Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Fachbereich 10 Mathematik und Informatik

Skript Operatoralgebren

Mitschrift der Vorlesung „Operatoralgebren“ von Prof. Dr. Wilhelm Winter

Jannes Bantje

12. Februar 2016

C^*

Aktuelle Version verfügbar bei

GitHub

`https://github.com/JaMeZ-B/latex-wwu`

GitHub ist eine Internetplattform, auf der viele OpenSource-Projekte gehostet werden. Diese Plattform nutzen wir zur Zusammenarbeit, also findet man hier neben den PDFs auch die TeX-Dateien. Außerdem ist über diese Plattform auch direktes Mitarbeiten möglich, siehe nächste Seite.

sciebo die Campuscloud

`https://uni-muenster.sciebo.de/public.php?service=files&t=965ae79080a473eb5b6d927d7d8b0462`

Sciebo ist ein Dropbox-Ersatz der Hochschulen in NRW, der von der Uni Münster in leitender Position auf Basis der OpenSource-Software Owncloud aufgebaut wurde. Wenn man auf den Link klickt, kann man die Freigabe zum eigenen Speicher hinzufügen und hat dann immer automatisch die aktuellste Version.

Bittorrent Sync

`B6WH2DISQ5QVYIRYIEZSF4ZR2IDVKPN3I`

BTSync ist ein peer-to-peer Dateisynchronisations-Tool. Dabei werden die Dateien nur auf den Computern der Teilnehmer an einer Freigabe gespeichert. Ein RasPi ist permanent online, sodass stets die aktuellste Version verfügbar ist. `Clients` gibt es für jedes Betriebssystem. Zugang ist über das obige „Secret“ bzw. den QR-Code möglich.

Vorlesungshomepage

`https://wwwmath.uni-muenster.de/u/wilhelm.winter/wwinter/operatoralgebren.html`

Hier ist ein Link zur offiziellen Vorlesungshomepage.

Vorwort — Mitarbeit am Skript

Dieses Dokument ist eine Mitschrift aus der Vorlesung „Operatoralgebren, WiSe 2015“, gelesen von Prof. Dr. Wilhelm Winter. Der Inhalt entspricht weitestgehend dem Tafelanschrieb. Für die Korrektheit des Inhalts übernehme ich keinerlei Garantie! Für Bemerkungen und Korrekturen – und seien es nur Rechtschreibfehler – bin ich sehr dankbar. Korrekturen lassen sich prinzipiell auf drei Wegen einreichen:

- Persönliches Ansprechen in der Uni, Mails an `j.bantje@wwu.de` (gerne auch mit annotieren PDFs) oder Kommentare auf `https://github.com/JaMeZ-B/latex-wwu`.
- *Direktes* Mitarbeiten am Skript: Den Quellcode poste ich auf GitHub (siehe oben), also stehen vielfältige Möglichkeiten der Zusammenarbeit zur Verfügung: Zum Beispiel durch Kommentare am Code über die Website und die Kombination Fork + Pull Request. Wer sich verdient macht oder ein Skript zu einer Vorlesung, die ich nicht besuche, beisteuern will, dem gewähre ich gerne auch Schreibzugriff.

  Beachten sollte man dabei, dass dazu ein Account bei `github.com` notwendig ist, der allerdings ohne Angabe von persönlichen Daten angelegt werden kann. Wer bei GitHub (bzw. dem zugrunde liegenden Open-Source-Programm „`git`“) – verständlicherweise – Hilfe beim Einstieg braucht, dem helfe ich gerne weiter. Es gibt aber auch zahlreiche empfehlenswerte Tutorials im Internet.[1]
- *Indirektes* Mitarbeiten: TeX-Dateien per Mail verschicken.

  Dies ist nur dann sinnvoll, wenn man einen ganzen Abschnitt ändern möchte (zB. einen alternativen Beweis geben), da ich die Änderungen dann per Hand einbauen muss! Ich freue mich aber auch über solche Beiträge!

Anmerkung

Innerhalb dieser Mitschrift wird man öfter den Ausdruck „Warum?“ finden. Dies sind vom Dozenten bewusst weggelassene Details, die zu verstärktem Mitdenken beim Lesen animieren sollen. Oftmals sind dies schon aus vorherigen Semestern bekannte Sachverhalte. Nur an wenigen Stellen habe ich die fehlenden Details hinzugefügt.

Literatur

- G. J. Murphy *C*-algebras and Operator Theory*
- B. Blackadar *Operator Algebras*
- J. Dixmier *C*-algèbres*
- J. Dixmier *Algèbres de von Neumann*
- M. Takesaki *Theory of Operator Algebras I.*
- R.V. Kadison und J. R. Ringrose *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras I.*
- G.K. Pedersen *C*-algebras and their Automorphism Groups*

[1] zB. `https://try.github.io/levels/1/challenges/1`, ist auf Englisch, aber dafür interaktives LearningByDoing

Inhaltsverzeichnis

1. Spektraltheorie in Banachalgebren

1.1 Definition. Eine ***Banachalgebra*** ist eine vollständige normierte Algebra. Für die Multiplikation gilt also $\|ab\| \leqslant \|a\| \cdot \|b\|$ Wir betrachten in dieser Vorlesung fast ausschließlich Algebren über $\mathbb{C}$. Eine Banachalgebra heißt ***unital***, falls sie ein Einselement $\mathbb{1}$ mit $\|\mathbb{1}\| = 1$ enthält.

1.2 Definition. Für eine unitale $\mathbb{C}$-Algebra A setzen wir

$$\begin{aligned} \operatorname{Inv}(A) &:= \{a \in A \text{ invertierbar}\} \\ \sigma(a) := \sigma_A(a) &:= \left\{\lambda \in \mathbb{C} \,\middle|\, \lambda \cdot \mathbb{1} - a \notin \operatorname{Inv}(A)\right\} \end{aligned}$$

das Vorzeichen der Differenz spielt für die Definition der Menge keine Rolle

$\sigma(a)$ heißt ***Spektrum*** von $a \in A$.

1.3 Bemerkung. Sei A wie oben und $a, b \in A$. Dann gilt

$$\mathbb{1} - ab \in \operatorname{Inv}(A) \iff \mathbb{1} - ba \in \operatorname{Inv}(A)$$

Beweis: Durch simples Nachrechnen verifiziert man, dass $(\mathbb{1} - ba)^{-1} = \mathbb{1} + b(\mathbb{1} - ab)^{-1}a$ gilt. □

1.4 Satz. Sei A eine unitale $\mathbb{C}$-Algebra und $a \in A$ mit $\sigma(a) \neq \emptyset$. Sei weiter $p \in \mathbb{C}[Z]$ ein Polynom. Dann gilt

$$\sigma\big(p(a)\big) = p\big(\sigma(a)\big)$$

weiter gilt $\sigma(a^{-1}) = \{\lambda^{-1} \mid \lambda \in \sigma(a)\}$ nach Aufgabe 5 von Blatt 1

Beweis: Die Aussage ist trivial, falls p konstant ist. Sei also p nicht konstant. Zu $\mu \in \mathbb{C}$ existieren $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ mit $\lambda_0 \neq 0$ und $p(z) - \mu = \lambda_0 \cdot (z - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (z - \lambda_n)$, also

$$p(a) - \mu = \lambda_0 \cdot (a - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (a - \lambda_n)$$

Damit gilt: $p(a) - \mu$ ist genau dann invertierbar, wenn $a - \lambda_1, \dots, a - \lambda_n$ invertierbar sind. Also

$$\begin{aligned} \mu \in \sigma\big(p(a)\big) &\iff \lambda_i \in \sigma(a) \text{ ist für ein } i \in \{1, \dots, n\} \\ &\iff p(\lambda) - \mu = 0 \text{ für ein } \lambda \in \sigma(a) \\ &\iff p(\lambda) = \mu \text{ für ein } \lambda \in \sigma(a) \end{aligned}$$

Somit folgt dann $\sigma(p(a)) = p(\sigma(a))$. □

1.5 Satz. Sei A eine unitale Banachalgebra und $a \in A$. Falls $\|a\| < 1$, so ist $\mathbb{1} - a$ invertierbar und

$$(\mathbb{1} - a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \qquad \text{(\textbf{\textit{Neumannsche Reihe}})}$$

Beweis: Die Folge der Partialsummen $\left(\sum_{n=0}^{k} a^n\right)_{k \in \mathbb{N}} \subset A$ ist eine Cauchyfolge (warum?), sodass wegen Vollständigkeit die unendliche Summe existiert. Es gilt dann

$$(\mathbb{1} - a)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a^n\right) \xleftarrow{k \to \infty} (\mathbb{1} - a)\left(\sum_{n=0}^{k} a^n\right) = \mathbb{1} - a^{k+1} \xrightarrow{k \to \infty} \mathbb{1}$$

Die Summe ist also ein Rechtsinverses. Genauso folgt, dass sie auch ein Linksinverses ist. □

1.6 Korollar. Für jede unitale Banachalgebra A ist $\operatorname{Inv}(A) \subset A$ offen.

Beweis: Falls $a \in \mathrm{Inv}(A)$ und $\|b-a\| < \|a^{-1}\|^{-1}$, so gilt $\|ba^{-1} - \mathbb{1}\| \leqslant \|b-a\| \cdot \|a^{-1}\| < 1$. Also ist auch $-\big(\mathbb{1} - \big(ba^{-1} - \mathbb{1}\big)\big) = ba^{-1}$ invertierbar nach Satz 1.5 und damit auch $b \in \mathrm{Inv}(A)$, denn b ist ein Linksinverses für $a^{-1}(ba^{-1})^{-1} \in \mathrm{Inv}(A)$. □

1.7 Definition. Sei A eine unitale Banachalgebra. Für $a \in A$ definieren wir den ***Spektralradius*** durch

$$r(a) := \sup_{\lambda \in \sigma(a)} |\lambda|$$

1.8 Proposition. Sei $a \in A$ wie oben. Dann ist das Spektrum $\sigma(a)$ kompakt und $r(a) \leqslant \|a\|$.

Beweis: Angenommen $|\lambda| > \|a\|$, dann gilt $\|\lambda^{-1}a\| < 1$, also ist $\mathbb{1} - \lambda^{-1}a$ invertierbar nach Satz 1.5 und damit auch $\lambda - a$. Also kann λ nicht im Spektrum von a enthalten sein. Es folgt, dass $r(a) \leqslant \|a\|$ ist. Weiter ist $\mathbb{C} \setminus \sigma(a) \subset \mathbb{C}$ offen, da $\mathrm{Inv}(A) \subset A$ offen ist. Damit muss $\sigma(a)$ nach Heine-Borel kompakt sein. □

1.9 Satz. Sei A eine unitale Banachalgebra. Für jedes $a \in A$ ist $\sigma(a)$ nichtleer.

Beweis: Falls $|\lambda| > \|a\|$, so existiert $\big(\mathbb{1} - \lambda^{-1}a\big)^{-1}$ und $(\lambda - a)^{-1}$ mit der gleichen Begründung wie eben. Es gilt dann

$$(\lambda - a)^{-1} = \lambda^{-1}\big(1 - \lambda^{-1}a\big)^{-1} \overset{1.5}{=} \lambda^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n}a^n\right)$$

und weiter

$$\|(\lambda - a)^{-1}\| \leqslant \left|\lambda^{-1}\right| \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left|\lambda^{-1}\right| \cdot \|a\|\right)^n \xrightarrow{|\lambda| \to \infty} 0 \qquad [*]$$

da man die Summe als geometrische Reihe mit 2 abschätzen kann, falls $|\lambda| > 2 \cdot \|a\|$ ist. Sei nun $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \sigma(a)$ und $|\lambda - \lambda_0| < \|(a - \lambda_0)^{-1}\|^{-1}$. Dann gilt

$$\|(\lambda - \lambda_0)(a - \lambda_0)^{-1}\| \leqslant |\lambda - \lambda_0| \cdot \|(a - \lambda_0)^{-1}\| < 1$$

Also ist wieder nach Satz 1.5 $\big(\mathbb{1} - (\lambda - \lambda_0)(a - \lambda_0)^{-1}\big)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n (a - \lambda_0)^{-n}$ und

$$\begin{aligned} -\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n (a - \lambda_0)^{-(n+1)} &= (a - \lambda_0)^{-1}\big((\lambda - \lambda_0)(a - \lambda_0)^{-1} - \mathbb{1}\big)^{-1} \\ &= \Big((\lambda - \lambda_0)\underbrace{(a - \lambda_0)^{-1}(a - \lambda_0)}_{=\mathbb{1}} - (a - \lambda_0)\Big)^{-1} = (\lambda - a)^{-1} \end{aligned}$$

Für ein stetiges Funktional $\varphi \in A^*$ erhalten wir

$$\varphi\big((\lambda - a)^{-1}\big) = \sum_{n=0}^{\infty} -\varphi\Big((a - \lambda_0)^{-(n+1)}\Big) \cdot (\lambda - \lambda_0)^n$$

falls $|\lambda - \lambda_0| < \|(a - \lambda_0)^{-1}\|^{-1}$. Daher ist $\lambda \mapsto \varphi\big((\lambda - a)^{-1}\big)$ ***holomorph*** auf $\mathbb{C} \setminus \sigma(a)$. Falls $\sigma(a) = \emptyset$, so ist $\lambda \mapsto \varphi\big((\lambda - a)^{-1}\big)$ ***ganz***, d.h. holomorph auf ganz $\mathbb{C}$. Wegen [*] und dem Satz von Liouville[1] ist dann $\varphi\big((\lambda - a)^{-1}\big) = 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$. Aber $\varphi \in A^*$ war beliebig, und wegen Hahn-Banach gilt $(\lambda - a)^{-1} = 0$. Dies ist ein Widerspruch. □

[1] siehe `https://de.wikipedia.org/wiki/Satz_von_Liouville_%28Funktionentheorie%29`

1.10 Satz. Sei A eine unitale Banachalgebra. Für $a \in A$ gilt dann

$$r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$$

Beweis: Sei $\varphi \in A^*$ ein stetiges Funktional. Wir haben im Beweis von Satz 1.9 gesehen, dass die Zuordnung $\lambda \mapsto \varphi\big((\lambda - a)^{-1}\big)$ analytisch ist für $\lambda \notin \sigma(a)$. Insbesondere gilt dies für $|\lambda| > r(a)$. Dann ist auch $\lambda \mapsto \varphi\big((\lambda^{-1} - a)^{-1}\big)$ analytisch für $0 < |\lambda| < 1/r(a)$, ebenso $\lambda \mapsto \varphi\big((\mathbb{1} - \lambda a)^{-1}\big)$. Die Singularität bei 0 ist hebbar, also definiert $f(\lambda) := \varphi\big((\mathbb{1} - \lambda a)^{-1}\big)$ eine analytische Funktion für $|\lambda| < 1/r(a)$. Dann existiert eine Folge $(\alpha_n)_{n\in N} \subset \mathbb{C}$ mit $f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cdot \lambda^n$ für $|\lambda| < 1/r(a)$. Die Konvergenz ist absolut und gleichmäßig, also gilt insbesondere $|\alpha_n \cdot \lambda^n| \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Falls andererseits $|\lambda| < 1/\|a\| \leqslant 1/r(a)$ ist, so gilt

$$f(\lambda) = \varphi\big((\mathbb{1} - \lambda \cdot a)^{-1}\big) \overset{1.5}{=} \varphi\left(\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda \cdot a)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi\big((\lambda \cdot a)^n\big) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(a^n) \cdot \lambda^n$$

also $\alpha_n = \varphi(a^n)$ für $n \in N$. Es gilt $\varphi(a^n) \cdot \lambda^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Aber $\varphi \in A^*$ war beliebig, also ist für jedes $\varphi \in A^*$ die Folge $(\varphi(\lambda^n a^n))_{\mathbb{N}} = (\varphi(a^n) \cdot \lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt für $|\lambda| < 1/r(a)$.

Nach dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit ist dann $(\lambda^n a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt für jedes λ mit $|\lambda| < 1/r(a)$. Damit existiert für $0 < |\lambda| < 1/r(a)$ ein $M \geqslant 0$ mit $\|\lambda^n a^n\| \leqslant M$, $n \in \mathbb{N}$, also

$$\|a^n\|^{1/n} \leqslant \frac{M^{1/n}}{|\lambda|} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{|\lambda|}$$

Es folgt $\limsup_n \|a^n\|^{1/n} \leqslant r(a)$. Falls $\lambda \in \sigma(a)$, so gilt nach Satz 1.4 $\lambda^n \in \sigma(a^n)$ und wegen Proposition 1.8 $|\lambda^n| \leqslant \|a^n\|$, also $|\lambda| \leqslant \|a^n\|^{1/n}$ und es folgt insgesamt

$$r(a) \leqslant \inf_n \|a^n\|^{1/n} \leqslant \liminf_n \|a^n\|^{1/n} \leqslant \limsup_n \|a^n\|^{1/n} \leqslant r(a)$$

und damit $\lim_n \|a^n\|^{1/n} = r(a)$, woraus die Behauptung folgt. □

1.11 Proposition. Sei A eine abelsche unitale Banachalgebra. Falls A einfach ist, so ist $A \cong \mathbb{C}$.

einfach = besitzt keine nichttrivialen Ideale

Beweis: Sei $a \in A$, $\alpha \in \sigma(a)$. Dann ist $J := \overline{(a - \alpha \cdot \mathbb{1}) \cdot A} \lhd A$ ein abgeschlossenes Ideal. Für jedes $b \in A$ ist $(a - \alpha)b$ nicht invertierbar. Damit folgt dann $\|(a - \alpha)b - \mathbb{1}\| \geqslant 1$ für jedes $b \in A$ nach Satz 1.5. Damit ist auch $\operatorname{dist}((a - \alpha \cdot \mathbb{1}) \cdot A, \mathbb{1}) \geqslant 1$, also $\mathbb{1} \notin J$ und damit $J \neq A$. Da A einfach ist, folgt $J = \{0\}$, also muss $a - \alpha \cdot \mathbb{1} = 0$ und weiter $a \in \mathbb{C} \cdot \mathbb{1}$ gelten. Damit ist $A = \mathbb{C} \cdot \mathbb{1} \cong \mathbb{C}$. □

1.12 Definition. Sei A eine abelsche unitale Banachalgebra. Eine lineare, multiplikative, nicht verschwindende Abbildung $\chi\colon A \to \mathbb{C}$ heißt ***Charakter*** auf A. Es gilt dann $\chi(\mathbb{1}) = 1$. Wir setzen $\Omega(A) := \{\chi \mid \chi \text{ Charakter auf } A\}$ (***Charakterspektrum*** oder einfach nur ***Spektrum*** von A).

1.13 Satz. Sei A eine abelsche unitale Banachalgebra. Dann gilt

(i) Jeder Charakter auf A ist stetig mit Norm 1.

(ii) $\chi \mapsto \ker\chi$ definiert eine Bijektion $\Omega(A) \to J_{\max} := \{J \mid J \lhd A \text{ ist maximales Ideal}\}$

Beweis:

(i) Sei $a \in A$ mit $\|a\| < 1$ und $\chi(a) = 1$. Setze $b = \sum_{n=1}^{\infty} a^n$, dann ist $\mathbb{1}+b = \sum_{n=0}^{\infty} a^n = (\mathbb{1}-a)^{-1}$. Also ist $\mathbb{1} = (\mathbb{1}+b)(\mathbb{1}-a) = \mathbb{1}+b-a-ab$ und damit $ab+a = b$. Es folgt $\chi(a)\chi(b)+\chi(a) = \chi(b)$. Dies ist ein Widerspruch zu $\chi(a) = 1$, also muss $\|\chi\| \leqslant 1$ sein. Mit $\chi(\mathbb{1}) = 1$ folgt dann $\|\chi\| = 1$.

(ii) Für jedes $\chi \in \Omega(A)$ ist $\ker\chi \lhd A$ ein Ideal. Weiter ist der Kern abgeschlossen in A, da χ stetig ist. Wir zeigen, dass $\ker\chi$ maximal ist. Es ist $\ker\chi \neq A$, denn es gilt $\chi \neq 0$. Falls $c \in A \setminus \ker\chi$, so gilt $\chi(c)^{-1} \cdot c - \mathbb{1} \in \ker\chi$. Also ist $\ker\chi + \mathbb{C}\cdot c = \ker\chi + \mathbb{C}\cdot\mathbb{1} = A$, da für $a \in A$ gilt $a - \chi(a)\cdot\mathbb{1} \in \ker\chi$ und damit $a = (a - \chi(a)\cdot\mathbb{1}) + \chi(a)\cdot\mathbb{1} \in \ker\chi + \mathbb{C}\cdot\mathbb{1}$. Damit ist der Kern von χ maximal.

Zur Injektivität: Es seien $\chi_1, \chi_2 \in \Omega(A)$ Charaktere mit $\ker\chi_1 = \ker\chi_2$. Dann gilt für $a \in A$

$$\chi_1(a) - \chi_2(a) = \chi_1\Big(\underbrace{a - \chi_2(a)\cdot\mathbb{1}}_{\in\ker\chi_2 = \ker\chi_1}\Big) = 0$$

Also ist $\chi_1 = \chi_2$. Für die Surjektivität betrachten wir ein maximales, nichttriviales Ideal $J \lhd A$. Dann ist $\operatorname{dist}(J, \mathbb{1}) = 1$, denn für den offenen Ball mit Radius 1 um $\mathbb{1}$ gilt $\mathring{B}_A(\mathbb{1}, 1) \subset \operatorname{Inv}(A)$ nach Satz 1.5 bzw. wie im Beweis von Korollar 1.6. Dann ist $\mathbb{1} \notin \overline{J} \lhd A$. Da J maximal ist, folgt $J = \overline{J}$ und damit ist A/J eine einfache, abelsche, unitale Banachalgebra und mit Proposition 1.11 folgt $A/J \cong \mathbb{C}$. Also ist $\chi\colon A \to A/J \cong \mathbb{C}$ ein Charakter mit $\ker\chi = J$. ☐

1.14 Satz. Sei A eine abelsche unitale Banachalgebra. Für $a \in A$ gilt $\sigma(a) = \{\chi(a) \mid \chi \in \Omega(A)\}$.

Beweis: Für $\lambda \in \sigma(a)$ ist $J := (a - \lambda)A \lhd A$ ein echtes Ideal, da $(a - \lambda)$ nicht invertierbar ist. Nach dem Lemma von Zorn ist J in einem maximalen echten Ideal enthalten, also ist $J \subset \ker\chi$ für ein $\chi \in \Omega(A)$ nach Satz 1.13. Dann ist $\chi(a - \lambda) = 0$ für einen Charakter χ und somit auch $\chi(a) = \lambda$. Es gilt also $\sigma(a) \subseteq \{\chi(a) \mid \chi \in \Omega(A)\}$. Für $\chi \in \Omega(A)$ gilt $a - \chi(a)\cdot\mathbb{1} \in \ker\chi$. Damit kann $a - \chi(a)\cdot\mathbb{1}$ nicht invertierbar sein. Also ist $\chi(a) \in \sigma(a)$ und es folgt die zweite Inklusion. ☐

1.15 Satz. Sei A eine abelsche unitale Banachalgebra. Dann ist $\Omega(A)$ ein kompakter Hausdorffraum bezüglich der w^*-Topologie.

Beweis: Es ist $\Omega(A) \subset B^1(A^*)$, wobei die Einheitskugel kompakt und Hausdorffsch ist bezüglich der w^*-Topologie nach Banach-Alaoglu und da der Raum lokalkonvex ist. Sei $\chi_\gamma \xrightarrow{w^*} \chi$ ein Netz. χ_γ ist multiplikativ für jedes γ und $\chi_\gamma(\mathbb{1}) = 1$. Damit gelten diese Eigenschaften auch für χ. ☐

1.16 Definition. Sei A eine abelsche unitale Banachalgebra. $\Omega(A)$ mit der w^*-Topologie heißt ***Spektrum*** von A. Für $a \in A$ definieren wir die ***Gelfandtransformation*** $\widehat{a}\colon \Omega(A) \to \mathbb{C}$ durch $\widehat{a}(\chi) = \chi(a)$.

$a \mapsto \hat{a}$ ist isometrisch gdw. $\|a^2\| = \|a\|^2$ (Aufgabe 5 von Blatt 1)

1.17 Satz. Sei A eine abelsche unitale Banachalgebra. Dann ist $\widehat{\ }\colon A \to C(\Omega(A))$, $a \mapsto \widehat{a}$ ein normvermindernder Homomorphismus und $r(a) = \|\widehat{a}\|_\infty$ für $a \in A$. Weiter gilt $\sigma(a) = \widehat{a}(\Omega(A))$.

Beweis: $\widehat{a}\colon \Omega(A) \to \mathbb{C}$ ist stetig nach Definition der w^*-Topologie, denn die w^*-Topologie ist per Definition die gröbste Topologie auf A^*, sodass die Einsetzungshomomorphismen stetig sind. Wir haben weiter

$$\sigma(a) \overset{1.14}{=} \{\chi(a) \mid \chi \in \Omega(A)\} = \{\widehat{a}(\chi) \mid \chi \in \Omega(A)\} = \widehat{a}\big(\Omega(A)\big)$$

Also gilt außerdem

$$\|a\| \overset{1.8}{\geqslant} r(a) = \sup_{\lambda\in\sigma(a)} |\lambda| \overset{1.14}{=} \sup_{\chi\in\Omega(A)} |\widehat{a}(\chi)| = \|\widehat{a}\|_\infty$$ ☐

2. C^*-Algebren und Funktionalkalkül

2.1 Definition. Eine Banachalgebra heißt ***involutiv***, falls eine antilineare Abbildung $^*\colon A \to A$ existiert, für die folgenden Identitäten gelten:

$$a^{**} = a \qquad (ab)^* = b^*a^* \qquad \|a^*\| = \|a\|$$

2.2 Definition. Eine C^****-Algebra*** ist eine involutive Banachalgebra mit $\|a^*a\| = \|a\|^2$ für $a \in A$.

2.3 Definition. Sei A ein C^*-Algebra. $a \in A$ heißt

$$\begin{cases} \textbf{\textit{selbstadjungiert}} & \text{falls } a = a^* \\ \textbf{\textit{normal}} & \text{falls } aa^* = a^*a \\ \textbf{\textit{unitär}} & \text{falls } aa^* = a^*a = \mathbb{1} \\ \textbf{\textit{Projektion}} & \text{falls } a = a^* = a^2 \\ \textbf{\textit{Isometrie}} & \text{falls } a^*a = \mathbb{1} \end{cases}$$

Wo die Existenz eines Einselements nötig ist, fordern wir zusätzlich, dass A unital ist. Die Teilmenge der selbstadjungierten Elemente bezeichnen wir mit A_{sa}, die der unitären mit $\mathcal{U}(A)$.

2.4 Definition. Es seien A, B zwei C^*-Algebren. Eine Abbildung $\pi\colon A \to B$ heißt ****-Homomorphismus***, falls π linear, multiplikativ und *-erhaltend ist. π heißt ****-Einbettung***, falls π zusätzlich isometrisch ist.

2.5 Bemerkung. Falls A eine (involutive) Banachalgebra ist, so ist $A \oplus \mathbb{C}$ mit offensichtlichen Vektorraumoperationen, der absolut naheliegenden Multiplikation $(a, \lambda) \cdot (b, \mu) = (ab + \mu a + \lambda b, \lambda\mu)$ sowie $(a, \lambda)^* = (a^*, \overline{\lambda})$ im involutiven Fall und Norm definiert durch $\|(a, \lambda)\| := \|a\|_A + |\lambda|$ eine unitale (involutive) Banachalgebra mit $\mathbb{1} = (0, 1)$. $A \oplus \mathbb{C}$ ist jedoch keine C^*-Algebra, auch wenn A eine C^*-Algebra ist. Wir müssen also etwas subtiler vorgehen, um eine ***Unitalisierung*** zu konstruieren:

2.6 Satz. Sei A eine C^*-Algebra. Dann existiert eine unitale C^*-Algebra $A^\sim$ mit einer isometrischen *-Einbettung $\iota\colon A \hookrightarrow A^\sim$, sodass $\iota(A) \lhd A^\sim$ ein Ideal ist mit

$$A^\sim/\iota(A) \cong \begin{cases} 0, & \text{falls } A \text{ unital} \\ \mathbb{C}, & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis: Für $a \in A$ definieren wir $\iota(a) \in \mathcal{B}(A)$, wobei $\mathcal{B}(A)$ die beschränkten Operatoren auf A aufgefasst als Banachraum sind, durch $\iota(a)(b) = ab$. Definiere $A^\sim := \iota(A) + \mathbb{C} \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(A)} \subset \mathcal{B}(A)$. Dann ist $A^\sim$ eine unitale Algebra mit Involution

$$\left(\iota(a) + \lambda \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(A)}\right)^* := \iota(a^*) + \overline{\lambda} \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(A)}$$

Dass $\iota(A) \lhd A^\sim$ ein Ideal ist, ist klar. $A^\sim$ ist normiert mittels der Operatornorm. Für $0 \neq a \in A$ gilt

$$\begin{aligned} \|a\|_A = \frac{1}{\|a\|_A}\|aa^*\|_A = \left\|a\left(\frac{1}{\|a^*\|} \cdot a^*\right)\right\|_A &\leqslant \left\|\iota(a)\left(\frac{1}{\|a^*\|} \cdot a^*\right)\right\|_A \\ &\leqslant \sup_{\|b\| \leqslant 1} \left\|\iota(a)(b)\right\|_A = \left\|\iota(a)\right\|_{\mathcal{B}(A)} \\ &= \sup_{\|b\| \leqslant 1} \|ab\|_A \\ &\leqslant \|a\|_A \end{aligned}$$

Also ist ι isometrisch. Es folgt, dass $\iota(A) \subset \mathcal{B}(A)$ abgeschlossen ist, da A vollständig ist. Weiter folgt, dass auch $A^\sim = \iota(A) + \mathbb{C} \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(A)}$ vollständig ist bezüglich $\|\cdot\|_{\mathcal{B}(A)}$. Wir zeigen nun, dass $\|\cdot\|_{\mathcal{B}(A)}$ eine C^*-Norm ist auf $A^\sim$:

$$\begin{aligned}
\left\|\iota(a) + \lambda \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(A)}\right\|_{\mathcal{B}(A)}^2 &= \sup_{b \in A, \|b\| \leqslant 1} \|ab + \lambda b\|_A^2 \\
&= \sup_{b \in A, \|b\| \leqslant 1} \left\|(ab + \lambda b)^*(ab + \lambda b)\right\|_A \\
&= \sup_{b \in A, \|b\| \leqslant 1} \left\|b^*a^*ab + \lambda b^*a^*b + \overline{\lambda} b^*ab + |\lambda|^2 b^*b\right\|_A \\
&\leqslant \sup_{b \in A, \|b\| \leqslant 1} \left\|a^*ab + \lambda a^*b + \overline{\lambda} ab + |\lambda|^2 b\right\|_A && [*] \\
&= \left\|\iota\big(a^*a + \lambda a^* + \overline{\lambda} a\big) + |\lambda|^2 \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(A)}\right\|_{\mathcal{B}(A)} \\
&= \left\|\big(\iota(a) + \lambda \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(A)}\big)^* \big(\iota(a) + \lambda \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(A)}\big)\right\|_{\mathcal{B}(A)} \\
&\leqslant \left\|\big(\iota(a) + \lambda \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(A)}\big)^*\right\|_{\mathcal{B}(A)} \cdot \left\|\iota(a) + \lambda \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(A)}\right\|_{\mathcal{B}(A)} && [**]
\end{aligned}$$

Es folgt, dass

$$\left\|\iota(a) + \lambda \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(A)}\right\|_{\mathcal{B}(A)} \leqslant \left\|\big(\iota(a) + \lambda \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(A)}\big)^*\right\|_{\mathcal{B}(A)} \leqslant \left\|\iota(a) + \lambda \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(A)}\right\|_{\mathcal{B}(A)}$$

Damit folgt, dass [*] und [**] Gleichungen sind und $\|\cdot\|_{\mathcal{B}(A)}$ eine C^*-Norm auf $A^\sim$ ist. Falls A unital ist, gilt $\iota(\mathbb{1}_A) = \mathbb{1}_{\mathcal{B}(A)}$ und somit $\iota(A) = A^\sim$. Ist A nicht unital, so ist $A^\sim \cong \iota(A) \oplus \mathbb{C}$ als Vektorräume(!) und es muss $A^\sim / \iota(A) \cong \mathbb{C}$ gelten. □

2.7 Bemerkung. Man definiert oft auch eine unitale C^*-Algebra

$$A^+ := \begin{cases} A^\sim, & \text{falls } A \text{ nicht unital} \\ A \oplus \mathbb{C}, & \text{falls } A \text{ unital} \end{cases}$$

mit $\|(a, \lambda)\| := \max\{\|a\|_A, |\lambda|\}$ in letzterem Fall. Dann ist in jedem Fall $A^+ \cong A \oplus \mathbb{C}$ als Vektorraum.

Blatt3 Aufgabe 2

A^+ lässt sich charakterisieren durch die universelle Eigenschaft:

$$\begin{tikzcd}
& B \\
A \arrow[ur] \arrow[r, hook] & A^+ \arrow[u, dashed, "\exists!"']
\end{tikzcd}$$

wobei B eine unitale C^*-Algebra ist und $A \to B$ ein *-Homomorphismus ist. Eine ähnliche Beschreibung für $A^\sim$ ist möglich, aber etwas „subtiler".

2.8 Definition. Sei A eine nichtunitale C^*-Algebra. Für $a \in A$ setzen wir

$$\sigma(a) := \sigma_{A^\sim}\big(\iota(a)\big) \quad \text{und} \quad r(a) := r_{A^\sim}\big(\iota(a)\big)$$

Für A unital sind maximale Ideale automatisch abgeschlossen

Wieder schreiben wir $\Omega(A) := \big\{\chi \colon A \to \mathbb{C} \text{ Charaktere}\big\}$ und

$$J_{\max}(A) = \big\{ J \mid J \lhd A \text{ echtes maximales abgeschlossenes Ideal} \big\}$$

2.9 Satz. Sei A eine nichtunitale abelsche C^*-Algebra. Dann ist $\Omega(A)$ ein lokalkompakter Hausdorffraum bezüglich der w^*-Topologie. Für $a \in A$ gilt $\sigma(a) = \big\{\chi(a) \mid \chi \in \Omega(A)\big\} \cup \{0\}$.

Beweis: Für $\chi \in \Omega(A)$ sei $\chi^{\sim}\colon A^{\sim} \to \mathbb{C}$ die eindeutig bestimmte, lineare, unitale Fortsetzung. Es gilt $\chi^{\sim} \in \Omega(A^{\sim})$ und

$$\Omega(A^{\sim}) = \{\chi^{\sim} \mid \chi \in \Omega(A)\} \cup \{\chi_\infty\}$$

wo $\chi_\infty\colon A^{\sim} \to A^{\sim}/\iota(A) \cong \mathbb{C}$. $\Omega(A^{\sim})$ ist ein kompakter Hausdorffraum nach Satz 1.15, also muss der linke Teil der Vereinigung ein lokalkompakter Hausdorffraum sein. Man überprüft, dass $\chi \mapsto \chi^{\sim}$ ein Homöomorphismus $\Omega(A) \to \Omega(A^{\sim}) \setminus \{\chi_\infty\}$ bezüglich der w*-Topologie ist. Es gilt *Blatt 2 Aufgabe 2*

$$\sigma(a) := \sigma_{A^{\sim}}(\iota(a)) \overset{1.17}{=} \{\chi(\iota(a)) \mid \chi \in \Omega(A^{\sim})\} = \underbrace{\{\chi^{\sim}(\iota(a)) \mid \chi \in \Omega(A)\}}_{=\{\chi(a) \mid \chi \in \Omega(A)\}} \cup \underbrace{\{\chi_\infty(\iota(a))\}}_{=\{0\}} \qquad \square$$

2.10 Proposition. Sei A eine C*-Algebra. Dann gilt

- **(i)** Für eine Projektion $0 \neq p \in A$ gilt $\|p\| = 1$.
- **(ii)** Ist $\mathbb{1} \in A$ und $u \in A$ unitär, dann ist $\|u\| = 1$ und $\sigma(u) \subset \mathbb{T}$.
- **(iii)** Für $a \in A_{sa}$ ist $r(a) = \|a\|$ und $\sigma(a) \subset \mathbb{R}$.
- **(iv)** Für $a \in A$ beliebig gilt $\|a\| = \|a^*a\|^{1/2} = r(a^*a)^{1/2}$.

Beweis:

- **(i)** Es gilt $\|p\| = \|p^*p\| = \|p\|^2$ und somit muss $\|p\| = 1$ gelten.
- **(ii)** Es gilt $\|u\|^2 = \|u^*u\| = \|\mathbb{1}\| = 1$, also $\|u\| = 1 = \|u^*\|$. Wenn $\lambda \in \sigma(u)$, dann gilt $\lambda \neq 0$ und es gilt $\lambda^{-1} \in \sigma(u^*)$. Da die Spektralradien von u und u^* kleiner gleich 1 sind, muss $|\lambda|, |\lambda^{-1}| \leqslant 1$ gelten, also $|\lambda| = 1$ und damit $\lambda \in \mathbb{T}$.
- **(iii)** Es gilt $\|a^2\| = \|a^*a\| = \|a\|^2$. Eine Induktion liefert $\|a^{2^n}\| = \|a\|^{2^n}$, also nach Satz 1.10

  $$r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \|a^{2^n}\|^{1/2^n} = \|a\|$$

  Weiter existiert[2] $e^{ia} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(ia)^n \in A^{\sim}$ und ist unitär mit $(e^{ia})^* = e^{(ia)^*} = e^{-ia} = (e^{ia})^{-1}$, also ist $\sigma(e^{ia}) \subset \mathbb{T}$ nach (ii). Falls $\lambda \in \sigma(a)$, dann setze $b := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} i^n (a-\lambda)^{n-1}$. Dann gilt

  $$(a-\lambda)be^{i\lambda} = \left(e^{i(a-\lambda)} - \mathbb{1}\right)e^{i\lambda} = e^{ia} - e^{i\lambda}$$

  Also ist $e^{i\lambda} \in \sigma(e^{ia}) \subset \mathbb{T}$ und somit $\lambda \in \mathbb{R}$.
- **(iv)** Folgt direkt aus (iii). $\square$

2.11 Korollar. Es seien A und B zwei C*-Algebren und $\pi\colon A \to B$ ein *-Homomorphismus. Dann ist π kontraktiv. Die Aussage bleibt richtig, falls A nur eine involutive Banachalgebra ist.

Beweis: Wir dürfen π als unital annehmen (betrachte sonst $\pi^+\colon A^+ \to B^{\sim}$). Für $d \in A$ gilt $\sigma_B(\pi(d)) \subset \sigma_A(d)$, also $r_B(\pi(d)) \leqslant r_A(d)$. Für $a \in A$ gilt nach Proposition 2.10 (iii)

$$\|\pi(a)\|^2 = \|\pi(a)^*\pi(a)\| = \|\pi(a^*a)\| = r_B(\pi(a^*a)) \leqslant r_A(a^*a) = \|a\|^2 \qquad \square$$

2.12 Korollar. Auf einer *-Algebra gibt es höchstens eine C*-Norm.

[2] es ist $(ia)^0 = \mathbb{1}_{A^{\sim}}$ falls A nicht unital

Beweis: Sei A eine *-Algebra mit C^*-Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$. Wir bezeichnen die C^*-Algebren entsprechend mit A_1 und A_2. Es seien $\pi_1\colon A_1 \to A_2$ und $\pi_2\colon A_2 \to A_1$ die Identitäten. Dann gilt

$$\|a\|_1 = \|\pi_2(a)\|_1 \leqslant \|a\|_2 = \|\pi_1(a)\|_2 \leqslant \|a\|_1 \qquad \square$$

2.13 Korollar. Sei A eine C^*-Algebra und χ ein Charakter auf A. Dann gilt $\chi(a^*) = \overline{\chi(a)}$ für $a \in A$, das heißt χ ist ein *-Homomorphismus.

Beweis: Sei $a \in A$, dann ist $a = \frac{1}{2}(a+a^*) + i \cdot \frac{1}{2i}(a-a^*) =: b + i \cdot c$ und b, c sind selbstadjungiert. Es gilt

$$\chi(b) \overset{2.9}{\in} \sigma(b) \overset{2.10(\text{iii})}{\subset} \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \chi(c) \in \sigma(c) \subset \mathbb{R}$$

Damit folgt $\chi(a^*) = \chi(b - i\cdot c) = \chi(b) - i \cdot \chi(c) = \overline{\chi(b) + i\cdot\chi(c)} = \overline{\chi(a)}$. $\square$

Aus dem bisher gezeigten können wir nun eine Version von Satz 1.13 für nicht notwendigerweise unitale C^*-Algebren ableiten:

2.14 Korollar. Sei A eine abelsche C^*-Algebra. Dann gilt

- **(i)** Jeder Charakter $\chi\colon A \to \mathbb{C}$ ist stetig mit Norm $\leqslant 1$.
- **(ii)** Die Abbildung $\chi \mapsto \ker\chi$ definiert eine Bijektion

$$\Omega(A) \to J_{\max} = \left\{ J \;\middle|\; J \subsetneq A \text{ maximales, abgeschlossenes Ideal} \right\}$$

Beweis:

- **(i)** folgt aus Korollar 2.11 und Korollar 2.13 oder auch aus Satz 1.13 und Satz 2.6.
- **(ii)** Wir zeigen nur die Surjektivität: Sei $J \lhd A$ ein abgeschlossenes, maximales Ideal. Dann ist $J \lhd A^\sim$ ein abgeschlossenes Ideal und es gilt

$$J \subset A \cap \bigcap_{\substack{I \lhd A^\sim \max \\ J \subset I}} I \overset{1.13}{=} A \cap \bigcap_{\substack{\chi \in \Omega(A^\sim) \\ J \subset \ker\chi}} \ker\chi \overset{2.9}{=} A \cap \ker\chi_\infty \cap \bigcap_{\substack{\chi \in \Omega(A) \\ J \subset \ker\chi^\sim}} \ker\chi^\sim$$

Damit ist J enthalten im Schnitt über alle Kerne der $\chi \in \Omega(A)$, wobei $J \subset \ker\chi$. Also ist $J \subset \ker\chi$ für ein $\chi \in \Omega(A)$ und da $\ker\chi \lhd A$ abgeschlossen und maximal ist, folgt $J = \ker\chi$. $\square$

2.15 Beispiel. Wir haben nun schon einiges über C^*-Algebren gelernt, es dabei aber total versäumt konkrete Beispiele anzugeben. Dies holen wir nun nach:

- **(i)** Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Dann ist $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ eine C^*-Algebra mit Operatornorm und Adjunktion: Für $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ gilt $\|T\| = \sup\left\{ |\langle \eta\,,\, T\xi\rangle| \;\middle|\; \|\xi\|, \|\eta\| \leqslant 1 \right\}$ also

$$\begin{aligned} \|T^*T\| = \sup\left\{ |\langle \eta\,,\, T^*T\xi\rangle| \;\middle|\; \|\xi\|, \|\eta\| \leqslant 1 \right\} &\geqslant \sup\left\{ |\langle T\eta\,,\, T\eta\rangle| \;\middle|\; \|\eta\| \leqslant 1 \right\} \\ &= \left(\sup\left\{ \|T\eta\| \;\middle|\; \|\eta\| \leqslant 1 \right\}\right)^2 = \|T\|^2 \geqslant \|T^*T\| \end{aligned}$$

- **(ii)** Insbesondere ist $M_n := M_n(\mathbb{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$ eine C^*-Algebra für $n \in \mathbb{N}$.
- **(iii)** Jede abgeschlossene *-Unteralgebra von $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist eine C^*-Algebra, zum Beispiel $\mathcal{K}(\mathcal{H})$.
- **(iv)** Sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum. Dann ist $C_0(X)$ eine C^*-Algebra mit punktweisen Operationen, Involution $f^* = \overline{f}$ und der Supremumsnorm. Tatsächlich ist jede abelsche C^*-Algebra von dieser Form:

2.16 Satz (Gelfand). Sei $A \neq 0$ eine abelsche C^*-Algebra. Dann ist die Gelfandtransformation $\widehat{\ }\colon A \to C_0(\Omega(A))$ ein isometrischer *-Isomorphismus.

$C_0(\Omega(A)) = C(\Omega(A))$, falls A unital nach Satz 1.15

Beweis: Betrachte das folgende Diagramm

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[rr, mapsto] \arrow[d, phantom, "\rotatebox{90}{$\in$}"] & & \big(\chi \mapsto \chi(a)\big) = \mathrm{ev}_a \arrow[d, phantom, "\rotatebox{90}{$\in$}"] \\
A \arrow[rr, "\widehat{\ }"] \arrow[d, hook, "\iota"] & & \big\{f \in C\big(\Omega(A) \cup \{\chi_\infty\}\big) \,\big|\, f(\chi_\infty) = 0\big\} \cong C_0(\Omega(A)) \arrow[d, hook] \\
A^\sim \arrow[r, "\widehat{\ }"] & C\big(\Omega(A^\sim)\big) = C\big(\{\chi^\sim \mid \chi \in \Omega(A)\} \cup \{\chi_\infty\}\big) \arrow[r, phantom, "\overset{2.9}{\cong}"] & C\big(\Omega(A) \cup \{\chi_\infty\}\big)
\end{tikzcd}$$

Die Gelfandtransformation ist ein *-Homomorphismus nach Korollar 2.13 und Satz 1.17. Weiter gilt

$$\|a\|^2 = \|a^*a\| \overset{2.10}{=} r(a^*a) \overset{1.17}{=} \|\widehat{a^*a}\|_\infty = \left\|\widehat{a^*}\,\widehat{a}\right\|_\infty = \|\overline{\widehat{a}}\,\widehat{a}\|_\infty = \||\widehat{a}|^2\|_\infty = \|\widehat{a}\|_\infty^2$$

Damit ist $a \mapsto \widehat{a}$ isometrisch und es folgt, dass $C := \{\widehat{a} \mid a \in A\} \subset C_0(\Omega(A))$ abgeschlossen ist. Außerdem ist C eine *-Unteralgebra, also insbesondere invariant unter komplexer Konjugation. Weiter trennt C die Punkte von $\Omega(A)$ und zu jedem $\chi \in \Omega(A)$ existiert ein $a \in A$ mit $\widehat{a}(\chi) = \chi(a) \neq 0$, das heißt $\mathrm{ev}_\chi(C) \neq \{0\}$ für alle $\chi \in \Omega(A)$. Mit Stone-Weierstraß folgt, dass $C \subset C_0(\Omega(A))$ dicht ist. Da C abgeschlossen ist, folgt also $C = C_0(\Omega(A))$. □

2.17 Bemerkung. Sei X ein kompakter Hausdorffraum und $f \in C(X)$, dann ist $\sigma_{C(X)}(f) = f(X)$.

Beweis: Die Abbildung $\delta\colon X \to \Omega(C(X))$ definiert durch $x \mapsto (f \mapsto f(x))$ ist ein Homöomorphismus wegen $C(X) \cong C\big(\Omega(C(X))\big)$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\sigma_{C(X)}(f) \overset{1.17}{=} \widehat{f}\big(\Omega(C(X))\big) = \left\{\widehat{f}(\chi) \,\middle|\, \chi \in \Omega\big(C(X)\big)\right\} &= \{\chi(f) \mid \chi \in \Omega\big(C(X)\big)\} \\
&= \big\{\delta(x)(f) \mid x \in X\big\} = f(X)
\end{aligned}$$
□

2.18 Definition. Sei $S \subset A$ Teilmenge einer C^*-Algebra A. Dann bezeichnet $C^*(S) \subset A$ die kleinste C^*-Unteralgebra von A, die S enthält; also

$$C^*(S) := \bigcap_{\substack{B \subset A \ C^*\text{-Unteralg.} \\ \text{mit } S \subset B}} B$$

2.19 Satz (Funktionalkalkül). Sei A eine C^*-Algebra und $a \in A$ normal. Dann existiert ein eindeutig bestimmter *-Isomorphismus

$$C^*(a) \cong C_0\big(\sigma(a) \setminus \{0\}\big) \qquad \text{mit} \quad a \longmapsto \mathrm{id}_{\sigma(a) \setminus \{0\}}$$

Falls A unital ist, so existiert ein eindeutig bestimmter unitaler *-Isomorphismus

$$C^*(a, \mathbb{1}) \cong C\big(\sigma(a)\big) \qquad \text{mit} \quad a \longmapsto \mathrm{id}_{\sigma(a)}$$

Für $f \in C_0(\sigma(a) \setminus \{0\})$ bzw. $f \in C(\sigma(a))$ bezeichnen wir mit $f(a) \in A$ das Urbild von f unter diesem Isomorphismus. Es gilt $f(a) \in C^*(a, \mathbb{1}_{A^\sim}) \subset A^\sim$, falls $f(0) \neq 0$. Weiter gilt

$$\sigma\big(f(a)\big) = f\big(\sigma(a)\big)$$

Für $g \in C\big(f(\sigma(a))\big)$ gilt dann $g\big(f(a)\big) = (g \circ f)(a)$.

Beweis: Sei zunächst A unital. Da $a \in A$ normal ist, ist $C^*(a, \mathbb{1}) = \overline{\operatorname{Alg}(a, a^*, \mathbb{1})} \subset A$ abelsch. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \alpha\colon \Omega\big(C^*(a, \mathbb{1})\big) &\longrightarrow \widehat{a}\big(\Omega(C^*(a, \mathbb{1}))\big) \overset{1.17}{=} \sigma_{C^*(A,\mathbb{1})}(a) \subset \mathbb{C} \\ \chi &\longmapsto \widehat{a}(\chi) = \chi(a) \end{aligned}$$

ist ein Homöomorphismus: Die Stetigkeit ist klar, denn $\Omega(C^*(a, \mathbb{1}))$ trägt die w^*-Topologie. Die Surjektivität ist trivial. Zur Injektivität: Falls $\chi_1(a) = \widehat{a}(\chi_1) = \widehat{a}(\chi_2) = \chi_2(a)$ ist, so ist $\chi_1|_{\operatorname{Alg}(a,a^*,\mathbb{1})} = \chi_2|_{\operatorname{Alg}(a,a^*,\mathbb{1})}$ und mit der Stetigkeit von χ_1 und χ_2 folgt, dass $\chi_1 = \chi_2$ sein muss. Die Inverse ist stetig, da $\Omega(C^*(a, \mathbb{1}))$ kompakt ist.

Wir erhalten nach Satz 2.16 $C^*(a, \mathbb{1}) \cong C\big(\Omega(C^*(a, \mathbb{1}))\big)$ mittels $a \mapsto \widehat{a}$ und $C\big(\Omega(C^*(a, \mathbb{1}))\big) \cong C\big(\sigma_{C^*(a,\mathbb{1})}(a)\big)$ mittels $\widehat{a} \mapsto \widehat{a} \circ \alpha^{-1}$. Für $\alpha(\chi) = t \in \sigma_{C^*(a,\mathbb{1})}(a)$ haben wir

$$\big(\widehat{a} \circ \alpha^{-1}\big)(t) = \big(\widehat{a} \circ \alpha^{-1}\big)\big(\alpha(\chi)\big) = \widehat{a}(\chi) = \alpha(\chi) = t$$

Also ist $\widehat{a} \circ \alpha^{-1} = \operatorname{id}_{\sigma_{C^*(a,\mathbb{1})}(a)}$. Wir nenen die Komposition der beiden Isomorphismen β und zeigen, dass β tatsächlich die in der Behauptung geforderten Eigenschaften hat: Für $f \in C\big(\sigma_{C^*(a,\mathbb{1})}(a)\big)$ gilt

$$\sigma_{C^*(a,\mathbb{1})}\big(f(a)\big) = \sigma_{C^*(a,\mathbb{1})}\big(\beta^{-1}(f)\big) = \sigma_{\beta(C^*(a,\mathbb{1}))}(f) = \sigma_{C\left(\sigma_{C^*(a,\mathbb{1})}(a)\right)}(f) \overset{2.17}{=} f\big(\sigma_{C^*(a,\mathbb{1})}(a)\big)$$

Falls A nicht unital ist, so haben wir

$$\begin{tikzcd}
C^*(a, \mathbb{1}_{A^\sim}) \arrow[r, "\overset{2.16}{\cong}"] & C\big(\Omega(C^*(a, \mathbb{1}_{A^\sim}))\big) \arrow[r, "\overset{\text{s.o.}}{\cong}"] & C\big(\sigma_{C^*(a,\mathbb{1})}(a)\big) \\
\cup & \cup & \cup \\
C^*(a) \arrow[r, "\overset{2.16}{\cong}"] & \begin{array}{c} C_0\big(\Omega(C^*(a))\big) \overset{2.9}{=} \\ C_0\big(\Omega(C^*(a, \mathbb{1}_{A^\sim})) \setminus \{\chi_\infty\}\big) \end{array} \arrow[r, "\cong"] & \begin{array}{c} C_0\big(\sigma_{C^*(a,\mathbb{1}_{A^\sim})}(a) \setminus \{0\}\big) = \\ \big\{f \in C\big(\sigma_{C^*(a,\mathbb{1}_{A^\sim})}(a)\big) \bigm| f(0) = 0\big\} \end{array} \\
\rotatebox{90}{$\in$} & \rotatebox{90}{$\in$} & \rotatebox{90}{$\in$} \\
a \arrow[r, mapsto] & \widehat{a} \arrow[r, mapsto] & \operatorname{id}_{\sigma_{C^*(a,\mathbb{1}_{A^\sim})}(a)}
\end{tikzcd}$$

Der Funktionalkalkül β^{-1} ist ein *-Homomorphismus, daher gilt für *-Polynome g, dass

$$g\big(f(a)\big) = g\big(\beta^{-1}(f)\big) = \beta^{-1}(g \circ f) = (g \circ f)(a)$$

Für eine beliebige Funktion $g \in C\big(\sigma_{C^*(a,\mathbb{1})}(a)\big)$ approximieren wir g gleichmäßig auf $\sigma_{C^*(a,\mathbb{1})}(a)$ durch *-Polynome und benutzen die Stetigkeit von β^{-1}.

Es bleibt zu zeigen, dass $\sigma_{C^*(a,\mathbb{1})}(a) = \sigma_A(a)$ ist (der unitale Fall genügt). Offensichtlich gilt $\operatorname{Inv}(C^*(a, \mathbb{1}_A)) \subseteq \operatorname{Inv}(A)$ und somit $\sigma_A(a) \subseteq \sigma_{C^*(a,\mathbb{1}_A)}(a)$. Um zu zeigen, dass auch die andere Inklusion gilt, sei $b \in C^*(a, \mathbb{1}_A)$ mit $\|b\| \leqslant 1$ und $b \in \operatorname{Inv}(A)$. Dann ist b normal, denn b und b^* sind in $C^*(a, \mathbb{1}_A)$ und diese Algebra ist abelsch. $C^*(b, b^{-1})$ ist auch abelsch, da $(b^{-1})^* = (b^*)^{-1}$ und

$$b(b^*)^{-1} = b(b^*)^{-1}b^{-1}b = b(bb^*)^{-1}b = b(b^*b)^{-1}b = bb^{-1}(b^*)^{-1}b = (b^*)^{-1}b$$

Weiter ist $\|b^*b\| \leqslant 1$ nach der C^*-Gleichung und $\mathbb{1} - b^*b$ ist selbstadjungiert. Ferner gilt $0 < \chi(b^*b) \leqslant 1$ für alle Charaktere $\chi \in \Omega\big(C^*(b, b^{-1})\big)$. Damit ist

$$\sigma_{C^*(b,b^{-1})}(\mathbb{1} - b^*b) \overset{1.17}{=} \big\{\chi(\mathbb{1} - b^*b) \bigm| \chi \in \Omega\big(C^*(b, b^{-1})\big)\big\} \subseteq [0, 1)$$

Da das Spektrum $\sigma_{C^*(b,b^{-1})}(\mathbb{1} - b^*b)$ kompakt ist, folgt $1 > r(\mathbb{1} - b^*b) = \|\mathbb{1} - b^*b\|$. Damit existiert die Neumannsche Reihe

$$(b^*b)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\mathbb{1} - b^*b)^n \in C^*(b, \mathbb{1})$$

und es folgt $b^{-1} = (b^*b)^{-1}b^* \in C^*(a, \mathbb{1}) \subseteq C^*(a, \mathbb{1})$. Wenn $b \in C^*(a, \mathbb{1})$ invertierbar in A ist, so ist also tatsächlich auch $b^{-1} \in C^*(a, \mathbb{1})$, womit die andere Inklusion $\sigma_{C^*(a,\mathbb{1})}(a) \subseteq \sigma_A(a)$ folgt. Ebenso folgt $\sigma_{C^*(a,\mathbb{1})}\big(f(a)\big) = \sigma_A\big(f(a)\big)$ für $f \in C\big(\sigma(a)\big)$. □

2.20 Korollar. Es seien $B \subseteq A$ C^*-Algebren und $b \in B$. Dann gilt

$$\sigma_B(b) \cup \{0\} = \sigma_A(b) \cup \{0\}$$

(i) Wenn B und A unital sind und $\mathbb{1}_B = \mathbb{1}_A$ ist, dann gilt $\sigma_B(b) = \sigma_A(b)$.

(ii) Wenn B nicht unital ist, A aber schon, so ist $0 \in \sigma_B(b) = \sigma_A(b)$.

(iii) Wenn beide unital sind, die Einselemente aber nicht gleich sind, so gilt $\sigma_B(b) \cup \{0\} = \sigma_A(b)$.

Beweis:

(i) Es gilt wieder $\mathrm{Inv}(B) \subset \mathrm{Inv}(A)$, also $\sigma_A(b) \subset \sigma_B(b)$. Für $c \in B \cap \mathrm{Inv}(A)$ normal gilt dann $c \in \mathrm{Inv}(B)$ wie im Beweis von Satz 2.19. Damit folgt

$$\sigma_B(b) \subset \sigma_A(b) \implies \sigma_B(b) = \sigma_A(b)$$

Falls c nicht normal ist, betrachten wir $c^*c \in \mathrm{Inv}(A)$. Dann gilt $(c^*c)^{-1}c^* = c^{-1} \in B$.

(ii) Betrachte $B^\sim \cong C^*(b, \mathbb{1}_A) \subset A$ (algebraisch klar, als C^*-Algebren nach Korollar 2.11). Dann gilt

$$\overline{\sigma}_B(b) := \sigma_{B^\sim}(b) \overset{\text{(i)}}{=} \sigma_A(b)$$

(iii) Wenn $\mathbb{1}_A \neq \mathbb{1}_B$, so gilt für $b \in \mathrm{Inv}(A)$ auch $b^{-1} \in B$ wie im Beweis von Satz 2.19. Dann folgt aber $\mathbb{1}_A = b^{-1}b \in B$ (wieder wie im Beweis von 2.19). Dies ist ein Widerspruch, also muss $0 \in \sigma_A(b)$ gelten. Wenn $\lambda \neq 0$, dann gilt $\lambda\cdot\mathbb{1}_B - b \in \mathrm{Inv}(B)$ genau dann, wenn $\lambda\cdot\mathbb{1}_A - b \in \mathrm{Inv}(A)$. Es gilt nämlich

$$(\lambda \cdot \mathbb{1}_A - b)^{-1} = (\lambda \cdot \mathbb{1}_B - b)^{-1} + \lambda^{-1}(\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B)$$

Damit ist $\sigma_B(b) \setminus \{0\} = \sigma_A(b) \setminus \{0\}$. □

3. Positivität

3.1 Definition. Sei A eine C^*-Algebra. Ein Element $a \in A$ heißt ***positiv*** ($a \geqslant 0$), wenn $a = a^*$ und $\sigma(a) \subseteq [0, \infty)$ ist. Mit A_+ bezeichnen wir die Menge der positiven Elemente. Wenn $b, c \in A_{sa}$ sind, dann definieren wir

$$b \leqslant c \quad :\Longleftrightarrow \quad c - b \geqslant 0$$

3.2 Bemerkung.

(i) Für $a \in B \subseteq A$ gilt $a \geqslant 0$ in A genau dann, wenn $a \geqslant 0$ in B gilt (nach Korollar 2.20).

(ii) Für $a \in A = C_0(X)$ ist $a \geqslant 0$ genau dann, wenn $a(x) \geqslant 0$ für alle $x \in X$ gilt (nach 2.17).

3.3 Proposition. Sei A eine C^*-Algebra und $a \in A_+$. Dann gibt es ein eindeutiges $b \in A_+$, sodass $b^2 = a$. Wir schreiben $a^{1/2}$ für dieses Element b.

Beweis: Ein solches $b \in C^*(a) \subseteq A$ existiert nach dem Funktionalkalkül, da $C^*(a) \cong C_0(\sigma(a) \setminus \{0\})$ via $a \mapsto \mathrm{id}_{\sigma(a)} \geqslant 0$. Sei $c \in A_+$ ein weiteres Element mit $c^2 = a$. Dann gilt $ca = c^3 = ac$ und damit ist $C^*(a, c)$ abelsch. Sei $\Omega := \Omega(C^*(a, c))$ das Charakterspektrum und $\Phi\colon C^*(a, c) \to C_0(\Omega)$ die Gelfandtransformation. Dann sind $\Phi(b)$ und $\Phi(c)$ Quadratwurzeln von $\Phi(a)$. Anders ausgedrückt gilt für alle $\omega \in \Omega$

$$\Phi(b)(\omega)^2 = \Phi(a)(\omega) = \Phi(c)(\omega)^2$$

Damit folgt $\Phi(b)(\omega) = \Phi(c)(\omega)$ für alle ω und somit $\Phi(b) = \Phi(c)$, also $b = c$. □

$\Rightarrow \varphi\colon A \to B$ linear, kontraktiv, unital und $*$-erhaltend ist positiv

3.4 Proposition. Sei a eine unitale C^*-Algebra, $a \in A_{sa}$ und $t \in \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$. Dann gilt

(i) Aus $\|a - t\| \leqslant t$ folgt $a \geqslant 0$

(ii) Aus $a \geqslant 0$ und $\|a\| \leqslant t$ folgt $\|a - t\| \leqslant t$

Beweis: Wir können annehmen, dass $A = C^*(a, \mathbb{1}) = C(\sigma(a))$ gilt. (Warum?)

(i) Es gilt $\sup_{x\in\sigma(a)}|x - t| = \|a - t\| \leqslant t$, woraus $|x - t| \leqslant t$ für alle $x \in \sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$ folgt. Damit folgt $x \geqslant 0$ für alle $x \in \sigma(a)$, also $a \geqslant 0$.

(ii) Aus $\|a\| \leqslant t$ und $a \geqslant 0$ folgt $0 \leqslant x \leqslant t$ für alle $x \in \sigma(a)$. Subtrahieren mit t liefert $-t \leqslant x - t \leqslant 0$ für alle x, also $|x - t| \leqslant t$. Damit folgt wieder $\|a - t\| \leqslant t$. □

3.5 Korollar. Sei A eine C^*-Algebra. Dann ist A_+ ein Kegel, d.h. für $a, b \in A_+$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+$ gilt

$$\lambda \cdot a + \mu \cdot b \in A_+$$

Beweis: Wir dürfen annehmen, dass A unital ist. Dass $\lambda a \geqslant 0$ und $\mu b \geqslant 0$ gilt, ist klar. Wir müssen also nur zeigen, dass aus $a, b \in A_+$ $a + b \in A_+$ folgt. Es gilt

$$\big\|a - \|a\| \cdot \mathbb{1}_A\big\| \leqslant \|a\| \quad \text{und} \quad \big\|b - \|b\| \cdot \mathbb{1}_A\big\| \leqslant \|b\|$$

nach voriger Proposition 3.4(ii). Damit folgt weiter aus der Dreiecksungleichung

$$\big\|a + b - (\|a\| + \|b\|)\big\| \leqslant \big\|a - \|a\|\big\| + \big\|b - \|b\|\big\| \overset{3.4(ii)}{\leqslant} \|a\| + \|b\|$$

Also ist $a + b \geqslant 0$ nach Proposition 3.4(i). □

3.6 Satz. Sei A eine C^*-Algebra und $a \in A$. Dann gilt $a^* a \geqslant 0$.

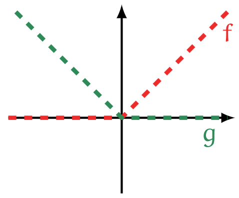

Abbildung 1: Zerlegen der Identität in zwei Funktionen f und g, sodass $f - g = \mathrm{id}$

Beweis: Definiere Funktionen $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wie in Abbildung 1 und $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $h(t) = t^{1/3}$. Es gilt $a^*a \in A_{sa}$, $a^*a = f(a^*a) - g(a^*a)$ und $f(a^*a) \cdot g(a^*a) = 0$. Für $c = a\, g(a^*a)$ ergibt sich

$$-c^*c = -g(a^*a)a^*ag(a^*a) = -g(a^*a)\big(f(a^*a) - g(a^*a)\big)g(a^*a) = g(a^*a)^3 \in A_+$$

Nach Bemerkung 1.3 gilt $\sigma(-cc^*) \setminus \{0\} = \sigma(-c^*c) \setminus \{0\}$, also $-cc^* \in A_+$. Schreibe nun $c = d + ie$ mit $d, e \in A_{sa}$. Dann gilt

$$c^*c + cc^* = 2d^2 + 2e^2$$

Also ist $c^*c = 2d^2 + 2e^2 - cc^* \geqslant 0$. Damit ist $\sigma(c^*c) \subseteq \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_- = \{0\}$. Also ist $\|c\|^2 = \|c^*c\| = r(c^*c) = 0$. Insgesamt ist $g(a^*a)^3 = 0$, also $g(a^*a) = h\big(g(a^*a)^3\big) = 0$ und $a^*a = f(a^*a) \geqslant 0$. □

3.7 Satz. Sei A eine C^*-Algebra. Dann gilt

(i) Es gilt $A_+ = \{a^*a \mid a \in A\}$.

(ii) Es gilt $A = \operatorname{span} A_+$.

es gilt auch $\operatorname{span} \mathcal{U}(A) = A$ siehe Anhang A.2

(iii) A_+ ist ein abgeschlossener Kegel in A.

(iv) $\leqslant$ ist eine partielle Ordnung auf A_{sa}.

(v) Für $a, b \in A_{sa}$ und $c \in A$ mit $a \leqslant b$ gilt $cac^* \leqslant cbc^*$.

(vi) Für $0 \leqslant a \leqslant b$ gilt $\|a\| \leqslant \|b\|$.

(vii) Wenn A unital ist und $a \in A$ positiv und invertierbar, dann folgt aus $a \leqslant b$ stets, dass auch b invertierbar ist und $0 \leqslant b^{-1} \leqslant a^{-1}$ gilt.

Beweis:

(i) Folgt aus Satz 3.6 und Proposition 3.3.

(ii) Wenn $a \in A$ ist, dann können wir $a = b + i \cdot c$ mit $b, c \in A_{sa}$ schreiben. Definiere $b_+ := f(b)$, $b_- := g(b)$, $c_+ := f(c)$, $c_- := g(c)$. Diese liegen alle in A_+. Dann gilt $b = b_+ - b_-$, $c = c_+ - c_-$ und $a = b_+ - b_- + i(c_+ - c_-) \in \operatorname{span} A_+$.

(iii) Die Kegeleigenschaft ist klar nach Korollar 3.5. Zur Abgeschlossenheit: Sei $a \in \overline{A_+}$. Dann gilt $a = a^*$, da A_{sa} abgeschlossen ist. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es $b \in A_+$ mit $\|b - a\| < \varepsilon$. Dann gilt

$$\|(a + \varepsilon - b) - \varepsilon\| \leqslant \varepsilon$$

und somit $a + \varepsilon - b \geqslant 0$ nach Proposition 3.4. Dann ist $a + \varepsilon = a + \varepsilon - b + b \geqslant 0$ nach Korollar 3.5 und es folgt $\sigma(a + \varepsilon) \subseteq [0, \infty)$. Damit ist $\sigma(a) \subseteq [\varepsilon, \infty)$. Lassen wir ε gegen 0 gehen, so folgt $\sigma(a) \subseteq [0, \infty)$. Insgesamt folgt $a \geqslant 0$ und damit $\overline{A_+} = A_+$.

(iv) Reflexivität: Es gilt offensichtlich $a \leqslant a$.

Antisymmetrie: Aus $a \leqslant b$ und $b \leqslant a$ folgt $\sigma(b-a) \subset \mathbb{R}_+$ sowie $\sigma(a-b) \subset \mathbb{R}_+$ und damit folgt $\sigma(a-b) = \sigma(b-a) = \{0\}$. Da $a-b$ selbstadjungiert ist, folgt aus Proposition 2.10 $a-b=0$.

Transitivität: Gilt $a \leqslant b$ und $b \leqslant c$, so ist $c - a = c - b + b - a \overset{3.5}{\geqslant} 0 \implies c \geqslant a$.

(v) Es gilt $c^*bc - c^*ac = c^*(b-a)c = c^*(b-a)^{1/2}(b-a)^{1/2}c = d^*d \geqslant 0$ mit $d := (b-a)^{1/2}c$.

(vi) Sei $0 \leqslant a \leqslant b$. Wir haben $\|b\| \cdot \mathbb{1}_{A^\sim} \geqslant b$ nach Gelfand für $C^*(b, \mathbb{1}_{A^\sim})$. Damit ist $a \leqslant \|b\| \cdot \mathbb{1}_{A^\sim}$. Gelfand für $C^*(a, \mathbb{1}_{A^\sim})$ liefert $\|b\| \cdot \mathbb{1}_{A^\sim} \geqslant \|a\| \cdot \mathbb{1}_{A^\sim}$. Damit muss dann bereits $\|b\| \geqslant \|a\|$ sein.

(vii) *Übungsaufgabe 1 b) von Blatt 5! Siehe Anhang A.1.* □

3.8 Satz. Sei A eine C^*-Algebra. Für $0 \leqslant a \leqslant b \in A$ gilt $a^{1/2} \leqslant b^{1/2}$.

Beweis: Es seien eine reelle Zahl $t > 0$ und $c, d \in A^\sim_{sa}$ gegeben mit

$$\left(t \cdot \mathbb{1} + b^{1/2} + a^{1/2}\right)\left(t \cdot \mathbb{1} + b^{1/2} - a^{1/2}\right) = c + i \cdot d$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{2} \cdot \left(\left(t \cdot \mathbb{1} + b^{1/2} + a^{1/2}\right)\left(t \cdot \mathbb{1} + b^{1/2} - a^{1/2}\right) + \left(t \cdot \mathbb{1} + b^{1/2} - a^{1/2}\right)\left(t \cdot \mathbb{1} + b^{1/2} + a^{1/2}\right)\right) \\ &= t^2 \cdot \mathbb{1} + 2t \cdot \underbrace{b^{1/2}}_{\geqslant 0} + \underbrace{b - a}_{\geqslant 0} \geqslant t^2 \cdot \mathbb{1} \end{aligned}$$

Da $t \neq 0$ ist, folgt $c \in \mathrm{Inv}(A^\sim) \cap A_+$ nach Satz 3.7(vii). Da $c^{-1/2}dc^{-1/2}$ positiv ist, ist das Spektrum von $\mathbb{1} + i \cdot c^{-1/2}dc^{-1/2}$ in $1 + i \cdot \mathbb{R}$ enthalten. Weiter gilt

$$\mathbb{1} + i \cdot c^{1/2}dc^{1/2} = c^{-1/2}(c + i \cdot d)c^{-1/2} \in \mathrm{Inv}(A^\sim)$$

Also ist $c + i \cdot d$ invertierbar und damit $\left(t \cdot \mathbb{1} + b^{1/2} - a^{1/2}\right)$ linksinvertierbar. Dieses Element ist aber selbstadjungiert und muss damit dann auch rechtsinvertierbar, also invertierbar sein. Damit folgt nun $-t \notin \sigma\left(b^{1/2} - a^{1/2}\right)$ und somit ist $\sigma\left(b^{1/2} - a^{1/2}\right) \subset \mathbb{R}_+$ und $b^{1/2} \geqslant a^{1/2}$. □

3.9 Beispiel. Im Allgemeinen folgt aus $0 \leqslant a \leqslant b$ *nicht* $a^2 \leqslant b^2$. Betrachte dafür die C^*-Algebra $A = M_2$ und die beiden Projektionen

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dann gilt $p \leqslant p + q$, aber $p^2 = p \nleqslant (p+q)^2 = p + q + pq + qp$, denn

$$q + pq + qp = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Matrix hat einen negativen Eigenwert, da die Determinante -1 ist.

[Ped79, Prop. 1.3.9] **3.10 Bemerkung.** Falls für alle $a, b \in A$ mit $0 \leqslant a \leqslant b$ schon $a^2 \leqslant b^2$ gilt, so ist A bereits abelsch.

3.11 Lemma. Sei A eine C^*-Algebra. Dann ist $\Lambda := \{a \in A_+ \mid \|a\| < 1\}$ gerichtet bezüglich „$\leqslant$“.

Beweis: *Im Anhang A.3 findet man auch den Beweis von Murphy mit zusätzlichen Erklärungen, der meiner Meinung nach etwas „flüssiger“ zu lesen ist.*
Für $a, b \in \Lambda$ setze $a' := a(\mathbb{1}_{A^\sim} - a)^{-1}$ und $b' := b(\mathbb{1}_{A^\sim} - b)^{-1}$. Durch Betrachtung der von-Neumann-Reihe sieht man sofort, dass a' und b' positiv sind. Dann gilt

$$c := (a' + b')(\mathbb{1}_{A^\sim} + a' + b')^{-1} \in \Lambda$$

nach Gelfand. Es ist nun

$$\begin{aligned} a = a(\mathbb{1} - a)^{-1}\big((\mathbb{1} - a)^{-1}\big)^{-1} &\overset{1.3}{=} a(\mathbb{1} - a)^{-1}\big(\mathbb{1} + a(\mathbb{1} - a)^{-1}\big)^{-1} = a'(\mathbb{1} + a')^{-1} \\ &= \big((\mathbb{1} + a') - \mathbb{1}\big)(\mathbb{1} + a')^{-1} = \mathbb{1} - (\mathbb{1} + a')^{-1} \end{aligned}$$

Da $0 \leqslant \mathbb{1} + a' \leqslant \mathbb{1} + a' + b'$ jeweils invertierbar sind, ist $(\mathbb{1} + a' + b')^{-1} \leqslant (\mathbb{1} + a')^{-1}$ nach Satz 3.7

$$\begin{aligned} &\leqslant \mathbb{1} - (\mathbb{1} + a' + b')^{-1} \overset{1.3}{=} \mathbb{1} - \big(\mathbb{1} + (a' + b')(\mathbb{1} + a' + b')^{-1}\big) \\ &= (a' + b')(\mathbb{1} + a' + b')^{-1} = c \end{aligned}$$

Damit ist $a \leqslant c$. Die Relation $b \leqslant c$ folgt ebenso. □

3.12 Definition. Eine ***approximative Eins*** in einer C^*-Algebra A ist (aufsteigendes) Netz $(e_\lambda)_\Lambda \subset A_+^1$ mit $a = \lim_\lambda a e_\lambda$ beziehungsweise $a = \lim_\lambda e_\lambda a$ für jedes $a \in A$.

3.13 Satz. Jede C^*-Algebra A besitzt eine approximative Eins.

Beweis: Sei $\Lambda := \{a \in A_+ \mid \|a\| < 1\}$ wie in Lemma 3.11 und setze $e_\lambda := \lambda$ für $\lambda \in \Lambda$. Dann ist $(e_\lambda)_\Lambda \subset A_+^1$ ein aufsteigendes Netz (aufsteigend bezüglich „$\leqslant$“, gerichtet nach Lemma 3.11). Wir wollen die geforderte Eigenschaft nun zunächst für $a \in \Lambda$ beweisen.

Sei dazu $1 \geqslant \varepsilon > 0$, $\Omega := \sigma(a) \setminus \{0\} \subset (0, 1]$ und $\Phi\colon C^*(a) \to C_0(\Omega)$ der Gelfandisomorphismus. Betrachte $f := \Phi(a) = \mathrm{id}_\Omega$ und die kompakte Menge $K := \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \geqslant \varepsilon\} \subset \Omega$. Nach Urysohn existiert ein $g\colon \Omega \to [0, 1]$ stetig mit kompaktem Träger und $g(\omega) = 1$ für $\omega \in K$. Wähle $\delta > 0$ mit $\delta < 1$ und $1 - \delta < \varepsilon$. Dann gilt

$$\big\|f - \delta \cdot g f\big\|_\infty = \big\|(\mathbb{1} - \delta \cdot g)f\big\|_\infty \leqslant \varepsilon$$

Mit $\overline{\lambda} := \Phi^{-1}(\delta \cdot g) \in \Lambda$ ergibt sich $\big\|a - \overline{\lambda} a\big\|_A \leqslant \varepsilon$. Falls nun $\lambda \in \Lambda$ ist mit $\lambda \geqslant \overline{\lambda}$, so gilt $0 \leqslant a(\mathbb{1} - e_\lambda)a \leqslant a(\mathbb{1} - e_{\overline{\lambda}})a$ nach Satz 3.7(v), da $0 \leqslant \mathbb{1} - e_\lambda \leqslant \mathbb{1} - e_{\overline{\lambda}}$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \|a - e_\lambda a\|^2 = \Big\|(\mathbb{1} - e_\lambda)^{1/2}(\mathbb{1} - e_\lambda)^{1/2} a\Big\|^2 \leqslant \Big\|(\mathbb{1} - e_\lambda)^{1/2} a\Big\|^2 &= \Big\|a^*(\mathbb{1} - e_\lambda)^{1/2}(\mathbb{1} - e_\lambda)^{1/2} a\Big\| \\ &\leqslant \|a^*(\mathbb{1} - e_{\overline{\lambda}})a\| \\ &\leqslant \|(\mathbb{1} - e_{\overline{\lambda}})a\| \leqslant \varepsilon \end{aligned}$$

Damit folgt $a = \lim_\lambda e_\lambda a$ für $a \in \Lambda$. Da $A = \operatorname{span} \Lambda$ gilt, sind wir fertig. □

3.14 Proposition. Sei A eine separable C^*-Algebra – das heißt A besitzt eine abzählbare dichte Teilmenge – dann besitzt A eine abzählbare idempotente approximative Eins $(e_n)_{\mathbb{N}}$, das heißt es gilt $e_n e_{n+1} = e_n$.

Beweis: *Übung! (Blatt 5 Aufgaben 3 und 4)* □

4. Ideale, Quotienten und Limiten

4.1 Proposition. Sei L ein abgeschlossenes Linksideal in der C^*-Algebra A. Dann existiert ein aufsteigendes Netz $(e_\lambda)_\Lambda \subset L \cap A_+^1$ mit $a = \lim_\lambda ae_\lambda$ für $a \in L$ und $L \cap L^* \subset A$ ist eine C^*-Unteralgebra.

Beweis: Sei $B := L \cap L^*$, dann ist $B \subset A$ eine C^*-Unteralgebra:

- $L^* \subset A$ abgeschlossen, da * isometrisch ist. Damit ist auch $L \cap L^*$ abgeschlossen in A
- $L \cap L^* \subset$ ist ein Untervektorraum.
- $L^* \subset A$ ist ein Rechtsideal: $l^*a = (a^*l)^* \in L^*$. Damit ist $L \cap L^*$ bereits eine Unteralgebra:

$$a, b \in L \cap L^* \implies \underbrace{a}_{\in L^*}\underbrace{b}_{\in L} \in L \cap L^*$$

- $L \cap L^* = (L \cap L^*)^*$ ist klar.

Mit Satz Satz 3.13 folgt, dass B eine approximative Eins $(e_\lambda)_\Lambda$ besitzt. Für $a \in L$ ist $a^*a \in B$ und damit

$$\lim_\lambda \|a - ae_\lambda\| = \lim_\lambda \big\|(\mathbb{1} - e_\lambda)a^*a(\mathbb{1} - e_\lambda)\big\|^{1/2} = 0 \qquad \square$$

4.2 Satz. Sei A eine C^*-Algebra und $J \lhd A$ ein (abgeschlossenes, zweiseitiges) Ideal. Dann ist $J \subset A$ eine C^*-Unteralgebra. Falls $(e_\lambda)_\Lambda \subset J$ eine approximative Eins ist, so gilt für $a \in A$

$$\|a + J\|_{A/J} = \lim_\lambda \|a - ae_\lambda\| = \lim_\lambda \|a - e_\lambda a\|$$

wobei $\|a + J\|_{A/J} = \inf_{b \in J} \|a + b\|$ die Quotientennorm bezeichnet.

Beweis: Nach Proposition 4.1 existiert $(u_\gamma)_\Gamma \subset J \cap A_+^1$ mit $a = \lim_\gamma au_\gamma$ für $a \in J$. Dann gilt

$$a^* = \lim_\gamma (au_\gamma)^* = \lim_\gamma u_\gamma a^* \in J$$

für $a \in J$, also ist $J = J^*$. Mit Proposition 4.1 folgt dann wiederum, dass $J = J \cap J^*$ eine C^*-Unteralgebra von A ist. Sei nun $(e_\lambda)_\Lambda \subset J$ eine beliebige approximative Eins für J. Gegeben $a \in A$ und $\varepsilon > 0$, so wähle $b \in J$ mit $\|a + b\| \leqslant \|a + J\|_{A/J} + \frac{\varepsilon}{2}$. Wähle dann $\lambda_0 \in \Lambda$ mit $\|b - \varepsilon_\lambda b\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $\lambda \geqslant \lambda_0$. Für $\lambda \geqslant \lambda_0$ gilt dann

$$\begin{aligned} \|a + J\|_{A/J} \leqslant \|a - e_\lambda a\| \leqslant \big\|(\mathbb{1} - e_\lambda)(a + b)\big\| + \big\|(\mathbb{1} - e_\lambda)b\big\| &\leqslant \|a + b\| + \|(\mathbb{1} - e_\lambda)b\| \\ &\leqslant \|a + J\|_{A/J} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Damit folgt $\|a - e_\lambda a\| \xrightarrow{\lambda} \|a + J\|_{A/J}$. $\|a - ae_\lambda\| \xrightarrow{\lambda} \|a + J\|_{A/J}$ folgt ebenso. $\square$

4.3 Bemerkung. Für Ideale $J \lhd A$ und $I \lhd J$ gilt $I \lhd A$.

Beweis: Es sei $a \in A$ und $b \in I_+$. Dann gilt $ab = \underbrace{ab^{1/2}}_{\in J} b^{1/2} \in I$. $\square$

4.4 Satz. Sei A eine C^*-Algebra und $J \lhd A$ ein Ideal. Dann ist A/J eine C^*-Algebra (mit induzierten Operationen und der Quotientennorm).

Beweis: Fixiere eine approximative Eins $(e_\lambda)_\Lambda$ für J. Sei $a \in A$ und $b \in J$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\|a+J\|^2_{A/J} &\overset{4.2}{=} \lim_\lambda \|a - ae_\lambda\|^2 = \lim_\lambda \|(\mathbb{1}-e_\lambda)a^*a(\mathbb{1}-e_\lambda)\| \\ &\leqslant \sup_\lambda \big\|(\mathbb{1}-e_\lambda)(a^*a+b)(\mathbb{1}-e_\lambda)\big\| + \underbrace{\lim_\lambda \big\|(\mathbb{1}-e_\lambda)b(\mathbb{1}-e_\lambda)\big\|}_{=0} \\ &\leqslant \|a^*a+b\|\end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\|a+J\|^2_{A/J} \leqslant \inf_{b\in J}\|a^*a+b\| = \|a^*a+J\|_{A/J} \leqslant \|a^*+J\|_{A/J}\cdot\|a+J\|_{A/J} = \|a+J\|^2_{A/J}$$

Damit ist $\|(a^*+J)(a+J)\|_{A/J} = \|a+J\|^2_{A/J}$ und somit ist die C^*-Gleichung erfüllt. Dass A/J ein Banachraum ist, haben wir bereits in Funktionalanalysis, Proposition 2.16 gesehen. □

4.5 Proposition. Es seien A, B C^*-Algebren, $\pi\colon A \to B$ ein injektiver *-Homomorphismus. Dann ist π bereits isometrisch.

Beweis: Zu zeigen: $\|\pi(a^*a)\| = \|\pi(a)\|^2 = \|a\|^2 = \|a^*a\|$ für $a \in A$. Wir dürfen also annehmen, dass $A = C^*(a^*a)$ und $B = \overline{\pi(A)}$ abelsch sind. Weiter können wir π durch $\pi^\sim\colon A^\sim \to B^\sim$ ersetzen, falls A nicht unital ist. Wir dürfen also auch A und B als unital annehmen. π induziert eine stetige Abbildung $\pi^*\colon \Omega(B) \to \Omega(A)$ durch $\chi \mapsto \chi\circ\pi$, also ist $\pi^*(\Omega(B)) \subset \Omega(A)$ kompakt nach Satz 1.15 und insbesondere auch abgeschlossen. Falls π^* nicht surjektiv wäre, so gäbe es ein $0 \neq f \in C(\Omega(A))_+ \cong A_+$ mit $f|_{\pi^*(\Omega(B))} = 0$. Dann gilt

a^*a normal $\Rightarrow$ $C^*(a^*a)$ abelsch

Gelfand-Isomorphismus in der Notation unterdrückt

$$0 = f\big(\pi^*(\chi)\big) = \chi\circ\pi(f)$$

für alle Charaktere $\chi \in \Omega(B)$. Also ist $\pi(f) = 0$, woraus mit der Injektivität wieder $f = 0$ folgt. Dies ist ein Widerspruch und somit ist π^* surjektiv. Für $a \in A$ gilt dann

$$\|a\|_A \overset{\text{Gelfand-}}{\underset{\text{Isom.}}{=}} \sup_{\rho\in\Omega(A)}|\rho(a)| = \sup_{\chi\in\Omega(B)}\big|\chi\circ\pi(a)\big| = \|\pi(a)\|_B$$ □

4.6 Satz. Seien A, B C^*-Algebren, $\pi\colon A \to B$ ein *-Homomorphismus. Dann ist $\pi(A) \subset B$ eine C^*-Unteralgebra.

Beweis: Betrachte die C^*-Algebra $A/\ker\pi$ (siehe 4.4) und den wohldefinierten *-Homomorphismus

$$\begin{aligned}\dot\pi\colon A/\ker\pi_n &\longrightarrow B \\ a+\ker\pi &\longmapsto \pi(a)\end{aligned}$$

$\dot\pi$ ist injektiv, also isometrisch nach Proposition 4.5. Damit ist $\pi(A)$ vollständig und $\pi(A) \subset B$ abgeschlossen. Also ist $\pi(A)$ eine C^*-Unteralgebra von B. □

4.7 Proposition. Sei A eine C^*-Algebra, $B \subset A$ eine C^*-Unteralgebra und $J \lhd A$ ein Ideal. Dann ist $B + J \subset A$ eine C^*-Unteralgebra.

Beweis: *Übung! (Blatt 7, Aufgabe 1) Siehe Anhang A.4* □

4.8 Definition. Eine C^*-Unteralgebra $B \subset A$ heißt ***hereditär***, $B \subset_{\text{her}} A$, falls gilt

$$a \in A_+, b \in B_+ : \quad a \leqslant b \implies a \in B$$

4.9 Satz. Für eine C^*-Algebra A definiert

$$\begin{aligned}\{L \subset A \mid L \text{ ist abg.Linksideal}\} &\longrightarrow \{B \subset_{\text{her}} A\}\\ L &\longmapsto L \cap L^*\\ L_B := \{a \in A \mid a^*a \in B\} &\longleftarrow B\end{aligned}$$

eine natürliche Bijektion.

Beweis: Sei $B \subset_{\text{her}} A$. Dann ist $L_B := \{a \in A \mid a^*a \in B\} \subset A$ ein abgeschlossenes Linksideal: Wenn $a, b \in L_B$, dann gilt

$$(a^* + b^*)(a + b) \leqslant (a^* + b^*)(a + b) + (a - b)^*(a - b) = 2a^*a + 2b^*b \in B$$

also $(a^* + b^*)(a + b) \in B$, da B hereditär ist, und somit $a + b \in L_B$. Für $a \in A$ und $b \in L_B$ gilt

$$(ab)^*ab = b^*a^*ab \leqslant b^*(\|a^*a\| \cdot \mathbb{1}_{A^\sim})b = \|a^*a\|b^*b \in B$$

Da B hereditär ist, folgt $(ab)^*ab \in B$ und somit $ab \in L_B$. Also ist L_B wirklich ein Linksideal und $L_B \subset A$ ist abgeschlossen, da L_B das Urbild von B unter der stetigen Abbildung $a \mapsto a^*a$ ist.

Mit Proposition 4.1 folgt, dass $L_B \cap L_B^* \subset A$ eine C^*-Algebra ist. Es gilt

$$0 \leqslant b \in L_B \cap L_B^* \implies 0 \leqslant b^{1/2} \in L_B \cap L_B^*$$

Also ist $b \in B$ und somit $L_B \cap L_B^* \subset B$. Weiter ist klar, dass $B \subset L_B \cap L_B^*$ ist, also insgesamt $B = L_B \cap L_B^*$ gilt. Die Verknüpfung $B \mapsto L_B \mapsto L_B \cap L_B^*$ entspricht also der Identität.

Für die zweite Verknüpfung verifizieren wir zunächst, dass $L \cap L^*$ eine hereditäre C^*-Unteralgebra ist: Nach Proposition 4.1 müssen wir dafür nur noch zeigen, dass $L \cap L^*$ hereditär ist. Sei dazu $a \in A_+$ und $0 \leqslant a \leqslant b$ für ein $b \in L \cap L^*$. Sei $(e_\lambda)_\Lambda$ ein Netz wie in Proposition 4.1. Es gilt $0 \leqslant (\mathbb{1} - e_\lambda)a(\mathbb{1} - e_\lambda) \leqslant (\mathbb{1} - e_\lambda)b(\mathbb{1} - e_\lambda)$ für alle $\lambda \in \Lambda$. Damit erhalten wir

$$\left\|a^{1/2}(\mathbb{1} - e_\lambda)\right\|^2 = \left\|(\mathbb{1} - e_\lambda)a(\mathbb{1} - e_\lambda)\right\| \leqslant \left\|(\mathbb{1} - e_\lambda)b(\mathbb{1} - e_\lambda)\right\| \leqslant \left\|b(\mathbb{1} - e_\lambda)\right\|$$

Damit ist $a^{1/2} = \lim_\lambda a^{1/2}e_\lambda$ und damit $a^{1/2} \in L$, da L ein Linksideal ist. Dann ist aber auch $a \in L$. Es bleibt nun $L = L_{L\cap L^*}$ zu zeigen. $L \subseteq L_{L\cap L^*}$ folgt sofort, da L ein Linksideal und L^* ein Rechtsideal ist. Sei nun $a \in L_{L\cap L^*}$ positiv, also $a \in A$ mit $a^*a \in L \cap L^*$. Dann gilt $a^2 = a^*a \in L \cap L^*$ und somit $a \in L \cap L^* \subset L$, da $L \cap L^*$ eine C^*-Algebra ist. Wir haben nun $(L_{L\cap L^*})_+ \subseteq L_+$ und es folgt $L_{L\cap L^*} \subseteq L$. Also entspricht auch $L \mapsto L \cap L \mapsto L_{L\cap L^*}$ der Identität. □

4.10 Satz. Sei $B \subset A$ eine C^*-Unteralgebra. Dann gilt:

$$B \subset_{\text{her}} A \iff bac \in B \text{ für alle } b, c \in B, a \in A$$

Beweis: Für die erste Implikation sei $B = L \cap L^*$ für ein abgeschlossenes Linksideal L nach Satz 4.9. Für $b, c \in B$ und $a \in A$ gilt $bac \in L$ und

$$(bac)^* = c^*a^*b^* \in L$$

Also ist $bac \in L \cap L^* = B$ wie gewünscht. Für die zweite Implikation seien $a \in A_+$, $b \in B_+$ mit $0 \leqslant a \leqslant b$. Sei weiter $(e_\lambda)_\Lambda \subset B$ eine approximative Eins für B. Dann gilt $e_\lambda a e_\lambda \in B$ für $\lambda \in \Lambda$ nach Vorraussetzung. Wir haben nun wie im vorigen Beweis

$$0 \leqslant (\mathbb{1} - e_\lambda)a(\mathbb{1} - e_\lambda) \leqslant (\mathbb{1} - e_\lambda)b(\mathbb{1} - e_\lambda) \xrightarrow{\lambda} 0$$

Wie eben gilt auch $a^{1/2}(\mathbb{1} - e_\lambda) \xrightarrow{\lambda} 0$ und es folgt $B \ni e_\lambda a e_\lambda \to a \in B$. Also ist B hereditär. □

4.11 Korollar. Sei $J \lhd A$ ein Ideal, dann gilt $J \subset_{\text{her}} A$. □

4.12 Korollar. Sei A eine C^*-Algebra, $a \in A_+$ ein positives Element. Dann gilt $\overline{aAa} \subset_{\text{her}} A$. Falls A separabel ist und $B \subset_{\text{her}} A$, so gilt $B = \overline{hAh}$ für ein $h \in A_+$.

$\overline{aAa}$ ist die kleinste hereditäre C^*-Unteralgebra, die a enthält

Beweis: *Übung! (Blatt5, Aufgaben 3 und 4 Blatt 7, Aufgaben 2 und 3) siehe auch Anhang A.5* □

4.13 Satz. Sei $(A_n, \varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein ***induktives System von C^*-Algebren***, das heißt die A_n sind C^*-Algebren und die $\varphi_n : A_n \to A_{n+1}$ sind *-Homomorphismen. Dann existiert eine (bis auf Isomorphie) eindeutig bestimmte C^*-Algebra $\varinjlim(A_n, \varphi_n)$ mit folgender universeller Eigenschaft:

- Es existieren *-Homomorphismen $\varphi_{n,\infty} : A_n \to \varinjlim(A_n, \varphi_n)$ mit $\varphi_{n,\infty} = \varphi_{n+1,\infty} \circ \varphi_n$.
- Falls $\psi_n : A_n \to B$ für $n \in \mathbb{N}$ *-Homomorphismen sind mit $\psi_n = \psi_{n+1} \circ \varphi_n$, so existiert ein eindeutig bestimmter *-Homomorphismus $\psi : \varinjlim(A_n, \varphi_n) \to B$ mit $\psi_n = \psi \circ \varphi_{n,\infty}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Kürzer: Folgendes Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd}
 & & & & & \varinjlim(A_n,\varphi_n) \arrow[dd, dashed, bend left, "\exists!\psi"] \\
A_0 \arrow[r,"\varphi_0"] & \dots \arrow[r,"\varphi_{n-1}"] & A_n \arrow[r,"\varphi_n"] \arrow[urrr, "\varphi_{n,\infty}"] \arrow[drrr, "\psi_n"'] & A_{n+1} \arrow[r] \arrow[urr, "\varphi_{n+1,\infty}"] \arrow[drr, "\psi_{n+1}"'] & \dots & \\
 & & & & & B
\end{tikzcd} \qquad [*]$$

Beweis: Die Menge

$$\textstyle\prod_{\mathbb{N}} A_n := \left\{ (a_n)_{\mathbb{N}} \;\middle|\; a_n \in A_n, \sup_n \|a_n\| < \infty \right\}$$

ist eine C^*-Algebra mit komponentenweisen Operationen und Supremumsnorm, denn sie ist eine Banachalgebra nach Blatt 1, Aufgabe 1 c) und $\|\cdot\|_\infty$ ist offensichtlich eine C^*-Norm. Es ist nun

$$\textstyle\bigoplus_{\mathbb{N}} A_n := \left\{ (a_n)_{\mathbb{N}} \;\middle|\; a_n \in A_n, \lim_{n\to\infty} \|a_n\| = 0 \right\} \lhd \prod_{\mathbb{N}} A_n$$

warum?

Sei $q : \prod_{\mathbb{N}} A_n \to \prod_{\mathbb{N}} A_n / \bigoplus_{\mathbb{N}} A_n$ die Quotientenabbildung und weiter

$$C := \left\{ (a_n)_{\mathbb{N}} \in \textstyle\prod_{\mathbb{N}} A_n \;\middle|\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ mit } a_{n+1} = \varphi_n(a_n) \text{ für } n \geqslant n_0 \right\}$$

$C \subset \prod_{\mathbb{N}} A_n$ ist eine *-Unteralgebra und folglich ist $\overline{C} \subset \prod_{\mathbb{N}} A_n$ eine C^*-Unteralgebra. Wir definieren

$$\varinjlim(A_n, \varphi_n) := q(\overline{C}) \subset {\textstyle\prod_{\mathbb{N}} A_n} \big/ {\textstyle\bigoplus_{\mathbb{N}} A_n}$$

Der Übergang zum Quotienten ist notwendig, damit später $\varphi_{n+1,\infty} \circ \varphi_n = \varphi_{n,\infty}$ gilt. Wir definieren nun *-Homomorphismen $\varphi'_n : A_n \to C$ durch

$$\varphi'_n(a) := (0, \dots, 0, a, \varphi_n(a), \varphi_{n+1}(\varphi_n(a)), \dots)$$

und $\varphi_{n,\infty} := q \circ \varphi_n' \colon A_n \to \varinjlim(A_n, \varphi_n)$. Gegeben B und $\psi_n \colon A_n \to B$, so ist ψ auf $q(C)$ eindeutig bestimmt durch [∗], das heißt $\psi_n = \psi \circ \varphi_{n,\infty} \colon A_n \to B$. Aber $q(C) \subset q(\overline{C}) = \varinjlim(A_n, \varphi_n)$ ist dicht und ψ ist normvermindernd auf $q(C)$, setzt sich also eindeutig auf $q(\overline{C})$ fort. Die Eindeutigkeit von $\varinjlim(A_n, \varphi_n)$ ist klar. □

4.14 Beispiel. Beispiele für den gerichteten Limes

(i) Betrachte

$$M_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow M_n \xrightarrow{\varphi_n} M_{n+1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow \varinjlim(M_n, \varphi_n) \cong \mathcal{K}\big(\ell^2(\mathbb{N})\big)$$

wobei die φ_n eine Matrix rechts unten mit Nullen auffüllt. Es gilt

$$\mathcal{K}\big(\ell^2(\mathbb{N})\big) = \overline{\bigcup_{\mathbb{N}} \underbrace{\mathcal{B}\big(\underbrace{\operatorname{span}\{\eta_0, \ldots, \eta_n\}}_{\cong \mathbb{C}^{n+1}}\big)}_{\cong M_{n+1}}} \subset \mathcal{B}\big(\ell^2(\mathbb{N})\big)$$

nach Korollar 8.11 aus Funktionalanalysis.

(ii) Betrachtet man den folgenden Limes

$$M_2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow M_{2^n} \xrightarrow{\varphi_n} M_{2^{n+1}} \longrightarrow \ldots \longrightarrow \varinjlim(M_{2^n}, \varphi_n) =: M_{2^\infty}$$

wobei die verbindenden Abbildungen die Matrizen zweimal auf der Diagonalen platzieren, also $X \mapsto \left(\begin{smallmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{smallmatrix}\right)$, so erhält man die sogenannte ***CAR-Algebra*** M_{2^∞}. Wikipedia zum Namen:

„Es handelt sich um eine C^*-Algebra, die eng mit den in der Quantenmechanik untersuchten kanonischen Antivertauschungsrelationen (engl. **c**anonical **a**nticommutation **r**elation, daher der Name CAR) verbunden ist und daher auch Fermionenalgebra genannt wird.“ (`https://de.wikipedia.org/wiki/CAR-Algebra`)

5. Zustände und die GNS-Konstruktion

5.1 Definition. Sei A eine C^*-Algebra. Eine Abbildung $\varphi\colon A \to \mathbb{C}$ heißt ***positives Funktional***, falls φ linear ist und $\varphi(A_+) \subset \mathbb{R}_+$ gilt. φ heißt ***Zustand***, falls außerdem $\|\varphi\| = 1$ gilt. Wir schreiben *engl. states*

$$S(A) := \{\text{Zustände auf } A\}$$

Wie in Anhang A.6 gezeigt, sind positive lineare Abbildungen $A \to \mathbb{C}$ immer stetig.

5.2 Proposition. Sei $\varphi\colon A \to \mathbb{C}$ ein positives Funktional. Dann ist $(a,b) \mapsto \varphi(a^*b)$ eine positiv semidefinite Sesquilinearform auf A. Insbesondere gilt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\left|\varphi(a^*b)\right| \leqslant \varphi(a^*a)^{1/2}\varphi(b^*b)^{1/2}$$

Beweis: Das einzige, was man sich kurz überlegen muss, ist die Eigenschaft von $(a,b) \mapsto \varphi(a^*b)$ hermitesch zu sein: Dies folgt mit (ii) aus folgendem Satz 5.3

$$\overline{\varphi(a^*b)} = \varphi\big((a^*b)^*\big) = \varphi(b^*a) \longleftarrow (b,a) \qquad \square$$

5.3 Satz. Sei φ ein positives Funktional auf A. Dann gilt

(i) φ ist beschränkt,

(ii) $\varphi(a^*) = \overline{\varphi(a)}$ für $a \in A$ und

(iii) $|\varphi(a)|^2 \leqslant \|\varphi\| \cdot \varphi(a^*a)$ für $a \in A$.

Beweis:

(i) Falls φ unbeschränkt ist, so existiert $(a_n)_{\mathbb{N}} \subset A_+^1$ mit $\varphi(a_n) > 2^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Setze $h := \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \cdot a_n \subset A_+$. Dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\varphi(h) \geqslant \varphi\left(\sum_{n=0}^{k} \frac{1}{2^n} \cdot a_n\right) > k+1,$$

was ein Widerspruch ist.

(ii) Es sei $a = b - c + i \cdot d - i \cdot e$ mit $b,c,d,e \in A_+$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\varphi(a^*) = \varphi(b - c - i\cdot d + i\cdot e) &= \varphi(b) - \varphi(c) - i\cdot\varphi(d) + i\cdot\varphi(e)\\ &= \overline{\varphi(b) - \varphi(c) + i\cdot\varphi(d) - i\cdot\varphi(e)} = \overline{\varphi(a)}\end{aligned}$$

(iii) Sei $(e_\lambda)_\Lambda$ eine approximative Eins. Dann gilt

$$|\varphi(a)|^2 = \lim_\lambda \left|\varphi(e_\lambda \cdot a)\right|^2 \overset{\text{C.S.}}{\leqslant} \lim_\lambda \varphi(e_\lambda^2)\cdot\varphi(a^*a) \overset{5.4}{\leqslant} \|\varphi\|\cdot\varphi(a^*a) \qquad \square$$

5.4 Satz. Sei A eine C^*-Algebra und $\varphi \in A^*$ ein (beschränktes) Funktional. Dann sind äquivalent:

(i) φ ist positiv.

(ii) $\|\varphi\| = \lim_\lambda \varphi(e_\lambda)$ für jede approximative Eins $(e_\lambda)_\Lambda$ in A.

(iii) $\|\varphi\| = \lim_\lambda \varphi(e_\lambda)$ für *eine* approximative Eins $(e_\lambda)_\Lambda$ in A.

Falls A unital ist, so ist φ genau dann positiv, wenn $\varphi(1) = \|\varphi\|$ ist.

Beweis: Für die Implikation (i) ⇒ (ii) sei φ positiv und $(e_\lambda)_\Lambda$ eine approximative Eins. Dann ist $(\varphi(e_\lambda))_\Lambda \subset [0, \|\varphi\|]$ ein aufsteigendes Netz, da φ positiv und linear ist, also existiert der Limes und es gilt $\lim_\lambda \varphi(e_\lambda) \leqslant \|\varphi\|$. Sei $a \in A^1$. Dann gilt

$$|\varphi(a)|^2 \xleftarrow{\lambda\to\infty} |\varphi(e_\lambda a)|^2 \overset{\text{C.S.}}{\leqslant} \varphi(e_\lambda^2)\cdot\varphi(a^*a) \overset{e_\lambda^2 \leqslant e_\lambda}{\leqslant} \varphi(e_\lambda)\cdot\varphi(a^*a) \leqslant \lim_\lambda \varphi(e_\lambda)\cdot\|\varphi\|$$

Damit folgt $\|\varphi\|^2 \leqslant \lim_\lambda \varphi(e_\lambda)\cdot\|\varphi\| \leqslant \|\varphi\|^2$, also $\|\varphi\| = \lim_\lambda \varphi(e_\lambda)$.

Die Implikation (ii) ⇒ (iii) ist trivial. Für (iii) ⇒ (i) sei $(e_\lambda)_\Lambda$ die approximative Eins mit $\|\varphi\| = \lim_\lambda \varphi(e_\lambda)$. Behauptung: $\varphi(A_{sa}) \subset \mathbb{R}$. Sei $a \in A^1_{sa}$ mit $\varphi(a) = \alpha + i\cdot\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Wir dürfen $\beta \leqslant 0$ annehmen (betrachte sonst a^*). Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\|a - i\cdot n\cdot e_\lambda\|^2 = \big\|(a + i\cdot n\cdot e_\lambda)(a - i\cdot n\cdot e_\lambda)\big\| &= \big\|a^2 + n^2\cdot e_\lambda^2 + i\cdot n\cdot(e_\lambda a - a e_\lambda)\big\| \\ &\leqslant 1 + n^2 + n\cdot\|e_\lambda a - a e_\lambda\|\end{aligned}$$

Erweitern mit $\|\varphi\|^2$ liefert

$$\begin{array}{ccc} \big|\varphi(a - i\cdot n\cdot e_\lambda)\big|^2 & \leqslant & \|\varphi\|^2\big(1 + n^2 + n\cdot\|e_\lambda a - a e_\lambda\|\big) \\ \big\downarrow \lambda & & \big\downarrow \lambda \\ \big|\varphi(a) - i\cdot n\cdot\|\varphi\|\big|^2 & & \|\varphi\|^2(1+n^2) \\ = \big|\alpha + i\cdot\beta - i\cdot n\cdot\|\varphi\|\big|^2 & & \\ = \alpha^2 + \beta^2 - 2\cdot n\cdot\|\varphi\|\cdot\beta + n^2\|\varphi\|^2 & & \end{array}$$

Wir erhalten

$$-2\cdot n\cdot\|\varphi\|\cdot\beta \leqslant \|\varphi\|^2 - \alpha^2 - \beta^2$$

Damit folgt $\|\varphi\| = 0$ oder $\beta \geqslant 0$, da n beliebig ist. Insgesamt also in jedem Fall $\varphi(A_{sa}) \subset \mathbb{R}$. Sei $a \in A^1_+$. Dann gilt $e_\lambda - a \in A_{sa}$ und $\|e_\lambda - a\| \leqslant 1$ (denn $-\mathbb{1}_{A^\sim} \leqslant e_\lambda - a \leqslant \mathbb{1}_{A^\sim}$). Also ist $\varphi(e_\lambda - a) \leqslant |\varphi(e_\lambda - a)| \leqslant \|\varphi\|\cdot\|e_\lambda - a\| \leqslant \|\varphi\|$. Dann gilt aber

$$\|\varphi\| - \varphi(a) = \lim_\lambda \varphi(e_\lambda) - \varphi(a) = \lim_\lambda \varphi(e_\lambda - a) \leqslant \|\varphi\|$$

Also ist $\varphi(a) \geqslant 0$ und wir sind fertig. □

5.5 Satz. Sei A eine C^*-Algebra und $0 \neq a \in A$ normal. Dann existiert ein Zustand φ auf A mit $\|a\| = |\varphi(a)|$.

Beweis: Die C^*-Algebra $B := C^*(a, \mathbb{1}) \subset A^\sim$ ist abelsch, da a normal ist. Insbesondere existiert ein Charakter φ_2 auf B mit $|\varphi_2(a)| = \|a\|$. Nach Hahn-Banach können wir φ_2 stetig und linear zu φ_1 auf $A^\sim$ fortsetzen mit $\|\varphi_1\| = \|\varphi_2\| = 1$. Weiter gilt $\varphi_1(\mathbb{1}) = \varphi_2(\mathbb{1}) = 1$ und damit ist φ_1 ein stetiges lineares Funktional auf $A^\sim$ mit

$$\|\varphi_1\| = \|\varphi_2\| \overset{5.4}{=} \varphi_2(\mathbb{1}) = \varphi_1(\mathbb{1})$$

Mit Satz 5.4 folgt dann auch, dass φ_1 positiv ist. $\varphi := \varphi_1|_A$ ist also positiv mit $\|a\| = |\varphi(a)|$ wie gewünscht. Weiter ist $\|\varphi\| \leqslant \|\varphi_1\| \leqslant 1$ und außerdem

$$\|a\| = |\varphi(a)| \leqslant \|\varphi\|\cdot\|a\| \implies \|\varphi\| \geqslant 1$$

Also ist φ auch ein Zustand. □

5.6 Proposition. Sei φ ein positives stetiges Funktional auf A.

(i) Für alle $a \in A$ gilt $\varphi(a^*a) = 0 \iff \varphi(ba) = 0$ für alle $b \in A$.

(ii) Für alle $a, b \in A$ gilt: $\varphi(b^*a^*ab) \leqslant \|a^*a\| \cdot \varphi(b^*b)$.

Beweis:

(i) Die nicht triviale Implikation folgt mit Cauchy-Schwarz.

(ii) Benutze $b^*a^*ab \leqslant b^*(\|a^*a\| \cdot \mathbb{1}_{A^\sim})b = \|a^*a\| \cdot b^*b$. □

5.7 Satz. Sei $B \subset A$ eine C^*-Unteralgebra und φ ein positives Funktional auf B. Dann besitzt φ eine positive Fortsetzung $\overline{\varphi}$ auf A mit $\|\overline{\varphi}\| = \|\varphi\|$.

Beweis: Definiere $\varphi^+ : B^+ \to \mathbb{C}$ durch $\varphi^+\big((b, \mu)\big) := \varphi(b) + \mu \cdot \|\varphi\|$. Für $(b, \mu) \in B^+$ erhalten wir *vgl. 2.7 für* B^+

$$\begin{aligned}\left|\varphi^+((b,\mu))\right| = \left|\varphi(b) + \mu \cdot \|\varphi\|\right| = \left|\lim_\lambda \varphi(be_\lambda) + \mu \cdot \lim_\lambda \varphi(e_\lambda)\right| &= \left|\lim_\lambda \varphi\big((b + \mu \cdot \mathbb{1}_{B^+})e_\lambda\big)\right| \\ &\leqslant \|\varphi\| \cdot \|b + \mu \cdot \mathbb{1}_{B^+}\|_{B^+} \\ &= \|\varphi\| \cdot \|(b,\mu)\|\end{aligned}$$

wobei $(e_\lambda)_\Lambda$ eine approximative Eins für B ist. Damit ist $\|\varphi^+\| \leqslant \|\varphi\| (\leqslant \|\varphi^+\|)$ und es folgt $\|\varphi^+\| = \|\varphi\| = \varphi^+(\mathbb{1}_{B^+})$ noch Definition von φ^+. Mit Satz 5.4 folgt, dass φ^+ positiv ist.

Die Einbettung $\iota : B \hookrightarrow A \hookrightarrow A^\sim$ setzt sich zu einem unitalen *-Homomorphismus $\iota^+ : B^+ \to A^\sim$ fort mittels

$$\big(\iota^+(b,\mu)\big) := \iota(b) + \mu \cdot \mathbb{1}_{A^\sim}$$

Definiere nun $\hat{\varphi} : \iota^+(B^+) \to \mathbb{C}$ durch $\hat{\varphi}(\iota^+(b,\mu)) := \varphi^+(b,\mu)$. Dies ist wohldefiniert, denn nur der Fall $B \ni \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_A \in A$ ist zu überprüfen. Dann ist $\hat{\varphi}$ positiv, denn φ^+ ist positiv und $(\iota^+(B^+))_+ = \iota^+(B^+_+)$ (warum?). Nach Hahn-Banach existiert eine stetige lineare Fortsetzung $\hat{\hat{\varphi}} : A^\sim \to \mathbb{C}$ von $\hat{\varphi}$ mit $\|\hat{\hat{\varphi}}\| = \|\hat{\varphi}\| = \hat{\varphi}(\mathbb{1}_{A^\sim}) = \hat{\hat{\varphi}}(\mathbb{1}_{A^\sim})$ und es folgt wieder mit Satz 5.4, dass $\hat{\hat{\varphi}}$ positiv ist. Dann ist $\overline{\varphi} := \hat{\hat{\varphi}}|_A$ die gesuchte positive Fortsetzung. □

5.8 Satz. Sei $B \subset_{\text{her}} A$ eine hereditäre C^*-Unteralgebra und φ ein positives Funktional auf B. Dann besitzt φ eine *eindeutige* positive lineare Fortsetzung $\overline{\varphi}$ auf A mit $\|\overline{\varphi}\| = \|\varphi\|$.

Falls $(e_\lambda)_\Lambda \subset B$ eine approximative Eins für B ist, so gilt $\overline{\varphi}(a) = \lim_\lambda \varphi(e_\lambda a e_\lambda)$ für $a \in A$.

Beweis: *Eine* positive Fortsetzung $\overline{\varphi}$ existiert nach Satz 5.7. Sei nun $\psi : A \to \mathbb{C}$ irgendeine positive lineare Fortsetzung von φ mit $\|\psi\| = \|\varphi\|$. Sei $\psi^\sim : A^\sim \to \mathbb{C}$ eine (die) positive lineare Fortsetzung von ψ mit $\|\psi\| = \|\psi^\sim\|$ nach Satz 5.7. Wir haben $\lim_\lambda \varphi(e_\lambda) = \|\varphi\| = \|\psi^\sim\| = \psi^\sim(\mathbb{1}_{A^\sim})$, also ist

$$\lim_\lambda \psi^\sim(\mathbb{1}_{A^\sim} - e_\lambda) = 0$$

Für $a \in A$ ergibt sich nun

$$\begin{aligned}\left|\psi(a) - \varphi(e_\lambda a e_\lambda)\right| &\leqslant \left|\psi^\sim(a) - \psi^\sim(e_\lambda a)\right| + \left|\psi^\sim(e_\lambda a - e_\lambda a e_\lambda)\right| \\ &= \left|\psi^\sim\big((\mathbb{1} - e_\lambda)a\big)\right| + \left|\psi^\sim\big(e_\lambda a(\mathbb{1} - e_\lambda)\big)\right| \\ &\overset{\text{C.S.}}{\leqslant} \psi^\sim\big((\mathbb{1} - e_\lambda)^2\big)^{1/2} \cdot \psi^\sim(a^*a)^{1/2} + \psi^\sim(a^*e_\lambda^2 a)^{1/2} \cdot \psi^\sim\big((\mathbb{1} - e_\lambda)^2\big)^{1/2} \\ &\leqslant \underbrace{\psi^\sim(\mathbb{1} - e_\lambda)^{1/2}}_{\longrightarrow 0} \cdot \psi^\sim(a^*a)^{1/2} + \psi^\sim(a^*e_\lambda^2 a) \cdot \underbrace{\psi^\sim(\mathbb{1} - e_\lambda)^{1/2}}_{\longrightarrow 0}\end{aligned}$$

Damit folgt $\psi(a) = \lim_\lambda \varphi(e_\lambda a e_\lambda)$ und die Eindeutigkeit. □

5.9 Beispiel.

(i) Folgende Abbildung ist ein Zustand aber kein Charakter, da das Integral nicht multiplikativ ist. Die Positivität folgt mit Bemerkung 3.2:

$$\begin{aligned} C([0,1]) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ f &\longmapsto \int f \, d\lambda \end{aligned}$$

(ii) Die normalisierte Spurabbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\colon M_n &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x_{ij}) &\longmapsto \tfrac{1}{n} \textstyle\sum_{i=1}^n x_{ii}^2 \end{aligned}$$

bezeichnet man als ***Spurzustand***, was allgemein ein Zustand $\tau\colon A \to \mathbb{C}$ ist mit $\tau(a^*a) = \tau(aa^*)$ für alle $a \in A$.

(iii) Sei $A_0 \longrightarrow A_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow A = \varinjlim A_i$ ein unitales induktives System von C^*-Algebren. Falls jedes A_i einen Spurzustand τ_i besitzt, so auch A: Wir haben

$$A \hookrightarrow \prod_{\mathbb{N}} A_i \big/ \bigoplus_{\mathbb{N}} (A_i)$$

Für $a = [(a_i)_{\mathbb{N}}] \in A \subset \prod_{\mathbb{N}} A_i / \bigoplus_{\mathbb{N}}(A_i)$ definieren wir $\tau(a) := \lim_\omega \tau_i(a_i)$, wobei $\omega \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ ein freier Ultrafilter ist. Man verifiziert nun leicht, dass τ wohldefiniert, unital, positiv und linear ist und außerdem die Spurbedingung erfüllt.

Alternativ kann man auch wie folgt vorgehen: Betrachte folgendes Diagramm

$$\begin{tikzcd} & (a_i)_{\mathbb{N}} \arrow[r, mapsto] & (\tau_i(a_i))_{\mathbb{N}} & \\ & \prod_{\mathbb{N}} A_i \arrow[r] \arrow[d] & \ell^\infty(\mathbb{N}) \arrow[d] & \\ A \arrow[r, hook] & \prod_{\mathbb{N}} A_i \big/ \bigoplus_{\mathbb{N}}(A_i) \arrow[r] & \ell^\infty(\mathbb{N}) \big/ c_0(\mathbb{N}) \arrow[r, "\chi"] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

Die Menge rechts unten ist eine abelsche, unitale C^*-Algebra. Wähle einen Charakter χ. Man sieht auch, dass die freien Ultrafilter in 1-zu-1-Zusammenhang zu $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ stehen.

5.10 Definition. Sei A eine C^*-Algebra. Eine ***Darstellung*** von A ist ein Paar $(\mathcal{H}, \pi)$, wobei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum ist und π ein *-Homomorphismus $A \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

- $(\mathcal{H}, \pi)$ heißt ***treu***, falls π injektiv ist.
- $(\mathcal{H}, \pi, \xi)$ heißt ***zyklisch***, falls $(\mathcal{H}, \pi)$ eine Darstellung ist und $\xi \in \mathcal{H}$ ein Vektor mit $\overline{\pi(A)\xi} = \mathcal{H}$.
- $(\mathcal{H}, \pi)$ heißt ***algebraisch irreduzibel***, falls gilt: Für einen beliebigen Untervektorraum $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$ mit $\pi(A)\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}_0$ ist $\mathcal{H}_0 = \{0\}$ oder $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}$.
- $(\mathcal{H}, \pi)$ heißt ***(topologisch) irreduzibel***, falls gilt: Für einen abgeschlossenen Untervektorraum $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$ mit $\pi(A)\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}_0$ ist $\mathcal{H}_0 = \{0\}$ oder $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}$.
- $(\mathcal{H}, \pi)$ heißt ***nicht degeneriert***, falls $\overline{\pi(A)\mathcal{H}} = \mathcal{H}$. Äquivalent: $\pi(A)\xi = \{0\} \implies \xi = 0$.

5.11 Satz (GNS-Konstruktion). Sei A eine C^*-Algebra und $\varphi\colon A \to \mathbb{C}$ ein positives Funktional. Wir setzen

$$N_\varphi := \{a \in A \mid \varphi(a^*a) = 0\} \overset{5.6(i)}{=} \{a \in A \mid \varphi(ba) = 0 \text{ für alle } b \in A\}$$

Dann ist $N_\varphi \subset A$ ein abgeschlossenes Linksideal. Definiere eine Abbildung

$$\begin{array}{rcl} A/N_\varphi \times A/N_\varphi & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (a + N_\varphi, b + N_\varphi) & \longmapsto & \langle a + N_\varphi\,,\, b + N_\varphi\rangle := \varphi(a^*b) \end{array}$$

$\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle$ ist dann ein wohldefiniertes Skalarprodukt auf A/N_φ: Für die Wohldefiniertheit seien $a+N_\varphi = c+N_\varphi$ und $b + N_\varphi = d + N_\varphi$. Dann gilt $a - c \in N_\varphi$ und $b - d \in N_\varphi$. Damit folgt dann

$$\begin{aligned} \left|\varphi(a^*b) - \varphi(c^*d)\right| &\leqslant \left|\varphi(a^*b) - \varphi(c^*b)\right| + \left|\varphi(c^*b) - \varphi(c^*d)\right| = \left|\varphi\big((a^* - c^*)b\big)\right| + \left|\varphi\big(c^*(b - d)\big)\right| \\ &\overset{5.3}{=} \left|\overline{\varphi\big(b^*(a - c)\big)}\right| + \left|\varphi\big(c^*(b - d)\big)\right| \\ &= 0 \end{aligned}$$

Dass $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle$ sesquilinear ist, ist klar. Die Antisymmetrie folgt mit $\varphi(a^*b) = \overline{\varphi(b^*a)}$ (nach Satz 5.3). Die positive Definitheit rechnet man einfach wie folgt nach:

$$\langle a + N_\varphi\,,\, a + N_\varphi\rangle = 0 \iff \varphi(a^*a) = 0 \iff a \in N_\varphi \iff a + N_\varphi = N_\varphi = 0 \in A/N_\varphi$$

Insgesamt ist A/N_φ also ein Prä-Hilbertraum mit $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle$. Sei $\mathcal{H}_\varphi := \overline{A/N_\varphi}^{\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle}$ die Hilbertraumvervollständigung und definiere $\dot\pi\colon A \to \mathcal{B}(A/N_\varphi)$ durch $\dot\pi(a)(b+N_\varphi) := ab+N_\varphi$ für $a, b \in A$. Dann ist $\dot\pi$ ein wohldefinierter kontraktiver Homomorphismus von Algebren: Da N_φ ein Linksideal ist, ist $\dot\pi(a)$ linear auf A/N_φ. Weiter ist $\dot\pi$ linear und multiplikativ als Abbildung $A \to \mathcal{L}(A/N_\varphi)$. Kontraktivität:

$$\begin{aligned} \left\|\dot\pi(a)(b + N_\varphi)\right\|^2_{A/N_\varphi} = \langle ab + N_\varphi\,,\, ab + N_\varphi\rangle = \varphi(b^*a^*ab) &\overset{5.6(ii)}{\leqslant} \|a\|_A^2 \cdot \varphi(b^*b) \\ &= \|a\|_A^2 \cdot \|b + N_\varphi\|^2_{A/N_\varphi} \end{aligned}$$

Damit gilt $\|\dot\pi(a)(b + N_\varphi)\|_{A/N_\varphi} \leqslant \|a\|_A \cdot \|b + N_\varphi\|_{A/N_\varphi}$, also $\|\dot\pi(a)\|_{\mathcal{B}(A/N_\varphi)} \leqslant \|a\|_A$. Insgesamt ist $\dot\pi\colon A \to \mathcal{B}(A/N_\varphi)$ also ein kontraktiver Homomorphismus. Für jedes $a \in A$ ist $\|\dot\pi(a)\|$ beschränkt durch $\|a\|$, daher besitzt $\dot\pi(a)$ eine eindeutig bestimmte Fortsetzung $\pi_\varphi(a) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\varphi)$ mit $\|\pi_\varphi(a)\| = \|\dot\pi(a)\| \leqslant \|a\|$. Wir zeigen nun, dass $\pi_\varphi\colon A \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_\varphi)$ ein *-Homomorphismus und damit nach Korollar 2.11 kontraktiv ist. Dazu zeigen zunächst $\dot\pi(a^*) = \dot\pi(a)^*$. Für $b + N_\varphi, c + N_\varphi \in A/N_\varphi$ gilt

$$\big\langle c + N_\varphi\,,\, \dot\pi(a)b + N_\varphi\big\rangle = \varphi(c^*ab) = \varphi\big((a^*c)^*b\big) = \langle a^*c + N_\varphi\,,\, b + N_\varphi\rangle = \big\langle \dot\pi(a^*)c + N_\varphi\,,\, b + N_\varphi\big\rangle$$

Da $\dot\pi$ stetig fortgesetzt wird, gilt dann auch $\pi_\varphi(a^*) = \pi_\varphi(a)^*$.

$(\mathcal{H}_\varphi, \pi_\varphi)$ ist die ***GNS-Darstellung***[3] von φ. $(\mathcal{H}_\varphi, \pi_\varphi, \xi_\varphi)$ ist zyklisch mit $\xi_\varphi = \lim_\lambda e_\lambda + N_\varphi$, wobei $(e_\lambda)_\lambda$ eine approximative Eins von A ist. *Übungsaufgabe 2 von Blatt 8, siehe Anhang A.7*

5.12 Satz. Jede C^*-Algebra A besitzt eine treue Darstellung, die ***universelle Darstellung***. Falls A separabel ist, so existiert eine treue Darstellung auf einem separablen Hilbertraum.

Beweis: Wir definieren die universelle Darstellung $(\mathcal{H}_u, \pi_u)$ durch

$$\mathcal{H}_u := \bigoplus_{\varphi \in S(A)} \mathcal{H}_\varphi = \left\{(\eta_\varphi)_{\varphi \in S(A)} \,\middle|\, \eta_\varphi \in \mathcal{H}_\varphi, \sum\nolimits_\varphi \langle \eta_\varphi\,,\, \eta_\varphi\rangle < \infty\right\}$$

[3] nach *Gelfand*, *Naimark*, *Segal*

und $\pi_u\colon A \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_u)$ mit $\pi_u(a)\big((\eta_\varphi)_\varphi\big) := \big(\pi_\varphi(a)\eta_\varphi\big)_\varphi$ für $a \in A$. Sei $0 \neq a \in A^1$. Dann existiert nach Satz 5.5 ein $\overline{\varphi} \in S(A)$ mit $\overline{\varphi}(a^*a) = \|a^*a\| = \|a\|^2$. Es gilt nun

$$\begin{aligned}\|a\|^2 = \overline{\varphi}(a^*a) \overset{\text{A.7}}{=} \langle \xi_{\overline{\varphi}}, \pi_{\overline{\varphi}}(a^*a)\xi_{\overline{\varphi}}\rangle \overset{\text{C.S.}}{\leqslant} \big\|\pi_{\overline{\varphi}}(a^*a)\big\| \cdot \|\xi_{\overline{\varphi}}\|^2_{\mathcal{H}_{\overline{\varphi}}} &= \big\|\pi_{\overline{\varphi}}(a^*a)\big\| \cdot \langle \xi_{\overline{\varphi}}, \xi_{\overline{\varphi}}\rangle \\ &= \big\|\pi_{\overline{\varphi}}(a^*a)\big\| \cdot \overline{\varphi}\big(\lim_\lambda e_\lambda^2\big) \\ &\overset{5.4}{=} \|\pi_{\overline{\varphi}}(a)\|^2 \cdot \underbrace{\|\overline{\varphi}\|}_{=1}\end{aligned}$$

Da π_φ nach Korollar 2.11 kontraktiv ist, folgt also $\|\pi_\varphi(a)\| = \|a\|$. Damit erhalten wir weiter $\|a\| = \|\pi_\varphi(a)\| \leqslant \|\pi_u(a)\| \leqslant \|a\|$ und somit ist π_u als Isometrie treu. Falls A separabel ist, so wählen wir eine abzählbare dichte Teilmenge $\{a_0, a_1, \ldots\} \subset A^1$ und Zustände $\varphi_0, \varphi_1, \ldots \in S(A)$ mit $\varphi_i(a_i^*a_i) = \|a_i^*a_i\| = \|a_i\|^2$. Für $a \in A^1$ existiert dann ein $i \in \mathbb{N}$ mit $\varphi_i(a_i^*a_i) \geqslant \frac{1}{2}\|a\|^2$. Dann ist

$$\|\pi_{\varphi_i}(a)\| \geqslant \big\|\pi_{\varphi_i}(a)\xi_{\varphi_i}\big\|_{\mathcal{H}_{\varphi_i}} = \varphi_i(a^*a)^{1/2} \geqslant 1/\sqrt{2} \cdot \|a\|$$

Wir definieren $\mathcal{H}_{\text{sep}} := \bigoplus_{\mathbb{N}} \mathcal{H}_{\varphi_i}$ und $\pi_{\text{sep}}\colon A \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\text{sep}})$ durch $\pi_{\text{sep}}(a)\big((\eta_i)_{i\in\mathbb{N}}\big) := \big(\pi_{\varphi_i}(a)(\eta_i)\big)_{i\in\mathbb{N}}$. Mit obiger Ungleichung folgt $\big\|\pi_{\text{sep}}(a)\big\| \geqslant 1/\sqrt{2}\|a\| \geqslant 0$ und damit ist π_{sep} treu, denn nur für $a = 0$ kann dann $\pi_{\text{sep}}(a) = 0$ gelten. □

5.13 Korollar. Sei A eine C^*-Algebra und $n \geqslant 1$ eine natürliche Zahl. Dann ist $M_n(A)$ eine C^*-Algebra mit Operationen

$$(a_{ij})_{ij} \cdot (b_{ij})_{ij} = \left(\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}\right)_{ij} \qquad \text{und} \qquad (a_{ij})_{ij}^* = (a_{ji}^*)_{ij}$$

Wegen Korollar 2.12 ist die C^*-Norm auf $M_n(A)$ eindeutig bestimmt.

Beweis: Wir müssen eine geeignete Norm auf $M_n(A)$ definieren. Sei dazu $(\mathcal{H}_u, \pi_u)$ die universelle Darstellung von A. Definiere

$$\begin{aligned}\pi_u^{(n)}\colon M_n(A) &\longrightarrow M_n\big(\mathcal{B}(\mathcal{H}_u)\big) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_u^{\oplus n}) \\ (a_{ij})_{ij} &\longmapsto \big(\pi_u(a_{ij})\big)_{ij} \longmapsto \pi_u^{(n)}\big((a_{ij})_{ij}\big)\end{aligned}$$

wobei analog zur Matrix-Vektor-Multiplikation gilt

$$\pi_u^{(n)}\big((a_{ij})_{ij}\big)\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots \\ \xi_n\end{pmatrix} = \Big(\sum\nolimits_j \pi_u(a_{ij})\xi_j\Big)_{i=1,\ldots,n}$$

Hat jemand mal Lust das alles nachzurechnen und mir zu schicken?

Damit ist $\pi_u^{(n)}$ ein *-Homomorphismus; $\pi_u^{(n)}$ ist injektiv, da π_u injektiv ist. Nun definiert

$$\big\|(a_{ij})_{ij}\big\|_{M_n(A)} := \big\|\pi_u^{(n)}\big((a_{ij})_{ij}\big)\big\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_u^{\oplus n})}$$

eine *-Algebra Norm, welche die C^*-Bedingung erfüllt. Weiter gilt für $i, j = 1, \ldots n$

$$\begin{aligned}\|a_{ij}\|_A = \|\pi_u(a_{ij})\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_u)} \leqslant \big\|\pi_u^{(n)}\big((a_{kl})_{kl}\big)\big\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_u^{\oplus n})} = \big\|(a_{kl})_{kl}\big\|_{M_n(A)} &\leqslant \sum_{k,l}\big\|\pi_u(a_{kl})\big\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_u)} \\ &= \sum_{k,l}\|a_{kl}\|_A\end{aligned}$$

Mit der Vollständigkeit von A folgt, dass $M_n(A)$ vollständig ist bezüglich $\|\cdot\|_{M_n(A)}$. □

5.14 Korollar. Sei A eine C^*-Algebra und $a \in A$. Dann gilt

(i) $a \in A_{sa}$ genau dann, wenn $\varphi(a) \in \mathbb{R}$ für jeden Zustand $\varphi \in S(A)$.

(ii) $a \in A_+$ genau dann, wenn $\varphi(a) \geqslant 0$ ist für jeden Zustand $\varphi \in S(A)$.

Beweis:

(i) Die erste Implikation folgt mit Satz 5.3 (ii). Für die umgekehrte Implikation betrachte das Element $i(a - a^*) \in A_{sa}$. Dann gilt für $\varphi \in S(A)$

$$\varphi\big(i \cdot (a - a^*)\big) = i\big(\varphi(a) - \varphi(a^*)\big) = i \cdot \big(\varphi(a) - \overline{\varphi(a)}\big) = 0$$

Da φ beliebig war folgt mit Satz 5.5 $i \cdot (a - a^*) = 0$ und damit $a = a^*$.

(ii) Hier ist die erste Implikation trivial. Für die umgekehrte Implikation sei $(\mathcal{H}_u, \pi_u)$ die universelle Darstellung von A und $a \in A$, sodass a unter jedem Zustand auf eine positive Zahl abgebildet wird. Für einen Vektor $\xi \in \mathcal{H}_u$ ist $\varphi_\xi \colon A \to \mathbb{C}$, $b \mapsto \langle \xi, \pi_u(b)\xi \rangle$ ein positives Funktional, wie man sich leicht anhand Satz 5.4 überlegt. Also ist $\langle \xi, \pi_u(a)\xi \rangle = \varphi_\xi(a) \geqslant 0$ für $\xi \in \mathcal{H}_u$. Sei $\lambda < 0$ und $\xi \in \mathcal{H}_u$. Dann gilt, da a nach (i) selbstadjungiert ist

$$\begin{aligned}\big\|(\pi_u(a) - \lambda)\xi\big\|^2_{\mathcal{H}_u} &= \big\langle (\pi_u(a) - \lambda)\xi\,,\, (\pi_u(a) - \lambda)\xi \big\rangle \\ &= \|\pi_u(a)\xi\|^2 + |\lambda|^2 \cdot \|\xi\|^2 \underbrace{-2 \cdot \lambda \cdot \langle \xi\,,\, \pi_u(a)\xi \rangle}_{\geqslant 0} \geqslant |\lambda|^2 \cdot \|\xi\|^2\end{aligned}$$

Damit folgt $\ker\big(\pi_u(a) - \lambda\big) = \{0\}$ und $(\pi_u(a) - \lambda)(\mathcal{H}_u) \subset \mathcal{H}_u$ ist abgeschlossen. Also ist

$$\operatorname{im}\big(\pi_u(a) - \lambda\big) = \big(\ker(\pi_u(a) - \lambda)^*\big)^\perp \overset{a^* = a}{=} \big(\ker(\pi_u(a) - \lambda)\big)^\perp = \mathcal{H}_u$$

und folglich ist $\pi_u(a) - \lambda$ surjektiv und somit auch invertierbar. Damit ist λ also kein Element des Spektrums von $\pi_u(a)$. Da π_u isometrisch ist, ist λ auch kein Element von $\sigma(a)$ und es folgt $a \geqslant 0$ wie gewünscht. □

5.15 Beispiel. Sei $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N})$ mit der Standard-Orthonormalbasis $(\eta_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Definiere den unilateralen Shift $v \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ durch $v(\eta_i) := \eta_{i+1}$. Dann ist $v^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ gegeben durch

$$v^*(\eta_i) = \begin{cases} \eta_{i-1} & \text{falls } i \geqslant 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Es gilt $v^* v = \mathbb{1}_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} (= \mathrm{id})$ und

$$\mathbb{1} - vv^* = p_{\eta_0} = e_{00} \in \mathcal{K} = \mathcal{K}\big(\ell^2(\mathbb{N})\big)$$

Wir definieren nun die ***Toeplitz-Algebra*** $\mathcal{T}$ durch

$$\mathcal{T} := C^*(v) \subset \mathcal{B}\big(\ell^2(\mathbb{N})\big)$$

Weiter sei $J := \langle \mathbb{1} - vv^* \rangle \lhd \mathcal{T}$ das von $\mathbb{1} - vv^*$ in $\mathcal{T}$ erzeugte (abgeschlossene zweiseitige) Ideal. Wir zeigen, dass $J = \mathcal{K}$ ist: Offensichtlich ist $J \subset \mathcal{K}$, denn $\mathbb{1} - vv^* \in \mathcal{K}$. Für die Matrixeinheiten $e_{ij} \in \mathcal{K}$ gilt $e_{ij} = v^i(\mathbb{1} - vv^*)(v^*)^j \in J$ wie man leicht auf Basiselementen nachrechnet. Damit ist $e_{ij}(\eta_k) = \delta_{jk}\eta_i$

$$\mathcal{K} \underset{\text{Blatt 14}}{\overset{\text{F.A.}}{=}} \overline{\operatorname{span}\{e_{ij}\}} \subset J$$

Für die Quotientenabbildung $\pi\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}/\mathcal{J}$ gilt $\mathcal{T}/\mathcal{J} = C^*\big(\pi(v)\big)$ und $\pi(\mathbb{1} - vv^*) = 0$, also ist

$$\pi(v)^*\pi(v) = \mathbb{1}_{\mathcal{T}/\mathcal{J}} = \pi(v)\pi(v^*)$$

und damit ist $\pi(v) \in \mathcal{T}/\mathcal{J}$ unitär. Man zeigt mit dem Fredholmindex $\sigma\big(\pi(v)\big) = \mathbb{T}$ und erhält einen Isomorphismus $\mathcal{T}/\mathcal{J} \cong C(\mathbb{T})$. Wir haben nun eine kurze exakte Sequenz von C^*-Algebren

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \hookrightarrow \mathcal{T} \twoheadrightarrow C(\mathbb{T}) \longrightarrow 0$$

Für jede unitale C^*-Algebra A mit einer Isometrie w, das heißt $w^*w = \mathbb{1}$, existiert ein *-Homomorphismus $\varphi\colon \mathcal{T} \to A$ mit $\varphi(v) = w$, dies besagt der *Satz von Coburn*.

5.16 Beispiel. Sei $\mathcal{H} = L^2([0,1])$. Definiere $v_1, v_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ durch

$$v_1(f)(t) := \begin{cases} \sqrt{2}\cdot f(2t) & \text{falls } t \in [0, 1/2] \\ 0 & \text{falls } t \in (1/2, 1] \end{cases} \quad \text{und} \quad v_2(f)(t) := \begin{cases} \sqrt{2}\cdot f(2t-1) & \text{falls } t \in [1/2, 1] \\ 0 & \text{falls } t \in [0, 1/2) \end{cases}$$

Wie man sich leicht überlegt, ist $v_i^*v_i = \mathbb{1}$ und $v_1v_1^* + v_2v_2^* = \mathbb{1}$. Die von v_1 und v_2 erzeugte C^*-Algebra

$$\mathcal{O}_2 := C^*(v_1, v_2) \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

ist eine ***Cuntz-Algebra***. Ähnlich lassen sich $\mathcal{O}_n$ und $\mathcal{O}_\infty$ definieren. $\mathcal{O}_2$ besitzt keinen Spurzustand und ist einfach (d.h. es gibt keine nichttrivialen abgeschlossenen zweiseitigen Ideale). Ist nun A eine beliebige unitale C^*-Algebra mit $s_1, s_2 \in A$, sodass $s_1^*s_1 = s_2^*s_2 = \mathbb{1} = s_1s_1^* + s_2s_2^*$. Dann existiert ein *-Homomorphismus $\pi\colon \mathcal{O}_2 \to A$ mit $\pi(v_i) = s_i$ für $i = 1, 2$.

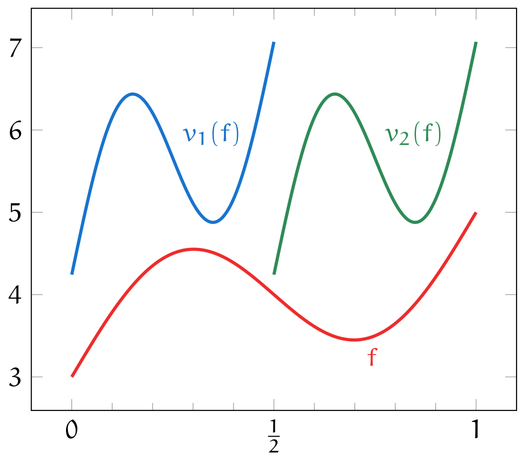

Abbildung 2: Wirkung von v_1 und v_2 in der Cuntz-Algebra $\mathcal{O}_2$ über $\mathcal{H} = L^2([0,1])$

6. Von-Neumann-Algebren und der Bikommutantensatz

6.1 Erinnerung. Die ***starke Operatortopologie*** $\mathcal{T}_{\text{s.o.}}$ auf $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist die lokalkonvexe Topologie, welche von den Halbnormen $p_\xi \colon \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \|x\xi\|_{\mathcal{H}}$ für $\xi \in \mathcal{H}$ erzeugt wird. Das heißt $\mathcal{T}_{\text{s.o.}}$ ist die gröbste Topologie, sodass Addition, skalare Multiplikation und alle Halbnormen p_ξ stetig sind. „Typische" offene Mengen sind der Form

$$U_{x,\xi,\varepsilon} := \left\{ y \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \;\middle|\; \|(x-y)\xi\| < \varepsilon \right\}$$

wobei $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\xi \in \mathcal{H}$ und $\varepsilon > 0$. Die $U_{x,\xi,\varepsilon}$ bilden eine Subbasis für $\mathcal{T}_{\text{s.o.}}$. Für ein Netz $(x_\lambda)_\Lambda \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ und $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ gilt

Damit ist $\mathcal{T}_{\text{s.o.}}$ die Topologie der punktweisen Konvergenz

$$\begin{aligned} x_\lambda \xrightarrow{\text{s.o.}} x \iff & \|(x_\lambda - x)\xi\|_{\mathcal{H}} \longrightarrow 0 \quad \text{für jedes } \xi \in \mathcal{H} \\ \iff & x_\lambda \xi \longrightarrow x\xi \qquad \text{für jedes } \xi \in \mathcal{H} \end{aligned}$$

$\mathcal{T}_{\text{s.o.}}$ ist schwächer als $\mathcal{T}_{\|\cdot\|}$, das heißt $\left(\mathcal{B}(\mathcal{H}), \mathcal{T}_{\|\cdot\|}\right) \xrightarrow{\text{id}} \left(\mathcal{B}(\mathcal{H}), \mathcal{T}_{\text{s.o.}}\right)$ ist stetig. Äquivalent dazu: Wenn $A \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ s.o.-abgeschlossen ist, so ist A auch $\|\cdot\|$-abgeschlossen. Alternativ: Wenn $x_\lambda \to x$ in der Normtopologie, dann auch in der starken Operatortopologie.

Die Norm $\|\cdot\|$, die Multiplikation und Involution sind nicht stetig bezüglich der starken Operatortopologie: Sei dazu $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N})$ mit Standardorthonormalbasis $(\eta_k)_{\mathbb{N}}$ und Matrixeinheiten e_{ij}. Dann gilt $e_{0,n} \xrightarrow{\text{s.o.}} 0$ aber weder $1 = \|e_{0,n}\|$ noch $e_{0,n}^* = e_{n,0}$ konvergieren gegen 0 für $n \to \infty$. Dass die Multiplikation nicht stetig ist, ist etwas subtiler (Übungsaufgabe 5 von Blatt 9).

$e_{ij}\eta_k = \delta_{jk} \cdot \eta_i$

6.2 Satz. Sei $(x_\lambda)_\Lambda \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})_{sa}$ ein monotones und beschränktes Netz selbstadjungierter Operatoren. Dann existiert ein $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit

$$x_\lambda \xrightarrow{\text{s.o.}} x$$

Falls $(x_\lambda)_\Lambda$ ein aufsteigendes Netz von orthogonalen Projektionen ist, so ist x die (orthogonale) Projektion auf $\overline{\bigcup_\Lambda x_\lambda \mathcal{H}}$. Falls $(x_\lambda)_\Lambda$ ein absteigendes Netz aus Projektionen ist, so ist x die Projektion auf $\bigcap_\Lambda \overline{x_\lambda \mathcal{H}}$.

Beweis: Der erste Teil wurde schon in Funktionalanalysis Satz 7.32 bewiesen. Hier noch einmal kurz die Idee: Mittels Polarisierung und der Monotonie sieht man, dass $\langle x_\lambda \xi \,,\, \cdot \rangle \in \mathcal{H}^* \cong \mathcal{H}$ schwach gegen ein $\eta := x\xi$ konvergiert. Also

$$x_\lambda \xrightarrow{\text{wo}} x$$

da $\langle \eta \,,\, x_\lambda \xi \rangle \to \langle \eta \,,\, x\xi \rangle$ für $\xi, \eta \in \mathcal{H}$. Mit Beschränktheit folgt dann $x_\lambda \xrightarrow{\text{s.o.}} x$. In dem Fall, dass die x_λ Projektionen sind, folgt $x^2 = x$ mittels

$$\langle \eta \,,\, x\xi \rangle = \lim_\lambda \langle \eta \,,\, x_\lambda \xi \rangle = \lim_\lambda \langle x_\lambda \eta \,,\, x_\lambda \xi \rangle = \langle x\eta \,,\, x\xi \rangle = \langle \eta \,,\, x^* x\xi \rangle$$

Also ist $x = x^* x = x^2$. *Der Rest ist Übungsaufgabe 4 von Blatt 9, siehe Anhang A.9* □

6.3 Bemerkung. In Funktionalanalysis hatten wir $0 \leqslant x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ definiert als $\langle \xi \,,\, x\xi \rangle \geqslant 0$ für alle $\xi \in \mathcal{H}$ (und $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_{sa}$). Dies ist äquivalent zu $0 \leqslant x$ in unserem Sinne: Ist x positiv in unserem Sinne, so haben wir $x = y^* y$ und es folgt

$$\langle \xi \,,\, x\xi \rangle = \langle \xi \,,\, y^* y\xi \rangle = \langle y\xi \,,\, y\xi \rangle \geqslant 0$$

für $\xi \in \mathcal{H}$. Die Gegenrichtung zeigt man wie im Beweis von Korollar 5.14.

6.4 Definition. Eine ***von-Neumann-Algebra*** auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$ ist eine in der starken Operatortopologie abgeschlossene *-Unteralgebra von $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

6.5 Definition & Proposition. Sei B eine Algebra und $S \subset B$ eine Teilmenge.

$$S' := \big\{ b \in B \,\big|\, bs = sb, s \in S \big\}$$

heißt ***Kommutante*** von S in B. $S'' := (S')'$ heißt ***Bikommutante***. Sowohl S' als auch S'' sind Unteralgebren. Falls B eine *-Algebra und $S = S^*$ ist, so sind S' und S'' auch *-Unteralgebren. Falls $A \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ eine *-Unteralgebra ist, so ist $A' \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ eine von-Neumann-Algebra.

Beweis: Wir zeigen nun, dass A' abgeschlossen ist in der starken Operatortopologie. Sei dazu $(x_\lambda) \subset A'$ ein Netz mit $x_\lambda \xrightarrow{\text{s.o.}} x$, $a \in A$ beliebig sowie $\xi, \eta \in \mathcal{H}$. Dann gilt

$$\langle \eta\,,\, ax\xi\rangle = \langle \eta\,,\, a \lim_\lambda x_\lambda \xi\rangle = \lim_\lambda \langle \eta\,,\, ax_\lambda \xi\rangle = \lim_\lambda \langle \eta\,,\, x_\lambda a\xi\rangle = \langle \eta\,,\, xa\xi\rangle$$

Also ist $ax = xa$. Alle weiteren Behauptungen sind trivial. □

6.6 Lemma. Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $\mathbb{1}_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \in A \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ eine unitale *-Unteralgebra. Dann ist A s.o.-dicht in der Bikommutante A''.

die $U_{x,\xi,\varepsilon}$ bilden eine Subbasis von $\mathcal{T}_{\text{s.o.}}$

Beweis: Sei $x \in A''$. Zu zeigen: Jede s.o.-offene Umgebung U von x mit $x \in U = \bigcap_{i=1}^n U_{x,\xi_i,\varepsilon}$ für $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathcal{H}$ besitzt nichtleeren Schnitt mit A. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \pi^{(n)} \colon \mathcal{B}(\mathcal{H}) &\longrightarrow M_n(\mathcal{B}(\mathcal{H})) \cong \mathcal{B}(\mathcal{H}^{\oplus n}) \\ y &\longmapsto \begin{pmatrix} y & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ist ein *-Homomorphismus und $\pi^{(n)}(A) \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}^{\oplus n})$ ist *-Unteralgebra von $\mathcal{B}(\mathcal{H}^{\oplus n})$ mit $\mathbb{1}_{\mathcal{B}(\mathcal{H}^{\oplus n})} \in \pi^{(n)}(A)$. Wir zeigen, dass $\pi^{(n)}(x) \in \pi^{(n)}(A)''$ ist: Sei dafür $y \in \pi^{(n)}(A)'$ und $a \in A$. Dann gilt

$e_{ij}(\eta_k) = \delta_{jk}\eta_i$

$$\pi^{(n)}(a)\, e_{ii}\, y\, e_{jj} = e_{ii}\, \pi^{(n)}(a)\, y\, e_{jj} = e_{ii}\, y\, \pi^{(n)}(a)\, e_{jj} = \underbrace{e_{ii}\, y\, e_{jj}}_{=y_{ij} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})}\, \pi^{(n)}(a)$$

Dann ist $y_{ij}\, a = a\, y_{ij}$ für $i, j \in \{1, \dots, n\}$ und es folgt $y_{ij} \in A'$, also $y_{ij}\, x = x\, y_{ij}$ für $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Damit folgt dann aber auch $\pi^{(n)}(x)\, y = y\, \pi^{(n)}(x)$ und somit die Zwischenbehauptung. Sei nun

$$\underline{\xi} := \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \in \mathcal{H}^{\oplus n} \qquad \text{und} \qquad K := \overline{\pi^{(n)}(A)\underline{\xi}} \subset \mathcal{H}^{\oplus n}$$

Dann ist K ein abgeschlossener Unterraum und $\pi^{(n)}(A)$-invariant. Da $\pi^{(n)}(A) = \pi^{(n)}(A)^*$ ist, ist K *reduzierend* für jedes $\pi^{(n)}(a) \in \pi^{(n)}(A)$, das heißt

- $\pi^{(n)}(a)K \subset K$ und $\pi^{(n)}(a)^*K \subset K$ bzw.
- $\pi^{(n)}(a)K \subset K$ und $\pi^{(n)}(a)(K^\perp) \subset K^\perp$ bzw.
- $p_K\, \pi^{(n)}(a) = \pi^{(n)}(a)\, p_K$ wobei $p_K \colon H^{\oplus n} \to K$ die orthogonale Projektion ist.

Damit ist p_K in der Kommutante $\pi^{(n)}(A)'$ und somit auch $\pi^{(n)}(x)\, p_K = p_K\, \pi^{(n)}(x)$. Insgesamt gilt

$$\pi^{(n)}(x)\underline{\xi} = \pi^{(n)}(x)\, \underbrace{p_K \underline{\xi}}_{=\underline{\xi}} = p_K\, \pi^{(n)}(x)\underline{\xi} \in K$$

Also existiert eine Folge $(a_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset A$, so dass $\pi^{(n)}(x)\underline{\xi} = \lim_{m\to\infty} \pi^{(n)}(a_m)\underline{\xi}$. Dieser Ausdruck hat folgende Gestalt

$$\begin{pmatrix} x\xi_1 \\ \vdots \\ x\xi_n \end{pmatrix} = \lim_{m\to\infty} \begin{pmatrix} a_m\xi_1 \\ \vdots \\ a_m\xi_n \end{pmatrix} = \lim_{m\to\infty} \begin{pmatrix} a_m & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

Also gilt $a_m \xi_j \xrightarrow{m\to\infty} x\xi_j$ für $j = 1, \ldots, n$ und damit $\|a_m\xi_j - x\xi_j\| < \varepsilon$ für m groß genug. Damit ist $a_m \in U_{x,\xi_j,\varepsilon}$ für m groß genug und $j = 1, \ldots, n$. Dies war zu zeigen. $\square$

6.7 Korollar (von Neumanns Bikommutantensatz). Sei $A \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ eine unitale *-Unteralgebra mit $\mathbb{1}_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \in A$. Dann ist A eine von-Neumann-Algebra genau dann, wenn $A = A''$ ist.

Beweis: Für die erste Implikation ist $A = \overline{A}^{\text{s.o.}}$, also $A = A''$ nach Lemma 6.6 Für die Rückrichtung beachte, dass A'' eine s.o.-abgeschlossene *-Unteralgebra ist nach Proposition 6.5. $\square$

6.8 Proposition. Jede von-Neumann-Algebra $\{0\} \neq A \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ besitzt ein Einselement.

Beweis: Sei $(e_\lambda)_\Lambda \subset A$ eine approximative Eins für A. Dann gilt $e_\lambda \xrightarrow{\text{s.o.}} e$ für ein $e \in A_{sa}$ nach Satz 6.2. Für $\xi \in \mathcal{H}$ und $a \in A$ gilt

$$(ea)(\xi) = e(a\xi) = \big(\text{s.o.-}\lim_\lambda e_\lambda\big)(a\xi) = \big(\text{s.o.-}\lim_\lambda (e_\lambda a)\big)(\xi) = \big(\|\cdot\|\text{-}\lim_\lambda (e_\lambda a)\big)(\xi) = a(\xi)$$

Damit ist $e\,a = a$ für alle a und damit auch $e\,a^* = a^*$. Also ist $a\,e = a$ und e somit eine Eins. $\square$

6.9 Proposition. Sei $A \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ eine von-Neumann-Algebra mit Einselement e. Dann ist A aufgefasst als Unteralgebra A_e von $\mathcal{B}(e\mathcal{H})$ eine unitale von-Neumann-Algebra ($\mathbb{1}_{A_e} = \mathbb{1}_{\mathcal{B}(e\mathcal{H})}$) und es gilt $A_e = (A_e)''$.

Beweis: Es gilt $e = e^2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_{sa}$, das heißt e ist eine orthogonale Projektion. Weiter ist $e\mathcal{H} \subset \mathcal{H}$ abgeschlossen, denn $e\xi_\lambda \to \xi \in \mathcal{H}$ impliziert

$$\big(\mathbb{1}_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} - e\big)\xi = \big(\mathbb{1}_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} - e\big)\big(\lim_\lambda e\xi_\lambda\big) = \lim_\lambda\big((\mathbb{1}_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} - e)e\xi_\lambda\big) = 0$$

Also ist $e\xi = \xi \in e\mathcal{H}$. Damit folgt, dass $e\mathcal{H} \subset \mathcal{H}$ ein Unterhilbertraum ist. Wir haben

κ ist *-linear und kontraktiv, aber nicht multiplikativ

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{B}(e\mathcal{H}) & \overset{\iota}{\hookrightarrow} & \mathcal{B}(\mathcal{H}) & \xrightarrow{\kappa} & \mathcal{B}(e\mathcal{H}) \\ & & x & \longmapsto & e\,x|_{e\mathcal{H}} \end{array}$$

Dabei gilt $\kappa \circ \iota = \mathrm{id}_{\mathcal{B}(e\mathcal{H})}$ und $\kappa|_A \colon A \to \kappa(A) =: A_e$ ist ein *-Isomorphismus. Wir müssen noch zeigen, dass $A_e \subset \mathcal{B}(e\mathcal{H})$ s.o.-abgeschlossen ist: Sei dazu $(x_\lambda)_\Lambda \subset A_e$ ein Netz mit $x_\lambda \xrightarrow{\text{s.o.}} x \in \mathcal{B}(e\mathcal{H})$. Für $\xi \in \mathcal{H}$ gilt dann

$$\iota(x_\lambda)(\xi) = \iota(x_\lambda)\big(e\xi + (\mathbb{1} - e)\xi\big) = \iota(x_\lambda)(e\xi) \longrightarrow \iota(x)(e\xi) = \iota(x)\big(e\xi + (\mathbb{1} - e)\xi\big) = \iota(x)(\xi)$$

Also gilt $\iota(x_\lambda) \xrightarrow{\text{s.o.}} \iota(x)$ und damit ist $\iota(x) \in A$, da A s.o.-abgeschlossen ist. Damit folgt weiter $x = \kappa \circ \iota(x) \in A_e$ und $\mathbb{1}_{\mathcal{B}(e\mathcal{H})} = \kappa(e) \in A_e$. Nach Korollar 6.7 gilt außerdem $A_e = (A_e)''$. $\square$

6.10 Definition & Proposition. Sei $A \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ eine von-Neumann-Algebra und $x \in A$. Wir definieren die ***Bildprojektion*** $[x]$ als orthogonale Projektion auf $\overline{\operatorname{im} x} = \overline{x\mathcal{H}} \subset \mathcal{H}$. Es gilt

$$[x] = [xx^*] \in A$$

Beweis: Mit den Implikationen $x^*\xi = 0 \implies xx^*\xi = 0 \implies \langle \xi, xx^*\xi\rangle = 0 \implies \langle x^*\xi, x^*\xi\rangle = 0 \implies x^*\xi = 0$ folgt

$$\overline{\operatorname{im} x} = (\ker x^*)^\perp = \big(\ker(xx^*)\big)^\perp = \overline{\operatorname{im} xx^*}$$

xx^* *ist positiv* Damit ist $[x] = [xx^*]$. Die Folge $\left((1/n \cdot \mathbb{1} + xx^*)^{-1} xx^*\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset A^1_+$ ist monoton aufsteigend und beschränkt nach Funktionalkalkül, konvergiert also nach Satz 6.2 stark gegen ein $e \in A_{sa}$. Für $\xi \in \mathcal{H}$ gilt dann

$$\begin{aligned} exx^*\xi = \lim_n (1/n \cdot \mathbb{1} + xx^*)^{-1} xx^*xx^*\xi = \lim_n \underbrace{(1/n \cdot \mathbb{1} + xx^*)^{-1} xx^*}_{\text{beschränkt}} (1/n \cdot \mathbb{1} + xx^*)\xi &= \lim_n xx^*\xi \\ &= xx^*\xi \end{aligned}$$

Also ist $exx^* = xx^*$ und damit auch $xx^*e = (exx^*)^* = (xx^*)^* = xx^*$, es folgt also $e[xx^*] = [xx^*] = [xx^*]e$. Andererseits gilt für $\xi \in \mathcal{H}$

$$e\xi = \lim_n \underbrace{(1/n \cdot \mathbb{1} + xx^*)^{-1} xx^*}_{\text{kommutiert da in } C^*(xx^*, \mathbb{1})} \xi \in \overline{\operatorname{im} xx^*} = [xx^*]\mathcal{H}$$

Damit ist $[xx^*]e\xi = e\xi$, also $[xx^*]e = e$, woraus insgesamt $[xx^*] = e \in A$ folgt. □

6.11 Satz (Polarzerlegung). Sei $A \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ eine von-Neumann-Algebra und $x \in A$. Dann existiert genau eine partielle Isometrie $u \in A$ mit $u^*u = [|x|]$ und $x = u \cdot |x|$, wobei $|x| = (x^*x)^{1/2}$.

Beweis: Setze $u_n := x(1/n \cdot \mathbb{1} + |x|)^{-1} \subset A^1$.[4] Nach Proposition 6.10 ist $[|x|] = [x^*x] = [x^*]$ und $[x^*]x^* = x^*$, also folgt $x = x[x^*] = x[|x|]$. Wegen $|x| = [|x|]\,|x| = |x|\,[|x|]$ kommutiert $[|x|]$ mit $(1/n \cdot \mathbb{1} + |x|)$ und damit auch mit dem Inversen. Zusammen mit $x = x[|x|]$ folgt dann $u_n = u_n[|x|]$ für $n \in \mathbb{N}$. Weiter gilt $u_n|x| \xrightarrow{n\to\infty} x$ in Norm, denn

$$\|x - u_n|x|\| \leqslant \underbrace{\left\|x - u_n\left(1/n \cdot \mathbb{1} + |x|\right)\right\|}_{=0} + \underbrace{\left\|u_n\left(1/n \cdot \mathbb{1} + |x|\right) - u_n|x|\right\|}_{=\|u_n \cdot 1/n\|} \leqslant \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Wegen $x^*x = |x|^2$ haben wir für $n, m \in \mathbb{N}$

$$(u_n^* - u_m^*)(u_n - u_m) = \left(\left(1/n \cdot \mathbb{1} + |x|\right)^{-1} - \left(1/m \cdot \mathbb{1} + |x|\right)^{-1}\right)^2 |x|^2$$

Für $\xi \in |x|^2\mathcal{H}$ sehen wir genau wie in Proposition 6.10, dass

$$(u_n^* - u_m^*)(u_n - u_m)\xi \xrightarrow{n,m\to\infty} 0$$

Wegen der Beschränktheit der $(u_n^* - u_m^*)(u_n - u_m)$ gilt dies auch für $\xi \in \overline{|x|^2\mathcal{H}} \overset{[|x|]=[x^*x]}{=\!=\!=} \overline{|x|\mathcal{H}}$. Für $\xi \in \overline{|x|\mathcal{H}}^\perp$ gilt $(u_n^* - u_m^*)(u_n - u_m)\xi = 0$, also insgesamt $(u_n^* - u_m^*)(u_n - u_m)\xi \xrightarrow{n,m\to\infty} 0$ für beliebiges $\xi \in \mathcal{H}$. Es folgt $\|(u_n - u_m)\xi\| \xrightarrow{n,m\to\infty} 0$ für $\xi \in \mathcal{H}$ und damit ist $(u_n\xi)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{H}$, also konvergent. $(u_n)_\mathbb{N}$ ist also s.o.-konvergent, das heißt es existiert ein $u \in A$ mit $u = \text{s.o.-}\lim_n u_n$. Wegen dem oben gezeigten ist

$$u\xi = \lim_n u_n\xi = \lim_n u_n[|x|]\xi = (\text{s.o.-}\lim u_n)[|x|]\xi = u[|x|]\xi$$

für beliebiges $\xi \in \mathcal{H}$. Es gilt also $u = u[|x|]$. Außerdem haben wir für $\xi \in \mathcal{H}$

$$\left(u|x| - x\right)\xi = \lim_n\left(u_n|x| - x\right)\xi = 0$$

Also ist $u|x| = x$. Für $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ gilt

$$\left\langle |x|\eta\,,\, |x|\,\xi\right\rangle = \left\langle \eta\,,\, x^*x\xi\right\rangle = \left\langle \eta\,,\, |x|\,u^*u\,|x|\,\xi\right\rangle = \left\langle \eta\,,\, |x|\,[|x|]\,u^*u\,|x|\,[|x|]\,\xi\right\rangle = \left\langle |x|\eta\,,\, [|x|]\,u^*u\,[|x|]\,|x|\,\xi\right\rangle$$

[4] Für die Normabschätzung siehe Anhang A.10

Mit Stetigkeit folgt $\langle \eta\,,\,[|x|]\,\xi \rangle = \langle \eta\,,\,[|x|]\,u^*u\,[|x|]\,\xi \rangle$ für alle $\eta, \xi \in \overline{|x|\mathcal{H}}$. Damit erhalten wir $[|x|] = [|x|]\,u^*u\,[|x|]$. Wegen $u = u[|x|]$ gilt weiter $[|x|] = u^*u$, insbesondere ist u eine partielle Isometrie. Falls $v \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ die Gleichungen $x = v\,|x|$ und $v^*v = [|x|]$ erfüllt, so gilt wegen $v\,|x| = x = u\,|x|$ auch

$$v = v\,[|x|] = u\,[|x|] = u$$

wobei man die Gleichung wieder zunächst auf $\overline{|x|\mathcal{H}}$ nachrechnet. u ist also eindeutig bestimmt. □

6.12 Proposition. Sei $A \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ eine von-Neumann-Algebra und $x \in A$ normal. Für jede offene Menge $U \subset \sigma(x)$ existiert eine eindeutig bestimmte Projektion $e \in A \cap \{x\}'$ mit

$$e = \text{s.o.-}\lim_{\lambda} e_\lambda(x)$$

wobei $(e_\lambda)_\Lambda$ (irgend)eine aufsteigende approximative Eins von $C_0(U)$ ist. Wir schreiben auch $\chi_U(x)$ für e. Es gilt $ef(x) = f(x)e = f(x)$ für alle $f \in C_0(U)$. Für eine weitere offene Menge $V \subset \sigma(x)$ gilt

$$\chi_U(x) \cdot \chi_V(x) = \chi_V(x) \cdot \chi_U(x) = \chi_{U\cap V}(x) \qquad \text{sowie} \qquad \chi_U(x) + \chi_V(x) - \chi_{U\cap V}(x) = \chi_{U\cup V}(x)$$

Für $W \subset \sigma(x)$ abgeschlossen schreiben wir auch $\chi_W(x) := \mathbb{1}_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} - \chi_{\sigma(x)\setminus W}(x)$.

Beweis: Für eine beliebige aufsteigende approximative Eins $(e_\lambda)_\Lambda \subset C_0(U)$ existiert der starke Limes $e := \text{s.o.-}\lim e_\lambda(x)$ nach Satz 6.2. Wie im Beweis von Proposition 6.8 zeigt man, dass für $f \in C_0(U)$ und alle $\xi \in \mathcal{H}$ gilt

$$ef(x)\xi = f(x)\xi \quad \Longrightarrow \quad ef(x) = f(x), f(x)e = f(x)$$

Sei nun $(h_\gamma)_\Gamma$ eine weitere aufsteigende approximative Eins für $C_0(U)$ und $h := \text{s.o.-}\lim h_\gamma(x)$. Dann gilt

$$eh\xi = \lim_{\lambda}\Big(e_\lambda(x)\big(\lim_\gamma h_\gamma(x)\xi\big)\Big) = \lim_{\lambda}\big(\lim_\gamma e_\lambda h_\gamma(x)(\xi)\big) = \lim_{\lambda}\big(e_\lambda(x)(\xi)\big) = e\xi$$

Es folgt $eh = e = he$ und genauso $he = h = eh$, also $h = e$ und damit die Eindeutigkeit. Die restlichen Aussagen folgen auf ähnliche Art und Weise. □

6.13 Korollar. Sei $A \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ eine von-Neumann-Algebra.

(i) A hat reellen Rang 0, das heißt $A_{sa} = \overline{\{a \in A_{sa} \mid \sigma(a) \text{ ist endlich}\}}$.

(ii) Für die unitäre Gruppe gilt $\mathcal{U}(A) = \overline{\{e^{i\pi h} \mid h \in A^1_{sa}\}}$.

Beweis:

(i) Sei $a \in A_{sa}$. Ohne Einschränkungen sei $\sigma(a) \subset [0,1]$ (Warum?). Für $N \in \mathbb{N}$ definieren wir eine Zerlegung der Eins von $[0,1]$ wie in Abbildung 3. Nach Aufgabe 2 von Blatt 4 gilt für eine Projektion p stets $\sigma(p) \subset \{0,1\}$. Insbesondere gilt dies für die eben definieren χ_U für $U \subset \sigma(a)$ offen. Es gilt dann

$$a = \mathrm{id}_{[0,1]}(a) = \sum_{i=1}^{N} \frac{i}{N} \cdot f_i(a) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N} \sum_{j=i}^{N} f_j(a) \geqslant \overbrace{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N} \cdot \chi_{(i/N,1]}(a)}^{\text{hat endliches Spektrum}} \geqslant \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N} \sum_{j=i+1}^{N} f_j(a)$$
$$\geqslant \mathrm{id}_{[0,1]}(a) - {}^1\!/\!_N \cdot \mathbb{1}$$

Also lässt sich a durch Elemente mit endlichem Spektrum beliebig approximieren.

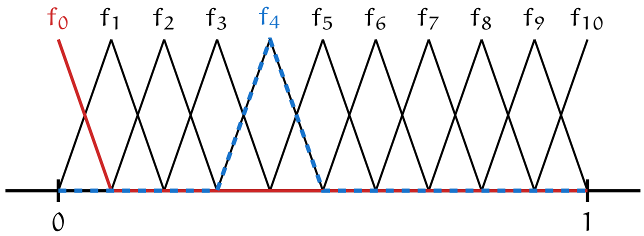

Abbildung 3: Zerlegung der Eins auf $[0,1]$ für gegebenes $N \in \mathbb{N}$, hier $N = 10$

(ii) Die Abbildung $(-1,1] \to \mathbb{T}$, $t \mapsto e^{i\pi t}$ ist bijektiv und stetig; die Umkehrfunktion f ist lediglich stetig auf $\mathbb{T} \setminus \{-1\}$. Sei nun $u \in A$ unitär. Dann ist $\sigma(u) \subset \mathbb{T}$ nach Proposition 2.10 (ii). Falls $-1 \notin \sigma(u) \subset \mathbb{T}$, so ist $h = f(u) \in A^1_{sa}$ und $u = e^{i\pi h}$.

Falls -1 im Spektrum von u enthalten ist, so betrachten wir eine offene Umgebung $V \subset \mathbb{T}$ von -1. Dann ist $p := \chi_{V \cap \sigma(u)}(u)$ eine Projektion in $A \cap \{u\}'$ nach Proposition 6.12. Für diese ist dann $u(\mathbb{1}-p) \in B := (\mathbb{1}-p)A(\mathbb{1}-p)$ unitär. Es gilt $-1 \notin \sigma_B(u(\mathbb{1}-p))$, denn für $f \in C_0(V)$ gilt $f\big(u(\mathbb{1}-p)\big) = 0$ und damit folgt $\sigma_B\big(u(\mathbb{1}-p)\big) \subset \mathbb{T} \setminus V$. Wie im ersten Teil gilt dann

f mit Polynomen approximieren

$$u(\mathbb{1}-p) = e^{i\pi h_0} \in B$$

für ein $h_0 \in B^1_{sa}$. Ähnlich wie in (i) sieht man, dass $\big\|\big(u(\mathbb{1}-p)-p\big)-u\big\| \leqslant \operatorname{diam} V$. Weiter gilt, da h_0 und p orthogonal zueinander sind

die Begründung verstehe ich noch nicht ganz. Wie in der Bemerkung erläutert, ist dieser Beweis aber auch gar nicht wirklich nötig

$$u(\mathbb{1}-p) - p = e^{i\pi(h_0+p)}$$

Wir können nun V beliebig klein wählen und erhalten somit die Behauptung. □

6.14 Bemerkung.

a) Aus dem Beweis von (i) folgt insbesondere, dass $A = \overline{\operatorname{span}\{p \in A \mid p \text{ ist Projektion}\}}$.

b) Die Gleichung in (i) gilt entsprechend auch für normale Elemente.

c) Mit dem Borel-Funktionalkalkül, Satz 6.15, folgt, dass die Gleichung in (ii) auch ohne den Normabschluss gilt.

6.15 Satz (Borel-Funktionalkalkül). Sei $A \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ eine von-Neumann-Algebra und $a \in A$ normal. Dann existiert ein *-Homomorphismus

beschränkte Borel-Funktionen bilden C^*-Algebra mit $\|\cdot\|_\infty$; $W^*(x)$ erzeugte von-Neumann-Algebra

$$\begin{aligned} \mathbb{B}_b\big(\sigma(x)\big) &\longrightarrow W^*(x) \subset A \\ f &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

welcher den Gelfandhomomorphismus $C(\sigma(x)) \to C^*(x)$ fortsetzt. Für eine aufsteigende beschränkte Folge $(f_n)_\mathbb{N} \subset \mathbb{B}_b(\sigma(x))_{sa}$ mit punktweisem Limes $f = \lim_n f_n$ gilt

$$f(x) = \text{s.o.-}\lim f_n(x)$$

Beweis (Skizze): Für $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ können wir mit Hilfe von $\mu_{\xi,\eta}(U) := \big\langle \xi, \chi_U(x)(\eta)\big\rangle$ für $U \subset \sigma(a)$ offen bzw. abgeschlossen ein Integral auf Treppenfunktionen definieren. Hieraus erhält man ein Integral $\Phi_{\xi,\eta}$ auf $\mathbb{B}_b(\sigma(x))$:

- entweder mit L^1-Approximation wie in Analysis III.

- oder als Regelintegral zunächst für stetige Funktionen, also $C(\sigma(x))$, dann für $\mathbb{B}_b(\sigma(x))$ mit dem Rieszschen Darstellungssatz.

Damit hat man nun $\Phi_{\xi,\eta}\colon \mathbb{B}_b(\sigma(x)) \to \mathbb{C}$ linear und stetig. Für $f \in \mathbb{B}_b(\sigma(x))$ und $\eta \in \mathcal{H}$ definiert $\xi \mapsto \Phi_{\xi,\eta}(f) \in \mathbb{C}$ ein konjugiert lineares, stetiges Funktional $\varphi_{f,\eta}$ auf $\mathcal{H}$. Mittels $\langle \xi\,,\,\cdot\rangle$ lässt sich dann schließen, dass man $\varphi_{f,\eta}$ als Element von $\mathcal{H}$ auffassen kann, d.h. $\varphi_{f,\eta}(\xi) = \langle \xi\,,\,\varphi_{f,\eta}\rangle$. Die Abbildung $\eta \mapsto \varphi_{f,\eta}$ ist linear und stetig, definiert also einen Operator $f(x) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Auf Vektoren in $\mathcal{H}$ rechnet man nach, dass $f \mapsto f(x)$ ein isometrischer *-Homomorphismus $\mathbb{B}_b(\sigma(x)) \to \mathcal{B}\mathcal{H}$ ist. Weiter gilt $f(x) \in A'' = \overline{A}^{\text{s.o.}}$ nach dem Bikommutantensatz. Außerdem gilt $\mathrm{id}_{\sigma(x)} \mapsto x$ und daher setzt das Borel-Funktionalkalkül den Gelfandhomomorphismus fort. □

6.16 Erinnerung. Die ***schwache Operatortopologie*** $\mathcal{T}_{\text{w.o.}}$ auf $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist die lokalkonvexe Topologie, welche von den Halbnormen

$$p_{\eta,\xi}(x) := \big|\langle \eta\,,\,x\xi\rangle\big|$$

für $\eta, \xi \in \mathcal{H}$ erzeugt wird. Die Mengen $U_{x,\eta,\xi,\varepsilon} := \big\{ y \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \,\big|\, |\langle \eta\,,\,(x-y)\xi\rangle| < \varepsilon \big\}$ bilden eine Subbasis von $\mathcal{T}_{\text{w.o.}}$. Die Abbildungen

$$\big(\mathcal{B}(\mathcal{H}), \mathcal{T}_{\|\cdot\|}\big) \xrightarrow{\ \mathrm{id}\ } \big(\mathcal{B}(\mathcal{H}), \mathcal{T}_{\text{s.o.}}\big) \xrightarrow{\ \mathrm{id}\ } \big(\mathcal{B}(\mathcal{H}), \mathcal{T}_{\text{w.o.}}\big)$$

sind stetig, denn $\|(x-y)\xi\| \leqslant \|x-y\| \cdot \|\xi\|$ und $|\langle \eta\,,\,(x-y)\xi\rangle| \leqslant \|\eta\| \cdot \|(x-y)\xi\|$. Im Gegensatz zur starken Operatortopologie (vergleiche Erinnerung 6.1) ist die Involution w.o.-stetig:

$$\begin{aligned} x_\lambda \xrightarrow{\text{w.o.}} x &\iff \big|\langle \eta\,,\,(x_\lambda - x)\xi\rangle\big| \longrightarrow 0 \text{ für } \eta, \xi \in \mathcal{H} \\ &\iff \big|\langle (x_\lambda - x)^*\eta\,,\,\xi\rangle\big| \longrightarrow 0 \text{ für } \eta, \xi \in \mathcal{H} \\ &\iff \big|\langle \xi\,,\,(x_\lambda^* - x^*)\eta\rangle\big| \longrightarrow 0 \text{ für } \eta, \xi \in \mathcal{H} \\ &\iff x_\lambda^* \xrightarrow{\text{w.o.}} x^* \end{aligned}$$

Die Multiplikation ist allerdings auch nicht w.o.-stetig: Sei dazu S der Shift. Dann gilt einerseits $S^n, S^{*n} \xrightarrow{\text{w.o.}} 0$ aber andererseits $S^{*n}S^n = \mathbb{1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

6.17 Satz. Die Einheitskugel $\mathcal{B}(\mathcal{H})^1$ ist w.o.-kompakt.

Beweis (Skizze): Fixiere eine Orthonormalbasis $(\xi_\gamma)_\Gamma$ und definiere die ***Spurklasse-Operatoren***

$$\mathcal{L}^1(\mathcal{H}) := \big\{ x \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \,\big|\, \|x\|_1 := \textstyle\sum_\Gamma \langle \xi_\gamma\,,\,|x|\xi_\gamma\rangle < \infty \big\}$$

Man zeigt, dass $\|\cdot\|_1$ eine Norm ist und dass folgendes gilt:

$$\mathcal{L}^1(\mathcal{H}) = \overline{\big\{ x \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \,\big|\, x \text{ hat endlichen Rang} \big\}}^{\|\cdot\|_1}$$

Für $y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ definiert man nun $\varphi_y \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H})^*$ durch $x \mapsto \varphi_y(x) := \sum_\Gamma \langle \xi_\gamma\,,\,yx\xi_\gamma\rangle$. Man zeigt nun, dass $\varphi\colon \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{L}^1(\mathcal{H})^*$, $y \mapsto \varphi_y$ einen isometrischen Isomorphismus definiert. Sei $\mathcal{T}_{w^*}$ die zurückgezogene Topologie auf $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Mit Banach-Alaoglu folgt, dass $\mathcal{B}(\mathcal{H})^1$ w*-kompakt und hausdorffsch ist. Die Abbildung $\mathrm{id}\colon \big(\mathcal{B}(\mathcal{H})^1, \mathcal{T}_{w^*}\big) \to \big(\mathcal{B}(\mathcal{H})^1, \mathcal{T}_{\text{w.o.}}\big)$ ist stetig, was man wie folgt verifiziert:

$$\begin{aligned} y_\lambda \xrightarrow{w^*} y \text{ in } \mathcal{B}(\mathcal{H})^1 &\implies \sum_\gamma \langle \xi_\gamma\,,\,(y_\lambda - y)x\xi_\gamma\rangle \to 0 \text{ für jedes } x \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H}) \\ &\overset{\text{Übung}}{\implies} \langle \xi\,,\,(y_\lambda - y)\eta\rangle \to 0 \text{ für alle } \xi, \eta \in \mathcal{H} \\ &\implies y_\lambda \xrightarrow{\text{w.o.}} y \end{aligned}$$

Damit ist $\mathcal{B}(\mathcal{H})^1$ auch w.o.-kompakt. □

6.18 Satz. Sei $\mathbb{1}_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \in A \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ eine *-Algebra. Dann gilt

(i) $\overline{A}^{\text{w.o.}} = A''$

(ii) A ist eine von-Neumann-Algebra genau dann, wenn $A = \overline{A}^{\text{w.o.}}$.

Beweis: Zur ersten Aussage: Es gilt $A'' \overset{6.6}{=} \overline{A}^{\text{s.o.}} \subset \overline{A}^{\text{w.o.}}$. Sei nun $(x_\lambda)_\Lambda \subset A$ ein Netz mit $x_\lambda \xrightarrow{\text{w.o.}} x$. Falls $y \in A'$, so gilt für $\eta, \xi \in \mathcal{H}$

$$\langle \eta\,,\,(xy)\xi\rangle = \lim_\lambda \langle \eta\,,\,x_\lambda y\xi\rangle = \lim_\lambda\langle\eta\,,\,yx_\lambda\xi\rangle = \lim_\lambda\langle y^*\eta\,,\,x_\lambda\xi\rangle = \langle y^*\eta\,,\,x\xi\rangle = \langle\eta\,,\,(yx)\xi\rangle$$

Es folgt $xy = yx$ und somit ist $x \in A''$, also $\overline{A}^{\text{w.o.}} \subseteq A''$. Die zweite Aussage folgt offensichtlich direkt aus (i) und dem Bikommutantensatz. $\square$

Wir wollen uns nun noch ein bisschen mehr mit dem Zusammenspiel der verschiedenen Topologien beschäftigen. Für ein lineares Funktional φ auf $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ gilt:

$$\varphi \text{ w.o.-stetig} \Longrightarrow \varphi \text{ s.o.-stetig} \Longrightarrow \varphi\ \|\cdot\|\text{-stetig}$$

$$\begin{array}{ccccc}
x_\lambda \xrightarrow{\text{w.o.}} x & \Longleftarrow & x_\lambda \xrightarrow{\text{s.o.}} x & \Longleftarrow & x_\lambda \xrightarrow{\|\cdot\|} x \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
\varphi(x_\lambda) \to \varphi(x) & \Longleftrightarrow & \varphi(x_\lambda) \to \varphi(x) & \Longleftrightarrow & \varphi(x_\lambda) \to \varphi(x)
\end{array}$$

Die Umkehrung der zweiten Implikation in der obersten Zeile gilt im Allgemeinen nicht. Wie wir jetzt sehen werden ist die erste aber tatsächlich eine Äquivalenz:

6.19 Satz. Für ein lineares Funktional φ auf $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ sind äquivalent:

(i) φ ist w.o.-stetig.

(ii) φ ist s.o.-stetig.

(iii) $\varphi(x) = \sum_{i=1}^n \langle \eta_i\,,\,x\xi_i\rangle$ für $\eta_1, \xi_1, \dots, \eta_n, \xi_n \in \mathcal{H}$.

Beweis: Die Implikation (i) ⇒ (ii) ist klar, da $\mathcal{T}_{\text{w.o.}} \subset \mathcal{T}_{\text{s.o.}}$ ist. Die Implikation (iii) ⇒ (i) ist auch klar nach Definition der schwachen Operatortopologie und wir müssen nur (ii) ⇒ (iii) zeigen: Sei also φ s.o.-stetig. Die Menge $S_\varphi := \{x \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mid |\varphi(x)| < 1\} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist dann eine s.o.-offene Umgebung der Null und es existieren $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathcal{H}$ und ein $\alpha > 0$, sodass für die entsprechenden Elemente $U_{0,\xi_i,\alpha}$ der Subbasis[5] von $\mathcal{T}_{\text{s.o.}}$ gilt

$$\bigcap_{i=1}^n U_{0,\xi_i,\alpha} \subset S_\varphi$$

Details hinzugefügt in Anlehnung an [Mur90, S. 267 f]

Wir bezeichnen die dazugehörigen Halbnormen mit $p_i(x) := \|x\xi_i\|$ und setzen $p(x) := \max_i p_i(x)$. Für $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ beliebig gilt dann: $p(x) < \alpha \implies |\varphi(x)| < 1$. Wir setzen $M := {}^2/_\alpha$ und erhalten, falls $p(x) > 0$ ist, $p\big(\frac{x}{M\cdot p(x)}\big) = \frac{\alpha}{2} < \alpha$. Mit obiger Implikation folgt $\big|\varphi\big(\frac{x}{M\cdot p(x)}\big)\big| < 1$ und wir erhalten insgesamt für alle $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$

$$|\varphi(x)| \leqslant M \cdot p(x) = M \cdot \max_i \|x\xi_i\|$$

Nach entsprechender Skalierung der ξ_i können wir $M = 1$ annehmen und erhalten dann

$$|\varphi(x)| \leqslant \max_i \|x\xi_i\| \leqslant \left(\sum_{i=1}^n \|x\xi_i\|^2\right)^{1/2} \qquad \textbf{[†]}$$

[5] Es gilt $U_{x,\xi_i,\alpha} = \{y \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mid \|(x-y)\xi_i\| < \alpha\}$, vergleiche Erinnerung 6.1

Setze nun

$$\mathcal{H}_0 := \left\{ \begin{pmatrix} x\xi_1 \\ \vdots \\ x\xi_n \end{pmatrix} \,\middle|\, x \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \right\} \subset \mathcal{H}^{\oplus n}$$

und definiere $\psi\colon \mathcal{H}_0 \to \mathbb{C}$ durch $(x\xi_1, \dots, x\xi_n) \mapsto \varphi(x)$. Man sieht nun, dass ψ wohldefiniert, linear und stetig ist mit $\|\psi\| \leqslant 1$ (unter Benutzung von [†]). ψ setzt sich also fort zu $\overline{\psi}\colon \overline{\mathcal{H}_0} \to \mathbb{C}$. Mit Riesz folgt die Existenz eines eindeutigen $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in \overline{\mathcal{H}_0}$ mit $\overline{\psi}(x) = \langle \eta\,,\, x\rangle$, also gilt

$$\varphi(x) = \overline{\psi}\begin{pmatrix} x\xi_1 \\ \vdots \\ x\xi_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \langle \eta_i\,,\, x\xi_i\rangle \qquad \square$$

6.20 Proposition. Sei $C \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ konvex. Dann ist C s.o.-abgeschlossen genau dann, wenn C w.o.-abgeschlossen ist.

Beweis (Idee): Wenn C w.o.-abgeschlossen ist, dann ist C auch s.o.-abgeschlossen, da die schwache Topologie in der starken enthalten ist. Für die andere Implikation sei $x \in \overline{C}^{\text{w.o.}}$. Zu zeigen ist nun, dass x auch in $\overline{C}^{\text{s.o.}}$ enthalten ist. Es existiert ein Netz $(x_\lambda)_\Lambda \subset C$, dass schwach gegen x konvergiert. Für jedes w.o.-stetige Funktional φ auf $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ gilt $\varphi(x_\lambda) \to \varphi(x)$. Mit Satz 6.19 folgt, dass für jedes s.o.-stetige Funktional φ auf $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ auch $\varphi(x_\lambda) \to \varphi(x)$ gilt. Falls $x \notin \overline{C}^{\text{s.o.}}$, so folgt mit dem Lemma von Zorn (bzw. mit Hahn-Banach für lokalkonvexe Räume), dass $\overline{\varphi} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^*$ s.o.-stetig existiert mit $\operatorname{dist}(\overline{\varphi}(x), \overline{\varphi}(C)) > 0$. Dies ist ein Widerspruch. $\square$

6.21 Proposition. Die Involution ist s.o.-stetig auf $\{x \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mid x \text{ normal}\}$.

Beweis: Für $x, y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ normal und $\xi \in \mathcal{H}$ gilt

$$\begin{aligned}
\|(x^* - y^*)\xi\|^2 &= \|x\xi\|^2 - \|y\xi\|^2 + 2\cdot\langle \xi\,,\, yy^*\xi\rangle - \langle \xi\,,\, xy^*\xi\rangle - \langle \xi\,,\, yx^*\xi\rangle \\
&= \|x\xi\|^2 - \|y\xi\|^2 + \langle \xi\,,\, (y-x)y^*\xi\rangle + \underbrace{\langle \xi\,,\, y(y^*-x^*)\xi\rangle}_{=\langle (y-x)y^*\xi\,,\,\xi\rangle} \\
&\overset{\text{C.S.}}{\leqslant} \|x\xi\|^2 - \|y\xi\|^2 + 2\cdot\|(y-x)y^*\xi\|\cdot\|\xi\|
\end{aligned}$$

Falls nun $x_\lambda \xrightarrow{\text{s.o.}} y$ in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, so gilt

$$\|(x_\lambda^* - y^*)\xi\| \leqslant \underbrace{\|x_\lambda\xi\|^2 - \|y\xi\|^2}_{\to 0} + \underbrace{2\cdot\|(y-x_\lambda)y^*\xi\|\cdot\|\xi\|}_{\to 0} \longrightarrow 0 \qquad \square$$

6.22 Definition. Eine stetige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt ***stark stetig***, falls für jeden Hilbertraum $\mathcal{H}$ und jedes Netz $(x_\lambda)_\Lambda \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})_{\text{sa}}$ mit $x_\lambda \xrightarrow{\text{s.o.}} x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_{\text{sa}}$ gilt $f(x_\lambda) \xrightarrow{\text{s.o.}} f(x)$.

6.23 Proposition. Jedes $h \in C_b(\mathbb{R})$ ist stark stetig.

Beweis: Sei $S := \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid f \text{ stark stetig}\}$ und $S_b := S \cap C_b(\mathbb{R})$. Dann sind S und S_b Vektorräume. Wegen $\|ab\xi - a_0b_0\xi\| \leqslant \|a\|\cdot\|(b-b_0)\xi\| + \|(a-a_0)b_0\xi\|$ haben wir für $f \in S_b$, $g \in S$ und $x_\lambda \xrightarrow{\text{s.o.}} x$ in $\mathcal{B}(\mathcal{H})_{\text{sa}}$

$$\|f(x_\lambda)g(x_\lambda)\xi - f(x)g(x)\xi\| \leqslant \|f\|_\infty \cdot \big\|\big(g(x_\lambda) - g(x)\big)\xi\big\| + \big\|\big(f(x_\lambda) - f(x)\big)g(x)\xi\big\| \longrightarrow 0$$

Damit ist $f\cdot g \in S$, das heißt $S_b \cdot S \subset S$ und $S_b \cdot S_b \subset S_b$. Weiter ist S_b selbstadjungiert, also $S_b^* = S_b$, denn $f(x)$ für x selbstadjungiert ist normal und nach Proposition 6.21 ist $f(x) \mapsto f(x)^*$ s.o.-stetig.

Außerdem ist S_b abgeschlossen unter $\|\cdot\|_\infty$. Insbesondere ist $S_b \subset C_b(\mathbb{R})$ eine C*-Unteralgebra. Ebenso $S_b \cap C_0(\mathbb{R}) =: S_0 \subset C_0(\mathbb{R})$.

Die Funktionen $t \mapsto f(t) := \frac{1}{1+t^2}$ und $t \mapsto g(t) := \frac{t}{1+t^2}$ sind in $C_0(\mathbb{R})$ mit $\|f\|_\infty, \|g\|_\infty \leqslant 1$. Behauptung: f und g sind in S_0 enthalten. Für $x, y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_{sa}$ gilt

$$g(x) - g(y) = \ldots = (\mathbb{1} + x^2)^{-1}\big(x - y + x(y-x)y\big)(\mathbb{1} + y^2)^{-1}$$

Für $\xi \in \mathcal{H}$ gilt dann weiter, da $\left\|(\mathbb{1}+x^2)^{-1}\right\| \leqslant 1$ ist

$$\left\|\big(g(x) - g(y)\big)\xi\right\| \leqslant \left\|(x-y)(\mathbb{1}+y^2)^{-1}\xi\right\| + \left\|x(y-x)y(\mathbb{1}+y^2)^{-1}\xi\right\|$$

Damit ist g stark stetig und somit in S_0. Weiter ist $(t \mapsto t) \in S$, also $\big(t \mapsto t \cdot g(t)\big) \in S$ und $\big(t \mapsto 1 - t \cdot g(t)\big) = f \in S_0$. Damit ist die Behauptung gezeigt.

Nach Stone-Weierstraß ist $^*\text{-}\operatorname{Alg}(f, g) \subset C_0(\mathbb{R})$ dicht, denn diese Algebra trennt Punkte von $\mathbb{R}$ und enthält mit f eine strikt positive Funktion. Damit folgt $S_0 = C_0(\mathbb{R})$. Für $h \in C_b(\mathbb{R})$ gilt $hf, hg \in S_0 \subset S_b$, also ist auch $(t \mapsto t \cdot h(t) \cdot g(t)) \in S$ und

$$\big(t \longmapsto h(t) \cdot f(t) + t \cdot h(t) \cdot g(t) = h(t)\big) \in S_b$$

Also gilt $S_b \subset C_b(\mathbb{R})$ und damit ist die Behauptung gezeigt. □

Zum krönenden Abschluss dieses Kapitels wollen wir noch den Dichtesatz von Kaplansky beweisen, über den Pedersen in seinem Buch *C*-Algebras and their Automorphism Groups* schreibt:

> „*The density theorem is Kaplansky's great gift to mankind. It can be used every day, and twice on Sundays.*" ([Ped79, S. 25])

B ist vN-Algebra nach Aufgabe 1 von Blatt 10

6.24 Satz (Kaplanskys Dichtesatz). Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $A \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ eine C*-Algebra und $B = \overline{A}^{\text{s.o.}} = \overline{A}^{\text{w.o.}}$ die von A in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ erzeugte von-Neumann-Algebra. Dann gilt

(i) $\overline{A_{sa}}^{\text{s.o.}} = \overline{A_{sa}}^{\text{w.o.}} = B_{sa}$

(ii) $\overline{A^1_{sa}}^{\text{s.o.}} = \overline{A^1_{sa}}^{\text{w.o.}} = B^1_{sa}$

(iii) $\overline{A^1_+}^{\text{s.o.}} = \overline{A^1_+}^{\text{w.o.}} = B^1_+$

(iv) $\overline{A^1}^{\text{s.o.}} = \overline{A^1}^{\text{w.o.}} = B^1$

(v) $\overline{\mathcal{U}(A)}^{\text{s.o.}} = \mathcal{U}(B)$ falls $\mathbb{1}_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \in A$

Beweis: Die starken und schwachen Abschlüsse stimmen jeweils überein nach Proposition 6.20.

(i) Falls $a \in B_{sa}$, so existiert $(a_\lambda)_\Lambda \subset A$ mit $a_\lambda \xrightarrow{\text{w.o.}} a$. Dann gilt aber auch $a_\lambda^* \xrightarrow{\text{w.o.}} a^* = a$ nach Erinnerung 6.16 und damit

$$A_{sa} \ni {}^1\!/\!_2(a_\lambda + a_\lambda^*) \xrightarrow{\text{w.o.}} a$$

Also ist $B_{sa} \subset \overline{A_{sa}}^{\text{w.o.}} \subset B_{sa}$, wobei die zweite Inklusion offensichtlich ist.

(ii) Sei $a \in B^1_{sa}$. Nach (i) existiert ein Netz $(a_\lambda)_\Lambda \subset A_{sa}$ mit $a_\lambda \xrightarrow{\text{s.o.}} a$. Sei $f \in C_b(\mathbb{R})$ gegeben durch Abbildung 4. f ist stark stetig nach Proposition 6.23. Also ist $A^1_{sa} \ni f(a_\lambda) \xrightarrow{\text{s.o.}} f(a) = a$ und damit $a \in \overline{A^1_{sa}}^{\text{s.o.}}$. Wir haben also $B^1_{sa} \subseteq \overline{A^1_{sa}}^{\text{s.o.}}$ gezeigt. Die andere Inklusion ist wieder klar.

(iii) Wie (ii) mit g anstatt f, siehe Abbildung 4.

Abbildung 4: Funktionen im Beweis von Satz 6.24

(iv) Sei $a \in B^1$. Dann ist $\left(\begin{smallmatrix} 0 & a \\ a^* & 0 \end{smallmatrix}\right) \in M_2(B)^1_{sa} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}^{\oplus 2})$. Es gilt $\overline{M_2(A)}^{s.o.} = M_2(B)$ und nach (ii) existiert $(b_\lambda)_\Lambda \subset M_2(A)^1_{sa}$ mit $\left(\begin{smallmatrix} b_{\lambda,1,1} & b_{\lambda,1,2} \\ b_{\lambda,2,1} & b_{\lambda,2,2} \end{smallmatrix}\right) = b_\lambda \xrightarrow{s.o.} \left(\begin{smallmatrix} 0 & a \\ a^* & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Dann gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{\lambda,1,1} & b_{\lambda,1,2} \\ b_{\lambda,2,1} & b_{\lambda,2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b_{\lambda,1,2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also ist $b_{\lambda,1,2} \in A^1$ und wir erhalten $b_{\lambda,1,2} \xrightarrow{s.o.} a$, also $a \in \overline{A^1}^{s.o.}$. Wir haben somit die Inklusion $B^1 \subseteq \overline{A^1}^{s.o.}$ gezeigt; die andere ist wieder klar.

(v) Nach Korollar 6.13 (ii) gilt $\mathcal{U}(B) = \overline{\{e^{i\pi h} \mid h \in B^1_{sa}\}}^{\|\cdot\|}$. Zu $u \in \mathcal{U}(B)$ und $\varepsilon > 0$ existiert ein $h \in B^1_{sa} = \overline{A^1_{sa}}^{s.o.}$ mit $\left\|e^{i\pi h} - u\right\| < \varepsilon$. Aber $\left(t \mapsto e^{i\pi t}\right) \in C_b(\mathbb{R})$ ist stark stetig nach Proposition 6.23 und somit ist $e^{i\pi h} \in \overline{\mathcal{U}(A)}^{s.o.}$. Damit haben wir

$$\mathcal{U}(B) \subset \overline{\overline{\mathcal{U}(A)}^{s.o.}}^{\|\cdot\|} = \overline{\mathcal{U}(A)}^{s.o.}$$

Die umgekehrte Inklusion ist wieder klar. □

7. Reine Zustände und irreduzible Darstellungen

Bevor man in dieses Kapitel abtaucht, ist es empfehlenswert, sich noch einmal an Definition 5.10 zu erinnern, denn dort wurden die Begriffe *irreduzibel* und *zyklisch* für Darstellungen eingeführt. Wenig überraschend wird auch die GNS-Konstruktion, siehe Satz 5.11 und Anhang A.7, wieder eine wichtige Rolle spielen.

Es gilt auch die Umkehrung, wie man sich leicht mit 3.7 überlegt

7.1 Proposition. Sei A eine C^*-Algebra, $\varphi \in S(A)$ ein Zustand und $\rho \in A^*$ ein weiteres positives Funktional. Falls $\varphi - \rho$ positiv ist, so existiert genau ein $0 \leqslant h \leqslant \mathbb{1} \in \pi_\varphi(A)' \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}_\varphi)$ mit

$$\rho(a) = \left\langle \xi_\varphi\,,\, \pi_\varphi(a) h \xi_\varphi \right\rangle$$

wobei $(\mathcal{H}_\varphi, \pi_\varphi, \xi_\varphi)$ die GNS-Darstellung zu φ ist.

Beweis: Im Zuge der GNS-Konstruktion, siehe Satz 5.11 haben wir ein Ideal in A definiert durch $N_\varphi = \{a \in A \mid \varphi(a^*a) = 0\}$ und dann den Hilbertraum $\mathcal{H}_\varphi = \overline{A/N_\varphi}^{\langle\cdot,\cdot\rangle}$ betrachtet. Definiere auf A/N_φ eine hermitesche Sesquilinearform σ durch

$$\sigma(a + N_\varphi, b + N_\varphi) := \rho(a^*b)$$

σ ist wohldefiniert, da $0 \leqslant \rho \leqslant \varphi$ ist, woraus $N_\varphi \subset N_\rho$ folgt. Es gilt für $a, b \in A$

$$\sigma(a + N_\varphi, b + N_\varphi) = \rho(a^*b) \overset{\text{C.S.}}{\leqslant} \rho(a^*a)^{1/2}\rho(b^*b)^{1/2} \leqslant \varphi(a^*a)^{1/2}\varphi(b^*b)^{1/2} = \|a + N_\varphi\| \cdot \|b + N_\varphi\|$$

Damit ist $\|\sigma\| \leqslant 1$ und σ lässt sich stetig auf $\mathcal{H}_\varphi$ fortsetzen. Für $\xi \in \mathcal{H}_\varphi$ ist $\eta \mapsto \sigma(\xi, \eta)$ eine stetige Linearform auf $\mathcal{H}_\varphi$. Nach Riesz existiert also genau ein Vektor $\xi_\sigma \in \mathcal{H}_\varphi$ mit $\sigma(\xi, \eta) = \langle \xi_\sigma\,,\, \eta \rangle$. $\xi \mapsto \xi_\sigma$ ist linear und beschränkt, also existiert genau ein $h \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\varphi)$ mit $h\xi = \xi_\sigma$. Es gilt

$$\langle h\xi\,,\, \eta \rangle = \sigma(\xi, \eta) = \overline{\sigma(\eta, \xi)} = \overline{\langle h\eta\,,\, \xi \rangle} = \langle \xi\,,\, h\eta \rangle = \langle h^*\xi\,,\, \eta \rangle$$

Also ist h selbstadjungiert. Weiter gilt $\|h\| \leqslant \|\sigma\| \leqslant 1$ und für $a \in A$ haben wir

$$\langle a + N_\varphi\,,\, h(a + N_\varphi) \rangle = \sigma(a^*a) = \rho(a^*a) \geqslant 0$$

Also ist $\langle \xi\,,\, h\xi \rangle \geqslant 0$ für $\xi \in \mathcal{H}_\varphi$, womit $h \geqslant 0$ ist nach Bemerkung 6.3. Damit haben wir $0 \leqslant h \leqslant \mathbb{1}$. Für $a, b, c \in A$ gilt

$$\begin{aligned}\left\langle a + N_\varphi\,,\, \pi_\varphi(c)h(b + N_\varphi) \right\rangle = \left\langle c^*a + N_\varphi\,,\, h(b + N_\varphi) \right\rangle = \rho(a^*cb) &= \left\langle a + N_\varphi\,,\, h(cb + N_\varphi) \right\rangle \\ &= \left\langle a + N_\varphi\,,\, h\pi_\varphi(c)(b + N_\varphi) \right\rangle\end{aligned}$$

Damit ist $\pi_\varphi(c)h = h\pi_\varphi(c)$, also ist h in der Kommutante von $\pi_\varphi(A)$ wie behauptet. Um die behauptete Formel für ρ zu beweisen, betrachten wir eine approximative Eins $(e_\lambda)_\Lambda \subset A^1_+$. Dann ist $\xi_\varphi = \lim_\lambda e_\lambda + N_\varphi \in \mathcal{H}_\varphi$ und es gilt

$$\begin{aligned}\rho(a) = \lim_{\lambda,\lambda'} \rho(e_\lambda a e_{\lambda'}) = \lim_{\lambda,\lambda'} \left\langle e_\lambda + N_\varphi\,,\, h(a e_{\lambda'} + N_\varphi) \right\rangle &= \lim_{\lambda,\lambda'} \left\langle e_\lambda + N_\varphi\,,\, h\,\pi_\varphi(a)(e_{\lambda'} + N_\varphi) \right\rangle \\ &= \left\langle \xi_\varphi\,,\, h\,\pi_\varphi(a)\,\xi_\varphi \right\rangle\end{aligned}$$

Für die Eindeutig sei $d \in (\pi_\varphi(A)')^1_+$ mit $\rho(a) = \langle \xi_\varphi\,,\, \pi_\varphi(a) d \xi_\varphi \rangle$ für alle $a \in A$. Dann gilt für $a, b \in A$, da $\xi_\varphi = \lim_\lambda e_\lambda + N_\varphi$ zyklisch ist

$$\begin{aligned}\left\langle a + N_\varphi\,,\, d(b + N_\varphi) \right\rangle = \left\langle \pi_\varphi(a)\xi_\varphi\,,\, d\,\pi_\varphi(b)\xi_\varphi \right\rangle = \left\langle \xi_\varphi\,,\, \pi_\varphi(a^*b) d\xi_\varphi \right\rangle &= \rho(a^*b) \\ &= \left\langle a + N_\varphi\,,\, h(b + N_\varphi) \right\rangle\end{aligned}$$

Also ist $d = h$, womit die Eindeutigkeit gezeigt ist. □

7.2 Satz. Sei $(\mathcal{H}, \pi)$ eine nicht degenerierte Darstellung einer C^*-Algebra A. Dann ist $(\mathcal{H}, \pi)$ eine direkte Summe zyklischer Darstellungen.

Beweis: Sei $\mathcal{S} := \left\{ S \subset \mathcal{H} \setminus \{0\} \,\middle|\, \overline{\pi(A)\xi} \perp \overline{\pi(A)\eta} \text{ für alle } \xi \neq \eta \in S \right\}$. $\mathcal{S}$ ist partiell geordnet bezüglich Inklusion und abgeschlossen bezüglich Vereinigungen von aufsteigenden Teilmengen. Nach Zorns Lemma besitzt $\mathcal{S}$ ein maximales Element $\tilde{S}$. Sei $\eta \in \left(\bigcup_{\xi \in \tilde{S}} \overline{\pi(a)\xi} \right)^{\perp}$, dann gilt für $a, b \in A$, $\xi \in \tilde{S}$.

$$\langle \pi(a)\eta \,,\, \pi(b)\xi \rangle = \langle \eta \,,\, \pi(a^*b)\xi \rangle = 0$$

Dann ist $\overline{\pi(A)\eta} \perp \overline{\pi(A)\xi}$ für alle $\xi \in \tilde{S}$. Da $\tilde{S}$ maximal ist, muss $\eta \in \tilde{S}$ oder $\eta = 0$ sein. Falls $\eta \in \tilde{S}$, so gilt $\overline{\pi(A)\eta} \perp \overline{\pi(A)\eta}$, was ein Widerspruch ist, denn $(\mathcal{H}, \pi)$ ist nicht degeneriert ($\Rightarrow \pi(e_\lambda) \xrightarrow{\text{s.o.}} \mathbb{1}_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}$). Also ist $\eta = 0$ und damit

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{\xi \in \tilde{S}} \overline{\pi(A)\xi}$$

Die eingeschränkten Darstellungen $\pi(\cdot)\big|_{\overline{\pi(A)\xi}}$ haben jeweils $\xi \in \overline{\pi(A)\xi}$ als zyklischen Vektor. □

7.3 Satz. Sei $(\mathcal{H}, \pi)$ eine Darstellung einer C^*-Algebra A mit $\pi \neq 0$. Dann gilt

(i) $(\mathcal{H}, \pi)$ ist irreduzibel $\iff \pi(A)' = \mathbb{C} \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}$.

(ii) $(\mathcal{H}, \pi)$ ist irreduzibel $\implies$ jedes $0 \neq \xi \in \mathcal{H}$ ist zyklisch, also $\overline{\pi(A)\xi} = \mathcal{H}$.

$\iff$ $\pi(A)$ s.o.-dicht in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, siehe Anhang A.12

Beweis:

(i) Für die Rückrichtung nehmen wir an, $(\mathcal{H}, \pi)$ sei nicht irreduzibel. Dann existiert $\tilde{\mathcal{H}} \subset \mathcal{H}$ abgeschlossen mit $\{0\} \neq \tilde{\mathcal{H}} \neq \mathcal{H}$ und $\pi(A)\tilde{\mathcal{H}} \subset \tilde{\mathcal{H}}$. Setze $p := p_{\tilde{\mathcal{H}}}$, dann gilt $0 \neq p \neq \mathbb{1}_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}$ und

$$p\pi(a) = \big(\pi(a)p\big)^* = \big(p\pi(a)p\big)^* = p\pi(a)p = \pi(a)p$$

für $a \in A_{sa}$. Also ist $p \in \pi(A_{sa})'$ und somit $p \in \pi(A)'$. Damit ist $p = \lambda \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$. Da p ein Projektion ist, folgt $\lambda \in \{0, 1\}$ und somit ist $p = 0$ oder $p = \mathbb{1}_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}$, was einen Widerspruch darstellt.

Für ein Projektion $p \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ gilt $p \in \pi(A)'$ genau dann, wenn $\overline{p\mathcal{H}} \subset \mathcal{H}$ invariant ist unter $\pi(A)$. Da $\pi(A)'$ eine von-Neumann-Algebra ist, ist sie nach Bemerkung 6.14 der Abschluss des Spans ihrer Projektionen. Wenn die Darstellung irreduzibel ist, enthält $\pi(A)'$ also nur die trivialen Projektionen und es folgt $\pi(A)' = \mathbb{C} \cdot \mathrm{id}_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}$.

(ii) Sei $(\mathcal{H}, \pi)$ irreduzibel. Dann ist $\overline{\pi(A)\xi} = \{0\}$ oder $\overline{\pi(A)\xi} = \mathcal{H}$ für $\xi \in \mathcal{H}$, da die Darstellung irreduzibel ist. Da $\pi \neq 0$ ist, existiert ein $\eta \in \mathcal{H}$ mit $\pi(A)\eta \neq \{0\}$. Also ist $\overline{\pi(A)\eta} = \mathcal{H}$. Damit ist π nicht degeneriert und es folgt $\overline{\pi_n(A)\xi} = \mathcal{H}$ für $\xi \neq 0$, also ist ξ zyklisch wie behauptet. □

7.4 Definition. Sei A eine C^*-Algebra. Ein Zustand $\varphi \in S(A)$ heißt ***rein***, falls gilt: Für jedes $\rho \in A^*$ positiv mit $\rho \leqslant \varphi$ existiert $\lambda \in [0, 1]$ mit $\rho = \lambda \cdot \varphi$. Wir schreiben $PS(A) := \{\text{reine Zustände auf } A\}$.

engl. pure states

7.5 Satz. Sei A eine C^*-Algebra, $\varphi \in S(A)$. Dann gilt

$$\varphi \text{ ist rein} \iff (\mathcal{H}_\varphi, \pi_\varphi) \text{ ist irreduzibel}$$

Beweis: Sei φ rein und $0 \leqslant h \leqslant \mathbb{1}_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \in \pi_\varphi(A)'$. Dann definiert

$$\begin{aligned} \rho \colon A &\longrightarrow \mathbb{C} \\ a &\longmapsto \langle \xi_\varphi \,,\, h\,\pi_\varphi(a)\xi_\varphi \rangle \end{aligned}$$

ein positives Funktional auf A mit $\rho \leqslant \varphi$, siehe Proposition 7.1. φ ist rein, also existiert $\lambda \in [0,1]$ mit $\rho = \lambda \cdot \varphi$. Für $a, b \in A$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}\langle a + N_\varphi\,,\, h(b + N_\varphi)\rangle = \langle \pi(a)\xi_\varphi\,,\, h\pi(b)\xi_\varphi\rangle &= \langle \xi_\varphi\,,\, h\pi(a^*b)\xi_\varphi\rangle \\ &= \rho(a^*b) = \lambda \cdot \varphi(a^*b) \\ &= \lambda \cdot \langle a + N_\varphi\,,\, b + N_\varphi\rangle \\ &= \big\langle a + N_\varphi\,,\, \lambda \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}(b + N_\varphi)\big\rangle\end{aligned}$$

Also ist $\langle \xi\,,\, h\eta\rangle = \big\langle \xi\,,\, \lambda \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_\varphi)}(\eta)\big\rangle$ für $\xi, \eta \in \mathcal{H}_\varphi$ und damit $h = \lambda \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_\varphi)}$. Also ist $\pi_\varphi(A)' = \mathbb{C} \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}$ und mit Satz 7.3 (i) folgt, dass $(\mathcal{H}_\varphi, \pi_\varphi)$ irreduzibel ist.

Für die andere Implikation sei $(\mathcal{H}_\varphi, \pi_\varphi)$ irreduzibel und $\rho \in A^*$ positiv mit $\rho \leqslant \varphi$. Nach Proposition 7.1 existiert $0 \leqslant h \leqslant \mathbb{1} \in \pi_\varphi(A)'$ mit $\rho(a) = \langle \xi_\varphi\,,\, h\pi_\varphi(a)\xi_\varphi\rangle$ für $a \in A$. Nach Satz 7.3 (i) gilt $\pi_\varphi(A)' = \mathbb{C} \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_\varphi)}$, also $h = \lambda \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}$ für ein $\lambda \in [0,1]$ und $\rho(a) = \langle \xi_\varphi\,,\, h\pi_\varphi(a)\xi_\varphi\rangle = \lambda \cdot \langle \xi_\varphi\,,\, \pi_\varphi(a)\xi_\varphi\rangle = \lambda \cdot \varphi(a)$. $\square$

7.6 Satz. Sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum. Dann gilt $\mathrm{PS}\big(C_0(X)\big) = \Omega\big(C_0(X)\big)$.

Beweis: Sei $\varphi \in \mathrm{PS}(C_0(X))$ ein reiner Zustand. Dann gilt

$$\pi_\varphi\big(C_0(X)\big) \subset \pi_\varphi\big(C_0(X)\big)' \overset{7.3,\,7.5}{=\!=} \mathbb{C} \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_\varphi)} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}_\varphi)$$

und $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\varphi) \subset \big(\mathbb{C} \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_\varphi)}\big)' \subset \pi_\varphi\big(C_0(X)\big)' = \mathbb{C} \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_\varphi)}$. Also ist $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\varphi) = \mathbb{C} \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_\varphi)} \cong \mathbb{C}$. Wir zeigen jetzt, dass φ multiplikativ und damit ein Charakter ist: Für $a, b \in C_0(X)$ gilt

$$\begin{aligned}\varphi(ab) = \langle \xi_\varphi\,,\, \pi_\varphi(ab)\xi_\varphi\rangle = \underbrace{\pi_\varphi(a)}_{\in\mathbb{C}} \cdot \langle \xi_\varphi\,,\, \pi_\varphi(b)\xi_\varphi\rangle &= \pi_\varphi(a)\underbrace{\langle \xi_\varphi\,,\, \xi_\varphi\rangle}_{=1} \cdot \langle \xi_\varphi\,,\, \pi_\varphi(b)\xi_\varphi\rangle \\ &= \langle \xi_\varphi\,,\, \pi_\varphi(a)\xi_\varphi\rangle \cdot \langle \xi_\varphi\,,\, \pi_\varphi(b)\xi_\varphi\rangle \\ &= \varphi(a) \cdot \varphi(b)\end{aligned}$$

Also ist $\varphi \in \Omega(C_0(X))$ ein Charakter. Sei nun umgekehrt $\chi \in \Omega(C_0(X))$ und $\rho \in C_0(X)^*$ positiv mit $\rho \leqslant \chi$. Für $a \in C_0(X)$ gilt dann

$$|\rho(a)| \overset{5.3}{\leqslant} \|\rho\|^{1/2}\rho(a^*a)^{1/2} \leqslant \chi(a^*a)^{1/2} = \Big(\overline{\chi(a)} \cdot \chi(a)\Big)^{1/2} \leqslant |\chi(a)|$$

Also ist $\ker\chi \subset \ker\rho$. ρ induziert nun ein Funktional $\tilde{\rho}$ auf ${}^{C_0(X)}/_{\ker\chi} \cong \mathbb{C}$ mit $\rho = \tilde{\rho} \circ \chi$.

$$\begin{tikzcd} C_0(X) \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr, twoheadrightarrow, "\chi"'] & & \mathbb{C} \\ & {}^{C_0(X)}/_{\ker\chi} \cong \mathbb{C} \arrow[ur, "\tilde{\rho}"'] & \end{tikzcd}$$

Damit ist $\rho = \lambda \cdot \chi$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$. Für $a \in C_0(X)$ mit $\chi(a) = 1$ gilt $0 \leqslant \rho(a^*a) = \lambda \cdot \chi(a^*a) = \lambda$ und außerdem $\rho(a^*a) \leqslant \chi(a^*a) = 1$, womit $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ ist. Daraus folgt, dass χ rein ist. $\square$

7.7 Definition. Sei X ein hausdorffscher lokalkonvexer Vektorraum, das heißt X ist ein topologischer Vektorraum und die Topologie ist durch eine punkte trennende Familie $(p_\lambda)_\Lambda$ von Halbnormen induziert. Sei $C \subset X$ eine nichtleere, (kompakte,) konvexe Teilmenge und sei $F \subset C$ eine nichtleere konvexe Teilmenge. F heißt ***Seite*** von C, falls gilt: Für $x \in F$, $y, z \in C$ und $t \in (0,1)$ gilt

$$x = t \cdot y + (1-t) \cdot z \implies y, z \in F$$

$x \in C$ heißt ***Extrempunkt*** von C, falls $\{x\}$ eine Seite von C ist. Wir schreiben

$$\partial_e C := \big\{\text{Extrempunkte von } C\big\}$$

7.8 Proposition. Seien X, C wie oben.

(i) C ist eine Seite von C.

(ii) Eine nichtleerer Durchschnitt von Seiten ist wieder eine Seite.

(iii) Für eine Seite F von C gilt $\partial_e F \subset \partial_e C$.

BEWEIS: Alle drei Aussagen ergeben sich direkt aus der Definition. □

7.9 Lemma. Seien X und C wie oben und $\varphi\colon X \to \mathbb{C}$ ein stetiges lineares Funktional. Setze $M := \sup_{x\in C} \operatorname{Re}\varphi(x)$. Dann ist $F := \{x \in C \mid \varphi(x) = M\}$ eine kompakte Seite von C.

BEWEIS: Da C kompakt ist, existiert ein $x_0 \in C$, sodass $\operatorname{Re}\varphi(x_0) = M$, also ist $F \neq \emptyset$. Offensichtlich ist F konvex. Da φ stetig ist, ist $F \subset C$ abgeschlossen. Seien nun $x \in F$, $y, z \in C$ und $t \in (0, 1)$ mit $x = t \cdot y + (1-t) \cdot z$. Falls y oder z nicht in F liegt, so gilt $\operatorname{Re}\varphi(y) < M$ oder $\operatorname{Re}\varphi(z) < M$. Damit ist

$$M = \operatorname{Re}\varphi(x) = t \cdot \operatorname{Re}\varphi(y) + (1-t) \cdot \operatorname{Re}\varphi(z) < M$$

Dies ist ein Widerspruch, also müssen y und z in F liegen und damit ist F eine Seite. □

7.10 Satz (KREIN-MILMAN). Sei X ein hausdorffscher lokalkonvexer Vektorraum und $C \subset X$ eine nichtleere, kompakte, konvexe Teilmenge. Dann gilt

nach Mark Grigorjewitsch KREIN und David MILMAN

$$C = \overline{\operatorname{conv}(\partial_e C)}$$

BEWEIS: Sei $\Lambda := \{\text{kompakte Seiten von } C\}$. Dann ist $C \in \Lambda$, das heißt $\Lambda \neq \emptyset$. Λ ist partiell geordnet bezüglich $\supset$. Sei $\Gamma \subset \Lambda$ eine totalgeordnete Teilmenge, dann gilt unter der Annahme $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} \gamma = \emptyset$

$$C = C \setminus \bigcap_{\gamma\in\Gamma} \gamma = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \underbrace{C \setminus \gamma}_{\text{offen in } C} \overset{C \text{ kpt.}}{=\!=} \bigcup_{i=1}^{n} C \setminus \gamma_i \overset{\text{totalgeord.}}{=\!=} C \setminus \gamma_0 \neq C$$

Damit ist $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} \gamma \neq \emptyset$ eine kompakte Seite von C und Γ besitzt eine untere Schranke in Λ. Also ist Λ induktiv geordnet und mit dem Lemma von Zorn folgt die Existenz eines minimalen Elements F_0. Behauptung: $F_0 = \{x_0\}$ für ein $x_0 \in C$. Angenommen es gäbe $x_0 \neq y_0 \in F_0$. Dann existiert $\varphi\colon X \to \mathbb{C}$ stetig und linear mit $\operatorname{Re}\varphi(x_0) \neq \operatorname{Re}\varphi(y_0)$ (Hahn-Banach für lokalkonvexe Vektorräume[6]). Dann ist

$$F_1 := \left\{x \in F_0 \;\middle|\; \operatorname{Re}\varphi(x) = M = \sup_{x\in F_0} \operatorname{Re}\varphi(x)\right\}$$

eine kompakte Seite von F_0 nach Lemma 7.9 und Proposition 7.8. Es gilt $F_1 \subset F_0$, also folgt wegen der Minimalität $F_0 = F_1$ und damit $M = \operatorname{Re}\varphi(x_0) = \operatorname{Re}\varphi(y_0)$. Dies ist ein Widerspruch und somit kann F_0 nur genau ein Element $x_0 \in \partial_e C$ besitzen.

Angenommen es gibt ein $z \in C \setminus \overline{\operatorname{conv}(\partial_e C)}$. Dann existiert (wieder nach Hahn-Banach für lokalkonvexe Räume[7]) ein stetiges lineares $\psi\colon X \to \mathbb{C}$ mit

$$\sup\left\{\operatorname{Re}\psi(y) \;\middle|\; y \in \overline{\operatorname{conv}(\partial_e C)}\right\} < \operatorname{Re}\psi(z)$$

Setze $M' := \sup_{x\in C} \operatorname{Re}\psi(x)$ und $F' := \{x \in C \mid \operatorname{Re}\psi(x) = M'\}$. Dann ist F' eine kompakte Seite von C nach Lemma 7.9. Wie oben sieht man, dass F' einen Extrempunkt y_0 besitzt, der dann auch ein Extrempunkt von C ist, also $y_0 \in \partial_e C$.

$$M' = \operatorname{Re}\psi(y_0) \leqslant \sup\left\{\operatorname{Re}\psi(y) \;\middle|\; y \in \overline{\operatorname{conv}(\partial_e C)}\right\} < \operatorname{Re}\psi(z) \leqslant M'$$

Dies ist ein Widerspruch und damit folgt die Behauptung. □

[6] siehe zum Beispiel [Mur90, Cor. A.9, S. 271]
[7] siehe [Mur90, Th. A.7, S. 270]

7.11 Satz. Sei A eine C^*-Algebra und $S := \{\varphi \in A^* \mid \varphi \text{ ist positiv}, \|\varphi\| \leqslant 1\}$. Dann ist S konvex und w^*-kompakt. Weiter gilt

$$\partial_e S = PS(A) \cup \{0\} \quad \text{und} \quad S = \overline{\operatorname{conv}(\partial_e S)}^{w^*}$$

Falls A unital ist, so gilt $\partial_e(S(A)) = PS(A)$ und $S(A) = \overline{\operatorname{conv}(PS(A))}^{w^*}$.

Beweis: Es ist $S \subset B^1(A^*)$ w^*-abgeschlossen, wobei $B^1(A^*)$ nach Banach-Alaoglu w^*-kompakt ist. Also ist S auch w^*-kompakt. Offensichtlich ist S außerdem konvex. Wir zeigen nun, dass für die Extrempunkte von S gilt: $\partial_e S = PS(A) \cup \{0\}$:

- Es gilt $0 \in \partial_e S$: Falls $0 = t \cdot \varphi + (1-t) \cdot \psi$ mit $\varphi, \psi \in S$ und $t \in (0,1)$, so gilt

$$\varphi\big|_{A_+} = \psi\big|_{A_+} = 0 \implies \varphi = \psi = 0$$

- Es gilt $PS(A) \subset \partial_e S$: Sei $\rho \in PS(A)$ und es gelte $\rho = t \cdot \varphi + (1-t) \cdot \psi$ mit $\varphi, \psi \in S$ und $t \in (0,1)$. Dann gilt $t \cdot \varphi, (1-t) \cdot \psi \leqslant \rho$, also folgt

$$t \cdot \varphi = \lambda_\varphi \cdot \rho \quad \text{und} \quad (1-t) \cdot \psi = \lambda_\psi \cdot \rho$$

  für geeignete Skalare $\lambda_\varphi, \lambda_\psi \in [0,1]$. Es gilt $1 = \|\rho\| \leqslant t \cdot \|\varphi\| + (1-t) \cdot \|\psi\| \leqslant 1$, also ist $\|\varphi\| = \|\psi\| = 1$. Damit folgt weiter $t = \lambda_\varphi$ und $(1-t) = \lambda_\psi$ und somit ist $\varphi = \rho = \psi$, also $\rho \in \partial_e S$.

- Es gilt $\partial_e S \setminus \{0\} \subset PS(A)$: Für $0 \neq \tau \in \partial_e S$ ist $0 < \|\tau\| \leqslant 1$. Es gilt dann

$$\tau = \|\tau\| \cdot \underbrace{\frac{1}{\|\tau\|} \cdot \tau}_{\in S} + \big(1 - \|\tau\|\big) \cdot 0$$

  Falls $\|\tau\| < 1$, so ist $\|\tau\| \in (0,1)$ und $\tau = 0$, da τ ein Extrempunkt ist. Dies ist ein Widerspruch und es folgt also $\tau \in S(A)$. Sei nun $0 \neq \rho \leqslant \tau$ ein positives Funktional auf A. Dann gilt $1 - \|\rho\| = \lim_\lambda \tau(e_\lambda) - \rho(e_\lambda) = \|\tau - \rho\|$, wobei $(e_\lambda)_\Lambda \subset A$ eine approximative Eins ist. Es folgt

$$\tau = \|\rho\| \cdot \underbrace{\frac{1}{\|\rho\|} \cdot \rho}_{\in S} + \big(1 - \|\rho\|\big) \cdot \underbrace{\frac{1}{\|\tau - \rho\|} \cdot (\tau - \rho)}_{\in S}$$

  Da $\tau \in \partial_e S$ ist, folgt $\tau = {}^1/_{\|\rho\|} \cdot \rho$ und somit $\|\rho\| \cdot \tau = \rho$, also ist $\tau \in PS(A)$.

Nach dem Satz von Krein-Milman (7.10) ist $S = \overline{\operatorname{conv}(\partial_e S)}^{w^*}$. Sei nun A unital. Dann ist $S(A)$ nichtleer, konvex und w^*-kompakt, denn aus A unital folgt $\|\varphi\| = \varphi(\mathbb{1})$. Mit Krein-Milman folgt also

$$S(A) = \overline{\operatorname{conv}\big(\partial_e(S(A))\big)}^{w^*}$$

Aber $S(A) \subset S$ ist eine Seite, also gilt

$$PS(A) = S(A) \cap \partial_e S \overset{7.8(iii)}{=\!=} \partial_e(S(A))$$

□

7.12 Satz. Sei A eine C^*-Algebra und $0 \neq a \in A_+$. Dann existiert $\rho \in PS(A)$ mit $\rho(a) = \|a\|$.

Beweis: Die folgende Menge mit S wie in Satz 7.11 ist w^*-abgeschlossen und konvex:

$$F := \big\{\varphi \in S \,\big|\, \varphi(a) = \|a\|\big\} \subset S$$

F ist nichtleer nach Satz 5.5 und w^*-kompakt nach Banach-Alaoglu. Mit Krein-Milman folgt, dass F einen Extrempunkt ρ besitzt. Wie in Lemma 7.9 zeigt man, dass F eine Seite von S ist. Nach Proposition 7.8 ist ρ ein Extrempunkt von S. Da $\rho \neq 0$ ist, folgt also $\rho \in PS(A)$ nach Satz 7.11. □

7.13 Korollar. Sei A eine C*-Algebra und $a \in A$. Dann existiert eine irreduzible Darstellung $(\mathcal{H}, \pi)$ von A mit $\|a\| = \|\pi(a)\|$.

Beweis: Ohne Einschränkungen sei $a \neq 0$. Nach Satz 7.12 existiert ein reiner Zustand $\rho \in PS(A)$ mit $\rho(a^*a) = \|a^*a\| = \|a\|^2$. Die GNS-Darstellung $(\mathcal{H}_\rho, \pi_\rho)$ ist irreduzibel nach Satz 7.5. Es gilt

$$\|a\|^2 = \rho(a^*a) = \langle \xi_\rho\,,\, \pi_\rho(a^*a)\xi_\rho \rangle = \|\pi_\rho(a)\xi_\rho\|^2 \leqslant \|\pi_\rho(a)\|^2 \leqslant \|a\|^2 \qquad \square$$

7.14 Korollar. Sei $B \subset A$ eine C*-Unteralgebra und $\rho \in PS(B)$. Dann existiert eine Fortsetzung $\rho' \in PS(A)$. Falls $B \subset_{\text{her}} A$, so ist ρ' eindeutig bestimmt.

Beweis: Die Menge $F := \{\varphi \in S(A) \mid \varphi|_B = \rho\}$ ist nichtleer nach Satz 5.7 und es ist $F \subset S$ w*-abgeschlossen, also auch w*-kompakt (vergleiche Satz 7.11). Weiter ist F auch wieder konvex. F ist nun eine Seite von

$$S = \{\varphi\colon A \to \mathbb{C} \mid \text{ positiv, linear, } \|\varphi\| \leqslant 1\}$$

wie in Aufgabe 5 von Blatt 12 gezeigt (siehe Anhang A.11). Mit Krein-Milman und Proposition 7.8 folgt, dass ein $\rho' \in \partial_e F \subset \partial_e S \setminus \{0\} = PS(A)$ existiert. Die Eindeutigkeit folgt direkt mit Satz 5.8. $\square$

7.15 Proposition. Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots \eta_n \in \mathcal{H}$, wobei $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ ein Orthonormalsystem bildet. Dann existiert ein $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit $x(\xi_i) = \eta_i$ für $i = 1, \dots, n$ und

$$\|x\| \leqslant \sqrt{2n} \cdot \max_{i=1,\dots,n} \|\eta_i\|$$

Falls $y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_{sa}$ mit $y(\xi_i) = \eta_i$ existiert, so kann man x selbstadjungiert wählen.

Beweis: Wir benutzen in diesem Beweis die aus Quantenphysik stammende *Bra-Ket-Notation*. Setze also $x := \sum_{i=1}^n |\eta_i\rangle\langle\xi_i|$, wobei der Operator $|\eta\rangle\langle\xi| \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ gegeben ist durch

$$\Big(|\eta\rangle\langle\xi|\Big)(\zeta) := \langle \xi, \zeta \rangle \cdot \eta$$

Dann gilt $x(\xi_i) = \eta_i$ für $i = 1, \dots, n$, da die ξ_i orthogonal sind. Für $\xi \in \mathcal{H}$ gilt weiter

$$\begin{aligned} \|x\xi\| = \left\| \sum_{i=1}^n \langle \xi_i \mid \xi \rangle \eta_i \right\| \leqslant \sum_{i=1}^n |\langle \xi_i \mid \xi \rangle| \cdot \|\eta_i\| &\overset{\text{Hölder}}{\leqslant} \left(\sum_{i=1}^n |\langle \xi_i \mid \xi \rangle|^2 \cdot \sum_{i=1}^n \|\eta_i\|^2 \right)^{1/2} \\ &\leqslant \|\xi\| \cdot \sqrt{n} \cdot \max_i \|\eta_i\| \end{aligned}$$

Es folgt $\|x\| \leqslant \sqrt{n} \cdot \max_i \|\eta_i\|$. Existiert nun $y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_{sa}$ mit $y(\xi_i) = \eta_i$, dann gilt

$$x = \sum_{i=1}^n |\eta_i\rangle\langle\xi_i| = \sum_{i=1}^n |y\xi_i\rangle\langle\xi_i| = y \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n |\xi_i\rangle\langle\xi_i| \right)}_{=:p} = yp$$

wobei p die Projektion auf $\operatorname{span}\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ ist. Dann ist $x' := yp + py - pyp$ selbstadjungiert und es gilt $x'\xi_i = \eta_i + p\eta_i - p\eta_i = \eta_i$. Für die Norm erhalten wir

$$\begin{aligned} \|x'\|^2 = \|yp + py - pyp\|^2 = \big\|(yp + py - pyp)(yp + py - pyp)\big\| &= \big\|ypy + py(\mathbb{1} - p)yp\big\| \\ &\leqslant \|ypy\| + \big\|py(\mathbb{1} - p)^2 yp\big\| \\ &\leqslant \|xx^*\| + \|x^*x\| = 2 \cdot \|x\|^2 \\ &\leqslant 2 \cdot n \cdot \big(\max_i \|\eta_i\|\big)^2 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir insgesamt die gewünschte Abschätzung. $\square$

7.16 Satz (Kadisons Transitivitätssatz). Sei A eine C^*-Algebra und $\pi\colon A \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ eine irreduzible Darstellung. Seien $\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_n \in \mathcal{H}$, wobei die ξ_i linear unabhängig sind. Dann existiert ein $x \in A$ mit $\pi(x)(\xi_i) = \eta_i$ für $i = 1, \ldots, n$.

- Falls $y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_{sa}$ existiert mit $y(\xi_i) = \eta_i$, so kann man auch $x \in A_{sa}$ wählen.
- Falls A und π unital sind und es ein $u \in \mathcal{U}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ gibt mit $u(\xi_i) = \eta_i$, so kann man x unitär wählen (tatsächlich sogar $x = e^{ih}$ mit $h \in A_{sa}$).

Beweis: Wir zeigen verschiedene Spezialfälle, die wir schrittweise verallgemeinern:

Teil I. Seien zunächst die ξ_i orthonormal und es existiere ein $y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_{sa}$ mit $y(\xi_i) = \eta_i$. Wir dürfen wegen Linearität $\max_i \|\eta_i\| \leqslant (2n)^{-1/2}$ annehmen. Zu $\varepsilon > 0$ definiere

$$U_\varepsilon := \left\{ z \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \;\middle|\; \|z(\xi_i)\| < \varepsilon, i = 1, \ldots, n \right\}$$

Dann ist U_ε eine stark-offene Umgebung von $0 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Es ist $\pi(A)$ s.o.-dicht in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, wie in einem kleinen Exkurs in Anhang A.12 gezeigt. Mit Kaplansky folgt, dass

$$\overline{\pi(A^1_{sa})}^{\text{s.o.}} = \mathcal{B}(\mathcal{H})^1_{sa}$$

Insbesondere gilt: Zu $w \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_{sa}$ existiert $w' \in A_{sa}$ mit $\pi(w') - w \in U_\varepsilon$ und $\|w'\| \leqslant \|w\|$. Nach Proposition 7.15 existiert $v_0 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_{sa}$ mit $v_0(\xi_i) = \eta_i$ und $\|v_0\| \leqslant \sqrt{2n} \cdot \max_i \|\eta_i\| \leqslant 1$. Also existiert ein $x_0 \in A_{sa}$ mit $\pi(x_0) - v_0 \in U_{1/(2\sqrt{2n})}$ und $\|x_0\| \leqslant 1$. Wir konstruieren nun induktiv $(x_k)_k \subset A_{sa}$, $(v_k)_k \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})_{sa}$ mit

$$\|x_k\|, \|v_k\| \leqslant 2^{-k} \qquad \pi(x_k) - v_k \in U_{2^{-(k+1)}(2n)^{-1/2}} \qquad v_k(\xi_i) = \big(v_{k-1} - \pi(x_{k-1})\big)(\xi_i)$$

x_0, und v_0 sind bereits konstruiert. Falls auch $x_0, \ldots, x_r, v_0, \ldots, v_r$ bereits konstruiert sind, so existiert nach Proposition 7.15 ein $v_{r+1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_{sa}$ mit $v_{r+1}(\xi_i) = (v_r - \pi(x_r))(\xi_i)$ für $i = 1, \ldots, n$ und

$$\|v_{r+1}\| \leqslant \sqrt{2n} \cdot \max_{i=1,\ldots,n} \big\| \big(v_r - \pi(x_r)\big)(\xi_i) \big\| \leqslant \sqrt{2n} \cdot 2^{-(r+1)}(2n)^{-1/2} = 2^{-(r+1)}$$

Also existiert $x_{r+1} \in A_{sa}$ mit $\pi(x_{r+1}) - v_{r+1} \in U_{2^{-(r+2)} \cdot (2n)^{-1/2}}$ und $\|x_{r+1}\| \leqslant 2^{-(r+1)}$. Dies schließt die Induktion ab. Nach Konstruktion konvergiert $x := \sum_{r=0}^\infty x_r$ in A_{sa} und es gilt

$$\begin{aligned}
\eta_i - \pi(x)(\xi_i) &= \lim_{k\to\infty} \left(\eta_i - \sum_{r=0}^k \pi(x_r)\xi \right) \\
&= \lim_{k\to\infty} \left(\underbrace{\left(\underbrace{\big(v_0(\xi_i) - \pi(x_0)(\xi_i)\big)}_{=v_1(\xi_i)} - \pi(x_1)(\xi_i) \right)}_{=v_2(\xi_i)} - \ldots - \pi(x_k)(\xi_i) \right) \\
&= \lim_{k\to\infty} v_{k+1}(\xi_i) = 0
\end{aligned}$$

Damit ist dieser Spezialfall bewiesen.

Teil II. Wir nehmen nun nicht mehr an, dass y wie oben existiert, behalten die Annahme über die Orthogonalität aber bei. Wir wissen aus Proposition 7.15, dass $\tilde{y} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit $\tilde{y}\xi_i = \eta_i$ für $i = 1, \ldots, n$ existiert. Dann sind $\operatorname{Re}\tilde{y}, \operatorname{im}\tilde{y} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_{sa}$ und nach Teil I. existieren $x', x'' \in A_{sa}$ mit

$$\pi(x')\xi_i = (\operatorname{Re}\tilde{y})\xi_i \quad \text{ und } \quad \pi(x'')\xi_i = (\operatorname{im}\tilde{y})\xi_i$$

Für $x := x' + i \cdot x''$ gilt dann $\pi(x)\xi_i = \tilde{y}\xi_i = \eta_i$ für alle i.

Teil III. Falls die ξ_i nicht notwendigerweise orthogonal, aber linear unabhängig sind, wähle eine Orthonormalbasis $\{\xi_1', \dots, \xi_n'\}$ für $\operatorname{span}\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$. Falls $y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_{sa}$ mit $y\xi_i = \eta_i$ existiert, so existiert nach Teil I. ein $x \in A_{sa}$ mit $\pi(x)\xi_i' = y\xi_i'$. Aber dann gilt auch $\pi(x)\xi_i = y\xi_i = \eta_i$ für $i = 1, \dots, n$. Falls kein solches y existiert, wende Teil II. an.

Teil IV. Seien nun A und π unital und es existiere $u \in \mathcal{U}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ mit $u(\xi_i) = \eta_i$. Wie in Teil III. reduziert man das Problem auf den Fall, dass die ξ_i ein Orthonormalsystem bilden. Da u unitär ist, ist dann auch $\{\eta_1, \dots, \eta_n\}$ ein Orthonormalsystem. Sei

$$\mathcal{H}_0 := \operatorname{span}\{\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_n\}$$

Wir können $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ und $\{\eta_1, \dots, \eta_n\}$ zur Orthonormalbasen $\{\xi_1, \dots, \xi_m\}$ bzw. $\{\eta_1, \dots, \eta_m\}$ von $\mathcal{H}_0$ ergänzen. Dann existiert offensichtlich $u' \in \mathcal{U}(\mathcal{B}(\mathcal{H}_0)) \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit $u'\xi_i = \eta_i$. u' ist diagonalisierbar, also existiert eine Orthonormalbasis $\{\zeta_1, \dots, \zeta_m\}$ von $\mathcal{H}_0$, sodass $u'(\zeta_i) = \lambda_i \cdot \zeta_i$ für $\lambda_i \in \mathbb{T} \subset \mathbb{C}$. Damit existieren $t_i \in \mathbb{R}$ mit $e^{it_i} = \lambda_i$ und wir finden $h \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)_{sa} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})_{sa}$ mit $u' = e^{ih}$ und $h\zeta_i = t_i \cdot \zeta_i$. Nach Teil I. existiert ein $d \in A_{sa}$ mit $\pi(d)\zeta_i = h\zeta_i$. Setze nun $x := e^{id} \in A$. Dann ist x offensichtlich unitär und es gilt

$$x\zeta_i = e^{id}\zeta_i = e^{it_i} \cdot \zeta_i = \lambda_i \cdot \zeta_i = u'\zeta_i$$

Also stimmt x auf $\mathcal{H}_0$ mit u' überein und es folgt $x\xi_i = \eta_i$ wie gewünscht. □

7.17 Korollar. Eine irreduzible Darstellung $(\mathcal{H}, \pi)$ einer C^*-Algebra A ist algebraisch irreduzibel.

Beweis: Nach Satz 7.16 gilt $\pi(A)\xi = \mathcal{H}$ für jedes $0 \neq \xi \in \mathcal{H}$. Also ist $\pi(A)(\mathcal{H}_0) = \mathcal{H}$ oder $\{0\}$ für jeden Unterraum $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$. Also gibt es keinen nichttrivialen invarianten Unterraum. □

7.18 Definition. Sei A eine C^*-Algebra. Ein Ideal $J \lhd A$ heißt ***primitiv***, falls $J = \ker \pi$ für eine irreduzible Darstellung π ist. Wir schreiben $\operatorname{Prim} A := \{J \lhd A \text{ primitiv}\}$. Die ***Hülle-Kern-Topologie*** bzw. ***Jacobson-Topologie*** auf $\operatorname{Prim} A$ ist gegeben durch: Für $R \subset \operatorname{Prim} A$ sei

$$\overline{R} = \operatorname{hull}\big(\ker(R)\big) = \left\{ J \in \operatorname{Prim} A \;\middle|\; \left(\bigcap_{J \in R} J \right) \subset J \right\}$$

siehe [Mur90, Th. 5.4.6, S. 159] für einen Beweis, dass dies eine eindeutige Topologie definiert

7.19 Satz. Für eine kommutative C^*-Algebra A gilt $\Omega(A) \approx \operatorname{Prim} A$.

Beweis: Jeder Charakter $\chi \in \Omega(A)$ ist eine irreduzible Darstellung $\chi \colon A \to \mathbb{C} = \mathcal{B}(\mathbb{C})$, da $\mathbb{C}$ keine echten Unterräume besitzt. Wir haben also eine Abbildung

$$\begin{aligned} \gamma \colon \Omega(A) &\longrightarrow \operatorname{Prim} A \\ \chi &\longmapsto \ker \chi \end{aligned}$$

Für die Injektivität von γ seien $\ker \chi_1 = \ker \chi_2$ für $\chi_1, \chi_2 \in \Omega(A)$. Dann kommutiert folgendes Diagramm

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "\chi_1"] \arrow[dr] \arrow[ddd, equal] & & \mathbb{C} \arrow[ddd, "\cong"] \\
& A/\ker \chi_1 \arrow[ur, "\cong"] \arrow[d, equal] & \\
& A/\ker \chi_2 \arrow[dr, "\cong"] & \\
A \arrow[rr, "\chi_2"'] \arrow[ur] & & \mathbb{C}
\end{tikzcd}$$

Der Isomorphismus in der rechten Spalte ist durch Multiplikation mit einem $c \in \mathbb{C}$ gegeben. Sei $(e_\lambda)_\Lambda \subset A$ eine approximative Eins, dann gilt $\lim_\lambda \chi_i(e_\lambda) = \|\chi\| = 1$ und somit muss $c = 1$ gelten, woraus direkt $\chi_1 = \chi_2$ folgt. Für die Surjektivität sei $J \in \operatorname{Prim} A$ mit $J = \ker \pi$ für $\pi\colon A \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ irreduzibel. Da A abelsch ist, gilt dann $\pi(A) \subset \pi(A)' = \mathbb{C} \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \cong \mathbb{C}$. Also ist π ein Charakter.

Um zu zeigen, dass γ ein Homöomorphismus ist, zeigen wir, dass γ abgeschlossen ist. Zum einen gilt nach Aufgabe 3 von Blatt 2 $\Omega(A) \approx \Omega(C_0(\Omega(A)))$ und nach Gelfand auch $A \cong C_0(\Omega(A))$. Wir erhalten also folgendes Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\chi \arrow[rrr, mapsto] \arrow[ddd] \arrow[dr, phantom, "\in"] & & & \ker\chi \arrow[dl, phantom, "\in"] \\
& \Omega(A) \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\approx"] & \operatorname{Prim} A \arrow[d, "\approx"] & \\
& \Omega\big(C_0(\Omega(A))\big) \arrow[r] \arrow[dl, phantom, "\in"] & \operatorname{Prim} C_0(\Omega(A)) \arrow[dr, phantom, "\in"] & \\
\mathrm{ev}_\chi \arrow[rrr, mapsto] & & & \ker \mathrm{ev}_\chi
\end{tikzcd}$$

Es ist $\ker \mathrm{ev}_\chi = \big\{ f \in C_0(\Omega(A)) \,\big|\, f(\chi) = 0 \big\} =: J_\chi \lhd C_0(\Omega(A))$. Sei nun $X \subset \Omega(A)$ abgeschlossen und R das Bild von Y in $\operatorname{Prim} C_0(\Omega(A))$. Es gilt dann

$$\bigcap_{J \in R} J = \bigcap_{\chi \in X} J_\chi = \underbrace{\big\{ f \in C_0(\Omega(A)) \,\big|\, f|_X \equiv 0 \big\}}_{=: J_X \lhd C_0(\Omega(A))} \cong C_0(\Omega(A) \setminus X)$$

Sei nun $J \in \operatorname{Prim} C_0(\Omega(A))$ mit $J_X \subset J$. Nach Aufgabe 4 von Blatt 7 ist $J = J_Y$ für $Y \subset \Omega(A)$ abgeschlossen und es folgt $Y \subset X$. Da J_X primitiv ist, folgt wegen der oben gezeigten Surjektivität und der Tatsache, dass alle Charaktere in $\Omega\big(C_0(\Omega(A))\big)$ Auswertungsabbildungen sind, $\{y\} = Y \subset X$ und somit ist $J \in R$. Nach Definition der Jacobson-Topologie ist R also abgeschlossen. $\square$

8. Beispiele!

(Mit Ausrufezeichen)

8.1 Satz. Eine endlichdimensionale C^*-Algebra A ist von der Form

$$M_{r_1} \oplus \ldots \oplus M_{r_s} \qquad r_1, \ldots, r_s \in \mathbb{N}$$

Beweis: Sei zunächst A einfach und $\pi\colon A \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ irreduzibel. Für $0 \neq \xi \in \mathcal{H}$ ist $\mathcal{H} \overset{7.16}{=} \pi(A)\xi$ endlichdimensional und es gilt $\pi(A) = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ wieder nach Satz 7.16. Da A einfach ist, muss π bereits ein Isomorphismus sein und es folgt $\mathcal{B}(\mathcal{H}) \cong \mathcal{B}(\mathbb{C}^r) = M_r$.

Falls A nicht einfach ist, so enthält A ein Ideal $\{0\} \neq J \neq A$ mit minimaler Dimension. Dann ist J eine endlichdimensionale C^*-Algebra und enthält keine nichttrivialen Ideale, ist also einfach. Mit dem ersten Teil folgt also $J \cong M_{r_1}$ für ein $r_1 \in \mathbb{N}$. J ist insbesondere unital, sodass $J = J \cdot \mathbb{1}_J = A \cdot \mathbb{1}_J = \mathbb{1}_J \cdot A$ gilt und damit

$$A = A\big(\mathbb{1}_J + (\mathbb{1}_{A^\sim} - \mathbb{1}_J)\big) = A\mathbb{1}_J + A(\mathbb{1}_{A^\sim} - \mathbb{1}_J) \cong \underbrace{\mathbb{1}_J A \mathbb{1}_J}_{\cong M_{r_1}} \oplus \underbrace{(\mathbb{1}_{A^\sim} - \mathbb{1}_J)A(\mathbb{1}_{A^\sim} - \mathbb{1}_J)}_{\lhd A}$$

Das rechte Ideal hat eine kleinere Dimension als A und damit sind wir fertig. □

8.2 Beispiel. Für eine C^*-Algebra A sei

$$\begin{aligned} \iota_n^A\colon M_n(A) &\longrightarrow M_{n+1}(A) \\ X &\longmapsto \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Schon gesehen: Für $A = \mathbb{C}$ ist $\varinjlim(M_n, \iota_n^{\mathbb{C}}) \cong \mathcal{K}\big(\ell^2(\mathbb{N})\big) = \mathcal{K}$. Für ein beliebiges A schreiben wir

$$\mathcal{K} \otimes A := \varinjlim\big(M_n(A), \iota_n^A\big)$$

Die Notation werden wir später rechtfertigen. Es gilt $\mathcal{K} \cong \mathcal{K} \otimes M_r \cong \mathcal{K} \otimes \mathcal{K}$ und $\mathcal{K} \otimes M_r \cong M_r(\mathcal{K})$. Für die primitiven Ideale gilt

$$\operatorname{Prim} A \approx \operatorname{Prim}(\mathcal{K} \otimes A)$$

Zwei C^*-Algebren A und B heißen ***stabil isomorph***, falls $\mathcal{K} \otimes A \cong \mathcal{K} \otimes B$. Tensorieren mit den Kompakten Operatoren liefert „nichtkommutativen Platz" für direkte Summen von Moduln. Dies liefert eine abelsche Halbgruppe und daraus erhält man mit der Grothendiek-Konstruktion[8] eine abelsche Gruppe. Das ist die Grundlage der sogenannten K-Theorie.

8.3 Beispiel. Betrachte $A := C([0,1], M_2)$ und die Unteralgebren

$$\begin{aligned} B &:= \left\{ f \in A \,\middle|\, f(1) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{C} \right\} \\ C &:= \left\{ f \in A \,\middle|\, f(1) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \right\} \\ D &:= \left\{ f \in A \,\middle|\, f(1) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, f(0) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \right\} \end{aligned}$$

Wir können uns $\operatorname{Prim} A$ als die Charaktere auf A vorstellen und in diesem Fall sogar als Intervall, wobei die Punkte Evaluierungen $\mathrm{ev}_f\colon A \to M_2$ entsprechen. In $\operatorname{Prim} B$ gilt zusätzlich $\mathrm{ev}_1\colon B \to$

[8] siehe `https://de.wikipedia.org/wiki/Grothendieck-Gruppe`

$\mathbb{C}\cdot\mathbb{1}_{M_2} \cong \mathbb{C}$. Für Prim C enthält am rechten Rand des Intervalls zwei Punkte, einmal die Auswertung, die λ_1 ausgibt, und die, die λ_2 ausgibt. Damit ist Prim C nicht hausdorffsch, aber immerhin T_0. Für Prim D erhält man einen Kreis, der an einer Stelle einen verdoppelten Punkt hat, der nur zu einer Seite hin offen ist.

8.4 Beispiel. Sei nun $A := \big\{ f \in C_0([0,\infty),\mathcal{K}) \;\big|\; f(t) \in \iota_{n,\infty}(M_n) \text{ für } t \in [n-1,n) \big\}$. Dann ist

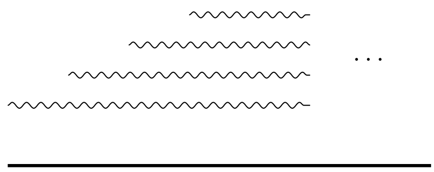

Abbildung 5: Eine – leicht esoterische – Zeichnung der in Beispiel 8.4 betrachteten C*-Algebra

Prim $A \approx [0,\infty)$ hausdorffsch. Für jedes $t_0 \in \operatorname{Prim} A$ existieren eine Umgebung U von t_0 und $f \in A$, sodass $f(t)$ eine Projektion von Rang 1 ist für alle $t \in U$. A hat eine „stetige Spur“. Für A, B mit stetiger Spur und $\operatorname{Prim} A \approx \operatorname{Prim} B$ gilt

$$\mathcal{K} \otimes A \cong \mathcal{K} \otimes B \iff \underbrace{H^3(\operatorname{Prim} A)}_{\ni \delta(A)} \cong \underbrace{H^3(\operatorname{Prim} B)}_{\ni \delta(B)}$$

Die Elemente aus den Kohomologiegruppen heißen Dixmier-Douady-Klassen.

8.5 Beispiel.

(i) M_r ist erzeugt von den Matrixeinheiten $e_{ij} \in M_r$, $i,j = 1,\dots,r$. Die e_{ij} erfüllen Relationen

$$R_{M_r} = \{ e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il}, e_{ij}^* = e_{ji} \mid i,j,k,l \in 1,\dots,r \}$$

Falls A eine weitere C*-Algebra ist mit Elementen f_{ij}, $i,j = 1,\dots,r$, welche die Relationen R_{M_r} erfüllen, so existiert genau ein *-Homomorphismus $\pi\colon M_r \to M$ mit $\pi(e_{ij}) = f_{ij}$. Die Erzeuger e_{ij} mit den Relationen R_{M_r} erfüllen also eine universelle Eigenschaft. (M_r ist einfach $\implies \pi$ ist frei, falls $f_{ij} \neq 0$)

(ii) Sei $X = \{x_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ eine Menge. Eine Relation mit Erzeugern in X ist ein Ausdruck der Form $p(x_{\gamma_1},\dots,x_{\gamma_n},x_{\gamma_1}^*,\dots,x_{\gamma_n}^*) = 0$, wo p ein Polynom in $2n$ nichtkommutierenden Variablen ist. Allgemeiner betrachtet man auch Relationen $[p,\varepsilon]$ der Form

$$\big\| p(x_{\gamma_1},\dots,x_{\gamma_n},x_{\gamma_1}^*,\dots,x_{\gamma_n}^*) \big\| \leqslant \varepsilon \quad , \qquad \varepsilon > 0$$

Eine Darstellung von (X,R) (wo R eine Menge von Relationen ist) ist ein *-Homomorphismus $\pi\colon {}^*\text{-}\operatorname{Alg}(X) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$, der jede Relation erfüllt, das heißt

$$\Big\| p\big(\pi(x_{\gamma_1}),\dots,\pi(x_{\gamma_n}),\pi(x_{\gamma_1})^*,\dots,\pi(x_{\gamma_n})^*\big) \Big\| \leqslant \varepsilon$$

Das Paar (X,R) heißt *zulässig*, falls es für jedes x_γ ein $c_\gamma \geqslant 0$ gibt mit $\|\pi(x_\gamma)\| \leqslant c_\gamma$ für jede Darstellung π. Für zulässige (X,R) definieren wir eine Halbnorm auf *-Alg(X) durch

$$\|x\| := \sup_{\pi \text{ Darst.}} \|\pi(x)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}$$

Definiere $C^*(X \mid R) := \overline{{}^*\text{-}\operatorname{Alg}(X)}^{\|\cdot\|}$ (Vervollständigung bezüglich einer Halbnorm).

(iii) Beispiele für Konstruktionen mit Erzeugern und Relationen:

a) $M_r \cong C^*\big(\{e_{ij}\} \mid R_{M_r}\big)$.

b) $C^*\big(\{\mathbb{1}, u\} \mid uu^* = \mathbb{1}, u^*u = \mathbb{1}, \mathbb{1}\mathbb{1} = \mathbb{1}, \mathbb{1}u = u, u\mathbb{1} = u, \mathbb{1}^* = \mathbb{1}\big) \cong C(S^1)$

c) $A_\theta := C^*\big(\{u, v, 1\} \mid u, v \text{ unitär}, uv = e^{2\pi i\theta}vu\big)$ für $\theta \in [0, 1]$ ist die ***Drehungsalgebra***.

d) Die Relation $x = x^*$ ist nicht zulässig (da die Norm den Wert unendlich haben kann). Dies lässt sich aber durch eine zusätzliche Relation reparieren

e) Die Relationen $x = x^*$, $p = p^*$ und $xp - px = i \cdot \mathbb{1}$ sind auch nicht zulässig, denn sie lassen sich nur mit unbeschränkten Operatoren darstellen.

f) Es gilt

$$\begin{aligned}&C^*\big(\{p, q\} \mid p = p^*, p = p^2, f = f^*, f = f^2\big)\\ \cong&\{f \in C([0, 1], M_2) \mid f(0) = \operatorname{diag}(\lambda, \mu), f(1) = \operatorname{diag}(\kappa, 0), \lambda, \mu, \kappa \in \mathbb{C}\}\end{aligned}$$

g) Sei G eine diskrete Gruppe. Die ***volle Gruppen-C^*-Algebra*** ist gegeben durch

$$C^*(G) := C^*(X \mid R) \quad \text{mit} \quad X = \{u_g \mid g \in G\} \quad R = \big\{u_g \text{ unitär}, u_g^* = u_{g^{-1}}, u_g u_h = u_{gh}\big\}$$

Alternativ kann man auch den Gruppenring betrachten:

$$\mathbb{C}[G] := \left\{\sum_{g\in G} \alpha_g \cdot g \;\middle|\; \text{nur endlich viele } \alpha_g \neq 0\right\} = \big\{\alpha\colon G \to C \;\big|\; \alpha \text{ hat endlichen Träger}\big\}$$

mit Faltung, das heißt $(\alpha * \beta)(h) = \sum_{g\in G} \alpha(g)\beta(g^{-1}h)$ und Involution $\alpha^*(g) = \overline{\alpha(g^{-1})}$. Die unitären Darstellungen $\tilde{\pi}\colon G \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ stehen in Bijektion zu den *-Darstellungen $\pi\colon \mathbb{C}[G] \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Die C^*-Norm auf $\mathbb{C}[G]$ ist gegeben durch

$$\|x\|_u = \sup_{\substack{\tilde{\pi} \text{ unitäre}\\ \text{Darst.}}} \|\pi(x)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}$$

Es folgt $C^*(G) \cong \overline{\mathbb{C}[G]}^{\|\cdot\|_u}$. $\|\cdot\|_u$ ist tatsächlich eine Norm, denn $\mathbb{C}[G]$ besitzt eine injektive Darstellung, wie wir nun sehen werden:

8.6 Beispiel. Sei G wieder eine diskrete Gruppe

$$\ell^2(G) = \left\{\xi\colon G \to \mathbb{C} \;\middle|\; \|\xi\|_2 := \Big(\sum\nolimits_G |\xi(g)|^2\Big)^{1/2} < \infty\right\}$$

mit der Orthonormalbasis $\{\delta_g \mid g \in G\}$. Dann ist die linksreguläre Darstellung $\tilde{\lambda}\colon G \to \mathcal{B}\big(\ell^2(G)\big)$ gegeben durch $\tilde{\lambda}(g)(\delta_h) = \delta_{gh}$, das heißt $\big(\tilde{\lambda}(g)(\xi)\big)(h) = \xi\big(g^{-1}h\big)$. $\tilde{\lambda}(g)$ ist unitär für jedes g. Mit der Bijektion erhält man dann eine injektive *-Darstellung $\lambda\colon \mathbb{C}[G] \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Wir definieren die ***reduzierte Gruppen-C^*-Algebra*** durch

$$C^*_{\text{red}}(G) := C^*\big(\tilde{\lambda}(G)\big) = C^*\big(\lambda(\mathbb{C}[G])\big) \subset \mathcal{B}\big(\ell^2(G)\big)$$

und weiter $L(G) := \overline{C^*_{\text{red}}(G)}^{\text{w.o.}} \subset \mathcal{B}\big(\ell^2(G)\big)$. Diese Algebra ist die ***Gruppen-von-Neumann-Algebra***. Man kann zeigen, dass $C^*(G) \twoheadrightarrow C^*_{\text{red}}(G)$ genau dann ein Isomorphismus ist, wenn G *amenabel* ist. Die freie Gruppe in n Variablen $\mathbb{F}_n$ ist nicht amenabel und man kann zeigen

$$C^*_{\text{red}}(\mathbb{F}_n) \not\cong C^*_{\text{red}}(\mathbb{F}_m) \quad m \neq n$$

Ein offenes Problem ist die Frage

$$¿\ L(\mathbb{F}_n) \cong L(\mathbb{F}_m)\ ?$$

8.7 Beispiel. Sei X ein kompakter Hausdorffraum und $\overline{\alpha}$ ein Homöomorphismus $X \to X$. Dann erhält man $\alpha \in \mathrm{Aut}(C(X))$ und man kann setzen

$$\alpha^n(f) = f \circ \overline{\alpha}^{-n} \qquad n \in \mathbb{Z}$$

Sei $\pi\colon C(X) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ eine treue Darstellung. Setzt man $\tilde{\mathcal{H}} := \ell^2(\mathbb{Z}, \mathcal{H})$, so erhält man $\tilde{\pi}\colon C(X) \to \mathcal{B}(\tilde{\mathcal{H}})$ durch

$$\tilde{\pi}(f)(\xi)(n) = \pi\big(\alpha^{-n}(f)\big)\big(\xi(u)\big) \implies \tilde{\pi}(f) = \begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & \pi(\alpha^{-1}f) & & & \\ & & \pi(f) & & \\ & & & \pi(af) & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \in \mathcal{B}(\tilde{\mathcal{H}})$$

Sei $u \in \mathcal{B}(\tilde{\mathcal{H}})$ der bilaterale Shift. Wir definieren das ***verschränkte Produkt*** durch

$$C(X) \rtimes_\alpha \mathbb{Z} := C^*\big(\tilde{\pi}(C(X)), u\big) \subset \mathcal{B}\big(\tilde{\mathcal{H}}\big)$$

Die Frage ist nun, welchen Eigenschaften des dynamischen Systems $(X, \overline{\alpha})$ sind aus $C(X) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ ablesen lassen. Ein Ergebnis solcher Überlegungen ist $C(S^1) \rtimes_{\mathrm{rot}_\theta} \mathbb{Z} \cong A_\theta$.

A. Anhang

Hier findet man einige ausgewählte Beweise und Ergänzungen, auf die der Vorlesung hingewiesen wurde und die teilweise im Rahmen von Übungsaufgaben bearbeitet wurden. Sie stammen also auch hauptsächlich aus den Übungen und deswegen sei hier noch einmal darauf hingewiesen, dass für die Richtigkeit keine Garantie übernommen wird!

Die Reihenfolge richtet sich nach dem Auftreten der Verweise in der Vorlesung.

A.1. Beweis von Satz 3.7 (vii)

Dies war außerdem die Übungsaufgabe 1 b) von Blatt 5.

Wenn A unital ist und $a \in A$ positiv und invertierbar, dann folgt aus $a \leqslant b$ stets, dass auch b invertierbar ist und $0 \leqslant b^{-1} \leqslant a^{-1}$ gilt.

Beweis: Da a invertierbar ist, ist 0 nicht im Spektrum von a enthalten. Da $\sigma(a)$ kompakt ist, ist die äquivalent dazu, dass ein $\lambda > 0$ existiert mit $\sigma(a) \subset [\lambda, \infty)$. Weiter gilt Wir haben damit folgende Äquivalenzen

$$\sigma(a) \subset [\lambda, \infty) \iff \sigma(a - \lambda) \subset [0, \infty) \iff a - \lambda \geqslant 0 \iff a \geqslant \lambda$$

Da $b \geqslant a \geqslant \lambda$, gilt also auch $0 \notin \sigma(b)$ und b ist invertierbar.

Das $\sigma(a^{-1}) = \left\{\lambda^{-1} \,\middle|\, \lambda \in \sigma(a)\right\}$, sind a^{-1} und b^{-1} wieder positiv. Insbesondere existieren die Quadratwurzeln von den Inversen. Mit Satz 3.7 (v) folgt aus $a \leqslant b$ also

$$\mathbb{1} = a^{-1/2} a a^{-1/2} \leqslant a^{-1/2} b a^{-1/2} =: c$$

Nach Gelfand folgt aus $c \geqslant \mathbb{1}$, dass c invertierbar ist und $c^{-1} \leqslant \mathbb{1}$ gilt. Wieder mit Satz 3.7 (v) erhalten wir

$$c^{-1} = a^{1/2} b^{-1} a^{1/2} \leqslant \mathbb{1} \implies b^{-1} \leqslant (a^{1/2})^{-1} (a^{1/2})^{-1} = a^{-1} \qquad \square$$

A.2. Die unitären Elemente spannen die gesamte C^*-Algebra auf

Dies war die Aussage von Übungsaufgabe 1 a) von Blatt 5.

Für $a \in A_{sa}$ mit $\|a\| \leqslant 1$ ist $u = a + i(\mathbb{1} - a^2)^{1/2}$ unitär. Weiter gilt $\operatorname{span} \mathcal{U}(A) = A$.

Beweis: Es gilt $\sigma(\mathbb{1} - a^2) = 1 - \sigma(a^2) \subset [0, \infty)$ nach Satz 1.4, also ist $\mathbb{1} - a^2$ positiv und die Wurzel existiert. Weiter haben wir, da $C^*(a, \mathbb{1})$ abelsch ist

$$uu^* = \left(a + i(\mathbb{1} - a^2)^{1/2}\right)\left(a - i(\mathbb{1} - a^2)^{1/2}\right) = a^2 - i \cdot a(\mathbb{1} - a^2)^{1/2} + i \cdot (\mathbb{1} - a^2)^{1/2} a + (\mathbb{1} - a^2) = \mathbb{1}$$

Genauso folgt $u^* u = \mathbb{1}$ und somit ist u unitär. Da $a = 1/2(u - u^*)$ gilt $\operatorname{span} \mathcal{U}(A) = \operatorname{span} A_{sa} = A$. $\square$

A.3. Alternativer Beweis von Lemma 3.11

Sei A eine C^*-Algebra. Dann ist $\Lambda := \{a \in A_+ \mid \|a\| < 1\}$ gerichtet bezüglich „$\leqslant$“.

Beweis ([Mur90, S. 78])**:** Wenn $a \in A_+$, dann ist $\mathbb{1} + a$ invertierbar in $\tilde{A}$, da 0 nicht im Spektrum enthalten sein kann. Weiter gilt $a(\mathbb{1} + a)^{-1} = \mathbb{1} - (\mathbb{1} + a)^{-1}$. Wir zeigen nun

$$a, b \in A_+ \text{ und } a \leqslant b \implies a(\mathbb{1} + a)^{-1} \leqslant b(\mathbb{1} + b)^{-1}$$

Aus $a \leqslant b$ folgt nämlich $\mathbb{1} + a \leqslant \mathbb{1} + b$ und damit $(\mathbb{1} + b)^{-1} \leqslant (\mathbb{1} + a)^{-1}$ nach Satz 3.7 (vii). Daraus erhalten wir die Ungleichung $\mathbb{1} - (\mathbb{1} + a)^{-1} \leqslant \mathbb{1} - (\mathbb{1} + b)^{-1}$, nach der Gleichung für $a(\mathbb{1} + a)^{-1}$

oben also die Behauptung. Durch Betrachtung des Gelfandisomorphismus für $C^*(a, \mathbb{1})$ sieht man, dass $a(\mathbb{1}+a)^{-1} \in \Lambda$ ist.

Seien nun $a, b \in \Lambda$ beliebig. Dann setzen wir $a' := a(\mathbb{1}-a)^{-1}$ und $b' := b(\mathbb{1}-b)^{-1}$. Hier überlegt man sich die Invertierbarkeit und Positivität entweder auch mit Gelfand oder der von-Neumann-Reihe (siehe 1.5). Genauso ist auch $\mathbb{1}+a'$ invertierbar und damit auch $\mathbb{1}+a'+b'$ (wieder mit 3.7). Dann gilt nach Gelfand

$$c := (a'+b')(\mathbb{1}+a'+b')^{-1} \in \Lambda$$

Da offensichtlich $a' \leqslant a'+b'$ gilt, folgt aus der oben gezeigten Implikation $a'(\mathbb{1}+a')^{-1} \leqslant c$. Es gilt nun

$$a'(\mathbb{1}+a')^{-1} = a(\mathbb{1}-a)^{-1}\big(\mathbb{1}+a(\mathbb{1}-a)^{-1}\big)^{-1} \overset{1.3}{=} a(\mathbb{1}-a)^{-1}\big((\mathbb{1}-a)^{-1}\big)^{-1} = a$$

womit wir $a \leqslant c$ gezeigt haben. Die Relation $b \leqslant c$ folgt genauso, also ist Λ gerichtet. □

A.4. Beweis von Proposition 4.7

Dies war die Übungsaufgabe 1 c) von Blatt 7.

Sei A eine C^*-Algebra, $B \subset A$ eine C^*-Unteralgebra und $J \lhd A$ ein Ideal. Dann ist $B + J$ eine C^*-Unteralgebra.

Beweis: Die kanonische Projektion $\pi\colon A \to A/J$ ist ein *-Homomorphismus. Die Einschränkung $\rho := \pi|_B$ ist dann auch ein *-Homomorphismus und nach Satz 4.6 ist $\rho(B) \subset A/J$ eine C^*-Unteralgebra. Das Urbild von $\rho(B)$ unter π ist nun eine *-Algebra, da π surjektiv ist; es ist aber auch abgeschlossen, da π stetig ist, also ist $\pi^{-1}(\rho(B))$ eine C^*-Unteralgebra und wir müssen nur noch $\pi^{-1}(\rho(B)) = B + J$ zeigen.

Wenn $a \in \pi^{-1}(\rho(B))$, dann ist $\pi(a) = \rho(b)$ für ein $b \in B$ und es gilt $a - b \in \ker \pi = J$. Also ist $a = b + a - b \in B + J$. Ist umgekehrt $a \in B + J$, also $a = b + j$, dann gilt

$$\pi(a) = \pi(b) + \underbrace{\pi(j)}_{=0} = \rho(b)$$

Also ist auch $a \in \pi^{-1}(\rho(B))$ wie gewünscht. □

A.5. Kleinste hereditäre C^*-Unteralgebra, die $a \in A_+$ enthält

Dies ist eine der Aussagen von Korollar 4.12.

bei Projektionen kann auf den Abschluss verzichtet werden

Sei A eine C^*-Algebra und $a \in A_+$. Danni ist $\overline{aAa}$ die kleinste C^*-Unteralgebra, die a enthält.

Beweis: $\overline{aAa}$ ist offensichtlich eine C^*-Unteralgebra, denn a ist selbstadjungiert. Wir rechnen nun Satz 4.10 nach: Ein beliebiges Element in $\overline{aAa}$ ist der Grenzwert eines Netzes $(ab_\lambda a)_\lambda \subset aAa$. Zu zeigen ist also, dass für $d \in A$

$$\lim_\lambda (ab_\lambda a)\, d\, \lim_\mu (ac_\mu a) \in \overline{aAa}$$

ist, sofern die Limiten existieren. Betrachte zunächst eine konstante Folge c_μ. Dann ist

$$\lim_\lambda \underbrace{ab_\lambda adac_\mu a}_{\in aAa} \in \overline{aAa}$$

Bildet man von diesen Elementen den Limes über μ, so erhalten wir ein konvergentes Netz. Da $\overline{aAa}$ vollständig ist, ist der Grenzwert in $\overline{aAa}$ enthalten und es folgt $\overline{aAa} \subset_{\text{her}} A$.

Wir zeigen, dass $a \in \overline{aAa}$ ist. Sei dazu $(e_\lambda)_\Lambda$ eine approximative Eins von A. Dann gilt

$$a^2 = \lim_\lambda \underbrace{a e_\lambda a}_{\in aAa} \in \overline{aAa}$$

a^2 ist positiv, also ist die Quadratwurzel a auch positiv und ist insbesondere ein Element von $\overline{aAa}_+$.

Es bleibt zu zeigen, dass $\overline{aAa}$ die kleinste hereditäre C^*-Unteralgebra ist, die a enthält. Sei also B eine kleine hereditäre C^*-Unteralgebra mit $a \in B \subseteq \overline{aAa}$. Da B hereditär ist, ist für $c \in A$ beliebig nach Satz 4.10 $aca \in B$ und damit ist $aAa \subseteq B$, also $B = \overline{aAa}$. □

A.6. Positive Funktionale sind stetig

Dies begründet die Bezeichnung von positiven linearen $\varphi\colon A \to \mathbb{C}$ als „Funktionale", siehe Definition 5.1. Dies war Aufgabe 1 von Blatt 8.

Sei $\varphi\colon A \to \mathbb{C}$ positiv und linear für eine C^*-Algebra A. Dann ist φ *-erhaltend und beschränkt.

Beweis: Wir können $a \in A$ schreiben als $a = b_+ - b_- + i \cdot (c_+ - c_-)$ mit $b_\pm, c_\pm \in A_+$. Es gilt

$$\begin{aligned}\varphi(a^*) = \varphi(b_+ - b_- - i \cdot (c_+ - c_-)) &= \varphi(b_+) - \varphi(b_-) - i \cdot (\varphi(c_+) - \varphi(c_-)) \\ &= \varphi(b_+)^* - \varphi(b_-)^* - i \cdot (\varphi(c_+)^* - \varphi(c_-)^*) = \varphi(a)^*\end{aligned}$$

Da φ positiv und linear ist, erhält φ Ungleichungen. Weiter gilt $a \leqslant \|a\| \cdot \mathbb{1}$ nach Gelfand. Damit erhalten wir

$$\|\varphi\| = \sup_{a \in A^1_+} \|\varphi(a)\| \leqslant \sup_{a \in A^1_+} \|\varphi(\|a\| \cdot \mathbb{1})\| = \sup_{a \in A^1_+} \|a\| \cdot \|\varphi(\mathbb{1})\| \leqslant \sup_{a \in A^1_+} \|\varphi(\mathbb{1})\| < \infty$$ □

A.7. Die GNS-Darstellung ist zyklisch

Dies war Bestandteil von Blatt 8, Aufgabe 2 und komplettiert die Ausführungen zur GNS-Darstellung in Satz 5.11 und Satz 5.12).

Wir zeigen, dass der Grenzwert $\xi_\varphi = \lim_\lambda e_\lambda + N_\varphi$ für eine beliebige approximative Eins $(e_\lambda)_\Lambda \subset A^1_+$ existiert, eindeutig ist und ein zyklischer Vektor für die GNS-Darstellung ist (vgl. Satz 5.11). Weiter wird gezeigt, dass folgende Identität für $a \in A$ gilt:

$$\varphi(a) = \langle \xi_\varphi\, ,\, \pi_\varphi(a)\xi_\varphi \rangle \qquad [\dagger]$$

Beweis: Da $(e_\lambda)_\Lambda$ aufsteigend ist, gilt $e_\mu - e_\lambda \geqslant 0$ für $\lambda \leqslant \mu$. Weiter gilt $e_\mu - e_\lambda \leqslant \mathbb{1}_{A^\sim}$. Nach Satz 3.7 (v) mit $c = (e_\mu - e_\lambda)^{1/2}$ folgt $(e_\mu - e_\lambda)^2 \leqslant e_\mu - e_\lambda$. Es gilt nun

$$\|e_\mu - e_\lambda + N_\varphi\|^2 = \varphi\big((e_\mu - e_\lambda)^2\big) \leqslant \varphi(e_\mu - e_\lambda) = \varphi(e_\mu) - \varphi(e_\lambda) \xrightarrow{5.4} 0$$

da postive Operatoren Ungleichungen erhalten (warum?). Also ist $(e_\lambda + N_\varphi)_\Lambda$ ein Cauchy-Netz und konvergiert gegen ξ_φ, da $\mathcal{H}_\varphi$ vollständig ist. Um zu zeigen, dass ξ_φ zyklisch ist, reicht es $\pi_\varphi(a)\xi_\varphi = a + N_\varphi$ für $a \in A$ zu zeigen. Es gilt

$$\pi_\varphi(A)\xi_\varphi = \lim_\lambda \dot{\pi}_\varphi(a)(e_\lambda + N_\varphi) = \lim_\lambda (a e_\lambda + N_\varphi) = a + N_\varphi$$

Wegen Linearität genügt es nun $[\dagger]$ für positive Elemente a^*a zu zeigen: Da ξ_φ zyklisch ist, gilt

hier ist es wichtig, dass das Skalarprodukt in der zweiten Koordinate linear ist!

$$\varphi(a^*a) = \langle a + N_\varphi\, ,\, a + N_\varphi \rangle = \langle \pi_\varphi(a)\xi_\varphi\, ,\, \pi_\varphi(a)\xi_\varphi \rangle = \langle \xi_\varphi\, ,\, \pi_\varphi(a^*a)\xi_\varphi \rangle$$ □

A.8. Äquivalente Eigenschaften von Projektionen

Die folgenden Äquivalenzen sind beim Umgang mit Projektionen oft äußerst nützlich, zum Beispiel bei der nachfolgenden Aussage zu Netzen von Projektionen oder beim Umgang mit minimalen Projektionen.

Sei $A \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ eine C^*-Algebra und $p, q \in A$ Projektionen. Dann sind äquivalent:

(i) $p \leqslant q$

(ii) $pq = p$

(iii) $qp = p$

(iv) $p(\mathcal{H}) \subseteq q(\mathcal{H})$

(v) $\|p(\xi)\| \leqslant \|q(\xi)\|$ für alle $\xi \in \mathcal{H}$

(vi) $q - p$ ist eine Projektion

Beweis ([Mur90, Th. 2.3.2, S. 50]): Die Äquivalenz der Aussagen (ii), (iii) und (iv) ist klar. Offensichtlich gilt (ii) $\implies$ (vi) $\implies$ (i). Angenommen (i) gilt, dann erhalten wir

$$\|q(\xi)\|^2 - \|p(\xi)\|^2 = \left\langle (q-p)\xi\,,\, \xi \right\rangle = \left\|(q-p)^{1/2}\xi\right\| \geqslant 0$$

und somit muss dann auch (v) gelten. Gilt nun (v), so erhalten wir $\|p(1-q)\xi\| \leqslant \left\|(q-q^2)\xi\right\| = 0$ und somit $p = pq$, womit (ii) gilt und die Behauptung bewiesen ist. □

A.9. Monotones Netz von Projektionen

Dies war Bestandteil von Blatt 9, Aufgabe 4 und komplettiert Satz 6.2.

Sei $(p_\lambda)_\Lambda$ ein aufsteigendes/absteigendes Netz von Projektionen. Sei q die Projektion auf $\overline{\bigcup_\lambda p_\lambda(\mathcal{H})}$ und r die Projektion auf $\bigcap_\lambda p_\lambda(\mathcal{H})$. Dann gilt

(i) Falls $(p_\lambda)_\Lambda$ aufsteigend ist, dann gilt $p_\lambda \xrightarrow{\text{s.o.}} q$.

(ii) Falls $(p_\lambda)_\Lambda$ absteigend ist, dann gilt $p_\lambda \xrightarrow{\text{s.o.}} r$.

Beweis:

(i) Wir müssen zeigen, dass $p_\lambda\xi \to q\xi$ für alle $\xi \in \mathcal{H}$. Für Projektionen gilt nach Anhang A.8

$$p_\lambda \leqslant p_\mu \iff p_\lambda(\mathcal{H}) \subset p_\mu(\mathcal{H})$$

Jedes $\xi \in \mathcal{H}$ lässt sich eindeutig schreiben als $\xi = \xi_1 + \xi_2$ mit $\xi_1 \in \overline{\bigcup_\lambda p_\lambda(\mathcal{H})}$ und $\xi_2 \in \bigcap_\lambda p_\lambda(\mathcal{H})^\perp$. Wähle eine Folge $(x_n)_\mathbb{N} \to \xi_1$. Sei nun $\varepsilon > 0$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\|\xi_1 - x_n\| < \varepsilon/2$ für $n \geqslant n_0$ und passend dazu $\lambda_0 \in \Lambda$ mit $x_{n_0} \in p_{\lambda_0}(\mathcal{H})$. Dann ist $x_{n_0} \in p_\lambda(\mathcal{H})$ für $\lambda \geqslant \lambda_0$ und es gilt

$$\begin{aligned}\|p_\lambda\xi - q\xi\| = \|p_\lambda\xi_1 + p_\lambda\xi_2 - \xi_1\| = \|p_\lambda\xi_1 - \xi_1\| &= \|p_\lambda(\xi_1 - x_{n_0} + x_{n_0}) - \xi_1\| \\ &\leqslant \|p_\lambda(\xi_1 - x_{n_0})\| + \|x_{n_0} - \xi_1\| \\ &\leqslant \underbrace{\|p_\lambda\|}_{=1} \cdot \|\xi_1 - x_{n_0}\| + \|x_{n_0} - \xi_1\| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon\end{aligned}$$

Damit ist $p_\lambda \xrightarrow{\text{s.o.}} q$ gezeigt.

(ii) Da p_λ ein Projektion ist, ist $\mathbb{1} - p_\lambda$ die Projektion auf $p_\lambda(\mathcal{H})^\perp$. Weiter ist dann $(\mathbb{1} - p_\lambda)_\Lambda$ ein aufsteigendes Netz von Projektionen und nach (i) konvergiert dies stark gegen die Projektion auf $\overline{\bigcup_\lambda p_\lambda(\mathcal{H})^\perp}$. Damit konvergiert dann aber auch p_λ stark gegen die Projektion auf

$$\overline{\bigcup_\lambda p_\lambda(\mathcal{H})^\perp}^{\perp} = \bigcap_\lambda p_\lambda(\mathcal{H})$$

Also gilt $p_\lambda \xrightarrow{\text{s.o.}} r$ wie gewünscht. □

A.10. Normabschätzung im Beweis der Polarzerlegung, 6.11

Für $x \in A \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ setzen wir $u_n := x\big(1/n \cdot \mathbb{1} + |x|\big)^{-1}$. Dann ist

$$u_n^* u_n = \big(1/n \cdot \mathbb{1} + |x|\big)^{-1} x^* x \big(1/n \cdot \mathbb{1} + |x|\big)^{-1}$$

Weiter ist $(1/n \cdot \mathbb{1} + |x|)^2 = 1/n^2 \cdot \mathbb{1} + 2/n \cdot |x| + x^*x$ und damit offensichtlich $x^*x \leqslant (1/n \cdot \mathbb{1} + |x|)^2$. Eine Anwendung von Satz 3.7(v) mit $c = \big(1/n \cdot \mathbb{1} + |x|\big)^{-1}$ liefert dann $u_n^* u_n \leqslant \mathbb{1}$. Insgesamt folgt also mit der C^*-Gleichung $u_n \in A^1$ für $n \in \mathbb{N}$.

A.11. Aufgabe 5 von Blatt 12

Diese Übungsaufgabe komplettiert Korollar 7.14.

Sei $B \subset A$ eine C^*-Unteralgebra und $\rho \in PS(B)$ ein reiner Zustand. Dann ist $F := \{\varphi \in S(A) \mid \varphi|_B = \rho\}$ eine Seite von $S := \{\psi \in A^* \mid \psi \text{ positiv}, \|\psi\| \leqslant 1\}$.

Beweis: Wie in Satz 7.11 erläutert, ist S konvex, w^*-kompakt und nichtleer ($0 \in S$). Es seien nun $\theta \in F$, $\varphi_1, \varphi_2 \in S$ und $t \in (0,1)$ mit

da $\|\theta\| = 1$ und $\|\varphi_i\| \leqslant 1$, folgt $\varphi_i \neq 0$

$$\theta = t \cdot \varphi_1 + (1-t) \cdot \varphi_2$$

Nach Definition der Operatornorm gilt $\|\varphi_i|_B\| \leqslant \|\varphi_i\| \leqslant 1$ für $i = 1, 2$. Einschränken auf B liefert

$$\rho = \theta\big|_B = t \cdot \varphi_1\big|_B + (1-t) \cdot \varphi_2\big|_B \qquad [\#]$$

Betrachtet man diese Gleichung in der Norm erhält man

$$1 = \|\rho\| = \left\|t \cdot \varphi_1\big|_B + (1-t) \cdot \varphi_2\big|_B\right\| \leqslant t \cdot \left\|\varphi_1\big|_B\right\| + (1-t) \cdot \left\|\varphi_2\big|_B\right\| \leqslant 1$$

Es folgt $\|\varphi_1|_B\| = \|\varphi_2|_B\| = 1$ und damit auch $\|\varphi_1\| = \|\varphi_2\| = 1$. φ_1 und φ_2 sind also Zustände. Aus **[#]** folgt weiter $t \cdot \varphi_1|_B \leqslant \rho$ und $(1-t)\varphi_2|_B \leqslant \rho$. Da ρ ein reiner Zustand ist, existieren $\lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]$ mit

$$t \cdot \varphi_1\big|_B = \lambda_1 \cdot \rho \quad \text{und} \quad (1-t) \cdot \varphi_2\big|_B = \lambda_2 \cdot \rho$$

Da $\|\rho\| = \|\varphi_1|_B\| = \|\varphi_2|_B\| = 1$ und $t, (1-t) \in (0,1)$, folgt $\varphi_1|_B = \varphi_2|_B = \rho$. Damit sind φ_1 und φ_2 bereits in F enthalten und die Behauptung folgt. □

A.12. Das Bild irreduzibler Darstellungen ist stark dicht

Dies war ein kleiner Exkurs im Beweis von Kadisons Transitivitätssatz, 7.16. Tatsächlich ist die Aussage bezüglich der Dichtheit auch eine weitere Äquivalenz zu Satz 7.3 (i).

Sei $(\mathcal{H}, \pi)$ eine irreduzible Darstellung einer C^*-Algebra A. Dann ist $\pi(A)$ s.o.-dicht in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$

Beweis: Da $(\mathcal{H}, \pi)$ irreduzibel ist, folgt mit Satz 7.3, dass $\pi(A)' = \mathbb{C} \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}$, also $\pi(A)'' = \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Falls $\mathbb{1}_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \in \pi(A)$, so ist nach Lemma 6.6

$$\overline{\pi(A)}^{\text{s.o.}} = \pi(A)'' = \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

Im nichtunitalen Fall betrachten wir eine approximative Eins $(e_\lambda)_\Lambda$ für A. Dann konvergiert $\pi(e_\lambda)$ gegen eine Projektion $p \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ und $p\mathcal{H} \subset \mathcal{H}$ ist ein abgeschlossener $\pi(A)$-invarianter Unterraum. Da π irreduzibel ist, ist $p\mathcal{H} = \mathcal{H}$ und $p = \mathbb{1}_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}$. Weiter ist

$$\mathbb{1}_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \in \overline{\pi(A)}^{\text{s.o.}} = \Big(\overline{\pi(A)}^{\text{s.o.}}\Big)'' \supseteq \pi(A)'' = \mathcal{B}(\mathcal{H}) \qquad \square$$

Index

Die *Seitenzahlen* sind mit Hyperlinks versehen und somit anklickbar

Literatur

[Mur90] Gerard J. Murphy. *C*-Algebras and Operator Theory*. Academic Press, 1990 (siehe S. 15, 36, 43, 47, A, D).

[Ped79] Gert Kjærgård Pedersen. *C*-Algebras and their Automorphism Groups*. London Mathematical Society Monographs. Academic Press, 1979 (siehe S. 14, 38).

Abbildungsverzeichnis