Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Fachbereich 10 Mathematik und Informatik

Numerische Analysis

Mitschrift der Tafelnotizen

Tobias Wedemeier

13. April 2015

gelesen von

Prof. Dr. Ohlberger

Hierbei handelt es sich um eine Mitschrift der Tafelnotizenvon **Prof. Dr. Ohlberger**, WWU Münster, aus der Vorlesung **Numerische Analysis** im Wintersemester 2014/15. Dies ist kein Skript der Vorlesung und keine eigene Arbeit des Autors.

Für Fehler in der Mitschrift wird keine Haftung übernommen. Hinweise auf Fehler sind gerne gesehen, hierfür kann man mich in der Uni ansprechen oder alternativ eine e-Mail an: *tobias.wedemeier@gmx.de* Auch ist eine Mitarbeit über Github möglich.

Wenn Teile aus der Vorlesung selber fehlen, können diese gerne an meine e-Mail versandt werden. Ich werde diese dann einarbeiten.

Inhaltsverzeichnis

0 Einleitung

0.1 Variationsprinzip und Galerkinapproximation

Beispiel: Elastizitätstheorie in der Physik:
Gesucht: $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R},\ d = 1, 2, 3$, Gegeben: Energiefunktional $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
Aufgabe: Finde $\underset{u \in X}{\operatorname{argmin}}\, E(u)$
u entspricht der Auslenkung/Verschiebevektor, ∇u der Gradient (Jacobimatrix); der Symmetrische Gradient $\frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T) =: \epsilon(u)$, dann ist die elastische Gesamtenergie:

$$E(u) := \frac{1}{2} \int_\Omega \Theta : \epsilon(u) \mathrm{d}x - \int_\Omega f(x) u(x) \mathrm{d}x$$

mit symmetrischem **Spannungstensor** Θ und äußerer Kraft $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$.
Materialgesetz: Der Spannungstensor ist proportional zum **Verzerrungstensor**:

: ist das Skalarprodukt

$$\begin{aligned} \Theta(u) &= A\epsilon(u) \\ \Theta(u)_{i,j} &= A_{ijkl}\epsilon(u)_{kl}\ \forall i, j, k, l = 1, \dots, d \end{aligned}$$

$$\Rightarrow E(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega A\epsilon(u) : \epsilon(u) \mathrm{d}x - \int_\Omega f(x) u(x) \mathrm{d}x$$

0.2 Definition 1 (Energieminimierung/Variationsprinzip)

(a) Physikalisches Prinzip: Ein physikalisches System strebt immer in einen Zustand minimaler Energie.

(b) Mathematisches Prinzip: Sei $\bar{u}(x, t)$ eine Zustandsvariable und $E(u)$ die Energie eines Systems, das durch $\bar{u}$ repräsentiert wird. Dann strebt $\bar{u}$ gegen ein $u = u(x)$, der die Energie minimiert, d.h. falls E genügend glatt ist gilt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon} E(u + \epsilon\varphi)|_{\epsilon=0} = 0 \qquad \forall \text{zulässigen Variationen von } \varphi$$

Elastizität:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon} E(u + \epsilon\varphi)|_{\epsilon=0} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon} \left[\frac{1}{2} \int_\Omega A\epsilon(u + \epsilon\varphi) : \epsilon(u + \epsilon\varphi) \mathrm{d}x - \int_\Omega f(x) u(x) \mathrm{d}x \right]_{\epsilon=0} \\ &= \int_\Omega A\epsilon(u) : \epsilon(\varphi) \mathrm{d}x - \int_\Omega f\varphi \overset{!}{=} 0 \\ &\Rightarrow -\nabla(A\epsilon(u)) = f \text{ Dgl.} \end{aligned}$$

Diese Dgl. gliedert sich auf in

$$-\sum_{i=1}^{d} \sum_{k,l=1}^{d} \partial_{x_i} A_{ijkl}\epsilon(u)_{kl} = f_i \qquad \forall j = 1, \dots, d$$

Im 1D ergibt sich $-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(A \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} u\right) = f$, mit $A \in \mathbb{R}$. Für $A = 1 :\ -u''(x) = f$.
Im 2D ergibt sich:

$$-\nabla(A\nabla u) = f;\ A = \mathrm{id} \Rightarrow -\Delta u = f$$

0.3 Galerkinverfahren

Idee: Energieminimierung in endlich-dimensionalen Teilräumen. Sei X Funktionenraum und $E : V \to \mathbb{R}$ ein Energiefunktional. Gesucht ist $u = \operatorname*{argmin}_{v \in X} E(v)$.

Sei $X_h \subseteq X$ endlich-dimensionaler Teilraum von X. Wir erhalten die **Galerkin-Approximation**

$$u_h \in X_h : \; u_h = \operatorname*{argmin}_{v_h \in X_h} E(v_h)$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon} E(u_h + \epsilon v_h)|_{\epsilon=0} = 0 \; \forall v_h \in X_h$$

X_h endl.-dim. $\Rightarrow$ $\exists$ Basis $\Phi := \{\varphi_i | i = 1, \dots, N := \dim(X_h)\}$, mit der Basisdarstellung $u_h(x) = \sum_{i=1}^N u_i \varphi_i(x),\ u_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \dots, N$.

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon} E\left(\sum_{i=1}^N u_i \varphi_i + \epsilon \varphi_j\right)\Bigg|_{\epsilon=0} = 0 \; \forall j = 1, \dots, N$$

Dies ist ein Gleichungssystem mit N Unbekannten und N Gleichungen. Allgemein ist das System nicht linear.

0.4 Beispiel Elastizität in 1D

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 (u'(x))^2 + fu; \; A = 1$$

Betrachte

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon} E(u + \epsilon\varphi)|_{\epsilon=0} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon} \frac{1}{2} \int_0^1 (u' + \epsilon\varphi')^2 - fu|_{\epsilon=0} \\ &= \int_0^1 u'\varphi' - f\varphi\end{aligned}$$

Sei $(u, v) := \int_0^1 uv$ das L^2-Skalarprodukt, so folgt

$$(u', \varphi') = (f, \varphi) \; \forall \varphi \in X$$

Analog folgt für $u_h \in X_h$:

$$(u_h', \varphi_h') = (f, \varphi_h) \; \forall \varphi_h \in X_h$$

Sei $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ Basis von X_h, $u_h = \sum_{i=1}^N u_i \varphi_i$. Dann folgt

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^N u_i \varphi_i', \varphi_j'\right) &= (f, \varphi_j), \; j = 1, \dots, N \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^N u_i (\varphi_i', \varphi_j') &= (f, \varphi_j), \; j = 1, \dots, N \\ U_i = u_i, \; i = 1, \dots, N; \; U \in \mathbb{R}^N, \; S_{ij} &= (\varphi_i', \varphi_j'), \; S \in \mathbb{R}^{N \times N} \\ F_j &= (f, \varphi_i), \; F \in \mathbb{R}^N \\ &\Rightarrow SU = F \text{ lin. Gleichungssystem}\end{aligned}$$

1 Interpolation

Sei $\{\Phi(x, a_0, \ldots, a_n | a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R})\}$ eine Familie von Funktionen mit $x \in \mathbb{R}$. Ein Element aus dieser Familie ist durch $(n+1)$ Parameter $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ charakterisiert.
Aufgabe: Zu $(x_k, f_k) \in \mathbb{R}^2,\ k = 0, \ldots, n$ mit $x_i \neq x_k$ für $i \neq k$, finde Parameter $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, so dass

$$\Phi(x_k, a_0, \ldots, a_n) = f_k,\ k = 0, \ldots, n.$$

Dies ist ein Gleichungssystem mit $(n+1)$ Gleichungen und Unbekannten.
Familie von linearen prarmeterabh. Funktionen: Sei $f \in C^0(\mathbb{R})$ und $V \subseteq C^0(\mathbb{R})$ sei ein Teilraum mit $\dim(V) = n+1$. Sei $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ eine Basis von V, so setze

$$\Phi(x, a_0, \ldots, a_n) = \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_i(x)$$

1.1 Beispiel: Polynominterpolation

Hier wählt man $V = \mathbb{P}_n$ und z.B. $\varphi_i(x) = x^i;\ i = 0, \ldots, n.$

$$\Rightarrow \Phi(x, a_0, \ldots, a_n) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i =: p(x)$$

Aufgabe: Finde $p \in \mathbb{P}$ mit $p(x_i) = f_i,\ i = 0, \ldots, n.$

1.2 Beispiel: Trigonometrische Interpolation

$\Phi(x, a_0, \ldots, a_n) = a_0 + a_1 e^{ix} + \cdots + a_n e^{nix} = \sum_{j=0}^{n} a_j e^{jix} = a_0 = \sum_{k=1}^{n} a_k(\cos(kx) + i \sin(kx))$

1.3 Beispiel: Nicht lineare Interpolation

Exponentielle Interpolation:

$$\Phi(x, a_0, \ldots, a_n) = a_0 e^{\lambda_0 x} + \cdots + a_n e^{\lambda_n x}$$

mit $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ fest gewählt oder

$$\Phi(x, a_0, \ldots, a_n) = \sum_{i=0}^{n} a_i e^{\lambda_i x} \text{ und } (m+1) \cdot 2 = n+1$$

1.4 Beispiel: Rationale Interpolation

$$\Phi(x, a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_m) = \frac{a_0 + \cdots + a_n x^n}{b_0 + \cdots + b_m x^m}$$

mit $(m+1) \cdot 2 = n+1.$

1.5 Erweitertes Problem: Hermite-Interpolation

Aufgabe: zu Stützstellen $x_0, \ldots, x_n$ seien die Funktionswerte $f_0, \ldots, f_n$ und Ableitungen $f_0^{(p)}, \ldots, f_n^{(p)},\ p = 1, \ldots, p_{\max}$ gegeben. Ist $p_{\max} = 1$, so suchen wir ein Interpolationsproblem

$$p(x) = \sum_{i=0}^{N} a_i x^i$$

mit $(n+1) \cdot 2 = N+1$ mit $p(x_k) = f_k,\ p'(x_k) = f'(x_k),\ k = 0, \ldots, n.$

1.6 Beispiel: Spline-Interpolation

Gesucht: $\Phi \in C^q(\mathbb{R})$ mit q fest gewählt mit

$$\Phi(x_k) = f_k \text{ und } \Phi|_{[x_k, x_{k+1}]} \in \mathbb{P}_r.$$

Das heißt (q, r) bestimmen die Klasse von **Splines**.

1.7 Polynominterpolation

Gegeben: $(x_0, f_0), \ldots, (x_n, f_n) \in \mathbb{R}^2$ mit $x_i \neq x_k,\ i \neq k$.
Gesucht: $p \in Pw_N$ mit $p(x_i) = f_i,\ i = 0, \ldots, n$ und N minimal gewählt.
Beispiel: $(x_0, f_0) = (0, 0),\ (x_1, f_1) = (1, 1)$ dann folgt $p \in \mathbb{P}_1,\ p = x$ ist eindeutiges Interpolationspolynom, aber jedes Monom x^k erfüllt die Interpolationsaufgabe.

1.8 Satz 1

Es existiert genau ein $p \in \mathbb{P}_n$ mit

$$p(x_i) = f_i,\ i = 0, \ldots, n.$$

Beweis:
Sei $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ eine Basis von $\mathbb{P}_n$. Dann ist das Interpolationsproblem äquivalent zu einem linearem Gleichungssystem:

$$A \cdot a = f \text{ mit } A \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)},\ a \in \mathbb{R}^{(n+1)},\ f \in \mathbb{R}^{(n+1)}$$

so dass $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i \varphi_i(x)$ und $A_{ik} = \varphi_k(x_i)\ \forall k, i = 0, \ldots, n$, dann folgt

$$(A \cdot a)_j = \left(\sum_{k=0}^n A_{ik} a_k \right)_j = p(x_j) = f_j$$

Zeige: A ist regulär. Sei $a = (a_0, \ldots, a_n)^T$ Lösung der Gleichung $Aa = 0$, das heißt

$$\sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(x_i) = 0\ \forall i = 0, \ldots, n$$

Es ist $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(x) \in \mathbb{P}_n$. Dann hat $p \in \mathbb{P}_n$ mindestens $n + 1$ Nullstellen. Mit dem Fundamentalsatz der Algebra folgt $p \equiv 0$ und somit $a_0 = \cdots = a_n = 0$. Also ist A regulär und somit $p \in \mathbb{P}_n$ eindeutig bestimmt. □

Bemerkung
Interpolation $\Leftrightarrow Aa = f$ mit $A_{ik} = \varphi_k(x_i),\ i, k = 0, \ldots, n$.
1. Ansatz: Monombasis $\varphi_k(x) = x^k \rightsquigarrow p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ **Normalform** von $p \in \mathbb{P}_N$.

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} \varphi_0(x_0) & \ldots & \varphi_n(x_0) \\ \ddots & & \ddots \\ \varphi_0(x_n) & \ldots & \varphi_n(x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \ldots & x_1^n \\ \ddots & & & \ddots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^n \end{pmatrix}$$

Dies ist die **Vandermondsche Matrix**, insbesondere ist A vol besetzt und sie ist schlecht konditioniert.
Idee: Konstruiere eine Basis $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ so, dass gilt

$$A = \mathrm{id}$$

Dann wäre $a = f$, d.h. $a_i = f_i\ \forall i = 0, \ldots, n$ die Lösung des Interpolationsproblems.

(a) Lagrange-Form des Interpolationsproblems:

$$A = \mathrm{id} \Leftrightarrow \varphi_k(x_i) = \delta_{ik} \ (0 \leq k, i \leq n)$$

Ansatz: $\varphi_k(x) = c \cdot \prod_{i=0, i\neq k}^{n}(x - x_i) \Rightarrow \varphi_k(x_i) = 0 \ \forall i \neq k$. Aus $\varphi_k(x_k) = 1$ folgt

$$c = \left(\prod_{i=0, i\neq k}^{n} (x_k - x_i) \right)^{-1}$$

$$\Rightarrow \varphi_k(x) = \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)}, \ k = 0, \ldots, n$$

1.9 Defintion 2 (Lagrange-Polynome)

Die Polynome

$$l_k^n(x) = \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)}$$

heißen **Lagrange-Polynome** $(l_0^n, \ldots, l_n^n)$ bilden eine Basis von $\mathbb{P}_n$ und

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k l_k^n(x)$$

heißt **Lagrange-Form** von $p \in \mathbb{P}_n$. Es ist

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k l_k^n(x)$$

die Lösung des Interpolationsproblems zu $(x_0, f_0), \ldots, (x_n, f_n)$. Für die Lagrange-Polynome gilt

$$l_i^n(x_j) = \delta_{ij}.$$

Bemerkung:
Diese Darstellung ist insbesondere für die Theorie sehr nützlich, edr Nachteil ist, dass die Polynome sich bei Hinzunahme von Stützstellen ändern.

(b) Newton-Form des Interpolationsproblems:
Wähle eine Basis von $\mathbb{P}_n$, so dass A eine untere Dreiecksmatrix wird:

$$\varphi_k(x) = \prod_{j=0}^{k-1}(x - x_j) \ k = 0, \ldots, n$$

Dann gilt $\varphi_k \in \mathbb{P}_n$. Dann ist

$$\begin{aligned}
&\varphi_0(x) = 1 \text{ (verwende die Konvention, dass } \prod_{j=j_0}^{j_n} a_j = 1, \text{ falls } j_n < j_0) \\
&\varphi_1(x) = (x - x_0) \\
&\varphi_2(x) = (x - x_0)(x - x_1) \qquad \ddots
\end{aligned}$$

Es gilt $\varphi_k(x_i) = 0$ für $i < k \Rightarrow A$ ist eine untere Dreiecksmatrix.

1.10 Definiton 3 (Newton-Polynome)

Die Polynome

$$N_k^n := \prod_{j=0}^{k-1}(x - x_j)$$

heißen **Newton-Polynome** und

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k N_k^n(x)$$

heißt **Newton-Form** von $p \in \mathbb{P}_n$. Für das Interpolationsproblem gilt:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{f_0}{\varphi_0(x_0)} = f_0 \\
a_1 &= \frac{f_1 - \varphi_0(x_1 a_0)}{\varphi_1(x_1)} = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} =: f[x_0, x_1] \\
a_2 &= \dots = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} =: f[x_0, x_1, x_2]
\end{aligned}$$

Die Koeffizienten $a_0, \dots, a_n$ werden iterativ über die sogenannten **dividierten Differenzen** $f[x_0, \dots, x_n]$ berechnet ($\rightsquigarrow$ § 3).

2 Funktionsinterpolation durch Polynome

Gegeben: $x_0, \dots, x_m$ und $f \in C^0(\mathbb{R})$
Gesucht: Interpolationspolynom zu $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_n, f(x_n))$
Frage: Approximationsfehlerabschätzung:

$$||f - p||_\infty \leq ??$$

2.1 Satz 4 (Fehlerdarstellung)

Sei $f \in C^{n+1}(a, b)$ und $p \in \mathbb{P}_n$ das Interpolationsproblem zu den Stützstellen $x_0, \dots, x_n$ (paarweise verschieden). Dann existiert zu jedem $x \in (a, b)$ ein $\xi_x \in (a, b)$ mit

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x) \cdot \underbrace{\prod_{k=0}^{n}(x - x_k)}_{\text{Knotenpolynom}} \tag{$*$}$$

Index

Die Seitenzahlen *sind mit Hyperlinks zu den entsprechenden Seiten versehen, also anklickbar!*

Abbildungsverzeichnis