



WESTFÄLISCHE  
WILHELMS-UNIVERSITÄT  
MÜNSTER



FACHBEREICH 10  
MATHEMATIK UND  
INFORMATIK

# **Skript $K$ -Theorie und die Hopf-Invariante**

Mitschrift der Vorlesung „ $K$ -Theorie und die Hopf-Invariante“ von Dr.  
Ulrich Penning

Jannes Bantje

6. Juli 2015

# **$K$**

## Aktuelle Version verfügbar bei



<https://github.com/JaMeZ-B/latex-wwu>

GitHub ist eine Internetplattform, auf der viele OpenSource-Projekte gehostet werden. Diese Plattform nutzen wir zur Zusammenarbeit, also findet man hier neben den PDFs auch die  $\text{\TeX}$ -Dateien. Außerdem ist über diese Plattform auch direktes Mitarbeiten möglich, siehe nächste Seite.



**sciebo** die Campuscloud

<https://uni-muenster.sciebo.de/public.php?service=files&t=965ae79080a473eb5b6d927d7d8b0462>

Sciebo ist ein Dropbox-Ersatz der Hochschulen in NRW, der von der Uni Münster in leitender Position auf Basis der OpenSource-Software Owncloud aufgebaut wurde. Wenn man auf den Link klickt, kann man die Freigabe zum eigenen Speicher hinzufügen und hat dann immer automatisch die aktuellste Version.



**Bittorrent Sync**

B6WH2DISQ5QVYIRYIEZSF4ZR2IDVKPN3I

BTSync ist ein peer-to-peer Dateisynchronisations-Tool. Dabei werden die Dateien nur auf den Computern der Teilnehmer an einer Freigabe gespeichert. Ein Mini-Computer ist permanent online, sodass jederzeit die aktuellste Version verfügbar ist. Clients gibt es für jedes Betriebssystem. Zugang ist über das obige „Secret“ bzw. den QR-Code möglich



## Vorlesungshomepage

<https://wwwmath.uni-muenster.de/reine/u/topos/lehre/SS2015/KTheorie-Hopf/Hopf.html>

Hier ist ein Link zur offiziellen Vorlesungshomepage.

## Vorwort – Mitarbeit am Skript

Dieses Dokument ist eine Mitschrift aus der Vorlesung „K-Theorie und die Hopf-Invariante, SoSe 2015“, gelesen von Dr. Ulrich Penning. Der Inhalt entspricht weitestgehend dem Tafelanschrieb. Für die Korrektheit des Inhalts übernehme ich keinerlei Garantie! Für Bemerkungen und Korrekturen – und seien es nur Rechtschreibfehler – bin ich sehr dankbar. Korrekturen lassen sich prinzipiell auf drei Wegen einreichen:

- ▶ Persönliches Ansprechen in der Uni, Mails an [j.bantje@wwu.de](mailto:j.bantje@wwu.de) (gerne auch mit annotierten PDFs) oder Kommentare auf <https://github.com/JaMeZ-B/latex-www>.
- ▶ *Direktes* Mitarbeiten am Skript: Den Quellcode poste ich auf GitHub (siehe oben), also stehen vielfältige Möglichkeiten der Zusammenarbeit zur Verfügung: Zum Beispiel durch Kommentare am Code über die Website und die Kombination Fork + Pull Request. Wer sich verdient macht oder ein Skript zu einer Vorlesung, die ich nicht besuche, beisteuern will, dem gewähre ich gerne auch Schreibzugriff.

Beachten sollte man dabei, dass dazu ein Account bei [github.com](https://github.com) notwendig ist, der allerdings ohne Angabe von persönlichen Daten angelegt werden kann. Wer bei GitHub (bzw. dem zugrunde liegenden Open-Source-Programm „git“) – verständlicherweise – Hilfe beim Einstieg braucht, dem helfe ich gerne weiter. Es gibt aber auch zahlreiche empfehlenswerte Tutorials im Internet.<sup>1</sup>

- ▶ *Indirektes* Mitarbeiten:  $\text{\TeX}$ -Dateien per Mail verschicken.

Dies ist nur dann sinnvoll, wenn man einen ganzen Abschnitt ändern möchte (zB. einen alternativen Beweis geben), da ich die Änderungen dann per Hand einbauen muss! Ich freue mich aber auch über solche Beiträge!

---

<sup>1</sup> zB. <https://try.github.io/levels/1/challenges/1>, ist auf Englisch, aber dafür interaktives LearningByDoing

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Kohomologietheorien</b>	<b>2</b>
<b>2. Vektorbündel</b>	<b>4</b>
<b>3. Topologische K-Theorie</b>	<b>11</b>
3.1. Definition: Tripel, Morphismus von Tripeln und stabile Isomorphie . . . . .	11
3.2. Definition von $K^{-n}(X, A)$ . . . . .	12
3.3. Lemma über die Existenz eines Bündelisomorphismus und einer Homotopie . . . . .	13
3.4. Lemma . . . . .	14
3.5. Korollar . . . . .	15
3.6. Lemma . . . . .	15
3.7. Lemma . . . . .	16
3.8. Lemma . . . . .	16
3.9. Theorem . . . . .	16
3.10. Korollar . . . . .	18
3.11. Definition 3.1.2 . . . . .	20
3.12. Lemma 3.1.3 . . . . .	20
3.13. Lemma 3.1.4 . . . . .	20
3.14. Lemma 3.1.5 . . . . .	21
3.15. Lemma 3.1.6 . . . . .	21
<b>4. Die Hopf-Invariante</b>	<b>31</b>
4.1. Definition . . . . .	31
4.2. Satz . . . . .	31
4.3. Lemma . . . . .	31
4.4. Satz . . . . .	32
4.5. Lemma . . . . .	34
4.6. Definition . . . . .	34
4.7. Satz . . . . .	34
<b>A. Anhang</b>	<b>35</b>
A.1. Lokale Trivialität des Tangentialbündels auf $S^n$ . . . . .	35
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>A</b>
<b>Todo list</b>	<b>A</b>

## Einführung

**Definition.** Eine  $\mathbb{R}$ -Algebra  $\mathcal{A}$  mit 1, die nicht notwendigerweise assoziativ ist, heißt *reelle Divisionsalgebra*, falls jedes Element  $a \neq 0$  invertierbar ist.

**Beispiel:** Die reellen Zahlen  $\mathbb{R}$ , die komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$ , die Quaternionen<sup>2</sup>  $\mathbb{H}$  und die sogenannten Cayley-Zahlen<sup>3</sup>  $\mathbb{O}$ . Dabei ist  $\mathbb{O} \cong \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$ , wobei die Multiplikation wie folgt definiert ist:

$$(a, b) \cdot (d, c) = (ac - d^*b, da + bc^*)$$

Dabei ist  $d = x + iy + jz + kw$  und  $d^* = x - iy - jz - kw$ .

Wir wollen in dieser Vorlesung das folgende Theorem über Divisionsalgebren beweisen:


**Theorem (ADAMS).** Folgende Aussagen sind äquivalent:


- (i)  $\mathbb{R}^n$  besitzt die Struktur einer reellen Divisionsalgebra.
- (ii) Entweder ist  $n = 1$  oder  $n \geq 2$  ist gerade und es gibt eine stetige Abbildung  $f: S^{2n-1} \rightarrow S^n$  mit *Hopf-Invariante* 1.
- (iii) Es gilt  $n \in \{1, 2, 4, 8\}$ .

## Geplanter Verlauf der Vorlesung

Wir werden diesen Satz mit Hilfe der sogenannten K-Theorie beweisen. Dazu müssen wir aber einiges an Vorarbeit leisten. Der geplante Verlauf ist deswegen wie folgt:

1. Verallgemeinerte Kohomologietheorien
2. Vektorbündel
3. K-Theorie
  - 3.1. Produkte in K-Theorie
  - 3.2. Bott-Periodizität
  - 3.3. Thom-Isomorphismus
4. Hopf-Invariante und der Beweis des Satzes

<sup>2</sup> siehe auch <https://de.wikipedia.org/wiki/Quaternion> 

<sup>3</sup> auch Oktonionen oder reelle Oktaven; siehe [http://de.wikipedia.org/wiki/Oktave\\_\(Mathematik\)](http://de.wikipedia.org/wiki/Oktave_(Mathematik)) 

# 1. Kohomologietheorien

**1.1 Definition.** Seien  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{D}$  Kategorien. Ein *kontravarianter Funktor*  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$

- ▶ ordnet jedem Objekt  $c \in \text{Obj}(\mathcal{C})$  ein Objekt  $F(c) \in \text{Obj}(\mathcal{D})$  zu,
- ▶ ordnet jedem Morphismus  $f: c \rightarrow c'$  in  $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(c, c')$  einen Morphismus  $F(f): F(c') \rightarrow F(c)$  zu,

sodass folgende Eigenschaften gelten:

- ▶ Für  $f: c \rightarrow c'$  und  $g: c' \rightarrow c''$  gilt  $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$
- ▶  $F(\text{id}_c) = \text{id}_{F(c)}$

**Beispiel (Dualraumfunktor):** Sei  $K$  ein Körper. Sei  $\text{VEKT}_K$  die Kategorie der endlich dimensionalen  $K$ -Vektorräume und linearen Abbildungen. Sei  $*$ :  $\text{VEKT}_K \rightarrow \text{VEKT}_K$  gegeben durch  $V \mapsto \text{Hom}_K(V, K) = V^*$ . Für  $f: V \rightarrow W$  sei  $f^*: W^* \rightarrow V^*$ ,  $\varphi \mapsto \varphi \circ f$ . Dies ist ein kontravarianter Funktor. Insbesondere ist  $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$ .

**1.2 Definition.** Sei  $\text{Top}^2$  die Kategorie der Raumpaare  $(X, A)$ . Sei  $V: \text{Top}^2 \rightarrow \text{Top}^2$  der Funktor  $(X, A) \mapsto (A, \emptyset)$ . Sei  $R$  ein kommutativer Ring mit 1. Eine *verallgemeinerte Kohomologietheorie*  $h^* = (h^n, \partial^n)_{n \in \mathbb{Z}}$  mit Werten in  $R$ -Moduln ist ein kontravarianter Funktor  $h^*: \text{Top}^2 \rightarrow \text{GR-}R\text{-MOD}$  zusammen mit einer natürlichen Transformation

$$\partial^*: h^* \circ V \rightarrow h^{*+1},$$

so dass die folgenden Eigenschaften gelten:

- a) *Homotopieinvarianz:* Es seien  $f, g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  homotope Abbildungen von Raumpaaren. Dann gilt für alle  $n \in \mathbb{Z}$ :

$$h^n(f) = h^n(g)$$

- b) *Lange exakte Paarsequenz:* Sei  $(X, A)$  ein Raumpaar. Seien  $i: (A, \emptyset) \hookrightarrow (X, \emptyset)$  und  $j: (X, \emptyset) \hookrightarrow (X, A)$  die kanonischen Inklusionen. Dann ist die Folge

$$\dots \xrightarrow{\partial^{n-1}} h^n(X, A; R) \xrightarrow{h^n(j)} h^n(X, \emptyset; R) \xrightarrow{h^n(i)} h^n(A, \emptyset; R) \xrightarrow{\partial^n} h^{n+1}(X, A; R) \longrightarrow \dots$$

exakt.

- c) *Ausschneidung:* Sei  $(X, A)$  ein Raumpaar,  $U \subset A$ , sodass  $\overline{U} \subseteq \mathring{A}$ . Dann ist die von der Inklusion  $\iota: (X \setminus U, A \setminus U) \hookrightarrow (X, A)$  induzierte Abbildung  $h^n(\iota): h^n(X, A; R) \rightarrow h^n(X \setminus U, A \setminus U; R)$  ein Isomorphismus.

**Bemerkung:**

- (i) Wir schreiben kurz  $h^n(X, A)$  für  $h^n(X, A; \mathbb{Z})$  und  $f^*$  für  $h^n(f)$ , falls sich der Grad aus dem Kontext ergibt.
- (ii)  $h^n(\{\text{pt}\}) =: h^n$  heißen *Koeffizienten der Kohomologietheorie*.
- (iii) Einige Kohomologietheorien besitzen ein *externes Produkt*, das heißt eine natürliche Transformation

$$h^n(X, A; R) \times h^m(Y, B; R) \longrightarrow h^{n+m}((X, A) \times (Y, B); R)$$

die bilinear und assoziativ ist. Dabei ist  $(X, A) \times (Y, B) = (X \times Y, (A \times Y) \cup (X \times B))$ .

Sei  $\Delta: (X, A) \rightarrow (X, A) \times (X, A)$  die Diagonalabbildung. Falls ein externes Produkt für  $h^*$  existiert, dann ist  $h^*(X, A; R) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} h^n(X, A; R)$  ein *graduierter Ring* mit der Multiplikation

$$\begin{array}{ccc}
 h^n(X, A; R) \times h^m(X, A; R) & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & h^{n+m}(X, A; R) \\
 \searrow \times & & \nearrow h^{n+m}(\Delta) \\
 & h^{n+m}((X, A) \times (X, A); R) &
 \end{array}$$

Wir betrachten im Folgenden Kohomologietheorien, die auf einer Unterkategorie  $\text{Top}_{\text{Kof}}^2$  von  $\text{Top}^2$  definiert sind:

**1.3 Definition.** Ein Raumpaard  $(X, A)$  heißt *Ko-Raumpaard*, falls

- ▶  $X$  ein kompakter Hausdorffraum ist,
- ▶  $A \subset X$  abgeschlossen ist,
- ▶ die Inklusion  $A \hookrightarrow X$  eine *Kofaserung* ist, das heißt für jede stetige Abbildung  $f: A \times I \cup X \times \{0\} \rightarrow Y$  existiert  $H: X \times I \rightarrow Y$ , sodass das folgende Diagramm kommutiert:

*Homotopieerweiterungseigenschaft*

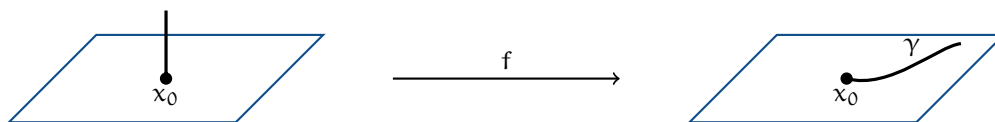
$$\begin{array}{ccc}
 A \times I \cup X \times \{0\} & \xrightarrow{f} & Y \\
 \downarrow & \nearrow H & \\
 X \times I & &
 \end{array}$$

Mit  $\text{Top}_{\text{Kof}}^2 \subseteq \text{Top}^2$  bezeichnen wir die Kategorie der Ko-Raumpaare und stetigen Abbildungen.

**Beispiel:**

- ▶ Sei  $X$  ein kompakter CW-Komplex,  $A \subset X$  ein Unterkomplex. Dann ist  $\iota: A \hookrightarrow X$  eine Kofaserung.
- ▶  $X$  eine kompakte Mannigfaltigkeit,  $A$  eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit.
- ▶ Falls  $(X, \{x_0\})$  ein Objekt in  $\text{Top}_{\text{Kof}}^2$  ist, dann heißt  $X$  *wohlpunktiert*.

Zur Veranschaulichung des Begriffes „Kofaserung“ betrachten wir den Raum  $X = [-1, 1] \times [-1, 1]$ , den Punkt  $x_0 = (0, 0)$  und setzen  $Y = X$ . Sei  $\gamma: I \rightarrow X$  ein Pfad mit  $\gamma(0) = (0, 0) = x_0$ . Wir erhalten mit  $\gamma$  und  $\text{id}$  eine Abbildung  $f: \{x_0\} \times I \cup X \times \{0\} \rightarrow X$ .



Kofaserung heißt in diesem Fall, dass der Raum  $X$  entlang des Pfades „mitgezogen“ werden kann. Allgemeiner:  $A \hookrightarrow X$  ist eine Kofaserung, falls sich jedes Paar aus einer Homotopie  $h: A \times I \rightarrow Y$  und einer „Startabbildung“  $X \times \{0\} \rightarrow Y$ , die  $h_0$  fortsetzt, zu einer Homotopie  $H: X \times I \rightarrow Y$  erweitern lässt.

## 2. Vektorbündel

Wir betrachten nur reelle und komplexe Vektorbündel, sei also  $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ .

**2.1 Definition.** Sei  $X$  ein topologischer Raum. Eine stetige surjektive Abbildung  $p: E \rightarrow X$  heißt *K-Vektorbündel*, falls gilt:

- a)  $E_x := p^{-1}(\{x\})$  ist ein  $K$ -Vektorraum für alle  $x \in X$ .  $E_x$  heißt die *Faser* von  $E$  über  $x$ .
- b) Für alle Punkte  $x \in X$  gibt es eine Umgebung  $U$ , ein  $n \in \mathbb{N}$  und einen Homöomorphismus  $\varphi_U: p^{-1}(U) \rightarrow U \times K^n$ , sodass das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi_U} & U \times K^n \\ & \searrow p \quad \swarrow \text{pr}_U & \\ & U & \end{array}$$

und die Einschränkung  $\varphi_U|_{E_x}: E_x \rightarrow K^n$  für alle  $x \in U$  ein Isomorphismus von  $K$ -Vektorräumen ist. Diese Eigenschaft wird oft als *lokale Trivialität* bezeichnet.

**Beispiel:**

- Sei  $X$  ein beliebiger topologischer Raum. Dann ist  $X \times K^n \xrightarrow{\text{pr}_X} X$  das *triviale Vektorbündel* über  $X$ .
- Betrachte  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ . Sei  $TS^n = \{(x, v) \in S^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, v \rangle = 0\}$ . Definiere  $p: TS^n \rightarrow S^n$  durch  $(x, v) \mapsto x$ . Damit erhalten wir ein  $\mathbb{R}$ -Vektorbündel über  $S^n$ , das *Tangentialbündel*.

*Übung:* Zeige lokale Trivialität. Siehe Anhang A.1

**Bemerkung:** Die Abbildung  $x \mapsto \dim_K(E_x)$  ist stetig, also lokal konstant, das heißt über einem zusammenhängenden Raum hat ein Vektorbündel konstante Faserdimension.

**2.2 Definition.** Seien  $p: E \rightarrow X$  und  $p': E' \rightarrow X'$  zwei  $K$ -Vektorbündel. Ein *Morphismus von Vektorbündeln* oder *Vektorraumbündelmorphismus* von  $E$  nach  $E'$  ist ein Paar  $(f, \bar{f})$  von stetigen Abbildungen  $\bar{f}: E \rightarrow E'$  und  $f: X \rightarrow X'$ , sodass das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\bar{f}} & E' \\ p \downarrow & & \downarrow p' \\ X & \xrightarrow{f} & X' \end{array}$$

und sodass die Einschränkung  $\bar{f}|_{E_x}: E_x \rightarrow E'_{f(x)}$  für jedes  $x \in X$  ein  $K$ -Vektorraumhomomorphismus ist. Wir bezeichnen die Kategorie der endlich dimensionalen  $K$ -Vektorraumbündel über einem topologischen Raum  $X$  zusammen mit den Morphismen  $(\text{id}_X, \bar{f})$  mit  $\text{VEKT}_K(X)$ .

## Operationen mit Vektorbündeln

**2.3 Definition.** Seien  $X$  und  $Y$  topologische Räume. Sei  $f: Y \rightarrow X$  eine stetige Abbildung und sei  $p: E \rightarrow X$  ein Vektorbündel. Dann heißt

$$f^*E := \{(y, v) \in Y \times E \mid f(y) = p(v)\}$$



zusammen mit der Abbildung  $q: f^*E \rightarrow Y$ ,  $(y, v) \mapsto y$  der Pullback von  $p: E \rightarrow X$  entlang von  $f$ . Mit  $\bar{f}(y, v) = v$  kommutiert das folgende Diagramm

Der Pullback lässt sich auch allgemein auf kategorieller Ebene definieren

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \xrightarrow{\bar{f}} & E \\ q \downarrow & & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

## 2.4 Lemma.

- a)  $q: f^*E \rightarrow Y$  ist ein Vektorbündel und  $(\bar{f}, f)$  ist ein Morphismus von Vektorbündeln. Revision
- b)  $q: f^*E \rightarrow Y$  ist durch die folgende universelle Eigenschaft eindeutig (bis auf Isomorphie) charakterisiert:  
Sei  $r: F \rightarrow Z$  ein Vektorbündel,  $(\bar{g}, g)$  ein Morphismus zwischen  $r: F \rightarrow Z$  und  $p: E \rightarrow X$ . Sei weiter  $g': Z \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung mit  $f \circ g' = g$ . Dann existiert genau ein  $G: F \rightarrow f^*E$ , so dass  $(G, g')$  ein Morphismus von Vektorbündeln ist und weiter  $(\bar{f}, f) \circ (G, g') = (\bar{g}, g)$  gilt.

$$\begin{array}{ccccc} F & & \xrightarrow{\bar{g}} & & E \\ r \downarrow & \searrow \exists! G & & \searrow \bar{f} & \downarrow p \\ Z & & & & f^*E \\ & \searrow g' & & \searrow q & \\ & & Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

**BEWEIS:** Sei  $y \in Y$ . Sei  $U \subset X$  eine Umgebung von  $f(y)$  in  $X$ , sodass eine lokale Trivialisierung  $\varphi_U: p^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{K}^n$  existiert. Dann ist  $V := f^{-1}(U)$  eine Umgebung von  $y$  und es gilt

$$q^{-1}(V) = \{(y, v) \in V \times p^{-1}(U) \mid f(y) = p(v)\}$$

Wir definieren nun

$$\begin{aligned} \psi_V: q^{-1}(V) &\longrightarrow V \times \mathbb{K}^n & (y, v) &\longmapsto (y, \text{pr}_{\mathbb{K}^n} \circ \varphi_U(v)) \\ \kappa_V: V \times \mathbb{K}^n &\longrightarrow q^{-1}(V) & (y, w) &\longmapsto (y, \varphi_U^{-1}(f(y), w)) \end{aligned}$$

Dann gilt  $\psi_V \circ \kappa_V = \text{id}_{V \times \mathbb{K}^n}$  und  $\kappa_V \circ \psi_V = \text{id}_{q^{-1}(V)}$ . Außerdem kommutiert das Diagramm aus Definition 2.1. Also ist  $\psi_V$  eine lokale Trivialisierung von  $f^*E \rightarrow Y$  über  $V$ .

Der Beweis von b) ist eine (relativ einfache) Übungsaufgabe. □

eventuell hinzufügen

Sei  $\mathcal{C}$  eine (topologische) Kategorie. Hieraus lässt sich eine neue Kategorie  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  definieren:

$$\text{obj}(\mathcal{C}^{\text{op}}) := \text{obj}(\mathcal{C}) \quad , \quad \text{Mor}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(c, d) := \text{Mor}_{\mathcal{C}}(d, c)$$

mit der neuen Komposition

$$\begin{aligned} \bullet: \text{Mor}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(c', c'') \times \text{Mor}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(c, c') &\longrightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(c, c'') \\ (f, g) &\longmapsto f \bullet g = g \circ f \end{aligned}$$

(Kovariante) Funktoren  $\mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}$  entsprechen dann kontravarianten Funktoren  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ .

Sei  $\text{VEKT}_K = \text{VEKT}_K(\text{pt})$  die Kategorie der endlichdimensionalen  $K$ -Vektorräume und linearen Abbildungen. Ein Funktor

$$F: \underbrace{\text{VEKT}_K \times \dots \times \text{VEKT}_K}_r \times \underbrace{\text{VEKT}_K^{\text{op}} \times \dots \times \text{VEKT}_K^{\text{op}}}_s \longrightarrow \text{VEKT}_K \quad [\#]$$

heißt *stetig*, falls die induzierte Abbildung

$$\begin{aligned} & \text{Mor}_{\text{VEKT}_K}(V_1, V'_1) \times \dots \times \text{Mor}_{\text{VEKT}_K}(V_r, V'_r) \times \text{Mor}_{\text{VEKT}_K^{\text{op}}}(V_{r+1}, V'_{r+1}) \times \dots \times \text{Mor}_{\text{VEKT}_K^{\text{op}}}(V_{r+s}, V'_{r+s}) \\ & \longrightarrow \text{Mor}_{\text{VEKT}_K}(F(V_1, \dots, V_r, V_{r+1}, \dots, V_{r+s}), F(V'_1, \dots, V'_r, V'_{r+1}, \dots, V'_{r+s})) \end{aligned}$$

stetig ist. Dies klappt nur für Kategorien, für die eine Topologie auf den Morphismen existiert, was auf lineare Abbildungen aber natürlich zutrifft.

**2.5 Lemma.** Sei  $F$  ein stetiger Funktor wie in  $[\#]$  und sei  $X$  ein topologischer Raum. Dann induziert  $F$  einen Funktor

$$F_X: \underbrace{\text{VEKT}_K(X) \times \dots \times \text{VEKT}_K(X)}_r \times \underbrace{\text{VEKT}_K(X)^{\text{op}} \times \dots \times \text{VEKT}_K(X)^{\text{op}}}_s \longrightarrow \text{VEKT}_K(X)$$

Rev 2

der verträglich ist mit Pullbacks und  $F_{\text{pt}} = F$  erfüllt.

**BEWEIS:** Sei  $m = r + s$ . Definiere  $F_X(E^{(1)}, \dots, E^{(m)}) = \coprod_{x \in X} F(E_x^{(1)}, \dots, E_x^{(m)})$  als Menge. Sei  $U_i$  eine offene Überdeckung von  $X$ , so dass lokale Trivialisierungen

$$\varphi_i^{(k)}: (p^{(k)})^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times K^{\ell_k}$$

existieren.  $F$  induziert Bijektionen

$$F_{U_i}(\varphi_i^{(1)}, \dots, \varphi_i^{(m)}): F_{U_i}((p^{(1)})^{-1}(U_i), \dots, (p^{(m)})^{-1}(U_i)) \longrightarrow U_i \times F(K^{\ell_1}, \dots, K^{\ell_m})$$

Jetzt gibt es eine eindeutige Topologie auf  $F_X(E^{(1)}, \dots, E^{(m)})$ , so dass die eben definierten Abbildungen  $\psi_i = F_{U_i}(\varphi_i^{(1)}, \dots, \varphi_i^{(m)})$  Homöomorphismen werden, wobei  $U_i \times F(K^{\ell_1}, \dots, K^{\ell_m})$  die Produkttopologie trägt: Eine Menge  $V \subset F_X(E^{(1)}, \dots, E^{(m)})$  ist offen, falls sie die Vereinigung von Mengen der Form  $\psi_i^{-1}(V_i)$  mit  $V_i \subset U_i \times F(K^{\ell_1}, \dots, K^{\ell_m})$  offen ist.

Damit diese Definition konsistent ist, müssen wir folgendes überprüfen: Sei  $V \subset (U_i \cap U_j) \times F(K^{\ell_1}, \dots, K^{\ell_m})$  offen. Wir haben zu zeigen, dass dann auch  $\psi_j \circ \psi_i^{-1}(V)$  offen ist. Aber es gilt  $\psi_j \circ \psi_i^{-1}(x, v) = (x, \psi_{ij}(x)(v))$  für eine Abbildung

$$\psi_{ij}: U_i \cap U_j \longrightarrow \text{End}_K(F(K^{\ell_1}, \dots, K^{\ell_m}))$$

Es gilt  $\psi_{ij} = F(\psi_{ij}^{(1)}, \dots, \psi_{ij}^{(m)})$  für *stetige* Abbildungen  $\psi_{ij}^{(k)}: U_i \cap U_j \rightarrow \text{End}_K(K^{\ell_k})$ . Da  $F$  stetig ist, folgt, dass alle  $\psi_{ij}$  stetig sind und folglich auch  $\psi_j \circ \psi_i^{-1}$ . Somit ist  $\psi_j \circ \psi_i^{-1}(V)$  offen. Es ist damit klar, dass  $F_X(E^{(1)}, \dots, E^{(m)}) \rightarrow X$  ein Vektorbündel ist, denn wir haben lokale Trivialisierungen konstruiert. Ferner gilt per Definition für eine stetige Abbildung  $f: Y \rightarrow X$

$$f^*F_X(E^{(1)}, \dots, E^{(m)}) \cong F_Y(f^*E^{(1)}, \dots, f^*E^{(m)}) \quad \square$$

**Beispiel:**

- ▶  $\oplus: \text{VEKT}_K \times \text{VEKT}_K \rightarrow \text{VEKT}_K$  ist stetig  $\Rightarrow$  direkte Summe von Vektorbündeln
- ▶  $\otimes: \text{VEKT}_K \times \text{VEKT}_K \rightarrow \text{VEKT}_K$  ist stetig  $\Rightarrow$  Tensorprodukt von Vektorbündeln

- Dualisieren von Vektorräumen  $*$ :  $\text{VEKT}_K^{\text{op}} \rightarrow \text{VEKT}_K$  ist stetig  $\Rightarrow$  duales Vektorbündel
- $\text{Hom}: \text{VEKT}_K \times \text{VEKT}_K^{\text{op}} \rightarrow \text{VEKT}_K, (V, W) \mapsto \text{Hom}_K(W, V)$  ist stetig  $\Rightarrow$  Homomorphismenbündel  $\text{Hom}(E, F)$ .

Seien  $p: E \rightarrow X$  und  $q: F \rightarrow X$  zwei  $K$ -Vektorbündel. Dann ist  $E \times F \xrightarrow{(p,q)} X \times X$  auch ein Vektorbündel, wenn  $E_X \times F_X$  die Vektorraumstruktur der äußeren direkten Summe trägt.

**Übung:** Sei  $\Delta: X \rightarrow X \times X$  die Diagonalabbildung. Zeige, dass  $\Delta^*(E \times F) \cong E \oplus F$  als Vektorbündel über  $X$ .

## Homotopieinvarianz von Pullbacks

**Erinnerung:** Ein topologischer Raum heißt *normal*, falls sich zwei disjunkte abgeschlossene Mengen durch offene Mengen trennen lassen.

**Bemerkung:** Jeder kompakte Hausdorffraum ist normal. *Übungsaufgabe*

In den Anhang?

**2.6 Satz (FORTSETZUNGSSATZ VON Tietze).** Sei  $X$  ein normaler Raum,  $A \subset X$  abgeschlossen und  $V$  ein endlich dimensionaler  $K$ -Vektorraum. Zu jeder stetigen Abbildung  $f: A \rightarrow V$  existiert eine stetige Abbildung  $F: X \rightarrow V$  mit  $F|_A = f$ .

kommt der Beweis noch?

**Definition.** Sei  $p: E \rightarrow X$  ein  $K$ -Vektorbündel über einem topologischen Raum  $X$ . Ein *Schnitt* von  $E$  ist eine stetige Abbildung  $s: X \rightarrow E$  mit  $p \circ s = \text{id}_X$ . Das heißt  $s(x) \in E_x$ . Jedes Vektorbündel hat einen Schnitt, nämlich den trivialen Schnitt  $s(x) = 0 \in E_x$ .

**2.7 Lemma.** Sei  $X$  ein kompakter Hausdorffraum,  $A \subset X$  abgeschlossen. Seien  $p: E \rightarrow X$  und  $p': E' \rightarrow X$  zwei  $K$ -Vektorbündel. Dann gilt:

- Jeder Schnitt  $s: A \rightarrow E|_A$  lässt sich zu einem Schnitt  $\bar{s}: X \rightarrow E$  fortsetzen.
- Sei  $\iota: A \hookrightarrow X$  die Inklusion und  $E|_A := \iota^*E$ , sowie  $E'|_A := \iota^*E'$ . Sei weiter  $f: E|_A \rightarrow E'|_A$  ein Morphismus von Vektorbündeln. Dann existiert ein Morphismus  $\hat{f}: E \rightarrow E'$ , der  $f$  fortsetzt. Ist  $f$  ein Isomorphismus, dann existiert eine offene Menge  $U \supset A$ , sodass  $\hat{f}|_U: E|_U \rightarrow E'|_U$  ein Isomorphismus von Vektorbündeln ist.

**BEWEIS:**

- Wir wählen eine endliche Überdeckung  $(U_i)_{i=1,\dots,N}$  von  $X$ , sodass lokale Trivialisierungen  $\varphi_i: E|_{U_i} \rightarrow U_i \times K^n$  existieren. Nach dem Fortsetzungssatz lässt sich

$$\text{pr}_{K^n} \circ \varphi_i \circ s|_{U_i \cap A}: U_i \cap A \rightarrow K^n$$

zu einer stetigen Abbildung auf  $U_i$  fortsetzen, also auch  $s|_{U_i \cap A}$  selbst. Sei  $\bar{s}_i$  eine solche Fortsetzung. Sei  $\psi_i: X \rightarrow [0, 1]$  eine Partition der Eins<sup>4</sup>, die der Überdeckung  $(U_i)_{i=1,\dots,N}$  untergeordnet ist. Sei

$$\bar{s} = \sum_{i=1}^N \psi_i \cdot \bar{s}_i: X \rightarrow E$$

<sup>4</sup> siehe [https://de.wikipedia.org/wiki/Zerlegung\\_der\\_Eins](https://de.wikipedia.org/wiki/Zerlegung_der_Eins)

Dann gilt  $\bar{s}|_A = \left(\sum_{i=1}^N \psi_i\right) \cdot s|_A = s|_A$ .

- b) Die Morphismen  $E \xrightarrow{f} E'$  entsprechen den Schnitten des Vektorbündels  $\text{Hom}(E, E') \rightarrow X$  wie folgt: Jedem  $f$  lässt sich ein Schnitt

$$s_f(x)(v) := f(v)$$

zuordnen. Jedem Schnitt  $s: X \rightarrow \text{Hom}(E, E')$  entspricht ein Morphismus  $f_s(v) = s(p(v))(v) \in E'_{p(v)}$ . Somit folgt der erste Teil aus a).

Sei  $\pi: \text{Hom}(E, E') \rightarrow X$  die Bündelabbildung. Sei weiter

$$\text{Iso}(E, E') = \left\{ g \in \text{Hom}(E, E') \mid g: E_{\pi(g)} \rightarrow E'_{\pi(g)} \text{ ist ein Isomorphismus} \right\}$$

Dann ist  $\text{Iso}(E, E') \rightarrow X$  ein lokal triviales Bündel, allerdings *kein* Vektorbündel. Sind  $E$  und  $E'$   $n$ -dimensional, ist die Faser von  $\text{Iso}(E, E')$  homöomorph zu  $\text{GL}_n(K)$ . Da  $\text{GL}_n(K) \subset M_n(K)$  offen ist und  $\text{Iso}(E, E')$  lokal trivial ist, folgt, dass  $\text{Iso}(E, E') \subset \text{Hom}(E, E')$  offen ist.<sup>5</sup> Sei  $\hat{f}$  eine Fortsetzung von  $f$ . Setze  $U = s_{\hat{f}}^{-1}(\text{Iso}(E, E'))$  für  $s_{\hat{f}}: X \rightarrow \text{Hom}(E, E')$ . Dann ist  $U$  offen und  $s_{\hat{f}}|_U$  entspricht einem Isomorphismus  $\hat{f}: E|_U \rightarrow E'|_U$ .  $\square$

**2.8 Lemma.** Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$  und  $X$  ein topologischer Raum. Sei weiter  $p: E \rightarrow X \times [a, b]$  ein  $K$ -Vektorbündel. Es geben  $c \in (a, b)$ , so dass  $E|_{X \times [a, c]}$  und  $E|_{X \times [c, b]}$  trivialisierbar sind. Dann ist auch  $E$  trivialisierbar.

**BEWEIS:** Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $X$  zusammenhängend. Seien

$$\varphi_a: X \times [a, c] \times K^n \xrightarrow{\cong} E|_{X \times [a, c]}$$

$$\varphi_b: X \times [c, b] \times K^n \xrightarrow{\cong} E|_{X \times [c, b]}$$

entsprechende Trivialisierungen. Sei außerdem

$$h := \left( \varphi_b|_{X \times \{c\} \times K^n} \right)^{-1} \circ \left( \varphi_a|_{X \times \{c\} \times K^n} \right): X \times \{c\} \times K^n$$

$h$  hat die Form  $h(x, v) = (x, g(x) \cdot v)$  für eine stetige Abbildung  $g: X \rightarrow \text{GL}_n(K)$ . Sei jetzt

$$w: X \times [c, b] \times K^n \longrightarrow X \times [c, b] \times K^n, \quad (x, t, v') \longmapsto (x, t, g(x)v')$$

Dann gilt  $\varphi_a|_{X \times \{c\} \times K^n} = \varphi_b \circ w|_{X \times \{c\} \times K^n}$ . Daher können wir diese beiden Abbildungen zu einem Isomorphismus von Vektorbündeln  $X \times [a, b] \times K^n \rightarrow E$  zusammensetzen.  $\square$

**2.9 Lemma.** Sei  $X$  ein kompakter Raum. Sei  $p: E \rightarrow X \times I$  ein  $K$ -Vektorbündel. Dann gibt es eine endliche offene Überdeckung  $\{U_i\}_{i=1}^N$  von  $X$ , so dass  $E|_{U_i \times I}$  trivialisierbar ist.

**BEWEIS:** Sei  $x \in X$  und  $t \in I$ . Dann existieren offene Umgebungen  $U(t) \subset X$  und  $I(t) \subset I$ , sodass  $E|_{U(t) \times I(t)}$  trivialisierbar ist. Da  $I$  kompakt ist, existiert eine endliche Folge  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = 1$  zusammen mit offenen Umgebungen  $U_i$  von  $x$ , so dass  $E|_{U_i \times [t_{i-1}, t_i]}$  trivialisierbar ist. Sei nun  $U := \bigcap_{i=1}^N U_i$ . Nach Lemma 2.8 ist  $E|_{U \times I}$  trivialisierbar. Da  $X \times I$  kompakt ist, wird es von endlichen vielen solcher Mengen überdeckt.  $\square$

<sup>5</sup> da lokal homöomorph zu  $U \times \text{GL}_n(K) \hookrightarrow U \times M_n(K)$

**2.10 Theorem.** Sei  $X$  ein kompakter Raum und sei  $p: E \rightarrow X \times I$  ein  $K$ -Vektorbündel. Sei  $E_1 = E|_{X \times \{1\}}$ .

- a) Es gibt einen Isomorphismus von Vektorbündeln über  $X \times I$

$$\varphi: E \xrightarrow{\cong} E_1 \times I$$

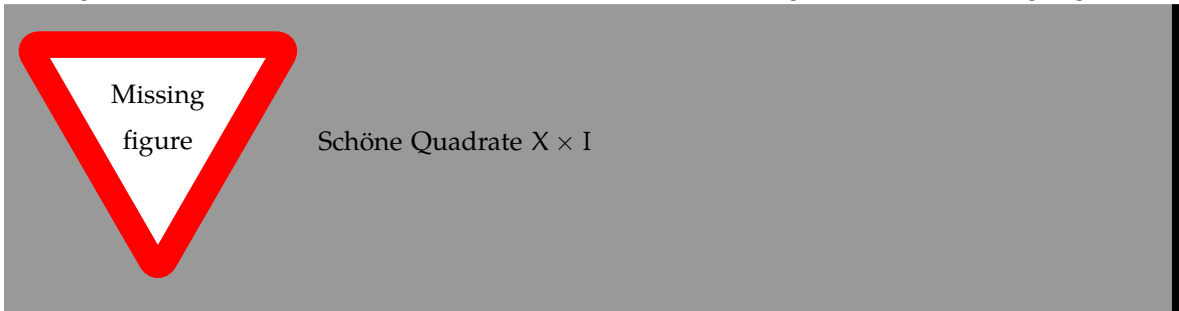
mit  $\varphi|_{p^{-1}(X \times \{1\})} = \text{id}_{E_1}$

- b) Sei  $(X, A)$  ein Ko-Raumpaar,  $h: X \times I \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung und  $p': E' \rightarrow Y$  ein  $K$ -Vektorbündel mit  $E \cong h^*E'$ . Falls jetzt  $h_t(a) = h_0(a)$  für alle  $a \in A$  und  $t \in I$ , dann lässt sich der Isomorphismus aus a) so wählen, dass er den durch  $h$  induzierten Isomorphismus  $E|_{A \times I} \rightarrow E_1|_A \times I$  fortsetzt.

*BEWEIS:* Nach Lemma 2.9 können wir eine Überdeckung von  $X \times I$  durch offene Mengen der Form  $U_i \times I$  mit  $i \in \{1, \dots, N\}$  finden, so dass  $E|_{U_i \times I}$  trivialisierbar ist. Seien  $h_i: U_i \times I \times K^n \xrightarrow{\cong} E|_{U_i \times I}$  Trivialisierungen. Seien  $\eta_i: X \rightarrow [0, 1]$  stetige Funktionen mit folgenden Eigenschaften:

- (i)  $\text{supp}(\eta_i) \subset U_i$ , (ii)  $\max_{i=1, \dots, N} \eta_i(x) = 1$  für alle  $x \in X$

Sei  $r_i: X \times I \rightarrow X \times I$  gegeben durch  $r_i(x, t) = (x, \max(\eta_i(x), t))$ . Ein Punkt  $(x, t)$  wird durch  $r_i$  entlang der  $I$ -Achse nach 1 verschoben. Der Wert der Verschiebung wird durch  $\eta_i$  festgelegt.



Nun konstruieren wir einen Morphismus von  $K$ -Vektorbündeln  $(u_i, r_i)$  über  $r_i$  wie folgt:

$$u_i(h_i(x, t, v)) = h_i(r_i(x, t), v)$$

für  $(x, t, v) \in U_i \times I \times K^n$ . Wir setzen  $u_i = \text{id}$  außerhalb des Bildes von  $h_i$ . Wegen  $r_i|_{X \times I \setminus U_i \times I} = \text{id}_{X \times I \setminus U_i \times I}$  ist dies stetig. Außerdem kommutiert

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{u_i} & R \\ \downarrow p & & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{r_i} & X \times I \end{array}$$

und  $u_i$  ist auf den Fasern linear. Sei  $r := r_N \circ r_{N-1} \circ \dots \circ r_1$ . Wegen (ii) gilt  $r(x, t) = (x, 1)$ . Sei  $u := u_N \circ \dots \circ u_2 \circ u_1$ . Dann ist  $(u, r)$  ein Morphismus von Vektorbündeln. Außerdem haben wir

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ & \searrow & \uparrow \\ & & E_1 \end{array}$$

Setze jetzt  $\varphi: E \rightarrow E_1 \times I, v \mapsto (u(v), \text{pr}_I \circ p(v))$ . Dann ist  $(\varphi, \text{id}_{X \times I})$  ein Isomorphismus von Vektorbündeln mit  $\varphi|_{X \times \{1\}} = \text{id}$ .

Für b) sei  $V_j \subset Y$  eine offene Überdeckung von  $Y$ , sodass  $E'|_{\overline{V}_j}$  trivialisierbar ist. Sei  $B_j = h^{-1}(\overline{V}_j) \subset X \times I$ . Es gilt

$$B_j \cap (A \times I) = h_1^{-1}(\overline{V}_j) \cap A \times I$$

da  $h$  auf  $A$  unabhängig ist von  $t \in I$ . Nach Konstruktion ist  $E|_{A_j \times I}$  trivialisierbar. Nach Lemma 2.7 b) finden wir eine offene Umgebung  $U_j \times I$  mit  $X \supset U_j \supset A_j$ , so dass  $E|_{U_j \times I}$  trivialisierbar ist. Wir ergänzen die Mengen  $U_j \times I$  um trivialisierende offene Umgebungen  $U_i \times I$  mit  $U_i \times A = \emptyset$ , so dass  $\bigcup_{i \in I} U_i \times I = X \times I$ . Jetzt verwenden wir die Konstruktion aus a) für diese Überdeckung. Der entsprechende Isomorphismus  $\varphi: E \rightarrow E_1 \times I$  stimmt auf  $A_j \times I$  mit dem von  $h$  induzierten Isomorphismus überein.  $\square$

**2.11 Korollar.** Sei  $X$  ein kompakter Raum und  $h: X \times I \rightarrow Y$  eine Homotopie. Sei  $p: E \rightarrow Y$  ein  $K$ -Vektorbündel. Dann gilt

- a)  $h_0^*E \cong h_1^*E$  als Vektorbündel über  $X$ , das heißt Pullbacks sind homotopieinvariant bis auf Isomorphie.
- b) Falls  $(X, A)$  ein Ko-Raumpaar ist und  $h$  stationär auf  $A$  ist, dann kann der Isomorphismus so gewählt werden, dass er über  $A$  die Identität ist.  $\square$

### 3. Topologische K-Theorie

Wir haben im letzten Kapitel folgenden kontravarianten, homotopieinvarianten Funktor kennengelernt

$$\begin{array}{ccc} \text{Top} & \longrightarrow & \text{MONOIDE} \\ X & \longmapsto & \text{VEKT}_K(X)/\sim_{\text{Iso}} \\ (f: X \rightarrow Y) & \longmapsto & (f^*: \text{VEKT}_K(Y)/\sim_{\text{Iso}} \rightarrow \text{VEKT}_K(X)/\sim_{\text{Iso}}) \end{array}$$

mit der Monoid-Operation  $[E]_{\text{Iso}} + [F]_{\text{Iso}} = [E \oplus F]_{\text{Iso}}$  und dem Nullvektorbündel als neutralem Element. Daraus wollen wir eine Gruppe konstruieren:

#### Grothendieck-Konstruktion

Sei  $(M, +)$  ein kommutativer Monoid. Betrachte  $\text{Gr}(M) = M \times M / \sim$  mit der Äquivalenzrelation

$$(x, y) \sim (x', y') : \iff \exists c \in M \text{ mit } x + y' + c = x' + y + c$$

Die Idee dahinter:  $[x, y] = "x - y"$ . Dann ist

$$\begin{array}{ccc} +: \text{Gr}(M) \times \text{Gr}(M) & \longrightarrow & \text{Gr}(M) \\ ([x, y], [x', y']) & \longmapsto & [x + x', y + y'] \end{array}$$

wohldefiniert. Mit dieser Operation ist  $\text{Gr}(M)$  eine abelsche Gruppe (das Inverse zu  $[x, y]$  ist  $[y, x]$ , denn  $[x + y, x + y] = [0, 0]$ ) und  $M \rightarrow \text{Gr}(M), x \mapsto [x, 0]$  ist ein Monoidhomomorphismus.

#### Beispiel

$$\text{Gr}(\mathbb{N}_0, +) = (\mathbb{Z}, +).$$

#### Universelle Eigenschaft

Zu jedem Monoidhomomorphismus  $\varphi: M \rightarrow A$  in eine abelsche Gruppe  $A$  existiert genau ein Gruppenhomomorphismus  $\psi: \text{Gr}(M) \rightarrow A$ , sodass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\varphi} & A \\ \downarrow & \nearrow \exists! \psi & \\ \text{Gr}(M) & & \end{array}$$

kommutiert. Der Beweis ist eine Übungsaufgabe.

Wir bekommen jetzt eine abelsche Gruppe  $K^0(X) := \text{Gr}(\text{VEKT}_{\mathbb{C}}(X)/\sim_{\text{Iso}})$ , aber es stellen sich weiterhin die Fragen: Was ist  $K^n(X)$  für  $n \neq 0$ ? Was ist  $K^n(X, A)$ ?

#### 3.1. Definition

Sei  $(X, A)$  ein Ko-Raumpaar.

- (i) Ein *Tripel*  $(E_1, f, E_0)$  über  $(X, A)$  besteht aus endlichdimensionalen  $\mathbb{C}$ -Vektorbündeln  $p_i: E_i \rightarrow X$  und einem Isomorphismus  $f: E_1|_A \rightarrow E_0|_A$ .

- (ii) Ein *Morphismus von Tripeln*  $(E_1, f, E_0)$  und  $(E'_1, f', E'_0)$  besteht aus einem Paar  $(g_1, g_0)$  von Vektorbündelmorphismen  $g_i: E_i \rightarrow E'_i$ , sodass das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} E_1|_A & \xrightarrow{g_1|_A} & E'_1|_A \\ \downarrow f & & \downarrow f' \\ E_0|_A & \xrightarrow{g_0|_A} & E'_0|_A \end{array}$$

- (iii) Tripel der Form  $(E, \text{id}_E, E)$  heißen *elementar*.

- (iv)  $(E_1, f, E_0)$  und  $(E'_1, f', E'_0)$  heißen *stabil isomorph*, falls Vektorbündel  $E \rightarrow X$  und  $E' \rightarrow X$  existieren, so dass

$$(E_1 \oplus E, f \oplus \text{id}_E, E_0 \oplus E) \cong (E'_1 \oplus E', f' \oplus \text{id}_{E'}, E'_0 \oplus E')$$

also falls sie isomorph werden nach Addition elementarer Tripel. Stabile Isomorphie ist eine Äquivalenzrelation (Übung).

### 3.2. Definition

Sei  $(X, A)$  ein Ko-Raumpaar. Dann ist  $K^0(X, A)$  die Menge der stabilen Isomorphieklassen von Tripeln über  $(X, A)$ . Für  $n > 0$  definieren wir

$$K^{-n}(X, A) := K^0((X, A) \times (I, \partial I)^n)$$

Übung:  $K^0(X, \emptyset)$  ist isomorph zu  $\text{Gr}(V_{\text{EKT}}(X)/\sim_{\text{Iso}})$

### Bemerkung

Es gilt  $[E_1, f, E_0]_{\text{st.iso}} = [0, \text{id}, 0]_{\text{st.iso}}$  genau dann, wenn ein Vektorbündel  $E \rightarrow X$  existiert, so dass sich  $E_1 \oplus E|_A \xrightarrow{f \oplus \text{id}} E_0 \oplus E|_A$  zu einem Isomorphismus über ganz  $X$  ausdehnen lässt.

### Beweis

Für „ $\Rightarrow$ “ folgt aus der Definition  $(E_1 \oplus E, f \oplus \text{id}, E_0 \oplus E) \cong (E', \text{id}_{E'}, E')$ .  $\text{id}_{E'}$  ist ein Isomorphismus auf ganz  $X$ , also lässt sich  $f \oplus \text{id}$  zu einem Isomorphismus auf ganz  $X$  ausdehnen.

$$\begin{array}{ccc} E_1 \oplus E|_A & \xrightarrow[\cong]{\varphi_1|_A} & E'|_A \\ f \oplus \text{id} \downarrow & & \downarrow \text{id}_{E'} \\ E_0 \oplus E|_A & \xrightarrow[\cong]{\varphi_0|_A} & E'|_A \end{array}$$

Für die Rückrichtung betrachten wir  $\varphi: E_1 \oplus E \xrightarrow{\cong} E_0 \oplus E$ , sodass  $\varphi|_A = f \oplus \text{id}$ . Dann folgt

$$(E_1 \oplus E, f \oplus \text{id}, E_0 \oplus E) \cong (E \oplus E, \text{id}_{E \oplus E}, E_0 \oplus E)$$

$$\begin{array}{ccc} E_1 \oplus E|_A & \xrightarrow{\varphi|_A} & E_0 \oplus E|_A \\ \downarrow f \oplus \text{id} & & \downarrow \text{id} \\ E_0 \oplus E|_A & \xrightarrow{\text{id}} & E_0 \oplus E|_A \end{array}$$

□



### 3.3. Lemma

Sei  $(X, A)$  ein Ko-Raumpaar. Seien  $p: E \rightarrow X$  und  $p': E' \rightarrow X$   $K$ -Vektorbündel und  $f: E|_A \rightarrow E|_A$  ein Isomorphismus. Sei  $f': E' \rightarrow E$  ein Isomorphismus von  $K$ -Vektorbündeln und sei  $h: A \times I \rightarrow \text{Iso}(E'|_A, E|_A)$  eine stetige Abbildung, so dass  $h_t$  ein Schnitt ist für alle  $t \in I$  und so dass  $h_0 = f'|_A$ ,  $h_1 = f$  gilt. Dann existiert ein Isomorphismus  $F: E' \rightarrow E$  mit  $F|_A = f$  und eine Homotopie  $H: X \times I \rightarrow \text{Iso}(E', E)$  mit  $H_0 = f'$ ,  $H_1 = F$  und  $H|_{A \times I} = h$ .

#### Beweis

Die Abbildungen  $h$  und  $f'$  liefern eine stetige Abbildung

$$\tilde{h}: A \times I \cup X \times \{0\} \longrightarrow \text{Iso}(\text{pr}_X^* E'|_{A \times I \cup X \times \{0\}}, \text{pr}_X^* E|_{A \times I \cup X \times \{0\}})$$

Wir müssen diese Abbildung so zu einer auf  $X \times I$  ausdehnen, dass wir einen Schnitt bekommen. Betrachte

$r$  aus Kofaserungseigenschaft

$$\begin{array}{ccc} A \times I \cup X \times \{0\} & \xrightarrow{\text{id}} & A \times I \cup X \times \{0\} \xleftarrow{\iota} X \times I \\ \downarrow & \nearrow r & \\ X \times I & & \end{array}$$

Sei  $r_X = \text{pr}_X \circ \iota \circ r$  und  $r_I = \text{pr}_I \circ \iota \circ r$ . Sei weiter

$$\begin{aligned} K: (X \times I) \times I &\longrightarrow X \times I \\ (x, t, s) &\longmapsto (r_X(x, st), sr_I(x, t) + (1-s)t) \end{aligned}$$

Dann gilt  $K_0(x, t) = (x, t)$  und  $K_1(x, t) = \iota \circ r(x, t)$ , also ist  $\iota \circ r$  homotop zu  $\text{id}_{X \times I}$ . Folglich ist

$$E \times I \xrightarrow{\cong} (\iota \circ r)^*(E \times I) \cong r^*(\iota^*(E \times I)) \xrightarrow{\bar{r}} \iota^*(E \times I) \cong E|_A \times I \cup E \times \{0\}$$

Ebenso  $\bar{r}': E' \times I \rightarrow E'|_A \times I \cup E' \times \{0\}$ .  $(\bar{r}, r)$  und  $(\bar{r}', r)$  sind Morphismen von Vektorbündeln. Wir erhalten nun das folgende Diagramm, wobei die diagonale Abbildung rechts oben von  $\tilde{h}$  induziert ist und somit ein Isomorphismus ist

$$\begin{array}{ccccc} E' \times I & \xrightarrow{\bar{r}'} & E'|_A \times I \cup E' \times \{0\} & & \\ \downarrow & \searrow \bar{H} & \downarrow & \searrow \cong & \\ & E \times I & \xrightarrow{\bar{r}} & E|_A \times I \cup E \times \{0\} & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ X \times I & \xrightarrow{r} & A \times I \cup X \times \{0\} & \xrightarrow{\text{id}} & A \times I \cup X \times \{0\} \\ & \searrow \text{id} & \downarrow & \searrow \text{id} & \\ & X \times I & \xrightarrow{r} & A \times I \cup X \times \{0\} & \end{array}$$

Die Existenz von  $\bar{H}$  folgt aus der universellen Eigenschaft des Pullbacks. Es gilt nun  $H = \text{pr}_E \circ \bar{H}: E' \times I \rightarrow E$  und wir erhalten eine Abbildung  $X \times I \rightarrow \text{Iso}(E' \times I, E \times I)$ .  $F := H|_{E' \times \{1\}}: E' \rightarrow E$  ist nun die gesuchte Abbildung.  $\square$

Wir haben noch nicht geklärt, was inverse Elemente in  $K^0(X, A)$  ist. Kandidat für inverses Element in  $K^0(X, A)$  zu  $(E_0, f, E_1)$  ist  $(E_1, f^{-1}, E_0)$ . Wir müssen prüfen  $(E_0, f, E_1) \oplus (E_1, f^{-1}, E_0) = (E_0 \oplus E_1, f \oplus f^{-1}, E_1 \oplus E_0)$ . Dazu folgendes Lemma:

### 3.4. Lemma

Sei  $(X, A)$  ein Ko-Raumpaar.

(i) Seien  $(E_0, f, E_1)$  und  $(E_1, g, E_2)$  Tripel über  $(X, A)$ . Dann sind die beiden Tripel

$$(E_0, g \circ f, E_2) \quad \text{und} \quad (E_0 \oplus E_1, f \oplus g, E_1 \oplus E_2)$$

stabil isomorph.

(ii) Seien  $(E_0, f, E_1)$  und  $(E_0, g, E_1)$  Tripel über  $(X, A)$ . Sei  $h: A \times I \rightarrow \text{Iso}(E_0|_A, E_1|_A)$  eine Homotopie zwischen  $f$  und  $g$ , sodass  $h_t: A \rightarrow \text{Iso}(E_0|_A, E_1|_A)$  ein Schnitt ist für alle  $t \in I$ . Dann sind die beiden Tripel stabil isomorph.

#### Beweis

(i) Wir haben das folgende kommutative Diagramm von Vektorbündeln:

$$\begin{array}{ccccccc}
 E_1 \oplus E_0|_A & \xrightarrow[\quad (1) \quad]{\begin{pmatrix} \text{id} & f \\ 0 & \text{id} \end{pmatrix}} & E_1 \oplus E_0|_A & & & & \\
 \downarrow \begin{pmatrix} \text{id} & 0 \\ 0 & g \circ f \end{pmatrix} & & & & & & \downarrow \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix} \\
 E_1 \oplus E_2|_A & \xleftarrow[\quad (2) \quad]{\begin{pmatrix} 0 & -\text{id} \\ \text{id} & 0 \end{pmatrix}} & E_2 \oplus E_1|_A & \xleftarrow[\quad (3) \quad]{\begin{pmatrix} \text{id} & g \\ 0 & \text{id} \end{pmatrix}} & E_2 \oplus E_1|_A & \xleftarrow[\quad (4) \quad]{\begin{pmatrix} \text{id} & 0 \\ -g^{-1} & \text{id} \end{pmatrix}} & E_2 \oplus E_1|_A
 \end{array}$$

Die Kommutativität ergibt sich wie folgt

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} 0 & -\text{id} \\ \text{id} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{id} & g \\ 0 & \text{id} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{id} & 0 \\ -g^{-1} & \text{id} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{id} & 0 \\ 0 & g \circ f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{id} & f \\ 0 & \text{id} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & -\text{id} \\ \text{id} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & g \\ -g^{-1} & \text{id} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g & g \circ f \\ 0 & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g^{-1} & -\text{id} \\ 0 & g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g & g \circ f \\ 0 & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{id} & 0 \\ 0 & g \circ f \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Wir können  $f, g, g^{-1}$  zu Morphismen über  $X$  fortsetzen. Dann sind die auf  $X$  erweiterter Versionen der Morphismen (1)–(4) Isomorphismen über  $X$ .

$$\begin{aligned}
 [E_0, g \circ f, E_2]_{\text{st}} &= [E_1 \oplus E_0, \text{id} \oplus g \circ f, E_1 \oplus E_1]_{\text{st}} = [E_1 \oplus E_0, \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}, E_2 \oplus E_1]_{\text{st}} \\
 &= [E_0 \oplus E_1, \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}, E_1 \oplus E_2]_{\text{st}}
 \end{aligned}$$

(ii) Betrachte das Tripel  $(E_0, \oplus E_1, f \oplus g^{-1}, E_1 \oplus E_0)$ . Nach (i) ist es stabil isomorph zu  $(E_0, g^{-1} \circ f, E_0)$ . Nach Voraussetzung ist  $g^{-1} \circ f$  homotop zu  $\text{id}_{E_0}$  durch Isomorphismen. Also folgt aus Lemma 3.3, dass sich  $g^{-1} \circ f$  zu einem Isomorphismus über  $X$  fortsetzen lässt. Aus der Bemerkung folgt

$$[E_0, g^{-1} \circ f, E_0]_{\text{st}} = [0, \text{id}, 0]_{\text{st}}$$

Außerdem gilt nach (i) auch  $[E_1 \oplus E_0, g^{-1} \oplus g, E_0 \oplus E_1]_{\text{st}} = [0, \text{id}, 0]$ . Weiter ist

$$\begin{aligned}
 [E_0, f, E_1]_{\text{st}} &= [E_0 \oplus E_1 \oplus E_0, f \oplus g^{-1} \oplus g, E_1 \oplus E_0 \oplus E_1]_{\text{st}} \\
 &= \underbrace{[E_0 \oplus E_1, f \oplus g^{-1}, E_1 \oplus E_0]_{\text{st}}}_{=[0, \text{id}, 0]} + [E_0, g, E_1]_{\text{st}}
 \end{aligned}$$

□

### 3.5. Korollar

#### Beweis

Es genügt zu zeigen, dass  $K^0(X, A)$  eine abelsche Gruppe ist. Sei  $[E_0, f, E_1]_{st} \in K^0(X, A)$ . Dann gilt nach Lemma 3.4

$$[E_0, f, E_1]_{st} + [E_1, f^{-1}, E_0]_{st} = [E_0 \oplus E_1, f \oplus f^{-1}, E_1 \oplus E_0]_{st} = [E_0, f^{-1} \circ f, E_0]_{st} = [0, \text{id}, 0]_{st} \quad \square$$

Die Zuordnung  $(X, A) \mapsto K^{-n}(X, A)$  ist ein kontravarianter Funktor: Sei  $g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  eine stetige Abbildung von Ko-Raumpaaren, dann ist

$$g^*: K^{-n}(Y, B) \rightarrow K^{-n}(X, A)$$

definiert durch  $g^*[E_0, f, E_1]_{st} = [g^*E_0, g^*f, g^*E_1]_{st}$ . Hierbei ist  $g^*f$  der von der universellen Eigenschaft des Pullbacks induzierte Morphismus:

$$\begin{array}{ccccc}
 g^*E_0|_A & \xrightarrow{\quad} & E_0|_B & & \\
 \downarrow & \searrow \scriptstyle g^*f & \downarrow & \searrow \scriptstyle f & \\
 & \cong & & \cong & \\
 & g^*E_1|_A & \xrightarrow{\quad} & E_1|_B & \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
 A & \xrightarrow{g|_A} & B & \xrightarrow{\text{id}} & B \\
 & \downarrow \scriptstyle \text{id} & \downarrow \scriptstyle g|_A & & \\
 & A & \xrightarrow{g|_A} & B & 
 \end{array}$$

### 3.6. Lemma

Der Funktor  $(X, A) \mapsto K^{-n}(X, A)$  ist homotopieinvariant.

#### Beweis

Es genügt wieder, den Fall  $n = 0$  zu betrachten. Seien  $g_0, g_1: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  und sei  $h: (X \times, A \times I) \rightarrow (Y, B)$  eine Homotopie zwischen  $g_0$  und  $g_1$ . Sei  $(E_0, f, E_1)$  ein Tripel über  $(Y, B)$ . Nach Theorem 2.10 a) existieren Isomorphismen

$$\begin{aligned}
 h^*E_0 &\xrightarrow[\cong]{\psi^{(0)}} g_1^*(E_0) \times I \\
 h^*E_1 &\xrightarrow[\cong]{\psi^{(1)}} g_1^*(E_1) \times I
 \end{aligned}$$

die über  $X \times \{1\}$  die Identität sind. Betrachte

$$\left(\psi^{(1)}|_{A \times I}\right) \circ (h^*f) \circ \left(\psi^{(0)}|_{A \times I}\right)^{-1}: g_1^*E_0|_A \times I \xrightarrow{\cong} g_1^*E_1|_A \times I$$

Dies entspricht einer Homotopie  $\tilde{h}: A \times I \rightarrow \text{Iso}(g_1^*E_0|_A, g_1^*E_1|_A)$ . Sei  $\tilde{f} = \left(\psi^{(1)}|_{A \times \{0\}}\right) \circ (h_0^*f) \circ \left(\psi^{(0)}|_{A \times \{0\}}\right)^{-1}$ . Dann haben wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 g_0^*E_0|_A & \xrightarrow[\cong]{g_0^*f} & g_0^*E_1|_A \\
 \downarrow \scriptstyle \psi^{(0)}|_{A \times \{0\}} & & \downarrow \scriptstyle \psi^{(1)}|_{A \times \{0\}} \\
 g_1^*E_0|_A & \xrightarrow[\cong]{\tilde{f}} & g_1^*E_1|_A
 \end{array}$$

Es folgt damit

$$[g_0^* E_0, g_0^* f, g_0^* E_1]_{st} = [g_1^* E_0, \tilde{f}, g_1^* E_1]_{st} \stackrel{3.4 \text{ ii)}}{=} [g_1^* E_0, g_1^* f, g_1^* E_1]_{st} \quad \square$$

## Ausschneidung

Sei  $(X, A)$  ein Ko-Raumpaar und  $U \subset A$ , sodass  $\bar{U} \subset \mathring{A}$ , dann ist die induzierte Abbildung  $K^{-n}(X, A) \rightarrow K^{-n}(X \setminus U, A \setminus U)$  ein Isomorphismus.

### 3.7. Lemma

Sei folgendes Diagramm ein Pushout-Diagramm von kompakten Hausdorffräumen

$$\begin{array}{ccc} X_0 & \xrightarrow{i_1} & X_1 \\ \downarrow i_2 & & \downarrow j_1 \\ X_2 & \xrightarrow{j_2} & X \end{array}$$

Seien  $p_i: E_i \rightarrow X_i$  für  $i \in \{1, 2\}$  K-Vektorbündel und  $f: i_1^* E_1 \xrightarrow{\cong} i_2^* E_2$  ein Isomorphismus von K-Vektorbündeln über  $X_0$ . Dann ist

Hier vlt mal  
 $\timesfrac$  benutzen?

$$E = E_1 \amalg E_2 / \sim \xrightarrow{p} X_1 \amalg X_2 / \sim = X$$

mit  $v_1 \sim f(v_1)$  für alle  $v_1 \in E_1$  mit  $p_1(v_1) \in X_0$  ein K-Vektorbündel über  $X$ .

**Beweis**

*Übung!*

### 3.8. Lemma

Sei  $(X, A)$  ein Ko-Raumpaar. Sei  $p: E \rightarrow A$  ein K-Vektorbündel und  $\iota: A \hookrightarrow X$  die Inklusion. Dann existieren Vektorbündel  $q: F \rightarrow X$  und  $q': F' \rightarrow A$ , so dass  $\iota^* F \cong E \oplus F'$ .

**Beweisidee**

Finde  $F' \xrightarrow{q'} A$ , sodass  $E \oplus F'$  trivialisierbar ist. Setze  $F = X \times K^N$ .

$$\begin{array}{ccc} E|_{U_i} & \longrightarrow & U_i \times K^N \\ E & \longrightarrow & X \times \underbrace{K^N \oplus \dots \oplus K^N}_{k \text{ Kopien}} \end{array}$$

### 3.9. Theorem

$$\begin{array}{ccc} X_0 & \xrightarrow{i_1} & X_1 \\ \downarrow i_2 & & \downarrow j_1 \\ X_2 & \xrightarrow{j_2} & X \end{array}$$

Für das obige Pushout-Diagramm von kompakten Hausdorffräumen gilt

- a) Ist  $i_1$  eine Kofaserung, dann auch  $j_2$ .
- b) Die Abbildungen  $j_1^*: K^{-n}(X, X_2) \rightarrow K^{-n}(X_1, X_0)$  für  $n \geq 0$  ist ein Isomorphismus.

**Beweis**

a) Da  $i_1$  eine Kofaserung ist, gibt es die folgende Homotopieerweiterungseigenschaft

$$\begin{array}{ccc} X_1 \times \{0\} \cup X_0 \times I & \xrightarrow{\quad} & Z \\ \downarrow & \nearrow \exists & \\ X_1 \times I & & \end{array}$$

Sei jetzt  $X \times \{0\} \cup X_2 \times I \xrightarrow{f} Z$  gegeben ( $f$  stetig). Wir haben

$$\begin{array}{ccc} X_1 \times \{0\} \cup X_0 \times I & \xrightarrow{j_1 \cup (j_2 \times \text{id})} & X \times \{0\} \cup X_2 \times I \xrightarrow{f} Z \\ \downarrow & \nearrow h_1 & \\ X_1 \times I & & \end{array}$$

Betrachte das Pushout-Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} X_0 \times I & \xrightarrow{i_1 \times \text{id}} & X_1 \times I & & \\ \downarrow i_2 \times \text{id} & & \downarrow j_1 \times \text{id} & \searrow h_1 & \\ X_2 \times I & \hookrightarrow & X \times I & \xrightarrow{h} & Z \\ & \searrow f|_{X_2 \times I} & & \nearrow & \end{array}$$

Also existiert  $h$ , sodass

$$\begin{array}{ccc} X \times \{0\} \cup X_2 \times I & \xrightarrow{f} & Z \\ \downarrow & \nearrow h & \\ X \times I & & \end{array}$$

Damit ist Teil a) gezeigt.

b) Wir zeigen die Behauptung zunächst für  $n = 0$ :

**Injektivität:** Sei  $(E_0, f, E_1)$  ein Tripel über  $(X, X_2)$  mit  $j_1^*[E_0, f, E_1]_{\text{st}} = 0$ . Also existiert ein Vektorbündel  $q: F \rightarrow X_1$ , sodass sich der Isomorphismus

$$(j_1^*E_0 \oplus F)|_{X_0} \xrightarrow{j_1^*f \oplus \text{id}} (j_1^*E_1 \oplus F)|_{X_0}$$

zu einem Isomorphismus über  $X_1$  fortsetzen lässt. Nach Lemma 3.8 existieren Vektorbündel  $q': F' \rightarrow X$  und  $\tilde{F} \rightarrow X_1$ , sodass  $j_1^*F' \cong F \oplus \tilde{F}$  gilt. Es gilt

$$[j_1^*E_0, j_1^*f, j_1^*E_1]_{\text{st}} = [j_1^*(E_0 \oplus F'), \underbrace{j_1^*(f \oplus \text{id}_{F'})}_{\text{l\"asst sich zu Iso \u00fcber } X_1 \text{ ausdehnen}}, j_1^*(E_1 \oplus F')]$$

Wir k\u00f6nnen daher ohne Beschr\u00e4nkung der Allgemeinheit annehmen, dass sich  $j_1^*f$  zu einem Isomorphismus \u00fcber  $X_1$  fortsetzen l\u00e4sst. Das Vektorb\u00fcndel  $E_0$  ist isomorph zur Verklebung von  $j_1^*E_0 \rightarrow X_1$  und  $j_2^*E_0 \rightarrow X_2$  mittels der Identit\u00e4t  $i_2^*j_2^*E_0 \xrightarrow{\cong} i_1^*j_1^*E_0$  wie in Lemma 3.7 beschrieben. \u00c4hnliches gilt f\u00fcr  $E_1 \rightarrow X$ . Wir haben also Isomorphismen

$$j_1^*E_0 \xrightarrow[\cong]{j_1^*f} j_1^*E_1 \quad \text{und} \quad j_2^*E_0 = E_0|_{X_2} \xrightarrow[\cong]{f} E_1|_{X_2} = j_2^*E_1$$

die kompatibel mit der Äquivalenzrelation in der Verklebung sind. Sie induzieren daher einen Isomorphismus  $E_0 \xrightarrow{\cong} E_1$  über  $X_1$ , der  $f$  fortsetzt. Es folgt  $[E_0, f, E_1]_{\text{st}} = 0$ .

**Surjektivität:** Sei  $(E_0, f, E_1)$  ein Tripel über  $(X_1, X_0)$ . Nach Lemma 3.8 existieren Vektorbündel  $q: F \rightarrow X_1$  und  $p'_1: E'_1 \rightarrow X$  mit einem Isomorphismus  $\psi: E_1 \oplus F \xrightarrow{\cong} j_1^* E'_1$ . Sei  $\alpha: (E_0 \oplus F)|_{X_0} \rightarrow j_1^* E'_1|_{X_0}$  gegeben durch

$$(E_0 \oplus F)|_{X_0} \xrightarrow[\cong]{f \oplus \text{id}} (E_1 \oplus F)|_{X_0} \xrightarrow[\cong]{\psi}$$

Definiere nun  $p'_0: E'_0 \rightarrow X$  durch Verkleben von  $E_0 \oplus F \rightarrow X_1$  und  $E'_1|_{X_2} \rightarrow X_2$  entlang  $\alpha$  wie in Lemma 3.7. Sei  $f': E'_0|_{X_2} \rightarrow E'_1|_{X_2}$  gegeben durch die Identität. Jetzt gilt

$$\begin{aligned} j_1^*[E'_0, f', E'_1]_{\text{st}} &= [E_0 \oplus F, \psi \circ (f \oplus \text{id}), j_1^* E'_1]_{\text{st}} = [E_0 \oplus F, f \oplus \text{id}, E_1 \oplus F]_{\text{st}} \\ &= [E_0, f, E_1]_{\text{st}} + \underbrace{[F, \text{id}, F]_{\text{st}}}_{=0} \end{aligned}$$

Für den Fall  $n > 0$  lässt sich der Beweis auf den Fall  $n = 0$  zurückführen, denn

$$(X_1, X_0) \times (I^n, \partial I^n) = (X_1 \times I^n, X_1 \times \partial I^n \cup X_0 \times I^n),$$

$X_0 \times I^n \cup X_1 \times \partial I^n \hookrightarrow X_1 \times I^n$  ist eine Kofaserung und das folgende Diagramm ist ein Pushout-Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X_0 \times I^n \cup X_1 \times \partial I^n & \hookrightarrow & X_1 \times I^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_2 \times I^n \cup X \times \partial I^n & \hookrightarrow & X \times I^n \end{array}$$

Damit ist das Theorem bewiesen. □

### 3.10. Korollar

Sei  $(X, A)$  ein Ko-Raumpaar und  $U \subseteq A$ , sodass  $\overline{U} \subset \mathring{A}$ , dann ist  $K^{-n}(X, A) \rightarrow K^{-n}(X \setminus U, A \setminus U)$  ein Isomorphismus.

**Beweis**

Setze  $X_0 = A \setminus U$ ,  $X_1 = X \setminus U$  und  $X_2 = A$  in Theorem 3.9. Dann ist der Pushout gleich  $X$ . □

## Produkte in K-Theorie und Kettenkomplexe von Vektorbündeln

Klassen in  $K^0(X)$  sind  $[E_1, E_0]$  „ $=$ “  $E_1 - E_0$ , die Produkte könnten wir wie folgt definieren:

$$[E_1, E_0] \cdot [E'_1, E'_0] = [(E_1 \otimes E'_1) \oplus (E_0 \otimes E'_0), (E_1 \otimes E'_0) \oplus (E_0 \otimes E'_1)]$$

Damit kann man aber nur schwer rechnen. Stattdessen wollen wir ein Produkt über Kettenkomplexe definieren.

$$[E_1, f, E_0] \rightsquigarrow \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{\tilde{f}} E_0 \longrightarrow 0$$

wobei  $\tilde{f}$  die Fortsetzung von  $f$  über  $X$  ist

## Definition

Ein Kettenkomplex von  $K$ -Vektorbündeln über einem Ko-Raumpaar  $(X, A)$  ist ein Paar  $(C_n, c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , wobei die  $C_i$  endlichdimensionale Vektorbündel sind und die  $c_i: C_n \rightarrow C_{n-1}$  Morphismen von  $K$ -Vektorbündeln mit folgenden Eigenschaften sind:

- ▶  $\exists N \geq 0$  mit  $C_n = 0$  für  $n > N$ ,
- ▶  $c_{n-1} \circ c_n = 0$ ,
- ▶ für alle  $x \in A$  ist der Kettenkomplex von Vektorräumen

$$0 \longrightarrow (C_n)|_X \xrightarrow{c_n|_X} C_{n-1}|_X \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1|_X \xrightarrow{c_1|_X} C_0|_X \longrightarrow 0$$

exakt.

Eine Kettenabbildung zwischen  $(C_*, c_*)$  und  $(D_*, d_*)$  über  $(X, A)$  ist eine Folge von Morphismen  $f_k: C_k \rightarrow D_k$ , so dass folgendes Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_k & \xrightarrow{c_k} & C_{k-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow f_k & & \downarrow f_{k-1} & & \\ \cdots & \longrightarrow & D_k & \xrightarrow{d_k} & D_{k-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Zwei Kettenkomplexe  $(C_*^i, c_*^i)$  über  $(X, A)$  für  $i \in \{0, 1\}$  heißen *homotop*, falls es einen Kettenkomplex  $(C_*, c_*)$  über  $(X \times I, A \times I)$  gibt, sodass  $(C_*, c_*)|_{X \times \{i\}} \cong (C_*^i, c_*^i)$ . Wir schreiben  $(C_*^0, c_*^0) \simeq (C_*^1, c_*^1)$ .

Ab hier fehlen noch diverse Diagramme

## Definition

Sei  $K(X, A)^c$  der Quotient der freien abelschen Gruppe erzeugt von den Isomorphie-Klassen von Kettenkomplexen von  $\mathbb{C}$ -Vektorbündeln über  $(X, A)$  bezüglich der folgenden Relationen:

- a) Wenn  $C_* \simeq D_*$  gilt, dann folgt  $[C_*] = [D_*]$
- b) Wenn  $0 \rightarrow C_* \rightarrow D_* \rightarrow E_* \rightarrow 0$  eine kurze exakte Folge von Kettenkomplexen ist (faserweise exakt), dann gilt

$$[C_*] - [D_*] + [E_*] = 0$$

- c)  $[\cdots \rightarrow 0 \rightarrow E \xrightarrow{\text{id}} E \rightarrow 0 \rightarrow \cdots]$

### Bemerkung

Aus b) folgt  $[C_*] = [D_*]$  für isomorphe Kettenkomplexe und

$$[C_* \oplus D_*, c_* \oplus d_*] = [C_*, c_*] + [D_*, d_*]$$

Wir haben einen Gruppenhomomorphismus  $\alpha: K^0(X, A) \rightarrow K(X, A)^c$ , wobei  $\tilde{f}$  eine Fortsetzung von  $f$  auf  $X$  ist. Dies ist unabhängig von der Wahl der Fortsetzung. Seien  $\tilde{f}_0, \tilde{f}_1$ . Dann sei  $h_t = t\tilde{f}_1 + (1-t)\tilde{f}_0$ . Es gilt  $h_t|_A = f$  und

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow E_1 \times I \xrightarrow{(v, t) \mapsto (h_t(v), t)} E_0 \times I \longrightarrow 0$$

ist ein Kettenkomplex über  $(X \times I, A \times I)$  und somit eine Homotopie zwischen  $0 \rightarrow E_1 \xrightarrow{\tilde{f}_0} E_0 \rightarrow 0$  und

Hier fehlt noch eine Aussage  
...

### 3.11. Definition 3.1.2

Eine *Kettenkontraktion* über  $A$  ist eine Familie von Bündelabbildungen  $\gamma_n: C_n|_A \rightarrow C_{n+1}|_A$ , sodass  $\gamma_{n-1} \circ (c_n|_A) + (c_{n+1}|_A) \circ \gamma_n = \text{id}_{C_n|_A}$

### 3.12. Lemma 3.1.3

Sei  $(C_*, c_*)$  ein Kettenkomplex über dem Ko-Raumpaar  $(X, A)$ . Dann existiert eine Kettenkontraktion über  $A$ .

**Beweis**

*Übung.*

### 3.13. Lemma 3.1.4

Die Abbildung  $b: K(X, A)^c \rightarrow K^0(X, A)$  mit  $b([C_+, c_*]) = (C_{\text{odd}}, c_n|_A + \gamma_*, C_{\text{even}})$  mit  $C_{\text{odd}} = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}_0} C_{2k+1}$  und  $C_{\text{even}} = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}_0} C_{2k}$ , wobei  $\gamma_*$  eine Kettenkontraktion über  $A$  ist, ist wohldefiniert.

**Beweis**

Sei  $\gamma'_n: C_n|_A \rightarrow C_{n+1}|_A$  eine weitere Kettenkontraktion über  $A$ . Betrachte  $\delta_n = (\gamma'_{n+1} - \gamma_{n+1}) \circ \gamma_n: C_n|_A \rightarrow C_{n+2}|_A$  und

$$\begin{aligned} f: C_{\text{even}}|_A &\xrightarrow{\text{id} + \delta_*} C_{\text{even}}|_A \quad \text{und} \\ g: C_{\text{odd}}|_A &\xrightarrow{c_*|_A + \gamma_*} C_{\text{even}}|_A \xrightarrow{f} C_{\text{even}}|_A \xrightarrow{c_*|_A + \gamma'_*} C_{\text{odd}}|_A \end{aligned}$$

Behauptung:  $g$  ist ein Isomorphismus.



Diagramm mit Vektorschreibweise

Der Teil von  $g$ , der  $C_{2n+1}|_A \rightarrow C_{2n-1}|_A$  abbildet, ist gegeben durch  $c_{2n+1}|_A \circ c_{2n}|_A = 0$ . Der Teil von  $g$ , der  $C_{2n+1}|_A \rightarrow C_{2n+1}|_A$  abbildet ist gegeben durch die Identität, also ist  $g$  eine „Dreiecksmatrix mit Identitäten auf der Diagonalen“ und somit ein Isomorphismus. Insgesamt folgt, dass  $c_*|_A + \gamma_*$  injektiv ist und  $c_*|_A + \gamma'_*$  surjektiv. Aus Symmetriegründen sind beide Isomorphismen.

Betrachte jetzt  $h_t = (\text{id} + t \cdot \delta) \circ (c_*|_A + \gamma_*) : C_{\text{odd}}|_A \rightarrow C_{\text{even}}|_A$ . Dies ist eine Homotopie durch Isomorphismen. Aufgrund der Homotopieinvarianz von  $K^0(X, A)$  gilt:

$$[C_{\text{odd}}, (c_*|_A + \gamma_*), C_{\text{even}}]_{\text{st}} = [C_{\text{odd}}, f \circ (c_*|_A + \gamma_*), C_{\text{even}}]_{\text{st}}$$

Auch die Kettenabbildung  $g$  ist von der Form  $g = \text{id} + \varepsilon$ , wobei  $\varepsilon$  der Teil oberhalb der Diagonalen ist. Mit dem gleichen Trick wie eben erhalten wir mit  $\tilde{h}_t = (c_*|_A + \gamma'_*)^{-1} \circ (\text{id} + t\varepsilon)$

$$[C_{\text{odd}}, \underbrace{(c_*|_A + \gamma'_*)^{-1} \circ g}_{= f \circ (c_*|_A + \gamma_*)}, C_{\text{even}}]_{\text{st}} = [C_{\text{odd}}, (c_*|_A + \gamma'_*)^{-1}, C_{\text{even}}]_{\text{st}}$$



Also insbesondere für  $\gamma'_* = \gamma_*$ :

$$[C_{\text{odd}}, (c_*|_A + \gamma_*), C_{\text{even}}]_{\text{st}} = [C_{\text{odd}}, (c_*|_A + \gamma_*)^{-1}, C_{\text{even}}]$$

Aus den letzten drei Formeln folgt

$$[C_{\text{odd}}, (c_*|_A + \gamma_*), C_{\text{even}}] = [C_{\text{odd}}, (c_*|_A + \gamma'_*)^{-1}, C_{\text{even}}] = [C_{\text{odd}}, (c_*|_A + \gamma'_*), C_{\text{even}}]$$

 sternchen oder  
sowas einfügen

Kompatibilität mit den Relationen:

- ▶  $C_* \simeq D_* \Rightarrow b([C_*]) = b([D_*])$  aus der Homotopieinvarianz von  $K^0(X, A)$ .
- ▶  $b\left(\left[\cdot \rightarrow 0 \rightarrow E \xrightarrow{\text{id}} E \rightarrow 0 \rightarrow \dots\right]\right) = [E, \text{id}, E]_{\text{st}} = 0$
- ▶ Sei  $0 \rightarrow C_* \xrightarrow{i_*} D_* \xrightarrow{p_*} E_0 \rightarrow 0$  eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen. Jede kurze exakte Sequenz von Vektorbündeln spaltet (Übung!). Also existieren Morphismen  $t_n: E_n \rightarrow D_n$  mit  $p_n \circ t_n = \text{id}_{E_n}$ . Problem:  $t_n$  ist keine Kettenabbildung! Wähle eine Kettenkontraktion  $\varepsilon$  über  $A$  für  $E_*$ . Setze

$$s_n = d_{n+1}|_A \circ t_{n+1}|_A \circ \varepsilon_n + e_n|_A \circ \varepsilon_{n-1} \circ e_n|_A$$

Dies ist ein Spalt von  $p_n$  über  $A$ .  $i_n + s_n: C_n|_A \oplus E_n|_A \rightarrow D_n|_A$  ist homotop durch Isomorphismen zu  $i_n + t_n$  via

$$h_r = \tau(d_{n+1}|_A \circ t_{n+1}|_A - t_n|_A \circ e_{n+1}|_A) \circ \varepsilon_n + (t_n - i_n)|_A$$

Da  $i_n, t_n$  auf ganz  $X$  definiert sind, lässt sich  $i_n + s_n$  zu einem Isomorphismus  $\varphi_n$  über  $X$  fortsetzen. Setze  $\delta_n = (i_n + s_n) \circ (\gamma_n \oplus \varepsilon_n) \circ (i_n + s_n)^{-1}$ . Dies ist eine Kettenkontraktion von  $D_*$  über  $A$ . Es folgt

$$[C_{\text{odd}} \oplus E_{\text{odd}}, (c_*|_A + \gamma_*) \oplus (e_*|_A + \varepsilon_*), C_{\text{even}} \oplus E_{\text{even}}]_{\text{st}} = [D_{\text{odd}}, d_*|_A + \delta_*, D_{\text{even}}]_{\text{st}} \quad \square$$

### 3.14. Lemma 3.1.5

Seien  $(E_*, e_*)$  und  $(E_*, e'_*)$  Kettenkomplexe über  $(X, A)$  mit  $e_i|_A = e'_i|_A$ . Dann gilt  $[E_*, e_*] = [E_*, e'_*] \in K(X, A)^c$ .

### 3.15. Lemma 3.1.6

Die Abbildungen  $a$  und  $b$  sind invers zueinander.

#### Beweis

$b \circ a = \text{id}_{K^0(X, A)}$  ist klar. Es bleibt zu zeigen, dass  $a$  surjektiv ist  $\iff$  Jeder Kettenkomplex der Länge  $l \geq 2$  ist äquivalent zu einem Kettenkomplex der Länge  $l = 1$ . Es gilt

$$\begin{aligned} & \left[ 0 \rightarrow C_n \xrightarrow{c_n} C_{n-1} \rightarrow C_{n-2} \rightarrow \dots \rightarrow C_0 \rightarrow 0 \right] \\ &= \left[ 0 \rightarrow C_n \xrightarrow{c_n \oplus 0} C_{n-1} \oplus C_n \xrightarrow{c_{n-1} \oplus \text{id}} C_{n-2} \oplus C_n \rightarrow C_{n-3} \rightarrow \dots \rightarrow C_0 \rightarrow 0 \right] \end{aligned}$$

- ▶  $(c_n \oplus 0)|_A$  ist ein Monomorphismus und homotop zu  $(0 \oplus \text{id})|_A$  durch Monomorphismen. Jetzt lässt sich  $(0 \oplus \text{id})|_A$  zu einem Monomorphismus über  $X$  ausdehnen. Eine Variante von Lemma 3.3 zeigt, dass sich dann auch  $(c_n \oplus 0)|_A$  zu einem Monomorphismus  $\tau: C_n \rightarrow C_{n-1} \oplus C_n$  auf  $X$  ausdehnen lässt.

$$\Rightarrow C_{n-1} \oplus C_n \cong \tau(C_n) \oplus Q$$

## Der Kettenkomplex

$$0 \rightarrow C_n \xrightarrow{\tau} \tau(C_n) \oplus Q \xrightarrow{(c_{n-1} \oplus \text{id})|_Q \circ \text{pr}_Q} C_{n-2} \oplus C_n \rightarrow \dots \rightarrow C_0 \rightarrow 0$$

stimmt über  $A$  mit dem obigen überein, liefert also dieselbe Klasse. Aber

$$\underbrace{\left[ 0 \rightarrow C_n \xrightarrow{\tau} \tau(C_n) \rightarrow 0 \rightarrow \dots \right]}_{= \left[ 0 \rightarrow C_n \xrightarrow{\text{id}} C_n \rightarrow 0 \rightarrow \dots \rightarrow 0 \right] = 0} + \underbrace{\left[ 0 \rightarrow Q \xrightarrow{C'_{n-1}} C_{n-2} \oplus C_n \rightarrow \dots \rightarrow C_0 \rightarrow 0 \right]}_{\text{Länge um 1 verringert}} \quad \square$$

Sei  $(C, c)$  ein Kettenkomplex über dem Ko-Raumpaar  $(X, A)$  und  $(C', c')$  ein weiterer über  $(X', A')$ . Das *äußere Tensorprodukt* von zwei Vektorbündeln  $E \rightarrow X, F \rightarrow X'$  ist definiert durch

$$E \boxtimes F := \pi_X^* E \otimes \pi_{X'}^* F$$

wobei  $\pi_X: X \times X' \rightarrow X, \pi_{X'}: X \times X' \rightarrow X'$  die Projektionen sind. Es gilt also  $(E \boxtimes F)_{x, x'} = E_x \times F_{x'}$ . Das *Tensorprodukt* von  $(C, c)$  und  $(C', c')$  ist definiert durch

$$(C \boxtimes C')_n := \bigoplus_{i+j=n} C_i \boxtimes C'_j$$

mit dem Differential  $c''_n$ , das auf  $C_i \boxtimes C'_j$  gegeben ist durch

$$c''_n|_{C_i \boxtimes C'_j} = c_i \boxtimes \text{id} + (-1)^i \text{id} \boxtimes c'_j$$

Damit ist  $((C \boxtimes C'), c'')$  ein Kettenkomplex über  $(X, A) \times (X', A')$ . Somit erhalten wir

$$\begin{array}{ccc} K^{-n}(X, A) \times K^{-m}(X', A') & \xrightarrow{*} & K^{-(n+m)}((X, A) \times (X', A')) \\ \cong \downarrow a \times a & & \cong \downarrow a \\ K((X, A) \times (I, \partial I)^n)^c \times K((X', A') \times (I, \partial I)^m)^c & \longrightarrow & K^{-(n+m)}((X, A) \times (X', A') \times (I, \partial I)^{n+m}) \end{array}$$

Für  $X = X'$  und  $A \subset X, B \subset X$  sei  $\Delta: (X, A \cup B) \rightarrow (X, A) \times (X, B) = (X \times X, X \times B \cup A \times X) \subset (A \cup B) \times (A \cup B)$ . Dies induziert  $K^{-(n+m)}((X, A) \times (X, B)) \rightarrow K^{-(n+m)}(X, A \cup B)$ . Wir definieren

$$\cdot := \Delta^* \circ *: K^{-n}(X, A) \times K^{-m}(X, B) \xrightarrow{*} K^{-(n+m)}((X, A) \times (X, B)) \xrightarrow{\Delta^*} K^{-(n+m)}(X, A \cup B)$$

- Insbesondere ist  $K^*(X) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} K^{-n}(X)$  ein graduiert kommutativer Ring mit 1, das heißt es gilt für  $x \in K^i(X)$  und  $y \in K^j(X)$

$$x \cdot y = (-1)^{i \cdot j} y \cdot x$$

- Für  $f: X \rightarrow Y$  erhalten wir einen Ringhomomorphismus  $f^*: K^*(Y) \rightarrow K^*(X)$ .
- Für  $A \subset B \subset X$  ist  $K^*(B, A)$  ein Modul über  $K^*(X)$ .

## Lemma

Für  $a, a' \in K^0(X), b, b' \in K^0(Y)$  ist

$$(a \cdot a') * (b \cdot b') = (a * b) \cdot (a' * b')$$

## Beweis

Richtiges Diagramm hinschreiben.

## 3.2 Bott-Periodizität – eine Beweisskizze

Welche K-Gruppen können wir berechnen?

- ▶  $K^0(\text{pt}) = \text{Gr}(\mathbb{N}) \cong \mathbb{Z}$
- ▶  $K^{-1}(\text{pt}) = K^0(I, \partial I) = 0$
- ▶ Tripel  $(E_1, f, E_0)$  über  $(I, \partial I)$  mit  $f: E_1|_{\partial I} \xrightarrow{\cong} E_0|_{\partial I}$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $E_i \cong \mathbb{C}^n \times I$ . Da  $\text{GL}_n(\mathbb{C})$  wegzusammenhängend ist, gibt es eine Erweiterung von  $f$  zu einem Isomorphismus über  $I$ .

$$f_0: \mathbb{C}^n \times \{0\} \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}^n \times \{0\} f_1: \mathbb{C}^n \times \{1\} \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}^n \times \{1\}$$

$f$  entspricht also zwei Elementen von  $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ .  $g: \mathbb{C}^n \times I \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}^n \times I \rightsquigarrow I \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})$

Übung  $KO^{-1}(\text{pt})$  ?

Was ist  $K^0(S^1)$ ?

$$[S^1 \times \mathbb{C}, 0]_{\text{st}} \longmapsto [\mathbb{C}, 0]_{\text{st}} = 1$$

$$0 = K^0(I, \partial I) \cong K^0(S^1, \text{pt}) \longrightarrow K^0(S^1) \longrightarrow K^0(\text{pt}) \cong \mathbb{Z}$$

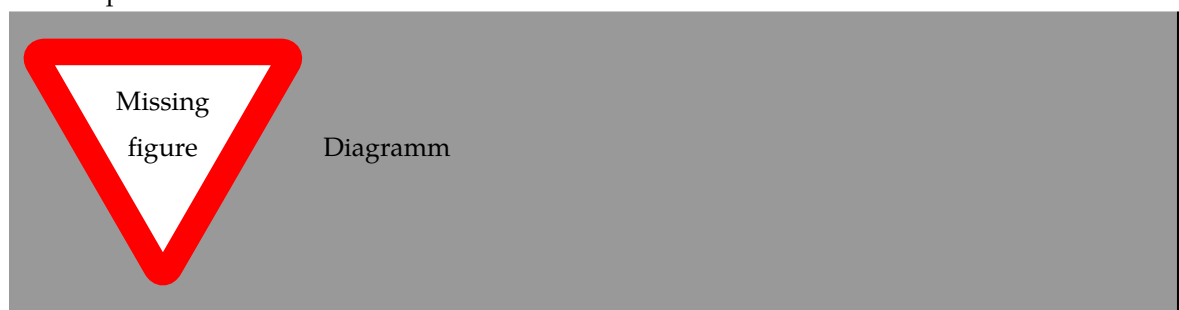
Aus der unteren Zeile folgt  $K^0(S^1)$  ist Untergruppe von  $\mathbb{Z}$ . Aus der oberen folgt dann weiter  $K^0(S^1) \cong \mathbb{Z}$ .

Gibt es eine nichttriviale Klasse in  $K^0(S^2)$ ? Wir haben einen Homöomorphismus

$$S^2 \cong \mathbb{CP}^1 = \{V \subset \mathbb{C}^2 \mid V \text{ ist eindimensionaler Untervektorraum}\}$$

Betrachte  $H = \{(v, V) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{CP}^1 \mid v \in V\}$ . Dies ist ein eindimensionales Vektorbündel über  $\mathbb{CP}^1$ . Was ist  $[H, 0]_{\text{st}} \in K^0(\mathbb{CP}^1)$ ? Welche Gestalt haben Vektorbündel über  $X \times S^2$ ? Sei  $S^2 = D_+ \cup D_-$  die Zerlegung in die „obere“ und die „untere“ Halbsphäre. Sei  $E \rightarrow X \times S^2$  ein Vektorbündel. Sei  $z_0 \in S^1 = D_+ \cap D_- \subset S^2$  ein Basispunkt von  $S^2$ . Sei  $F = \iota^* E$  mit  $\iota: X \rightarrow X \times S^2$  gegeben durch  $x \mapsto (x, z_0)$ . Wegen  $D_+ \cong D_- \simeq \{\text{pt}\}$  ist  $\text{pr}_X^\pm: X \times D_\pm \rightarrow X$  eine Homotopieäquivalenz mit Homotopieinversen  $\iota_\pm: X \rightarrow X \times D_\pm, x \mapsto (x, z_0)$ . Daher ist  $E|_{X \times D_\pm} \cong \iota_\pm^* F$ .

Dann ist  $E$  isomorph zur Verklebung von  $\iota_+^* F$  und  $\iota_-^* F$  entlang eines Isomorphismus, der gegeben ist durch eine stetige Abbildung  $S^1 \rightarrow \text{Iso}(F)$ , wobei  $\text{Iso}(F)$  der Raum aller Vektorbündelisomorphismen  $F \rightarrow F$  ist. Wir schreiben  $E \cong \{F, f\}$ . Die Isomorphieklasse von  $\{F, f\}$  hängt nur noch der Homotopieklasse von  $f$  ab.



### Beispiel

Übergangsabbildung von  $H$ : Identifiziere  $\mathbb{CP}^1$  mit  $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \cong S^2$  mit Hilfe der Abbildung  $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{CP}^1$ , definiert durch  $z \mapsto [z : 1], \infty \mapsto [1 : 0]$ . Die Umkehrabbildung ist gegeben durch

$$[z_1, z_2] \mapsto \begin{cases} z_1/z_2, & \text{falls } z_2 \neq 0 \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} H &= \{(z, v) \in (\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \times \mathbb{C}^2 \mid v = \lambda(z, 1), \text{ falls } z \neq \infty \text{ oder } v = (\lambda, 0) \text{ falls } z = \infty\} \\ D_+ &= \{z \in (\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \mid |z| \leq 1\} \\ D_- &= \{z \in (\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \mid |z| \geq 1 \text{ oder } z = \infty\} \end{aligned}$$

Trivialisierungen:

$$H|_{D_+} \xrightarrow{\cong} D_+ \times \mathbb{C} \quad H|_{D_-} \xrightarrow{\cong} D_- \times \mathbb{C}$$

$$(z, (v_1, v_2)) \longmapsto (z, v_2) \quad , \quad (z, (v_1, v_2)) \longmapsto (z, v_1)$$

$$(z, (wz, w)) \longmapsto (z, w) \quad (z, (w, w/z)) \longmapsto (z, w)$$

Wir setzen  $F = S^1 \times \mathbb{C}$  und  $f: S^1 \rightarrow \text{Iso}(S^2 \times \mathbb{C})$ ,  $z \mapsto (w \mapsto wz)$ , in jeder Faser Multiplikation mit  $z$ . Es ist nun  $H = \{\mathbb{C}, w \mapsto w \cdot z\} = \{\mathbb{C}, z\}$  und  $H^* \cong \{\mathbb{C}, z^{-1}\}$ .

Weitere Beispiele

$$H^{\otimes k} = \{\mathbb{C}, w \mapsto w \cdot z^k\} \quad , \quad H \oplus H = \left\{ \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}, z \mapsto \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} \right\}$$

Da  $\text{GL}_2(\mathbb{C})$  wegzusammenhängend ist, gibt es einen Pfad zwischen  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ . Betrachte

hier fehlt noch was

Hieraus erhalten wir

$$\begin{aligned} H^{\otimes 2} \oplus \underbrace{(\mathbb{C} \times S^2)}_{\cong \left\{ \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}, \begin{pmatrix} z^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}} &\cong \underbrace{H \oplus H}_{\cong \left\{ \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}, \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} \right\}} \\ &\cong \left\{ \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}, \begin{pmatrix} z^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

In K-Theorie

$$[H, 0] \cdot [H, 0] + [\mathbb{C}, 0] = [H^{\otimes 2} \oplus \mathbb{C}, 0]_{\text{st}} = [H \oplus H, 0]_{\text{st}} = 2 \cdot [H, 0]$$

in  $K^0(S^2)$  gilt die Relation  $[H, 0]^2 - 2[H, 0] + [\mathbb{C}, 0] = 0$

$$(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1 = 0$$

### Theorem Bott '58

$$\mu: K^1(X) \otimes \mathbb{Z}[H]/(H-1)^2 \longrightarrow K^0(X) \otimes K^0(S^2) \longrightarrow K^0(X \times S^2)$$

$$[E, 0]_{\text{st}} \otimes H^m \longmapsto \underbrace{[\text{pr}_X E \otimes (\text{pr}_{S^2}^* H)^{\otimes m}, 0]_{\text{st}}}_{\{E, z^m\}}$$

ist ein Ringisomorphismus. Insbesondere  $K^0(S^2) \cong \mathbb{Z}[H]/(H-1)^2$

**Beweis**

1. Satz: Jedes Vektorbündel  $\{F, f\}$  über  $X \times S^1$  ist isomorph zu  $\{F, l\}$ , wobei  $l = \sum_{i=-N}^N a_i \cdot z^i$  und  $a_i: F \rightarrow F$  ein Morphismus von Vektorbündeln ist, das heißt die Übergangsfunktion ist gegeben durch ein Laurent-Polynom. Sind  $l_0$  und  $l_1$  homotope Übergangsfunktionen, dann sind sie auch homotop durch Laurent-polynomiale Übergangsfunktionen.

Idee hierzu: Wir können stetige Funktionen  $g: X \times S^1 \rightarrow \mathbb{C}$  durch Laurent-Polynome approximieren.  $g(x, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(x) z^n$  für

$$a_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x, e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$$

Genauso können wir Funktionen  $\tilde{g}: X \times S^1 \rightarrow M_n \mathbb{C}$  approximieren. Wähle ein Skalarprodukt in den Fasern von  $F$  (hermitesche Metrik). Der Raum der Vektorbündelendomorphismen  $\text{End}(F \times S^1)$  ist normiert via

$$\|\alpha\| = \sup_{\substack{\|v\|=1 \\ v \in F \times S^1}} \|\alpha(v)\|$$

$\text{Iso}(F \times S^1) \subset \text{End}(F \times S^1)$  ist offen. Fasse  $f$  als Schnitt  $f: X \times S^1 \rightarrow \text{Iso}(F \times S^1) \subset \text{End}(F \times S^1)$ . Wähle trivialisierende Überdeckung  $U_i$  mit Partition der Eins  $\{\varphi_i\}_i$

$$f|_{U_i}: U_i \times S^1 \rightarrow \text{End}(F|_{U_i} \times S^1) \cong M_n \mathbb{C} \times U_i \times S^1$$

Approximiere durch  $l_i$  und setze  $l = \sum_i \varphi_i l_i$ .  $l$  liegt beliebig nahe bei  $f$  in Norm. Da Iso offen ist, folgt dass  $f$  und  $l$  homotop durch Isos.  $\square$

2. (Linearisierungstrick): Schreibe  $\{F, l\} = \{F, z^{-m} \cdot q\}$  für ein „Polynom“  $q$  und ein  $m \in \mathbb{N}$ .

Satz: Sei  $q$  eine polynomiale Übergangsfunktion vom Grad  $\leq n$ , dann gilt

$$\left\{ \underbrace{n \cdot F}_{F \oplus \dots \oplus F}, 1 \right\} \oplus \{F, q\} \cong \{(n+1) \cdot F, L^n q\}$$

wobei  $L^n q$  eine Übergangsfunktion ist, die nur noch  $z^0$  und  $z^1$  enthält, das heißt  $L^n q(x, z) = a(x) + b(x) \cdot z$ .

Idee hierzu:  $q = \sum_{i=1}^n a_i z^i$ . Übergangsfunktion der linken Seite ist gegeben durch eine Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & q \end{pmatrix}$$

Zeilen- und Spaltenoperationen bringen dies auf die Form

$$\begin{pmatrix} 1 & -z & & & \\ & 1 & -z & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -z \\ a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 \end{pmatrix} = A$$

Zeilen- und Spaltenoperationen erhalten die Determinante, also ist  $A$  invertierbar für alle  $(x, z) \in X \times S^1$ . Damit ist  $A$  eine gültige Übergangsfunktion. Es ist  $A = a + b \cdot z = L^n q$ . Jede Zeilen- und Spaltenoperation ist homotop zur Identität, daher ist  $L^n q$  homotop zu  $1 \oplus q$

$$\Rightarrow \{(n+1) \cdot F, 1 \oplus q\} \cong \{(n+1) \cdot F, L^n q\} \quad \square$$

3. (Aufspaltung von  $F$ ): Wir haben bereits:  $\{(n+1) \cdot F, q\} \cong \{(n+1) \cdot F, a + b \cdot z\}$ . Betrachte nun die Homotopie

$$q_t(x, z) = (1 + tz) \left( b(x) \frac{z+t}{1+tz} + a(x) \right) = (b(x) + ta(x))z + tb(x) + a(x)$$

Der mittlere Teil ist gleich  $L^n q$  für  $t = 0$ , invertierbar für  $0 \leq t < 1$ . Weiter ist  $z \mapsto \frac{z+t}{1+tz}$  ein Homöomorphismus  $S^1 \rightarrow S^1$ . Wähle nun  $t_0 < 1$ , sodass  $b(x) + t_0 a(x)$  invertierbar ist. Dies funktioniert, denn  $b(x) + a(x)$  ist invertierbar. Damit erhalten wir

$$\{(n+1) \cdot F, L^n q\} \cong \{(n+1) \cdot f, z + c\}$$

mit  $c(x) = (t_0 b(x) + a(x))(b(x) + t_0 a(x))^{-1}$ ,  $b + t_0 \cdot a: F \xrightarrow{\cong} F$ . Insbesondere ist  $z + c(x): F_x \times \{z\} \xrightarrow{\cong} F_x \times \{z\}$  ein Isomorphismus, also hat  $z + c(x)$  niemals Eigenwert 0, woraus folgt, dass  $c(x)$  keine Eigenwerte auf  $S^1$  hat.

Lemma: Sei  $c: F \rightarrow F$  ein Morphismus von Vektorbündeln, so dass  $c(x): F_x \rightarrow F_x$  keine Eigenwerte auf  $S^1$  hat. Dann existieren eindeutige Untervektorbündel  $F_+$  und  $F_-$ , sodass

a)  $F \cong F_+ \oplus F_-$

b)  $c(F_{\pm}) \subset F_{\pm}$

c) Die Eigenwerte von  $c|_{F_+}$  liegen außerhalb von  $S^1$ , von  $c|_{F_-}$  innerhalb von  $S^1$

Korollar:  $\{F, z + c\} \cong \{F_+, 1\} \oplus \{F_-, z\}$ . Beweis:

$$\{F, z + c\} \cong \{F_+, z + c_+\} \oplus \{F_-, z + c_-\}$$

mit  $c_{\pm} = c|_{F_{\pm}}$ . Die Eigenwerte von  $z + c_+$  liegen außerhalb von  $S^1$ ,  $tz + c_+$  liefert eine Homotopie zu  $\{F_+, c_+\} \cong \{F_+, 1\}$ . Die Eigenwerte von  $c_-$  liegen innerhalb von  $S^1$ . Dann liefert  $z + tc_-$  eine Homotopie durch Isomorphismen zu  $z$ , das heißt  $\{F_-, z + c_-\} \cong \{F_-, z\}$ .  $\square$

Setze alles zusammen für die Surjektivität von  $\mu$ .  $\mu$  ist ein Gruppenhomomorphismus, also müssen wir nur zeigen, dass  $K^0(X \times S^2) \ni [\{F, f\}, 0]_{st}$  im Bild liegt. Es gilt nun

$$\begin{aligned} [\{F, f\}, 0]_{st} &\stackrel{1}{=} [\{F, z^{-m} q\}, 0]_{st} = [\{F, q\} \oplus H^{-m}, 0]_{st} \\ &\stackrel{2}{=} [((n+1)F, L^n q) \oplus H^{-m}, 0]_{st} - [nF, 1] \otimes H^{-m}, 0]_{st} \\ &\stackrel{3}{=} [\{((n+1)F)_+, 1\} \otimes H^{-m}, 0]_{st} + [\{((n+1)F)_-, z\} \otimes H^{-m}, 0]_{st} \\ &\quad - [nF, 1] \otimes H^{-m}, 0]_{st} \\ &= [\text{pr}_X^*((n+1)F)_+ \otimes H^{-m}, 0]_{st} + [\text{pr}_X^*((n+1)F)_- \otimes H^{1-m}, 0]_{st} \\ &\quad - [\text{pr}_X^*(nF) \otimes H^{-m}, 0]_{st} \end{aligned}$$

liegt im Bild von  $\mu$ . Für Injektivität betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned} \nu: K^0(X \times S^2) &\longrightarrow K^0(X) \otimes \mathbb{Z}[H]/(H-1)^2 \\ [\{F, f\}, 0]_{st} &\longmapsto [((n+1)F)_-, 0]_{st} \otimes (H-1) + [F, 0]_{st} \otimes H^{-m} \end{aligned}$$

Prüfe, dass dies wohldefiniert ist!  $\mathbb{Z}[H]/(H-1)^2$  wird erzeugt von  $1, H^{-1}$ . Dann gilt

$$\nu \circ \mu([F, 0]_{st} \otimes H^{-m}) = \nu([\{F, z^{-m}\}, 0]_{st}) = \underbrace{[F_-, 0]_{st}}_{=0} \otimes (H-1) + [F, 0]_{st} \otimes H^{-m}$$

## Konsequenzen aus der Bott-Periodizität

### Definition

Sei  $X$  ein kompakter Hausdorffraum mit Basispunkt  $x_0$ . Setze

$$\tilde{K}^{-n}(X) = K^{-n}(X, \text{pt})$$

$\tilde{\phantom{x}}$  heißt reduzierte  $K$ -Theorie von  $(X, x_0)$ . Theorem 3.21 impliziert

- ▶  $\tilde{K}^0(S^2) \cong \mathbb{Z} = \langle \beta_2 := 1 - [H, 0]_{\text{st}} \rangle$  mit  $\beta_2^2 = 0$
- ▶ allgemeiner  $\tilde{K}^0(S^{2n}) = \langle \beta_{2n} \rangle$  mit  $\beta_{2n}^2 = 0$ , wobei  $\beta_{2n}$  aus  $\beta_{2n-2}$  durch äußere Multiplikation mit  $\beta_2$  entsteht:

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{K}^0(S^{2m-2}) \otimes \tilde{K}(S^2) & \xrightarrow{\cong} & K^0(D^{2m}, S^{2m-1}) \otimes K^0(D^2, S^1) \\
 & & \downarrow \\
 & & K^0((D^{2m-2}, S^{2m-3}) \times (D^2, S^1)) \\
 & & \downarrow \cong \\
 & & K^0(D^{2m}, S^{2m-1}) \cong \tilde{K}^0(S^{2m})
 \end{array}$$

$$\text{Sei } j: K^0(S^2, \text{pt}) \cong K^0(D^2, S^1) \cong K^0(I^2, \partial I^2) \cong K^{-2}(\text{pt}), \beta_2 \mapsto \hat{\beta}_2 = j(\beta_2)$$

### Theorem

Sei  $(X, A)$  ein Ko-Raumpaar. Dann ist

$$K^{-n}(X, A) \xrightarrow{\hat{\beta}_2} K^{-n-2}(X, A)$$

ein Isomorphismus.

### Beweis

Es genügt  $n = 0$  zu betrachten. Sei  $A = \emptyset$ . Die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow K(S^2, \text{pt}) \longrightarrow K^0(S^2) \longrightarrow K^0(\text{pt}) \longrightarrow 0$$

spaltet, also spaltet auch

$$0 \longrightarrow K^0(X) \otimes K^0(S^2, \text{pt}) \longrightarrow K^0(X) \otimes K^0(S^2) \longrightarrow K^0(X) \otimes K^0(\text{pt}) \longrightarrow 0$$

Betrachte

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & K^0(X) \otimes K^0(S^2, \text{pt}) & \longrightarrow & K^0(X) \otimes K^0(S^2) & \longrightarrow & K^0(X) \otimes K^0(\text{pt}) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong 3.21 & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & K^0(X \times (S^2, \text{pt})) & \longrightarrow & K^0(X \times S^2) & \longrightarrow & K^0(X) \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Für  $A \neq \emptyset$  gilt  $K^{-n}$  gilt  $K^{-n}(X, A) \cong \tilde{K}^{-n}(X/A)$  nach Theorem 3.9 b). Angewandt auf den Pushout

$$\begin{array}{ccc} A & \hookrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ * & \longrightarrow & X/A \end{array}$$

Daher genügt es den Fall  $A = *$  zu betrachten. Dieser folgt analog zu dem unreduzierten Fall.

### Definition

Für  $n > 0$  und ein Ko-Raumpaar  $(X, A)$  definieren wir

$$K^n(X, A) := K^{-n}(X, A)$$

und die Randabbildung in der exakten Paarfolge über das nachfolgende Diagramm

$$\begin{array}{ccc} K^0(A) & \xrightarrow{\partial'} & K^1(X, A) \\ \downarrow \cong & & \downarrow = \\ K^{-2}(A) & \xrightarrow{\partial} & K^{-1}(X, A) \end{array}$$

Die Paarsequenzfolge reduziert dann auf die .....-Folge

$$\begin{array}{ccccc} K^0(X, A) & \longrightarrow & K^0(X) & \longrightarrow & K^0(A) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ K^1(A) & \longleftarrow & K^1(X) & \longleftarrow & K^1(X, A) \end{array}$$

## Die K-Theorie von $\mathbb{C}P^n$

### Theorem 3.2.5

Sei  $X$  ein endlicher CW-Komplex mit  $n$  Zellen. Dann ist  $K^*(X) = K^0(X) \oplus K^1(X)$  eine endlich erzeugte Gruppe mit höchstens  $n$  Erzeugern. Haben alle Zellen gerade Dimension, dann ist  $K^1(X) = 0$  und  $K^0(X)$  ist frei abelsch mit genau einem Erzeuger für jede Zelle.

#### Beweis

Per Induktion über die Anzahl der Zellen. Für  $X = \text{pt}$  ist die Aussage richtig. Es entstehe  $X$  aus  $A$  durch Anheften einer  $k$ -Zelle für ein  $k \in \mathbb{N}_0$ . Nach dem Theorem 3.9 b) angewandt auf das Pushout

$$\begin{array}{ccc} A & \hookrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{pt} & \longrightarrow & X/A \end{array}$$

gilt  $K^*(X, A) \cong K^*(X/A)$ . Folglich ist  $\tilde{K}^n(X/A) \rightarrow \tilde{K}^n(X) \rightarrow \tilde{K}^n(A)$  exakt. Wir haben

$$\tilde{K}^n(X/A) \cong \tilde{K}^n(S^k) \cong K(S^k, \text{pt}) \cong K(I^k, \partial I^k) = K^{n+k}(\text{pt}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{falls } n+k \text{ gerade} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$



Also ist  $\tilde{K}^n(X/A)$  entweder 0 oder  $\mathbb{Z}$ , also erhalten wir aus der Exaktheit, dass man maximal einen Erzeuger mehr braucht, um  $\tilde{K}(X)$  zu erzeugen, als man braucht um  $\tilde{K}^n(A)$  zu erzeugen.

Zur zweiten Aussage: Beweis durch Induktion nach Anzahl der Zellen (wie oben). Aussage ist korrekt für  $X = \text{pt.}$  Sei  $A$  ein CW-Komplex, der nur aus geraden dimensionalen Zellen besteht und  $X$  entstehe aus  $A$  durch das Anheften einer  $2k$ -Zelle. Wir betrachten  $K^1(X/A) \rightarrow \tilde{K}^1(X) \rightarrow \tilde{K}^1(A)$ . Mit Induktionsannahme folgt  $\tilde{K}^1(A) = 0$ . Weiterhin gilt  $\tilde{K}^1(X/A) \cong \tilde{K}^1(S^{2k}) = 0$ , also folgt  $\tilde{K}^1(X) = 0$  und auch  $K^1(X) = 0$ . Damit reduziert sich die 6-Term folge auf eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \tilde{K}^0(X/A) \longrightarrow K^0(X) \longrightarrow K^0(A) \longrightarrow 0$$

Es gilt  $\tilde{K}^0(X/A) \cong \tilde{K}(S^{2k}) \cong \mathbb{Z}$  und mit Induktionsannahme ist  $K^0(A)$  eine freie abelsche Gruppe vom Rang #Zellen von  $A$ . Also folgt  $\tilde{K}^0(X) = \tilde{K}^0(A) \oplus \mathbb{Z}$  und damit  $K^0(X) \cong K^0(A) \oplus \mathbb{Z}$ . Also ist

$$K^0(X) \cong K^0(A) \oplus \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}^{\# \text{ Zellen in } A} \oplus \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^{\# \text{ Zellen von } X}$$

## Korollar

$$K^0(\mathbb{CP}^n) = \mathbb{Z}^{n+1}, K^1(\mathbb{CP}^n) = 0.$$

Zur Ringstruktur auf  $K^*(\mathbb{CP}^n)$ . Sei

$$L_n = \{(v, V) \in \mathbb{C}^{n+1} \otimes \mathbb{CP}^n \mid v \in V\}$$

das kanonische ....Bündel über  $\mathbb{CP}^n$ . Für  $n = 1$  gilt  $L_1 = H$  mit  $H$  wie oben. Sei  $\mathbb{CP}^{n-1} \xrightarrow{p} \mathbb{CP}^n$  die Inklusion. Dann gilt  $L_{n-1} \cong p^*L_n$ .

## Satz

$$K^0(\mathbb{CP}^n) \cong \mathbb{Z}[L]/(L-1)^{n+1}$$

als Ring, induziert durch  $[L_n, 0]_{\text{st}} \leftrightarrow L$

### Beweis

Für  $n = 1$  ist die Aussage richtig (siehe Satz 3.2.1). Wir betrachten  $(\mathbb{CP}^n, \mathbb{CP}^{n-1})$  und die zugehörigen Sequenz aus der 6-Term Sequenz

$$0 \longrightarrow K^0(\mathbb{CP}^n, \mathbb{CP}^{n-1}) \longrightarrow K^0(\mathbb{CP}^n) \xrightarrow{\rho^*} K^0(\mathbb{CP}^{n-1}) \longrightarrow 0$$

Wir zeigen:  $(a_n) \cdot (L_n - 1)^n$  erzeugt den Kern von  $\rho^*$ . Anmerkung: Hieraus folgt der Satz, wenn wir annehmen, dass  $K^0(\mathbb{CP}^{n-1}) \cong \mathbb{Z}[L]/(L-1)^n$ , denn dann ist

$$\{1, (L_n - 1), (L_n - 1)^2, \dots, (L_n - 1)^n\}$$

eine additive Basis von  $K^0(\mathbb{CP}^n)$ .

$\mathbb{CP}^n \cong \text{Quotient von } S^{2n+1}/S^1$ , wobei  $S^1$  durch Multiplikation wirkt. Statt  $S^{2n+1} \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$  können wir auch den Rand von  $D_0^2 \times D_1^2 \times \dots \times D_n^2 \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$  betrachten, wobei  $D_i \subseteq \mathbb{C}$  die Einheitskugel ist.

$$\partial(D_0^2 \times D_1^2 \times \dots \times D_n^2) = \bigcup_i D_0^2 \times \dots \times \partial D_i^2 \times D_{i+1}^2 \times \dots \times D_n^2$$

Den Quotient von  $D_0^2 \times \dots \times \partial D_i^2 \times D_{i+1}^2 \times \dots \times D_n^2$  bezüglich der  $S^1$ -Operation bezeichnen wir mit  $C_i \subseteq \mathbb{CP}^n$ .  $C_i$  ist homöomorph zu  $D_0^2 \times \dots \times \hat{D}_i^2 \times D_{i+1}^2 \times \dots \times D_n^2$  und es gilt

$$C_i \cap C_j = \partial C_i \cap \partial C_j$$

Betrachte  $C_0 = D_1^2 \times \dots \times D_n^2$  und  $\partial C_0 = \bigcup_i \partial_i C_0$  mit

$$\partial_i C_0 = D_1^1 \times \dots \times \partial D_i^2 \times \dots \times D_n^2 \subseteq C_i$$

Die Inklusionen  $(D_i^2, \partial D_i^2) \hookrightarrow (C_0, \partial_i C_0) \subseteq (\mathbb{CP}^n, C_i)$  Wir erhalten

$$\begin{array}{ccc}
 K^0(D_0^2, \partial D_0^2) \otimes \dots \otimes K^0(D_n^2, \partial D_n^2) & \longrightarrow & K^0((D_1^2, \partial D_1^2) \times \dots \times (D_n^2, \partial D_n^2)) \\
 \cong \uparrow & & \cong \uparrow \\
 K^0(C_0, \partial_1 C_0) \otimes \dots \otimes K^0(C_0, \partial_n C_0) & \longrightarrow & K^0(C_0, \partial C_0) \\
 & & \uparrow \\
 K^0(\mathbb{CP}^n, C_1) \otimes \dots \otimes K^0(\mathbb{CP}^n, C_n) & \longrightarrow & K^0(\mathbb{CP}^n, C_1 \cup \dots \cup C_n) \cong K^0(\mathbb{CP}^n, \mathbb{CP}^{n-1}) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 K(\mathbb{CP}^n) \otimes \dots \otimes K(\mathbb{CP}^n) & \longrightarrow & K^0(\mathbb{CP}^n)
 \end{array}$$

das brauche ich aus den Notizen...

## 4. Die Hopf-Invariante

Zur Erinnerung: Wir wollen den folgenden Satz beweisen:

**Theorem (ADAMS).** Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (i)  $\mathbb{R}^n$  besitzt die Struktur einer reellen Divisionsalgebra.
- (ii) Entweder ist  $n = 1$  oder  $n \geq 2$  ist gerade und es gibt eine stetige Abbildung  $f: S^{2n-1} \rightarrow S^n$  mit Hopf-Invariante 1.
- (iii) Es gilt  $n \in \{1, 2, 4, 8\}$ .

Ziel für heute: Definition der Hopf-Invariante sowie (i) $\Rightarrow$ (ii).

### 4.1. Definition

Ein H-Raum ist ein punktierter topologischer Raum  $(X, e)$  mit Basispunkt  $e \in X$  zusammen mit einer stetigen Abbildung  $\mu: X \times X \rightarrow X$ , so dass

- (i)  $\mu(e, e) = e$
- (ii) Die Abbildung  $X \rightarrow X, x \mapsto \mu(x, e)$  und  $X \rightarrow X, x \mapsto \mu(e, x)$  sind beide homotop zur Identität auf  $X$ .

### 4.2. Satz

Falls  $\mathbb{R}^n$  die Struktur einer reellen Divisionsalgebra hat, dann existiert eine stetige Abbildung  $\mu: S^{n-1} \times S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ , sodass  $(S^{n-1}, e, \mu)$  ein H-Raum ist.

#### Beweis

Sei  $e \in \mathbb{R}^n$  die Eins der Divisionsalgebra. Dann gilt  $\|e\| \neq 0$ . Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $\|e\| = 1$  annehmen. Wenn dies nicht gilt, dann definieren wir eine neue Divisionsalgebrastruktur auf  $\mathbb{R}^n$  durch

$$x * y := x \bullet y \cdot \|e\|$$

mit Einselement  $\frac{e}{\|e\|} =: e'$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist also  $e \in S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ . Sei  $\mu: S^{n-1} \times S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$  gegeben durch

$$\mu(x, y) = \frac{x * y}{\|x * y\|}$$

Dies ist wohldefiniert, da  $x * y \neq 0$  für  $x, y \neq 0$ . Außerdem gilt  $\mu(x, e) = x$ ,  $\mu(e, x) = x$ ,  $\square$

### 4.3. Lemma

Seien  $k, l > 0$ . Dann gilt

$$K^0(S^{2l} \times S^{2k}) \cong K^0(S^{2l}) \otimes K^0(S^{2k}) \cong \mathbb{Z}[\alpha, \beta] / (\alpha^2, \beta^2)$$

### Beweis

Wir haben  $\tilde{K}^0(S^{2l}) \cong \mathbb{Z} = \langle \alpha \rangle$  mit  $\alpha^2 = 0$ . Die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow K^0(S^{2l}, \text{pt}) \longrightarrow K^0(S^{2l}) \longrightarrow K^0(\text{pt}) \cong \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

spaltet durch einen Ringhomomorphismus  $\mathbb{Z} \cong K^0(\text{pt}) \rightarrow K^0(S^{2l})$ . Hieraus lesen wir die Ringstruktur von  $K^0(S^{2l})$  ab:  $K^0(S^{2l}) \cong \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \cdot \alpha$  mit  $\alpha^2 = 0$ . Das heißt

$$K^0(S^{2l}) \cong \mathbb{Z}[\alpha]/(\alpha^2)$$

und somit  $K^0 S^{2l} \otimes K^0(S^{2k}) \cong \mathbb{Z}[\alpha, \beta]/(\alpha^2, \beta^2)$ . Aus Bott-Periodizität folgt

$$\begin{aligned} K^0(S^{2k}, \text{pt}) &= \tilde{K}^0(S^{2k}) \cong \tilde{K}^0(S^{2k-2}) \otimes \tilde{K}^0(S^2) \\ K^0(X) \otimes K^0(S^2, \text{pt}) &\cong K^0(X \times (S^2, \text{pt})) \end{aligned}$$

Zusammen folgt durch Induktion, dass

$$K^0(X) \otimes K^0(S^{2k}, \text{pt}) \cong K^0(X \times (S^{2k}, \text{pt}))$$

Jetzt betrachten wir

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & K^0(X) \otimes K^0(S^{2k}, \text{pt}) & \longrightarrow & K^0(X) \otimes K^0(S^{2k}) & \longrightarrow & K^0(X) \otimes K^0(\text{pt}) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \cong & & \downarrow (1) & & \downarrow \cong \\ 0 & \longrightarrow & K^0(X \times (S^{2k}, \text{pt})) & \longrightarrow & K^0(X \times S^{2k}) & \longrightarrow & K^0(X \times \text{pt}) \longrightarrow 0 \end{array}$$

(1) ist auch ein Isomorphismus. Die Aussage folgt für  $X = S^{2l}$ . □

### 4.4. Satz

Falls  $S^{n-1}$  ein H-Raum ist, dann ist entweder  $n = 1$  oder  $n \geq 2$  gerade.

#### Beweis

Wir zeigen: Für  $k > 0$  kann  $S^{2k}$  kein H-Raum sein. Angenommen wir haben H-Raum-Struktur  $\mu: S^{2k} \times S^{2k} \rightarrow S^{2k}$  mit Eins  $e$ .

$$\mu^*: \mathbb{Z}[\gamma]/(\gamma^2) \longrightarrow \mathbb{Z}[\alpha, \beta]/(\alpha^2, \beta^2)$$

$$K^0(S^{2k}) \longrightarrow K^0(S^{2k} \times S^{2k})$$

$$\begin{aligned} S^{2k} &\xrightarrow{i} S^{2k} \times S^{2k} \xrightarrow{\mu} S^{2k} \\ x &\longmapsto (x, e) \end{aligned}$$

≅ ins Diagramm einfügen

Jetzt betrachte

Dies ist homotop zur Identität, das heißt  $i^* \circ \mu^* = \text{id}_{K^0(S^{2k})}$ . Betrachte

$$\begin{array}{ccc} K^0(S^{2k} \times S^{2k}) & \xrightarrow{i^*} & K^0(S^{2k} \times \text{pt}) \\ \uparrow * & & \uparrow \\ K^0(S^{2k}) \otimes K^0(S^{2k}) & \longrightarrow & K^0(S^{2k}) \otimes K^0(\text{pt}) \end{array}$$

$$\mathbb{Z}[\alpha, \beta] / (\alpha^2, \beta^2) \xrightarrow{i^*} \mathbb{Z}[\gamma] / (\gamma^2)$$

$$\alpha \longmapsto \gamma$$

$$\beta \longmapsto 0$$

Seien  $r, s, t \in \mathbb{Z}$ , so dass  $\mu^*(\gamma) = r\alpha + s\beta + t\alpha\beta$ . Dann gilt  $r\gamma = i^* \circ \mu^*(\gamma) = \gamma$ . Also ist  $r = 1$ . Analog folgt  $s = 1$ .

$$\Rightarrow 0 = \mu^*(\gamma^2) = (\mu^*(\gamma))^2 = 2\alpha\beta \neq 0$$

Widerspruch! □

Eine H-Raum-Struktur  $\mu: S^{n-1} \times S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$  liefert eine stetige Abbildung  $f: S^{2n-1} \rightarrow S^n$  definiert wir folgt: Wir haben  $S^{2n-1} \cong \partial(D^n \times D^n) = \partial D^n \times D^n \cup D^n \times \partial D^n$  und  $S^n \cong D_+^n \amalg D_-^n / \sim$  durch Verklebung entlang von  $S^{n-1} = \partial D_+^n = \partial D_-^n$ .  $f$  ist definiert durch

$$\begin{aligned} f: \partial D^n \times D^n \cup D^n \times \partial D^n &\longrightarrow D_+^n \amalg D_-^n / \sim \\ (x, y) &\longmapsto \begin{cases} \|y\| \cdot \mu\left(x, \frac{y}{\|y\|}\right), & \text{falls } (x, x) \in \partial D^n \times D^n \\ \|x\| \cdot \mu\left(\frac{x}{\|x\|}, y\right), & \text{falls } (x, y) \in D^n \times \partial D^n \end{cases} \end{aligned}$$

$f$  ist wohldefiniert und stetig. Ab jetzt nehmen wir  $n = 2k$  an. Sei  $f: S^{4k-1} \rightarrow S^{2k}$  eine stetige Abbildung.  $f$  ist die Anklebeabbildung einer  $4k$ -Zelle  $D^{4k}$  an  $S^{2k}$ . Sei  $C_f$  durch das Pushout-Diagramm

$$\begin{array}{ccc} S^{4k-1} & \hookrightarrow & D^{4k} \\ \downarrow f & & \downarrow \\ S^{2k} & \hookrightarrow & C_f \end{array}$$

Es gilt  $C_f / S^{2k} \cong S^{4k}$ . Damit folgt

$$K^0(C_f, S^{2k}) \cong K^0(D^{4k}, S^{4k-1}) \cong \tilde{K}^0(S^{4k})$$

Wegen  $\tilde{K}^1(S^{4k}) \cong \tilde{K}^1(S^{2k}) = 0$  erhalten wir aus der exakten Tripelsequenz für  $C_f \supset S^{2k} \supset \text{pt}$  die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \tilde{K}^0(S^{4k}) \longrightarrow \tilde{K}^0(C_f) \longrightarrow \tilde{K}^0(S^{2k}) \longrightarrow 0$$

Sei  $\alpha \in \tilde{K}^0(C_f)$  das Bild des Generator von  $\tilde{K}^0(S^{4k})$  in  $\tilde{K}^0(C_f)$ . Sei  $\beta \in \tilde{K}^0(C_f)$  ein Element, welches auf den Generator von  $\tilde{K}^0(S^{2k})$  abbildet. Dann ist das Bild von  $\beta^2$  in  $\tilde{K}^0(S^{2k})$  gleich 0. Also ist  $\beta^2 = h_f \cdot \alpha$  für ein  $h_f \in \mathbb{Z}$ .

#### 4.5. Lemma

$h_f$  ist unabhängig von der Wahl von  $\beta$ .

##### Beweis

Sei  $\beta'$  ein weiteres Element. Dann gilt  $\beta' = \beta + m \cdot \alpha$  für ein  $m \in \mathbb{Z}$ . Es gilt dann

$$(\beta')^2 = \beta^2 + 2m\beta\alpha$$

Das Bild von  $\alpha\beta$  in  $\tilde{K}^0(S^{2k})$  ist 0. Damit ist  $\alpha\beta = r \cdot \alpha$  für ein  $r \in \mathbb{Z}$ . Es folgt

$$r\alpha\beta = \alpha\beta^2 = h_f \cdot \alpha^2 = 0$$

da  $\alpha^2 = 0$  ist. Damit ist  $\alpha\beta = 0$ , da  $\alpha\beta \in \text{Im}(\mathbb{Z} = \tilde{K}^0(S^{4k}) \hookrightarrow \tilde{K}^0(C_f))$ . Also gilt  $(\beta')^2 = \beta^2$ .  $\square$

#### 4.6. Definition

Das Element  $h_f \in \mathbb{Z}$  heißt die *Hopf-Invariante* von  $f$ .

#### 4.7. Satz

Sei  $f: S^{4k} \rightarrow S^{2k}$  die stetige Abbildung assoziiert zu einer H-Raum-Struktur auf  $S^{2k-1}$ . Dann gilt  $h_f \in \{\pm 1\}$ .

##### Beweis

## A. Anhang

### A.1. Lokale Trivialität des Tangentialbündels auf $S^n$

Sei  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  die  $n$ -Sphäre und sei

$$TS^n = \{(x, v) \in S^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, v \rangle = 0\}$$

Wir definieren  $p: TS^n \rightarrow S^n$  durch  $p(x, v) = x$ . Wir zeigen, dass  $p: TS^n \rightarrow S^n$  lokal trivial ist.

#### Beweis

Sei  $x_0 \in S^n$  gegeben. Sei  $U := \{x \in S^n \mid \langle x, x_0 \rangle > 0\}$ . Da  $\langle x_0, x_0 \rangle = 1$  ist, ist  $x_0 \in U$ . Weiter ist  $U$  offen in  $S^n$ , also eine offene Umgebung von  $x_0$ . Sei  $H \subset \mathbb{R}^{n+1}$  die Hyperebene gegeben durch  $H = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, v \rangle = 0\}$ . Da dies ein  $n$ -dimensionaler Vektorraum ist, finden wir einen Isomorphismus  $\kappa: H \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Sei  $TS^n|_U = p^{-1}(U)$ . Wegen  $\langle x_0, x_0 \rangle = 1$  liegt  $v - \langle x_0, v \rangle x_0$  in  $H$  für alle  $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ . Also können wir definieren:

$$\varphi: TS^n|_U \rightarrow U \times \mathbb{R}^n, \quad (x, v) \mapsto (x, \kappa(v - \langle x_0, v \rangle x_0))$$

Außerdem definieren wir  $\psi: U \times \mathbb{R}^n \rightarrow TS^n|_U$  durch

$$\psi(x, w) = \left( x, \kappa^{-1}(w) - \frac{\langle x, \kappa^{-1}(w) \rangle}{\langle x, x_0 \rangle} x_0 \right)$$

Dies ist wohldefiniert, da für  $x \in U$  der Nenner stets ungleich 0 ist und weiter

$$\left\langle x, \kappa^{-1}(w) - \frac{\langle x, \kappa^{-1}(w) \rangle}{\langle x, x_0 \rangle} x_0 \right\rangle = \langle x, \kappa^{-1}(w) \rangle - \frac{\langle x, \kappa^{-1}(w) \rangle}{\langle x, x_0 \rangle} \langle x, x_0 \rangle = 0$$

gilt. Weiter sind beide Abbildungen offensichtlich stetig. Für die Komposition gilt

$$(\psi \circ \varphi)(x, v) = \left( x, v - \langle x_0, v \rangle x_0 - \frac{\langle x, v - \langle x_0, v \rangle x_0 \rangle}{\langle x, x_0 \rangle} x_0 \right) = (x, v - \langle x_0, v \rangle x_0 + \langle x_0, v \rangle x_0) = (x, v)$$

Dabei haben wir benutzt, dass  $\langle x, v \rangle = 0$  gilt. Umgekehrt gilt

$$\begin{aligned} (\varphi \circ \psi)(x, w) &= \left( x, \kappa \left( \kappa^{-1}(w) - \frac{\langle x, \kappa^{-1}(w) \rangle}{\langle x, x_0 \rangle} x_0 - \left\langle x_0, \kappa^{-1}(w) - \frac{\langle x, \kappa^{-1}(w) \rangle}{\langle x, x_0 \rangle} x_0 \right\rangle x_0 \right) \right) \\ &= \left( x, \kappa \left( \kappa^{-1}(w) - \frac{\langle x, \kappa^{-1}(w) \rangle}{\langle x, x_0 \rangle} x_0 - \langle x_0, \kappa^{-1}(w) \rangle x_0 + \frac{\langle x, \kappa^{-1}(w) \rangle}{\langle x, x_0 \rangle} x_0 \right) \right) \\ &= (x, \kappa(\kappa^{-1}(w) - \langle x_0, \kappa^{-1}(w) \rangle x_0)) = (x, w) \end{aligned}$$

da wieder  $\langle x_0, \kappa^{-1}(w) \rangle = 0$ , weil  $\kappa^{-1}(w) \in H$  ist. Damit ist  $\varphi$  ein Homöomorphismus. Es ist außerdem klar, dass  $\varphi$  eingeschränkt auf die Fasern eine lineare Abbildung ist. Damit ist das Tangentialbündel  $TS^n$  lokal trivial.  $\square$





# Abbildungsverzeichnis

## To-do's und andere Baustellen

Revision	5
eventuell hinzufügen	5
Rev 2	6
In den Anhang?	7
kommt der Beweis noch?	7
Figure: Schöne Quadrate $X \times I$	9
Hier vlt mal $\timesfrac$ benutzen?	16
Ab hier fehlen noch diverse Diagramme	19
Hier fehlt noch eine Aussage ...	19
Figure: Diagramm mit Vektorschreibweise	20
sternchen oder sowas einfügen	21
Figure: Diagramm	23
hier fehlt noch was	24
das brauche ich aus den Notizen...	30
$\cong$ ins Diagramm einfügen	32