

WESTFÄLISCHE
WILHELMUS-UNIVERSITÄT
MÜNSTER



FACHBEREICH 10
MATHEMATIK UND
INFORMATIK

Skript Analysis II.

Mitschrift der Vorlesung „Analysis II.“ von Prof. Dr. Wilhelm Winter

Jannes Bantje

18. Februar 2015

Aktuelle Version verfügbar bei



GitHub

<https://github.com/JaMeZ-B/latex-wwu> ↗

GitHub ist eine Internetplattform, auf der viele OpenSource-Projekte gehostet werden. Diese Plattform nutzen wir zur Zusammenarbeit, also findet man hier neben den PDFs auch die TeX-Dateien. Außerdem ist über diese Plattform auch direktes Mitarbeiten möglich, siehe nächste Seite.



sciebo die Campuscloud

<https://uni-muenster.sciebo.de/public.php?service=files&t=965ae79080a473eb5b6d927d7d8be462> ↗

Sciebo ist ein Dropbox-Ersatz der Hochschulen in NRW, der von der Uni Münster in leitender Position auf Basis der OpenSource-Software Owncloud aufgebaut wurde. Wenn man auf den Link klickt, kann man die Freigabe zum eigenen Speicher hinzufügen und hat dann immer automatisch die aktuellste Version.



BitTorrent Sync

B6WH2DISQ5QVYIRYIEZSF4ZR2IDVKPN3I

BTSync ist ein peer-to-peer Dateisynchronisations-Tool. Dabei werden die Dateien nur auf den Computern der Teilnehmer an einer Freigabe gespeichert. Ein Mini-Computer ist permanent online, sodass jederzeit die aktuellste Version verfügbar ist. Clients ↗ gibt es für jedes Betriebssystem. Zugang ist über das obige „Secret“ bzw. den QR-Code möglich



Vorlesungshomepage

http://wwwmath.uni-muenster.de/u/wilhelm.winter/wwinter/analysis_II.html ↗

Hier ist ein Link zur offiziellen Vorlesungshomepage.

Vorwort — Mitarbeit am Skript

Dieses Dokument ist eine Mitschrift aus der Vorlesung „Analysis II., SoSe 2013“, gelesen von Prof. Dr. Wilhelm Winter. Der Inhalt entspricht weitestgehend dem Tafelanschrieb. Für die Korrektheit des Inhalts übernehme ich keinerlei Garantie! Für Bemerkungen und Korrekturen – und seien es nur Rechtschreibfehler – bin ich sehr dankbar. Korrekturen lassen sich prinzipiell auf drei Wegen einreichen:

- Persönliches Ansprechen in der Uni, Mails an j.bantje@wwu.de (gerne auch mit annotieren PDFs) oder Kommentare auf <https://github.com/JaMeZ-B/latex-wwu>.
- *Direktes* Mitarbeiten am Skript: Den Quellcode poste ich auf GitHub (siehe oben), also stehen vielfältige Möglichkeiten der Zusammenarbeit zur Verfügung: Zum Beispiel durch Kommentare am Code über die Website und die Kombination Fork + Pull Request. Wer sich verdient macht oder ein Skript zu einer Vorlesung, die ich nicht besuche, beisteuern will, dem gewähre ich gerne auch Schreibzugriff. Beachten sollte man dabei, dass dazu ein Account bei github.com notwendig ist, der allerdings ohne Angabe von persönlichen Daten angelegt werden kann. Wer bei GitHub (bzw. dem zugrunde liegenden Open-Source-Programm „git“) – verständlicherweise – Hilfe beim Einstieg braucht, dem helfe ich gerne weiter. Es gibt aber auch zahlreiche empfehlenswerte Tutorials im Internet.¹
- *Indirektes* Mitarbeiten: TeX-Dateien per Mail verschicken.
Dies ist nur dann sinnvoll, wenn man einen ganzen Abschnitt ändern möchte (zB. einen alternativen Beweis geben), da ich die Änderungen dann per Hand einbauen muss! Ich freue mich aber auch über solche Beiträge!

¹zB. <https://try.github.io/levels/1/challenges/1>, ist auf Englisch, aber dafür interaktives LearningByDoing

Inhaltsverzeichnis

1 Funktionenfolgen und Potenzreihen	1
1.1 Definition Konvergenz von Funktionenfolgen	1
1.2 Bemerkung zur Normen	1
1.3 Beispiele von konvergierenden Funktionenfolgen	1
1.4 Satz über Stetigkeit des Grenzwertes einer Funktionenfolge	2
1.5 Satz über Konvergenz von Reihen basierend auf Funktionenfolgen	3
1.6 Beispiel einer konvergierenden Reihe	3
1.7 Satz über das Integral des Grenzwertes einer Funktionenfolge	3
1.8 Satz über die Ableitung des Grenzwertes einer Funktionenfolge	4
1.9 Definition Potenzreihe und Konvergenzradius	4
1.10 Satz über absolute gleichmäßige Konvergenz innerhalb des Konvergenzradius	4
1.11 Satz über Differenzierbarkeit innerhalb des Konvergenzradius	5
1.12 Abelscher Grenzwertsatz	6
1.13 Beispiele für die Anwendung des Abelschen Grenzwertsatzes	7
1.14 Satz Taylorformel	8
1.15 Defintion Taylorreihe	9
1.16 Bemerkung über Eigenschaften von Taylorenthen	9
1.17 Beispiele für Taylorreihen	9
2 Metrische Räume, Topologie	10
2.1 Definition metrischer Raum	10
2.2 Beispiele für metrische Räume	10
2.3 Definition Kugel, Umgebung	12
2.4 Bemerkung über in Kugeln enthaltene Kugeln	13
2.5 Proposition über Eigenschaften metrischer Räume	13
2.6 Definition Topologie, topologischer Raum	14
2.7 Bemerkung über die von einer Metrik induzierte Topologie	14
2.8 Proposition und Definition: Jeder metrische Raum ist Hausdorffsch	14
2.9 Definition Rand, das Innere, der Abschluss	14
2.10 Proposition über Abgeschlossenheit/Offenheit von Rand etc.	15
2.11 Beispiele für offene und abgeschlossene Mengen	15
2.12 Definition von Folgenkonvergenz in metrischen Räumen	16
2.13 Definition: Cauchyfolgen in metrischen Räumen	17
2.14 Bemerkung: Jede konvergente Folge ist Cauchy	17
2.15 Definition von Vollständigkeit eines metrischen Raumes	17
2.16 Definition Banachraum	17
2.17 Proposition über abgeschlossene Teilmengen	17
2.18 Proposition: „Intervallschachtelungsprinzip“ in metrischen Räumen	17
2.19 Proposition über Konvergenz von Vektoren	18
2.20 Corollar: (\mathbb{R}^n, d_2) ist vollständig	18
3 Stetigkeit	19
3.1 Definition von Stetigkeit in metrischen Räumen	19
3.2 Proposition über unterschiedliche Charakterisierungen von Stetigkeit	19
3.3 Definition von Stetigkeit in topologischen Räumen	20
3.4 Proposition über Stetigkeit der Komposition in topologischen Räumen	20
3.5 Definition von punktweiser und gleichmäßiger Konvergenz in metrischen Räumen	20
3.6 Satz über Stetigkeit des Grenzwertes einer Funktionenfolge in metrischen Räumen	20

3.7 Beispiele	21
4 Kompaktheit	23
4.1 Definition Überdeckung	23
4.2 Definition Kompaktheit	23
4.3 Beispiele für kompakte Mengen	23
4.4 Proposition über die Eigenschaften einer kompakten Teilmenge	23
4.5 Proposition: Eine abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge ist kompakt	24
4.6 Bemerkung über kompakte Teilmengen	24
4.7 Satz von Heine-Borel	24
4.8 Satz (Bolzano-Weierstraß)	25
4.9 Satz: Das Bild einer kompakten Teilmenge ist kompakt	26
4.10 Korollar: Auf kompakten topl. Räumen nimmt stetiges f Minimum und Maximum an	26
4.11 Beispiel mit dist	26
4.12 Definition: Gleichmäßige Stetigkeit in metrischen Räumen	27
4.13 Satz: Ein f stetig mit kompaktem Definitionsbereich ist gleichmäßig stetig	27
5 Abbildungen von \mathbb{R} nach \mathbb{R}^n	28
5.1 Definition: Kurve	28
5.2 Bemerkung: Stetigkeit von $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$	28
5.3 Definition: Tangentialvektor, Geschwindigkeit und regulär	28
5.4 Bemerkung: Grenzwertprozess zur Bestimmung eines Tangentialvektors	28
5.5 Beispiele für Kurven	28
5.6 Definition Rektifizierbarkeit	29
5.7 Bemerkung über Stetigkeit und Rektifizierbarkeit	30
5.8 Lemma über stetig differenzierbare Kurven	30
5.9 Satz über Rektifizierbarkeit	30
5.10 Parametertransformation	31
5.11 Beispiel: Länge eines Zykloids	32
6 Abbildungen von \mathbb{R}^n nach \mathbb{R}	33
6.1 Definition: Partielle Differenzierbarkeit	33
6.2 Bemerkung zur partiellen Differenzierbarkeit	33
6.3 Definition: Vektorfeld und Divergenz	34
6.4 Beispiele zum partiellen Differenzieren	34
6.5 Definition: k -mal partiell differenzierbar	35
6.6 Satz über Reihenfolge des Differenzierens	36
6.7 Beispiele	37
7 Abbildungen von \mathbb{R}^m nach \mathbb{R}^n: Differenzierbarkeit	38
7.1 Definition: Differenzierbarkeit, Differential, Jacobimatrix	38
7.2 Bemerkung: Vergleich der Differenzierbarkeits-Begriffe	38
7.3 Beispiel mit einer symmetrischen Matrix	39
7.4 Satz: Differenzierbar impliziert stetig und partiell differenzierbare Koordinatenfunktionen .	39
7.5 Satz: Stetig partiell differenzierbar impliziert differenzierbar und stetig ($\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$)	40
7.6 Satz: Kettenregel	41
7.7 Beispiel	42
7.8 Definition: Richtungsableitung	43
7.9 Satz: Richtungsableitung ohne Differentialquotienten	43
7.10 Definition: Integral einer Funktion $[a, b] \rightarrow M_{n \times m}(\mathbb{R})$	43
7.11 Satz: Mittelwertsatz für vektorwertige Funktionen mehrerer Variablen	44

7.12 Notation für Multiindizes	45
7.13 Proposition	45
7.14 Satz: Taylorformel	46
7.15 Corollar: Taylorformel bis zum zweiten Summanden	47
7.16 Definition: Lokale Extrema, isolierte Extrema	47
7.17 Proposition: Der Gradient verschwindet in einem Extremum	48
7.18 Erinnerung an lineare Algebra	48
7.19 Satz über ein hinreichendes Kriterium für Extrema	48
7.20 Beispiel	49
8 Implizite Funktionen	50
8.1 Motivation	50
8.2 Satz	50
8.3 Satz über implizit definierte Funktionen	52
8.4 Corollar (Satz von der Umkehrabbildung)	54
8.5 Corollar (Lagrangemultiplikator)	55
8.6 Beispiel	56
9 Parameterabhängige Integrale	57
9.1 Proposition: Gleichmäßige Konvergenz durch Folge in R^m	57
9.2 Satz: Stetigkeit einer per Integral definierten Funktion	57
9.3 Proposition: Differentialquotient und partielle Ableitung	58
9.4 Satz: Funktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert über das Integral einer Abbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$	58
9.5 Satz von Fubini	58
10 Anwendungen	60
10.1 Physikalische (mechanische) Systeme	60
10.2 Satz (Euler-Lagrange-Gleichungen)	60
10.3 Ebenes Pendel	61
10.4 Kettenlinie	61
Index	A
Abbildungsverzeichnis	B

1 Funktionenfolgen und Potenzreihen

1.1 Definition

Sei M eine Menge und $f : M \rightarrow \mathbb{C}$, $f_n : M \rightarrow \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ Funktionen

- a) $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ punktweise, falls für jedes $x \in M$ $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$ gilt. D.h.

$$\forall x \in M \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

- b) $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ gleichmäßig, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall x \in M, n \geq N : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

- c) $\|f\|_{\infty, M} := \sup \{|f(x)| \mid x \in M\} \in [0, \infty)$

1.2 Bemerkung

(i) gleichmäßige Konvergenz \implies punktweise Konvergenz

(ii) $\|f\|_{\infty, M} < \infty \iff f$ beschränkt

(iii) $\|\cdot\|_{\infty, M}$ ist eine Norm auf $\{f : M \rightarrow \mathbb{C} \mid f$ beschränkt} (Übung)

V Vektorraum über \mathbb{K} . $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}_+$ ist eine **Norm** falls gilt:

(i) $\|v\| = 0 \iff v = 0$

(ii) $\|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$

(iii) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

(iv) $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ gleichmäßig $\iff \|f_n - f\|_{\infty, M} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ (Übung)

1.3 Beispiele

(i) f_n aus Abb. 1 konvergiert punktweise gegen 0, aber f_n konvergiert nicht gleichmäßig gegen 0, denn

$$\|f_n - 0\|_{\infty, M} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

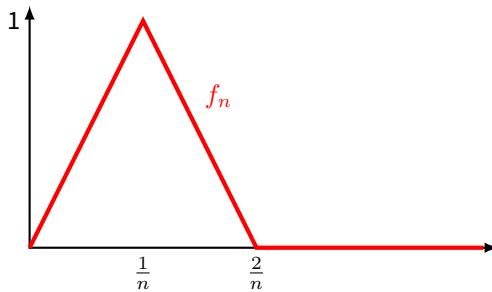


Abbildung 1: punktweise konvergierende Funktionenfolge

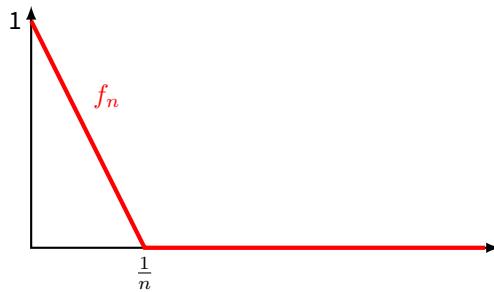
(ii) f_n aus Abb.2 konvergiert punktweise gegen f , wo

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x > 0 \\ 1, & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

f_n konvergiert nicht gleichmäßig gegen f (warum?)

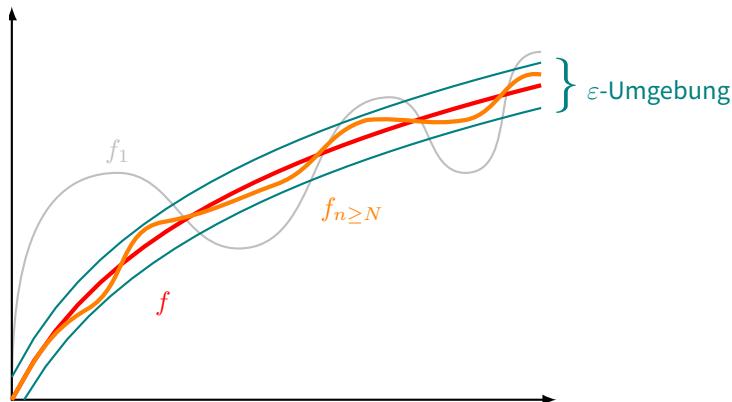
f_n sind stetig, f ist nicht stetig!

Abbildung 2: Folge stetiger Funktionen



(iii)

Abbildung 3: Veranschaulichung von gleichmäßiger Konvergenz



1.4 Satz

Sei $M \subset \mathbb{C}$ eine Menge und $f : M \rightarrow \mathbb{C}$, $f_n : M \rightarrow \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ Funktionen. Falls die f_n stetig sind und gleichmäßig gegen f konvergieren, so ist f stetig.

Beweis

Sei $x_0 \in M$. Sei $\varepsilon > 0$. $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ gleichmäßig $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall x \in M : |f_N(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. f_N ist stetig in x_0

$$\Rightarrow \exists \delta > 0 : |f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}, \text{ falls } |x - x_0| < \delta$$

Für $x \in M$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

□

1.5 Satz

Sei M eine Menge. Seien $f_k : M \rightarrow \mathbb{C}, k \in \mathbb{N}$ Funktionen mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_{\infty, M} < \infty$$

Dann konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ absolut und gleichmäßig gegen eine Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{C}$, d.h. $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ konvergiert absolut für jedes $x \in M$ und $\sum_{k=0}^n f_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ gleichmäßig.

Beweis

Für $x \in M$ gilt $|f_k(x)| \leq \|f_k\|_{\infty, M} \forall k \in \mathbb{N}$. Nach Majorantenkriterium konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ absolut. Definiere $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ durch $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \in \mathbb{C}$. Sei $\varepsilon > 0$.

$$\exists N \in \mathbb{N} : \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_{\infty, M} < \varepsilon \text{ falls } n \geq N$$

Für $x \in M$ und $n \geq N$ gilt dann

$$\left| -\sum_{k=0}^n f_k(x) + f(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_{\infty, M} < \varepsilon \quad \square$$

1.6 Beispiel

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2}$ konvergiert absolut und gleichmäßig auf \mathbb{R} , denn

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\| \frac{\cos(kx)}{k^2} \right\|_{\infty, \mathbb{R}} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$$

1.7 Satz

Seien $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ stetig. f_n konvergiere gleichmäßig gegen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx \left(= \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx \right)$$

Beweis

Nach 1.4 ist f stetig, also integrierbar. Es gilt

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b f_n(x) dx \right| &= \left| \int_a^b (f(x) - f_n(x)) dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)| dx \\ &\leq \int_a^b \|f - f_n\|_{\infty, [a,b]} dx \\ &= \|f - f_n\|_{\infty, [a,b]} (b-a) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

□

1.8 Satz

Seien $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ stetig differenzierbar. f_n konvergiere gegen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und f'_n konvergiere gleichmäßig gegen ein $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Dann ist f stetig differenzierbar und es gilt

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = g(x) \quad \text{für } x \in [a, b]$$

d.h.

$$\frac{d}{dx} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right) (x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{df_n}{dx} (x)$$

Beweis

Nach Satz 1.4 ist g stetig, also integrierbar. Für $x \in [a, b]$ gilt

$$f(x) - f(a) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f_n(x) - f_n(a) = \int_a^x f'_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^x g(t) dt$$

⇒ **Hauptsatz**

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t) dt \quad \text{also} \quad f'(x) = g(x) \quad \text{für } x \in [a, b]$$

1.9 Definition

Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}, z_0 \in \mathbb{C}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

heißt **Potenzreihe** mit Mittelpunkt z_0 und Koeffizienten $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

$$r := \sup \left\{ |z - z_0| \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \text{ konvergiert}, z \in \mathbb{C} \right\} \in [0, \infty]$$

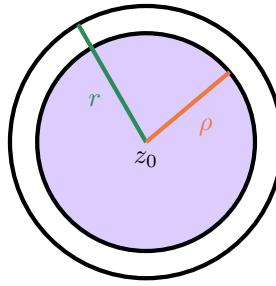
heißt **Konvergenzradius** der Potenzreihe.

1.10 Satz

Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ habe den Konvergenzradius $r > 0$. Sei $0 < \rho < r$. Dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ absolut gleichmäßig auf

$$\overline{B}(z_0, \rho) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq \rho\}$$

D.h. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ konvergiert absolut für $z \in \overline{B}(z_0, \rho)$ und $\sum_{n=0}^k a_n (z - z_0)^n$ konvergiert gleichmäßig für $k \rightarrow \infty$. (siehe auch 1.5)

**Abbildung 4:** Veranschaulichung von 1.10 in der komplexen Ebene**Beweis**

$$\rho < r = \sup\{|z - z_0| \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \text{ konvergiert}\}$$

$$\Rightarrow \exists z_1 \in \mathbb{C} \text{ mit } |z_1 - z_0| > \rho \text{ und } \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_1 - z_0)^n \text{ konvergiert}$$

$\Rightarrow \exists K \in \mathbb{R}_+$ mit $|a_n(z_1 - z_0)^n| \leq K$ für $n \in \mathbb{N}$. Für $z \in \overline{B}(z_0, \rho)$ gilt nun

$$\begin{aligned} |a_n(z - z_0)^n| &= |a_n(z_1 - z_0)^n| \cdot \frac{|z - z_0|^n}{|z_1 - z_0|^n} \\ &\leq K \cdot \frac{\rho^n}{|z_1 - z_0|^n} \\ &= K \cdot \theta^n \quad \text{mit } \theta := \frac{\rho}{|z_1 - z_0|} < 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \|a_n(z - z_0)^n\|_{\infty, \overline{B}(z_0, \rho)} \leq K \cdot \theta^n$. Nach dem Majorantenkriterium folgt dann

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n(z - z_0)^n\|_{\infty, \overline{B}(z_0, \rho)} < \infty$$

Satz 1.5 $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ konvergiert absolut und gleichmäßig auf $\overline{B}(z_0, \rho)$. \square

1.11 Satz

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$. Dann ist $f : (x_0 - r, x_0 + r) \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ unendlich oft differenzierbar; es gilt

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (x - x_0)^{n-1} \quad \text{und} \quad a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

Ableitung erfolgt gliedweise

Beweis

Sei $\bar{x} \in (x_0 - r, x_0 + r)$. Wähle $0 < \rho < r$ mit $\bar{x} \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$. Wähle $x_1 \in \mathbb{R}$ mit $\rho < |x_0 - x_1| < r$. Sei $K \in \mathbb{R}$ wie im Beweis 1.10, d.h. mit $|a_n(x_1 - x_0)^n| \leq K, n \in \mathbb{N}$. Dann gilt für $x \in \overline{B}(x_0, \rho)$

$$\begin{aligned} |n \cdot a_n(x - x_0)^{n-1}| &= \frac{|n \cdot a_n(x_1 - x_0)^n|}{|x_1 - x_0|} \cdot \frac{|x - x_0|^{n-1}}{|x_1 - x_0|^{n-1}} \\ &\leq \frac{n \cdot K}{\rho} \left(\frac{\rho}{|x_1 - x_0|} \right)^{n-1} =: \theta^{n-1} < 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \|n \cdot a_n(x - x_0)^{n-1}\|_{\infty, \overline{B}(x_0, \rho)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot K}{\rho} \theta^{n-1} < \infty \text{ (Quotientenkriterium)}$$

Mit Satz 1.5 folgt: $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n(x - x_0)^{n-1}$ konvergiert absolut und gleichmäßig auf $[x_0 - \rho, x_0 + \rho]$. Mit Satz 1.8 folgt weiter

$$\frac{d}{dx} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} (a_n(x - x_0)^n) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n(x - x_0)^{n-1}$$

Rest: Induktion und Einsetzen ($x \rightsquigarrow x_0$). □

1.12 Satz (Abelscher Grenzwertsatz)

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Wenn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ für alle $x \in [0, 1]$ und ist stetig auf $[0, 1]$.

Beweis

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hat Konvergenzradius $r \geq 1$, denn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n 1^n$ konvergiert. Aus Satz 1.10 folgt: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergiert gleichmäßig auf $[0, 1 - \gamma]$ für jedes $\gamma > 0$.

$\Rightarrow f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ist wohldefiniert und $f|_{[0, 1-\gamma]}$ ist stetig für jedes $\gamma > 0$. Dann gilt auch $f|_{[0, 1]}$ ist stetig.

Es bleibt zu zeigen: f ist stetig in 1. Setze $s_k := \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$ für $k \geq -1$. Dann $s_{-1} = f(1)$ und $s_k - s_{k-1} = \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n - \sum_{n=k}^{\infty} a_n = -a_k$, $k \in \mathbb{N}$. Außerdem gilt: $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = 0$ (denn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert). Also existiert $S \in \mathbb{R}_+^*$ mit $|s_k| \leq S$, $k \in \mathbb{N}$.

$$\Rightarrow \left| \sum_{k=0}^{\infty} s_k x^k \right| \stackrel{\text{Majorantenkrit.}}{\leq} \sum_{k=0}^{\infty} S |x|^k = S \cdot \sum_{k=0}^{\infty} |x|^k \stackrel{\text{geom. Reihe}}{<} \infty \quad \text{für } |x| < 1$$

Dann gilt für $|x| < 1$:

$$\begin{aligned} (1-x) \left(\sum_{k=0}^{\infty} s_k x^k \right) &= \sum_{k=0}^{\infty} s_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} s_k x^{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} s_k x^k - \sum_{k=1}^{\infty} s_{k-1} x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} s_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} s_{k-1} x^k + s_{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (\underbrace{s_k - s_{k-1}}_{-a_k}) - a_k x^k + \underbrace{s_{-1}}_{f(1)} \\ &= -f(x) + f(1) \end{aligned}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$, O.E. $\varepsilon \leq 1$. Wähle $K \in \mathbb{N}^*$ so dass $|s_k| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ für $k \geq K$ und setze $\delta := \frac{\varepsilon}{2S \cdot K}$. Für $x \in (1-\delta, 1)$

gilt dann

$$\begin{aligned}
 |f(1) - f(x)| &= \left| (1-x) \sum_{k=0}^{\infty} s_k x^k \right| \leq (1-x) \sum_{k=0}^{\infty} |s_k| x^k \\
 &= (1-x) \left(\sum_{k=0}^{K-1} |s_k| x^k + \sum_{k=K}^{\infty} |s_k| x^k \right) \\
 &\leq (1-x) \left(K \cdot S + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=K}^{\infty} x^k \right) \\
 &\leq (1-x) \left(K \cdot S + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^{\infty} x^k \right) \\
 &= (1-x) K \cdot S + \frac{\varepsilon}{2} (1-x) \sum_{k=0}^{\infty} x^k \\
 &= (1-x) K \cdot S + \frac{\varepsilon}{2} \\
 &< \delta \cdot K \cdot S + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2SK} \cdot K \cdot S + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
 \end{aligned}
 \quad \square$$

1.13 Beispiele

(i) Für $-1 < x \leq 1$ gilt

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \mp \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$$

Insbesondere $\ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \mp \dots$

Beweis

Für $|x| < 1$ gilt

$$\ln(1+x) = \ln(1+x) - \ln(1+0) = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \int_0^x \frac{1}{1-(-t)} dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n \right) dt \quad \text{da } t \leq 1$$

Nach Satz 1.10 konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n$ gleichmäßig auf $[-|x|, |x|]$ (Konvergenzradius ≤ 1)
 Nach Satz 1.7 gilt für $|x| < 1$

$$\begin{aligned}
 \ln(1+x) &= \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n \right) dt = \int_0^x \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k (-1)^n t^n \right) dt \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\int_0^x \left(\sum_{n=0}^k (-1)^n t^n \right) dt \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=0}^k (-1)^n \int_0^x t^n dt \right) \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\left| \sum_{n=0}^k (-1)^n \frac{1}{n+1} t^{n+1} \right|_0^x \right) \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=0}^k (-1)^n \frac{1}{n+1} x^{n+1} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}
 \end{aligned}$$

Für $x = 1$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ konvergiert $\xrightarrow{\text{Satz 1.12}} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$ ist stetig auf $[0, 1]$ aber $\ln(1+x)$ ist ebenfalls stetig auf $[0, 1]$ und $f(x) = \ln(1+x)$ auf $[0, 1]$. Dann gilt auch

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \mp \dots = f(1) = \ln(1+1) = \ln(2)$$

□

(ii) Für $|x| \leq 1$ gilt

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \mp \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

Insbesondere $\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \mp \dots$

Beweis

Für $|x| < 1$ gilt nach Analysis I, 13.16(v):

$$\begin{aligned} \arctan(x) &= \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^x \frac{1}{1-(-t^2)} dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} \right) dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left| \frac{1}{2n+1} t^{2n+1} \right|_0^x \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} \end{aligned}$$

Für $x = 1$ gilt: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ konvergiert $\xrightarrow{1.12} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ ist stetig auf $[0, 1]$

$$a_m = \begin{cases} 0, & \text{falls } m \text{ gerade} \\ \frac{(-1)^n}{2n+1}, & \text{falls } m = 2n+1 \text{ ungerade} \end{cases} \quad f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$$

aber $\arctan(x)$ ist auch stetig auf $[0, 1]$ und $f(x) = \arctan(x)$ auf $[0, 1]$. Daher gilt auch

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \mp \dots = f(1) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

Für $x = -1$ gilt: $f(-1) = -f(1) = -\arctan(1) = \arctan(-1)$. (vgl. Anal, Beispiel 7.8)

□

1.14 Satz (Taylorformel)

Sei I ein Intervall. $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ $(n+1)$ -mal stetig differenzierbar. Dann gilt für $x, x_0 \in I$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_{n+1}(x)$$

wo

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt$$

Außerdem existiert ein ξ zwischen x und x_0 mit

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

Beweis

I.A. ($n = 0$): $f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^x f'(t) dt$ nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

I.S. ($n \rightarrow n + 1$): (*) gelte für ein $n \in \mathbb{N}$. Partielle Integration liefert

$$\begin{aligned} R_{n+1}(x) &= \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x \underbrace{(x-t)^n}_{u'(t)} \underbrace{f^{(n+1)}(t)}_{v(t)} dt \\ &= \left[\frac{1}{n!} \cdot \frac{(-1)}{n+1} (x-t)^{n+1} f^{(n+1)}(t) \right]_{x_0}^x - \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x \frac{(-1)}{n+1} (x+t)^{n+1} f^{(n+2)}(t) dt \\ &= \frac{1}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} f^{(n+1)}(x_0) + \frac{1}{(n+1)!} \int_{x_0}^x (x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t) dt \\ &= \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} + R_{n+2}(x) \end{aligned}$$

$\Rightarrow (*)$ für $n+1 \in \mathbb{N}$

Zweiter Teil $g(t) := (x-t)^n$ wechselt nicht das Vorzeichen zwischen x und x_0 .

Mittelwertsatz d. Integralrechnung $\Rightarrow \exists \xi$ zwischen x und x_0 mit

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x \underbrace{(x-t)^n}_g f^{(n+1)}(t) dt &= \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi) \int_{x_0}^x (x-t)^n dt \\ &= f^{(n+1)}(\xi) \frac{1}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} \end{aligned} \quad \square$$

1.15 Definition

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar, $x_0 \in I$.

$$T_f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

heißt **Taylorreihe** von f mit Entwicklungspunkt x_0 .

1.16 Bemerkung

- (i) Der Konvergenzradius von T_f ist nicht notwendig > 0
- (ii) Auch wenn T_f konvergiert, gilt nicht immer $T_f(x) = f(x)$
- (iii) $T_f(x) = f(x)$ genau dann, wenn $R_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$
- (iv) Falls $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ gilt für $x \in I$, so ist $T_f(x) = f(x)$.
(folgt aus Satz 1.11, denn $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$)

1.17 Beispiel

- (i) $\exp(x) = T_{\exp}(x)$
- (ii) $\sin(x) = T_{\sin}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $\cos(x) = T_{\cos}(x)$

2 Metrische Räume, Topologie

2.1 Definition

Sei X eine Menge. Eine Metrik d auf X ist eine Abbildung $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ mit

- (i) $d(x, y) = 0 \iff x = y, x, y \in X$
- (ii) $d(x, y) = d(y, x), x, y \in X$
- (iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), x, y, z \in X$

(X, d) heißt **metrischer Raum**.

2.2 Beispiele

- (i) (\mathbb{K}, d) mit $d(x, y) := |x - y|$
- (ii) „französische Eisenbahnmetrik“: $d(x, y) := \text{Strecke}(x \rightarrow \text{Paris}) + \text{Strecke}(\text{Paris} \rightarrow y)$

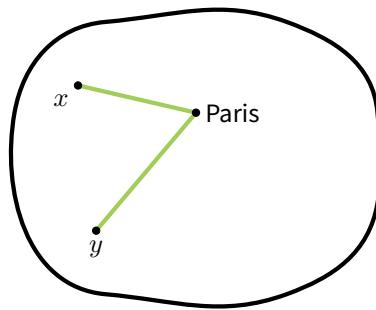


Abbildung 5: eine exakte Darstellung von Frankreich ...

(iii) (X, d) metrischer Raum, $A \subset X$. Dann ist $(A, d|_{A \times A})$ wieder ein metrischer Raum. Wir schreiben oft auch (A, d) .

(iv) $(V, \|\cdot\|)$ normierter Vektorraum, dann ist (V, d) ein metrischer Raum mit

$$d(x, y) := \|x - y\|$$

(v) $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_{\max})$ mit $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$

$$\|\underline{x}\|_{\max} := \max \{|x_1|, \dots, |x_n|\}$$

ist normierter Raum

(Übung)

(vi) $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_1)$ mit

$$\|\underline{x}\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$$

ist normierter Raum

(Übung)

(vii) $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$ mit

$$\|\underline{x}\|_2 := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

ist normierter Raum:

1.

$$\|\underline{x}\|_2 = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n |x_i|^2 = 0 \Leftrightarrow |x_1| = \dots = |x_n| = 0 \Leftrightarrow x_1 = \dots = x_n = 0 \Leftrightarrow \underline{x} = 0$$

2.

$$\|\lambda \underline{x}\|_2 = |\lambda| \cdot \|\underline{x}\|_2, \lambda \in \mathbb{K}, \underline{x} \in \mathbb{K}^n$$

3. \triangle -Ungleichung:A. $0 \neq \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{K}^n$ mit $\|\underline{u}\|_2 = \|\underline{v}\|_2 = 1$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &\leq \sum_{i=1}^n (|u_i| - |v_i|)^2 = \sum_{i=1}^n |u_i|^2 - 2 \sum_{i=1}^n |u_i| \cdot |v_i| + \sum_{i=1}^n |v_i|^2 = 1 - 2 \sum_{i=1}^n |u_i| \cdot |v_i| + 1 \\ &\Rightarrow \sum_{i=1}^n |u_i| \cdot |v_i| \leq 1 \end{aligned}$$

B. $0 \neq \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{K}^n$ beliebig. \Rightarrow für $\underline{u} := \frac{1}{\|\underline{x}\|_2} \cdot \underline{x}, \underline{v} := \frac{1}{\|\underline{y}\|_2} \cdot \underline{y}$ gilt

$$\|\underline{u}\|_2 = \|\underline{v}\|_2 = 1 \Rightarrow \left| \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\|\underline{x}\|_2} \frac{y_i}{\|\underline{y}\|_2} \right| \leq \sum_{i=1}^n \frac{|x_i|}{\|\underline{x}\|_2} \frac{|y_i|}{\|\underline{y}\|_2} \leq 1$$

Cauchy-Schwarz-Ungleichung (trivial für $\underline{x} = 0$ oder $\underline{y} = 0$):

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \|\underline{x}\|_2 \|\underline{y}\|_2$$

C.

$$\begin{aligned} \|\underline{x} + \underline{y}\|_2^2 &= \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^2 \leq \sum_{i=1}^n |x_i|^2 + 2|x_i||y_i| + |y_i|^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^n |x_i|^2 + 2 \cdot \|\underline{x}\|_2 \|\underline{y}\|_2 + \sum_{i=1}^n |y_i|^2 \\ &= \|\underline{x}\|_2^2 + 2 \cdot \|\underline{x}\|_2 \|\underline{y}\|_2 + \|\underline{y}\|_2^2 \\ &= (\|\underline{x}\|_2 + \|\underline{y}\|_2)^2 \Rightarrow \|\underline{x} + \underline{y}\|_2 < \|\underline{x}\|_2 + \|\underline{y}\|_2 \end{aligned}$$

(viii) $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)$ mit $\|\underline{x}\|_p := (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ für $1 \leq p < \infty$ ist ein normierter Raum (Übung?)(ix) $(l([0, 1]), \|\cdot\|_p)$ mit $\|f\|_p := (\int_0^1 |f(x)|^p)^{\frac{1}{p}}$ (Übung)

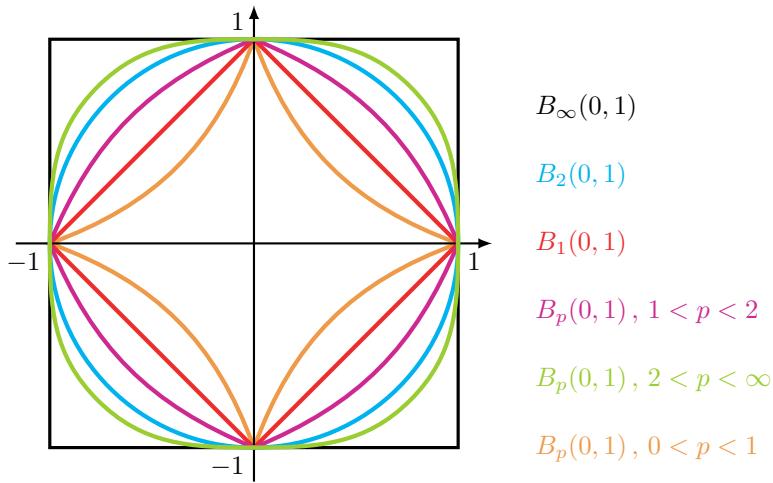


Abbildung 6: zu 2.2 (x) : Geometrische Interpretation verschiedener Normen

(x) Betrachte $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)$ für $1 \leq p \leq \infty$ in Abbildung 6:

$$B(0, r) := \left\{ \underline{x} \in \mathbb{K}^n \mid \|\underline{x}\|_p < r \right\}$$

(xi) Sei X eine Menge, dann definiere

$$d(x, y) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x = y \\ 1, & \text{falls } x \neq y \end{cases}$$

Dies ist die **diskrete Metrik** auf X .

2.3 Definition

Sei (X, d) ein metrischer Raum.

- (i) $B(x, r) := \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$ heißt **offene Kugel** von x mit Radius r .
- (ii) $\overline{B}(x, r) := \{y \in X \mid d(x, y) \leq r\}$ heißt **abgeschlossene Kugel** von x mit Radius r .
- (iii) $U \subset X$ heißt **Umgebung** von $x \in X$, falls gilt:

$$\exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subset U$$
- (iv) $U \subset X$ heißt **offen**, falls gilt:

$$\forall x \in U \ \exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subset U$$

(d.h. U ist eine Umgebung für jedes $x \in U$)
- (v) $A \subset X$ ist abgeschlossen, falls $X \setminus A$ offen ist.

2.4 Bemerkung

$B(x, r)$ ist offen:

Zu zeigen: $\forall y \in B(x, r) \exists \varepsilon > 0 : B(y, \varepsilon) \subset B(x, r)$

Sei also $y \in B(x, r)$ gegeben. Setze $\varepsilon := r - d(x, y) > 0$, nach Definition von $B(x, r)$. Es gilt $B(y, \varepsilon) \subset B(x, r)$, denn:

$$\begin{aligned} z \in B(y, \varepsilon) &\Rightarrow d(z, y) < \varepsilon \\ &\Rightarrow d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x) < \varepsilon + d(y, x) = r \end{aligned}$$

Also $z \in B(x, r)$

□

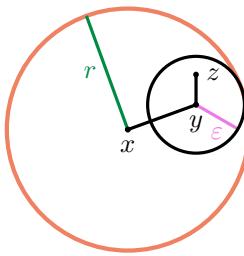


Abbildung 7: Veranschaulichung des Vorgehens in 2.4

2.5 Proposition

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann gilt:

- (i) \emptyset, X sind offen.
- (ii) U, V offen $\Rightarrow U \cap V$ ist offen.
- (iii) Für jede Familie $(U_i)_{i \in I}$ von offenen Mengen gilt

$$\bigcup_{i \in I} U_i \text{ ist offen}$$

Beweis

- (i) $\forall x \in \emptyset \exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subset \emptyset$ gilt trivialerweise \emptyset ist offen.
Für $x \in X$ wähle $\varepsilon = 1$, dann gilt immer

$$B(x, \varepsilon) \subset X$$

$\Rightarrow X$ ist offen.

- (ii) Seien U, V offen. Sei $x \in U \cap V$. U, V offen $\Rightarrow \exists \varepsilon_U, \varepsilon_V > 0$ mit:

$$B(x, \varepsilon_U) \subset U, B(x, \varepsilon_V) \subset V$$

Setze $\varepsilon := \min\{\varepsilon_U, \varepsilon_V\} > 0$

$$\Rightarrow B(x, \varepsilon) \subset \underbrace{B(x, \varepsilon_U) \cap B(x, \varepsilon_V)}_{\subset U \cap V}$$

- (iii) Sei $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$, dann ist $x \in U_{\bar{i}}$ für ein $\bar{i} \in I$. $U_{\bar{i}}$ offen

$$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subset U_{\bar{i}} \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$$

□

2.6 Definition

Sei X eine Menge. Ein System $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen von X heißt **Topologie** auf X , falls gilt:

- (i) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
- (ii) $U, V \in \mathcal{T} \implies U \cap V \in \mathcal{T}$
- (iii) $(U_i)_{i \in I} \subset \mathcal{T} \implies \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$

(X, \mathcal{T}) heißt **topologischer Raum**. Die Elemente von \mathcal{T} heißen offene Teilmengen von X .
 $A \subset X$ heißt abgeschlossen, falls $X \setminus A \in \mathcal{T}$. $Y \subset X$ heißt **Umgebung** von $x \in X$, falls gilt

$$\exists U \in \mathcal{T} : x \in U \subset Y$$

2.7 Bemerkung

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Wir definieren:

$$\mathcal{T}_d := \{U \subset X \mid U \text{ ist offen im Sinne von (2.3)(iv)}\}$$

nach Proposition 2.5 ist \mathcal{T}_d eine Topologie auf X , die von d induzierte Topologie.

2.8 Proposition und Definition

Jeder metrische Raum ist **Hausdorffsch**, d.h.

$$\forall x, y \in X, x \neq y : \exists U, V \subset X \text{ offen} : x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset$$

Beweis

Gegeben $x \neq y \in X$. Dann ist $\frac{d(x,y)}{2} > 0$. Setze $U := B(x, \frac{d(x,y)}{2}), V := B(y, \frac{d(x,y)}{2})$. Dann gilt $x \in U, y \in V$. Falls $z \in U \cap V$, so gilt

$$d(x, y) \leq \underbrace{d(x, z)}_{< \frac{d(x,y)}{2}} + \underbrace{d(z, y)}_{< \frac{d(x,y)}{2}} < 2 \cdot \frac{d(x, y)}{2} = d(x, y)$$

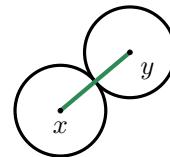


Abbildung 8: Veranschaulichung des Vorgehens im Beweis von 2.8

2.9 Definition

Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum. $Y \subset X$. Wir definieren den **Rand**

$$\partial Y := \{x \in X \mid \text{für jede Umgebung } U \text{ von } x \text{ gilt: } U \cap Y \neq \emptyset \text{ und } U \cap (X \setminus Y) \neq \emptyset\}$$

$\overset{\circ}{Y} := Y \setminus \partial Y$ heißt das **Innere** von Y

$\overline{Y} := Y \cup \partial Y$ heißt der **Abschluss** von Y

2.10 Proposition

Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum. $Y \subset X$. Dann gilt:

- (i) $\overset{\circ}{Y}$ ist offen
- (ii) \overline{Y} ist abgeschlossen
- (iii) ∂Y ist abgeschlossen

Beweis

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & y \in \overset{\circ}{Y} \Rightarrow \exists U_y \text{ offen mit } (U_y \cap Y = \emptyset \text{ oder } U_y \cap (X \setminus Y) = \emptyset) \\ & \Rightarrow U_y \subset Y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \Rightarrow \overset{\circ}{Y} \subset \bigcup_{y \in \overset{\circ}{Y}} \underbrace{U_y}_{\text{offen}} \subset Y \\ & y' \in \bigcup_{y \in \overset{\circ}{Y}} U_y \subset Y \Rightarrow y' \notin \partial Y \\ & \Rightarrow \bigcup_{y \in \overset{\circ}{Y}} U_y \subset Y \setminus \partial Y = \overset{\circ}{Y} \Rightarrow \overset{\circ}{Y} \subset \bigcup_{y \in \overset{\circ}{Y}} U_y \subset \overset{\circ}{Y} \Rightarrow \overset{\circ}{Y} = \bigcup_{y \in \overset{\circ}{Y}} U_y \text{ offen} \end{aligned}$$

- (ii) Übung
- (iii) Übung

2.11 Beispiele

$$\text{(i) } (a, b) \text{ ist offen in } \mathbb{R} \text{ (mit Standardmetrik } d(x, y) = |x - y|). \text{ Für } x \in (a, b) \text{ setze}$$

$$\varepsilon := \min\{x - a, b - x\} > 0$$

Dann $B(x, \varepsilon) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset (a, b)$. $\Rightarrow (a, b)$ ist offen im Sinne von 2.3.

(a, ∞) und $(-\infty, b)$ sind ebenfalls offen. (warum?)

alternativ:

$$(a, \infty) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \underbrace{(a, a+k)}_{\text{offen}}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii) } [a, b] \subset \mathbb{R} & \text{ ist nicht offen (für } a < b\text{).} \\ & \text{Für } a \in [a, b] \text{ existiert kein } \varepsilon > 0 \text{ mit } B(a, \varepsilon) \subset [a, b]. \text{ (Denn } a - \frac{\varepsilon}{2} \notin [a, b]\text{)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(iii) } [a, b] \subset \mathbb{R} & \text{ ist nicht offen. Siehe (ii)} \\ [a, b] & \text{ ist abgeschlossen:} \end{aligned}$$

$$\mathbb{R} \setminus [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, \infty) \text{ offen}$$

$$\text{(iv) } (a, b] \subset \mathbb{R} \text{ (für } a < b\text{) ist nicht abgeschlossen. Betrachte: } \mathbb{R} \setminus (a, b] \text{ und argumentiere wie in (ii)}$$

- (v)
 - $\mathbb{N}, \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ sind abgeschlossen (warum?)
 - $\{\frac{1}{n} \mid n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{0\}$ ist abgeschlossen (warum?)
 - $\{\frac{1}{n} \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ ist weder offen noch abgeschlossen (warum?)
- (vi) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ist weder offen noch abgeschlossen. (warum?)

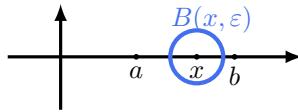


Abbildung 9: Veranschaulichung von 2.11 (vii)

- (vii) $(a, b) \subset \mathbb{C}$ (mit Standardmetrik $d(x, y) = |x - y|$) ist nicht(!) offen: $x + \underbrace{\frac{\varepsilon}{2}i}_{\in (a, b)} \in B(x, \varepsilon)$
- (viii) Betrachte $[a, b]$ als metrischen Unterraum von \mathbb{R} . Dann ist $[d, b) \subset [a, b]$ abgeschlossen und $[a, d) \subset [a, b]$ offen.
- (ix) allgemeiner: (X, \mathcal{T}) topologischer Raum, $Y \subset X$, dann ist (Y, \mathcal{T}_Y) ein topologischer Raum mit
- $$\mathcal{T}_Y := \{U \cap Y \mid U \in \mathcal{T}\} = \{V \subset Y \mid \exists U \in \mathcal{T} : V = U \cap Y\}$$
- (vii) und (viii) zeigen:
- $$U \subset Y \text{ offen in } Y \not\Rightarrow U \text{ offen in } X$$
- aber für $U \subset Y$ gilt:
- $$U \text{ offen in } Y \Leftarrow U \text{ offen in } X$$
- Schreibweise: $U \underset{\text{offen}}{\subset} Y$ und $U \underset{\text{offen}}{\subset} X$
- (x) $(X, \mathcal{P}(X))$ ist topologischer Raum für jede Menge X ; $\mathcal{P}(X)$ wird induziert durch d_{diskret} , die diskrete Metrik.
- (xi) Sei X eine Menge, dann ist $\{X, \emptyset\}$ eine Topologie; im Allgemeinen nicht induziert von einer Metrik.
- (xii) \mathbb{C} mit Standardmetrik, dann:

$$\partial B(0, 1) = S^1 = \{z \mid |z| = 1\}$$

$$\overline{B(0, 1)}_{B(0, 1) \cup \partial B(0, 1)} = \overline{B}(0, 1)_{\{z \mid |z| \leq 1\}}$$

(xiii) \mathbb{R} mit Standardmetrik, dann:

$$\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}, \quad \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}, \quad \overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \emptyset$$

2.12 Definition

Sei (X, d) ein metrischer Raum, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ eine Folge. Wir sagen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen $x \in X$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : d(x, x_n) < \varepsilon$$

äquivalent:

$$d(x, x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Zu jeder Umgebung U von x existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in U$ für $n \geq N$

2.13 Definition

Sei (X, d) ein metrischer Raum, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ heißt **Cauchyfolge**, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq N : d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

2.14 Bemerkung

Jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge.

Beweis

Sei $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$, sodass für $n \geq N$ gilt $d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$. Für $n, m \geq N$ gilt:

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

□

2.15 Definition

Ein metrischer Raum heißt **vollständig**, falls in ihm jede Cauchyfolge konvergiert.

2.16 Definition

Ein vollständig normierter Vektorraum heißt **Banachraum**.

2.17 Proposition

Sei (X, d) ein metrischer Raum, $A \subset X$. Dann sind äquivalent:

(i) $A \underset{\text{abgeschl.}}{\subset} X$

(ii) Für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$, welche in X konvergiert, gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in A$.

Beweis

(i) \Rightarrow (ii): Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ konvergent in X , sei $\bar{x} := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in X$. Falls $\bar{x} \in X \setminus A \underset{\text{offen}}{\subset} X$, so existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in X \setminus A$ falls $n \geq N$ (benutzt: $\star\star\star$ aus 2.12) $\not\vdash$

(ii) \Rightarrow (i) Sei $x \in X \setminus A$. Zu zeigen: $\exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$.

Falls nicht, so existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in B(x, \frac{1}{n+1}) \cap A$. Dann folgt $x_n \in A$, $d(x, x_n) < \frac{1}{n+1}$.

Wir haben jetzt $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ mit $d(x, x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, also $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Nach Voraussetzung (ii) gilt: $x \in A \not\vdash$

□

2.18 Proposition

Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum. Sei $A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \dots$ eine absteigende Folge nichtleerer abgeschlossener Teilmengen mit $\text{diam}(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ (wo $\text{diam } A_n := \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A_n\}$). Dann gibt es genau einen Punkt in $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$. (vgl. mit Intervallschachtelungsprinzip)

Beweis

Für $n \in \mathbb{N}$ wähle $x_n \in A_n$. Falls $\varepsilon > 0$, wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $\text{diam}(A_n) < \varepsilon$, falls $n \geq N$. Falls $n, m \geq N$, so gilt:

$$d(x_n, x_m) \leq \text{diam}(A_N) < \varepsilon$$

$\Rightarrow (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist Cauchyfolge. Da (X, d) vollständig: $\bar{x} := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in X$ existiert. Für $k \in \mathbb{N}$ gilt $(x_n)_{n \in \mathbb{N}, n > k} \subset A_k$. Dann folgt mit 2.17 $\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in A_k$. Also gilt $\bar{x} \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Sei nun $y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ ein weiterer Punkt.

$$\begin{aligned} \Rightarrow d(\bar{x}, y) &\leq \text{diam } A_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ \Rightarrow d(\bar{x}, y) &= 0 \Rightarrow \bar{x} = y \end{aligned}$$

□

2.19 Proposition

Betrachte (\mathbb{R}^n, d_2) (d_2 induziert durch $\|\cdot\|_2$). Sei $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ und $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$, $\underline{x}_k = (x_{k,1}, \dots, x_{k,n})$. Dann gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \underline{x}_k = \underline{x} \iff \lim_{k \rightarrow \infty} x_{k,i} = x_i \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

Beweis

" \Rightarrow ": Für $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt:

$$|x_{k,i} - x_i| = \left(|x_{k,i} - x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{j=1}^n |x_{k,j} - x_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|\underline{x}_k - \underline{x}\|_2 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

" \Leftarrow ": Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Für $i \in \{1, \dots, n\}$ existiert $N_i \in \mathbb{N}$ mit: $|x_{k,i} - x_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$, falls $k \geq N_i$. Setze $N := \max\{N_i \mid i = 1, \dots, n\}$, dann gilt für $k \geq N$:

$$d_2(\underline{x}, \underline{x}_k) = \left(\sum_{i=1}^n |x_{k,i} - x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon^2}{n} \right)^{\frac{1}{2}} = (\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} = \varepsilon \quad \square$$

2.20 Corollar

(\mathbb{R}^n, d_2) ist vollständig.

Beweis

Sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ Cauchyfolge. Es gilt

$$\|x_k - x_l\|_2 \geq |x_{k,i} - x_{l,i}|$$

Sei $i = 1, \dots, n$, daher ist $(x_{k,i})_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ Cauchyfolge, also konvergent $\xrightarrow{2.19} (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ konvergent. □

3 Stetigkeit

3.1 Definition

Seien (X, d_X) , (Y, d_Y) metrische Räume, $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. f heißt stetig in $\bar{x} \in X$, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in B_{d_X}(\bar{x}, \delta) : f(x) \in B_{d_Y}(f(\bar{x}), \varepsilon)$$

D.h. $d_X(x, \bar{x}) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(\bar{x})) < \varepsilon$
 f heißt stetig falls gilt: f ist stetig in jedem Punkt $x \in X$.

3.2 Proposition

Seien (X, d_X) , (Y, d_Y) metrische Räume, $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent:

- (i) f ist stetig in $\bar{x} \in X$
- (ii) Für jede Umgebung V von $f(\bar{x})$ existiert eine Umgebung U von \bar{x} mit $f(U) \subset V$
- (iii) Für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\bar{x})$.
 d.h. $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = f(\bar{x})$

Außerdem sind äquivalent:

- (a) f ist stetig
- (b) $\forall V \in \mathcal{T}_{d_Y} : f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_{d_X}$
- (c) $\forall A \subseteq Y : f^{-1}(A) \text{ abgeschl.}$

Beweis

(i) \Rightarrow (ii): Sei V Umgebung von $f(\bar{x})$. Dann:

$$\exists \varepsilon > 0 : B_{d_Y}(f(\bar{x}), \varepsilon) \subset V$$

Da f stetig in \bar{x} : $\exists \delta > 0 : \forall x \in B_{d_X}(\bar{x}, \delta) : f(x) \in B_{d_Y}(f(\bar{x}), \varepsilon)$. Setze $U := B_{d_X}(\bar{x}, \delta)$, dann gilt:

$$f(U) \subset B_{d_Y}(f(\bar{x}), \varepsilon) \subset V \quad \square$$

(ii) \Rightarrow (iii): Sei $(x_n)_{\mathbb{N}} \subset X$ eine Folge mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$. Zu zeigen: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\bar{x})$. Sei $\varepsilon > 0$. Setze $V := B_{d_Y}(f(\bar{x}), \varepsilon)$, nach (ii) existiert eine Umgebung U von \bar{x} mit $f(U) \subset V$. $\Rightarrow \exists \delta > 0 : B_{d_X}(\bar{x}, \delta) \subset U$. Da $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$ gilt:

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : x_n \in B_{d_X}(\bar{x}, \delta)$$

\Rightarrow falls $n \geq N$, so gilt:

$$f(x_n) \in V = B_{d_Y}(f(\bar{x}), \varepsilon) \quad \square$$

(iii) \Rightarrow (i): Angenommen (i) gelte nicht, d.h.

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta : \exists x \in B_{d_X}(\bar{x}, \delta) : f(x) \notin B_{d_Y}(f(\bar{x}), \varepsilon)$$

Insbesondere existiert für $\delta = \frac{1}{n+1}$ ein $x_n \in B_{d_X}(\bar{x}, \frac{1}{n+1})$ mit $d_Y(f(x_n), f(\bar{x})) \geq \varepsilon$. Dann gilt für $(x_n)_{\mathbb{N}} \subset X$: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$, aber $(f(x_n))_{\mathbb{N}}$ konvergiert nicht gegen $f(\bar{x})$.

(a) \Rightarrow (b): Sei $V \subset Y$. Falls $x \in f^{-1}(V)$, so ist V Umgebung von $f(x)$. f stetig (in x) $\stackrel{(ii)}{\Rightarrow}$ es existiert eine offene Umgebung U von x mit $f(U) \subset V$. Dann gilt $x \in U \subset f^{-1}(V)$, also ist auch $f^{-1}(V)$ Umgebung von x . $x \in f^{-1}(V)$ war beliebig $\Rightarrow f^{-1}(V) \subset X$. \square

(b) \Rightarrow (a): Sei $x \in X$ und $V \subset Y$ eine Umgebung von $f(x)$. Dann existiert $W \subset Y$ mit $f(x) \in W \subset V$. Aus (b) folgt $f^{-1}(W) \subset X \Rightarrow U := f^{-1}(W)$, dann ist U eine Umgebung von x mit $f(U) = f(f^{-1}(W)) \subset W \subset V$. Aus (ii) folgt f ist stetig in x .

(b) \Leftrightarrow (c) klar mit

$$f^{-1}(Y \setminus V) = X \setminus f^{-1}(V)$$

3.3 Definition

Seien $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume, $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. f heißt stetig in $\bar{x} \in X$, falls 3.2(ii) gilt. f heißt stetig, falls 3.2(b) gilt.

(Äquivalent: f ist stetig in jedem Punkt)

(warum?)

3.4 Proposition

Seien $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y), (Z, \mathcal{T}_Z)$ topologische Räume, $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$ stetig. Dann ist $g \circ f : X \rightarrow Z$ auch stetig.

Beweis

$U \subset Z$. Da g stetig ist gilt: $g^{-1}(U) \subset Y$. Da f stetig ist:

$$\begin{aligned} f^{-1}(g^{-1}(U)) &\subset X \\ &= \{x \in X \mid f(x) \in g^{-1}(U)\} \\ &= \{x \in X \mid g(f(x)) \in U\} \\ &= \{x \in X \mid (g \circ f)(x) \in U\} \\ &= (g \circ f)^{-1}(U) \end{aligned}$$

\square

3.5 Definition

Seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume, $f : X \rightarrow Y, f_n : X \rightarrow Y, n \in \mathbb{N}$

(i) $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ punktweise, falls gilt: $\forall x \in X : f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$

(ii) $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ gleichmäßig, falls gilt: $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall x \in X, n \geq N : d_Y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$

3.6 Satz

Seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume, $f : X \rightarrow Y, f_n : X \rightarrow Y, n \in \mathbb{N}$. Falls die f_n stetig sind und $f_n \rightarrow f$ gleichmäßig, so ist f stetig

Beweis

Wie in 1.4

\square

3.7 Beispiele

(i) Seien V, W normierte Vektorräume, $f : V \rightarrow W$ linear. Dann sind äquivalent:

- a) f ist stetig
- b) $\|f\| := \sup\{\|f(v)\|_W \mid v \in V, \|v\|_V \leq 1\} < \infty$
- c) $\exists C \in \mathbb{R}_+ : \|f(v)\| \leq C \cdot \|v\|$, für alle $v \in V$

Beweis

(a) \Rightarrow (b): f ist stetig in $0 \in V$, daher gilt: Zu $\varepsilon := 1$ existiert $\delta > 0$:

$$\|v - 0\| < \delta \Rightarrow \|f(v) - f(0)\| < \varepsilon = 1$$

Falls $\|v\| \leq 1$, so gilt (für $v \neq 0$): $\left\| \frac{\delta}{2} \cdot v \right\| < \delta$, also $\frac{\delta}{2} \|f(v)\| = \|f(\frac{\delta}{2}v)\| < 1$ und $\|f(v)\| < \frac{2}{\delta}$.

(b) \Rightarrow (c): Setze $C := \|f\|$, dann gilt (für $v \neq 0$)

$$\|f(v)\| = \|v\| \cdot \left\| \frac{1}{\|v\|} \cdot f(v) \right\| = \|v\| \cdot \left\| f\left(\frac{1}{\|v\|} \cdot v \right) \right\| \leq C \cdot \|v\|$$

(c) \Rightarrow (a): Klar, falls $C = 0$. Falls $C \neq 0$: Gegeben $\varepsilon > 0$. Setze $\delta := \frac{\varepsilon}{C}$.

$$\|v - v'\| < \delta \implies \|f(v) - f(v')\| = \|f(v - v')\| \leq C \|v - v'\| < \varepsilon$$

□

(ii) $V := \ell([a, b]) := \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}\}$ mit $\|\cdot\|_{\infty, [a, b]}$ ist ein normierter Vektorraum: Stetige Funktionen auf $[a, b]$ sind beschränkt nach Analysis I 9.12; $\|\cdot\|_{\infty, [a, b]}$ ist Norm auf

$$V \underset{\text{Untervektorraum}}{\subset} \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ beschränkt}\} \quad \text{nach 1.2(iii)}$$

(iii) $(V, \|\cdot\|_{\infty, [a, b]})$ ist vollständig.

Beweis

Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ eine Cauchyfolge. Dann gilt für $x \in [a, b]$:

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_{\infty, [a, b]}$$

Daher ist $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Cauchyfolge, also konvergent (warum?)

Definiere $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Es gilt nach Definition $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ punktweise; tatsächlich gilt sogar $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ gleichmäßig (Übung). $\Rightarrow \|f_n - f\|_{\infty, [a, b]} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Dann folgt mit Satz 1.4, dass f stetig ist. □

(iv) Sei $(V, \|\cdot\|_{\infty, [a, b]})$ wie in (ii). Definiere $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\varphi(f) := \int_a^b f(x) dx$$

Dann ist φ wohldefiniert und linear (Analysis I). Es gilt

$$|\varphi(f)| \leq \int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b \|f\|_{\infty, [a, b]} dx = \underbrace{(b-a)}_{=:C} \cdot \|f\|_{\infty, [a, b]}$$

3.7(i) c) $\Rightarrow \varphi$ stetig.

(v) Sei

$$D : \ell^1([a, b]) \xrightarrow{1\text{-mal stetig diff.bar}} \ell([a, b]) \quad a = 0, b = 1$$

gegeben durch $Df := f'$. D ist nicht stetig bezüglich $\|\cdot\|_{\infty, [0,1]}$:

Sei $f_n \in \ell^1([0, 1])$ gegeben durch $f_n(x) := x^n$, $n \in \mathbb{N}$, dann ist $\|f_n\|_{\infty, [0,1]} = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, aber

$$\|Df_n\|_{\infty, [0,1]} = \|n \cdot f_{n-1}\|_{\infty, [0,1]} = n \quad , n \in \mathbb{N}$$

Also gilt für kein $C \in \mathbb{R}_+$

$$n = \|Df_n\|_{\infty, [0,1]} \leq C \cdot \|f_n\|_{\infty, [0,1]} = C \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\xrightarrow{3.7 \text{ (i) c)}}$ D ist nicht stetig.

(vi) Sei (X, d) eine metrische Raum, $\bar{x} \in X$. Definiere $f : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ durch $f(x) := d(x, \bar{x})$. Dann ist f stetig. (Übung)

4 Kompaktheit

4.1 Definition

Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum, $Y \subset X$. Eine offene **Überdeckung** von Y ist eine Familie $(U_i)_{i \in I} \subset \mathcal{T}$ mit $Y \subset \bigcup_{i \in I} U_i$. Falls $J \subset I$ und $Y \subset \bigcup_{i \in J} U_i$, so heißt $(U_i)_{i \in J}$ **Teilüberdeckung**. $(U_i)_{i \in J}$ heißt endlich, falls J endlich ist.

4.2 Definition

Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum. $K \subset X$ heißt **kompakt**, falls gilt: Zu jeder offenen Überdeckung von K existiert eine endliche Teilüberdeckung.

D.h. Für jede offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von K existieren i_0, \dots, i_n mit

$$K \subset \bigcup_{l=0}^n U_{i_l}$$

4.3 Beispiel

(i) Sei (X, d) ein metrischer Raum, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ eine Folge mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$. Dann ist $K := \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\bar{x}\}$ kompakt.

Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von K . Dann existiert $\bar{i} \in I$ mit $\bar{x} \in U_{\bar{i}}$. $U_{\bar{i}}$ ist offen, daher existiert $N \in \mathbb{N}$, so dass gilt: $x_n \in U_{\bar{i}}$ falls $n \geq N$. Wähle $i_0, \dots, i_{N-1} \in I$ mit $x_n \in U_{i_n}$, $n \in \{0, \dots, N-1\}$. Dann ist $(U_{i_0}, U_{i_1}, \dots, U_{i_{N-1}}, U_{\bar{i}})$ eine endliche Teilüberdeckung. \square

(ii) $(X, d), (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wie oben, dann ist $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ im Allgemeinen nicht kompakt.

Gegenbeispiel: Sei $x_n \in [0, 1]$ gegeben durch $x_n = \frac{1}{n+1}$, dann gilt $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ und $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht kompakt. $U_n := (\frac{1}{n+2}, 1] \subset [0, 1]$ offen,

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n = (0, 1] \supset \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

$(U_n)_{\mathbb{N}}$ ist also eine offene Überdeckung, besitzt aber keine endliche Teilüberdeckung. (warum?)

4.4 Proposition

Sei (X, d) ein metrischer Raum, $K \subset X$ kompakt. Dann ist K beschränkt und abgeschlossen. (d.h. $K \subset B(x, R)$ für ein $x \in X, R \in \mathbb{R}$).

Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht. (Übung)

Beweis

Sei $\bar{x} \in X$ beliebig, dann ist $(B(\bar{x}, n))_{n \in \mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung von K . Da K kompakt ist, existieren $n_0, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ mit $K \subset \bigcup_{l=0}^k B(\bar{x}, n_l)$. Sei $N := \max\{n_l \mid l = 0, \dots, k\}$. Dann ist

$$K \subset \bigcup_{l=0}^k B(\bar{x}, n_l) \subset B(\bar{x}, N)$$

also ist K beschränkt. Sei nun $x \in X \setminus K$ beliebig. Setze

$$U_n := \left\{ y \in X \mid d(y, x) > \frac{1}{n+1} \right\} = X \setminus \underbrace{\overline{B}(x, \frac{1}{n+1})}_{\text{abgeschlossen}} \underbrace{\text{offen}}$$

Es gilt $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n = X \setminus \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{B}(x, \frac{1}{n+1}) \right) = X \setminus \{x\}$. Da $x \notin K$ folgt: $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine offene Überdeckung von K . Da K kompakt ist, existieren $n_0, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ mit $K \subset \bigcup_{l=0}^k U_{n_l}$. Sei $N := \max\{n_0, \dots, n_k\}$, dann ist $K \subset X \setminus \overline{B}(x, \frac{1}{N+1})$, also

$$B\left(x, \frac{1}{N+1}\right) \cap K = \emptyset \implies B\left(x, \frac{1}{N+1}\right) \subset X \setminus K$$

$\Rightarrow X \setminus K$ ist Umgebung von x . x war beliebig, also $X \setminus K$ offen. Also K abgeschlossen in X . \square

4.5 Proposition

Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum, $K \subset X$ kompakt. Sei $A \subset X$, $A \subset K$. Dann ist auch A kompakt.

Beweis

Sei $(U_i)_I$ eine offene Überdeckung von A . Dann gilt

$$K \subset \bigcup_{i \in I} U_i \cup X \setminus A$$

Da K kompakt ist, existieren $i_0, \dots, i_k \in I$ mit $K \subset \bigcup_{l=0}^k U_{i_l} \cup X \setminus A$. Also $(U_{i_0}, \dots, U_{i_k})$ ist eine endliche Teilüberdeckung für A , da $A \subset K$.

4.6 Bemerkung

Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum. $K \subset X$. Dann gilt: K ist kompakt bezüglich $\mathcal{T} \iff K$ kompakt bezüglich \mathcal{T}_k (warum?)

Wir schreiben daher oft

$$\underset{\text{kompakt}}{K} \subset X$$

4.7 Satz von Heine-Borel

$A \subset \mathbb{R}^n$ ist kompakt $\iff A$ ist beschränkt und abgeschlossen.

Beweis

„ \Rightarrow “: Proposition 4.4

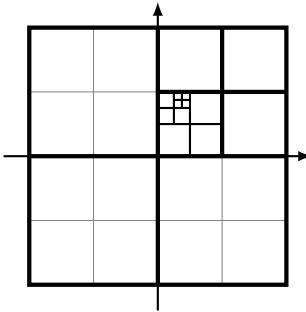
„ \Leftarrow “: A beschränkt $\Rightarrow A \subset K$ wo $K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid -L \leq x_i \leq L, i = 1, \dots, n\}$ für ein $L \in \mathbb{R}_+$. Es genügt zu zeigen, dass K kompakt ist, denn dann ist auch A kompakt nach 4.5.

Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von K . Annahme: $(U_i)_{i \in I}$ besitzt keine endliche Teilüberdeckung für K . Wir konstruieren induktiv

$$\mathbb{R}^n \supset K_0 \supset K_1 \supset K_2 \supset \dots$$

und $I_{m,i} \subset \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, \dots, n\}$ mit folgenden Eigenschaften:

- (i) $I_{m,i}$ ist ein abgeschlossenes Intervall der Länge $2^{-m+1} \cdot L$, $m \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, \dots, n\}$
- (ii) $K_m = I_{m,1} \times \dots \times I_{m,n}$, $m \in \mathbb{N}$
- (iii) $(U_i)_{i \in I}$ besitzt keine endliche Teilüberdeckung für K_m , $m \in \mathbb{N}$

Abbildung 10: Veranschaulichung vom Beweis zu 4.7 in \mathbb{R}^2

Setze $K_0 := K$, $I_{0,i} := [-L, L]$, $i = 1, \dots, n$ dann sind (i), (ii), (iii) erfüllt.

Seien nun $K_m, I_{m,i}$ bereits konstruiert. Schreibe $I_{m,i} := \bigcup_{j \in \{0,1\}} I_{m,i}^{(j)}$, wo $I_{m,i}^{(j)} \subset \mathbb{R}$ abgeschlossene Intervalle sind mit der Länge $\frac{1}{2}|I_{m,i}| = 2^{-(m+1)+1}L$. Dann gilt:

$$K_m = I_{m,1} \times \dots \times I_{m,n} = \bigcup_{(j_1, \dots, j_n) \in \{0,1\}^n} I_{m,1}^{(j_1)} \times \dots \times I_{m,n}^{(j_n)}$$

Da $(U_i)_i$ keine endliche Teilüberdeckung von K_m hat, existiert $(\bar{j}_1, \dots, \bar{j}_n) \in \{0,1\}^n$ so dass

$$I_{m,1}^{(\bar{j}_1)} \times \dots \times I_{m,n}^{(\bar{j}_n)} =: K_{m+1}$$

keine endliche Teilüberdeckung von U_i zulässt. Dann $I_{m+1,l} := I_{m,l}^{(\bar{j}_l)}$ und es gilt

$$|I_{m+1,l}| = \frac{1}{2}|I_{m,l}| = \frac{1}{2}2^{-m+1}L = 2^{-(m+1)+1}L$$

Da $\text{diam}(K_m) = \sqrt{n} \cdot 2^{-m+1}L \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$, gilt nach 2.18

(anwendbar, da \mathbb{R}^n vollständig)

$$\bigcap_{m=0}^{\infty} K_m = \{\bar{x}\}$$

Da $(U_i)_{i \in I}$ Überdeckung von K ist, und $\bar{x} \in K$, existiert ein $i \in I$ sodass $\bar{x} \in U_i$. Dann existiert $\varepsilon > 0$ sodass $\bar{x} \in B(\bar{x}, \varepsilon) \subset U_i$. Für m groß genug gilt $\text{diam}(K_m) < \varepsilon$. Also $\bar{x} \in K_m \subset B(\bar{x}, \text{diam}(K_m)) \subset B(\bar{x}, \varepsilon) \subset U_i$ \$\not\subseteq\$ zu (iii) \$\square\$

4.8 Satz (Bolzano-Weierstraß)

Sei (X, d) ein metrischer Raum, $K \subset X$ kompakt. Dann besitzt jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset K$ eine konvergente Teilfolge.

Beweis

Angenommen, für alle $x \in K$ konvergiert keine Teilfolge von $(x_n)_n$ gegen x .

$$\Rightarrow \forall x \in K \exists c_x > 0 : B(x, c_x) \cap \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \text{ endlich}$$

$\Rightarrow \{B(x, c_x)\}_{x \in K}$ ist offene Überdeckung von K

$$K \xrightarrow{\text{kompakt}} \exists x^{(1)}, \dots, x^{(l)} \in K : K \subset B(x^{(1)}, c_{x^{(1)}}) \cup \dots \cup B(x^{(l)}, c_{x^{(l)}})$$

Dann

$$\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset K \subset \bigcup_{j=1}^l B(x^{(j)}, c_{x^{(j)}})$$

endliche Vereinigung
endlicher Mengen ist
endlich

also

$$\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \underbrace{\bigcup_{j=1}^l \left(\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cap B(x^{(j)}, c_{x^{(j)}}) \right)}_{\text{endlich}}$$

also tritt mindestens ein x_n unendlich oft auf, es existiert also eine konstante Teilfolge $\not\downarrow$

□

4.9 Satz

Seien $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume. $f : X \rightarrow Y$ stetig, $K \subset X$ kompakt. Dann ist $f(K) \subset Y$ kompakt.

Beweis

Seien $(U_i)_{i \in I} \subset \mathcal{T}_Y$, sodass $f(K) \subset \bigcup_{i \in I} U_i$. Da f stetig ist gilt: $(f^{-1}(U_i))_{i \in I}$ ist offene Überdeckung von K . Da weiter K kompakt ist gilt:

$$\exists i_0, \dots, i_m \in I : K \subset \bigcup_{j=0}^m f^{-1}(U_{i_j})$$

$$\Rightarrow f(K) \subset f\left(\bigcup_{j=0}^m f^{-1}(U_{i_j})\right) = \bigcup_{j=0}^m f(f^{-1}(U_{i_j})) \subset \bigcup_{j=0}^m U_{i_j}$$

□

4.10 Korollar

Sei (X, \mathcal{T}) ein kompakter topologischer Raum, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f ihr Minimum und ihr Maximum an.

Beweis

Nach 4.9 ist $f(X) \subset \mathbb{R}$ kompakt. Nach 4.4 ist $f(X) \subset \mathbb{R}$ beschränkt und abgeschlossen. Es folgt $\sup f(X) < \infty$ und $\inf f(X) > -\infty$. Es existiert also eine Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset f(X)$, $y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sup f(X)$, da $f(X)$ abgeschlossen ist, ist $\sup f(X) \in f(X)$.

4.11 Beispiel

Sei (X, d) metrischer Raum $A \subset X$ abgeschlossen, $K \subset X$ kompakt, $A \cap K = \emptyset$. $x \mapsto \text{dist}(x, A)$ ist stetig nach Übung.

Nach 4.10 nimmt diese Funktion ihr Minimum auf K an, d.h. es existiert

$$\bar{x} \in K : \text{dist}(\bar{x}, A) = \inf_{x \in K} \text{dist}(x, A) =: \text{dist}(K, A)$$

$\text{dist}(K, A) = \text{dist}(\bar{x}, A) > 0$: Da $X \setminus A$ offen ist, existiert $\varepsilon > 0$ sodass $\bar{x} \in B(\bar{x}, \varepsilon) \subset X \setminus A \Rightarrow \text{dist}(\bar{x}, A) \geq \varepsilon > 0$

D.h. aus A abgeschlossen, K kompakt und $A \cap K = \emptyset$ folgt $\text{dist}(K, A) > 0$.

Dies gilt nicht für zwei abgeschlossene Mengen A, B .

$$A = \left\{ (x, \frac{1}{x}) \mid x > 0 \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

$$B = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$$

Dann gilt $A \cap B = \emptyset$, aber $\text{dist}(A, B) = 0$. Begründung:

$$\text{dist}(A, B) = \inf_{a \in A, b \in B} d(a, b) \quad a_n = (n, \frac{1}{n}) \in A \quad b_n = (n, 0) \in B \Rightarrow d(a_n, b_n) = \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \text{dist}(A, B) = \inf_{n \in \mathbb{N}_+} d(a_n, b_n) = 0$$

4.12 Definition

Seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume, $f : X \rightarrow Y$ heißt **gleichmäßig stetig**, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, x' \in X : d_X(x, x') < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$$

4.13 Satz

Seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume, X kompakt, $f : X \rightarrow Y$ stetig. Dann ist f auch gleichmäßig stetig.

Beweis

Angenommen f sei nicht gleichmäßig stetig. D.h.

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 : \exists x, x' \in X : d_X(x, x') < \delta \wedge d_Y(f(x), f(x')) \geq \varepsilon$$

insbesondere für $\delta = \frac{1}{n+1}$ existieren $x_n, x'_n \in X$ mit

$$d_X(x_n, x'_n) < \frac{1}{n+1}$$

aber $d(f(x_n), f(x'_n)) \geq \varepsilon$. nach 4.8 existiert eine Teilfolge $(x_{n_k})_k$ mit $x_{n_k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \bar{x}$ da $d(x_{n_k}, x'_{n_k}) = \frac{1}{n_k+1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ gilt auch $x'_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \bar{x}$

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) &= f\left(\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}\right) \\ &= f\left(\lim_{k \rightarrow \infty} x'_{n_k}\right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} f(x'_{n_k}) \end{aligned}$$

Also $d_Y(f(x_{n_k}), f(x'_{n_k})) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ ↳ zu $d_Y(f(x_{n_k}), f(x'_{n_k})) \geq \varepsilon$

□

5 Abbildungen von \mathbb{R} nach \mathbb{R}^n

5.1 Definition

Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall mit mindestens zwei Punkten (d.h. ein echtes Intervall). Eine stetige Abbildung $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **Kurve** in \mathbb{R}^n .

5.2 Bemerkung

$\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n), \gamma_i : I \rightarrow \mathbb{R}$. Dann gilt: γ ist stetig $\iff \gamma_i$ ist stetig für $i = 1, \dots, n$. (folgt z.B. aus Proposition 3.2 und Proposition 2.19)

5.3 Definition

Eine Kurve $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt (stetig) differenzierbar, falls ihre Koordinatenfunktionen $\gamma_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ (stetig) differenzierbar sind. In diesem Fall heißt $\gamma'(t) := (\gamma'_1(t), \dots, \gamma'_n(t))$ **Tangentialvektor** von γ in $t \in I$, und $\|\gamma'(t)\|_2$ heißt **Geschwindigkeit**. Für $\gamma'(t) \neq 0$ ist $\frac{1}{\|\gamma'(t)\|_2} \gamma'(t)$ der **Tangialeinheitsvektor**.

γ heißt **regulär**, falls γ stetig differenzierbar und $\gamma'(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$.

5.4 Bemerkung

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma_1(t+h) - \gamma_1(t)}{h}, \dots, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma_n(t+h) - \gamma_n(t)}{h} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h}\end{aligned}$$

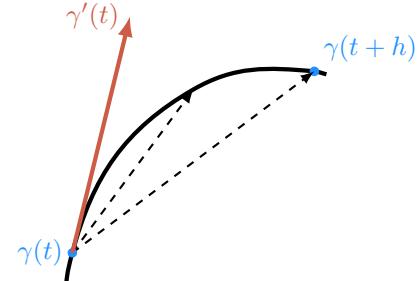


Abbildung 11: Bestimmung des Tangentialvektors durch den Limes des Differenzenquotienten in 5.4

5.5 Beispiele

- 1) $\underline{a}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n, \gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \gamma(t) = \underline{a} + t \cdot \underline{v}$.
 Dann ist $\gamma'(t) = \underline{v}$

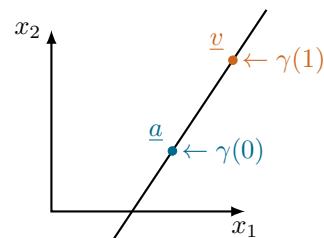
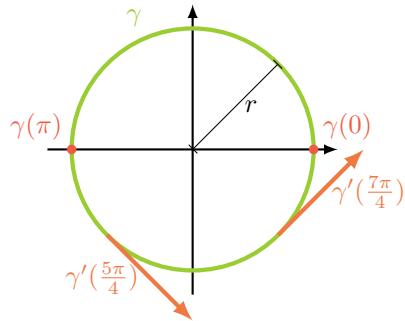


Abbildung 12: Darstellung der Kurve aus 5.5 1)

- 2) $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) = (r \cdot \sin t, r \cdot \cos t)$ mit $r \in (0, \infty)$. γ ist regulär

Abbildung 13: Graph aus 5.5 2) mit zwei Tangentialvektoren; Kreis mit Radius r

- 3) Kurve $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\gamma(t) = (r \cdot \cos t, r \cdot \sin t, c \cdot t)$, $r \in (0, \infty)$
 γ ist regulär.

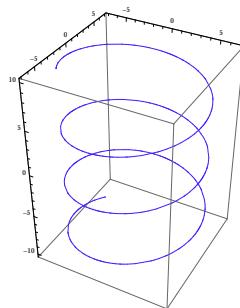


Abbildung 14: Schraubenlinie aus 5.5 3)

- 4) $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$. (Zykloid)

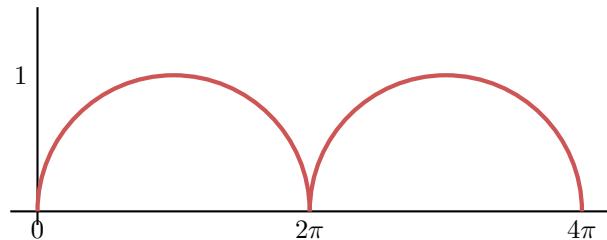


Abbildung 15: Graph der Kurve aus 5.5 4) (Zykloid)

5.6 Definition

Eine Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **rektifizierbar** mit der Länge L , falls gilt: Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$ mit folgender Eigenschaft: Für jede Unterteilung $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ mit $|t_j - t_{j-1}| < \delta$ für $j = 1, \dots, n$ gilt:

$$\left| \underbrace{\sum_{j=1}^n \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|_2}_{\text{Länge des Polygonzugs}} - L \right| < \varepsilon$$

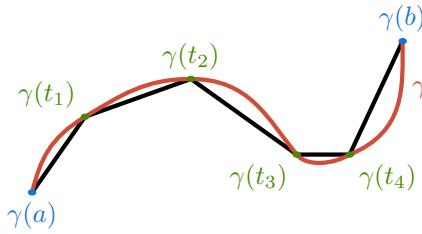


Abbildung 16: Polygonzug für ein rektifizierbares γ

5.7 Bemerkung

γ stetig $\not\Rightarrow \gamma$ rektifizierbar

5.8 Lemma

Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Zu $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$ sodass für alle $\bar{t} \neq t \in [a, b]$ mit $|\bar{t} - t| < \delta$, gilt

$$\left\| \frac{1}{\bar{t} - t} (\gamma(\bar{t}) - \gamma(t)) - \gamma'(\bar{t}) \right\|_2 < \varepsilon$$

Beweis

Für $i \in \{1, \dots, n\}$ ist $\gamma'_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, nach Satz 4.13 also gleichmäßig stetig. D.h. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_i > 0$: für $s, \bar{t} \in [a, b]$ mit $|s - \bar{t}| < \delta_i$ gilt: $|\gamma'_i(s) - \gamma'_i(\bar{t})| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$. Setze nun: $\delta := \min\{\delta_1, \dots, \delta_n\} > 0$. Für $\bar{t} \neq t$ mit $|\bar{t} - t| < \delta$ existiert nach dem Mittelwertsatz ein s_i zwischen \bar{t} und t mit

$$\gamma'_i(s_i) = \frac{\gamma_i(\bar{t}) - \gamma_i(t)}{\bar{t} - t}$$

Dann

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{\bar{t} - t} (\gamma(\bar{t}) - \gamma(t)) - \gamma'(\bar{t}) \right\|_2 &\leq \sqrt{n} \cdot \max_{i \in \{1, \dots, n\}} \left| \frac{1}{\bar{t} - t} (\gamma_i(\bar{t}) - \gamma_i(t)) - \gamma'_i(\bar{t}) \right| \\ &= \sqrt{n} \cdot \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |\gamma'_i(s_i) - \gamma'_i(\bar{t})| \\ &\leq \sqrt{n} \cdot \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

□

5.9 Satz

Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Dann ist γ rektifizierbar mit der Länge

$$L = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_2 dt$$

Beweis

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir wollen $\delta > 0$, so dass für $a = t_0 < \dots < t_k = b$ mit $|t_j - t_{j-1}| < \delta$ gilt

$$\left| \sum_{j=1}^k \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|_2 - \int_a^b \|\gamma'(t)\|_2 dt \right| < \varepsilon$$

Nach 5.8 gibt es $\delta_1 > 0$ sodass für $a = t_0 < \dots < t_k = b$ mit $|t_j - t_{j-1}| < \delta_1$ gilt:

$$\left\| \frac{1}{t_j - t_{j-1}} (\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})) - \gamma'(t_j) \right\|_2 < \frac{\varepsilon}{2|b-a|}$$

$$\Rightarrow \left| \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|_2 - \|\gamma'(t_j)\|_2 \cdot |t_j - t_{j-1}| \right| < \frac{\varepsilon}{2|b-a|} \cdot |t_j - t_{j-1}|$$

Da $f : t \mapsto \|\gamma'(t)\|_2$ gleichmäßig stetig ist, existiert $\delta_2 > 0$ sodass für $a = t_0 < \dots < t_k = b$ mit $|t_j - t_{j-1}| < \delta_2$ gilt:

$$\left\| \|\gamma'(t_1)\|_2 \cdot \mathbb{1}_{[t_0, t_1]} + \sum_{j=2}^k \|\gamma'(t_j)\|_2 \cdot \mathbb{1}_{(t_{j-1}, t_j]} - f \right\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2|b-a|}$$

$$\Rightarrow \left| \sum_{j=1}^k \|\gamma'(t_j)\|_2 \cdot |t_j - t_{j-1}| - \int_a^b \|\gamma'(t)\|_2 dt \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Für $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ gilt: Für jede Unterteilung $a = t_0 < \dots < t_k = b$ mit $|t_j - t_{j-1}| < \delta$ gilt:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j=1}^k \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|_2 - \int_a^b \|\gamma'(t)\|_2 dt \right| \\ & \leq \left| \sum_{j=1}^k \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|_2 - \sum_{j=0}^k \|\gamma'(t_j)\|_2 \cdot |t_j - t_{j-1}| \right| + \left| \sum_{j=1}^k \|\gamma'(t_j)\|_2 |t_j - t_{j-1}| - \int_a^b \|\gamma'(t)\|_2 dt \right| \\ & \leq \sum_{j=1}^k \frac{\varepsilon}{2|b-a|} \cdot |t_j - t_{j-1}| + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

5.10 Proposition und Definition

Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve, $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ bijektiv und stetig. Dann heißt φ **Parametertransformation** und $\zeta := \gamma \circ \varphi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist eine Kurve.

Falls $\gamma, \varphi, \varphi^{-1}$ stetig differenzierbar sind, so gilt:

- a) $\varphi'(t) \neq 0$ für $t \in [c, d]$ und $(\varphi^{-1})'(t) \neq 0$ für $t \in [a, b]$
- b) $\zeta'(t) = \varphi'(t) \cdot \gamma'(\varphi(t))$ für $t \in [c, d]$ insbesondere ist ζ stetig differenzierbar.
- c) $\int_a^b \|\gamma'(t)\|_2 dt = \int_c^d \|\zeta'(t)\|_2 dt$

Beweis

$\gamma \circ \varphi$ ist stetig nach Proposition 3.4, also eine Kurve.

a) $\varphi \circ \varphi^{-1} = \text{id}_{[c,d]}$ und

$$\begin{aligned} 1 &= (\text{id}_{[c,d]})'(t) = (\varphi^{-1} \circ \varphi)'(t) = (\varphi^{-1})'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \\ &\Rightarrow \varphi'(t) \neq 0 \text{ für } t \in [c, d], \quad (\varphi^{-1})'(t) \neq 0 \text{ analog} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \zeta'(t) &= (\gamma \circ \varphi)'(t) = ((\gamma_1 \circ \varphi)'(t), \dots, (\gamma_n \circ \varphi)'(t)) = \left(\varphi'(t) \cdot \gamma'_1(\varphi(t)), \dots, \varphi'(t) \cdot \gamma'_n(\varphi(t)) \right) \\ &= \varphi'(t) \cdot (\gamma'_1(\varphi(t)), \dots, \gamma'_n(\varphi(t))) \\ &= \varphi'(t) \cdot \gamma'(\varphi(t)) \end{aligned}$$

c) $\varphi'(t) \neq 0$ für $t \in [c, d]$, φ' stetig. Daraus folgt (1) $\varphi'(t) > 0$ für $t \in [c, d]$ oder (2) $\varphi'(t) < 0$ für $t \in [c, d]$ (nach Zwischenwertsatz). Wir betrachten (1); (2) geht analog

$\varphi'(t) > 0$ für alle $t \Rightarrow \varphi$ streng monoton wachsend und $\varphi(c) = a, \varphi(d) = b$. Es gilt

$$\begin{aligned} \int_c^d \|\zeta'(t)\|_2 dt &= \int_c^d \|\varphi'(t) \cdot \gamma'(\varphi(t))\|_2 dt = \int_c^d \varphi'(t) \cdot \|\gamma'(\varphi(t))\|_2 dt \\ &= \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} \|\gamma'(n)\|_2 dn \\ &= \int_a^b \|\gamma'(t)\|_2 dt \end{aligned}$$

□

5.11 Beispiel

Sei $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ ein **Zykloid**. Dann gilt: $\gamma'(t) = (1 - \cos t, \sin t)$ und

$$\begin{aligned} \|\gamma'(t)\|_2 &= ((1 - \cos t)^2 + (\sin t)^2)^{\frac{1}{2}} = (1 - 2 \cos t + (\cos t)^2 + (\sin t)^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= (2 - 2 \cos t)^{\frac{1}{2}} = (2 \cdot (1 - \cos t))^{\frac{1}{2}} = \left(2 \cdot 2 \sin^2 \left(\frac{t}{2} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= 2 \sin \left(\frac{t}{2} \right) \quad t \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$

benutzt: $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$

$$L = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\|_2 dt = 2 \int_0^{2\pi} \sin \left(\frac{t}{2} \right) dt \stackrel{n=\frac{t}{2}}{=} 4 \int_0^{2\pi} \sin n dn = 4(-\cos(n)) \Big|_0^\pi = 8$$

6 Abbildungen von \mathbb{R}^n nach \mathbb{R}

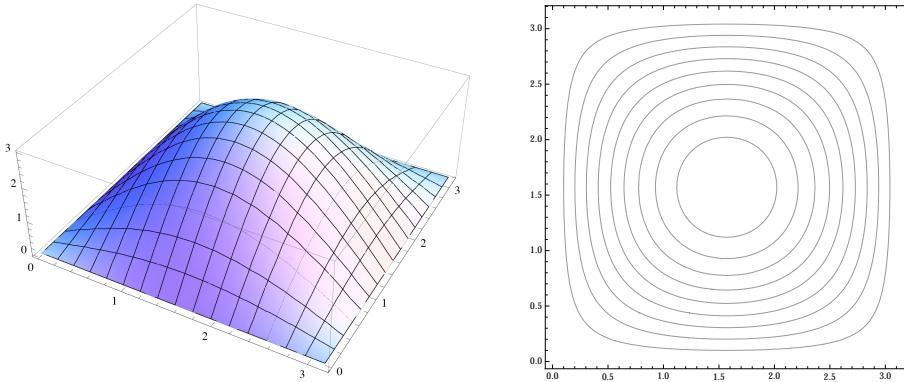


Abbildung 17: Darstellung einer Abbildung $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $U \subset \mathbb{R}^2$ als 3D-Plot und als Niveaulinien

6.1 Definition

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung.

- a) Für $\underline{x} \in U$, $i \in \{1, \dots, n\}$ heißt f **partiell differenzierbar** in \underline{x} bezüglich der i -ten Koordinate, falls gilt:

(i) Es gibt eine Folge $(h_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^*$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} h_k = 0$ und $\underline{x} + h_k \cdot \underline{e}_i \in U$, wobei $k \in \mathbb{N}$

(ii) Der Limes

$$D_i f(\underline{x}) := \lim_{\substack{h \rightarrow 0, h \neq 0 \\ \underline{x} + h \cdot \underline{e}_i \in U}} \frac{f(\underline{x} + h \cdot \underline{e}_i) - f(\underline{x})}{h} \in \mathbb{R}$$

existiert. (Dabei ist $\underline{e}_i = (0, \dots, \overset{i}{1}, \dots, 0)$). Wir schreiben auch $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ für $D_i f$.

- b) f heißt partiell differenzierbar, falls f für jedes $\underline{x} \in U$ und jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ partiell differenzierbar in \underline{x} bezüglich der i -ten Koordinate ist.

f heißt stetig partiell differenzierbar, falls außerdem $D_i f : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$

Der **Gradient** von f in \underline{x} ist

$$\text{grad } f(\underline{x}) = (D_1 f(\underline{x}), \dots, D_n f(\underline{x})) \in \mathbb{R}^n$$

Wir schreiben auch $\nabla f(\underline{x})$ für $\text{grad } f(\underline{x})$.

6.2 Bemerkung

- (i) Die Bedingung 6.1 (a)(i) ist automatisch erfüllt, falls $U \subset \mathbb{R}^n$ offen ist. (warum?)
- (ii) Für $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ definiere $f_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f_i(\xi) = f((x_1, \dots, \xi, \dots, x_n))$, wo

$$U_i := U \cap \underbrace{\{(x_1, \dots, \xi, \dots, x_n) \mid \xi \in \mathbb{R}\}}_{\sim \mathbb{R}} \subset \mathbb{R}^n$$

Es gilt

$$D_i f(\underline{x}) = \lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} \frac{f_i(x_i + h) - f_i(x_i)}{h} = f'_i(x_i)$$

6.3 Definition

Ein **Vektorfeld** auf $U \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung $\underline{v} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$. \underline{v} heißt partiell differenzierbar, wenn alle Komponenten $v_1, \dots, v_n : U \rightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar sind. In diesem Fall heißt

$$\operatorname{div} \underline{v} := \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$$

Divergenz von \underline{v} in \underline{x} . Wir schreiben auch

$$\operatorname{div} \underline{v} = \langle \nabla | \underline{v} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \right\rangle$$

6.4 Beispiel

- (i) Betrachte $r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit $r(\underline{x}) := \|\underline{x}\|_2$. Niveaumengen sind $N_r(c) := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid r(\underline{x}) = c\}$ für $c > 0$ also **Sphären** mit Radius c .

r ist auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} := U$ stetig partiell differenzierbar: Für $0 \neq \underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ definiere $r_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}$ durch $r_i(\xi) := r((x_1, \dots, x_{i-1}, \xi, x_{i+1}, \dots, x_n)) = (x_1^2 + \dots + x_{i-1}^2 + \xi^2 + x_{i+1}^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$ Dann ist

$$D_i r(\underline{x}) = \frac{\partial r}{\partial x_i}(\underline{x}) = r'_i(x_i) = 2x_i \cdot \frac{1}{2} \cdot (x_1^2, \dots, x_{i-1}^2, x_i^2, x_{i+1}^2, \dots, x_n^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{x_i}{r(\underline{x})}$$

- (ii) Sei r wie oben und $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann ist $f \circ r : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar. Es gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ r)(\underline{x}) = f'(r(\underline{x})) \frac{\partial r}{\partial x_i}(\underline{x}) = f'(r(\underline{x})) \cdot \frac{x_i}{r(\underline{x})}$$

- (iii) Sei $n \geq 2$. Definiere $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$g(\underline{x}) := \begin{cases} \frac{(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n) =: e}{r(\underline{x})^{2n} =: \frac{1}{d}}, & \text{falls } \underline{x} \neq 0 \\ 0, & \text{falls } \underline{x} = 0 \end{cases}$$

g ist auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ partiell differenzierbar mit (Produktregel)

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(\underline{x}) = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{i-1} \cdot x_{i+1} \cdot \dots \cdot x_n \cdot r(\underline{x})^{-2n} + x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n \cdot r(\underline{x})^{-2n-1} \cdot \frac{x_i}{r(\underline{x})} \cdot (-2n)$$

g ist in 0 partiell differenzierbar:

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(0) = \lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} \frac{g(0 + h \cdot \underline{e}_i) - g(0)}{h} = 0$$

D.h. g ist auf \mathbb{R}^n partiell differenzierbar. Aber g ist nicht stetig in 0: Es gilt $\mathbb{R}^n \ni (\frac{1}{k}, \dots, \frac{1}{k}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ aber

$$g\left(\left(\frac{1}{k}, \dots, \frac{1}{k}\right)\right) = \frac{\frac{1}{k^n}}{\left((n \cdot \frac{1}{k^2})^{\frac{1}{2}}\right)^{2n}} = \frac{\frac{1}{k^n}}{n^n \cdot \frac{1}{k^{2n}}} = \left(\frac{k}{n}\right)^n \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$$

D.h. partielle Differenzierbarkeit impliziert nicht Stetigkeit.

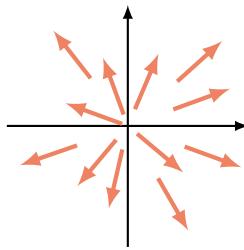


Abbildung 18: Vektorfeld aus 6.4(iv) (Man beachte, dass alle Vektoren Einheitsvektoren sind)

(iv) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar, dann ist $\text{grad } f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld.

Es gilt

$$\text{grad } r(\underline{x}) = \left(\frac{\partial r}{\partial x_1}(\underline{x}), \dots, \frac{\partial r}{\partial x_n}(\underline{x}) \right) = \left(\frac{x_1}{r(\underline{x})}, \dots, \frac{x_n}{r(\underline{x})} \right) = \frac{1}{r(\underline{x})} \cdot \underline{x}$$

Jeder Vektor wird also normiert/zu einem Einheitsvektor

(v)

$$\begin{aligned} \text{div}(\text{grad } r)(\underline{x}) &= \text{div}\left(\frac{1}{r(\underline{x})} \cdot \underline{x}\right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{r(\underline{x})} \cdot x_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{r(\underline{x})} \right) \cdot x_i + \frac{1}{r(\underline{x})} \cdot 1 \right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n -\frac{1}{r(\underline{x})^2} \cdot \frac{x_i}{r(\underline{x})} \cdot x_i \right) + \frac{n}{r(\underline{x})} \\ &= -\frac{1}{r(\underline{x})} \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^n x_i^2}_{=1} + \frac{n}{r(\underline{x})} = (n-1) \cdot \frac{1}{r(\underline{x})} \end{aligned}$$

Formaler (vgl. mit Produktregel):

$$\langle \nabla | \frac{1}{r(\underline{x})} \cdot \underline{x} \rangle = \text{div}\left(\frac{1}{r(\underline{x})} \cdot \underline{x}\right) = \langle \nabla \frac{1}{r(\underline{x})} | \underline{x} \rangle + \frac{1}{r(\underline{x})} \cdot \underbrace{\langle \nabla | \underline{x} \rangle}_{=n}$$

Allgemeiner: $\langle \nabla | f \cdot \underline{v} \rangle = \langle \nabla f | \underline{v} \rangle + f \langle \nabla | \underline{v} \rangle$

6.5 Definition

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar. f heißt zweimal partiell differenzierbar, falls alle partiellen Ableitungen $D_i D_j f : U \rightarrow \mathbb{R}$ wieder partiell differenzierbar sind. Induktiv definieren wir: f heißt $(k+1)$ mal partiell differenzierbar, falls f k -mal partiell differenzierbar ist und alle partiellen Ableitungen k -ter Ordnung

$$D_{i_k} \dots D_{i_2} D_{i_1} f : U \rightarrow \mathbb{R}$$

partiell differenzierbar sind. f heißt k -mal stetig partiell differenzierbar, falls f k -mal partiell differenzierbar ist und alle partiellen Ableitungen der Ordnung $\leq k$ stetig sind. Wir schreiben auch

$$\begin{aligned} D_{i_k} \dots D_{i_1} f &= \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \cdot \dots \cdot \partial x_{i_2} \cdot \partial x_{i_1}} \\ D_i D_i f &= D_i^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \end{aligned}$$

6.6 Satz

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar. Dann gilt für $\underline{a} \in U$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$

$$D_i D_j f(\underline{a}) = D_j D_i f(\underline{a})$$

Beweis

O.E. sei $n = 2$, $i = 1$ und $j = 2$ (warum?). Aus $U \subset \mathbb{R}^2$ offen folgt: Es existiert ein $\delta > 0$ mit $[a_1 - \delta, a_1 + \delta] \times [a_2 - \delta, a_2 + \delta] \subset U$. Betrachte $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in [a_1 - \delta, a_1 + \delta] \times [a_2 - \delta, a_2 + \delta]$ mit $\bar{x}_1 \neq a_1, \bar{x}_2 \neq a_2$. Definiere

$$F : [a_1 - \delta, a_1 + \delta] \rightarrow \mathbb{R} \text{ durch } F(x_1) := f((x_1, \bar{x}_2)) - f((x_1, a_2))$$

F ist stetig differenzierbar, da f stetig differenzierbar ist. Nach dem Mittelwertsatz existiert ξ zwischen \bar{x}_1 und a_1 mit

$$f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) - f(\bar{x}_1, a_2) - (f(a_1, \bar{x}_2) - f(a_1, a_2)) = F(\bar{x}_1) - F(a_1) = (\bar{x}_1 - a_1) \cdot F'(\xi) = (\bar{x}_1 - a_1)(D_1 f(\xi, \bar{x}_2) - D_1 f(\xi, a_2))$$

Definiere $G : [a_2 - \delta, a_2 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}$ durch $G(x_2) := D_1 f(\xi, x_2)$. G ist stetig differenzierbar. Nach dem Mittelwertsatz existiert η zwischen \bar{x}_2 und a_2 mit

$$D_1 f(\xi, \bar{x}_2) - D_1 f(\xi, a_2) = G(\bar{x}_2) - G(a_2) = (\bar{x}_2 - a_2) \cdot G'(\eta) = (\bar{x}_2 - a_2) \cdot D_2 D_1 f(\xi, \eta)$$

Es folgt

$$f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) - f(\bar{x}_1, a_2) - f(a_1, \bar{x}_2) + f(a_1, a_2) = (\bar{x}_1 - a_1) \cdot (\bar{x}_2 - a_2) \cdot D_2 D_1 f(\xi, \eta)$$

Definiere nun $\tilde{F} : [a_2 - \delta, a_2 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}$ durch $\tilde{F}(x_2) := f(\bar{x}_1, x_2) - f(a_1, x_2)$. Dann ist \tilde{F} stetig differenzierbar. Nach dem Mittelwertsatz existiert ein $\tilde{\eta}$ zwischen \bar{x}_2 und a_2 mit

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\bar{x}_2) - \tilde{F}(a_2) &= (\bar{x}_2 - a_2) \cdot \tilde{F}'(\tilde{\eta}) \\ f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) - f(a_1, \bar{x}_2) - (f(\bar{x}_1 - a_2) - f(a_1, a_2)) &= (\bar{x}_2 - a_2)(D_2 f(\bar{x}_1, \tilde{\eta}) - D_2 f(a_2, \tilde{\eta})) \end{aligned}$$

Definiere $\tilde{G} : [a_1 - \delta, a_1 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}$ durch $\tilde{G}(x_1) := D_2 f(x_1, \tilde{\eta})$. \tilde{G} ist stetig differenzierbar. Nach dem Mittelwertsatz existiert $\tilde{\xi}$ zwischen a_1 und \bar{x}_1 mit:

$$D_2 f(\bar{x}_1, \tilde{\eta}) - D_2 f(a_1, \tilde{\eta}) = \tilde{G}(\bar{x}_1) - \tilde{G}(a_1) = (\bar{x}_1 - a_1) \tilde{G}'(\tilde{\xi}) = (\bar{x}_1 - a_1) \cdot D_1 D_2 f(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$$

Es folgt

$$f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) - f(a_1, \bar{x}_2) - f(\bar{x}_1, a_2) + f(a_1, a_2) = (\bar{x}_1 - a_1)(\bar{x}_2 - a_2) D_1 D_2 f(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$$

$$\xrightarrow{(*)} D_1 D_2 f(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) = D_2 D_1 f(\xi, \eta)$$

$$\begin{array}{c} D_1 D_2 f(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \xrightarrow[\substack{\bar{x}_2 \rightarrow a_2 \\ \bar{x}_1 \rightarrow a_1}]{\substack{\bar{x}_1 \rightarrow a_1}} D_1 D_2 f(a_1, a_2) \\ D_2 D_1 f(\xi, \eta) \xrightarrow[\substack{\bar{x}_2 \rightarrow a_2 \\ \bar{x}_1 \rightarrow a_1}]{\substack{\bar{x}_1 \rightarrow a_1}} D_2 D_1 f(a_1, a_2) \end{array}$$

wegen Stetigkeit von $D_1 D_2 f$ und $D_2 D_1 f$.

□

6.7 Beispiele

(i) Sei $U \subset \mathbb{R}^3$, $\underline{v} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein partiell differenzierbares Vektorfeld. Wir definieren ein Vektorfeld

$$\operatorname{rot} \underline{v} := \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right)$$

Wir schreiben auch

$$\operatorname{rot} \underline{v} = \nabla \times \underline{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

eventuell kennt man
das Kreuzprodukt noch
aus der Schule

Falls $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar ist, so gilt

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \nabla \times \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2}, \dots, \dots \right) = 0$$

nach Satz 6.6

(ii) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar. Setze

$$\Delta f := \operatorname{div} \operatorname{grad} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ heißt **Laplaceoperator**.

Sei $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ eine zeitabhängige Temperaturverteilung, d.h. $h(x_1, \dots, x_n, t)$ ist Temperatur in (x_1, \dots, x_n) zum Zeitpunkt t . Dann erfüllt h die Wärmeleitungsgleichung

$$\Delta h - \lambda \cdot \frac{\partial h}{\partial t} = 0$$

mit $\frac{1}{\lambda}$ Wärmeleitfähigkeit.

7 Abbildungen von \mathbb{R}^m nach \mathbb{R}^n : Differenzierbarkeit

7.1 Definition

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Abbildung.

- (i) f heißt differenzierbar in $\underline{x} \in U$, falls gilt: Es gibt $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ linear und $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit

$$f(\underline{x} + \underline{\xi}) = f(\underline{x}) + A(\underline{\xi}) + \varphi(\underline{\xi})$$

für alle $\underline{\xi}$ in einer Umgebung von 0 und mit

d.h. $\varphi(\underline{\xi})$ geht „schneller“ gegen 0 als $\|\underline{\xi}\|_2$

$$\lim_{\underline{\xi} \rightarrow 0, \underline{\xi} \neq 0} \frac{1}{\|\underline{\xi}\|_2} \varphi(\underline{\xi}) = 0$$

Es genügt, wenn das φ in einer Umgebung von 0 definiert ist. (warum?)

- (ii) f heißt differenzierbar, falls f in jedem Punkt $\underline{x} \in U$ differenzierbar ist.

- (iii) $A (= A(\underline{x}))$ heißt **Ableitung** oder **Differential** von f in \underline{x} , oft schreiben wir auch $Df(x)$.

Wir werden gleich sehen, dass A nicht von der Wahl von φ abhängt.

Die zugehörige Matrix $(a_{ij}) \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ heißt auch **Jacobimatrix** oder **Funktionalmatrix**.

7.2 Bemerkung

Sei $U \subset \mathbb{R}$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{x} \in U$. Nach Analysis I 12.2 (iv) gilt: f ist differenzierbar in $\bar{x} \in U$ (im Sinne von Analysis I) $\iff \exists \psi : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in \bar{x} mit

$$f(\bar{x} + \xi) = f(\bar{x}) + \xi \cdot \psi(\bar{x} + \xi) = f(\bar{x}) + \underbrace{\psi(\bar{x}) \xi}_{f'(\bar{x})} + \underbrace{(\psi(\bar{x} + \xi) - \psi(\bar{x})) \xi}_{=: \varphi(\xi)}$$

$$\lim_{\xi \rightarrow 0, \xi \neq 0} \left| \frac{1}{|\xi|} \varphi(\xi) \right| = \lim_{\xi \rightarrow 0, \xi \neq 0} |\psi(\bar{x} + \xi) - \psi(\bar{x})| \stackrel{\psi \text{ stetig in } \bar{x}}{=} 0$$

$\Rightarrow f$ ist auch differenzierbar im Sinne von 7.1.

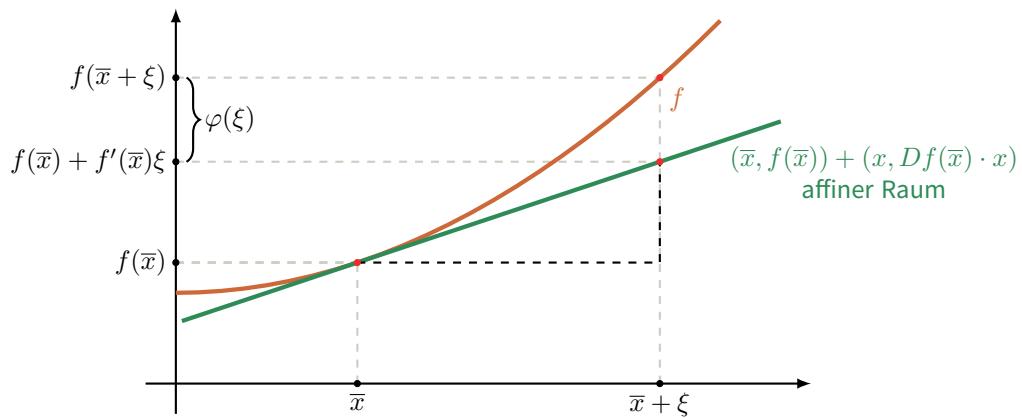


Abbildung 19: Veranschaulichung von Bemerkung 7.2

7.3 Beispiel

Sei $C \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ symmetrisch ($C = C^t$). Definiere $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(\underline{x}) := \langle \underline{x} | C \cdot \underline{x} \rangle$$

(quadratische Form). Für $\underline{x}, \underline{\xi} \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\begin{aligned} f(\underline{x} + \underline{\xi}) &= \langle \underline{x} + \underline{\xi} | C \underline{x} + C \underline{\xi} \rangle = \langle \underline{x} | C \underline{x} \rangle + \langle \underline{x} | C \underline{\xi} \rangle + \langle \underline{\xi} | C \underline{x} \rangle + \langle \underline{\xi} | C \underline{\xi} \rangle \\ &= \langle \underline{x} | C \underline{x} \rangle + 2\langle \underline{x} | C \underline{\xi} \rangle + \langle \underline{\xi} | C \underline{\xi} \rangle \\ &= f(\underline{x}) + A \cdot \underline{\xi} + \varphi(\underline{\xi}) \end{aligned}$$

mit $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $\underline{\eta} \mapsto 2\langle \underline{x} | C \underline{\eta} \rangle$ und $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $\underline{\eta} \mapsto \langle \underline{\eta} | C \underline{\eta} \rangle$. Damit ist A linear.

da C symm. $\Rightarrow C$
Matrix von selbstdadjun-
giertem Endmorphis-
mus

$$\left| \frac{1}{\|\underline{\xi}\|_2} \cdot \varphi(\underline{\xi}) \right| \leq \frac{1}{\|\underline{\xi}\|_2} \cdot \|C\| \cdot \|\underline{\xi}\|_2^2 = \|C\| \cdot \|\underline{\xi}\|_2 \xrightarrow{\underline{\xi} \rightarrow 0} 0$$

Also ist f differenzierbar.

7.4 Satz

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar in $\underline{x} \in U$. Dann gilt

- (i) f ist stetig in \underline{x}
- (ii) Die Koordinatenfunktionen $f_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ für $i = 1, \dots, n$ sind partiell differenzierbar und

$$Df(\underline{x}) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\underline{x}) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$$

Dabei betrachten wir die kanonische Identifizierung

$$\begin{aligned} \text{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) &= L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \longleftarrow M_{n \times m}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{pmatrix} &\mapsto \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} \xi_j \right)_{1 \leq i \leq n} \longleftarrow (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \\ A &\longmapsto ? \end{aligned}$$

Beweis

- (i) Es gilt (für $\underline{\xi}$ in einer Umgebung von 0) für ein $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\lim_{\underline{\xi} \rightarrow 0} \frac{1}{\|\underline{\xi}\|_2} \cdot \varphi(\underline{\xi}) = 0$

$$f(\underline{x} + \underline{\xi}) = f(\underline{x}) + Df(\underline{x})\underline{\xi} + \varphi(\underline{\xi})$$

wir erhalten

$$Df(\underline{x})\underline{\xi} \xrightarrow{\underline{\xi} \rightarrow 0} 0 \quad \text{und} \quad \varphi(\underline{\xi}) \xrightarrow{\underline{\xi} \rightarrow 0} 0$$

$$\text{also } f(\underline{x} + \underline{\xi}) \xrightarrow{\underline{\xi} \rightarrow 0} f(\underline{x}) + 0 + 0 = f(\underline{x}) \quad (\text{vgl. Folgenkriterium})$$

(ii) Sei $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ die zu $Df(\underline{x})$ gehörige Matrix, d.h.

$$Df(\underline{x})\underline{\xi} = \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} \xi_j \right)_{1 \leq i \leq n}$$

Sei φ wie oben. Dann gilt für die Koordinatenabbildungen

$$f_i(\underline{x} + \underline{\xi}) = f_i(\underline{x}) + \sum_{j=1}^m a_{ij} \xi_j + \varphi_i(\underline{\xi}) \quad i = 1, \dots, n$$

also

$$f_i(\underline{x} + h \cdot e_j) = f_i(\underline{x}) + a_{ij} \cdot h + \varphi_i(h \cdot e_j)$$

siehe auch Definition
6.1

Daher

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\underline{x}) &= \lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} \frac{f_i(\underline{x} + h \cdot e_j) - f_i(\underline{x})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} \frac{a_{ij} \cdot h + \varphi_i(h \cdot e_j)}{h} \\ &= a_{ij} + \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} \frac{\varphi_i(h \cdot e_j)}{h}}_{=0} = a_{ij} \end{aligned} \quad \square$$

7.5 Satz

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar. Dann ist f differenzierbar (insbesondere stetig).

Beweis

Sei $\underline{x} \in U$. U offen $\Rightarrow \exists \delta > 0 : B_{\|\cdot\|_{\max}}(x, \delta) \subset U$. Für $\underline{\xi} \in \mathbb{R}^m$ mit $\|\underline{\xi}\|_{\max} < \delta$ setze

$$\underline{z}^{(i)} := \underline{x} + \sum_{j=0}^i \xi_j \cdot e_j \quad \text{für } i = 0, \dots, m$$

dann ist $\underline{z}^{(0)} = \underline{x}$, $\underline{z}^{(m)} = \underline{x} + \underline{\xi}$. Definiere $g^{(i)} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$g^{(i)}(t) := f(z^{(i-1)} + t \cdot \xi_i \cdot e_i) \quad i \in \{1, \dots, m\}$$

dann ist $g^{(i)}$ differenzierbar (warum?) mit $(g^{(i)})'(t) = D_i f(z^{(i-1)} + t \cdot \xi_i \cdot e_i) \cdot \xi_i$. Nach dem Mittelwertsatz existiert $\theta_i \in [0, 1]$ mit

$$\begin{aligned} g^{(i)}(1) - g^{(i)}(0) &= (1 - 0) \cdot (g^{(i)})'(\theta_i) \\ f(z^{(i)}) - f(z^{(i-1)}) &= D_i f(z^{(i-1)} + \theta_i \cdot \xi_i \cdot e_i) \cdot \xi_i \end{aligned}$$

Wir erhalten

$$(Teleskopsumme) \quad f(\underline{x} + \underline{\xi}) - f(\underline{x}) = \sum_{i=1}^m (f(z^{(i)}) - f(z^{(i-1)})) = \sum_{i=1}^m D_i f(z^{(i-1)} + \theta_i \cdot \xi_i \cdot e_i) \cdot \xi_i$$

also

$$\begin{aligned}
 f(\underline{x} + \underline{\xi}) &= f(\underline{x}) + \underbrace{\sum_{i=1}^m D_i f(\underline{x}) \xi_i}_{=: A \underline{\xi}_i} + \underbrace{\sum_{i=1}^m \left(D_i f(z^{(i-1)} + \theta_i \cdot \xi_i \cdot \underline{e}_i) - D_i f(\underline{x}) \right) \xi_i}_{=: \varphi(\underline{\xi})} \\
 &= f(\underline{x}) + A \underline{\xi} + \varphi(\underline{\xi})
 \end{aligned}
 \quad 0 \text{ ergänzt}$$

Definiere $\lambda_i \in \mathbb{R}$ durch $\lambda_i := D_i f(\underline{x})$ für $i = 1, \dots, m$

Definiere $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_m \end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^m \lambda_i \eta_i = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_m \end{pmatrix} = \langle \operatorname{grad} f(\underline{x}) | \underline{\eta} \rangle$$

Für φ gilt

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\|\underline{\xi}\|_2} \cdot |\varphi(\underline{\xi})| &\leq \frac{1}{\|\underline{\xi}\|_2} \cdot m \cdot \max_i |D_i f(z^{(i-1)} + \theta_i \xi_i \underline{e}_i) - D_i f(\underline{x})| \cdot \max_i |\xi_i| \\
 &\leq \frac{1}{\|\underline{\xi}\|_2} \cdot m \cdot \max_i |D_i f(z^{(i-1)} + \theta_i \xi_i \underline{e}_i) - D_i f(\underline{x})| \cdot \|\underline{\xi}\|_2 \\
 &= m \cdot \max_i \underbrace{|D_i f(z^{(i-1)} + \theta_i \xi_i \underline{e}_i) - D_i f(\underline{x})|}_{\substack{\xi \rightarrow 0 \\ \underline{x}}} \xrightarrow{\underline{\xi} \rightarrow 0} 0 \quad (\text{da } D_i f \text{ stetig}) \quad \square
 \end{aligned}$$

7.6 Satz (Kettenregel)

Seien $U \subset \mathbb{R}^m, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $g : U \rightarrow V, f : V \rightarrow \mathbb{R}^k$ Abbildungen. g sei differenzierbar in $\underline{x} \in U$. f sei differenzierbar in $\underline{y} := g(\underline{x}) \in V$. Dann ist $f \circ g : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ differenzierbar in \underline{x} mit

$$D(f \circ g)(\underline{x}) = Df(g(\underline{x})) \cdot Dg(\underline{x})$$

Beweis

nach Voraussetzung existieren $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, \psi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ mit

$$\begin{aligned}
 \lim_{\underline{\xi} \rightarrow 0, \underline{\xi} \neq 0} \frac{1}{\|\underline{\xi}\|_2} \cdot \varphi(\underline{\xi}) &= 0 \\
 \lim_{\underline{\eta} \rightarrow 0, \underline{\eta} \neq 0} \frac{1}{\|\underline{\eta}\|_2} \cdot \psi(\underline{\eta}) &= 0
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 g(\underline{x} + \underline{\xi}) &= g(\underline{x}) + D_g(\underline{x}) \underline{\xi} + \varphi(\underline{\xi}) \\
 f(\underline{y} + \underline{\eta}) &= f(\underline{y}) + D_f(\underline{y}) \underline{\eta} + \psi(\underline{\eta})
 \end{aligned}$$

Definiere $\chi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ durch

$$\chi(\underline{\xi}) := Df(g(\underline{x})) \varphi(\underline{\xi}) + \psi(D_g(\underline{x}) \underline{\xi} + \varphi(\underline{\xi}))$$

dann gilt

$$\begin{aligned}
 (f \circ g)(\underline{x} + \underline{\xi}) &= f\left(\underbrace{g(\underline{x})}_{y} + \underbrace{g(\underline{x} + \underline{\xi}) - g(\underline{x})}_{\eta}\right) \\
 &= f(g(\underline{x})) + Df(g(\underline{x}))\left(g(\underline{x} + \underline{\xi}) - g(\underline{x})\right) + \psi\left(g(\underline{x} + \underline{\xi}) - g(\underline{x})\right) \\
 &= f(g(\underline{x})) + Df(g(\underline{x}))(Dg(\underline{x})\underline{\xi} + \varphi(\underline{\xi})) + \psi(Dg(\underline{x})\underline{\xi} + \varphi(\underline{x})) \\
 &= f(g(\underline{x})) + Df(g(\underline{x}))Dg(\underline{x})\underline{\xi} + \underbrace{Df(g(\underline{x}))\varphi(\underline{\xi}) + \psi(Dg(\underline{x})\underline{\xi} + \varphi(\underline{\xi}))}_{\chi(\underline{\xi})} \\
 &= f \circ g(\underline{x}) + Df(g(\underline{x})) \circ Dg(\underline{x})\underline{\xi} + \chi(\underline{\xi})
 \end{aligned}$$

Wegen (*) existieren ein $K > 0$ und $\delta > 0$ mit $\|\varphi(\underline{\xi})\|_2 \leq K \cdot \|\underline{\xi}\|_2$ für alle $\underline{\xi} \in B(0, \delta)$ (warum?)
 Dann gilt

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\|\underline{\xi}\|_2} \cdot \|\psi(Dg(\underline{x})\underline{\xi} + \varphi(\underline{\xi}))\|_2 &= \frac{\|Dg(\underline{x})\underline{\xi} + \varphi(\underline{\xi})\|_2}{\|\underline{\xi}\|_2 \cdot \|Dg(\underline{x})\underline{\xi} + \varphi(\underline{\xi})\|_2} \|\psi(Dg(\underline{x})\underline{\xi} + \varphi(\underline{\xi}))\|_2 \\
 &\leq \frac{\|Dg(\underline{x})\underline{\xi}\|_2 + \|\varphi(\underline{\xi})\|_2}{\|\underline{\xi}\|_2 \cdot \|Dg(\underline{x})\underline{\xi} + \varphi(\underline{\xi})\|_2} \|\psi(Dg(\underline{x})\underline{\xi} + \varphi(\underline{\xi}))\|_2 \\
 &\leq \frac{(\|Dg(\underline{x})\underline{\xi}\|_2 + K\|\underline{\xi}\|_2)}{\|\underline{\xi}\|_2 \cdot \|Dg(\underline{x})\underline{\xi} + \varphi(\underline{\xi})\|_2} \|\psi(Dg(\underline{x})\underline{\xi} + \varphi(\underline{\xi}))\|_2 \\
 &\leq \frac{(\|Dg(\underline{x})\|_2 + K)\|\underline{\xi}\|_2}{\|\underline{\xi}\|_2 \cdot \|Dg(\underline{x})\underline{\xi} + \varphi(\underline{\xi})\|_2} \left\| \underbrace{\psi(Dg(\underline{x})\underline{\xi} + \varphi(\underline{\xi}))}_{\substack{\xi \rightarrow 0 \\ \longrightarrow 0}} \right\|_2 \\
 &\xrightarrow{\xi \rightarrow 0} 0
 \end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$\frac{1}{\|\underline{\xi}\|_2} \|Df(g(\underline{x}))\varphi(\underline{\xi})\|_2 \leq \|Df(g(\underline{x}))\| \cdot \frac{\|\varphi(\underline{\xi})\|_2}{\|\underline{\xi}\|_2} \xrightarrow{\xi \rightarrow 0} 0$$

also

$$\frac{1}{\|\underline{\xi}\|_2} \|\chi(\underline{\xi})\|_2 \leq \frac{1}{\|\underline{x}\|_2} \left(\|Df(g(\underline{x}))\varphi(\underline{\xi})\|_2 + \|\psi(Dg(\underline{x})\underline{\xi} + \varphi(\underline{\xi}))\|_2 \right) \xrightarrow{\xi \rightarrow 0} 0 \quad \square$$

7.7 Beispiel

$U \subset \mathbb{R}^m, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $g : U \rightarrow V, f : V \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (f \circ g)(\underline{x}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_j}(g(\underline{x})) \cdot \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(\underline{x})$$

denn

$$\begin{aligned}\nabla(f \circ g)(\underline{x}) &= \left(\frac{\partial(f \circ g)}{\partial x_1}(\underline{x}), \dots, \frac{\partial(f \circ g)}{\partial x_m}(\underline{x}) \right) = D(f \circ g)(\underline{x}) \\ &\stackrel{7.6}{=} Df(g(\underline{x})) \cdot Dg(\underline{x}) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial y_1}(g(\underline{x})), \dots, \frac{\partial f}{\partial y_n}(g(\underline{x})) \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\underline{x}) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_m}(\underline{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1}(\underline{x}) & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial x_m}(\underline{x}) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\langle \nabla f(\underline{x}), \underline{v} \rangle \leftrightarrow Df(\underline{x})(\underline{v}) = (\dots) \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

7.8 Definition

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $\underline{x} \in U$, $\underline{v} \in \mathbb{R}^m$ mit $\|\underline{v}\|_2 = 1$. Falls

$$D_{\underline{v}}f(\underline{x}) := \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(\underline{x} + t \cdot \underline{v}) - f(\underline{x})}{t}$$

existiert, so heißt $D_{\underline{v}}f(\underline{x})$ **Richtungsableitung** von f in \underline{x} in Richtung \underline{v} .
(Es gilt $D_{e_i}f(\underline{x}) = D_i f(\underline{x})$)

7.9 Satz

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig (partiell) differenzierbar. Dann gilt für $\underline{x} \in U$ und $\underline{v} \in \mathbb{R}^m$ mit $\|\underline{v}\|_2 = 1$

$$D_{\underline{v}}f(\underline{x}) = \langle \underline{v} | \operatorname{grad} f(\underline{x}) \rangle (= \|\operatorname{grad} f(\underline{x})\|_2 \cdot \cos \theta)$$

falls $\operatorname{grad} f(\underline{x}) \neq 0$.

Beweis

Definiere $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ durch $g(t) := \underline{x} + t \cdot \underline{v}$, dann existiert $\varepsilon > 0$ mit $g((-\varepsilon, \varepsilon)) \subset U$ (warum?) und $f \circ g : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ ist definiert. Es gilt

$$\begin{aligned}D_{\underline{v}}f(\underline{x}) &= \lim_{t \rightarrow 0, t \neq 0} \frac{f(\underline{x} + t \cdot \underline{v}) - f(\underline{x})}{t} = \lim_{t \rightarrow 0, t \neq 0} \frac{f(g(t)) - f(g(0))}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0, t \neq 0} \frac{(f \circ g)(t) - (f \circ g)(0)}{t} \\ &= D(f \circ g)(0) = Df(g(0)) \circ Dg(0) \\ &= \langle \operatorname{grad} f(g(0)), \underline{v} \rangle \quad \square\end{aligned}$$

7.10 Definition

Sei $A : [a, b] \rightarrow M_{n \times m}(\mathbb{R})$ stetig². Dann sind $A_{ij} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$ stetig. Wir setzen

$$\int_a^b A(t) dt := \left(\int_a^b A_{ij}(t) dt \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$$

² Zum Beispiel mit Operatornorm: $\|B\| := \sup \{ \|Bx\|_2 \mid \underline{x} \in \mathbb{R}^m, \|\underline{x}\|_2 = 1 \}$

7.11 Satz

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Sei $\underline{x} \in U$, $\underline{\xi} \in \mathbb{R}^m$ so, dass $\{\underline{x} + t\underline{\xi} \mid t \in [0, 1]\} \subset U$. Dann gilt

$$f(\underline{x} + \underline{\xi}) - f(\underline{x}) = \left(\int_0^1 Df(\underline{x} + t \cdot \underline{\xi}) dt \right) \cdot \underline{\xi}$$

Außerdem gilt

$$\|f(\underline{x} + \underline{\xi}) - f(\underline{x})\|_2 \leq \sup\{\|Df(\underline{x} + t \cdot \underline{\xi})\| \mid t \in [0, 1]\} \|\underline{\xi}\|_2$$

Beweis

Für $1 \leq i \leq n$ definieren $g_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ durch $g_i(t) := f_i(\underline{x} + t \cdot \underline{\xi})$, dann gilt $g'_i(t) = Df_i(\underline{x} + t \cdot \underline{\xi}) \cdot \underline{\xi}$ und

$$\begin{aligned} f_i(\underline{x} + \underline{\xi}) - f_i(\underline{x}) &= g_i(1) - g_i(0) = \int_0^1 g'_i(t) dt = \int_0^1 (Df_i(\underline{x} + t \cdot \underline{\xi}) \underline{\xi}) dt \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\underline{x} + t \cdot \underline{\xi}) \cdot \xi_j \right) dt \\ &= \sum_{j=1}^m \left(\int_0^1 \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\underline{x} + t \cdot \underline{\xi}) dt \right) \xi_j \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} f(\underline{x} + \underline{\xi}) - f(\underline{x}) &= \left(\sum_{j=1}^m \left(\int_0^1 \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\underline{x} + t \cdot \underline{\xi}) dt \right) \xi_j \right)_{1 \leq i \leq n} = \left(\int_0^1 \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\underline{x} + t \underline{\xi}) dt \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \underline{\xi} \\ &= \left(\int_0^1 Df(\underline{x} + t \underline{\xi}) dt \right) \underline{\xi} \end{aligned}$$

Normabschätzung:

$$\begin{aligned} \|f(\underline{x} + \underline{\xi}) - f(\underline{x})\|_2 &= \left\| \left(\int_0^1 Df(\underline{x} + t \underline{\xi}) dt \right) \underline{\xi} \right\|_2 = \left\| \int_0^1 (Df(\underline{x} + t \underline{\xi}) \underline{\xi}) dt \right\|_2 \\ &\leq \int_0^1 \|Df(\underline{x} + t \underline{\xi}) \underline{\xi}\|_2 dt \\ &\leq \int_0^1 \|Df(\underline{x} + t \underline{\xi})\| \cdot \|\underline{\xi}\|_2 dt \\ &\leq \int_0^1 \|Df(\underline{x} + t \underline{\xi})\| dt \cdot \|\underline{\xi}\|_2 \\ &\leq \sup\{\|Df(\underline{x} + t \underline{\xi})\| \mid t \in [0, 1]\} \cdot \|\underline{\xi}\|_2 \end{aligned}$$

Für (*) benutzt :

$$\left\| \int_0^1 \underline{v}(t) dt \right\|_2 \leq \int_0^1 \|\underline{v}(t)\|_2 dt$$

für $\underline{v} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig. (Übung)

□

7.12 Notation

Für $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{N}^m$ setzen wir

$$|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_m$$

$$\alpha! := \alpha_1! \cdot \dots \cdot \alpha_m!$$

α bezeichnet man auch als Multindex

Für $\underline{x} = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ sei

$$\underline{x}^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_m^{\alpha_m}$$

Für $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ($U \subset \mathbb{R}^m$ offen): $|\alpha|$ -mal partiell differenzierbar sei

$$D^\alpha f := D_1^{\alpha_1} \dots D_m^{\alpha_m} f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_m^{\alpha_m}}$$

7.13 Proposition

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ k -mal stetig partiell differenzierbar. Sei $\underline{x} \in U$ und $\underline{\xi} \in \mathbb{R}^m$ mit $\{\underline{x} + t\underline{\xi} \mid t \in [0, 1]\} \subset U$. Dann ist $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(t) := f(\underline{x} + t\underline{\xi})$ auch k -mal stetig differenzierbar mit

$$\frac{\partial^k g}{\partial t^k}(t) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^m, |\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha f(\underline{x} + t\underline{\xi}) \underline{\xi}^\alpha$$

Beweis

Behauptung:

$$\frac{d^l g}{dt^l}(t) = \sum_{i_1, \dots, i_l \in \{1, \dots, m\}} D_{i_l} \dots D_{i_1} f(\underline{x} + t\underline{\xi}) \underline{\xi}_{i_1} \dots \underline{\xi}_{i_l}$$

für $l = 1, \dots, k$.

I.A. $\frac{\partial^1 g}{dt}(t) = \frac{\partial g}{\partial t}(t) = Df(\underline{x} + t\underline{\xi}) \cdot \underline{\xi} = \sum_{i=1}^m D_i f(\underline{x} + t\underline{\xi}) \cdot \underline{\xi}_i$

I.S. Es gelte (\star) für $l \in \{1, \dots, k-1\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{l+1}}{\partial t^{l+1}} g(t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{d^l}{dt^l} g(t) \right) = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i_1, \dots, i_l \in \{1, \dots, m\}} D_{i_l} \dots D_{i_1} f(\underline{x} + t\underline{\xi}) \underline{\xi}_{i_1} \dots \underline{\xi}_{i_l} \right) \\ &= \sum_{i=1, \dots, m} D_i \left(\sum_{i_1, \dots, i_l \in \{1, \dots, m\}} D_{i_l} \dots D_{i_1} f(\underline{x} + t\underline{\xi}) \underline{\xi}_{i_1} \dots \underline{\xi}_{i_l} \right) \underline{\xi}_i \\ &= \sum_{i_{l+1} \in \{1, \dots, m\}} \sum_{i_1, \dots, i_l \in \{1, \dots, m\}} D_{i_{l+1}} D_{i_l} \dots D_{i_1} f(\underline{x} + t\underline{\xi}) \underline{\xi}_{i_1} \dots \underline{\xi}_{i_l} \cdot \underline{\xi}_{i_{l+1}} \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_{l+1} \in \{1, \dots, m\}} D_{i_{l+1}} \dots D_{i_1} f(\underline{x} + t\underline{\xi}) \underline{\xi}_{i_1} \dots \underline{\xi}_{i_{l+1}} \end{aligned}$$

per Induktion folgt die Behauptung

Falls $(i_1, \dots, i_k) \in \{1, \dots, m\}^k$ dem Index i α_i -mal enthält (für $i = 1, \dots, m$), so gilt nach Satz 6.6

$$\begin{aligned} D_{i_k} \dots D_{i_1} f(\underline{x} + t\underline{\xi}) \underline{\xi}_{i_1} \dots \underline{\xi}_{i_k} &= D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \dots D_m^{\alpha_m} f(\underline{x} + t\underline{\xi}) \underline{\xi}_1^{\alpha_2} \cdot \underline{\xi}_2^{\alpha_3} \cdot \dots \cdot \underline{\xi}_m^{\alpha_m} \\ &= D^\alpha f(\underline{x} + t \cdot \underline{\xi}) \underline{\xi}^\alpha \end{aligned}$$

dabei ist $|\alpha| = k$.

Weiter gilt für $\alpha \in \mathbb{N}^m$ mit $|\alpha|)k$

$$\#\left\{(i_1, \dots, i_k) \in \{1, \dots, m\}^k \mid \text{Index } i \text{ kommt } \alpha_i\text{-mal vor, für } i = 1, \dots, m\right\} = \frac{k!}{\alpha_1! \cdot \dots \cdot \alpha_m!} = \frac{k!}{\alpha!}$$

Es folgt

$$\sum_{(i_1, \dots, i_k) \in \{1, \dots, m\}^k} D_{i_k} \dots D_{i_1} f(\underline{x} + t\underline{\xi}) \xi_{i_1} \dots \xi_{i_k} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^m, |\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha f(\underline{x} + t\underline{\xi}) \underline{\xi}^\alpha \quad \square$$

7.14 Satz: Taylorformel

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $\underline{x} \in U$ und $\delta > 0$ mit $\overline{B}(\underline{x}, \delta) \subset U$. Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ $(k+1)$ -mal stetig (partiell) differenzierbar. Dann existiert $R_{k+1} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(\underline{x} + \underline{\xi}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^m, |\alpha| \leq k} \frac{D^\alpha f(\underline{x})}{\alpha!} \cdot \underline{\xi}^\alpha + R_{k+1}(\underline{\xi})$$

und

$$\lim_{\underline{\xi} \rightarrow 0, \underline{\xi} \neq 0} \frac{R_{k+1}(\underline{\xi})}{\|\underline{\xi}\|_2^k} = 0$$

(Hierfür genügt es, wenn f nur k -mal stetig differenzierbar ist.). Für jedes $\underline{\xi} \in \mathbb{R}^m$ mit $\|\underline{\xi}\|_2 \leq \delta$ existiert ein $\theta \in [0, 1]$ mit

$$R_{k+1}(\underline{\xi}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^m, |\alpha|=k+1} \frac{D^\alpha f(\underline{x} + \theta \cdot \underline{\xi})}{\alpha!} \cdot \underline{\xi}^\alpha$$

Beweis

Sei $\underline{\xi} \in \overline{B}(0, \delta)$. Definiere $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ durch $g(t) := f(\underline{x} + t \cdot \underline{\xi})$. Nach 7.13 ist g $(k+1)$ -mal stetig differenzierbar; nach 1.14 existiert ein $\theta \in [0, 1]$ mit

$$\begin{aligned} g(1) &= g(0+1) \stackrel{1.14}{=} \sum_{l=0}^k \frac{1}{l!} \frac{d^l}{dt^l} g(0)(1-0)^l + \frac{1}{(k+1)!} \frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} g(\theta) 1^{k+1} \\ &= \sum_{l=0}^k \frac{1}{l!} \frac{d^l}{dt^l} g(0) + \frac{1}{(k+1)!} \frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} g(\theta) \\ &\stackrel{7.13}{=} \sum_{l=0}^k \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^m, |\alpha|=l} \frac{l!}{l! \cdot \alpha!} D^\alpha f(\underline{x} + 0 \cdot \underline{\xi}) \underline{\xi}^\alpha + \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^m, |\alpha|=k+1} \frac{(k+1)!}{(k+1)! \cdot \alpha!} D^\alpha f(\underline{x} + \theta \cdot \underline{\xi}) \underline{\xi}^\alpha \\ &= R_{k+1}(\underline{\xi}) \quad \Rightarrow (\star) \end{aligned}$$

Für $\alpha \in \mathbb{N}^m$ mit $|\alpha| = k+1$ ist $D^\alpha f = D_1^{\alpha_1} \dots D_m^{\alpha_m} f : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, also beschränkt auf $\overline{B}(x, \delta) \subset U$ (da $\overline{B}(x, \delta)$ kompakt). Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|\underline{\xi}\|_2^k} \cdot |\underline{\xi}^\alpha| &= \frac{1}{\|\underline{\xi}\|_2^k} \cdot |\xi_1|^{\alpha_1} \dots |\xi_m|^{\alpha_m} \leqslant \frac{1}{\|\underline{\xi}\|_2^k} \cdot \|\underline{\xi}\|_2^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot \|\underline{\xi}\|_2^{\alpha_m} \\ &= \frac{1}{\|\underline{\xi}\|_2^k} \|\underline{\xi}\|_2^{|\alpha|} \\ &= \|\underline{\xi}\|_2 \xrightarrow{\underline{\xi} \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\|\underline{\xi}\|_2^k} \cdot R_{k+1}(\underline{\xi}) \xrightarrow{\underline{\xi} \rightarrow 0} 0.$$

□

7.15 Corollar

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $\underline{x} \in U$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Dann gilt

$$f(\underline{x} + \underline{\xi}) = f(\underline{x}) + \langle \text{grad } f(\underline{x}) | \underline{\xi} \rangle + \frac{1}{2} \langle \underline{\xi} | \text{Hess } f(\underline{x}) \underline{\xi} \rangle + R_3(\underline{\xi})$$

für $\underline{\xi}$ in einer Umgebung von 0. Dabei ist $\text{Hess } f(\underline{x}) := (D_i D_j f(\underline{x}))_{i,j \in \{1, \dots, m\}} \in M_{m \times m}(\mathbb{R})$

Beweis

Nach 7.14 gilt:

$$f(\underline{x} + \underline{\xi}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^m, |\alpha| \leq 2} \frac{D^\alpha f(\underline{x})}{\alpha!} \underline{\xi}^\alpha + R_3(\underline{\xi})$$

- $|\alpha| = 0$: $\alpha = (0, \dots, 0)$ und

$$\frac{D^\alpha f(\underline{x})}{\alpha!} \underline{\xi}^\alpha = \frac{D^0 f(\underline{x})}{\alpha_1! \cdots \alpha_m!} \xi_1^0 \cdots \xi_m^0 = f(\underline{x})$$

- $|\alpha| = 1$: $\alpha = (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0)$, $i \in \{1, \dots, m\}$

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^m, |\alpha|=1} \frac{D^\alpha f(\underline{x})}{\alpha!} \underline{\xi}^\alpha = \sum_{i=1}^m \frac{D_i f(\underline{x})}{0! \cdots 1! \cdots 0!} \xi_1^0 \cdots \xi_i^1 \cdots \xi_m^0 = \sum_{i=1}^m D_i f(\underline{x}) \xi_i = \langle \text{grad } f(\underline{x}) | \underline{\xi} \rangle$$

- $|\alpha| = 2$: $\alpha = (0, \dots, \underset{i}{2}, \dots, 0)$ für $1 \leq i \leq m$ oder $\alpha = (0, \dots, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0, \underset{j}{1}, 0, \dots, 0)$ für $1 \leq i < j \leq m$.

$$\frac{D^\alpha f(\underline{x})}{\alpha!} \underline{\xi}^\alpha = \frac{D_i^2 f(\underline{x})}{2} \xi_1^2 \quad \Bigg| \quad \frac{D^\alpha f(\underline{x})}{\alpha!} \underline{\xi}^\alpha = \frac{D_i D_j f(\underline{x})}{1} \xi_i \xi_j$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^m, |\alpha|=2} \frac{D^\alpha f(\underline{x})}{\alpha!} \underline{\xi}^\alpha &= \sum_{i \in \{1, \dots, m\}} \frac{D^2 f(\underline{x})}{2} \xi_1^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq m} D_i D_j f(\underline{x}) \xi_i \xi_j \\ &= \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq m, i=j} D_i D_j f(\underline{x}) \xi_i \xi_j + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq m, i \neq j} D_i D_j f(\underline{x}) \xi_i \xi_j \\ &= \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq m} D_i D_j f(\underline{x}) \xi_i \xi_j = \langle \underline{\xi} | \text{Hess } f(\underline{x}) \underline{\xi} \rangle \end{aligned} \quad \square$$

7.16 Definition

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $\underline{x} \in U$. f besitzt in \underline{x} ein **lokales Maximum (Minimum)**, falls $\underline{x} \in V \subset U$ existiert offen mit $f(\underline{y}) \leq f(\underline{x})$ für alle $\underline{y} \in V$ (bzw. $f(\underline{y}) \geq f(\underline{x})$ für alle $\underline{y} \in V$). Ein **lokales Extremum** ist ein lokales Maximum oder Minimum. Das Maximum (Minimum) ist **isoliert**, falls $f(\underline{y}) < f(\underline{x})$ (bzw. $f(\underline{y}) > f(\underline{x})$) für $\underline{x} \neq \underline{y} \in V$.

7.17 Propositon

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar. Falls f in $\underline{x} \in U$ ein lokales Extremum besitzt, so gilt

$$\operatorname{grad} f(\underline{x}) = 0$$

Beweis

Für $\varepsilon > 0$ klein genug und $i \in \{1, \dots, m\}$ definiere $g_i : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g_i(t) := f(\underline{x} + t \cdot e_i)$. Dann ist g_i differenzierbar und hat in 0 ein lokales Extremum (warum?). Es gilt nach Analysis I: $0 = g'_i(0) = D_i f(\underline{x})$, also

$$\operatorname{grad} f(\underline{x}) = (D_1 f(\underline{x}), \dots, D_m f(\underline{x})) = 0$$

□

7.18 Erinnerung

Sei $A \in M_{m \times m}(\mathbb{R})$ symmetrisch, dann existiert $T \in M_{m \times m}(\mathbb{R})$ unitär (orthogonal) mit

$$T^{-1} A T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{pmatrix}$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ Eigenwerte (zu Eigenvektoren $T e_1, \dots, T e_m$). A heißt positiv definit (negativ definit), falls alle λ_i echt positiv (echt negativ) sind. In diesem Fall gilt $\langle \underline{\xi} | A \underline{\xi} \rangle > 0 (< 0)$ für alle $\underline{\xi} \in \mathbb{R}^m$.

7.19 Satz

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, $\underline{x} \in U$ mit $\operatorname{grad} f(\underline{x}) = 0$.

- (i) Wenn $\operatorname{Hess} f(\underline{x})$ positiv definit ist, dann hat f in \underline{x} ein isoliertes Minimum.
- (ii) Wenn $\operatorname{Hess} f(\underline{x})$ negativ definit ist, dann hat f in \underline{x} ein isoliertes Maximum.
- (iii) Falls $\operatorname{Hess} f(\underline{x})$ echt positive und echt negative Eigenwerte besitzt, so hat f in \underline{x} kein Extremum.

Beweis

- (i) Nach Corollar 7.15 gilt für $\underline{\xi}$ in einer Umgebung von 0.

$$f(\underline{x} + \underline{\xi}) = f(\underline{x}) + \underbrace{\langle \operatorname{grad} f(\underline{x}) | \underline{\xi} \rangle}_{=0} + \frac{1}{2} \langle \underline{\xi} | \operatorname{Hess} f(\underline{x}) \underline{\xi} \rangle + R_3(\underline{\xi})$$

Wegen $\frac{R_3(\underline{\xi})}{\|\underline{\xi}\|_2^2} \xrightarrow{\underline{\xi} \rightarrow 0, \underline{\xi} \neq 0} 0$ existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit: $\|\underline{\xi}\|_2 < \delta \Rightarrow |R_3(\underline{\xi})| < \varepsilon \|\underline{\xi}\|_2$. Dann ist $S^{m-1} := \left\{ \underline{\eta} \in \mathbb{R}^m \mid \|\underline{\eta}\|_2 = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^m$ kompakt und $\underline{\eta} \mapsto \langle \underline{\eta} | \operatorname{Hess} f(\underline{x}) \underline{\eta} \rangle$ ist stetig, nimmt also auf S^{m-1} ihr Minimum an. Dann gilt $\langle \underline{\eta} | \operatorname{Hess} f(\underline{x}) \underline{\eta} \rangle > 0$ für alle $\underline{\eta} \in S^{m-1}$, gilt

$$\alpha := \inf \{ \langle \underline{\eta} | \operatorname{Hess} f(\underline{x}) \underline{\eta} \rangle \mid \underline{\eta} \in S^{m-1} \} > 0$$

Für $\underline{\xi} \in \mathbb{R}^m$ gilt nun

$$\langle \underline{\xi} | \operatorname{Hess} f(\underline{x} \underline{\xi}) \rangle \geq \alpha \|\underline{\xi}\|_2^2$$

Sei nun $\varepsilon := \frac{\alpha}{4}$, wähle $\delta > 0$ wie eben.

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(\underline{x} + \underline{\xi}) &\geq f(\underline{x}) + \frac{1}{2} \langle \underline{\xi} | \operatorname{Hess} f(\underline{x}) \underline{\xi} \rangle - R_3(\underline{\xi}) \\ &\geq f(\underline{x}) + \frac{\alpha}{2} \|\underline{\xi}\|_2^2 - \frac{\alpha}{4} \|\underline{\xi}\|_2^2 \\ &> f(\underline{x}) \end{aligned}$$

(ii) analog

(iii) Übung

□

7.20 Beispiel

$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right) = c + x^2 + y^2$, $c \in \mathbb{R}$. Taylorformel:

$$\begin{aligned} f\left(\begin{matrix} \xi \\ \eta \end{matrix}\right) &= f\left(\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right) + \langle \nabla f\left(\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right) | \left(\begin{matrix} \xi \\ \eta \end{matrix}\right) \rangle + \frac{1}{2} \langle \left(\begin{matrix} \xi \\ \eta \end{matrix}\right) | (\text{Hess } f)\left(\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right) \left(\begin{matrix} \xi \\ \eta \end{matrix}\right) \rangle + R_3\left(\begin{matrix} \xi \\ \eta \end{matrix}\right) \\ \nabla f\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right) &= \begin{pmatrix} D_x f\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right) \\ D_y f\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \\ \text{Hess } f\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right) &= \begin{pmatrix} D_x D_x f\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right) & D_x D_y f\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right) \\ D_y D_x f\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right) & D_y D_y f\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\text{Hess } f\left(\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ist positiv definit. Gesamt folgt:

$$\Rightarrow f\left(\begin{matrix} \xi \\ \eta \end{matrix}\right) = c + \xi^2 + \eta^2 + R_3\left(\begin{matrix} \xi \\ \eta \end{matrix}\right)$$

und f hat in $\left(\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right)$ ein isoliertes Minimum.

8 Implizite Funktionen

8.1 Motivation

Sei $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar.

Abbildung 20: Hier kommt noch ein Bild mit Niveaulinien hin

- * Wann ist $N_f(c)$ lokal von der Form $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ g(x) \end{pmatrix} \mid x \in I \right\}$ für ein $g : I \rightarrow \mathbb{R}$?
- * Was lässt sich über g sagen?
- * Wo liegen die Extrema von $F|_Z$?

8.2 Satz

Seien $\underline{a} \in \mathbb{R}^k$, $\underline{b}, \underline{c} \in \mathbb{R}^m$, $r_1, r_2 > 0$. $U_1 := B(\underline{a}, r_1) \subset \mathbb{R}^k$, $U_2 := B(\underline{b}, r_2) \subset \mathbb{R}^m$. Sei

$$F : U_1 \times U_2 \rightarrow \mathbb{R}^m , \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{pmatrix} \mapsto F \left(\frac{\underline{x}}{\underline{y}} \right)$$

Eine Abbildung mit $F(\underline{a}) = \underline{c}$. F sei in (\underline{a}) differenzierbar und $\frac{\partial F}{\partial \underline{y}}(\underline{a}) \in M_{m \times m}(\mathbb{R})$ sei invertierbar. Es sei $g : U_1 \rightarrow U_2$ stetig mit $g(\underline{a}) = \underline{b}$ und $F\left(\frac{\underline{x}}{g(\underline{x})}\right) = \underline{c}$ für $\underline{x} \in U_1$.

Dann ist g in \underline{a} differenzierbar und

$$Dg(\underline{a}) = - \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{y}}(\underline{a}) \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial \underline{x}}(\underline{a})$$

Dabei ist

$$\frac{\partial F}{\partial \underline{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_k} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial F}{\partial \underline{y}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}$$

$$\text{Also } DF = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial \underline{x}} & \frac{\partial F}{\partial \underline{y}} \end{pmatrix}$$

Beweis

Ohne Einschränkungen: $(\underline{a}) = (0) \in \mathbb{R}^{k+m}$ (warum?). F ist differenzierbar in (\underline{a}) , d.h. für $(\frac{\underline{x}}{\underline{y}}) \in U_1 \times U_2$ gilt

$$\begin{aligned} F\left(\frac{\underline{x}}{\underline{y}}\right) &= \underbrace{F\left(\frac{\underline{a}}{\underline{b}}\right)}_{=c} + \underbrace{\left(DF\left(\frac{\underline{a}}{\underline{b}}\right)\right)\left(\frac{\underline{x}}{\underline{y}}\right)}_{=\left(\frac{\partial F}{\partial \underline{x}}\left(\frac{\underline{a}}{\underline{b}}\right)\right)\underline{x}+\left(\frac{\partial F}{\partial \underline{y}}\left(\frac{\underline{a}}{\underline{b}}\right)\right)\underline{y}} + \varphi\left(\frac{\underline{x}}{\underline{y}}\right) \end{aligned}$$

wo $\varphi : \mathbb{R}^{k+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ein Abbildung ist mit

$$\lim_{(\underline{y}) \rightarrow 0, (\frac{\underline{x}}{\underline{y}}) \neq 0} \frac{1}{\left\| \left(\frac{\underline{x}}{\underline{y}} \right) \right\|_2} \cdot \varphi\left(\frac{\underline{x}}{\underline{y}}\right)$$

Dann gilt für $\underline{x} \in U_1$

$$\underline{c} = F\left(\frac{\underline{x}}{g(\underline{x})}\right) = \underline{c} + \frac{\partial F}{\partial \underline{x}}\left(\frac{\underline{a}}{\underline{b}}\right) + \frac{\partial F}{\partial \underline{y}}\left(\frac{\underline{a}}{\underline{b}}\right)g(\underline{x}) + \varphi\left(\frac{\underline{x}}{g(\underline{x})}\right)$$

also

$$g(\underline{x}) = -\underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial \underline{y}}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial \underline{x}}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \underline{x}}_{\text{lin. Abb. } \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m} - \underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial \underline{y}}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\right)^{-1} \varphi\left(\frac{\underline{x}}{g(\underline{x})}\right)}_{=: \psi(\underline{x})}$$

Bleibt zu zeigen:

$$\frac{1}{\|\underline{x}\|_2} \|\psi(\underline{x})\|_2 \xrightarrow{\underline{x} \rightarrow 0, \underline{x} \neq 0} 0$$

Sei $0 < \varepsilon < 1$. Setze $M := \left\| \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{y}} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right)^{-1} \right\|$ und $N := 2 \left\| \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{y}} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial \underline{x}} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right\| + 1$.

Wegen (*) existieren $0 < \delta_1 < r_1$ und $0 < \delta_2 < r_2$ sodass für $\left(\frac{\underline{x}}{\underline{y}}\right) \in U_1 \times U_2$ mit $\|\underline{x}\|_1 < \delta_1$, $\|\underline{y}\|_2 < \delta_2$ gilt

$$\left\| \varphi\left(\frac{\underline{x}}{\underline{y}}\right) \right\|_2 \leq \left\| \left(\frac{\underline{x}}{\underline{y}}\right) \right\|_2 \cdot \frac{1}{2M} \frac{\varepsilon}{1+N} \leq \frac{\|\underline{x}\|_2 + \|\underline{y}\|_2}{2M} \cdot \frac{\varepsilon}{1+N}$$

Da g stetig ist, gilt $g(0) = 0 \Rightarrow \exists 0 < \delta < \delta_1$ sodass für $\underline{x} \in U_1$ mit $\|\underline{x}\|_2 < \delta$ gilt $\|g(\underline{x})\|_2 < \delta_2$. Für $\underline{x} \in U_1$ mit $\|\underline{x}\|_2 < \delta$ gilt daher

$$\left\| \varphi\left(\frac{\underline{x}}{g(\underline{x})}\right) \right\|_2 \leq \frac{\|\underline{x}\|_2 + \|g(\underline{x})\|_2}{2M} \cdot \frac{\varepsilon}{1+N} \leq \frac{\|\underline{x}\|_2 + \|g(\underline{x})\|_2}{2M}$$

Also

$$\begin{aligned} \|g(\underline{x})\|_2 &\stackrel{(**)}{\leq} \left\| \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{y}} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial \underline{x}} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right\| \|\underline{x}\|_2 + M \cdot \left\| \varphi\left(\frac{\underline{x}}{g(\underline{x})}\right) \right\|_2 \\ &\stackrel{*****}{\leq} \left\| \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{y}} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial \underline{x}} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right\| \|\underline{x}\|_2 + M \cdot \frac{\|\underline{x}\|_2 + \|g(\underline{x})\|_2}{2M} \\ &= \left\| \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{y}} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial \underline{x}} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right\| \|\underline{x}\|_2 + \frac{\|\underline{x}\|_2}{2} + \frac{\|g(\underline{x})\|_2}{2} \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \frac{\|g(\underline{x})\|_2}{2} &\leq \left(\left\| \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{y}} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial \underline{x}} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right\| + \frac{1}{2} \right) \|\underline{x}\|_2 \\ &\implies \|g(\underline{x})\|_2 \leq N \|\underline{x}\|_2 \quad \text{für } \|\underline{x}\|_2 < \delta \end{aligned}$$

Wir erhalten für $0 < \|\underline{x}\|_2 < \delta$

$$\frac{1}{\|\underline{x}\|_2} \cdot \|\psi(\underline{x})\|_2 \stackrel{(**)}{\leq} \frac{M}{\|\underline{x}\|_2} \cdot \left\| \varphi\left(\frac{\underline{x}}{g(\underline{x})}\right) \right\|_2 \stackrel{***** \& *****}{\leq} \frac{M}{\|\underline{x}\|_2} \cdot \frac{\|\underline{x}\|_2(1+N)}{2M} \cdot \frac{\varepsilon}{1+N} < \varepsilon$$

$\Rightarrow (***)$ □

8.3 Satz

Seien $\underline{a} \in U_1 \subset_{\text{offen}} \mathbb{R}^k$, $\underline{b} \in U_2 \subset_{\text{offen}} \mathbb{R}^m$, $\underline{c} \in \mathbb{R}^m$. $F : U_1 \times U_2 \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar, sodass $F(\frac{\underline{a}}{\underline{b}}) = \underline{c}$ und $\frac{\partial F}{\partial \underline{y}}(\frac{\underline{a}}{\underline{b}}) \in M_{m \times m}(\mathbb{R})$ invertierbar ist. Dann existieren $\underline{a} \in V_1 \subset_{\text{offen}} U_1$, $\underline{b} \in V_2 \subset_{\text{offen}} U_2$ und $g : V_1 \rightarrow V_2$ stetig differenzierbar mit

$$Dg(\underline{a}) = - \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{y}} \left(\frac{\underline{a}}{\underline{b}} \right) \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial \underline{x}} \left(\frac{\underline{a}}{\underline{b}} \right)$$

und $N_F(\underline{c}) \cap (V_1 \times V_2) = \left\{ \left(\frac{\underline{x}}{g(\underline{x})} \right) \mid \underline{x} \in V_1 \right\}$, wo $N_F(\underline{c}) = \left\{ \left(\frac{\underline{x}}{\underline{y}} \right) \in U_1 \times U_2 \mid F \left(\frac{\underline{x}}{\underline{y}} \right) = \underline{c} \right\}$. Insbesondere gilt $F \left(\frac{\underline{x}}{g(\underline{x})} \right) = \underline{c}$ für $\underline{x} \in V_1$ und $\underline{b} = g(\underline{a})$.

Beweis

Ohne Einschränkungen: $(\frac{\underline{a}}{\underline{b}}) = (0) \in \mathbb{R}^{k+m}$. Definiere $G : U_1 \times U_2 \rightarrow \mathbb{R}^m$ durch

$$G \left(\frac{\underline{x}}{\underline{y}} \right) := \underline{y} - \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{y}} \left(0 \right) \right)^{-1} \left(F \left(\frac{\underline{x}}{\underline{y}} \right) - \underline{c} \right)$$

dann ist G stetig differenzierbar und

$$\frac{\partial G}{\partial \underline{y}} \left(\frac{\underline{x}}{\underline{y}} \right) = \underbrace{1_m}_{\text{Einheitsmatrix}} - \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{y}} \left(0 \right) \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial \underline{y}} \left(\frac{\underline{x}}{\underline{y}} \right)$$

also

$$\frac{\partial G}{\partial \underline{y}} \left(0 \right) = 1_m - \underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial \underline{y}} \left(0 \right) \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial \underline{y}} \left(0 \right)}_{=1_m} = 0$$

$\frac{\partial G}{\partial \underline{y}}$ ist stetig, daher existieren $0 \in W_1 \subset_{\text{offen}} U_1$, $0 \in W_2 \subset_{\text{offen}} U_2$, sodass für $(\frac{\underline{x}}{\underline{y}}) \in W_1 \times W_2$ gilt

$$\left\| \frac{\partial G}{\partial \underline{y}} \left(\frac{\underline{x}}{\underline{y}} \right) \right\| \leq \frac{1}{2}$$

$0 \in W_2 \subset_{\text{offen}} \mathbb{R}^m \Rightarrow \exists r > 0 : V_2 := B(0, r) \subset W_2 \subset \mathbb{R}^m$. Wegen $G(0) = 0$ existiert $0 \in V_1 \subset_{\text{offen}} W_1$ mit

$$\alpha := \sup \left\{ \left\| G \left(\frac{\underline{x}}{0} \right) \right\|_2 \mid \underline{x} \in V_1 \right\} < \frac{r}{2}$$

Wir definieren induktiv stetige Abbildungen $g_j : V_1 \rightarrow V_2$, $n \in \mathbb{N}$ mit

(i) $g_0(\underline{x}) = 0$, $\underline{x} \in V_1$

(ii) $\sup \left\{ \|g_{j+1}(\underline{x}) - g_j(\underline{x})\|_2 \mid \underline{x} \in V_1 \right\} \leq 2^{-j} \cdot \alpha$, $j \in \mathbb{N}$

(iii) $g_{j+1}(\underline{x}) = G \left(\frac{\underline{x}}{g_j(\underline{x})} \right)$, $\underline{x} \in V_1$

I.A.: $g_0 \equiv 0$ gegeben durch (i)

I.S.: Seien $g_0, \dots, g_l : V_1 \rightarrow V_2$ stetig bereits definiert, sodass (ii) und (iii) für $j \in \{0, \dots, l-1\}$ gelten. Für $\underline{x} \in V_1$ haben wir

$$\begin{aligned}\|g_l(\underline{x})\|_2 &= \left\| \sum_{j=0}^{l-1} g_{j+1}(\underline{x}) - g_j(\underline{x}) \right\| \leq \sum_{j=0}^{l-1} \|g_{j+1}(\underline{x}) - g_j(\underline{x})\| \\ &\leq \sum_{j=0}^{l-1} 2^{-j} \alpha \\ &\leq 2\alpha \\ &< r\end{aligned}$$

$\Rightarrow g_l(\underline{x}) \in V_2$. Also ist $g_l(V_1) \subset V_2$ und wir können $g_{l+1} : V_1 \rightarrow \mathbb{R}^m$ durch (iii) definieren. Müssen noch zeigen:

- $g_{l+1}(V_1) \subset V_2$
- (ii) mit l anstelle von j
- g_{l+1} ist stetig

Nach Satz 7.11(Mittelwertsatz) gilt für $\underline{x} \in V_1, \underline{y}', \underline{y}'' \in V_2$

$$\left\| G\left(\frac{\underline{x}}{\underline{y}'}\right) - G\left(\frac{\underline{x}}{\underline{y}''}\right) \right\|_2 \leq \sup_{\underline{y} \in V_2} \left\| \frac{\partial G}{\partial \underline{y}}\left(\frac{\underline{x}}{\underline{y}}\right) \right\| \cdot \|\underline{y}' - \underline{y}''\|_2$$

also

$$\begin{aligned}\|g_{l+1}(\underline{x}) - g_l(\underline{x})\|_2 &\stackrel{(iii)}{=} \left\| G\left(\frac{\underline{x}}{g_l(\underline{x})}\right) - G\left(\frac{\underline{x}}{g_{l-1}(\underline{x})}\right) \right\|_2 \stackrel{(***)}, (**)}{\leq} \frac{1}{2} \cdot \|g_l(\underline{x}) - g_{l-1}(\underline{x})\|_2 \\ &\stackrel{(ii)}{\leq} \frac{1}{2} 2^{-(l-1)} \alpha = 2^{-l} \alpha\end{aligned}$$

und es gilt (ii) mit $j = l$.

Weiter gilt für $\underline{x} \in V_1$

$$\|g_{l+1}(\underline{x})\|_2 \leq \sum_{j=0}^l \|g_{j+1}(\underline{x}) - g_j(\underline{x})\|_2 \stackrel{(ii)}{\leq} \sum_{j=0}^l 2^{-j} \cdot \alpha = 2\alpha < r$$

also $g_{l+1}(V_1) \subset V_2$.

g_{l+1} ist stetig wegen (iii) und Stetigkeit von g_l und G . Die Induktion liefert $g_j, j \in \mathbb{N}$ wie gewünscht.

Hier ist die Induktion beendet

Nach Satz 1.5 konvergiert $\sum_{j=0}^{\infty} g_{j+1} - g_j$ absolut und gleichmäßig gegen eine Abbildung $g : V_1 \rightarrow \mathbb{R}^m$. (Wende 1.5 auf jede Koordinaten einzeln an). Nach Satz 1.4 ist g stetig (in jeder Koordinate gleichmäßiger Limes stetiger Funktionen). Es gilt für $\underline{x} \in V_1$

$$\|g(\underline{x})\|_2 \leq \sum_{j=0}^{\infty} \|g_{j+1}(\underline{x}) - g_j(\underline{x})\|_2 \stackrel{(ii)}{\leq} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \alpha = 2\alpha < r$$

$\Rightarrow g(V_1) \subset V_2$.

Wegen (iii) und Stetigkeit von g, g_j, G gilt für $\underline{x} \in V_1$ gilt:

$$g(\underline{x}) \lim_{j \rightarrow \infty} g_{j+1}(\underline{x}) = \lim_{j \rightarrow \infty} G\left(\frac{\underline{x}}{g_j(\underline{x})}\right) = G\left(\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\underline{x}}{g_j(\underline{x})}\right) = G\left(\frac{\underline{x}}{g(\underline{x})}\right)$$

und wegen (\star) gilt $F\left(\frac{\underline{x}}{g(\underline{x})}\right) = \underline{c}$, also

$$\left\{ \left(\frac{\underline{x}}{g(\underline{x})} \right) \middle| \underline{x} \in V_1 \right\} \subset N_F(\underline{c}) \cap (V_1 \times V_2)$$

Sei nun $\left(\frac{\underline{x}}{\underline{y}}\right) \in N_F(\underline{c}) \cap (V_1 \times V_2)$. Dann gilt nach (\star) $G\left(\frac{\underline{x}}{\underline{y}}\right) = \underline{y}$ und

$$\left\| \underline{y} - g(\underline{x}) \right\|_2 = \left\| G\left(\frac{\underline{x}}{\underline{y}}\right) - G\left(\frac{\underline{x}}{g(\underline{x})}\right) \right\|_2 \stackrel{(\star\star\star), (\star\star)}{\leq} \frac{1}{2} \cdot \left\| \underline{y} - g(\underline{x}) \right\|_2$$

$$\Rightarrow \left\| \underline{y} - g(\underline{x}) \right\|_2 = 0 \Rightarrow \underline{y} = g(\underline{x}).$$

Nach Satz 8.2 $\Rightarrow g$ ist differenzierbar in $\underline{a} \in \mathbb{R}^k$ mit

$$Dg(\underline{a}) = \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{y}} \left(\frac{\underline{a}}{\underline{b}} \right) \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial \underline{x}} \left(\frac{\underline{a}}{\underline{b}} \right)$$

g ist stetig differenzierbar: Verkleinere V_1, V_2 so dass $\frac{\partial F}{\partial \underline{y}} \left(\frac{\underline{a}}{\underline{b}} \right)$ invertierbar ist für $\left(\frac{\underline{a}}{\underline{b}}\right) \in V_1 \times V_2$. Variiere $\underline{a}, \underline{b}$

8.4 Corollar (Satz von der Umkehrabbildung)

(vgl. Analysis I, Satz 12.6)
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Sei $\underline{b} \in U$, sodass $Df(\underline{b})$ invertierbar ist. Dann existiert $\underline{b} \in V \subset U$ und $f(\underline{b}) \in W \subset \mathbb{R}^n$, sodass $f|_V : V \rightarrow W$ bijektiv ist und die **Umkehrabbildung** $f^{-1} : W \rightarrow V$ stetig differenzierbar ist mit

$$D(f^{-1})(f(\underline{b})) = (Df(\underline{b}))^{-1}$$

Beweis

Definiere $F : \mathbb{R}^m \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch $F\left(\frac{\underline{x}}{\underline{y}}\right) := \underline{x} - f(\underline{y})$. Dann gilt $F\left(\frac{f(\underline{b})}{\underline{b}}\right) = 0$ und F ist stetig differenzierbar mit

$$\frac{\partial F}{\partial \underline{y}} \left(\frac{\underline{x}}{\underline{y}} \right) = -Df(\underline{y}) \quad , \underline{y} \in$$

und $-Df(\underline{b}) = \frac{\partial F}{\partial \underline{y}} \left(\frac{f(\underline{b})}{\underline{b}} \right)$ ist invertierbar. Nach Satz 8.3 (mit $\underline{a} = f(\underline{b})$, $\underline{c} = 0$) existieren $f(\underline{b}) \in W \subset \mathbb{R}^n$, $\underline{b} \in V' \subset U$ und $g : W \rightarrow V'$ stetig differenzierbar mit

$$Dg(f(\underline{b})) = \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{y}} \left(\frac{f(\underline{b})}{\underline{b}} \right) \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial \underline{x}} \left(\frac{f(\underline{b})}{\underline{b}} \right) = (-Df(\underline{b}))^{-1} \cdot 1_n = -Df(\underline{b})^{-1}$$

und

$$\left\{ \left(\frac{\underline{x}}{g(\underline{x})} \right) \middle| \underline{x} \in W \right\} = N_F(0) \cap (W \times V') = \left\{ \left(\frac{\underline{x}}{\underline{y}} \right) \in W \times V' \middle| \underline{x} = f(\underline{y}) \right\}$$

Urbild Aus „ \subset “ folgt $\forall \underline{x} \in W : \underline{x} = f(g(\underline{x}))$. Setze

$$\begin{aligned} V &:= \underbrace{V' \cap f^{-1}(W)}_{\text{offen}} \subset V' \subset U \\ &= \{ \underline{y} \in V' \mid f(\underline{y}) \in W \} \end{aligned}$$

Dann ist $f(V) \subset W$ und $g(W) \subset V$. Begründung: $\forall \underline{x} \in W : g(\underline{x}) \in V', \underline{x} = f(g(\underline{x})) \Rightarrow g(\underline{x}) \in f^{-1}(W)$. Für $\underline{y} \in V$ gilt $\left(\frac{f(\underline{y})}{\underline{y}}\right) \in W \times V'$, also wegen „ \supset “

$$\left(\frac{f(\underline{x})}{\underline{y}} \right) = \left(\frac{f(\underline{x})}{g(f(\underline{y}))} \right), \quad \text{also } \underline{y} = g(f(\underline{y})) \Rightarrow f \circ g = \text{id}_W \wedge g \circ f = \text{id}_V \quad \square$$

8.5 Corollar (Lagrangemultiplikator)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $\underline{d} \in M := \{\underline{x} \in U \mid f(\underline{x}) = 0\}$ mit $\text{grad } f(\underline{d}) \neq 0$. Sei $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, sodass $h|_M : M \rightarrow \mathbb{R}$ in \underline{d} ein lokales Extremum hat. Dann existiert $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\text{grad } h(\underline{d}) = \lambda \cdot \text{grad } f(\underline{d})$$

Abbildung 21: Hier kommt noch ein Bild hin

Beweis

O.E. sei $\frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{d}) \neq 0$. Setze $\underline{a} := \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\underline{b} := d_n \in \mathbb{R}^1$. Dann existieren $\underline{a} \in U_1 \subset \mathbb{R}^{n-1}$, $\underline{b} \in U_2 \subset \mathbb{R}$ mit $U_1 \times U_2 \subset U$. Nach Satz 8.3 mit $F := f|_{U_1 \times U_2} : U_1 \times U_2 \rightarrow \mathbb{R}$ (es ist $\frac{\partial F}{\partial \underline{y}}(\underline{b}) = \frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{d}) \neq 0$, also invertierbar) existieren $\underline{a} \in V_1 \subset U_1$, $\underline{b} \in V_2 \subset U_2$ und $g : V_1 \rightarrow V_2$ stetig differenzierbar mit

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ g(x_1, \dots, x_{n-1}) \end{pmatrix} = 0 \quad \text{für } \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \in V_1, \text{d.h. } \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ g(x_1, \dots, x_{n-1}) \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \in V_1 \right\} \subset M \text{ sowie } \underline{b} = g(\underline{a})$$

Dann gilt für $i \in \{1, \dots, n-1\}$

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x_i} \left(\begin{pmatrix} \underline{a} \\ \underline{b} \end{pmatrix} \right) \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial x_n} \left(\begin{pmatrix} \underline{a} \\ \underline{b} \end{pmatrix} \right) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}(\underline{a}) \quad (*) \text{ (warum?)}$$

Definiere $H : V_1 \rightarrow \mathbb{R}$ durch $H \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} := h \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ g(x_1, \dots, x_{n-1}) \end{pmatrix}$. $h|_M$ besitzt in $\underline{d} = \begin{pmatrix} \underline{a} \\ \underline{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{a} \\ g(\underline{a}) \end{pmatrix}$ ein lokales Extremum, also auch H in \underline{a} . Für $i \in \{1, \dots, n-1\}$ folgt

$$0 = \frac{\partial H}{\partial x_i}(\underline{a}) = \frac{\partial h}{\partial x_i} \left(\begin{pmatrix} \underline{a} \\ g(\underline{a}) \end{pmatrix} \right) \cdot 1 + \frac{\partial h}{\partial x_i} \left(\begin{pmatrix} \underline{a} \\ g(\underline{a}) \end{pmatrix} \right) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}(\underline{a})$$

Setze

$$\lambda := \frac{\partial h}{\partial x_n} \left(\begin{pmatrix} \underline{a} \\ g(\underline{a}) \end{pmatrix} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \left(\begin{pmatrix} \underline{a} \\ g(\underline{a}) \end{pmatrix} \right) \right)^{-1}$$

dann folgt mit (*), (**), (***)

$$\frac{\partial h}{\partial x_i} \left(\frac{a}{g(\underline{a})} \right) = \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} \left(\frac{a}{g(\underline{a})} \right) \quad i = 1, \dots, n-1, n$$

□

8.6 Beispiel

(i) Sei $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$. Dann ist

$$Df \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r} \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} & \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r} \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} & \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$\det(Df \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix}) = r \neq 0$, also ist $Df \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix}$ invertierbar und f ist lokal invertierbar. Für $r > 0, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$
 gilt $f^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2} \\ \arctan \frac{y}{x} \end{pmatrix}$

(ii) Sei $A = (a_{ij})_{i,j \in \{1, \dots, n\}} \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ symmetrisch. $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$h(\underline{x}) := \langle \underline{x} | A \underline{x} \rangle = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

$M := S^{n-1} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\underline{x}\|_2 = 1\} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\underline{x}) = 0\}$ wo $f(\underline{x}) = 1 - \langle \underline{x} | \underline{x} \rangle$. M ist kompakt
 $\Rightarrow h|_M$ nimmt in ξ_{\max} ihr Maximum an; in ξ_{\min} ihr Minimum. Es ist $\frac{\partial f}{\partial x_l}(\underline{x}) = -2x_l$, also

$$\text{grad } f(\underline{x}) = -2\underline{x} \neq 0 \quad \text{für } \underline{x} \in M$$

also

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x_l}(\underline{x}) &= \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\sum_{i,j}^n a_{ij} x_i x_j \right) = \sum_{i,j}^n a_{ij} \frac{\partial x_i}{\partial x_l} x_j + \sum_{i,j}^n a_{ij} x_i \frac{\partial x_j}{\partial x_l} = \sum_{j=1}^n a_{lj} \cdot x_j + \sum_{i=1}^n a_{il} \cdot x_i \\ &= 2 \cdot \sum_{j=1}^n a_{lj} \cdot x_j = 2(A\underline{x})_l \end{aligned}$$

also $\text{grad } h(\underline{x}) = 2A\underline{x}$. Mit Corollar 8.5 folgt:

$$\exists \lambda_{\max} \in \mathbb{R} : -2 \cdot \lambda_{\max} \cdot \xi_{\max} = 2A\xi_{\max}$$

Es folgt: ξ_{\max} ist ein Eigenvektor von A mit Eigenwert $-\lambda_{\max}$

Also besitzt A mindestens einen reellen Eigenwert und A ist diagonalisierbar.

Es gilt

$$-\lambda_{\max} = -\lambda_{\max} \cdot \langle \xi_{\max} | \xi_{\max} \rangle = \langle \xi_{\max} | A \cdot \xi_{\max} \rangle = h(\xi_{\max})$$

9 Parameterabhängige Integrale

9.1 Proposition

Seien $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^m$, $f : [a, b] \times U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Sei $(\underline{y}_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset U$ konvergent mit $\bar{y} := \lim_{k \rightarrow \infty} \underline{y}_k \in U$. Definiere $F_k, F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$F_k(x) := f\left(\begin{matrix} x \\ \underline{y}_k \end{matrix}\right) \quad F(x) := f\left(\begin{matrix} x \\ \bar{y} \end{matrix}\right)$$

Dann gilt $F_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} F$ gleichmäßig.

Beweis

Setze $M := \{\underline{y}_k \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{\bar{y}\}$. Dann ist M kompakt nach 4.3 (i); $[a, b] \times M \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ist beschränkt und abgeschlossen, also auch kompakt. Nach 4.13 ist $f|_{[a, b] \times M} : [a, b] \times M \rightarrow \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $\delta > 0$, sodass für $(\underline{y}), (\underline{y}') \in [a, b] \times M$ mit $\left\| \begin{pmatrix} \underline{y} \\ \underline{y}' \end{pmatrix} \right\|_2 < \delta$ gilt $|f(\underline{y}) - f(\underline{y}')| < \varepsilon$.

Wegen $\underline{y}_k \rightarrow \bar{y}$ existiert ein $K \in \mathbb{N}$ mit $\left\| \bar{y} - \underline{y}_k \right\|_2 < \delta$ falls $k \geq K$. Für $x \in [a, b], k \geq K$ gilt

$$\left\| \begin{pmatrix} x \\ \underline{y}_k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ \bar{y} \end{pmatrix} \right\|_2 = \left\| \underline{y}_k - \bar{y} \right\|_2 < \delta$$

also

$$|F_k(x) - F(x)| = \left| f\left(\begin{matrix} x \\ \underline{y}_k \end{matrix}\right) - f\left(\begin{matrix} x \\ \bar{y} \end{matrix}\right) \right| < \varepsilon \quad \square$$

9.2 Satz

Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^m$, $f : [a, b] \times U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Definiere $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$g(\underline{y}) = \int_a^b f\left(\begin{matrix} x \\ \underline{y} \end{matrix}\right) dx$$

Dann ist g stetig.

Beweis

Sei $(\underline{y}_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset U$ mit $\underline{y}_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \bar{y} \in U$. Dann ist (mit F_k, F wie in 9.1)

$$g(\underline{y}_k) = \int_a^b f\left(\begin{matrix} x \\ \underline{y}_k \end{matrix}\right) dx = \int_a^b F_k(x) dx \quad \text{und} \quad g(\bar{y}) = \int_a^b F(x) dx$$

Nach 9.1 gilt $F_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} F$ gleichmäßig und nach 1.7 gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g(\underline{y}_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b F_k(x) dx \stackrel{1.7}{=} \int_a^b (\lim_{k \rightarrow \infty} F_k(x)) dx = \int_a^b F(x) dx = g(\bar{y})$$

Nach 3.2 (Folgenkriterium) ist g also stetig. \square

9.3 Proposition

Seien $[a, b], [c, d] \subset \mathbb{R}$, $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. f sei stetig partiell differenzierbar nach der zweiten Variablen, d.h. $\frac{\partial f}{\partial y}(\frac{x}{y})$ existiert und ist stetig in $(\frac{x}{y})$ für alle $(\frac{x}{y})$. Sei $(y_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset [c, d]$ mit $y_k \rightarrow \bar{y} \in [c, d]$ und $y_k \neq \bar{y}$, für $k \in \mathbb{N}$. Definiere $F_k, F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$F_k(x) := \frac{f(\frac{x}{y_k}) - f(\frac{x}{\bar{y}})}{y_k - \bar{y}}, \quad F(x) := \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{x}{\bar{y}}\right)$$

Dann gilt $F_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} F$ gleichmäßig.

Beweis

Sei $\varepsilon > 0$. $\frac{\partial f}{\partial y} : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig, also gleichmäßig stetig nach 4.13; daher existiert ein $\delta > 0$, sodass für $y, y' \in [c, d]$ mit $|y - y'| < \delta$ gilt $\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x) - \frac{\partial f}{\partial y}(y') \right| < \varepsilon$ für $x \in [a, b]$. Nach dem Mittelwertsatz existiert für $x \in [a, b], k \in \mathbb{N}$ ein $\theta_{k,x}$ zwischen \bar{y} und y_k mit

$$F_k(x) = \frac{f(\frac{x}{y_k}) - f(\frac{x}{\bar{y}})}{y_k - \bar{y}} = \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{x}{\theta_{k,x}}\right)$$

Wegen $y_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \bar{y}$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $|\bar{y} - y_k| < \delta$ falls $k \geq N$. Für $k \geq N$ gilt dann $|\bar{y} - \theta_{k,x}| < \delta$ also

$$|F(x) - F_k(x)| = \left| \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{x}{\bar{y}}\right) - \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{x}{\theta_{k,x}}\right) \right| < \varepsilon$$

für alle $x \in [a, b]$.

□

9.4 Satz

Seien $[a, b], [c, d] \subset \mathbb{R}$, $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. f sei stetig partiell differenzierbar nach der zweiten Variablen. Definiere $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ durch $g(y) := \int_a^b f(\frac{x}{y}) dx$. Dann ist g stetig differenzierbar mit

$$\frac{dg}{dy}(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right) dx$$

Beweis

Sei $\bar{y} \in [c, d]$, $(y_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset [c, d]$ mit $y_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \bar{y}, y_k \neq \bar{y} \forall k \in \mathbb{N}$. Definiere $F_k, F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ wie in Proposition 9.3, sodass $F_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} F$ gleichmäßig. Dann gilt

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{g(y_k) - g(\bar{y})}{y_k - \bar{y}} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\int_a^b (f(\frac{x}{y_k}) - f(\frac{x}{\bar{y}})) dx}{y_k - \bar{y}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b F_k(x) dx = \int_a^b F(x) dx \\ &= \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y} dx \end{aligned} \quad \square$$

9.5 Satz von Fubini

Seien $[a, b], [c, d] \subset \mathbb{R}$, $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:

$$\int_c^d \left(\int_a^b f\left(\frac{x}{y}\right) dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f\left(\frac{x}{y}\right) dy \right) dx$$

(Die Funktion $y \mapsto \int_a^b f(\frac{x}{y}) dx$ und $x \mapsto \int_c^d f(\frac{x}{y}) dy$ sind stetig nach 9.2, daher existieren beide Seiten)

Beweis

Definiere $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$g(y) := \int_a^b \underbrace{\left(\int_c^y f\left(\frac{x}{s}\right) ds \right)}_{\substack{\text{stetig bezüglich } x \text{ nach 9.2} \\ \text{stetig diffbar. bzgl. } y}} dx$$

Nach Satz 9.4 gilt

$$\frac{dg}{dy}(y) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_c^y f\left(\frac{x}{s}\right) ds \right) dx = \int_a^b f\left(\frac{x}{y}\right) dx$$

Wir erhalten:

$$\int_c^d \left(\int_a^b f\left(\frac{x}{y}\right) dx \right) dy = \int_c^d \frac{\partial g}{\partial y}(y) dy = g(d) - \underbrace{g(c)}_{=0} = g(d) = \int_a^b \left(\int_c^d f\left(\frac{x}{y}\right) dy \right) dx \quad \square$$

10 Anwendungen

10.1 Physikalische (mechanische) Systeme

Zu einem physikalischen (mechanischen) System assoziiert man eine sogenannte **Lagrange-funktion**

$$L : [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \begin{pmatrix} t \\ q \\ p \end{pmatrix} \mapsto L \begin{pmatrix} t \\ q \\ p \end{pmatrix}$$

Dabei ist zB. t die Zeit, q der Ort (eines Teilchens) und p seine Geschwindigkeit (bzw. sein Impuls). Für $q(a), q(b)$ sind oft Randbedingungen vorgegeben. Das **Prinzip der kleinsten Wirkung** besagt, dass für einen physikalischen Zustand die Größe

$$S(q) := \int_a^b L \begin{pmatrix} t \\ q(t) \\ \dot{q}(t) \end{pmatrix} dt$$

minimal wird.

Problem:

Finde Bedingungen an q dafür, dass $S(q)$ minimal ist.

10.2 Satz (Euler-Lagrange-Gleichungen)

Sei $L : [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $q : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar mit $q(a) = \alpha, q(b) = \beta$ und $S(q) = \inf \{ S(g) \mid g \in C^2([a, b]), g(a) = \alpha, g(b) = \beta \}$. Dann gilt

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial p} \begin{pmatrix} t \\ q(t) \\ \dot{q}(t) \end{pmatrix} \right) = \frac{\partial L}{\partial q} \begin{pmatrix} t \\ q(t) \\ \dot{q}(t) \end{pmatrix}$$

Beweis

Für jedes $h \in C^2([a, b])$ mit $h(a) = h(b) = 0$ (\star) gilt für $r \in \mathbb{R}$

$$S(q) \leq S(q + r \cdot h) = \int_a^b L \begin{pmatrix} t \\ q(t) + r \cdot h(t) \\ \dot{q}(t) + r \cdot \dot{h}(t) \end{pmatrix} dt$$

Definiere $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch $F(r) := S(q + r \cdot h)$. F hat in 0 ein Minimum, also $\frac{dF}{dr}(0) = 0$ ($\star\star$) Nach Satz 9.4 gilt

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dr}(r) &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial r} \left(L \begin{pmatrix} t \\ q(t) + r \cdot h(t) \\ \dot{q}(t) + r \cdot \dot{h}(t) \end{pmatrix} \right) dt \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial q} \begin{pmatrix} t \\ q(t) + r \cdot h(t) \\ \dot{q}(t) + r \cdot \dot{h}(t) \end{pmatrix} \cdot h(t) + \frac{\partial L}{\partial p} \begin{pmatrix} t \\ q(t) + r \cdot h(t) \\ \dot{q}(t) + r \cdot \dot{h}(t) \end{pmatrix} \cdot \dot{h}(t) \right) dt \end{aligned}$$

Partielle Integration liefert:

$$\int_a^b \frac{\partial L}{\partial p} \begin{pmatrix} t \\ q(t) + r \cdot h(t) \\ \dot{q}(t) + r \cdot \dot{h}(t) \end{pmatrix} \cdot \dot{h}(t) dt = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial p}(\dots) h(t)}_{=0 \text{ nach } (\star)} \Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial p}(\dots) \right) h(t) dt$$

Dann gilt

$$0 \stackrel{(\star\star)}{=} \frac{dF}{dr}(0) = \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial q} \begin{pmatrix} t \\ q(t) \\ \dot{q}(t) \end{pmatrix} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial p} \begin{pmatrix} t \\ q(t) \\ \dot{q}(t) \end{pmatrix} \right) \right) h(t) dt$$

da $h \in C^2([a, b])$ mit (\star) beliebig folgt:

$$\frac{\partial L}{\partial q} \begin{pmatrix} t \\ q(t) \\ \dot{q}(t) \end{pmatrix} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial p} \begin{pmatrix} t \\ q(t) \\ \dot{q}(t) \end{pmatrix} \right) = 0$$

Dabei bemerkt: $f \in C[a, b]$ mit $\int_a^b f(t)h(t) dt = 0$ für jedes $h \in C^2([a, b])$ mit $h(a) = h(b) = 0 \Rightarrow f(t) = 0$ für alle $t \in [a, b]$ \square

10.3 Ebenes Pendel

Abbildung 22: hier kommt ein Bild von einem ebenen Pendel hin ...

Potentielle Energie: $E_{pot} = m \cdot g \cdot z(t) = m \cdot g \cdot l \cdot (1 - \cos \varphi(t))$
 Kinetische Energie: $E_{kin} = \frac{m}{2} \cdot (\dot{z}(t)^2 + \dot{x}(t)^2) = \frac{m}{2} l^2 \cdot \dot{\varphi}(t)^2$

m Masse, g Erdbe-
schleunigung

$$L \begin{pmatrix} t \\ \varphi(t) \\ \dot{\varphi}(t) \end{pmatrix} = E_{kin} - E_{pot} = \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}(t)^2 + m \cdot g \cdot l \cos \varphi(t) - m \cdot g \cdot l$$

Ist die Lagrangefunktion und

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial p} \right) \begin{pmatrix} t \\ \varphi(t) \\ \dot{\varphi}(t) \end{pmatrix} &= \frac{d}{dt} (m \cdot l^2 \dot{\varphi}(t)) = m \cdot l^2 \ddot{\varphi}(t) \\ \frac{\partial L}{\partial q} \begin{pmatrix} t \\ \varphi(t) \\ \dot{\varphi}(t) \end{pmatrix} &= -m \cdot g \cdot l \cdot \sin \varphi(t) \end{aligned}$$

\Rightarrow Für eine Pendelbewegung gilt

$$\begin{aligned} m \cdot l^2 \ddot{\varphi}(t) &= -mgl \sin \varphi(t) \\ \Leftrightarrow \quad \ddot{\varphi}(t) &= -\frac{g}{l} \sin \varphi(t) \end{aligned}$$

Für ein kleines φ ist $\sin \varphi(t) \approx \varphi(t)$ (Taylor). Wir erhalten:

$$\ddot{\varphi}(t) = -\frac{g}{l} \varphi(t)$$

Lösung: $\varphi(t) = \lambda \cdot \cos(\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t) + \mu \cdot \sin(\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t)$. Eindeutigkeit? \leadsto Analysis III

10.4 Kettenlinie

Gesucht: Kurve des Seils mit Länge l in der Gleichgewichtslage: $E_{kin} = 0$ (Seil beliebig biegsam mit homogener Massengewichtung) (Masse/Länge)

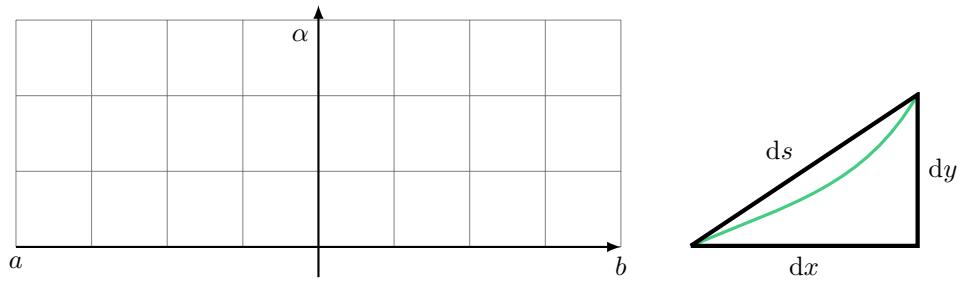


Abbildung 23: hier kommt eine Zeichnung der Kettenlinie hin, irgendwann ...

$$dm = \rho \cdot ds$$

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \\ &= \sqrt{1 + y'(x)^2} dx \end{aligned}$$

potentielle Energie von dm ist $y \cdot g \cdot dm = \rho \cdot g \cdot y(x)$. Länge:

$$\begin{aligned} l &= \int_a^b \underbrace{\sqrt{1 + y'(x)^2}}_{=:H\begin{pmatrix} x \\ y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix}} dx \end{aligned}$$

Wir müssen

$$S(y) = \int_a^b L\begin{pmatrix} x \\ y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} dx = \rho \cdot g \cdot \int_a^b y(x) \cdot \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$$

mit $y(a) = y(b) = \alpha$ minimal unter den Nebenbedingungen $l = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$. Sei nun $\bar{y} \in C^2([a, b])$ eine Lösung. Seien $h_1, h_2 \in C^2([a, b])$ mit $h_i(a) = h_i(b) = 0$. Definiere $\bar{S}, \bar{K} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\begin{aligned} \bar{S}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} &:= S(\bar{y} + r_1 h_1 + r_2 h_2) \\ \bar{K}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} &:= K(\bar{y} + r_1 h_1 + r_2 h_2) \end{aligned}$$

$K(y) = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2} dx = \int_a^b H\begin{pmatrix} x \\ y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} dx$. Dann hat \bar{S} ein lokales Minimum in $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ unter den Nebenbedingungen $\bar{K} - l = 0$. Nach Corollar 8.5 existiert $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$0 = \text{grad } \bar{S}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \lambda \text{grad } \bar{K}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \text{grad } (\bar{S} - \lambda \bar{K})\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Man kann zeigen: Falls h_1, h_2 linear unabhängig sind, ist dieses Minimum isoliert und gegeben als lokales isoliertes Minimum von $\bar{S} - \lambda \cdot \bar{K}$ (jetzt ohne Nebenbedingung). Mit der modifizierten Lagrangefunktion

$$\tilde{L}\begin{pmatrix} x \\ y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} = L\begin{pmatrix} x \\ y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} - \lambda H\begin{pmatrix} x \\ y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix}$$

minimiere jetzt $\tilde{S}(y) = \int_a^b \tilde{L} \begin{pmatrix} x \\ y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} dx = (y(x) - \lambda) \cdot \sqrt{1 + y'(x)^2}$. Satz 10.2 liefert die Bedingung

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial p} \right) \begin{pmatrix} x \\ y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q} \begin{pmatrix} x \\ y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix}$$

Trick:

$$\frac{d}{dx} \left(\tilde{L} \begin{pmatrix} x \\ y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial p} \begin{pmatrix} x \\ y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} \cdot y'(x) \right) = \underbrace{\left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial q} \begin{pmatrix} x \\ y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial p} \right) \begin{pmatrix} x \\ y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} \right)}_{\text{mit } (\star) = 0} \cdot y'(x)$$

$\Rightarrow \tilde{L} \begin{pmatrix} x \\ y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial p} \begin{pmatrix} x \\ y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} \cdot y'(x) \equiv C$ ist konstant. Nach einer kleinen Rechnung erhält man

$$= \frac{y(x) - \lambda}{\sqrt{1 + y'(x)^2}}$$

$$\Rightarrow y'(x)^2 = \frac{1}{c^2} (y(x) - \lambda)^2 - 1$$

Eine Lösung ist $y(x) = \lambda + c \cdot \cosh(\frac{x}{c})$ wo $\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$

Index

Die Seitenzahlen sind mit Hyperlinks zu den entsprechenden Seiten versehen, also anklickbar 

Ableitung, 38
Abschluss, 14

Banachraum, 17

Cauchyfolge, 17

Differential, 38

Divergenz, 34

Durchmesser
metrischer Raum, 17

Funktionalmatrix, 38

Funktionenfolgen

gleichmäßige Konvergenz, 1
Konvergenz in metrischen Räumen, 20
punktweise Konvergenz, 1
Reihen, 3

Geschwindigkeit, 28

gleichmäßig stetig, 27

Gradient, 33

Hausdorffsch, 14

Hesse-Matrix, 47

Innere, 14

Jacobimatrix, 38

kompakt, 23

Konvergenz

metrischer Raum, 16
topologischer Raum, 16

Konvergenzradius, 4

Kugel

abgeschlossene, 12
offene, 12

Kurve, 28

Lagrangefunktion, 60

Laplaceoperator, 37

lokales Extremum, 47

isoliert, 47

lokales Maximum (Minimum), 47

Metrik

diskrete, 12

metrischer Raum, 10

Stetigkeit, 19

Mittelwertsatz, 44

Norm, 1

1-Norm, 10

2-Norm, 11

max-Norm, 10

p-Norm, 11

Supremumsnorm, 1

offen, 12

Parametertransformation, 31

partiell differenzierbar, 33

Potenzreihe, 4

Prinzip der kleinsten Wirkung, 60

Rand, 14

regulär, 28

rektifizierbar, 29

Richtungsableitung, 43

Sphären, 34

Tangentialeinheitsvektor, 28

Tangentialvektor, 28

Taylorformel, 46

Taylorreihe, 9

Teilüberdeckung, 23

Topologie, 14

induzierte, 14

topologischer Raum, 14

Stetigkeit, 20

Umgebung, 12, 14

Umkehrabbildung, 54

Vektorfeld, 34

vollständig, 17

Zykloid, 32

Überdeckung, 23

Abbildungsverzeichnis

1	punktweise konvergierende Funktionenfolge	1
2	Folge stetiger Funktionen	2
3	Veranschaulichung von gleichmäßiger Konvergenz	2
4	Veranschauchlichung von 1.10 in der komplexen Ebene	5
5	eine exakte Darstellung von Frankreich ...	10
6	zu 2.2 (x) : Geometrische Interpretation verschiedener Normen	12
7	Veranschaulichung des Vorgehens in 2.4	13
8	Veranschaulichung des Vorgehens im Beweis von 2.8	14
9	Veranschaulichung von 2.11 (vii)	16
10	Veranschaulichung vom Beweis zu 4.7 in \mathbb{R}^2	25
11	Bestimmung des Tangentialvektors durch den Limes des Differenzenquotienten in 5.4	28
12	Darstellung der Kurve aus 5.5 1)	28
13	Graph aus 5.5 2) mit zwei Tangentialvektoren; Kreis mit Radius r	29
14	Schraubenlinie aus 5.5 3)	29
15	Graph der Kurve aus 5.5 4) (Zykloid)	29
16	Polygonzug für ein rektifizierbares γ	30
17	Darstellung einer Abbildung $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $U \subset \mathbb{R}^2$ als 3D-Plot und als Niveaulinien	33
18	Vektorfeld aus 6.4(iv) (Man beachte, dass alle Vektoren Einheitsvektoren sind)	35
19	Veranschauchlichung von Bemerkung 7.2	38
20	Hier kommt noch ein Bild mit Niveaulinien hin	50
21	Hier kommt noch ein Bild hin	55
22	hier kommt ein Bild von einem ebenen Pendel hin ...	61
23	hier kommt eine Zeichnung der Kettenlinie hin, irgendwann ...	62