Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Fachbereich 10 Mathematik und Informatik

Lineare Algebra II

gelesen von

Prof. Dr. Siegfried Echterhoff

im Sommersemester 2016

Vorlesungsmitschrift von Phil Steinhorst

Stand: 27. Februar 2016

Vorwort

Der vorliegende Text ist eine Mitschrift zur Vorlesung *Lineare Algebra II*, gelesen von Prof. Dr. Siegfried Echterhoff an der WWU Münster im Sommersemester 2016. Der Inhalt entspricht weitestgehend den Vorlesungsnotizen, welche auf der Vorlesungswebsite bereitsgestellt werden. Dieses Werk ist daher keine Eigenleistung des Autors und wird nicht vom Dozenten der Veranstaltung korrekturgelesen. Für die Korrektheit des Inhalts wird keinerlei Garantie übernommen. Bemerkungen, Korrekturen und Ergänzungen kann man folgenderweise loswerden:

- persönlich durch Überreichen von Notizen oder per E-Mail
- durch Abändern der entsprechenden TeX-Dateien und Versand per E-Mail an mich
- direktes Mitarbeiten via GitHub. Dieses Skript befindet sich im `latex-wwu`-Repository von Jannes Bantje:

  `https://github.com/JaMeZ-B/latex-wwu`

Literatur

- Literatur hinzufügen

Kommentar des Dozenten

einfügen

Geplante Themen

- einfügen

Vorlesungswebsite

Das handgeschriebene Skript sowie weiteres Material findet man unter folgendem Link: Link einfügen

Phil Steinhorst
p.st@wwu.de

Inhaltsverzeichnis

I. Lineare Algebra I (Zusammenfassung)

3. Lineare Gleichungssysteme

3.5 Definition (Matrix)
Sei K ein Körper (siehe Definition 4.7).

(1) Ein Schema der Form

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$$

mit $a_{ij} \in K$ heißt $\boldsymbol{m \times n}$**-Matrix** über K. Wir bezeichnen mit $M(m \times n, K)$ die Menge aller $m \times n$-Matrizen über K.

(2) Wir identifizieren $M(n \times 1, K)$ mit K^n, das heißt wir schreiben die Elemente des K^n in der Regel als Spalten. Für $x, y \in K^n$ und $\lambda \in K$ definieren wir:

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \lambda \cdot x = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

(3) Ist $A = (a_{ij})_{i,j} \in M(m \times n, K)$ und $x = (x_i)_i \in K^n$, so definieren wir $b = (b_i)_i := Ax \in K^m$ durch $b_i := \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$. (Dies ist ein Spezialfall der Matrixmultiplikation, vgl. Definition 6.17)

3.7 Definition (Lineares Gleichungssystem)
Sei K ein Körper, $A = (a_{ij})_{i,j} \in M(m \times n, K)$, $b = (b_i)_i \in K^m$. Die Gleichung

$$Ax = b$$

mit Unbekannten $x = (x_i)_i \in K^n$ heißt ein **lineares Gleichungssystem (LGS)** über K. Ein Tupel $\tilde{x} \in K^n$ mit $A\tilde{x} = b$ **heißt** Lösung des LGS.

3.9 Definition (Elementare Zeilenumformungen)
Sei $Ax = b$ ein LGS über K. Folgende **elementare Zeilenumformungen** ändern die Lösungsmenge des LGS nicht:

(I) Vertauschen zweier Zeilen in A und der entsprechenden Einträge in b.

(II) Addition der i-ten Zeile von A auf die j-te Zeile von A und entsprechend den i-ten Eintrag von b auf den j-ten Eintrag von b, $i \neq j$.

(III) Multiplikation einer Zeile von A und dem entsprechenden Eintrag von b mit einer Konstanten $\lambda \in K \setminus \{0\}$.

(IV) Addition des λ-fachen der i-ten Zeile auf die j-te Zeile von A, $i \neq j$, und Entsprechendes für die Einträge von b.

Durch diese Umformungen wird das Lösungstupel x nicht verändert. Wir betrachten daher oft nur das Schema $(A \mid b)$, das heißt die Matrix, die aus A durch Ergänzen der Spalte b entsteht.

3.11 Satz (Gaußsches Eliminationsverfahren)
Sei $A \in M(m \times n, K)$ eine Matrix. Dann lässt sich A durch endlich viele elementare Zeilenumformungen der Form auf **Zeilenstufenform** bringen, das heißt auf eine Form

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & 1 & * & 0 & \cdots & & & & & 0 \\
0 & \cdots & & \cdots & 0 & 1 & * & 0 & \cdots & & & 0 \\
0 & \cdots & & & & \cdots & 0 & 1 & * & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\
\vdots & & & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & & & & & & & \cdots & 0 & 1 & * \\
0 & \cdots & & & & & & & & & \cdots & 0 \\
\vdots & & & & & & & & & & & \vdots \\
0 & \cdots & & & & & & & & & \cdots & 0
\end{pmatrix}$$

3.12 Satz (Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen)
Ein LGS $Ax = b$ ist genau dann lösbar, wenn für die Zeilenstufenform $(\tilde{A} \mid \tilde{b})$ der Matrix $(A \mid b)$ gilt: Für jede Nullzeile in $\tilde{A}$ ist auch der entsprechende Eintrag in $\tilde{b}$ null (mit anderen Worten: Keine der führenden Einsen liegt in $\tilde{b}$).

4. Gruppen, Ringe, Körper

4.1 Definition (Gruppe)

(1) Eine **Gruppe** $(G, *)$ besteht aus einer Menge G zusammen mit einer Verknüpfung $*\colon G \times G \to G, (x, y) \mapsto x * y$ mit folgenden Eigenschaften:

  a) $*$ ist **assoziativ**, das heißt es gilt $(x * y) * z = x * (y * z)$ für alle $x, y, z \in G$.

  b) Es existiert ein **neutrales Element** $1 \in G$ für $*$, das heißt für alle $x \in G$ gilt $1 * x = x * 1 = x$.

  c) Zu jedem $x \in G$ existiert ein **inverses Element** $x^{-1} \in G$ mit $x * x^{-1} = x^{-1} * x = 1$.

(2) Eine Gruppe $(G, *)$ heißt **abelsche Gruppe**, falls zusätzlich das Kommutativgesetz gilt, das heißt für alle $x, y \in G$ gilt $x * y = y * x$.

4.4 Beispiel (Symmetrische Gruppe)
Sei X eine Menge. Die Gruppe $S(X) := \{f : X \to X : f \text{ ist bijektiv}\}$ mit der Komposition $\circ$ als Verknüpfung heißt **symmetrische Gruppe** von X. Besitzt X mehr als zwei Elemente, so ist $(S(X), \circ)$ nicht abelsch. Für $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ schreiben wir $S_n := S(X)$.

4.5 Definition (Ring)
Ein **Ring** $(R, +, \cdot)$ besteht aus einer abelschen Gruppe $(R, +)$ zusammen mit einer zusätzlichen Verknäpfung $\cdot : R \times R \to R, (x, y) \mapsto x \cdot y$, sodass Folgendes gilt:

(1) Ist $0 \in R$ das neutrale Element für $(R, +)$, so gilt $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$ für alle $x \in R$.

(2) Die Verknüpfung $\cdot$ ist assoziativ.

(3) Es gelden die **Distributivgesetze**, das heißt für alle $x, y, z \in R$ gilt $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ und $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Ist $\cdot$ kommutativ, so heißt R ein kommutativer Ring. Existiert zusätzlich ein neutrales Element $1 \in R$ für $\cdot$, so heißt R ein **unitaler Ring** oder **Ring mit Eins**. Die Menge $R^* := \{x \in R : \text{es existiert ein } x^{-1} \in R \text{ mit } x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1\}$ heißt dann die **Einheitengruppe** von R.

4.7 Definition (Schiefkörper, Körper)
Sei R ein Ring mit Eins. Gilt $R^* = R \setminus \{0\}$, so heißt R ein **Schiefkörper**. Ist R zusätzlich kommutativ, so heißt R ein **Körper**.

4.10 Definition (Komplexe Zahlen)
Sei $\mathbb{C}$ die Menge der formalen Summen der Gestalt $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, also

$$\mathbb{C} := \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Vermöge $i^2 := -1$ und der Verknüpfungen

$$\begin{aligned}(a + ib) + (c + id) &:= (a + c) + i(b + d)\\ (a + ib) \cdot (c + id) &:= (ac - bd) + i(bc + ad)\end{aligned}$$

ist $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ein Körper – der Körper der **komplexen Zahlen**. Wir definieren weiter für $z = a + ib \in \mathbb{C}$:

a) $\mathrm{Re}(z) := a$ – der **Realteil** von z.

b) $\mathrm{Im}(z) := b$ – der **Imaginärteil** von z.

c) $\overline{z} := a - ib$ – das **komplex Konjugierte** von z.

d) $|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$ – der **Betrag** von z.

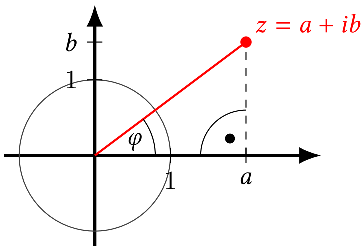
4.12 Lemma
Für alle $z = a + ib, w = c + id \in \mathbb{C}$ gilt:

(1) $|z|^2 = z\overline{z}$ und $|zw| = |z| \cdot |w|$.

(2) Ist $z \neq 0$, so auch $|z|$, und es gilt $z^{-1} = \frac{1}{|z|^2}\overline{z}$.

4.13 Bemerkung (Polardarstellung komplexer Zahlen)
Ist $z = a + ib \in \mathbb{C}$, so existiert ein $\varphi \in [0, 2\pi]$ mit $\cos(\varphi) = \frac{a}{|z|}$ und $\sin(\varphi) = \frac{b}{|z|}$, das heißt es gilt

$$z = |z| \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi).$$



5. Vektorräume und lineare Abbildungen

5.1 Definition (Vektorraum)
Sei K ein Körper. Ein K**-Vektorraum** besteht aus einer Menge $V \neq \emptyset$ versehen mit zwei Verknüpfungen

$$+\colon V \times V \to V, (u, v) \mapsto u + v$$
$$\cdot\colon K \times V \to V, (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v,$$

sodass $(V, +)$ eine abelsche Gruppe ist und für alle $\lambda, \mu \in K$ und $u, v \in V$ gilt:

(1) $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$

(2) $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$

(3) $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$

(4) $1 \cdot v = v$

5.2 Beispiel (Diverse Vektorräume)

(1) K^n ist ein Vektorraum mit den Verknüpfungen aus Definition 3.5(2).

(2) $M(m \times n, K)$ ist ein Vektorraum vermöge komponentenweiser Addition und skalarer Multiplikation.

(3) Für eine Menge $X \neq \emptyset$ und einen K-Vektorraum V ist $\mathrm{Abb}(X, V) := \{f : X \to V\}$ ein Vektorraum vermöge

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x)$$
$$(\lambda f)(x) := \lambda \cdot (f(x))$$

f+r $\lambda \in K, x \in X$ und $f, g \in \mathrm{Abb}(X, V)$.

(4) Der **Polynomring** $K[T] := \{a_0 + a_1 T + a_2 T^2 + \cdots + a_n T^n \ : \ a_i \in K, n \in \mathbb{N}_0\}$ ist ein Vektorraum vermöge

$$\sum_{k=0}^{n} a_k T^k + \sum_{k=0}^{m} b_k T^k := \sum_{k=0}^{\max(m,n)} (a_k + b_k) T^k$$
$$\lambda \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} a_k T^k \right) := \sum_{k=0}^{n} (\lambda a_k) T^k$$

5.4 Definition (Untervektorraum)
Sei V ein K-Vektorraum und $U \subseteq V$ nichtleer. U heißt **Untervektorraum** von V, wenn gilt:

(1) Für alle $v, w \in U$ ist $v + w \in U$.

(2) Für alle $\lambda \in K$ und $v \in U$ ist $\lambda v \in U$.

5.7 Definition (Lineare Abbildung)
Sei K ein Körper und V, W zwei K-Vektorräume. Eine Abbildung $F \colon V \to W$ heißt **K-linear** oder **K-Vektorraum-Homomorphismus**, wenn für alle $v, w \in V$ und $\lambda \in K$ gilt:

$$F(\lambda v + w) = \lambda \cdot F(v) + F(w).$$

Wir definieren $\mathrm{Hom}(V, W) = \{F \colon V \to W \text{ linear}\}$. $\mathrm{Hom}(V, W)$ ist ein Untervektorraum von $\mathrm{Abb}(V, W)$.

5.8 Beispiel (Auswertungsabbildung)
Für jedes $x \in K$ ist die **Auswertungsabbildung**

$$\mathrm{ev}_x \colon K[T] \longrightarrow K$$
$$p = \sum_{k=0}^{n} a_k T^k \longmapsto p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

eine lineare Abbildung

5.9 Definition (Isomorphismus, Kern, Bild)
Sei $F\colon V \to W$ linear.

(1) Ist F bijektiv, so heißt F ein **Isomorphismus**. F^{-1} ist ebenfalls linear. Existiert für zwei Vektorräume V, W ein Isomorphismus $V \to W$, so heißen V, W **isomorph** und wir schreiben $V \simeq W$.

(2) Der Untervektorraum $\mathrm{Kern}(F) := \{v \in V : F(v) = 0_W\} \subseteq V$ heißt **Kern** von F.
Es gilt: F injektiv $\Leftrightarrow \mathrm{Kern}(F) = \{0\}$.

(3) Der Untervektorraum $\mathrm{Bild}(F) := F(V) := \{F(V) : v \in V\} \subseteq W$ heißt **Bild** von F.

6. Lineare Abbildungen von K^n nach K^m und Matrizen

6.1 Definition (Linearkombination)
Sei V ein K-Vektorraum, $v_1, \dots, v_m \in V$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$, so heißt

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i$$

eine **Linearkombination** der Vektoren $v_1, \dots, v_m$ in V.

6.3 Lemma
Sei $A \in M(m \times n, K)$, dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} F_A\colon K^n &\longrightarrow K^m \\ x &\longmapsto Ax \end{aligned}$$

mit Ax wie in Definition 3.5(3) linear.

6.4 Satz (Umkehrung von Lemma 6.3)
Ist $F\colon K^n \to K^m$ eine lineare Abbildung, dann ist $A_F = (F(e_1), \dots, F(e_n)) \in M(m \times n, K)$ die eindeutige Matrix mit $F(x) = A_F x$ für alle $x \in K^n$.

6.6 Satz
Die Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi\colon \ \mathrm{Hom}(K^n, K^m) &\longrightarrow M(m \times n, K) \\ F &\longmapsto A_F \end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus von K-Vektorräumen mit Umkehrabbildung $\Phi^{-1}(A) = F_A$. Für $A \in M(m \times n, A)$ setzen wir $\mathrm{Kern}(A) := \mathrm{Kern}(F_A)$ und $\mathrm{Bild}(A) := \mathrm{Bild}(F_A)$.

6.8 Satz
Seien $A \in M(m \times n, K)$ und $b \in K^m$. Dann gilt:

(1) Das LGS $Ax = b$ besitzt genau dann eine Lösung $x \in K^n$, wenn $b \in \mathrm{Bild}(A)$.

(2) Ist $x_s \in K^n$ eine spezielle Lösung von $Ax = b$, so ist die Menge $\mathbb{L}$ aller Lösungen von $Ax = b$ gegeben durch

$$\mathbb{L} = x_s + \mathrm{Kern}(A) = \{x_s + x : x \in \mathrm{Kern}(A)\}.$$

6.9 Korollar
Sei $A \in M(m \times n, K)$. Dann sind äquivalent:

(1) Die Gleichung $Ax = b$ besitzt für jedes $b \in K^m$ genau eine Lösung $x \in K^n$.

(2) Es gilt $\mathrm{Kern}(A) = \{0\}$ und $\mathrm{Bild}(A) = K^m$.

(3) Die Abbildung F_A ist bijektiv.

6.13 Definition (Matrixmultiplikation)
Für $B \in M(l \times m, K)$ und $A \in (m \times n, K)$ definieren wir das Produkt $C := B \cdot A = (c_{ij})_{i,j} \in M(l \times n, K)$ durch

$$c_{ij} := \sum_{k=1}^{m} b_{ik} a_{kj} \quad \text{für } 1 \le i \le l \text{ und } 1 \le j \le n.$$

6.14 Satz
Seien $F\colon K^n \to K^m, G\colon K^m \to K^l$ linear. Dann gilt $A_{G \circ F} = A_G \cdot A_F$.
Ist umgekehrt $A \in M(m \times n, K), B \in M(l \times m, K)$, so ist $F_{BA} = F_B \circ F_A$.

6.17 Definition (Inverse Matrix)
$A \in M(n \times n, K)$ heißt **invertierbar**, falls eine Matrix $B \in M(n \times n, K)$ existiert mit $BA = AB = E_n$. B heißt die zu A **inverse Matrix** und ist eindeutig bestimmt. Wir schreiben $A^{-1} := B$.

6.19 Satz
Sei $A \in M(n \times n, K)$. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(1) A ist invertierbar.

(2) $F_A\colon K^n \to K^n$ ist invertierbar und es gilt $(F_A)^{-1} = F_{A^{-1}}$.

(3) Für jedes $b \in K^n$ existiert genau eine Lösung $x \in K^n$ für das LGS $Ax = b$, und es gilt $x = A^{-1}b$.

(4) A lässt sich durch elementare Zeilenumformungen in die Einheitsmatrix E_n

6.22 Definition (allgemeine lineare Gruppe)
Sei K ein Körper und sei $n \in \mathbb{N}$. Die Menge

$$\mathrm{GL}(n, K) := \{A \in M(n \times n, K) : A \text{ ist invertierbar}\} \subseteq M(n \times n, K)$$

ist versehen mit der Matrixmultiplikation eine Gruppe – die **allgemeine lineare Gruppe**.

7. Zerlegung von Matrizen in Elementarmatrizen

7.1 Definition (Elementarmatrizen)
Sei $A \in M(n \times n, K)$.

(1) Sei $1 \leq k, l \leq n$ mit $k \neq l$. Definiere $P_{kl} = (p_{ij})_{ij} \in M(n \times n, K)$ mit

$$p_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j \neq k, l \\ 1, & \text{falls } i = k \text{ und } j = l \\ 1, & \text{falls } i = l \text{ und } j = k \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \qquad P_{kl} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & 0 & & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & & 0 & & & \\ & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Das heißt, P_{kl} ist die Einheitsmatrix, bei der die k-te und l-te Zeile vertauscht wurden. Es gilt $P_{kl}^{-1} = P_{kl}$.

Die Multiplikation $P_{kl}A$ vertauscht die k-te mit der l-ten Zeile von A. Analog vertauscht AP_{kl} die entsprechenden Spalten.

(2) Sei $k \neq l$ und $\lambda \in K \setminus \{0\}$. Definiere $A_{kl}(\lambda) := E_n + \lambda \cdot E_{kl}$, wobei $E_{kl} = (e_{ij})_{ij} \in M(n \times n, K)$ mit

$$e_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{falls } i = k \text{ und } j = l \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \qquad A_{kl}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & \lambda & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Das heißt, $A_{kl}(\lambda)$ ist die Einheitsmatrix mit einem zusätzlichen λ an der Stelle (k,l). Es gilt $A_{kl}(\lambda)^{-1} = A_{kl}(-\lambda)$.

Die Multiplikation $A_{kl}(\lambda)A$ bewirkt eine Addition des λ-fachen der l-ten Zeile von A auf die k-te Zeile, während $AA_{kl}(\lambda)$ eine Addition des λ-fachen der k-ten Spalte von A auf die l-te Spalte bewirkt.

(3) Sei $1 \leq k \leq n$ und $\lambda \in K \setminus \{0\}$. Definiere $M_k(\lambda) := (m_{ij})_{ij} \in M(n \times n, K)$ durch

$$e_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j \neq k \\ \lambda, & \text{falls } i = j = k \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \qquad M_k(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && 1 &&&& \\ &&& \lambda &&& \\ &&&& 1 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{pmatrix}$$

Das heißt, $M_k(\lambda)$ ist die Einheitsmatrix mit einem λ anstatt einer 1 an der Stelle (k,k). Es gilt $M_k(\lambda)^{-1} = M_k(\lambda^{-1})$.

Die Multiplikation $M_k(\lambda)A$ multipliziert die k-te Zeile von A mit λ. Analog multipliziert $AM_k(\lambda)$ die k-te Spalte von A mit λ.

7.4 Satz

Sei $A \in M(m \times n, K)$. Dann existieren endlich viele Elementarmatrizen $D_1, \ldots, D_l \in M(m \times m, K)$ und $F_1, \ldots, F_r \in M(n \times n, K)$ und ein $k \in \mathbb{N}$ mit

$$D_l \cdots D_1 A F_1 \ldots F_r = \left(\begin{array}{c|c} E_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 &&& & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots && & \vdots && \vdots \\ && \ddots & & \vdots && \vdots \\ &&& 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots &&& \vdots & \vdots && \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right)$$

8. Basen endlich erzeugter K-Vektorräume

8.1 Definition (Lineare Hülle, Erzeugendensystem)
Sei V ein K-Vektorraum und sei $M \subseteq V$. Dann heißt

$$\mathrm{LH}(M) = \cap\{W : M \subseteq W, W \text{ ist Untervektorraum von } V\}$$

die **lineare Hülle** von M in V. $\mathrm{LH}(M)$ ist der kleinste Untervektorraum von V, der M enthält.
$M \subseteq V$ heißt **Erzeugendensystem** von V, falls $\mathrm{LH}(M) = V$ gilt.
V heißt **endlich erzeugt**, falls ein endliches Erzeugendensystem M von V existiert.

8.3 Lemma
Sei V ein K-Vektorraum und $M \subseteq V$. Dann gilt:

$$\mathrm{LH}(M) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i : k \in \mathbb{N}, v_1, \ldots, v_k \in M, \lambda_1, \ldots, \lambda_k \right\}$$

Das heißt, $\mathrm{LH}(M)$ ist die Menge aller möglichen (endlichen) Linearkombinationen von Vektoren aus M.

8.4 Beispiel
Sei $A \in M(m \times n, K)$ und $a_1, \ldots, a_n \in K^m$ die Spalten von A. Dann gilt

$$\mathrm{Bild}(A) = \{Ax : x \in K^n\} = \mathrm{LH}\{a_1, \ldots, a_n\}.$$

8.5 Definition (lineare Unabhängigkeit)
Sei V ein K-Vektorraum und seien $l \in \mathbb{N}$ und $v_1, \ldots, v_l \in V$. Dann heißen $v_1, \ldots, v_l$ **linear unabhängig**, falls für alle $\lambda_1, \ldots, \lambda_l \in K$ gilt:

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_l v_l = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \cdots = \lambda_l = 0.$$

Allgemein: Eine Menge $M := \{v_i : i \in I\} \subseteq V$ heißt linear unabhängig, wenn jede endliche Teilmenge von M linear unabhängig ist.

8.9 Satz
Sei $A \in M(m \times n, K)$ und $a_1, \ldots, a_n \in K^m$ die Spalten von A. Dann sind äquivalent:

(1) $a_1, \ldots, a_n$ sind linear unabhängig.

(2) $\mathrm{Kern}(A) = \{x \in K^n : Ax = 0\} = \{0\}$.

(3) Für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt: a_i ist keine Linearkombination von $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, a_n$.

8.10 Definition (Basis)
Sei V ein K-Vektorraum und $B \subseteq V$. Dann heißt B eine **Basis** von V, wenn gelten:

(1) B ist linear unabhängig.

(2) $\mathrm{LH}(B) = V$

8.12 Satz
Sei V ein endlich erzeugter K-Vektorraum mit $V \neq \{0\}$ und $B := \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$. Dann sind äquivalent:

(1) B ist Basis von V.

(2) Es gilt $V = \mathrm{LH}(B)$ und für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt $V \neq \mathrm{LH}(B \setminus \{v_i\})$. Das heißt, B ist ein minimales Erzeugendensystem.

(3) B ist linear unabhängig und für jedes $v \in V \setminus B$ ist $B \cup \{v\}$ nicht linear unabhängig. Das heißt, B ist maximal linear unabhängig.

(4) Jedes $v \in V$ lässt sich eindeutig als Linearkombination von B schreiben.

8.13 Satz (Basisauswahlsatz)
Sei $V \neq \emptyset$ ein K-Vektorraum und $M := \{v_1, \dots, v_l\} \subseteq V$ mit $V = \mathrm{LH}(M)$. Dann existiert eine Teilmenge $B \subseteq M$, sodass B eine Basis von V ist.

8.15 Satz
Seien V, W K-Vektorräume, $B := \{v_1, \dots v_n\}$ eine Basis von V und $w_1, \dots, w_n \in W$. Dann existiert genau eine lineare Abbildung $F\colon V \to W$ mit $F(v_i) = w_i$ für alle $1 \leq i \leq n$. Ferner gelten:

(1) F injektiv $\Leftrightarrow$ $w_1, \dots, w_n$ sind linear unabhängig.

(2) F surjektiv $\Leftrightarrow$ $\mathrm{LH}\{w_1, \dots, w_n\} = W$.

(3) F bijektiv $\Leftrightarrow$ $\{w_1, \dots, w_n\}$ ist Basis von W.

8.16 Korollar
Sei V ein K-Vektorraum und $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V.

(1) Es existiert genau ein Isomorphismus $K^n \to V$, und zwar

$$\begin{aligned} \Phi_B\colon K^n &\longrightarrow V \\ x &\longmapsto \sum_{i=1}^{n} x_i v_i. \end{aligned}$$

(2) Ist $B' = \{w_1, \dots, w_m\}$ eine weitere Basis von V, so gilt $n = m$.

8.17 Definition (Dimension)
Sei $V \neq \{0\}$ ein endlich erzeugter K-Vektorraum mit Basis $B := \{v_1, \ldots, v_n\}$. Wir definieren die **Dimension** von V wie folgt:

$$\dim_K(V) := \#B = n.$$

9. Berechnung von Basen

9.1 Lemma (Austauschlemma)
Sei $\{v_1, \ldots, v_l\}$ ein Erzeugendensystem des K-Vektorraums V und sei $i \in \{1, \ldots, l\}$. Dann gilt: Ist $w = \sum_{j=1}^{l} \lambda_j v_j$ mit $\lambda_i \neq 0$, so ist auch $\{v_1, \ldots, v_{i-1}, w, v_{i+1}, \ldots, v_l\}$ ein Erzeugendensystem von V.

9.2 Satz (Basisergänzungssatz)
Sei V ein K-Vektorraum und sei $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V. Sind dann $w_1, \ldots, w_r \in V$ linear unabhängig, so gilt $r \leq n$ und es existiert eine Umnummerierung von $\{v_1, \ldots, v_n\}$, sodass nach dem Umsortieren das System $\{w_1, \ldots, w_r, v_{r+1}, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V ist.

9.3 Satz
Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim_K(V) = n$ und seien $B := \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$. Dann sind äquivalent:

(1) B ist Basis von V.

(2) B ist linear unabhängig.

(3) $\mathrm{LH}(B) = V$.

9.4 Satz
Sei $W \subseteq K^n$ ein Untervektorraum und $w_1, \ldots, w_l$ ein Erzeugendensystem von W. Dann gilt: Entsteht das System $\{\widetilde{w_1}, \ldots, \widetilde{w_l}\}$ aus $\{w_1, \ldots, w_l\}$ durch folgende Umformungen, so ist auch $\{\widetilde{w_1}, \ldots, \widetilde{w_l}\}$ ein Erzeugendensystem von W:

(1) Vertauschen der Reihenfolge.

(2) Multiplikation eines Vektors mit $\lambda \in K \setminus \{0\}$.

(3) Addition des λ-fachen des i-ten Vektors auf den j-ten Vektor.

Das bedeutet: Schreiben wir $w_1, \ldots, w_k$ als Spalten in eine Matrix und führen elementare Spaltenumformungen (vgl. Definition 3.9) durch, bilden die resultierenden Nichtnullspalten ein Erzeugendensystem von W. Bringt man die Matrix auf Spaltenstufenform (vgl. Satz 3.11), erhält man dadurch eine Basis von W.

9.5 Definition (Transponierte Matrix)
Sei $A = (a_{ij})_{ij} \in M(m \times n, K)$, dann ist die **transponierte Matrix** $A^T := (a^T_{ij})_{ij} \in M(n \times m, K)$ von A definiert durch

$$a^T_{ij} := a_{ji},$$

das heißt A^T entsteht aus A durch "spiegeln an der Diagonalen". Es gilt $(A^T)^T = A$, $(A+B)^T = A^T + B^T$, $(\lambda A)^T = \lambda A^T$ und $(AB)^T = B^T A^T$.

10. Basen und lineare Abbildungen

10.1 Satz (Darstellungsmatrix)
Seien V, W endlich dimensionale K-Vektorräume, $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ Basis von V, $C = \{w_1, \dots, w_m\}$ Basis von W sowie $F\colon V \to W$ linear. Jedes $F(v_j) \in W$ besitzt eine eindeutige Darstellung

$$F(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \text{ mit } a_{ij} \in K.$$

Die Matrix

$${}^{C}A^{B}_{F} := (a_{ij})_{ij} \in M(m \times n, K)$$

heißt **Darstellungsmatrix** von F bezüglich der Basen B und C. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(V, W) &\longrightarrow M(m \times n, K) \\ F &\longmapsto {}^{C}A^{B}_{F} \end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus von K-Vektorräumen.

10.3 Lemma
Seien V, W zwei K-Vektorräume, $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ Basis von V, $C = \{w_1, \dots, w_m\}$ Basis von W sowie $F\colon V \to W$ linear. Seien Φ_B, Φ_C die Isomorphismen aus Korollar 8.16. Ist $A := {}^{C}A^{B}_{F}$ und $F_A(x) := Ax$, so ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\Phi_B^{-1}"'] & W \\ K^n \arrow[r, "F_A"'] & K^m \arrow[u, "\Phi_C"'] \end{tikzcd}$$

kommutativ, das heißt es gilt $F = \Phi_C \circ F_A \circ \Phi_B^{-1}$ bzw. $F_A = \Phi_C^{-1} \circ F \circ \Phi_B$.

10.4 Satz
Seien V, W, U K-Vektorräume mit Basen B, C, D und $F\colon V \to W, G\colon W \to U$ linear. Dann gilt:

(1) ${}^{D}A^{B}_{G \circ F} = {}^{D}A^{C}_{G} \cdot {}^{C}A^{B}_{F}$.

(2) F ist bijektiv genau dann, wenn ${}^{C}A^{B}_{F}$ invertierbar ist, und dann gilt $\left({}^{C}A^{B}_{F}\right)^{-1} = {}^{B}A^{C}_{F^{-1}}$.

10.5 Definition (Basiswechselmatrix)
Sei V ein K-Vektorraum und $B = \{v_1, \dots, v_n\}, C = \{w_1, \dots, w_n\}$ zwei Basen von V und $\mathrm{id}\colon V \to V$ die Identität auf V. Dann heißt ${}^{C}A^{B}_{\mathrm{id}}$ die **Basiswechselmatrix** bezüglich B und C.

10.6 Satz
Sei V ein K-Vektorraum und B, C, D Basen von V. Dann gelten:

(1) ${}^{B}A^{B}_{\mathrm{id}} = E_n$.

(2) ${}^{D}A^{B}_{\mathrm{id}} = {}^{D}A^{C}_{\mathrm{id}} \cdot {}^{C}A^{B}_{\mathrm{id}}$.

(3) $\left({}^{C}A^{B}_{\mathrm{id}}\right)^{-1} = {}^{B}A^{C}_{\mathrm{id}}$

10.7 Satz (Basiswechsel)
Seien V, W endlich-dimensionale K-Vektorräume, B_1, B_2 Basen von V und C_1, C_2 Basen von W. Dann gilt für jede lineare Abbildung $F\colon V \to W$:

$$ {}^{C_2}A^{B_2}_{F} = {}^{C_2}A^{C_1}_{\mathrm{id}} \cdot {}^{C_1}A^{B_1}_{F} \cdot {}^{B_1}A^{B_2}_{\mathrm{id}}. $$

10.10 Satz
Sind V, W endlich erzeugte K-Vektorräume und $F\colon V \to W$ ein Isomorphismus, dann gilt $\dim_K(V) = \dim_K(W)$.

10.11 Satz
Sei $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ Basis von V und $A \in \mathrm{GL}(n, K)$. Dann existiert genau eine Basis $C = \{w_1, \dots, w_n\}$ von V mit $A = {}^{B}A^{C}_{\mathrm{id}}$, und diese ist gegeben durch

$$ w_j := \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i \text{ für } 1 \le j \le n. $$

10.13 Satz
Seien V, W endlich dimensionale K-Vektorräume und sei $F\colon V \to W$ linear. Dann existiert ein $k \in \mathbb{N}_0$ und Basen B von V und C von W mit

$$ {}^{C}A^{B}_{F} = \left(\begin{array}{c|c} E_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & 1 & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right) $$

10.15 Satz (Dimensionsformel für lineare Abbildungen)
Seien V, W endlich dimensionale K-Vektorräume und sei $F\colon V \to W$ linear. Dann gilt:

$$ \dim_K(V) = \dim_K(\mathrm{Kern}(F)) + \dim_K(\mathrm{Bild}(F)). $$

10.16 Korollar
Seien V, W K-Vektorräume mit $\dim_K(V) = n, \dim_K(W) = m$ und sei $F\colon V \to W$ linear. Dann gelten:

(1) Ist F injektiv, so gilt $n \leq m$.

(2) Ist F surjektiv, so gilt $n \geq m$.

(3) Ist F bijektiv, so gilt $n = m$.

10.17 Korollar
Seien V, W K-Vektorräume mit $\dim_K(V) = \dim_K(W) = n$ und $F\colon V \to W$ linear. Dann gilt:

$$F \text{ injektiv} \quad \Leftrightarrow \quad F \text{ surjektiv} \quad \Leftrightarrow \quad F \text{ bijektiv}.$$

11. Der Entzerrungsalgorithmus und der Rang einer Matrix

11.3 Definition (Rang einer Matrix)
Sei $A \in M(m \times n, K)$. Dann heißt

$$\mathrm{Rang}(A) := \dim_K(\mathrm{Bild}(A))$$

der **Rang** der Matrix A.

11.4 Lemma
Sei $A \in M(m \times n, K)$ und seien $D \in \mathrm{GL}(m, K)$ und $F \in \mathrm{GL}(n, K)$ invertierbare Matrizen. Dann gilt

$$\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(DA) = \mathrm{Rang}(AF) = \mathrm{Rang}(DAF).$$

Insbesondere ist $\mathrm{Rang}(A)$ invariant unter elementaren Zeilen- und Spaltenumformungen.
Da wir A durch elementare Zeilen- und Spaltenumformungen auf die Gestalt

$$\left(\begin{array}{c|c} E_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & 1 & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right)$$

bringen können, gilt $\mathrm{Rang}(A) = k$ sowie $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(A^T)$.

11.9 Satz
Sei $A \in M(m \times n, K)$ und $b \in K^m$. Das LGS $Ax = b$ ist genau dann lösbar, wenn $\mathrm{Rang}(A \mid b) = \mathrm{Rang}(A)$ gilt. Ist zusätzlich $\mathrm{Rang}(A) = n$, so ist die Lösung eindeutig.

12. Summen und direkte Summen von Vektorräumen

12.1 Definition (Summe von Untervektorräumen)
Sei V ein K-Vektorraum und $W_1, W_2 \subseteq V$ Untervektorräume von V. Dann heißt der Untervektorraum

$$W_1 + W_2 := \{w_1 + w_2 : w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\} \subseteq V$$

die **Summe** von W_1 und W_2.

12.2 Satz (Dimensionsformel für Untervektorräume)
Sei V ein K-Vektorraum und $W_1, W_2 \subseteq V$ endlich dimensionale Untervektorräume von V. Dann gilt

$$\dim_K(W_1 + W_2) = \dim_K(W_1) + \dim_K(W_2) - \dim_K(W_1 \cap W_2).$$

12.3 Definition (Direkte Summe)
Sei V ein K-Vektorraum und $W_1, W_2 \subseteq V$ Untervektorräume von V. Dann heißt V die **direkte Summe** von W_1 und W_2, falls gilt:

(1) $V = W_1 + W_2$

(2) $W_1 \cap W_2 = \{0\}$

Wir schreiben dann $V = W_1 \oplus W_2$.

12.4 Satz
Sei V ein K-Vektorraum und $W_1, W_2 \subseteq V$ Untervektorräume von V. Dann gelten:

(1) Ist $V = W_1 \oplus W_2$ und ist B_1 eine Basis von W_1 und B_2 eine Basis von W_2, so ist $B_1 \cup B_2$ eine Basis von V.

(2) Ist $V = W_1 \oplus W_2$, so ist jedes $v \in V$ eindeutig darstellbar als Summe $v = w_1 + w_2$ mit $w_1 \in W_1$ und $w_2 \in W_2$.

(3) Ist $\dim(V) = n$, so sind äquivalent:

  a) $V = W_1 \oplus W_2$

  b) $V = W_1 + W_2$ und $\dim(W_1) + \dim(W_2) = n$.

  c) $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ und $\dim(W_1) + \dim(W_2) = n$.

12.5 Satz (Existenz von Projektionen)
Sei V ein K-Vektorraum und $W_1, W_2 \subseteq V$ Untervektorräume mit $V = W_1 \oplus W_2$. Dann existieren für $i = 1, 2$ eindeutige lineare Abbildungen

$$\begin{aligned} P_i \colon V &\longrightarrow W_i \\ w_1 + w_2 &\longmapsto w_i. \end{aligned}$$

P_1 und P_2 heißen **Projektionen** auf W_1 und W_2. P_1 und P_2 sind als Abbildungen $V \to V$ **idempotent**, das heißt es gilt $P_1 \circ P_1 = P_1$ bzw. $P_2 \circ P_2 = P_2$.

12.7 Satz
Sei $P\colon V \to V$ eine idempotente lineare Abbildung. Dann gilt $V = \mathrm{Bild}(P) \oplus \mathrm{Kern}(P)$ und $P\colon V \to \mathrm{Bild}(P)$ ist die zugehörige Projektion auf den ersten Summanden.

12.8 Satz (Existenz von Komplementärräumen)
Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und sei $W \subseteq V$ ein Untervektorraum. Dann existiert ein Untervektorraum $\widetilde{W} \subseteq V$ mit $V = W \oplus \widetilde{W}$. Der Raum $\widetilde{W}$ heißt **Komplementärraum** von W in V.

13. Determinanten

13.1 Definition (Determinante)
Sei K ein Körper und sei $n \in \mathbb{N}$ fest. Eine **Determinante** ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} \det_n\colon M(n \times n, K) &\longrightarrow K \\ A &\longmapsto \det_n(A) \end{aligned}$$

mit folgenden Eigenschaften:

(D1) $\det_n(E_n) = 1$, das heißt $\det_n$ ist normiert.

(D2) Besitzt A zwei gleiche Spalten, so gilt $\det_n(A) = 0$, das heißt $\det_n$ ist alternierend.

(D3) $\det_n$ ist linear in jeder Spalte, das heißt für alle $\lambda \in K$ und $a_1, \dots, a_n, a_j' \in K^n$ mit $1 \leq j \leq n$ gilt

$$\det_n(a_1, \dots, a_{j-1}, \lambda a_j + a_j', a_{j+1}, \dots, a_n) = \lambda \cdot \det_n(a_1, \dots, a_j, \dots, a_n) + \det_n(a_1, \dots, a_j', \dots, a_n).$$

13.2 Satz (Eigenschaften von Determinanten)
Sei $\det_n\colon M(n \times n, K) \to K$ wie in Definition 13.1. Dann gelten:

(D4) Entsteht A' aus A durch Vertauschen zweier unterschiedlicher Spalten, so gilt $\det_n(A') = -\det_n(A)$.

(D5) Ist $A = (a_1, \dots, a_n)$ mit $a_j = 0$ für ein $1 \leq j \leq n$, so gilt $\det_n(A) = 0$.

(D6) Für alle $i \neq j$ und $\lambda \in K$ gilt

$$\det_n(a_1, \dots, a_{j-1}, a_j + \lambda a_i, a_{j+1}, \dots, a_n) = \det_n(a_1, \dots, a_n).$$

13.5 Satz (Mehr Eigenschaften von Determinanten)
Sei $\det_n : M(n \times n, K)$ eine Determinante wie in Definition 13.1 und $A, B \in M(n \times n, K)$. Dann gelten:

(1) $\det_n(A) \neq 0 \Leftrightarrow A \in \mathrm{GL}(n, K) \Leftrightarrow \mathrm{Rang}(A) = n \Leftrightarrow$ Die Spalten bzw. Zeilen von A sind linear unabhängig.

(2) Es gilt $\det_n(AB) = \det_n(A) \cdot \det_n(B)$.

(3) Es gilt $\det_n(A^T) = \det_n(A)$ und $\det_n(A^{-1}) = \det_n(A)^1$, falls A invertierbar.

13.8 Korollar
Für jeden Körper K und jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert höchstens eine Determinante $\det_n : M(n \times n, K)$.

14. Die Entwicklungssätze von Laplace und Leibniz

14.1 Satz (Laplace-Entwicklungssatz)
Sei K ein Körper und $A \in M(n \times n, K)$. Für alle $1 \leq i, j \leq n$ sei $\widehat{A_{ij}} \in M((n-1) \times (n-1), K)$ die Matrix, die aus A durch Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte entsteht:

$$\widehat{A_{ij}} := \begin{pmatrix} a_1 1 & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Dann gilt für jedes $1 \leq i, j \leq n$:

$$\det_n(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det_{n-1}(\widehat{A_{ik}}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \det_{n-1}(\widehat{A_{kj}}).$$

14.4 Korollar
Ist $A = (a_{ij})_{ij} \in M(n \times n, K)$ eine obere Dreiecksmatrix, das heißt $a_{ij} = 0$ für alle $i > j$, so gilt

$$\det_n(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

14.5 Definition (Adjunkte)
Sei $A \in M(n \times n, K)$. Wir definieren die **Adjunkte** $\widehat{A} = (\widehat{a_{ij}})_{ij} \in M(n \times n, K)$ von A durch

$$\widehat{a_{ij}} = (-1)^{i+j} \det_{n-1}(\widehat{A_{ji}})$$

mit $\widehat{A_{ji}}$ wie in Satz 14.1.

14.6 Satz
Für alle $A \in M(n \times n, K)$ gilt
$$\widehat{A} \cdot A = A \cdot \widehat{A} = \det_n(A) \cdot E_n.$$

14.8 Satz (CRAMERsche Regel)
Sei $A \in M(n \times n, K)$ mit $\det_n(A) \neq 0$ und sei $b \in K^n$. Für alle $1 \leq i \leq n$ sei A_i die Matrix, die aus A durch Ersetzen der i-ten Spalte mit b entsteht, also

$$A_i = (a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_n).$$

Die eindeutige Lösung $x = (x_i)_i \in K^n$ des LGS $Ax = b$ ist dann gegeben durch

$$x_i = \frac{\det_n(A_i)}{\det_n(A)}.$$

14.10 Definition (Transposition)
Eine Permutation $\tau \in S_n$ (vgl. Beispiel 4.4) heißt **Transposition**, falls $i \neq j \in \{1, \dots, n\}$ existieren mit

$$\tau(x) = \begin{cases} j, & \text{falls } x = i \\ i, & \text{falls } x = j \\ x, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gilt dann $\tau^{-1} = \tau$ bzw. $\tau^2 = \mathrm{id}$.

14.11 Lemma
Sei $\mathrm{id} \neq \sigma \in S_n$. Dann existieren endlich viele Transpositionen $\tau_1, \dots, \tau_l$ mit $\sigma = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_l$, das heißt jede Permutation ist ein Produkt von endlich vielen Transpositionen.

14.13 Definition (Signum)
Sei $\sigma \in S_n$. Wir definieren das **Signum** bzw. **Vorzeichen** von σ durch

$$\mathrm{sign}(\sigma) := \begin{cases} (-1)^l, & \text{falls } \sigma \neq \mathrm{id} \text{ und } \sigma = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_l \\ 1, & \text{falls } \sigma = \mathrm{id}\,. \end{cases}$$

Es gilt $\mathrm{sign}(\sigma) = \det_n(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$ und sign ist ein Gruppenhomomorphismus $(S_n, \circ) \to (\{\pm 1\}, \cdot)$.

14.15 Satz (LEIBNIZsche Determinantenformel)
Sei $A = (a_{ij})_{ij} \in M(n \times n, K)$. Dann gilt

$$\det_n(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}.$$

15. Die VANDERMONDE-Determinante und Polynome

15.1 Satz (VANDERMONDE-Determinante)
Seien $x_0, \dots, x_n \in K$ und $B := (x_{i-1}^{j-1})_{1 \le i,j \le n-1} \in M((n+1) \times (n+1), K)$. Dann gilt **Vandermonde-Determinante**

$$\det_{n+1}(B) = \prod_{0 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

Insbesondere ist B invertierbar, wenn die x_i paarweise verschieden sind.

15.3 Korollar
Sei K ein Körper, $x_0, \dots, x_n \in K$ paarweise verschieden und $y_0, \dots, y_n \in K$. Dann existiert genau ein Polynom $p \in K[T]$ mit $\mathrm{grad}(p) \le n$ und $p(x_i) = y_i$ für alle $0 \le i \le n$.

15.4 Korollar
Sei K ein Körper und $p \in K[T]$ mit $\mathrm{grad}(p) = n \in \mathbb{N}_0$. Dann besitzt p höchstens n paarweise verschiedene Nullstellen in K.

15.6 Satz
Sei K ein Körper mit unendlich vielen Elementen und $\mathcal{P}_K := \{p\colon K \to K[T]\} \subseteq \mathrm{Abb}(K,K)$ der Vektorraum aller **Polynomfunktionen** auf K (vgl. Beispiel 5.2(3)). Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi\colon K[T] &\longrightarrow \mathcal{P}_K \\ p(T) &\longmapsto p \end{aligned}$$

ein Isomorphismus von K-Vektorräumen.

16. Eigenwerte und Eigenvektoren von Endomorphismen

16.2 Definition (Endomorphismus, Diagonalisierbarkeit)
Sei V ein K-Vektorraum. Eine lineare Abbildung $F\colon V \to V$ heißt **Endomorphismus**. Wir setzen

$$\mathrm{End}(V) = \{F\colon V \to V \text{ linear}\}.$$

Ist $\dim(V) = n$, $F \in \mathrm{End}(V)$ und $B := \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V, so bezeichnen wir die Darstellungsmatrix von F bezüglich B mit

$$A_F^B := {}^B A_F^B = (a_{ij})_{ij} \in M(n \times n, K),$$

das heißt es gilt $F(v_j) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} v_i$ (vgl. Satz 10.1).
$F \in \mathrm{End}(V)$ heißt **diagonalisierbar**, falls eine Basis B von V existiert, sodass A_F^B eine Diagonalmatrix ist.

16.3 Definition (Ähnlichkeit, Diagonalisierbarkeit von Matrizen)
Zwei Matrizen $A, B \in M(n \times n, K)$ heißen **ähnlich**, falls eine Matrix $S \in \mathrm{GL}(n, K)$ existiert mit $B = S^{-1}AS$. $A \in M(n \times n, K)$ heißt **diagonalisierbar**, wenn A ähnlich zu einer Diagonalmatrix ist.

16.4 Satz
Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $F \in \mathrm{End}(V)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) F ist diagonalisierbar.

(2) Jede Darstellungsmatrix von A ist diagonalisierbar.

16.7 Definition (Eigenwert, Eigenvektor, Eigenraum)
Sei V ein K-Vektorraum und $F \in \mathrm{End}(V)$. Ein $\lambda \in K$ heißt **Eigenwert** von F, falls ein $v \in V \setminus \{0\}$ existiert mit $F(v) = \lambda v$. Dieses v heißt dann **Eigenvektor** zum Eigenwert λ von F. Der Raum

$$E_\lambda(F) := \{v \in V : F(v) = \lambda v\} = \mathrm{Kern}(\lambda \cdot \mathrm{id}_V - F) = \mathrm{Kern}(F - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)$$

heißt **Eigenraum** von F zum Eigenwert λ.

16.9 Satz
Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $F \in \mathrm{End}(V)$. Dann sind äquivalent:

(1) F ist diagonalisierbar.

(2) V besitzt eine Basis aus Eigenvektoren von F.

16.11 Definition (charakteristische Funktion)
Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum, $F \in \mathrm{End}(V)$ sowie A eine Darstellungsmatrix von F. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \chi_A := \chi_F : K &\longrightarrow K \\ \lambda &\longmapsto \det(\lambda E_n - A) \end{aligned}$$

heißt **charakteristische Funktion** von F bzw. A.

16.12 Satz
Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $F \in \mathrm{End}(V)$. Dann sind für $\lambda \in K$ äquivalent:

(1) λ ist Eigenwert von F.

(2) $\chi_F(\lambda) = 0$.

16.14 Lemma
Eigenvektoren zu zu paarweise verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig.

16.15 Satz
Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $F \in \mathrm{End}(V)$. Besitzt F genau n paarweise verschiedene Eigenwerte, dann ist F diagonalisierbar.

16.16 Satz
Besitzt $A \in M(n \times n, K)$ genau n verschiedene Eigenwerte, dann ist A diagonalisierbar. Sind $v_1, \dots, v_n \in K^n$ die Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ und ist $S = (v_1, \dots, v_n)$, so gilt

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

16.17 Definition (Direkte Summe)
Sei V ein K-Vektorraum und $W_1, \dots, W_l$ Untervektorräume von V. V heißt die **direkte Summe** (vgl. Definition 12.3) von $W_1, \dots, W_l$, wenn gelten:

(1) $V = \sum\limits_{i=1}^{l} W_i := \left\{ \sum\limits_{i=1}^{l} w_i : w_i \in W_i, 1 \leq i \leq l \right\}$

(2) Für alle $1 \leq j \leq l$ gilt $W_j \cap \left(\sum\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{l} W_i \right) = \{0\}$.

Wir schreiben dann

$$V = \bigoplus_{i=1}^{l} W_i.$$

16.18 Lemma
Ist $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{l}$ und B_i eine Basis von W_i, so ist $B = \bigcup\limits_{i=1}^{l}$ eine Basis von V.

16.19 Satz
Sei V ein K-Vektorraum, $F \in \mathrm{End}(V)$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_l \in K$ paarweise verschiedene Eigenwerte von F. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{l} E_{\lambda_i}(F) = \bigoplus_{i=1}^{l} E_{\lambda_i}(F).$$

16.20 Satz

Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $F \in \mathrm{End}(V)$. Dann existieren höchstens n paarweise verschiedene Eigenwerte von F. Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ alle paarweise verschiedenen Eigenwerte von F, so sind äquivalent:

(1) F ist diagonalisierbar.

(2) Es gilt $V = \sum_{i=1}^{l} E_{\lambda_i}(F)$.

(3) Es gilt $\dim(V) = \sum_{i=1}^{l} \dim(E_{\lambda_i}(F))$.

16.21 Definition (Geometrische Vielfachheit)

Die Zahl $\dim(E_{\lambda_i}(F)) \in \mathbb{N}$ heißt die **geometrische Vielfachheit** des Eigenwerts λ_i von F.

II. Lineare Algebra II

1. Erster Abschnitt

1.1 Definition (Eine Definition)
Ich bin Definition.

$$\text{und ich eine Gleichung.} \tag{1}$$

Beweis: Ich bin ein Beweis, der die Gleichung referenziert: (1) □

Referenz auf die Definition: 1.1.

Index

Todo list