Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

Fachbereich 10
Mathematik und
Informatik

Numerische Analysis

Mitschrift der Tafelnotizen

Tobias Wedemeier

16. April 2015
gelesen von
Prof. Dr. Ohlberger

Hierbei handelt es sich um eine Mitschrift der Tafelnotizenvon **Prof. Dr. Ohlberger**, WWU Münster, aus der Vorlesung **Numerische Analysis** im Wintersemester 2014/15. Dies ist kein Skript der Vorlesung und keine eigene Arbeit des Autors.

Für Fehler in der Mitschrift wird keine Haftung übernommen. Hinweise auf Fehler sind gerne gesehen, hierfür kann man mich in der Uni ansprechen oder alternativ eine e-Mail an: *tobias.wedemeier@gmx.de* Auch ist eine Mitarbeit über Github möglich.

Wenn Teile aus der Vorlesung selber fehlen, können diese gerne an meine e-Mail versandt werden. Ich werde diese dann einarbeiten.

Inhaltsverzeichnis

0 Einleitung

0.1 Variationsprinzip und Galerkinapproximation

Beispiel: Elastizitätstheorie in der Physik:
Gesucht: $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R},\ d = 1, 2, 3$, Gegeben: Energiefunktional $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
Aufgabe: Finde $\underset{u \in X}{\operatorname{argmin}} E(u)$
u entspricht der Auslenkung/Verschiebevektor, ∇u der Gradient (Jacobimatrix); der Symmetrische Gradient $\frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T) =: \epsilon(u)$, dann ist die elastische Gesamtenergie:

$$E(u) := \frac{1}{2} \int_\Omega \Theta : \epsilon(u) \mathrm{d}x - \int_\Omega f(x) u(x) \mathrm{d}x$$

mit symmetrischem **Spannungstensor** Θ und äußerer Kraft $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$.
Materialgesetz: Der Spannungstensor ist proportional zum **Verzerrungstensor**:

: ist das Skalarprodukt

$$\Theta(u) = A\epsilon(u)$$
$$\Theta(u)_{i,j} = A_{ijkl}\epsilon(u)_{kl}\ \forall i, j, k, l = 1, \ldots, d$$
$$\Rightarrow E(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega A\epsilon(u) : \epsilon(u) \mathrm{d}x - \int_\Omega f(x) u(x) \mathrm{d}x$$

0.2 Definition 1 (Energieminimierung/Variationsprinzip)

(a) Physikalisches Prinzip: Ein physikalisches System strebt immer in einen Zustand minimaler Energie.

(b) Mathematisches Prinzip: Sei $\bar{u}(x, t)$ eine Zustandsvariable und $E(u)$ die Energie eines Systems, das durch $\bar{u}$ repräsentiert wird. Dann strebt $\bar{u}$ gegen ein $u = u(x)$, der die Energie minimiert, d.h. falls E genügend glatt ist gilt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon} E(u + \epsilon\varphi)|_{\epsilon=0} = 0 \qquad \forall \text{zulässigen Variationen von } \varphi$$

Elastizität:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon} E(u + \epsilon\varphi)|_{\epsilon=0} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon} \left[\frac{1}{2} \int_\Omega A\epsilon(u + \epsilon\varphi) : \epsilon(u + \epsilon\varphi) \mathrm{d}x - \int_\Omega f(x) u(x) \mathrm{d}x \right]_{\epsilon=0} \\ &= \int_\Omega A\epsilon(u) : \epsilon(\varphi) \mathrm{d}x - \int_\Omega f\varphi \overset{!}{=} 0 \\ &\Rightarrow -\nabla(A\epsilon(u)) = f \text{ Dgl.}\end{aligned}$$

Diese Dgl. gliedert sich auf in

$$-\sum_{i=1}^{d} \sum_{k,l=1}^{d} \partial_{x_i} A_{ijkl}\epsilon(u)_{kl} = f_i \qquad \forall j = 1, \ldots, d$$

Im 1D ergibt sich $-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(A \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} u\right) = f$, mit $A \in \mathbb{R}$. Für $A = 1:\ -u''(x) = f$.
Im 2D ergibt sich:

$$-\nabla(A\nabla u) = f;\ A = \mathrm{id} \Rightarrow -\Delta u = f$$

0.3 Galerkinverfahren

Idee: Energieminimierung in endlich-dimensionalen Teilräumen. Sei X Funktionenraum und $E : V \to \mathbb{R}$ ein Energiefunktional. Gesucht ist $u = \underset{v \in X}{\operatorname{argmin}}\, E(v)$.

Sei $X_h \subseteq X$ endlich-dimensionaler Teilraum von X. Wir erhalten die **Galerkin-Approximation**

$$u_h \in X_h : \; u_h = \underset{v_h \in X_h}{\operatorname{argmin}}\, E(v_h)$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon} E(u_h + \epsilon v_h)|_{\epsilon=0} = 0 \; \forall v_h \in X_h$$

X_h endl.-dim. $\Rightarrow$ $\exists$ Basis $\Phi := \{\varphi_i | i = 1, \ldots, N := \dim(X_h)\}$, mit der Basisdarstellung $u_h(x) = \sum_{i=1}^N u_i \varphi_i(x)$, $u_i \in \mathbb{R}, \; i = 1, \ldots, N$.

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon} E\left(\sum_{i=1}^N u_i \varphi_i + \epsilon \varphi_j\right)\Bigg|_{\epsilon=0} = 0 \; \forall j = 1, \ldots, N$$

Dies ist ein Gleichungssystem mit N Unbekannten und N Gleichungen. Allgemein ist das System nicht linear.

0.4 Beispiel Elastizität in 1D

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 (u'(x))^2 + fu; \; A = 1$$

Betrachte

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon} E(u + \epsilon\varphi)|_{\epsilon=0} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon} \frac{1}{2} \int_0^1 (u' + \epsilon\varphi')^2 - fu|_{\epsilon=0} \\ &= \int_0^1 u'\varphi' - f\varphi \end{aligned}$$

Sei $(u, v) := \int_0^1 uv$ das L^2-Skalarprodukt, so folgt

$$(u', \varphi') = (f, \varphi) \; \forall \varphi \in X$$

Analog folgt für $u_h \in X_h$:

$$(u_h', \varphi_h') = (f, \varphi_h) \; \forall \varphi_h \in X_h$$

Sei $\varphi_1, \ldots, \varphi_N$ Basis von X_h, $u_h = \sum_{i=1}^N u_i \varphi_i$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^N u_i \varphi_i', \varphi_j'\right) &= (f, \varphi_j), \; j = 1, \ldots, N \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^N u_i (\varphi_i', \varphi_j') &= (f, \varphi_j), \; j = 1, \ldots, N \\ U_i = u_i, \; i = 1, \ldots, N; \; U \in \mathbb{R}^N, \; S_{ij} &= (\varphi_i', \varphi_j'), \; S \in \mathbb{R}^{N \times N} \\ F_j &= (f, \varphi_i), \; F \in \mathbb{R}^N \\ &\Rightarrow SU = F \text{ lin. Gleichungssystem} \end{aligned}$$

1 Interpolation

Sei $\{\Phi(x, a_0, \ldots, a_n | a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R})\}$ eine Familie von Funktionen mit $x \in \mathbb{R}$. Ein Element aus dieser Familie ist durch $(n+1)$ Parameter $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ charakterisiert.
Aufgabe: Zu $(x_k, f_k) \in \mathbb{R}^2,\ k = 0, \ldots, n$ mit $x_i \neq x_k$ für $i \neq k$, finde Parameter $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, so dass

$$\Phi(x_k, a_0, \ldots, a_n) = f_k,\ k = 0, \ldots, n.$$

Dies ist ein Gleichungssystem mit $(n+1)$ Gleichungen und Unbekannten.
Familie von linearen prarmeterabh. Funktionen: Sei $f \in C^0(\mathbb{R})$ und $V \subseteq C^0(\mathbb{R})$ sei ein Teilraum mit $\dim(V) = n+1$. Sei $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ eine Basis von V, so setze

$$\Phi(x, a_0, \ldots, a_n) = \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_i(x)$$

1.1 Beispiel: Polynominterpolation

Hier wählt man $V = \mathbb{P}_n$ und z.B. $\varphi_i(x) = x^i;\ i = 0, \ldots, n$.

$$\Rightarrow \Phi(x, a_0, \ldots, a_n) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i =: p(x)$$

Aufgabe: Finde $p \in \mathbb{P}$ mit $p(x_i) = f_i,\ i = 0, \ldots, n$.

1.2 Beispiel: Trigonometrische Interpolation

$\Phi(x, a_0, \ldots, a_n) = a_0 + a_1 e^{ix} + \cdots + a_n e^{nix} = \sum_{j=0}^{n} a_j e^{jix} = a_0 = \sum_{k=1}^{n} a_k(\cos(kx) + i\sin(kx))$

1.3 Beispiel: Nicht lineare Interpolation

Exponentielle Interpolation:

$$\Phi(x, a_0, \ldots, a_n) = a_0 e^{\lambda_0 x} + \cdots + a_n e^{\lambda_n x}$$

mit $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ fest gewählt oder

$$\Phi(x, a_0, \ldots, a_n) = \sum_{i=0}^{n} a_i e^{\lambda_i x} \text{ und } (m+1) \cdot 2 = n+1$$

1.4 Beispiel: Rationale Interpolation

$$\Phi(x, a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_m) = \frac{a_0 + \cdots + a_n x^n}{b_0 + \cdots + b_m x^m}$$

mit $(m+1) \cdot 2 = n+1$.

1.5 Erweitertes Problem: Hermite-Interpolation

Aufgabe: zu Stützstellen $x_0, \ldots, x_n$ seien die Funktionswerte $f_0, \ldots, f_n$ und Ableitungen $f_0^{(p)}, \ldots, f_n^{(p)},\ p = 1, \ldots, p_{\max}$ gegeben. Ist $p_{\max} = 1$, so suchen wir ein Interpolationsproblem

$$p(x) = \sum_{i=0}^{N} a_i x^i$$

mit $(n+1) \cdot 2 = N+1$ mit $p(x_k) = f_k,\ p'(x_k) = f'(x_k),\ k = 0, \ldots, n$.

1.6 Beispiel: Spline-Interpolation

Gesucht: $\Phi \in C^q(\mathbb{R})$ mit q fest gewählt mit

$$\Phi(x_k) = f_k \text{ und } \Phi|_{[x_k, x_{k+1}]} \in \mathbb{P}_r.$$

Das heißt (q, r) bestimmen die Klasse von **Splines**.

1.7 Polynominterpolation

Gegeben: $(x_0, f_0), \ldots, (x_n, f_n) \in \mathbb{R}^2$ mit $x_i \neq x_k,\ i \neq k$.
Gesucht: $p \in Pw_N$ mit $p(x_i) = f_i,\ i = 0, \ldots, n$ und N minimal gewählt.
Beispiel: $(x_0, f_0) = (0, 0),\ (x_1, f_1) = (1, 1)$ dann folgt $p \in \mathbb{P}_1,\ p = x$ ist eindeutiges Interpolationspolynom, aber jedes Monom x^k erfüllt die Interpolationsaufgabe.

1.8 Satz 1

Es existiert genau ein $p \in \mathbb{P}_n$ mit

$$p(x_i) = f_i,\ i = 0, \ldots, n.$$

Beweis:
Sei $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ eine Basis von $\mathbb{P}_n$. Dann ist das Interpolationsproblem äquivalent zu einem linearem Gleichungssystem:

$$A \cdot a = f \text{ mit } A \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)},\ a \in \mathbb{R}^{(n+1)},\ f \in \mathbb{R}^{(n+1)}$$

so dass $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i \varphi_i(x)$ und $A_{ik} = \varphi_k(x_i)\ \forall k, i = 0, \ldots, n$, dann folgt

$$(A \cdot a)_j = \left(\sum_{k=0}^n A_{ik} a_k \right)_j = p(x_j) = f_j$$

Zeige: A ist regulär. Sei $a = (a_0, \ldots, a_n)^T$ Lösung der Gleichung $Aa = 0$, das heißt

$$\sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(x_i) = 0\ \forall i = 0, \ldots, n$$

Es ist $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(x) \in \mathbb{P}_n$. Dann hat $p \in \mathbb{P}_n$ mindestens $n+1$ Nullstellen. Mit dem Fundamentalsatz der Algebra folgt $p \equiv 0$ und somit $a_0 = \cdots = a_n = 0$. Also ist A regulär und somit $p \in \mathbb{P}_n$ eindeutig bestimmt. $\square$

Bemerkung
Interpolation $\Leftrightarrow Aa = f$ mit $A_{ik} = \varphi_k(x_i),\ i, k = 0, \ldots, n$.
1. Ansatz: Monombasis $\varphi_k(x) = x^k \rightsquigarrow p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ **Normalform** von $p \in \mathbb{P}_N$.

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} \varphi_0(x_0) & \ldots & \varphi_n(x_0) \\ \ddots & & \ddots \\ \varphi_0(x_n) & \ldots & \varphi_n(x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \ldots & x_1^n \\ \ddots & & & \ddots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^n \end{pmatrix}$$

Dies ist die **Vandermondsche Matrix**, insbesondere ist A vol besetzt und sie ist schlecht konditioniert.
Idee: Konstruiere eine Basis $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ so, dass gilt

$$A = \mathrm{id}$$

Dann wäre $a = f$, d.h. $a_i = f_i\ \forall i = 0, \ldots, n$ die Lösung des Interpolationsproblems.

(a) Lagrange-Form des Interpolationsproblems:

$$A = \mathrm{id} \Leftrightarrow \varphi_k(x_i) = \delta_{ik} \ (0 \leq k, i \leq n)$$

Ansatz: $\varphi_k(x) = c \cdot \prod_{i=0, i\neq k}^{n} (x - x_i) \Rightarrow \varphi_k(x_i) = 0 \ \forall i \neq k$. Aus $\varphi_k(x_k) = 1$ folgt

$$c = \left(\prod_{i=0, i\neq k}^{n} (x_k - x_i) \right)^{-1}$$

$$\Rightarrow \varphi_k(x) = \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)}, \ k = 0, \ldots, n$$

1.9 Defintion 2 (Lagrange-Polynome)

Die Polynome

$$l_k^n(x) = \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)}$$

heißen **Lagrange-Polynome** $(l_0^n, \ldots, l_n^n)$ bilden eine Basis von $\mathbb{P}_n$ und

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k l_k^n(x)$$

heißt **Lagrange-Form** von $p \in \mathbb{P}_n$. Es ist

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k l_k^n(x)$$

die Lösung des Interpolationsproblems zu $(x_0, f_0), \ldots, (x_n, f_n)$. Für die Lagrange-Polynome gilt

$$l_i^n(x_j) = \delta_{ij}.$$

Bemerkung:
Diese Darstellung ist insbesondere für die Theorie sehr nützlich, edr Nachteil ist, dass die Polynome sich bei Hinzunahme von Stützstellen ändern.

(b) Newton-Form des Interpolationsproblems:
Wähle eine Basis von $\mathbb{P}_n$, so dass A eine untere Dreiecksmatrix wird:

$$\varphi_k(x) = \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j) \ k = 0, \ldots, n$$

Dann gilt $\varphi_k \in \mathbb{P}_n$. Dann ist

$$\begin{aligned} &\varphi_0(x) = 1 \text{ (verwende die Konvention, dass } \prod_{j=j_0}^{j_n} a_j = 1, \text{ falls } j_n < j_0) \\ &\varphi_1(x) = (x - x_0) \\ &\varphi_2(x) = (x - x_0)(x - x_1) \qquad \ddots \end{aligned}$$

Es gilt $\varphi_k(x_i) = 0$ für $i < k \Rightarrow A$ ist eine untere Dreiecksmatrix.

1.10 Definiton 3 (Newton-Polynome)

Die Polynome

$$N_k^n := \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j)$$

heißen **Newton-Polynome** und

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k N_k^n(x)$$

heißt **Newton-Form** von $p \in \mathbb{P}_n$. Für das Interpolationsproblem gilt:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{f_0}{\varphi_0(x_0)} = f_0 \\ a_1 &= \frac{f_1 - \varphi_0(x_1 a_0)}{\varphi_1(x_1)} = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} =: f[x_0, x_1] \\ a_2 &= \dots = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} =: f[x_0, x_1, x_2] \end{aligned}$$

Die Koeffizienten $a_0, \dots, a_n$ werden iterativ über die sogenannten **dividierten Differenzen** $f[x_0, \dots, x_n]$ berechnet ($\rightsquigarrow$ § 3).

2 Funktionsinterpolation durch Polynome

Gegeben: $x_0, \dots, x_m$ und $f \in C^0(\mathbb{R})$
Gesucht: Interpolationspolynom zu $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_n, f(x_n))$
Frage: Approximationsfehlerabschätzung:

$$||f - p||_\infty \leq ??$$

2.1 Satz 4 (Fehlerdarstellung)

Sei $f \in C^{n+1}(a, b)$ und $p \in \mathbb{P}_n$ das Interpolationsproblem zu den Stützstellen $x_0, \dots, x_n$ (paarweise verschieden). Dann existiert zu jedem $x \in (a, b)$ ein $\xi_x \in (a, b)$ mit

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x) \cdot \underbrace{\prod_{k=0}^{n} (x - x_k)}_{\text{Knotenpolynom}} \qquad (*)$$

Beweis:
Setze

$$\omega(t) := \prod_{k=0}^{n} (t - x_k)$$

und betrachte die Funktion

$$\phi(t) := f(t) - p(t) - \lambda\omega(t); \;\; \lambda := \frac{f(x) - p(x)}{\omega(t)}$$

daraus folgt, dass $t = x$ eine Nullstelle von $\phi(t)$ und $\phi(x_i) = 0 * \forall i = 0, \dots, n$ x_i Stützstelle von p ist. Dann hat ϕ $n+2$ Nullstellen. Dann folgt mit dem Satz von Rolle: ϕ' hat mindestens $n+1$ Nullstelle, also hat $\phi^{(n+1)}$ min. eine Nullstelle. Diese Nullstelle nennen wir ξ_x.
Dann gilt:

$$\phi^{(n+1)}(\xi_x) = 0$$

und

$$f^{(n+1)}(\xi_x) - (n+1)!\frac{f(x)-p(x)}{\omega(x)} = 0$$

$$\Rightarrow f(x) - p(x) = f^{(n+1)}(\xi_x)\frac{1}{(n+1)!}\omega(x)$$

□

2.2 Folgerung 5

Gelten die Voraussetzungen aus Satz 4. So gilt:

$$\|f-p\|_\infty \leq \frac{1}{(n+1)!}\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty \cdot \|\omega\|_\infty$$

mit $\omega(x) = \prod_{k=0}^{n}(x-x_k)$.

Bemerkung:
Durch optimale Wahl der Stützstellen kann $\|\omega\|_\infty$ minimiert werden.

2.3 Beispiel 6 (Range)

Betrachte $f(x) = \frac{1}{1+x^2},\ x \in (-5,5)$ und

$$x_k^{(n)} := -5 + k \cdot h_n,\ k = 0,\ldots,n \text{ mit } h_n = \frac{10}{n}$$

Dann kann man zeigen, dass Konvergenz von $p^{(n)}$ nur auf einem Teilintervall $x \in (-\tilde{x},\tilde{x}),\ x \approx 3.6..$ vorliegt und Divergenz außerhalb.
Allgemein gilt:

1. Ist $f \in C^0(a,b)$ so existiert eine Folge von Stützstellen, so dass $p^{(n)}$ gegen f gleichmäßig konvergiert.

2. Zu jeder Folge von Stützstellen gibt es eine Funktion f, so dass $p^{(n)} \nrightarrow f$ gleichmäßig.

Frage: Wie wählt man Stützstellen optimal?
Betrachte dazu Interpolation auf dem Referenzintervall $[-1,1]$.
Idee: $\omega(x) = \prod_{k=0}^{n}(x-x_k) = x^{n+1} + a_n x^n + \ldots \Rightarrow \omega$ ist ein **normiertes Polynom** und $x_0,\ldots,x_n$ sind die Nullstellen dieses Polynoms.
Minimierungsaufgabe: Suchen $T_{n+1} := \operatorname{argmin}_{p\in N\mathbb{P}_{n+1}} \|p\|_\infty$.

2.4 Definition 7 (Tschebyschev-Polynome)

Auf $[-1,1]$ sind die **Tschebyschev-Polynome** rekursiv definiert durch

$$T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x,\ T_{n+1}(x)2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \qquad (**)$$

Die normierten Tschebyschev-Polynome sind dann:

$$\hat{T}_n(x) = 2^{1-n}T_n(x)$$

2.5 Satz 8

Für $x \in [-1,1]$ gilt

$$T_n(x) = \cos(n \cos^{-1}(x)) \tag{$*$}$$

Weiterhin gilt

1. $|T_n(x)| \leq 1$
2. $T_n(\cos\left(\frac{j\pi}{n}\right)) = (-1)^j \ (0 \leq j \leq n)$
3. $T_n(\cos\left(\pi\frac{2j-1}{n}\right)) = 0 \ (0 \leq j \leq n)$
4. $T_n \in \mathbb{P}_n(-1,1)$
5. $\hat{T}_n \in N\mathbb{P}_n(-1,1)$, das heißt Koeffizient 1 vor x^n.

Beweis:
Nach Additionstheoremen gilt:

$$\cos(A+B) = \cos(A)\cos(B) - \sin(A)\sin(B)$$

Dann folgt

$$\cos((n+1)\Theta) = \cos(n\Theta)\cos(\Theta) - \sin(n\Theta)\sin(\Theta)$$
$$\cos((n-1)\Theta) = \cos(n\Theta)\cos(\Theta) + \sin(n\Theta)\sin(\Theta)$$

Also

$$\cos((n+1)\Theta) + \cos((n-1)\Theta) = 2 \cdot \cos(n\Theta)\cos(\Theta)$$

Wähle $\Theta = \cos^{-1}(x)$:

$$\Rightarrow \cos((n+1)\cos^{-1}(x)) - 2\cos(n\cos^{-1}(x)) \cdot x - \cos((n-1)\cos^{-1}(x))$$

Setze $F_n := \cos(n\cos^{-1}(x))$, dann erfüllt F_n die Iterationsvorschrift $(**)$.
Noch zu zeigen: $F_0(x) = 1,\ F_1(x) = x$.
Es ist

$$F_0(x) = \cos(0\cos^{-1}(x)) = \cos(0) = 1$$

und

$$F_1(x) = \cos(1\cos^{-1}(x)) = x$$

Die Eigenschaften 1.-4. folgen aus den Eigenschaften der $\cos$-Funktion. 5. folgt aus der Iterationsvorschrift induktiv. $\square$

2.6 Lemma 9

Sei $p \in \mathbb{P}_n$ ein normiertes Polynom auf $[-1,1]$. Dann gilt $\|p\|_\infty = \max\limits_{-1\leq x\leq 1}|p(x)| \geq 2^{1-n}$ und $\left\|\hat{T}_n\right\|_\infty = 2^{1-n}$.

Beweis:
Annahme: Es gibt ein normiertes Polynom $p \in \mathbb{P}_n$ mit

$$|p(x)| < 2^{1-n} \ \forall x \in [-1,1]$$

Sei $x_i = \cos\left(\pi\frac{i}{n}\right)$. Nach Satz 8 (ii) folgt dann

$$(-1)^i p(x_i) \leq |p(x_i)| < 2^{1-n} = (-1)^i \hat{T}_n(x_i)$$

Daraus folgt

$$(-1)^i \underbrace{(\hat{T}_n(x_i) - p(x_i)}_{\in \mathbb{P}_{n-1}} > 0 \; 0 \leq i \leq n.$$

Daher wechselt $\hat{T} - p$ $(n-1)$-mal das Vorzeichen aus $[-1,1]$. Da beide Polynome normiert sind ist $\hat{T} - p \in \mathbb{P}_{n-1}$ und es folgt ein Widerspruch zur Annahme. Daraus folgt die Behauptung. □

2.7 Folgerung 10 (Optimale Wahl der Stützstellen)

Mit den Stützstellen $x_k = \cos\left(\pi \frac{2k-1}{2(n+1)}\right), \; k = 1, \ldots, n+1$ als die Nullstellen von T_{n+1} gilt, dass das Knotenpolynom $\hat{T}_{n+1}$ ist und es gilt

$$\left\|\hat{T}_{n+1}\right\|_\infty = \|\omega\|_\infty = 2^{1-(n+1)}$$

3 Dividierte Differenzen

Newton-Form des Interpolationsproblems:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k N_k(x)$$

$$N_k(x) = \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j), \; k = 0, \ldots, n$$

Gesucht: Algorithmus zur Berechnung der $a_0, \ldots, a_n$.
Bemerkung: Setze $p_m(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k N_k(x)$ für $m \leq n$. Dann gilt $p_m(x_j) = f_j$ $(0 \leq j \leq n)$ und $p_m \in \mathbb{P}_m$.
Das heißt p_m ist Interpolationspolynom zu den Daten $(x, f_0), \ldots, (x_m, f_m)$, dann hängt insbesondere a_k nur von $(x_0, f_0), \ldots, (x_k, f_k)$ ab.
Schreibweise: Für a_k schreibe wir $f[x_0, \ldots, x_k]$.

3.1 Definition 11 (Dividierte Differenzen)

Seien $i_0, \ldots, i_k \in \{0, \ldots, n\}$ paarweise verschieden und sie $P_{i_0,\ldots,i_k}$ das Interpolationspolynom zu $(x_{i_0}, f_{i_0}), \ldots, (x_{i_k}, f_{i_k})$. Mit $f[x_{i_0}, \ldots, x_{i_k}]$ bezeichnen wir den Koeffizienten vor x^k im Polynom $P_{i_0,\ldots,i_k}$. $f[x_{i_0}, \ldots, x_{i_k}]$ heißen **dividierte Differenzen** der Ordnung k.

3.2 Satz 12

(i) Die Polynome $P_{i_0,\ldots,i_k}$ genügen der Rekursionsformel

$$P_{i_0,\ldots,i_k} = \frac{(x - x_{i_0}) P_{i_1,\ldots,i_k} - (x - x_{i_k}) P_{i_0,\ldots,i_{k-1}}}{x_{i_k} - x_{i_0}} \tag{1}$$

(ii) Die dividierte Differenzen genügen der Rekursionsformel

$$f[x_{i_0}, \ldots, x_{i_k}] = \frac{f[x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}] - f[x_{i_0}, \ldots, x_{i_{k-1}}]}{x_{i_k} - x_{i_0}}; \; f[x_{i_k}] = f_{i_k} \tag{2}$$

(iii) Die dividierten Differenzen sind unabhängig von der Reihenfolge ihrer Argumente, das heißt ist $x_{j_0}, \ldots, x_{j_k}$ eine Permutation von $x_{i_0}, \ldots, x_{i_k}$, so gilt

$$f[x_{j_0}, \ldots, x_{j_k}] = f[x_{i_0}, \ldots, x_{i_k}].$$

Bemerkung: Die div. Differenzen kann man in einem Tableau schreiben:

Index

Die Seitenzahlen *sind mit Hyperlinks zu den entsprechenden Seiten versehen, also anklickbar!*

Abbildungsverzeichnis