Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Fachbereich 10 Mathematik und Informatik

Skript Differentialgeometrie I.

Mitschrift der Vorlesung „Differentialgeometrie I." von Frederik Witt

Arne Grauer

25. Oktober 2014

Aktuelle Version verfügbar bei:

GitHub (inklusive Sourcecode)
`https://github.com/JaMeZ-B/latex-wwu`

Bittorrent Sync
`B6WH2DISQ5QVYIRYIEZSF4ZR2IDVKPN3I`

Vorwort — Mitarbeit am Skript

Dieses Dokument ist eine Mitschrift aus der Vorlesung „Differentialgeometrie I., WiSe 2014“, gelesen von Frederik Witt. Der Inhalt entspricht weitestgehend dem Tafelanschrieb. Für die Korrektheit des Inhalts übernehme ich keinerlei Garantie! Für Bemerkungen und Korrekturen – und seien es nur Rechtschreibfehler – bin ich sehr dankbar. Korrekturen lassen sich prinzipiell auf drei Wegen einreichen:

- Persönliches Ansprechen in der Uni, Mails an `j.bantje@wwu.de` (gerne auch mit annotieren PDFs)
- *Direktes* Mitarbeiten am Skript: Den Quellcode poste ich auf GitHub (siehe oben), also stehen vielfältige Möglichkeiten der Zusammenarbeit zur Verfügung: Zum Beispiel durch Kommentare am Code über die Website und die Kombination Fork + Pull Request. Wer sich verdient macht oder ein Skript zu einer Vorlesung, die ich nicht besuche, beisteuern will, dem gewähre ich gerne auch Schreibzugriff.

  Beachten sollte man dabei, dass dazu ein Account bei `github.com` notwendig ist, der allerdings ohne Angabe von persönlichen Daten angelegt werden kann. Wer bei GitHub (bzw. dem zugrunde liegenden Open-Source-Programm „`git`“) – verständlicherweise – Hilfe beim Einstieg braucht, dem helfe ich gerne weiter. Es gibt aber auch zahlreiche empfehlenswerte Tutorials im Internet.[1]
- *Indirektes* Mitarbeiten: TeX-Dateien per Mail verschicken.

  Dies ist nur dann sinnvoll, wenn man einen ganzen Abschnitt ändern möchte (zB. einen alternativen Beweis geben), da ich die Änderungen dann per Hand einbauen muss!

Vorlesungshomepage

`https://wwwmath.uni-muenster.de/u/frederik.witt/diffgeoI.html`

Über die Differentialgeometrie

1. Differentialgeometrie Mannigfaltigkeiten $\Rightarrow$ Differentialtopologie

2. Riemannsche Geometrie Längen und Winkel messen $\rightsquigarrow$ Geodäte (lokal) kürzeste Verbindung zwischen 2 Punkten einer Mannigfaltigkeit.

Krümmung

Allgemeine Relativitätstheorie: Krümmung = Gravitation ist für solche Effekte verantwortlich

[1] zB. `https://try.github.io/levels/1/challenges/1`, ist auf Englisch, aber dafür interaktives LearningByDoing

Inhaltsverzeichnis

1 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Konvention: glatt = C^∞.
Wiederholung: Diffeomorphismus $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ glatt, bijektiv und f^{-1} glatt.

1.1 Untermannigfaltigkeiten

1.1.1 Definition

Eine Abbildung $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ glatt heißt **Submersion**/**Immersion**/**Étale** in $x \in U$, falls $\mathrm{d}_x f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ surjektiv/injektiv/Isomorphismus ist. . f heißt schlechthin **Submersion**/**Immersion**/**Étale**, falls f Submersion/Immersion/Étale für alle $x \in U$ ist.

Insbesondere $n \geq m/n \leq m/n = m$

1.1.2 Bemerkung

Submersiv/immersiv/étale sind offene Bedingungen, d.h. ist f Submersion/Immersion/Étale in x, so auch in einer hinreichend kleinen Umgebung von x (vergleiche auch Satz 15 unten)

1.1.3 Satz über inverse Funktionen (inverse function theorem)

Sei $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ étale in x. Dann existiert eine offene Menge $x \in V \subset U \subset \mathbb{R}^n$, sodass $f\big|_V$ ein Diffeomorphismus auf seinem Bild ist, d.h. $f\big|_V : V \xrightarrow{\sim} f(V)$ ist bijektiv und $f\big|_V$, $(f\big|_V)^{-1}$ glatt.

1.1.4 Satz über implizite Funktionen (implicit function theorem)

Sei $f : U \subset \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^n$ eine Submersion in 0 mit $f(0) = 0$. Dann existiert eine glatte Funktion g auf einer Umgebung von $0 \in \mathbb{R}^n$ mit Werten in $\mathbb{R}^k$, d.h.

$$g = g(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} g_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ g_k(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

mit

$$f\big(x_1, \dots, x_n, g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_k(x_1, \dots, x_n)\big) = f\big(x, g(x)\big) = 0$$

1.1.5 Satz (Normalenformen von Submersionen/Immersionen)

a) Sei $f : U \subseteq \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^n$ eine Submersion mit $f(0) = 0$. Dann existiert ein Diffeomorphismus $\varphi : 0 \in V \subset \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^{n+k}$ mit $\varphi(V) \subset U$ und $f \circ \varphi(x_1, \dots, x_{n+k}) = (x_1, \dots, x_n) = \pi_{\mathbb{R}^n}(x_1, \dots, x_{n+k})$, d.h. modulo einer Diffeomorphismus ist jede Submersion äquivalent zu einer Projektion.

b) Sei $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+k}$ eine Immersion in 0, $f(0) = 0$. Dann existiert ein Diffeomorphismus

$$\varphi : 0 \in V \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+k}$$

mit $\varphi(0) = 0$ und

$$\varphi \circ f(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0) = i(x_1, \dots, x_n)$$

d.h. modulo Diffeomorphismen ist f äquivalent zur kanonischen Einbettung von $\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+k}$.

Beweis

(i) Wähle Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ mit $\mathrm{d}_0 f = (A\,B)$ mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{k\times n}$ mit $\det A \neq 0$. Definiere $F : U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ durch $(p,q) \mapsto (f(p,q), q)$. Dann gilt

$$\mathrm{d}_{(0,0)} F = \begin{pmatrix} \mathrm{d}_0 f & \\ 0 & \mathrm{id}_{k\times k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & \mathrm{id}_{k\times k} \end{pmatrix} \Longrightarrow \det \mathrm{d}_0 F \neq 0$$

Mit 1.1.3 folgt: $\varphi = F^{-1}$ Diffeomorphismus um $0 \in \mathbb{R}^{n+k}$ herum.

(ii) Definiere $F : U \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$. $F(p,q) = f(p) + (0,q)$.

$$\mathrm{d}_{(0,0)} F = \begin{pmatrix} \mathrm{d}_0 f & 0 \\ 0 & \mathrm{id}_{k\times k} \end{pmatrix},$$

also $\det \mathrm{d}_{(0,0)} F \neq 0$. $\Rightarrow \exists \varphi = F^{-1}$ um 0 mit $\varphi(f(p)) = \varphi \circ F(p,0) = (p,0) = i(p)$ □

Bemerkung

Durch Komposition mit Translationen können Submersionen/Immersionen mit $F(x) = y$ (nicht notwendigerweise $= 0$) behandelt werden.

1.1.6 Definition

Verallgemeinerung des n-dimensionalen Unterraumes

$M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ heißt n-dimensionale **Untermannigfaltigkeit**, falls $\forall x \in M : \exists x \in U \subset \mathbb{R}^{n+k}$ Umgebung, sowie eine Submersion $f : U \to \mathbb{R}^k$ mit $U \cap M = f^{-1}(0)$.

1.1.7 Beispiele

(i) Die n-**Sphäre** $S^n := \left\{ x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \,\middle|\, |x|^2 = 1 \right\}$ ist eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+1}$. Definiere $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ durch $f(x_1, \ldots, x_{n+1}) = x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 - 1$. $\Rightarrow f^{-1}(0) = S^n$ nach Definition.

$$\mathrm{d}_x f = (2x_1, \ldots, 2x_{n+1}) : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$$

(ii) Die hyperbolischen Räume $H_c^n := \left\{ x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \,\middle|\, -x_1^2 + \sum_{i=2}^{n+1} x_i^2 = c \right\}$

Missing figure

Hyperbolische Räume für c < 0,c > 0 und c = 0

Sei $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_c(x) = -x_1^2 + \sum_{i=2}^{n+1} x_i^2 - c$.
$\Rightarrow f$ ist glatt und $f_c^{-1}(0) = H_c^n$
Es bleibt zu zeigen, das f eine Submersion ist.

$$\mathrm{d}_x f = (-2x_1, 2x_2, \ldots, 2x_{n+1}) : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$$

Es gilt $\mathrm{d}_x f(\nu) = 0 \forall \nu \in \mathbb{R}^{n+1} \Leftrightarrow x_i = 0 \;\forall i = 1, \ldots, n+1$.
Das heißt $\exists i : x_i \neq 0 \Rightarrow \mathrm{d}_x f$ Submersion, wobei $\exists i : x_i \neq 0$ gilt, falls $x \in H_c^n, c \neq 0$. Also ist für $c \neq 0$ H_c^n eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Für $c = 0$ ist $H_0^n \backslash \{0\}$ eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit.

(iii) Der n-Torus $T^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_{2n-1}, x_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n} \mid x_1^2 + x_2^2 = 1, \dots, x_{2n-1}^2 + x_{2n}^2 = 1\}$

$$f : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 1 \\ \vdots \\ x_{2n-1}^2 + x_{2n}^2 - 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow f$ glatt, $f^{-1}(0) = T^n$

$$\mathrm{d}_x f = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2x_3 & 2x_4 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & & 2x_{2n-1} & 2x_{2n} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \mathrm{d}_x f$ ist eine Submersion.

(iv) Die orthogonale Gruppe $O(n) \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ ist eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $\frac{n(n-1)}{2}$.

$$O(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid AA^T = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} = f^{-1}(0)\},\ f(A) = AA^T - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$$

Es gilt $f(A)^T = {A^T}^T \cdot A^T - \mathrm{id}^T = AA^T - \mathrm{id} = f(A)$. Also $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathrm{Sym}(\mathbb{R}^{n\times n}) = \{A \subseteq \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^T = A\}$.
$\Rightarrow f$ glatt, $f^{-1}(0) = O(n)$

$$\mathrm{d}_A f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathrm{Sym}(\mathbb{R}^{n\times n}),\ \mathrm{d}_A f = HA^T + AH^T$$

Sei $S \in \mathrm{Sym}(\mathbb{R}^{n\times})$. Setze $H = \frac{SA}{2} \Rightarrow \mathrm{d}_A f(\frac{SA}{2}) = \frac{1}{2}(SAA^T + ASA^T) = \frac{1}{2}(S + S) = S$
$\Rightarrow O(n)$ ist eine Untermannigfaltigkeit

1.1.8 Bemerkung

M kann von der Form $M = f^{-1}(0)$ sein, f glatt, aber keine Submersion. Zum Beispiel

$$M = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\} = f^{-1}(0),\ f(x, y) = x^3 + y^3$$

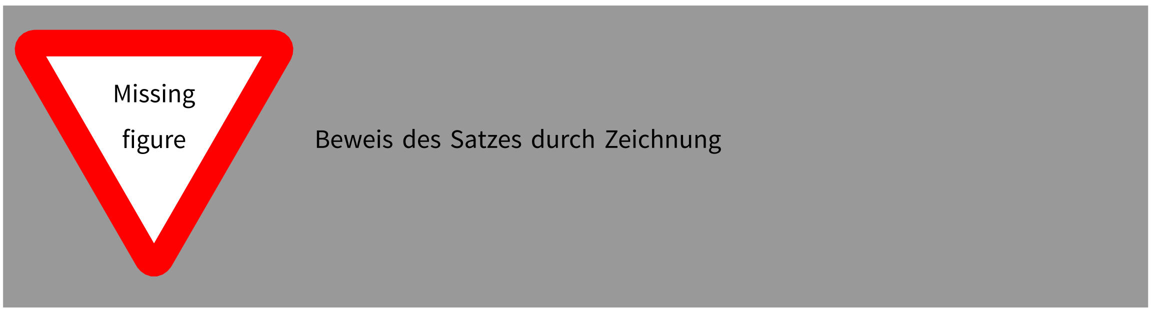
1.1.9 Satz

Es sind äquivalent:

(i) $M^n \subset \mathbb{R}^{n+k}$ ist n-dim Untermannigfaltigkeit

(ii) $\forall x \in M^n\ \exists$ Umgebungen U und $V \subset \mathbb{R}^{n+k}$ von x und 0, und ein Diffeomorphismus $\phi : U \to V$ mit $\phi(M \cap U) \to \underbrace{(\mathbb{R}^n \times \{0\} \cap V)}_{=:W}$

(iii) $\forall x \in M^n\ \exists$ Umgebungen $U \subset \mathbb{R}^{n+k}$ und $W \subset \mathbb{R}^n$, sowie eine glatte Abbildung $g : W \to \mathbb{R}^{n+k}$, sodass g ein Homöomorphismus von W auf $M \cap U$ und eine Immersion ist. g nennt man eine **lokale Parametrisierung**



Beweis des Satzes durch Zeichnung

1.1.10 Beispiele

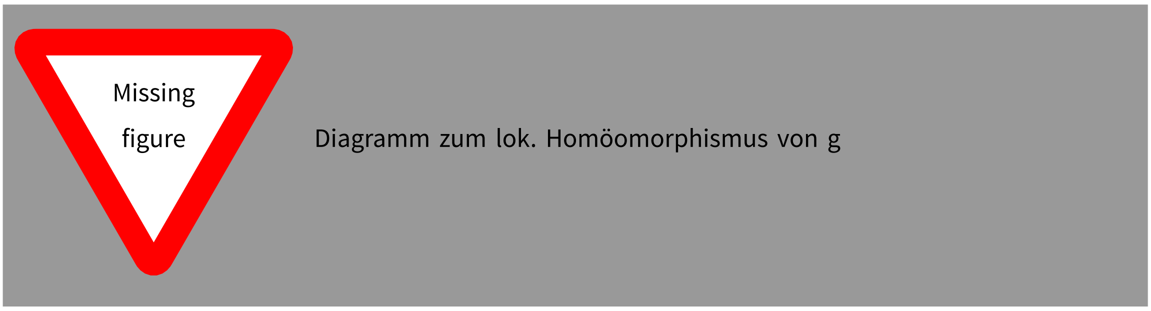
(i) Der 2-Torus T^2 ist das Bild von

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ g(x,y) = \big(\cos(x), \sin(x), \cos(y), \sin(y)\big) \subset T^2 \subset \mathbb{R}^4$$

g ist lokale Parametrisierung:

$$\mathrm{d}_{(x,y)}g = \begin{pmatrix} -\sin(x) & 0 \\ \cos(x) & 0 \\ 0 & -\sin(x) \\ 0 & \cos(y) \end{pmatrix}$$

$\mathrm{d}_{(x,y)}g$ hat somit immer vollen Rang 2, also ist $\mathrm{d}_{(x,y)}g$ injektiv. Es folgt somit, dass g eine Immersion ist.



$\hat{g}$ ist stetig (Quotiententopologie), $\hat{g}$ bijektiv und T^2 kompakt. Damit folgt, dass $\hat{g}$ ein Homöomorphimus und somit g ein lokaler Homöomorphismus ist.

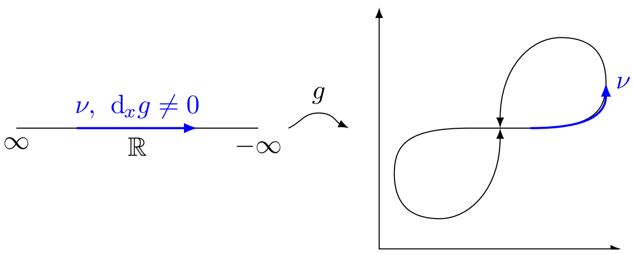
(ii)

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, g(x,y) = \big(\sin(x)\cos(y), \sin(x)\sin(y), \cos(x)\big) \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$$

g ist ein lokaler Homöomorphismus, jedoch ist $\mathrm{d}_{(x,y)}$ nicht injektiv, das heißt keine lokale Parametrisierung nahe der Pole. Also müssen wir eine andere Parametrisierung wählen, zum Beispiel $g(x,y) = (x, y, \sqrt{1-x^2-y^2})$

1.1.11 Bemerkung

(i) Betrachte:



g ist immersiv, hat aber keine Umkehrfunktion und ist somit kein Homöomophismus.

(ii) Missing figure Weiteres Beispiel zur lok. Par.

g ist keine lokale Parametrisierung, da g nicht immersiv in 0 ist. $g(t) = \big(g_1(t), g_2(t)\big) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow g_1^2(t) = g_2^3(t) \Rightarrow \mathrm{d}_0 g = 0$

1.1.12 Satz

Sei M^n eine n-dim glatte Untermannigfaltigkeit, $x \in M$, und seien U_1, U_2 Umgebungen von x in $\mathbb{R}^{k+n}$ mit lok. Parametrisierung g_1 und g_2 von $U_1 \cap M$ und $U_2 \cap M$ definiert auf Ω_1 und Ω_2 (das heißt $g_i : \Omega_i \to \mathbb{R}^{n+k}$). Dann ist

$$g_2^{-1} \circ g_1 : \Omega_1 \cap g_1^{-1}(U_2) \xrightarrow{g_1} g_1(\Omega_1) \cap U_2 \xrightarrow{g_2^{-1}} \Omega_2 \cap g_2^{-1}(U_1)$$

ein C^∞-Diffeomorphismus.

Missing figure Veranschaulichung des Wechsel lok. Parametrisierung

Bemerkung

- $h : \Omega_1 \to \Omega_2$ Homöomorphismus, offene Menge in $\Omega_1 \leftrightarrow$ offene Menge in Ω_2
- $\varphi : \Omega_1 \to \Omega_2$ Diffeomorphismus, falls Homöom. und $C^\infty(\Omega_1) \leftrightarrow C^\infty(\Omega_2)$

1.2 Abstrakte Mannigfaltigkeit

1.2.1 Definition

Sei M ein topologischer Raum. Ein **Atlas** ist eine Familie $\{(U_i, \varphi_i)\}_i \in I$ mit

(i) $U_i \subset M$ offen, $M = \bigcup_{i \in I} U_i$ ($\{U_i\}$ offene Überdeckung)

(ii) $\{\varphi_i : U_i \to \Omega_i \subset \mathbb{R}^n\}$ ist eine Familie von Homöomorphismen mit:

$$U_{ij} = U_i \cap U_j \neq \emptyset, \text{ dann ist } \varphi_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_{ij}) \to \varphi_i(U_{ij})$$

ein C^∞-Diffeomorphismus.

Ein Paar (U_i, φ_i) heißt **Karte** und φ_{ij} heißt Übergangsfunktion oder .

1.2.2 Definiton

Sei M ein topologischer Raum.

(i) Zwei Atlanten $\mathcal{A}_1 = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ und $\mathcal{A}_2 = \{(V_j, \psi_j)\}_{j \in J}$ sind äquivalent, genau dann wenn $\forall i \in I, j \in J$ mit $U_i \cap V_j \neq \emptyset$

$$\varphi_i \circ \psi_j^{-1} : \psi(U_i \cap V_j) \to \varphi(U_i \cap V_j)$$

ein C^∞-Diffeomorphismus, das heißt die Vereinigung und $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ ist wieder ein Atlas von M.

(ii) **Diffenrenzierbare Struktur** auf M ist die Äquivalenzklasse eines Atlanten. Ein Hausdorffraum M mit einer differenzierbaren Struktur heißt **(abstrakte) differenzierbare Mannigfaltigkeit** oder Mannigfaltigkeit.

(iii) Nehmen alle Karten eines Atlanten Werte in $\mathbb{R}^n$ an, so heißt n die Dimension der Mannigfaltigkeit.

1.2.3 Beispiele

(i) $\mathbb{R}^n$ ist Mannigfaltigkeit der Dimension n, Atlas: $\{\mathbb{R}^n, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}\}$ und $U \subset \mathbb{R}^n$ ist Mannigfaltigkeit der Dimension n, Atlas: $\left\{U, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}\big|_U\right\}$

(ii) Untermannigfaltigkeit im Sinne von Abschnitt 1.1 sind abstrakte Mannigfaltigkeiten.

(iii) Mannigfaltigkeit $N \subset M$ ist eine Untermannigfaltigkeit von M, falls für alle $y \in N$ eine Karte (U, φ) von M um y existiert, sodass $\varphi(U \cap N)$ Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ im Sinne von Abschnitt 1.1 ist.

Dann gilt zum Beispiel $U \overset{offen}{\subset} \mathbb{R}^n$ ist Untermannigfaltigkeit im "abstrakten" Sinne. Untermannigfaltigkeit $N \subset \mathbb{R}^n$ im Sinne von 1.1 ist Untermannigfaltigkeit im abstrakten Sinne.

(iv) Die n-Sphäre, z.B $n = 1$

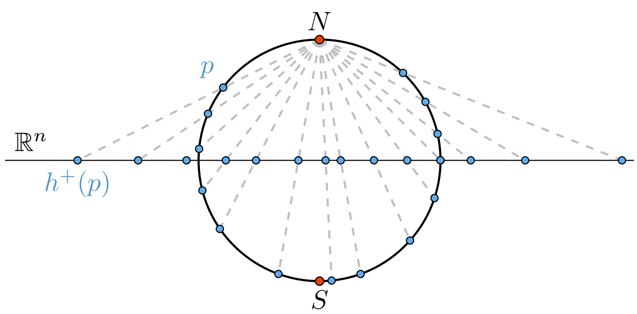


Abbildung 1: Stereografische Projektion

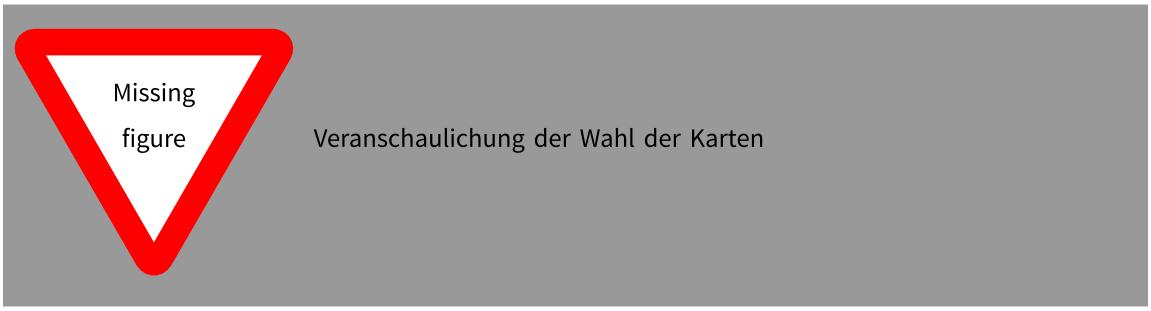
Allgemein: $U_N = S^n \backslash \{N\},\ U_S = S^n \backslash \{S\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$

$$\varphi_N : U_N \to \mathbb{R}^n,\ (x_1, \ldots, x_{n+1}) \mapsto \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, \ldots, x_n)$$
$$\varphi_S : U_S \to \mathbb{R}^n,\ (x_1, \ldots, x_{n+1}) \mapsto \frac{1}{1 + x_{n+1}}(x_1, \ldots, x_n)$$
$$\varphi_S \circ \varphi_N^{-1} : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^n \backslash \{0\},\ x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \mapsto \frac{x}{\|x\|^2}$$

Bemerkung

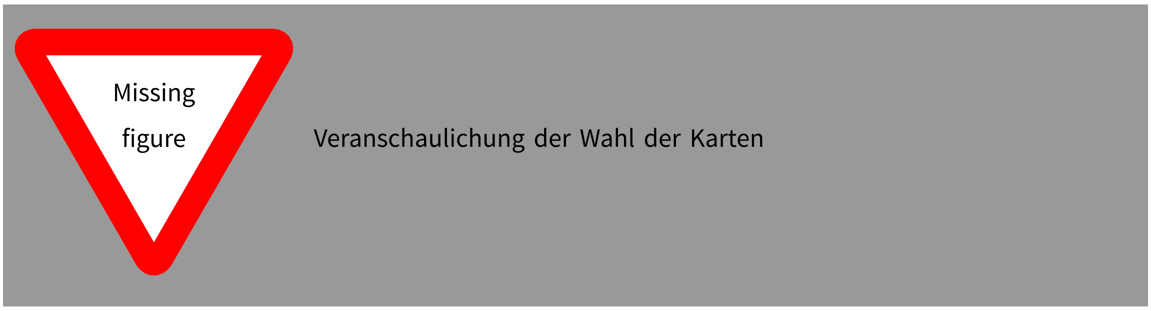
$\{(S^n, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{n+1}}|_{S^n})\}$ ist kein Atlas, denn S^n ist nicht offen im $\mathbb{R}^{n+1}$.

(v) Der n-Torus T^n. Betrachte $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}^n$, $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (\exp(ix_1), \ldots, \exp(ix_n)) \in \underbrace{n-\text{mal}} S^1 \times \ldots \times S^1 \subset \mathbb{C} \times \ldots \times \mathbb{C}$, so folgt $f(\mathbb{R}^n) = T^n$



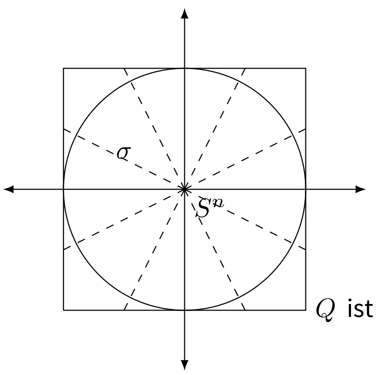
Schränke $f|_{(a_1-\epsilon,a_1+\epsilon)\times\ldots\times(a_n-\epsilon,a_n+\epsilon)}$ auf sein Bild ein. $\varphi_a := f^{-1} : \underbrace{f(I_a)}_{=U_a \subset T} \to I_a \overset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}^n$. Somit ist $\{(U_a, \varphi_a)\}_{a\in\mathbb{R}^n}$ eine Familie von Karten, die T^n überdeckt. Es bleibt zu zeigen, dass $\varphi_{ab} = \varphi_a \circ \varphi_b$ ein Diffeomorphismus ist, was wir an dieser Stelle dem Leser überlassen. Somit folgt, dass $\{(U_a, \varphi_a)\}_{a\in\mathbb{R}^n}$ ein Atlas ist.

(vi) Betrachte den Hyperbolischen Raum H^n.



H^n ist eine Mannigfaltigkeit mit einer Karte, gegeben durch stereographische Projektion. Man sagt daher, dass H^n diffeomorph zu $\mathbb{R}^n$

(vii) Würfel $Q \subset \mathbb{R}^n$



Q ist keine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$!

Q ist jedoch eine abstrakte Mannigfaltigkeit, denn Q ist ein Hausdorffraum und bijektiv zu S^n durch Projektion $sigma$. So ist $\mathcal{A} := \left\{ \left(\sigma^{-1}(U_N), \varphi_N \circ \sigma\right), \left(\sigma^{-1}(U_S), \varphi_S \circ \sigma\right) \right\}$ ein Atlas, da $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} = \varphi_S \circ \sigma \circ \sigma^{-1} \circ \varphi_N$ und somit ist Q eine abstrakte Mannigfaltigkeit.

(viii) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R},\ \mathbb{C}$. So ist der **projektive Raum**

$$\mathbb{KP}^n = \text{Menge der Ursprungsgraden in } \mathbb{K}^{n+1}$$
$$= {}^{\mathbb{K}^{n+1}\setminus\{0\}}/_{\sim},\ x, y \in \mathbb{K}^{n+1}\setminus\{0\} \text{ seien äquivalent},\ x \sim y \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}\setminus\{0\} : x = \lambda y$$
$$= {}^{\mathbb{K}^{n+1}\setminus\{0\}}/_{\mathbb{K}^*} \text{ wobei}$$
$$[x] \in {}^{\mathbb{K}^{n+1}\setminus\{0\}}/_{\mathbb{K}^*} \mapsto < x >_{\mathbb{K}} \text{ lineare Erzeugnis von } x \text{ in } \mathbb{K}^{n+1}$$

Wir schreiben $[x] = [x_0 : \ldots : x_n]$, falls $x = (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$, "homogene Koordinaten".

Bemerkung

$[x_0 : \ldots : x_n] = [\lambda x_0 : \ldots : \lambda x_n],\ \lambda \in \mathbb{K}^{n+1}$

(1) Betrachte $p:\ x \in \mathbb{K}^{n+1}\setminus\{0\} \mapsto [x] = p(x) \in {}^{\mathbb{K}^{n+1}\setminus\{0\}}/_{\sim}$ so folgt, dass $\mathbb{KP}^n$ versehen mit der Quotiententopologie ein Hausdorff-Raum ist.

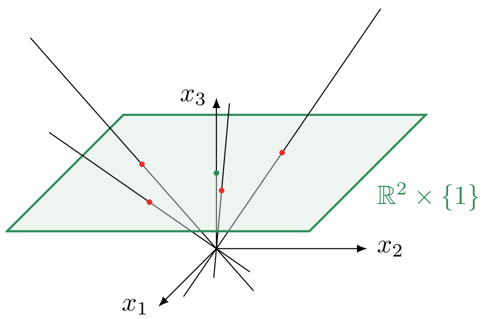


Abbildung 2: Der 2-dimensionale projektive Raum $\mathbb{R}P^2$ (projektive Ebene)

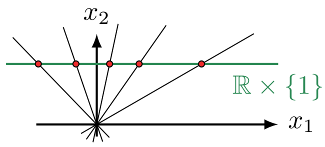


Abbildung 3: Der eindimensionale projektive Raum $\mathbb{R}P^1$

Aus Abbildung 3 bzw. 2 folgt somit $\mathbb{RP}^n = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cong S^2$ und analog $\mathbb{R}^2 \cup \{N\} \cong S^2$. Um zu zeigen, dass $\mathbb{KP}^n$ eine abstrakte Mannigfaltigkeit ist, muss die Existenz eines Atlanten gezeigt werden. Betrachte $U_i = \{[x_0 : \ldots : x_n \,|\in\}\mathbb{KP}^n]x_i \neq 0$. So folgt, dass $\bigcup_{i=0}^n = \mathbb{KP}^n$, da $(0, \ldots, 0) \notin \mathbb{K}^{n+1}\setminus\{0\}$, also $\not\exists : [0 : \ldots : 0]$. Da $[x_0 : \ldots : x_n] \in U_i \Rightarrow x_i \neq 0$, ist $\varphi_i : [x_0 : \ldots : x_n] = [\frac{x_0}{x_i} : \ldots : \frac{x_n}{x_i}] \overset{\varphi_i}{\to} [\frac{x_0}{x_i} : \ldots : \hat{\frac{x_i}{x_i}} : \ldots \frac{x_n}{x_i}]$ wohldefiniert. Es bleibt als Übung zu zeigen, dass $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ ein Diffeomorphismus ist.

1.2.4 Bemerkung

(i) Die Vereinigung aller äquivalenten Atlanten ist wieder ein Atlas, der sogenannte maximale Atlas (eindeutig bestimmt). In der Praxis arbeitet man mit konkreten Atlanten.

(ii) Allgemein kann man C^p-Atlanten betrachten, das heißt φ_{ij} C^p-Diffeomorphismen $\to$ C^p-Mannigfaltigkeiten. Ebenso kann man Karten mit allgemeinen Zielräumen betrachten, wo der Begriff der Differenzierbarkeit/Diffeomorphismus Sinn hat. Zum Beispiel Banach- und Hilbertraum $\to$ Banach- und Hilbertmannigfaltigkeiten oder Frécheraum $\to$ Fréchemannigfaltigkeiten.

(iii) Sei M ein topologischer Raum mit differenzierbarer Struktur, so ist er nicht automatisch Hausdorff! Zum Beispiel

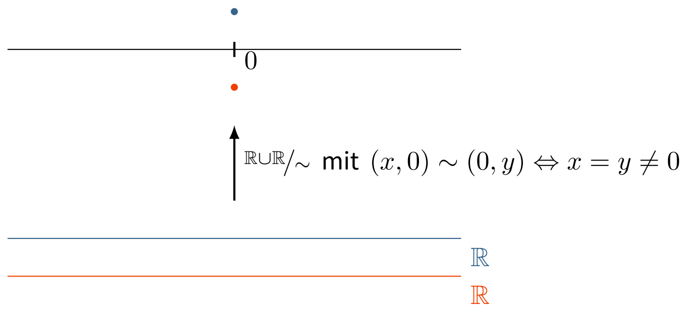


Abbildung 4: Beispiel einer Nichthaudorffmenge

Benutze Atlas $\{(U_1=\{(x,0)\,|\,x\in\mathbb{R}\},\mathrm{id}),(U_2=\{(0,y)\,|\,y\in\mathbb{R}\},\mathrm{id})\}$. Dies ist ein Atlas, da $U_1\cap U_2=M\backslash\{:\}$.

(iv) Wir nehmen künftig zwei zusätzliche Bedingungen für Mannigfaltigkeiten an:

(a) M zusammenhängend $\to$ jede Mannigfaltigkeit hat wohldefinierte Dimension schreibe M^n

(b) M erfüllt das 2. Abzählbarkeitsaxiom. Für uns: $\exists$ abzählbarer Atlas.

Abbildungsverzeichnis