



WESTFÄLISCHE  
WILHELMS-UNIVERSITÄT  
MÜNSTER



FACHBEREICH 10  
MATHEMATIK UND  
INFORMATIK

---

# CAT(0) kubische Komplexe

---

gelesen von

**DR. OLGA VARGHESE**

im Wintersemester 2015/2016



Vorlesungsmitschrift von Phil Steinhorst

Stand: 31. Oktober 2015



## Vorwort

Der vorliegende Text ist eine Mitschrift zur Vorlesung  $CAT(0)$  kubische Komplexe, gelesen von Dr. Olga Varghese an der WWU Münster im Wintersemester 2015/2016. Der Inhalt entspricht weitestgehend dem Tafelanschrieb und den Vorlesungsnotizen, welche auf der Vorlesungswebsite bereitgestellt werden. Dieses Werk ist daher keine Eigenleistung des Autors und wird nicht von der Dozentin der Veranstaltung korrektur gelesen. Für die Korrektheit des Inhalts wird keinerlei Garantie übernommen. Bemerkungen, Korrekturen und Ergänzungen kann man folgenderweise loswerden:

- persönlich durch Überreichen von Notizen oder per E-Mail
- durch Abändern der entsprechenden TeX-Dateien und Versand per E-Mail an mich
- direktes Mitarbeiten via GitHub. Dieses Skript befindet sich im `latex-wwu`-Repository von Jannes Bantje:

<https://github.com/JaMeZ-B/latex-wwu>

## Literatur

- BRIDSON, HAEFLIGER: Metric Spaces of Non-Positive Curvature [BH99]
- SERRE: Trees [Ser80]
- BEKKA, DE LA HARPE, VALETTE: Kazhdan's Property (T) [BHV08]

## Kommentar der Dozentin

In der geometrischen Gruppentheorie werden Gruppen als Symmetrien von Räumen betrachtet. Ihre algebraische Eigenschaften werden mittels geometrischer Eigenschaften der Räume, auf denen sie wirken, untersucht. Gruppen, die auf kubischen Komplexen wirken – das sind polyedrische Komplexe, die aus Würfeln gebaut sind – sind dabei besonders gut verstanden.

Die Vorlesung wird eine Einführung in die Strukturtheorie  $CAT(0)$  kubischer Komplexe liefern, sowie Anwendungen in der Gruppentheorie diskutieren.

---

### abstrakte Gruppen

- endliche Gruppen
- $GL_n(\mathbb{Z})$ ,  $SL_n(\mathbb{Z})$
- $Aut(F_n)$ ,  $SAut(F_n)$
- Coxetergruppen



### metrische Räume mit "viel Geometrie"

- $(\mathbb{R}^n, d_2)$
- Hilberträume
- simpliziale Bäume
- $CAT(0)$  kubische Komplexe

### Geplante Themen

- $CAT(0)$ -Räume (simpliziale Bäume, kubische Komplexe)
- Gruppenwirkungen auf  $CAT(0)$  kubische Komplexe
- BRUHAT-TITS-Fixpunktsatz für  $CAT(0)$  kubische Komplexe
- HELLY's Theorem
- Kazhdan-Eigenschaft (T)

### Vorlesungswebsite

Das handgeschriebene Skript sowie weiteres Material findet man unter folgendem Link:

[http://wwwmath.uni-muenster.de/u/ag\\_kramer/index.php?name=KubischeKomplexe\\_15&menu=teach&lang=de](http://wwwmath.uni-muenster.de/u/ag_kramer/index.php?name=KubischeKomplexe_15&menu=teach&lang=de)

Phil Steinhorst  
p.st@wwu.de

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>CAT(0)-Räume</b>	<b>1</b>
	<b>Literatur</b>	<b>13</b>
	<b>Index</b>	<b>14</b>



# 1 CAT(0)-Räume

## 1.1 Definition (Metrischer Raum)

Sei  $X$  eine Menge. Eine Abbildung  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  heißt **Metrik**, wenn für alle  $x, y, z \in X$  gilt:

21.10.15  
[1]

- (i)  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- (ii)  $d(x, y) = d(y, x)$
- (iii)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Das Paar  $(X, d)$  heißt dann **metrischer Raum**.

## 1.2 Beispiel

- (i) Für  $n \in \mathbb{N}$  ist  $\mathbb{E}^n := (\mathbb{R}^n, d_2)$  mit

$$d_2: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$
$$(x, y) \longmapsto \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

- (ii) Sei  $X$  eine Menge. Wir definieren:

$$d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$
$$(x, y) \longmapsto \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

Dann ist  $d$  eine Metrik und  $(X, d)$  heißt ein **diskreter metrischer Raum**.

## 1.3 Definition (Geodätischer Raum)

- (i) Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $x, y \in X$ . Eine **Geodäte** von  $x$  nach  $y$  ist eine Abbildung  $\gamma: [a, b] \rightarrow X$  mit  $\gamma(a) = x, \gamma(b) = y$  und  $d(\gamma(t), \gamma(t')) = |t - t'|$  für alle  $t, t' \in [a, b]$ . Wir schreiben  $\gamma: x \rightsquigarrow y$ .

- (ii) Der Raum  $(X, d)$  ist ein **geodätischer Raum**, wenn für alle  $x, y \in X$  eine Geodäte  $x \rightsquigarrow y$  existiert.

- (iii) Ein geodätischer Raum heißt **eindeutig geodätisch**, wenn genau eine solche Geodäte existiert.

Sofern nichts anderes gesagt wird, ist  $[0, d(x, y)]$  der Definitionsbereich einer Geodäte  $\alpha: x \rightsquigarrow y$ .

**1.4 Beispiel**

- (i) Sei  $(V, \|\cdot\|)$  ein normierter reeller Vektorraum. Dann ist  $(V, d_{\|\cdot\|})$  ein geodätischer Raum. Im Detail: Seien  $u, v \in V$  paarweise verschieden und  $L := \|u - v\| \neq 0$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \gamma: [0, L] &\longrightarrow V \\ t &\longmapsto \left(1 - \frac{t}{L}\right) \cdot u + \frac{t}{L} \cdot v \end{aligned}$$

eine Geodäte von  $u$  nach  $v$ .

- (ii)  $(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, d_2)$  ist nicht geodätisch: Es existiert keine Geodäte  $(-1, 0) \rightsquigarrow (1, 0)$ .
- (iii)  $(\mathbb{R}^2, d_1)$  ist geodätisch, aber nicht eindeutig geodätisch: In der folgenden Abbildung sind zwei Geodäten von  $(1, 0) \rightsquigarrow (0, 1)$  dargestellt.



Abbildung 1.1: Der metrische Raum  $(\mathbb{R}^2, d_1)$  ist nicht eindeutig geodätisch.

**1.5 Definition** (Geodätisches Dreieck)

Ein **geodätisches Dreieck**  $\Delta = \Delta(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$  in einem geodätischen Raum  $(X, d)$  ist gegeben durch ein Tripel  $(x, y, z) \in X^3$  und Geodäten  $\alpha: x \rightsquigarrow y$ ,  $\beta: y \rightsquigarrow z$ ,  $\gamma: z \rightsquigarrow x$  – den Seiten von  $\Delta$ .

**1.6 Beispiel**

Abbildung 1.2: Geodätische Dreiecke sind im Allgemeinen durch ihre Ecken nicht eindeutig bestimmt.



Die Dreiecksungleichung garantiert, dass es Punkte  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathbb{E}^2$  gibt mit  $d(x, y) = d_2(\bar{x}, \bar{y})$ ,  $d(y, z) = d_2(\bar{y}, \bar{z})$ ,  $d(z, x) = d_2(\bar{z}, \bar{x})$  und Geodäten

$$\bar{\alpha}(t) = \bar{x} + t \cdot \frac{\bar{y} - \bar{x}}{d_2(\bar{y}, \bar{x})}, \quad \bar{\beta}(t) = \bar{y} + t \cdot \frac{\bar{z} - \bar{y}}{d_2(\bar{z}, \bar{y})}, \quad \bar{\gamma}(t) = \bar{z} + t \cdot \frac{\bar{x} - \bar{z}}{d_2(\bar{x}, \bar{z})}.$$

$\bar{\Delta} = \bar{\Delta}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma})$  heißt **Vergleichsdreieck** zu  $\Delta(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$ . Ist  $v = \gamma(s)$  für ein  $s$ , so heißt  $\bar{v} = \bar{\gamma}(s)$  **Vergleichspunkt** von  $v$ .

### 1.7 Definition (CAT(0)-Raum)

- (i) Ein Dreieck  $\Delta$  in  $(X, d)$  hat die **CAT(0)-Eigenschaft**, wenn für alle  $n, m$  auf den Seiten von  $\Delta$  und ihre Vergleichspunkte  $\bar{n}, \bar{m}$  auf den Seiten von  $\bar{\Delta}$ .
- (ii) Ein metrischer Raum  $(X, d)$  ist ein **CAT(0)-Raum**, wenn  $(X, d)$  geodätisch ist und alle seine Dreiecke die CAT(0)-Eigenschaft erfüllen.
- (iii) Ein metrischer Raum  $(X, d)$  heißt **lokal CAT(0)**, wenn für alle  $x \in X$  ein  $r_x > 0$  existiert, sodass

$$B_{r_x}(x) = \{y \in X : d(y, x) < r_x\}$$

mit der induzierten Metrik ein CAT(0)-Raum ist.

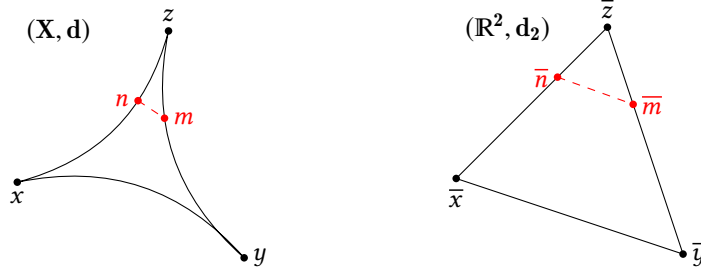


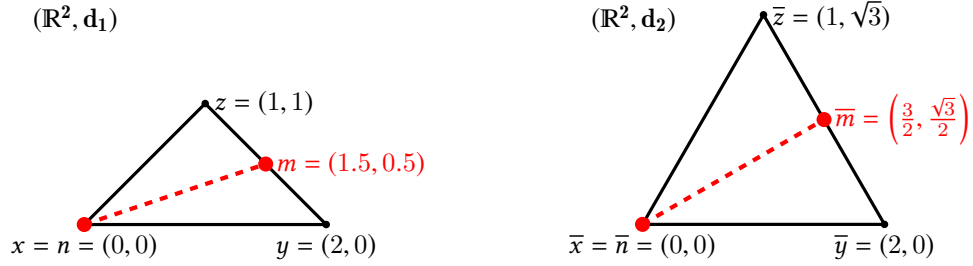
Abbildung 1.3: Anschaulich gesprochen sind Dreiecke in CAT(0)-Räumen „mindestens so dünn“ wie ihre Vergleichsdreiecke im euklidischen Raum.

### 1.8 Bemerkung

- (i) Lokal CAT(0)-Räume heißen auch nichtpositiv gekrümmte oder Alexandrov-Räume.
- (ii) CAT(0) steht für CARTAN-ALEXANDROV-TOPOGONOV und Krümmung  $\leq 0$ .

### 1.9 Beispiel

- (i) Der euklidische Raum  $\mathbb{E}^n$  ist CAT(0).
- (ii)  $(\mathbb{R}^2, d_1)$  ist nicht CAT(0): In der folgenden Abbildung 1.4 ist  $d_1(n, m) = 2$ , aber  $d_2(\bar{n}, \bar{m}) = \sqrt{3}$ .
- (iii) Hilberträume sind CAT(0).


Abbildung 1.4: Der Raum  $(\mathbb{R}^2, d_1)$  ist nicht CAT(0).

(iv) Komplemente von Polygonen im  $\mathbb{R}^2$  sind lokal CAT(0), aber nicht CAT(0).

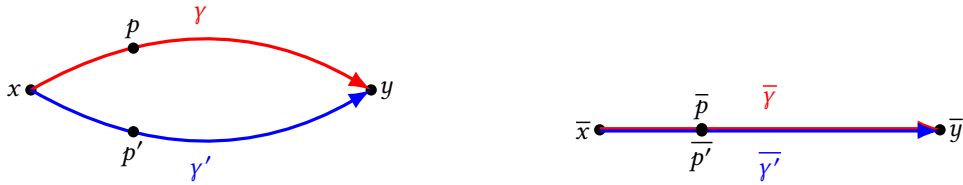
### 1.10 Beobachtung

Sei  $(X, d)$  ein CAT(0)-Raum. Dann ist  $X$  eindeutig geodätisch.

**BEWEIS:** Seien  $\gamma: x \rightsquigarrow y$  und  $\gamma': x \rightsquigarrow y$  zwei Geodäten von  $x$  nach  $y$ . Seien  $p$  und  $p'$  zwei Punkte auf  $\gamma$  und  $\gamma'$  mit  $d(x, p) = d(x, p')$ . Das Vergleichsdreieck  $\bar{\Delta}$  zum Dreieck

$$\Delta = \Delta(x, p, \gamma|_{[0, d(x, p)]}, \gamma|_{[d(x, p), d(x, y)]}, \gamma')$$

ist degeneriert:



Wegen der CAT(0)-Eigenschaft gilt  $d(p, p') \leq d(\bar{p}, \bar{p}') = 0$ , also folgt  $d(p, p') = 0$  und  $p = p'$ .  $\square$

### 1.11 Definition (Konvexe Menge)

Sei  $X$  ein CAT(0)-Raum. Eine nichtleere Teilmenge  $C \subseteq X$  heißt **konvex**, wenn zu allen  $p, q \in C$  die Geodäte  $\gamma: p \rightsquigarrow q$  in  $C$  liegt.

Offensichtlich ist  $C$  wieder ein CAT(0)-Raum und Durchschnitte konvexer Mengen sind wieder konvex.

### 1.12 Theorem ([BH99, 1A.6])

Sei  $\mathcal{M}$  eine einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit nichtpositiver Krümmung. Dann ist  $\mathcal{M}$  CAT(0).

23.10.15  
[2]

**1.13 Satz**

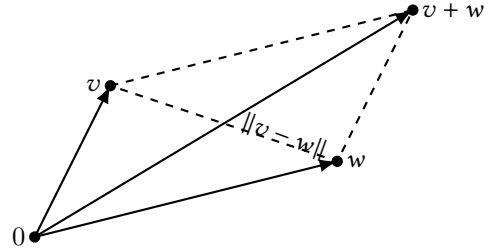
Sei  $(V, \|\cdot\|)$  ein reeller normierter Vektorraum. Dann ist  $(V, \|\cdot\|)$  genau dann ein CAT(0)-Raum, wenn  $(V, \|\cdot\|)$  ein Prähilbertraum ist, das heißt es existiert eine symmetrische positiv definite Bilinearform  $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$  für  $v \in V$ .

Für den Beweis brauchen wir eine metrische Charakterisierung von Prähilberträumen:

**1.14 Proposition** (VON NEUMANN, 1935)

Ein reeller normierter Vektorraum  $(V, \|\cdot\|)$  ist ein Prähilbertraum genau dann, wenn für alle  $v, w \in V$  die **Parallelogrammgleichung** gilt:

$$\|v - w\|^2 + \|v + w\|^2 = 2 \cdot (\|v\|^2 + \|w\|^2) \quad (\text{PG})$$

**BEWEIS:**

" $\Rightarrow$ ": Seien  $u, v \in V$ .

$$\begin{aligned} & \|u - v\|^2 + \|u + v\|^2 \\ &= \langle u - v, u - v \rangle + \langle u + v, u + v \rangle \\ &= \langle u, u \rangle - \langle u, v \rangle - \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle + \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle \\ &= 2 \cdot (\langle v, v \rangle + \langle u, u \rangle) \end{aligned}$$

" $\Leftarrow$ ": Definiere:

$$\begin{aligned} b: V \times V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto \frac{1}{4}(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2). \end{aligned}$$

Wir zeigen, dass  $b$  ein Skalarprodukt ist:

- Offensichtlich ist  $b$  symmetrisch.
- $b$  ist positiv definit, denn für  $v \in V$  gilt:

$$\begin{aligned} b(v, v) &= \frac{1}{4}(2 \cdot \|v\|^2) = \|v\|^2 \geq 0 \\ b(v, v) &= 0 \Leftrightarrow v = 0 \end{aligned}$$

- Sei nun  $w \in V$  beliebig. Zu zeigen ist, dass  $b(\cdot, w): V \rightarrow \mathbb{R}$  linear ist. Seien also  $u, v \in V$  beliebig, dann gilt:

$$\begin{aligned} & b(u + v, w) + b(u - v, w) \\ &\stackrel{\text{Def}}{=} \frac{1}{4}(\|u + v + w\|^2 - \|u + v - w\|^2 + \|u - v + w\|^2 - \|u - v - w\|^2) \\ &\stackrel{(\text{PG})}{=} \frac{1}{4}(2 \cdot \|u + w\|^2 + 2 \cdot \|v\|^2 - 2 \cdot \|u - w\|^2 - 2 \cdot \|v\|^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}(\|u + w\|^2 - \|u - w\|^2) \\
&\stackrel{\text{Def}}{=} 2 \cdot b(u, w)
\end{aligned} \tag{1}$$

Analog erhalten wir

$$b(u + v, w) - b(u - v, w) = 2 \cdot b(v, w). \tag{2}$$

Addition von (1) und (2) liefert:

$$b(u + v, w) = b(u, w) + b(v, w)$$

Bleibt zu zeigen: Für alle  $r \in \mathbb{R}$  gilt  $b(rv, w) = r \cdot b(v, w)$ .

**1. Fall:**  $r = -1$ . Mit  $u = 0$  folgt aus (1):

$$b(v, w) + b(-v, w) = 2 \cdot b(0, w) = 2 \cdot \frac{1}{4}(\|w\|^2 - \|-w\|^2) = 0$$

und somit  $b(-v, w) = -b(v, w)$ .

**2. Fall:**  $r = n \in \mathbb{N}$ . Für  $n = 2$  folgt mit  $u = v$  aus (1)

$$b(2v, w) + \underbrace{b(0, w)}_{=0} = 2 \cdot b(v, w)$$

und weiter induktiv

$$\begin{aligned}
b(nv, w) &= b((n-1)v + v, w) = b((n-1)v, w) + b(v, w) \\
&= (n-1)b(v, w) + b(v, w) = n \cdot b(v, w).
\end{aligned}$$

**3. Fall:**  $r = \frac{1}{n}$  mit  $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ . Es gilt  $\frac{1}{n} \cdot b(nv, w) = b(v, w)$  und damit

$$b\left(\frac{1}{n}v, w\right) = \frac{1}{n} \cdot b\left(n \cdot \frac{1}{n}v, w\right) = \frac{1}{n}b(v, w)$$

Aus allen drei Fällen folgt nun  $b(qv, w) = q \cdot b(v, w)$  für alle  $q \in \mathbb{Q}$ . Da  $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$  eine dichte Teilmenge und  $b(\cdot, w)$  stetig ist, folgt  $b(rv, w) = r \cdot b(v, w)$  für alle  $r \in \mathbb{R}$ .  $\square$

**BEWEIS** (Satz 1.13):

” $\Leftarrow$ ”: Sei  $\Delta \subseteq (V, \|\cdot\|) = \mathcal{H}$  ein geodätisches Dreieck. Dann ist die lineare Hülle  $\langle \Delta \rangle$  isometrisch isomorph zum  $\mathbb{E}^2$ , bzw. zum  $\mathbb{E}^1$  oder zu  $\{0\}$ , falls  $\Delta$  degeneriert ist.

” $\Rightarrow$ ”: Sei  $u, v \in V$  beliebig. Zeige, dass für  $v, w$  das Parallelogrammgesetz gilt: Wir betrachten das Dreieck  $\Delta(0, u, v)$  und das Vergleichsdreieck  $\bar{\Delta}(0, \bar{u}, \bar{v})$ . Es gilt:

$$\begin{aligned}
d\left(\frac{u+v}{2}, 0\right) &\stackrel{\text{CAT}(0)}{\leq} d_2\left(\frac{\bar{u}+\bar{v}}{2}, 0\right) \\
\Rightarrow d(u+v, 0) &\leq d_2(\bar{u}+\bar{v}, 0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|u + v\|^2 &\leq \|\bar{u} + \bar{v}\|_2^2 \stackrel{(PG)}{=} 2 \cdot \|\bar{u}\|_2^2 + 2 \cdot \|\bar{v}\|_2^2 - \|\bar{u} - \bar{v}\|_2^2 \\ &\stackrel{CAT(0)}{=} 2 \cdot \|u\|^2 + 2 \cdot \|v\|^2 - \|u - v\|^2 \end{aligned} \quad (3)$$

Betrachte das Dreieck  $\Delta(0 - v, u)$  und das Vergleichsdreieck  $\bar{\Delta}(0 - \bar{v}, \bar{u})$ . Wir erhalten genauso wie oben die Ungleichung

$$\|u - v\|^2 \leq 2 \cdot \|u\|^2 + 2 \cdot \|v\|^2 - \|u + v\|^2. \quad (4)$$

Insgesamt haben wir also:

$$\|u + v\|^2 \stackrel{(3)}{\leq} 2 \cdot \|u\|^2 + 2 \cdot \|v\|^2 - \|u - v\|^2 \stackrel{(4)}{\leq} \|u + v\|^2 \quad \square$$

### 1.15 Erinnerung (Orthogonale Projektion)

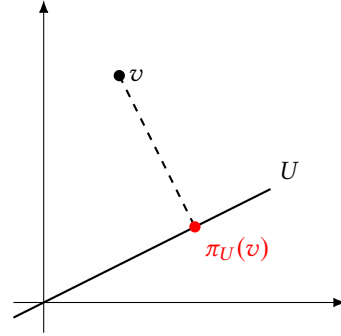
Gegeben sei ein reeller Hilbertraum  $\mathbb{E}^d$  und  $U \subseteq \mathbb{E}^d$  ein Unterraum. Sei weiter  $v_1, \dots, v_n \in U$  eine Orthonormalbasis von  $U$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \pi_U : V &\longrightarrow U \\ v &\longmapsto \sum_{i=1}^n \langle v, v_i \rangle \cdot v_i \end{aligned}$$

eine lineare Abbildung und es gilt

$$d(v, \pi_U(v)) = \inf_{u \in U} d(v, u) =: d(v, U)$$

und  $v - \pi_U(v) \perp U$ .



### 1.16 Satz (Projektion auf konvexe Teilmengen)

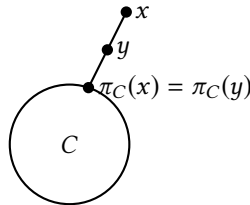
Sei  $X$  ein CAT(0)-Raum und  $C \subseteq X$  konvex und vollständig mit der induzierten Metrik. Dann gilt:

- (i) Für alle  $x \in X$  existiert genau ein  $\pi_C(x) \in C$  mit

$$d(x, \pi_C(x)) = \inf_{p \in C} d(x, p) =: d(x, C).$$

Die Abbildung  $\pi_C : X \rightarrow C$  heißt die **(orthogonale) Projektion** auf  $C$ .

- (ii) Ist  $y \in [X, \pi_C(x)] = \text{im}(\gamma : x \rightsquigarrow \pi_C(x))$ , so ist  $\pi_C(y) = \pi_C(x)$ .



(iii) Für alle  $x, y \in X$  gilt

$$d(\pi_C(x), \pi_C(y)) \leq d(x, y),$$

das heißt  $\pi_C$  ist 1-Lipschitz.

**BEWEIS:**

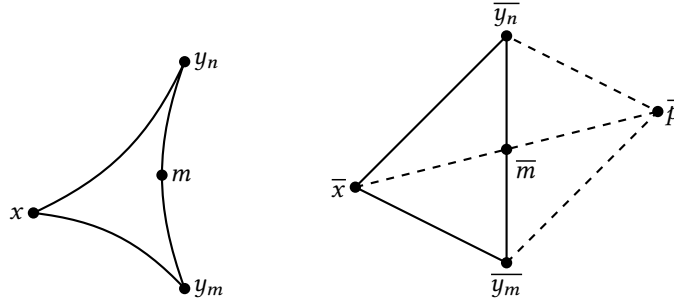
(i) Sei  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq C$  eine Folge mit  $d(x, y_n) \rightarrow d(x, C) =: D$ . Ziel ist es zu zeigen, dass  $(y_n)_n$  eine Cauchy-Folge ist. Da  $C$  vollständig ist, ist die Folge  $(y_n)_n$  konvergent in  $C$  und wir können  $\pi_C(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$  definieren.

Zur Eindeutigkeit von  $\pi_C(x)$ : Angenommen, es existiert ein  $\pi_C(x') \in C$  mit  $\pi_C(x)' \neq \pi_C(x)$  und  $d(x, \pi_C(x')) = d(x, C)$ . Betrachte die Folge

$$q_n := \begin{cases} \pi_C(x), & n \text{ gerade} \\ \pi_C(x)', & n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Dann ist  $d(x, q_n) \rightarrow d(x, C)$ , aber  $(q_n)_n$  ist keine Cauchy-Folge. Widerspruch.

Zur Existenz: Betrachte folgendes Dreieck und Vergleichsdreieck ergänzt zu einem Parallelogramm:



Es ist  $d(y_n, m) = d(y_m, m) = \frac{1}{2}d(y_n, y_m)$ . Die Parallelogrammgleichung in  $\mathbb{E}^2$  besagt:

$$d_2(\bar{x}, \bar{p})^2 + d_2(\bar{y}_n, \bar{y}_m)^2 = 2(d_2(\bar{x}, \bar{y}_n)^2 + d_2(\bar{x}, \bar{y}_m)^2)$$

Sei  $\varepsilon > 0$ . Sei  $\delta > 0$  die positive Lösung von  $\delta^2 + 2D\delta - \frac{\varepsilon^2}{4} = 0$ , das heißt  $\varepsilon = 2 \cdot \sqrt{\delta^2 + 2D\delta}$ .

Wähle  $n, m$  groß genug, sodass gilt

$$\left. \begin{aligned} d(x, y_n) &< D + \delta \\ d(x, y_m) &< D + \delta \end{aligned} \right\} \forall n, m \geq N. \quad (5)$$

Aus der CAT(0)-Eigenschaft folgt

$$D \leq d(x, m)^2 \leq d_2(\bar{x}, \bar{m}). \quad (6)$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
 d(y_n, y_m)^2 &\stackrel{\text{CAT}(0)}{=} d_2(\overline{y_n}, \overline{y_m}) \\
 &\stackrel{(\text{PG})}{=} 2 \cdot (d_2(\overline{x}, \overline{y_n}) + d_2(\overline{x}, \overline{y_m})^2) - d_2(\overline{x}, \overline{p})^2 \\
 &= 2 \cdot (d_2(\overline{x}, \overline{y_n}) + d_2(\overline{x}, \overline{y_m})^2) - 4 \cdot d_2(\overline{x}, \overline{m})^2 \\
 &\stackrel{(6)}{\leq} 2 \cdot (d_2(\overline{x}, \overline{y_n}) + d_2(\overline{x}, \overline{y_m})^2) - 4D^2 \\
 &\stackrel{(5)}{\leq} 2 \cdot (2 \cdot (D + \delta)^2) - 4D^2 \\
 &= 4 \cdot (2D\delta + \delta^2)
 \end{aligned}$$

Somit folgt  $d(y_n, y_m) \leq 2 \cdot \sqrt{2D\delta + \delta^2} = \varepsilon$  für  $n, m \geq N$ . Also ist  $(y_n)_n$  eine Cauchy-Folge und wir setzen  $\pi_C(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ .

- (ii) Es ist  $\text{im}(\gamma: x \rightsquigarrow \pi_C(x)) = \{y \in X : d(x, y) + d(y, \pi_C(x)) = d(x, \pi_C(x))\}$ . Angenommen,  $\pi_C(y) \neq \pi_C(x)$ . Dann ist insbesondere

28.10.15  
[3]

$$d(y, \pi_C(y)) < d(y, \pi_C(x)) \quad (7)$$

und mit der Dreiecksungleichung folgt

$$\begin{aligned}
 d(x, \pi_C(y)) &\leq d(x, y) + d(y, \pi_C(y)) \\
 &\stackrel{(7)}{<} d(x, y) + d(y, \pi_C(x)) \\
 &= d(x, \pi_C(x)),
 \end{aligned}$$

was ein Widerspruch zur Minimalität von  $\pi_C(x)$  ist.

- (iii) Übungsaufgabe. □

Unser nächstes Ziel ist es zu zeigen, dass CAT(0)-Räume kontrahierbar sind.

### 1.17 Definition (Homotopie)

Seien  $\varphi_0, \varphi_1: X \rightarrow Y$  stetige Abbildungen zwischen topologischen Räumen  $X$  und  $Y$ .

- (i) Die Abbildungen  $\varphi_0, \varphi_1$  heißen **homotop**, wenn es eine stetige Abbildung  $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$  gibt mit  $H(x, 0) = \varphi_0(x)$  und  $H(x, 1) = \varphi_1(x)$  für alle  $x \in X$ .  $H$  heißt **Homotopie** zwischen  $\varphi_0$  und  $\varphi_1$ . Wir schreiben  $\varphi_0 \simeq \varphi_1$ .
- (ii) Ist  $A \subseteq X$  eine Teilmenge mit  $\varphi_0(a) = \varphi_1(a)$  für alle  $a \in A$ , so heißen  $\varphi_0$  und  $\varphi_1$  **homotop relativ zu  $A$** , wenn es eine Homotopie  $H$  zwischen  $\varphi_0$  und  $\varphi_1$  gibt mit  $H(a, t) = \varphi_0(a)$  für alle  $t \in [0, 1]$  und  $a \in A$ . Wir schreiben  $\varphi_0 \simeq \varphi_1 \text{ rel } A$ .
- (iii) Ein topologischer Raum  $X \neq \emptyset$  heißt **kontrahierbar**, wenn die Identität  $\text{id}_X$  und die konstante Abbildung  $\varphi_p: x \mapsto p, p \in X$ , homotop sind.

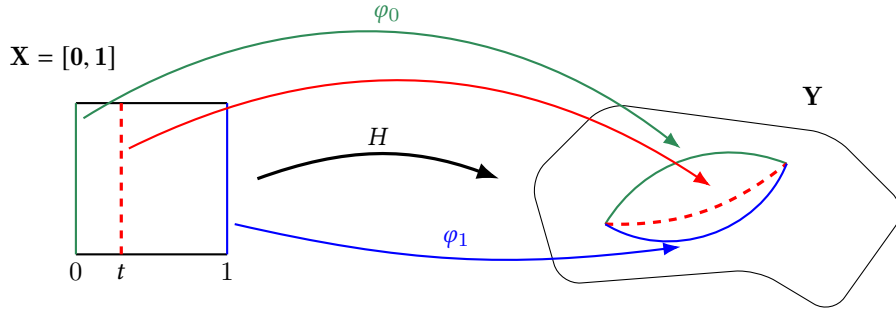


Abbildung 1.5: Veranschaulichung des Homotopiebegriffs am Beispiel  $X = [0, 1]$ .

### 1.18 Bemerkung

Ist  $X$  ein kontrahierbarer Raum, so ist die Fundamentalgruppe  $\pi_1(X, \{x_0\})$ ,  $x_0 \in X$  trivial.

### 1.19 Satz

Sei  $X$  ein CAT(0)-Raum und  $\emptyset \neq C \subseteq X$  konvex und vollständig. Dann gilt  $\text{id}_X \simeq \pi_C \text{ rel } C$ . Insbesondere erhalten wir für  $C = \{p\}$ ,  $p \in X$ , dass  $\text{id}_X \simeq \varphi_p \text{ rel } \{p\}$ , und folglich ist der Raum  $X$  kontrahierbar.

**BEWEIS:** Wir brauchen folgendes Resultat (Übungsaufgabe):

Seien  $\alpha: x \rightsquigarrow y, \beta: x' \rightsquigarrow y'$  zwei Geodäten. Dann gilt für alle  $t \in [0, 1]$ :

$$d(\alpha(t \cdot d(x, y)), \beta(t \cdot d(x', y'))) \leq (1 - t) \cdot d(x, x') + t \cdot d(y, y'). \quad (8)$$

Wir definieren

$$\begin{aligned} H: X \times [0, 1] &\longrightarrow X \\ (x, t) &\longmapsto \gamma_x(t \cdot d(x, \pi_C(x))), \end{aligned}$$

wobei  $\gamma_x: x \rightsquigarrow \pi_C(x)$ . Es gilt  $H(x, 0) = \gamma_x(0) = x$  und  $H(x, 1) = \gamma_x(d(x, \pi_C(x))) = \pi_C(x)$ , somit ist  $H(\cdot, 0) = \text{id}_X$  und  $H(\cdot, 1) = \pi_C$ .

Sei weiter  $c \in C$ . Dann gilt  $H(c, t) = c$ , da  $\gamma_c: c \rightsquigarrow \pi_C(c)$  und  $c = \pi_C(c)$ .

Es bleibt zu zeigen, dass  $H$  stetig ist. Wir wissen, dass Abbildungen zwischen metrischen Räumen genau dann stetig sind, wenn sie folgenstetig sind. Sei  $(x, t) \in X \times [0, 1]$  beliebig und weiter  $(x_n, t_m) \in X \times [0, 1]$  eine Folge mit  $\lim_{n,m} (x_n, t_m) = (x, t)$ . Zu zeigen ist:

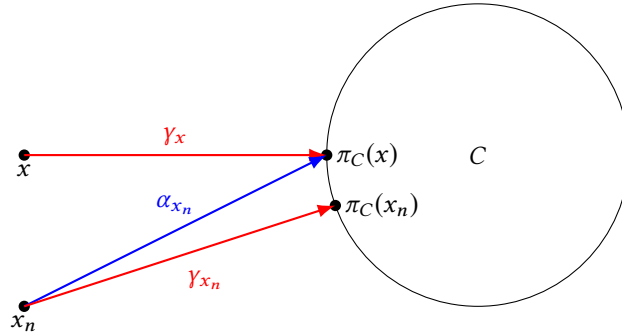
$$\begin{aligned} \lim_{n,m} H(x_n, t_m) &= H(x, t) \\ \stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \lim_{n,m} \gamma_{x_n}(t_m \cdot d(x_n, \pi_C(x_n))) &= \gamma_x(t \cdot d(x, \pi_C(x))), \end{aligned}$$

wobei  $\gamma_{x_n}: x_n \rightsquigarrow \pi_C(x_n)$ .



Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben. Wähle  $N_1 \in \mathbb{N}$  so groß, dass mit Satz 1.16(iii) gilt:

$$\left. \begin{aligned} d(x_n, x) &< \frac{\varepsilon}{2} \\ d(\pi_C(x_n), \pi_C(x)) &< \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned} \right\} \forall n \geq N_1 \quad (9)$$



Wir haben:

$$\begin{aligned} & d(H(x, t), H(x_n, t)) \\ &= d(\gamma_x(t \cdot d(x, \pi_C(x))), \gamma_{x_n}(t \cdot d(x_n, \pi_C(x_n)))) \\ &\stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} d(\gamma_x(t \cdot d(x, \pi_C(x))), \alpha_{x_n}(t \cdot d(x_n, \pi_C(x)))) + d(\alpha_{x_n}(t \cdot d(x_n, \pi_C(x))), \gamma_{x_n}(t \cdot d(x_n, \pi_C(x_n)))) \\ &\stackrel{(8)}{\leq} (1-t) \cdot d(x, x_n) + t \cdot \underbrace{d(\pi_C(x), \pi_C(x))}_{=0} + (1-t) \cdot \underbrace{d(x_n, x_n)}_{=0} + t \cdot d(\pi_C(x), \pi_C(x_n)) \\ &\stackrel{(9)}{\leq} (1-t) \cdot \frac{\varepsilon}{2} + t \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall t \in [0, 1], n \geq N_1 \end{aligned} \quad (10)$$

Wähle  $N_2 \in \mathbb{N}$  groß genug mit

$$d(H(x_n, t_m), H(x_n, t)) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall m \geq N_2. \quad (11)$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} & d(H(x_n, t_m), H(x, t)) \\ &\stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} d(H(x_n, t_m), H(x_n, t)) + d(H(x_n, t), H(x, t)) \\ &\stackrel{(10), (11)}{\leq} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall n, m \geq \max(N_1, N_2). \end{aligned} \quad \square$$



# Literatur

- [BH99] Martin R. Bridson, André Haefliger. *Metric Spaces of Non-Positive Curvature*. Springer, 1999 (siehe S. III, 4).
- [BHV08] Mohammed El Bachir Bekka, Pierre de la Harpe, Alain Valette. *Kazhdan's Property (T)*. Cambridge Univ. Press, 2008 (siehe S. III).
- [Ser80] Jean-Pierre Serre. *Trees*. Springer-Verlag, 1980 (siehe S. III).

# Index

CAT(0)-Raum, 3

    lokal, 3

eindeutig geodätisch, 1

Geodäte, 1

geodätischer Raum, 1

geodätisches Dreieck, 2

Homotopie, 9

kontrahierbar, 9

konvex, 4

Lipschitz, 8

Metrik, 1

metrischer Raum, 1

    diskret, 1

orthogonale Projektion, 7

Parallelogrammgleichung, 5

Vergleichsdreieck, 3

Vergleichspunkt, 3