Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Fachbereich 10 Mathematik und Informatik

Numerische Analysis

Mitschrift der Tafelnotizen

Tobias Wedemeier

9. April 2015

gelesen von

Prof. Dr. Ohlberger

Hierbei handelt es sich um eine Mitschrift der Tafelnotizenvon **Prof. Dr. Ohlberger**, WWU Münster, aus der Vorlesung **Numerische Analysis** im Wintersemester 2014/15. Dies ist kein Skript der Vorlesung und keine eigene Arbeit des Autors.

Für Fehler in der Mitschrift wird keine Haftung übernommen. Hinweise auf Fehler sind gerne gesehen, hierfür kann man mich in der Uni ansprechen oder alternativ eine e-Mail an: *tobias.wedemeier@gmx.de*
Auch ist eine Mitarbeit über Github möglich.

Wenn Teile aus der Vorlesung selber fehlen, können diese gerne an meine e-Mail versandt werden. Ich werde diese dann einarbeiten.

Inhaltsverzeichnis

0 Einleitung **III**
0.1 Variationsprinzip und Galerkinapproximation III
0.2 Definition 1 (Energieminimierung/Variationsprinzip) III
0.3 Galerkinverfahren IV
0.4 Beispiel Elastizität in 1D IV

1 Interpolation **V**

Abbildungsverzeichnis **A**

0 Einleitung

0.1 Variationsprinzip und Galerkinapproximation

Beispiel: Elastizitätstheorie in der Physik:
Gesucht: $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R},\ d = 1, 2, 3$, Gegeben: Energiefunktional $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
Aufgabe: Finde $\operatorname*{argmin}_{u \in X} E(u)$
u entspricht der Auslenkung/Verschiebevektor, ∇u der Gradient (Jacobimatrix); der Symmetrische Gradient $\frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T) =: \epsilon(u)$, dann ist die elastische Gesamtenergie:

$$E(u) := \frac{1}{2} \int_\Omega \Theta : \epsilon(u) \mathrm{d}x - \int_\Omega f(x) u(x) \mathrm{d}x$$

mit symmetrischem **Spannungstensor** Θ und äußerer Kraft $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$.
Materialgesetz: Der Spannungstensor ist proportional zum **Verzerrungstensor**:

: ist das Skalarprodukt

$$\Theta(u) = A\epsilon(u)$$
$$\Theta(u)_{i,j} = A_{ijkl} \epsilon(u)_{kl}\ \forall i, j, k, l = 1, \dots, d$$

$$\Rightarrow E(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega A\epsilon(u) : \epsilon(u) \mathrm{d}x - \int_\Omega f(x) u(x) \mathrm{d}x$$

0.2 Definition 1 (Energieminimierung/Variationsprinzip)

(a) Physikalisches Prinzip: Ein physikalisches System strebt immer in einen Zustand minimaler Energie.

(b) Mathematisches Prinzip: Sei $\bar{u}(x, t)$ eine Zustandsvariable und $E(u)$ die Energie eines Systems, das durch $\bar{u}$ repräsentiert wird. Dann strebt $\bar{u}$ gegen ein $u = u(x)$, der die Energie minimiert, d.h. falls E genügend glatt ist gilt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon} E(u + \epsilon\varphi)|_{\epsilon=0} = 0 \qquad \forall \text{zulässigen Variationen von } \varphi$$

Elastizität:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon} E(u + \epsilon\varphi)|_{\epsilon=0} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon} \left[\frac{1}{2} \int_\Omega A\epsilon(u + \epsilon\varphi) : \epsilon(u + \epsilon\varphi) \mathrm{d}x - \int_\Omega f(x) u(x) \mathrm{d}x \right]_{\epsilon=0} \\ &= \int_\Omega A\epsilon(u) : \epsilon(\varphi) \mathrm{d}x - \int_\Omega f\varphi \overset{!}{=} 0 \\ &\Rightarrow -\nabla(A\epsilon(u)) = f \text{ Dgl.}\end{aligned}$$

Diese Dgl. gliedert sich auf in

$$-\sum_{i=1}^{d} \sum_{k,l=1}^{d} \partial_{x_i} A_{ijkl} \epsilon(u)_{kl} = f_i \qquad \forall j = 1, \dots, d$$

Im 1D ergibt sich $-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(A \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} u\right) = f$, mit $A \in \mathbb{R}$. Für $A = 1 :\ -u''(x) = f$.
Im 2D ergibt sich:

$$-\nabla(A\nabla u) = f;\ A = \mathrm{id} \Rightarrow -\Delta u = f$$

0.3 Galerkinverfahren

Idee: Energieminimierung in endlich-dimensionalen Teilräumen. Sei X Funktionenraum und $E : V \to \mathbb{R}$ ein Energiefunktional. Gesucht ist $u = \operatorname*{argmin}_{v \in X} E(v)$.
Sei $X_h \subseteq X$ endlich-dimensionaler Teilraum von X. Wir erhalten die **Galerkin-Approximation**

$$u_h \in X_h : \; u_h = \operatorname*{argmin}_{v_h \in X_h} E(v_h)$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon} E(u_h + \epsilon v_h)|_{\epsilon=0} = 0 \; \forall v_h \in X_h$$

X_h endl.-dim. $\Rightarrow$ $\exists$ Basis $\Phi := \{\varphi_i | i = 1, \ldots, N := \dim(X_h)\}$, mit der Basisdarstellung $u_h(x) = \sum_{i=1}^N u_i \varphi_i(x)$, $u_i \in \mathbb{R}, \; i = 1, \ldots, N$.

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon} E\left(\sum_{i=1}^N u_i \varphi_i + \epsilon \varphi_j\right)_{\epsilon=0} = 0 \; \forall j = 1, \ldots, N$$

Dies ist ein Gleichungssystem mit N Unbekannten und N Gleichungen. Allgemein ist das System nicht linear.

0.4 Beispiel Elastizität in 1D

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 (u'(x))^2 + fu; \; A = 1$$

Betrachte

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon} E(u + \epsilon\varphi)|_{\epsilon=0} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon} \frac{1}{2} \int_0^1 (u' + \epsilon\varphi')^2 - fu|_{\epsilon=0} \\
&= \int_0^1 u'\varphi' - f\varphi
\end{aligned}$$

Sei $(u, v) := \int_0^1 uv$ das L^2-Skalarprodukt, so folgt

$$(u', \varphi') = (f, \varphi) \; \forall \varphi \in X$$

Analog folgt für $u_h \in X_h$:

$$(u_h', \varphi_h') = (f, \varphi_h) \; \forall \varphi_h \in X_h$$

Sei $\varphi_1, \ldots, \varphi_N$ Basis von X_h, $u_h = \sum_{i=1}^N u_i \varphi_i$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^N u_i \varphi_i', \varphi_j'\right) &= (f, \varphi_j), \; j = 1, \ldots, N \\
\Rightarrow \sum_{i=1}^N u_i (\varphi_i', \varphi_j') &= (f, \varphi_j), \; j = 1, \ldots, N \\
U_i = u_i, \; i = 1, \ldots, N; \; U \in \mathbb{R}^N, \; S_{ij} &= (\varphi_i', \varphi_j'), \; S \in \mathbb{R}^{N \times N} \\
F_j &= (f, \varphi_i), \; F \in \mathbb{R}^N \\
\Rightarrow SU &= F \text{ lin. Gleichungssystem}
\end{aligned}$$

1 Interpolation

Sei $\{\Phi(x, a_0, \ldots, a_n | a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R})\}$ eine Familie von Funktionen mit $x \in \mathbb{R}$. Ein Element aus dieser Familie ist durch $(n+1)$ Parameter $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ charakterisiert.
Aufgabe: Zu $(x_k, f_k) \in \mathbb{R}^2,\ k = 0, \ldots, n$ mit $x_i \neq x_k$ für $i \neq k$, finde Parameter $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$,so dass

$$\Phi(x_k, a_0, \ldots, a_n) = f_k,\ k = 0, \ldots, n.$$

Dies ist ein Gleichungssystem mit $(n+1)$ Gleichungen und Unbekannten.

Abbildungsverzeichnis