Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

Fachbereich 10
Mathematik und
Informatik

Finanzmathematik

Mitschrift der Tafelnotizen

Tobias Wedemeier

30. Januar 2015
gelesen von
PD Dr. Paulsen

Hierbei handelt es sich um eine Mitschrift der Tafelnotizenvon **PD Dr. Paulsen**, WWU Münster, aus der Vorlesung **Finanzmathematik** im Wintersemester 2014/15. Dies ist kein Skript der Vorlesung und keine eigene Arbeit des Autors.

Für Fehler in der Mitschrift wird keine Haftung übernommen. Hinweise auf Fehler sind gerne gesehen, hierfür kann man mich in der Uni ansprechen oder alternativ eine e-Mail an: *tobias.wedemeier@gmx.de* Auch ist eine Mitarbeit über Github möglich.

Wenn Teile aus der Vorlesung selber fehlen, können diese gerne an meine e-Mail versandt werden. Ich werde diese dann einarbeiten.

Inhaltsverzeichnis

Prolog **V**
Ziel . . . V
Schlagwörter . . . V
Hilfsmittel . . . V
Themen . . . V

1 Informelle Einführung **1**
1.1 Option . . . 1
1.2 long, short . . . 1
1.3 Payoff und Profit Diagramme . . . 2
1.4 Strategien . . . 4
1.5 Arbitrage . . . 6
1.6 Replikationsprinzip . . . 6
1.7 Nullkouponanleihe . . . 7
1.8 Put-Call Parität . . . 7
1.9 forward . . . 8
1.10 Digitale Position . . . 8
1.11 Eigenschaften des Call-Preises . . . 8
1.12 Zinsmethoden . . . 9
1.13 Festzinsanleihe . . . 11
1.14 Variabelverzinsliche Anleihe . . . 12
1.15 Swaps . . . 13

2 Aktuarielle Bewertung von Zahlungsströmungen **14**
2.1 Zahlungsströme und deren Bewertung . . . 14
2.2 Personenversicherung und deren Bewertung . . . 14
2.3 Klassische Beispiele . . . 15
2.4 Deckungskapital . . . 18
2.5 Beispiele Deckungskapital . . . 19
2.6 Personengemeinschaften, verbundene Leben . . . 21
2.7 Konkurrierende Ausscheideursachen . . . 22

3 Exkurs stochastische Prozesse **25**
3.1 Definitionen . . . 25
3.2 Das N-Perioden CRR-Modell . . . 25
3.3 Random-Walk . . . 25
3.4 Bedingter Erwartungswert . . . 26
3.5 Existenz & Eindeutigkeit . . . 26
3.6 Faktorisierter bedingter Erwartungswert . . . 27
3.7 Stochastischer Kern . . . 27
3.8 bedingte W'keit und bedingte Verteilungen . . . 28
3.9 Beispiel: diskrete Zufallsvariablen . . . 28
3.10 Lebesgue-Dichten . . . 29
3.11 Eigenschaften . . . 30
3.12 Bestapproximation . . . 31
3.13 Martingale . . . 32
3.14 Beispiele Martingale . . . 32
3.15 Stopzeit . . . 33
3.16 Martingal als faires Glücksspiel . . . 33

3.17 Optional Sampling . . . 34
3.18 Anwendung . . . 35
3.19 Vorhersehbare Prozesse . . . 37
3.20 Doob-Meyer Zerlegung . . . 38

4 Diskrete Finanzmarktmodelle 39
4.1 Beschreibung von Finanzmärkten . . . 39
4.2 Selbstfinanzierung . . . 40
4.3 Beispiele CRR-Modell . . . 41
4.4 Das diskontierte Finanzmarktmodell . . . 42
4.5 Charakterisierung der Selbstfinazierung . . . 43
4.6 Satz 1 . . . 44
4.7 Arbitrage . . . 44
4.8 Beispiele Arbitrage . . . 45
4.9 Äquivalente Maße . . . 47
4.10 Äquivalentes Martingalmaß . . . 48
4.11 Separationssatz von Minkowski . . . 48
4.12 Umformulierung der Arbitragefreiheit . . . 48
4.13 Satz 2 . . . 49
4.14 Das No-Arbitrage Theorem . . . 50
4.15 Bestimmung von äquivalenten Martingalmaßen . . . 51

5 Bewerten von Derivaten 53
5.1 Claim und Hedge . . . 53
5.2 Satz 3 . . . 54
5.3 Superreplizierbare Claims . . . 54
5.4 Satz 4 . . . 55
5.5 Das Bipolartheorem . . . 55
5.6 Upper and lower hedging Preise . . . 56
5.7 Charakterisierung der arbitragefreien Preise . . . 56
5.8 Erweitertes Finanzmarktmodell . . . 59
5.9 Vollständigkeit . . . 59
5.10 2. Fundamentalsatz der Preistheorie . . . 59
5.11 Satz 5 . . . 60
5.12 Hedgen im CRR-Modell . . . 60
5.13 Algorithmische Berechnung des upper und lower hedging Preises im Trinomialmodell . . . 62
5.14 Allgemeine Call-Formel . . . 64

6 Das Black-Scholes Modell 66
6.1 Beschreibung des Modells . . . 66
6.2 Approximation eines Black-Scholes Modells durch ein CRR-Modell . . . 67
6.3 Eigenschaften des Wiener-Prozesses . . . 69
6.4 Maßwechsel . . . 70
6.5 Girsanov Transformation . . . 71
6.6 Äquivalentes Martingalmaß im Black-Scholes Modell . . . 72
6.7 Bewertung von Claims . . . 73
6.8 Black-Scholes Formel . . . 74
6.9 Greeks . . . 75
6.10 Smile Effekt . . . 76

Index A

Abbildungsverzeichnis C

Prolog

Ziel

- Bewertung von Finanzderivaten, dies entspricht der Bewertung von Finanzmarktrisiken
- aktuarielle Bewertung von Risiken, biometrische Risiken (Rente,...) $\leftrightarrow$ Personenversicherungen, sonstige Risiken (Unfall, ...) $\leftrightarrow$ Schadenversicherungen

Schlagwörter

- Black-Scholes Formel
- äqivalentes Martingalmaß
- Hedging, Replizieren durch Handel
- Arbitage
- Äquivalenzprinzip
- Risikoausgleich im Kollektier

Hilfsmittel

Theorie der stochastischen Prozesse

- mathem. Modellierung von zeitlich abhängigen Zufallsphänomenen
- notwendig zur Beschreibung von Finanzmärkten

Themen

- diskrete und kontinuierliche Martingaltheorie
- diskrete und kontinuierliche Markov-Prozesse
- Wiener-Prozess, Brownsche Bewegung
- geometrische Brownsche Bewegung als Modell für Aktienkurse

1 Informelle Einführung

(i) Zweiteilung von Finanzgütern in:
   (1) Basisfinanzgüter
   (2) derivative Finanzgüter

(ii) zu (1) gehören:
   - Aktien
   - festverzinsliche Wertpapiere, Bonds
   - Rohstoffe, Agrarprodukte

   diese werden gehandelt auf:
   - Aktienmärkte
   - Rentenmärkte
   - Warenmärkte

   Diese werden als Kassamärkte bezeichnet.

(iii) zu (2) gehören:
   - Optionen auf Aktien
   - Swaps (Zinsderivate)
   - futures und forwards

1.1 Option

Unterscheidung in Kauf- und Verkaufoptionen

- Eine Kaufoption (**Call**) gibt das Recht ein Basisfinanzgut (**Underlying**), zu einem im Voraus bestimmten fixen Preis, dem Ausübungspreis (**strike**, Basis), während (**amerikanische Option**) oder nur am Ende der Laufzeit der Option (**europäische Option**) zu kaufen.
- Eine Verkaufoption (**Put**) gibt das Recht ein Basisfinanzgut (Underlying), zu einem im Voraus bestimmten fixen Preis, dem Ausübungspreis (strike, Basis), während (amerikanische Option) oder nur am Ende der Laufzeit der Option (europäische Option) zu verkaufen.

Dies sind **unbestimmte Termingeschäfte** , da keinerlei Verpflichtung zum Kauf bzw. Verkauf besteht.

1.2 long, short

In der Regel nimmt der Käufer eines Finanzgutes eine **long-Position** ein, der Verkäufer eine **short-Position**. Der Verkäufer wird auch als writer (Zeichner) bezeichnet, da er die Option 'zeichnet'. Man kann zu jeder Zeit eine long oder short Position eingehen, insbesondere auch wenn man die Aktie gar nicht besitzt. Dies wird auch als **Leerverkauf** (short selling) bezeichnet, hierbei leiht man sich die Aktie von der Bank um sie zu verkaufen.

1.3 Payoff und Profit Diagramme

- Positionen in Finanzgütern bergen Chancen und Risiken.
- **Payoff**: Wert der Position wird gegen den Preis des Underlyings aufgetragen
- **Profit**: analog zum Payoff, unter Berücksichtigung von Kosten (Anfangswert der Postion)
- Beispiele: Option mit Laufzeit $T \in \mathbb{N}$, Underlying mit Preis S_T in T

  (a) long call: strike K
  Payoff: $(S_T - K)^+$
  $S_T \leq K$ keine Ausübung, $S_T > K$ Ausübung der Option (Ablauf: leihe Geld, kaufe Aktie, verkaufe Aktie, zahle Geld zurück)

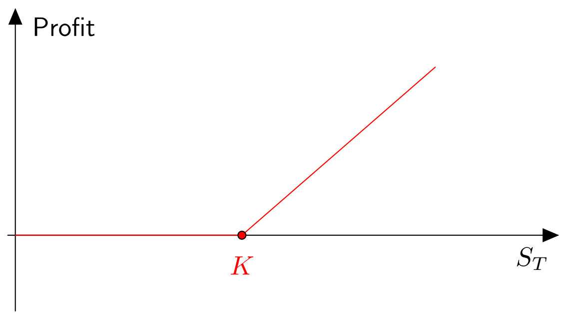


Abbildung 1: Payoff long call

Kosten: Anfangspreis des Calls $c > 0$. Profit: $(S_T - K)^+ - c$

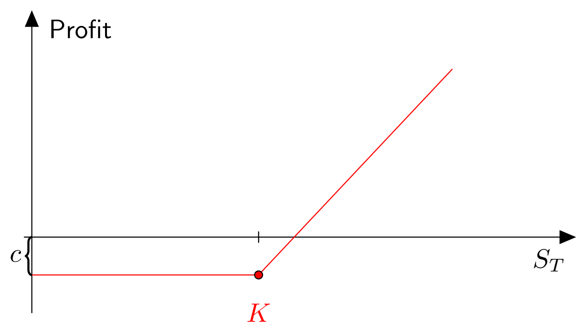


Abbildung 2: Profit long call

(b) long put: strike K
Payoff: $(K - S_T)^+$
$S_T > K$ keine Ausübung, $S_T \leq K$ Ausübung der Option (Ablauf: leihe Aktie, verkaufe Aktie, kaufe Aktie, gebe Aktie zurück)

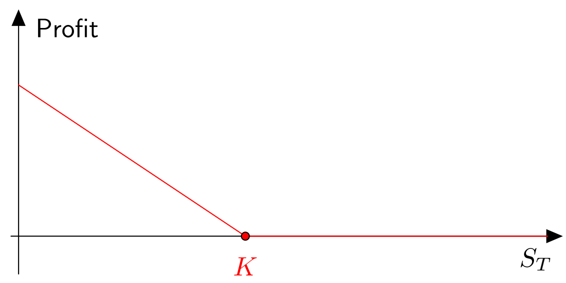


Abbildung 3: Payoff long put

Kosten: Anfangspreis de Option $p > 0$. Profit: $(K - S_T)^+ - p$

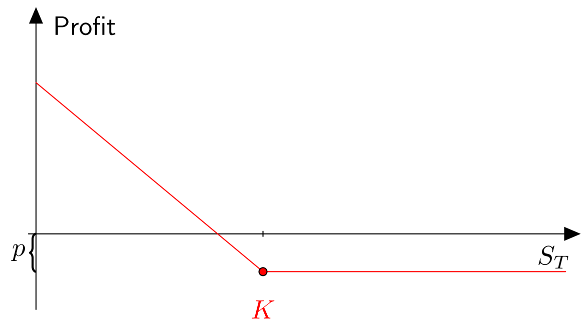


Abbildung 4: Profit long put

(c) short call:
Payoff: $-(S_T - K)^+$, Profit: $c - (S_T - K)^+$

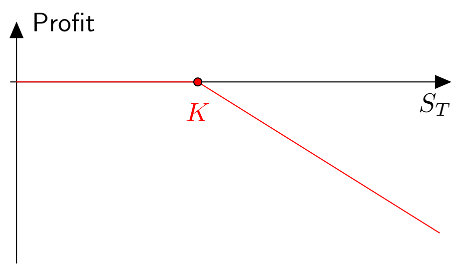


Abbildung 5: Payoff short call

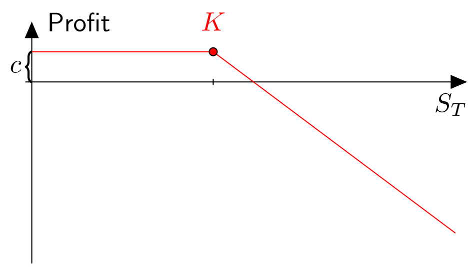


Abbildung 6: Profit short call

(d) short put:
Payoff: $-(K - S_T)^+$, Profit: $p - (K - S_T)^+$

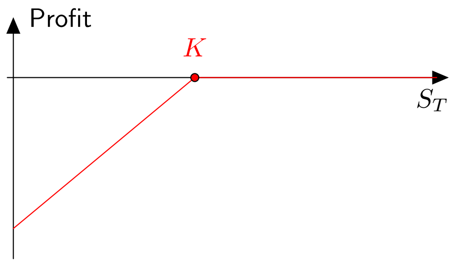


Abbildung 7: Payoff short put

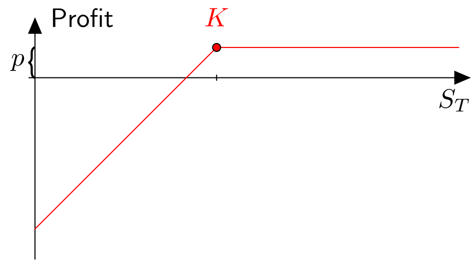


Abbildung 8: Profit short put

1.4 Strategien

Durch Kombination von einfachen Positionen bildet man **Strategien**.

Beispiel

- Absicherung einer Aktie:
  - Aktie zum heutigen Kurs kaufen mit strike K
  - zur Absicherung gegen Kursverlust in T wird eine Putoption zum strike K gekauft
- Gesamtposition:

	long Aktie	long put	Gesamt
Kosten	K	p	$K + p$
Payoff	S_T	$(K - S_T)^+$	$S_T + (K - S_T)^+ = \max\{K, S_T\}$

- Profit:

$$S_T + (K - S_T)^+ - (K + p) = (S_T - K) + (K - S_T)^+ - p = -p\mathbb{1}_{\{S_T \leq K\}} + (S_T - (K + p))\mathbb{1}_{\{S_T > K\}}$$

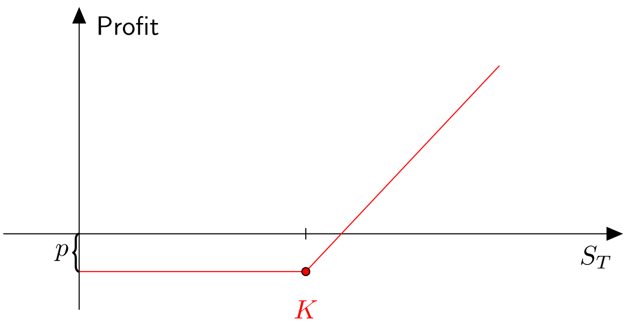


Abbildung 9: Bsp. Profit Diagramm

long straddle

- Idee: Spekulation auf eine starke Kursänderung

	long call	long put	Gesamt
Kosten	c	p	$c+p$
Payoff	$(S_T-K)^+$	$(K-S_T)^+$	$\lvert S_T-K\rvert$

Profit: $|S_T-K|-(c+p)$

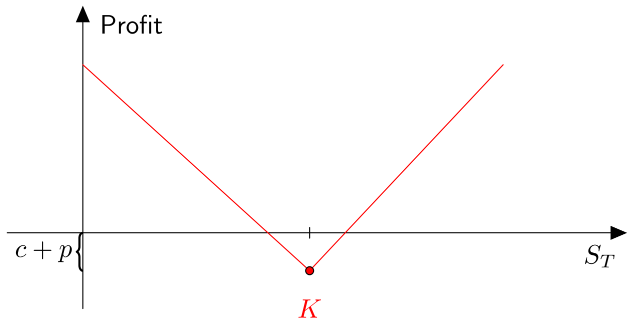


Abbildung 10: long straddle

Bullish Vertical Spread

Idee: Risikoarme Spekulation auf ein Anziehen des Kurses

	long call mit strike K_1	short call mit strike $K_2 > K_1$	Gesamt
Kosten	c_1	$-c_2$	$c_1-c_2>0$
Payoff	$(S_T-K_1)^+$	$-(S_T-K_2)^+$	$(S_T-K_1)\mathbb{1}_{\{K_1<S_T<K_2\}}+(K_2-K_1)\mathbb{1}_{\{S_T>K_2\}}$

Je kleiner der strike, desto teuerer ist der call.

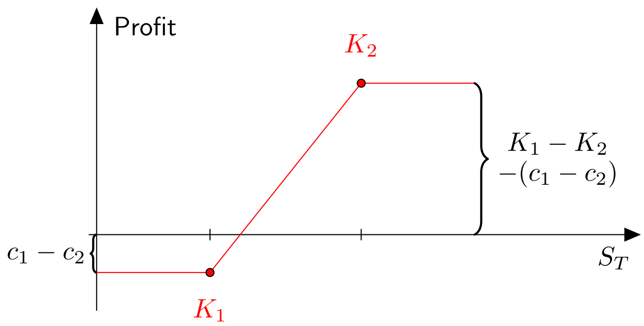


Abbildung 11: Bullish Vertical Spread

Butterfly Spread

Idee: Risikoarme Spekulation auf eine Seitwärtsbewegung des Kurses
strike: $K_1<K_2<K_3$

	long call strike K_1	long call strike K_3	$2\times$ short call strike K_2	
Kosten	c_1	c_3	$-2c_2$	$c_1+c_3-2c_2$

Payoff: $(S_T-K_1)\mathbb{1}_{\{K_1<S_T<K_2\}}+(2K_2-K_1-S_T)\mathbb{1}_{\{K_2<S_T<K_3\}}+2K_2-(K_1+K_3)\mathbb{1}_{\{S_T>K_3\}}$

Falls $K_2 = \frac{1}{2}(K_1 + K_3) \Rightarrow c_1 + c_3 - 2c_2 > 0$

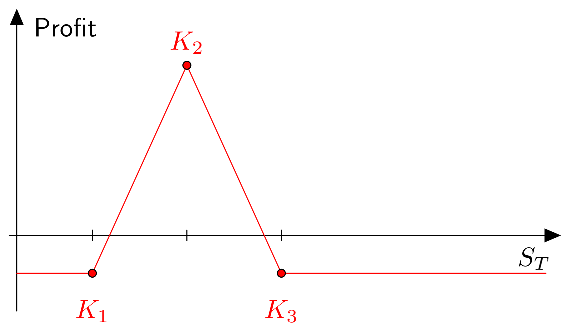


Abbildung 12: long Butterfly Spread

Für weitere Strategien klicken Sie hier.

1.5 Arbitrage

- Ein **Arbitrage** ist eine Möglichkeit durch Handel mit Finanzgütern einen risikolosen Profit zu erzielen.
- **Beispiel**

	New York	Frankfurt
Aktie	130 \$	100 €
Wechselkurs	1,27 \$ $\widehat{=}$ 1 €	

- Arbitragemöglichkeit:
  leihe 100 € $\rightsquigarrow$ kaufe Aktie in Frankfurt $\rightsquigarrow$ verkaufe Aktie in New York
  $\rightsquigarrow$ tausche 127 \$ in 100 € $\rightsquigarrow$ 100 € zurück zahlen $\rightsquigarrow$ risikolosen Profit von 3 \$
- Grundannahme:
  Im Handel mit Finanzgütern gibt es keine Arbitragen. Dies ist das sogenannte **No-Arbitrage Prinzip**.
- Aus dem No-Arbitrage Prinzip kann das **Replikationsprinzip** gefolgert werden.

1.6 Replikationsprinzip

Haben zwei verschiedene Kombinationen K, L von ausschüttungsfreien Finanzgütern zu einem zukünftigen Zeitpunkt $T \in \mathbb{R}$ immer den gleichen Wert, so haben sie auch zum gegenwärtigen Zeitpunkt den gleichen Wert.
Die Kombination K repliziert den Payoff der Kombination L, und umgekehrt.
Argumentation:
K,L habe den Anfangswert $V_0, W_0 \in \mathbb{R}$ und den zufälligen Wert $V_T, W_T \in \mathbb{R}$ in T.
Es gelte: $V_T = W_T$:
Beh.: $V_0 = W_0$

$\mathbb{A}$
1.Fall: $V_0 > W_0$.
Dann kann durch short selling von K ein Arbitrage erzielt werden:

- short selling in K

- gehe long in L

$\Rightarrow$ am Anfang Gewinn $V_0 - W_0 > 0$

- handeln entsprechend L bis T

in T:

- verkaufe L, erhalte $W_T = V_T$
- kaufe K für V_T und gebe die Position K zurück

Am Ende: Glattstellen der Positionen $W_T - V_T = 0$ ↯

2.Fall: $W_0 > V_0$. Analog. □

1.7 Nullkouponanleihe

festverzinsliches Wertpapier:

- Fälligkeit T (Maturity)
- Zahlung von 1 Euro
- keine Kouponzahlung während der Laufzeit

$B(t,T)$ bezeichne den Preis dieser Anleihe zum Zeitpunkt $t < T$. $0 < B(t,T) < 1$ ist der Regelfall.

1.8 Put-Call Parität

Seien c, p die Anfangspreise einer Call- bzw. Putoption mit Laufzeit T und strike K.
Sei S_0 und S_T die Preise des Underlyings heute und in T.
Dann gilt:

$$S_0 + p = c + K \cdot B(0,T)$$

Argumentation:
Betrachte folgende Kombinationen:
I: long Aktie, long put
II: long call, $K\cdot$ long in eine Nullkouponanleihe mit Fälligkeit in T

Wert zum Zeitpunkt T:
I: $S_T + (K - S_T)^+ = \max\{S_T, K\}$
II: $(S_T - K)^+ + K = \max\{S_T, K\}$

Replikationsprinzip liefert:

$$S_0 + p = c + K \cdot B(0,T)$$

□

1.9 forward

Ein **forward** ist ein unbedingtes Termingeschäft mit Ausübungszeitpunkt T (Maturity), für ein Underlying mit Preisen S_0 heute und S_T in T. Zwei Parteien A und B, mit festem Terminpreis F_T zum Vertragsabschluss. In T: A zahlt an B den Terminpreis F_T, B liefert das Underlying

zum Beispiel bei Agrargütern

A hat die long-Position im forward, B die short-Position. Zusammenhang zwischen Termin- und Spotpreis des Underlyings.
S_0 - gegenwärtiger Preis, **Spotpreis**
F_T - Terminpreis zum Termin T
Dann gilt:

$$F_T \cdot B(0,T) = S_0$$

Argumentation:
Betrachte folgende Kombinationen:
I: long im forward zum Zeitpunkt T, $F_T \times$ long in einer Nullkouponanleihe mit Fälligkeit T
II: long im Underlying
Wert zum Zeitpunkt T: I: $\underbrace{S_T - F_T}_{\text{forward}} + \underbrace{F_T}_{\text{Nullkouponanleihe}} = S_T$
II: S_T
Replikationsprinzip liefert:

$$F_T \cdot B(0,T) = S_0$$

1.10 Digitale Position

Recht auf Auszahlung eines festen Geldbetrags (etwa 1 €) bei Eintreten eines auslösenden Ereignisses (**bedingtes Termingeschäft**).
z.B.

digitaler call	digtialer put
$\mathbb{1}_{\{S_T \geq K\}}$	$\mathbb{1}_{\{S_T \leq K\}}$

1.11 Eigenschaften des Call-Preises

Sei $C(S_0, T, K)$ der Preis eines Calls auf ein Underlying mit Laufzeit T, strike K und Anfangspreis S_0. Dann gilt:

(i) $C(S_0,T,K) \geq \max\{0, S_0 - K \cdot B(0,T)\}$ **innerer Wert** des Calls

(ii) $C(S_0,T,K) \leq S_0$ **obere Grenze** des Calls

(iii) $K_1 \leq K_2 \Rightarrow C(S_0,T,K_1) \geq C(S_0,T,K_2)$

(iv) $B(0,T)(K_2 - K_1) \geq C(S_0,T,K_1) - C(S_0,T,K_2)\ \forall K_1 < K_2$

(v) $C(S_0,T,K_2) \leq \frac{K_3-K_2}{K_3-K_1} \cdot C(S_0,T,K_1) + \frac{K_2-K_1}{K_3-K_1} \cdot C(S_0,T,K_3)\ \forall K_1 < K_2 < K_3$ **Konvexität in K**

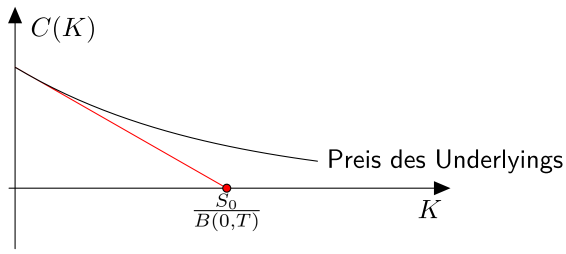


Abbildung 13: Konvexität in K

Argumentation:

(i) Falls $C(S_0,T,K)<0$ gehe long im Call und halte bis T. Risikolosen Gewinn von $|C(S_0,T,K)|>0$ am Anfang. ↯ No-Arbitrage
Genauso sieht man ein, dass $P(S_0,T,K)\geq 0$
Put-Call Parität liefert:

$$\begin{aligned}C(S_0,T,K)&=S_0+P(S_0,T,K)-K\cdot B(0,T)\\&\geq S_0-K\cdot B(0,T)\end{aligned}$$

(ii) Falls $C(S_0,T,K)>S_0$.
long Aktie, short im call
am Anfang: Gewinn von $C(S_0,T,K)-S_0>0$, benutze die Aktie um die Verpflichtung des Calls zu erfüllen: $S_T-(S_T-K)^+\geq 0$ ↯ No-Arbitrage

(iii) Sei $K_1\leq K_2$:
Falls $C(K_1)<C(K_2)$ gehe short in K_2 und long in K_1.
am Anfang: $C(K_2)-C(K_1)>0$
am Ende:

$$(S_T-K_1)^+-(S_T-K_2)^+=(S_T-K_1)\mathbb{1}_{\{K_1\leq S_T\leq K_2\}}-(K_2-K_1)\mathbb{1}_{\{S_T>K_2\}}>0 \quad \text{↯ No-Arbitrage}$$

(iv) Sei $K_1<K_2$.
Falls $C(K_1)-C(K_2)>(K_2-K_1)\cdot B(0,T)$ gehe short in K_1, long in K_2, long $(K_2-K_1)\times$ Nullkouponanleihe
am Anfang: $C(K_1)-C(K_2)-(K_2-K_1)\cdot B(0,T)>0$
am Ende: $(S_T-K_2)^+-(S_T-K_1)^++K_2-K_1\geq 0$ ↯ No-Arbitrage

(v) $K_1<K_2<K_3$; $K_2=\lambda K_1+(1-\lambda)K_3$ mit $\lambda=\frac{K_3-K_2}{K_3-K_1}$
Falls $C(K_2)>\lambda C(K_1)+(1-\lambda)C(K_3)$, gehe short in K_2, $\lambda\times$ long in K_1, $(1-\lambda)\times$ long in K_3.
am Anfang: $C(K_2)-\lambda C(K_1)-(1-\lambda)C(K_3)>0$
am Ende:

$$\begin{aligned}\lambda(S_T-K_1)^++(1-\lambda)(S_T-K_3)^+-(S_T-K_2)^+&=\lambda(S_T-K_1)\mathbb{1}_{\{K_1<S_T<K_2\}}\\&\quad+\big[\lambda(S_T-K_1)-(S_T-K_2)\big]\mathbb{1}_{\{K_2<S_T<K_3\}}\\&\quad+\underbrace{\big[K_2-(\lambda K_1+(1-\lambda)K_3)\big]\mathbb{1}_{\{S_T>K_3\}}}_{=0}\end{aligned}$$

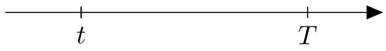
da

$$\begin{aligned}\lambda(S_T-K_1)+(K_2-S_T)&=K_2-\lambda K_1-(1-\lambda)S_T\\&=\lambda K_1+(1-\lambda)K_3-\lambda K_1-(1-\lambda)S_T\\&=(1-\lambda)(K_3-S_T)\geq 0\end{aligned}$$

↯ No-Arbitrage

1.12 Zinsmethoden

Frage: Wie kann man Kapitalrenditen durch annualisierte **Zinssätze** beschreiben?
Antwort: Man vereinbart eine **Zinsmethoden** und eine **Zählkonvention** (Anzahl der Tage eines Jahres). Zählkonvention für uns nicht wichtig
Genauer: Kapital N wird zum Zeitpunkt t in eine Nullkouponanleihe mit Fälligkeit in T angelegt.



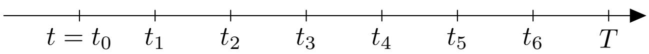
in t: erhalte für N:
$\frac{N}{B(t,T)}$ T-Bonds $\{$Nullkouponanleihe mit Fälligkeit in T

in T: die Position hat einen Wert von $\frac{N}{B(t,T)}$

<u>Gewinn:</u> $\frac{N}{B(t,T)} - N = N\left(\frac{1}{B(t,T)} - 1\right)$
$R(t,T) = \frac{1}{B(t,T)} - 1$ kann als Kapitalrendite interpretiert werden, die ein Investment zwischen t und T hervorbringt:
<u>Ziel:</u> Beschreibung durch einen jährlichen Zinssatz:

(a) <u>**lineare Zinsmethode:**</u>
lineare Verteilung der jährlichen Zinsen auf die Laufzeit $R(t,T) = \underbrace{(T-t)}_{Laufzeit} \cdot r_{lin}$, r_{lin} ist der jährliche Zinssatz bei linearer Zinsmethode.
<u>**Beispiel:**</u>
Anlage Zeitraum ein Monat
- Rendite von $0.5\% = 50$ bp (ein Basispunkt $\hat{=}$ 0,01%)
- $r_{lin} = 0.5\% \cdot 12 = 6\%$

(b) <u>**periodische Zinsmethode:**</u>



setze $t_i = t + i \cdot \frac{T-t}{m}, i = 0, \ldots, m$
Ein jährlicher Zins r wird linear verteilt auf die Periodenlänge. Das Kapital wird unter Berücksichtigung von Zinseszinsen verzinst.
<u>Verzinsung:</u>

$$K_m(r,t,T) := \left(1 + r \cdot \frac{T-t}{m}\right)^m = 1 + R(t,T)$$

(c) <u>**stetige Zinsmethode:**</u>

(i) <u>Konstante</u> Zinsrate r
erhält man als Grenzübergang für $m \to \infty$
$\lim\limits_{m\to\infty} K_m(r,t,T) = e^{r(T-t)} = 1 + R(t,T)$

(ii) <u>nicht konstante</u> Zinsrate
$r : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ liefert eine Kapitalentwicklung der Form:

$$K(r,t,T) = e^{\int_t^T r(s)\mathrm{d}s}$$

zwischen t und T.

Veranschaulichung:
$r : [0, \inf) \to \mathbb{R}, \quad t_i = t + i \cdot \frac{T-t}{m}, i = 0, \dots, m$
1 € in t_0 ergibt bei Zinsrechnung:

$$
\begin{aligned}
K_m(r,t,T) &= (1 + r(t_0)\Delta t) \cdot (1 + r(t_1)\Delta t) \cdots (1 + r(t_m)\Delta t) \\
\log\ K_m(r,t,T) &= \sum_{i=1}^{m} \log(1 + r(t_{i-1})\Delta t) \\
&= \underbrace{\sum_{i=1}^{m} r(t_{i-1})\Delta t}_{\int_t^T r(s)\mathrm{d}s} + \underbrace{\mathcal{O}(\Delta t)}_{\overset{\Delta t \to 0}{\longrightarrow} 0}
\end{aligned}
$$

1.13 Festzinsanleihe

- festverzinsliches Wertpapier
- Nominal N
- Fälligkeit T
- Zinstermine $t_1 < t_2 < \cdots < t_m \leq T$
- Koupons $K_1, K_2, \dots, K_m$

In der Regel werden Koupons als Zins auf das Nominal gezahlt, d.h. $K_i = N \cdot R$, R Zinssatz.

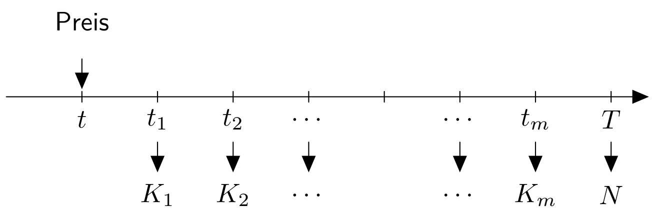


Abbildung 14: Ablauf Festzinsanleihe

Bewertung zu Zeitpunkt $t < t_1$:
Mit Hilfe einer Modifikation des Replikationsprinzips:
I: long in die Festzinsanleihe
II: long in $K_i \times$ T_i-Bonds, $i = 1, \dots, m$, long in N T-Bonds

Beide Strategien erzeugen den gleichen Zahlungsstrom an Auschüttungen:

$$K_1 \text{ in } t_1, K_2 \text{ in } t_2, \dots K_m \text{ in } t_m$$

und haben den gleichen Endwert N in T.
Replikationsprinzip liefert, dass die Preise in $t < t_1$ übereinstimmen müssen, d.h.

Preis der Festzinsanleihe in $t < t_1$ ist

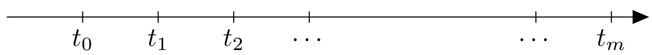
$$\sum_{i=1}^{m} K_i \cdot B(t, t_i) + N \cdot B(t, T)$$

1.14 Variabelverzinsliche Anleihe

Floater FRN (Floating Rate Note)

- Nominal N
- Fälligkeit T
- Startpunkt t_0
- Zinszahlungstermine $t_0 < t_1 < \cdots < t_m = T$
- **nachschüssige Kouponzahlungen** $K_1, K_2, \ldots, K_m$ entsprechend dem für die Periode geltendem Marktzins
$$F(t_{i-1}, t_{i-1}, t_i) = \frac{1}{t - t_{i-1}} \cdot \left(\frac{1}{B(t_{i-1}, t_i)} - 1 \right)$$
also
$$\begin{aligned} K_i &= N \cdot F(t_{i-1}, t_{i-1}, t_i)(t_i - t_{i-1}) \\ &= N \left(\frac{1}{B(t_{i-1}, t_i)} - 1 \right), \quad i = 1, \ldots, m \end{aligned}$$
- Bewertung in t_0 durch folgende replizierende Handelsstrategie:
Rollierende Anlage des Nominals bis zum jeweiligen nächsten Zinstermin.

Genauer:



- in t_0: Kaufe $\frac{N}{B(t_0,t_1)}$ t_1-Bonds und halte bis t_1
- in t_1:
  - Reinvestition von N in die 2.-Zinsperiode durch Kauf von $\frac{N}{B(t_1.t_2)}$ t_2-Bonds
  - Ausschüttung der Zinszahlung von $\frac{N}{B(t_0,t_1)} - N = N \cdot F(t_0, t_0, t_1)(t_1 - t_0) = K_1$
- ...
- ...
- in t_m:
  - Rückzahlung von N
  - Ausschüttung der letzten Zinszahlung $\frac{N}{B(t_{m-1},t_m)} - N = K_m$

Das Halten der variabel verzinslichen Anleihe und das Durchführen der rollierenden Handelsstrategie liefern den gleichen Zahlungsstrom an Zinszahlungen und haben zur Fälligkeit das Nominal als Endwert. Für die Handelsstrategie wird in t_0 ein Kapital von N benötigt. Deshalb ist der Preis der variabel verzinslichen Anleihe in t_0 durch N gegeben.
In $t < t_0$ ist der Preis $N \cdot B(t, t_0)$, denn durch Kauf von N t_0-Bonds in t kann die rollierende Handelsstrategie von t beginnend durchgeführt werden.

1.15 Swaps

Ein **Zinsswap** liefert die Möglichkeit das **Zinsänderungsrisiko** einer Festzinsanleihe zu vermeiden:

- Tauschgeschäft
- beim Zinsswap werden feste gegen variable Zinsen getauscht
- **Tenorstruktur** $t_0 < t_1 < \cdots < t_m$
- jährlichen Festzinssatz
- Nominal N, das nur zur Berechnung der Zinsen dient
- Unterscheidung in **Payer- und Reciever-Swaps** ausgehend von der Festzinsseite

Am Ende einer jeden Periode werden die festen Zinsen $N \cdot R(t_i - t_{i-1})$ gegen die variablen $N \cdot F(t_{i-1}, t_{i-1}, t_i)(t_i - t_{i-1})$ getauscht.
Dies führt zum Zahlungsstrom

$$N(t_i - t_{i-1})\left(F(t_{i-1}, t_{i-1}, t_i) - R\right), \ 1 \leq i \leq m$$

beim Payer-Swap und

$$N(t_i - t_{i-1})(R - F(t_{i-1}, t_{i-1}, t_i))$$

beim Reciever-Swap.
Ein Payer-Swap kann repliziert werden durch eine long-Position in der FRN, short in die Festzinsanleihe zum Nominal N und Zinszahlungsterminen passend zur Tenorstruktur.
Deshalb gilt für den Preis Payerswap(t) in $t \leq t_0$:

$$\begin{aligned} \text{Payerswap}(t) &= \underbrace{N \cdot B(t, t_0)}_{\text{FRN in } t} - \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{m} N \cdot R(t_{i-1} - t_i) \cdot B(t, t_i) + N \cdot B(t, t_m)\right)}_{\text{Festzinspreis}} \\ &= N \left(B(t, t_0) - B(t, t_m) - \sum_{i=1}^{m} R \cdot B(t_{i-1}, t_i)\right) \end{aligned}$$

Der 'faire' Festzinspreis R liegt dann in t vor, wenn Payerswap(t)=0, also wenn

$$R = \frac{B(t, t_0) - B(t, t_m)}{\sum_{i=1}^{m} B(t, t_i)(t_i - t_{i-1})}$$

R ist dann die sogenannte **Swaprate** in t.

2 Aktuarielle Bewertung von Zahlungsströmungen

Ziel: Bewertung von Zahlungsverpflichtungen, die durch biometrische Risiken verursacht werden. Biometrische Risiken sind zum Beispiel Todesfall, Invalidität,...

2.1 Zahlungsströme und deren Bewertung

- zeitdiskrete periodische Sichtweise, Zeit wird in Jahren gemessen

Definition

- Ein Zahlungsstrom Z ist eine Folge $(Z(n))_{n\in\mathbb{N}}$ von nicht negativen reellen Zahlen, $Z(n) \widehat{=}$ Auszahlung zum Zeitpunkt n
- Frage: Was ist der Kapitalwert, der durch den Zahlungsstrom der verursachten Zahlungsverpflichtungen entsteht?
- Antwort: Summe der **abdiskontierten** Zahlungen
- Genauer: Für jedes $n \in N$ gibt $B(k,n)$, den Preis des n-Bonds zum Zeitpunkt k, den Wert einer in n fälligen Zahlungsverpflichtung von 1€ an.
- Deshalb definieren wir:

$$V_0(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} Z(n) \cdot B(0,n)$$

Summe aller auf den Anfang abdiskontierten Zahlungsverpflichtungen, Kapitalwert von heute.
Und

$$V_m(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} Z(m+k) \cdot B(m,m+k)$$

Summe aller nach m fälligen auf den Zeitpunkt m abdiskontierten Zahlungsverpflichtungen.

- $V_m(Z)$ ist das Kapital, das zum Zeitpunkt m benötigt wird, um die zukünftigen Zahlungsverpflichtungen erfüllen zu können.
- Praxis: Periodische Rendite r, periodische **Diskontfaktor**

$$v = \frac{1}{1+r} \Rightarrow B(m,n) = v^{n-m} \quad \forall 0 \leq m \leq n$$

2.2 Personenversicherung und deren Bewertung

Ziel:
Mathematische Beschreibung und Analyse einer Personenversicherung
Definition:
Eine Personenversicherung ist ein Quadertupel $\Gamma = (t,s,b,T)$ mit Zahlungsströmen $(t(n))_{n\in\mathbb{N}_0},\ (s(n))_{n\in\mathbb{N}_0},\ (b(n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(0,\infty)$-wertiger Zufallsvariabel T.
Interpretation:

- T ist eine zufällige Ausfallzeit (etwa Restlebensdauer)
- **Todesfallspektrum** $(t(n))_{n\in\mathbb{N}_0}$

$$t(n) \geq 0 \widehat{=} \text{ Auszahlung in } n \text{ bei Ausfall in der } n\text{-ten Periode}$$

- **Erlebensspektrum** $(s(n))_{n\in\mathbb{N}_0}$

$$s(n) \geq 0 \hat{=} \text{ Auszahlung in } n\text{, wenn } n \text{ erreicht wird}$$

- **Beitragsspektrum** $(b(n))_{n\in\mathbb{N}_0}$

$$b(n) \geq 0 \hat{=} \text{ Prämienzahlung in } n\text{, wenn } n \text{ erreicht wird}$$

Aus Sicht des Versicherungsunternehmens erzeugt eine Personenverischerung die folgenden zufälligen Zahlungsströme:

Ausgabenstrom:
$A(n) = s(n)\mathbb{1}_{\{T>n\}} + t(n)\mathbb{1}_{\{n-1<T\leq n\}}$
$\forall n \in \mathbb{N}_0, \quad A(0) = s(0)$
Bewertung aus heutiger Sicht durch

Einnahmestrom:
$I(n) = b(n)\mathbb{1}_{\{T>n\}} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$

$$V_0(A) = s(0) + \sum_{n=1}^{\infty} s(n)\mathbb{1}_{\{T>n\}}B(0,n) + \sum_{n=1}^{\infty} t(n)\mathbb{1}_{\{n-1<T\leq n\}}B(0,n)$$
$$V_0(I) = \sum_{n=0}^{\infty} b(n)\mathbb{1}_{\{T>n\}}B(0,n)$$

$V_0(A) \hat{=}$ heutiger Kapitalwert des zufälligen Zahlungsstroms
$\mathbb{E}V_0(A) \hat{=}$ mittlerer Kapitalwert der zukünftigen Zahlungsverpflichtung
$\mathbb{E}V_0(I) \hat{=}$ mittlerer Kapitalwert der Einnahmen
Definition:
$\mathbb{E}V_0(A)$ heißt **Barwert** der durch die Versicherung induzierten Zahlungsverpflichtungen. $\mathbb{E}V_0(I)$ heißt **Barwert** der durch die Versicherung induzierten Einnahmen.
Eine Personenversicherung heißt **ausgewogen** oder **fair**, wenn $\mathbb{E}V_0(A) = \mathbb{E}V_0(I)$ gilt und beide endlich sind.
Ist $\mathbb{E}V_0(A) < \infty$ oder $\mathbb{E}V_0(I) < \infty$, so ist $\mathbb{E}V_0(A) - \mathbb{E}V_0(I)$ der Barwert der Versicherung.
Dies ist als Ausgangspreis zu interpretieren, den ein Versicherungsunternehmen verlangt.
Äquivalenzprinzip:
Man wähle (t, s, b) so, dass die Versicherung fair ist.

2.3 Klassische Beispiele

- versichert wird eine Person
- biometrisches Risiko ist das Todesfallrisiko
- Ausfallzeit ist deshalb die Restlebensdauer der Person

(a) **Todesfallversicherung:**
  - Todesfallsumme M
  - Laufzeit n
  - konstante periodische Prämienzahlung

$$t(k) = M \; k = 1, \dots, n \quad t(k) = 0 \text{ sonst}$$
$$s(k) = 0 \; \forall k \in \mathbb{N}_0$$
$$b(k) = p \; k = 0, \dots, n-1 \quad b(k) = 0 \text{ sonst}$$

- Induzierte Zahlungsströme:

$$
\begin{aligned}
A(k) &= M \cdot \mathbb{1}_{\{k-1<T\leq k\}},\ k = 1,\dots,n \quad A(k) = 0 \text{ sonst}\\
I(k) &= p \cdot \mathbb{1}_{\{T>k\}},\ k = 0,\dots,n-1 \quad I(k) = 0 \text{ sonst}\\
V_0(A) &= \sum_{k=1}^{n} M \cdot B(0,k)\mathbb{1}_{\{k-1<T\leq k\}}\\
V_0(I) &= \sum_{k=0}^{n-1} p \cdot B(0,k)\mathbb{1}_{\{T>k\}}\\
\text{Also } \mathbb{E}V_0(A) &= \sum_{k=1}^{n} M \cdot B(0,k)\mathbb{P}(k-1<T\leq k)\\
\mathbb{E}V_0(I) &= p \cdot \sum_{k=0}^{n-1} B(0,k)\mathbb{P}(T>k)
\end{aligned}
$$

- Praxis:
  - Restlebenszeit wird durch das Alter bestimmt T_x Restlebenszeit eines x-Jährigen
  - Stationaritätsannahme $\mathbb{P}(T_x > t+s \mid T_x > s) = \mathbb{P}(T_{x+s} > t)$
  - $q_x = \mathbb{P}(T_x \leq 1)$ 1-jährige Sterbew'keit eines x-Jährigen
  - $p_x = 1 - q_x = \mathbb{P}(T_x > 1)$ 1-jährige Überlebensw'keit eines x-Jährigen
  - ${}_kp_x := \mathbb{P}(T_x > k) = \mathbb{P}(T_x > 1)\mathbb{P}(T_x > k \mid T_x > 1) \overset{\text{Stationarität}}{=} p_x\mathbb{P}(t_{x+1} > k-1)$
    $= \dots = p_xp_{x+1}\dots p_{x+k-1}$
  - ${}_kq_x = 1 -_k p_x = \mathbb{P}(T_x \leq k)$
  - Bezeichnung für $M = 1$, Eintrittsalter x

    $$_{|n}A_x = \sum_{k=1}^{n} v^k\mathbb{P}(k-1<T_x\leq k)$$

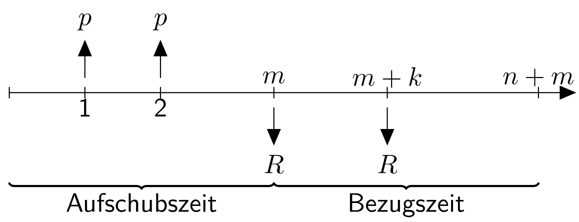
    für $p = 1$:

    $$\ddot{\mathrm{a}}_{x:n\rceil} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k\mathbb{P}(T_x > k)$$

    Die Todesfallversicherung ist fair, wenn $M \cdot {}_{|n}A_x = p \cdot \ddot{\mathrm{a}}_{x:n\rceil}$
    $n \to +\infty$ entspricht Todesfallversicherung ohne zeitliche Beschränkung
  - Bezeichnung

$$
\begin{aligned}
A_x &= \sum_{k=1}^{\infty} v^k\mathbb{P}(k-1<T_x\leq k)\\
\ddot{\mathrm{a}}_x &= \sum_{k=0}^{\infty} v^k\mathbb{P}(T_x > k)
\end{aligned}
$$

(b) **aufgeschobene Rentenversicherung**



- Eintrittsalter x
- Aufschubszeit m Jahre
- Bezugszeit n Jahre
- Rentenhöhe R
- Beitragshöhe p

Modellierung:

- $T = T_x$ Restlebenszeit eines x-Jährigen
- $t(k) = 0 \; \forall k \in \mathbb{N}_0$
- $s(k) = 0 \; k = 0, \dots, m-1, \quad s(m+k) = R \; k = 0, \dots, n-1$
- $b(k) = p \; k = 0, \dots, m-1, \quad b(k) = 0$ sonst

Induzierte Zahlungsströme:

- Ausgaben: $A(m+k) = R \cdot \mathbb{1}_{\{T > m+k\}} \; k = 0, \dots, n-1, \;\; A(k) = 0$ sonst
- Einnahmen: $I(k) = p \cdot \mathbb{1}_{\{T > k\}} \; k = 0, \dots, m-1 \;\; I(k) = 0$ sonst
- Barwert der Ausgaben: $\mathbb{E}V_0(A) = \sum_{k=0}^{n-1} R \cdot v^{m+k} \mathbb{P}(T_> m+k)$
- Barwert der Einnahmen: $\mathbb{E}V_0(I) = p \sum_{k=0}^{m-1} v^k \mathbb{P}(T > k) = p \cdot \ddot{a}_{x:m\rceil}$ $\ddot{a}_{x:m\rceil} = \sum_{k=0}^{m-1} v^k \mathbb{P}(T > k)$
- Bezeichnung für $R = 1$: ${}_{m|n}\ddot{a}_x := \sum_{k=0}^{n-1} v^{m+k} \mathbb{P}(T > m+k)$
- Die Versicherung ist fair, wenn $R \cdot \; {}_{m|n}\ddot{a}_x = p \cdot \ddot{a}_{x:m\rceil}$
- Für $n = \infty$, lebenslange Rente: ${}_{m|}\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+m} \mathbb{P}(T > m+k)$

(c) **Erlebensfallversicherung**

- Eintrittsalter x
- Laufzeit n Jahre
- **Erlebensfallsumme** M, Auszahlung bei Überleben von n Jahren
- konst. Prämie p, während der Laufzeit

Modellierung:

- $T = T_x$ Restlebenszeit
- $t(k) = 0 \; \forall k \in \mathbb{N}_0$
- $s(k) = \begin{cases} M, & k = n \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$
- $b(k) = \begin{cases} p, & k = 0, \dots, n-1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

Induzierte Zahlungsströme:

- Ausgaben: $A(m) = M \cdot \mathbb{1}_{\{T > m\}}$, $A(k) = 0$ sonst
- Einnahmen: $I(k) = p \cdot \mathbb{1}_{\{T > k\}}, \quad k = 1, \dots, n-1$

Bewertung:

$$\mathbb{E}V_0(A) = M \underbrace{v^n \mathbb{P}(T_x > n)}_{= {}_nE_x} = M \cdot \; {}_nE_x$$

$$\mathbb{E}V_0(I) = p \cdot \ddot{a}_{x:n\rceil}$$

- Versicherung ist fair, wenn $M \;_nE_x = p\ddot{a}_{x:m\rceil}$

(d) **gemischte Versicherung** (Kapitalgebundene Lenbensvers.)

- Kombination aus Todesfall- und Erlebensversicherung
- Eintrittsalter x
- Laufzeit n
- Versicherungssumme M, fällig bei Tod während der Laufzeit oder bei Überleben der Laufzeit
- konst. Prämie p, während der Laufzeit

Modellierung:

- $T = T_x$ Restlebenszeit
- $t(k) = M, \quad k = 1, \dots, n$, $t(k) = 0$ sonst
- $s(n) = M, \quad s(k) = 0$ sonst
- $b(k) = p, \quad k = 0, \dots, n-1$, $b(k) = 0$ sonst

Induzierte Zahlungsströme:

$$\begin{aligned} A(k) &= M \cdot \mathbb{1}_{\{k-1<T\le k\}}, \qquad k = 1, \dots, n-1 \\ A(n) &= M \cdot (\mathbb{1}_{\{n-1<T\le n\}} + \mathbb{1}_{\{T>n\}}), \qquad A(k) = 0 \text{ sonst} \\ I(k) &= p \cdot \mathbb{1}_{\{T>k\}}, \qquad k = 0, \dots, n-1 \end{aligned}$$

Bewertung:

$$\mathbb{E}V_0(A) = M(\;_{|n}A_x + \;_nE_x) \qquad \mathbb{E}V_0(I) = p\ddot{a}_{x:n\rceil}$$

Versicherung ist fair, wenn $M(\;_{|n}A_x + \;_nE_x) = p\ddot{a}_{x:n\rceil}$

2.4 Deckungskapital

Betrachtet wird nur der Fall einer **deterministischen Zinsentwicklung**, z.B. $B(k,n) \in (0,1)$ det. $\forall n \in \mathbb{N},\ k < n$

Beobachtung:

Anfangs sind die Prämieneinnahmen pro Jahr höher, als die zu erwartenden Ausgaben pro Jahr. Dies führt zum Aufbau einer **Prämienreserve**. Gegen Ende sind die zu erwartenden Leistungen pro Jahr höher, als die Prämien pro Jahr und werden durch die aufgebaute Prämienreserve finanziert.

Der **Deckungskapitalverlauf** spiegelt den Auf- und Abbau der Prämienreserve wieder.

Anfang und Ende bezieht sich auf die Versicherung, bzw. viele Versicherungen zum selben Zeitpunkt

Definition:

Gegeben sei eine allgemeine Prämienversicherung $\Gamma = (t,s,b,T)$. Sei $(A(n))_{n\in\mathbb{N}}$ und $(I(n))_{n\in\mathbb{N}}$ der Zahlungsstrom der Ausgaben und Einnahmen. Das nach m Jahren gebildete Deckungskapital $\mathcal{D}(m)$ ist definiert, als die Differenz der Barwerte, der dann zukünftigen Ausgaben und Einnahmen, wobei die Diskontierung auf das Ende des n-ten Jahres vorgegeben wird.

In mathematischen Formeln:

$$\mathcal{D}(m) = \mathbb{E}(V_m(A) \mid \underbrace{T > m}_{\text{die nach } m \text{ noch leben}}) - \mathbb{E}(V_m(I) \mid T > m) \quad \forall m \in \mathbb{N}_0$$

Dies ist die Definition des sogenannten **prospektiven Deckungskapitals** (vorausschauende Methode). Für $m = 0$ ist $\mathcal{D}(0)$ der Barwert der Versicherung. $\mathcal{D}(0) = 0$ liegt bei einer fairen Versicherung vor.

Bemerkung:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(V_m(A) \mid T > m) &= \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{\infty} A(m+k)\underbrace{B(m,m+k)}_{=v^k} \mid (T > m)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} t(k+m)B(m,m+k)\mathbb{P}(m+k-1 < T < m+k \mid T > m) \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} s(k+m)B(m,m+k)\mathbb{P}(T > m+k \mid T > m) \end{aligned}$$

Da $A(m+k) = t(k+m) \cdot \mathbb{1}_{\{m+k-1<T\leq m+k\}} + s(k+m) \cdot \mathbb{1}_{\{T>m+k\}}$

Analog:

$$\mathbb{E}(V_m(I) \mid T > m) = \sum_{k=0}^{\infty} b(m+k)B(m,m+k)\mathbb{P}(T > m+k \mid T > m)$$

2.5 Beispiele Deckungskapital

periodischen konst. Diskontfaktor v

(a) Todesfallverischerung:

- Eintrittsalter x
- VS $M = 1$
- Laufzeit n Jahre

$$A(k) = \mathbb{1}_{\{k-1<T_x\leq k\}}, \quad k = 1,\dots,n$$

$$I(k) = p \cdot \mathbb{1}_{\{T_x>k\}}, \quad k = 0,\dots,n-1 \text{ mit } p = \frac{{}_{|n}A_x}{\ddot{a}_{x:n\rceil}}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_x(m) &= \sum_{k=1}^{n-m} v^k \mathbb{P}(m+k-1 < T_x \leq m+k \mid T_x > m) - p \sum_{k=0}^{n-m-1} v^k \mathbb{P}(T_x > m+k \mid T_x > m) \\
&= \sum_{k=1}^{n-m} v^k \mathbb{P}(k-1 < T_{x+m} \leq k) - p \sum_{k=0}^{n-m-1} v^k \mathbb{P}(T_{x+m} > k) \\
&= {}_{|n-m}A_{x+m} - p \cdot \ddot{a}_{x+m:n-m\rceil}
\end{aligned}$$

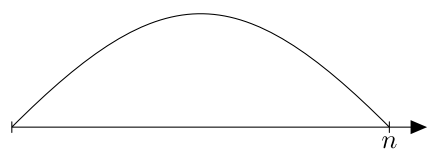


Abbildung 15: Deckungskapital: Todesfall,begrenzt

(b) Todesfallversicherung, unbegrenzte Laufzeit

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_x(m) &= \sum_{k=1}^{\infty} v^k \mathbb{P}(m+k-1 < T_x \leq m+k \mid T_x > m) - p \sum_{k=0}^{\infty} v^k \mathbb{P}(T_x > m+k \mid T_x > m) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} v^k \mathbb{P}(k-1 < T_{x+m} \leq k) - p \sum_{k=0}^{\infty} v^k \mathbb{P}(T_{x+m} > k) \\
&= A_{x+m} - p \cdot \ddot{a}_{x+m} \qquad m = 0,1,2,3,\dots \qquad p \text{ erfüllt } A_x = p\ddot{a}_x
\end{aligned}$$

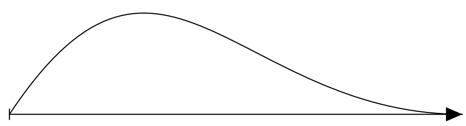


Abbildung 16: Deckungskapital: Todesfall, unbegrenzt

(c) Erlebensfallversicherung:
- Eintrittsalter x
- Laufzeit n
- Versicherungssumme 1

$A(k) = \mathbb{1}_{\{T_x > k\}}$ für $k = n$
$A(k) = 0$ sonst
$I(k) = p\mathbb{1}_{\{T_x > k\}} \quad k = 0, \dots, n-1$

Deckungskapitalverlauf:

$$\mathcal{D}_x(m) = v^{n-m}\mathbb{P}(T_x > n \mid T_x > m) - p\sum_{k=0}^{n-m-1} v^k \mathbb{P}(T_x > m+k \mid T_x > m)$$

$$\text{Stationarität } \Rightarrow = v^{n-m}\mathbb{P}(T_{x+m} > n-m) - p\sum_{k=0}^{n-m-1} v^k \mathbb{P}(T_{x+m} > k)$$

$$= {}_{n-m}E_{x+m} - p\ddot{a}_{x+m:n-m\rceil}$$

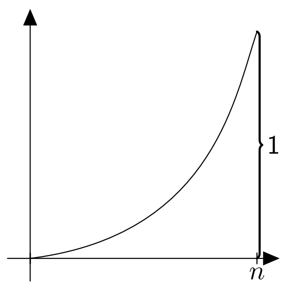


Abbildung 17: Deckungskapital: Erlebensfall

(d) gemischte Versicherung:

- Todesfall + Erlebensfall
- Deckungskapitalverlauf als Summe der Deckungskapitalien der einzelnen Versicherungen
- in Formeln: ·Laufzeit n ·Eintrittsalter x

$$\mathcal{D}_x(m) = A_{x+m:n-m\rceil} - p\ddot{a}_{x+m:n-m\rceil} \text{ mit } A_{x+m:n-m\rceil} = p\ddot{a}_{x+m:n-m\rceil}$$

Wobei $A_{x:n\rceil} = {}_{|n}A_x + {}_nE_x$ Barwert der gemischten Versicherung.

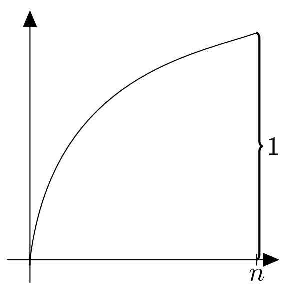


Abbildung 18: Deckungskapital: gemischte Versicherung

(e) Aufgeschobene Rentenversicherung:

- Eintrittsalter x
- Aufschubszeit n
- Rentenbezugszeit bis zum Tod
- Rentenhöhe 1

- Ausgaben:

$$A(n+k) = \mathbb{1}_{\{T_x > m+k\}}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

- Einnahmen:

$$I(k) = p\mathbb{1}_{\{T_x > k\}}, \quad k = 0, \ldots, n-1$$

Versicherung ist fair, wenn $p\ddot{a}_{x:n\rceil} = {}_{|n}\ddot{a}_x$
Deckungskapitalverlauf:

$$\begin{aligned}
m = 0, \ldots, n-1 : \mathcal{D}_x(m) &= \sum_{k=0}^{\infty} v^{n-m+k}\mathbb{P}(T_{x+m} > n-m+k) - p\sum_{k=0}^{n-m-1} v^k \mathbb{P}(T_{x+m} > k) \\
&= {}_{|n-m}\ddot{a}_{x+m} - p\ddot{a}_{x+m:n-m\rceil} \\
m = n : \quad \mathcal{D}_x(n) &= \ddot{a}_{x+n} \\
m > n : \quad \mathcal{D}_x(m) &= \ddot{a}_{x+m}
\end{aligned}$$

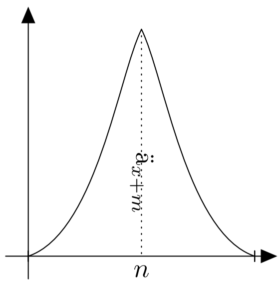


Abbildung 19: Deckungskapital: Rentenversicherung

Weitere Beispiele für Personenversicherungen bei denen die Ausfallzeiten nicht durch die Restlebenszeit einer einzelnen Person gegeben ist:

2.6 Personengemeinschaften, verbundene Leben

- n Personen mit Restlebensdauer $T_1, \ldots, T_n$
- Aus diesen wird eine Ausfallzeit der Gemeinschaft definiert durch $\Gamma = f(T_1, \ldots, T_n)$ für eine geeignete Funktion f.
- Bsp: $n = 2$ $T = \min\{T_1, T_2\} = T_1 \wedge T_2$ oder $T = \max\{T_1, T_2\} = T_1 \vee T_2$
- Bem: Bei unabhängigen $T_1, \ldots, T_2$ kann die Verteilung von $\max\{T_1, \ldots, T_n\}$ bzw. $\min\{T_1, \ldots, T_n\}$ ausgerechnet werden, denn

$$\mathbb{P}(\max\{T_1, \ldots, T_n\} \leq t) = \mathbb{P}(T_1 \leq t, \ldots, T_n \leq t) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(T_i \leq t)$$

$$\mathbb{P}(\min\{T_1, \ldots, T_n\} > t) = \mathbb{P}(T_1 > t, \ldots, T_n > t) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(T_i > t)$$

- Beispiel: Todesfallversicherung eines Ehepaares
  - Eintrittsalter erste Person x, zweite Person y

- Laufzeit n Jahre
- Versicherungssumme M wird fällig, wenn eine der beiden Personen stirbt (1. Tod)
- konst. Prämie solange wie beiden leben

- Modell:
  Setze $T_{xy} = T_x \wedge T_y$.
  $t(m) = M, \quad m = 1, \dots, n; \qquad b(m) = p, \quad m = 0, \dots, n-1; \qquad s(m) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$
  Dann beschreibt $\Gamma = (t, s, b, T_{xy})$ diese Versicherung.
  Bestimmung von p:

$$A(k) = m\mathbb{1}_{\{k-1<T_{xy}<k\}}, \quad k = 1, \dots, n$$
$$I(K) = p\mathbb{1}_{\{T_{xy}<k\}}, \quad k = 0, \dots, n-1$$

Fair, wenn
$$p\sum_{k=0}^{n-1} v^k \mathbb{P}(T_{xy} > k) = M\sum_{k=1}^{n} v^k \mathbb{P}(k-1 < T_{xy} \leq k)$$

Es gilt:
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_{xy} > k) &= \mathbb{P}(T_{xy} > k \mid T_{xy} > k-1)\mathbb{P}(T_{xy} > k-1) \\
&= \mathbb{P}(T_{x+k-1,y+k-1} > 1)\mathbb{P}(T_{xy} > k-1) \\
&= \mathbb{P}^{(1)}_{x+k-1}\mathbb{P}^{(2)}_{y+k-1}\mathbb{P}(T_{xy} > k-1) = \mathbb{P}^{(1)}_{x+k-1}\mathbb{P}^{(2)}_{y+k-1} \cdot \dots \cdot \mathbb{P}^{(1)}_{x}\mathbb{P}^{(2)}_{y}
\end{aligned}$$

und
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(k-1 < T_{xy} \leq k) &= \mathbb{P}(T_{xy} \leq k \mid T_{xy} > k-1)\mathbb{P}(T_{xy} > k-1) \\
&= \mathbb{P}(T_{x+k-1,y+k-1} \leq 1)\mathbb{P}(T_{xy} > k-1) \\
&= (1 - \mathbb{P}^{(1)}_{x+k-1}\mathbb{P}^{(2)}_{y+k-1}\mathbb{P}(T_{xy} > k-1))
\end{aligned}$$

2.7 Konkurrierende Ausscheideursachen

- Ausfallzeit T
- mehrere konkurrierende Ausscheideursachen. Welche Ursache zum Ausscheiden führt ist zufällig und wird durch eine $\{1, \dots, m\}$-wertige Zufallsvariable J beschrieben.
- Leistung bei Ausfall hängt von der Ausscheideursache ab
- Modellierung erfolgt dadurch, dass die Todesfallleistung ersetzt bzw. modifiziert wird durch Ausfallleistungen.
- Definition: Sei T eine $(0, \infty)$-wertige ZV und J eine $\{1, \dots, m\}$-wertige ZV. Seien $(t_j)_{j=1,\dots,m}$, s, b Zahlungsströme.
- Dann heißt $\Gamma = ((t_j)_{j=1,\dots,m}, s, b, T, J)$ Personenversicherung unter m konkurrierenden Risiken
- Interpretation: Anfangszustand

$$\begin{aligned}
T &\mathrel{\hat{=}} \text{Verweilzeit im Anfangszustand} \\
J &\mathrel{\hat{=}} \text{zufällige Wahl einer Ausscheideursache} \\
t_j(n) &\mathrel{\hat{=}} \text{Leistung bei Ausfall in der } n\text{-ten Periode, wegen Ursache } j \\
s(n) &\mathrel{\hat{=}} \text{Leistung bei einer Verweildauer größer als } n \\
b(n) &\mathrel{\hat{=}} \text{Beitrag bei Ausfall nach n}
\end{aligned}$$

- Zahlungsströme:

$$A(n) = \sum_{j=1}^{m} t_j(n)\mathbb{1}_{\{n-1<T\leq n,\ J=j\}} + s(n)\mathbb{1}_{\{T>n\}}$$
$$I(n) = b(n)\mathbb{1}_{\{T>n\}}$$

- Bewertung:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}V(A) &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{m} t_j(n)v^n\mathbb{P}(n-1<T\leq n,\ J=j)\\ &+\sum_{n=0}^{\infty} s(n)v^n\mathbb{P}(T>n)\\ \mathbb{E}V(A) &= \sum_{n=0}^{\infty} b(n)v^n\mathbb{P}(T>n)\end{aligned}$$

Für eine praktische Berechnung muss die Stationaritätsannahme geeignet modifiziert werden.

Definition
$((T_x)_{x\in\mathbb{N}_0}, J)$ ist stationär, falls gilt

$$\mathbb{P}(T_x \leq n+k, J=j \mid T_x > n) = \mathbb{P}(T_{x+n}\leq k, J=j) \quad \forall n\in\mathbb{N}_0,\ k\in\mathbb{N},\ j\in\{1,\dots,m\}$$

Lemma
Ist $((T_x)_{x\in\mathbb{N}_0}, J)$ stationär, so ist auch $(T_x)_{x\in\mathbb{N}_0}$ stationär. Es gilt also

$$\mathbb{P}(T_x\leq n+k \mid T_x>n) = \mathbb{P}(T_{x+n}\leq k)$$

Beweis:

$$\mathbb{P}(T_x\leq n+k \mid T_x>n) = \sum_{j=1}^{m}\mathbb{P}(T_x\leq n+k, J=j \mid T_x>n) = \sum_{j=1}^{m}\mathbb{P}(T_{x+n}\leq k, J=j) = \mathbb{P}(T_{x+n}\leq k)$$

Setze $q_{x,j} = \mathbb{P}(T_x \leq 1, J=j)$ als W'keit eines x-Jährigen im nächsten Jahr wegen Ursache j auszuscheiden.
$q_x = \mathbb{P}(T_x\leq 1) = \sum_{j=1}^{m} q_{x,j}$.
$p_x = 1-q_x$ einjährige Verweildauer eines x-Jährigen.
Wegen der Stationaritätsannahme gilt dann:

$$\mathbb{P}(T_x>n) = \mathbb{P}(T_x>n \mid T_x>n-1)\cdot\dots\cdot\mathbb{P}(T_x>1) = p_{x+n-1}\cdot\dots\cdot p_x$$

bzw.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(n-1<T_x\leq n, J=j) &= \mathbb{P}(n-1<T_x\leq n, J=j \mid T_x>n-1)\mathbb{P}(T_x>n-1)\\ &= \mathbb{P}(T_{x+n-1}\leq 1, J=j)\mathbb{P}(T_x>n-1)\\ &= q_{x+n-1,j}\mathbb{P}(T_x>n-1)\end{aligned}$$

Für eine Berechnung der Barwerte genügt es also die $q_{x,j}$ zu spezifizieren.

Bsp: Invaliditätsrente:

- Eintrittsalter x

- Grundzustand aktiv (a)
- n Restlaufzeit zur gesetzlichen Rente
- mögliche Ausscheideursachen
  - Invalidität
  - Tod

Bei Invalidität wird eine lebenslange Rente der Höhe R gezahlt.
Modell:

$$\begin{aligned} T_x &\mathrel{\widehat{=}} \text{Verweilzeit im Zustand } a \\ \mathbb{P}(T_x > k) &\mathrel{\widehat{=}} \text{als aktiver } k \text{ Jahre zu überleben} \\ J = 1 &\mathrel{\widehat{=}} \text{Invalidität} \\ J = 2 &\mathrel{\widehat{=}} \text{Tod} \end{aligned}$$

$$t_1(k) = R \cdot \ddot{a}_{x+k} \mathrel{\widehat{=}} \text{Leistung bei Invalidisierung im } k\text{-ten Jahr, Barwert des Rentenanspruchs,}$$
$$k = 1, \ldots, n$$
$$t_2(k) = 0 \ \forall k \in \mathbb{N}_0, \ s(k) = 0, \ \forall k \in \mathbb{N}_0, \ b(k) = p, \ k = 0, \ldots, n-1$$

Bewertung:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}V(A) &= R \sum_{k=1}^{n} \ddot{a}_{x+k} v^k \mathbb{P}(k-1 < T_x \leq k, J = j) \\ &= R \sum_{k=1}^{n} \ddot{a}_{x+k} v^k q_{x+k-1} \mathbb{P}(T_x > k-1) \\ \mathbb{E}V(I) &= p \sum_{k=0}^{n-1} v^k \mathbb{P}(T_x > k) \end{aligned}$$

$i(y) := q_{y,1}$ einjährige Invalidisierungsw'keit eines y-Jährigen
$q_y^a := q_{y,2}$ einjährige Sterbew'keit eines aktiven
$q_y = q_y^a + i(y)$ W'keit eines aktiven y-Jährigen im nächsten Jahr auszuscheiden.
$p_y = 1 - q_y$

3 Exkurs stochastische Prozesse

3.1 Definitionen

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein W'Raum. Sei $T \subseteq \mathbb{R}$ eine Zeitparametermenge. Sei $(E, \mathcal{E})$ ein messbarer Raum als Zustandsraum. Eine Familie $(X_t)_{t\in T}$ von E-wertigen ZV'en heißt **stochastischer Prozess**.
Eine Familie $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ von Unter-σ-Algebren von $\mathcal{F}$ heißt **Filtration**, wenn

man glaubt es nicht ein W'Raum ;)

$$\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \ \forall s \leq t, \ s, t \in T$$

$(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ gibt ein Informationsverlauf wieder. $\mathcal{F}_t \mathrel{\widehat{=}}$ Information, die bis zum Zeitpunkt t verfügbar ist.
$(X_t)_{t\in T}$ heißt **adaptiert** bzgl. der Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$, falls gilt X_t ist messbar bzgl. $\mathcal{F}_t$ $\forall t \in T$.
In der Regel: $T \subseteq \mathbb{N}_0$ oder $T \subseteq [0, \infty)$, $E = \mathbb{R}^d$, $\mathcal{E} = \mathcal{L}(\mathbb{R}^{0d})$

Beispiel:
Die Preisentwicklung von d Finanzgütern kann man durch einen stochastischen Prozess $(X_t)_{t\in T}$ mit Werten in $\mathbb{R}^d$ beschreiben.

3.2 Das N-Perioden CRR-Modell

(Anmerkung: CRR steht für Coxe-Ross-Rubinstein)
$\Omega = \{0,1\}^N, \ \mathcal{F} = \mathbb{P}(\Omega), \ 0 < d < u$
$Y_n : \Omega \to \mathbb{R}, \ \omega \mapsto u^{\omega_n} d^{1-\omega_n} = \begin{cases} u, & \text{falls } \omega_n = 1 \\ d, & \text{falls } \omega_n = 0 \end{cases}$
$S_n = Y_1 Y_2 \cdot \cdots \cdot Y_n$ Preis nach n-Perioden, $(S_n)_{n=0,\dots,N}$ Verlauf einer Aktie über N Perioden.
Zusätzlich zur Aktie betrachtet man ein **Geldmarktkonto** mit konst. periodischer Verzinsung r.
$\begin{pmatrix} (1+r)^n \\ S_n \end{pmatrix}_{n=0,\dots,N}$ beschreibt im **CRR-Modell** den Verlauf der Preise dieser beiden Basisfinanzgüter.

Anmerkung zur Abbildung 20: bei sehr kleinen Zeitsprüngen ist es möglich anzunehmen, dass das Finanzgut nur einen kleinen Sprung nach oben oder unten machen kann (zetliche Darstellung der Black-Scholes Formel).

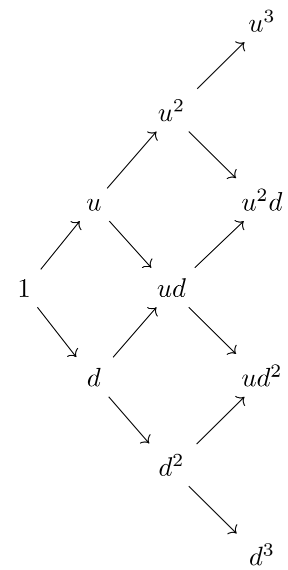


Abbildung 20: CRR-Modell

3.3 Random-Walk

Sei $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von iid ZV'en. Sei Y_0 unabhängig von $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Durch $S_n = Y_0 + \sum_{k=1}^{n} Y_k, \ n \in \mathbb{N}$ wird ein sogenannter **Random-Walk** definiert.
Durch $S_n = Y_0 \cdot \prod_{k=0}^{n} Y_k, \ n \in \mathbb{N}$ wird ein **geometrischer Random-Walk** definiert. Die Aktie im CRR-Modell ist ein geom. Random-Walk.

3.4 Bedingter Erwartungswert

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein W'Raum. G Unter-σ-Algebra von $\mathcal{F}$. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ sei messbar bzgl. $\mathcal{F}$ und es existiert $\mathbb{E}X$.
Dann heißt $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Version des **bedingten Erwartungswertes** von X bzgl. G, wenn gilt:

(i) Z ist messbar bzgl. G

(ii) $\int_A Z \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A X \mathrm{d}\mathbb{P} \quad \forall A \in G$

Schreibweise $Z = \mathbb{E}(X \mid G)$; ist $G = \sigma(Y)$ für eine ZV Y, so schreibt man $\mathbb{E}(X \mid G) = \mathbb{E}(X \mid Y)$

3.5 Existenz & Eindeutigkeit

Gegeben seien die Bezeichnungen von 3.4. Dann existiert der bedingte Erwartungswert von X bzgl. G und ist $\mathbb{P}$-f.s. eindeutig bestimmt, d.h. erfüllen Z_1, Z_2 die Bedingungen (i), (ii) aus 3.4, so gilt $Z_1 = Z_2,\ \mathbb{P} -$ f.s..

Beweis:
Existenz: 1.Fall: $X \geq 0$
$\mu(A) = \int_A X \mathrm{d}\mathbb{P},\ A \in G$ definiert ein σ-endliches Maß auf (Ω, G) mit $\mu \ll \mathbb{P}$.
Satz von Radon-Nikodym liefert ein G-messbares Z mit $\mu(A) = \int_A Z \mathrm{d}\mathbb{P}$. Also $Z = \mathbb{E}(X \mid G)\ \forall A \in G$
2.Fall: $X = X^+ - X^-$
$\mathbb{E}(X^+ \mid G),\ \mathbb{E}(X^- \mid G)$ existiert nach Fall 1.

$$\begin{aligned}\int_A X \mathrm{d}\mathbb{P} &= \int_A X^+ \mathrm{d}\mathbb{P} - \int_A X^- \mathrm{d}\mathbb{P} \\ &= \int_A \mathbb{E}(X^+ \mid G) \mathrm{d}\mathbb{P} - \int_A \mathbb{E}(X^- \mid G) \mathrm{d}\mathbb{P} \\ &= \int_A \mathbb{E}(X^+ \mid G) - \mathbb{E}(X^- \mid G) \mathrm{d}\mathbb{P} \quad A \in G\end{aligned}$$

Also ist $\mathbb{E}(X^+ \mid G) - \mathbb{E}(X^- \mid G)$ der bedingte Erwartungswert von X bzgl. G.
Eindeutigkeit: Z_1, Z_2 bedingte EW. Sei $A = \{Z_1 - Z_2 > \frac{1}{n}\}$, ist G messbar.

$$\begin{aligned}&\int_A Z_1 - Z_2 \mathrm{d}\mathbb{P} \overset{Z_1, Z_2 \text{ EW}}{=} \int_A X \mathrm{d}\mathbb{P} - \int_A X \mathrm{d}\mathbb{P} = 0 \\ &\Rightarrow \mathbb{P}(Z_1 - Z_2 > \frac{1}{n}) = 0\ \forall n \in \mathbb{N} \\ &\Rightarrow \mathbb{P}(Z_1 - Z_2 > 0) = 0 \\ &\text{Genauso folgt } \mathbb{P}(Z_2 - Z_1 > 0) = 0\end{aligned}$$

□

Beispiel
$X_1, \ldots, X_n$ iid ZV'en, sei $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$.
Frage: Was ist $\mathbb{E}(X_1 \mid S_n)$?
Vermutung: $\mathbb{E}(X_1 \mid S_n) = \mathbb{E}(X_2 \mid S_n) = \cdots = \mathbb{E}(X_n \mid S_n)$
Dann gilt:

$$n\mathbb{E}(X_1 \mid S_n) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i \mid S_n) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i \mid S_n\right) = \mathbb{E}(S_n \mid S_n) = S_n$$

$\Rightarrow \mathbb{E}(X_1 \mid S_n) = \frac{1}{n} S_n$
Wieso ist $\mathbb{E}(X_1 \mid S_n) = \mathbb{E}(X_k \mid S_n)$?

ZZ: $\int_{\{S_n \in B\}} X_1 \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_{\{S_n \in B\}} X_k \mathrm{d}\mathbb{P} \quad \forall B \in \mathcal{L}$

Da die $X_1, \dots, X_n$ stochastisch unabhängig sind, ist die Verteilung durch $\mathbb{P}^{(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(n)})}$ gegeben. Daher folgt

$$\int\limits_{\left\{x \in \mathbb{R}^n \;\mid\; \sum_{i=1}^n x_i \in B\right\}} X_1 \mathbb{P}^{(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(n)})} \mathrm{d}(x_1, \dots, x_n)$$

Betrachte Permutation π mit $\pi(1) = k$, dann folgt

$$= \int\limits_{\{S_n \in B\}} X_k \mathrm{d}\mathbb{P}$$

3.6 Faktorisierter bedingter Erwartungswert

Sei $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{L})$ eine Zufallsvariable, $Y : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (E, \mathcal{E})$ messbar.
Sei $G = \sigma(Y)$. Dann gilt:
Eine Zufallsvariable $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ ist G-messbar genau dann, wenn es eine $\mathcal{E}$-messbare Abbildung $h : E \to \mathbb{R}$ gibt mit $Z = h \circ Y$

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "Y"] \arrow[dr, "\mathbb{E}(X \mid Y)"'] & (E, \mathcal{E}) \arrow[d, "h"] \\ & (\mathbb{R}, \mathcal{L}) \end{tikzcd} \qquad h(y) = \mathbb{E}(X \mid Y = y)$$

Abbildung 21: fakt. bed. Erwartungswert

Falls Z eine Version der bedingten Erwartung von X gegeben Y ist, so gibt es also ein $h : E \to \mathbb{R}$ mit $Z = h \circ Y$.
Schreibweise $h(y) = \mathbb{E}(X \mid Y = y)$, h heißt Version der **faktorisierten** bedingten Erwartung von X gegeben Y.
Sind h_1, h_2 Versionen der bedingten Erwartung von X gegeben Y, so gilt

$$h_1(y) = h_2(y) \text{ für } \mathbb{P}^y - \text{f.a. } y \in E$$

$y \mapsto \mathbb{E}(X \mid Y = y)$ ist eindeutig festgelegt für $\mathbb{P}^y$-f.a. y durch

$$\mathbb{E} X \mathbb{1}_{\{Y \in B\}} = \int\limits_{\{Y \in B\}} \mathbb{E}(X \mid Y) \mathrm{d}\mathbb{P}$$

$$\int\limits_{\{Y \in B\}} h Y \mathrm{d}\mathbb{P} = \int\limits_B h(y) \mathbb{P}^y(\mathrm{d}y) \quad \forall B \in \mathcal{L}$$

Ausrechnen des bedingten Erwartungswertes erfolgt häufig durch Spezifikation der bedingten Verteilung.

3.7 Stochastischer Kern

Seien $(\Omega, \mathcal{F}), (E, \mathcal{E})$ messbare Räume. Ein **stochastischer Kern** ist eine Abbildung $K : E \times \mathcal{F} \to [0, 1]$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $K(y, .)$ ist ein W-Maß für alle $y \in E$

(ii) $K(., A)$ ist messbar für alle $A \in \mathcal{F}$

3.8 bedingte W'keit und bedingte Verteilungen

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein W'Raum, $\mathcal{G}$ Unter-σ-Algebra von $\mathcal{F}$. Für jedes $\Gamma \in \mathcal{F}$ heißt $\mathbb{E}(\mathbb{1}_\Gamma \mid \mathcal{G})$ **bedingte Wahrscheinlichkeit** von Γ gegeben $\mathcal{G}$
Schreibweise:

$$\mathbb{P}(\Gamma \mid \mathcal{G}) := \mathbb{E}(\mathbb{1}_\Gamma \mid \mathcal{G})$$

Seien $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (E_1, \mathcal{E}_1)$, $Y : (\Omega, \mathcal{F}) \to (E_2, \mathcal{E}_2)$ messbare Abbildungen.
Die **bedingte Verteilung** von X gegeben Y ist ein stochastischer Kern $K : E_2 \times \mathcal{E}_1 \to [0,1]$ derart, dass $y \mapsto K(y, A)$ eine Version der faktorisierten bedingten Erwartung von $\mathbb{P}(X \in A \mid Y)$ ist für alle $A \in \mathcal{E}_1$.
Schreibweise:

$$K(y, A) = \mathbb{P}(X \in A \mid Y = y)$$

Durch Erweiterungsschluss kann man zeigen

$$\mathbb{E}(f(X) \mid Y = y) = \int f(x) K(Y, \mathrm{d}x)$$

für jedes messbare $f : E_1 \to (\Omega, \mathcal{L})$.

3.9 Beispiel: diskrete Zufallsvariablen

Sei $(E_1, \mathcal{E}_1)$ messbar, E_2 abzählbar

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_2 &= \mathcal{P}(E_2) \\ X &: (\Omega, \mathcal{F}) \to (E_1, \mathcal{E}_1) \text{ messbar} \\ Y &: (\Omega, \mathcal{F}) \to (E_2, \mathcal{E}_2) \text{ messbar} \end{aligned}$$

Die bedingte Verteilung von X gegeben $Y = y$ ist definiert durch

$$\mathbb{P}(X \in A \mid Y = y) = \frac{\mathbb{P}(X \in A, Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)} \quad \forall y \in E_2 \text{ mit } \mathbb{P}(Y = y) > 0$$

Definiere den stochastischen Kern $K : E_2 \times \mathcal{E}_1 \to [0,1]$

$$K(y, A) = \begin{cases} \frac{\mathbb{P}(X \in A, Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)} & \forall A \in \mathcal{E}_1, y \in E_2 \text{ mit } \mathbb{P}(Y = y) > 0 \\ \text{irgendwie} & \text{d.h. wähle W'Maß auf } (E_1, \mathcal{E}_1) \\ & \text{ und setze } K(y, A) = \mu(A) \ \forall A \in \mathcal{E}_1 \end{cases}$$

Dann ist K die bedingte Verteilung von X gegeben Y.

3.10 Lebesgue-Dichten

Sei (X,Y) ein zweidimensionaler Zufallsvektor mit **Lebesgue-Dichte** $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) &= \int\limits_{A\times B} h(x,y)\lambda^2(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)\\ &= \int\limits_A \int\limits_B h(x,y)\lambda(\mathrm{d}y)\lambda(\mathrm{d}x) \quad \forall B \in \mathcal{L}\end{aligned}$$

Setze $f(y) = \int_{\mathbb{R}} h(x,y)\mathrm{d}x$.
Dann ist f messbar wegen Fubini und die Lebesgue-Dichte von Y, denn:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y \in B) = \mathbb{P}(Y \in B, X \in \mathbb{R}) &= \int\limits_{\mathbb{R}\times B} h(x,y)\mathrm{d}(x,y)\\ &= \int\limits_B \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}} h(x,y)\mathrm{d}x}_{f(y)}\,\mathrm{d}y \quad \forall B \in \mathcal{L}\end{aligned}$$

Definiere den stochastischen Kern $K : \mathbb{R}\times\mathcal{L} \to [0,1]$ durch $\begin{cases} \int_A \frac{h(x,y)}{f(y)}\lambda(\mathrm{d}x) & \text{falls } f(y) > 0 \\ \text{irgendwie} & \end{cases}$

$$\frac{\mathbb{P}(X \in A, Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)} \overset{X \text{ diskret}}{=} \frac{\sum_{x\in A}\mathbb{P}(X = x, Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)}$$

Dann ist K eine bedingte Verteilung von Y,denn

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) &= \int\limits_{A\times B} h(x,y)\lambda^2(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)\\ &= \int\limits_B \int\limits_A h(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \int\limits_{B\cap\{f>0\}} \int\limits_A \frac{h(x,y)}{f(y)}\mathrm{d}x \cdot f(y)\mathrm{d}y\\ &= \int\limits_{B\cap\{f>0\}} K(y,A)f(y)\mathrm{d}y\\ &= \int\limits_B K(y,A)\mathbb{P}^y(\mathrm{d}y)\end{aligned}$$

Also gilt: $\omega \mapsto K(Y(\omega),A)$ ist eine Version von $\mathbb{P}(X \in A, Y)$
$\Rightarrow y \mapsto K(y,A)$ ist eine Version von $\mathbb{P}(X \in A \mid Y = y)$.

3.11 Eigenschaften

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ W'Raum, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ Unter-σ-Algebra. Seien X, X_1, X_2 integrierbare ZV'en. Dann gilt:

(i) $\mathbb{E}(\alpha X_1 + \beta X_2 \mid \mathcal{G}) = \alpha \mathbb{E}(X_1 \mid \mathcal{G}) + \beta \mathbb{E}(X_2 \mid \mathcal{G})$ für alle α, β

(ii) $X_1 \leq X_2 \Rightarrow \mathbb{E}(X_1 \mid \mathcal{G}) \leq \mathbb{E}(X_2 \mid \mathcal{G})$

(iii) Sei Z eine $\mathcal{G}$-messbare ZV, so dass $\mathbb{E}ZX$ existiert. Dann gilt

$$\mathbb{E}(ZX \mid \mathcal{G}) = Z\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$$

(iv) Sind G_1, G_2 Unter-σ-Algebren mit $G_1 \subseteq G_2$, so folgt

$$\mathbb{E}(X \mid G_1) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid G_2) \mid G_1) \quad \text{'}\underline{\textbf{Tower Property}}\text{'}$$

(v) Sind X und $\mathcal{G}$ stoch. unabhängig, so gilt

$$\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}X$$

(vi) Sind Z_1, Z_2 stoch. unabh. ZV'en mit Werten in $(E_1, \mathcal{E}_1), (E_2, \mathcal{E}_2)$ und ist $h : E_1 \times E_2 \to (\mathbb{R}, \mathcal{L})$ messbar mit ex. $\mathbb{E}h(Z_1, Z_2)$, so gilt

$$\mathbb{E}(h(Z_1, Z_2) \mid Z_2 = z_2) = \mathbb{E}h(Z_1, z_2)$$

für $\mathbb{P}^{Z_2}$-f.a. $z_2 \in E_2$

(vii) $\mathbb{E}\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}X$

Beweis:
(i), (ii) einfach (✓).
(iii): 1.Fall: $Z \geq 0, \;\; X \geq 0$
Ist $Z = \mathbb{1}_G$ mit $G \in \mathcal{G}$, so gilt für alle $A \in \mathcal{G}$

$$\begin{aligned} \int_A ZX \mathrm{d}\mathbb{P} &= \int_A \mathbb{1}_G X \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_{A \cap G} X \mathrm{d}\mathbb{P} \\ &= \int_{A \cap G} \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A Z\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) \mathrm{d}\mathbb{P} \\ &\Rightarrow \mathbb{E}(ZX \mid \mathcal{G}) = Z\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) \end{aligned}$$

Ist $Z = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{G_i}, \; G_i \in \mathcal{G}, \; \alpha_i \geq 0$ so gilt wegen (i)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(ZX \mid \mathcal{G}) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{G_i} X \mid \mathcal{G} \right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{E}(\mathbb{1}_{G_i} X \mid \mathcal{G}) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{G_i} \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) = Z\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) \end{aligned}$$

Ist $Z \geq 0$, so ex. eine Folge von Treppenfunktionen $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $0 \leq Z_1 \leq Z_2 \leq \ldots \uparrow Z \Rightarrow Z_n X \uparrow ZX$.
Für jedes $A \in G$ folgt mit monotoner Konvergenz

$$\begin{aligned} \int_A ZX \mathrm{d}\mathbb{P} &= \mathbb{E}ZX\mathbb{1}_A = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}Z_n X \mathbb{1}_A = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\mathbb{E}(Z_n X \mid \mathcal{G})\mathbb{1}_A \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}Z_n \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})\mathbb{1}_A = \mathbb{E}Z\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})\mathbb{1}_A \\ &\Rightarrow \mathbb{E}(ZX \mid \mathcal{G}) = Z\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) \end{aligned}$$

Es ex. $\mathbb{E}ZX$.
$ZX = U - V$ mit $U = Z^+X^+ + Z^-X^- \geq 0,\ V = Z^+X^- + Z^-X^+ \geq 0$

$$(Z^+ - Z^-)(X^+ - X^-) = Z^+X^+ + Z^-X^- - (Z^-X^+ + X^-Z^+)$$

Also

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(ZX \mid \mathcal{G}) &= \mathbb{E}(U \mid \mathcal{G}) - \mathbb{E}(V \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}(Z^+X^+ \mid \mathcal{G}) + \mathbb{E}(Z^-X^- \mid \mathcal{G}) - \big(\mathbb{E}(Z^-X^+ \mid \mathcal{G}) + \mathbb{E}(Z^+X^- \mid \mathcal{G})\big)\\ &= Z^+\mathbb{E}(X^+ \mid \mathcal{G}) - Z^-\mathbb{E}(X^+ \mid \mathcal{G}) - \big(Z^+\mathbb{E}(X^- \mid \mathcal{G}) - Z^-\mathbb{E}(X^- \mid \mathcal{G})\big)\\ &= Z(\mathbb{E}(X^+ \mid \mathcal{G}) - \mathbb{E}(X^- \mid \mathcal{G})) = Z\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})\end{aligned}$$

(iv): Sei $A \in G_1$.

$$\begin{aligned}&\int_A \mathbb{E}(X \mid G_2)\mathrm{d}\mathbb{P} \overset{A \in G_2}{=} \int_A X\mathrm{d}\mathbb{P} \overset{A \in G_1}{=} \int_A \mathbb{E}(X \mid G_1)\mathrm{d}\mathbb{P}\\ &\Rightarrow \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid G_2) \mid G_1) = \mathbb{E}(X \mid G_1)\end{aligned}$$

(vi): Zz $\mathbb{E}(h(Z_1, Z_2) \mid Z_2 = z_2) = \mathbb{E}h(Z_1, z_2)$
Für $B \in \mathcal{E}_2$ gilt:

$$\begin{aligned}&\int_{\{Z_2 \in B\}} h(Z_1, Z_2)\mathrm{d}\mathbb{P} = \mathbb{E}h(Z_1, Z_2)\mathbb{1}_{\{Z_2 \in B, \mathbb{Z}_1 \in E_1\}}\\ &= \int_B \int_{E_1} h(z_1, z_2)\mathbb{P}^{Z_1}(\mathrm{d}z_1)\mathbb{P}^{Z_2}(\mathrm{d}z_2)\end{aligned}$$

da $\int_{E_1} h(z_1, z_2)\mathbb{P}^{Z_1}(\mathrm{d}z_1) = \mathbb{E}h(Z_1, z_2)$ für $\mathbb{P}^{Z_2}$-f.a. z_2, ist

$$\mathbb{E}(h(Z_1, Z_2) \mid Z_2 = z_2) = \mathbb{E}h(Z_1, z_2) \text{ für } \mathbb{P}^{Z_2} - \text{f.a. } z_2$$

3.12 Bestapproximation

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, X Zv mit $\mathbb{E}X^2 < \infty$ $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ Unter-σ-Algebra,

$$L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = \{Y : \Omega \to \mathbb{R} \mid Y \text{ ist } \mathcal{F} - \text{messbar und } \mathbb{E}Y^2 < \infty\}$$

$$L_2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P}) = \{Y : \Omega \to \mathbb{R} \mid Y \text{ ist } \mathcal{G} - \text{messbar und } \mathbb{E}Y^2 < \infty\}$$

$$L_2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P}) \subseteq L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$$

Durch $\langle Y \mid Z \rangle := \mathbb{E}YZ$ wird ein Skalarprodukt auf $L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ definiert. Für $X \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ist $\hat{X} := \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$ die **Orthogonalprojektion** auf $L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, d.h. $\hat{X} \in L_2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$

$$\left\|X - \hat{X}\right\|_2^2 = \inf \|X - Z\|_2^2,\ Z \in L_2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$$

$\|Y\|_2^2 = \langle Y \mid Y \rangle$ für alle $Y \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. $L_2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ ist ein abgeschlossener Teilraum.

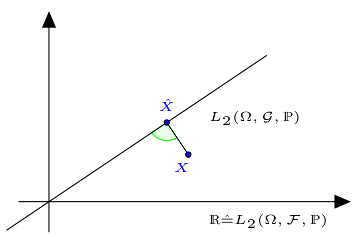


Abbildung 22: Orthogonalprojektion auf dem $L_2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$

Beweis:
Es gilt $X = \hat{X} + X - \hat{X}$. ZZ $X - \hat{X} \perp Z$ für alle $Z \in L_2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$
Eigenschaften des bedingten Erwartungswertes implizieren:

$$\begin{aligned}\langle \mathbb{1}_A \,|\, X\rangle &= \int \mathbb{1}_A X \mathrm{d}\mathbb{P} = \int \mathbb{1}_A \hat{X} \mathrm{d}\mathbb{P} = \left\langle \mathbb{1}_A \,\middle|\, \hat{X}\right\rangle \ \forall A \in \mathcal{G} \\ &\Rightarrow \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} \,\middle|\, X \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} \,\middle|\, \hat{X} \right\rangle \ \forall A_i \in \mathcal{G},\ \alpha_i \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow \langle Z \,|\, X\rangle = \left\langle Z \,\middle|\, \hat{X}\right\rangle \ \forall Z \in L_2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})\end{aligned}$$

da $\langle\, . \,|\, X\rangle$ bzw. $\left\langle\, . \,\middle|\, \hat{X}\right\rangle$ stetig sind. $\Rightarrow X - \hat{X} \perp L_2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$
Mit Pythagoras folgt

$$\|X - Z\|_2^2 = \left\|X - \hat{X} + \hat{X} - Z\right\|_2^2 = \left\|X - \hat{X}\right\|_2^2 + \left\|\hat{X} - Z\right\|_2^2 \geq \left\|X - \hat{X}\right\|_2^2$$

□

3.13 Martingale

Sei T eine Zeitparametermenge. $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ eine Filtration und $(M_t)_{t\in T}$ ein **adaptiv-stochastischer Prozess**. $M = (M_t)_{t\in T}$ heißt **Martingal**, falls gilt:

(i) $\mathbb{E}\,|M_t| < \infty\ \forall t \in T$

(ii) $\mathbb{E}(M_t \mid \mathcal{F}_s) = M_s\ \forall s, t \in T,\ s \leq t$

$\mathbb{E}(M_t \mid \mathcal{F}_s)$ Schätzung der zukünftigen Zahlung eines Spielers

M heißt **Submartingal**, falls gilt:

(i) $\mathbb{E}\,|M_t| < \infty\ \forall t \in T$

(ii) $\mathbb{E}(M_t \mid \mathcal{F}_s) \geq M_s\ \forall s, t \in T,\ s \leq t$

ist günstig weiter zu spielen

M heißt **Supermartingal**, falls gilt:

(i) $\mathbb{E}\,|M_t| < \infty\ \forall t \in T$

(ii) $\mathbb{E}(M_t \mid \mathcal{F}_s) \leq M_s\ \forall s, t \in T,\ s \leq t$

jetzt sollte man gehen

3.14 Beispiele Martingale

(i) Random-Walk:
$S_n = S_0 + \sum_{i=1}^n X_i$, S_0 unabhängig von $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ und iid, $\mathbb{E}\,|X_i| < \infty$, $\mathbb{E}\,|S_0| < \infty$ und $\mathcal{F}_n = \sigma(S_0, S_1, S_2, \dots, S_n) = \sigma(S_0, X_1, \dots, X_n)$.
Dann gilt:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}(S_n + X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(S_n \mid \mathcal{F}_n) + \mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) \\ &\overset{S_n\ \mathcal{F}_n\text{-messbar}}{=} S_n + \mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) \overset{X_{n+1}\ \text{unabh. von}\ \mathcal{F}_n}{=} S_n + \mathbb{E}X_{n+1}\end{aligned}$$

$$\begin{cases} > & & & > \\ = & S_n \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{E}X_{n+1} & = & 0 \\ < & & & < \end{cases}$$

(ii) geometrischer Random-Walk:
$S_n = S_0 \cdot \prod_{i=1}^n X_i,\ (X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ iid, $\mathbb{E}\,|X_i| < \infty$, $\mathcal{F}_n = \sigma(S_0, X_1, \ldots, X_n)$
Dann gilt:

$$\mathbb{E}(S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(S_n \cdot X_{n+1} \mid S_0, \ldots, S_n) \overset{S_n\ \mathcal{F}_n\text{-messbar}}{=} S_n \cdot \mathbb{E}(X_{n+1} \mid S_0, \ldots, S_n) = S_n \cdot \mathbb{E}X_{n+1}$$

(S_n) ist ein Martingal genau dann, wenn $\mathbb{E}X_i = 1\ \forall i \in \mathbb{N}$, für Submartingal bzw. Supermartingal verschiedene Fälle betrachten.

3.15 Stopzeit

Sei $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ eine Filtration, $\tau : \Omega \to T \cup \{+\infty\}$ heißt **Stopzeit**, falls

$$\{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t$$

Stopzeiten kann man als Verkaufsstrategie interpretieren. Die Entscheidung über t hinaus fortzufahren. $\{t \in T\}$ darf nur von der bis t verfügbaren Informationen abhängen.
Beispiel: $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reellwertiger stoch. Prozess $\mathcal{F}_n = \sigma(S_0, \ldots, S_n)\ \forall n \in \mathbb{N}$. $\tau = \inf\{n \in \mathbb{N}_0 \mid S_n > a\}$ ist eine Stopzeit, denn $\{\tau > n\} = \{S_0 \le a, \ldots, S_n \le a\} \subseteq \mathcal{F}_n$.

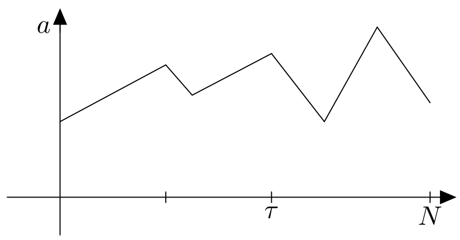


Abbildung 23: Stopzeiten

$\tau = \inf\{0 \le k \le N \mid S_k = \max\{S_0, \ldots, S_n\}\}$ ist keine Stopzeit, da zur Stopentscheidung in die Zukunft geschaut werden muss.

3.16 Martingal als faires Glücksspiel

Sei $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Filtration und $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ adaptierter stoch. Prozess mit $\mathbb{E}\,|M_n| < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
$M_n \,\hat{=}$ Auszahlung, die ein Spieler erhält, wenn er das Spiel zum Zeitpunkt n beendet.
Stopzeiten $\hat{=}$ Strategien, die ein Spieler verwirklichen kann.
τ ist eine beschränkte Stopzeit, falls es ein $N \in \mathbb{N}$ ex. mit $\tau \le N$.
Beschränkte Stopzeiten $\hat{=}$ real umsetzbare Strategien.

Satz:
Es gilt: $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist ein Martingal genau dann, wenn

$$\mathbb{E}M_\tau = \mathbb{E}M_0 \text{ für jede beschränkte Stopzeit } \tau$$

d.h. durch Spielen des Glücksspiels kann sich ein Spieler im Mittel weder verbessern noch verschlechtern (faires Glücksspiel).

Beweis:
$\Rightarrow$: Sei τ Stopzeit mit $\tau \leq N$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}M_\tau &= \mathbb{E}\sum_{n=0}^{N} M_\tau \mathbb{1}_{\{\tau=n\}} = \mathbb{E}\sum_{n=0}^{N} M_n \mathbb{1}_{\{\tau=n\}} \\
&= \sum_{n=0}^{N} \mathbb{E}M_n \mathbb{1}_{\{\tau=n\}} = \sum_{n=0}^{N} \mathbb{E}\mathbb{E}(M_N \mid \mathcal{F}_n)\mathbb{1}_{\{\tau=n\}} \\
&= \sum_{n=0}^{N} \mathbb{E}\mathbb{E}(M_N \mathbb{1}_{\{\tau=n\}} \mid \mathcal{F}_n) = \sum_{n=0}^{N} \mathbb{E}M_N \mathbb{1}_{\{\tau=n\}} \\
&= \mathbb{E}\sum_{n=0}^{N} M_N \mathbb{1}_{\{\tau=n\}} = \mathbb{E}M_N = \mathbb{E}M_0
\end{aligned}$$

Also: $\mathbb{E}M_\tau = \mathbb{E}M_0$.

$\Leftarrow$: Sei $n < m$. Z.z. $\mathbb{E}(M_m \mid \mathcal{F}_n) = M_n$, d.h. $\int_A M_m \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A M_n \mathrm{d}\mathbb{P}$ für alle $A \in \mathcal{F}_n$.
Zu $A \in \mathcal{F}_n$ definiere Stopzeit:

$$\tau_A(\omega) = \begin{cases} m, & \omega \in A \\ n, & \omega \in A^c \end{cases}$$

$\tau_A = m\mathbb{1}_A + n\mathbb{1}_{A^c}$
τ_A ist eine beschränkte Stopzeit. Es gilt also:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}M_0 = \mathbb{E}M_{\tau_A} &= \mathbb{E}M_m\mathbb{1}_A + \mathbb{E}M_n\mathbb{1}_{A^c} \\
&= \mathbb{E}M_m\mathbb{1}_A + \mathbb{E}M_n - \mathbb{E}M_n\mathbb{1}_A
\end{aligned}$$

Weiter gilt mit $\tau_A = n$

$$\mathbb{E}M_0 = \mathbb{E}M_{\tau_A} = \mathbb{E}M_n$$

Einsetzen liefert

$$\mathbb{E}M_m\mathbb{1}_A = \mathbb{E}M_n\mathbb{1}_A$$

□

3.17 Optional Sampling

Frage: Wann gilt $\mathbb{E}M_\tau = \mathbb{E}M_0$, wenn M ein Martingal ist. Für beschränkte Stopzeiten klar. Für unbeschränkte Stopzeiten braucht man Voraussetzungen.
Beispiel: Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$
$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i,\ (X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ iid, $\mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(X_i = -1)$, $\tau = \inf\{n \in \mathbb{N}_0 \mid S_n = 1\}$
Es gilt: $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$ $\mathbb{P}$-f.s. $S_\tau = 1 \Rightarrow \mathbb{E}S_\tau = 1 \neq \mathbb{E}S_0 = 0$.
Antwort liefert das **Optional-Sampling Theorem**.

Satz:
Sei $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Martingal bzgl. einer Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Sei τ eine Stopzeit mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$

(ii) $\mathbb{E}\,|M_\tau| < \infty$

(iii) $\mathbb{E}\,|M_n|\,\mathbb{1}_{\{\tau>n\}} \overset{n\to\infty}{\to} 0$

Dann gilt:

$$\mathbb{E}M_\tau = \mathbb{E}M_0$$

Beweis:
Approximiere τ durch beschränkte Stopzeiten $\tau \wedge n$. Es gilt $\mathbb{E}M_{\tau\wedge n} = \mathbb{E}M_0$. Also

$$\begin{aligned}|\mathbb{E}M_\tau - \mathbb{E}M_0| &= |\mathbb{E}M_\tau - \mathbb{E}M_{\tau\wedge n}| = \left|\mathbb{E}M_\tau - \mathbb{E}M_\tau \mathbb{1}_{\{\tau\leq n\}} - \mathbb{E}M_n\mathbb{1}_{\{\tau>n\}}\right| \\ &= \left|\mathbb{E}M_\tau \mathbb{1}_{\{\tau>n\}} - \mathbb{E}M_n\mathbb{1}_{\{\tau>n\}}\right| \\ &\leq \mathbb{E}\,|M_\tau|\,\mathbb{1}_{\{\tau>n\}} + \mathbb{E}\,|M_n|\,\mathbb{1}_{\{\tau>n\}} \to 0\end{aligned}$$

Wegen (ii),(iii) und einer Anwendung des Satzes von der majorisierten Konvergenz. □

3.18 Anwendung

Berechnung von Ruinwahrscheinlichkeiten. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iid mit $\mathbb{P}(X_n = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X_n = -1)$
$S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ für alle $n \in \mathbb{N}$
Anfangskapital von k Euro. $S_n^{(k)} = k + S_n = k + \sum_{i=0}^n X_i$ Vermögen nach n-Spielen bei Anfangskapital k.
Wir spielen solange, bis wir ein Vermögen von $l > k$ Euro erreichen oder ruiniert sind

$$\tau = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid S_n^{(k)} = 0 \text{ oder } S_n^{(k)} = l\} = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid S_n = 0 - k \text{ oder } S_n = l - k\}$$

ist die Strategie.

$$\{S_\tau = -k\} = \{S_\tau^{(k)} = 0\} \text{ ist Ruin}$$
$$\{S_\tau = l - k\} = \{S_\tau^{(k)} = l\} \text{ ist Gewinn}$$

Man kann zeigen:

$$\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1,\ \mathbb{E}\tau < \infty$$

1. $p = \frac{1}{2}$ der faire Fall:
   Dann ist $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Martingal.

   $$\mathbb{E}\,|S_\tau| \leq \max\{k, l-k\} < \infty$$

   $$\mathbb{E}\,|S_n|\,\mathbb{1}_{\{\tau>n\}} \leq \max\{k, l-k\}\mathbb{P}(\tau > n) \to 0$$

   Optional-Sampling liefert

   $$0 = \mathbb{E}S_\tau = -k\mathbb{P}(S_\tau = -k) + (l-k)\mathbb{P}(S_\tau = l-k)$$

   Zusammen mit $\mathbb{P}(S_\tau = -k) + \mathbb{P}(S_\tau = l - k) = 1$ folgt

   $$\mathbb{P}(S_\tau = -k) = \frac{l-k}{l} \text{ Ruinw'keit}$$

   $$\mathbb{P}(S_\tau = l-k) = \frac{k}{l} \text{ Gewinnw'keit}$$

2. $p \neq \frac{1}{2}$ der unfaire Fall:
   $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, $\tau = \inf\{n \in \mathbb{N}_0 \mid S_n = -k \text{ oder } S_n = l - k\}$
   Betrachte den geometrischen Random-Walk

   $$M_n = a^{S_n} = \prod_{i=1}^n a^{X_i} \text{ mit } a > 0$$

$(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist ein Martingal $\Leftrightarrow \mathbb{E}a^{X_1} = 1 \Leftrightarrow ap + \frac{1}{a}(1-p) = 1 \Leftrightarrow a = 1$ oder $a = \frac{1-p}{p}$
Für $p \neq \frac{1}{2}$ ist $a \neq 1$
Weiter gilt:

$$\mathbb{E}\,|M_\tau| \leq \max\{a^{-k}, a^{l-k}\} < \infty$$

$$\mathbb{E}\,|M_n|\,\mathbb{1}_{\{\tau>n\}} \leq \max\{a^{-k}, a^{l-k}\}\mathbb{P}(\tau > n) \overset{n\to\infty}{\to} 0$$

Optional Sampling liefert:

$$1 = \mathbb{E}M_\tau = a^{-k}\mathbb{P}(S_\tau = -k) + a^{l-k}\mathbb{P}(S_\tau = l-k)$$

Zusammen mit $\mathbb{P}(S_\tau = -k) + \mathbb{P}(S_\tau = l-k) = 1$ folgt

$$P(S_\tau = -k) = \frac{a^k - a^l}{1-a^l} \text{ und } \mathbb{P}(S_\tau = l) = \frac{1-a^k}{1-a^l}$$

Es folgt der Nachweis von $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$.
Betrachte dazu für $b \in \mathbb{Z}$, $\tau_b = \inf\{n \in \mathbb{N}_0 \mid S_n = b\}$
Dann gilt:

$$\mathbb{P}(\tau_b < \infty) = \mathbb{P}(\tau_1 < \infty)\mathbb{P}(\tau_{b-1} < \infty) = \mathbb{P}(\tau_1 < \infty)^b$$

$$\mathbb{P}(\tau_{-a} < \infty) = \mathbb{P}(\tau_{-1} < \infty)^a \text{ für alle } a, b \in \mathbb{N}$$

Weiter ist

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\tau_1 < \infty) &= \mathbb{P}(\tau_1 < \infty, X_1 = 1) + \mathbb{P}(\tau_1 < \infty, X_1 = -1)\\ &= \mathbb{P}(X_1 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = -1)P(\tau_2 < \infty)\\ &= p + (1-p)\mathbb{P}(\tau_1 < \infty)^2\end{aligned}$$

Also ist $\mathbb{P}(\tau_1 < \infty)$ Lösung von

$$(1-p)x^2 - x + p = 0$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(\tau_1 < +\infty) = 1 \text{ oder } \mathbb{P}(\tau_1 < +\infty) = \frac{p}{1-p}$$

Der Fall $p \geq \frac{1}{2}$:
$p \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{p}{1-p} \geq 1 \Rightarrow \mathbb{P}(\tau_1 < +\infty) = 1$

Der Fall $p < \frac{1}{2}$:
Dann ist $\frac{p}{1-p} < 1$

$$\begin{aligned}\text{SLLN } &\Rightarrow \frac{S_n}{n} \overset{n\to\infty}{\to} \mathbb{E}X_1 = 2p - 1 < 0\\ &\Rightarrow S_n \to -\infty \ \mathbb{P} - f.s.\\ &\Rightarrow \mathbb{P}(\sup_{n\in\mathbb{N}} S_n = +\infty) = 0\end{aligned}$$

Wäre $\mathbb{P}(\tau_1 < \infty) = 1$, so wäre $\mathbb{P}(\tau_b < \infty) = 1 \ \forall b \in \mathbb{N}$ und damit

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\sup_{n\in\mathbb{N}} S_n = +\infty) &= \lim_{b\to\infty} \mathbb{P}(\sup_{n\in\mathbb{N}} S_n \geq +\infty)\\ &= \lim_{b\to\infty} \mathbb{P}(\tau_b < \infty) = 1 \lightning\end{aligned}$$

Widerspruch, also gilt $\mathbb{P}(\tau_1 < \infty) = \frac{p}{1-p}$ falls $p < \frac{1}{2}$
$(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist Martingal $\Leftrightarrow \ \mathbb{E}a^{X_1} = 1 \Leftrightarrow ap + \frac{1}{a}(1-p) = 1 \Leftrightarrow a = 1$ oder $a = \frac{1-p}{p}$
Analog kann man schließen $\mathbb{P}(\tau_{-1} < \infty) = \begin{cases} 1, & \text{falls } p \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1-p}{p}, & \text{falls } p > \frac{1}{2} \end{cases}$
Insgesamt folgt für $a < 0 < b, \ a, b \in \mathbb{R}$, und $\tau_{ab} = \inf\{n \in \mathbb{N}_0 \mid S_n = a \text{ oder } S_n = b\}$

$$\mathbb{P}(\tau_{ab} < \infty) = \mathbb{P}(\tau_a < \infty \text{ oder } \tau_b < \infty) = 1$$

Berechnung von $\mathbb{E}\tau_{ab}$:

(1) unfairer Fall:
$S_n - n\mathbb{E}X_1 = S_n - (2p-1),\ n \in N_0$ ist ein **zentrierter Random-Walk** und deshalb ein Martingal. Optional Sampling liefert:

$$\mathbb{E}(S_{\tau\wedge n} - (\tau \wedge n)(2p-1)) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{E}(\tau \wedge n)(2p-1) = \mathbb{E}S_{\tau\wedge n}$$

$\mathbb{E}\tau \wedge n \uparrow \mathbb{E}\tau$ monotone Konvergenz
$\mathbb{E}S_{\tau\wedge n} \overset{n\to\infty}{\to} \mathbb{E}S_\tau$ majorisierte Konvergenz, da $|S_{\tau\wedge n}| \le \max\{|a|, b\}$
Es gilt $\mathbb{E}S_{\tau\wedge n} = a\mathbb{P}(S_\tau = a) + b\mathbb{P}(S_\tau = b) = (2p-1)\mathbb{E}\tau$
Also folgt:

$$\mathbb{E}\tau_{ab} = \frac{1}{2p-1} \cdot \left(a \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{|a|} - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{|a|+b}}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{|a|+b}} + b \frac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{|a|}}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{|a|+b}} \right)$$

(2) fairer Fall: $p = \frac{1}{2}$
$(S_n^2 - n\mathbb{E}X_1^2)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist ein Martingal, denn

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}((S_n + X_{n+1})^2 \mid \mathcal{F}_n) \\
&= \mathbb{E}(S_n^2 \mid \mathcal{F}_n) + 2\mathbb{E}(X_{n+1}S_n \mid \mathcal{F}_n) + \mathbb{E}(X_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n) \\
&= S_n^2 + 2S_n\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) + \mathbb{E}X_{n+1}^2 \\
&= S_n^2 + 2S_n + \underbrace{\mathbb{E}X_{n+1}}_{=0} \cdot \mathbb{E}X_{n+1}^2 \\
&= S_n^2 + \mathbb{E}X_{n+1}^2 \\
\mathbb{E}(S_{n+1}^2 - (n+1)\mathbb{E}X_1^2 \mid \mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}(S_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n) - (n+1)\mathbb{E}(X_1^2 \mid \mathcal{F}_n) \\
&= S_n^2 + \mathbb{E}X_{n+1}^2 - (n+1)\mathbb{E}X_1^2 \\
&= S_n^2 + n\mathbb{E}X_1^2
\end{aligned}$$

Hieraus folgt die Martingaleigenschaft. Optioal Smapling liefert:

$$\mathbb{E}(S_{\tau\wedge n}^2 - (\tau \wedge n)\mathbb{E}X_1^2 = 0 \Leftrightarrow \mathbb{E}S_{\tau\wedge n}^2 = \underbrace{X_1^2}_{=1} \cdot \mathbb{E}(\tau \wedge n)$$

$\mathbb{E}\tau \wedge n \uparrow \mathbb{E}\tau$ mon. Konv. und $\mathbb{E}S_{\tau\wedge n}^2 \to \mathbb{E}S_\tau^2$ maj. Konv.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \mathbb{E}\tau &= \mathbb{E}S_\tau^2 = a^2\mathbb{P}(S_\tau = a) + b\mathbb{P}(S_\tau = b) \\
&= a^2 \cdot \frac{b}{|a| + b} + b^2 \cdot \frac{|a|}{|a| + b} = \frac{|a|\, b(|a| + b)}{|a| + b} \\
&= |a|\, b
\end{aligned}$$

3.19 Vorhersehbare Prozesse

Sei $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Filtration. Ein stochastischer Prozess $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **vorhersehbar**, wenn gilt

$$X_n \text{ ist } \mathcal{F}_{n-1} - \text{messbar } \forall n \in \mathbb{N}$$

man kennt den Wert für X_n schon vor Beginn der Periode

3.20 Doob-Meyer Zerlegung

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein, zu einer Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, adaptierter Prozess, mit

$$\mathbb{E}\,|X_n| < \infty \;\forall n \in \mathbb{N}_0$$

Dann existiert genau eine Zerlegung der Form

$$X_n = Y + M_n + \Lambda_n \quad \mathbb{P}-\text{f.s. } \forall n \in \mathbb{N}_0$$

mit Y ist $\mathcal{F}_o$-messbare Startvariable, $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist ein Martingal, mit $M_0 = 0$ und $(\Lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist vorhersehbar, $\Lambda_0 = 0$.
Eindeutigkeit bedeutet, wenn es eine weiter Zerlegung $X = Y' + M_n' + \Lambda_n'$ gibt, so folgt:

$$Y = Y', M_n = M_n',\ \Lambda_n = \Lambda_n' \ \mathbb{P}\text{-f.s.},\ \forall n \in \mathbb{N}_0$$

<u>Beweis:</u>
<u>Existenz:</u>
Setze $M_0 = 0,\ \Lambda_0 = 0$ und $M_1 = X_1 - \mathbb{E}(X_1 \mid \mathcal{F}_0),\ \Lambda_1 = \mathbb{E}(X_1 \mid \mathcal{F}_0) - X_0$.
Definiere rekursiv:

$$\begin{aligned} M_{n+1} &= M_n + X_{n+1} - \mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) \\ \Lambda_{n+1} &= \Lambda_n + \mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) - X_n \end{aligned}$$

Dann gilt $(\Lambda_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist vorhersehbar, $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist ein Martingal, denn

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}(M_n + X_{n+1} - \mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) \mid \mathcal{F}_n) \\ &= M_n + \mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) - \mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = M_n \end{aligned}$$

<u>Behauptung:</u>

$$X_n = X_0 + M_n + \Lambda_n,\ \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Induktion nach n:
$n = 0$ klar(✓)
<u>$n \to n+1$:</u>

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= X_{n+1} - X_n + X_n \\ &\overset{\text{IV}}{=} X_{n+1} - X_n + X_0 + M_n + \Lambda_n \\ &= X_0 + M_n + X_{n+1} - \mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) + \Lambda_n + \mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) - X_n \\ &= X_0 + M_{n+1} + \Lambda_{n+1} \end{aligned}$$

Eindeutigkeit folgt aus der Tatsache, dass ein vorhersehbares Martingal konstant sein muss, d.h. sei $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Martingal und vorhersehbar, dann folgt

$$\exists Y \in \mathbb{R}:\ Y\ \mathcal{F}_0\text{-messbar}:\ Z_n = Y\ \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

<u>Beweis:</u>

$$Z_{n+1} = \mathbb{E}(Z_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = Z_n = \cdots = Z_1 = Y\ \mathcal{F}_0\text{-messbar}$$

□

$$\begin{aligned} &\text{Sei } Y + M_n + \Lambda_n = Y' + M_n' + \Lambda_n' \\ &\Rightarrow Y = Y',\ \text{da } M_0 = M_0' = 0,\ \Lambda_0 = \Lambda_0' = 0 \\ &\Rightarrow M_n + \Lambda_n = M_n' + \Lambda_n' \\ &\Rightarrow M_n - M_n' = \Lambda_n' - \Lambda_n \end{aligned}$$

Also ist $(M_n - M_n')_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein vorhersehbares Martingal. Also folgt $M_n - M_n' = Z\ \forall n \in \mathbb{N}_0$ für ein $\mathcal{F}_0$-messbares Z.

$$Z = \mathbb{E}(M_n - M_n' \mid \mathcal{F}_0) = M_0 - M_0' = 0 \Rightarrow Z \equiv 0$$

□

4 Diskrete Finanzmarktmodelle

Ziel:

- Modellierung von Finanzmärkten in diskreter Zeit
- Formulierung des Arbitragebegriffs
- Arbitrage freie Bewertung von Derivaten
- Zusammenhang zur W'theorie, das No-Arbitrage Theorem

4.1 Beschreibung von Finanzmärkten

- periodische Sichtweise
- N Perioden
- N Handelszeitpunkte $0, 1, \dots, N-1$
- Informationsverlauf wird gegeben durch eine Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n=0,\dots,N}$
- d risikobehaftete Finanzgüter, mit zu $(\mathcal{F}_n)_{n=0,\dots,N}$ adaptierten Preisprozessen

  $$S_1(n), \dots, S_d(n),\ n = 0, \dots, N$$

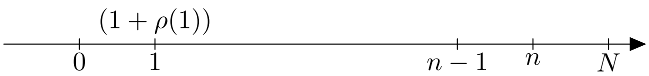
  $S = (S_1, \dots, S_d)$ beschreibt die Entwicklung der Basisfinanzgüter (**risky assets**).
  $S(n)$ ist der zufällige Vektor der Preise nach n Perioden für die risky assets.

- ein **Numeraire Asset** (Verrechnungsgut) mit Preisprozess $S_0(n),\ n = 0, \dots, N$, wobei vorausgesetzt wird, dass $S_0(n) > 0,\ n = 0, \dots, N$
  S_0 ist adaptiert bzgl. $(\mathcal{F}_n)_{n=0,\dots,N}$.
  Das Numeraire Asset dient zur Verrechnung. Häufig wird ein Geldmarktkonto hierzu benutzt, d.h.

  $$\begin{aligned} S_0(n) = \beta(n) &= (1+\rho(1))(1+\rho(2))\cdots(1+\rho(n)),\ n = 1, \dots, N,\ \beta(0) = 1 \\ &= \prod_{i=1}^{n} 1 + \rho(i) \end{aligned}$$

  wobei $(\rho(n))_{n=1,\dots,N}$ ein vorhersehbarer Prozess ist mit

  $$\rho(n) > -1,\ \mathbb{P} - \text{f.s. } n = 1, \dots, N$$

  $\rho(n)$ beschreibt die zufällige Zinsrate der n-ten Periode

- gehandelt werden kann durch Erwerb bzw. Verkauf von Anteilen an den $(d+1)$ Basisfinanzgütern in den Handelszeitpunkten. Die Entwicklung der Anzahl an Anteilen der Basisfinanzgütern entspricht dabei vorhersehbaren Prozessen (φ, H), mit $\varphi(n)$ entspricht der Anzahl an Anteilen des Numeriare Assets in der n-ten Periode und $H_j(n)$ entspricht der Anzahl an Anteilen im j-ten risky Assets in der n-ten Periode.

  $$H = (H_1, \dots, H_d)$$

  Ein solches Paar (φ, H) heißt **Handelsstrategie**. Vorhersehbar, da am Anfang einer Periode das Portfolio zusammengesetzt wird.

Eine Handelsstrategie (φ, H) induziert eine **Vermögensentwicklung**

$$V(n) = \varphi(n)S_0(n) + \sum_{j=1}^{d} H_j(n)S_j(n), \ n = 1, \dots, N$$

Wert nach n Perioden.

$$V(0) = \varphi(1)S_0(0) + \sum_{j=1}^{d} H_j(1)S_j(0)$$

Anfangsvermögen. $V(0)$ kann als Anfangskapital interpretiert werden, dass ein Investor einsetzen muss, um die Handelsstrategie (φ, H) durchführen zu können. $V(n)$ entspricht dem Vermögen am Ende der n-ten Periode, vor Umschichtung des Portfolios.

4.2 Selbstfinanzierung

Wird beim Handel in den Handelszeitpunkten $1, \dots, N-1$ kein Kapital hinzugefügt bzw. entnommen, so nennt man diese Handelsstrategie **selbstfinanzierend**.
Formal: (φ, H) heißt selbstfinanzierend, wenn

$$\begin{aligned} V_n(H) &= \varphi(n)S_0(n) + \sum_{j=1}^{d} H_j(n)S_j(n) \\ &= \varphi(n+1)S_0(n) + \sum_{j=1}^{d} H_j(n+1)S_j(n), \ n = 1, \dots, N-1 \end{aligned}$$

Beispiele für selbstfinanzierende Strategien

(a) Buy and hold Strategie:
Ein Anfangskapital $x > 0$ wird in das erste risky asset investiert und bis zum Ende gehalten.
$H_1(1) = \frac{x}{S_1(0)}$ Kaufen am Anfang
$H_1(n) = \frac{x}{S_1(0)}, \ n = 2, \dots, N$ Halten über die Perioden
$H_j \equiv 0$ für alle anderen j
Wertentwicklung:

$$V(n) = H_1(n)S_1(n) = \frac{x}{S_1(0)}S_1(n)$$

(b) short selling and hold einer Aktie:
$H_1(1) = -1$ short selling der Aktie, Verkauf am Anfang
$H_1(n) = -1$ Halten der Verkaufoption von $n = 2, \dots, N$
Anfangskapital:

$$-S_1(0) < 0$$

Wertentwicklung:

$$-S_1(n), \ n = 2, \dots, N$$

(c) kaufe Aktie 1, halte diese k-Perioden und tausche danach in Aktie 2, falls $S_2(k) < S_1(k)$ und halte diese Position bis zum Ende.
Also: $H_1(n) = 1$, $H_2(n) = 0$ für $n = 1, \dots, k$

$$H_2(k+1) = \frac{V(k)}{S_2(k)} \mathbb{1}_{\{S_2(k) < S_1(k)\}} = \frac{S_1(k)}{S_2(k)} \mathbb{1}_{\{S_2(k) < S_1(k)\}}$$

zufällige Umschichtung in Aktie 2 am Anfang der $(k+1)$-Periode.

$$H_1(k+1) = \mathbb{1}_{\{S_2(k) > S_1(k)\}}$$
$$H_2(n) = \frac{S_1(k)}{S_2(k)} \mathbb{1}_{\{S_2(k) < S_1(k)\}}$$
$$H_1(n) = \mathbb{1}_{\{S_2(k) > S_1(k)\}}, \; n = k+2, \dots, N$$

Halten bis zum Ende.
H ist vorhersehbar und selbstfinanzierend, da

$$\begin{aligned} V(k) = S_1(k) &= \frac{S_1(k)}{S_2(k)} \mathbb{1}_{\{S_2(k) < S_1(k)\}} S_2(k) + \mathbb{1}_{\{S_2(k) > S_1(k)\}} S_1(k) \\ &= H_2(k+1) S_2(k) + H_1(k+1) S_1(k) \end{aligned}$$

4.3 Beispiele CRR-Modell

(a) Das N-Perioden CRR-Modell:
N-Perioden, $n = 1, \dots, N$, S_0 Anfangskurs, Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n=1,\dots,N}$.
Sei $(Z_n)_{n=1,\dots,N}$ die Anzahl der Aufwärtssprünge in den ersten n Perioden.
Annahme: $Z_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ mit iid. ZV'en $Y_1, \dots, Y_N$, $\mathbb{P}(Y_i = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(Y_i = 0)$.
Die Sprunghöhen sind $0 < d < u$, damit ergibt sich der Preisprozess der risky assets (Aktie), der Form

$$S_n = S_0 u^{Z_n} d^{n - Z_n} \; n = 1, \dots, N$$

Also ergibt sich

$$S_{n+1} = S_n u^{Y_{n+1}} d^{1 - Y_{n+1}}$$

$(Y_i)_{i=1,\dots,N}$ adaptiert bzgl. der Filtration.
Bemerkung: $(S_n)_{n=1,\dots,N}$ ist ein geometrischer Random-Walk, startend aus $S_0 > 0$.
Andere Darstellung:

$$S_n = S_0 \cdot \prod_{i=1}^n X_i \text{ mit } X_i = u^{Y_i} d^{1 - Y_i}$$

Das Numeriare Asset ist ein Geldmarktkonto mit konstanter periodischer Zinsrate $\rho > -1$, d.h.

$$\beta(n) = (1 + \rho)^n \; n = 1, \dots, N$$

(b) Mehrdimensionales CRR-Modell:
Gegeben seien l Aktien und l Aktienpreisprozesse, entsprechend dem einfachen CRR-Modell.

$$S_j(n) = S_j(0) u_j^{Z_j(n)} d_j^{n - Z_j(n)}, \; n = 1, \dots, N$$

Sei $(\mathcal{F}_n)_{n=1,\dots,N}$ eine Filtration. $(Z_n)_{n=1,\dots,N}$ ist ein l-dim. Random-Walk mit

$$Z(n) = \sum_{i=1}^n Y(i)$$

mehrdimimensionales Bernoulli-Experiment, aber Aktien beeinflussen sich gegenseitig

$Y(i) = (Y_1(i), \dots, Y_l(i))$ mit $\mathbb{P}(Y_j(i) = 1) = p_j = 1 - \mathbb{P}(Y_j(i) = 0)$. Die $Y_1, \dots, Y_N$ sind iid., aber in einer Periode können die $Y_1(i), \dots, Y_l(i)$ abhängig sein.
Das Numeraire Asset ist wie beim CRR-Modell ein Geldmarktkonto:

$$\beta(n) = \prod_{i=1}^{n} (1 + \rho) = (1 + \rho)^n$$

(c) Das verallgemeinerte CRR-Modell:
Idee: Ersetze den Random-Walk (Z_n), der die Aufwärtssprünge zählt, durch eine zeitlich inhomogene **Markov-Kette**.
Genauer: $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sei W'Raum, $(\mathcal{F}_n)_{n=0,\dots,N}$ eine Filtration und $(Z_n)_{n=0,\dots,N}$ ein **Markov-Prozess**, adaptiert bzgl. $(\mathcal{F}_n)$ mit

(i) $Z_0 = 0$

(ii) Übergangswahrscheinlichkeiten:

$$\mathbb{P}(Z_{n+1} = k + 1 \mid Z_n = k) = p_n(k) = 1 - \mathbb{P}(Z_{n+1} = k \mid Z_n = k),\ k = 0, \dots, n$$

Markov-Eigenschaft bedeutet:

$$\mathbb{P}(Z_{n+1} = k \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{P}(Z_{n+1} = k \mid Z_n)$$

insbesondere folgt damit:

$$\mathbb{P}(Z_{k+1} = k \mid Z_n = k_n, Z_{n-1} = k_{n-1}, \dots, Z_1 = k_1, Z_0 = 0) = \mathbb{P}(Z_{k+1} = k \mid Z_n = k_n)$$

$Z(n)$ zählt die Aufwärtssprünge der ersten n-Perioden. Setze als Preisprozess des risky asset

$$S(n) = S_0 u^{Z_n} d^{n - Z_n} \text{ mit } 0 < d < u$$

Für die Entwicklung des Geldmarktkontos wird angenommen, dass die Zinsrate in einer Periode von der bis dahin erfolgten Anzahl an Aufwärtssprüngen abhängt, d.h.

kennen den Zins in der n-ten Periode, da wir Z_{n-1} kennen

$$\rho(n) = r(n, Z_{n-1}),\ n = 1, \dots, N$$

mit $r : \mathbb{N} \times \{0, \dots, N\} \to (-1, \infty)$. $\rho(n)$ ist dann die zufällige Zinsrate in der n-ten Periode. $\rho(n)$ ist $\mathcal{F}_{n-1}$-messbar für $n = 1, \dots, N$, ρ ist also vorhersehbar.
Der Preisprozess des Geldmarktkontos ergibt sich durch

$$\beta(n) = \prod_{i=1}^{n} (1 + \rho(i)),\ n = 0, \dots, N$$

4.4 Das diskontierte Finanzmarktmodell

Gegeben sei ein Modell entsprechend 4.1 mit $S = (S_1, \dots, S_d)$ als Preisprozess für die risky assets und S_0 als Preisprozess für das Numeraire Asset.
Alle Preise sind hier in Geldeinheiten (Euro) notiert. Eine weitere Möglichkeit Preise zu notieren besteht darin, diese in Anzahl an Anteilen des Numeraire Assets anzugeben. x Geldeinheiten zum Zeitpunkt t entsprechen $\frac{x}{S_0(t)}$-Anteilen des Numeraire Assets.
Im Falle das S_0 das Geldmarktkonto ist, $(S_0(n) = \beta(n))$, ist dies der übliche Diskontierungsvorgang. Dies drückt aus wie viel Geld zum Zeitpunkt t heute wert ist. x Euro in t entsprechen $\frac{x}{\beta(t)}$ heute. Führt man diese '**Diskontierung**' für die Basisfinanzgüter durch, erhält man ein Finanzmarktmodell, dessen Preise in Anteilen des Numeraire Assets notiert sind. Definiere:

$$S_j^*(t) = \frac{S_j(t)}{S_0(t)},\ t = 0, \dots, N,\ 1 \leq j \leq d$$

S_j^* ist dann der Preisprozess des j-ten risky assets ausgedrückt in Anteilen des Numeraire Assets. $(S_1^*, \dots, S_d^*)$ ist dann das 'abdiskontierte' Finanzmarktmodell.
Für eine Handelsstrategie (φ, H) ist der Wertprozess, in Anteilen des Numeraire Assets ausgedrückt, gegeben durch

$$V^*(n) = \varphi(n) + \sum_{j=1}^{d} H_j(n) S_j^*(n)$$

4.5 Charakterisierung der Selbstfinazierung

Eine Handelsstrategie (φ, H) ist selbstfinazierend genau dann, wenn sich ihre Vermögensentwicklung aus dem Anfangskapital und den Periodengewinnen bzw. Verlusten ergibt.
Genauer: Für eine Handelsstrategie (φ, H) sind äquivalent:

(i) (φ, H) ist selbstfinanzierend

(ii)

$$V(n) = V(0) + \sum_{k=1}^{n} \varphi(k) \Delta S_0(k) + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\sum_{j=1}^{d} H_j(k) \Delta S_j(k)}_{=\left\langle H(k) \,\middle|\, \Delta S(k) \right\rangle}, \ n = 1, \dots, N$$

alternativ auch mit Skalarprodukt $\langle H(k) \mid \Delta S(k) \rangle$

(iii)

$$V^*(n) = V^*(0) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{d} H_j(k) \Delta S_j^*(k), \ n = 1, \dots, N$$

Für ein stochastischen Prozess $(X(n))_{n=0,1,2,\dots}$ bedeutet

$$\Delta X(n) = X(n) - X(n-1)$$

Prozess der Periodenzuwächse.

Beweis:
Für jede Handelsstrategie (φ, H) gilt:

$$\begin{aligned} V(1) - V(0) &= \varphi(1) S_0(1) - \varphi(1) S_0(0) + \langle H(1) \mid S(1) \rangle - \langle H(1) \mid S(0) \rangle \\ &= \varphi(1) \Delta S_0(1) + \langle H(1) \mid \Delta S(1) \rangle \end{aligned}$$

Deshalb gilt:

$$\begin{aligned} \text{(ii) ist erfüllt} &\Leftrightarrow \Delta V(k) = \varphi(k) \Delta S_0(k) + \langle H(k) \mid \Delta S(k) \rangle \ \ k = 2, \dots, N \\ &\Leftrightarrow \varphi(k) S_0(k) + \langle H(k) \mid S(k) \rangle - \varphi(k-1) S_0(k-1) - \langle H(k-1) \mid S(k-1) \rangle \\ &\quad = \varphi(k) S_0(k) - \varphi(k) S_0(k-1) + \langle H(k) \mid S(k) \rangle - \langle H(k) \mid S(k-1) \rangle \ \ k = 2, \dots, N \\ &\overset{l=k-1}{\Leftrightarrow} \langle H(l+1) \mid S(l) \rangle + \varphi(l+1) S_0(l) = \langle H(l) \mid S(l) \rangle + \varphi(l) S_0(l) \ l = 1, \dots, N-1 \\ &\Leftrightarrow (\varphi, H) \text{ ist selbstfinanzierend} \end{aligned}$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} \text{(iii) ist erfüllt} &\Leftrightarrow \Delta V^*(k) = \langle H(k) \mid \Delta S^*(k) \rangle \ \ k = 2, \dots, N \\ &\Leftrightarrow \varphi(k) + \langle H(k) \mid S(k) \rangle \frac{1}{S_0(k)} - \varphi(k-1) - \langle H(k-1) \mid S(k-1) \rangle \frac{1}{S_0(k-1)} \\ &\quad = \frac{1}{S_0(k)} \langle H(k) \mid S(k) \rangle - \frac{1}{S_0(k-1)} \langle H(k) \mid S(k-1) \rangle \ \ k = 2, \dots, N \\ &\Leftrightarrow \varphi(k) S_0(k-1) + \langle H(k) \mid S(k-1) \rangle = \varphi(k-1) S_0(k-1) + \langle H(k-1) \mid S(k-1) \rangle \ \ k = 2, \dots, N \\ &\Leftrightarrow (\varphi, H) \text{ ist selbstfinanzierend} \end{aligned}$$

□

Wichtig ist, dass der Handel in den risky assets durch Aufbau einer geeigneten Position im Numeraire Asset zu einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie gemacht werden kann.

4.6 Satz 1

Sei $S_0(0) = 1$. Zu jedem $\mathbb{R}^d$-wertigem vorhersehbarem Prozess H und jedem Anfangskapital V_0 ex. genau ein vorhersehbarer Prozess φ, so dass (φ, H) selbstfinanzierend ist und

$$V^*(n) = V_0 + \sum_{k=1}^{n} \langle H(k) \,|\, \Delta S^*(k) \rangle \;\; n = 1, \ldots, N \qquad (*)$$

Beweis:
Zu bestimmen ist ein φ, so dass der abdiskontierte Wertprozess von (φ, H) durch $(*)$ gegeben ist.
Damit ist (φ, H) selbstfinanzierend wegen 4.5.
Wegen

$$V_0 = \varphi(1) S_0(0) + \langle H(1) \,|\, S(0) \rangle$$

folgt

$$\varphi(1) = \frac{\langle H(1) \,|\, S(0) \rangle - V_0}{S_0(0)}$$

Bestimmung von $\varphi(n)$ für $n \geq 2$:
Wegen

$$V_0 + \sum_{k=1}^{n} \langle H(k) \,|\, \Delta S^*(k) \rangle = V^*(n) = \varphi(n) + \langle H(n) \,|\, S^*(n) \rangle$$

erhält man

$$V_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \langle H(k) \,|\, \Delta S^*(k) \rangle + \langle H(n) \,|\, S^*(n) \rangle - \langle H(n) \,|\, S^*(n-1) \rangle = \varphi(n) + \langle H(n) \,|\, S^*(n) \rangle$$

Also setzt man

$$\varphi(n) = V_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \langle H(k) \,|\, \Delta S^*(k) \rangle - \langle H(n) \,|\, S^*(n-1) \rangle$$

□

Bezeichne mit $\mathcal{H}$ die Menge aller $\mathbb{R}^d$-wertigen vorhersehbaren stoch. Prozesse. Definiere den stoch. Prozess $H \cdot S^*$ durch

$$(H \cdot S^*)(n) = \sum_{k=1}^{n} \langle H(k) \,|\, \Delta S^*(k) \rangle \;\; n = 1, \ldots, N, \;\; (H \cdot S^*)(0) = 0$$

$(H \cdot S^*)(n)$ ist die Summe der Periodengewinne bzgl. S^* über die ersten n-Perioden. $H \cdot S^*$ wird als diskreter stoch. Integralprozess bezeichnet.

4.7 Arbitrage

Eine selbstfinanziernde Handelsstrategie (φ, H) heißt **Arbitrage**, wenn gilt

$$V_0 \leq 0, \;\; V_N \geq 0 \text{ und } \mathbb{P}(V_N - V_0 > 0) > 0$$

Ausgedrückt in Anteilen des Numeraire Assets ist dies äquivalent zu, mit $S_0(0) = 1$:

$$V_0 \leq 0, \;\; V^*(N) = \frac{V(N)}{S_0(N)} \geq 0 \text{ und } \mathbb{P}(V^*(N) - V_0 > 0) > 0$$

Da $V^*(N) - V_0 = H \cdot S^*(N)$.
Es gibt eine Arbitragemöglichkeit genau dann, wenn es ein Anfangskapital $V_0 \leq 0$ und ein $H \in \mathcal{H}$ gibt mit

$$V_0 + (H \cdot S^*)(N) \geq 0 \text{ und } \mathbb{P}(H \cdot S^*(N) > 0) > 0$$

__Bemerkung:__ Existiert ein Arbitrage, so existiert auch ein Arbitrage zum Anfangskapital 0.

__Beweis:__
Sei (φ, H) ein Arbitrage mit

$$V(0) = \varphi(1)S_0(0) + \langle\, H(1) \,|\, S(0) \rangle < 0$$

Dann ist

$$V^*(N) = V(0) + (H \cdot S^*)(N) \geq 0 \text{ und } \mathbb{P}(H \cdot S^*(N) > 0) > 0$$

Zum Anfangskapital 0 existiert eine selbstfinanzierende Handelsstrategie (Ψ, H) mit

$$V^*_{(\Psi,H)}(N) = 0 + (H \cdot S^*)(N) \geq -V(0) > 0$$

$\square$

4.8 Beispiele Arbitrage

Satz
Das CRR-Modell ist genau dann arbitragefrei, wenn $d < 1 + \rho < u$ gilt.

__Beweis:__
__"$\Rightarrow$":__ per Kontraposition: Ist $1 + \rho \leq d < u$, so ist immer die Aktie besser als das Bankkonto. Die buy and hold Strategie für die Aktie liefert dann ein Arbitrage. Setze $H \equiv 1$.
Dann existiert zum Anfangskapital 0 eine selbstfin. Handelsstrategie (φ, H) mit Wertprozess

$$V^*(n) = 0 + (H \cdot S^*)(n), \;\; n = 0, \dots, N$$

Also

$$V^*(n) = \sum_{k=1}^{n} H(k)\Delta S^*(k) = S^*(N) - S^*(0) \geq S(0)\frac{d^N}{(1+\rho)^N} - S(0) \geq 0$$

und

$$\mathbb{P}(V^*(N) > 0) > 0$$

Ist $d < u \leq 1 + \rho$, so ist das Bankkonto immer besser als die Aktie. Also kann man durch ein short selling der Aktie ein Arbitrage konstruieren. Setze also $H(n) \equiv -1, \;\; n = 1, \dots, N$. Dann existiert zum Anfangskapital 0 eine selbstfin. Handelsstrategie (φ, H) mit Wertprozess

$$V^*(N) = (H \cdots S^*)(N)$$

also

$$V^*(N) = (H \cdot S^*)(N) = -(S^*(N) - S(0)) = S(0) - S^*(N) \geq S(0) - S(0)\frac{u^N}{(1+\rho)^N} \geq S(0) - S(0) = 0$$

und

$$\mathbb{P}(V^*(N) - V(0) > 0) > 0$$

"$\Leftarrow$": per Kontraposition: Sei das Modell nicht arbitragefrei.
Dann existiert ein vorhersehbares H mit

$$V_N^* = (H \cdot S^*)(N) \geq 0 \text{ und } \mathbb{P}((H \cdot S^*)(N) > 0) > 0$$

Wegen $V^*(N) = \sum_{k=1}^N H(k)\Delta S^*(k)$ existiert eine Periode n mit

$$H(n)\Delta S^*(n) \geq 0 \text{ und } \mathbb{P}(H(n)\Delta S^*(n) > 0) > 0$$

Also auch

$$\begin{aligned} 0 \leq H(n)\frac{\Delta S^*(n)}{S^*(n-1)} &= H(n)\left(\frac{S^*}{S^*(n-1)} - 1\right) \\ &= H(n)\left(\frac{1}{1+\rho}u^{X_n}d^{1-X_n} - 1\right) \end{aligned}$$

Daher folgt:

$$\begin{aligned} S(n) &= u^{Z_n}d^{n-Z_n}S(0) \\ Z_n &= \sum_{i=1}^n X_i,\ \mathbb{P}(X_i = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X_i = 0) \\ S^*(n) &= \frac{S(n)}{(1+\rho)^n},\ \beta(n) = S_0(n) = (1+\rho)^n \end{aligned}$$

Annahme: $d < 1+\rho < u$.
Dann ist mit $R(n) = \frac{1}{1+\rho}u^{X_n}d^{1-X_n} - 1$:

$$\begin{aligned} 1 = \mathbb{P}(H(n)R(n) \geq 0) &= \mathbb{P}(H(n) > 0, R(n) > 0) + \mathbb{P}(H(n) < 0, R(n) < 0) + \mathbb{P}(H(n) = 0) \\ &= \mathbb{P}(H(n) > 0)\mathbb{P}(R(n) > 0) + \mathbb{P}(H(n) < 0)\mathbb{P}(R(n) < 0) + \mathbb{P}(H(n) = 0) \end{aligned}$$

Da $H(n)$ $\mathcal{F}_{n-1}$-messbar ist und $R(n)$ unabhängig von $\mathcal{F}_{n-1}$ ist.

$$= qp + r(1-p) + 1 - (q+r)$$

mit $q = \mathbb{P}(H(n) > 0),\ r = \mathbb{P}(H(n) < 0)$.
Aus $\mathbb{P}(H(n) = 0) < 1$ folgt

$$q > 0 \text{ oder } r > 0$$

Wegen

$$\begin{aligned} 1 &= qp + r(1-p) + 1 - (q+r) \\ &< q + r + 1 - (q+r) = 1 \lightning \end{aligned}$$

$\square$

Ziel: No-Arbitrage Theorem
Charakterisierung von arbitragefreien Märkten im probabilistischem Sinne.

4.9 Äquivalente Maße

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein W'Raum.

$$\mathcal{N} = \{N \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}(N) = 0\}$$

ist das System der $\mathbb{P}$-**Nullmengen**.
Ein W'Maß Q ist **absolut-stetig** bzgl. $\mathbb{P}$

$$Q \ll \mathbb{P} \Leftrightarrow \mathcal{N}_\mathbb{P} \subseteq \mathcal{N}_Q$$

Q heißt **äquivalent** zu $\mathbb{P}$ genau dann, wenn $\mathcal{N}_\mathbb{P} = \mathcal{N}_Q$.
Ist $L \geq 0$ ZV mit $\int L \mathrm{d}\mathbb{P} = 1$, so wird durch

$$Q(A) = \int_A L \mathrm{d}\mathbb{P} \ \forall A \in \Omega$$

ein W'Maß Q definiert mit $Q \ll \mathbb{P}$. L ist die $\mathbb{P}$-Dichte von Q. Schreibweise: $L = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\mathbb{P}}$.
Gilt $\mathbb{P}(L > 0) = 1$ und $\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\mathbb{P}} = L$, so ist

$$\mathbb{P} \sim Q \text{ und } \frac{\mathrm{d}\mathbb{P}}{\mathrm{d}Q} = \frac{1}{L}$$

Weiter: Sind L, L' Dichten von Q bzgl. $\mathbb{P}$, so gilt $P(L = L') = 1$. Für jede ZV X gilt:

$$\mathbb{E}_Q(X) = \int X \mathrm{d}Q = \int X L \mathrm{d}\mathbb{P} = \mathbb{E}_\mathbb{P}(LX)$$

sofern obiger Erwartungswert existiert.

Zusammenhang zur Modellierung von Finanzmärkten:

- Ein Finanzmarktmodell wird im westenlichen bestimmt durch die zufällige Entwicklung der Basisfinanzgüter.
- Dabei ist nicht entscheidend, welche Verteilung ein Akteur im Finanzmarkt postuliert.
- Zwei Akteure sind im gleichem Finanzmarkt, wenn die beiden postulierten Verteilungen für die Basisfinanzgüter die gleichen Ereignisse mit positiver W'keit eintreten lassen können. Das bedeutet, dass die Verteilungen zueinander äquivalent sind.
- Ein Übergang zu einem äquivalenten W'Maß ändert den Finanzmarkt nicht, wohl aber die Verteilung der Basisfinanzgüter.
- Ein endliches Finanzmarktmodell, z.B. $|\Omega| < \infty$, wird nicht verändert, wenn die Menge der Elementarereignisse mit positiver W'keit unverändert bleibt.

4.10 Äquivalentes Martingalmaß

Gegeben sei ein Finanzmarktmodell mit Preisprozess $S = (S_1, \dots, S_d)$ der risky assets und ein Informationsverlauf $(\mathcal{F}_n)_{n=0,\dots,N}$. Sei S_0 das Numeriare Asset und

$$S_j^* := \frac{S_j}{S_0},\ j = 1, \dots, d$$

Ein W'Maß $\mathbb{P}^*$ auf $(\Omega, \mathcal{F})$ heißt **äquivalentes Martingalmaß**, wenn gilt

(i) $\mathbb{P}^* \sim \mathbb{P}$

(ii) $(S_j^*(n))_{n=0,\dots,N}$ ist ein $\mathbb{P}^*$-Martingal für alle $j = 1, \dots, d$

Kurz: Bzgl. $\mathbb{P}^*$ ist der Finanzmarkt fair.

Ziel: Arbitragefreier Markt $\Leftrightarrow$ Existiert ein äquivalentes Martingalmaß.
"$\Leftarrow$": leicht.
vgl. Funktional Analysis
"$\Rightarrow$": etwas schwierig, math. Argument ist der Trennungssatz von Minkowski.

4.11 Separationssatz von Minkowski

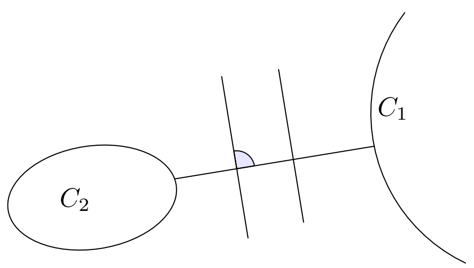
Seien C_1 und C_2 nicht leere konvexe Mengen des $\mathbb{R}^n$ mit $C_1 \cap C_2 = \emptyset$. Sei C_1 abgeschlossen und C_2 kompakt.
Dann gibt es eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und reelle Zahlen $\beta_1 < \beta_2$ mit

$$\varphi(x) \leq \beta_1 < \beta_2 \leq \varphi(y),\ \forall x \in C_1,\ y \in C_2$$

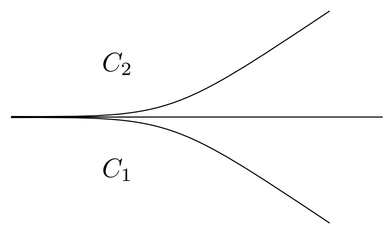
d.h.

$$\sup_{x \in C_1} \varphi(x) < \sup_{y \in C_2} \varphi(y)$$

Graphische Veranschaulichung:



Wieso Kompaktheit von C_2:



C_1 und C_2 lassen sich nicht strikt trennen.

Zur Bestimmung der zu trennenden konvexen Mengen wird die Arbitragefreiheit umformuliert.

4.12 Umformulierung der Arbitragefreiheit

Finanzmarktmodell über N Perioden mit $S = (S_1, \dots, S_d)$ als Preisprozess der risky assets. Mit $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sei die Menge der meßbaren Abb. von Ω nach $\mathbb{R}$. $\mathcal{G}^* := \{(H \cdot S^*)(N) \mid H \in \mathcal{H}\}$ bezeichnet die Menge der möglichen Gewinne, notiert in Anteile des Numeriare Assets, die beim Handel entsprechend einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie erzielt werden können. Dabei ist $\mathcal{H}$ die Menge der vorhersehbaren $\mathbb{R}^d$-wertigen Prozesse.

Der Markt ist arbitragefrei, wenn

$$\mathcal{G}^* \cap L^0_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = \{0\}$$

wobei $L^0_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = \{X \in L^0 \mid X \geq 0\}$.
$\mathcal{G}^*$ ist ein Vektorraum.

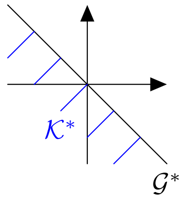


Abbildung 24: Kegel im $\mathbb{R}^2$

$\mathcal{K}^* := \{C^* \in L^0 \mid$ es ex. ein $G^* \in \mathcal{G}^*$ mit $G^* \geq C^*\}$ $\mathcal{K}^*$ ist der Kegel aus Elementen aus L^0, die unterhalb von $\mathcal{G}^*$ liegen. Es gilt:

$$\mathcal{G}^* \cap L^0_+ = \{0\} \Leftrightarrow \mathcal{K}^* \cap L^0_+ = \{0\}$$

Weiter

$$\mathcal{K}^* \cap (-\mathcal{K}^*) = \mathcal{G}^*$$

Mittels $\mathcal{G}^*$ und $\mathcal{K}^*$ können äquivalente Martingalmaße charakterisiert werden.

4.13 Satz 2

Sei $|\Omega| < \infty$. Für ein zu $\mathbb{P}$ äquivalentes W'Maß $\mathbb{P}^*$ sind äquivalent:

(i) $\mathbb{P}^*$ ist ein Martingalmaß, d.h. S^*_j ist ein $\mathbb{P}^*$-Martingal für alle $j = 1, \ldots, d$.

(ii) $\mathbb{E}^* C^* = 0$ für alle $C^* \in \mathcal{G}^*$.

(iii) $\mathbb{E}^* K^* \leq 0$ für alle $K^* \in \mathcal{K}^*$.

Beweis:
(i)⇒(ii): Für $H \in \mathcal{H}$ ist $V^*(n) = (H \cdot S^*)(n),\ n = 1, \ldots, N,\ V^*(0) = 0$ ein $\mathbb{P}^*$-Martingal, denn

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^*(\Delta V^*(k) \mid \mathcal{F}_{k-1}) &= \mathbb{E}^*(V^*(k) - V^*(k-1) \mid \mathcal{F}_{k-1}) \\ &= \mathbb{E}^*(\langle H(k) \,|\, \Delta S^*(k)\rangle \mid \mathcal{F}_{k-1}) = \mathbb{E}^*\left(\sum_{j=1}^d H_j(k) \Delta S^*_j(k) \mid \mathcal{F}_{k-1}\right) \\ &= \sum_{j=1}^d \mathbb{E}^*(H_j(k)\Delta S^*_j(k) \mid \mathcal{F}_{k-1}) = \sum_{j=1}^d H_j(k) \underbrace{\mathbb{E}^*(\Delta S^*_j(k) \mid \mathcal{F}_{k-1})}_{=0} = 0 \quad k = 1, \ldots, N\end{aligned}$$

äquivalente Bedingung zur Martingaleigenschaft

Für $C^* = (H \cdot S^*)(N)$ folgt also

$$\mathbb{E}^* C^* = \mathbb{E}^*((H \cdot S^*)(N)) = \mathbb{E}^* V^*(N) = \mathbb{E}^* V^*(0) = 0$$

(ii)⇒(i): Zeige die Martingaleigenschaft von S^*_j bzgl. $\mathbb{P}^*$ für alle $j = 1, \ldots, d$.
$\mathbb{Z}$: $\mathbb{E}^*(S^*_j(k) \mid \mathcal{F}_{k-1}) = S^*_j(k-1)$
$\Leftrightarrow \mathbb{E}^*(\Delta S^*_j(k) \mid \mathcal{F}_{k-1}) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{E}^* \mathbb{1}_A\ \Delta S^*_j(k) = 0$ für alle $A \in \mathcal{F}_{k-1}$.

$\mathbb{1}_A \Delta S^*_j(k)$ ist der Gewinn der Handelsstrategie, die in der k-ten Periode long in S_j geht, wenn A eintritt, d.h.

$$H_j(k) = \mathbb{1}_A,\ H_j(n) = 0 \text{ sonst}$$

$$(H\cdot S^*)(N) = H_j(k)\Delta S_j^*(k) = \mathbb{1}_A \Delta S_j^*(k),\ H_i \equiv 0 \text{ für } i \neq j$$

wegen (ii) folgt $\mathbb{E}^* \mathbb{1}_A \Delta S_j(k) = 0$ für alle $A \in \mathcal{F}_{k-1}$.
Also ist S_j^* ein $\mathbb{P}^*$-Martingal.

<u>(ii)⇒(iii):</u> Klar, wegen Monotonie des Erwartungswertes.

<u>(iii)⇒(ii):</u> Ist $C^* \in \mathcal{G}^*$ dann folgt $C^* \in \mathcal{K}^* \Rightarrow \mathbb{E}^*C^* \leq 0$. $\mathcal{G}^*$ ist ein Vektorraum:

$$\Rightarrow -C^* \in \mathcal{G}^* \Rightarrow -C^* \in \mathcal{K}^* \Rightarrow \mathbb{E}^*(-C^*) \leq 0 \Rightarrow \mathbb{E}^*C^* \geq 0$$

□

Zusammen mit dem Separationssatz kann man das No-Arbitrage Theorem beweisen.

4.14 Das No-Arbitrage Theorem

1. Fundamentalsatz der Preistheorie:
Gegeben sei ein Finanzmarkt S über einem endlichem Ω mit Informationsverlauf $(\mathcal{F}_n)_{n=0,\dots,N}$ bzgl. einem W'Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
Dann sind äquivalent

(i) Der Markt ist arbitragefrei
$$\mathcal{G}^* \cap L^0_+ = \{0\}.$$

(ii) Es existiert ein äquivalentes Martingalmaß $\mathbb{P}^*$.

<u>Beweis:</u>
<u>(ii)⇒(i):</u> ist einfach: $C^* \in \mathcal{G}^* \cap L^0_+$. Dann gilt:

$$C^* \geq 0 \text{ und } \mathbb{E}^*C^* = 0 \Rightarrow C^* = 0\ \mathbb{P}^* - \text{f.s.} \Rightarrow C^* = 0\ \mathbb{P} - \text{f.s.} \Rightarrow C^* = \{0\}$$

<u>(i)⇒(ii):</u> O.E.d.A. $\mathbb{P}(\{\omega\}) > 0\ \forall \omega \in \Omega$.
$\mathcal{G}^*$ ist als Teilraum von $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ konvex und abgeschlossen.

$$\mathbb{P} = \{Q : \Omega \to \mathbb{R} \mid Q(\omega) \geq 0\ \forall \omega \in \Omega,\ \sum_{\omega \in \Omega} Q(\omega) = 1\}$$

ist die konvexe und kompakte Menge der W'Maße auf $(\Omega, \mathcal{F})$.
Wegen (i) ist $\mathcal{G}^* \cap \mathbb{P} = \emptyset$.
Nach dem Separationssatz existiert eine lineare Abbildung $\varphi : L^*(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$ mit

$$\varphi(C^*) < \inf_{Q \in \mathbb{P}} \varphi(Q)$$

Da der Dualraum von $L^*(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ durch $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ gegeben ist, ist $\varphi \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, d.h.

$$\varphi(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\varphi(\omega)$$

Da $\mathcal{G}^*$ ein Teilraum ist und $\varphi(C^*) \leq \alpha,\ \forall C^* \in \mathcal{G}^*$ folgt $\varphi(C^*) = 0,\ \forall C^* \in \mathcal{G}^*$.
Für $e_\omega = \mathbb{1}_{\{\omega\}}$ gilt $e_\omega \in \mathbb{P}$ und

$$0 < \varphi(e_\omega) = \varphi(\omega)$$

Da dies für alle $\omega \in \Omega$ gilt kann man ein $\mathbb{P}^*$ durch

$$\mathbb{P}^*(\omega) = \frac{\varphi(\omega)}{\sum_{\omega' \in \Omega} \varphi(\omega')}\ \forall \omega \in \Omega$$

definieren.

$$\mathbb{P}^*(\omega) > 0 \ \forall \omega \in \Omega \Rightarrow \mathbb{P}^* \sim \mathbb{P}$$

Wegen

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^* C^* &= \sum_{\omega \in \Omega} C^*(\omega)\mathbb{P}^*(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} C^*(\omega) \frac{\varphi(\omega)}{\sum_{\omega' \in \Omega} \varphi(\omega')} \\ &= \frac{1}{\sum_{\omega' \in \Omega} \varphi(\omega')} \underbrace{\varphi(C^*)}_{=0} = 0\end{aligned}$$

$\overset{4.12}{\Rightarrow}$ $\mathbb{P}^*$ ist ein Martingalmaß. □

4.15 Bestimmung von äquivalenten Martingalmaßen

(a) CRR-Modell:

- N Perioden.

$$Z_n = \sum_{i=1}^{N} X_i, \ X_1, \dots, X_N, \text{ iid}, \ \mathbb{P}(X_i = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X_i = 0)$$

- $S(n) = S_0 u^{Z_n} d^{1-Z_n}$
- $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n) = \sigma(Z_1, \dots, Z_n)$
- $\beta(n) = \prod_{i=1}^{n} 1 + \rho = (1+\rho)^n, \ \rho > -1,$

Gesucht ist ein $\mathbb{P}^*$ mit

(i) $\mathbb{P} \sim \mathbb{P}^*$

(ii) S^* ist ein $\mathbb{P}^*$-Martingal

$$S^*(n) = \frac{S(n)}{\beta(n)} = S_0 u^{Z_n} d^{n-Z_n} \frac{1}{(1+\rho)^n} = S_0 \prod_{i=1}^{n} \frac{u^{X_i} d^{1-X_i}}{1+\rho}$$

ist ein geometrischer Random-Walk. S^* ist ein Martingal genau dann, wenn

ab hier könnte sich einiges wiederholen, da er in zwei Vorlesungen das selbe jeweils entwas anders gemacht hat

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}^* \frac{u^{X_i} d^{1-X_i}}{1+\rho} = 1 \Leftrightarrow u \cdot p^* + d(1-p^*) = 1+\rho \\ &\Leftrightarrow p^* = \frac{1+\rho-d}{u-d} \in (0,1) \Leftrightarrow d < 1+\rho < u\end{aligned}$$

Durch $\rho \in (0,1)$ werden alle äquivalenten CRR-Modelle parametrisiert und genau für den Parameter

$$\mathbb{P}^* = \frac{(1+\rho)-d}{u-d}$$

ist das Modell risikoneutral. Dies bedeutet, dass S^* ein Martingal ist, bzgl. dem Parameter $\mathbb{P}^*$.

Genauer:

Wegen

$$\mathbb{P}^*(X = x) = \frac{\mathbb{P}^*(X = x)}{\mathbb{P}(X = x)} \cdot \mathbb{P}(X = x), \ \forall x \in \{0, 1\}$$

ist die Dichte von $(\mathbb{P}^*)^X$ bzgl. $\mathbb{P}^X$ gegeben durch

$$l(x) = \frac{(p^*)^{Z_N}(1-p^*)^{N-Z_N}}{p^{Z_N}(1-p)^{N-Z_N}}, \ Z_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

Hieraus erhält man durch $L : \Omega \to (0,\infty),\ \omega \mapsto l(X_1(\omega),\dots,X_N(\omega)) = \frac{(p^*)^{Z_N(\omega)}(1-p^*)^{N-Z_N(\omega)}}{p^{Z_N(\omega)}(1-p)^{N-Z_N(\omega)}}$ die Dichte von $\mathbb{P}^*$ bzgl. $\mathbb{P}$.
Setze also $\mathbb{P}^*$ an mittels

$$\mathbb{P}^*(A) = \int\limits_A L\mathrm{d}\mathbb{P},\ \forall A \in \mathcal{F}_N$$

Dann ist $\mathbb{P}^*$ äquivalent zu $\mathbb{P}$, da $L > 0$ $\mathbb{P}-$f.s. und es gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^*(X=x) &= \int\limits_{\{X=x\}} L\mathrm{d}\mathbb{P} = \left(\frac{p^*}{p}\right)^{\sum_{i=1}^N X_i}\left(\frac{(1-p^*)}{1-p}\right)^{N-\sum_{i=1}^N X_i}\mathbb{P}(X=x)\\ &= (p^*)^{\sum_{i=1}^N X_i}(1-p^*)N - \sum_{i=1}^N X_i\end{aligned}$$

Bzgl. des so definierten Maßes $\mathbb{P}^*$ ist $S(n) = S_0 u^{Z_n} d^{n-Z_n},\ n = 0,\dots,N$ ein geometrischer Random-Walk mit $\mathbb{E}^*S(1) = S_0(1+\rho)$. Deshalb ist $(S^*(n))$ ein $\mathbb{P}^*$-Martingal und damit $\mathbb{P}^*$ ein äquivalentes Martingalmaß.

5 Bewerten von Derivaten

Gegeben sei ein Finanzmarktmodell über N Perioden mit Preisprozess $(S_1, \dots, S_d)$ der risky assets und S_0 des Numeraire Assets.

Grundannahme:
Der Finanzmarkt ist arbitragefrei ⇔ Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes.
Bezeichne mit $\mathcal{P}$ die Menge aller äquivalenten Martingalmaße. Dann ist $\mathcal{P}$ eine konvexe Teilmenge, der Menge aller zu $\mathbb{P}$ äquivalenten Maße.

5.1 Claim und Hedge

Ein Derivat ist ein Wertpapier, das eine Auszahlung am Ende der Laufzeit (N) verbrieft.
Mathematisch gesehen entspricht dies einer $\mathcal{F}_N$-messbaren Abbildung C. Diese wird auch als **Claim** bezeichnet. Zum Beispiel $C = (S(N) - K)^+$.
$C^* = \frac{C}{S_0(N)}$ ist dann die **Claimauszahlung**, notiert in Einheiten des Numeraire Assets.
Denkt man an das Replikationsprinzip, so ist gesucht eine Strategie, durch Handel am Finanzmarkt den Claim zu replizieren. Im Modell bedeutet dies:
Gesucht ist ein Anfangskapital V_0 und ein $H \in \mathcal{H}$ mit

$$V_0 + \sum_{n=1}^{N} \langle H(n) \,|\, \Delta S^*(n) \rangle = V_0 + (H \cdot S^*)(N) = C^*$$

V_0 und H definieren dann eindeutig eine selbstfinanzierende Handelsstrategie (φ, H) mit

$$V_0\big((\varphi, H)\big) = V_0, \; V_N\big((\varphi, H)\big) = C$$

Vorausgesetzt wird $S_0(0) = 1$.

Ist dies möglich, so heißt C **hedgebar** und (φ, H) bzw. V_0 und H definieren eine **Hedgestrategie**.
In Analogie zum Replikationsprinzip kann man fragen:
Ist V_0 der eindeutige arbitragefreie Anfangspreis für C?

Informelle Argumentation:
Ein Anfangspreis $x > V_0$ liefert ein Arbitrage für den Verkäufer, denn

- gehe short ins Claim, erhalte x
- investiere V_0 in die selbstfinanzierende Handelsstrategie und handle entsprechend dieser Strategie

$x - V_0$ ist der Gewinn am Anfang. Benutze am Ende das Vermögen aus der Handelsstrategie, um die short-Position im Claim aufzulösen.

$$V_N(H) - C = 0$$

Ein Anfangspreis $x < V_0$ liefert ein Arbitrage für den Käufer, denn

- gehe short im Hedge, erhalte V_0.
- investiere x in den Claim.

$V_0 - x$ ist Gewinn am Anfang, handle nun entsprechend der short-Position im Hedge. Am Ende benutze den Claim, um die short-Position im Hedge aufzulösen.

$$C - V_N(H) = 0$$

Diese Argumentation legt nahe, dass $x = V_0$ der arbitragefreie Anfangspreis eines hedgebaren Claims C ist.
Im Folgendem wird dies mathematisch präzisiert.

5.2 Satz 3

Sei C ein hedgebarer Claim und $H, H' \in \mathcal{H}$ Hedgestrategien zu Anfangskapitalien V_0 bzw. V_0'.
Dann gilt:

$$V_0 = V_0' = \mathbb{E}^* C^*, \ \forall \mathbb{P}^* \in \mathcal{P}$$

und

$$V_0 + (H \cdot S^*)(n) = V_H^*(n) = V_{H'}^*(n) = V_0' + (H' \cdot S^*)(n) = \mathbb{E}^*(C^* \mid \mathcal{F}_n), \ \forall n = 1, \dots, N$$

Beweis:
Dies folgt aus der Martingaleigenschaft von S^* bzw. $(H \cdot S^*)$ bzgl. $\mathbb{P}^*$, da $\mathbb{E}^*(H \cdot S^*)(N) = 0$:

$$\begin{aligned} V_0 + (H \cdot S^*)(N) = C^* &= V_0' + (H' \cdot S^*)(N) \\ \Rightarrow V_0 = \mathbb{E}^*(V_0 + (H \cdot S^*)(N)) = \underbrace{\mathbb{E}^* C^*}_{=V_0'} &= \mathbb{E}^*(V_0' + (H' \cdot S^*)(N)) \end{aligned}$$

Das gleiche Argument liefert:

$$\begin{aligned} V_H^*(n) &= V_0 + (H \cdot S^*)(n) = \mathbb{E}^*(V_0 + (H \cdot S^*)(N) \mid \mathcal{F}_n) \\ &= \mathbb{E}^*(C^* \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}^*(V_0' + (H' \cdot S^*)(N) \mid \mathcal{F}_n) \\ &= V_0' + (H' \cdot S^*)(n) = V_{H'}^*(n) \end{aligned}$$

□

5.3 Superreplizierbare Claims

Ein Claim C heißt **upper hedgebar** zum Anfangskapital V_0, falls ein $H \in \mathcal{H}$ gibt mit

$$V_0 + (H \cdot S^*)(N) \geq C^*$$

Dies ist der Fall, wenn

$$C^* - V_0 \in \mathcal{K}^*$$

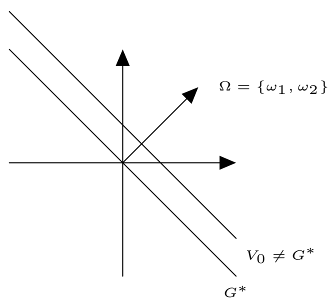
$\mathcal{G}^* = \{(H \cdot S^*)(N) \mid H \in \mathcal{H}\}$ Gewinne, $\mathcal{K}^* = \{C^* \mid \text{es ex. } G \in \mathcal{G} \text{ mit } G \geq C^*\}$.
C heißt **strikt upperhedgebar** zum Anfangskapital V_0, falls es eine $H \in \mathcal{H}$ gibt mit

$$V_0 + (H \cdot S^*)(N) \geq C^* \text{ und } \mathbb{P}(V_0 + (H \cdot S^*)(N) > C^*) > 0$$

C heißt **lower hedgebar** zum Anfangskapital V_0, wenn es ein $H \in \mathcal{H}$ gibt mit

$$V_0 - (H \cdot S^*)(N) \leq C^*$$

(**strikt** für $\leq$ und $\mathbb{P}(V_0 - (H \cdot S^*)(N) < C^*) > 0$)



Der Kegel $\mathcal{K}^*$, der zum Anfangskapital 0 upper hedgebaren Claims, lässt sich durch die erwarteten Auszahlungen bzgl. der äquivalenten Martingalmaße charakterisieren.

5.4 Satz 4

Für einen Claim C sind äquivalent:

(i) $C^* \in \mathcal{K}^*$

(ii) $\mathbb{E}^* C^* \leq 0 \ \forall \mathbb{P}^* \in \mathcal{P}$

Beweis:
(i)⇒(ii): Ist $C^* \in \mathcal{K}^* \Rightarrow \exists H \in \mathcal{H}$ mit $(H \cdot S^*)(N) \geq C^* \Rightarrow 0 = \mathbb{E}^*[(H \cdot S^*)(N)] \geq \mathbb{E}^* C^* \ \forall \mathbb{P} \in \mathcal{P}$.
(ii)⇒(i): Dies ergibt sich aus dem Bipolartheorem.

5.5 Das Bipolartheorem

Betrachte den $\mathbb{R}^n$ mit einem Skalarprodukt. Eine Teilmenge $C \in \mathbb{R}^n$ heißt **Kegel**, wenn

$$\lambda x \in C \ \forall \lambda > 0, \ x \in C$$

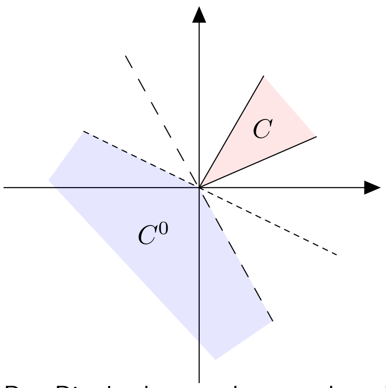
(heißt **konvexer Kegel**, wenn C ein Kegel ist und konvex ist. Dies ist der Fall, wenn gilt

$$x \in C, \ x > 0 \Rightarrow \lambda x \in C$$

$$x, y \in C \Rightarrow x + y \in C$$

)
Zu einem Kegel C ist die **Polarmenge** C^0 definiert durch

$$C^0 = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid \langle x \,|\, y \rangle \leq 0 \ \forall x \in C \}$$



C^0 ist ein abgeschlossener Kegel, denn

$$y \in C^0, \ \lambda > 0 \Rightarrow \langle x \,|\, \lambda y \rangle = \lambda \langle x \,|\, y \rangle \leq 0 \ \forall x \in C$$

Die Abgeschlossenheit folgt aus der Stetigkeit des Skalarprodukts.

Das Bipolartheorem besagt, dass das Bipolar von C mit dem Abschluss von C übereinstimmt

$$(C^0)^0 = \overline{C}.$$

Anwendung von 5.4: Für eine Menge $E \subseteq \mathbb{R}^n$ sei $\operatorname{cone}(E)$ der von E erzeugte Kegel. Definiere

$$\operatorname{cone}(E) := \bigcap_{C \text{ Kegel}, \ E \subseteq C} C = \{ \lambda x \mid \lambda > 0, \ x \in E \}.$$

Es gilt: (wegen 4.13) $\mathbb{P}^*$ ist ein Martingalmaß genau dann, wenn

$$\mathbb{E}^* C^* \leq 0 \ \forall C^* \in \mathcal{K}^*.$$

Deshalb ist $(\mathcal{K}^*)^0 = \overline{\operatorname{cone}(\mathcal{P})} = \operatorname{cone}(\overline{\mathcal{P}})$

$$\Rightarrow (\mathcal{K}^*)^{0^0} = \overline{\operatorname{cone}(\mathcal{P})}^0$$

$$\overset{\text{Bip.t.}}{\Rightarrow} \mathcal{K}^* = (\mathcal{K}^*)^{0^0} = \overline{\operatorname{cone}(\mathcal{P})}^0 = \operatorname{cone}(\overline{\mathcal{P}})^0$$

Also gilt:

$$\mathbb{E}^* C^* \leq 0 \ \forall \mathbb{P}^* \in \mathcal{P} \Rightarrow C^* \in \operatorname{cone}(\overline{\mathcal{P}})^0 \Rightarrow C^* \in \mathcal{K}^*$$

5.6 Upper and lower hedging Preise

Sei C ein Claim. $P_+(C) = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid C^* \text{ ist upper hedgbar zum Anfangskapital } x\}$ und $P_-(C) = \sup\{x \in \mathbb{R} \mid C^* \text{ ist lower hedgebar zum Anfangskapital } x\}$.
Aus 5.4 folgt, dass das Infimum bzw. Supremum angenommen wird.

Satz

(i) Die Menge der upper hedging Preise ist ein abgeschlossenes Intervall $[P_+(C), +\infty)$

(ii) Die Menge der lower hedging Preise ist ein abgeschlossenes Intervall $(-\infty, P_-(C)]$

(iii) $P_-(C) \leq P_+(C)$

Beweis:
(i): Klar ist, dass die Menge der upper hedging Preise ein nach oben unbeschränktes Intervall bildet. Für die Abgeschlossenheit betrachte upper hedging Preise a_n mit $a_n \searrow a$.
$\mathbb{Z}$ a ist upper hedging Preis. Dann gilt

$$C^* - a_n \in \mathcal{K}^* \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Wegen 4.13 gilt für $\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}$: $\mathbb{E}^*(C^* - a_n) \leq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, außerdem folgt wegen $C^* - a_n \to C^* - a$, dass $0 \geq \mathbb{E}^*(C^* - a_n) \to \mathbb{E}^*(C^* - a) \ \forall \mathbb{P}^* \in \mathcal{P}$.
5.4 liefert $C^* - a \in \mathcal{K}^*$ also ist a ein upper hedging Preis.

(ii): geht wie (i): a ist lower hedging Preis genau dann, wenn es ein $K \in \mathcal{G}^*$ gibt mit

$$a - K \leq C^* \Leftrightarrow -(C^* - a) \leq K \Leftrightarrow -(C^* - a) \in \mathcal{K}^*$$

$a_n \nearrow a, \ a_n$ lower hedging Preise $\Rightarrow -(C^* - a_n) \in \mathcal{K}^* \Rightarrow \mathbb{E}^*(-(C^* - a_n)) \leq 0 \ \forall \mathbb{P}^* \in \mathcal{P}, \ \forall n \in \mathbb{N}$
$C^* - a_n \to C^* - a \Rightarrow \mathbb{E}^*(-(C^* - a)) \leq 0 \ \forall \mathbb{P}^* \in \mathcal{P} \Rightarrow -(C^* - a) \in \mathcal{K}^*$
$\Rightarrow a$ ist lower hedging Preis (für C^*).

(iii): Ist a lower hedging Preis und b upper hedging Preis,so gilt

$$\begin{aligned}
(C^* - b) \in \mathcal{K}^* &\Leftrightarrow \mathbb{E}^*(C^* - b) \leq 0 \ \forall \mathbb{P}^* \in \mathcal{P} \\
&\Leftrightarrow \sup_{\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}} \mathbb{E}^* C^* \leq b \\
-(C^* - a) \in \mathcal{K}^* &\Leftrightarrow \mathbb{E}^*(-(C^* - a)) \leq 0 \ \forall \mathbb{P}^* \in \mathcal{P} \\
&\Leftrightarrow \inf_{\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}} \mathbb{E}^* C^* \geq a \\
a \leq \inf_{\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}} \mathbb{E}^* C^* &\leq \sup_{\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}} \mathbb{E}^* C^* \leq b
\end{aligned}$$

□

Prinzipiell ergeben sich zwei Fälle:

(a) $P_-(C) = P_+(C)$, dies ergibt sich, wenn C hedgebar ist.

(b) $P_-(C) < P_+(C)$, dies ergibt sich, wenn C nicht hedgebar ist.

5.7 Charakterisierung der arbitragefreien Preise

Sei C ein Claim. Kann aus $x \in \mathbb{R}$ ein strikter upper hedge finanziert werden, so ergibt sich eine Arbitragemöglichkeit für den Verkäufer. Kann aus $x \in \mathbb{R}$ ein strikter lower hedge finanziert werden, so ergibt sich eine Arbitragemöglichkeit für den Käufer.
Dies ist die Motivation für die folgende Definition:

$x \in \mathbb{R}$ heißt **arbitragefreier Preis** für C, falls durch x weder ein striker upper noch ein strikter lower hedge finanziert werden kann.
Mit $\pi(C)$ bezeichne die Menge aller arbitragefreien Preise für C. $\pi(C)$ kann mittels der upper und lower hedging Preise charakterisiert werden.

Theorem
Für ein Claim C gilt:

(i) C ist hedgebar zum Anfangskapital x genau dann, wenn $P_-(C) = x = P_+(C)$.

(ii) Ist C hedgebar zum Anfangskapital x, so ist

$$\mathbb{E}^*C^* = x \ \forall \mathbb{P}^* \in \mathcal{P} \text{ und } \pi(C) = \{x\}$$

(iii) Ist C nicht hedgebar, so gilt:

$$P_-(C) < P_+(C) \text{ und } \pi(C) = \big(P_-(C), P_+(C)\big) = \{\mathbb{E}^*C^* \mid \mathbb{P}^* \in \mathcal{P}\}$$

Beweis:
(i): "$\Rightarrow$": Sei C hedgebar zum Anfangskapital x. Dann folgt:

$$\exists H \in \mathcal{H} : x + (H \cdot S^*)(N) = C^* \Rightarrow C^* - x \in \mathcal{K}^* \Rightarrow x \text{ ist ein upper hedging Preis}$$

Auch gilt:

$$x - ((-H) \cdot S^*(N) \leq C^* \Rightarrow -(C^* - x) \in \mathcal{K}^* \Rightarrow x \text{ ist ein lower hedging Preis}$$

Also gilt:

$$x \leq P_-(C) \leq P_+(C) \leq x \Rightarrow P_-(C) = P_+(C)$$

"$\Leftarrow$": Sei $P_-(C) = P_+(C)$. Wegen 5.6 ist x ein upper hedging Preis und ein lower hedging Preis. Also ist $C^* - x \in \mathcal{K}^*$ und $-(C^* - x) \in \mathcal{K}^*$. Daher gilt:

$$C^* - x \in \mathcal{K}^* \cap (-\mathcal{K}^*) = \mathcal{G}^*$$

Also existiert ein $H \in \mathcal{H}$ mit

$$C^* = x + (H \cdot S^*)(N)$$

Also ist C hedgebar zum Anfangskapital x. $\square$

(ii): Sei C hedgebar zum Anfangskapital x, so ist $C^* - x \in \mathcal{G}^*$. Somit gilt

$$0 = \mathbb{E}^*(C^* - x) \Leftrightarrow \mathbb{E}^*C^* = x \ \forall \mathbb{P}^* \in \mathcal{P}$$

Behauptung: $\pi(C) = \{x\}$
"$\supseteq$": Es ist kein strikter upper hedge noch ein strikter lower hedge aus x finanzierbar, denn

$$\mathbb{E}^*C^* = x = \mathbb{E}^*(x + (H \cdot S^*)(N)) \ \forall H \in \mathcal{H}$$

Also ist $x \in \pi(C)$.

"$\subseteq$": C^* ist hedgebar zum Anfangskapital x, da $P_-(C) = x = P_+(C)$, also existiert $H \in \mathcal{H}$ mit

$$x + (H \cdot S^*)(N) = C^*$$

Jedes $y > x$ kann man nutzen zur Finanzierung eines strikten upper hedges, denn

$$y + (H \cdot S^*)(N) > x + (H \cdot S^*) = C^*$$

Also ist $(x,\infty)\cap\pi(C)=\emptyset$.
Jedes $y<x$ lässt ein strikten lower hedge finanzieren. Denn:

$$y+(H\cdot S^*)(N)<x+(H\cdot S^*)(N)=C^*$$

Also ist $(-\infty,x)\cap\pi(C)=\emptyset$. Da $x\in\pi(C)$ ist $\pi(C)\subseteq\{x\}$. $\square$

(iii): Sei C nicht hedgebar. Wegen (i) gilt $P_-(C)<P_+(C)$.
"$\supseteq$": Gilt $P_-(C)<x<P_+(C)$, so kann weder ein strikter upper noch ein strikter lower hedge aus x finanziert werden. Also ist $x\in\pi(C)$.
"$\subseteq$": Ist $x\in\pi(C)$, so kann weder ein strikter upper noch ein strikter lower hedge finanziert werden. Hieraus folgt:

$$x\in[P_-(C),P_+(C)]$$

Im Falle $P_-(C)<P_+(C)$ kann x kein Randwert sein, da für $x=P_+(C)$ ein strikter upper hedge und aus $x=P_-(C)$ ein strikter lower hedge finanziert werden kann. Also gilt:

$$\pi(C)\subseteq(P_-(C),P_+(C))$$

Begründung für den strikten upper hedge: Wegen der Abgeschlossenheit existiert ein $H\in\mathcal{H}$ mit $P_+(C)+(H\cdot S^*)(N)\geq C^*$. Es gilt $\mathbb{P}^*(P_+(C)+(H\cdot S^*)(N)>C^*)>0$, denn sonst wäre H eine Hedgestrategie, was $P_-(C)=P_+(C)$ implizieren würde. Für den strikten lower hedge analog.

Zeige weiter:

$$\sup_{\mathbb{P}^*\in\mathcal{P}}\mathbb{E}^*C^*=P_+(C)\text{ und }\inf_{\mathbb{P}^*\in\mathcal{P}}\mathbb{E}^*C^*=P_-(C)$$

Ist $x<P_+(C)$, so existiert kein upper hedge für C mit Anfangskapital x. Daraus folgt:

$$C^*-x\notin\mathcal{K}^*$$

Wegen 5.4 existiert ein $\mathbb{P}^*\in\mathcal{P}$ mit

$$\mathbb{E}^*C^*-x>0\Rightarrow\mathbb{E}^*C^*>x.$$

Ist $x>P_-(C)$, so existiert kein lower hedge für C zum Anfangskapital x. Also ist

$$-(C^*-x)\notin\mathcal{K}^*$$

Also existiert ein $\mathbb{P}^*\in\mathcal{P}$ mit

$$\mathbb{E}^*(C^*-x)<0\Rightarrow\mathbb{E}^*C^*<x.$$

Behauptung: $(P_-(C),P_+(C))=\{\mathbb{E}^*C^*\mid\mathbb{P}^*\in\mathcal{P}\}$

Beweis:
"$\subseteq$": Klar, da $\inf\mathbb{E}^*C^*=P_-(C)$ und $\sup\mathbb{E}^*C^*=P_+(C)$.
"$\supseteq$": Für $x=P_+(C)$ existiert ein strikter upper hedge, also existiert ein $H\in\mathcal{H}$ mit

$$x+(H\cdot S^*)(N)\geq C^*\text{ und }\mathbb{P}^*(x+(H\cdot S^*)(N)>C^*)>0$$

und damit gilt:

$$x>\mathbb{E}^*C^*\ \forall\mathbb{P}^*\in\mathcal{P}$$

Für $x=P_-(C)$ existiert ein strikter lower hedge. Also existiert ein $H\in\mathcal{H}$ mit

$$x+(H\cdot S^*)(N)\leq C^*\text{ und }\mathbb{P}^*(x+(H\cdot S^*)(N)<C^*)>0$$

$$\Rightarrow x=\mathbb{E}^*(x+(H\cdot S^*)(N))<\mathbb{E}^*C^*$$

Also

$$P_-(C)<\mathbb{E}^*C^*<P_+(C)\ \forall\mathbb{P}^*\in\mathcal{P}$$

$\square$

5.8 Erweitertes Finanzmarktmodell

Arbitragefreier Finanzmarkt mit $S = (S_1, \ldots, S_d)$ als Preisprozess der Basisgüter. S_0 bezeichne das Numeraire Asset, $(\mathcal{F}_n)_{n=0,\ldots,N}$ Informationsverlauf.
Im Markt sei C die Auszahlung eines Claims zum Zeitpunkt N. Das arbitragefreie Anfangspreisintervall für C sei gegeben durch

$$\pi(C) = (P_-(C), P_+(C) \text{ bzw. } \pi(C) = P(C) \text{ falls } P_-(C) = P_+(C)$$

Der Finanzmarkt soll um den Handel mit C erweitert werden, sodass der erweiterte Finanzmarkt arbitragefrei bleibt. Der Claim wird als $(d+1)$-tes risky asset angesehen. Bezeichne dessen Preisprozess mit $(S_{d+1}(n))_{n=0,\ldots,N}$.
Ist $x \in \pi(C)$, so existiert ein $\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}$ mit $x = \mathbb{E}^* C^*$. Durch

$$S_{d+1}(n) = S_0(n) \cdot \mathbb{E}^*(C^* \mid \mathcal{F}_n) \; n = 1, \ldots, N$$

kann dann ein Preisprozess definiert werden, für den gilt:

$$S_{d+1}(N) = S_0(N)C^* = C \text{ und } S_{d+1}(0) = \underbrace{S_0(0)}_{=1} \mathbb{E}^*(C^* \mid \mathcal{F}_0) = \mathbb{E}^* C^* = x$$

$\mathcal{F}_0$ sei trivial, d.h. $\mathbb{P}(A) \in \{0,1\} \; \forall A \in \mathcal{F}_0$. Weiter ist $S^*_{d+1}(n) = \mathbb{E}^*(C^* \mid \mathcal{F}_n), \; n = 0, \ldots, N$ ein $\mathbb{P}^*$-Martingal und damit definiert $\mathbb{P}^*$ ein äquivalentes Martingalmaß für das erweiterte Modell $(S_0, \ldots, S_d, S_{d+1})$.
Umgekehrt ist $(S_{d+1}(n))_{n=0,\ldots,N}$ ein Preisprozess für C mit $S_{d+1}(N) = C$ und ist das erweiterte Modell arbitragefrei, so existiert ein äquivalentes Martingalmaß $\mathbb{P}^*$ für das erweiterte Modell. Insbesondere gilt:

$$S_{d+1}(n) = S_0(n)\mathbb{E}^*(C^* \mid \mathcal{F}_n) \; n = 0, \ldots, N.$$

Da $\mathbb{P}^*$ auch ein äquivalentes Martingalmaß für das Ausgangsmodell ist und $S_{d+1}(0) = \mathbb{E}^* C^*$, gilt

$$S_{d+1}(0) \in \pi(C).$$

Insgesamt erhält man:
Theorem:
Der Finanzmarkt ist um den Handel mit C arbitragefrei erweiterbar, genau dann, wenn es ein $\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}$ gibt mit

$$S^*_{d+1}(n) = \mathbb{E}^*(C^* \mid \mathcal{F}_n) \; n = 0, \ldots, N.$$

5.9 Vollständigkeit

Für hedgebare Claims ist der arbitragefreie Anfangspreis eindeutig bestimmt. Finanzmärkte, in denen jeder Claim hedgebar ist, nennt man **vollständig**.
Definition: Ein Finanzmarkt heißt vollständig, falls $P_-(C) = P_+(C)$ gilt für alle Claims C.

5.10 2. Fundamentalsatz der Preistheorie

Für ein arbitragefreies Finanzmarktmodell mit äquivalentem Martingalmaß $\mathbb{P}^*$ sind äquivalent:

(i) Das Modell ist vollständig.

(ii) Das äquivalente Martingalmaß ist eindeutig, i.e.

$$\mathcal{P} = \{\mathbb{P}^*\}$$

(iii) Zu jedem $\mathbb{P}^*$-Martingal M existiert eine Darstellung der Form

$$M_n = \mathbb{E}M_0 + (H \cdot S^*)(n) \ \forall 1 \leq n \leq N$$

mit vorhersehbarem $H \in \mathcal{H}$.

Beweis:
(i)⇒(ii): Sei $\mathbb{P}^*$ ein äquivalentes Martingalmaß. Für $A \in \mathcal{F}_N$ ist $C = \mathbb{1}_A S_0(N)$ ein Claim mit $C^* = \mathbb{1}_A$. Also gilt:

$$\mathbb{P}_1^*(A) = \mathbb{E}_1^* C^* \overset{C \text{ ist hedgebar}}{=} \mathbb{E}^* C^* = \mathbb{P}^*(A) \Rightarrow \mathbb{P}_1^* = \mathbb{P}^*$$

(ii)⇒(i): $\mathcal{P} = \{\mathbb{P}^*\} \Rightarrow P_+(C) = P_-(C)$ für alle C und damit ist jedes C hedgebar.

(i)⇒(iii): Sei M ein $(\mathcal{F}_n)$ Martingal bzgl. $\mathbb{P}^*$. Dann ist $C = M(N)S_0(N)$ ein Claim mit $C^* = M(N)$. Wegen der Vollständigkeit ist C hedgebar. Also existiert ein $V_0 \in \mathbb{R}$ und ein preversibles H mit

$$V_0 + (H \cdot S^*)(N) = C^* = M(N)$$

Also gilt:

$$V_0 = \mathbb{E}^*(V_0 + (H \cdot S^*)(N)) = \mathbb{E}^* C^* = \mathbb{E}^* M(N) = \mathbb{E}^* M(0)$$

und

$$\mathbb{E}^* M_0 + (H \cdot S^*)(n) = V_0 + (H \cdot S^*)(n) = \mathbb{E}^*(V_0 + (H \cdot S^*)(N) \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}^*(M(N) \mid \mathcal{F}_n) = M_n$$

(iii)⇒(i): Ist C ein Claim, so ist

$$M_n = \mathbb{E}^*(C^* \mid \mathcal{F}_n), \ n = 0, \ldots, N$$

ein $\mathbb{P}^*$-Martingal. Wegen (iii) gibt es zu $\mathbb{E}^* C^* = \mathbb{E}^* M_0$ ein preversibles H mit

$$\mathbb{E}^* C^* + (H \cdot S^*)(N) = C^*$$

Also ist C hedgebar, also ist der Finanzmarkt vollständig. □

5.11 Satz 5

Das arbitragefreie CRR und das verallgemeinerte arbitragefreie CRR-Modell sind vollständig.

Beweis:
Dies folgt aus der Eindeutigkeit des äquivalenten Martingalmaßes. □

5.12 Hedgen im CRR-Modell

Gegeben sei ein N-Perioden CRR-Modell und ein Claim

$$C = g(S(N))$$

Problem: Wie kann man algorithmisch den Hedge und damit auch den Preis ausrechnen?
Es gilt:

$$S(n) = S(0)u^{Z_n} d^{n-Z_n}, \ Z_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

Gesucht ist ein preversibles H und Anfangskapital V_0 mit

$$V_0 + (H \cdot S^*)(N) = C^* = \frac{g(S(N))}{(1+\rho)^N}$$

Für den Wert der Hedgestrategie nach n-Perioden gilt:

$$\begin{aligned} V_n^* = V_0 + (H \cdot S^*)(n) = \mathbb{E}^*(C^* \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}^*(\mathbb{E}^*(C^* \mid \mathcal{F}_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}^*(V_{n+1}^* \mid \mathcal{F}_n) \\ \overset{\text{Markov-Eigenschaft}}{=} \mathbb{E}^*(V_{n+1}^* \mid Z(n)) \\ = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}^*(V_{n+1}^* \mid Z_n = k)\mathbb{1}_{\{S(n)=S(0)u^k d^{n-k}\}} \end{aligned}$$

setze

$$v^*(n,k) = \mathbb{E}^*(V_{n+1}^* \mid Z_n = k) = \mathbb{E}^*(C^* \mid Z_n = k),\ n = 0, \ldots, N,\ k = 0, \ldots, n$$

v^* kann dann rekursiv berechnet werden durch

$$v^*(N,k) = \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^N \cdot g\big(S(0)u^k d^{N-k}\big),\ k = 0, \ldots, N$$

'Initialisierung':
for $n = N-1$ downto 0 do

$$v^*(n,k) = p^* v^*(n+1,k+1) + (1-p^*)v^*(n+1,k) \text{ für } k = n, n-1, \ldots, 0$$

Es gilt:

$$V_n^* = \sum_{k=0}^{n} v^*(n,k)\mathbb{1}_{\{Z_n=k\}}$$

Damit ist der Wertprozess der Hedgestrategie algorithmisch berechnet.
Berechnen der Hedgestrategie im CRR-Modell $C = g(S(N))$. Gesucht ist $(H_n)_{n=1,\ldots,N}$ mit

$$V_0 + \sum_{k=1}^{N} H(k)\Delta S^*(k) = C^*$$

Ansatz: $Z(n-1) = k$

$$H(n) = \sum_{k=0}^{n-1} H(n)\mathbb{1}_{\{Z(n-1)=k\}} = \sum_{k=0}^{n-1} h(n,k)\mathbb{1}_{\{Z(n-1)=k\}}$$

$h(n,k)$ wird rekursiv berechnet.
$v^*(n-1,k)$ ist der Preis in Einheiten des Numeraire Assets und $v^*(n, k+X_n)$ zum Zeitpunkt $n+1$ zu hedgen. Der Hedge berechnet sich aus

$$v^*(n-1,k) + h(n,k)\Delta S^*(n) = v^*(n, Z_n) \text{ auf } \{Z_{n-1} = k\}$$

Dies führt zu den Gleichungen

$$\begin{aligned} v^*(n-1,k) + h(n,k)S^*(n-1)\left(\frac{u}{1-\rho} - 1\right) = v^*(n,k+1) \\ v^*(n-1,k) + h(n,k)S^*(n-1)\left(\frac{d}{1-\rho} - 1\right) = v^*(n,k) \end{aligned}$$

Hieraus ergibt:

$$h(n,k) = \frac{v^*(n,k+1) - v^*(n-1,k)}{S^*(n-1)\left(\frac{u}{1+\rho} - 1\right)} = \frac{v^*(n,k) - v^*(n-1,k)}{S^*(n-1)\left(\frac{d}{1+\rho} - 1\right)},\ k = 0, \ldots, n-1$$

Beachte: Auf $\{Z(n-1)=k\}$ ist

$$S^*(n-1) = \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^{n-1} S(0)u^k d^{n-1-k}$$

Man erhält also den Wertprozess und Hedge für den Claim $C = g(S(N))$ durch folgenden Algorithmus.
Initialisierung:

$$v^*(N,k) = \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^{N} g(S(0)u^k d^{N-k}),\ k = 0,\dots,N$$

Rekursionsschritt:
for $n = N-1$ down to 0 do

$$v^*(n,k) = p^* v^*(n+1,k+1) + (1-p^*)v^*(n+1,k)$$

$$h(n+1,k) = \frac{v^*(n+1,k+1) - v^*(n,k)}{S^*(n)\left(\frac{u}{1+\rho}-1\right)},\ S^*(n) = S(0)u^k d^{n-k}\frac{1}{(1+\rho)^n} \text{ für } k = 0,\dots,n$$

Den Wertprozess, in Einheiten des Numeraire Assets, für den Hedge erhält man durch

$$V_n^* = \sum_{k=0}^{n} v^*(n,k)\mathbb{1}_{\{Z(n)=k\}},\ n = 0,\dots,N$$

und die Hedgestrategie durch

$$H(n) = \sum_{k=0}^{n-1} h(n,k)\mathbb{1}_{\{Z(n-1)=k\}}$$

5.13 Algorithmische Berechnung des upper und lower hedging Preises im Trinomialmodell

1. Schritt: Einperiodenfall:
$N = 1$: Anfangskurs S_0, Endkurse $(uS_0, mS_0, dS_0),\ 0 < d < m < u$, Zinsrate $\rho,\ d < 1+\rho < u$.

$$\Delta S^*(1) = S^*(1) - S^*(0) = (\frac{uS_0}{1+\rho} - S_0, \frac{mS_0}{1+\rho} - S_0, \frac{dS_0}{1+\rho} - S_0) = S_0(\frac{u}{1+\rho} - 1, \frac{m}{1+\rho} - 1, \frac{d}{1+\rho} - 1) = S_0 \cdot R$$

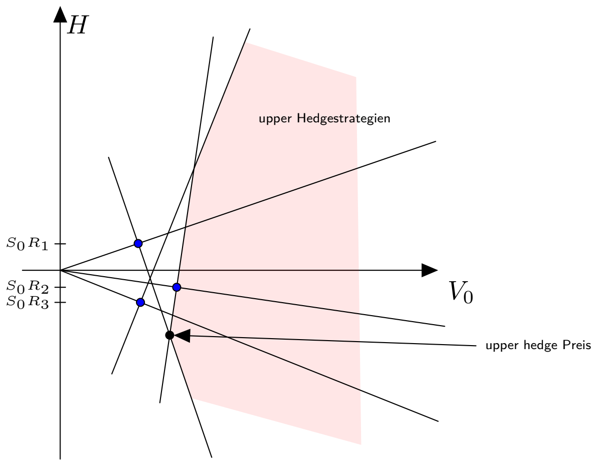
Ein Claim C entspricht einem Vektor $C = (c_1, c_2, c_3)^T$

$$C^* = \begin{pmatrix} c_1^* \\ c_2^* \\ c_3^* \end{pmatrix},\ c_i^* = \frac{c_i}{1+\rho}$$

Ein Anfangskapital V_0 und H Anteile im risky asset liefern einen upper Hedge, wenn

$$V_0 + H\Delta S^*(1) \geq C^* \Leftrightarrow \begin{pmatrix} V_0 + HS_0R_1 \\ V_0 + HS_0R_2 \\ V_0 + HS_0R_3 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} c_1^* \\ c_2^* \\ c_3^* \end{pmatrix}$$

$\{(V_0, H) \mid V_0 + HS_0R_i \geq c_i^*,\ i = 1,2,3\}$ ist der Durchschnitt von 3 Halbräumen im $\mathbb{R}^2$



$$V_0 + HS_0R_1 = c_1^* = \langle (V_0, H) \,|\, (1, S_0R_1) \rangle = c_1^*$$

Numerische Umsetzung: Berechnung der Schnittpunkte:

$$V_0^{(1)} + H^{(1)}S_0R_2 = c_2^*,\ V_0^{(1)} + H^{(1)}S_0R_3 = c_3^* \Leftrightarrow H^{(1)} = \frac{c_3^* - c_2^*}{S_0(R_3 - R_2)},\ V_0^{(1)}c_2^* - \frac{c_3^* - c_2^*}{R_3 - R_2}R_2$$

entsprechend

$$V_0^{(2)} + H^{(2)}S_0R_1 = c_1^*,\ V_0^{(2)} + H^{(2)}S_0R_3 = c_3^*$$

und

$$V_0^{(3)} + H^{(3)}S_0R_2 = c_2^*,\ V_0^{(3)} + H^{(3)}S_0R_2 = c_2^*$$

Ist $V_0^{(1)} = V_0^{(2)} = V_0^{(3)}$, so ist

$$P_-(C) = P_+(C) = V_0^{(1)} \text{ und } H^- = H^+ = H = H^{(1)} = H^{(2)} = H^{(3)}$$

der Hedge für C.
Andernfalls bestimme l, m, r, sodass

$$V_0^{(l)} \le V_0^{(m)} \le V_0^{(r)}$$

Entscheide, ob $(V_0^{(m)}, H^{(m)})$ ein upper Hedge ist durch

$$V_0^{(m)} + H^{(m)}S_0R_m > c_m^*$$

Ist dies der Fall, so ist

$$P_+(C) = V_0^{(m)} \text{ und } H^+ = H^{(m)}$$

der upper Hedge und $P_-(C) = V_0^{(l)},\ H^- = H^{(l)}$ der lower Hedge.
ist dies nicht der Fall, so ist

$$P_-(C) = V_0^{(m)} \text{ und } H^- = H^{(m)}$$

der lower Hedge. Weiter ist dann $P_+(C) = V_0^{(r)},\ H^{(r)} = H^+$ der upper Hedge.

2. Schritt: Mehr Perioden-Fall (N-Perioden):

$$\begin{aligned} S(n) &= S_0 \prod_{i=1}^{n} Y_i,\ (Y_i) \text{ iid, } Y_i \text{ hat nur Werte in } \{m, u, d\} \\ &= S_0 u^{Z_1(n)} d^{Z_2(n)} m^{n-(Z_1(n)+Z_2(n))} \text{ mit } Z_1(n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{Y_k = u\}},\ Z_2(n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{Y_k = d\}} \end{aligned}$$

Claim C der Form $C = g(S(N))$.
Rekursiv wird die upper und lower hedging Strategie berechnet:
Initialisierung:

$$v^-(N,(k,l)) = v^+(N,(k,l)) = (1+\rho)^{-N} g(S_0 u^k d^l m^{N-(k+l)})$$

for $n = N-1$ down to 0 do
for $k = 0, \dots, n$
for $l = 0, , \dots, n-k$
Berechne den upper hedging Preis, sowie upper Hedge im Trinomialmodell mit Anfangskurs $S_0 u^k d^l m^{n-(k+l)}$ und Claim $C^+ = (v^+(n+1,(k+1,l)),\ v^+(n+1,(k,l)), v^+(n+1,(k,l-1)))$
Setze $v^+(n,(k,l)) = P_+(C)$ und $h^+(n+1,(k,l)) = H^+$
Berechne den lower hedging Preis, sowie lower Hedge im Trinomialmodell mit Anfangskurs $S_0 u^k d^l m^{n-(k+l)}$ und Claim $C^- = (v^-(n+1,(k+1,l)),\ v^-(n+1,(k,l)), v^-(n+1,(k,l-1)))$
Setze $v^-(n,(k,l)) = P_-(C)$ und $h^-(n+1,(k,l)) = H^-$

Es gilt:

$$v^+\big(0,(0,0)\big) = P_+(C)$$

ist das Anfangskapital des minimalen upper hegdes und

$$H_n^+ := \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-k-1} h^+(n,(k,l)) \mathbb{1}_{\{Z_1(n-1)=k\}} \mathbb{1}_{\{Z_2(n-1)=l\}}$$

die minimale upper hedge Strategie, insbesondere gilt damit

$$P_+(C) = \sum_{k=1}^{N} H(k) \Delta S^*(k) \geq C^*$$

Entsprechend

$$v^-(0,(0,0)) = P_-(C)$$

das Anfangskapital für den maximalen lower hedge und

$$H_n^- = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-k-1} h^-(n,(k,l)) \mathbb{1}_{\{Z_1(n-1)=k\}} \mathbb{1}_{\{Z_2(n-1)=l\}}$$

ist der maximale lower hedge

$$P_-(C) = \sum_{k=1}^{N} H(k) \Delta S^*(k) \leq C^*$$

5.14 Allgemeine Call-Formel

Betrachte Finanzmarkt über N-Perioden mit $(S(n))_{n=0,\dots,N} \subseteq \mathbb{R}_+$ als Preisprozess für das risky asset und $(\beta(n))_{n=0,\dots,N}$ als Geldmarktkonto, $(\mathcal{F}_n) n = 0, \dots, N$ Filtration und damit

$$\beta(n) = \prod_{k=1}^{n} (1 + \zeta(k))$$

mit vorhersehbarem Prozess $\zeta > -1$. Wir betrachten einen Call mit strike K, d.h. $C = (S(N) - K)^+$ ist die Claimauszahlung nach N Perioden.
Annahme: C sei hedgebar und das Modell arbitragefrei.

Dann gilt: $\mathbb{E}^* C^*$ ist der eindeutige arbitragefreie Anfangspreis für C, wobei $\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}$ beliebig gewählt werden kann.

$$\begin{aligned}
P(C) &= \mathbb{E}^* C^* = \mathbb{E}^* \left(\frac{(S(N)-K)^+}{\beta(N)} \right) \\
&= \mathbb{E}^* \frac{S(N)}{\beta(N)} \mathbb{1}_{\{S(N)>K\}} - \mathbb{E}^* \frac{K}{\beta(N)} \mathbb{1}_{\{S(N)>K\}} \\
&= \mathbb{E}^* S^*(N) \mathbb{1}_{\{S(N)>K\}} - K \cdot \mathbb{E}^* \frac{1}{\beta(N)} \mathbb{1}_{\{S(N)>K\}} \\
&= S_0 \cdot \mathbb{E}^* \frac{S^*(N)}{S_0} \mathbb{1}_{\{S(N)>K\}} - K \cdot B(0,N) \cdot \mathbb{E}^* \frac{1}{\beta(N)} \cdot \frac{1}{B(0,N)} \mathbb{1}_{\{S(N)>K\}} \text{ mit } B(0,N) := \mathbb{E}^* \frac{1}{\beta(N)}
\end{aligned}$$

Definiere äquivalente Maße $\mathbb{P}_1^*$ und $\mathbb{P}_2^*$ durch

$$\left.\frac{d\mathbb{P}_1^*}{d\mathbb{P}^*}\right|_{\mathcal{F}_N} = \frac{S^*(N)}{S_0} \text{ und } \left.\frac{d\mathbb{P}_2^*}{d\mathbb{P}^*}\right|_{\mathcal{F}_N} = \frac{1}{\beta(N)} \frac{1}{B(0,N)}$$

Dann gilt:

$$P(C) = S(0)\mathbb{P}_1^*(S(N) > K) - KB(0,N)\mathbb{P}_2^*(S(N) > K)$$

Im CRR-Modell ist

$$\beta(N) = (1+\zeta)^N, \text{ also } \mathbb{P}_2^* = \mathbb{P}^*$$

somit folgt:

$$P(C) = S(0)\mathbb{P}_1^*(S(N) > K) - K(1+\zeta)^{-N}\mathbb{P}^*(S(N) > K)$$

$$\frac{S(N)}{S(0)} = u^{Z(N)} d^{N-Z(N)}$$

Dann folgt:

$$S(N) > K \Leftrightarrow Z(N) > \frac{\ln \frac{K}{S(0)} - N \ln d}{\ln u - \ln d} = b_N$$

Bzgl. $\mathbb{P}^*$ ist $Z(N)$ eine $\mathrm{Bin}(N, p^*)$ verteilte Zufallsvariable mit

$$p^* = \frac{(1+\zeta) - d}{u - d}$$

Im CRR-Modell ist bzgl. $\mathbb{P}_1^*$ der Zählprozess $(Z(n))_{n=0,\dots,N}$ ein Random-Walk $Z(n) = \sum_{k=1}^n X_k$, mit

$$\mathbb{P}_1^*(X_k = 1) = p_1^* = \frac{p^* u}{1+\zeta}$$

Bzgl. $\mathbb{P}_1^*$ ist $Z(N)$ eine $\mathrm{Bin}(N, p_1^*)$ verteilte Zufallsvariable. Also gilt:

$$P(C) = S(0)\,\mathrm{Bin}(N, p_1^*)((b_N, \infty)) - K\,\mathrm{Bin}(N, p^*)((b_N, \infty))$$

Dies ist die diskrete **Black-Scholes Formel**

6 Das Black-Scholes Modell

Ziel: Modellierung von Finanzmärkten in stetiger Zeit.

6.1 Beschreibung des Modells

Finanzmarktmodell besteht aus

- einem Geldmarktkonto
- ein risky asset
- Laufzeit T

Geldmarktkonto:

- Annahme: deterministische stetige Verzinsung mit Rate r. Daher entwickelt sich das Geldmarktkonto gemäß
$$\beta(t) = e^{rt},\ 0 \le t \le T$$

risky asset:

- Anfangskurs $S_0 > 0$. Annahme:
  (a) die relativen Kursänderungen sind unabhängig und zeitlich stationär
  (b) die Kursänderungen sind stetig

  Hieraus folgt, dass der Kursverlauf $(S(t))_{0\le t\le T}$ des risky assets durch einen stochastischen Prozess der Form
$$S(t) = S(0)\exp\left(\sigma W(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right)e^{\mu t},\ t \le T \text{ mit } \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$$
  beschrieben werden kann. $(W(t))_{t\ge 0}$ bezeichnet dabei den **Wiener-Prozess**. Dieser ist definiert durch die folgenden Bedingungen

  (i) $W(0) = 0\ \mathbb{P}-$f.s.

  (ii) Für beliebige $0 \le t_0 < t_1 < \cdots < t_n,\ n \in \mathbb{N}$ sind
$$W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_2} - W_{t_1}, \ldots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$$
  stochastisch unabhängig.

  (iii) Für alle $0 \le s,\ t > 0$ gilt
$$W_{s+t} - W_s \sim W_t - W_0 = W_t \sim N(0,t)$$

  (iv) $(W_t)_{t\ge 0}$ hat stetige Pfade

  Wieso erfüllt das Modell die Annahmen?
  Die relativen Kursänderungen in $t_1 < \cdots < t_n$ sind gegeben durch
$$\frac{S(t_1)-S(t_0)}{S(t_0)}, \frac{S(t_2)-S(t_1)}{S(t_1)}, \ldots, \frac{S(t_n)-S(t_{n-1})}{S(t_{n-1})}.$$
  Da
$$\frac{S(t_i)-S(t_{i-1})}{S(t_{i-1})} = \exp\left(\sigma(W(t_i)-W(t_{i-1})) - \frac{1}{2}\sigma^2(t_i - t_{i-1})\right)e^{\mu(t_i - t_{i-1})} - 1$$
  folgt die Unabhängigkeit und zeitliche Stationarität der relativen Kursänderungen aus (ii) und (iii). Die Annahme (b) ist erfüllt wegen (iv). Das das Modell aus den Annahmen folgt, ist nicht

ganz so einfach zu beweisen. Das folgt aus der Tatsache, dass ein stochastischer Prozess X mit unabhängigen stationären Zuwächsen der stetige Pfade hat, notwendigerweise ein Wiener-Prozess mit Drift sein muss, d.h.

$$X(t) = \sigma W(t) + \nu t \text{ mit } \sigma > 0 \text{ und } \nu \in \mathbb{R}$$

Nur aus der Annahme (a) ergeben sich sogenannte **Levy-Prozess Modelle**.

6.2 Approximation eines Black-Scholes Modells durch ein CRR-Modell

Gegeben: BS-Modell mit Parametern $\sigma > 0$ für die **Volatilität**, $T > 0$ für die Laufzeit, $\mu > 0$ für den Trend und $R > 0$ für die Zinsrate, daraus ergibt sich

$$S(t) = S(0)e^{\mu t}\exp\left(\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right)$$

Es soll in geeigneter Weise ein CRR-Modell angepasst werden. Teile hierzu den Zeitbereich in äquidistante Intervalle $[t_{i-1}, t_i]$ mit $0 = t_0,\ T = t_n$, erhalten $\frac{T}{n} = \Delta_n$ als Intervalllänge. Approximiere $S(t_j) = S(j\Delta)$ für $j = 1, \dots, n$ durch

$$S_n(t_j) = S(0)u_n^{Z_n(j)}d_n^{j-Z_n(j)}$$

mit $Y_1, \dots, Y_n$ iid. $\mathbb{P}(Y_i = u_n) = p_n = 1 + \mathbb{P}(Y_i = d_n)$ und $Z_n(j) = \sum_{k=1}^{j} \mathbb{1}_{\{Y_k = u_n\}}$. $(S_n(t_j))_{j=0,\dots,n}$ definiert einen Aktienpreisprozess in einem CRR-Modell.
Frage: Wie kann man u_n, d_n, p_n sinnvoll wählen.
Ansatz: Wähle u_n, d_n, p_n so, dass der Erwartungswert und die Varianz der log Rendite bis T übereinstimmen. Es gilt:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\log\left(\frac{S(T)}{S(0)}\right) &= \mathbb{E}\left(\mu T + \sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 T\right)\\ &= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T\\ \mathbb{V}\log\frac{S(T)}{S(0)} &= \sigma^2\mathbb{V}W_t = \sigma^2 T\end{aligned}$$

Im CRR-Modell:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\log\frac{S_n(T)}{S_n(0)} &= \mathbb{E}\log\prod_{k=1}^{n} Y_k = \mathbb{E}\sum_{k=1}^{n}\log Y_k\\ &= n\mathbb{E}\log Y_1 = n((\log u_n)p_n + (\log d_n)(1-p_n))\\ \mathbb{V}\log\frac{S_n(T)}{S_n(0)} &= \sum_{k=1}^{n}\mathbb{V}(\log Y_1)\\ &= n\left(p_n(\log u_n)^2 + (1-p_n)(\log d_n)^2 - \big((\log u_n)p_n + (\log d_n)(1-p_n)\big)^2\right)\end{aligned}$$

Das führt auf die Gleichungen

$$\begin{aligned}p_n\log u_n + (1-p_n)\log d_n &= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{T}{n}\\ p_n\log^2 u_n + (1-p_n)\log^2 d_n &= \frac{\sigma^2 T}{n} + \left(\frac{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{n}\right)^2\end{aligned}$$

welche durch

$$\log u_n = \frac{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{n} + \left(\frac{1-p_n}{p_n}\frac{\sigma^2 T}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\log d_n = \frac{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{n} - \left(\frac{1-p_n}{p_n}\frac{\sigma^2 T}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$$

gelöst werden.
Strebt $p_n \to p \in (0,1)$ für $n \to \infty$, so ist

$$d_n < \underbrace{e^{r\frac{T}{n}}}_{=1+\zeta_n} < u_n$$

denn

$$\log u_n \sim \left(\frac{1-p_n}{p_n}\frac{\sigma^2 T}{n}\right)^{\frac{1}{2}} > r\frac{T}{n}$$
$$\log d_n \sim -\left(\frac{1-p_n}{p_n}\frac{\sigma^2 T}{n}\right)^{\frac{1}{2}} < r\frac{T}{n}$$

Im folgenden setze die Sprungwahrscheinlichkeit

$$p_n = p \in (0,1)\ \forall n \in \mathbb{N}$$

setze $\eta = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2$.
Definiere mit dem diskreten CRR-Aktienprozess $(S_n(t_j))_{j=0,\dots,n}$ einen stochastischen Prozess, mit $(S_n(t))_{0\le t\le T}$ durch

$$S_n(t) = S_n(t_{i-1}) \text{ für } t_{i-1} \le t < t_i\ \forall 1 \le i \le n$$

Für festes $t \in [0,T]$ und für $i_n = \lfloor n\frac{t}{T}\rfloor$ gilt:

$$i_n\frac{T}{n} \le t < (i_n+1)\frac{T}{n},\ \frac{i_n}{n} \to \frac{t}{T}$$

Mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes für Dreiecksschemata gilt:

$$\begin{aligned}\log\frac{S_n(t)}{S_n(0)} &= \log\left(\frac{S_n\left(i_n\frac{T}{n}\right)}{S\quad {}_n(0)}\right)\\ &= \underbrace{\log\left(\frac{S_n\left(i_n\frac{T}{n}\right)}{S\quad {}_n(0)}\right) - i_n\frac{1}{n}\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}_{\to N(0,\sigma^2 t) \text{ in Vert. nach CLT}} + \underbrace{\frac{i_n}{n}\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}_{\to\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t}\end{aligned}$$

da

$$\mathbb{E}\log\left(\frac{S_n\left(i_n\frac{T}{n}\right)}{S_n(0)}\right) = i_n\frac{1}{n}\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T$$
$$\mathbb{V}\log\left(\frac{S_n\left(i_n\frac{T}{n}\right)}{S_n(0)}\right) = i_n\frac{1}{n}\sigma^2 T$$

Also gilt:

$$\log\left(\frac{S_n(t)}{S_n(0)}\right) \overset{n\to\infty}{\to} N\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t, \sigma^2 t\right) \text{ in Verteilung}$$

Da

$$\log\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right) \sim N\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t, \sigma^2 t\right)$$

folgt hieraus

$$S_n(t) \overset{n\to\infty}{\to} S(t) \text{ Konvergenz in Verteilung (mit d bezeichnet).}$$

Für $0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_k \leq T$ folgt wegen der Unabhängigkeit und Stationarität von $\left(\log \frac{S_n(t_j)}{S_n(0)}\right)_{j=0,\ldots,n}$ analog mit dem CLT, dass

$$\left(\log\left(\frac{S_n(s_1)}{S_n(0)}\right),\ldots,\log\left(\frac{S_n(s_k)}{S_n(0)}\right)\right) \overset{\mathsf{d}}{\to} \left(\log\left(\frac{S(s_1)}{S(0)}\right),\ldots,\log\left(\frac{S(s_k)}{S(0)}\right)\right)$$

Hieraus erhält man, dasss die Familie der endlich dimensionalen Verteilungen von S_n gegen die Familie der endlich dimensionalen Verteilungen von S konvergieren. Genauer: Für alle $0 < t_1 < \cdots < t_k \leq T,\ k \in \mathbb{N}$ gilt

$$(S_n(t_1),\ldots,S_n(t_k)) \overset{\mathsf{d}}{\to} (S(t_1),\ldots,S(t_k))$$

Zusammen mit einer **Straffheitsbedingung** folgt hieraus die schwache Konvergenz von $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen S in $\mathbb{D}[0,T]$, wobei

$$\mathbb{D}[0,T] = \{x : [0,T] \to \mathbb{R} \mid x \text{ ist rechtsseitig stetig und hat linksseitige Limites}\}$$

6.3 Eigenschaften des Wiener-Prozesses

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein W'Raum und $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ eine Filtration.
Ein stochastischer Prozess $(W_t)_{t\geq 0}$ heißt **Wiener-Prozess** bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, wenn gilt:

(i) W ist adaptiert bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$

(ii) $W_0 = 0$ $\mathbb{P}-$f.s.

(iii) $W_t - W_s$ ist stochastisch unabhängig von $\mathcal{F}_s$ für alle $0 \leq s < t$

(iv) $W_t - W_s \sim W_{t-s} \sim N(0, t-s)$ $\forall 0 \leq s < t$

(v) W hat $\mathbb{P}-$f.s.stetige Pfade

Im folgenden sollen Martingale bestimmt werden.

Satz
Sei W ein Wiener-Prozess bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Dann gilt:

(i) W ist ein Martingal

(ii) $(W_t^2 - t)$ ist ein Martingal

(iii) $\left(\exp\left(\nu W_t - \frac{1}{2}\nu^2 t\right)\right)_{t\geq 0}$ ist ein Martingal

Beweis:

(i)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(W_t \mid \mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}(W_s + W_t - W_s \mid \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(W_s \mid \mathcal{F}_s) + \mathbb{E}(W_t - W_s \mid \mathcal{F}_s)\\ &= W_s + \underbrace{\mathbb{E}(W_t - W_s)}_{=0}\ \forall s \leq t\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(W_t^2 \mid \mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}((W_s + W_t - W_s)^2 \mid \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(W_s^2 + 2W_s(W_t - W_s) + (W_t - W_s)^2 \mid \mathcal{F}_s) \\
&= W_s^2 + \mathbb{E}(2W_s(W_t - W_s) \mid \mathcal{F}_s) + \mathbb{E}((W_t - W_s)^2 \mid \mathcal{F}_s) \\
&= W_s^2 + 2W_s \underbrace{\mathbb{E}(W_t - W_s \mid \mathcal{F}_s)}_{=\mathbb{E}(W_t - W_s)=0} + \mathbb{E}(W_t - W_s)^2 \\
&= W_s^2 + \mathbb{E}(W_{t-s})^2 = W_s^2 + t - s
\end{aligned}$$

(iii) $s \le t$

letzter Schritt stoch. Analysis (vgl.brownsche Bewegung)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\exp(\nu W_t) \mid \mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}(\exp(\nu(W_s + W_t - W_s)) \ \ \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(\exp(\nu W_s)\exp(\nu(W_t - W_s) \mid \mathcal{F}_s)) \\
&= \exp(\nu W_s)\mathbb{E}(\exp(\nu(W_t - W_s) \mid \mathcal{F}_s)) = \exp(\nu W_s)\mathbb{E}(\exp(\nu(W_t - W_s))) \\
&= \exp(\nu W_s)\mathbb{E}(\exp(\nu W_{t-s})) = \exp(\nu W_s)\exp\left(\frac{1}{2}\nu^2(t-s)\right)
\end{aligned}$$

<u>Ziel:</u> Konstruktion des äquivalenten Martingalmaßes im Black-Scholes Modell.

6.4 Maßwechsel

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein W'Raum, $(\mathcal{F}_t)_{t\ge 0}$ eine Filtration, sei $(L_t)_{t\ge 0}$ ein positives Martingal bzgl. $\mathbb{P}$ und $\bar{\mathbb{P}}$ ein weiteres W'Maß auf $(\Omega, \mathcal{F})$ mit:

$$\left.\frac{d\bar{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} = L_t \ \forall t \ge 0$$

Dann gilt:

(i) Ist Y $\mathcal{F}_t$-messbar und existiert $\bar{\mathbb{E}}Y$, so gilt

$$\bar{\mathbb{E}}(Y \mid \mathcal{F}_s) = \frac{\mathbb{E}(YL_t \mid \mathcal{F}_s)}{L_s} \ \forall s \le t$$

dabei ist $\bar{\mathbb{E}}Y = \int Y d\bar{\mathbb{P}}$ und $\bar{\mathbb{E}}(Y \mid \mathcal{F}_t)$ der bedingte Erwartungswert von Y bzgl. $\bar{\mathbb{P}}$.

(ii) $(M_t)_{t\ge 0}$ ist ein $\bar{\mathbb{P}}$-Martingal genau dann, wenn $(M_tL_t)_{t\ge 0}$ ein $\mathbb{P}$-Martingal ist.

(iii) Ist $(R_t)_{t\ge 0}$ ein positives $\mathbb{P}$-Martingal mit $\mathbb{E}R_t = 1 \ \forall t \ge 0$, so kann auf jedem $\mathcal{F}_T$ ein W'Maß Q_T definiert werden, mit

$$\left.\frac{dQ_T}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} = R_t \ \forall t \le T$$

<u>**Beweis:**</u>
<u>zu (i):</u> Sei Y $\mathcal{F}_t$-messbar und $A \in \mathcal{F}_s$

$$\begin{aligned}
\int_A Y d\bar{\mathbb{P}} &= \int_A YL_t d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}(YL_t \mid \mathcal{F}_s) d\mathbb{P} \\
&= \int_A \mathbb{E}(YL_t \mid \mathcal{F}_s)\frac{1}{L_s} d\bar{\mathbb{P}}, \text{ da } \left.\frac{d\bar{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_s} = L_s
\end{aligned}$$

<u>zu (ii:)</u> $(M_t)_{t\ge 0}$ ist ein $\bar{\mathbb{P}}$-Martingal

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \bar{\mathbb{E}}(M_t \mid \mathcal{F}_s) = M_s \ \forall s \le t \Leftrightarrow \mathbb{E}(M_tL_t \mid \mathcal{F}_s)\frac{1}{L_s} = M_s \ \forall s \le t \\
&\Leftrightarrow \mathbb{E}(M_tL_t \mid \mathcal{F}_s) = M_sL_s \ \forall s \le t \Leftrightarrow ML \text{ ist ein } \mathbb{P}\text{-Martingal}
\end{aligned}$$

zu (iii): Wegen $\mathbb{E}R_T = 1$ definiert

$$Q_T(A) = \int_A R_T \mathrm{d}\mathbb{P} \ \forall A \in \mathcal{F}_T$$

ein zu $\mathbb{P}$ äquivalentes W'Maß auf $(\Omega, \mathcal{F}_T)$. Für $A \in \mathcal{F}_t$ mit $t \leq T$ gilt:

$$\begin{aligned} Q_T(A) &= \int_A R_T \mathrm{d}\mathbb{P} \overset{A\in F_t}{=} \int_A \mathbb{E}(R_T \mid \mathcal{F}_t)\mathrm{d}\mathbb{P} \\ &= \int_A R_t \mathrm{d}\mathbb{P} \end{aligned}$$

□

6.5 Girsanov Transformation

Sei $(W_t)_{t\geq 0}$ ein Wiener-Prozess bzgl. einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Sei für $\nu \in \mathbb{R}$ ein weiteres Maß $\mathbb{P}_\nu$ auf $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ gegeben mit

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}_\nu}{\mathrm{d}\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} = \exp\left(\nu W_t - \frac{1}{2}\nu^2 t\right) \ \forall t \geq 0$$

und $\mathcal{F}_\infty := \sigma\left(\bigcup_{t\geq 0} \mathcal{F}_t\right)$.

Dann gilt:

$$\bar{W}_t = W_t - \nu t, \ t \geq 0$$

ist ein Wiener-Prozess bzgl. $\mathbb{P}_\nu$.

Beweis:

Zeige die definierenden Eigenschaften des Wiener-Prozesses:

(i) $(\bar{W}_t)_{t\geq 0}$ hat stetige Pfade mit $\bar{W}_0 = 0$.

(ii) $\bar{W}_t - \bar{W}_s$ ist unabhängig von $\mathcal{F}_s$ und verteilt wie eine $N(0, t-s)$ Verteilung

zu (i): ist klar.

zu (ii): Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschränkt messbar.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\nu(g(\bar{W}_t - \bar{W}_s) \mid \mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}(g(\bar{W}_t - \bar{W}_s)L_t \mid \mathcal{F}_s)\frac{1}{L_s} \qquad \text{mit } L_t = \exp\left(\nu W_t - \frac{1}{2}\nu^2 t\right) \\ &= \mathbb{E}\left(g(W_t - W_s - \nu(t-s))\frac{L_t}{L_s} \mid \mathcal{F}_s\right) \\ &= \mathbb{E}\left(g(W_t - W_s - \nu(t-s))\exp\left(\nu(W_t - W_s) - \frac{1}{2}\nu^2(t-s)\right) \mid \mathcal{F}_s\right) \\ &= \mathbb{E}g(W_t - W_s - \nu(t-s))\exp\left(\nu(W_t - W_s) - \frac{1}{2}\nu^2(t-s)\right) \\ &= \mathbb{E}g(W_{t-s} - \nu(t-s))\exp\left(\nu W_{t-s} - \frac{1}{2}\nu^2(t-s)\right) \\ &= \mathbb{E}_\nu g(\bar{W}_{t-s}) \end{aligned}$$

Hieraus folgt: $\bar{W}_t - \bar{W}_s$ ist stochastisch unabhängig von $\mathcal{F}_s$ und genauso verteilt wie $\bar{W}_{t-s}$. Dies ist eine $N(0, t-s)$ Verteilung, denn

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\nu g(\bar{W}_t) &= \mathbb{E} g(W_t - \nu t) \exp\left(\nu W_t - \frac{1}{2}\nu^2 t\right) \\
&= \mathbb{E} g(W_t - \nu t) \exp\left(\nu(W_t - \nu t) + \frac{1}{2}\nu^2 t\right) = e^{\frac{1}{2}\nu^2 t} \int g(x) e^{\nu x} N(-\nu t, t)(\mathrm{d}x) \\
&= e^{\frac{1}{2}\nu^2 t} \int g(x) e^{\nu x} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{1}{2t}(x+\nu t)^2\right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int g(x) e^{-\frac{1}{2t}x^2} \mathrm{d}x = \int g(x) N(0,t)(\mathrm{d}x)
\end{aligned}$$

Also ist $\bar{W}_t$ $N(0,t)$-verteilt bzgl. $\mathbb{P}_\nu$. □

6.6 Äquivalentes Martingalmaß im Black-Scholes Modell

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein W'Raum, $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ eine Filtration und W ein Wiener-Prozess bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Sei $[0,T]$ der Handelszeitraum eines Finanzmarktes,

$$S(t) = S_0 e^{\mu t} \exp\left(\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right),\ 0 \leq t < T$$

sei der Preisprozess eines risky assets, $S_0 > 0$ der Anfangspreis, $\mu \in \mathbb{R}$ Trendparameter, $\sigma > 0$ Volatilität und $\beta(t) = e^{rt},\ t \geq 0$ der Preisprozess eines Geldmarktkontos mit Zinsrate r.
Definition: Ein W'Maß $\mathbb{P}^*$ auf $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ heißt äquivalentes Martingalmaß genau dann, wenn

(i) $\mathbb{P}^*$ ist äquivalent zu $\mathbb{P}$ auf $\mathcal{F}_T$

(ii) $S^*(t) := \frac{S(t)}{\beta(t)} = e^{-rt}S(t),\ 0 \leq t \leq T$ ist ein $\mathbb{P}^*$-Martingal.

Beispiel

Ansatz:

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}^*}{\mathrm{d}\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} = \exp\left(\nu W(t) - \frac{1}{2}\nu^2 t\right),$$

zu bestimmen ist ν.
Girsanov liefert $W^*(t) = W(t) - \nu t,\ t \geq 0$ ist ein Wiener-Prozess bzgl. $\mathbb{P}^*$. Bzgl. $\mathbb{P}^*$ gilt:

$$\begin{aligned}
S(t) &= S_0 e^{\mu t} \exp\left(\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right) \\
&= S_0 e^{\mu t} \exp\left(\sigma(W_t^* + \nu t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right) \\
&= S_0 \exp\left(\sigma W_t^* - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right) e^{(\mu + \sigma\nu)t}
\end{aligned}$$

Also

$$S_t^* = e^{-rt} S_t = e^{-rt} S_0 \exp\left(\sigma W_t^* - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right) e^{(\mu+\sigma\nu)t}$$

und damit (S_t^*) ist ein $\mathbb{P}^*$-Martingal genau dann, wenn

$$\mu - r + \sigma\nu = 0 \Leftrightarrow \nu = -\frac{\mu - r}{\sigma}$$

Ergebnis:
Für $\nu = -\frac{\mu - r}{\sigma}$ ist $\mathbb{P}^*$ ein äquivalentes Martingalmaß.

Bemerkung:
Bzgl. $\mathbb{P}^*$ gilt:

$$S(t) = S_0 e^{rt} \exp\left(\sigma W_t^* - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right),\ t \geq 0$$

Also ist S ein geometrischer Wiener-Prozess mit Trend r und Volatiliät σ.
$\left(\frac{S_t^*}{S_0}\right)_{t\geq 0}$ ist ein $\mathbb{P}^*$-Martingal und damit ein positives Martingal mit

$$\mathbb{E}^* \frac{S_t^*}{S_0} = \frac{S_0^*}{S_0} = 1$$

Deshalb kann ein Maßwechsel durchgeführt werden:

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}_\sigma^*}{\mathrm{d}\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} = \frac{S_t^*}{S_0} = \exp\left(\sigma W_t^* - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right)$$

Da W^* ein Wiener-Prozess bzgl. $\mathbb{P}^*$ ist, gilt nach Girsanov

$$W_t^{**} = W_t^* - \sigma t,\ t \geq 0$$

ist ein Wiener-Prozess bzgl. $\mathbb{P}_\sigma^*$. Weiter ist:

$$\begin{aligned} S(t) &= S_0 e^{rt} \exp\left(\sigma W_t^* - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right) \\ &= S_0 e^{rt} \exp\left(\sigma(W_t^{**} + \sigma t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right) \\ &= S_0 e^{(r+\sigma^2)t} \exp\left(\sigma W_t^{**} - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right) \end{aligned}$$

Ergebnis:
Der Aktienpreisprozess $(S(t))_{t\geq 0}$ ist ein geometrischer Wiener-Prozess mit Trend μ und Volatilität σ bzgl. $\mathbb{P}$, dann r und σ bzgl. $\mathbb{P}^*$ und abschließend $r + \sigma^2$ und σ bzgl. $\mathbb{P}_\sigma^*$.

6.7 Bewertung von Claims

Ein Derivat ist ein Wertpapier, das eine zufällige Auszahlung C zum Zeitpunkt T garantiert. Im mathematischem Modell entspricht dies einer $\mathcal{F}_T$-messbaren Zufallsvariablen C.
Annahme:

$$\mathbb{E}^* |C^*| < \infty,\ \text{wobei } C^* := e^{-rt} C$$

Klar

$$\mathbb{E}^* |C^*| < \infty \Leftrightarrow \mathbb{E}^* |C| < \infty$$

Es gilt: C ist durch eine selbstfinanzierende Handelsstrategie replizierbar. Zum Nachweis hierfür benötigt man die stochastische Analysis (siehe Höhere Finanzmathematik). Dies folgt aus dem **Martingaldarstellungssatz**.
Deshalb gibt es einen eindeutigen arbitragefreien Preisprozess $(P_t(C))_{0\leq t\leq T}$. Analog zum diskreten ist dieser gegeben durch

$$e^{-rt} P_t(C) = \mathbb{E}^*(C^* \mid \mathcal{F}_t),\ 0 \leq t \leq T$$

Insbesondere ist damit $P_0(C) = \mathbb{E}^*(C^*) = \mathbb{E}^* e^{-rT} C$.

6.8 Black-Scholes Formel

Betrachtet wird eine Call-Option

$$C = (S_T - K)^+$$

Zu bestimmen ist:

$$\mathbb{E}^*(e^{-rT}(S_T - K)^+ \mid \mathcal{F}_t) = P_t(C)e^{-rt}$$

Zunächst für $t = 0$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^* e^{-rT}(S_T - K)^+ &= \mathbb{E}^* e^{-rT} S_T \mathbb{1}_{\{S_T > K\}} - e^{-rT} K \mathbb{P}^*(S_T > K) \\ &= S_0 \cdot \mathbb{E} \frac{S_T^*}{S_0} \mathbb{1}_{\{S_T > K\}} - e^{-rT} K \mathbb{P}^*(S_T > K) \\ &= S_0 \underbrace{\mathbb{P}^*_\sigma(S_T > K)}_{(1)} - e^{-rT} K \underbrace{\mathbb{P}^*(S_T > K)}_{(2)}\end{aligned}$$

Mit $S_T = S_0 \exp\left(\sigma W_T^{**} - \frac{1}{2}\sigma^2 T\right) e^{(r+\sigma^2)T}$ folgt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^*_\sigma(S_T > K) &= \mathbb{P}^*_\sigma\left(\log \frac{S_T}{S_0} > \log \frac{K}{S_0}\right) \\ &= \mathbb{P}^*_\sigma\left(\sigma W_T^{**} - \frac{1}{2}\sigma^2 T + (r + \sigma^2)T > \log \frac{K}{S_0}\right) \\ &= \mathbb{P}^*_\sigma\left(\frac{W_T^{**}}{\sqrt{T}} > \frac{\log \frac{K}{S_0} + \frac{1}{2}\sigma^2 T - (r+\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\ &= \phi\left(\frac{\log \frac{S_0}{K} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\ \text{mit } \phi(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{1}{2}z^2} \mathrm{d}z\end{aligned}$$

Weiter:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^*(S_T > K) &= \mathbb{P}^*\left(\log \frac{S_t}{S_0} > \log \frac{K}{S_0}\right) \\ &= \mathbb{P}^*\left(\sigma W_T^* - \frac{1}{2}\sigma^2 T + rT > \log \frac{K}{S_0}\right) \\ &= \mathbb{P}^*\left(\frac{W_T}{\sqrt{T}} > \frac{\log \frac{K}{S_0} - rT + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\ &= \phi\left(\frac{\log \frac{S_0}{K} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\end{aligned}$$

Ergebnis:
Bezeichnet $c(S_0, T, K)$ den Anfangspreis einer Call-Option mit Laufzeit T, strike K und Anfangsaktienkurs S_0, so gilt:

$$c(S_0, T, K) = S_0 \phi(h_1(S_0, T)) - K e^{-rT} \phi(h_2(S_0, T))$$

mit

$$h_1(S_0, T) = \frac{\log \frac{S_0}{K} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}},\ h_2(S_0, T) = \frac{\log \frac{S_0}{K} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

Da der Aktienpreisprozess - gegeben $\mathcal{F}_t$ - sich verhält wie in einem Black-Scholes Modell, mit Laufzeit $T - t$ und Anfangskurs S_t, ergibt sich für den Call-Preis zum Zeitpunkt t:

$$P_t(C) = c(S_t, T_t, K)$$

Genauer kann man zeigen, mit Hilfe der Markov-Eigenschaft:

$$\begin{aligned}P_t(C) &= \mathbb{E}^*\left(e^{-rt}(S_T - K)^+ \mid \mathcal{F}_t\right) e^{rt} = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^*((S_T - K)^+ \mid \mathcal{F}_t) \\ &= e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^*((S_T - K)^+ \mid S_t) = \mathbb{E}^*(e^{-r(T-t)}(S_T - K)^+ \mid S_t) \\ &= c(S_t, T-t, K)\end{aligned}$$

denn

$$\mathbb{E}^*((S_T - K)^+ \mid S_t = x) = \mathbb{E}^*((S_{T-t} - K)^+ \mid S_0 = x)$$

6.9 Greeks

<u>Eigenschaften des Call-Preises:</u>
Sei $c(x, t, \sigma, K)$ der Preis einer Call-Option mit Laufzeit t, Volatilität σ, strike K und Anfangskurs x.

$$c(x, t, \sigma, K) = x\phi(h_1(x,t)) - Ke^{-rt}\phi(h_2(x,t))$$

(i) $\lim\limits_{t \downarrow 0} c(x, t, \sigma, K) = (x - K)^+$

(ii) $\partial_t c + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \partial_x^2 c + x\partial_x c = rc$ auf $(0,\infty)\times(0,\infty)$. Dies ist die **<u>Black-Scholes Differenzialgleichung</u>**.
Dann gilt:

$$x\phi(h_1(x,t)) - Ke^{-rt}\phi(h_2(x,t)) = 0$$

(iii) c ist strikt wachsend als Funktion des Aktienanfangskurses mit

$$\Delta = \partial_x c = \phi(h_1) > 0$$

$\partial_x c$ ist das sogenannte **<u>Delta der Option</u>**. Das Delta bestimmt die Replikationsstrategie.
Setze $H(t) = \partial_x c(S(t), T-t)$ und $\psi(t) = -Ke^{-rt}\phi(h_2(S(t), T-t))$. Dann wird durch $(\psi(t), H(t))_{0\le t\le T}$ eine selbstfinanzierende Handelsstrategie definiert, die die Call-Option repliziert.

$$\begin{aligned}V_t((\psi, H)) &= H(t)S(t) + \psi(t)\beta(t) = S(t)\Delta + \psi(t)\beta(t) \\ &= S(t)\phi(h_1(S(t), T-t)) - Ke^{-r(T-t)}\phi(h_2(S(t), T-t)) \\ &= c(S(t), U, T-t)\end{aligned}$$

Preis der Call-Option mit Fälligkeit T in t bei $S(t)$.

(iv) Das **<u>Gamma</u>** einer Option

$$\Gamma = \partial_x^2 c = \phi(h_1(x,t))\partial_x h_1(x,t) > 0$$

Γ ist ein Maß für die Änderung der Δ.

(v) **<u>Theta</u>** einer Option:

$$\Theta := \partial_t c = \frac{x\sigma}{2\sqrt{t}}\phi(h_1) + Kre^{-rt}\phi(h_2)$$

Preis der Option ist monoton wachsend in der Laufzeit.

(vi) **<u>Lambda</u>** oder **<u>Vega</u>**

$$\Lambda := \frac{\partial c}{\partial \sigma} = x\phi(h_1(x,y))\sqrt{t} > 0$$

Eine höhere Volatilität signalisiert eine erhöhte Unsicherheit im Markt, die zu höheren Optionspreisen führt.

(vii) **<u>Rho</u>** einer Option

$$\rho := \frac{\partial c}{\partial r} = Kte^{-rt}\phi(h_2) > 0$$

Der Optionspreis wächst mit der Zinsrate r.

6.10 Smile Effekt

Das Black-Scholes Modell ist ein sehr einfaches Modell zur Beschreibung von Aktienkursen.
Frage: Erklärt das Modell die empirischen Phänomene?
Antwort: Nein, da der beobachtete **Smile-Effekt** im Black-Scholes Modell nicht vorkommt.
Fixiere hierzu eine Aktie mit Anfangskurs x, fixiere Laufzeit T. Betrachte die zur Laufzeit gehörige Zinsrate r, betrachte den Call-Preis als Funktion der Basis zu verschiedenen Basispreisen K, dann sind $c_{\text{Markt}}(K)$ Marktpreise der dazugehörigen Option abrufbar. Zu jedem K kann die Modellvolatilität $\sigma(K)$ so bestimmt werden, dass Modellpreis und Marktpreis übereinstimmen, d.h.

$$c(x, T, \sigma(K), K) = c_{\text{Markt}}(K)$$

Wäre das B-S-Modell exakt richtig, so müsste $\sigma(K)$ konstant sein. Man stellt aber folgenden Verlauf für $\sigma(K)$ fest:

Grafik

Verbesserung: Ersetze die globale Volatilität σ durch eine lokale Volatilitätsfunktion $(t,x) \mapsto \sigma(t,x)$.
Es ergibt sich dann bzgl. eines äquivalenten Martingalmaßes $\mathbb{P}^*$ der Aktienpreisprozess:

$$dS_t = S_t(rdt + \sigma(t, S_t))dW_t^*$$

Dieser wird gelöst durch

$$S_t = S_0 e^{rt} \exp\left(\int_0^t \sigma(u, S_u) \mathrm{d}W^*(u) - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2(u, S_u) \mathrm{d}u \right)$$

Das Black-Scholes Modell für 2 Aktien:

- Handelszeitraum $[0,T]$ und Informationsverlauf $(\mathcal{F}_t)_{0 \le t \le T}$
- Geldmarktkonto $\beta(t) = e^{rt},\ 0 \le t \le T$
- Unabhängige Wiener-Prozesse, W_1, W_2 die die Aktien treiben

$$S_1(t) = S_1(0)e^{\mu_1 t} \exp\left(\sigma_1(\rho W_2(t) + \sqrt{1-\rho^2} W_1(t) - \frac{1}{2}\sigma_1^2 t \right)$$

$$S_2(t) = S_2(0)e^{\mu_2 t} \exp\left(\sigma_2 W_2(t) - \frac{1}{2}\sigma_2^2 t \right)$$

  mit $S_1(0), S_2(0) > 0$ als Anfangskurse. $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ Trendparameter, σ_1, σ_2 Volatilitäten und $|\rho| < 1$ Korrelation zwischen den Wiener-Prozessen

Bemerkung:

$$\beta(t) = \rho W_2(t) + \sqrt{1-\rho^2} W_1(t),\ = \le t \le T$$

ist ein Wiener-Prozess bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t=0}$

$$\operatorname{cov}(\beta(t), W_2(t)) = \operatorname{cov}(\rho W_2(t), W_2(t)) = \rho t$$

Bestimmung des äquivalenten Martingalmaßes:
Ansatz: zweimalige Anwendung des Satzes von Girsanov:
1. Schritt: Girsanov auf Aktie 2 anwenden

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}_{\nu_2}}{\mathrm{d}\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} = \exp\left(\nu_2 W_2(t) - \frac{1}{2}\nu_2^2 t \right)$$

Dann ist $W_2^*(t) = W_2(t) - \nu_2(t),\ t \ge 0$ ein Wiener-Prozess bzgl. $\mathbb{P}_{\nu_2}$.
2. Schritt: Wende Girsanov auf Aktie 1 an, genauer auf W_1. Für $\nu_1 \in \mathbb{R}$ definiere

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}(\nu_1, \nu_2)}{\mathrm{d}\mathbb{P}_{\nu_2}}\right|_{\mathcal{F}_t} = \exp\left(\nu_1 W_1(t) - \frac{1}{2}\nu_1^2 t \right),\ 0 \le t \le T$$

Index

Die Seitenzahlen *sind mit Hyperlinks zu den entsprechenden Seiten versehen, also anklickbar!*

äquivalent, 47
äquivalentes Martingalmaß, 48

abdiskontierten, 14
absolut-stetig, 47
adaptiert, 25
adaptiv-stochastischer Prozess, 32
amerikanische Option, 1
Anleihe
  Festzins-, 11
  Nullkoupon-, 7
  Variabelverzinsliche, 12
    Floater FRN, 12
Arbitrage, 6, 44
  No-, 6
arbitragefreier Preis, 57
aufgeschobene Rentenversicherung, 17
ausgewogen, 15

Barwert, 15
Basispunkt, 10
bedingte Verteilung, 28
bedingte Wahrscheinlichkeit, 28
bedingter Erwartungswert, 26
  faktorisierte bed. EW, 27
Beitragsspektrum, 15
Black-Scholes Differenzialgleichung, 75
Black-Scholes Formel, 65, 74

Call, 1
Claim, 53
  -auszahlung, 53
CRR-Modell, 25

Deckungskapital, 18
  -verlauf, 18
  prospektives, 18
Delta der Option, 75
deterministischen Zinsentwicklung, 18
Digitale Position, 8
Diskontfaktor, 14
Diskontierung, 42

Erlebensfallsumme, 17
Erlebensfallversicherung, 17
Erlebensspektrum, 15
europäische Option, 1

fair, 15
Filtration, 25
forward, 8

Gamma, 75
Geldmarktkonto, 25
gemischte Versicherung, 18

Handelsstrategie, 39
Hedge
  hedgebar, 53
  Hedgestrategie, 53
  lower hedgebar, 54
  upper hedgebar, 54

innerer Wert, 8

Kegel, 55
  konvexer, 55
Konvexität in K, 8

Lambda, 75
Lebesgue-Dichte, 29
Leerverkauf, 1
Levy-Prozess Modelle, 67

Markov-Kette, 42
Markov-Prozess, 42
Martingal, 32
  Sub-, 32
  Super-, 32

nachschüssige Kouponzahlungen, 12
Nullmengen, 47
Numeraire Asset, 39

obere Grenze, 8
Optional-Sampling Theorem, 34
Orthogonalprojektion, 31

Payoff, 2
Personengemeinschaften, 21
Polarmenge, 55
Position
  long, 1
  short, 1
Prämienreserve, 18
Profit, 2
Put, 1

Random-Walk, 25, 32

  geometrischer, 25
  zentrierter, 37
Replikationsprinzip, 6
Rho, 75
risky assets, 39
Rollierende Anlage, 12

selbstfinanzierend, 40
Smile-Effekt, 76
Spotpreis, 8
stochastischer Kern, 27
stochastischer Prozess, 25
Stopzeit, 33
Straffheitsbedingung, 69
Strategien, 4
  Bullish Vertical Spread, 5
  Butterfly Spread, 5
  long straddle, 5
strike, 1
Swaprate, 13
Swaps
  Payer-, 13
  Reciever-, 13
  Zinsswap, 13

Tenorstruktur, 13
Termingeschäft
  bedingtes, 8
  unbestimmtes, 1
Theta, 75
Todesfallspektrum, 14
Todesfallversicherung:, 15
Tower Property, 30

Underlying, 1

Vega, 75
Vermögensentwicklung, 40
Volatilität, 67
vollständig, 59
vorhersehbar, 37

Wiener-Prozess, 66, 69

Zählkonvention, 9
Zahlungsströme, 14
Zinsänderungsrisiko, 13
Zinsmethoden, 9
  lineare, 10
  periodische, 10
  stetige, 10
    konstant, 10
    nicht konstant, 10
Zinssatz, 9

Abbildungsverzeichnis

1 Payoff long call 2
2 Profit long call 2
3 Payoff long put 3
4 Profit long put 3
5 Payoff short call 3
6 Profit short call 3
7 Payoff short put 4
8 Profit short put 4
9 Bsp. Profit Diagramm 4
10 long straddle 5
11 Bullish Vertical Spread 5
12 long Butterfly Spread 6
13 Konvexität in K 8
14 Ablauf Festzinsanleihe 11
15 Deckungskapital: Todesfall,begrenzt 19
16 Deckungskapital: Todesfall, unbegrenzt 19
17 Deckungskapital: Erlebensfall 20
18 Deckungskapital: gemischte Versicherung 20
19 Deckungskapital: Rentenversicherung 21
20 CRR-Modell 25
21 fakt. bed. Erwartungswert 27
22 Orthogonalprojektion auf dem $L_2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ 31
23 Stopzeiten 33
24 Kegel im $\mathbb{R}^2$ 49