Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Fachbereich 10 Mathematik und Informatik

Skript $\mathbb{K}$-Theorie und die Hopf-Invariante

Mitschrift der Vorlesung „$\mathbb{K}$-Theorie und die Hopf-Invariante“ von Dr. Ulrich Penning

Jannes Bantje

23. Oktober 2015

K

Aktuelle Version verfügbar bei

GitHub

`https://github.com/JaMeZ-B/latex-wwu`

GitHub ist eine Internetplattform, auf der viele OpenSource-Projekte gehostet werden. Diese Plattform nutzen wir zur Zusammenarbeit, also findet man hier neben den PDFs auch die TeX-Dateien. Außerdem ist über diese Plattform auch direktes Mitarbeiten möglich, siehe nächste Seite.

sciebo die Campuscloud

`https://uni-muenster.sciebo.de/public.php?service=files&t=965ae79080a473eb5b6d927d7d8b0462`

Sciebo ist ein Dropbox-Ersatz der Hochschulen in NRW, der von der Uni Münster in leitender Position auf Basis der OpenSource-Software Owncloud aufgebaut wurde. Wenn man auf den Link klickt, kann man die Freigabe zum eigenen Speicher hinzufügen und hat dann immer automatisch die aktuellste Version.

Bittorrent Sync

`B6WH2DISQ5QVYIRYIEZSF4ZR2IDVKPN3I`

BTSync ist ein peer-to-peer Dateisynchronisations-Tool. Dabei werden die Dateien nur auf den Computern der Teilnehmer an einer Freigabe gespeichert. Ein RasPi ist permanent online, sodass stets die aktuellste Version verfügbar ist. `Clients` gibt es für jedes Betriebssystem. Zugang ist über das obige „Secret“ bzw. den QR-Code möglich.

Vorlesungshomepage

`https://wwwmath.uni-muenster.de/reine/u/topos/lehre/SS2015/KTheorie-Hopf/Hopf.html`

Hier ist ein Link zur offiziellen Vorlesungshomepage.

Vorwort — Mitarbeit am Skript

Dieses Dokument ist eine Mitschrift aus der Vorlesung „K-Theorie und die Hopf-Invariante, SoSe 2015“, gelesen von Dr. Ulrich Penning. Der Inhalt entspricht weitestgehend dem Tafelanschrieb. Für die Korrektheit des Inhalts übernehme ich keinerlei Garantie! Für Bemerkungen und Korrekturen – und seien es nur Rechtschreibfehler – bin ich sehr dankbar. Korrekturen lassen sich prinzipiell auf drei Wegen einreichen:

- Persönliches Ansprechen in der Uni, Mails an `j.bantje@wwu.de` (gerne auch mit annotieren PDFs) oder Kommentare auf `https://github.com/JaMeZ-B/latex-wwu`.
- *Direktes* Mitarbeiten am Skript: Den Quellcode poste ich auf GitHub (siehe oben), also stehen vielfältige Möglichkeiten der Zusammenarbeit zur Verfügung: Zum Beispiel durch Kommentare am Code über die Website und die Kombination Fork + Pull Request. Wer sich verdient macht oder ein Skript zu einer Vorlesung, die ich nicht besuche, beisteuern will, dem gewähre ich gerne auch Schreibzugriff.

  Beachten sollte man dabei, dass dazu ein Account bei `github.com` notwendig ist, der allerdings ohne Angabe von persönlichen Daten angelegt werden kann. Wer bei GitHub (bzw. dem zugrunde liegenden Open-Source-Programm „`git`“) – verständlicherweise – Hilfe beim Einstieg braucht, dem helfe ich gerne weiter. Es gibt aber auch zahlreiche empfehlenswerte Tutorials im Internet.[1]
- *Indirektes* Mitarbeiten: TeX-Dateien per Mail verschicken.

  Dies ist nur dann sinnvoll, wenn man einen ganzen Abschnitt ändern möchte (zB. einen alternativen Beweis geben), da ich die Änderungen dann per Hand einbauen muss! Ich freue mich aber auch über solche Beiträge!

[1] zB. `https://try.github.io/levels/1/challenges/1`, ist auf Englisch, aber dafür interaktives LearningByDoing

Inhaltsverzeichnis

Einführung

Definition. Eine $\mathbb{R}$-Algebra $\mathcal{A}$ mit 1, die nicht notwendigerweise assoziativ ist, heißt *reelle Divisionsalgebra*, falls jedes Element $a \neq 0$ invertierbar ist.

Beispiel: Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$, die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$, die Quaternionen[2] $\mathbb{H}$ und die sogenannten Cayley-Zahlen[3] $\mathbb{O}$. Dabei ist $\mathbb{O} \cong \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$, wobei die Multiplikation wie folgt definiert ist:

$$(a, b) \cdot (d, c) = (ac - d^* b, da + bc^*)$$

Dabei ist $d = x + iy + jz + kw$ und $d^* = x - iy - jz - kw$.

Wir wollen in dieser Vorlesung das folgende Theorem über Divisionsalgebren beweisen:

Theorem (Adams). Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $\mathbb{R}^n$ besitzt die Struktur einer reellen Divisionsalgebra.

(ii) Entweder ist $n = 1$ oder $n \geqslant 2$ ist gerade und es gibt eine stetige Abbildung $f\colon S^{2n-1} \to S^n$ mit *Hopf-Invariante* 1.

(iii) Es gilt $n \in \{1, 2, 4, 8\}$.

Geplanter Verlauf der Vorlesung

Wir werden diesen Satz mit Hilfe der sogenannten K-Theorie beweisen. Dazu müssen wir aber einiges an Vorarbeit leisten. Der geplante Verlauf ist deswegen wie folgt:

1. Verallgemeinerte Kohomologietheorien
2. Vektorbündel
3. K-Theorie
   - **3.1.** Produkte in K-Theorie
   - **3.2.** Bott-Periodizität
   - **3.3.** Thom-Isomorphismus
4. Hopf-Invariante und der Beweis des Satzes

[2] siehe auch `https://de.wikipedia.org/wiki/Quaternion`
[3] auch Oktonionen oder reelle Okataven; siehe `http://de.wikipedia.org/wiki/Oktave_(Mathematik)`

1. Kohomologietheorien

1.1 Definition. Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien. Ein *kontravarianter Funktor* $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$

- ordnet jedem Objekt $c \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ ein Objekt $F(c) \in \mathrm{Obj}(\mathcal{D})$ zu,
- ordnet jedem Morphismus $f\colon c \to c'$ in $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(c, c')$ einen Morphismus $F(f)\colon F(c') \to F(c)$ zu,

sodass folgende Eigenschaften gelten:

- Für $f\colon c \to c'$ und $g\colon c' \to c''$ gilt $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$
- $F(\mathrm{id}_c) = \mathrm{id}_{F(c)}$

Beispiel (Dualraumfunktor): Sei K ein Körper. Sei $\textsc{Vekt}_K$ die Kategorie der endlich dimensionalen K-Vektorräume und linearen Abbildungen. Sei ${}^*\colon \textsc{Vekt}_K \to \textsc{Vekt}_K$ gegeben durch $V \mapsto \mathrm{Hom}_K(V, K) = V^*$. Für $f\colon V \to W$ sei $f^*\colon W^* \to V^*$, $\varphi \mapsto \varphi \circ f$. Dies ist ein kontravarianter Funktor. Insbesondere ist $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$.

1.2 Definition. Sei $\textsc{Top}^2$ die Kategorie der Raumpaare (X, A). Sei $V\colon \textsc{Top}^2 \to \textsc{Top}^2$ der Funktor $(X, A) \mapsto (A, \emptyset)$. Sei R ein kommutativer Ring mit 1. Eine *verallgemeinerte Kohomologietheorie* $h^* = (h^n, \partial^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ mit Werten in R-Moduln ist ein kontravarianter Funktor $h^*\colon \textsc{Top}^2 \to \textsc{Gr-R-Mod}$ zusammen mit einer natürlichen Transformation

$$\partial^*\colon h^* \circ V \to h^{*+1},$$

so dass die folgenden Eigenschaften gelten:

a) *Homotopieinvarianz*: Es seien $f, g\colon (X, A) \to (Y, B)$ homotope Abbildungen von Raumpaaren. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{Z}$:
$$h^n(f) = h^n(g)$$

b) *Lange exakte Paarsequenz*: Sei (X, A) ein Raumpaar. Seien $i\colon (A, \emptyset) \hookrightarrow (X, \emptyset)$ und $j\colon (X, \emptyset) \hookrightarrow (X, A)$ die kanonischen Inklusionen. Dann ist die Folge

$$\cdots \xrightarrow{\partial^{n-1}} h^n(X, A; R) \xrightarrow{h^n(j)} h^n(X, \emptyset; R) \xrightarrow{h^n(i)} h^n(A, \emptyset; R) \xrightarrow{\partial^n} h^{n+1}(X, A; R) \longrightarrow \cdots$$

exakt.

c) *Ausschneidung*: Sei (X, A) ein Raumpaar, $U \subset A$, sodass $\overline{U} \subseteq \mathring{A}$. Dann ist die von der Inklusion $\iota\colon (X \setminus U, A \setminus U) \hookrightarrow (X, A)$ induzierte Abbildung $h^n(\iota)\colon h^n(X, A; R) \to h^n(X \setminus U, A \setminus U; R)$ ein Isomorphismus.

Bemerkung:

(i) Wir schreiben kurz $h^n(X, A)$ für $h^n(X, A; \mathbb{Z})$ und f^* für $h^n(f)$, falls sich der Grad aus dem Kontext ergibt.

(ii) $h^n(\{\mathrm{pt}\}) =: h^n$ heißen *Koeffizienten der Kohomologietheorie*.

(iii) Einige Kohomologietheorien besitzen ein *externes Produkt*, das heißt eine natürliche Transformation
$$h^n(X, A; R) \times h^m(Y, B; R) \longrightarrow h^{n+m}\big((X, A) \times (Y, B); R\big)$$
die bilinear und assoziativ ist. Dabei ist $(X, A) \times (Y, B) = \big(X \times Y, (A \times Y) \cup (X \times B)\big)$.

Sei $\Delta\colon (X,A) \to (X,A)\times(X,A)$ die Diagonalabbildung. Falls ein externes Produkt für h^* existiert, dann ist $h^*(X,A;R) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} h^n(X,A;R)$ ein *graduierter Ring* mit der Multiplikation

$$\begin{tikzcd} h^n(X,A;R)\times h^m(X,A;R) \arrow[rr, dashed] \arrow[dr, "\times"'] & & h^{n+m}(X,A;R) \\ & h^{n+m}\big((X,A)\times(X,A);R\big) \arrow[ur, "h^{n+m}(\Delta)"'] & \end{tikzcd}$$

Wir betrachten im Folgenden Kohomologietheorien, die auf einer Unterkategorie $\textsc{Top}^2_{\mathrm{Kof}}$ von $\textsc{Top}^2$ definiert sind:

1.3 Definition. Ein Raumpaar (X,A) heißt *Ko-Raumpaar*, falls

- X ein kompakter Hausdorffraum ist,
- $A \subset X$ abgeschlossen ist,
- die Inklusion $A \hookrightarrow X$ eine *Kofaserung* ist, das heißt für jede stetige Abbildung $f\colon A\times I\cup X\times\{0\} \to Y$ existiert $H\colon X\times I \to Y$, sodass das folgende Diagramm kommutiert: *Homotopieerweiterungseigenschaft*

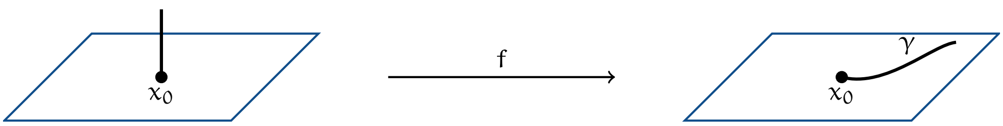
$$\begin{tikzcd} A\times I\cup X\times\{0\} \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & Y \\ X\times I \arrow[ur, "H"'] & \end{tikzcd}$$

Mit $\textsc{Top}^2_{\mathrm{Kof}} \subseteq \textsc{Top}^2$ bezeichnen wir die Kategorie der Ko-Raumpaare und stetigen Abbildungen.

Beispiel:

- Sei X ein kompakter CW-Komplex, $A \subset X$ ein Unterkomplex. Dann ist $\iota\colon A \hookrightarrow X$ eine Kofaserung.
- X eine kompakte Mannigfaltigkeit, A eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit.
- Falls $(X,\{x_0\})$ ein Objekt in $\textsc{Top}^2_{\mathrm{Kof}}$ ist, dann heißt X *wohlpunktiert*.

Zur Veranschaulichung des Begriffes „Kofaserung" betrachten wir den Raum $X = [-1,1]\times[-1,1]$, den Punkt $x_0 = (0,0)$ und setzen $Y = X$. Sei $\gamma\colon I \to X$ ein Pfad mit $\gamma(0) = (0,0) = x_0$. Wir erhalten mit γ und id eine Abbildung $f\colon \{x_0\}\times I\cup X\times\{0\} \to X$.



Kofaserung heißt in diesem Fall, dass der Raum X entlang des Pfades „mitgezogen" werden kann. Allgemeiner: $A \hookrightarrow X$ ist eine Kofaserung, falls sich jedes Paar aus einer Homotopie $h\colon A\times I \to Y$ und einer „Startabbildung" $X\times\{0\} \to Y$, die h_0 fortsetzt, zu einer Homotopie $H\colon X\times I \to Y$ erweitern lässt.

2. Vektorbündel

Wir betrachten nur reelle und komplexe Vektorbündel, es sei also $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

2.1 Definition. Sei X ein topologischer Raum. Eine stetige surjektive Abbildung $p\colon E \to X$ heißt K-*Vektorbündel*, falls gilt:

a) $E_x := p^{-1}(\{x\})$ ist ein K-Vektorraum für alle $x \in X$. E_x heißt die *Faser* von E über x.

b) Für alle Punkte $x \in X$ gibt es eine Umgebung U, ein $n \in \mathbb{N}$ und einen Homöomorphismus $\varphi_U\colon p^{-1}(U) \to U \times K^n$, sodass das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[rr, "\varphi_U"] \arrow[dr, "p"'] & & U \times K^n \arrow[dl, "\mathrm{pr}_U"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

und die Einschränkung $\varphi_U|_{E_x}\colon E_x \to K^n$ für alle $x \in U$ ein Isomorphismus von K-Vektorräumen ist. Diese Eigenschaft wird oft als *lokale Trivialität* bezeichnet.

Beispiel:

- Sei X ein beliebiger topologischer Raum. Dann ist $X \times K^n \xrightarrow{\mathrm{pr}_X} X$ das *triviale Vektorbündel* über X. Für jeden topologischen Raum existiert also ein Vektorbündel.
- Betrachte $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Sei $TS^n = \left\{(x,v) \in S^n \times \mathbb{R}^{n+1} \,\middle|\, \langle x\,,\, v\rangle = 0\right\}$. Definiere $p\colon TS^n \to S^n$ durch $(x,v) \mapsto x$. Damit erhalten wir ein $\mathbb{R}$-Vektorbündel über S^n, das *Tangentialbündel*.

  Übung: Zeige lokale Trivialität. Siehe Anhang A.1

Bemerkung: Die Abbildung $x \mapsto \dim_K(E_x)$ ist stetig, also lokal konstant, das heißt über einem zusammenhängenden Raum hat ein Vektorbündel konstante Faserdimension.

2.2 Definition. Seien $p\colon E \to X$ und $p'\colon E' \to X'$ zwei K-Vektorbündel. Ein *Morphismus von Vektorbündeln* oder *Vektorraumbündelmorphismus* von E nach E' ist ein Paar $(f, \overline{f})$ von stetigen Abbildungen $\overline{f}\colon E \to E'$ und $f\colon X \to X'$, sodass das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d, "p"'] & E' \arrow[d, "p'"] \\ X \arrow[r, "f"] & X' \end{tikzcd}$$

und sodass die Einschränkung $\overline{f}|_{E_x}\colon E_x \to E'_{f(x)}$ für jedes $x \in X$ ein K-Vektorraumhomomorphismus ist. Wir bezeichnen die Kategorie der endlich dimensionalen K-Vektorraumbündel über einem topologischen Raum X zusammen mit den Morphismen $(\mathrm{id}_X, \overline{f})$ mit $\mathrm{VEKT}_K(X)$.

Operationen mit Vektorbündeln

2.3 Definition. Seien X und Y topologische Räume. Sei $f\colon Y \to X$ eine stetige Abbildung und sei $p\colon E \to X$ ein Vektorbündel. Dann heißt

$$f^*E := \left\{(y,v) \in Y \times E \,\middle|\, f(y) = p(v)\right\}$$

zusammen mit der Abbildung $q\colon f^*E \to Y$, $(y,v) \mapsto y$ der *Pullback* von $p\colon E \to X$ entlang von f. Mit $\overline{f}(y,v) = v$ kommutiert das folgende Diagramm:

Der Pullback lässt sich auch allgemein auf kategorieller Ebene definieren

$$\begin{tikzcd} f^*E \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d, "q"'] & E \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

2.4 Lemma.

a) $q\colon f^*E \to Y$ ist ein Vektorbündel und $(\overline{f}, f)$ ist ein Morphismus von Vektorbündeln.

b) $q\colon f^*E \to Y$ ist durch die folgende universelle Eigenschaft eindeutig (bis auf Isomorphie) charakterisiert:

Sei $r\colon F \to Z$ ein Vektorbündel, $(\overline{g}, g)$ ein Morphismus zwischen $r\colon F \to Z$ und $p\colon E \to X$. Sei weiter $g'\colon Z \to Y$ eine stetige Abbildung mit $f \circ g' = g$. Dann existiert genau ein $G\colon F \to f^*E$, so dass (G, g') ein Morphismus von Vektorbündeln ist und weiter $(\overline{f}, f) \circ (G, g') = (\overline{g}, g)$ gilt.

$$\begin{tikzcd} F \arrow[d, "r"'] \arrow[dr, dashed, "\exists!\, G"] \arrow[drr, bend left, "\overline{g}"] & & \\ Z \arrow[dr, "g'"'] \arrow[drr, "g"] & f^*E \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d, "q"] & E \arrow[d, "p"] \\ & Y \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

Beweis: Sei $y \in Y$. Sei $U \subset X$ eine Umgebung von $f(y)$ in X, sodass eine lokale Trivialisierung $\varphi_U\colon p^{-1}(U) \to U \times K^n$ existiert. Dann ist $V := f^{-1}(U)$ eine Umgebung von y und es gilt

$$q^{-1}(V) = \left\{(y,v) \in V \times p^{-1}(U) \,\middle|\, f(y) = p(v)\right\}$$

Wir definieren nun

$$\begin{aligned} \psi_V\colon\ q^{-1}(V) &\longrightarrow V \times K^n & (y,v) &\longmapsto \left(y, \mathrm{pr}_{K^n} \circ \varphi_U(v)\right) \\ \kappa_V\colon V \times K^n &\longrightarrow q^{-1}(V) & (y,w) &\longmapsto \left(y, \varphi_U^{-1}(f(y), w)\right) \end{aligned}$$

Dann gilt $\psi_V \circ \kappa_V = \mathrm{id}_{V \times K^n}$ und $\kappa_V \circ \psi_V = \mathrm{id}_{q^{-1}(V)}$. Außerdem kommutiert das Diagramm aus Definition 2.1. Also ist ψ_V eine lokale Trivialisierung von $f^*E \to Y$ über V.
Der Beweis von b) ist eine (relativ einfache) Übungsaufgabe. □

eventuell hinzufügen

Sei $\mathcal{C}$ eine (topologische) Kategorie. Hieraus lässt sich eine neue Kategorie $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ definieren:

$$\mathrm{obj}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}) := \mathrm{obj}(\mathcal{C}) \quad , \quad \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(c,d) := \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(d,c)$$

mit der neuen Komposition

$$\begin{aligned} \bullet : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(c',c'') \times \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(c,c') &\longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(c,c'') \\ (f,g) &\longmapsto f \bullet g = g \circ f \end{aligned}$$

(Kovariante) Funktoren $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}$ entsprechen dann kontravarianten Funktoren $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$.

Sei $\textsc{Vekt}_K = \textsc{Vekt}_K(\mathrm{pt})$ die Kategorie der endlichdimensionalen K-Vektorräume und linearen Abbildungen. Ein Funktor

$$F\colon \underbrace{\textsc{Vekt}_K \times \ldots \times \textsc{Vekt}_K}_{r} \times \underbrace{\textsc{Vekt}_K^{\mathrm{op}} \times \ldots \times \textsc{Vekt}_K^{\mathrm{op}}}_{s} \longrightarrow \textsc{Vekt}_K \tag{[\#]}$$

heißt *stetig*, falls die induzierte Abbildung

$$\begin{aligned}\mathrm{Mor}_{\textsc{Vekt}_K}(V_1, V_1') \times \ldots \times \mathrm{Mor}_{\textsc{Vekt}_K}(V_r, V_r') \times \mathrm{Mor}_{\textsc{Vekt}_K^{\mathrm{op}}}(V_{r+1}, V_{r+1}') \times \ldots \times \mathrm{Mor}_{\textsc{Vekt}_K^{\mathrm{op}}}(V_{r+s}, V_{r+s}')\\ \longrightarrow \mathrm{Mor}_{\textsc{Vekt}_K}\big(F(V_1, \ldots, V_r, V_{r+1}, \ldots, V_{r+s}), F(V_1', \ldots, V_r', V_{r+1}', \ldots, V_{r+s}')\big)\end{aligned}$$

stetig ist. Dies klappt nur für Kategorien, für die eine Topologie auf den Morphismen existiert, was auf lineare Abbildungen zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen aber natürlich zutrifft.

2.5 Lemma. Sei F ein stetiger Funktor wie in [#] und sei X ein topologischer Raum. Dann induziert F einen Funktor

$$F_X\colon \underbrace{\textsc{Vekt}_K(X) \times \ldots \times \textsc{Vekt}_K(X)}_{r} \times \underbrace{\textsc{Vekt}_K(X)^{\mathrm{op}} \times \ldots \times \textsc{Vekt}_K(X)^{\mathrm{op}}}_{s} \longrightarrow \textsc{Vekt}_K(X)$$

der verträglich ist mit Pullbacks und $F_{\mathrm{pt}} = F$ erfüllt.

Beweis: Sei $m = r + s$. Definiere $F_X(E^{(1)}, \ldots, E^{(m)}) = \coprod_{x \in X} F(E_x^{(1)}, \ldots, E_x^{(m)})$ als Menge. Sei $\{U_i\}_i$ eine offene Überdeckung von X, so dass lokale Trivialisierungen

$$\varphi_i^{(k)}\colon (p^{(k)})^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times K^{\ell_k}$$

existieren. F induziert nun – da die $\varphi_i^{(k)}$ Homöomorphismen sind – Bijektionen

$$F_{U_i}\big(\varphi_i^{(1)}, \ldots, \varphi_i^{(m)}\big)\colon F_{U_i}\big((p^{(1)})^{-1}(U_i), \ldots, (p^{(m)})^{-1}(U_i)\big) \longrightarrow U_i \times F\big(K^{\ell_1}, \ldots, K^{\ell_m}\big)$$

Jetzt gibt es eine eindeutige Topologie auf $F_X(E^{(1)}, \ldots, E^{(m)})$, so dass die eben definierten Abbildungen $\psi_i = F_{U_i}\big(\varphi_i^{(1)}, \ldots, \varphi_i^{(m)}\big)$ Homöomorphismen werden, wobei $U_i \times F\big(K^{\ell_1}, \ldots, K^{\ell_m}\big)$ die Produkttopologie trägt: Eine Menge $V \subset F_X(E^{(1)}, \ldots, E^{(m)})$ ist offen, falls sie die Vereinigung von Mengen der Form $\psi_i^{-1}(V_i)$ mit $V_i \subset U_i \times F\big(K^{\ell_1}, \ldots, K^{\ell_m}\big)$ offen ist.

Damit diese Definition konsistent ist, müssen wir folgendes überprüfen: Sei $V \subset (U_i \cap U_j) \times F(K^{\ell_1}, \ldots, K^{\ell_m})$ offen. Wir haben zu zeigen, dass dann auch $\psi_j \circ \psi_i^{-1}(V)$ offen ist. Aber es gilt $\psi_j \circ \psi_i^{-1}(x, v) = \big(x, \psi_{ij}(x)(v)\big)$ für eine Abbildung

$$\psi_{ij}\colon U_i \cap U_j \longrightarrow \mathrm{End}_K\big(F(K^{\ell_1}, \ldots, K^{\ell_m})\big)$$

Es gilt $\psi_{ij} = F\big(\psi_{ij}^{(1)}, \ldots, \psi_{ij}^{(m)}\big)$ für *stetige* Abbildungen $\psi_{ij}^{(k)}\colon U_i \cap U_j \to \mathrm{End}_K(K^{\ell_k})$. Da F stetig ist, folgt, dass alle ψ_{ij} stetig sind und folglich auch $\psi_j \circ \psi_i^{-1}$. Somit ist $\psi_j \circ \psi_i^{-1}(V)$ offen. Es ist damit klar, dass $F_X(E^{(1)}, \ldots, E^{(m)}) \to X$ ein Vektorbündel ist, denn wir haben lokale Trivialisierungen konstruiert. Ferner gilt per Definition für eine stetige Abbildung $f\colon Y \to X$

$$f^* F_X(E^{(1)}, \ldots, E^{(m)}) \cong F_Y(f^* E^{(1)}, \ldots, f^* E^{(m)}) \qquad \square$$

Beispiel: Lemma 2.5 liefert uns viele bekannte Konstruktionen für Vektorbündel:

- $\oplus\colon \textsc{Vekt}_K \times \textsc{Vekt}_K \to \textsc{Vekt}_K$ ist stetig $\Rightarrow$ direkte Summe von Vektorbündeln.
- $\otimes\colon \textsc{Vekt}_K \times \textsc{Vekt}_K \to \textsc{Vekt}_K$ ist stetig $\Rightarrow$ Tensorprodukt von Vektorbündeln.

- Dualisieren von Vektorräumen $^*\colon \mathrm{Vekt}_K^{op} \to \mathrm{Vekt}_K$ ist stetig $\Rightarrow$ duales Vektorbündel
- Der Funktor $\mathrm{Hom}\colon \mathrm{Vekt}_K \times \mathrm{Vekt}_K^{op} \to \mathrm{Vekt}_K$, $(V,W) \mapsto \mathrm{Hom}_K(W,V)$ ist stetig $\Rightarrow$ Homomorphismenbündel.

Seien $p\colon E \to X$ und $q\colon F \to X$ zwei K-Vektorbündel. Dann ist $E \times F \xrightarrow{(p,q)} X \times X$ auch ein Vektorbündel, wenn $E_x \times F_x$ die Vektorraumstruktur der äußeren direkten Summe trägt.

Übung: Sei $\Delta\colon X \to X \times X$ die Diagonalabbildung. Zeige, dass $\Delta^*(E \times F) \cong E \oplus F$ als Vektorbündel über X.

Homotopieinvarianz von Pullbacks

Erinnerung: Ein topologischer Raum heißt *normal*, falls sich zwei disjunkte abgeschlossene Mengen durch offene Mengen trennen lassen. Ein wichtiger Satz über normale Räume ist der folgende:

2.6 Satz (Fortsetzungssatz von Tietze). Sei X ein normaler Raum, $A \subset X$ abgeschlossen und V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum. Zu jeder stetigen Abbildung $f\colon A \to V$ existiert eine stetige Abbildung $F\colon X \to V$ mit $F|_A = f$.

Bemerkung: Jeder kompakte Hausdorffraum ist normal *(Übungsaufgabe)*.

Definition. Sei $p\colon E \to X$ ein K-Vektorbündel über einem topologischen Raum X. Ein *Schnitt* von E ist eine stetige Abbildung $s\colon X \to E$ mit $p \circ s = \mathrm{id}_X$, das heißt $s(x) \in E_x$. Jedes Vektorbündel hat einen Schnitt, nämlich den trivialen Schnitt $s(x) = 0 \in E_x$.

2.7 Lemma. Sei X ein kompakter Hausdorffraum, $A \subset X$ abgeschlossen. Seien $p\colon E \to X$ und $p'\colon E' \to X$ zwei K-Vektorbündel über X. Dann gilt:

a) Jeder Schnitt $s\colon A \to E|_A$ lässt sich zu einem Schnitt $\bar{s}\colon X \to E$ fortsetzen.

b) Sei $\iota\colon A \hookrightarrow X$ die Inklusion und $E|_A := \iota^*E$, sowie $E'|_A := \iota^*E'$. Sei weiter $f\colon E|_A \to E'|_A$ ein Morphismus von Vektorbündeln. Dann existiert ein Morphismus $\hat{f}\colon E \to E'$, der f fortsetzt. Ist f ein Isomorphismus, dann existiert eine offene Menge $U \supset A$, sodass $\hat{f}|_U\colon E|_U \to E'|_U$ ein Isomorphismus von Vektorbündeln ist.

Beweis:

a) Wir wählen eine endliche Überdeckung $(U_i)_{i=1,\dots,N}$ von X, sodass lokale Trivialisierungen $\varphi_i\colon E|_{U_i} \to U_i \times K^n$ existieren. Nach dem Fortsetzungssatz 2.6 lässt sich

$$\mathrm{pr}_{K^n} \circ \varphi_i \circ s\big|_{U_i \cap A}\colon U_i \cap A \longrightarrow K^n$$

zu einer stetigen Abbildung auf U_i fortsetzen, also auch $s|_{U_i \cap A}$ selbst. Sei $\bar{s}_i$ eine solche Fortsetzung. Sei $\psi_i\colon X \to [0,1]$ eine Partition der Eins[4], die der Überdeckung $(U_i)_{i=1,\dots,N}$ untergeordnet ist. Sei

$$\bar{s} = \sum_{i=1}^{N} \psi_i \cdot \bar{s}_i\colon X \longrightarrow E$$

Dann gilt $\bar{s}|_A = \left(\sum_{i=1}^N \psi_i\right) \cdot s|_A = s|_A$.

[4] siehe https://de.wikipedia.org/wiki/Zerlegung_der_Eins

b) Die Morphismen $f\colon E \to E'$ entsprechen den Schnitten des Vektorbündels $\mathrm{Hom}(E,E') \to X$ wie folgt: Jedem f lässt sich ein Schnitt

$$s_f(x)(v) := f(v)$$

für $x \in X$ und $v \in E_x$ zuordnen. Jedem Schnitt $s\colon X \to \mathrm{Hom}(E,E')$ entspricht ein Morphismus $f_s(v) = s\big(p(v)\big)(v) \in E'_{p(v)}$. Somit folgt der erste Teil der Aussage aus a).

Sei nun $\pi\colon \mathrm{Hom}(E,E') \to X$ die Bündelabbildung. Sei weiter

$$\mathrm{Iso}(E,E') = \big\{ g \in \mathrm{Hom}(E,E') \,\big|\, g\colon E_{\pi(g)} \to E'_{\pi(g)} \text{ ist ein Isomorphismus} \big\} \subset \mathrm{Hom}(E,E')$$

Dann ist $\mathrm{Iso}(E,E') \to X$ ein lokal triviales Bündel, allerdings *kein* Vektorbündel. Sind E und E' n-dimensional, ist die Faser von $\mathrm{Iso}(E,E')$ an jedem Punkt homöomorph zu $\mathrm{GL}_n(K)$. Da $\mathrm{GL}_n(K) \subset M_n(K)$ offen ist und $\mathrm{Iso}(E,E')$ lokal trivial ist, folgt, dass $\mathrm{Iso}(E,E') \subset \mathrm{Hom}(E,E')$ offen ist.[5] Sei $\hat{f}$ eine Fortsetzung von f. Setze $U = s_{\hat{f}}^{-1}\big(\mathrm{Iso}(E,E')\big)$ für $s_{\hat{f}}\colon X \to \mathrm{Hom}(E,E')$. Dann ist U offen und $s_{\hat{f}}|_U$ entspricht einem Isomorphismus $\hat{f}\colon E|_U \to E'|_U$. □

2.8 Lemma. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und X ein topologischer Raum. Sei weiter $p\colon E \to X \times [a,b]$ ein K-Vektorbündel. Es gebe außerdem ein $c \in (a,b)$, so dass $E|_{X\times[a,c]}$ und $E|_{X\times[c,b]}$ trivialisierbar sind. Dann ist auch E trivialisierbar.

Beweis: Wir können den Beweis für jede Komponente von X einzeln führen und daher ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass X zusammenhängend ist. Seien

$$\varphi_a\colon X \times [a,c] \times K^n \xrightarrow{\cong} E\big|_{X\times[a,c]}$$
$$\varphi_b\colon X \times [c,b] \times K^n \xrightarrow{\cong} E\big|_{X\times[c,b]}$$

entsprechende Trivialisierungen. Sei außerdem

$$h := \Big(\varphi_b\big|_{X\times\{c\}\times K^n}\Big)^{-1} \circ \Big(\varphi_a\big|_{X\times\{c\}\times K^n}\Big)\colon X \times \{c\} \times K^n \longrightarrow X \times \{c\} \times K^n$$

Dann ist h ein Isomorphismus eines trivialen K-Vektorbündels über X. Dieser hat die Form $h(x,v) = \big(x, g(x)\cdot v\big)$ für eine stetige Abbildung $g\colon X \to \mathrm{GL}_n(K)$. Sei jetzt

$$w\colon X \times [c,b] \times K^n \longrightarrow X \times [c,b] \times K^n \quad , \qquad (x,t,v') \longmapsto \big(x,t,g(x)\cdot v'\big)$$

Dann gilt $\varphi_a|_{X\times\{c\}\times K^n} = \varphi_b \circ w|_{X\times\{c\}\times K^n}$ und w ist ein Isomorphismus. Daher können wir diese beiden Abbildungen zu einem Isomorphismus von Vektorbündeln $X \times [a,b] \times K^n \to E$ zusammensetzen. □

2.9 Lemma. Sei X ein kompakter Raum. Sei $p\colon E \to X \times I$ ein K-Vektorbündel. Dann gibt es eine endliche offene Überdeckung $\{U_i\}_{i=1}^N$ von X, so dass $E|_{U_i \times I}$ trivialisierbar ist.

Beweis: Sei $x \in X$ und $t \in I$. Dann existieren offene Umgebungen $x \in U(t) \subset X$ und $I(t) \subset I$, sodass $E|_{U(t)\times I(t)}$ trivialisierbar ist. Da I kompakt ist, existiert eine endliche Folge $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ zusammen mit offenen Umgebungen U_i von x, so dass $E|_{U_i\times[t_{i-1},t_i]}$ trivialisierbar ist. Sei nun $U := \bigcap_{i=1}^n U_i$. Nach Lemma 2.8 ist $E|_{U\times I}$ trivialisierbar. Da $X \times I$ kompakt ist, wird es von endlichen vielen solcher Mengen überdeckt. □

[5] da lokal homöomorph zu $U \times \mathrm{GL}_n(K) \hookrightarrow U \times M_n(K)$

2.10 Theorem. Sei X ein kompakter Raum und sei $p\colon E \to X \times I$ ein K-Vektorbündel. Sei weiter $E_1 = E|_{X\times\{1\}}$.

a) Es gibt einen Isomorphismus von Vektorbündeln über $X \times I$

$$\varphi\colon E \xrightarrow{\cong} E_1 \times I$$

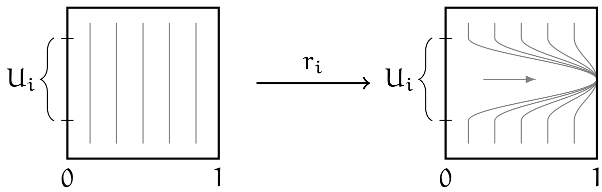
mit $\varphi|_{p^{-1}(X\times\{1\})} = \mathrm{id}_{E_1}$

b) Sei (X, A) ein Ko-Raumpaar, $h\colon X \times I \to Y$ eine stetige Abbildung und $p'\colon E' \to Y$ ein K-Vektorbündel mit $E \cong h^*E'$. Falls jetzt $h_t(a) = h_0(a)$ für alle $a \in A$ und $t \in I$, dann lässt sich der Isomorphismus aus a) so wählen, dass er den durch h induzierten Isomorphismus $E|_{A\times I} \to E_1|_A \times I$ fortsetzt.

Beweis: Nach Lemma 2.9 können wir eine Überdeckung von $X \times I$ durch offene Mengen der Form $U_i \times I$ mit $i \in \{1, \ldots, N\}$ finden, so dass $E|_{U_i\times I}$ trivialisierbar ist. Seien $h_i\colon U_i \times I \times K^n \to E|_{U_i\times I}$ die entsprechenden Trivialisierungen und seien $\eta_i\colon X \to [0, 1]$ stetige Funktionen mit folgenden Eigenschaften:

$$\mathrm{supp}(\eta_i) \subset U_i \qquad \text{und} \qquad \max_{i=1,\ldots,N} \eta_i(x) = 1 \text{ für alle } x \in X$$

Sei $r_i\colon X \times I \to X \times I$ gegeben durch $r_i(x, t) = \big(x, \max(\eta_i(x), t)\big)$. Ein Punkt (x, t) wird durch r_i entlang der I-Achse nach 1 verschoben. Der Wert der Verschiebung wird durch η_i festgelegt.



Nun konstruieren wir einen Morphismus von K-Vektorbündeln (u_i, r_i) über r_i wie folgt:

$$u_i\big(h_i(x, t, v)\big) := h_i\big(r_i(x, t), v\big)$$

für $(x, t, v) \in U_i \times I \times K^n$. Wir setzen $u_i = \mathrm{id}$ außerhalb des Bildes von h_i. Wegen $r_i|_{X\times I\setminus U_i\times I} = \mathrm{id}_{X\times I\setminus U_i\times I}$ ist dies stetig. Außerdem kommutiert

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "u_i"] \arrow[d, "p"] & E \arrow[d, "p"] \\ X \times I \arrow[r, "r_i"] & X \times I \end{tikzcd}$$

und u_i ist auf den Fasern linear. Sei $r := r_N \circ r_{N-1} \circ \ldots \circ r_1$. Nach Konstruktion gilt $r(x, t) = (x, 1)$ für alle $x \in X$. Sei $u := u_N \circ \ldots \circ u_2 \circ u_1$.Dann ist (u, r) ein Morphismus von Vektorbündeln und es gilt $(u, r)|_{X\times\{1\}} = \mathrm{id}_{E_1}$. Außerdem haben wir

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "{(u,r)}"] \arrow[dr] & E \\ & E_1 \arrow[u] \end{tikzcd} \qquad \text{und} \qquad \begin{tikzcd} E \arrow[r, "u"] \arrow[d, "p"'] & E_1 \arrow[d, "p_1"] \\ X \times I \arrow[r, "r"] & X \times \{1\} \end{tikzcd}$$

Setze jetzt $\varphi\colon E \to E_1 \times I$, $v \mapsto \big(u(v), \mathrm{pr}_I \circ p(v)\big)$. Dann ist $(\varphi, \mathrm{id}_{X\times I})$ ein Isomorphismus von Vektorbündeln mit $\varphi|_{E\times\{1\}} = \mathrm{id}$. Damit ist a) gezeigt.

Für b) sei $V_j \subset Y$ eine offene Überdeckung von Y, sodass $E'|_{\overline{V}_j}$ trivialisierbar ist. Sei nun $B_j = h^{-1}(\overline{V}_j) \subset X \times I$. Es gilt dann

$$B_j \cap (A \times I) = \underbrace{\left(h_1^{-1}(\overline{V}_j) \cap A\right)}_{=A_j} \times I$$

da h auf A unabhängig ist von $t \in I$. Nach Konstruktion ist $E|_{A_j \times I}$ trivialisierbar. Nach Lemma 2.7 b) finden wir eine offene Umgebung $U_j \times I$ mit $X \supset U_j \supset A_j$, so dass $E|_{U_j \times I}$ trivialisierbar ist. Wir ergänzen die Mengen $U_j \times I$ um trivialisierende offene Umgebungen $U_i \times I$ mit $U_i \cap A = \emptyset$, so dass $\bigcup_i U_i \times I = X \times I$. Jetzt verwenden wir die Konstruktion aus a) für diese Überdeckung. Der entsprechende Isomorphismus $\varphi\colon E \to E_1 \times I$ stimmt auf $A_j \times I$ mit dem von h induzierten Isomorphismus überein. $\square$

Das folgende Korollar ist von entscheidender Bedeutung für die Definition von topologischer K-Theorie, die wir im nächsten Abschnitt erarbeiten wollen.

2.11 Korollar. Sei X ein kompakter Raum und $h\colon X \times I \to Y$ eine Homotopie. Sei $p\colon E \to Y$ ein $\mathbb{K}$-Vektorbündel. Dann gilt

- **a)** $h_0^* E \cong h_1^* E$ als Vektorbündel über X, das heißt Pullbacks sind homotopieinvariant bis auf Isomorphie.
- **b)** Falls (X, A) ein Ko-Raumpaar ist und h stationär auf A ist, dann kann der Isomorphismus so gewählt werden, dass er über A die Identität ist. $\square$

3. Topologische K-Theorie

Wir haben im letzten Kapitel folgenden kontravarianten, homotopieinvarianten Funktor kennengelernt

$$\begin{aligned} \textsc{Top} &\longrightarrow \textsc{Monoide} \\ X &\longmapsto \textsc{Vekt}_{\mathbb{K}}(X)/\sim_{\mathrm{Iso}} \\ (f\colon X \to Y) &\longmapsto \big(f^*\colon \textsc{Vekt}_{\mathbb{K}}(Y)/\sim_{\mathrm{Iso}} \to \textsc{Vekt}_{\mathbb{K}}(X)/\sim_{\mathrm{Iso}}\big) \end{aligned}$$

mit der Monoid-Operation $[E]_{\mathrm{Iso}} + [F]_{\mathrm{Iso}} = [E \oplus F]_{\mathrm{Iso}}$ und dem Nullvektorbündel als neutralem Element. Daraus wollen wir eine Gruppe konstruieren. Ein kanonischer Ansatz dazu ist die folgende Konstruktion:

Grothendieck-Konstruktion

Sei $(M, +)$ ein kommutativer Monoid. Betrachte $\mathrm{Gr}(M) = {}^{M\times M}/_{\sim}$ mit der Äquivalenzrelation

$$(x, y) \sim (x', y') :\iff \exists c \in M \text{ mit } x + y' + c = x' + y + c$$

Die Idee dahinter: $[x, y]$„=“$x - y$, also die erste Koordinate ist der „positive“ und die zweite der „negative“ Teil. Dann ist

$$\begin{aligned} +\colon \mathrm{Gr}(M) \times \mathrm{Gr}(M) &\longrightarrow \mathrm{Gr}(M) \\ \big([x, y], [x', y']\big) &\longmapsto [x + x', y + y'] \end{aligned}$$

wohldefiniert. Mit dieser Operation ist $\mathrm{Gr}(M)$ eine abelsche Gruppe (das Inverse zu $[x, y]$ ist $[y, x]$, denn $[x + y, x + y] = [0, 0]$) und $M \to \mathrm{Gr}(M)$, $x \mapsto [x, 0]$ ist ein Monoidhomomorphismus.

Beispiel: $\mathrm{Gr}(\mathbb{N}_0, +) = (\mathbb{Z}, +)$.

Universelle Eigenschaft
Zu jedem Monoidhomomorphismus $\varphi\colon M \to A$ in eine abelsche Gruppe A existiert genau ein Gruppenhomomorphismus $\psi\colon \mathrm{Gr}(M) \to A$, sodass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, hook] & A \\ \mathrm{Gr}(M) \arrow[ur, dashed, "\exists!\psi"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert. *Der Beweis ist eine Übungsaufgabe. Für die Existenz betrachte* $\psi([x, y]) = \varphi(x) - \varphi(y)$. *Die Eindeutigkeit folgt dann ganz einfach.*

Wir bekommen jetzt eine abelsche Gruppe $K^0(X) := \mathrm{Gr}(\textsc{Vekt}_{\mathbb{C}}(X)/\sim_{\mathrm{Iso}})$, aber es stellen sich weiterhin die Fragen auf dem Weg zu einer Kohomologie-Theorie: Was ist $K^n(X)$ für $n \neq 0$? Was ist $K^n(X, A)$, also was machen wir mit (Ko-)Raumpaaren?

3.1 Definition. Sei (X, A) ein Ko-Raumpaar.

(i) Ein *Tripel* (E_1, f, E_0) über (X, A) besteht aus endlichdimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorbündeln $p_i\colon E_i \to X$ und einem Isomorphismus $f\colon E_1|_A \to E_0|_A$.

(ii) Ein *Morphismus von Tripeln* (E_1, f, E_0) und (E'_1, f', E'_0) besteht aus einem Paar (g_1, g_0) von Vektorbündelmorphismen $g_i\colon E_i \to E'_i$, sodass das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd} E_1|_A \arrow[r, "g_1|_A"] \arrow[d, "f"] & E'_1|_A \arrow[d, "f'"] \\ E_0|_A \arrow[r, "g_0|_A"] & E'_0|_A \end{tikzcd}$$

(iii) Tripel der Form (E, id_E, E) heißen *elementar*.

(iv) (E_1, f, E_0) und (E'_1, f', E'_0) heißen *stabil isomorph*, falls Vektorbündel $E \to X$ und $E' \to X$ existieren, so dass

$$(E_1 \oplus E, f \oplus \mathrm{id}_E, E_0 \oplus E) \cong (E'_1 \oplus E', f' \oplus \mathrm{id}_{E'}, E'_0 \oplus E')$$

also falls sie isomorph werden nach Addition elementarer Tripel.

Bemerkung: ▸ Stabile Isomorphie ist eine Äquivalenzrelation. *(einfache Übung)*

▸ Stabile Isomorphieklassen von Tripeln lassen sich addieren, das heißt

$$\left[E_1, f, E_0\right]_{\mathrm{st}} + \left[E'_1, f', E'_0\right]_{\mathrm{st}} := \left[E_1 \oplus E'_1, f \oplus f', E_0 \oplus E'_0\right]_{\mathrm{st}}$$

ist wohldefiniert. Das Tripel $[0, \mathrm{id}, 0]_{\mathrm{st}}$ ist ein neutrales Element hierfür.

▸ Es gilt $[E_1, f, E_0]_{\mathrm{st}} = [0, \mathrm{id}, 0]_{\mathrm{st}}$ genau dann, wenn ein Vektorbündel $E \to X$ existiert, so dass sich der Isomorphismus $f \oplus \mathrm{id}\colon E_1 \oplus E|_A \to E_0 \oplus E|_A$ zu einem Isomorphismus über ganz X ausdehnen lässt.

BEWEIS: Für die erste Implikation folgt aus der Definition $(E_1 \oplus E, f \oplus \mathrm{id}, e_0 \oplus E) \cong (E', \mathrm{id}_{E'}, E')$. Sei $\varphi = (\varphi_1, \varphi_0)$ dieser Isomorphismus. Dann kommutiert das folgende Diagramm

$$\begin{tikzcd} (E_1 \oplus E)|_A \arrow[r, "\varphi_1|_A", "\cong"'] \arrow[d, "f\oplus\mathrm{id}"'] & E'|_A \arrow[d, "\mathrm{id}_{E'}|_A", "\cong"'] \\ (E_0 \oplus E)|_A \arrow[r, "\cong", "\varphi_0|_A"'] & E'|_A \end{tikzcd}$$

Der Isomorphismus $\varphi_0^{-1} \circ \varphi_1\colon E_1 \oplus E \to E_0 \oplus E$ ist auf ganz X definiert und erfüllt $\varphi_0^{-1} \circ \varphi_1|_A = f \oplus \mathrm{id}$, ist also eine Fortsetzung wie gewünscht.

Für die Rückrichtung betrachten wir $\psi\colon E_1 \oplus E \xrightarrow{\cong} E_0 \oplus E$ mit $\psi|_A = f \oplus \mathrm{id}$. Dann kommutiert

$$\begin{tikzcd} (E_1 \oplus E)|_A \arrow[r, "\psi|_A", "\cong"'] \arrow[d, "f\oplus\mathrm{id}"] & (E_0 \oplus E)|_A \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\ (E_0 \oplus E)|_A \arrow[r, "\mathrm{id}", "\cong"'] & (E_0 \oplus E)|_A \end{tikzcd}$$

also ist $(\psi, \mathrm{id})\colon (E_1 \oplus E, f \oplus \mathrm{id}, E_0 \oplus E) \to (E_0 \oplus E, \mathrm{id}, E_0 \oplus E)$ die gesuchte stabile Isomorphie. □

3.2 Definition. Sei (X, A) ein Ko-Raumpaar. Wir definieren $K^0(X, A)$ als die Menge der stabilen Isomorphieklassen von Tripeln über (X, A). $K^0(X, A)$ heißt auch *0-te K-Gruppe* von (X, A). Für $n > 0$ definieren wir

$$\begin{aligned} & K^{-n}(X, A) := K^0\big((X, A) \times (I, \partial I)^n\big) \\ \text{und} \quad & K^{-n}(X) \quad := K^{-n}(X, \emptyset) \end{aligned}$$

Übung: $K^0(X,\emptyset)$ *ist isomorph zu* $\mathrm{Gr}(\mathrm{Vekt}_{\mathbb{C}}(X)/_{\sim_{\mathrm{Iso}}})$.

Wir wissen bisher nur, dass $K^0(X,A)$ ein Monoid ist bezüglich der Addition von Tripeln. Um zu sehen, dass dies tatsächlich eine Gruppenstruktur liefert, brauchen wir zwei Lemmata:

3.3 Lemma. Sei (X,A) ein Ko-Raumpaar. Seien $p\colon E\to X$ und $p'\colon E'\to X$ zwei K-Vektorbündel und $f\colon E'|_A\to E|_A$ ein Isomorphismus, (E',f,E) also ein Tripel. Sei weiter $f'\colon E'\to E$ ein Isomorphismus von K-Vektorbündeln und $h\colon A\times I\to \mathrm{Iso}(E'\times I|_{A\times I}, E\times I|_{A\times I})$ eine stetige Abbildung, so dass h_t ein Schnitt ist für alle $t\in I$ und $h_0=f'|_A$, sowie $h_1=f$ gilt.

Morphismen entsprechen Schnitten von Morphismenbündeln, siehe Beweis von Lemma 2.7

Ich sehe nicht ein, wie bei dieser Definition von h, $h_1=f$ bzw. $h_0=f'|_A$ gelten kann, da in deren Definitionen das Einheitsintervall doch gar nicht vorkommt …

Dann existiert ein Isomorphismus $F\colon E'\to E$ mit $F|_A=f$ und eine Homotopie $H\colon X\times I\to \mathrm{Iso}(E'\times I, E\times I)$ mit $H_0=f'$, $H_1=F$ und $H|_{A\times I}=h$.

Beweis: Unser Ziel ist es h zu einer Homotopie H auf ganz $X\times I$ zu erweitern und dann $F=H_1$ zu setzen. Die Abbildungen h und f' liefern eine stetige Abbildung

$$\tilde{h}\colon A\times I\cup X\times\{0\}\longrightarrow \mathrm{Iso}\big((\mathrm{pr}_X^*E')|_{A\times I\cup X\times\{0\}},(\mathrm{pr}_X^*E)|_{A\times I\times X\times\{0\}}\big)$$

Wir müssen $\tilde{h}$ zu einem Schnitt $X\times I\to\mathrm{Iso}(E'\times I,E\times I)$ ausdehnen, dass wir einen Schnitt bekommen. Betrachte

r aus Kofaserungseigenschaft

$$\begin{tikzcd}
A\times I\cup X\times\{0\} \arrow[r,"\mathrm{id}"] \arrow[d,hook] & A\times I\cup X\times\{0\} \arrow[r,hook,"\iota"] & X\times I\\
X\times I \arrow[ur,dashed,"r"] & &
\end{tikzcd}$$

Sei $r_X=\mathrm{pr}_X\circ\iota\circ r$ und $r_I=\mathrm{pr}_I\circ\iota\circ r$. Sei weiter

$$\begin{aligned}
K\colon (X\times I)\times I &\longrightarrow X\times I\\
(x,t,s)&\longmapsto (r_X(x,st),sr_I(x,t)+(1-s)t)
\end{aligned}$$

Dann gilt $K_0(x,t)=(x,t)$ und $K_1(x,t)=\iota\circ r(x,t)$, also ist $\iota\circ r$ homotop zu $\mathrm{id}_{X\times I}$. Folglich ist

$$E\times I\xrightarrow{\cong}(\iota\circ r)^*(E\times I)\cong r^*(\iota^*(E\times I))\xrightarrow{\bar{r}}\iota^*(E\times I)\cong E|_A\times I\cup E\times\{0\}$$

Ebenso $\bar{r}'\colon E'\times IE'|_A\times I\cup E'\times\{0\}$. $(\bar{r},r)$ und $(\bar{r}',r)$ sind Morphismen von Vektorbündeln. Wir erhalten nun das folgende Diagramm, wobei die diagonale Abbildung rechts oben von $\tilde{h}$ induziert ist und somit ein Isomorphismus ist

$$\begin{tikzcd}
E'\times I \arrow[rr,"\bar{r}'"] \arrow[dr,dashed,"\bar{H}"] \arrow[dd] & & E'|_A\times I\cup E'\times\{0\} \arrow[dr,"\cong"] \arrow[dd] & \\
& E\times I \arrow[rr,"\bar{r}"] \arrow[dd] & & E|_A\times I\cup E\times\{0\} \arrow[dd]\\
X\times I \arrow[rr,"r"] \arrow[dr,"\mathrm{id}"] & & A\times I\cup X\times\{0\} \arrow[dr,"\mathrm{id}"] & \\
& X\times I \arrow[rr,"r"] & & A\times I\cup X\times\{0\}
\end{tikzcd}$$

Die Existenz von $\overline{H}$ folgt aus der universellen Eigenschaft des Pullbacks. Es gilt nun $H = \mathrm{pr}_E \circ \overline{H}\colon E' \times I \to E$ und wir erhalten eine Abbildung $X \times I \to \mathrm{Iso}(E' \times I, E \times I)$. $F := H|_{E' \times \{1\}}\colon E' \to E$ ist nun die gesuchte Abbildung. $\square$

Wir können nur klären, was inverse Elemente in $K^0(X, A)$ sind. Kandidat für das inverse Element in $K^0(X, A)$ zu (E_0, f, E_1) ist (E_1, f^{-1}, E_0). Wir müssen prüfen, dass $(E_0, f, E_1) \oplus (E_1, f^{-1}, E_0) = (E_0 \oplus E_1, f \oplus f^{-1}, E_1 \oplus E_0)$ ist. Dazu folgendes Lemma:

3.4 Lemma. Sei (X, A) ein Ko-Raumpaar.

(i) Seien (E_0, f, E_1) und (E_1, g, E_2) Tripel über (X, A). Dann sind die beiden Tripel

$$(E_0, g \circ f, E_2) \quad \text{und} \quad (E_0 \oplus E_1, f \oplus g, E_1 \oplus E_2)$$

stabil isomorph.

(ii) Seien (E_0, f, E_1) und (E_0, g, E_1) Tripel über (X, A). Sei $h\colon A \times I \to \mathrm{Iso}(E_0|_A, E_1|_A)$ eine Homotopie zwischen f und g, sodass $h_t\colon A \to \mathrm{Iso}(E_0|_A, E_1|_A)$ ein Schnitt ist für alle $t \in I$. Dann sind die beiden Tripel stabil isomorph.

BEWEIS:

(i) Wir haben das folgende kommutative Diagramm von Vektorbündeln:

$$\begin{tikzcd}
E_1 \oplus E_0|_A \arrow[rrr, "\begin{pmatrix} \mathrm{id} & f \\ 0 & \mathrm{id} \end{pmatrix}", "(1)"'] \arrow[d, "\begin{pmatrix} \mathrm{id} & 0 \\ 0 & g\circ f \end{pmatrix}"'] & & & E_1 \oplus E_0|_A \arrow[d, "\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}"] \\
E_1 \oplus E_2|_A & E_2 \oplus E_1|_A \arrow[l, "\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{id} \\ \mathrm{id} & 0 \end{pmatrix}"', "(2)"] & E_2 \oplus E_1|_A \arrow[l, "\begin{pmatrix} \mathrm{id} & g \\ 0 & \mathrm{id} \end{pmatrix}"', "(3)"] & E_2 \oplus E_1|_A \arrow[l, "\begin{pmatrix} \mathrm{id} & 0 \\ -g^{-1} & \mathrm{id} \end{pmatrix}"', "(4)"]
\end{tikzcd}$$

Die Kommutativität ergibt sich dabei wie folgt

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{id} \\ \mathrm{id} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{id} & g \\ 0 & \mathrm{id} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{id} & 0 \\ -g^{-1} & \mathrm{id} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{id} & f \\ 0 & \mathrm{id} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{id} \\ \mathrm{id} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & g \\ -g^{-1} & \mathrm{id} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g & g \circ f \\ 0 & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g^{-1} & -\mathrm{id} \\ 0 & g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g & g \circ f \\ 0 & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{id} & 0 \\ 0 & g \circ f \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Wir können f,g und g^{-1} zu Morphismen über X fortsetzen (nach Lemma 2.7). Die Fortsetzungen sind im Allgemeinen aber keine Isomorphismen. Dennoch sind die auf X erweiterten Versionen der Morphismen (1) – (4) Isomorphismen über X. Dabei ist zum Beispiel das Inverse zu $\left(\begin{smallmatrix} \mathrm{id} & f \\ 0 & \mathrm{id} \end{smallmatrix}\right)$ gegeben durch $\left(\begin{smallmatrix} \mathrm{id} & -f \\ 0 & \mathrm{id} \end{smallmatrix}\right)$. Dass die beiden Tripel stabil isomorph sind, ergibt sich nun wie folgt:

$$\begin{aligned}
[E_0, g \circ f, E_2]_{\mathrm{st}} = [E_1 \oplus E_0, \mathrm{id} \oplus g \circ f, E_1 \oplus E_2]_{\mathrm{st}} &= \left[E_1 \oplus E_0, \left(\begin{smallmatrix} g & 0 \\ 0 & f \end{smallmatrix}\right), E_2 \oplus E_1\right]_{\mathrm{st}} \\
&= \left[E_0 \oplus E_1, \left(\begin{smallmatrix} f & 0 \\ 0 & g \end{smallmatrix}\right), E_1 \oplus E_2\right]_{\mathrm{st}}
\end{aligned}$$

(ii) Betrachte das Tripel $(E_0, \oplus E_1, f \oplus g^{-1}, E_1 \oplus E_0)$. Nach (i) ist es stabil isomorph zu $(E_0, g^{-1} \circ f, E_0)$. Nach Voraussetzung ist $g^{-1} \circ f$ homotop zu id_{E_0} durch Isomorphismen. Also folgt aus Lemma 3.3, dass sich $g^{-1} \circ f$ zu einem Isomorphismus über X fortsetzen lässt. Aus der Bemerkung folgt

$$[E_0, g^{-1} \circ f, E_0]_{st} = [0, \mathrm{id}, 0]_{st}$$

Außerdem gilt nach (i) auch $[E_1 \oplus E_0, g^{-1} \oplus g, E_0 \oplus E_1]_{st} = [0, \mathrm{id}, 0]_{st}$. Weiter ist

$$\begin{aligned} [E_0, f, E_1]_{st} &= [E_0 \oplus E_1 \oplus E_0, f \oplus g^{-1} \oplus g, E_1 \oplus E_0 \oplus E_1]_{st} \\ &= \underbrace{[E_0 \oplus E_1, f \oplus g^{-1}, E_1 \oplus E_0]_{st}}_{=[0,\mathrm{id},0]} + [E_0, g, E_1]_{st} \end{aligned}$$ □

3.5 Korollar. Sei (X, A) ein Ko-Raumpaar. Dann ist $K^{-n}(X, A)$ für $n \geqslant 0$ eine abelsche Gruppe.

Beweis: Es genügt zu zeigen, dass $K^0(X, A)$ eine abelsche Gruppe ist (siehe Definition 3.2). Sei $[E_0, f, E_1]_{st} \in K^0(X, A)$. Dann gilt nach Lemma 3.4

$$[E_0, f, E_1]_{st} + [E_1, f^{-1}, E_0]_{st} = [E_0 \oplus E_1, f \oplus f^{-1}, E_1 \oplus E_0]_{st} = [E_0, f^{-1} \circ f, E_0]_{st} = [0, \mathrm{id}, 0]_{st}$$

Damit ist die Existenz von Inversen bewiesen. Diese Gruppe ist nach Definition abelsch. □

Die Zuordnung $(X, A) \mapsto K^{-n}(X, A)$ ist ein kontravarianter Funktor: Sei $g\colon (X, A) \to (Y, B)$ eine stetige Abbildung von Ko-Raumpaaren, dann ist

$$g^*\colon K^{-n}(Y, B) \to K^{-n}(X, A)$$

definiert durch $g^*[E_0, f, E_1]_{st} = [g^*E_0, g^*f, g^*E_1]_{st}$. Hierbei ist g^*f der von der universellen Eigenschaft des Pullbacks induzierte Morphismus:

$$\begin{tikzcd}
g^*E_0|_A \arrow[rr] \arrow[dr, dashed, "g^*f", "\cong"'] \arrow[dd] & & E_0|_B \arrow[dr, "f", "\cong"'] \arrow[dd] & \\
& g^*E_1|_A \arrow[rr] \arrow[dd] & & E_1|_B \arrow[dd] \\
A \arrow[rr, "g|_A"] \arrow[dr, "id"'] & & B \arrow[dr, "id"] & \\
& A \arrow[rr, "g|_A"] & & B
\end{tikzcd}$$

3.6 Lemma. Der Funktor $(X, A) \mapsto K^{-n}(X, A)$ ist homotopieinvariant.

Beweis: Es genügt wieder, den Fall $n = 0$ zu betrachten. Seien $g_0, g_1\colon (X, A) \to (Y, B)$ stetige Abbildungen und $h\colon (X \times I, A \times I) \to (Y, B)$ eine Homotopie zwischen g_0 und g_1. Sei (E_0, f, E_1) ein Tripel über (Y, B). Nach Theorem 2.10 a) existieren Isomorphismen

$$h^*E_0 \xrightarrow[\cong]{\psi^{(0)}} g_1^*(E_0) \times I$$
$$h^*E_1 \xrightarrow[\cong]{\psi^{(1)}} g_1^*(E_1) \times I$$

die über $X \times \{1\}$ die Identität sind. Betrachte nun die Abbildung

$$(\psi^{(1)}|_{A\times I}) \circ (h^*f) \circ (\psi^{(0)}|_{A\times I})^{-1}\colon g_1^*E_0|_A \times I \xrightarrow{\cong} g_1^*E_1|_A \times I$$

Dies entspricht einer Homotopie $\tilde{h}\colon A \times I \to \mathrm{Iso}\big(g_1^* E_0|_A \times I, g_1^* E_1|_A \times I\big)$. Sei nun

$$\tilde{f} = \big(\psi^{(1)}|_{A\times\{0\}}\big) \circ (h_0^* f) \circ \big(\psi^{(0)}|_{A\times\{0\}}\big)^{-1}$$

Dann erhalten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} g_0^* E_0|_A \arrow[r, "g_0^* f", "\cong"'] \arrow[d, "\psi^{(0)}|_{A\times\{0\}}"', "\cong"] & g_0^* E_1|_A \arrow[d, "\cong"', "\psi^{(1)}|_{A\times\{0\}}"] \\ g_1^* E_0|_A \arrow[r, "\tilde{f}", "\cong"'] & g_1^* E_1|_A \end{tikzcd}$$

Es folgt damit

$$\big[g_0^* E_0, g_0^* f, g_0^* E_1\big]_{\mathrm{st}} = \big[g_1^* E_0, \tilde{f}, g_1^* E_1\big]_{\mathrm{st}} \overset{3.4\text{ ii)}}{=} \big[g_1^* E_0, g_1^* f, g_1^* E_1\big]_{\mathrm{st}} \qquad \square$$

Ausschneidung

Wir erinnern uns an das Ausschneide-Axiom:

> Sei (X, A) ein Ko-Raumpaar und $U \subset A$ eine Teilmenge mit $\overline{U} \subset \mathring{A}$. Dann ist die induzierte Abbildung $K^{-n}(X, A) \to K^{-n}(X \setminus U, A \setminus U)$ ein Isomorphismus.

Wir wollen das Ausschneide-Axiom nun für die K-Theorie beweisen.

3.7 Lemma. Sei folgendes Diagramm ein Pushout-Diagramm von kompakten Hausdorffräumen

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, hook, "\iota_1"] \arrow[d, hook, "\iota_2"] & X_1 \arrow[d, "j_1"] \\ X_2 \arrow[r, hook, "j_2"] & X \end{tikzcd}$$

Seien $p_i\colon E_i \to X_i$ für $i \in \{1, 2\}$ K-Vektorbündel und $f\colon \iota_1^* E_1 \xrightarrow{\cong} \iota_2^* E_2$ ein Isomorphismus von K-Vektorbündeln über X_0. Dann ist

$$E = {E_1 \coprod E_2}/{\sim} \xrightarrow{\ p\ } {X_1 \coprod X_2}/{\sim} = X$$

mit $v_1 \sim f(v_1)$ für alle $v_1 \in E_1$ mit $p_1(v_1) \in X_0$ ein K-Vektorbündel über X.

Beweis: Sei $p\colon E \to X$ die Abbildung, die von p_1 und p_2 induziert wird. Wir zeigen, dass E zusammen mit p ein K-Vektorbündel ist. Die Abbildung f ist ein Isomorphismus von K-Vektorbündeln, also erhält die Äquivalenzrelation die Vektorraumstruktur auf den Fasern. Es bleibt daher nur zu zeigen, dass E lokal trivial ist. Aufgrund der lokalen Trivialität von E_1 und E_2 existieren lokale Trivialisierungen für die Punkte $j_1(X_1 \setminus \iota_1(X_0))$ und $j_2(X_2 \setminus \iota_2(X_0))$. Sei also $x = j_2 \circ \iota_2(x_0)$ für ein $x_0 \in X_0$. Da X_2 ein kompakter Hausdorffraum ist, ist er insbesondere lokal kompakt. Jede offene Umgebung von $\iota_2(x_0)$ enthält damit eine abgeschlossene Umgebung von $\iota_2(x_0)$. Also existiert eine abgeschlossene Umgebung V_2 von $\iota_2(x_0)$ mit einer Trivialisierung $\varphi_2\colon E_2|_{V_2} \to V_2 \times K^n$. Sei jetzt $W_1 = \iota_2^{-1}(V_2)$ und

$$\varphi_1 = \iota_2^* \varphi_2\big|_{W_1} \circ f\colon \iota_1^* E_1\big|_{W_1} \longrightarrow \iota_2^* E_2\big|_{W_1} \longrightarrow W_1 \times K^n$$

Dann ist φ_1 ein Isomorphismus von K-Vektorbündeln. Da W_1 kompakt ist, also insbesondere abgeschlossen, existiert eine Umgebung $V_1 \supset W_1$ und ein Isomorphismus $\psi_1 \colon E_1|_{V_1} \to V_1 \times K^n$, der φ_1 fortsetzt. Somit ist

$$\psi_1 \cup_f \varphi_2 \colon E\big|_{j_1(V_1)\cup j_2(V_2)} \longrightarrow \big(j_1(V_1) \cup j_2(V_2)\big) \times K^n$$

eine lokale Trivialisierung um x. □

3.8 Lemma. Sei (X, A) ein Ko-Raumpaar. Sei $p \colon E \to A$ ein K-Vektorbündel und $\iota \colon A \hookrightarrow X$ die Inklusion. Dann existieren Vektorbündel $q \colon F \to X$ und $q' \colon F' \to A$, so dass $\iota^* F \cong E \oplus F'$.

Beweis: Es genügt ein Vektorbündel $q' \colon F' \to A$ zu finden, sodass $E \oplus F'$ trivialisierbar ist. Denn dann können wir $F = X \times K^n$ für ein geeignetes $n \in \mathbb{N}$ setzen.

Dazu können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass X zusammenhängend ist, da wir den Beweis sonst komponentenweise durchführen können. Sei $\{U_i\}_{i=I}$, $I = \{1, \dots, N\}$ eine endliche offene Überdeckung von X, sodass lokale Trivialisierungen $\varphi_i \colon E|_{U_i} \to U_i \times K^n$ existieren. Wähle außerdem eine der Überdeckung untergeordnete Partition der Eins $\rho_i \colon X \to [0, 1]$. Sei nun $\psi_i \colon E \to K^n$ für $i \in I$ definiert durch

$$\psi_i(v) = \begin{cases} \rho_i\big(p(v)\big) \cdot \big(\mathrm{pr}^{(i)}_{K^n} \circ \varphi_i\big)(v) & \text{falls } p(v) \in U_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dies ist eine stetige Abbildung, da ρ_i außerhalb von U_i verschwindet. Jetzt betrachte

$$\psi \colon E \longrightarrow X \times \underbrace{K^n \oplus \ldots \oplus K^n}_{\text{N Summanden}} \quad , \qquad v \longmapsto \big(p(v), \big(\psi_1(v), \dots, \psi_N(v)\big)\big)$$

Dies ist ein Morphismus von K-Vektorbündeln, der die Fasern von E injektiv nach K^{nN} abbildet, da für jedes v mindestens ein $\rho_i(p(v))$ ungleich 0 ist. Sei $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt auf K^{nN} und $\varphi \colon E \to K^{nN}$ gegeben durch $\varphi = \mathrm{pr}_{K^{nN}} \circ \psi$. Sei weiter

$$F = \big\{(x, w) \in X \times K^{nN} \;\big|\; \langle w\,, \varphi(v) \rangle = 0 \text{ für alle } v \in E_x \big\}$$

und $q \colon F \to X$ gegeben durch $q(x, w) = x$. Dann ist $F_x = q^{-1}(x)$ das orthogonale Komplement der Faser E_x von E über x. Insbesondere ist $x \mapsto \dim(F_x)$ konstant, da dies auch für $x \mapsto \dim(E_x)$ gilt. Wir wollen sehen, dass F ein K-Vektorbündel über X ist. Es bleibt dazu die lokale Trivialität von F zu zeigen.

Sei $p \colon X \to \mathrm{Mat}_{nN}(K)$ dadurch definiert, dass $p(x)$ die (eindeutige) orthogonale Projektion auf F_x ist. Dann ist p stetig. Dies lässt sich wie folgt sehen: Sei $x' \in U_i \subset X$ beliebig. Dann liefern $f_k(x) = (\varphi \circ \varphi_i^{-1})(x, e_k)$ für $k \in \{1, \dots, n\}$ stetige Abbildungen $U_i \to K^{nN}$, sodass $\{f_1(x), \dots, f_n(x)\}$ für alle $x \in U_i$ eine Basis von $\varphi(E_x)$ ist (wegen der Injektivität von $\varphi|_{E_x}$). Wenden wir das Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren auf die f_i an, erhalten wir neue stetige Abbildungen $\hat{f}_i \colon U_i \to K^{nN}$, sodass $\big\{\hat{f}_1(x), \dots, \hat{f}_n(x)\big\}$ eine Orthonormalbasis von $\varphi(E_x)$ ist. Es gilt dann

$$p\big|_{U_i}(x) = 1 - \sum_{k=1}^{n} \Big\langle \hat{f}_k(x)\,, \cdot \Big\rangle \hat{f}_k(x)$$

Somit ist p stetig in x'. Sei jetzt $x_0 \in X$ und $p_0 = p(x_0)$. Betrachte die stetige Abbildung

$$\tilde{\varphi}_0 \colon F \longrightarrow X \times F_{x_0} \quad , \qquad (x, w) \longmapsto (x, p_0 w)$$

sowie

$$\tilde{\psi}_0 \colon X \times F_{x_0} \longrightarrow F \quad , \qquad (x, w') \longmapsto \big(x, p(x) w'\big)$$

Die Komposition $\tilde\varphi_0 \circ \tilde\psi_0$ erfüllt $\tilde\varphi_0 \circ \tilde\psi_0(x, w) = (x, \tilde p(x)w)$ für eine stetige Abbildung $\tilde p\colon X \to \mathrm{Hom}_K(F_{x_0}, F_{x_0})$ mit $\tilde p(x_0) = \mathrm{id}_{F_{x_0}}$. Da die invertierbaren Elemente offen in $\mathrm{Hom}_K(F_{x_0}, F_{x_0})$ sind, muss es eine offene Umgebung $x_0 \in U \subset X$ geben, sodass $\tilde p|_U$ invertierbar an jedem Punkt ist. Somit ist $(\tilde\varphi_0 \circ \tilde\psi_0)|_U$ ein Isomorphismus des trivialen Vektorbündels $U \times F_{x_0}$ und $\tilde\varphi_0|_U\colon F|_U \to U \times F_{x_0}$ bildet jede Faser F_x surjektiv und damit aus Dimensionsgründen auch injektiv auf F_{x_0} ab. Dann ist $\tilde\varphi_0|_U$ aber eine lokale Trivialisierung von F über U ($\tilde\varphi_0$ ist nicht notwendigerweise ein Isomorphismus über ganz X).

Es bleibt noch zu zeigen, dass $E \oplus F \cong X \times K^{nN}$ ist. Dieser Isomorphismus ist gegeben durch

$$E \oplus F \longrightarrow X \times K^{nN} \quad , \qquad (v, w) \longmapsto \psi(v) + w$$

Das Inverse hierzu bildet $(x, w') \in X \times K^{nN}$ auf $\big(\psi^{-1}((1 - p(x))w'), p(x)w'\big)$ ab. $\square$

3.9 Theorem.

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, hook, "i_1"] \arrow[d, "i_2"] & X_1 \arrow[d, "j_1"] \\ X_2 \arrow[r, hook, "j_2"] & X \end{tikzcd}$$

Für das obige Pushout-Diagramm von kompakten Hausdorffräumen gilt

a) Ist i_1 eine Kofaserung, dann auch j_2.

b) Der induzierte Homomorphismus $j_1^*\colon K^{-n}(X, X_2) \to K^{-n}(X_1, X_0)$ ist für $n \geqslant 0$ ein Isomorphismus.

Beweis:

a) Da i_1 eine Kofaserung ist, gibt es die folgende Homotopieerweiterungseigenschaft

$$\begin{tikzcd} X_1 \times \{0\} \cup X_0 \times I \arrow[r] \arrow[d, hook] & Z \\ X_1 \times I \arrow[ur, dashed, "\exists"'] & \end{tikzcd}$$

Sei jetzt $f\colon X \times \{0\} \cup X_2 \times I \to Z$ gegeben, wobei f stetig ist. Dann kommutiert das folgende Diagramm

$$\begin{tikzcd} X_1 \times \{0\} \cup X_0 \times I \arrow[r, "j_1 \cup (i_2 \times \mathrm{id})"] \arrow[d, hook] & X \times \{0\} \cup X_2 \times I \arrow[r, "f"] & Z \\ X_1 \times I \arrow[urr, dashed, "h_1"'] & & \end{tikzcd}$$

Betrachte nun das Pushout-Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X_0 \times I \arrow[r, hook, "i_1 \times \mathrm{id}"] \arrow[d, "i_2 \times \mathrm{id}"] & X_1 \times I \arrow[d, hook, "j_1 \times \mathrm{id}"] \arrow[ddr, bend left, "h_1"] & \\
X_2 \times I \arrow[r, hook, "j_2 \times \mathrm{id}"] \arrow[drr, bend right, "f|_{X_2 \times I}"] & X \times I \arrow[dr, dashed, "h"] & \\
& & Z
\end{tikzcd}$$

Aufgrund der universellen Eigenschaft des Pushouts existiert die Abbildung h, sodass das Diagramm kommutiert. Nach Definition von h_1 und h kommutiert dann auch das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X \times \{0\} \cup X_2 \times I \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & Z \\
X \times I \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

Damit ist Teil a) gezeigt.

b) Wir zeigen die Behauptung zunächst für $n = 0$:

Injektivität: Sei (E_0, f, E_1) ein Tripel über (X, X_2) mit $j_1^*[E_0, f, E_1]_{st} = 0$. Also existiert ein Vektorbündel $q\colon F \to X_1$, sodass sich der Isomorphismus

$$(j_1^* E_0 \oplus F)\big|_{X_0} \xrightarrow{j_1^* f \oplus \mathrm{id}} (j_1^* E_1 \oplus F)\big|_{X_0}$$

zu einem Isomorphismus über X_1 fortsetzen lässt (siehe Bemerkung nach 3.1). Nach Lemma 3.8 existieren Vektorbündel $q'\colon F' \to X$ und $\tilde{F} \to X_1$, sodass $j_1^* F' \cong F \oplus \tilde{F}$ gilt. Nach Definition von stabiler Isomorphie gilt

$$\left[j_1^* E_0, j_1^* f, j_1^* E_1\right]_{st} = \left[j_1^*(E_0 \oplus F'), \underbrace{j_1^*(f \oplus \mathrm{id}_{F'})}_{\text{lässt sich zu Iso über } X_1 \text{ ausdehnen}}, j_1^*(E_1 \oplus F')\right]_{st}$$

Wir können daher ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass sich $j_1^* f$ zu einem Isomorphismus über X_1 fortsetzen lässt. Das Vektorbündel E_0 ist isomorph zur Verklebung von $j_1^* E_0 \to X_1$ und $j_2^* E_0 \to X_2$ mittels der Identität $i_2^* j_2^* E_0 \cong i_1^* j_1^* E_0$ wie in Lemma 3.7 beschrieben. Ähnliches gilt für $E_1 \to X$. Wir haben also Isomorphismen

$$j_1^* E_0 \xrightarrow[\cong]{j_1^* f} j_1^* E_1 \quad \text{und} \quad j_2^* E_0 = E_0\big|_{X_2} \xrightarrow[\cong]{f} E_1\big|_{X_2} = j_2^* E_1$$

die kompatibel mit der Äquivalenzrelation in der Verklebung sind. Sie induzieren daher einen Isomorphismus $E_0 \cong E_1$ über X, der f fortsetzt. Es folgt $[E_0, f, E_1]_{st} = 0$.

Surjektivität: Sei (E_0, f, E_1) ein Tripel über (X_1, X_0). Nach Lemma 3.8 existieren Vektorbündel $q\colon F \to X_1$ und $p_1'\colon E_1' \to X$ mit einem Isomorphismus $\psi\colon E_1 \oplus F \to j_1^* E_1'$. Sei $\alpha\colon (E_0 \oplus F)|_{X_0} \to j_1^* E_1'|_{X_0}$ gegeben durch

$$(E_0 \oplus F)\big|_{X_0} \xrightarrow[\cong]{f \oplus \mathrm{id}} (E_1 \oplus F)\big|_{X_0} \xrightarrow[\cong]{\psi} j_1^* E_1'\big|_{X_0}$$

Definiere nun $p_0'\colon E_0' \to X$ durch Verkleben von $E_0 \oplus F \to X_1$ und $E_1'|_{X_2} \to X_2$ entlang α wie in Lemma 3.7. Sei $f'\colon E_0'|_{X_2} \to E_1'|_{X_2}$ gegeben durch die Identität. Jetzt gilt

$$\begin{aligned} j_1^*\left[E_0', f', E_1'\right]_{st} = \left[E_0 \oplus F, \psi \circ (f \oplus \mathrm{id}), j_1^* E_1'\right]_{st} &= \left[E_0 \oplus F, f \oplus \mathrm{id}, E_1 \oplus F\right]_{st} \\ &= \left[E_0, f, E_1\right]_{st} + \underbrace{\left[F, \mathrm{id}, F\right]_{st}}_{=0} \end{aligned}$$

Für den Fall $n > 0$ lässt sich der Beweis auf den Fall $n = 0$ zurückführen, denn es ist

$$(X_1, X_0) \times (I^n, \partial I^n) = (X_1 \times I^n, X_1 \times \partial I^n \cup X_0 \times I^n),$$

und $X_0 \times I^n \cup X_1 \times \partial I^n \hookrightarrow X_1 \times I^n$ ist eine Kofaserung. Weiter ist das folgende Diagramm ein Pushout-Diagramm

$$\begin{tikzcd} X_0 \times I^n \cup X_1 \times \partial I^n \arrow[r, hook] \arrow[d] & X_1 \times I^n \arrow[d] \\ X_2 \times I^n \cup X \times \partial I^n \arrow[r, hook] & X \times I^n \end{tikzcd}$$

Damit ist das Theorem bewiesen. □

3.10 Korollar. Sei (X, A) ein Ko-Raumpaar und $U \subseteq A$, sodass $\overline{U} \subset \mathring{A}$, dann ist $K^{-n}(X, A) \to K^{-n}(X \setminus U, A \setminus U)$ ein Isomorphismus.

BEWEIS: Setze $X_0 = A \setminus U$, $X_1 = X \setminus U$ und $X_2 = A$ in Theorem 3.9. Dann ist der Pushout gleich X und die Aussage folgt direkt aus dem Theorem. □

Exakte Tripelsequenz in K-Theorie

3.11 Definition. Ein Tripel (X, B, A) von kompakten Hausdorff-Räumen heißt *Ko-Raumtripel*, falls $A \subset B$ und $B \subset X$ Kofaserungen sind.

Wir wollen nun eine exakte Tripelsequenz in K-Theorie konstruieren:

$$\ldots \longrightarrow K^{-n}(X,B) \xrightarrow{i^*} K^{-n}(X,A) \xrightarrow{j^*} K^{-n}(B,A) \xrightarrow{\delta^{-n}} K^{-n+1}(X,B) \longrightarrow \ldots$$
$$\ldots \longrightarrow K^0(X,B) \xrightarrow{i^*} K^0(X,A) \xrightarrow{j^*} K^0(B,A)$$

Als Randabbildung brauchen wir also einen natürlichen Homomorphismus abelsche Gruppen $\delta^{-n}\colon K^{-n}(B,A) \to K^{-n+1}(X,B)$. Wir definieren zunächst $\delta^{-1}\colon K^{-1}(B,A) \to K^0(X,B)$ wie folgt

$$\begin{tikzcd}
K^{-1}(B,A) = K^0\big(B \times I, B \times \{0\} \cup A \times I \cup B \times \{1\}\big) \arrow[r, dashed, "\delta^{-1}"] & K^0(X,B) \arrow[d, "\mathrm{pr}_X^*", "(2)"'] \\
K^0\big(X \times \{0\} \cup B \times I, X \times \{0\} \cup A \times I \cup B \times \{1\}\big) \arrow[u, "(1)"] \arrow[r] & K^0\big(X \times \{0\} \cup B \times I, A \times I \cup B \times \{1\}\big)
\end{tikzcd}$$

Die untere Abbildung ist dabei durch die Inklusion induziert. Weiter ist $\mathrm{pr}_X\colon X \times \{0\} \cup B \times I \to X$ die Einschränkung der entsprechenden Projektion. Wir wollen nun sehen, dass (1) und (2) Isomorphismen sind:

(1) ist Ausschneidung mit $U = (X \setminus B) \times \{0\}$ und damit ein Isomorphismus.

(2) Wir zeigen, dass $\mathrm{pr}_X\colon (X \times \{0\} \cup B \times I, A \times I \cup B \times \{1\}) \to (X, B)$ eine Homotopieäquivalenz von Raumpaaren ist:

Beweis: Da $B \hookrightarrow X$ eine Kofaserung ist, erhalten wir eine Abbildung h, sodass folgendes Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd}
X \times \{0\} \cup B \times I \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, hook] & X \times \{0\} \cup B \times I \\
X \times I \arrow[ur, dashed, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

Setze nun $h_i := h|_{X \times \{i\}}$. Dann ist $h_0\colon X \cong X \times \{0\} \to X \times \{0\} \cup B \times I$ die Inklusion und $h_1\colon X \to X \times \{0\} \cup B \times I$ bildet $B \subset X$ auf $B \times \{1\}$ ab. Außerdem ist $h(A \times I) \subset A \times I$. Somit liefert h_1 eine stetige Abbildung $h_1\colon (X,B) \to (X \times \{0\} \cup B \times I, A \times I \cup B \times \{1\})$. Damit ist dann $\mathrm{pr}_X \circ h_1\colon (X,B) \to (X,B)$ homotop durch Abbildungen von Raumpaaren zu $\mathrm{pr}_X \circ h_0 = \mathrm{id}$.

Sei nun $H\colon (X \times \{0\} \cup B \times I) \times I \to X \times \{0\} \cup B \times I$ gegeben durch

$$\begin{aligned}
\big((x,0),s\big) &\longmapsto h(x,s) && \text{auf } X \times \{0\} \times I \\
\big((b,t),s\big) &\longmapsto h\big(b,(1-s)t+s\big) && \text{auf } B \times I \times I
\end{aligned}$$

Dies ist stetig und es gilt $H((A \times I \cup B \times \{1\}) \times I) \subset A \times I \cup B \times \{1\}$. Außerdem ist

$$\begin{aligned}
& H\big((x,t),0\big) = h(x,t) = \mathrm{id}_{X \times \{0\} \cup B \times I} \\
\text{und} \quad & H\big((x,t),1\big) = h(x,1) = h_1\big(\mathrm{pr}_X(x,t)\big)
\end{aligned}$$

Also ist H eine Homotopie zwischen $h_1 \circ \mathrm{pr}_X$ und der Identität als Abbildung von Raumpaaren. $\square$

δ^{-n} für $n > 1$ ist folgendermaßen definiert: Wir betrachten das Tripel

$$\left(X \times I^{n-1}, B \times I^{n-1} \cup X \times \partial I^{n-1}, A \times I^{n-1} \cup X \times \partial I^{n-1}\right)$$

Ausschneidung liefert nun einen Isomorphismus

$$K^{-1}\left(B\times I^{n-1}\cup X\times\partial I^{n-1}, A\times I^{n-1}\cup X\times\partial I^{n-1}\right) \cong K^{-1}\left(B \times I^{n-1}, A \times I^{n-1} \cup B \times \partial I^{n-1}\right) = K^{-n}(B,A)$$

Damit können wir δ^{-n} nun definieren:

$$\begin{tikzcd}
K^{-n}(B,A) \arrow[rr, dashed, "\delta^{-n}"] & & K^{-n+1}(X,B) \\
K^{-1}\left(B \times I^{n-1} \cup X \times \partial I^{n-1}, A \times I^{n-1} \cup X \times \partial I^{n-1}\right) \arrow[u, "\cong"] \arrow[rr, "\delta^{-1}"] & & K^{0}\left(X \times I^{n-1}, B \times I^{n-1} \cup X \times \partial I^{n-1}\right) \arrow[u, equal]
\end{tikzcd}$$

3.12 Theorem. Sei (X, B, A) ein Ko-Raumtripel. Dann ist die Folge

$$\ldots \longrightarrow K^{-n}(X,B) \xrightarrow{i^*} K^{-n}(X,A) \xrightarrow{j^*} K^{-n}(B,A) \xrightarrow{\delta^{-n}} K^{-n+1}(X,B) \longrightarrow \ldots$$

exakt, wobei $i\colon (X,A) \to (X,B)$ und $j\colon (B,A) \to (X,A)$ die Inklusionen sind.

BEWEIS: Wir zeigen zunächst die Exaktheit bei $K^0(X,A)$ und folgern die Exaktheit von allen anderen Stellen hieraus.

- Zu zeigen: $\ker j^* = \operatorname{Im} i^*$. Sei $[E_0, f, E_1]_{st} \in K^0(X,B)$. Dann ist

  $$j^* \circ i^*\left[E_0, f, E_1\right]_{st} = \left[E_0|_B, f|_A, E_1|_B\right]_{st}$$

  $f|_B$ setzt sich zu einem Isomorphismus f über B fort und somit folgt $j^* \circ i^* = 0$. Damit ist $\operatorname{Im} i^* \subset \ker j^*$ gezeigt.

  Sei jetzt $[E_0, f, E_1]_{st} \in \ker j^*$. Dann existiert ein Vektorbündel $F \to B$, sodass sich $f \oplus \mathrm{id}_F\colon (j^*E_0 \oplus F)|_A \to (j^*E_1 \oplus F)|_A$ zu einem Isomorphismus über B fortsetzen lässt. Sei g dieser Isomorphismus. Nach Lemma 3.8 können wir annehmen, dass $F = j^*F'$ für ein Vektorbündel $F' \to X$ ist. Dann gilt aber

  $$\left[E_0, f, E_1\right]_{st} = \left[E_0 \oplus F', f \oplus \mathrm{id}_{F'}\right]_{st} = i^*\left[E_0 \oplus F', g, E_1 \oplus F'\right]_{st}$$

  Damit ist auch $\ker j^* \subset \operatorname{Im} i^*$.

- Für die Exaktheit bei $K^0(X,B)$ betrachte das folgende Diagramm

$$\begin{tikzcd}
K^0\left(X \times \{0\} \cup B \times I, X \times \{0\} \cup A \times I \cup B \times \{1\}\right) \arrow[r, "i_1^*", "\cong"'] \arrow[d, "i_2^*"] \arrow[dr, phantom, "1"] & K^{-1}(B,A) \arrow[d, "\delta^{-1}"] \\
K^0\left(X \times \{0\} \cup B \times I, A \times I \cup B \times \{1\}\right) \arrow[d, "i_3^*"] \arrow[dr, phantom, "2"] & K^0(X,B) \arrow[l, "\mathrm{pr}_X^*"', "\cong"] \arrow[d, "i^*"] \\
K^0\left(X \times \{0\} \cup A \times I \cup B \times \{1\}, A \times I \cup B \times \{1\}\right) \arrow[r, "i_4^*", "\cong"'] & K^0(X,A)
\end{tikzcd}$$

Dabei kommutiert 1 nach Definition von δ^{-1} und 2, da $\mathrm{pr}_x \circ i_3 \circ i_4 = i$ ist. i_4^* ist ein Isomorphismus wegen Ausschneidung und Homotopieinvarianz:

$$(X, A) \simeq \big(X \times \{0\} \cup A \times [0, 1/2], A \times [0, 1/2]\big) \hookrightarrow \big(X \times \{0\} \cup A \times I \cup B \times \{1\}, A \times I \cup B \times \{1\}\big)$$

i_1^* und pr_X^* sind Isomorphismen wie oben erklärt. Die Exaktheit der rechten Seite bei $K^0(X, B)$ folgt nur aus der Exaktheit der linken Seiten an der entsprechenden Stelle. Aber hier steht der Ausschnitt aus der exakten Folge des Tripels

$$\big(X \times \{0\} \cup B \times I, X \times \{0\} \cup A \times I \cup B \times \{1\}, A \times I \cup B \times \{1\}\big)$$

an der Stelle, an der keine Randabbildung auftritt. Somit folgt die Exaktheit aus dem, was wir bereits gezeigt haben.

- Die Exaktheit bei $K^{-1}(B, A)$ lässt sich ebenfalls durch Verschieben der exakten Sequenz zeigen:

$$\begin{tikzcd}
K^{-1}\big(X \times \{0\} \cup A \times I \cup B \times \{1\}, A \times I \cup B \times \{1\}\big) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\delta^{-1}"] \arrow[dr, phantom, "3"] & K^{-1}(X, A) \arrow[d, "j^*"] \\
K^0\big(X \times \{0\} \cup B \times I, X \times \{0\} \cup A \times I \cup B \times \{1\}\big) \arrow[r, "i_1^*"] \arrow[d, "i_1^*"] \arrow[dr, phantom, "4"] & K^{-1}(B, A) \arrow[d, "\delta^{-1}"] \\
K^0\big(X \times \{0\} \cup B \times I, A \times I \cup B \times \{1\}\big) & K^0(X, B) \arrow[l, "\mathrm{pr}_X^*", "\cong"']
\end{tikzcd}$$

4 kommutiert wieder nach Definition von δ^{-1}. Dass das Diagramm bei 3 kommutiert, ist eine (mühsame!) Übungsaufgabe.

- Die Exaktheit für $n \geqslant 1$ folgt aus folgenden Überlegungen: Betrachte das Ko-Raumtripel

$$\big(X \times I^n, B \times I^n \cup X \times \partial I^n, A \times I^n \cup X \times \partial I^n\big)$$

und das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
K^0\big((X, A) \times (I, \partial I)^{n+1}\big) \arrow[r, equal] \arrow[d, "j^*"] & K^{-(n+1)}(X, A) \arrow[d, "j^*"] \\
K^0\big((B \times I^n \cup X \times \partial I^n, A \times I^n \cup X \times \partial I^n) \times (I, \partial I)\big) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\delta^{-1}"] \arrow[dr, phantom, "5"] & K^{-(n+1)}(B, A) \arrow[d, "\delta^{-(n+1)}"] \\
K^0\big((X, B) \times (I, \partial I)^n\big) \arrow[r, equal] \arrow[d, "i^*"] & K^{-n}(X, B) \arrow[d, "i^*"] \\
K^0\big((X, A) \times (I, \partial I)^n\big) \arrow[r, equal] \arrow[d, "j^*"] & K^{-n}(X, A) \arrow[d, "j^*"] \\
K^0\big(B \times I^n \cup X \times \partial I^n, A \times I^n \cup X \times \partial I^n\big) \arrow[r, "\cong"] & K^{-n}(B, A)
\end{tikzcd}$$

5 kommutiert nach Definition von $\delta^{-(n+1)}$. Die linke Spalte des Diagramms ist exakt, also auch die rechte Spalte. □

Produkte in K-Theorie und Kettenkomplexe von Vektorbündeln

Klassen in $K^0(X)$ sind $[E_1, E_0]$ „=“ $E_1 - E_0$, die Produkte könnten wir wie folgt definieren:

$$[E_1, E_0] \cdot [E_1', E_0'] = \big[(E_1 \otimes E_1') \oplus (E_0 \otimes E_0'), (E_1 \otimes E_0') \oplus (E_0 \otimes E_1')\big]$$

Damit kann man aber nur schwer rechnen. Stattdessen wollen wir ein Produkt über Kettenkomplexe definieren.

$$[E_1, f, E_0] \rightsquigarrow \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{\tilde f} E_0 \longrightarrow 0$$

wobei $\tilde f$ die Fortsetzung von f über X ist

Ab hier weicht die Nummerierung aus Konsistenzgründen von den Vorlesungsnotizen ab

3.13 Definition.

- Ein *Kettenkomplex von* K*-Vektorbündeln* über einem Ko-Raumpaar (X, A) ist gegeben durch ein Paar $(C_n, c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei die C_i endlichdimensionale Vektorbündel sind und die $c_i\colon C_n \to C_{n-1}$ Morphismen von K-Vektorbündeln mit den folgenden Eigenschaften sind:
  - **a)** $\exists N \geqslant 0$ mit $C_n = 0$ für alle $n > N$,
  - **b)** $c_{n-1} \circ c_n = 0$ für alle n,
  - **c)** für alle $x \in A$ ist der Kettenkomplex von Vektorräumen
  $$0 \longrightarrow C_n|_x \xrightarrow{c_n|_x} C_{n-1}|_x \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1|_x \xrightarrow{c_1|_x} C_0|_x \longrightarrow 0$$
  exakt.
- Eine *Kettenabbildung* zwischen (C_*, c_*) und (D_*, d_*) über (X, A) ist eine Folge von Morphismen $f_k\colon C_k \to D_k$, so dass folgendes Diagramm kommutiert
$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & C_k \arrow[r, "c_k"] \arrow[d, "f_k"] & C_{k-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{k-1}"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & D_k \arrow[r, "d_k"] & D_{k-1} \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$
- Zwei Kettenkomplexe (C_*^i, c_*^i) über (X, A) für $i \in \{0, 1\}$ heißen *homotop*, falls es einen Kettenkomplex (C_*, c_*) über $(X \times I, A \times I)$ gibt, sodass $(C_*, c_*)\big|_{X\times\{i\}} \cong (C_*^i, c_*^i)$. Wir schreiben hierfür auch $(C_*^0, c_*^0) \simeq (C_*^1, c_*^1)$.
- Sei $K(X, A)^c$ der Quotient der freien abelschen Gruppe erzeugt von den Isomorphie-Klassen von Kettenkomplexen von $\mathbb{C}$-Vektorbündeln über (X, A) bezüglich der folgenden Relationen (wir lassen die Differentiale in der Notation weg):
  - **a)** Wenn $C_* \simeq D_*$ gilt, dann folgt $[C_*] = [D_*]$
  - **b)** Wenn $0 \longrightarrow C_* \longrightarrow D_* \longrightarrow E_* \longrightarrow 0$ eine kurze exakte Folge von Kettenkomplexen ist (faserweise exakt), dann gilt
  $$[C_*] - [D_*] + [E_*] = 0$$
  - **c)** $\big[\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow E \xrightarrow{\mathrm{id}} E \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots\big] = 0$

Bemerkung: Aus b) folgt $[C_*] = [D_*]$ für isomorphe Kettenkomplexe und

$$\big[C_* \oplus D_*, c_* \oplus d_*\big] = \big[C_*, c_*\big] + \big[D_*, d_*\big]$$

Wir haben einen Gruppenhomomorphismus $\alpha\colon K^0(X,A) \to K(X,A)^c$,

$$[E_1, f, E_0]_{st} \mapsto \left[\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{\tilde f} E_0 \longrightarrow 0\right]$$

wobei $\tilde f$ eine Fortsetzung von f auf X ist. Dies ist unabhängig von der Wahl der Fortsetzung: Seien $\tilde f_0, \tilde f_1$ zwei solche Fortsetzungen. Definiere $h_t = t \cdot \tilde f_1 + (1-t) \cdot \tilde f_0$. Es gilt dann $h_t|_A = f$ und

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow E_1 \times I \xrightarrow{(v,t)\mapsto(h_t(v),t)} E_0 \times I \longrightarrow 0$$

ist ein Kettenkomplex über $(X \times I, A \times I)$ und somit eine Homotopie zwischen $0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{\tilde f_0} E_0 \longrightarrow 0$ und $0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{\tilde f_1} E_0 \longrightarrow 0$.

Revision

3.14 Definition. Sei (C_*, c_*) ein Kettenkomplex über (X,A). Eine *Kettenkontraktion* über A ist eine Familie von Bündelabbildungen $\gamma_n\colon C_n|_A \to C_{n+1}|_A$, sodass $\gamma_{n-1} \circ (c_n|_A) + (c_{n+1}|_A) \circ \gamma_n = \mathrm{id}_{C_n|_A}$

3.15 Lemma. Sei (C_*, c_*) ein Kettenkomplex über dem Ko-Raumpaar (X,A). Dann existiert eine Kettenkontraktion über A.

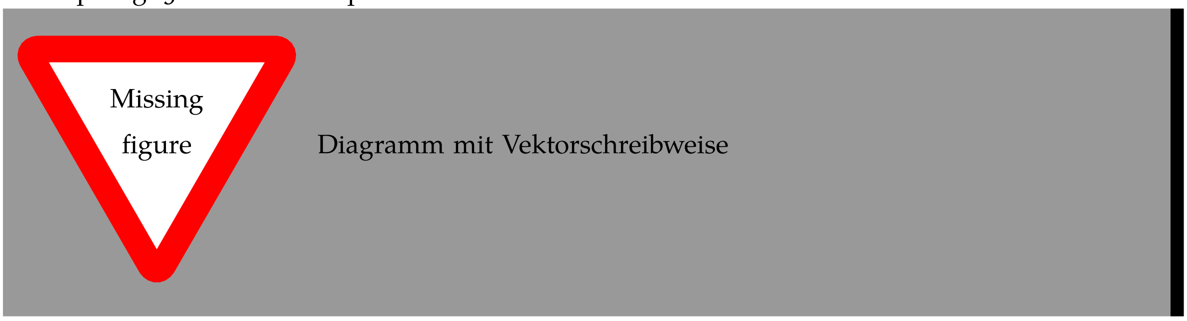
Beweis: Übung. □

3.16 Lemma. Die Abbildung $b\colon K(X,A)^c \to K^0(X,A)$ mit $b([C_+, c_*]) = (C_{odd}, c_n|_A + \gamma_*, C_{even})$ mit $C_{odd} = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}_0} C_{2k+1}$ und $C_{even} = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}_0} C_{2k}$, wobei γ_* eine Kettenkontraktion über A ist, ist wohldefiniert.

Beweis: Sei $\gamma_n'\colon C_n|_A \to C_{n+1}|_A$ eine weitere Kettenkontraktion über A. Betrachte $\delta_n = (\gamma_{n+1}' - \gamma_{n+1}) \circ \gamma_n\colon C_n|_A \to C_{n+2}|_A$ und

$$f\colon C_{even}\big|_A \xrightarrow{\mathrm{id}+\delta_*} C_{even}\big|_A \qquad \text{und}$$
$$g\colon C_{odd}\big|_A \xrightarrow{c_*|_A+\gamma_*} C_{even}\big|_A \xrightarrow{f} C_{even}\big|_A \xrightarrow{c_*|_A+\gamma_*'} C_{odd}\big|_A$$

Behauptung: g ist ein Isomorphismus.



Der Teil von g, der $C_{2n+1}|_A \to C_{2n-1}|_A$ abbildet, ist gegeben durch $c_{2n+1}|_A \circ c_{2n}|_A = 0$. Der Teil von g, der $C_{2n+1}|_A \to C_{2n+1}|_A$ abbildet ist gegeben durch die Identität, also ist g eine „Dreiecksmatrix mit Identitäten auf der Diagonalen“ und somit ein Isomorphismus. Insgesamt folgt, dass $c_*|_A + \gamma_*$ injektiv ist und $c_*|_A + \gamma_*'$ surjektiv. Aus Symmetriegründen sind beide Isomorphismen.

Betrachte jetzt $h_t = (\mathrm{id} + t \cdot \delta) \circ (c_+|_A + \gamma_*)\colon C_{odd}|_A \to C_{even}|_A$. Dies ist eine Homotopie durch Isomorphismen. Aufgrund der Homotopieinvarianz von $K^0(X,A)$ gilt:

$$[C_{odd}, (c_*|_A + \gamma_*), C_{even}]_{st} = [C_{odd}, f \circ (c_*|_A + \gamma_*), C_{even}]_{st}$$

Auch die Kettenabbildung g ist von der Form $g = \mathrm{id} + \varepsilon$, wobei ε der Teil oberhalb der Diagonalen ist. Mit dem gleichen Trick wie eben erhalten wir mit $\tilde{h}_t = (c_*|_A + \gamma'_*)^{-1} \circ (\mathrm{id} + t\varepsilon)$

$$\big[C_{\mathrm{odd}}, \underbrace{(c_*|_A + \gamma'_*)^{-1} \circ g}_{= f \circ (c_*|_A + \gamma_*)}, C_{\mathrm{even}}\big]_{\mathrm{st}} = \big[C_{\mathrm{odd}}, (c_*|_A + \gamma'_*)^{-1}, C_{\mathrm{even}}\big]_{\mathrm{st}}$$

Also insbesondere für $\gamma'_* = \gamma_*$:

$$[C_{\mathrm{odd}}, (c_*|_A + \gamma_*), C_{\mathrm{even}}]_{\mathrm{st}} = \big[C_{\mathrm{odd}}, (c_*|_A + \gamma_*)^{-1}, C_{\mathrm{even}}\big]$$

sternchen oder sowas einfügen

Aus den letzten drei Formeln folgt

$$[C_{\mathrm{odd}}, (c_*|_A + \gamma_*), C_{\mathrm{even}}] = \big[C_{\mathrm{odd}}, (c_*|_A + \gamma'_*)^{-1}, C_{\mathrm{even}}\big] = [C_{\mathrm{odd}}, (c_*|_A + \gamma'_*), C_{\mathrm{even}}]$$

Kompatibilität mit den Relationen:

- $C_* \simeq D_* \Rightarrow b([C_*]) = b([D_*])$ aus der Homotopieinvarianz von $K^0(X, A)$.
- $b\Big(\Big[\cdot \to 0 \to E \xrightarrow{\mathrm{id}} E \to 0 \to \cdots\Big]\Big) = [E, \mathrm{id}, E]_{\mathrm{st}} = 0$
- Sei $0 \to C_* \xrightarrow{i_*} D_* \xrightarrow{p_*} E_0 \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen. Jede kurze exakte Sequenz von Vektorbündeln spaltet (Übung!). Also existieren Morphismen $t_n \colon E_n \to D_n$ mit $p_n \circ t_n = \mathrm{id}_{E_n}$. Problem: t_n ist keine Kettenabbildung! Wähle eine Kettenkontraktion ε über A für E_*. Setze

  $$s_n = d_{n+1}|_A \circ t_{n+1}|_A \circ \varepsilon_n + e_n|_A \circ \varepsilon_{n-1} \circ e_n|_A$$

  Dies ist ein Spalt von p_n über A. $i_n + s_n \colon C_n|_A \oplus E_n|_A \to D_n|_A$ ist homotop durch Isomorphismen zu $i_n + t_n$ via

  $$h_r = r\big(d_{n+1}\big|_A \circ t_{n+1}\big|_A - t_n\big|_A \circ e_{n+1}\big|_A\big) \circ \varepsilon_n + (t_n - i_n)\big|_A$$

  Da i_n, t_n auf ganz X definiert sind, lässt sich $i_n + s_n$ zu einem Isomorphismus φ_n über X fortsetzen. Setze $\delta_n = (i_n + s_n) \circ (\gamma_n \oplus \varepsilon_n) \circ (i_n + s_n)^{-1}$. Dies ist eine Kettenkontraktion von D_* über A. Es folgt

  $$\big[C_{\mathrm{odd}} \oplus E_{\mathrm{odd}}, (c_*|_A + \gamma_*) \oplus (e_*|_A + \varepsilon_*), C_{\mathrm{even}} \oplus E_{\mathrm{even}}\big]_{\mathrm{st}} = \big[D_{\mathrm{odd}}, d_*|_A + \delta_*, D_{\mathrm{even}}\big]_{\mathrm{st}} \square$$

3.17 Lemma. Seien (E_*, e_*) und (E_*, e'_*) Kettenkomplexe über (X, A) mit $e_i|_A = e'_i|_A$. Dann gilt $[E_*, e_*] = [E_*, e'_*] \in K(X, A)^c$.

3.18 Lemma. Die Abbildungen a und b sind invers zueinander.

Beweis: $b \circ a = \mathrm{id}_{K^0(X,A)}$ ist klar. Es bleibt zu zeigen, dass a surjektiv ist $\iff$ Jeder Kettenkomplex der Länge $l \geqslant 2$ ist äquivalent zu einem Kettenkomplex der Länge $l = 1$. Es gilt

$$\begin{aligned}&\Big[0 \to C_n \xrightarrow{c_n} C_{n-1} \to C_{n-2} \to \ldots \to C_0 \to 0\Big]\\ =&\Big[0 \to C_n \xrightarrow{c_n \oplus 0} C_{n-1} \oplus C_n \xrightarrow{c_{n-1} \oplus \mathrm{id}} C_{n-2} \oplus C_n \to C_{n-3} \to \ldots \to C_0 \to 0\Big]\end{aligned}$$

- $(c_n \oplus 0)|_A$ ist ein Monomorphismus und homotop zu $(0 \oplus \mathrm{id})|_A$ durch Monomorphismen. Jetzt lässt sich $(0 \oplus \mathrm{id})|_A$ zu einem Monomorphismus über X ausdehnen. Eine Variante von Lemma

3.3 zeigt, dass sich dann auch $(c_n \oplus 0)|_A$ zu einem Monomorphismus $\tau\colon c_N \to C_{n-1} \oplus C_n$ auf X ausdehnen lässt.

$$\Rightarrow C_{n-1} \oplus C_n \cong \tau(C_n) \oplus Q$$

Der Kettenkomplex

$$0 \to C_n \xrightarrow{\tau} \tau(C_n) \oplus Q \xrightarrow{(c_{n-1} \oplus \mathrm{id})|_Q \circ \mathrm{pr}_Q} C_{n-2} \oplus C_n \to \ldots \to C_0 \to 0$$

stimmt über A mit dem obigen überein, liefert also dieselbe Klasse. Aber

$$\underbrace{\left[0 \to C_n \xrightarrow{\tau} \tau(C_n) \to 0 \to \cdots\right]}_{=\left[0 \to C_n \xrightarrow{\mathrm{id}} C_n \to 0 \to \ldots \to 0\right] = 0} + \underbrace{\left[0 \to Q \xrightarrow{C'_{n-1}} C_{n-2} \oplus C_n \to \ldots \to C_0 \to 0\right]}_{\text{Länge um 1 verringert}} \square$$

Sei $(C_., c_.)$ ein Kettenkomplex über dem Ko-Raumpaar (X, A) und $(C'_., c'_.)$ ein weiterer über (X', A'). Das *äußere Tensorprodukt* von zwei Vektorbündeln $E \to X$, $F \to X'$ ist definiert durch

$$E \boxtimes F := \pi_X^* E \otimes \pi_{X'}^* F$$

wobei $\pi_X\colon X \times X' \to X$, $\pi_{X'}\colon X \times X' \to X'$ die Projektionen sind. Es gilt also $(E \boxtimes F)_{x,x'} = E_x \times F_{x'}$. Das *Tensorprodukt* von $(C_., c_.)$ und $(C'_., c'_.)$ ist definiert durch

$$(C \boxtimes C')_n := \bigoplus_{i+j=n} C_i \boxtimes C'_j$$

mit dem Differential c''_n, das auf $C_i \boxtimes C'_j$ gegeben ist durch

$$c''_n\big|_{C_i \boxtimes C'_j} = c_i \boxtimes \mathrm{id} + (-1)^i \,\mathrm{id} \boxtimes c'_j$$

Damit ist $((C \boxtimes C')_., c''_.)$ ein Kettenkomplex über $(X, A) \times (X', A')$. Somit erhalten wir

$$\begin{array}{ccc}
K^{-n}(X,A) \times K^{-m}(X',A') & \xrightarrow{\quad\quad *\quad\quad} & K^{-(n+m)((X,A)\times(X',A'))} \\
\cong\Big\downarrow a \times a & & \cong\Big\downarrow a \\
K((X,A) \times (I, \partial I)^n)^c \times K((X',A') \times (I,\partial I)^m)^c & \longrightarrow & K^{-(n+m)}((X,A) \times (X',A') \times (I, \partial I)^{n+m})
\end{array}$$

Für $X = X'$ und $A \subset X, B \subset X$ sei $\Delta\colon (X, A \cup B) \to (X,A) \times (X,B) = (X \times X, X \times B \cup A \times X) \supset (A \cup B) \times (A \cup B)$. Dies induziert $K^{-n(n+m)}((X,A) \times (X,B)) \to K^{-(n+m)}(X, A \cup B)$. Wir definieren

$$\cdot := \Delta^* \circ *\colon K^{-n}(X,A) \times K^{-m}(X,B) \xrightarrow{*} K^{-(n+m)}((X,A) \times (X,B)) \xrightarrow{\Delta^*} K^{-(n+m)}(X, A \cup B)$$

- Insbesondere ist $K^*(X) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} K^{-n}(X)$ ein graduiert kommutativer Ring mit 1, das heißt es gilt für $x \in K^i(X)$ und $y \in K^j(X)$
$$x \cdot y = (-1)^{i \cdot j} y \cdot x$$
- Für $f\colon X \to Y$ erhalten wir einen Ringhomomorphismus $f^*\colon K^*(Y) \to K^*(X)$.
- Für $A \subset B \subset X$ ist $K^*(B, A)$ ein Modul über $K^*(X)$.

3.19 Lemma. Für $a, a' \in K^0(X)$, $b, b' \in K^0(Y)$ ist

$$(a \cdot a') * (b \cdot b') = (a * b) \cdot (a' * b')$$

Beweis: *Richtiges Diagramm hinschreiben.* $\square$

3.2 Bott-Periodizität – eine Beweisskizze

Welche K-Gruppen können wir berechnen?

- $K^0(\mathrm{pt}) = \mathrm{Gr}(\mathbb{N}) \cong \mathbb{Z}$
- $K^{-1}(\mathrm{pt}) = K^0(I, \partial I) = 0$
- Tripel (E_1, f, E_0) über $(I, \partial I)$ mit $f\colon E_1|_{\partial I} \xrightarrow{\cong} E_0|_{\partial I}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $E_i \cong \mathbb{C}^n \times I$. Da $GL_n(\mathbb{C})$ wegzusammenhängend ist, gibt es eine Erweiterung von f zu einem Isomorphismus über I.

$$f_0\colon \mathbb{C}^n \times \{0\} \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}^n \times \{0\} f_1\colon \mathbb{C}^n \times \{1\} \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}^n \times \{1\}$$

  f entspricht also zwei Elementen von $GL_n(\mathbb{C})$. $g\colon \mathbb{C}^n \times I \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}^n \times I \rightsquigarrow I \to GL_n(\mathbb{C})$

Übung $KO^{-1}(\mathrm{pt})$?
Was ist $K^0(S^1)$?

$$\begin{tikzcd}
 & {[S^1 \times \mathbb{C}, 0]_{st}} \arrow[r, mapsto] & {[\mathbb{C}, 0]_{st} = 1} \\
0 = K^0(I, \partial I) \cong K^0(S^1, \mathrm{pt}) \arrow[r] & K^0(S^1) \arrow[r] & K^0(\mathrm{pt}) \cong \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

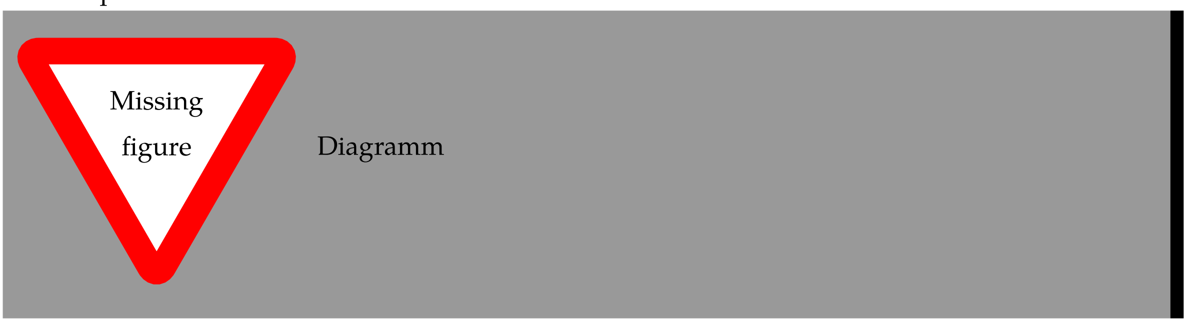
Aus der unteren Zeile folgt $K^0(S^1)$ ist Untergruppe von $\mathbb{Z}$. Aus der oberen folgt dann weiter $K^0(S^1) \cong \mathbb{Z}$.

Gibt es eine nichttriviale Klasse in $K^0(S^2)$? Wir haben einen Homöomorphismus

$$S^2 \cong \mathbb{C}P^1 = \left\{V \subset \mathbb{C}^2 \,\middle|\, V \text{ ist eindimensionaler Untervektorraum}\right\}$$

Betrachte $H = \left\{(v, V) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}P^1 \,\middle|\, v \in V\right\}$. Dies ist ein eindimensionales Vektorbündel über $\mathbb{C}P^1$. Was ist $[H, 0]_{st} \in K^0(\mathbb{C}P^1)$? Welche Gestalt haben Vektorbündel über $X \times S^2$? Sei $S^2 = D_+ \cup D_-$ die Zerlegung in die „obere“ und die „untere“ Halbsphäre. Sei $E \to X \times S^2$ ein Vektorbündel. Sei $z_0 \in S^1 = D_+ \cap D_- \subset S^2$ ein Basispunkt von S^2. Sei $F = \iota^* E$ mit $\iota\colon X \to X \times S^2$ gegeben durch $x \mapsto (x, z_0)$. Wegen $D_+ \cong D_- \simeq \{\mathrm{pt}\}$ ist $\mathrm{pr}_X^{\pm}\colon X \times D_\pm \to X$ eine Homotopieäquivalenz mit Homotopieinversem $\iota_\pm\colon X \to X \times D_\pm$, $x \mapsto (x, z_0)$. Daher ist $E|_{X \times D_\pm} \cong \iota_\pm^* F$.

Dann ist E isomorph zur Verklebung von $\iota_+^* F$ und $\iota_-^* F$ entlang eines Isomorphismus, der gegeben ist durch eine stetige Abbildung $S^1 \to \mathrm{Iso}(F)$, wobei $\mathrm{Iso}(F)$ der Raum aller Vektorbündelisomorphismen $F \to F$ ist. Wir schreiben $E \cong \{F, f\}$. Die Isomorphieklasse von $\{F, f\}$ hängt nur noch der Homotopieklasse von f ab.



Beispiel
Übergangsabbildung von H: Identifiziere $\mathbb{C}P^1$ mit $\mathbb{C}\cup\{\infty\} \cong S^2$ mit Hilfe der Abbildung $\mathbb{C}\cup\{\infty\} \to \mathbb{C}P^1$, definiert duch $z \mapsto [z:1], \infty \mapsto [1:0]$. Die Umkehrabbildung ist gegeben durch

$$[z_1, z_2] \mapsto \begin{cases} z_1/z_2, & \text{falls } z_2 \neq 0 \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} H &= \left\{(z,v) \in (\mathbb{C}\cup\{\infty\}) \times \mathbb{C}^2 \,\middle|\, v = \lambda(z,1), \text{ falls } z \neq \infty \text{ oder } v = (\lambda, 0) \text{ falls } z = \infty\right\} \\ D_+ &= \{z \in (\mathbb{C}\cup\{\infty\}) \mid |z| \leqslant 1\} \\ D_- &= \{z \in (\mathbb{C}\cup\{\infty\}) \mid |z| \geqslant 1 \text{ oder } z = \infty\} \end{aligned}$$

Trivialisierungen:

$$\begin{tikzcd} H|_{D_+} \arrow[r, "\cong"] & D_+ \times \mathbb{C} & H|_{D_-} \arrow[r, "\cong"] & D_- \times \mathbb{C} \\ (z,(v_1,v_2)) \arrow[r, mapsto] & (z, v_2) \quad , & (z,(v_1,v_2)) \arrow[r, mapsto] & (z, v_1) \\ (z,(wz,w)) & (z,w) \arrow[l, mapsto] & (z,(w,w/z)) & (z,w) \arrow[l, mapsto] \end{tikzcd}$$

Wir setzen $F = S^1 \times \mathbb{C}$ und $f\colon S^1 \to \mathrm{Iso}(S^2 \times \mathbb{C}), z \mapsto (w \mapsto wz)$, in jeder Faser Multiplikation mit z. Es ist nun $H = \{\mathbb{C}, w \mapsto w\cdot z\} = \{\mathbb{C}, z\}$ und $H^* \cong \left\{\mathbb{C}, z^{-1}\right\}$.

Weitere Beispiele

$$H^{\otimes K} = \left\{\mathbb{C}, w \mapsto w \cdot z^k\right\} \quad , \quad H \oplus H = \left\{\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}, z \mapsto \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}\right\}$$

Da $GL_2(\mathbb{C})$ wegzusammenhängend ist, gibt es einen Pfad zwischen $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Betrachte

hier fehlt noch was

Hieraus erhalten wir

$$H^{\otimes 2} \oplus \underbrace{(\mathbb{C} \times S^2)}_{\cong\left\{\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}, \begin{pmatrix} z^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}} \cong \underbrace{H \oplus H}_{\cong\left\{\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}, \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}\right\}}$$

In K-Theorie

$$[H,0]\cdot[H,0] + [\mathbb{C},0] = \left[H^{\otimes 2} \oplus \mathbb{C}, 0\right]_{st} = [H \oplus H, 0]_{st} = 2 \cdot [H,0]$$

in $K^0(S^2)$ gilt die Relation $[H,0]^2 - 2[H,0] + [\mathbb{C},0] = 0$

$$(x-1)^2 = X^2 - 2x + 1 = 0$$

Theorem Bott '58

$$\begin{tikzcd} \mu\colon K^1(X) \otimes {}^{\mathbb{Z}[H]}/_{(H-1)^2} \arrow[r] & K^0(X) \otimes K^0(S^2) \arrow[r] & K^0(X \times S^2) \\ {[E,0]_{st}} \otimes H^m \arrow[rr, mapsto] & & \Big[\underbrace{pr_X E \otimes (pr_{S^2}^* H)^{\otimes m}}_{\{E, z^m\}}, 0\Big]_{st} \end{tikzcd}$$

ist ein Ringisomorphismus . Insbesondere $K^0(S^2) \cong {}^{\mathbb{Z}[H]}/_{(H-1)^2}$

Beweis

1. Satz: Jedes Vektorbündel $\{F,f\}$ über $X\times S^2$ ist isomorph zu $\{F,l\}$, wobei $l=\sum_{i=-N}^{N} a_i\cdot z^i$ und $a_i\colon F\to F$ ein Morphismus von Vektorbündeln ist, das heißt die Übergangsfunktion ist gegeben durch ein Laurent-Polynom. Sind l_0 und l_1 homotope Übergangsfunktionen, dann sind sie auch homotop durch Laurent-polynomiale Übergangsfunktionen.

   Idee hierzu: Wir können stetige Funktionen $g\colon X\times S^1\to\mathbb{C}$ durch Laurent-Polynome approximieren. $g(x,z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(x)z^n$ für
   $$a_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x,e^{i\theta})e^{-i\theta n}d\theta$$
   Genauso können wir Funktionen $\tilde{g}\colon X\times S^1\to M_n\mathbb{C}$ approximieren. Wähle ein Skalarprodukt in den Fasern von F (hermitesche Metrik). Der Raum der Vektorbündelendomorphismen $\mathrm{End}(F\times S^1)$ ist normiert via
   $$\|\alpha\|=\sup_{\substack{\|v\|=1\\ v\in F\times S^1}}\|\alpha(v)\|$$
   $\mathrm{Iso}(F\times S^1)\subset\mathrm{End}(F\times S^1)$ ist offen. Fasse f als Schnitt $f\colon X\times S^1\to\mathrm{Iso}(F\times S^1)\subset\mathrm{End}(F\times S^1)$. Wähle trivialisierende Überdeckung U_i mit Partition der Eins $\{\varphi_i\}_i$
   $$f\big|_{U_i}\colon U_i\times S^1\longrightarrow\mathrm{End}\Big(F\big|_{U_i}\times S^1\Big)\cong M_n\mathbb{C}\times U_i\times S^1$$
   Approximiere durch l_i und setze $l=\sum_i\varphi_i l_i$. l liegt beliebig nahe bei f in Norm. Da Iso offen ist, folgt dass f und l homotop durch Isos. □

2. (Linearisierungstrick): Schreibe $\{F,l\}=\{F,z^{-m}\cdot q\}$ für ein „Polynom“ q und ein $m\in\mathbb{N}$.

   Satz: Sei q eine polynomiale Übergangsfunktion vom Grad $\leqslant n$, dann gilt
   $$\{\underbrace{n\cdot F}_{F\oplus\ldots\oplus F},1\}\oplus\{F,q\}\cong\{(n+1)\cdot F,L^n q\}$$
   wobei $L^n q$ eine Übergangsfunktion ist, die nur noch z^0 und z^1 enthält, das heißt $L^n q(x,z)=a(x)+b(x)\cdot z$.

   Idee hierzu: $q=\sum_{i=1}^{n} a_i z^i$. Übergansfunktion der linken Seite ist gegeben durch eine Matrix
   $$\begin{pmatrix}1 & & & 0\\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & q\end{pmatrix}$$
   Zeilen- und Spaltenoperationen bringen dies auf die Form
   $$\begin{pmatrix}1 & -z & & & \\ & 1 & -z & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -z\\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0\end{pmatrix}=A$$
   Zeilen- und Spaltenoperationen erhalten die Determinante, also ist A invertierbar für alle $(x,z)\in X\times S^1$. Damit ist A eine gültige Übergangsfunktion. Es ist $A=a+b\cdot z=L^n q$. Jede Zeilen- und Spaltenoperation ist homotop zur Identität, daher ist $L^n q$ homotop zu $1\oplus q$
   $$\Rightarrow\{(n+1)\cdot F,1\oplus q\}\cong\{(n+1)\cdot F,L^n q\}$$ □

3. (Aufspaltung von F): Wir haben bereits: $\{(n+1)\cdot F, q\} \cong \{(n+1)\cdot F, a+b\cdot z\}$. Betrachte nun die Homotopie

$$q_t(x,z) = (1+tz)\left(b(x)\frac{z+t}{1+tz} + a(x)\right) = (b(x)+ta(x))z + tb(x) + a(x)$$

Der mittlere Teil ist gleich $L^n q$ für $t=0$, invertierbar für $0 \leqslant t < 1$. Weiter ist $z \mapsto \frac{z+t}{1+tz}$ ein Homöomorphismus $S^1 \to S^1$. Wähle nun $t_0 < 1$, sodass $b(x) + t_0 a(x)$ invertierbar ist. Dies funktioniert, denn $b(x)+a(x)$ ist invertierbar. Damit erhalten wir

$$\{(n+1)\cdot F, L^n q\} \cong \{(n+1)\cdot f, z+c\}$$

mit $c(x) = (t_0 b(x) + a(x))(b(x)+t_0 a(x))^{-1}$, $b + t_0 \cdot a \colon F \xrightarrow{\cong} F$. Insbesondere ist $z + c(x) \colon F_x \times \{z\} \xrightarrow{\cong} F_x \times \{z\}$ ein Isomorphismus, also hat $z + c(x)$ niemals Eigenwert 0, woraus folg, dass $c(x)$ keine Eigenwerte auf S^1 hat.

Lemma: Sei $c \colon F \to F$ ein Morphismus von Vektorbündeln, so dass $c(x) \colon F_x \to F_x$ keine Eigenwerte auf S^1 hat. Dann existieren eindeutige Untervektorbündel F_+ und F_-, sodass

a) $F \cong F_+ \oplus F_-$

b) $c(F_\pm) \subset F_\pm$

c) Die Eigenwerte von $c|_{F_+}$ liegen außerhalb von S^1, von $c|_{F_-}$ innerhalb von S^1

Korollar: $\{F, z+c\} \cong \{F_+, 1\} \oplus \{F_-, z\}$. Beweis:

$$\{F, z+c\} \cong \{F_+, z+c_+\} \oplus \{F_-, z+c_-\}$$

mit $c_\pm = c|_{F_\pm}$. Die Eigenwerte von $z + c_+$ liegen außerhalb von S^1, $tz + c_+$ liefert eine Homotopie zu $\{F_+, c_+\} \cong \{F_+, 1\}$. Die Eigenwerte von c_- liegen innerhalb von S^1. Dann liefert $z + tc_-$ eine Homotopie durch Isomorphismen zu z, das heißt $\{F_-, z+c_-\} \cong \{F_-, z\}$. □

Setze alles zusammen für die Surjektivität von μ. μ ist ein Gruppenhomomorphismus, also müssen wir nur zeigen, dass $K^0(X \times S^2) \ni [\{F,f\},0]_{st}$ im Bild liegt. Es gilt nun

$$\begin{aligned}
[\{F,f\},0]_{st} \overset{1}{=} \left[\{F, z^{-m}q\},0\right]_{st} &= \left[\{F,q\} \oplus H^{-m},0\right]_{st} \\
&\overset{2}{=} \left[\{(n+1)F, L^n q\} \oplus H^{-m},0\right]_{st} - \left[\{nF,1\} \otimes H^{-m},0\right]_{st} \\
&\overset{3}{=} \left[\{((n+1)F)_+,1\} \otimes H{-}m,0\right]_{st} + \left[\{((n+1)F)_-,z\} \otimes H{-}m,0\right]_{st} \\
&\quad - \left[\{nF,1\} \otimes H^{-m},0\right]_{st} \\
&= \left[pr_X^*((n+1)F)_+ \otimes H^{-m},0\right]_{st} + \left[pr_X^*((n+1)F)_- \otimes H^{1-m},0\right]_{st} \\
&\quad - \left[pr_x^*(nF) \otimes H^{-m},0\right]_{st}
\end{aligned}$$

liegt im Bild von μ. Für Injektivität betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned}
\nu \colon K^0(X \times S^2) &\longrightarrow K^0(X) \otimes \mathbb{Z}[H]/(H-1)^2 \\
[\{F,f\},0]_{st} &\longmapsto \left[((n+1)F)_-,0\right]_{st} \otimes (H-1) + [F,0]_{st} \otimes H^{-m}
\end{aligned}$$

Prüfe, dass dies wohldefiniert ist! $\mathbb{Z}[H]/(H-1)^2$ wird erzeugt von $1, H^{-1}$. Dann gilt

$$\nu \circ \mu\left([F,0]_{st} \otimes H^{-m}\right) = \nu\left(\left[\{F, z^{-m}\},0\right]_{st}\right) = \underbrace{[F_-,0]_{st}}_{=0} \otimes (H-1) + [F,0]_{st} \otimes H^{-m}$$

Konsequenzen aus der Bott-Periodizität

Definition

Sei X ein kompakter Hausdorffraum mit Basispunkt x_0. Setze

$$\tilde{K}^{-n}(X) = K^{-n}(X, \mathrm{pt})$$

˜heißt reduzierte K-Theorie von (X, x_0). Theorem 3.21 impliziert

- $\tilde{K}^0(S^2) \cong \mathbb{Z} = \langle \beta_2 := 1 - [H, 0]_{\mathrm{st}} \rangle$ mit $\beta_2^2 = 0$
- allgemeiner $\tilde{K}^0(S^{2n}) = \langle \beta_{2m} \rangle$ mit $\beta_{2m}^2 = 0$, wobei β_{2m} aus β_{2m-2} durch äußere Multiplikation mit β_2 entsteht:

$$\begin{tikzcd}
\tilde{K}^0(S^{2m-2}) \otimes \tilde{K}(S^2) \arrow[r, "\cong"] & K^0(D^{2m}, S^{2m-1}) \otimes K^0(D^2, S^1) \arrow[d] \\
& K^0\Big((D^{2m-2, S^{2m-3}}) \times (D^2, S^1)\Big) \arrow[d, "\cong"] \\
& K^0\big(D^{2m}, S^{2m-1}\big) \cong \tilde{K}^0(S^{2m})
\end{tikzcd}$$

Sei $j\colon K^0(S^2, \mathrm{pt}) \cong K^0(D^2, S^1) \cong K^0(I^2, \partial I^2) \cong K^{-2}(\mathrm{pt})$, $\beta_2 \mapsto \hat{\beta}_2 = j(\beta_2)$

Theorem

Sei (X, A) ein Ko-Raumpaar. Dann ist

$$K^{-n}(X, A) \xrightarrow{\hat{\beta}_2} K^{-n-2}(X, A)$$

ein Isomorphismus.

Beweis
Es genügt $n = 0$ zu betrachten. Sei $A = \emptyset$. Die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow K(S^2, \mathrm{pt}) \longrightarrow K^0(S^2) \longrightarrow K^0(\mathrm{pt}) \longrightarrow 0$$

spaltet, also spaltet auch

$$0 \longrightarrow K^0(X) \otimes K^0(S^2, \mathrm{pt}) \longrightarrow K^0(X) \otimes K^0(S^2) \longrightarrow K^0(X) \otimes K^0(\mathrm{pt}) \longrightarrow 0$$

Betrachte

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K^0(X) \otimes K^0(S^2, \mathrm{pt}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & K^0(X) \otimes K^0(S^2) \arrow[r] \arrow[d, "\cong\ 3.21"] & K^0(X) \otimes K^0(\mathrm{pt}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K^0(X \times (S^2, \mathrm{pt})) \arrow[r] & K^0(X \times S^2) \arrow[r] & K^0(X) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Für $A \neq \emptyset$ gilt K^{-n} gilt $K^{-n}(X,A) \cong \tilde{K}^{-n}(X/A)$ nach Theorem 3.9 b). Angewandt auf den Pushout

$$\begin{array}{ccc} A & \hookrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ * & \longrightarrow & X/A \end{array}$$

Daher genügt es den Fall $A = *$ zu betrachten. Dieser folgt analog zu dem unreduzierten Fall.

Definition

Für $n > 0$ und ein Ko-Raumpaar (X, A) definieren wir

$$K^n(X,A) := K^{-n}(X,A)$$

und die Randabbildung in der exakten Paarfolge über das nachfolgende Diagramm

$$\begin{array}{ccc} K^0(A) & \xrightarrow{\partial'} & K^1(X,A) \\ \downarrow{\cong} & & \downarrow{=} \\ K^{-2}(A) & \xrightarrow{\partial} & K^{-1}(X,A) \end{array}$$

Die Paarsequenzfolge reduziert dann auf die .....-Folge

$$\begin{array}{ccccc} K^0(X,A) & \longrightarrow & K^0(X) & \longrightarrow & K^0(A) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ K^1(A) & \longleftarrow & K^1(X) & \longleftarrow & K^1(X,A) \end{array}$$

Die K-Theorie von $\mathbb{C}P^n$

Theorem 3.2.5

Sei X ein endlicher CW-Komplex mit n Zellen. Dann ist $K^*(X) = K^0(X) \oplus K^1(X)$ eine endlich erzeugte Gruppe mit höchstens n Erzeugern. Haben alle Zellen gerade Dimension, dann ist $K^1(X) = 0$ und $K^0(X)$ ist frei abelsch mit genau einem Erzeuger für jede Zelle.

Beweis

Per Induktion über die Anzahl der Zellen. Für $X = \mathrm{pt}$ ist die Aussage richtig. Es entstehe X aus A durch Anheften einer k-Zelle für ein $k \in \mathbb{N}_0$. Nach dem Theorem 3.9 b) angewandt auf das Pushout

$$\begin{array}{ccc} A & \hookrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{pt} & \longrightarrow & X/A \end{array}$$

gilt $K^*(X,A) \cong K^*(X/A)$. Folglich ist $\tilde{K}^n(X/A) \to \tilde{K}^n(X) \to \tilde{K}^n(A)$ exakt. Wir haben

$$\tilde{K}^n(X/A) \cong \tilde{K}^n(S^k) \cong K(S^k, \mathrm{pt}) \cong K(I^k, \partial I^k) = K^{n+k}(\mathrm{pt}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{falls } n+k \text{ gerade} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Also ist $\tilde{K}^n(X/A)$ entweder 0 oder $\mathbb{Z}$, also erhalten wir aus der Exaktheit, dass man maximal einen Erzeuger mehr braucht, um $\tilde{K}(X)$ zu erzeugen, als man braucht um $\tilde{K}^n(A)$ zu erzeugen.

Zur zweiten Aussage: Beweis durch Induktion nach Anzahl der Zellen (wie oben). Aussage ist korrekt für $X = \mathrm{pt}$. Sei A ein CW-Komplex, der nur aus geraden dimensionalen Zellen besteht und X entstehe aus A durch das Anheften einer $2k$-Zelle. Wir betrachten $K^1(X/A) \to \tilde{K}^1(X) \to \tilde{K}^1(A)$. Mit Induktionsannahme folgt $\tilde{K}^1(A) = 0$. Weiterhin gilt $\tilde{K}^1(X/A) \cong \tilde{K}^1(S^{2k}) = 0$, also folgt $\tilde{K}^1(X) = 0$ und auch $K^1(X) = 0$. Damit reduziert sich die 6-Term folge auf eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \tilde{K}^0(X/A) \longrightarrow K^0(X) \longrightarrow K^0(A) \longrightarrow 0$$

Es gilt $\tilde{K}^0(X/A) \cong \tilde{K}(S^{2k}) \cong \mathbb{Z}$ und mit Induktionsannahme ist $k^0(A)$ eine freie abelsche Gruppe vom Rang #Zellen von A. Also folgt $\tilde{K}^0(X) = \tilde{K}^0(A) \oplus \mathbb{Z}$ und damit $K^0(X) \cong K^0(A) \oplus \mathbb{Z}$. Also ist

$$K^0(X) \cong K^0(A) \oplus \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}^{\#\text{ Zellen in A}} \oplus \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^{\#\text{Zellen von X}}$$

Korollar

$K^0(\mathbb{C}P^n) = \mathbb{Z}^{n+1}$, $K^1(\mathbb{C}P^n) = 0$.

Zur RIngstruktur auf $K^*(\mathbb{C}P^n)$. Sei

$$L_n = \left\{(\nu, V) \in \mathbb{C}^{n+1} \otimes \mathbb{C}P^n \,\middle|\, \nu \in V\right\}$$

das kanonische .....Bündel über $\mathbb{C}P^n$. Für $n = 1$ gilt $L_1 = H$ mit H wie oben. Sei $\mathbb{C}P^{n-1} \overset{p}{\hookrightarrow} \mathbb{C}P^n$ die Inklusion. Dann gilt $L_{n-1} \cong p^* L_n$.

Satz

$$K^0(\mathbb{C}P^n) \cong \mathbb{Z}[L]/(L-1)^{n+1}$$

als Ring, induziert durch $[L_n, 0]_{st} \mapsfrom L$

Beweis

Für $n = 1$ ist die Aussage richtig (siehe Satz 3.2.1). Wir betrachten $(\mathbb{C}P^n, \mathbb{C}P^{n-1})$ und die zugehörigen Sequenz aus der 6-Term Sequenz

$$0 \longrightarrow K^0(\mathbb{C}P^n, \mathbb{C}P^{n-1}) \longrightarrow K^0(\mathbb{C}P^n) \xrightarrow{\rho^*} K^0(\mathbb{C}P^{n-1}) \longrightarrow 0$$

Wir zeigen: $(a_n) \cdot (L_n - 1)^n$ erzeugt den Kern von ρ^*. Anmerkung: Hieraus folgt der Satz , wenn wir annehmen, dass $K^0(\mathbb{C}P^{n-1}) \cong \mathbb{Z}[L]/(L-1)^n$, denn dann ist

$$\left\{1, (L_n - 1), (L_n - 1)^2, \ldots, (L_n - 1)^n\right\}$$

eine additive Basis von $K^0(\mathbb{C}P^n)$.

$\mathbb{C}P^n \cong$ Quotient von S^{2n+1}/S^1, wobei S^1 durch Multiplikation wirkt. Statt $S^{2n+1} \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$ können wir auch den Rand von $D_0^2 \times D_1^2 \times \ldots \times D_n^2 \subseteq C^{n+1}$ betrachten, wobei $D_i \subseteq \mathbb{C}$ die Einheitssphäre ist.

$$\partial\left(D_0^2 \times D_1^2 \times \ldots \times D_n^2\right) = \bigcup_i D_0^2 \times \ldots \times \partial D_i^2 \times D_{i+1}^2 \times \ldots \times D_n^2$$

Den Quotient von $D_0^2 \times \ldots \times \partial D_i^2 \times D_{i+1}^2 \times \ldots \times D_n^2$ bezüglich der S^1-Operation bezeichnen wir mit $C_i \subseteq \mathbb{C}P^n$. C_i ist homöomorph zu $D_0^2 \times \ldots \times \hat{D}_i^2 \times D_{i+1}^2 \times \ldots \times D_n^2$ und es gilt

$$C_i \cap C_j = \partial C_i \cap \partial C_j$$

Betrachte $C_0 = D^2_1 \times \ldots \times D^2_n$ und $\partial C_0 = \bigcup_i \partial_i C_0$ mit

$$\partial_i C_0 = D^1_1 \times \ldots \times \partial D^2_i \times \ldots \times D^2_n \subseteq C_i$$

Die Inklusionen $(D^2_i, \partial D^2_i) \hookrightarrow (C_0, \partial_i C_0) \subseteq (\mathbb{C}P^n, C_i)$ Wir erhalten

$$\begin{tikzcd}
K^0(D^2_0, \partial D^2_0) \otimes \ldots \otimes K^0(D^2_n, \partial D^2_n) \arrow[r] & K^0\big((D^2_1, \partial D^2_1) \times \ldots \times (D^2_n, \partial D^2_n)\big) \\
K^0(C_0, \partial_1 C_0) \otimes \ldots \otimes K^0(C_0, \partial_n C_0) \arrow[r] \arrow[u, "\cong"] & K^0(C_0, \partial C_0) \arrow[u, "\cong"] \\
K^0(\mathbb{C}P^n, C_1) \otimes \ldots \otimes K^0(\mathbb{C}P^n, C_n) \arrow[r] \arrow[d] & K^0(\mathbb{C}P^n, C_1 \cup \ldots \cup C_n) \cong K^0(\mathbb{C}P^n, \mathbb{C}P^{n-1}) \arrow[u] \arrow[d] \\
K(\mathbb{C}P^n) \otimes \ldots \otimes K(\mathbb{C}P^n) \arrow[r] & K^0(\mathbb{C}P^n)
\end{tikzcd}$$

das brauche ich aus den Notizen…

4. Die Hopf-Invariante

Zur Erinnerung: Wir wollen den folgenden Satz beweisen:

Theorem (Adams). Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $\mathbb{R}^n$ besitzt die Struktur einer reellen Divisionsalgebra.

(ii) Entweder ist $n = 1$ oder $n \geqslant 2$ ist gerade und es gibt eine stetige Abbildung $f\colon S^{2n-1} \to S^n$ mit *Hopf-Invariante* 1.

(iii) Es gilt $n \in \{1, 2, 4, 8\}$.

Ziel für heute: Definition der Hopf-Invariante sowie (i)⇒(ii).

4.1 Definition. Ein H-Raum ist ein punktierter topologischer Raum (X, e) mit Basispunkt $e \in X$ zusammen mit einer stetigen Abbildung $\mu\colon X \times X \to X$, so dass

(i) $\mu(e, e) = e$

(ii) Die Abbildung $X \to X$, $x \mapsto \mu(x, e)$ und $X \to X$, $x \mapsto \mu(e, x)$ sind beide homotop zur Identität auf X.

4.2 Satz. Falls $\mathbb{R}^n$ die Struktur einer reellen Divisionsalgebra hat, dann existiert eine stetige Abbildung $\mu\colon S^{n-1} \times S^{n-1} \to S^{n-1}$, sodass (S^{n-1}, e, μ) ein H-Raum ist.

Beweis: Sei $e \in \mathbb{R}^n$ die Eins der Divisionsalgebra. Dann gilt $\|e\| \neq 0$. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\|e\| = 1$ annehmen. Wenn dies nicht gilt, dann definieren wir eine neue Divisionsalgebrastruktur auf $\mathbb{R}^n$ durch

$$x * y := x \bullet y \cdot \|e\|$$

mit Einselement $\frac{e}{\|e\|} =: e'$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist also $e \in S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. Sei $\mu\colon S^{n-1} \times S^{n-1} \to S^{n-1}$ gegeben durch

$$\mu(x, y) = \frac{x * y}{\|x * y\|}$$

Dies ist wohldefiniert, da $x * y \neq 0$ für $x, y \neq 0$. Außerdem gilt $\mu(x, e) = x$, $\mu(e, x) = x$. □

4.3 Lemma. Seien $k, l > 0$. Dann gilt

$$K^0\big(S^{2l} \times S^{2k}\big) \cong K^0(S^{2l}) \otimes K^0(S^{2k}) \cong \mathbb{Z}[\alpha,\beta]/(\alpha^2,\beta^2)$$

Beweis: Wir haben $\tilde{K}^0(S^{2l}) \cong \mathbb{Z} = \langle\alpha\rangle$ mit $\alpha^2 = 0$. Die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow K^0(S^{2l}, \mathrm{pt}) \longrightarrow K^0(S^{2l}) \longrightarrow K^0(\mathrm{pt}) \cong \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

spaltet durch einen Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \cong K^0(\mathrm{pt}) \to K^0(S^{2l})$. Hieraus lesen wir die Ringstruktur von $K^0(S^{2l})$ ab: $K^0(S^{2l}) \cong \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \cdot \alpha$ mit $\alpha^2 = 0$. Das heißt

$$K^0(S^{2l}) \cong \mathbb{Z}[\alpha]/(\alpha^2)$$

und somit $K^0 S^{2l} \otimes K^0(S^{2k}) \cong \mathbb{Z}[\alpha,\beta]/(\alpha^2,\beta^2)$. Aus Bott-Periodizität folgt

$$K^0(S^{2k},\mathrm{pt}) = \tilde{K}^0(S^{2k}) \cong \tilde{K}^0(S^{2k-2}) \otimes \tilde{K}^0(S^2)$$
$$K^0(X) \otimes K^0(S^2,\mathrm{pt}) \cong K^0(X \times (S^2,\mathrm{pt}))$$

Zusammen folgt durch Induktion, dass

$$K^0(X) \otimes K^0(S^{2k},\mathrm{pt}) \cong K^0\big(X \times (S^{2k},\mathrm{pt})\big)$$

Jetzt betrachten wir

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K^0(X) \otimes K^0(S^{2k},\mathrm{pt}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & K^0(X) \otimes K^0(S2k) \arrow[r] \arrow[d, "(1)"] & K^0(X) \otimes K^0(\mathrm{pt}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K^0\big(X \times (S^{2k},\mathrm{pt})\big) \arrow[r] & K^0(X \times S^{2k}) \arrow[r] & K^0(X \times \mathrm{pt}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

(1) ist auch ein Isomorphismus. Die Aussage folgt für $X = S^{2l}$. □

4.4 Satz. Falls S^{n-1} ein H-Raum ist, dann ist entweder $n = 1$ oder $n \geqslant 2$ gerade.

Beweis: Wir zeigen: Für $k > 0$ kann S^{2k} kein H-Raum sein. Angenommen wir haben H-Raum-Struktur $\mu\colon S^{2k} \times S^{2k} \to S^{2k}$ mit Eins e.

$$\mu^*\colon \mathbb{Z}[\gamma]/(\gamma^2) \longrightarrow \mathbb{Z}[\alpha,\beta]/(\alpha^2,\beta^2)$$

$$K^0(S^{2k}) \longrightarrow K^0(S^{2k} \times S^{2k})$$

Jetzt betrachte

≅ ins Diagramm einfügen

$$\begin{aligned} S^{2k} &\xrightarrow{\ i\ } S^{2k} \times S^{2k} \xrightarrow{\ \mu\ } S^{2k} \\ x &\longmapsto (x,e) \end{aligned}$$

Dies ist homotop zur Identität, das heißt $i^* \circ \mu^* = \mathrm{id}_{K^0(S^{2k})}$. Betrachte

$$\begin{tikzcd}
K^0(S^{2k} \times S^{2k}) \arrow[r, "i^*"] & K^0(S^{2k} \times \mathrm{pt}) \\
K^0(S^{2k}) \otimes K^0(S^{2k}) \arrow[r] \arrow[u, "*"] & K^0(S^{2k}) \otimes K^0(\mathrm{pt}) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

$$\mathbb{Z}[\alpha,\beta]/(\alpha^2,\beta^2) \xrightarrow{\ i^*\ } \mathbb{Z}[\gamma]/(\gamma^2)$$

$$\alpha \longmapsto \gamma$$

$$\beta \longmapsto 0$$

Seien $r, s, t \in \mathbb{Z}$, so dass $\mu^*(\gamma) = r\alpha + s\beta + t\alpha\beta$. Dann gilt $r\gamma = i^* \circ \mu^*(\gamma) = \gamma$. Also ist $r = 1$. Analog folgt $s = 1$.

$$\Rightarrow 0 = \mu^*(\gamma^2) = (\mu^*(\gamma))^2 = 2\alpha\beta \neq 0$$

Widerspruch! □

Eine H-Raum-Struktur $\mu\colon S^{n-1} \times S^{n-1} \to S^{n-1}$ liefert eine stetige Abbildung $f\colon S^{2n-1} \to S^n$ definiert wir folgt: Wir haben $S^{2n-1} \cong \partial(D^n \times D^n) = \partial D^n \times D^n \cup D^n \times \partial D^n$ und $S^n \cong D^n_+ \coprod D^n_n/\sim$ durch Verklebung entlang von $S^{n-1} = \partial D^n_+ = \partial D^n_-$. f ist definiert durch

$$\begin{aligned} f\colon \partial D^n \times D^n \cup D^n \times \partial D^n &\longrightarrow D^n_+ \textstyle\coprod D^n_-/\sim \\ (x,y) &\longmapsto \begin{cases} \|y\| \cdot \mu\Big(x, \frac{y}{\|y\|}\Big), & \text{falls } (x,x) \in \partial D^n \times D^n \\ \|x\| \cdot \mu\Big(\frac{x}{\|x\|}, y\Big), & \text{falls } (x,y) \in D^n \times \partial D^n \end{cases} \end{aligned}$$

f ist wohldefiniert und stetig. Ab jetzt nehmen wir $n = 2k$ an. Sei $f\colon S^{4k-1} \to S^{2k}$ eine stetige Abbildung. f ist die Anklebeabbildung einer 4k-Zelle D^{4k} an S^{2k}. Sei C_f durch das Pushout-Diagramm

$$\begin{tikzcd} S^{4k-1} \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"] & D^{4k} \arrow[d] \\ S^{2k} \arrow[r, hook] & C_f \end{tikzcd}$$

Es gilt $C_f/S^{2k} \cong S^{4k}$. Damit folgt

$$K^0(C_f, S^{2k}) \cong K^0(D^{4k}, S^{4k-1}) \cong \tilde{K}^0(S^{4k})$$

Wegen $\tilde{K}^1(S^{4k}) \cong \tilde{K}^1(S^{2k}) = 0$ erhalten wir aus der exakten Tripelsequenz für $C_f \supset S^{2k} \supset \mathrm{pt}$ die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \tilde{K}^0(S^{4k}) \longrightarrow \tilde{K}^0(C_f) \longrightarrow \tilde{K}^0(S^{2k}) \longrightarrow 0$$

Sei $\alpha \in \tilde{K}^0(C_f)$ das Bild des Generator von $\tilde{K}^0(S^{4k})$ in $\tilde{K}^0(C_f)$. Sei $\beta \in \tilde{K}^0(C_f)$ ein Element, welches auf den Generator von $\tilde{K}^0(S^{2k})$ abbildet. Dann ist das Bild von β^2 in $\tilde{K}^0(S^{2k})$ gleich 0. Also ist $\beta^2 = h_f \cdot \alpha$ für ein $h_f \in \mathbb{Z}$.

4.5 Lemma. h_f ist unabhängig von der Wahl von β.

Beweis: Sei β' ein weiteres Element. Dann gilt $\beta' = \beta + m \cdot \alpha$ für ein $m \in \mathbb{Z}$. Es gilt dann

$$(\beta')^2 = \beta^2 + 2m\beta\alpha$$

Das Bild von $\alpha\beta$ in $\tilde{K}^0(S^{2k})$ ist 0. Damit ist $\alpha\beta = r \cdot \alpha$ für ein $r \in \mathbb{Z}$. Es folgt

$$r\alpha\beta = \alpha\beta^2 = h_f \cdot \alpha^2 = 0$$

da $\alpha^2 = 0$ ist. Damit ist $\alpha\beta = 0$, da $\alpha\beta \in \mathrm{Im}(\mathbb{Z} = \tilde{K}^0(S^{4k}) \hookrightarrow \tilde{K}^0(C_f))$. Also gilt $(\beta')^2 = \beta^2$. □

4.6 Definition. Das Element $h_f \in \mathbb{Z}$ heißt die *Hopf-Invariante* von f.

4.7 Satz. Sei $f\colon S^{4k} \to S^{2k}$ die stetige Abbildung assoziiert zu einer H-Raum-Struktur auf S^{2k-1}. Dann gilt $h_f \in \{\pm 1\}$.

Beweis: Hier fehlt noch ganz viel

□

Die äußere Algebra

Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum.

$$T(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V^{\otimes n}$$

mit $V^{\otimes 0} = \mathbb{C}$ ist die *Tensoralgebra* von V mit Multiplikation induziert vom Tensorprodukt und Einselement $1 \in \mathbb{C} = V^{\otimes 0} \subset T(V)$. $T(V)$ ist $\mathbb{N}$-graduiert. Sei $I \subset T(V)$ das (graduierte) zweiseitige Ideal erzeugt von $v \times v \in V^{\otimes 2} \subset T(V)$ für alle $v \in V$. Das heißt in ${}^{T(V)}/_{I}$ gilt

$$[v_1 \otimes \ldots \otimes v_r] = [v_1 \otimes \ldots \otimes v_r + w_1 \otimes \ldots \otimes w_k \otimes a \otimes a \otimes w_{k+3} \otimes \ldots \otimes w_r] \qquad \textbf{[\#]}$$

Dann heißt $\Lambda^* V := {}^{T(V)}/_{I}$ die *äußere Algebra* von V. Elemente in $\Lambda^* V$ schreibt man auch $v_1 \wedge \ldots \wedge v_r = [v_1 \otimes \ldots \otimes v_r]$. Aus **[#]** folgt:

$$v_1 \wedge \ldots \wedge v_i \wedge v_{i+1} \wedge \ldots \wedge v_r = -v_1 \wedge \ldots \wedge v_{i+1} \wedge v_i \wedge \ldots \wedge v_r$$

$\Lambda^* V = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Lambda^n V$ ist graduiert über die Länge der Tensoren.

Beispiel:

- Ist $V = \mathbb{C}$, so ist $T(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathbb{C}$ und $\Lambda^*(V) \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$.
- Ist $V = \mathbb{C}^2$, so erhalten wir $\Lambda^* V \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}$, wobei das letze $\mathbb{C} = \mathrm{span}\{e_1 \wedge e_2\}$ ist.
- Allgemeiner gilt für $V = \mathbb{C}^r$

$$\Lambda^* V \cong \mathbb{C} \otimes C^r \oplus \ldots \oplus C^{\binom{r}{i}} \oplus \ldots \oplus \underset{\Lambda^r V}{\mathbb{C}} \oplus 0 \ldots$$

Der Dualraum $(\Lambda^n V)^*$ ist kanonisch isomorph zum Vektorraum der antisymmetrischen n-Formen auf V, also Abbildungen $\varphi \colon V \times \ldots \times V \to C$, die multilinear und antisymmetrisch sind.

Die Zuordnungen $V \mapsto \Lambda^n V$ und $V \mapsto \Lambda^* V$ lassen sich zu stetigen Funktoren $\mathrm{Vekt}_{\mathbb{C}} \to \mathrm{Vekt}_{\mathbb{C}}$ beziehungsweise $\mathrm{Vekt}_{\mathbb{C}} \to \mathrm{Gr}{-}\mathrm{Vekt}_{\mathbb{C}}$ erweitern. Nach Lemma 2.5 existieren Funktoren

$$\Lambda^n \colon \mathrm{Vekt}_{\mathbb{C}}(X) \longrightarrow \mathrm{Vekt}_{\mathbb{C}}(X) \qquad \Lambda^* \colon \mathrm{Vekt}_{\mathbb{C}}(X) \longrightarrow \mathrm{Gr}{-}\mathrm{Vekt}_{\mathbb{C}}(X)$$

Eigenschaften dieser Funktoren:

a) $\Lambda^n(E_1 \oplus E_2) \cong \bigoplus_{i+j=n} \Lambda^i(E_1) \otimes \Lambda^j(E_2)$

b) $\Lambda^0(E) \cong X \times \mathbb{C}$, $\Lambda^1(E) \cong E$

c) $\Lambda^n(E) = 0$ für $n > \dim E$.

$$\Lambda^n(E_1 \oplus E_2) = [\Lambda^*(E_1 \oplus E_2)]_n = (\Lambda^*(E_1) \otimes \Lambda^*(E_2))_n = (*, *)$$

Elementarsymmetrische Polynome

Sei $p \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ ein Polynom in Variablen $x_1, \ldots, x_n$. Die Permutationsgruppe Σ_n von $\{1, \ldots, n\}$ wirkt auf $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ durch

$$(\tau \cdot p)(x_1, \ldots, x_n) = p\big(x_{\tau^{-1}(1)}, \ldots, x_{\tau^{-1}(n)}\big) \quad , \quad \tau_1 \cdot (\tau_2 \cdot p) = (\tau_1 \cdot \tau_2) \cdot p$$

Ein Polynom p heißt Σ_n-invariant, falls $\tau \cdot p = p$ für alle $\tau \in \Sigma$ gilt.

Beispiel:

- $\sigma_1(x_1,\ldots,x_n) = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ ist Σ_n-invariant.
- $\sigma_2(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ ist Σ_3-invariant.
- $\sigma_r(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_r\leqslant n} x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}$ ist Σ_n-invariant. Diese Polynome heißen *elementarsymmetrische Polynome*

Sei $q(x_1,\ldots,x_n;t) = \prod_{i=1}^n (1+tx_i)$. Es ist $(1+tx_1)(1+tx_2) = 1 + t(x_1+x_2) + t^2x_1x_2$. Dann ist $\sigma_r(x_1,\ldots,x_n)$ der Koeffizient von $q(x_1,\ldots,x_n;t)$ vor t^r.

4.8 Satz. Ein Polynom $p \in \mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_n]$ ist Σ_n-invariant genau dann, wenn es von der Form

$$p(x_1,\ldots,x_n) = s(\sigma_1(x_1,\ldots,x_n), \sigma_2(x_1,\ldots,x_n),\ldots,\sigma_n(x_1,\ldots,x_n))$$

für ein $s \in \mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_n]$ ist.

Sei $E \to X$ ein $\mathbb{C}$-Vektorbündel. Betrachte

$$\Lambda_t(E) := \sum_{i=0}^n \left[\Lambda^i(E), 0\right]_{st} \cdot t^i = \sum_{i=0}^n \Lambda^i(E)t^i \in K^0(X)[t]$$

Dann gilt $\Lambda_t(E_1 \oplus E_2) = \Lambda_t(E_1)\cdot\Lambda_t(E_2)$ wegen Eigenschaft a) von $\Lambda^n(E)$. Falls $E \cong L_1 \oplus L_2 \oplus \ldots \oplus L_n$ für eindimensionale $\mathbb{C}$-Vektorbündel $L_i \to X$. Dann gilt

$$\Lambda_t(E) = \prod_{i=1}^n \Lambda_t(L_i) = \prod_{i=1}^n (1 + L_it)$$

Durch Koeffizientenvergleich bekommen wir

$$\Lambda^i(E) \cong \sigma_i(L_1,\ldots,L_n)$$

für dieses E. Wir wollen $\psi^m(L_1 \oplus \ldots \oplus L_n) = L_1^m + \ldots + L_n^m$. Das Polynom $p_m(x_1,\ldots,x_n) = x_1^m + \ldots + x_n^m$ ist Σ_n-invariant, das heißt es gibt $s_m(x_1,\ldots,x_n)$ sodass $p_m = s_m(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$. Jetzt definieren wir

$$\psi^m(E) = s_m\left(\Lambda^1(E),\ldots,\Lambda^n(E)\right)$$

4.9 Satz (Spaltungsprinzip). Sei X ein kompakter Hausdorffraum. Sei $E \to X$ ein endlichdimensionales $\mathbb{C}$-Vektorbündel. Dann gibt es einen kompakten Hausdorffraum $F(E)$ zusammen mit einer stetigen Abbildung $p\colon F(E) \to X$, sodass $p^*\colon K^0(X) \to K^0(F(E))$ injektiv ist und p^*E in eine SUmme von eindimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorbündeln zerfällt.

Beweis (Existenz Adams Operation):

- Natürlichkeit folgt aus Funktorialität von Λ^n.

Seien E_1, E_2 $\mathbb{C}$-Vektorraumbündel über X. Zu zeigen: $\psi^m(E_1 \oplus E_2) = \psi^m(E_1) + \psi^m(E_2)$. Sei $p_1\colon F(E_1) \to X$ aus dem Spaltungsprinzip. Betrachte $p_2\colon F(p_1^*E_2) \to F(E_1)$. Dann gilt $p_1^*E_1 \cong L_1^m \oplus \ldots \oplus L_r^m$ und

$$p_2^*p_1^*E_2 \cong L_1^{(2)} \oplus \ldots \oplus L_s^{(2)}$$

hier ist noch ein Fehler im Code, deswegen auskommentiert

Es folgt Also gilt $\psi^m(E_1 \oplus E_2) = \psi^m(E_1) + \psi^m(E_2)$. Jetzt definiere $\psi^m(E_1 - E_2) = \psi^m(E_1) - \psi^m(E_2)$.

Die Multiplikativität geht analog. Außerdem gilt

$$\psi^m\big(\psi^l(L_1 \oplus L_r)\big) = L_1^{ml} \oplus \ldots \oplus L_r^{ml} = \psi^{ml}(L_1 \oplus \ldots\ldots L_r)$$

und

$$\psi^p(L_1 \oplus \ldots \oplus L_r) = L_1^p \oplus \ldots \oplus L_r^p = (L_1 \oplus \ldots \oplus L_r)^p \quad \text{mod } p$$

□

Idee des Beweises vom Spaltungsprinzip

Betrachte das zu E assoziierte projektive Bündel. Sei $s_0 \colon X \to E$ der Nullschnitt von $q \colon E \to X$.

$$P(E) := {}^{E \setminus s_0(X)}/_{\sim} \qquad v \sim w \text{ falls } q(v) = q(w), v = \lambda w \text{ für ein } \lambda \in \mathbb{C}^*$$

$q' \colon P(E) \to X$, $q(w) = q'([w])$. Sei $L = \{(v, [w] \in E \times P(E)) \,|\, v = \lambda w \text{ für ein } \lambda \in \mathbb{C}^*\}$. Dann ist $L \to P(E)$ ein eindimensionales Vektorbündel über $P(E)$ und wir haben eine kurze exakte Sequenz von Vektorbündeln

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow (q')^*E \longrightarrow Q \longrightarrow 0$$

Es folgt nun $(q')^*E \cong L \oplus Q$. Es bleibt zu zeigen: $(q')^* \colon K^0(X) \to K^0(P(E))$ ist injektiv. Dies braucht den Thom-Isomorphismus oder das Leray-Hirsch-Theorem.

$E = X \times \mathbb{C}^{n+1} \Rightarrow P(E) = X \times \mathbb{C}P^n$ und

$$K^0(X) \otimes K^0(\mathbb{C}P^n) \xrightarrow{\cong} K^0(X \times \mathbb{C}P^n)$$

A. Anhang

A.1. Lokale Trivialität des Tangentialbündels auf S^n

Sei $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ die n-Sphäre und sei

$$TS^n = \left\{(x,v) \in S^n \times \mathbb{R}^{n+1} \,\middle|\, \langle x\,,\, v\rangle = 0\right\}$$

Wir definieren $p\colon TS^n \to S^n$ durch $p(x,v) = x$. Wir zeigen, dass $p\colon TS^n \to S^n$ lokal trivial ist.

Beweis
Sei $x_0 \in S^n$ gegeben. Sei $U := \{x \in S^n \mid \langle x\,,\, x_0\rangle > 0\}$. Da $\langle x_0\,,\, x_0\rangle = 1$ ist, ist $x_0 \in U$. Weiter ist U offen in S^n, also eine offene Umgebung von x_0. Sei $H \subset \mathbb{R}^{n+1}$ die Hyperebene gegeben durch $H = \left\{v \in \mathbb{R}^{n+1} \,\middle|\, \langle x\,,\, v\rangle = 0\right\}$. Da dies ein n-dimensionaler Vektorraum ist, finden wir einen Isomorphismus $\kappa\colon H \to \mathbb{R}^n$. Sei $TS^n\big|_U = p^{-1}(U)$. Wegen $\langle x_0\,,\, x_0\rangle = 1$ liegt $v - \langle x_0\,,\, v\rangle x_0$ in H für alle $v \in \mathbb{R}^{n+1}$. Also können wir definieren:

$$\varphi\colon TS^n\big|_U \to U \times \mathbb{R}^n \quad , \quad (x,v) \mapsto \big(x, \kappa(v - \langle x_0\,,\, v\rangle x_0)\big)$$

Außerdem definieren wir $\psi\colon U \times \mathbb{R}^n \to TS^n\big|_U$ durch

$$\psi(x,w) = \left(x, \kappa^{-1}(w) - \frac{\langle x\,,\, \kappa^{-1}(w)\rangle}{\langle x\,,\, x_0\rangle} x_0\right)$$

Dies ist wohldefiniert, da für $x \in U$ der Nenner stets ungleich 0 ist und weiter

$$\left\langle x\,,\, \kappa^{-1}(w) - \frac{\langle x\,,\, \kappa^{-1}(w)\rangle}{\langle x\,,\, x_0\rangle} x_0 \right\rangle = \langle x\,,\, \kappa^{-1}(w)\rangle - \frac{\langle x\,,\, \kappa^{-1}(w)\rangle}{\langle x\,,\, x_0\rangle}\langle x\,,\, x_0\rangle = 0$$

gilt. Weiter sind beide Abbildungen offensichtlich stetig. Für die Komposition gilt

$$(\psi \circ \varphi)(x,v) = \left(x, v - \langle x_0\,,\, v\rangle x_0 - \frac{\langle x\,,\, v - \langle x_0\,,\, v\rangle x_0\rangle}{\langle x\,,\, x_0\rangle} x_0\right) = (x, v - \langle x_0\,,\, v\rangle x_0 + \langle x_0\,,\, v\rangle x_0) = (x,v)$$

Dabei haben wir benutzt, dass $\langle x\,,\, v\rangle = 0$ gilt. Umgekehrt gilt

$$\begin{aligned}
(\varphi \circ \psi)(x,w) &= \left(x, \kappa\left(\kappa^{-1}(w) - \frac{\langle x\,,\, \kappa^{-1}(w)\rangle}{\langle x\,,\, x_0\rangle}x_0 - \left\langle x_0\,,\, \kappa^{-1}(w) - \frac{\langle x\,,\, \kappa^{-1}(w)\rangle}{\langle x\,,\, x_0\rangle}x_0\right\rangle x_0\right)\right) \\
&= \left(x, \kappa\left(\kappa^{-1}(w) - \frac{\langle x\,,\, \kappa^{-1}(w)\rangle}{\langle x\,,\, x_0\rangle}x_0 - \langle x_0\,,\, \kappa^{-1}(w)\rangle x_0 + \frac{\langle x\,,\, \kappa^{-1}(w)\rangle}{\langle x\,,\, x_0\rangle}x_0\right)\right) \\
&= \Big(x, \kappa\big(\kappa^{-1}(w) - \langle x_0\,,\, \kappa^{-1}(w)\rangle x_0\big)\Big) = (x,w)
\end{aligned}$$

da wieder $\langle x_0\,,\, \kappa^{-1}(w)\rangle = 0$, weil $\kappa^{-1}(w) \in H$ ist. Damit ist φ ein Homöomorphismus. Es ist außerdem klar, dass φ eingeschränkt auf die Fasern eine lineare Abbildung ist. Damit ist das Tangentialbündel TS^n lokal trivial. □

Index

Die Seitenzahlen *sind mit Hyperlinks zu den entsprechenden Seiten versehen, also anklickbar*

Abbildungsverzeichnis

To-do's und andere Baustellen