Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Fachbereich 10 Mathematik und Informatik

Skript Topologie I.

Mitschrift der Vorlesung „Topologie I.“ von Prof. Dr. Arthur Bartels

Jannes Bantje

22. Februar 2016

$$H_*$$

Aktuelle Version verfügbar bei

GitHub

https://github.com/JaMeZ-B/latex-wwu

GitHub ist eine Internetplattform, auf der viele OpenSource-Projekte gehostet werden. Diese Plattform nutzen wir zur Zusammenarbeit, also findet man hier neben den PDFs auch die TEX-Dateien. Außerdem ist über diese Plattform auch direktes Mitarbeiten möglich, siehe nächste Seite.

sciebo die Campuscloud

https://uni-muenster.sciebo.de/public.php?service=files&t=965ae79080a473eb5b6d927d7d8b0462

Sciebo ist ein Dropbox-Ersatz der Hochschulen in NRW, der von der Uni Münster in leitender Position auf Basis der OpenSource-Software Owncloud aufgebaut wurde. Wenn man auf den Link klickt, kann man die Freigabe zum eigenen Speicher hinzufügen und hat dann immer automatisch die aktuellste Version.

Bittorrent Sync

B6WH2DISQ5QVYIRYIEZSF4ZR2IDVKPN3I

BTSync ist ein peer-to-peer Dateisynchronisations-Tool. Dabei werden die Dateien nur auf den Computern der Teilnehmer an einer Freigabe gespeichert. Ein RasPi ist permanent online, sodass stets die aktuellste Version verfügbar ist. `Clients` gibt es für jedes Betriebssystem. Zugang ist über das obige „Secret“ bzw. den QR-Code möglich.

Vorlesungshomepage

https://wwwmath.uni-muenster.de/reine/u/topos/lehre/WS2014-2015/Topologie1/Topologie1.html

Hier ist ein Link zur offiziellen Vorlesungshomepage.

Vorwort — Mitarbeit am Skript

Dieses Dokument ist eine Mitschrift aus der Vorlesung „Topologie I., WiSe 2014/2015“, gelesen von Prof. Dr. Arthur Bartels. Der Inhalt entspricht weitestgehend dem Tafelanschrieb. Für die Korrektheit des Inhalts übernehme ich keinerlei Garantie! Für Bemerkungen und Korrekturen – und seien es nur Rechtschreibfehler – bin ich sehr dankbar. Korrekturen lassen sich prinzipiell auf drei Wegen einreichen:

- Persönliches Ansprechen in der Uni, Mails an `j.bantje@wwu.de` (gerne auch mit annotieren PDFs) oder Kommentare auf `https://github.com/JaMeZ-B/latex-wwu`.
- *Direktes* Mitarbeiten am Skript: Den Quellcode poste ich auf GitHub (siehe oben), also stehen vielfältige Möglichkeiten der Zusammenarbeit zur Verfügung: Zum Beispiel durch Kommentare am Code über die Website und die Kombination Fork + Pull Request. Wer sich verdient macht oder ein Skript zu einer Vorlesung, die ich nicht besuche, beisteuern will, dem gewähre ich gerne auch Schreibzugriff.

  Beachten sollte man dabei, dass dazu ein Account bei `github.com` notwendig ist, der allerdings ohne Angabe von persönlichen Daten angelegt werden kann. Wer bei GitHub (bzw. dem zugrunde liegenden Open-Source-Programm „`git`“) – verständlicherweise – Hilfe beim Einstieg braucht, dem helfe ich gerne weiter. Es gibt aber auch zahlreiche empfehlenswerte Tutorials im Internet.[1]
- *Indirektes* Mitarbeiten: TeX-Dateien per Mail verschicken.

  Dies ist nur dann sinnvoll, wenn man einen ganzen Abschnitt ändern möchte (zB. einen alternativen Beweis geben), da ich die Änderungen dann per Hand einbauen muss! Ich freue mich aber auch über solche Beiträge!

Inhalt der Vorlesung

In der Vorlesung werden wir uns mit algebraischer Topologie beschäftigen. In der algebraischen Topologie werden topologische Fragen, wie zum Beispiel wann $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ homöomorph sind, in algebraische Fragen übersetzt. Ein wichtiges Hilfsmittel für solche Übersetzungen sind Homologiegruppen. Wir werden in der Vorlesung diese Homologiegruppen definieren und Hilfsmittel entwickeln, um Homologiegruppen zu berechnen. Es ergeben sich dann schöne topologische Anwendungen, wie zum Beispiel die topologische Invarianz der Dimension.

Literatur

- Bredon, G.E.: *Topology and Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, Springer Verlag 1993
- Hatcher, A.: *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002
- Lück, W.: *Algebraische Topologie - Homologie und Mannigfaltigkeiten*, Vieweg, 2005
- tom Dieck, T.: *Topologie*, 2. Auflage, de Gruyter 2000
- Waldhausen, F.: *Skript zur Einführung in die Topologie*, *Skript zur Topologie*

[1] zB. `https://try.github.io/levels/1/challenges/1`, ist auf Englisch, aber dafür interaktives LearningByDoing

Inhaltsverzeichnis

1 Kategorien, Funktoren und natürliche Transformationen

1.1 Definition. Eine ***Kategorie*** $\mathcal{C}$ besteht aus:

i) Einer Klasse $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$. Die Elemente von $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ heißen die ***Objekte*** von $\mathcal{C}$.

ii) Zu je zwei Objekten A, B aus $\mathcal{C}$ einer Menge $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$. Die Elemente von $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ heißen ***Morphismen*** von $\mathcal{C}$.

iii) Zu je drei Objekten $A, B, C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ aus einer Abbildung:

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C) \times \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, C) \quad , \quad (f, g) \mapsto f \circ g$$

genannt die ***Komposition*** in $\mathcal{C}$.

Dabei müssen folgende Axiome erfüllt sein:

(i) Die Komposition ist ***assoziativ***: Für Objekte A, B, C, D von $\mathcal{C}$ und $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C, D)$, $g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C)$ und $h \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ gilt immer

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

(ii) Die Komposition ist ***unital***: Für jedes Objekt A von $\mathcal{C}$ gibt es einen Morphismus $\mathrm{id}_A \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, A)$ so, dass

$$\forall f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, A) : \mathrm{id}_A \circ f = f \qquad \text{und} \qquad \forall f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) : f \circ \mathrm{id}_A = f$$

1.2 Beispiel.

(1) Die Kategorie der Mengen Set: Objekte sind Mengen und Morphismen sind Abbildungen.

(2) Die Kategorie der Gruppen Gruppen: Objekte sind Gruppen und Morphismen sind Gruppenhomomorphismen.

(3) Die Kategorie der K-Vektorräume K-VR: Objekte sind K-Vektorräume und die Morphismen sind K-lineare Abbildungen.

(4) Die Kategorie der R-Moduln R-Mod: Objekte sind R-Moduln und Morphismen sind R-lineare Abbildungen.

(5) Die Kategorie der C^∞-Mannigfaltigkeiten C^∞-Man: Objekte sind C^∞-Mannigfaltigkeiten und Morphismen sind C^∞-Abbildungen.

(6) Die Kategorie der topologischen Räume Top: Objekte sind topologische Räume und Morphismen sind stetige Abbildungen.

(7) Die Kategorie der punktierten topologischen Räume $\mathrm{Top}_\bullet$: Objekte sind punktiert-topologische Räume und Morphismen sind punktiert-stetige Abbildungen.

(8) Die Kategorie HTop: Objekte sind topologische Räume und Morphismen sind Homotopieklassen von stetigen Abbildungen.

(9) Die Kategorie $\mathrm{HTop}_\bullet$: Objekte sind punktiert-topologische Räume und Morphismen sind Homotopieklassen von punktiert-stetigen Abbildungen.

(10) Sei G eine Gruppe. Wir erhalten eine Kategorie $\mathcal{C}_G$ mit genau einem Objekt $*$ und Morphismen $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}_G}(*, *) = G$. Die Komposition wird durch die Verknüpfung in der Gruppe festgelegt.

(11) Ist $\mathcal{C}$ eine Kategorie, so ist $\mathcal{C}^{op}$ eine Kategorie, wobei $\mathrm{Obj}(\mathcal{C}^{op}) = \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ und $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}^{op}}(A, B) := \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, A)$. Die Komposition ist gegeben durch $f \circ^{op} g := g \circ f$.

1.3 Bemerkung.

(i) Eine Kategorie heißt ***klein***, wenn ihre Objekte eine Menge bilden.

(ii) Statt $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ schreiben wir oft $f\colon A \to B$ oder $A \xrightarrow{f} B$.

1.4 Definition. Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien: Ein ***Funktor*** $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ordnet jedem Objekt C von $\mathcal{C}$ ein Objekt $F(C)$ von $\mathcal{D}$ und ordnet jedem Morphismus $f : C \to C'$ in $\mathcal{C}$ einen Morphismus $F(f)\colon F(C) \to F(C')$ in $\mathcal{D}$ zu. Dabei muss gelten:

$$F(f \circ g) = F(f) \circ F(g) \quad \text{und} \quad F(\mathrm{id}_C) = \mathrm{id}_{F(C)}$$

1.5 Beispiel.

(1) Es gibt offensichtliche „Vergiss“-Funktoren:

$$\text{K-VR} \longrightarrow \textsc{Set} \qquad \text{R-}\textsc{Mod} \longrightarrow \textsc{Set} \qquad \textsc{Top} \longrightarrow \textsc{Set}$$
$$\textsc{Top}_\bullet \longrightarrow \textsc{Set} \qquad \textsc{Top}_\bullet \longrightarrow \textsc{Top}$$

(2) Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und C ein Objekt von $\mathcal{C}$. Der durch C ***dargestellte Funktor*** $F_C\colon \mathcal{C} \to \textsc{Set}$ ist definiert durch

$$\begin{aligned} &F_C(A) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C, A) && \text{für } A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}) \\ &F_C(f)\colon\ \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C, A) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C, A'), g \mapsto f \circ g && \text{für } f\colon A \to A' \text{ in } \mathrm{Mor}(A, A') \end{aligned}$$

(3) Die Fundamentalgruppe definiert einen Funktor

$$\pi_1 : \mathrm{H}\textsc{Top}_\bullet \longrightarrow \textsc{Gruppen}$$

Ist $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor so schreiben wir oft kürzer und ungenauer $f_* := F(f)$. Kleine Kategorien und Funktoren bilden die Kategorie $\textsc{Kat}$.

1.6 Definition. Seien $F, G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ zwei Funktoren. Eine ***natürliche Transformation*** $\tau\colon F \to G$ ordnet jedem $C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ einen Morphismus $\tau_C\colon F(C) \to G(C)$ in $\mathcal{D}$ zu, sodass für jedes $f\colon C \to C'$ in $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd} F(C) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\tau_C"] & F(C') \arrow[d, "\tau_{C'}"] \\ G(C) \arrow[r, "G(f)"] & G(C') \end{tikzcd}$$

kommutiert.

$F, G, H\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$

Natürliche Transformationen lassen sich komponieren. Für $\tau\colon F \to G$, $\eta\colon G \to H$ ist $\eta \circ \tau\colon F \to H$ gegeben durch

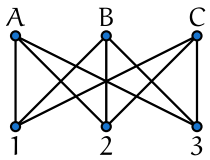
$$(\eta \circ \tau)_C := \eta_C \circ \tau_C\colon F(C) \to H(C)$$

Genauer: Für feste kleine Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ bilden die Funktoren $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ mit den natürlichen Transformationen eine Kategorie $\textsc{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$.

In der algebraischen Topologie werden topologische Fragen, wie zum Beispiel, wann $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ homöomorph sind, in algebraische Fragen übersetzt. Eine Möglichkeit für eine solche Übersetzung sind Funktoren von einer Kategorie von topologischen Räumen, z.B. $\textsc{Top}, \textsc{Top}_\bullet, \mathrm{H}\textsc{Top}_\bullet$, in eine algebraisch Kategorie, z.B. $\textsc{Gruppen}$, K-VR, $\textsc{Abel.Gruppen}$, R-$\textsc{Mod}$. Ein Beispiel für einen solchen Funktor ist die Fundamentalgruppe π_1. Ein Nachteil der Fundamentalgruppe ist, dass diese oft schwierig zu berechnen ist. Wir werden in dieser Vorlesung weitere Funktoren und Methoden für ihre Berechnung kennenlernen.

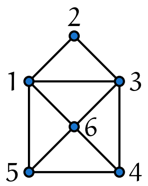
2 Kombinatorische Beschreibungen topologischer Räume

2.1 Beispiel. *Graphen* sind einerseits topologische Räume und andererseits kombinatorische Objekte:



$\longleftrightarrow$

$$V = \{A, B, C, 1, 2, 3\}$$
$$E = \big\{\{A,1\},\{A,2\},\{A,3\},\{B,1\},\{B,2\},\{B,3\},\{C,1\},\{C,2\},\{C,3\}\big\}$$



$\longleftrightarrow$

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
$$E = \big\{\{1,2\},\{1,3\},\{1,5\},\{1,6\},\{2,3\},\{3,4\},\{3,6\},\{4,5\},\{4,6\},\{5,6\}\big\}$$

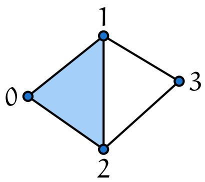
2.2 Definition. Ein ***simplizialer Komplex*** $K = (V, \Sigma)$ besteht aus einer Menge V und einer Menge Σ von nichtleeren, endlichen Teilmengen von V, sodass gilt

(i) $\{v\} \in \Sigma$ für alle $v \in V$

(ii) $\sigma \in \Sigma,\ \emptyset \neq \tau \subseteq \sigma \Longrightarrow \tau \in \Sigma.$ (Abgeschlossen bzgl. Teilmengenbildung)

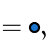
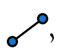
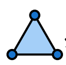
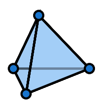
Die Elemente von V heißen die ***Ecken*** oder ***Vertices*** von K. Die Elemente von Σ heißen die ***Simplizes*** von K. Enthält $\sigma \in \Sigma$ genau $n+1$ Elemente, so heißt σ ein ***n-Simplex***. Ist $\tau \subseteq \sigma$, wobei σ ein n-Simplex und τ ein $n-1$-Simplex ist, so heißt τ eine ***Seite*** von σ. Ist V geordnet, so heißt K geordnet. Ist V endlich, so heißt K endlich.

2.3 Beispiel.



$$V = \{0, 1, 2, 3\}$$
$$\Sigma = \{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{0, 1, 2\}\}$$

Ist σ eine endliche Menge, so heißt $\Delta^\sigma := \big(\sigma, \mathcal{P}(\sigma) \setminus \{\emptyset\}\big)$ der σ-Simplex. Für $\sigma = \{0, \ldots, n\}$ schreiben wir $\Delta^n := \Delta^{\{0,\ldots,n\}}$. Es ist

$\Delta^0 =$ , $\Delta^1 =$ , $\Delta^2 =$ , $\Delta^3 =$ 

2.4 Definition. Sei $K = (V, \Sigma)$ ein simplizialer Komplex. Ein ***Unterkomplex*** von K ist ein simplizialer Komplex $K_0 = (V_0, \Sigma_0)$ mit $V_0 \subseteq V$ und $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$.

Sei $K = (V, \Sigma)$ ein endlicher simplizialer Komplex. Dann ist K ein Unterkomplex von Δ^V.

2.5 Definition. Eine ***simpliziale Abbildung*** $f\colon K_1 = (V_1, \Sigma_1) \to K_2 = (V_2, \Sigma_2)$ zwischen simplizialen Komplexen ist eine Abbildung $f\colon V_1 \to V_2$, sodass $f(\sigma_1) \in \Sigma_2$ für alle $\sigma_1 \in \Sigma_1$. Simpliziale Komplexe zusammen mit simplizialen Abbildungen bilden eine Kategorie Simp.

2.6 Definition. Sei σ eine endliche Menge. Sei $\mathbb{R}^\sigma = \prod_{v\in\sigma} \mathbb{R}$ mit der Produkttopologie. Wir setzen nun

$$|\Delta^\sigma| := \left\{ x = (x_v)_{v\in\sigma} \in \mathbb{R}^\sigma \;\middle|\; \sum_{v\in\sigma} x_v = 1, x_v \in [0,1]\ \forall v \in \sigma \right\}$$

Ist $\tau \subseteq \sigma$, so erhalten wir eine Abbildung $\iota_\tau^\sigma\colon |\Delta^\tau| \to |\Delta^\sigma|$ indem wir $(x_v)_{v\in\tau} \in |\Delta^\tau|$ durch $x_v = 0$ für $v \in \sigma \setminus \tau$ zu $(x_v)_{v\in\sigma}$ auffüllen. Ist $\eta \subseteq \tau \subseteq \sigma$ so gilt offensichtlich $\iota_\eta^\sigma = \iota_\tau^\sigma \circ \iota_\eta^\tau$. Sei nun $K = (V, \Sigma)$ ein simplizialer Komplex. Die ***geometrische Realisierung*** $|K|$ von K ist definiert als

$$|K| := \coprod_{\sigma\in\Sigma} \{\sigma\} \times |\Delta^\sigma| \Big/ \sim$$

wobei $\sim$ die durch $(\tau, x) \sim \big(\sigma, \iota_\tau^\sigma(x)\big)$ für $\tau \subseteq \sigma$ erzeugte Äquivalenzrelation ist. Versehen mit der Quotiententopologie ist $|K|$ ein topologischer Raum.

Anschaulich „klebt“ $\sim$ die geometrischen Realisierungen aller Einzelteile passend zusammen

- In Aufgabe 4 von Blatt 1 haben wir gezeigt, dass $|K|$ homöomorph zu einem Unterraum X von $\mathbb{R}^n$ mit $n := \#V$ ist via $\big[(\{\sigma\}, (x_{v_i})_{v_i\in\sigma})\big] \mapsto \sum_{v_i\in\sigma} x_{v_i} \cdot e_i$.
- In Aufgabe 2 von Blatt 2 haben wir gezeigt, dass $|\cdot|$ einen Funktor Simp $\to$ Top definiert. Dazu definiert man eine Abbildung zunächst auf den zugrunde liegenden Räumen durch

$$\Big(\sigma, \sum\nolimits_{v\in\sigma} x_v \cdot v\Big) \longmapsto \Big(f(\sigma), \sum\nolimits_{v\in\sigma} x_v \cdot f(v)\Big)$$

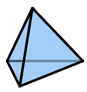
  und wendet diese unter Benutzung der universellen Eigenschaft der Quotiententopologie auf Repräsentanten an.[1]

2.7 Beispiel.

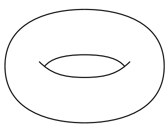
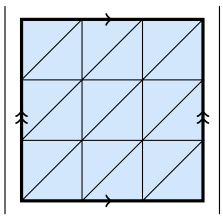
- Sei $\partial\Delta^n := \big(\{0,\dots,n\}, \mathcal{P}(\{0,\dots,n\}) \setminus \{\emptyset, \{0,\dots,n\}\}\big) =$ „$\Delta^n \setminus \{0,\dots,n\}$“. $\partial\Delta^n$ heißt der ***Rand des** n**-Simplizes***. Es gilt

$$\big|\partial\Delta^1\big| = \bullet\bullet \cong S^0$$

$\big|\partial\Delta^2\big| =$  $\cong S^1$

$\big|\partial\Delta^3\big| =$  $\cong S^2$

  Allgemein gilt $|\partial\Delta^n| \cong S^{n-1}$, siehe Aufgabe 1 von Blatt 3.

- $T^2 = S^1 \times S^1 \cong$  $\cong$ 

2.8 Definition. Ein topologischer Raum X heißt ein ***Polyeder***, falls er homöomorph zur geometrischen Realisierung eines simplizialen Komplexes ist.

[1] hier wird eine formale Summe anstatt eines Tupels benutzt; da σ stets eine endliche Menge ist, macht dies aber keinen Unterschied.

2.9 Definition. Sei $K = (V, \Sigma)$ ein endlicher simplizialer Komplex. Sei

$$a_n := \#\{\sigma \in \Sigma \mid \sigma \text{ ist ein } n\text{-Simplex von } K\}$$

Dann heißt $\chi(K) := \sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n \cdot a_n$ die ***Euler-Charakteristik*** von K.

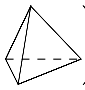
Die Eulercharakteristik lässt sich einfach durch Abzählen bestimmen:

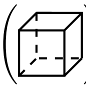
$$\chi(\triangle) = 3 - 3 = 0$$

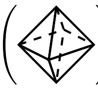
$$\chi(\square) = 4 - 4 = 0$$

$$\chi([n\text{-Eck}]) = n - n = 0$$

Selbstverständlich funktioniert dies auch bei dreidimensionalen Komplexen:

$\chi\big(\partial\Delta^3 =$  $\big) = 4 - 6 + 4 = 2$

$\chi\big($  $\big) = 8 - 12 + 6 = 2$

$\chi\big($  $\big) = 6 - 12 + 8 = 2$

2.10 Satz. Seinen K und K' endliche simpliziale Komplexe. Gilt $|K| \cong |K'|$, so gilt

$$\chi(K) = \chi(K').$$

Beweis: □ auskommentieren

Die Euler-Charakteristik ist also eine topologische Invariante von simplizialen Komplexen. Sie hängt nur von der topologischen Struktur von $|K|$ und nicht von der kombinatorischen Struktur von K ab.

3 Simpliziale Homologie

Ring mit Eins

3.1 Definition. Sei S eine Menge. Sei R ein Ring. Der ***freie** R**-Modul mit Basis** S*, $R[S]$, besteht aus allen endlichen formalen R-Linearkombinationen

$$\sum_{s\in S} r_s \cdot s \quad , r_s \in R \text{ und } r_s \neq 0 \text{ für endliche viele } s \in S$$

Die R-Modulstruktur auf $R[S]$ ist definiert durch:

$$r \cdot \left(\sum_{s\in S} r_s \cdot s\right) := \sum_{s\in S} (r \cdot r_s) \cdot s \qquad \left(\sum_{s\in S} r_s \cdot s\right) + \left(\sum_{s\in S} r'_s s\right) := \sum_{s\in S} (r_s + r'_s) \cdot s$$

Mittels $s = \sum_{s'\in S} \delta_{s,s'} \cdot s'$ fassen wir S als Teilmenge von $R[S]$ auf.

Die freien Moduln sind durch die folgende universelle Eigenschaft charakterisiert:

3.2 Lemma. Sei S eine Menge, R ein Ring. Es gilt

1) Ist M ein R-Modul und $i\colon S \to M$ eine Abbildung, so gibt es genau eine R-lineare Abbildung $\varphi\colon R[S] \to M$, die i fortsetzt.

2) Sei $f\colon R[S] \to M$ R-linear und $p\colon N \twoheadrightarrow M$ R-linear und surjektiv. Dann gibt es $\hat{f}\colon R[S] \to N$ mit $p \circ \hat{f} = f$.

   Moduln mit dieser Eigenschaft bezeichnet man als ***projektiv***. Freie Moduln sind also projektiv.

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[d, "p"] \\ R[S] \arrow[ur, dashed, "\hat{f}"] \arrow[r, "f"] & M \end{tikzcd}$$

Beweis:

1) Eine solche Abbildung ist gegeben durch $\varphi\big(\sum_{s\in S} r_s \cdot s\big) = \sum_{s\in S} r_s \cdot i(s)$. Ist φ' eine zweite, so gilt

$$\hat{\varphi}\left(\sum_{s\in S} r_s \cdot s\right) = \sum_{s\in S} r_s \cdot \hat{\varphi}(s) = \sum_{s\in S} r_s \cdot i(s)$$

2) Wähle für jedes $s \in S$ ein Urbild $j(s) \in N$ für $f(s) \in M$ unter $p\colon N \twoheadrightarrow M$. Nun wende 1) auf $j\colon S \to N$ an, um $\hat{f}\colon R[S] \to N$ mit $\hat{f}(s) = j(s)$ zu erhalten. Nun ist $p \circ \hat{f}(s) = f(s)$ für alle $s \in S$. Mit der Eindeutigkeit aus 1) folgt $p \circ \hat{f} = f$. $\square$

3.3 Beispiel. Viele uns bereits bekannte Strukturen sind freie Moduln:

(i) Sei K ein Körper und V, M, N seien K-Vektorräume, $f\colon V \to M$, $p\colon N \to M$ seien K-linear und p surjektiv. Dann gibt es $\hat{f}\colon V \to N$ mit $p \circ \hat{f} = f$. Wir können Lemma 3.2 benutzen, da V eine Basis B hat, also $V \cong K[B]$.

(ii) Sei $R = \mathbb{Z}$, sei $V = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $M = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, sowie $f = \mathrm{id}\colon V \to M$, $N = \mathbb{Z}$ und $p\colon \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ die Projektion mit $p(n) = n + 2\mathbb{Z}$. Dann gibt es *keine* $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung $\hat{f}\colon \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mit $p \circ \hat{f} = f$, denn falls $\hat{f}(1 + 2\mathbb{Z}) = n \in \mathbb{Z}$ ist, so folgt

$$2n = 2 \cdot \hat{f}(1 + 2\mathbb{Z}) = \hat{f}\big(2 \cdot (1 + 2\mathbb{Z})\big) = \hat{f}(0 + 2\mathbb{Z}) = 0$$

also $n = 0$ und somit $p \circ \hat{f} = 0$. $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist also kein freier Modul.

3.4 Definition. Sei $K = (V, \Sigma)$ ein simplizialer Komplex. Sei $\Sigma_n := \{\sigma \in \Sigma \mid \sigma \text{ ist ein } n\text{-Simplex}\}$. Sei R ein Ring. Der ***n-te Kettenmodul*** von K über R ist definiert als

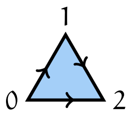
$$C_n(K; R) := R[\Sigma_n]$$

Ist $R = \mathbb{Z}$, so schreiben wir auch kurz $C_n(K) := C_n(K; \mathbb{Z})$.

3.5 Definition. Sei $K = (V, \Sigma)$ ein geordneter simplizialer Komplex. Sei $\sigma = \{v_0, \ldots, v_n\}$ ein n-Simplex von K. Bezüglich der Ordnung von K sei dabei $v_0 < v_1 < \ldots < v_n$. Sei τ ein $(n-1)$-Simplex von K. Definiere

$$\varepsilon_\sigma^\tau := \begin{cases} (-1)^i, & \text{falls } \tau = \{v_0, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n\} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Es gilt offensichtlich $\varepsilon_\sigma^\tau \neq 0$ genau dann, wenn τ eine Seite von σ ist. Für den folgenden geordneten simplizialen Komplex gilt



$$\varepsilon_{\{0,1,2\}}^{\{0,1\}} = 1, \quad \varepsilon_{\{0,1,2\}}^{\{0,2\}} = -1, \quad \varepsilon_{\{0,1,2\}}^{\{1,2\}} = 1$$

3.6 Definition. Sei $K = (V, \Sigma)$ ein geordneter simplizialer Komplex. Die ***n-te Randabbildung***

$$\partial_n \colon \underbrace{C_n(K; R)}_{=R[\Sigma_n]} \longrightarrow \underbrace{C_{n-1}(K; R)}_{=R[\Sigma_{n-1}]}$$

ist für ein Basiselement $\sigma \in \Sigma_n$ definiert durch

$$\partial_n(\sigma) = \sum_{\tau \in \Sigma_{n-1}} \varepsilon_\sigma^\tau \cdot \tau$$

3.7 Proposition. Es gilt

$$\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$$

Damit folgt $\operatorname{im} \partial_n \subseteq \ker \partial_{n-1}$.

Beweis: Sei σ ein n-Simplex von K. Dann gilt

$$\begin{aligned} \partial_{n-1}(\partial_n(\sigma)) = \partial_{n-1}\left(\sum_{\tau \in \Sigma_{n-1}} \varepsilon_\sigma^\tau \cdot \tau \right) = \sum_{\tau \in \Sigma_{n-1}} \varepsilon_\sigma^\tau \cdot \partial_{n-1}(\tau) &= \sum_{\tau \in \Sigma_{n-1}} \varepsilon_\sigma^\tau \left(\sum_{\eta \in \Sigma_{n-2}} \varepsilon_\tau^\eta \cdot \eta \right) \\ &= \sum_{\eta \in \Sigma_{n-2}} \left(\sum_{\tau \in \Sigma_{n-1}, \eta \subseteq \tau \subseteq \sigma} \varepsilon_\tau^\eta \cdot \varepsilon_\sigma^\tau \right) \eta \\ &\overset{\text{Lemma 3.8}}{=} 0 \end{aligned}$$

□

3.8 Lemma. Sei σ ein n-Simplex. Sei $\eta \subseteq \sigma$ ein $(n-2)$-Simplex. Dann gibt es genau zwei $(n-1)$-Simplizes τ, τ' von K, die eine Seite von σ sind und η als Seite enthalten. Es gilt

$$\varepsilon_\tau^\eta \cdot \varepsilon_\sigma^\tau = -\varepsilon_{\tau'}^\eta \cdot \varepsilon_\sigma^{\tau'}$$

Beweis: Sei $\sigma = \{v_0, \dots, v_n\}$ mit $v_0 < v_1 < \dots < v_n$. Dann ist $\eta = \{v_0, \dots, v_n\} \setminus \{v_i, v_j\}$ mit $i < j$. Dann sind $\tau = \{v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n\}$ und $\tau' = \{v_0, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n\}$ die gesuchten $(n-1)$-Simplizes und es gilt

$$\varepsilon^{\tau}_{\sigma} = (-1)^i \ , \ \varepsilon^{\tau'}_{\sigma} = (-1)^j \ , \ \varepsilon^{\eta}_{\tau} = (-1)^{j-1} \ , \ \varepsilon^{\eta}_{\tau'} = (-1)^i \qquad \square$$

Wir vereinbaren die folgende Notation: Für $\sigma \in \Sigma_n$, $\sigma = \{v_0, \dots, v_n\}$ mit $v_0 < \dots < v_n$ schreiben wir

$$\delta^j \sigma := \{v_0, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n\} \in \Sigma_{n-1}$$

Dann ist $\partial_n(\sigma) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \cdot \delta^j \sigma$.

In Aufgabe 3 von Blatt 3 haben wir gezeigt, dass die Homologiemoduln für verschiedene Ordnungen auf der gleichen Menge isomorph sind.

3.9 Definition. Sei K ein geordneter simplizialer Komplex. Der ***n-te Homologiemodul*** von K über R ist definiert als

$$H_n(K;R) := \frac{\ker \partial_n \colon C_n(K;R) \to C_{n-1}(K;R)}{\operatorname{im} \partial_{n+1} \colon C_{n+1}(K;R) \to C_n(K;R)}$$

Für $n = 0$ interpretieren wir ∂_0 als die Nullabbildung. Daher gilt

$$H_0(K;R) = \frac{C_0(K;R)}{\operatorname{im} \partial_1 \colon C_1(K;R) \to C_0(K;R)}$$

3.10 Beispiel. Für ausreichend „einfache“ Komplexe können wir die Homologie direkt ausrechnen:

(1) Sei $K = \bullet$. Dann ist $C_0(K;R) \cong R$ und $C_i(K;R) = 0$ für $i > 0$. Weiter ist $H_0(K;R) = C_0(K;R) \cong R$ und $H_i(K;R) = 0$ für $i > 0$.

(2) Sein nun $K = K_n$ das n-Eck, wobei $n \geqslant 3$. Also

$$\begin{aligned} \Sigma_0 &= \big\{\tau_1 = \{1\}, \tau_2 = \{2\}, \dots, \tau_n = \{n\}\big\} \\ \Sigma_1 &= \big\{\sigma_1 = \{1,2\}, \dots, \sigma_{n-1} = \{n-1, n\}, \sigma_n = \{1, n\}\big\} \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} &C_0(K;R) = R[\Sigma_0] \cong R^n \\ &C_1(K;R) = R[\Sigma_1] \cong R^n \\ &C_i(K;R) = 0 \text{ für } i > 1, \text{ insbesondere } H_i(K;R) = 0 \text{ für } i > 1 \end{aligned}$$

Es ist dann $\partial_2 = \partial_3 = \dots = 0$. Interessant ist $\partial_1 \colon C_1(K;R) \to C_0(K;R)$, denn es gilt

$$\partial_1(\sigma_i) = \begin{cases} \tau_{i+1} - \tau_i, & \text{falls } i = 1, \dots, n-1 \\ \tau_n - \tau_1, & \text{falls } i = n \end{cases}$$

Mit $\sigma'_1 := \sigma_1, \sigma'_2 := \sigma_2, \dots, \sigma'_{n-1} := \sigma_{n-1}$ und $\sigma'_n := -\sigma_n$ gilt dann

$$\partial_1(\sigma'_i) = \tau_{i+1} - \tau_i$$

mit der Konvention $\tau_{n+1} = \tau_1$. Also gilt

$$\partial_1\left(\sum_{i=1}^{n} r_i \sigma'_i\right) = \sum_{i=1}^{n} r_i(\tau_{i+1} - \tau_i) = \sum_{i=1}^{n} (r_{i-1} - r_i)\tau_i$$

Es folgt

$$\ker \partial_1 = \left\{ \sum_{i=1}^{n} r_i \cdot \sigma_i' \,\middle|\, r_1 = r_2 = \ldots = r_n \right\} \subseteq C_1(K;R)$$
$$\operatorname{im} \partial_1 = \left\{ \sum_{i=1}^{n} s_i \cdot \tau_i \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} s_i = 0 \right\} \subseteq C_0(K;R)$$

Ist $\sum_{i=1}^n s_i = 0$, so folgt für $r_n = 0, r_1 = -s_1, r_2 = -s_1 - s_2, \ldots, r_{n-1} = -s_1 - s_2 - \ldots - s_{n-1}$

$$\partial_1 \left(\sum_{i=1}^{n} r_i \sigma_i' \right) = \sum_{i=1}^{n} s_i \tau_i$$

Es folgt $H_1(K;R) = {}^{\ker \partial_1}/_{\operatorname{im} \partial_2} = \ker \partial_1 \cong R$ und

$$H_0(K;R) = {}^{\ker \partial_0}/_{\operatorname{im} \partial_1} = {}^{R[\Sigma_0]}/_{\{\sum_{i=1}^n s_i \tau_i \mid \sum_{i=1}^n s_i = 0\}} \cong R$$

(via $\sum_{i=1}^n s_i \tau_i \longmapsto \sum_{i=1}^n s_i$ und Homomorphiesatz)

3.11 Definition. Sei R ein Ring. Ein **R-*Kettenkomplex*** (C_*, d_*) ist eine Folge von R-Moduln $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zusammen mit R-linearen Abbildungen $(d_n \colon C_n \to C_{n-1})_{n \geqslant 1}$, so dass $d_n \circ d_{n+1} = 0$. Die d_n heißen die ***Randabbildungen*** von (C_*, d_*), die C_n die ***Kettenmoduln***. Die **n*-te Homologie*** eines Kettenkomplexes (C_*, d_*) ist definiert als

$$H_n(C_*, d_*) := \frac{\ker d_n \colon C_n \to C_{n-1}}{\operatorname{im} d_{n+1} \colon C_{n+1} \to C_n}$$

3.12 Bemerkung.

(i) Oft werden auch Kettenkomplexe betrachtet, die $\mathbb{Z}$ statt $\mathbb{N}$ verwenden.

(ii) Ein Kettenkomplex (C_*, d_*) heißt endlich erzeugt, wenn alle C_n endlich erzeugte R-Moduln sind und $C_n \neq 0$ nur für endlich viele n ist.

3.13 Definition. Zu einem geordneten simplizialen Komplex K heißt $\big(C_*(K;R), \partial_*\big)$ der ***simpliziale Kettenkomplex*** von K über R.

Ist K endlich, so ist $\big(C_*(K;R), \partial_*\big)$ endlich erzeugt.

4 Euler-Charakteristik von Kettenkomplexen

4.1 Erinnerung. Sei A eine abelsche Gruppe. Dann ist

$$TA := \left\{ a \in A \,\middle|\, \exists n \geqslant 1 : n \cdot a = \underbrace{a + \ldots + a}_{n\text{-mal}} = 0 \right\}$$

abelsche Gruppen sind $\mathbb{Z}$-Moduln

die ***Torsionsgruppe*** von A. Ist A endlich erzeugt, so ist auch TA endlich erzeugt und es gibt Primzahlpotenzen $p_1^{n_1}, \ldots, p_k^{n_k}$ mit

$$TA \cong \mathbb{Z}/(p_1^{n_1}) \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}/(p_k^{n_k})$$

Weiter gibt es dann n mit $A \cong \mathbb{Z}^n \oplus TA$. $\operatorname{Rg} A := n$ ist der ***Rang*** von A.

4.2 Lemma. Sei A eine endlich erzeugte abelsche Gruppe. Dann gilt

$$\operatorname{Rg} A = \max\{m \mid \exists C \leqslant A, C \cong \mathbb{Z}^m\}.$$

Beweis: Da $A \cong \mathbb{Z}^n \oplus TA$ ist, genügt zu zeigen: Ist $\varphi\colon \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}^n \oplus TA$ ein injektiver Gruppenhomomorphismus, so ist $m \leqslant n$. Schreibe $\varphi = \varphi_0 \oplus \varphi_1$, also $\varphi(a) = \varphi_0(a) + \varphi_1(a)$ mit $\varphi_0\colon \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}^n$, $\varphi_1\colon \mathbb{Z}^m \to TA$.

Behauptung: φ_0 ist injektiv. Zu $v \in \mathbb{Z}^m$ wähle $k \geqslant 1$ mit $k \cdot \varphi_1(v) = 0 \in TA$. Dann ist $\varphi_1(kv) = k\varphi_1(v) = 0$. Ist $v \neq 0$, so ist $k \cdot v \neq 0 \in \mathbb{Z}^m$, also ist $\varphi(kv) \neq 0$ und damit $\varphi_0(kv) \neq 0$. Es folgt $\varphi_0(v) \neq 0$, da sonst $\varphi_0(k \cdot v) = k \cdot \varphi_0(v) = 0$. Damit ist die Behauptung gezeigt.

Gruppenhomomorphismen $\varphi_0\colon \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}^n$ werden durch $n \times m$-Matrizen beschrieben: Es gibt $A = (a_{ij}) \in \mathbb{Z}^{n \times m}$ mit

$$\varphi_0 \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m a_{1j} \cdot z_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m a_{nj} \cdot z_j \end{pmatrix}$$

Ist $m > n$, so hat A, aufgefasst als Matrix über $\mathbb{Q}$, einen Kern. Es gibt also einen Vektor $w = \begin{pmatrix} a_1/b_1 \\ \vdots \\ a_m/b_m \end{pmatrix}$ mit $Aw = 0$, $w \neq 0$. Dann ist $(b_1, \ldots, b_m) \cdot w \in \mathbb{Z}^m$ und

$$\varphi_0\big((b_1, \ldots, b_m) \cdot w\big) = A \cdot \big((b_1, \ldots, b_m) \cdot w\big) = (b_1, \ldots, b_m) \cdot A \cdot w = 0$$

Dies ist ein Widerspruch zur Injektivität von φ_0. Also gilt $m \leqslant n$. □

4.3 Definition. Seien M_0, M_1, M_2 R-Moduln und $f_0\colon M_0 \to M_1$, $f_1\colon M_1 \to M_2$ R-lineare Abbildungen. Dann heißt

$$M_0 \overset{f_0}{\hookrightarrow} M_1 \overset{f_1}{\twoheadrightarrow} M_2 \qquad [*]$$

eine ***kurze exakte Sequenz***, wenn gilt:

(i) f_0 ist injektiv, **(ii)** $\operatorname{im} f_0 = \ker f_1$, **(iii)** f_1 ist surjektiv.

Oft sagt man $M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} M_2$ ist exakt in M_1, wenn $\operatorname{im} f_0 = \ker f_1$ ist. Dann ist [*] eine kurze exakte Folge, wenn

$$0 \longrightarrow M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \longrightarrow 0$$

exakt in M_0, M_1 und M_2 ist.

4.4 Beispiel. Es gibt zahlreiche Beispiele für kurze exakte Sequenzen:

1)

$$\begin{array}{ccccc} M_0 & \overset{i}{\hookrightarrow} & M_0 \oplus M_1 & \overset{p}{\twoheadrightarrow} & M_1 \\ v_0 & \overset{i}{\longmapsto} & (v_0, 0) \quad (v_0, v_1) & \overset{p}{\longmapsto} & v_1 \end{array}$$

ist eine kurze exakte Folge.

2) $\mathbb{Z} \overset{\cdot n}{\hookrightarrow} \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist eine kurze exakte Folge.

4.5 Bemerkung. Eine ***Spaltung*** für eine kurze exakte Folge $M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} M_2$ ist eine R-lineare Abbildung $s \colon M_2 \to M_1$ mit $f_1 \circ s = \mathrm{id}_{M_2}$. In diesem Fall erhalten wir einen Isomorphismus $M_0 \oplus M_2 \to M_1$, $(v_0, v_2) \mapsto f_0(v_0) + s(v_2)$.

Injektivität: Sei $(v_0, v_2) \in M_0 \oplus M_2$ mit $f_0(v_0) + s(v_2) = 0$. Dann gilt

$$0 = f_1\big(f_0(v_0) + s(v_2)\big) = v_2 \implies f_0(v_0) = 0 \implies v_0 = 0$$

Surjektivität: Sei $v_1 \in M_1$. Betrachte $v_2 := f_1(v_1)$. Dann ist $v_1 - s(v_2) \in \ker f_1 = \operatorname{im} f_0$, also gibt es v_0 in M_0 mit $f_0(v_0) = v_1 - s(v_1)$. Damit ist $v_1 = f_0(v_0) + s(v_1)$.

4.6 Bemerkung. **1)** Die kurze exakte Sequenz $\mathbb{Z} \overset{\cdot n}{\hookrightarrow} \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ spaltet nicht.

2) Ist $M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} M_2$ eine kurze exakte Folge mit M_2 frei, also $M_2 \cong R[S]$, so spaltet die Folge. Insbesondere ist $M_1 \cong M_0 \oplus M_2$. Dazu wenden wir Lemma 3.2 an und erhalten eine R-lineare Abbildung $s \colon M_2 \to M_1$, sodass folgendes Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd} & M_1 \arrow[d, two heads, "f_1"] \\ R[S] \arrow[ur, dashed, "s"] \arrow[r, "\mathrm{id}"] & R[S] \end{tikzcd}$$

s ist also die gesuchte Spaltung. Dieses Vorgehen funktioniert bei jedem projektiven Modul.

4.7 Bemerkung. Der Rang für alle endlich erzeugten abelschen Gruppen ist additiv:

$$\operatorname{Rg}(A \oplus B) = \operatorname{Rg} A + \operatorname{Rg} B,$$

da $A \cong \mathbb{Z}^{\operatorname{Rg} A} \oplus TA$, $B \cong \mathbb{Z}^{\operatorname{Rg} B} \oplus TB$, also

$$A \oplus B \cong \mathbb{Z}^{\operatorname{Rg} A + \operatorname{Rg} B} \oplus \underbrace{TA \oplus TB}_{=T(A \oplus B)}$$

4.8 Proposition. Der Rang von endlich erzeugten abelschen Gruppen ist additiv für kurze exakte Folgen: Ist

$$A \overset{i}{\hookrightarrow} B \overset{p}{\twoheadrightarrow} C \qquad [\star]$$

eine kurze exakte Folge von endlich erzeugten abelschen Gruppen, so gilt $\operatorname{Rg} B = \operatorname{Rg} A + \operatorname{Rg} C$.

Beweis: Spaltet [$\star$], so ist $B \cong A \oplus C$ und die Behauptung folgt aus der Bemerkung 4.7. Wir können annehmen, dass $C = \mathbb{Z}^n \oplus TC$ gilt. Wir erhalten folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, equal] & p^{-1}(\mathbb{Z}^n) \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[d, hook, "i''"] & \mathbb{Z}^n \arrow[d, hook, "i'"] \\
A \arrow[r, hook, "i"] & B \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[d, two heads, "p''"] & C \arrow[d, two heads, "p'"] \\
& B/p^{-1}(\mathbb{Z}^n) \arrow[r, hook, two heads, "p' \circ p"] & TC
\end{tikzcd} \qquad [\star]$$

Ist $p' \circ p(b) = 0$, so gibt es $v \in \mathbb{Z}^n$ mit $i'(v) = p(b)$. Nun gibt es $v' \in p^{-1}(\mathbb{Z}^n)$ mit $p(v') = v$. Es folgt

$$p\big(i''(v')\big) = p(b)$$

also $i''(v') - b \in \ker p = i(A)$. Da $i(A) \subseteq i''\big(p^{-1}(\mathbb{Z}^n)\big)$, folgt $b \in i''\big(p^{-1}(\mathbb{Z}^n)\big)$. In dem Diagramm sind die Spalten und Zeilen exakt. Da $\mathbb{Z}^n$ frei ist, spaltet $A \xhookrightarrow{i} p^{-1}(\mathbb{Z}^n) \xrightarrow{p} \mathbb{Z}^n$ und es gilt

$$\operatorname{Rg} A + \operatorname{Rg} C = \operatorname{Rg} A + n = \operatorname{Rg}\big(p^{-1}(\mathbb{Z}^n)\big)$$

Es bleibt zu zeigen: $\operatorname{Rg} B = \operatorname{Rg}\big(p^{-1}(\mathbb{Z}^n)\big)$.

Nebenbei: Ist $A' \subseteq B'$, so gilt $\operatorname{Rg} A' \leqslant \operatorname{Rg} B'$, denn

$$\operatorname{Rg} A' = \max\Big\{n' \,\Big|\, \mathbb{Z}^{n'} \cong C' \leqslant A'\Big\} \leqslant \max\Big\{n' \,\Big|\, \mathbb{Z}^{n'} \cong C' \leqslant B'\Big\} = \operatorname{Rg} B'.$$

Betrachte die kurze exakte Folge

$$p^{-1}(\mathbb{Z}^n) \longrightarrow B \longrightarrow {}^{B}\!/_{p^{-1}(\mathbb{Z}^n)}$$

Wegen ${}^{B}\!/_{p^{-1}(\mathbb{Z}^n)} \cong TC$ gibt es ein k mit $k \cdot \big(b + p^{-1}(\mathbb{Z}^n)\big) = 0$ für alle $b \in B$. Also $k \cdot b \in p^{-1}(\mathbb{Z}^n)$. Es folgt $kB \subseteq p^{-1}(\mathbb{Z}^n)$. Ist $B \cong \mathbb{Z}^{\operatorname{Rg} B} + TB$, so ist $kB \cong (k\mathbb{Z})^{\operatorname{Rg} B} + T(kB)$ und $\operatorname{Rg} kB = n = \operatorname{Rg} B$. Mit der Nebenbemerkung folgt $\operatorname{Rg} p^{-1}(\mathbb{Z}^n) = \operatorname{Rg} B$ aus $kB \subseteq p^{-1}(\mathbb{Z}^n) \subseteq B$. ☐

Man kann die Proposition auch mittels Tensorprodukten beweisen. Dazu geht man wie folgt vor:

- $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}}\colon \mathbb{Z}$-Mod $\to \mathbb{Q}$-VR ist ein Funktor.
- $\operatorname{Rg} A = \dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} A)$
  - **(a)** $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} (X \oplus Y) = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} X \oplus \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} Y$
  - **(b)** $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^n \cong \mathbb{Q}^n$
  - **(c)** $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} T \cong 0$ für T ein Torsionsmodul.
- Ist $A \longrightarrow B \longrightarrow C$ eine kurze exakte Folge, so ist auch $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} A \longrightarrow \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} B \longrightarrow \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} C$ eine kurze exakte Folge.
- Jede kurze exakte Folge $V_0 \longrightarrow V_1 \longrightarrow V_2$ von $\mathbb{Q}$-Vektorräumen spaltet und daher gilt $V_1 \cong V_0 \oplus V_2$ und $\dim_{\mathbb{Q}}(V \oplus W) = \dim_{\mathbb{Q}}(V) + \dim_{\mathbb{Q}}(W)$.

4.9 Definition. Sei (C_*, d_*) ein endlich erzeugter $\mathbb{Z}$-Kettenkomplex.

$$\chi(C_*) := \sum_{i=0}^{\infty} \operatorname{Rg}(C_i) = \sum_{i=0}^{n_0} \operatorname{Rg}(C_i)$$

heißt die ***Eulercharakteristik*** von (C_*, d_*). Dabei ist n_0 so gewählt, dass $C_n = 0$ für alle $n > n_0$.

4.10 Satz. Sei (C_*, d_*) ein endlich erzeugter $\mathbb{Z}$-Kettenkomplex. Dann gilt

$$\chi(C_*) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \operatorname{Rg} H_i(C_*, d_*).$$

Beweis: Sei $B_{n+1} := \operatorname{im} d_{n+1} \colon C_{n+1} \to C_n$ und $Z_n := \ker d_n \colon C_n \to C_{n-1}$. Also $H_n(C_*, d_*) = Z_n/B_{n+1}$. Als Untermoduln von C_n sind Z_n und B_n endlich erzeugt (LA2). Insbesondere ist auch $H_n(C_*, d_*)$ endlich erzeugt und der Rang somit definiert. Auch B_{n+1} ist Untermodul des endlich erzeugten $\mathbb{Z}$-Moduls C_n und somit endlich erzeugt. Wir erhalten kurze exakte Folgen:

$$B_{n+1} \hookrightarrow Z_n \twoheadrightarrow H_n(C_*, d_*)$$

$$Z_n \hookrightarrow C_n \twoheadrightarrow B_n$$

Nach Proposition 4.8 gilt $\operatorname{Rg} Z_n = \operatorname{Rg} B_{n+1} + \operatorname{Rg} H_n(C_*, d_*)$ und $\operatorname{Rg} C_n = \operatorname{Rg} Z_n + \operatorname{Rg} B_n$. Also gilt

$$\begin{aligned}
\chi(C_*) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \operatorname{Rg} C_i &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i (\operatorname{Rg} Z_i + \operatorname{Rg} B_i) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \Big(\operatorname{Rg} H_i(C_*, d_*) + \operatorname{Rg} B_{i+1} + \operatorname{Rg} B_i\Big) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \operatorname{Rg} H_i(C_*, d_*) + \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \operatorname{Rg} B_{i+1} + \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \operatorname{Rg} B_i \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \operatorname{Rg} H_i(C_*, d_*)
\end{aligned}$$ □

4.11 Korollar. Sei K ein endlicher, geordneter simplizialer Kettenkomplex. Dann gilt

$$\chi(K) = \sum_{i=1}^{\dim K} (-1)^i \operatorname{Rg} H_i(K; \mathbb{Z})$$

Eine vereinfachte Variante dieser Aussage kam in Aufgabe 2 von Blatt3 vor: Dort haben wirden Homologiemodul über einen Körper betrachtet. Deshalb konnte wir da dann die Dimensionsformeln anwenden, um die beiden Vorraussetzungen für die Rechnung in 4.10 zu erhalten.

Beweis: Wende den Satz 4.10 auf den simplizialen Kettenkomplex von K an. Da

$$\operatorname{Rg} C_n(K; \mathbb{Z}) = \operatorname{Rg} \mathbb{Z}[\Sigma_n] = \#\ n\text{-Simplizes in } K$$

ist

$$\chi(K) = \chi\big(C_*(K; \mathbb{Z}), \partial_*\big) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \operatorname{Rg} H_i\big(C_*(K; \mathbb{Z}), \partial_*\big) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \operatorname{Rg} H_i(K; \mathbb{Z})$$ □

5 Singuläre Homologie

5.1 Definition. Sei X ein topologischer Raum. Sei $S_n(X)$ die Menge aller stetigen Abbildungen $\sigma\colon |\Delta^n| \to X$. Elemente von $S_n(X)$ heißen ***singuläre Simplizes*** in X. Sei R ein Ring. Der ***n-te (singuläre) Kettenmodul*** von X über R ist

$$C_n(X;R) := R\big[S_n(X)\big]$$

5.2 Definition. Für $\sigma \in S_n(X)$ und $j \in \{0,\dots,n\}$ sei $\delta_j\sigma \in S_{n-1}(X)$ die Einschränkung von σ auf die j-te Seite von $|\Delta^n|$, also $\delta_j(\sigma) = \sigma \circ \iota_{n,j}$, wobei $\iota_{n,j}\colon |\Delta^{n-1}| \to |\Delta^n|$ die Inklusion der j-ten Seite ist:

$$\iota_{n,j}(x_0,\dots,x_{n-1}) = \big(x_0,\dots,x_{j-1},0,x_j,\dots,x_{n-1}\big)$$

vergleiche Blatt 2, Aufgabe 2

5.3 Bemerkung. Es gilt $\iota_{n,j} = |i_{n,j}|$ wobei $i_{n,j}\colon \Delta^{n-1} \to \Delta^n$ gegeben ist durch

$$i_{n,j}(k) = \begin{cases} k, & \text{falls } k < j \\ k+1, & \text{falls } k \geqslant j \end{cases}$$

5.4 Definition. Die ***n-te singuläre Randabbildung*** $\partial_n\colon C_n(X;R) \to C_{n-1}(X;R)$ ist definiert durch

$$\partial_n(\sigma) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \cdot \delta_j(\sigma).$$

5.5 Proposition. Es gilt

$$\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$$

Beweis: Wir rechnen die Behauptung einfach für $\sigma\colon |\Delta^n| \to X$ nach:

$$\begin{aligned}
\partial_{n-1} \circ \partial_n(\sigma) = \partial_{n-1}\left(\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \delta_j(\sigma)\right) &= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n} (-1)^{j+k}\delta_k\delta_j(\sigma) \\
&= \sum_{0\leqslant k<j\leqslant n} (-1)^{k+j}\delta_k\delta_j(\sigma) + \sum_{0\leqslant j\leqslant k\leqslant n-1} (-1)^{k+j}\delta_k\delta_j(\sigma) \\
&\overset{5.6}{=} \sum_{0\leqslant k<j\leqslant n} (-1)^{k+j}\delta_k\delta_j(\sigma) + \sum_{0\leqslant j\leqslant k\leqslant n-1} (-1)^{k+j}\delta_j\delta_{k+1}(\sigma) \\
&= \sum_{0\leqslant k<j\leqslant n} (-1)^{k+j}\delta_k\delta_j(\sigma) + \sum_{0\leqslant j<k\leqslant n} (-1)^{k-1+j}\delta_j\delta_k(\sigma) \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

5.6 Lemma. Für $0 \leqslant j \leqslant k \leqslant n-1$ und $\sigma \in S_n(X)$ ist $\delta_k\delta_j(\sigma) = \delta_j\delta_{k+1}(\sigma)$.

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned}
\delta_k\big(\delta_j(\sigma)\big)(x_0,\dots,x_{n-2}) &= \delta_j(\sigma)\big(x_0,\dots,x_{k-1},0,x_k,\dots,x_{n-2}\big) \\
&= \big(x_0,\dots,x_{j-1},0,x_j,\dots,x_{k-1},0,x_k,\dots,x_{n-2}\big)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\delta_j\delta_{k+1}(\sigma)(x_0,\dots,x_{n-2}) &= \delta_{k+1}(\sigma)\big(x_0,\dots,x_{j-1},0,x_j,\dots,x_{n-2}\big) \\
&= \big(x_0,\dots,x_{j-1},0,x_j,\dots,x_{k-1},0,x_k,\dots,x_{n-2}\big)
\end{aligned}$$

□

5.7 Definition. Sei X ein topologischer Raum. Die Homologie des ***singulären Kettenkomplex*** über R, $\big(C_*(X;R), \partial_*\big)$, heißt die ***singuläre Homologie von*** X mit Koeffizienten in R:

$$H_n(X;R) := H_n\big(C_*(X;R), \partial_*\big)$$

Für $R = \mathbb{Z}$ schreiben wir kürzer $C_*(X) := C_*(X;\mathbb{Z})$ und $H_n(X) := H_n(X;\mathbb{Z})$.

- Die Elemente von $C_n(X;R)$ heißen ***n-Ketten***.
- Die Elemente von $\operatorname{im}\partial_{n+1} \subseteq C_n(X;R)$ heißen ***n-Ränder***.
- Die Elemente von $\ker\partial_n \subseteq C_n(X;R)$ heißen ***n-Zykel***.

Jeder n-Zykel $\sigma \in C_n(X;R)$ bestimmt eine ***Homologieklasse*** $[\sigma] := \sigma + \operatorname{im}\partial_{n+1} \in H_n(X;R)$.

5.8 Beispiel. Ist $X = \{x_0\}$ der Ein-Punkt-Raum, so ist

$$H_*\big(\{x_0\};R\big) \cong \begin{cases} R, & \text{falls } * = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis: Es gibt für jedes n genau eine Abbildung $\sigma_n\colon |\Delta^n| \to \{x_0\}$ nämlich die konstante. Diese ist offensichtlich stetig. Also ist$C_n(\{x_0\};R) = R[\sigma_n]$. Für alle j ist $\delta_j\sigma_n = \sigma_{n-1}$. Daher ist

$$\partial_n(\sigma_n) = \begin{cases} 0, & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \sigma_{n-1}, & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

Der singuläre Kettenkomplex von $\{x_0\}$ hat also folgende Gestalt:

$$\begin{tikzcd}
C_0\big(\{x_0\};R\big) \arrow[d, phantom, "\cong"] & C_1\big(\{x_0\};R\big) \arrow[l, "0"'] \arrow[d, phantom, "\cong"] & C_2\big(\{x_0\};R\big) \arrow[l, "\cong"'] \arrow[d, phantom, "\cong"] & C_3\big(\{x_0\};R\big) \arrow[l, "0"'] \arrow[d, phantom, "\cong"] & \cdots \arrow[l, "\cong"'] \arrow[d, phantom, "\cong"] \\
R & R \arrow[l, "0"] & R \arrow[l, "\mathrm{id}"] & R \arrow[l, "0"] & R \arrow[l, "\mathrm{id}"]
\end{tikzcd}$$

Es folgt

$$H_n\big(\{x_0\};R\big) \cong \begin{cases} R, & \text{falls } n = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

□

5.9 Proposition.

1) Ist $X \neq \emptyset$, so ist $H_0(X) \neq 0$.
2) Ist X wegzusammenhängend, so gilt $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$.[a]

[a] Tatsächlich gilt auch die Umkehrung, wie in Aufgabe 4 von Blatt 3 gezeigt.

Eine analoge Aussage für simpliziale Komplexe haben wir in Aufgabe 3 von Blatt 2 bewiesen

Beweis: **1)** Sei die sogenannte ***Augmentierung*** $\epsilon\colon C_0(X) \to \mathbb{Z}$ definiert durch

$$\epsilon\left(\sum_{\sigma\in S_0(X)} r_\sigma \cdot \sigma\right) := \sum_\sigma r_\sigma.$$

Dann ist $\epsilon \circ \partial_1\colon C_1(X) \to \mathbb{Z}$ trivial, denn für $\sigma \in S_1(X)$ ist $\epsilon\circ\partial_1(\sigma) = \epsilon(\delta_0\sigma - \delta_1\sigma) = 0$. Daher induziert ϵ eine Abbildung $\overline{\epsilon}\colon H_0(X) \to \mathbb{Z}$. Da $X \neq \emptyset$ ist, gibt es einen singulären 0-Simplex $\sigma\colon \big|\Delta^0\big| \to X$. Für σ gilt $\overline{\epsilon}([\sigma]) = 1$ und daher ist $\overline{\epsilon}$ surjektiv und $H_0(X) \neq 0$.

2) Wir zeigen, dass $\overline{\epsilon}\colon H_0(X) \to \mathbb{Z}$ ein Isomorphismus ist, falls X wegzusammenhängend ist. Dazu zeigen wir $\ker \epsilon = \operatorname{im} \partial_1$. Dazu definieren wir $s\colon C_0(X) \to C_1(X)$ wie folgt: Sei σ_0 ein fest gewählter singulärer 0-Simplex. Zu $\sigma \in S_0(X)$ gibt es, da X wegzusammenhängend ist, $s(\sigma) \in S_1(X)$ mit $\delta_0 s(\sigma) = \sigma$, $\delta_1 s(\sigma) = \sigma_0$. Es gilt nun

$$\partial_1 \circ s(\sigma) = \sigma - \sigma_0 = \big(\mathrm{id}_{C_0(X)} - i \circ \epsilon\big)(\sigma)$$

wobei $i\colon \mathbb{Z} \to C_0(X)$, $n \mapsto n \cdot \sigma_0$. Ist nun $\nu \in \ker \epsilon$, so folgt

$$\partial_1 \circ s(\nu) = \nu - i \circ \underbrace{\epsilon(\nu)}_{=0} = \nu$$

also ist $\nu \in \operatorname{im} \partial_1$ und es folgt die Behauptung. □

5.10 Bemerkung. Sei $K = (V, \Sigma)$ ein geordneter simplizialer Komplex. Sei $\sigma = \{v_0, \dots, v_n\} \in \Sigma_n$ ein n-Simplex von K mit $v_0 < v_1 < \dots < v_n$. Wir ordnen σ den singulären n-Simplex $f_\sigma\colon |\Delta^n| \to |\Delta^\sigma| \subseteq |K|$ zu, wobei

$$f_\sigma\left(\sum_{i=0}^n t_i \cdot e_i\right) = \sum_{i=0}^n t_i \cdot v_i.$$

Nun erhalten wir eine Abbildung

$$C_*(K;R) \to C_*(|K|, R) \quad , \qquad \sum_{\sigma \in \Sigma_n} r_\sigma \cdot \sigma \longmapsto \sum_{\sigma \in \Sigma_n} r_\sigma \cdot f_\sigma.$$

Diese Abbildung induziert(!) eine weitere Abbildung $H_*(K;R) \xrightarrow{\cong} H_*(|K|;R)$ von der wir später zeigen werden, dass sie ein Isomorphismus ist.

6 Funktorialität

6.1 Definition. Seien (C_*, d_*) und (C'_*, d'_*) zwei R-Kettenkomplexe. Dann ist eine ***R-Kettenabbildung*** $f_*: (C_*, d_*) \to (C'_*, d'_*)$ eine Folge von R-linearen Abbildungen $f_n: C_n \to C'_n$, sodass

$$d'_n \circ f_n = f_{n-1} \circ d_n$$

für alle $n \geqslant 1$ gilt. Also kommutiert folgendes Diagramm

$$\begin{tikzcd} C_0 \arrow[d, "f_0"] & C_1 \arrow[l, "d_1"'] \arrow[d, "f_1"] & C_2 \arrow[l, "d_2"'] \arrow[d, "f_2"] & C_3 \arrow[l, "d_3"'] \arrow[d, "f_3"] & \dots \arrow[l] \\ C'_0 & C'_1 \arrow[l, "d'_1"] & C'_2 \arrow[l, "d'_2"] & C'_3 \arrow[l, "d'_3"] & \dots \arrow[l] \end{tikzcd}$$

6.2 Bemerkung. Ist $f_*: (C_*, d_*) \to (C'_*, d'_*)$ eine Kettenabbildung, so erhalten wir eine induzierte Abbildung auf Homologie $H_n(f_*): H_n(C_*, d_*) \to H_n(C'_*, d'_*)$ durch

$$H_n(f_*)([v]) := [f_n(v)]$$

für $v \in \ker d_n$. Dies ist wohldefiniert, denn:

- $d'_n\big(f_n(v)\big) = f_{n-1}\big(d_n(v)\big) = 0$, also $f_n(v) \in \ker d'_n$ für $v \in \ker d_n$.
- Ist $[v] = [w]$, mit $v, w \in \ker d_n$, so gibt es $x \in C_{n+1}$ mit $d_{n+1}(x) = v - w$. Dann ist

$$d'_{n+1}\big(f_{n+1}(x)\big) = f_n\big(d_{n+1}(x)\big) = f_n(v) - f_n(w)$$

also $[f_n(v)] = [f_n(w)] \in H_n(C'_*, d'_*)$.

6.3 Bemerkung.

a) R-Kettenkomplexe mit R-Kettenabbildungen bilden die Kategorie R-Ketten.

b) Homologie definiert nun einen Funktor: H_n: R-Ketten $\to$ R-Mod.
Es gilt $H_n(\mathrm{id}_{(C_*, d_*)}) = \mathrm{id}_{H_n(C_*, d_*)}$ und $H_n(f \circ g) = H_n(f) \circ H_n(g)$, da

$$H_n(f \circ g)([v]) = [f_n \circ g_n(v)] = \big[f_n\big(g_n(v)\big)\big] = H_n(f)\big([g_n(v)]\big) = H_n(f)\big(H_n(g)(v)\big)$$

c) Definiert man die Kategorie der ***graduierten*** R-Moduln als die Kategorie, deren Objekte Folgen $(V_n)_n$ von $\mathbb{R}$-Moduln sind und deren Morphismen Folgen von R-linearen Abbildungen $(f_n)_n$ sind, so kann man die H_n, $n \in \mathbb{N}$ zu einem Funktor

$$H_*: \text{R-Ketten} \longrightarrow \text{Gr-R-Mod} \quad , \qquad (C_*, d_*) \longmapsto \big(H_n(C_*, d_*)\big)_n$$

zusammensetzen.

6.4 Definition. Sei $f: X \to Y$ stetig. Wir definieren $C_n(f; R): C_n(X; R) \to C_n(Y; R)$ durch

$$C_n(f; R)\left(\sum_{\sigma \in S_n(X)} r_\sigma \cdot \sigma\right) := \sum_{\sigma \in S_n(X)} r_\sigma \cdot (f \circ \sigma)$$

Dies ist wohldefiniert, denn für $\sigma \in S_n(X)$ ist $f \circ \sigma \in S_n(Y)$.

6.5 Proposition. Mit dieser Definition von $C_*(f;R)$ wird der singuläre Kettenkomplex über R zu einem Funktor

$$C_*(-;R)\colon \textsc{Top} \to R\text{-}\textsc{Ketten}$$

Beweis:

(i) $C_*(f;R)$ ist eine R-Kettenabbildung: Es gilt

$$\begin{aligned} C_{n-1}(f;R)\circ \partial_n(\sigma) = C_{n-1}(f;R)\left(\sum_{l=0}^{n}(-1)^l\cdot \sigma\circ \iota_{n,l}\right) &= \sum_{l=0}^{n}(-1)^l\cdot (f\circ\sigma)\circ\iota_{n,l} \\ &= \partial_n(f\circ\sigma) = \partial\big(C_n(f;R)(\sigma)\big). \end{aligned}$$

(ii) Zu zeigen: $C_*(f\circ g;R) = C_*(f;R)\circ C_*(g;R)$. Es gilt

$$C_n(f\circ g;R)(\sigma) = f\circ(g\circ\sigma) = C_n(f;R)(g\circ\sigma) = C_n(f;R)\big(C_n(g;R)(\sigma)\big).$$

(iii) Zu zeigen: $C_*(\mathrm{id}_X;R) = \mathrm{id}_{C_*(X;R)}$. Es gilt

$$C_n(\mathrm{id}_X;R)(\sigma) = \mathrm{id}_X\circ\sigma = \sigma$$

□

6.6 Korollar. Mit $H_n(f;R) := H_n(C_*(f;R))$ wird $H_n(-;R)$ zu einem Funktor: $H_n(-;R)\colon \textsc{Top} \to R\text{-}\textsc{Mod}$.

Beweis: $H_n(-;R)$ ist die Komposition des Funktors $C_*(-;R)\colon \textsc{Top}\to R\text{-}\textsc{Ketten}$ aus Proposition 6.5 mit dem Funktor $H_n\colon R\text{-}\textsc{Ketten}\to R\text{-}\textsc{Mod}$ aus Bemerkung 6.3. □

6.7 Bemerkung. Oft schreiben wir kurz $f_* = H_n(f;R)$. Für $\left[\sum_{\sigma\in S_n(X)} r_\sigma\sigma\right]\in H_n(X;R)$ ist

$$f_*\left(\left[\sum_{\sigma\in S_n(X)} r_\sigma\sigma\right]\right) = \left[\sum_{\sigma\in S_n(X)} r_\sigma f\circ\sigma\right]\in H_n(Y;R)$$

6.8 Definition. Seien X_i, $i\in I$ topologische Räume. Mit

$$X := \coprod_{i\in I} X_i$$

bezeichnen wir die ***Summe*** (oder auch das ***Koprodukt***) der X_i. Als Menge ist X die disjunkte Vereinigung der X_i. $U\subseteq X$ ist offen genau dann, wenn $X_i\cap U\subseteq X_i$ offen ist für jedes $i\in I$. Für jedes i_0 erhalten wir eine stetige Inklusion $j_{i_0}\colon X_{i_0}\to\coprod_i X_i$. Für jedes i_0 ist $X_{i_0}\subseteq\coprod_i X_i$ offen und abgeschlossen.

6.9 Definition. Seien V_i, $i\in I$ R-Moduln. Mit

$$V := \bigoplus_{i\in I} V_i$$

bezeichnen wir die ***Summe*** (auch das ***Koprodukt***) der V_i. Elemente von V sind I-Folgen $(v_i)_{i\in I}$ mit $v_i\in V_i$ und $v_i = 0$ füralle bis auf endlich viele i. Die R-Modulstruktur ist erklärt durch: $(v_i)_{i\in I}+(w_i)_{i\in I} := (v_i+w_i)_{i\in I}$ und $r\cdot(v_i)_{i\in I} := (r\cdot v_i)_{i\in I}$ Für jedes $i_0\in I$ erhalten wir eine R-lineare Abbildung $j_{i_0}\colon V_{i_0}\to V$ mit

$$(j_{i_0}(v))_i = \begin{cases} v, & \text{falls } i = i_0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Seien V_i für $i \in I$ R-Moduln. Sei W ein weiterer R-Modul. Dann gibt es zu jeder Folge $f_i \colon V_i \to W$ von R-linearen Abbildungen eine R-lineare Abbildung $\oplus_{i\in I} f_i \colon \bigoplus_{i\in I} V_i \to W$ mit

$$(\oplus_{i\in I} f_i)\big((v_i)_{i\in I}\big) = \sum_{i\in I} f_i(v_i)$$

Ist umgekehrt $f \colon \bigoplus_{i\in I} V_i \to W$ eine R-lineare Abbildung, so ist $f_i := f \circ j_i$ eine Folge von R-linearen Abbildungen mit $f = \bigoplus_{i\in I} f_i$.

6.10 Satz. Sei $X = \coprod_{i\in I} X_i$. Dann induzieren die Inklusionen $j_i \colon X_i \hookrightarrow X$ einen Isomorphismus

$$\bigoplus_{i\in I} H_n(X_i;R) \xrightarrow{\oplus_{i\in I}(j_i)_*} H_n(X;R)$$

Beweis: Da die $X_i \subseteq X$ offen und abgeschlossen sind und $|\Delta^n|$ zusammenhängend ist (sogar wegzusammenhängend), gibt es für jedes $\sigma \colon |\Delta^n| \to X$ ein eindeutiges i mit $\operatorname{im}\sigma \subseteq X_i$. Es gilt also $S_n(X) = \dot{\bigcup} S_n(X_i)$. Daher induzieren die j_i für jedes n einen Isomorphismus

$$\bigoplus_{i\in I} C_n(j_i;R) \colon \bigoplus_{i\in I} C_n(X_i;R) \xrightarrow{\cong} C_n(X;R)$$

Da diese Isomorphismen mit den Randabbildungen vertauschen, erhalten wir einen Isomorphismus von R-Kettenkomplexen

$$\varphi := \bigoplus_{i\in I} C_*(j_i;R) \colon \bigoplus C_*(X_i;R) \xrightarrow{\cong} C_*(X;R)$$

Da $\bigoplus_i H_n\big(C_*(X_i;R)\big) \cong H_n\big(\bigoplus_i C_*(X_i;R)\big)$ induzieren dann auch die $(j_i)_*$ einen Isomorphismus

$$\bigoplus_{i\in I} (j_i)_* \colon \bigoplus_{i\in I} H_n(X_i;R) \xrightarrow{\cong} H_n(X;R)$$ □

7 Homotopieinvarianz

7.1 Bemerkung. Sei $f\colon X \to Y$ ein Homöomorphismus. Dann ist $f_*\colon H_n(X;R) \longrightarrow H_n(Y;R)$ ein Isomorphismus.

Beweis: Da Homologie ein Funktor ist, gilt

$$\begin{aligned} f_* \circ (f^{-1})_* &= (f \circ f^{-1})_* = (\mathrm{id}_Y)_* = \mathrm{id}_{H_n(Y;R)} \qquad \text{und} \\ (f^{-1})_* \circ f_* &= (f^{-1} \circ f)_* = (\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{H_n(X;R)} \end{aligned}$$

Also ist $(f_*)^{-1} = (f^{-1})_*$. Insbesondere ist f_* ein Isomorphismus. □

7.2 Definition. Eine stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt eine ***Homotopieäquivalenz***, falls es eine stetige Abbildung $g\colon Y \to X$ gibt, so dass $g \circ f$ homotop zu id_X ist und $f \circ g$ homotop zu id_Y ist. g heißt dann eine ***Homotopieinverse*** zu f.

(i) f ist genau dann eine Homotopieäquivalenz, wenn $[f]$ in HTop invertierbar ist. In HTop ist dann $[f]^{-1} = [g]$.

(ii) Die Homotopieinverse ist eindeutig bis auf Homotopie.

7.3 Satz. Seien $f, g\colon X \to Y$ stetige Abbildungen. Sind f und g homotop, so gilt für die induzierten Abbildungen $H_n(f;R) = H_n(g;R)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis: *Siehe Lemma 7.8, sowie Bemerkung 7.9.* □

7.4 Korollar. Ist $f\colon X \to Y$ eine Homotopieäquivalenz, so ist $f_*\colon H_n(X;R) \to H_n(Y;R)$ ein Isomorphismus.

Beweis: Sei $g\colon Y \to X$ ein Homotopieinverses zu f. Es folgt

$$\begin{aligned} f_* \circ g_* &\overset{\text{Funktor}}{=} (f \circ g)_* \overset{\text{Homotopieinvarianz}}{=} (\mathrm{id}_Y)_* \overset{\text{Funktor}}{=} \mathrm{id}_{H_n(Y;R)} \\ g_* \circ f_* &\overset{\text{Funktor}}{=} (g \circ f)_* \overset{\text{Homotopieinvarianz}}{=} (\mathrm{id}_X)_* \overset{\text{Funktor}}{=} \mathrm{id}_{H_n(X;R)} \end{aligned}$$ □

7.5 Korollar. Ist X ***kontrahierbar***, d.h. es gibt eine Homotopie $H\colon X \times [0,1] \to X$ mit $H_0 = \mathrm{id}_X$ und H_1 konstant, so gilt

$$H_n(X;R) \cong \begin{cases} R, & \text{falls } n = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis: Sei $\{x_0\} = \operatorname{im} H_1$. Dann ist die Inklusion $\{x_0\} \to X$ eine Homotopieäquivalenz. Also gilt nach Korollar 7.4

$$H_n(X;R) \cong H_n\big(\{x_0\};R\big) \overset{5.8}{=} \begin{cases} R, & \text{falls } n = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$ □

Es gilt beispielsweise

$$H_n(\mathbb{R}^k;R) \cong \begin{cases} R, & \text{falls } n = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{und} \qquad H_n(D^k;R) \cong \begin{cases} R, & \text{falls } n = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

7.6 Definition. Seien (C_*, d_*) und (C'_*, d'_*) R-Kettenkomplexe. Seien $f_*, g_* \colon (C_*, d_*) \to (C'_*, d'_*)$ R-Kettenabbildungen. Eine ***Kettenhomotopie*** von f_* nach g_* ist eine Folge von R-linearen Abbildungen $h_n \colon C_n \to C'_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, sodass für alle n gilt:

$$d'_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ d_n = f_n - g_n$$

In diesem fall heißen f_* und g_* ***kettenhomotop***.

Kettenhomotopie definiert eine Äquivalenzrelation wie in Aufgabe 2 von Blatt 5 gezeigt.

$$\begin{tikzcd}
C_{n-1} \arrow[dr, "h_{n-1}"'] & C_n \arrow[l, "d_n"'] \arrow[d, shift right, "g_n"'] \arrow[d, shift left, "f_n"] \arrow[dr, "h_n"] & \\
& C'_n & C'_{n+1} \arrow[l, "d'_{n+1}"]
\end{tikzcd}$$

Abbildung 1: Diagramm zu Definition 7.6 (Kettenhomotopie)

7.7 Proposition. Seien $f_*, g_* \colon (C_*, d_*) \to (C'_*, d'_*)$ Kettenabbildungen. Sind f_* und g_* kettenhomotop, so gilt für alle n

$$H_n(f_*) = H_n(g_*)$$

Beweis: Sei $x \in H_n(C_*, d_*)$. Also $x = [v]$ mit $v \in \ker d_n \colon C_n \to C_{n-1}$. Dann gilt, da $v \in \ker d_n$

$$\begin{aligned} H_n(f_*)(x) = H_n(f_*)([v]) = [f_n(v)] &= \Big[g_n(v) + \underbrace{d'_{n+1} \circ h_n(v)}_{\in \operatorname{im} d'_{n+1}} + \underbrace{h_{n-1} \circ d_n(v)}_{=0}\Big] \\ &= [g_n(v)] = H_n(g_*)([v]) = H_n(g_*)(x) \end{aligned}$$

□

7.8 Lemma. Die Homotopieinvarianz von $H_n(-;R)$, also Satz 7.3, folgt aus folgenden Spezialfall:

$$\text{Für } i_0, i_1 \colon X \hookrightarrow X \times [0,1] \text{ gilt } i_0(x) = (x,0),\ i_1(x) = (x,1) \implies (i_0)_* = (i_1)_* \qquad [\#]$$

Beweis: Sei $H \colon X \times [0,1] \to Y$ eine Homotopie zwischen $f, g \colon X \to Y$, also $f = H \circ i_0$ und $g = H \circ i_1$. Dann folgt mittels Funktorialität

$$f_* = (H \circ i_0)_* = H_* \circ (i_0)_* = H_* \circ (i_1)_* = (H \circ i_1)_* = g_*$$

□

7.9 Bemerkung. Zum Beweis von [#] werden wir eine explizite Kettenhomotopie h_* zwischen $C_*(i_0; R)$ und $C_*(i_1; R)$ konstruieren. Wir brauchen also $h_n \colon C_n(X; R) \to C_{n+1}(X \times [0,1]; R)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\partial_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ \partial_n = C_n(i_0; R) - C_n(i_1; R). \qquad [\#\#]$$

Wir besprechen zunächst eine möglichen – aber formal nicht korrekten – Ansatz: Für $\sigma \colon |\Delta^n| \to X$ setze $h_n(\sigma) = \sigma \times \mathrm{id}_{[0,1]} \colon |\Delta^n| \times [0,1] \to X \times [0,1]$. Dann ist „$h_{n-1}(\partial_n \sigma) = \partial_n \sigma \times \mathrm{id}_{[0,1]}$“ und

$$\partial_{n+1}(h_n \sigma) = \partial_{n+1}(\sigma \times \mathrm{id}_{[0,1]}) = (\sigma \times \mathrm{id})\Big|_{\partial(|\Delta^n| \times [0,1])} = \partial_n \sigma \times \mathrm{id}_{[0,1]} + i_0 \sigma + i_1 \sigma$$

da $\partial(|\Delta^n| \times [0,1]) = \partial|\Delta^n| \times [0,1] \,\dot\cup\, |\Delta^n| \times \{0,1\}$.

Um daraus Sinn zu machen, zerlegen wir $|\Delta^n| \times [0,1]$ in eine Vereinigung von $(n+1)$-Simplizes. $\Delta^n \times [0,1]$ hat die folgende Form für $n \in \{0,1,2\}$:

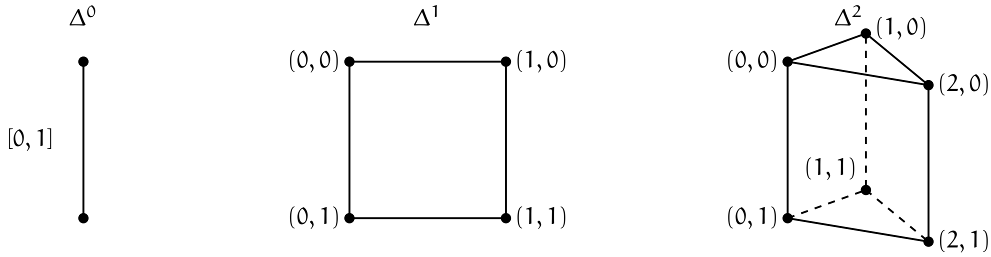


Abbildung 2: $\Delta^n \times [0,1]$ für $n = 0, 1, 2$

Die Zerlegung in 3-Simplizes ist für $\Delta^2 \times [0,1]$ gegeben durch

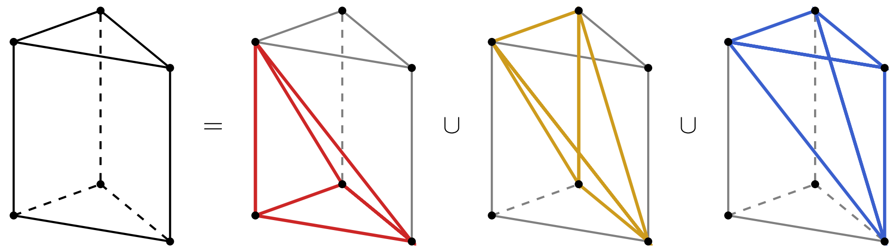


Abbildung 3: Zerlegung von $\Delta^2 \times [0,1]$ in 3-Simplizes

Dieses Vorgehen verallgemeinern wir jetzt für beliebiges $n \in \mathbb{N}$:

$e_1, \dots, e_n$ sind wieder die Einheitsvektoren von $\mathbb{R}^n$

7.10 Definition. Für $j = 0, \dots, n$ seien $k_{n,j} \colon |\Delta^{n+1}| \to |\Delta^n| \times [0,1]$ und $\iota_{n,j} \colon \left|\Delta^{n-1}\right| \to |\Delta^n|$ die eindeutigen affin linearen Abbildungen, für die gilt:

$$\begin{aligned} k_{n,j}(e_0) &= (e_0, 0) & \iota_{n,j}(e_0) &= e_0 \\ k_{n,j}(e_1) &= (e_1, 0) \quad \dots & \iota_{n,j}(e_1) &= e_1 \quad \dots \\ k_{n,j}(e_j) &= (e_j, 0) & \iota_{n,j}(e_{j-1}) &= e_{j-1} \\ k_{n,j}(e_{j+1}) &= (e_j, 1) \quad \dots & \iota_{n,j}(e_j) &= e_{j+1} \quad \dots \\ k_{n,j}(e_{n+1}) &= (e_n, 1) & \iota_{n,j}(e_{n-1}) &= e_n \end{aligned}$$

7.11 Lemma. Es gelten folgende fünf Gleichungen für die Abbildungen $k_{n,j}$ und $\iota_{n,j}$:

(i) Für $0 \leqslant l < j \leqslant n$ gilt $k_{n,j} \circ \iota_{n+1,l} = \left(\iota_{n,l} \times \mathrm{id}_{[0,1]}\right) \circ k_{n-1,j-1}$

(ii) Für $1 \leqslant j+1 < l \leqslant n+1$ gilt $k_{n,j} \circ \iota_{n+1,l} = \left(\iota_{n,l-1} \times \mathrm{id}_{[0,1]}\right) \circ k_{n-1,j}$

(iii) Für $1 \leqslant j+1 = l \leqslant n$ gilt $k_{n,j} \circ \iota_{n+1,l} = k_{n,j+1} \circ \iota_{n+1,l}$

(iv) Für $l = 0, j = 0$ ist $k_{n,j} \circ \iota_{n+1,l} = i_1 : \Delta^n \to \Delta^n \times [0,1]$

(v) Für $l = n, j = n+1$ ist $k_{n,j} \circ \iota_{n+1,l} = i_0 : \Delta^n \to \Delta^n \times [0,1]$

Beweis: Wir zeigen hier nur exemplarisch die erste Gleichung: Die linke Seite der Gleichung entspricht

$$
\begin{tikzcd}
\lvert\Delta^n\rvert \arrow[d, "\iota_{n+1,l}"] & e_0 \arrow[d, mapsto] & e_{l-1} \arrow[d, mapsto] & e_l \arrow[dr, mapsto] & \cdots & e_j \arrow[dr, mapsto] & \cdots & e_n \arrow[dr, mapsto] & \\
\lvert\Delta^{n+1}\rvert \arrow[d, "k_{n,j}"] & e_0 \arrow[d, mapsto] & e_{l-1} \arrow[d, mapsto] & e_l \arrow[d, mapsto] & e_{l+1} \arrow[d, mapsto] & e_j \arrow[d, mapsto] & e_{j+1} \arrow[ddl, mapsto, bend left] & e_n & e_{n+1} \arrow[ddl, mapsto, bend left] \\
\lvert\Delta^n\rvert \times [0,1] & (e_0,0) & (e_{l-1},0) & (e_l,0) & (e_{l+1},0) & (e_j,0) & & & \\
& & & & & (e_j,1) & \cdots & (e_n,1) &
\end{tikzcd}
$$

und die rechte Seite entspricht

$$
\begin{tikzcd}
\lvert\Delta^n\rvert \arrow[d, "k_{n-1,j-1}"] & e_0 \arrow[d, mapsto] & e_{l-1} \arrow[d, mapsto] & e_l \arrow[d, mapsto] & \cdots & e_{j-1} \arrow[d, mapsto] & e_j \arrow[ddl, mapsto, bend left] & e_{j+1} \arrow[ddl, mapsto, bend left] & \cdots & e_n \arrow[ddl, mapsto, bend left] \\
\lvert\Delta^{n-1}\rvert \times [0,1] \arrow[dd, "\iota_{n,l}\times \mathrm{id}_{[0,1]}"] & (e_0,0) \arrow[dd, mapsto] & (e_{l-1},0) \arrow[dd, mapsto] & (e_l,0) \arrow[ddr, mapsto] & \cdots & (e_{j-1},0) \arrow[dd, mapsto, bend right] & & & \cdots & \\
& & & & & (e_{j-1},1) \arrow[dd, mapsto, bend left] & (e_j,1) \arrow[dd, mapsto] & \cdots & (e_{n-1},1) \arrow[dd, mapsto] & \\
\lvert\Delta^n\rvert \times [0,1] & (e_0,0) & (e_{l-1},0) & (e_l,0) & (e_{l+1},0) & (e_j,0) & & & & \\
& & & & & (e_j,1) & (e_{j+1},1) & \cdots & (e_n,1) &
\end{tikzcd}
$$

Also folgt insgesamt die Gleichheit. Die anderen Gleichungen folgen genauso. □

Damit können wir nun die im vorigen schon vereinfachte zentrale Aussage dieses Abschnitt beweisen:

Beweis (von [##]): Sei $h_n \colon C_n(X;R) \to C_{n+1}(X \times [0,1];R)$ definiert durch

$$h_n(\sigma) := \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \cdot (\sigma \times \mathrm{id}) \circ k_{n,j}$$

h_* ist nun die gesuchte Kettenhomotopie, da für jedes $n \in \mathbb{N}$ unter Anwendung der Gleichungen aus Lemma 7.11 gilt:

$$
\begin{aligned}
\partial_{n+1}\big(h_n(\sigma)\big) &= \partial_{n+1}\left(\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\cdot(\sigma\times\mathrm{id})\circ k_{n,j}\right)\\
&= \sum_{l=0}^{n+1}\sum_{j=0}^{n}(-1)^{j+l}\cdot(\sigma\times\mathrm{id})\circ k_{n,j}\circ\iota_{n+1,l} \qquad \text{(nach Definition 5.2)}\\
&= \sum_{0\leqslant l<j\leqslant n}(-1)^{j+l}\big((\sigma\circ\iota_{n,l})\times\mathrm{id}\big)\circ k_{n-1,j-1} + \sum_{1\leqslant j+1<l\leqslant n+1}(-1)^{j+l}\big((\sigma\circ\iota_{n,l-1})\times\mathrm{id}\big)\circ k_{n-1,j}\\
&\quad+\sum_{1\leqslant j+1=l\leqslant n}(-1)^{j+l}(\sigma\times\mathrm{id})\circ k_{n,j+1}\circ\iota_{n+1,l}+\sum_{1\leqslant j=l\leqslant n}(-1)^{j+l}(\sigma\times\mathrm{id})\circ k_{n,j}\circ\iota_{n+1,l}\\
&\quad+\sum_{0=l=j}(-1)^{j+l}(\sigma\times\mathrm{id})\circ i_1+\sum_{n+1=j+1=l}(-1)^{j+l}(\sigma\times\mathrm{id})\circ i_0\\
&= \sum_{0\leqslant l\leqslant j\leqslant n-1}(-1)^{j+l+1}\big((\sigma\circ\iota_{n,l})\times\mathrm{id}\big)\circ k_{n-1,j}+\sum_{1\leqslant j+1\leqslant l\leqslant n}(-1)^{j+l+1}\big((\sigma\circ\iota_{n,l})\times\mathrm{id}\big)\circ k_{n-1,j}\\
&\quad\underbrace{+\sum_{1\leqslant j=l\leqslant n}(-1)^{j+l-1}(\sigma\times\mathrm{id})\circ k_{n,j}\circ\iota_{n+1,l}+\sum_{1\leqslant j=l\leqslant n}(-1)^{j+l}(\sigma\times\mathrm{id})\circ k_{n,j}\circ\iota_{n+1,l}}_{=0}\\
&\quad+\sum_{0=l=j}(-1)^{j+l}(\sigma\times\mathrm{id})\circ i_1+\sum_{n+1=j+1=l}(-1)^{j+l}(\sigma\times\mathrm{id})\circ i_0\\
&= -\sum_{\substack{0\leqslant l\leqslant n\\0\leqslant j\leqslant n-1}}(-1)^{j+l}\big((\sigma\circ\iota_{n,l})\times\mathrm{id}\big)\circ k_{n-1,j}+(\sigma\times\mathrm{id})\circ i_1-(\sigma\times\mathrm{id})\circ i_0\\
&= -\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\sum_{l=0}^{n}(-1)^l\big((\sigma\circ\iota_{n,l})\times\mathrm{id}\big)\circ k_{n-1,j}+\underbrace{(\sigma\times\mathrm{id})\circ i_1}_{=i_1\circ\sigma}-\underbrace{(\sigma\times\mathrm{id})\circ i_0}_{=i_0\circ\sigma}\\
&= -h_{n-1}(\partial_n\sigma)+C_n(i_1;R)(\sigma)-C_n(i_0;R)(\sigma)
\end{aligned}
$$

□

7.12 Bemerkung. Ist $H\colon X\times[0,1]\to Y$ eine Homotopie zwischen f und g, so erhalten wir eine Kettenhomotopie k zwischen $C_*(f;R)$ und $C_*(g;R)$ durch

$$k_n(\sigma) := C_{n+1}(H;R)\circ h_n = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j H\circ(\sigma\times\mathrm{id})\circ k_{n,j}$$

8 Homologie von Paaren

8.1 Definition. Sei A ein Teilraum von X, dann heißt (X, A) ein ***Paar von topologischen Räumen***. Eine Abbildung von Paaren $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ ist eine stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ mit $f(A) \subseteq B$. Manchmal schreiben wir $(f, f|_A)\colon (X, A) \to (Y, B)$. Die Kategorie von Paaren von topologischen Räumen bezeichnen wir mit TOP^2.

8.2 Definition. Sei (X, A) ein Paar. Dann definieren wir den ***singulären Kettenkomplex*** von (X, A) über R durch

$$C_n(X, A; R) := {}^{C_n(X;R)}/_{C_n(A;R)}$$
$$\partial_n\big(\sigma + C_n(A; R)\big) := \partial_n\sigma + C_{n-1}(A; R)$$

Dies ist wohldefiniert, da $\partial_n\big(C_n(A; R)\big) \subseteq C_{n-1}(A; R)$. Weiter heißt

$$H_n(X, A; R) := H_n\big(C_*(X, A; R), \partial_*\big)$$

der ***n-te singuläre Homologiemodul*** von (X, A) mit Koeffizienten in R.

8.3 Bemerkung. Der singuläre Kettenkomplex von Paaren definiert offensichtlich einen Funktor $\mathrm{TOP}^2 \to R\text{-KETTEN}$. Durch Komposition mit Homologie (als Funktor $R\text{-KETTEN} \to R\text{-MOD}$) erhalten wir einen Funktor

$$H_n(-, -; R)\colon \mathrm{TOP}^2 \longrightarrow R\text{-MOD}$$

Homologie von Paaren ist auch wieder homotopieinvariant, wie in Aufgabe 1 von Blatt 7 gezeigt.

Via $X \mapsto (X, \emptyset)$ können wir jeden Raum auch als Paar auffassen. Somit sind Paare eine Verallgemeinerung von Räumen, passend dazu gilt auch $H_n(X, \emptyset; R) = H_n(X; R)$.

Es stellt sich nun die folgende Frage: Können wir $H_n(X, A; R)$ durch $H_n(X; R)$ und $H_n(A; R)$ ausdrücken?

Ansatz 1:

$$H_n(X, A; R) \cong {}^{H_n(X;R)}/_{H_n(A;R)}$$

⚠ Problem: $H_n(A; R)$ ist kein Untermodul von $H_n(X; R)$.

Ansatz 2: Ist $H_n(X; R) \to H_n(X, A; R)$ surjektiv?

Sei $x \in H_n(X, A; R)$. Dann gibt es $\sigma + C_n(A; R) \in C_n(X, A; R)$ mit $\partial_n\big(\sigma + C_n(A; R)\big) = 0$ und $x = [\sigma]$. Es ist $\sigma \in C_n(X; R)$, aber wir wissen nur $\partial_n\sigma \in C_{n-1}(A; R)$, nicht $\partial_n(\sigma) = 0$. 😐

8.4 Beispiel. In $C_n\big(|\Delta^n|, |\partial\Delta^n|; R\big)$ gilt für $\sigma := \mathrm{id}\colon |\Delta^n| \to |\Delta^n|$, dass $\partial_n([\sigma]) = 0$ ist, da $\partial_n\sigma \in C_{n-1}(|\partial\Delta^n|; R)$. Wir werden später sehen, dass $[\sigma]$ den Homologiemodul

$$H_n\big(|\Delta^n|, |\partial\Delta^n|; R\big) \cong R$$

erzeugt.

8.5 Definition. Eine Folge von R-linearen Abbildungen zwischen R-Moduln M_i

$$\cdots \longrightarrow M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_{n-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_0$$

heißt ***lange exakte Folge***, wenn sie exakt an jeder Stelle M_i ist, d.h. für alle i gilt $\operatorname{im} f_i = \ker f_{i-1}$.

8.6 Satz. Es gibt eine natürliche Transformation ∂_n von $(X,A) \mapsto H_n(X,A;R)$ nach $(X,A) \mapsto H_{n-1}(A;R)$, sodass für jedes Paar (X,A)

$$\begin{array}{l} \cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(A;R) \xrightarrow{i_*} H_n(X;R) \xrightarrow{j_*} H_n(X,A;R) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A;R) \longrightarrow \cdots \\ \cdots \xrightarrow{\partial_1} H_0(A;R) \longrightarrow H_0(X;R) \longrightarrow H_0(X,A;R) \longrightarrow 0 \end{array} \qquad [*]$$

eine lange exakte Folge ist. Dabei sind $i\colon A \hookrightarrow X$ und $j\colon (X,\emptyset) \hookrightarrow (X,A)$ die Inklusionen. Das bedeutet:

Für jedes Paar (X,A) haben wir eine R-lineare Abbildung $\partial_n\colon H_n(X,A;R) \to H_{n-1}(A;R)$, sodass für jede Abbildung $(f,f|_A)\colon (X,A) \to (Y,B)$ von Paaren folgendes Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd} H_n(X,A;R) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "(f,f|_A)_*"] & H_{n-1}(A;R) \arrow[d, "(f|_A)_*"] \\ H_n(Y,B;R) \arrow[r, "\partial_n"] & H_{n-1}(B;R) \end{tikzcd}$$

Beweis: *siehe Seite 29.* □

8.7 Korollar.

(1) Ist die Inklusion $i\colon A \to X$ eine Homotopieäquivalenz, so ist $H_n(X,A;R) = 0$ für alle n.

(2) Sei A kontraktibel. Dann gilt für alle $n \geqslant 1$. $H_n(X;R) \cong H_n(X,A;R)$

Beweis: **(1)** Betrachte den folgenden Ausschnitt aus der langen exakten Folge:

$$H_n(A;R) \xrightarrow{i_*} H_n(X;R) \xrightarrow{j_*} H_n(X,A;R) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A;R) \xrightarrow{i_*} H_n(X;R)$$

Nach Korollar 7.4 ist $i_*\colon H_n(A;R) \to H_n(X;R)$ ein Isomorphismus. Wegen der Exaktheit gilt $\ker j_* = \operatorname{im} i_* = H_n(X;R)$, also folgt $j_* = 0$. Da $\operatorname{im} \partial_n = \ker i_* = 0$, folgt $\partial_n = 0$. Nun ist

$$H_n(X,A;R) = \ker \partial_n = \operatorname{im} j_* = 0$$

(2) Folgt leicht aus Korollar 7.5 und der Exaktheit der Paarsequenz [*]. Für $n = 1$ brauchen wir außerdem, dass ∂_1 für A wegzusammenhängend trivial ist. Dies folgt aus Aufgabe 1a) von Blatt 6, denn dort wurde gezeigt, dass $i_*\colon H_0(A) \to H_0(X)$ injektiv ist. □

8.8 Definition. Seien

$$(C_*, d_*) \xrightarrow{i_*} (C'_*, d'_*) \xrightarrow{p_*} (C''_*, d''_*) \qquad [\#]$$

R-Kettenabbildungen. Ist für jedes n die Folge $C_n \xrightarrow{i_n} C'_n \xrightarrow{p_n} C''_n$ kurz exakt, so heißt [#] eine ***kurze exakte Folge von Kettenkomplexen***.

8.9 Beispiel. Für jedes Paar (X,A) ist

$$(C_*(A;R), \partial_*) \xrightarrow{i_*} (C_*(X;R), \partial_*) \xrightarrow{j_*} (C_*(X,A;R), \partial_*)$$

eine kurze exakte Folge von R-Kettenkomplexen.

8.10 Satz (Schlangenlemma). Sei

$$(C_*, d_*) \xrightarrow{i_*} (C'_*, d'_*) \xrightarrow{p_*} (C''_*, d''_*)$$

eine kurze exakte Folge von R-Kettenkomplexen.

a) Für jedes n gibt es eine eindeutige wohldefinierte R-lineare Abbildung $\partial_n \colon H_n(C''_*, d''_*) \to H_{n-1}(C_*, d_*)$ mit: Für $v' \in C'_n$ mit $d''_n \circ p_n(v') = 0$ ist

$$\partial_n\Big(\underbrace{[p_n(v')]}_{\in H_n(C''_*, d''_*)}\Big) = [v] \in H_{n-1}(C_*, d_*)$$

wobei $v \in C_{n-1}$ bestimmt ist durch $i_{n-1}(v) = d'_n(v')$.

b)

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\partial_{n+1}"] & H_n(C_*, d_*) \arrow[r, "i_*"] & H_n(C'_*, d'_*) \arrow[r, "p_*"] & H_n(C''_*, d''_*) \arrow[dll, rounded corners, "\partial_n"] \\
& H_{n-1}(C_*, d_*) \arrow[r, "i_*"] & H_{n-1}(C'_*, d'_*) \arrow[r, "p_*"] & \cdots \arrow[dll, rounded corners, "\partial_1"] \\
& H_0(C_*, d_*) \arrow[r, "i_*"] & H_0(C'_*, d'_*) \arrow[r, "p_*"] & H_0(C''_*, d''_*) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

ist eine lange exakte Folge.

Beweis:

$$\begin{tikzcd}
C_{n+1} \arrow[r, "i_{n+1}"] \arrow[d, "d_{n+1}"] & C'_{n+1} \arrow[r, "p_{n+1}"] \arrow[d, "d'_{n+1}"] & C''_{n+1} \arrow[d, "d''_{n+1}"] \\
C_n \arrow[r, "i_n"] \arrow[d, "d_n"] & C'_n \arrow[r, "p_n"] \arrow[d, "d'_n"] & C''_n \arrow[d, "d''_n"] \\
C_{n-1} \arrow[r, "i_{n-1}"] \arrow[d, "d_{n-1}"] & C'_{n-1} \arrow[r, "p_{n-1}"] \arrow[d, "d'_{n-1}"] & C''_{n-1} \arrow[d, "d''_{n-1}"] \\
C_{n-2} \arrow[r, "i_{n-2}"] & C'_{n-2} \arrow[r, "p_{n-2}"] & C''_{n-2}
\end{tikzcd}$$

a) Sei $x'' \in H_n(C''_*, d''_*)$, also $x'' = [v'']$ mit $v'' \in \ker d''_n$. Da p_n surjektiv ist, existiert $v' \in C'_n$ mit $p_n(v') = v''$. Es gilt

$$p_{n-1} \circ d'_n(v') = d''_n \circ p_n(v') = d''_n(v'') = 0$$

Also ist $d'_n(v') \in \ker p_{n-1}$. Weiter gilt $\ker p_{n-1} = \operatorname{im} i_{n-1}$, also existiert ein $v \in C_{n-1}$ mit $i_{n-1}(v) = d'_n(v')$. Dann gilt

$$i_{n-2}\big(d_{n-1}(v)\big) = d'_{n-1}\big(i_{n-1}(v)\big) = d'_{n-1}\big(d'_n(v')\big) = 0$$

Da i_{n-2} injektiv ist, folgt somit $d_{n-1}(v) = 0$. Also setzen wir $\partial_n(x'') := [v] \in H_{n-1}(C_*, d_*)$.

Es bleibt zu zeigen, dass $[v] \in H_{n-1}(C_*, d_*)$ unabhängig von der Wahl von v'' und v' ist. Seien $w'' \in \ker d''_n$, $w' \in C'_n$ und $w \in C_{n-1}$ mit $x'' = [w'']$, $p_n(w') = w''$ und $i_{n-1}(w) = d'_n(w')$. Es ist $[v''] = [w'']$, also existiert ein $a'' \in C''_{n+1}$ mit $d''_{n+1}(a'') = v'' - w''$. p_{n+1} ist surjektiv, also existiert $a' \in C'_{n+1}$ mit $p_{n+1}(a') = a''$. Es gilt

$$p_n\big(v' - w' - d'_{n+1}(a')\big) = v'' - w'' - \underbrace{d''_{n+1}\big(p_{n+1}(a')\big)}_{=v''-w''} = 0$$

Mit $\ker p_n = \operatorname{im} i_n$ folgt die Existenz von $a \in C_n$ mit $i_n(a) = v' - w' - d_{n+1}(a')$. Es gilt nun

$$\begin{aligned} i_{n-1}\big(d_n(a) - (v-w)\big) &= i_{n-1}\big(d_n(a)\big) - i_{n-1}(v-w) \\ &= d'_n\big(i_n(a)\big) - \big(d'_n(v') - d'_n(w')\big) \\ &= d'_n\big(-d'_{n+1}(a') + v' - w'\big) - d'_n(v' - w') \\ &= -d'_n d'_{n+1}(a') + d'_n(v' - w') - d'_n(v' - w') = 0 \end{aligned}$$

Da i_{n-1} injektiv ist, folgt $d_n(a) - (v - w) = 0$, also $d_n(a) = (v - w)$. Es folgt $[v] = [w]$.

b) Exaktheit der langen Folge:

$\boxed{\operatorname{im}(i_n)_* = \ker(p_n)_*}$**:** „$\subseteq$" folgt aus $(p_n)_* \circ (i_n)_* = (p_n \circ i_n)_* = (0)_* = 0$.

Für „$\supseteq$" betrachte $x' \in \ker(p_n)_*$, wobei $x' = [v']$ mit $v' \in C'_n$ und $d'_n(v') = 0$. Da nun $[p_n(v')] = (p_n)_*[x'] = 0$ ist, gibt es $a'' \in C''_n$ mit $d''_{n+1}(a'') = p_n(v')$. Da p_{n+1} surjektiv ist, existiert $a' \in C'_{n+1}$ mit $p_{n+1}(a') = a''$. Dann gilt

$$p_n\big(v' - d'_{n+1}(a')\big) = p_n(v') - p_n \circ d'_{n+1}(a') = p_n(v') - \underbrace{d''_{n+1}\Big(\underbrace{p_{n+1}(a')}_{=a''}\Big)}_{=p_n(v')} = 0$$

Da $\ker p_n = \operatorname{im} i_n$, gibt es $a \in C_n$ mit $i_n(a) = v' - d'_{n+1}(a')$. Nun ist

$$i_{n-1}\big(d_n(a)\big) = d'_n\big(i_n(a)\big) = d'_n\big(v' - d'_{n+1}(a')\big) = d'_n(v') = 0$$

Da i_{n-1} injektiv ist, folgt $d_n(a) = 0$. Insbesondere $[a] \in H_n(C_*, d_*)$. Nun ist

$$(i_n)_*[a] = [i_n(a)] = \big[v' - d'_{n+1}(a')\big] = [v'] = x'$$

Also ist $x' \in \operatorname{im}(i_n)_*$.

$\boxed{\operatorname{im}(p_n)_* = \ker \partial_n}$**:** Für „$\subseteq$" betrachte $x'' \in \operatorname{im}(p_n)_*$. Dann gibt es $v' \in C'_n$ mit $d'_n(v') = 0$ und $x'' = [p_n(v')]$. Es ist $d'_n(v') \in \ker p_{n-1} = \operatorname{im} i_{n-1}$, also existiert ein $v \in C_{n-1}$ mit $i_{n-1}(v) = d'_n(v')$. Es gilt nun $\partial_n(x'') = [v]$. Wegen der Injektivität von i_{n-1} ist $v = 0$, also $\partial_n(x'') = [0]$.

Sei nun umgekehrt $x'' \in \ker \partial_n$. Wir finden wieder $v' \in C'_n$ und $v \in C_{n-1}$ mit $x'' = [p_n(v')]$, $i_{n-1}(v) = d'_n(v')$ und $0 = \partial_n(x'') = [v]$. Daher gibt es $a \in C_n$ mit $d_n(a) = v$. Es folgt

$$d'_n\big(v' - i_n(a)\big) = i_{n-1}(v) - i_{n-1}\big(d_n(a)\big) = 0$$

Es gilt nun $(p_n)_*\big[v' - i_n(a)\big] = \big[p_n(v') - p_n(i_n(a))\big] = [p_n(v')] = x''$.

$\boxed{\operatorname{im} \partial_n = \ker(i_{n-1})_*}$**:** Für „$\subseteq$" sei $x \in \operatorname{im} \partial_n$. Dann gibt es wieder $v' \in C'_n$ und $v \in C_{n-1}$ mit $d''_n(p_n(v')) = 0$, $d'_n(v') = i_{n-1}(v)$ und $x = [v]$. Dann gilt

$$(i_{n-1})_*(x) = (i_{n-1})_*[v] = [i_{n-1}(v)] = [d'_n(v')] = 0$$

Sei nun umgekehrt $x \in \ker(i_{n-1})_*$ und $v \in C_{n-1}$ mit $d_{n-1}(v) = 0$ und $x = [v]$. Da nun $(i_{n-1})_*(x) = [i_{n-1}(v)]$ und $x \in \ker(i_{n-1})_*$ ist, gibt es $v' \in C'_n$ mit $d'_n(v') = i_{n-1}(v)$. Es gilt nun

$$d''_n(p_n(v')) = p_{n-1}(d'_n(v')) = p_{n-1}(i_{n-1}(v)) = 0$$

Daraus folgt $\partial_n[p_n(v')] = x$. $\square$

Beweis (von Satz 8.6)**:** Für jedes Paar (X, A) ist die Folge der singulären Kettenkomplexe

$$\left(C_*(A;R), \partial_*^A\right) \xrightarrow{C_*(i;R)} \left(C_*(X;R), \partial_*^X\right) \xrightarrow{C_*(j;R)} \left(C_*(X,A;R), \partial_*^{(X,A)}\right)$$

kurz exakt. Das Schlangenlemma 8.10 produziert $\partial_n \colon H_n(X, A; R) \to H_{n-1}(A; R)$ und die lange exakte Sequenz [*]. Es bleibt zu zeigen, dass die Randabbildungen aus dem Schlangenlemma wie behauptet eine natürliche Transformation definieren: Sei $(f, f|_A) \colon (X, A) \to (Y, B)$ eine Abbildung von Paaren. Zu zeigen ist, dass

$$\begin{tikzcd}
H_n(X,A;R) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "(f,f|_A)_*"] & H_{n-1}(A;R) \arrow[d, "(f|_A)_*"] \\
H_n(Y,B;R) \arrow[r, "\partial_n"] & H_{n-1}(B;R)
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Sei $x'' \in H_n(X, A; R)$. Sei $\nu' \in C_n(X; R)$ mit $\partial_n^X(\nu') \in C_n(A; R)$ und $[\nu' + C_n(A; R)] = x''$. Dann ist $\partial_n(x'') = \left[\partial_n^X(\nu')\right] \in H_{n-1}(A; R)$. Dann ist

$$(f, f|_A)_*(x'') = (f, f|_A)_*\left[\nu' + C_n(A;R)\right] = \left[f_*(\nu') + C_n(B;R)\right] \in H_n(Y, B; R)$$

Es ist $\partial_n^Y\left(f_*(\nu')\right) = (f|_A)_*\Big(\underbrace{\partial_n^X(\nu')}_{\in C_n(A;R)}\Big) \in C_n(B; R)$. Also

$$\partial_n^Y\left((f, f|_A)_*(x'')\right) = \left[\partial_n^Y\left(f_*(\nu')\right)\right] = \left[f_* \circ \partial_n^X(\nu')\right] = f_* \circ \partial_n(x'') \qquad \square$$

8.11 Bemerkung. Für eine Abbildung $(f, f|_A) \colon (X, A) \to (Y, B)$ erhalten wir ein kommutierendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\partial_{n+1}"] & H_n(A;R) \arrow[r, "i_*^A"] \arrow[d, "(f|_A)_*"] & H_n(X;R) \arrow[r, "j_*^X"] \arrow[d, "f_*"] & H_n(X,A;R) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "(f,f|_A)_*"] & H_{n-1}(A;R) \arrow[r] \arrow[d, "(f|_A)_*"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_n(B;R) \arrow[r, "i_*^B"] & H_n(Y;R) \arrow[r, "j_*^Y"] & H_n(Y,B;R) \arrow[r, "\partial_n"] & H_{n-1}(B;R) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

8.12 Lemma (Fünfer-Lemma)**.** Seien die Zeilen in folgendem kommutativen Diagramm von R-Moduln exakt.

$$\begin{tikzcd}
A_4 \arrow[r, "\alpha_4"] \arrow[d, "f_4"', "\cong"] & A_3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "f_3"', "\cong"] & A_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "f_2"'] & A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "f_1"', "\cong"] & A_0 \arrow[d, "f_0"', "\cong"] \\
B_4 \arrow[r, "\beta_4"] & B_3 \arrow[r, "\beta_3"] & B_2 \arrow[r, "\beta_2"] & B_1 \arrow[r, "\beta_1"] & B_0
\end{tikzcd}$$

Sind f_4, f_3, f_1 und f_0 Isomorphismen, so ist auch f_2 ein Isomorphismus.

Beweis: Injektivität: Sei $a_2 \in A_2$ mit $f_2(a_2) = 0$. Wir erhalten

$$f_1\left(\alpha_2(a_2)\right) = \beta_2\left(f_2(a_2)\right) = \beta_2(0) = 0.$$

Da f_1 ein Isomorphismus ist, folgt $\alpha_2(a_2) = 0$. Damit ist $a_2 \in \ker \alpha_2 = \operatorname{im} \alpha_3$, also existiert $a_3 \in A_3$ mit $\alpha_3(a_3) = a_2$. Es gilt

$$\beta_3\left(f_3(a_3)\right) = f_2\left(\alpha_3(a_3)\right) = f_2(a_2) = 0$$

Also ist $f_3(a_3) \in \ker \beta_3 = \operatorname{im} \beta_4$. Da f_4 Isomorphismus ist, gibt es $a_4 \in A_4$ mit $\beta_4\big(f_4(a_4)\big) = f_3(a_3)$. Nun gilt

$$f_3\big(\alpha_4(a_4) - a_3\big) = f_3\big(\alpha_4(a_4)\big) - f_3(a_3) = \beta_4\big(f_4(a_4)\big) - f_3(a_3) = f_3(a_3) - f_3(a_3) = 0$$

Da f_3 ein Isomorphismus ist, folgt nun $\alpha_4(a_4) = a_3$. Nun ist

$$a_2 = \alpha_3(\alpha_3) = \alpha_3\big(\alpha_4(a_4)\big) = \underbrace{\alpha_3 \circ \alpha_4}_{=0}(a_4) = 0$$

Surjektivität: Sei $b_2 \in B_2$. Fall 1: $\beta_2(b_2) = 0$. Da $\operatorname{im} \beta_3 = \ker \beta_2$ und f_3 Isomorphismus, existiert $a_3 \in A_3$ mit $\beta_3\big(f_3(a_3)\big) = b_2$. Also ist $b_2 = \beta_3\big(f_3(a_3)\big) = f_2\big(\alpha_3(a_3)\big) \in \operatorname{im} f_2$.

Ist b_2 beliebig, so genügt es zu zeigen: Es existiert ein $a_2 \in A_2$ mit $\beta_2\big(b_2 - f_2(a_2)\big) = 0$. f_1 ist ein Isomorphismus, also existiert ein $a_1 \in A_1$ mit $f_1(a_1) = \beta_2(b_2)$. Dann folgt

$$f_0\big(\alpha_1(a_1)\big) = \beta_1\big(f_1(a_1)\big) = \beta_1\big(\beta_2(b_2)\big) = \underbrace{\beta_1 \circ \beta_2}_{=0}(b_2) = 0$$

Da f_0 ein Isomorphismus ist, folgt $\alpha_1(a_1) = 0$. Da $\ker \alpha_1 = \operatorname{im} \alpha_2$, folgt $\alpha_2(a_2) = a_1$. Es gilt nun

$$\begin{aligned}\beta_2\big(b_2 - f_2(a_2)\big) = \beta_2(b_2) - \beta_2\big(f_2(a_2)\big) &= \beta_2(b_2) - f_1\big(\alpha_2(a_2)\big) \\ &= \beta_2(b_2) - f_1(a_1) = \beta_2(b_2) - \beta_2(b_2) = 0 \qquad \square\end{aligned}$$

8.13 Lemma („2 von 3"). Sei $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ eine Abbildung von Paaren. Seien von den drei Abbildungen

(i) $(f|_A)_*\colon H_n(A; R) \to H_n(B; R)$

(ii) $f_*\colon H_n(X; R) \to H_n(Y; R)$

(iii) $(f, f|_A)_*\colon H_n(X, A; R) \to H_n(Y, B; R)$

zwei für jeweils alle n Isomorphismen. Dann ist auch die dritte für alle n ein Isomorphismus.

Beweis: Da die Randabbildung in der Paarfolge eine natürliche Transformation ist, erhalten wir ein kommutatives Leiterdiagramm:

„R" aus Platzgründen weggelassen

$$\begin{tikzcd}
H_{n+1}(A) \arrow[r] \arrow[d, "(f|_A)_*"] & H_{n+1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & H_{n+1}(X,A) \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, "(f,f|_A)_*"] & H_n(A) \arrow[r] \arrow[d, "(f|_A)_*"] & H_n(X) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & H_n(X,A) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "(f,f|_A)_*"] & H_{n-1}(A) \arrow[d, "(f|_A)_*"] \\
H_{n+1}(B) \arrow[r] & H_{n+1}(Y) \arrow[r] & H_{n+1}(Y,B) \arrow[r, "\partial_{n+1}"] & H_n(B) \arrow[r] & H_n(Y) \arrow[r] & H_n(Y,B) \arrow[r, "\partial_n"] & H_{n-1}(B)
\end{tikzcd}$$

Da die Zeilen lang exakt sind, folgt die Behauptung aus dem Fünfer-Lemma. $\square$

Index

Die *Seitenzahlen* sind mit Hyperlinks versehen und somit anklickbar

Abbildungsverzeichnis

To-do's und andere Baustellen