WESTFÄLISCHE
WILHELMS-UNIVERSITÄT
MÜNSTER

FACHBEREICH 10
MATHEMATIK UND
INFORMATIK

# Finanzmathematik

**Aufarbeitung der Übungen**

Tobias Wedemeier

16. November 2014
gelesen von
PD Dr. Paulsen

Hierbei handelt es sich um eine Aufarbeitung der Übungenvon **PD Dr. Paulsen**, WWU Münster, aus der Vorlesung **Finanzmathematik** im Wintersemester 2014/15. Dies ist kein Skript der Vorlesung und keine eigene Arbeit des Autors.

Für Fehler in der Aufarbeitung wird keine Haftung übernommen. Hinweise auf Fehler sind gerne gesehen, hierfür kann man mich in der Uni ansprechen oder alternativ eine e-Mail an:
*tobias.wedemeier@gmx.de*
Auch ist eine Mitarbeit über Github möglich.

Die Beweise stammen größtenteils vom Autor oder anderen Kommilitonen, und sind teilweise nur verkürzt oder vereinfacht dargestellt. Sie dienen nur dem Verständnis.

# Inhaltsverzeichnis

# Zettel 1

## Aufgabe 1

**Bear Spread**:
long put, strike $K_2$, short put, strike $K_1 < K_2$

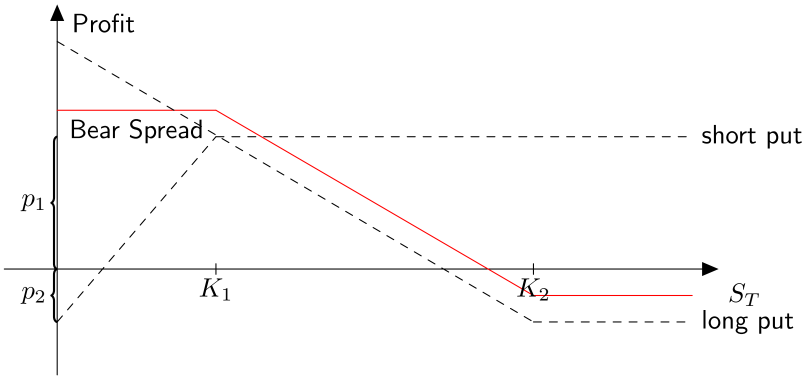


Abbildung 1: Bear Spread

Profit: $(K_2 - S_T)^+ - p_2 + p_1 - (K_1 - S_T)^+ = (K_2 - K_1) + (p_1 - p_2)$

## Aufgabe 3

**Exchange-Option**:
Analog zur Put-Call-Parität.

# Zettel 2

## Aufgabe 1

**Eigenschaften des Put-Preises:**

(i) innerer Wert: $P(S_0, T, K) \geq \max\{0, K \cdot B(0,T) - S_0\}$

(ii) obere Grenze: $P(S_0, T, K) < K$

(iii) Monoton im strike: $K_1 \leq K_2 \Rightarrow P(S_0, T, K_1) \leq P(S_0, T, K_2)$

(iv) $B(0,T)(K_2 - K_1) \geq P(K_2) - P(K_1) \quad \forall K_1 \leq K_2$

(v) Konvexität in $K$:

$$P(K_2) \leq \lambda P(K_1) + (1-\lambda) P(K_3) \quad \forall K_1 < K_2 < K_3 \text{ mit } \lambda = \frac{K_3 - K_2}{K_3 - K_1}$$

Beweise analog zum Call-Preis.

## Aufgabe 2

Gelte No-Arbitrage und keine Deflation,d.h. $0 < B(0,T) < 1$.
Dann ist der Call-Preis monoton in der Zeit, also

$$T_1 < T_2 : \quad C(T_1) \leq C(T_2)$$

**Beweis:**
Sei $C(T_1)$ der Preis eines Calls auf ein Underlying mit Laufzeit $T_1$, strike $K$ und Anfangspreis $S_0$ und $C(T_2)$ der Preis eines Calls auf ein Underlying mit demselben strike und Anfangspreis, aber mit Laufzeit $T_2 > T_1$.
Angenommen, $C(T_1) > C(T_2)$.
Dann gehe am Anfang short im Call mit Laufzeit $T_1$ und long im Call mit Laufzeit $T_2$
$\Rightarrow$ risikoloser Gewinn von $C(T_1) - C(T_2) > 0$.
in $T_1$: Ist $S_{T_1} \leq K$,wird der Call-Inhaber die Option nicht nutzen. Dann nutzen wir unsere Call-Option in $T_2$ ebenfalls nicht und haben insgesamt einen risikolosen Gewinn.
Ist $S_{T_1} > K$, leihen wie uns das Underlying von der Bank um die Verpflichtung des Calls zu erfüllen. Wir erhalten dafür $K$ und gehe damit $\frac{K}{B(T_1,T_2)} \times$long in einen Zero-Bond mit Laufzeit bis $T_2$.
in $T_2$: Wir erhalten für die Anleihe ( $\frac{K}{B(T_1,T_2)}$.
Ist $K < S_{T_2}$, nutze die Option und gebe das Underlying an die Bank zurück. Ist $K \geq S_{T_2}$, kaufe das Underlying für $S_{T_2}$ und lasse die Option verfallen, dann gebe das Underlying ebenfalls zurück.
In $T_2$ erhalten wir also

$$\frac{K}{B(T_1,T_2)} - \min\{S_{T_2,K}\} \geq \frac{K}{B(T_1,T_2)} - K \geq 0$$

da $B(T_1,T_2) \in (0,1)$ $\Rightarrow$ risikoloser Gewinn $\lightning_{\text{No-Arbitrage}}$
Also $C(T_1) \leq C(T_2)$ $\square$

## Aufgabe 4

**Terminzinssatz**
Der Kunde zahlt jedes Jahr $K£$ an die Versicherung, die dafür eine bestimmte, im voraus festgelegte Rendite $R$ zusichert. Erstelle einen geeigneten Sparplan.
Annahme: Kunde zahlt immer am Jahresanfang. Die Versicherung muss heute, in $t_0$, $n \cdot K£$ anlegen um die garantierte Rendite zu gewährleisten.
in $t_0$ short in Zero-Bonds:

$$K \cdot B(t_0,1), K \cdot B(t_0,2), \cdot, K \cdot B(t_0,n-1)$$

Also zu jedem $j = 1,\ldots,n-1$ muss die Versicherung $K£$ an die Bank zurück zahlen, dies wird gerade durch die jährlichen Prämien der Kunden getilgt.
Also hat die Versicherung am Anfang ein Kapital von $K + \sum_{j=1}^{n-1} K \cdot B(t_0,j)$ zur Verfügung. Lege dies in Zero-Bonds an mit Laufzeit $n$ Jahren an:

$$\left(K \cdot \sum_{j=1}^{n-1} K \cdot B(t_0,j)\right) \times \text{long in n-Zero-Bonds}$$

Daher Auszahlung bei $T = n$:

$$R = \left(K \cdot \left(1 + \sum_{j=1}^{n-1} B(t_0,j)\right)\right) \cdot \frac{1}{B(t_0,n)}$$

$R$ ist dann die mögliche garantierte Auszahlung.

# Zettel 3

## Aufgabe 1

# Index

*Die* Seitenzahlen *sind mit Hyperlinks zu den entsprechenden Seiten versehen, also anklickbar!*

# Abbildungsverzeichnis