Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Fachbereich 10 Mathematik und Informatik

Skript Analysis III.

Mitschrift der Vorlesung „Analysis III." von Prof. Dr. Wilhelm Winter

Jannes Bantje

18. Februar 2015

Aktuelle Version verfügbar bei

GitHub

`https://github.com/JaMeZ-B/latex-wwu`

GitHub ist eine Internetplattform, auf der viele OpenSource-Projekte gehostet werden. Diese Plattform nutzen wir zur Zusammenarbeit, also findet man hier neben den PDFs auch die TEX-Dateien. Außerdem ist über diese Plattform auch direktes Mitarbeiten möglich, siehe nächste Seite.

sciebo die Campuscloud

`https://uni-muenster.sciebo.de/public.php?service=files&t=965ae79080a473eb5b6d927d7d8b0462`

Sciebo ist ein Dropbox-Ersatz der Hochschulen in NRW, der von der Uni Münster in leitender Position auf Basis der OpenSource-Software Owncloud aufgebaut wurde. Wenn man auf den Link klickt, kann man die Freigabe zum eigenen Speicher hinzufügen und hat dann immer automatisch die aktuellste Version.

Bittorrent Sync

`B6WH2DISQ5QVYIRYIEZSF4ZR2IDVKPN3I`

BTSync ist ein peer-to-peer Dateisynchronisations-Tool. Dabei werden die Dateien nur auf den Computern der Teilnehmer an einer Freigabe gespeichert. Ein Mini-Computer ist permanent online, sodass jederzeit die aktuellste Version verfügbar ist. `Clients` gibt es für jedes Betriebssystem. Zugang ist über das obige „Secret“ bzw. den QR-Code möglich

---

Vorlesungshomepage

`http://wwwmath.uni-muenster.de/u/wilhelm.winter/wwinter/analysis_III.html`

Hier ist ein Link zur offiziellen Vorlesungshomepage.

Vorwort — Mitarbeit am Skript

Dieses Dokument ist eine Mitschrift aus der Vorlesung „Analysis III., WiSe 2013“, gelesen von Prof. Dr. Wilhelm Winter. Der Inhalt entspricht weitestgehend dem Tafelanschrieb. Für die Korrektheit des Inhalts übernehme ich keinerlei Garantie! Für Bemerkungen und Korrekturen – und seien es nur Rechtschreibfehler – bin ich sehr dankbar. Korrekturen lassen sich prinzipiell auf drei Wegen einreichen:

- Persönliches Ansprechen in der Uni, Mails an `j.bantje@wwu.de` (gerne auch mit annotieren PDFs) oder Kommentare auf `https://github.com/JaMeZ-B/latex-wwu`.
- *Direktes* Mitarbeiten am Skript: Den Quellcode poste ich auf GitHub (siehe oben), also stehen vielfältige Möglichkeiten der Zusammenarbeit zur Verfügung: Zum Beispiel durch Kommentare am Code über die Website und die Kombination Fork + Pull Request. Wer sich verdient macht oder ein Skript zu einer Vorlesung, die ich nicht besuche, beisteuern will, dem gewähre ich gerne auch Schreibzugriff.

  Beachten sollte man dabei, dass dazu ein Account bei `github.com` notwendig ist, der allerdings ohne Angabe von persönlichen Daten angelegt werden kann. Wer bei GitHub (bzw. dem zugrunde liegenden Open-Source-Programm „`git`“) – verständlicherweise – Hilfe beim Einstieg braucht, dem helfe ich gerne weiter. Es gibt aber auch zahlreiche empfehlenswerte Tutorials im Internet.[1]
- *Indirektes* Mitarbeiten: TeX-Dateien per Mail verschicken.

  Dies ist nur dann sinnvoll, wenn man einen ganzen Abschnitt ändern möchte (zB. einen alternativen Beweis geben), da ich die Änderungen dann per Hand einbauen muss! Ich freue mich aber auch über solche Beiträge!

[1] zB. `https://try.github.io/levels/1/challenges/1`, ist auf Englisch, aber dafür interaktives LearningByDoing

Inhaltsverzeichnis

1 Gewöhnliche Differentialgleichungen – Existenz und Eindeutigkeit

1.1 Definition

a) Sei $G \subset \mathbb{R}^2, f : G \to \mathbb{R}$ stetig.

$$y' = f(x, y)$$

heißt **gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung**. Eine Lösung von ($\star$) auf dem Intervall I ist eine differenzierbare Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}$ mit

(i) $\big\{\big(x, \varphi(x)\big) \,\big|\, x \in I\big\} \subset G$

(ii) $\varphi'(x) = f\big(x, \varphi(x)\big), x \in I$

b) Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f : G \to \mathbb{R}^n$ stetig.

$$y' = f(x, y)$$

heißt **System von n Differentialgleichungen 1. Ordnung**. Eine Lösung von ($\star\star$) auf I ist eine differenzierbare Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ mit

(i) $\big\{\big(x, \varphi(x)\big) \,\big|\, x \in I\big\} \subset G$

(ii) $\varphi'(x) = f\big(x, \varphi(x)\big), x \in I$

($\star\star$) und (ii) lassen sich auch schreiben als

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ \vdots \\ f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} \varphi_1'(x) \\ \vdots \\ \varphi_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1\big(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\big) \\ \vdots \\ f_n\big(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\big) \end{pmatrix}$$

c) Sei $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f : G \to \mathbb{R}$ stetig

$$y^{(n)} = f\Big(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\Big)$$

heißt **Differentialgleichung n-ter Ordnung**. Eine Lösung von ($\star\star\star$) ist eine n-mal differenzierbare Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}$ mit

(i) $\big\{\big(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n-1)}(x)\big) \,\big|\, x \in I\big\} \subset G$

(ii) $\varphi^{(n)}(x) = f\Big(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n-1)}(x)\Big), x \in I$

1.2 Beispiel

(i) Sei $y' = \frac{y}{x}$, $G = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Lösungen sind Geraden der Form $\varphi(x) = c \cdot x$, wo $c \in \mathbb{R}$ konstant ist. Dann gilt mit $I = (0, \infty)$

$$\varphi'(x) = \frac{c \cdot x}{x} = \frac{\varphi(x)}{x}$$

(ii) Sei $y' = -\frac{x}{y}$, $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$. Lösungen sind Halbkreise der Form $\varphi(x) = \sqrt{c - x^2}, x \in (-\sqrt{c}, \sqrt{c}) = I, c \in \mathbb{R}_+$

$$\varphi'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{c - x^2}} = -\frac{x}{\varphi(x)}$$

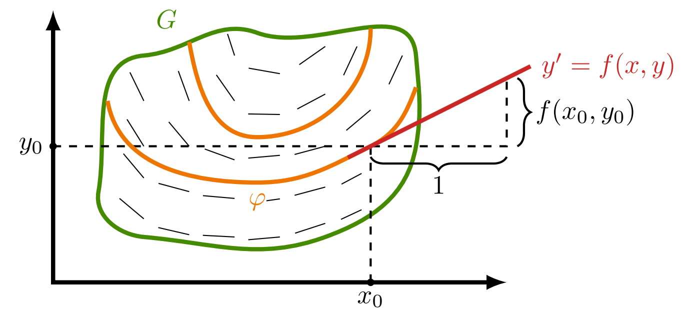
(iii) $m \cdot \ddot{x} = F(t, x, \dot{x})$

t Zeit, x Ort, $\dot{x}$ Geschwindigkeit, m Masse, $\ddot{x}$ Beschleunigung, F Kraft

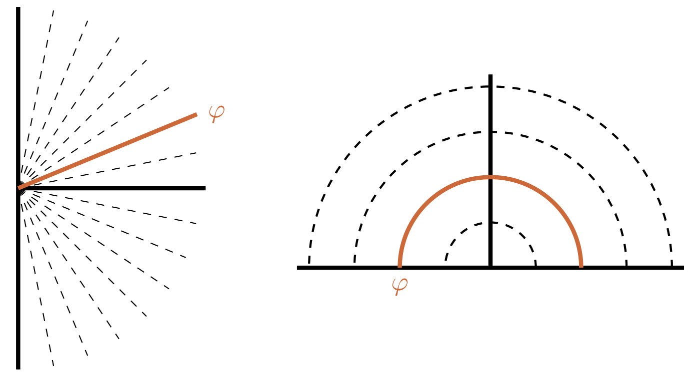
1.3 Bemerkung

(i) geometrische Interpretationen:

- allgemeine Darstellung:



- zu 1.2 (i) und 1.2 (ii)



Symmetrie bei 1.2 (ii): $f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y)$ für $(x,y) \in G, \lambda \in \mathbb{R}$

(ii) Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f : G \to \mathbb{R}$ stetig und sei

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right)$$

eine DGL n-ter Ordnung. Betrachte nun die Gleichung

$$\begin{pmatrix} y_0' \\ \vdots \\ y_{n-2}' \\ y_{n-1}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ f(x, y_0, \dots, y_{n-1}) \end{pmatrix}$$

mit $Y = \left(\begin{smallmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{smallmatrix}\right), F(x,Y) = \left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ f(x,y_0,\dots,y_{n-1}) \end{smallmatrix}\right)$ schreibt sich $(\star\star)$ als

$$Y' = F(x,Y)$$

ein System von DGL erster Ordnung. Falls $\varphi : I \to \mathbb{R}$ Lösung von $(\star)$ ist, so ist $\Phi : I \to \mathbb{R}^n$ mit

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \varphi'(x) \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

eine Lösung von $(\star\star\star)$. Beweis:

$$\Phi'(x) = \begin{pmatrix} \varphi'(x) \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)}(x) \\ \varphi^{(n)}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi'(x) \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)}(x) \\ f\big(x, \varphi(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)\big) \end{pmatrix} = F\big(x, \Phi(x)\big)$$

Falls umgekehrt $\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \vdots \\ \varphi_{n-1} \end{pmatrix} : I \to \mathbb{R}^n$ Lösung von $(\star\star\star)$ ist, so ist φ_0 Lösung von $(\star)$. *(warum?)*

1.4 Definition

Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f : G \to \mathbb{R}^n$.

(i) f ist Lipschitz (bezüglich der zweiten Variablen), falls $L \geqslant 0$ existiert, sodass für $(x,y), (x,\overline{y}) \in G$ gilt:

$$\|f(x,y) - f(x,\overline{y})\|_2 \leqslant L \cdot \|y - \overline{y}\|_2$$

(ii) f ist lokal Lipschitz (bezüglich der zweiten Variablen), falls gilt: Jedes $(a,b) \in G$ besitzt eine Umgebung U, sodass $f|_{U \cap G}$ Lipschitz ist.

1.5 Satz

Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : G \to \mathbb{R}^n, (x,y) \mapsto f(x,y)$, stetig partiell differenzierbar bezüglich der 2. Variablen, d.h.

$$(x,y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(x,y)\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

ist stetig. Dann ist f lokal Lipschitz.

Beweis
Sei $(a,b) \in G$. Es gibt $r > 0$ sodass $K := [a-r, a+r] \times \overline{B}_{\|\cdot\|_2}(b,r) \subset G$ (warum?)
Dann ist K kompakt nach Heine-Borel. Für $(x,y) \in G$ ist $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \in M_n(\mathbb{R})$ und $(x,y) \mapsto \left\|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right\|$ stetig. K kompakt $\overset{\text{Ana II., 4.10}}{\Rightarrow}$ $L := \sup\left\{\left\|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right\| \,\middle|\, (x,y) \in K\right\} < \infty$. Für $(x,y), (x,\overline{y}) \in K$ gilt nach dem Mittelwertsatz (Ana II., 7.11)

$$\|f(x,y) - f(x,\overline{y})\|_2 \leqslant L \cdot \|y - \overline{y}\|_2$$ □

1.6 Satz (Eindeutigkeit)

Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f : G \to \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitz. Seien $\varphi, \psi : I \to \mathbb{R}^n$ Lösungen von $y' = f(x,y)$. Falls $\varphi(x_0) = \psi(x_0)$ für ein $x_0 \in I$, so gilt $\varphi(x) = \psi(x)$ für alle $x \in I$.

Beweis
1. Behauptung Falls $\varphi(a) = \psi(a)$ für $a \in I$, so existiert $\varepsilon > 0 : \varphi(x) = \psi(x)$ für $x \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon] \cap I$.

Beweis
Es gilt $\varphi'(x) = f\big(x, \varphi(x)\big), \psi'(x) = f\big(x, \psi(x)\big)$, also

$$\int_a^x \big(f\big(t,\varphi(t)\big) - f\big(t,\psi(t)\big)\big)\,\mathrm{d}t = \int_a^x (\varphi'(t) - \psi'(t))\,\mathrm{d}t = \varphi(x) - \psi(x)$$

f lokal Lipschitz $\Rightarrow \exists L > 0$ und $\delta > 0$ mit

$$\big\| f\big(t, \varphi(t)\big) - f\big(t, \psi(t)\big)\big\|_2 \leqslant L \cdot \|\varphi(t) - \psi(t)\|_2 \quad , \quad t \in [a-\delta, a+\delta] \cap I$$

Setze $\varepsilon := \min\big\{\delta, \frac{1}{2L}\big\}$. Für $x \in [a-\delta, a+\delta] \cap I$ gilt nun

$$\begin{aligned}\|\varphi(x) - \psi(x)\|_2 = \left\| \int_a^x \big(f\big(t, \varphi(t)\big) - f\big(t, \psi(t)\big)\big)\,\mathrm{d}t \right\|_2 &\leqslant \int_a^x \big\| f\big(t, \varphi(t)\big) - f\big(t, \psi(t)\big)\big\|_2 \,\mathrm{d}t \\ &\leqslant L \cdot \int_a^x \|\varphi(t) - \psi(t)\|_2 \,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Für $x \in [a-\delta, a+\delta] \cap I$ setze $M(x) := \sup\{\|\varphi(t) - \psi(t)\|_2 \,|\, t \in I, |t-a| \leqslant |x-a|\} < \infty$. Für $x, \xi \in [a-\delta, a+\delta] \cap I$ mit $|\xi - a| \leqslant |x-a|$ gilt dann

$$\|\varphi(\xi) - \psi(\xi)\|_2 \leqslant L \cdot \int_a^\xi \|\varphi(t) - \psi(t)\|_2 \,\mathrm{d}t \leqslant L \cdot |\xi - a| \cdot M(x) \leqslant L \cdot |x-a| \cdot M(x)$$

also $M(x) \leqslant L \cdot |x-a| M(x)$. Für $|x-a| < \varepsilon \leqslant \frac{1}{2 \cdot L}$ ergibt sich

$$0 \leqslant M(x) \leqslant L \cdot \varepsilon \cdot M(x) \leqslant \frac{1}{2} M(x)$$

also muss $M(x) = 0$ gelten und $\varphi(x) = \psi(x)$ für $x \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon] \cap I$.

2. Behauptung $\varphi(x) = \psi(x)$ für $x \in [x_0, \infty) \cap I$.

Beweis

Lücke schließen mit φ, ψ stetig

Setze $x_1 := \sup\big\{\xi \in I \,\big|\, \varphi|_{[x_0,\xi]} = \psi|_{[x_0,\xi]}\big\}$, dann gilt $x_1 > x_0$. Falls $x_1 \notin I$, ist die Behauptung bewiesen. Falls $x_1 \in I$ und $[x_0, x_1] = [x_0, \infty) \cap I$, so ist die Behauptung auch wieder bewiesen. Sei nun $x_1 \in I$ und $[x_0, x_1] \neq [x_0, \infty) \cap I$. Dann existiert $\eta > 0$ mit $[x_0, x_1 + \eta] \subset I$. Nach der 1. Behauptung existiert $\varepsilon > 0$ sodass $\varphi(x) = \psi(x)$ für $x \in [x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon] \cap I$. Setze $\zeta := \min\{\varepsilon, \eta\}$, dann $\varphi|_{[x_0, x_1+\zeta]} = \psi|_{[x_0, x_1+\zeta]}$ $\lightning$

3. Behauptung $\varphi(x) = \psi(x)$ für $x \in (-\infty, x_0] \cap I$

Beweis

Analog zu Behauptung 2.

$\Rightarrow \varphi(x) = \psi(x)$ für $x \in (-\infty, \infty) \cap I$. $\square$

1.7 Satz (Picard-Lindelöf)

Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f : G \to \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitz, $(x_0, y_0) \in G$. Dann existiert $\varepsilon > 0$, sodass

$$y' = f(x, y)$$

auf $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ eine Lösung φ mit der Anfangsbedingung $\varphi(x_0) = y_0$ hat. Dabei ist $\varphi(x) = \lim_{k\to\infty} \varphi_k(x)$, wo $\varphi_0 \equiv y_0$ und

$$\varphi_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f\big(t, \varphi_k(t)\big)\,\mathrm{d}t$$

Beweis

1. Schritt: Es gibt $r > 0$ sodass $K := [x_0 - r, x_0 + r] \times \overline{B}_{\|.\|_2}(y_0, r) \subset G$ und $f|_K$ Lipschitz ist mit der Konstanten L. K kompakt, f stetig $\Rightarrow$ $M := \sup\{\|f(x,y)\|_2 \,|\, (x,y) \in K\} < \infty$. Setze $\varepsilon := \min\{r, \frac{r}{M}\} > 0$ (dürfen $M > 0$ annehmen).

2. Schritt $\varphi : [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \to \mathbb{R}^n$ erfüllt $(\star)$ mit Anfangsbedingung $\varphi(x_0) = y_0$ genau dann, wenn

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, \varphi(t)\big)\,\mathrm{d}t$$

gilt für alle $x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ (Fundamentalsatz). Wir definieren induktiv Funktionen $\varphi_k : [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \to \mathbb{R}^n$ durch $\varphi_0(x) = y_0$, $x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$,

$$\varphi_{k+1} := y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, \varphi_k(t)\big)\,\mathrm{d}t \quad , \qquad x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$$

Zu zeigen: φ_k ist wohldefiniert für $k \in \mathbb{N}$, φ_k konvergiert gleichmäßig auf $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ gegen eine Lösung φ.

3. Schritt $(\star\star\star)$ ist wohldefiniert, falls $\|\varphi_k(x) - y_0\|_2 \leqslant r$ für $x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$. $k = 0$ trivial. Falls die Aussage für k gilt, so folgt

$$\|\varphi_{k+1} - y_0\|_2 \leqslant \int_{x_0}^{x} \big\|f\big(t, \varphi_k(t)\big)\big\|_2\,\mathrm{d}t \leqslant M \cdot |x - x_0| \leqslant M \cdot \varepsilon \leqslant r \qquad x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$$

$\Rightarrow$ $(\star\star\star)$ ist wohldefiniert für alle $k \in \mathbb{N}$

4. Schritt Wir zeigen

$$\|\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x)\|_2 \leqslant M \cdot L^k \cdot \frac{|x - x_0|^{k+1}}{(k+1)!}$$

für $k \in \mathbb{N}$, $x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$. $k = 0$:

$$\|\varphi_1(x) - \varphi_0(x)\|_2 = \left\|\int_{x_0}^{x} f(t, y_0)\,\mathrm{d}t\right\|_2 \leqslant \int_{x_0}^{x} \|f(t, y_0)\|_2\,\mathrm{d}t \leqslant M \cdot \frac{|x - x_0|^{0+1}}{(0+1)!}$$

$k - 1 \mapsto k$:

$$\begin{aligned}
\|\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x)\|_2 &= \int_{x_0}^{x} \Big\| \Big(f\big(t, \varphi_k(t)\big) - f\big(t, \varphi_{k-1}(t)\big) \Big)\,\mathrm{d}t \Big\|_2 \\
&\leqslant \int_{x_0}^{x} \big\| f\big(t, \varphi_k(t)\big) - f\big(t, \varphi_{k-1}(t)\big) \big\|_2\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant \int_{x_0}^{x} L \cdot \|\varphi_k(t) - \varphi_{k-1}(t)\|_2\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant M \cdot L^k \int_{x_0}^{x} \frac{|t - x_0|^k}{k!}\,\mathrm{d}t \\
&= M \cdot L^k \frac{|x - x_0|^{k+1}}{(k+1)!}
\end{aligned}$$

5. Schritt Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (\varphi_{k+1} - \varphi_k)$ wird majorisiert durch $\sum_{k=0}^{\infty} M \cdot \frac{L^k \cdot \varepsilon^{k+1}}{(k+1)!}$

$$\left(\left\| \sum_{k=0}^{k_0} \varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x) \right\|_2 \leqslant \sum_{k=0}^{k_0} \|\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x)\|_2 \leqslant \sum_{k=0}^{k_0} \frac{M \cdot L^k \cdot |x - x_0|^{k+1}}{(k+1)!} \leqslant \sum_{k=0}^{k_0} \frac{M \cdot L^k \cdot \varepsilon^{k+1}}{(k+1)!} \right)$$

Teleskopsumme

und konvergiert daher gleichmäßig; Der Limes ist stetig auf $[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]$. Wir erhalten

$$\varphi := \lim_{k\to\infty} \varphi_k = \lim_{k\to\infty} y_0 + \sum_{l=0}^{k} \varphi_{l+1} - \varphi_l = y_0 + \lim_{k\to\infty} \sum_{l=0}^{k} \varphi_{l+1} - \varphi_l = y_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_{k+1} - \varphi_k$$

$\varphi : [x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon] \to \mathbb{R}^n$ stetig. Für $k\in\mathbb{N}$, $x\in[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]$ gilt

$$\|f(x,\varphi(x)) - f(x,\varphi_k(x))\|_2 \leqslant L\cdot \|\varphi(x)-\varphi_k(x)\|_2$$

warum?

$\varphi_l \xrightarrow{k\to\infty} \varphi$ gleichmäßig $\Rightarrow \Big(x\mapsto f\big(x,\varphi_k(x)\big)\Big) \xrightarrow{k\to\infty} \Big(x\mapsto f\big(x,\varphi(x)\big)\Big)$ gleichmäßig

$$\varphi(x) \xleftarrow{k\to\infty} \varphi_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t,\varphi_k(t)\big)\,\mathrm{d}t \xrightarrow{k\to\infty} y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t,\varphi(t)\big)\,\mathrm{d}t$$

$\Rightarrow (\star\star)$ □

1.8 Beispiel

Betrachte $y' = 2\cdot x\cdot y$, $G=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Gesucht: Lösung φ mit $\varphi(0)=y_0$. Setze $\varphi_0(x) := y_0$, $x\in\mathbb{R}$. $\varphi_{k+1}(x) := y_0 + \int_0^x 2t\varphi_k(t)\,\mathrm{d}t$, $x\in\mathbb{R}$. Dann

$$\varphi_1(x) = y_0 + 2\int_0^x t\cdot y_0\,\mathrm{d}t = y_0 + y_0\cdot x^2$$
$$\varphi_2(x) = y_0 + \int_0^x 2t(y_0+y_0\cdot x^2)\,\mathrm{d}t = y_0 + y_0\cdot x^2 + y_0\cdot\frac{x^4}{2}$$

Induktion liefert dann: $\varphi(x) = y_0(1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{4!}+\ldots+\frac{x^{2k}}{k!})$ also $\varphi_k(x)\xrightarrow{k\to\infty} y_0\cdot e^{x^2}$

1.9 Corollar

Sei $G\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ offen, $f:G\to\mathbb{R}$ stetig und lokal Lipschitz.

(i) Seien $\varphi,\psi: I\to\mathbb{R}$ zwei Lösungen von

$$x^{(n)} = f\big(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)}\big)$$

über dem Intervall I. Falls für $x_0\in I$ gilt:

$$\varphi(x_0)=\psi(x_0),\ldots,\varphi^{(n-1)}(x_0)=\psi^{(n-1)}(x_0)$$

so ist $\varphi=\psi$ über I.

(ii) Zu $(x_0,y_0,y_1,\ldots,y_{n-1})\in G$ existiert $\varepsilon>0$ und eine Lösung $\varphi:[x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon]\to\mathbb{R}$ vom $(\star)$ mit

$$\varphi(x_0)=y_0,\;\; \varphi'(x_0)=y_1,\;\;\ldots,\;\; \varphi^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}$$

Beweis

Bemerkung 1.3 (ii), Satz 1.6, Satz 1.7 □

1.10 Beispiel

$y''=-y$ ist eine Differentialgleichung 2. Ordnung. Lösungen sind $\sin(x), \cos(x), 2\sin(x)+\cos(x)$. Allgemeiner gilt: Für Konstanten $c_1,c_2\in\mathbb{R}$ betrachte

$$\varphi(x) = c_1\sin(x) + c_2\cos(x)$$

Dann gilt φ löst $y''=-y$ und $\varphi(0)=c_2$ und $\varphi'(0)=c_1$. Mit Eindeutigkeit folgt, dass alle diese Funktionen Lösungen sind.

2 Einige Lösungsmethoden

2.1 Trennung der Variablen

Betrachte die Differentialgleichung

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

An dieser Stelle benehmen wir uns mal wie Physiker:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x) \cdot g(y) \iff \frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y = f(x)\mathrm{d}x \iff \int \frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y = \int f(x)\mathrm{d}x$$

Satz: Seien $I, J \in \mathbb{R}$ Intervalle $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to \mathbb{R}^*$ stetig. Für $(x_0, y_0) \in I \times J$ definiere $F : I \to \mathbb{R}$, $G : J \to \mathbb{R}$ durch

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \qquad G(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(s)}\,\mathrm{d}s$$

Sei $I' \subset I$ ein Intervall mit $x_0 \in I'$ und $F(I') \subset G(J)$. Dann besitzt

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

eine eindeutige Lösung $\varphi : I' \to J$ mit $\varphi(x_0) = y_0$. Diese Lösung erfüllt:

$$G\big(\varphi(x)\big) = F(x) \qquad \text{für } x \in I'$$

Beweis

Schritt 1: Sei $\varphi : I' \to \mathbb{R}$ eine Lösung von $(\star)$ mit $\varphi(x_0) = y_0$. Wir zeigen, dass φ $(\star\star)$ erfüllt: Wir haben: $\varphi'(x) = f(x)g\big(\varphi(x)\big)$, $x \in I'$. Also

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x} \frac{\varphi'(t)}{g\big(\varphi(t)\big)}\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)} \frac{\mathrm{d}s}{g(s)} = \int_{y_0}^{\varphi(x)} \frac{\mathrm{d}s}{g(s)} = G\big(\varphi(x)\big)$$

Schritt 2 (Eindeutigkeit): $G'(y) = \frac{1}{g(y)} \neq 0$ ist stetig $\Rightarrow$ G ist stetig differenzierbar und streng monoton. Daraus folgt: G besitzt eine stetig differenzierbare Umkehrfunktion $H : G(J) \to \mathbb{R}$. Aus $(\star\star)$ folgt

$$\varphi(x) = H\Big(G\big(\varphi(x)\big)\Big) = H\big(F(x)\big) \qquad x \in I'$$

$\Rightarrow$ φ eindeutig bestimmt durch F und H.

Schritt 3 (Existenz): Betrachte H aus 2. und definiere $\varphi : I' \to \mathbb{R}$ durch $\varphi(x) = H\big(F(x)\big)$, $x \in I'$. φ ist wohldefiniert, da $F(I') \subset G(J)$. H, F stetig differenzierbar, also auch φ. Anfangsbedingung:

$$\varphi(x_0) = H\big(F(x_0)\big) = H(0) = y_0$$

Weiter gilt $G\big(\varphi(x)\big) = F(x)$

$$\Rightarrow f(x) = F'(x) = (G \circ \varphi)'(x) = G'\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'(x) = \frac{1}{g\big(\varphi(x)\big)} \cdot \varphi'(x)$$

Daraus folgt $\varphi'(x) = f(x) \cdot g\big(\varphi(x)\big)$. Also löst φ $(\star)$. $\square$

2.2 Beispiel

$$y' = y^2 = f(x) \cdot g(y)$$

Dann $f(x) = 1, g(y) = y^2$. Anfangsbedingung $\varphi(0) = y_0 \in \mathbb{R}$

1. $y_0 = 0$**:** Aus $y_0 = 0$ folgt, dass $\varphi(x) \equiv 0$ löst $(\star)$

2. $y_0 > 0$**:** Aus $y_0 > 0$ folgt: Sei $\varphi : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung von $(\star)$ mit $\varphi(0) = y_0 > 0$. Falls es $x \in I$ gibt mit $\varphi(x) < 0$, dann existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $\overline{x} \in I$ mit $\varphi(\overline{x}) = 0$. Dies ist ein Widerspruch zur Eindeutigkeit der Lösung $\lightning$

$\Rightarrow \varphi(x) > 0$ für alle $x \in I$. $f : I = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : J = R \to \mathbb{R}_+^*$. $f(x) = 1, g(x) = x^2$. Setze nun: $F : I \to \mathbb{R}$, $G : J \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = x \\ G(y) &= \int_{y_0}^y \frac{1}{g(s)}\,\mathrm{d}s = \int_{y_0}^y \frac{1}{s^2}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{y_0} - \frac{1}{y} \end{aligned}$$

Für $I' = (-\infty, \frac{1}{y_0})$ gilt $F(I') = (-\infty, \frac{1}{y_0})$ und somit $F(I') \subset G(J)$. Nach 2.1 besitzt $(\star)$ eine eindeutige Lösung $\varphi : I' \to \mathbb{R}_+^*$ mit $\frac{1}{y_0} - \frac{1}{\varphi(x)} = x \rightsquigarrow \varphi(x) = \frac{y_0}{1 - x \cdot y_0}$

3. $y_0 < 0$**:** Analog zu 2. $I' = (\frac{1}{y_0}, \infty)$ $\varphi(x) = \frac{y_0}{1-x\cdot y_0}$

2.3 Satz (homogene, lineare Differentialgleichung)

Sei I ein Intervall, $a : I \to \mathbb{R}$ stetig, $x_0 \in I, y_0 \in \mathbb{R}$. Dann besitzt

$$y' = a(x)y$$

genau eine Lösung $\varphi : I \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(x_0) = y_0$ gegeben durch:

$$\varphi(x) = y_0 \cdot e^{\int_{x_0}^x a(t)\,\mathrm{d}t}$$

Beweis
$\varphi(x_0) = y_0$ ✓
φ wie in $(\star\star)$ ist eine Lösung von $(\star)$ (Nachrechnen). Da $(x, y) \mapsto a(x) \cdot y$ Lipschitz $\Rightarrow$ Lösung ist eindeutig (1.6) □

2.4 Beispiel

$$y' = c \cdot y$$

hat Lösungen der Form $\varphi(x) = y_0 e^{c|x-x_0|}$ mit $\varphi(x_0) = y_0$. $(\star)$ ist eine homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten.

2.5 Satz (inhomogene lineare DGL; Variation der Konstanten)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $a, b : I \to \mathbb{R}$ stetig, $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$. Dann besitzt

$$y' = a(x) \cdot y + b(x)$$

genau eine Lösung $\psi : I \to \mathbb{R}$ mit $\psi(x_0) = y_0$, nämlich

$$\psi(x) = \underbrace{y_0 \cdot \varphi(x)}_{\text{homogene Lösung}} + \underbrace{\varphi(x) \cdot \int_{x_0}^{x} \varphi(t)^{-1} b(t)\,\mathrm{d}t}_{\text{inhomogene Lösung}} = \underbrace{\varphi(x)\left(y_0 + \int_{x_0}^{x} \varphi(t)^{-1} b(t)\,\mathrm{d}t\right)}_{\text{Variation der Konstanten}}$$

wobei $\varphi(x) = e^{\int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t}$ eine Lösung der homogenen linearen DGL $y' = a(x)y$ mit $\varphi(x_0) = 1$ ist.

Beweis
ψ löst $(\star)$: einsetzen. $f(x,y) = a(x)y + b(x)$ ist lokal Lipschitz $\Rightarrow$ Eindeutigkeit. □

2.6 Bemerkung

Der Ansatz lässt sich (zum Teil) auf Systeme von linearen Differentialgleichungen der Form

$$y' = Ay + b \qquad y, b : I \to \mathbb{R}^n, A : I \to M_n(\mathbb{R})$$

übertragen. $(\star)$ schreibt sich auch als

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot y_1 + \ldots + a_{1n} \cdot y_n \\ \vdots \\ a_{n1} \cdot y_1 + \ldots + a_{nn} \cdot y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Es gilt:

$$\{\text{Lösungen der inhomogenen linearen DGL}\} = \psi_0 + \{\text{Lösungen der homogenen linearen DGL}\}$$

wobei ψ_0 (irgend-)eine Lösung der inhomogenen linearen DGL ist. Die Lösungen der homogenen linearen DGL bilden einen Vektorraum.

2.7 Homogene Differentialgleichungen

Betrachte

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Mit $z = \frac{y}{x}$ ergibt sich $y = x \cdot z$, also $y' = x \cdot z' + z$ und damit $x \cdot z' + z = f(z)$, also

$$z' = \frac{1}{x}\big(f(z) - z\big)$$

$(\star\star)$ lässt sich mit Trennung der Variablen behandeln (siehe 2.1).

2.8 Satz

Seien $I \subset \mathbb{R}^*$, $J \subset \mathbb{R}$ Intervalle, $f : J \to \mathbb{R}$ stetig und $G := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{y}{x} \in J\right\}$. Sei $(x_0, y_0) \in G$ ein Punkt mit $x_0 \in I$. Dann gilt: Eine Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}$ ist Lösung von $y' = f(\frac{y}{x})$ $(\star)$ genau dann, wenn $\psi : I \to \mathbb{R}$, $\psi(x) := \frac{\varphi(x)}{x}$ Lösung ist von $z' = \frac{1}{x}\big(f(z) - z\big)$ $(\star\star)$ mit $\psi(x_0) = \frac{y_0}{x_0}$.

Beweis
Nachrechnen □

2.9 Beispiel

Betrachte

$$y' = 1 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2$$

auf $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ mit Anfangsbedingung (x_0, y_0). Die Substitution $z = \frac{y}{x}$ liefert

$$z' = \underbrace{\frac{1}{x}}_{=:f(x)} \underbrace{(1+z^2)}_{=:g(z)}$$

mit Anfangsbedingung $(x_0, \frac{y_0}{x_0})$. Trennung der Variablen (Satz 2.1) liefert:

$$\arctan(\psi(x)) - \arctan\left(\frac{y_0}{x_0}\right) = \int_{\frac{y_0}{x_0}}^{\psi(x)} \frac{1}{1+s^2}\,\mathrm{d}s = G(\psi(x)) = F(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln x - \ln x_0 = \ln\frac{x}{x_0}$$

$\Rightarrow\ \psi(x) = \tan\left(\ln\frac{x}{x_0} + \arctan\frac{y_0}{x_0}\right)$ und $\varphi(x) = x \cdot \psi(x)$ löst das Anfangswertproblem $y' = 1 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2, (x_0, y_0)$.

2.10 Beispiel

Sei $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Betrachte

$$\ddot{x} = -\operatorname{grad} U(x)$$

d.h. wir suchen $x : I \to \mathbb{R}^3$, $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$ mit $\ddot{x}(t) = -\operatorname{grad} U\big(x(t)\big)$, $t \in I$, also

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \\ \ddot{x}_3(t) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x_1}\big(x_1(t), x_2(t), x_3(t)\big) \\ \frac{\partial U}{\partial x_2}\big(x_1(t), x_2(t), x_3(t)\big) \\ \frac{\partial U}{\partial x_3}\big(x_1(t), x_2(t), x_3(t)\big) \end{pmatrix}$$

Wir nehmen an, dass das Potential U in $0 \in \mathbb{R}^3$ ein lokales Maximum hat und interessieren uns für Lösungen x von ($\star$) in einer kleinen Umgebung von 0.

$x(t) \equiv 0$ ist Lösung , d.h. das System ist im Minimum im Gleichgewicht. Wir nehmen weiter an, dass

$$A := (\operatorname{Hess} U)(0) = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial x_j}(0)\right)_{i,j} \in M_3(\mathbb{R})$$

positiv definit ist, d.h. es existiert $S \in M_3(\mathbb{R})$ orthogonal mit

$$B := S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_3 \end{pmatrix} \qquad , \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$$

Ana. II $\rightsquigarrow$

$$U(\xi) = U(0 + \xi) = U(0) + \frac{1}{2}\langle \xi \,|\, A\xi \rangle + \beta(\xi)$$

für ein $\beta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $\lim_{\xi \to 0} \frac{\beta(\xi)}{\|\xi\|_2} = 0$. Wir approximieren nun $U(\xi)$ durch

$$\tilde{U}(\xi) := U(0) + \frac{1}{2}\langle \xi \,|\, A \cdot \xi \rangle$$

Wie in Ana. II 8.6 (i) erhält man

$$\operatorname{grad}(\xi \mapsto \langle \xi \mid A \cdot \xi \rangle) = 2A \cdot x$$

Also $\operatorname{grad} \tilde{U}(x) = A \cdot x$

$$\rightsquigarrow \ddot{x} = -Ax$$

$y := S^{-1}x \Rightarrow \ddot{y} = S^{-1}\ddot{x} = S^{-1}(-A)x = -S^{-1}ASS^{-1}x = -BS^{-1}x = -By$. Also folgt:

$$\ddot{y} = -By = -\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix} y, \qquad \begin{pmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 y \\ -\lambda_2 y \\ -\lambda_3 y \end{pmatrix}$$

mit den Lösungen $y_i(t) = \alpha_i \cdot \cos\bigl(\sqrt{\lambda_i} \cdot t\bigr) + \beta_i \cdot \sin\bigl(\sqrt{\lambda_i} \cdot t\bigr)$, $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}\ i = 1, 2, 3$

3 Treppenfunktionen: Die L^1-Halbnorm

3.1 Definition

a) Ein **Quader** $Q \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Teilmenge der Form $Q = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n$, wo $I_j \subset \mathbb{R}, j = 1, \ldots, n$ ein beschränktes, nicht leeres Intervall ist.
(Wir lassen offene, halboffene, abgeschlossene und Intervalle mit einem Punkt zu.)

b) Das **Volumen** eines Quaders wie in a) definieren wir als $v(Q) := |I_1| \cdot |I_2| \cdot \ldots \cdot |I_n|$
($|I_j|$ ist die Länge von I_j)

c) $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt **Treppenfunktion**, falls paarweise disjunkte Quader $Q_1, \ldots, Q_s \subset \mathbb{R}^n$ existieren mit $\varphi|_{Q_j}$ konstant für $j = 1, \ldots, s$ und

$$\varphi\Big|_{\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{j=1}^s Q_j} \equiv 0$$

φ lässt sich dann schreiben als

$$\varphi = \sum_{j=1}^s c_j \cdot \chi_{Q_j}$$

auch mit $\mathbb{1}_{Q_j}$ bezeichnet

wo $\chi_{Q_j} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die charakteristische Funktion von Q_j ist,

$$\chi_{Q_j}(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in Q_j \\ 0, & \text{falls } x \notin Q_j \end{cases}$$

Wir schreiben $\mathcal{T}_{\mathbb{R}^n} := \{\text{Treppenfunktionen auf } \mathbb{R}^n\}$.

d) Für eine Treppenfunktion φ wie in c) definieren wir das **Integral**

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,\mathrm{d}x := \sum_{j=1}^s c_j \cdot v(Q_j)$$

Wir schreiben auch $\int \varphi\,\mathrm{d}x$.

3.2 Bemerkung

Falls $Q_1, \ldots, Q_s \subset \mathbb{R}^n$ Quader sind (nicht notwendig paarweise disjunkt), $c_1, \ldots, c_s \in \mathbb{R}$, so ist $\varphi = \sum_{j=1}^s c_j \cdot \chi_{Q_j}$ eine Treppenfunktion: Es existieren paarweise disjunkte Quader $Q'_1, \ldots, Q'_{s'} \subset \mathbb{R}^n$ mit $\varphi|_{Q'_i} \equiv c_i$ und $\bigcup Q_j = \bigcup Q'_i \rightsquigarrow \varphi = \sum_{i=1}^{s'} c'_i \cdot \chi_{Q'_i}$

3.3 Proposition

a) $\mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$.

b) $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$ hängt nicht von der Darstellung $\varphi = \sum_{k=1}^s c_k \cdot \chi_{Q_k}$ ab (wo $Q_1, \ldots, Q_s \subset \mathbb{R}^n$ Quader sind und $c_1, \ldots, c_s \in \mathbb{R}$)

c) Es gilt
   (i) $\int (\alpha \cdot \varphi + \beta \cdot \psi)\,\mathrm{d}x = \alpha \cdot \int \varphi\,\mathrm{d}x + \beta \cdot \int \psi\,\mathrm{d}x$, $\varphi, \psi \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Mit anderen Worten $(\varphi \mapsto \int \varphi\,\mathrm{d}x)$ ist lineares Funktional auf $\mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$
   (ii) $\left|\int \varphi\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int |\varphi|\,\mathrm{d}x$
   (iii) $\varphi \leqslant \psi \implies \int \varphi\,\mathrm{d}x \leqslant \int \psi\,\mathrm{d}x$

Beweis

a) 1. $Q, Q' \subset \mathbb{R}^n$ Quader $\Rightarrow Q \cap Q'$ Quader

2. $\varphi = \sum_{k=1}^{s} c_k \cdot \chi_{Q_k}$, $\psi = \sum_{l=1}^{s'} c'_l \cdot \chi_{Q'_l} \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt o.E. $\cup Q_k = \cup Q'_l$

$$\alpha \cdot \varphi + \beta \cdot \psi = \sum_{\substack{j=1,\dots,s \\ l=1,\dots,s'}} (\alpha \cdot c_k + \beta \cdot c'_l) \cdot \chi_{Q_k \cap Q'_l} \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$$

b) Für $n = 1$: Analysis I.
Sei die Behauptung für $n-1$ bewiesen. Betrachte

$$\varphi = \sum_{k=1}^{s} c_k \cdot \chi_{Q_k} \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$$

Jeder Quader Q_k lässt sich schreiben als $Q_k = Q'_k \times Q''_k$ mit Quadern $Q'_k \subset \mathbb{R}$ und $Q''_k \subset \mathbb{R}^{n-1}$ $Q_k = (I_1) \times (I_2 \times \ldots \times I_n)$. Es gilt für $(x, y) \in R \times R^{n-1} = \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\chi_{Q_k}((x, y)) = \chi_{Q'_k}(x) \cdot \chi_{Q''_k}(y)$$

Für $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ definieren wir $\varphi_y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $\varphi(y) := \varphi(x, y)$ (φ_y hängt nicht von der Darstellung in $(\star)$ ab). Dann gilt:

$$\varphi_y(x) = \sum_{k=1}^{s} c_k \cdot \chi_{Q_k}(x, y) = \sum_{k=1}^{s} c_k \cdot \chi_{Q''_k}(y) \cdot \chi_{Q'_k}(x)$$

Also

$$\varphi_y = \sum_{k=1}^{s} c_k \cdot \chi_{Q''_k} \cdot \chi_{Q'_k} \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$$

nach Bemerkung 3.2. Aus Analysis I folgt $\int \varphi_y(x)\,\mathrm{d}x$ ist wohldefiniert und hängt nicht von der Darstellung $(\star\star)$ ab:

$$\Phi(y) := \int \varphi_y(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{s} c_k \cdot \chi_{Q''_k}(y) \cdot v(Q'_k)$$

Dann ist $\Phi : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ definiert durch $y \mapsto \Phi(y)$, eine Treppenfunktion, denn nach $(\star\star\star)$

$$\Phi = \sum_{k=1}^{s} c_k \cdot v(Q'_k) \cdot \chi_{Q''_k}$$

I.V. $\Rightarrow \int \Phi(y)\,\mathrm{d}y$ ist wohldefiniert und hängt nicht von der Darstellung $(\star\star\star)$ ab; es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Phi(y)\,\mathrm{d}y = \sum_{k=1}^{s} c_k \cdot v(Q'_k) \cdot v(Q''_k)$$

also

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Big(\int \varphi_y(x)\,\mathrm{d}x \Big) \mathrm{d}y = \sum_{k=1}^{s} c_k \cdot v(Q_k)$$

und die linke Seite hängt nicht von der Darstellung $(\star)$ ab.

c) Übung, benutze $(\star\star\star\star)$. $\square$

3.4 Corollar (Fubini für Treppenfunktionen)

Für $\varphi \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$ gilt mit $\mathbb{R}^n = R^p \times \mathbb{R}^{n-p}$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\mathbb{R}^{n-p}} \left(\int_{\mathbb{R}^p} \varphi(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

Beweis
Benutze wiederholt $(\star\star\star)$ aus 3.3 b) □

3.5 Notation

Wir versehen $(-\infty,\infty] = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit Ordnung und Operationen von $\mathbb{R}$ und

- $c < \infty$, $\forall c \in \mathbb{R}$,
- $\infty + c = c + \infty = \infty$, $c \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$,
- $\infty \cdot c = c \cdot \infty = \infty$, $c \in \mathbb{R}^*$,
- $\infty \cdot 0 = 0 \cdot \infty = 0$.

3.6 Definition

Sei $f : \mathbb{R}^n \to (-\infty,\infty]$ eine Abbildung. Eine **Treppe** über f ist eine Reihe

$$\Phi = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot \chi_{Q_k}$$

mit folgenden Eigenschaften:

(i) $Q_k \subset \mathbb{R}^n$ sind offene Quader, $c_k \in \mathbb{R}_+$

(ii) $|f(x)| \leqslant \Phi(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot \chi_{Q_k}(x) \in (-\infty,\infty]$, $x \in \mathbb{R}^n$

I für "Inhalt"

Wir setzen $I(\Phi) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot v(Q_k) \in (-\infty,\infty]$

3.7 Definition

Sei $f : \mathbb{R}^n \to (-\infty,\infty]$. Wir setzen

$$\|f\|_1 := \inf\{I(\Phi) \mid \Phi \text{ Treppe über } f\}$$

3.8 Bemerkung

1. Eine Treppe über f existiert für jedes f (warum?), daher $\|f\|_1 \in [0,\infty]$ für jedes f.
2. Für $f, g : \mathbb{R}^n \to (-\infty,\infty]$, $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:
   (i) $\|\lambda \cdot f\|_1 = |\lambda| \cdot \|f\|_1$
   (ii) $\|f+g\|_1 \leqslant \|f\|_1 + \|g\|_1$
   (iii) $|f| \leqslant |g| \Longrightarrow \|f\|_1 \leqslant \|g\|_1$
   Beweis: Übung.

für stetige f allerdings schon

3. Es gilt *nicht*: $\|f\|_1 = 0 \Longrightarrow f \equiv 0$ (Übung)
   $\|.\|_1$ ist also **Halbnorm** auf $\{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \mid \|f\|_1 < \infty\}$ VR: Siehe 6.1 und 6.2

3.9 Proposition

Für $f_0, f_1, \ldots : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ definiert $x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = \lim_{K\to\infty} \sum_{k=0}^{K} f_k(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ eine Abbildung $\sum_{k=0}^{\infty} f_k : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$. Es gilt

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} f_k \right\|_1 \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_1$$

Beweis
Sei $\varepsilon > 0$. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ wähle eine Treppe $\Phi_k = \sum_{i=0}^{\infty} c_{k,i} \cdot \chi_{Q_{k,i}}$ über f_k mit $I(\Phi_k) \leqslant \|f_k\|_1 + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$. Wähle eine Bijektion $\gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und setze

$$\Phi := \sum_{l\in\mathbb{N}} c_{\gamma(l)} \cdot \chi_{Q_{\gamma(l)}} = \sum_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ i\in\mathbb{N}}} c_{k,i} \cdot \chi_{Q_{k,i}}$$

Dann gilt

- $\Phi = \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_k$, insbesondere ist Φ nicht abhängig von γ
- Φ ist Treppe über $\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k$
- $$\begin{aligned}\left\| \sum_{k=0}^{\infty} f_k \right\|_1 \leqslant I(\Phi) = \sum_{l=0}^{\infty} c_{\gamma(l)} \cdot v(Q_{\gamma(l)}) &\overset{\star}{=} \sum_{k=0}^{\infty} I(\Phi_k) \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \left(\|f_k\|_1 + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_1 + \varepsilon \end{aligned}$$

$\Rightarrow \|\sum_{k=0}^{\infty} f_k\|_1 \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_1$

Für $\star$ benutze: $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset [0,\infty]$, $\beta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ Bijektion, dann gilt

gilt nur, da $a_k \geqslant 0$; $\Rightarrow$ Riemannscher Umordnungssatz

$$S_K = \sum_{k=0}^{K} a_k \xrightarrow{K\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{\beta(k)} \xleftarrow{L\to\infty} \sum_{k=0}^{L} a_{\beta(k)} = V_L$$

$\square$

3.10 Lemma

Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossener Quader. Dann gilt

$$\|\chi_Q\|_1 = v(Q) \left(=: \int \chi_Q \,\mathrm{d}x \right)$$

Beweis
Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein offener Quader $Q' \subset \mathbb{R}^n$ mit $Q \subset Q'$ und $v(Q') \leqslant v(Q) + \varepsilon$. $\chi_{Q'}$ ist dann Treppe über χ_Q. Es gilt

$$I(\chi'_Q) = v(Q') \leqslant v(Q) + \varepsilon$$

also $\|\chi_Q\|_1 = \inf\{I(\Phi) \,|\, \Phi \text{ Treppe über } \chi_Q\} \leqslant v(Q)$. Sei nun $\Phi = \sum_k c_k \cdot \chi_{Q_k}$ eine Treppe über χ_Q. Zu $\varepsilon > 0$ und $x \in Q$ existieren wegen $\chi_Q(x) \leqslant \Phi(x)$ ein $N(x) \in \mathbb{N}$ mit

$$1 - \varepsilon = \chi_Q(x) - \varepsilon \leqslant \sum_{k=0}^{N(x)} c_k \cdot \chi_{Q_k}(x)$$

Die Q_k sind offen, daher existiert eine Umgebung $U(x)$, so dass gilt: $x \in Q_k \Rightarrow U(x) \subset Q_k$ für $k = 0, \dots, N(x)$. Für $y \in U(x)$ erhalten wir

$$1 - \varepsilon \leqslant \sum_{k=0}^{N(x)} c_k \cdot \chi_{Q_k}(x) \leqslant \sum_{k=0}^{N(x)} c_k \cdot \chi_{Q_k}(y)$$

$(U(x))_{x \in Q}$ ist eine offene Überdeckung von Q. Q ist kompakt, also gilt nach Heine-Borel

$$\exists x_1, \dots, x_L \in Q : Q \subset \bigcup_{i=1}^{L} U(x)$$

Setze $N := \max\{N(x_1), \dots, N(x_L)\}$, dann gilt für $y \in Q$

$$\sum_{k=0}^{N} c_k \cdot \chi_{Q_k}(y) \geqslant 1 - \varepsilon = (1-\varepsilon)\chi_Q(y)$$

also $\sum_{k=0}^{N} c_k \cdot \chi_{Q_k} \geqslant (1-\varepsilon) \cdot \chi_Q$. Mit Proposition 3.3 folgt dann

$$I(\Phi) \geqslant \sum_{k=0}^{N} c_k \cdot v(Q_k) = \int \left(\sum_{k=0}^{N} c_k \cdot \chi_{Q_k}(y) \right) \mathrm{d}y \geqslant \int (1-\varepsilon)\chi_Q(y) \, \mathrm{d}y = (1-\varepsilon) v(Q)$$

Es folgt $I(\Phi) \geqslant v(Q)$ und damit $\|\chi_Q\|_1 \geqslant v(Q)$ □

3.11 Lemma

Für jedes $\varphi \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$ gilt

$$\|\varphi\|_1 = \int |\varphi| \, \mathrm{d}x$$

Beweis

1. Es existieren paarweise disjunkte Quader $Q_1, \dots, Q_s, P_1, \dots, P_r \subset \mathbb{R}^n$ und $c_1, \dots, c_s, d_1, \dots, d_r \in \mathbb{R}$ mit
   - $\varphi = \sum_{k=1}^{s} c_k \cdot \chi_{Q_k} + \sum_{l=1}^{r} d_l \cdot \chi_{P_l}$
   - $Q_k \subset \mathbb{R}^n$ ist offen für $k = 1, \dots, s$
   - (Übung) $v(P_l) = 0, l = 1, \dots, r$ (d.h. P_l ist von der Form $I_{l,1} \times \ldots \times I_{l,n}$ und mindestens ein $I_{l,j}$ besteht nur aus einem Punkt)

   Es gilt dann $|\varphi| = \sum_{k=1}^{s} |c_k| \cdot \chi_{Q_k} + \sum_{l=1}^{r} |d_l| \cdot \chi_{P_l}$ (die Quader sind paarweise disjunkt). Sei nun $\varepsilon > 0$. Zu jedem P_l existiert ein offener Quader P_l' mit $P_l \subset P_l'$ und $v(P_l') < \varepsilon$. Dann ist

   $$\Phi := \sum_{k=0}^{s} |c_k| \cdot \chi_{Q_k} + \sum_{l=1}^{r} |d_l| \cdot \chi_{P_l'}$$

   eine Treppe über $|\varphi|$ also auch über φ. Es ist

   $$I(\Phi) = \sum_{k=1}^{s} |c_k| \cdot v(Q_k) + \sum_{l=1}^{r} |d_l| \cdot v(P_l') \leqslant \sum_{k=1}^{s} |c_k| \cdot v(Q_k) + \varepsilon \cdot \sum_{l=1}^{r} |d_k|$$

   also $\|\varphi\|_1 \leqslant \sum_{k=1}^{s} |c_k| \cdot v(Q_k) = \int |\varphi| \, \mathrm{d}x$

2. Sei nun $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossener Quader mit $(\bigcup Q_k) \cup (\bigcup P_l) \subset Q$, d.h. $\varphi\big|_{R^n \setminus Q} \equiv 0$. Setze $M := \max\{|c_k|, |d_l|\} = \max|\varphi| \in \mathbb{R}$. Setze $\psi := M \cdot \chi_Q - |\varphi|$ dann ist $0 < \psi = |\psi| \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$. Nach Teil 1. gilt

$$\|\psi\|_1 \leqslant \int |\psi| \,\mathrm{d}x = \int \psi \,\mathrm{d}x$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\int |\varphi| = \int (M \cdot \chi_Q - \psi) \,\mathrm{d}x &= M \cdot \int \chi_Q \,\mathrm{d}x - \int \psi \,\mathrm{d}x \\
&= M \cdot \|\chi_Q\|_1 - \int \psi \,\mathrm{d}x \\
&= \|M \cdot \chi_Q\|_1 - \int \psi \,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \|M \cdot \chi_Q\|_1 - \|\psi\|_1 \\
&= \||\varphi| + \psi\|_1 - \|\psi\|_1 \\
&\leqslant \||\varphi|\|_1 \\
&= \|\varphi\|_1
\end{aligned}$$

□

4 Das Lebesgue-Integral

4.1 Definition

$f : \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$ heißt **Lebesgue integrierbar**, falls eine Folge $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$ existiert mit

$$\|f - \varphi_k\|_1 \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

Wir setzen

siehe auch 3.1

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(x)\,\mathrm{d}x$$

Wir schreiben auch $\int f\,\mathrm{d}x$.

4.2 Bemerkung

1) Der Limes in $(\star)$ existiert, denn $\left(\int \varphi_k(x)\,\mathrm{d}x\right)_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge:

für geeignete k, l

$$\left|\int \varphi_k\,\mathrm{d}x - \int \varphi_l\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int |\varphi_k - \varphi_l|\,\mathrm{d}x = \|\varphi_k - \varphi_l\|_1 \leqslant \|\varphi_k - f\|_1 + \|f - \varphi_l\|_1 \leqslant \varepsilon$$

   Ebenso: Der Limes in $(\star)$ hängt nicht von der Wahl der Approximationsfolge $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ab. (D.h. für eine weitere Folge $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$ mit $\|\psi_k - f\|_1 \xrightarrow{k\to\infty} 0$, so ist $\lim_k \int \psi_k\,\mathrm{d}x = \int \varphi_k\,\mathrm{d}x$)

2) Sei $\varphi \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$. Dann ist φ Lebesgue integrierbar und das Integral stimmt mit dem aus (3.1) überein.

4.3 Proposition

Seien $f, g : \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$ integrierbar, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt

a) $\alpha \cdot f + \beta \cdot g$ ist integrierbar; es gilt

$$\int (\alpha \cdot f + \beta \cdot g)\,\mathrm{d}x = \alpha \cdot \int f\,\mathrm{d}x + \beta \cdot \int g\,\mathrm{d}x.$$

   Insbesondere ist $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \mid f \text{ Lebesgue integrierbar}\}$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ und $\int$: $\mathcal{L}^{-1}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ ist linear.

b) $|f|$ ist integrierbar und es gilt:

$$\left|\int f\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int |f|\,\mathrm{d}x = \|f\|_1$$

c) Ist $f \leqslant g$, so folgt $\int f\,\mathrm{d}x \leqslant \int g\,\mathrm{d}x$ (Monotonie)

d) Aus g beschränkt folgt $f \cdot g$ ist integrierbar.

Beweis

a) Seien $(\varphi_k)_{\mathbb{N}}$, $(\psi_k)_{\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$ mit $\|f - \varphi_k\|_1, \|g - \psi_k\|_1 \xrightarrow{k\to\infty} 0$. Dann ist $\alpha \cdot \varphi_k + \beta \cdot \psi_k \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$ und

$$\|\alpha \cdot f + \beta \cdot g - \alpha \cdot \varphi_k - \beta \cdot \psi_K\|_1 \leqslant |\alpha| \cdot \|f - \varphi_k\|_1 + |\beta| \cdot \|g - \psi_k\|_1 \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

b) benutze $\big||f| - |\varphi_k|\big| \leqslant |f - \varphi_k|$, also $\||f| - |\varphi_k|\|_1 \leqslant \|f - \varphi_k\|_1$, sowie $\|f\|_1 - \|f - \varphi_k\|_1 \leqslant \|\varphi_k\|_1 \leqslant \|f\|_1 + \|f - \varphi_k\|_1$

c) Übung

d) Übung □

4.4 Bemerkung

Falls f integrierbar ist, so auch

$$f_+ := \max\{f, 0\} = \frac{1}{2} \cdot (f + |f|)$$
$$f_- := \max\{-f, 0\} = \frac{1}{2} \cdot (-f + |f|)$$

Dann gilt $f = f_+ - f_-$ und $f_+ \cdot f_- = 0$. Entsprechend für

$$\max\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|),$$
$$\min\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$$

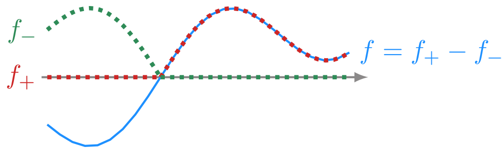


Abb. 1: Zerteilung von f in f_+ und f_-

4.5 Definition

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$, $f : A \to (-\infty, \infty]$. f heißt integrierbar über A, falls $f_A : \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$ gegeben durch

triviale Fortsetzung

$$f_A(x) = \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \in A \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

integrierbar ist. Wir schreiben

$$\int_A f \, \mathrm{d}x := \int_{\mathbb{R}^n} f_A \, \mathrm{d}x \quad , \quad \|f\|_{1,A} := \|f_A\|_1$$
$$\mathcal{L}^1(A) := \{g : A \to \mathbb{R} \,|\, g \text{ integrierbar über } A\}$$

Proposition 4.3 und Bemerkung 4.4 gelten entsprechend.

4.6 Proposition

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion. Dann ist f Lebesgue integrierbar und die Integrale stimmen überein.

Beweis
Sei $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}([a, b])$ eine Folge von Treppenfunktionen mit $\|f - \varphi_k\|_{\infty,[a,b]} \xrightarrow{k\to\infty} 0$. Dann

$$\begin{aligned}\left\|f_{[a,b]} - (\varphi_k)_{[a,b]}\right\|_1 = \left\| |f - \varphi_k|_{[a,b]} \right\|_1 &= \left\| |(f - \varphi_k)_{[a,b]}| \cdot \chi_{[a,b]} \right\|_1 \\ &\leqslant \left\| \|f - \varphi_k\|_{\infty,[a,b]} \cdot \chi_{[a,b]} \right\|_1 \\ &= \|f - \varphi_k\|_{\infty,[a,b]} \cdot (b - a) \\ &\xrightarrow{k\to\infty} 0\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ f ist Lebesgue integrierbar und

$$\int_{[a,b]} f \, \mathrm{d}x \overset{4.5}{=} \int_{\mathbb{R}} f_{[a,b]} \, \mathrm{d}x \overset{4.1}{=} \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} (\varphi_k)_{[a,b]} \, \mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int_a^b \varphi_k \, \mathrm{d}x = \int_a^b f \, \mathrm{d}x$$ □

die letzten beiden Integrale sind Regel-Integrale

4.7 Satz (Translationsinvarianz)

Sei $f : \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$ integrierbar und $a \in \mathbb{R}^n$. Dann ist auch $f_a : \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$, gegeben durch $f_a(x) := f(x - a)$ integrierbar und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} f_a \, \mathrm{d}x$$

Beweis
Für jeden Quader $Q \subset \mathbb{R}^n$ ist $a + Q := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x - a \in Q\}$ wieder ein Quader. (warum?)
Es gilt

$$\int \chi_Q \,\mathrm{d}x = v(Q) = v(a+Q) = \int \chi_{a+Q} \,\mathrm{d}x = \int (\chi_Q)_a \,\mathrm{d}x$$

Der Satz gilt daher für Funktionen der Form χ_Q; wegen der Linearität auch für $f \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$, denn $(\alpha \cdot f + \cdot \beta g)_a = \alpha \cdot f_a + \beta \cdot g_a$.

Ist nun $g : \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$ eine Abbildung und $\Phi = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot \chi_{Q_k}$ eine Treppe über g, so ist $\Phi_a := \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot (\chi_{Q_k})_a$ eine Treppe über g_a und $I(\Phi) = I(\Phi_a) \Rightarrow \|g\|_1 = \|g_a\|_1$.
Sei $(\varphi_k)_{\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$ mit $\|f - \varphi_k\|_1 \to 0$. Dann gilt auch

$$\|f_a - (\varphi_k)_a\|_1 = \|(f - \varphi_k)_a\|_1 = \|f - \varphi_k\|_1 \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

Also ist f_a integrierbar; es gilt weiter

$$\int f_a \,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int (\varphi_k)_a \,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int \varphi_k = \int f \,\mathrm{d}x.$$ □

4.8 Satz (Beppo Levi mit Treppenfunktionen)

Sei $f : \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$ eine Abbildung und $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$ eine Folge von Treppenfunktionen mit

(i) $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend,

(ii) $\varphi_k \xrightarrow{k\to\infty} f$ punktweise und

(iii) $\left(\int \varphi_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt (also konvergent, da monoton).

Dann ist f integrierbar und es gilt

$$\int f \,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int \varphi_k \,\mathrm{d}x$$

Beweis
Für $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\begin{aligned} f(x) - \varphi_m(x) &= \lim_{k\to\infty} (\varphi_k(x) - \varphi_m(x)) \\ &= \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{i=m}^{k-1} \varphi_{i+1}(x) - \varphi_i(x) \right) \\ &= \sum_{i=m}^{\infty} \varphi_{i+1}(x) - \varphi_i(x) \end{aligned}$$

Teleskopsumme

Es folgt

$$f - \varphi_m = \sum_{i=m}^{\infty} \underbrace{\varphi_{i+1} - \varphi_i}_{\geqslant 0}$$

Damit ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \|f-\varphi_m\|_1 &\overset{3.9}{\leqslant} \sum_{i=m}^{\infty} \|\varphi_{i+1}-\varphi_i\|_1 \\
&\overset{3.11}{=} \sum_{i=m}^{\infty} \int |\varphi_{i+1}-\varphi_i| \,\mathrm{d}x = \sum_{i=m}^{\infty} \int (\varphi_{i+1}-\varphi_i) \,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{i=m}^{\infty} \left(\int \varphi_{i+1} \,\mathrm{d}x - \int \varphi_i \,\mathrm{d}x \right) \\
&= \lim_{k\to\infty} \int \varphi_k \,\mathrm{d}x - \int \varphi_m \,\mathrm{d}x \xrightarrow{m\to\infty} 0
\end{aligned}
$$

□

4.9 Proposition

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}_+$ und stetig. Dann existiert $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$ mit

- $\varphi_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$,
- $(\varphi_k)_{\mathbb{N}}$ monoton wachsend,
- $\varphi_k \xrightarrow{k\to\infty} f_U$ punktweise.

Beweis
Sei $Q_{x,t} \subset \mathbb{R}^n$ für $(x,t) \in \mathbb{Q}^n \times \mathbb{Q}$ durch $Q_{x,t} := [x_1 - t, x_1 + t] \times \ldots \times [x_n - t, x_n + t]$. Setze

$$
Q'_{x,t} := \begin{cases} Q_{x,t} & \text{falls } Q_{x,t} \subset U \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}
$$

und

$$
c_{x,t} := \begin{cases} \min\{ f(y) \,|\, y \in Q'_{x,t} \} & \text{falls } Q'_{x,t} \neq \emptyset \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}
$$

(Das Minimum existiert aufgrund der Kompaktheit von $Q'_{x,t}$)
Dann gilt für $(x,t) \in \mathbb{Q}^n \times \mathbb{Q}$ folgendes: $c_{x,t} \cdot \chi_{Q'_{x,t}} \leqslant f$. Außerdem gilt: Zu jedem $y \in U$, $\varepsilon > 0$ existiert ein $(x,t) \in \mathbb{Q}^n \times \mathbb{Q}$ mit

$$
\left| c_{x,t} \cdot \chi_{Q'_{x,t}}(y) - f(y) \right| < \varepsilon
$$

Wähle $\gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^n \times \mathbb{Q}$ surjektiv und definiere $\varphi_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch

$$
\varphi_k(y) := \max\left\{ c_{\gamma(i)} \cdot \chi_{Q'_{\gamma(i)}}(y) \,\middle|\, i = 0, \ldots, k \right\}
$$

Dann ist $(\varphi_k)_{\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$ wie gewünscht. (warum?)

4.10 Satz

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $f : U \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt. Dann ist f über U integrierbar.

Beweis
Wegen $f = f_+ - f_-$ (mit $f_+, f_- : U \to \mathbb{R}_+$ stetig) und Proposition (4.3) genügt es zu zeigen, dass f_+ und f_- integrierbar sind. Wir dürfen also o.E.d.A. annehmen, dass $0 \leqslant f \leqslant M \in \mathbb{R}_+$. Wähle $(\varphi_k)_{\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$ wie in (4.9). (D.h. $\varphi_k \geqslant 0$, $\varphi_k \to f_U$ monoton und punktweise). Wähle $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader mit $U \subseteq Q$, dann ist *siehe auch 4.4*

$$
\int \varphi_k \,\mathrm{d}x \leqslant \int M \cdot \chi_U \,\mathrm{d}x \leqslant \int M \cdot \chi_Q \,\mathrm{d}x = M \cdot v(Q) < \infty
$$

Mit Satz 4.8 folgt: f_U ist integrierbar über $\mathbb{R}^n$, also ist f integrierbar über U. □

4.11 Satz (Fubini für stetige Funktionen auf offenen Teilmengen)

Sei $U \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ offen und beschränkt, $f : U \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt. Für $y \in \mathbb{R}^q$ definiere $f_y : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ durch $f_y(x) := f_U(x,y)$. Dann ist f_y integrierbar, die Funktion $F : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$, definiert durch $F(y) := \int_{\mathbb{R}^n} f_y(x)\,\mathrm{d}x$ ist ebenfalls integrierbar und es ist

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_U(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{\mathbb{R}^q} F(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^q}\left(\int_{\mathbb{R}^p} f_U(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$$

Beweis

O.E.d.A $0 \leqslant f \leqslant M$. Sei $(\varphi_k)_\mathbb{N} \subset \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$ wie in Proposition 4.9; wie im Beweis von 4.10 ist $(\int \varphi_k\,\mathrm{d}x)_\mathbb{N}$ beschränkt. Nach Satz 4.8 gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_U(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$$

Für $y \in \mathbb{R}^q$ ist $\psi_{y,k} : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, definiert durch $\psi_{y,k}(x) := \varphi_k(x,y)$ in $\mathcal{T}_{\mathbb{R}^p}$ (wie in 3.3). Dann gilt $\psi_{y,k} \xrightarrow{k\to\infty} f_y$ punktweise und monoton wachsend. Wie im Beweis von 4.10 sieht man, dass $\left(\int_{R^p}\psi_{y,k}\,\mathrm{d}x\right)_\mathbb{N}$ beschränkt ist. Mit Satz 4.8 folgt

$$F(y) := \int_{\mathbb{R}^p} f_U(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^p} f_y(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^p}\psi_{y,k}(x)\,\mathrm{d}x$$

Definiere $\Phi_k : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$ durch $\Phi_k(y) := \int_{\mathbb{R}^p}\varphi_k(x,y)\,\mathrm{d}x$ wie im Beweis 3.3 (bzw. 3.4), sieht man $\Phi_k \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^q}$. Es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^q}\Phi_k(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n}\varphi_k(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} f_U(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) < \infty$$

Die Folge $(\Phi_k)_\mathbb{N}$ ist monoton (wegen der Monotonie der φ_k und des Integrals). Es gilt $\Phi_k(y) \xrightarrow{k\to\infty} F(y)$, d.h. $\Phi_k \nearrow F$ punktweise und monoton. Mit 4.8 folgt, dass F integrierbar ist mit

$$\int_{\mathbb{R}^q} F(y)\,\mathrm{d}y = \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^q}\Phi_k(y)\,\mathrm{d}y = \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_k(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{\mathbb{R}^n} f_U(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) \qquad \square$$

5 Messbarkeit in $\mathbb{R}^n$, Nullmengen

5.1 Definition

Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt **Lebesgue-messbar**, falls χ_A integrierbar ist. Wir setzen $v(A) := \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A$.

5.2 Proposition

Seien $A, B \subset \mathbb{R}^n$ messbar, dann sind $A \cup B$, $A \cap B$ messbar mit $v(A \cup B) = v(A) + v(B) - v(A \cap B)$. Falls $A \subset B$ gilt, so ist $v(A) \leqslant v(B)$.

Beweis
Benutze (4.3) und:

(i) $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B}$

(ii) $A \subset B \Longrightarrow \chi_A \leqslant \chi_B$ $\square$

5.3 Proposition

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen oder kompakt. Dann ist A messbar.

Beweis

1) Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen. Dann ist $f \equiv 1$ stetig und beschränkt ($f : A \to \mathbb{R}$). Mit 4.10 folgt, dass f_A integrierbar ist. $\Rightarrow f_A = \chi_A$ integrierbar $\Rightarrow$ A messbar.

2) Sei A kompakt. Dann existiert ein offener Quader $Q \subset \mathbb{R}^n$ mit $A \subseteq Q$, dann ist $Q \setminus A \underset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}^n$ und beschränkt, also sind $\chi_{Q \setminus A}, \chi_Q$ integrierbar, also $\chi_A = \chi_Q - \chi_{Q \setminus A}$ integrierbar. $\square$

5.4 Beispiel

(i) $U_r := B_{\mathbb{R}^2}(0, r) \underset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}^2$

$$
\begin{aligned}
v(U_r) = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_{U_r}(x, y)\,\mathrm{d}(x, y) &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_{U_r}(x, y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_{(-r,r)}(y) \cdot \chi_{\left(-\sqrt{r^2-y^2}, \sqrt{r^2-y^2}\right)}(x)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}} \chi_{(-r,r)}(y) \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_{\left(-\sqrt{r^2-y^2}, \sqrt{r^2-y^2}\right)}(x)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}} \chi_{(-r,r)}(y) \cdot 2 \cdot \sqrt{r^2 - y^2}\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{-r}^{r} 2 \cdot \sqrt{r^2 - y^2}\,\mathrm{d}y \\
&= 2 \cdot \int_{-r}^{r} r \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{y}{r}\right)^2}\,\mathrm{d}y \\
&= 2 \cdot \int_{s(-r)}^{s(r)} r \cdot r \cdot \sqrt{1 - s^2}\,\mathrm{d}s \\
&= 2 \cdot r^2 \cdot \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - s^2}\,\mathrm{d}s \\
&= r^2 \cdot \pi
\end{aligned}
$$

S^1 *ist die Sphäre, also die Kugeloberfläche*

(ii) $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ kompakt also messbar nach 5.3. $S_1 \subset U_{1+\varepsilon} \setminus U_1$. Mit 5.2 folgt

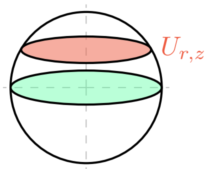
$$v(U_{1+\varepsilon}) = v\big(U_1 \cup (U_{1+\varepsilon} \setminus U_1)\big) = v(U_1) + v(U_{1+\varepsilon} \setminus U_1) - v(\emptyset)$$

damit folgt

$$v(S^1) \leqslant v(U_{1+\varepsilon}) - v(U_1) = \pi \cdot \big((1+\varepsilon)^2 - 1^2\big) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0$$

(iii) $K_r := B_{\mathbb{R}^3}(0,r) \subset \mathbb{R}^3$ offen.

$$U_{r,z} := B_{\mathbb{R}^2}(0, \sqrt{r^2 - z^2})$$



$$\begin{aligned}
v(K_r) = \int_{\mathbb{R}^3} \chi_{K_r}(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z) &= \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}^2} \chi_{K_r}(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y) \Big)\,\mathrm{d}z \\
&= \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}^2} \chi_{(-r,r)}(z) \cdot \chi_{U_{r,z}}(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) \Big)\,\mathrm{d}z \\
&= \int_{\mathbb{R}} \chi_{(-r,r)}(z) \Big(\int_{\mathbb{R}^2} \chi_{U_{r,z}}(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) \Big)\,\mathrm{d}z \\
&= \int_{\mathbb{R}} \chi_{(-r,r)}(z) \cdot \big(\pi \cdot (r^2 - z^2)\big)\,\mathrm{d}z \qquad \text{nach i)} \\
&= \pi r^2 \int_{-r}^{r} 1\,\mathrm{d}z - \pi \int_{-r}^{r} z^2\,\mathrm{d}z \\
&= \pi r^2 \cdot 2r - \pi \cdot 2 \cdot \frac{r^3}{3} \\
&= \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3
\end{aligned}$$

□

5.5 Bemerkung

Seien $U, W \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ offen. Setze $U_y := \big\{x \in \mathbb{R}^{n-1} \,\big|\, (x,y) \in U\big\}$ für $y \in \mathbb{R}$, $W_y := \big\{x \in \mathbb{R}^{n-1} \,\big|\, (x,y) \in W\big\}$ für $y \in \mathbb{R}$. Dann gilt $v_{\mathbb{R}^n}(U) = v_{\mathbb{R}^n}(W)$, falls gilt

$$v_{\mathbb{R}^{n-1}}(U_y) = v_{\mathbb{R}^{n-1}}(W_y) \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R},$$

denn $v_{\mathbb{R}^n}(U) = \int_{\mathbb{R}} v_{\mathbb{R}^{n-1}}(U_y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} v_{\mathbb{R}^{n-1}}(W_y)\,\mathrm{d}y = v_{\mathbb{R}^n}(W)$ gilt nach Fubini (4.11). Mit Translationsinvarianz (4.7) ergibt sich das **Prinzip von Cavalieri**:

5.6 Proposition und Definition

$N \subset \mathbb{R}^n$ heißt **Lebesgue-Nullmenge**, falls sie eine der folgenden äquivalenten Eigenschaften erfüllt:

(i) N ist messbar und $v(N) = 0$

(ii) $\|\chi_N\|_1 = 0$

Sei $E : \mathbb{R}^n \to \{\text{wahr}, \text{falsch}\}$, so sagen wir E gilt **fast überall** (f.ü.), falls $N_E := \{x \in \mathbb{R}^n \mid E(x) = \text{falsch}\}$ eine Nullmenge ist.

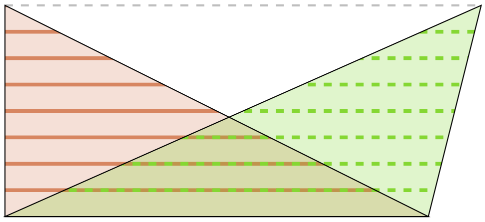


Abbildung 2: Prinzip von Cavalieri: Beide Dreiecke haben den gleichen Flächeninhalt

Beweis

(i) ⇒ (ii): $0 \leqslant \|\chi_N\|_1 \overset{\text{4.3 b)}}{=} \int \chi_N \,\mathrm{d}x = v(N) = 0.$

(ii) ⇒ (i): Setze $\varphi_k \equiv 0 \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$ für $k \in \mathbb{N}$, dann

$$\|\chi_N - \varphi_k\|_1 = \|\chi_N\|_1 = 0$$

also ist χ_N integrierbar. Nach Proposition 4.3 b) gilt $0 \leqslant \int \chi_N \,\mathrm{d}x = \|\chi_N\|_1 = 0$ □

5.7 Proposition

(i) Jede Teilmenge einer Nullmenge ist eine Nullmenge.

(ii) Jede abzählbare Vereinigung von Nullmengen ist eine Nullmenge.

Beweis

(i) Sei $M \subset N$. Es folgt $0 \leqslant \chi_M \leqslant \chi_N$. Mit Bemerkung 3.8 folgt $0 \leqslant \|\chi_M\|_1 \leqslant \|\chi_N\|_1$

(ii) Sei $N = \bigcup_{k=0}^{\infty} N_k$. Dann gilt $0 \leqslant \chi_N \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \chi_{N_k}$. Nach Bemerkung 3.8 und Proposition 3.9 gilt

$$0 \leqslant \|\chi_N\|_1 \leqslant \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \chi_{N_k} \right\|_1 \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \|\chi_{N_k}\|_1 = 0$$ □

5.8 Proposition

Sei $f : \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$ eine Abbildung mit $\|f\|_1 < \infty$. Dann ist f fast überall endlich, d.h. $N := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = \infty\}$ ist eine Nullmenge.

Beweis

Für $\varepsilon > 0$ ist $0 \leqslant \chi_N \leqslant \varepsilon \cdot |f|$, also

$$0 \leqslant \|\chi_N\|_1 \overset{3.8}{\leqslant} \|\varepsilon \cdot |f|\|_1 \overset{3.8}{=} \varepsilon \cdot \|f\|_1 \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0$$

Daraus folgt $\|\chi_N\|_1 = 0$ □

5.9 Proposition

Seien $f, g : \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$ Abbildungen mit $f = g$ fast überall. Falls f integrierbar ist, dann auch g und es gilt

$$\int f \,\mathrm{d}x = \int g \,\mathrm{d}x$$

Beweis
Sei $N := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq g(x)\}$, dann gilt $\int \chi_N \,\mathrm{d}x = 0$ nach Vorraussetzung. Definiere $h : \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$ durch

$$h(x) := \infty \cdot \chi_N(x) = \begin{cases} \infty, & \text{falls } x \in N \\ 0, & \text{falls } x \notin N \end{cases}$$

Dann gilt $h = \sum_{k=0}^{\infty} \chi_N$ und $\|h\|_1 \overset{3.9}{\leqslant} \sum_{k=0}^{\infty} \|\chi_N\|_1 = 0$. f ist integrierbar, als gilt $\exists (\varphi_k)_{\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$ mit $\|f - \varphi_k\|_1 \xrightarrow{k \to \infty} 0$. Es gilt $|g - \varphi_k| \leqslant |f - \varphi_k| + h$ also

$$\|g - \varphi_k\|_1 \leqslant \||f - \varphi_k| + h\|_1 \leqslant \|f - \varphi_k\|_1 + \|h\|_1 \xrightarrow{k \to \infty} 0$$

mit (4.1) folgt: g integrierbar und $\int g \,\mathrm{d}x = \lim_{k \to \infty} \int \varphi_k \,\mathrm{d}x = \int f \,\mathrm{d}x$ □

5.10 Beispiele

(i) $\mathbb{Q}$ ist Nullmenge in $\mathbb{R}$: $v(\{x\}) = 0$, $x \in \mathbb{R}$. $\mathbb{Q}$ ist abzählbare Vereinigung solcher Einpunktmengen, also ist $\mathbb{Q}$ nach 5.7 (ii) eine Nullmenge.

(Alternativ: Benutze Satz 4.8 (Beppo-Levi))

(ii) Sei $C \subset [0,1]$ die Cantormenge, dann ist C eine Nullmenge:

$$[0,1] \setminus C = \dot{\bigcup_{l=0}^{\infty}} U_l$$

Setze $\varphi_k := \chi_{\bigcup_{l=0}^{k} U_l}$, $k \in \mathbb{N}$. Dann ist $(\varphi_k)_{\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$, $\varphi_k \xrightarrow{k \to \infty} \chi_{[0,1]\setminus C}$ monoton wachsend und punktweise und $\int \varphi_k \,\mathrm{d}x \leqslant 1$, $k \in \mathbb{N}$.

Mit 4.8 folgt

$$\begin{aligned} \int \chi_{[0,1]\setminus C} \,\mathrm{d}x &= \lim_{k \to \infty} \int \varphi_k \,\mathrm{d}x = \lim_{k \to \infty} \sum_{l=0}^{k} v(U_l) \,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{k \to \infty} \sum_{l=0}^{k} \frac{2^l}{3^{l+1}} = \frac{1}{3} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^l = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1 \end{aligned}$$

Es folgt

$$\int \chi_C \,\mathrm{d}x = \int \left(\chi_{[0,1]} - \chi_{[0,1]\setminus C}\right) \mathrm{d}x = \int \chi_{[0,1]} \,\mathrm{d}x - \int \chi_{[0,1]\setminus C} \,\mathrm{d}x = 1 - 1 = 0$$

Die Cantormenge ist also eine überabzählbare Nullmenge! □

5.11 Bemerkung

Nullmengen lassen sich auch wie folgt charakterisieren:
$N \subset \mathbb{R}^n$ ist Nullmenge genau dann, wenn Folgendes gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists Q_0, Q_1, \ldots \subset \mathbb{R}^n \text{ offene Quader mit } N \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} Q_i \text{ und } \sum_{i \in \mathbb{N}} v(Q_i) < \varepsilon$$

(ohne Beweis)

5.12 Proposition

Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader und $A_0, A_1, \ldots \subset Q$ eine Folge messbarer Mengen. Dann ist $\bigcup_{l \in \mathbb{N}} A_l$ messbar.

Beweis
Wende Beppo-Levi an auf

$$\varphi_k := \chi_{\bigcup_{l=0}^k A_l} \qquad \square$$

spätere Variante von Beppo-Levi

5.13 Bemerkung

Wir haben jetzt:

- Beschränkte offene Mengen sind messbar.
- Kompakte Mengen sind messbar.
- beschränkte abzählbare Vereinigungen von messbaren Mengen sind messbar.
- Komplemente messbarer Mengen in beschränkten messbaren Mengen sind messbar.

Frage: Existieren überhaupt (beschränkte) nicht messbare Mengen?

5.14 Satz

$\mathbb{R}$ besitzt[2] eine beschränkte Teilmenge, die nicht messbar ist.

Beweis
Für $x \in [0,1]$ definiere $E_x := \{y \in [0,1] \,|\, x - y \in \mathbb{Q}\} \subset [0,1]$. Dann gilt für $x, x' \in [0,1] : E_x = E_{x'}$ oder $E_x \cap E_{x'} = \emptyset$. ($\exists y \in E_x \cap E_{x'} \iff \exists y \in [0,1] x - y \in \mathbb{Q}$ und $x' - y \in \mathbb{Q} \iff x - x' \in \mathbb{Q} \iff E_x = E_{x'}$).
Es gilt $[0,1] = \bigcup_{x \in [0,1]} E_x$.

Setze $A := \{E \,|\, E = E_x$ für ein $x \in [0,1]\} \subset \mathcal{P}([0,1])$. Sei $f : A \to [0,1] = \bigcup_{E \in A} E$ eine Funktion mit $f(E) \in E$, $E \in A$. f existiert nach dem Auswahlaxiom. Setze $M := f(A) \subset [0,1]$. Sei $J := \mathbb{Q} \cap [-1,1]$, dann ist J abzählbar, d.h. es existiert $(j_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit $J = \{j_0, j_1, \ldots\}$ und $j_i \neq j_{i'}$ für $i \neq i'$. Setze $M_i := M + j_i = \{y + j_i \,|\, y \in M\} \subset [-1,2]$.
Behauptungen:

(i) $[0,1] \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_i = \{y + j_i \,|\, y \in M, i \in \mathbb{N}\}$

(ii) $M_i \cap M_{i'} = \emptyset$ falls $i \neq i'$

Beweis:

(i) $x \in [0,1]$, dann ist $f(E_x) \in E_x$, d.h. $x - f(E_x) \in \mathbb{Q} \cap [-1,1] = J$. Also ist $x - f(E_x) = j_i$ für ein $i \in \mathbb{N}$. Daraus folgt $x = f(E_x) + j_i \in M_i$.

(ii) Falls $z \in M_i \cap M_{i'}$, $i \neq i'$, so gilt $z = y + j_i$, $z = y' + j_{i'}$ für $y, y' \in M$, $j_i \neq j_{i'}$. Es gilt $y = f(E_x) \in E_x$, $y' = f(E_{x'}) \in E_{x'}$, $x, x' \in [0,1]$. Es folgt $y - y' \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]$ und $E_x \cap E_{x'} \neq \emptyset$, also $E_x = E_{x'}$. Andererseits $j_i \neq j_{i'}$, also $y \neq y'$

Wir haben nun $[0,1] \subset \dot{\bigcup}_{i \in \mathbb{N}} M_i \subset [-1,2]$. Angenommen M sei messbar. Wegen Translationsinvarianz ist dann auch M_i messbar, $i \in \mathbb{N}$ und $v(M) = v(M_i)$. Weiter gilt

$$v(M_i) = \int \chi_{M_i} \,\mathrm{d}x = \|\chi_{M_i}\|_1$$

[2] in ZFC

Wegen $[0,1] \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} M_i$ gilt außerdem

$$0 \leqslant \chi_{[0,1]} \leqslant \chi_{\bigcup_{i\in\mathbb{N}} M_i}$$

also

$$1 = v([0,1]) = \int \chi_{[0,1]}\,\mathrm{d}x \overset{4.3}{=} \left\|\chi_{[0,1]}\right\|_1 \leqslant \left\|\sum_{i\in\mathbb{N}} \chi_{M_i}\right\|_1 \overset{3.9}{\leqslant} \sum_{i\in\mathbb{N}} \|\chi_{M_i}\|_1 = \sum_{i\in\mathbb{N}} v(M)$$

$\Rightarrow v(M) > 0$. Wähle $K \in \mathbb{N}$ so groß, dass $(K+1)\cdot v(M) > 3$ ist, dann

$$3 < (K+1)\cdot v(M) = \sum_{i=0}^{K} v(M_i) = v\Big(\dot{\bigcup_{i=0}^{K}}\Big) \leqslant v([-1,2]) = 3 \quad ↯ \qquad \square$$

5.15 Satz

Parallelotope hatten wir auch schon in LA2

Seien $\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_n \in \mathbb{R}^n$. Setze

$$P(\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_n) := \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \exists t_1,\dots,t_n \in [0,1] : \underline{x} = \sum_{i=1}^{n} t_i \cdot \underline{x}_i \right\}$$

Dann gilt

$$v\big(P(\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_n)\big) = |\det(\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_n)| = \left|\det\begin{pmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n,1} & \cdots & x_{n,n}\end{pmatrix}\right|$$

Beweis
Sei

$$D : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n}_{n\text{-mal}} \to \mathbb{R}$$

eine Abbildung mit

$(D1)$ $D(\underline{a}_1,\dots,\lambda\underline{a}_i,\dots,\underline{a}_n) = |\lambda|\cdot D(\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_i,\dots,\underline{a}_n)$ für $i \in \{1,\dots,n\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_n \in \mathbb{R}^n$

$(D2)$ $D(\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_i + \underline{a}_j,\dots,\underline{a}_j,\dots,\underline{a}_n) = D(\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_n)$ für $i < j$, $\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_n \in \mathbb{R}^n$

$(D3)$ $D(\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_n) = 1$, wo $\underline{e}_i$ der i-te Einheitsvektor ist.

Für $\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_n \in \mathbb{R}^n$ ist $D(\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_n)$ durch $(D1),(D2),(D3)$ mittels elementaren Spaltenumformungen bestimmt (Vergleiche Charakterisierung der Determinante in der Linearen Algebra). Daraus folgt: Es kann höchstens eine Abbildung mit $(D1),(D2),(D3)$ geben. Andererseits erfüllt

$$(\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_n) \mapsto |\det(\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_n)|$$

$(D1),(D2)$ und $(D3)$. Es genügt zu zeigen: Die Abbildung

$$(\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_n) \mapsto v\big(P(\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_n)\big)$$

erfüllt $(D1),(D2),(D3)$.

- $(D3)$: $v\big(P(\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_n)\big) = 1^n = 1$
- Falls $\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_n$ linear abhängig sind, dann gilt

  $$v\big(P(\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_n)\big) \overset{\text{Übung}}{=} 0 = |\det(\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_n)|$$

  und $(D1),(D2)$ sind erfüllt.

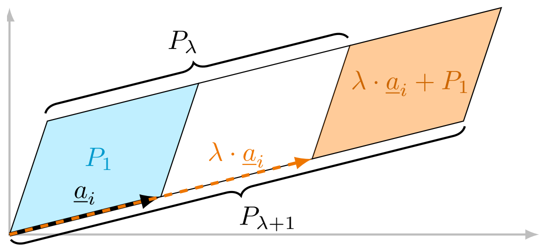
Seien also $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ linear unabhängig.

$(D1):$ Für $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ setze $P_\lambda := P(\underline{a}_1, \ldots, \lambda \cdot \underline{a}_i, \ldots, \underline{a}_n)$; wir wollen

$$v(P_\lambda) = |\lambda| \cdot v(P_1)$$

zeigen:

a) Zunächst für $\lambda \in \mathbb{N}^*$:
$\lambda = 1$ ✓
$\lambda \mapsto \lambda + 1$: Es gilt $P_{\lambda+1} = P_\lambda \cup (\lambda \cdot \underline{a}_i + P_1)$



Weiter gilt $P_\lambda \cap (\lambda \cdot \underline{a}_i + P_1) \subset \lambda \cdot \underline{a}_i + \operatorname{span}\{\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_i, \ldots, \underline{a}_n\}$ mit $\dim \leqslant n - 1$. Also ist

$$v\big(P_\lambda \cap (\lambda \cdot \underline{a}_i + P_1)\big) = 0$$

Also folgt

$$\begin{aligned} v(P_{\lambda+1}) &= v(P_\lambda) + v(\lambda \cdot \underline{a}_i + P_1) - v(P_\lambda \cap \lambda \cdot \underline{a}_i + P_1) = v(P_\lambda) + v(P_1) - 0 \\ &\overset{\text{(I.V.)}}{=} \lambda \cdot v(P_1) + v(P_1) = (\lambda + 1) \cdot v(P_1) \end{aligned}$$

Induktion $\rightsquigarrow$ $(\star)$ für $\lambda \in \mathbb{N}^*$. Ebenso zeigt man $v(P_{q \cdot \lambda}) = q \cdot v(P_\lambda)$, $q \in \mathbb{N}^*, \lambda \in \mathbb{R}$

b) Jetzt für $\lambda = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}^*$:
Nach a) gilt $v(P_{q \cdot \lambda}) = v(P_p) = p \cdot v(P_1)$ und $v(P_{q \cdot \lambda}) = q \cdot v(P_\lambda)$, also

$$p \cdot v(P_1) = q \cdot v(P_\lambda) \implies v(P_\lambda) = \frac{p}{q} \cdot v(P_1) = |\lambda| \cdot v(P_1).$$

c) $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$: Zu $\varepsilon > 0$ wähle $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}_+^*$ mit $r_1 \leqslant \lambda \leqslant r_2$ und $r_2 - r_1 < \frac{\varepsilon}{v(P_1)}$.
(Da $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ linear unabhängig, enthält $P_1 = P(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n)$ einen offenen Quader, also ist $v(P_1) > 0$).
Dann gilt $P_{r_1} \subset P(\lambda) \subset P_{r_2}$ und

$$v(P_{r_1}) \leqslant v(P_\lambda) \leqslant v(P_{r_2})$$

und

$$r_1 \cdot v(P_1) \leqslant \lambda \cdot v(P_1) \leqslant r_2 \cdot v(P_1)$$

Wir erhalten

$$|v(P_\lambda) - \lambda \cdot v(P_1)| \leqslant r_2 \cdot v(P_1) - r_1 \cdot v(P_1) = (r_2 - r_1) \cdot v(P_1) < \varepsilon$$

Also $v(P_\lambda) = \lambda \cdot v(P_1), \lambda \in \mathbb{R}_+^*$

d) $\lambda = 0$: P_0 liegt in einer Hyperebene. Nach einer Übung folgt dann

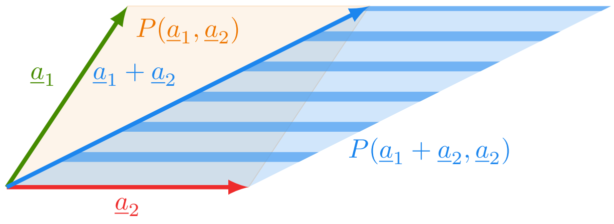
$$v(P_0) = 0 = 0 \cdot v(P_1)$$

e) $\lambda < 0$: $P_\lambda = \lambda \cdot \underline{a}_i + P_{-\lambda}$ und wegen Translationsinvarianz (4.7) gilt dann

$$v(P_\lambda) = v(P_{-\lambda}) = (-\lambda) \cdot v(P_1) = |\lambda| v(P_1)$$

Es folgt $(\star)$ für $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow D1$

$(D2):$ (nur Idee)



geschickte Zerlegung + Translationsinvarianz

5.16 Corollar

Sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear und $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader. Dann gilt

$$v\big(T(Q)\big) = |\det T| \cdot v(Q)$$

Beweis
O.E. $Q \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen. Es gibt $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ mit $Q = \underline{a} + P(\alpha \cdot \underline{e}_1, \ldots, \alpha_n \cdot \underline{e}_n)$. Dann ist $v(Q) = v\big(P(\alpha \cdot \underline{e}_1, \ldots, \alpha_n \cdot \underline{e}_n)\big) = |\alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_n|$ und

$$T(Q) = T(\underline{a}) + T\big(P(\alpha \cdot \underline{e}_1, \ldots, \alpha_n \cdot \underline{e}_n)\big) = T(\underline{a}) + P\big(\alpha \cdot T(\underline{e}_1), \ldots, \alpha_n \cdot T(\underline{e}_n)\big)$$

Also

$$v\big(T(Q)\big) \overset{\text{D1}}{=} |\alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_n| \cdot P\big(T(\underline{e}_1), \ldots, T(\underline{e}_n)\big) = |\alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_n| \cdot |\det T| \qquad \square$$

6 $L^1(\mathbb{R}^n)$-Konvergenzsätze

$\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ Raum der integrierbaren Funktionen

6.1 Proposition

$$\mathcal{N} = \left\{ f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \,\middle|\, \|f\|_1 = 0 \right\}$$

ist ein Untervektorraum von $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$.

Beweis
folgt aus $\|\alpha f + \beta g\|_1 \leqslant |\alpha| \cdot \|f\|_1 + |\beta| \cdot \|g\|_1$

6.2 Definition

$$L^1(\mathbb{R}^n) = {}^{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)}/_{\mathcal{N}}$$

ist ein Quotientenvektorraum versehen mit der Norm

$$\|f + \mathcal{N}\|_1 := \|f\|_1$$

Falls $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, so schreiben wir $[f]$ oder nur f für $f + \mathcal{N}$.

6.3 Satz (Riesz-Fischer)

$L^1(\mathbb{R}^n)$ ist vollständig. Ist $([f_k])_{k\in\mathbb{N}} \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ eine Cauchyfolge mit Limes $[f]$, so existiert eine Teilfolge $(f_{k_\nu})_{\nu\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ mit $f_{k_\nu} \xrightarrow{\nu\to\infty} f$ punktweise fast überall und:

$$\lim_{k\to\infty} \int f_k \,\mathrm{d}x = \int f \,\mathrm{d}x$$

Beweis
Sei $([f_k])k \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ Cauchy, d.h. $(f_k)_k \subset \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ erfüllt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall m, n \geqslant N : \|f_m - f_n\|_1 < \varepsilon$$

Wähle Indizes $k_0 < k_1 < \ldots$ mit

$$\|f_k - f_{k_\nu}\|_1 \leqslant 2^{-(\nu+1)} \qquad \text{falls } k \geqslant k_\nu.$$

Es gilt dann $\sum_{\nu=0}^{\infty} \left\| f_{k_{\nu+1}} - f_{k_\nu} \right\|_1 \leqslant 1$. Setze

$$g_\nu := f_{k_{\nu+1}} - f_{k_\nu}$$
$$g := \sum_{y=0}^{\infty} |g_\nu|$$

Dann sind $g_\nu \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n), g : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ und $\|g\|_1 \leqslant 1$ (nach 3.9). Nach 5.8 ist g fast überall endlich, d.h. $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) = \infty\}$ ist eine Nullmenge. Es folgt, dass die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu(x)$ absolut konvergiert für $x \in \mathbb{R}^n \setminus M$. Definiere $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} f_{k_0}(x) + \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu(x) = \lim_{\nu\to\infty} f_{k_\nu}(x), & \text{falls } x \notin M \\ 0, & \text{falls } x \in M \end{cases}$$

Teleskopsumme

Noch zu zeigen: f ist integrierbar, $\|f_k - f\|_1 \xrightarrow{k\to\infty} 0$ und ($\star$).
Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\sigma \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{\nu=\sigma}^{\infty} \|g_\nu\|_1 < \varepsilon \quad \text{und} \quad \|f_k - f_{k_\sigma}\|_1 < \varepsilon \ \forall k \geqslant k_\sigma$$

Sei $\varphi \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$ mit $\|f_{k_\sigma} - \varphi\|_1 < \varepsilon$. Dann gilt

$$\|f - \varphi\|_1 \leqslant \|f - f_{k_\sigma}\|_1 + \|f_{k_\sigma} - \varphi\|_1 \leqslant 2\varepsilon$$

Es gilt weiter

$$f(x) = f_{k_0}(x) + \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu(x) = f_{k_\sigma}(x) + \sum_{\nu=\sigma}^{\infty} g_\nu(x)$$

$$\implies f - f_{k_\sigma} = \sum_{\nu=\sigma}^{\infty} g_\nu$$

$\Rightarrow f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Für $k \geqslant k_\sigma$ gilt

$$\|f - f_k\|_1 \leqslant \|f - f_{k_\sigma}\|_1 + \|f_{k_\sigma} - f_k\|_1 \leqslant \varepsilon + \varepsilon$$

d.h. $\|f - f_k\|_1 \xrightarrow{k\to\infty} 0$. Trivialerweise gilt $f_{k_\nu} \to f$ punktweise fast überall (für $x \notin M$). Für ($\star$):

$$\left|\int f \,\mathrm{d}x - \int f_k \,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int |f - f_k| \,\mathrm{d}x = \|f - f_k\|_1 \xrightarrow{k\to\infty} 0 \qquad \square$$

6.4 Korollar

[3] Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Dann existiert $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$ mit:

(i) $\|f - \varphi_\nu\|_1 \xrightarrow{\nu\to\infty} 0$

(ii) $\sum_{\nu=0}^{\infty} \|\varphi_{\nu+1} - \varphi_\nu\|_1 < \infty$

(iii) $\varphi_\nu \xrightarrow{\nu\to\infty} f$ punktweise, fast überall

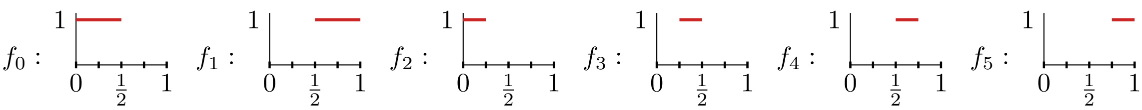
Beweis
Da $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ existiert $(\psi_k)_k \subset \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$ mit $\|f - \psi_k\|_1 \xrightarrow{k\to\infty} 0$. Dann gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall m, n \geqslant N : \|\psi_n - \psi_m\|_1 < \varepsilon$$

Nach Beweis von 6.3 existiert eine Teilfolge $(\psi_{k_\nu})_\nu$ mit $\sum_{\nu=0}^{\infty} \left\|\psi_{k_{\nu+1}} - \psi_{k_\nu}\right\|_1 \leqslant 1$ und so dass $\psi_{k_\nu} \xrightarrow{\nu\to\infty} \tilde{f}$ punktweise fast überall. Dann gilt $f = \tilde{f}$ fast überall (da $\left\|f - \tilde{f}\right\|_1 = 0$). Also auch $\psi_{k_\nu} \xrightarrow{\nu\to\infty} f$ fast überall. $\square$

6.5 Bemerkung

Der Übergang zu einer Teilfolge in 6.3 ist wesentlich. Betrachte dazu



…Dann gilt: $\|f_k - 0\|_1 \xrightarrow{k\to\infty} 0$, aber es gibt *kein* $x \in [0,1]$ mit $f_k(x) \xrightarrow{k\to\infty} 0$. Wie sieht eine Teilfolge $(f_{k_\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$ aus mit $f_{k_\nu} \xrightarrow{\nu\to\infty} 0$ fast überall?

[3] Ist $\|f - g\|_1 = 0$ für $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, dann gilt $f(x) = g(x)$ fast überall

6.6 Satz (Beppo-Levi)

Sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge integrierbarer Funktionen. $f_k : \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$, so dass $(\int f_k \,\mathrm{d}x)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ beschränkt ist. Sei $f : \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$ der punktweise Limes, d.h. $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$. Dann ist f integrierbar und

$$\lim_{k\to\infty} \int f_k \,\mathrm{d}x = \int f \,\mathrm{d}x$$

Beweis
Es ist $f_k \leqslant f_{k+1}$, also $\int f_k \,\mathrm{d}x \leqslant \int f_{k+1} \,\mathrm{d}x$, d.h. die Folge $(\int f_k \,\mathrm{d}x)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ ist monoton wachsend und beschränkt, also konvergent. Also gilt auch

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall m, k \geqslant N : \left| \int f_k \,\mathrm{d}x - \int f_m \,\mathrm{d}x \right| < \varepsilon$$

Falls $m \geqslant k \geqslant N$, dann

$$\|f_m - f_k\|_1 = \int |f_m - f_k| \,\mathrm{d}x = \int (f_m - f_k) \,\mathrm{d}x = \int f_m \,\mathrm{d}x - \int f_k \,\mathrm{d}x \leqslant \left| \int f_m \,\mathrm{d}x - \int f_k \,\mathrm{d}x \right|$$

Damit folgt: $([f_k])_k \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ ist Cauchy. Sei $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ eine Funktion mit $\left\| f_k - \tilde{f} \right\|_1 \xrightarrow{k\to\infty} 0$ (existiert nach 6.3). Nach 6.3 gibt es eine Teilfolge $(f_{k_\nu})_\nu$ mit $f_{k_\nu} \xrightarrow{\nu\to\infty} \tilde{f}$ fast überall und

$$\lim_{\nu\to\infty} \int f_{k_\nu} \,\mathrm{d}x = \int \tilde{f} \,\mathrm{d}x$$

$\Rightarrow f = \tilde{f}$ fast überall. Daher $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ und

$$\int f \,\mathrm{d}x = \int \tilde{f} \,\mathrm{d}x = \lim_{\nu\to\infty} \int f_{k_\nu} \,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int f_k \,\mathrm{d}x \qquad \square$$

6.7 Corollar

a) Seien $A_1 \subset A_1 \subset \ldots \subset \mathbb{R}^n$ messbar. Dann ist $\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$ messbar genau dann, wenn die Folge $\big(v(A_k)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist; in diesem Fall ist

$$v\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \right) = \sup_k v(A_k)$$

b) Seien $B_0, B_1, \ldots \subset \mathbb{R}^n$ messbar so dass $B_i \cap B_j$ Nullmengen sind für $i \neq j$. Dann ist $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k$ messbar genau dann wenn $\sum_{k=0}^{\infty} v(B_k) < \infty$; in diesem Fall ist

$$v\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} v(B_k)$$

Beweis

a) Beppo-Levi mit $f_k := \chi_{A_k}$,

$$f = \lim_{k\to\infty} f_k = \chi_{\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k}$$

b) folgt aus a) mit $A_k := \bigcup_{i=0}^{k} B_i$ und

$$v(A_k) = \sum_{i=0}^{k} v(B_i) \qquad \square$$

6.8 Bemerkung

Setze $\Lambda := \{E \,|\, E \subset \mathbb{R}^n \text{ messbar}\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. Die Abbildung $v : \Lambda \to \mathbb{R}_+$ heißt auch **Lebesgue-Maß** und es gilt:

(M0) Λ enthält alle kompakten und beschränkten offenen Mengen.

(M1) $A, B \in \Lambda$, $A \subseteq B \Longrightarrow v(A) \leqslant v(B)$.

(M2) Für $a \in \mathbb{R}^n$, $E \in \Lambda$ ist $a + E \in \Lambda$ und $v(a + E) = v(E)$.

(M3) Für $B_0, B_1, \ldots \in \Lambda$ paarweise disjunkt mit $\sum_{k\in\mathbb{N}} v(B_k) < \infty$ ist $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k \in \Lambda$ und es gilt

$$v\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} v(B_k).$$

(M4) $v(\emptyset) = 0$ und $v([0, 1]^n) = 1$.

Man kann zeigen: Das Lebesgue-Maß ist durch diese Eigenschaften eindeutig bestimmt.

6.9 Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz

Sei $f_k : \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty], k \in \mathbb{N}$ eine Folge integrierbarer Funktionen. Sei $f : \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$ eine weitere Funktion mit $f_k \xrightarrow{k\to\infty} f$ punktweise fast überall. Sei $F : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ integrierbar mit $F \geqslant |f_k|, k \in \mathbb{N}$. Dann ist f integrierbar und es gilt

$$\int f \,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int f_k \,\mathrm{d}x$$

Beweis

warum? Mittels Proposition 5.8 dürfen wir annehmen, dass f_k, F nur Werte in $\mathbb{R}$ annehmen. Wir dürfen außerdem annehmen, dass $f_k \to f$ punktweise überall.

Setze

$$g_{k,\nu} := \max\{f_k, \ldots, f_{k+\nu}\} \quad , \quad g_k := \sup_{i\geqslant k} f_i \qquad k, \nu \in \mathbb{N}$$

Dann sind $g_{k,\nu}, g_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $g_{k,\nu} \xrightarrow{\nu\to\infty} g_k$ punktweise monoton wachsend. Die $g_{k,\nu}$ sind integrierbar und $\int g_{k,\nu} \,\mathrm{d}x \leqslant \int F \,\mathrm{d}x < \infty$. Mit Beppo-Levi (6.6) folgt: g_k ist integrierbar und es gilt

$$\int g_k \,\mathrm{d}x = \lim_{\nu\to\infty} \int g_{k,\nu} \,\mathrm{d}x$$

Weiter gilt $\left|\int g_{k,\nu} \,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int F \,\mathrm{d}x$, also auch $\left|\int g_k \,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int F \,\mathrm{d}x$, $k \in \mathbb{N}$. Es gilt $g_k \xrightarrow{k\to\infty} f$ punktweise monoton fallend, also $-g_k \xrightarrow{k\to\infty} -f$ punktweise monoton wachsend. Da

$$\int -g_k \,\mathrm{d}x \leqslant \left|\int g_k \,\mathrm{d}x\right| \leqslant \left|\int F \,\mathrm{d}x\right| < \infty$$

ist $(\int -g_k \,\mathrm{d}x)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt und wieder nach Beppo-Levi (6.6) ist $-f$ integrierbar mit

$$\int -f \,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int g_k \,\mathrm{d}x \implies \int f \,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int g_k \,\mathrm{d}x$$

Definiere nun

$$h_{k,\nu} := \min\{f_k, \ldots, f_{k+\nu}\} \quad , \quad h_k := \inf_{i\geqslant k} f_i \qquad k, \nu \in \mathbb{N}$$

Dann gilt $h_{k,\nu} \xrightarrow{\nu\to\infty} h_k$ punktweise monoton fallend und $h_k \xrightarrow{k\to\infty} f$ punktweise monoton wachsend. Wie oben zeigt man

$$\int f \, \mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int h_k \, \mathrm{d}x$$

Wegen $h_k \leqslant f_k \leqslant g_k$ gilt

$$\int f \, \mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int h_k \, \mathrm{d}x \leqslant \lim_{k\to\infty} \int f_k \, \mathrm{d}x \geqslant \lim_{k\to\infty} \int g_k \, \mathrm{d}x = \int f \, \mathrm{d}x$$

□

6.10 Corollar

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ messbar, $f_k : A \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ beschränkte Folge integrierbarer Funktionen. Falls $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ punktweise fast überall gegen $f : A \to \mathbb{R}$ konvergiert, so ist f integrierbar und es gilt

$$\int_A f \, \mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int_A f_k \, \mathrm{d}x$$

Beweis
Mit 6.9 und χ_A mal der Konstanten aus der Beschränktheit als Majorante. □

6.11 Corollar

Sei $f : [a, x] \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit beschränkter Ableitung f'. Dann ist f' Lebesgue-integrierbar und so gilt

$$f(x) - f(a) = \int_{[a,x]} f' \, \mathrm{d}x$$

Beweis

- f ist differenzierbar, also stetig. Definiere $f_k : [a, x] \to \mathbb{R}$ durch

$$f_k(t) := \begin{cases} (k+1) \cdot \Big(f\big(t + \frac{1}{k+1}\big) - f(t)\Big), & \text{falls } t \in [a, x - \frac{1}{k+1}] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

vgl. Differenzenquotient

  Dann gilt $f_k \xrightarrow{k\to\infty} f'$ punktweise auf $[a, x)$.

- $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt: Nach Mittelwertsatz existiert ein $s \in (t, t + \frac{1}{k+1})$ mit

$$\frac{f\big(t + \frac{1}{k+1}\big) - f(t)}{\frac{1}{k+1}} = f'(s),$$

  also gilt $|f_k(t)| \leqslant \sup\{|f'(r)| \mid r \in [a, x]\} < \infty$ (dieses Supremum hängt nicht von k oder t ab).

- f_k ist integrierbar: f_k ist stetig auf $[a, x - \frac{1}{k+1}]$ und konstant 0 auf $(x - \frac{1}{k+1}, x]$, also Regelfunktion (warum?). Es gilt

$$\int_a^x f_k(t) \, \mathrm{d}t = \frac{1}{\frac{1}{k+1}} \cdot \left(\int_{x-\frac{1}{k+1}}^x f(t) \, \mathrm{d}t - \int_a^{a+\frac{1}{k+1}} f(t) \, \mathrm{d}t \right).$$

  MWS der Integralrechnung (Anal, Satz 13.13) liefert: Es existiert ein $\bar{t}_k \in [x - \frac{1}{k+1}, x]$ mit

$$f(\bar{t}_k) \cdot \frac{1}{k+1} = \int_{x-\frac{1}{k+1}}^x f(t) \, \mathrm{d}t$$

entsprechend für $\overline{s}_k \in [a, a + \frac{1}{k+1}]$. f stetig $\Longrightarrow$

$$\int_a^x f_k(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\frac{1}{k+1}} \cdot \left(\int \ldots - \int \ldots \right) = f(\overline{t}_k) - f(\overline{s}_k) \xrightarrow{k\to\infty} f(x) - f(a)$$

mit 6.10 folgt: f' ist Lebesgue-integrierbar und es gilt

$$\int_{[a,x]} f'\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int_{[a,x]} f_k\,\mathrm{d}t = \lim_{k\to\infty} \int_a^x f_k(t)\,\mathrm{d}t = f(x) - f(a)$$

□

6.12 Definition

$A \subset \mathbb{R}^n$ heißt σ-**kompakt**, falls A abzählbare Vereinigung kompakter Mengen ist.

6.13 Beispiel

Folgende Mengen sind alle σ-kompakt:

- offene Mengen
- abgeschlossene Mengen
- endliche Durchschnitte σ-kompakter Mengen
- abzählbare Vereinigungen σ-kompakter Mengen

6.14 Definition

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ σ-kompakt. Dann heißt $f : A \to (-\infty, \infty]$ **lokal integrierbar**, falls für jedes kompakte $K \subset A$ die Funktion $f|_K : K \to (-\infty, \infty]$ integrierbar ist.

6.15 Corollar (Majorantenkriterium)

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ σ-kompakt, $f : A \to (-\infty, \infty]$ lokal integrierbar. Sei $F : A \to (-\infty, \infty]$ integrierbar mit $F \geqslant |f|$. Dann ist f integrierbar über A.

Beweis
Sei $A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ mit $A_k \subseteq A_{k+1}$ kompakt für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann ist $f|_{A_k}$ integrierbar, also auch

$$f_k := f_A \cdot \chi_{A_k} = (f|_{A_k})_{A_k}$$

es gilt dann $f_k \xrightarrow{k\to\infty} f$ punktweise und $|f_k| \leqslant F$. Mit Satz 6.9 folgt, dass f integrierbar ist. □

7 Der Satz von Fubini

7.1 Lemma

Sei $A \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ eine Nullmenge. Dann existiert eine Nullmenge $B \subset \mathbb{R}^q$ so, dass für jedes $y \in \mathbb{R}^q \setminus B$ die Menge

$$A_y := \{x \in \mathbb{R}^p \,|\, (x,y) \in A\} \subset \mathbb{R}^p$$

eine Nullmenge im $\mathbb{R}^p$ ist.

Beweis
A ist Nullmenge, d.h. $\|\chi_A\|_1 = 0$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert eine Treppe[4] $\Phi = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot \chi_{Q_k}$ über χ_A mit $I(\Phi) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k v(Q_k) < \varepsilon$. Es ist $Q_k = Q'_k \times Q''_k$, wo $Q'_k \subset \mathbb{R}^p$ und $Q''_K \subset \mathbb{R}^q$ offene Quader sind. Definiere $a : \mathbb{R}^q \to (-\infty, \infty]$ durch

$$a(y) := \left\|\chi_{A_y}\right\|_{1,\mathbb{R}^p}$$

Für $x \in \mathbb{R}^p$ gilt

$$\chi_{A_y}(x) \leqslant \chi_A(x,y) \leqslant \Phi(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot \chi_{Q'_k}(x) \cdot \chi_{Q''_k}(y)$$

also $\chi_{A_y} \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot \chi_{Q''_k}(y) \cdot \chi_{Q'_k}$ und nach 3.9 gilt

$$a(y) = \left\|\chi_{A_y}\right\|_1 \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot \chi_{Q''_k}(y) \cdot \left\|\chi_{Q'_k}\right\|_{1,\mathbb{R}^p} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot v(Q'_k) \cdot \chi_{Q''_k}(y),$$

somit $a \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot c(Q'_k) \cdot \chi_{Q''_k} =: \Psi$. Ψ ist Treppe über a. Aber

$$\|a\|_{1,\mathbb{R}^q} \leqslant I(\Psi) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot v(Q'_k) \cdot v(Q''_k) = I(\Phi) < \varepsilon$$

also gilt $\|a\|_{1,\mathbb{R}^q} = 0$. Für $l \in \mathbb{N}$ setze $B_l := \left\{ y \in \mathbb{R}^q \,\middle|\, a(y) \geqslant \frac{1}{l+1} \right\}$. Dann ist $B_l \subset \mathbb{R}^q$ Nullmenge (warum?). Daraus folgt mit 5.7

$$B := \bigcup_{l \in \mathbb{N}} B_l \text{ Nullmenge}$$

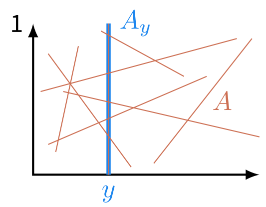
aber $B = \{y \in \mathbb{R}^q \,|\, a(y) > 0\}$ also

$$\forall y \in \mathbb{R}^q \setminus B : 0 = a(y) = \left\|\chi_{A_y}\right\|_1$$

$\Rightarrow A_y$ Nullmenge. $\square$

7.2 Bemerkung

In 7.1 ist es wesentlich, die Nullmenge B auszuschließen:



$A \subset \mathbb{R}^2$ ist eine Nullmenge, aber $A_y = [0,1] \subset \mathbb{R}$ ist keine Nullmenge!

[4] $c_k \in \mathbb{R}_+$, Q_k offene Quader in $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$

7.3 Satz von Fubini

Sei $f : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to (-\infty, \infty]$ integrierbar.

a) Die Funktion $f_y : \mathbb{R}^p \to (-\infty, \infty]$ mit $f_y(x) := f(x,y)$ ist für fast alle $y \in \mathbb{R}^q$ integrierbar, d.h. f_y ist integrierbar für $y \in \mathbb{R}^q \setminus N$, für eine Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^q$.

b) Definiere $F : \mathbb{R}^q \to (-\infty, \infty)$ durch

$$F(y) := \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^p} f_y \,\mathrm{d}x, & \text{falls } y \in \mathbb{R}^q \setminus N \\ 0, & \text{falls } y \in N \end{cases}$$

Dann ist F integrierbar und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q} f(x,y) \,\mathrm{d}(x,y) = \int_{R^q} F(y) \,\mathrm{d}y$$

"Kürzer":

$$\int_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q} f(x,y) \,\mathrm{d}(x,y) = \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f_y(x) \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

Beweis

a) Nach Corollar 6.4 existiert $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q}$ und eine Nullmenge $A \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ mit $\|f - \varphi_k\|_1 \xrightarrow{k\to\infty} 0$ und

(i) $\varphi_k(x,y) \xrightarrow{k\to\infty} f(x,y)$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \setminus A$

(ii) $\sum_{k=0}^{\infty} \|\varphi_{k+1} - \varphi_k\|_1 < \infty$

Nach Lemma 7.1 existiert eine Nullmenge $N' \subset \mathbb{R}^q$ so dass für $y \in \mathbb{R}^q \setminus N'$ gilt:

$$A_y := \{x \in \mathbb{R}^p \mid (x,y) \in A\} \subset \mathbb{R}^p$$

ist eine Nullmenge. Aber für $x \in \mathbb{R}^p \setminus A_y$ gilt $(x,y) \notin A$, also

(iii) Für $y \in \mathbb{R}^q \setminus N'$ gilt

$$(x \mapsto \varphi_k(x,y)) \;\; (\varphi_k)_y \xrightarrow{k\to\infty} f_y \qquad \text{punktweise fast überall, d.h. für } x \in \mathbb{R}^p \setminus A_y$$

Setze

$$H_k(y) := \int_{\mathbb{R}^p} \underbrace{|\varphi_{k+1}(x,y) - \varphi_k(x,y)|}_{\in \mathcal{T}(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q)} \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^p} \underbrace{|(\varphi_{k+1})_y(x) - (\varphi_k)_y(x)|}_{\in \mathcal{T}(\mathbb{R}^p)} \,\mathrm{d}x = \|(\varphi_{k+1})_y - (\varphi_k)_y\|_{1,\mathbb{R}^p}$$

Dann gilt nach Fubini für Treppenfunktionen(3.4):

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^q} H_k(y) \,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} |\varphi_{k+1}(x,y) - \varphi_k(x,y)| \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y &= \int_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q} |\varphi_{k+1} - \varphi_k| \,\mathrm{d}(x,y) \\ &= \|\varphi_{k+1} - \varphi_k\|_{1,\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q}\end{aligned}$$

Nach (ii) gilt dann

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^q} H_k(y) \,\mathrm{d}y < \infty$$

Nun ist $\left(\sum_{k=0}^{i} H_k\right)_{i\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge von integrierbaren Funktionen; die Folge der Integrale $\left(\int_{\mathbb{R}^q}\left(\sum_{k=0}^{i} H_k\right)\mathrm{d}y\right)_{i\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt durch $\sum_{k=0}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^q} H_k(y)\,\mathrm{d}y \overset{(\star)}{<} \infty$. nach Beppo-Levi (6.6) ist dann

$$H := \sum_{k=0}^{\infty} H_k : \mathbb{R}^q \to (-\infty,\infty]$$

integrierbar und nach 5.8 ist H außerhalb einer Nullmenge $N'' \subset \mathbb{R}^q$ endlich. Wir erhalten

(iv) $\sum_{k=0}^{\infty}\|(\varphi_{k+1})_y - (\varphi_k)_y\|_{1,\mathbb{R}^p} = \sum_{k=0}^{\infty} H_k(y) = H(y) < \infty$ für $y \in \mathbb{R}^q \setminus N''$

Setze $N := N' \cup N'' \subset \mathbb{R}^q$.

Für $y \in \mathbb{R}^q \setminus N$ gilt nach (iv): $\left((\varphi_k)_y\right)_{k\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge bezüglich $\|.\|_{1,\mathbb{R}^p}$ also bildet

$$\left([(\varphi_k)_y]\right)_{k\in\mathbb{N}} \subset L^1(\mathbb{R}^p)$$

eine Cauchy-Folge und konvergiert nach 6.3 in $L^1(\mathbb{R}^p)$ gegen ein $[g] \in L^1(\mathbb{R}^p)$ für ein $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^p)$. Ebenfalls nach 6.3 gilt für eine Teilfolge $\left((\varphi_{k_\nu})_y\right)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $(\varphi_{k_\nu})_y \xrightarrow{\nu\to\infty} g$ punktweise fast überall.

Nach (iii) ist dann $g = f_y$ fast überall, also ist f_y integrierbar für $y \in \mathbb{R}^q \setminus N$.

b) Nach Satz 6.3 gilt außerdem für $y \in \mathbb{R}^q \setminus N$

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^p}\varphi_k(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

Wir setzen $\Phi_k(y) := \int_{\mathbb{R}^p}\varphi_k(x,y)\,\mathrm{d}x$, $k \in \mathbb{N}$. Dann ist $\Phi_k \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^q}$ (vgl. Fubini für Treppenfunktionen, 3.4) und es gilt

(v) $\Phi_k \xrightarrow{k\to\infty} F$ punktweise auf $\mathbb{R}^q \setminus N$ (nach $(\star\star)$)

(vi) $\sum_{k=0}^{\infty}\|\Phi_{k+1} - \Phi_k\|_{1,\mathbb{R}^q} \leqslant \sum_{k=0}^{\infty}\|H_k\|_{1,\mathbb{R}^q} = \sum_{k=0}^{\infty}\|\varphi_{k+1} - \varphi_k\|_{1,\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^p} \overset{\text{(ii)}}{<} \infty$.

Wegen (vi) ist $(\Phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchy bzgl. $\|.\|_{1,\mathbb{R}^q}$, also konvergiert nach 6.3 eine Teilfolge $(\Phi_{k_\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$ punktweise fast überall gegen ein $G \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^q)$. Wegen (v) gilt $F = G$ fast überall und F ist integrierbar.

Wieder nach 6.3 gilt

$$\begin{aligned}\int_{R^q} F(y)\,\mathrm{d}y &\overset{6.3}{=} \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^q}\Phi_k(y)\,\mathrm{d}y \overset{3.4}{=} \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q}\varphi_k(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)\\ &\overset{4.2}{=} \int_{\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)\end{aligned}$$ □

7.4 Satz von Tonelli

Sei $f : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to (-\infty,\infty]$ lokal integrierbar. f ist genau dann integrierbar, wenn wenigstens eines der Integrale

$$\int_{\mathbb{R}^q}\left(\int_{\mathbb{R}^p}|f(x,y)|\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \quad (\star) \quad , \quad \int_{\mathbb{R}^p}\left(\int_{\mathbb{R}^q}|f(x,y)|\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \quad (\star\star)$$

existiert. In diesem Fall gilt die Formel aus 7.3.

Beweis
"⇒": f integrierbar $\Rightarrow |f|$ integrierbar; Existenz von $(\star)$ und $(\star\star)$ folgt aus 7.3.

"⇐": Nach 6.15 genügt es zu zeigen, dass $|f|$ integrierbar ist. Sei $W_k := [-k,k]^p \times [-k,k]^q$; setze

$$f_k := \min\{|f|, |f| \cdot \chi_{W_k}\}, k \in \mathbb{N}$$

Dann konvergiert $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ punktweise monoton wachsend gegen $|f|$. Außerdem gilt

$$0 \leqslant \int_{\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q} f_k(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) \overset{7.3}{=} \int_{\mathbb{R}^q}\left(\int_{\mathbb{R}^p} f_k(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \leqslant \int_{\mathbb{R}^q}\left(\int_{\mathbb{R}^p} |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \overset{\text{falls } (\star) \text{ ex.}}{<} \infty$$

$\Rightarrow \left(\int_{\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^p} f_k(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Mit Beppo-Levi (6.6) folgt $|f|$ ist integrierbar. □

7.5 Beispiel

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x-y}{(x+y)^3}, & \text{falls } x+y \neq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

ist nicht integrierbar über $[0,1]\times[0,1]$, und

$$\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \neq \int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

Beweis
Übung.

Exkurs: Die Gammafunktion

7.6 Proposition/Definition

Für $x > 0$ ist $(t \mapsto t^{x-1}e^{-t})$ integrierbar über $(0,\infty)$. Wir definieren die **Gammafunktion**

$$\Gamma(x) := \int_{(0,\infty)} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

Beweis

1. $0 \leqslant t^{x-1}e^{-t} \leqslant t^{x-1}$. t^{x-1} ist integrierbar über $(0,1]$, denn

$$\int_{(0,1]} t^s\,\mathrm{d}t \overset{6.6}{=} \lim_{k\to\infty}\int_{[\frac{1}{k+1},1]} t^s\,\mathrm{d}t = \lim_{k\to\infty}\int_{\frac{1}{k+1}}^1 t^s\,\mathrm{d}t = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{1}{s+1}t^{s+1}\right|_{\frac{1}{k+1}}^1 = \frac{1}{s+1} \qquad \text{für } s > -1$$

2. $0 \leqslant t^{x-1}e^{-t} \leqslant \frac{1}{t^2}$, falls $t \geqslant t_0$ für ein geeignetes t_0, denn $t^2 \cdot t^{x-1}e^{-t} \xrightarrow{t\to\infty} 0$. Aber $\frac{1}{t^2}$ ist integrierbar über $[t_0,\infty)$, also auch $t^{x-1}e^{-t}$.

3. $t^{x-1}e^{-t}$ist stetig, also auch integrierbar auf $[1,t_0]$. □

7.7 Proposition

Für $x > 0$ gilt $\Gamma(x+1) = x\cdot\Gamma(x)$. Weiter gilt $\Gamma(1) = 1$, also $\Gamma(n+1) = n!$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Beweis

1.)

$$\Gamma(x+1) = \int_{(0,\infty)} t^{x+1-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t \overset{6.6}{=} \lim_{k\to\infty}\int_{\frac{1}{k+1}}^{k} t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t = \lim_{k\to\infty}\left(-t^x e^{-t}\Big|_{\frac{1}{k+1}}^{k} + \int_{\frac{1}{k+1}}^{k} x\cdot t^{x-1}\cdot e^{-t}\,\mathrm{d}t\right)$$

$$= x\cdot \lim_{k\to\infty}\int_{\frac{1}{k+1}}^{k} t^{x-1}e^{-t}$$

$$= x\cdot\int_{(0,\infty)} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t = x\cdot\Gamma(x)$$

2.) $\Gamma(1) = \int_{(0,\infty)} e^{-t}\,\mathrm{d}t = 1$.

3.) $\Gamma(n+1) = n!$ nach Induktion. □

7.8 Satz

Für $x > 0$ gilt

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{n!\cdot n^x}{x\cdot(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n)}$$

Beweis

Es ist $e^{-t} = \lim_{n\to\infty}(1-\frac{t}{n})^n$ für $t>0$ (Analysis I). Die Folge ist monoton wachsend in n. Setze

$$f_n(t) := \begin{cases} t^{x-1}\cdot(1-\frac{t}{n})^n, & \text{falls } 0<t\leqslant n\\ 0, & \text{sonst}\end{cases}$$

Dann gilt für $t\in(0,\infty)$: $f_n(t)\to t^{x-1}e^{-t}$ monoton wachsend. Wir erhalten für $x>0$

$$\Gamma(x) = \int_{(0,\infty)} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t \overset{n\to\infty}{\longleftarrow} \int_{(0,\infty)} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{k\to\infty}\int_{\frac{1}{k+1}}^{n} t^{x-1}\cdot\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\mathrm{d}t$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left(\frac{t^x}{x}\cdot\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\Bigg|_{\frac{1}{k+1}}^{n} + \int_{\frac{1}{k+1}}^{n}\frac{t^x}{x}\cdot\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}\mathrm{d}t\right)$$

$$= 0 + \lim_{k\to\infty}\left(\frac{t^{x+1}}{(x+1)x}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}\Bigg|_{\frac{1}{k+1}}^{n} - \int_{\frac{1}{k+1}}^{n}\frac{t^{x+1}}{(x+1)x}\cdot\frac{n-1}{n}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-2}\mathrm{d}t\right)$$

$$= 0 + \frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{(x+1)x}\cdot\int_0^n t^{x+1}\cdot\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-2}\mathrm{d}t = \ldots$$

$$= \frac{(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 1}{n\cdot n\cdot\ldots\cdot n}\cdot\frac{1}{x\cdot(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n-1)}\cdot\int_0^n t^{x+n+1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-n}$$

$$= \frac{n!\cdot n^x}{x\cdot(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n-1)}$$ □

7.9 Corollar

$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

Das ist ein Knaller!

Beweis

$$
\begin{aligned}
\Gamma(\frac{1}{2})^2 &= \lim_{n\to\infty} \frac{n!\cdot n^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2})\cdot\ldots\cdot(n+\frac{1}{2})}\cdot\frac{n!\cdot n^{\frac{1}{2}}}{(1-\frac{1}{2})\cdot(2-\frac{1}{2})\cdot\ldots\cdot(n-\frac{1}{2})(n+\frac{1}{2})}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot(n!)^2\cdot n}{(n+\frac{1}{2})\cdot(1^2-\frac{1}{4})(2^2-\frac{1}{4})\cdot\ldots\cdot(n^2-\frac{1}{4})}\\
&= 2\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+\frac{1}{2}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2}{(1^2-\frac{1}{4})\cdot\ldots\cdot(n^2-\frac{1}{4})}\\
&= 2\cdot\lim_{n\to\infty}\underbrace{\prod_{k=1}^{n}\frac{k^2}{k^2-\frac{1}{4}}}_{=:c_n}
\end{aligned}
$$

Setze $A_m := \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m t\,\mathrm{d}t$. Dann gilt $A_0 = \frac{\pi}{2}, A_1 = 1$, $A_m = \frac{m-1}{m}A_{m-2}, m \geqslant 2$ (partielle Integration). Induktion $\rightsquigarrow$

$$
\begin{aligned}
A_{2n} &= \frac{(2n-1)(2n-3)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 1}{2n\cdot(2n-2)\cdot\ldots\cdot 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}\\
A_{2n+1} &= \frac{2n\cdot(2n-2)\cdot\ldots\cdot 4\cdot 2}{(2n+1)\cdot(2n-1)\cdot\ldots\cdot 5\cdot 3}\cdot 1
\end{aligned}
$$

Es gilt $\sin^{2n+2} t \leqslant \sin^{2n+1} t \leqslant \sin^{2n} t$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, also

$$A_{2n+2} \leqslant A_{2n+1} \leqslant A_{2n}.$$

Damit gilt dann $\frac{A_{2n+2}}{A_{2n}} = \frac{2n+1}{2n+2} \xrightarrow{n\to\infty} 1$, also

$$1 \xleftarrow{\infty\leftarrow n} \frac{A_{2n+2}}{A_{2n}} \leqslant \underbrace{\frac{A_{2n+1}}{A_{2n}}}_{=\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{4k^2}{4k^2-1}\right)\cdot\frac{2}{\pi}=c_n\cdot\frac{2}{\pi}\to 1} \leqslant \frac{A_{2n}}{A_{2n}} = 1$$

Also $c_n \xrightarrow{n\to\infty} \frac{\pi}{2}$, woraus die Behauptung folgt. □

7.10 Beispiel

Es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|_2^2}\,\mathrm{d}x = \pi^{\frac{n}{2}} \quad \text{insbesondere} \quad \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \pi^{\frac{1}{2}}$$

Beweis

Mit $n = t^2$, $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} = 2t, \mathrm{d}t = \frac{n^{-\frac{1}{2}}}{2}\,\mathrm{d}n$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \overset{?}{=} 2\cdot\int_{(0,\infty)} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{(0,\infty)} n^{-\frac{1}{2}}e^{-n}\,\mathrm{d}n = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Weiter gilt nach Fubini (7.3) und Tonelli (7.4)

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|_2^2}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)}\mathrm{d}(x_1,\ldots,x_n) &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)}\,\mathrm{d}x_1\right)\mathrm{d}(x_2,\ldots,x_n)\\
&= \int_{R^{n-1}}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x_1^2}\,\mathrm{d}x_1\right)e^{-(x_2^2+\ldots+x_n^2)}\mathrm{d}(x_2,\ldots,x_n)\\
&= \ldots = (\pi^{\frac{1}{2}})^n = \pi^{\frac{n}{2}}
\end{aligned}
$$

□

7.11 Beispiel

Für das Kugelvolumen im $\mathbb{R}^n$ gilt

$$v\Big(B_{\mathbb{R}^n}(0,R)\Big) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}} \cdot R^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Beweis
Übung (vgl. Beispiel 5.4) □

7.12 Beispiel

Wir definieren die **Euler'sche Betafunktion** $B : (0,\infty)\times(0,\infty) \to \mathbb{R}_+$ durch

$$B(x,y) := \int_{(0,1)} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t \overset{\text{Subs. } t=1/(1+u)}{=} \int_{(0,\infty)} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\,\mathrm{d}u$$

(Warum existiert das Integral?)
Behauptung:

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\cdot\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

Beweis
Mit Substitution $t = R\cdot s$, $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = R$

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty (R\cdot s)^{z-1}e^{-Rs}\cdot R\,\mathrm{d}s = R^z\int_0^\infty s^{z-1}e^{-Rs}\,\mathrm{d}s$$

Dann gilt für $z = x+y, R = 1+u$

$$\begin{aligned}
&\rightsquigarrow \frac{1}{\Gamma(x,y)}\cdot\int_0^\infty t^{x+y-1}e^{-(1+u)t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(1+u)^{x+y}}\\
&\rightsquigarrow B(x,y) = \frac{1}{\Gamma(x+y)}\cdot\int_0^\infty u^{x-1}\left(\int_0^\infty t^{x+y-1}e^{-(1+u)t}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u\\
&\qquad = \frac{1}{\Gamma(x+y)}\int_0^\infty\left(\int_0^\infty u^{x-1}t^{x+y-1}e^{-(1+u)t}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u\\
&\qquad = \frac{1}{\Gamma(x+y)}\cdot\int_0^\infty\left(\int_0^\infty u^{x-1}t^{x+y-1}e^{-(1+u)t}\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t\\
&\qquad = \frac{1}{\Gamma(x+y)}\cdot\int_0^\infty t^{x+y-1}e^{-t}\cdot\left(\int_0^\infty u^{x-1}e^{-ut}\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Substitution $ut = s$

$$= \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+y)}\cdot\int_0^\infty t^{y-1}e^{-t} = \frac{\Gamma(x)\cdot\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$ □

7.13 Beispiel (Dirichlet)

Sei $\triangle := \{(x,y) \in (0,\infty) \times (0,\infty) \,|\, x+y<1\}$ das **Standardsimplex** im $\mathbb{R}^2$ und $f : \triangle \to \mathbb{R}_+$ gegeben durch $f(x,y) := x^{p-1} \cdot y^{q-1}$, $p,q>0$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_\triangle f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{(0,1)} \left(\int_{(0,1-y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y &= \int_{(0,1)} y^{q-1} \left(\int_{(0,1-y)} x^{p-1}\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \\
&= \int_{(0,1)} y^{q-1} \frac{1}{p} \cdot (1-y)^p \,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{p} \cdot B(q,p+1) \\
&= \frac{1}{p} \cdot \frac{\Gamma(q) \cdot \Gamma(p+1)}{\Gamma(q+p+1)} \\
&= \frac{\Gamma(q) \cdot \Gamma(p)}{\Gamma(q+p+1)}
\end{aligned}$$

8 Der Transformationssatz

Erinnerung: $T : [a, b] \to [c, d]$ bijektiv, stetig differenzierbar, $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt

$$\int_a^b f\big(T(x)\big) \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{T(a)}^{T(b)} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

also $\int_{[a,b]} f\big(T(x)\big)\left|\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}(x)\right|\mathrm{d}x = \int_{[c,d]=T([a,b])} f(t)\,\mathrm{d}t$

8.1 Transformationssatz

Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $T : U \to V$ ein C^1-**Diffeomorphismus**[5]; sei $f : V \to (-\infty, \infty]$ eine Funktion. Dann ist f über V integrierbar, genau dann wenn

$$(f \circ T) \cdot |\det(\mathrm{D}T)|$$

über U integrierbar ist. In diesem Fall gilt

$$\int_U (f \circ T)(x) \cdot \big|\det\big(\mathrm{D}T(x)\big)\big|\,\mathrm{d}x = \int_V f(y)\,\mathrm{d}y$$

Beweis (Skizze)
Strategie: Sei V ein Quader und f eine Treppenfunktion. T^{-1} ist differenzierbar, d.h. für $y \in V$ gilt

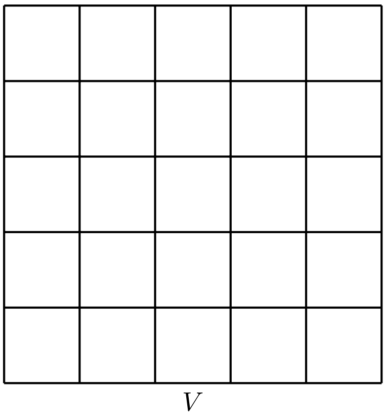


Abbildung 3: Veranschaulichung der Beweisstrategie von 8.1

$$T^{-1}(y + \xi) = T^{-1}(y) + \mathrm{D}(T^{-1})(y)\xi + \varphi(\xi)$$

,wo $\mathrm{D}(T^{-1})(y) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear (und invertierbar) ist und $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung mit $\frac{1}{\|\xi\|_2}\varphi(\xi) \xrightarrow{\xi \to 0} 0$. Setze $\tilde{P}_k := P_k - x_k$, $\tilde{Q}_k := Q_k - y_k$, dann

$$\begin{aligned}\tilde{P}_k = P_k - x_k = T^{-1}(Q_k) - T^{-1}(y_k) &\approx T^{-1}(y_k) + \mathrm{D}(T^{-1})(y_k)(\tilde{Q}_k) - T^{-1}(y_k) \\ &= D(T^{-1})(T(x_k))(\tilde{Q}_k) = \big(\mathrm{D}T(x_k)\big)^{-1}(\tilde{Q}_k)\end{aligned}$$

[5] T stetig diff'bar, T^{-1} stetig diff'bar

Es folgt

$$v(P_k) = v(\tilde{P}_k) \approx v\big((\mathrm{D}T(x_k))^{-1}(\tilde{Q}_k)\big) \overset{5.16}{=} \left|\det\left(\mathrm{D}T(x_k)\right)^{-1}\right| \cdot v(\tilde{Q}_k)$$
$$= |\det \mathrm{D}T(x_k)|^{-1} \cdot v(Q_k)$$

also $|\det \mathrm{D}T(x_k)| \cdot v(P_k) \approx v(Q_k)$. Daraus folgt

$$\int_V f(y)\,\mathrm{d}y = \sum_k f(y_k)\cdot v(Q_k) \overset{!}{\approx} \sum_k f\big(T(x_k)\big)\cdot|\det \mathrm{D}T(x_k)|\cdot v(P_k)$$
$$\overset{!}{\approx} \int_U f\circ T(x)\cdot|\det \mathrm{D}T(x)|\,\mathrm{d}x.$$

8.2 Lemma

Sei T, U, V wie in 8.1, $N \subset V$ eine Nullmenge. Dann ist $T^{-1}(N)$ eine Nullmenge.

Beweisidee
Man darf $N \subset K \subseteq V$ für ein kompaktes K annehmen, benutze dann, dass $T^{-1}\big|_K$ Lipschitz ist, sowie Bemerkung 5.11 (N lässt sich durch abzählbar viele Quader mit kleinem Gesamtvolumen überdecken). ☐

8.3 Lemma

Sei $P \subset U$ eine kompakte Teilmenge, sodass $Q := T(P) \subset V$ ein kompakter Quader ist. Dann gilt:

$$\min_{x\in P}|\det \mathrm{D}T(x)|\cdot v(P) \leqslant v(Q) \leqslant \max_{x\in P}|\det \mathrm{D}T(x)|\cdot v(P)$$

Beweis benutzt:
Corollar 5.16, Lemma 8.2, Kompaktheit von P und Stetigkeit von $(x\mapsto|\det \mathrm{D}T(x)|)$ ☐

8.4 Proposition

Der Transformationssatz 8.1 gilt für $f_V \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp} f := \overline{\{x\in V \mid f(x)\neq 0\}} \subset V$.

Beweis (Skizze)
Wegen Linearität und Lemma 8.2 genügt es den Satz für $f = \chi_Q$ zu beweisen, wo $Q \subset V$ ein kompakter Quader ist. Integrierbarkeit von $(\chi_Q \circ T)\cdot|\det \mathrm{D}T|$ folgt aus Kompaktheit von $T^{-1}(Q)$ und Stetigkeit von $(x\mapsto|\det \mathrm{D}T(x)|)$. Zu zeigen: $\int_{T^{-1}(Q)}|\det \mathrm{D}T(x)|\,\mathrm{d}x = \int_Q 1\,\mathrm{d}y$

Sei $\varepsilon > 0$. $\left|\det \mathrm{D}T^{-1}\right|^{-1}$ ist gleichmäßig stetig auf Q, daher existieren $Q_1,\dots Q_r \subset Q$ kompakte Quader, sodass

(i) $Q = \bigcup_{i=1}^r Q_i$

(ii) $Q_i \cap Q_{i'}$ ist Nullmenge, falls $i \neq i'$

(iii) $\max_{y\in Q_i}\left|\det \mathrm{D}(T^{-1})(y)\right|^{-1} - \min_{y\in Q_i}\left|\det \mathrm{D}(T^{-1})(y)\right|^{-1} \leqslant \varepsilon, \quad i = 1,\dots,n$

Satz von der Umkehrabbildung

Wegen $\mathrm{D}(T^{-1})(T(x)) = \mathrm{D}T(x)^{-1}$ und $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$ (für $A \in M_n(\mathbb{R})$), gilt

$$\left|\det \mathrm{D}(T^{-1})\big(T(x)\big)\right|^{-1} = |\det \mathrm{D}T(x)|$$

Für $P_i := T^{-1}(Q_i)$ erhalten wir:

$$\max_{x\in P_i}|\det(\mathrm{D}T(x))| - \min_{x\in P_i}|\det(\mathrm{D}T(x))| \overset{\text{(iii)}}{\leqslant} \varepsilon$$

Dann gilt:

$$\left| \int_{P_i} |\det \mathrm{D}T(x)| \, \mathrm{d}x - v(Q_i) \right| \overset{(\star),\, 8.3}{\leqslant} \varepsilon \cdot v(P_i)$$

Es folgt

$$\int_{T^{-1}(Q)} |\det \mathrm{D}T(x)| \, \mathrm{d}x \overset{\text{(ii), 8.2}}{=} \sum_{i=1}^{r} \int_{P_i} |\det \mathrm{D}T(x)| \, \mathrm{d}x \underset{\substack{\sum_{i=1}^r \varepsilon \cdot v(P_i) \\ = \varepsilon \cdot v(T^{-1}(Q))}}{=} \sum_{i=1}^{r} v(Q_i) = v(Q) = \int_Q 1 \, \mathrm{d}y$$

$\varepsilon > 0$ beliebig $\Rightarrow$ Behauptung. □

Beweis von 8.1 (Skizze)

Sei f integrierbar über V. Konstruiere Treppenfunktionen $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{T}(\mathbb{R}^n)$ mit

(i) $\operatorname{supp} \varphi_k \subset V$

(ii) $\|f_V - \varphi_k\|_1 \xrightarrow{k \to \infty} 0$

(iii) Für eine Nullmenge $N \subset V$ gilt: $\varphi_k \xrightarrow{k \to \infty} f_V$ punktweise auf $V \setminus N$. (mit 6.3)

Nach Proposition 8.4 gilt:

$$\begin{aligned}
\Big\| (\varphi_k \circ T) \cdot |\det(\mathrm{D}T)| - (\varphi_l \circ T) \cdot |\det(\mathrm{D}T)| \Big\|_1 &= \int_U |\varphi_k \circ T - \varphi_l \circ T| \cdot |\det(\mathrm{D}T)| \, \mathrm{d}x \\
&\overset{8.4}{=} \int_V |\varphi_k - \varphi_l| \, \mathrm{d}y \\
&= \|\varphi_k - \varphi_l\|_1
\end{aligned}$$

$\Rightarrow ((\varphi_k \circ T) \cdot |\det(\mathrm{D}T)|)_{k \in \mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge bezüglich $\|.\|_1$. Weiter gilt

$$(\varphi_k \circ T) \cdot |\det(\mathrm{D}T)| \xrightarrow{k \to \infty} (f_V \circ T) \circ |\det(\mathrm{D}T)|$$

punktweise fast überall, d.h. auf $U \setminus T^{-1}(N)$ ($T^{-1}(N)$ ist Nullmenge nach 8.2). Nach dem Satz von Riesz-Fischer (6.3) ist dann $(f_V \circ T) \cdot |\det(\mathrm{D}T)|$ integrierbar über U und

$$\int_U (f \circ T) \cdot |\det(\mathrm{D}T)| \, \mathrm{d}x) = \lim_{k \to \infty} \int_U (\varphi_K \circ T) \cdot |\det(\mathrm{D}T)| \, \mathrm{d}x \overset{8.4}{=} \lim_{k \to \infty} \int_V \varphi_k \, \mathrm{d}y \overset{6.3}{=} \int_V f \, \mathrm{d}y.$$

Rückrichtung $T \rightsquigarrow T^{-1}$ □

8.5 Beispiel

(i) Sei $A \in GL(n, \mathbb{R})$ eine invertierbare $n \times n$-Matrix, $b \in \mathbb{R}^n$. Sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die **affine Transformation** $x \mapsto Ax + b$. Dann gilt $\mathrm{D}T(x) = A, x \in \mathbb{R}^n$ (vgl. Ana II) und f ist über $K \subset \mathbb{R}^n$ integrierbar genau dann, wenn $f \circ T$ über $T^{-1}(K)$ integrierbar ist und es gilt

$$|\det A| \cdot \int_{T^{-1}(K)} f(Ax + b) \, \mathrm{d}x = \int_K f(y) \, \mathrm{d}y.$$

Für $A \in O(n)$ (orthogonale Matrix) gilt

$$v\big(T(K)\big) = v(K)$$

(**Bewegungsinvarianz** des Lebesgue-Maßes).

(ii) Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^2$
$P_2 : (0,\infty) \times (-\pi,\pi) \to \mathbb{R}^2 \setminus (-\infty,0] \times \{0\}, \binom{r}{\varphi} \mapsto \binom{r\cdot\cos\varphi}{r\cdot\sin\varphi}$ ist bijektiv. Es ist

$$\mathrm{D}P_2\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

und $\det \mathrm{D}P_2\binom{r}{\varphi} = r > 0$. Daraus folgt $\mathrm{D}P_2\binom{r}{\varphi}$ ist invertierbar $\Rightarrow$ P_2 ist C^1-Diffeomorphismus. Für $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ integrierbar gilt nun

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{\mathbb{R}^2\setminus(-\infty,0]\times\{0\}} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) &= \int_{(0,\infty)\times(-\pi,\pi)} f\big(P_2(r,\varphi)\big)\cdot r \ \mathrm{d}(r,\varphi) \\ &= \int_{(0,\infty)} r\left(\int_{(-\pi,\pi)} f(P_2(r,\varphi))\,\mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}r\end{aligned}$$

(iii) Kugelkoordinaten im $\mathbb{R}^3$
$P_3 : (0,\infty) \times (-\pi,\pi) \times (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}^3 \setminus (-\infty,0] \times \{0\} \times \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\cdot\cos\varphi\cdot\cos\theta \\ r\cdot\sin\varphi\cdot\cos\theta \\ r\cdot\sin\theta \end{pmatrix}$$

ist bijektiv. Es gilt

$$\det\left(\mathrm{D}P_3\begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \theta \end{pmatrix}\right) = r^2\cdot\cos\theta > 0$$

für $r > 0, \theta \in (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$. Für f integrierbar gilt

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z) = \int_{(0,\infty)}\int_{(-\pi,\pi)}\int_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})} f\big(P_3(r,\varphi,\theta)\big)\cdot r^2\cdot\cos\theta\ \ \mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r$$

(iv)

$$\int_{\mathbb{R}^3} \chi_{B(0,R)}\,\mathrm{d}(x,y,z) = \ldots = \frac{4}{3}\pi R^3$$

8.6 Corollar (Integration rotationssymetrischer Funktionen)

Sei $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion, welche sich in der Form $g(x) = f(\|x\|_2)$ schreiben lässt für eine Funktion $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. Dann ist g über $\mathbb{R}^n$ integrierbar genau dann, wenn $f(r)\cdot r^{n-1}$ über $(0,\infty)$ integrierbar ist. In diesem Fall gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,\mathrm{d}x = n\cdot v\big(B_{\mathbb{R}^n}(0,1)\big)\cdot\int_{(0,\infty)} f(r)r^{n-1}\,\mathrm{d}r$$

Beweis
Für $n = 2,3$ Übung. Für $n > 3$ ohne Beweis.

9 σ-Algebren und messbare Räume

9.1 Erinnerung

Sei X eine Menge. $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt **Topologie** auf X, falls

(i) $X, \emptyset \in \mathcal{T}$,

(ii) $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{T} \Longrightarrow \bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$,

(iii) $U_i \in \mathcal{T}, i \in I \Longrightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$.

$(X, \mathcal{T})$ heißt **topologischer Raum**, $U \in \mathcal{T}$ heißt **offen**. Falls $(X_j, \mathcal{T}_j)$, $j = 1, 2$ topologischer Räume sind und $f : X_1 \to X_2$ eine Abbildung, dann heißt f **stetig**, falls gilt

$$U \in \mathcal{T}_2 \Longrightarrow f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_1.$$

9.2 Definition

Sei X eine Menge. $\Sigma \subset \mathcal{P}(X)$ heißt σ**-Algebra** auf X, falls

(i) $X \in \Sigma$,

(ii) $A \in \Sigma \Rightarrow X \setminus A \in \Sigma$,

(iii) $A_n \in \Sigma, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n \in N} A_n \in \Sigma$.

(X, Σ) heißt **messbarer Raum**; die Elemente von Σ heißen **messbare Mengen**. (X_j, Σ_j) für $j = 1, 2$ seien messbare Räume, $f : X_1 \to X_2$ eine Abbildung. f heißt **messbar**, falls gilt

$$A \in \Sigma_2 \Longrightarrow f^{-1}(A) \in \Sigma_1.$$

9.3 Bemerkung

(i) σ-Algebren sind abgeschlossen bezüglich abzählbarer Vereinigungen und Durchschnitten. *de Morgan*

(ii) (X_j, Σ_j) für $j = 1, 2, 3$, $f : X_1 \to X_2$, $g : X_2 \to X_3$ messbar. $\Rightarrow g \circ f : X_1 \to X_3$ messbar.

9.4 Proposition

Sei X eine Menge und $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ eine Menge von Teilmengen. Dann existiert eine kleinste σ-Algebra, die $\mathcal{F}$ enthält; diese nennen wir die von $\mathcal{F}$ **erzeugte** σ**-Algebra** $\Sigma(\mathcal{F})$.

Beweis
Setze

$$\Omega := \left\{ \Gamma \subset \mathcal{P}(X) \,\middle|\, \Gamma \text{ ist } \sigma\text{-Algebra und } \mathcal{F} \subset \Gamma \right\}$$

Dann ist $\Omega \neq \emptyset$ (denn $\mathcal{P}(X) \in \Omega$). Setze $\Sigma(\mathcal{F}) := \bigcap_{\Gamma \in \Omega} \Gamma \subset \mathcal{P}(X)$. Dann ist $\mathcal{F} \subset \Sigma(\mathcal{F})$, denn $\mathcal{F} \subset \Gamma$ für $\Gamma \in \Omega$. Ist $\Gamma \subset \mathcal{P}(X)$ eine σ-Algebra, welche $\mathcal{F}$ enthält, so ist $\Gamma \in \Omega$ und $\Sigma(\mathcal{F}) \subset \Gamma$. Es bleibt zu zeigen: $\Sigma(\mathcal{F})$ ist σ-Algebra:

(i) $X \in \Sigma(\mathcal{F})$, denn $X \in \Gamma$ für jedes $\Gamma \in \Omega$.

(ii) $A \in \Sigma(\mathcal{F}) \Rightarrow A \in \Gamma$ für jedes $\Gamma \in \Omega$. Es folgt $X \setminus A \in \Gamma$für jedes $\Gamma \in \Omega$. Also ist $X \setminus A \in \Sigma(\mathcal{F})$.

(iii) ebenso. $\square$

9.5 Bemerkung

Die entsprechende Aussage für topologische Räume beweist man analog.

9.6 Definition

(i) Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Wir nennen $\Sigma(\mathcal{T})$ die **σ-Algebra der Borelmengen** auf X und schreiben $\mathcal{B}_X$ für $\Sigma(\mathcal{T})$.

(ii) Seien $(X,\mathcal{T}_X)$, $(Y,\mathcal{T}_Y)$ topologische Räume, dann heißt $f : X \to Y$ **Borel-messbar**, falls f messbar ist bezüglich $\mathcal{B}_X$ und $\mathcal{B}_Y$.

9.7 Bemerkung

Offene und abgeschlossene Mengen sind Borel und ebenso F_σ's (abzählbare Vereinigungen von abgeschlossenen Mengen), und G_δ's (abzählbare Durchschnitte von offenen Mengen).

9.8 Proposition

Sei (X,Σ) ein messbarer Raum und $(Y,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Dann gilt

(i) $\Omega := \left\{E \subset Y \,\middle|\, f^{-1}(E) \in \Sigma\right\}$ ist eine σ-Algebra auf Y.

(ii) Falls $f^{-1}(E) \in \Sigma$ für jedes $E \in \mathcal{T}$, so ist f messbar (bezüglich. Σ und $\mathcal{B}_Y$). Insbesondere: Falls $(X,\mathcal{T}_X)$ ein topologischer Raum ist und $\Sigma = \mathcal{B}_X$ und falls f stetig ist, so ist f Borel.

(iii) Falls $Y = \mathbb{R}$ und $f^{-1}\big((\alpha,\infty)\big) \in \Sigma$ für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$, so ist f messbar.

(iv) Aussage (iii) gilt analog für $Y = (-\infty,\infty]$ und $(\alpha,\infty]$, wobei $\mathcal{T}$, die von $\mathcal{T}_\mathbb{R}$ und $(\alpha,\infty]$, $\alpha \in \mathbb{R}$ erzeugte Topologie ist.

Beweis

(i) $f^{-1}(Y) = X$, $f^{-1}(Y \setminus E) = X \setminus f^{-1}(E)$, $f^{-1}(E_1 \cup E_2 \cup \ldots) = f^{-1}(E_1) \cup f^{-1}(E_2) \cup \ldots$

(ii) Setze $\Omega := \left\{E \subset Y \,\middle|\, f^{-1}(E) \in \Sigma\right\}$ wie in (i). Dann gilt $\mathcal{T} \subset \Omega$, also $\mathcal{B}_Y \subset \Omega$ nach (i). $\Rightarrow f^{-1}(E) \in \Sigma$ für jedes $E \in \mathcal{B}_Y \Rightarrow f$ ist messbar.

(iii) Wieder $\Omega := \left\{E \subset Y \,\middle|\, f^{-1}(E) \in \Sigma\right\}$. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ wähle $\alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha$ mit $\alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} \alpha$. Dann ist $(\alpha_k,\infty) \in \Omega$ für jedes k. Also auch $(-\infty,\alpha_n]$ (nach (i)) und $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(-\infty,\alpha_n] = (-\infty,\alpha) \in \Omega$. $\Rightarrow (\alpha,\beta) = (-\infty,\beta) \cap (\alpha,\infty) \in \Omega$. Also für jedes $U \in \mathcal{T}_\mathbb{R}$ ist $U \in \Omega$, denn $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\gamma_n,\delta_n)$ (warum?).

Daraus folgt $\mathcal{B}_Y \subset \Omega$, also ist f messbar.

(iv) Übung. □

9.9 Proposition

Sei (X,Σ) ein messbarer Raum und $f_n : X \to (-\infty,\infty]$ eine Folge messbarer Funktionen. Dann sind $g := \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ und $h := \limsup_{n\to\infty} f_n$ messbar[6].

[6] $h(x) = \lim_k \sup_{n\geqslant k} f_n(x)$

Beweis

$$g^{-1}((\alpha,\infty]) = \underbrace{\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \underbrace{f_n^{-1}((\alpha,\infty])}_{\in\Sigma}}_{\in\Sigma} \overset{9.8}{\Longrightarrow} g \text{ messbar}$$

Ebenso für $\inf$ an Stelle von $\sup$. Weiter gilt

$$h(x) = \lim_{k\to\infty} \sup_{n\geqslant k} f_n(x) = \underbrace{\inf_{k\geqslant 0} \underbrace{\sup_{n\geqslant k} f_n(x)}_{\text{messbar}}}_{\text{messbar}}$$ □

9.10 Corollar

Seien (X,Σ) und $f_n : X \to (-\infty,\infty]$ messbar für $n\in\mathbb{N}$.

(i) Falls $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ punktweise, so ist f messbar.

(ii) Falls $d,e : X \to (-\infty,\infty]$ messbar sind, so auch $\max\{d,e\}, \min\{d,e\}$, also auch d_+ und d_-.

Beweis
$f = \limsup_{n\to\infty} f_n$; $\max\{d,e\} = \sup\{d,e,e,e,\dots\}$ benutze 9.9. Mit $d_+ = \max\{d,0\}, d_- = \max\{-d,0\}$ folgt der zweite Teil. □

9.11 Definition

Sei (X,Σ) ein messbarer Raum. $f : X \to (-\infty,\infty)$ heißt **einfach**, falls $f(X)$ endlich ist.

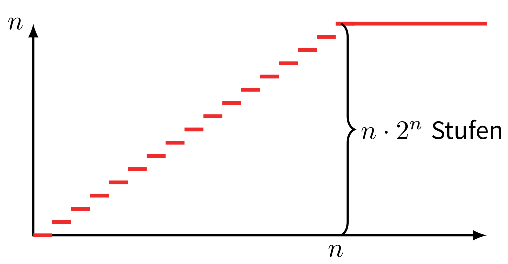
9.12 Bemerkung

Sei f einfach, dann ist $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \chi_{A_i}$ für $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\} = f(X)$ und $A_i = f^{-1}(\{\alpha\})$. f ist messbar genau dann, wenn die A_i messbar sind.

9.13 Proposition

Sei (X,Σ) ein messbarer Raum, $f : X \to [0,\infty]$ messbar. Dann existieren einfache, messbare Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $0 \leqslant f_1 \leqslant f_2 \leqslant \dots$ und $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ punktweise.

Beweis
Definiere $\varphi_n : [0,\infty] \to [0,\infty)$ wie folgt:



Dann ist φ_n messbar, also auch $\varphi_n \circ f =: f_n$. Dann gilt $f_n \nearrow f$ punktweise. □

9.14 Definition

Sei (X, Σ) ein messbarer Raum. Ein **Maß** auf (X, Σ) ist eine Abbildungen $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ mit $\mu(\emptyset) = 0$, welche **abzählbar additiv** ist, d.h. Falls $A_i,\ i \in \mathbb{N}$ paarweise disjunkte messbare Mengen sind, so gilt

$$\mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i).$$

(X, Σ, μ) heißt **Maßraum**; **Wahrscheinlichkeitsraum** falls $\mu(X) = 1$.

9.15 Proposition

Sei (X, Σ, μ) ein Maßraum. Dann gilt

(i) $A, B \in \Sigma, A \subset B \Longrightarrow \mu(A) \leqslant \mu(B)$

(ii) $A_i \in \Sigma, i \in \mathbb{N}$, $A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \ldots$, dann gilt $\mu(A_i) \xrightarrow{i\to\infty} \mu\big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\big)$.

(iii) $A_i \in \Sigma, i \in \mathbb{N}$, $A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ und $\mu(A_0) < \infty$, dann gilt $\mu(A_i) \xrightarrow{i\to\infty} \mu\big(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i\big)$.

Beweis

(i)

$$\mu(B) = \mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) \overset{9.14}{=} \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i) \geqslant \mu(A)$$

mit $A_0 := A, A_1 := B \setminus A, A_2 := \emptyset, A_3 := \emptyset, \ldots$ paarweise disjunkt und messbar.

(ii) Setze $B_0 := A_0, B_1 := A_1 \setminus A_0, B_2 := A_2 \setminus A_1, \ldots, B_{i+1} := A_{i+1} \setminus A_i$, dann sind die B_i paarweise disjunkt und messbar;

$$\mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(B_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

(iii) Übung. □

9.16 Beispiele

(i) $(X, \mathcal{P}(X), \mu)$ mit $\mu(E) = \begin{cases} 0, & \text{falls } E = \emptyset \\ \infty, & \text{falls } E \neq \emptyset \end{cases}$

(ii) $(X, \mathcal{P}(X), \mu)$ mit $\mu(E) = \begin{cases} |E|, & \text{falls } E \text{ endlich} \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases}$ (**Zählmaß**)

(iii) $(X, \mathcal{P}(X), \delta_{x_0})$ mit $\delta_{x_0}(E) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x_0 \in E \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ ist W'raum für jedes X und $x_0 \in X$.

(iv) Sei μ das Zählmaß auf $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Sei $A_i := \{i, i+1, \ldots\}$, $i \in \mathbb{N}$. Dann gilt $A_1 \supset A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ und $\mu(A_i) = \infty$, aber $\mu\big(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i\big) = 0$. In Proposition 9.15 (iii) ist $\mu(A_0) < \infty$ also wesentlich!

(v)

$$\begin{aligned}\hat{\Lambda} &= \{E \subset \mathbb{R}^n \,|\, \chi_E \text{ ist lokal integrierbar}\} \\ &= \{E \subset \mathbb{R}^n \,|\, E \cap K \text{ messbar im Sinne von Abschnitt 6 für jedes kompakte } K \subset \mathbb{R}^n\}\end{aligned}$$

ist σ-Algebra auf $\mathbb{R}^n$:

a) $\emptyset, X \in \hat{\Lambda}$ denn für jedes kompakte K ist χ_X über K integrierbar.

b) Sei $E \subset \mathbb{R}^n, E \in \hat{\Lambda}$ und $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt: $\chi_{(\mathbb{R}^n \setminus E) \cap K} = \chi_{K \setminus (K \cap E)} = \chi_K - \chi_{K \cap E}$ ist integrierbar. Also $\mathbb{R}^n \setminus E \in \hat{\Lambda}$.

c) abzählbare Vereinigungen ähnlich (mit Beppo-Levi).

$\hat{\Lambda}$ enthält die Borelmengen auf $\mathbb{R}^n$ (vgl. 6.8). $\lambda : \hat{\Lambda} \to [0, \infty]$ gegeben durch

$$\lambda(E) := \begin{cases} v(E), & \text{falls } \chi_E \text{ integrierbar} \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases}$$

ist ein Maß auf $\mathbb{R}^n$, das **Lebesgue-Maß** (vgl. Bemerkung 6.8).

(vi) $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f$ ist messbar im Sinne von Abschnitt 9 (Benutze 9.8 und Corollar 6.4, f ist fast überall punktweiser Limes von Treppenfunktionen.)

9.17 Definition

Sei (X, Σ, μ) ein Maßraum.

(i) Für eine einfache, messbare Funktion $s : X \to [0, \infty)$, $s = \sum_{i=1}^k \alpha_i \cdot \chi_{A_i}$ definieren wir

$$\int s \, \mathrm{d}\mu := \sum_{i=1}^k \alpha_i \cdot \mu(A_i)$$

(ii) Für $f : X \to [0, \infty]$ messbar definieren wir *vgl. 9.13*

$$\int f \, \mathrm{d}\mu := \sup \left\{ \int s \, \mathrm{d}\mu \,\middle|\, s \text{ ist einfach, messbar, } 0 \leqslant s \leqslant f \right\}$$

(iii) Falls f nicht notwendig positiv ist, aber $\int f_- \, \mathrm{d}\mu < \infty$, so setzen wir $\int f \, \mathrm{d}\mu := \int f_+ \, \mathrm{d}\mu - \int f_- \, \mathrm{d}\mu$.

(iv) Wir schreiben $\mathcal{L}^1(\mu) := \{f : X \to \mathbb{R} \,|\, \int |f| \, \mathrm{d}\mu < \infty\}$. $\mathcal{L}^1(\mu)$ ist Vektorraum und die Abbildung $f \mapsto \int f \, \mathrm{d}\mu$ ist lineares Funktional auf $\mathcal{L}^1(\mu)$.

(v) Für $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ setzen wir $\|f\|_1 = \int |f| \, \mathrm{d}\mu$. $\|.\|_1$ ist Halbnorm.

9.18 Satz

Für $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\int f(x) \, \mathrm{d}x = \int f \, \mathrm{d}\lambda$$

Beweis
Klar für einfache Funktionen (Linearität). Benutze dann 9.13 und Beppo-Levi für f_+ und f_-. ☐

9.19 Bemerkung

Wir haben vorher das Lebesgue-Integral definiert und daraus das Lebesgue-Maß erhalten. Der Satz sagt, dass man umgekehrt das Integral von dem Maß erhält.

9.20 Definition

(X, Σ, μ) Maßraum. Wir definieren wieder $\mathcal{N} := \left\{ f \in \mathcal{L}^1(\mu) \,\middle|\, \int |f| \,\mathrm{d}\mu = 0 \right\}$ und $L^1(\mu) := {}^{\mathcal{L}^1(\mu)}/_{\mathcal{N}}$. Die folgenden Sätze beweist man wie in Abschnitt 6

9.21 Satz

$(L^1(\mu), \|.\|_1)$ ist vollständig normierter Vektorraum (Banachraum).

9.22 Satz (von Lebesgue über monotone Konvergenz)

Sei (X, Σ, μ) ein Maßraum und $f_n : X \to [0, \infty]$, $n \in \mathbb{N}$ eine Folge messbarer Funktionen mit $0 \leqslant f_0 \leqslant f_1 \leqslant \ldots$. Dann ist $f := \lim_{n\to\infty} f_n : X \to [0, \infty]$ messbar und es gilt

$$\int f_n \,\mathrm{d}\mu \xrightarrow{n\to\infty} \int f \,\mathrm{d}\mu.$$

9.23 Lemma von Fatou

Sei (X, Σ, μ) ein Maßraum und $f_n : X \to [0, \infty]$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge messbarer Funktionen. Dann gilt

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu$$

9.24 Satz (von Lebesgue über dominierte Konvergenz)

Sei (X, Σ, μ) ein Maßraum und $f_n : X \to (-\infty, \infty]$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge messbarer Funktionen, welche punktweise gegen $f : X \to (-\infty, \infty]$ konvergiert. Es sei $g : X \to [0, \infty]$ messbar mit $\int g \,\mathrm{d}\mu < \infty$; es gelte $|f_n| \leqslant g$. Dann ist $f := \lim_{n\to\infty} f_n$ integrierbar und es gilt

$$\int f_n \,\mathrm{d}\mu \xrightarrow{n\to\infty} \int f \,\mathrm{d}\mu.$$

Haben gesehen: Maß $\mu \rightsquigarrow$ lineares Funktional auf $\mathcal{L}^1(\mu)$. Unter gewissen Umständen lassen sich umgekehrt Funktionale auf Funktionsräumen durch Integrale darstellen.

Erinnerung

Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt **lokalkompakt** und **Hausdorff** falls gilt:

(i) Jeder Punkt besitzt eine kompakte Umgebung

(ii) Je zwei Punkte lassen sich durch offene Mengen trennen.

D.h.

(i) $\forall x \in X : \exists K$ kompakt $\supset V$ offen $\ni x$

(ii) $\forall x \neq y \in X : \exists V, W \in \mathcal{T} : x \in V, y \in W, V \cap W = \emptyset$

$C_c(X) := \{ f : X \to \mathbb{R} \mid \operatorname{supp} f$ kompakt$\}$

9.25 Satz (Darstellungssatz von Riesz)

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein lokalkompakter Hausdorffraum und sei $\Phi : C_c(X) \to \mathbb{R}$ ein positives $(f \geqslant 0 \Rightarrow \Phi(f) \geqslant 0)$ lineares Funktional. Dann existieren eine σ-Algebra Σ auf X mit $\mathcal{B}_X \subset \Sigma$ und ein Maß μ auf (X, Σ) mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\Phi(f) = \int f \,\mathrm{d}\mu$ für $f \in C_c(X)$.

(ii) $\mu(K) < \infty$ für K kompakt.

(iii) Für $E \in \Sigma$ gilt $\mu(E) = \inf\{\mu(V) \mid E \subset V \in \mathcal{T}\}$

(iv) Für $E \in \Sigma$ mit $\mu(E) < \infty$ gilt $\mu(E) = \sup\{\mu(K) \mid K \subseteq E$ kompakt$\}$

(v) Falls $E \in \Sigma$, $\mu(E) = 0$, $A \subseteq E$ dann gilt $A \in \Sigma$.

Außerdem ist μ durch diese Eigenschaften eindeutig bestimmt. □ (ohne Beweis)

Bemerkung

a) (iii) und (iv): μ ist **reguläres Borelmaß** (von außen und von innen regulär)

(v): μ ist "vollständig", d.h. Teilmengen von Nullmengen sind wieder Nullmengen.

b) Der Satz erlaubt es, das Lebesgue-Maß/Integral aus dem Regelintegral für stetige Funktionen mit kompaktem Träger zu gewinnen.

10 Ausblick

lokalkompakte Gruppen: $\rightsquigarrow$ $\exists$ (links)invariantes reguläres Borelmaß λ. $\lambda(g \cdot E) = \lambda(E) \rightsquigarrow L^1(G, \lambda)$. Faltung $\rightsquigarrow$ Fourieranalysis

Dynamische Systeme: X topologischer Raum, $\alpha : X \to X$ bijektiv, stetig Borel. Existenz von invarianten Borelmaßen? $\rightsquigarrow$ Ergodentheorie.

Mannigfaltigkeiten: $M = \bigcup_{i \in I} U_i$ wo $U_i \approx \mathbb{R}^n$

Räume von Funktionen und Abbildungen zwischen ihnen $L^2(\mu) := \left\{ f : X \to \mathbb{R} \,\middle|\, \int |f|^2 \,\mathrm{d}\mu < \infty \right\}$ Skalarprodukt auf $L^2 \rightsquigarrow$ Hilbertraum, unendlich dimensionaler euklidischer Vektorraum.

Index

Die Seitenzahlen *sind mit Hyperlinks zu den entsprechenden Seiten versehen, also anklickbar*

Abbildungsverzeichnis