Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

Fachbereich 10
Mathematik und
Informatik

# Skript Operatoralgebren

**Mitschrift der Vorlesung „Operatoralgebren“ von Prof. Dr. Wilhelm Winter**

Jannes Bantje

28. November 2015

## Aktuelle Version verfügbar bei

## GitHub

`https://github.com/JaMeZ-B/latex-wwu`

GitHub ist eine Internetplattform, auf der viele OpenSource-Projekte gehostet werden. Diese Plattform nutzen wir zur Zusammenarbeit, also findet man hier neben den PDFs auch die TeX-Dateien. Außerdem ist über diese Plattform auch direktes Mitarbeiten möglich, siehe nächste Seite.

## sciebo die Campuscloud

`https://uni-muenster.sciebo.de/public.php?service=files&t=965ae79080a473eb5b6d927d7d8b0462`

Sciebo ist ein Dropbox-Ersatz der Hochschulen in NRW, der von der Uni Münster in leitender Position auf Basis der OpenSource-Software Owncloud aufgebaut wurde. Wenn man auf den Link klickt, kann man die Freigabe zum eigenen Speicher hinzufügen und hat dann immer automatisch die aktuellste Version.

## Bittorrent Sync

`B6WH2DISQ5QVYIRYIEZSF4ZR2IDVKPN3I`

BTSync ist ein peer-to-peer Dateisynchronisations-Tool. Dabei werden die Dateien nur auf den Computern der Teilnehmer an einer Freigabe gespeichert. Ein RasPi ist permanent online, sodass stets die aktuellste Version verfügbar ist. `Clients` gibt es für jedes Betriebssystem. Zugang ist über das obige „Secret“ bzw. den QR-Code möglich.

---

## Vorlesungshomepage

`https://wwwmath.uni-muenster.de/u/wilhelm.winter/wwinter/operatoralgebren.html`

Hier ist ein Link zur offiziellen Vorlesungshomepage.

# Vorwort — Mitarbeit am Skript

Dieses Dokument ist eine Mitschrift aus der Vorlesung „Operatoralgebren, WiSe 2015“, gelesen von Prof. Dr. Wilhelm Winter. Der Inhalt entspricht weitestgehend dem Tafelanschrieb. Für die Korrektheit des Inhalts übernehme ich keinerlei Garantie! Für Bemerkungen und Korrekturen – und seien es nur Rechtschreibfehler – bin ich sehr dankbar. Korrekturen lassen sich prinzipiell auf drei Wegen einreichen:

- Persönliches Ansprechen in der Uni, Mails an `j.bantje@wwu.de` (gerne auch mit annotieren PDFs) oder Kommentare auf `https://github.com/JaMeZ-B/latex-wwu`.

- *Direktes* Mitarbeiten am Skript: Den Quellcode poste ich auf GitHub (siehe oben), also stehen vielfältige Möglichkeiten der Zusammenarbeit zur Verfügung: Zum Beispiel durch Kommentare am Code über die Website und die Kombination Fork + Pull Request. Wer sich verdient macht oder ein Skript zu einer Vorlesung, die ich nicht besuche, beisteuern will, dem gewähre ich gerne auch Schreibzugriff.

  Beachten sollte man dabei, dass dazu ein Account bei `github.com` notwendig ist, der allerdings ohne Angabe von persönlichen Daten angelegt werden kann. Wer bei GitHub (bzw. dem zugrunde liegenden Open-Source-Programm „`git`“) – verständlicherweise – Hilfe beim Einstieg braucht, dem helfe ich gerne weiter. Es gibt aber auch zahlreiche empfehlenswerte Tutorials im Internet.[1]

- *Indirektes* Mitarbeiten: TeX-Dateien per Mail verschicken.

  Dies ist nur dann sinnvoll, wenn man einen ganzen Abschnitt ändern möchte (zB. einen alternativen Beweis geben), da ich die Änderungen dann per Hand einbauen muss! Ich freue mich aber auch über solche Beiträge!

# Anmerkung

Innerhalb dieser Mitschrift wird man öfter den Ausdruck „Warum?“ finden. Dies sind vom Dozenten bewusst weggelassene Details, die zu verstärktem Mitdenken beim Lesen animieren sollen. Oftmals sind dies schon aus vorherigen Semestern bekannte Sachverhalte. Nur an wenigen Stellen habe ich die fehlenden Details hinzugefügt.

[1] zB. `https://try.github.io/levels/1/challenges/1`, ist auf Englisch, aber dafür interaktives LearningByDoing

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Spektraltheorie in Banachalgebren

**1.1 Definition.** Eine *Banachalgebra* ist eine vollständige normierte Algebra. Für die Multiplikation gilt also $\|ab\| \leqslant \|a\| \cdot \|b\|$ Wir betrachten in dieser Vorlesung fast ausschließlich Algebren über $\mathbb{C}$. Eine Banachalgebra heißt *unital*, falls sie ein Einselement $\mathbb{1}$ mit $\|\mathbb{1}\| = 1$ enthält.

**1.2 Definition.** Für eine unitale $\mathbb{C}$-Algebra $A$ setzen wir

$$\begin{aligned} \operatorname{Inv}(A) &:= \{a \in A \text{ invertierbar}\} \\ \sigma(a) := \sigma_A(a) &:= \big\{\lambda \in \mathbb{C} \,\big|\, \lambda \cdot \mathbb{1} - a \notin \operatorname{Inv}(A)\big\} \end{aligned}$$

*das Vorzeichen der Differenz spielt für die Definition der Menge keine Rolle*

$\sigma(a)$ heißt *Spektrum* von $a$.

**1.3 Bemerkung.** Sei $A$ wie oben und $a, b \in A$. Dann gilt

$$\mathbb{1} - ab \in \operatorname{Inv}(A) \iff \mathbb{1} - ba \in \operatorname{Inv}(A)$$

**Beweis:** Durch simples Nachrechnen verifiziert man, dass $(\mathbb{1} - ba)^{-1} = \mathbb{1} + b(\mathbb{1} - ab)^{-1}a$ gilt. □

**1.4 Satz.** Sei $A$ eine unitale $\mathbb{C}$-Algebra und $a \in A$ mit $\sigma(a) \neq \emptyset$. Sei weiter $p \in \mathbb{C}[Z]$ ein Polynom. Dann gilt

$$\sigma\big(p(a)\big) = p\big(\sigma(a)\big)$$

**Beweis:** Die Aussage ist trivial, falls $p$ konstant ist. Sei also $p$ nicht konstant. Zu $\mu \in \mathbb{C}$ existieren $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ mit $\lambda_0 \neq 0$ und $p(z) - \mu = \lambda_0 \cdot (z - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (z - \lambda_n)$, also

$$p(a) - \mu = \lambda_0 \cdot (a - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (a - \lambda_n)$$

Damit gilt: $p(a) - \mu$ ist genau dann invertierbar, wenn $a - \lambda_1, \ldots, a - \lambda_n$ invertierbar sind. Also

$$\begin{aligned} \mu \in \sigma\big(p(a)\big) &\iff \lambda_i \in \sigma(a) \text{ ist für ein } i \in \{1, \ldots, n\} \\ &\iff p(\lambda) - \mu = 0 \text{ für ein } \lambda \in \sigma(a) \\ &\iff p(\lambda) = \mu \text{ für ein } \lambda \in \sigma(a) \end{aligned}$$

Somit folgt dann $\sigma(p(a)) = p(\sigma(a))$. □

**1.5 Satz.** Sei $A$ eine unitale Banachalgebra und $a \in A$. Falls $\|a\| < 1$, so ist $\mathbb{1} - a$ invertierbar und

$$(\mathbb{1} - a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \qquad \text{(\textit{Neumannsche Reihe})}$$

**Beweis:** Die Folge der Partialsummen $\big(\sum_{n=0}^{k} a^n\big)_{k \in \mathbb{N}} \subset A$ ist eine Cauchyfolge (warum?), sodass wegen Vollständigkeit die unendliche Summe existiert. Es gilt dann

$$(\mathbb{1} - a)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a^n\right) \xleftarrow{k \to \infty} (\mathbb{1} - a)\left(\sum_{n=0}^{k} a^n\right) = \mathbb{1} - a^{k+1} \xrightarrow{k \to \infty} \mathbb{1}$$

Die Summe ist also ein Rechtsinverses. Genauso folgt, dass sie auch ein Linksinverses ist. □

**1.6 Korollar.** Für jede unitale Banachalgebra $A$ ist $\operatorname{Inv}(A) \subset A$ offen.

**Beweis:** Falls $a \in \mathrm{Inv}(A)$ und $\|b-a\| < \|a^{-1}\|^{-1}$, so gilt $\|ba^{-1} - \mathbb{1}\| \leqslant \|b-a\| \cdot \|a^{-1}\| < 1$. Also ist auch $-\big(\mathbb{1} - \big(ba^{-1} - \mathbb{1}\big)\big) = ba^{-1}$ invertierbar nach Satz 1.5 und damit auch $b \in \mathrm{Inv}(A)$, denn $b$ ist ein Linksinverses für $a^{-1}(ba^{-1})^{-1} \in \mathrm{Inv}(A)$. □

**1.7 Definition.** Sei $A$ eine unitale Banachalgebra. Für $a \in A$ definieren wir den *Spektralradius* durch

$$r(a) := \sup_{\lambda \in \sigma(a)} |\lambda|$$

**1.8 Proposition.** Seien $a \in A$ wie oben. Dann ist das Spektrum $\sigma(a)$ kompakt und $r(a) \leqslant \|a\|$.

**Beweis:** Angenommen $|\lambda| > \|a\|$, dann gilt $\|\lambda^{-1}a\| < 1$, also ist $\mathbb{1} - \lambda^{-1}a$ invertierbar nach Satz 1.5 und damit auch $\lambda - a \iff \lambda \notin \sigma(a)$. Insgesamt folgt, dass $r(a) \leqslant \|a\|$ ist. Es ist $\mathbb{C} \setminus \sigma(a) \subset \mathbb{C}$ offen, da $\mathrm{Inv}(A) \subset A$ offen ist. Damit muss $\sigma(a)$ nach Heine-Borel kompakt sein. □

**1.9 Satz.** Sei $A$ eine unitale Banachalgebra. Für jedes $a \in A$ ist $\sigma(a)$ nichtleer.

**Beweis:** Falls $|\lambda| > \|a\|$, so existiert $\big(\mathbb{1} - \lambda^{-1}a\big)^{-1}$ und $(\lambda - a)^{-1}$ mit der gleichen Begründung wie eben. Es gilt dann

$$(\lambda - a)^{-1} = \lambda^{-1}\big(1 - \lambda^{-1}a\big)^{-1} \overset{1.5}{=} \lambda^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n}a^n\right)$$

und weiter

$$\|(\lambda - a)^{-1}\| \leqslant \big|\lambda^{-1}\big| \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \big(\big|\lambda^{-1}\big| \cdot \|a\|\big)^n \xrightarrow{|\lambda| \to \infty} 0 \qquad [*]$$

da man die Summe als geometrische Reihe mit 2 abschätzen kann, falls $|\lambda| > 2 \cdot \|a\|$ ist. Sei nun $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \sigma(a)$ und $|\lambda - \lambda_0| < \|(a - \lambda_0)^{-1}\|^{-1}$. Dann gilt

$$\|(\lambda - \lambda_0)(a - \lambda_0)^{-1}\| \leqslant |\lambda - \lambda_0| \cdot \|(a - \lambda_0)^{-1}\| < 1$$

Also ist wieder nach Satz 1.5 $\big(\mathbb{1} - (\lambda - \lambda_0)(a - \lambda_0)^{-1}\big)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n (a - \lambda_0)^n$ und

$$\begin{aligned} -\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n (a - \lambda_0)^{-(n+1)} &= (a - \lambda_0)^{-1}\big((\lambda - \lambda_0)(a - \lambda_0)^{-1} - \mathbb{1}\big)^{-1} \\ &= \Big((\lambda - \lambda_0)\underbrace{(a - \lambda_0)^{-1}(a - \lambda_0)}_{=\mathbb{1}} - (a - \lambda_0)\Big)^{-1} = (\lambda - a)^{-1} \end{aligned}$$

Für ein stetiges Funktional $\varphi \in A^*$ erhalten wir

$$\varphi\big((\lambda - a)^{-1}\big) = \sum_{n=0}^{\infty} -\varphi\Big((a - \lambda_0)^{-(n+1)}\Big) \cdot (\lambda - \lambda_0)^n$$

falls $|\lambda - \lambda_0| < \|(a - \lambda_0)^{-1}\|^{-1}$. Daher ist $\lambda \mapsto \varphi\big((\lambda - a)^{-1}\big)$ *holomorph* auf $\mathbb{C} \setminus \sigma(a)$. Falls $\sigma(a) = \emptyset$, so ist $\lambda \mapsto \varphi\big((\lambda - a)^{-1}\big)$ *ganz*, d.h. holomorph auf ganz $\mathbb{C}$. Wegen [$*$] und dem Satz von Liouville[1] ist dann $\varphi\big((\lambda - a)^{-1}\big) = 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$. Aber $\varphi \in A^*$ war beliebig, und wegen Hahn-Banach gilt $(\lambda - a)^{-1} = 0$. Dies ist ein Widerspruch. □

[1] siehe `https://de.wikipedia.org/wiki/Satz_von_Liouville_%28Funktionentheorie%29`

**1.10 Satz.** Sei $A$ eine unitale Banachalgebra. Für $a \in A$ gilt dann

$$r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$$

**Beweis:** Sei $\varphi \in A^*$ ein stetiges Funktional. Wir haben im Beweis von Satz 1.9 gesehen, dass die Zuordnung $\lambda \mapsto \varphi\big((\lambda - a)^{-1}\big)$ analytisch ist für $\lambda \notin \sigma(a)$. Insbesondere gilt dies für $|\lambda| > r(a)$. Dann ist auch $\lambda \mapsto \varphi\big((\lambda^{-1} - a)^{-1}\big)$ analytisch für $0 < |\lambda| < {}^1/_{r(a)}$, ebenso $\lambda \mapsto \varphi\big((\mathbb{1} - \lambda a)^{-1}\big)$. Die Singularität bei $0$ ist hebbar, also definiert $f(\lambda) := \varphi\big((\mathbb{1} - \lambda a)^{-1}\big)$ eine analytische Funktion für $|\lambda| < {}^1/_{r(a)}$. Dann existiert eine Folge $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ mit $f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cdot \lambda^n$ für $|\lambda| < {}^1/_{r(a)}$. Die Konvergenz ist absolut und gleichmäßig, also gilt insbesondere $|\alpha_n \cdot \lambda^n| \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Falls andererseits $|\lambda| < {}^1/_{\|a\|} \leqslant {}^1/_{r(a)}$ ist, so gilt

$$f(\lambda) = \varphi\big((\mathbb{1} - \lambda \cdot a)^{-1}\big) \overset{1.5}{=} \varphi\left(\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda \cdot a)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi\big((\lambda \cdot a)^n\big) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(a^n) \cdot \lambda^n$$

also $\alpha_n = \varphi(a^n)$ für $n \in \mathbb{N}$. Es gilt $\varphi(a^n) \cdot \lambda^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Aber $\varphi \in A^*$ war beliebig, also ist für jedes $\varphi \in A^*$ die Folge $(\varphi(\lambda^n a^n))_{\mathbb{N}} = (\varphi(a^n) \cdot \lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt für $|\lambda| < {}^1/_{r(a)}$.

Nach dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit ist dann $(\lambda^n a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt für jedes $\lambda$ mit $|\lambda| < {}^1/_{r(a)}$. Damit existiert für $0 < |\lambda| < {}^1/_{r(a)}$ ein $M \geqslant 0$ mit $\|\lambda^n a^n\| \leqslant M$, $n \in \mathbb{N}$, also

$$\|a^n\|^{1/n} \leqslant \frac{M^{1/n}}{|\lambda|} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{|\lambda|}$$

Es folgt $\limsup_n \|a^n\|^{1/n} \leqslant r(a)$. Falls $\lambda \in \sigma(a)$, so gilt nach Satz 1.4 $\lambda^n \in \sigma(a^n)$ und wegen Proposition 1.8 $|\lambda^n| \leqslant \|a^n\|$, also $|\lambda| \leqslant \|a^n\|^{1/n}$ und es folgt insgesamt

$$r(a) \leqslant \inf_n \|a^n\|^{1/n} \leqslant \liminf_n \|a^n\|^{1/n} \leqslant \limsup_n \|a^n\|^{1/n} \leqslant r(a)$$

und damit $\lim_n \|a^n\|^{1/n} = r(a)$, woraus die Behauptung folgt. □

**1.11 Proposition.** Sei $A$ eine abelsche unitale Banachalgebra. Falls $A$ einfach ist, so ist $A \cong \mathbb{C}$.

*einfach = besitzt keine nichttrivialen Ideale*

**Beweis:** Sei $a \in A$, $\alpha \in \sigma(a)$. Dann ist $J := \overline{(a - \alpha \cdot \mathbb{1}) \cdot A} \lhd A$ ein abgeschlossenes Ideal. Für jedes $b \in A$ ist $(a - \alpha)b$ nicht invertierbar. Damit folgt dann $\|(a - \alpha)b - \mathbb{1}\| \geqslant 1$ für jedes $b \in A$ nach Satz 1.5. Damit ist auch $\operatorname{dist}((a - \alpha \cdot \mathbb{1}) \cdot A, \mathbb{1}) \geqslant 1$, also $\mathbb{1} \notin J$ und damit $J \neq A$. Da $A$ einfach ist, folgt $J = \{0\}$, also muss $a - \alpha \cdot \mathbb{1} = 0$ und weiter $a \in \mathbb{C} \cdot \mathbb{1}$ gelten. Damit ist $A = \mathbb{C} \cdot \mathbb{1} \cong \mathbb{C}$. □

**1.12 Definition.** Sei $A$ eine abelsche unitale Banachalgebra. Eine lineare, multiplikative, nicht verschwindende Abbildung $\chi\colon A \to \mathbb{C}$ heißt *Charakter* auf $A$. Es gilt dann $\chi(\mathbb{1}) = 1$. Wir setzen $\Omega(A) := \{\chi \mid \chi \text{ Charakter auf } A\}$ (*Charakterspektrum* oder einfach nur *Spektrum* von $A$).

**1.13 Satz.** Sei $A$ eine abelsche unitale Banachalgebra. Dann gilt

**(i)** Jeder Charakter auf $A$ ist stetig mit Norm 1.

**(ii)** $\chi \mapsto \ker \chi$ definiert eine Bijektion $\Omega(A) \to J_{\max} := \{J \mid J \subsetneq A \text{ ist maximales Ideal}\}$

**Beweis:**

**(i)** Sei $a \in A$ mit $\|a\| < 1$ und $\chi(a) = 1$. Setze $b = \sum_{n=1}^{\infty} a^n$, dann ist $\mathbb{1} + b = \sum_{n=0}^{\infty} a^n = (\mathbb{1} - a)^{-1}$. Also ist $\mathbb{1} = (\mathbb{1} + b)(\mathbb{1} - a) = \mathbb{1} + b - a - ab$ und damit $ab + a = b$. Es folgt $\chi(a)\chi(b) + \chi(a) = \chi(b)$. Dies ist ein Widerspruch. Also muss $\|\chi\| \leqslant 1$ sein. Mit $\chi(\mathbb{1}) = 1$ folgt $\|\chi\| = 1$.

**(ii)** Für jedes $\chi \in \Omega(A)$ ist $\ker\chi \lhd A$ ein Ideal. Weiter ist der Kern abgeschlossen in $A$, da $\chi$ stetig ist. Wir zeigen, dass $\ker\chi$ maximal ist. Es ist $\ker\chi \neq A$, denn es gilt $\chi \neq 0$. Falls $c \in A \setminus \ker\chi$, so gilt $\chi(c)^{-1} \cdot c - \mathbb{1} \in \ker\chi$. Also ist $\ker\chi + \mathbb{C}\cdot c = \ker\chi + \mathbb{C}\cdot\mathbb{1} = A$, da für $a \in A$ gilt $a - \chi(a)\cdot\mathbb{1} \in \ker\chi$ und damit $a = (a - \chi(a)\cdot\mathbb{1}) + \chi(a)\cdot\mathbb{1} \in \ker\chi + \mathbb{C}\cdot\mathbb{1}$. Damit ist der Kern von $\chi$ maximal.

Zur Injektivität: Es seien $\chi_1, \chi_2 \in \Omega(A)$ Charaktere mit $\ker\chi_1 = \ker\chi_2$. Dann gilt für $a \in A$

$$\chi_1(a) - \chi_2(a) = \chi_1\Big(\underbrace{a - \chi_2(a)\cdot\mathbb{1}}_{\in\ker\chi_2=\ker\chi_1}\Big) = 0$$

Also ist $\chi_1 = \chi_2$. Für die Surjektivität betrachten wir ein maximales, nichttriviales Ideal $J \subsetneq A$. Dann ist $\operatorname{dist}(J,\mathbb{1}) = 1$, denn für den offenen Ball mit Radius 1 um $\mathbb{1}$ gilt $\mathring{B}_A(\mathbb{1},1) \subset \operatorname{Inv}(A)$ nach Satz 1.5. Dann ist $\mathbb{1} \notin \overline{J} \lhd A$. Da $J$ maximal ist, folgt $J = \overline{J}$ und damit ist ${}^{A}/_{J}$ eine einfache, abelsche, unitale Banachalgebra und mit Proposition 1.11 folgt ${}^{A}/_{J} \cong \mathbb{C}$. Also ist $\chi\colon A \to {}^{A}/_{J} \cong \mathbb{C}$ ein Charakter mit $\ker\chi = J$. □

**1.14 Satz.** Sei $A$ eine abelsche unitale Banachalgebra. Für $a \in A$ gilt $\sigma(a) = \big\{\chi(a) \,\big|\, \chi \in \Omega(A)\big\}$.

**Beweis:** Für $\lambda \in \sigma(a)$ ist $J := (a-\lambda)A \lhd A$ ein echtes Ideal, da $(a-\lambda)$ nicht invertierbar ist. Nach dem Lemma von Zorn ist $J$ in einem maximalen echten Ideal enthalten, also ist $J \subset \ker\chi$ für ein $\chi \in \Omega(A)$ nach Satz 1.13. Dann ist $\chi(a-\lambda) = 0$ für einen Charakter $\chi$ und somit auch $\chi(a) = \lambda$. Es gilt also $\sigma(a) \subseteq \{\chi(a) \mid \chi \in \Omega(A)\}$. Für $\chi \in \Omega(A)$ gilt $a - \chi(a)\cdot\mathbb{1} \in \ker\chi$. Damit kann $a - \chi(a)\cdot\mathbb{1}$ nicht invertierbar sein. Also ist $\chi(a) \in \sigma(a)$ und es folgt die zweite Inklusion. □

**1.15 Satz.** Sei $A$ eine abelsche unitale Banachalgebra. Dann ist $\Omega(A)$ ein kompakter Hausdorffraum bezüglich der $w^*$-Topologie.

**Beweis:** Es ist $\Omega(A) \subset B^1(A^*)$, wobei die Einheitskugel kompakt und Hausdorffsch ist bezüglich der $w^*$-Topologie nach Banach-Alaoglu und da der Raum lokalkonvex ist. Sei $\chi_\gamma \xrightarrow{w^*} \chi$ ein Netz. $\chi_\gamma$ ist multiplikativ für jedes $\gamma$ und $\chi_\gamma(\mathbb{1}) = 1$. Damit gelten diese Eigenschaften auch für $\chi$. □

**1.16 Definition.** Sei $A$ eine abelsche unitale Banachalgebra. $\Omega(A)$ mit der $w^*$-Topologie heißt *Spektrum* von $A$. Für $a \in A$ definieren wir die *Gelfandtransformation* $\widehat{a}\colon \Omega(A) \to \mathbb{C}$ durch $\widehat{a}(\chi) = \chi(a)$.

**1.17 Satz.** Sei $A$ eine abelsche unitale Banachalgebra. Dann ist $\widehat{\ }\colon A \to C(\Omega(A))$, $a \mapsto \widehat{a}$ ein normvermindernder Homomorphismus und $r(a) = \|\widehat{a}\|_\infty$ für $a \in A$. Weiter gilt $\sigma(a) = \widehat{a}(\Omega(A))$.

**Beweis:** $\widehat{a}\colon \Omega(A) \to \mathbb{C}$ ist stetig nach Definition der $w^*$-Topologie, denn die $w^*$-Topologie ist per Definition die gröbste Topologie auf $A^*$, sodass die Einsetzungshomomorphismen stetig sind. Wir haben weiter

$$\sigma(a) \overset{1.14}{=} \big\{\chi(a) \,\big|\, \chi \in \Omega(A)\big\} = \big\{\widehat{a}(\chi) \,\big|\, \chi \in \Omega(A)\big\} = \widehat{a}\big(\Omega(A)\big)$$

Also gilt außerdem

$$\|a\| \overset{1.8}{\leqslant} r(a) = \sup_{\lambda\in\sigma(a)} |\lambda| \overset{1.14}{=} \sup_{\chi\in\Omega(A)} |\widehat{a}(\chi)| = \|\widehat{a}\|_\infty$$ □

# 2 $C^*$-Algebren und Funktionalkalkül

**2.1 Definition.** Eine Banachalgebra heißt *involutiv*, falls eine antilineare Abbildung $^*\colon A \to A$ existiert, für die folgenden Identitäten gelten:

$$a^{**} = a \qquad (ab)^* = b^*a^* \qquad \|a^*\| = \|a\|$$

**2.2 Definition.** Eine $C^*$-*Algebra* ist eine involutive Banachalgebra mit $\|a^*a\| = \|a\|^2$ für $a \in A$.

**2.3 Definition.** Sei $A$ ein $C^*$-Algebra. $a \in A$ heißt

$$\begin{cases} \textit{selbstadjungiert} & \text{falls } a = a^* \\ \textit{normal} & \text{falls } aa^* = a^*a \\ \textit{unitär} & \text{falls } aa^* = a^*a = \mathbb{1} \\ \textit{Projektion} & \text{falls } a = a^* = a^2 \\ \textit{Isometrie} & \text{falls } a^*a = \mathbb{1} \end{cases}$$

Wo die Existenz eines Einselements nötig ist, fordern wir zusätzlich, dass $A$ unital ist.

**2.4 Definition.** Es seien $A, B$ zwei $C^*$-Algebren. Eine Abbildung $\pi\colon A \to B$ heißt $^*$-*Homomorphismus*, falls $\pi$ linear, multiplikativ und $^*$-erhaltend ist. $\pi$ heißt $^*$-*Einbettung*, falls $\pi$ zusätzlich isometrisch ist.

**2.5 Bemerkung.** Falls $A$ eine (involutive) Banachalgebra ist, so ist $A \oplus \mathbb{C}$ mit offensichtlichen Vektorraumoperationen, der naheliegenden Multiplikation $(a, \lambda) \cdot (b, \mu) = (ab + \mu a + \lambda b, \lambda\mu)$ sowie $(a, \lambda)^* = (a^*, \overline{\lambda})$ im involutiven Fall und Norm definiert wir durch $\|(a, \lambda)\| := \|a\|_A + |\lambda|$ eine unitale (involutive) Banachalgebra mit $\mathbb{1} = (0, 1)$. $A \oplus \mathbb{C}$ ist jedoch keine $C^*$-Algebra, auch wenn $A$ eine $C^*$-Algebra ist.

**2.6 Satz.** Sei $A$ eine $C^*$-Algebra. Dann existiert eine unitale $C^*$-Algebra $A^\sim$ mit einer isometrischen $^*$-Einbettung $\iota\colon A \hookrightarrow A^\sim$, sodass $\iota(A) \lhd A^\sim$ ein Ideal ist mit

$$A^\sim/\iota(A) \cong \begin{cases} 0, & \text{falls } A \text{ unital} \\ \mathbb{C}, & \text{sonst} \end{cases}$$

**Beweis:** Für $a \in A$ definieren wir $\iota(a) \in \mathcal{B}(A)$, wobei $\mathcal{B}(A)$ die beschränkten Operatoren auf $A$ aufgefasst als Banachraum sind, durch $\iota(a)(b) = ab$. Definiere $A^\sim := \iota(A) + \mathbb{C} \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(A)} \subset \mathcal{B}(A)$. Dann ist $A^\sim$ eine unitale Algebra mit Involution

$$\big(\iota(a) + \lambda \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(A)}\big)^* := \iota(a^*) + \overline{\lambda} \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(A)}$$

Dass $\iota(A) \lhd A^\sim$ ein Ideal ist, ist klar. $A^\sim$ ist normiert mittels der Operatornorm. Für $0 \neq a \in A$ gilt

$$\begin{aligned} \|a\|_A = \frac{1}{\|a\|_A}\|aa^*\|_A = \left\|a\left(\frac{1}{\|a^*\|} \cdot a^*\right)\right\|_A &\leqslant \left\|\iota(a)\left(\frac{1}{\|a^*\|} \cdot a^*\right)\right\|_A \\ &\leqslant \sup_{\|b\|_A \leqslant 1} \big\|\iota(a)(b)\big\|_A = \big\|\iota(a)\big\|_{\mathcal{B}(A)} \\ &= \sup_{\|b\|_A \leqslant 1} \|ab\|_A \\ &\leqslant \|a\|_A \end{aligned}$$

Also ist $\iota$ isometrisch. Es folgt, dass $\iota(A) \subset \mathcal{B}(A)$ abgeschlossen ist, da $A$ vollständig ist. Weiter folgt, dass auch $A^{\sim} = \iota(A) + \mathbb{C} \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(A)}$ vollständig ist bezüglich $\|\cdot\|_{\mathcal{B}(A)}$. Wir zeigen nun, dass $\|\cdot\|_{\mathcal{B}(A)}$ eine $C^*$-Norm ist auf $A^{\sim}$:

$$\begin{aligned}
\left\|\iota(a) + \lambda \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(A)}\right\|_{\mathcal{B}(A)}^2 &= \sup_{b \in A, \|b\| \leqslant 1} \|ab + \lambda b\|_A^2 \\
&= \sup_{b \in A, \|b\| \leqslant 1} \left\|(ab + \lambda b)^*(ab + \lambda b)\right\|_A \\
&= \sup_{b \in A, \|b\| \leqslant 1} \left\|b^*a^*ab + \lambda b^*a^*b + \overline{\lambda} b^*ab + |\lambda|^2 b^*b\right\|_A \\
&\leqslant \sup_{b \in A, \|b\| \leqslant 1} \left\|a^*ab + \lambda a^*b + \overline{\lambda} ab + |\lambda|^2 b\right\|_A && [*] \\
&= \left\|\iota\big(a^*a + \lambda a^* + \overline{\lambda} a\big) + |\lambda|^2 \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(A)}\right\|_{\mathcal{B}(A)} \\
&= \left\|\big(\iota(a) + \lambda \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(A)}\big)^*\big(\iota(a) + \lambda \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(A)}\big)\right\|_{\mathcal{B}(A)} \\
&\leqslant \left\|\big(\iota(a) + \lambda \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(A)}\big)^*\right\|_{\mathcal{B}(A)} \left\|\iota(a) + \lambda \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(A)}\right\|_{\mathcal{B}(A)} && [**]
\end{aligned}$$

Es folgt, dass

$$\left\|\iota(a) + \lambda \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(A)}\right\|_{\mathcal{B}(A)} \leqslant \left\|\big(\iota(a) + \lambda \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(A)}\big)^*\right\|_{\mathcal{B}(A)} \leqslant \left\|\iota(a) + \lambda \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(A)}\right\|_{\mathcal{B}(A)}$$

Damit folgt, dass [*] und [**] Gleichungen sind und $\|\cdot\|_{\mathcal{B}(A)}$ eine $C^*$-Norm auf $A^{\sim}$ ist. Falls $A$ unital ist, gilt $\iota(\mathbb{1}_A) = \mathbb{1}_{\mathcal{B}(A)}$ und somit $\iota(A) = A^{\sim}$. Ist $A$ nicht unital, so ist $A^{\sim} \cong \iota(A) \oplus \mathbb{C}$ als Vektorräume und es muss $A^{\sim}/\iota(A) \cong \mathbb{C}$ gelten. □

**2.7 Bemerkung.** Man definiert oft auch eine unitale $C^*$-Algebra

$$A^+ := \begin{cases} A^{\sim}, & \text{falls } A \text{ nicht unital} \\ A \oplus \mathbb{C}, & \text{falls } A \text{ unital} \end{cases}$$

mit $\|(a, \lambda)\| := \max\{\|a\|_A, |\lambda|\}$. Dann ist in jedem Fall $A^+ \cong A \oplus \mathbb{C}$ als Vektorraum. $A^+$ lässt sich

*Blatt3 Aufgabe 2*

charakterisieren durch die universelle Eigenschaft:

$$\begin{tikzcd} & B \\ A \arrow[ur] \arrow[r, hook] & A^+ \arrow[u, dashed, "\exists!"'] \end{tikzcd}$$

wobei $B$ eine unitale $C^*$-Algebra ist und $A \to B$ ein ${}^*$-Homomorphismus ist. Eine ähnliche Beschreibung für $A^{\sim}$ ist möglich, aber etwas „subtiler".

**2.8 Definition.** Sei $A$ eine nichtunitale $C^*$-Algebra. Für $a \in A$ setzen wir

$$\sigma(a) := \sigma_{A^{\sim}}\big(\iota(a)\big) \quad \text{und} \quad r(a) := r_{A^{\sim}}\big(\iota(a)\big)$$

*Für $A$ unital sind maximale Ideale automatisch abgeschlossen*

Wieder schreiben wir $\Omega(A) := \big\{\chi \colon A \to \mathbb{C} \text{ Charaktere}\big\}$ und

$$J_{\max}(A) = \big\{J \mid J \lhd A \text{ echtes maximales abgeschlossenes Ideal}\big\}$$

**2.9 Satz.** Sei $A$ eine nichtunitale abelsche $C^*$-Algebra. Dann ist $\Omega(A)$ ein lokalkompakter Hausdorffraum bezüglich der $w^*$-Topologie. Für $a \in A$ gilt $\sigma(a) = \big\{\chi(a) \mid \chi \in \Omega(A)\big\} \cup \{0\}$.

**Beweis:** Für $\chi \in \Omega(A)$ sei $\chi^{\sim} \colon A^{\sim} \to \mathbb{C}$ die eindeutig bestimmte, lineare, unitale Fortsetzung. Es gilt $\chi^{\sim} \in \Omega(A^{\sim})$ und

$$\Omega(A^{\sim}) = \{\chi^{\sim} \mid \chi \in \Omega(A)\} \cup \{\chi_\infty\}$$

wo $\chi_\infty \colon A^{\sim} \to A^{\sim}/\iota(A) \cong \mathbb{C}$. $\Omega(A^{\sim})$ ist ein kompakter Hausdorffraum nach Satz 1.15, also muss der linke Teil der Vereinigung ein lokalkompakter Hausdorffraum sein. Man überprüft, dass $\chi \mapsto \chi^{\sim}$ ein Homöomorphismus $\Omega(A) \to \Omega(A^{\sim}) \setminus \{\chi_\infty\}$ bezüglich der $w^*$-Topologie ist. Es gilt *Blatt 2 Aufgabe 2*

$$\sigma(a) := \sigma_{A^{\sim}}(\iota(a)) \overset{1.17}{=} \{\chi(\iota(a)) \mid \chi \in \Omega(A^{\sim})\} = \underbrace{\{\chi^{\sim}(\iota(a)) \mid \chi \in \Omega(A)\}}_{=\{\chi(a) \mid \chi \in \Omega(A)\}} \cup \underbrace{\{\chi_\infty(\iota(a))\}}_{=\{0\}} \qquad \square$$

**2.10 Proposition.** Sei $A$ eine $C^*$-Algebra. Dann gilt

**(i)** Für eine Projektion $0 \neq p \in A$ gilt $\|p\| = 1$.

**(ii)** Ist $\mathbb{1} \in A$ und $u \in A$ unitär, dann ist $\|u\| = 1$ und $\sigma(u) \subset \mathbb{T}$.

**(iii)** Für $a \in A_{sa}$ ist $r(a) = \|a\|$ und $\sigma(a) \subset \mathbb{R}$.

**(iv)** Für $a \in A$ beliebig gilt $\|a\| = \|a^*a\|^{1/2} = r(a^*a)^{1/2}$.

**Beweis:**

**(i)** Es gilt $\|p\| = \|p^*p\| = \|p\|^2$ und somit muss $\|p\| = 1$ gelten.

**(ii)** Es gilt $\|u\|^2 = \|u^*u\| = \|\mathbb{1}\| = 1$, also $\|u\| = 1 = \|u^*\|$. Wenn $\lambda \in \sigma(u)$, dann gilt $\lambda \neq 0$ und es gilt $\lambda^{-1} \in \sigma(u^*)$. Da die Spektralradien von $u$ und $u^*$ kleiner gleich 1 sind, muss $|\lambda|, |\lambda^{-1}| \leqslant 1$ gelten, also $|\lambda| = 1$ und damit $\lambda \in \mathbb{T}$.

**(iii)** Es gilt $\|a^2\| = \|a^*a\| = \|a\|^2$. Eine Induktion liefert $\|a^{2^n}\| = \|a\|^{2^n}$, also nach Satz 1.10

$$r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \|a^{2^n}\|^{1/2^n} = \|a\|$$

Weiter existiert[2] $e^{ia} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(ia)^n \in A^{\sim}$ und ist unitär mit $(e^{ia})^* = e^{(ia)^*} = e^{-ia} = (e^{ia})^{-1}$, also ist $\sigma(e^{ia}) \subset \mathbb{T}$ nach (ii). Falls $\lambda \in \sigma(a)$, dann setze $b := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} i^n (a-\lambda)^{n-1}$. Dann gilt

$$(a-\lambda)be^{i\lambda} = \left(e^{i(a-\lambda)} - \mathbb{1}\right)e^{i\lambda} = e^{ia} - e^{i\lambda}$$

Also ist $e^{i\lambda} \in \sigma(e^{ia}) \subset \mathbb{T}$ und somit $\lambda \in \mathbb{R}$.

**(iv)** Folgt direkt aus (iii). $\square$

**2.11 Korollar.** Es seien $A$ und $B$ zwei $C^*$-Algebren und $\pi \colon A \to B$ ein $^*$-Homomorphismus. Dann ist $\pi$ kontraktiv. Die Aussage bleibt richtig, falls $A$ nur eine involutive Banachalgebra ist.

**Beweis:** Wir dürfen $\pi$ als unital annehmen (betrachte sonst $\pi^+ \colon A^+ \to B^{\sim}$). Für $d \in A$ gilt $\sigma_B(\pi(d)) \subset \sigma_A(d)$, also $r_B(\pi(d)) \leqslant r_A(d)$. Für $a \in A$ gilt nach Proposition 2.10 (iii)

$$\|\pi(a)\|^2 = \|\pi(a)^*\pi(a)\| = \|\pi(a^*a)\| = r_B(\pi(a^*a)) \leqslant r_A(a^*a) = \|a\|^2 \qquad \square$$

**2.12 Korollar.** Auf einer $^*$-Algebra gibt es höchstens eine $C^*$-Norm.

[2] $(ia)^0 = \mathbb{1}_{A^{\sim}}$ falls $A$ nicht unital

**Beweis:** Sei $A$ eine $^*$-Algebra mit $C^*$-Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$. Wir bezeichnen die $C^*$-Algebren entsprechend mit $A_1$ und $A_2$. Es seien $\pi_1\colon A_1 \to A_2$ und $\pi_2\colon A_2 \to A_1$ die Identitäten. Dann gilt

$$\|a\|_1 = \|\pi_2(a)\|_1 \leqslant \|a\|_2 = \|\pi_1(a)\|_2 \leqslant \|a\|_1 \qquad \square$$

**2.13 Korollar.** Sei $A$ eine $C^*$-Algebra und $\chi$ ein Charakter auf $A$. Dann gilt $\chi(a^*) = \overline{\chi(a)}$ für $a \in A$, das heißt $\chi$ ist ein $^*$-Homomorphismus.

**Beweis:** Sei $a \in A$, dann ist $a = \frac{1}{2}(a + a^*) + i \cdot \frac{1}{2i}(a - a^*) =: b + i \cdot c$ und $b, c$ sind selbstadjungiert. Es gilt

$$\chi(b) \overset{2.9}{\in} \sigma(b) \overset{2.10(iii)}{\subset} \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \chi(c) \in \sigma(c) \subset \mathbb{R}$$

Damit folgt $\chi(a^*) = \chi(b - i \cdot c) = \chi(b) - i \cdot \chi(c) = \overline{\chi(b) + i \cdot \chi(c)} = \overline{\chi(a)}$. $\square$

Aus dem bisher gezeigten können wir nun eine Version von Satz 1.13 für nicht notwendigerweise unitale $C^*$-Algebren ableiten:

**2.14 Korollar.** Sei $A$ eine abelsche $C^*$-Algebra. Dann gilt

**(i)** Jeder Charakter $\chi\colon A \to \mathbb{C}$ ist stetig mit Norm $\leqslant 1$.

**(ii)** Die Abbildung $\chi \mapsto \ker\chi$ definiert eine Bijektion

$$\Omega(A) \to J_{\max} = \left\{ J \;\middle|\; J \subsetneq A \text{ maximales, abgeschlossenes Ideal} \right\}$$

**Beweis:**

**(i)** folgt aus Korollar 2.11 und Korollar 2.13 oder auch aus Satz 1.13 und Satz 2.6.

**(ii)** Wir zeigen nur die Surjektivität: Sie $J \subsetneq A$ ein abgeschlossenes, maximales Ideal. Dann ist $J \subsetneq A^\sim$ ein abgeschlossenes Ideal und es gilt

$$J \subset A \cap \bigcap_{\substack{I \lhd A^\sim \max \\ J \subset I}} I \overset{1.13}{=} A \cap \bigcap_{\substack{\chi \in \Omega(A^\sim) \\ J \subset \ker\chi}} \ker\chi \overset{2.9}{=} A \cap \ker\chi_\infty \cap \bigcap_{\substack{\chi \in \Omega(A) \\ J \subset \ker\chi^\sim}} \ker\chi^\sim$$

Damit ist $J$ enthalten im Schnitt über alle Kerne der $\chi \in \Omega(A)$, wobei $J \subset \ker\chi$. Damit ist $J \subset \ker\chi$ für ein $\chi \in \Omega(A)$ und da $\ker\chi \lhd A$ abgeschlossen und maximal ist, folgt $J = \ker\chi$. $\square$

**2.15 Beispiel.** Wir haben nun schon einiges über $C^*$-Algebren gelernt, es dabei aber total versäumt konkrete Beispiele anzugeben. Dies holen wir nun nach:

**(i)** Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Dann ist $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ eine $C^*$-Algebra mit Operatornorm und Adjunktion: Für $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ gilt $\|T\| = \sup\left\{ |\langle \eta, T\xi\rangle| \;\middle|\; \|\xi\|, \|\eta\| \leqslant 1 \right\}$ also

$$\begin{aligned} \|T^*T\| &= \sup\left\{ |\langle \eta, T^*T\xi\rangle| \;\middle|\; \|\xi\|, \|\eta\| \leqslant 1 \right\} \geqslant \sup\left\{ |\langle T\eta, T\eta\rangle| \;\middle|\; \|\eta\| \leqslant 1 \right\} \\ &= \left(\sup\left\{ \|T\eta\| \;\middle|\; \|\eta\| \leqslant 1 \right\}\right)^2 = \|T\|^2 \geqslant \|T^*T\| \end{aligned}$$

**(ii)** Insbesondere ist $M_n := M_n(\mathbb{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$ eine $C^*$-Algebra für $n \in \mathbb{N}$.

**(iii)** Jede abgeschlossene $^*$-Unteralgebra von $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist eine $C^*$-Algebra, zum Beispiel $\mathcal{K}(\mathcal{H})$.

**(iv)** Sei $X$ ein lokalkompakter Hausdorffraum. Dann ist $C_0(X)$ eine $C^*$-Algebra mit punktweisen Operationen, Involution $f^* = \overline{f}$ und der Supremumsnorm. Tatsächlich ist jede abelsche $C^*$-Algebra von dieser Form:

**2.16 Satz** (Gelfand). Sei $A \neq 0$ eine abelsche $C^*$-Algebra. Dann ist die Gelfandtransformation $\widehat{\ }\colon A \to C_0(\Omega(A))$ ein isometrischer ${}^*$-Isomorphismus.

*$C_0(\Omega(A)) = C(\Omega(A))$, falls $A$ unital nach Satz 1.15*

**Beweis:** Betrachte das folgende Diagramm

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, mapsto] & (\chi \mapsto \chi(a)) \\
\rotatebox{90}{$\Subset$} & \rotatebox{90}{$\Subset$} \\
A \arrow[r, "\widehat{\ }"] \arrow[d, hook, "\iota"] & \left\{f \in C\big(\Omega(A) \cup \{\chi_\infty\}\big) \,\middle|\, f(\chi_\infty) = 0\right\} \cong C_0(\Omega(A)) \arrow[d, hook] \\
A^\sim \arrow[r, "\widehat{\ }"] & C\big(\Omega(A^\sim)\big) = C\big(\{\chi^\sim \mid \chi \in \Omega(A)\} \cup \{\chi_\infty\}\big) \overset{2.9}{\cong} C\big(\Omega(A) \cup \{\chi_\infty\}\big)
\end{tikzcd}$$

Die Gelfandtransformation ist ein ${}^*$-Homomorphismus nach Korollar 2.13 und Satz 1.17. Weiter gilt

$$\|a\|^2 = \|a^*a\| \overset{2.10}{=} r(a^*a) \overset{1.17}{=} \|\widehat{a^*a}\|_\infty = \left\|\widehat{a^*}\widehat{a}\right\|_\infty = \|\overline{\widehat{a}}\,\widehat{a}\|_\infty = \||\widehat{a}|^2\|_\infty = \|\widehat{a}\|_\infty^2$$

Damit ist $a \mapsto \widehat{a}$ isometrisch. Damit folgt, dass $C := \{\widehat{a} \mid a \in A\} \subset C_0(\Omega(A))$ abgeschlossen ist. Außerdem ist $C$ eine ${}^*$-Unteralgebra, also insbesondere invariant unter komplexer Konjugation. Weiter trennt $C$ die Punkte von $\Omega(A)$ und zu jedem $\chi \in \Omega(A)$ existiert ein $a \in A$ mit $\widehat{a}(\chi) = \chi(a) \neq 0$, das heißt $\mathrm{ev}_\chi(C) \neq \{0\}$ für alle $\chi \in \Omega(A)$. Mit Stone-Weierstraß folgt, dass $C \subset C_0(\Omega(A))$ dicht ist. Da $C$ abgeschlossen ist, folgt also $C = C_0(\Omega(A))$. □

**2.17 Bemerkung.** Sei $X$ ein kompakter Hausdorffraum und $f \in C(X)$, dann ist $\sigma_{C(X)}(f) = f(X)$.

**Beweis:** Die Abbildung $\delta\colon X \to \Omega(C(X))$ definiert durch $x \mapsto (f \mapsto f(x))$ ist ein Homöomorphismus wegen $C(X) \cong C\big(\Omega(C(X))\big)$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\sigma_{C(X)}(f) \overset{1.17}{=} \widehat{f}\big(\Omega(C(X))\big) = \left\{\widehat{f}(\chi) \,\middle|\, \chi \in \Omega\big(C(X)\big)\right\} &= \big\{\chi(f) \mid \chi \in \Omega\big(C(X)\big)\big\} \\
&= \big\{\delta(x)(f) \mid x \in X\big\} = f(X)
\end{aligned}$$ □

**2.18 Definition.** Sei $S \subset A$ Teilmenge einer $C^*$-Algebra $A$. Dann bezeichnet $C^*(S) \subset A$ die kleinste $C^*$-Unteralgebra von $A$, die $S$ enthält; also

$$C^*(S) := \bigcap_{\substack{B \subset A \text{ Unteralg.} \\ \text{mit } S \subset B}} B$$

**2.19 Satz** (Funktionalkalkül). Sei $A$ eine $C^*$-Algebra und $a \in A$ normal. Dann existiert ein eindeutig bestimmter ${}^*$-Isomorphismus

$$C^*(a) \cong C_0\big(\sigma(a) \setminus \{0\}\big) \qquad \text{mit} \qquad a \longmapsto \mathrm{id}_{\sigma(a)\setminus\{0\}}$$

Falls $A$ unital ist, so existiert ein eindeutig bestimmter unitaler ${}^*$-Isomorphismus

$$C^*(a, \mathbb{1}) \cong C\big(\sigma(a)\big) \qquad \text{mit} \qquad a \longmapsto \mathrm{id}_{\sigma(a)}$$

Für $f \in C_0(\sigma(a) \setminus \{0\})$ bzw. $f \in C(\sigma(a))$ bezeichnen wir mit $f(a) \in A$ das Urbild von $f$ unter diesem Isomorphismus. Es gilt $f(a) \in C^*(a, \mathbb{1}_{A^\sim}) \subset A^\sim$, falls $f(0) \neq 0$. Weiter gilt

$$\sigma\big(f(a)\big) = f\big(\sigma(a)\big)$$

Für $g \in C\big(f(\sigma(a))\big)$ gilt dann $g\big(f(a)\big) = (g \circ f)(a)$.

**Beweis:** Sei zunächst $A$ unital. Da $a \in A$ normal ist, ist $C^*(a, \mathbb{1}) = \overline{\mathrm{Alg}(a, a^*, \mathbb{1})} \subset A$ abelsch. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \alpha \colon \Omega\big(C^*(a,\mathbb{1})\big) &\longrightarrow \widehat{a}\big(\Omega(C^*(a,\mathbb{1}))\big) \overset{1.17}{=} \sigma_{C^*(A,\mathbb{1})}(a) \subset \mathbb{C} \\ \chi &\longmapsto \widehat{a}(\chi) = \chi(a) \end{aligned}$$

ist ein Homöomorphismus: Die Stetigkeit ist klar, denn $\Omega(C^*(a,\mathbb{1}))$ trägt die $w^*$-Topologie. Die Surjektivität ist trivial. Zur Injektivität: Falls $\chi_1(a) = \widehat{a}(\chi_1) = \widehat{a}(\chi_2) = \chi_2(a)$ ist, so ist $\chi_1|_{\mathrm{Alg}(a,a^*,\mathbb{1})} = \chi_2|_{\mathrm{Alg}(a,a^*,\mathbb{1})}$ und mit der Stetigkeit von $\chi_1$ und $\chi_2$ folgt, dass $\chi_1 = \chi_2$ sein muss. Die Inverse ist stetig, da $\Omega(C^*(a,\mathbb{1}))$ kompakt ist.

Wir erhalten nach Satz 2.16 $C^*(a,\mathbb{1}) \cong C\big(\Omega(C^*(a,\mathbb{1}))\big)$ mittels $a \mapsto \widehat{a}$ und $C\big(\Omega(C^*(a,\mathbb{1}))\big) \cong C\big(\sigma_{C^*(a,\mathbb{1})}(a)\big)$ mittels $\widehat{a} \mapsto \widehat{a} \circ \alpha^{-1}$. Für $\alpha(\chi) = t \in \sigma_{C^*(a,\mathbb{1})}(a)$ haben wir

$$\big(\widehat{a} \circ \alpha^{-1}\big)(t) = \big(\widehat{a} \circ \alpha^{-1}\big)\big(\alpha(\chi)\big) = \widehat{a}(\chi) = \alpha(\chi) = t$$

Also ist $\widehat{a} \circ \alpha^{-1} = \mathrm{id}_{\sigma_{C^*(a,\mathbb{1})}(a)}$. Wir nenen die Komposition der beiden Isomorphismen $\beta$ und zeigen, dass $\beta$ tatsächlich die in der Behauptung geforderten Eigenschaften hat: Für $f \in C\big(\sigma_{C^*(a,\mathbb{1})}(a)\big)$ gilt

$$\sigma_{C^*(a,\mathbb{1})}\big(f(a)\big) = \sigma_{C^*(a,\mathbb{1})}\big(\beta^{-1}(f)\big) = \sigma_{\beta(C^*(a,\mathbb{1}))}(f) = \sigma_{C\left(\sigma_{C^*(a,\mathbb{1})}(a)\right)}(f) \overset{2.17}{=} f\big(\sigma_{C^*(a,\mathbb{1})}(a)\big)$$

Falls $A$ nicht unital ist, so haben wir

$$\begin{array}{ccccc}
C^*(a, \mathbb{1}_{A^\sim}) & \xrightarrow[\cong]{2.16} & C\big(\Omega(C^*(a,\mathbb{1}_{A^\sim}))\big) & \xrightarrow[\cong]{\text{s.o.}} & C\big(\sigma_{C^*(a,\mathbb{1})}(a)\big) \\
\cup & & \cup & & \cup \\
C^*(a) & \xrightarrow[\cong]{2.16} & \begin{array}{c} C_0\big(\Omega(C^*(a))\big) \overset{2.9}{=} \\ C_0\big(\Omega(C^*(a,\mathbb{1}_{A^\sim})) \setminus \{\chi_\infty\}\big) \end{array} & \xrightarrow{\cong} & \begin{array}{c} C_0\big(\sigma_{C^*(a,\mathbb{1}_{A^\sim})}(a) \setminus \{0\}\big) = \\ \big\{ f \in C\big(\sigma_{C^*(a,\mathbb{1}_{A^\sim})}(a)\big) \bigm| f(0) = 0 \big\} \end{array} \\
\Psi & & \Psi & & \Psi \\
a & \longmapsto & \widehat{a} & \longmapsto & \mathrm{id}_{\sigma_{C^*(a,\mathbb{1}_{A^\sim})}(a)}
\end{array}$$

Der Funktionalkalkül $\beta^{-1}$ ist ein $^*$-Homomorphismus, daher gilt für $^*$-Polynome $g$, dass

$$g\big(f(a)\big) = g\big(\beta^{-1}(f)\big) = \beta^{-1}(g \circ f) = (g \circ f)(a)$$

Für eine beliebige Funktion $g \in C\big(\sigma_{C^*(a,\mathbb{1})}(a)\big)$ approximieren wir $g$ gleichmäßig auf $\sigma_{C^*(a,\mathbb{1})}(a)$ durch $^*$-Polynome und benutzen die Stetigkeit von $\beta^{-1}$.

Es bleibt zu zeigen, dass $\sigma_{C^*(a,\mathbb{1})}(a) = \sigma_A(a)$ ist (der unitale Fall genügt). Offensichtlich gilt $\mathrm{Inv}(C^*(a,\mathbb{1}_A)) \subseteq \mathrm{Inv}(A)$ und somit $\sigma_A(a) \subseteq \sigma_{C^*(a,\mathbb{1}_A)}(a)$. Um zu zeigen, dass auch die andere Inklusion gilt, sei $b \in C^*(a,\mathbb{1}_A)$ mit $\|b\| \leqslant 1$ und $b \in \mathrm{Inv}(A)$. Dann ist $b$ normal, denn $b$ und $b^*$ sind in $C^*(a,\mathbb{1}_A)$ und diese Algebra ist abelsch. $C^*(b, b^{-1})$ ist auch abelsch, da $(b^{-1})^* = (b^*)^{-1}$ und

$$b(b^*)^{-1} = b(b^*)^{-1}b^{-1}b = b(bb^*)^{-1}b = b(b^*b)^{-1}b = bb^{-1}(b^*)^{-1}b = (b^*)^{-1}b$$

Weiter ist $\|b^*b\| \leqslant 1$ nach der $C^*$-Gleichung und $\mathbb{1} - b^*b$ ist selbstadjungiert. Ferner gilt $0 < \chi(b^*b) \leqslant 1$ für alle Charaktere $\chi \in \Omega\big(C^*(b, b^{-1})\big)$. Damit ist

$$\sigma_{C^*(b,b^{-1})}(\mathbb{1} - b^*b) \overset{1.17}{=} \big\{ \chi(\mathbb{1} - b^*b) \bigm| \chi \in \Omega\big(C^*(b,b^{-1})\big) \big\} \subseteq [0,1)$$

Da das Spektrum $\sigma_{C^*(b,b^{-1})}(\mathbb{1} - b^*b)$ kompakt ist, folgt $1 > r(\mathbb{1} - b^*b) = \|\mathbb{1} - b^*b\|$. Damit existiert die Neumannsche Reihe

$$(b^*b)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\mathbb{1} - b^*b)^n \in C^*(b, \mathbb{1})$$

und es folgt $b^{-1} = (b^*b)^{-1}b^* \in C^*(b, \mathbb{1}) \subseteq C^*(a, \mathbb{1})$. Wenn $b \in C^*(a, \mathbb{1})$ invertierbar in $A$ ist, so ist also tatsächlich auch $b^{-1} \in C^*(a, \mathbb{1})$, womit die andere Inklusion $\sigma_{C^*(a,\mathbb{1})}(a) \subseteq \sigma_A(a)$ folgt. Ebenso folgt $\sigma_{C^*(a,\mathbb{1})}\big(f(a)\big) = \sigma_A\big(f(a)\big)$ für $f \in C\big(\sigma(a)\big)$. $\square$

**2.20 Korollar.** Es seien $A \subseteq B$ $C^*$-Algebren und $a \in A$. Dann gilt

$$\sigma_A(a) \cup \{0\} = \sigma_B(a) \cup \{0\}$$

**(i)** Wenn $A$ und $B$ unital sind und $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$ ist, dann gilt $\sigma_A(a) = \sigma_B(a)$.

**(ii)** Wenn $A$ nicht unital ist und $B$ unital ist, so ist $0 \in \sigma_A(a) = \sigma_B(a)$.

**(iii)** Wenn beide unital sind, die Einselemente aber nicht übereinstimmen, so gilt $\sigma_A(a) \cup \{0\} = \sigma_B(a)$.

**Beweis:**

**(i)** Es gilt wieder $\mathrm{Inv}(A) \subset \mathrm{Inv}(B)$, also $\sigma_B(a) \subset \sigma_A(a)$. Für $b \in A \cap \mathrm{Inv}(B)$ normal gilt dann $b \in \mathrm{Inv}(A)$ wie im Beweis von Satz 2.19. Damit folgt

$$\sigma_A(a) \subset \sigma_B(a) \Longrightarrow \sigma_A(a) = \sigma_B(a)$$

Falls $b$ nicht normal ist, betrachten wir $b^*b \in \mathrm{Inv}(B)$. Dann gilt

$$(b^*b)^{-1}b^* = b^{-1} \in A$$

**(ii)** Betrachte $A^\sim \cong C^*(a, \mathbb{1}_B) \subset B$ (algebraisch klar, als $C^*$-Algebren nach Korollar 2.11). Dann gilt

$$\overline{\sigma}_A(a) := \sigma_{A^\sim}(a) \overset{\text{(i)}}{=} \sigma_B(a)$$

**(iii)** Wenn $\mathbb{1}_A \neq \mathbb{1}_B$, so gilt für $a \in \mathrm{Inv}(B)$ auch $a^{-1} \in A$. Dann folgt aber $\mathbb{1}_B = a^{-1}a \in A$ (Beweis 2.19). Dies ist ein Widerspruch, also muss $0 \in \sigma_B(a)$ gelten. Wenn $\lambda \neq 0$, dann gilt $\lambda \cdot \mathbb{1}_A - a \in \mathrm{Inv}(A)$ genau dann, wenn $\lambda \cdot \mathbb{1}_B - a \in \mathrm{Inv}(B)$. Dies sieht man wie folgt:

$$(\lambda \cdot \mathbb{1}_B - a)^{-1} = (\lambda \cdot \mathbb{1}_A - a)^{-1} + \lambda^{-1}(\mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A)$$

Damit ist $\sigma_A(a) \setminus \{0\} = \sigma_B(a) \setminus \{0\}$. $\square$

# 3 Positivität

**3.1 Definition.** Sei $A$ eine $C^*$-Algebra. Ein Element $a \in A$ heißt *positiv* ($a \geqslant 0$), wenn $a = a^*$ und $\sigma(a) \subseteq [0, \infty)$ ist. Mit $A_+$ bezeichnen wir die Menge der positiven Elemente. Wenn $b, c \in A_{sa}$ sind, dann definieren wir

$$b \leqslant c \quad :\Longleftrightarrow \quad c - b \geqslant 0$$

**3.2 Bemerkung.**

**(i)** Für $a \in A \subseteq B$ gilt $a \geqslant 0$ in $A$ genau dann, wenn $a \geqslant 0$ in $B$ gilt (nach Korollar 2.20).

**(ii)** Für $a \in A = C_0(X)$ ist $a \geqslant 0$ genau dann, wenn $a(x) \geqslant 0$ für alle $x \in X$ gilt (nach 2.17).

**3.3 Proposition.** Sei $A$ eine $C^*$-Algebra und $a \in A_+$. Dann gibt es ein eindeutiges $b \in A_+$, sodass $b^2 = a$. Wir schreiben $a^{1/2}$ für dieses Element $b$.

**Beweis:** Ein solches $b \in C^*(a) \subseteq A$ existiert nach dem Funktionalkalkül, da $C^*(a) \cong C_0(\sigma(a) \setminus \{0\})$ via $a \mapsto \mathrm{id}_{\sigma(a)} \geqslant 0$. Sei $c \in A_+$ ein weiteres Element mit $c^2 = a$. Dann gilt $ca = c^3 = ac$ und damit ist $C^*(a, c)$ abelsch. Sei $\Omega := \Omega(C^*(a, c))$ das Charakterspektrum und $\Phi\colon C^*(a, c) \to C_0(\Omega)$ die Gelfandtransformation. Dann sind $\Phi(b)$ und $\Phi(c)$ Quadratwurzeln von $\Phi(a)$. Anders ausgedrückt gilt für alle $\omega \in \Omega$

$$\Phi(b)(\omega)^2 = \Phi(a)(\omega) = \Phi(c)(\omega)^2$$

Damit folgt $\Phi(b)(\omega) = \Phi(c)(\omega)$ für alle $\omega$ und somit $\Phi(b) = \Phi(c)$, also $b = c$. □

**3.4 Proposition.** Sei $a$ eine unitale $C^*$-Algebra, $a \in A_{sa}$, $t \in \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$. Dann gilt

**(i)** Aus $\|a - t\| \leqslant t$ folgt $a \geqslant 0$

Revision 3

**(ii)** Aus $a \geqslant 0$ und $\|a\| \leqslant t$ folgt $\|a - t\| \leqslant t$

**Beweis:** Wir können annehmen, dass $A = C^*(a, \mathbb{1}) = C(\sigma(a))$ gilt.

**(i)** Es gilt $\sup_{x \in \sigma(a)} |x - t| = \|a - t\| \leqslant t$, woraus $|x - t| \leqslant t$ für alle $x \in \sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$ folgt. Damit folgt $x \geqslant 0$ für alle $x \in \sigma(a)$, also $a \geqslant 0$.

**(ii)** Aus $\|a\| \leqslant t$ und $a \geqslant 0$ folgt $0 \leqslant x \leqslant t$ für alle $x \in \sigma(a)$. Subtrahieren mit $t$ liefert $-t \leqslant x - t \leqslant 0$ für alle $x$, also $|x - t| \leqslant t$. Damit folgt wieder $\|a - t\| \leqslant t$. □

**3.5 Korollar.** Sei $A$ eine $C^*$-Algebra. Dann ist $A_+$ ein Kegel, das heißt für $a, b \in A_+$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+$ gilt $\lambda \cdot a + \mu \cdot b \in A_+$

**Beweis:** Wir dürfen annehmen, dass $A$ unital ist. Dass $\lambda a \geqslant 0$ und $\mu b \geqslant 0$ gilt, ist klar. Wir müssen also nur zeigen, dass aus $a, b \in A_+$ $a + b \in A_+$ folgt. Es gilt

$$\big\| a - \|a\| \cdot \mathbb{1}_A \big\| \leqslant \|a\| \quad \text{und} \quad \big\| b - \|b\| \cdot \mathbb{1}_A \big\|$$

nach voriger Proposition 3.4(ii). Damit folgt weiter

$$\big\| a + b - (\|a\| + \|b\|) \big\| \leqslant \big\| a - \|a\| \big\| + \big\| b - \|b\| \big\| \leqslant \|a\| + \|b\|$$

Also ist $a + b \geqslant 0$ nach Proposition 3.4(i). □

**3.6 Satz.** Sei $A$ eine $C^*$-Algebra und $a \in A$. Dann gilt $a^* a \geqslant 0$.

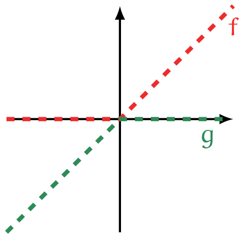


**Abbildung 1:** Zerlegen der Identität in zwei Funktionen f und g

**Beweis:** Definiere Funktionen $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wie in Abbildung 1 und $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $h(t) = t^{1/3}$. Es gilt $a^*a \in A_{sa}$, $a^*a = f(a^*a) - g(a^*a)$ und $f(a^*a)g(a^*a) = 0$. Für $c = ag(a^*a)$ ergibt sich

$$-c^*c = -g(a^*a)a^*ag(a^*a) = -g(a^*a)\big(f(a^*a) - g(a^*a)\big)g(a^*a) = g(a^*a)^3 \in A_+$$

Nach Bemerkung 1.3 gilt $\sigma(-cc^*)\setminus\{0\} = \sigma(-c^*c)\setminus\{0\}$, also $-cc^* \in A_+$. Schreibe nun $c = d + ie$ mit $d, e \in A_{sa}$. Dann gilt

$$c^*c + cc^* = 2d^2 + 2e^2$$

Also ist $c^*c = 2d^2 + 2e^2 - cc^* \geqslant 0$. Damit ist $\sigma(c^*c) \subseteq \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_- = \{0\}$. Also ist $\|c\|^2 = \|c^*c\| = r(c^*c) = 0$. Damit ist $g(a^*a)^3 = 0$ und $g(a^*a) = 0$ and $a^*a = f(a^*a) \geqslant 0$. $\square$

**3.7 Satz.** Sei $A$ eine $C^*$-Algebra. Dann gilt

**(i)** $A_+ = \{a^*a \mid a \in A\}$

**(ii)** $A = \operatorname{span} A_+$

**(iii)** $A_+$ ist ein abgeschlossener Kegel in $A$

**(iv)** $\leqslant$ ist eine partielle Ordnung auf $A_{sa}$

**(v)** Für $a, b \in A_{sa}$ mit $a \leqslant b$ gilt $cac^* \leqslant cbc^*$.

**(vi)** Für $0 \leqslant a \leqslant b$ gilt $\|a\| \leqslant \|b\|$

**(vii)** Wenn $A$ unital ist und $a \in A_+ \cap \operatorname{Inv}(A)$, dann folgt aus $a \leqslant b$ stets $b \in \operatorname{Inv}(A)$ und $0 \leqslant b^{-1} \leqslant a^{-1}$.

**Beweis:**

**(i)** Folgt aus Satz 3.6 und Proposition 3.3.

**(ii)** Wenn $a \in A$ ist, dann können wir $a = b + ic$ mit $b, c \in A_{sa}$ schreiben. Definiere $b_+ := f(b)$, $b_- := g(b)$, $c_+ := f(c)$, $c_- := g(c)$. Diese liegen alle in $A_+$. Dann gilt $b = b_+ - b_-$, $c = c_+ - c_-$ und $a = b_+ - b_- + i(c_+ - c_-) \in \operatorname{span} A_+$.

**(iii)** Kegel ist klar. Zur Abgeschlossenheit: Sei $a \in \overline{A}^{\|\cdot\|}$. Dann gilt $a = a*$, da $A_{sa}$ abgeschlossen ist. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es $b \in A_+$ mit $\|b - a\| < \varepsilon$. Dann gilt

$$\|(a + \varepsilon - b) - \varepsilon\| \leqslant \varepsilon$$

$a + \varepsilon - b \geqslant 0$ nach Proposition 3.4. Dann ist $a + \varepsilon = a + \varepsilon - b + b \geqslant 0$ nach Korollar 3.5. Es folgt $\sigma(a + \varepsilon) \subseteq [0, \infty)$ und damit $\sigma(a) \subseteq [\varepsilon, \infty)$. Lassen wir $\varepsilon$ gegen 0 gehen, so folgt $\sigma(a) \subseteq [0, \infty)$. Es folgt $a \geqslant 0$ und damit $\overline{A_+} = A_+$.

**(iv)** Es gilt offensichtlich $a \leqslant a$. Aus $a \leqslant b$ und $b \leqslant a$ folgt $\sigma(b-a) \subset \mathbb{R}_+$ und $\sigma(a-b) \subset \mathbb{R}_+$. Damit folgt $\sigma(a-b) = \sigma(b-a) = \{0\}$. Da $a-b$ selbstadjungiert ist, folgt $a-b=0$. Gilt $a \leqslant b$ und $b \leqslant c$, so ist

$$c - a = c - b + b - a \overset{3.5}{\geqslant} 0 \Longrightarrow c \geqslant a$$

**(v)** Es gilt

$$c^*bc - c^*ac = c^*(b-a)c = c^*(b-a)^{1/2}(b-a)^{1/2}c = d^*d \geqslant 0$$

**(vi)** Sei $0 \leqslant a \leqslant b$. Wir haben $\|b\| \cdot \mathbb{1}_{A^\sim} \geqslant b$ nach Gelfand (für $C^*(b, \mathbb{1}_{A^\sim})$). Damit ist $a \leqslant \|b\| \cdot \mathbb{1}_{A^\sim}$. Gelfand für $C^*(a, \mathbb{1}_{A^\sim})$ liefert $\|b\| \cdot \mathbb{1}_{A^\sim} \geqslant \|a\| \cdot \mathbb{1}_{A^\sim}$. Damit muss $\|b\| \geqslant \|a\|$ sein.

**(vii)** *Übung!* □

**3.8 Satz.** Sei $A$ eine $C^*$-Algebra. Für $0 \leqslant a \leqslant b$ gilt $a^{1/2} \leqslant b^{1/2}$.

**Beweis:** Seien $t > 0$ und $c, d \in A^\sim_{sa}$ mit

$$\left(t \cdot \mathbb{1} + b^{1/2} + a^{1/2}\right)\left(t \cdot \mathbb{1} + b^{1/2} - a^{1/2}\right) = c + id$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{2} \cdot \left(\left(t \cdot \mathbb{1} + b^{1/2} + a^{1/2}\right)\left(t \cdot \mathbb{1} + b^{1/2} - a^{1/2}\right) + \left(t \cdot \mathbb{1} + b^{1/2} - a^{1/2}\right)\left(t \cdot \mathbb{1} + b^{1/2} + a^{1/2}\right)\right) \\ &= t^2 \cdot \mathbb{1} + 2t\underbrace{b^{1/2}}_{\geqslant 0} + \underbrace{b-a}_{\geqslant 0} \geqslant t^2 \cdot \mathbb{1} \end{aligned}$$

Da $t \neq 0$ ist, folgt $c \in \mathrm{Inv}(A^\sim) \cap A_+$. Da $c^{-1/2}dc^{-1/2}$ positiv ist, ist das Spektrum von $\mathbb{1} + i \cdot c^{-1/2}dc^{-1/2}$ in $1 + i \cdot \mathbb{R}$ enthalten. Weiter gilt

$$\mathbb{1} + i \cdot c^{1/2}dc^{1/2} = c^{-1/2}(c + i \cdot d)c^{-1/2} \in \mathrm{Inv}(A^\sim)$$

Damit folgt, dass $c + i \cdot d$ invertierbar ist und damit $\left(t \cdot \mathbb{1} + b^{1/2} - a^{1/2}\right)$ linksinvertierbar. Dieses Element ist aber selbstadjungiert und muss damit dann auch rechtsinvertierbar, also invertierbar sein. Damit folgt, dass $-t \notin \sigma\left(b^{1/2} - a^{1/2}\right)$. Damit ist $\sigma\left(b^{1/2} - a^{1/2}\right) \subset \mathbb{R}_+$ und $b^{1/2} \geqslant a^{1/2}$. □

**3.9 Beispiel.** Im Allgemeinen folgt aus $0 \leqslant a \leqslant b$ *nicht* $a^2 \leqslant b^2$. Betrachte dafür $A = M_2$ und die Elemente

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dann gilt $p \leqslant p + q$, aber $p^2 = p \nleqslant (p+q)^2 = p + q + pq + qp$, denn

$$q + pq + qp = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Matrix hat einen negativen Eigenwert, da die Determinante $-1$ ist.

**3.10 Bemerkung.** Falls für alle $a, b \in A$ mit $0 \leqslant a \leqslant b$ gilt, dass $a^2 \leqslant b^2$, so ist $A$ abelsch.

**3.11 Lemma.** Sei $A$ eine $C^*$-Algebra. Dann ist $\Lambda := \{a \in A_+ \mid \|a\| < 1\}$ gerichtet bezüglich „$\leqslant$“.

**Beweis:** Gegeben $a, b \in \Lambda$ setze $a' := a(\mathbb{1}_{A^\sim})^{-1} \in A_+$ und $b' := b(\mathbb{1}_{A^\sim} - b)^{-1} \in A_+$. Dann gilt

$$c := (a' + b')(\mathbb{1}_{A^\sim} + a' + b')^{-1} \in \Lambda$$

nach Gelfand. Es ist

$$\begin{aligned} a = a(\mathbb{1}-a)^{-1}\left((\mathbb{1}-a)^{-1}\right)^{-1} &= a(\mathbb{1}-a)^{-1}\left(\mathbb{1}+a(\mathbb{1}-a)^{-1}\right)^{-1} = a'(\mathbb{1}+a')^{-1} \\ &= (\mathbb{1}+a'-\mathbb{1})(\mathbb{1}+a')^{-1} = \mathbb{1}-(\mathbb{1}+a')^{-1} \end{aligned}$$

Da $0 \leqslant \mathbb{1} + a' \leqslant 1 + a' + b'$ jeweils invertierbar, also $(1 + a' + b')^{-1} \leqslant (1 + a')^{-1}$

$$\leqslant \mathbb{1} - (\mathbb{1} + a' + b')^{-1} = \ldots = (a' + b')(\mathbb{1} + a' + b')^{-1}$$

$a \leqslant c$ und $b \leqslant c$ ebenso. □

**3.12 Definition.** Eine *approximative Eins* in einer $C^*$-Algebra $A$ ist (aufsteigendes) Netz $(e_\lambda)_\Lambda \subset A_+^1$ mit $a = \lim_\lambda ae_\lambda$ beziehungsweise $a = \lim_\lambda e_\lambda a$ für jedes $a \in A$.

**3.13 Satz.** Jede $C^*$-Algebra $A$ besitzt eine approximative Eins.

**Beweis:** Sei $\Lambda := \{a \in A_+ \mid \|a\| < 1\}$ wie in Lemma 3.11 und setze $e_\lambda := \lambda$ für $\lambda \in \Lambda$. Dann ist $(e_\lambda)_\Lambda \subset A_+^1$ ein aufsteigendes Netz (aufsteigend bezüglich „$\leqslant$", gerichtet nach Lemma 3.11). Sei nun $a \in \Lambda$ und $1 \geqslant \varepsilon > 0$. Sei $\Omega := \sigma(a)\backslash\{0\} \subset (0, 1]$ und $\Phi\colon C^*(a) \to C_0(\Omega)$ der Gelfandisomorphismus. Setze $f := \Phi(a) = \mathrm{id}_\Omega$ und $K := \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \geqslant \varepsilon\} \subset \Omega$ kompakt. Nach Urysohn existiert ein $g\colon \Omega \to [0, 1]$ stetig mit kompaktem Träger und $g(\omega) = 1$ für $\omega \in K$. Wähle $\delta > 0$ mit $\delta < 1$ und $1 - \delta < \varepsilon$. Dann gilt

$$\|f - \delta \cdot g \cdot f\|_\infty = \|(1 - \delta g)f\|_\infty \leqslant \varepsilon$$

Mit $\overline{\lambda} := \Phi^{-1}(\delta \cdot g) \in \Lambda$ ergibt sich $\left\|a - \overline{\lambda}a\right\|_A \leqslant \varepsilon^2 \leqslant \varepsilon$. Falls nun $\lambda \in \Lambda$ mit $\lambda \geqslant \overline{\lambda}$, so gilt $0 \leqslant a^*(\mathbb{1} - e_\lambda)a \leqslant a^*(1 - e_{\overline{\lambda}})a$ nach Satz 3.7(v). Dann folgt

$$\begin{aligned} \|a - e_\lambda a\|^2 = \left\|(\mathbb{1}-e_\lambda)^{1/2}(\mathbb{1}-e_\lambda)^{1/2}a\right\|^2 \leqslant \left\|(\mathbb{1}-e_\lambda)^{1/2}a\right\|^2 &= \left\|a^*(\mathbb{1}-e_\lambda)^{1/2}(\mathbb{1}-e_\lambda)^{1/2}a\right\| \\ &\leqslant \|a^*(\mathbb{1}-e_{\overline{\lambda}})a\| \leqslant \varepsilon \end{aligned}$$

Damit folgt $a = \lim_\lambda e_\lambda a$ für $a \in \Lambda$. Da $A = \operatorname{span}\Lambda$ gilt, sind wir fertig. □

**3.14 Proposition.** Sei $A$ eine separable $C^*$-Algebra – das heißt $A$ besitzt eine abzählbare dichte Teilmenge – dann besitzt $A$ eine abzählbare idempotente approximative Eins $(e_n)_\mathbb{N}$, das heißt es gilt $e_n e_{n+1} = e_n$.

**Beweis:** *Übung!* □

# 4 Ideale, Quotienten und Limiten

**4.1 Proposition.** Sei $L$ ein abgeschlossenes Linksideal in einer $C^*$-Algebra $A$. Dann existiert ein aufsteigendes Netz $(e_\lambda)_\Lambda \subset L \cap A_+^1$ mit $a = \lim_\lambda ae_\lambda$ für $a \in L$. $L \cap L^* \subset A$ ist eine $C^*$-Unteralgebra.

**Beweis:** Sei $B := L \cap L^*$, dann ist $B \subset A$ eine $C^*$-Unteralgebra:

- $L^* \subset A$ abgeschlossen, da $^*$ isometrisch ist. Damit ist auch $L \cap L^*$ abgeschlossen in $A$
- $L \cap L^* \subset$ ist ein Untervektorraum.
- $L^* \subset A$ ist ein Rechtsideal: $l^*a = (a^*l)^* \in L^*$. Damit ist $L \cap L^*$ eine Unteralgebra:

$$a, b \in L \cap L^* \Rightarrow \underbrace{a}_{\in L^*}\underbrace{b}_{\in L} \in L \cap L^*$$

- $L \cap L* = (L \cap L^*)^*$ ist klar.

Mit Satz Satz 3.13 folgt, dass $B$ eine approximative Eins $(e_\lambda)_\Lambda$ besitzt. Für $a \in L$ ist $a^*a \in B$ und damit

$$\lim_\lambda \|a - ae_\lambda\| = \lim_\lambda \left\|(\mathbb{1} - e_\lambda)a^*a(\mathbb{1} - e_\lambda)\right\|^{1/2} = 0$$ □

**4.2 Satz.** Sei $A$ eine $C^*$-Algebra und $J \lhd A$ ein (abgeschlossenes, zweiseitiges) Ideal. Dann ist $J \subset A$ eine $C^*$-Algebra. Falls $(e_\lambda)_\Lambda \subset J$ eine approximative Eins ist, so gilt für $a \in A$

$$\|a + J\|_{A/J} = \lim_\lambda \|a - ae_\lambda\| = \lim_\lambda \|a - e_\lambda a\|$$

wobei $\|a + J\|_{A/J} = \inf_{b\in J} \|a + b\|$ die Quotientennorm bezeichnet.

**Beweis:** Nach Proposition 4.1 existiert $(u_\gamma)_\Gamma \subset J \cap A_+^1$ mit $a = \lim_\gamma au_\gamma$ für $a \in J$. Dann gilt

$$a^* = \lim_\gamma (au_\gamma)^* = \lim_\gamma u_\gamma a^* \in J$$

für $a \in J$, also $J = J^*$. Mit Proposition 4.1 folgt dann wiederum, dass $J = J \cap J^*$ eine $C^*$-Unteralgebra von $A$ ist. Sei $(e_\lambda)_\Lambda \subset J$ eine beliebige approximative Eins für $J$. Gegeben $a \in A$ und $\varepsilon > 0$, so wähle $b \in J$ mit $\|a + b\| \leqslant \|a + J\|_{A/J} + \frac{\varepsilon}{2}$. Wähle dann $\lambda_0 \in \Lambda$ mit $\|b - \varepsilon_\lambda b\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $\lambda \geqslant \lambda_0$. Für $\lambda \geqslant \lambda_0$ gilt dann

$$\begin{aligned}\|a + J\|_{A/J} \leqslant \|a - e_\lambda a\| \leqslant \|(\mathbb{1} - e_\lambda)(a + b)\| + \|(\mathbb{1} - e_\lambda)b\| &\leqslant \|a + b\| + \|(\mathbb{1} - e_\lambda)b\| \\ &\leqslant \|a + J\|_{A/J} + \varepsilon/2 + \varepsilon/2\end{aligned}$$

Damit folgt $\|a - e_\lambda a\| \xrightarrow{\lambda} \|a + J\|_{A/J}$. $\|a - ae_\lambda\| \xrightarrow{\lambda} \|a + J\|_{A/J}$ folgt ebenso. □

**4.3 Bemerkung.** Für Ideale $J \lhd A$ und $I \lhd J$ gilt $I \lhd A$.

**Beweis:** Es sei $a \in A$ und $b \in I$. Dann gilt

$$ab = \underbrace{ab^{1/2}}_{\in J} b^{1/2} \in I$$ □

**4.4 Satz.** Sei $A$ eine $C^*$-Algebra und $J \lhd A$ ein Ideal. Dann ist $A/J$ eine $C^*$-Algebra (mit induzierten Operationen und der Quotientennorm).

**Beweis:** Fixiere eine approximative Eins $(e_\lambda)_\Lambda$ für J. Sei $a \in A$ und $b \in J$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\|a+J\|^2_{A/J} &\overset{4.2}{=} \lim_\lambda \|a - ae_\lambda\|^2 = \lim_\lambda \|(\mathbb{1}-e_\lambda)a^*a(\mathbb{1}-e_\lambda)\| \\ &\leqslant \sup_\lambda \big\|(\mathbb{1}-e_\lambda)(a^*a+b)(\mathbb{1}-e_\lambda)\big\| + \underbrace{\lim_\lambda \big\|(\mathbb{1}-e_\lambda)b(\mathbb{1}-e_\lambda)\big\|}_{=0} \\ &\leqslant \|a^*a+b\|\end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\|a+J\|^2_{A/J} \leqslant \inf_{b\in J}\|a^*a+b\| = \|a^*a+J\|_{A/J} \leqslant \|a^*+J\|_{A/J}\cdot\|a+J\|_{A/J} = \|a+J\|^2_{A/J}$$

Also ist $\|(a^*+J)(a+J)\|_{A/J} = \|a+J\|^2_{A/J}$. □

**4.5 Proposition.** Seien $A, B$ $C^*$-Algebren, $\pi\colon A \to B$ ein injektiver $^*$-Homomorphismus. Dann ist $\pi$ bereits isometrisch.

**Beweis:** Zu zeigen: $\|\pi(a^*a)\| = \|\pi(a)\|^2 = \|a\|^2 = \|a^*a\|$ für $a \in A$. Wir dürfen also annehmen, dass $A = C^*(a^*a)$ und $B = \overline{\pi(A)}$ abelsch sind. Ersetze $\pi$ durch $\tilde{\pi}\colon \tilde{A} \to \tilde{B}$, falls $A$ nicht unital ist. Wir dürfen also auch $A$ und $B$ als unital annehmen. $\pi$ induziert eine stetige Abbildung $\pi^*\colon \Omega(B) \to \Omega(A)$ durch $\chi \mapsto \chi\circ\pi$, also ist $\pi^*(\Omega(B)) \subset \Omega(A)$ kompakt und insbesondere auch abgeschlossen. Falls $\pi^*$ nicht surjektiv wäre, so gäbe es ein $0 \neq f \in C(\Omega(A))_+ \cong A_+$ mit $f|_{\pi^*(\Omega(B))} = 0$. Dann gilt

$$0 = f(\pi^*(\chi)) = \chi\circ\pi(f)$$

*Gelfand-Isomorphismus in der Notation unterdrückt*

für alle $\chi \in \Omega(B)$. Also ist $\pi(f) = 0$, woraus mit der Injektivität wieder $f = 0$ folgt. Dies ist ein Widerspruch und somit ist $\pi$ surjektiv. Für $a \in A$ gilt

$$\|a\|_A = \sup_{\rho\in\Omega(A)}|\rho(a)| = \sup_{\chi\in\Omega(B)}|\chi\circ\pi(a)| = \|\pi(a)\|_B$$

Also ist $\pi$ isometrisch. □

**4.6 Satz.** Seien $A, B$ $C^*$-Algebren, $\pi\colon A \to B$ ein $^*$-Homomorphismus. Dann ist $\pi(A) \subset B$ eine $C^*$-Unteralgebra.

**Beweis:** Betrachte die $C^*$-Algebra $A/\ker\pi$ (siehe 4.4) und den wohldefinierten $^*$-Homomorphismus

$$\begin{aligned}\dot{\pi}\colon A/\ker\pi_n &\longrightarrow B \\ a+\ker\pi &\longmapsto \pi(a)\end{aligned}$$

$\dot{\pi}$ ist injektiv, also isometrisch nach Proposition 4.5. Damit ist $\pi(A)$ vollständig und $\pi(A) \subset B$ abgeschlossen. Also ist $\pi(A)$ eine $C^*$-Unteralgebra. □

**4.7 Proposition.** Sei $A$ eine $C^*$-Algebra, $B \subset A$ eine $C^*$-Unteralgebra und $J \lhd A$ ein Ideal. Dann ist $B + J \subset A$ eine $C^*$-Unteralgebra.

**Beweis:** *Übung!* □

**4.8 Definition.** Eine $C^*$-Unteralgebra $B \subset A$ heißt *hereditär*, $B \subset_{\text{her}} A$, falls gilt

$$a \in A_+, b \in B_+, a \leqslant b \Longrightarrow a \in B$$

**4.9 Satz.** Für eine $C^*$-Algebra $A$ definiert

$$\begin{array}{rcl} \{L \subset A \mid L \text{ ist abg.Linksideal}\} & \longrightarrow & \{B \subset_{\text{her}} A\} \\ L & \longmapsto & L \cap L^* \\ \{a \in A \mid a^*a \in B\} & \longleftarrow & B \end{array}$$

eine natürliche Bijektion.

**Beweis:** Sei $B \subset_{\text{her}} A$. Dann ist $L_B := \{a \in A \mid a^*a \in B\} \subset A$ ein abgeschlossenes Linksideal: Wenn $a, b \in L_B$, dann gilt

$$(a^* + b^*)(a + b) \leqslant (a^* + b^*)(a + b) + (a - b)^*(a - b) = 2a^*a + 2b^*b \in B$$

also $(a^* + b^*)(a + b) \in B$ und somit $a + b \in L_B$. Für $a \in A$ und $b \in L_B$ gilt

$$(ab)^*ab = b^*a^*ab \leqslant b^*(\|a^*a\| \cdot \mathbb{1}_{A^\sim})b = \|a^*a\|b^*b \in B$$

Da $B$ hereditär ist, folgt $(ab)^*ab \in B$ und somit $ab \in L_B$. Also ist $L_B$ wirklich ein Linksideal und $L_B \subset A$ ist abgeschlossen.

Mit Proposition 4.1 folgt, dass $L_B \cap L_B^* \subset A$ eine $C^*$-Algebra ist. Es gilt

$$0 \leqslant b \in L_B \cap L_B^* \Longrightarrow 0 \leqslant b^{1/2} \in L_B \cap L_B^*$$

Also ist $b \in B$ und $L_B \cap L_B^* \subset B$. Weiter ist klar, dass $B \subset L_B \cap L_B^*$, also gilt insgesamt $B = L_B \cap L_B^*$ und die erste Verknüpfung entspricht der Identität auf der rechten Seite. Die andere ist eine Übung (mit approximativer Eins für $L \cap L^*$). □

**4.10 Satz.** Sei $B \subset A$ eine $C^*$-Unteralgebra. Dann gilt:

$$B \subset_{\text{her}} A \iff bac \in B \text{ für alle } b, c \in B, a \in A$$

**Beweis:** Für die erste Implikation sei $B = L \cap L^*$ für ein abgeschlossenes Linksideal $L$ nach Satz 4.9. Für $b, c \in B$ und $a \in A$ gilt $bac \in L$ und

$$(bac)^* = c^*a^*b^* \in L$$

Also ist $bac \in L \cap L^* = B$. Für die zweite Implikation seien $a \in A_+$, $b \in B_+$ mit $0 \leqslant a \leqslant b$. Sei weiter $(e_\lambda)_\Lambda \subset B$ eine approximative Eins für $B$. Dann gilt $e_\lambda a e_\lambda \in B$ für $\lambda \in \Lambda$ nach Vorraussetzung. Wir haben nun

$$0 \leqslant (\mathbb{1} - e_\lambda)a(\mathbb{1} - e_\lambda) \leqslant (\mathbb{1} - e_\lambda)b(\mathbb{1} - e_\lambda) \xrightarrow{\lambda} 0$$

Damit gilt auch $a^{1/2}(\mathbb{1} - e_\lambda) \xrightarrow{\lambda} 0$ und es folgt $B \ni e_\lambda a e_\lambda \to a \in B$. □

**4.11 Korollar.** Sei $J \lhd A$ ein Ideal, dann gilt $J \subset_{\text{her}} A$. □

**4.12 Korollar.** Sei $A$ eine $C^*$-Algebra, $a \in A_+$ ein positives Element. Dann gilt $\overline{aAa} \subset_{\text{her}} A$. Falls $A$ separabel ist und $B \subset_{\text{her}} A$, so gilt $B = \overline{hAh}$ für ein $h \in A_+$.

**Beweis:** *Übung!* □

**4.13 Satz.** Sei $(A_n, \varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein *induktives System von $C^*$-Algebren*, das heißt die $A_n$ sind $C^*$-Algebren und die $\varphi_n \colon A_n \to A_{n+1}$ sind $^*$-Homomorphismen. Dann existiert eine (bis auf Isomorphie) eindeutig bestimmte $C^*$-Algebra $\varinjlim(A_n, \varphi_n)$ mit folgender universeller Eigenschaft:

- Es existieren $^*$-Homomorphismen $\varphi_{n,\infty} \colon A_n \to \varinjlim(A_n, \varphi_n)$ mit $\varphi_{n,\infty} = \varphi_{n+1,\infty} \circ \varphi_n$.
- Falls $\psi_n \colon A_n \to B$ für $n \in \mathbb{N}$ $^*$-Homomorphismen sind mit $\psi_n = \psi_{n+1} \circ \varphi_n$, so existiert ein eindeutig bestimmter $^*$-Homomorphismus $\psi \colon \varinjlim(A_n, \varphi_n) \to B$ mit $\psi_n = \psi \circ \varphi_{n,\infty}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Kürzer:

$$\begin{tikzcd}
 & & & & \varinjlim(A_n, \varphi_n) \arrow[dd, dashed, bend left, "\exists!\psi"] \\
A_0 \arrow[r] & \dots \arrow[r] & A_n \arrow[r] \arrow[urr, "\varphi_{n,\infty}"] \arrow[drr, "\psi_n"'] & A_{n+1} \arrow[r] \arrow[ur, "\varphi_{n+1,\infty}"] \arrow[dr, "\psi_{n+1}"] & \dots \\
 & & & & B
\end{tikzcd} \qquad [*]$$

**Beweis:** Die Menge

$$\prod_{\mathbb{N}} A_n := \left\{ (a_n)_{\mathbb{N}} \;\middle|\; a_n \in A_n, \sup_n \|a_n\| < \infty \right\}$$

ist eine $C^*$-Algebra mit komponentenweisen Operationen und Supremumsnorm: Sie ist Banachalgebra nach Blatt 1, Aufgabe 1 c) und $\|\cdot\|_\infty$ ist offensichtlich eine $C^*$-Norm. Es ist nun

$$\bigoplus_{\mathbb{N}} A_n := \{(a_n)_{\mathbb{N}} \mid a_n \in A_n, \lim_{n\to\infty} \|a_n\| = 0\} \lhd \prod_{\mathbb{N}} A_n$$ *warum?*

Sei $q \colon \prod_{\mathbb{N}} A_n \to {}^{\prod_{\mathbb{N}} A_n}/_{\bigoplus_{\mathbb{N}} A_n}$ die Quotientenabbildung. Sei

$$C := \{(a_n)_{\mathbb{N}} \mid (a_n)_{\mathbb{N}} \in \prod_{\mathbb{N}} A_n, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ mit } a_{n+1} = \varphi_n(a_n), n \geqslant n_0\}$$

$C \subset \prod_{\mathbb{N}} A_n$ ist eine $^*$-Unteralgebra und $\overline{C} \subset \prod_{\mathbb{N}} A_n$ ist $C^*$-Unteralgebra. Wir definieren

$$\varinjlim(A_n, \varphi_n) := q(\overline{C}) \subset {}^{\prod_{\mathbb{N}} A_n}\!\!\Big/_{\bigoplus_{\mathbb{N}} A_n}$$

Wir definieren $^*$-Homomorphismen $\varphi'_n \colon A_n \to C$ durch $\varphi'_n(a) := \big(0, \dots, 0, a, \varphi_n(a), \varphi_{n+1}(\varphi(a))\big)$ und $\varphi_{n,\infty} := q \circ \varphi'_n \colon A_n \to \varinjlim(A_n, \varphi_n)$. Gegeben $B$ und $\psi_n \colon A_n \to B$, so ist $\psi$ auf $q(C)$ eindeutig bestimmt durch $[*]$, das heißt $\psi_n = \psi \circ \varphi_{n,\infty} \colon A_n \to B$. Aber $q(C) \subset q(\overline{C}) = \varinjlim(A_n, \varphi_n)$ und $\psi$ ist normvermindernd, setzt sich also eindeutig auf $q(\overline{C})$ fest. Eindeutigkeit von $\varinjlim(A_n, \varphi_n)$ ist klar. $\square$

**4.14 Beispiel.** Beispiele für den gerichteten Limes

**(i)** Betrachte

$$M_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow M_n \xrightarrow{\varphi_n} M_{n+1} \longrightarrow \dots \longrightarrow \varinjlim(M_n, \varphi_n) \cong \mathcal{K}\big(\ell^2(\mathbb{N})\big)$$

wobei die $\varphi_n$ eine Matrix rechts unten mit Nullen auffüllt. Es gilt

$$\overline{\bigcup_{\mathbb{N}} \mathcal{B}(\operatorname{span}\{\eta_0, \dots, \eta_n\})} \subset \mathcal{B}\big(\ell^2(\mathbb{N})\big)$$

**(ii)** Betrachte

$$M_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow M_{2^n} \xrightarrow{\varphi_n} M_{2^{n+1}} \longrightarrow \dots \longrightarrow \varinjlim(M_{2^n}, \varphi_n) =: M_{2^\infty}$$

wobei die verbindenden Abbildungen die Matrizen zweimal auf der Diagonalen platzieren. Erzeuger/Vernichter Fermionen, CAR-Algebra.

# 5 Zustände, die GNS-Konstruktion

**5.1 Definition.** Sei $A$ eine $C^*$-Algebra. Eine Abbildung $\varphi\colon A \to \mathbb{C}$ heißt *positives Funktional*, falls $\varphi$ linear ist und $\varphi(A_+) \subset \mathbb{R}_+$ gilt. $\varphi$ heißt *Zustand*, falls außerdem $\|\varphi\| = 1$ gilt. Wir schreiben $S(A) := \{\text{Zustände auf } A\}$.

Revision 5

**5.2 Proposition.** Sei $\varphi\colon A \to \mathbb{C}$ ein positives Funktional. Dann ist

$$\begin{aligned} A \times A &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (a, b) &\longmapsto \varphi(a^*b) \end{aligned}$$

eine positive Sesquilinearform. Insbesondere gilt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|\varphi(a^*b)| \leqslant \varphi(a^*a)^{1/2}\varphi(b^*b)^{1/2}$$

**Beweis:** Klar. □

**5.3 Satz.** Sei $\varphi$ ein positives Funktional auf $A$. Dann gilt

**(i)** $\varphi$ ist beschränkt,

**(ii)** $\varphi(a^*) = \varphi(a)$ für $a \in A$ und

**(iii)** $|\varphi(a)|^2 \leqslant \|\varphi\|\varphi(a^*a)$ für $a \in A$

**Beweis:**

**(i)** Falls $\varphi$ unbeschränkt ist, so existiert $(a_n)_{\mathbb{N}} \subset A_+^1$ mit $\varphi(a_n) > 2^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Setze $h := \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \cdot a_n \subset A_+$. Dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\varphi(h) \geqslant \varphi\left(\sum_{n=0}^{k} \frac{1}{2^n} \cdot a_n\right) > k + 1,$$

was ein Widerspruch ist.

**(ii)** Es sei $a = b - c + i \cdot d - e \cdot e$ mit $b, c, d, e \in A_+$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \varphi(a^*) = \varphi(b - c - i \cdot d + i \cdot e) &= \varphi(b) - \varphi(c) - i \cdot \varphi(d) + i \cdot \varphi(e) \\ &= \overline{\varphi(b) - \varphi(c) + i \cdot \varphi(d) - i \cdot \varphi(e)} = \overline{\varphi(a)} \end{aligned}$$

**(iii)** Sei $(e_\lambda)_\Lambda$ eine approximative Eins. Dann gilt

$$|\varphi(a)|^2 = \lim_\lambda |\varphi(e_\lambda \cdot a)|^2 \overset{\text{C.S.}}{\leqslant} \lim_\lambda \varphi(e_\lambda^2)\varphi(a^*a) \leqslant \|\varphi\|\varphi(a^*a)$$ □

**5.4 Satz.** Sei $A$ eine $C^*$-Algebra und $\varphi \in A^*$ ein (beschränktes) Funktional. Dann sind äquivalent:

**(i)** $\varphi$ ist positiv.

**(ii)** $\|\varphi\| = \lim_\lambda \varphi(e_\lambda)$ für jede approximative Eins $(e_\lambda)_\Lambda$ in $A$.

**(iii)** $\|\varphi\| = \lim_\lambda \varphi(e_\lambda)$ für *eine* approximative Eins $(e_\lambda)_\Lambda$ in $A$.

Falls $A$ unital ist, so ist $\varphi$ genau dann positiv, wenn $\varphi(1) = \|\varphi\|$ ist.

**Beweis:** Für die Implikation (i)⇒(ii) sei $\varphi$ positiv und $(e_\lambda)_\Lambda$ eine approximative Eins. Dann ist $(\varphi(e_\lambda))_\Lambda \subset [0, \|\varphi\|]$ ein aufsteigendes Netz, also existiert der Limes und es gilt $\lim_\lambda \varphi(e_\lambda) \leqslant \|\varphi\|$. Sei $a \in A^1$. Dann gilt

$$|\varphi(a)|^2 \xleftarrow{\lambda} |\varphi(e_\lambda a)|^2 \leqslant \varphi(e_\lambda^2)\varphi(a^*a) \leqslant \varphi(e_\lambda)\varphi(a^*a) \leqslant \lim_\lambda \varphi(e_\lambda) \cdot \|\varphi\|$$

Damit folgt $\|\varphi\|^2 \leqslant \lim_\lambda \varphi(e_\lambda) \cdot \|\varphi\| \leqslant \|\varphi\|^2$, also $\|\varphi\| = \lim_\lambda \varphi(e_\lambda)$.

Die Implikation (ii)⇒(iii) ist trivial. Für (iii)⇒(i) sei $(e_\lambda)_\Lambda$ die approximative Eins mit $\|\varphi\| = \lim_\lambda \varphi(e_\lambda)$. Behauptung: $\varphi(A_{sa}) \subset \mathbb{R}$. Sei $a \in A^1_{sa}$ mit $\varphi(a) = \alpha + i \cdot \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Wir dürfen $\beta \leqslant 0$ annehmen. Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\|(a - i \cdot n \cdot e_\lambda)\|^2 \overset{C^*}{=} \ldots \leqslant 1 + n^2 + n \cdot \|e_\lambda a - a e_\lambda\|$$

Also ist

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 - 2n\|\varphi\|\beta + n^2\|\varphi\|^2 = \ldots = |\varphi(a) - i \cdot n \cdot \|\varphi\|| &\xleftarrow{\lambda} |\varphi(a - i \cdot n \cdot e_\lambda)|^2 \\ &\leqslant \|\varphi\|^2(1 + n^2 + n \cdot e_\lambda a - a e_\lambda) \\ &\xrightarrow{\lambda} \leqslant \|\varphi\|^2(1 + n^2) \end{aligned}$$

Damit folgt $\|\varphi\| \neq 0$ oder $\beta = 0$. Insgesamt also $\beta = 0$ und damit $\varphi(A_{sa}) \subset \mathbb{R}$. Sei $a \in A^1_+$. Dann gilt $e_\lambda - a \in A_{sa}$ und $\|e_\lambda - a\| \leqslant 1$ (denn $-\mathbb{1}_{A^\sim} \leqslant e_\lambda - a \leqslant \mathbb{1}_{A^\sim}$). Also ist $\varphi(e_\lambda - a) \leqslant |\varphi(e_\lambda - a)| \leqslant \|\varphi\| \cdot \|e_\lambda - a\| \leqslant \|\varphi\|$. Dan gilt aber

$$\|\varphi\| - \varphi(a) = \lim_\lambda \varphi(e_\lambda) - \varphi(a) = \lim_\lambda \varphi(e_\lambda - a) \leqslant \|\varphi\|$$

Also ist $\varphi(a) \geqslant 0$ und wir sind fertig. □

**5.5 Satz.** Sei $A$ eine $C^*$-Algebra und $0 \neq a \in A$ normal. Dann existiert ein Zustand $\varphi$ auf $A$ mit $\|a\| = |\varphi(a)|$.

**Beweis:** Die $C^*$-Algebra $B := C^*(a, \mathbb{1}) \subset A^\sim$ ist abelsch, da $a$ normal ist. Insbesondere existiert ein Charakter $\varphi_2$ auf $B$ mit $|\varphi_2(a)| = \|a\|$. Nach Hahn-Banach können wir $\varphi_2$ stetig und linear zu $\varphi_1$ auf $A^\sim$ fortsetzen mit $\|\varphi_1\| = \|\varphi_2\|$. Weiter gilt $\varphi(\mathbb{1}) = \varphi_2(\mathbb{1}) = 1$ und damit ist $\varphi_1$ ein stetiges lineares Funktional auf $A^\sim$ mit

$$\|\varphi_1\| = \|\varphi_2\| \overset{5.4}{=} \varphi_2(\mathbb{1}) = \varphi_1(\mathbb{1})$$

Mit Satz 5.4 folgt dann auch, dass $\varphi_1$ positiv ist. $\varphi := \varphi_1|_A$ ist also positiv mit $\|a\| = |\varphi(a)|$ wie gewünscht. Weiter ist $\|\varphi\| \leqslant \|\varphi_1\| \leqslant 1$ und außerdem $\|a\| = |\varphi(a)| \leqslant \|\varphi\| \cdot \|a\| \Rightarrow \|\varphi\| \geqslant 1$. Also ist $\varphi$ auch ein Zustand. □

**5.6 Proposition.** Sei $\varphi$ ein positives stetiges Funktional auf $A$.

**(i)** Für alle $a \in A$ gilt $\varphi(a^*a) = 0 \iff \varphi(ba) = 0$ für alle $b \in A$.

**(ii)** Für alle $a, b \in A$ gilt: $\varphi(b^*a^*ab) \leqslant \|a^*a\|\varphi(b^*b)$.

**Beweis:**

**(i)** Die nicht triviale Implikation folgt mit Cauchy-Schwarz.

**(ii)** Benutze $b^*a^*ab \leqslant b^*(\|a^*a\| \cdot \mathbb{1}_{A^\sim})b = \|a^*a\| \cdot b^*b$. □

**5.7 Satz.** Sei $B \subset A$ eine C*-Unteralgebra und $\varphi$ ein positives Funktional auf $B$. Dann besitzt $\varphi$ eine positive Fortsetzung $\overline{\varphi}$ auf $A$ mit $\|\overline{\varphi}\| = \|\varphi\|$.

**Beweis:** Definiere $\varphi^+ \colon B^+ \to \mathbb{C}$ durch $\varphi^+((b,\mu)) := \varphi(b) + \mu \cdot \|\varphi\|$. Für $(b,\mu) \in B^+$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\left|\varphi^+((b,\mu))\right| = |\varphi(b) + \mu \cdot \|\varphi\|| = \left|\lim_\lambda \varphi(be_\lambda) + \mu \cdot \lim_\lambda \varphi(e_\lambda)\right| &= \left|\lim_\lambda \varphi((b + \mu \cdot \mathbb{1}_{B^+})e_\lambda)\right| \\ &\leqslant \|\varphi\| \cdot \|b + \mu \cdot \mathbb{1}_{B^+}\|_{B^+} \\ &= \|\varphi\| \cdot \|(b,\mu)\|\end{aligned}$$

wobei $(e_\lambda)_\Lambda$ eine approximative Eins für $B$ ist. Damit ist $\|\varphi^+\| \leqslant \|\varphi\| \leqslant \|\varphi^+\|$ und es folgt $\|\varphi^+\| = \|\varphi\| = \varphi^+(\mathbb{1}_{B^+})$. Mit Satz 5.4 folgt, dass $\varphi^+$ positiv ist.

Die Einbettung $\iota \colon B \hookrightarrow A \hookrightarrow A^\sim$ setzt sich zu einem unitalen $^*$-Homomorphismus $\iota^+ \colon B^+ \to A^\sim$ fort mittels

$$\left(\iota^+(b,\mu)\right) := \iota(b) + \mu \cdot \mathbb{1}_{A^\sim}$$

Definiere nun $\hat{\varphi} \colon \iota^+(B^+) \to \mathbb{C}$ durch $\hat{\varphi}(\iota^+(b,\mu)) := \varphi^+(b,\mu)$. Dies ist wohldefiniert, denn nur der Fall $B \ni \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_A \in A$ ist zu überprüfen. Dann ist $\hat{\varphi}$ positiv, denn $\varphi^+$ ist positiv und $(\iota^+(B^+))_+ = \iota^+(B^+_+)$ (Übung). Nach Hahn-Banach existiert eine stetige lineare Fortsetzung $\hat{\hat{\varphi}} \colon A^\sim \to \mathbb{C}$ von $\hat{\varphi}$ mit $\left\|\hat{\hat{\varphi}}\right\| = \|\hat{\varphi}\| = \hat{\varphi}(\mathbb{1}_{A^\sim}) = \hat{\hat{\varphi}}(\mathbb{1}_{A^\sim})$ und es folgt wieder mit Satz 5.4, dass $\hat{\hat{\varphi}}$ positiv ist. Dann ist wieder $\overline{\varphi} := \hat{\hat{\varphi}}|_A$ die gesuchte positive Fortsetzung. □

**5.8 Satz.** Sei $B \subset_{\text{her}} A$ eine hereditäre C*-Unteralgebra und $\varphi$ ein positives Funktional auf $B$. Dann besitzt $\varphi$ eine eindeutige positive lineare Fortsetzung $\overline{\varphi}$ auf $A$ mit $\|\overline{\varphi}\| = \|\varphi\|$. Falls $(e_\lambda)_\Lambda \subset B$ eine approximative Eins für $B$ ist, so gilt $\overline{\varphi}(a) = \lim_\lambda \varphi(e_\lambda a e_\lambda)$ für $a \in A$.

**Beweis:** Eine Fortsetzung $\overline{\varphi}$ existiert nach Satz 5.7. Sei nun $\psi \colon A \to \mathbb{C}$ irgendeine positive lineare Fortsetzung von $\varphi$ mit $\|\psi\| = \|\varphi\|$. Sei $\psi^\sim \colon A^\sim \to \mathbb{C}$ eine (die) positive lineare Fortsetzung von $\psi$ mit $\|\psi\| = \|\psi^\sim\|$ nach Satz 5.7. Wir haben $\lim_\lambda \varphi(e_\lambda) = \|\varphi\| = \|\psi^\sim\| = \psi^\sim(\mathbb{1}_{A^\sim})$, also ist

$$\lim_\lambda \psi^\sim(\mathbb{1}_{A^\sim} - e_\lambda) = 0$$

Für $a \in A$ ergibt sich

$$\begin{aligned}|\psi(a) - \varphi(e_\lambda a e_\lambda)| &\leqslant |\psi^\sim(a) - \psi^\sim(e_\lambda a)| + |\psi^\sim(e_\lambda a - e_\lambda a e_\lambda)| \\ &\overset{\text{CS}}{\leqslant} \psi^\sim\left((\mathbb{1} - e_\lambda)^2\right)^{1/2} \cdot \psi^\sim(a^*a)^{1/2} + \psi^\sim(a^* e_\lambda^2 a)^{1/2} \cdot \psi^\sim\left((\mathbb{1} - e_\lambda)^2\right)^{1/2} \\ &\leqslant \underbrace{\psi^\sim(1 - e_\lambda)^{1/2}}_{\to 0} \cdot \psi^\sim(a^*a)^{1/2} + \psi^\sim(a^* e_\lambda^2 a) \cdot \underbrace{\psi^\sim(\mathbb{1} - e_\lambda)^{1/2}}_{\to 0}\end{aligned}$$

Damit folgt $\psi(a) = \lim_\lambda \varphi(e_\lambda a e_\lambda)$. □

**5.9 Beispiel.**

**(i)** Folgende Abbildung ist ein Zustand aber kein Charakter:

$$\begin{aligned} C([0,1]) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ f &\longmapsto \int f \, d\lambda \end{aligned}$$

**(ii)** Die normalisierte Spurabbildung

$$\begin{aligned} M_n &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto \operatorname{tr} x \end{aligned}$$

bezeichnet man als *Spurzustand* ($\tau \colon A \to \mathbb{C}$ Zustand mit $\tau(a^*a) = \tau(aa^*)$, $a \in A$)

**(iii)** Sei $A_0 \longrightarrow A_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow A = \varinjlim A_i$ ein unitales induktives System von $C^*$-Algebren. Falls jedes $A_i$ einen Spurzustand besitzt, so auch $A$

$$A \hookrightarrow \prod_{\mathbb{N}} A_i \Big/ \bigoplus_{\mathbb{N}}(A_i)$$

Für $a = [(a_i)_{\mathbb{N}}]$ definieren wir $\tau(a) := \lim_\omega \tau_i(a_i)$, wobei $\omega \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ ein freier Ultrafilter. Dann ist $\tau$ wohldefiniert, unital, positiv, linear und erfüllt die Spurbedingung.

Alternativ:

$$(a_i)_{\mathbb{N}} \longmapsto (\tau_i(a_i))_{\mathbb{N}}$$

$$\begin{tikzcd}
 & \prod_{\mathbb{N}} A_i \arrow[r] \arrow[d] & \ell^\infty(\mathbb{N}) \arrow[d] & \\
A \arrow[r, hook] & \prod_{\mathbb{N}} A_i \Big/ \bigoplus_{\mathbb{N}}(A_i) \arrow[r] & \ell^\infty(\mathbb{N}) \big/ c_0(\mathbb{N}) \arrow[r, "\chi"] & \mathbb{C}
\end{tikzcd}$$

Rechts unten ist eine $C^*$-Algebra; wähle einen Charakter $\chi$. Also stehen die freien Ultrafilter in 1zu1-Zusammenhang zu $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$.

# Index

Die *Seitenzahlen* sind mit Hyperlinks versehen und somit anklickbar

# Abbildungsverzeichnis



# To-do's und andere Baustellen