Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Fachbereich 10 Mathematik und Informatik

Skript Einführung in die Funktionalanalysis

Mitschrift der Vorlesung „Einführung in die Funktionalanalysis“ von Prof. Dr. Wilhelm Winter

Jannes Bantje

27. Januar 2015

Aktuelle Version verfügbar bei:

GitHub (inklusive Sourcecode)
https://github.com/JaMeZ-B/latex-wwu

Bittorrent Sync
B6WH2DISQ5QVYIRYIEZSF4ZR2IDVKPN3I

Vorwort — Mitarbeit am Skript

Dieses Dokument ist eine Mitschrift aus der Vorlesung „Einführung in die Funktionalanalysis, WiSe 2014“, gelesen von Prof. Dr. Wilhelm Winter. Der Inhalt entspricht weitestgehend dem Tafelanschrieb. Für die Korrektheit des Inhalts übernehme ich keinerlei Garantie! Für Bemerkungen und Korrekturen – und seien es nur Rechtschreibfehler – bin ich sehr dankbar. Korrekturen lassen sich prinzipiell auf drei Wegen einreichen:

- Persönliches Ansprechen in der Uni, Mails an `j.bantje@wwu.de` (gerne auch mit annotieren PDFs)
- *Direktes* Mitarbeiten am Skript: Den Quellcode poste ich auf GitHub (siehe oben), also stehen vielfältige Möglichkeiten der Zusammenarbeit zur Verfügung: Zum Beispiel durch Kommentare am Code über die Website und die Kombination Fork + Pull Request. Wer sich verdient macht oder ein Skript zu einer Vorlesung, die ich nicht besuche, beisteuern will, dem gewähre ich gerne auch Schreibzugriff.

  Beachten sollte man dabei, dass dazu ein Account bei `github.com` notwendig ist, der allerdings ohne Angabe von persönlichen Daten angelegt werden kann. Wer bei GitHub (bzw. dem zugrunde liegenden Open-Source-Programm „`git`“) – verständlicherweise – Hilfe beim Einstieg braucht, dem helfe ich gerne weiter. Es gibt aber auch zahlreiche empfehlenswerte Tutorials im Internet.[1]
- *Indirektes* Mitarbeiten: TeX-Dateien per Mail verschicken.

  Dies ist nur dann sinnvoll, wenn man einen ganzen Abschnitt ändern möchte (zB. einen alternativen Beweis geben), da ich die Änderungen dann per Hand einbauen muss! Ich freue mich aber auch über solche Beiträge!

Vorlesungshomepage

`https://wwwmath.uni-muenster.de/u/wilhelm.winter/wwinter/funktionalanalysis.html`

Anmerkung

Innerhalb dieser Mitschrift wird man öfter den Ausdruck „Warum?“ finden. Dies sind vom Dozenten bewusst weggelassene Details, die zu verstärktem Mitdenken beim Lesen animieren sollen. Oftmals sind dies schon aus vorherigen Semestern bekannte Sachverhalte. Nur an wenigen Stellen habe ich die fehlenden Details hinzugefügt.

[1]zB. `https://try.github.io/levels/1/challenges/1`, ist auf Englisch, aber dafür interaktives LearningByDoing

Inhaltsverzeichnis

1. Metrische Räume und der Satz von Baire 1
1.1. Definition: Metrischer Raum . . . 1
1.2. Definition: Offen, abgeschlossen und Abschluss . . . 1
1.3. Definition: Stetigkeit, gleichmäßige Stetigkeit, Isometrie . . . 1
1.4. Definition: Cauchy-Folge und Vollständigkeit . . . 1
1.5. Satz: Existenz einer eindeutigen Vervollständigung metrischer Räume . . . 2
1.6. Definition: Raum der beschränkten, stetigen Abbildungen . . . 3
1.7. Bemerkung: $d_{W,X}$ als Metrik auf $C(W,X)$ . . . 4
1.8. Proposition: X vollständig $\Rightarrow C_b(W,X)$ und $C(W,X)$ vollständig . . . 4
1.9. Proposition über eine Folge von Bällen . . . 4
1.10. Satz von Baire . . . 5
1.11. Bemerkungen zum Satz von Baire . . . 6
1.12. Corollar: Satz der gleichmäßigen Beschränktheit . . . 6

2. Normierte Räume, Hahn-Banach Sätze 7
2.1. Definition: Topologischer Vektorraum . . . 7
2.2. Proposition: Unterräume topologischer Vektorräume sind topologische Vektorräume . . . 7
2.3. Proposition: Normierte Vektorräume sind topologische Vektorräume . . . 7
2.4. Proposition: Stetigkeit einer linearen Abbildung zwischen topologischen Vektorräumen 7
2.5. Definition: Stetige Funktionale und Operatoren . . . 8
2.6. Bemerkung: Vektorraumstruktur auf $\mathcal{L}(X,Y)$, Algebrastruktur auf $\mathcal{L}(X,X)$ . . . 8
2.7. Proposition: Stetigkeit linearer Abbildungen mittels Normabschätzung . . . 8
2.8. Definition: Operatornorm . . . 8
2.9. Propostion: $\mathcal{L}(X,Y)$ ist ein normierter Raum mit der Operatornorm . . . 9
2.10. Definition: Normierte $\mathbb{K}$-Algebra . . . 9
2.11. Beispiele für normierte Algebren . . . 9
2.12. Proposition: Norm auf dem Produkt normierter Räume . . . 9
2.13. Proposition und Definition: Norm auf dem Quotientenraum . . . 10
2.14. Definition: Banachraum und Banachalgebra . . . 11
2.15. Beispiel für eine Banachalgebra . . . 11
2.16. Proposition: Produkte und Quotienten von Banachräumen . . . 11
2.17. Definition: Sublineare Abbildung . . . 11
2.18. Beispiele für sublineare Abbildungen . . . 11
2.19. Proposition: Die sublinearen Abbildungen $\mathcal{S}(X)$ sind nach unten induktiv geordnet . . . 12
2.20. Propostion: Minimale Elemente in $\mathcal{S}(X)$ sind genau die lineare Abbildungen . . . 12
2.21. Satz von Hahn-Banach . . . 13
2.22. Satz (Hahn-Banach): Existenz einer linearen Fortsetzung (mit sublinearer Schranke) . . . 13
2.23. Satz (Hahn-Banach): Existenz einer linearen Fortsetzung (mit Halbnorm) . . . 13
2.24. Satz (Hahn-Banach): Existenz einer stetigen linearen Fortsetzung . . . 14
2.25. Definition: Konvexe Teilmenge eines $\mathbb{K}$-Vektorraums, konvexe Hülle . . . 14
2.26. Satz (Hahn-Banach): Existenz einer linearen Fortsetzung (mit konvexer Teilmenge) . . . 14
2.27. Satz (Hahn-Banach): Existenz einer linearen Fortsetzung (zwei konvexe Teilmengen) . . . 15

3. Operatoren zwischen Banachräumen, Satz von der offenen Abbildung 16
3.1. Proposition: Y vollständig $\Rightarrow \mathcal{L}(X,Y)$ ist vollständig . . . 16
3.2. Corollar: Dualraum ist vollständig und $\mathcal{L}(X,X)$ ist Banachalgebra, falls X Banachraum 16
3.3. Definition und Proposition: Lineare Isometrie $\iota_X : X \to X^{**}$ (kanonische Inklusion) . . . 17
3.4. Definition und Proposition: Die transponierte Abbildung . . . 17
3.5. Satz: Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit für Banachräume . . . 18

3.6. Corollar über Beschränktheit einer Teilmenge eines normierten Raumes 18
3.7. Corollar über Beschränktheit einer Teilmenge von $\mathcal{L}(X,Z)$ 19
3.8. Satz: Prinzip der offenen Abbildung 19
3.9. Corollar: Satz von der inversen Abbildung 20
3.10. Corollar: Gleichheit von Topologien von Banachräumen, wenn $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ 20
3.11. Corollar: Wenn $X = X_1 \oplus X_2$, so ist X isomorph zu $X_1 \times X_2$ 20

4. L^p-Räume und der Satz von Riesz-Fischer **21**
4.1. Erinnerung: $L^1(\mu)$ ist ein Banachraum 21
4.2. Beispiele für L^1-Räume mit Lebesgue-Maß und Zählmaß 21
4.3. Definition und Proposition: Der Raum $L^p(\mu)$ 21
4.4. Proposition: Speziallfall der Youngschen Ungleichung 22
4.5. Satz: Höldersche Ungleichung 22
4.6. Satz: Minkowskische Ungleichung 23
4.7. Corollar: $L^p(\mu)$ ist ein normierter Vektorraum für $1 \leqslant p < \infty$ 23
4.8. Definition und Proposition: Der normierte Raum $L^\infty(\mu)$ und 23
4.9. Beispiele für L^p-Räume 24
4.10. Proposition: Lineare Isometrie $\iota_p\colon L^p(\mu) \to L^q(\mu)^*$ 24
4.11. Satz von Riesz-Fischer 24

5. Schwache Topologien, Reflexivität **26**
5.1. Definition: Schwache Topologie 26
5.2. Bemerkungen zu schwachen Topologie 26
5.3. Proposition: Die schwache Topologie ist Hausdorffsch 26
5.4. Proposition: Äquivalenz zu schwacher Konvergenz 26
5.5. Corollar: Schwach konvergente Netze sind beschränkt 27
5.6. Beispiel: Konvergenz impliziert schwache Konvergenz, aber nicht umgekehrt 27
5.7. Proposition: Elemente aus $\mathcal{L}(X,Y)$ sind auch stetig bezüglich schwachen Topologie . . 27
5.8. Definition: Die w^*-Topologie auf X^* 27
5.9. Bemerkungen zur w^*-Topologie auf X^* 28
5.10. Satz (Banach-Alaoglu) 28
5.11. Erinnerung: separabel, 1. abzählbar, 2. abzählbar 29
5.12. Satz: Metrisierbarkeit von $\overline{B_{X^*}(0,1)}$ bezüglich der w^*-Topologie 29
5.13. Definition: Reflexiver normierter Raum 30
5.14. Proposition: Abgeschlossene Unterräume von reflexiven Banachräumen sind reflexiv . . 30
5.15. Proposition: Für Banachräume gilt: X reflexiv $\iff$ X^* reflexiv 31
5.16. Satz: Einheitskugel eines Banachraumes X liegt w^*-dicht in Einheitskugel von X^{**} . . 31
5.17. Corollar: $f \in \overline{B}_{X^{**}}(0,1)$ lässt sich auf endlich vielen φ_i als Einsetzung auffassen 32
5.18. Satz: Äquivalenzen zu: X ist reflexiv 33
5.19. Bemerkung: X separabel, wenn X^* separabel, Reflexiviät von Banachräumen 33

6. Gleichmäßig konvexe Räume, noch einmal L^p **34**
6.1. Definition und Proposition: Gleichmäßig konvexer Raum 34
6.2. Beispiel für gleichmäßig konvexe Räume 34
6.3. Definition und Proposition: Gleichmäßig konvexe Räume sind strikt konvex 35
6.4. Proposition über strikt konvexe Teilmenge W, $a \in X$ und $\inf_{y\in W}\|a-y\|$ 35
6.5. Bemerkung über Folge mit $\limsup_n \|x_n\| \leqslant 1$ in einem gleichmäßig konvexen Raum . . 36
6.6. Proposition: Jensensche Ungleichung 36
6.7. Proposition: Zwei Abschätzungen für die p-Norm in $L^p(\mu)$ 36
6.8. Satz: Für $1 < p < \infty$ ist $L^p(\mu)$ gleichmäßig konvex 37
6.9. Satz: Gleichmäßig konvexe Banachräume sind reflexiv 37
6.10. Corollar: $L^p(\mu)$ ist für $1 < p < \infty$ reflexiv. 38

6.11. Satz: Isometrischer Isomorphismus $\iota_p\colon L^p(\mu) \to L^q(\mu)^*$ 38
6.12. Bemerkung zur Gültigkeit von Satz 6.11 für $p \in \{1, \infty\}$ 38

7. Hilberträume und selbstadjungierte Operatoren **39**
7.1. Definition: Hermitesche Form, Skalarprodukt 39
7.2. Bemerkung: Einfache Eigenschaften von hermiteschen Formen 39
7.3. Beispiele für hermitesche Formen 39
7.4. Proposition (Cauchy-Schwarz-Ungleichung) 39
7.5. Proposition: Ein Skalarprodukt definiert eine Norm 39
7.6. Bemerkungen über Cauchy-Schwarz und die Stetigkeit von $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle$ 40
7.7. Proposition über Zusammenhang von Norm und Skalarprodukt mit dem Parallelogrammgesetz 40
7.8. Bemerkung 41
7.9. Definition: Prä-Hilbertraum und Hilbertraum 41
7.10. Proposition 41
7.11. Proposition 41
7.12. Korollar 42
7.13. Definition: Orthogonal, Orthonormalsystem und Hilbertraumbasis 43
7.14. Bemerkung 43
7.15. Proposition über Schnitt und Summe eines Unterraumes mit seinem orthogonalen Komplement 43
7.16. Definition: Summierbar 43
7.17. Proposition 43
7.18. Proposition 44
7.19. Proposition: Kriterium für die Summierbarkeit orthogonaler Vektoren 44
7.20. Proposition 45
7.21. Definition und Proposition: Summe von Hilberträumen 45
7.22. Satz 46
7.23. Bemerkung 46
7.24. Beispiele für Basen von Hilberträumen 46
7.25. Definition und Proposition: Der zu $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ adjungierte Operator T^* 47
7.26. Proposition 47
7.27. Proposition 48
7.28. Definition: Selbstadjungierter Operator 48
7.29. Bemerkung 48
7.30. Proposition 48
7.31. Definition und Proposition 49
7.32. Satz 49

8. Kompakte Operatoren und ein Spektralsatz **50**
8.1. Definition: Spektrum eines Bachnachraumes 50
8.2. Bemerkung zum Zusammenhang von Spektralwerten und Eigenwerten 50
8.3. Proposition 50
8.4. Corollar 50
8.5. Satz: Die Resolventenabbildung ist lokal durch eine Potenzreihe gegeben 50
8.6. Satz 51
8.7. Definition und Proposition: Kompakte Operatoren 51
8.8. Bemerkung zu kompakten Operatoren 51
8.9. Proposition: Die Menge der kompakten Operatoren ist ein abgeschlossenes Ideal in $\mathcal{L}(X)$ 52
8.10. Satz: Diagonalisierbarkeit selbstadjungierter, kompakter Operatoren 52
8.11. Corollar 53

9. Fredholm-Operatoren. Ein Index **54**
9.1. Definition: Fredholm-Operator und Fredholm-Index 54
9.2. Satz (Fredholm-Riesz) 54
9.3. Satz 54

A. Anhang **57**
A.1. Vierecksungleichung 57
A.2. Abschluss einer konvexen Menge ist konvex 57
A.3. Beweis von Aufgabe 2 von Blatt 7 57

Index **A**

Abbildungsverzeichnis **C**

Todo list **C**

1. Metrische Räume und der Satz von Baire

1.1. Definition

Ein **metrischer Raum** ist ein Paar (X,d), wobei X eine Menge und $d\colon X\times X\to[0,\infty)$ ist, sodass

1) $d(x,y)=0 \iff x=y\ \forall x,y\in X$
2) $d(x,y)=d(y,x)\ \forall x,y\in X$
3) $d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z)\ \forall x,y,z\in X$

1.2. Definition

Sei (X,d) ein metrischer Raum

- Eine Teilmenge $U\subseteq X$ heißt **offen**, falls für jedes $x\in U$ ein $\varepsilon>0$ existiert, so dass
$$B(x,\varepsilon):=\{y\in X\,|\,d(x,y)<\varepsilon\}\subset U$$
- Eine Teilmenge $A\subset X$ heißt **abgeschlossen**, falls $X\setminus A$ offen ist (als Teilmenge von X).
- $\mathcal{T}_X:=\{U\subset X\,|\,U$ offen im obigen Sinne$\}$ ist die von der Metrik induzierte Topologie auf X.
- Falls $W\subset X$ eine Teilmenge ist, dann bezeichnet $\overline{W}$ den **Abschluss** von W, d.h. die kleinste abgeschlossene Teilmenge von X, die W enthält. Es gilt
$$\overline{W}=\bigcap_{A\subset X\text{ abg.},W\subset A}A$$
Für metrische Räume ist dies äquivalent zu
$$\overline{W}=\left\{x\in X\,\middle|\,\exists(x_n)_n\subset W:\lim_{n\to\infty}x_n=x\right\}\qquad\text{(warum?)}$$

1.3. Definition

Eine Abbildung $f\colon X\to Y$ zwischen zwei metrischen Räumen (X,d_X) und (Y,d_Y) heißt

- **stetig in** $x\in X$, falls $\forall\varepsilon>0:\exists\delta>0:\forall x'\in X:d_X(x,x')<\delta\implies d_Y\big(f(x),f(x')\big)<\varepsilon$
- **stetig**, falls f in jedem Punkt $x\in X$ stetig ist.
(Äquivalent: Für jede offene Menge V in Y ist $f^{-1}(V)$ offen in X)
- **gleichmäßig stetig**, falls $\forall\varepsilon>0:\exists\delta>0:\forall x,x'\in X:d_X(x,x')<\delta\implies d_Y\big(f(x),f(x')\big)<\varepsilon$.
- f heißt **Isometrie**, falls $\forall x,x'\in X:d_X(x,x')=d_Y\big(f(x),f(x')\big)$. *automatisch injektiv*
- f heißt **isometrischer Isomorphismus**, falls f bijektiv und isometrisch ist. *f^{-1} auch*

1.4. Definition

Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum (X,d) heißt **Cauchy-Folge**, falls
$$\forall\varepsilon>0:\exists N\in\mathbb{N}:\forall n,k>N:d(x_n,x_k)<\varepsilon.$$
(X,d) heißt **vollständig**, falls jede Cauchy-Folge in X konvergiert.

1.5. Satz

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann existiert ein vollständiger metrischer Raum $(\tilde{X}, \tilde{d})$ und eine Isometrie $\iota\colon X \hookrightarrow \tilde{X}$, sodass $\overline{\iota(X)} = \tilde{X}$ (d.h. $\iota(X)$ ist dicht in $\tilde{X}$). $(\tilde{X}, \tilde{d})$ heißt **Vervollständigung** von (X, d) und ist eindeutig bis auf isometrische Isomorphie.

Beweis

Eindeutigkeit: Angenommen, $(\hat{X}, \hat{d})$ ist ein weiterer vollständiger metrischer Raum und $\kappa\colon X \to \hat{X}$ eine Isometrie mit $\overline{\kappa(X)} = \hat{X}$. Definiere $\gamma\colon \hat{X} \to \tilde{X}$ wie folgt: Falls $y \in \hat{X}$, wähle eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X, sodass $y = \lim_{n\to\infty} \kappa(x_n)$. Setze nun

$$\gamma(y) := \lim_{n\to\infty} \iota(x_n) \in \tilde{X}$$

Der Grenzwert existiert, da $\tilde{X}$ vollständig ist Zu zeigen: γ ist ein wohldefinierter isometrischer Isomorphismus.

Wohldefiniertheit: $(\kappa(x_n))_n$ ist konvergent, also auch Cauchy. Da κ eine Isometrie ist, muss $(x_n)_n$ auch eine Cauchyfolge in X sein. Nun ist aber auch ι eine Isometrie und somit $(\iota(x_n))_n$ eine Cauchyfolge in $\tilde{X}$. Da $\tilde{X}$ vollständig ist, existiert also obiger Grenzwert

Wir müssen außerdem zeigen, dass die Definition nicht von der Wahl der Folge abhängt: Angenommen $(x'_n)_n$ ist eine weitere Folge, sodass $\kappa(x'_n) \to y$. Sei $z \in \tilde{X}$ der Grenzwert dieser Folge unter ι. Dann folgt $\gamma(y) = z$ aus

$$\tilde{d}\big(\gamma(y), z\big) = \lim_{n\to\infty} \tilde{d}\big(\iota(x_n), \iota(x'_n)\big) = \lim_{n\to\infty} d\big(x_n, x'_n\big) = \lim_{n\to\infty} \hat{d}\big(\kappa(x_n), \kappa(x'_n)\big) = \hat{d}(y, y) = 0$$

Isometrie: Analog zu obiger Rechnung folgt für $z, z' \in \hat{X}$ und Folgen $(x_n)_n$, $(x'_n)_n$ mit $\kappa(x_n) \to z$ und $\kappa(x'_n) \to z'$

$$\tilde{d}\big(\gamma(z), \gamma(z')\big) = \lim_{n\to\infty} \tilde{d}\big(\iota(x_n), \iota(x'_n)\big) = \lim_{n\to\infty} d\big(x_n, x'_n\big) = \lim_{n\to\infty} \hat{d}\big(\kappa(x_n), \kappa(x'_n)\big) = \hat{d}(z, z')$$

Bijektivität: Eine Umkehrabbildung lässt sich leicht konstruieren, indem man in obiger Konstruktion die Rollen von $\hat{X}$ und $\tilde{X}$ vertauscht.

Existenz: **Konstruktion von** $(\tilde{X}, \tilde{d})$: Setze $Y := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (x_n)_n \text{ ist Cauchy-Folge in } X\}$. Definiere

$$(x_n)_n \sim (x'_n) :\iff \lim_{n\to\infty} d(x_n, x'_n) = 0$$

$\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf Y. Definiere nun $\tilde{X} := {}^{Y}\!/\!_{\sim}$ und $\tilde{d} : \tilde{X} \times \tilde{X} \to [0, \infty)$ durch

$$\tilde{d}\big([(x_n)_n], [(x'_n)_n]\big) := \lim_{n\to\infty} d(x_n, x'_n)$$

$\tilde{d}$ ist eine wohldefiniert, d.h. falls $[(x_n)_n] = [(y_n)_n]$ und $[(x'_n)_n] = [(y'_n)_n]$, dann ist

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x'_n) = \lim_{n\to\infty} d(y_n, y'_n). \qquad \text{(leichte Übung)}$$

Weiter ist $\big(d(x_n x'_n)\big)_n$ eine Cauchy-Folge in dem vollständigen Raum $[0, \infty)$ und somit konvergent: Sei dazu $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $d(x_n, x_m) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ und $d(x'_n, x'_m) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n, m \geqslant N$. Dann gilt nach der Vierecksungleichung (siehe Anhang A.1)

$$\big|d(x_n, x'_n) - d(x_m, x'_m)\big| \leqslant d(x_n, x_m) + d(x'_n, x'_m) \leqslant \varepsilon$$

Einbettung von X : Definiere nun $\iota : X \to \tilde{X}$ durch $x \mapsto [(x, x, x, \ldots)] \in \tilde{X}$. ι ist Isometrie, da

$$\tilde{d}\big(\iota(x), \iota(y)\big) = \lim_{n\to\infty} d(x, y) = d(x, y)$$

Sei nun $[(x_n)_n] \in \tilde{X}$ und $\varepsilon > 0$. Da $(x_n)_n$ eine Cauchy-Folge ist, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n, m \geqslant N$ gilt $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Dann gilt

$$\tilde{d}\big(\iota(x_N), [(x_n)_n]\big) = \lim_{n\to\infty} d(x_N, x_n) < \varepsilon$$

Vollständigkeit von $(\tilde{X}, \tilde{d})$: Sei $(\overline{x}^m)_m$ eine Cauchyfolge in $\tilde{X}$. $\overline{x} \in \tilde{X}$

$$\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists M(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall m, m' > M : \tilde{d}\Big(\overline{x}^m, \overline{x}^{m'}\Big) < \frac{\varepsilon}{3}$$

Wenn $\overline{x}^m = [(x_n^m)_n]$ und $\overline{x}^{m'} = \Big[(x_n^{m'})_n\Big]$, dann gilt also für alle $m, m' > M(\varepsilon)$

$$\lim_{n\to\infty} d\Big(x_n^m, x_n^{m'}\Big) < \frac{\varepsilon}{3} \qquad [*]$$

Für alle m ist $(x_n^m)_n$ eine Cauchyfolge, also gilt

$$\forall m : \exists N(m) : \forall n, n' \geqslant N(m) : d(x_n^m, x_{n'}^m) < \frac{1}{m} \qquad [**]$$

Setze nun $z_n := x^n_{N(n)}$. Behauptung: $(z_n)_n$ ist eine Cauchyfolge. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt für $n, m > N = \max\big\{M(\varepsilon), \frac{3}{\varepsilon}\big\}$ für ein $k > N(m), N(n)$

$d(z_n, z_m)$ ist unabhängig von k, also kann man k beliebig groß wählen

$$d(z_n, z_m) = d\Big(x^n_{N(n)}, x^m_{N(m)}\Big) \leqslant \underbrace{d\Big(x^n_{N(n)}, x^n_k\Big)}_{\overset{[**]}{<}\frac{1}{n} < \frac{1}{N} \leqslant \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{d\Big(x^n_k, x^m_k\Big)}_{\overset{[*]}{\leqslant}\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{d\Big(x^m_k, x^m_{N(m)}\Big)}_{\overset{[**]}{<}\frac{1}{m} < \frac{1}{N} \leqslant \frac{\varepsilon}{3}} < \varepsilon$$

$\Rightarrow (z_n)_n$ ist eine Cauchyfolge, also

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N_z(\varepsilon) : \forall n, m > N_z(\varepsilon) : d(z_n, z_m) < \varepsilon \qquad [\#]$$

Es bleibt zu zeigen: $\lim_{m\to\infty} \overline{x}^m = [(z_n)_n]$. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Dann gilt für $m \geqslant \max\big\{\frac{2}{\varepsilon}, N_z(\varepsilon)\big\}$

$$\tilde{d}(\overline{x}^m, [(z_n)_n]) = \lim_{n\to\infty} d\Big(x_n^m, x^n_{N(n)}\Big) \leqslant \lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{d\Big(x^m_n, x^m_{N(m)}\Big)}_{\overset{[**]}{<}\frac{1}{m} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{d\Big(x^m_{N(m)}, x^n_{N(n)}\Big)}_{= d(z_m, z_n) \overset{[\#]}{<} \frac{\varepsilon}{2}}\right) < \varepsilon$$

Also gilt $\overline{x}^m \xrightarrow{m\to\infty} [(z_n)_n]$ und $(\tilde{X}, \tilde{d})$ ist vollständig. □

1.6. Definition

Sei $(W, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und (X, d) ein metrischer Raum. Sei

$$C_b(W, X) := \{f : W \to X \mid f \text{ stetig und beschränkt}\}$$

versehen mit der Metrik $d_{W,X}$, definiert durch

$$d_{W,X}(f, g) = \sup_{t\in W} d\big(f(t), g(t)\big)$$

1.7. Bemerkung

Auf $C(W,X) = \{f\colon W \to X \text{ stetig}\}$ ist $d_{W,X}$ eine **erweiterte Metrik**, d.h. der Wert ∞ ist möglich. $\tilde{d}_{W,X} := \min\{1, d_{W,X}\}$ ist eine „echte“ Metrik auf $C(W,X)$.

1.8. Proposition

Falls X vollständig ist, dann sind $C_b(W,X)$ und $C(W,X)$ vollständig (bezüglich $d_{W,X}$ bzw. $\tilde{d}_{W,X}$).

Beweis
Sei $(f_n)_n$ eine Cauchy-Folge in $C_b(W,X)$, also

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n,m > N : \sup_{t\in W} d\big(f_n(t), f_m(t)\big) < \varepsilon$$

Also ist $\big(f_n(t)\big)_n$ für alle t eine Cauchyfolge in X. Da X vollständig ist, existiert ein $x_t \in X$ sodass $f_n(t) \xrightarrow{n\to\infty} x_t$. Definiere also $f(t) := x_t$ punktweise.

f ist Grenzwert: Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $k, l \geqslant N$ gilt $d_{W,X}(f_k, f_l) < \varepsilon$, da $(f_n)_n$ Cauchy ist. Für $n \geqslant N$ gilt nun $d_{W,X}(f, f_n) \leqslant \varepsilon$, da

$$\sup_{t\in W} d\big(f(t), f_n(t)\big) = \sup_{t\in W} \lim_{k\to\infty} d\big(f_k(t), f_n(t)\big) \leqslant \varepsilon$$

f ist stetig: Sei $\varepsilon > 0$ und $t \in W$. Wir finden ein $N \in \mathbb{N}$ mit $d_{W,X}(f, f_N) < \frac{\varepsilon}{3}$. Da f_N stetig ist in t, existiert eine offene Umgebung U von t, sodass $d\big(f_N(t), f_N(s)\big) < \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $s \in U$. Es folgt

$$d\big(f(t), f(s)\big) \leqslant d\big(f(t), f_N(t)\big) + d\big(f_N(t), f_N(s)\big) + d\big(f_N(s), f(s)\big) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Damit ist f stetig in $t \in W$, also auch auf ganz W, da t beliebig war.

f ist beschränkt: Seien $x, y \in W$. Sei $c > 0$. Finde $N \in \mathbb{N}$, sodass $d_{W,X}(f, f_N) < c$. Dann gilt

$$d\big(f(x), f(y)\big) \leqslant d\big(f(x), f_N(x)\big) + d\big(f_N(x), f_N(y)\big) + d\big(f_N(y), f(y)\big) < 2c + d\big(f_N(x), f_N(y)\big) < \infty$$

da f_N beschränkt ist. □

1.9. Proposition

Sei (X,d) ein vollständiger metrischer Raum und $\big(\overline{B}(x_n, \varepsilon_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\overline{B}(x_{n+1}, \varepsilon_{n+1}) \subseteq \overline{B}(x_n, \varepsilon_n)$ und $\varepsilon_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Dann existiert genau ein Punkt in $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{B}(x_n, \varepsilon_n)$.

Beweis
Existenz: Behauptung: Die Folge der Mittelpunkte $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge: Sei $\varepsilon > 0$. Finde $N \in \mathbb{N}$, sodass $\varepsilon_n \leqslant \varepsilon$ für alle $n \geqslant N$. Dann gilt für alle $n \geqslant m \geqslant N$

$$d(x_n, x_m) \leqslant \varepsilon_m \leqslant \varepsilon,$$

da $x_n \in \overline{B}(x_m, \varepsilon)$ ist. Da X vollständig ist, existiert ein $x \in X$ mit $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$.

Behauptung: $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{B}(x_n, \varepsilon_n)$. Wähle dazu ein $N \in \mathbb{N}$. Dann ist $(x_n)_{n\geqslant N}$ eine Cauchy-Folge in $\overline{B}(x_N, \varepsilon_N)$. $\overline{B}(x_N, \varepsilon_N)$ ist ein abgeschlossener Teilraum von X und somit vollständig. Also ist $x \in \overline{B}(x_N, \varepsilon_N)$. Da N beliebig war, gilt $x \in \overline{B}(x_n, \varepsilon_n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Eindeutigkeit: Es seien $x, y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{B}(x_n, \varepsilon_n)$, also $x, y \in \overline{B}(x_n, \varepsilon_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$d(x,y) \leqslant d(x, x_n) + d(x_n, y) \leqslant 2 \cdot \varepsilon_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ und somit $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$. □

1.10. Satz von Baire[2]

Es gelten folgende äquivalente Formulierungen:

a) Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $A_0, A_1, \dots$ eine Folge abgeschlossener Teilmengen. Falls $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ eine offene Kugel enthält, so auch eines der A_n.

b) In einem vollständigen metrischen Raum hat eine abzählbare Vereinigung von abgeschlossenen Mengen ohne innere Punkte keine inneren Punkte.

c) In einem vollständigen metrischen Raum ist ein abzählbarer Durchschnitt von dichten offenen Mengen wieder dicht.

Beweis
Zunächst die Äquivalenz:

a)⇒b): Klar, da b) Kontraposition von a) ist.

b)⇒c): Für $n \in N$ sei $U_n \subseteq X$ offen und dicht. Dann ist $X \setminus U_n \subseteq X$ abgeschlossen und hat keine inneren Punkte. Aus b) folgt nun, dass

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X \setminus U_n = X \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$$

keine inneren Punkte hat. Also ist $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ dicht in X.

c)⇒a): Ebenso (Zeige: Keines der A_n enthält offene Kugel $\Rightarrow \bigcup_n A_n$ enthält keine offen Kugel).

Wir wollen nun a) durch Widerspruch beweisen, d.h. wir nehmen an, dass gilt: Jede offene Kugel schneidet $X \setminus A_k$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Dazu wollen wir Folgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset X$, $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset (0,1]$ finden mit

(i) $\varepsilon_k < \frac{1}{k+1}$,

(ii) $\overline{B}(x_{k+1}, \varepsilon_{k+1}) \subset (X \setminus A_k) \cap B(x_k, \varepsilon_k) \subset \overline{B}(x_k, \varepsilon_k)$,

(iii) $\overline{B}(x_k, \varepsilon_k) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$

für $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \overset{\text{(iii)}}{\supset} \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \overline{B}(x_k, \varepsilon_k) \overset{\text{(ii)}}{\subset} \bigcap_{k\in\mathbb{N}} (X \setminus A_k) \cap B(x_k, \varepsilon_k) \subset \bigcap_{k\in\mathbb{N}} X \setminus A_k = X \setminus \left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \right)$$

Aber wegen (i) und (ii) existiert nach Proposition 1.9 ein $x \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \overline{B}(x_k, \varepsilon_k)$. $\lightning$

Wir suchen also eine Abbildung $\overline{c}\colon \mathbb{N} \to X \times (0,1], k \mapsto (x_k, \varepsilon_k)$ mit (i),(ii),(iii) für $k \in \mathbb{N}$. Wir setzen

$$P_m := \left\{ c\colon \{0,\dots,m\} \to X \times (0,1] \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{(i),(iii) gilt für } k \in \{0,\dots,m\}, \\ \text{(ii) gilt für } k \in \{0,\dots,m-1\} \end{array} \right\}$$
$$P_\infty := \left\{ c\colon \mathbb{N} \to X \times (0,1] \;\middle|\; \text{(i),(ii),(iii) gilt für } k \in \mathbb{N} \right\}$$

Die Menge $P := \left(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} P_m\right) \cup P_\infty$ ist partiell geordnet bezüglich „$\prec$“:

$$c \prec c' :\iff m \leqslant m' \text{ und } c'\big|_{\{0,\dots,m\}} = c, \text{ bzw. } c' = c \text{ falls } m = m' = \infty$$

P ist nicht leer, denn nach Vorraussetzung existiert (x_0, ε_0) mit $0 < \varepsilon_0 < 1$ und $\overline{B}(x_0, \varepsilon_0) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, d.h. $\big(0 \mapsto (x_0, \varepsilon_0)\big) \in P_0$. Jede total geordnete Teilmenge $\emptyset \neq \Gamma$ von P besitzt eine obere Schranke:

[2] nach René Louis Baire, https://de.wikipedia.org/wiki/René_Louis_Baire

- Falls Γ ein $c \in P_\infty$ enthält, so ist c obere Schranke (Warum?).
- Ebenso falls Γ ein $c \in P_{\overline{m}}$ enthält und $\Gamma \cap P_{m'} = \emptyset$ für alle $\overline{m} < m' \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.
- Falls $\Gamma \subset \bigcup_{\mathbb{N}} P_m$, aber $\Gamma \not\subset \bigcup_{m \leqslant \overline{m}} P_m$ für jedes $\overline{m}$, so definieren wir eine obere Schranke in P_∞ durch Einschränkung (Wie genau?).

Mit dem Lemma von Zorn folgt, dass P ein maximales Element $\overline{c}$ besitzt. Wir müssen noch zeigen, dass $\overline{c} \in P_\infty$ wie gewünscht:

Falls $\overline{c} \in P_m$ für ein $m \in \mathbb{N}$, so gilt nach Annahme, dass $(X \setminus A_m) \cap B(x_m, \varepsilon_m) \neq \emptyset$. Dann existiert aber $(x_{m+1}, \varepsilon_{m+1}) \in X \times (0,1]$ mit $\varepsilon_{m+1} < \frac{1}{m+2}$ und

$$\overline{B}(x_{m+1}, \varepsilon_{m+1}) \subset (X \setminus A_m) \cap B(x_m, \varepsilon_m),$$

da $(X \setminus A_m) \cap B(x_m, \varepsilon_m)$ offen ist. Definiere $\overline{\overline{c}} : \{0, \dots, m+1\} \to X \times (0,1]$ durch

$$k \longmapsto \begin{cases} (x_k, \varepsilon_k), & \text{falls } k = m+1 \\ \overline{c}(k), & \text{falls } k \in \{0, \dots, m\} \end{cases},$$

dann gilt $\overline{c} \prec \overline{\overline{c}} \in P_{m+1}$ im Widerspruch zur Maximalität von $\overline{c}$. □

1.11. Bemerkungen

(i) Die Aussage gilt auch für lokalkompakte Hausdorffräume. (Übung, Blatt 2, Aufgabe 2)

(ii) Tatsächlich genügt eine schwächere Form des Auswahlaxioms (DC); das abzählbare Auswahlaxiom jedoch nicht.

(iii) Falls X **separabel** ist (d.h. falls eine abzählbare dichte Teilmenge von X existiert), dann lässt sich der Satz auch ohne (AC) beweisen. (Übung, Blatt 2, Aufgabe 1)

1.12. Corollar: Satz der gleichmäßigen Beschränktheit

Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum. Sei $F \subset C(X, \mathbb{R})$ eine Menge, die **punktweise gleichmäßig beschränkt** ist, d.h. für jedes $x \in X$ existiert $K_x \in \mathbb{R}$, sodass

$$|f(x)| \leqslant K_x \ \ \forall f \in F.$$

Dann existieren $\emptyset \neq U \subset X$ offen und $K \in \mathbb{R}$ so, dass

$$|f(x)| \leqslant K \ \ \forall x \in U, f \in F$$

Beweis
Definiere für $n \in \mathbb{N}$

$$X \supset A_n := \big\{ x \in X \,\big|\, |f(x)| \leqslant n \ \ \forall f \in F \big\} = \bigcap_{f \in F} f^{-1}\big([-n, n]\big)$$

Also sind die $A_n \subset X$ abgeschlossen. Es ist $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = X$, wegen der Voraussetzung von punktweiser gleichmäßiger Beschränktheit. Da X eine nichtleere, offene Teilmenge U enthält, existiert nach dem Satz von Baire ein $n \in N$ mit $U \subset A_n$. □

2. Normierte Räume, Hahn-Banach Sätze

2.1. Definition

Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit einer Topologie $\mathcal{T}$. Wir sagen, X ist ein **topologischer Vektorraum**, falls Addition und Skalarmultiplikation stetig sind:

$$\begin{aligned} +\colon X \times X \to X \quad &, \quad (x,y) \mapsto x+y \\ \cdot\colon \mathbb{K} \times X \to X \quad &, \quad (\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x \end{aligned}$$

2.2. Proposition

Sei X ein topologischer $\mathbb{K}$-Vektorraum und $Y \subset X$ ein Untervektorraum. Dann sind Y und $\overline{Y}$ topologische Vektorräume mit der Unterraumtopologie.

Beweis

- Klar für Y.
- Zu zeigen: $\overline{Y}$ ist ein Untervektorraum. Seien $x_0, y_0 \in \overline{Y}$ und sei U eine offene Menge in X mit $x_0 + y_0 \in U$. Dann existieren offene Mengen V, W von X mit $x_0 \in V$, $y_0 \in W$ und $V + W \subset U$, da die Addition stetig ist. Da $x_0 \in \overline{Y}$ und $x_0 \in V$, existiert $x_1 \in Y$ mit $x_1 \in V$. Analog existiert $y_1 \in Y$ mit $y_1 \in W$. Daher ist $x_1 + y_1 \in Y \cap U$. Da U eine beliebige offene Umgebung um $x_0 + y_0$ ist, folgt $x_0 + y_0 \in \overline{Y}$.

  Skalarmultiplikation genauso. □

2.3. Proposition

Ein normierter Vektorraum $(X, \|\cdot\|)$ ist ein topologischer Vektorraum bezüglich der von $\|\cdot\|$ induzierten Topologie.

Beweis
Es gilt

$$\|(x+y) - (x'+y')\|_X \leqslant \|x - x'\|_X + \|y - y'\|_X$$

Daher ist $+\colon X \times X \to X$ gleichmäßig stetig bezüglich der Norm $\|(z,z')\|_{X\times X} := \|z\|_X + \|z'\|_X$ auf $X \times X$. Ähnlich folgt

$$\|\lambda x - \lambda' x'\|_X = \|\lambda(x - x') + (\lambda - \lambda')x'\|_X \leqslant |\lambda| \cdot \|x - x'\|_X + |\lambda - \lambda'| \cdot \|x'\|_X$$

Daher ist $\cdot\colon \mathbb{K} \times X \to X$ stetig, denn falls $(\lambda_i)_{i \in I}$ ein Netz in $\mathbb{K}$ und $(x_i)_{i\in I}$ ein Netz in X ist mit $\lambda_i \to \lambda$, $x_i \to x$, dann gilt $\lambda_i x_i \to \lambda x$, also $\|\lambda_i x_i - \lambda x\|_X \to 0$. □

2.4. Proposition

Seien X, Y topologische Vektorräume, $T : X \to Y$ linear. Dann sind äquivalent:

(1) T ist stetig.

(2) T ist stetig in 0.

(3) T ist stetig in einem Punkt $\overline{x}$.

Beweis
(1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) ist klar. Wir zeigen (3) $\Rightarrow$ (1):

Für $y \in X$ definiere $L_y \colon X \to X$, $x \mapsto y + x$. Dann ist L_y bijektiv und stetig. Da auch L_{-y} stetig ist, ist L_y ein Homöomorphismus. Sei nun T in $\overline{x}$ stetig. Sei $x_0 \in X$. Wir zeigen: T ist stetig in x_0. Setze $y := \overline{x} - x_0$. Dann ist

$$T(x_0) = T(x_0 + y - y) = T(-y) + T(x_0 + y) = L_{T(-y)} \circ T \circ L_y(x_0)$$

Da $L_y(x_0) = \overline{x}$, T stetig in $\overline{x}$ ist und L_y, $L_{T(-y)}$ stetig sind, ist somit T stetig in x_0. □

2.5. Definition

Für topologische Vektorräume X, Y definieren wir

$$\mathcal{L}(X,Y) = \{T \colon X \to Y \mid T \text{ linear und stetig}\}$$

Wir schreiben $X^* := \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ für den **Dualraum** von X. Die Elemente von X^* heißen (stetige) **Funktionale**.[3] Die Elemente von $\mathcal{L}(X,X)$ heißen (stetige) **Operatoren** auf X.

2.6. Bemerkung

$\mathcal{L}(X,Y)$ und $\mathcal{L}(X,\mathbb{K}) = X^*$ sind Vektorräume, wobei die Vektorraumstruktur punktweise definiert ist. $\mathcal{L}(X,X)$ ist sogar eine Algebra mittels Komposition.

2.7. Proposition

Seien X, Y normierte Vektorräume, $T \colon X \to Y$ linear. Dann ist T stetig genau dann, wenn ein $\mu \geqslant 0$ existiert, sodass

$$\|T(x)\|_Y \leqslant \mu \cdot \|x\|_X \quad \forall x \in X$$

Ein stetiger Operator zwischen normierten Vektorräumen heißt deswegen auch **beschränkt**.

Beweis

„$\Leftarrow$“: Klar: Wenn $x_n \to 0$, dann $T(x_n) \to 0$, denn $\|T(x_n)\| \leqslant \mu \|x_n\| \to 0$. Also ist T stetig in 0 und nach 2.4 überall stetig.

„$\Rightarrow$“: Angenommen T ist stetig. Dann setzen wir

$$\mu := \sup\left\{ \frac{1}{\|x\|_X} \cdot \|T(x)\|_Y \,\middle|\, x \in X \setminus \{0\} \right\}$$

Falls $\mu = \infty$, dann existieren $x_n \in X$ mit $\frac{1}{\|x_n\|_X} \cdot \|T(x_n)\|_Y \geqslant n$. Betrachte $x_n' := \frac{1}{n \cdot \|x_n\|_X} \cdot x_n$, dann $\|x_n'\| = \frac{1}{n}$, also $x_n' \to 0$. Aber es gilt $T(x_n') \not\longrightarrow 0$, denn

$$\|T(x_n')\|_Y = \frac{1}{n \cdot \|x_n\|_X} \cdot \|T(x_n)\|_Y \geqslant 1$$

für alle n, $\lightning$ zur Stetigkeit von T. Also $\mu < \infty$. □

2.8. Definition

Seien X, Y normierte Vektorräume, $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Die **Norm** (oder **Operatornorm**) von T ist

$$\|T\| = \sup\left\{ \frac{1}{\|x\|_X} \cdot \|T(x)\|_Y \,\middle|\, x \in X \setminus \{0\} \right\} = \sup\left\{ \|T(x)\|_Y \,\middle|\, x \in X \text{ mit } \|x\|_X = 1 \right\}$$

Nach 2.7 ist $\|T\| < \infty$ und $\|Tx\|_Y \leqslant \|T\| \cdot \|x\|_X$ für alle $x \in X$.

[3] Aus der linearen Algebra: $X^* = \mathrm{Hom}(X, \mathbb{R}) = \{T : X \to Y \mid T \text{ linear}\}$. Die Elemente von X^* heißen Funktionale.

2.9. Proposition

Seien X, Y normierte Räume, betrachte $\mathcal{L}(X,Y)$ mit $\|\cdot\|$. Dann ist $\mathcal{L}(X,Y)$ ein normierter Raum.

Beweis

- $\|T\| \geqslant 0$ für alle $T \in \mathcal{L}(X,Y)$.
- Es gilt
$$\begin{aligned}\|T\| = 0 \iff \forall x \in X, \|x\|_X = 1 : \|Tx\|_Y = 0 &\iff \forall x \in X, \|x\|_X = 1 : Tx = 0\\ &\iff \forall x \in X : Tx = 0\\ &\iff T = 0\end{aligned}$$
- Sei $\lambda \in \mathbb{K}$, $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Dann gilt
$$\|\lambda \cdot T\| = \sup_{\|x\|_X=1} \|\lambda \cdot T(x)\|_Y = \sup_{\|x\|_X=1} |\lambda| \cdot \|Tx\|_Y = |\lambda| \cdot \sup_{\|x\|_X=1} \|Tx\|_Y = |\lambda| \cdot \|T\|$$
- Seien $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(X,Y)$ und $x \in X$ mit $\|x\|_X = 1$. Dann gilt
$$\|(T_1+T_2)(x)\|_Y = \|T_1x + T_2x\|_Y \leqslant \|T_1x\|_Y + \|T_2x\|_Y$$
Damit folgt weiter
$$\begin{aligned}\|T_1+T_2\| = \sup_{\|x\|_X=1} \|(T_1+T_2)(x)\|_Y &\leqslant \sup_{\|x\|_X=1} \left(\|T_1x\|_Y + \|T_2x\|_Y\right)\\ &\leqslant \sup_{\|x\|_X=1} \sup_{\|x'\|_X=1} \left(\|T_1x\|_Y + \|T_2x'\|_Y\right)\\ &= \|T_1\| + \|T_2\|\end{aligned}$$
□

2.10. Definition

Eine $\mathbb{K}$-Algebra A heißt **normiert**, falls A mit einer Norm $\|\cdot\|$ versehen ist, so dass $(A, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum und
$$\|ab\| \leqslant \|a\| \cdot \|b\| \quad \forall a, b \in A$$
Falls A **unital** ist, d.h. es existiert ein Einselement 1_A, dann gilt $\|1_A\| \leqslant 1$.

Bemerkung
Wenn $\|1_A\| < 1$, dann $\|1_A\| = \|1_A \cdot 1_A\| \leqslant \|1_A\| \cdot \|1_A\| \Rightarrow \|1_A\| = 0$. Also $1_A = 0$ und damit $A = \{0\}$.

2.11. Beispiele

(i) $C(\Omega, \mathbb{K})$, wobei Ω ein kompakter Hausdorffraum und die Multiplikation punktweise ist. Betrachte $\|.\|_\infty$. Für $f, g \colon \Omega \to K$ gilt dann $\|f \cdot g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \cdot \|g\|_\infty$

(ii) $\mathcal{L}(X,X)$ für einen normierten Raum X mit $\|.\|$, denn für $S, T \in \mathcal{L}(X,X)$ gilt
$$\|ST\| = \sup_{\|x\|_X=1} \|S(T(x))\|_X \leqslant \sup_{\|x\|_X=1} \left(\|S\| \cdot \|Tx\|_X\right) = \|S\| \cdot \|T\|.$$

2.12. Proposition

Seien X, Y normierte Räume. Dann ist $X \times Y$ ein normierter Raum mit
$$\begin{aligned}&\|(x,y)\|_1 := \|x\|_X + \|y\|_Y \quad \text{für } (x,y) \in X \times Y\\ \text{oder}\quad &\|(x,y)\|_\infty := \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\}\end{aligned}$$
Beide Normen sind äquivalent.

Beweis
Übung! □

2.13. Proposition und Definition

Sei X ein normierter Raum und $Y \subseteq X$ ein abgeschlossener Unterraum. Dann ist ${}^{X}/_{Y} = \{x + Y \mid x \in X\}$ ein normierter Raum mit

$$\|x + Y\|_{X/Y} := \inf\{\|x + y\|_X \mid y \in Y\}$$

Die Quotientenabbildung $q\colon X \twoheadrightarrow {}^{X}/_{Y}$, $x \mapsto x + Y$ ist stetig, linear und $\|q\| \leqslant 1$ und offen, d.h. bildet offene Mengen in X auf offene Mengen in ${}^{X}/_{Y}$ ab.

Bemerkung
Daraus folgt, dass Normtopologie und Quotiententopologie auf ${}^{X}/_{Y}$ gleich sind.

Beweis

a) ${}^{X}/_{Y}$ ist ein Vektorraum mit $(x + Y) + (x' + Y) = (x + x') + Y$.

b) Sei $\overline{x} = x + Y \in {}^{X}/_{Y}$. Es gilt
   - $\|\overline{x}\| \geqslant 0$ ist klar für alle $\overline{x} \in {}^{X}/_{Y}$
   - Angenommen $\|\overline{x}\|_{X/Y} = 0$, d.h. $\inf_{y\in Y}\|x + y\|_X = 0$. Also existiert eine Folge $(y_n)_n \subset Y$ mit $\|x + y_n\|_X \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow y_n \xrightarrow{n\to\infty} -x$. Also ist $-x$ und damit auch x in Y, da Y abgeschlossen ist. Damit ist $\overline{x} = 0$

c) Sei $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$, $x \in X$. Dann gilt

$$\|\lambda \cdot \overline{x}\|_{X/Y} = \inf_{y\in Y}\|\lambda x + y\|_X = \inf_{y\in Y}\|\lambda x + \lambda y\|_X = \inf_{y\in Y}|\lambda| \cdot \|x + y\|_X = |\lambda| \cdot \|\overline{x}\|_{X/Y}$$

d) Seien $\overline{x}, \overline{y} \in {}^{X}/_{Y}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\|\overline{x} + \overline{y}\|_{X/Y} = \inf_{z\in Y}\|x + y + z\|_X = \inf_{z,z'\in Y}\|x + y + z + z'\|_X &\leqslant \inf_{z,z'\in Y}\Big(\|x + z\|_X + \|y + z'\|_X\Big)\\ &= \|\overline{x}\|_{X/Y} + \|\overline{y}\|_{X/Y}\end{aligned}$$

Damit ist $\|.\|_{X/Y}$ eine Norm auf ${}^{X}/_{Y}$.

e) Linearität von q ist klar. Es gilt

$$\|\overline{x}\|_{X/Y} = \inf_{y\in Y}\|x + y\|_X \leqslant \|x\|_X$$

Also

$$\|q\| = \sup_{\|x\|_X=1}\|q(x)\|_{X/Y} \leqslant \sup_{\|x\|_X=1}\|x\|_X = 1$$

f) Zu zeigen: q ist offen. Sei $x \in X$, $\varepsilon > 0$. Betrachte die offene Kugel $B(x, \varepsilon) \subset X$. Wir zeigen $B(\overline{x}, \varepsilon) \subset q(B(x, \varepsilon))$. Sei also $\overline{z} = z + Y$ in $B(\overline{x}, \varepsilon)$. Dann gilt $\|\overline{x} - \overline{z}\|_{X/Y} < \varepsilon$, worauf folgt

$$\inf_{y\in Y}\|x - z + y\|_X < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ es existiert $y \in Y : \|x - z + y\|_X < \varepsilon$. Es gilt $\overline{z} = \overline{z - y} \in q(B(x, \varepsilon))$, da $z - y \in B(x, \varepsilon)$.

Sei $V \subset X$ offen, zeige $q(V) \subset {}^{X}/_{Y}$ offen. Für $x \in V$ finde $\varepsilon > 0$, sodass $B(x, \varepsilon) \subset V$. Dann folgt $B(\overline{x}, \varepsilon) \subseteq q\big(B(x, \varepsilon)\big) \subseteq q(V)$. □

2.14. Definition

Ein **Banachraum** ist ein vollständiger, normierter Raum. Eine **Banachalgebra** ist eine vollständige normierte Algebra.

2.15. Beispiel

$C(\Omega, \mathbb{K})$, wobei Ω ein kompakter Hausdorffraum ist, ist eine Banachalgebra.

2.16. Proposition

Produkte und Quotienten (nach abgeschlossenen Unterräumen) von Banachräumen sind wieder Banachräume.

Beweis

Produkt $X \times Y$: Es gilt $\|(x,y)\|_\infty = \max\{\|x\|, \|y\|\}$. Sei $((x_n, y_n))_n \subset X \times Y$ eine Cauchyfolge. Dann sind $(x_n)_n$ und $(y_n)_n$ Cauchyfolgen und es gilt $x_n \to x$ und $y_n \to y$ und somit auch $(x_n, y_n) \to (x, y)$.

Quotient ${}^{X}/_{Y}$: Sei X ein Banachraum und $Y \subseteq X$ ein abgeschlossener Unterraum.

Falls $\overline{x}, \overline{y} \in {}^{X}/_{Y}$, so existiert $y' \in X$, sodass $\overline{y} = \overline{y'}$ und

$$\|x - y'\|_X \leqslant 2 \cdot \|\overline{x} - \overline{y}\|_{X/Y}$$

Sei nun $(\overline{x}_n)_n$ eine Cauchyfolge in ${}^{X}/_{Y}$. Es gibt eine Teilfolge $(\overline{x}_{n_k})_k$, sodass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\|\overline{x}_{n_{k-1}} - \overline{x}_{n_k}\right\|_{X/Y} < \infty$$

Falls $(\overline{x}_{n_k})_k$ konvergiert, dann auch $(\overline{x}_n)_n$. Wir dürfen also ohne Einschränkungen annehmen, dass bereits $\sum_{n=1}^{\infty} \|\overline{x}_{n-1} - \overline{x}_n\| < \infty$ gilt. Wähle $x'_1 \in \overline{x}_1$. Wähle induktiv $x'_n \in X$ mit

$$\left\|x'_{n-1} - x'_n\right\|_X \leqslant 2 \cdot \left\|\overline{x_{n-1} - x_n}\right\|_{X/Y}$$

und $x'_n \in \overline{x}_n$. Dann gilt $\sum_{n=1}^{\infty} \left\|x'_{n-1} - x'_n\right\|_X < \infty$. Daher ist $(x'_n)_n$ eine Cauchyfolge in X. Also existiert $x \in X$ mit $x_n \to x$. Dann gilt auch $\overline{x}_n \to \overline{x}$. □

2.17. Definition

Sei X ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine Abbildung $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ heißt **sublinear**, falls gilt:

(i) $\varphi(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot \varphi(x)$, für $x \in X$, $\lambda \in [0, \infty)$

(ii) $\varphi(x + y) \leqslant \varphi(x) + \varphi(y)$, für $x, y \in X$.

Setze $\mathcal{S}(X) := \{\varphi\colon X \to \mathbb{R} \,|\, \varphi \text{ sublinear}\}$. $\mathcal{S}(X)$ ist partiell geordnet mit

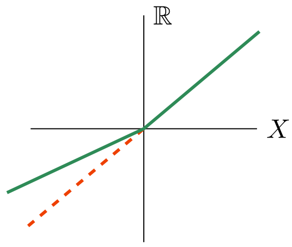
$$\varphi \leqslant \psi :\iff \varphi(x) \leqslant \psi(x), \quad x \in X$$

2.18. Beispiele

(i) Halbnormen[4] sind sublinear.

[4] Es „fehlt“ nur die positive Definitheit einer Norm.

(ii)



Benutze: $0 = \varphi(0) = \varphi(x-x) \leqslant \varphi(x) + \varphi(-x)$.

2.19. Proposition

Sei X ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. $\mathcal{S}(X)$ ist nach unten **induktiv geordnet**, d.h. jede nichtleere total geordnete Teilmenge besitzt eine untere Schranke.

Beweis
Sei $\emptyset \neq (\varphi_i)_I \subseteq \mathcal{S}(X)$ total geordnet. Setze $\varphi(x) := \inf_{i\in I} \varphi_i(x)$, dann gilt

$$-\varphi_i(-x) \leqslant \varphi_i(x) \implies -\varphi(-x) \leqslant \varphi(x) \leqslant \varphi_i(x) < \infty$$

ebenso $-\varphi(x) \leqslant \varphi(-x) \leqslant \varphi_i(-x)$ für $x \in X$, $i \in I$. Insbesondere gilt $-\infty < \varphi(x) < \infty$, $x \in X$. Die Sublinearität von φ und $\varphi \leqslant \varphi_i$, $i \in I$ sind klar (Warum?). □

2.20. Proposition

Sei X ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\varphi \in \mathcal{S}(X)$. Dann ist φ in $\mathcal{S}(X)$ minimal genau dann, wenn φ linear ist.

Beweis
"$\Leftarrow$": Sei $\psi \leqslant \varphi$ mit ψ sublinear und φ linear. Dann folgt $\psi(x) \leqslant \varphi(x)$ und $\psi(-x) \leqslant \varphi(-x)$ für $x \in X$.

$$\implies -\psi(x) \leqslant \psi(-x) \leqslant \varphi(-x) = -\varphi(x)$$

Daraus folgt $\varphi(x) \leqslant \psi(x)$ und somit muss $\varphi = \psi$ gelten. Also ist φ minimal.

"$\Rightarrow$": Sei $\varphi \in \mathcal{S}(X)$ minimal. Zu $\overline{x} \in X$ definiere $\varphi_{\overline{x}} \colon X \to \mathbb{R}$ durch

$$\varphi_{\overline{x}}(x) := \inf_{\lambda \geqslant 0} \Big(\varphi(x + \lambda \cdot \overline{x}) - \lambda \cdot \varphi(\overline{x}) \Big)$$

Es gilt $\varphi_{\overline{x}}(x) \in (-\infty, \infty)$, denn für $x \in X, \lambda \geqslant 0$ ist

$$\begin{aligned} &\varphi(\lambda \cdot \overline{x}) = \varphi(x + \lambda \cdot \overline{x} - x) \leqslant \varphi(x + \lambda \cdot \overline{x}) + \varphi(-x) \\ \iff & -\varphi(\lambda \cdot \overline{x}) \geqslant -\varphi(-x) - \varphi(x + \lambda \cdot \overline{x}) \\ \iff & -\varphi(-x) \leqslant \varphi(x + \lambda \cdot \overline{x}) - \lambda \cdot \varphi(\overline{x}) \overset{\text{2.17 (ii)}}{\leqslant} \varphi(x) \end{aligned}$$

$\varphi_{\overline{x}}$ ist sublinear:

(i) Sei $\mu > 0$. Dann gilt für $x \in X$.

$$\begin{aligned} \varphi_{\overline{x}}(\mu \cdot x) = \inf_{\lambda \geqslant 0} \Big(\varphi(\mu \cdot x + \lambda \cdot \overline{x}) - \lambda \cdot \varphi(\overline{x}) \Big) &= \inf_{\lambda \geqslant 0} \mu \cdot \left(\varphi\left(x + \frac{\lambda}{\mu} \cdot \overline{x} \right) - \frac{\lambda}{\mu} \cdot \varphi(\overline{x}) \right) \\ &= \mu \cdot \inf_{\lambda' \geqslant 0} \Big(\varphi(x + \lambda' \cdot \overline{x}) - \lambda' \varphi(\overline{x}) \Big) \\ &= \mu \cdot \varphi_{\overline{x}}(x) \end{aligned}$$

$\varphi_{\overline{x}}(0 \cdot x) = 0$ ist klar.

(ii) Zu $x, y \in X$, $\varepsilon > 0$ wähle $\lambda_x, \lambda_y \geqslant 0$ mit

$$\begin{aligned}\varphi_{\overline{x}}(x) &\geqslant \varphi(x + \lambda_x \cdot \overline{x}) - \lambda_x \cdot \varphi(\overline{x}) - \varepsilon \\ \varphi_{\overline{x}}(y) &\geqslant \varphi(y + \lambda_y \cdot \overline{x}) - \lambda_y \cdot \varphi(\overline{x}) - \varepsilon\end{aligned}$$

Setze $\lambda := \lambda_x + \lambda_y$, dann gilt

$$\begin{aligned}\varphi_{\overline{x}}(x) + \varphi_{\overline{x}}(y) &\geqslant \varphi(x + \lambda_x \cdot \overline{x}) + \varphi(y + \lambda_y \cdot \overline{x}) - \lambda \cdot \varphi(\overline{x}) - 2\varepsilon \\ &\geqslant \varphi(x + y + \lambda \cdot \overline{x}) - \lambda \cdot \varphi(\overline{x}) - 2\varepsilon \\ &\geqslant \varphi_{\overline{x}}(x + y) - 2\varepsilon \qquad \text{(nach Definition)}\end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, gilt $\varphi_{\overline{x}}(x) + \varphi_{\overline{x}}(y) \geqslant \varphi_{\overline{x}}(x + y)$. Also ist $\varphi_{\overline{x}}$ sublinear.

$\varphi_{\overline{x}} \leqslant \varphi$ ist klar mit $\lambda = 0$. Da φ minimal ist, folgt $\varphi_{\overline{x}} = \varphi$. Wir erhalten

$$\varphi(x) + 1 \cdot \varphi(\overline{x}) \leqslant \varphi(x + 1 \cdot \overline{x}) \overset{\text{sublinear}}{\leqslant} \varphi(x) + 1 \cdot \varphi(\overline{x})$$

für jedes $x, \overline{x} \in X$. Also ist φ additiv und somit linear. □

2.21. Satz von Hahn-Banach

Sei X ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\varphi \in \mathcal{S}(X)$. Dann existiert $\psi \colon X \to \mathbb{R}$ linear mit $\psi \leqslant \varphi$.

X ist nicht zwangsweise endlich-dimensional!

Beweis
Sei $\mathcal{S}_\varphi := \{\varphi' \in \mathcal{S}(X) \mid \varphi' \leqslant \varphi\} \ni \varphi$. Nach Proposition 2.19 ist $\mathcal{S}(X)$ und damit auch $\mathcal{S}_\varphi$ nach unten induktiv geordnet. Nach dem Lemma von Zorn enthält $\mathcal{S}_\varphi$ ein minimales Element ψ. ψ ist auch minimal in $\mathcal{S}(X)$ (Warum?). Also ist ψ linear nach Proposition 2.20. □

Wichtige Folgerungen: Fortsetzungs- und Trennungssätze.

2.22. Satz

Sei X ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\varphi \colon X \to \mathbb{R}$ sublinear. Sei $Y \subset X$ ein linearer Unterraum und $\psi \colon Y \to \mathbb{R}$ linear mit $\psi \leqslant \varphi\big|_Y$. Dann existiert $\overline{\psi} \colon X \to \mathbb{R}$ linear mit $\overline{\psi}\big|_Y = \psi$ und $\overline{\psi} \leqslant \varphi$.

Beweis
Definiere $\tilde{\varphi} \colon X \to \mathbb{R}$ durch $\tilde{\varphi}(x) := \inf_{y \in Y} \big(\varphi(x - y) + \psi(y)\big)$, $x \in X$. Es gilt $0 \leqslant \varphi(x + y - x - y) \leqslant \varphi(x - y) + \varphi(-x) + \varphi(y)$, womit folgt

$$\varphi(x - y) + \psi(y) \geqslant \varphi(-y) - \varphi(-x) - \psi(-y) \geqslant -\varphi(-x) > -\infty \qquad \forall x \in X, y \in Y$$

Also ist $\tilde{\varphi}$ wohldefiniert. Analog zu 2.20 folgt, dass $\tilde{\varphi}$ sublinear ist. Nach dem Satz von Hahn-Banach (2.21) existiert ein $\overline{\psi} \colon X \to \mathbb{R}$ linear mit $\overline{\psi} \leqslant \tilde{\varphi} \leqslant \varphi$. Es bleibt nur $\overline{\psi}|_Y = \psi$ zu zeigen.

Für $y_0 \in Y$ gilt $\tilde{\varphi}(y_0) = \inf_{y \in Y} \big(\varphi(y_0 - y) + \psi(y)\big)$ und somit folgt $\tilde{\varphi}|_Y \leqslant \psi$ mittels $y = y_0$. Weiter folgt aus 2.20, dass ψ minimal in $\mathcal{S}(Y)$ ist. Also muss insgesamt gelten:

$$\overline{\psi}\big|_Y \leqslant \tilde{\varphi}\big|_Y \leqslant \psi \quad \Longrightarrow \quad \psi = \overline{\psi}\big|_Y$$ □

2.23. Satz

Sei nun X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $p \colon X \to \mathbb{R}$ eine Halbnorm. Sei $Y \subset X$ ein Untervektorraum und $\psi \colon Y \to \mathbb{K}$ linear mit $|\psi(y)| \leqslant p(y)$ für $y \in Y$. Dann existiert $\overline{\psi} \colon X \to \mathbb{K}$ linear mit $\overline{\psi}\big|_Y = \psi$ und

$$\big|\overline{\psi}(x)\big| \leqslant p(x) \qquad \text{für } x \in X$$

Beweis
Sei zunächst $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. p ist sublinear und es gilt $\psi \leqslant p|_Y$. Nach 2.22 existiert eine lineare Fortsetzung $\overline{\psi}\colon X \to \mathbb{R}$ mit $\overline{\psi} \leqslant p$. Es gilt auch

$$-\overline{\psi}(x) = \overline{\psi}(-x) \leqslant p(-x) = p(x) \quad \Longrightarrow \quad \left|\overline{\psi}(x)\right| \leqslant p(x) \quad \text{für } x \in X$$

Sei nun $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Definiere $\psi_1 := \operatorname{Re}(\psi)\colon Y \to \mathbb{R}$. Dann ist ψ_1 $\mathbb{R}$-linear (warum?). Es gilt $|\psi_1(y)| \leqslant |\psi(y)| \leqslant p(y)$, $y \in Y$. Es existiert also ein $\mathbb{R}$-lineares $\overline{\psi}_1\colon X \to \mathbb{R}$ mit

$$\overline{\psi}_1(y) = \psi_1(y),\ \ y \in Y \quad \text{und} \quad \left|\overline{\psi}_1(x)\right| \leqslant p(x),\ \ x \in X$$

Definiere jetzt $\overline{\psi}\colon X \to \mathbb{C}$ durch $\overline{\psi}(x) := \overline{\psi}_1(x) - i \cdot \overline{\psi}_1(i \cdot x)$, $x \in X$. Dann ist $\overline{\psi}$ $\mathbb{C}$-linear (warum?). Weiter gilt $\overline{\psi}(y) = \psi(y)$ für $y \in Y$. ($\operatorname{Re}(\overline{\psi}\big|_Y) = \operatorname{Re}(\psi)$ und $\overline{\psi}\big|_Y$ und ψ sind beide $\mathbb{C}$-linear). Zu $x \in X$ wähle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| = 1$ und

$$\left|\overline{\psi}(x)\right| = \lambda \cdot \overline{\psi}(x) = \overline{\psi}(\lambda \cdot x) = \overline{\psi}_1(\lambda \cdot x) \leqslant p(\lambda \cdot x) = |\lambda| \cdot p(x) = p(x)$$ □

2.24. Satz

Sei X ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum, $Y \subset X$ ein Unterraum und $\psi\colon Y \to \mathbb{K}$ linear und stetig. Dann existiert eine stetige, lineare Fortsetzung $\overline{\psi}\colon X \to \mathbb{K}$ mit $\left\|\overline{\psi}\right\|_{\mathcal{L}(X,\mathbb{K})} = \|\psi\|_{\mathcal{L}(Y,\mathbb{K})}$.

Beweis
Definiere eine Halbnorm durch $p(x) := \|x\| \cdot \|\psi\|$. Wegen 2.7 gilt $|\psi(x)| \leqslant p(x)$, also besitzt ψ nach Satz 2.23 eine lineare Fortsetzung $\overline{\psi}$ mit $\left|\overline{\psi}(x)\right| \leqslant p(x) = \|\psi\| \cdot \|x\|$, $x \in X$. Es folgt $\left\|\overline{\psi}\right\| \leqslant \|\psi\|$. $\|\psi\| \leqslant \left\|\overline{\psi}\right\|$ ist trivial, da $\psi|_Y = \overline{\psi}$. □

2.25. Definition

Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Sei $M \subset X$ eine Teilmenge. M heißt **konvex**, falls für $a, b \in M$, $\lambda \in [0,1]$ gilt

$$(1-\lambda) \cdot a + \lambda \cdot b \in M$$

Ist X ein topologischer Vektorraum und $M \subset X$ konvex, so ist auch $\overline{M}$ konvex.[5] Ist $N \subset X$ eine beliebige Teilmenge, so definieren wir die **konvexe Hülle** von N durch

$$\operatorname{conv}(N) := \bigcap_{\substack{N \subset M \subset X \\ M \text{ konvex}}} M$$

$\operatorname{conv}(N)$ ist konvex. (warum?)

2.26. Satz

Sei X ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, $\emptyset \neq M \subset X$ konvex, $\varphi \in \mathcal{S}(X)$. Dann existiert $\psi\colon X \to \mathbb{R}$ linear mit $\psi \leqslant \varphi$ und

$$\inf_{y \in M} \varphi(y) = \inf_{y \in M} \psi(y) \qquad [*]$$

[5] für normierte Vektorräume siehe Anhang A.2

Beweis
Setze $\mu := \inf_{y\in M} \varphi(y)$. Falls $\mu = -\infty$, so folgt die Behauptung aus dem Satz von Hahn-Banach 2.21. [*] ist dann trivialerweise erfüllt. Sei also $\mu \in \mathbb{R}$. Definiere $\tilde{\varphi}\colon X \to \mathbb{R}$ durch

$$\tilde{\varphi}(x) := \inf_{y\in M, \lambda\geqslant 0} \big(\varphi(x+\lambda\cdot y) - \lambda\cdot\mu\big), \quad x \in X$$

Es gilt $\varphi(x+\lambda\cdot y)-\lambda\cdot\mu \geqslant -\varphi(-x)$ für $x\in X, y\in M, \lambda\geqslant 0$ (siehe 2.20). Also ist $\tilde{\varphi}(x) \geqslant -\varphi(-x) > -\infty$ und $\tilde{\varphi}$ somit wohldefiniert. $\tilde{\varphi}$ ist sublinear:

(i) $\tilde{\varphi}(\gamma\cdot x) = \gamma\cdot\tilde{\varphi}(x)$, für $x\in X$, $\gamma \in\geqslant 0$, wie in 2.22.

(ii) Seien $x, z\in X$ und $\varepsilon > 0.$ Wähle $y_x, y_z \in M$, $\lambda_x, \lambda_z \geqslant 0$ mit

$$\tilde{\varphi}(x) \geqslant \varphi(x+\lambda_x\cdot y_x) - \lambda_x\cdot\mu - \varepsilon \quad \text{und} \quad \tilde{\varphi}(x) \geqslant \varphi(z+\lambda_z\cdot y_z) - \lambda_z\cdot\mu-\varepsilon$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(x)+\tilde{\varphi}(z) &\geqslant \varphi\big(x+z+\lambda_x\cdot y_x+\lambda_z\cdot y_z\big) - (\lambda_x+\lambda_z)\cdot\mu - 2\varepsilon\\ &= \varphi\Bigg(x+z+(\lambda_x+\lambda_z)\cdot\underbrace{\left(\frac{\lambda_x}{\lambda_x+\lambda_z}\cdot y_x + \frac{\lambda_z}{\lambda_x+\lambda_z}\cdot y_z\right)}_{\in M}\Bigg) - (\lambda_x+\lambda_z)\cdot\mu - 2\varepsilon\\ &\geqslant \tilde{\varphi}(x+z) - 2\varepsilon\end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, gilt $\tilde{\varphi}(x)+\tilde{\varphi}(z) \geqslant \tilde{\varphi}(x+z)$ für alle $x, z\in X$.

Nach Hahn-Banach (2.21) existiert $\psi\colon X\to\mathbb{R}$ linear mit $\psi \leqslant \tilde{\varphi} \leqslant \varphi$. Für $y\in M$ gilt

$$-\psi(y) = \psi(-y) \leqslant \tilde{\varphi}(-y) \leqslant \varphi(-y+1\cdot y) - 1\cdot\mu = -\mu$$

also $\mu \leqslant \psi(y) \leqslant \varphi(y)$, woraus [*] folgt. □

2.27. Satz

Sei X ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum und $A, B\subset X$ nichtleere konvexe Teilmengen mit

$$\operatorname{dist}(A,B) := \inf\{\|a-b\| \mid a\in A, b\in B\} > 0$$

Dann existiert $\psi\colon X\to\mathbb{R}$ stetig und linear mit $\psi(A)\cap\psi(B) = \emptyset$.

Beweis
$A - B := \{a-b \,|\, a\in A, b\in B\}\subset X$ ist konvex. (Warum?) Nach Satz 2.26 existiert, da Normen sublinear sind, $\psi\colon X\to\mathbb{R}$ linear mit $\psi\leqslant \|.\|$, und

$$0 < \operatorname{dist}(A,B) = \inf_{y\in A-B}\|y\| = \inf_{y\in A-B}\psi(y) = \inf_{a\in A}\psi(a) - \sup_{b\in B}\psi(b).$$ □

3. Operatoren zwischen Banachräumen. Die Sätze von der offenen Abbildung und vom abgeschlossenen Graphen

3.1. Proposition

Seien X, Y normierte Vektorräume, Y vollständig. Dann ist $\mathcal{L}(X,Y)$ vollständig bezüglich $\|.\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$.

Beweis
Sei $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}(X,Y)$ eine Cauchy-Folge bezüglich $\|.\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$. Für $x \in X$ ist dann auch $(T_n x)_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ Cauchy bezüglich $\|.\|_Y$ (Warum?)[6]. Da Y ein Banachraum ist, folgt $T_n x \to y$ für ein $y \in Y$. Wir definieren $T\colon X \to Y$ durch

$$T(x) := \lim_{n\to\infty} T_n(x)$$

für $x \in X$. T ist linear: Klar, da die T_n linear sind. T ist stetig: $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy, also auch $(\|T_n\|)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Cauchyfolge, da wegen der umgekehrten Dreiecksungleich gilt

$$\big|\|T_n\| - \|T_m\|\big| \leqslant \|T_n - T_m\| \leqslant \varepsilon$$

Dann existiert $C \geqslant 0$ mit $\|T_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leqslant C$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also gilt $\|Tx\|_Y \leqslant C \cdot \|x\|$, $x \in X$, woraus $\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leqslant C$ und die Stetigkeit von T folgt. Also ist $T \in \mathcal{L}(X,Y)$.

Wir müssen nun noch zeigen, dass $(T_n)_n \to T$ in der Operatornorm gilt. Da $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist, existiert für $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\|T_n - T_m\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n, m \geqslant n_0$. Insbesondere gilt

$$\|(T_n - T_m)(x)\|_Y \leqslant \|T_n - T_m\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \cdot \|x\|_X < \frac{\varepsilon}{2} \cdot \|x\|_X$$

für $n, m \geqslant n_0$, $x \in X$. Weiter gilt

$$\begin{aligned}\|(T_n - T)(x)\|_Y &\leqslant \|(T_n - T_m)(x)\|_Y + \|(T_m - T)(x)\|_Y \leqslant \|T_n - T_m\| \cdot \|x\|_X + \|(T_m - T)x\|_Y \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} \cdot \|x\|_X + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \|x\|_X = \varepsilon \cdot \|x\|_X\end{aligned}$$

für $n, m \geqslant n_0$ und m groß genug, $x \in X$. Damit folgt nun $\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leqslant \varepsilon$ für $n \geqslant n_0$, also $T_n \to T$ bezüglich $\|.\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$. □

3.2. Corollar

(i) Der Dualraum X^* eines normierten $\mathbb{K}$-Vektorraumes X ist vollständig.

(ii) Falls $\{0\} \neq X$ ein Banachraum ist, so ist $\mathcal{L}(X,X)$ eine Banachalgebra.

Beweis
(i) $X^* = \mathcal{L}(X,\mathbb{K})$ und $\mathbb{K}$ ist vollständig. Wende 3.1 an.

(ii) $\mathcal{L}(X,X)$ ist ein Banachraum nach 3.1. $\mathcal{L}(X,X)$ ist eine normierte Algebra:
- Es gilt $\|\mathrm{id}_X\|_{\mathcal{L}(X,X)} = 1$
- Für $S, T \in \mathcal{L}(X,X)$, $x \in X$ gilt

$$\|(S \circ T)(x)\|_X \leqslant \|S\| \cdot \|Tx\|_X \leqslant \|S\| \cdot \|T\| \cdot \|x\|_X$$

Also ist $\|S \circ T\| \leqslant \|S\| \cdot \|T\|$. □

[6] mit $\|T_n x - T_m x\|_Y \leqslant \|T_n - T_m\| \cdot \|x\|$

3.3. Definition und Proposition

Sei X ein normierter Raum. Definiere $\iota_X : X \to X^{**}$ $\left(= (X^*)^*\right)$ durch

$$x \longmapsto (\varphi \mapsto \varphi(x))$$

für $x \in X$. Die Abbildung ι_X ist eine lineare Isometrie.

Beweis

Wohldefiniertheit: Die Linearität von $\iota_X(x)$ ist klar. Mit

$$|\iota_X(x)(\varphi)| = |\varphi(x)| \leqslant \|\varphi\|_{X^*} \cdot \|x\|_X = \|x\|_X \cdot \|\varphi\|_{X^*}$$

folgt $\|\iota_X(x)\|_{X^{**}} \leqslant \|x\|_X$, also ist $\iota_X(x)$ stetig.

ι_X ist linear: Für $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $x, y \in X$, $\varphi \in \mathcal{L}(X, \mathbb{K}) = X^*$ gilt

$$\begin{aligned} \iota_X(\alpha \cdot x + \beta \cdot y)(\varphi) = \varphi(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) = \alpha \cdot \varphi(x) + \beta \cdot \varphi(y) &= \alpha \cdot \iota_X(x)(\varphi) + \beta \cdot \iota_X(y)(\varphi) \\ &= \big(\alpha \cdot \iota_X(x) + \beta \cdot \iota_X(y)\big)(\varphi) \end{aligned}$$

Isometrie: Es bleibt zu zeigen: $\|\iota_X(x)\|_{X^{**}} \geqslant \|x\|_X$ für $0 \neq x \in X$. Sei $Y := \mathbb{K} \cdot x$ und $\psi : Y \to \mathbb{K}$ gegeben durch $\psi(\alpha \cdot x) := \alpha \cdot \|x\|_X$. Dann ist $Y \subset X$ ein linearer Unterraum und ψ linear mit $\|\psi\| = 1$. Nach Satz 2.24 existiert nun $\overline{\psi} : X \to \mathbb{K}$ linear mit $\overline{\psi}(x) = \psi(x) = \|x\|_X$ und $\|\overline{\psi}\| = \|\psi\| = 1$. Es gilt

$$\|\iota_X(x)\|_{X^{**}} \geqslant \left|\iota_X(x)(\overline{\psi})\right| = \left|\overline{\psi}(x)\right| = \|x\|_X \qquad \square$$

3.4. Definition und Proposition

Seien X, Y normierte Räume. Definiere eine Abbildung $.^{\mathrm{tr}} : \mathcal{L}(X, Y) \to \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ durch $T \mapsto T^{\mathrm{tr}} = (\varphi \mapsto \varphi \circ T)$. $.^{\mathrm{tr}}$ ist eine lineare Isometrie und das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\iota_X"] \arrow[d, "T"] & X^{**} \arrow[d, "T^{\mathrm{tr\,tr}} = (T^{\mathrm{tr}})^{\mathrm{tr}}"] \\ Y \arrow[r, "\iota_Y"] & Y^{**} \end{tikzcd}$$

kommutiert für jedes $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Für $\iota_{X^*} : X^* \to X^{***}$ und $\iota_X^{\mathrm{tr}} : X^{***} \to X^*$ gilt $\iota_X^{\mathrm{tr}} \circ \iota_{X^*} = \mathrm{id}_{X^*}$.

Beweis

(i) Für $T, S \in \mathcal{L}(X, Y)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\varphi \in Y^*$ gilt

$$\begin{aligned} (\alpha \cdot T + \beta \cdot S)^{\mathrm{tr}}(\varphi) = \varphi \circ (\alpha \cdot T + \beta \cdot S) \overset{\text{linear}}{=} \alpha \cdot (\varphi \circ T) + \beta \cdot (\varphi \circ S) &= \alpha \cdot T^{\mathrm{tr}}(\varphi) + \beta \cdot S^{\mathrm{tr}}(\varphi) \\ &= \big(\alpha \cdot T^{\mathrm{tr}} + \beta \cdot S^{\mathrm{tr}}\big)(\varphi) \end{aligned}$$

Damit ist $.^{\mathrm{tr}}$ eine lineare Abbildung.

(ii) Für $x \in X$, $\psi \in Y^*$ gilt $\big(\iota_Y \circ T(x)\big)(\psi) = \psi\big(T(x)\big)$. Weiter gilt dann

$$\begin{aligned} \big(T^{\mathrm{tr\,tr}} \circ \iota_X(x)\big)(\psi) = \big((T^{\mathrm{tr}})^{\mathrm{tr}} \circ \iota_X(x)\big)(\psi) = \big(\iota_X(x) \circ T^{\mathrm{tr}}\big)(\psi) &= \iota_X(x)\big(T^{\mathrm{tr}}(\psi)\big) \\ &= T^{\mathrm{tr}}(\psi)(x) = \psi \circ T(x) \\ &= \iota_Y\big(T(x)\big)(\psi) \end{aligned}$$

$\Rightarrow T^{\mathrm{tr\,tr}} \iota_X(x) = \iota_Y\big(T(x)\big) = \iota_Y \circ T(x)$. Also $T^{\mathrm{tr\,tr}} \circ \iota_X = \iota_Y \circ T$ und das Diagramm kommutiert.

(iii) Es ist $|(T^{\mathrm{tr}}\psi)(x)| = |\psi \circ T(x)| \leqslant \|\psi\|_{Y^*} \cdot \|Tx\|_Y \leqslant \|\psi\|_{Y^*} \cdot \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \cdot \|x\|_X$. Also ist $\|T^{\mathrm{tr}}\psi\|_{X^*} \leqslant \|\psi\|_{Y^*} \cdot \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$ und damit folgt

$$\left\|T^{\mathrm{tr}}\right\|_{\mathcal{L}(Y^*,X^*)} \leqslant \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$$

Ebenso ist $\|T^{\mathrm{tr}\,\mathrm{tr}}\|_{\mathcal{L}(X^{**},Y^{**})} \leqslant \|T^{\mathrm{tr}}\|_{\mathcal{L}(Y^*,X^*)} \leqslant \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$. Andererseits gilt $\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leqslant \|T^{\mathrm{tr}\,\mathrm{tr}}\|_{\mathcal{L}(X^{**},Y^{**})}$ nach 3.3 und da das Diagramm kommutiert (Warum?).

$$\Rightarrow \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leqslant \left\|T^{\mathrm{tr}}\right\|_{\mathcal{L}(Y^*,X^*)} \leqslant \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$$

also ist $.^{\mathrm{tr}}$ eine Isometrie.

(iv) Für $\varphi \in X^*$, $x \in X$ gilt

$$\big(\iota_X^{\mathrm{tr}} \circ \iota_{X^*}(\varphi)\big)(x) = (\iota_{X^*}(\varphi) \circ \iota_X)(x) = \iota_X(x)(\varphi) = \varphi(x)$$

$\Rightarrow \iota_X^{\mathrm{tr}} \circ \iota_{X^*}(\varphi) = \varphi$, also erhalten wir $\iota_X^{\mathrm{tr}} \circ \iota_{X^*} = \mathrm{id}_{X^*}$. □

3.5. Satz: Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit für Banachräume

Vergleiche 1.12, diese Aussage ist deutlich stärker! Dies verdanken wir in erster Linie der Linearität der betrachteten Abbildungen.

Sei X ein Banachraum und Y ein normierter Raum. Sei $M \subset \mathcal{L}(X,Y)$, sodass die Menge

$$\left\{x \mapsto \|Tx\|_Y \,\middle|\, T \in M\right\} \subset C(X,\mathbb{R})$$

punktweise gleichmäßig beschränkt ist, d.h. für $x \in X$ existiert $C_x \geqslant 0$ mit $\|Tx\|_Y \leqslant C_x$, $T \in M$. Dann existiert $C \geqslant 0$ mit $\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leqslant C$, $T \in M$.

Beweis
Nach Corollar 1.12 (Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit für metrische Räume) existieren eine offene Kugel $\emptyset \neq B(x_0,\varepsilon) \subset X$ und $K \geqslant 0$ mit $\|Tx\|_Y \leqslant K$ für $x \in B(x_0,\varepsilon)$, $T \in M$. Für $x \in X$ mit $\|x\| \leqslant 1$ gilt

$$\begin{aligned}\|Tx\|_Y = \frac{2}{\varepsilon} \cdot \left\|T\Big(\frac{\varepsilon}{2} \cdot x\Big)\right\|_Y &= \frac{2}{\varepsilon} \cdot \left\|T\Big(\frac{\varepsilon}{2} \cdot x + x_0 - x_0\Big)\right\|_Y \\ &\leqslant \frac{2}{\varepsilon} \cdot \left(\left\|T\Big(\underbrace{\frac{\varepsilon}{2} \cdot x + x_0}_{\in B(x_0,\varepsilon)}\Big)\right\|_Y + \left\|T\Big(\underset{\in B(x_0,\varepsilon)}{x_0}\Big)\right\|_Y\right) \\ &\leqslant \frac{2}{\varepsilon}(K+K) = \frac{4K}{\varepsilon}\end{aligned}$$

Es folgt $\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leqslant \frac{4K}{\varepsilon} =: C$. □

3.6. Corollar

Sei Z ein normierter Raum und $N \subset Z$ eine Teilmenge, so dass gilt: Für alle $\varphi \in Z^*$ existiert $C_\varphi \geqslant 0$ mit $|\varphi(z)| \leqslant C_\varphi$, $z \in N$. Dann ist N beschränkt.

Beweis
$\iota_Z \colon Z \to Z^{**}$ ist eine Isometrie nach 3.3. Wende Satz 3.5 an mit

$$\begin{aligned}X &= Z^* \\ Y &= \mathbb{K} \\ M &= \iota_Z(N) \subset Z^{**} = \mathcal{L}(Z^*,\mathbb{K})\end{aligned}$$

Für $\varphi \in X = Z^*$ existiert $C_\varphi \geqslant 0$ mit $|T\varphi| = |\iota_Z(z)(\varphi)| = |\varphi(z)| \leqslant C_\varphi$, wo $T = \iota_Z(z) \in M$ für ein $z \in N$. Nach 3.5 folgt: Es existiert ein $C \geqslant 0$ mit $\|z\|_Z = \|\iota_Z(z)\|_{Z^{**}} \leqslant C$, $z \in N$. □

3.7. Corollar

Sei X ein Banachraum und Z ein normierter Raum. $M \subset \mathcal{L}(X, Z)$ eine Teilmenge, so dass gilt: Für alle $\varphi \in Z^*$ und $x \in X$ existiert $C_{x,\varphi} \geqslant 0$ mit

$$\left|\varphi(Tx)\right| \leqslant C_{x,\varphi} \ , \qquad T \in M$$

Dann ist M beschränkt.

Beweis
Für jedes $x \in X$ folgt aus Corollar 3.6 mit $N := \{T(x) \,|\, T \in M\}$, dass N beschränkt ist. Es folgt, dass $\{x \mapsto \|T(x)\| \,|\, T \in M\}$ punktweise gleichmäßig beschränkt ist. Mit Satz 3.5 folgt: M ist beschränkt. □

3.8. Satz: Prinzip der offenen Abbildung

Seien X, Y Banachräume, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ surjektiv. Dann ist T offen, d.h. für eine offene Menge $U \subset X$ ist $T(U) \subset Y$ offen.

Beweis

(i) Sei $0 \in W \subset X$ offen, dann existiert $\emptyset \neq V \subset Y$ offen mit $V \subset \overline{T(W)}$:
$0 \in W \subset X \Rightarrow B(0, \varepsilon) \subset W$ für ein $\varepsilon > 0$. Dann gilt

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} n \cdot B(0, \varepsilon) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} n \cdot W$$

Aus der Surjektivität von T folgt $Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} n \cdot T(W) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} n \cdot \overline{T(W)}$. Nach dem Satz von Baire (1.10) folgt: Ein $n \cdot \overline{T(W)}$ enthält eine nichtleere offene Teilmenge, also auch $\overline{T(W)}$.

(ii) Sei $0 \in M \subset X$ offen, dann ist 0 ein innerer Punkt von $\overline{T(M)}$:
Die Abbildung $X \times X \to X$, $(x_1, x_2) \mapsto x_1 - x_2$ ist stetig.[7] $\Rightarrow$ es gibt $0 \in W \subset X$ offen mit

mit W als Urbild einer offenen Umgebung der 0 in M

$$W - W = \{x_1 - x_2 \,|\, x_1, x_2 \in W\} \subset M$$

Es folgt

$$\overline{T(M)} \supset \overline{T(W - W)} = \overline{T(W) - T(W)} \overset{\text{(Warum?)}}{\supset} \overline{T(W)} - \overline{T(W)} \overset{\text{(i)}}{\supset} V - V$$

für $\emptyset \neq V$ offen in Y wie in (i). Aber $0 \in V - V = \bigcup_{y \in V} \{y\} - V$ ist offen in Y. Also ist 0 ein innerer Punkt von $\overline{T(M)}$.

(iii) Ist $0 \in N \subset X$ offen, so existiert $0 \in Z \subset Y$ offen mit $Z \subset T(N)$:
Sei $\varepsilon_0 > 0$. Wähle $\varepsilon_i > 0$, $1 \leqslant i \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i < \varepsilon_0$. Nach (ii) gilt: Zu ε_i, $i \in N$ existiert ein $\delta_i > 0$ mit

$$B_Y(0, \delta_i) \subset \overline{T(B_X(0, \varepsilon_i))}.$$

Es gilt $\delta_i \xrightarrow{i \to \infty} 0$. Sei nun $y \in B_Y(0, \delta_0) =: Z$. Dann gilt $y \in \overline{T(B_X(0, \varepsilon_0))}$, also existiert $x_0 \in B_X(0, \varepsilon_0)$ mit $\|y - T(x_0)\|_Y < \delta_1$. Folglich existiert $x_1 \in B_X(0, \varepsilon_1)$ mit $\|y - T(x_0) - T(x_1)\|_Y < \delta_2$. Per Induktion folgt

$$\exists x_i \in B_X(0, \varepsilon_i) \text{ mit } \left\| y - \sum_{j=0}^{i} T(x_i) \right\|_Y < \delta_{i+1}, \qquad i \in \mathbb{N}$$

$\sum_{i \in \mathbb{N}} x_i$ konvergiert in X und $\left\|\sum_{i \in \mathbb{N}} x_i\right\|_X < 2 \cdot \varepsilon_0$, es gilt $T\left(\sum_{i \in \mathbb{N}} x_i\right) = y$. Es folgt

$$Z = B_Y(0, \delta_0) \subset T\left(B_X(0, 2 \cdot \varepsilon_0)\right) \subset T(N)$$

[7] Banachräume sind topologische Vektorräume

(iv) Sei $U \subset X$ offen. Dann ist $T(U) \subset Y$ offen:

Zu $x \in U$ existiert $0 \in N \subset X$ offen mit $x + N \subset U$, also $T(x) + T(N) \subset T(U)$. Nach (iii) existiert $0 \in Z \subset Y$ offen mit $Z \subset T(N)$, also $T(x) + Z \subset T(U)$. Aber $T(x) \in T(x) + Z$ ist offen in Y und $T(U)$ ist Umgebung von $T(x)$. $x \in U$ war beliebig, also ist $T(U)$ offen. □

3.9. Corollar: Satz von der inversen Abbildung

Seien X, Y Banachräume, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ bijektiv. Dann gilt $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$, d.h. T ist ein Homöomorphismus.

Beweis
Nach Satz 3.8 ist T offen und somit ist T^{-1} stetig. □

3.10. Corollar

Sei X ein Vektorraum und seien $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ zwei Topologien auf X, die durch Banachraumnormen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ induziert sind. Falls $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$, so gilt bereits $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.

Beweis
$\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2 \Rightarrow (X, \mathcal{T}_2) \xrightarrow{\mathrm{id}_X} (X, \mathcal{T}_1)$ ist stetig und bijektiv, also ist id_X nach 3.9 ein Homöomorphismus. □

3.11. Corollar

Sei X ein Banachraum mit abgeschlossenen Teilräumen X_1, X_2, sodass $X_1 \cap X_2 = \{0\}$ und $X = X_1 + X_2$. Dann sind X und $X_1 \times X_2$ als topologische Vektorräume isomorph.

Beweis
Die Abbildung $X_1 \times X_2 \to X$, $(x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$ ist linear und bijektiv. Sie ist stetig, wegen

$$\|x_1 + x_2\|_X \leqslant \|x_1\|_X + \|x_2\|_X = \|(x_1, x_2)\|_{1, X_1 \times X_2}$$

Mit Corollar 3.9 folgt die Behauptung. □

4. L^p-Räume und der Satz von Riesz-Fischer

4.1. Erinnerung

Sei (X,Σ,μ) ein **Maßraum**.[8] Eine Abbildung $f\colon X\to(-\infty,\infty]$ heißt **messbar**, falls $f^{-1}(E)\in\Sigma$ gilt für $E\subset\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (Borelmengen[9]). Eine Abbildung $s\colon X\to(-\infty,\infty]$ heißt **einfach**, falls $s(X)$ endlich ist. Für $f\colon X\to[0,\infty]$ messbar setzen wir

$$\int f\,\mathrm{d}\mu := \sup\left\{\int s\,\mathrm{d}\mu \,\middle|\, s \text{ einfach, messbar mit } 0\leqslant s\leqslant f\right\}$$

Für $f\colon X\to(-\infty,\infty]$ messbar setze $\int f\,\mathrm{d}\mu := \int f_+\,\mathrm{d}\mu - \int f_-\,\mathrm{d}\mu$, falls $\int f_-\,\mathrm{d}\mu<\infty$. Betrachte

$$\mathcal{L}^1(\mu) := \left\{f\colon X\to\mathbb{R} \text{ messbar} \,\middle|\, \int |f|\,\mathrm{d}\mu<\infty\right\}$$

mit der Halbnorm $\|f\|_1 := \int|f|\,\mathrm{d}\mu$. Setze nun $\mathcal{N}^1 := \left\{f\colon X\to\mathbb{R} \text{ messbar} \,\middle|\, \int|f|\,\mathrm{d}\mu=0\right\}$. $L^1(\mu)$ ist ein topologischer Vektorraum (Topologie induziert durch $\|\cdot\|_1$) und $\mathcal{N}^1\subset\mathcal{L}^1(\mu)$ ist ein abgeschlossener Untervektorraum. Definiere

$$L^1(\mu) := {}^{\mathcal{L}^1(\mu)}/_{\mathcal{N}^1}$$

$\|\cdot\|_1$ induziert eine wohldefinierte Norm auf $L^1(\mu)$ – die wir auch wieder mit $\|\cdot\|_1$ bezeichnen – via

$$\left\|f+\mathcal{N}^1\right\|_1 := \|f\|_1 \quad,\quad f\in\mathcal{L}^1(\mu) \qquad \text{(Übung)}$$

$(L^1(\mu),\|\cdot\|_1)$ ist ein Banachraum (siehe Analysis III, 9.23).

4.2. Beispiele

(i) $L^1(\mathbb{R}^n) := L^1(\mathbb{R}^n,\Lambda,\lambda)$, wobei Λ die Lebesgue-messbaren Mengen sind und λ das Lebesgue-Maß ist.

(ii) $\ell^1(\mathbb{N}) := L^1\big(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}),\delta\big) = \{f\colon\mathbb{N}\to\mathbb{R}\mid\sum|f(n)|<\infty\}$, wobei δ das Zählmaß[10] ist.

4.3. Definition und Proposition

Ähnlich wie oben definieren wir für einen Maßraum (X,Σ,μ)

$$\mathcal{L}^p(\mu) := \left\{f\colon X\to\mathbb{R} \text{ messbar} \,\middle|\, \int |f|^p\mathrm{d}\mu<\infty\right\}$$
$$\mathcal{N}^p := \left\{f\colon X\to\mathbb{R} \text{ messbar} \,\middle|\, \int |f|^p\mathrm{d}\mu=0\right\}$$

$\mathcal{L}^p(\mu)$ und $\mathcal{N}^p$ sind Vektorräume. Wir setzen wieder

$$L^p(\mu) := {}^{\mathcal{L}^p(\mu)}/_{\mathcal{N}^p}$$

Definiere $\|\cdot\|_p\colon\mathcal{L}^p(\mu)\to[0,\infty)$ durch $\|f\|_p := \left(\int|f|^p\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}$. $\|\cdot\|_p$ induziert wieder eine Abbildung $\|\cdot\|_p\colon L^p(\mu)\to[0,\infty)$ via $\|f+\mathcal{N}^p\|_p := \|f\|_p$ für $f\in\mathcal{L}^p$.

[8] X Menge, Σ eine σ-Algebra auf X, μ Maß

[9] σ-Algebra, die von den offenen Intervallen mit rationalen Endpunkten aufgespannt wird, siehe auch `https://de.wikipedia.org/wiki/Borelsche_σ-Algebra`

[10] siehe auch `http://de.wikipedia.org/wiki/Zählmaß_(Maßtheorie)`

Beweis
$\mathcal{L}^p(\mu)$ **ist Vektorraum:** Für $f,g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ und $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\int |\alpha\cdot f+\beta\cdot g|^p \mathrm{d}\mu &\leqslant \int \big(|\alpha\cdot f|+|\beta\cdot g|\big)^p \mathrm{d}\mu \leqslant \int \big(2\cdot\sup\{|\alpha\cdot f|,|\beta\cdot g|\}\big)^p \mathrm{d}\mu \\ &\leqslant \int \Big(2^p\cdot \sup\Big\{|\alpha\cdot f|^p,|\beta\cdot g|^p\Big\}\Big)\mathrm{d}\mu \\ &\leqslant \int 2^p\cdot\big(|\alpha\cdot f|^p+|\beta\cdot g|^p\big)\mathrm{d}\mu<\infty\end{aligned}$$

$\mathcal{N}^p$ **ist Vektorraum:** Wie obige Ungleichung, dann Linearität des Integrals anwenden.

$\|\cdot\|_p$ **wohldefiniert auf** $L^p(\mu)$**:** Übung (Blatt 6, Aufgabe 3). $\square$

4.4. Proposition

Für $\alpha,\beta\geqslant 0$, $p,q>1$ mit $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ gilt die folgende Ungleichung

$$\alpha\cdot\beta\leqslant\frac{\alpha^p}{p}+\frac{\beta^q}{q} \qquad [\#]$$

Dies ist ein Spezialfall der Youngschen Ungleichung, `Wikipedia-Link`.

Beweis

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \iff p+q=pq \iff (p-1)(q-1)=1 \iff p(q-1)=q \iff q(p-1)=p$$

Falls $\beta=\alpha^{p-1}$, so gilt $\alpha\cdot\beta=\alpha^p$ und

$$\frac{\alpha^p}{p}+\frac{\beta^q}{q}=\frac{\alpha^p}{p}+\frac{(\alpha^{p-1})^q}{q}=\frac{\alpha^p}{p}+\frac{\alpha^p}{q}=\alpha^p=\alpha\cdot\beta$$

Also gilt in diesem Fall Gleichheit in [#]. Für festes $\alpha\geqslant 0$ betrachte $f_\alpha\colon[0,\infty)\to[0,\infty)$ gegeben durch $f_\alpha(\beta):=\frac{\alpha^p}{p}+\frac{\beta^q}{q}-\alpha\cdot\beta$. Dann ist f_α stetig auf $[0,\infty)$ und differenzierbar auf $(0,\infty)$. Es gilt $f'_\alpha(\beta)=\beta^{q-1}-\alpha$ und weiter

$$f'_\alpha(\beta)=0 \iff \beta^{q-1}=\alpha \iff \beta=\alpha^{p-1}$$

Es ist $f''_\alpha(\alpha^{p-1})\geqslant 0$, also hat f_α bei $\beta=\alpha^{p-1}$ ein lokales Minimum. Es gilt $f_\alpha(\alpha^{p-1})=0\leqslant f_\alpha(0)$, also hat f_α bei $\beta=\alpha^{p-1}$ ein globales Minimum. Damit ist [#] bewiesen. $\square$

4.5. Satz: Höldersche Ungleichung

Sei (X,Σ,μ) ein Maßraum. Seien $p,q\geqslant 1$ mit $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $f\in\mathcal{L}^p(\mu)$, $g\in\mathcal{L}^q(\mu)$. Dann gilt $f\cdot g\in\mathcal{L}^1\mu$ und

$$\|f\cdot g\|_1\leqslant\|f\|_p\cdot\|g\|_q$$

Die entsprechenden Aussagen gelten dann auch für $L^p(\mu)$, $L^q(\mu)$, $L^1(\mu)$.

Beweis
Klar, falls $\|f\|_p = 0$ oder $\|g\|_q = 0$ (Warum?). Sei also $\|f\|_p, \|g\|_q \neq 0$. Nach Proposition 4.4 gilt für $x \in X$

$$0 \leqslant \underbrace{\underbrace{\frac{|f(x)|}{\|f\|_p}}_{=\alpha} \cdot \underbrace{\frac{|g(x)|}{\|g\|_q}}_{=\beta}}_{\text{messbar}} \leqslant \underbrace{\frac{1}{p} \cdot \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}}_{\text{integrierbar}}$$

Es ist $|f|^p, |g|^q \in \mathcal{L}^1(\mu)$, also folgt aus obiger Ungleichung $\frac{|f \cdot g|}{\|f\|_p \cdot \|g\|_q} \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Weiter gilt nun

$$\frac{\int |f \cdot g| \mathrm{d}\mu}{\|f\|_p \cdot \|g\|_q} \leqslant \frac{1}{p} \cdot \frac{\int |f|^p \mathrm{d}\mu}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{\int |g|^q \mathrm{d}\mu}{\|g\|_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Es folgt also $\int |f \cdot g| \mathrm{d}\mu \leqslant \|f\|_p \cdot \|g\|_q$. □

4.6. Satz: Minkowskische Ungleichung

Für $1 < p < \infty$, $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ (bzw. $L^p(\mu)$) gilt die **Minkowski-Ungleichung**

$$\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$$

Beweis
Sei $\|f + g\|_p > 0$ (sonst ist die Aussage trivial). Es gilt

$$|f + g|^p = |f + g|^{p-1} \cdot |f + g| \leqslant |f + g|^{p-1} \cdot \big(|f| + |g|\big)$$

Sei $q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Es gilt $|f + g|^{p-1} \in \mathcal{L}^q(\mu)$, da $|f + g|^{(p-1)q} = |f + g|^p \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Nach der Hölderschen Ungleichung 4.5 gilt

$$\begin{aligned}\int |f + g|^p \mathrm{d}\mu \leqslant \int |f + g|^{p-1} |f| \mathrm{d}\mu + \int |f + g|^{p-1} |g| \mathrm{d}\mu &\leqslant \|f\|_p \cdot \left\| |f + g|^{p-1} \right\|_q + \|g\|_p \cdot \left\| |f + g|^{p-1} \right\|_q \\ &= \left(\|f\|_p + \|g\|_p\right) \cdot \left(\int |f + g|^{(p-1)q} \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\|f\|_p + \|g\|_p\right) \cdot \left(\int |f + g|^p \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

Also gilt

$$\left(\int |f + g|^p \mathrm{d}\mu\right)^{1 - \frac{1}{q}} = \left(\int |f + g|^p \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$$ □

4.7. Corollar

$L^p(\mu)$ ist ein normierter Vektorraum für $1 \leqslant p < \infty$.

4.8. Definition und Proposition

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^\infty(\mu) &:= \left\{ f \colon X \to \mathbb{R} \text{ messbar} \,\middle|\, \exists C \geqslant 0 : |f| \leqslant C \text{ fast überall} \right\} \\ \mathcal{N}^\infty &:= \left\{ f \colon X \to \mathbb{R} \,\middle|\, f = 0 \text{ fast überall} \right\}\end{aligned}$$

Wir definieren $L^\infty(\mu) := {}^{\mathcal{L}^\infty(\mu)}/_{\mathcal{N}^\infty}$. Wir definieren eine Halbnorm auf $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ durch

$$\|f\|_\infty := \inf\left\{ C \,\middle|\, |f| \leqslant C \text{ fast überall} \right\}$$

Dies induziert wieder eine Norm auf $L^\infty(\mu)$ durch $\|f + \mathcal{N}\|_\infty := \|f\|_\infty$. Damit ist $(L^\infty(\mu), \|\cdot\|_\infty)$ ein normierter Vektorraum. Für $f \in L^1(\mu)$, $g \in L^\infty(\mu)$ gilt die Höldersche Ungleichung $\|f \cdot g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \cdot \|g\|_\infty$, also gilt $f \cdot g \in L^1(\mu)$.

Beweis
Übung. □

4.9. Beispiele

(i) $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$, $1 \leqslant p < \infty$, also $X = \{1, \dots, n\}, \Sigma = \mathcal{P}(X), \mu =$ Zählmaß.

auch: Raum der p-summierbaren Folgen

(ii) $\left(\ell^p(\mathbb{N}), \|\cdot\|_p\right)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, also $X = \mathbb{N}, \Sigma = \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu =$ Zählmaß. Dabei ist

$$\ell^p(\mathbb{N}) = \left\{ (a_n)_n \;\middle|\; a_n \in \mathbb{R}, \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^p < \infty \right\}$$

für $p < \infty$ bzw. $\ell^p(\mathbb{N}) = \{$beschränkte Folgen$\}$ für $p = \infty$.

4.10. Proposition

Sei (X, Σ, μ) ein Maßraum und $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, bzw. $p = 1$ und $q = \infty$. Die Abbildung $\iota_p \colon L^p(\mu) \to L^q(\mu)^*$, gegeben durch

$$\iota_p(f)(g) := \int f \cdot g \,\mathrm{d}\mu$$

ist eine lineare Isometrie.

Beweis
$\iota_p(f) \colon L^q(\mu) \to \mathbb{R}$ **ist linear und wohldefiniert:** Übung!

ι_p **ist linear und wohldefiniert:** Übung!

$\iota_p(f)$ ist beschränkt durch $\|f\|_p$ nach Hölder (4.5), also ist ι_p beschränkt durch 1. Noch zu zeigen: Zu $f \in L^p(\mu)$ existiert $g \in L^q(\mu)$ mit $|\iota_p(f)(g)| = \|f\|_p \cdot \|g\|_q$, denn dann gilt $\|\iota_p(f)\|_{L^q(\mu)^*} \geqslant \|f\|_p$. Gegeben $f \in L^p(\mu)$ setzen wir $g := \operatorname{sgn}(f) \cdot |f|^{p-1}$. Dann ist $|g|^q = |f|^p$, also $g \in L^q(\mu)$. Weiter gilt dann

$$\int f \cdot g \,\mathrm{d}\mu = \int |f \cdot g| \mathrm{d}\mu = \int |f|^p \mathrm{d}\mu = \left(\int |f|^p \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int |f|^p \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

Für $p = 1$ und $q = \infty$ ist die Aussage eine Übungsaufgabe. □

4.11. Satz von Riesz-Fischer

Sei (X, Σ, μ) ein Maßraum. $L^p(\mu)$ ist vollständig für $p \in [1, \infty]$.

Beweis
Für $p = \infty$ ist dies eine Übung (Blatt 7, Aufgabe 1). Sei also $p < \infty$ und sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p(\mu)$ Cauchy.

Behauptung: Es gibt $E_l \subset X, l \in \mathbb{N}$, messbare Teilmenge mit $\mu(E_l) < \infty$ und sodass für $E := \bigcup_{l \in \mathbb{N}} E_l$ gilt $\chi_{X \setminus E} \cdot f_n = 0$ in $L^p(\mu)$ für $n \in \mathbb{N}$. Beweis: Übung (Blatt 7, Aufgabe 2, siehe Anhang A.3)

Wähle $n_0 < n_1 < \dots$ mit $\|f_n - f_{n_k}\|_p < \frac{1}{2^k}$ für $n > n_k$, $k \in \mathbb{N}$. Für jedes $l, k \in \mathbb{N}$ gilt $\left|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right| \in L^p(\mu)$ und $\chi_{E_l} \in L^q(\mu)$, wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Also ist nach Hölder (4.5) auch $\left|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right| \cdot \chi_{E_l} \in L^1(\mu)$. Weiter gilt für $j \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{j} \left\| \left|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right| \cdot \chi_{E_l} \right\|_1 \leqslant \sum_{k=0}^{j} \left\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\|_p \cdot \|\chi_{E_l}\|_q \leqslant \sum_{k=0}^{j} \frac{1}{2^k} \cdot \|\chi_{E_l}\|_q$$

$\left(\sum_{k=0}^{j}\left|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}\right|\cdot\chi_{E_l}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ ist eine aufsteigende Folge von integrierbaren Funktionen. Nach dem Satz von Lebesgue über monotone Konvergenz gilt: $\sum_{k=0}^{\infty}\left|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}\right|$ konvergiert auf E_l fast überall. Da abzählbare Vereinigungen von Nullmengen Nullmengen sind, folgt: $\sum_{k=0}^{\infty}\left|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}\right|$ konvergiert auf E fast überall. Also konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty}\left|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}\right|$ auf X fast überall. Damit konvergiert auch $\sum_{k=0}^{\infty} f_{n_{k+1}}-f_{n_k}$ auf X fast überall. Nach Auflösen der Wechselsumme stellen wir fest, dass also auch $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ auf X fast überall konvergiert. Setze

$$f(x) := \begin{cases} \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x), & \text{falls der Limes existiert} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

f ist als Limes messbarer Funktionen messbar. Weiter gilt $|f_{n_k}|^p \to |f|^p$ fast überall. Noch zu zeigen: $f \in L^p(\mu)$. Die Folge $\left(\|f_{n_k}\|_p^p\right)_k$ ist beschränkt, da $(f_n)_n$ eine Cauchyfolge bezüglich $\|\cdot\|_p$ ist. Es gilt $|f|^p \overset{f.ü.}{=} \liminf |f_{n_k}|^p$

$$\int |f|^p \mathrm{d}\mu \leqslant \liminf_{k\to\infty} \int |f_{n_k}|^p \mathrm{d}\mu < \infty$$

nach dem Lemma von Fatou[11]. Also gilt $f \in L^p(\mu)$. Noch zu zeigen: $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ bezüglich $\|\cdot\|_p$. Sei dazu $j \in \mathbb{N}$. Sei $n \geqslant n_j$. Für $i > j$ gilt

$$\|f_n - f_{n_i}\|_p \leqslant \left\|f_n - f_{n_j}\right\|_p + \left\|f_{n_j} - f_{n_i}\right\|_p < 2\cdot\frac{1}{2^j}$$

Weiter gilt $|f_n - f_{n_i}|^p \xrightarrow{i\to\infty} |f_n - f|^p$ fast überall. Mit dem Lemma von Fatou folgt

$$\int |f_n - f|^p \mathrm{d}\mu \leqslant \liminf_{i\to\infty} \int |f_n - f_{n_i}|^p \mathrm{d}\mu \leqslant \left(2\cdot\frac{1}{2^j}\right)^p$$

$\Rightarrow \|f_n - f\|_p \leqslant 2\cdot\frac{1}{2^j}$, falls $n \geqslant n_j$. Also gilt $\|f_n - f\|_p \xrightarrow{n\to\infty} 0$. $\square$

[11] siehe Analysis III. 9.23 oder https://de.wikipedia.org/wiki/Lemma_von_Fatou

5. Schwache Topologien, Reflexivität

5.1. Definition

Sei X ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum. Die **schwache Topologie** $\mathcal{T}_X^{\mathrm{w}}$ ist die gröbste[12] Topologie auf X, sodass alle $\varphi \in X^*$ stetig sind.

5.2. Bemerkung

(i) Jedes $\varphi \in X^*$ ist – nach Definition von $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ – stetig bezüglich $\mathcal{T}_X^{\|\cdot\|}$, d.h. $\mathcal{T}_X^{\mathrm{w}} \subset \mathcal{T}_X^{\|\cdot\|}$. Mit anderen Worten: Die Abbildung $\mathrm{id}_X : \left(X, \mathcal{T}_X^{\|\cdot\|}\right) \to \left(X, \mathcal{T}_X^{\mathrm{w}}\right)$ ist stetig.

(ii) Mengen der Form $\varphi^{-1}(U)$ für $U \subset K$ offen, $\varphi \in X^*$ bilden eine Subbasis für $\mathcal{T}_X^{\mathrm{w}}$. Mengen der Form

$$\bigcap_{i=1}^{n} \varphi_i^{-1}(U_i) \quad , \qquad U_i \subset \mathbb{K} \text{ offen}, \varphi_i \in X^*$$

bilden eine Basis für $\mathcal{T}_X^{\mathrm{w}}$.

5.3. Proposition

Die schwache Topologie $\left(X, \mathcal{T}_X^{\mathrm{w}}\right)$ ist Hausdorffsch.

Beweis
Seien $x \neq y \in X$. Nach Hahn-Banach existiert $\varphi \in X^*$ mit $\varphi(x) \neq \varphi(y)$. Setze $\varepsilon := \frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{2} > 0$, dann sind $\varphi^{-1}\big(B_{\mathbb{K}}(\varphi(x), \varepsilon)\big)$ und $\varphi^{-1}\big(B_{\mathbb{K}}(\varphi(y), \varepsilon)\big)$ disjunkte offene Umgebungen von x bzw. y. □

5.4. Proposition

Sei X ein normierter Raum, $x \in X$, $(x_\lambda)_\Lambda \subset X$ ein Netz. Dann sind äquivalent:

(i) $x_\lambda \xrightarrow{\mathrm{w}} x$, d.h. x_λ konvergiert gegen x in der schwachen Topologie $\mathcal{T}_X^{\mathrm{w}}$.

(ii) $\varphi(x_\lambda) \to \varphi(x)$ für alle $\varphi \in X^*$.

Beweis
(i)⇒(ii): Sei $\varphi \in X^*$ und $\varepsilon > 0$. Es ist $\varphi(x) \in B_{\mathbb{K}}\big(\varphi(x), \varepsilon\big) \subset \mathbb{K}$ offen und φ stetig bezüglich $\mathcal{T}_X^{\mathrm{w}}$, also

$$x \in \varphi^{-1}\Big(B_{\mathbb{K}}\big(\varphi(x), \varepsilon\big)\Big) \underset{\text{w-offen}}{\subset} X$$

Da $x_\lambda \xrightarrow{\mathrm{w}} x$ existiert ein $\overline{\lambda} \in \Lambda$ mit $x_\lambda \in \varphi^{-1}\big(B_{\mathbb{K}}(\varphi(x), \varepsilon)\big)$, falls $\lambda \geqslant \overline{\lambda}$. Dann folgt $\varphi(x_\lambda) \in B_{\mathbb{K}}(\varphi(x), \varepsilon)$ falls $\lambda \geqslant \overline{\lambda}$, also $\varphi(x_\lambda) \to \varphi(x)$ in $\mathbb{K}$.

(ii)⇒(i): Sei $x \in V \subset X$ w-offen. Nach 5.2(ii) existieren $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in X^*$, $U_1, \ldots, U_m$ offen in $\mathbb{K}$ mit

$$x \in \varphi_1^{-1}(U_1) \cap \ldots \cap \varphi_m^{-1}(U_m) \subset V$$

Wegen (ii) existieren $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \Lambda$ mit $\varphi_i(x_\lambda) \in U_i$, falls $\lambda \geqslant \lambda_i$. Wähle $\overline{\lambda} \in \Lambda$ mit $\overline{\lambda} \geqslant \lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Dann gilt $\varphi_i(x_\lambda) \in U_i$, falls $\lambda \geqslant \overline{\lambda}$ für alle i. Damit ist dann auch $x_\lambda \in \varphi_i^{-1}(U_i)$ für alle i, falls $\lambda \geqslant \overline{\lambda}$. Also gilt $x_\lambda \in \bigcap_{i=1}^{m} \varphi_i^{-1}(U_i) \subset V$, falls $\lambda \geqslant \overline{\lambda}$. □

[12] auch: „dollste“

5.5. Corollar

Wenn $x_\lambda \xrightarrow{\text{w}} x$, dann ist $(x_\lambda)_\Lambda \subset X$ beschränkt.

Beweis
Wir betrachten zunächst die folgende Menge

$$\{\iota_X(x_\lambda) \,|\, \lambda \in \Lambda\} \subset \mathcal{L}(X^*, \mathbb{K}) = X^{**}.$$

Wir wollen zeigen, dass diese punktweise gleichmäßig beschränkt ist. Sei dazu $\varphi \in X^*$ beliebig. Da $\varphi(x_\lambda)$ nach 5.4 konvergent und somit auch beschränkt ist, gibt es ein $C_\varphi > 0$ mit

$$|\iota_X(x_\lambda)(\varphi)| = |\varphi(x_\lambda)| \leqslant C_\varphi.$$

Nach 3.1 ist X^* vollständig, also können wir nun das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit anwenden und erhalten ein $C > 0$ mit $\|\iota_X(x_\lambda)\| \leqslant C$ für alle $\lambda \in \Lambda$. Da ι_X isometrisch ist, gilt also auch $\|x_\lambda\| \leqslant C$ für alle $\lambda \in \Lambda$, also ist das Netz beschränkt. □

5.6. Beispiel

Im Allgemeinen gilt

$$x_\lambda \xrightarrow{\|\cdot\|} x \quad \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \quad x_\lambda \xrightarrow{\text{w}} x$$

Betrachte $X = \ell^2(\mathbb{N})$ mit $\|\cdot\|_2$. Sei $e_n \in \ell^2(\mathbb{N})$ gegeben durch $e_n(m) := \delta_{n,m}$. Dann gilt $e_n \not\to 0$ für $n \to \infty$ in $\mathcal{T}^{\|\cdot\|_2}$, denn $\|e_n - 0\|_2 = \|e_n\|_2 \equiv 1 \not\to 0$. Aber $e_n \xrightarrow{\text{w}} 0$ für $n \to \infty$, denn es ist – wie wir später sehen werden – $\ell^2(\mathbb{N})^* \cong \ell^2(\mathbb{N})$ via $\langle a \,|\, b\rangle = \sum \overline{a(k)} \cdot b(k)$. Es gilt aber *Kronecker-Delta*

$$\langle a \,|\, e_n\rangle = \sum \overline{a(k)} e_n(k) = \overline{a(n)} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

$\Rightarrow e_n \xrightarrow{\text{w}} 0$ für $n \to \infty$.

Direktes Argument: Übung.

5.7. Proposition

Seien X, Y normierte Räume, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ ein beschränkter (d.h. normstetiger) linearer Operator. Dann ist T auch stetig bezüglich der schwachen Topologie auf X und Y.

Beweis
Zu zeigen: Falls $U \subset Y$ schwach-offen ist, so ist $T^{-1}(U)$ schwach-offen in X. Wir können annehmen, dass U von der Form $\varphi^{-1}(B_\mathbb{K}(\lambda, \varepsilon))$, $\varphi \in Y^*, \lambda \in \mathbb{K}, \varepsilon > 0$ ist, da diese Mengen eine Subbasis bilden. Es gilt nun

$$T^{-1}\Big(\varphi^{-1}\big(B_\mathbb{K}(\lambda, \varepsilon)\big)\Big) = \Big(\underbrace{\varphi \circ T}_{\in X^*}\Big)^{-1}\big(B_\mathbb{K}(\lambda, \varepsilon)\big) \underset{\text{w-offen}}{\subset} X$$ □

5.8. Definition

Sei X ein normierter Raum. Die **w^*-Topologie** $\mathcal{T}^{\mathrm{w}^*}$ ist die gröbste Topologie auf X^*, sodass alle $\iota_X(x) \in X^{**}$ stetig sind.

5.9. Bemerkung

(i) Es gilt $\mathcal{T}_{X^*}^{\mathrm{w}^*} \subset \mathcal{T}_{X^*}^{\mathrm{w}} \subset \mathcal{T}_{X^*}^{\|\cdot\|}$.

(ii) Mengen der Form $W(\varphi, x, \varepsilon) := \{\psi \in X^* \mid |\psi(x) - \varphi(x)| < \varepsilon\}$ bilden eine Subbasis für $\mathcal{T}_{X^*}^{\mathrm{w}^*}$. Mengen der Form $\{\psi \mid \psi(x) \in U\}$, $U \subseteq \mathbb{K}$ offen, bilden ebenfalls eine Subbasis für $\mathcal{T}_{X^*}^{\mathrm{w}^*}$.

(iii) Ein Netz $(\varphi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset X^*$ konvergiert w^* gegen $\varphi \in X^*$ genau dann, wenn

$$\iota_X(x)(\varphi_\lambda) = \varphi_\lambda(x) \xrightarrow{\lambda} \varphi(x) = \iota_X(x)(\varphi)$$

für jedes $x \in X$.

(iv) $\mathcal{T}_{X^*}^{\mathrm{w}^*}$ ist Hausdorff.

Beweis
Übung!

5.10. Satz (Banach-Alaoglu)

Sei X ein normierter Raum. Dann ist die abgeschlossene Einheitskugel in X^*

$$\overline{B}_{X^*}(0,1) = \{\varphi \in X^* \mid \|\varphi\|_{X^*} \leqslant 1\}$$

w^*-kompakt.

Beweis
Für $x \in X$ setze $F_x := \mathbb{K}$ und $F := \prod_{x\in X} F_x$. Wir versehen F mit der Produkttopologie $\mathcal{T}_F^{\Pi}$. Definiere eine Abbildung $\kappa\colon X^* \to F$ durch $\kappa(\varphi)_x := \varphi(x)$, $x \in X$. Dann ist κ injektiv (warum?) und $\mathcal{T}_{X^*}^{\mathrm{w}^*}$ stimmt überein mit der durch κ und $\mathcal{T}_F^{\Pi}$ induzierten Topologie auf X^*. Diese besteht aus den Mengen $\left\{\kappa^{-1}(U) \,\middle|\, U \in \mathcal{T}_F^{\Pi}\right\}$. Eine Basis für $\mathcal{T}_F^{\Pi}$ sind Mengen der Form

$$\prod_{x\in X} U_x, \quad U_x \subset \mathbb{K} \text{ offen}$$

mit $U_x = \mathbb{K}$ für alle bis auf endlich viele $x \in X$. Eine Basis, für die durch κ und $\mathcal{T}_F^{\Pi}$ induzierte Topologie auf X^* sind Mengen der Form

$$\kappa^{-1}\left(\prod_{x\in X} U_x\right) = \underbrace{\bigcap_{i=1}^{n} \{\varphi \mid \varphi(x_i) \in U_{x_i}\}}_{\text{bilden Basis für } \mathcal{T}_{X^*}^{\mathrm{w}^*}\text{, 5.9(ii)}}$$

mit U_x wie oben. Dabei erhalten wir die x_i durch $\kappa^{-1}\left(\prod_{x\in X} V_x\right) = \{\varphi \mid \varphi(x_i) \in U_{x_i}\}$, wobei

$$V_x = \begin{cases} \mathbb{K}, & \text{falls } x \neq x_i \\ U_{x_i}, & \text{falls } x = x_i \end{cases}$$

Falls $\|\varphi\| \leqslant 1$, so gilt $|\varphi(x)| \leqslant \|x\|_X$, also

$$\kappa\big(\overline{B}_{X^*}(0,1)\big) \subset \underbrace{\prod_{x\in X} \overline{B}_{\mathbb{K}}(0, \|x\|)}_{\text{kompakt nach Tychonov}} \subset F$$

Bleibt zu zeigen: $\kappa\big(\overline{B}_{X^*}(0,1)\big) \subset F$ ist abgeschlossen. Sei $f \in \overline{\kappa\big(\overline{B}_{X^*}(0,1)\big)}$. Dies definiert eine Abbildung $\varphi_f\colon X \to \mathbb{K}$ durch $\varphi_f(x) := f_x$. Falls nun φ_f linear und stetig ist mit $\|\varphi_f\| \leqslant 1$, so gilt $\kappa(\varphi_f) = f$, denn $\kappa(\varphi_f)_x = \varphi_f(x) = f_x$. Damit folgt $f \in \kappa\big(\overline{B}_{X^*}(0,1)\big)$ und dann ist $\overline{B}_{X^*}(0,1)$ kompakt.

Additivität: Seien $y, z \in X$, $\varepsilon > 0$. Dann ist

$$W_\varepsilon := \left\{ g \in \prod_{x \in X} \overline{B}_{\mathbb{K}}(0, \|x\|) \;\middle|\; \begin{array}{r} |g_{y+z} - f_{y+z}| < \varepsilon \\ |g_y - f_y| < \varepsilon \\ |g_z - f_z| < \varepsilon \end{array} \right\} \underset{\text{offen}}{\subset} \prod_{x \in X} \overline{B}_{\mathbb{K}}(0, \|x\|)$$

Da $f \in \overline{\kappa\big(\overline{B}_{X^*}(0,1)\big)}$ existiert ein $g \in W_\varepsilon \cap \kappa\big(\overline{B}_{X^*}(0,1)\big)$. Sei $g' \in \overline{B}_{X^*}(0,1)$ mit $\kappa(g') = g$. $g' \in X^*$ ist linear, also gilt auch $g_{y+z} = g_y + g_z$ und daher

$$|f_{y+z} - (f_y + f_z)| < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon$$

$\varepsilon > 0$ war beliebig, also $f_{y+z} = f_y + f_z$ und $\varphi_f(y+z) = \varphi_f(y) + \varphi_f(z)$. Also ist φ additiv.

Skalarmultiplikation: analog.

Es gilt $|\varphi_f(x)| = |f_x| \leqslant \|x\|$, $x \in X$, also $\|\varphi_f\|_{X^*} \leqslant 1$. □

5.11. Erinnerung

(a) Ein topologischer Raum X heißt

(i) **separabel**, falls X eine abzählbare dichte Teilmenge enthält.

(ii) **1. abzählbar**, falls gilt: Jedes $x \in X$ besitzt abzählbar viele Umgebungen U_i, $i \in \mathbb{N}$, sodass jede Umgebung V von x wenigstens ein U_i enthält.

(iii) **2. abzählbar**, falls gilt: $\mathcal{T}_X$ besitzt eine abzählbare Basis, d.h. es gibt offene Mengen W_i, $i \in N$, sodass für jedes $V \subset X$ offen gilt: $V = \bigcup_{W_i \subset V} W_i$.

(b) 2. abzählbar $\Rightarrow$ 1. abzählbar und separabel.

(c) Ist X kompakt und 1. abzählbar, so besitzt jede Folge in X eine konvergente Teilfolge.

Beweisskizze: $(x_n)_n \subset X$, setze $A_n := \overline{\{x_n, x_{n+1}, \dots\}}$. Dann ist $\bigcap_n A_n$ nichtleer wegen Kompaktheit, also hat $(x_n)_n$ einen Häufungspunkt. Benutze nun 1. abzählbar.

(d) Sei X kompakt und Hausdorff. Dann ist X metrisierbar $\iff$ X ist 2. abzählbar.

Die Hinrichtung ist eine einfache Übungsaufgabe (Blatt 10, Aufgabe 3). Die Rückrichtung benutzt Urysohn und Metrisierungssätze. Den Satz von Urysohn haben wir auch in „Grundlagen der Analysis, Topologie und Geometrie" im letzen Semester bewiesen.

5.12. Satz

Sei X ein separabler normierter Raum. Dann ist $\overline{B}_{X^*}(0,1)$ bezüglich $\mathcal{T}_{X^*}^{\mathrm{w}^*}$ metrisierbar. Insbesondere ist $\overline{B}_{X^*}(0,1)$ bezüglich $\mathcal{T}_{X^*}^{\mathrm{w}^*}$ 2. abzählbar und kompakt, und jede Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beweis
Sei $\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} \subset \overline{B}_X(0,1)$ dicht.[13] Definiere eine Abbildung $d\colon X^* \times X^* \to [0,\infty)$ durch

Konvergenz mit Abschätzung durch Operatornorm und $\|x_n\| \leqslant 1$

$$d(\varphi,\psi) := \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \cdot \big|\varphi(x_n) - \psi(x_n)\big|$$

Wir zeigen, dass d eine Metrik ist: d ist offensichtlich symmetrisch und erfüllt die Dreiecksungleichung. Noch zu zeigen: d ist definit. Wenn $\varphi \neq \psi$, dann existiert $x \in \overline{B}_X(0,1)$ mit $\varphi(x) \neq \psi(x)$. Da φ und ψ stetig sind und $\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ dicht ist, existiert x_n mit $\varphi(x_n) \neq \psi(x_n)$. Dann ist $d(\varphi,\psi) \neq 0$.

[13] Im Allgemeinen sind Unterräume separabler topologischer Räume nicht separabel. Für metrische Räume allerdings schon.

Sei nun $(\varphi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset \overline{B}_{X^*}(0,1)$ ein Netz und $\varphi \in \overline{B}_{X^*}(0,1)$. Es genügt zu zeigen

$$\varphi_\lambda \xrightarrow{\text{w}^*} \varphi \iff d(\varphi_\lambda,\varphi) \longrightarrow 0$$

denn dann stimmen $\mathcal{T}_{X^*}^{\text{w}^*}$ und $\mathcal{T}_{X^*}^{d}$ überein. (siehe Nachtrag)

"$\Rightarrow$": Es gelte $\varphi_\lambda \xrightarrow{\text{w}^*} \varphi$, also $\varphi_\lambda(x_n) \to \varphi(x_n)$ für $n \in \mathbb{N}$ nach 5.9(iii). Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{n\geqslant n_0} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{4}$ und $\overline{\lambda} \in \Lambda$ mit $|\varphi_\lambda(x_n) - \varphi(x_n)| < \frac{\varepsilon}{4}$ falls $n < n_0$, $\lambda \geqslant \overline{\lambda}$. Dann gilt für $\lambda \geqslant \overline{\lambda}$

$$\begin{aligned} d(\varphi_\lambda,\varphi) &\leqslant \sum_{n<n_0} \frac{1}{2^n} \cdot \big|\varphi_\lambda(x_n) - \varphi(x_n)\big| + \sum_{n\geqslant n_0} \frac{1}{2^n} \cdot \underbrace{\big|\varphi_\lambda(x_n) - \varphi(x_n)\big|}_{\leqslant 2} \\ &< 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} + 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon \end{aligned}$$

"$\Leftarrow$": Da $d(\varphi_\lambda,\varphi) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \cdot \big|\varphi_\lambda(x_n) - \varphi(x_n)\big| \to 0$, muss bereits $|\varphi_\lambda(x_n) - \varphi(x_n)| \to 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten, da alle Summanden positiv sind. Wir haben also $\forall n : \varphi_\lambda(x_n) \to \varphi(x_n)$. Sei nun $x \in X$ und $\varepsilon > 0$. Wähle $N \in \mathbb{N}$ sodass $\|x - x_N\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Weiter finden wir $\overline{\lambda} \in \Lambda$, sodass $|\varphi_\lambda(x_n) - \varphi(x_n)| < \frac{\varepsilon}{3}$ für $\lambda \geqslant \overline{\lambda}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |\varphi_\lambda(x) - \varphi(x)| &\leqslant \big|\varphi_\lambda(x) - \varphi_\lambda(x_N)\big| + \underbrace{\big|\varphi_\lambda(x_N) - \varphi(x_N)\big|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} + \big|\varphi(x_N) - \varphi(x)\big| \\ &\leqslant \underbrace{\|\varphi_\lambda\|}_{\leqslant 1} \cdot \underbrace{\|x - x_N\|}_{\leqslant \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{\big|\varphi_\lambda(x_N) - \varphi(x_N)\big|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{\|\varphi\|}_{\leqslant 1} \cdot \underbrace{\|x_N - x\|}_{\leqslant \frac{\varepsilon}{3}} = \varepsilon \end{aligned}$$

Damit haben wir $\varphi_\lambda(x) \to \varphi(x)$ für alle x gezeigt. Mit 5.9(iii) folgt also $\varphi_\lambda \xrightarrow{\text{w}^*} \varphi$. □

Nachtrag
Topologien sind durch Konvergenz von Netzen bestimmt: Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum.

$$\begin{aligned} U \subset X \text{ offen} &\iff \forall x \in U : \exists x \in V \subset U, V \in \mathcal{T} \\ U \subset X \text{ nicht offen} &\iff \exists x \in U : \text{ für jedes } x \in V \underset{\text{offen}}{\subset} X \text{ gilt } V \cap (X \setminus U) \neq \emptyset \\ &\overset{(\#)}{\iff} \exists x \in U, \exists \text{ Netz } (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset X \setminus U \text{ mit } x_\lambda \to x \end{aligned}$$

Auswahlaxiom nötig!

Die Implikation $\overset{(\#)}{\Longleftarrow}$ ist trivial. Für $\overset{(\#)}{\Longrightarrow}$ betrachten wir die Menge $\Lambda := \{V \mid x \in V \subset X \text{ offen}\}$. Diese ist gerichtet bezüglich "$\subset$". Zu jedem $V \in \Lambda$ wählen wir $x_V \in (X \setminus U) \cap V$. Dann gilt $(x_V)_{V\in\Lambda} \subset X \setminus U$ und $x_V \to x$. □

5.13. Definition

Der normierte Raum X heißt **reflexiv**, falls die kanonische Abbildung $\iota_X : X \to X^{**}$ ein Isomorphismus ist. (ι_X ist ein Isomorphismus genau dann, wenn ι_X surjektiv ist.)

5.14. Proposition

Sei X ein reflexiver Banachraum und $Y \subset X$ ein abgeschlossener Teilraum. Dann ist Y reflexiv.

Beweis
Sei $\kappa\colon Y \hookrightarrow X$ die Inklusion. Dann ist $\kappa \in \mathcal{L}(Y,X)$ und nach 3.4 kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, hook, "\iota_Y"] \arrow[d, hook, "\kappa"'] & Y^{**} \arrow[d, "\kappa^{\mathrm{tr}\,\mathrm{tr}}"] \\ X \arrow[r, hook, "\iota_X", "\cong"'] & X^{**} \end{tikzcd}$$

Sei $f \in Y^{**}$, dann existiert $x \in X$ mit $\iota_X(x) = \kappa^{\mathrm{tr}\,\mathrm{tr}}(f)$. Für $\varphi \in X^*$ gilt dann also

$$\varphi(x) = \iota_X(x)(\varphi) = \kappa^{\mathrm{tr}\,\mathrm{tr}}(f)(\varphi).$$

Aber $(\kappa^{\mathrm{tr}})^{\mathrm{tr}}(f) = f \circ \kappa^{\mathrm{tr}}$ und $\kappa^{\mathrm{tr}}(\varphi) = \varphi \circ \kappa = \varphi|_Y$, also gilt $\varphi(x) = f(\varphi|_Y)$ für jedes $\varphi \in X^*$. Falls $x \notin Y$, so existiert nach Hahn-Banach ein $\psi \in X^*$ mit $\psi|_Y = 0$, $\psi(x) \neq 0$. Damit folgt

$$0 \neq \psi(x) = f(\psi|_Y) = 0 \ \lightning$$

Also gilt $x \in Y$. Weiter gilt $\iota_Y(x) = f$, denn $\kappa^{\mathrm{tr}\,\mathrm{tr}}$ ist injektiv. Andernfalls existiert $0 \neq g \in Y^{**}$ mit $\kappa^{\mathrm{tr}\,\mathrm{tr}}(g) = 0$. Da $g \neq 0$, existiert ein $\sigma \in Y^*$ mit $g(\sigma) \neq 0$. Nach Hahn-Banach existiert eine Fortsetzung $\rho \in X^*$ mit $\rho|_Y = \sigma$. Nun gilt

$$0 = \kappa^{\mathrm{tr}\,\mathrm{tr}}(g)(\rho) = g \circ \kappa^{\mathrm{tr}}(\rho) = g(\rho|_Y) = g(\sigma) \neq 0 \ \lightning$$

Also ist $\kappa^{\mathrm{tr}\,\mathrm{tr}}$ ist injektiv. $\square$

5.15. Proposition

Für einen Banachraum X gilt: X reflexiv $\iff$ X^* reflexiv.

Beweis
"$\Rightarrow$": $\iota_X : X \xrightarrow{\cong} X^{**}$ ist ein isometrischer Isomorphismus. Nach Blatt 6, Aufgabe 2 ist $\iota_X^{\mathrm{tr}} : X^{***} \to X^*$ auch ein isometrischer Isomorphismus. Nach 3.4 gilt $\iota_X^{\mathrm{tr}} \circ \iota_{X^*} = \mathrm{id}_{X^*}$, also ist $(\iota_X^{\mathrm{tr}})^{-1} = \iota_{X^*}$ ebenfalls ein isometrischer Isomorphismus.

"$\Leftarrow$": Wenn X^* reflexiv ist, dann ist nach "$\Rightarrow$" auch X^{**} reflexiv. Nun ist aber $\iota_X(X) \subset X^{**}$ abgeschlossen (Satz vom Abgeschlossenen Graphen). Mit 5.14 folgt dann, dass auch $\iota_X(X) \cong X$ reflexiv ist. $\square$

5.16. Satz

Sei X ein Banachraum. Dann gilt (unter der Inklusion $\iota_X : X \hookrightarrow X^{**}$)

$$\overline{B}_X(0,1) \underset{\mathrm{w}^*\text{-dicht}}{\subset} \overline{B}_{X^{**}}(0,1)$$

Beweis
Zu zeigen: Zu $f \in \overline{B}_{X^{**}}(0,1)$ und $\varepsilon > 0$, sowie $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in X^*$, existiert ein $x \in \overline{B}_X(0,1)$ mit $|f(\varphi_i) - \varphi_i(x)| < \varepsilon$ für $i = 1, \dots, n$. Behauptung: Gegeben f und $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ gilt

$$\inf_{x \in \overline{B}_X(0,1)} \sum_{i=1}^{n} \left|f(\varphi_i) - \varphi_i(x)\right|^2 = 0$$

Sei $h(x) := \sum_{i=1}^n |f(\varphi_i) - \varphi_i(x)|^2$ und $\inf_{x \in \overline{B}_X(0,1)} h(x) =: \mu \geqslant 0$. Wähle $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \overline{B}_X(0,1)$ mit $\lim_{k\to\infty} h(x_k) = \mu$. Nach Übergang zu einer Teilfolge dürfen wir annehmen, dass $\left(\varphi_i(x_k)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen

$\gamma_i \in \mathbb{K}$ konvergiert für $i = 1, \ldots, n$. Setze $\delta_i := f(\varphi_i) - \gamma_i$, dann gilt $\mu = \sum_{i=1}^n |\delta_i|^2$. Für $y \in \overline{B}_X(0,1)$ und $t \in [0,1]$ gilt nun

$$\begin{aligned}
\mu \leqslant h\Big(\underbrace{(1-t)\cdot x_k + t \cdot y}_{\in \overline{B}_X(0,1)}\Big) &= \sum_{i=1}^n \Big| f(\varphi_i) - (1-t)\cdot \varphi_i(x_k) - t \cdot \varphi_i(y) \Big|^2 \\
&= \sum_{i=1}^n \Big| \big(f(\varphi_i) - \varphi_i(x_k)\big) - t \cdot \big(\varphi_i(y) - \varphi_i(x_k)\big) \Big|^2 \\
&= \sum_{i=1}^n \big| f(\varphi_i) - \varphi_i(x_k) \big|^2 + t^2 \cdot \sum_{i=1}^n \big| \varphi_i(y) - \varphi_i(x_k) \big|^2 \\
&\quad - 2t \cdot \mathrm{Re}\left(\sum_{i=1}^n \big(\varphi_i(y) - \varphi_i(x_k)\big) \cdot \overline{\big(f(\varphi_i) - \varphi_i(x_k)\big)} \right) \\
&\xrightarrow{k\to\infty} \underbrace{\sum_{i=1}^n \big| f(\varphi_i) - \gamma_i \big|^2}_{=\mu} + t^2 \cdot \sum_{i=1}^n \big| \varphi_i(y) - \gamma_i \big|^2 - 2t \cdot \mathrm{Re} \sum_{i=1}^n \big(\varphi_i(y) - \gamma_i\big) \cdot \overline{\delta_i}
\end{aligned}$$

mit $z \cdot \overline{z} = |z|^2$ und $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$

Nach Abziehen von μ folgt für $t > 0$

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant t \cdot \sum_{i=1}^n \big|\varphi_i(y) - \gamma_i\big|^2 - 2 \cdot \mathrm{Re} \sum_{i=1}^n \big(\varphi_i(y) - \gamma_i\big) \cdot \overline{\delta_i} \\
\overset{t\searrow 0}{\Longrightarrow}\ & 2 \cdot \mathrm{Re} \sum_{i=1}^n \big(\varphi_i(y) - \gamma_i\big) \cdot \overline{\delta_i} \leqslant 0 \text{ für alle } y \in \overline{B}_X(0,1)
\end{aligned}$$

Definiere nun $\varphi \in X^*$ durch $\varphi := \sum_{i=1}^n \overline{\delta_i} \cdot \varphi_i \in X^*$. Dann gilt für $y \in \overline{B}_X(0,1)$

$$\mathrm{Re}\,\varphi(y) \leqslant \mathrm{Re} \sum_{i=1}^n \gamma_i \cdot \overline{\delta_i},$$

also ist $\|\varphi\|_{X^*} \leqslant \mathrm{Re} \sum_{i=1}^n \gamma_i \cdot \overline{\delta_i}$. Dies folgt durch Einsetzen der Definition von $\|\varphi\|$ und Multiplikation mit $|\lambda|$ für ein geeignetes $\lambda \in S^1 \subset \mathbb{C}$. Andererseits gilt aber

$$\varphi(x_k) = \sum_{i=1}^n \overline{\delta_i} \cdot \varphi_i(x_k) \xrightarrow{k\to\infty} \sum_{i=1}^n \overline{\delta_i} \cdot \gamma_i,$$

das heißt $\left|\sum_{i=1}^n \overline{\delta_i} \cdot \gamma_i\right| \leqslant \|\varphi\| \leqslant \mathrm{Re} \sum_{i=1}^n \gamma_i \cdot \overline{\delta_i}$ und somit $\sum_{i=1}^n \overline{\delta_i} \cdot \gamma_i = \|\varphi\|_{X^*}$. Wir erhalten

$$\mu = \sum_{i=1}^n \overline{\delta_i} \cdot \delta_i = \sum_{i=1}^n \overline{\delta_i} \cdot \big(f(\varphi_i) - \gamma_i\big) = f(\varphi) - \|\varphi\|_{X^*} \overset{\|f\|\leqslant 1}{\leqslant} 0 \qquad \square$$

5.17. Corollar

Sei X ein Banachraum, $f \in \overline{B}_{X^{**}}(0,1)$ und $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in X^*$. Falls $\overline{B}_X(0,1)$ w-kompakt ist, so existiert $x \in \overline{B}_X(0,1)$ mit $f(\varphi_i) = \varphi_i(x)$ für $i = 1, \ldots, n$.

Beweis
Definiere $h\colon X \to \mathbb{R}$ durch $h(x) := \sum_{i=1}^n |f(\varphi_i) - \varphi_i(x)|^2$ wie in Satz 5.16. h ist stetig auf X bezüglich $\mathcal{T}_X^{\mathrm{w}}$, nimmt also auf $\overline{B}_X(0,1)$ ihr Minimum an. $\square$

5.18. Satz

Sei X ein Banachraum. Dann sind äquivalent:

(i) X ist reflexiv.

(ii) $\overline{B}_X(0,1)$ ist w-kompakt.

(iii) $\mathcal{T}_{X^*}^{\mathrm{w}} = \mathcal{T}_{X^*}^{\mathrm{w}^*}$.

Beweis

(i)⇒(ii): $\overline{B}_{X^{**}}(0,1)$ ist w^*-kompakt nach 5.10. Nach 5.15 ist X^* reflexiv, daher stimmen auf X^{**} die w^*- und die w-Topologie überein. Damit ist $\overline{B}_{X^{**}}(0,1)$ w-kompakt. Aber unter $X \cong X^{**}$ stimmen die jeweiligen w-Topologien überein; daher ist $\overline{B}_X(0,1) \cong \overline{B}_{X^{**}}(0,1)$ w-kompakt.

(ii)⇒(i): Es gilt $(X, \mathcal{T}_X^{\mathrm{w}}) \subset (X^{**}, \mathcal{T}_{X^{**}}^{\mathrm{w}^*})$ in der Relativtopologie (warum?). $\overline{B}_X(0,1)$ ist kompakt, also ist $\overline{B}_X(0,1) \subset \overline{B}_{X^{**}}(0,1)$ w^*-abgeschlossen. Nach 5.16 ist $\overline{B}_X(0,1)$ sogar w^*-dicht. Also folgt $\overline{B}_X(0,1) = \overline{B}_{X^{**}}(0,1)$ und somit $X = X^{**}$.

(iii)⇒(i): $\overline{B}_{X^*}(0,1)$ ist w^*-kompakt nach Banach-Alaoglu (5.10). Mit (iii) folgt, dass $\overline{B}_{X^*}(0,1)$ w-kompakt ist. Da (ii)⇒(i) folgt, dass X^* reflexiv ist und somit ist nach 5.15 auch X reflexiv.

(i)⇒(iii): klar. □

5.19. Bemerkung

a) Sei X ein normierter Raum. Falls X^* separabel ist, so ist X separabel. *bzgl. der Normtopologie*

b) Für einen Banachraum X gilt: X reflexiv $\iff$ $\overline{B}_X(0,1)$ ist folgenkompakt bezüglich $\mathcal{T}_X^{\mathrm{w}}$.

Beweis

a) Übung (Blatt 10, Aufgabe 2)

b) **"⇒":** leicht.
"⇐": nicht so leicht. □

6. Gleichmäßig konvexe Räume, noch einmal L^p

6.1. Definition und Proposition

Ein normierter Raum X heißt **gleichmäßig konvex**, falls eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

(i) Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$, sodass für $x, y \in X$ mit $\|x\|, \|y\| \leqslant 1$ gilt:
$$\|x - y\| \geqslant \varepsilon \implies \left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\| \leqslant 1 - \delta$$

(ii) Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$, sodass für $x, y \in X$ mit $\|x\|, \|y\| = 1$ gilt:
$$\|x - y\| \geqslant \varepsilon \implies \left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\| \leqslant 1 - \delta$$

(iii) Für $(x_n)_{\mathbb{N}}, (y_n)_{\mathbb{N}} \subset X$ mit $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:
$$\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{1}{2}(x_n+y_n)\right\| = 1 \implies \lim_{n\to\infty}\|x_n - y_n\| = 0$$

(iv) Für $(x_n)_{\mathbb{N}}, (y_n)_{\mathbb{N}} \subset X$ mit $\limsup_n\|x_n\|, \limsup_n\|y_n\| \leqslant 1$ gilt:
$$\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{1}{2}(x_n+y_n)\right\| = 1 \implies \lim_{n\to\infty}\|x_n - y_n\| = 0$$

Beweis

(i)⇒(ii)⇒(iii): trivial; für (ii)⇒(iii) einfach Implikation umkehren und Aussagen negieren.

(iii)⇒(iv): Aus $\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{1}{2}(x_n+y_n)\right\| = 1$ folgt $\lim_{n\to\infty}\|x_n+y_n\| = 2$. Wir haben
$$2 = \lim_{n\to\infty}\|x_n+y_n\| = \liminf_{n\to\infty}\|x_n+y_n\| \leqslant \liminf_{n\to\infty}\big(\|x_n\| + \|y_n\|\big)$$
Also stimmen Limes superior und Limes inferior jeweils überein und es folgt $\lim_{n\to\infty}\|x_n\| = 1$ und $\lim_{n\to\infty}\|y_n\| = 1$, woraus mit (iii) dann wiederum die gewünschte Implikation folgt.

(iv)⇒(i): Angenommen (i) gilt nicht, d.h. $\exists \varepsilon > 0$ und für jedes $\delta_n = \frac{1}{n+1}$ existieren $x_n, y_n \in X$ mit $\|x_n\|, \|y_n\| \leqslant 1$, $\|x_n - y_n\| \geqslant \varepsilon$ und $\left\|\frac{1}{2}(x_n+y_n)\right\| > 1 - \frac{1}{n+1}$. $\lightning$ zu (iv). □

6.2. Beispiel

$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ ist gleichmäßig konvex für $1 < p < \infty$ aber nicht für $p = 1, p = \infty$

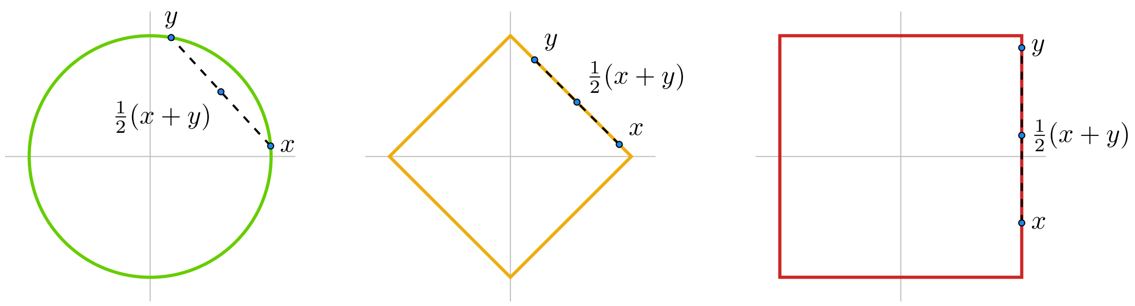
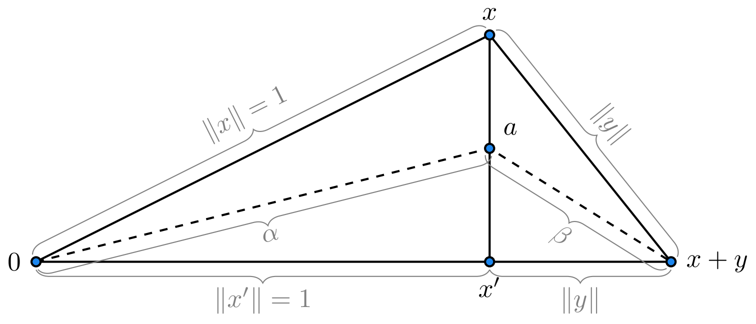


Abbildung 1: Einheitskugeln der p-Norm auf $\mathbb{R}^2$ für $p = 2$, $p = 1$ und $p = \infty$. Nur für $p \notin \{1, \infty\}$ ist (ii) aus 6.1 erfüllt. Anschaulich gesprochen bedeutet dies, dass nur in gleichmäßig konvexen Räumen Bälle auch tatsächlich „rund" oder zumindest „rundlich" sind.



H

Abbildung 2: Zeichnung zum Beweis von 6.3. Die Tatsache, dass $\|x\|$ und $\|x'\|$ in dieser Zeichnung nicht gleich sind, weißt schon darauf hin, dass diese Zeichnung in Wahrheit „degeneriert“.

6.3. Definition und Proposition

Ein gleichmäßig konvexer normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum ist **strikt konvex**, d.h. für alle $0 \neq x, y \in X$ mit $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ existiert $\lambda > 0$ mit $x = \lambda \cdot y$.

Beweis
Seien x, y wie angegeben. Ohne Einschränkungen sei $\|x\| = 1$. Wir setzen nun $x' := \frac{x+y}{\|x+y\|}$, $a := \frac{x+x'}{2}$, $\alpha := \|a\|$ und $\beta := \|x + y - a\|$. Es gilt dann

$$\|x + y - x'\| = \left(1 - \frac{1}{\|x + y\|}\right) \cdot \|x + y\| = \|x + y\| - 1 = 1 + \|y\| - 1 = \|y\|$$

Also ist $\beta = \|x + y - a\| \leqslant \left\|\frac{x+y-x}{2}\right\| + \left\|\frac{x+y-x'}{2}\right\| = \frac{\|y\|}{2} + \frac{\|y\|}{2} = \|y\|$. Weiter gilt $\alpha = \|a\| \leqslant \frac{\|x\|}{2} + \frac{\|x'\|}{2} = 1$ und

$$1 + \|y\| = \|x + y\| \leqslant \|a\| + \|x + y - a\| \leqslant \alpha + \beta \leqslant 1 + \|y\|$$

also $1 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Wegen $\|x\| = 1$, $\|x'\| = 1$ und $\left\|\frac{1}{2}(x + x')\right\| = \|a\| = \alpha = 1 > 1 - \delta$ für jedes $\delta > 0$ erhalten wir aus gleichmäßiger Konvexität $\|x - x'\| \leqslant \varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$, also$x = x'$. Es folgt nun

$$x = \frac{x + y}{\|x + y\|} \iff \|x\| \cdot x + \|y\| \cdot x = x + y \iff \|y\| \cdot x = y \qquad \square$$

6.4. Proposition

Sei X ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum, $a \in X$, $W \subset X$ konvex und abgeschlossen.

(i) Ist W strikt konvex, so existiert höchstens ein $x \in W$ mit $\|a - x\| = \inf_{y \in W} \|a - y\|$.

(ii) Ist X vollständig und gleichmäßig konvex, so existiert genau ein $x \in W$ mit $\|a - x\| = \inf_{y \in W} \|a - y\|$

Beweis
Wir dürfen ohne Einschränkungen $a = 0$ annehmen. Für $a \in W$ ist nichts zu beweisen. Für $a \notin W$ gilt $\inf_{y \in W} \|a - y\| > 0$, denn W ist abgeschlossen. Ohne Einschränkungen dürfen wir außerdem $\inf_{y \in W} \|a - y\| = 1$ annehmen.

(i) Sei $x, x' \in W$ mit $\|a - x\| = \|a - x'\| = \inf_{y \in W} \|a - y\|$, also $\|x\| = \|x'\| = 1$. Dann gilt

$$1 = \inf_{y \in W} \|a - y\| \leqslant \Bigg\|\underbrace{\frac{1}{2}(x + x')}_{\in W}\Bigg\| \leqslant \frac{1}{2}\|x\| + \frac{1}{2}\|x'\| = 1$$

Es folgt aus strikter Konvexität, dass $x = \lambda \cdot x'$ für ein $\lambda \geqslant 0$. Wegen $\|x\| = \|x'\| = 1$ folgt $\lambda = 1$ und $x = x'$.

(ii) Wähle eine Folge $(x_n)_{\mathbb{N}} \subset W$ mit

Œ wieder $a = 0$ und $\inf_{y \in W} \|a-y\| = 1$

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \lim_{n\to\infty} \|a - x_n\| = \inf_{y\in W} \|a-y\| = 1$$

Behauptung: Diese Folge ist Cauchy. W ist konvex, also folgt $\frac{1}{2}(x_n + x_m) \in W$. Es gilt dann

$$1 \leqslant \left\| \frac{1}{2}(x_n + x_m) \right\| \leqslant \frac{1}{2}\big(\|x_n\| + \|x_m\|\big) \quad \text{für } n, m \in \mathbb{N} \qquad [\#]$$

Angenommen $(x_n)_{\mathbb{N}}$ sei nicht Cauchy. Dann existiert $\varepsilon > 0$, so dass gilt: Für jedes $N \in \mathbb{N}$ existieren $n, m > N$ mit $\|x_n + x_m\| > \varepsilon$. Wir können daher Teilfolgen $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, $(x_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ bilden mit $\liminf_k \|x_{n_k} - x_{m_k}\| \geqslant \varepsilon$. Es gilt aber $\lim_{k\to\infty} \|x_{n_k}\| = \lim_{k\to\infty} \|x_{m_k}\| = 1$ und wegen [#] gilt $\lim_{k\to\infty} \left\| \frac{1}{2}(x_{n_k} + x_{m_k}) \right\| = 1$ ↯ zu 6.1 (iv). Die Folge ist also Cauchy und konvergiert damit gegen ein $x \in W$, da W vollständig ist. Nach (i) ist x eindeutig. □

6.5. Bemerkung

Der Beweis von (ii) zeigt auch: Sei X gleichmäßig konvex und $(x_n)_{\mathbb{N}} \subset X$ eine Folge mit $\limsup_n \|x_n\| \leqslant 1$ und $\lim_{n,m\to\infty} \left\| \frac{1}{2}(x_n + x_m) \right\| = 1$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 1$ und $(x_n)_{\mathbb{N}}$ ist Cauchy.

6.6. Proposition: Jensensche Ungleichung

Für $\alpha, \beta \geqslant 0$, $p \geqslant r > 0$ gilt

$$(\alpha^p + \beta^p)^{\frac{1}{p}} \leqslant (\alpha^r + \beta^r)^{\frac{1}{r}}.$$

Beweis
Setze $A := (\alpha^r + \beta^r)^{\frac{1}{r}}$, wobei wir o.B.d.A. annehmen können, dass $A \neq 0$ ist. Dann gilt

$$1 = \frac{1}{A^r} \cdot (\alpha^r + \beta^r) = \Big(\underbrace{\frac{\alpha}{A}}_{\leqslant 1}\Big)^r + \Big(\underbrace{\frac{\beta}{A}}_{\leqslant 1}\Big)^r \geqslant \Big(\frac{\alpha}{A}\Big)^p + \Big(\frac{\beta}{A}\Big)^p$$

Es folgt $\left(\frac{1}{A^p} \cdot (\alpha^p + \beta^p)\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant 1 = \left(\frac{1}{A^r}(\alpha^r + \beta^r)\right)^{\frac{1}{r}}$. Kürzen von $\frac{1}{A}$ liefert die Behauptung. □

6.7. Proposition

Sei (X, Σ, μ) ein Maßraum, $1 < p, q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $f, g \in L^p(\mu)$.

(i) Falls $p \geqslant 2$, so gilt $\|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p \leqslant 2^{p-1}\Big(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\Big)$.

(ii) Falls $p < 2$, so gilt $\|f+g\|_p^q + \|f-g\|_p^q \leqslant 2 \cdot \Big(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\Big)^{q-1}$.

Beweis

(i) Nach der Jensenschen Ungleichung (6.6) gilt für $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$

$$\Big(|\gamma+\delta|^p + |\gamma-\delta|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leqslant \Big(|\gamma+\delta|^2 + |\gamma-\delta|^2\Big)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \cdot \big(\gamma^2 + \delta^2\big)^{\frac{1}{2}} \qquad [\star]$$

Wir betrachten nun zunächst den Fall $p > 2$. Setze $r := \frac{p}{p-2}$. Dann gilt $\frac{1}{\frac{p}{2}} + \frac{1}{r} = 1$. Die Höldersche Ungleichung (4.5) für $\mathbb{R}^2$ liefert für (γ^2, δ^2) und $(1, 1)$

$$\gamma^2 \cdot 1 + \delta^2 \cdot 1 \leqslant \Big((\gamma^2)^{\frac{p}{2}} + (\delta^2)^{\frac{p}{2}}\Big)^{\frac{2}{p}} \cdot (1^r + 1^r)^{\frac{1}{r}} = \big(|\gamma|^p + |\delta|^p\big)^{\frac{2}{p}} \cdot 2^{\frac{p-2}{p}}$$

Es folgt

$$\sqrt{2}\cdot\left(\gamma^2+\delta^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant 2^{\frac{1}{2}}\cdot\left(|\gamma|^p+|\delta|^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot 2^{\frac{p-2}{2p}} = 2^{\frac{p-1}{p}}\cdot\left(|\gamma|^p+|\delta|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Mit [*] folgt insgesamt $|\gamma+\delta|^p+|\gamma-\delta|^p \leqslant 2^{p-1}\cdot\left(|\gamma|^p+|\delta|^p\right)$. Integration liefert nun (i). Für $p=2$ gilt Gleichheit in [*] und auch hier liefert Integration das gewünschte Ergebnis.

(ii) *Übung!* □

6.8. Satz

Sei (X,Σ,μ) ein Maßraum und $1<p<\infty$. Dann ist $L^p(\mu)$ gleichmäßig konvex.

Beweis
Seien $(f_n)_{\mathbb{N}},(g_n)_{\mathbb{N}}\subset L^P(\mu)$ Folgen mit $\|f_n\|_p=\|g_n\|_p=1$ für $n\in\mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{1}{2}(f_n+g_n)\right\|_p=1.$ Wir zeigen, dass 6.1(iii) gilt, also $\|f_n-g_n\|_p\xrightarrow{n\to\infty}0$. Nach 6.7 gilt

$$\underbrace{\|f_n+g_n\|_p^p}_{\xrightarrow{n\to\infty}2^p}+\|f_n-g_n\|_p^p\leqslant 2^p$$

falls $p\geqslant 2$. Für $p<2$ erhalten wir mit $q>0$, sodass $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

$$\underbrace{\|f_n+g_n\|_p^q}_{\xrightarrow{n\to\infty}2^q}+\|f_n-g_n\|_p^q\leqslant 2^q$$

Also folgt $\|f_n-g_n\|_p^p\xrightarrow{n\to\infty}0$ bzw. $\|f_n-g_n\|_p^q\xrightarrow{n\to\infty}0$. Also gilt $\|f_n-g_n\|_p\xrightarrow{n\to\infty}0$. □

6.9. Satz

Sei X ein gleichmäßig konvexer Banachraum. Dann ist X reflexiv.

Beweis
Sei $f\in X^{**}$ mit $\|f\|_{X^{**}}=1$. Zu zeigen: $f\in\iota(X)$. Wir wählen $\varphi_n\in X^*$ mit $\|\varphi_n\|_{X^*}=1$ und $f(\varphi_n)>1-\frac{1}{n+1}$ für $n\in\mathbb{N}$. Nach dem Beweis von 5.16 gilt für $n\in\mathbb{N}$

$$\inf_{x\in\overline{B}_X(0,1)}\sum_{i=0}^{n}\left|f(\varphi_i)-\varphi_i(x)\right|^2=0$$

Also gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset X$, sodass $\|x_n\|_X=1$ und für $0\leqslant m\leqslant n$

Frag mich nicht, wie man auf die zweite Abschätzung kommt …

$$|f(\varphi_m)-\varphi_m(x_n)|<\frac{1}{2(n+1)}\quad\text{also auch}\quad 1-\frac{3}{2(m+1)}\leqslant\varphi_m(x_n)\leqslant 1$$

Behauptung: $(x_n)_{\mathbb{N}}$ ist Cauchy. Es gilt für $n\geqslant m$

$$\underbrace{1-\frac{3}{2(m+1)}+1-\frac{3}{2(m+1)}}_{\xrightarrow{n,m\to\infty}2}\leqslant\varphi_m(x_m)+\varphi_m(x_n)=\varphi_m(x_m+x_n)\leqslant\|\varphi_m\|\cdot\|x_m+x_n\|_X$$

$$\leqslant\|x_m\|_X+\|x_n\|_X=2$$

Also gilt $\left\|\frac{1}{2}(x_m + x_n)\right\|_X \xrightarrow{n,m\to\infty} 1$. Mit Bemerkung 6.5 folgt nun, dass $(x_n)_{\mathbb{N}}$ Cauchy ist. Sei $\overline{x} := \lim_{n\to\infty} x_n$. Es gilt $\|\overline{x}\|_X = 1$. Behauptung: $\iota_X(\overline{x}) = f$. Für $n \geqslant m$ gilt

$$\Big| f(\varphi_m) - \underbrace{\varphi_m(x_n)}_{\xrightarrow{n\to\infty} \varphi_m(\overline{x})} \Big| < \frac{1}{2(n+1)}$$

φ_m ist stetig, also ist $f(\varphi_m) = \varphi_m(\overline{x}) = \iota(\overline{x})(\varphi_m)$ für jedes $m \in \mathbb{N}$. Sei $\tilde{x} \in X$ ein weiterer Punkt mit $\|\tilde{x}\| = 1$ und $f(\varphi_m) = \varphi_m(\tilde{x})$, $m \in \mathbb{N}$. Das obige Argument für die Folge $(\overline{x}, \tilde{x}, \overline{x}, \tilde{x}, \dots)$ liefert: $(\overline{x}, \tilde{x}, \overline{x}, \tilde{x}, \dots)$ ist Cauchy und somit $\overline{x} = \tilde{x}$.

Noch zu zeigen: $f(\varphi) = \varphi(\overline{x})$ für alle $\varphi \in X^*$. Das obige Argument für $(\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \dots)$ an Stelle von $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots)$ liefert eine Folge $(y_n)_{\mathbb{N}} \subset X$ mit $\|y_n\| = 1$, $(y_n)_{\mathbb{N}}$ ist Cauchy; Dann erfüllt $\overline{y} := \lim_{n\to\infty} y_n$ die Gleichung $f(\varphi_m) = \varphi_m(\overline{y})$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Also gilt auch $f(\varphi) = \varphi(\overline{y})$. Die Eindeutigkeit von $\overline{x}$ liefert $\overline{y} = \overline{x}$. Damit folgt $\iota(\overline{x})(\varphi) = \varphi(\overline{x}) = \varphi(\overline{y}) = f(\varphi)$ für jedes $\varphi \in X^*$, also ist $\iota(\overline{x}) = f$. □

6.10. Corollar

Für einen Maßraum (X, Σ, μ) und $1 < p < \infty$ ist $L^p(\mu)$ reflexiv.

Beweis
Kombiniere die Aussagen aus 6.8 und 6.9. □

6.11. Satz

Sei (X, Σ, μ) ein Maßraum und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann ist die Abbildung $\iota_p \colon L^p(\mu) \to L^q(\mu)^*$ gegeben durch

$$\iota_p(f)(g) := \int fg \,\mathrm{d}\mu$$

ein isometrischer Isomorphismus.

Beweis
ι_p ist eine lineare Isometrie nach Proposition 4.10, wir müssen also nur Surjektivität zeigen. $\iota_p(L^p(\mu))$ ist vollständig, also abgeschlossen in $L^q(\mu)^*$. Falls $\iota_p(L^p(\mu)) \subsetneq L^q(\mu)$, so existiert nach Hahn-Banach ein $0 \neq \psi \in L^q(\mu)^{**}$ mit $\psi\big(\iota_p(L^p(\mu))\big) = 0$. $L^q(\mu)$ ist reflexiv nach 6.10, also existiert $g \in L^q(\mu)$ mit $\iota(g) = \psi$, d.h. $\varphi(g) = \iota(g)(\varphi) = \psi(\varphi)$ für alle $\varphi \in L^q(\mu)^*$. Für jedes $f \in L^p(\mu)$ gilt dann

$$0 = \psi(\iota_p(f)) = \iota_p(f)(g) = \int fg \,\mathrm{d}\mu \implies g = 0 \;\lightning$$

Also kann ein solches ψ nicht existieren und es folgt die Surjektivität von ι_p. □

6.12. Bemerkung

- Weiter kann man zeigen, dass die kanonische Abbildung

  $$\iota_\infty \colon L^\infty(\mu) \to L^1(\mu)^* \quad , \quad \iota_\infty(f)(g) = \int fg \,\mathrm{d}\mu$$

  ein isometrischer Isomorphismus ist. *(ohne Beweis)*
- Die Isometrie $\iota_1 \colon L^1(\mu) \to L^\infty(\mu)^*$ ist jedoch *nicht* surjektiv! *(Übung, Blatt 10, Aufgabe 1)*

7. Hilberträume und selbstadjungierte Operatoren

7.1. Definition

Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine **hermitesche Form** auf X ist eine Abbildung $\langle \cdot\,,\,\cdot \rangle\colon X \times X \to \mathbb{K}$ mit RevChap7

$$\begin{aligned} \langle x\,,\, y+y' \rangle &= \langle x\,,\, y \rangle + \langle x\,,\, y' \rangle \\ \langle x\,,\, \alpha \cdot y \rangle &= \alpha \cdot \langle x\,,\, y \rangle \\ \langle x\,,\, y \rangle &= \overline{\langle y\,,\, x \rangle} \qquad \text{für } x, y, y' \in X, \alpha \in \mathbb{K} \end{aligned}$$

$\langle \cdot\,,\,\cdot \rangle$ heißt **positiv semidefinit**, falls $\langle x\,,\, x \rangle \geqslant 0$ für $x \in X$ und **positiv definit**, falls $\langle x\,,\, x \rangle > 0$ für $0 \neq x \in X$. In diesem Fall heißt $\langle \cdot\,,\,\cdot \rangle$ auch **Skalarprodukt**.

7.2. Bemerkung

Für eine hermitesche Form $\langle \cdot\,,\,\cdot \rangle$ und $x, x', y \in X$, $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt

$$\langle x+x'\,,\, y \rangle = \langle x\,,\, y \rangle + \langle x'\,,\, y \rangle \quad , \qquad \langle \alpha \cdot x\,,\, y \rangle = \overline{\alpha} \cdot \langle x\,,\, y \rangle \qquad \text{und} \qquad \langle x\,,\, x \rangle \in \mathbb{R}$$

7.3. Beispiele

(i) Auf $\mathbb{C}^n$ definiert $\langle \underline{x}\,,\, \underline{y} \rangle := \sum_{i=1}^n \overline{x}_i \cdot y_i$ ein Skalarprodukt.

(ii) Auf $L^2(\mathbb{R})$ definiert $\langle f\,,\, g \rangle := \int fg \,\mathrm{d}\lambda$ ein Skalarprodukt. Auf

$$L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) := \left\{ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C} \,\middle|\, \operatorname{Re} f \text{ und } \operatorname{Im} f \text{ messbar}, \int \bar{f} f \mathrm{d}\mu < \infty \right\} / \mathcal{N}$$

definiert $\langle f\,,\, g \rangle := \int \bar{f} g \,\mathrm{d}\lambda$ ein Skalarprodukt.

(iii) Auf $\ell^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$ definieren wir ein Skalarprodukt durch $\langle (a_n)\,,\, (b_n) \rangle := \sum_{n\in\mathbb{N}} \overline{a}_n b_n$.

7.4. Proposition (Cauchy-Schwarz-Ungleichung)

Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit einer positiv semidefiniten hermiteschen Form. Dann gilt für $x, y \in X$

$$\left| \langle x\,,\, y \rangle \right|^2 \leqslant \langle x\,,\, x \rangle \cdot \langle y\,,\, y \rangle$$

Beweis
Für $\lambda \in \mathbb{K}$, $x, y \in X$ gilt:

$$0 \leqslant \langle x+\lambda y\,,\, x+\lambda y \rangle = \langle x\,,\, x \rangle + \lambda \cdot \langle x\,,\, y \rangle + \overline{\lambda} \cdot \langle y\,,\, x \rangle + \lambda\overline{\lambda} \langle y\,,\, y \rangle$$

Falls $\langle y\,,\, y \rangle \neq 0$, so setze $\lambda := -\frac{\langle y\,,\, x \rangle}{\langle y\,,\, y \rangle}$. Es folgt

$$0 \leqslant \langle x\,,\, x \rangle - \frac{\langle y\,,\, x \rangle \cdot \langle x\,,\, y \rangle}{\langle y\,,\, y \rangle} + \overline{\lambda} \left(\langle y\,,\, x \rangle - \frac{\langle y\,,\, x \rangle}{\langle y\,,\, y \rangle} \langle y\,,\, y \rangle \right) = \langle x\,,\, x \rangle - \frac{|\langle x\,,\, y \rangle|^2}{\langle y\,,\, y \rangle}$$

Falls $\langle x\,,\, x \rangle \neq 0$, so vertausche die Rollen von x und y. Falls $\langle x\,,\, x \rangle = \langle y\,,\, y \rangle = 0$ gilt, so setzen wir $\lambda := -\langle y\,,\, x \rangle$. □

7.5. Proposition

Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt. Dann definiert $x \mapsto \|x\| := \langle x\,,\, x \rangle^{\frac{1}{2}}$ eine Norm auf X.

Beweis
$\|\cdot\|$ ist positiv definit, also ist auch $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle$ positiv definit. Weiter gilt

$$\|\lambda\cdot x\| = \langle\lambda\cdot x\,,\,\lambda\cdot x\rangle^{\frac{1}{2}} = \left(\overline{\lambda}\lambda\cdot\langle x\,,\,x\rangle\right)^{\frac{1}{2}} = |\lambda|\cdot\|x\|$$

Die Dreieckungleichung gilt, da

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \langle x+y\,,\,x+y\rangle = \langle x\,,\,x\rangle + \langle x\,,\,y\rangle + \langle y\,,\,x\rangle + \langle y\,,\,y\rangle \leqslant \langle x\,,\,x\rangle + (\langle x\,,\,x\rangle\langle y\,,\,y\rangle)^{\frac{1}{2}} + \langle y\,,\,y\rangle\\ &= \|x\|^2 + 2\cdot\|x\|\cdot\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\|+\|y\|)^2\end{aligned}$$

$\Rightarrow \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$. □

7.6. Bemerkung

(i) Die Cauchy-Schwarz Ungleichung schreibt sich auch als $|\langle x\,,\,y\rangle| \leqslant \|x\|\cdot\|y\|$.

(ii) Die Abbildung $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle\colon X\times X\to\mathbb{K}$ ist stetig:

$$|\langle x\,,\,y\rangle - \langle x'\,,\,y'\rangle| = \ldots \leqslant \|x-x'\|\cdot\|y\| + \|x'\|\cdot\|y'-y\|.$$

7.7. Proposition

eventuell Bild von Parallelogramm hinzufügen

Für einen normierten Raum X sind äquivalent:

(i) Es gilt das **Parallelogrammgesetz**: $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$ für alle $x,y\in X$.

(ii) $\langle x\,,\,y\rangle := \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|-x+y\|^2 + i\cdot\|i\cdot x+y\|^2 - i\cdot\|-i\cdot x+y\|^2\right)$ für $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ bzw. $\langle x\,,\,y\rangle := \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$ für $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ definiert ein Skalarprodukt auf X. In diesem Fall gilt $\langle x\,,\,x\rangle = \|x\|^2$ für alle $x\in X$; insbesondere ist $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle$ stetig auf $X\times X$.

Beweis
(ii)⇒(i): Es gilt $\|x\|^2 = \langle x\,,\,x\rangle$ für $x\in X$. und (i) folgt durch einfache Rechnung.

(i)⇒(ii): $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle\colon X\times X\to X$ ist stetig (klar). Linearität (für $\mathbb{K}=\mathbb{C}$):

$$\langle x\,,\,y+y'\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y+y'\|^2 - \|-x+y+y'\|^2 + i\|ix+y+y'\|^2 - i\|-ix+y+y'\|^2\right) \quad [*]$$

$$\begin{aligned}\langle x\,,\,y\rangle + \langle x\,,\,y'\rangle = \frac{1}{4}\Big(&\|x+y\|^2 - \|-x+y\|^2 + i\|ix+y\|^2 - i\|-ix+y\|^2 +\\ &\|x+y'\|^2 + \|-x+y'\| + i\|ix+y'\| - i\|-ix+y'\|\Big)\end{aligned} \quad [**]$$

Vergleich der Imaginärteile: Es gilt

$$\|x+y+y'\|^2 = -\|x+y-y'\|^2 + 2\|x+y\|^2 + 2\|y'\|$$

und

$$\begin{aligned}\|x+y+y'\|^2 &= -\|x-y+y'\|^2 + 2\|x+y'\| + 2\|y\|^2\\ &= -\frac{1}{2}\left(\|x+y-y'\|^2 + \|x-y+y'\|^2\right) + \|x+y\|^2 + \|x+y'\|^2 + \|y'\|^2 + \|y\|^2\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Realteile von [*] und [**] stimmen überein. ... $\Rightarrow \langle x\,,\,y\rangle + \langle x\,,\,y'\rangle = \langle x\,,\,y+y'\rangle$. $\Rightarrow \langle x\,,\,\alpha\cdot y\rangle = \alpha\cdot\langle x\,,\,y\rangle$ für $\alpha\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ ($\langle x\,,\,0\rangle = 0$ ist trivial). Damit folgt auch $\langle x\,,\,\alpha\cdot y\rangle = \alpha\cdot\langle x\,,\,y\rangle$ für $\alpha\in\mathbb{Z}$. Es gilt nun für $\alpha = \frac{m}{n}\in\mathbb{Q}$

$$\langle x\,,\,\alpha\cdot y\rangle = \frac{n}{n}\cdot\left\langle x\,,\,\frac{m}{n}\cdot y\right\rangle = \frac{m}{n}\cdot\left\langle x\,,\,\frac{n}{n}\cdot y\right\rangle = \alpha\cdot\langle x\,,\,y\rangle$$

Mit der Stetigkeit von $\langle \cdot \,,\, \cdot \rangle$ folgt nun $\langle x \,,\, \alpha \cdot y \rangle = \alpha \cdot \langle x \,,\, y \rangle$ für $\alpha \in \mathbb{R}$. $\langle x \,,\, i \cdot y \rangle = i \cdot \langle x \,,\, y \rangle$ ist trivial und damit ist $\langle x \,,\, \alpha \cdot y \rangle = \alpha \cdot \langle x \,,\, y \rangle$ für $\alpha \in \mathbb{C}$. Also ist $\langle \cdot \,,\, \cdot \rangle$ linear in der zweiten Variablen. $\langle x \,,\, y \rangle = \overline{\langle y \,,\, x \rangle}$ ist trivial. □

7.8. Bemerkung

Ist X ein $\mathbb{C}$-Vektorraum und $q\colon X \times X \to \mathbb{C}$ eine **Sesquilinearform** (d.h. q ist linear in der zweiten Variable und konjugiert linear in der ersten), dann ist q durch die Abbildung $n_q\colon X \to \mathbb{C}$, $n_q(x) := q(x,x)$ eindeutig bestimmt durch die **Polarisierungsidentität**

$$q(x,y) = \frac{1}{4}\Big(n_q(x+y) - n_q(-x+y) + i \cdot n_q(ix+y) - i \cdot n_q(-ix+y)\Big).$$

7.9. Definition

Ein $\mathbb{K}$-Vektorraum $\mathcal{H}$ heißt **Prä-Hilbertraum**, falls $\mathcal{H}$ ein Skalarprodukt besitzt. $\mathcal{H}$ heißt **Hilbertraum**, falls $\mathcal{H}$ vollständig ist bzgl. der durch $\langle \cdot \,,\, \cdot \rangle$ induzierten Norm.

7.10. Proposition

Sei $\mathcal{H}$ ein Prä-Hilbertraum und $\overline{\mathcal{H}}^{\|\cdot\|}$ die Vervollständigung bezüglich $\|x\| = \langle x \,,\, x \rangle^{\frac{1}{2}}$. Dann ist $\overline{\mathcal{H}}^{\|\cdot\|}$ in kanonischer Weise ein Hilbertraum.

Beweis
$(\mathcal{H}, \|\cdot\|) \hookrightarrow \left(\overline{\mathcal{H}}^{\|\cdot\|}, \|\cdot\|_{\overline{\mathcal{H}}^{\|\cdot\|}}\right)$ ist isometrisch mit dichtem Bild. $\|\cdot\|$ erfüllt das Parallelogrammgesetz und daher auch $\|\cdot\|_{\overline{\mathcal{H}}^{\|\cdot\|}}$. Mit 7.7 folgt, dass $\overline{\mathcal{H}}^{\|\cdot\|}$ ein Skalarprodukt besitzt, welches die Norm $\|\cdot\|_{\overline{\mathcal{H}}^{\|\cdot\|}}$ induziert und auf $\mathcal{H}$ mit $\langle \cdot \,,\, \cdot \rangle$ übereinstimmt. Das Skalarprodukt auf $\overline{\mathcal{H}}^{\|\cdot\|}$ ist wegen Stetigkeit hierdurch eindeutig bestimmt. □

7.11. Proposition

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $\kappa\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}^*$ definiert durch $\kappa(x)(y) := \langle x \,,\, y \rangle$, $x, y \in \mathcal{H}$. Dann gilt

(i) κ ist **konjugiert linear**, d.h. $\kappa(\alpha x + \alpha' x') = \overline{\alpha}\kappa(x) + \overline{\alpha'}\kappa(x')$ mit $x, x' \in \mathcal{H}$, $\alpha, \alpha' \in \mathbb{K}$.

(ii) κ ist isometrisch (insbesondere injektiv).

(iii) κ ist surjektiv.

Beweis
Es gilt $\kappa(x) \in \mathcal{H}^*$, da $\kappa(x)\colon \mathcal{H} \to \mathbb{K}$ offensichtlich linear ist. Weiter ist $\kappa(x)$ stetig, da

$$|\kappa(x)(y)| = |\langle x \,,\, y \rangle| \leqslant \|x\| \cdot \|y\| \implies \|\kappa(x)\|_{\mathcal{H}^*} \leqslant \|x\|$$

(i) klar.

(ii) Es gilt $\kappa(x)\left(\frac{1}{\|x\|}x\right) = \frac{1}{\|x\|}\langle x \,,\, x \rangle = \|x\|$. Daraus folgt $\|\kappa(x)\|_{\mathcal{H}^*} \geqslant \|x\|$, also auch $\|\kappa(x)\|_{\mathcal{H}^*} = \|x\|$.

(iii) Sei $\varphi \in \mathcal{H}^*$. Ohne Einschränkungen gelte $\|\varphi\|_{\mathcal{H}^*} = 1$.
Behauptung: Es gibt $\overline{x} \in \mathcal{H}$ mit $\|\overline{x}\| = 1$ und $\varphi(\overline{x}) = 1$. Wähle $(x_n)_\mathbb{N} \subset \mathcal{H}$ mit $\|x_n\| = 1$ und $0 \leqslant \varphi(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} 1$. Zu $1 > \varepsilon > 0$ existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $\varphi(x_n) > 1 - \frac{\varepsilon}{8}$ für $n \geqslant N$, also $\varphi(x_n + x_m) > 2 - \frac{\varepsilon}{4}$. Aus dem Parallelogrammgesetz folgt für $n, m \geqslant N$

$$\|x_n - x_m\|^2 = 2 \cdot \|x_n\|^2 + 2 \cdot \|x_m\|^2 - \|x_n + x_m\|^2 \leqslant 4 - \left(2 - \frac{\varepsilon}{4}\right)^2 \leqslant \varepsilon$$

Es folgt, dass $(x_n)_\mathbb{N}$ eine Cauchyfolge ist. $\overline{x} := \lim_{n\to\infty} x_n$ erfüllt die Behauptung.
Behauptung: $\varphi = \kappa(\overline{x})$, d.h. $\varphi(y) = \kappa(\overline{x})(y)$ für $y \in \mathcal{H}$. Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Für $\lambda > 0$ gilt wegen der Dreiecksungleichung und $\|\varphi\|_{\mathcal{H}*} \leqslant 1$

$$-\frac{1}{\lambda}(\|\overline{x} - \lambda \cdot y\| - \|\overline{x}\|) \leqslant -\frac{1}{\lambda}(\varphi(\overline{x} - \lambda \cdot y) - \varphi(\overline{x})) = \varphi(y)$$

und

$$\varphi(y) = \frac{1}{\lambda}\Big(\varphi(\overline{x} + \lambda \cdot y) - \underbrace{\varphi(\overline{x})}_{=1}\Big) \leqslant \frac{1}{\lambda} \cdot \Big(\|\overline{x} + \lambda \cdot y\| - \underbrace{\|\overline{x}\|}_{=1}\Big)$$

also insgesamt

$$\underbrace{-\frac{1}{\lambda}\Big(\|\overline{x} - \lambda \cdot y\| - \|\overline{x}\|\Big)}_{\xrightarrow{\lambda\to 0}\langle \overline{x}\,,\, y\rangle} \leqslant \varphi(y) \leqslant \underbrace{\frac{1}{\lambda} \cdot \Big(\|\overline{x} + \lambda \cdot y\| - \|\overline{x}\|\Big)}_{\xrightarrow{\lambda\to 0}\langle \overline{x}\,,\, y\rangle}$$

stimmt noch nicht so ganz, aber passt schon ...

nach l'Hospital. Im Detail:

$$\|\overline{x} + \lambda y\| - \|\overline{x}\| = \langle \overline{x} + \lambda y\,,\, \overline{x} + \lambda y\rangle^{\frac{1}{2}} - \|\overline{x}\| = \big(\langle \overline{x}\,,\, \overline{x}\rangle + \langle \overline{x}\,,\, \lambda y\rangle + \lambda^2\langle y\,,\, y\rangle\big)^{\frac{1}{2}} - \langle \overline{x}\,,\, \overline{x}\rangle^{\frac{1}{2}}$$

ist in $\lambda = 0$ differenzierbar nach λ mit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\cdots) = \left(2\langle \overline{x}\,,\, y\rangle + 2\lambda\|y\|^2\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{2}(\cdots)^{-\frac{1}{2}} \xrightarrow{\lambda\to 0} \langle \overline{x}\,,\, y\rangle$$

Wir erhalten $\varphi(y) = \langle \overline{x}\,,\, y\rangle = \kappa(\overline{x})(y)$, also $\varphi = \kappa(\overline{x})$.
Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: $\mathcal{H}$ ist reeller Vektorraum und $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle_\mathbb{R} := \operatorname{Re}(\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle)$. Es gilt dann $\varphi(y) = \rho(y) - i \cdot \rho(y)$ mit $\rho(\cdot) := \operatorname{Re}(\varphi(\cdot))$. Es gilt nämlich

$$\operatorname{Im}(\varphi(y)) = -\operatorname{Re}(i \cdot \varphi(y)) = -\operatorname{Re}(\varphi(i \cdot y)) = -\rho(i \cdot y)$$

Es ist $\rho(y) = \langle \overline{x}\,,\, y\rangle_\mathbb{R} = \operatorname{Re}(\langle \overline{x}\,,\, y\rangle)$ für ein $\overline{x} \in \mathcal{H}$. Also gilt $\varphi(y) = \rho(y) - i \cdot \rho(i \cdot y) = \ldots = \langle \overline{x}\,,\, y\rangle$.
□

7.12. Korollar

Hilberträume sind reflexiv.

Beweis
Das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H} \arrow[r, "\iota_\mathcal{H}"] \arrow[d, "\kappa"] & \mathcal{H}^{**} \arrow[d, "\kappa^{\mathrm{tr}}"] \\
\mathcal{H}^* \arrow[r, "\varphi\mapsto\overline{\varphi}"] & \mathcal{H}^*
\end{tikzcd}$$

kommutiert, da gilt

$$\kappa^{\mathrm{tr}} \circ \iota_\mathcal{H}(x)(y) = \kappa^{\mathrm{tr}}(\iota_\mathcal{H}(x))(y) = \iota_\mathcal{H}(x) \circ \kappa(y) = \kappa(y)(x) = \langle y\,,\, x\rangle = \overline{\langle x\,,\, y\rangle} = \overline{\kappa(x)(y)}$$

Die Abbildungen $\kappa, \kappa^{\mathrm{tr}}$ und $(\varphi \mapsto \overline{\varphi})$ sind surjektive Isometrien, also ist auch $\iota_\mathcal{H} \colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}^{**}$ eine surjektive Isometrie. □

7.13. Definition

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum.

(i) $x, y \in \mathcal{H}$ heißen **orthogonal**, $x \perp y$, falls $\langle x\,,\,y\rangle = 0$.

(ii) $A, B \subset \mathcal{H}$ heißen **orthogonal**, falls $x \perp y$ für alle $x \in A$, $y \in B$.

(iii) Für $A \subset \mathcal{H}$ heißt $A^\perp := \{x \in \mathcal{H} \,|\, \langle x\,,\,y\rangle = 0 \text{ für alle } y \in A\}$ **orthogonales Komplement** von A.

(iv) $\{x_i\}_I \subset \mathcal{H}$ heißt **Orthonormalsystem**, falls $\langle x_i\,,\,x_j\rangle = \delta_{ij}$, $i, j \in I$.

(v) $\{x_i\}_I \subset \mathcal{H}$ heißt **Hilbertraumbasis** (bzw. Basis), falls es ein maximales Orthonormalsystem ist.

7.14. Bemerkung

(i) Für $x \perp y \in \mathcal{H}$ gilt der **Satz des Pythagoras**: $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

(ii) Wir werden sehen, dass jeder Hilbertraum eine Hilbertraumbasis besitzt.

(iii) Im Allgemeinen ist eine Hilbertraumbasis *keine* Vektorraumbasis (**Hamelbasis**).

7.15. Proposition

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$ ein abgeschlossener Unterraum. Dann gilt $\mathcal{H}_0 \cap \mathcal{H}_0^\perp = \{0\}$ und $\mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_0^\perp = \mathcal{H}$. Wir schreiben in diesem Fall auch $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_0^\perp$.

Beweis
$\mathcal{H}_0 \cap \mathcal{H}_0^\perp = \{0\}$ ist klar (warum?). Sei $x \in \mathcal{H}$. Dann ist $\kappa(x) \in \mathcal{H}^*$ gegeben durch $\kappa(x)(y) = \langle x\,,\,y\rangle$, und $\kappa(x)|_{\mathcal{H}_0} \in \mathcal{H}_0^*$. $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$ abgeschlossen, ist also selbst ein Hilbertraum. Sei $\kappa_0 \colon \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_0^*$ der konjugiert lineare, isometrische Isomorphismus aus 7.11. Nach 7.11 existiert $x_0 \in \mathcal{H}_0$ mit $\kappa_0(x_0) = \kappa(x)|_{\mathcal{H}_0}$. Das heißt für $y \in \mathcal{H}_0$ gilt

$$\langle x_0\,,\,y\rangle = \kappa_0(x_0)(y) = \kappa(x)\big|_{\mathcal{H}_0}(y) = \kappa(x)(y) = \langle x\,,\,y\rangle$$

Daraus folgt $\langle x - x_0\,,\,y\rangle = 0$ für jedes $y \in \mathcal{H}_\prime$, also ist $x_1 := x - x_0 \in \mathcal{H}_0^\perp$ (und $x = x_0 + x_1$). □

7.16. Definition

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Eine Familie $\{x_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{H}$ heißt **summierbar** zu $x \in \mathcal{H}$, falls gilt: Zu $\varepsilon > 0$ existiert $\overline{J} \subset\subset I$ endlich, sodass für alle $\overline{J} \subset J \subset\subset I$ endlich gilt $\left\|\sum_{i\in J} x_i - x\right\| < \varepsilon$.

Wir schreiben dann auch $x = \sum_{i\in I} x_i$. (Warum kann es höchstens ein solches x geben?) Formulierung mit Netzen:

$$\left(\sum_{i\in J} x_i\right)_{\{J \,|\, J\subset\subset I \text{ endlich}\}} \longrightarrow x \qquad \text{oder} \qquad \sum_{i\in J} x_i \xrightarrow{J\subset\subset I} x$$

Dabei ist $\{J \,|\, J \subset\subset I \text{ endlich}\}$ gerichtet bezüglich Inklusion.

7.17. Proposition

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $\{x_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{H}$.

(i) $\{x_i\}_{i\in I}$ ist genau dann summierbar, wenn gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert $\overline{J} \subset\subset I$ endlich, sodass $\left\|\sum_{i\in J'} x_i\right\| < \varepsilon$ für jedes $J' \subset\subset I$ endlich mit $J' \cap \overline{J} = \emptyset$.

(ii) $\{x_i\}_{i\in I}$ ist genau dann summierbar zu $x \in \mathcal{H}$, wenn gilt: Es sind höchstens abzählbar viele der $x_i \neq 0$ und für jede Abzählung $x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots$ dieser x_i gilt

$$x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} x_{i_k}.$$

Beweis

(i) Angenommen $\sum_{i\in I} x_i \in \mathcal{H}$ existiert. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $\overline{J} \subset\subset I$, sodass für $\overline{J} \subset J \subset\subset I$ gilt $\left\|\sum_{i\in J} x_i - \sum_{i\in I} x_i\right\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Für $J' \subset\subset I$, $J' \cap \overline{J} = \emptyset$ gilt

$$\left\|\sum_{i\in J'} x_i\right\| = \left\|\sum_{i\in J'\cup\overline{J}} x_i - \sum_{i\in\overline{J}} x_i\right\| \leqslant \left\|\sum_{i\in J'\cup\overline{J}} x_i - \sum_{i\in I} x_i\right\| + \left\|\sum_{i\in\overline{J}} x_i - \sum_{i\in I} x_i\right\| < \varepsilon$$

Zur Rückrichtung: Für $n \in \mathbb{N}$ existiert $J_n \subset\subset I$ endlich, sodass für $J' \subset\subset I$ mit $J' \cap J_n = \emptyset$ gilt $\left\|\sum_{i\in J'} x_i\right\| < \frac{1}{n+1}$. Aber dann ist

$$\left(\sum_{i\in J_0\cup J_1\cup\ldots\cup J_n} x_i\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$$

eine Cauchyfolge. Für den Limes x gilt $x = \sum_{i\in I} x_i$ (Warum? Zu $\varepsilon > 0$ wähle n mit $\frac{1}{n+1} < \frac{\varepsilon}{2}$ und $\left\|x - \sum_{i\in J_0\cup J_1\cup\ldots\cup J_n} x_i\right\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Setze $\overline{J} := J_n$)

(ii) Angenommen $\{x_i\}_{i\in I}$ ist summierbar. Seien die J_n wie oben. Dann ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n$ abzählbar. Falls $I \ni i \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n$, so gilt $\|x_i\| < \frac{1}{n+1}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, also $x_i = 0$.

Die Rückrichtung ist klar. (sonst noch einmal an Analysis I. erinnern …) □

7.18. Proposition

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $z \in \mathcal{H}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\{x_i\}_{i\in I}, \{y_i\}_{i\in I}$ summierbare Familien. Dann gilt

$$\alpha \cdot \sum_{i\in I} x_i + \beta \cdot \sum_{i\in I} y_i = \sum_{i\in I} (\alpha \cdot x_i + \beta \cdot y_i) \qquad \text{und} \qquad \left\langle \sum_{i\in I} x_i\,,\, z \right\rangle = \sum_{i\in I} \langle x_i\,,\, z\rangle$$

Beweis

Übung. □

7.19. Proposition

Sei $\{x_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{H}$ eine Familie paarweise orthogonaler Vektoren. Dann ist $\{x_i\}_{i\in I}$ summierbar genau dann, wenn $\sum_{i\in I} \|x_i\|^2$ endlich ist. In diesem Fall gilt

$$\left\|\sum_{i\in I} x_i\right\|^2 = \sum_{i\in I} \|x_i\|^2$$

Beweis
Falls $\{x_i\}_{i\in I}$ summierbar ist, so gilt

$$\left\|\sum_{i\in I} x_i\right\|^2 = \left\langle \sum_{i\in I} x_i\,,\, \sum_{j\in I} x_j \right\rangle \overset{7.18}{=} \sum_{i\in I}\left\langle x_i\,,\,\sum_{j\in I} x_j\right\rangle \overset{7.18}{=} \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in I}\langle x_i\,,\,x_j\rangle\right) = \sum_{i\in I}\|x_i\|^2$$

Äquivalenz: Übung mit

$$\left\|\sum_{i\in I} x_i\right\|^2 \xleftarrow{J\subset\subset I} \left\|\sum_{i\in J} x_i\right\|^2 = \sum_{i\in J}\|x_i\|^2 \xrightarrow{J\subset\subset I} \sum_{i\in I}\|x_i\|^2$$

für $J \subset\subset I$ endlich und 7.17. □

7.20. Proposition

Sei $\{x_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{H}$ ein Orthonormalsystem, $x \in \mathcal{H}$.

(i) Es gilt $\sum_{i\in I}|\langle x_i\,,\,x\rangle|^2 \leqslant \|x\|^2$, (**Besselsche Ungleichung**[14]).

(ii) Es gilt $\sum_{i\in I}|\langle x_i\,,\,x\rangle|^2 = \|x\|^2$ (**Parselvalsche Gleichung**[15]) genau dann, wenn

$$x = \sum_{i\in I}\langle x_i\,,\,x\rangle\cdot x_i.$$

Beweis
(i) Für $J \subset\subset I$ endlich gilt

$$\begin{aligned}
0 \leqslant \left\|x - \sum_{i\in J}\langle x_i\,,\,x\rangle x_i\right\|^2 &= \langle x\,,\,x\rangle - \sum_{i\in J}\langle\langle x_i\,,\,x\rangle x_i\,,\,x\rangle - \sum_{i\in J}\langle x\,,\,\langle x_i\,,\,x\rangle x_i\rangle \\
&\quad + \sum_{i\in J}\sum_{j\in J}\langle\langle x_i\,,\,x\rangle x_i\,,\,\langle x_j\,,\,x\rangle x_j\rangle \\
&= \langle x\,,\,x\rangle - \sum_{i\in J}\overline{\langle x_i\,,\,x\rangle}\langle x_i\,,\,x\rangle - \sum_{i\in J}\langle x_i\,,\,x\rangle\overline{\langle x_i\,,\,x\rangle} + \sum_{i\in J}\overline{\langle x_i\,,\,x\rangle}\langle x_i\,,\,x\rangle
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \sum_{i\in J}|\langle x_i\,,\,x\rangle|^2 \leqslant \|x\|^2 < \infty$, also gilt $\sum_{i\in I}|\langle x_i\,,\,x\rangle|^2 \leqslant \|x\|^2$.

(ii) Die Rechnung aus (i) zeigt auch:

$$\sum_{i\in J}|\langle x_i\,,\,x\rangle|^2 \xrightarrow{J\subset\subset I} \|x\|^2 \iff \sum_{i\in J}\langle x_i\,,\,x\rangle\cdot x_i \xrightarrow{J\subset\subset I} x$$ □

7.21. Definition und Proposition

Seien $\mathcal{H}_i$ für $i \in I$ Hilberträume. Dann ist

$$\bigoplus_{i\in I}\mathcal{H}_i := \left\{ (x_i)_{i\in I} \,\middle|\, x_i \in \mathcal{H}_i, \sum_{i\in I}\|x_i\|^2_{\mathcal{H}_i} < \infty \right\}$$

ein Hilbertraum mit $\langle (x_i)_{i\in I}\,,\,(y_i)_{i\in I}\rangle := \sum_{i\in I}\langle x_i\,,\,y_i\rangle_{\mathcal{H}_i}$.

[14] nach Friedrich Wilhelm Bessel, http://de.wikipedia.org/wiki/Friedrich_Wilhelm_Bessel
[15] nach Marc-Antoine Parseval, http://de.wikipedia.org/wiki/Marc-Antoine_Parseval

Beweis
Übung! □

7.22. Satz

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $\{x_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{H}$ ein Orthonormalsystem. Dann sind äquivalent:

(i) $\{x_i\}_{i\in I}$ ist eine Hilbertraumbasis.

(ii) Falls $x \perp x_i$ für alle $i \in I$, so gilt $x = 0$.

(iii) Es gibt einen isometrischen Isomorphismus $\bigoplus_{i\in I} \mathcal{H}_i \cong \mathcal{H}$ gegeben durch $(\lambda_i \cdot x_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} \lambda_i \cdot x_i$ wobei $\mathcal{H}_i = \mathbb{K} \cdot x_i$ der von x_i erzeugte Unterhilbertraum ist.

(iv) Für jedes $x \in \mathcal{H}$ gilt $x = \sum_{i\in I} \langle x_i \, , \, x \rangle \cdot x_i$.

(v) Für alle $x, y \in \mathcal{H}$ gilt $\langle x \, , \, y \rangle = \sum_{i\in I} \langle x \, , \, x_i \rangle \cdot \langle x_i \, , \, y \rangle$.

(vi) Für alle $x \in \mathcal{H}$ gilt die Parsevalsche Gleichung $\|x\|^2 = \sum |\langle x_i \, , \, x \rangle|^2$.

Beweis
(i)⇒(ii): Falls $0 \neq x \perp x_i$ für $i \in I$, so ist $\{x_i\}_{i\in I} \cup \left\{ \frac{1}{\|x\|} \cdot x \right\}$ ein Orthonormalsystem. ↯

(ii)⇒(iii): $\gamma\colon \bigoplus_{i\in I} \mathcal{H}_i \to \mathcal{H}$, $(\lambda_i \cdot x_i)_I \mapsto \sum \lambda_i \cdot x_i$ ist eine wohldefinierte lineare Isometrie nach 7.19. Außerdem erhält γ das Skalarprodukt. $\gamma\big(\bigoplus_{i\in I} \mathcal{H}_i\big)$ ist vollständig, also abgeschlossen in $\mathcal{H}$. Falls $\gamma\big(\bigoplus_{i\in I} \mathcal{H}_o\big) \neq \mathcal{H}$, so ist nach 7.15 $\gamma\big(\bigoplus_{i\in I} \mathcal{H}_i\big)^\perp \not\ni \{0\}$. ↯ zu (ii).

(iii)⇒(iv): Für $x \in \mathcal{H}$ existieren $\lambda_i \in \mathbb{K}$, sodass $x = \gamma\big((\lambda_i \cdot x_i)_{i\in I}\big) = \sum_{i\in I} \lambda_i \cdot x_i$ gilt. Es gilt

$$\langle x_j \, , \, x \rangle = \left\langle x_j \, , \, \sum_{i\in I} \lambda_i \cdot x_i \right\rangle = \sum_{i\in I} \langle x_j \, , \, \lambda_i \cdot x_i \rangle = \sum_{i\in I} \lambda_i \cdot \delta_{ij} = \lambda_j$$

Damit folgt (iv).

(iv)⇒(v): Klar.

(v)⇒(vi): Klar.

(vi)⇒(i): Falls $x \perp x_i$ für alle $i \in I$, so gilt $\|x\|^2 = \sum_{i\in I} |\langle x_i \, , \, x \rangle|^2 = 0$. Also ist $x = 0$ und damit das Orthonormalsystem maximal. □

7.23. Bemerkung

(i) Jeder Hilbertraum besitzt eine Basis (Lemma von Zorn).

(ii) Wegen 7.22 (iii) ist ein Hilbertraum bis auf isometrischen Isomorphismus durch die Mächtigkeit seiner Basis eindeutig bestimmt.

(iii) Jeder separable Hilbertraum ist isometrisch isomorph zu $\mathbb{K}^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ oder zu $\ell^2(\mathbb{N})$.

7.24. Beispiele

(i) $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ bzw. $\{e_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ bilden Basen von $\ell^2(\mathbb{N})$ bzw. $\ell^2(\mathbb{Z})$, wobei $e_i(j) = \delta_{ij}$ ist.

(ii) $\big(e^{2\pi i n t}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ bilden eine Basis von $L^2([0,1])$.

7.25. Definition und Proposition

Seien $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ Hilberträume und $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_\in)$. Dann existiert genau ein Operator $T^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$, sodass für alle $x \in \mathcal{H}_1$, $y \in \mathcal{H}_2$ gilt

$$\langle T^* y \,,\, x\rangle_{\mathcal{H}_1} = \langle y \,,\, Tx\rangle_{\mathcal{H}_2} \qquad [\#]$$

Die Abbildung $^*\colon \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) \to \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ ist konjugiert linear und isometrisch. Weiter gilt $T^{**} = T$. Ist $\mathcal{H}_3$ ein weiterer Hilbertraum und $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3)$, so gilt

$$(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$$

Beweis
Sei $\kappa_i\colon \mathcal{H}_i \to \mathcal{H}_i^*$ wie in 7.11. Wir haben

$$\begin{aligned}
&\langle T^* y \,,\, x\rangle_{\mathcal{H}_1} = \langle y \,,\, Tx\rangle_{\mathcal{H}_2} && [\#]\\
\iff\ & \kappa_1(T^*y)(x) = \kappa_2(y)(Tx) && \text{für } x \in \mathcal{H}_1, y \in \mathcal{H}_2\\
\iff\ & \kappa_1(T^*y) = \kappa_2(y) \circ T && \text{für } y \in \mathcal{H}_2\\
\iff\ & \kappa_1(T^*y) = T^{\mathrm{tr}} \circ \kappa_2(y) && \text{für } y \in \mathcal{H}_2\\
\iff\ & T^*y = \kappa_1^{-1} \circ T^{\mathrm{tr}} \circ \kappa_2(y) && \text{für } y \in \mathcal{H}_2
\end{aligned}$$

Also definieren wir $T^* := \kappa_1^{-1} \circ T^{\mathrm{tr}} \circ \kappa_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$. Durch [#] ist T^* eindeutig bestimmt. κ_1^{-1} und κ_2 sind Isometrien; da außerdem $\|T^{\mathrm{tr}}\| = \|T\|$, gilt $\|T^*\| = \|T\|$ und somit ist $T \mapsto T^*$ isometrisch. κ_1^{-1} ist konjugiert linear, also auch $T \mapsto T^*$. Weiter gilt

$$(ST)^* = \kappa_1^{-1}(ST)^{\mathrm{tr}}\kappa_3 = \kappa_1^{-1}T^{\mathrm{tr}}S^{\mathrm{tr}}\kappa_3 = \kappa_1^{-1}T^{\mathrm{tr}}\kappa_2\kappa_2^{-1}S^{\mathrm{tr}}\kappa_3 = T^*S^*$$

Des weiteren erfüllt $T^{**} = (T^*)^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ für alle $x \in \mathcal{H}_1, y \in \mathcal{H}_2$

$$\langle T^{**}x \,,\, y\rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle x \,,\, T^*y\rangle_{\mathcal{H}_1}$$

Ebenso gilt $\langle Tx \,,\, y\rangle_{\mathcal{H}_2} = \overline{\langle y \,,\, T_x\rangle_{\mathcal{H}_2}} = \overline{\langle T^*y \,,\, x\rangle_{\mathcal{H}_1}} = \langle x \,,\, T^*y\rangle_{\mathcal{H}_1}$ für alle $x \in \mathcal{H}_1$, $y \in \mathcal{H}_2$. Folglich muss $T^{**}x = Tx$ gelten. ☐

gleiche Werte auf allen Elementen, Hahn-Bannach

7.26. Proposition

Für $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ gilt:

$$\begin{aligned}
\|T\| &= \inf\bigl\{\lambda \in \mathbb{R} \bigm| \bigl|\langle y \,,\, Tx\rangle_{\mathcal{H}_2}\bigr| \leqslant \lambda \cdot \|y\| \cdot \|x\| \forall x \in \mathcal{H}_1, y \in \mathcal{H}_2\bigr\}\\
&= \sup\bigl\{|\langle y \,,\, Tx\rangle|_{\mathcal{H}_2} \bigm| x \in \overline{B}_{\mathcal{H}_1}(0,1), y \in \overline{B}_{\mathcal{H}_2}(0,1)\bigr\}
\end{aligned}$$

Beweis
Sei γ die rechte Seite der oberen Gleichung. Es gilt $\bigl|\langle y \,,\, Tx\rangle_{\mathcal{H}_2}\bigr| \leqslant \|T\| \cdot \|y\| \cdot \|x\|$ für $x \in \mathcal{H}_1$, $y \in \mathcal{H}_2$, also ist $\gamma \leqslant \|T\|$. Weiter gilt

$$\|Tx\|^2 = |\langle Tx \,,\, Tx\rangle| \leqslant \gamma\|Tx\| \cdot \|x\| \leqslant \gamma \cdot \|T\| \cdot \|x\|^2$$

also ist $\|Tx\| \leqslant \sqrt{\gamma} \cdot \sqrt{\|T\|} \cdot \|x\|$ für $x \in \mathcal{H}_1$ und es folgt $\|T\| \leqslant \sqrt{\gamma} \cdot \sqrt{\|T\|}$. Also gilt $\sqrt{\|T\|} \leqslant \sqrt{\gamma} \Rightarrow \|T\| \leqslant \gamma$ und somit insgesamt $\gamma = \|T\|$. Die zweite Gleichheit ist klar. ☐

7.27. Proposition

Sei $\mathcal{H}$ ein $\mathbb{K}$-Hilbertraum, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ und $\beta \geqslant 0$. Falls $|\langle x\,,\,Tx\rangle| \leqslant \beta\|x\|^2$ für alle $x \in \mathcal{H}$, so gilt für $x, y \in \mathcal{H}$

$$|\langle y\,,\,Tx\rangle + \langle Ty\,,\,x\rangle| \leqslant 2\beta \cdot \|x\| \cdot \|y\|$$

Falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, gilt sogar

$$|\langle y\,,\,Tx\rangle| + |\langle Ty\,,\,x\rangle| \leqslant 2\beta \cdot \|x\| \cdot \|y\|$$

In diesem Fall gilt also $T = 0 \iff \langle x\,,\,Tx\rangle = 0$ für alle $x \in \mathcal{H}$.

Beweis
Für alle $x, y \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ gilt (für 0 ist die Ungleichung trivial)

$$\begin{aligned}2|\langle y\,,\,Tx\rangle + \langle Ty\,,\,x\rangle| = |\langle x+y\,,\,T(x+y)\rangle - \langle x-y\,,\,T(x-y)\rangle| &\leqslant \beta\|x+y\|^2 + \beta\|x-y\|^2 \\ &\leqslant 2\beta\Big(\|x\|^2 + \|y\|^2\Big)\end{aligned}$$

Ersetze x durch $\left(\frac{\|y\|}{\|x\|}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot x$ und y durch $\left(\frac{\|x\|}{\|y\|}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot y$. Dann folgt

$$\cancel{2} \cdot |\langle y\,,\,Tx\rangle + \langle Ty\,,\,x\rangle| \leqslant \cancel{2} \cdot \beta \cdot \Big(\|x\| \cdot \|y\| + \|x\| \cdot \|y\|\Big) = \cancel{2} \cdot 2 \cdot \beta \cdot \|x\| \cdot \|y\| \qquad [*]$$

das stimmt noch nicht so ganz …

Falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, so gilt für $\rho, \sigma \in \mathbb{R}_+$ geeignet

$$\begin{aligned}|\langle y\,,\,Tx\rangle| + |\langle Ty\,,\,x\rangle| &= \Big|e^{i(\rho+\sigma)} \cdot \langle y\,,\,Tx\rangle + e^{i(\rho-\sigma)} \cdot \langle x\,,\,Ty\rangle\Big| \\ &= \big|e^{i\rho} \cdot \big(\big\langle y\,,\,T(e^{i\sigma} \cdot x)\big\rangle + \big\langle e^{i\sigma} \cdot x\,,\,Ty\big\rangle\big)\big| \\ &= \Big|\big\langle y\,,\,T(e^{i\sigma} \cdot x)\big\rangle + \overline{\langle y\,,\,T(e^{i\sigma} \cdot x)\rangle}\Big| \\ \ldots &\overset{[*]}{\leqslant} 2 \cdot \beta \cdot \|x\| \cdot \|y\|\end{aligned}$$

□

7.28. Definition

$T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ heißt **selbstadjungiert**, falls $T = T^*$. Wir setzen

$$\mathcal{L}(\mathcal{H})_{\text{s.a.}} := \{T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \mid T \text{ selbstadjungiert}\}$$

7.29. Bemerkung

Für T selbstadjungiert gilt

$$\|T\| = \inf\Big\{\lambda \in \mathbb{R} \,\Big|\, |\langle x\,,\,Tx\rangle| \leqslant \lambda\|x\|^2 \text{ für alle } x \in \mathcal{H}\Big\}$$

Beweis
Sei β das Infimum auf der rechten Seite. Dann gilt

$$2 \cdot |\langle x\,,\,Tx\rangle| = |\langle y\,,\,Tx\rangle + \langle Ty\,,\,x\rangle| \overset{7.27}{\leqslant} 2 \cdot \beta\|x\| \cdot \|y\|$$

Nach 7.26 folgt $\|T\| \leqslant \beta \leqslant \|T\|$. □

7.30. Proposition

Falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, so gilt

$$T \text{ selbstadjungiert} \iff \langle x\,,\,Tx\rangle \in \mathbb{R} \text{ für alle } x \in \mathcal{H}$$

Beweis
Um "$\Rightarrow$" zu zeigen, betrachte $\langle x\,,\,Tx\rangle = \langle Tx\,,\,x\rangle = \overline{\langle x\,,\,Tx\rangle}$ für $x \in \mathcal{H}$. Für die Rückrichtung betrachte $\langle x\,,\,Tx\rangle = \langle Tx\,,\,x\rangle = \langle x\,,\,T^*x\rangle$. Dann ist $\langle x\,,\,(T-T^*)x\rangle = 0$ für $x \in \mathcal{H}$. Es folgt dann $T - T^* = 0$. $\square$

7.31. Definition und Proposition

Seien $R, S, T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ selbstadjungiert. Wir schreiben

- $T \geqslant 0$, falls $\langle x\,,\,Tx\rangle \geqslant 0$ für alle $x \in \mathcal{H}$ gilt.
- $T \geqslant S$, falls $T - S \geqslant 0$

"$\geqslant$" ist eine partielle Ordnung auf $\mathcal{L}(\mathcal{H})_{\text{s.a.}}$, das heißt $T \geqslant T$; $T \geqslant S$, $S \geqslant T \Rightarrow S = T$, $T \geqslant S, S \geqslant R \Rightarrow T \geqslant R$ (folgt mit 7.29). Es gilt $-\|T\|\,\mathrm{id}_{\mathcal{H}} \leqslant T \leqslant \|T\| \cdot \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$. Falls $T \geqslant 0$ ist, so gilt

$$|\langle y\,,\,Tx\rangle|^2 \leqslant \langle x\,,\,Tx\rangle \cdot \langle y\,,\,Ty\rangle$$

insbesondere gilt $\langle x\,,\,Tx\rangle = 0 \iff Tx = 0$

Beweis
Übung, für die letzte Aussage benutze 7.4 und: $(y, x) \mapsto \langle y\,,\,Tx\rangle$ ist positiv semidefinit hermitesch.

7.32. Satz

Sei $(T_j)_{j\in I} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})_{\text{s.a.}}$ ein monoton wachsendes und beschränktes Netz selbstadjungierter Operatoren. Dann konvergiert $(T_j)_{j\in I}$ punktweise gegen ein $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})_{\text{s.a.}}$, das heißt $T_jx \to Tx$ in Norm für jedes $x \in \mathcal{H}$. Wir schreiben auch $T_j \xrightarrow{\text{s.o.}} T$, d.h. $(T_j)_{j\in I}$ konvergiert gegen T in der **starken Operatortopologie**.

Beweis
Nach Polarisierung (vergleiche Bemerkung 7.8) gilt (für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

$$\langle x\,,\,T_jy\rangle = \frac{1}{4}\Big(\big\langle x+y\,,\,T_j(x+y)\big\rangle + \big\langle x-y\,,\,T_j(x-y)\big\rangle + i\big\langle ix+y\,,\,T_j(ix+y)\big\rangle - i\big\langle ix-y\,,\,T_j(ix-y)\big\rangle\Big)$$

Die rechte Seite konvergiert (warum?), also auch die linke Seite. $\Rightarrow$ Für jedes $x \in \mathcal{H}$ konvergiert $\langle x\,,\,T_j(\cdot)\rangle \colon \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ gegen ein $\varphi_x \colon \mathcal{H} \to \mathbb{C}$. Aber $\varphi_x \in \mathcal{H}^*$ (warum?). Es gilt

$$\|\varphi_x\|_{\mathcal{H}^*} \leqslant \limsup_j \|T_j\|\|x\| < \infty.$$

Die Abbildung $x \mapsto \kappa^{-1}(\varphi_x)$ ist linear (warum?). Definiere $T\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ durch $T(x) := \kappa^{-1}(\varphi_x)$. Es gilt $\|T(x)\| = \|\varphi_x\|$, also $\|T\| \leqslant \limsup_j \|T_j\| \leqslant \infty$. Damit ist $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Außerdem gilt für $x, y \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned}\langle Tx\,,\,y\rangle = \kappa(Tx)(y) = \varphi_x(y) = \lim_j \langle x\,,\,T_jy\rangle = \lim_j \langle T_jx\,,\,y\rangle = \overline{\lim_j \langle y\,,\,T_jx\rangle} = \overline{\varphi_y(x)} &= \overline{\langle Ty\,,\,x\rangle} \\ &= \langle x\,,\,Ty\rangle\end{aligned}$$

Also ist T auch selbstadjungiert. Es gilt für $\lim_j \langle x\,,\,T_jy\rangle = \langle x\,,\,Ty\rangle$ für $x, y \in \mathcal{H}$, das heißt $T_j \xrightarrow{\text{w.o.}} T$ ($T_j \to T$ in der schwachen Operatortopologie). Für $j \geqslant j'$ gilt $T_j - T_{j'} \geqslant 0$, also nach 7.31 für $x \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned}\Big\langle (T_j - T_{j'})(x)\,,\,(T_j - T_{j'})(x)\Big\rangle &\leqslant \Big\langle x\,,\,(T_j - T_{j'})(x)\Big\rangle \cdot \Big\langle (T_j - T_{j'})(x)\,,\,(T_j - T_{j'})^2(x)\Big\rangle \\ &\leqslant \Big\langle x\,,\,(T_j - T_{j'})(x)\Big\rangle \cdot \Big(2 \cdot \limsup_j \|T_j\|\Big)^3 \cdot \|x\|^2 < \varepsilon\end{aligned}$$

falls j' groß genug ist. Also $\|T_j(x-) - T_{j'}(x)\| < \varepsilon$ falls $j \geqslant j'$ groß. Damit folgt dann $T_j(x) \to T(x)$ in Norm (warum?). $\square$

8. Kompakte Operatoren und ein Spektralsatz

8.1. Definition

RevChap8

Sei X ein $\mathbb{K}$-Banachraum und $T \in \mathcal{L}(X)$. Wir definieren das **Spektrum** von T als

auch $\operatorname{spec}(T)$

$$\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{K} \,|\, T - \lambda \cdot \mathrm{id}_X \text{ ist nicht invertierbar}\} \subset \mathbb{K}$$

Die **Resolventenmenge** ist $\operatorname{res}(T) := \rho(T) := \mathbb{K} \setminus \sigma(T)$. Wir schreiben $\mathrm{R}(T, \lambda) := (T - \lambda \cdot \mathrm{id}_X)^{-1}$ für die **Resolvente** von T in $\lambda \in \rho(T)$.

8.2. Bemerkung

(i) Jeder Eigenwert von T ist ein Spektralwert.

(ii) Für X endlichdimensional gilt auch die Umkehrung, für beliebige X jedoch nicht: Sei $X = \ell^2(\mathbb{N})$, dann ist $S \in \mathcal{L}\big(\ell^2(\mathbb{N})\big)$ gegeben durch $S(x_0, x_i, \ldots) := (0, x_0, x_1, \ldots)$ (**unilateraler Shift**) linear, stetig und sogar isometrisch, aber *nicht* surjektiv. Dann ist $0 \in \sigma(S)$, aber 0 ist kein Eigenwert, da S injektiv ist.

8.3. Proposition

Seien X, Y Banachräume und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ bijektiv (also injektiv). Falls für $S \in \mathcal{L}(X, Y)$ gilt

$$\|T - S\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \big\|T^{-1}\big\|^{-1}_{\mathcal{L}(Y,X)},$$

so ist auch S bijektiv.

Beweis
Es gilt $S = T\big(\mathrm{id}_X - T^{-1}(T - S)\big)$. Für $k \leqslant l$ gilt mit $C := \big\|T^{-1}\big\| \cdot \|T - S\| < 1$

$$\left\| \sum_{n=k}^{l} \big(T^{-1}(T-S)\big)^n \right\| \leqslant \sum_{n=k}^{l} \big\| \big(T^{-1}(T-S)\big)^n \big\| \leqslant \sum_{n=k}^{l} \big\|T^{-1}\big\| \cdot \|T - S\|^n = \sum_{n=k}^{l} C^n$$

also ist $\sum_{n=0}^{\infty} \big(T^{-1}(T-S)\big)^n$ konvergent in $\mathcal{L}(X, X)$. Weiter ist $\big(\sum_{n=0}^{\infty} \big(T^{-1}(T-S)\big)^n\big) T^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$ das Inverse von S (warum?). □

8.4. Corollar

Für $T \in \mathcal{L}(X)$ ist die Resolventenmenge offen in $\mathbb{K}$.

8.5. Satz

Sei X ein Banachraum und $T in \mathcal{L}(X)$. Dann ist die **Resolventenabbildung** $R(T, \cdot)\colon \rho(T) \to \mathcal{L}(X)$, $\lambda \mapsto R(T, \lambda)$ lokal durch eine Potenzreihe mit Koeffizienten in $\mathcal{L}(X)$ gegeben. Mit anderen Worten $R(T, \cdot)$ ist lokal analytisch.

Beweis
Sei $\lambda_0 \in \rho(T)$. Setze $S_0 := T - \lambda_0 \cdot \mathrm{id}_X$, $S_\lambda := T - \lambda \cdot \mathrm{id}_X$, $\lambda \in \rho(T)$. Sei $\lambda \in \rho(T)$ mit

$$\|S_0 - S_\lambda\| = |\lambda - \lambda_0| < \big\|S_0^{-1}\big\|^{-1}$$

Nach Proposition 8.3 ist S_λ invertierbar und es gilt

$$R(T, \lambda) = S_\lambda^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \big(S_0^{-1}(S_0 - S_\lambda)\big)^n S_0^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n \cdot S_0^{-(n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n R(T, \lambda_0)^{n+1}$$

Durch Abschätzung mit der geometrischen Reihe folgt die Beschränktheit. □

8.6. Satz

Sei X ein $\mathbb{C}$-Banachraum und $T \in \mathcal{L}(X)$. Dann ist $\sigma(T)$ nichtleer, kompakt und es gilt

$$\sigma(T) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant \|T\|\}$$

Beweis

Wir wissen bereits, dass $\sigma(T)$ abgeschlossen in $\mathbb{C}$ ist. Für $\lambda \neq 0$ ist $S_\lambda := -\lambda \cdot \mathrm{id}_X$ invertierbar und es gilt $\left\|S_\lambda^{-1}\right\|^{-1} = \lambda$. Falls $\|S_\lambda - (T - \lambda \cdot \mathrm{id}_X)\| = \|T\| < |\lambda| = \left\|S_\lambda^{-1}\right\|^{-1}$, so ist nach 8.3 $T - \lambda \cdot \mathrm{id}_X$ invertierbar, also ist $\lambda \notin \sigma(T)$. Damit folgt $\sigma(T) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant \|T\|\}$ und die Kompaktheit von $\sigma(T)$.

Angenommen $\sigma(T) = \emptyset$. $R(T, \lambda)$ ist stetig auf $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant 2 \cdot \|T\|\}$, also beschränkt. Weiter gilt für $|\lambda| \geqslant 2 \cdot \|T\|$

$$R(T,\lambda) = (T - \lambda \cdot \mathrm{id}_X)^{-1} = -\lambda^{-1} \cdot \left(-\frac{T}{\lambda} + \mathrm{id}_X\right)^{-1} = -\lambda^{-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{T}{\lambda}\right)^n$$

also $\|R(T,\lambda)\| \leqslant |\lambda|^{-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left\|\frac{T}{\lambda}\right\|^n \leqslant \frac{1}{2\|T\|} \cdot 2 = \frac{1}{\|T\|}$. Damit ist $R(T,\lambda)$ auf $\mathbb{C}$ beschränkt. Für $x \in X$ und $\varphi \in X^*$ gilt:

$$\lambda \mapsto \varphi\big(R(T,\lambda)(x)\big) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n \underbrace{\varphi\big(R(T,\lambda)^{n+1}(x)\big)}_{\in \mathbb{C}}$$

ist lokal analytisch (auf ganz $\mathbb{C}$), also ganz, und beschränkt. Nach dem Satz von Liouville[16] folgt

$$\begin{aligned} & \varphi\big(R(T,\lambda)(x)\big) \equiv \varphi\big(R(T,0)(x)\big) \\ \Longrightarrow \quad & R(T,\lambda)(x) \equiv R(T,0)(x) \quad , x \in X \\ \Longrightarrow \quad & (T - \lambda \cdot \mathrm{id}_X)^{-1} = R(T,\lambda) \equiv R(T,0) = T^{-1} \lightning \end{aligned}$$

□

8.7. Definition und Proposition

Sei X ein Banachraum. $T \in \mathcal{L}(X)$ heißt **kompakt**, falls eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

(i) Das Bild jeder beschränkten Menge M unter T ist relativ kompakt, d.h. $\overline{T(M)} \subset X$ kompakt.

(ii) $\overline{T(B_X(0,1))}$ ist kompakt.

(iii) Ist $(x_n)_{\mathbb{N}} \subset X$ beschränkt, so enthält $(T(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge.

Wir schreiben $\mathcal{K}(X)$ für die Menge der kompakten Operatoren auf X.

Beweis

(i)⇔(ii): Klar, da T linear ist.

(i)⇔(iii): Für metrische Räume ist kompakt äquivalent zu folgenkompakt. □

8.8. Bemerkung

(i) Sei X ein Banachraum. Dann gilt *(Übung!)*

$$\overline{B}_X(0,1) \text{ ist kompakt} \iff \mathrm{id}_X \text{ ist kompakt} \iff X \text{ ist endlichdimensional}$$

(ii) Entsprechend kann man $\mathcal{K}(X,Y)$ definieren.

---

[16] f ganz $\rightsquigarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n$ mit $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \overset{\text{Cauchy}}{=} \frac{1}{2\pi i} \cdot \oint_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}} \mathrm{d}\zeta$, wobei C_r der Kreis mit Radius r ist. Dann folgt $|f(z)| \leqslant M$, also $|a_k| \leqslant \frac{1}{r^k}$, $r > 0$, $k \geqslant 1 \Rightarrow a_k = 0, k \geqslant 1$. Siehe auch `https://de.wikipedia.org/wiki/Satz_von_Liouville_(Funktionentheorie)`

8.9. Proposition

Sei X ein Banachraum. Dann ist $\mathcal{K}(X) \lhd \mathcal{L}(X)$ ein abgeschlossenes Ideal.

Beweis

$\mathcal{K}(X) \subset \mathcal{L}(X)$ **ist ein linearer Unterraum:** $T, T' \in \mathcal{K}(X)$, $\alpha \in \mathbb{K}$. $\alpha \cdot T \in \mathcal{K}(X)$ ist klar. Wir müssen nur $T + T' \in \mathcal{K}(X)$ zeigen: Sei $(x_n)_{\mathbb{N}} \subset X$ beschränkt. Da T kompakt ist, existiert eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, sodass $(Tx_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Da T' kompakt ist, gibt es wiederum eine Teilfolge $\big(x_{n_{k_l}}\big)_{l\in\mathbb{N}}$, sodass $(Tx_{n_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Dann muss auch $((T+T')x_{n_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}}$ konvergieren.

$\mathcal{K}(X)$ **ist Ideal:** Sei $T \in \mathcal{K}(X)$, $S \in \mathcal{L}(X)$. Dann gilt auch $TS, ST \in \mathcal{K}(X)$, wie man sich leicht überlegt.

$\mathcal{K}(X)$ **ist abgeschlossen:** Zu $T \in \overline{\mathcal{K}(X)}$ existiert $(T_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{K}(X)$ mit $\|T - T_k\| \to 0$. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ beschränkt. Wähle Teilfolge $(x_n^{(0)})_{n\in\mathbb{N}}$, sodass $(T_0 x_n^{(0)})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und in einem $\frac{1}{1}$-Ball liegt. Wähle Teilfolge $(x_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}$ von $(x_n^{(0)})_{n\in\mathbb{N}}$ mit: $(T_1 x_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und liegt in einem $\frac{1}{2}$-Ball. Induktiv folgt, dass für $(x_n^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ gilt: $(x_n^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ ist Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(Tx_n^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. □

8.10. Satz

Sei $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ ein selbstadjungierter, kompakter Operator auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$. Dann ist T diagonalisierbar; genauer gilt:

(i) $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$ ist abzählbar; der einzige mögliche Häufungspunkt ist 0.

Letzteres gilt allgemein für selbstadjungierte Operatoren

(ii) Jedes $\lambda \in \sigma(T)$ ist ein Eigenwert. Die Eigenräume zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.

(iii) Seien $\tilde{\lambda}_0, \tilde{\lambda}_1, \ldots$ die unterschiedlichen Spektralwerte (d.h. Eigenwerte *ohne* Vielfachheiten) und $\tilde{X}_0, \tilde{X}_1, \ldots$ die zugehörigen Eigenräume. Dann ist $\tilde{X}_i$ für jedes $\tilde{\lambda}_i \neq 0$ endlichdimensional und es gilt $\mathcal{H} = \bigoplus_i \tilde{X}_i$.

(iv) Seien $\lambda_0, \lambda_1, \ldots$ die nichtverschwindenden Eigenwerte, gezählt *mit* Vielfachheiten. Dann existiert ein Orthonormalsystem $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ von zugehörigen Eigenvektoren und für jedes solche Orthonormalsystem gilt für $x \in \mathcal{H}$

$$Tx = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i \cdot \langle e_i\,,\, x\rangle \cdot e_i$$

Falls $T \geqslant 0$, kann man die λ_i absteigend wählen und es gilt $\lambda_i \to 0$ (falls es unendlich viele $\lambda_i \neq 0$ gibt).

Beweis (für $T \geqslant 0$)

Für $x \in \mathcal{H}$ setze $\mu(x) := \frac{\langle x\,,\,Tx\rangle}{\langle x\,,\,x\rangle} \geqslant 0$ und

$$\overline{\mu} := \sup_{x\in\mathcal{H}} \mu(x) = \sup_{x\in\overline{B}(0,1)} \langle x\,,\,Tx\rangle \leqslant \|T\|$$

Wir nehmen $\mu > 0$ an, denn andernfalls ist $T = 0$ nach Bemerkung 7.29. Wähle $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ mit $\|x_k\| = 1$ und $\mu(x_k) = \langle x_k\,,\,Tx_k\rangle \to \overline{\mu}$. Da T kompakt ist, dürfen wir (eventuell nach Übergang zu einer Teilfolge) annehmen, dass $Tx_k \to \overline{y}$ für ein $\overline{y} \in \mathcal{H}$. Nach 5.10 ist $\overline{B}_{\mathcal{H}^*}(0,1)$ w^*-kompakt, also gilt (wieder eventuell nach Übergang zu einer Teilfolge)

$$\kappa(x_k) \xrightarrow{\mathrm{w}^*} \overline{\varphi} \in \mathcal{H}^*$$

Setze nun $\overline{x} := \kappa^{-1}(\overline{\varphi})$. Für jedes $x \in \mathcal{H}$ gilt $\langle x_k\,,\,Tx\rangle = \kappa(x_k)(Tx) \to \overline{\varphi}(Tx) = \langle \overline{x}\,,\,Tx\rangle$. Also insbesondere

$$0 = \lim_{k\to\infty}\langle x_k - \overline{x}\,,\,Tx\rangle = \lim_{k\to\infty}\langle Tx_k - T\overline{x}\,,\,x\rangle = \left\langle \lim_{k\to\infty} Tx_k - T\overline{x}\,,\,x\right\rangle = \langle \overline{y} - T\overline{x}\,,\,x\rangle$$

Damit folgt $\overline{y} = T\overline{x}$. Es gilt $\|\overline{x}\| = 1$ und[17]

$$\overline{\mu} = \lim_{k\to\infty}\langle x_k\,,\,Tx_k\rangle = \lim_{k\to\infty}\langle x_k\,,\,\overline{y}\rangle = \langle \overline{x}\,,\,\overline{y}\rangle = \langle \overline{x}\,,\,T\overline{x}\rangle = \mu(\overline{x})$$

das heißt $\overline{\mu}$ ist das Maximum von $\mu\colon \mathcal{H} \to \mathbb{R}$. Für $z \in \mathcal{H}$ definiere $f_z\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f_z(t) := \mu(\overline{x}+t\cdot z)$. Dann ist f_z in $t = 0$ differenzierbar und es gilt

$$0 = f_z'(0) = \frac{2\cdot\langle z\,,\,T\overline{x}\rangle\cdot\|\overline{x}\|^2 - 2\cdot\langle \overline{x}\,,\,T\overline{x}\rangle\cdot\langle z\,,\,\overline{x}\rangle}{\|\overline{x}\|^4}$$

Also ist $\langle z\,,\,T\overline{x} - \overline{\mu}\cdot\overline{x}\rangle = 0$ für alle $z \in \mathcal{H}$. Es folgt $T\overline{x} = \overline{\mu}\cdot\overline{x}$. Setze nun $\lambda_0 := \overline{\mu}$, $e_0 := \overline{x}$. Definiere $\mathcal{H}_1 := \{e_0\}^\perp$. Dann ist $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}$ ein Untervektorraum. Für $x \in \mathcal{H}_1$ gilt $\langle e_0\,,\,Tx\rangle = \langle Te_0\,,\,x\rangle = \lambda_0\cdot\langle e_0\,,\,x\rangle = 0$. Also ist $Tx \in \mathcal{H}_1$. Wir können also

$$T_1 := T\big|_{\mathcal{H}_1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$$

definieren. Tatsächlich gilt $0 \leqslant T_1 = T_1^* \in \mathcal{K}(\mathcal{H}_1)$. Induktion liefert Eigenwerte $\lambda_0 \geqslant \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots > 0$ zu normierten Eigenvektoren $e_0, e_1, e_2, \ldots$ (Die Folge ist endlich falls ein $\lambda_i = 0$ oder $\dim\mathcal{H} < \infty$). Die Eigenvektoren sind paarweise orthogonal und für jedes $X_k := \operatorname{span}\{e_0,\ldots,e_k\}$ und $x \in X_k^\perp$ gilt $\mu(x) \leqslant \lambda_k$.

(Noch zu zeigen: $\lambda_k \to 0$)

Für $\tilde{\mathcal{H}} := \overline{\bigcup_{k=0}^\infty X_k}$ und $x \in \tilde{\mathcal{H}}^\perp$ gilt $\mu(x) \leqslant \lambda_k$, $k \in \mathbb{N}$, also $\mu(x) = 0$. Damit folgt $\langle x\,,\,Tx\rangle = 0$ und wegen $T|_{\tilde{\mathcal{H}}^\perp} \in \mathcal{K}(\tilde{\mathcal{H}}^\perp)$ selbstadjungiert gilt nach Bemerkung 7.29 $T|_{\tilde{\mathcal{H}}^\perp} = 0$, das heißt $\tilde{\mathcal{H}}^\perp \subset \ker T$.

Die e_k bilden eine Orthonormalbasis von $\tilde{\mathcal{H}}$: Für $x \in \mathcal{H}$ existieren $\tilde{x} \in \tilde{\mathcal{H}}$ und $\tilde{x}^\perp \in \tilde{\mathcal{H}}^\perp$ mit $x = \tilde{x}+\tilde{x}^\perp$. Es gilt dann

$$Tx = T\tilde{x} + T(\tilde{x}^\perp) = T\tilde{x} = T\left(\sum_{k=0}^\infty \langle e_k\,,\,\tilde{x}\rangle\right)\cdot e_k = \sum_{k=0}^\infty \langle e_k\,,\,x\rangle Te_k = \sum_{k=0}^\infty \lambda_k\langle e_k\,,\,x\rangle\cdot e_k$$

Also gilt (iv). Damit folgt auch (ii). (i) folgt aus (iv) und (ii). Da T kompakt ist, existiert eine konvergente Teilfolge $(Te_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$. Es gilt

$$0 = \lim_{l,m\to\infty}\|Te_{k_l} - Te_{k_n}\| = \lim_{l,m\to\infty}\|\lambda_{k_l}\cdot e_{k_l} - \lambda_{k_m}e_{k_m}\| = \lim_{l,m\to\infty}\sqrt{\lambda_{k_l}^2 + \lambda_{k_m}^2}$$

Damit folgt $\lambda_{k_l} \xrightarrow{l\to\infty} 0$. Damit müssen wegen der Absteigenden Folge auch $\lambda_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$. □

8.11. Corollar

(i) $\mathcal{K}(\mathcal{H}) = \overline{\mathcal{F}(\mathcal{H})}^{\|\cdot\|}$, wobei $\mathcal{F}(\mathcal{H}) := \{T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})\,|\,T(\mathcal{H}) \text{ endlichdimensional}\}$.

(ii) $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ ist selbstadjungiert, das heißt $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H}) \iff T^* \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$.

Kompakte Operatoren lassen sich also gut approximieren

Beweis
Übung! (Blatt 13) □

[17] „teilweiser Limes" mit: $|\langle x_k\,,\,Tx_k\rangle - \langle x_k\,,\,\overline{y}\rangle| = |\langle x_k\,,\,Tx_k - \overline{y}\rangle| \leqslant \|x_k\|\cdot\|Tx_k - \overline{y}\| \to 0$

9. Fredholm-Operatoren. Ein Index

9.1. Definition

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Ein Operator $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ heißt **Fredholm-Operator**[18], falls gilt:

(i) $\ker T$ ist endlichdimensional.

(ii) $\operatorname{Im} T \subset \mathcal{H}$ ist abgeschlossen.

(iii) $\mathcal{H}/\operatorname{Im} T$ ist endlichdimensional (endliche Kodimension).

In diesem Fall definieren wir den **Fredholm-Index** von T als

$$\operatorname{ind}(T) := \dim(\ker T) - \dim(\mathcal{H}/\operatorname{Im} T) \in \mathbb{Z}$$

RevChap9

Wir schreiben $\operatorname{Fred}(\mathcal{H}) := \{T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \mid T \text{ ist Fredholm}\}$.

9.2. Satz (Fredholm-Riesz)

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $S \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Dann ist $T := \operatorname{id}_{\mathcal{H}} - S$ Fredholm.

Beweis

(i) $\ker T \subset \mathcal{H}$ ist abgeschlossen, also ein Unterhilbertraum. Sei $P := \operatorname{proj}_{\ker T}$ die orthogonale Projektion auf $\ker T$, das heißt für $\mathcal{H} \ni x = x_0 + x_1$ mit $x_0 \in \ker T$ und $x_1 \in (\ker T)^\perp$ ist $P(x) = x_0$. Es ist $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ (warum?). Dann ist

$$P = \operatorname{id}_{\mathcal{H}} \circ P \overset{T \circ P = 0}{=} S \circ P \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$$

Also ist $P|_{\ker T} = \operatorname{id}_{\ker T} \in \mathcal{K}(\ker T)$. Damit ist $\ker T$ endlichdimensional.

(ii) Es ist $T|_{(\ker T)^\perp} : (\ker T)^\perp \to \operatorname{Im} T$ ist bijektiv und stetig. Zu zeigen ist, dass $\left(T|_{(\ker T)^\perp}\right)^{-1}$ stetig ist, denn dann ist $\operatorname{Im} T$ vollständig, also auch abgeschlossen. Falls $\left(T|_{(\ker T)^\perp}\right)^{-1}$ nicht stetig ist, so existiert eine Folge $(x_n)_n \subset (\ker T)^\perp$ mit $\|x_n\| = 1$ und $Tx_n \to 0$. Nach Übergang zu einer Teilfolge dürfen wir $Sx_n \to \overline{y}$ für ein $\overline{y} \in \mathcal{H}$ annehmen. Da $Tx_n \to 0$, folgt $x_n = \operatorname{id}_x x_n \to \overline{y}$. Aber dann ist auch $\overline{y} \in (\ker T)^\perp$, $\|\overline{y}\| = 1$ und $\overline{y} \in \ker T$. $\lightning$

(iii) Es ist

$$\begin{aligned}(\mathcal{H}/\operatorname{Im} T)^* \cong \left((\operatorname{Im} T)^\perp\right)^* = \kappa\left((\operatorname{Im} T)^\perp\right) &= \{\langle y\,,\cdot\rangle \mid \langle y\,, Tx\rangle = 0 \text{ für alle } x \in \mathcal{H}\} \\ &= \{\langle y\,,\cdot\rangle \mid \langle T^*y\,, x\rangle = 0 \text{ für alle } x \in \mathcal{H}\} \\ &= \{\langle y\,,\cdot\rangle \mid y \in \ker T^*\} \\ &= \kappa(\ker T^*) \cong \ker T^* = \ker(\operatorname{id}_{\mathcal{H}} - S^*)\end{aligned}$$

Dies ist endlichdimensional nach (i), da $S^* \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. □

9.3. Satz

$\operatorname{Fred}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ist offen bezüglich der Normtopologie. Die Abbildung $\operatorname{ind}\colon \operatorname{Fred}(\mathcal{H}) \to \mathbb{Z}$ ist steig.

[18] nach Erik Ivar Fredholm, siehe https://de.wikipedia.org/wiki/Erik_Ivar_Fredholm

Beweis
Sei $T \in \mathrm{Fred}(\mathcal{H})$. Wir haben $\ker T \oplus (\ker T)^\perp = \mathcal{H} = \operatorname{Im} T \oplus (\operatorname{Im} T)^\perp$ abgeschlossen.

(i) Für $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ definiere $\tilde{S}\colon \tilde{H} := (\ker T)^\perp \oplus (\operatorname{Im} T)^\perp \to \mathcal{H}$ durch $\tilde{S}(v, w) := S(v) + w$. Dann ist $\tilde{S}$ stetig und die Abbildung

$$\tilde{}\colon \mathcal{L}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{L}(\tilde{\mathcal{H}}, \mathcal{H}), \quad S \longmapsto \tilde{S}$$

stetig. $\tilde{T}$ ist bijektiv und stetig. Nach dem Satz von Inversen Operator ist $\tilde{T}$ also ein Homöomorphismus. Mit 8.3 folgt, dass $\tilde{T}$ eine Umgebung von Homöomorphismen in $\mathcal{L}(\tilde{\mathcal{H}}, \mathcal{H})$ besitzt. Also besitzt T eine Umgebung $U \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$, sodass für alle $S \in U$ der Operator $\tilde{S}$ ein Homöomorphismus ist. Für jedes $S \in U$ gilt:

1) $S\big((\ker T)^\perp\big) \subset \mathcal{H}$ ist abgeschlossen, denn $\tilde{S}\big((\ker T)^\perp\big) = (\tilde{S}^{-1})^{-1}\big((\ker T)^\perp\big)$, $(\ker T)^\perp$ ist abgeschlossen und $S\big((\ker T)^\perp\big) = \tilde{S}\big((\ker T)^\perp\big)$

2)

A. Anhang

A.1. Vierecksungleichung

Sei (X,d) ein metrischer Raum und $x,y,u,v \in X$. Dann gilt

$$\left|d(x,y) - d(u,v)\right| \leqslant d(x,u) + d(y,v)$$

Beweis
Einerseits gilt nach der Dreiecksungleichung

$$d(x,y) \leqslant d(x,u) + d(u,v) + d(v,y) \quad \Longrightarrow \quad d(x,y) - d(u,v) \leqslant d(x,u) + d(y,v)$$

Andererseits aber auch

$$d(u,v) \leqslant d(u,x) + d(x,y) + d(y,v) \quad \Longrightarrow \quad d(u,v) - d(x,y) \leqslant d(x,u) + d(y,v)$$

Insgesamt folgt also die Behauptung. □

A.2. Abschluss einer konvexen Menge ist konvex

Sei X ein topologischer Vektorraum, von dem wir der Einfachheit halber annehmen, dass die Topologie von einer Norm induziert wird. Sei $M \subset X$ konvex. Dann ist auch $\overline{M}$ konvex.

Beweis
Seien $a,b \in \overline{M}$, $\lambda \in [0,1]$. Dann existieren für jedes $\varepsilon > 0$ Elemente $a', b' \in M$ mit $\|a - a'\| < \varepsilon$ und $\|b - b'\| < \varepsilon$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\left\|\big((1-\lambda)\cdot a + \lambda\cdot b\big) - \big((1-\lambda)\cdot a' + \lambda\cdot b'\big)\right\| &= \|(1-\lambda)\cdot(a-a') + \lambda\cdot(b-b')\| \\ &\leqslant |1-\lambda|\cdot\|a-a'\| + |\lambda|\cdot\|b-b'\| \\ &\leqslant |1-\lambda+\lambda|\cdot\varepsilon = \varepsilon\end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt somit $(1-\lambda)\cdot a + \lambda\cdot b \in \overline{M}$. □

A.3. Beweis von Aufgabe 2 von Blatt 7

Dies ist eine Teilaussage im Beweis des Satzes von Riesz-Fischer (4.11).
Es sei (X,Σ,μ) ein Maßraum, $p \in [1,\infty)$ und $(f_n)_n \subset \mathcal{L}^p(\mu)$ eine Folge p-integrierbarer Funktionen.

Behauptung
Es existieren messbare Mengen $E_l \subset X$ mit $\mu(E_l) < \infty, l \in \mathbb{N}$, sodass für $E := \bigcup_{l\in\mathbb{N}} E_l$ gilt $\chi_E \cdot f_n = f_n$ fast überall für $n \in \mathbb{N}$.

Beweis
Sei $n \in \mathbb{N}$. Für $l \in \mathbb{N}$ definieren wir $E_{l,n} := f_n^{-1}\Big(\big(-\infty, -\frac{1}{l}\big) \cup \big(\frac{1}{l}, \infty\big)\Big)$. Da $\big(-\infty, -\frac{1}{l}\big)$ und $\big(\frac{1}{l}, \infty\big)$ Borelmengen sind und f_n messbar ist, ist $E_{l,n} \subset X$ messbar, also $E_{l,n} \in \Sigma$. Wir zeigen, dass $\mu(E_{l,n}) < \infty$ gilt: Für $x \in E_{l,n}$ gilt $|f_n(x)| > \frac{1}{l} \Rightarrow |f_n(x)|^p > \frac{1}{l^p}$. Es folgt mit der Monotonie des Integrals

$$\int_{E_{l,n}} \frac{1}{l^p} \mathrm{d}\mu < \int_{E_{l,n}} |f_n|^p \mathrm{d}\mu < \infty$$

da $f_n \in \mathcal{L}^p(\mu)$. Da $\frac{1}{l^p} < \infty$, folgt also $\mu(E_{l,n}) < \infty$. Setze nun $E := \bigcup_{l,n} E_{l,n}$. Dies ist eine abzählbare Vereinigung. Es bleibt $\chi_E \cdot f_n = f_n$ fast überall zu zeigen. Sei also $x \in X$ beliebig. Wenn $f_n(x) = 0$, dann gilt die Gleichung trivialerweise. Andernfalls existiert ein $l \in \mathbb{N}$ mit $|f_n(x)| > \frac{1}{l}$, also $x \in E_{l,n} \subset E$. Wenn wir für f_n den Wert ∞ zulassen, dann gilt die Gleichung auf der Nullmenge $\{x \in X \mid f_n(x) = \infty\}$ nicht. Also gilt die Gleichung fast überall. □

Index

Die Seitenzahlen *sind mit Hyperlinks zu den entsprechenden Seiten versehen, also anklickbar* ☝

1. abzählbar, 29
2. abzählbar, 29

abgeschlossen, 1
Abschluss, 1
Algebra, 8
analytisch, 50

Banachalgebra, 11
Banachraum, 11
Besselsche Ungleichung, 45

Cauchy-Folge, 1
Cauchy-Schwarz-Ungleichung, 39

Distanz dist, 15
Dualraum, 8

einfach, 21
erweiterte Metrik, 4

Funktionale, 8

gleichmäßig konvex, 34
gleichmäßig stetig, 1

Hamelbasis, 43
hermitesche Form, 39
    positiv definit, 39
    positiv semidefinit, 39
Hilbertraum, 41
Hilbertraumbasis, 43
Homöomorphismus, 20
Hölder-Ungleichung, 22

induktiv geordnet, 12
Isometrie, 1
isometrischer Isomorphismus, 1

Jensen-Ungleichung, 36

kanonische Inklusion, 17
kompakter Operator, 51
konjugiert linear, 41
konvex, 14
konvexe Hülle, 14

Lebesgue-Maß, 21
lokalkompakt, 6

Maßraum, 21
messbar, 21
metrischer Raum, 1
Minkowski-Ungleichung, 23

normierte $\mathbb{K}$-Algebra, 9

offen, 1
Operator
    beschränkter Operator, 8
Operatoren, 8
Operatornorm, 8
orthogonal, 43
orthogonales Komplement, 43
Orthonormalsystem, 43

Parallelogrammgesetz, 40
Parselvalsche Gleichung, 45
Polarisierungsidentität, 41
Prä-Hilbertraum, 41
punktweise gleichmäßig beschränkt, 6, 18

reflexiv, 30
Resolvente, 50
Resolventenabbildung, 50
Resolventenmenge, 50
Riesz-Fischer, 24

Satz des Pythagoras, 43
schwache Konvergenz, 26
schwache Topologie, 26
selbstadjungiert, 48
separabel, 6, 29
Sesquilinearform, 41
Skalarprodukt, 39
Spektrum, 50
starke Operatortopologie, 49
stetig, 1, 7
strikt konvex, 35
sublinear, 11
summierbar, 43

topologischer Vektorraum, 7
transponierte Abbildung, 17

unilateraler Shift, 50
unital, 9

Vervollständigung, 2

vollständig, 1

w^*-Topologie, 27

Young-Ungleichung, 22

Zählmaß, 21

Abbildungsverzeichnis

1. Einheitskugeln der p-Norm auf $\mathbb{R}^2$ für $p = 2$, $p = 1$ und $p = \infty$ 34
2. Zeichnung zum Beweis von 6.3 35

Todo's und andere Baustellen

RevChap7 39
eventuell Bild von Parallelogramm hinzufügen 40
stimmt noch nicht so ganz, aber passt schon ... 42
das stimmt noch nicht so ganz ... 48
RevChap8 50
RevChap9 54