Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

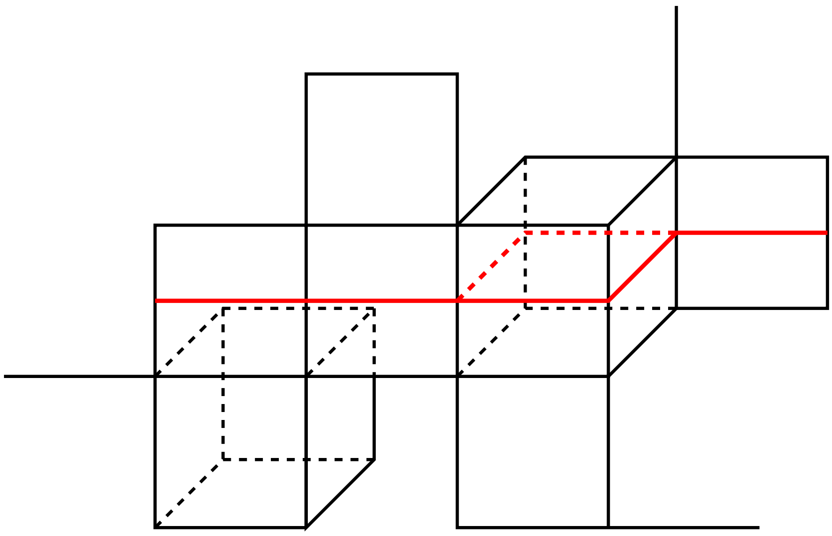
Fachbereich 10
Mathematik und
Informatik

# CAT(0) kubische Komplexe

gelesen von

**Dr. Olga Varghese**

im Wintersemester 2015/2016



Vorlesungsmitschrift von Phil Steinhorst

Stand: 28. Oktober 2015

# Vorwort

Der vorliegende Text ist eine Mitschrift zur Vorlesung CAT(0) kubische Komplexe, gelesen von Dr. Olga Varghese an der WWU Münster im Wintersemester 2015/2016. Der Inhalt entspricht weitestgehend dem Tafelanschrieb und den Vorlesungsnotizen, welche auf der Vorlesungswebsite bereitsgestellt werden. Dieses Werk ist daher keine Eigenleistung des Autors und wird nicht von der Dozentin der Veranstaltung korrekturgelesen. Für die Korrektheit des Inhalts wird keinerlei Garantie übernommen. Bemerkungen, Korrekturen und Ergänzungen kann man folgenderweise loswerden:

- persönlich durch Überreichen von Notizen oder per E-Mail
- durch Abändern der entsprechenden TeX-Dateien und Versand per E-Mail an mich
- direktes Mitarbeiten via GitHub. Dieses Skript befindet sich im `latex-wwu`-Repository von Jannes Bantje:

  `https://github.com/JaMeZ-B/latex-wwu`

## Literatur

- Bridson, Haefliger: Metric Spaces of Non-Positive Curvature [BH99]
- Serre: Trees [Ser80]
- Bekka, de la Harpe, Valette: Kazhdan's Property (T) [BHV08]

## Kommentar der Dozentin

In der geometrischen Gruppentheorie werden Gruppen als Symmetrien von Räumen betrachtet. Ihre algebraische Eigenschaften werden mittels geometrischer Eigenschaften der Räume, auf denen sie wirken, untersucht. Gruppen, die auf kubischen Komplexen wirken – das sind polyhedrische Komplexe, die aus Würfeln gebaut sind – sind dabei besonders gut verstanden.
Die Vorlesung wird eine Einführung in die Strukturtheorie CAT(0) kubischer Komplexe liefern, sowie Anwendungen in der Gruppentheorie diskutieren.

**abstrakte Gruppen**

- endliche Gruppen
- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$
- $\mathrm{Aut}(F_n)$, $\mathrm{SAut}(F_n)$
- Coxetergruppen

$$\xrightarrow[\text{Fixpunkt?}]{\Psi\colon G \to \mathrm{Isom}(X)}$$

**metrische Räume mit ”viel Geometrie”**

- $(\mathbb{R}^n, d_2)$
- Hilberträume
- simpliziale Bäume
- CAT(0) kubische Komplexe

## Geplante Themen

- CAT(0)-Räume (simpliziale Bäume, kubische Komplexe)
- Gruppenwirkungen auf CAT(0) kubische Komplexe
- Bruhat-Tits-Fixpunktsatz für CAT(0) kubische Komplexe
- Helly’s Theorem
- Kazhdan-Eigenschaft (T)

## Vorlesungswebsite

Das handgeschriebene Skript sowie weiteres Material findet man unter folgendem Link:

`http://wwwmath.uni-muenster.de/u/ag_kramer/index.php?name=KubischeKomplexe_15&menu=teach&lang=de`

Phil Steinhorst
p.st@wwu.de

# Inhaltsverzeichnis

**1 CAT(0)-Räume** **1**

**Literatur** **5**

**Index** **6**

# 1 CAT(0)-Räume

**1.1 Definition** (Metrischer Raum)

Sei $X$ eine Menge. Eine Abbildung $d\colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt **Metrik**, wenn für alle $x, y, z \in X$ gilt: 21.10.15 [1]

**(i)** $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

**(ii)** $d(x, y) = d(y, x)$

**(iii)** $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Das Paar $(X, d)$ heißt dann **metrischer Raum**.

**1.2 Beispiel**

**(i)** Für $n \in \mathbb{N}$ ist $\mathbb{E}^n := (\mathbb{R}^n, d_2)$ mit

$$\begin{aligned} d_2\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ (x, y) &\longmapsto \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}. \end{aligned}$$

**(ii)** Sei $X$ eine Menge. Wir definieren:

$$\begin{aligned} d\colon X \times X &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ (x, y) &\longmapsto \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y. \end{cases} \end{aligned}$$

Dann ist $d$ eine Metrik und $(X, d)$ heißt ein **diskreter metrischer Raum**.

**1.3 Definition** (Geodätischer Raum)

**(i)** Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum und $x, y \in X$. Eine **Geodäte** von $x$ nach $y$ ist eine Abbildung $\gamma\colon [a, b] \to X$ mit $\gamma(a) = x, \gamma(b) = y$ und $d(\gamma(t), \gamma(t')) = |t - t'|$ für alle $t, t' \in [a, b]$. Wir schreiben $\gamma\colon x \rightsquigarrow y$.

**(ii)** Der Raum $(X, d)$ ist ein **geodätischer Raum**, wenn für alle $x, y \in X$ eine Geodäte $x \rightsquigarrow y$ existiert.

**(iii)** Ein geodätischer Raum heißt **eindeutig geodätisch**, wenn genau eine solche Geodäte existiert.

**1.4 Beispiel**

**(i)** Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter reeller Vektorraum. Dann ist $(V, d_{\|\cdot\|})$ ein geodätischer Raum. Im Detail: Seien $u, v \in V$ paarweise verschieden und $L := \|u - v\| \neq 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} \gamma\colon [0, L] &\longrightarrow V \\ t &\longmapsto \left(1 - \frac{t}{L}\right) \cdot u + \frac{t}{L} \cdot v \end{aligned}$$

eine Geodäte von $u$ nach $v$.

**(ii)** $(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, d_2)$ ist nicht geodätisch: Es existiert keine Geodäte $(-1, 0) \rightsquigarrow (1, 0)$.

**(iii)** $(\mathbb{R}^2, d_1)$ ist geodätisch, aber nicht eindeutig geodätisch: In der folgenden Abbildung sind zwei Geodäten von $(1, 0) \rightsquigarrow (0, 1)$ dargestellt.

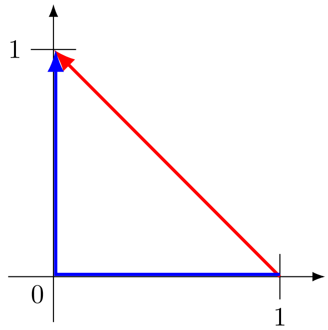



Abbildung 1.1: Der metrische Raum $(\mathbb{R}^2, d_1)$ ist nicht eindeutig geodätisch.

**1.5 Definition** (Geodätisches Dreieck)
Ein **geodätisches Dreieck** $\Delta = \Delta(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$ in einem geodätischen Raum $(X, d)$ ist gegeben durch ein Tripel $(x, y, z) \in X^3$ und Geodäten $\alpha\colon x \rightsquigarrow y$, $\beta\colon y \rightsquigarrow z$, $\gamma\colon z \rightsquigarrow x$ – den Seiten von $\Delta$.

**1.6 Beispiel**

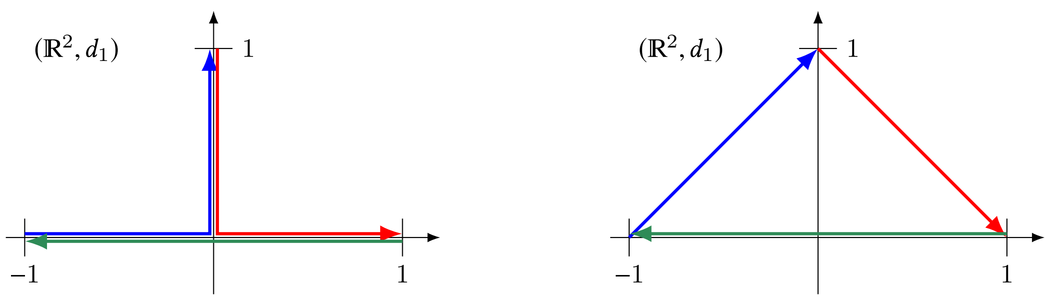



Abbildung 1.2: Geodätische Dreiecke sind im Allgemeinen durch ihre Ecken nicht eindeutig bestimmt.

Die Dreiecksungleichung garantiert, dass es Punkte $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in \mathbb{E}^2$ gibt mit $d(x,y) = d_2(\overline{x}, \overline{y})$, $d(y,z) = d_2(\overline{y}, \overline{z})$, $d(z,x) = d_2(\overline{z}, \overline{x})$ und Geodäten

$$\overline{\alpha}(t) = \overline{x} + t \cdot \frac{\overline{y} - \overline{x}}{d_2(\overline{y}, \overline{x})}, \quad \overline{\beta}(t) = \overline{y} + t \cdot \frac{\overline{z} - \overline{y}}{d_2(\overline{z}, \overline{y})}, \quad \overline{\gamma}(t) = \overline{z} + t \cdot \frac{\overline{x} - \overline{z}}{d_2(\overline{x}, \overline{z})}.$$

$\overline{\Delta} = \overline{\Delta}(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma})$ heißt **Vergleichsdreieck** zu $\Delta(x,y,z,\alpha,\beta,\gamma)$. Ist $v = \gamma(s)$ für ein $s$, so heißt $\overline{v} = \overline{\gamma}(s)$ **Vergleichspunkt** von $v$.

**1.7 Definition** (CAT(0)-Raum)

**(i)** Ein Dreieck $\Delta$ in $(X,d)$ hat die **CAT(0)-Eigenschaft**, wenn für alle $n, m$ auf den Seiten von $\Delta$ und ihre Vergleichspunkte $\overline{n}, \overline{m}$ auf den Seiten von $\overline{\Delta}$.

**(ii)** Ein metrischer Raum $(X,d)$ ist ein **CAT(0)-Raum**, wenn $(X,d)$ geodätisch ist und alle seine Dreiecke die CAT(0)-Eigenschaft erfüllen.

**(iii)** Ein metrischer Raum $(X,d)$ heißt **lokal CAT(0)**, wenn für alle $x \in X$ ein $r_x > 0$ existiert, sodass

$$B_{r_x}(x) = \{y \in X : d(y,x) < r_x\}$$

mit der induzierten Metrik ein CAT(0)-Raum ist.

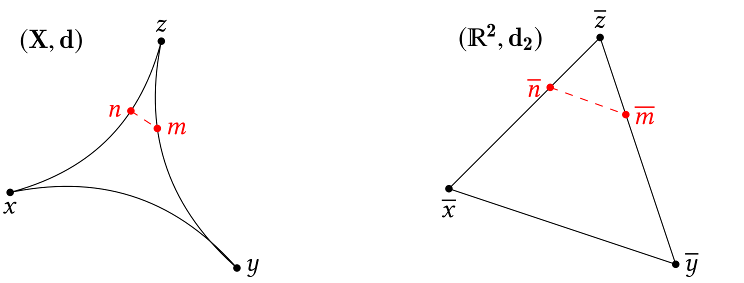



Abbildung 1.3: Anschaulich gesprochen sind Dreiecke in CAT(0)-Räumen „mindestens so dünn“ wie ihre Vergleichsdreiecke im euklidischen Raum.

**1.8 Bemerkung**

**(i)** Lokal CAT(0)-Räume heißen auch nichtpositiv gekrümmte oder Alexandrov-Räume.

**(ii)** CAT(0) steht für Cartan-Alexandrov-Topogonov und Krümmung $\leq 0$.

**1.9 Beispiel**

**(i)** Der euklidische Raum $\mathbb{E}^n$ ist CAT(0).

**(ii)** $(\mathbb{R}^2, d_1)$ ist nicht CAT(0): In der folgenden Abbildung 1.4 ist $d_1(n,m) = 2$, aber $d_2(\overline{n}, \overline{m}) = \sqrt{3}$.

**(iii)** Hilberträume sind CAT(0).

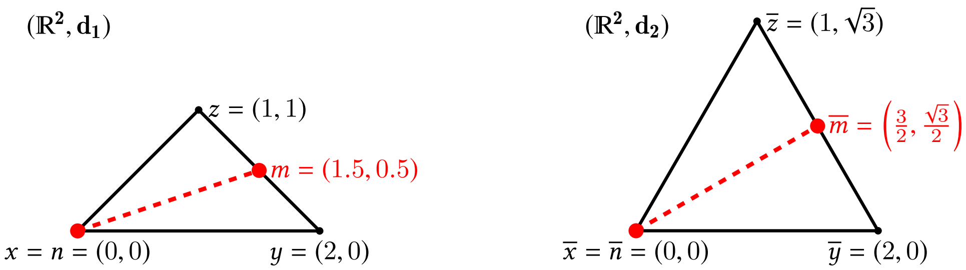



Abbildung 1.4: Der Raum $(\mathbb{R}^2, d_1)$ ist nicht CAT(0).

**(iv)** Komplemente von Polygonen im $\mathbb{R}^2$ sind lokal CAT(0), aber nicht CAT(0).

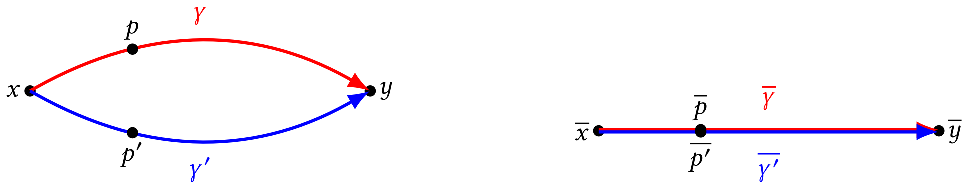
### 1.10 Beobachtung

Sei $(X, d)$ ein CAT(0)-Raum. Dann ist $X$ eindeutig geodätisch.

**Beweis:** Seien $\gamma : x \rightsquigarrow y$ und $\gamma' : x \rightsquigarrow y$ zwei Geodäten von $x$ nach $y$. Seien $p$ und $p'$ zwei Punkte auf $\gamma$ und $\gamma'$ mit $d(x,p) = d(x,p')$. Das Vergleichsdreieck $\overline{\Delta}$ zum Dreieck

$$\Delta = \Delta(x, p, y\gamma|_{[0,d(x,p)]}, \gamma|_{[d(x,p),d(x,y)]}, \gamma')$$

ist degeneriert:




Wegen der CAT(0)-Eigenschaft gilt $d(p,p') \leq d(\overline{p}, \overline{p'}) = 0$, also folgt $d(p,p') = 0$ und $p = p'$. □

### 1.11 Definition (Konvexe Menge)

Sei $X$ ein CAT(0)-Raum. Eine nichtleere Teilmenge $C \subseteq X$ heißt **konvex**, wenn zu allen $p, q \in C$ die Geodäte $\gamma : p \rightsquigarrow q$ in $C$ liegt.

Offensichtlich ist $C$ wieder ein CAT(0)-Raum und Durchschnitte konvexer Mengen sind wieder konvex.

# Literatur


[BH99] Martin R. Bridson, André Haefliger. *Metric Spaces of Non-Positive Curvature.* Springer, 1999 (siehe S. III).

[BHV08] Mohammed El Bachir Bekka, Pierre de la Harpe, Alain Valette. *Kazhdan's Property (T).* Cambridge Univ. Press, 2008 (siehe S. III).

[Ser80] Jean-Pierre Serre. *Trees.* Springer-Verlag, 1980 (siehe S. III).

# Index

CAT(0)-Raum, 3
    lokal, 3

eindeutig geodätisch, 1

Geodäte, 1
geodätischer Raum, 1
geodätisches Dreieck, 2

konvex, 4

Metrik, 1
metrischer Raum, 1
    diskret, 1

Vergleichsdreieck, 3
Vergleichspunkt, 3