



WESTFÄLISCHE  
WILHELMS-UNIVERSITÄT  
MÜNSTER



FACHBEREICH 10  
MATHEMATIK UND  
INFORMATIK

# **Skript $K$ -Theorie und die Hopf-Invariante**

Mitschrift der Vorlesung „ $K$ -Theorie und die Hopf-Invariante“ von Dr. Ulrich Penning

Jannes Bantje

23. April 2015

## Aktuelle Version verfügbar bei



<https://github.com/JaMeZ-B/latex-wwu>

GitHub ist eine Internetplattform, auf der viele OpenSource-Projekte gehostet werden. Diese Plattform nutzen wir zur Zusammenarbeit, also findet man hier neben den PDFs auch die  $\text{\TeX}$ -Dateien. Außerdem ist über diese Plattform auch direktes Mitarbeiten möglich, siehe nächste Seite.



<https://uni-muenster.sciebo.de/public.php?service=files&t=965ae79080a473eb5b6d927d7d8b0462>

Sciebo ist ein Dropbox-Ersatz der Hochschulen in NRW, der von der Uni Münster in leitender Position auf Basis der OpenSource-Software Owncloud aufgebaut wurde. Wenn man auf den Link klickt, kann man die Freigabe zum eigenen Speicher hinzufügen und hat dann immer automatisch die aktuellste Version.



B6WH2DISQ5QVYIRYIEZSF4ZR2IDVKPN3I

BTSync ist ein peer-to-peer Dateisynchronisations-Tool. Dabei werden die Dateien nur auf den Computern der Teilnehmer an einer Freigabe gespeichert. Ein Mini-Computer ist permanent online, sodass jederzeit die aktuellste Version verfügbar ist. Clients gibt es für jedes Betriebssystem. Zugang ist über das obige „Secret“ bzw. den QR-Code möglich



## Vorlesungshomepage

<https://wwwmath.uni-muenster.de/reine/u/topos/lehre/SS2015/KTheorie-Hopf/Hopf.html>

Hier ist ein Link zur offiziellen Vorlesungshomepage.

## Vorwort — Mitarbeit am Skript

Dieses Dokument ist eine Mitschrift aus der Vorlesung „K-Theorie und die Hopf-Invariante, SoSe 2015“, gelesen von Dr. Ulrich Penning. Der Inhalt entspricht weitestgehend dem Tafelanschrieb. Für die Korrektheit des Inhalts übernehme ich keinerlei Garantie! Für Bemerkungen und Korrekturen – und seien es nur Rechtschreibfehler – bin ich sehr dankbar. Korrekturen lassen sich prinzipiell auf drei Wegen einreichen:

- ▶ Persönliches Ansprechen in der Uni, Mails an [j.bantje@wwu.de](mailto:j.bantje@wwu.de) (gerne auch mit annotieren PDFs) oder Kommentare auf <https://github.com/JaMeZ-B/latex-wwu>.

- ▶ *Direktes* Mitarbeiten am Skript: Den Quellcode poste ich auf GitHub (siehe oben), also stehen vielfältige Möglichkeiten der Zusammenarbeit zur Verfügung: Zum Beispiel durch Kommentare am Code über die Website und die Kombination Fork + Pull Request. Wer sich verdient macht oder ein Skript zu einer Vorlesung, die ich nicht besuche, beisteuern will, dem gewähre ich gerne auch Schreibzugriff.

Beachten sollte man dabei, dass dazu ein Account bei [github.com](https://github.com) notwendig ist, der allerdings ohne Angabe von persönlichen Daten angelegt werden kann. Wer bei GitHub (bzw. dem zugrunde liegenden Open-Source-Programm „git“) – verständlicherweise – Hilfe beim Einstieg braucht, dem helfe ich gerne weiter. Es gibt aber auch zahlreiche empfehlenswerte Tutorials im Internet.<sup>1</sup>

- ▶ *Indirektes* Mitarbeiten:  $\text{\TeX}$ -Dateien per Mail verschicken.

Dies ist nur dann sinnvoll, wenn man einen ganzen Abschnitt ändern möchte (zB. einen alternativen Beweis geben), da ich die Änderungen dann per Hand einbauen muss! Ich freue mich aber auch über solche Beiträge!

---

<sup>1</sup> zB. <https://try.github.io/levels/1/challenges/1>, ist auf Englisch, aber dafür interaktives LearningByDoing

## Inhaltsverzeichnis

<b>0. Einführung</b>	<b>1</b>
0.1. Definition: Reelle Divisionsalgebra . . . . .	1
0.2. Theorem 1.1 (Adams) . . . . .	1
0.3. Geplanter Verlauf der Vorlesung . . . . .	1
<b>1. Kohomologietheorien</b>	<b>2</b>
1.1. Definition: Kontravarianter Funktor . . . . .	2
1.2. Definition: Verallgemeinerte Kohomologietheorie . . . . .	2
1.3. Definition: Ko-Raumpaar und Kofaserung . . . . .	3
<b>2. Vektorbündel</b>	<b>4</b>
2.1. Definition: K-Vektorbündel . . . . .	4
2.2. Definition: Vektorraumbündelmorphismus . . . . .	4
2.3. Definition: Pullback . . . . .	5
2.4. Lemma: Universelle Eigenschaft des Pullbacks . . . . .	5
2.5. Lemma: Induzierter Funktor eines stetigen Funktors . . . . .	6
2.6. Satz (Fortsetzungssatz von Tietze) . . . . .	7
2.7. Lemma über Fortsetzungen von Schnitten auf abgeschlossenen Teilmengen . . . . .	7
2.8. Lemma: Trivialisierbarkeit von $E \rightarrow X \times [a, b]$ , wenn $E _{X \times [a, c]}$ , $E _{X \times [c, b]}$ trivialisierbar . . . . .	8
2.9. Lemma: Endliche Überdeckung $\{U_i\}_{i=1}^N$ , sodass Trivialisierbarkeit auf $U_i$ gilt . . . . .	9
2.10. Theorem: Isomorphismus von Vektorbündeln $E$ und $E _{X \times \{1\}} \times I$ für $X$ kompakt . . . . .	9
<b>A. Anhang</b>	<b>11</b>
A.1. Lokale Trivialität des Tangentialbündels auf $S^n$ . . . . .	11
<b>Index</b>	<b>A</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>B</b>
<b>Todo list</b>	<b>B</b>

## 0. Einführung

### 0.1. Definition

Eine  $\mathbb{R}$ -Algebra  $\mathcal{A}$  mit 1, die nicht notwendigerweise assoziativ ist, heißt **reelle Divisionsalgebra**, falls jedes Element  $a \neq 0$  invertierbar ist.

#### Beispiele

Die reellen Zahlen  $\mathbb{R}$ , die komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$ , die Quaternionen<sup>2</sup>  $\mathbb{H}$  und die sogenannten Cayley-Zahlen<sup>3</sup>  $\mathbb{O}$ . Dabei ist  $\mathbb{O} \cong \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$ , wobei die Multiplikation wie folgt definiert ist:

$$(a, b) \cdot (d, c) = (ac - d^*b, da + bc^*)$$

Dabei ist  $d = x + iy + jz + kw$  und  $d^* = x - iy - jz - kw$ .

### 0.2. Theorem 1.1 (Adams)


Folgende Aussagen sind äquivalent:


- (i)  $\mathbb{R}^n$  besitzt die Struktur einer reellen Divisionsalgebra.
- (ii) Entweder ist  $n = 1$  oder  $n \geq 2$  ist gerade und es gibt eine stetige Abbildung  $f: S^{2n-1} \rightarrow S^n$  mit der sogenannten **Hopf-Invariante** 1.
- (iii) Es gilt  $n \in \{1, 2, 4, 8\}$ .

### 0.3. Geplanter Verlauf der Vorlesung

Wir werden diesen Satz mit Hilfe der sogenannten K-Theorie beweisen. Dazu müssen wir aber einiges an Vorarbeit leisten:

1. Verallgemeinerte Kohomologietheorien
2. Vektorbündel
3. K-Theorie
  - 3.1. Produkte in K-Theorie
  - 3.2. Bott-Periodizität
  - 3.3. Thom-Isomorphismus
4. Hopf-Invariante und der Beweis des Satzes

<sup>2</sup> siehe auch <https://de.wikipedia.org/wiki/Quaternion> 

<sup>3</sup> auch Oktonionen oder reelle Oktaven; siehe [http://de.wikipedia.org/wiki/Oktave\\_\(Mathematik\)](http://de.wikipedia.org/wiki/Oktave_(Mathematik)) 

# 1. Kohomologietheorien

## 1.1. Definition

Seien  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{D}$  Kategorien. Ein **kontravarianter Funktor**  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$

- ▶ ordnet jedem Objekt  $c \in \text{Obj}(\mathcal{C})$  ein Objekt  $F(c) \in \text{Obj}(\mathcal{D})$  zu
- ▶ ordnet jedem Morphismus  $f: c \rightarrow c'$  in  $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(c, c')$  einen Morphismus  $F(f): F(c') \rightarrow F(c)$  zu

sodass folgende Eigenschaften gelten:

- ▶ Für  $f: c \rightarrow c'$  und  $g: c' \rightarrow c''$  gilt  $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$
- ▶  $F(\text{id}_c) = \text{id}_{F(c)}$

### Beispiel (Dualraumfunktor)

Sei  $K$  ein Körper. Sei  $\text{VEKT}_K$  die Kategorie der endlich dimensionalen  $K$ -Vektorräume und linearen Abbildungen. Sei  $*$ :  $\text{VEKT}_K \rightarrow \text{VEKT}_K$  gegeben durch  $V \mapsto \text{Hom}_K(V, K) = V^*$ . Für  $f: V \rightarrow W$  sei  $f^*: W^* \rightarrow V^*$ ,  $\varphi \mapsto \varphi \circ f$ . Dies ist ein kontravarianter Funktor. Insbesondere ist  $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$ .

## 1.2. Definition

Sei  $\text{Top}^2$  die Kategorie der Raumpaare  $(X, A)$ . Sei  $V: \text{Top}^2 \rightarrow \text{Top}^2$  der Funktor  $(X, A) \mapsto (A, \emptyset)$ . Sei  $R$  ein kommutativer Ring mit 1. Eine **verallgemeinerte Kohomologietheorie**  $h^* = (h^n, \partial^n)_{n \in \mathbb{Z}}$  mit Werten in  $R$ -Moduln ist ein kontravarianter Funktor  $h^*: \text{Top}^2 \rightarrow \text{Gr-}R\text{-Mod}$  zusammen mit einer natürlichen Transformation

$$\partial^*: h^* \circ V \rightarrow h^{*+1},$$

so dass die folgenden Eigenschaften gelten:

- a) **Homotopieinvarianz:** Seien  $f, g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  homotope Abbildungen von Raumpaaren. Dann gilt für alle  $n \in \mathbb{Z}$ :

$$h^n(f) = h^n(g)$$

- b) **Lange exakte Paarsequenz:** Sei  $(X, A)$  ein Raumpaar. Seien  $(A, \emptyset) \xrightarrow{i} (X, \emptyset)$  und  $j: (X, \emptyset) \rightarrow (X, A)$  die kanonischen Inklusionen. Dann ist die Folge

$$\dots \xrightarrow{\partial^{n-1}} h^n(X, A; R) \xrightarrow{h^n(j)} h^n(X, \emptyset; R) \xrightarrow{h^n(i)} h^n(A, \emptyset; R) \xrightarrow{\partial^n} h^{n+1}(X, A; R) \longrightarrow \dots$$

- c) **Ausschneidung:** Sei  $(X, A)$  ein Raumpaar,  $U \subset A$ , sodass  $\overline{U} \subseteq \mathring{A}$ . Dann ist die von der Inklusion  $\iota: (X \setminus U, A \setminus U) \hookrightarrow (X, A)$  induzierte Abbildung  $h^n(\iota): h^n(X, A; R) \rightarrow h^n(X \setminus U, A \setminus U; R)$  ein Isomorphismus.

### Bemerkungen

- (i) Wir schreiben kurz  $h^n(X, A)$  für  $h^n(X, A; \mathbb{Z})$  und  $f^*$  für  $h^n(f)$ , falls sich der Grad aus dem Kontext ergibt.

- (ii)  $h^n(\{\text{pt}\}) =: h^n$  heißen **Koeffizienten der Kohomologietheorie**.

- (iii) Einige Kohomologietheorien besitzen ein **externes Produkt**, das heißt eine natürliche Transformation

$$h^n(X, A; R) \times h^m(Y, B; R) \longrightarrow h^{n+m}((X, A) \times (Y, B); R)$$

die bilinear und assoziativ ist. Dabei ist  $(X, A) \times (Y, B) = (X \times Y, (A \times Y) \cup (X \times B))$ .

Diagramm hinzufügen

Falls ein externes Produkt für  $h^*$  existiert, dann ist  $h^*(X, A; R) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} h^n(X, A; R)$  ein **graduierter Ring** mit der Multiplikation

$$\begin{array}{ccc}
 h^n(X, A; R) \times h^m(X, A; R) & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & h^{n+m}(X, A; R) \\
 \searrow \times & & \nearrow h^{n+m}(\Delta) \\
 & h^{n+m}((X, A) \times (X, A); R) &
 \end{array}$$

### 1.3. Definition

Ein Raumpaard  $(X, A)$  heißt **Ko-Raumpaard**, falls

- ▶  $X$  ein kompakter Hausdorffraum ist
- ▶  $A \subset X$  abgeschlossen ist
- ▶ die Inklusion  $A \hookrightarrow X$  eine **Kofaserung** ist, das heißt für jede stetige Abbildung  $f: A \times I \cup X \times \{0\} \rightarrow Y$  existiert  $H: X \times I \rightarrow Y$ , sodass das folgende Diagramm kommutiert:

*Homotopieerweiterungseigenschaft*

$$\begin{array}{ccc}
 A \times I \cup X \times \{0\} & \xrightarrow{f} & Y \\
 \downarrow & \nearrow H & \\
 X \times I & &
 \end{array}$$

Mit  $\text{Tor}_{\text{Kof}}^2 \subseteq \text{Tor}^2$  bezeichnen wir die Kategorie der Ko-Raumpaare und stetigen Abbildungen.

#### Beispiel

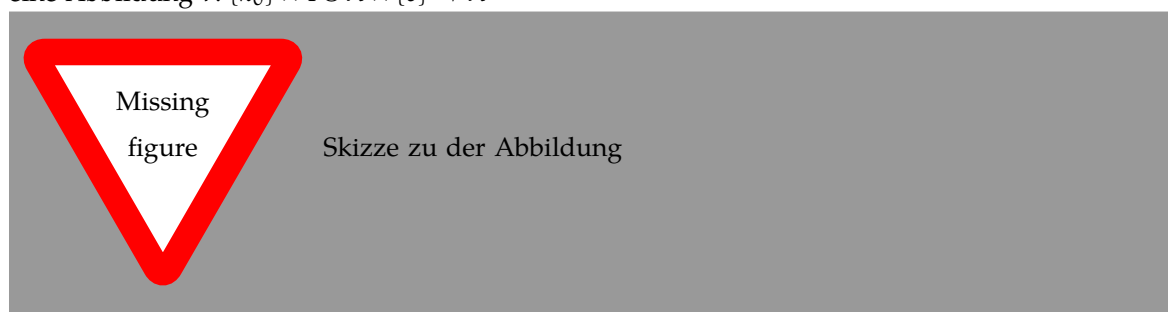
- ▶ Sei  $X$  ein kompakter CW-Komplex,  $A \subset X$  ein Unterkomplex. Dann ist  $\iota: A \hookrightarrow X$  eine Kofaserung.
- ▶  $X$  eine kompakte Mannigfaltigkeit,  $A$  eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit.

#### Bemerkung

Falls  $(X, \{x_0\})$  ein Objekt in  $\text{Tor}_{\text{Kof}}^2$  ist, dann heißt  $X$  **wohlpunktiert**.

#### Beispiel

$X = [-1, 1] \times [-1, 1]$ ,  $x_0 = (0, 0)$ ,  $Y = X$ . Sei  $\gamma: I \rightarrow X$  ein Pfad mit  $\gamma(0) = (0, 0) = x_0$ . Wir erhalten eine Abbildung  $f: \{x_0\} \times I \cup X \times \{0\} \rightarrow X$



Kofaserung heißt in diesem Fall, dass der Raum  $X$  entlang des Pfades „mitgezogen“ werden kann.

## 2. Vektorbündel

Sei für den Verlauf dieses Kapitels  $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ .

### 2.1. Definition

Sei  $X$  ein topologischer Raum. Eine stetige surjektive Abbildung  $p: E \rightarrow X$  heißt **K-Vektorbündel**, falls gilt:

- a)  $p^{-1}(\{x\}) =: E_x$  ist ein  $K$ -Vektorraum für alle  $x \in X$ .  $E_x$  heißt die **Faser** von  $E$  über  $x$ .
- b) Für alle  $x \in X$  gibt es eine Umgebung  $U$ , ein  $n \in \mathbb{N}$  und einen Homöomorphismus  $\varphi_U: p^{-1}(U) \rightarrow U \times K^n$ , sodass das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi_U} & U \times K^n \\ & \searrow p \quad \swarrow \text{pr}_U & \\ & U & \end{array}$$

und die Einschränkung  $\varphi_U|_{E_x}: E_x \rightarrow K^n$  für alle  $x \in U$  ein Isomorphismus von  $K$ -Vektorräumen ist. Diese Eigenschaft wird oft als **lokale Trivialität** bezeichnet.

#### Beispiel

- Sei  $X$  ein beliebiger topologischer Raum. Dann ist  $X \times K^n \xrightarrow{\text{pr}_X} X$  das **triviale Vektorbündel** über  $X$ .
- Betrachte  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ . Sei  $TS^n = \{(x, v) \in S^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, v \rangle = 0\}$ . Definiere  $p: TS^n \rightarrow S^n$  durch  $(x, v) \mapsto x$ . Damit erhalten wir ein  $\mathbb{R}$ -Vektorbündel über  $S^n$  (Tangentialbündel).

*Übung: Zeige lokale Trivialität. Siehe Anhang A.1*

#### Bemerkung

Die Abbildung  $x \mapsto \dim_K(E_x)$  ist stetig, also lokal konstant, das heißt über einem zusammenhängenden Raum hat ein Vektorbündel konstante Faserdimension.

### 2.2. Definition

Seien  $p: E \rightarrow X$  und  $p': E' \rightarrow X'$  zwei  $K$ -Vektorbündel. Ein **Morphismus von Vektorbündeln** oder **Vektorraumbündelmorphismus** von  $E$  nach  $E'$  ist ein Paar  $(f, \bar{f})$  von stetigen Abbildungen  $\bar{f}: E \rightarrow E'$  und  $f: X \rightarrow X'$ , sodass das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\bar{f}} & E' \\ p \downarrow & & \downarrow p' \\ X & \xrightarrow{f} & X' \end{array}$$

und sodass die Einschränkung  $\bar{f}|_{E_x}: E_x \rightarrow E'_{f(x)}$  für jedes  $x \in X$  ein  $K$ -Vektorraumhomomorphismus ist. Wir bezeichnen die Kategorie der endlich dimensionalen  $K$ -Vektorraumbündel über einem topologischen Raum  $X$  zusammen mit den Morphismen  $(\text{id}_X, \bar{f})$  mit  $\text{VEKT}_K(X)$ .



## Operationen mit Vektorbündeln

### 2.3. Definition

Seien  $X$  und  $Y$  topologische Räume. Sei  $f: Y \rightarrow X$  eine stetige Abbildung und sei  $p: E \rightarrow X$  ein Vektorbündel. Dann heißt

$$f^*E := \{(y, v) \in Y \times E \mid f(y) = p(v)\}$$

zusammen mit der Abbildung  $q: f^*E \rightarrow Y, (y, v) \mapsto y$  der **Pullback** von  $p: E \rightarrow X$  entlang von  $f$ . Mit  $\bar{f}(y, v) = v$  kommutiert das folgende Diagramm

*Der Pullback lässt sich auch allgemein auf kategorieller Ebene definieren*

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \xrightarrow{\bar{f}} & E \\ q \downarrow & & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

### 2.4. Lemma

- a)  $q: f^*E \rightarrow Y$  ist ein Vektorbündel und  $(\bar{f}, f)$  ist ein Morphismus von Vektorbündeln.  
 b)  $q: f^*E \rightarrow Y$  ist durch die folgende universelle Eigenschaft eindeutig (bis auf Isomorphie) charakterisiert:

Sei  $r: F \rightarrow Z$  ein Vektorbündel,  $(\bar{g}, g)$  ein Morphismus zwischen  $r: F \rightarrow Z$  und  $p: E \rightarrow X$ . Sei weiter  $g': Z \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung mit  $f \circ g' = g$ . Dann existiert genau ein  $G: F \rightarrow f^*E$ , so dass  $(G, g')$  ein Morphismus von Vektorbündeln ist und weiter  $(\bar{f}, f) \circ (G, g') = (\bar{g}, g)$  gilt.

$$\begin{array}{ccccc} F & & \xrightarrow{\bar{g}} & & E \\ r \downarrow & \searrow \exists! G & & \xrightarrow{\bar{f}} & \downarrow p \\ Z & & f^*E & & E \\ & \searrow g' & \downarrow q & \searrow g & \\ & & Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

#### Beweis

Sei  $y \in Y$ . Sei  $U \subset X$  eine Umgebung von  $f(y)$  in  $X$ , sodass eine lokale Trivialisierung  $\varphi_U: p^{-1}(U) \rightarrow U \times K^n$  existiert.  $V := f^{-1}(U)$  ist eine Umgebung von  $y$  und es gilt

$$q^{-1}(V) = \{(y, v) \in V \times p^{-1}(U) \mid f(y) = p(v)\}$$

Wir definieren nun

$$\begin{aligned} \psi_V: q^{-1}(V) &\longrightarrow V \times K^n & (y, v) &\longmapsto (y, \text{pr}_{K^n} \circ \varphi_U(v)) \\ \kappa_V: V \times K^n &\longrightarrow q^{-1}(V) & (y, w) &\longmapsto (y, \varphi_U^{-1}(f(y), w)) \end{aligned}$$

Dann gilt  $\psi_V \circ \kappa_V = \text{id}_{V \times K^n}$  und  $\kappa_V \circ \psi_V = \text{id}_{q^{-1}(V)}$ . Außerdem kommutiert das Diagramm aus 2.1. Also ist  $\psi_V$  eine lokale Trivialisierung von  $f^*E \rightarrow Y$  über  $V$ . Der Beweis von b) ist eine (relativ einfache) Übungsaufgabe. □

eventuell hinzufügen

Sei  $\mathcal{C}$  eine (topologische) Kategorie. Hieraus lässt sich eine neue Kategorie  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  definieren:

$$\text{obj}(\mathcal{C}^{\text{op}}) := \text{obj}(\mathcal{C}) \quad , \quad \text{Mor}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(c, d) := \text{Mor}_{\mathcal{C}}(d, c)$$

mit der neuen Komposition

$$\begin{aligned} \bullet : \text{Mor}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(\mathbf{c}', \mathbf{c}'') \times \text{Mor}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(\mathbf{c}, \mathbf{c}') &\longrightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(\mathbf{c}, \mathbf{c}'') \\ (f, g) &\longmapsto f \bullet g = g \circ f \end{aligned}$$

(Kovariante) Funktoren  $\mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}$  entsprechen dann kontravarianten Funktoren  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ . Sei  $\text{VEKT}_K = \text{VEKT}_K(\text{pt})$  die Kategorie der endlichdimensionalen  $K$ -Vektorräume und linearen Abbildungen. Ein Funktor

$$F: \underbrace{\text{VEKT}_K \times \dots \times \text{VEKT}_K}_r \times \underbrace{\text{VEKT}_K^{\text{op}} \times \dots \times \text{VEKT}_K^{\text{op}}}_s \longrightarrow \text{VEKT}_K \quad [\#]$$

heißt **stetig**, falls die induzierte Abbildung

$$\begin{aligned} \text{Mor}_{\text{VEKT}_K}(V_1, V'_1) \times \dots \times \text{Mor}_{\text{VEKT}_K}(V_r, V'_r) \times \text{Mor}_{\text{VEKT}_K^{\text{op}}}(V_{r+1}, V'_{r+1}) \times \dots \times \text{Mor}_{\text{VEKT}_K^{\text{op}}}(V_{r+s}, V'_{r+s}) \\ \longrightarrow \text{Mor}_{\text{VEKT}_K}(F(V_1, \dots, V_r, V_{r+1}, \dots, V_{r+s}), F(V'_1, \dots, V'_r, V'_{r+1}, \dots, V'_{r+s})) \end{aligned}$$

stetig ist (dies klappt nur für Kategorien, für die eine Topologie auf den Morphismen existiert!).

## 2.5. Lemma

Sei  $F$  ein stetiger Funktor wie in  $[\#]$  und sei  $X$  ein topologischer Raum. Dann induziert  $F$  einen Funktor

$$F_X: \underbrace{\text{VEKT}_K(X) \times \dots \times \text{VEKT}_K(X)}_r \times \underbrace{\text{VEKT}_K(X)^{\text{op}} \times \dots \times \text{VEKT}_K(X)^{\text{op}}}_s \longrightarrow \text{VEKT}_K(X)$$

der verträglich ist mit Pullbacks und  $F_{\text{pt}} = F$  erfüllt.

### Beweis

Sei  $m = r + s$ . Definiere  $F_X(E^{(1)}, \dots, E^{(m)}) = \coprod_{x \in X} F(E_x^{(1)}, \dots, E_x^{(m)})$  als Menge. Sei  $U_i$  eine offene Überdeckung von  $X$ , so dass lokale Trivialisierungen

$$\varphi_i^{(k)}: (p^{(k)})^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times K^{\ell_k}$$

existieren.  $F$  induziert Bijektionen

$$F_{U_i}(\varphi_i^{(1)}, \dots, \varphi_i^{(m)}): F_{U_i}((p^{(1)})^{-1}(U_i), \dots, (p^{(m)})^{-1}(U_i)) \longrightarrow U_i \times F(K^{\ell_1}, \dots, K^{\ell_m})$$

Jetzt gibt es eine eindeutige Topologie auf  $F_X(E^{(1)}, \dots, E^{(m)})$ , so dass die eben definierten Abbildungen  $\psi_i = F_{U_i}(\varphi_i^{(1)}, \dots, \varphi_i^{(m)})$  Homöomorphismen werden, wobei  $U_i \times F(K^{\ell_1}, \dots, K^{\ell_m})$  die Produkttopologie trägt. Eine Menge  $V \subset F_X(E^{(1)}, \dots, E^{(m)})$  ist offen, falls sie die Vereinigung von Mengen der Form  $\psi_i^{-1}(V_i)$  mit  $V_i \subset U_i \times F(K^{\ell_1}, \dots, K^{\ell_m})$  offen ist.

Damit diese Definition konsistent ist, müssen wir folgendes prüfen: Sei  $V \subset (U_i \cap U_j) \times F(K^{\ell_1}, \dots, K^{\ell_m})$  offen. Wir haben zu zeigen, dass dann auch  $\psi_j \circ \psi_i^{-1}(V)$  offen ist. Aber es gilt  $\psi_j \circ \psi_i^{-1}(x, v) = (x, \psi_{ij}(x)(v))$  für eine Abbildung

$$\psi_{ij}: U_i \cap U_j \longrightarrow \text{End}_K(F(K^{\ell_1}, \dots, K^{\ell_m}))$$

Es gilt  $\psi_{ij} = F(\psi_{ij}^{(1)}, \dots, \psi_{ij}^{(m)})$  für stetige Abbildungen  $\psi_{ij}^{(k)}: U_i \cap U_j \rightarrow \text{End}_K(K^{\ell_k})$ . Da  $F$  stetig ist, folgt, dass alle  $\psi_{ij}$  stetig sind und folglich auch  $\psi_j \circ \psi_i^{-1}$ . Somit ist  $\psi_j \circ \psi_i^{-1}(V)$  offen. Es ist damit klar, dass  $F_X(E^{(1)}, \dots, E^{(m)}) \rightarrow X$  ein Vektorbündel ist, denn wir haben lokale Trivialisierungen konstruiert. Ferner gilt per Definition für eine stetige Abbildung  $f: Y \rightarrow X$

$$f^*F_X(E^{(1)}, \dots, E^{(m)}) \cong F_Y(f^*E^{(1)}, \dots, f^*E^{(m)}) \quad \square$$

### Beispiele

- ▶  $\oplus: \text{VEKT}_K \times \text{VEKT}_K \rightarrow \text{VEKT}_K$  ist stetig  $\Rightarrow$  direkte Summe von Vektorbündeln
- ▶  $\otimes: \text{VEKT}_K \times \text{VEKT}_K \rightarrow \text{VEKT}_K$  ist stetig  $\Rightarrow$  Tensorprodukt von Vektorbündeln
- ▶ Dualisieren von Vektorräumen  $*$ :  $\text{VEKT}_K^{\text{op}} \rightarrow \text{VEKT}_K$  ist stetig  $\Rightarrow$  duales Vektorbündel
- ▶  $\text{Hom}: \text{VEKT}_K \times \text{VEKT}_K^{\text{op}} \rightarrow \text{VEKT}_K, (V, W) \mapsto \text{Hom}_K(W, V)$  ist stetig  $\Rightarrow$  Homomorphismenbündel  $\text{Hom}(E, F)$ .

Seien  $p: E \rightarrow X$  und  $q: F \rightarrow X$  zwei  $K$ -Vektorbündel. Dann ist  $E \times F \xrightarrow{(p,q)} X \times X$  auch ein Vektorbündel, wenn  $E_X \times F_X$  die Vektorraumstruktur der äußeren direkten Summe trägt.

### Übungsaufgabe

Sei  $\Delta: X \rightarrow X \times X$  die Diagonalabbildung. Zeige, dass  $\Delta^*(E \times F) \cong E \oplus F$  als Vektorbündel über  $X$ .

## Homotopieinvarianz von Pullbacks

### Erinnerung

Ein topologischer Raum heißt **normal**, falls sich zwei disjunkte abgeschlossene Mengen durch offene Mengen trennen lassen.

### Bemerkung

Jeder kompakte Hausdorffraum ist normal. *Übungsaufgabe*

In den Anhang?

### 2.6. Satz (Fortsetzungssatz von Tietze)

Sei  $X$  ein normaler Raum,  $A \subset X$  abgeschlossen und  $V$  ein endlich dimensionaler  $K$ -Vektorraum. Zu jeder stetigen Abbildung  $f: A \rightarrow V$  existiert eine stetige Abbildung  $F: X \rightarrow V$  mit  $F|_A = f$ .

### Beweis

#### Definition

Sei  $p: E \rightarrow X$  ein  $K$ -Vektorbündel über einem topologischen Raum  $X$ . Ein **Schnitt** von  $E$  ist eine stetige Abbildung  $s: X \rightarrow E$  mit  $p \circ s = \text{id}_X$ . Das heißt  $s(x) \in E_x$ . Jedes Vektorbündel hat einen Schnitt, nämlich den trivialen Schnitt  $s(x) = 0 \in E_x$ .

### 2.7. Lemma

Sei  $X$  ein kompakter Hausdorffraum,  $A \subset X$  abgeschlossen. Seien  $p: E \rightarrow X$  und  $p': E' \rightarrow X$  zwei  $K$ -Vektorbündel. Dann gilt:

- a) Jeder Schnitt  $s: A \rightarrow E|_A$  lässt sich zu einem Schnitt  $\bar{s}: X \rightarrow E$  fortsetzen.
- b) Sei  $\iota: A \hookrightarrow X$  die Inklusion und  $E|_A := \iota^*E$ , sowie  $E'|_A := \iota^*E'$ . Sei weiter  $f: E|_A \rightarrow E'|_A$  ein Morphismus von Vektorbündeln. Dann existiert ein Morphismus  $\hat{f}: E \rightarrow E'$ , der  $f$  fortsetzt. Ist  $f$  ein Isomorphismus, dann existiert eine offene Menge  $U \supset A$ , sodass  $\hat{f}|_U: E|_U \rightarrow E'|_U$  ein Isomorphismus von Vektorbündeln ist.

### Beweis

- a) Wähle eine endliche Überdeckung  $(U_i)_{i=1,\dots,N}$  von  $X$ , sodass lokale Trivialisierungen  $\varphi_i: E|_{U_i} \rightarrow U_i \times K^n$  existieren. Nach dem Fortsetzungssatz lässt sich

$$\text{pr}_{K^n} \circ \varphi_i \circ s|_{U_i \cap A} : U_i \cap A \rightarrow K^n$$

zu einer stetigen Abbildung auf  $U_i$  fortsetzen, also auch  $s|_{U_i \cap A}$  selbst. Sei  $\bar{s}_i$  eine solche Fortsetzung. Sei  $\psi_i: X \rightarrow [0, 1]$  eine Partition der Eins<sup>4</sup>, die der Überdeckung  $(U_i)_{i=1,\dots,N}$  untergeordnet ist. Sei

$$\bar{s} = \sum_{i=1}^N \psi_i \cdot \bar{s}_i : X \rightarrow E$$

Dann gilt  $\bar{s}|_A = \left(\sum_{i=1}^N \psi_i\right) \cdot s|_A = s|_A$ .

- b) Die Morphismen  $E \xrightarrow{f} E'$  entsprechen den Schnitten des Vektorbündels  $\text{Hom}(E, E') \rightarrow X$  wie folgt: Jedem  $f$  lässt sich ein Schnitt

$$s_f(x)(v) := f(v)$$

zuordnen. Jedem Schnitt  $s: X \rightarrow \text{Hom}(E, E')$  entspricht ein Morphismus  $f_s(v) = s(p(v))(v) \in E'_{p(v)}$ . Somit folgt der erste Teil aus a).

Sei  $\pi: \text{Hom}(E, E') \rightarrow X$  die Bündelabbildung. Sei weiter

$$\text{Iso}(E, E') = \left\{ g \in \text{Hom}(E, E') \mid g: E_{\pi(g)} \rightarrow E'_{\pi(g)} \text{ ist ein Isomorphismus} \right\}$$

Dann ist  $\text{Iso}(E, E') \rightarrow X$  ein lokal triviales Bündel, allerdings *kein* Vektorbündel. Sind  $E$  und  $E'$   $n$ -dimensional, ist die Faser von  $\text{Iso}(E, E')$  homöomorph zu  $GL_n(K)$ . Da  $GL_n(K) \subset M_n(K)$  offen ist und  $\text{Iso}(E, E')$  lokal trivial ist, folgt, dass  $\text{Iso}(E, E') \subset \text{Hom}(E, E')$  offen ist.<sup>5</sup> Sei  $\hat{f}$  eine Fortsetzung von  $f$ . Setze  $U = s_{\hat{f}}^{-1}(\text{Iso}(E, E'))$  für  $s_{\hat{f}}: X \rightarrow \text{Hom}(E, E')$ . Dann ist  $U$  offen und  $s_{\hat{f}}|_U$  entspricht einem Isomorphismus  $\hat{f}: E|_U \rightarrow E'|_U$ .  $\square$

### 2.8. Lemma

Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$  und  $X$  ein topologischer Raum. Sei weiter  $p: E \rightarrow X \times [a, b]$  ein  $K$ -Vektorbündel. Es geben  $c \in (a, b)$ , so dass  $E|_{X \times [a, c]}$  und  $E|_{X \times [c, b]}$  trivialisierbar sind. Dann ist auch  $E$  trivialisierbar.

#### Beweis

Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $X$  zusammenhängend. Seien

$$\varphi_a: X \times [a, c] \times K^n \xrightarrow{\cong} E|_{X \times [a, c]}$$

$$\varphi_b: X \times [c, b] \times K^n \xrightarrow{\cong} E|_{X \times [c, b]}$$

entsprechende Trivialisierungen. Sei außerdem

$$h := \left( \varphi_b|_{X \times \{c\} \times K^n} \right)^{-1} \circ \left( \varphi_a|_{X \times \{c\} \times K^n} \right): X \times \{c\} \times K^n$$

<sup>4</sup> siehe [https://de.wikipedia.org/wiki/Zerlegung\\_der\\_Eins](https://de.wikipedia.org/wiki/Zerlegung_der_Eins)

<sup>5</sup> da lokal homöomorph zu  $U \times GL_n(K) \hookrightarrow U \times M_n(K)$

$h$  hat die Form  $h(x, v) = (x, g(x) \cdot v)$  für eine stetige Abbildung  $g: X \rightarrow GL_n(K)$ . Sei jetzt

$$w: X \times [c, b] \times K^n \longrightarrow X \times [c, b] \times K^n, \quad (x, t, v') \longmapsto (x, t, g(x)v')$$

Dann gilt  $\varphi_a|_{X \times \{c\} \times K^n} = \varphi_b \circ w|_{X \times \{c\} \times K^n}$ . Daher können wir diese beiden Abbildungen zu einem Isomorphismus von Vektorbündeln  $X \times [a, b] \times K^n \rightarrow E$  zusammensetzen.  $\square$

## 2.9. Lemma

Sei  $X$  ein kompakter Raum. Sei  $p: E \rightarrow X \times I$  ein  $K$ -Vektorbündel. Dann gibt es eine endliche offene Überdeckung  $\{U_i\}_{i=1}^N$  von  $X$ , so dass  $E|_{U_i \times I}$  trivialisierbar ist.

### Beweis

Sei  $x \in X$  und  $t \in I$ . Dann existieren offene Umgebungen  $U(t) \subset X$  und  $I(t) \subset I$ , sodass  $E|_{U(t) \times I(t)}$  trivialisierbar ist. Da  $I$  kompakt ist, existiert eine endliche Folge  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = 1$  zusammen mit offenen Umgebungen  $U_i$  von  $x$ , so dass  $E|_{U_i \times [t_{i-1}, t_i]}$  trivialisierbar ist. Sei nun  $U := \bigcap_{i=1}^N U_i$ . Nach Lemma 2.8 ist  $E|_{U \times I}$  trivialisierbar. Da  $X \times I$  kompakt ist, wird es von endlichen vielen solcher Mengen überdeckt.  $\square$

## 2.10. Theorem

Sei  $X$  ein kompakter Raum und sei  $p: E \rightarrow X \times I$  ein  $K$ -Vektorbündel. Sei  $E_1 = E|_{X \times \{1\}}$ .

- a) Es gibt einen Isomorphismus von Vektorbündeln über  $X \times I$

$$\varphi: E \xrightarrow{\cong} E_1 \times I$$

mit  $\varphi|_{p^{-1}(X \times \{1\})} = \text{id}_{E_1}$

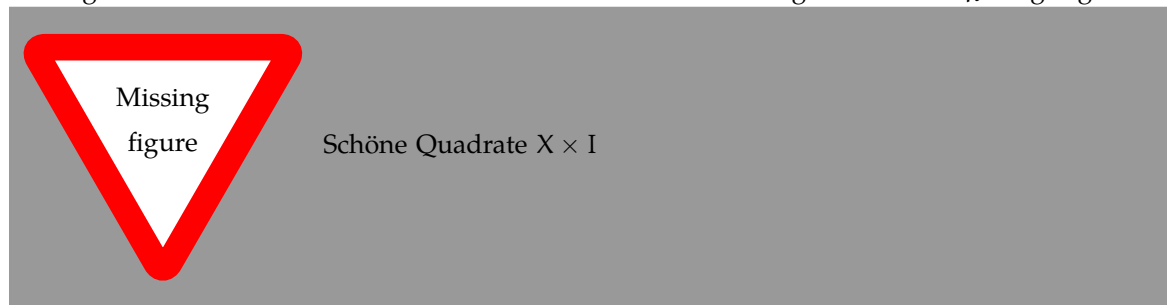
- b) Sei  $(X, A)$  ein Ko-Raumpaar,  $h: X \times I \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung und  $p': E' \rightarrow Y$  ein  $K$ -Vektorbündel mit  $E \cong h^*E'$ . Falls jetzt  $h_t(a) = h_0(a)$  für alle  $a \in A$ , dann lässt sich der Isomorphismus aus a) so wählen, dass er den durch  $h$  induzierten Isomorphismus  $E|_{A \times I} \rightarrow E_1|_A \times I$  fortsetzt.

### Beweis

Nach Lemma 2.9 können wir eine Überdeckung von  $X \times I$  durch offene Mengen der Form  $U_i \times I$  mit  $i \in \{1, \dots, N\}$  finden, so dass  $E|_{U_i \times I}$  trivialisierbar ist. Seien  $h_i: U_i \times I \times K^n \xrightarrow{\cong} E|_{U_i \times I}$  Trivialisierungen. Seien  $\eta_i: X \rightarrow [0, 1]$  stetige Funktionen mit folgenden Eigenschaften:

- (i)  $\text{supp}(\eta_i) \subset U_i$ , (ii)  $\max_{i=1, \dots, N} \eta_i(x) = 1$  für alle  $x \in X$

Sei  $r_i: X \times I \rightarrow X \times I$  gegeben durch  $r_i(x, t) = (x, \max(\eta_i(x), t))$ . Ein Punkt  $(x, t)$  wird durch  $r_i$  entlang der  $I$ -Achse nach 1 verschoben. Der Wert der Verschiebung wird durch  $\eta_i$  festgelegt.



Nun konstruieren wir einen Morphismus von  $K$ -Vektorbündeln  $(u_i, r_i)$  über  $r_i$  wie folgt:

$$u_i(h_i(x, t, v)) = h_i(r_i(x, t), v)$$

für  $(x, t, v) \in U_i \times I \times K^n$ . Wir setzen  $u_i = \text{id}$  außerhalb des Bildes von  $h_i$ . Wegen  $r_i|_{X \times I \setminus U_i \times I} = \text{id}_{X \times I \setminus U_i \times I}$  ist dies stetig. Außerdem kommutiert

$$\begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{u_i} & R \\
 \downarrow p & & \downarrow p \\
 X \times I & \xrightarrow{r_i} & X \times I
 \end{array}$$

und  $u_i$  ist auf den Fasern linear. Sei  $r := r_N \circ r_{N-1} \circ \dots \circ r_1$ . Wegen (ii) gilt  $r(x, t) = (x, 1)$ . Sei  $u := u_N \circ \dots \circ u_2 \circ u_1$ . Dann ist  $(u, r)$  ein Morphismus von Vektorbündeln. Außerdem haben wir

$$\begin{array}{ccc}
 E & \longrightarrow & E \\
 & \searrow & \uparrow \\
 & & E_1
 \end{array}$$

Setze jetzt  $\varphi: E \rightarrow E_1 \times I, v \mapsto (u(v), \text{pr}_I \circ p(v))$ . Dann ist  $(\varphi, \text{id}_{X \times I})$  ein Isomorphismus von Vektorbündeln mit  $\varphi|_{X \times \{1\}} = \text{id}$ .  $\square$

## A. Anhang

### A.1. Lokale Trivialität des Tangentialbündels auf $S^n$

Sei  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  die  $n$ -Sphäre und sei

$$TS^n = \{(x, v) \in S^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, v \rangle = 0\}$$

Wir definieren  $p: TS^n \rightarrow S^n$  durch  $p(x, v) = x$ . Wir zeigen, dass  $p: TS^n \rightarrow S^n$  lokal trivial ist.

#### Beweis

Sei  $x_0 \in S^n$  gegeben. Sei  $U := \{x \in S^n \mid \langle x, x_0 \rangle > 0\}$ . Da  $\langle x_0, x_0 \rangle = 1$  ist, ist  $x_0 \in U$ . Weiter ist  $U$  offen in  $S^n$ , also eine offene Umgebung von  $x_0$ . Sei  $H \subset \mathbb{R}^{n+1}$  die Hyperebene gegeben durch  $H = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, v \rangle = 0\}$ . Da dies ein  $n$ -dimensionaler Vektorraum ist, finden wir einen Isomorphismus  $\kappa: H \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Sei  $TS^n|_U = p^{-1}(U)$ . Wegen  $\langle x_0, x_0 \rangle = 1$  liegt  $v - \langle x_0, v \rangle x_0$  in  $H$  für alle  $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ . Also können wir definieren:

$$\varphi: TS^n|_U \rightarrow U \times \mathbb{R}^n, \quad (x, v) \mapsto (x, \kappa(v - \langle x_0, v \rangle x_0))$$

Außerdem definieren wir  $\psi: U \times \mathbb{R}^n \rightarrow TS^n|_U$  durch

$$\psi(x, w) = \left( x, \kappa^{-1}(w) - \frac{\langle x, \kappa^{-1}(w) \rangle}{\langle x, x_0 \rangle} x_0 \right)$$

Dies ist wohldefiniert, da für  $x \in U$  der Nenner stets ungleich 0 ist und weiter

$$\left\langle x, \kappa^{-1}(w) - \frac{\langle x, \kappa^{-1}(w) \rangle}{\langle x, x_0 \rangle} x_0 \right\rangle = \langle x, \kappa^{-1}(w) \rangle - \frac{\langle x, \kappa^{-1}(w) \rangle}{\langle x, x_0 \rangle} \langle x, x_0 \rangle = 0$$

gilt. Weiter sind beide Abbildungen offensichtlich stetig. Für die Komposition gilt

$$(\psi \circ \varphi)(x, v) = \left( x, v - \langle x_0, v \rangle x_0 - \frac{\langle x, v - \langle x_0, v \rangle x_0 \rangle}{\langle x, x_0 \rangle} x_0 \right) = (x, v - \langle x_0, v \rangle x_0 + \langle x_0, v \rangle x_0) = (x, v)$$

Dabei haben wir benutzt, dass  $\langle x, v \rangle = 0$  gilt. Umgekehrt gilt

$$\begin{aligned} (\varphi \circ \psi)(x, w) &= \left( x, \kappa \left( \kappa^{-1}(w) - \frac{\langle x, \kappa^{-1}(w) \rangle}{\langle x, x_0 \rangle} x_0 - \left\langle x_0, \kappa^{-1}(w) - \frac{\langle x, \kappa^{-1}(w) \rangle}{\langle x, x_0 \rangle} x_0 \right\rangle x_0 \right) \right) \\ &= \left( x, \kappa \left( \kappa^{-1}(w) - \frac{\langle x, \kappa^{-1}(w) \rangle}{\langle x, x_0 \rangle} x_0 - \langle x_0, \kappa^{-1}(w) \rangle x_0 + \frac{\langle x, \kappa^{-1}(w) \rangle}{\langle x, x_0 \rangle} x_0 \right) \right) \\ &= (x, \kappa(\kappa^{-1}(w) - \langle x_0, \kappa^{-1}(w) \rangle x_0)) = (x, w) \end{aligned}$$

da wieder  $\langle x_0, \kappa^{-1}(w) \rangle = 0$ , weil  $\kappa^{-1}(w) \in H$  ist. Damit ist  $\varphi$  ein Homöomorphismus. Es ist außerdem klar, dass  $\varphi$  eingeschränkt auf die Fasern eine lineare Abbildung ist. Damit ist das Tangentialbündel  $TS^n$  lokal trivial.  $\square$





## Index

*Die Seitenzahlen sind mit Hyperlinks zu den entsprechenden Seiten versehen, also anklickbar*



Ausschneidung, 2

externes Produkt, 2

Faser, 4

graduierter Ring, 3

Homotopieinvarianz, 2

Hopf-Invariante, 1

Ko-Raumpaar, 3

Koeffizienten der Kohomologietheorie, 2

Kofaserung, 3

kontravarianter Funktor, 2

Lange exakte Paarsequenz, 2

lokale Trivialität, 4

Morphismus

von Vektorbündeln, 4

normaler topologischer Raum, 7

Pullback, 5

reelle Divisionsalgebra, 1

Schnitt, 7

stetiger Funktor, 6

triviale Vektorbündel, 4

Vektorbündel, 4

Vektorraumbündelmorphismus, 4

verallgemeinerte Kohomologietheorie, 2

wohlpunktiert, 3

## Abbildungsverzeichnis

### To-do's und andere Baustellen

Diagramm hinzufügen	2
Figure: Skizze zu der Abbildung	3
eventuell hinzufügen	5
In den Anhang?	7
Figure: Schöne Quadrate $X \times I$	9