Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

Fachbereich 10
Mathematik und
Informatik

Skript Dynamische Systeme

Mitschrift der Vorlesung „Dynamische Systeme“ von Prof. Dr. Michael Herrmann

Jannes Bantje

13. April 2015

Aktuelle Version verfügbar bei

GitHub

`https://github.com/JaMeZ-B/latex-wwu`

GitHub ist eine Internetplattform, auf der viele OpenSource-Projekte gehostet werden. Diese Plattform nutzen wir zur Zusammenarbeit, also findet man hier neben den PDFs auch die TEX-Dateien. Außerdem ist über diese Plattform auch direktes Mitarbeiten möglich, siehe nächste Seite.

sciebo die Campuscloud

`https://uni-muenster.sciebo.de/public.php?service=files&t=965ae79080a473eb5b6d927d7d8b0462`

Sciebo ist ein Dropbox-Ersatz der Hochschulen in NRW, der von der Uni Münster in leitender Position auf Basis der OpenSource-Software Owncloud aufgebaut wurde. Wenn man auf den Link klickt, kann man die Freigabe zum eigenen Speicher hinzufügen und hat dann immer automatisch die aktuellste Version.

Bittorrent Sync

`B6WH2DISQ5QVYIRYIEZSF4ZR2IDVKPN3I`

BTSync ist ein peer-to-peer Dateisynchronisations-Tool. Dabei werden die Dateien nur auf den Computern der Teilnehmer an einer Freigabe gespeichert. Ein Mini-Computer ist permanent online, sodass jederzeit die aktuellste Version verfügbar ist. `Clients` gibt es für jedes Betriebssystem. Zugang ist über das obige „Secret“ bzw. den QR-Code möglich

---

Vorlesungshomepage

`https://wwwmath.uni-muenster.de/num/herrmann/sose2015/vl_dyn_sys/index.html`

Hier ist ein Link zur offiziellen Vorlesungshomepage.

Vorwort — Mitarbeit am Skript

Dieses Dokument ist eine Mitschrift aus der Vorlesung „Dynamische Systeme, WiSe 2014/2015“, gelesen von Prof. Dr. Michael Herrmann. Der Inhalt entspricht weitestgehend dem Tafelanschrieb. Für die Korrektheit des Inhalts übernehme ich keinerlei Garantie! Für Bemerkungen und Korrekturen – und seien es nur Rechtschreibfehler – bin ich sehr dankbar. Korrekturen lassen sich prinzipiell auf drei Wegen einreichen:

- Persönliches Ansprechen in der Uni, Mails an `j.bantje@wwu.de` (gerne auch mit annotieren PDFs) oder Kommentare auf `https://github.com/JaMeZ-B/latex-wwu`.
- *Direktes* Mitarbeiten am Skript: Den Quellcode poste ich auf GitHub (siehe oben), also stehen vielfältige Möglichkeiten der Zusammenarbeit zur Verfügung: Zum Beispiel durch Kommentare am Code über die Website und die Kombination Fork + Pull Request. Wer sich verdient macht oder ein Skript zu einer Vorlesung, die ich nicht besuche, beisteuern will, dem gewähre ich gerne auch Schreibzugriff.

  Beachten sollte man dabei, dass dazu ein Account bei `github.com` notwendig ist, der allerdings ohne Angabe von persönlichen Daten angelegt werden kann. Wer bei GitHub (bzw. dem zugrunde liegenden Open-Source-Programm „`git`“) – verständlicherweise – Hilfe beim Einstieg braucht, dem helfe ich gerne weiter. Es gibt aber auch zahlreiche empfehlenswerte Tutorials im Internet.[1]
- *Indirektes* Mitarbeiten: TeX-Dateien per Mail verschicken.

  Dies ist nur dann sinnvoll, wenn man einen ganzen Abschnitt ändern möchte (zB. einen alternativen Beweis geben), da ich die Änderungen dann per Hand einbauen muss! Ich freue mich aber auch über solche Beiträge!

[1] zB. `https://try.github.io/levels/1/challenges/1`, ist auf Englisch, aber dafür interaktives LearningByDoing

Inhaltsverzeichnis

0 Einführung

„Systeme“ (physikalische, biologische) entwickeln sich mit der Zeit t. Abstrakt: Zustandsraum Ω, momentaner Zustand $x(t) \in \Omega$. Es gibt zwei große Unterklassen: Kontinuierliche und diskrete Dynamik, die auch Beziehung zueinander stehen. Erstere zeichnet sich durch eine kontinuierliche Zeit $t \geqslant t_0$ aus. In letzterer betrachtet man nur abzählbar viele Zeiten $t_0 < t_1 < t_2 < \dots$ $(t_i \xrightarrow{i\to\infty} \infty)$, oftmals $t_i = i \cdot \Delta t$ mit $\Delta t > 0$.

Das prototypische Modell für eine kontinuierliche Dynamik ist eine gewöhnliche Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = f\big(t, x(t)\big)$$

Für eine diskrete Dynamik ist x_i der Zustand zur Zeit t_i

$$x_{i+1} = f(t_i, x_i)$$

Dabei ist x_i die Gegenwart und x_{i+1} die Zukunft.

0.1 Fragen

- Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung
- Qualitative Eigenschaften
  - Muster oder spezielle Lösung (etwa Oszillation)
  - Langzeitverhalten
  - Stabilität von Lösungen
  - Chaos

1 Diskrete Dynamik und iterierte Abbildungen

Generalannahme

- (X, d) sei ein metrischer Raum, zum Beispiel $X = \mathbb{R}^n$ mit $d(x, \tilde{x}) = |x - \tilde{x}|$
- „Zustandsraum“ $\Omega \subseteq X$
- $f : \Omega \to \Omega$ ist stetig

Dynamik

- Wähle einen Startwert x_{i_0} (meist $i_0 = 0$)
- $x_{i_0+1} := f(x_i)$, $x_{i_0+2} := f(x_{i_0+1}), \ldots, x_{i_0+k+1} := f(x_{i_0+k})$

Interpretation: x_i ist der Zustand des Systems zur Zeit $t_i = i \cdot \Delta t$

Beispiele

(1) Wachstums- und Zerfallsprozesse: Dabei stellt x_i zum Beispiel die Menge einer Substanz zur Zeit t_i. Eine dynamische Gleichung dafür könnte wie folgt aussehen

$$x_{i+1} = a \cdot x_i$$

wobei a eine Konstante ist. Die Lösung dafür ist $x_i = a^i x_0 = \exp(i \ln a) x_0 = \exp(t_i \cdot \lambda) \cdot x_0$ mit $\lambda = \frac{\ln a}{\Delta t}$ für $\lambda < 0$ beziehungsweise $0 < a < 1$ spricht man von einem Zerfall und für $\lambda > 0$ von Wachstum.

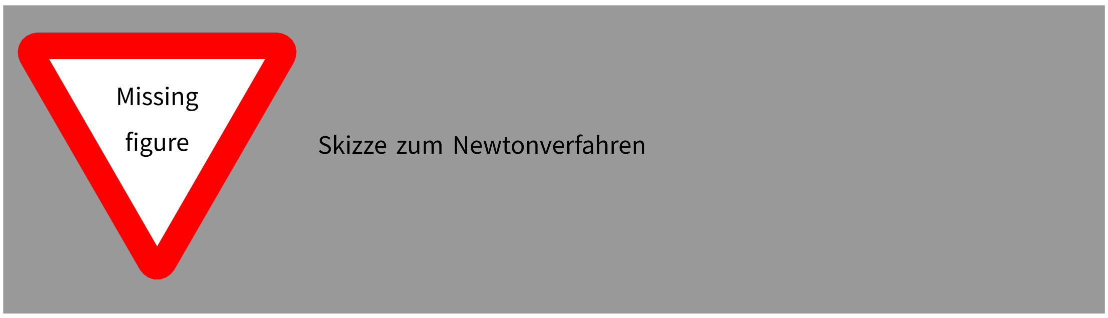
(2) Kaninchenzucht: Sei $n_i = \#$ Anzahl der Kaninchen im Monat i. Annahme: Jedes Kaninchen wird nach einem Monat geschlechtsreif und produziert im Schnitt ein Nachkommen pro Monat. Weiter nehmen wir an, dass es keine Todesfälle gibt.[2] Wir erhalten folgende dynamische Gleichung

$$n_{i+2} = n_{i+1} + n_i$$

Diese Gleichung entdeckte Fibonacci (1170-1240). Auch wenn dies im Sachkontext Blödsinn ist, betrachtet man oft die Anfangswerte $n_0 = 1, n_1 = 1$ und erhalt die Lösung $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$. Für den Zustandsraum können wir $\Omega \subset \mathbb{N}^2$ wählen mit $x_i = (n_{i+1}, n_i)$. Damit können wir die dynamische Gleichung wie folgt umformulieren

$$x_{i+1} = (n_{i+2}, n_{i+1}) = f(x_i) \quad , \quad f(n_{i+1}, n_i) = (n_{i+1} + n_i, n_{i+1})$$

(3) Newton-Verfahren zur Bestimmung einer Nullstelle: Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und strikt monoton wachsend mit einer eindeutigen Nullstelle x_*.



$x_i = f(x_i)$. Wir setzen $f(x) := x - \frac{g(x)}{g'(x)}$. Dann ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wohldefiniert und es gilt $x_i \xrightarrow{i \to \infty} x_*$.

[2] Das ist natürlich spätestens im Winter falsch …

In einem weiteren Fall mit weniger Annahmen an g ist f nicht immer wohldefiniert

Missing figure

Skizze mit Funktion mit 3 Nullstellen

Dies führt zu einem fraktalen Muster der Einzugsbereiche.

(4) Euler-Verfarhen für Gewöhnliche Differentialgleichungen:

$$\dot{x}(t) = g\big(x(t)\big)$$

Diskretisiere die kontinuierliche Zeit t mit $t_i = i \cdot \Delta t$. $x(t_i) \approx x_i$. Wir erhalten

$$\frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t} = g(x_i) \quad \rightsquigarrow \quad x_{i+1} = x_i + \Delta t g(x_i) =: f(x_i)$$

Die Lösungen dieses diskreten Systems konvergieren in einem geeigneten Sinne gegen eine Lösung der kontinuierlichen Gleichung

(5) Mandelbrot und Julia-Mengen: Sei $\Omega = \mathbb{C} \ni z$ und $c \in \mathbb{C}$ eine gegeben Zahl

$$z_{i+1} = z_i^2 - c = f(z_i)$$

Man betrachtet nur den Einheitskreis und markiert Punkte mit verschiedenen Farben, je nachdem, nach wie vielen Iterationsschritten sie den Einheitskreis verlassen. Dies ist ein erstes Beispiel für Fraktale/Chaos

Über iterierte Abbildung in einer Dimension

Sei nun Ω ein Intervall I und $f\colon I \to I$ stetig. Setze $x_0, x_i := f(x_0), x_2 := f\big(f(x_0)\big), \dots$. Wir betrachten nun

$$(x_0, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_3) \in \operatorname{graph} f$$

Missing figure

Skizze mit Graph und Diagonale

1.1 Definition 1 (Orbits)

Seien Startdaten (i_0, x_{i_0}) gegeben. Dann heißt die Folge $(x_i)_{i \geqslant i_0} \subseteq \Omega$ mit $x_{i+1} = f(x_i)$ der von (i_0, x_{i_0}) erzeugte (Vorwärts-)**Orbit** bezüglich f. Ist f invertierbar, so heißt $(x_i)_{i \leqslant i_0}$ mit $x_{i-1} f^{-1}(x_i)$ der Rückwärtsorbit. Diese werden mit $O((i_0, x_{i_0}))$ und $O^{-1}((i_0, x_{i_0}))$ bezeichnet.

Bemerkung

(1) Meist ist $i_0 = 0$.

(2) Manchmal wird der Vorwärtsorbit auch als Menge definiert: $\{x_i \mid i \geqslant i_0\}$.

1.2 Definition 2 (Fixpunkte)

$p \in \Omega$ heißt **Fixpunkt** (der von f erzeugten Dynamik/von f), falls $p = f(p)$. Der entsprechende Orbit ($(x_i)_{i \geqslant i_0}$ mit $x_i = p$ für alle $i \geqslant i_0$) heißt **stationärer Orbit**.

Bemerkung
Statt Fixpunkt findet man in der Literatur auch die Begriffe „stationärer Punkt“ oder „Gleichgewicht“.

Notation
Im Folgenden sei $f^n \colon \Omega \to \Omega$ die n-fache Iterierte von f, also

$$f^n(x) := \underbrace{f\Big(f\Big(f(\ldots f(x))\Big)\Big)}_{n\text{-mal}}$$

mit $f^0 := \mathrm{id}$.

1.3 Definition 3 (periodischer Punkt)

Sei $k \in \mathbb{N}_+$. $p \in \Omega$ heißt k-**periodischer Punkt**, falls $f^k(p) = p$. Der entsprechende Orbit heißt k-**periodischer Orbit**

Bemerkung

- Ist p k-periodisch, so ist p auch nk-periodisch, für alle $n \in \mathbb{N}_+$. Die kleinste Periode wird auch **Primperiode** von p genannt.
- p ist Fixpunkt genau dann, wenn p 1-periodisch ist.
- Ist p k-periodisch und $q = f^m(p)$, so ist auch q k-periodisch.

Bemerkung für den 1-dimensionalen Fall

vielleicht ne Skizze einfügen?

- Fixpunkte sind Schnittpunkte von Graph und Diagonalen.
- 2-periodische Punkte kann man am Graphen von f^2 ablesen.

1.4 Definition 4

Die **stabile Menge** eines periodischen Punktes mit Primperiode k ist

$$W_S(p) := \left\{ x \in \Omega \,\middle|\, \lim_{n\to\infty} f^{nk}(x) = p \right\}$$

Jeder Punkt $x \in W_S(p)$ heißt **vorwärtsasymptotisch** für p.

Bemerkung

- Übungsaufgabe: Beispiele
- Definition 4 ist ein globales Konzept (siehe Definition 6)

1.5 Lemma 5

Seien p_1, p_2 zwei periodische Punkte von f (mit Primperioden k_1 und k_2), so gilt

$$W_S(p_1) \cap W_S(p_2) = \emptyset$$

Beweis
Sei $x \in W_S(p_1) \cap W_S(p_2)$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} f^{nk}(x) = p_l$, $l = 1, 2$. Teilfolgenargument:

$$\lim_{m\to\infty} f^{mk_2k_1}(x) = p_1 \quad , \quad \lim_{m\to\infty} f^{mk_1k_2}(x) = p_2$$

Also ist $p_1 = p_2$. $\square$

Bemerkung
Ist f invertierbar, so ist jeder periodische Punkt von f auch periodischer Punkt von f^{-1} (Beachte $f^{-k} = (f^{-1})^k$, $f^k \circ f^{-k} = \mathrm{id}$). Dann wird durch

$$W_I(p) := \left\{ x \in \Omega \,\middle|\, \lim_{n\to\infty} f^{-nk}(x) = p \right\}$$

die stabile Menge definiert. Diese ist die stabile Menge von p bezüglich f^{-1}.

Idee
Übergang $f \rightsquigarrow f^{-1}$ entspricht Zeitumkehr.

1.6 Stabile Fixpunkte 1.1.2

In diesem Abschnitt ist

- $(X, d) = \mathbb{R}^n$ mit euklidischer Norm, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$
- $B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \,|\, |x - y| < r\}$ offene Kugel
- $\overline{B}_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \,|\, |x - y| \leqslant r\}$ abgeschlossene Kugel

1.7 Definition 6 (Stabilität eines Fixpunktes)

(i) p heißt **stabil**(**Ljapunow-stabil**), falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(i_0) > 0$ mit

$$x \in B_r(p) \Rightarrow f^i(x) \subset B_\varepsilon(p)$$

für alle $i \geqslant 1$ gilt.

(ii) p heißt **asymptotisch stabil**, falls p stabil und außerdem ein $\hat{\delta} > 0$ existiert, sodass

$$x \in B_{\hat{\delta}}(p) \Rightarrow f^i(x) \xrightarrow{i \to \infty} p$$

Bemerkung

- Stabilität von periodischen Punkten mit Primperiode k analog mit f^k statt f
- p asymptotisch stabil $\Rightarrow$ p ist innerer Punkt von $W_S(p)$.
- Ist p nicht stabil, so heißt p auch instabil.

Mal wieder zwei Graphen

Bemerkung

Stabilität im Sinne von Definition 6 ist ein lokales Konzept! (besseres Konzept als stabile Menge von Definition 4)

1.8 Satz 7 (Stabilität in einer Dimension)

Sei $f : I \to I$ stetig differenzierbar und sei p sowohl Fixpunkt von f als auch innerer Punkt von I. Dann gilt

(1) Ist $|f'(p)| < 1$, so ist p asymptotisch stabil. Insbesondere gibt es ein $\delta > 0$ mit

   i) $f : B_\delta(p) \to B_\delta(p)$

   ii) $x \in B_\delta(p) \Rightarrow f^p(x) \xrightarrow{i \to \infty} p$

(2) ist $|f'(p)| > 1$, so ist p instabil. Insbesondere existiert $\delta > 0$ mit: Für jedes $x \in B_\delta(p)$ existiert $n \in \mathbb{N}$, sodass $f^n(x) \notin B_\delta(p)$.

Beweis

Yay, mal wieder zwei Graphen oder vielleicht auch 4

Index

Die Seitenzahlen *sind mit Hyperlinks zu den entsprechenden Seiten versehen, also anklickbar* ☝

Abbildungsverzeichnis

To-do's und andere Baustellen