



FACHBEREICH 10
MATHEMATIK UND
INFORMATIK

Modellreduktion und partielle Differentialgleichungen

Mitschrift der Tafelnotizen

Tobias Wedemeier

2. November 2015

gelesen von
Dr. Smetana

Hierbei handelt es sich um eine Mitschrift der Tafelnotizen von **Dr. Smetana**, WWU Münster, aus der Vorlesung **Modellreduktion und partielle Differentialgleichungen** im Wintersemester 2015/16. Dies ist kein Skript der Vorlesung und keine eigene Arbeit des Autors.

Für Fehler in der Mitschrift wird keine Haftung übernommen. Hinweise auf Fehler sind gerne gesehen, hierfür kann man mich in der Uni ansprechen oder alternativ eine e-Mail an: tobias.wedemeier@gmx.de. Auch ist eine Mitarbeit über Github möglich.

Wenn Teile aus der Vorlesung selber fehlen, können diese gerne an meine e-Mail versandt werden. Ich werde diese dann einarbeiten.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung und Motivation	III
1.1	Parameterabhängige PDGL	III
1.2	Definition (schwache Formulierung in Hilberträumen)	III
1.3	Definition (hochdimensionales, diskretes Modell)	III
1.4	Parameterabhängige Lösungsmenge	IV
1.5	Beispiel	IV
1.6	Definition (reduziertes Modell)	IV
1.7	Bemerkung (Begrifflichkeit)	IV
1.8	Organisation der Vorlesung	V
2	Grundlagen	V
2.1	Lineare Funktionalanalysis in Hilberträumen	V
2.1.1	Lineare Operatoren	V
2.1	Definition	V
2.2	Beispiele	VI
2.3	Lemma	VI
2.4	Definition	VI
2.5	Definition	VI
2.6	Beispiel	VII
2.7	Satz	VII
2.8	Folgerung	VII
2.9	Satz	VII
2.10	Folgerung / Beispiel:	VIII
2.11	Definition 2.11	VIII
2.12	Bemerkung	IX
2.13	Satz	IX
2.14	Satz	IX
2.1.2	Sobolevräume	X
2.15	Bemerkung	X
2.16	Definition	X
2.17	Definition	X
2.18	Lemma	X
2.19	Beispiel	X
2.20	Beispiel	X
2.21	Definition	X
2.22	Bemerkung	XI
2.23	Beispiel	XI
2.24	Satz	XI
2.25	Definition	XI
2.26	Satz	XI
2.27	Satz	XI
2.28	Satz	XI
2.29	Satz	XII
2.1.3	Schwache Formulierung elliptischer Randwertprobleme	XII
2.30	Definition	XII
2.31	Satz	XII
2.32	Bemerkung	XIII
2.33	Bemerkung	XIII



2.34 Definition	XIII
2.1.4 Regularität	XIII
2.35 Satz	XIV
2.36 Bemerkung	XIV
2.2 Ritz-Galerkin Verfahren und absrtrakte Fehlerabschätzungen	XIV
2.37 Definition	XIV
2.38 Bemerkung	XIV
2.39 Satz	XIV
2.40 Bemerkung	XV
2.41 Beispiel	XV
2.42 Folgerung	XV
2.3 Finite Elemente Verfahren	XV
2.43 Definition	XVI
2.44 Definition	XVI
2.45 Lemma	XVI
2.46 Definition	XVII

Abbildungsverzeichnis**A**

1 Einleitung und Motivation

1.1 Parameterabhängige PDGL

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ein polygonales Gebiet. Zu einem Parametervektor $\mu \in P \subseteq \mathbb{R}^d$ aus einer Menge von 'erlaubten' Parametern ist eine Funktion, z.B. 'Temperatur'

$$u(\mu) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

gesucht, so dass $-\nabla(\kappa(\mu)\nabla u(\mu)) = q(\mu)$ in Ω , wobei $u(\mu) = 0$ auf $\partial\Omega$, mit $\kappa(\mu) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dem 'Wärmeleitkoeffizient' und $q(\mu)$ eine 'Wärmequelle', z.B. $q(\mu) = 1$. Weiter kann eine Ausgabe erwünscht sein, z.B.

$$s(\mu) = \frac{1}{|\Omega_s|} \int \lim_{\Omega_s} u(x, \mu) dx,$$

die mittlere Temperatur auf Ω_s .

1.2 Definition (schwache Formulierung in Hilberträumen)

Sei X ein reeller Hilbertraum. Zu $\mu \in P$ ist gesucht ein $u(\mu) \in X$ und eine Ausgabe $s(\mu) \in \mathbb{R}$, so dass

$$b(u(\mu), v; \mu) = f(v; \mu), \quad s(\mu) = l(u(\mu); \mu) \quad \forall v \in X$$

für eine Bilinearform $b(\cdot, \cdot; \mu) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ und linearen Funktionalen $f(\cdot; \mu), l(\cdot; \mu) : X \rightarrow \mathbb{R}$. Die schwache Formulierung für Beispiel 1.1 lautet:

$$X := H_0^1(\Omega) = \left(f \in L^2(\Omega) : + \frac{d}{dx_1} f \in L^2(\Omega), f|_{\partial\Omega=0} \right)$$

Dann kann man die Bilinearform über

$$b(u(\mu), v; \mu) := \int_{\Omega} \kappa(\mu) \nabla u(\mu) \nabla v dx; \quad f(v; \mu) := \int \lim_{\Omega} q(\mu) v dx$$

ausdrücken und

$$s(\mu) = \frac{1}{|\Omega_s|} \int \lim_{\Omega_s} u(x; \mu) dx =: l(u(\mu); \mu)$$

ABER: Für sehr wenige PDGL's können wir die Lösung analytisch bestimmen. Daher sind wir an einer numerische Approximation interessiert. Ein weit verbreitetes Diskretisierungsverfahren ist die Finite Elemente Methode. Diese Methode basiert auf obiger schwacher Formulierung.

1.3 Definition (hochdimensionales, diskretes Modell)

Sei $X_h \subseteq X$ mit $\dim(X_h) = N_h < \infty$. Der Index h bezeichnet hier die Gitterweite. Zu $\mu \in P$ ist gesucht ein $u_h(\mu) \in X_h$ und eine Ausgabe $s_h(\mu) \in \mathbb{R}$, so dass

$$b(u_h(\mu), v_h; \mu) = f(v_h; \mu), \quad s_h(\mu) = l_h(v_h(\mu); \mu) \quad \forall v_h \in X_h. \quad (1.1)$$

Anwendungen für die Standarddiskretisierungsverfahren sehr teuer oder zu teuer sind:

many-query context

- Parameterstudien
- Design
- Parameteridentifikation / inverse Probleme

- Optimierung
- Statistische Analyse

schnelle Simulationsantwort

- Echtzeit-Steuerung technischer Geräte
- interaktive Benutzeroberflächen

1.4 Parameterabhängige Lösungsmenge

Sei $\mu := \{u(\mu) : \mu \in P\} \subseteq P$ für $P \in \mathbb{R}^p$ ist die durch μ parametrisierte Lösungsmenge. X ist die im Allgemeinen unendlichdimensional. \Rightarrow Motivation für die Suche nach einem 'niedrigdimensionalen' Teilraum $X_N \subseteq X$ zur Approximation von M und einer Approximation $u_N(\mu) \approx u(\mu)$, $u_N \in X_N$. Eine Möglichkeit eine reduzierte Basis zu generieren besteht darin geschickt Parameterwerte $\mu_1, \dots, \mu_N \in P$ zu wählen und den Raum als $X_N := \text{span}\{u(\mu_1), \dots, u(\mu_N)\}$ zu definieren. Eine Lösung $u(\mu_i)$ für einen Parameterwert $\mu \in P$ wird auch **Snapshot** genannt.

1.5 Beispiel

Gesucht ist $u(\cdot; \mu) \in C^2([0, 1])$ mit $(1 + \mu)u'' = 1$ auf $(0, 1)$ und $u(0) = u(1) = 1$ für den Parameter $\mu \in P := [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$.

Snapshots:

$\mu_1 = 0 \Rightarrow u_1 := u(\cdot; \mu_1) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1$, $\mu_2 = 0 \Rightarrow u_2 := u(\cdot; \mu_2) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x + 1$ und $X_N := \text{span}\{u_1, u_2\}$. Dann ist die reduzierte Lösung $u_N(\mu) \in X_N$ gegeben durch

$$u_N(\mu) = \alpha_1(\mu)u_1 + \alpha_2(\mu)u_2,$$

mit $\alpha_1 = \frac{2}{\mu+1} - 1$ und $\alpha_2 = 2 - \frac{2}{\mu-1}$. Diese erfüllt folgende Fehleraussage und ist somit exakt:

$$\|u_N(\mu) - u(\mu)\|_\infty = \sup_{\lambda \in [0,1]} |U_N(x; \mu) - u(x; \mu)| = 0$$

Da $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ und $0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq 1$ ist M die Menge der Konvexkombinationen von u_1 und u_2 .

1.6 Definition (reduziertes Modell)

Sei $X_N \subseteq X$ ein reduzierter Basisraum mit $\dim(X_N) < \infty$. Zu $\mu \in P$ ist gesucht ein $u_N(\mu) \in X_N$ und eine Ausgabe $s_N(\mu) \in \mathbb{R}$, so dass

$$b(u_N(\mu), v_N; \mu) = f(v_N; \mu), \quad s_N(\mu) = l_N(u_N(\mu); \mu) \quad \forall v_N \in X_N \quad (1.2)$$

1.7 Bemerkung (Begrifflichkeit)

Zusammengefasst unterscheiden wir zwischen den folgenden drei Modellen:

- 1) Eine partielle DGL ist ein **analytisches Modell**, welches die analytische Lösung $u(\mu) \in X$ in einem (typischerweise) ∞ -dimensionalen Funktionenraum charakterisiert ist.
- 2) Ein **hochdimensionales, diskretes Modell** ist ein Berechnungsverfahren zur Bestimmung einer Näherung $u_h(\mu) \in X_h$, wobei X_h ein hochdimensionaler Funktionenraum ist. Beispiele sind **Finite Elemente** oder **Finite Volumenräume** und typischerweise hat X_h eine Dimension von mindestens 10^5 .

- 3) Ein **reduziertes Modell** ist ein Berechnungsverfahren zur Bestimmung einer Näherung $u_N(\mu) \in X_N$ in einem sehr problemangepassten und daher niedrigdimensionalen Raum von typischerweise $\dim X_N < 100$.
- 4) **Modellreduktion** beschäftigt sich mit Modellen der Erzeugung von reduzierten Modellen aus hochdimensionalen, diskreten (oder auch analytischen) Modellen und Untersuchungen ihrer Eigenschaften.

1.8 Organisation der Vorlesung

Zentrale Fragen:

- **Reduzierte Basis:** Wie kann ein möglichst kompakter Teilraum konstruiert werden?
- **Reduziertes Modell:** Existenz von reduzierten Lösungen $u_N(\mu)$? Wie kann eine reduzierte Lösung $u_N(\mu)$ berechnet werden?
- **Effizienz:** Wie kann $u_N(\mu)$ schnell berechnet werden?
- **Stabilität:** Wie kann die Stabilität des reduzierten Modells für wachsendes N garantiert werden?
- **Approximationsgüte:** Warum können wir erwarten, dass eine relativ kleine Anzahl von Basisfunktionen ausreicht?
- **Fehlerschätzer:** Kann der Fehler des reduzierten zum vollen Modell beschränkt werden?
- **Effektivität:** Kann garantiert werden, dass der Fehlerschätzer den Fehler nicht beliebig überschätzt?

Vorläufige Gliederung (bis Weihnachten)

- 1) Einleitung / Motivation
- 2) Grundlagen:
 - Kurze Einführung in lineare Funktionalanalysis
 - Kurze Einführung in Finite Elemente
- 3) Reduzierte Basis Methoden für lineare, koerzive Probleme
 - Reduzierte Basis Verfahren
 - Offline-/ Online-Zerlegung
 - Fehlerschätzer
 - Basisgenerierung

2 Grundlagen

2.1 Lineare Funktionalanalysis in Hilberträumen

2.1.1 Lineare Operatoren

2.1 Definition (Hilbertraum)

Sei X ein reeller Vektorraum mit $(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt und induzierter Norm $\|x\| := \sqrt{(x, x)}$. falls X vollständig bzgl. $\|\cdot\|$, ist X ein (reeller) **Hilbertraum** (HR).

2.2 Beispiele (Hilbertraum)

- (1) $X := \mathbb{R}^d$ mit $(x, y) := \sum_{i=1}^d x_i y_i$ ist ein HR.
- (2) $X := L^2(\Omega)$ mit $(x, y) := \int_{\Omega} f(x)g(x)dx$ ist ein HR.
- (3) $X := C^0([0, 1])$ mit $(f, g) := \int_0^1 f(x)g(x)dx$ ist kein HR.

2.3 Lemma

Seien X und Y reelle Vektorräume. Ist die Abbildung $T : X \rightarrow Y$ linear und $x_0 \in X$, so sind äquivalent:

- (1) T ist stetig.
- (2) T ist stetig in x_0 .
- (3) $\sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y < \infty$.
- (4) \exists Konstante (mit $\|Tx\|_Y \leq c \|x\|_X \quad \forall x \in X$)

2.4 Definition (Lineare Operatoren)

Seien X und Y reelle Vektorräume. Wir definieren

$$L(X; Y) := \{T : X \rightarrow Y ; T \text{ ist linear und stetig} \}.$$

Abbildungen in $L(X; Y)$ nennen wir **lineare Operatoren**. Nach Lemma 2.3 (3) ist für jeden Operator $T \in L(X; Y)$ die **Operatornorm** von T definiert durch

$$\|T\|_{L(X; Y)} := \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y < \infty,$$

oder in kurz $\|T\|$. Es ist $L(X) := L(X; X)$.

2.5 Definition (Spezielle lineare Operatoren)

- (1) $X' := L(X; \mathbb{R})$ ist der **Dualraum** von X . Die Elemente von X' nennen wir auch **lineare Funktionale**.
- (2) Die Menge der kompakten (linearen) Operatoren von X nach Y ist definiert durch

$$K(X; Y) := \left(T \in L(X; Y) ; T(\overline{B_1(0)}) \text{ kompakt} \right).$$

- (3) Eine lineare Abbildung $P : X \rightarrow X$ heißt (lineare) **Projektion**, falls $P^2 = P$.
- (4) Für $T \in L(X; Y)$ ist $\ker(T) := \{x \in X ; Tx = 0\}$ der **Nullraum** oder **Kern** von T . Aus der Stetigkeit von T folgt, dass $\ker(T)$ ein abgeschlossener Unterraum ist. Der **Bildraum** von T ist $\text{bild}(T) := \{Tx \in Y ; x \in X\}$.
- (5) Ist $T \in L(X; Y)$ bijektiv, so ist $T^{-1} \in L(Y; X)$. Dann heißt T (linear, stetiger) **Isomorphismus**.
- (6) $T \in L(X; Y)$ heißt **Isometrie**, falls

$$\|Tx\|_Y = \|x\|_X \quad \forall x \in X$$

2.6 Beispiel

Sei $g \in L^2(\Omega)$. Dann ist nach der Hölderungleichung durch

$$T_g f := \int_{\Omega} f(x)g(x)dx$$

ein Funktional $T_g \in L^2(\Omega)'$ definiert.

2.7 Satz (Projektionssatz)

Sei X ein Hilbertraum und $A \subseteq X$ nicht leer, abgeschlossen und konvex. Dann gibt es genau eine Abbildung $P : X \rightarrow A$ mit

$$\|x - Px\|_X = \text{dist}(x, A) = \inf_{y \in A} \|x - y\|_X \quad \forall x \in X.$$

Die Abbildung $P : X \rightarrow A$ heißt orthogonale Projektion von X auf A .

Beweis: [Alt, Satz 2.2, S.96]

2.8 Folgerung

Ist $A \subseteq X$ nicht-leer, abgeschlossen und Unterraum, so ist P linear und $Px \in A$ charakterisiert durch $(x - Px, a)_X = 0 \quad \forall a \in A$. Falls $\dim(A) = n < \infty$ und $(\varphi_i)_{i=1}^n$ Orthonormalbasis von A , gilt

$$Px = \sum_{i=1}^n (x, \varphi_i)_X \varphi_i.$$

2.9 Satz (Riesz'scher Darstellungssatz)

Ist X Hilbertraum, so ist $J : X \rightarrow X'$ definiert durch

$$J(v)(w) := (v, w)_X \quad \forall v, w \in X$$

eine stetige, lineare, bijektive Isometrie. Insbesondere existiert zu $l \in X'$ ein eindeutiger **Riesz Repräsentant** $V_l := J^{-1}(l) \in X$ mit $l(\cdot) = (v_l, \cdot)_X$.

Beweis:

C-S-Ungleichung: $|J(v)(w)| \leq \|v\|_X \|w\|_X$. Dann folgt: $J(v) \in X'$ mit

$$\|J(v)\|_{X'} = \sup_{w \in X \setminus \{0\}} \frac{|J(v)(w)|}{\|w\|_X} = \sup_{w \in X \setminus \{0\}} \frac{|(v, w)_X|}{\|w\|_X} \leq \|v\|_X \Rightarrow J \text{ stetig.}$$

Da $|J(v)(v)| = \|v\|_X^2$ folgt:

$$\sup_{w \in X \setminus \{0\}} \frac{|J(v)(w)|}{\|w\|_X} \geq \frac{|J(v)(v)|}{\|v\|_X} = \frac{\|v\|_X^2}{\|v\|_X} = \|v\|_X.$$

Also ist J eine Isometrie und insbesondere ist J injektiv.

Zeige J surjektiv: Sei $l \in X'$, $l \neq 0$, $\text{Kern}(l)$ ist abgeschlossener Teilraum, also existiert $P : X \rightarrow \text{Kern}(l)$ orthogonale Projektion nach Satz 2.7. Sei $v_0 \in X$ mit $l(v_0) = 1$. Setze $v_1 := v_0 - Pv_0 \Rightarrow l(v_1) = l(v_0) = 1$ und $v_1 \neq 0$. Mit Folgerung 2.8:

$$\Rightarrow (w, v)_X = 0 \quad \forall w \in \text{Kern}(l) \Rightarrow v_1 \perp \text{Kern}(l).$$

Für $v \in X$ gilt

$$\underbrace{v - l(v) \cdot v_1}_{\in \ker(l)} + l(v) \cdot v_1$$

und $v - l(v)v_1 \in \ker(l)$ wegen

$$l(v - l(v)v_1) = l(v) - l(v)l(v_1) = 0.$$

Also ist

$$\begin{aligned} (v_1, v)_X &= \underbrace{(v_1, v - l(v)v_1)_X}_{=0, \text{ da } \ker(l) \perp v_1} + (v_1, l(v)v_1)_X \\ &= l(v) \|v_1\|_X^2 \\ &\Rightarrow l(v) = \left(\frac{v_1}{\|v_1\|_X^2}, v \right)_X = J \left(\frac{v_1}{\|v_1\|_X^2} \right) (v). \\ &\Rightarrow l \in \text{bild}(J) \Rightarrow J \text{ bijektiv.} \end{aligned}$$

□

2.10 Folgerung / Beispiel:

Mit Hilfe des Rieszschen Darstellungssatz können wir damit $L^2(\Omega)'$ - den Dualraum von $L^2(\Omega)$ - charakterisieren. Wie in 2.6 definieren wir für $g \in L^2(\Omega)$ das Funktional

$$T_g f := \int_{\Omega} f(x)g(x)dx.$$

Definition 2.11 (Bilinearformen)

Seien X_1, X_2 Hilberträume, $b : X_1 \times X_2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine Bilinearform.

(1) Falls

$$\gamma := \sup_{u \in X_1 \setminus \{0\}} \limsup_{v \in X_2 \setminus \{0\}} \frac{b(u, v)}{\|u\|_{X_1} \|v\|_{X_2}} < \infty$$

so ist b stetig mit Stetigkeitskonstante γ .

(2) Falls $X = X_1 = X_2$, definieren

$$b_s(u, v) = \frac{1}{2}b(u, v) + b(v, u), \quad b_a = \frac{1}{2}b(u, v) - b(v, u) \quad \forall u, v \in X$$

den symmetrischen bzw. antisymmetrischen ANteil von $b = b_s + b_a$.

(3) Falls $X = X_1 = X_2$, b stetig und

$$\alpha := \inf_{u \in X \setminus \{0\}} \frac{b(u, u)}{\|u\|_X^2} > 0$$

heißt b Koerziv mit Stetigkeitskonstante α .

2.12 Bemerkung

(1) $\alpha \in \mathbb{R}$ ist wohldefiniert, denn mit Stetigkeit folgt

$$\frac{b(u, u)}{\|u\|_X^2} \geq -\gamma \frac{\|u\|_X \|u\|_X}{\|u\|_X^2} = -\gamma.$$

(2) b ist koerziv bzgl. $\alpha \Leftrightarrow b_s$ ist koerziv bzgl. α .

2.13 Satz (Operatoren und Bilinearformen)

Seien X_1, X_2 Hilberträume.

(1) Zu $B \in L(X_1, X_2)$ existiert eine eindeutig definierte stetige Bilinearform $b : X_1 \times X_2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$b(u, v) = (Bu, v)_{X_2} \quad \forall u \in X_1, v \in X_2. \quad (2.1)$$

(2) Zu $b : X_1 \times X_2 \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Bilinearform existiert eindeutiges $B \in L(X_1, X_2)$ welches (2.1) erfüllt.

Beweis:

(1) b definiert durch (2.1) ist bilinear wegen Bilinearität von (\cdot, \cdot) und Linearität von B . Stetigkeit:

$$b(u, v) = (Bu, v)_{X_2} \stackrel{\text{C.S.}}{\leq} \|B\| \|u\|_{X_1} \|v\|_{X_2}$$

daraus folgt $\gamma \leq \|B\| < \infty$.

(2) Sei $u \in X_1$ fest. Dann ist $b(u, \cdot) : X_2 \rightarrow \mathbb{R}$ linear und stetig:

$$\sup_{v \in X_2 \setminus \{0\}} \frac{b(u, v)}{\|v\|_{X_2}} \leq \sup_{v \in X_2 \setminus \{0\}} \frac{\|u\|_{X_1} \|v\|_{X_2}}{\|v\|_{X_2}} \cdot \gamma = \gamma \|u\|_{X_1} < \infty.$$

Daraus folgt $b(u, \cdot) \in X_2'$ und es existiert nach Satz 2.9 ein eindeutiger Riesz-Repräsentant $v_u \in X_2$ mit $b(u, \cdot) = (v_u, \cdot)$. Definiere $B : X_1 \rightarrow X_2$ durch $Bu := v_u \in X_2$. Hiermit (2.1) und Eindeutigkeit klar. Linearität damit klar.

Stetigkeit:

$$\begin{aligned} \|Bu\|^2 &= (Bu, Bu) = (v_u, Bu)_{X_2} = b(u, Bu) \leq \gamma \|u\|_{X_1} \|Bu\|_{X_2} \\ \Rightarrow \|Bu\|_{X_2} &\leq \gamma \|u\|_{X_1} \Rightarrow \sup_{u \in X_1 \setminus \{0\}} \frac{\|Bu\|_{X_2}}{\|u\|_{X_1}} \leq \gamma. \end{aligned}$$

□

2.14 Satz von Lax-Milgram

Sei x HR, $b : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ koerzive, stetige Bilinearform mit Koerzivitätskonstante α . Dann existiert ein eindeutiger Operator $B \in L(X)$ mit

$$b(u, v) = (Bu, v) \quad \forall u, v \in X.$$

Ferner gilt: B ist bijektiv, $B^{-1} \in L(X)$ mit

$$\|B\| \leq \gamma \quad \text{und} \quad \|B^{-1}\| \leq \frac{1}{\alpha}.$$

2.1.2 Sobolevräume

2.15 Bemerkung (Motivation Sobolevräume)

Wie in 1.1 motiviert, eignet sich die sogenannte Schwache Formulierung (s. 1.2) einer PDgl besonders gut um Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen zu untersuchen. Die dazu geeigneten Räume sind die **Sobolevräume**.

2.16 Definition ($L^p_{log}(\Omega)$)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet. Dann ist der Raum $L^p_{log}(\Omega)$ definierter durch

$$L^p_{log}(\Omega) := \{u \in L^p(K) \mid \forall K \subset \Omega, K \text{ kompakt}\}.$$

2.17 Definition (schwache Ableitung)

Sei $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ ein Multiindex. Eine Funktion $u \in L^1_{log}(\Omega)$ besitzt eine schwache Ableitung $u_\alpha \in L^1_{log}(\Omega)$, wenn für alle Testfunktionen $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \cdot \int_{\Omega} u^{(\alpha)} \varphi,$$

mit $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_d^{\alpha_d}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$. Wir schreiben dann auch $u^{(\alpha)} = D^\alpha u$ für die schwache Ableitung.

2.18 Lemma

Falls $u \in C^{|\alpha|}(\bar{\Omega})$ und $|\alpha| \geq 1$, gilt: $D^\alpha u = u^{(\alpha)}$, d.h. klassische und schwache Ableitung stimmen überein.

2.19 Beispiel

Sei $\Omega = (-1, 1)$ und $u(x) = |x|$. Dann ist $u'(x) = -1(x \leq 0), 1(x > 0)$ die schwache Ableitung von u .

Beweis:

Esgilt füt beliebige $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$:

Foto

2.20 Beispiel

Im Gegensatz zu $|x|$ ist $v(x) = -1(x \leq 0)1(x > 0)$ auf $\Omega = (-1, 1)$ nicht schwach differenzierbar.

2.21 Definition (Sobolevräume)

Seien $m \in \mathbb{N}_0$, $p \in [1, \infty]$ und $u \in L^p_{log}(\Omega)$. Wir nehmen an, dass alle schwachen partiellen Ableitungen $D^\alpha u$ existieren für $|\alpha| \leq m$. Dann definieren wir die **Sobolevnormen** $\|u\|_{H^{m,p}(\Omega)}$, durch

$$\|u\|_{H^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \text{ falls } 1 \leq p < \infty$$

und für $p = \infty$ als

$$\|u\|_{H^{m,p}(\Omega)} := \max_{|\alpha| \leq m} \lim \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Schließlich definieren wir die **Sobolevräume** $H^{m,p}(\Omega)$ durch

$$H^{m,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^p_{log}(\Omega) \mid \|u\|_{H^{m,p}(\Omega)} < \infty \right\}.$$

2.22 Bemerkung

Anstelle von $H^{m,p}(\Omega)$ werden die Sobolevräume in der Literatur auch oft mit $W^{m,p}(\Omega)$ bezeichnet.

2.23 Beispiel

Seien $\Omega = B_{\frac{1}{2}}(0) \subset \mathbb{R}^2$ und $u(x) = \ln |\ln |x||$, $x \in \Omega$. Dann gilt: $u \in H^{1,2}(\Omega)$, aber $u \notin C^0(\Omega)$. D.h. Funktionen in $H^{1,p}(\Omega)$ sind in mehreren Raumdimensionen nicht notwendigerweise stetig.

2.24 Satz (Vollständigkeit von Sobolevräumen)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet. Dann ist $H^{m,p}(\Omega)$ $1 \leq p \leq \infty$, $m \in \mathbb{N}_0$ mit der in 2.21 definierten Norm ein Banachraum, $H^{m,p}(\Omega)$ ist ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$(u, v)_{H^{m,p}(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}.$$

Da wir uns mit Randwertproblemen befassen wollen, ist es notwendig zu klären in welchem Sinne wir bei Sobolevräumen von Randwerten reden können. Da die Funktionen zunächst nur bis auf Nullmengen definiert sind und der Rand eines Gebietes eine Nullmenge darstellt, auf der man L^p -Funktionen beliebig abändern kann. In der folgenden Definition klären wir zunächst was wir unter Nullrandwerten im schwachen Sinne verstehen wollen.

2.25 Definition (schwache Nullrandwerte)

Für $1 \leq p \leq \infty$ und $m \in \mathbb{N}$ definieren wir die Sobolevräume mit Nullrandwerten $H_0^{m,p}(\Omega)$ durch

$$H_0^{m,p}(\Omega) := \overline{C_0^m(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^{m,p}(\Omega)}}.$$

2.26 Satz

Für $1 \leq p < \infty$ ist $H_0^{m,p}(\Omega)$ ein abgeschlossener Teilraum von $H^{m,p}(\Omega)$ und damit ein Banachraum.

Dass aus der Definition von $H_0^{m,p}(\Omega)$ tatsächlich folgt, dass solche Funktionen Randwerte besitzen, drückt der folgende Satz aus.

2.27 Satz (Spursatz)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Lipschitz-Gebiet und $1 \leq p < \infty$. Dann gibt es einen linearen **Spuroperator** $\tau : H^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\partial\Omega)$, so dass für $u \in H^{m,p}(\Omega) \cap C^\infty(\bar{\Omega})$ gilt:

$$\tau u = u|_{\partial\Omega}.$$

Insbesondere gilt für $u \in H_0^{1,p}(\Omega) : \tau u = 0$.

Beweis:

Im Buch von Alt oder von Evans.

2.28 Satz (2. Soblev'scher Einbettungssatz)

Sei $1 \leq p < \infty$, dann gilt:

$$H^{1,p}((a, b)) \hookrightarrow C^0([a, b]),$$

d.h. dass (möglicherweise nach Änderung von Funktionswerten auf einer Nullmenge) Funktionen in $H^{1,p}((a, b))$ stetig sind.

Sei nun $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet und $1 \leq p < \infty$. Dann gilt

$$H_0^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\Omega), \text{ falls } 2 - \frac{d}{p} > 0.$$

Ist Ω ein Lipschitz-Gebiet, so gilt diese Aussage auch für Sobolevräume ohne Nullrandwerte.

Beweis:

Im Buch von Alt.

2.29 Satz (Poincaré-Friedrichs Ungleichung)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet mit Durchmesser $D := \text{diam}(\Omega)$ und $1 \leq p < \infty$. Dann gibt es eine Konstante $c_p \leq 2D$, so dass für alle $v \in H_0^{1,p}(\Omega)$ gilt:

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} \leq c_p \|\nabla v\|_{L^p(\Omega)}.$$

Beweis:

Siehe Buch von Dzink.

2.1.3 Schwache Formulierung elliptischer Randwertprobleme

Wir betrachten zunächst die stationäre Wärmeleitgleichung. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet mit glattem Rand und seinen $q \in C^0(\Omega)$ und $\kappa \in C^1(\Omega)$ mit $\kappa \geq \kappa_1 > 0$, $\kappa_1 \in \mathbb{R}$ Konstante. Gesucht ist eine Funktion $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, die sogenannte klassische Lösung, so dass

$$\begin{aligned} -\nabla(\kappa \nabla u) &= q \text{ in } \Omega, \\ u &= 0 \text{ auf } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Mit Hilfe von schwachen Ableitungen und den Sobolevräumen können wir nun den klassischen Lösungsbegriff verallgemeinern:

2.30 Definition (schwache Formulierung der stationären Wärmeleitgleichung)

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Lipschitz-Gebiet, $q \in L^2(\Omega)$ und $\kappa \in L^\infty(\Omega)$ mit $0 < \kappa_1 \leq \kappa$ für eine Konstante $\kappa_1 \in \mathbb{R}$ gegeben. Dann heißt $u \in H_0^{1,p}(\Omega)$ schwache Lösung des Randwertproblems der stationären Wärmeleitgleichung (2.2), falls für alle Testfunktionen $v \in H_0^1(\Omega)$ gilt

$$\int_{\Omega} \kappa(x) \nabla u(x) \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} q(x) v(x) dx.$$

2.31 Satz (Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen)

Unter den Voraussetzungen von Def. 2.30 gibt es genau eine schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ des Randwertproblems der stationären Wärmeleitgleichung.

Beweis:

Zunächst wird durch $l(v) := \int_{\Omega} q(x) v(x) dx$ ein lineares Funktional in $(H_0^1(\Omega))'$ definiert, denn

$$\|l(v)\|_{(H_0^1(\Omega))'} = \sup_{v \in (H_0^1(\Omega)) \setminus \{0\}} \frac{(q, v)_{L^2(\Omega)}}{\|v\|_{H^1(\Omega)}} \leq \|q\|_{L^2(\Omega)}.$$

Ferner wird wegen der Poincaré-Friedrichs Ungleichung durch

$$(w, v)_{H_0^1(\Omega)} := \int_{\Omega} \nabla w(x) \nabla v(x) dx$$

ein Skalarprodukt auf dem Hilbertraum $H_0^1(\Omega)$ definiert. Daher existiert nach dem Riesz'schen Darstellungssatz 2.9 ein eindeutiger Riesz-Repräsentant w_l mit $l(\cdot) = (w_l, \cdot)_{H_0^1(\Omega)}$.

Um den Beweis zu schließen, müssen wir noch nachweisen, dass die Bilinearform $b : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$b(w, v) := \int_{\Omega} \kappa(x) \nabla w(x) \nabla v(x) dx$$

die Voraussetzungen des Satzes von Lax-Milgram erfüllt. Wir müssen also zeigen, dass die Bilinearform b stetig und koerziv ist.

Stetigkeit:

$$b(w, v) \leq \|\kappa\|_{L^\infty(\Omega)} \|w\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Koerzitivität:

$$b(w, w) \geq \kappa_1 \|w\|_{H_0^1(\Omega)}^2.$$

Damit existiert ein bijektiver Operator $B \in L(H_0^1(\Omega))$ mit $b(u, v) = (Bu, v)_{H_0^1(\Omega)}$ und wir definieren die eindeutige Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ des Randwertproblems als $u := B^{-1}w_l$, wobei w_l der eindeutige Riesz-Repräsentant mit $l(\cdot) = (w_l, \cdot)_{H_0^1(\Omega)}$ war. \square

2.32 Bemerkung

Mit der gleichen Beweistechnik lassen sich auch allgemeinere PDgl'en behandeln, wie zum Beispiel das Randwertproblem in Divergenzform

$$\begin{aligned} -\nabla(A(x)\nabla u) + b(x)\nabla u + c(x)u &= q \text{ in } \Omega, \\ u &= 0 \text{ auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

$A(x) \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^{d \times d})$, $b(x) \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^d)$, $c(x) \in C^1(\Omega)$, wobei die Koeffizienten gewisse Anforderungen erfüllen müssen damit die Koerzitivität der entsprechenden Bilinearform nachgewiesen werden können.

2.33 Bemerkung (Reduktion auf Nullrandwerte)

Zur Betrachtung von allgemeinen Dirichletrandwerten, kann man wie folgt vorgehen. Seien $g_D \in H^1(\Omega)$ und $q \in L^2(\Omega)$, $\kappa \in L^\infty(\Omega)$, $\kappa \geq \kappa_1 > 0$. Dann ist $u \in H^1(\Omega)$ schwache Lösung von $-\nabla(\kappa(x)\nabla u(x)) = q$ in Ω und $u = g$ auf $\partial\Omega$. Wenn gilt $\tilde{u} := u - g_D \in H_0^1(\Omega)$ und für alle $v \in H_0^1(\Omega)$ gilt (2.3). Dabei ist zu bemerken, dass mit der Definition von \tilde{u} (2.3) äquivalent ist zu $\int_{\Omega} \kappa(x) \nabla \tilde{u} \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} q(x) v(x) dx - \int_{\Omega} \nabla g_D(x) \nabla v(x) dx$. Die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung folgt dann daraus, dass durch $l(v) := \int_{\Omega} q(x) v(x) dx - \int_{\Omega} \nabla g_D(x) \nabla v(x) dx$ ein lin. Funktional in $(H_0^1(\Omega))'$ definiert wird.

2.34 Definition (schwache Formulierung)

Seien X reeller Hilbertraum, $b : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige und koerzive Bilinearform mit Stetigkeitskonstante γ und Koerzivitätskonstante α und $l \in X'$. Dann bezeichnen wir mit $u \in X$ die eindeutige Lösung des Problems

$$b(u, v) = l(v) \quad \forall v \in X. \quad (2.3)$$

2.1.4 Regularität

Zur Motivation betrachte in einer Raumdimension die Dgl. $u''(x) = q(x)$ mit einer stetigen Funktion $q(x)$. Dann folgt mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, dass bereits $u \in C^2$ gelten muss.

2.35 Satz (H^2 -Regularität)

Sei Ω ein Gebiet mit glattem Rand (es gelte $\partial\Omega$ ist in C^2) oder ein konvexes Lipschitz-Gebiet. Ferner seien $q \in L^2(\Omega)$ und $\kappa \in C^1(\bar{\Omega})$. Dann gilt für die eindeutige schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ der stationären Wärmeleitungsgleichung (2.2) dass $u \in H^2(\Omega)$ und dass eine Konstante $c > 0$ existiert, so dass die folgende Abschätzung gilt:

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq c \|q\|_{L^2(\Omega)}$$

Beweis:

Für glatten Rand: Buch von Evans.

2.36 Bemerkung

Betrachtet man nicht konvexe Lipschitz-Gebiete, so kann man im Allgemeinen keine Lösung $u \in H^2(\Omega)$ erwarten.

2.2 Ritz-Galerkin Verfahren und abstrakte Fehlerabschätzungen

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit der Approximation der Lösung der schwachen Formulierung von (2.4) befassen.

2.37 Definition (Ritz-Galerkin Verfahren)

Seien X, b wie in Definition 2.34 und $X_m \subset X$ mit $\dim(X_m) = m$ ein Unterraum. Dann ist die **Ritz-Galerkin Approximation** $u_m \in X_m$ definiert durch

$$b(u_m, v_m) = l(v_m) \quad \forall v_m \in X_m.$$

2.38 Bemerkung

Die Existenz und Eindeutigkeit von u_m folgt unmittelbar aus dem Satz von Lax-Milgram 2.14, da der Unterraum X_m wieder ein Hilbertraum mit dem aus X geerbten Skalarprodukt ist.

2.39 Satz (Abstrakte Fehlerabschätzung/Lemma von Céa)

Seien X, X_m, b, u und u_m wie in den Definitionen 2.34 und 2.37 definiert. Dann gilt die abstrakte Fehlerabschätzung

$$\|u - u_m\|_X \leq \frac{\gamma}{\alpha} \inf_{v_m \in X_m} \|u - v_m\|_X.$$

Außerdem gilt die Galerkin-Orthogonalität

$$b(u - u_m, v_m) = 0 \quad \forall v_m \in X_m.$$

Beweis:

Wir zeigen zunächst die Galerkin-Orthogonalität: Dazu sei $v_m \in X_m$ und es folgt mit $X_m \subset X$:

$$b(u - u_m, v_m) = b(u, v_m) - b(u_m, v_m) = l(v_m) - l(v_m) = 0.$$

Mit der Stetigkeit und Koerzivität von b folgt weiter

$$\begin{aligned} \alpha \|u - u_m\|_X^2 &\leq b(u - u_m, u - u_m) = b(u - u_m, u - v_m) \\ &\leq \gamma \|u - u_m\|_X \|u - v_m\|_X \\ &\Rightarrow \|u - u_m\|_X \leq \frac{\gamma}{\alpha} \|u - v_m\|_X \end{aligned}$$

Gehe auf beiden Seiten der Ungleichung zum Infimum über, dann folgt die Behauptung. \square

2.40 Bemerkung

Die abstrakte Fehlerabschätzung zeigt, dass der Fehler zwischen Ritz-Galerkin Approximationen und exakter Lösung abgeschätzt werden kann durch die Bestapproximation in dem Teilraum X_m . Die weitere numerische Analyse beruht somit allein auf der Approximationstheorie. Insbesondere bestimmt im wesentlichen der Teilraum X_m die Approximationsgüte.

2.41 Beispiel (mögliche Wahl von Teilräumen)

Betrachten wir konkret die Stationäre Wärmeleitungsgleichung (2.2) oder allgemeiner ein elliptisches Problem in Divergenzform mit $X = H_0^1(\Omega)$ auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, so sind neben den Finiten Elemente Verfahren, die wir im nächsten Abschnitt betrachten wollen, vor allem folgende Wahlen von Teilräumen gebräuchlich:

- Polynomräume $X_M := \mathbb{P}^{k(m)}(\Omega) \cap \{v_m \in C^0(\bar{\Omega}) \mid v_m = 0 \text{ auf } \partial\Omega\}$, wobei $\mathbb{P}^{k(m)}(\Omega)$ der Raum der Polynome mit Grad $\leq k(m)$ über Ω ist. Die zugehörigen Verfahren nennt man **Spektralverfahren**.
- $X_m := \text{span} \{u_i \in X \mid Lu_i = \lambda u_i, i = 1, \dots, m\}$ wobei u_i die i -te Eigenfunktion des zugrundeliegenden Differentialoperators L ist.
- $X_m := \text{span} \{u_i \in X \mid \Delta u_i = \lambda u_i, i = 1, \dots, m\}$, wobei u_i die i -te Eigenfunktion des Laplaceoperators Δ ist.

2.42 Folgerung (Matrix-Vektor von Ritz-Galerkin Verfahren)

Seien X, X_m, b, u und u_m wie in den Definitionen 2.34 und 2.37 definiert und sei zudem X_m endlichdimensional, mit Dimension $m := \dim X_m$. Ist dann $\Phi := \{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ eine Basis von X_m so folgt mit der Darstellung $u_m = \sum_{i=1}^m U_i \varphi_i$ aus der Definition von u_m

$$b\left(\sum_{i=1}^m U_i \varphi_i, \varphi_j\right) = l(\varphi_j), \quad j = 1, \dots, m.$$

Durch Ausnutzen der Linearität von b im 1. Argument folgt weiter:

$$\sum_{i=1}^m b(\varphi_i, \varphi_j) u_i = l(\varphi_j), \quad j = 1, \dots, m.$$

Definieren wir also die Matrix $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ durch $\mathbf{S}_{ji} := b(\varphi_i, \varphi_j)$, $i, j = 1, \dots, m$ und die Vektoren $\mathbf{u}, \mathbf{l} \in \mathbb{R}^m$ durch $\mathbf{u}_i := U_i$, $\mathbf{l}_i := l(\varphi_i)$, $i = 1, \dots, m$, so ist u_m genau dann Lösung des Ritz-Galerkin Verfahrens, wenn u das folgende lineare Gleichungssystem löst: $\mathbf{S}\mathbf{u} = \mathbf{l}$.

2.3 Finite Elemente Verfahren

Finite Elemente Verfahren sind Spezialfälle von Ritz-Galerkin Verfahren für eine bestimmte Klasse von Teilräumen $X_h \subset X$, wobei X_h der **Finite Elemente Raum** ist. Die Konstruktion von x_h im Falle von Finite Elemente (FE) Verfahren beruht auf einer Zerlegung des Gebietes Ω in nicht überlappende Teilgebiete, die selbst wiederum einfache geometrische Objekte sind. Die einfachste Klasse von Finiten Elementen sind Lagrange Elemente, auf welche wir uns in dieser Vorlesung beschränken werden. Ferner betrachten wir nur Teilräume X_h welche auf einer simplizialen Zerlegung des Gebietes Ω beruhen. In zwei Raumdimensionen besteht das Rechengitter aus Dreiecken, in drei Raumdimensionen aus Tetraedern. Eingeschränkt auf einen Simplex wird eine Funktion aus X_h , dann ein Polynom mit Grad $\leq k$, $k \in \mathbb{N}$ sein. Für andere FE siehe z.B. das Buch von Brenner und Scott.

2.43 Definition (Simplex)

Seien $s \in \{1, \dots, d\}$ und $a_0, \dots, a_s \in \mathbb{R}^d$ Punkte, so dass $(a_j - a_0)_{j=1, \dots, s}$ linear unabhängig sind. Dann heißt

$$T := \left\{ x \in \mathbb{R}^d \mid x = \sum_{i=0}^s \lambda_i a_i, 0 \leq \lambda_i, \sum_{i=0}^s \lambda_i = 1 \right\}$$

nicht-degeneriertes s -dimensionaler Simplex im \mathbb{R}^d . Die Punkte a_0, \dots, a_s heißen Ecken des Simplex. Ist $r \in \{0, \dots, s\}$ und $\tilde{a}_0, \dots, \tilde{a}_r \in \{a_0, \dots, a_s\}$, so heißt

$$\tilde{T} := \left\{ x \in \mathbb{R}^d \mid x = \sum_{i=0}^s \lambda_i \tilde{a}_i, 0 \leq \lambda_i, \sum_{i=0}^s \lambda_i = 1 \right\}$$

r -dimensionales Seitensimplex von T . Die nulldimensionalen Seitensimplexe heißen Ecken, die eindimensionalen Kanten. Wir bezeichnen mit T_0 den Simplex zu den Punkten $a_0 = e_0 = (0, \dots, 0)$, $a_i = e_i$, $i = 1, \dots, d$, T_0 heißt d -dimensionaler Einheitssimplex. Der **Durchmesser** von T ist gegeben durch $h(T) := \text{diam}(T) = \max_{i,j=1, \dots, s} |a_i - a_j|$. Mit

$$\rho(T) := 2 \sup\{R \mid B_R(x_0) \subset T\}$$

bezeichnen wir den **Inkugeldurchmesser** von T und mit

$$\delta(T) := \frac{h(T)}{\rho(T)}$$

den Quotienten aus h und ρ .

2.44 Definition (Baryzentrische Koordinaten)

Die baryzentrischen Koordinaten $\lambda_0, \dots, \lambda_s \in [0, 1]$ eines Punktes $x \in T$ des s -dim. Simplex T sind die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$x = \sum_{i=0}^s \lambda_i a_i, \sum_{i=0}^s \lambda_i = 1.$$

Der Schwerpunkt x_s von T ist definiert durch $x_s := \frac{1}{s+1} \sum_{i=0}^s a_i$ und hat die baryzentrischen Koordinaten $\lambda_i := \frac{1}{s+1}$. Für die Eckpunkte a_k von T sind die baryzentrischen Koordinaten gegeben durch $\lambda_k = 1$, $\lambda_i = 0$, $i \neq k$. Die baryzentrischen Koordinaten sind eindeutig bestimmt.

2.45 Lemma (Referenzabbildung)

Jedes s -dimensionale Simplex T im \mathbb{R}^s ist affin äquivalent zum Einheitssimplex T_0 der gleichen Dimension. Die eindeutige affine Abbildung $F : T_0 \rightarrow T$, $F(x) = Ax + b$, $A \in \mathbb{R}^{s \times s}$, $b \in \mathbb{R}^s$, $\det A \neq 0$ mit $F(e_j) = a_j$, $j = 0, \dots, s$ heißt **Referenzabbildung**. F ist invertierbar und es gelten die Abschätzungen

$$\|\nabla F\| = \|A\| \leq \frac{h(T)}{\rho(T_0)}, \|\nabla(F^{-1})\| = \|A^{-1}\| \leq \frac{h(T_0)}{\rho(T)}$$

sowie

$$c \cdot \rho(T)^s \leq |\det(\nabla F)| = |\det A| = \frac{|T|}{|T_0|} \leq C \cdot h(T)^s, c, C > 0.$$

Beweis:

Im Buch von Dzink.

2.46 Definition (Zulässige Triangulierung)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet und

$$\mathbb{T}_h := \{T_j \mid j = 1, \dots, m, T_j \text{ ist } d\text{-dim. Simplex im } \mathbb{R}^d\}.$$

\mathbb{T}_h heißt zulässige Triangulierung der Feinheit h und Güte ρ von Ω , falls gilt:

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{j=1}^m T_j, \quad \partial\Omega = \bigcup_{j=1}^m \tilde{T}_j,$$

wobei \tilde{T}_j Flächen der Simplexe T_j sind. Für je zwei $T_1, T_2 \in \mathbb{T}_h$ mit $S := T_1 \cap T_2$ gilt $S = \emptyset$ oder S ist $(d - k)$ -dim. Seitensimplex von T_1 und T_2 für ein $k \in \{1, \dots, d\}$. Mit $h := \max_{j=1, \dots, m} h(T_j)$ und $\rho := \min_{j=1, \dots, m} \rho(T_j)$.



Abbildungsverzeichnis