring{Y}} U_y \subset \mathring{Y} \Rightarrow \mathring{Y} = \bigcup_{y \in \mathring{Y}} U_y \text{ offen}$$

(ii) Übung

(iii) Übung

2.11 Beispiele

(i) (a, b) ist offen in $\mathbb{R}$ (mit Standardmetrik $d(x, y) = |x - y|$). Für $x \in (a, b)$ setze

$$\varepsilon := \min\{x - a, b - x\} > 0$$

Dann $B(x, \varepsilon) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset (a, b)$. $\Rightarrow (a, b)$ ist offen im Sinne von 2.3.

(a, ∞) und $(-\infty, b)$ sind ebenfalls offen. (warum?)

alternativ:

$$(a, \infty) = \underbrace{\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \underbrace{(a, a + k)}_{\text{offen}}}_{\text{offen}}$$

(ii) $[a, b) \subset \mathbb{R}$ ist nicht offen (für $a < b$).
Für $a \in [a, b)$ existiert kein $\varepsilon > 0$ mit $B(a, \varepsilon) \subset [a, b)$. (Denn $a - \frac{\varepsilon}{2} \notin [a, b)$)

(iii) $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ist nicht offen. Siehe (ii)
$[a, b]$ ist abgeschlossen:

$$\mathbb{R} \setminus [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, \infty) \quad \text{offen}$$

(iv) $(a, b] \subset \mathbb{R}$ (für $a < b$) ist nicht abgeschlossen. Betrachte: $\mathbb{R} \setminus (a, b]$ und argumentiere wie in (ii)

(v)
- $\mathbb{N}, \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ sind abgeschlossen (warum?)
- $\left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n = 1, 2, 3, \ldots \right\} \cup \{0\}$ ist abgeschlossen (warum?)
- $\left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n = 1, 2, 3, \ldots \right\}$ ist weder offen noch abgeschlossen (warum?)

(vi) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ist weder offen noch abgeschlossen. (warum?)

(vii) $(a, b) \subset \mathbb{C}$ (mit Standardmetrik $d(x, y) = |x - y|$) ist nicht(!) offen: $\underbrace{x + \frac{\varepsilon}{2} i}_{\notin (a,b)} \in B(x, \varepsilon)$

(viii) Betrachte $[a, b)$ als metrischen Unterraum von $\mathbb{R}$. Dann ist $[d, b) \subset [a, b)$ abgeschlossen und $[a, d) \subset [a, b)$ offen.

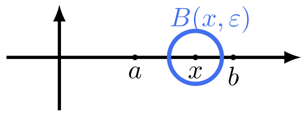


Abbildung 9: Veranschaulichung von 2.11 (vii)

(ix) allgemeiner: $(X,\mathcal{T})$ topologischer Raum, $Y \subset X$, dann ist $(Y,\mathcal{T}_Y)$ ein topologischer Raum mit

$$\mathcal{T}_Y := \{U \cap Y \,|\, U \in \mathcal{T}\} = \{V \subset Y \,|\, \exists U \in \mathcal{T} : V = U \cap Y\}$$

(vii) und (viii) zeigen:

$$U \subset Y \text{ offen in } Y \not\Rightarrow U \text{ offen in } X$$

aber für $U \subset Y$ gilt:

$$U \text{ offen in } Y \Leftarrow U \text{ offen in } X$$

Schreibweise: $U \underset{\text{offen}}{\subset} Y$ und $U \underset{\text{offen}}{\subset} X$

(x) $(X,\mathcal{P}(X))$ ist topologischer Raum für jede Menge X; $\mathcal{P}(X)$ wird induziert durch d_{diskret}, die diskrete Metrik.

(xi) Sei X eine Menge, dann ist $\{X,\emptyset\}$ eine Topologie; im Allgemeinen nicht induziert von einer Metrik.

(xii) $\mathbb{C}$ mit Standardmetrik, dann:

$$\partial B(0,1) = S^1 = \{\, z \,|\, |z| = 1\}$$

$$\underbrace{\overline{B(0,1)}}_{B(0,1)\cup\partial B(0,1)} = \underbrace{\overline{B}(0,1)}_{\left\{z \,\middle|\, |z|\le 1\right\}}$$

(xiii) $\mathbb{R}$ mit Standardmetrik, dann:

$$\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R} \;,\; \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \;,\; \mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset$$

2.12 Definition

Sei (X,d) ein metrischer Raum, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ eine Folge. Wir sagen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $x \in X$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : d(x,x_n) < \varepsilon \tag{$\star$}$$

äquivalent:

$$d(x,x_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \tag{$\star\star$}$$

Zu jeder Umgebung U von x existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in U$ für $n \geq N$ $(\star\star\star)$

2.13 Definition

Sei (X,d) ein metrischer Raum, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ heißt **Cauchyfolge**, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall m,n \geq N : d(x_m,x_n) < \varepsilon$$

2.14 Bemerkung

Jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge.

Beweis
Sei $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$, sodass für $n \geq N$ gilt $d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$. Für $n, m \geq N$ gilt:

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad \square$$

2.15 Definition

Ein metrischer Raum heißt **vollständig**, falls in ihm jede Cauchyfolge konvergiert.

2.16 Definition

Ein vollständig normierter Vektorraum heißt **Banachraum**.

2.17 Proposition

Sei (X, d) ein metrischer Raum, $A \subset X$. Dann sind äquivalent:

(i) $A \underset{\text{abgschl.}}{\subset} X$

(ii) Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$, welche in X konvergiert, gilt $\lim_{n\to\infty} x_n \in A$.

Beweis
(i)⇒(ii): Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ konvergent in X, sei $\overline{x} := \lim_{n\to\infty} x_n \in X$. Falls $\overline{x} \in X \setminus A \underset{\text{offen}}{\subset} X$, so existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in X \setminus A$ falls $n \geq N$ (benutzt: $\star\star\star$ aus 2.12) $\lightning$

(ii)⇒(i) Sei $x \in X \setminus A$. Zu zeigen: $\exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$.
Falls nicht, so existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in B(x, \frac{1}{n+1}) \cap A$. Dann folgt $x_n \in A, d(x, x_n) < \frac{1}{n+1}$. Wir haben jetzt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ mit $d(x, x_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$, also $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Nach Vorraussetzung (ii) gilt: $x \in A$ $\lightning$ $\square$

2.18 Proposition

Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum. Sei $A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ eine absteigende Folge nichtleerer abgeschlossener Teilmengen mit $\operatorname{diam}(A_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ (wo $\operatorname{diam} A_n := \sup\{\, d(x, y) \mid x, y \in A_n \}$).
Dann gibt es genau einen Punkt in $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. (vgl. mit Intervallschachtelungsprinzip)

Beweis
Für $n \in \mathbb{N}$ wähle $x_n \in A_n$. Falls $\varepsilon > 0$, wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $\operatorname{diam}(A_n) < \varepsilon$, falls $n \geq N$. Falls $n, m \geq N$, so gilt:

$$d(x_n, x_m) \leq \operatorname{diam}(A_N) < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchyfolge. Da (X, d) vollständig: $\overline{x} := \lim_{n\to\infty} x_n \in X$ existiert. Für $k \in \mathbb{N}$ gilt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}, n>k} \subset A_k$. Dann folgt mit 2.17 $\overline{x} = \lim_{n\to\infty} x_n \in A_k$. Also gilt $\overline{x} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Sei nung $y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ein weiterer Punkt.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow d(\overline{x}, y) \leq \operatorname{diam} A_n \xrightarrow{n\to\infty} 0 \\ &\Rightarrow d(\overline{x}, y) = 0 \Rightarrow \overline{x} = y \end{aligned} \qquad \square$$

2.19 Proposition

Betrachte $(\mathbb{R}^n, d_2)$ (d_2 induziert durch $\|.\|_2$). Sei $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ und $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$, $\underline{x}_k = (x_{k,1}, \dots, x_{k,n})$. Dann gilt:

$$\lim_{k\to\infty} \underline{x}_k = \underline{x} \iff \lim_{k\to\infty} x_{k,i} = x_i \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

Beweis
„$\Rightarrow$“: Für $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt:

$$|x_{k,i} - x_i| = \left(|x_{k,i} - x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |x_{k,j} - x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|\underline{x}_k - \underline{x}\|_2 \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

„$\Leftarrow$“ Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Für $i \in \{1, \dots, n\}$ existiert $N_i \in \mathbb{N}$ mit: $|x_{k,i} - x_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$, falls $k \geq N_i$. Setze $N := \max\{\, N_i \mid i = 1, \dots, n\}$, dann gilt für $k \geq N$:

$$d_2(\underline{x}, \underline{x}_k) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_{k,i} - x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\varepsilon^2\right)^{\frac{1}{2}} = \varepsilon \qquad \square$$

2.20 Corollar

$(\mathbb{R}^n, d_2)$ ist vollständig.

Beweis
Sei $(\underline{x}_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ Cauchyfolge. Es gilt

$$\|\underline{x}_k - x_l\|_2 \geq |x_{k,i} - x_{l,i}|$$

Sei $i = 1, \dots, n$, daher ist $(x_{k,i})_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ Cauchyfolge, also konvergent $\overset{2.19}{\Longrightarrow}$ $(\underline{x}_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ konvergent.
$\square$

3 Stetigkeit

3.1 Definition

Seien (X, d_X), (Y, d_Y) metrische Räume, $f : X \to Y$ eine Abbildung. f heißt stetig in $\overline{x} \in X$, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \forall x \in B_{d_X}(\overline{x}, \delta) : f(x) \in B_{d_Y}(f(\overline{x}), \varepsilon)$$

D.h. $d_X(x, \overline{x}) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(\overline{x})) < \varepsilon$
f heißt stetig falls gilt: f ist stetig in jedem Punkt $x \in X$.

3.2 Proposition

Seien (X, d_X), (Y, d_Y) metrische Räume, $f : X \to Y$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent:

(i) f ist stetig in $\overline{x} \in X$

(ii) Für jede Umgebung V von $f(\overline{x})$ existiert eine Umgebung U von $\overline{x}$ mit $f(U) \subset V$

(iii) Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \overline{x}$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(\overline{x})$.
d.h. $\lim\limits_{x\to\overline{x}} f(x) = f(\overline{x})$

Außerdem sind äquivalent:

(a) f ist stetig

(b) $\forall V \in \mathcal{T}_{d_Y} : f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_{d_X}$

(c) $\forall A \underset{\text{abgschl.}}{\subset} Y : f^{-1}(A) \underset{\text{abgschl.}}{\subset} X$

Beweis
(i)⇒(ii): Sei V Umgebung von $f(\overline{x})$. Dann:

$$\exists \varepsilon > 0 : B_{d_Y}\big(f(\overline{x}), \varepsilon\big) \subset V$$

Da f stetig in $\overline{x}$: $\exists \delta > 0 : \forall x \in B_{d_X}(\overline{x}, \delta) : f(x) \in B_{d_Y}(f(\overline{x}), \varepsilon)$. Setze $U := B_{d_X}(\overline{x}, \delta)$, dann gilt:

$$f(U) \subset B_{d_Y}(f(\overline{x}), \varepsilon) \subset V \qquad \square$$

(ii)⇒(iii): Sei $(x_n)_{\mathbb{N}} \subset X$ eine Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \overline{x}$. Zu zeigen: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(\overline{x})$. Sei $\varepsilon > 0$. Setze $V := B_{d_Y}(f(\overline{x}), \varepsilon)$, nach (ii) existiert eine Umgebung U von $\overline{x}$ mit $f(U) \subset V$. $\Rightarrow \exists \delta > 0 : B_{d_X}(\overline{x}, \delta) \subset U$. Da $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \overline{x}$ gilt:

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : x_n \in B_{d_X}(\overline{x}, \delta)$$

$\Rightarrow$ falls $n \geq N$, so gilt:

$$f(x_n) \in V = B_{d_Y}(f(\overline{x}), \varepsilon) \qquad \square$$

(iii)⇒(i); Angenommen (i) gelte nicht, d.h.

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta : \exists x \in B_{d_X}(\overline{x}, \delta) : f(x) \notin B_{d_Y}(f(\overline{x}), \varepsilon)$$

Insbesondere existiert für $\delta = \frac{1}{n+1}$ ein $x_n \in B_{d_X}(\overline{x}, \frac{1}{n+1})$ mit $d_Y(f(x_n), f(\overline{x})) \geq \varepsilon$. Dann gilt für $(x_n)_{\mathbb{N}} \subset X$: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \overline{x}$, aber $\big(f(x_n)\big)_{\mathbb{N}}$ konvergiert nicht gegen $f(\overline{x})$ $\lightning$

(a)⇒(b): Sei $V \underset{\text{offen}}{\subset} Y$. Falls $x \in f^{-1}(V)$, so ist V Umgebung von $f(x)$. f stetig (in x) $\overset{\text{(ii)}}{\Rightarrow}$ es existiert eine Umgebung U von x mit $f(U) \subset V$. Dann gilt $x \in U \subset f^{-1}(V)$, also ist auch $f^{-1}(V)$ Umgebung von x. $x \in f^{-1}(V)$ war beliebig $\Rightarrow f^{-1}(V) \underset{\text{offen}}{\subset} X$. □

(b)⇒(a): Sei $x \in X$ und $V \subset Y$ eine Umgebung von $f(x)$. Dann existiert $W \underset{\text{offen}}{\subset} Y$ mit $f(x) \in W \subset V$. Aus (b) folgt $f^{-1}(W) \underset{\text{offen}}{\subset} X \Rightarrow U := f^{-1}(W)$, dann ist U eine Umgebung von x mit $f(U) = f\big(f^{-1}(W)\big) \subset W \subset V$. Aus (ii) folgt f ist stetig in x.

(b)⇔(c) klar mit

$$f^{-1}(Y \setminus V) = X \setminus f^{-1}(V)$$

3.3 Definition

Seien $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume, $f : X \to Y$ eine Abbildung. f heißt stetig in $\overline{x} \in X$, falls 3.2(ii) gilt. f heißt stetig, falls 3.2(b) gilt.

(Äquivalent: f ist stetig in jedem Punkt) (warum?)

3.4 Proposition

Seien $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y), (Z, \mathcal{T}_Z)$ topologische Räume, $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ stetig. Dann ist $g \circ f : X \to Z$ auch stetig.

Beweis

$U \underset{\text{offen}}{\subseteq} Z$. Da g stetig ist gilt: $g^{-1}(U) \underset{\text{offen}}{\subseteq} Y$. Da f stetig ist:

$$\begin{aligned} f^{-1}\Big(g^{-1}(U)\Big) & \underset{\text{offen}}{\subseteq} X \\ &= \big\{ x \in X \,\big|\, f(x) \in g^{-1}(U) \big\} \\ &= \{ x \in X \mid g(f(x)) \in U \} \\ &= \{ x \in X \mid (g \circ f)(x) \in U \} \\ &= (g \circ f)^{-1}(U) \end{aligned}$$

□

3.5 Definition

Seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume, $f : X \to Y$, $f_n : X \to Y$, $n \in \mathbb{N}$

(i) $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ punktweise, falls gilt: $\forall x \in X : f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$

(ii) $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ gleichmäßig, falls gilt: $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall x \in X, n \geq N : d_Y\big(f_n(x), f(x)\big) < \varepsilon$

3.6 Satz

Seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume, $f : X \to Y$, $f_n : X \to Y$, $n \in \mathbb{N}$. Falls die f_n stetig sind und $f_n \to f$ gleichmäßig, so ist f stetig

Beweis

Wie in 1.4 □

3.7 Beispiele

(i) Seien V, W normierte Vektorräume, $f : V \to W$ linear. Dann sind äquivalent:

a) f ist stetig

b) $\|f\| := \sup\{\,\|f(v)\|_W \mid v \in V, \|v\|_V \leq 1\} < \infty$

c) $\exists C \in \mathbb{R}_+ : \|f(v)\| \leq C \cdot \|v\|$, für alle $v \in V$

Beweis

(a)⇒(b): f ist stetig in $0 \in V$, daher gilt: Zu $\varepsilon := 1$ existiert $\delta > 0$:

$$\|v - 0\| < \delta \Rightarrow \|f(v) - f(0)\| < \varepsilon = 1$$

Falls $\|v\| \leq 1$, so gilt (für $v \neq 0$): $\left\|\frac{\delta}{2} \cdot v\right\| < \delta$, also $\frac{\delta}{2}\|f(v)\| = \left\|f(\frac{\delta}{2}v)\right\| < 1$ und $\|f(v)\| < \frac{2}{\delta}$.

(b)⇒(c): Setze $C := \|f\|$, dann gilt (für $v \neq 0$)

$$\|f(v)\| = \|v\| \cdot \left\|\frac{1}{\|v\|} \cdot f(v)\right\| = \|v\| \cdot \left\|f\left(\frac{1}{\|v\|} \cdot v\right)\right\| \leq C \cdot \|v\|$$

(c)⇒(a): Klar, falls $C = 0$. Falls $C \neq 0$: Gegeben $\varepsilon > 0$. Setze $\delta := \frac{\varepsilon}{C}$.

$$\|v - v'\| < \delta \Longrightarrow \|f(v) - f(v')\| = \|f(v - v')\| \leq C\,\|v - v'\| < \varepsilon$$ □

(ii) $V := \ell([a, b]) := \{f : [a, b] \to R \text{ stetig}\}$ mit $\|.\|_{\infty,[a,b]}$ ist ein normierter Vektorraum: Stetige Funktionen auf $[a, b]$ sind beschränkt nach Analysis I 9.12; $\|.\|_{\infty,[a,b]}$ ist Norm auf

$$V \underset{\text{Untervektorraum}}{\subset} \{f : [a, b] \to \mathbb{R} \text{ beschränkt}\} \qquad \text{nach 1.2(iii)}$$

(iii) $(V, \|.\|_{\infty,[a,b]})$ ist vollständig.

Beweis

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ eine Cauchyfolge. Dann gilt für $x \in [a, b]$:

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_{\infty,[a,b]}$$

Daher ist $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Cauchyfolge, also konvergent (warum?)
Definiere $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ durch $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Es gilt nach Definition $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ punktweise; tatsächlich gilt sogar $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ gleichmäßig (Übung). $\Rightarrow \|f_n - f\|_{\infty,[a,b]} \xrightarrow{n\to\infty} 0$.
Dann folgt mit Satz 1.4, dass f stetig ist. □

(iv) Sei $(V, \|.\|_{\infty,[a,b]})$ wie in (ii). Definiere $\varphi : V \to \mathbb{R}$ durch

$$\varphi(f) := \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Dann ist φ wohldefiniert und linear (Analysis I). Es gilt

$$|\varphi(f)| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b \|f\|_{\infty,[a,b]}\,\mathrm{d}x = \underbrace{(b - a)}_{=:C} \cdot \|f\|_{\infty,[a,b]}$$

3.7(i) c) $\Rightarrow \varphi$ stetig.

(v) Sei

$$D: \overset{\text{1-mal stetig diff.bar}}{\ell^1([a,b])} \quad \to \quad \ell([a,b]) \qquad a=0, b=1$$

gegeben durch $Df := f'$. D ist nicht stetig bezüglich $\|.\|_{\infty,[0,1]}$:
Sei $f_n \in \ell^1([0,1])$ gegeben durch $f_n(x) := x^n$, $n \in \mathbb{N}$, dann ist $\|f_n\|_{\infty,[0,1]} = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, aber

$$\|Df_n\|_{\infty,[0,1]} = \|n \cdot f_{n-1}\|_{\infty,[0,1]} = n \quad , n \in \mathbb{N}$$

Also gilt für kein $C \in \mathbb{R}_+$

$$n = \|Df_n\|_{\infty,[0,1]} \leq C \cdot \|f_n\|_{\infty,[0,1]} = C \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\overset{\text{3.7 (i) c)}}{\Longrightarrow}$ D ist nicht stetig.

(vi) Sei (X,d) eine metrischer Raum, $\overline{x} \in X$. Definiere $f: X \to \mathbb{R}_+$ durch $f(x) := d(x,\overline{x})$. Dann ist f stetig. (Übung)

4 Kompaktheit

4.1 Definition

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $Y \subset X$. Eine offene **Überdeckung** von Y ist eine Familie $(U_i)_{i\in I} \subset \mathcal{T}$ mit $Y \subset \bigcup_{i\in I} U_i$. Falls $J \subset I$ und $Y \subset \bigcup_{i\in J} U_i$, so heißt $(U_i)_{i\in J}$ **Teilüberdeckung**. $(U_i)_{i\in J}$ heißt endlich, falls J endlich ist.

4.2 Definition

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. $K \subset X$ heißt **kompakt**, falls gilt: Zu jeder offenen Überdeckung von K existiert eine endliche Teilüberdeckung.

D.h. Für jede offene Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von K existieren $i_0, \dots, i_n$ mit

$$K \subset \bigcup_{l=0}^{n} U_{i_l}$$

4.3 Beispiel

(i) Sei (X, d) ein metrischer Raum, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{x}$. Dann ist $K := \{\, x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\overline{x}\}$ kompakt.

Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von K. Dann existiert $\overline{\imath} \in I$ mit $\overline{x} \in U_{\overline{\imath}}$. $U_{\overline{\imath}}$ ist offen, daher existiert $N \in \mathbb{N}$, so dass gilt: $x_n \in U_{\overline{\imath}}$ falls $n \geq N$. Wähle $i_0, \dots, i_{N-1} \in I$ mit $x_n \in U_{i_n}$, $n \in \{0, \dots, N-1\}$. Dann ist $\big(U_{i_0}, U_{i_1}, \dots, U_{i_{N-1}}, U_{\overline{\imath}}\big)$ eine endliche Teilüberdeckung. $\square$

(ii) $(X, d), (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie oben, dann ist $\{\, x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ im Allgemeinen nicht kompakt.

Gegenbeispiel: Sei $x_n \in [0, 1]$ gegeben durch $x_n = \frac{1}{n+1}$, dann gilt $x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ und $\{\, x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht kompakt. $U_n := (\frac{1}{n+2}, 1] \subset [0, 1]$ offen,

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n = (0, 1] \supset \{\, x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

$(U_n)_{\mathbb{N}}$ ist also eine offene Überdeckung, besitzt aber keine endliche Teilüberdeckung. (warum?)

4.4 Proposition

Sei (X, d) ein metrischer Raum, $K \subset X$ kompakt. Dann ist K beschränkt und abgeschlossen. (d.h. $K \subset B(x, R)$ für ein $x \in X$, $R \in \mathbb{R}$).
Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht. (Übung)

Beweis
Sei $\overline{x} \in X$ beliebig, dann ist $\big(B(\overline{x}, n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung von K. Da K kompakt ist, existieren $n_0, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ mit $K \subset \bigcup_{l=0}^{k} B(\overline{x}, n_l)$. Sei $N := \max\{\, n_l \mid l = 0, \dots, k\}$. Dann ist

$$K \subset \bigcup_{l=0}^{k} B(\overline{x}, n_l) \subset B(\overline{x}, N)$$

also ist K beschränkt. Sei nun $x \in X \setminus K$ beliebig. Setze

$$U_n := \left\{ y \in X \,\middle|\, d(y, x) > \frac{1}{n+1} \right\} = \underbrace{X \setminus \underbrace{\overline{B}(x, \frac{1}{n+1})}_{\text{abgeschlossen}}}_{\text{offen}}$$

Es gilt $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n = X \setminus \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{B}(x, \frac{1}{n+1})\right) = X \setminus \{x\}$. Da $x \notin K$ folgt: $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine offene Überdeckung von K. Da K kompakt ist, existieren $n_0, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ mit $K \subset \bigcup_{l=0}^k U_{n_l}$. Sei $N := \max\{n_0, \dots, n_k\}$, dann ist $K \subset X \setminus \overline{B}(x, \frac{1}{N+1})$, also

$$B\left(x, \frac{1}{N+1}\right) \cap K = \emptyset \implies B\left(x, \frac{1}{N+1}\right) \subset X \setminus K$$

$\Rightarrow X \setminus K$ ist Umgebung von x. x war beliebig, also $X \setminus K \underset{\text{offen}}{\subset} X$. Also K abgeschlossen in X. $\square$

4.5 Proposition

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $K \subset X$ kompakt. Sei $A \underset{\text{abg.}}{\subset} X$, $A \subset K$. Dann ist auch A kompakt.

Beweis
Sei $(U_i)_I$ eine offene Überdeckung von A. Dann gilt

$$K \subset \bigcup_{i\in I} U_i \cup \underbrace{X \setminus A}_{\text{offen in } X}$$

Da K kompakt ist, existieren $i_0, \dots, i_k \in I$ mit $K \subset \bigcup_{l=0}^k U_{i_l} \cup X \setminus A$. Also $(U_{i_0}, \dots, U_{i_k})$ ist eine endliche Teilüberdeckung für A, da $A \subset K$.

4.6 Bemerkung

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. $K \subset X$. Dann gilt: K ist kompakt bezüglich $\mathcal{T} \iff K$ kompakt bezüglich $\mathcal{T}_k$ (warum?)
Wir schreiben daher oft

$$\underset{\text{kompakt}}{K} \subset X$$

4.7 Satz von Heine-Borel

$A \subset \mathbb{R}^n$ ist kompakt $\iff$ A ist beschränkt und abgeschlossen.

Beweis
„⇒“: Proposition 4.4

„⇐“: A beschränkt $\Rightarrow A \subset K$ wo $K = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid -L \leq x_i \leq L, i = 1, \dots, n\}$ für ein $L \in \mathbb{R}_+$. Es genügt zu zeigen, dass K kompakt ist, denn dann ist auch A kompakt nach 4.5.

Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von K. Annahme: $(U_i)_{i\in I}$ besitzt keine endliche Teilüberdeckung für K. Wir konstruieren induktiv

$$\mathbb{R}^n \supset K_0 \supset K_1 \supset K_2 \supset \dots$$

und $I_{m,i} \subset \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, \dots, n\}$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $I_{m,i}$ ist ein abgeschlossenes Intervall der Länge $2^{-m+1} \cdot L,\ m \in \mathbb{N},\ i \in \{1, \dots, n\}$

(ii) $K_m = I_{m,1} \times \dots \times I_{m,n},\ m \in \mathbb{N}$

(iii) $(U_i)_{i\in I}$ besitzt keine endliche Teilüberdeckung für K_m, $m \in \mathbb{N}$

Setze $K_0 := K$, $I_{0,i} := [-L, L]$, $i = 1, \dots, n$ dann sind (i), (ii), (iii) erfüllt.

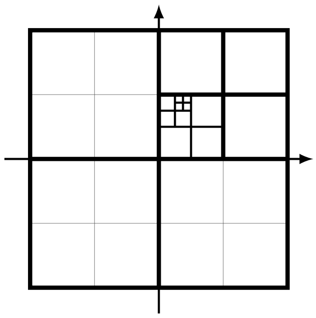


Abbildung 10: Veranschaulichung vom Beweis zu 4.7 in $\mathbb{R}^2$

Seien nun $K_m, I_{m,i}$ bereits konstruiert. Schreibe $I_{m,i} := \bigcup_{j\in\{0,1\}} I_{m,i}^{(j)}$, wo $I_{m,i}^{(j)} \subset \mathbb{R}$ abgeschlossene Intervalle sind mit der Länge $\frac{1}{2}|I_{m,i}| = 2^{-(m+1)+1}L$. Dann gilt:

$$K_m = I_{m,1} \times \ldots \times I_{m,n} = \bigcup_{(j_1,\ldots,j_n)\in\{0,1\}^n} I_{m,1}^{(j_1)} \times \ldots \times I_{m,n}^{(j_n)} \qquad \text{(endl. Verein.)}$$

Da $(U_i)_i$ keine endliche Teilüberdeckung von K_m hat, existiert $(\bar{\jmath}_1, \ldots, \bar{\jmath}_n) \in \{0,1\}^n$ so dass

$$I_{m,1}^{(\bar{\jmath}_1)} \times \ldots \times I_{m,n}^{(\bar{\jmath}_n)} =: K_{m+1}$$

keine endliche Teilüberdeckung von U_i zulässt. Dann $I_{m+1,l} := I_{m,l}^{(\bar{\jmath}_l)}$ und es gilt

$$|I_{m+1,l}| = \frac{1}{2}|I_{m,l}| = \frac{1}{2}2^{-m+1}L = 2^{-(m+1)+1}L$$

Da $\operatorname{diam}(K_m) = \sqrt{n}\cdot 2^{-m+1}L \xrightarrow{m\to\infty} 0$, gilt nach 2.18 (anwendbar, da $\mathbb{R}^n$ vollständig)

$$\bigcap_{m=0}^{\infty} K_m = \{\overline{x}\}$$

Da $(U_i)_{i\in I}$ Überdeckung von K ist, und $\overline{x} \in K$, existiert ein $i \in I$ sodass $\overline{x} \in U_i$. Dann existiert $\varepsilon > 0$ sodass $\overline{x} \in B(\overline{x}, \varepsilon) \subset U_i$. Für m groß genug gilt $\operatorname{diam}(K_m) < \varepsilon$. Also $\overline{x} \in K_m \subset B(\overline{x}, \operatorname{diam}(K_m)) \subset B(\overline{x}, \varepsilon) \subset U_i$ ↯ zu (iii) $\square$

4.8 Satz (Bolzano-Weierstraß)

Sei (X, d) ein metrischer Raum, $K \subset X$ kompakt. Dann besitzt jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ eine konvergente Teilfolge.

Beweis
Angenommen, für alle $x \in K$ konvergiert keine Teilfolge von $(x_n)_n$ gegen x.

$$\Rightarrow \forall x \in K\ \exists c_x > 0 : B(x, c_x) \cap \{\, x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \text{ endlich}$$

$\Rightarrow \{B(x, c_x)\}_{x\in K}$ ist offene Überdeckung von K

$$\overset{K \text{ kompakt}}{\Longrightarrow} \exists x^{(1)}, \ldots, x^{(l)} \in K : K \subset B(x^{(1)}, c_{x^{(1)}}) \cup \ldots \cup B(x^{(l)}, c_{x^{(l)}})$$

Dann

$$\{\, x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset K \subset \bigcup_{j=1}^{l} B\Big(x^{(j)}, c_{x^{(j)}}\Big)$$

endliche Vereinigung endlicher Mengen ist endlich

also

$$\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \underbrace{\bigcup_{j=1}^{l} \underbrace{\Big(\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cap B\big(x^{(j)}, c_{x^{(j)}}\big)\Big)}_{\text{endlich}}}_{\text{endlich}}$$

also tritt mindestens ein x_n unendlich oft auf, es existiert also eine konstante Teilfolge $\lightning$ □

4.9 Satz

Seien $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume. $f : X \to Y$ stetig, $K \subset X$ kompakt. Dann ist $f(K) \subset Y$ kompakt.

Beweis
Seien $(U_i)_{i\in I} \subset \mathcal{T}_Y$, sodass $f(K) \subset \bigcup_{i\in I} U_i$. Da f stetig ist gilt: $(f^{-1}(U_i))_{i\in I}$ ist offene Überdeckung von K. Da weiter K kompakt ist gilt:

$$\exists i_0, \dots, i_m \in I : K \subset \bigcup_{j=0}^{m} f^{-1}(U_{i_j})$$

$\Rightarrow f(K) \subset f\left(\bigcup_{j=0}^{m} f^{-1}(U_{i_j})\right) = \bigcup_{j=0}^{m} f\left(f^{-1}(U_{i_j})\right) \subset \bigcup_{j=0}^{m} U_{i_j}$ □

4.10 Korollar

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein kompakter topologischer Raum, $f : X \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f ihr Minimum und ihr Maximum an.

Beweis
Nach 4.9 ist $f(X) \subset \mathbb{R}$ kompakt. Nach 4.4 ist $f(X) \subset \mathbb{R}$ beschränkt und abgeschlossen. Es folgt $\sup f(X) < \infty$ und $\inf f(X) > -\infty$. Es existiert also eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset f(X)$, $y_n \xrightarrow{n\to\infty} \sup f(X)$, da $f(X)$ abgeschlossen ist, ist $\sup f(X) \in f(X)$.

4.11 Beispiel

Sei (X, d) metrischer Raum $A \subset X$ abgeschlossen, $K \subset X$ kompakt, $A \cap K = \emptyset$. $x \mapsto \operatorname{dist}(x, A)$ ist stetig nach Übung.

Nach 4.10 nimmt diese Funktion ihr Minimum auf K an, d.h. es existiert

$$\overline{x} \in K : \operatorname{dist}(\overline{x}, A) = \inf_{x\in K} \operatorname{dist}(x, A) =: \operatorname{dist}(K, A)$$

$\operatorname{dist}(K, A) = \operatorname{dist}(\overline{x}, A) > 0$: Da $X \setminus A$ offen ist, existiert $\varepsilon > 0$ sodass $\overline{x} \in B(\overline{x}, \varepsilon) \subset X \setminus A \Rightarrow \operatorname{dist}(\overline{x}, A) \geq \varepsilon > 0$
D.h. aus A abgeschlossen, K kompakt und $A \cap K = \emptyset$ folgt $\operatorname{dist}(K, A) > 0$.
Dies gilt nicht für zwei abgeschlossene Mengen A, B.

$$A = \left\{ (x, \frac{1}{x}) \,\middle|\, x > 0 \right\} \subset \mathbb{R}^2$$
$$B = \{ (x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$$

Dann gilt $A \cap B = \emptyset$, aber $\operatorname{dist}(A, B) = 0$. Begründung:

$$\operatorname{dist}(A, B) = \inf_{a\in A, b\in B} d(a, b) \quad a_n = (n, \frac{1}{n}) \in A \;\; b_n = (n, 0) \in B \;\; \Rightarrow d(a_n, b_n) = \frac{1}{n}$$

$\Rightarrow \operatorname{dist}(A, B) = \inf_{n\in\mathbb{N}_+} d(a_n, b_n) = 0$

4.12 Definition

Seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume, $f : X \to Y$ heißt **gleichmäßig stetig**, falls

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 : \forall x, x' \in X : d_X(x, x') < \delta \Rightarrow d_Y\big(f(x), f(x')\big) < \varepsilon$$

4.13 Satz

Seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume, X kompakt, $f : X \to Y$ stetig. Dann ist f auch gleichmäßig stetig.

Beweis
Angenommen f sei nicht gleichmäßig stetig. D.h.

$$\exists \varepsilon > 0\, \forall \delta > 0 : \exists x, x' \in X : d_X(x, x') < \delta \wedge d_Y(f(x), f(x')) \geq \varepsilon$$

insbesondere für $\delta = \frac{1}{n+1}$ existieren $x_n, x'_n \in X$ mit

$$d_X(x_n, x'_n) < \frac{1}{n+1}$$

aber $d(f(x_n), f(x'_n)) \geq \varepsilon$. nach 4.8 existiert eine Teilfogle $(x_{n_k})_k$ mit $x_{n_k} \xrightarrow{n\to\infty} \overline{x}$ da $d(x_{n_k}, x'_{n_k}) = \frac{1}{n_k+1} \xrightarrow{k\to\infty} 0$ gilt auch $x'_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} \overline{x}$

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) &= f(\lim_{k\to\infty} x_{n_k})\\ &= f(\lim_{k\to\infty} x'_{n_k})\\ &= \lim_{k\to\infty} f(x'_{n_k})\end{aligned}$$

Also $d_Y(f(x_{n_k}, x'_{n_k})) \xrightarrow{k\to\infty} 0$ $\lightning$ zu $d_Y(f(x_{n_k}), f(x'_{n_k})) \geq \varepsilon$ $\square$

5 Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^n$

5.1 Definition

Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall mit mindestens zwei Punkten (d.h. ein echtes Intervall). Eine stetige Abbildung $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ heißt **Kurve** in$\mathbb{R}^n$.

5.2 Bemerkung

$\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n), \gamma_i : I \to \mathbb{R}$. Dann gilt: γ ist stetig $\iff$ γ_i ist stetig für $i = 1, \dots, n$. (folgt z.B. aus Proposition 3.2 und Proposition 2.19)

5.3 Definition

Eine Kurve $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ heißt (stetig) differenzierbar, falls ihre Koordinatenfunktionen $\gamma_i : I \to \mathbb{R}$ (stetig) differenzierbar sind. In diesem Fall heißt $\gamma'(t) := (\gamma_1'(t), \dots, \gamma_n'(t))$ **Tangentialvektor** von γ in $t \in I$, und $\|\gamma'(t)\|_2$ heißt **Geschwindigkeit**. Für $\gamma'(t) \neq 0$ ist $\frac{1}{\|\gamma'(t)\|_2}\gamma'(t)$ der **Tangentialeinheitsvektor**.

γ heißt **regulär**, falls γ stetig differenzierbar und $\gamma'(t) \neq 0 \;\; \forall t \in I$.

5.4 Bemerkung

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= \left(\lim_{h\to 0} \frac{\gamma_1(t+h) - \gamma_1(t)}{h}, \dots, \lim_{h \to 0} \frac{\gamma_n(t+h) - \gamma_n(t)}{h}\right) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h}\end{aligned}$$

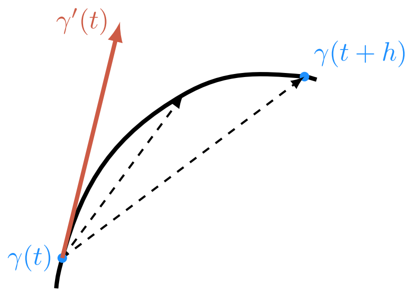


Abbildung 11: Bestimmung des Tangentialvektors durch den Limes des Differenzenquotienten in 5.4

5.5 Beispiele

1) $\underline{a}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$, $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ $\gamma(t) = \underline{a} + t \cdot \underline{v}$.
Dann ist $\gamma'(t) = \underline{v}$

$$\begin{aligned}\gamma(t+h) &= \underline{a} + (t+h)\underline{v} \\ \gamma(t+h) - \gamma(t) &= h\underline{v} \\ \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h} &= \underline{v} \xrightarrow{h \to 0} \underline{v}\end{aligned}$$

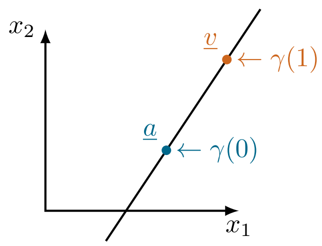


Abbildung 12: Darstellung der Kurve aus 5.5 1)

2) $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) = (r \cdot \sin t, r \cdot \cos t)$ mit $r \in (0, \infty)$. γ ist regulär

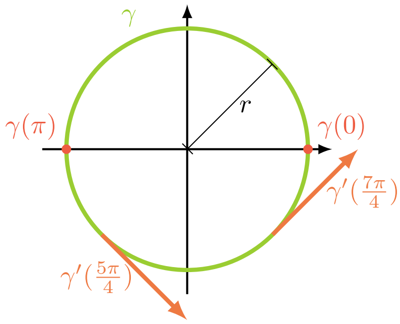


Abbildung 13: Graph aus 5.5 2) mit zwei Tangentialvektoren; Kreis mit Radius r

3) Kurve $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ mit $\gamma(t) = (r \cdot \cos t, r \cdot \sin t, c \cdot t)$, $r \in (0, \infty)$
   γ ist regulär.

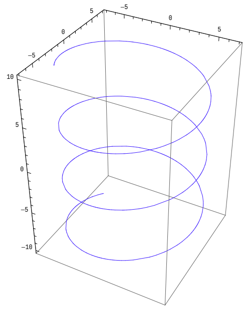


Abbildung 14: Schraubenlinie aus 5.5 3)

4) $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$. (Zykloid)

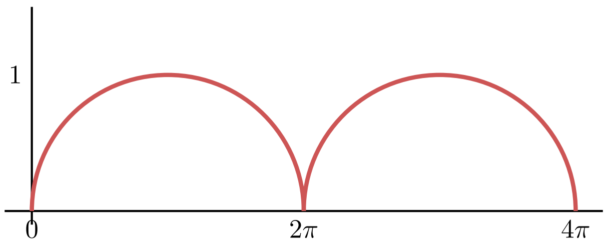


Abbildung 15: Graph der Kurve aus 5.5 4) (Zykloid)

5.6 Definition

Eine Kurve $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ heißt **rektifizierbar** mit der Länge L, falls gilt: Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$ mit folgender Eigenschaft: Für jede Unterteilung $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ mit $|t_j - t_{j-1}| < \delta$ für $j = 1, \ldots, n$ gilt:

$$\left| \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|_2}_{\text{Länge des Polygonzugs}} - L \right| < \varepsilon$$

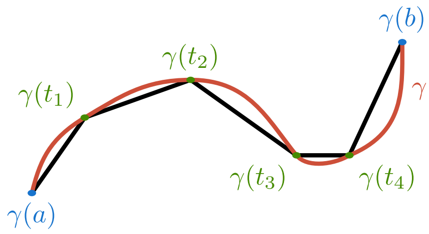


Abbildung 16: Polygonzug für ein rektifizierbares γ

5.7 Bemerkung

γ stetig $\not\Rightarrow$ γ rektifizierbar

5.8 Lemma

Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Zu $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$ sodass für alle $\bar{t} \neq t \in [a, b]$ mit $\left|\bar{t} - t\right| < \delta$, gilt

$$\left\| \frac{1}{\bar{t} - t} \big(\gamma(\bar{t}) - \gamma(t)\big) - \gamma'(\bar{t}) \right\|_2 < \varepsilon$$

Beweis
Für $i \in \{1, \ldots, n\}$ ist $\gamma_i' : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, nach Satz 4.13 also gleichmäßig stetig. D.h. $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta_i > 0 :$ für $s, \bar{t} \in [a, b]$ mit $\left|s - \bar{t}\right| < \delta_i$ gilt: $\left|\gamma_i'(s) - \gamma_i'(\bar{t})\right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$. Setze nun: $\delta := \min\{\delta_i, \ldots, \delta_n\} > 0$. Für $\bar{t} \neq t$ mit $\left|\bar{t} - t\right| < \delta$ existiert nach dem Mittelwertsatz ein s_i zwischen $\bar{t}$ und t mit

$$\gamma_i'(s_i) = \frac{\gamma_i(\bar{t}) - \gamma_i(t)}{\bar{t} - t}$$

Dann

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{1}{\bar{t} - t} \big(\gamma(\bar{t}) - \gamma(t)\big) - \gamma'(\bar{t}) \right\|_2 &\leq \sqrt{n} \cdot \max_{i \in \{1, \ldots, n\}} \left| \frac{1}{\bar{t} - t} \big(\gamma_i(\bar{t}) - \gamma_i(t)\big) - \gamma_i'(\bar{t}) \right| \\
&= \sqrt{n} \cdot \max_{i \in \{1, \ldots, n\}} \left|\gamma_i'(s_i) - \gamma_i'(\bar{t})\right| \\
&\leq \sqrt{n} \cdot \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} && \text{(weil } \left|s_i - \bar{t}\right| < \delta < \delta_i) \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

□

5.9 Satz

Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Dann ist γ rektifizierbar mit der Länge

$$L = \int_a^b \left\|\gamma'(t)\right\|_2 \,\mathrm{d}t$$

Beweis
Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir wollen $\delta > 0$, so dass für $a = t_0 < \ldots < t_k = b$ mit $|t_j - t_{j-1}| < \delta$ gilt

$$\left| \sum_{j=1}^{k} \left\|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\right\|_2 - \int_a^b \left\|\gamma'(t)\right\|_2 \,\mathrm{d}t \right| < \varepsilon$$

Nach 5.8 gibt es $\delta_1 > 0$ sodass für $a = t_0 < \ldots < t_k = b$ mit $|t_j - t_{j-1}| < \delta_1$ gilt:

$$\left\| \frac{1}{t_j - t_{j-1}} \big(\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\big) - \gamma'(t_j) \right\|_2 < \frac{\varepsilon}{2\,|b-a|}$$

$$\Rightarrow \big| \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|_2 - \|\gamma'(t_j)\|_2 \cdot |t_j - t_{j-1}| \big| < \frac{\varepsilon}{2\,|b-a|} \cdot |t_j - t_{j-1}| \qquad (\star)$$

Da $f : t \mapsto \|\gamma'(t)\|_2$ gleichmäßig stetig ist, existiert $\delta_2 > 0$ sodass für $a = t_0 < \ldots < t_k = b$ mit $|t_j - t_{j-1}| < \delta_2$ gilt:

$$\left\| \|\gamma'(t_1)\|_2 \cdot \mathbb{1}_{[t_0,t_1]} + \sum_{j=2}^{k} \|\gamma'(t_j)\|_2 \cdot \mathbb{1}_{(t_{j-1},t_j]} - f \right\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2\,|b-a|}$$

$$\Rightarrow \left| \sum_{j=1}^{k} \|\gamma'(t_j)\|_2 \cdot |t_j - t_{j-1}| - \int_a^b \|\gamma'(t)\|_2 \,\mathrm{d}t \right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (\star\star)$$

Für $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ gilt: Für jede Unterteilung $a = t_0 < \ldots < t_k = b$ mit $|t_j - t_{j-1}| < \delta$ gilt:

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{j=1}^{k} \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|_2 - \int_a^b \|\gamma'(t)\|_2 \,\mathrm{d}t \right| \\
&\leq \left| \sum_{j=1}^{k} \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|_2 - \sum_{j=0}^{k} \|\gamma'(t_j)\|_2 \cdot |t_j - t_{j-1}| \right| + \left| \sum_{j=1}^{k} \|\gamma'(t_j)\|_2 \,|t_j - t_{j-1}| - \int_a^b \|\gamma'(t)\|_2 \,\mathrm{d}t \right| \\
&\leq \sum_{j=1}^{k} \frac{\varepsilon}{2\,|b-a|} \cdot |t_j - t_{j-1}| + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

5.10 Proposition und Definition

Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve, $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ bijektiv und stetig. Dann heißt φ **Parametertransformation** und $\zeta := \gamma \circ \varphi : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ ist eine Kurve.
Falls $\gamma, \varphi, \varphi^{-1}$ stetig differenzierbar sind, so gilt:

a) $\varphi'(t) \neq 0$ für $t \in [c,d]$ und $(\varphi^{-1})'(t) \neq 0$ für $t \in [a,b]$

b) $\zeta'(t) = \varphi'(t) \cdot \gamma'\big(\varphi(t)\big)$ für $t \in [c,d]$ insbesondere ist ζ stetig differenzierbar.

c) $\int_a^b \|\gamma'(t)\|_2 \,\mathrm{d}t = \int_c^d \|\zeta'(t)\|_2 \,\mathrm{d}t$

Beweis
$\gamma \circ \varphi$ ist stetig nach Proposition 3.4, also eine Kurve.

a) $\varphi \circ \varphi^{-1} = \mathrm{id}_{[c,d]}$ und

$$1 = (\mathrm{id}_{[c,d]})'(t) = (\varphi^{-1} \circ \varphi)'(t) = \left(\varphi^{-1}\right)' (\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$
$$\Rightarrow \varphi'(t) \neq 0 \text{ für } t \in [c,d], \quad \left(\varphi^{-1}\right)'(t) \neq 0 \text{ analog}$$

b)

$$\begin{aligned}
\zeta'(t) = (\gamma \circ \varphi)'(t) = \big((\gamma_1 \circ \varphi)'(t), \ldots, (\gamma_n \circ \varphi)'(t)\big) &= \Big(\varphi'(t) \cdot \gamma_1'(\varphi(t)), \ldots, \varphi'(t) \cdot \gamma_n'\big(\varphi(t)\big)\Big) \\
&= \varphi'(t) \cdot (\gamma_1'(\varphi(t)), \ldots, \gamma_n'(\varphi(t))) \\
&= \varphi'(t) \cdot \gamma'(\varphi(t))
\end{aligned}$$

c) $\varphi'(t) \neq 0$ für $t \in [c,d]$, φ' stetig. Daraus folgt (1)$\varphi'(t) > 0$ für $t \in [c,d]$ oder (2)$\varphi'(t) < 0$ für $t \in [c,d]$ (nach Zwischenwertsatz). Wir betrachten (1); (2) geht analog

$\varphi'(t) > 0$ für alle $t \Rightarrow \varphi$ streng monoton wachsend und $\varphi(c) = a$, $\varphi(d) = b$. Es gilt

$$\begin{aligned}\int_c^d \|\zeta'(t)\|_2 \,\mathrm{d}t = \int_c^d \|\varphi'(t)\cdot\gamma'(\varphi(t))\|_2 \,\mathrm{d}t &= \int_c^d \varphi'(t)\cdot\|\gamma'(\varphi(t))\|_2 \,\mathrm{d}t \\ &= \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} \|\gamma'(n)\|_2 \,\mathrm{d}n \qquad \text{(Substitution 13.17 Ana I)} \\ &= \int_a^b \|\gamma'(t)\|_2 \,\mathrm{d}t \qquad \square\end{aligned}$$

5.11 Beispiel

Sei $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ ein **Zykloid**. Dann gilt: $\gamma'(t) = (1-\cos t, \sin t)$ und

$$\begin{aligned}\|\gamma'(t)\|_2 = \big((1-\cos t)^2 + (\sin t)^2\big)^{\frac{1}{2}} &= \big(1 - 2\cos t + (\cos t)^2 + (\sin t)^2\big)^{\frac{1}{2}} \\ &= (2-2\cos t)^{\frac{1}{2}} = (2\cdot(1-\cos t))^{\frac{1}{2}} = \left(2\cdot 2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= 2\sin\left(\frac{t}{2}\right) \qquad t \in [0,2\pi]\end{aligned}$$

benutzt: $\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

$$L = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\|_2 \,\mathrm{d}t = 2\int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right) \mathrm{d}t \overset{n=\frac{t}{2}}{=} 4\int_0^{2\pi} \sin n \,\mathrm{d}n = 4\big(-\cos(n)\big)\Big|_0^{\pi} = 8$$

6 Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$

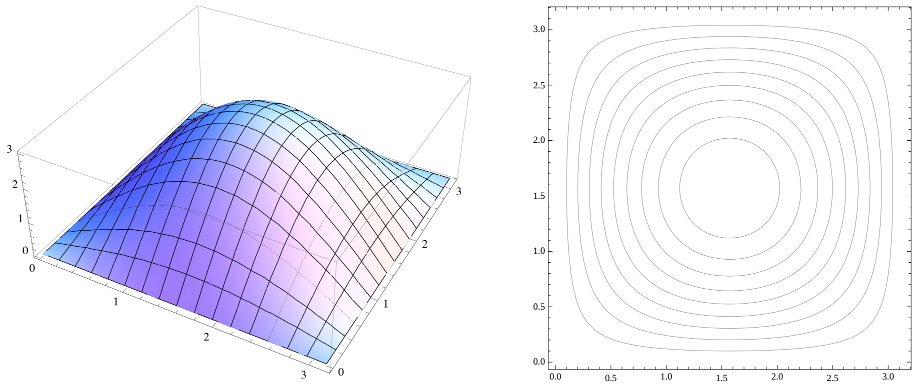


Abbildung 17: Darstellung einer Abbildung $f : U \to \mathbb{R}$ mit $U \subset \mathbb{R}^2$ als 3D-Plot und als Niveaulinien

6.1 Definition

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ und $f : U \to \mathbb{R}$ eine Abbildung.

a) Für $\underline{x} \in U$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ heißt f **partiell differenzierbar** in $\underline{x}$ bezüglich der i-ten Koordinate, falls gilt:

(i) Es gibt eine Folge $(h_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^*$ mit $\lim_{k\to\infty} h_k = 0$ und $\underline{x} + h_k \cdot \underline{e}_i \in U$, wobei $k \in \mathbb{N}$

(ii) Der Limes

$$D_i f(\underline{x}) := \lim_{\substack{h\to 0, h\neq 0 \\ \underline{x}+h\underline{e}_i \in U}} \frac{f(\underline{x} + h \cdot \underline{e}_i) - f(\underline{x})}{h} \in \mathbb{R}$$

existiert. (Dabei ist $\underline{e}_i = (0, \ldots, \overset{i}{1}, \ldots, 0)$). Wir schreiben auch $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ für $D_i f$.

b) f heißt partiell differenzierbar, falls f für jedes $\underline{x} \in U$ und jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ partiell differenzierbar in $\underline{x}$ bezüglich der i-ten Koordinate ist.

f heißt stetig partiell differenzierbar, falls außerdem $D_i f : U \to \mathbb{R}$ stetig ist für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$

Der **Gradient** von f in $\underline{x}$ ist

$$\operatorname{grad} f(\underline{x}) = (D_1 f(\underline{x}), \ldots, D_n f(\underline{x})) \in \mathbb{R}^n$$

Wir schreiben auch $\nabla f(\underline{x})$ für $\operatorname{grad} f(\underline{x})$.

6.2 Bemerkung

(i) Die Bedingung 6.1 (a)(i) ist automatisch erfüllt, falls $U \subset \mathbb{R}^n$ offen ist. (warum?)

(ii) Für $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ definiere $f_i : U_i \to \mathbb{R}$ durch $f_i(\xi) = f((x_1, \ldots, \xi, \ldots, x_n))$, wo

$$U_i := U \cap \underbrace{\{(x_1, \ldots, \xi, \ldots, x_n) \mid \xi \in \mathbb{R}\}}_{\sim\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}^n$$

Es gilt

$$D_i f(\underline{x}) = \lim_{h\to 0, h\neq 0} \frac{f_i(x_i + h) - f_i(x_i)}{h} = f_i'(x_i)$$

6.3 Definition

Ein **Vektorfeld** auf $U \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung $\underline{v} : U \to \mathbb{R}^n$. $\underline{v}$ heißt partiell differenzierbar, wenn alle Komponenten $v_1, \ldots, v_n : U \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar sind. In diesem Fall heißt

$$\operatorname{div} \underline{v} := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$$

Divergenz von $\underline{v}$ in $\underline{x}$. Wir schreiben auch

$$\operatorname{div} \underline{v} = \langle \nabla \,|\, \underline{v} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \right\rangle$$

6.4 Beispiel

(i) Betrachte $r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $r(\underline{x}) := \|\underline{x}\|_2$. Niveaumengen sind $N_r(c) := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, r(\underline{x}) = c\}$ für $c > 0$ also **Sphären** mit Radius c.

r ist auf $\mathbb{R}^n \backslash \{0\} := U$ stetig partiell differenzierbar: Für $0 \neq \underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ definiere $r_i : U_i \to \mathbb{R}$ durch $r_i(\xi) := r((x_1, \ldots, x_{i-1}, \xi, x_{i+1}, \ldots, x_n)) = (x_1^2 + \ldots + x_{i-1}^2 + \xi^2 + x_{i+1}^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$ Dann ist

$$D_i r(\underline{x}) = \frac{\partial r}{\partial x_i}(\underline{x}) = r_i'(x_i) = 2x_i \cdot \frac{1}{2} \cdot (x_1^2, \ldots, x_{i-1}^2, x_i^2, x_{i+1}^2, \ldots, x_n^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{x_i}{r(\underline{x})}$$

(ii) Sei r wie oben und $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann ist $f \circ r : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar. Es gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ r)(\underline{x}) = f'(r(\underline{x})) \frac{\partial r}{\partial x_i}(\underline{x}) = f'(r(\underline{x})) \cdot \frac{x_i}{r(\underline{x})}$$

(iii) Sei $n \geq 2$. Definiere $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch

$$g(\underline{x}) := \begin{cases} \frac{(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n) =: e}{r(\underline{x})^{2n} =: \frac{1}{d}}, & \text{falls } \underline{x} \neq 0 \\ 0, & \text{falls } \underline{x} = 0 \end{cases}$$

g ist auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ partiell differenzierbar mit (Produktregel)

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(\underline{x}) = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{i-1} \cdot x_{i+1} \cdot \ldots \cdot x_n \cdot r(\underline{x})^{-2n} + x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot r(\underline{x})^{-2n-1} \cdot \frac{x_i}{r(\underline{x})} \cdot (-2n)$$

g ist in 0 partiell differenzierbar:

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(0) = \lim_{h \to 0, h \neq 0} \frac{g(0 + h \cdot \underline{e}_i) - g(0)}{h} = 0$$

D.h. g ist auf $\mathbb{R}^n$ partiell differenzierbar. Aber g ist nicht stetig in 0: Es gilt $\mathbb{R}^n \ni \left(\frac{1}{k}, \ldots, \frac{1}{k}\right) \xrightarrow{k \to \infty} 0$ aber

$$g\left(\left(\frac{1}{k}, \ldots, \frac{1}{k}\right)\right) = \frac{\frac{1}{k^n}}{\left(\left(n \cdot \frac{1}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{2n}} = \frac{\frac{1}{k^n}}{n^n \cdot \frac{1}{k^{2n}}} = \left(\frac{k}{n}\right)^n \xrightarrow{k \to \infty} \infty$$

D.h. partielle Differenzierbarkeit impliziert nicht Stetigkeit.

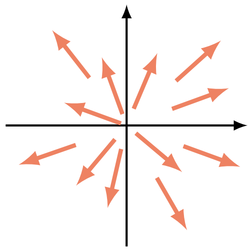


Abbildung 18: Vektorfeld aus 6.4(iv) (Man beachte, dass alle Vektoren Einheitsvektoren sind)

(iv) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar, dann ist $\operatorname{grad} f : U \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld. Es gilt

$$\operatorname{grad} r(\underline{x}) = \left(\frac{\partial r}{\partial x_1}(\underline{x}), \dots, \frac{\partial r}{\partial x_n}(\underline{x})\right) = \left(\frac{x_1}{r(\underline{x})}, \dots, \frac{x_n}{r(\underline{x})}\right) = \frac{1}{r(\underline{x})} \cdot \underline{x}$$

Jeder Vektor wird also normiert/zu einem Einheitsvektor

(v)

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\operatorname{grad} r)(\underline{x}) = \operatorname{div}\left(\frac{1}{r(\underline{x})} \cdot \underline{x}\right) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{r(\underline{x})} \cdot x_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{r(\underline{x})}\right) \cdot x_i + \frac{1}{r(\underline{x})} \cdot 1\right) && \text{(Produktregel)} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} -\frac{1}{r(\underline{x})^2} \cdot \frac{x_i}{r(\underline{x})} \cdot x_i\right) + \frac{n}{r(\underline{x})} && \text{(Kettenregel)} \\
&= -\frac{1}{r(\underline{x})} \cdot \underbrace{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{r(\underline{x})^2}}_{=1} + \frac{n}{r(\underline{x})} = (n-1) \cdot \frac{1}{r(\underline{x})}
\end{aligned}$$

Formaler (vgl. mit Produktregel):

$$\left\langle \nabla \,\middle|\, \frac{1}{r(\underline{x})} \cdot \underline{x} \right\rangle = \operatorname{div}\left(\frac{1}{r(\underline{x})} \cdot \underline{x}\right) = \left\langle \nabla \frac{1}{r(\underline{x})} \,\middle|\, \underline{x} \right\rangle + \frac{1}{r(\underline{x})} \cdot \underbrace{\langle \nabla \,|\, \underline{x} \rangle}_{=n}$$

Allgemeiner: $\langle \nabla \,|\, f \cdot \underline{v} \rangle = \langle \nabla f \,|\, \underline{v} \rangle + f \langle \nabla \,|\, \underline{v} \rangle$

6.5 Definition

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ und $f : U \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar. f heißt zweimal partiell differenzierbar, falls alle partiellen Ableitungen $D_i f : U \to \mathbb{R}$ wieder partiell differenzierbar sind. Induktiv definieren wir: f heißt $(k+1)$ mal partiell differenzierbar, falls f k-mal partiell differenzierbar ist und alle partiellen Ableitungen k-ter Ordnung

$$D_{i_k} \dots D_{i_2} D_{i_1} f : U \to \mathbb{R}$$

partiell differenzierbar sind. f heißt k-mal stetig partiell differenzierbar, falls f k-mal partiell differenzierbar ist und alle partiellen Ableitungen der Ordung $\leq k$ stetig sind. Wir schreiben auch

$$D_{i_k} \dots D_{i_1} f = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \cdot \ldots \cdot \partial x_{i_2} \cdot \partial x_{i_1}}$$

$$D_i D_i f = D_i^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

6.6 Satz

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar. Dann gilt für $\underline{a} \in U$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$

$$D_i D_j f(\underline{a}) = D_j D_i f(\underline{a})$$

Beweis
O.E. sei $n = 2$, $i = 1$ und $j = 2$ (warum?). Aus $U \subset \mathbb{R}^2$ offen folgt: Es existiert ein $\delta > 0$ mit $[a_1 - \delta, a_1 + \delta] \times [a_2 - \delta, a_2 + \delta] \subset U$. Betrachte $(\overline{x}_1, \overline{x}_2) \in [a_1 - \delta, a_1 + \delta] \times [a_2 - \delta, a_2 + \delta]$ mit $\overline{x}_1 \neq a_1, \overline{x}_2 \neq a_2$. Definiere

$$F : [a_1 - \delta, a_1 + \delta] \to \mathbb{R} \quad \text{durch } F(x_1) := f\left((x_1, \overline{x}_2)\right) - f\left((x_1, a_2)\right)$$

F ist stetig differenzierbar, da f stetig differenzierbar ist. Nach dem Mittelwertsatz existiert ξ zwischen $\overline{x}_1$ und a_1 mit

$$f(\overline{x}_1, \overline{x}_2) - f(\overline{x}_1, a_2) - (f(a_1, \overline{x}_2) - f(a_1, a_2)) = F(\overline{x}_1) - F(a_1) = (\overline{x}_1 - a_1) \cdot F'(\xi) = (\overline{x}_1 - a_1)(D_1 f(\xi, \overline{x}_2) - D_1 f(\xi, a_2))$$

Definiere $G : [a_2 - \delta, a_2 + \delta] \to \mathbb{R}$ durch $G(x_2) := D_1 f(\xi, x_2)$. G ist stetig differenzierbar. Nach dem Mittelwertsatz existiert η zwischen $\overline{x}_2$ und a_2 mit

$$D_1 f(\xi, \overline{x}_2) - D_1 f(\xi, a_2) = G(\overline{x}_2) - G(a_2) = (\overline{x}_2 - a_2) \cdot G'(\eta) = (\overline{x}_2 - a_2) \cdot D_2 D_1 f(\xi, \eta)$$

Es folgt

$$f(\overline{x}_1, \overline{x}_2) - f(\overline{x}_1, a_2) - f(a_1, \overline{x}_2) + f(a_1, a_2) = (\overline{x}_1 - a_1) \cdot (\overline{x}_2 - a_2) \cdot D_2 D_1 f(\xi, \eta) \qquad (\star)$$

Definiere nun $\tilde{F} : [a_2 - \delta, a_2 + \delta] \to \mathbb{R}$ durch $\tilde{F}(x_2) := f(\overline{x}_1, x_2) - f(a_1, x_2)$. Dann ist $\tilde{F}$ stetig differenzierbar. Nach dem Mittelwertsatz existiert ein $\tilde{\eta}$ zwischen $\overline{x}_2$ und a_2 mit

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\overline{x}_2) - \tilde{F}(a_2) &= (\overline{x}_2 - a_2) \cdot \tilde{F}'\tilde{\eta} \\ f(\overline{x}_1, \overline{x}_2) - f(a_1, \overline{x}_2) - (f(\overline{x}_1 - a_2) - f(a_1, a_2)) = &= (\overline{x}_2 - a_2)(D_2 f(\overline{x}_1, \tilde{\eta}) - D_2 f(a_2, \tilde{\eta})) \end{aligned}$$

Definiere $\tilde{G} : [a_1 - \delta, a_1 + \delta] \to \mathbb{R}$ durch $\tilde{G}(x_1) := D_2 f(x_1, \tilde{\eta})$. $\tilde{G}$ ist stetig differenzierbar. Nach dem Mittelwertsatz existiert $\tilde{\xi}$ zwischen a_1 und $\overline{x}_1$ mit:

$$D_2 f(\overline{x}_1, \tilde{\eta}) - D_2 f(a_1, \tilde{\eta}) = \tilde{G}(\overline{x}_1) - \tilde{G}(a_1) = (\overline{x}_1 - a_1)\tilde{G}\left(\tilde{\xi}\right) = (\overline{x}_1 - a_1) \cdot D_1 D_2 f\left(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}\right)$$

Es folgt

$$f(\overline{x}_1, \overline{x}_2) - f(a_1, \overline{x}_2) - f(\overline{x}_1, a_2) + f(a_1, a_2) = (\overline{x}_1 - a_1)(\overline{x}_2 - a_2) D_1 D_2 f\left(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}\right)$$

$\overset{(\star)}{\Longrightarrow} D_1 D_2 f\left(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}\right) = D_2 D_1 f(\xi, \eta)$

$$\begin{aligned} D_1 D_2 f\left(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}\right) &\xrightarrow{\substack{\overline{x}_1 \to a_1 \\ \overline{x}_2 \to a_2}} D_1 D_2 f(a_1, a_2) \\ D_2 D_1 f(\xi, \eta) &\xrightarrow{\substack{\overline{x}_1 \to a_1 \\ \overline{x}_2 \to a_2}} D_2 D_1 f(a_1, a_2) \end{aligned}$$

wegen Stetigkeit von $D_1 D_2 f$ und $D_2 D_1 f$. □

6.7 Beispiele

(i) Sei $U \subset \mathbb{R}^3$, $\underline{v} : U \to \mathbb{R}^3$ ein partiell differenzierbares Vektorfeld. Wir definieren ein Vektorfeld

$$\operatorname{rot} \underline{v} := \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \qquad \text{(Rotation von } \underline{v}\text{)}$$

Wir schreiben auch

eventuell kennt man das Kreuzprodukt noch aus der Schule

$$\operatorname{rot} \underline{v} = \nabla \times \underline{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Falls $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar ist, so gilt

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \nabla \times \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2}, \dots, \dots \right) = 0$$

nach Satz 6.6

(ii) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar. Setze

$$\Delta f := \operatorname{div} \operatorname{grad} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ heißt **Laplaceoperator**.

Sei $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ eine zeitabhängige Temperaturverteilung, d.h. $h(x_1, \dots, x_n, t)$ ist Temperatur in $(x_1, \dots, x_n)$ zum Zeitpunkt t. Dann erfüllt h die Wärmeleitungsgleichung

$$\Delta h - \lambda \cdot \frac{\partial h}{\partial t} = 0$$

mit $\frac{1}{\lambda}$ Wärmeleitfähigkeit.

7 Abbildungen von $\mathbb{R}^m$ nach $\mathbb{R}^n$: Differenzierbarkeit

7.1 Definition

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung.

(i) f heißt differenzierbar in $\underline{x} \in U$, falls gilt: Es gibt $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ linear und $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ mit

$$\boxed{f(\underline{x} + \underline{\xi}) = f(\underline{x}) + A(\underline{\xi}) + \varphi(\underline{\xi})}$$

für alle $\underline{\xi}$ in einer Umgebung von 0 und mit

d.h. $\varphi(\underline{\xi})$ geht „schneller" gegen 0 als $\left\|\underline{\xi}\right\|_2$

$$\lim_{\underline{\xi} \to 0, \underline{\xi} \neq 0} \frac{1}{\left\|\underline{\xi}\right\|_2} \varphi(\underline{\xi}) = 0$$

Es genügt, wenn das φ in einer Umgebung von 0 definiert ist. (warum?)

(ii) f heißt differenzierbar , falls f in jedem Punkt $\underline{x} \in U$ differenzierbar ist.

(iii) $A(= A(\underline{x}))$ heißt **Ableitung** oder **Differential** von f in $\underline{x}$, oft schreiben wir auch $Df(x)$. Wir werden gleich sehen, dass A nicht von der Wahl von φ abhängt.

Die zugehörige Matrix $(a_{ij}) \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ heißt auch **Jacobimatrix** oder **Funktionalmatrix**.

7.2 Bemerkung

Sei $U \subset \mathbb{R}$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$, $\overline{x} \in U$. Nach Analysis I 12.2 (iv) gilt: f ist differenzierbar in $\overline{x} \in U$ (im Sinne von Analysis I) $\iff \exists \psi : U \to \mathbb{R}$ stetig in $\overline{x}$ mit

$$f(\overline{x} + \xi) = f(\overline{x}) + \xi \cdot \psi(\overline{x} + \xi) = f(\overline{x}) + \underbrace{\psi(\overline{x})}_{f'(\overline{x})} \xi + \underbrace{\big(\psi(\overline{x} + \xi) - \psi(\overline{x})\big)\xi}_{=:\varphi(\xi)}$$

$$\lim_{\xi \to 0, \xi \neq 0} \left| \frac{1}{|\xi|} \varphi(\xi) \right| = \lim_{\xi \to 0, \xi \neq 0} |\psi(\overline{x} + \xi) - \psi(\overline{x})| \overset{\psi \text{ stetig in } \overline{x}}{=} 0$$

$\Rightarrow$ f ist auch differenzierbar im Sinne von 7.1.

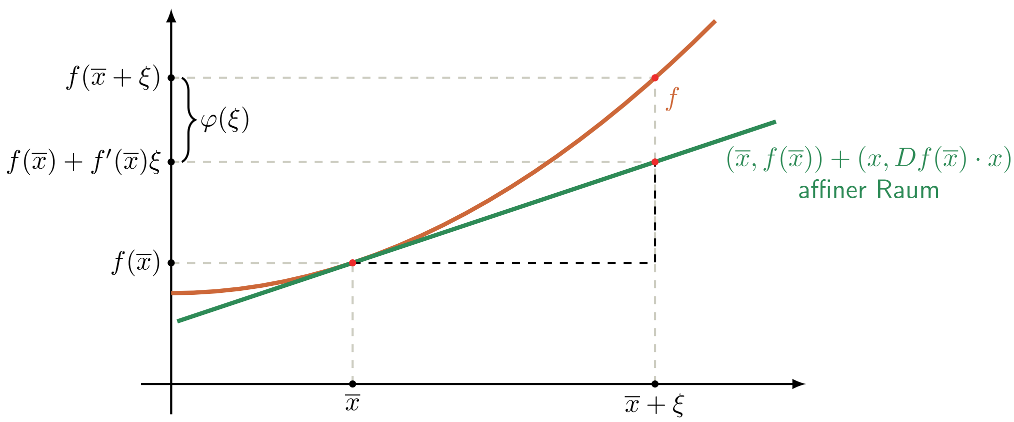


Abbildung 19: Veranschaulichung von Bemerkung 7.2

7.3 Beispiel

Sei $C \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ symmetrisch ($C = C^t$). Definiere $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch

$$f(\underline{x}) := \langle \underline{x} \,|\, C \cdot \underline{x} \rangle$$

(quadratische Form). Für $\underline{x}, \underline{\xi} \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\begin{aligned} f(\underline{x}+\underline{\xi}) &= \left\langle \underline{x}+\underline{\xi} \,\middle|\, C\underline{x}+C\underline{\xi} \right\rangle = \langle \underline{x} \,|\, C\underline{x} \rangle + \left\langle \underline{x} \,\middle|\, C\underline{\xi} \right\rangle + \left\langle \underline{\xi} \,\middle|\, C\underline{x} \right\rangle + \left\langle \underline{\xi} \,\middle|\, C\underline{\xi} \right\rangle \\ &= \langle \underline{x} \,|\, C\underline{x} \rangle + 2\left\langle \underline{x} \,\middle|\, C\underline{\xi} \right\rangle + \left\langle \underline{\xi} \,\middle|\, C\underline{\xi} \right\rangle \\ &= f(\underline{x}) + A\cdot\underline{\xi} + \varphi(\underline{\xi}) \end{aligned}$$

da C symm. $\Rightarrow C$ Matrix von selbst-adjungiertem Endmorphismus

mit $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\underline{\eta} \mapsto 2\left\langle \underline{x} \,\middle|\, C\underline{\eta} \right\rangle$ und $\varphi : \mathbb{R}^n \to R$ gegeben durch $\underline{\eta} \mapsto \left\langle \underline{\eta} \,\middle|\, C\underline{\eta} \right\rangle$. Damit ist A linear.

$$\left| \frac{1}{\left\|\underline{\xi}\right\|_2} \cdot \varphi(\underline{\xi}) \right| \leq \frac{1}{\left\|\underline{\xi}\right\|_2} \cdot \|C\| \cdot \left\|\underline{\xi}\right\|_2^2 = \|C\| \cdot \left\|\underline{\xi}\right\|_2 \xrightarrow{\underline{\xi}\to 0} 0$$

Also ist f differenzierbar.

7.4 Satz

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar in $\underline{x} \in U$. Dann gilt

(i) f ist stetig in $\underline{x}$

(ii) Die Koordinatenfunktionen $f_i : U \to \mathbb{R}$ für $i = 1, \ldots, n$ sind partiell differenzierbar und

$$Df(\underline{x}) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\underline{x}) \right)_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m}} \in M_{n\times m}(\mathbb{R}) \qquad \text{(Jacobimatrix)}$$

Dabei betrachten wir die kanonische Identifizierung

$$\begin{gathered} \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) = L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \longleftarrow M_{n\times m}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{pmatrix} \mapsto \left(\sum_{j=1}^m a_{ij}\xi_j \right)_{1\leq i\leq n} \longleftarrow (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m}} \\ A \longmapsto ? \end{gathered}$$

Beweis

(i) Es gilt (für ξ in einer Umgebung von 0) für ein $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ mit $\lim_{\underline{\xi}\to 0} \frac{1}{\left\|\underline{\xi}\right\|_2} \cdot \varphi(\underline{\xi}) = 0$

$$f(\underline{x}+\underline{\xi}) = f(\underline{x}) + Df(\underline{x})\underline{\xi} + \varphi(\underline{\xi})$$

wir erhalten

$$Df(\underline{x})\underline{\xi} \xrightarrow{\underline{\xi}\to 0} 0 \quad \text{und} \quad \varphi(\underline{\xi}) \xrightarrow{\underline{\xi}\to 0} 0$$

also $f(\underline{x}+\underline{\xi}) \xrightarrow{\underline{\xi}\to 0} f(\underline{x}) + 0 + 0 = f(\underline{x})$ (vgl. Folgenkriterium)

(ii) Sei $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}} \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ die zu $Df(\underline{x})$ gehörige Matrix, d.h.

$$Df(\underline{x})\underline{\xi} = \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\xi_j\right)_{1\le i\le n}$$

Sei φ wie oben. Dann gilt für die Koordinatenabbildungen

$$f_i(\underline{x}+\underline{\xi}) = f_i(\underline{x}) + \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\xi_i + \varphi_i(\underline{\xi}) \qquad i = 1,\dots,n$$

also

$$f_i(\underline{x} + h\cdot e_j) = f_i(\underline{x}) + a_{ij}\cdot h + \varphi_i(h\cdot e_j)$$

siehe auch Definition 6.1

Daher

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\underline{x}) = \lim_{h\to 0, h\neq 0} \frac{f_i(\underline{x}+h\cdot \underline{e}_j) - f_i(\underline{x})}{h} &= \lim_{h\to 0,h\neq 0}\frac{a_{ij}\cdot h + \varphi_i(h\cdot \underline{e}_j)}{h}\\ &= a_{ij} + \underbrace{\lim_{h\to 0,h\neq 0}\frac{\varphi_i(h\cdot \underline{e}_j)}{h}}_{=0} = a_{ij}\end{aligned}$$

□

7.5 Satz

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar. Dann ist f differenzierbar (insbesondere stetig).

Beweis
Sei $\underline{x} \in U$. U offen $\Rightarrow \exists \delta > 0 : B_{\|\cdot\|_{\max}}(x,\delta) \subset U$. Für $\underline{\xi} \in \mathbb{R}^m$ mit $\|\xi\|_{\max} < \delta$ setze

$$\underline{z}^{(i)} := \underline{x} + \sum_{j=0}^{i} \xi_j \cdot \underline{e}_j \qquad \text{für } i = 0,\dots,m$$

dann ist $\underline{z}^{(0)} = \underline{x}$, $\underline{z}^{(m)} = \underline{x} + \underline{\xi}$. Definiere $g^{(i)} : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch

$$g^{(i)}(t) := f\left(z^{(i-1)} + t\cdot \xi_i \cdot \underline{e}_i\right) \qquad i \in \{1,\dots,m\}$$

dann ist $g^{(i)}$ differenzierbar (warum?) mit $(g^{(i)})'(t) = D_i f(z^{(i-1)} + t\cdot\xi_i\cdot\underline{e}_i)\cdot\xi_i$. Nach dem Mittelwertsatz existiert $\theta_i \in [0,1]$ mit

$$\begin{aligned} g^{(i)}(1) - g^{(i)}(0) &= (1-0)\cdot\left(g^{(i)}\right)'(\theta_i)\\ f\left(z^{(i)}\right) - f\left(z^{(i-1)}\right) = \quad &= D_i f(z^{(i-1)} + \theta_i\cdot\xi_i\cdot\underline{e}_i)\cdot\xi_i\end{aligned}$$

Wir erhalten

(Teleskopsumme)

$$f(\underline{x}+\underline{\xi}) - f(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{m}\left(f(z^{(i)}) - f(z^{(i-1)})\right) = \sum_{i=1}^{m} D_i f\left(z^{(i-1)} + \theta_i\cdot\xi_i\cdot\underline{e}_i\right)\cdot\xi_i$$

also

$$\begin{aligned} f(\underline{x}+\underline{\xi}) &= f(\underline{x}) + \underbrace{\sum_{i=1}^m D_i f(\underline{x})\xi_i}_{=:A\xi_i} + \underbrace{\sum_{i=1}^m \Big(D_i f\left(z^{(i-1)} + \theta_i \cdot \xi_i \cdot \underline{e}_i\right) - D_i f(\underline{x})\Big)\xi_i}_{=:\varphi(\underline{\xi})} \\ &= f(\underline{x}) + A\underline{\xi} + \varphi(\underline{\xi}) \end{aligned}$$

0 ergänzt

Definiere $\lambda_i \in \mathbb{R}$ durch $\lambda_i := D_i f(\underline{x})$ für $i = 1, \dots, m$
Definiere $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ durch

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_m \end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^m \lambda_i \eta_i = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_m \end{pmatrix} = \left\langle \operatorname{grad} f(\underline{x}) \,\middle|\, \underline{\eta} \right\rangle$$

Für φ gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|\underline{\xi}\|_2} \cdot \left|\varphi(\underline{\xi})\right| &\leq \frac{1}{\|\underline{\xi}\|_2} \cdot m \cdot \max_i \left| D_i f\left(z^{(i-1)} + \theta_i \xi_i \underline{e}_i\right) - D_i f(\underline{x}) \right| \cdot \max_i |\xi_i| \\ &\leq \frac{1}{\|\underline{\xi}\|_2} \cdot m \cdot \max_i \left| D_i f\left(z^{(i-1)} + \theta_i \xi_i \underline{e}_i\right) - D_i f(\underline{x}) \right| \cdot \|\underline{\xi}\|_2 \\ &= m \cdot \max_i \left| D_i f \underbrace{\left(z^{(i-1)} + \theta_i \xi_i \underline{e}_i\right)}_{\xrightarrow{\xi \to 0} \underline{x}} - D_i f(\underline{x}) \right| \xrightarrow{\xi \to 0} 0 \end{aligned}$$

(da $D_i f$ stetig) □

7.6 Satz (Kettenregel)

Seien $U \subset \mathbb{R}^m, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $g : U \to V$, $f : V \to \mathbb{R}^k$ Abbildungen. g sei differenzierbar in $\underline{x} \in U$. f sei differenzierbar in $\underline{y} := g(\underline{x}) \in V$. Dann ist $f \circ g : U \to \mathbb{R}^k$ differenzierbar in $\underline{x}$ mit

$$D(f \circ g)(\underline{x}) = Df\big(g(\underline{x})\big) \cdot Dg(\underline{x}) \qquad (R^m \to \mathbb{R}^k \text{ linear})$$

Beweis
nach Vorraussetzung existieren $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $\psi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ mit

$$\lim_{\underline{\xi} \to 0, \underline{\xi} \neq 0} \frac{1}{\|\underline{\xi}\|_2} \cdot \varphi(\underline{\xi}) = 0 \qquad (*)$$

$$\lim_{\underline{\eta} \to 0, \underline{\eta} \neq 0} \frac{1}{\|\eta\|_2} \cdot \psi(\underline{\eta}) = 0 \qquad (**)$$

und

$$\begin{aligned} g(\underline{x}+\underline{\xi}) &= g(\underline{x}) + D_g(\underline{x})\underline{\xi} + \varphi(\underline{\xi}) \\ f(\underline{y}+\underline{\eta}) &= f(\underline{y}) + D_f(\underline{y})\underline{\xi} + \psi(\underline{\eta}) \end{aligned}$$

Definiere $\chi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ durch

$$\chi(\underline{\xi}) := Df(\underline{y})\varphi(\underline{\xi}) + \psi\big(D_g(\underline{x})\underline{\xi} + \varphi(\underline{\xi})\big)$$

dann gilt

$$\begin{aligned}(f\circ g)(\underline{x}+\underline{\xi}) &= f\Big(\underbrace{g(\underline{x})}_{\underline{y}}+\underbrace{g(\underline{x}+\underline{\xi})-g(\underline{x})}_{\underline{\eta}}\Big)\\
&= f(g(\underline{x}))+Df\big(g(\underline{x})\big)\Big(g(\underline{x}+\underline{\xi})-g(\underline{x})\Big)+\psi\Big(g(\underline{x}+\underline{\xi})-g(\underline{x})\Big)\\
&= f(g(\underline{x}))+Df(g(\underline{x}))\,\big(Dg(\underline{x})\underline{\xi}+\varphi(\underline{\xi})\big)+\psi\big(Dg(\underline{x})\underline{\xi}+\varphi(\underline{x})\big)\\
&= f(g(\underline{x}))+Df(g(\underline{x}))Dg(\underline{x})\underline{\xi}+\underbrace{Df(g(\underline{x}))\varphi(\underline{\xi})+\psi(Dg(\underline{x})\underline{\xi}+\varphi(\underline{\xi}))}_{\chi(\xi)}\\
&= f\circ g(\underline{x})+Df(g(\underline{x}))\circ Dg(\underline{x})\underline{\xi}+\chi(\underline{\xi})\end{aligned}$$

Wegen (*) existieren ein $K>0$ und $\delta>0$ mit $\left\|\varphi(\underline{\xi})\right\|_2\leq K\cdot\|\xi\|_2$ für alle $\xi\in B(0,\delta)$ (warum?)
Dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{\|\xi\|_2}\cdot\left\|\psi(Dg(\underline{x})\xi+\varphi(\underline{\xi}))\right\|_2 &= \frac{\left\|Dg(\underline{x})\underline{\xi}+\varphi(\underline{\xi})\right\|_2}{\|\xi\|_2\cdot\left\|Dg(\underline{x})\underline{\xi}+\varphi(\underline{\xi})\right\|_2}\left\|\psi(Dg(\underline{x})\xi+\varphi(\underline{\xi}))\right\|_2\\
&\leq \frac{\left\|Dg(\underline{x})\underline{\xi}\right\|_2+\left\|\varphi(\underline{\xi})\right\|_2}{\|\xi\|_2\cdot\left\|Dg(\underline{x})\underline{\xi}+\varphi(\underline{\xi})\right\|_2}\left\|\psi(Dg(\underline{x})\xi+\varphi(\underline{\xi}))\right\|_2\\
&\leq \frac{\Big(\left\|Dg(\underline{x})\underline{\xi}\right\|_2+K\left\|\underline{\xi}\right\|_2\Big)}{\|\xi\|_2\cdot\left\|Dg(\underline{x})\underline{\xi}+\varphi(\underline{\xi})\right\|_2}\left\|\psi(Dg(\underline{x})\xi+\varphi(\underline{\xi}))\right\|_2\\
&\leq \frac{(\|Dg(\underline{x})\|+K)\left\|\underline{\xi}\right\|_2}{\|\xi\|_2\cdot\left\|Dg(\underline{x})\underline{\xi}+\varphi(\underline{\xi})\right\|_2}\left\|\psi(\underbrace{Dg(\underline{x})\xi+\varphi(\underline{\xi})}_{\xrightarrow{\xi\to 0}0})\right\|_2\\
&\xrightarrow{\xi\to 0} 0\end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$\frac{1}{\|\xi\|_2}\left\|Df(g(\underline{x}))\varphi(\underline{\xi})\right\|_2\leq\|Df(g(\underline{x}))\|\cdot\frac{\left\|\varphi(\underline{\xi})\right\|_2}{\left\|\underline{\xi}\right\|_2}\xrightarrow{\xi\to 0}0$$

also

$$\frac{1}{\left\|\underline{\xi}\right\|_2}\left\|\chi(\underline{\xi})\right\|_2\leq\frac{1}{\|\underline{xi}\|_2}\Big(\left\|Df(g(\underline{x}))\varphi(\underline{\xi})\right\|_2+\left\|\psi(Dg(\underline{x})\underline{\xi}+\varphi(\underline{\xi}))\right\|_2\Big)\xrightarrow{\xi\to 0}0$$

□

7.7 Beispiel

$U\subset\mathbb{R}^m, V\subset\mathbb{R}^n$ offen, $g:U\to V$, $f:V\to\mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f\circ g)(\underline{x})=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial y_j}\big(g(\underline{x})\big)\cdot\frac{\partial g_j}{\partial x_i}(\underline{x})$$

denn

$$\begin{aligned}\nabla(f\circ g)(\underline{x}) = \left(\frac{\partial(f\circ g)}{\partial x_1}(\underline{x}),\dots,\frac{\partial(f\circ g)}{\partial x_m}(\underline{x})\right) &= D(f\circ g)(\underline{x})\\ &\overset{7.6}{=} Df\big(g(\underline{x})\big)\cdot Dg(\underline{x})\\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial y_1}(g(\underline{x})),\dots,\frac{\partial f}{\partial y_n}(g(\underline{x}))\right)\begin{pmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\underline{x}) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_m}(\underline{x})\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1}(\underline{x}) & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_m}(\underline{x})\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$\langle\nabla f(\underline{x}),\underline{v}\rangle \leftrightarrow Df(\underline{x})(\underline{v}) = (\dots)\begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix}$

7.8 Definition

Sei $U\subset\mathbb{R}^m$ offen, $f:U\to\mathbb{R}$, $\underline{x}\in U$, $\underline{v}\in\mathbb{R}^m$ mit $\|v\|_2=1$. Falls

$$D_{\underline{v}}f(\underline{x}) := \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}}\frac{f(\underline{x}+t\cdot\underline{v})-f(\underline{x})}{t}$$

existiert, so heißt $D_{\underline{v}}f(\underline{x})$ **Richtungsableitung** von f in $\underline{x}$ in Richtung $\underline{v}$.
(Es gilt $D_{\underline{e}_i}f(\underline{x}) = D_if(\underline{x})$)

7.9 Satz

Sei $U\subset\mathbb{R}^m$ offen, $f:U\to\mathbb{R}$ stetig (partiell) differenzierbar. Dann gilt für $\underline{x}\in U$ und $\underline{v}\in\mathbb{R}^m$ mit $\|v\|_2=1$

$$D_{\underline{v}}f(\underline{x}) = \langle\underline{v}\,|\,\operatorname{grad}f(\underline{x})\rangle\ (=\|\operatorname{grad}f(\underline{x})\|_2\cdot\cos\theta)\qquad(\theta = \text{Winkel zwischen } \underline{v} \text{ und } \operatorname{grad}f(\underline{x}))$$

falls $\operatorname{grad}f(\underline{x})\neq 0$.

Beweis
Definiere $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^m$ durch $g(t):=\underline{x}+t\cdot\underline{v}$, dann existiert $\varepsilon>0$ mit $g((-\varepsilon,\varepsilon))\subset U$ (warum?) und $f\circ g:(-\varepsilon,\varepsilon)\to\mathbb{R}$ ist definiert. Es gilt

$$\begin{aligned}D_{\underline{v}}f(\underline{x}) = \lim_{t\to 0,t\neq 0}\frac{f(\underline{x}+t\cdot\underline{v})-f(\underline{x})}{t} &= \lim_{t\to 0,t\neq 0}\frac{f\big(g(t)\big)-f\big(g(0)\big)}{t}\\ &= \lim_{t\to 0,t\neq 0}\frac{(f\circ g)(t)-(f\circ g)(0)}{t}\\ &= D(f\circ g)(0) = Df\big(g(0)\big)\circ Dg(0) \qquad \text{(Kettenregel)}\\ &= \big\langle\operatorname{grad}f\big(g(0)\big),\underline{v}\big\rangle \qquad \square\end{aligned}$$

7.10 Definition

Sei $A:[a,b]\to M_{n\times m}(\mathbb{R})$ stetig[1]. Dann sind $A_{ij}:[a,b]\to\mathbb{R}$, $1\le i\le n$, $1\le j\le m$ stetig. Wir setzen

$$\int_a^b A(t)\,\mathrm{d}t := \left(\int_a^b A_{ij}(t)\,\mathrm{d}t\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}}\in M_{n\times m}(\mathbb{R})$$

[1] Zum Beispiel mit Operatornorm: $\|B\| := \sup\left\{\|B\underline{x}\|_2 \,\middle|\, \underline{x}\in\mathbb{R}^m, \|\underline{x}\|_2 = 1\right\}$

7.11 Satz

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Sei $\underline{x} \in U$, $\underline{\xi} \in \mathbb{R}^m$ so, dass $\left\{ \underline{x} + t\underline{\xi} \,\middle|\, t \in [0,1] \right\} \subset U$. Dann gilt

$$f\left(\underline{x} + \underline{\xi}\right) - f(\underline{x}) = \left(\int_0^1 Df(\underline{x} + t \cdot \underline{\xi}) \,\mathrm{d}t \right) \cdot \underline{\xi}$$

Außerdem gilt

$$\left\| f(\underline{x} + \underline{\xi}) - f(\underline{x}) \right\|_2 \leq \sup \left\{ \left\| Df(\underline{x} + t \cdot \underline{\xi}) \right\| \,\middle|\, t \in [0,1] \right\} \left\| \underline{\xi} \right\|_2$$

Beweis
Für $1 \leq i \leq n$ definieren $g_i : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch $g_i(t) := f_i(\underline{x} + t \cdot \underline{\xi})$, dann gilt $g_i'(t) = Df_i(\underline{x} + t \cdot \underline{\xi}) \cdot \underline{\xi}$ und

$$\begin{aligned} f_i(\underline{x} + \underline{\xi}) - f_i(\underline{x}) = g_i(1) - g_i(0) = \int_0^1 g_i'(t) \,\mathrm{d}t &= \int_0^1 \left(Df_i(\underline{x} + t \cdot \underline{\xi})\underline{\xi} \right) \,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\underline{x} + t \cdot \underline{\xi}) \cdot \xi_j \right) \,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{j=1}^m \left(\int_0^1 \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\underline{x} + t \cdot \underline{\xi}) \,\mathrm{d}t \right) \xi_j \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} f(\underline{x} + \underline{\xi}) - f(\underline{x}) = \left(\sum_{j=1}^m \left(\int_0^1 \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\underline{x} + t \cdot \underline{\xi}) \,\mathrm{d}t \right) \xi_j \right)_{1 \leq i \leq n} &= \left(\int_0^1 \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\underline{x} + t\underline{\xi}) \,\mathrm{d}t \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \underline{\xi} \\ &= \left(\int_0^1 Df(\underline{x} + t\underline{\xi}) \,\mathrm{d}t \right) \underline{\xi} \end{aligned}$$

Normabschätzung:

$$\begin{aligned} \left\| f(\underline{x} + \underline{\xi}) - f(\underline{x}) \right\|_2 = \left\| \left(\int_0^1 Df(\underline{x} + t\underline{\xi}) \,\mathrm{d}t \right) \underline{\xi} \right\|_2 &= \left\| \int_0^1 \left(Df(\underline{x} + t\underline{\xi})\underline{\xi} \right) \,\mathrm{d}t \right\|_2 \\ &\leq \int_0^1 \left\| Df(\underline{x} + t\underline{\xi})\underline{\xi} \right\|_2 \,\mathrm{d}t \\ &\leq \int_0^1 \left\| Df(\underline{x} + t\underline{\xi}) \right\| \cdot \left\| \underline{\xi} \right\|_2 \,\mathrm{d}t \\ &\leq \int_0^1 \left\| Df(\underline{x} + t\underline{\xi}) \right\| \,\mathrm{d}t \cdot \left\| \underline{\xi} \right\|_2 \\ &\leq \sup \left\{ \left\| Df(\underline{x} + t\underline{\xi}) \right\| \,\middle|\, t \in [0,1] \right\} \cdot \left\| \underline{\xi} \right\|_2 \end{aligned}$$

Für (*) benutzt :

$$\left\| \int_0^1 \underline{v}(t) \,\mathrm{d}t \right\|_2 \leq \int_0^1 \left\| \underline{v}(t) \right\|_2 \,\mathrm{d}t$$

für $\underline{v} : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ stetig. (Übung) □

7.12 Notation

Für $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{N}^m$ setzen wir

α bezeichnet man auch als Mulitindex

$$|\alpha| := \alpha_1 + \ldots + \alpha_m$$
$$\alpha! := \alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_m!$$

Für $\underline{x} = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ sei

$$\underline{x}^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_m^{\alpha_m}$$

Für $f : U \to \mathbb{R}$ ($U \subset \mathbb{R}^m$ offen): $|\alpha|$-mal partiell differenzierbar sei

$$D^\alpha f := D_1^{\alpha_1} \ldots D_m^{\alpha_m} f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}}$$

7.13 Proposition

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ k-mal stetig partiell differenzierbar. Sei $\underline{x} \in U$ und $\underline{\xi} \in \mathbb{R}^m$ mit $\left\{ \underline{x} + t\underline{\xi} \,\middle|\, t \in [0,1] \right\} \subset U$. Dann ist $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(t) := f(\underline{x} + t\underline{\xi})$ auch k-mal stetig differenzierbar mit

$$\frac{\partial^k g}{\partial t^k}(t) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^m, |\alpha| = k} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha f(\underline{x} + t\underline{\xi})\underline{\xi}^\alpha$$

Beweis
Behauptung:

$$\frac{d^l g}{dt^l}(t) = \sum_{i_1, \dots i_k \in \{1, \dots, m\}} D_{i_l} \ldots D_{i_1} f(\underline{x} + t\underline{\xi}) \xi_{i_1} \ldots \xi_{i_l} \qquad (\star)$$

für $l = 1, \dots, k$.

I.A. $\frac{\partial^1 g}{dt}(t) = \frac{\partial g}{\partial t}(t) = Df\big(\underline{x} + t\underline{\xi}\big) \cdot \underline{\xi} = \sum_{i=1}^m D_i f(\underline{x} + t\underline{\xi}) \cdot \xi_i$

I.S. Es gelte $(\star)$ für $l \in \{1, \dots, k-1\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^{l+1}}{\partial t^{l+1}} g(t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{d^l}{dt^l} g(t)\right) &= \frac{d}{dt}\left(\sum_{i_1, \dots, i_l \in \{1, \dots, m\}} D_{i_l} \ldots D_{i_1} f(\underline{x} + t\underline{\xi}) \xi_{i_1} \ldots \xi_{i_l} \right) \\
&= \sum_{i = 1, \dots, m} D_i \left(\sum_{i_1, \dots, i_l \in \{1, \dots, m\}} D_{i_l} \ldots D_{i_1} f(\underline{x} + t\underline{\xi}) \xi_{i_1} \ldots \xi_{i_l} \right) \xi_i \\
&= \sum_{i_{l+1} \in \{1, \dots, m\}} \sum_{i_1, \dots, i_l \in \{1, \dots, m\}} D_{i_{l+1}} D_{i_l} \ldots D_{i_1} f(\underline{x} + t\underline{\xi}) \xi_{i_1} \ldots \xi_{i_l} \cdot \xi_{i_{l+1}} \\
&= \sum_{i_1, \dots i_{l+1} \in \{1, \dots, m\}} D_{i_{l+1}} \ldots D_{i_1} f(\underline{x} + t\underline{\xi}) \xi_{i_1} \ldots \xi_{i_{l+1}}
\end{aligned}$$

per Induktion folgt die Behauptung

Falls $(i_1, \dots, i_k) \in \{1, \dots, m\}^k$ dem Index i α_i-mal enthält (für $i = 1, \dots, m$), so gilt nach Satz 6.6

$$\begin{aligned}
D_{i_k} \ldots D_{i_1} f(\underline{x} + t\underline{\xi}) \xi_{i_1} \ldots \xi_{i_k} &= D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \ldots D_m^{\alpha_m} f(\underline{x} + t\underline{\xi}) \xi_1^{\alpha_2} \cdot \xi_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot \xi_m^{\alpha_m} \\
&= D^\alpha f(\underline{x} + t \cdot \underline{\xi}) \underline{\xi}^\alpha \qquad \text{(mit } \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m))
\end{aligned}$$

dabei ist $|\alpha| = k$.

Weiter gilt für $\alpha \in \mathbb{N}^m$ mit $|\alpha|)k$

$$\#\left\{(i_1,\dots,i_k) \in \{1,\dots,m\}^k \,\middle|\, \text{Index } i \text{ kommt } \alpha_i\text{-mal vor, für } i = 1,\dots,m\right\} = \frac{k!}{\alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_m!} = \frac{k!}{\alpha!}$$

Es folgt

$$\sum_{(i_1,\dots,i_k)\in\{1,\dots,m\}^k} D_{i_k}\dots D_{i_1} f(\underline{x} + t\underline{\xi})\xi_{i_1}\dots\xi_{i_k} = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^m, |\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha f(\underline{x}+t\underline{\xi})\underline{\xi}^\alpha \qquad \square$$

7.14 Satz: Taylorformel

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $\underline{x} \in U$ und $\delta > 0$ mit $\overline{B}(\underline{x}, \delta) \subset U$. Sei $f : U \to \mathbb{R}$ $(k+1)$-mal stetig (partiell) differenzierbar. Dann existiert $R_{k+1} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ mit

$$f(\underline{x} + \underline{\xi}) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^m, |\alpha|\leq k} \frac{D^\alpha f(\underline{x})}{\alpha!} \cdot \underline{\xi}^\alpha + R_{k+1}(\underline{\xi}) \qquad (\text{für } \|\xi\|_2 \leq \delta)$$

und

$$\lim_{\underline{\xi}\to 0, \underline{\xi}\neq 0} \frac{R_{k+1}(\underline{\xi})}{\|\underline{\xi}\|_2^k} = 0$$

(Hierfür genügt es, wenn f nur k-mal stetig differenzierbar ist.). Für jedes $\underline{\xi} \in \mathbb{R}^m$ mit $\|\underline{\xi}\|_2 \leq \delta$ existiert ein $\theta \in [0,1]$ mit

$$R_{k+1}(\underline{\xi}) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^m, |\alpha|=k+1} \frac{D^\alpha f(\underline{x} + \theta\cdot\underline{\xi})}{\alpha!} \cdot \underline{\xi}^\alpha \qquad (\star)$$

Beweis

Sei $\underline{\xi} \in \overline{B}(0,\delta)$. Definiere $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch $g(t) := f(\underline{x} + t\cdot\underline{\xi})$. Nach 7.13 ist g $(k+1)$-mal stetig differenzierbar; nach 1.14 existiert ein $\theta \in [0,1]$ mit

0 als Entwicklungspunkt in 1.14

$$\begin{aligned}
g(1) = g(0+1) &\overset{1.14}{=} \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{l!}\frac{d^l}{dt^l} g(0)(1-0)^l + \frac{1}{(k+1)!}\frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} g(\theta)1^{k+1} \\
&= \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{l!}\frac{d^l}{dt^l} g(0) + \frac{1}{(k+1)!}\frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} g(\theta) \\
&\overset{7.13}{=} \sum_{l=0}^{k} \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^m, |\alpha|=l} \frac{l!}{l!\cdot\alpha!} D^\alpha f(\underline{x} + 0\underline{\xi})\underline{\xi}^\alpha + \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^m, |\alpha|=k+1} \frac{(k+1)!}{(k+1)!\cdot\alpha!} D^\alpha f(\underline{x}+\theta\underline{\xi})\underline{\xi}^\alpha \\
&= R_{k+1}(\underline{\xi}) \qquad \Rightarrow (\star)
\end{aligned}$$

Für $\alpha \in \mathbb{N}^m$ mit $|\alpha| = k+1$ ist $D^\alpha f = D_1^{\alpha_1}\dots D_m^{\alpha_m} f : U \to \mathbb{R}$ stetig, also beschränkt auf $\overline{B}(x,\delta) \subset U$ (da $\overline{B}(x,\delta)$ kompakt). Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\|\underline{\xi}\|_2^k} \cdot \left|\underline{\xi}^\alpha\right| = \frac{1}{\|\underline{\xi}\|_2^k} \cdot |\xi_1|^{\alpha_1} \dots |\xi_m|^{\alpha_m} &\leq \frac{1}{\|\underline{\xi}\|_2^k} \cdot \|\underline{\xi}\|_2^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \|\underline{\xi}\|_2^{\alpha_m} \\
&= \frac{1}{\|\underline{\xi}\|_2^k} \|\underline{\xi}\|_2^{|\alpha|} \\
&= \|\underline{\xi}\|_2 \xrightarrow{\underline{\xi}\to 0} 0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\|\underline{\xi}\|_2^k} \cdot R_{k+1}(\underline{\xi}) \xrightarrow{\underline{\xi}\to 0} 0. \qquad \square$$

7.15 Corollar

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $\underline{x} \in U$, $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Dann gilt

$$f(\underline{x}+\underline{\xi}) = f(\underline{x}) + \left\langle \operatorname{grad} f(\underline{x}) \,\middle|\, \underline{\xi} \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle \underline{\xi} \,\middle|\, \operatorname{Hess} f(\underline{x})\underline{\xi} \right\rangle + R_3(\underline{\xi})$$

für ξ in einer Umgebung von 0. Dabei ist $\operatorname{Hess} f(\underline{x}) := (D_i D_j f(\underline{x}))_{i,j\in\{1,\dots,m\}} \in M_{m\times m}(\mathbb{R})$

Beweis
Nach 7.14 gilt:

$$f(\underline{x}+\underline{\xi}) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^m, |\alpha|\le 2} \frac{D^\alpha f(\underline{x})}{\alpha!} \underline{\xi}^\alpha + R_3(\underline{\xi})$$

- $\boxed{|\alpha| = 0}$: $\alpha = (0,\dots,0)$ und

$$\frac{D^\alpha f(\underline{x})}{\alpha!} \underline{\xi}^\alpha = \frac{D^0 f(\underline{x})}{\alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_m!} \xi_1^0 \cdots \xi_m^0 = f(\underline{x})$$

- $\boxed{|\alpha| = 1}$: $\alpha = (0,\dots,0,\underset{i}{1},0,\dots,0)$, $i \in \{1,\dots,m\}$

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^m, |\alpha|=1} \frac{D^\alpha f(\underline{x})}{\alpha!} \underline{\xi}^\alpha = \sum_{i=1}^m \frac{D_i f(\underline{x})}{0!\cdots 1!\cdots 0!} \xi_1^0 \cdots \xi_i^1 \cdots \xi_m^0 = \sum_{i=1}^m D_i f(\underline{x})\xi_i = \left\langle \operatorname{grad} f(\underline{x}) \,\middle|\, \underline{\xi} \right\rangle$$

- $\boxed{|\alpha| = 2}$: $\alpha = (0,\dots,\underset{i}{2},\dots,0)$ für $1 \le i \le m$ oder $\alpha = (0,\dots,\underset{i}{1},0,\dots,0,\underset{j}{1},0,\dots,0)$ für $1 \le i < j \le m$.

$$\frac{D^\alpha f(\underline{x})}{\alpha!} \underline{\xi}^\alpha = \frac{D_i^2 f(\underline{x})}{2} \xi_1^2 \qquad \Bigg| \qquad \frac{D^\alpha f(\underline{x})}{\alpha!} \underline{\xi}^\alpha = \frac{D_i D_j f(\underline{x})}{1} \xi_i \xi_j$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^m, |\alpha|=2} \frac{D^\alpha f(\underline{x})}{\alpha!} \underline{\xi}^\alpha &= \sum_{i\in\{1,\dots,m\}} \frac{D^2 f(\underline{x})}{2} \xi_1^2 + \sum_{1\le i<j\le m} D_i D_j f(\underline{x}) \xi_i \xi_j \\
&= \frac{1}{2} \sum_{1\le i,j\le m, i=j} D_i D_j f(\underline{x}) \xi_i \xi_j + \frac{1}{2} \sum_{1\le i,j\le m, i\ne j} D_i D_j f(\underline{x}) \xi_i \xi_j \\
&= \frac{1}{2} \sum_{1\le i,j\le m} D_i D_j f(\underline{x}) \xi_i \xi_j = \left\langle \underline{\xi} \,\middle|\, \operatorname{Hess} f(\underline{x})\underline{\xi} \right\rangle
\end{aligned}$$

□

7.16 Definition

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$, $f : U \to \mathbb{R}$, $\underline{x} \in U$. f besitzt in $\underline{x}$ ein **lokales Maximum (Minimum)**, falls $\underline{x} \in V \underset{\text{offen}}{\subset} U$ existiert mit $f(\underline{y}) \le f(\underline{x})$ für alle $\underline{y} \in V$ (bzw. $f(\underline{y}) \ge f(\underline{x})$ für alle $\underline{y} \in V$). Ein **lokales Extremum** ist ein lokales Maximum oder Minimum. Das Maximum (Minimum) ist **isoliert** , falls $f(\underline{y}) < f(\underline{x})$ (bzw. $f(\underline{y}) > f(\underline{x})$) für $\underline{x} \ne \underline{y} \in V$.

7.17 Propositon

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar. Falls f in $\underline{x} \in U$ ein lokales Extremum besitzt, so gilt

$$\operatorname{grad} f(\underline{x}) = 0$$

Beweis
Für $\varepsilon > 0$ klein genug und $i \in \{1, \dots, m\}$ definiere $g_i : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ mit $g_i(t) := f(\underline{x} + t \cdot \underline{e}_1)$. Dann ist g_i differenzierbar und hat in 0 ein lokales Extremum (warum?). Es gilt nach Analysis I: $0 = g_i'(0) = D_i f(\underline{x})$, also

$$\operatorname{grad} f(\underline{x}) = (D_1 f(\underline{x}), \dots, D_m f(\underline{x})) = 0$$ □

7.18 Erinnerung

Sei $A \in M_{m\times m}(\mathbb{R})$ symmetrisch, dann existiert $T \in M_{m\times m}(\mathbb{R})$ unitär (orthogonal) mit

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{pmatrix}$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ Eigenwerte (zu Eigenvektoren $T\underline{e}_1, \dots, Te_m$). A heißt positiv definit (negativ definit), falls alle λ_i echt positiv (echt negativ) sind. In diesem Fall gilt $\langle \underline{\xi} \mid A\underline{\xi} \rangle > 0 \ (< 0)$ für alle $\underline{\xi} \in \mathbb{R}^m$.

7.19 Satz

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, $\underline{x} \in U$ mit $\operatorname{grad} f(\underline{x}) = 0$.

(i) Wenn $\operatorname{Hess} f(\underline{x})$ positiv definit ist, dann hat f in $\underline{x}$ ein isoliertes Minimum.

(ii) Wenn $\operatorname{Hess} f(\underline{x})$ negativ definit ist, dann hat f in $\underline{x}$ ein isoliertes Maximum.

(iii) Falls $\operatorname{Hess} f(\underline{x})$ echt positive und echt negative Eigenwerte besitzt, so hat f in $\underline{x}$ kein Extremum.

Beweis

(i) Nach Corollar 7.15 gilt für $\underline{\xi}$ in einer Umgebung von 0.

$$f(\underline{x} + \underline{\xi}) = f(\underline{x}) + \underbrace{\langle \operatorname{grad} f(\underline{x}) \mid \underline{\xi} \rangle}_{=0} + \frac{1}{2} \langle \underline{\xi} \mid \operatorname{Hess} f(\underline{x}) \rangle + R_3(\underline{\xi})$$

Wegen $\frac{R_3(\underline{\xi})}{\|\underline{\xi}\|_2^2} \xrightarrow{\underline{\xi}\to 0, \underline{\xi}\neq 0} 0$ existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit: $\|\underline{\xi}\|_3 < \delta \Rightarrow |R_3(\underline{\xi})| < \varepsilon \|\underline{\xi}\|_2$. Dann ist $S^{m-1} := \left\{ \underline{\eta} \in \mathbb{R}^m \,\middle|\, \|\underline{\eta}\|_2 = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^m$ kompakt und $\underline{\eta} \mapsto \langle \underline{\eta} \mid \operatorname{Hess} f(\underline{x})\underline{\eta} \rangle$ ist stetig, nimmt also auf S^{m-1} ihr Minimum an. Dann gilt $\langle \underline{\eta} \mid \operatorname{Hess} f(\underline{x})\underline{\eta} \rangle > 0$ für alle $\underline{\eta} \in S^{m-1}$, gilt

$$\alpha := \inf \left\{ \langle \underline{\eta} \mid \operatorname{Hess} f(\underline{x})\underline{\eta} \rangle \mid \underline{\eta} \in S^{m-1} \right\} > 0$$

Für $\underline{\xi} \in \mathbb{R}^m$ gilt nun

$$\langle \underline{\xi} \mid \operatorname{Hess} f(\underline{x}\underline{\xi}) \rangle \geq \alpha \|\underline{\xi}\|_2^2$$

Sei nun $\varepsilon := \frac{\alpha}{4}$, wähle $\delta > 0$ wie eben.

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(\underline{x} + \underline{\xi}) &\geq f(\underline{x}) + \frac{1}{2} \langle \underline{\xi} \mid \operatorname{Hess} f(\underline{x})\underline{\xi} \rangle - R_3(\underline{\xi}) \\ &\geq f(\underline{x}) + \frac{\alpha}{2} \|\underline{\xi}\|_2^2 - \frac{\alpha}{4} \|\xi\|_2^2 \\ &> f(\underline{x}) \qquad \text{(falls } 0 < \|\underline{\xi}\|_2 < \delta\text{)} \end{aligned}$$

(ii) analog

(iii) Übung

□

7.20 Beispiel

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f\binom{x}{y} = c + x^2 + y^2$, $c \in \mathbb{R}$. Taylorformel:

$$\begin{aligned}
f\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} &= f\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + \left\langle \nabla f\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}\right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle \begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} \,\middle|\, (\operatorname{Hess} f)\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}\right\rangle + R_3\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}\\
\nabla f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}D_x f\binom{x}{y}\\ D_y f\binom{x}{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x\\2y\end{pmatrix}\\
\operatorname{Hess} f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}D_x D_x f\binom{x}{y} & D_x D_y f\binom{x}{y}\\ D_x D_y f\binom{x}{y} & D_y D_y f\binom{x}{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$\operatorname{Hess} f\binom{0}{0} = \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ ist positiv definit. Gesamt folgt:

$$\Rightarrow f\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} = c + \xi^2 + \eta^2 + R_3\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}$$

und f hat in $\binom{0}{0}$ ein isoliertes Minimum.

8 Implizite Funktionen

8.1 Motivation

Sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenzierbar.

Abbildung 20: Hier kommt noch ein Bild mit Niveaulinien hin

* Wann ist $N_f(c)$ lokal von der Form $\left\{ \binom{x}{g(x)} \,\middle|\, x \in I \right\}$ für ein $g : I \to \mathbb{R}$?
* Was lässt sich über g sagen?
* Wo liegen die Extrema von $F|_Z$?

8.2 Satz

Seien $\underline{a} \in \mathbb{R}^k$, $\underline{b}, \underline{c} \in \mathbb{R}^m$, $r_1, r_2 > 0$. $U_1 := B(a, r_1) \subset \mathbb{R}^k, U_2 := B(b, r_2) \subset \mathbb{R}^m$. Sei

$$F : U_1 \times U_2 \to \mathbb{R}^m \quad , \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{pmatrix} \mapsto F \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{pmatrix}$$

Eine Abbildung mit $F\binom{\underline{a}}{\underline{b}} = \underline{c}$. F sei in $\binom{\underline{a}}{\underline{b}}$ differenzierbar und $\frac{\partial F}{\partial \underline{y}} \binom{\underline{a}}{\underline{b}} \in M_{m \times m}(\mathbb{R})$ sei invertierbar. Es sei $g : U_1 \to U_2$ stetig mit $g(\underline{a}) = \underline{b}$ und $F\binom{\underline{x}}{g(\underline{x})} = \underline{c}$ für $\underline{x} \in U_1$.

Dann ist g in $\underline{a}$ differenzierbar und

$$Dg(\underline{a}) = - \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{y}} \begin{pmatrix} \underline{a} \\ \underline{b} \end{pmatrix} \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial \underline{x}} \begin{pmatrix} \underline{a} \\ \underline{b} \end{pmatrix}$$

Dabei ist

$$\frac{\partial F}{\partial \underline{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_k} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial F}{\partial \underline{y}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

Also $DF = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial \underline{x}} & \frac{\partial F}{\partial \underline{y}} \end{pmatrix}$

Beweis

Ohne Einschränkungen: $\binom{\underline{a}}{\underline{b}} = \binom{0}{0} \in \mathbb{R}^{k+m}$ (warum?). F ist differenzierbar in $\binom{\underline{a}}{\underline{b}}$, d.h. für $\binom{\underline{x}}{\underline{y}} \in U_1 \times U_2$ gilt

$$F \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{pmatrix} = \underbrace{F \begin{pmatrix} \underline{a} \\ \underline{b} \end{pmatrix}}_{=c} + \underbrace{\left(DF \begin{pmatrix} \underline{a} \\ \underline{b} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{pmatrix}}_{= \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{x}} \binom{\underline{a}}{\underline{b}} \right) \underline{x} + \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{y}} \binom{\underline{a}}{\underline{b}} \right) \underline{y}} + \varphi \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{pmatrix}$$

wo $\varphi : \mathbb{R}^{k+m} \to \mathbb{R}^m$ ein Abbildung ist mit

$$\lim_{\binom{\underline{x}}{\underline{y}} \to 0, \binom{\underline{x}}{\underline{y}} \neq 0} \frac{1}{\left\| \binom{\underline{x}}{\underline{y}} \right\|_2} \cdot \varphi \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{pmatrix} \tag{*}$$

Dann gilt für $\underline{x} \in U_1$

$$\underline{c} = F\begin{pmatrix} \underline{x} \\ g(\underline{x}) \end{pmatrix} = \underline{c} + \frac{\partial F}{\partial \underline{x}}\begin{pmatrix} \underline{a} \\ \underline{b} \end{pmatrix} + \frac{\partial F}{\partial \underline{y}}\begin{pmatrix} \underline{a} \\ \underline{b} \end{pmatrix} g(\underline{x}) + \varphi\begin{pmatrix} \underline{x} \\ g(\underline{x}) \end{pmatrix}$$

also

$$g(\underline{x}) = \underbrace{-\left(\frac{\partial F}{\partial \underline{y}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial \underline{x}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \underline{x}}_{\text{lin. Abb. } \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m} - \underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial \underline{y}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)^{-1} \varphi\begin{pmatrix} \underline{x} \\ g(\underline{x}) \end{pmatrix}}_{=:\psi(\underline{x})} \tag{**}$$

Bleibt zu zeigen:

$$\frac{1}{\|\underline{x}\|_2} \|\psi(\underline{x})\|_2 \xrightarrow{\underline{x}\to 0, \underline{x}\neq 0} 0 \tag{***}$$

Sei $0 < \varepsilon < 1$. Setze $M := \left\| \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{y}} \binom{0}{0} \right)^{-1} \right\|$ und $N := 2 \left\| \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{y}} \binom{0}{0} \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial \underline{x}} \binom{0}{0} \right\| + 1$.
Wegen (*) existieren $0 < \delta_1 < r_1$ und $0 < \delta_2 < r_2$ sodass für $\binom{\underline{x}}{\underline{y}} \in U_1 \times U_2$ mit $\|\underline{x}\|_1 < \delta_1$, $\left\|\underline{y}\right\|_2 < \delta_2$ gilt

$$\left\| \varphi\begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{pmatrix} \right\|_2 \leq \left\| \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{pmatrix} \right\|_2 \cdot \frac{1}{2M} \frac{\varepsilon}{1+N} \leq \frac{\|\underline{x}\|_2 + \left\|\underline{y}\right\|_2}{2M} \cdot \frac{\varepsilon}{1+N}$$

Da g stetig ist, gilt $g(0) = 0 \Rightarrow \exists 0 < \delta < \delta_1$ sodass für $\underline{x} \in U_1$ mit $\|\underline{x}\|_2 < \delta$ gilt $\|g(\underline{x})\|_2 < \delta_2$. Für $\underline{x} \in U_1$ mit $\|\underline{x}\|_2 < \delta$ gilt daher

$$\left\| \varphi\begin{pmatrix} \underline{x} \\ g(\underline{x}) \end{pmatrix} \right\|_2 \leq \frac{\|\underline{x}\|_2 + \|g(\underline{x})\|_2}{2M} \cdot \frac{\varepsilon}{1+N} \leq \frac{\|\underline{x}\|_2 + \|g(\underline{x})\|_2}{2M} \tag{****}$$

Also

$$\begin{aligned}
\|g(\underline{x})\|_2 &\overset{(**)}{\leq} \left\| \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{y}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial \underline{x}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \|\underline{x}\|_2 + M \cdot \left\| \varphi\begin{pmatrix} \underline{x} \\ g(\underline{x}) \end{pmatrix} \right\|_2 \\
&\overset{(****)}{\leq} \left\| \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{y}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial \underline{x}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \|\underline{x}\|_2 + M \cdot \frac{\|\underline{x}\|_2 + \|g(\underline{x})\|_2}{2M} \\
&= \left\| \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{y}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial \underline{x}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \|\underline{x}\|_2 + \frac{\|\underline{x}\|_2}{2} + \frac{\|g(\underline{x})\|_2}{2}
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
\frac{\|g(\underline{x})\|_2}{2} &\leq \left(\left\| \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{y}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial \underline{x}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| + \frac{1}{2} \right) \|\underline{x}\|_2 \\
&\Longrightarrow \|g(\underline{x})\|_2 \leq N \|\underline{x}\|_2 \quad \text{für } \|\underline{x}\|_2 < \delta
\end{aligned} \tag{*****}$$

Wir erhalten für $0 < \|\underline{x}\|_2 < \delta$

$$\frac{1}{\|\underline{x}\|_2} \cdot \|\psi(\underline{x})\|_2 \overset{(**)}{\leq} \frac{M}{\|\underline{x}\|_2} \cdot \left\| \varphi\begin{pmatrix} \underline{x} \\ g(\underline{x}) \end{pmatrix} \right\|_2 \overset{(****)\&(*****)}{\leq} \frac{M}{\|\underline{x}\|_2} \cdot \frac{\|\underline{x}\|_2 (1+N)}{2M} \cdot \frac{\varepsilon}{1+N} < \varepsilon$$

$\Rightarrow (***)$ $\square$

8.3 Satz

Seien $\underline{a} \in U_1 \underset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}^k$, $\underline{b} \in U_2 \underset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}^m$, $\underline{c} \in \mathbb{R}^m$. $F : U_1 \times U_2 \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar, sodass $F\binom{\underline{a}}{\underline{b}} = \underline{c}$ und $\frac{\partial F}{\partial \underline{y}}\binom{\underline{a}}{\underline{b}} \in M_{m\times m}(\mathbb{R})$ invertierbar ist. Dann existieren $\underline{a} \in V_1 \underset{\text{offen}}{\subset} U_1$, $\underline{b} \in V_2 \underset{\text{offen}}{\subset} U_2$ und $g : V_1 \to V_2$ stetig differenzierbar mit

$$Dg(\underline{a}) = -\left(\frac{\partial F}{\partial \underline{y}}\begin{pmatrix}\underline{a}\\ \underline{b}\end{pmatrix}\right)^{-1}\frac{\partial F}{\partial \underline{x}}\begin{pmatrix}\underline{a}\\ \underline{b}\end{pmatrix}$$

und $N_F(\underline{c}) \cap (V_1 \times V_2) = \left\{ \binom{\underline{x}}{g(\underline{x})} \,\middle|\, \underline{x} \in V_1 \right\}$, wo $N_F(\underline{c}) = \left\{ \binom{\underline{x}}{\underline{y}} \in U_1 \times U_2 \,\middle|\, F\binom{\underline{x}}{\underline{y}} = \underline{c} \right\}$. Insbesondere gilt $F\binom{\underline{x}}{g(\underline{x})} = \underline{c}$ für $\underline{x} \in V_1$ und $\underline{b} = g(\underline{a})$.

Beweis
OhneEinschränkungen: $\binom{\underline{a}}{\underline{b}} = \binom{0}{0} \in \mathbb{R}^{k+m}$. Definiere $G : U_1 \times U_2 \to \mathbb{R}^m$ durch

verschwindet, wenn hinterer Vektor 0

$$G\begin{pmatrix}\underline{x}\\ \underline{y}\end{pmatrix} := \underline{y} - \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{y}}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right)^{-1}\left(F\begin{pmatrix}\underline{x}\\ \underline{y}\end{pmatrix} - \underline{c}\right) \tag{$\star$}$$

dann ist G stetig differenzierbar und

$$\frac{\partial G}{\partial \underline{y}}\begin{pmatrix}\underline{x}\\ \underline{y}\end{pmatrix} = \underbrace{1_m}_{\text{Einheitsmatrix}} - \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{y}}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right)^{-1}\frac{\partial F}{\partial \underline{y}}\begin{pmatrix}\underline{x}\\ \underline{y}\end{pmatrix} \qquad \text{(warum?)}$$

also

$$\frac{\partial G}{\partial \underline{y}}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = 1_m - \underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial \underline{y}}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right)^{-1}\frac{\partial F}{\partial \underline{y}}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}}_{=1_m} = 0$$

$\frac{\partial G}{\partial \underline{y}}$ ist stetig, daher existieren $0 \in W_1 \underset{\text{offen}}{\subset} U_1$, $0 \in W_2 \underset{\text{offen}}{\subset} U_2$, sodass für $\binom{\underline{x}}{\underline{y}} \in W_1 \times W_2$ gilt

$$\left\|\frac{\partial G}{\partial \underline{y}}\begin{pmatrix}\underline{x}\\ \underline{y}\end{pmatrix}\right\| \leq \frac{1}{2} \tag{$\star\star$}$$

$0 \in W_2 \underset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}^m \Rightarrow \exists r > 0 : V_2 := B(0,r) \subset W_2 \subset \mathbb{R}^m$. Wegen $G\binom{0}{0} = 0$ existiert $0 \in V_1 \underset{\text{offen}}{\subset} W_1$ mit

$$\alpha := \sup\left\{ \left\|G\begin{pmatrix}\underline{x}\\ 0\end{pmatrix}\right\|_2 \,\middle|\, \underline{x} \in V_1 \right\} < \frac{r}{2}$$

Wir definieren induktiv stetige Abbildungen $g_j : V_1 \to V_2 \quad, n \in \mathbb{N}$ mit

(i) $g_0(\underline{x}) = 0$, $\underline{x} \in V_1$

(ii) $\sup\left\{ \|g_{j+1}(\underline{x}) = g_j(\underline{x})\|_2 \,\middle|\, \underline{x} \in V_1 \right\} \leq 2^{-j} \cdot \alpha \quad j \in \mathbb{N}$

(iii) $g_{j+1}(\underline{x}) = G\binom{\underline{x}}{g_j(\underline{x})}$, $\underline{x} \in V_1$

I.A.: $g_0 \equiv 0$ gegeben durch (i)

I.S.: Seien $g_0, \dots, g_l : V_1 \to V_2$ stetig bereits definiert, sodass (ii) und (iii) für $j \in \{0, \dots, l-1\}$ gelten. Für $\underline{x} \in V_1$ haben wir

$$\begin{aligned}\|g_l(\underline{x})\|_2 = \left\|\sum_{j=0}^{l-1} g_{j+1}(\underline{x}) - g_j(\underline{x})\right\| &\leq \sum_{j=0}^{l-1} \|g_{j+1}(\underline{x}) - g_j(\underline{x})\| \\ &\leq \sum_{j=0}^{l-1} 2^{-j}\alpha \\ &\leq 2\alpha \\ &< r\end{aligned}$$

$\Rightarrow g_l(\underline{x}) \in V_2$. Also ist $g_l(V_1) \subset V_2$ und wir können $g_{l+1} : V_1 \to \mathbb{R}^m$ durch (iii) definieren. Müssen noch zeigen:

- $g_{l+1}(V_1) \subset V_2$
- (ii) mit l anstelle von j
- g_{l+1} ist stetig

Nach Satz 7.11(Mittelwertsatz) gilt für $\underline{x} \in V_1$, $\underline{y}', \underline{y}'' \in V_2$

$$\left\|G\begin{pmatrix}x\\ \underline{y}'\end{pmatrix} - G\begin{pmatrix}x\\ \underline{y}''\end{pmatrix}\right\|_2 \leq \sup_{\underline{y}\in V_2}\left\|\frac{\partial G}{\partial \underline{y}}\begin{pmatrix}x\\ \underline{y}\end{pmatrix}\right\| \cdot \|\underline{y}' - \underline{y}''\|_2 \qquad (\star\star\star)$$

also

$$\begin{aligned}\|g_{l+1}(\underline{x}) - g_l(\underline{x})\|_2 \overset{\text{(iii)}}{=} \left\|G\begin{pmatrix}x\\ g_l(\underline{x})\end{pmatrix} - G\begin{pmatrix}x\\ g_{l-1}(\underline{x})\end{pmatrix}\right\|_2 &\overset{(\star\star\star),(\star\star)}{\leq} \frac{1}{2} \cdot \|g_l(\underline{x}) - g_{l-1}(\underline{x})\|_2 \\ &\overset{\text{(ii)}}{\leq} \frac{1}{2} 2^{-(l-1)}\alpha = 2^{-l}\alpha\end{aligned}$$

und es gilt (ii) mit $j = l$.

Weiter gilt für $\underline{x} \in V_1$

$$\|g_{l+1}(\underline{x})\|_2 \leq \sum_{j=0}^{l} \|g_{j+1}(\underline{x}) - g_j(\underline{x})\|_2 \overset{\text{(ii)}}{\leq} \sum_{j=0}^{l} 2^{-j} \cdot \alpha = 2\alpha < r$$

also $g_{l+1}(V_1) \subset V_2$.

g_{l+1} ist stetig wegen (iii) und Stetigkeit von g_l und G. Die Induktion liefert $g_j, j \in \mathbb{N}$ wie gewünscht.

Hier ist die Induktion beendet

Nach Satz 1.5 konvergiert $\sum_{j=0}^{\infty} g_{j+1} - g_j$ absolut und gleichmäßig gegen eine Abbildung $g : V_1 \to \mathbb{R}^m$. (Wende 1.5 auf jede Koordinaten einzeln an). Nach Satz 1.4 ist g stetig (in jeder Koordinate gleichmäßiger Limes stetiger Funktionen). Es gilt für $\underline{x} \in V_1$

$$\|g(\underline{x})\|_2 \leq \sum_{j=0}^{\infty} \|g_{j+1}(\underline{x}) - g_j(\underline{x})\|_2 \overset{\text{(ii)}}{\leq} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j}\alpha = 2\alpha < r$$

$\Rightarrow g(V_1) \subset V_2$.

Wegen (iii) und Stetigkeit von g, g_j, G gilt für $\underline{x} \in V_1$ gilt:

$$g(\underline{x}) \lim_{j\to\infty} g_{j+1}(\underline{x}) = \lim_{j\to\infty} G\begin{pmatrix}x\\ g_j(\underline{x})\end{pmatrix} = G\begin{pmatrix}x\\ \lim_{j\to\infty} g(\underline{x})\end{pmatrix} = G\begin{pmatrix}x\\ g(\underline{x})\end{pmatrix}$$

und wegen $(\star)$ gilt $F\binom{\underline{x}}{g(\underline{x})} = \underline{c}$, also

$$\left\{ \begin{pmatrix} \underline{x} \\ g(\underline{x}) \end{pmatrix} \middle| \underline{x} V_1 \right\} \subset N_F(\underline{c}) \cap (V_1 \times V_2)$$

Sei nun $\binom{\underline{x}}{\underline{y}} \in N_F(\underline{c}) \cap (V_1 \times V_2)$. Dann gilt nach $(\star)$ $G\binom{\underline{x}}{\underline{y}} = \underline{y}$ und

$$\left\|\underline{y} - g(\underline{x})\right\|_2 = \left\| G\begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{pmatrix} - G\begin{pmatrix} \underline{x} \\ g(\underline{x}) \end{pmatrix} \right\|_2 \overset{(\star\star\star),(\star\star)}{\leq} \frac{1}{2} \cdot \left\|\underline{y} - g(\underline{x})\right\|_2$$

$\Rightarrow \left\|\underline{y} - g(\underline{x})\right\|_2 = 0 \Rightarrow \underline{y} = g(\underline{x})$.
Nach Satz 8.2 $\Rightarrow$ g ist differenzierbar in $\underline{a} \in \mathbb{R}^k$ mit

$$Dg(\underline{a}) = \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{y}} \begin{pmatrix} \underline{a} \\ \underline{b} \end{pmatrix} \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial \underline{x}} \begin{pmatrix} \underline{a} \\ \underline{b} \end{pmatrix}$$

g ist stetig differenzierbar: Verkleinere V_1, V_2 so dass $\frac{\partial F}{\partial \underline{y}}\binom{\widetilde{\underline{a}}}{\widetilde{\underline{b}}}$ invertierbar ist für $\binom{\widetilde{\underline{a}}}{\widetilde{\underline{b}}} \in V_1 \times V_2$. Variiere $\widetilde{\underline{a}}, \widetilde{\underline{b}}$

8.4 Corollar (Satz von der Umkehrabbildung)

(vgl. Analysis I, Satz 12.6)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Sei $\underline{b} \in U$, sodass $Df(\underline{b})$ invertierbar ist. Dann existiert $\underline{b} \in V \underset{\text{offen}}{\subset} U$ und $f(\underline{b}) \in W \underset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}^n$, sodass $f\big|_V : V \to W$ bijektiv ist und die **Umkehrabbildung** $f^{-1} : W \to V$ stetig differenzierbar ist mit

$$D(f^{-1})\big(f(\underline{b})\big) = \big(Df(\underline{b})\big)^{-1}$$

Beweis
Definiere $F : \mathbb{R}^m \times U \to \mathbb{R}^n$ durch $F\binom{\underline{x}}{\underline{y}} := \underline{x} - f(\underline{y})$. Dann gilt $F\binom{f(\underline{b})}{\underline{b}} = 0$ und F ist stetig differenzierbar mit

$$\frac{\partial F}{\partial \underline{y}} \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{pmatrix} = -Df(\underline{y}) \quad , \underline{y} \in$$

und $-Df(\underline{b}) = \frac{\partial F}{\partial \underline{y}}\binom{f(\underline{b})}{\underline{b}}$ ist invertierbar. Nach Satz 8.3 (mit $\underline{a} = f(\underline{b})$, $\underline{c} = 0$) existieren $f(\underline{b}) \in W \subset \mathbb{R}^n$, $\underline{b} \in V' \underset{\text{offen}}{\subset} U$ und $g : W \to V'$ stetig differenzierbar mit

$$Dg\big(f(\underline{b})\big) = \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{y}} \begin{pmatrix} f(\underline{b}) \\ \underline{b} \end{pmatrix} \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial \underline{x}} \begin{pmatrix} f(\underline{b}) \\ \underline{b} \end{pmatrix} = (-Df(\underline{b}))^{-1} \cdot 1_n = -Df(\underline{b})^{-1}$$

und

$$\left\{ \begin{pmatrix} \underline{x} \\ g(\underline{x}) \end{pmatrix} \middle| \underline{x} \in W \right\} = N_F(0) \cap (W \times V') = \left\{ \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{pmatrix} \in W \times V' \middle| \underline{x} = f(\underline{y}) \right\}$$

Urbild

Aus „$\subset$“folgt $\forall \underline{x} \in W : \underline{x} = f\big(g(\underline{x})\big)$. Setze

$$V := \underbrace{V' \cap f^{-1}(W)}_{=\left\{ \underline{y} \in V' \middle| f(\underline{y}) \in W \right\}} \underset{\text{offen}}{\subset} V' \subset U$$

Dann ist $f(V) \subset W$ und $g(W) \subset V$. Begründung: $\forall \underline{x} \in W : g(\underline{x}) \in V', \underline{x} = f(g(\underline{x})) \Rightarrow g(\underline{x}) \in f^{-1}(W)$.
Für $\underline{y} \in V$ gilt $\binom{f(\underline{y})}{\underline{y}} \in W \times V'$, also wegen „$\supset$“

$$\begin{pmatrix} f(\underline{x}) \\ \underline{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\underline{x}) \\ g(f(\underline{y})) \end{pmatrix}, \quad \text{also } \underline{y} = g\big(f(\underline{y})\big) \Rightarrow f \circ g = \mathrm{id}_W \wedge g \circ f = \mathrm{id}_V \qquad \square$$

8.5 Corollar (Lagrangemultiplikator)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $\underline{d} \in M := \{\underline{x} \in U \mid f(\underline{x}) = 0\}$ mit $\operatorname{grad} f(\underline{d}) \neq 0$. Sei $h : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, sodass $h\big|_M : M \to \mathbb{R}$ in $\underline{d}$ ein lokales Extremum hat. Dann existiert $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\operatorname{grad} h(\underline{d}) = \lambda \cdot \operatorname{grad} f(\underline{d})$$

Abbildung 21: Hier kommt noch ein Bild hin

Beweis

O.E. sei $\frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{d}) \neq 0$. Setze $\underline{a} := \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\underline{b} := d_n \in \mathbb{R}^1$. Dann existieren $\underline{a} \in U_1 \underset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}^{n-1}$, $\underline{b} \in U_2 \underset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}$ mit $U_1 \times U_2 \subset U$. Nach Satz 8.3 mit $F := f\big|_{U_1 \times U_2} : U_1 \times U_2 \to \mathbb{R}$ (es ist $\frac{\partial F}{\partial y}\binom{\underline{a}}{\underline{b}} = \frac{\partial}{\partial x_n}(\underline{d}) \neq 0$, also invertierbar) existieren $\underline{a} \in V_1 \underset{\text{offen}}{\subset} U_1$, $\underline{b} \in V_2 \underset{\text{offen}}{\subset} U_2$ und $g : V_1 \to V_2$ stetig differenzierbar mit

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ g(x_1, \dots, x_{n-1}) \end{pmatrix} = 0 \quad \text{für} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \in V_1 \text{,d.h.} \quad \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ g(x_1, \dots, x_{n-1}) \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \in V_1 \right\} \subset M \text{ sowie } \underline{b} = g(\underline{a})$$

Dann gilt für $i \in \{1, \dots, n-1\}$

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x_i}\begin{pmatrix} \underline{a} \\ \underline{b} \end{pmatrix} \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial x_n}\begin{pmatrix} \underline{a} \\ \underline{b} \end{pmatrix} \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}(\underline{a}) \qquad \text{(*) (warum?)}$$

Definiere $H : V_1 \to \mathbb{R}$ durch $H\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} := h\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ g(x_1, \dots, x_{n-1}) \end{pmatrix}$. $h\big|_M$ besitzt in $\underline{d} = \binom{\underline{a}}{\underline{b}} = \binom{\underline{a}}{g(\underline{a})}$ ein lokales Extremum, also auch H in $\underline{a}$. Für $i \in \{1, \dots, n-1\}$ folgt

$$0 = \frac{\partial H}{\partial x_i}(\underline{a}) = \frac{\partial h}{\partial x_i}\begin{pmatrix} \underline{a} \\ g(\underline{a}) \end{pmatrix} \cdot 1 + \frac{\partial h}{\partial x_i}\begin{pmatrix} \underline{a} \\ g(\underline{a}) \end{pmatrix} \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}(\underline{a}) \qquad \text{(**)}$$

Setze

$$\lambda := \frac{\partial h}{\partial x_n}\begin{pmatrix} \underline{a} \\ g(\underline{a}) \end{pmatrix} \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\begin{pmatrix} \underline{a} \\ g(\underline{a}) \end{pmatrix} \right)^{-1} \qquad \text{(***)}$$

dann folgt mit (*),(**),(***)

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}\begin{pmatrix} \underline{a} \\ g(\underline{a}) \end{pmatrix} = \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}\begin{pmatrix} \underline{a} \\ g(\underline{a}) \end{pmatrix} \qquad i = 1, \dots, n-1, n$$

□

8.6 Beispiel

(i) Sei $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $\binom{r}{\varphi} \mapsto \binom{r\cos\varphi}{r\sin\varphi}$. Dann ist

$$Df\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r}\binom{r}{\varphi} & \frac{\partial f_1}{\partial \varphi}\binom{r}{\varphi} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r}\binom{r}{\varphi} & \frac{\partial f_2}{\partial \varphi}\binom{r}{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$\det(Df\binom{r}{\varphi}) = r \neq 0$, also ist $Df\binom{r}{\varphi}$ invertierbar und f ist lokal invertierbar. Für $r > 0, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ gilt $f^{-1}\binom{x}{y} = \binom{\sqrt{x^2+y^2}}{\arctan\frac{y}{x}}$

(ii) Sei $A = (a_{ij})_{i,j\in\{1,\dots,n\}} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ symmetrisch. $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$h(\underline{x}) := \langle\, \underline{x} \,|\, A\underline{x}\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$$

$M := S^{n-1} = \{\, \underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\underline{x}\|_2 = 1\} = \{\, \underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\underline{x}) = 0\}$ wo $f(\underline{x}) = 1 - \langle\, \underline{x} \,|\, \underline{x}\rangle$. M ist kompakt $\Rightarrow h|_M$ nimmt in $\xi_{\max}$ ihr Maximum an; in $\xi_{\min}$ ihr Minimum. Es ist $\frac{\partial f}{\partial x_l}(\underline{x}) = -2x_l$, also

$$\operatorname{grad} f(\underline{x}) = -2\underline{x} \neq 0 \quad \text{für } \underline{x} \in M$$

also

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial x_l}(\underline{x}) = \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\sum_{i,j}^{n} a_{ij}x_i x_j\right) &= \sum_{i,j}^{n} a_{ij}\frac{\partial x_i}{\partial x_l}x_j + \sum_{i,j}^{n} a_{ij}x_i\frac{\partial x_j}{\partial x_l} = \sum_{j=1}^{n} a_{lj}\cdot x_j + \sum_{i=1}^{n} a_{il}\cdot x_i \\ &= 2\cdot\sum_{j=1}^{n} a_{lj}\cdot x_j = 2(A\underline{x})_l\end{aligned}$$

also $\operatorname{grad} h(\underline{x}) = 2A\underline{x}$. Mit Corollar 8.5 folgt:

$$\exists \lambda_{\substack{\max\\(\min)}} \in \mathbb{R} : -2\cdot\lambda_{\substack{\max\\(\min)}}\cdot\underline{\xi}_{\substack{\max\\(\min)}} = 2A\underline{\xi}_{\substack{\max\\(\min)}}$$

Es folgt: $\underline{\xi}_{\substack{\max\\(\min)}}$ ist ein Eigenvektor von A mit Eigenwert $-\lambda_{\substack{\max\\(\min)}}$

Also besitzt A mindestens einen reellen Eigenwert und A ist diagonalisierbar.

Es gilt

$$-\lambda_{\max} = -\lambda_{\max}\cdot\left\langle \underline{\xi}_{\max} \,\middle|\, \underline{\xi}_{\max}\right\rangle = \left\langle \underline{\xi}_{\max} \,\middle|\, A\cdot\underline{\xi}_{\max}\right\rangle = h(\underline{\xi}_{\max})$$

9 Parameterabhängige Integrale

9.1 Proposition

Seien $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^m$, $f : [a,b] \times U \to \mathbb{R}$ stetig. Sei $(\underline{y}_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset U$ konvergent mit $\overline{y} := \lim_{k\to\infty} \underline{y}_k \in U$. Definiere $F_k, F : [a,b] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$F_k(x) := f\begin{pmatrix} x \\ \underline{y}_k \end{pmatrix} \quad F(x) := f\begin{pmatrix} x \\ \overline{y} \end{pmatrix}$$

Dann gilt $F_k \xrightarrow{k\to\infty} F$ gleichmäßig.

Beweis
Setze $M := \left\{ \underline{y}_k \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \right\} \cup \{\overline{y}\}$. Dann ist M kompakt nach 4.3 (i); $[a,b] \times M \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ist beschränkt und abgeschlossen, also auch kompakt. Nach 4.13 ist $f|_{[a,b]\times M} : [a,b] \times M \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $\delta > 0$, sodass für $\binom{x}{\underline{y}}, \binom{x'}{\underline{y}'} \in [a,b] \times M$ mit $\left\| \binom{x}{\underline{y}} - \binom{x'}{\underline{y}'} \right\|_2 < \delta$ gilt $\left| f\binom{x}{\underline{y}} - f\binom{x'}{\underline{y}'} \right| < \varepsilon$. Wegen $\underline{y}_k \to \overline{y}$ existiert ein $K \in \mathbb{N}$ mit $\left\| \overline{y} - \underline{y}_k \right\|_2 < \delta$ falls $k \geq K$. Für $x \in [a,b], k \geq K$ gilt

$$\left\| \begin{pmatrix} x \\ \underline{y}_k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ \overline{y} \end{pmatrix} \right\|_2 = \left\| \underline{y}_k - \overline{y} \right\|_2 < \delta$$

also

$$|F_k(x) - F(x)| = \left| f\begin{pmatrix} x \\ \underline{y}_k \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} x \\ \overline{y} \end{pmatrix} \right| < \varepsilon$$ □

9.2 Satz

Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^m$, $f : [a,b] \times U \to \mathbb{R}$ stetig. Definiere $g : U \to \mathbb{R}$ durch

$$g(\underline{y}) = \int_a^b f\begin{pmatrix} x \\ \underline{y} \end{pmatrix} \mathrm{d}x$$

Dann ist g stetig.

Beweis
Sei $(\underline{y}_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset U$ mit $\underline{y}_k \xrightarrow{k\to\infty} \overline{y} \in U$. Dann ist (mit F_k, F wie in 9.1)

$$g(\underline{y}_k) = \int_a^b f\begin{pmatrix} x \\ \underline{y}_k \end{pmatrix} \mathrm{d}x = \int_a^b F_k(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad g(\overline{y}) = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x$$

Nach 9.1 gilt $F_k \xrightarrow{k\to\infty} F$ gleichmäßig und nach 1.7 gilt

$$\lim_{k\to\infty} g(\underline{y}_k) = \lim_{k\to\infty} \int_a^b F_k(x)\,\mathrm{d}x \overset{1.7}{=} \int_a^b (\lim_{k\to\infty} F_k(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = g(\overline{y})$$

Nach 3.2 (Folgenkriterium) ist g also stetig. □

9.3 Proposition

Seien $[a,b],[c,d] \subset \mathbb{R}$, $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ stetig. f sei stetig partiell differenzierbar nach der zweiten Variablen, d.h. $\frac{\partial f}{\partial y}\binom{x}{y}$ existiert und ist stetig in $\binom{x}{y}$ für alle $\binom{x}{y}$. Sei $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset [c,d]$ mit $y_k \to \overline{y} \in [c,d]$ und $y_k \neq \overline{y}$, für $k \in \mathbb{N}$. Definiere $F_k, F : [a,b] \to \mathbb{R}$ durch

$$F_k(x) := \frac{f\binom{x}{y_k} - f\binom{x}{\overline{y}}}{y_k - \overline{y}}, \qquad F(x) := \frac{\partial f}{\partial y}\binom{x}{\overline{y}}$$

Dann gilt $F_k \xrightarrow{k\to\infty} F$ gleichmäßig.

Beweis
Sei $\varepsilon > 0$. $\frac{\partial f}{\partial y} : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ ist stetig, also gleichmäßig stetig nach 4.13; daher existiert ein $\delta > 0$, sodass für $y, y' \in [c,d]$ mit $|y - y'| < \delta$ gilt $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\binom{x}{y} - \frac{\partial f}{\partial y}\binom{x}{y'}\right| < \varepsilon$ für $x \in [a,b]$. Nach dem Mittelwertsatz exisitert für $x \in [a,b], k \in \mathbb{N}$ ein $\theta_{k,x}$ zwischen $\overline{y}$ und y_k mit

$$F_k(x) = \frac{f\binom{x}{y_k} - f\binom{x}{\overline{y}}}{y_k - \overline{y}} = \frac{\partial f}{\partial y}\binom{x}{\theta_{k,x}}$$

Wegen $y_k \xrightarrow{k\to\infty} \overline{y}$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $|\overline{y} - y_k| < \delta$ falls $k \geq N$. Für $k \geq N$ gilt dann $|\overline{y} - \theta_{k,x}| < \delta$ also

$$|F(x) - F_k(x)| = \left|\frac{\partial f}{\partial y}\binom{x}{\overline{y}} - \frac{\partial f}{\partial y}\binom{x}{\theta_{k,x}}\right| < \varepsilon$$

für alle $x \in [a,b]$. □

9.4 Satz

Seien $[a,b],[c,d] \subset \mathbb{R}$, $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ stetig. f sei stetig partiell differenzierbar nach der zweiten Variablen. Definiere $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ durch $g(y) := \int_a^b f\binom{x}{y}\,\mathrm{d}x$. Dann ist g stetig differenzierbar mit

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}y}(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}\binom{x}{y}\,\mathrm{d}x$$

Beweis
Sei $\overline{y} \in [c,d], (y_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset [c,d]$ mit $y_k \xrightarrow{k\to\infty} \overline{y}, y_k \neq \overline{y}\,\forall k \in \mathbb{N}$. Definiere $F_k, F : [a,b] \to \mathbb{R}$ wie in Proposition 9.3, sodass $F_k \xrightarrow{k\to\infty} F$ gleichmäßig. Dann gilt

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} \frac{g(y_k) - g(\overline{x})}{y_k - \overline{y}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\int_a^b \left(f\binom{x}{y_k} - f\binom{x}{\overline{y}}\right)\,\mathrm{d}x}{y_k - \overline{y}} = \lim_{k\to\infty} \int_a^b F_k(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \overline{y}}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$ □

9.5 Satz von Fubini

Seien $[a,b],[c,d] \subset \mathbb{R}$, $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:

$$\int_c^d \left(\int_a^b f\binom{x}{y}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d f\binom{x}{y}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

(Die Funktion $y \mapsto \int_a^b f\binom{x}{y}\,\mathrm{d}x$ und $x \mapsto \int_c^d f\binom{x}{y}\,\mathrm{d}y$ sind stetig nach 9.2, daher existieren beide Seiten)

Beweis
Definiere $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ durch

$$g(y) := \int_a^b \underbrace{\left(\int_c^y f\begin{pmatrix}x\\s\end{pmatrix}\mathrm{d}s\right)}_{\substack{\text{stetig bezüglich } x \text{ nach 9.2}\\ \text{stetig diffbar. bzgl. } y}} \mathrm{d}x$$

Nach Satz 9.4 gilt

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}y}(y) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial y}\left(\int_c^y f\begin{pmatrix}x\\s\end{pmatrix}\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}x = \int_a^b f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mathrm{d}x$$

Wir erhalten:

$$\int_c^d \left(\int_a^b f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_c^d \frac{\partial g}{\partial y}(y)\,\mathrm{d}y = g(d) - \underbrace{g(c)}_{=0} = g(d) = \int_a^b \left(\int_c^d f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \qquad \square$$

10 Anwendungen

10.1 Physikalische (mechanische) Systeme

Zu einem physikalischen (mechanischen) System assoziiert man eine sogenannte **Lagrangefunktion**

$$L : [a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \begin{pmatrix} t \\ q \\ p \end{pmatrix} \mapsto L\begin{pmatrix} t \\ q \\ p \end{pmatrix}$$

Dabei ist zB. t die Zeit, q der Ort (eines Teilchens) und p seine Geschwindigkeit (bzw. sein Impuls). Für $q(a), q(b)$ sind oft Randbedingungen vorgegeben. Das **Prinzip der kleinsten Wirkung** besagt, dass für einen physikalischen Zustand die Größe

$$S(q) := \int_a^b L\begin{pmatrix} t \\ q(t) \\ \dot{q}(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}t$$

minimal wird.

Problem:
Finde Bedingungen an q dafür, dass $S(q)$ minimal ist.

10.2 Satz (Euler-Lagrange-Gleichungen)

Sei $L : [a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $q : [a,b] \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar mit $q(a) = \alpha, q(b) = \beta$ und $S(q) = \inf\left\{ S(g) \,\middle|\, g \in C^2([a,b]), g(a) = \alpha, g(b) = \beta \right\}$. Dann gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial p}\begin{pmatrix} t \\ q(t) \\ \dot{q}(t) \end{pmatrix} \right) = \frac{\partial L}{\partial q}\begin{pmatrix} t \\ q(t) \\ \dot{q}(t) \end{pmatrix}$$

Beweis
Für jedes $h \in C^2([a,b])$ mit $h(a) = h(b) = 0 \;\; (\star)$ gilt für $r \in \mathbb{R}$

$$S(q) \leq S(q + r \cdot h) = \int_a^b L\begin{pmatrix} t \\ q(t) + r \cdot h(t) \\ \dot{q}(t) + r \cdot \dot{h}(t) \end{pmatrix}$$

Definiere $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $F(r) := S(q + r \cdot h)$. F hat in 0 ein Minimum, also $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r}(0) = 0 \;\; (\star\star)$ Nach Satz 9.4 gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r}(r) &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial r}\left(L\begin{pmatrix} t \\ q(t) + r \cdot h(t) \\ \dot{q}(t) + r \cdot \dot{h}(t) \end{pmatrix} \right) \mathrm{d}t \\
&= \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial q}\begin{pmatrix} t \\ q(t) + r \cdot h(t) \\ \dot{q}(t) + r \cdot \dot{h}(t) \end{pmatrix} \cdot h(t) + \frac{\partial L}{\partial p}\begin{pmatrix} t \\ q(t) + r \cdot h(t) \\ \dot{q}(t) + r \cdot \dot{h}(t) \end{pmatrix} \cdot \dot{h}(t) \right) \mathrm{d}t \qquad (\star\star\star)
\end{aligned}$$

Partielle Integration liefert:

$$\int_a^b \frac{\partial L}{\partial p}\begin{pmatrix} t \\ q(t) + r \cdot h(t) \\ \dot{q}(t) + r \cdot \dot{h}(t) \end{pmatrix} \cdot \dot{h}(t)\,\mathrm{d}t = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial p}(\ldots)h(t)\Big|_a^b}_{=0 \text{ nach } (\star)} - \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial p}(\ldots) \right) h(t)\mathrm{d}t \qquad (\star\star\star\star)$$

Dann gilt

$$0 \overset{(\star\star)}{=} \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r}(0) = \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial q} \begin{pmatrix} t \\ q(t) \\ \dot{q}(t) \end{pmatrix} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial p} \begin{pmatrix} t \\ q(t) \\ \dot{q}(t) \end{pmatrix} \right) \right) h(t)\,\mathrm{d}t$$

da $h \in C^2([a,b])$ mit ($\star$) beliebig folgt:

$$\frac{\partial L}{\partial q} \begin{pmatrix} t \\ q(t) \\ \dot{q}(t) \end{pmatrix} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial p} \begin{pmatrix} t \\ q(t) \\ \dot{q}(t) \end{pmatrix} \right) = 0$$

Dabei bemutzt: $f \in C[a,b]$ mit $\int_a^b f(t)h(t)\,\mathrm{d}t = 0$ für jedes $h \in C^2([a,b])$ mit $h(a) = h(b) = 0 \Rightarrow f(t) = 0$ für alle $t \in [a,b]$ □

10.3 Ebenes Pendel

Abbildung 22: hier kommt ein Bild von einem ebenen Pendel hin ...

Potentielle Energie: $E_{pot} = m \cdot g \cdot z(t) = m \cdot g \cdot l \cdot (1 - \cos\varphi(t))$
Kinetische Energie: $E_{kin} = \frac{m}{2} \cdot \left(\dot{z}(t)^2 + \dot{x}(t)^2\right) = \frac{m}{2} l^2 \cdot \dot{\varphi}(t)^2$

m Masse, g Erdbeschleunigung

$$L \begin{pmatrix} t \\ \varphi(t) \\ \dot{\varphi}(t) \end{pmatrix} = E_{kin} - E_{pot} = \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}(t)^2 + m \cdot g \cdot l \cos\varphi(t) - m \cdot g \cdot l$$

Ist die Lagrangefunktion und

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial p} \right) \begin{pmatrix} t \\ \varphi(t) \\ \dot{\varphi}(t) \end{pmatrix} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(m \cdot l^2 \dot{\varphi}(t) \right) = m \cdot l^2 \cdot \ddot{\varphi}(t) \\ \frac{\partial L}{\partial q} \begin{pmatrix} t \\ \varphi(t) \\ \dot{\varphi}(t) \end{pmatrix} &= -m \cdot g \cdot l \cdot \sin\varphi(t) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Für eine Pendelbewegung gilt

$$\begin{aligned} m \cdot l^2 \ddot{\varphi}(t) &= -mgl \sin\varphi(t) \\ \Leftrightarrow \qquad \ddot{\varphi}(t) &= -\frac{g}{l} \sin\varphi(t) \end{aligned}$$

Für ein kleines φ ist $\sin\varphi(t) \approx \varphi(t)$ (Taylor). Wir erhalten:

$$\ddot{\varphi}(t) = -\frac{g}{l}\varphi(t)$$

Lösung: $\varphi(t) = \lambda \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t\right) + \mu \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t\right)$. Eindeutigkeit? $\rightsquigarrow$ Analysis III

10.4 Kettenlinie

Gesucht: Kurve des Seils mit Länge l in der Gleichgewichtslage: $E_{kin} = 0$ (Seil beliebig biegsam mit homogener Massengewichtung) (Masse/Länge)

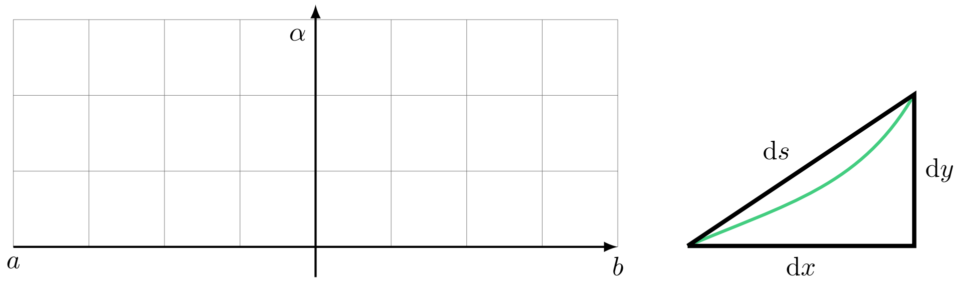


Abbildung 23: hier kommt eine Zeichnung der Kettenlinie hin, irgendwann ...

$\mathrm{d}m = \rho \cdot \mathrm{d}s$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} &= \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\mathrm{d}x \\ &= \sqrt{1 + y'(x)^2}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

potentielle Energie von $\mathrm{d}m$ ist $y \cdot g \cdot \mathrm{d}m = \rho \cdot g \cdot y(x)$. Länge:

$$l = \int_a^b \underbrace{\sqrt{1 + y'(x)^2}}_{=:H\begin{pmatrix} x \\ y(x) \\ y'(x)\end{pmatrix}} \mathrm{d}x$$

Wir müssen

$$S(y) = \int_a^b L \begin{pmatrix} x \\ y(x) \\ y'(x)\end{pmatrix} \mathrm{d}x = \rho \cdot g \cdot \int_a^b y(x) \cdot \sqrt{1 + y'(x)^2}\, \mathrm{d}x$$

mit $y(a) = y(b) = \alpha$ minimal unter den Nebenbedingungen $l = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2}\, \mathrm{d}x$. Sei nun $\overline{y} \in C^2([a,b])$ eine Lösung. Seien $h_1, h_2 \in C^2([a,b])$ mit $h_i(a) = h_i(b) = 0$. Definiere $\overline{S}, \overline{K} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$\begin{aligned}\overline{S}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} &:= S(\overline{y} + r_1 h_1 + r_2 h_2) \\ \overline{K}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} &:= K(\overline{y} + r_1 h_1 + r_2 h_2)\end{aligned}$$

$K(y) = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2}\, \mathrm{d}x = \int_a^b H \begin{pmatrix} x \\ y(x) \\ y'(x)\end{pmatrix} \mathrm{d}x$. Dann hat $\overline{S}$ ein lokales Minimum in $\binom{0}{0}$ unter den Nebenbedingungen $\overline{K} - l = 0$. Nach Corollar 8.5 exisiter $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$0 = \operatorname{grad} \overline{S}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \lambda \operatorname{grad} \overline{K}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \operatorname{grad}\left(\overline{S} - \lambda \overline{K}\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Man kann zeigen: Falls h_1, h_2 linear unabhängig sind, ist dieses Minimum isoliert und gegeben als lokales isoliertes Minimum von $\overline{S} - \lambda \cdot \overline{K}$ (jetzt ohne Nebenbedingung). Mit der modifizierten Lagrangefunktion

$$\tilde{L}\begin{pmatrix} x \\ y(x) \\ y'(x)\end{pmatrix} = L\begin{pmatrix} x \\ y(x) \\ y'(x)\end{pmatrix} - \lambda H \begin{pmatrix} x \\ y(x) \\ y'(x)\end{pmatrix}$$

minimiere jetzt $\tilde{S}(y) = \int_a^b \tilde{L}\begin{pmatrix} x \\ y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} \mathrm{d}x = (y(x)-\lambda)\cdot\sqrt{1+y'(x)^2}$. Satz 10.2 liefert die Bedingung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial p}\right)\begin{pmatrix} x \\ y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q}\begin{pmatrix} x \\ y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} \qquad (\star)$$

Trick:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\tilde{L}\begin{pmatrix} x \\ y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial p}\begin{pmatrix} x \\ y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix}\cdot y'(x)\right) \overset{\text{kleine Rechnung}}{=\cdots} = \underbrace{\left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial q}\begin{pmatrix} x \\ y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial p}\right)\begin{pmatrix} x \\ y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix}\right)}_{\text{mit } (\star) \ =0}\cdot y'(x)$$

$\Rightarrow \tilde{L}\begin{pmatrix} x \\ y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial p}\begin{pmatrix} x \\ y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix}\cdot y'(x) \equiv C$ ist konstant. Nach einer kleinen Rechnung erhält man

$$= \frac{y(x)-\lambda}{\sqrt{1+y'(x)^2}}$$

$\Rightarrow \boxed{y'(x)^2 = \frac{1}{c^2}(y(x)-\lambda)^2 - 1}$ Eine Lösung ist $y(x) = \lambda + c\cdot\cosh\left(\frac{x}{c}\right)$ wo $\cosh(t) = \frac{e^t+e^{-t}}{2}$

Index

Die Seitenzahlen *sind mit Hyperlinks zu den entsprechenden Seiten versehen, also anklickbar!*

Abbildungsverzeichnis