Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Fachbereich 10
Mathematik und
Informatik

Skript Topologie I.

Mitschrift der Vorlesung „Topologie I.“ von Prof. Dr. Arthur Bartels

Jannes Bantje

16. Oktober 2014

Aktuelle Version verfügbar bei:

GitHub (inklusive Sourcecode)
`https://github.com/JaMeZ-B/latex-wwu`

Bittorrent Sync
`B6WH2DISQ5QVYIRYIEZSF4ZR2IDVKPN3I`

Vorwort — Mitarbeit am Skript

Dieses Dokument ist eine Mitschrift aus der Vorlesung „Topologie I., WiSe 2014/2015“, gelesen von Prof. Dr. Arthur Bartels. Der Inhalt entspricht weitestgehend dem Tafelanschrieb. Für die Korrektheit des Inhalts übernehme ich keinerlei Garantie! Für Bemerkungen und Korrekturen – und seien es nur Rechtschreibfehler – bin ich sehr dankbar. Korrekturen lassen sich prinzipiell auf drei Wegen einreichen:

- Persönliches Ansprechen in der Uni, Mails an `j.bantje@wwu.de` (gerne auch mit annotieren PDFs)

- *Direktes* Mitarbeiten am Skript: Den Quellcode poste ich auf GitHub (siehe oben), also stehen vielfältige Möglichkeiten der Zusammenarbeit zur Verfügung: Zum Beispiel durch Kommentare am Code über die Website und die Kombination Fork + Pull Request. Wer sich verdient macht oder ein Skript zu einer Vorlesung, die ich nicht besuche, beisteuern will, dem gewähre ich gerne auch Schreibzugriff.

  Beachten sollte man dabei, dass dazu ein Account bei `github.com` notwendig ist, der allerdings ohne Angabe von persönlichen Daten angelegt werden kann. Wer bei GitHub (bzw. dem zugrunde liegenden Open-Source-Programm „`git`“) – verständlicherweise – Hilfe beim Einstieg braucht, dem helfe ich gerne weiter. Es gibt aber auch zahlreiche empfehlenswerte Tutorials im Internet.[1]

- *Indirektes* Mitarbeiten: TeX-Dateien per Mail verschicken.

  Dies ist nur dann sinnvoll, wenn man einen ganzen Abschnitt ändern möchte (zB. einen alternativen Beweis geben), da ich die Änderungen dann per Hand einbauen muss!

Vorlesungshomepage

`https://wwwmath.uni-muenster.de/reine/u/topos/lehre/WS2014-2015/Topologie1/Topologie1.html`

[1] zB. `https://try.github.io/levels/1/challenges/1`, ist auf Englisch, aber dafür interaktives LearningByDoing

Inhaltsverzeichnis

1 Kategorien, Funktoren und natürliche Transformationen

1.1 Definition

Eine **Kategorie** $\mathcal{C}$ besteht aus: 13. Okt

i) Einer Klasse $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Die Elemente von $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ heißen die **Objekte** von $\mathcal{C}$.

ii) Zu je zwei Objekten A, B aus $\mathcal{C}$ einer Menge $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B)$. Die Elemente von $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B)$ heißen **Morphismen** von $\mathcal{C}$.

iii) Zu je drei Objekten A, B, C aus $\mathcal{C}$ einer Abbildung:
$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B,C) \times \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,C) \ , \quad (f,g) \mapsto f \circ g$$
genannt die **Komposition** in $\mathcal{C}$.

Dabei müssen folgende Axiome erfüllt sein:

(i) Die Komposition ist **assoziativ**:
Für Objekte A, B, C, D von $\mathcal{C}$ und $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C,D), g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B,C), h \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B)$ gilt immer
$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

(ii) Die Komposition ist **unital**: Für jedes Objekt A von $\mathcal{C}$ gibt es einen Morphismus $\mathrm{id}_A \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,A)$ so, dass
$$\forall f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B,A) : \mathrm{id}_A \circ f = f \qquad \text{und} \qquad \forall f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B) : f \circ \mathrm{id}_A = f$$

1.2 Beispiele

(1) Die Kategorie der Mengen MENGEN: Objekte sind Mengen und Morphismen sind Abbildungen.

(2) Die Kategorie der Gruppen $\mathrm{GRUPPEN}$: Objekte sind Gruppen und Morphismen sind Gruppenhomomorphismen.

(3) Die Kategorie der K-Vektorräume $K\text{-}\mathrm{VR}$: Objekte sind K-Vektorräume und die Morphismen sind K-lineare Abbildungen.

(4) Die Kategorie der R-Moduln $R\text{-}\mathrm{MOD}$: Objekte sind R-Moduln und Morphismen sind R-lineare Abbildungen.

(5) Die Kategorie der C^∞-Mannigfaltigkeiten $C^\infty\text{-}\mathrm{MAN}$: Objekte sind C^∞-Mannigfaltigkeiten und Morphismen sind C^∞-Abbildungen.

(6) Die Kategorie der topologischen Räume TOP: Objekte sind topologische Räume und Morphismen sind stetige Abbildungen.

(7) Die Kategorie der punktierten topologischen Räume $\mathrm{TOP}_\bullet$: Objekte sind punktiert-topologische Räume und Morphismen sind punktiert-stetige Abbildungen.

(8) Die Kategorie HTOP: Objekte sind topologische Räume und Morphismen sind Homotopieklassen von stetigen Abbildungen.

(9) Die Kategorie $\mathrm{HTOP}_\bullet$: Objekte sind punktiert-topologische Räume und Morphismen sind Homotopieklassen von punktiert-stetigen Abbildungen.

(10) Sei G eine Gruppe. Wir erhalten eine Kategorie $\mathcal{C}_G$ mit genau einem Objekt $*$ und $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}_G}(*,*) = G$. Die Komposition wird durch die Verknüpfung in der Gruppe festgelegt.

(11) Ist $\mathcal{C}$ eine Kategorie, so ist $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ eine Kategorie, wobei $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}) = \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ und $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(A,B) := \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B,A)$. Die Komposition ist gegeben durch $f \circ^{\mathrm{op}} g := g \circ f$.

1.3 Bemerkung

(i) Eine Kategorie heißt **klein**, wenn ihre Objekte eine Menge bilden.

(ii) Statt $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ schreiben wir oft $f : A \to B$ oder $A \xrightarrow{f} B$.

1.4 Definition

Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien: Ein **Funktor** $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ordnet jedem Objekt C von $\mathcal{C}$ ein Objekt $F(C)$ von $\mathcal{D}$ und ordnet jedem Morphismus $f : C \to C'$ in $\mathcal{C}$ einen Morphismus $F(f) : F(C) \to F(C')$ in $\mathcal{D}$ zu. Dabei muss gelten:

$$F(f \circ g) = F(f) \circ F(g) \quad \text{und} \quad F(\mathrm{id}_C) = \mathrm{id}_{F(C)}$$

1.5 Beispiele

(1) Es gibt offensichtliche „Vergiss“-Funktoren:

$$\begin{aligned} K\text{-}\mathrm{VR} &\longrightarrow \mathrm{MENGEN} \\ R\text{-}\mathrm{MOD} &\longrightarrow \mathrm{MENGEN} \\ \mathrm{TOP} &\longrightarrow \mathrm{MENGEN} \\ \mathrm{TOP}_\bullet &\longrightarrow \mathrm{MENGEN} \\ \mathrm{TOP}_\bullet &\longrightarrow \mathrm{TOP} \end{aligned}$$

(2) Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und C ein Objekt von $\mathcal{C}$. Der durch C **dargestellte Funktor** $F_C : \mathcal{C} \to \mathrm{MENGEN}$ ist definiert durch

$$\begin{aligned} &F_C(A) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C, A) && \text{für } A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \\ &F_C(f) : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C, A) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C, A'), g \mapsto f \circ g && \text{für } f : A \to A' \text{ in } \mathcal{C} \end{aligned}$$

(3) Die Fundamentalgruppe definiert einen Funktor

$$\pi_1 : \mathrm{HTOP}_\bullet \longrightarrow \mathrm{GRUPPEN}$$

Bemerkung

- Ist $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor so schreiben wir oft kürzer und ungenauer $f_* := F(f)$.
- Kleine Kategorien und Funktoren bilden die Kategorie KAT.

1.6 Definition

Seien $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ zwei Funktoren. Eine **natürliche Transformation** $\tau : F \to G$ ordnet jedem $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ einen Morphismus $\tau_C : F(C) \to G(C)$ in $\mathcal{D}$ zu, sodass für jedes $f : C \to C'$ in $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd} F(C) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\tau_C"] & F(C') \arrow[d, "\tau_{C'}"] \\ G(C) \arrow[r, "G(f)"] & G(C') \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Bemerkung
Natürliche Transformationen lassen sich komponieren. Für $\tau : F \to G$, $\eta : G \to H$ ist $\eta \circ \tau : F \to H$ gegeben durch $F, G, H : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$

$$(\eta \circ \tau)_C := \eta_C \circ \tau_C : F(C) \to H(C)$$

Genauer: Für eine feste kleine Kategorie $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ bilden die Funktoren $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ mit den natürlichen Transformationen eine Kategorie $\mathrm{FUN}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$.

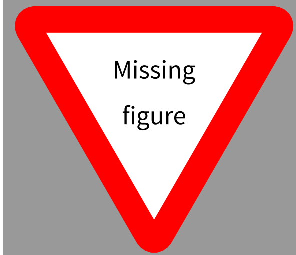
1.7 Ausblick

In der algebraischen Topologie werden topologische Fragen, wie zum Beispiel, wann $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ homöomorph sind, in algebraische Fragen übersetzt. Eine Möglichkeit für eine solche Übersetzung sind Funktoren von einer Kategorie von topologischen Räumen, z.B. $\mathrm{TOP}, \mathrm{TOP}_\bullet, \mathrm{HTOP}_\bullet$, in eine algebraisch Kategorie, z.B. $\mathrm{GRUPPEN}, K\text{-}\mathrm{VR}, \mathrm{ABEL.\,GRUPPEN}, R\text{-}\mathrm{MOD}$. Ein Beispiel für einen solchen Funktor ist die Fundamentalgruppe π_1. Ein Nachteil der Fundamentalgruppe ist, dass diese oft schwierig zu berechnen ist. Wir werden in dieser Vorlesung weitere Funktoren und Methoden für ihr Berechnung kennenlernen.

2 Kombinatorische Beschreibungen topologischer Räume

2.1 Beispiel

Graphen sind einerseits topologische Räume und andererseits kombinatorische Objekte:



Hier kommen noch zwei Graphen sowohl mit Ecken und Kanten hin

2.2 Definition

Ein **simplizialer Komplex** $K = (V, \Sigma)$ besteht aus einer Menge V und einer Menge Σ von nichtleeren, endlichen Teilmengen von V, sodass gilt

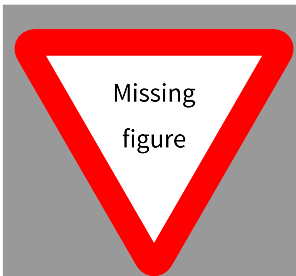
(i) $\{v\} \in \Sigma$ für alle $v \in V$

(ii) $\sigma \in \Sigma, \emptyset \neq \tau \subseteq \sigma \implies \tau \in \Sigma$.

Die Elemente von V heißen die **Ecken** oder **Vertices** von K. Die Elemente von Σ heißen die **Simplizes** von K. Enthält $\sigma \in \Sigma$ genau $n+1$ Elemente, so heißt σ ein n-**Simplex**. Ist $\tau \subsetneq \sigma$ mit σ ein n-Simplex und τ ein $n-1$-Simplex, so heißt τ eine **Seite** von σ.

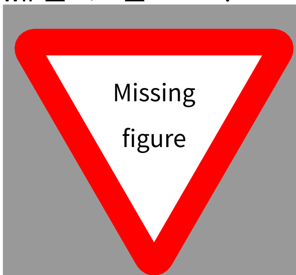
Ist V geordnet, so heißt K geordnet. Ist V endlich, so heißt K endlich.

2.3 Beispiel



Ein weiterer Graph mit den Mengen V und Σ

Ist σ eine endliche Menge, so heißt $\Delta^\sigma := \big(\sigma, \mathcal{P}(\sigma) \setminus \{\emptyset\}\big)$ der σ-Simplex. Für $\sigma = \{0, \dots, n\}$ schreiben wir $\Delta^n := \Delta^{\{0,\dots,n\}}$.



Zeichnungen von Δ^0 bis Δ^3

2.4 Definition

Sei $K = (V, \Sigma)$ ein simplizialer Komplex. Ein **Unterkomplex** von K ist ein simplizialer Komplex $K_0 = (V_0, \Sigma_0)$ mit $V_0 \subseteq V$, $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$.

Beispiel
Sei $K = (V, \Sigma)$ ein endlicher simplizialer Komplex. Dann ist K ein Unterkomplex von Δ^V.

2.5 Definition

Eine **simpliziale Abbildung** $f : K_1 = (V_1, \Sigma_1) \to K_2(V_2, \Sigma_2)$ zwischen simplizialen Komplexen ist eine Abbildung $f : V_1 \to V_2$, sodass $f(\sigma_1) \in \Sigma_2$ für alle $\sigma_1 \in \Sigma_1$.

2.6 Definition

Sei σ eine endliche Menge. Sei $\mathbb{R}^\sigma = \prod_{v\in\sigma} \mathbb{R}$ mit der Produkttopologie. Sei nun

$$|\Delta^\sigma| := \left\{ x = (x_v)_{v\in\sigma} \in \mathbb{R}^\sigma \,\middle|\, \sum_{v\in\sigma} x_v = 1, x_v \in [0,1] \forall v \in \sigma \right\}$$

Ist $\tau \subseteq \sigma$ so erhalten wir eine Abbildung $\iota_\tau^\sigma : |\Delta^\tau| \to |\Delta^\sigma|$ indem wir $(x_v)_{v\in\tau} \in |\Delta^\tau|$ durch $x_v = 0$ für $v \in \sigma \setminus \tau$ zu $(x_v)_{v\in\tau}$ auffüllen. Ist $\eta \subseteq \tau \subseteq \sigma$ so gilt $\iota_\eta^\sigma = \iota_\tau^\sigma \circ \iota_\eta^\tau$.

3 Simpliziale Homologie

Index

Die Seitenzahlen *sind mit Hyperlinks zu den entsprechenden Seiten versehen, also anklickbar*

Abbildungsverzeichnis

Todo's und andere Baustellen