



WESTFÄLISCHE
WILHELMS-UNIVERSITÄT
MÜNSTER



FACHBEREICH 10
MATHEMATIK UND
INFORMATIK

Skript Topologie I.


Mitschrift der Vorlesung „Topologie I.“ von Prof. Dr. Arthur Bartels

Jannes Bantje

1. Februar 2015

Aktuelle Version verfügbar bei:



 **GitHub** (inklusive Sourcecode)
<https://github.com/JaMeZ-B/latex-www> 




 **Bittorrent Sync**
B6WH2DISQ5QVYIRYIEZSF4ZR2IDVKPN3I

Vorwort — Mitarbeit am Skript

Dieses Dokument ist eine Mitschrift aus der Vorlesung „Topologie I., WiSe 2014/2015“, gelesen von Prof. Dr. Arthur Bartels. Der Inhalt entspricht weitestgehend dem Tafelanschrieb. Für die Korrektheit des Inhalts übernehme ich keinerlei Garantie! Für Bemerkungen und Korrekturen – und seien es nur Rechtschreibfehler – bin ich sehr dankbar. Korrekturen lassen sich prinzipiell auf drei Wegen einreichen:

- Persönliches Ansprechen in der Uni, Mails an [✉ j.bantje@wwu.de](mailto:j.bantje@wwu.de) (gerne auch mit annotieren PDFs)
- *Direktes* Mitarbeiten am Skript: Den Quellcode poste ich auf GitHub (siehe oben), also stehen vielfältige Möglichkeiten der Zusammenarbeit zur Verfügung: Zum Beispiel durch Kommentare am Code über die Website und die Kombination Fork + Pull Request. Wer sich verdient macht oder ein Skript zu einer Vorlesung, die ich nicht besuche, beisteuern will, dem gewähre ich gerne auch Schreibzugriff.

Beachten sollte man dabei, dass dazu ein Account bei github.com  notwendig ist, der allerdings ohne Angabe von persönlichen Daten angelegt werden kann. Wer bei GitHub (bzw. dem zugrunde liegenden Open-Source-Programm „git“) – verständlicherweise – Hilfe beim Einstieg braucht, dem helfe ich gerne weiter. Es gibt aber auch zahlreiche empfehlenswerte Tutorials im Internet.¹


- *Indirektes* Mitarbeiten: \TeX -Dateien per Mail verschicken.


Dies ist nur dann sinnvoll, wenn man einen ganzen Abschnitt ändern möchte (zB. einen alternativen Beweis geben), da ich die Änderungen dann per Hand einbauen muss! Ich freue mich aber auch über solche Beiträge!

Vorlesungshomepage



[https:](https://wwwmath.uni-muenster.de/reine/u/topos/lehre/WS2014-2015/Topologie1/Topologie1.html)

[//wwwmath.uni-muenster.de/reine/u/topos/lehre/WS2014-2015/Topologie1/Topologie1.html](https://wwwmath.uni-muenster.de/reine/u/topos/lehre/WS2014-2015/Topologie1/Topologie1.html) 

¹zB. <https://try.github.io/levels/1/challenges/1> , ist auf Englisch, aber dafür interaktives LearningByDoing

Inhaltsverzeichnis

1	Kategorien, Funktoren und natürliche Transformationen	1
1.1	Definition: Kategorie	1
1.2	Beispiele für Kategorien	1
1.3	Bemerkungen zu Kategorien	2
1.4	Definition: Funktor	2
1.5	Beispiele für Funktoren	2
1.6	Definition: Natürliche Transformation	2
1.7	Ausblick auf Kategorien und Funktoren in der algebraischer Topologie	3
2	Kombinatorische Beschreibungen topologischer Räume	4
2.1	Beispiel einer kombinatorischen Beschreibung eines Raumes	4
2.2	Definition: Simplicialer Komplex	4
2.3	Beispiel für simpliciale Komplexe	4
2.4	Definition: Unterkomplex	4
2.5	Definition: Simpliciale Abbildung	5
2.6	Definition: Geometrische Realisierung	5
2.7	Beispiel: Rand des n -Simplizes und der Torus	5
2.8	Definition: Polyeder	6
2.9	Definition: Euler-Charakteristik	6
2.10	Satz über die Euler-Charakteristik	6
3	Simpliciale Homologie	7
3.1	Definition: Freier R -Modul mit Basis S	7
3.2	Lemma: Universale Eigenschaft von freien Moduln	7
3.3	Beispiel für freie und nicht-freie Moduln	7
3.4	Definition: n -ter Kettenmodul	8
3.5	Definition: Orientierung eines $(n - 1)$ -Simplizes als Teilmenge eines n -Simplizes	8
3.6	Definition: n -te Randabbildung	8
3.7	Proposition: Für die Randabbildung gilt $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$	8
3.8	Lemma: Ein $(n - 2)$ -Simplex ist Seite von genau zwei $(n - 1)$ -Simplizes	9
3.9	Notation für das Weglassen eines Knotens	9
3.10	Definition: n -ter Homologiemodul	9
3.11	Beispiele für Homologiemoduln	9
3.12	Definition: R -Kettenkomplex, n -te Homologie eines R -Kettenkomplexes	10
3.13	Bemerkungen zu Kettenkomplexen	10
3.14	Definition: Simplicialer Kettenkomplex	10
4	Euler-Charakteristik von Kettenkomplexen	11
4.1	Wiederholung: Torsionsgruppe	11
4.2	Lemma: Rang einer endlich erzeugten abelschen Gruppe	11
4.3	Definition: Kurze exakte Sequenz	11
4.4	Beispiele für kurze exakte Folgen	12
4.5	Bemerkung: Spaltung einer kurzen exakten Sequenz	12
4.6	Bemerkung: Existenz einer Spaltung, wenn M_2 frei ist	12
4.7	Bemerkung: Der Rang ist additiv	12
4.8	Proposition: Der Rang ist für kurze exakte Folgen endl. erz., abelscher Gruppen additiv	13
4.9	Definition: Eulercharakteristik von \mathbb{Z} -Kettenkomplexen	14
4.10	Satz: Eulercharakteristik eines endlich erzeugten \mathbb{Z} -Kettenkomplexes	14
4.11	Korollar: Die Eulercharakteristik eines simplicialen Komplexes	14

5	Singuläre Homologie	15
5.1	Definition: Singuläre Simplizes und n -ter singulärer Kettenmodul	15
5.2	Definition: Einschränkung eines singulären Simplizes auf eine Seite	15
5.3	Bemerkung zur Inklusion der j -ten Seite	15
5.4	Definition: n -te singuläre Randabbildung	15
5.5	Proposition: Für die Randabbildungen gilt $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$	15
5.6	Lemma: Hilfslemma für Proposition 5.5	15
5.7	Definition: Singuläre Homologie von X	16
5.8	Definition: n -Ketten, n -Ränder und n -Zykel und Homologieklassen	16
5.9	Beispiel: Die Homologie des Ein-Punkt-Raumes	16
5.10	Proposition: Eigenschaften von $H_0(X)$ für $X \neq \emptyset$ und X wegzusammenhängend	17
5.11	Bemerkung: Vorgehen, um später zu zeigen: $H_*(K; R) \cong H_*(K ; R)$	17
6	Funktorialität	18
6.1	Definition: R -Kettenabbildung	18
6.2	Bemerkung: Induzierte Abbildung einer Kettenabbildung auf Homologie	18
6.3	Bemerkung: Homologie definiert einen Funktor	18
6.4	Definition: Induzierte Abbildung auf Kettenkomplexen	18
6.5	Proposition: Der singuläre Kettenkomplex über R bildet einen Funktor	19
6.6	Korollar: Homologie ist ein Funktor $\text{Top} \rightarrow R\text{-Mod}$	19
6.7	Bemerkung: Notation für die auf Homologie induzierte Abbildung	19
6.8	Definition: Summe oder Koproduct von topologischen Räumen	19
6.9	Definition: Summe von R -Moduln	20
6.10	Satz: Homologie des Koproductes topologischer Räume	20
7	Homotopieinvarianz	21
7.1	Bemerkung: Die induzierte Abbildung eines Homöomorphismus ist ein Isomorphismus	21
7.2	Definition: Homotopieäquivalenz und Homotopieinverse	21
7.3	Satz: Homotopieinvarianz der Homologie	21
7.4	Korollar: Die induzierte Abbildung einer Homotopieäquivalenz ist ein Isomorphismus	21
7.5	Korollar: Homologie eines kontrahierbaren Raumes	21
7.6	Definition: Kettenhomotopie	22
7.7	Prop.: induzierte Abbildungen von kettenhomotopen Kettenabbildungen sind gleich	22
7.8	Lemma: Reduktion von Satz 7.3 auf Beweis eines Spezialfalles	22
7.9	Bemerkung zum Vorgehen beim Beweis von [#]	22
7.10	Definition: Affin lineare Abbildungen zur Konstruktion der Kettenhomotopie	23
7.11	Lemma: Gleichungen für die Abbildungen aus 7.10	24
7.12	Beweis von [##]/Konstruktion der Kettenhomotopie	25
7.13	Bemerkung: Konstruktion einer Kettenhomotopie aus einer Homotopie	25
8	Homologie von Paaren	26
8.1	Definition: Paar von topologischen Räumen	26
8.2	Definition: Singulärer Kettenkomplex und Homologiemodul von Paaren	26
8.3	Definition: Der singuläre Kettenkomplex von Paaren definiert einen Funktor	26
8.4	Bemerkung: Topologische Räume als Paar auffassen	26
8.5	Frage: Können wir $H_n(X, A; R)$ durch $H_n(X; R)$ und $H_n(A; R)$ ausdrücken?	26
8.6	Beispiel: Homologie des Paares $(\Delta^n , \partial\Delta^n)$	26
8.7	Definition: Lange exakte Sequenz von R -Moduln	27
8.8	Satz: Existenz der Paarsequenz	27
8.9	Korollar: Homologiemodul wenn A kontraktibel ist	27
8.10	Definition: Kurze exakte Folge von Kettenkomplexen	28
8.11	Beispiel einer kurzen exakten Folge von Kettenkomplexen	28

8.12	Schlangenlemma	28
8.13	Beweis von Satz 8.8	30
8.14	Bemerkung	30
8.15	Fünfer-Lemma	31
8.16	Lemma („2 von 3“)	31
9	Ausschneidung und die Mayer-Vietoris Folge	33
9.1	Satz: Ausschneidungsisomorphismus	33
9.2	Satz (Mayer-Vietoris-Folge)	33
9.3	Bemerkung zur Anwendbarkeit der Mayer-Vietoris-Folge	35
9.4	Satz: Homologie der Sphäre S^n	35
9.5	Definition: Reduzierte Homologie	35
9.6	Bemerkung: Die Aussage von Satz 9.4 in reduzierter Homologie	35
9.7	Beweis von [##]	36
10	Anwendungen	37
10.1	Satz: Invarianz der Dimension	37
10.2	Fixpunktsatz von Brouwer	37
10.3	Definition: Abbildungsgrad einer stetigen Abbildung $f: S^n \rightarrow S^n$	37
10.4	Proposition: Einfache Eigenschaften des Abbildungsgrades	37
10.5	Beispiel: Abbildungsgrad der Spiegelung $R_i: S^n \rightarrow S^n$	38
10.6	Beispiel: Grad der Punktspiegelung	39
10.7	Erinnerung: Vektorfelder	39
10.8	Satz: Es gibt ein Vektorfeld ohne Nullstellen auf $S^n \iff n$ ist ungerade	39
10.9	Satz (Jordanscher Kurvensatz)	40
10.10	Satz: Homologie von S^n ohne Einbettung von Scheiben D^k und Sphären S^k mit $k < n$	40
10.11	Proposition über Homologie von $X = \bigcup_{a \in N} U_a$ wobei $U_a \subseteq U_{a+1}$	40
10.12	Beweis von Satz 10.10	40
11	CW-Komplexe	42
11.1	Definition: Pushout	42
11.2	Bemerkung zur Existenz und zur Eindeutigkeit des Pushouts	42
11.3	Definition: CW-Komplex	42
11.4	Bemerkungen zur Definition von CW-Komplexen	43
11.5	Beispiele für CW-Komplexe	43
11.6	Lemma: Kompaktheit von Teilmengen eines CW-Komplexes	45
11.7	Korollar: Ein CW-Komplex ist genau dann kompakt, wenn er endlich ist.	45
12	Zelluläre Homologie	46
12.1	Definition: n -ter zellulärer Kettenmodul und zelluläre Randabbildung	46
12.2	Lemma: Für die zellulären Randabbildungen gilt $\partial_{n-1}^{\text{cell}} \circ \partial_n^{\text{cell}} = 0$	46
12.3	Definition: Zellulärer Kettenkomplex und zelluläre Homologie	46
12.4	Bem.: Funktorialität des zellulären Kettenkomplexes und der zellulären Homologie	46
12.5	Lemma über $(\coprod Q_i^{(n)}, \coprod q_i^{(n)})_*$ und $H_k(\coprod D_i^n, \coprod S_i^{n-1}; R)$	46
12.6	Bemerkung: Matrixform der Randabbildung ∂_n^{cell}	47
12.7	Definition: Natürlicher Isomorphismus	48
12.8	Satz: Natürlicher Isomorphismus zwischen zellulärer und singulärer Homologie	48
12.9	Lemma: Die Homologie des n -Gerüsts und die von $X^{(n)} \hookrightarrow X$ induzierte Abbildung	49
12.10	Korollar: Die Eulercharakteristik ist eine topologische Invariante	49
12.11	Bemerkung: n -te Bettizahl und Eulercharakteristik eines CW-Komplexes	49
12.12	Beispiel: Homologie von $\mathbb{C}P^n$	50
12.13	Beispiel: Homologie von $\mathbb{R}P^n$	50

12.14	Satz: Isomorphie zwischen $C_*(K; R)$ und $C_n^{\text{cell}}(K ; R)$	52
13	Kleine Simplizes	53
13.1	Satz: Ausschneidungs-Isomorphismus	53
13.2	Definition: \mathcal{U} -klein	53
13.3	Satz über kleine Simplizes	53
13.4	Bemerkung	53
13.5	Beweis des Ausschneidungssatzes (13.1)	53
13.6	Idee zum Beweis des Satzes über kleine Simplizes	54
13.7	Definition: Schwerpunkt und „Abkegeln“	54
13.8	Lemma	54
13.9	Definition von Zerteilungsoperatoren	54
13.10	Lemma 1	55
13.11	Lemma 2	55
13.12	Beweis des Satzes über kleine Simplizes (13.3)	55
13.13	Bemerkung	55
13.14	Definition: Affiner singulärer Simplex	55
13.15	Definition: Durchmesser eines Simplizes	56
13.16	Lemma 3	56
14	Axiome für Homologie	58
14.1	Bezeichnung: Funktor mit $(X, A) \mapsto (X, \emptyset)$	58
14.2	Definition: Homologietheorie	58
14.3	Bemerkung zur Homotopieinvarianz von Homologietheorien	58
14.4	Bemerkung zu Mayer-Vietoris-Folge und disjunkten Vereinigungen	58
14.5	Definition: Dimensionsaxiom und Axiom über disjunkte Vereinigungen	58
14.6	Bemerkung: Statt \mathbb{N} -graduierten Moduln sind oft auch \mathbb{Z} -graduierte Moduln nötig	59
14.7	Bemerkung	59
14.8	Definition: Morphismus von Homologietheorien	59
14.9	Satz: Isomorphie der Homologie von CW-Komplexen von zwei Homologietheorien	59
15	Zusammenhang zwischen $\pi_1(X, x_0)$ und $H_1(X, \mathbb{Z})$	61
15.1	Definition: Kommutatorgruppe	61
15.2	Lemma	61
15.3	Definition	61
15.4	Bemerkung	61
15.5	Schleifen und 1-Zykel	61
15.6	Lemma 1	61
15.7	Lemma 2	62
15.8	Lemma 3	62
15.9	Die Hurewicz-Abbildung	63
15.10	Theorem (Hurewicz)	63
15.11	Lemma 4	63
15.12	Lemma 5	64
15.13	Corollar	64
15.14	Definition	64
15.15	Eigenschaften von $\pi_n(X, x_0)$	65
15.16	Definition	65
15.17	Bemerkung	65
15.18	Beispiel	65
15.19	Definition: Relative Homotopiegruppen	65
15.20	Bemerkung	66

15.21 Die Hurewicz-Abbildung	66
15.22 Lemma	66
15.23 Theorem (Hurwicz)	66
15.24 Korollar	66
15.25 Satz	66
16 Die Fundamentalklasse	68
16.1 Beispiele für die Homologiegruppen verschiedener Mannigfaltigkeiten	68
16.2 Bemerkung	68
16.3 Definition: Homologische Orientierung	68
16.4 Notation	68
16.5 Definition: Homologische Orientierung auf der gesamten Mannigfaltigkeit	68
16.6 Beispiel	68
16.7 Beispiel: Orientierung von S^n	69
16.8 Bezeichnung: Geschlossene Mannigfaltigkeit	69
16.9 Satz	69
16.10 Definition	69
16.11 Bemerkung	69
16.12 Bemerkung	70
16.13 Beispiel	70
16.14 Lemma	70
16.15 Bemerkung	70
Index	A
Abbildungsverzeichnis	C
Todo list	C

1 Kategorien, Funktoren und natürliche Transformationen

1.1 Definition

Eine **Kategorie** \mathcal{C} besteht aus:

- i) Einer Klasse $\text{Ob}(\mathcal{C})$. Die Elemente von $\text{Ob}(\mathcal{C})$ heißen die **Objekte** von \mathcal{C} .
- ii) Zu je zwei Objekten A, B aus \mathcal{C} einer Menge $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$. Die Elemente von $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ heißen **Morphismen** von \mathcal{C} .
- iii) Zu je drei Objekten A, B, C aus \mathcal{C} einer Abbildung:

$$\text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C) \times \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, C), \quad (f, g) \mapsto f \circ g$$

genannt die **Komposition** in \mathcal{C} .

Dabei müssen folgende Axiome erfüllt sein:

- (i) Die Komposition ist **assoziativ**:
Für Objekte A, B, C, D von \mathcal{C} und $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(C, D), g \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C), h \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ gilt immer

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

- (ii) Die Komposition ist **unital**: Für jedes Objekt A von \mathcal{C} gibt es einen Morphismus $\text{id}_A \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, A)$ so, dass

$$\forall f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, A) : \text{id}_A \circ f = f \quad \text{und} \quad \forall f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) : f \circ \text{id}_A = f$$

1.2 Beispiele

- (1) Die Kategorie der Mengen **MENGEN**: Objekte sind Mengen und Morphismen sind Abbildungen.
- (2) Die Kategorie der Gruppen **GRUPPEN**: Objekte sind Gruppen und Morphismen sind Gruppenhomomorphismen.
- (3) Die Kategorie der K -Vektorräume K -VR: Objekte sind K -Vektorräume und die Morphismen sind K -lineare Abbildungen.
- (4) Die Kategorie der R -Moduln R -MOD: Objekte sind R -Moduln und Morphismen sind R -lineare Abbildungen.
- (5) Die Kategorie der C^∞ -Mannigfaltigkeiten C^∞ -MAN: Objekte sind C^∞ -Mannigfaltigkeiten und Morphismen sind C^∞ -Abbildungen.
- (6) Die Kategorie der topologischen Räume **TOP**: Objekte sind topologische Räume und Morphismen sind stetige Abbildungen.
- (7) Die Kategorie der punktierten topologischen Räume **TOP_{*}**: Objekte sind punktiert-topologische Räume und Morphismen sind punktiert-stetige Abbildungen.
- (8) Die Kategorie **HTOP**: Objekte sind topologische Räume und Morphismen sind Homotopieklassen von stetigen Abbildungen.
- (9) Die Kategorie **HTOP_{*}**: Objekte sind punktiert-topologische Räume und Morphismen sind Homotopieklassen von punktiert-stetigen Abbildungen.
- (10) Sei G eine Gruppe. Wir erhalten eine Kategorie \mathcal{C}_G mit genau einem Objekt $*$ und $\text{Mor}_{\mathcal{C}_G}(*, *) = G$. Die Komposition wird durch die Verknüpfung in der Gruppe festgelegt.
- (11) Ist \mathcal{C} eine Kategorie, so ist \mathcal{C}^{op} eine Kategorie, wobei $\text{Ob}(\mathcal{C}^{\text{op}}) = \text{Ob}(\mathcal{C})$ und $\text{Mor}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(A, B) := \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, A)$. Die Komposition ist gegeben durch $f \circ^{\text{op}} g := g \circ f$.

1.3 Bemerkung

- (i) Eine Kategorie heißt **klein**, wenn ihre Objekte eine Menge bilden.
- (ii) Statt $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ schreiben wir oft $f: A \rightarrow B$ oder $A \xrightarrow{f} B$.

1.4 Definition

Seien \mathcal{C} und \mathcal{D} Kategorien: Ein **Funktor** $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ordnet jedem Objekt C von \mathcal{C} ein Objekt $F(C)$ von \mathcal{D} und ordnet jedem Morphismus $f: C \rightarrow C'$ in \mathcal{C} einen Morphismus $F(f): F(C) \rightarrow F(C')$ in \mathcal{D} zu. Dabei muss gelten:

$$F(f \circ g) = F(f) \circ F(g) \quad \text{und} \quad F(\text{id}_C) = \text{id}_{F(C)}$$

1.5 Beispiele

- (1) Es gibt offensichtliche „Vergiss“-Funktoen:

$$\begin{aligned}
 K\text{-VR} &\longrightarrow \text{MENGEN} \\
 R\text{-MOD} &\longrightarrow \text{MENGEN} \\
 \text{TOP} &\longrightarrow \text{MENGEN} \\
 \text{TOP}_{\bullet} &\longrightarrow \text{MENGEN} \\
 \text{TOP}_{\bullet} &\longrightarrow \text{TOP}
 \end{aligned}$$

- (2) Sei \mathcal{C} eine Kategorie und C ein Objekt von \mathcal{C} . Der durch C **dargestellte Funktor** $F_C: \mathcal{C} \rightarrow \text{MENGEN}$ ist definiert durch

$$\begin{aligned}
 F_C(A) &= \text{Mor}_{\mathcal{C}}(C, A) && \text{für } A \in \text{Ob}(\mathcal{C}) \\
 F_C(f): \text{Mor}_{\mathcal{C}}(C, A) &\rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}}(C, A'), g \mapsto f \circ g && \text{für } f: A \rightarrow A' \text{ in } \mathcal{C}
 \end{aligned}$$

- (3) Die Fundamentalgruppe definiert einen Funktor

$$\pi_1: \text{HTOP}_{\bullet} \longrightarrow \text{GRUPPEN}$$

Bemerkung

- Ist $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ein Funktor so schreiben wir oft kürzer und ungenauer $f_* := F(f)$.
- Kleine Kategorien und Funktoen bilden die Kategorie KAT .

1.6 Definition

Seien $F, G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ zwei Funktoen. Eine **natürliche Transformation** $\tau: F \rightarrow G$ ordnet jedem $C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ einen Morphismus $\tau_C: F(C) \rightarrow G(C)$ in \mathcal{D} zu, sodass für jedes $f: C \rightarrow C'$ in \mathcal{C}

$$\begin{array}{ccc}
 F(C) & \xrightarrow{F(f)} & F(C') \\
 \downarrow \tau_C & & \downarrow \tau_{C'} \\
 G(C) & \xrightarrow{G(f)} & G(C')
 \end{array}$$

kommutiert.

Bemerkung

Natürliche Transformationen lassen sich komponieren. Für $\tau: F \rightarrow G$, $\eta: G \rightarrow H$ ist $\eta \circ \tau: F \rightarrow H$ gegeben durch

$$(\eta \circ \tau)_C := \eta_C \circ \tau_C: F(C) \rightarrow H(C)$$

$$F, G, H: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$$

Genauer: Für feste kleine Kategorien \mathcal{C} und \mathcal{D} bilden die Funktoren $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ mit den natürlichen Transformationen eine Kategorie $\text{FUN}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$.

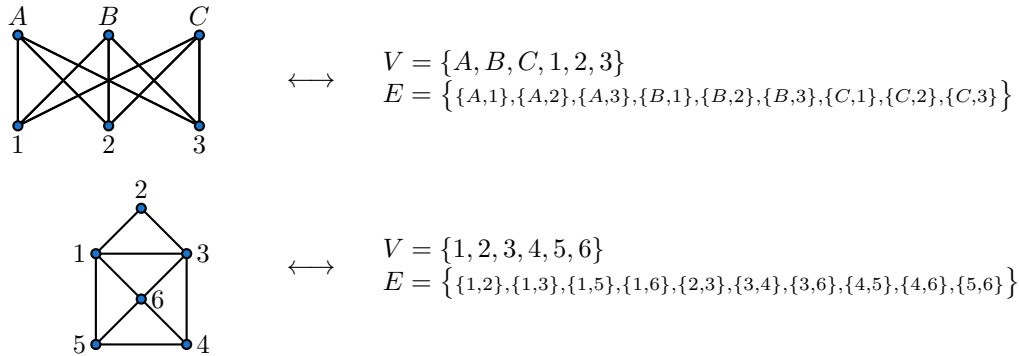
1.7 Ausblick

In der algebraischen Topologie werden topologische Fragen, wie zum Beispiel, wann \mathbb{R}^n und \mathbb{R}^m homöomorph sind, in algebraische Fragen übersetzt. Eine Möglichkeit für eine solche Übersetzung sind Funktoren von einer Kategorie von topologischen Räumen, z.B. TOP , TOP_\bullet , HTOP_\bullet , in eine algebraische Kategorie, z.B. GRUPPEN , $K\text{-VR}$, ABEL.GRUPPEN , $R\text{-MOD}$. Ein Beispiel für einen solchen Funktor ist die Fundamentalgruppe π_1 . Ein Nachteil der Fundamentalgruppe ist, dass diese oft schwierig zu berechnen ist. Wir werden in dieser Vorlesung weitere Funktoren und Methoden für ihre Berechnung kennenlernen.

2 Kombinatorische Beschreibungen topologischer Räume

2.1 Beispiel

Graphen sind einerseits topologische Räume und andererseits kombinatorische Objekte:



2.2 Definition

Ein **simplicialer Komplex** $K = (V, \Sigma)$ besteht aus einer Menge V und einer Menge Σ von nichtleeren, endlichen Teilmengen von V , sodass gilt

(i) $\{v\} \in \Sigma$ für alle $v \in V$

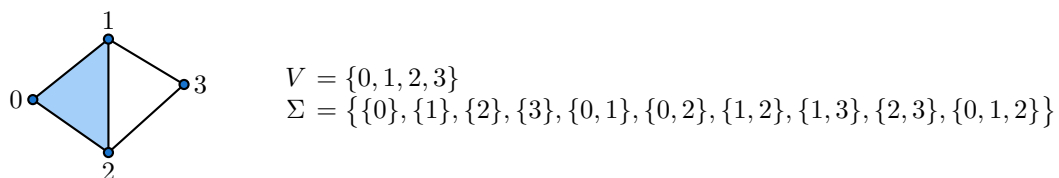
(ii) $\sigma \in \Sigma, \emptyset \neq \tau \subseteq \sigma \implies \tau \in \Sigma$.

(Abgeschlossen bzgl. Teilmengenbildung)

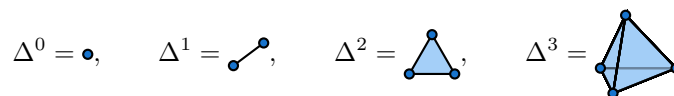
Die Elemente von V heißen die **Ecken** oder **Vertices** von K . Die Elemente von Σ heißen die **Simplizes** von K . Enthält $\sigma \in \Sigma$ genau $n+1$ Elemente, so heißt σ ein **n -Simplex**. Ist $\tau \subseteq \sigma$, wobei σ ein n -Simplex und τ ein $n-1$ -Simplex ist, so heißt τ eine **Seite** von σ .

Ist V geordnet, so heißt K geordnet. Ist V endlich, so heißt K endlich.

2.3 Beispiel



Ist σ eine endliche Menge, so heißt $\Delta^\sigma := (\sigma, \mathcal{P}(\sigma) \setminus \{\emptyset\})$ der σ -Simplex. Für $\sigma = \{0, \dots, n\}$ schreiben wir $\Delta^n := \Delta^{\{0, \dots, n\}}$. Es ist



2.4 Definition

Sei $K = (V, \Sigma)$ ein simplicialer Komplex. Ein **Unterkomplex** von K ist ein simplicialer Komplex $K_0 = (V_0, \Sigma_0)$ mit $V_0 \subseteq V$ und $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$.

Beispiel

Sei $K = (V, \Sigma)$ ein endlicher simplicialer Komplex. Dann ist K ein Unterkomplex von Δ^V .

2.5 Definition

Eine **simpliciale Abbildung** $f: K_1 = (V_1, \Sigma_1) \rightarrow K_2 = (V_2, \Sigma_2)$ zwischen simplizialen Komplexen ist eine Abbildung $f: V_1 \rightarrow V_2$, sodass $f(\sigma_1) \in \Sigma_2$ für alle $\sigma_1 \in \Sigma_1$. Simpliziale Komplexe zusammen mit simplizialen Abbildungen bilden eine Kategorie SIMP .

2.6 Definition

Sei σ eine endliche Menge. Sei $\mathbb{R}^\sigma = \prod_{v \in \sigma} \mathbb{R}$ mit der Produkttopologie. Wir setzen nun

$$|\Delta^\sigma| := \left\{ x = (x_v)_{v \in \sigma} \in \mathbb{R}^\sigma \mid \sum_{v \in \sigma} x_v = 1, x_v \in [0, 1] \ \forall v \in \sigma \right\}$$

Ist $\tau \subseteq \sigma$, so erhalten wir eine Abbildung $\iota_\tau^\sigma: |\Delta^\tau| \rightarrow |\Delta^\sigma|$ indem wir $(x_v)_{v \in \tau} \in |\Delta^\tau|$ durch $x_v = 0$ für $v \in \sigma \setminus \tau$ zu $(x_v)_{v \in \sigma}$ auffüllen. Ist $\eta \subseteq \tau \subseteq \sigma$ so gilt offensichtlich $\iota_\eta^\sigma = \iota_\tau^\sigma \circ \iota_\eta^\tau$.

Sei nun $K = (V, \Sigma)$ ein simplizialer Komplex. Die **geometrische Realisierung** $|K|$ von K ist definiert als

$$|K| := \coprod_{\sigma \in \Sigma} \{\sigma\} \times |\Delta^\sigma| / \sim$$

wobei \sim die durch $(\tau, x) \sim (\sigma, \iota_\tau^\sigma(x))$ für $\tau \subseteq \sigma$ erzeugte Äquivalenzrelation ist. Versehen mit der Quotiententopologie ist $|K|$ ein topologischer Raum.

Anschaulich „klebt“
 \sim die geometrischen Realisierungen aller Einzelteile passend zusammen

Bemerkung

- In Aufgabe 4 von Blatt 1 haben wir gezeigt, dass $|K|$ homöomorph zu einem Unterraum X von \mathbb{R}^n mit $n := \#V$ ist via $[(\sigma, (x_{v_i})_{v_i \in \sigma})] \mapsto \sum_{v_i \in \sigma} x_{v_i} \cdot e_i$.
- In Aufgabe 2 von Blatt 2 haben wir gezeigt, dass $|\cdot|$ einen Funktor $\text{SIMP} \rightarrow \text{TOP}$ definiert. Dazu definiert man eine Abbildung zunächst auf den zugrunde liegenden Räumen durch²

$$(\sigma, \sum_{v \in \sigma} x_v \cdot v) \mapsto (f(\sigma), \sum_{v \in \sigma} x_v \cdot f(v))$$

und wendet diese unter Benutzung der universellen Eigenschaft der Quotiententopologie auf Repräsentanten an.

2.7 Beispiel

- Sei $\partial\Delta^n := (\{0, \dots, n\}, \mathcal{P}(\{0, \dots, n\}) \setminus \{\emptyset, \{0, \dots, n\}\}) = \Delta^n \setminus \{0, \dots, n\}$. $\partial\Delta^n$ heißt der **Rand des n -Simplizes**. Es gilt

$$\begin{aligned} |\partial\Delta^1| &= \bullet \bullet \cong S^0 \\ |\partial\Delta^2| &= \triangle \cong S^1 \\ |\partial\Delta^3| &= \text{Dreieck} \cong S^2 \end{aligned}$$

Allgemein gilt $|\partial\Delta^n| \cong S^{n-1}$, siehe Aufgabe 1 von Blatt 3.

²hier wird eine formale Summe anstatt eines Tupels benutzt; da σ stets eine endliche Menge ist, macht dies aber keinen Unterschied.

$$\bullet T^2 = S^1 \times S^1 \cong \left(\text{torus} \right) \cong \left(\begin{array}{|c|} \hline \text{3x3 grid of squares with arrows} \\ \hline \end{array} \right)$$

2.8 Definition

Ein topologischer Raum X heißt ein **Polyeder**, falls er homöomorph zur Realisierung eines simplizialen Komplexes ist.

2.9 Definition

Sei $K = (V, \Sigma)$ ein endlicher simplizialer Komplex. Sei $a_n := \#\{\sigma \in \Sigma \mid \sigma \text{ ist ein } n\text{-Simplex von } K\}$. Dann heißt $\chi(K) := \sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n \cdot a_n$ die **Euler-Charakteristik** von K .

Beispiel

$$\chi(\triangle) = 3 - 3 = 0$$

$$\chi(\square) = 4 - 4 = 0$$

$$\chi([n\text{-Eck}]) = n - n = 0$$

$$\chi(\partial\Delta^3 = \text{tetrahedron}) = 4 - 6 + 4 = 2$$

$$\chi(\text{cube}) = 8 - 12 + 6 = 2$$

$$\chi(\text{octahedron}) = 6 - 12 + 8 = 2$$

2.10 Satz

Seien K und K' endliche simpliziale Komplexe. Gilt $|K| \cong |K'|$, so gilt

$$\chi(K) = \chi(K').$$

Bemerkung

Die Euler-Charakteristik ist also eine topologische Invariante von simplizialen Komplexen. Sie hängt nur von der topologischen Struktur von $|K|$ und nicht von der kombinatorischen Struktur von K ab.

3 Simpliciale Homologie

3.1 Definition

Sei S eine Menge. Sei R ein Ring. Der **freie R -Modul mit Basis S** , $R[S]$, besteht aus allen endlichen formalen R -Linearkombinationen

Ring mit Eins

$$\sum_{s \in S} r_s \cdot s, \quad r_s \in R, r_s \neq 0 \text{ für endliche viele } s \in S$$

Die R -Modulstruktur auf $R[S]$ ist definiert durch:

$$r \cdot \left(\sum_{s \in S} r_s \cdot s \right) := \sum_{s \in S} (r \cdot r_s) \cdot s \quad \left(\sum_{s \in S} r_s \cdot s \right) + \left(\sum_{s \in S} r'_s \cdot s \right) := \sum_{s \in S} (r_s + r'_s) \cdot s$$

Bemerkung

Mittels $s = \sum_{s' \in S} \delta_{s,s'} \cdot s'$ fassen wir S als Teilmenge von $R[S]$ auf.

3.2 Lemma

Sei S eine Menge, R ein Ring. Es gilt

- 1) Ist M ein R -Modul und $i: S \rightarrow M$ eine Abbildung, so gibt es genau eine R -lineare Abbildung $\varphi: R[S] \rightarrow M$, die i fortsetzt.
- 2) Sei $f: R[S] \rightarrow M$ R -linear und $p: N \twoheadrightarrow M$ R -linear und surjektiv. Dann gibt es $\hat{f}: R[S] \rightarrow N$ mit $p \circ \hat{f} = f$.

Moduln mit dieser Eigenschaft bezeichnet man als **projektiv**. Freie Moduln sind also projektiv.

$$\begin{array}{ccc} & N & \\ \nearrow \hat{f} & \downarrow p & \\ R[S] & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

Beweis

- 1) Eine solche Abbildung ist gegeben durch $\varphi(\sum_{s \in S} r_s \cdot s) = \sum_{s \in S} r_s \cdot i(s)$. Ist φ' eine zweite, so gilt

$$\hat{\varphi} \left(\sum_{s \in S} r_s \cdot s \right) = \sum_{s \in S} r_s \cdot \hat{\varphi}(s) = \sum_{s \in S} r_s \cdot i(s)$$

- 2) Wähle für jedes $s \in S$ ein Urbild $j(s) \in N$ für $f(s) \in M$ unter $p: N \twoheadrightarrow M$. Nun wende 1) auf $j: S \rightarrow N$ an, um $\hat{f}: R[S] \rightarrow N$ mit $\hat{f}(s) = j(s)$ zu erhalten. Nun ist $p \circ \hat{f}(s) = f(s)$ für alle $s \in S$. Mit der Eindeutigkeit aus 1) folgt $p \circ \hat{f} = f$. \square

3.3 Beispiel

- (i) Sei K ein Körper und V, M, N seien K -Vektorräume, $f: V \rightarrow M, p: N \rightarrow M$ seien K -linear und p surjektiv. Dann gibt es $\hat{f}: V \rightarrow N$ mit $p \circ \hat{f} = f$. Wir können Lemma 3.2 benutzen, da V eine Basis B hat, also $V \cong K[B]$.
- (ii) Sei $R = \mathbb{Z}$, sei $V = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $M = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, sowie $f = \text{id}: V \rightarrow M, N = \mathbb{Z}$ und $p: \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ die Projektion mit $p(n) = n + 2\mathbb{Z}$. Dann gibt es **keine** \mathbb{Z} -lineare Abbildung $\hat{f}: \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ mit $p \circ \hat{f} = f$. Ist $\hat{f}(1 + 2\mathbb{Z}) = n \in \mathbb{Z}$, so folgt

$$2n = 2 \cdot \hat{f}(1 + 2\mathbb{Z}) = \hat{f}(2 \cdot (1 + 2\mathbb{Z})) = \hat{f}(0 + 2\mathbb{Z}) = 0$$

also $n = 0$. $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist also kein freier Modul.

3.4 Definition

Sei $K = (V, \Sigma)$ ein simplizialer Komplex. Sei $\Sigma_n := \{\sigma \in \Sigma \mid \sigma \text{ ist ein } n\text{-Simplex}\}$. Sei R ein Ring. Der **n -te Kettenmodul** von K über R ist definiert als

$$C_n(K; R) := R[\Sigma_n]$$

Ist $R = \mathbb{Z}$, so schreiben wir auch kurz $C_n(K) := C_n(K; \mathbb{Z})$.

3.5 Definition

Sei $K = (V, \Sigma)$ ein geordneter simplizialer Komplex. Sei $\sigma = \{v_0, \dots, v_n\}$ ein n -Simplex von K . Bezüglich der Ordnung von K sei dabei $v_0 < v_1 < \dots < v_n$. Sei τ ein $(n-1)$ -Simplex von K . Definiere

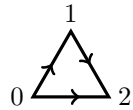
$$\varepsilon_\sigma^\tau := \begin{cases} (-1)^i, & \text{falls } \tau = \{v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n\} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Bemerkung

Es gilt: $\varepsilon_\sigma^\tau \neq 0 \iff \tau$ ist eine Seite von σ .

Beispiel

Für den folgenden geordneten simplizialen Komplex gilt



$$\varepsilon_{\{0,1,2\}}^{\{0,1\}} = 1, \quad \varepsilon_{\{0,1,2\}}^{\{0,2\}} = -1, \quad \varepsilon_{\{0,1,2\}}^{\{1,2\}} = 1$$

3.6 Definition

Sei $K = (V, \Sigma)$ ein geordneter simplizialer Komplex. Die **n -te Randabbildung**

$$\partial_n: C_n(K; R) \longrightarrow C_{n-1}(K; R)$$

$= R[\Sigma_n] \qquad \qquad \qquad = R[\Sigma_{n-1}]$

ist für ein Basiselement $\sigma \in \Sigma_n$ definiert durch

$$\partial_n(\sigma) = \sum_{\tau \in \Sigma_{n-1}} \varepsilon_\sigma^\tau \cdot \tau$$

3.7 Proposition

$$\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$$

Damit folgt $\text{Im } \partial_n \subseteq \ker \partial_{n-1}$.

Beweis (mit Lemma 3.8)

Sei σ ein n -Simplex von K . Dann gilt

$$\begin{aligned} \partial_{n-1}(\partial_n(\sigma)) &= \partial_{n-1}\left(\sum_{\tau \in \Sigma_{n-1}} \varepsilon_\sigma^\tau \cdot \tau\right) = \sum_{\tau \in \Sigma_{n-1}} \varepsilon_\sigma^\tau \cdot \partial_{n-1}(\tau) = \sum_{\tau \in \Sigma_{n-1}} \varepsilon_\sigma^\tau \left(\sum_{\eta \in \Sigma_{n-2}} \varepsilon_\tau^\eta \cdot \eta\right) \\ &= \sum_{\eta \in \Sigma_{n-2}} \left(\sum_{\tau \in \Sigma_{n-1}, \eta \subseteq \tau \subseteq \sigma} \varepsilon_\tau^\eta \cdot \varepsilon_\sigma^\tau\right) \eta \\ &\stackrel{\text{Lemma 3.8}}{=} 0 \end{aligned} \quad \square$$

3.8 Lemma

Sei σ ein n -Simplex. Sei $\eta \subseteq \sigma$ ein $(n-2)$ -Simplex. Dann gibt es genau zwei $(n-1)$ -Simplizes τ, τ' von K , die eine Seite von σ sind und η als Seite enthalten. Es gilt

$$\varepsilon_{\tau}^{\eta} \cdot \varepsilon_{\sigma}^{\tau} = -\varepsilon_{\tau'}^{\eta} \cdot \varepsilon_{\sigma}^{\tau'}$$

Beweis

Sei $\sigma = \{v_0, \dots, v_n\}$ mit $v_0 < v_1 < \dots < v_n$. Dann ist $\eta = \{v_0, \dots, v_n\} \setminus \{v_i, v_j\}$ mit $i < j$. Dann sind $\tau = \{v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n\}$ und $\tau' = \{v_0, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n\}$ die gesuchten $(n-1)$ -Simplizes und es gilt

$$\varepsilon_{\sigma}^{\tau} = (-1)^i, \quad \varepsilon_{\sigma}^{\tau'} = (-1)^j, \quad \varepsilon_{\tau}^{\eta} = (-1)^{j-1}, \quad \varepsilon_{\tau'}^{\eta} = (-1)^i \quad \square$$

3.9 Notation

Für $\sigma \in \Sigma_n$, $\sigma = \{v_0, \dots, v_n\}$ mit $v_0 < \dots < v_n$ schreiben wir

$$\delta^j \sigma := \{v_0, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n\} \in \Sigma_{n-1}$$

Dann ist $\partial_n(\sigma) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \cdot \delta^j \sigma$.

3.10 Definition

Sei K ein geordneter simplizialer Komplex. Der **n -te Homologiemodul** von K über R ist definiert als

$$H_n(K; R) := \frac{\ker \partial_n: C_n(K; R) \rightarrow C_{n-1}(K; R)}{\operatorname{Im} \partial_{n+1}: C_{n+1}(K; R) \rightarrow C_n(K; R)}$$

Für $n = 0$ interpretieren wir ∂_0 als die Nullabbildung. Daher gilt

$$H_0(K; R) = \frac{C_0(K; R)}{\operatorname{Im} \partial_1: C_1(K; R) \rightarrow C_0(K; R)}$$

3.11 Beispiele

- (1) Sei $K = \bullet$. Dann ist $C_0(K; R) \cong R$ und $C_i(K; R) = 0$ für $i > 0$. Weiter ist $H_0(K; R) = C_0(K; R) \cong R$ und $H_i(K; R) = 0$ für $i > 0$.
- (2) Seien nun $K = K_n$ das n -Eck, wobei $n \geq 3$. Also

$$\begin{aligned} \Sigma_0 &= \{\tau_1 = \{1\}, \tau_2 = \{2\}, \dots, \tau_n = \{n\}\} \\ \Sigma_1 &= \{\sigma_1 = \{1, 2\}, \dots, \sigma_{n-1} = \{n-1, n\}, \sigma_n = \{1, n\}\} \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} C_0(K; R) &= R[\Sigma_0] \cong R^n \\ C_1(K; R) &= R[\Sigma_1] \cong R^n \\ C_i(K; R) &= 0 \text{ für } i > 1, \text{ insbesondere } H_i(K; R) = 0 \text{ für } i > 1 \end{aligned}$$

Es ist dann $\partial_2 = \partial_3 = \dots = 0$. Interessant ist $\partial_1: C_1(K; R) \rightarrow C_0(K; R)$, denn es gilt

$$\partial_1(\sigma_i) = \begin{cases} \tau_{i+1} - \tau_i, & \text{falls } i = 1, \dots, n-1 \\ \tau_n - \tau_1, & \text{falls } i = n \end{cases}$$

Mit $\sigma'_1 := \sigma_1, \sigma'_2 := \sigma_2, \dots, \sigma'_{n-1} := \sigma_{n-1}$ und $\sigma'_n := -\sigma_n$ gilt dann

$$\partial_1(\sigma'_i) = \tau_{i+1} - \tau_i$$

mit der Konvention $\tau_{n+1} = \tau_1$. Also gilt

$$\partial_1\left(\sum_{i=1}^n r_i \sigma'_i\right) = \sum_{i=1}^n r_i (\tau_{i+1} - \tau_i) = \sum_{i=1}^n (r_{i-1} - r_i) \tau_i$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \ker \partial_1 &= \left\{ \sum_{i=1}^n r_i \cdot \sigma'_i \mid r_1 = r_2 = \dots = r_n \right\} \subseteq C_1(K; R) \\ \operatorname{Im} \partial_1 &= \left\{ \sum_{i=1}^n s_i \cdot \tau_i \mid \sum_{i=1}^n s_i = 0 \right\} \subseteq C_0(K; R) \end{aligned}$$

Ist $\sum_{i=1}^n s_i = 0$, so folgt für $r_n = 0, r_1 = -s_1, r_2 = -s_1 - s_2, \dots, r_{n-1} = -s_1 - s_2 - \dots - s_{n-1}$

$$\partial_1\left(\sum_{i=1}^n r_i \sigma'_i\right) = \sum_{i=1}^n s_i \tau_i$$

Es folgt $H_1(K; R) = \ker \partial_1 / \operatorname{Im} \partial_2 = \ker \partial_1 \cong R$ und

$$H_0(K; R) = \ker \partial_0 / \operatorname{Im} \partial_1 = R[\Sigma_0] / \{\sum_{i=1}^n s_i \tau_i \mid \sum_{i=1}^n s_i = 0\} \cong R$$

(via $\sum_{i=1}^n s_i \tau_i \mapsto \sum_{i=1}^n s_i$ und Homomorphiesatz)

3.12 Definition

Sei R ein Ring. Ein **R-Kettenkomplex** (C_*, d_*) ist eine Folge von R -Moduln $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zusammen mit R -linearen Abbildungen $(d_n: C_n \rightarrow C_{n-1})_{n \geq 1}$, so dass $d_n \circ d_{n+1} = 0$. Die d_n heißen die **Randabbildungen** von (C_*, d_*) , die C_n die **Kettenmoduln**. Die **n-te Homologie** eines Kettenkomplexes (C_*, d_*) ist definiert als

$$H_n(C_*, d_*) := \frac{\ker d_n: C_n \rightarrow C_{n-1}}{\operatorname{Im} d_{n+1}: C_{n+1} \rightarrow C_n}$$

3.13 Bemerkung

- (i) Oft werden auch Kettenkomplexe betrachtet, die \mathbb{Z} statt \mathbb{N} verwenden.
- (ii) Ein Kettenkomplex (C_*, d_*) heißt endlich erzeugt, wenn alle C_n endlich erzeugte R -Moduln sind und $C_n \neq 0$ nur für endlich viele n ist.

3.14 Definition

Zu einem geordneten simplizialen Komplex K heißt $(C_*(K; R), \partial_*)$ der **simpliziale Kettenkomplex** von K über R .

Bemerkung

Ist K endlich, so ist $(C_*(K; R), \partial_*)$ endlich erzeugt.

4 Euler-Charakteristik von Kettenkomplexen

4.1 Wiederholung

Sei A eine abelsche Gruppe. Dann ist

$$TA := \left\{ a \in A \mid \exists n \geq 1 : n \cdot a = \underbrace{a + \dots + a}_{n\text{-mal}} = 0 \right\}$$

die **Torsionsgruppe** von A . Ist A endlich erzeugt, so ist auch TA endlich erzeugt und es gibt Primzahlpotenzen $p_1^{n_1}, \dots, p_k^{n_k}$ mit

$$TA \cong \mathbb{Z}/(p_1^{n_1}) \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/(p_k^{n_k})$$

abelsche Gruppen
sind \mathbb{Z} -Moduln

Weiter gibt es dann n mit $A \cong \mathbb{Z}^n \oplus TA$. $\text{Rg } A := n$ ist der **Rang** von A .

4.2 Lemma

Sei A eine endlich erzeugte abelsche Gruppe. Dann gilt $\text{Rg } A = \max\{m \mid \exists C \leq A, C \cong \mathbb{Z}^m\}$.

Beweis

Da $A \cong \mathbb{Z}^n \oplus TA$ ist, genügt zu zeigen: Ist $\varphi: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^n \oplus TA$ ein injektiver Gruppenhomomorphismus, so ist $m \leq n$. Schreibe $\varphi = \varphi_0 \oplus \varphi_1$, also $\varphi(a) = \varphi_0(a) + \varphi_1(a)$ mit $\varphi_0: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^n$, $\varphi_1: \mathbb{Z}^m \rightarrow TA$.

Behauptung: φ_0 ist injektiv. Zu $v \in \mathbb{Z}^m$ wähle $k \geq 1$ mit $k \cdot \varphi_1(v) = 0 \in TA$. Dann ist $\varphi_1(kv) = k\varphi_1(v) = 0$. Ist $v \neq 0$, so ist $k \cdot v \neq 0 \in \mathbb{Z}^m$, also ist $\varphi(kv) \neq 0$ und damit $\varphi_0(kv) \neq 0$. Es folgt $\varphi_0(v) \neq 0$, da sonst $\varphi_0(k \cdot v) = k \cdot \varphi_0(v) = 0$. Damit ist die Behauptung gezeigt.

Gruppenhomomorphismen $\varphi_0: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^n$ werden durch $n \times m$ -Matrizen beschrieben: Es gibt $A = (a_{ij}) \in \mathbb{Z}^{n \times m}$ mit

$$\varphi_0 \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m a_{1j} \cdot z_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m a_{nj} \cdot z_j \end{pmatrix}$$

Ist $m > n$, so hat A , aufgefasst als Matrix über \mathbb{Q} , einen Kern. Es gibt also einen Vektor $w = \begin{pmatrix} a_1/b_1 \\ \vdots \\ a_m/b_m \end{pmatrix}$ mit $Aw = 0$, $w \neq 0$. Dann ist $(b_1, \dots, b_m) \cdot w \in \mathbb{Z}^m$ und

$$\varphi_0((b_1, \dots, b_m) \cdot w) = A \cdot ((b_1, \dots, b_m) \cdot w) = (b_1, \dots, b_m) \cdot A \cdot w = 0 \quad \nexists$$

Dies ist ein Widerspruch zur Injektivität von φ_0 . Also gilt $m \leq n$. □

4.3 Definition

Seien M_0, M_1, M_2 R -Moduln und $f_0: M_0 \rightarrow M_1$, $f_1: M_1 \rightarrow M_2$ R -lineare Abbildungen. Dann heißt

$$M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \quad [*]$$

eine **kurze exakte Sequenz**, wenn gilt:

- (i) f_0 ist injektiv, (ii) $\text{Im } f_0 = \ker f_1$, (iii) f_1 ist surjektiv.

Bemerkung

Oft sagt man $M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} M_2$ ist exakt in M_1 , wenn $\text{Im } f_0 = \ker f_1$ ist. Dann ist $(*)$ eine kurze exakte Folge, wenn

$$0 \longrightarrow M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \longrightarrow 0$$

exakt in M_0, M_1 und M_2 ist.

4.4 Beispiele

1)

$$\begin{array}{ccccc} M_0 & \xhookrightarrow{i} & M_0 \oplus M_1 & \xrightarrow{p} & M_1 \\ v_0 & \xhookrightarrow{i} & (v_0, 0) & & (v_0, v_1) \xrightarrow{p} v_1 \end{array}$$

ist eine kurze exakte Folge.

2) $\mathbb{Z} \xhookrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist eine kurze exakte Folge.

4.5 Bemerkung

Eine **Spaltung** für eine kurze exakte Folge $M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} M_2$ ist eine R -lineare Abbildung $s: M_2 \rightarrow M_1$ mit $f_1 \circ s = \text{id}_{M_2}$. In diesem Fall erhalten wir einen Isomorphismus $M_0 \oplus M_2 \rightarrow M_1, (v_0, v_2) \mapsto f_0(v_0) + s(v_2)$.

Injektivität: Sei $(v_0, v_2) \in M_0 \oplus M_2$ mit $f_0(v_0) + s(v_2) = 0$. Dann gilt

$$0 = f_1(f_0(v_0) + s(v_2)) = v_2 \implies f_0(v_0) = 0 \implies v_0 = 0$$

Surjektivität: Sei $v_1 \in M_1$. Betrachte $v_2 := f_1(v_1)$. Dann ist $v_1 - s(v_2) \in \ker f_1 = \text{Im } f_0$, also gibt es v_0 in M_0 mit $f_0(v_0) = v_1 - s(v_2)$. Damit ist $v_1 = f_0(v_0) + s(v_2)$. \square

4.6 Bemerkung

1) Die kurze exakte Sequenz $\mathbb{Z} \xhookrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ spaltet nicht.

2) Ist $M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} M_2$ eine kurze exakte Folge mit M_2 frei, also $M_2 \cong R[S]$, so spaltet $[\ast]$. Insbesondere ist $M_1 \cong M_0 \oplus M_2$. Dazu wenden wir Lemma 3.2 an und erhalten eine R -lineare Abbildung $s: M_2 \rightarrow M_1$, sodass folgendes Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} & & M_1 \\ & \nearrow s & \downarrow f_1 \\ R[S] & \xrightarrow{\text{id}} & R[S] \end{array}$$

s ist also die gesuchte Spaltung. Dieses Vorgehen funktioniert bei jedem projektiven Modul.

4.7 Bemerkung

Der Rang für alle endlich erzeugten abelschen Gruppen ist additiv:

$$\text{Rg}(A \oplus B) = \text{Rg } A + \text{Rg } B,$$

da $A \cong \mathbb{Z}^{\text{Rg } A} \oplus TA, B \cong \mathbb{Z}^{\text{Rg } B} \oplus TB$, also

$$A \oplus B \cong \mathbb{Z}^{\text{Rg } A + \text{Rg } B} \oplus \underbrace{TA \oplus TB}_{=T(A \oplus B)}$$

4.8 Proposition

Der Rang von endlich erzeugten abelschen Gruppen ist additiv für kurze exakte Folgen: Ist

$$A \xhookrightarrow{i} B \xrightarrow[p]{\twoheadrightarrow} C \quad [\star]$$

eine kurze exakte Folge von endlich erzeugten abelschen Gruppen, so gilt $\text{Rg } B = \text{Rg } A + \text{Rg } C$.

Beweis

Spaltet $[\star]$, so ist $B \cong A \oplus C$ und die Behauptung folgt aus der Bemerkung 4.7.

Wir können annehmen, dass $C = \mathbb{Z}^n \oplus TC$ gilt. Wir erhalten folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xhookrightarrow{i} & p^{-1}(\mathbb{Z}^n) & \xrightarrow[p]{\twoheadrightarrow} & \mathbb{Z}^n \\
 \parallel & & \downarrow i'' & & \downarrow i' \\
 A & \xhookrightarrow{i} & B & \xrightarrow[p]{\twoheadrightarrow} & C \\
 & & \downarrow p'' & & \downarrow p' \\
 & & B/p^{-1}(\mathbb{Z}^n) & \xrightarrow[p' \circ p]{\twoheadrightarrow} & TC
 \end{array} \quad [\star]$$

Ist $p' \circ p(b) = 0$, so gibt es $v \in \mathbb{Z}^n$ mit $i'(v) = p(b)$. Nun gibt es $v' \in p^{-1}(\mathbb{Z}^n)$ mit $p(v') = v$. Es folgt

$$p(i''(v')) = p(b)$$

also $i''(v') - b \in \ker p = i(A)$. Da $i(A) \subseteq i''(p^{-1}(\mathbb{Z}^n))$, folgt $b \in i''(p^{-1}(\mathbb{Z}^n))$. In dem Diagramm sind die Spalten und Zeilen exakt. Da \mathbb{Z}^n frei ist, spaltet $A \xhookrightarrow{i} p^{-1}(\mathbb{Z}^n) \xrightarrow[p]{\twoheadrightarrow} \mathbb{Z}^n$ und es gilt

$$\text{Rg } A + \text{Rg } C = \text{Rg } A + n = \text{Rg}(p^{-1}(\mathbb{Z}^n))$$

Es bleibt zu zeigen: $\text{Rg } B = \text{Rg}(p^{-1}(\mathbb{Z}^n))$.

Nebenbei: Ist $A' \subseteq B'$, so gilt $\text{Rg } A' \leq \text{Rg } B'$, denn

$$\text{Rg } A' = \max\{n' \mid \mathbb{Z}^{n'} \cong C' \leq A'\} \leq \max\{n' \mid \mathbb{Z}^{n'} \cong C' \leq B'\} = \text{Rg } B'.$$

Betrachte die kurze exakte Folge

$$p^{-1}(\mathbb{Z}^n) \longrightarrow B \longrightarrow B/p^{-1}(\mathbb{Z}^n)$$

Wegen $B/p^{-1}(\mathbb{Z}^n) \cong TC$ gibt es ein k mit $k \cdot (b + p^{-1}(\mathbb{Z}^n)) = 0$ für alle $b \in B$. Also $k \cdot b \in p^{-1}(\mathbb{Z}^n)$. Es folgt $kB \subseteq p^{-1}(\mathbb{Z}^n)$. Ist $B \cong \mathbb{Z}^{\text{Rg } B} + TB$, so ist $kB \cong (k\mathbb{Z})^{\text{Rg } B} + T(kB)$ und $\text{Rg } kB = n = \text{Rg } B$. Mit der Nebenbemerkung folgt $\text{Rg } p^{-1}(\mathbb{Z}^n) = \text{Rg } B$ aus $kB \subseteq p^{-1}(\mathbb{Z}^n) \subseteq B$. \square

Beweis mit Tensorprodukten (Skizze)

- $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}}: \mathbb{Z}\text{-Mod} \rightarrow \mathbb{Q}\text{-VR}$ ist ein Funktor.
- $\text{Rg } A = \dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} A)$
 - (a) $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} (X \oplus Y) = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} X \oplus \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} Y$
 - (b) $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^n \cong \mathbb{Q}^n$
 - (c) $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} T \cong 0$ für T ein Torsionsmodul.
- Ist $A \longrightarrow B \longrightarrow C$ eine kurze exakte Folge, so ist auch $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} A \rightarrow \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} B \rightarrow \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} C$ eine kurze exakte Folge.
- Jede kurze exakte Folge $V_0 \longrightarrow V_1 \longrightarrow V_2$ von \mathbb{Q} -Vektorräumen spaltet und daher gilt $V_1 \cong V_0 \oplus V_2$ und $\dim_{\mathbb{Q}}(V \oplus W) = \dim_{\mathbb{Q}}(V) + \dim_{\mathbb{Q}}(W)$.

4.9 Definition

Sei (C_*, d_*) ein endlich erzeugter \mathbb{Z} -Kettenkomplex.

$$\chi(C_*) := \sum_{i=0}^{\infty} \operatorname{Rg}(C_i) = \sum_{i=0}^{n_0} \operatorname{Rg}(C_i)$$

heißt die **Eulercharakteristik** von (C_*, d_*) . Dabei ist n_0 so gewählt, dass $C_n = 0$ für alle $n > n_0$.

4.10 Satz

Sei (C_*, d_*) ein endlich erzeugter \mathbb{Z} -Kettenkomplex. Dann gilt

$$\chi(C_*) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \operatorname{Rg} H_i(C_*, d_*).$$

Beweis

Sei $B_{n+1} := \operatorname{Im} d_{n+1}: C_{n+1} \rightarrow C_n$ und $Z_n := \ker d_n: C_n \rightarrow C_{n-1}$. Also $H_n(C_*, d_*) = Z_n/B_{n+1}$. Als Untermoduln von C_n sind Z_n und B_n endlich erzeugt (LA2). Insbesondere ist auch $H_n(C_*, d_*)$ endlich erzeugt und der Rang somit definiert. Auch B_{n+1} ist Untermodul des endlich erzeugten \mathbb{Z} -Moduls C_n und somit endlich erzeugt. Wir erhalten kurze exakte Folgen:

$$\begin{aligned} B_{n+1} &\hookrightarrow Z_n \twoheadrightarrow H_n(C_*, d_*) \\ Z_n &\hookrightarrow C_n \twoheadrightarrow B_n \end{aligned}$$

Nach Proposition 4.8 gilt $\operatorname{Rg} Z_n = \operatorname{Rg} B_{n+1} + \operatorname{Rg} H_n(C_*, d_*)$ und $\operatorname{Rg} C_n = \operatorname{Rg} Z_n + \operatorname{Rg} B_n$. Also gilt

$$\begin{aligned} \chi(C_*) &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \operatorname{Rg} C_i = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i (\operatorname{Rg} Z_i + \operatorname{Rg} B_i) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i (\operatorname{Rg} H_i(C_*, d_*) + \operatorname{Rg} B_{i+1} + \operatorname{Rg} B_i) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \operatorname{Rg} H_i(C_*, d_*) + \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \operatorname{Rg} B_{i+1} + \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \operatorname{Rg} B_i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \operatorname{Rg} H_i(C_*, d_*) \quad \square \end{aligned}$$

4.11 Korollar

Sei K ein endlicher, geordneter simplizialer Kettenkomplex. Dann gilt

$$\chi(K) = \sum_{i=1}^{\dim K} (-1)^i \operatorname{Rg} H_i(K; \mathbb{Z})$$

Beweis

Wende den Satz 4.10 auf den simplizialen Kettenkomplex von K an. Da

$$\operatorname{Rg} C_n(K; \mathbb{Z}) = \operatorname{Rg} \mathbb{Z}[\Sigma_n] = \# \text{ } n\text{-Simplizes in } K$$

ist

$$\chi(K) = \chi(C_*(K; \mathbb{Z}), \partial_*) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \operatorname{Rg} H_i(C_*(K; \mathbb{Z}), \partial_*) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \operatorname{Rg} H_i(K; \mathbb{Z}) \quad \square$$

Eine vereinfachte Variante dieser Aussage kam in Aufgabe 2 von Blatt3 vor: Dort haben wir den Homologiemodul über einen Körper betrachtet. Deshalb konnte wir da dann die Dimensionsformeln anwenden, um die beiden Voraussetzungen für die Rechnung in 4.10 zu erhalten.

5 Singuläre Homologie

5.1 Definition

Sei X ein topologischer Raum. Sei $S_n(X)$ die Menge aller stetigen Abbildungen $\sigma: |\Delta^n| \rightarrow X$. Elemente von $S_n(X)$ heißen **singuläre Simplexes** in X . Sei R ein Ring. Der **n-te (singuläre) Kettenmodul** von X über R ist

$$C_n(X; R) := R[S_n(X)]$$

5.2 Definition

Für $\sigma \in S_n(X)$ und $j \in \{0, \dots, n\}$ sei $\delta_j \sigma \in S_{n-1}(X)$ die Einschränkung von σ auf die j -te Seite von $|\Delta^n|$, also $\delta_j(\sigma) = \sigma \circ \iota_{n,j}$, wobei $\iota_{n,j}: |\Delta^{n-1}| \rightarrow |\Delta^n|$ die Inklusion der j -ten Seite ist:

$$\iota_{n,j}(x_0, \dots, x_{n-1}) = (x_0, \dots, x_{j-1}, 0, x_j, \dots, x_{n-1})$$

5.3 Bemerkung

Es gilt $\iota_{n,j} = |i_{n,j}|$ wobei $i_{n,j}: \Delta^{n-1} \rightarrow \Delta^n$ gegeben ist durch

$$i_{n,j}(k) = \begin{cases} k, & \text{falls } k < j \\ k+1, & \text{falls } k \geq j \end{cases}$$

vergleiche Blatt 2,
Aufgabe 2

5.4 Definition

Die **n-te singuläre Randabbildung** $\partial_n: C_n(X; R) \rightarrow C_{n-1}(X; R)$ ist definiert durch

$$\partial_n(\sigma) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \cdot \delta_j(\sigma).$$

5.5 Proposition

$$\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$$

Beweis (mit Lemma 5.6)

$$\begin{aligned} \partial_{n-1} \circ \partial_n(\sigma) &= \partial_{n-1} \left(\sum_{j=0}^n (-1)^j \delta_j(\sigma) \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^n (-1)^{j+k} \delta_k \delta_j(\sigma) \\ &= \sum_{0 \leq k < j \leq n} (-1)^{k+j} \delta_k \delta_j(\sigma) + \sum_{0 \leq j \leq k \leq n-1} (-1)^{k+j} \delta_k \delta_j(\sigma) \\ &\stackrel{\text{Lemma 5.6}}{=} \sum_{0 \leq k < j \leq n} (-1)^{k+j} \delta_k \delta_j(\sigma) + \sum_{0 \leq j \leq k \leq n-1} (-1)^{k+j} \delta_j \delta_{k+1}(\sigma) \\ &= \sum_{0 \leq k < j \leq n} (-1)^{k+j} \delta_k \delta_j(\sigma) + \sum_{0 \leq j < k \leq n} (-1)^{k-1+j} \delta_j \delta_k(\sigma) \\ &= 0 \end{aligned} \quad \square$$

5.6 Lemma

Für $0 \leq j \leq k \leq n-1$ und $\sigma \in S_n(X)$ ist $\delta_k \delta_j(\sigma) = \delta_j \delta_{k+1}(\sigma)$.

Beweis

Es ist

$$\begin{aligned}\delta_k(\delta_j(\sigma))(x_0, \dots, x_{n-2}) &= \delta_j(\sigma)(x_0, \dots, x_{k-1}, 0, x_k, \dots, x_{n-2}) \\ &= (x_0, \dots, x_{j-1}, 0, x_j, \dots, x_{k-1}, 0, x_k, \dots, x_{n-2})\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\delta_j\delta_{k+1}(\sigma)(x_0, \dots, x_{n-2}) &= \delta_{k+1}(\sigma)(x_0, \dots, x_{j-1}, 0, x_j, \dots, x_{n-2}) \\ &= (x_0, \dots, x_{j-1}, 0, x_j, \dots, x_{k-1}, 0, x_k, \dots, x_{n-2})\end{aligned} \quad \square$$

5.7 Definition

Sei X ein topologischer Raum. Die Homologie des **singulären Kettenkomplex** über R , $(C_*(X; R), \partial_*)$, heißt die **singuläre Homologie von X** mit Koeffizienten in R :

$$H_n(X; R) := H_n(C_*(X; R), \partial_*)$$

Für $R = \mathbb{Z}$ schreiben wir kürzer $C_*(X) := C_*(X; \mathbb{Z})$ und $H_n(X) := H_n(X; \mathbb{Z})$.

5.8 Definition

- Die Elemente von $C_n(X; R)$ heißen **n-Ketten**.
- Die Elemente von $\text{Im } \partial_{n+1} \subseteq C_n(X; R)$ heißen **n-Ränder**.
- Die Elemente von $\ker \partial_n \subseteq C_n(X; R)$ heißen **n-Zykel**.

Jeder n -Zykel $\sigma \in C_n(X; R)$ bestimmt eine **Homologieklass** $[\sigma] := \sigma + \text{Im } \partial_{n+1} \in H_n(X; R)$.

5.9 Beispiel

Ist $X = \{x_0\}$ der Ein-Punkt-Raum, so ist

$$H_*(\{x_0\}; R) \cong \begin{cases} R, & \text{falls } * = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis

Es gibt für jedes n genau eine Abbildung $\sigma_n: |\Delta^n| \rightarrow \{x_0\}$ nämlich die konstant. Diese ist offensichtlich stetig. Also ist $C_n(\{x_0\}; R) = R[\sigma_n]$. Für alle j ist $\delta_j\sigma_n = \sigma_{n-1}$. Daher ist

$$\partial_n(\sigma_n) = \begin{cases} 0, & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \sigma_{n-1}, & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

Der singuläre Kettenkomplex von $\{x_0\}$ hat also folgende Gestalt:

$$\begin{array}{ccccccc} C_0(\{x_0\}; R) & \xleftarrow{0} & C_1(\{x_0\}; R) & \xleftarrow{\cong} & C_2(\{x_0\}; R) & \xleftarrow{0} & C_3(\{x_0\}; R) & \xleftarrow{\cong} & \dots \\ \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ R & \xleftarrow{0} & R & \xleftarrow{\text{id}} & R & \xleftarrow{0} & R & \xleftarrow{\text{id}} & R \end{array}$$

Es folgt

$$H_n(\{x_0\}; R) \cong \begin{cases} R, & \text{falls } n = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad \square$$

5.10 Proposition

- 1) Ist $X \neq \emptyset$, so ist $H_0(X) \neq 0$.
- 2) Ist X wegzusammenhängend, so gilt $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$.

Tatsächlich gilt auch die Umkehrung, wie in Aufgabe 4 von Blatt 3 gezeigt.

Beweis

- 1) Sei die sogenannte **Augmentierung** $\epsilon: C_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ definiert durch

$$\epsilon \left(\sum_{\sigma \in S_0(X)} r_\sigma \cdot \sigma \right) := \sum_{\sigma} r_\sigma.$$

Dann ist $\epsilon \circ \partial_1: C_1(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ trivial, denn für $\sigma \in S_1(X)$ ist $\epsilon \circ \partial_1(\sigma) = \epsilon(\delta_0\sigma - \delta_1\sigma) = 0$. Daher induziert ϵ eine Abbildung $\bar{\epsilon}: H_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$. Da $X \neq \emptyset$ ist, gibt es einen singulären 0-Simplex $\sigma: |\Delta^0| \rightarrow X$. Für σ gilt $\bar{\epsilon}([\sigma]) = 1$ und daher ist $\bar{\epsilon}$ surjektiv und $H_0(X) \neq 0$.

- 2) Wir zeigen, dass $\bar{\epsilon}: H_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ ein Isomorphismus ist, falls X wegzusammenhängend ist. Dazu zeigen wir $\ker \epsilon = \text{Im } \partial_1$. Dazu definieren wir $s: C_0(X) \rightarrow C_1(X)$ wie folgt: Sei σ_0 ein fest gewählter singulärer 0-Simplex. Zu $\sigma \in S_0(X)$ gibt es, da X wegzusammenhängend ist, $s(\sigma) \in S_1(X)$ mit $\delta_0 s(\sigma) = \sigma$, $\delta_1 s(\sigma) = \sigma_0$. Es gilt nun

$$\partial_1 \circ s(\sigma) = \sigma - \sigma_0 = (\text{id}_{C_0(X)} - i \circ \epsilon)(\sigma)$$

wobei $i: \mathbb{Z} \rightarrow C_0(X)$, $n \mapsto n \cdot \sigma_0$. Ist nun $v \in \ker \epsilon$, so folgt

$$\partial_1 \circ s(v) = v - \underbrace{i \circ \epsilon(v)}_{=0} = v$$

also ist $v \in \text{Im } \partial_1$ und es folgt die Behauptung. □

5.11 Bemerkung

Sei $K = (V, \Sigma)$ ein geordneter simplizialer Komplex. Sei $\sigma = \{v_0, \dots, v_n\} \in \Sigma_n$ ein n -Simplex von K mit $v_0 < v_1 < \dots < v_n$. Wir ordnen σ den singulären n -Simplex $f_\sigma: |\Delta^n| \rightarrow |K|$ zu, wobei

$$f_\sigma \left(\sum_{i=0}^n t_i \cdot e_i \right) = \sum_{i=0}^n t_i \cdot v_i.$$

Nun erhalten wir eine Abbildung

$$C_*(K; R) \rightarrow C_*(|K|, R) \quad , \quad \sum_{\sigma \in \Sigma_n} r_\sigma \cdot \sigma \mapsto \sum_{\sigma \in \Sigma_n} r_\sigma \cdot f_\sigma.$$

Diese Abbildung induziert(!) eine weitere Abbildung $H_*(K; R) \xrightarrow{\cong} H_*(|K|; R)$ von der wir später zeigen werden, dass sie ein Isomorphismus ist.

6 Funktorialität

6.1 Definition

Seien (C_*, d_*) und (C'_*, d'_*) zwei R -Kettenkomplexe. Eine **R -Kettenabbildung** $f_*: (C_*, d_*) \rightarrow (C'_*, d'_*)$ ist eine Folge von R -linearen Abbildungen $f_n: C_n \rightarrow C'_n$, sodass

$$d'_n \circ f_n = f_{n-1} \circ d_n$$

für alle $n \geq 1$ gilt. Also kommutiert folgendes Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} C_0 & \xleftarrow{d_1} & C_1 & \xleftarrow{d_2} & C_2 & \xleftarrow{d_3} & C_3 \xleftarrow{\quad} \dots \\ \downarrow f_0 & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 \\ C'_0 & \xleftarrow{d'_1} & C'_1 & \xleftarrow{d'_2} & C'_2 & \xleftarrow{d'_3} & C'_3 \xleftarrow{\quad} \dots \end{array}$$

6.2 Bemerkung

Ist $f_*: (C_*, d_*) \rightarrow (C'_*, d'_*)$ eine Kettenabbildung, so erhalten wir eine induzierte Abbildung auf Homologie $H_n(f_*): H_n(C_*, d_*) \rightarrow H_n(C'_*, d'_*)$ durch

$$H_n(f_*)([v]) := [f_n(v)]$$

für $v \in \ker d_n$. Dies ist wohldefiniert, denn:

- $d'_n(f_n(v)) = f_{n-1}(d_n(v)) = 0$, also $f_n(v) \in \ker d'_n$ für $v \in \ker d_n$.
- Ist $[v] = [w]$, mit $v, w \in \ker d_n$, so gibt es $x \in C_{n+1}$ mit $d_{n+1}(x) = v - w$. Dann ist

$$d'_{n+1}(f_{n+1}(x)) = f_n(d_{n+1}(x)) = f_n(v) - f_n(w)$$

also $[f_n(v)] = [f_n(w)] \in H_n(C'_*, d'_*)$.

6.3 Bemerkung

a) R -Kettenkomplexe mit R -Kettenabbildungen bilden die Kategorie $R\text{-KETTEN}$.

b) Homologie definiert nun einen Funktor: $H_n: R\text{-KETTEN} \rightarrow R\text{-MOD}$.

Es gilt $H_n(\text{id}_{(C_*, d_*)}) = \text{id}_{H_n(C_*, d_*)}$ und $H_n(f \circ g) = H_n(f) \circ H_n(g)$, da

$$H_n(f \circ g)([v]) = [f_n \circ g_n(v)] = [f_n(g_n(v))] = H_n(f)([g_n(v)]) = H_n(f)(H_n(g)(v))$$

c) Definiert man die Kategorie der **graduerten** R -Moduln als die Kategorie, deren Objekte Folgen $(V_n)_n$ von R -Moduln sind und deren Morphismen Folgen von R -linearen Abbildungen $(f_n)_n$ sind, so kann man die H_n , $n \in \mathbb{N}$ zu einem Funktor

$$H_*: R\text{-KETTEN} \longrightarrow \text{GR-}R\text{-MOD} \quad , \quad (C_*, d_*) \longmapsto (H_n(C_*, d_*))_n$$

zusammensetzen.

6.4 Definition

Sei $f: X \rightarrow Y$ stetig. Wir definieren $C_n(f; R): C_n(X; R) \rightarrow C_n(Y; R)$ durch

$$C_n(f; R) \left(\sum_{\sigma \in S_n(X)} r_\sigma \cdot \sigma \right) := \sum_{\sigma \in S_n(X)} r_\sigma \cdot (f \circ \sigma)$$

Dies ist wohldefiniert, denn für $\sigma \in S_n(X)$ ist $f \circ \sigma \in S_n(Y)$.

6.5 Proposition

Mit dieser Definition von $C_*(f; R)$ wird der singuläre Kettenkomplex über R zu einem Funktor

$$C_*(-; R): \text{TOP} \rightarrow R\text{-KETTEN}$$

Beweis

(i) $C_*(f; R)$ ist eine R -Kettenabbildung: Es gilt

$$\begin{aligned} C_{n-1}(f; R) \circ \partial_n(\sigma) &= C_{n-1}(f; R) \left(\sum_{l=0}^n (-1)^l \cdot \sigma \circ \iota_{n,l} \right) = \sum_{l=0}^n (-1)^l \cdot (f \circ \sigma) \circ \iota_{n,l} \\ &= \partial_n(f \circ \sigma) = \partial(C_n(f; R)(\sigma)). \end{aligned}$$

(ii) Zu zeigen: $C_*(f \circ g; R) = C_*(f; R) \circ C_*(g; R)$. Es gilt

$$C_n(f \circ g; R)(\sigma) = f \circ (g \circ \sigma) = C_n(f; R)(g \circ \sigma) = C_n(f; R)(C_n(g; R)(\sigma)).$$

(iii) Zu zeigen: $C_*(\text{id}_X; R) = \text{id}_{C_*(X; R)}$. Es gilt

$$C_n(\text{id}_X; R)(\sigma) = \text{id}_X \circ \sigma = \sigma$$

□

6.6 Korollar

Mit $H_n(f; R) := H_n(C_*(f; R))$ wird $H_n(-; R)$ zu einem Funktor: $H_n(-; R): \text{TOP} \rightarrow R\text{-MOD}$.

Beweis

$H_n(-; R)$ ist die Komposition des Funktors $C_*(-; R): \text{TOP} \rightarrow R\text{-KETTEN}$ aus 6.5 mit dem Funktor $H_n: R\text{-KETTEN} \rightarrow R\text{-MOD}$ aus 6.3. □

6.7 Bemerkung

• Oft schreiben wir kurz $f_* = H_n(f; R)$.

• Für $\left[\sum_{\sigma \in S_n(X)} r_\sigma \sigma \right] \in H_n(X; R)$ ist $f_* \left(\left[\sum_{\sigma \in S_n(X)} r_\sigma \sigma \right] \right) = \left[\sum_{\sigma \in S_n(X)} r_\sigma f \circ \sigma \right] \in H_n(Y; R)$

6.8 Definition

Seien $X_i, i \in I$ topologische Räume. Mit

$$X := \coprod_{i \in I} X_i$$

bezeichnen wir die **Summe** (oder auch das **Koprodukt**) der X_i . Als Menge ist X die disjunkte Vereinigung der X_i . $U \subseteq X$ ist offen genau dann, wenn $X_i \cap U \subseteq X_i$ offen ist für jedes $i \in I$. Für jedes i_0 erhalten wir eine stetige Inklusion $j_{i_0}: X_{i_0} \rightarrow \coprod_i X_i$.

Bemerkung

Für jedes i_0 ist $X_{i_0} \subseteq \coprod_i X_i$ offen und abgeschlossen.

6.9 Definition

Seien $V_i, i \in I$ R -Moduln. Mit

$$V := \bigoplus_{i \in I} V_i$$

bezeichnen wir die **Summe** (oder auch das **Koprodukt**) der V_i . Elemente von V sind I -Folgen $(v_i)_{i \in I}$ mit $v_i \in V_i$ und $v_i = 0$ für alle bis auf endlich viele i . Die R -Modulstruktur ist erklärt durch:

$$(v_i)_{i \in I} + (w_i)_{i \in I} := (v_i + w_i)_{i \in I}, \quad r \cdot (v_i)_{i \in I} := (r \cdot v_i)_{i \in I}$$

Für jedes $i_0 \in I$ erhalten wir eine R -lineare Abbildung $j_{i_0}: V_{i_0} \rightarrow V$ mit

$$(j_{i_0}(v))_i = \begin{cases} v, & \text{falls } i = i_0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Bemerkung

Seien V_i für $i \in I$ R -Moduln. Sei W ein weiterer R -Modul. Dann gibt es zu jeder Folge $f_i: V_i \rightarrow W$ von R -linearen Abbildungen eine R -lineare Abbildung $\bigoplus_{i \in I} f_i: \bigoplus_{i \in I} V_i \rightarrow W$ mit

$$(\bigoplus_{i \in I} f_i)((v_i)_{i \in I}) = \sum_{i \in I} f_i(v_i)$$

Ist umgekehrt $f: \bigoplus_{i \in I} V_i \rightarrow W$ eine R -lineare Abbildung, so ist $f_i := f \circ j_i$ eine Folge von R -linearen Abbildungen mit $f = \bigoplus_{i \in I} f_i$.

6.10 Satz

Sei $X = \coprod_{i \in I} X_i$. Dann induzieren die Inklusionen $j_i: X_i \hookrightarrow X$ einen Isomorphismus

$$\bigoplus_{i \in I} H_n(X_i; R) \xrightarrow{\bigoplus_{i \in I} (j_i)_*} H_n(X; R)$$

Beweis

Da die $X_i \subseteq X$ offen und abgeschlossen sind und $|\Delta^n|$ zusammenhängend ist (sogar wegzusammenhängend), gibt es für jedes $\sigma: |\Delta^n| \rightarrow X$ ein eindeutiges i mit $\text{Im } \sigma \subseteq X_i$. Es gilt also $S_n(X) = \bigcup S_n(X_i)$. Daher induzieren die j_i für jedes n einen Isomorphismus

$$\bigoplus_{i \in I} C_n(j_i; R): \bigoplus_{i \in I} C_n(X_i; R) \xrightarrow{\cong} C_n(X; R)$$

Da diese Isomorphismen mit den Randabbildungen vertauschen, erhalten wir einen Isomorphismus von R -Kettenkomplexen

$$\varphi := \bigoplus_{i \in I} C_*(j_i; R): \bigoplus_{i \in I} C_*(X_i; R) \xrightarrow{\cong} C_*(X; R)$$

Da $\bigoplus_i H_n(C_*(X_i; R)) \cong H_n(\bigoplus_i C_*(X_i; R))$ induzieren dann auch die $(j_i)_*$ einen Isomorphismus

$$\bigoplus_{i \in I} (j_i)_*: \bigoplus_{i \in I} H_n(X_i; R) \xrightarrow{\cong} H_n(X; R) \quad \square$$

7 Homotopieinvarianz

7.1 Bemerkung

Sei $f: X \rightarrow Y$ ein Homöomorphismus. Dann ist $f_*: H_n(X; R) \rightarrow H_n(Y; R)$ ein Isomorphismus.

Beweis

Da Homologie ein Funktor ist, gilt

$$\begin{aligned} f_* \circ (f^{-1})_* &= (f \circ f^{-1})_* = (\text{id}_Y)_* = \text{id}_{H_n(Y; R)} & \text{und} \\ (f^{-1})_* \circ f_* &= (f^{-1} \circ f)_* = (\text{id}_X)_* = \text{id}_{H_n(X; R)} \end{aligned}$$

Also ist $(f_*)^{-1} = (f^{-1})_*$. Insbesondere ist f_* ein Isomorphismus. □

7.2 Definition

Eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ heißt eine **Homotopieäquivalenz**, falls es eine stetige Abbildung $g: Y \rightarrow X$ gibt, so dass $g \circ f$ homotop zu id_X ist und $f \circ g$ homotop zu id_Y ist. g heißt dann eine **Homotopieinverse** zu f .

Bemerkung

- (i) f ist genau dann eine Homotopieäquivalenz, wenn $[f]$ in HTop invertierbar ist. In HTop ist dann $[f]^{-1} = [g]$.

- (ii) Die Homotopieinverse ist eindeutig bis auf Homotopie.

7.3 Satz

Seien $f, g: X \rightarrow Y$ stetige Abbildungen. Sind f und g homotop, so gilt für die induzierten Abbildungen $H_n(f; R) = H_n(g; R)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis

Siehe 7.8, sowie 7.13 □

7.4 Korollar

Ist $f: X \rightarrow Y$ eine Homotopieäquivalenz, so ist $f_*: H_n(X; R) \rightarrow H_n(Y; R)$ ein Isomorphismus.

Beweis

Sei $g: Y \rightarrow X$ ein Homotopieinverses zu f . Es folgt

$$\begin{aligned} f_* \circ g_* &\stackrel{\text{Funktor}}{=} (f \circ g)_* \stackrel{\text{Homotopieinvarianz}}{=} (\text{id}_Y)_* \stackrel{\text{Funktor}}{=} \text{id}_{H_n(Y; R)} \\ g_* \circ f_* &\stackrel{\text{Funktor}}{=} (g \circ f)_* \stackrel{\text{Homotopieinvarianz}}{=} (\text{id}_X)_* \stackrel{\text{Funktor}}{=} \text{id}_{H_n(X; R)} \end{aligned} \quad \square$$

7.5 Korollar

Ist X **kontrahierbar**, d.h. es gibt eine Homotopie $H: X \times [0, 1] \rightarrow X$ mit $H_0 = \text{id}_X$ und H_1 konstant, so gilt

$$H_n(X; R) \cong \begin{cases} R, & \text{falls } n = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis

Sei $\{x_0\} = \text{Im } H_1$. Dann ist die Inklusion $\{x_0\} \rightarrow X$ eine Homotopieäquivalenz. Also gilt nach 7.4

$$H_n(X; R) \cong H_n(\{x_0\}; R) \stackrel{5.9}{=} \begin{cases} R, & \text{falls } n = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad \square$$

Beispiel

$$H_n(\mathbb{R}^k; R) \cong \begin{cases} R, & \text{falls } n = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad H_n(D^k; R) \cong \begin{cases} R, & \text{falls } n = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

7.6 Definition

Seien (C_*, d_*) und (C'_*, d'_*) R -Kettenkomplexe. Seien $f_*, g_*: (C_*, d_*) \rightarrow (C'_*, d'_*)$ R -Kettenabbildungen. Eine **Kettenhomotopie** von f_* nach g_* ist eine Folge von R -linearen Abbildungen $h_n: C_n \rightarrow C'_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, sodass für alle n gilt:

$$d'_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ d_n = f_n - g_n$$

In diesem Fall heißen f_* und g_* **kettenhomotop**.

$$\begin{array}{ccccc} C_{n-1} & \xleftarrow{d_n} & C_n & & \\ & \searrow h_{n-1} & \downarrow g_n & \searrow f_n & \\ & & C'_n & \xleftarrow{d'_{n+1}} & C'_{n+1} \end{array}$$

Kettenhomotopie
definiert eine Äqui-
valenzrelation wie
in Aufgabe 2 von
Blatt 5 gezeigt.

7.7 Proposition

Seien $f_*, g_*: (C_*, d_*) \rightarrow (C'_*, d'_*)$ Kettenabbildungen. Sind f_* und g_* kettenhomotop, so gilt für alle n

$$H_n(f_*) = H_n(g_*)$$

Beweis

Sei $x \in H_n(C_*, d_*)$. Also $x = [v]$ mit $v \in \ker d_n: C_n \rightarrow C_{n-1}$. Dann gilt, da $v \in \ker d_n$

$$\begin{aligned} H_n(f_*)(x) &= H_n(f_*)([v]) = [f_n(v)] = \left[g_n(v) + \underbrace{d'_{n+1} \circ h_n(v)}_{\in \text{Im } d'_{n+1}} + \underbrace{h_{n-1} \circ d_n(v)}_{=0} \right] \\ &= [g_n(v)] = H_n(g_*)([v]) = H_n(g_*)(x) \end{aligned} \quad \square$$

7.8 Lemma

Die Homotopieinvarianz von $H_n(-; R)$, also Satz 7.3, folgt aus folgenden Spezialfall:

$$\text{Seien } i_0, i_1: X \hookrightarrow X \times [0, 1] \text{ Inklusionen mit } i_0(x) = (x, 0), i_1(x) = (x, 1). \implies (i_0)_* = (i_1)_* \quad [\#]$$

Beweis

Sei $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ eine Homotopie zwischen $f, g: X \rightarrow Y$, also $f = H \circ i_0$ und $g = H \circ i_1$. Dann folgt mittels Funktorialität

$$f_* = (H \circ i_0)_* = H_* \circ (i_0)_* = H_* \circ (i_1)_* = (H \circ i_1)_* = g_* \quad \square$$

7.9 Bemerkung

Zum Beweis von $[\#]$ werden wir eine explizite Kettenhomotopie h_* zwischen $C_*(i_0; R)$ und $C_*(i_1; R)$ konstruieren. Wir brauchen also $h_n: C_n(X; R) \rightarrow C_{n+1}(X \times [0, 1]; R)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\partial_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ \partial_n = C_n(i_0; R) - C_n(i_1; R). \quad [\#\#]$$

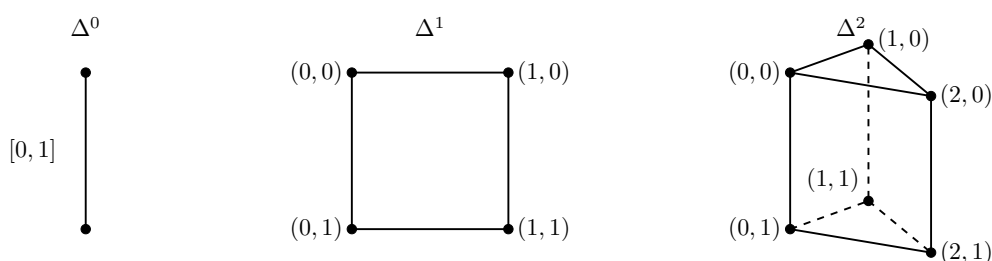
"Ansatz"

Für $\sigma: |\Delta^n| \rightarrow X$ setze $h_n(\sigma) = \sigma \times \text{id}_{[0,1]}: |\Delta^n| \times [0,1] \rightarrow X \times [0,1]$. Dann ist " $h_{n-1}(\partial_n \sigma) = \partial_n \sigma \times \text{id}_{[0,1]}$ " und

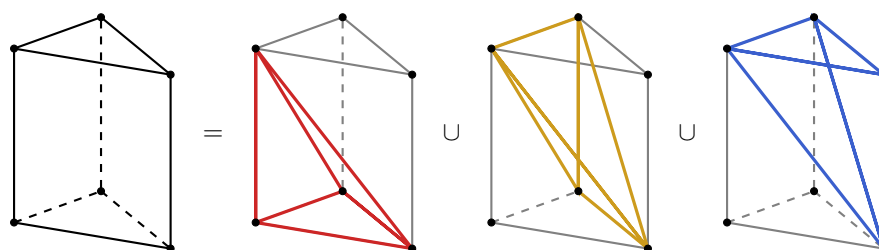
$$\partial_{n+1}(h_n \sigma) = \partial_{n+1}(\sigma \times \text{id}_{[0,1]}) = (\sigma \times \text{id}) \Big|_{\partial(|\Delta^n| \times [0,1])} = \partial_n \sigma \times \text{id}_{[0,1]} + i_0 \sigma + i_1 \sigma$$

da $\partial(|\Delta^n| \times [0,1]) = \partial|\Delta^n| \times [0,1] \cup |\Delta^n| \times \{0,1\}$.

Um daraus Sinn zu machen, zerlegen wir $|\Delta^n| \times [0,1]$ in eine Vereinigung von $(n+1)$ -Simplizes. $\Delta^n \times [0,1]$ hat die folgende Form für $n \in \{0,1,2\}$:

Abbildung 1: $\Delta^n \times [0,1]$ für $n = 0, 1, 2$

Die Zerlegung in 3-Simplizes ist für $\Delta^2 \times [0,1]$ gegeben durch

Abbildung 2: Zerlegung von $\Delta^2 \times [0,1]$ in 3-Simplizes

Dieses Vorgehen verallgemeinern wir jetzt für beliebiges $n \in \mathbb{N}$:

7.10 Definition

Für $j = 0, \dots, n$ seien $k_{n,j}: |\Delta^{n+1}| \rightarrow |\Delta^n| \times [0,1]$ und $\iota_{n,j}: |\Delta^{n-1}| \rightarrow |\Delta^n|$ die eindeutigen affin linearen Abbildungen, für die gilt:

$$\begin{aligned} k_{n,j}(e_0) &= (e_0, 0) \\ k_{n,j}(e_1) &= (e_1, 0) \dots \\ k_{n,j}(e_j) &= (e_j, 0) \\ k_{n,j}(e_{j+1}) &= (e_j, 1) \dots \\ k_{n,j}(e_{n+1}) &= (e_n, 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iota_{n,j}(e_0) &= e_0 \\ \iota_{n,j}(e_1) &= e_1 \dots \\ \iota_{n,j}(e_{j-1}) &= e_{j-1} \\ \iota_{n,j}(e_j) &= e_{j+1} \dots \\ \iota_{n,j}(e_{n-1}) &= e_n \end{aligned}$$

e_1, \dots, e_n sind wieder die Einheitsvektoren von \mathbb{R}^n

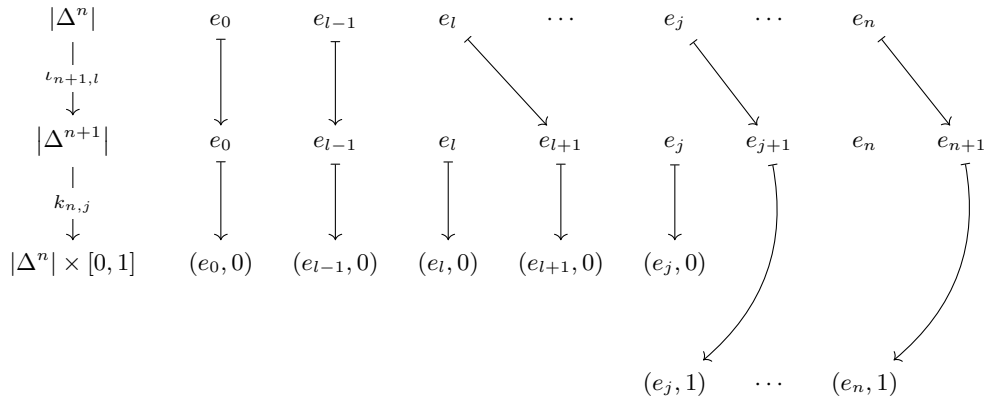
7.11 Lemma

Es gelten folgende fünf Gleichungen für die Abbildungen $k_{n,j}$ und $\iota_{n,j}$:

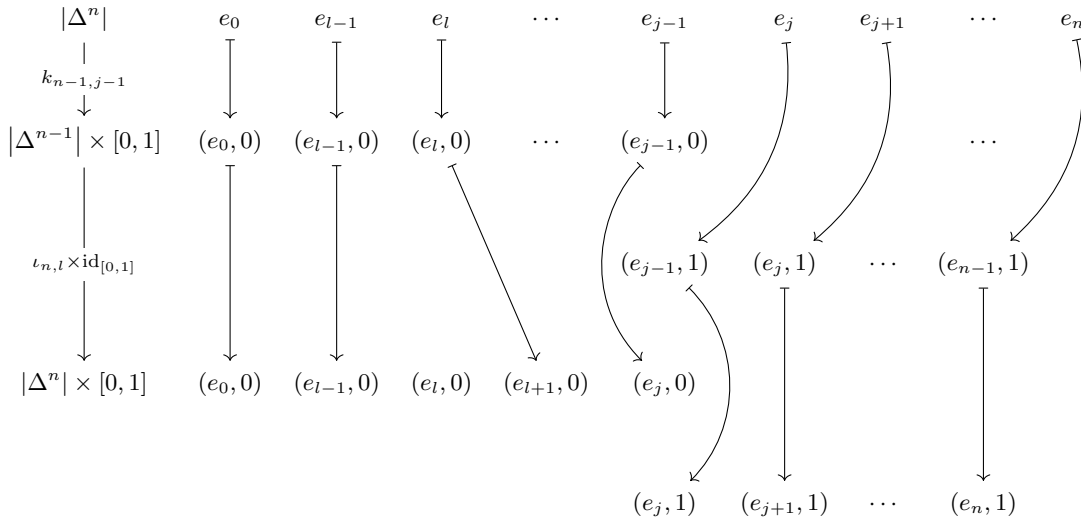
- (i) Für $0 \leq l < j \leq n$ gilt $k_{n,j} \circ \iota_{n+1,l} = (\iota_{n,l} \times \text{id}_{[0,1]}) \circ k_{n-1,j-1}$
- (ii) Für $1 \leq j+1 < l \leq n+1$ gilt $k_{n,j} \circ \iota_{n+1,l} = (\iota_{n,l-1} \times \text{id}_{[0,1]}) \circ k_{n-1,j}$
- (iii) Für $1 \leq j+1 = l \leq n$ gilt $k_{n,j} \circ \iota_{n+1,l} = k_{n,j+1} \circ \iota_{n+1,l}$
- (iv) Für $l=0, j=0$ ist $k_{n,j} \circ \iota_{n+1,l} = i_1 : \Delta^n \rightarrow \Delta^n \times [0,1]$
- (v) Für $l=n, j=n+1$ ist $k_{n,j} \circ \iota_{n+1,l} = i_0 : \Delta^n \rightarrow \Delta^n \times [0,1]$

Beweis

Wir zeigen hier nur exemplarisch die erste Gleichung: Die linke Seite der Gleichung entspricht



und die rechte Seite entspricht



Also folgt insgesamt die Gleichheit. Die anderen Gleichungen folgen genauso. \square

7.12 Beweis von [##]

Sei $h_n: C_n(X; R) \rightarrow C_{n+1}(X \times [0, 1]; R)$ definiert durch

$$h_n(\sigma) := \sum_{j=0}^n (-1)^j \cdot (\sigma \times \text{id}) \circ k_{n,j}$$

h_* ist die gesuchte Kettenhomotopie, da für $n \in \mathbb{N}$ unter Anwendung der Gleichungen aus 7.12 gilt:

$$\begin{aligned}
 \partial_{n+1}(h_n(\sigma)) &= \partial_{n+1} \left(\sum_{j=0}^n (-1)^j \cdot (\sigma \times \text{id}) \circ k_{n,j} \right) \\
 &= \sum_{l=0}^{n+1} \sum_{j=0}^n (-1)^{j+l} \cdot (\sigma \times \text{id}) \circ k_{n,j} \circ \iota_{n+1,l} \quad (\text{nach Definition 5.2}) \\
 &= \sum_{0 \leq l < j \leq n} (-1)^{j+l} ((\sigma \circ \iota_{n,l}) \times \text{id}) \circ k_{n-1,j-1} + \sum_{1 \leq j+1 < l \leq n+1} (-1)^{j+l} ((\sigma \circ \iota_{n,l-1}) \times \text{id}) \circ k_{n-1,j} \\
 &\quad + \sum_{1 \leq j+1=l \leq n} (-1)^{j+l} (\sigma \times \text{id}) \circ k_{n,j+1} \circ \iota_{n+1,l} + \sum_{1 \leq j=l \leq n} (-1)^{j+l} (\sigma \times \text{id}) \circ k_{n,j} \circ \iota_{n+1,l} \\
 &\quad + \sum_{0=l=j} (-1)^{j+l} (\sigma \times \text{id}) \circ i_1 + \sum_{n+1=j+1=l} (-1)^{j+l} (\sigma \times \text{id}) \circ i_0 \\
 &= \sum_{0 \leq l \leq j \leq n-1} (-1)^{j+l+1} ((\sigma \circ \iota_{n,l}) \times \text{id}) \circ k_{n-1,j} + \sum_{1 \leq j+1 \leq l \leq n} (-1)^{j+l+1} ((\sigma \circ \iota_{n,l}) \times \text{id}) \circ k_{n-1,j} \\
 &\quad + \underbrace{\sum_{1 \leq j=l \leq n} (-1)^{j+l-1} (\sigma \times \text{id}) \circ k_{n,j} \circ \iota_{n+1,l} + \sum_{1 \leq j=l \leq n} (-1)^{j+l} (\sigma \times \text{id}) \circ k_{n,j} \circ \iota_{n+1,l}}_{=0} \\
 &\quad + \sum_{0=l=j} (-1)^{j+l} (\sigma \times \text{id}) \circ i_1 + \sum_{n+1=j+1=l} (-1)^{j+l} (\sigma \times \text{id}) \circ i_0 \\
 &= - \sum_{\substack{0 \leq l \leq n \\ 0 \leq j \leq n-1}} (-1)^{j+l} ((\sigma \circ \iota_{n,l}) \times \text{id}) \circ k_{n-1,j} + (\sigma \times \text{id}) \circ i_1 - (\sigma \times \text{id}) \circ i_0 \\
 &= - \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \sum_{l=0}^n (-1)^l ((\sigma \circ \iota_{n,l}) \times \text{id}) \circ k_{n-1,j} + \underbrace{(\sigma \times \text{id}) \circ i_1}_{=i_1 \circ \sigma} - \underbrace{(\sigma \times \text{id}) \circ i_0}_{=i_0 \circ \sigma} \\
 &= -h_{n-1}(\partial_n \sigma) + C_n(i_1; R)(\sigma) - C_n(i_0; R)(\sigma) \quad \square
 \end{aligned}$$

7.13 Bemerkung

Ist $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ eine Homotopie zwischen f und g , so erhalten wir eine Kettenhomotopie k zwischen $C_*(f; R)$ und $C_*(g; R)$ durch

$$k_n(\sigma) := C_{n+1}(H; R) \circ h_n = \sum_{j=0}^n (-1)^j H \circ (\sigma \times \text{id}) \circ k_{n,j}$$

8 Homologie von Paaren

8.1 Definition

Sei A ein Teilraum von X , dann heißt (X, A) ein **Paar von topologischen Räumen**. Eine Abbildung von Paaren $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ ist eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ mit $f(A) \subseteq B$. Manchmal schreiben wir $(f, f|_A): (X, A) \rightarrow (Y, B)$.

Die Kategorie von Paaren von topologischen Räumen bezeichnen wir mit Top^2 .

8.2 Definition

Sei (X, A) ein Paar. Dann definieren wir den **singulären Kettenkomplex** von (X, A) über R durch

$$C_n(X, A; R) := C_n(X; R) / C_n(A; R)$$

$$\partial_n(\sigma + C_n(A; R)) := \partial_n \sigma + C_{n-1}(A; R)$$

Dies ist wohldefiniert, da $\partial_n(C_n(A; R)) \subseteq C_{n-1}(A; R)$. Weiter heißt

$$H_n(X, A; R) := H_n(C_*(X, A; R), \partial_*)$$

der **n-te singuläre Homologiemodul** von (X, A) mit Koeffizienten in R .

8.3 Bemerkung

Der singuläre Kettenkomplex von Paaren definiert einen Funktor $\text{Top}^2 \rightarrow R\text{-KETTEN}$. Durch Komposition mit Homologie (als Funktor $R\text{-KETTEN} \rightarrow R\text{-MOD}$) erhalten wir einen Funktor

$$H_n(-, -; R): \text{Top}^2 \rightarrow R\text{-MOD}$$

8.4 Bemerkung

Via $X \mapsto (X, \emptyset)$ können wir jeden Raum auch als Paar auffassen. Es gilt $H_n(X, \emptyset; R) = H_n(X; R)$.

8.5 Frage

Können wir $H_n(X, A; R)$ durch $H_n(X; R)$ und $H_n(A; R)$ ausdrücken?

Ansatz 1:

$$H_n(X, A; R) \cong H_n(X; R) / H_n(A; R)$$

⚠ Problem: $H_n(A; R)$ ist kein Untermodul von $H_n(X; R)$.

Ansatz 2: Ist $H_n(X; R) \rightarrow H_n(X, A; R)$ surjektiv?

Sei $x \in H_n(X, A; R)$. Dann gibt es $\sigma + C_n(A; R) \in C_n(X, A; R)$ mit $\partial_n(\sigma + C_n(A; R)) = 0$ und $x = [\sigma]$. Es ist $\sigma \in C_n(X; R)$, aber wir wissen nur $\partial_n \sigma \in C_{n-1}(A; R)$, nicht $\partial_n(\sigma) = 0$. ☹

8.6 Beispiel

In $C_n(|\Delta^n|, |\partial\Delta^n|; R)$ gilt für $\sigma := \text{id}: |\Delta^n| \rightarrow |\Delta^n|$, dass $\partial_n([\sigma]) = 0$ ist, da $\partial_n \sigma \in C_{n-1}(|\partial\Delta^n|; R)$. Wir werden später sehen, dass $[\sigma]$ den Homologiemodul

$$H_n(|\Delta^n|, |\partial\Delta^n|; R) \cong R$$

erzeugt.

8.7 Definition

Eine Folge von R -linearen Abbildungen zwischen R -Moduln M_i

$$\cdots \longrightarrow M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_{n-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_0$$

heißt **lange exakte Folge**, wenn sie exakt an jeder Stelle M_i ist, d.h. für alle i gilt $\text{Im } f_i = \ker f_{i-1}$.

8.8 Satz

Es gibt eine natürliche Transformation ∂_n von $(X, A) \mapsto H_n(X, A; R)$ nach $(X, A) \mapsto H_{n-1}(A; R)$, sodass für jedes Paar (X, A)

$$\begin{aligned} \cdots &\xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(A; R) \xrightarrow{i_*} H_n(X; R) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A; R) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A; R) \longrightarrow \cdots \\ \cdots &\xrightarrow{\partial_1} H_0(A; R) \longrightarrow H_0(X; R) \longrightarrow H_0(X, A; R) \longrightarrow 0 \end{aligned} \quad [*]$$

eine lange exakte Folge ist. Dabei sind $i: A \hookrightarrow X$ und $j: (X, \emptyset) \hookrightarrow (X, A)$ die Inklusionen. Das bedeutet:

Für jedes Paar (X, A) haben wir eine R -lineare Abbildung $\partial_n: H_n(X, A; R) \rightarrow H_{n-1}(A; R)$, sodass für jede Abbildung $(f, f|_A): (X, A) \rightarrow (Y, B)$ von Paaren folgendes Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} H_n(X, A; R) & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(A; R) \\ \downarrow (f, f|_A)_* & & \downarrow (f|_A)_* \\ H_n(Y, B; R) & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(B; R) \end{array}$$

Beweis

siehe 8.13.

8.9 Korollar

- (1) Ist die Inklusion $i: A \rightarrow X$ eine Homotopieäquivalenz, so ist $H_n(X, A; R) = 0$ für alle n .
- (2) Sei A kontraktibel. Dann gilt für alle $n \geq 1$, $H_n(X; R) \cong H_n(X, A; R)$

Beweis

- (1) Betrachte den folgenden Ausschnitt aus der langen exakten Folge:

$$H_n(A; R) \xrightarrow{i_*} H_n(X; R) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A; R) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A; R) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(X; R)$$

Nach 7.4 ist $i_*: H_n(A; R) \rightarrow H_n(X; R)$ ein Isomorphismus. Wegen der Exaktheit gilt $\ker j_* = \text{Im } i_* = H_n(X; R)$, also folgt $j_* = 0$. Da $\text{Im } \partial_n = \ker i_* = 0$, folgt $\partial_n = 0$. Nun ist

$$H_n(X, A; R) = \ker \partial_n = \text{Im } j_* = 0$$

- (2) Folgt leicht aus 7.5 und der Exaktheit der Paarsequenz $[*]$. Für $n = 1$ brauchen wir außerdem, dass ∂_1 für A wegzusammenhängend trivial ist. Dies folgt aus Aufgabe 1a) von Blatt 6, denn dort wurde gezeigt, dass $i_*: H_0(A) \rightarrow H_0(X)$ injektiv ist. \square

8.10 Definition

Seien

$$(C_*, d_*) \xrightarrow{i_*} (C'_*, d'_*) \xrightarrow{p_*} (C''_*, d''_*) \quad [\#]$$

R -Kettenabbildungen. Ist für jedes n die Folge $C_n \xrightarrow{i_n} C'_n \xrightarrow{p_n} C''_n$ kurz exakt, so heißt $[\#]$ eine **kurze exakte Folge von Kettenkomplexen**.

8.11 Beispiel

Für jedes Paar (X, A) ist

$$(C_*(A; R), \partial_*) \xrightarrow{i_*} (C_*(X; R), \partial_*) \xrightarrow{j_*} (C_*(X, A; R), \partial_*)$$

eine kurze exakte Folge von R -Kettenkomplexen.

8.12 Schlangenlemma

Sei

$$(C_*, d_*) \xrightarrow{i_*} (C'_*, d'_*) \xrightarrow{p_*} (C''_*, d''_*)$$

eine kurze exakte Folge von R -Kettenkomplexen.

- a) Für jedes n gibt es eine eindeutige wohldefinierte R -lineare Abbildung $\partial_n : H_n(C''_*, d''_*) \rightarrow H_{n-1}(C_*, d_*)$ mit: Für $v' \in C'_n$ mit $d''_n \circ p_n(v') = 0$ ist

$$\partial_n \left(\underbrace{[p_n(v')]}_{\in H_n(C''_*, d''_*)} \right) = [v] \in H_{n-1}(C_*, d_*)$$

wobei $v \in C_{n-1}$ bestimmt ist durch $i_{n-1}(v) = d'_n(v')$.

b)

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & H_n(C_*, d_*) & \xrightarrow{i_*} & H_n(C'_*, d'_*) & \xrightarrow{p_*} & H_n(C''_*, d''_*) \\ & & & & & & \downarrow \partial_n \\ & & \xrightarrow{\quad} & H_{n-1}(C_*, d_*) & \xrightarrow{i_*} & H_{n-1}(C'_*, d'_*) & \xrightarrow{p_*} \cdots \\ & & & & & & \downarrow \partial_{n-1} \\ & & \xrightarrow{\quad} & H_0(C_*, d_*) & \xrightarrow{i_*} & H_0(C'_*, d'_*) & \xrightarrow{p_*} H_0(C''_*, d''_*) \longrightarrow 0 \end{array}$$

ist eine lange exakte Folge.

Beweis

$$\begin{array}{ccccc} C_{n+1} & \xrightarrow{i_{n+1}} & C'_{n+1} & \xrightarrow{p_{n+1}} & C''_{n+1} \\ \downarrow d_{n+1} & & \downarrow d'_{n+1} & & \downarrow d''_{n+1} \\ C_n & \xrightarrow{i_n} & C'_n & \xrightarrow{p_n} & C''_n \\ \downarrow d_n & & \downarrow d'_n & & \downarrow d''_n \\ C_{n-1} & \xrightarrow{i_{n-1}} & C'_{n-1} & \xrightarrow{p_{n-1}} & C''_{n-1} \\ \downarrow d_{n-1} & & \downarrow d'_{n-1} & & \downarrow d''_{n-1} \\ C_{n-2} & \xrightarrow{i_{n-2}} & C'_{n-2} & \xrightarrow{p_{n-2}} & C''_{n-2} \end{array}$$

- a) Sei $x'' \in H_n(C'_*, d''_*)$, also $x'' = [v'']$ mit $v'' \in \ker d''_n$. Da p_n surjektiv ist, existiert $v' \in C'_n$ mit $p_n(v') = v''$. Es gilt

$$p_{n-1} \circ d'_n(v') = d''_n \circ p_n(v') = d''_n(v'') = 0$$

Also ist $d'_n(v') \in \ker p_{n-1}$. Weiter gilt $\ker p_{n-1} = \text{Im } i_{n-1}$, also existiert ein $v \in C_{n-1}$ mit $i_{n-1}(v) = d'_n(v')$. Dann gilt

$$i_{n-2}(d_{n-1}(v)) = d'_{n-1}(i_{n-1}(v)) = d'_{n-1}(d'_n(v')) = 0$$

Da i_{n-2} injektiv ist, folgt somit $d_{n-1}(v) = 0$. Also setzen wir $\partial_n(x'') := [v] \in H_{n-1}(C_*, d_*)$.

Es bleibt zu zeigen, dass $[v] \in H_{n-1}(C_*, d_*)$ unabhängig von der Wahl von v'' und v' ist. Seien $w'' \in \ker d''_n$, $w' \in C'_n$ und $w \in C_{n-1}$ mit $x'' = [w'']$, $p_n(w') = w''$ und $i_{n-1}(w) = d'_n(w')$. Es ist $[v''] = [w'']$, also existiert ein $a'' \in C''_{n+1}$ mit $d''_{n+1}(a'') = v'' - w''$. p_{n+1} ist surjektiv, also existiert $a' \in C'_{n+1}$ mit $p_{n+1}(a') = a''$. Es gilt

$$p_n(v' - w' - d'_{n+1}(a')) = v'' - w'' - \underbrace{d''_{n+1}(p_{n+1}(a'))}_{=v''-w''} = 0$$

Mit $\ker p_n = \text{Im } i_n$ folgt die Existenz von $a \in C_n$ mit $i_n(a) = v' - w' - d_{n+1}(a')$. Es gilt nun

$$\begin{aligned} i_{n-1}(d_n(a) - (v - w)) &= i_{n-1}(d_n(a)) - i_{n-1}(v - w) \\ &= d'_n(i_n(a)) - (d'_n(v') - d'_n(w')) \\ &= d'_n(-d'_{n+1}(a') + v' - w') - d'_n(v' - w') \\ &= -d'_n d'_{n+1}(a') + d'_n(v' - w') - d'_n(v' - w') = 0 \end{aligned}$$

Da i_{n-1} injektiv ist, folgt $d_n(a) - (v - w) = 0$, also $d_n(a) = (v - w)$. Es folgt $[v] = [w]$.

- b) Exaktheit der langen Folge:

$$\boxed{\text{Im}(i_n)_* = \ker(p_n)_*} : \text{„}\subseteq\text{“ folgt aus } (p_n)_* \circ (i_n)_* = (p_n \circ i_n)_* = (0)_* = 0.$$

Für „ \supseteq “ betrachte $x' \in \ker(p_n)_*$, wobei $x' = [v']$ mit $v' \in C'_n$ und $d'_n(v') = 0$. Da nun $[p_n(v')] = (p_n)_*[x'] = 0$ ist, gibt es $a'' \in C''_{n+1}$ mit $d''_{n+1}(a'') = p_n(v')$. Da p_{n+1} surjektiv ist, existiert $a' \in C'_{n+1}$ mit $p_{n+1}(a') = a''$. Dann gilt

$$p_n(v' - d'_{n+1}(a')) = p_n(v') - p_n \circ d'_{n+1}(a') = p_n(v') - \underbrace{d''_{n+1}(p_{n+1}(a'))}_{=a''}_{=p_n(v')} = 0$$

Da $\ker p_n = \text{Im } i_n$, gibt es $a \in C_n$ mit $i_n(a) = v' - d'_{n+1}(a')$. Nun ist

$$i_{n-1}(d_n(a)) = d'_n(i_n(a)) = d'_n(v' - d'_{n+1}(a')) = d'_n(v') = 0$$

Da i_{n-1} injektiv ist, folgt $d_n(a) = 0$. Insbesondere $[a] \in H_n(C_*, d_*)$. Nun ist

$$(i_n)_*[a] = [i_n(a)] = [v' - d'_{n+1}(a')] = [v'] = x'$$

Also ist $x' \in \text{Im}(i_n)_*$.

$\boxed{\text{Im}(p_n)_* = \ker \partial_n}$: Für „ \subseteq “ betrachte $x'' \in \text{Im}(p_n)_*$. Dann gibt es $v' \in C'_n$ mit $d'_n(v') = 0$ und $x'' = [p_n(v')]$. Es ist $d'_n(v') \in \ker p_{n-1} = \text{Im } i_{n-1}$, also existiert ein $v \in C_{n-1}$ mit $i_{n-1}(v) = d'_n(v')$. Es gilt nun $\partial_n(x'') = [v]$. Wegen der Injektivität von i_{n-1} ist $v = 0$, also $\partial_n(x'') = [0]$.

Sei nun umgekehrt $x'' \in \ker \partial_n$. Wir finden wieder $v' \in C'_n$ und $v \in C_{n-1}$ mit $x'' = [p_n(v')]$, $i_{n-1}(v) = d'_n(v')$ und $0 = \partial_n(x'') = [v]$. Daher gibt es $a \in C_n$ mit $d_n(a) = v$. Es folgt

$$d'_n(v' - i_n(a)) = i_{n-1}(v) - i_{n-1}(d_n(a)) = 0$$

Es gilt nun $(p_n)_*[v' - i_n(a)] = [p_n(v') - p_n(i_n(a))] = [p_n(v')] = x''$.

$\boxed{\text{Im } \partial_n = \ker(i_{n-1})_*}$: Für „ \subseteq “ sei $x \in \text{Im } \partial_n$. Dann gibt es wieder $v' \in C'_n$ und $v \in C_{n-1}$ mit $d''_n(p_n(v')) = 0$, $d'_n(v') = i_{n-1}(v)$ und $x = [v]$. Dann gilt

$$(i_{n-1})_*(x) = (i_{n-1})_*[v] = [i_{n-1}(v)] = [d'_n(v')] = 0$$

Sei nun umgekehrt $x \in \ker(i_{n-1})_*$ und $v \in C_{n-1}$ mit $d_{n-1}(v) = 0$ und $x = [v]$. Da nun $(i_{n-1})_*(x) = [i_{n-1}(v)]$ und $x \in \ker(i_{n-1})_*$ ist, gibt es $v' \in C'_n$ mit $d'_n(v') = i_{n-1}(v)$. Es gilt nun

$$d''_n(p_n(v')) = p_{n-1}(d'_n(v')) = p_{n-1}(i_{n-1}(v)) = 0$$

Daraus folgt $\partial_n[p_n(v')] = x$. □

8.13 Beweis von Satz 8.8

Für jedes Paar (X, A) ist die Folge der singulären Kettenkomplexe

$$(C_*(A; R), \partial_*^A) \xrightarrow{C_*(i; R)} (C_*(X; R), \partial_*^X) \xrightarrow{C_*(j; R)} (C_*(X, A; R), \partial_*^{(X, A)})$$

kurz exakt. Das Schlangenlemma 8.12 produziert $\partial_n: H_n(X, A; R) \rightarrow H_{n-1}(A; R)$ und die lange exakte Sequenz $[\ast]$. Es bleibt zu zeigen, dass die Randabbildungen aus dem Schlangenlemma wie behauptet eine natürliche Transformation definieren: Sei $(f, f|_A): (X, A) \rightarrow (Y, B)$ eine Abbildung von Paaren. Zu zeigen ist, dass

$$\begin{array}{ccc} H_n(X, A; R) & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(A; R) \\ \downarrow (f, f|_A)_* & & \downarrow (f|_A)_* \\ H_n(Y, B; R) & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(B; R) \end{array}$$

kommutiert. Sei $x'' \in H_n(X, A; R)$. Sei $v' \in C_n(X; R)$ mit $\partial_n^X(v') \in C_n(A; R)$ und $[v' + C_n(A; R)] = x''$. Dann ist $\partial_n(x'') = [\partial_n^X(v')] \in H_{n-1}(A; R)$. Dann ist

$$(f, f|_A)_*(x'') = (f, f|_A)_*[v' + C_n(A; R)] = [f_*(v') + C_n(B; R)] \in H_n(Y, B; R)$$

Es ist $\partial_n^Y(f_*(v')) = (f|_A)_*\left(\underbrace{\partial_n^X(v')}_{\in C_n(A; R)}\right) \in C_n(B; R)$. Also

$$\partial_n^Y((f, f|_A)_*(x'')) = [\partial_n^Y(f_*(v'))] = [f_* \circ \partial_n^X(v')] = f_* \circ \partial_n(x'') \quad \square$$

8.14 Bemerkung

Für eine Abbildung $(f, f|_A): (X, A) \rightarrow (Y, B)$ erhalten wir ein kommutierendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & H_n(A; R) & \xrightarrow{i_*^A} & H_n(X; R) & \xrightarrow{j_*^X} & H_n(X, A; R) & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(A; R) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow (f|_A)_* & & \downarrow f_* & & \downarrow (f, f|_A)_* & & \downarrow (f|_A)_* & & \\ \cdots & \longrightarrow & H_n(B; R) & \xrightarrow{i_*^B} & H_n(Y; R) & \xrightarrow{j_*^Y} & H_n(Y, B; R) & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(B; R) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

8.15 Fünfer-Lemma

Seien die Zeilen in folgendem kommutativen Diagramm von R -Moduln exakt.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 A_4 & \xrightarrow{\alpha_4} & A_3 & \xrightarrow{\alpha_3} & A_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & A_0 \\
 f_4 \downarrow \cong & & f_3 \downarrow \cong & & f_2 \downarrow & & f_1 \downarrow \cong & & f_0 \downarrow \cong \\
 B_4 & \xrightarrow{\beta_4} & B_3 & \xrightarrow{\beta_3} & B_2 & \xrightarrow{\beta_2} & B_1 & \xrightarrow{\beta_1} & B_0
 \end{array}$$

Sind f_4, f_3, f_1 und f_0 Isomorphismen, so ist auch f_2 ein Isomorphismus.

Beweis

Injektivität: Sei $a_2 \in A_2$ mit $f_2(a_2) = 0$. Wir erhalten

$$f_1(\alpha_2(a_2)) = \beta_2(f_2(a_2)) = \beta_2(0) = 0.$$

Da f_1 ein Isomorphismus ist, folgt $\alpha_2(a_2) = 0$. Damit ist $a_2 \in \ker \alpha_2 = \operatorname{Im} \alpha_3$, also existiert $a_3 \in A_3$ mit $\alpha_3(a_3) = a_2$. Es gilt

$$\beta_3(f_3(a_3)) = f_2(\alpha_3(a_3)) = f_2(a_2) = 0$$

Also ist $f_3(a_3) \in \ker \beta_3 = \operatorname{Im} \beta_4$. Da f_4 Isomorphismus ist, gibt es $a_4 \in A_4$ mit $\beta_4(f_4(a_4)) = f_3(a_3)$. Nun gilt

$$f_3(\alpha_4(a_4) - a_3) = f_3(\alpha_4(a_4)) - f_3(a_3) = \beta_4(f_4(a_4)) - f_3(a_3) = f_3(a_3) - f_3(a_3) = 0$$

Da f_3 ein Isomorphismus ist, folgt nun $\alpha_4(a_4) = a_3$. Nun ist

$$a_2 = \alpha_3(a_3) = \alpha_3(\alpha_4(a_4)) = \underbrace{\alpha_3 \circ \alpha_4}_{=0}(a_4) = 0$$

Surjektivität: Sei $b_2 \in B_2$. Fall 1: $\beta_2(b_2) = 0$. Da $\operatorname{Im} \beta_3 = \ker \beta_2$ und f_3 Isomorphismus, existiert $a_3 \in A_3$ mit $\beta_3(f_3(a_3)) = b_2$. Also ist $b_2 = \beta_3(f_3(a_3)) = f_2(\alpha_3(a_3)) \in \operatorname{Im} f_2$.

Ist b_2 beliebig, so genügt es zu zeigen: Es existiert ein $a_2 \in A_2$ mit $\beta_2(b_2 - f_2(a_2)) = 0$. f_1 ist ein Isomorphismus, also existiert ein $a_1 \in A_1$ mit $f_1(a_1) = \beta_2(b_2)$. Dann folgt

$$f_0(\alpha_1(a_1)) = \beta_1(f_1(a_1)) = \beta_1(\beta_2(b_2)) = \underbrace{\beta_1 \circ \beta_2}_{=0}(b_2) = 0$$

Da f_0 ein Isomorphismus ist, folgt $\alpha_1(a_1) = 0$. Da $\ker \alpha_1 = \operatorname{Im} \alpha_2$, folgt $\alpha_2(a_2) = a_1$. Es gilt nun

$$\begin{aligned}
 \beta_2(b_2 - f_2(a_2)) &= \beta_2(b_2) - \beta_2(f_2(a_2)) = \beta_2(b_2) - f_1(\alpha_2(a_2)) \\
 &= \beta_2(b_2) - f_1(a_1) = \beta_2(b_2) - \beta_2(b_2) = 0 \quad \square
 \end{aligned}$$

8.16 Lemma („2 von 3“)

Sei $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ eine Abbildung von Paaren. Seien von den drei Abbildungen

- (i) $(f|_A)_*: H_n(A; R) \rightarrow H_n(B; R)$
- (ii) $f_*: H_n(X; R) \rightarrow H_n(Y; R)$
- (iii) $(f, f|_A)_*: H_n(X, A; R) \rightarrow H_n(Y, B; R)$

zwei für jeweils alle n Isomorphismen. Dann ist auch die dritte für alle n ein Isomorphismus.

Beweis

Da die Randabbildung in der Paarfolge eine natürliche Transformation ist, erhalten wir ein kommutatives Leiterdiagramm:

"R" aus Platzgründen weggelassen

$$\begin{array}{ccccccc}
 H_{n+1}(A) & \longrightarrow & H_{n+1}(X) & \longrightarrow & H_{n+1}(X, A) & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & H_n(A) \longrightarrow H_n(X) \longrightarrow H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A) \\
 \downarrow (f|_A)_* & & \downarrow f_* & & \downarrow (f, f|_A)_* & & \downarrow (f|_A)_* \quad \downarrow f_* \quad \downarrow (f, f|_A)_* \quad \downarrow (f|_A)_* \\
 H_{n+1}(B) & \longrightarrow & H_{n+1}(Y) & \longrightarrow & H_{n+1}(Y, B) & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & H_n(B) \longrightarrow H_n(Y) \longrightarrow H_n(Y, B) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(B)
 \end{array}$$

Da die Zeilen lang exakt sind, folgt die Behauptung aus dem Fünfer-Lemma. □

9 Ausschneidung und die Mayer-Vietoris Folge

9.1 Satz

Sei (X, A) ein Paar und $L \subseteq A$, sodass der Abschluss \overline{L} von im Inneren \mathring{A} von A liegt. Dann induziert die Inklusion $(X \setminus L, A \setminus L) \xrightarrow{j} (X, A)$ einen Isomorphismus $j_*: H_n(X \setminus L, A \setminus L; R) \rightarrow H_n(X, A; R)$.

Beweis

Siehe Kapitel 13.

9.2 Satz (Mayer-Vietoris-Folge)

Seien $A, B \subseteq X$ offen und $X = A \cup B$. Seien $i_A: A \hookrightarrow X$, $i_B: B \hookrightarrow X$, $j_A: A \cap B \hookrightarrow A$ und $j_B: A \cap B \hookrightarrow B$ die Inklusionen. Dann gibt es eine Randabbildung $\partial_n = \partial_n^{X=A \cup B}: H_n(X; R) \rightarrow H_{n-1}(A \cap B; R)$, sodass

Für simpliziale Homologie gibt es auch eine Mayer-Vietoris-Folge, siehe Aufgabe 4 von Blatt 6

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(A \cap B) \xrightarrow{\begin{pmatrix} (j_A)_* \\ (j_B)_* \end{pmatrix}} \bigoplus_{H_n(B)} H_n(A) \xrightarrow{(i_A)_* - (i_B)_*} H_n(X) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A \cap B) \longrightarrow \cdots$$

"R" aus Platzgründen weggelassen

eine lange exakte Folge ist. Die Randabbildung ist dabei eine natürlicher Transformation: Sei $A', B' \subseteq X'$ offen mit $X' = A' \cup B'$. Ist $f: X \rightarrow X'$ mit $f(A) \subseteq A'$ und $f(B) \subseteq B'$, so kommutiert

$$\begin{array}{ccc} H_n(X; R) & \xrightarrow{\partial_n^{X=A \cup B}} & H_{n-1}(A \cap B; R) \\ \downarrow f_* & & \downarrow (f|_{A \cap B})_* \\ H_n(X'; R) & \xrightarrow{\partial_n^{X'=A' \cup B'}} & H_{n-1}(A' \cap B'; R) \end{array}$$

Beweis

Sei $L := X \setminus B$. Dann ist L abgeschlossen und $L \subseteq A = \mathring{A}$. Wir erhalten daher einen Ausschneideisomorphismus

$$H_n(B, A \cap B; R) = H_n(X \setminus L, A \setminus L; R) \xrightarrow{\cong} H_n(X, A; R)$$

Betrachte nun das folgende kommutative Leiterdiagramm, das zwei Paarfolgen vergleicht:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_{n+1}(B, A \cap B) & \xrightarrow{\partial_{n+1}^{B, A \cap B}} & H_n(A \cap B) & \xrightarrow{(j_B)_*} & H_n(B) & \xrightarrow{(l_B)_*} & H_n(B, A \cap B) & \xrightarrow{\partial_n^{B, A \cap B}} & H_{n-1}(A \cap B) & \longrightarrow \cdots \\ & & \cong \downarrow (i_B, j_A)_* & & \downarrow (j_A)_* & & \downarrow (i_B)_* & & \cong \downarrow (i_B, j_A)_* & & \downarrow (j_A)_* & \\ \cdots & \longrightarrow & H_{n+1}(X, A) & \xrightarrow{\partial_{n+1}^{X, A}} & H_n(A) & \xrightarrow{(i_A)_*} & H_n(X) & \xrightarrow{(l_X)_*} & H_n(X, A) & \xrightarrow{\partial_n^{X, A}} & H_{n-1}(A) & \longrightarrow \cdots \end{array}$$

"R" aus Platzgründen weggelassen

dabei sind $l_B: (B, \emptyset) \rightarrow (B, A \cap B)$ und $l_X: (X, \emptyset) \rightarrow (X, A)$ die Inklusionen von Paaren. Definiere nun $\partial_n: H_n(X; R) \rightarrow H_{n-1}(A \cap B; R)$ durch

$$\partial_n := \partial_n^{B, A \cap B} \circ (i_B, j_A)_*^{-1} \circ (l_X)_*$$

Die Natürlichkeit von $\partial_n^{B, A \cap B}$ impliziert die Natürlichkeit von ∂_n (siehe auch 8.8). Wir müssen noch die Exaktheit zeigen:

- Zu zeigen: $\text{Im} \begin{pmatrix} (j_A)_* \\ (j_B)_* \end{pmatrix} = \ker((i_A)_* - (i_B)_*)$:

" \supseteq ": Sei $(a, b) \in \ker((i_A)_* - (i_B)_*)$. Also $(i_A)_*(a) = (i_B)_*(b)$. Es ist

$$(i_B, j_A)_*((l_B)_*(b)) = (l_X)_* \circ (i_B)_*(b) = \underbrace{(l_X)_* \circ (i_A)_*(a)}_{=0} = 0$$

$(i_B, j_A)_*$ ist ein Isomorphismus, also $(l_B)_*(b) = 0$. Es gilt $\ker(l_B)_* = \text{Im}(j_B)_*$, also folgt $\exists x \in H_n(A \cap B; R) : (j_B)_*(x) = b$. Dann gilt

$$(i_A)_*(a - (j_A)_*(x)) = (i_A)_*(a) - (i_B)_*((j_B)_*(x)) = (i_A)_*(a) - (i_B)_*(b) = 0$$

Mit $\ker(i_A)_* = \text{Im } \partial_{n+1}^{X,A}$ und $(i_B, j_A)_*$ ist Isomorphismus, folgt $\exists y \in H_{n+1}(B, A \cap B; R)$ mit

$$\partial_{n+1}^{X,A} \circ (i_B, j_A)_*(y) = a - (j_A)_*(x)$$

Es folgt für $z := x + \partial_{n+1}^{B,A \cap B}(y)$ nun $(j_B)_*(z) = (j_B)_*(x) = b$ und

$$\begin{aligned} (j_A)_*(z) &= (j_A)_*(x) + (j_A)_*(\partial_{n+1}^{B,A \cap B}(y)) = (j_A)_*(x) + \partial_{n+1}^{X,A} \circ (i_B, j_A)_*(y) \\ &= (j_A)_*(x) + a - (j_A)_*(x) = a \end{aligned}$$

" \subseteq ": Sei $x \in H_n(A \cap B; R)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} ((i_A)_* - (i_B)_*) \left(\begin{pmatrix} (j_A)_* \\ (j_B)_* \end{pmatrix} (x) \right) &= (i_A)_* \circ (j_A)_*(x) - (i_B)_* \circ (j_B)_*(x) \\ &= (i_A)_* \circ (j_A)_*(x) - (i_A)_* \circ (j_A)_*(x) = 0 \end{aligned}$$

da $i_A \circ j_A = i_B \circ j_B$.

- Wir zeigen nun $\text{Im}((i_A)_* - (i_B)_*) = \ker \partial_n$:

" \supseteq ": Sei $v \in \ker \partial_n$, also $\partial_n^{B,A \cap B} \circ (i_B, j_A)_*^{-1} \circ (l_X)_*(v) = 0$. Da $\ker \partial_n^{B,A \cap B} = \text{Im}(l_B)_*$, gibt es ein $b \in H_n(B; R)$ mit

$$(l_B)_*(b) = (i_B, j_A)_*^{-1} \circ (l_X)_*(v) \iff (i_B, j_A)_* \circ (l_B)_*(b) = (l_X)_*(v)$$

Nun ist

$$(l_X)_*(v - (i_B)_*(b)) = (l_X)_*(v) - (l_X)_* \circ (i_B)_*(b) = (l_X)_*(v) - (i_B, j_A)_* \circ (l_B)_*(b) = 0$$

Da $\ker(l_X)_* = \text{Im}(i_A)_*$ ist, gibt es ein $a \in H_n(A; R)$ mit $(i_A)_*(a) = v - (i_B)_*(b)$ und somit ist $((i_A)_* - (i_B)_*)(a, -b) = v$.

" \subseteq ": Sei $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \bigoplus_{H_n(A)}^{H_n(B)}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \partial_n((i_A)_* - (i_B)_*) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= \partial_n^{B,A \cap B} \circ (i_B, j_A)_*^{-1} \circ (l_X)_*((i_A)_*(a) - (i_B)_*(b)) \\ &= \partial_n^{B,A \cap B} \circ (i_B, j_A)_*^{-1} \circ \underbrace{(l_X)_* \circ (i_A)_*(a)}_{=0} \\ &\quad - \underbrace{\partial_n^{B,A \cap B} \circ (l_B)_*(b)}_{=0} = 0 \end{aligned}$$

- Noch zu zeigen: $\text{Im } \partial_n = \ker \begin{pmatrix} (j_A)_* \\ (j_B)_* \end{pmatrix}$.

" \supseteq ": Sei $x \in \ker \begin{pmatrix} (j_A)_* \\ (j_B)_* \end{pmatrix}$, also $(j_A)_*(x) = 0 = (j_B)_*(x)$. Da $\text{Im } \partial_n^{B,A \cap B} = \ker(j_B)_*$ ist, gibt es $v \in H_n(B, A \cap B; R)$ mit $\partial_n^{B,A \cap B}(v) = x$. Nun ist

$$\partial_n^{X,A} \circ (i_B, j_A)_*(v) = (j_A)_*(\partial_n^{B,A \cap B}(v)) = (j_A)_*(x) = 0$$

Da $\ker \partial_n^{X,A} = \text{Im}(l_X)_*$, finden wir $w \in H_n(X; R)$ mit $(l_X)_*(w) = (i_B, j_A)_*(v)$. Also folgt

$$\partial_n(w) = \partial_n^{B,A \cap B} \circ (i_B, j_A)_*^{-1} \circ (l_X)_*(w) = \partial_n^{B,A \cap B} \circ (i_B, j_A)_*^{-1} \circ (i_B, j_A)_*(v) = \partial_n^{B,A \cap B}(v) = x$$

" \subseteq ": Für $v \in H_n(X; R)$ ist

$$\begin{aligned}
 & ((j_A)_* \oplus (j_B)_*) \circ \partial_n(v) \\
 &= \left((j_A)_* \circ \partial_n^{B, A \cap B} \circ (i_B, j_A)^{-1} \circ (l_X)_*(v), \underbrace{(j_B)_* \circ \partial_n^{B, A \cap B}}_{=0} \circ (i_B, j_A)^{-1} \circ (l_X)_*(v) \right) \\
 &= \left(\underbrace{\partial_n^{X, A} \circ (l_X)_*(v)}_{=0}, 0 \right) = (0, 0)
 \end{aligned}$$

9.3 Bemerkung

Für die Mayer-Vietoris-Folge müssen A und B nicht notwendig offen sein. Es genügt, dass die Inklusion $(B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$ einen Isomorphismus $H_*(B, A \cap B; R) \rightarrow H_*(X, A; R)$ induziert.

9.4 Satz

Für die Homologie der n -Sphäre S^n gilt

$$H_k(S^n; R) \cong \begin{cases} R \oplus R, & \text{falls } k = n = 0 \\ R, & \text{falls } k = 0, n \neq 0 \\ R, & \text{falls } k = n \neq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad [\#]$$

9.5 Definition

Sei X ein nichtleerer topologischer Raum. Sei $p: X \rightarrow \{\text{pt}\}$ die Projektion auf den Ein-Punkt-Raum. die **reduzierte singuläre Homologie** von X ist definiert durch

$$\tilde{H}_k(X; R) := \ker(p_*: H_k(X; R) \rightarrow H_k(\{\text{pt}\}; R))$$

Bemerkung

- Es gilt $\tilde{H}_k(X; R) = H_k(X; R)$ für $k > 0$, da $H_k(\{\text{pt}\}; R) = 0$ ist für $k > 0$ (siehe 5.9) und somit p_* die Nullabbildung ist.

Weiter gilt $H_0(X; R) = R \oplus \tilde{H}_0(X; R)$, da $H_0(\{\text{pt}\}; R) = R$ frei ist.

- Es ist nicht schwer die Eigenschaften von singulärer Homologie auf die reduzierte singuläre Homologie zu übertragen. Insbesondere ist \tilde{H}_* homotopieinvariant und es gibt eine Mayer-Vietoris-Folge.
- Es ist $\tilde{H}_k(\{\text{pt}\}) = 0$ und für jeden kontrahierbaren Raum X ist somit $\tilde{H}_n(X; R) = 0$ für alle n .

9.6 Bemerkung

In reduzierter singulärer Homologie wird $[\#]$ zu

$$\tilde{H}_k(S^n; R) \cong \begin{cases} R, & \text{falls } k = n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad [\#\#]$$

9.7 Beweis von [##]

Per Induktion nach n :

Induktionsanfang: $n = 0$: Es gilt

$$H_k(S^0; R) \xleftarrow{\varphi} H_k(\{\text{pt}\}; R) \oplus H_k(\{\text{pt}\}; R) = \begin{cases} R \oplus R, & \text{falls } k = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Seien $i_-: \{\text{pt}\} \hookrightarrow S^0$, $i_+: \{\text{pt}\} \hookrightarrow S^0$ mit $\text{Im } i_{\pm} = \{\pm 1\}$. Der Isomorphismus φ ist gegeben durch $\varphi = (i_-)_* + (i_+)_*$. Für $(a, b) \in H_k(\{-1\}; R) \oplus H_k(\{+1\}; R)$ gilt dann

$$p_*(i_-(a) + i_+(b)) = (p \circ i_-)_*(a) + (p \circ i_+)_*(b) = \text{id}_*(a) + \text{id}_*(b) = a + b$$

Also $\ker p_* = \{(a, -a) \mid a \in H_k(\{\text{pt}\}; R)\}$. Also

$$\tilde{H}_k(S^0; R) = \begin{cases} 0, & \text{falls } k \neq 0 \\ R, & \text{falls } k = 0 \end{cases}$$

Induktionsschritt: $n - 1 \mapsto n$: Sei $D_+^n = S^n \setminus \{(1, 0, \dots, 0)\}$ und $D_-^n = S^n \setminus \{(-1, 0, \dots, 0)\}$. Dann sind D_+^n und D_-^n offene Teilmengen von S^n mit $S^n = D_+^n \cup D_-^n$. Weiter gilt $D_+^n \simeq \{\text{pt}\}$ und $D_-^n \simeq \{\text{pt}\}$. Für den Schnitt der beiden Mengen erhalten wir

$$D_+^n \cap D_-^n = \{x = (x_0, \dots, x_n) \in S^n \mid x_0 \notin \{\pm 1\}\} \simeq S^{n-1} = \{x = (0, x_1, \dots, x_n) \in S^n\}.$$

Betrachte nun die Mayer-Vietoris-Folge zu $S^n = D_+^n \cup D_-^n$:

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{H}_k(D_+^n) \oplus \tilde{H}_k(D_-^n) & \longrightarrow & \tilde{H}_k(S^n) & \xrightarrow{\partial_k} & \tilde{H}_{k-1}(D_+^n \cap D_-^n) & \longrightarrow & \tilde{H}_{k-1}(D_+^n) \oplus \tilde{H}_{k-1}(D_-^n) \\ \underset{=0}{=} & & & & \underset{\cong}{\uparrow} & & \underset{=0}{=} \\ & & & & \tilde{H}_{k-1}(S^{n-1}) & & \end{array}$$

$$\text{Es folgt } \tilde{H}_k(S^n; R) \cong \tilde{H}_{k-1}(S^{n-1}; R) \stackrel{\text{l.A.}}{=} \begin{cases} R, & \text{falls } k = n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

□

"R" aus Platzgrün-
den weggelassen

10 Anwendungen

10.1 Satz (Invarianz der Dimension)

Sind \mathbb{R}^n und \mathbb{R}^m homöomorph, so gilt $n = m$.

Beweis

Sei $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ein Homöomorphismus. Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Dann erhalten wir auch einen Homöomorphismus $k := h|_{\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}}: \mathbb{R}^n \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{h(x_0)\}$. Nun ist $\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}$ homotopieäquivalent zu S^{n-1} und $\mathbb{R}^m \setminus \{h(x_0)\}$ ist homotopieäquivalent zu S^{m-1} . Da k ein Homöomorphismus ist, ist k_* ein Isomorphismus. Wir erhalten

$$H_*(S^{n-1}) \cong H_*(\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}) \cong H_*(\mathbb{R}^m \setminus \{h(x_0)\}) \cong H_*(S^{m-1})$$

Es ist aber $H_*(S^{n-1}) \cong H_*(S^{m-1})$ genau dann, wenn $n = m$. □

10.2 Fixpunktsatz von Brouwer

Jede stetige Abbildung $f: D^n \rightarrow D^n$ besitzt einen Fixpunkt.

Beweis

Durch Widerspruch: Angenommen es gibt $f: D^n \rightarrow D^n$ ohne Fixpunkt. Aus dem letzten Semester wissen wir, dass es dann eine stetige Abbildung $F: D^n \rightarrow S^{n-1}$ gibt mit $F|_{S^{n-1}} = \text{id}_{S^{n-1}}$. In Homologie erhalten wir folgendes kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{Z} \cong H_{n-1}(S^{n-1}) & \xrightarrow{(\text{id}_{S^{n-1}})_* = \text{id}} & H_{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbb{Z} \\
 & \searrow i_* & \nearrow (F)_* \\
 & H_{n-1}(D^n) = 0 &
 \end{array}$$

(E: $n \geq 2, n = 1$
haben wir bereits
im letzten Semester
bewiesen

wobei $i: S^{n-1} \hookrightarrow D^n$ die Inklusion ist. Da $F \circ i = \text{id}_{S^{n-1}}$ ist, gilt $F_* \circ i_* = \text{id}_{H_{n-1}(S^{n-1})}$. □

Der Abbildungsgrad

10.3 Definition

Sei $f: S^n \rightarrow S^n$ eine stetige Abbildung. Da $\tilde{H}_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ ist, gibt es eine ganze Zahl $d(f)$, so dass $f_*(x) = d(f) \cdot x$ für alle $x \in \tilde{H}_n(S^n)$. Diese Zahl heißt der **Abbildungsgrad** von f .

10.4 Proposition

Für den Abbildungsgrad d gilt

- $d(\text{id}_{S^n}) = 1$.
- Sind f und g homotop, so gilt $d(f) = d(g)$.
- $d(f \circ g) = d(f) \cdot d(g)$.

Beweis

- Es ist $(\text{id}_{S^n})_*(x) = \text{id}_{\mathbb{Z}}(x) = x$.
- Sind f und g homotop, so gilt $f_* = g_*$ und damit folgt $d(f) = d(g)$.
- Für alle $x \in \tilde{H}_n(S^n)$ gilt: $d(f \circ g) \cdot x = (f \circ g)_*(x) = f_* \circ g_*(x) = d(f) \cdot d(g) \cdot x$. Da $\tilde{H}_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ folgt $d(f \circ g) = d(f) \cdot d(g)$. □

10.5 Beispiel

Sei $i \in \{0, \dots, n\}$ und $R_i: S^n \rightarrow S^n$ die Spiegelung an der x_i -Achse, also

$$R_i(x_0, \dots, x_n) = (x_0, \dots, -x_i, \dots, x_n)$$

Dann ist $d(R_i) = -1$.

Beweis

Sei $f: S^n \rightarrow S^n$ der Homöomorphismus, der die 0-te und die i -te Koordinate vertauscht, also gilt $f(x_0, \dots, x_n) = (x_i, \dots, x_0, \dots, x_m)$. Dann ist $R_i = f \circ R_0 \circ f$. Da f ein Homöomorphismus ist, ist f_* ein Isomorphismus und daher ist $d(f)$ invertierbar, also $d(f) \in \{\pm 1\}$. Mit $d(R_i) = d(f) \cdot d(R_0) \cdot d(f)$ folgt $d(R_0) = d(R_i)$. Es genügt also R_0 zu betrachten. Wir zeigen $d(R_0) = -1$ durch Induktion nach n .

Induktionsanfang: Sei $i_-: \{\text{pt}\} \rightarrow S^0$ die Abbildung mit $\text{Im } i_- = \{-1\}$ und $i_+: \{\text{pt}\} \rightarrow S^0$ die Abbildung mit $\text{Im } i_+ = \{+1\}$. Dann ist

$$\begin{aligned} H_0(S^0) &= \left\{ (i_-)_*(a) + (i_+)_*(b) \mid a, b \in H_0(\{\text{pt}\}) \right\} \quad \text{und} \\ \tilde{H}_0(S^0) &= \left\{ (i_-)_*(a) - (i_+)_*(a) \mid a \in H_0(\{\text{pt}\}) \right\} \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} (R_0)_* \left((i_-)_*(a) - (i_+)_*(a) \right) &= (R_0)_*(i_-)_*(a) - (R_0)_*(i_+)_*(a) = (R_0 \circ i_-)_*(a) - (R_0 \circ i_+)_*(a) \\ &= (i_+)_*(a) - (i_-)_*(a) \\ &= -((i_-)_*(a) - (i_+)_*(a)) \end{aligned}$$

Also folgt $d(R_0) = -1$, da wir den Abbildungsgrad für reduzierte Homologie definiert hatten.

Induktionsschritt: Wir definieren zwei offene Teilmengen von S^n wie folgt

$$\begin{aligned} D_+^n &= \{(x_0, \dots, x_n) \in S^n \mid x_n \neq -1\} \\ D_-^n &= \{(x_0, \dots, x_n) \in S^n \mid x_n \neq +1\} \end{aligned}$$

Wir wissen schon aus 9.7, dass die Randabbildung aus der dazugehörigen Mayer-Vietoris-Folge $\tilde{H}_n(S^n) \xrightarrow{\partial_n} \tilde{H}_{n-1}(D_+^n \cap D_-^n)$ ein Isomorphismus ist. Da die Randabbildung natürlich ist, erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{H}_n(S^n) & \xrightarrow[\cong]{\partial_n} & \tilde{H}_{n-1}(D_-^n \cap D_+^n) & \xleftarrow[\cong]{i_*} & \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) \\ \downarrow (R_0)_* & & \downarrow (R_0|_{D_-^n \cap D_+^n})_* & & \downarrow (R_0|_{S^{n-1}})_* \\ \tilde{H}_n(S^n) & \xrightarrow[\cong]{\partial_n} & \tilde{H}_{n-1}(D_-^n \cap D_+^n) & \xleftarrow[\cong]{i_*} & \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) \end{array}$$

dabei ist $i: S^{n-1} \rightarrow D_-^n \cap D_+^n$ die Homotopieäquivalenz $i(x_0, \dots, x_{n-1}) = (x_0, \dots, x_{n-1}, 0)$. Nach Induktionsannahme ist $(R_0|_{S^{n-1}})_*(y) = -y$ für alle $y \in \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1})$. Für $x \in \tilde{H}_n(S^n)$ folgt dann

$$\begin{aligned} (R_0)_*(x) &= (\partial_n)^{-1} \circ (i_*) \circ (R_0|_{S^{n-1}})_* ((i_*^{-1} \circ \partial_n)(x)) \\ &= (\partial_n)^{-1} \circ (i_*) (-i_*^{-1}(\partial_n(x))) \\ &= -\partial_n^{-1} \circ (i_*) \circ (i_*)^{-1} \circ \partial_n(x) = -x \end{aligned}$$

Also gilt für den Abbildungsgrad der Spiegelung $d(R_0) = -1$. □

10.6 Beispiel

Der Grad der Punktspiegelung $R: S^n \rightarrow S^n, x \mapsto -x$ ist $d(R) = (-1)^{n+1}$.

Beweis

$$d(R) = d(R_0 \circ R_1 \circ \dots \circ R_n) = d(R_0) \cdot \dots \cdot d(R_n) = (-1)^{n+1}.$$

□

10.7 Erinnerung

Sei M eine C^∞ -Mannigfaltigkeit. Ein **Vektorfeld** auf M ist eine stetige Abbildung $v: M \rightarrow TM$ mit $v(x) \in T_x M$ für alle $x \in M$. Für $M = S^n$ entspricht ein Vektorfeld genau einer stetigen Abbildung $v: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ mit $\langle v(x) | x \rangle = 0$ für alle $x \in S^n$.

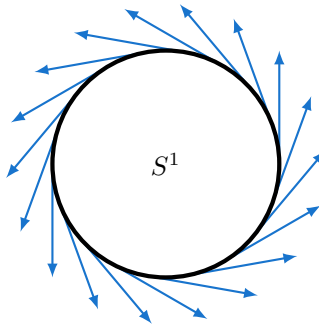


Abbildung 3: Ein nirgends verschwindendes Vektorfeld auf S^1

10.8 Satz

Es gibt genau dann ein Vektorfeld ohne Nullstellen auf S^n , wenn n ungerade ist.

Beweis

Ist n ungerade, so ist $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{C}^k$ mit $k = \frac{n+1}{2}$. Punkte in S^n sind dann genau k -Tupel $z = (z_1, \dots, z_k)$ mit $|z_1|^2 + \dots + |z_k|^2 = 1$. Ein Vektorfeld entspricht dann einer stetigen Abbildung $v: S^n \rightarrow \mathbb{C}^k$, so dass für das kanonische komplexe Skalarprodukt $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbb{C}}$ auf \mathbb{C}^k gilt

$$\langle z | v(z) \rangle_{\mathbb{C}} \in i\mathbb{R}$$

einfach nachzurechnen

Definiere nun $v: S^n \rightarrow \mathbb{C}^k$ durch $v(z) := iz$. Dann $iz \neq 0$ für alle $z \in S^n$ und $\langle z | iz \rangle = -i\|z\|_2 \in i\mathbb{R}$. Sei umgekehrt $v: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ ein Vektorfeld ohne Nullstellen. Zu zeigen: $d(R) = 1$, denn dann folgt die Behauptung, da $d(R) = (-1)^{n+1}$. Zeige dazu: R ist homotop zu id . Seien $H, K: S^n \times [0, 1] \rightarrow S^n$ definiert durch

$$H(x, t) := \frac{tx + (1-t)v(x)}{\|tx + (1-t)v(x)\|} \quad \text{bzw.} \quad K(x, t) := \frac{-tx + (1-t)v(x)}{\|-tx + (1-t)v(x)\|}$$

Da $\langle v(x) | x \rangle = 0$ und $v(x) \neq 0$ folgt für alle $x \in S^n$, folgt

für orthogonale Vektoren gilt der Satz von Pythagoras

$$\begin{aligned} \|tx + (1-t)v(x)\|^2 &= \|tx\|^2 + \|(1-t)v(x)\|^2 \neq 0 \\ \|-tx + (1-t)v(x)\|^2 &= \|-tx\|^2 + \|(1-t)v(x)\|^2 \neq 0 \end{aligned}$$

Also sind H und K wohldefiniert. H ist Homotopie zwischen id und $x \mapsto \frac{v(x)}{\|v(x)\|}$ und K ist Homotopie zwischen $-\text{id} = R$ und $x \mapsto \frac{v(x)}{\|v(x)\|}$. □

10.9 Satz (Jordanscher Kurvensatz)

Sei $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine stetige, injektive Abbildung. Dann hat $\mathbb{R}^2 \setminus f(S^1)$ genau zwei Wegzusammenhangskomponenten. Eine davon ist beschränkt, die andere nicht.

Beweis (mit 10.10)

Wir können f auch als injektive Abbildung $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \subseteq S^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ auffassen. Nun ist $\tilde{H}_0(S^2 \setminus f(S^1)) = \mathbb{Z}$. Also $H_0(S^2 \setminus f(S^1)) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Daher besteht $S^2 \setminus f(S^1)$ aus zwei Wegzusammenhangskomponenten U_1 und U_2 . Sei ohne Einschränkungen $\infty \in U_2$. Dann ist $U_2 \setminus \{\infty\}$ immer noch wegzusammenhängend: Seien $x, y \in U_2$, dann gibt es eine Umgebung V von $\infty \in S^2$ mit $V \setminus \{\infty\} \cong D^2 \setminus \{0\}$, $x, y \notin V$ und $f(S^1) \cap V = \emptyset$. Also sind U_1 und $U_2 \setminus \{\infty\}$ die Wegzusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^2 \setminus f(S^1)$. U_1 ist beschränkt und U_2 ist unbeschränkt. \square

10.10 Satz

- a) Sei $f: D^k \rightarrow S^n$ eine stetige, injektive Abbildung mit $0 \leq k < n$. Dann gilt $\tilde{H}_i(S^n \setminus f(D^k)) = 0$ für alle i .
- b) Sei $f: S^k \rightarrow S^n$ eine stetige, injektive Abbildung mit $0 \leq k < n$. Dann gilt

$$\tilde{H}_i(S^n \setminus f(S^k)) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{falls } i = n - k - 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

10.11 Proposition

Seien $U_1 \subseteq U_2 \subseteq \dots \subseteq X$ offen mit $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$. Seien $i_{a,b}: U_a \hookrightarrow U_b$ für $a < b$ und $i_a: U_a \hookrightarrow X$ die Inklusionen.

- (1) Für jedes $x \in H_k(X; R)$ gibt es $a > 0$ und $x_a \in H_k(U_a; R)$ mit $(i_a)_*(x_a) = x$.
- (2) Ist $x_a \in H_k(U_a; R)$ mit $(i_a)_*(x_a) = 0$, so gibt es $b > a$ mit $(i_{a,b})_*(x_a) = 0$.

Bemerkung

Diese Proposition gilt genauso für reduzierte Homologie.

Beweis

Sei $\sigma: |\Delta^n| \rightarrow X$ ein singulärer Simplex in X . Dann ist $\{\sigma^{-1}(U_a)\}_{a \in \mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung von $|\Delta^n|$. Da $|\Delta^n|$ kompakt ist, gibt es a mit $|\Delta^n| \subseteq \sigma^{-1}(U_a)$, also $\sigma(|\Delta^n|) \subseteq U_a$. Da Elemente von $C_n(X; R)$ endliche R -Linearkombinationen von singulären Simplizes sind, folgt

$$C_n(X; R) = \bigcup_a C_n(U_a; R).$$

Damit ergeben sich direkt (1) und (2). \square

10.12 Beweis von Satz 10.10

- a) Durch Induktion nach k . Für $k = 0$ ist $S^n \setminus f(D^0)$ homöomorph zu \mathbb{R}^n und die Behauptung folgt. Induktionsschritt $k \mapsto k + 1$: Da D^{k+1} und $[0, 1]^{k+1}$ homöomorph sind, können wir D^{k+1} durch $[0, 1]^{k+1}$ ersetzen. Sei $x \in \tilde{H}_i(S^n \setminus f([0, 1]^{k+1}))$. Es ist

$$S^n \setminus f(\{1/2\} \times [0, 1]^k) = \underbrace{S^n \setminus f([0, 1/2] \times [0, 1]^k)}_{=: A} \cup \underbrace{S^n \setminus f([1/2, 1] \times [0, 1]^k)}_{=: B} = A \cup B$$

eine Vereinigung von offenen Mengen. Weiter ist

$$A \cap B = (S^n \setminus f([0, 1/2] \times [0, 1]^k)) \cap (S^n \setminus f([1/2, 1] \times [0, 1]^k)) = S^n \setminus f([0, 1]^{k+1})$$

Die zugehörige Mayer-Vietoris-Folge liefert nun einen Isomorphismus:

$$\tilde{H}_{i+1}(A \cup B) \longrightarrow \tilde{H}_i(A \cap B) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_i(A) \oplus \tilde{H}_i(B) \longrightarrow \tilde{H}_i(A \cup B)$$

$\quad \quad \quad =0 \text{ nach I.A.} \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad =0 \text{ nach I.A.}$

Angenommen $x \neq 0$. Dann ist das Bild von x in $\tilde{H}_i(A)$ ungleich Null oder in $\tilde{H}_i(B)$ ungleich Null. Indem wir dieses Argument iterieren, erhalten wir eine Folge von Intervallen

$$[0, 1] \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots \quad \text{sodass} \quad \bigcap_a I_a = \{t\}$$

und das Bild von $x \in \tilde{H}_i(S^n \setminus f([0, 1]^{k+1}))$ unter der von der Inklusion $\iota_{0,a}: S^n \setminus f([0, 1]^{k+1}) \rightarrow S^n \setminus f(I_a \times [0, 1]^k)$ induzierten Abbildung $(\iota_{0,a})_*$ ungleich Null ist. Nun ist aber

$$\bigcup_a (S^n \setminus f(I_a \times [0, 1]^k)) = S^n \setminus f(\{t\} \times [0, 1]^k)$$

und wieder nach Induktionsannahme ist $\tilde{H}_i(S^n \setminus f(\{t\} \times [0, 1]^k)) = 0$. Für die von der Inklusion $\iota_a: S^n \setminus f(I_a \times [0, 1]^k) \rightarrow S^n \setminus f(\{t\} \times [0, 1]^k)$ induzierte Abbildung gilt also $(\iota_a)_*(x) = 0$. Nach Proposition 10.11(2) muss x dann aber schon für ein i in $\tilde{H}_i(S^n \setminus f(I_a \times [0, 1]^k))$ trivial sein. ζ

- b) Durch Induktion nach k . Für $k = 0$ ist $S^n \setminus f(S^0) \cong \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Da $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \simeq S^{n-1}$ folgt für $k = 0$ die Behauptung.

Induktionsschritt $k - 1 \mapsto k$: Wir setzen

$$D_+^k := \{(x_0, \dots, x_k) \in S^k \mid x_k \geq 0\}$$

$$D_-^k := \{(x_0, \dots, x_k) \in S^k \mid x_k \leq 0\}$$

Dann ist $D_+^k \cap D_-^k = \{(x_0, \dots, x_k) \in S^k \mid x_k = 0\} \cong S^{k-1}$. Wieder ist

$$S^n \setminus f(D_+^k \cap D_-^k) = (S^n \setminus f(D_+^k)) \cup (S^n \setminus f(D_-^k))$$

eine offene Vereinigung mit $(S^n \setminus f(D_+^k)) \cap (S^n \setminus f(D_-^k)) = S^n \setminus f(S^k)$. Es ist $D_\pm^k \cong D^k$, also ist wegen a) ist die Randabbildung in der zugehörigen Mayer-Vietoris-Folge

$$\tilde{H}_i(S^n \setminus f(D_+^k \cap D_-^k)) \xrightarrow[\cong]{\partial_i} \tilde{H}_{i-1}(S^n \setminus f(S^k))$$

ein Isomorphismus. Die Behauptung folgt dann per Induktion. □

11 CW-Komplexe

11.1 Definition

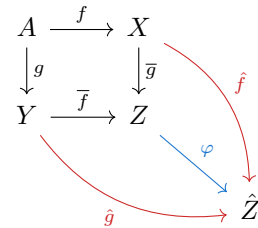
Ein kommutatives Diagramm von topologischen Räumen der Form

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow g & & \downarrow \bar{g} \\ Y & \xrightarrow{\bar{f}} & Z \end{array} \quad [\#]$$

heißt ein **Pushout**, falls es folgende universelle Eigenschaft hat:

$$\forall \hat{f}: X \rightarrow \hat{Z}, \hat{g}: Y \rightarrow \hat{Z} \text{ mit } \hat{f} \circ f = \hat{g} \circ g \text{ gilt:}$$

$$\exists! \varphi: Z \rightarrow \hat{Z} \text{ mit } \hat{f} = \varphi \circ \bar{g}, \hat{g} = \varphi \circ \bar{f}.$$



Wir sagen dann auch: $[\#]$ ist der Pushout von $Y \xleftarrow{g} A \xrightarrow{f} X$.

11.2 Bemerkung

Jedes Diagramm $Y \xleftarrow{g} A \xrightarrow{f} X$ lässt sich zu einem Pushout vervollständigen: Betrachte dazu den Raum $X \cup_A Y := X \amalg Y / f(a) \sim g(a) \forall a \in A$ mit der Quotiententopologie. Sind $\bar{f}: Y \rightarrow X \cup_A Y$ und $\bar{g}: X \rightarrow X \cup_A Y$ die von den Inklusionen $X \hookrightarrow X \amalg Y$ und $Y \hookrightarrow X \amalg Y$ induzierten Abbildungen, so ist

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ g \downarrow & & \downarrow \bar{g} \\ Y & \xrightarrow{\bar{f}} & X \cup_A Y \end{array}$$

ein Pushout. Existenz und Eindeutigkeit aus der universellen Eigenschaft können benutzt werden um zu zeigen, dass der Pushout eindeutig bis auf kanonischen Homöomorphismus ist.

11.3 Definition

Ein **CW-Komplex**³ ist ein topologischer Raum X zusammen mit einer Filtrierung⁴ durch Unterräume von X :

$$\emptyset = X^{(-1)} \subseteq X^{(0)} \subseteq X^{(1)} \subseteq X^{(2)} \subseteq \dots \subseteq X^{(n)} \subseteq X^{(n+1)} \subseteq \dots \subseteq X$$

sodass die folgenden zwei Eigenschaften erfüllt sind:

(i) **Zellstruktur:** Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt einen Pushout von topologischen Räumen

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{i \in I^{(n)}} S^{n-1} & \xrightarrow{\coprod_{i \in I^{(n)}} q_i^{(n)}} & X^{(n-1)} \\ \downarrow \coprod_{i \in I^{(n)}} j_i & & \downarrow k^{(n)} \\ \coprod_{i \in I^{(n)}} D^n & \xrightarrow{\coprod_{i \in I^{(n)}} Q_i^{(n)}} & X^{(n)} \end{array}$$

³Zitat von Wikipedia³ zum Namen: The C stands for "closure-finite", and the W for "weak topology".

⁴siehe auch [https://de.wikipedia.org/wiki/Filter_\(Mathematik\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Filter_(Mathematik))

wobei $j_i: S^{n-1} \hookrightarrow D^n$ und $k_n: X^{(n-1)} \hookrightarrow X^{(n)}$ die Inklusionen sind.

- (ii) **Schwache Topologie:** Es ist $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^{(n)}$ und $U \subseteq X$ ist genau dann offen, wenn $U \cap X^{(n)} \subseteq X^{(n)}$ für alle n offen ist.

Eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ zwischen CW-Komplexen heißt **zellulär**, falls $f(X^{(n)}) \subseteq Y^{(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

11.4 Bemerkung

- (i) Die Abbildungen $q_i^{(n)}$ und $Q_i^{(n)}$ sind *nicht* Teil der Struktur eines CW-Komplex. Nur die Existenz von $q_i^{(n)}$ und $Q_i^{(n)}$ wird gefordert — sie ist nicht notwendig eindeutig. Hat man $q_i^{(n)}$ und $Q_i^{(n)}$ gewählt, so heißt $q_i^{(n)}$ die **anklebende Abbildung** der i -ten n -Zelle und $Q_i^{(n)}$ die **charakteristische Abbildung** der i -ten n -Zelle.

- (ii) Sei $\mathring{D}^n = D^n \setminus S^{n-1}$ das Innere von D^n . Die Abbildungen $Q_i^{(n)}$ schränken sich zu einem Homöomorphismus $\coprod_{i \in I^{(n)}} \mathring{D}^n \rightarrow X^{(n)} \setminus X^{(n-1)}$ ein.⁵ Insbesondere lässt sich $I^{(n)}$ mit der Menge der Wegzusammenhangskomponenten von $X^{(n)} \setminus X^{(n-1)}$ identifizieren. Die Wegzusammenhangskomponenten heißen die **offenen Zellen** von X . Damit ist jeder CW-Komplex die disjunkte Vereinigung seiner offenen Zellen.

⚠ Achtung: Jede offene n -Zelle ist offen in $X^{(n)}$, aber nicht notwendig in X .

- (iii) Der Abschluss einer offenen Zelle $Q_i^{(n)}(\mathring{D}^n)$ ist $Q_i^{(n)}(D^n)$ und insbesondere kompakt. Die $Q_i^{(n)}(D^n)$ heißen die **abgeschlossenen Zellen** und sind als Abschluss von offenen Zellen unabhängig von der Wahl der $Q_i^{(n)}$.

⚠ Achtung: Abgeschlossene Zellen sind Bilder von D^n unter stetigen Abbildungen, aber nicht notwendig homöomorph zu D^n .

- (iv) Ein CW-Komplex X heißt **endlich**, wenn er nur aus endlich vielen Zellen besteht, also wenn $I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I^{(n)}$ endlich ist. Insbesondere gibt es dann ein n mit $X = X^{(n)}$.

Die Dimension von X ist die maximale Dimension von Zellen von X , also $\dim X := N$, falls $X^{(N)} = X$, $X^{(N-1)} \subsetneq X$. Gibt es kein solches N so setzen wir $\dim X := \infty$.

11.5 Beispiele

- (i) S^n mit

$$(S^n)^{(k)} = \begin{cases} \emptyset, & \text{falls } k = -1 \\ \{(1, 0, \dots, 0)\}, & \text{falls } k = 0, \dots, n-1 \\ S^n, & \text{falls } k \geq n \end{cases}$$

ist ein CW-Komplex via $S^n \cong D^n / S^{n-1}$

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \longrightarrow & (S^n)^{(n-1)} = \{(1, 0, \dots, 0)\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^n & \longrightarrow & S^n \end{array}$$

- (ii) S^n mit $(S^n)^{(k)} = \{(x_0, \dots, x_k, 0, \dots, 0) \in S^n\}$ ist ebenfalls eine CW-Struktur auf S^n .

⁵Dass dies ein Homöomorphismus ist, folgt aus der Pushout-Eigenschaft und dem letzten Teil der Bemerkung 11.2, denn es gilt demnach $X^{(n)} \cong X^{(n-1)} \cup_{\coprod_{i \in I^{(n-1)}} S^{n-1}} \coprod_{i \in I^{(n)}} D^n$.

(iii) Sei $K = (V, \Sigma)$ ein simplizialer Komplex. Es ist $|\Delta^n| \cong D^n$ und $|\partial\Delta^n| \cong S^{n-1}$. Sei $\Sigma^{(n)} := \Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup \dots \cup \Sigma_n$. Dann wird $|K|$ durch $|K|^{(n)} := |(V, \Sigma^{(n)})|$ für $n \geq 0$ zu einem CW-Komplex. Ist $f: K \rightarrow L$ eine simpliziale Abbildung, so ist $|f|: |K| \rightarrow |L|$ eine zelluläre Abbildung.

(iv) Der n -dimensionale reelle projektive Raum $\mathbb{R}P^n$ kann definiert werden durch

$$\mathbb{R}P^n := \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / x \sim \lambda x = S^n / x \sim -x$$

Punkte in $\mathbb{R}P^n$ sind Äquivalenzklassen von $(n+1)$ -Tupeln reeller Zahlen und werden als die sogenannten homogenen Koordinaten $[x_0 : \dots : x_n]$ geschrieben. Es ist

$$\mathbb{R}P^n = \left\{ [x_0 : \dots : x_n] \mid (x_0, \dots, x_n) \in S^n \right\} = \left\{ [x_0 : \dots : x_n] \mid (x_0, \dots, x_n) \in S^n, x_n \geq 0 \right\}$$

Wir erhalten einen Homöomorphismus $f^{(n)}: D^n / x \sim -x, x \in S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}P^n$ mit

$$f^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \left[x_1 : \dots : x_n : \sqrt{1 - \sum_{i=1}^n x_i^2} \right]$$

Ist $Q^{(n)}: D^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ die Komposition von $f^{(n)}$ mit der Projektion $D^n \twoheadrightarrow D^n / x \sim -x, x \in S^{n-1}$ und $q^{(n)}: S^{n-1} \twoheadrightarrow \mathbb{R}P^{n-1}$ die Projektion, so erhalten wir einen Pushout

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \xrightarrow{q^{(n)}} & \mathbb{R}P^{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^n & \xrightarrow{Q^{(n)}} & \mathbb{R}P^n \end{array}$$

Induktiv erhalten wir einen CW-Struktur auf $\mathbb{R}P^n$ mit genau einer k -Zelle für $k = 0, \dots, n$ und

$$(\mathbb{R}P^n)^{(k)} \cong \mathbb{R}P^k$$

(v) Der n -dimensionale komplexe projektive Raum $\mathbb{C}P^n$ kann definiert werden durch

$$\mathbb{C}P^n := \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} / z \sim \lambda z = S^{2n+1} / z \sim \lambda z, \lambda \in S^1 \subseteq \mathbb{C}$$

Punkte in $\mathbb{C}P^n$ sind Äquivalenzklassen von $(n+1)$ -Tupeln komplexer Zahlen und werden als homogenen Koordinaten $[z_0 : \dots : z_n]$ geschrieben. Es ist wieder

$$\mathbb{C}P^n = \left\{ [z_0 : \dots : z_n] \mid (z_0, \dots, z_n) \in S^{2n+1} \right\} = \left\{ [z_0 : \dots : z_n] \mid (z_0, \dots, z_n) \in S^{2n+1}, |z_n| \geq 0 \right\}$$

Wir erhalten wieder einen Homöomorphismus $f^{(n)}: D^{2n+1} / z \sim \lambda z, z \in S^{2n-1}, \lambda \in S^1 \rightarrow \mathbb{C}P^n$ durch

$$f^{(n)}(z_1, \dots, z_n) = \left[z_1 : \dots : z_n : \sqrt{1 - \sum_{i=1}^n |z_i|^2} \right]$$

Ist $Q^{(2n)}: D^{2n} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ die Komposition von $f^{(n)}$ mit der Projektion $D^{2n} \twoheadrightarrow D^{2n} / z \sim \lambda z, z \in S^{2n-1}$ und $q^{(2n)}: S^{2n-1} \twoheadrightarrow \mathbb{C}P^{n-1}$ die Projektion, so erhalten wir auch wieder einen Pushout

$$\begin{array}{ccc} S^{2n-1} & \xrightarrow{q^{(2n)}} & \mathbb{C}P^{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^{2n} & \xrightarrow{Q^{(2n)}} & \mathbb{C}P^n \end{array}$$

Induktiv erhalten wir einen CW-Struktur auf $\mathbb{C}P^n$ mit genau einer k -Zelle für $k = 0, 2, \dots, 2n$ und

$$(\mathbb{C}P^n)^{(k)} \cong \mathbb{C}P^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}$$

11.6 Lemma

Sei X ein CW-Komplex und $K \subseteq X$. Dann ist K genau dann kompakt, wenn K abgeschlossen ist und K nur endlich viele offene Zellen von X schneidet.

Beweis

Zunächst: Ist $S \subseteq X$ ein Unterraum der jede offene Zelle höchstens in einem Punkt schneidet, so ist S diskret. Für $S_0 \subseteq S$ ist $S_0 \cap (X^{(n)} \setminus X^{(n-1)})$ abgeschlossen in $X^{(n)}$, da S_0 jede offene n -Zelle von X höchstens in einem Punkt schneidet. Daher ist $S_0 \cap X^{(n)} \subseteq X^{(n)}$ abgeschlossen für alle n . Damit ist also jede Teilmenge $S_0 \subseteq S$ abgeschlossen in X und S somit diskret.

Sei nun $K \subseteq X$ kompakt. Dann ist K sicher abgeschlossen. Sei $S \subseteq K$ ein Teilraum, der aus jeder offenen Zelle von X , die K schneidet, genau einen Punkt enthält. Wegen der Vorüberlegung ist S diskret. Da $S \subseteq K$ abgeschlossen und K kompakt ist, ist S auch kompakt. Damit ist S endlich und K schneidet nur endlich viele offene Zellen.

Ist nun umgekehrt K abgeschlossen und schneidet nur endlich viele offene Zellen, so ist K enthalten in einer endlichen Vereinigung von abgeschlossen Zellen von X . Da diese abgeschlossen Zellen kompakt sind, ist auch diese Vereinigung kompakt, K ist also ein abgeschlossener Teilraum eines kompakten Teilraums und damit selbst kompakt. \square

11.7 Korollar

Ein CW-Komplex ist genau dann kompakt, wenn er endlich ist.

12 Zelluläre Homologie

12.1 Definition

Sei X ein CW-Komplex. Dann heißt

$$C_n^{\text{cell}}(X; R) := H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}; R)$$

der **n -te zelluläre Kettenmodul** von X mit Koeffizienten in R . Die **n -te Randabbildung** $\partial_n^{\text{cell}}: C_n^{\text{cell}}(X; R) \rightarrow C_{n-1}^{\text{cell}}(X; R)$ wird durch die Komposition

$$\begin{array}{ccc} H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}; R) & \xrightarrow{\partial_n^{(X^{(n)}, X^{(n-1)})}} & H_{n-1}(X^{(n-1)}; R) \\ & & \downarrow (j^{(n-1)})_* \\ & & H_{n-1}(X^{(n-1)}, X^{(n-2)}; R) \end{array}$$

definiert. Dabei ist $\partial_n^{(X^{(n)}, X^{(n-1)})}$ die Randabbildung aus der Paarfolge für $(X^{(n)}, X^{(n-1)})$ und $j^{(n-1)}$ die Inklusion $(X^{(n-1)}, \emptyset) \hookrightarrow (X^{(n-1)}, X^{(n-2)})$.

12.2 Lemma

$$\partial_{n-1}^{\text{cell}} \circ \partial_n^{\text{cell}} = 0$$

Beweis

Wir schreiben die Paarsequenz für $(X^{(n)}, X^{(n-1)})$ dreimal übereinander und erhalten:

$$\begin{array}{ccccccc} H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}) & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(X^{(n-1)}) & \longrightarrow & \dots & & \\ & & \parallel & & & & \\ & & H_{n-1}(X^{n-1}) & \xrightarrow{j_*^{(n-1)}} & H_{n-1}(X^{(n-1)}, X^{(n-2)}) & \xrightarrow{\partial_{n-1}} & H_{n-2}(X^{(n-2)}) \longrightarrow \dots \\ & \searrow \partial_n^{\text{cell}} & & \nearrow & & & \\ & & & & \parallel & & \\ & & & & H_{n-2}(X^{(n-2)}) & \xrightarrow{j_*^{(n-2)}} & H_{n-2}(X^{(n-2)}, X^{(n-3)}) \\ & & & & \nearrow \partial_{n-1}^{\text{cell}} & & \end{array}$$

"R" aus Platzgründen weggelassen

Also $\partial_{n-1}^{\text{cell}} \circ \partial_n^{\text{cell}} = 0$, da wegen der Exaktheit der Paarfolge schon $\partial_{n-1} \circ j_*^{(n-1)} = 0$ ist. \square

12.3 Definition

$(C_*^{\text{cell}}(X; R), \partial_*^{\text{cell}})$ heißt der **zelluläre Kettenkomplex** von X über R . Seine Homologie $H_*^{\text{cell}}(X; R)$ heißt die **zelluläre Homologie** von X .

12.4 Bemerkung

Der zelluläre Kettenkomplex und die zelluläre Homologie sind Funktoren auf der Kategorie der CW-Komplexe und zellulären Abbildungen.

12.5 Lemma

Sei X ein CW-Komplex. Wähle $q_i^{(n)}$ und $Q_i^{(n)}$ für die Zellstruktur auf X . Dann gilt

a) Die Abbildungen

$$\left(\coprod_{i \in I^{(n)}} Q_i^{(n)}, \coprod_{i \in I^{(n)}} q_i^{(n)} \right) : \left(\coprod_i D^n, \coprod_i S^{n-1}; R \right) \longrightarrow (X^{(n)}, X^{(n-1)}; R)$$

induziert einen Isomorphismus in Homologie.

b) Es gilt

$$H_k \left(\coprod_i D^n, \coprod_i S^{n-1}; R \right) = \begin{cases} R[I^{(n)}], & \text{falls } k = n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis

a) Sei $D_0^n := D^n \setminus \{0\}$, $\frac{1}{2}D^n := \{\frac{x}{2} \mid x \in D^n\}$ und $\frac{1}{2}D_0^n := \frac{1}{2}D^n \setminus \{0\}$. Wir definieren

$$X_{++}^{(n-1)} := X^{(n)} \setminus \bigcup_{i \in I^{(n)}} Q_i^{(n)}(\{0\}) \quad \text{und} \quad X_+^{(n-1)} := X^{(n)} \setminus \bigcup_{i \in I^{(n)}} Q_i^{(n)}\left(\frac{1}{2}D^n\right)$$

Dann sind $X^{(n-1)} \hookrightarrow X_+^{(n-1)} \hookrightarrow X_{++}^{(n-1)}$ Homotopieäquivalenzen, da $\coprod_{i \in I^{(n)}} Q_i^{(n)}$ ein Homöomorphismus auf den offenen n -Zellen ist. Betrachte:

$$\begin{array}{ccccc} (\coprod D^n, \coprod S^{n-1}) & \xrightarrow{(1)} & (\coprod D^n, \coprod D_0^n) & \xleftarrow{(2)} & (\coprod \frac{1}{2}D^n, \coprod \frac{1}{2}D_0^n) \\ \downarrow (\coprod Q_i^{(n)}, \coprod q_i^{(n)}) & & \downarrow & & \downarrow (3) \\ (X^{(n)}, X^{(n-1)}) & \xrightarrow{(5)} & (X^{(n)}, X_{++}^{(n-1)}) & \xleftarrow{(4)} & (X^{(n)} \setminus X_+^{(n-1)}, X_{++}^{(n-1)} \setminus X_+^{(n-1)}) \end{array}$$

(1), (2) und (5) sind Homotopieäquivalenzen und induzieren Isomorphismen in Homologie. (3) ist ein Homöomorphismus und induziert einen Isomorphismus in Homologie. (4) erfüllt die Voraussetzungen für den Ausschneideisomorphismus und induziert daher auch einen Isomorphismus in Homologie. Damit folgt a).

b) Da die Randabbildung aus der Paarsequenz in diesem Fall ein Isomorphismus ist, gilt

$$\begin{aligned} H_k \left(\coprod_i D^n, \coprod_i S^{n-1}; R \right) &\xleftarrow{\cong} \bigoplus_i H_k(D^n, S^{n-1}; R) \xrightarrow{\cong} \bigoplus_i \tilde{H}_{k-1}(S^{n-1}; R) \\ &\cong \bigoplus_i \begin{cases} R, & \text{falls } k = n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\ &\cong \begin{cases} R[I^{(n)}], & \text{falls } k = n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad \square \end{aligned}$$

12.6 Bemerkung

Wir haben soeben gezeigt, dass die folgenden Isomorphismen existieren:

$$\begin{array}{ccc} C_n^{\text{cell}}(X; R) & \xrightarrow{\partial_n^{\text{cell}}} & C_{n-1}^{\text{cell}}(X; R) \\ \parallel & & \parallel \\ H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}; R) & \longrightarrow & H_{n-1}(X^{(n-1)}, X^{(n-2)}; R) \\ \parallel & & \parallel \\ R[I^{(n)}] & \longrightarrow & R[I^{(n-1)}] \end{array}$$

Die Randabbildung ∂_n^{cell} wird unter diesen Isomorphismen zu einer $I^{(n-1)} \times I^{(n)}$ -Matrix. Für $j \in I^{(n-1)}$ und $k \in I^{(n)}$ ist der (j, k) -Eintrag dieser Matrix genau der Abbildungsgrad einer Selbstabbildung der $(n-1)$ -Sphäre:

Die $(Q_i^{(n-1)}, q_i^{(n-1)})$ induzieren einen Homöomorphismus $\coprod_i D^{n-1} / \coprod_i S^{n-2} \cong X^{(n)} / X^{(n-1)}$. Durch Komposition mit der Projektion auf die j -te Zelle erhalten wir die folgenden Abbildung

$$\coprod_i D^{n-1} / \coprod_i S^{n-2} \xrightarrow{p_j^{(n-1)}} D^{n-1} / S^{n-2} \cong S^{n-1}.$$

Der (j, k) -te Eintrag ist nun der Abbildungsgrad von

$$S^{n-1} \xrightarrow{q_k^{(n-2)}} X^{(n-1)} \longrightarrow X^{(n-1)} / X^{(n-2)} \xrightarrow{\cong} \coprod_i D^{n-1} / \coprod_i S^{n-2} \xrightarrow{p_j^{(n-1)}} S^{n-1}$$

12.7 Definition

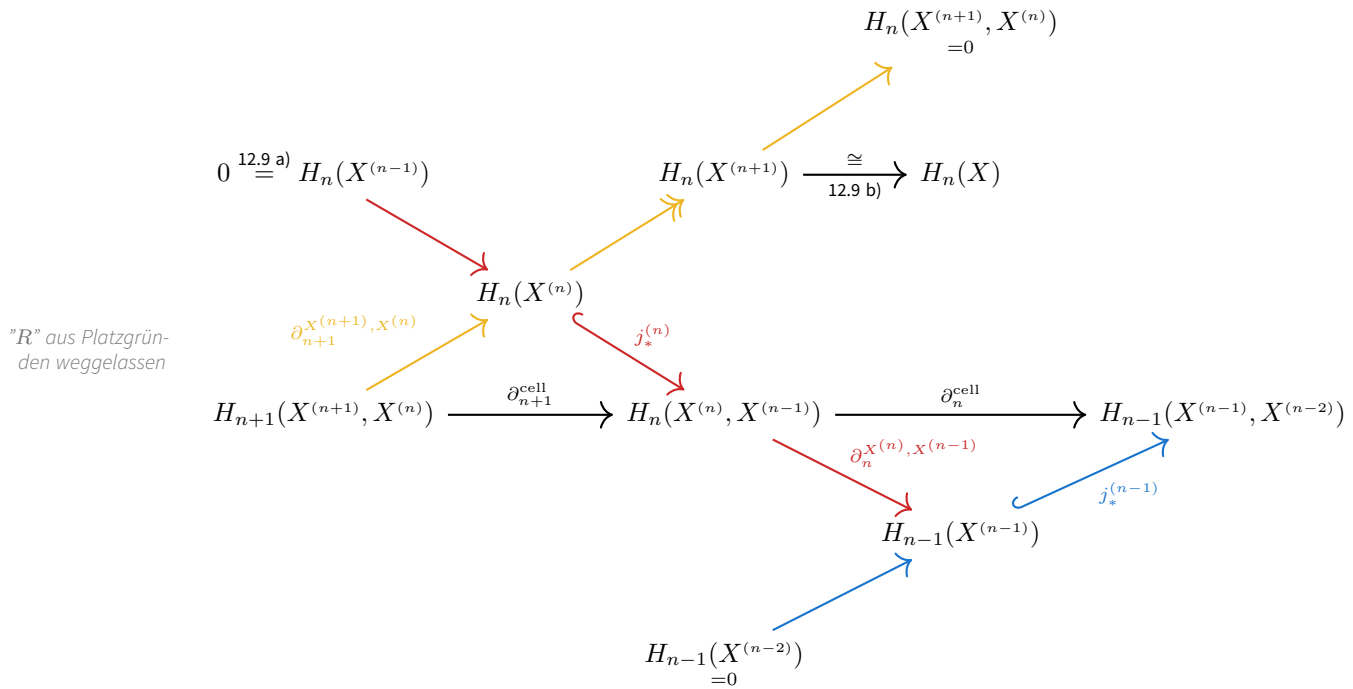
Eine natürliche Transformation τ zwischen Funktoren $F, G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ heißt ein **natürlicher Isomorphismus**, wenn $\tau_C: F(C) \rightarrow G(C)$ für alle Objekte C von \mathcal{C} ein Isomorphismus in \mathcal{D} ist.

12.8 Satz

Für CW-Komplexe gibt es einen natürlichen Isomorphismus $\tau_X: H_*^{\text{cell}}(X; R) \xrightarrow{\cong} H_*(X; R)$.

Beweis (mit Lemma 12.9)

Betrachte folgendes Diagramm; die diagonalen Folgen sind Ausschnitte aus den Paarsequenzen:



Es folgt, dass $j_*^{(n)}$ wegen Exaktheit einen Isomorphismus $H_n(X^{(n)}; R) \xrightarrow{\cong} \ker \partial_n^{\text{cell}}$ induziert. Da $j_*^{(n)}$ injektiv ist, induziert $j_*^{(n)}$ außerdem einen Isomorphismus $\text{Im } \partial_{n+1}^{X^{(n+1)}, X^{(n)}} \xrightarrow{\cong} \text{Im } \partial_{n+1}^{\text{cell}}$. Insgesamt erhalten wir natürliche Isomorphismen

$$H_n(X; R) \cong H_n(X^{(n+1)}; R) \cong H_n(X^{(n)}; R) / \text{Im } \partial_{n+1}^{X^{(n+1)}, X^{(n)}} \cong \ker \partial_n^{\text{cell}} / \text{Im } \partial_{n+1}^{\text{cell}} \cong H_n^{\text{cell}}(X; R) \quad \square$$

12.9 Lemma

Sei X ein CW-Komplex.

- Für $k > n$ ist $H_k(X^{(n)}; R) = 0$.
- Für $k < n$ induziert die Inklusion $l_n: X^{(n)} \hookrightarrow X$ einen Isomorphismus $(l_n)_*: H_k(X^{(n)}; R) \rightarrow H_k(X; R)$.

Beweis

- Ist $k > n$, so erhalten wir aus der Paarfolge einen Isomorphismus

$$H_{k+1}(X^{(n)}, X^{(n-1)}; R) \rightarrow H_k(X^{(n-1)}; R) \xrightarrow{\cong} H_k(X^{(n)}; R) \rightarrow H_k(X^{(n)}, X^{(n-1)}; R) \\ \stackrel{12.5}{=} 0 \qquad \qquad \qquad \stackrel{12.5}{=} 0$$

Da $H_k(X^{(0)}; R) = 0$ für $k > 0$, folgt a) nun durch endliche Induktion für $n = 0, 1, \dots, k-1$.

- Ist $n > k$, so erhalten wir aus der Paarfolge

$$H_{k+1}(X^{(n+1)}, X^{(n)}; R) \rightarrow H_k(X^{(n)}; R) \xrightarrow{\cong} H_k(X^{(n+1)}; R) \rightarrow H_k(X^{(n+1)}, X^{(n)}; R) \\ \stackrel{12.5}{=} 0 \qquad \qquad \qquad \stackrel{12.5}{=} 0$$

Für $m \geq n > k$ induziert die Inklusion $X^{(n)} \hookrightarrow X^{(m)}$ daher einen Isomorphismus $H_k(X^{(n)}; R) \rightarrow H_k(X^{(m)}; R)$. Ist $\dim X$ endlich, so folgt die Behauptung.

Für den allgemeinen Fall beobachten wir zunächst, dass es zu jeder stetigen Abbildung $\sigma: |\Delta^j| \rightarrow X$ ein n gibt mit $\text{Im } \sigma \subseteq X^{(n)}$, da $\text{Im } \sigma \subseteq X$ kompakt ist und daher nur endlich viele offene Zellen von X trifft (siehe 11.5). Also gilt $C_*(X; R) = \bigcup_n C_*(X^{(n)}; R)$. Damit folgt

- $\forall x \in H_k(X; R)$ existiert ein n , sodass x im Bild von $H_k(X^{(n)}; R) \rightarrow H_k(X; R)$.
- $\forall x \in H_k(X^{(n)}; R)$ mit trivialem Bild von x in $H_k(X; R)$, gibt es ein $m \geq n$, sodass das Bild von x in $H_k(X^{(m)}; R)$ trivial ist.

Da für $m \geq n > k$ die Abbildung $H_k(X^{(n)}; R) \rightarrow H_k(X^{(m)}; R)$ ein Isomorphismus ist, ergibt sich damit die Behauptung. \square

12.10 Korollar

Die Eulercharakteristik eines endlichen simplizialen Komplexes ist eine topologische Invariante.

Beweis

Sei a_n die Anzahl der n -Simplizes von K . Dann gibt es eine CW-Struktur auf $|K|$, die für jedes n genau a_n Zellen hat.

$$\chi(K) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i a_i \stackrel{12.5}{=} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \text{Rg } C_i^{\text{cell}}(|K|) \stackrel{4.10}{=} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \text{Rg } H_i^{\text{cell}}(|K|) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \text{Rg } H_i(|K|)$$

Da die $H_i(|K|)$ eine topologische Invariante sind, ist auch $\chi(K)$ eine topologische Invariante. \square

Man beachte, dass 4.10 für beliebige \mathbb{Z} -Kettenkomplexe und deren Homologie gilt

12.11 Bemerkung

Ist X ein CW-Komplex mit endlich vielen n - und $n+1$ -Zellen, so ist $H_n(X)$ ein endlich erzeugter \mathbb{Z} -Modul. Man definiert dann die **n -te Bettizahl** von X als $b_n := \text{Rg } H_n(X)$. Ist X ein endlicher CW-Komplex, so definiert man die Euler-Charakteristik von X als

$$\chi(X) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n.$$

Ist a_n die Anzahl der n -Zellen von X , so gilt $\chi(X) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$.

12.12 Beispiel

Es gilt

$$H_k(\mathbb{C}P^n; R) \cong \begin{cases} R, & \text{falls } k = 0, 2, 4, \dots, 2n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis

Aus Beispiel 11.5 (v) wissen wir, dass es auf $\mathbb{C}P^n$ eine CW-Struktur gibt mit genau einer Zelle in der Dimension $0, 2, 4, \dots, 2n$ (und keine weiteren Zellen). Der zelluläre Kettenkomplex hat daher folgende Form:

$$\begin{array}{cccccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 2n-1 & 2n & 2n+1 & \dots \\ R \longleftarrow 0 \longleftarrow R \longleftarrow 0 \longleftarrow R \longleftarrow \dots \longleftarrow 0 \longleftarrow R \longleftarrow 0 \longleftarrow \dots \end{array}$$

Alle Randabbildungen sind trivial und die Homologie von $\mathbb{C}P^n$ stimmt mit den zellulären Kettenkomplexen überein. \square

RevChap12

12.13 Beispiel

Es gilt

$$H_k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{falls } k = 0 \text{ oder } (k = n \text{ und } k \text{ ungerade}) \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & \text{falls } 0 < k < n \text{ und } k \text{ ungerade} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis

Aus Beispiel 11.5 (iv) wissen wir, dass es eine CW-Struktur auf $\mathbb{R}P^n$ gibt, die für $k = 0, \dots, n$ genau eine k -Zelle und keine weiteren Zellen besitzt. Der zelluläre Kettenkomplex von $\mathbb{R}P^n$ (über \mathbb{Z}) hat also die Form:

$$\mathbb{Z} \xleftarrow{\partial_1^{\text{cell}}} \mathbb{Z} \xleftarrow{\partial_2^{\text{cell}}} \mathbb{Z} \xleftarrow{\quad} \dots \xleftarrow{\quad} \mathbb{Z} \xleftarrow{\partial_n^{\text{cell}}} \mathbb{Z} \xleftarrow{\quad} 0$$

Wir müssen die Randabbildung verstehen. In der CW-Struktur können wir $(\mathbb{R}P^n)^{(k)}$ mit $\mathbb{R}P^k$ identifizieren. Die anklebende Abbildung $q^{(k+1)}: S^k \rightarrow \mathbb{R}P^k$ der $(k+1)$ -Zelle ist die Projektion $(x_0, \dots, x_k) \mapsto [x_0 : \dots : x_k]$. Die charakteristische Abbildung $Q^{(k+1)}: D^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}P^{k+1}$ der $(k+1)$ -Zelle ist gegeben durch

$$(x_0, \dots, x_k) \mapsto \left[x_0 : \dots : x_k : \sqrt{1 - \|(x_1, \dots, x_k)\|^2} \right]$$

Betrachte folgendes kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} C_{k+1}^{\text{cell}}(\mathbb{R}P^n) & \xrightarrow{\partial_{k+1}^{\text{cell}}} & C_k^{\text{cell}}(\mathbb{R}P^n) & & \\ \parallel & & \parallel & & \\ H_{k+1}(\mathbb{R}P^{k+1}, \mathbb{R}P^k) & \xrightarrow{\partial_{\mathbb{R}P^{k+1}, \mathbb{R}P^k}} & H_k(\mathbb{R}P^k) & \longrightarrow & H_k(\mathbb{R}P^k, \mathbb{R}P^{k-1}) \\ \uparrow (Q^{(k+1)}, q^{(k+1)})_* \cong & & \uparrow (q^{(k+1)})_* & & \uparrow (q^{(k+1)}, q^{(k)})_* \\ H_{k+1}(D^{k+1}, S^k) & \xrightarrow[\cong]{\partial_{D^{k+1}, S^k}} & \tilde{H}_k(S^k) & \xrightarrow{j_*} & H_k(S^k, S^{k-1}) \end{array}$$

Das linke untere Quadrat kommutiert, da die Randabbildung aus der Paarfolge eine natürliche Transformation ist. Das rechte, da die zugrunde liegenden Abbildungen kommutieren.

Das Bild von $\partial_{k+1}^{\text{cell}}$ stimmt also mit dem Bild der Komposition

$$H_k(S^k) \xrightarrow{j_*} H_k(S^k, S^{k-1}) \xrightarrow{(q^{(k+1)}, q^{(k)})_*} H_k(\mathbb{R}P^k, \mathbb{R}P^{k-1})$$

überein. Sei $i_{\pm}: D^k \rightarrow S^k$ definiert durch $i_{\pm}(x) = (\pm x, \pm \sqrt{1 - \|x\|^2})$. Sei $l: S^{k-1} \hookrightarrow i_-(D^k)$ die Inklusion und $R: S^k \rightarrow S^k$ die Punktspiegelung $x \mapsto -x$. Es ist $i_+ = R \circ i_-$. Betrachte

faktorisieren über 0

$$\begin{array}{ccc}
 & \tilde{H}_k(S^k) & \\
 & \downarrow j_* & \\
 \begin{array}{c} y_+ \in H_k(D^k, S^{k-1}) \\ \oplus \\ y_- \in H_k(D^k, S^{k-1}) \end{array} & \xrightarrow[\cong]{\begin{array}{c} (i_+, i_+|_{S^{k-1}})_* \\ (i_-, i_-|_{S^{k-1}})_* \end{array}} & H_k(S^k, S^{k-1}) \xrightarrow[\cong]{\begin{array}{c} (\text{id}_{S^k}, l)_* \\ (R, R|_{S^{k-1}})_* \end{array}} \begin{array}{c} H_k(S^k, i_-(D^k)) \ni x_+ \\ \oplus \\ H_k(S^k, i_-(D^k)) \ni x_- \end{array} \quad [\#] \\
 & \downarrow (q^{(k+1)}, q^{(k)})_* & \\
 & H_k(\mathbb{R}P^k, \mathbb{R}P^{k-1}) &
 \end{array}$$

In der Übungen haben wir gesehen, dass die horizontalen Abbildungen Isomorphismen sind. Sei $x \in \tilde{H}_k(S^k)$ ein Erzeuger. Seien (x_+, x_-) und (y_+, y_-) die Elemente, die $j_*(x)$ unter den horizontalen Isomorphismen in $[\#]$ entsprechen. Mit Hilfe der Paarfolge zu $(S^k, i_-(D^k))$ sehen wir, dass die Inklusion $j_-: (S^k, \emptyset) \hookrightarrow (S^k, i_-(D^k))$ einen Isomorphismus $(j_-)_*: \tilde{H}_k(S^k) \rightarrow \tilde{H}_k(S^k, i_-(D^k))$ induziert. Es ist nun $(\text{id}_{S^k}, l) \circ j = j_-$ und $(R, R|_{S^{k-1}}) \circ j = j_- \circ R$. Damit ist x_+ ein Erzeuger von $H_k(S^k, i_+(D^k))$. Weiter entspricht R_* der Multiplikation mit $(-1)^{k+1}$ nach 10.6. Damit folgt

eventuell in Anhang?

$$x_- = (R, R|_{S^{k-1}})_* \circ j_*(x) = (\text{id}_{S^k}, l)_* \circ j_* \circ R_*(x) = (\text{id}_{S^k}, l)_* \circ j_*((-1)^{k+1}x) = (-1)^{k+1} \cdot x_+$$

Die Komposition der horizontalen Isomorphismen in $[\#]$ ist gegeben durch

Da bin ich anderer Meinung, bzw. sehe ich nicht ein warum ...

Problem beheben/Details hinzufügen

$$\begin{pmatrix} (i_+, l \circ i_+|_{S^{k-1}})_* & 0 \\ 0 & (R, R|_{S^{k-1}})_* \circ (i_-, i_-|_{S^{k-1}})_* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (i_+, l \circ i_+|_{S^{k-1}})_* & \\ & (i_+, l \circ i_+|_{S^{k-1}})_* \end{pmatrix}$$

Es folgt, dass y_+ ein Erzeuger von $H_k(D^k, S^{k-1})$ ist und $y_- = (-1)^{k+1}y_+$ ist. In $[\#]$ wird y_+ auf $(q^{(k+1)}, q^{(k)})_* \circ (i_+, i_+|_{S^{k-1}})_*(y_+) = (Q^{(k)}, q^{(k)})_*(y_+)$ abgebildet. Insbesondere wird y_+ auf einen Erzeuger $z_k \in H_k(\mathbb{R}P^k, \mathbb{R}P^{k-1})$ abgebildet, da diese Abbildung nach 12.5 ein Isomorphismus ist. Es folgt

Für die Gleichung unten brauchen wir doch $(i_-, i_-|_{S^{k-1}})_*(y_-) = (-1)^{k+1}(i_+, i_+|_{S^{k-1}})_*(y_+) = (-1)^{k+1}z_k$??

$$\begin{aligned}
 (q^{(k+1)}, q^{(k)})_*(j_*(x)) &= (q^{(k+1)}, q^{(k)})_* \left((i_+, i_+|_{S^{k-1}})_*(y_+) + (i_-, i_-|_{S^{k-1}})_*(y_-) \right) \\
 &= (Q^{(k)}, q^{(k)})_*(y_+ + (-1)^{k+1}y_+) \\
 &= \begin{cases} 2z_k, & \text{falls } k \text{ ungerade} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Es folgt

$$\text{Im } \partial_{k+1}^{\text{cell}} = \begin{cases} 2 \cdot C_k^{\text{cell}}(X), & \text{falls } k \text{ ungerade} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Der zelluläre Kettenkomplex ist daher isomorph zu:

$$\mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \xleftarrow{2} \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \xleftarrow{\quad} \cdots \xleftarrow{\quad} \mathbb{Z} \xleftarrow{n} \mathbb{Z} \xleftarrow{\quad} 0 \xleftarrow{\quad} 0$$

Womit die Behauptung folgt. □

Beispiel

Für $R = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist

$$H_k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & \text{falls } k = 0, \dots, n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad \square$$

12.14 Satz

Sei K ein geordneter simplizialer Komplex. Für $\sigma = \{v_0, \dots, v_n\} \in \Sigma_n$ mit $v_0 < v_1 < \dots < v_n$ sei $f_\sigma: |\Delta^n| \rightarrow |K|$ gegeben durch $f_\sigma(\sum_{i=0}^n t_i e_i) = \sum_{i=0}^n t_i v_i$. Wir erhalten

$$[f_\sigma] \in H_n(|K|^{(n)}, |K|^{(n-1)}; R) = C_n^{\text{cell}}(|K|; R).$$

Diese Zuordnung definiert einen Isomorphismus zwischen dem simplizialen Kettenkomplex von K und dem zellulären Kettenkomplex von $|K|$

$$\tau: C_*(K; R) \longrightarrow C_*^{\text{cell}}(|K|, R)$$

Insbesondere ist $H_*(K; R) \cong H_*(|K|; R)$ eine topologische Invariante von K .

Beweis

Betrachte

$$\begin{array}{ccc}
 \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_n} R & \xrightarrow{\cong} & \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_n} H_n(|\Delta^\sigma|, |\partial \Delta^\sigma|; R) \\
 \cong \downarrow & & \cong \downarrow \\
 C_n(K; R) & \xrightarrow{\tau} & H_n(|K|^{(n)}, |K|^{(n-1)}; R)
 \end{array}$$

Nun ist auch τ ein Isomorphismus, da $[f_\sigma]$ ein Erzeuger von $H_n(|\Delta^\sigma|, |\partial \Delta^\sigma|; R)$ ist, siehe Blatt 8. Es bleibt zu zeigen, dass $\sigma \mapsto [f_\sigma]$ mit den Randabbildungen vertauscht. Dies ergibt sich sofort aus $f_{\partial_j \sigma} = \partial_j f_\sigma$. \square

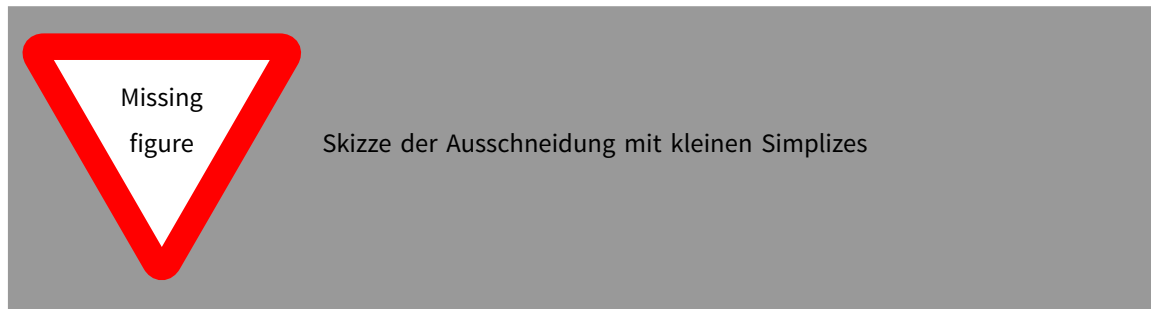
13 Kleine Simplizes

13.1 Satz

Sei (X, A) ein Paar von topologischen Räumen. Sei $L \subseteq A$ mit $\bar{L} \subseteq \mathring{A}$. Dann induziert die Inklusion $(X \setminus L, A \setminus L) \hookrightarrow (X, A)$ den Ausschneidungs-Isomorphismus $H_*(X \setminus L, A \setminus L; R) \xrightarrow{\cong} H_*(X, A; R)$. Es ist

RevChap13

$$H_*(X, A; R) = H_*(C_*(X; R)/C_*(A; R), \partial_*) \text{ und } H_*(X \setminus L, A \setminus L; R) = H_*(C_*(X \setminus L; R)/C_*(A \setminus L; R), \partial_*)$$



13.2 Definition

Sei \mathcal{U} eine offene Überdeckung von X . Ein singulärer Simplex $\sigma: |\Delta^n| \rightarrow X$ heißt **\mathcal{U} -klein**, falls es ein $U \in \mathcal{U}$ gibt mit $\text{Im } \sigma \subseteq U$. Die \mathcal{U} -kleinen Simplizes erzeugen den Unterkettenkomplex $(C_*^{\mathcal{U}}, \partial_*)$ des simplizialen Kettenkomplexes $C_*(X; R)$.

13.3 Satz über kleine Simplizes

Die Inklusion $C_*^{\mathcal{U}}(X; R) \rightarrow C_*(X; R)$ induziert einen Isomorphismus in Homologie.

13.4 Bemerkung

Der Satz über kleine Simplizes lässt sich auf Paare von topologischen Räumen verallgemeinern. Für eine Überdeckung \mathcal{U} von X setzen wir

$$C_*^{\mathcal{U}}(X, A; R) := C_*^{\mathcal{U}}(X; R)/C_*(A; R) \cap C_*^{\mathcal{U}}(X; R)$$

Dann induziert die Inklusion $C_*^{\mathcal{U}}(X, A; R) \rightarrow C_*(X, A; R)$ einen Isomorphismus in Homologie. Beweis mit Paarfolge und 5er-Lemma.

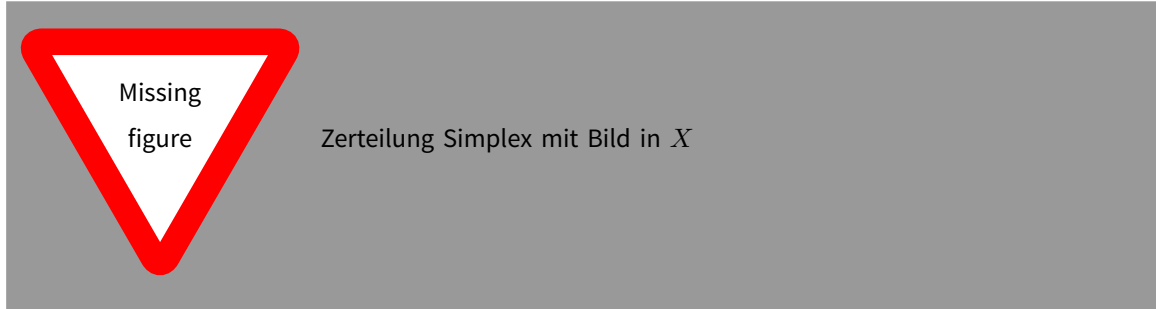
13.5 Beweis des Ausschneidungssatzes (13.1)

Seien $\mathcal{U} := \{\mathring{A}, X \setminus \bar{L}\}$ und $\mathcal{U}_L := \{\mathring{A} \setminus L, X \setminus \bar{L}\}$. Dann gilt nach dem Satz über kleine Simplizes

$$\begin{array}{ccc} C_*^{\mathcal{U}_L}(X \setminus L, A \setminus L; R) & \xrightarrow{\cong} & C_*^{\mathcal{U}}(X, A; R) \\ \cong_{H_*} \downarrow & & \downarrow \cong_{H_*} \\ C_*(X \setminus L, A \setminus L; R) & \xrightarrow{(\star)} & C_*(X, A; R) \end{array}$$

Daher induziert auch die Inklusion (\star) einen Isomorphismus in H_* . □

13.6 Idee zum Beweis des Satzes über kleine Simplizes



13.7 Definition

„Abkegeln“

$s_n := \left(\frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1}\right) \in |\Delta^n|$ heißt der **Schwerpunkt** von $|\Delta^n|$. Ist $\sigma: |\Delta^p| \rightarrow |\Delta^n|$ ein singulärer p -Simplex, so definieren wir $(K_{\Delta^n})(\sigma): |\Delta^{p+1}| \rightarrow |\Delta^n|$ durch

$$(K_{\Delta^n})(\sigma)(t_0, \dots, t_{p+1}) = t_0 \cdot s_n + (1 - t_0) \cdot \sigma\left(\frac{(t_1, \dots, t_{p+1})}{1 - t_0}\right)$$

Wir erhalten eine Abbildung $(K_{\Delta^n})_p: C_p(|\Delta^n|; R) \rightarrow C_{p+1}(|\Delta^n|; R)$.

13.8 Lemma

Sei $p_n: |\Delta^n| \rightarrow |\Delta^n|$ die konstante Abbildung mit $\text{Im } p_n = \{s_n\}$. Dann ist $(K_{\Delta^n})_*$ eine Kettenhomotopie zwischen id und $(p_n)_*$.

Beweis

Sei σ ein singulärer p -Simplex in $|\Delta^n|$. Dann ist

$$\begin{aligned} \partial_{p+1} \circ (K_{\Delta^n})_p(\sigma) &= \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j (K_{\Delta^n})_p(\sigma) \circ \iota_{p+1,j} = \sigma + \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^j (K_{\Delta^n})_p(\sigma) \circ \iota_{p+1,j} \\ &= \sigma + \begin{cases} \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^j (K_{\Delta^n})_{p-1}(\sigma \circ \iota_{p+1,j}), & p \geq 1 \\ -c_{\{s_n\}}: |\Delta^0| \rightarrow \{s_n\}, & p = 0 \end{cases} \\ &= \sigma - \begin{cases} (K_{\Delta^n})_{p-1}(\partial_p \circ \sigma), & \text{falls } p \geq 1 \\ c_{\{s_0\}}, & \text{falls } p = 0 \end{cases} \quad \square \end{aligned}$$

13.9 Definition

Wir definieren induktiv natürliche Transformationen $B_n: C_n(-; R) \rightarrow C_n(-; R)$ und $H_n: C_n(-; R) \rightarrow C_{n+1}(-; R)$ wie folgt: Für $n = 0$ setzen wir $(B_0)_X = \text{id}$. Sei B_k nun schon für $k = 0, \dots, n-1$ definiert. Betrachte zunächst $\text{id}_{|\Delta^n|} \in C_n(|\Delta^n|; R)$. Setze

$$(B_n)_{|\Delta^n|}(\text{id}_{|\Delta^n|}) := (K_{\Delta^n})_{n-1} \circ (B_{n-1})_{|\Delta^n|} \circ \partial_n(\text{id}_{|\Delta^n|})$$

Ist $\sigma: |\Delta^n| \rightarrow X$ ein beliebiger singulärer n -Simplex in X , so ist $\sigma = \sigma_*(\text{id}_{|\Delta^n|})$, also setzen wir ⁶

$$(B_n)_X(\sigma) := \sigma_*((B_n)_{|\Delta^n|}(\text{id}_{|\Delta^n|}))$$

⁶ $(B_n)_X(\sigma) = (B_n)_X(\sigma_*(\text{id}_{|\Delta^n|})) = \sigma_*((B_n)_{|\Delta^n|}(\text{id}_{|\Delta^n|}))$ muss wegen Natürlichkeit gelten

Für $n = 0$ und $\sigma: |\Delta^0| \rightarrow X$ setzen wir $(H_0)_X(\sigma)$ als den konstanten 1-Simplex τ mit $\text{Im } \tau = \text{Im } \sigma$. Ist H_{n-1} schon definiert, so setzen wir für einen singulären n -Simplex $\sigma: |\Delta^n| \rightarrow X$

$$(H_n)_X(\sigma) := \sigma_*((K_{\Delta^n})_n(\text{id}_{|\Delta^n|} - (H_{n-1})_{|\Delta^n|} \circ \partial_n(\text{id}_{|\Delta^n|})))$$

13.10 Lemma 1

Für jeden topologischen Raum X ist $(B_*)_X$ eine Kettenabbildung und $(H_*)_X$ eine Kettenhomotopie zwischen $(B_*)_X$ und der Identität.

13.11 Lemma 2

Sei \mathcal{U} eine offene Überdeckung von X . Sei $\alpha \in C_n(X; R)$. Dann gibt es $k_0 \geq 0$ so, dass $(B_n)_X^k(\alpha) \in C_n^{\mathcal{U}}(X; R)$ für alle $k \geq k_0$.

Beweis (mit Lemma 3, 13.16)

Es genügt $\alpha = \sigma: |\Delta^n| \rightarrow X$ zu betrachten. Sei $\sigma^*\mathcal{U} = \{\sigma^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{U}\}$. Dann gilt

$$\sigma^*(C_*^{\sigma^*\mathcal{U}}(|\Delta^n|; R)) \subseteq C_*^{\mathcal{U}}(X; R).$$

Da $(B_n)_X^k(\sigma) = \sigma_*((B_n)_{|\Delta^n|}^k(\text{id}_{|\Delta^n|}))$ genügt es zu zeigen: $(B_n)_{|\Delta^n|}^k(\text{id}_{|\Delta^n|}) \in C_*^{\sigma^*\mathcal{U}}(|\Delta^n|; R)$. Sei $\varepsilon > 0$ eine Lebesguezahl⁷ für $\sigma^*\mathcal{U}$, das heißt $\forall x \in |\Delta^n| : \exists V \in \sigma^*\mathcal{U} : B_\varepsilon(x) \subseteq V$. Ist $k > 0$ mit $\left(\frac{n}{n+1}\right)^k \text{diam}(\text{id}_{|\Delta^n|}) < \varepsilon$, so ist $((B_n)_{|\Delta^n|})^k(\text{id}_{|\Delta^n|}) \in C_*^{\sigma^*\mathcal{U}}(|\Delta^n|; R)$ nach Lemma 3 (iii). \square

13.12 Beweis des Satzes über kleine Simplizes (13.3)

Sei $x \in H_n(X; R)$. Wähle $\alpha \in C_n(X; R)$ mit $[\alpha] = x$. Nach Lemma 2 gibt es ein k mit $(B_n)_X^k(\alpha) \in C_n^{\mathcal{U}}(X; R)$. Mit Lemma 1 folgt $x = [\alpha] = [(B_n)_X^k(\alpha)]$. Daher ist die von $C_*^{\mathcal{U}} \rightarrow C_*(X; R)$ induzierte Abbildung in H_* surjektiv.

Sei nun $x \in \ker H_n(C_*^{\mathcal{U}}(X; R) \rightarrow C_*(X; R))$. Sei $\alpha \in C_n^{\mathcal{U}}(X; R)$ mit $x = [\alpha]$. Da x im Kern liegt, gibt es $\beta \in C_{n+1}(X; R)$ mit $\partial_n(\beta) = \alpha$. Nach Lemma 2 gibt es k mit $(B_n)_X^k(\beta) \in C_n^{\mathcal{U}}(X; R)$. Mit Lemma 1 folgt

$$x = [\alpha] = [(B_n)_X^k(\alpha)] = [(B_n)_X^k(\partial_n \beta)] = [\partial_n((B_{n+1})_X^k(\beta))]$$

Also ist $x = 0$ in $H_*(C_*^{\mathcal{U}}(X; R))$. \square

13.13 Bemerkung


Seien (C_*, ∂_*) und (C'_*, ∂'_*) Kettenkomplexe. $s_n: C_n \rightarrow C'_{n+1}$ eine Abbildung, die den Grad um 1 erhöht. Dann ist $s_{n-1} \circ \partial_n + \partial'_{n+1} \circ s_n$ eine Kettenabbildung:

$$(s_{n-1} \circ \partial_n + \partial'_{n+1} \circ s_n) \circ \partial_{n+1} = \partial'_{n+1} \circ (s_n \circ \partial_{n+1} + \partial'_{n+2} \circ s_{n+1})$$

Insbesondere ist $s \circ \partial + \partial' \circ s = f - g$ mit f eine Kettenabbildung. Dann ist auch g eine Kettenabbildung.

13.14 Definition

Seien $v_0, \dots, v_p \in |\Delta^n|$. Dann bezeichnen wir mit $[v_0, \dots, v_p]$ den singulären p -Simplex mit $\sum_{i=0}^p t_i e_i \rightarrow \sum_{i=1}^p t_i v_i$. Singuläre Simplizes dieser Form heißen **affin**.

⁷siehe <https://de.wikipedia.org/wiki/Lebesguezahl> 

13.15 Definition

Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf \mathbb{R}^{n+1} . Für einen singulären Simplex $\sigma: |\Delta^p| \rightarrow |\Delta^n|$ definieren wir den **Durchmesser** durch

$$\text{diam}(\sigma) := \max\{\|\sigma(x) - \sigma(y)\| \mid x, y \in |\Delta^p|\}$$

13.16 Lemma 3

Sei $[v_0, \dots, v_p]$ ein affiner singulärer p -Simplex in $|\Delta^n|$. Dann gilt:

$$(i) \text{ diam}([v_0, \dots, v_p]) = \max\{\|v_i - v_j\| \mid 0 \leq i, j \leq p\}$$

(ii) Es ist

$$(B_p)_{|\Delta^n|}([v_0, \dots, v_p]) = \sum_{\sigma \in \Sigma_{\{v_0, \dots, v_p\}}} \text{sgn}(\sigma) \underbrace{\left[\frac{\sum_{i=0}^p \sigma(v_i)}{p+1}, \frac{\sum_{i=0}^{p-1} \sigma(v_i)}{p}, \dots, \sigma(v_0) \right]}_{=: \tau_\sigma}$$

$$(iii) \text{ Für } \sigma \in \Sigma_{\{v_0, \dots, v_p\}} \text{ ist } \text{diam } \tau_\sigma \leq \frac{n}{n+1} \text{diam}[v_0, \dots, v_p].$$

Beweis

(i) Seien $v, v' \in \text{Im}[v_0, \dots, v_p]$. Dann ist $v = \sum_{i=0}^p t_i v_i, v' = \sum_{i=0}^p t'_i v_i$ mit $t_i, t'_i \geq 0, \sum_{i=0}^p t_i = 1 = \sum_{i=0}^p t'_i$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|v - v'\| &= \left\| \sum_{i=0}^p t_i v_i - v' \right\| = \left\| \sum_{i=0}^p t_i v_i - \sum_{i=0}^p t'_i v_i \right\| = \left\| \sum_{i=0}^p t_i (v_i - v') \right\| \leq \sum_{i=0}^p \|t_i (v_i - v')\| \\ &\leq \left(\sum_{i=0}^p t_i \right) \max_i \|v_i - v'\| = \max_i \|v_i - v\| \leq \max_{i,j} \|v_i - v_j\|. \end{aligned}$$

(ii) Per Induktion nach p .

$p = 0$: Klar.

$p - 1 \mapsto p$: Es genügt $n = p, v_0 = e_0, \dots, v_n = e_n$ zu betrachten. Es gilt

$$\begin{aligned} (B_{|\Delta^p|})_p([v_0, \dots, v_p]) &= (K_{\Delta^p}) \circ (B_{|\Delta^p|})_{p-1} \circ \partial_p[e_0, \dots, e_p] \\ &= \sum_{i=0}^p (-1)^i (K_{\Delta^p}) \circ (B_{|\Delta^p|})_{p-1} \circ [e_0, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_p] \\ &= \sum_{i=0}^p (-1)^i \sum_{\sigma \in \Sigma_{\{e_0, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_p\}}} \text{sgn}(\sigma) (K_{\Delta^p}) \left(\left[\frac{\sigma(e_0) + \dots + \sigma(e_{i-1}) + \sigma(e_{i+1}) + \dots + \sigma(e_p)}{p} \right] \right) \\ &= \sum_{i=0}^p (-1)^i \sum_{\sigma \in \Sigma_{\{e_0, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_p\}}} \text{sgn}(\sigma) \left[\frac{e_0 + \dots + e_p}{p+1}, \frac{\sigma(e_0) + \dots + \sigma(e_{i-1}) + \sigma(e_{i+1}) + \dots + \sigma(e_p)}{p}, \dots \right] \\ &= \dots = \sum_{\sigma \in \Sigma_{\{e_0, \dots, e_n\}}} \text{sgn}(\sigma) \left[\frac{\sum_{i=0}^p \sigma(e_i)}{p}, \dots, \dots \right] \end{aligned}$$

(iii) Es genügt $\sigma = \text{id}$ zu betrachten. Es ist

$$\begin{aligned}
 \text{diam} \left[\frac{v_0 + \dots + v_p}{p+1}, \frac{v_0 + \dots + v_{p-1}}{p}, \dots, v_0 \right] &\stackrel{(i)}{=} \max_{i < j} \left\| \frac{v_0 + \dots + v_i}{i+1} - \frac{v_0 + \dots + v_j}{j+1} \right\| \\
 &= \max_{i < j} \left\| \frac{v_0 + \dots + v_i}{i+1} - \frac{v_0 + \dots + v_j}{j+1} - \frac{v_{i+1} + \dots + v_j}{j+1} \right\| \\
 &= \max_{i < j} \left\| \frac{(j+1) - (i+1)}{(i+1)(j+1)} (v_0 + \dots + v_i) - \frac{1}{j+1} (v_{i+1} + \dots + v_j) \right\| \\
 &= \max_{i < j} \frac{j-1}{j+1} \left\| \underbrace{\frac{v_0 + \dots + v_i}{i+1}}_{\in \text{Im}[v_0, \dots, v_n]} - \underbrace{\frac{v_{i+1} + \dots + v_j}{j-1}}_{\in \text{Im}[v_0, \dots, v_n]} \right\| \\
 &\leq \max_{i < j} \frac{j-1}{j+1} \text{diam}[v_0, \dots, v_n] \\
 &\leq \max_j \frac{j}{j+1} \text{diam}[v_0, \dots, v_n] \leq \frac{n}{n+1} \text{diam}[v_0, \dots, v_n]
 \end{aligned}$$

14 Axiome für Homologie

14.1 Bezeichnung

RevChap14

Mit $V: \text{Top}^2 \rightarrow \text{Top}^2$ bezeichnen wir den Funktor $V(X, A) = (A, \emptyset) = A$.

14.2 Definition

Eine **Homologietheorie** mit Werten in R -Moduln ist ein Funktor

$$E_*: \text{HTop}^2 \longrightarrow \text{Gr-}R\text{-Mod}$$

zusammen mit einer natürlichen Transformation $\partial_{*+1}: E_{*+1} \rightarrow E_* \circ V$,⁸ sodass folgende Axiome gelten:

- (i) **Paarfolge:** Sei (X, A) ein Paar von topologischen Räumen. Seien $X = (X, \emptyset) \xrightarrow{j} (X, A)$ und $A = (A, \emptyset) \xrightarrow{i} X = (X, \emptyset)$ die Inklusionen. Dann ist

$$\cdots \longrightarrow E_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\partial_{n+1}} E_n(A) \xrightarrow{E_n(i)} E_n(X) \xrightarrow{E_n(j)} E_n(X, A) \xrightarrow{\partial_{n-1}} E_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots$$

eine lange exakte Folge.

- (ii) **Ausschneidung:** Sei (X, A) ein Paar von topologischen Räumen und $L \subseteq A$ mit $\bar{L} \subseteq \mathring{A}$. Dann induziert die Inklusion $i: (X \setminus L, A \setminus L) \rightarrow (X, A)$ einen Isomorphismus

$$E_*(i): E_*(X \setminus L, A \setminus L) \xrightarrow{\cong} E_*(X, A)$$

14.3 Bemerkung

Homologietheorien sind homotopieinvariant. Oft wird dies als eigenes Axiom formuliert.

14.4 Bemerkung

Für jede Homologietheorie gibt es eine Mayer-Vietoris-Folge. Dies ist eine formale Konsequenz aus der Paarfolge und dem Ausschneidungsisomorphismus. Eine einfache Folgerung aus der Mayer-Vietoris-Folge ist, dass jede Homologietheorie mit *endlichen* disjunkten Vereinigungen verträglich ist: Ist $X = X_1 \amalg \cdots \amalg X_n$ und $j_i: X_i \rightarrow X$ die Inklusion, dann ist

$$E_*(X_1) \oplus \cdots \oplus E_*(X_n) \xrightarrow{E_*(j_1) \oplus \cdots \oplus E_*(j_n)} E_*(X)$$

ein Isomorphismus.

14.5 Definition

Zwei weitere Axiome die Homologietheorien mit Werten in R -Moduln erfüllen können sind:

Dimensionsaxiom: Für den Einpunktraum $\{x_0\}$ ist $E_0(\{x_0\}) \cong R$ und $E_n(\{x_0\}) = 0$ für $n \neq 0$.

Disjunkte Vereinigung: Sei $X = \coprod_{i \in I} X_i$ und $j_i: X_i \rightarrow X$ die Inklusion. Dann ist

$$\bigoplus_{i \in I} E_*(j_i): \bigoplus_{i \in I} E_*(X_i) \longrightarrow E_*(X)$$

ein Isomorphismus.

⁸Genauer: Sei $S: \text{Gr-}R\text{-Mod} \rightarrow \text{Gr-}R\text{-Mod}$ der Funktor $(SM)_n = M_{n+1}$. Dann ist ∂_* eine natürliche Transformation $S \circ E_* \rightarrow E_* \circ V$, also für (X, A) $(S(E_*(X, A)))_n \rightarrow (E_*(V(X, A)))_n$, $E_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\partial_*} E_n(A)$.

14.6 Bemerkung

In Kapitel 6 haben wir $\text{GR-}R\text{-MOD}$ als die Kategorie der \mathbb{N} -graduierten R -Moduln definiert. Für viele Homologietheorien muss man diese Kategorie etwas vergrößern und \mathbb{Z} -graduierte R -Moduln zulassen. Objekte sind dann Folgen $(M_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ über \mathbb{Z} von R -Moduln M_n .

14.7 Bemerkung

- Für jede Homologietheorie E_* gilt: $E_*(S^n) \cong E_*(\{\text{pt}\}) \oplus E_{*-n}(\{\text{pt}\})$
- Die Konstruktion des zellulären Kettenkomplexes in singulärer Homologie benutzte nur die Axiome aus 14.2. Für die Identifikation der zellulären Homologie mit der singulären Homologie waren zusätzlich die Axiome aus 14.5 notwendig. Ohne das Axiom über disjunkte Vereinigungen kann man nur endliche CW-Komplexe behandeln. Ohne das Dimensionsaxiom erhält man an der Stelle der zellulären Kettenkomplex eine sogenannte **Spektralfolge**, die Atiyah-Hirzebruch Spektralfolge.

14.8 Definition

Seien (E_*, ∂_*^E) und (F_*, ∂_*^F) Homologietheorien. Ein **Morphismus von Homologietheorien** ist eine natürliche Transformation $\tau_*: E_* \rightarrow F_*$, sodass $\tau_* \circ \partial_{*+1}^E = \partial_{*+1}^F \circ \tau_{*+1}$. Also kommutiert für alle (X, A) das folgende Diagramm

$$\begin{array}{ccc} E_{n+1}(X, A) & \xrightarrow{\partial_{n+1}^E} & E_n(A) \\ \downarrow \tau_{n+1, (X, A)} & & \downarrow \tau_{n, A} \\ F_{n+1}(X, A) & \xrightarrow{\partial_{n+1}^F} & F_n(A) \end{array}$$

14.9 Satz

Sei $\tau_*: (E_*, \partial_*^E) \rightarrow (F_*, \partial_*^F)$ ein Morphismus von Homologietheorien. Ist

$$(\tau_*)_{\{\text{pt}\}}: E_*(\{\text{pt}\}) \rightarrow F_*(\{\text{pt}\})$$

ein Isomorphismus, dann ist $(\tau_*)_X$ für jeden endlichen CW-Komplex ein Isomorphismus. Sind E_* und F_* mit beliebigen disjunkten Vereinigungen verträglich, so ist $(\tau_*)_X$ für alle CW-Komplexe ein Isomorphismus.

Beweis

Schritt 1: Sei X ein 0-dimensionaler endlicher CW-Komplex, also eine endliche Menge mit der diskreten Topologie. Für $x \in X$ sei $i_x: \{x\} \rightarrow X$ die Inklusion. Wir erhalten folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} E_*(X) & \xrightarrow{(\tau_*)_X} & F_*(X) \\ \uparrow \cong & & \uparrow \cong \\ \bigoplus_{x \in X} E_*(\{x\}) & \xrightarrow[\cong]{\bigoplus_{x \in X} (\tau_*)_{\{x\}}} & \bigoplus_{x \in X} F_*(\{x\}) \end{array}$$

Das Diagramm kommutiert, da τ_* eine natürliche Transformation ist.

Schritt 2: Angenommen $(\tau_*)_X$ ist ein Isomorphismus für jeden endlichen CW-Komplex von Dimension echt kleiner als n . Sei X ein n -dimensionaler endlicher CW-Komplex:

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{i \in I} S^{n-1} & \xrightarrow{\coprod q_i^{(n)}} & X^{(n-1)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{i \in I} D^n & \xrightarrow{\coprod Q_i^{(n)}} & X \end{array}$$

Sei $X_+^{(n-1)} := X^{(n-1)} \cup \coprod_{i \in I} Q_i^{(n)}(D^n \setminus \{0\})$ und $Z := \coprod_{i \in I} Q_i^{(n)}(\mathring{D}^n)$. Dann sind $X_+^{(n-1)}$, Z und $Z \cap X_+^{(n-1)}$ homotopieäquivalent zu endlichen CW-Komplexen mit Dimension echt kleiner n . Insbesondere sind $(\tau_*)_{X_+^{(n-1)}}$, $(\tau_*)_Z$ und $(\tau_*)_{X_+^{(n-1)} \cap Z}$ Isomorphismen. Da $X_+^{(n-1)} \subseteq X$ und $Z \subseteq X$ offen sind, erhalten wir in E_* und F_* zugehörigen Mayer-Vietoris-Folgen:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & E_*(X_+^{(n-1)} \cap Z) & \longrightarrow & E_*(X_+^{(n-1)}) \oplus E_*(Z) & \longrightarrow & E_*(X) \xrightarrow{\partial_*^{MV,E}} E_{*-1}(X_+^{(n-1)} \cap Z) \longrightarrow \cdots \\ & & \cong \downarrow (\tau_*)_{X_+^{(n-1)} \cap Z} & & \cong \downarrow (\tau_*)_{X_+^{(n-1)} \oplus (\tau_*)_Z} & & \downarrow (\tau_*)_X \\ \cdots & \longrightarrow & F_*(X_+^{(n-1)} \cap Z) & \longrightarrow & F_*(X_+^{(n-1)}) \oplus F_*(Z) & \longrightarrow & F_*(X) \xrightarrow{\partial_*^{MV,F}} F_{*-1}(X_+^{(n-1)} \cap Z) \longrightarrow \cdots \\ & & \cong \downarrow (\tau_*)_{X_+^{(n-1)} \cap Z} & & \cong \downarrow (\tau_*)_{X_+^{(n-1)} \oplus (\tau_*)_Z} & & \downarrow (\tau_*)_X \end{array}$$

Da τ_* eine natürliche Transformation ist, kommutierten die beiden linken Vierecke. Da τ_* mit der Randabbildung der Paarfolgen von E_* und F_* kommutiert, kommutiert auch τ_* mit den Randabbildungen der Mayer-Vietoris-Folgen in E_* und F_* . Also kommutiert auch das dritte Viereck. Mit dem 5er-Lemma (8.15) folgt, dass $(\tau_*)_X$ auch ein Isomorphismus ist.

Erfüllen E_* und F_* auch das Dimensionsaxiom, so zeigen die Argumente aus Schritt 1 und 2, dass $(\tau_*)_X$ ein Isomorphismus ist für jeden endlich dimensional CW-Komplex.

Schritt 3: Sei X ein CW-Komplex. Sei

$$X^+ := \{(x, t) \mid x \in X^{(n)}, t \in \mathbb{R}^+\}$$

Aus Vorlesungsnotizen übernehmen

15 Zusammenhang zwischen $\pi_1(X, x_0)$ und $H_1(X, \mathbb{Z})$

Zur Vorbereitung müssen wir kurz wiederholen, was eine Abelsonierung ist:

RevChap15

15.1 Definition

Sei G eine Gruppe. Dann heißt die Untergruppe von G , die erzeugt wird von Elementen der Form $[g, h] := ghg^{-1}h^{-1}$, **Kommutatorgruppe** von G . Wir schreiben hierfür auch $[G, G] \subset G$.

15.2 Lemma

$[G, G] \subset G$ ist ein Normalteiler von G .

Beweis

Seien $g_0, \dots, g_n, h \in G$. Dann ist

$$h[g_0, g_1] \cdot \dots \cdot [g_{n-1}, g_n] \cdot h^{-1} = [hg_0h^{-1}, hg_1h^{-1}] \cdot \dots \cdot [hg_{n-1}h^{-1}, hg_nh^{-1}] \quad \square$$

15.3 Definition

Der Quotient $G^{\text{ab}} := G/[G, G]$ heißt **Abelsonierung** (manchmal auch Abelianisierung) von G .

15.4 Bemerkung

- $\text{GRUPPEN} \xrightarrow{\text{ab}} \text{ABEL.GRUPPEN}, \quad G \mapsto G^{\text{ab}}$ definiert einen Funktor.
- Dieser Funktor hat die folgende universelle Eigenschaft: Zu jeder abelschen Gruppe A und einem Homomorphismus $\varphi: G \rightarrow A$ existiert ein eindeutiger Gruppenhomomorphismus $\varphi^{\text{ab}}: G^{\text{ab}} \rightarrow A$ sodass folgendes Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi} & A \\ \downarrow & \nearrow \varphi^{\text{ab}} & \\ G^{\text{ab}} & & \end{array}$$

15.5 Schleifen und 1-Zykel

Sei X ein topologischer Raum. Da $|\Delta^1| \cong [0, 1]$, liefert jeder Pfad $\omega: [0, 1] \rightarrow X$ einen 1-Simplex in $C_1(X; \mathbb{Z})$.

15.6 Lemma 1

Seien $\omega, \omega': [0, 1] \rightarrow X$ Pfade in X mit $\omega(1) = \omega'(0)$, dann ist $\omega * \omega' - \omega - \omega' \in C_1(X; \mathbb{Z})$ der Rand eines 2-Simplex.

Beweis

Zur Erinnerung: $|\Delta^2| = \{(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 \mid \sum_{i=0}^2 x_i = 1, x_j \geq 0 \forall j \in \{0, 1, 2\}\}$. Betrachte: $\sigma: |\Delta^2| \rightarrow X$ definiert durch

$$(x_0, x_1, x_2) \mapsto (\omega * \omega')\left(\frac{1}{2}(1 - x_0 - x_2)\right) = \omega * \omega'\left(\frac{1}{2}(2x_0 + x_1)\right)$$

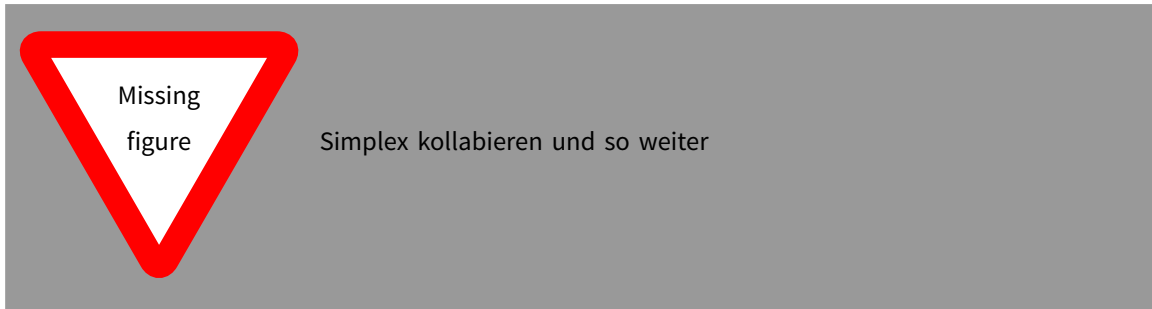
Es gilt

$$(\delta_0 \sigma)(s) = \sigma(0, s, 1-s) = \omega * \omega' \left(\frac{1}{2}s \right) = \omega(s)$$

$$(\delta_1 \sigma)(s) = \sigma(s, 0, 1-s) = \omega * \omega * (s)$$

$$(\delta_2 \sigma)(s) = \sigma(s, 1-s, 0) = (\omega * \omega') \left(\frac{1}{2}(1+s) \right) = \omega'(s)$$

Dann folgt $\partial \sigma = \delta_0 \sigma - \delta_1 \sigma + \delta_2 \sigma = \omega - \omega * \omega' + \omega'$. Bild: □



15.7 Lemma 2

a) Sei $\omega: [0, 1] \rightarrow X$ ein Pfad, sei $\omega^{-1}(s) = \omega(1-s)$. Dann ist $\omega + \omega^{-1}$ Rand einer 2-Kette, also von einem Element von $C_2(X; \mathbb{Z})$

b) Der konstante Pfad ist Rand einer 2-Kette.

Beweis

a) Sei $\sigma: |\Delta^2| \rightarrow X$ gegeben durch $\sigma(x_0, x_1, x_2) = \omega(x_1)$. Dann ist

$$\partial \sigma = \omega - \underbrace{\text{const}_{\omega(0)}}_{=\partial \tau} + \omega^{-1}$$

Also ist nach b) $\omega + \omega^{-1} = \partial(\sigma - \tau)$.

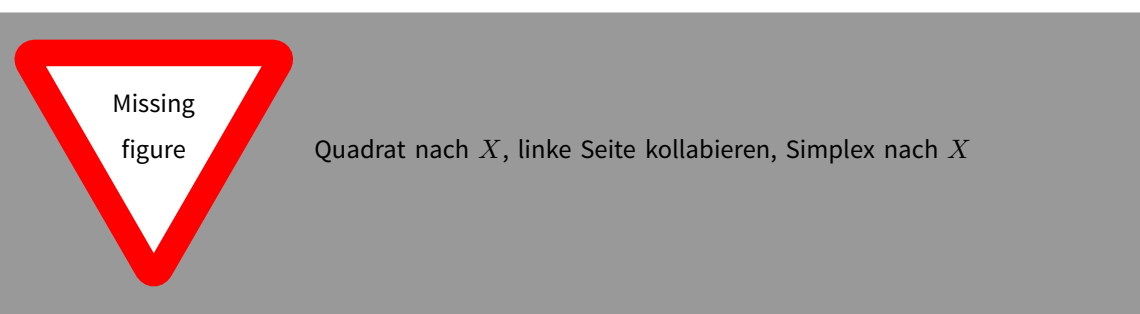
b) Der Rand des konstanten 2-Simplex ist der konstante Pfad. □

15.8 Lemma 3

Sind $\omega, \omega': [0, 1] \rightarrow X$ Pfade in X mit $\omega(0) = \omega'(0)$ und $\omega(1) = \omega'(1)$, dann gilt: Ist ω homotop zu ω' relativ Endpunkte, dann ist $\omega - \omega'$ Rand einer 2-Kette.

Beweis

Sei $H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ eine Homotopie zwischen ω und ω' mit $H(0, s) = \omega(s)$, $H(1, s) = \omega'(s)$, $H(t, 0) = \text{const}_{\omega(0)}$ und $H(t, 1) = \text{const}_{\omega(1)}$.



Wähle Homöomorphismus durch

$$\kappa: [0,1] \times [0,1] / [0,1] \times \{0\} \rightarrow |\Delta^2|, \quad [t, s] \mapsto (st, s(1-t), (1-s))$$

Betrachte $\sigma := H \circ \kappa^{-1}: |\Delta^2| \rightarrow X$. Die Ränder sind $\delta_0\sigma = \omega$ und $\delta_1\sigma = \omega'$ und $\delta_2\sigma = \text{const}_{\omega(1)}$. Also folgt, dass $\omega - \omega'$ der Rand einer 2-Kette ist.

15.9 Die Hurewicz-Abbildung

Falls $\omega: [0, 1] \rightarrow X$ eine Schleife ist, dann ist $\partial\omega = \omega(1) - \omega(0) = 0$. Also repräsentiert ω ein Element $[\omega] \in H_1(X)$. Nach Lemma 3 erhalten wir eine Abbildung $\theta: \pi_1(X, x_0) \rightarrow H_1(X)$. Nach Lemma 1 bildet diese Abbildung die Verknüpfung von Schleifen auf Summen von 1-Ketten ab.

$$[\omega * \omega'] = [\omega] + [\omega'] \quad , \quad [\omega^{-1}] = -[\omega]$$

Zusammen mit Lemma 2 erhalten wir einen Gruppenhomomorphismus. Aus der universellen Eigenschaft der Abelsierung erhalten wir

$$\theta^{\text{ab}}: \pi_1(X, x_0)^{\text{ab}} \longrightarrow H_1(X; \mathbb{Z})$$

15.10 Theorem (Hurewicz)

Für wegzusammenhängende Räume ist θ^{ab} ein Isomorphismus.

Beweis

Sei X wegzusammenhängend. Wähle für jedes $x \in X$ einen Pfad λ_x von x_0 nach x . Wähle $\lambda_{x_0} = \text{const}_{x_0}$. Betrachte

$$\bar{\rho}: C_1(X; \mathbb{Z}) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)^{\text{ab}} \quad , \quad \omega \mapsto [\lambda_{\omega(0)} * \omega * \lambda_{\omega(1)}^{-1}]$$

Somit (nach Lemma 4) induziert $\bar{\rho}$ einen Homomorphismus: $\rho: H_1(X; \mathbb{Z}) \rightarrow \pi_1(X, x_0)^{\text{ab}}$. Es gilt:

$$(\rho \circ \theta)[\omega] = [\lambda_{\omega(0)} * \omega * \lambda_{\omega(0)}^{-1}] = [\omega]$$

Wir haben $\lambda: C_0(X; \mathbb{Z}) \rightarrow C_1(X; \mathbb{Z})$, $\sum_i n_i x_i \mapsto \sum_i n_i \lambda_{x_i}$. Mit Lemma 5 folgt, dass θ^{ab} ein Isomorphismus ist für wegzusammenhängende Räume X . \square

15.11 Lemma 4

$\bar{\rho}$ bildet die Ränder von 2-Simplizes auf 1 $\in \pi_1(X, x_0)^{\text{ab}}$ ab.

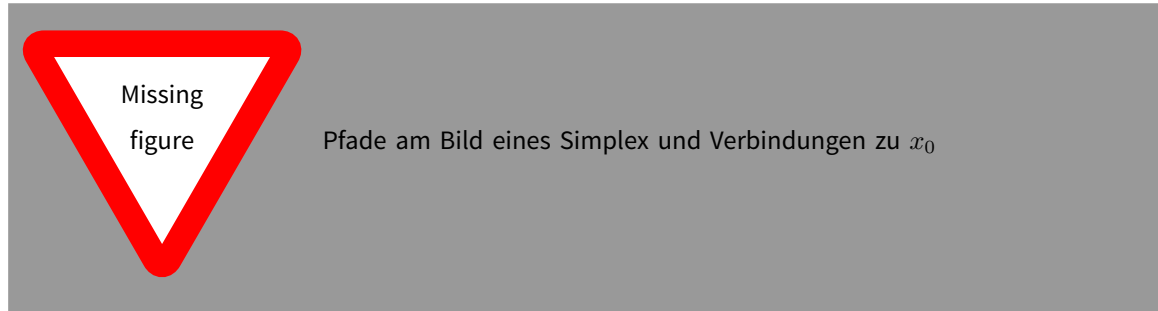
Beweis

Sei $\sigma \in C_2(X; \mathbb{Z})$ ein 2-Simplex. Es gilt

$$\begin{aligned}\bar{\rho}(\partial\sigma) &= \bar{\rho}(\partial_0\sigma - \partial_1\sigma + \partial_2\sigma) = \bar{\rho}(\omega_0) \cdot \bar{\rho}(\omega_1)^{-1} \cdot \bar{\rho}(\omega_2) \\ &= \left[\lambda_{\omega_0(0)} * \omega_0 * \lambda_{\omega_0(1)}^{-1} * \underbrace{(\lambda_{\omega_1(0)} * \omega_1 * \lambda_{\omega_1(1)})^{-1}}_{=\lambda_{\omega_0(1)} * \omega_1^{-1} * \lambda_{\omega_1(0)}^{-1}} * \lambda_{\omega_2(0)} * \omega_2 * \lambda_{\omega_2(1)} \right] \\ &= \left[\lambda_{\omega_0(0)} * \underbrace{\omega_0 * \omega_1^{-1} * \omega_2}_{=:\gamma} * \lambda_{\omega_2(1)=\omega_0(0)}^{-1} \right]\end{aligned}$$

Der Pfad γ ist die Schleife, die einmal auf dem Rand des 2-Simplex herumläuft. Also $\gamma: [0, 1] \rightarrow |\partial\Delta^2| \hookrightarrow |\delta^2| \rightarrow X$. Aber $|\partial\Delta^2| \hookrightarrow |\Delta^2|$ ist homotop zur konstanten Abbildung auf $\omega_0(0)$ mit einer Homotopie, die den Punkt $\omega_0(0)$ fixiert.

$$= \left[\lambda_{\omega_0(0)} * \lambda_{\omega_0(0)}^{-1} \right] = 1$$



15.12 Lemma 5

Sei $\omega: \Delta^1 \rightarrow X$ ein 1-Simplex, dann gilt $\theta \circ \bar{\rho}(\omega) = \llbracket \omega - \lambda_{\partial\omega} \rrbracket$

Beweis

Es gilt

$$(\theta \circ \bar{\rho})(\omega) = \theta\left(\left[\lambda_{\omega(0)} * \omega * \lambda_{\omega(1)}^{-1}\right]\right) = \llbracket \lambda_{\omega(0)} * \omega * \lambda_{\omega(1)}^{-1} \rrbracket = \llbracket \omega \rrbracket - \underbrace{\llbracket \lambda_{\omega(1)} \rrbracket + \llbracket \lambda_{\omega(0)} \rrbracket}_{\lambda_{\omega(1)} - \omega(0) = \lambda_{\partial\omega}}$$

15.13 Corollar

$$(\theta \circ \rho)(\llbracket c \rrbracket) = \llbracket c \rrbracket. \llbracket c \rrbracket \in H_1(X; \mathbb{Z})$$

Der Satz von Hurewicz

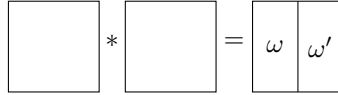
15.14 Definition

Sei X ein topologischer Raum mit Basispunkt $x_0 \in X$, sei $I = [0, 1]$. Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Die **n-te absolute Homotopiegruppe** $\pi_n(X, x_0)$ ist die Menge der Äquivalenzklassen von stetigen Abbildungen $\omega: I^n \rightarrow$

X mit $\omega(\partial I^n) = x_0$. Die Äquivalenzrelation ist Homotopie relativ zu ∂I^n , d.h. $H: I^n \times [0, 1] \rightarrow X$ erfüllt $H_t(\partial I^n) = x_0$ für alle $t \in [0, 1]$. Die Gruppenverknüpfung in $\pi_n(X, x_0)$ ist gegeben durch

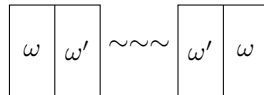
$$(\omega * \omega')(s_1, \dots, s_n) = \begin{cases} \omega(2s_1, s_2, \dots, s_n), & \text{falls } 0 \leq s_1 \leq \frac{1}{2} \\ \omega'(2s_1 - 1, s_2, \dots, s_n), & \text{falls } \frac{1}{2} \leq s_1 \leq 1 \end{cases}$$

Bild für $n = 2$:



15.15 Eigenschaften von $\pi_n(X, x_0)$

- „ $*$ “ ist assoziativ, hat die konstante Abbildung auf x_0 als neutrales Element und $\omega^{-1}(s_1, \dots, s_n) = \omega(1 - s_1, s_2, \dots, s_n)$ als inverses Element.
- „ $*$ “ ist abelsch für $n \geq 2$ (Eckmann-Hilton Argument)

 Zeichnung
fertig machen


- $\pi_n: \text{TOP} \rightarrow \text{ABEL.GRUPPEN}$ ist ein Funktor, d.h. $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ induziert $\pi_n(f): \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$.
- Da $I^n/\partial I^n \cong S^n$, ergibt sich $\pi_n(X, x_0)$ auch aus den punktierten Homotopieklassen von Abbildungen $(S^n, *) \rightarrow (X, x_0)$.
- Falls x_0 und x'_0 in der gleichen Wegzusammenhangskomponente von X liegen, dann induziert ein Weg von x_0 nach x'_0 einen Isomorphismus $\pi_n(X, x_0) \cong \pi_n(X, x'_0)$

15.16 Definition

Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Ein topologischer Raum X heißt **n -zusammenhängend**, falls $\pi_0(X) = \{*\}$ und $\pi_k(X, x_0)$ trivial ist für alle $k \leq n$ und einen Basispunkt $x_0 \in X$.

15.17 Bemerkung

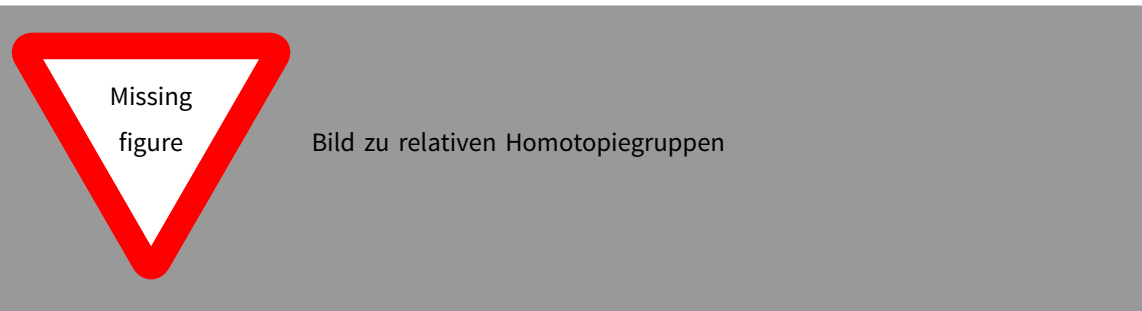
Da ein n -zusammenhängender Raum X für $n \geq 0$ mindestens wegzusammenhängend ist, gilt $\pi_k(X, x_0) \cong \pi_k(X, x'_0)$. Somit ist die Definition unabhängig von der Wahl des Basispunktes.

15.18 Beispiel

0-zusammenhängend entspricht wegzusammenhängend und 1-zusammenhängend entspricht wegsam-
menhängend und einfach zusammenhängend.

15.19 Definition: Relative Homotopiegruppen

Sei X ein topologischer Raum, $A \subset X$ ein Unterraum und $x_0 \in A$ ein Basispunkt von A und X . Wir identifizieren $I^{n-1} \subset I^n$ mit der Seitenfläche von I^n , für die $s_n = 0$ gilt. Außerdem setzen wir $J^{n-1} = \partial I^n \setminus I^{n-1}$. Die **relative Homotopiegruppe** $\pi_n(X, A, x_0)$ besteht aus den Homotopieklassen von stetigen Abbildungen $\omega: I^n \rightarrow X$ mit $\omega(I^{n-1}) \subset A$, $\omega(J^{n-1}) = x_0$. Die Homotopien müssen ebenfalls $H_t(I^{n-1}) \subset A$ und $H_t(J^{n-1}) = x_0$ für alle $t \in [0, 1]$ erfüllen.



Alternativ: $\pi_n(X, A, x_0)$ sind Homotopieklassen von Abbildungen $(D^n, S^{n-1}, *) \rightarrow (X, A, x_0)$

15.20 Bemerkung

- Homotopiegruppen bilden *keine* verallgemeinerte Homologietheorie.
- Es gibt eine lange exakte Sequenz von Homotopiegruppen:

$$\cdots \longrightarrow \pi_n(A, x_0) \longrightarrow \pi_n(X, x_0) \longrightarrow \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, x_0) \longrightarrow \cdots$$

15.21 Die Hurewicz-Abbildung

Sei $\vartheta: |\Delta^n| \xrightarrow{\cong} D^n$ ein Homöomorphismus. Dies liefert eine Homologieklass $[\vartheta] \in H_n(D^n, S^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$. Diese Klasse ist ein Generator der Gruppe $H_n(D^n, S^{n-1})$. Sei $[\omega] \in \pi_n(X, A, x_0)$ repräsentiert durch $\omega: (D^n, S^{n-1}, *) \rightarrow (X, A, x_0)$. Setze

$$\theta_n: \pi_n(X, A, x_0) \longrightarrow H_n(X, A) \quad , \quad [\omega] \longmapsto \omega_*[\vartheta]$$

für $n \geq 2$. Dies ist wohldefiniert, denn falls ω homotop zu ω' (bezüglich (A, x_0)), dann ist $\omega_* = \omega'_*$

15.22 Lemma

θ_n ist ein Gruppenhomomorphismus.

15.23 Theorem (Hurwicz)

Seien (X, A) mit $A \subset X$ beide wegzusammenhängend. Sei $\pi_1(A, x_0) = 1$ und seien $\pi_k(X, A, x_0) = 0$ für $k \leq n-1$, $n \geq 2$. Dann ist

$$\theta_n: \pi_n(X, A, x_0) \longrightarrow H_n(X, A)$$

ein Isomorphismus.

15.24 Korollar

Ist X ein $(n-1)$ -zusammenhängender Raum für ein $n \geq 2$, dann ist

$$\theta_n: \pi_n(X, x_0) = (X, x_0, x_0) \longrightarrow H_n(X, x_0) \cong H_n(X)$$

ein Isomorphismus.

15.25 Satz

Sei $n \geq 1$. Dann ist $\pi_n(S^n, *) \cong \mathbb{Z}$ und $\pi_k(S^n, *) = 0$ für $k < n$.

Beweis

Für $n = 1$ gilt $\pi_0(S^n, *) = \{*\}$ und $\pi_1(S^1, *) \cong \mathbb{Z}$. Für $n > 1$ wissen wir aus dem letzten Semester $\pi_1(S^n, *) = 1$ und S^n wegzusammenhängend, also ist S^n 1-zusammenhängend.

Angenommen $\pi_i(S^n, *) = 0$ für $i = 0, \dots, k$, $0 \leq k < n$. Dann ist S^n k -zusammenhängend und wir erhalten

$$\pi_{k+1}(S^n, *) \xrightarrow{\cong} H_{k+1}(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{falls } k+1 = n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Falls $k+1 < n$, so ist auch $\pi_{k+1}(S^n, *) = 0$, sonst sind wir fertig. □

16 Die Fundamentalklasse

16.1 Beispiel

Wir betrachten zu einigen uns gut bekannten Mannigfaltigkeiten die Homologiegruppen in der Dimension der Mannigfaltigkeit:

- $H_n(\mathbb{R}^n) = 0$
- $H_n(S^n) = \mathbb{Z}$
- $H_2(T^2) = \mathbb{Z}$
- $H_{2n}(\mathbb{C}P^n) = \mathbb{Z}$
- $H_{2n}(S^n \times \mathbb{R}^n) = 0$
- $H_n(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}$, falls n ungerade, 0 sonst.

RevChap16

16.2 Bemerkung

Sei M ein n -Mannigfaltigkeit und $x \in M$. Dann gilt (wegen Ausschneidung und der Paarfolge)

$$H_n(M, M \setminus \{x\}; R) \cong H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}; R) \cong H_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}; R) \cong H_{n-1}(S^{n-1}; R) \cong R$$

16.3 Definition

Sei M eine n -Mannigfaltigkeit und $x \in M$. Eine (homologische) **Orientierung** (über R) im Punkt x ist ein Erzeuger μ_x von $H_n(M, M \setminus \{x\}, R)$.

Bemerkung

Über $R = \mathbb{Z}$ gibt es in jedem Punkt genau zwei Orientierungen, da \mathbb{Z} genau zwei Erzeuger hat. Über $R = \mathbb{F}_2$ gibt es in jedem Punkt eine eindeutige Orientierung, da \mathbb{F}_2 genau einen Erzeuger hat.

16.4 Notation

Seien $A \subseteq B \subseteq X$ Unterräume. Sei $i: (X, X \setminus B) \hookrightarrow (X, X \setminus A)$ die Inklusion. Ist $v \in H_n(X, X \setminus B; R)$, so nennen wir

$$v|_A := i_*(v)$$

die Einschränkung von v auf A . Für $A = \{x\}$ schreiben wir $v|_x := v|_{\{x\}}$.

16.5 Definition

Sei M eine n -Mannigfaltigkeit. Eine (homologische) **Orientierung** von M über R ist eine Zuordnung $M \ni x \mapsto \mu_x \in H_n(M, M \setminus \{x\}; R)$, die für jeden Punkt $x \in M$ eine Orientierung über R im Punkt x auswählt, sodass folgende Bedingung erfüllt ist: Für alle $x \in M$ gibt es eine Umgebung U von $x \in M$ und $\mu_U \in H_n(M, M \setminus U; R)$ mit $\mu_y = \mu_U|_y$ für alle $y \in U$.

Gibt es eine solche Orientierung, so heißt M **orientierbar**. Eine Mannigfaltigkeit zusammen mit einer Orientierung heißt eine **orientierte Mannigfaltigkeit**.

16.6 Beispiel

Für $M = \mathbb{R}^n$ betrachte $U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$. Dann ist wegen Homotopieinvarianz

$$H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}; R) \cong H_n(\overline{U}, \overline{U} \setminus U; R) \cong H_n(D^n, S^{n-1}; R) = R$$

mit $\overline{U} = D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ und $\overline{U} \setminus U = S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$. Für jedes $y \in U$ ist $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus U) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{y\})$ eine Homotopieinvarianz. Ist $\mu_U \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}; R)$ ein Erzeuger, so ist also $\mu_y = \mu_U|_y$ eine Orientierung von \mathbb{R}^n in y für alle $y \in U$.

16.7 Beispiel

Sei $\mu_{S^n} \in \tilde{H}_n(S^n; R)$ ein Erzeuger. Für $x \in S^n$ ist $\tilde{H}_*(S^n \setminus \{x\}; R) = 0$ und daher die Einschränkungsabbildung $\tilde{H}_n(S^n; R) \rightarrow \tilde{H}_*(S^n \setminus \{x\}; R) = 0$ ein Isomorphismus und $\mu_{S^n}|_x$ ist ein Erzeuger von $\tilde{H}_n(S^n, S^n \setminus \{x\}; R)$. Daher ist $(\mu_{S^n}|_x)_{x \in S^n}$ eine Orientierung von M über R .

16.8 Bezeichnung

Eine **geschlossene Mannigfaltigkeit** ist eine kompakte Mannigfaltigkeit (ohne Rand).

16.9 Satz

Sei M eine geschlossene n -Mannigfaltigkeit. Dann ist M genau dann R -orientierbar, wenn es $\mu \in H_n(M; R)$ gibt, sodass $\mu|_x \in H_n(M, M \setminus \{x\}; R)$ für jedes x eine Orientierung von M in x ist. Ist M zusammenhängend, so ist μ ein Erzeuger von $H_n(M; R)$ und $H_n(M; R) \cong R$.

Beweis (mit 16.14)

$H_n(M; R)$ und $\Gamma(M, \mathcal{H})$ sind beide mit \coprod verträglich. Daher können wir auch annehmen, dass M zusammenhängend ist. Da M kompakt ist, können wir in dem Lemma 16.14 $A = M$ setzen und wir erhalten für jede Orientierung $s \in \Gamma(M, \mathcal{H})$ eine Klasse $\mu \in H_n(M; R)$ mit $\mu|_x$. Nach der Überlagerungstheorie aus dem letzten Semester ist jeder Schnitt von \mathcal{H} schon durch seinen Wert an einem Punkt festgelegt. Insbesondere ist $\text{ev}_x: \Gamma(M, \mathcal{H}) \rightarrow H_n(M, M \setminus \{x\}; R) \cong R$ injektiv. Ist M R -orientierbar, so ist ev_x ein Isomorphismus. \square

16.10 Definition

Sei M eine geschlossene n -Mannigfaltigkeit. Sei $\mathcal{H} = \mathcal{H}_R$ die disjunkte Vereinigung aller $H_n(M, M \setminus \{x\}; R)$ mit $x \in M$. Wir definieren eine Topologie auf \mathcal{H} durch:

$$V \subseteq \mathcal{H} \text{ offen} \iff \forall v \in V \text{ mit } v \in H_n(M, M \setminus \{x\}; R) \text{ gibt es eine Umgebung } U \text{ von } x \text{ in } M \\ \text{und } v_U \in H_n(M, M \setminus U, R) \text{ mit } v_U|_x = v \text{ und } v_U|_y \in V \text{ für alle } y \in U.$$

Wir definieren $\pi: \mathcal{H} \rightarrow M$ durch $\pi(v) = x$ für $v \in H_n(M, M \setminus \{x\}; R)$. Es gilt $\pi^{-1}(\{x\}) = H_n(M, M \setminus \{x\}; R)$. Mit $\Gamma(M, \mathcal{H})$ bezeichnen wir die Menge aller stetigen Schnitte $s: M \rightarrow \mathcal{H}$ für π , das heißt

$$\Gamma(M, \mathcal{H}) = \{s: M \rightarrow \mathcal{H} \text{ stetig} \mid \pi \circ s = \text{id}_M\}$$

16.11 Bemerkung

- 1) Für jedes $x \in M$ erbt $H_n(M, M \setminus \{x\}; R) \subseteq \mathcal{H}$ die diskrete Topologie.
- 2) $\pi: \mathcal{H} \rightarrow M$ ist eine Überlagerung.
- 3) $\Gamma(M, \mathcal{H})$ ist ein R -Modul. Sind $s, s' \in \Gamma(M, \mathcal{H})$ und $r \in R$, so können wir $s + s'$ und $r \cdot s$ punktweise erklären:

$$(s + s')(x) := s(x) + s'(x) \in H_n(M, M \setminus \{x\}; R) \\ (r \cdot s)(x) := r \cdot s(x) \in H_n(M, M \setminus \{x\}; R)$$

- 4) R -Orientierungen von M entsprechen genau den Schnitten $s \in \Gamma(M, \mathcal{H})$ für die $s(x) \in H_n(M, M \setminus \{x\}; R)$ für alle $x \in M$ ein Erzeuger ist.

- 5) Eine Folgerung aus der Eindeutigkeit im Hebungssatz aus der Überlagerungstheorie ist folgende Aussage:
Sei M zusammenhängend. Dann ist für jedes $x \in M$ die Auswertungsabbildung $\text{ev}_x: \Gamma(M, \mathcal{H}) \rightarrow H_n(M, M \setminus \{x\}; R)$, $\text{ev}_x(s) = s(x)$ injektiv.
- 6) Sei $v \in H_n(M; R)$. Dann erhalten wir durch $(s_v)(x) := v|_x$ einen Schnitt $s_v \in \Gamma(M, \mathcal{H})$. Wir erhalten einen R -Modul-Homomorphismus $H_n(M; R) \rightarrow \Gamma(M, \mathcal{H})$, $v \mapsto s_v$.
- 7) Es gibt immer den Nullschnitt in $\Gamma(M, \mathcal{H})$, $x \mapsto 0 \in H_n(M, M \setminus \{x\}; R)$.
- 8) Ist M zusammenhängend, so ist $\Gamma(M, \mathcal{H}) \neq 0$ genau dann, wenn M R -orientierbar ist.

16.12 Bemerkung

Für M zusammenhängend gilt: M ist R -orientierbar $\iff H_n(M; R) \cong R$.

16.13 Beispiel

Für $R = \mathbb{F}_2$ ist $\pi: \mathcal{H} \rightarrow M$ eine 2-fache Überlagerung. Da \mathcal{H} immer den Nullschnitt zulässt, ist \mathcal{H} dann trivial. Insbesondere ist jede n -Mannigfaltigkeit \mathbb{F}_2 -orientierbar.

16.14 Lemma

Sei M eine n -Mannigfaltigkeit und $A \subseteq M$ kompakt. Dann gilt

- a) Zu jedem $s \in \Gamma(M, \mathcal{H})$ gibt es ein eindeutiges $v_A \in H_n(M, M \setminus A; R)$ mit $v_A|_x = s(x)$ für alle $x \in A$.
- b) Für $i > n$ ist $H_i(M, M \setminus A; R) = 0$.

Beweisskizze

Schritt 1: Mit der MV-Folge (siehe 16.15) folgt: Sind die Aussagen a) und b) für A_1, A_2 und $A_1 \cap A_2$ richtig, so auch für $A_1 \cup A_2$.

Schritt 2: Das Lemma ist richtig, wenn A eine abgeschlossene konvexe Teilmenge von \mathbb{R}^n ist. Dazu benutze wir den Isomorphismus $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus A; R) \xrightarrow{\cong} H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\}; R)$ (für jedes $x \in A$). Mit Schritt 1 folgt die Aussage für $M = \mathbb{R}^n$ und A endliche Vereinigung von abgeschlossen konvexen Teilmengen.

Schritt 3: Das Lemma gilt für $M = \mathbb{R}^n$ und A beliebig.

Für den allgemeinen Fall schreibt man $A = A_1 \cup \dots \cup A_n$, sodass jedes A_i in einer Kartenumgebung von M enthalten ist. Mit Schritt 1 und 3 folgt dann die Aussage für A . \square

16.15 Bemerkung

- 1) Zu Unterräumen $A \subseteq X$ gibt es eine kurze exakte Folge von Kettenkomplexen $C_*(B, A; R) \hookrightarrow C_*(X, A; R) \rightarrow C_*(X, B; R)$. Damit erhalten wir eine lange exakte Sequenz:

$$\cdots \rightarrow H_{n+1}(X, B; R) \xrightarrow{\partial} H_n(B, A; R) \rightarrow H_n(X, A; R) \rightarrow H_n(X, B; R) \rightarrow \cdots$$

- 2) Zu abgeschlossenen Unterräumen $A, B \subseteq X$ ist $A \setminus B \subseteq X \setminus A \cap B$ abgeschlossen und $X \setminus B \subseteq X \setminus A \cap B$ offen. Da $A \setminus B \subseteq X \setminus B$ und

$$\begin{aligned}(X \setminus A \cap B) \setminus (A \setminus B) &= X \setminus A \\ (X \setminus B) \setminus (A \setminus B) &= X \setminus (A \cup B)\end{aligned}$$

erhalten wir einen Ausschneideisomorphismus $H_*(X \setminus A, X \setminus (A \cup B)) \cong H_*(X \setminus A \cap B, X \setminus B; R)$. Zusammen mit der Paarfolge aus 1) erhalten wir eine Mayer-Vietoris-Folge:

$$\cdots \longrightarrow H_{n+1}(X, X \setminus A \cap B) \xrightarrow{\partial} H_n(X, X \setminus A \cup B) \longrightarrow \bigoplus_{H_n(X, X \setminus B)}^{H_n(X, X \setminus A)} \longrightarrow H_n(X, X \setminus A \cap B) \longrightarrow \text{".R." aus Platzgründen weggelassen}$$

Index

Die **Seitenzahlen** sind mit [Hyperlinks](#) zu den entsprechenden Seiten versehen, also anklickbar 

Abbildungsgrad, 37
 Abelsierung, 61
 abgeschlossene Zelle, 43
 affin, 55
 anklebende Abbildung, 43
 assoziativ, 1
 Augmentierung, 17
 Ausschneidung, 58

 charakteristische Abbildung, 43
 CW-Komplex, 42
 endlicher, 43

 Dimensionsaxiom, 58
 disjunkte Vereinigung
 Axiom, 58
 Durchmesser, 56

 Ecken, 4
 Euler-Charakteristik, 6
 eines CW-Komplex, 49
 von \mathbb{Z} -Kettenkomplexen, 14

 freier Modul, 7
 Funktor, 2
 dargestellter, 2

 geometrische Realisierung, 5
 geschlossene Mannigfaltigkeit, 69
 graduierten, 18
 Graphen, 4

 homogene Koordinaten, 44
 Homologiekategorie, 16
 Homologietheorie, 58
 homologische Orientierung
 im Punkt, 68
 überall, 68
 Homotopiegruppe, 64
 Homotopieinverse, 21
 Homotopieäquivalenz, 21

 Jordanscher Kurvensatz, 40

 Kategorie, 1
 klein, 2
 Kettenhomotopie, 22

Kettenhomotopie, 22
 Kettenmoduln, 10
 Kommutatorgruppe, 61
 Komposition, 1
 kontrahierbar, 21
 Koprodukt
 topologischer Räume, 19
 von R -Moduln, 20
 kurze exakte Folge von Kettenkomplexen, 28
 kurze exakte Sequenz, 11

 lange exakte Folge, 27

 Morphismen, 1
 Morphismus von Homologietheorien, 59

 n -Ketten, 16
 n -Ränder, 16
 n -Simplex, 4
 n -te Bettizahl, 49
 n -te Homologie, 10
 n -te Randabbildung
 simplicial, 8
 singulär, 15
 zellulär, 46
 n -ter Homologiemodul
 simplicial, 9
 singulär, von Paaren, 26
 n -ter Kettenmodul
 simplicial, 8
 singulär, 15
 n -ter zelluläre Kettenmodul, 46
 n -zusammenhängend, 65
 n -Zykel, 16
 natürliche Transformation, 2, 33
 natürlicher Isomorphismus, 48

 Objekte, 1
 offene Zelle, 43
 orientierbar, 68
 orientierte Mannigfaltigkeit, 68

 Paar von topologischen Räumen, 26
 Paarfolge, 58
 Polyeder, 6
 projektiver Modul, 7, 12
 Pushout, 42

 R -Kettenabbildung, 18
 R -Kettenkomplex, 10

Rand des n -Simplizes, 5
Randabbildungen, 10
Rang einer abelschen Gruppe, 11
reduzierte singuläre Homologie, 35
reell projektiver Raum, 44
relative Homotopiegruppe, 65

Schwache Topologie, 43
Schwerpunkt, 54
Seite, 4
Simplizes, 4
simpliciale Abbildung, 5
simplicialer Kettenkomplex, 10
simplicialer Komplex, 4
singuläre Homologie von X , 16
singuläre Simplizes, 15
singulärer Kettenkomplex, 16
 von Paaren, 26
Skalarprodukt, 39
Spaltung, 12
Spektralfolge, 59
Summe
 topologischer Räume, 19
 von R -Moduln, 20

Torsionsgruppe, 11

\mathcal{U} -klein, 53
unital, 1
Unterkomplex, 4

Vektorfeld, 39
Vertices, 4

Zellstruktur, 42
zellulär, 43
zelluläre Homologie, 46
zellulärer Kettenkomplex, 46

Abbildungsverzeichnis

1 $\Delta^n \times [0, 1]$ für $n = 0, 1, 2$	23
2 Zerlegung von $\Delta^2 \times [0, 1]$ in 3-Simplizes	23
3 Ein nirgends verschwindendes Vektorfeld auf S^1	39

Todo's und andere Baustellen

RevChap12	50
eventuell in Anhang?	51
Problem beheben/Details hinzufügen	51
Für die Gleichung unten brauchen wir doch $(i_-, i_- _{S^{k-1}})_*(y_-) = (-1)^{k+1} (i_+, i_+ _{S^{k-1}})_*(y_+)$??	51
RevChap13	53
Figure: Skizze der Ausschneidung mit kleinen Simplizes	53
Figure: Zerteilung Simplex mit Bild in X	54
RevChap14	58
Aus Vorlesungsnotizen übernehmen	60
RevChap15	61
Figure: Simplex kollabieren und so weiter	62
Figure: Quadrat nach X , linke Seite kollabieren, Simplex nach X	62
Figure: Pfade am Bild eines Simplex und Verbindungen zu x_0	64
Zeichnung fertig machen	65
Figure: Bild zu relativen Homotopiegruppen	65
RevChap16	68