

Einführung in die Algebra

Aufarbeitung der Vorlesungsnotizen

Tobias Wedemeier

4. November 2014

gelesen von

Prof. Dr. Kramer

Hierbei handelt es sich um eine Aufarbeitung der Vorlesungsnotizen von **Prof. Dr. Kramer**, WWU Münster, aus der Vorlesung **Einführung in die Algebra** im Wintersemester 2014/15. Dies ist kein Skript der Vorlesung und keine eigene Arbeit des Autors.

Für Fehler in der Aufarbeitung wird keine Haftung übernommen. Hinweise auf Fehler sind gerne gesehen, hierfür kann man mich in der Uni ansprechen oder alternativ eine e-Mail an:

tobias.wedemeier@gmx.de

Auch ist eine Mitarbeit über Github möglich.

Wenn Teile aus der Vorlesung selber fehlen, können diese gerne an meine e-Mail versandt werden. Ich werde diese dann einarbeiten.

Zum Anhang: Aussagen aus den Übungen. Die Beweise sind größtenteils aus den Musterlösungen oder vom Autor selber und sind verkürzt oder vereinfacht, für die Korrektheit wird keine Haftung übernommen. Sie sind nur zum Verständnis gedacht.

Inhaltsverzeichnis

1	Elementare Gruppentheorie	1
1.1	Definition Gruppe	1
1.2	Beispiel 1	1
1.3	Beobachtungen	1
1.4	Lemma 1 (Sparsame Definition von Gruppen)	1
1.5	Beispiel 2	2
1.6	Definition zentralisieren	2
1.7	Beispiel 3	2
1.8	Definition Untergruppe	2
1.9	Lemma 2	3
1.10	Definition $\langle X \rangle$	3
1.11	Definition zyklische Gruppe	3
1.12	Zyklische Gruppen	3
1.13	Nebenklassen	4
1.14	Satz von Lagrange	5
1.15	Homomorphismen	6
1.16	Satz Gruppenhomomorphismen	6
1.17	Normalteiler	7
1.18	Definition Teilmengen assoziativ	7
1.19	Definition π_H	8
1.20	Der Homomorphiesatz	8
1.21	Definition Isomorphismus	9
1.22	Satz Eigenschaften von Gruppenhomomorphismen	9
1.23	Die Isomorphiesätze	10
1.24	Produkte von Gruppen	12
	Aussagen aus den Übungen	A
	Index	C
	Abbildungsverzeichnis	D

1 Elementare Gruppentheorie

Erinnerung: eine Verknüpfung auf einer nicht leeren Menge X ist eine Abbildung

$$X \times X \rightarrow X, (x, y) \mapsto m(x, y).$$

Häufig schreibt man $m(x, y) = xy$ oder $m(x, y) = x + y$, je nach Kontext. Die Schreibweise $m(x, y) = x + y$ wird eigentlich nur für kommutative Verknüpfungen benutzt, d.h. wenn $\forall x, y \in X$ gilt $m(x, y) = m(y, x)$.

1.1 Definition Gruppe

Eine **Gruppe** (G, \cdot) besteht aus einer Verknüpfung \cdot auf einer nicht leeren Menge G , mit folgenden Eigenschaften:

- (G1) Die Verknüpfung ist assoziativ, d.h. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ gilt $\forall x, y, z \in G$.
(Folglich darf man Klammern weglassen.)
- (G2) Es gibt ein neutrales Element $e \in G$, d.h. es gilt $e \cdot x = x \cdot e = x \forall x \in G$
- (G3) Zu jedem $x \in G$ gibt es ein Inverses $y \in G$, d.h. $xy = e = yx$.
man schreibt dann auch $y = x^{-1}$ für das Inverse zu x .

Fordert man von der Verknüpfung nur (G1) und (G2), so spricht man von einer Halbgruppe mit Eins oder einem **Monoïd**. Fordert man nur (G1), so spricht man von einer Halbgruppe.

1.2 Beispiel 1

- $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +)$ sind kommutative Gruppen.
- $(\mathbb{Z}, \cdot), (\mathbb{N}, \cdot), (\mathbb{N}, +)$ sind Monoïde.

1.3 Beobachtungen

- a) Das Neutralelement (einer Verknüpfung) ist eindeutig bestimmt: sind e, e' beides Neutralelemente, so folgt: $e = ee' = e'$
- b) Das Inverse zu x ist eindeutig bestimmt:
 $xy = e = xy' = y'x \Rightarrow y' = y'e = y'xy = ey = y$

1.4 Lemma 1 (Sparsame Definition von Gruppen)

Sei $G \times G \rightarrow G$ eine assoziative Verknüpfung. Dann ist G schon eine Gruppe, wenn gilt:

- (i) es gibt $e \in G$ so, dass $ex = x \forall x \in G$ gilt.
- (ii) zu jedem $x \in G$ gibt es ein $y \in G$ mit $yx = e$

Beweis

Sei $yx = e$, es folgt $xyx = y$. Wähle z mit $zy = e$, es folgt $\underbrace{zy}_{=e} xy = zy = e \Rightarrow xy = e$

Weiter gilt $xe = xyx = ex = x$.

□

1.5 Beispiel 2

Sei X eine nicht leere Menge, sei $X^X = \{f : X \rightarrow X\}$ die Menge aller Abbildungen von X nach X . Als Verknüpfung auf X nehmen wir die Komposition von Abbildungen. Dann gilt wegen $f = id_X \circ f = f \circ id_X$, dass id_X ein Neutralelement ist.

Damit haben wir ein Monoid (X^X, \circ) .

Sei $Sym(X) = \{f : X \rightarrow X \mid f \text{ bijektiv}\}$. Zu jedem $f \in Sym(X)$ gibt es also eine Umkehrabbildung $g : X \rightarrow X$ mit $f \circ g = g \circ f = id_X$. Folglich ist $(Sym(X), \circ)$ eine Gruppe, die **Symmetrische Gruppe**. Wenn X endlich ist mit n Elementen, so gibt es genau $n! = n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1$ Permutationen, also hat $Sym(X)$ dann genau $n!$ Elemente.

Für $X = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ schreibt man auch $Sym(X) = Sym(n) (= S_n)$.

1.6 Definition zentralisieren

Sei $G \times G \rightarrow G$ eine Verknüpfung. Wir sagen, $x, y \in G$ vertauschen oder kommutieren oder x **zentralisiert** y , wenn gilt $xy = yx$.

Eine Gruppe, in der alle Elemente vertauschen heißt kommutativ oder **abelsch**.

1.7 Beispiel 3

(a) $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{Q}^*, \cdot)$ sind abelsche Gruppen.

(b) K Körper, $G = Gl_2(K) = \{X \in K^{2 \times 2} \mid \det(X) \neq 0\}$ Gruppe der invertierbaren 2×2 Matrizen.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

\Rightarrow nicht abelsch, genauso $Gl_n(K)$ für $n \geq 2$.

(c) $Sym(2)$ ist abelsch, aber $Sym(3)$ nicht. Allgemein ist $Sym(X)$ nicht abelsch, falls $\#X \geq 3$ gilt.

1.8 Definition Untergruppe

Sei G eine Gruppe, sei $H \subseteq G$. Wir nennen H **Untergruppe** von G , wenn gilt:

(UG1) $e \in H$

(UG2) $x, y \in H \Rightarrow xy \in H$

(UG3) $x \in H \Rightarrow x^{-1} \in H$

Offensichtlich ist eine Untergruppe dann wieder eine Gruppe, mit der von G vererbten Verknüpfung.

Bsp

(a) $(\mathbb{Q}, +)$. \mathbb{Z} ist Untergruppe, denn $0 \in \mathbb{Z}, m, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow m + n \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{Z} \Rightarrow -n \in \mathbb{Z}$

(b) (\mathbb{Q}^*, \cdot) . \mathbb{Z}^* ist keine Untergruppe, kein Inverses.

1.9 Lemma 2

Sei G eine Gruppe und sei U eine nicht leere Menge von Untergruppen von G . Dann ist auch $\bigcap U = \{g \in G \mid \forall H \in U \text{ gilt } g \in H\}$ eine Untergruppe von G .

Beweis

Für alle $H \in U$ gilt $e \in H$, also $e \in \bigcap U$. Angenommen $x, y \in \bigcap U$. Dann gilt für alle $H \in U$, dass $xy \in H$ sowie $x^{-1} \in H$. Es folgt $xy \in \bigcap U$ sowie $x^{-1} \in \bigcap U$. \square

1.10 Definition $\langle X \rangle$

Sei G eine Gruppe und $X \subseteq G$ eine Teilmenge. Wir setzen:

$$\langle X \rangle = \bigcap \{H \subseteq G \mid H \text{ Untergruppe und } X \subseteq H\}$$

Ist nicht leer, da mindestens G enthalten ist.

- Es gilt z.B. $\langle \emptyset \rangle = \{e\}$, denn $\{e\}$ ist Untergruppe.
- Ist $H \subseteq G$ Untergruppe mit $X \subseteq H$, so folgt $X \subseteq \langle X \rangle \subseteq H$, insb. also $\langle H \rangle = H$.

Satz

Sei $X \subseteq G$ und sei $W = \{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_s \mid s \geq 1, x_i \in X \text{ oder } x_i^{-1} \in X \forall i = 1, \dots, s\}$.

Dann gilt: $\langle X \rangle = \{e\} \cup W$.

Beweis

Wegen $X \subseteq \langle X \rangle$ und $e \in \langle X \rangle$ folgt $\{e\} \cup W \subseteq \langle X \rangle$. Ist $f, g \in W$, so folgt $fg \in W$ sowie $f^{-1} \in W$, also ist $H = \{e\} \cup W$ eine Untergruppe von G , mit $X \subseteq H$. Es folgt $\langle X \rangle \subseteq H = \{e\} \cup W$. \square

1.11 Definition zyklische Gruppe

Sei G eine Gruppe und sei $g \in G$. Für $n \geq 1$ setze $g^n = \underbrace{g \cdot \dots \cdot g}_{n\text{-mal}}$ sowie $g^{-n} = \underbrace{g^{-1} \cdot \dots \cdot g^{-1}}_{n\text{-mal}}$ und

$$g^0 = e.$$

Dann gilt $\forall k, l \in \mathbb{Z}$, dass $g^k \cdot g^l = g^{k+l}$.

Sei $\langle g \rangle = \langle \{g\} \rangle \stackrel{1.10}{=} \{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Man nennt $\langle g \rangle$ die von g erzeugte **zyklische Gruppe**. Wenn für ein $n \geq 1$ gilt $g^n = e$, so heißt n ein **Exponent** von g . Die **Ordnung** von g ist der kleinste Exponent von g ,

$$o(g) = \min(\{n \geq 1 \mid g^n = 1\} \cup \{\infty\})$$

$o(g) = \infty$ bedeutet: $g^n \neq e \forall n \geq 1$

$o(g) = 1$ bedeutet: $g^n = g = e$

1.12 Zyklische Gruppen

Eine Gruppe G heißt **zyklisch**, wenn es ein $g \in G$ gibt mit $G = \langle g \rangle$. Wegen $g^k g^l = g^{k+l} = g^{l+k} = g^l g^k$ gilt: zyklische Gruppen sind abelsch.

Satz

Sei $G = \langle g \rangle$ zyklisch mit $o(g) = n < \infty$. Dann gilt $\#G = n$ und $G = \{g, g^1, g^2, g^3, \dots, g^n\}$. **Beweis**
Jedes $m \in \mathbb{Z}$ lässt sich schreiben als $m = kn + l$ mit $0 \leq l < n$ (Teilen mit Rest), also $g^m = \underbrace{g^{kn}}_{=e} \cdot g^l = g^l$.

Es folgt $G \subseteq \{g, g^2, \dots, g^n\}$, $g^n = g^0$. Ist $g^k = g^l$ für $0 \leq k \leq l < n$, so gilt $e = g^0 = g^{l-k}$, also $l - k = 0$ (wegen $l < n$), also $\#\{g, g^2, \dots, g^n = g^0\} = n$. \square

Folgerung

Ist G endlich mit $\#G = n$ und ist $h \in G$ mit $O(h) = n$, so folgt $\langle h \rangle = G$. Insbesondere ist dann G eine zyklische Gruppe. \square

1.13 Nebenklassen

Sei G eine Gruppe und sei H eine Untergruppe. Sei $a \in G$. Wir definieren:

$$aH = \{ah | h \in H\} \subseteq G$$

$$Ha = \{ha | h \in H\} \subseteq G$$

Man nennt aH die **Linksnebenklassen** von a bzgl. H (und Ha die **Rechtsnebenklassen**). In nicht abelschen Gruppen gilt im allgemeinen $aH \neq Ha$.

Lemma

Sei $H \subseteq G$ Untergruppe der Gruppe G und $a, b \in G$. Dann sind äquivalent:

- (i) $b \in aH$
- (ii) $bH = aH$
- (iii) $bH \cap aH \neq \emptyset$

Beweis

- (i) \Rightarrow (ii) : $b \in aH \Rightarrow b = ah$ für ein $h \in H \Rightarrow bH = \{ahh' | h' \in H\}$
 $\stackrel{H \text{ Untergruppe}}{=} \{ah'' | h'' \in H\} = aH$
- (ii) \Rightarrow (iii) : klar
- (iii) \Rightarrow (i) : Sei $g \in bH \cap aH$, $g = bh = ah' \Rightarrow b = ah'h^{-1} \in aH$, da H Untergruppe

\square

Folgerung

Jedes $g \in G$ liegt in genau einer Linksnebenklasse bzgl. H , nämlich $g \in gH$. Entsprechendes gilt natürlich für Rechtsnebenklassen. Man setzt:

$G/H = \{gH \mid g \in G\}$ Menge der Linksnebenklasse, Rechtsnebenklassen analog.

Lemma

Sei $H \subseteq G$ Untergruppe der Gruppe G , sei $a \in G$. Dann ist die Abbildung $H \rightarrow gH, h \mapsto gh$ bijektiv.

Beweis

'Surjektiv' ist klar nach Definition von gH . Angenommen, $gh = gh' \Rightarrow h = g^{-1}gh' = h'$

\square

1.14 Satz von Lagrange

Sei G eine Gruppe und $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Wenn zwei der drei Mengen $G, H, G/H$ endlich sind, dann ist die dritte ebenfalls endlich und es gilt:

$$\#G = \#H \cdot \#G/H$$

Insbesondere ist dann $\#H$ eine **Teiler** von $\#G$.

Beweis

Wenn G endlich ist, dann sind auch H und G/H endlich.

Angenommen, G/H und H sind endlich. Dann ist auch $G = \bigcup G/H = \bigcup \{gH \mid gH \in G/H\}$ endlich, da $\#gH = \#H$ nach 1.13.

Jetzt zählen wir genauer: sei $\#G/H = m; \#H = n$ etwa $G/H = \{g_1H, g_2H, \dots, g_mH\}$.

$g_iH \stackrel{1.13}{=} n$ $g_iH \cap g_jH = \emptyset$ für $i \neq j$ nach 1.13.

$G = g_1H \cup \dots \cup g_mH \Rightarrow \#G = m \cdot n$ □

Bem

(1) Eine entsprechende Aussage gilt für Rechtsnebenklassen.

(2) Die Abbildung $G \rightarrow G, g \mapsto g^{-1}$ bildet die Linksnebenklassen bijektiv auf die Rechtsnebenklassen ab:

$$(gH)^{-1} = \{(gh)^{-1} \mid h \in H\} \stackrel{\text{Achtung!}}{=} \{h^{-1}g^{-1} \mid h \in H\} = \{hg^{-1} \mid h \in H\} = Hg^{-1} \quad (\text{ÜA})$$

Korollar A (Lagrange)

Sei G eine endliche Gruppe und sei $g \in G$. Dann teilt $o(g)$ die Zahl $\#G$.

Beweis

Da G endlich ist, folgt $o(g) < \infty$. Nach dem Satz von Lagrange ist $\#\langle g \rangle = o(g)$ ein Teiler von $\#G$. □

Korollar B

Sei G eine endliche Gruppe, sei p eine **Primzahl** (d.h. die einzigen Teiler von p sind 1 und p) und $p > 1$. Wenn gilt $\#G = p$, dann ist G zyklisch. Für jedes $g \in G \setminus \{e\}$ gilt $\langle g \rangle = G$.

Beweis

Sei $g \in G \setminus \{e\}$. Dann ist $o(g) > 1$ und $o(g)$ teilt p . Es folgt $o(g) = p$, also $G = \langle g \rangle$ vgl. 1.12. □

Für endliche Gruppen sind Teilbarkeitseigenschaften wichtig, wie wir sehen werden.

Die Zahl $\#G/H := [G : H]$ nennt man auch den **Index von H in G**.

Wichtige Rechenregeln in Gruppen

(a) Man darf kürzen

$$ax = ay \Rightarrow x = y$$

$$xa = ya \Rightarrow x = y$$

(multipliziere beide Seiten von links/rechts mit a^{-1})

(b) Es gilt $(x^{-1})^{-1} = x$ ($x^{-1}x = e = xx^{-1} \Rightarrow (x^{-1})^{-1} = x$)

(c) Beim Invertieren darf die Reihenfolge umgedreht werden:

$$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} \quad (ab(b^{-1}a^{-1}) = e = (b^{-1}a^{-1})ab \Rightarrow (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1})$$

(in abelschen Gruppen gilt natürlich damit $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$)

1.15 Homomorphismen

Seien G, K Gruppen. Eine Abbildung $\varphi : G \rightarrow K$ heißt **(Gruppen-)Homomorphismus**, wenn $\forall x, y \in G$ gilt

$$\underbrace{\varphi(x \cdot y)}_{\text{Verknüpfung in } G} = \underbrace{\varphi(x)\varphi(y)}_{\text{Verknüpfung in } K}$$

Bsp

(a) $\text{id}_G : G \rightarrow G$ ist Homomorphismus

(b) $H \subseteq G$ Untergruppe $i : H \hookrightarrow G, h \mapsto h$ Inklusion, ist Homomorphismus.

(c) $(G, \cdot) = (\mathbb{Z}, +)$ $m \in \mathbb{Z}$ $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto mx$ ist Homomorphismus, denn $\phi(x + y) = m(x + y) = mx + my = \varphi(x) + \varphi(y)$

(d) G Gruppe, $a \in G, a \neq e, \lambda_a(x) = ax$.

$\lambda : G \rightarrow G$ ist kein Homomorphismus, denn $\lambda_a(e) = a, \lambda(ee) = a$, aber $\lambda_a(e)\lambda_a(e) = aa \neq a$

Lemma

Sei $\varphi : G \rightarrow K$ ein Homomorphismus von Gruppen. Dann gilt $\varphi(e_G) = e_K$ und $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1} \forall x \in G$. (e_G Neutralelement in G und e_K Neutralelement in K)

Beweis

$$\begin{aligned}\varphi(e_G) &= \varphi(e_G \cdot e_G) = \varphi(e_G) \cdot \varphi(e_G) \xrightarrow{\text{kürzen}} e_K = \varphi(e_G) \\ e_K &= \varphi(e_G) = \varphi(x^{-1}x) = \varphi(x^{-1})\varphi(x) \Rightarrow \varphi(x)^{-1} = \varphi(x^{-1})\end{aligned}$$

□

Achtung: $\varphi(x)^{-1}$ ist das Inverse in K von $\varphi(x)$ nicht die Umkehrabbildung!

Das **Bild** eines Homomorphismus $\varphi : G \rightarrow K$ ist $\varphi(G) \subseteq K$,
der **Kern** ist $\ker(\varphi) = \{x \in G \mid \varphi(x) = e_K\} \subseteq G$

1.16 Satz Gruppenhomomorphismen

Bild und Kern von Gruppenhomomorphismen sind Untergruppen.

Beweis

Setze $H = \varphi(G) \subseteq K$. Es folgt $e_K \in H$. Für $\varphi(x), \varphi(y) \in H$ gilt $\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(xy) \in H$ sowie $\varphi(x)^{-1} = \varphi(x^{-1}) \in H$, also ist H Untergruppe. Betrachte jetzt $\ker(\varphi) \subseteq G$. Es gilt $\varphi(e_G) = e_K$, also $e_G \in \ker(\varphi)$. Ist $x, y \in \ker(\varphi)$, so folgt

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) = e_K \cdot e_K = e_K, \text{ also } xy \in \ker(\varphi)$$

$$\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1} = e_K^{-1} = e_K, \text{ also } x^{-1} \in \ker(\varphi)$$

□

Bemerkung:

Jede Untergruppe von $H \subseteq G$ ist Bild eines geeigneten Homomorphismus (nämlich der Inklusion $H \hookrightarrow G$). Wir werden sehen, dass im allgemeinen nicht jede Untergruppe $H \subseteq G$ Kern eines Homomorphismus ist.

1.17 Normalteiler

Sei G eine Gruppe und $N \subseteq G$ eine Untergruppe. Wir nennen N **normal** in G oder **Normalteiler** in G , wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

- (i) für alle $a \in G$ gilt $aN = Na$ (Rechtsnebenklassen sind Linksnebenklassen)
- (ii) für alle $a \in G$ gilt $aNa^{-1} = N(aNa^{-1} = \{ana^{-1} \mid n \in N\})$
- (iii) für alle $a \in G$ gilt $aN \subseteq Na$
- (iv) für alle $a \in G$ gilt $aNa^{-1} \subseteq N$

Beweis:

(i) und (ii) sind äquivalent: multipliziere von rechts mit a^{-1} bzw. a . Genauso sind (iii) und (iv) äquivalent. Klar: (ii) \Rightarrow (iv) (\checkmark)

Zeige (iv) \Rightarrow (ii): Setze $b = a^{-1}$, es folgt aus (iv), dass $bNb^{-1} \subseteq N \rightsquigarrow N \subseteq b^{-1}Nb = aNa^{-1}$. Also gilt für alle $a \in G$, dass $N \subseteq aNa^{-1}$ und $aNa^{-1} \subseteq N$, damit gilt (ii) \square

Lemma

Ist $\varphi : G \rightarrow K$ ein Homomorphismus von Gruppen, dann ist $\ker(\varphi)$ ein Normalteiler in G .

Beweis:

Sei $N = \ker(\varphi) = \{n \in G \mid \varphi(n) = e\}$, sei $a \in G$. Dann gilt

$$\varphi(ana^{-1}) = \varphi(a) \underbrace{\varphi(n)}_{=e} \varphi(a^{-1}) = \varphi(a)\varphi(a^{-1}) = e$$

also gilt $aNa^{-1} \subseteq N \quad \forall a \in G$. \square

Achtung:

Bilder von Homomorphismen sind nicht immer Normalteiler, nach Beispiel 1.15 (b) ist jede Untergruppe Bild eines Homomorphismus, aber nicht jede Untergruppe ist normal.

Beispiel:

$G = \text{Sym}(3)$, $g = (1, 2)$ Transposition, die 1 und 2 vertauscht. $g^2 = id$, $\langle g \rangle = \{g, id\} \subseteq \text{Sym}(3)$ ist Untergruppe, aber für $h = (2, 3)$ gilt

$$h\langle g \rangle h^{-1} = \{hgh^{-1}, h id h^{-1}\} = \{\underbrace{(2, 3)(1, 2)(2, 3)}_{=(3, 1)}, id\} \not\subseteq \langle g \rangle$$

also ist $\langle g \rangle$ kein Normalteiler in $\text{Sym}(3)$.

Schreibweise: Ist $N \subseteq G$ ein Normalteiler, schreibt man kurz $N \trianglelefteq G$

Beachte: Ist G abelsch, dann sind alle Untergruppen $H \subseteq G$ automatisch normal.

1.18 Definition Teilmengen assoziativ

Für Teilmengen $X, Y, Z \subseteq G$ in einer Gruppe schreibe kurz:

$$XY = \{xy \mid x \in X, y \in Y\} \subseteq G$$

$$X^{-1} = \{x^{-1} \mid x \in X\} \subseteq G$$

Es gilt dann $(XY)Z = X(YZ)$, (weil die Verknüpfung assoziativ ist).

Satz

Sei $N \trianglelefteq G$ Normalteiler in der Gruppe G . Dann ist $G/N = \{gN \mid g \in G\}$ eine Gruppe mit der Verknüpfung $(gN) \cdot (hN) = ghN$

Das Neutralelement ist $eN = N$, das Inverse zu gN ist $g^{-1}N$.

Beweis:

Da N Normalteiler ist, gilt für $g, h \in G$

$$gNhN = g(Nh)N \stackrel{1.17}{=} g(hN)N = ghNN \stackrel{N \text{ Gruppe}}{=} ghN$$

Die Verknüpfung ist also einfach gegeben durch

$$gN \cdot hN = gNhN = ghN$$

und damit assoziativ nach obiger Bemerkung. Es gilt $NgN = gNN = gN = gNN$, also ist N ein Neutralelement. Weiter gilt:

$$gNg^{-1}N = gg^{-1}N = N = g^{-1}gN = g^{-1}NgN$$

□

1.19 Definition π_H

Ist G eine Gruppe und H eine Untergruppe, so definieren wir $\pi_H : G \rightarrow G/H$ durch $\pi_H(g) = gH$.

Satz

Ist $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler, dann ist $\pi_N : G \rightarrow G/N$ ein surjektiver Homomorphismus mit Kern $N = \ker(\pi_N)$.

Beweis:

π_N ist nach Definition surjektiv und

$$\pi_N(gh) = ghN = gNhN = \pi_N(g)\pi_N(h)$$

Weiter gilt

$$\pi_N(g) = N \iff gN = N \stackrel{1.13}{\iff} g \in N$$

□

Folgerung:

Jeder Normalteiler ist auch ein Kern eines Homomorphismus.

1.20 Der Homomorphiesatz

Sei $G \xrightarrow{\varphi} K$ ein Homomorphismus von Gruppen, sei $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler. Wenn gilt $N \subseteq \ker(\varphi)$, dann gibt es genau einen Homomorphismus $\bar{\varphi} : G/N \rightarrow K$ mit $\bar{\varphi} \circ \pi_N = \varphi$.

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi} & K \\ \pi_N \searrow & & \nearrow \bar{\varphi} \\ & G/N & \end{array}$$

Abbildung 1: Homomorphiesatz

Beweis:

Existenz von $\bar{\varphi}$:

Für $g \in G$ setze $\bar{\varphi}(gN) = \varphi(g)$. Das ist eine wohldefinierte Abbildung, denn angenommen,

$$gN = g'N \Rightarrow g^{-1}g' \in N \subseteq \ker(\varphi) \Rightarrow \varphi(g^{-1}g') = e \Rightarrow \varphi(g) = \varphi(g')$$

Es gilt damit

$$\bar{\varphi}(gNhN) = \bar{\varphi}(ghN) = \varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h) = \bar{\varphi}(gN)\bar{\varphi}(hN)$$

also ist $\bar{\varphi}$ ein Homomorphismus.

Eindeutigkeit von $\bar{\varphi}$:

Sei $\psi : G/N \rightarrow K$ ein Homomorphismus mit $\psi \circ \pi_N = \varphi$.

Es folgt

$$\psi(gN) = \psi(\pi_N(g)) = \varphi(g) = \bar{\varphi}(gN) \quad \forall g \in G$$

Bemerkung:

In der Situation vom Homomorphiesatz gilt:

- (i) $\ker(\varphi) = \pi_N^{-1} \ker(\bar{\varphi})$
- (ii) $\ker(\bar{\varphi}) = \pi_N \ker(\varphi)$
- (iii) $\varphi(G) = \bar{\varphi}(G/N)$

Beweis:

(iii) ist klar nach Konstruktion, $\bar{\varphi}(gN) = \varphi(g)$

(ii) $\bar{\varphi}(gN) = e = \varphi(g) \Leftrightarrow g \in \ker(\varphi)$, also $\ker(\bar{\varphi}) = \pi_N(\ker(\varphi))$

(i) $\varphi(g) = e \Rightarrow g \in \ker(\varphi) \Rightarrow \pi_N(g) \in \ker(\bar{\varphi}) \Rightarrow \bar{\varphi}(gN) = e$

□

1.21 Definition Isomorphismus

Ein Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \rightarrow K$ heißt **Mono/Epi/Isomorphismus**, wenn φ injektiv/surjektiv/bijektiv ist.

(Klar: φ Epimorphismus $\Leftrightarrow \varphi(G) = K$)

Für einen Mono / Epi / Isomorphismus schreibt man auch:

$\xrightarrow{\varphi} \rightarrow$ und $\xrightarrow{\cong}$.

Lemma

Ein Gruppenhomomorphismus $G \xrightarrow{\varphi} K$ ist genau dann injektiv, wenn gilt $\ker(\varphi) = \{e_G\}$.

Beweis:

Wenn φ injektiv ist, dann ist $\ker(\varphi) = \{e_G\}$ (klar). Angenommen, $\ker(\varphi) = \{e_G\}$ und $a, b \in G$ mit $\varphi(a) = \varphi(b) \rightsquigarrow \varphi(a)\varphi(b)^{-1} = \varphi(ab^{-1}) = e_K \Rightarrow ab^{-1} = e_G \Rightarrow a = b$ □

1.22 Satz Eigenschaften von Gruppenhomomorphismen

Sei $G \xrightarrow{\varphi} K$ ein Gruppenhomomorphismus. Dann gilt folgendes:

- (i) Ist $H \subseteq G$ Untergruppe, so ist $\varphi(H) \subseteq K$ Untergruppe. Wenn $H \trianglelefteq G$, so gilt $\varphi(H) \trianglelefteq \varphi(G)$
- (ii) Ist $L \subseteq K$ Untergruppe, so ist $\varphi^{-1}(L) \subseteq G$ Untergruppe. Ist $L \trianglelefteq K$, so gilt $\varphi^{-1}(L) \trianglelefteq G$.

Beweis:

(i) Sei $a, b \in H$ und $g \in G$. Es gilt $\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(ab) \in H$, $\varphi(a)^{-1} = \varphi(a^{-1}) \in \varphi(H)$. $\varphi(e_G) = e_K \in \varphi(H) \Rightarrow \varphi(H)$ Untergruppe.

Ist $H \trianglelefteq G$, so folgt $\varphi(g)\varphi(H)\varphi(g)^{-1} = \varphi(gHg^{-1}) \stackrel{H \trianglelefteq G}{=} \varphi(H)$ \square

(ii) Sei $a, b \in \varphi^{-1}(L)$, $g \in G$ (also $\varphi(a), \varphi(b) \in L$). Es folgt $\varphi(ab) \in L$, $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1} \in L$ und $\varphi(e_G) = e_K \Rightarrow ab, a^{-1}, e_G \in \varphi^{-1}(L) \rightsquigarrow$ Untergruppe.

Angenommen, $L \trianglelefteq K$. Es folgt $\varphi(ga g^{-1}) = \varphi(g)\varphi(a)\varphi(g^{-1}) \in L$, also $g\varphi^{-1}(L)g^{-1} \subseteq \varphi^{-1}(L)$. \square

Beispiele

Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$, $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ Homomorphismus, $\varphi(z) = m \cdot z$, $m \in \mathbb{Z}$ fest.

$\varphi(\mathbb{Z}) = m\mathbb{Z} = \{mz \mid z \in \mathbb{Z}\} = (-m)\mathbb{Z}$

z.B. $m = 2 \rightsquigarrow 2\mathbb{Z} = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\}$ gerade Zahlen

$\ker(\varphi) = \begin{cases} \{0\}, & \text{wenn } m \neq 0 \\ \mathbb{Z}, & \text{wenn } m = 0. \end{cases} \quad \varphi \text{ surjektiv} \Leftrightarrow m = \pm 1$

φ injektiv $\Leftrightarrow m \neq 0$

Angenommen, $m > 0$, $a, b \in \mathbb{Z}$

$a + m\mathbb{Z} = b + m\mathbb{Z}$ Nebenklassen $\stackrel{1,13}{\Leftrightarrow} a \in b + m\mathbb{Z} \Leftrightarrow a - b \in m\mathbb{Z}$

Folglich $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \{m\mathbb{Z}, 1 + m\mathbb{Z}, 2 + m\mathbb{Z}, \dots, (m-1) + m\mathbb{Z}\}$ insbesondere $\#\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = m$.

Schreibe $\bar{k} = k + m\mathbb{Z}$ **Kongruenzklasse** von k **modulo** m .

$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{m-1}\}$ wird erzeugt von $\bar{1} \rightsquigarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \langle \bar{1} \rangle$ zyklische Gruppe der Ordnung m . $o(\bar{1}) = m$.

Später mehr dazu.

1.23 Die Isomorphiesätze

Lemma

Sei G eine Gruppe, seien $H, N \subseteq G$ Untergruppen. Wenn $N \trianglelefteq G$ gilt, dann ist $HN = NH \subseteq G$ eine Untergruppe.

Beweis:

Es gilt $e = e \cdot e \in N \cdot H$. Weiter gilt für $h_1, h_2 \in H$, $n_1, n_2 \in N$, dass

$$h_1 n_1 h_2 n_2 = \underbrace{h_1 h_2}_{\in H} \underbrace{h_2^{-1} n_1 h_2}_{\in N} n_2 \in HN$$

$$(h_1 n_1)^{-1} = n_1^{-1} h_1^{-1} = h_1^{-1} \underbrace{h_1 n_1^{-1} h_1^{-1}}_{\in N} \in HN$$

$$(HN)^{-1} = N^{-1} H^{-1} = NH \subseteq HN \text{ genauso } HN \subseteq NH$$

\square

Satz

Sei $G \xrightarrow{\varphi} K$ ein Epimorphismus von Gruppen. Sei $N = \ker(\varphi)$. Dann ist die Abbildung $\bar{\varphi} : G/N \rightarrow K$ aus dem Homomorphiesatz 1.20 ein Isomorphismus.

Beweis:

$\bar{\varphi}(G/N) = \varphi(G)$ und $\ker(\bar{\varphi}) = \{N\}$ nach dem Beweis von 1.20. Den Isomorphismus $\bar{\varphi} : G/\ker(\varphi) \xrightarrow{\cong} K$ nennt man **kanonisch** oder **natürlich**.

Theorem: 1. Isomorphiesatz

Sei G eine Gruppe, seien $H, N \subseteq G$ Untergruppen mit $N \trianglelefteq G$. Dann gilt $H \cap N \trianglelefteq H$, $N \trianglelefteq NH$ und die Abbildung

$$\begin{aligned} H/H \cap N &\rightarrow NH/N \\ aH &\mapsto aNH \end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus. ("Kürzungsregel")

Beweis:

Für alle $h \in H$ gilt $h(H \cap N)h^{-1} \subseteq N \cap H$ weil $N \trianglelefteq G$ und $hHh^{-1} = H$. $\Rightarrow N \cap H \trianglelefteq H$. Für alle $g \in NH$ gilt $gNg^{-1} \subseteq N \Rightarrow N \trianglelefteq NH$ \square

Lemma

Sei $G \xrightarrow{\varphi} K$ ein Gruppenhomomorphismus. Dann sind äquivalent:

(i) φ ist bijektiv

(ii) es gibt ein Homomorphismus $\psi : K \rightarrow G$ mit $\varphi \circ \psi = \text{id}_K$ und $\psi \circ \varphi = \text{id}_G$.

Beweis:

(ii) \Rightarrow (i): klar, aus $\varphi \circ \psi = \text{id}_K$ folgt, dass φ surjektiv ist und aus $\psi \circ \varphi = \text{id}_G$ folgt, dass φ injektiv ist.

(i) \Rightarrow (ii): Sei $\psi : K \rightarrow G$ die eindeutig bestimmte Umkehrabbildung, also $\varphi \circ \psi = \text{id}_K$ und $\psi \circ \varphi = \text{id}_G$.

Für $a, b \in K$ folgt $\psi(ab) = \psi(\varphi\psi(a)\varphi\psi(b)) \stackrel{\varphi \text{ Homo.}}{=} \underbrace{\psi(\varphi(\psi(a)\psi(b)))}_{\text{id}} = \psi(a)\psi(b)$ \square Betrachte die

Abbildung $\varphi : H \rightarrow HN/N \subseteq G/N$, $h \mapsto hN$ das ist ein Homomorphismus,

weil $H \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi_N} G/N$ einer ist. Für $hn \in HN$ gilt $\varphi(h) = hN = hnN$, also ist φ ein Epimorphismus. Der Kern ist $\ker(\varphi) = \{h \in H \mid hN = N\} = H \cap N$. Also gilt nach dem vorigem Satz

$$H/H \cap N \xrightarrow[\cong]{\varphi} HN/N$$

\square

Theorem: 2. Isomorphiesatz

Sei G Gruppe, seien $M, N \trianglelefteq G$ Normalteiler mit $M \subseteq N \subseteq G$. Dann gilt $N/M \trianglelefteq G/M$ und

$$G/M/N/M \cong G/N \quad \text{'Kürzungsregel'}$$

Beweis:

Es gilt $N/M = \{nM \mid n \in N\} = \pi_M(N) \subseteq G/M$

Nach 1.22(i) gilt $N/M \trianglelefteq G/M$.

Jetzt Homomorphiesatz 1.20

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\pi_N} & K \\ \pi_M \searrow & & \nearrow \pi_N \leftarrow \text{surjektiv} \\ & G/N & \end{array}$$

Abbildung 2: 2. Isomorphiesatz

Nach dem vorigen Satz gilt:

$$\begin{aligned} G/M/\ker(\pi_N) &\xrightarrow{\cong} G/N \\ \ker(\pi_N) &\stackrel{1.20}{=} \pi_M(N) = N/M \end{aligned}$$

□

1.24 Produkte von Gruppen

Seien G, K zwei Gruppen. Dann ist das Produkt $G \times K$ wieder eine Gruppe das **direkte Produkt**, mit Verknüpfung

$$(g_1, k_1) \cdot (g_2, k_2) = (g_1 g_2, k_1 k_2)$$

$$\text{Neutralelement } e = (e_G, e_K)$$

$$\text{Das Inverse zu } (g, k) \in G \times K \text{ ist } (g, k)^{-1} = (g^{-1}, k^{-1})$$

Den Beweis lassen wir weg, die Gruppenaxiome (G1)-(G3) sind leicht zu prüfen.

Wir haben kanonische Homomorphismen:

$$i_G : G \rightarrow G \times K$$

$$i_K : K \rightarrow G \times K$$

$$g \mapsto (g, e_K)$$

$$k \mapsto (e_G, k)$$

sowie

$$pr_G : G \times K \rightarrow G, \quad (g, k) \mapsto g$$

$$pr_K : G \times K \rightarrow K, \quad (g, k) \mapsto k$$

mit

$$pr_G \circ i_G = \text{id}_G$$

$$pr_K \circ i_K = \text{id}_K$$

$$\ker(pr_G) = \{e_G\} \times K \cong K$$

$$\ker(pr_K) = G \times \{e_K\} \cong G$$

Das geht auch mit Familien von (endlich vielen) Gruppen: ist $(G_i)_{i \in I}$ eine Familie von Gruppen, so ist $\prod_{i \in I} G_i$ wieder eine Gruppe, das **direkte Produkt** der G_i . Die Elemente sind Folgen $(g_i)_{i \in I}$, $g_i \in G_i$ mit Verknüpfung $(g_i)_{i \in I} \cdot (g'_i)_{i \in I} = (g_i g'_i)_{i \in I}$ usw.

Satz

Sei G eine Gruppe mit Untergruppe $H, K \subseteq G$. Angenommen, es gilt folgendes

- (i) $G = HK$
- (ii) $H \cap K = \{e\}$
- (iii) $hk = kh \quad \forall h \in H, k \in K$

Dann ist die Abbildung $H \times K \xrightarrow{\varphi} G, (h, k) \mapsto hk$ ein Isomorphismus, d.h. G 'ist' das direkte Produkt aus H und K .

Beweis:

Wegen (iii) gilt

$$\begin{aligned}\varphi((h_1, k_1)(h_2, k_2)) &= \varphi(h_1 h_2, k_1 k_2) = h_1 h_2 k_1 k_2 \\ \varphi(h_1, k_1) \varphi(h_2, k_2) &= h_1 k_1 h_2 k_2 = h_1 h_2 k_1 k_2\end{aligned}$$

also ist φ ein Homomorphismus. Wegen (i) ist φ surjektiv.

$$(h, k) \in \ker(\varphi) \Leftrightarrow hk = e \Leftrightarrow \underbrace{h}_{\in H} = \underbrace{k^{-1}}_{\in K} \Leftrightarrow h = k = e \text{ wegen (ii)}$$

□

Beispiel

$G = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \dots, \bar{5}\}$ vgl. 1.22. Dann sind $H = \{\bar{0}, \bar{3}\}$ sowie $K = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$ Untergruppen (nachrechnen!), $H \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $K \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ und (i), (ii), (iii) aus dem vorigen Satz sind erfüllt. Es folgt

$$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \quad -$$

Aussagen aus den Übungen

Zettel 1

Aufgabe 1.2

Sei G eine Gruppe. A, B Untergruppen von G .

\mathbb{Z} : Wenn $A \cup B$ eine Untergruppe ist, dann gilt: $A \subseteq B$ oder $B \subseteq A$.

Beweis:

Annahme: $A \not\subseteq B$. Also ex. ein $a \in A \setminus B$ und $b \in B$ beliebig. Betrachte $ab \in A \cup B$, da AB Untergruppe. Also ist $ab \in A$ oder $ab \in B$.

Sei $ab \in B$ und $b^{-1} \in B$, da B Untergruppe, folgt, dass $abb^{-1} = a \in B$. \nrightarrow zur Annahme.

Also $ab \in A$ und $a^{-1} \in A$, da A Untergruppe, folgt, dass $a^{-1}ab = b \in A$. Da b beliebig war, folgt $B \subseteq A$. \square

Aufgabe 1.4

Gruppe G . A, B Untergruppen. Wir definieren $AB := \{ab \mid a \in A, b \in B\}$.

(i) Die Menge AB ist im allgemeinen keine Untergruppe.

(ii) Wenn weiter gilt $AB = BA$, dann ist AB eine Untergruppe.

Beweise klar! (\checkmark)

Zettel 2

Aufgabe 2.1

Eine Gruppe G hat **Exponent** k , wenn für jedes Gruppenelement $g \in G$ gilt: $g^k = e$.

\mathbb{Z} Gruppen mit Exponent 2 sind abelsch.

Beweis:

Aus $g^2 = e$ folgt $g = g^{-1} \forall g \in G$. $a, b \in G$ beliebig

$$ab = (ab)^{-1} \stackrel{G \text{ Gruppe}}{=} b^{-1}a^{-1} = ba$$

\square

Anmerkung: Gruppen mit Exponenten 3 sind im allgemeinen nicht abelsch.

Aufgabe 2.3

Menge X und $Sym(X)$. Der **Träger einer Permutation** $\sigma \in Sym(X)$ ist definiert wie folgt: $\text{supp}(\sigma) := \{x \in X \mid \sigma(x) \neq x\}$.

(i) Wenn $\text{supp}(\rho) \cap \text{supp}(\sigma) = \emptyset$ für $\rho, \sigma \in Sym(X)$ gilt, dann folgt $\rho \circ \sigma = \sigma \circ \rho$.

(ii) Wenn $\text{supp}(\rho) \cap \text{supp}(\sigma) = \emptyset$ und $\rho \circ \sigma = \text{id}$ für $\sigma, \rho \in Sym(X)$ gilt, dann folgt $\rho = \sigma = \text{id}$.

Beweis:

$$(i) \text{ Es gilt: } \rho \circ \sigma = \begin{cases} x, & \text{wenn } x \notin \text{supp}(\rho), \text{supp}(\sigma) \\ \rho(x), & \text{wenn } x \in \text{supp}(\rho) \\ \sigma(x), & \text{wenn } x \in \text{supp}(\sigma) \end{cases} \quad \text{oder } \sigma \circ \rho = \begin{cases} x, & \text{wenn } x \notin \text{supp}(\rho), \text{supp}(\sigma) \\ \rho(x), & \text{wenn } x \in \text{supp}(\rho) \\ \sigma(x), & \text{wenn } x \in \text{supp}(\sigma) \end{cases}$$

Da $\text{supp}(\rho) \cap \text{supp}(\sigma) = \emptyset$ gilt und somit x nicht von beiden Permutationen verändert wird. Da Permutationen bijektiv nach Definition sind, ist dies wohldefiniert.

(ii) Nach (i) gilt, dass $\rho \circ \sigma = \begin{cases} x, & \text{wenn } x \notin \text{supp}(\rho), \text{ supp}(\sigma) \\ \rho(x), & \text{wenn } x \in \text{supp}(\rho) \\ \sigma(x), & \text{wenn } x \in \text{supp}(\sigma) \end{cases}$ gilt.

Also muss $\rho(x) = x$ gelten, da $\rho \circ \sigma$ gilt, analog $\sigma(x) = x$. Also folgt $\rho = \sigma = \text{id}$.

Zettel 3

Index

Die Seitenzahlen sind mit Hyperlinks zu den entsprechenden Seiten versehen, also anklickbar!

abelsch, 2

Bild, 6

direkte Produkt, 12

Exponent, 3, A

Gruppe, 1

 Unter-, 2

 symmetrische, 2

 zyklische, 3

Homomorphismen

 Mono/Epi/Iso, 9

Homomorphismus

 Gruppen-, 6

Index von H in G , 5

kanonisch, 10

Kern, 6

Kongruenzklasse, 10

modulo, 10

Monoid, 1

natürlich, 10

Nebenklassen

 Links-, 4

 Rechts-, 4

normal, 7

Normalteiler, 7

Ordnung, 3

Primzahl, 5

Satz von Lagrange, 5

Teiler, 5

Träger einer Permutation, A

Verknüpfung, 1

zentralisiert, 2

zyklisch, 3

Abbildungsverzeichnis

1	Homomorphiesatz	8
2	2. Isomorphiesatz	12