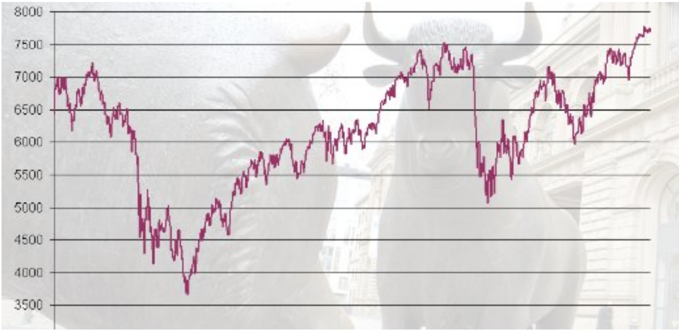
Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

Fachbereich 10
Mathematik und
Informatik

Finanzmathematik



Tobias Wedemeier

1. November 2014
gelesen von
PD Dr. Paulsen

Hierbei handelt es sich um eine Mitschrift der Vorlesung von **PD Dr. Paulsen**, WWU Münster, aus der Vorlesung **Finanzmathematik** im Wintersemester 2014/15. Dies ist kein Skript der Vorlesung und keine eigene Arbeit des Autors.

Für Fehler in der Mitschrift wird keine Haftung übernommen. Hinweise auf Fehler sind gerne gesehen, hierfür kann man mich in der Uni ansprechen oder alternativ eine e-Mail an: *tobias.wedemeier@gmx.de*
Auch ist eine Mitarbeit über Github möglich.

Wenn Teile aus der Vorlesung selber fehlen, können diese gerne an meine e-Mail versandt werden. Ich werde diese dann einarbeiten.

Zum Anhang: Aussagen aus den Übungen. Die Beweise stammen vom Autor und sind teilweise verkürzt oder vereinfacht und nur zum Verständnis gedacht. Für die Korrektheit wird keine Haftung übernommen.

Inhaltsverzeichnis

Prolog

Ziel

- Bewertung von Finanzderivaten, dies entspricht der Bewertung von Finanzmarktrisiken
- aktuarielle Bewertung von Risiken, biometrische Risiken (Rente,. . .) $\leftrightarrow$ Personenversicherungen, sonstige Risiken (Unfall, . . .) $\leftrightarrow$ Schadenversicherungen

Schlagwörter

- Black-Scholes Formel
- äqivalentes Martnigalmaß
- Hedging, Replizieren durch Handel
- Arbitage
- Äquivalenzprinzip
- Risikoausgleich im Kollektier

Hilfsmittel

Theorie der stochastischen Prozesse

- mathem. Modellierung von zeitlich abhängigen Zufallsphänomenen
- notwendig zur Beschreibung von Finanzmärkten

Themen

- diskrete und kontinuierliche Martnigaltheorie
- diskrete und kontinuierliche Markov-Prozesse
- Wiener-Prozess, Brownsche Bewegung
- geometrische Brownsche Bewegung als Modell für Aktienkurse

1 Informelle Einführung

(i) Zweiteilung von Finanzgütern in:
   (1) Basisfinanzgüter
   (2) derivative Finanzgüter

(ii) zu (1) gehören:
   - Aktien
   - festverzinsliche Wertpapiere, Bonds
   - Rohstoffe, Agrarprodukte

   diese werden gehandelt auf:
   - Aktienmärkte
   - Rentenmärkte
   - Warenmärkte

   Diese werden als Kassamärkte bezeichnet.

(iii) zu (2) gehören:
   - Optionen auf Aktien
   - Swaps (Zinsderivate)
   - futures und forwards

1.1 Option

Unterscheidung in Kauf- und Verkaufoptionen

- Eine Kaufoption (**Call**) gibt das Recht ein Basisfinanzgut (**Underlying**), zu einem im Voraus bestimmten fixen Preis, dem Ausübungspreis (**strike**, Basis), während (**amerikanische Option**) oder nur am Ende der Laufzeit der Option (**europäische Option**) zu kaufen.
- Eine Verkaufoption (**Put**) gibt das Recht ein Basisfinanzgut (Underlying), zu einem im Voraus bestimmten fixen Preis, dem Ausübungspreis (strike, Basis), während (amerikanische Option) oder nur am Ende der Laufzeit der Option (europäische Option) zu verkaufen.

Dies sind **unbestimmte Termingeschäfte** , da keinerlei Verpflichtung zum Kauf bzw. Verkauf besteht.

1.2 long, short

In der Regel nimmt der Käufer eines Finanzgutes eine **long-Position** ein, der Verkäufer eine **short-Position**. Der Verkäufer wird auch als writer (Zeichner) bezeichnet, da er die Option 'zeichnet'. Man kann zu jeder Zeit eine long oder short Position eingehen, insbesondere auch wenn man die Aktie gar nicht besitzt. Dies wird auch als **Leerverkauf** (short selling) bezeichnet, hierbei leiht man sich die Aktie von der Bank um sie zu verkaufen.

1.3 Payoff und Profit Diagramme

- Positionen in Finanzgütern bergen Chancen und Risiken.
- **Payoff**: Wert der Position wird gegen den Preis des Underlyings aufgetragen
- **Profit**: analog zum Payoff, unter Berücksichtigung von Kosten (Anfangswert der Postion)
- Beispiele: Option mit Laufzeit $T \in \mathbb{N}$, Underlying mit Preis S_T in T

  (a) long call: strike K
  Payoff: $(S_T - K)^+$
  $S_T \leq K$ keine Ausübung, $S_T > K$ Ausübung der Option (Ablauf: leihe Geld, kaufe Aktie, verkaufe Aktie, zahle Geld zurück)

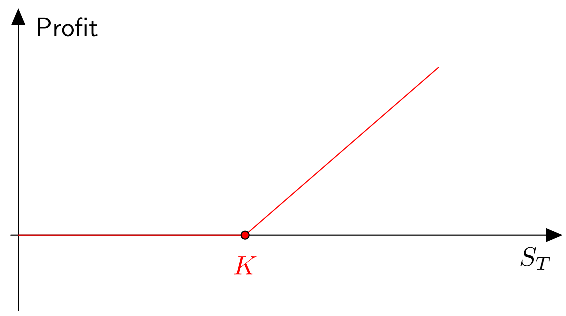


Abbildung 1: Payoff long call

Kosten: Anfangspreis des Calls $c > 0$. Profit: $(S_T - K)^+ - c$

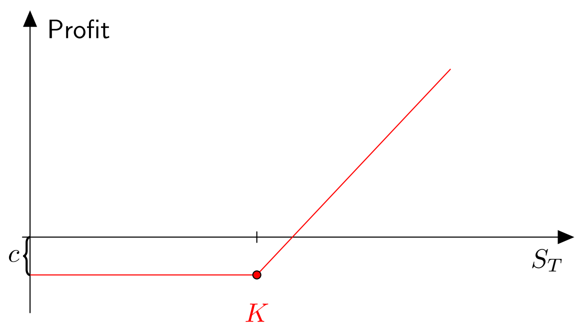


Abbildung 2: Profit long call

(b) long put: strike K
Payoff: $(K - S_T)^+$
$S_T > K$ keine Ausübung, $S_T \leq K$ Ausübung der Option (Ablauf: leihe Aktie, verkaufe Aktie, kaufe Aktie, gebe Aktie zurück)

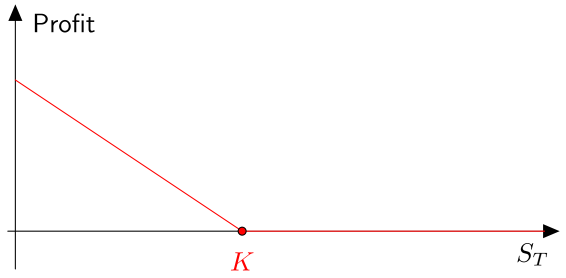


Abbildung 3: Payoff long put

Kosten: Anfangspreis de Option $p > 0$. Profit: $(K - S_T)^+ - p$

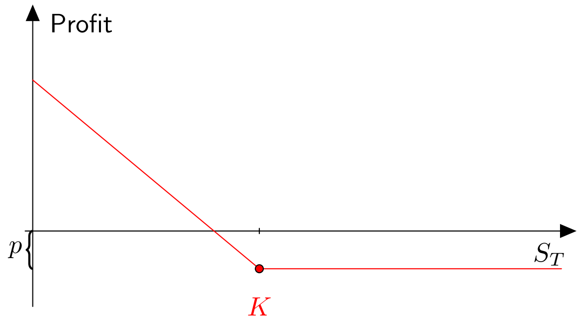


Abbildung 4: Profit long put

(c) short call:
Payoff: $-(S_T - K)^+$, Profit: $c - (S_T - K)^+$

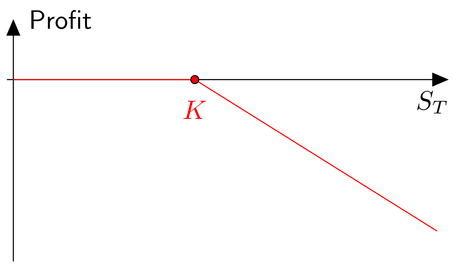


Abbildung 5: Payoff short call

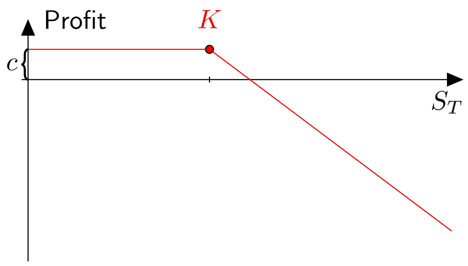


Abbildung 6: Profit short call

(d) short put:
Payoff: $-(K-S_T)^+$, Profit: $p-(K-S_T)^+$

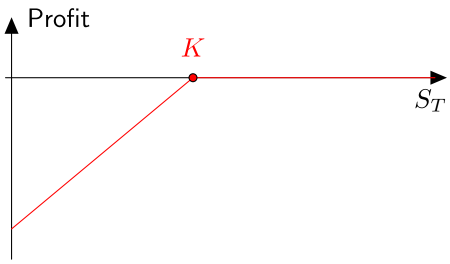


Abbildung 7: Payoff short put

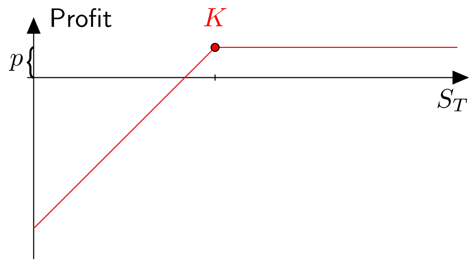


Abbildung 8: Profit short put

1.4 Strategien

Durch Kombination von einfachen Positionen bildet man **Strategien**.

Bsp

- Absicherung einer Aktie:
  - Aktie zum heutigen Kurs kaufen mit strike K
  - zur Absicherung gegen Kursverlust in T wird eine Putoption zum strike K gekauft
- Gesamtposition:

	long Aktie	long put	Gesamt
Kosten	K	p	$K+p$
Payoff	S_T	$(K-S_T)^+$	$S_T+(K-S_T)^+=max\{K,S_T\}$

- Profit:

$$S_T+(K-S_T)^+-(K+p)=(S_T-K)+(K-S_T)^+-p=-p_{\{S_T\leq K\}}+(S_T-(K+p))_{\{S_T>K\}}$$

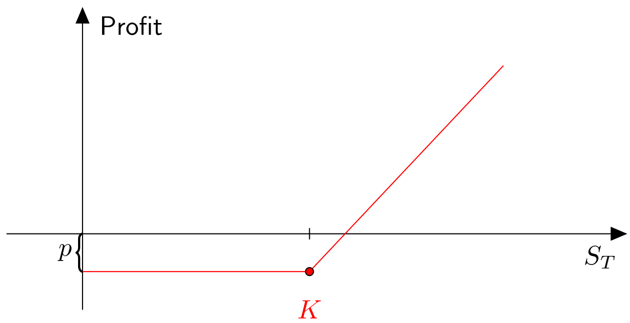


Abbildung 9: Bsp. Profit Diagramm

long straddle

- Idee: Spekulation auf eine starke Kursänderung

	long call	long put	Gesamt
Kosten	c	p	$c+p$
Payoff	$(S_T-K)^+$	$(K-S_T)^+$	$\lvert S_T-K\rvert$

Profit: $|S_T-K|-(c+p)$

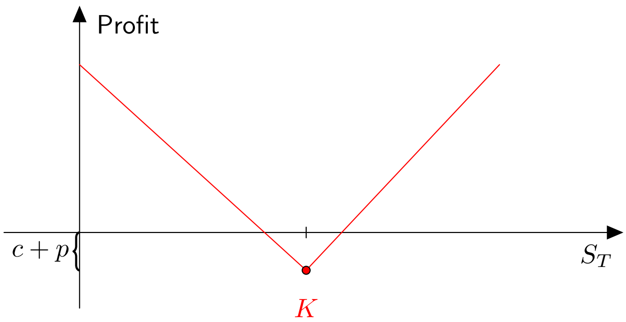


Abbildung 10: long straddle

Bullish Vertical Spread

Idee: Risikoarme Spekulation auf ein Anziehen des Kurses

Je kleiner der strike, desto teuerer ist der call.

	long call mit strike K_1	short call mit strike $K_2>K_1$	Gesamt
Kosten	c_1	$-c_2$	$c_1-c_2>0$
Payoff	$(S_T-K_1)^+$	$-(S_T-K_2)^+$	$(S_T-K_1)_{\{K_1<S_T<K_2\}}+(K_2-K_1)_{\{S_T>K_2\}}$

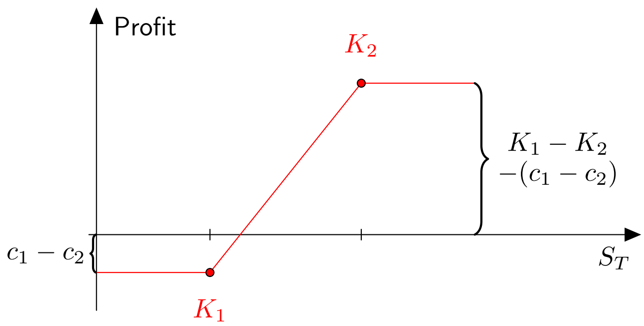


Abbildung 11: Bullish Vertical Spread

Butterfly Spread

Idee: Risikoarme Spekulation auf eine Seitwärtsbewegung des Kurses
strike: $K_1<K_2<K_3$

	long call strike K_1	long call strike K_3	2× short call strike K_2	
Kosten	c_1	c_3	$-2c_2$	$c_1+c_3-2c_2$

Payoff: $(S_T-K_1)_{\{K_1<S_T<K_2\}}+(2K_2-K_1-S_T)_{\{K_2<S_T<K_3\}}+2K_2-(K_1+K_3)_{\{S_T>K_3\}}$

Fall $K_2 = \frac{1}{2}(K_1 + K_3) \Rightarrow c_1 + c_3 - 2c_2 > 0$

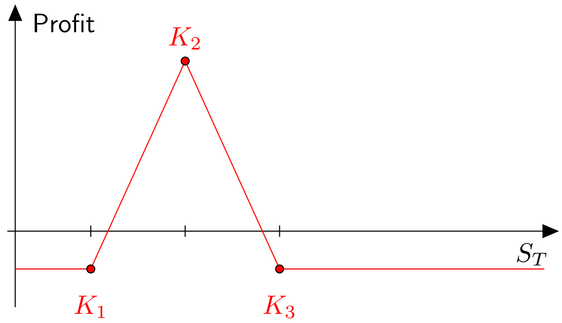


Abbildung 12: long Butterfly Spread

Für weitere Strategien klicken Sie hier.

1.5 Arbitrage

- Ein **Arbitrage** ist eine Möglichkeit durch Handel mit Finanzgütern einen risikolosen Profit zu erzielen.
- **Bsp**

	New York	Frankfurt
Aktie	130 \$	100 €
Wechselkurs	1,27 \$ ≙ 1 €	

- Arbitragemöglichkeit:
  leihe 100 € ⇝ kaufe Aktie in Frankfurt ⇝ verkaufe Aktie in New York
  ⇝ tausche 127 \$ in 100 € ⇝ 100 € zurück zahlen ⇝ risikolosen Profit von 3 \$
- Grundannahme:
  Im Handel mit Finanzgütern gibt es keine Arbitragen. Dies ist das sogenannte **No-Arbitrage Prinzip**.
- Aus dem No-Arbitrage Prinzip kann das **Replikationsprinzip** gefolgert werden.

1.6 Replikationsprinzip

Haben zwei verschiedene Kombinationen K, L von ausschüttungsfreien Finanzgütern zu einem zukünftigen Zeitpunkt $T \in \mathbb{R}$ immer den gleichen Wert, so haben sie auch zum gegenwärtigen Zeitpunkt den gleichen Wert.
Die Kombination K repliziert den Payoff der Kombination L, und umgekehrt.
Argumentation:
K,L habe den Anfangswert $V_0, W_0 \in \mathbb{R}$ und den zufälligen Wert $V_T, W_T \in \mathbb{R}$ in T.
Es gelte: $V_T = W_T$:
Beh.: $V_0 = W_0$

$\mathbb{A}$
1.Fall: $V_0 > W_0$.
Dann kann durch short selling von K ein Arbitrage erzielt werden:

- short selling in K

- gehe long in L

$\Rightarrow$ am Anfang Gewinn $V_0 - W_0 > 0$

- handeln entsprechend L bis T

in T:

- verkaufe L, erhalte $W_T = V_T$
- kaufe K für V_T und gebe die Position K zurück

Am Ende: Glattstellen der Positionen $W_T - V_T = 0$ ↯

2.Fall: $W_0 > V_0$. Analog. □

1.7 Nullkouponanleihe

festverzinsliches Wertpapier:

- Fälligkeit T (Maturity)
- Zahlung von 1 Euro
- keine Kouponzahlung während der Laufzeit

$B(t, T)$ bezeichne den Preis dieser Anleihe zum Zeitpunkt $t < T$. $0 < B(t, T) < 1$ ist der Regelfall.

1.8 Put-Call Parität

Seien c, p die Anfangspreise einer Call- bzw. Putoption mit Laufzeit T und strike K.
Sei S_0 und S_T die Preise des Underlyings heute und in T.
Dann gilt:

$$S_0 + p = c + K \cdot B(0, T)$$

Argumentation:
Betrachte folgende Kombinationen:
I: long Aktie, long put
II: long call, $K\cdot$ long in eine Nullkouponanleihe mit Fälligkeit in T

Wert zum Zeitpunkt T:
I: $S_T + (K - S_T)^+ = max\{S_T, K\}$
II: $(S_T - K)^+ + K = max\{S_T, K\}$

Replikationsprinzip liefert:

$$S_0 + p = c + K \cdot B(0, T)$$

□

1.9 forward

- unbedingtes Termingeschäft
- Termin T Ausübungszeitpunkt, Maturity
- Underlying mit Preisen S_0 heute und S_T in T

- Zwei Parteien A und B
- Terminpreis F_T festgelegt zum Vertragabschluss

in T

- A zahlt an B den Terminpreis F_T
- B liefert das Underlying

zum Beispiel bei Agrargütern

A hat die long-Position im forward, B die short-Position.Zusammenhang zwischen Termin- und Spotpreis des Underlyings.
S_0 - gegenwärtiger Preis, **Spotpreis**
F_T - Terminpreis zum Termin T
Dann gilt:

$$F_T \cdot B(0,T) = S_0$$

Argumentation:
Betrachte folgende Kombinationen:
I: long im forward zum Zeitpunkt T, $F\times$ long in einer Nullkouponanleihe mit Fälligkeit T
II: long im Underlying
Wert zum Zeitpunkt T: I: $\underbrace{S_T - F_T}_{forward} + \underbrace{F_T}_{Nullkouponanleihe} = S_T$
II: S_T
Replikationsprinzip liefert:

$$F_T \cdot B(0,T) = S_0$$

1.10 Digitale Position

Recht auf Auszahlung eines festen Geldbetrags (etwa 1 €) bei Eintreten eines auslösenden Ereignisses (**bedingtes Termingeschäft**).
z.B.

digitaler call	digtialer put
$1_{\{S_T \geq K\}}$	$1_{\{S_T \leq K\}}$

1.11 Eigenschaften des Call-Preises

Sei $C(S_0,T,K)$ der Preis eines Calls auf ein Underlying mit Laufzeit T, strike K und Anfangspreis S_0. Dann gilt:

(i) $C(S_0,T,K) \geq max\{0, S_0 - K \cdot B(0,T)\}$ **innerer Wert** des Calls

(ii) $C(S_0,T,K) \leq S_0$ **obere Grenze** des Calls

(iii) $K_1 \leq K_2 \Rightarrow C(S_0,T,K_1) \geq C(S_0,T,K_2)$

(iv) $B(0,T)(K_2 - K_1) \geq C(S_0,T,K_1) - C(S_0,T,K_2)\ \forall K_1 < K_2$

(v) $C(S_0,T,K_2) \leq \frac{K_3-K_2}{K_3-K_1} \cdot C(S_0,T,K_1) + \frac{K_2-K_1}{K_3-K_1} \cdot C(S_0,T,K_3)\ \forall K_1 < K_2 < K_3$ **Konvexität in K**

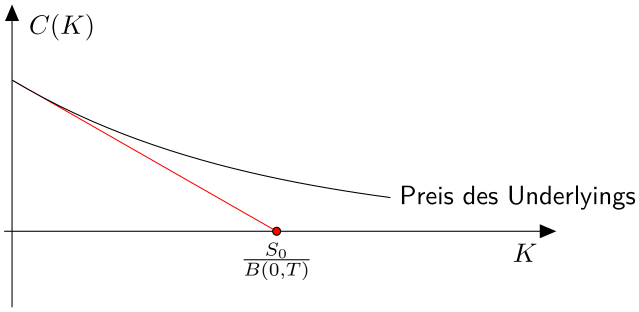


Abbildung 13: Konvexität in K

Argumentation:

(i) Falls $C(S_0, T, K) < 0$ gehe long im Call und halte bis T. Risikolosen Gewinn von $|C(S_0, T, K)| > 0$ am Anfang. $\lightning_{No-Arbitrage}$
Genauso sieht man ein, dass $P(S_0; T, K) \geq 0$
Put-Call Parität liefert:

$$\begin{aligned} C(S_0, T, K) &= S_0 + P(S_0, T, K) - K \cdot B(0, T) \\ &\geq S_0 - K \cdot B(0, T) \end{aligned}$$

(ii) Falls $C(S_0, T, K) > S_0$.
long Aktie, short im call
am Anfang: Gewinn von $C(S_0, T, K) - S_0 > 0$, benutze die Aktie um die Verpflichtung des Calls zu erfüllen: $S_T - (S_T - K)^+ \geq 0$ $\lightning_{No-Arbitrage}$

(iii) Sei $K_1 \leq K_2$:
Falls $C(K_1) < C(K_2)$ gehe short in K_2 und long in K_1.
am Anfang: $C(K_2) - C(K_1) > 0$
am Ende: $(S_T - K_1)^+ - (S_T - K_2)^+ = (S_T - K_1)_{\{K_1 \leq S_T \leq K_2\}} - (K_2 - K_1)_{\{S_T > K_2\}} > 0$ $\lightning_{No-Arbitrage}$

(iv) Sei $K_1 < K_2$.
Falls $C(K_1) - C(K_2) > (K_2 - K_1) \cdot B(0, T)$ gehe short in K_1, long in K_2, long $(K_2 - K_1) \times$ Nullkouponanleihe
am Anfang: $C(K_1) - C(K_2) - (K_2 - K_1) \cdot B(0, T) > 0$
am Ende: $(S_T - K_2)^+ - (S_T - K_1)^+ + K_2 - K_1 \geq 0$ $\lightning_{No-Arbitrage}$

(v) $K_1 < K_2 < K_3$; $K_2 = \lambda K_1 + (1 - \lambda) K_3$ mit $\lambda = \frac{K_3 - K_2}{K_3 - K_1}$
Falls $C(K_2) > \lambda C(K_1) + (1 - \lambda) C(K_3)$, gehe short in K_2, $\lambda \times$ long in K_1, $(1 - \lambda) \times$ long in K_3.
am Anfang: $C(K_2) - \lambda C(K_1) - (1 - \lambda) C(K_3) > 0$
am Ende:

$$\begin{aligned} \lambda(S_T - K_1)^+ + (1 - \lambda)(S_T - K_3)^+ - (S_T - K_2)^+ &= \lambda(S_T - K_1)_{\{K_1 < S_T < K_2\}} \\ &+ [\lambda(S_T - K_1) - (S_T - K_2)]_{\{K_2 < S_T < K_3\}} \\ &+ \underbrace{[K_2 - (\lambda K_1 + (1 - \lambda) K_3)]_{\{S_T > K_3\}}}_{=0} \end{aligned}$$

da

$$\begin{aligned} \lambda(S_T - K_1) + (K_2 - S_T) &= K_2 - \lambda K_1 - (1 - \lambda) S_T \\ &= \lambda K_1 + (1 - \lambda) K_3 - \lambda K_1 - (1 - \lambda) S_T \\ &= (1 - \lambda)(K_3 - S_T) \geq 0 \end{aligned}$$

$\lightning_{No-Arbitrage}$

1.12 Zinsmethoden

Frage: Wie kann man Kapitalrenditen durch annualisierte **Zinssätze** beschreiben?
Antwort: Man vereinbart eine **Zinsmethoden** und eine **Zählkonvention** (Anzahl der Tage eines Jahres).
Genauer: Kapital N wird zum Zeitpunkt t in eine Nullkouponanleihe mit Fälligkeit in T angelegt.

Zählkonvention für uns nicht wichtig

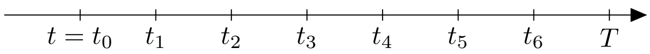
in t: erhalte für N:
$\frac{N}{B(t,T)}$ T-Bonds $\{$Nullkouponanleihe mit Fälligkeit in T

in T: die Position hat einen Wert von $\frac{N}{B(t,T)}$

Gewinn: $\frac{N}{B(t,T)} - N = N\left(\frac{1}{B(t,T)} - 1\right)$
$R(t,T) = \frac{1}{B(t,T)} - 1$ kann als Kapitalrendite interpretiert werden, die ein Investment zwischen t und T hervorbringt:
Ziel: Beschreibung durch einen jährlichen Zinssatz:

(a) **lineare Zinsmethode:**
lineare Verteilung der jährlichen Zinsen auf die Laufzeit $R(t,T) = \underbrace{(T-t)}_{Laufzeit} \cdot r_{lin}$, r_{lin} ist der jährliche Zinssatz bei linearer Zinsmethode.
Bsp.
Anlage Zeitraum ein Monat
- Rendite von $0.5\% = 50\ bp$ (ein Basispunkt $\hat{=}$ 0,01%)
- $r_{lin} = 0.5\% \cdot 12 = 6\%$

(b) **periodische Zinsmethode:**



setzte $t_i = t + i \cdot \frac{T-t}{m}, i = 0, \ldots, m$

Ein jährlicher Zins r wird linear verteilt auf die Periodenlänge. Das Kapital wird unter Berücksichtigung von Zinseszinsen verzinst.
Verzinsung:

$$K_m(r,t,T) := \left(1 + r \cdot \frac{T-t}{m}\right)^m = 1 + R(t,T)$$

(c) **stetige Zinsmethode:**

(i) Konstante Zinsrate r
erhält man als Grenzübergang für $m \to \infty$
$\lim\limits_{m\to\infty} K_m(r,t,T) = e^{r(T-t)} = 1 + R(t,T)$

(ii) nicht konstante Zinsrate
$r : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ liefert eine Kapitalentwicklung der Form:

$$K(r,t,T) = e^{\int_t^T r(s)\mathrm{d}s}$$

zwischen t und T.

Veranschaulichung:
$r : [0, \inf) \to \mathbb{R}, \quad t_i = t + i \cdot \frac{T-t}{m}, i = 0, \dots, m$
1 €in t_0 ergibt bei Zinsrechnung:

$$
\begin{aligned}
K_m(r,t,T) &= (1 + r(t_0)\Delta t) + (1 + r(t_1\Delta t) + \cdots + (1 + r(t_m)\Delta t) \\
log\ K_m(r,t,T) &= \sum_{i=1}^{m} log(1 + r(t_{i-1})\Delta t) \\
&= \underbrace{\sum_{i=1}^{m} r(t_{i-1)\Delta t}}_{\int_t^T r(s)\mathrm{d}s} + \underbrace{\mathcal{O}(\Delta t)}_{\overset{\Delta t \to 0}{\longrightarrow} 0}
\end{aligned}
$$

1.13 Festzinsanleihe

- festverzinsliches Wertpapier
- Nominal N
- Fälligkeit T
- Zinstermine $t_1 < t_2 < \cdots < t_m \leq T$
- Koupons $K_1, K_2, \dots, K_m$

In der Regel werden Koupons als Zins auf das Nominal gezahlt, d.h. $K_i = N \cdot R$, R Zinssatz.

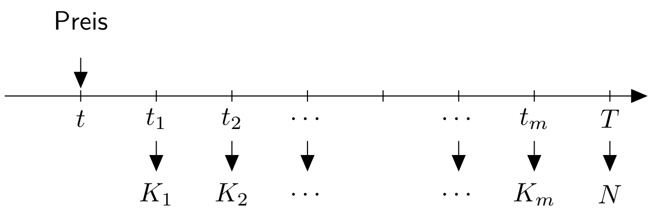


Abbildung 14: Ablauf Festzinsanleihe

Bewertung zu Zeitpunkt $t < t_1$:
Mit Hilfe einer Modifikation des Replikationsprinzips:
I: long in die festzinsanleihe
II: long in $K_i\times$ T_i-Bonds, $i = 1, \dots, m$, long in N T-Bonds

Beide Strategien erzeugen den gleichen Zahlungsstrom an Auschüttungen:

$$K_1 \text{ in } t_1, K_2 \text{ in } t_2, \dots K_m \text{ in } t_m$$

und haben den gleichen Endwert N in T.
Replikationsprinzip liefert, dass die Preise in $t < t_1$ übereinstimmen müssen, d.h.

Preis der Festzinsanleihe in $t < t_1$ ist

$$\sum_{i=1}^{m} K_i \cdot B(t, t_i) + N \cdot B(t, T)$$

1.14 Variabelverzinsliche Anleihe

Floater FRN (Floating Rate Note)

- Nominal N
- Fälligkeit T
- Startpunkt t_0
- Zinszahlungstermine $t_0 < t_1 < \dots < t_m = T$
- **nachschüssige Kouponzahlungen** $K_1, K_2, \dots, K_m$ entsprechend dem für die Periode geltendem Marktzins

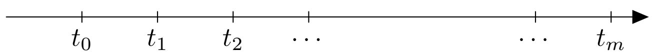
$$F(t_{i-1}, t_{i-1}, t_i) = \frac{1}{t - t_{i-1}} \cdot \left(\frac{1}{B(t_{i-1}, t)} - 1 \right)$$

also

$$\begin{aligned} K_i &= N \cdot F(t_{i-1}, t_{i-1}, t_i)(t_i - t_{i-1}) \\ &= N \left(\frac{1}{B(t_{i-1}, t_i)} - 1 \right), \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

- Bewertung in t_0 durch folgende replizierende Handelsstrategie:
Rollierende Anlage des Nominals bis zum jeweiligen nächsten Zinstermin.

Genauer:



- in t_0: Kaufe $\frac{N}{B(t_0,t_1)}$ t_1-Bonds und halte bis t_1
- in Tt_1:
  - Reinvestition von N in die 2.-Zinsperiode durch Kauf von $\frac{N}{B(t_1.t_2)}$ t_2-Bonds
  - Ausschüttung der Zinszahlung von $\frac{N}{B(t_0,t_1)} - N = N \cdot F(t_0, t_0, t_1)(t_1 - t_0) = K_1$
- $\dots$
- $\dots$
- in t_m:
  - Rückzahlung von N
  - Ausschüttung der letzten Zinszahlung $\frac{N}{B(t_{m-1},t_m)} - N = K_m$

Das Halten der variabel verzinslichen Anleihe und das Durchführen der rollierenden Handelsstrategie liefern den gleichen Zahlungsstrom an Zinszahlungen und haben zur Fälligkeit das Nominal als Endwert. Für die Handelsstrategie wird in t_0 ein Kapital von N benötigt. Desgalb ist der Preis der variabel verzinslichen Anleihe in t_0 durch N gegeben.
In $t < t_0$ ist der Preis $N \cdot B(t, t_0)$, denn durch Kauf von N t_0-Bonds in t kann die rollierende Handelsstrategie von t beginnend durchgeführt werden.

1.15 Swaps

Ein **Zinsswap** liefert die Möglichkeit das **Zinsänderungsrisiko** einer Festzinsanleihe zu vermeiden:

- Tauschgeschäft
- beim Zinsswap werden feste gegen variable Zinsen getauscht
- **Tenorstruktur** $t_0 < t_1 < \cdots < t_m$
- jährlichen Festzinssatz
- Nominal N, das nur zur Berechnung der Zinsen dient
- Unterscheidung in **Payer- und Reciever-Swaps** ausgehend von der Festzinsseite

Am Ende einer jeden Periode werden die festen Zinsen $N \cdot R(t_i - t_{i-1})$ gegen die variablen $N \cdot F(t_{i-1}, t_{i-1}, t_i)(t_i - t_{i-1})$ getauscht.
Dies führt zum Zahlungsstrom

$$N(t_i - t_{i-1})\left(F(t_{i-1}, t_{i-1}, t_i) - R\right), \ 1 \leq i \leq m$$

beim Payer-Swap und

$$N(t_i - t_{i-1})(R - F(t_{i-1}, t_{i-1}, t_i))$$

beim Reciever-Swap.
Ein Payer-Swap kann repliziert werden durch eine long-Position in der FRN, short in die Festzinsanleihe zum Nominal N und Zinszahlungsterminen passend zur Tenorstruktur.
Deshalb gilt für den Preis Payerswap(t) in $t \leq t_0$:

$$\begin{aligned}\text{Payerswap}(t) &= \underbrace{N \cdot B(t, t_0)}_{\text{FRN in } t} - \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{m} N \cdot R(t_{i-1} - t_i) \cdot B(t, t_i) + N \cdot B(t, t_m)\right)}_{\text{Festzinspreis}} \\ &= N\left(B(t, t_0) - B(t, t_m) - \sum_{i=1}^{m} R \cdot B(t_{i-1}, t_i)\right)\end{aligned}$$

Der "faire"Festzinspreis R liegt dann in t vor, wenn Payer-Swap(t)=0, also wenn

$$R = \frac{B(t, t_0) - B(t, t_m)}{\sum_{i=1}^{m} B(t, t_i)(t_i - t_{i-1})}$$

R ist dann die sogenannte **Swaprate** in t.

2 Aktuarielle Bewertung von Zahlungsströmungen

Ziel: Bewertung von Zahlungsverpflichtungen, die durch biometrische Risiken verursacht werden. Biometrische Risiken sind zum Beispiel Todesfall, Invalidität,...

2.1 Zahlungsströme und deren Bewertung

- zeitdiskrete periodische Sichtweise, Zeit wird in Jahren gemessen

Definition

- Ein Zahlungsstrom Z ist eine Folge $(Z(n))_{n\in\mathbb{N}}$ von nicht negativen reellen Zahlen, $Z(n) \mathrel{\widehat{=}}$ Auszahlung zum Zeitpunkt n
- Frage: Was ist der Kapitalwert, der durch den Zahlungsstrom der verursachten Zahlungsverpflichtungen entsteht?
- Antwort: Summe der **abdiskontierten** Zahlungen
- Genauer: Für jedes $n \in N$ gibt $B(k,n)$, den Preis des n-Bonds zum Zeitpunkt k, den Wert einer in n fälligen Zahlungsverpflichtung von 1€an.
- Deshalb definieren wir:

$$V_0(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} Z(n) \cdot B(0,n)$$

  Summe aller auf den Anfang abdiskontierten Zahlungsverpflichtungen, Kapitalwert von heute.
  Und

$$V_m(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} Z(m+k) \cdot B(m,m+k)$$

  Summe aller nach m fälligen auf den Zeitpunkt m abdiskontierten Zahlungsverpflichtungen.
- $V_m(Z)$ ist das Kapital, das zum Zeitpunkt m benötigt wird, um die zukünftigen Zahlungsverpflichtungen erfüllen zu können.
- Praxis: Periodische Rendite r, periodische **Diskontfaktor**

$$v = \frac{1}{1+r} \Rightarrow B(m,n) = v^{n-m} \quad \forall 0 \leq m \leq n$$

2.2 Personenversicherung und deren Bewertung

Ziel:
Mathematische Beschreibung und Analyse einer Personenversicherung
Definition:
Eine Personenversicherung ist ein Quadertupel $\Gamma = (t,s,b,T)$ mit Zahlungsströmen $(t(n))_{n\in\mathbb{N}_0},\ (s(n))_{n\in\mathbb{N}_0},\ (b(n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(0,\infty)$-wertiger Zufallsvariabel T.
Interpretation:

- T ist eine zufällige Ausfallzeit (etwa Restlebensdauer)
- **Todesfallspektrum** $(t(n))_{n\in\mathbb{N}_0}$

$$t(n) \geq 0 \mathrel{\widehat{=}} \text{ Auszahlung in } n \text{ bei Ausfall in der } n\text{-ten Periode}$$

- **Erlebensspektrum** $(s(n))_{n\in\mathbb{N}_0}$

$$s(n) \geq 0 \mathrel{\widehat{=}} \text{ Auszahlung in } n\text{, wenn } n \text{ erreicht wird}$$

- **Beitragsspektrum** $(b(n))_{n\in\mathbb{N}_0}$

$$b(n) \geq 0 \mathrel{\hat{=}} \text{ Premienzahlung in } n, \text{ wenn } n \text{ erreicht wird}$$

Aus Sicht des Versicherungsunternehmens erzeugt eine Personenverischerung die folgenden zufälligen Zahlungsströme:

Ausgabenstrom:
$A(n) = s(n)\mathbb{1}_{\{T>n\}} + t(n)\mathbb{1}_{\{n-1<T\leq n\}}$
$\forall n \in \mathbb{N}_0, \quad A(0) = s(0)$

Einnahmestrom:
$I(n) = b(n)\mathbb{1}_{\{T>n\}} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$

Bewertung aus heutiger Sicht durch

$$V_0(A) = s(0) + \sum_{n=1}^{\infty} s(n)\mathbb{1}_{\{T>n\}}B(0,n) + \sum_{n=1}^{\infty} t(n)\mathbb{1}_{\{n-1<T\leq n\}}B(0,n)$$
$$V_0(I) = \sum_{n=0}^{\infty} b(n)\mathbb{1}_{\{T>n\}}B(0,n)$$

$V_0(A) \mathrel{\hat{=}}$ heutiger Kapitalwert des zufälligen Zahlungsstroms
$\mathbb{E}V_0(A) \mathrel{\hat{=}}$ mittlerer Kapitalwert der zukünftigen Zahlungsverpflichtung
$\mathbb{E}V_0(I) \mathrel{\hat{=}}$ mittlerer Kapitalwert der Einnahmen
Definition:
$\mathbb{E}V_0(A)$ heißt **Barwert** der durch die Versicherung induzierten Zahlungsverpflichtungen. $\mathbb{E}V_0(I)$ heißt **Barwert** der durch die Versicherung induzierten Einnahmen.
Eine Personenversicherung heißt **ausgewogen** oder **fair**, wenn $\mathbb{E}V_0(A) = \mathbb{E}V_0(I)$ gilt und beide endlich sind.
Ist $\mathbb{E}V_0(A) < \infty$ oder? $\mathbb{E}V_0(I) < \infty$, so ist $\mathbb{E}V_0(A) - \mathbb{E}V_0(I)$ der Barwert der Versicherung.
Dies ist als Ausgangspreis zu interpretieren, den ein Versicherungsunternehmen verlangt.
Äquivalenzprinzip:
Man wähle (t, s, b) so, dass die Versicherung fair ist.

2.3 Klassische Beispiele

- versichert wird eine Person
- biometrisches Risiko ist das Todesfallrisiko
- Ausfallzeit ist deshalb die Restlebensdauer der Person

(a) **Todesfallversicherung:**

- Todesfallsumme M
- Laufzeit n
- konstante periodische Prämienzahlung

$$t(k) = M \quad \forall k = 1, \ldots, n \qquad t(k) = 0 \text{ sonst}$$
$$s(k) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$$
$$b(k) = p \quad \forall k = 0, \ldots, n-1 \qquad b(k) = 0 \text{ sonst}$$

- Induzierte Zahlungsströme:

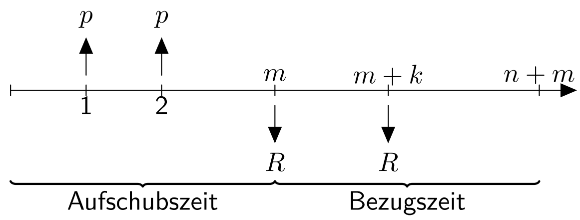
$$A(k) = M \cdot \mathbb{1}_{\{k-1<T\leq k\}},\ k = 1, \dots, n \quad A(k) = 0 \text{ sonst}$$
$$I(k) = p \cdot \mathbb{1}_{\{t>k\}},\ k = 0, \dots, n-1 \quad I(k) = 0 \text{ sonst}$$
$$V_0(A) = \sum_{k=1}^{n} M \cdot B(0,k)\mathbb{1}_{\{k-1<T\leq k\}}$$
$$V_0(I) = \sum_{k=0}^{n-1} p \cdot B(0,k)\mathbb{1}_{\{T>k\}}$$
$$\text{Also } \mathbb{E}V_0(A) = \sum_{k=1}^{n} M \cdot B(0,k)\mathbb{P}(k-1 < T \leq k)$$
$$\mathbb{E}V_0(I) = p \cdot \sum_{k=0}^{n-1} B(0,k)\mathbb{P}(T > k)$$

- Praxis:
  - Restlebenszeit wird durch das Alter bestimmt T_x Restlebenszeit eines x-Jährigen
  - Stationaritätsannahme $\mathbb{P}(T_x > t \mid T_x > s) = \mathbb{P}(T_{x+s} > t)$
  - $q_x = \mathbb{P}(T_x \leq 1)$ 1-jährige Sterbew'keit eines x-Jährigen
  - $p_x = 1 - q_x = \mathbb{P}(T_x > 1)$ 1-jährige Überlebensw'keit eines x-Jährigen
  - ${}_kp_x := \mathbb{P}(T_x > k) = \mathbb{P}(T_x > 1)\mathbb{P}(T_x > k \mid T_x > 1) \overset{\text{Stationarität}}{=} p_x\mathbb{P}(t_{x+1} > k-1)$
    $= \dots = p_x p_{x+1} \dots p_{x+k-1}$
  - ${}_kq_x = 1 -_k p_x = \mathbb{P}(T_x \leq k)$
  - Bezeichnung für $M = 1$, Eintrittsalter x
    ${}_{|n}A_x = \sum_{k=1}^{n} r^k \mathbb{P}(k-1 < T_x \leq k)$
    für $p = 1$:
    $\ddot{a}_{x:n\rceil} = \sum_{k=0}^{n-1} r^k \mathbb{P}(T_x > k)$
    Die Todesfallversicherung ist fair, wenn $M \cdot {}_{|n}A_x = p \cdot \ddot{a}_{x:n\rceil}$
    $n \to +\infty$ entspricht Todesfallversicherung ohne zeitliche Beschränkung
  - Bezeichnung

$$A_x = \sum_{k=1}^{\infty} v^k \mathbb{P}(k-1 < T_x \leq k)$$
$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \mathbb{P}(T_x > k)$$

(b) **aufgeschobene Rentenversicherung**

- Eintrittsalter x
- Aufschubszeit m Jahre
- Bezugszeit n Jahre
- Rentenhöhe R
- Beitragshöhe p



Modellierung:

- $T = T_x$ Restlebenszeit eines x-Jährigen
- $t(k) = 0 \; \forall k \in \mathbb{N}_0$
- $s(k) = 0 \; k = 0, \dots, m-1, \quad s(m+k) = R \; k = 0, \dots, n-1$
- $b(k) = p \; k = 0, \dots, m-1, \quad b(k) = 0$ sonst

Induzierte Zahlungsströme:

- Ausgaben: $A(m+k) = R \cdot \mathbb{1}_{\{T>m+k\}} \; k = 0, \dots, n-1, \quad A(k) = 0$ sonst
- Einnahmen: $I(k) = p \cdot \mathbb{1}_{\{T>k\}} \; k = 0, \dots, m-1 \quad I(k) = 0$ sonst
- Barwert der Ausgaben: $\mathbb{E}V_0(A) = \sum_{k=0}^{n-1} R \cdot v^{m+k} \mathbb{P}(T_> m+k)$
- Barwert der Einnahmen: $\mathbb{E}V_0(I) = p \underbrace{\sum_{k=0}^{m-1} v^k \mathbb{P}(T > k)}_{\ddot{a}_{x:m\rceil}} = p \cdot \ddot{a}_{x:m\rceil}$
- Bezeichnung für $R = 1$: ${}_{m|n}\ddot{a}_x := \sum_{k=0}^{n-1} v^{m+k} \mathbb{P}(T > m+k)$
- Die Versicherung ist fair, wenn $R \cdot {}_{m|n}\ddot{a}_x = p \cdot \ddot{a}_{x:m\rceil}$
- Für $n = \infty$, lebenslange Rente: ${}_{m|}\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+m} \mathbb{P}(T > m+k)$

(c) **Erlebensfallversicherung**

- Eintrittsalter x
- Laufzeit n Jahre
- **Erlebensfallsumme** M, Auszahlung bei Überleben von n Jahren
- konst. Prämie p, während der Laufzeit

Modellierung:

- $T = T_x$ Restlebenszeit
- $t(k) = 0 \; \forall k \in \mathbb{N}_0$
- $s(k) = \begin{cases} M, & k = n \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$
- $b(k) = \begin{cases} p, & k = 0, \dots, n-1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

Induzierte Zahlungsströme:

- Ausgaben: $A(m) = M \cdot \mathbb{1}_{\{T>m\}}$, $A(k) = 0$ sonst
- Einnahmen: $I(k) = p \cdot \mathbb{1}_{\{T>k\}}, \quad k = 1, \dots, n-1$

Bewertung:

$$\mathbb{E}V_0(A) = M \underbrace{v^n \mathbb{P}(T > n)}_{= {}_mE_x} = M \cdot \ {}_nE_x$$

$$\mathbb{E}V_{=}(I) = p \cdot \ddot{a}_{x:n\rceil}$$

- Versicherung ist fair, wenn $M \ {}_nE_x = p\ddot{a}_{x:m\rceil}$

(d) **gemischte Versicherung** (Kapitalgebundene Lenbensvers.)

- Kombination aus Todesfall- und Erlebensversicherung
- Eintrittsalter x
- Laufzeit n
- Versicherungssumme M, fällig bei Tod während der Laufzeit oder bei Überleben der Laufzeit
- konst. Prämie p, während der Laufzeit

Modellierung:

- $T = T_x$ Restlebenszeit
- $t(k) = M, \quad k = 1, \ldots, n,$ $t(k) = 0$ sonst
- $s(n) = M, \quad s(k) = 0$ sonst
- $b(k) = p, \quad k = 0, \ldots, n-1,$ $b(k) = 0$ sonst

Induzierte Zahlungsströme:

$$A(k) = M \cdot \mathbb{1}_{\{k-1<T\leq k\}}, \qquad k = 1, \ldots, n-1$$
$$A(n) = M \cdot (\mathbb{1}_{\{n-1<T\leq n\}} + \mathbb{1}_{\{T>n\}}), \qquad A(k) = 0 \text{ sonst}$$
$$I(k) = p \cdot \mathbb{1}_{\{T>k\}}, \qquad k = 0, \ldots, n-1$$

Bewertung:

$$\mathbb{E}V_0(A) = M(\ {}_{|n}A_x + \ {}_nE_x) \qquad\qquad \mathbb{E}V_0(I) = p\ddot{a}_{x:n\rceil}$$

Versicherung ist fair, wenn $M(\ {}_{|n}A_x + \ {}_nE_x) = p\ddot{a}_{x:n\rceil}$

2.4 Deckungskapital

Betrachtet wird nur der Fall einer **deterministischen Zinsentwicklung**,z.B. $B(k, n) \in (0, 1)$ det. $\forall n \in \mathbb{N},\ k < n$
Beobachtung:
Anfangs sind die Prämieneinnahmen pro Jahr höher, als die zu erwartenden Ausgaben pro Jahr. Dies führt zum Aufbau einer **Prämienreserve**. Gegen Ende sind die zu erwartenden Leistungen pro Jahr höher, als die Prämien pro Jahr und werden durch die aufgebaute Prämienreserve finanziert.
Der **Deckungskapitalverlauf** spiegelt den Auf- und Abbau der Prämienreserve wieder.
Definition:
Gegeben sei eine allgemeine Prämienversicherung $\Gamma = (t, s, b, T)$. Sei $(A(n))_{n\in\mathbb{N}}$ und $(I(n))_{n\in\mathbb{N}}$ der Zahlungsstrom der Ausgaben und Einnahmen. Das nach m Jahren gebildete Deckungskapital $\mathcal{D}(m)$ ist definiert, als die Differenz der Barwerte, der dann zukünftigen Ausgaben und Einnahmen, wobei die Diskontierung auf das Ende des n-ten Jahres vorgegeben wird.
In mathematischen Formeln:

Anfang und Ende bezieht sich auf die Versicherung, bzw. viele Versicherungen zum selben Zeitpunkt

$$\mathcal{D}(m) = \mathbb{E}(V_m(A) \mid \underbrace{T > m}_{\text{die nach } m \text{ noch leben}}) - \mathbb{E}(V_m(I) \mid T > m) \ \ \forall m \in \mathbb{N}_0$$

Dies ist die Definition des sogenannten **prospektiven Deckungskapitals** (vorausschauende Methode).
Für $m = 0$ ist $\mathcal{D}(0)$ der Barwert der Versicherung. $\mathcal{D}(0) = 0$ liegt bei einer fairen Versicherung vor.

Bemerkung:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(V_m(A) \mid T > m) &= \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{\infty} A(m+k)\underbrace{B(m,m+k)}_{=v^k} \mid (T > m\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} t(k+m)B(m,m+k)\mathbb{P}(m+k-1 < T < m+k \mid T > n) \\
&+ \sum_{k=0}^{\infty} s(k+m)B(m,m+k)\mathbb{P}(T > m+k \mid T > m)
\end{aligned}$$

Da $A(m+k) = t(k+m)\cdot \mathbb{1}_{\{m+k-1<T\leq m+k\}} + s(k+m)\cdot \mathbb{1}_{\{T>m+k\}}$

Analog:

$$\mathbb{E}(V_m(I) \mid T > m) = \sum_{k=0}^{\infty} b(m+k)B(m,m+k)\mathbb{P}(T > m+k \mid T > m)$$

2.5 Beispiele Deckungskapital

periodischen konst. Diskontfaktor v

(a) Todesfallverischerung:

- Eintrittsalter x
- VS $M = 1$
- Laufzeit n Jahre

$$\begin{aligned}
A(k) &= \mathbb{1}_{\{k-1<T_x\leq k\}}, \quad k = 1,\dots,n \\
I(k) &= p\cdot \mathbb{1}_{\{T_x>k\}}, \quad k = 0,\dots,n-1 \text{ mit } p = \frac{{}_{|n}A_x}{\ddot{a}_{x:n\rceil}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_x(m) &= \sum_{k=1}^{n-m} v^k\mathbb{P}(m+k-1 < T_x \leq m+k \mid T_x > m) - p\sum_{k=0}^{n-m-1} v^k\mathbb{P}(T_x > m+k \mid T_x > m) \\
&= \sum_{k=1}^{n-m} v^k\mathbb{P}(k-1 < T_{x+m} \leq k) - p\sum_{k=0}^{n-m-1} v^k\mathbb{P}(T_{x+m} > k) \\
&= {}_{|n-m}A_{x+m} - p\cdot \ddot{a}_{x+m:n-m\rceil}
\end{aligned}$$

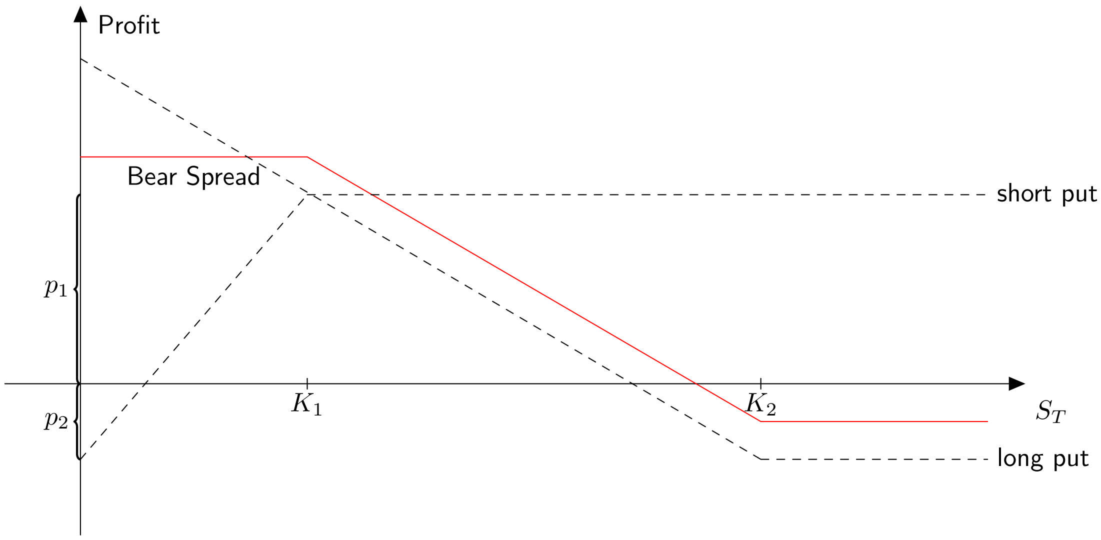
(b) Todesfallversicherung, unbegrenzte Laufzeit

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_x(m) &= \sum_{k=1}^{\infty} v^k\mathbb{P}(m+k-1 < T_x \leq m+k \mid T_x > m) - p\sum_{k=0}^{\infty} v^k\mathbb{P}(T_x > m+k \mid T_x > m) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} v^k\mathbb{P}(k-1 < T_{x+m} \leq k) - p\sum_{k=0}^{\infty} v^k\mathbb{P}(T_{x+m} > k) \\
&= A_{x+m} - p\cdot \ddot{a}_{x+m} \qquad m = 0,1,2,3,\dots \qquad p \text{ erfüllt } A_x = p\ddot{a}_x
\end{aligned}$$

Aussagen aus den Übungen

Zettel 1

Aufgabe 1
Bear Spread:
long put, strike K_2, short put, strike $K_1 < K_2$



Profit: $(K_2 - S_T)^+ - p_2 + p_1 - (K_1 - S_T)^+ = (K_2 - K_1) + (p_1 - p_2)$

Aufgabe 3
Exchange-Option:
Analog zur Put-Call-Parität.

Zettel 2

Aufgabe 1
Eigenschaften des Put-Preises:

(i) innerer Wert: $P(S_0, T, K) \geq max\{0, K \cdot B(0,T) - S_0\}$

(ii) obere Grenze: $P(S_0, T, K) < K$

(iii) Monoton im strike: $K_1 \leq K_2 \Rightarrow P(S_0, T, K_1) \leq P(S_0, T, K_2)$

(iv) $B(0,T)(K_2 - K_1) \geq P(K_2) - P(K_1) \quad \forall K_1 \leq K_2$

(v) Konvexität in K:

$$P(K_2) \leq \lambda P(K_1) + (1-\lambda)P(K_3) \quad \forall K_1 < K_2 < K_3 \text{ mit } \lambda = \frac{K_3 - K_2}{K_3 - K_1}$$

Beweise analog zum Call-Preis.

Aufgabe 2
Gelte <u>No-Arbitrage</u> und <u>keine Deflation</u>,d.h. $0 < B(0,T) < 1$.
Dann ist der Call-Preis monoton in der Zeit, also

$$T_1 < T_2: \quad C(T_1) \leq C(T_2)$$

<u>Beweis:</u>
folgt!

Aufgabe 4
<u>Terminzinssatz</u>
Der Kunde zahlt jedes Jahr $K£$ an die Versicherung, die dafür eine bestimmte, im voraus festgelegte Rendite R zusichert. Erstelle einen geeigneten Sparplan.
Annahme: Kunde zahlt immer am Jahresanfang. Die Versicherung muss heute, in t_0, $n \cdot K£$ anlegen um die garantierte Rendite zu gewährleisten.
in t_0 short in Zero-Bonds:

$$K \cdot B(t_0, 1), K \cdot B(t_0, 2), \cdot, K \cdot B(t_0, n-1)$$

Also zu jedem $j = 1, \ldots, n-1$ muss die Versicherung $K£$ an die Bank zurück zahlen, dies wird gerade durch die jährlichen Prämien der Kunden getilgt.
Also hat die Versicherung am Anfang ein Kapital von $K + \sum_{j=1}^{n-1} K \cdot B(t_0, j)$ zur Verfügung. Lege dies in Zero-Bonds an mit Laufzeit n Jahren an:

$$\left(K \cdot \sum_{j=1}^{n-1} K \cdot B(t_0, j) \right) \times \text{long in n-Zero-Bonds}$$

Daher Auszahlung bei $T = n$:

$$R = \left(K \cdot \left(1 + \sum_{j=1}^{n-1} B(t_0, j) \right) \right) \cdot \frac{1}{B(t_0, n)}$$

R ist dann die mögliche garantierte Auszahlung.

Index

Die Seitenzahlen *sind mit Hyperlinks zu den entsprechenden Seiten versehen, also anklickbar!*

Abbildungsverzeichnis