



WESTFÄLISCHE  
WILHELMS-UNIVERSITÄT  
MÜNSTER



FACHBEREICH 10  
MATHEMATIK UND  
INFORMATIK

---

# Lineare Algebra II

---

gelesen von

**PROF. DR. SIEGFRIED ECHTERHOFF**

im Sommersemester 2016

Vorlesungsmitschrift von Phil Steinhorst

Stand: 24. Februar 2016



## Vorwort

Der vorliegende Text ist eine Mitschrift zur Vorlesung *Lineare Algebra II*, gelesen von Prof. Dr. Siegfried Echterhoff an der WWU Münster im Sommersemester 2016. Der Inhalt entspricht weitestgehend den Vorlesungsnotizen, welche auf der Vorlesungswebsite bereitgestellt werden. Dieses Werk ist daher keine Eigenleistung des Autors und wird nicht vom Dozenten der Veranstaltung korrekturgelesen. Für die Korrektheit des Inhalts wird keinerlei Garantie übernommen. Bemerkungen, Korrekturen und Ergänzungen kann man folgenderweise loswerden:

- persönlich durch Überreichen von Notizen oder per E-Mail
- durch Abändern der entsprechenden TeX-Dateien und Versand per E-Mail an mich
- direktes Mitarbeiten via GitHub. Dieses Skript befindet sich im `latex-wwu`-Repository von Jannes Bantje:

<https://github.com/JaMeZ-B/latex-wwu>

## Literatur

- Literatur hinzufügen

## Kommentar des Dozenten

einfügen

## Geplante Themen

- einfügen

## Vorlesungswebsite

Das handgeschriebene Skript sowie weiteres Material findet man unter folgendem Link:  Link einfügen

Phil Steinhorst  
p.st@wwu.de

# Inhaltsverzeichnis

<b>I. Lineare Algebra I (Zusammenfassung)</b>	<b>1</b>
3. Lineare Gleichungssysteme . . . . .	1
4. Gruppen, Ringe, Körper . . . . .	2
5. Vektorräume und lineare Abbildungen . . . . .	4
6. Lineare Abbildungen von $\mathbf{K}^n$ nach $\mathbf{K}^m$ und Matrizen . . . . .	6
7. Zerlegung von Matrizen in Elementarmatrizen . . . . .	8
8. Basen endlich erzeugter $\mathbf{K}$ -Vektorräume . . . . .	10
9. Berechnung von Basen . . . . .	12
10. Basen und lineare Abbildungen . . . . .	13
<b>II. Lineare Algebra II</b>	<b>16</b>
1. Erster Abschnitt . . . . .	16
<b>Index</b>	<b>17</b>
<b>Todo list</b>	<b>18</b>

# I. Lineare Algebra I (Zusammenfassung)

## 3. Lineare Gleichungssysteme

### 3.5 Definition (Matrix)

Sei  $K$  ein Körper (siehe Definition 4.7).

(1) Ein Schema der Form

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

mit  $a_{ij} \in K$  heißt  **$m \times n$ -Matrix** über  $K$ . Wir bezeichnen mit  $M(m \times n, K)$  die Menge aller  $m \times n$ -Matrizen über  $K$ .

(2) Wir identifizieren  $M(n \times 1, K)$  mit  $K^n$  (vgl. ), das heißt wir schreiben die Elemente des  $K^n$  in der Regel als Spalten. Für  $x, y \in K^n$  und  $\lambda \in K$  definieren wir:

Ref. Isom.

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \lambda \cdot x = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

(3) Ist  $A = (a_{ij})_{i,j} \in M(m \times n, K)$  und  $x = (x_i)_i \in K^n$ , so definieren wir  $b = (b_i)_i := Ax \in K^m$  durch  $b_i := \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$ . (Dies ist ein Spezialfall der Matrixmultiplikation, vgl. Definition 6.17)

### 3.7 Definition (Lineares Gleichungssystem)

Sei  $K$  ein Körper,  $A = (a_{ij})_{i,j} \in M(m \times n, K)$ ,  $b = (b_i)_i \in K^m$ . Die Gleichung

$$Ax = b$$

mit Unbekannten  $x = (x_i)_i \in K^n$  heißt ein **lineares Gleichungssystem (LGS)** über  $K$ . Ein Tupel  $\tilde{x} \in K^n$  mit  $A\tilde{x} = b$  heißt Lösung des LGS.

### 3.9 Definition (Elementare Zeilenumformungen)

Sei  $Ax = b$  ein LGS über  $K$ . Folgende **elementare Zeilenumformungen** ändern die Lösungsmenge des LGS nicht:

- (I) Vertauschen zweier Zeilen in  $A$  und der entsprechenden Einträge in  $b$ .
- (II) Addition der  $i$ -ten Zeile von  $A$  auf die  $j$ -te Zeile von  $A$  und entsprechend den  $i$ -ten Eintrag von  $b$  auf den  $j$ -ten Eintrag von  $b$ ,  $i \neq j$ .
- (III) Multiplikation einer Zeile von  $A$  und dem entsprechenden Eintrag von  $b$  mit einer Konstanten  $\lambda \in K \setminus \{0\}$ .
- (IV) Addition des  $\lambda$ -fachen der  $i$ -ten Zeile auf die  $j$ -te Zeile von  $A$ ,  $i \neq j$ , und Entsprechendes für die Einträge von  $b$ .

Durch diese Umformungen wird das Lösungstupel  $x$  nicht verändert. Wir betrachten daher oft nur das Schema  $(A | b)$ , das heißt die Matrix, die aus  $A$  durch Ergänzen der Spalte  $b$  entsteht.

### 3.11 Satz (Gaußsches Eliminationsverfahren)

Sei  $A \in M(m \times n, K)$  eine Matrix. Dann lässt sich  $A$  durch endlich viele elementare Zeilenumformungen der Form auf **Zeilenstufenform** bringen, das heißt auf eine Form

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \boxed{1} & * & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 & \boxed{1} & * & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & & & \cdots & 0 & \boxed{1} & * & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & & & & \cdots & 0 & \boxed{1} & * \\ 0 & \cdots & & & & & & & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & & & & & & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

### 3.12 Satz (Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen)

Ein LGS  $Ax = b$  ist genau dann lösbar, wenn für die Zeilenstufenform  $(\tilde{A} | \tilde{b})$  der Matrix  $(A | b)$  gilt: Für jede Nullzeile in  $\tilde{A}$  ist auch der entsprechende Eintrag in  $\tilde{b}$  null (mit anderen Worten: Keine der führenden Einsen liegt in  $\tilde{b}$ ).

## 4. Gruppen, Ringe, Körper

### 4.1 Definition (Gruppe)

- (1) Eine **Gruppe**  $(G, *)$  besteht aus einer Menge  $G$  zusammen mit einer Verknüpfung  $*: G \times G \rightarrow G$ ,  $(x, y) \mapsto x * y$  mit folgenden Eigenschaften:
  - a)  $*$  ist **assoziativ**, das heißt es gilt  $(x * y) * z = x * (y * z)$  für alle  $x, y, z \in G$ .
  - b) Es existiert ein **neutrales Element**  $1 \in G$  für  $*$ , das heißt für alle  $x \in G$  gilt  $1 * x = x * 1 = x$ .
  - c) Zu jedem  $x \in G$  existiert ein **inverses Element**  $x^{-1} \in G$  mit  $x * x^{-1} = x^{-1} * x = 1$ .

- (2) Eine Gruppe  $(G, *)$  heißt **abelsche Gruppe**, falls zusätzlich das Kommutativgesetz gilt, das heißt für alle  $x, y \in G$  gilt  $x * y = y * x$ .

#### 4.4 Beispiel (Symmetrische Gruppe)

Sei  $X$  eine Menge. Die Gruppe  $S(X) := \{f: X \rightarrow X : f \text{ ist bijektiv}\}$  mit der Komposition  $\circ$  als Verknüpfung heißt **symmetrische Gruppe** von  $X$ . Besitzt  $X$  mehr als zwei Elemente, so ist  $(S(X), \circ)$  nicht abelsch. Für  $X = \{1, 2, \dots, n\}$  schreiben wir  $S_n := S(X)$ .

#### 4.5 Definition (Ring)

Ein **Ring**  $(R, +, \cdot)$  besteht aus einer abelschen Gruppe  $(R, +)$  zusammen mit einer zusätzlichen Verknüpfung  $\cdot: R \times R \rightarrow R, (x, y) \mapsto x \cdot y$ , sodass Folgendes gilt:

- (1) Ist  $0 \in R$  das neutrale Element für  $(R, +)$ , so gilt  $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$  für alle  $x \in R$ .
- (2) Die Verknüpfung  $\cdot$  ist assoziativ.
- (3) Es gelten die **Distributivgesetze**, das heißt für alle  $x, y, z \in R$  gilt  $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$  und  $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ .

Ist  $\cdot$  kommutativ, so heißt  $R$  ein kommutativer Ring. Existiert zusätzlich ein neutrales Element  $1 \in R$  für  $\cdot$ , so heißt  $R$  ein **unitaler Ring** oder **Ring mit Eins**. Die Menge  $R^* := \{x \in R : \text{es existiert ein } x^{-1} \in R \text{ mit } x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1\}$  heißt dann die **Einheitengruppe** von  $R$ .

#### 4.7 Definition (Schiefkörper, Körper)

Sei  $R$  ein Ring mit Eins. Gilt  $R^* = R \setminus \{0\}$ , so heißt  $R$  ein **Schiefkörper**. Ist  $R$  zusätzlich kommutativ, so heißt  $R$  ein **Körper**.

#### 4.10 Definition (Komplexe Zahlen)

Sei  $\mathbb{C}$  die Menge der formalen Summen der Gestalt  $x + iy$  mit  $x, y \in \mathbb{R}$ , also

$$\mathbb{C} := \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Vermöge  $i^2 := -1$  und der Verknüpfungen

$$\begin{aligned}(a + ib) + (c + id) &:= (a + c) + i(b + d) \\ (a + ib) \cdot (c + id) &:= (ac - bd) + i(bc + ad)\end{aligned}$$

ist  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  ein Körper – der Körper der **komplexen Zahlen**. Wir definieren weiter für  $z = a + ib \in \mathbb{C}$ :

- a)  $\operatorname{Re}(z) := a$  – der **Realteil** von  $z$ .
- b)  $\operatorname{Im}(z) := b$  – der **Imaginärteil** von  $z$ .

c)  $\bar{z} := a - ib$  – das **komplex Konjugierte** von  $z$ .

d)  $|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$  – der **Betrag** von  $z$ .

#### 4.12 Lemma

Für alle  $z = a + ib, w = c + id \in \mathbb{C}$  gilt:

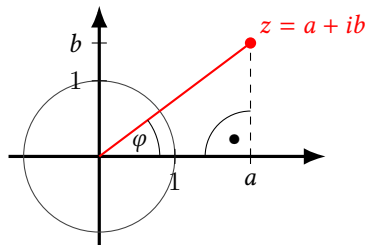
(1)  $|z|^2 = z\bar{z}$  und  $|zw| = |z| \cdot |w|$ .

(2) Ist  $z \neq 0$ , so auch  $|z|$ , und es gilt  $z^{-1} = \frac{1}{|z|^2} \bar{z}$ .

#### 4.13 Bemerkung (Polardarstellung komplexer Zahlen)

Ist  $z = a + ib \in \mathbb{C}$ , so existiert ein  $\varphi \in [0, 2\pi]$  mit  $\cos(\varphi) = \frac{a}{|z|}$  und  $\sin(\varphi) = \frac{b}{|z|}$ , das heißt es gilt

$$z = |z| \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi).$$



## 5. Vektorräume und lineare Abbildungen

### 5.1 Definition (Vektorraum)

Sei  $K$  ein Körper. Ein  **$K$ -Vektorraum** besteht aus einer Menge  $V \neq \emptyset$  versehen mit zwei Verknüpfungen

$$+ : V \times V \rightarrow V, (u, v) \mapsto u + v$$

$$\cdot : K \times V \rightarrow V, (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v,$$

sodass  $(V, +)$  eine abelsche Gruppe ist und für alle  $\lambda, \mu \in K$  und  $u, v \in V$  gilt:

(1)  $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$

(2)  $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$

(3)  $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$

(4)  $1 \cdot v = v$

### 5.2 Beispiel (Diverse Vektorräume)

(1)  $K^n$  ist ein Vektorraum mit den Verknüpfungen aus Definition 3.5(2).

(2)  $M(m \times n, K)$  ist ein Vektorraum vermöge komponentenweiser Addition und skalarer Multiplikation.



- (3) Für eine Menge  $X \neq \emptyset$  und einen  $K$ -Vektorraum  $V$  ist  $\text{Abb}(X, V) := \{f : X \rightarrow V\}$  ein Vektorraum vermöge

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x)$$

$$(\lambda f)(x) := \lambda \cdot (f(x))$$

für  $\lambda \in K, x \in X$  und  $f, g \in \text{Abb}(X, V)$ .

- (4) Der **Polynomring**  $K[T] := \{a_0 + a_1T + a_2T^2 + \dots + a_nT^n : a_i \in K, n \in \mathbb{N}_0\}$  ist ein Vektorraum vermöge

$$\sum_{k=0}^n a_k T^k + \sum_{k=0}^m b_k T^k := \sum_{k=0}^{\max(m,n)} (a_k + b_k) T^k$$

$$\lambda \cdot \left( \sum_{k=0}^n a_k T^k \right) := \sum_{k=0}^n (\lambda a_k) T^k$$

#### 5.4 Definition (Untervektorraum)

Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $U \subseteq V$  nichtleer.  $U$  heißt **Untervektorraum** von  $V$ , wenn gilt:

- (1) Für alle  $v, w \in U$  ist  $v + w \in U$ .  
 (2) Für alle  $\lambda \in K$  und  $v \in U$  ist  $\lambda v \in U$ .

#### 5.7 Definition (Lineare Abbildung)

Sei  $K$  ein Körper und  $V, W$  zwei  $K$ -Vektorräume. Eine Abbildung  $F : V \rightarrow W$  heißt **K-linear** oder **K-Vektorraum-Homomorphismus**, wenn für alle  $v, w \in V$  und  $\lambda \in K$  gilt:

$$F(\lambda v + w) = \lambda \cdot F(v) + F(w).$$

Wir definieren  $\text{Hom}(V, W) = \{F : V \rightarrow W \text{ linear}\}$ .  $\text{Hom}(V, W)$  ist ein Untervektorraum von  $\text{Abb}(V, W)$ .

#### 5.8 Beispiel (Auswertungsabbildung)

Für jedes  $x \in K$  ist die **Auswertungsabbildung**

$$\text{ev}_x : K[T] \longrightarrow K$$

$$p = \sum_{k=0}^n a_k T^k \longmapsto p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

eine lineare Abbildung

### 5.9 Definition (Isomorphismus, Kern, Bild)

Sei  $F: V \rightarrow W$  linear.

- (1) Ist  $F$  bijektiv, so heißt  $F$  ein **Isomorphismus**.  $F^{-1}$  ist ebenfalls linear. Existiert für zwei Vektorräume  $V, W$  ein Isomorphismus  $V \rightarrow W$ , so heißen  $V, W$  **isomorph** und wir schreiben  $V \simeq W$ .
- (2) Der Untervektorraum  $\text{Kern}(F) := \{v \in V : F(v) = 0_W\} \subseteq V$  heißt **Kern** von  $F$ .  
Es gilt:  $F$  injektiv  $\Leftrightarrow \text{Kern}(F) = \{0\}$ .
- (3) Der Untervektorraum  $\text{Bild}(F) := F(V) := \{F(v) : v \in V\} \subseteq W$  heißt **Bild** von  $F$ .

## 6. Lineare Abbildungen von $K^n$ nach $K^m$ und Matrizen

### 6.1 Definition (Linearkombination)

Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum,  $v_1, \dots, v_m \in V$  und  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$ , so heißt

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i v_i$$

eine **Linearkombination** der Vektoren  $v_1, \dots, v_m$  in  $V$ .

### 6.3 Lemma

Sei  $A \in M(m \times n, K)$ , dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} F_A: K^n &\longrightarrow K^m \\ x &\longmapsto Ax \end{aligned}$$

mit  $Ax$  wie in Definition 3.5(3) linear.

### 6.4 Satz (Umkehrung von Lemma 6.3)

Ist  $F: K^n \rightarrow K^m$  eine lineare Abbildung, dann ist  $A_F = (F(e_1), \dots, F(e_n)) \in M(m \times n, K)$  die eindeutige Matrix mit  $F(x) = A_F x$  für alle  $x \in K^n$ .

### 6.6 Satz

Die Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi: \text{Hom}(K^n, K^m) &\longrightarrow M(m \times n, K) \\ F &\longmapsto A_F \end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus von  $K$ -Vektorräumen mit Umkehrabbildung  $\Phi^{-1}(A) = F_A$ . Für  $A \in M(m \times n, K)$  setzen wir  $\text{Kern}(A) := \text{Kern}(F_A)$  und  $\text{Bild}(A) := \text{Bild}(F_A)$ .

### 6.8 Satz

Seien  $A \in M(m \times n, K)$  und  $b \in K^m$ . Dann gilt:

- (1) Das LGS  $Ax = b$  besitzt genau dann eine Lösung  $x \in K^n$ , wenn  $b \in \text{Bild}(A)$ .
- (2) Ist  $x_s \in K^n$  eine spezielle Lösung von  $Ax = b$ , so ist die Menge  $\mathbb{L}$  aller Lösungen von  $Ax = b$  gegeben durch

$$\mathbb{L} = x_s + \text{Kern}(A) = \{x_s + x : x \in \text{Kern}(A)\}.$$

### 6.9 Korollar

Sei  $A \in M(m \times n, K)$ . Dann sind äquivalent:

- (1) Die Gleichung  $Ax = b$  besitzt für jedes  $b \in K^m$  genau eine Lösung  $x \in K^n$ .
- (2) Es gilt  $\text{Kern}(A) = \{0\}$  und  $\text{Bild}(A) = K^m$ .
- (3) Die Abbildung  $F_A$  ist bijektiv.

### 6.13 Definition (Matrixmultiplikation)

Für  $B \in M(l \times m, K)$  und  $A \in M(m \times n, K)$  definieren wir das Produkt  $C := B \cdot A = (c_{ij})_{i,j} \in M(l \times n, K)$  durch

$$c_{ij} := \sum_{k=1}^m b_{ik} a_{kj} \quad \text{für } 1 \leq i \leq l \text{ und } 1 \leq j \leq n.$$

### 6.14 Satz

Seien  $F: K^n \rightarrow K^m, G: K^m \rightarrow K^l$  linear. Dann gilt  $A_{G \circ F} = A_G \cdot A_F$ .

Ist umgekehrt  $A \in M(m \times n, K), B \in M(l \times m, K)$ , so ist  $F_{BA} = F_B \circ F_A$ .

### 6.17 Definition (Inverse Matrix)

$A \in M(n \times n, K)$  heißt **invertierbar**, falls eine Matrix  $B \in M(n \times n, K)$  existiert mit  $BA = AB = E_n$ .  $B$  heißt die zu  $A$  **inverse Matrix** und ist eindeutig bestimmt. Wir schreiben  $A^{-1} := B$ .

### 6.19 Satz

Sei  $A \in M(n \times n, K)$ . Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (1)  $A$  ist invertierbar.
- (2)  $F_A: K^n \rightarrow K^n$  ist invertierbar und es gilt  $(F_A)^{-1} = F_{A^{-1}}$ .
- (3) Für jedes  $b \in K^n$  existiert genau eine Lösung  $x \in K^n$  für das LGS  $Ax = b$ , und es gilt  $x = A^{-1}b$ .
- (4)  $A$  lässt sich durch elementare Zeilenumformungen in die Einheitsmatrix  $E_n$

## 6.22 Definition (allgemeine lineare Gruppe)

Sei  $K$  ein Körper und sei  $n \in \mathbb{N}$ . Die Menge

$$\mathrm{GL}(n, K) := \{A \in M(n \times n, K) : A \text{ ist invertierbar}\} \subseteq M(n \times n, K)$$

ist versehen mit der Matrixmultiplikation eine Gruppe – die **allgemeine lineare Gruppe**.

## 7. Zerlegung von Matrizen in Elementarmatrizen

### 7.1 Definition (Elementarmatrizen)

Sei  $A \in M(n \times n, K)$ .

(1) Sei  $1 \leq k, l \leq n$  mit  $k \neq l$ . Definiere  $P_{kl} = (p_{ij})_{ij} \in M(n \times n, K)$  mit

$$p_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j \neq k, l \\ 1, & \text{falls } i = k \text{ und } j = l \\ 1, & \text{falls } i = l \text{ und } j = k \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad P_{kl} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & 0 & & & & & 1 \\ & & & & 1 & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & 0 & \\ & & & 1 & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Das heißt,  $P_{kl}$  ist die Einheitsmatrix, bei der die  $k$ -te und  $l$ -te Zeile vertauscht wurden. Es gilt  $P_{kl}^{-1} = P_{kl}$ .

Die Multiplikation  $P_{kl}A$  vertauscht die  $k$ -te mit der  $l$ -ten Zeile von  $A$ . Analog vertauscht  $AP_{kl}$  die entsprechenden Spalten.

(2) Sei  $k \neq l$  und  $\lambda \in K \setminus \{0\}$ . Definiere  $A_{kl}(\lambda) := E_n + \lambda \cdot E_{kl}$ , wobei  $E_{kl} = (e_{ij})_{ij} \in M(n \times n, K)$  mit

$$e_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{falls } i = k \text{ und } j = l \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad A_{kl}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Das heißt,  $A_{kl}(\lambda)$  ist die Einheitsmatrix mit einem zusätzlichen  $\lambda$  an der Stelle  $(k, l)$ . Es gilt  $A_{kl}(\lambda)^{-1} = A_{kl}(-\lambda)$ .

Die Multiplikation  $A_{kl}(\lambda)A$  bewirkt eine Addition des  $\lambda$ -fachen der  $l$ -ten Zeile von  $A$  auf die  $k$ -te Zeile, während  $AA_{kl}(\lambda)$  eine Addition des  $\lambda$ -fachen der  $k$ -ten Spalte von  $A$  auf die  $l$ -te Spalte bewirkt.

(3) Sei  $1 \leq k \leq n$  und  $\lambda \in K \setminus \{0\}$ . Definiere  $M_k(\lambda) := (m_{ij})_{ij} \in M(n \times n, K)$  durch

$$e_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j \neq k \\ \lambda, & \text{falls } i = j = k \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad M_k(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \lambda & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Das heißt,  $M_k(\lambda)$  ist die Einheitsmatrix mit einem  $\lambda$  anstatt einer 1 an der Stelle  $(k, k)$ . Es gilt  $M_k(\lambda)^{-1} = M_k(\lambda^{-1})$ .

Die Multiplikation  $M_k(\lambda)A$  multipliziert die  $k$ -te Zeile von  $A$  mit  $\lambda$ . Analog multipliziert  $AM_k(\lambda)$  die  $k$ -te Spalte von  $A$  mit  $\lambda$ .

#### 7.4 Satz

Sei  $A \in M(m \times n, K)$ . Dann existieren endlich viele Elementarmatrizen  $D_1, \dots, D_l \in M(m \times m, K)$  und  $F_1, \dots, F_r \in M(n \times n, K)$  und ein  $k \in \mathbb{N}$  mit

$$D_l \cdots D_1 A F_1 \cdots F_r = \left( \begin{array}{c|c} E_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & & & & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & & \vdots & & \vdots \\ & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right)$$

## 8. Basen endlich erzeugter $K$ -Vektorräume

### 8.1 Definition (Lineare Hülle, Erzeugendensystem)

Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und sei  $M \subseteq V$ . Dann heißt

$$\text{LH}(M) = \cap \{W : M \subseteq W, W \text{ ist Untervektorraum von } V\}$$

die **lineare Hülle** von  $M$  in  $V$ .  $\text{LH}(M)$  ist der kleinste Untervektorraum von  $V$ , der  $M$  enthält.

$M \subseteq V$  heißt **Erzeugendensystem** von  $V$ , falls  $\text{LH}(M) = V$  gilt.

$V$  heißt **endlich erzeugt**, falls ein endliches Erzeugendensystem  $M$  von  $V$  existiert.

### 8.3 Lemma

Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $M \subseteq V$ . Dann gilt:

$$\text{LH}(M) = \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i : k \in \mathbb{N}, v_1, \dots, v_k \in M, \lambda_1, \dots, \lambda_k \in K \right\}$$

Das heißt,  $\text{LH}(M)$  ist die Menge aller möglichen (endlichen) Linearkombinationen von Vektoren aus  $M$ .

### 8.4 Beispiel

Sei  $A \in M(m \times n, K)$  und  $a_1, \dots, a_n \in K^m$  die Spalten von  $A$ . Dann gilt

$$\text{Bild}(A) = \{Ax : x \in K^n\} = \text{LH}\{a_1, \dots, a_n\}.$$

### 8.5 Definition (lineare Unabhängigkeit)

Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und seien  $l \in \mathbb{N}$  und  $v_1, \dots, v_l \in V$ . Dann heißen  $v_1, \dots, v_l$  **linear unabhängig**, falls für alle  $\lambda_1, \dots, \lambda_l \in K$  gilt:

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_l v_l = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \dots = \lambda_l = 0.$$

Allgemein: Eine Menge  $M := \{v_i : i \in I\} \subseteq V$  heißt linear unabhängig, wenn jede endliche Teilmenge von  $M$  linear unabhängig ist.

### 8.9 Satz

Sei  $A \in M(m \times n, K)$  und  $a_1, \dots, a_n \in K^m$  die Spalten von  $A$ . Dann sind äquivalent:

- (1)  $a_1, \dots, a_n$  sind linear unabhängig.
- (2)  $\text{Kern}(A) = \{x \in K^n : Ax = 0\} = \{0\}$ .
- (3) Für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$  gilt:  $a_i$  ist keine Linearkombination von  $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, a_n$ .

### 8.10 Definition (Basis)

Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $B \subseteq V$ . Dann heißt  $B$  eine **Basis** von  $V$ , wenn gelten:

- (1)  $B$  ist linear unabhängig.
- (2)  $\text{LH}(B) = V$

### 8.12 Satz

Sei  $V$  ein endlich erzeugter  $K$ -Vektorraum mit  $V \neq \{0\}$  und  $B := \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ . Dann sind äquivalent:

- (1)  $B$  ist Basis von  $V$ .
- (2) Es gilt  $V = \text{LH}(B)$  und für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$  gilt  $V \neq \text{LH}(B \setminus \{v_i\})$ . Das heißt,  $B$  ist ein minimales Erzeugendensystem.
- (3)  $B$  ist linear unabhängig und für jedes  $v \in V \setminus B$  ist  $B \cup \{v\}$  nicht linear unabhängig. Das heißt,  $B$  ist maximal linear unabhängig.
- (4) Jedes  $v \in V$  lässt sich eindeutig als Linearkombination von  $B$  schreiben.

### 8.13 Satz (Basisauswahlsatz)

Sei  $V \neq \emptyset$  ein  $K$ -Vektorraum und  $M := \{v_1, \dots, v_l\} \subseteq V$  mit  $V = \text{LH}(M)$ . Dann existiert eine Teilmenge  $B \subseteq M$ , sodass  $B$  eine Basis von  $V$  ist.

### 8.15 Satz

Seien  $V, W$   $K$ -Vektorräume,  $B := \{v_1, \dots, v_n\}$  eine Basis von  $V$  und  $w_1, \dots, w_n \in W$ . Dann existiert genau eine lineare Abbildung  $F: V \rightarrow W$  mit  $F(v_i) = w_i$  für alle  $1 \leq i \leq n$ . Ferner gelten:

- (1)  $F$  injektiv  $\Leftrightarrow w_1, \dots, w_n$  sind linear unabhängig.
- (2)  $F$  surjektiv  $\Leftrightarrow \text{LH}\{w_1, \dots, w_n\} = W$ .
- (3)  $F$  bijektiv  $\Leftrightarrow \{w_1, \dots, w_n\}$  ist Basis von  $W$ .

### 8.16 Korollar

Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  eine Basis von  $V$ .

- (1) Es existiert genau ein Isomorphismus  $K^n \rightarrow V$ , und zwar

$$\begin{aligned} \Phi_B: K^n &\longrightarrow V \\ x &\longmapsto \sum_{i=1}^n x_i v_i. \end{aligned}$$

- (2) Ist  $B' = \{w_1, \dots, w_m\}$  eine weitere Basis von  $V$ , so gilt  $n = m$ .

**8.17 Definition** (Dimension)

Sei  $V \neq \{0\}$  ein endlich erzeugter  $K$ -Vektorraum mit Basis  $B := \{v_1, \dots, v_n\}$ . Wir definieren die **Dimension** von  $V$  wie folgt:

$$\dim_K(V) := \#B = n.$$

## 9. Berechnung von Basen

**9.1 Lemma** (Austauschlemma)

Sei  $\{v_1, \dots, v_l\}$  ein Erzeugendensystem des  $K$ -Vektorraums  $V$  und sei  $i \in \{1, \dots, l\}$ . Dann gilt: Ist  $w = \sum_{j=1}^l \lambda_j v_j$  mit  $\lambda_i \neq 0$ , so ist auch  $\{v_1, \dots, v_{i-1}, w, v_{i+1}, \dots, v_l\}$  ein Erzeugendensystem von  $V$ .

**9.2 Satz** (Basisergänzungssatz)

Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und sei  $\{v_1, \dots, v_n\}$  eine Basis von  $V$ . Sind dann  $w_1, \dots, w_r \in V$  linear unabhängig, so gilt  $r \leq n$  und es existiert eine Umnummerierung von  $\{v_1, \dots, v_n\}$ , sodass nach dem Umsortieren das System  $\{w_1, \dots, w_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$  eine Basis von  $V$  ist.

**9.3 Satz**

Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum mit  $\dim_K(V) = n$  und seien  $B := \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ . Dann sind äquivalent:

- (1)  $B$  ist Basis von  $V$ .
- (2)  $B$  ist linear unabhängig.
- (3)  $\text{LH}(B) = V$ .

**9.4 Satz**

Sei  $W \subseteq K^n$  ein Untervektorraum und  $w_1, \dots, w_l$  ein Erzeugendensystem von  $W$ . Dann gilt: Entsteht das System  $\{\widetilde{w}_1, \dots, \widetilde{w}_l\}$  aus  $\{w_1, \dots, w_l\}$  durch folgende Umformungen, so ist auch  $\{\widetilde{w}_1, \dots, \widetilde{w}_l\}$  ein Erzeugendensystem von  $W$ :

- (1) Vertauschen der Reihenfolge.
- (2) Multiplikation eines Vektors mit  $\lambda \in K \setminus \{0\}$ .
- (3) Addition des  $\lambda$ -fachen des  $i$ -ten Vektors auf den  $j$ -ten Vektor.

Das bedeutet: Schreiben wir  $w_1, \dots, w_k$  als Spalten in eine Matrix und führen elementare Spaltenumformungen (vgl. Definition 3.9) durch, bilden die resultierenden Nichtnullspalten ein Erzeugendensystem von  $W$ . Bringt man die Matrix auf Spaltenstufenform (vgl. Satz 3.11), erhält man dadurch eine Basis von  $W$ .



### 9.5 Definition (Transponierte Matrix)

Sei  $A = (a_{ij})_{ij} \in M(m \times n, K)$ , dann ist die **transponierte Matrix**  $A^T := (a_{ij}^T)_{ij} \in M(n \times m, K)$  von  $A$  definiert durch

$$a_{ij}^T := a_{ji},$$

das heißt  $A^T$  entsteht aus  $A$  durch "spiegeln an der Diagonalen". Es gilt  $(A^T)^T = A$ ,  $(A + B)^T = A^T + B^T$ ,  $(\lambda A)^T = \lambda A^T$  und  $(AB)^T = B^T A^T$ .

## 10. Basen und lineare Abbildungen

### 10.1 Satz (Darstellungsmatrix)

Seien  $V, W$  endlich dimensionale  $K$ -Vektorräume,  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  Basis von  $V$ ,  $C = \{w_1, \dots, w_m\}$  Basis von  $W$  sowie  $F: V \rightarrow W$  linear. Jedes  $F(v_j) \in W$  besitzt eine eindeutige Darstellung

$$F(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i \text{ mit } a_{ij} \in K.$$

Die Matrix

$${}^C A_F^B := (a_{ij})_{ij} \in M(m \times n, K)$$

heißt **Darstellungsmatrix** von  $F$  bezüglich der Basen  $B$  und  $C$ . Die Abbildung

$$\begin{aligned} \text{Hom}(V, W) &\longrightarrow M(m \times n, K) \\ F &\longmapsto {}^C A_F^B \end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus von  $K$ -Vektorräumen.

### 10.3 Lemma

Seien  $V, W$  zwei  $K$ -Vektorräume,  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  Basis von  $V$ ,  $C = \{w_1, \dots, w_m\}$  Basis von  $W$  sowie  $F: V \rightarrow W$  linear. Seien  $\Phi_B, \Phi_C$  die Isomorphismen aus Korollar 8.16. Ist  $A := {}^C A_F^B$  und  $F_A(x) := Ax$ , so ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{F} & W \\ \Phi_B^{-1} \downarrow & & \uparrow \Phi_C \\ K^n & \xrightarrow{F_A} & K^m \end{array}$$

kommutativ, das heißt es gilt  $F = \Phi_C \circ F_A \circ \Phi_B^{-1}$  bzw.  $F_A = \Phi_C^{-1} \circ F \circ \Phi_B$ .

### 10.4 Satz

Seien  $V, W, U$   $K$ -Vektorräume mit Basen  $B, C, D$  und  $F: V \rightarrow W, G: W \rightarrow U$  linear. Dann gilt:

- (1)  ${}^D A_{G \circ F}^B = {}^D A_G^C \cdot {}^C A_F^B$ .
- (2)  $F$  ist bijektiv genau dann, wenn  ${}^C A_F^B$  invertierbar ist, und dann gilt  $({}^C A_F^B)^{-1} = {}^B A_{F^{-1}}^C$ .

**10.5 Definition** (Basiswechselmatrix)

Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $B = \{v_1, \dots, v_n\}, C = \{w_1, \dots, w_n\}$  zwei Basen von  $V$  und  $\text{id}: V \rightarrow V$  die Identität auf  $V$ . Dann heißt  ${}^C A_{\text{id}}^B$  die **Basiswechselmatrix** bezüglich  $B$  und  $C$ .

**10.6 Satz**

Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $B, C, D$  Basen von  $V$ . Dann gelten:

- (1)  ${}^B A_{\text{id}}^B = E_n$ .
- (2)  ${}^D A_{\text{id}}^B = {}^D A_{\text{id}}^C \cdot {}^C A_{\text{id}}^B$ .
- (3)  $({}^C A_{\text{id}}^B)^{-1} = {}^B A_{\text{id}}^C$ .

**10.7 Satz** (Basiswechsel)

Seien  $V, W$  endlich-dimensionale  $K$ -Vektorräume,  $B_1, B_2$  Basen von  $V$  und  $C_1, C_2$  Basen von  $W$ . Dann gilt für jede lineare Abbildung  $F: V \rightarrow W$ :

$${}^{C_2} A_F^{B_2} = {}^{C_2} A_{\text{id}}^{C_1} \cdot {}^{C_1} A_F^{B_1} \cdot {}^{B_1} A_{\text{id}}^{B_2}.$$

**10.10 Satz**

Sind  $V, W$  endlich erzeugte  $K$ -Vektorräume und  $F: V \rightarrow W$  ein Isomorphismus, dann gilt  $\dim_K(V) = \dim_K(W)$ .

**10.11 Satz**

Sei  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  Basis von  $V$  und  $A \in \text{GL}(n, K)$ . Dann existiert genau eine Basis  $C = \{w_1, \dots, w_n\}$  von  $V$  mit  $A = {}^B A_{\text{id}}^C$ , und diese ist gegeben durch

$$w_j := \sum_{i=1}^n a_{ij} v_i \text{ für } 1 \leq j \leq n.$$

**10.13 Satz**

Seien  $V, W$  endlich dimensionale  $K$ -Vektorräume und sei  $F: V \rightarrow W$  linear. Dann existiert ein  $k \in \mathbb{N}_0$  und Basen  $B$  von  $V$  und  $C$  von  $W$  mit

$${}^C A_F^B = \left( \begin{array}{c|c} E_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & 0 \\ \hline 0 & & & 0 \end{array} \right)$$

**10.15 Satz** (Dimensionsformel für lineare Abbildungen)

Seien  $V, W$  endlich dimensionale  $K$ -Vektorräume und sei  $F: V \rightarrow W$  linear. Dann gilt:

$$\dim_K(V) = \dim_K(\text{Kern}(F)) + \dim_K(\text{Bild}(F)).$$

**10.16 Korollar**

Seien  $V, W$   $K$ -Vektorräume mit  $\dim_K(V) = n, \dim_K(W) = m$  und sei  $F: V \rightarrow W$  linear. Dann gelten:

- (1) Ist  $F$  injektiv, so gilt  $n \leq m$ .
- (2) Ist  $F$  surjektiv, so gilt  $n \geq m$ .
- (3) Ist  $F$  bijektiv, so gilt  $n = m$ .

**10.17 Korollar**

Seien  $V, W$   $K$ -Vektorräume mit  $\dim_K(V) = \dim_K(W) = n$  und  $F: V \rightarrow W$  linear. Dann gilt:

$$F \text{ injektiv} \quad \Leftrightarrow \quad F \text{ surjektiv} \quad \Leftrightarrow \quad F \text{ bijektiv}.$$

## II. Lineare Algebra II

### 1. Erster Abschnitt

#### 1.1 Definition (Eine Definition)

Ich bin Definition.

und ich eine Gleichung. (1)

**BEWEIS:** Ich bin ein Beweis, der die Gleichung referenziert: (1)  $\square$

Referenz auf die Definition: 1.1.

# Index

- allgemeine lineare Gruppe, 8
- Assoziativität, 2
- Auswertungsabbildung, 5
  
- Basis, 11
- Basiswechselmatrix, 14
- Betrag, 4
- Bild, 6
  
- Darstellungsmatrix, 13
- Dimension, 12
- Dimensionsformel, 14
- Distributivität, 3
  
- Einheitengruppe, 3
- elementare Zeilenumformungen, 1
- Elementarmatrix, 8
- endlich erzeugt, 10
- Erzeugendensystem, 10
  
- Gruppe, 2
  - abelsch, 3
  
- Imaginärteil, 3
- inverse Matrix, 7
- Inverses Element, 2
- invertierbar, 7
- Isomorphismus, 6
  
- Kern, 6
- komplex Konjugiertes, 4
- komplexe Zahl, 3
- Körper, 3
  
- linear unabhängig, 10
  
- lineare Hülle, 10
- Lineares Gleichungssystem, 1
- Linearkombination, 6
  
- Matrix, 1
- Matrixmultiplikation, 7
  
- Neutrales Element, 2
  
- Polynomring, 5
  
- Realteil, 3
- Ring, 3
  - kommutativ, 3
  - mit Eins, 3
  - unital, 3
  
- Schiefkörper, 3
- symmetrische Gruppe, 3
  
- transponierte Matrix, 13
  
- Untervektorraum, 5
  
- Vektorraum, 4
  
- Zeilenstufenform, 2

# Todo list

Literatur hinzufügen . . . . .	III
einfügen . . . . .	III
einfügen . . . . .	III
Link einfügen . . . . .	III
Ref. Isom. . . . .	1