

# Skript Einführung in die Funktionalanalysis


Mitschrift der Vorlesung „Einführung in die Funktionalanalysis“ von  
Prof. Dr. Wilhelm Winter

Jannes Bantje

31. Oktober 2014

Aktuelle Version verfügbar bei:



 **GitHub** (inklusive Sourcecode)  
<https://github.com/JaMeZ-B/latex-www>



 **Bittorrent Sync**  
B6WH2DISQ5QVYIRYIEZSF4ZR2IDVKPN3I

## Vorwort — Mitarbeit am Skript

Dieses Dokument ist eine Mitschrift aus der Vorlesung „Einführung in die Funktionalanalysis, WiSe 2014“, gelesen von Prof. Dr. Wilhelm Winter. Der Inhalt entspricht weitestgehend dem Tafelanschrieb. Für die Korrektheit des Inhalts übernehme ich keinerlei Garantie! Für Bemerkungen und Korrekturen – und seien es nur Rechtschreibfehler – bin ich sehr dankbar. Korrekturen lassen sich prinzipiell auf drei Wegen einreichen:

- Persönliches Ansprechen in der Uni, Mails an ✉ [j.bantje@wwu.de](mailto:j.bantje@wwu.de) (gerne auch mit annotieren PDFs)
- *Direktes* Mitarbeiten am Skript: Den Quellcode poste ich auf GitHub (siehe oben), also stehen vielfältige Möglichkeiten der Zusammenarbeit zur Verfügung: Zum Beispiel durch Kommentare am Code über die Website und die Kombination Fork + Pull Request. Wer sich verdient macht oder ein Skript zu einer Vorlesung, die ich nicht besuche, beisteuern will, dem gewähre ich gerne auch Schreibzugriff.

Beachten sollte man dabei, dass dazu ein Account bei [github.com](https://github.com)  notwendig ist, der allerdings ohne Angabe von persönlichen Daten angelegt werden kann. Wer bei GitHub (bzw. dem zugrunde liegenden Open-Source-Programm „git“) – verständlicherweise – Hilfe beim Einstieg braucht, dem helfe ich gerne weiter. Es gibt aber auch zahlreiche empfehlenswerte Tutorials im Internet.<sup>1</sup>

- *Indirektes* Mitarbeiten:  $\text{\TeX}$ -Dateien per Mail verschicken.

Dies ist nur dann sinnvoll, wenn man einen ganzen Abschnitt ändern möchte (zB. einen alternativen Beweis geben), da ich die Änderungen dann per Hand einbauen muss!

## Vorlesungshomepage



<https://wwwmath.uni-muenster.de/u/wilhelm.winter/wwinter/funktionalanalysis.html> 

---

<sup>1</sup>zB. <https://try.github.io/levels/1/challenges/1> , ist auf Englisch, aber dafür interaktives LearningByDoing

# Inhaltsverzeichnis

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1. Metrische Räume und der Satz von Baire</b>  | <b>1</b>  |
| 1.1. Definition: Metrischer Raum . . . . .  | 1         |
| 1.2. Definition: Offen, abgeschlossen und Abschluss . . . . .                                       | 1         |
| 1.3. Definition: Stetigkeit, gleichmäßige Stetigkeit, Isometrie . . . . .                           | 1         |
| 1.4. Definition: Cauchy-Folge und Vollständigkeit . . . . .   | 1         |
| 1.5. Satz: Existenz einer eindeutigen Vervollständigung metrischer Räume . . . . .                  | 2         |
| 1.6. Definition: Raum der beschränkten, stetigen Abbildungen . . . . .                              | 3         |
| 1.7. Bemerkung: $d_{W,X}$ als Metrik auf $C(W, X)$ . . . . .  | 3         |
| 1.8. Proposition: $X$ vollständig $\Rightarrow C - B(W, X)$ und $C(W, X)$ vollständig . . . . .     | 3         |
| 1.9. Proposition über eine Folge von Bällen . . . . .   | 4         |
| 1.10. Satz von Baire . . . . .  | 4         |
| 1.11. Bemerkungen zum Satz von Baire . . . . .  | 5         |
| 1.12. Korollar: Satz der gleichmäßigen Beschränktheit . . . . .                                     | 6         |
| <b>2. Normierte Räume, Hahn-Banach Sätze</b>  | <b>7</b>  |
| 2.1. Definition: Topologischer Vektorraum . . . . .   | 7         |
| 2.2. Proposition: Unterräume topologischer Vektorräume sind topologische Vektorräume . . . . .      | 7         |
| 2.3. Proposition: Normierte Vektorräume sind topologische Vektorräume . . . . .                     | 7         |
| 2.4. Proposition: Stetigkeit einer linearen Abbildung zwischen topologischen Vektorräumen . . . . . | 7         |
| 2.5. Definition: Stetige Funktionale und Operatoren . . . . .                                       | 8         |
| 2.6. Bemerkung: Vektorraumstruktur auf $L(X, Y)$ , Algebrastruktur auf $L(X, X)$ . . . . .          | 8         |
| 2.7. Proposition: Stetigkeit linearer Abbildungen zwischen normierten Vektorräumen . . . . .        | 8         |
| 2.8. Definition: Operatornorm . . . . .   | 8         |
| 2.9. Proposition: $L(X, Y)$ ist ein normierter Raum mit der Operatornorm . . . . .                  | 9         |
| 2.10. Definition: Normierte $\mathbb{K}$ -Algebra . . . . .   | 9         |
| 2.11. Beispiele für normierte Algebren . . . . .  | 9         |
| 2.12. Proposition . . . . .   | 9         |
| 2.13. Proposition und Definition . . . . .  | 10        |
| 2.14. Definition: Banachraum und Banachalgebra . . . . .  | 10        |
| 2.15. Beispiel für eine Banachalgebra . . . . .   | 11        |
| 2.16. Proposition: Produkte und Quotienten von Banachräumen . . . . .                               | 11        |
| 2.17. Definition: Sublineare Abbildung . . . . .  | 11        |
| 2.18. Beispiele für sublineare Abbildungen . . . . .  | 11        |
| 2.19. Proposition . . . . .   | 12        |
| 2.20. Proposition . . . . .   | 12        |
| 2.21. Satz von Hahn-Banach . . . . .  | 13        |
| 2.22. Satz (Hahn-Banach): Existenz einer linearen Fortsetzung . . . . .                             | 13        |
| 2.23. Satz . . . . .  | 13        |
| 2.24. Satz . . . . .  | 14        |
| <b>A. Anhang</b>  | <b>15</b> |
| A.1. Vierecksungleichung . . . . .  | 15        |
| <b>Index</b>  | <b>A</b>  |
| <b>Abbildungsverzeichnis</b>  | <b>B</b>  |
| <b>Todo list</b>  | <b>B</b>  |



# 1. Metrische Räume und der Satz von Baire

## 1.1. Definition

Ein **metrischer Raum** ist ein Paar  $(X, d)$ , wobei  $X$  eine Menge und  $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$  ist, sodass

14 Okt

- 1)  $d(x, y) = 0 \iff x = y \quad \forall x, y \in X$
- 2)  $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$
- 3)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \forall x, y, z \in X$

## 1.2. Definition

Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum

- Eine Teilmenge  $U \subseteq X$  heißt **offen**, falls für jedes  $x \in U$  ein  $\varepsilon > 0$  existiert, so dass

$$B(x, \varepsilon) := \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\} \subset U$$

- Eine Teilmenge  $A \subset X$  heißt **abgeschlossen**, falls  $X \setminus A$  offen ist (als Teilmenge von  $X$ ).
- $\mathcal{T}_X := \{U \subset X \mid U \text{ offen}\}$  ist die Topologie auf  $X$  (die von der Metrik  $d$  induziert wird)
- Falls  $W \subset X$  eine Teilmenge ist, dann bezeichnet  $\overline{W}$  den **Abschluss** von  $W$ , d.h. die kleinste abgeschlossene Teilmenge von  $X$ , die  $W$  enthält. Es gilt

$$\overline{W} = \bigcap_{A \subset X \text{ abg., } W \subset A} A$$

Für metrische Räume gilt:  $\overline{W} = \{\lim_n x_n \mid (x_n)_n \subset W \text{ konvergente Folge}\}$ . Warum gilt  $W \subset \overline{W}$ ?

## 1.3. Definition

Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  zwischen zwei metrischen Räumen  $(X, d_X)$  und  $(Y, d_Y)$  heißt

- **stetig in**  $x \in X$ , falls  $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x' \in X : d_X(x, x') < \delta \implies d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$
- **stetig**, falls  $f$  an jedem Punkt  $x \in X$  stetig ist.  
(Äquivalent: Für jede offene Menge  $V$  in  $Y$  ist  $f^{-1}(V)$  offen in  $X$ )
- **gleichmäßig stetig**, falls  $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x, x' \in X : d_X(x, x') < \delta \implies d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$ .
- $f$  heißt **Isometrie**, falls  $\forall x, x' \in X : d_X(x, x') = d_Y(f(x), f(x'))$ .
- $f$  heißt **isometrischer Isomorphismus**, falls  $f$  bijektiv und isometrisch ist.

automatisch injektiv

 $f^{-1}$  auch

## 1.4. Definition

Eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in einem metrischen Raum  $(X, d)$  heißt **Cauchy**, falls

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, k > N : d(x_n, x_k) < \varepsilon.$$

$(X, d)$  heißt **vollständig**, falls jede Cauchy-Folge in  $X$  konvergiert.

## 1.5. Satz

Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Dann existiert ein vollständiger metrischer Raum  $(\tilde{X}, \tilde{d})$  und eine Isometrie  $\iota : X \hookrightarrow \tilde{X}$ , sodass  $\overline{\iota(X)} = \tilde{X}$  (d.h.  $\iota(X)$  ist dicht in  $\tilde{X}$ ).  $(\tilde{X}, \tilde{d})$  heißt **Vervollständigung** von  $(X, d)$  und ist eindeutig bis auf isometrische Isomorphie.

### Beweis

**Eindeutigkeit:** Angenommen,  $(\hat{X}, \hat{d})$  ist ein weiterer vollständiger metrischer Raum und  $\kappa : X \rightarrow \hat{X}$  eine Isometrie mit  $\overline{\kappa(X)} = \hat{X}$ . Definiere  $\gamma : \hat{X} \rightarrow \tilde{X}$  wie folgt: Falls  $y \in \hat{X}$ , wähle eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $X$ , sodass  $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \kappa(x_n)$ . Setze nun

$$\gamma(y) := \lim_{n \rightarrow \infty} \iota(x_n) \in \tilde{X}$$

Zu zeigen:  $\gamma$  ist ein isometrischer Isomorphismus.

**Injektivität:** Seien  $y, y' \in \hat{X}$  mit  $\gamma(y) = \gamma(y')$ . Dann existieren Folgen  $(x_n)_n, (x'_n)_n$  in  $X$  mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iota(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \iota(x'_n)$$

**Existenz: Konstruktion von  $(\tilde{X}, \tilde{d})$ :** Setze  $Y := \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid (x_n)_n \text{ ist Cauchy-Folge in } X\}$ . Definiere

$$(x_n)_n \sim (x'_n)_n : \iff \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x'_n) = 0$$

$\sim$  ist eine Äquivalenzrelation auf  $Y$ . Definiere nun  $\tilde{X} := Y/\sim$  und  $\tilde{d} : \tilde{X} \times \tilde{X} \rightarrow [0, \infty)$  durch

$$\tilde{d}([(x_n)_n], [(x'_n)_n]) := \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x'_n)$$

$\tilde{d}$  ist wohldefiniert, d.h. falls  $[(x_n)_n] = [(y_n)_n]$  und  $[(x'_n)_n] = [(y'_n)_n]$ , dann ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(y_n, y'_n). \quad (\text{leichte Übung})$$

Weiter ist  $(d(x_n, x'_n))_n$  eine Cauchy-Folge in dem vollständigen Raum  $[0, \infty)$  und somit konvergent: Sei dazu  $\varepsilon > 0$ . Dann existiert ein  $N \in \mathbb{N}$ , sodass  $d(x_n, x_m) \leq \frac{\varepsilon}{2}$  und  $d(x'_n, x'_m) \leq \frac{\varepsilon}{2}$  für alle  $n, m \geq N$ . Dann gilt nach der Vierecksungleichung (siehe Anhang A.1)

$$|d(x_n, x'_n) - d(x_m, x'_m)| \leq d(x_n, x_m) + d(x'_n, x'_m) \leq \varepsilon$$

**Einbettung von  $X$ :** Definiere nun  $\iota : X \rightarrow \tilde{X}$  durch  $x \mapsto [(x, x, x, \dots)] \in \tilde{X}$ .  $\iota$  ist Isometrie, da

$$\tilde{d}(\iota(x), \iota(y)) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x, y) = d(x, y)$$

Sei nun  $[(x_n)_n] \in \tilde{X}$  und  $\varepsilon > 0$ . Da  $(x_n)_n$  eine Cauchy-Folge ist, gibt es ein  $N \in \mathbb{N}$ , sodass für alle  $n, m \geq N$  gilt  $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ . Dann gilt

$$\tilde{d}(\iota(x_N), [(x_n)_n]) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_N, x_n) < \varepsilon$$

$\bar{x} \in \tilde{X}$

**Vollständigkeit von  $(\tilde{X}, \tilde{d})$ :** Sei  $(\bar{x}^m)_m$  eine Cauchyfolge in  $\tilde{X}$ .

$$\implies \forall \varepsilon > 0 : \exists M(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall m, m' > M : \tilde{d}(\bar{x}^m, \bar{x}^{m'}) < \frac{\varepsilon}{3}$$

Wenn  $\bar{x}^m = [(x_n^m)_n]$  und  $\bar{x}^{m'} = [(x_n^{m'})_n]$ , dann gilt also für alle  $m, m' > M(\varepsilon)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n^m, x_n^{m'}) < \frac{\varepsilon}{3} \quad [*]$$

Für alle  $m$  ist  $(x_n^m)_n$  eine Cauchyfolge, also gilt

$$\forall m : \exists N(m) : \forall n, n' \geq N(m) : d(x_n^m, x_{n'}^m) < \frac{1}{m} \quad [**]$$

Setze nun  $z_n := x_{N(n)}^n$ . Behauptung:  $(z_n)_n$  ist eine Cauchyfolge. Sei  $\varepsilon > 0$ . Dann gilt für  $n, m > N = \max\{M(\varepsilon), \frac{3}{\varepsilon}\}$  für ein  $k > N(m), N(n)$

$$d(z_n, z_m) = d(x_{N(n)}^n, x_{N(m)}^m) \leq \underbrace{d(x_{N(n)}^n, x_k^n)}_{[**] < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} \leq \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{d(x_k^n, x_k^m)}_{[*] \leq \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{d(x_k^m, x_{N(m)}^m)}_{[**] < \frac{1}{m} < \frac{1}{N} \leq \frac{\varepsilon}{3}} < \varepsilon$$

$d(z_n, z_m)$  ist  
unabhängig von  $k$ ,  
also kann man  $k$   
beliebig groß  
wählen

$\Rightarrow (z_n)_n$  ist eine Cauchyfolge, also

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N_z(\varepsilon) : \forall n, m > N_z(\varepsilon) : d(z_n, z_m) < \varepsilon \quad [\#]$$

Es bleibt zu zeigen:  $\lim_{m \rightarrow \infty} \bar{x}^m = [(z_n)_n]$ . Sei dazu  $\varepsilon > 0$ . Dann gilt für  $m \geq \max\{\frac{2}{\varepsilon}, N_z(\varepsilon)\}$

$$\tilde{d}(\bar{x}^m, [(z_n)_n]) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n^m, x_{N(n)}^n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \underbrace{d(x_n^m, x_{N(m)}^m)}_{[**] < \frac{1}{m} \leq \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{d(x_{N(m)}^m, x_{N(n)}^n)}_{= d(z_m, z_n) \stackrel{[\#]}{<} \frac{\varepsilon}{2}} \right) < \varepsilon$$

Also gilt  $\bar{x}^m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} [(z_n)_n]$  und  $(\tilde{X}, \tilde{d})$  ist vollständig.  $\square$

## 1.6. Definition

Sei  $(W, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum und  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Sei

$$C_b(W, X) = \{f : W \rightarrow X \mid f \text{ stetig und beschränkt}\}$$

versehen mit der Metrik  $d_{W,X}$ , definiert durch

$$d_{W,X}(f, g) = \sup_{t \in W} d(f(t), g(t))$$

## 1.7. Bemerkung

Auf  $C(W, X) = \{f : W \rightarrow X \text{ stetig}\}$  ist  $d_{W,X}$  eine **erweiterte Metrik**, d.h. der Wert  $\infty$  ist möglich.  $\tilde{d}_{W,X} := \min\{1, d_{W,X}\}$  ist eine „echte“ Metrik auf  $C(W, X)$ .

## 1.8. Proposition

Falls  $X$  vollständig ist, dann sind  $C_b(W, X)$  und  $C(W, X)$  vollständig (bezüglich  $d_{W,X}$  bzw.  $\tilde{d}_{W,X}$ ).

### Beweis

Sei  $(f_n)_n$  eine Cauchy-Folge in  $C_b(W, X)$ , also

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m > N : \sup_{t \in W} d(f_n(t), f_m(t)) < \varepsilon$$

$\Rightarrow$  für alle  $t$  ist  $(f_n(t))_n$  eine Cauchyfolge in  $X$ . Da  $X$  vollständig ist, existiert ein  $x_t \in X$  sodass  $f_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_t$ . Definiere  $f(t) := x_t$  punktweise.

**Vorbereitung:** Es gilt  $\forall \varepsilon > 0 : \exists N_t$  sodass  $d(x_t, f_{N_t}(t)) \leq \varepsilon$ . Weiter ist

$$\sup_{t \in W} d(f_n(t), f_m(t)) \leq \varepsilon \quad \forall n, m \geq N_t$$

$$\Rightarrow \forall t : d(f_n(t), f_m(t)) \leq \varepsilon \quad \forall n, m \geq N$$

Beweis zu  
Ende führen

## 1.9. Proposition

Sei  $(X, d)$  ein vollständiger metrischer Raum und  $(\overline{B}(x_n, \varepsilon_n))_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $\overline{B}(x_{n+1}, \varepsilon_{n+1}) \subseteq \overline{B}(x_n, \varepsilon_n)$  und  $\varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Dann existiert genau ein Punkt in  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{B}(x_n, \varepsilon_n)$ .

### Beweis

**Existenz:** Behauptung: Die Folge der Mittelpunkte  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist eine Cauchy-Folge: Sei  $\varepsilon > 0$ . Finde  $N \in \mathbb{N}$ , sodass  $\varepsilon_n \leq \varepsilon$  für alle  $n \geq N$ . Dann gilt für alle  $n \geq m \geq N$

$$d(x_n, x_m) \leq \varepsilon_m \leq \varepsilon,$$

da  $x_n \in \overline{B}(x_m, \varepsilon)$  ist. Da  $X$  vollständig ist, existiert ein  $x \in X$  mit  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ .

Behauptung:  $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{B}(x_n, \varepsilon_n)$ . Wähle dazu ein  $N \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $(x_n)_{n \geq N}$  eine Cauchy-Folge in  $\overline{B}(x_N, \varepsilon_N)$ .  $\overline{B}(x_N, \varepsilon_N)$  ist ein abgeschlossener Teilraum von  $X$  und somit vollständig. Also ist  $x \in \overline{B}(x_N, \varepsilon_N)$ . Da  $N$  beliebig war, gilt  $x \in \overline{B}(x_n, \varepsilon_n)$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$ .

**Eindeutigkeit:** Es seien  $x, y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{B}(x_n, \varepsilon_n)$ , also  $x, y \in \overline{B}(x_n, \varepsilon_n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gilt

$$d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) \leq 2 \cdot \varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

für jedes  $n \in \mathbb{N}$  und somit  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ . □

## 1.10. Satz von Baire<sup>2</sup>

Es gelten folgende äquivalente Formulierungen:

- a) Sei  $(X, d)$  ein vollständiger metrischer Raum und  $A_0, A_1, \dots$  eine Folge abgeschlossener Teilmengen. Falls  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$  eine offene Kugel enthält, so auch eines der  $A_n$ .
- b) In einem vollständigen metrischen Raum hat eine abzählbare Vereinigung von abgeschlossenen Mengen ohne innere Punkte keine inneren Punkte.
- c) In einem vollständigen metrischen Raum ist ein abzählbarer Durchschnitt von dichten offenen Mengen wieder dicht.

### Beweis

Zunächst die Äquivalenz:

**a)  $\Rightarrow$  b):** Klar, da b) Kontraposition von a) ist.

**b)  $\Rightarrow$  c):** Sei  $U_n \subseteq X$  offen und dicht  $\Rightarrow X \setminus U_n \subseteq X$  abgeschlossen und hat somit keine inneren Punkte. Aus b) folgt nun

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X \setminus U_n = X \setminus \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$$


hat keine inneren Punkte. Also ist  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$  dicht in  $X$ .

**c)  $\Rightarrow$  a):** ebenso.

Wir wollen nun a) durch Widerspruch beweisen, d.h. wir nehmen an, dass gilt: Jede offene Kugel schneidet  $X \setminus A_k$  für jedes  $k \in \mathbb{N}$ . Dazu wollen wir Folgen  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset X$ ,  $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset (0, 1]$  finden mit

$$(i) \quad \varepsilon_k < \frac{1}{k+1},$$

$$(ii) \quad \overline{B}(x_{k+1}, \varepsilon_{k+1}) \subset (X \setminus A_k) \cap B(x_k, \varepsilon_k) \subset \overline{B}(x_k, \varepsilon_k),$$

<sup>2</sup>nach René Louis Baire, [https://de.wikipedia.org/wiki/René\\_Louis\\_Baire](https://de.wikipedia.org/wiki/René_Louis_Baire) 



$$(iii) \overline{B}(x_k, \varepsilon_k) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

für  $k \in \mathbb{N}$ . Dann gilt

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \stackrel{(iii),(ii)}{\supset} \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \overline{B}(x_k, \varepsilon_k) \stackrel{(ii)}{\subset} \bigcap_{k \in \mathbb{N}} (X \setminus A_k) \cap B(x_k, \varepsilon_k) \subset \bigcap_{k \in \mathbb{N}} X \setminus A_k = X \setminus \left( \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \right)$$

Aber wegen (i) und (ii) existiert nach Proposition 1.9 ein  $x \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \overline{B}(x_k, \varepsilon_k)$ .  $\nexists$

Wir suchen also eine Abbildung  $\bar{c} : \mathbb{N} \rightarrow X \times (0, 1]$ ,  $k \mapsto (x_k, \varepsilon_k)$  mit (i),(ii),(iii) für  $k \in \mathbb{N}$ . Setze

$$P_m := \left\{ c : \{0, \dots, m\} \rightarrow X \times (0, 1] \mid \begin{array}{l} (i),(iii) \text{ gilt für } k \in \{0, \dots, m\}, \\ (ii) \text{ gilt für } k \in \{0, \dots, m-1\} \end{array} \right\}$$

$$P_\infty := \{ c : \mathbb{N} \rightarrow X \times (0, 1] \mid (i),(ii),(iii) \text{ gilt für } k \in \mathbb{N} \}$$

Die Menge  $P := (\bigcup_{m \in \mathbb{N}} P_m) \cup P_\infty$  ist partiell geordnet bezüglich  $\prec$ :

$$c \prec c' \text{ falls } m \leq m' \text{ und } c'|_{\{0, \dots, m\}} = c, \text{ bzw. } c' = c \text{ falls } m = m' = \infty$$

$P$  ist nicht leer, denn nach Voraussetzung existiert  $(x_0, \varepsilon_0)$  mit  $0 < \varepsilon_0 < 1$  und  $\overline{B}(x_0, \varepsilon_0) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ , d.h.  $0 \mapsto (x_0, \varepsilon_0) \in P_0$ . Jede total geordnete Teilmenge  $\emptyset \neq \Gamma$  von  $P$  besitzt eine obere Schranke:

- Falls  $\Gamma$  ein  $c \in P_\infty$  enthält, so ist  $c$  obere Schranke. warum?
- Ebenso falls  $\Gamma$  ein  $c \in P_{\overline{m}}$  enthält und  $\Gamma \cap P_{m'} = \emptyset$  für alle  $\overline{m} < m' \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ .
- Falls  $\Gamma \subset \bigcup_{\mathbb{N}} P_m$ , aber  $\Gamma \not\subset \bigcup_{m \leq \overline{m}} P_m$  für jedes  $\overline{m}$ , so definieren wir eine obere Schranke in  $P_\infty$  durch Einschränkung. wie genau?

Mit dem Lemma von Zorn folgt, dass  $P$  ein maximales Element  $\bar{c}$  besitzt. Behauptung:  $\bar{c} \in P_\infty$  wie gewünscht:

Falls  $\bar{c} \in P_m$  für ein  $m \in \mathbb{N}$ , so gilt nach Annahme, dass  $(X \setminus A_m) \cap B(x_m, \varepsilon_m) \neq \emptyset$ . Dann existiert aber  $(x_{m+1}, \varepsilon_{m+1}) \in X \times (0, 1]$  mit  $\varepsilon_{m+1} < \frac{1}{m+2}$  und

$$\overline{B}(x_{m+1}, \varepsilon_{m+1}) \subset (X \setminus A_m) \cap B(x_m, \varepsilon_m)$$

Definiere  $\bar{c} : \{0, \dots, m+1\} \rightarrow X \times (0, 1]$  durch

$$k \mapsto \begin{cases} (x_k, \varepsilon_k), & \text{falls } k = m+1 \\ \bar{c}(k), & \text{falls } k \in \{0, \dots, m\} \end{cases},$$

dann gilt  $\bar{c} \prec \bar{c} \in P_{m+1}$ .  $\nexists$  zur Maximalität von  $\bar{c}$ . □

### 1.11. Bemerkungen

- (i) Die Aussage gilt auch für lokalkompakte Hausdorffräume. (Übung)
- (ii) Tatsächlich genügt eine schwächere Form des Auswahlaxioms(DC); das abzählbare Auswahlaxiom jedoch nicht.
- (iii) Falls  $X$  **separabel** ist (d.h. falls eine abzählbare dichte Teilmenge von  $X$  existiert), dann lässt sich der Satz auch ohne (AC) beweisen. (Übung)

### 1.12. Korollar: Satz der gleichmäßigen Beschränktheit

Sei  $(X, d)$  ein vollständiger metrischer Raum. Sei  $F \subset C(X, \mathbb{R})$  eine Menge, die **punktweise gleichmäßig beschränkt** ist, d.h. für jedes  $x \in X$  existiert  $K_x \in \mathbb{R}$ , sodass

$$|f(x)| \leq K_x \quad \forall f \in F.$$

Dann existieren  $\emptyset \neq U \subset X$  offen und  $K \in \mathbb{R}$  so, dass

$$|f(x)| \leq K \quad \forall x \in U, f \in F$$

#### Beweis

Definiere

$$X \supset A_n := \{x \in X \mid |f(x)| \leq n \forall f \in F\} = \bigcap_{f \in F} f^{-1}([-n, n])$$

Also sind die  $A_n \subset X$  abgeschlossen. Es ist  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = X$ , wegen der Voraussetzung von punktweiser gleichmäßiger Beschränktheit. Außerdem enthält dies eine nichtleere offene Menge. Also existiert ein  $n$  und  $U \subset X$  nichtleer und offen mit  $U \subset A_n$ .  $\square$

## 2. Normierte Räume, Hahn-Banach Sätze

### 2.1. Definition

Sei  $X$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit einer Topologie  $\mathcal{T}$ . Wir sagen  $X$  ist ein **topologischer Vektorraum**, falls Addition und Skalarmultiplikation stetig sind:

$$\begin{aligned} + : X \times X &\rightarrow X, & (x, y) &\mapsto x + y \\ \cdot : K \times X &\rightarrow X, & (\lambda, x) &\mapsto \lambda \cdot x \end{aligned}$$

### 2.2. Proposition

Sei  $X$  ein topologischer  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und  $Y \subset X$  ein Untervektorraum. Dann sind  $Y$  und  $\overline{Y}$  topologische Vektorräume mit der Unterraumtopologie.

#### Beweis

- Klar für  $Y$ .
- Zu zeigen:  $\overline{Y}$  ist ein Untervektorraum. Seien  $x_0, y_0 \in \overline{Y}$  und sei  $U$  eine offene Menge in  $X$  mit  $x_0 + y_0 \in U$ . Dann existieren offene Mengen  $V, W$  von  $X$  mit  $x_0 \in V, y_0 \in W$  und  $V + W \subset U$ , da die Addition stetig ist. Da  $x_0 \in \overline{Y}$  und  $x_0 \in V$ , existiert  $x_1 \in Y$  mit  $x_1 \in V$ . Analog existiert  $y_1 \in Y$  mit  $y_1 \in W$ . Daher ist  $x_1 + y_1 \in Y \cap U$ . Da  $U$  eine beliebige offene Umgebung um  $x_0 + y_0$ , folgt  $x_0 + y_0 \in \overline{Y}$ .

Skalarmultiplikation genauso. □

### 2.3. Proposition

Ein normierter Vektorraum  $(X, \|\cdot\|)$  ist ein topologischer Vektorraum bezüglich der von  $\|\cdot\|$  induzierten Topologie.

#### Beweis

Es gilt

$$\|(x + y) - (x' + y')\|_X \leq \|x - x'\|_X + \|y - y'\|_X$$

Daher ist  $+: X \times X \rightarrow X$  gleichmäßig stetig bezüglich der Norm  $\|(z, z')\|_{X \times X} = \|z\|_X + \|z'\|_X$  auf  $X \times X$ . Ähnlich folgt

$$\|\lambda x - \lambda' x'\|_X = \|\lambda(x - x') + (\lambda - \lambda')x'\|_X \leq |\lambda| \cdot \|x - x'\|_X + |\lambda - \lambda'| \cdot \|x'\|_X$$

Daher ist  $\cdot : K \times X \rightarrow X$  stetig, denn falls  $(\lambda_i)_{i \in I}$  ein Netz in  $\mathbb{K}$ ,  $(x_i)_{i \in I}$  ein Netz in  $X$  mit  $\lambda_i \rightarrow \lambda$ ,  $x_i \rightarrow x$ , dann  $\lambda_i x_i \rightarrow \lambda x$ .

### 2.4. Proposition

Seien  $X, Y$  topologische Vektorräume,  $T : X \rightarrow Y$  linear. Dann sind äquivalent:

- (1)  $T$  ist stetig.
- (2)  $T$  ist stetig in 0.
- (3)  $T$  ist stetig in einem Punkt  $\bar{x}$ .

### Beweis

(1)  $\Rightarrow$  (2)  $\Rightarrow$  (3) ist klar. Wir zeigen (3)  $\Rightarrow$  (1):

Für  $y \in X$  definiere  $L_y : X \rightarrow X, x \mapsto y + x$ . Dann ist  $L_y$  bijektiv und stetig. Da auch  $L_{-y}$  stetig ist, ist  $L_y$  ein Homöomorphismus. Sei nun  $T$  in  $\bar{x}$  stetig. Sei  $x_0 \in X$ . Wir zeigen:  $T$  ist stetig in  $x_0$ . Setze  $y := \bar{x} - x_0$ . Dann ist

$$T(x) = T(x + y - y) = T(-y) + T(x + y) = L_{T(-y)} \circ T \circ L_y(x)$$

Da  $L_y(x_0) = \bar{x}$ ,  $T$  stetig in  $\bar{x}$  ist und  $L_y, L_{T(-y)}$  stetig sind, ist somit  $T$  stetig in  $x_0$ .  $\square$

## 2.5. Definition

Für topologische Vektorräume  $X, Y$  definieren wir

$$L(X, Y) = \{T : X \rightarrow Y \mid T \text{ linear und stetig}\}$$

Wir schreiben  $X' := L(X, K)$  für den **Dualraum** von  $X$ . Die Elemente von  $X'$  heißen (stetige) **Funktionale**.<sup>3</sup> Die Elemente von  $L(X, X)$  heißen (stetige) **Operatoren** auf  $X$ .

## 2.6. Bemerkung

$L(X, Y)$  und  $L(X, K) = X'$  sind Vektorräume, wobei die Vektorraumstruktur punktweise definiert ist.  $L(X, X)$  ist sogar eine Algebra mittels Komposition.

## 2.7. Proposition

Seien  $X, Y$  normierte Vektorräume,  $T : X \rightarrow Y$  linear. Dann ist  $T$  stetig genau dann, wenn ein  $\mu \geq 0$  existiert, sodass

$$\|T(x)\|_Y \leq \mu \cdot \|x\|_X \quad \forall x \in X$$

Ein stetiger Operator zwischen normierten Vektorräumen heißt deswegen aus **beschränkt**

### Beweis

„ $\Leftarrow$ “: Klar: Wenn  $x_n \rightarrow 0$ , dann  $T(x_n) \rightarrow 0$ , denn  $\|T(x_n)\| \leq \mu \|x_n\| \rightarrow 0$

„ $\Rightarrow$ “: Angenommen  $T$  ist stetig. Dann setzen wir

$$\mu := \sup \left\{ \frac{1}{\|x\|_X} \cdot \|T(x)\|_Y \mid x \in X \setminus \{0\} \right\}$$

Falls  $\mu = \infty$ , dann existieren  $x_n \in X$  mit  $\frac{1}{\|x_n\|_X} \cdot \|T(x_n)\|_Y \geq n$ . Betrachte  $x'_n := \frac{1}{n \cdot \|x_n\|_X} \cdot x_n$ , dann  $\|x'_n\| = \frac{1}{n}$ , also  $x'_n \rightarrow 0$ . Aber es gilt  $T(x'_n) \not\rightarrow 0$ , denn

$$\|T(x'_n)\|_Y = \frac{1}{n \cdot \|x_n\|_X} \cdot \|T(x_n)\|_Y \geq 1$$

für alle  $n$ ,  $\nrightarrow$  zur Stetigkeit von  $T$ . Also  $\mu < \infty$ .  $\square$

## 2.8. Definition

Seien  $X, Y$  normierte Vektorräume,  $T \in L(X, Y)$ . Die **Norm** (oder **Operatornorm**) von  $T$  ist

$$\|T\| = \sup \left\{ \frac{1}{\|x\|_X} \cdot \|T(x)\|_Y \mid x \in X \setminus \{0\} \right\} = \sup \left\{ \|T(x)\|_Y \mid x \in X \text{ mit } \|x\|_X = 1 \right\}$$

Nach 2.7 ist  $\|T\| < \infty$  und  $\|Tx\|_Y \leq \|T\| \cdot \|x\|_X$  für alle  $x \in X$ .

<sup>3</sup>Aus der linearen Algebra:  $X^* = \text{Hom}(X, \mathbb{R}) = \{T : X \rightarrow \mathbb{R} \mid T \text{ linear}\}$ . Die Elemente von  $X^*$  heißen Funktionale

## 2.9. Proposition

Seien  $X, Y$  normierte Räume, betrachte  $L(X, Y)$  mit  $\|\cdot\|$ . Dann ist  $L(X, Y)$  ein normierter Raum.

**Beweis**

- $\|T\| \geq 0$  für alle  $T \in L(X, Y)$ .

- Es gilt

$$\begin{aligned} \|T\| = 0 &\iff \forall x \in X, \|x\|_X = 1 : \|Tx\|_Y = 0 \iff \forall x \in X, \|x\|_X = 1 : Tx = 0 \\ &\iff \forall x \in X : Tx = 0 \\ &\iff T = 0 \end{aligned}$$

- Sei  $\lambda \in K, T \in L(X, Y)$ . Dann gilt

$$\|\lambda \cdot T\| = \sup_{\|x\|_X=1} \|\lambda \cdot T(x)\|_Y = \sup_{\|x\|_X=1} |\lambda| \cdot \|Tx\|_Y = |\lambda| \cdot \sup_{\|x\|_X=1} \|Tx\|_Y = |\lambda| \cdot \|T\|$$

- Seien  $T_1, T_2 \in L(X, Y)$  und  $x \in X$  mit  $\|x\|_X = 1$ . Dann gilt

$$\|(T_1 + T_2)(x)\|_Y = \|T_1x + T_2x\|_Y \leq \|T_1x\|_Y + \|T_2x\|_Y$$

Damit folgt weiter

$$\begin{aligned} \|T_1 + T_2\| &= \sup_{\|x\|_X=1} \|(T_1 + T_2)(x)\|_Y \leq \sup_{\|x\|_X=1} (\|T_1x\|_Y + \|T_2x\|_Y) \\ &\leq \sup_{\|x\|_X=1} \sup_{\|x'\|_X=1} (\|T_1x\|_Y + \|T_2x\|_Y) \\ &= \|T_1\| + \|T_2\| \end{aligned}$$

□

## 2.10. Definition

Eine  $\mathbb{K}$ -Algebra heißt **normiert**, falls  $A$  mit einer Norm  $\|\cdot\|$  versehen ist, so dass  $(A, \|\cdot\|)$  ein normierter Vektorraum und

$$\|ab\| \leq \|a\| \cdot \|b\| \quad \forall a, b \in A$$

Falls  $A$  unital ist, d.h. es existiert ein Einselement  $1_A$ , dann gilt  $\|1_A\| \leq 1$ .

**Bemerkung**

Wenn  $\|1_A\| < 1$ , dann  $\|1_A\| = \|1_A \cdot 1_A\| \leq \|1_A\| \cdot \|1_A\| \Rightarrow \|1_A\| = 0$ . Also  $1_A = 0$  und damit  $A = \{0\}$ .

## 2.11. Beispiele

- (i)  $C(\Omega, K)$ , wobei  $\Omega$  ein kompakter Hausdorffraum und die Multiplikation punktweise ist. Betrachte  $\|\cdot\|_\infty$ . Für  $f, g : \Omega \rightarrow K$  gilt dann  $\|f \cdot g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \cdot \|g\|_\infty$

- (ii)  $L(X, X)$ , für  $X$  ein normierter Raum, mit  $\|\cdot\|$ . Für  $S, T \in L(X, X)$  gilt

$$\|ST\| = \sup_{\|x\|_X=1} \|S(T(x))\|_X \leq \sup_{\|x\|_X=1} (\|S\| \cdot \|Tx\|_X) = \|S\| \cdot \|T\|.$$

## 2.12. Proposition

Seien  $X, Y$  normierte Räume. Dann ist  $X \times Y$  ein normierter Raum mit

$$\begin{aligned} \|(x, y)\|_1 &:= \|x\|_X + \|y\|_Y \quad \text{für } (x, y) \in X \times Y \\ \text{oder} \quad \|(x, y)\|_\infty &:= \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\} \end{aligned}$$

Beide Normen sind äquivalent.

## 2.13. Proposition und Definition

Sei  $X$  ein normierter Raum und  $Y \subseteq X$  ein abgeschlossener Unterraum. Dann ist  $X/Y = \{x + Y \mid x \in X\}$  ein normierter Raum mit

$$\|x + Y\|_{X/Y} := \inf\{\|x + y\|_X \mid y \in Y\}$$

Die Quotientenabbildung  $q : X \rightarrow X/Y, x \mapsto x + Y$  ist stetig, linear und  $\|q\| \leq 1$  und offen, d.h. bildet offene Mengen in  $X$  auch offene Mengen in  $X/Y$  ab.

### Bemerkung

Daraus folgt, dass Normtopologie und Quotiententopologie auf  $X/Y$  gleich sind.

### Beweis

a)  $X/Y$  ist ein Vektorraum mit  $(x + Y) + (x' + Y) = (x + x') + Y$ .

b) Sei  $\bar{x} = x + Y \in X/Y$ . Es gilt

- $\|\bar{x}\| \geq 0$  klar für alle  $\bar{x} \in X/Y$
- Angenommen  $\|\bar{x}\|_{X/Y} = 0$ , d.h.  $\inf_{y \in Y} \|x + y\|_X = 0$ . Also existiert eine Folge  $(y_n)_n \subset Y$  mit  $\|x + y_n\|_X \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -x$ . Also ist  $-y$  und damit auch  $y$  in  $Y$ , da  $Y$  abgeschlossen ist. Damit ist  $\bar{x} = 0$

c) Sei  $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}, x \in X$ . Dann gilt

$$\|\lambda \cdot \bar{x}\|_{X/Y} = \inf_{y \in Y} \|\lambda x + y\|_X = \inf_{y \in Y} \|\lambda x + \lambda y\|_X = \inf_{y \in Y} |\lambda| \cdot \|x + y\|_X = |\lambda| \cdot \|\bar{x}\|_{X/Y}$$

d) Seien  $\bar{x}, \bar{y} \in X/Y$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \|\bar{x} + \bar{y}\|_{X/Y} &= \inf_{z \in Y} \|x + y + z\|_X = \inf_{z, z' \in Y} \|x + y + z + z'\|_X \leq \inf_{z, z' \in Y} (\|x + z\|_X + \|y + z'\|_X) \\ &= \|\bar{x}\|_{X/Y} + \|\bar{y}\|_{X/Y} \end{aligned}$$

Damit ist  $\|\cdot\|_{X/Y}$  eine Norm auf  $X/Y$ .

e) Linearität von  $q$  ist klar. Es gilt

$$\|\bar{x}\|_{X/Y} = \inf_{y \in Y} \|x + y\|_X \leq \|x\|_X$$

Also

$$\|q\| = \sup_{\|x\|_X=1} \|q(x)\|_{X/Y} \leq \sup_{\|x\|_X=1} \|x\|_X = 1$$

f) Zu zeigen:  $q$  ist offen. Sei  $x \in X, \varepsilon > 0$ . Betrachte die offene Kugel  $B(x, \varepsilon) \subset X$ . Wir zeigen  $B(\bar{x}, \varepsilon) \subset q(B(x, \varepsilon))$ . Sei also  $\bar{z} = z + Y$  in  $B(\bar{x}, \varepsilon)$ . Dann gilt  $\|\bar{x} - \bar{z}\|_{X/Y} < \varepsilon$ , worauf folgt

$$\inf_{y \in Y} \|x - z + y\|_X < \varepsilon$$

$\Rightarrow$  es existiert  $y \in Y : \|x - z + y\|_X < \varepsilon$ . Es gilt  $\bar{z} = \overline{z - y} \in q(B(x, \varepsilon))$ , da  $z - y \in B(x, \varepsilon)$ .

Sei  $V \subset X$  offen, zeige  $q(V) \subset X/Y$  offen. Für  $x \in V$  finde  $\varepsilon > 0$ , sodass  $B(x, \varepsilon) \subset V$ . Dann folgt  $B(\bar{x}, \varepsilon) \subseteq q(B(x, \varepsilon)) \subseteq q(V)$ .  $\square$

## 2.14. Definition

Ein **Banachraum** ist ein vollständiger, normierter Raum. Eine **Banachalgebra** ist eine vollständige normierte Algebra.

## 2.15. Beispiel

$C(\Omega, \mathbb{K})$ , wobei  $\Omega$  ein kompakter Hausdorffraum ist, ist eine Banachalgebra.

## 2.16. Proposition

Produkte und Quotienten (nach abgeschlossenen Unterräumen) von Banachräumen sind wieder Banachräume.

### Beweis

**Produkt**  $X \times Y$ : Es gilt  $\|(x, y)\|_\infty = \max\{\|x\|, \|y\|\}$ . Sei  $((x_n, y_n))_n \subset X \times Y$  eine Cauchyfolge. Dann sind  $(x_n)_n$  und  $(y_n)_n$  Cauchyfolgen und es gilt  $x_n \rightarrow x$  und  $y_n \rightarrow y$  und somit auch  $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$ .

**Quotient**  $X/Y$ : Sei  $X$  ein Banachraum und  $Y \subseteq X$  ein abgeschlossener Unterraum.

Falls  $\bar{x}, \bar{y} \in X/Y$ , so existiert  $y' \in Y$ , sodass  $\bar{y} = \overline{y'}$  und

$$\|x - y'\|_X \leq 2 \cdot \|\bar{x} - \bar{y}\|_{X/Y}$$

Sei nun  $(\bar{x}_n)_n$  eine Cauchyfolge in  $X/Y$ . Es gibt eine Teilfolge  $(\bar{x}_{n_k})_k$ , sodass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|\bar{x}_{n_{k-1}} - \bar{x}_{n_k}\|_{X/Y} < \infty$$

Falls  $(\bar{x}_{n_k})_k$  konvergiert, dann auch  $(\bar{x}_n)_n$ . Wir dürfen also annehmen, dass  $\sum_{n=1}^{\infty} \|\bar{x}_{n-1} - \bar{x}_n\| < \infty$ . Wähle  $x'_1 \in \bar{x}_1$ . Wähle induktiv  $x'_n \in X$  mit

$$\|x'_{n-1} - x'_n\|_X \leq 2 \cdot \|\bar{x}_{n-1} - \bar{x}_n\|_{X/Y}$$

und  $x'_n \in \bar{x}_n$ . Dann gilt  $\sum_{n=1}^{\infty} \|x'_{n-1} - x'_n\|_X < \infty$ . Daher ist  $(x'_n)_n$  eine Cauchyfolge in  $X$ . Also existiert  $x \in X$  mit  $x_n \rightarrow x$ . Dann  $\bar{x}_n \rightarrow \bar{x}$ .  $\square$

## 2.17. Definition

Sei  $X$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Eine Abbildung  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **sublinear**, falls gilt:

(i)  $\varphi(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot \varphi(x)$ , für  $x \in X$ ,  $\lambda \in [0, \infty)$

(ii)  $\varphi(x + y) \leq \varphi(x) + \varphi(y)$ , für  $x, y \in X$ .

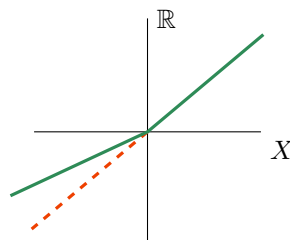
Setze  $\mathcal{S}(X) := \{\varphi : X \rightarrow \mathbb{R} \mid \varphi \text{ sublinear}\}$ .  $\mathcal{S}(X)$  ist partiell geordnet mit

$$\varphi \leq \psi : \iff \varphi(x) \leq \psi(x), \quad x \in X$$

## 2.18. Beispiele

(i) Halbnormen sind sublinear.

(ii)



$$0 = \varphi(0) = \varphi(x - x) \leq \varphi(x) + \varphi(-x).$$

## 2.19. Proposition

Sei  $X$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum.  $\mathcal{S}(X)$  ist nach unten induktiv geordnet, d.h. jede nichtleere total geordnete Teilmenge besitzt eine untere Schranke.

### Beweis

Sei  $\emptyset \neq (\varphi_i)_I \subseteq \mathcal{S}(X)$  total geordnet. Setze  $\varphi(x) := \inf_{i \in I} \varphi_i(x)$ , dann gilt

$$-\varphi_i(-x) \leq \varphi_i(x) \implies -\varphi(x) \leq \varphi(x) \leq \varphi_i(x) < \infty$$

ebenso  $-\varphi(x) \leq \varphi(-x) \leq \varphi_i(-x)$  für  $x \in X, i \in I$ . Insbesondere gilt  $-\infty < \varphi(x) < \infty, x \in X$ . Die Sublinearität von  $\varphi$  und  $\varphi \leq \varphi_i, i \in I$  sind klar (Warum?).  $\square$

## 2.20. Proposition

Sei  $X$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum und  $\varphi \in \mathcal{S}(X)$ . Dann ist  $\varphi$  in  $\mathcal{S}(X)$  minimal genau dann, wenn  $\varphi$  linear ist.

### Beweis

" $\Leftarrow$ ": Sei  $\psi \leq \varphi$  mit  $\psi$  sublinear und  $\varphi$  linear. Dann folgt  $\psi(x) \leq \varphi(x)$  und  $\psi(-x) \leq \varphi(-x)$  für  $x \in X$ .

$$\implies -\psi(x) \leq \psi(-x) \leq \varphi(-x) = -\varphi(x)$$

Daraus folgt  $\varphi(x) \leq \psi(x)$  und somit muss  $\varphi = \psi$  gelten. Also ist  $\varphi$  minimal.

" $\Rightarrow$ ": Sei  $\varphi \in \mathcal{S}(X)$  minimal. Zu  $\bar{x} \in X$  definiere  $\varphi_{\bar{x}} : X \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$\varphi_{\bar{x}}(x) := \inf_{\lambda \geq 0} \left( \varphi(x + \lambda \cdot \bar{x}) - \lambda \cdot \varphi(\bar{x}) \right)$$

mit (ii) aus 2.17

Es gilt  $\varphi_{\bar{x}}(x) \in (-\infty, \infty)$ , denn für  $x \in X, \lambda \geq 0$  ist

$$-\varphi(-x) \leq \varphi(x + \lambda \cdot \bar{x}) - \lambda \cdot \varphi(\bar{x}) \leq \varphi(x)$$

$\varphi_{\bar{x}}$  ist sublinear:

(i) Sei  $\mu > 0$ . Dann gilt für  $x \in X$ .

$$\begin{aligned} \varphi_{\bar{x}}(\mu \cdot x) &= \inf_{\lambda \geq 0} \left( \varphi(\mu \cdot x + \lambda \cdot \bar{x}) - \lambda \cdot \varphi(\bar{x}) \right) = \inf_{\lambda \geq 0} \mu \cdot \left( \varphi\left(x + \frac{\lambda}{\mu} \cdot \bar{x}\right) - \frac{\lambda}{\mu} \cdot \varphi(\bar{x}) \right) \\ &= \mu \cdot \inf_{\lambda' \geq 0} \left( \varphi(x + \lambda' \cdot \bar{x}) - \lambda' \cdot \varphi(\bar{x}) \right) \\ &= \mu \cdot \varphi_{\bar{x}}(x) \end{aligned}$$

$\varphi_{\bar{x}}(0 \cdot x) = 0$  ist klar.

(ii) Zu  $x, y \in X, \varepsilon > 0$  wähle  $\lambda_x, \lambda_y \geq 0$  mit

$$\begin{aligned} \varphi_{\bar{x}}(x) &\geq \varphi(x + \lambda_x \cdot \bar{x}) - \lambda_x \cdot \varphi(\bar{x}) - \varepsilon \\ \varphi_{\bar{x}}(y) &\geq \varphi(y + \lambda_y \cdot \bar{x}) - \lambda_y \cdot \varphi(\bar{x}) - \varepsilon \end{aligned}$$

Setze  $\lambda := \lambda_x + \lambda_y$ , dann gilt

$$\begin{aligned} \varphi_{\bar{x}}(x) + \varphi_{\bar{x}}(y) &\geq \varphi(x + \lambda_x \cdot \bar{x}) + \varphi(y + \lambda_y \cdot \bar{x}) - \lambda \cdot \varphi(\bar{x}) - 2\varepsilon \\ &\geq \varphi(x + y + \lambda \cdot \bar{x}) - \lambda \cdot \varphi(\bar{x}) - 2\varepsilon \\ &\geq \varphi_{\bar{x}}(x + y) - 2\varepsilon \end{aligned}$$

Da  $\varepsilon > 0$  beliebig war, gilt  $\varphi_{\bar{x}}(x) + \varphi_{\bar{x}}(y) \geq \varphi_{\bar{x}}(x + y)$ . Also ist  $\varphi_{\bar{x}}$  sublinear.

$\varphi_{\bar{x}} \leq \varphi$  ist klar. Da  $\varphi$  minimal ist, folgt  $\varphi_{\bar{x}} = \varphi$ . Wir erhalten

$$\varphi(x) + 1 \cdot \varphi(\bar{x}) \leq \varphi(x + 1 \cdot \bar{x}) \leq \varphi(x) + 1 \cdot \varphi(\bar{x})$$

für jedes  $x, \bar{x} \in X$ . Also ist  $\varphi$  additiv und somit linear.  $\square$



## 2.21. Satz von Hahn-Banach

Sei  $X$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum und  $\varphi \in \mathcal{S}(X)$ . Dann existiert  $\psi : X \rightarrow \mathbb{R}$  linear mit  $\psi \leq \varphi$ .

### Beweis

Sei  $\mathcal{S}_\varphi := \{\varphi' \in \mathcal{S}(X) \mid \varphi' \leq \varphi\} \ni \varphi$ . Nach Proposition 2.19 ist  $\mathcal{S}(X)$  und damit auch  $\mathcal{S}_\varphi$  nach unten induktiv geordnet. Nach dem Lemma von Zorn enthält  $\mathcal{S}_\varphi$  ein minimales Element  $\psi$ .  $\psi$  ist auch minimal in  $\mathcal{S}(X)$  (Warum?)

Also ist  $\psi$  linear nach Proposition 2.20. □

Wichtige Folgerungen: Fortsetzungs- und Trennungssätze.

*$X$  ist nicht  
 zwangsweise  
 endlich-  
 dimensional!*

## 2.22. Satz

Sei  $X$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum und  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$  sublinear. Sei  $Y \subset X$  ein linearer Unterraum und  $\psi : Y \rightarrow \mathbb{R}$  linear mit  $\psi \leq \varphi|_Y$ . Dann existiert  $\bar{\psi} : X \rightarrow \mathbb{R}$  linear mit  $\bar{\psi}|_Y = \psi$  und  $\bar{\psi} \leq \varphi$ .

### Beweis

Definiere  $\tilde{\varphi} : X \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $\tilde{\varphi}(x) := \inf_{y \in Y} (\varphi(x - y) + \psi(y))$ ,  $x \in X$ . Es gilt

$$\varphi(x - y) + \psi(y) \geq \varphi(-y) - \varphi(-x) - \psi(-y) \geq -\varphi(-x) > -\infty \quad \forall x \in X, y \in Y$$

Also ist  $\tilde{\varphi}$  wohldefiniert.  $\tilde{\varphi}$  ist sublinear: vergleiche 2.20. Nach Satz von Hahn-Banach (2.21) existiert ein  $\bar{\psi} : X \rightarrow \mathbb{R}$  linear mit  $\bar{\psi} \leq \tilde{\varphi}$ . Aus 2.20 folgt, dass  $\bar{\psi}$  minimal in  $\mathcal{S}(X)$  ist. Ebenso ist  $\bar{\psi}|_Y$  minimal in  $\mathcal{S}(Y)$ . Also gilt

$$\bar{\psi} \leq \tilde{\varphi}|_Y \leq \psi \quad \Rightarrow \quad \psi = \bar{\psi}|_Y \quad \square$$

## 2.23. Satz

Sei nun  $X$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und  $p : X \rightarrow \mathbb{R}$  eine Halbnorm. Sei  $Y \subset X$  ein Untervektorraum und  $\psi : Y \rightarrow \mathbb{K}$  linear mit  $|\psi(y)| \leq p(y)$  für  $y \in Y$ . Dann existiert  $\bar{\psi} : X \rightarrow \mathbb{K}$  linear mit  $\bar{\psi}|_Y = \psi$  und

$$|\bar{\psi}(x)| \leq p(x) \quad \text{für } x \in X$$

### Beweis

Sei zunächst  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .  $p$  ist sublinear und es gilt  $\psi \leq p|_Y$ . Nach 2.22 existiert eine lineare Fortsetzung  $\bar{\psi} : X \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\bar{\psi} \leq p$ . Es gilt auch

$$-\bar{\psi}(x) = \bar{\psi}(-x) \leq p(-x) = p(x) \quad \Rightarrow \quad |\bar{\psi}(x)| \leq p(x) \quad \text{für } x \in X$$

Sei nun  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Definiere  $\psi_1 := \operatorname{Re}(\psi) : Y \rightarrow \mathbb{R}$ .  $\psi_1$  ist  $\mathbb{R}$ -linear (warum?). Es gilt  $|\psi_1(y)| \leq |\psi(y)| \leq p(y)$ ,  $y \in Y$ . Es existiert also ein  $\bar{\psi}_1 : X \rightarrow \mathbb{R}$   $\mathbb{R}$ -linear mit

$$\bar{\psi}_1(y) = \psi_1(y), \quad y \in Y \quad \text{und} \quad |\bar{\psi}_1(x)| \leq p(x), \quad x \in X$$

Definiere jetzt  $\bar{\psi} : X \rightarrow \mathbb{C}$  durch  $\bar{\psi}(x) := \bar{\psi}_1(x) - i \cdot \bar{\psi}_1(i \cdot x)$ ,  $x \in X$ . Dann ist  $\bar{\psi}$   $\mathbb{C}$ -linear (warum?). Weiter gilt  $\bar{\psi}(y) = \psi(y)$  für  $y \in Y$ . ( $\operatorname{Re}(\bar{\psi}|_Y) = \operatorname{Re}(\psi)$  und  $\bar{\psi}|_Y$  und  $\psi$  sind beide  $\mathbb{C}$ -linear).

Zu  $x \in X$  wähle  $\lambda \in \mathbb{C}$  mit  $|\lambda| = 1$  und

$$|\bar{\psi}(x)| = \lambda \cdot \bar{\psi}(x) = \bar{\psi}(\lambda \cdot x) = \bar{\psi}_1(\lambda \cdot x) \leq p(\lambda \cdot x) = |\lambda| \cdot p(x) = p(x) \quad \square$$

## 2.24. Satz

Sei  $X$  ein normierter  $\mathbb{K}$ -Vektorraum,  $Y \subset X$  ein Unterraum und  $\psi : Y \rightarrow \mathbb{K}$  linear und stetig. Dann existiert eine lineare Fortsetzung  $\bar{\psi} : X \rightarrow \mathbb{K}$  mit  $\|\bar{\psi}\|_{L(X, \mathbb{K})} = \|\psi\|_{L(Y, \mathbb{K})}$ .

### Beweis

Definiere eine Halbnorm durch  $p(x) := \|x\| \cdot \|\psi\|$ . Nach Satz 2.23 besitzt  $\psi$  eine lineare Fortsetzung  $\bar{\psi}$  mit  $|\bar{\psi}(x)| \leq p(x) = \|\psi\| \cdot \|x\|$ ,  $x \in X$ . Es folgt  $\|\bar{\psi}\| \leq \|\psi\|$ .  $\|\psi\| \leq \|\bar{\psi}\|$  ist trivial, da  $\psi|_Y = \bar{\psi}$ .  $\square$

## A. Anhang

### A.1. Vierecksungleichung

Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $x, y, u, v \in X$ . Dann gilt

$$|d(x, y) - d(u, v)| \leq d(x, u) + d(y, v)$$

#### Beweis

Einerseits gilt nach der Dreiecksungleichung

$$d(x, y) \leq d(x, u) + d(u, v) + d(v, y) \implies d(x, y) - d(u, v) \leq d(x, u) + d(y, v)$$


Andererseits aber auch

$$d(u, v) \leq d(u, x) + d(x, y) + d(y, v) \implies d(u, v) - d(x, y) \leq d(x, u) + d(y, v)$$

Insgesamt folgt also die Behauptung. □



## Index

Die **Seitenzahlen** sind mit [Hyperlinks](#) zu den entsprechenden Seiten versehen, also anklickbar 

abgeschlossen, 1

Abschluss, 1

Banachalgebra, 10

Banachraum, 10

Cauchy-Folge, 1

Dualraum, 8

erweiterte Metrik, 3

Funktionale, 8

gleichmäßig stetig, 1

Isometrie, 1

isometrischer Isomorphismus, 1

metrischer Raum, 1

normierte  $K$ -Algebra, 9

offen, 1

Operator

    beschränkter Operator, 8

Operatoren, 8

Operatornorm, 8

punktweise gleichmäßig beschränkt, 6

separabel, 5

stetig, 1

topologischer Vektorraum, 7

Vervollständigung, 2

vollständig, 1

## Abbildungsverzeichnis

### Todo's und andere Baustellen

|   |   |
|---|---|
| Achtung Wortspiel: Beweis <i>vervollständigen</i> ;-D | 2 |
| Beweis zu Ende führen                                 | 3 |