Fachbereich 10
Mathematik und
Informatik

Modellreduktion und partielle Differentialgleichungen

Mitschrift der Tafelnotizen

Tobias Wedemeier

26. Oktober 2015
gelesen von
Dr. Smetana

Hierbei handelt es sich um eine Mitschrift der Tafelnotizenvon **Dr. Smetana**, WWU Münster, aus der Vorlesung **Modellreduktion und partielle Differentialgleichungen** im Wintersemester 2015/16. Dies ist kein Skript der Vorlesung und keine eigene Arbeit des Autors.

Für Fehler in der Mitschrift wird keine Haftung übernommen. Hinweise auf Fehler sind gerne gesehen, hierfür kann man mich in der Uni ansprechen oder alternativ eine e-Mail an: *tobias.wedemeier@gmx.de* Auch ist eine Mitarbeit über Github möglich.

Wenn Teile aus der Vorlesung selber fehlen, können diese gerne an meine e-Mail versandt werden. Ich werde diese dann einarbeiten.

Inhaltsverzeichnis

1 Einletung und Motivation

1.1 Parameterabhängige PDGL

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ein polygonales Gebiet. Zu einem Parametervektor $\mu \in P \subseteq \mathbb{R}^d$ aus einer Menge von 'erlaubten' Parametern ist eine Funktion, z.B. 'Temperatur'

$$u(\mu) : \Omega \to \mathbb{R}$$

gesucht, so dass $-\nabla\big(\kappa(\mu)\nabla u(\mu)\big) = q(\mu)$ in Ω, wobei $u(\mu) = 0$ auf $\partial\Omega$, mit $\kappa(\mu) : \Omega \to \mathbb{R}$ dem 'Wärmeleitkoeffizient' und $q(\mu)$ eine 'Wärmequelle', z.B. $q(\mu) = 1$. Weiter kann eine Augabe erwünscht sein, z.B.

$$s(\mu) = \frac{1}{|\Omega_s|} \int \lim_{\Omega_s} u(x, \mu)\mathrm{d}x,$$

die mittlere Temperatur auf Ω_s.

1.2 Definition (schwache Formulierung in Hilberträumen)

Sei X ein reeller Hilbertraum. Zu $\mu \in P$ ist gesucht ein $u(\mu) \in X$ und eine Ausgabe $s(\mu) \in \mathbb{R}$, so dass

$$b\big(u(\mu), v; \mu\big) = f(v; \mu),\ s(\mu) = l\big(u(\mu); \mu\big)\ \forall v \in X$$

für eine Bilinearform $b(\cdot, \cdot; \mu) : X \times X \to \mathbb{R}$ und linearen Funktionalen $f(\cdot; \mu), l(\cdot; \mu) : X \to \mathbb{R}$.
Die schwache Formulierung für Beispiel 1.1 lautet:

$$X := H_0^1(\Omega) = \left(f \in L^2(\Omega)\ : + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_1} f \in L^2(\Omega),\ f|_{\partial\Omega = 0}\right)$$

Dann kann man die Bilinearform über

$$b\big(u(\mu), v; \mu\big) := \int_\Omega \kappa(\mu)\nabla u(\mu)\nabla v\mathrm{d}x; f(v; \mu) := \int \lim_\Omega q(\mu)v\mathrm{d}x$$

ausdrücken und

$$s(\mu) = \frac{1}{|\Omega_s|} \int \lim_{\Omega_s} u(x; \mu)\mathrm{d}x =: l\big(u(\mu); \mu\big)$$

ABER: Für sehr wenige PDGL's können wir die Lösung analytisch bestimmen. Daher sind wir an einer numerische Approximation interessiert. Ein weit verbreitetes Diskretisierungsverfahren ist die Finite Elemente Methode. Diese Methode basiert auf obiger schwacher Formulierung.

1.3 Definition (hochdimensionales, diskretes Modell)

Sei $X_h \subseteq X$ mit $\dim(X_h) = N_h < \infty$. Der Index h bezeichnet hier die Gitterweite. Zu $\mu \in P$ ist gesucht ein $u_h(\mu) \in X_h$ und eine Ausgabe $s_h(\mu) \in \mathbb{R}$, so dass

$$b\big(u_h(\mu), v_h; \mu\big) = f(v_h; \mu),\ s_h(\mu) = l_h\big(v_h(\mu); \mu\big)\ \forall v_h \in X_h. \tag{1.1}$$

Anwendungen für die Standarddiskretisierungsverfahren sehr teuer oder zu teuer sind:

many-query context

- Parameterstudien
- Design
- Parameteridentifikation / inverse Probleme

- Optimierung
- Statistische Analyse

schnelle Simulationsantwort
- Echtzeit-Steuerung technischer Geräte
- interaktive Benutzeroberflächen

1.4 Parameterabhängige Lösungsmenge

Sei $\mu := \{u(\mu) \ : \ \mu \in P\} \subseteq P$ für $P \in \mathbb{R}^p$ ist die durch μ parametrisierte Lösungsmenge. X ist die im Allgemeinen unendlichdimensional. $\Rightarrow$ Motivation für die Suche nach einem 'niedrigdimensionalen' Teilraum $X_N \subseteq X$ zur Approximation von M und einer Approximation $u_N(\mu) \approx u(\mu),\ u_N \in X_N$. Eine Möglichkeit eine reduzierte Basis zu generieren besteht darin geschickt Parameterwerte $\mu_1, \ldots, \mu_N \in P$ zu wählen und den Raum als $X_N := \operatorname{span}\{u(\mu_1), \ldots, u(\mu_N)\}$ zu definieren. Eine Lösung $u(\mu_i)$ für einen Parameterwert $\mu \in P$ wird auch **Snapshot** genannt.

1.5 Beispiel

Gesucht ist $u(\cdot;\mu) \in C^2([0,1])$ mit $(1+\mu)u'' = 1$ auf $(0,1)$ und $u(0) = u(1) = 1$ für den Parameter $\mu \in P := [0,1] \subseteq \mathbb{R}$.
Snapshots:
$\mu_1 = 0 \Rightarrow u_1 := u(\cdot;\mu_1) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1$, $\mu_2 = 0 \Rightarrow u_2 := u(\cdot;\mu_2) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x + 1$ und $X_N := \operatorname{span}\{u_1, u_2\}$. Dann ist die reduzierte Lösung $u_N(\mu) \in X_N$ gegeben durch

$$u_N(\mu) = \alpha_1(\mu)u_1 + \alpha_2(\mu)u_2,$$

mit $\alpha_1 = \frac{2}{\mu+1} - 1$ und $\alpha_2 = 2 - \frac{2}{\mu-1}$. Diese erfüllt folgende Fehleraussage und ist somit exakt:

$$\|u_N(\mu) - u(\mu)\|_\infty = \sup_{\lambda \in [0,1]} |U_N(x;\mu) - u(x;\mu)| = 0$$

Da $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ und $0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq 1$ ist M die Menge der Konvexkombinationen von u_1 und u_2.

1.6 Definition (reduziertes Modell)

Sei $X_N \subseteq X$ ein reduzierter Basisraum mit $\dim(X_N) < \infty$. Zu $\mu \in P$ ist gesucht ein $u_N(\mu) \in X_N$ und eine Ausgabe $s_N(\mu) \in \mathbb{R}$, so dass

$$b\big(u_N(\mu), v_N; \mu\big) = f(v_N;\mu),\ s_N(\mu) = l_N\big(u_N(\mu);\mu\big)\ \forall v_N \in X_N \tag{1.2}$$

1.7 Bermerkung (Begrifflichkeit)

Zusammengefasst unterscheiden wir zwischen den folgenden drei Modellen:

1) Eine partielle DGL ist ein **analytisches Modell**, welches die analytische Lösung $u(\mu) \in X$ in einem (typischerweise) ∞-dimensionalen Funktionenraum charakterisiert ist.

2) Ein **hochdimensionales, diskretes Modell** ist ein Berechnungsverfahren zur Bestimmung einer Näherung $u_h(\mu) \in X_h$, wobei X_h ein hochdimensionaler Funktionenraum ist. Beispiele sind **Finite Elemente** oder **Finite Volumenräume** und typischerweise hat X_h eine Dimension von mindestens 10^5.

3) Ein **reduziertes Modell** ist ein Berechnungsverfahren zur Bestimmung einer Näherung $u_N(\mu) \in X_N$ in einem sehr problemangepassten und daher niedrigdimensionalen Raum von typischerweise $\dim X_N < 100$.

4) **Modellreduktion** beschäftigt sich mit Modellen der Erzeugung von reduzierten Modellen aus hochdimensionalen, diskreten (oder auch analytischen) Modellen und Untersuchungen ihrer Eigenschaften.

1.8 Organisation der Vorlesung

Zentrale Fragen:

- **Reduzierte Basis:** Wie kann ein möglichst kompakter Teilraum konstruiert werden?
- **Reduziertes Modell:** Existenz von reduzierten Lösungen $u_N(\mu)$? Wie kann eine reduzierte Lösung $u_N(\mu)$ berechnet werden?
- **Effizienz:** Wie kann $u_N(\mu)$ schnell berechnet werden?
- **Stabilität:** Wie kann die Stabilität des reduzierten Modells für wachsendes N garantiert werden?
- **Approximationsgüte:** Warum können wir erwarten, dass eine relativ kleine Anzahl von Basisfunktionen ausreicht?
- **Fehlerschätzer:** Kann der Fehler des reduzierten zum vollen Modell beschränkt werden?
- **Effektivität:** Kann garantiert werden, dass der Fehlerschätzer den Fehler nicht beliebig überschätzt?

Vorläufige Gliederung (bis Weihnachten)

1) Einleitung / Moitavtion

2) Grundlagen:
   - Kurze Einführung in lineare Funktionalanalysis
   - Kurze Einführung in Finite Elemente

3) Reduzierte Basis Methoden für lineare, koerzive Probleme
   - Reduzierte Basis Verfahren
   - Offline-/ Online-Zerlegung
   - Fehlerschätzer
   - Basisgenerierung

2 Grundlagen

2.1 Lineare Funktionalanalysis in Hilberträumen

2.1.1 Lineare Operatoren

2.1 Definition (Hilbertraum)

Sei X ein reeller Vektorraum mit $(\cdot,\cdot) : X \times X \to \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt und induzierter Norm $\|x\| := \sqrt{(x,x)}$. falls X vollständig bzgl. $\|.\|$, ist X ein (reeller) **Hilbertraum** (HR).

2.2 Beispiele (Hilbertraum)

(1) $X := \mathbb{R}^d$ mit $(x, y) := \sum_{i=1}^d x_i y_i$ ist ein HR.

(2) $X := L^2(\Omega)$ mit $(x, y) := \int_\Omega f(x)g(x)\mathrm{d}x$ ist ein HR.

(3) $X := C^0([0, 1])$ mit $(f, g) := \int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x$ ist kein HR.

2.3 Lemma

Seien X und Y reelle Vektorräume. Ist die Abbildung $T : X \to Y$ linear und $x_0 \in X$, so sind äquivalent:

(1) T ist stetig.

(2) T ist stetig in x_0.

(3) $\sup \lim\limits_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y < \infty$.

(4) $\exists$ Konstante (mit $\|Tx\|_Y \leq c \|x\|_X \;\; \forall x \in X$)

2.4 Definition (Lineare Operatoren)

Seinen X und Y reelle Vektorräume. Wir definieren

$$L(X; Y) := (T : X \to Y \;;\; T \text{ ist linear und stetig}) .$$

Abbildungen in $L(X; Y)$ nennen wir **lineare Operatoren**. Nach Lemma 2.3 (3) ist für jeden Operator $T \in L(X; Y)$ die **Operatornorm** von T definiert durch

$$\|T\|_{L(X;Y)} := \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y < \infty,$$

oder in kurz $\|T\|$. Es ist $L(X) := L(X; X)$.

2.5 Definition (Spezielle lineare Operatoren)

(1) $X' := L(X; \mathbb{R})$ ist der **Dualraum** von X. Die Elemente von X' nennen wir auch **lineare Funktionale**.

(2) Die Menge der kompakten (linearen) Operatoren von X nach Y ist definiert durch

$$K(X; Y) := \Big(T \in L(X; Y) \;;\; T(\overline{B_1(0)}) \text{ kompakt}\Big) .$$

(3) Eine lineare Abbildung $P : X \to X$ heißt (lineare) **Projektion**, falls $P^2 = P$.

(4) Für $T \in L(X; Y)$ ist $\ker(T) := (x \in X \;;\; Tx = 0)$ der **Nullraum** oder **Kern** von T. Aus der Stetigkeit von T folgt, dass $\ker(T)$ ein abgeschlossener Unterraum ist. Der **Bildraum** von T ist $\mathrm{bild}(T) := (Tx \in Y \;;\; x \in X)$.

(5) Ist $T \in L(X; Y)$ bijektiv, so ist $T^{-1} \in L(Y; X)$. Dann heißt T (linear, stetiger) **Isomorphismus**.

(6) $T \in L(X; Y)$ heißt **Isometrie**, falls

$$\|Tx\|_Y = \|x\|_X \;\; \forall x \in X$$

2.6 Beispiel

Sei $g \in L^2(\Omega)$. Dann ist nach der Hölderungleichung durch

$$T_g f := \int_\Omega f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

ein Funktional $T_g \in L^2(\Omega)'$ definiert.

2.7 Satz (Projektionssatz)

Sei X ein Hilbertraum und $A \subseteq X$ nicht leer, abgeschlossen und konvex. Dann gibt es genau eine Abbildung $P : X \to A$ mit

$$\|x - Px\|_X = \operatorname{dist}(x, A) = \inf \lim_{y \in A} \|x - y\|_X \ \ \forall x \in X.$$

Die Abbildung $P : X \to A$ heißt orthogonale Projektion von X auf A.
Beweis: [Alt, Satz 2.2, S.96]

2.8 Folgerung

Ist $A \subseteq X$ nicht-leer, abgeschlossen und Unterraum, so ist P linear und $Px \in A$ charakterisiert durch $(x - Px, a)_X = 0 \ \forall a \in A$. Falls $\dim(A) = n < \infty$ und $(\varphi_i)_{i=1}^h$ Orthonormalbasis von A, gilt

$$Px = \sum_{i=1}^n (x, \varphi_i)_X \varphi_i.$$

2.9 Satz (Riesz'scher Darstellungssatz)

Ist X Hilbertraum, so ist $J : X \to X'$ definiert durch

$$J(v)(w) := (v, w)_X \ \forall v, w \in X$$

eine stetige, lineare, bijektive Isometrie. Insbesondere existiert zu $l \in X'$ ein eindeutiger **Riesz Repräasentant** $V_l := J^{-1}(l) \in X$ mit $l(.) = (v_l, .)_X$.

Beweis:
C-S-Ungleichung: $|J(v)(w)| \leq \|v\|_X \|w\|_X$. Dann folgt: $J(v) \in X'$ mit

$$\|J(v)\|_{X'} = \sup_{w \in X \setminus \{0\}} \frac{|J(v)(w)|}{\|w\|_X} = \sup_{w \in X \setminus \{0\}} \frac{|(v, w)_X|}{\|w\|_X} \leq \|v\|_X \Rightarrow J \text{ stetig.}$$

Da $|J(v)(v)| = \|v\|_X^2$ folgt:

$$\sup_{w \in X \setminus \{0\}} \frac{|J(v)(w)|}{\|w\|_X} \geq \frac{|J(v)(v)|}{\|v\|_X} = \frac{\|v\|_x^2}{\|v\|_X} = \|v\|_X .$$

Also ist J eine Isometrie und insbesondere ist J injektiv.
Zeige J surjektiv: Sei $l \in X'$, $l \neq 0$, Kern(l) ist abgeschlossener Teilraum, also existiert $P : X \to \ker(l)$ orthogonale Projektion nach Satz 2.7. Sei $v_0 \in X$mit $l(v_O) = 1$. Setze $v_1 := v_o - Pv_0 \Rightarrow l(v_1) = l(v_0) = 1$ und $v_1 \neq 0$. Mit Folgerung 2.8:

$$\Rightarrow (w, v)_X = 0 \ \forall x \in \ker(l) \Rightarrow v_1 \perp \ker(l).$$

Für $v \in X$ gilt

$$v\, \underbrace{v - l(v)}_{\in \ker(l)} \cdot v_1 + l(v) \cdot v_1$$

und $v - l(v)v_1 \in \ker(l)$ wegen

$$l(v - l(v)v_1) = l(v) - l(v)l(v_1) = 0.$$

Also ist

$$\begin{aligned}
(v_1, v)_X &= (\underbrace{v_1, v - l(v)v_1}_{=0,\text{ da } \ker(l) \perp v_1})_X + (v_1, l(v)v_1)_X \\
&= l(v)\, \|v_1\|_X^2 \\
&\Rightarrow l(v) = \left(\frac{v_1}{\|v_1\|_X^2}, v \right)_X = J\left(\frac{v_1}{\|v_1\|_X^2} \right)(v). \\
&\Rightarrow l \in \text{bild}(J) \Rightarrow J \text{ bijektiv.}
\end{aligned}$$

□

2.10 Folgerung / Beispiel:

Mit Hilfe des Rieszschen Darstellungssatz können wir damit $L^2(\Omega)$' - den Dualraum von $L^2(\Omega)$ - charakterisieren. Wie in 2.6 definieren wir für $g \in L^2(\Omega)$ das Funktional

$$T_g f := \int_\Omega f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

Definition 2.11 (Bilinearformen)

Seien X_1, X_2 Hilberträume, $b : X_1 \times X_2 \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform.

(1) Falls

$$\gamma := \sup \lim_{u \in X_1 \setminus \{0\}} \sup \lim_{v \in X_2 \setminus \{0\}} \frac{b(u,v)}{\|u\|_{X_1} \|v\|_{X_2}} < \infty$$

so ist b stetig mit Stetigkeitskonstante γ.

(2) Falls $X = X_1 = X_2$, definieren

$$b_s(u,v) = \frac{1}{2} b(u,v) + b(v,u),\ b_a = \frac{1}{2} b(u,v) - b(v,u)\ \forall u, v \in X$$

den symmetrischen bzw. antisymmetrischen ANteil von $b = b_s + b_a$.

(3) Falls $X = X_1 = X_2$, b stetig und

$$\alpha := \inf_{u \in X \setminus \{0\}} \frac{b(u,u)}{\|u\|_X^2} > 0$$

heißt b Koerziv mit Stetigkeitskonstante α.

2.12 Bemerkung

(1) $\alpha \in \mathbb{R}$ ist wohldefiniert, denn mit Stetigkeit folgt

$$\frac{b(u,u)}{\|u\|_X^2} \geq -\gamma \frac{\|u\|_X \|u\|_X}{\|u\|_X^2} = -\gamma.$$

(2) b ist koerziv bzgl. $\alpha \Leftrightarrow b_s$ ist koerziv bzgl. α.

2.13 Satz (Operatoren und Bilinearformen)

Seien X_1, X_2 Hilberträume.

(1) Zu $B \in L(X_1, X_2)$ existiert eine eindeutig definierte stetige Bilinearform $b : X_1 \times X_2 \to \mathbb{R}$ mit

$$b(u,v) = (Bu, v)_{X_2} \ \forall u \in X_1, v \in X_2. \tag{2.1}$$

(2) Zu $b : X_1 \times X_2 \to \mathbb{R}$ stetige Bilinearform existiert eindeutiges $B \in L(X_1, X_2)$ welches (2.1) erfüllt.

Beweis:

(1) b definiert durch (2.1) ist bilinear wegen Bilinearität von $(.,.)$ und Linearität von B. Stetigkeit:

$$b(u,v) = (Bu, v)_{X_2} \overset{\text{C.S.}}{\leq} \|B\| \|u\|_{X_1} \|v\|_{X_2}$$

daraus folgt $\gamma \leq \|B\| < \infty$.

(2) Sei $u \in X_1$ fest. Dann ist $b(u,.) : X_2 \to \mathbb{R}$ linear und stetig:

$$\sup_{v \in X_2 \setminus \{0\}} \frac{b(u,v)}{\|v\|_{X_2}} \leq \sup_{v \in X_2 \setminus \{0\}} \frac{\|u\|_{X_1 \|v\|_{X_2}}}{\|v\|_{X_2}} \cdot \gamma = \gamma \|u\|_{X_1} < \infty.$$

Daraus folgt $b(u,.) \in X_2'$ und es existiert nach Satz 2.9 ein eindeutiger Riesz-Repräsentant $v_u \in X_2$ mit $b(u,.) = (v_u,.)$. Definiere $B : X_1 \to X_2$ durch $Bu := v_u \in X_2$. Hiermit (2.1) und Eindeutigkeit klar. Linearität damit klar.
Stetigkeit:

$$\|bu\|^2 = (Bu, Bu) = (v_u, Bu)_{X_2} = b(u, Bu) \leq \gamma \|u\|_{X_1} \|Bu\|_{X_2}$$
$$\Rightarrow \|Bu\|_{X_2} \leq \gamma \|u\|_{X_1} \Rightarrow \sup_{u \in X_1 \setminus \{0\}} \frac{\|Bu\|_{X_2}}{\|u\|_{X_1}} \leq \gamma.$$

□

2.14 Satz von Lax-Milgram

Sei x HR, $b : X \times X \to \mathbb{R}$ koerzive, stetige Bilinearform mit Koerzivitätskonstante α. Dann existiert ein eindeutiger Operator $B \in L(X)$ mit

$$b(u,v) = (Bu, v) \ \forall u, v \in X.$$

Ferner gil: B ist bijektiv, $B^{-1} \in L(X)$ mit

$$\|B\| \leq \gamma \text{ und } \left\|B^{-1}\right\| \leq \frac{1}{\alpha}.$$

2.1.2 Sobolevräume

2.15 Bemerkung (Motivation Sobolevräume)

Wie in 1.1 motiviert, eignet sich die sogenannte Schwache Formulierung (s. 1.2) einer PDgl besonders gut um Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen zu untersuchen. Die dazu geeigneten Räume sind die **Sobolevräume**.

2.16 Definition ($L^p_{log}(\Omega)$)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet. Dann ist der Raum $L^p_{log}(\Omega)$ definiter durch

$$L^p_{log}(\Omega) := \{u \in L^p(K) \mid \forall K \subset \Omega,\ K \text{ kompakt}\}.$$

2.17 Definition (schwache Ableitung)

Sei $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ ein Multiindex. Eine Funktion $u \in L^1_{log}(\Omega)$ besitzt eine schwache Ableitung $u_\alpha \in L^1_{log}(\Omega)$, wenn für alle Testfunktionen $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt

$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \cdot \int_\Omega u^{(\alpha)} \varphi,$$

mit $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_d^{\alpha_d},\ |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$. Wir schreiben dann auch $u^{(\alpha)} = D^\alpha u$ für die schwache Ableitung.

2.18 Lemma

Falls $u \in C^{|\alpha|(\bar{\Omega})}$ und $|\alpha| \geq 1$, gilt: $D^\alpha = u^{(\alpha)}$, d.h. klassische und schwache Ableitung stimmen überein.

2.19 Beispiel

Sei $\Omega = (-1, 1)$ und $u(x) = |x|$. Dann ist $u'(x) = -1(x \leq 0), 1(x > 0)$ die schwache Ableitung von u.

Beweis:
Esgilt füt beliebige $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$:

$$Foto$$

2.20 Beispiel

Im Gegensatz zu $|x|$ ist $v(x) = -1(x \leq 0)1(x > 0)$ auf $\Omega = (-1, 1)$ nicht schwach differenzierbar.

2.21 Definition (Sobolevräume)

Seinen $m \in \mathbb{N}_0,\ p \in [1, \infty]$ und $u \in L^p_{log}(\Omega)$. Wir nehmen an, dass alle schwachen partiellen Ableitungen $D^\alpha u$ existieren für $|\alpha| \leq m$. Dann definieren wir die **Sobolevnormen** $\|u\|_{H^{m,p}(\Omega)}$, durch

$$\|u\|_{H^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{falls } 1 \leq p < \infty$$

und für $p = \infty$ als

$$\|u\|_{H^{m,p}(\Omega)} := \max \lim_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Schließlich definieren wir die **Sobolevräume** $H^{m,p}(\Omega)$ durch

$$H^{m,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^p_{log}(\Omega) \mid \|u\|_{H^{m,p}(\Omega)} < \infty \right\}.$$

2.22 Bemerkung

Anstelle von $H^{m,p}(\Omega)$ werden die Sobolevräume in der Literatur auch oft mit $W^{m,p}(\Omega)$ bezeichnet.

2.23 Beispiel

Seien $\Omega = B_{\frac{1}{2}}(0) \subset \mathbb{R}^2$ und $u(x) = \ln|\ln|x||\,,\ x \in \Omega$. Dann gilt: $u \in H^{1,2}(\Omega)$, aber $u \notin C^0(\Omega)$. D.h. Funktionen in $H^{1,p}(\Omega)$ sind in mehreren Raumdimensionen nicht notwendigerweise stetig.

2.24 Satz (Vollständigkeit von Sobolevräumen)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet. Damm ist $H^{m,p}(\Omega)$ $1 \leq p \leq \infty,\ m \in \mathbb{N}_0$ mit der in 2.21 definierten Norm ein Banachraum,$H^{m,p}(\Omega)$ ist ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$(u,v)_{H^{m,p}(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}.$$

Da wir uns mit Randwertproblemen befassen wollen, ist es notwendig zu klären in welchem Sinne wir bei Sobolevräumen von Randwerten reden können. Da die Funktionen zunächst nur bis auf Nullmengen definiert sind und der Rand eines Gebietes eine Nullmenge darstellt, auf der man L^p-Funktionen beliebig abändern kann. In der folgenden Definition klären wir zunächst was wir unter Nullrandwerten im schwachen Sinne verstehen wollen.

2.25 Definition (schwache Nullrandwerte)

Für $1 \leq p \leq \infty$ und $m \in \mathbb{N}$ definieren wir die Sobolevräume mit Nullrandwerten $H_0^{m,p}(\Omega)$ durch

$$H_0^{m,p}(\Omega) := \overline{C_0^m(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^{m,p}(\Omega)}}.$$

Abbildungsverzeichnis