Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

Fachbereich 10
Mathematik und
Informatik

Skript Analysis I.

Mitschrift der Vorlesung „Analysis I.“ von Prof. Dr. Wilhelm Winter

Jannes Bantje

12. Januar 2016

Aktuelle Version verfügbar bei

GitHub

https://github.com/JaMeZ-B/latex-wwu

GitHub ist eine Internetplattform, auf der viele OpenSource-Projekte gehostet werden. Diese Plattform nutzen wir zur Zusammenarbeit, also findet man hier neben den PDFs auch die TeX-Dateien. Außerdem ist über diese Plattform auch direktes Mitarbeiten möglich, siehe nächste Seite.

sciebo die Campuscloud

https://uni-muenster.sciebo.de/public.php?service=files&t=965ae79080a473eb5b6d927d7d8b0462

Sciebo ist ein Dropbox-Ersatz der Hochschulen in NRW, der von der Uni Münster in leitender Position auf Basis der OpenSource-Software Owncloud aufgebaut wurde. Wenn man auf den Link klickt, kann man die Freigabe zum eigenen Speicher hinzufügen und hat dann immer automatisch die aktuellste Version.

Bittorrent Sync

B6WH2DISQ5QVYIRYIEZSF4ZR2IDVKPN3I

BTSync ist ein peer-to-peer Dateisynchronisations-Tool. Dabei werden die Dateien nur auf den Computern der Teilnehmer an einer Freigabe gespeichert. Ein RasPi ist permanent online, sodass stets die aktuellste Version verfügbar ist. Clients gibt es für jedes Betriebssystem. Zugang ist über das obige „Secret“ bzw. den QR-Code möglich.

Vorlesungshomepage

http://wwwmath.uni-muenster.de/u/wilhelm.winter/wwinter/analysis_I.html

Hier ist ein Link zur offiziellen Vorlesungshomepage.

Vorwort — Mitarbeit am Skript

Dieses Dokument ist eine Mitschrift aus der Vorlesung „Analysis I., WiSe 2012“, gelesen von Prof. Dr. Wilhelm Winter. Der Inhalt entspricht weitestgehend dem Tafelanschrieb. Für die Korrektheit des Inhalts übernehme ich keinerlei Garantie! Für Bemerkungen und Korrekturen – und seien es nur Rechtschreibfehler – bin ich sehr dankbar. Korrekturen lassen sich prinzipiell auf drei Wegen einreichen:

- Persönliches Ansprechen in der Uni, Mails an `j.bantje@wwu.de` (gerne auch mit annotieren PDFs) oder Kommentare auf `https://github.com/JaMeZ-B/latex-wwu`.

- *Direktes* Mitarbeiten am Skript: Den Quellcode poste ich auf GitHub (siehe oben), also stehen vielfältige Möglichkeiten der Zusammenarbeit zur Verfügung: Zum Beispiel durch Kommentare am Code über die Website und die Kombination Fork + Pull Request. Wer sich verdient macht oder ein Skript zu einer Vorlesung, die ich nicht besuche, beisteuern will, dem gewähre ich gerne auch Schreibzugriff.

  Beachten sollte man dabei, dass dazu ein Account bei `github.com` notwendig ist, der allerdings ohne Angabe von persönlichen Daten angelegt werden kann. Wer bei GitHub (bzw. dem zugrunde liegenden Open-Source-Programm „`git`“) – verständlicherweise – Hilfe beim Einstieg braucht, dem helfe ich gerne weiter. Es gibt aber auch zahlreiche empfehlenswerte Tutorials im Internet.[1]

- *Indirektes* Mitarbeiten: TeX-Dateien per Mail verschicken.

  Dies ist nur dann sinnvoll, wenn man einen ganzen Abschnitt ändern möchte (zB. einen alternativen Beweis geben), da ich die Änderungen dann per Hand einbauen muss! Ich freue mich aber auch über solche Beiträge!

Hinweis

Verglichen mit den neueren Mitschriften ist dieses Skript in einem deutlich schlechteren Zustand, hauptsächlich in technischer Hinsicht, aber auch die inhaltliche Fehlersuche war bei weitem nicht so intensiv …damals hatte ich gerade erst angefangen mich mit LaTeX zu beschäftigen.

Ich plane nicht, daran in näherer Zukunft etwas zu verändern, da dies ziemlich viel Zeit in Anspruch nehmen würde, die anderweitig besser investiert ist. Sollte jemand Lust dazu haben, wäre die wichtigste Baustelle das Inhaltsverzeichnis, in dem kurze Beschreibungen der Sätze, Lemmata, etc. fehlen. Außerdem müssen die Labels eindeutig werden. Wie man dies handhaben kann, sieht man gut in den Dateien der späteren Semester.

[1] zB. `https://try.github.io/levels/1/challenges/1`, ist auf Englisch, aber dafür interaktives LearningByDoing

Inhaltsverzeichnis

0 Mengen und Abbildungen

0.1 Cantor über Mengen:

„Zusammenfassung vor bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung und unseres Denkens zu einem Ganzen“

0.2 Definition

(i) Teilmenge

$$A \subset B \quad \text{falls gilt} \quad x \in A \Rightarrow x \in B$$

(ii) Vereinigung

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \quad \text{oder} \quad x \in B\}$$

(iii) Durchschnitt

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \quad \text{und} \quad x \in B\}$$

(iv) Differenz

$$A \backslash B := \{x \mid x \in A \quad \text{und} \quad x \notin B\}$$

(v) Potenzmenge, Menge aller Teilmengen von A

$$\mathcal{P}(A) := \{C \mid C \subset A\}$$

(vi) kartesisches Produkt

$$A \times B := \{(x, y) \mid x \in A \quad \text{und} \quad y \in B\}$$

(vii) $\emptyset$ sei die leere Menge

0.3 Definition Sei S ein System von Mengen

(i)

$$\underset{M \in S}{\cup} M := \{x \mid x \in M \quad \text{für ein} \quad M \in S\}$$

(ii)

$$\underset{M \in S}{\cap} M := \{x \mid x \in M \quad \text{für jedes} \quad M \in S\}$$

alternativ: Sei $S = (M_i)_{i \in I}$ für eine Indexmenge I

$$\underset{i \in I}{\cup} M_i := \{x \mid x \in M_i \quad \text{für ein} \quad i \in I\}$$

$$\underset{i \in I}{\cap} M_i := \{x \mid x \in M_i \quad \text{für jedes} \quad i \in I\}$$

0.4 Proposition (de Morgensche Regeln) Sei X eine Menge und $S \subset \mathcal{P}(X) \neq \emptyset$ ein nichtleeres System von Teilmengen. Dann gilt:

(i)

$$X \backslash (\bigcup_{M \in S} M) = \bigcap_{M \in S} (X \backslash M)$$

(ii)

$$X \backslash (\bigcap_{M \in S} M) = \bigcup_{M \in S} (X \backslash M)$$

Beweis:

(i)

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow x \in X \backslash (\bigcup_{M \in S} M) \\
&\Leftrightarrow x \in X \quad \text{und} \quad x \notin M \quad \text{für jedes} \quad M \in S \\
&\Leftrightarrow x \in X \backslash M \quad \text{für jedes} \quad M \in S \\
&\Leftrightarrow x \in \bigcap_{M \in S} (X \backslash M)
\end{aligned}$$

(ii) Übung!!!

0.5 Frage: Ist es wichtig, dass S nicht leer ist?

0.6 Definition: Seien X, Y Mengen Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist eine Vorschrift, welche jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$ zuordnet. Wir schreiben dann:

$$y = f(x) \quad \text{oder} \quad x \mapsto y$$

formaler: Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist eine Teilmenge $f \subset X \times Y$ sodass gilt

$$\forall x \in X \;\; \exists!\, y \in Y : (x, y) \in f$$

$\{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y$ heißt auch 'Graph von f'.

Seien X, Y, Z Mengen, $f : X \to Y \quad g : Y \to Z$

Dann ist $g \circ f : X \to Z$

0.7 Definition Seien X, Y Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung, $A \subset X, B \subset Y$ Teilmengen

(i)

$$f(A) := \{y \in Y \mid \exists x \in A : f(x) = y\}$$

In diesem Zusammenhang heißt $f(A)$ auch 'Bild von A unter f'.

(ii)

$$f^{-1}(B) := \{x \in X \mid \exists y \in B : f(x) = y\}$$

In diesem Zusammenhang heißt $f^{-1}(B)$ auch 'Urbild von B unter f'.

0.8 Definition Seien X, Y Mengen, $f : X \to Y$ eine Abbildung

(i) f heißt <u>injektiv</u>, falls gilt:

$$x, x' \in X,\ f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'$$

alternativ:

$$x, x' \in X,\ x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x')$$

(ii) f heißt <u>surjektiv</u>, falls gilt:

$$\forall y \in Y\ \exists x \in X : f(x) = y$$

alternativ:

$$f(X) = Y$$

(iii) f heißt <u>bijektiv</u>, falls f injektiv und surjektiv ist.

0.9 Proposition Sei $f : X \to Y$ bijektiv, dann existiert genau eine Umkehrabbildung (genau ein Inverses) $f^{-1} : Y \to X$ mit der Eigenschaft

$$f \circ f^{-1} = id_y \quad \text{bzw.} \quad f^{-1} \circ f = id_x$$

wobei

$$id_y : Y \to Y, y \mapsto y \quad \text{und} \quad id_x : X \to X, x \mapsto x$$

<u>Beweis:</u>

$$y \mapsto f^{-1}(y) := \text{dasjenige } x \in X \text{ mit } f(x) = y$$

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ ist surjektiv : ein solches } x \text{ existiert} \\ f \text{ ist injektiv : es existiert höchstens ein solches } x \end{array}\right\} = f^{-1} \text{ist wohldefiniert}$$

$$f \circ f^{-1}(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y \quad (\text{dasjenige } x \in X \text{ mit } f(x) = y)$$

Das heißt: $\forall y \in Y \Rightarrow f \circ f^{-1} = id_y$

Analog folgt daraus $f^{-1} \circ f = id_x$

Sein nun $g : Y \to X$ eine weiter Abbildung mit der Eigenschaft $f \circ g = id_y$ und $g \circ f = id_x$. Dann gilt

$$\forall y \in Y \quad f(g(y)) = y \quad \text{d.h. } g(y) \text{ ist dasjenige } x \in X \text{ mit } f(x) = y$$

$$\Longrightarrow g(y) = f^{-1}(y) \Rightarrow g = f^{-1}$$

1 Natürliche Zahlen und vollständige Induktion

1.1 Definition Wir definieren die Menge der natürlichen Zahlen als

$$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \ldots, \}$$

1.2 Exkurs

$$\begin{aligned} 0 &:= \emptyset \\ 1 &:= \{\emptyset\} \quad \text{(Potenzmenge der leeren Menge)} \\ 2 &:= \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\ 3 &:= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset\{\emptyset\}\}\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

1.2.1 Axiom (Axiom der unendlichen Mengen) Es existiert eine Menge N mit:

$$\begin{aligned} &(N1) \quad \text{Die Elemente von } N \text{ sind Mengen} \\ &(N2) \quad \emptyset \in N \\ &(N3) \quad n \in N \Longrightarrow n \cup \{n\} \in N \end{aligned}$$

1.2.2 Satz Es existiert eien kleinste Menge, welche die Eigenschaften $(N1)$, $(N2)$, $(N3)$ erfüllt. Diese Menge nennen wir die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$.

1.2.3 Bemerkung Die Existenz unendlicher Mengen ist nicht trivial!
zum Vergleich: Die Menge aller Mengen $\lightning$.

1.3 Das Prinzip der vollständigen Induktion Es sei $(A(n))_{n \in N}$ ein System von Aussagen. Es gelte:

(IA) $A(0)$ ist wahr

(IS) $\forall n \in N : \underset{\text{(IV)}}{A(n)}$ wahr $\Longrightarrow A(n+1)$ wahr

Dann ist $A(n)$ wahr für alle $n \in N$.

1.4 Beweis 1.3 ist äquivalent zu dem Satz 1.2.2

1.5 Beispiele

(i) $A(n) : \sum\limits_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$

- (IA): $\sum\limits_{k=1}^{0} k = 0 = \dfrac{0(0+1)}{2} \quad \Longrightarrow A(0)$ ist wahr

- (IS): Sei $A(n)$ wahr (IV)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k &= (\sum_{k=1}^{n} k) + (n+1) \\
&\overset{\text{(IV)}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\
&= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\
&= \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} \\
&\Longrightarrow A(n+1) \text{ ist wahr} \\
&\Longrightarrow \text{(IA) und (IS)} \\
&\Longrightarrow A(n) \text{ist wahr für alle } n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

(ii) $A(n)$ Für alle $x \neq 1$ gilt:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}}$$

(Summenformel für die geometrische Reihe)

- (IA): $\sum\limits_{k=0}^{0} x^k = x^0 = 1 = \dfrac{1-x^{0+1}}{1-x} \quad \Longrightarrow A(0)$ ist wahr
- (IS): Sei $A(n)$ wahr (IV)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} x^k &= \left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right) + x^{n+1} \\
&\overset{\text{(IV)}}{=} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1} \\
&= \frac{1-x^{n+1}+(1-x)x^{n+1}}{1-x} \\
&= \frac{1-x^{n+1}+x^{n+1}-x^{n+2}}{1-x} \\
&= \frac{1-x^{(n+1)+1}}{1-x} \\
&\Longrightarrow A(n+1) \text{ ist wahr} \\
&\Longrightarrow A(n) \text{ist wahr für alle } n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

1.6 Definition

(i) Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir:

$$\boxed{n! := \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}$$

$$(0! := \prod_{n=1}^{0} k = 1 \quad \text{nach Konvention})$$

(ii) Für $n, k \in \mathbb{N}$ setzen wir:

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \prod_{j=1}^{k} \frac{n-j+1}{j} \\ &= \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k} \\ &= \frac{\overbrace{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)(n-k)!}^{=n!}}{\underbrace{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}_{=k!}(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\end{aligned}$$

1.7 Proposition

(i) $\binom{n}{k} = 0$ falls $k > n$

(ii) $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{n-k}$ (falls $k \geq 0$)

(iii) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ falls $k < n$

Beweise für (i) und (ii) schenken wir uns…

(iii)

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!\,(n-1-k)!} \\ &= \frac{(n-1)!\,k + (n-1)!\,(n-k)}{k!\,(n-k)!} \\ &= \frac{(n-1)!\,(k+n-k)}{k!\,(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \\ &= \binom{n}{k}\end{aligned}$$

1.8 Satz Die Anzahl der Anordnungen einer n-elementigen Menge ist $n!$
Eine Anordnung der Menge $\{x_1, \ldots, x_n\}$ ist eine Bijektion $\{1, \ldots, n\} \longrightarrow \{x_1, \ldots, x_n\}$

1.8.1 Beweis

- I.A.: $n = 0$
  Es gibt genau eine Abbildung $\emptyset \to \emptyset$, die sogenannte „leere Abbildung" (Abb.: $f \subset \emptyset \times \emptyset = \emptyset$).
  Diese ist bijektiv.

  $$0! = 1$$

  (konkreter für $n = 1$ existiert genau eine Bijektion $\{1\} \longrightarrow \{x_1\}$)

- I.S.: Der Satz sei bewiesen für ein $n \in \mathbb{N}$
  Sei $M := \{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\}$ eine Menge mit $n+1$ Elementen. Gesucht:

$$\underset{\#F}{\text{Mächtigkeit von}}\ F := \Big\{ f : \{1, \ldots, n+1\} \to \{x_1, \ldots, x_{n+1}\} \mid f \text{ bijektiv} \Big\}$$

  Setze: $F_k := \{f \in F \mid f(n+1) = x_k\}$ dann ist

$$\begin{aligned} \#F_k &= \#\Big\{ f : \{1, \ldots, n\} \to M \backslash \{x_k\} \mid f \text{ bijektiv} \Big\} \\ &\overset{\text{(I.V.)}}{=} n! \end{aligned}$$

Außerdem gilt: $F = \dot{\bigcup\limits_{k=1,\ldots,n+1}} F_k$, also:

$$\begin{aligned} \#F = \sum_{k=1}^{n+1} \#F_k = \sum_{k=1}^{n+1} n! &= \underbrace{n! + n! + \ldots + n!}_{n+1} \\ &= (n+1)n! = (n+1)! \end{aligned}$$

1.9 Satz Die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge ist $\binom{n}{k}$. Insbesondere ist $\binom{n}{k}$ ganzzahlig.

1.10 Der Binomische Lehrsatz Für $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\boxed{(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k}$$

Insbesondere:
Für $y = x = 1$

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

Für $x = 1$, $y = -1$

$$0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$$

1.10.1 Beweis

- I.A.: $(n = 0)$

$$(x+y)^0 = 1 = \binom{0}{0} x^0 y^0 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} x^{0-k} y^k$$

- I.S.: Der Satz sei bewiesen für ein $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)^n(x+y) \\
&\overset{\text{(I.V.)}}{=} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k\right) \cdot (x+y) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k\right) + \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1}\right) \\
&= x^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k\right) + \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1}\right) + y^{n+1} \\
&= x^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} x^{n-(k-1)} y^{(k-1)+1}\right) + y^{n+1} \\
&= x^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right) x^{n-k+1} y^k\right) + y^{n+1} \\
&\overset{1.7\text{(iii)}}{=} x^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^{n-k+1} y^k\right) + y^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n-k+1} y^k
\end{aligned}$$

q.e.d.

2 Angeordnete Körper

2.1 Definition Ein Körper $(K, +, \cdot)$ ist eine Menge K mit Abbildungen („Operationen“)

$$\begin{aligned}
+ : K \times K &\longrightarrow K \\
(x, y) &\longmapsto x + y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cdot : K \times K &\longrightarrow K \\
(x, y) &\longmapsto x \cdot y
\end{aligned}$$

sodass gilt:

(A1) $\forall x, y, z \in K : (x+y)+z = x+(y+z)$ (Assoziativität)
(A2) $\forall x, y \in K : x+y = y+x$ (Kommutativität)
(A3) $\exists 0 \in K : \forall x \in K : x+0 = x$ (Existenz der Null)
(A4) $\forall x \in K \;\; \exists -x \in K : x+(-x) = 0$ (Existenz des Inversen)

$\Longrightarrow (K, +)$ ist eine abelsche Gruppe

(M1) $\forall x, y, z \in K \setminus \{0\} : (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (Assoziativität)
(M2) $\forall x, y \in K \setminus \{0\} : x \cdot y = y \cdot x$ (Kommutativität)
(M3) $\exists 1 \in K \setminus \{0\} : \forall x \in K \setminus \{0\} : x \cdot 1 = x$ (Existenz der Eins)
(M4) $\forall x \in K \setminus \{0\}\ \exists x^{-1} \in K : x \cdot x^{-1} = 1$ (Existenz des Inversen)

(D1) $\forall x, y, z \in K : x(y+z) = xy + xz$ (Distributivität)

$\Longrightarrow (K, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe
$\Longrightarrow +$ und $\cdot$ sind kompatibel

2.2 Bemerkung

(i) $0, 1, -x, x^{-1}$ sind durch ihre Eigenschaften eindeutig bestimmt

(ii) $\forall x \in K : -(-x) = x$
$\forall x \in K^* : (x^{-1})^{-1} = x$ $\quad \left(K^* := K \backslash \{0\}\right)$ da x^{-1} Element des Körpers ist

(iii) $\forall x, y \in K : -(x+y) = (-x) + (-y) = -x - y$ (Subtraktion eingeführt)

(iv) $\forall x \in K : x \cdot 0 = 0$

(v) $\forall x, y \in K : x \cdot y = 0 \Longrightarrow x = 0 \vee y = 0$

(vi) $\forall x, y \in K : (-x) \cdot y = -(x \cdot y), \quad (-1)x = -x$

(vii) $\forall x, y \in K : (-x) \cdot (-y) = x \cdot y$

Beweis:

(i) Sei $\bar{0} \in K$ ein Element mit:

$$(\overline{\text{A3}}) \quad \forall x \in K : \bar{0} + x = x$$

$$0 \underset{(\overline{\text{A3}})}{=} \bar{0} + 0 \underset{(\text{A3})}{=} \bar{0}$$

2.3 Beispiele

(i) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$

(ii) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

(iii) $(\mathbb{C}, +, \cdot)$

(iv) $\mathbb{F}_2 := \{0, 1\}$ mit <Tabellen>

(v) $(\mathbb{Z}, +, \cdot), (\mathbb{N}, +, \cdot)$ sind keine Körper
$(\mathbb{Z}\backslash\{0\}, \cdot)$ ist keine abelsche Gruppe
$(\mathbb{N}, +)$ ist keine abelsche Gruppe

2.4 Definition Ein Körper $(K, +, \cdot)$ heißt **angeordneter Körper**, falls eine Teilmenge $K_+^* \subset K$ mit folgenden Eigenschaften existiert:

(O1)

$$\forall x \in K^* : \begin{array}{l} \text{entweder } x \in K_+^* \\ \text{oder } -x \in K_+^* \\ \text{oder } x = 0 \end{array}$$

D.h. K^* ist eine disjunkte Vereinigung von K_+^* und $\{-x \mid x \in K_+^*\}$

(O2)

$$\forall x, y \in K_+^* : x + y \in K_+^*$$

(O3)

$$\forall x, y \in K_+^* : x \cdot y \in K_+^*$$

$(K, +, \cdot)$ heißt **archimedisch angeordnet** falls zusätzlich gilt:

$$\text{(A)} \quad \forall x, y \in K_+^* : \exists n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \cdot x - y \in K_+^*$$

Wir schreiben

$$\begin{aligned} 0 < x, &\quad \text{falls } x \in K_+^* \\ 0 \leq x, &\quad \text{falls } x \in K_+^* \cup \{0\} =: K_+ \\ x < y, &\quad \text{falls } y - x > 0 \\ x \leq y, &\quad \text{falls } y - x \geq 0 \end{aligned}$$

2.5 Bemerkungen Sei $(K, +, \cdot, <)$ ein geordneter Körper. Dann gilt

(i) $<$ ist transitiv, d.h. $x < y < z \Rightarrow x < z$

(ii) $0 < x \Leftrightarrow -x < 0$

(iii) $x < y \Rightarrow (\forall a \in K : x + a < y + a)$

(iv) $x < y, \ x' < y' \Longrightarrow x + x' < y + y'$

(v) $x < y, \ 0 < a \Longrightarrow ax < ay$

(vi) $0 < x < y, \ 0 < a < b \Longrightarrow 0 < ax < by$

(vii) $x \neq 0 \Longrightarrow x^2 > 0$

(viii) $0 < x < y \Longrightarrow 0 < y^{-1} < x^{-1}$

(ix) $0 < 1$

Beweis: Übung!

2.6 Bemerkung Sei $(K,+,\cdot,<)$ ein angeordneter Körper.
Definiere: Abbildung $\iota : \mathbb{N} \to K$ wie folgt

$$n \mapsto n_K$$

$\iota(0) = 0_K$
Falls $\iota(n)$ definiert ist, so definiere:

$$\iota \underbrace{(n+1)}_{\text{Nachfolger von } n \in K} := \iota(n) \underbrace{+}_{\text{Addition in } K} \underbrace{1_K}_{\text{Eins in } K}$$

Es gilt $\forall m,n \in \mathbb{N} : m \neq n \Longrightarrow \iota(m) \neq \iota(n)$
(mit Induktion)

$$\Longrightarrow \iota \text{ ist injektiv}$$

Außerdem gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \iota(n) < \iota(n+1)$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, x \in K : nx = \iota(n) \cdot x$$

($nx := \underbrace{x + x + x + \ldots + x}_{n\text{-mal}}$)

Beweis: <Induktion>

2.7 Proposition: Bernoullische Ungleichung Sei $(K,+,\cdot,<)$ ein geordneter Körper. Dann gilt

$$\forall x > -1, n \in \mathbb{N} : \boxed{(1+x)^n \geq 1 + nx}$$

$$(a^n := \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-mal}})$$

Beweis: Sei $x \geq -1$.

$$\text{A}(n) : (1+x)^n \geq 1 + nx$$

I.A.

$$\text{A}(0)\text{:} \ (1+x)^0 = 1 = 1 + 0x$$

I.S.

Sei A(n) wahr.

$$\begin{aligned}
\text{A}(n+1)\text{:} \ (1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) & \\
&\geq (1+nx)(1+x) & \text{I.V. ; nach 2.5(v)} \\
&= 1 + nx + x + nx^2 & nx^2 \geq 0 \text{ nach 2.5(vii)} \\
&\geq 1 + nx + x & \\
&= 1 + (n+1)x &
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ A($n+1$) ist wahr
$\Longrightarrow$ A(n) ist wahr für alle $n \in \mathbb{N}$
$x \geq -1$ war beliebig

2.8 Definition Sei $(K, +, \cdot, <)$ ein angeordneter Körper. Definiere den **Absolutbetrag**

$$|.| : K \to K_+$$

durch

$$x \mapsto |x| := \begin{cases} x & \text{, falls } x \geq 0 \\ -x & \text{, falls } x < 0 \end{cases}$$

2.9 Bemerkungen

(i) $|x| \geq 0, \ \ |x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0, \ \ x \leq |x|$

(ii) $|-x| = |x|$

(iii) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

(iv) $|x + y| \leq |x| + |y|$ $\big(\triangle$-Ungleichung$\big)$ (Beweis durch Quadrieren)

(v) $|x + y| \geq \big||x| - |y|\big|$ $\big($umgekehrte $\triangle$-Ungleichung$\big)$

Beweis: Übung! (iv) und (v)

2.10 Proposition Sei $(K, +, \cdot, \geq)$ ein archimedisch angeordneter Körper

(i) $\forall x \in K_+ \ \exists! n \in \mathbb{N} : n \leq x < n + 1$
Wir schreiben $[x]$ für dieses n. (Gauß-Klammer)

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n \in \mathbb{N}^* : n^{-1} < \varepsilon$

(iii) Sei $b > 1$. $\forall L \in \mathbb{N} : \exists n \in \mathbb{N} : b^n > L$

(iv) Sei $0 < b < 1$. $\forall \varepsilon > 0 : \exists n \in \mathbb{N} : 0 < b^n < \varepsilon$

Beweis: (Widerspruchsbeweis)

(i) Angenommen es gäbe kein solches n. Das heißt

$$\forall n \in \mathbb{N} : n > x \ \text{ oder } \ x \geq n + 1$$

Sei A(n): $x \geq n$

I.A.

$$x \geq 0 \quad \checkmark \quad \text{A(0) ist wahr}$$

I.S.

$$\begin{aligned} x &\overset{\text{I.V.}}{\geq} n \\ &\Rightarrow n \not> x \\ \text{nach Annahme } &\Rightarrow x \geq n + 1 \end{aligned}$$

Also ist A($n + 1$) wahr

$$\Longrightarrow \forall n : x \geq n \ \lightning \Longrightarrow \text{Annahme war falsch} \ \square$$

2.11 Beispiele

(i) $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ sind archimedisch angeordnet

(ii) $\mathbb{F}_2$, $\mathbb{C}$ nicht angeordnet wegen $1+1=0$, bzw. $i^2 = -1 \not\geq 0$

2.12 Definition Sei $(K,+,\cdot,<)$ ein angeordneter Körper, $M \subset K$ eine Teilmenge.

(i) $s \in K$ heißt obere (untere) Schranke für M, falls gilt:

$$\forall x \in M : x \leq s \quad (\forall x \in M : x \geq s)$$

(ii) M heißt nach oben (unten) beschränkt, falls es eine obere (untere) Schranke besitzt. M heißt beschränkt: M besitzt ein obere und untere Schranke

(iii) $s \in K$ heißt **Supremum** von M

$$\sup M = s$$

falls s die kleinste obere Schranke für M ist, d.h.

a) s ist obere Schranke für M

b) falls s' weitere obere Schranke für M ist, so gilt $s \leq s'$

.

$s \in K$ heißt **Infimum** von M

$$\inf M = s$$

falls s die größte untere Schranke für M ist, d.h.

a) s ist untere Schranke für M

b) falls s' weitere untere Schranke für M ist, so gilt $s \geq s'$

2.13 Definition Supremumsprinzip Ein angeordneter Körper heißt vollständig angeordnet, falls jede nach oben beschränkte Teilmenge ein Supremum besitzt.

2.14 Bemerkungen

(i) Auch wenn $\sup M$ existiert, gilt nicht immer $\sup M \in M$ (gilt analog für $\inf M$)

(ii) Wenn $\sup M$ ($\inf M$) existiert, so ist es eindeutig bestimmt (2.12 (iii)b))

(iii) Jede nach oben beschränkte Teilmenge besitzt ein Supremum
$\Leftrightarrow$
jede nach unten beschränkte Teilmenge besitzt ein Infimum
Übung! Multiplikation mit -1

2.15 Beispiele Sei K archimedisch angeordnet.
Aus 2.6 folgt $\mathbb{N} \subset K$

$$M := \{n^{-1} \mid n \in \mathbb{N}\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\} \subset K_+^*$$

M ist beschränkt: 0 ist untere Schranke, denn $x^{-1} > 0$ für alle $x \in K_+^*$ (2.5 (viii))
1 ist obere Schranke, denn $1 \leq n$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$, also $1 \geq 1^{-1} \geq n^{-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$

Beweis Infimum:

$$\inf M = 0 \quad \text{(2.12 (iii) a)} \ \checkmark$$

2.12(iii) b) :
Sei s' weitere untere Schranke von M. Falls $s' > 0$, so existiert nach 2.10(ii) ein $n \in \mathbb{N}^*$ mit $M \ni n^{-1} < s'$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow s' \text{ ist keine untere Schranke } \lightning\\&\Rightarrow s' \leq 0\end{aligned}$$

Beweis Supremum

$$\sup M = 1 \longrightarrow \text{ trivial!}$$

2.16 Definition und Satz Es existiert ein (bis auf **Isomorphie** eindeutig bestimmter) vollständig angeordneter Körper; diesen nennen wir $\mathbb{R}$.

Eindeutigkeit bis auf Isomorphie:
Sei K ein weiterer vollständig angeordneter Körper. Dann existiert eine Bijektion

$$\begin{aligned}\alpha : K \to \mathbb{R} \text{ mit } &\alpha(0_K) = 0_\mathbb{R}\\&\alpha(1_K) = 1_\mathbb{R}\\&\alpha(x +_K y) = \alpha(x) +_\mathbb{R} \alpha(y)\\&\alpha(x \cdot_K y) = \alpha(x) \cdot_\mathbb{R} \alpha(y)\\&x <_K y \Rightarrow \alpha(x) <_\mathbb{R} \alpha(y)\end{aligned}$$

$$\alpha\Big(\sup_{\text{mit } <_K} M\Big) = \sup_{\text{mit } <_\mathbb{R}} \alpha(M)$$

ohne Beweis □

2.17 Definition und Proposition Wir definieren die rationalen Zahlen

$$\mathbb{Q} := \left\{m \cdot n^{-1}, -m \cdot n^{-1} \mid m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^*\right\} \subset \mathbb{R}$$

Diese bilden einen archimedisch angeordneten Körper.
Wir definieren die ganzen Zahlen

$$\mathbb{Z} := \{n, -n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$$

2.18 Exkurs: Das Zahlensystem

- $\mathbb{N}$ jedes Element n hat einen Nachfolger $n+1$
  $\downarrow$
- $\mathbb{Z}$ Hinzufügen von additiven Inversen
  $\downarrow$
- $\mathbb{Q}$ Hinzufügen von multiplikativen Inversen
  $\downarrow$
- $\mathbb{R}$ Hinzufügen von Suprema beschränker Mengen
  $\downarrow$
- $\mathbb{C}$ Hinzufügen von Lösungen algebraischer Gleichungen (zB $x^2 = -1$)

3 Intervallschachtelungen

3.1 Definition Für $a < b \in \mathbb{R}$ setze

$$\begin{aligned}
[a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} && \text{abgeschlossenes Intervall}\\
(a,b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} && \text{offenes Intervall}\\
[a,b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} && \text{nach rechts halboffenes Intervall}\\
(a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} && \text{nach links halboffenes Intervall}
\end{aligned}$$

3.2 Satz (Intervallschachtelungsprinzip) Sei $[a_n, b_n], n \in \mathbb{N}$ Intervalle mit

(i) $\forall n \in \mathbb{N} [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : b_{n_0} - a_{n_0} < \varepsilon$

Dann existiert genau ein $x \in \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$

Beweis:

(i) $\Rightarrow$ $[a_m, b_m] \subset [a_n, b_n]$ falls $m \geq n$

$\Rightarrow$ $a_m \leq b_n$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ $\forall n \in \mathbb{N} : b_n$ ist obere Schranke für $A := \{a_m \mid m \in \mathbb{N}\}$ $(\star)$

$\Rightarrow$ A ist nach oben beschränkt
Aus dem Supremumsprinzip folgt: $\sup A \in \mathbb{R}$ existiert

$\Rightarrow$ $\sup A \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ $a_n \leq \sup A \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ $\sup A \in [a_n, b_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ $x = \sup A \in \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$

(ii) Falls $s, s' \in \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$ mit $s < s'$ so existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit:

$$b_{n_0} - a_{n_0} < s' - s \qquad \underbrace{s' - s}_{\varepsilon} > 0$$

Andererseit gilt:

$$s', s \in [a_{n_0}, b_{n_0}] \Rightarrow s' - s \leq b_{n_0} - a_{n_0} < s' - s \quad \lightning$$

3.3 Satz Sei $0 < x \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}^*$.
Dann existiert genau ein $0 < y \in \mathbb{R}$ mit $y^k = x$. Wir schreiben auch $y = x^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{x}$

Beweis:

A. Für $x = 1$ setze $y := 1$

B. Sei nun $x > 1$

B.1 Wir konstruieren induktiv

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \dots \text{ und } b_0, b_1, b_2, b_3, \dots$$

Setze nun $a_0 := 1, b_0 := x$
Falls nun $1 \leq a_n < b_n$ mit $a_n^k \leq x \leq b_n^k$ bereits konstruiert sind, definiere $a_{n+1}, b_{n+1} \in \mathbb{R}$ wie folgt:

$$a_{n+1} := \begin{cases} a_n, & \text{falls } (\frac{a_n+b_n}{2})^k \geq x \\ (\frac{a_n+b_n}{2})^k, & \text{falls } (\frac{a_n+b_n}{2})^k < x \end{cases}$$
$$b_{n+1} := \begin{cases} \frac{a_n+b_n}{2}, & \text{falls } (\frac{a_n+b_n}{2})^k \geq x \\ b_n, & \text{falls } (\frac{a_n+b_n}{2})^k < x \end{cases}$$

Dann gilt:

$$a_{n+1}^k \leq x < b_{n+1}^k$$

und

$$1 \leq a_{n+1} < b_{n+1}$$

Induktion liefert $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$
Nach Konstruktion gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

(i) $a_n^k \leq x \leq b_n^k$ und $1 \leq a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n$

(ii) $b_n - a_n = \frac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1}) = \frac{1}{2}\frac{1}{2}(b_{n-2} - a_{n-2}) = \dots = \frac{1}{2^n}(x-1)$

B.2 Sei $\varepsilon > 0$. Nach 2.10 (iv) existiert

$$n_0 \in \mathbb{N} \text{ mit } \frac{1}{2^{n_0}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n_0} < \frac{\varepsilon}{x-1}$$
$$\overset{\text{(ii)}}{\Longrightarrow} \quad b_{n_0} - a_{n_0} = \frac{1}{2^{n_0}} \cdot (x-1) < \varepsilon$$
$$\overset{3.2}{\Longrightarrow} \quad \exists! y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$$
$$\Longrightarrow \quad y^k \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n^k, b_n^k]$$

B.3 Wegen (i) gilt auch $a_n^k \leq a_{n+1}^k < b_{n+1}^k \leq b_n^k$, also

$$\left[a_{n+1}^k, b_{n+1}^k\right] \subseteq \left[a_n^k, b_n^k\right]$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} b_n^k - a_n^k &= (b_n - a_n)(b_n^{k-1} + b_n^{k-2}a_n + \dots + b_n a_n^{k-2} + a_n^{k-1}) \\ &\leq (b_n - a_n) \cdot k \cdot x^{k-1} \\ &= (\frac{1}{2})^n (x-1) \cdot k \cdot x^{k-1} \end{aligned}$$

Sei $\varepsilon' > 0$. Nach 2.10(iv) existiert $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $(\frac{1}{2})^{n_1} < \frac{\varepsilon'}{(x-1)kx^{k-1}}$, also $b_{n_1}^k - a_{n_1}^k < \varepsilon'$

$$\overset{3.2}{\Longrightarrow} \exists! x' \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n^k, b_n^k]$$

B.1(i)

$$\implies x' = x$$

(B.2)

$$\implies y^k = x' = x$$

C. Der Fall $x < 1$ folgt aus $1 < \tilde{x} < \frac{1}{x}$

D. Falls $0 < y < y' \in \mathbb{R}$, so gilt auch $0 < y^k < y'^k$, also ist y mit $y^k = x$ eindeutig.

4 Abzählbarkeit

4.1 Definition Sei $M \neq \emptyset$ eine Menge.

- M heißt **abzählbar**, falls eine Surjektion $\mathbb{N} \to M$ existiert
- M heißt **abzählbar unendlich**, falls M abzählbar und nicht endlich ist
- M heißt **überabzählbar**, falls M nicht abzählbar ist

(M ist endlich $\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ und Bijektion $\{1, \ldots, n\} \to M$)

4.2 Beispiele

(i) $\mathbb{N}$ ist abzählbar, denn

$$\mathrm{id} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ ist surjektiv}$$

(ii) $\mathbb{Z}$ ist abzählbar

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 0 & \to & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & \cdots \\ & & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \\ & & -1 & & -2 & & -3 & & -4 & & -5 & & \end{array}$$

definiert eine Surjektion $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$

(iii) $\mathbb{Q}$ ist abzählbar

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & 1 \arrow[dl] & -1 \arrow[r] & 2 \arrow[dl] & -2 \arrow[r] & 3 \arrow[dl] \cdots \\
\frac{1}{2} \arrow[d] & -\frac{1}{2} \arrow[ur] & \frac{3}{2} \arrow[dl] & -\frac{3}{2} \arrow[ur] & \frac{5}{2} \arrow[dl] & -\frac{5}{2} \cdots \\
\frac{1}{3} \arrow[ur] & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \arrow[ur] & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \arrow[ur] & -\frac{4}{3} \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{tikzcd}$$

definiert eine Surjektion $\beta : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$
(Dieses β ist nicht injektiv, kann aber zu Bijektion modifiziert werden. Wie?)

(iv) Allgemein zeigt man:
Eine abzählbare Vereinigung von abzählbaren Mengen ist abzählbar

$$A_0, A_1, A_2, \ldots \text{ abzählbarer Mengen } \implies \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \text{ abzählbar}$$

4.3 Satz $\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar.

Beweis: Angenommen es gäbe eine Surjektion $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
Wir konstruieren Intervalle $[a_n, b_n]$ wie folgt:

I.A. Wähle $a_0 := \alpha(0) + 1, b_0 := \alpha(0) + 2$. Dann

$$\alpha(0) \notin [a_0, b_0] \text{ und } b_0 - a_0 = 1 = (\frac{1}{3})^0$$

I.S. Seien $a_0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_n < b_n \leq \ldots \leq b_1 \leq b_0$ bereits konstruiert mit:

$$\alpha(n) \notin [a_n, b_n] \text{ und } b_n - a_n = (\frac{1}{3})^n$$

Dann sei $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ das erste Drittel von $[a_n, b_n]$, das $\alpha(n+1)$ nicht enthält.

In Formeln:

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] := \begin{cases} [a_n\,, a_n + (\frac{1}{3})^{n+1}]\,, & \text{falls } \alpha(n+1) \notin [a_n, a_n + (\frac{1}{3})^{n+1}] \\ [a_n + (\frac{1}{3})^{n+1}\,, a_n + \frac{2}{3^{n+1}}], & \text{falls } \alpha(n+1) \in [a_n, a_n + (\frac{1}{3})^{n+1}] \\ [a_n + \frac{2}{3^{n+1}}\,, b_n], & \text{falls } \alpha(n+1) = a_n + (\frac{1}{3})^{n+1} \end{cases}$$

Dann gilt $\alpha(n+1) \notin [a_{n+1}, b_{n+1}]$, $b_{n+1} - a_{n+1} = (\frac{1}{3})^{n+1}$ und $a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n$

Nach dem Intervallschachtelungsprinzip (Satz 3.2) existiert genau ein $x \in \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$

Dann gilt $x = \alpha(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ (α ist surjektiv nach Annahme), aber

$$x = \alpha(n) \notin [a_n, b_n] \quad ↯$$

5 Folgen und Grenzwerte

Im Folgenden schreiben wir $\mathbb{K}$ für $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$

5.1 Definition Eine Folge in $\mathbb{K}$ ist eine Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{K}$. Wir schreiben oft

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{K} \text{ oder } (a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots)$$

wobei $a_n = a(n)$ ist.

$$\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

ist die der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ unterliegende Menge. Wir fassen auch $(a_{n_0}, a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \ldots)$ als Folge auf $(a_n)_{n \geq n_0}$

5.2 Beispiele

(i) $a_n = a$ für alle $n \in \mathbb{N} \rightsquigarrow (a, a, a, a, \ldots)$

(ii) $a_n = \frac{1}{n+1} \rightsquigarrow (\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots)$

(iii) Fibonacci-Zahlen
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv definiert durch

$$\begin{aligned} a_0 &:= 1 \qquad a_1 := 1 \\ a_{n+1} &:= a_n + a_{n-1} \\ &\rightsquigarrow (1,1,2,3,5,8,13,21,34,\dots) \end{aligned}$$

(iv) $a_n = \frac{n}{2^n} \rightsquigarrow (0, \frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{8}, \frac{4}{16}, \dots)$

(v) $a_n = (-1)^n \rightsquigarrow (1,-1,1,-1,1,-1,\dots)$

5.3 Definition Sei a_n eine Folge in $\mathbb{K}$ und sei $a \in \mathbb{K}$

(i) Wir sagen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **konvergiert** gegen a,

$$a_n \xrightarrow{n\to\infty} a, \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = a$$

falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$$

(ii) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **divergiert**, falls sie gegen kein $a \in \mathbb{K}$ konvergiert

(iii) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **divergiert bestimmt gegen unendlich** (bzw. $-\infty$)

$$a_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty, \qquad \lim_{n\to\infty} a = \infty$$

falls gilt

$$\forall L \in \mathbb{R} \;\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 : a_n \underset{(<)}{>} L$$

(iv) $(a_n)_n$ heißt nach oben (nach unten) beschränkt, falls $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ nach oben (nach unten) beschränkt ist.

5.4 Beispiele

(i) $a_n = a$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$
Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $n_0 := 0$. Für $n \geq n_0$ gilt

$$|a_n - a| = |a - a| = 0 < \varepsilon$$

(ii) $(a_n)_n = \frac{1}{n+1}$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\underbrace{n+1}_{a_n}} = 0$

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Für $n \geq n_0$ gilt

$$\left| \frac{1}{n+1} - 0 \right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

(iii) $(a_n)_n$ Fibonacci-Zahlen ($a_0 = a_1 = 0, a_{n+1} = a_{n-1} + a_n$).
Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Induktion liefert $a_n \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zu $L \in \mathbb{K}$ wähle n_0 größer als L. Dann gilt für $n \geq n_0$

$$a_n \geq n \geq n_0 > L$$

(iv) $(a_n)_n = \frac{n}{2^n}$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$

Nach Blatt 2, Aufgabe 3a gilt $n^2 < 2^n \;\; \forall n \geq 4$
Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $n_0 > \max(4, \frac{1}{\varepsilon})$. Für $n \geq n_0$ gilt

$$\left|\frac{n}{2^n} - 0\right| = \frac{n}{2^n} = \underbrace{\frac{n^2}{2^n}}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{n}}_{\leq \frac{1}{n_0}} \leq 1 \cdot \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

(v) $(a_n)_n = \big((-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert

Für jedes $a \in \mathbb{K}$ gilt $\big|(-1)^n - a\big| \geq 1$ oder $\big|(-1)^{n+1} - a\big| \geq 1$,
weil $\big|(-1)^n - (-1)^{n+1}\big| = 2$

$$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \;\; \forall n_0 \in \mathbb{N} \;\; \exists n \geq n_0 : \big|(-1)^n - a\big| \geq \varepsilon$$
$$\Rightarrow \neg\Big(\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geq n_0 : \big|(-1)^n - a\big| < \varepsilon\Big)$$

5.5 Bemerkung Jede konvergente Folge ist beschränkt, aber nicht jede beschränkte Folge ist konvergent.

Beweis:

1. Sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, dann existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < 1$ für alle $n \geq n_0$
   Sei $L := \max\big\{|a_0|, |a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0}|, 1 + |a|\big\}$. Dann gilt:

$$|a_n| \leq L \text{ für } n < n_0$$
$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq 1 + |a| \leq L \text{ für } n \geq n_0 \text{ also}$$
$$-L \leq a_n < L \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

2. Beispiel 5.4(v)

5.6 Proposition Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$. Falls $(a_n)_n$ gegen $a \in \mathbb{K}$ konvergiert und gegen $a' \in \mathbb{K}$ konvergiert, so gilt $a = a'$ (Dies rechtfertigt die Schreibweise $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$)

Beweis: Falls $a \neq a'$ setze $\varepsilon := \frac{|a-a'|}{2} > 0$
Wegen $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$ existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für $n \geq n_0$
Wegen $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a'$ existiert $n_0' \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a'| < \varepsilon$ für $n \geq n_0'$

Für $\bar{n} := \max(n_0, n_0')$ gilt dann

$$|a - a'| = |a - a_{\bar{n}} + a_{\bar{n}} - a'| \leq |a - a_{\bar{n}}| + |a' - a_{\bar{n}}| < \varepsilon + \varepsilon = |a - a'| \quad \lightning$$

5.7 Proposition Seien $(a_n)_n, (b_n)_n$ konvergierende Folgen in $\mathbb{K}$ und seien $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

(i) Dann konvergieren die Folgen $(\lambda a_n + \mu b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \cdot \lim_{n\to\infty} a + \mu \lim_{n\to\infty} b$$

sowie

$$\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a \;\cdot\; \lim_{n\to\infty} b$$

($\Rightarrow$ konvergente Folgen ($=: C$) bilden einen Vektorraum)

$$C\to\mathbb{R} \qquad (a_n)_{n\in\mathbb{N}}\mapsto \lim_{n\to\infty} a_n \quad \text{ist linear}$$

(ii) Falls $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, so existiert ein $n_0\in\mathbb{N}$ mit $b_n\neq 0$ für alle $n\geq n_0$ und für die Folge $(\frac{a_n}{b_n})_{n\geq n_0}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$$

Beweis:

(i) Wir zeigen nur die Formel für das Produkt:
Sei $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ und $b := \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Nach 5.5 sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Das heißt

$$L>0\;\;\forall n\in\mathbb{N}: |a_n|, |b_n|\leq L$$

Sei $\varepsilon>0$. Dann existieren $n_0\in\mathbb{N}$ mit $|a_n-a|, |b_n-b| < \frac{\varepsilon}{2L}$ falls $n\geq n_0$
Dann gilt für $n\geq n_0$

$$\begin{aligned}|a_nb_n-ab| &= |a_n(b_n-b)+(a_n-a)b|\\ &\leq |a_n|\cdot|b_n-b| + |a_n-a|\cdot|b|\\ &< L\cdot\frac{\varepsilon}{2L}+\frac{\varepsilon}{2L}\cdot L\\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

□

(ii) Sei wieder $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $0\neq b := \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

Sei $L>0$ wie eben, also $|a_n|\leq L$ für alle $n\in\mathbb{N}$
Da $b\neq 0$ existiert $n_0\in\mathbb{N}$ mit $|b_n-b|\leq\frac{|b|}{2}$ für alle $n\geq n_0$, also

$$|b_n| = |b+b_n-b| \geqslant |b|-|b_n-b| = \frac{|b|}{2}\geq 0 \quad \text{für } n\geq n_0$$

Sei nun $\varepsilon>0$. Dann existiert $n_1\in\mathbb{N}$ mit

$$|a_n-a| < \frac{|b|\varepsilon}{4} \text{ und } |b_n-b| < \frac{|b|^2}{4L}\varepsilon \quad \text{falls } n\geq n_1$$

Dann gilt für $n \geq n_0, n_1$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| &= \left|\frac{a_n b - b_n a}{b_n b}\right| \\
&< 2\frac{|a_n b - b_n a|}{|b|^2} \\
&\leq 2\frac{|a_n b - ab| + |ab - b_n a|}{|b|^2} \\
&\leq \frac{2}{|b|^2}\Big(\underbrace{\underbrace{|a_n - a|}_{\frac{|b|\varepsilon}{4}} \cdot |b|}_{\frac{|b|^2\varepsilon}{4}} + |a| \cdot \underbrace{|b_n - b|}_{\frac{|b|^2}{4L}\varepsilon}\Big) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

5.8 Beispiel Sei $c_n = \frac{4n^3+n}{n^3+n^2+1}, n \in \mathbb{N}$. Für $n \geq 1$ gilt:

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{4 + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}} \approx \frac{a_n}{b_n} \\
\lim_{n\to\infty} c_n &= \frac{4}{1} = 4
\end{aligned}$$

5.9 Bemerkung Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}$ konvergent mit $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$$

<u>Aber:</u> $a_n < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ impliziert **nicht(!)**

$$\lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n$$

Beweis: Falls

$$b := \lim_{n\to\infty} b_n < a := \lim_{n\to\infty} a_n$$

Dann existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a|, |b_n - b| < \frac{a-b}{2} \text{ falls } n \geq n_o$$

Dann folgt aus

$$\begin{aligned}
|a_n - a| &< \frac{a-b}{2} \\
\Rightarrow a - a_n &< \frac{a-b}{2} \\
\Rightarrow a - \frac{a-b}{2} &< a_n
\end{aligned}$$

folgender Widerspruch:

$$a_n > a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} = b + \frac{a-b}{2} > b_n \quad \lightning$$

6 Vollständigkeit

6.1 Definition

(i) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ eine Folge und sei $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ eine Folge mit

$$n_0 < n_1 < n_2 < \dots$$

Dann heißt $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine **Teilfolge** von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

(ii) $a \in \mathbb{K}$ heißt **Häufungspunkt** von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$a = \lim_{k\to\infty} a_{n_k}$$

besitzt.

6.2 Beispiele

(i) $(2k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist Teilfolge von $(n)_{n\in\mathbb{N}}$

(ii) $(1,-1,1,-1,1,\dots)$ besitzt Teilfolgen

$$(1,1,1,1,1,\dots),(-1,-1,-1,-1,-1,\dots),(-1,-1,1,-1,-1,1,1,\dots)\dots$$

6.3 Satz von Bolzano-Weierstraß Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ besitzt einen Häufungspunkt.

Beweis: Sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ beschränkt, dann existieren $A, B \in \mathbb{R}$ mit

$$A \leq c_n \leq B \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

1. Wir konstruieren induktiv

$$a_0, a_1, a_2, \dots \in \mathbb{R} \text{ und } b_0, b_1, b_2, \dots \in \mathbb{R}$$

mit

(i) $[a_{k+1}, b_{k+1}] \subset [a_k, b_k]$ für alle $k \in \mathbb{N}$

(ii) $b_k - a_k \leq 2^{-k} \cdot (B - A)$ für alle $k \in \mathbb{N}$

(iii) $[a_k, b_k]$ enthält unendlich viele Glieder der Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Induktionsanfang
Setze:

$$a_0 := A \quad b_0 := B$$

dann gelten (ii) und (iii)

Induktionsschritt
Seien $a_0, \dots, a_k$ und $b_0, \dots, b_k$ mit (i), (ii), (iii) bereits konstruiert. Setze:

$$a_{k+1} := \begin{cases} a_k, & \text{falls unendlich viele Glieder von } (c_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ in } [a_k, \frac{a_k+b_k}{2}] \text{ liegen} \\ \frac{a_k+b_k}{2}, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$b_{k+1} := \begin{cases} \frac{a_k+b_k}{2}, & \text{falls unendlich viele Glieder von } (c_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ in } [a_k, \frac{a_k+b_k}{2}] \text{ liegen} \\ b_n, & \text{sonst} \end{cases}$$

$\Rightarrow [a_{k+1}, b_{k+1}]$ erfüllt (i), (ii), (iii)

Wegen (i) und (ii) gilt nach Satz 3.2 (Intervallschachtelungsprinzip)

$$\exists! c \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} [a_k, b_k]$$

---

2. Wir definieren induktiv die Teilfolge $(c_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $c_{n_k} \in [a_k, b_k]$ für alle $k \in \mathbb{N}$

Induktionsanfang
$n_0 := 0$, dann $c_{n_0} = c_0 \in [A, B] = [a_0, b_0]$

Induktionsschritt
Seien $n_0 < n_1 < n_2 < \ldots < n_k \in \mathbb{N}$ mit

$$c_{n_l} \in [a_l, b_l] \text{ für } l = 0, \ldots, k$$

bereits definiert.

$[a_{k+1}, b_{k+1}]$ enthält unendlich viele Folgenglieder der Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$, also existiert $N > n_k$ mit

$$c_N \in [a_{k+1}, b_{k+1}]$$

Setze $n_k + 1 := N$

3. $\lim_{k \to \infty} c_{n_k}$ = c

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $k_0 \in \mathbb{N}$ so groß, dass $2^{-k_0}(B - A) < \varepsilon$. Für $k \geq k_0$ gilt dann:

$$c_{n_k}, c \in [a_k, b_k]$$

Also gilt:

$$|c_{n_k} - c| \leq b_k - a_k < 2^{-k}(B - A) < \varepsilon$$

6.4 Bemerkung Man kann zeigen:
Bolzano-Weierstraß + Archimedisches Axiom $\Leftrightarrow$ Ordnungsvollständigkeit

6.5 Definition Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset K$ heißt (streng) **monoton wachsend**, falls gilt

$$a_n \leq a_{n+1} \quad \text{bzw.} \quad a_n < a_{n+1}$$

Eine Folge heißt $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset K$ heißt (streng) **monoton fallend**, falls gilt

$$a_n \geq a_{n+1} \quad \text{bzw.} \quad a_n > a_{n+1}$$

Eine Folge heißt monoton, falls sie monoton wachsend oder fallend ist.

6.6 Satz Jede beschränkte monotone Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert.

Beweis:
Sei o.E.d.A. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und beschränkt.
Aus 6.3 folgt $\Rightarrow$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a \in \mathbb{R}$$

Es genügt zu zeigen:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n$$

Sei $\varepsilon > 0$.

$$\exists K \in \mathbb{N} : |a_{n_k} - a| < \varepsilon \quad \text{falls } k \geq K$$

Setze $N := n_k$. Sei nun $n \geq N$

$$\exists K' \geq K \in N : n_{K'} \geq n \geq N = n_K$$

wegen Monotonie gilt

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow a_{n_K} = a_N \leq a_n \leq a_{n_{K'}} \\
&\Rightarrow |a - a_n| \leq \max\left\{|a - a_{n_K}|, |a - a_{n_{K'}}|\right\} < \varepsilon \qquad \square
\end{aligned}$$

6.7 Beispiel Sei $k \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R}_+^*$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie im Beweis von 3.3

$$[a_n, b_n], n \in \mathbb{N} \text{ war Intervallschachtelung mit } \sqrt[k]{x} \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$$

$[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}] \Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend und beschränkt, also konvergent. Man zeigt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt[k]{x} \quad \text{wie in Aufgabe 4, Blatt 3}$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
\left|\sqrt[k]{x} - a_n\right| &\leq b_n - a_n \\
&= \frac{1}{2}n(x-1) \qquad (\text{für } x > 1)
\end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ 3.3 liefert Methode, $\sqrt[k]{x}$ zu approximieren und den Fehler abzuschätzen.

6.8 Definition $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **Cauchy-Folge**, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq n_0 : |a_m - a_n| < \varepsilon$$

(Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass gilt: wann immer $m, n \geq n_0$, so gilt $|a_n - a_m| < \varepsilon$)

6.9 Bemerkung Jede konvergente Folge ist Cauchy

Beweis:
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$
Sei $\varepsilon > 0$. Da (a_n) konvergiert, existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit :

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{falls } n \geq n_0$$

Falls $n, m \geq n_0$ gilt:

$$|a_m - a_n| < |a_m - a| + |a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

6.10 Satz $\mathbb{R}$ ist vollständig, das heißt jede Cauchy-Folge konvergiert

Beweis:
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ Cauchy

1. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt (warum?)
2. 6.3 $\Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$
3. Es genügt zu zeigen $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$
   Sei $\varepsilon > 0$.

$$\begin{aligned}(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist Cauchy } &\Rightarrow \exists \overline{n_0} \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq \overline{n_0} : |a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}\\ a_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} a &\Rightarrow \exists k_0 \in \mathbb{N} : \forall k \geq k_0 : |a_{n_k} - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}\\ n_k \to \infty &\Rightarrow \exists k_1 \geq k_0 : n_{k_1} \geq \overline{n_0}\end{aligned}$$

Falls $n \geq n_0$, so gilt:

$$|a_n - a| \leq \underbrace{\left|a_n - a_{n_{k_1}}\right|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\left|a_{n_{k_1}} - a\right|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

6.11 Bemerkung

(i) Sei $k \in \mathbb{N}^*$ und x eine Primzahl
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie in 3.3 (bzw. 6.7), dann:

$$\begin{aligned}&(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}\\ &\Rightarrow a_n \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt[k]{x}\\ &\Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist Cauchy}\end{aligned}$$

Aber:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt[k]{x} \notin \mathbb{Q}$$

$\Rightarrow$ in $\mathbb{Q}$ konvergiert nicht jede Cauchy-Folge

(ii) Vollständigkeit + archimedisches Axiom $\Leftrightarrow$ Ordnungsvollständigkeit

7 Reihen

7.1 Definition Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Folge. Wir definieren die Folge der Partialsummen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ durch:

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$$

Falls $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, bezeichnen wir oft auch den Limes mit $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$.

$(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wird ebenfalls mit $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ bezeichnet.

7.2 Beispiel: geometrische Reihe Sei $|x| < 1$ und $a_k := x^k$

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \xrightarrow{n \to \infty} \frac{1}{1 - x}$$

7.3 Satz: Cauchy'sches Konvergenzkriterium Sei $(a_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Folge reeller Zahlen. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > m > N : \left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| < \varepsilon$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergiert } &\Leftrightarrow (s_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist Cauchy (da in } \mathbb{R}) \\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq m \geq N : |s_n - s_{m+1}| < \varepsilon \qquad \square \end{aligned}$$

7.4 Bemerkung $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert $\Longrightarrow \lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$

Beweis:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \underbrace{\left| \sum_{k=n}^{n} a_k \right|}_{|a_n| = |a_n - 0|} < \varepsilon \qquad \square$$

7.5 Satz Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Folge.
Dann gilt: Die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann, wenn sie beschränkt ist.

Beweis: Es gilt:

$$s_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_k + a_{n+1} = s_n + \underbrace{a_{n+1}}_{\geq 0} \geq s_n$$

$\Longrightarrow (s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist monoton wachsend
$(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt $\overset{6.6}{\Rightarrow} (s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert

$\Leftarrow$ ist klar (warum?) $\square$

7.6 Beispiel: Harmonische Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1}$ divergiert

$$s_{2^n} = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} = (1) + \overbrace{\left(\frac{1}{2}\right)}^{\geq \frac{1}{2}} + \overbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}^{\geq \frac{1}{2}} + \overbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}^{\geq \frac{1}{2}} + \ldots + \overbrace{\left(\sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} \frac{1}{k}\right)}^{\geq \frac{1}{2}} \geq (n+1) \cdot \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow (s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht beschränkt $\overset{7.5}{\Longrightarrow}$ Divergenz

7.7 Leibnizkriterium Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ monoton fallend mit $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$. Dann konvergiert $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot a_k$

Beweis: Für $n \in \mathbb{N}$ setze $s_n := \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} s_{2n+2} - s_{2n} &= -a_{2n+1} + a_{2n+2} \leq 0 \\ s_{2n+3} - s_{2n+1} &= a_{2n+2} - a_{2n+3} \geq 0 \\ s_{2n+1} - s_{2n} &= -a_{2n+1} \leq 0 \end{aligned}$$

Nebenrechnung:

$$\begin{aligned} s_{2n+2} - s_{2n} &= \sum_{k=0}^{2n+2} (-1)^k \cdot a_k - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \cdot a_k \\ &= \sum_{k=2n+1}^{2n+2} (-1)^k \cdot a_k \\ &= (-1)^{2n+1} \cdot a_{2n+1} + (-1)^{2n+2} \cdot a_{2n+2} \\ &= -a_{2n+1} + a_{2n+2} \end{aligned}$$

$\Rightarrow (s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend
$\Rightarrow (s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad s_1 \leq s_3 \leq \ldots \leq s_{2n+1} \leq s_{2n} \leq \ldots \leq s_4 \leq s_2 \leq s_0$$

$\Rightarrow (s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}, (s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sind beschränkt
$\overset{6.6}{\Rightarrow} (s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}, (s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren, sei

$$S := \lim_{n\to\infty} s_{2n} \qquad S' := \lim_{n\to\infty} s_{2n+1}$$

Es gilt $S = S'$, da

$$S - S' = \lim_{n\to\infty} s_{2n} - \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \overbrace{(s_{2n} - s_{2n+1})}^{=a_{2n+1}} = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0$$

Noch zu zeigen: $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = S$

Sei $\varepsilon > 0$. $\exists N, N' \in \mathbb{N}$ mit:

$$\begin{array}{lll} \text{falls } n \geq N & : |s_{2n} - S| & < \varepsilon \\ \text{falls } n \geq N' & : |s_{2n+1} - S| & < \varepsilon \end{array}$$

Setze $\overline{N} := \max(2N, 2N'+1)$, dann gilt, falls $m \geq \overline{N}$

$$|s_m - S| < \varepsilon$$

□

7.8 Beispiel

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k} \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\frac{1}{2k+1}$$

sind konvergent. Wir werden sehen, dass die Werte dieser Reihen $\ln 2$ bzw. $\frac{\pi}{4}$ sind.

7.9 Definition $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ **konvergiert absolut**, falls $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert

7.10 Proposition Absolute Konvergenz $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ Konvergenz

Beweis: $\Rightarrow$
Sei $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent. Sei $\varepsilon > 0$. Nach dem Cauchy-Kriterium (7.3) existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| \le \sum_{k=m}^{n} |a_k| < \varepsilon \quad \text{falls } n > m > N$$

Wieder nach dem Cauchy-Kriterium konvergiert $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$.

Beweis: $\not\Leftarrow$
$\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\frac{1}{k}$ konvergiert, aber konvergiert nicht absolut, denn

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|(-1)^{k+1}\frac{1}{k}\right| = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k}$$

divergiert (harmonische Reihe)

7.11 Majorantenkriterium Seien $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ und $(c_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ Folgen mit

$$|a_k| < |c_k| \;\; \forall k \in \mathbb{N}$$

Falls $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k$ konvergiert, so konvergiert $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut. Es gilt

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right| \le \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \le \sum_{k=0}^{\infty} c_k$$

Beweis:
Sei $\varepsilon > 0$.

$$\exists N \in \mathbb{N} : \left|\sum_{k=m}^{n} c_k\right| < \varepsilon \quad \text{falls } n > m > N$$

Aber

$$\sum_{k=m}^{n} |a_k| \le \left|\sum_{k=m}^{n} c_k\right| \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergiert}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & \left|\sum\limits_{k=0}^{n} a_k\right| & \leq & \sum\limits_{k=0}^{n} |a_k| & \leq & \sum\limits_{k=0}^{n} c_k \\ n \to \infty & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & \left|\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\right| & \leq & \sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k| & \leq & \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k \end{array}$$

Bemerkung: (5.9)

$$d_n \xrightarrow{n\to\infty} D, \qquad e_n \xrightarrow{n\to\infty} E, \qquad 0 \leq d_n \leq e_n \forall n \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow D \leq E$ □

7.12 Beispiel Für $s \in \mathbb{Q}$ gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \begin{cases} \text{konvergiert} & \text{, falls } s > 1 \\ \text{divergiert} & \text{, falls } s < 1 \end{cases}$$

($s = \frac{p}{q}$ $x^s = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p} = (\sqrt[q]{x})^p$ mit $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^*$)

<u>Fall "$s > 1$":</u>
$s_k = \sum\limits_{n=1}^{k} \frac{1}{n^s}$ Falls $2^l - 1 \geq k$, so gilt:

$$\begin{aligned} s_k \leq s_{2^l-1} &= 1 + \left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{(2^{l-1})^s} + \ldots + \frac{1}{(2^l-1)^s}\right) \\ &\leq 1 + \frac{2^1}{2^s} + \ldots + \frac{2^{l-1}}{(2^{l-1})^s} \\ &= (2^{1-s})^0 + (2^{1-s})^1 + \ldots + (2^{1-s})^{l-1} \\ &= \sum_{k=0}^{l-1} (2^{1-s})^k \underset{(0<2^{1-s}<1)}{=} \frac{1-(2^{1-s})^l}{1-2^{1-s}} \xrightarrow{l\to\infty} \frac{1}{1-2^{1-s}} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Konvergenz von s_k, denn s_{2^l-1} konvergiert nach dem Majorantenkriterium

<u>Fall "$s < 1$":</u>

$$\begin{aligned} s_k &= 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots + \frac{1}{k^s} \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k} \end{aligned}$$

(kontrapositives Majorantenkriterium) □

7.13 Satz: Quotientenkriterium Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^*$ eine Folge. Falls $0 \leq \theta < 1$ existiert mit $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \theta$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut.

<u>**Beweis:**</u>

Induktion liefert $|a_n| \leq |a_0| \cdot \theta^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$\left(\sum_{n=0}^{k} |a_n| \leq\right) \sum_{n=0}^{k} |a_0| \cdot \theta^n = |a_0| \sum_{n=0}^{k} \theta^n \xrightarrow{k\to\infty} |a_0| \frac{1}{1-\theta}$$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_0\theta^n|$ ist konvergente Majorante für $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$ □

7.14 Bemerkung in 7.13 genügt es, wenn ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $a_n \neq 0$ und $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \leq \theta$ für alle $n \geq n_0$.

7.15 Cauchyprodukt von Reihen Seien $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergent. Setze

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} \cdot b_k$$

Dann konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$$

Beweis:
Setze:

$$A := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \qquad B := \sum_{n=0}^{\infty} b_n \qquad S_m := \sum_{n=0}^{m} c_n \qquad D_m := \left(\sum_{n=0}^{m} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{m} b_n\right)$$

Es gilt $\lim\limits_{m\to\infty} D_m = A \cdot B$. Zu zeigen:

$$\lim_{m\to\infty} (D_m - S_m) = 0$$

Es gilt

$$D_m = \sum_{\substack{0\leq i\leq m\\ 0\leq j\leq m}} a_i b_j = \sum_{i,j\leq m} a_i b_j$$

Weiter gilt

$$S_m = \sum_{n=0}^{m} \left(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k\right) = \sum_{n=0}^{m} \left(\sum_{i+j=n} a_i b_j\right) = \sum_{i+j\leq m} a_i b_j$$

Also

$$D_m - S_m = \sum_{(i,j)\in\Delta_m} a_i b_j$$

$$\text{mit } \Delta_m := \{(i,j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid i,j \leq m, i+j > m\}$$

Setze

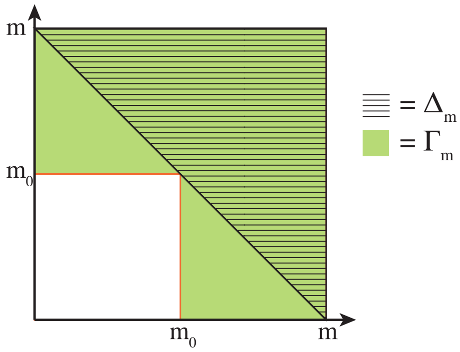
$$E_m := \left(\sum_{n=0}^{m} |a_n|\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{m} |b_n|\right) = \sum_{i,j\leq m} |a_i| \cdot |b_j|$$

$\Rightarrow$ Zu $\varepsilon > 0$ existiert ein $m_0 \in \mathbb{N}$ mit $|E_m - E_{m_0}| < \varepsilon$ falls $m \geq m_0$
$\Rightarrow$ $(E_m)_{m\in\mathbb{N}}$ konvergiert

Setze nun:

$$\Gamma_m := \Big\{(i,j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid i,j \leq m\Big\} \setminus \Big\{(i,j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid i,j \leq m_0\Big\}$$

Falls nun $m > 2m_0$, so gilt $\Delta_m \subset \Gamma_m$



Es folgt

$$E_m - E_{m_0} = \sum_{(i,j)\in\Gamma_m} |a_i \cdot b_j|$$

Es folgt

$$\begin{aligned} |D_m - S_m| &= \left| \sum_{(i,j)\in\Delta_m} a_i \cdot b_j \right| \\ &\leqslant \sum_{(i,j)\in\Delta_m} |a_i \cdot b_j| \\ &\leqslant \sum_{(i,j)\in\Gamma_m} |a_i \cdot b_j| \\ &< \varepsilon \quad \text{falls } m > 2m_0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (D_m - S_m) = 0$

Absolute Konvergenz von $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$:

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n|$ wird majorisiert durch $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \overline{c_n}$, wo

$$\overline{c_n} := \sum_{k=0}^{n} |a_{n-k} \cdot b_k|$$

Aber $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \overline{c_n}$ konvergiert, wie eben gesehen $\square$

7.16 Beispiele

(i) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{n^2}{2^n}}_{=:a_n}$ konvergiert

Für $n \geqslant 3$ gilt

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^2 2^n}{2^{n+1} n^2} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \leqslant \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}\right)^2 = \underbrace{\frac{8}{9}}_{:=\theta} < 1$$

Quotientenkriterium $\Rightarrow$ Konvergenz

(ii) Für $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ gilt:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n}{n+1} < 1$$

aber $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert

(iii) Aber: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert, obwohl

$$\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \frac{n^2}{(n+1)^2} < 1 \text{ mit } \frac{n^2}{(n+1)^2} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

8 Die Exponentialreihe

8.1 Definition und Satz Für jedes $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Exponentialreihe

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}$$

absolut. Den Limes bezeichnen wir mit $\exp(x)$. Wir setzen

$$e := \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Falls $N \in \mathbb{N}$ und $|x| < \frac{N}{2} + 1$ gilt

$$\left|\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right| \leqslant 2\frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}$$

Beweis:

- Klar für $x = 0$

- Für $x \neq 0$ und $n \geqslant 2|x|$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}\right| = \frac{|x|}{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$$

  Quotientenkriterium $\Rightarrow$ absolute Konvergenz

- **Restgliedabschätzung**

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right| \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!} \\
&= \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}\left(1 + \frac{|x|}{N+2} + \frac{|x|^2}{(N+2)(N+3)} + \frac{|x|^3}{(N+2)(N+3)(N+4)} + \dots\right) \\
&\leqslant \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}\left(1 + \frac{|x|}{N+2} + \frac{|x|^2}{(N+2)^2} + \frac{|x|^3}{(N+2)^3} + \dots\right) \\
&= \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{|x|}{N+2}\right)^k \\
&\leqslant \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&= \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \cdot \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}
\end{aligned}$$

□

8.2 Satz: Funktionalgleichung von $\exp(.)$ Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$$

Beweis:
$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ und $\exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}$ konvergieren absolut. Es gilt

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} \cdot \frac{y^k}{k!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}}_{\binom{n}{k}} x^{n-k} \cdot y^k \overset{1.10}{=} \frac{1}{n!} \cdot (x+y)^n$$

Also

$$\exp(x+y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \overset{7.15}{=} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}\right) = \exp(x) \cdot \exp(y)$$

8.3 Corollar Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $\exp(-x) = \exp(x)^{-1}$ und $\exp(x) > 0$.
Für $k \in \mathbb{Z}$ gilt $\exp(k) = e^k$

Beweis:

- $$\exp(x) \cdot \exp(-x) \overset{8.2}{=} \exp(x-x) = \exp(0) = 1$$

$\Rightarrow \exp(-x) = \exp(x)^{-1}$
Für $x \geqslant 0$ gilt $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \geqslant 1 > 0$
Für $x < 0$ gilt $\exp(-x) > 0$, also auch $\exp(x) = \exp(-x)^{-1} > 0$

- Für $k = 0$ gilt $\exp(0) = 1 = e^0$.
  Induktion: Für $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} \exp(k+1) &= \exp(k) \cdot \exp(1) \\ &= \exp(k) \cdot e \\ &= e^k \cdot e = e^{k+1} \end{aligned}$$

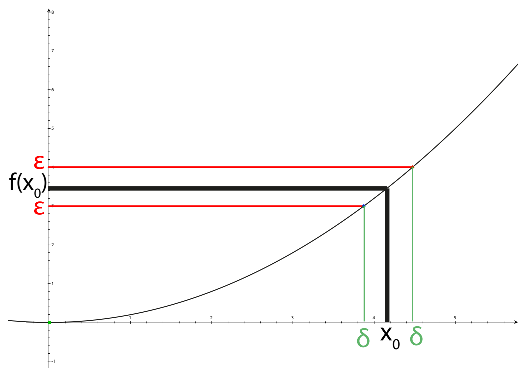
$\Rightarrow \exp(k) = e^k \ \ \forall k \in \mathbb{N}$
$\exp(-k) = (\exp(k))^{-1} = (e^k)^{-1} = e^{-k} \quad \forall k \in \mathbb{N}$

9 Stetige Funktionen

9.1 Definition Sei $D \subset \mathbb{R}$. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. f heißt stetig in $x_0 \in D$, falls gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in D : \big(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\big)$$

f heißt **stetig**, falls f stetig ist in x_0 ist für jedes $x_0 \in D$.



9.2 Beispiele

(i) $\mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig.

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Sei $\varepsilon > 0$. Setze $\delta := \varepsilon$. Falls $|x - x_0| < \delta$, so gilt

$$\big|\,\mathrm{id}(x) - \mathrm{id}(x_0)\big| = |x - x_0| < \delta = \varepsilon$$

(ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto x^2$ ist stetig.

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Sei $\varepsilon > 0$. Setze $\delta := \min\{1, \frac{\varepsilon}{2|x_0|+1}\}$.

Sei nun $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta$. Dann

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| = |x^2 - x_0^2| &= |x - x_0| \cdot |x + x_0| \\ &\leqslant |x - x_0| \cdot \big(|x - x_0| + 2|x_0|\big) \\ &\lneq \frac{\varepsilon}{2|x_0| + 1}\big(1 + 2|x_0|\big) \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

(iii) $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \sqrt{x}$ ist stetig

Sei $x_0 \in \mathbb{R}_+$. Sei $\varepsilon > 0$. Setze $\delta := \frac{\varepsilon^2}{2}$. Sei nun $x \in \mathbb{R}_+$ mit $|x - x_0| < \delta$.
Falls $x \geqslant x_0$ gilt, dann

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)|^2 &= |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}|^2 \\ &= |x - \sqrt{xx_0} - \sqrt{xx_0} + x_0| \\ &\leqslant |x - \sqrt{xx_0}| + |\sqrt{xx_0} - x_0| \\ &= x - \sqrt{x}\sqrt{x_0} + \sqrt{x}\sqrt{x_0} - x_0 \\ &\leqslant x - \sqrt{x_0}\sqrt{x_0} + \sqrt{x}\sqrt{x} - x_0 \\ &= x - x_0 + x - x_0 \\ &\leqslant 2 \cdot |x - x_0| \\ &\leqslant 2 \cdot \delta \\ &= 2 \cdot \frac{\varepsilon^2}{2} = \varepsilon^2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ Ebenso für $x < x_0$ $\square$

(iv) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R} \quad f(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x > \sqrt{2} \\ -1, & \text{falls } x < \sqrt{2} \end{cases}$ ist stetig.

Beweis: Übung!

(v) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{falls } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ ist in keinem Punkt stetig.

(vi) $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig.

Übung!

9.3 Defintion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt **Lipschitz stetig**, falls $L \in \mathbb{R}_+$ existiert mit:

$$\forall x, y \in D : \big|f(x) - f(y)\big| \leqslant L \cdot |x - y|$$

9.4 Beispiele

(i) $x \mapsto ax + b$ ist Lipschitz mit $L = |a|$

(ii) $x \mapsto |x|$ ist Lipschitz mit $L = 1$

(iii) $f : [a, \infty) \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \sqrt{x}$ ist Lipschitz für $a > 0$. Ist nicht Lipschitz für $a = 0$

(iv) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto x^2$ ist nicht Lipschitz.
<u>Aber</u>: $g|_{[a,b]}$ ist Lipschitz

$$g|_{[a,b]} : [a,b] \to \mathbb{R} \quad x \mapsto x^2$$

(v) Lipschitz stetig $\Rightarrow$ stetig $\left(\delta = \frac{\varepsilon}{L}\right)$

9.5 Proposition Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $\bar{x} \in D$.
Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) f ist stetig in $\bar{x}$

(ii) für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\bar{x})$$

<u>**Beweis:**</u> (i)$\Rightarrow$(ii)
Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ eine Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$. Sei $\varepsilon > 0$.

f ist stetig in $\bar{x} \Longrightarrow \exists \delta > 0$ mit

$$|x - \bar{x}| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon$$

$x_n \xrightarrow{n\to\infty} \bar{x} \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - \bar{x}| < \delta \;\; \forall n \geq N$. Dann gilt für $n \geq N$

$$|x_n - \bar{x}| < \delta \overset{(\star)}{\Rightarrow} |f(x_n) - f(\bar{x})| < \varepsilon \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(\bar{x})$$

<u>(ii) $\Rightarrow$ (i)</u>
Angenommen: f ist nicht stetig in $\bar{x}$. Das heißt

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 : \exists x \in D : |x - \bar{x}| < \delta \quad \text{und} \quad |f(x) - f(\bar{x})| \geqslant \varepsilon$$

Es folgt

$$\forall n \in \mathbb{N} \;\; \exists x_n \in D : |x_n - \bar{x}| < \frac{1}{n+1} \quad \text{und} \quad |f(x_n) - f(\bar{x})| \geq \varepsilon$$

Dann gilt:

$$x_n \xrightarrow{n\to\infty} \bar{x} \text{ , aber } \quad f(x_n) \not\xrightarrow{n\to\infty} f(\bar{x})$$

Wir haben gezeigt: ¬(i) $\Rightarrow$ ¬(ii), also (ii) $\Rightarrow$ (i) $\square$

9.6 Proposition Seien $f, g, h : D \to \mathbb{R}$ stetig in $\bar{x} \in D$. Dann sind $f + g$ und $f \cdot g$ stetig in $\bar{x}$. Falls $h(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, so ist $\frac{f}{h}$ stetig in $\bar{x}$.

<u>**Beweis**:</u>
Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ mit $x_n \xrightarrow{n\to\infty} \bar{x}$. Dann gilt

$$(f+g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n) \qquad \xrightarrow{n\to\infty} \qquad f(\bar{x}) + g(\bar{x}) = (f+g)(\bar{x})$$

$\downarrow$
f, g stetig
9.5 (i) $\Rightarrow$ (ii)
Prop 5.7

$\overset{\text{9.5 (ii)}\Rightarrow\text{(i)}}{\Longrightarrow}$ $f + g$ stetig in $\bar{x}$. Ebenso $f \cdot g$ und $\frac{f}{h}$ $\square$

9.7 Proposition Seien $f : D \to \mathbb{R}$, $g : E \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $E \supset f(D)$. Falls f stetig in $\bar{x} \in D$ und g stetig ist in $f(\bar{x}) \in E$, dann gilt $g \circ f$ ist stetig in $\bar{x}$

Beweis:
Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D$ eine Folge mit $x_n \xrightarrow{n\to\infty} \bar{x}$.

$$f \text{ stetig in } \bar{x} \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(\bar{x})$$

Wir haben jetzt:

$$\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}} \subset E \qquad f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(\bar{x})$$

Es folgt:

$$g \text{ stetig in} f(\bar{x}) \Rightarrow \underset{\substack{\| \\ (g\circ f)(x_n)}}{g\big(f(x_n)\big)} \xrightarrow{n\to\infty} g\big(f(\bar{x})\big) = (g \circ f)(\bar{x})$$

□

9.8 Beispiel Eine Polynom p ist eine Funktion der Form

$$x \mapsto p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 \ldots + \alpha_n x^n$$

wo $\alpha_i \in \mathbb{R}$ (Dann $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$)

(i) Polynome sind stetig auf $\mathbb{R}$

(ii) Seien p, q Polynome $D := \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\}$
Dann ist $\frac{p}{q}$ stetig auf D ($\frac{p}{q}$ heißt rationale Funktion)

9.9 Bemerkung "ε-δ-Definition" von Stetigkeit lässt sich geometrisch interpretieren.

9.10 Satz: Zwischenwertsatz Sei $a \leqslant b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig.
Zu jedem γ zwischen $f(a)$ und $f(b)$ existiert ein $c \in [a, b]$ mit $f(c) = \gamma$

Beweis:
O.E.d.A sei $f(a) \leqslant \gamma \leqslant f(b)$. Setze $[a_0, b_0] := [a, b]$ dann gilt $\gamma \in \big[f(a_0), f(b_0)\big]$.
Seien $[a_n, b_n]$ bereits konstruiert mit

(i) $\gamma \in \big[f(a_n), f(b_n)\big]$

(ii) $[a_n b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}]$ und $b_n - a_n = 2^{-n}(b - a)$

Dann gilt

$$\gamma \in [f(a_n), f(b_n)] \subset \left[f(a_n), f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)\right] \cup \left[f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right), f(b_n)\right]$$

Setze

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] := \begin{cases} \left[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right], & \text{falls } \gamma \in \left[f(a_n), f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)\right] \\ \left[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n\right], & \text{sonst} \end{cases}$$

Induktion $\rightsquigarrow$ Intervallschachtelung $[a_n, b_n] n \in \mathbb{N}$ mit

$$\exists c \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$$

Außerdem $a_n \xrightarrow{n\to\infty} c$ und $b_n \xrightarrow{n\to\infty} c$

$$f \text{ ist stetig } \implies f(a_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(c) \ \wedge \ f(b_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(c)$$

$f(a_n) \leqslant \gamma \leqslant f(b_n)$ für $n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow f(c) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \leqslant \gamma \leqslant \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(c)$$

$\Rightarrow \gamma = f(c)$ □

9.11 Beispiel Jedes Polynom ungeraden Grades besitzt eine Nullstelle.

9.12 Satz Sei $a \leqslant b$. Jede stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ nimmt ihr Maximum und ihr Minimum an. D.h. es gibt $s,t \in [a,b]$ mit

$$\begin{aligned} f(s) &= \sup \ \{f(x) \mid x \in [a,b]\} \\ f(t) &= \inf \ \{f(x) \mid x \in [a,b]\} \end{aligned}$$

Beweis:
Setze

$$M := \sup \big\{ f(x) \mid x \in [a,b] \big\} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

($M = \infty$ falls $\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$ nicht nach oben beschränkt ist)

Dann existiert eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \{f(x) \mid x \in [a,b]\}$ mit $y_n \xrightarrow{n\to\infty} M$ (warum?)
$\Rightarrow$ es existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [a,b]$ mit $f(x_n) = y_n \xrightarrow{n\to\infty} M$

Nach Bolzano-Weierstraß $\Rightarrow x_n$ besitzt konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$.
Sei $s := \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$ Es gilt $a \leqslant x_{n_k} \leqslant b$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Also muss gelten:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad a \leqslant \underbrace{\lim_{k\to\infty} x_{n_k}}_{= s} \leqslant b \\ &\Rightarrow \quad s \in [a,b] \\ f \text{ stetig } &\Rightarrow \quad M = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}) = f(s) \end{aligned}$$

$f \rightsquigarrow -f$ ergibt Aussage für das Minimum □

9.13 Definition $f : D \to \mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig, falls gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x, x' \in D : \big(|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon \big)$$

9.14 Bemerkung

$$\text{gleichmäßig stetig } \underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} \text{ stetig}$$

Beweis:
“($\Rightarrow$)“ ist trivial

“$\not\Leftarrow$“ :
$f : (0,\infty) \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{1}{x}$ ist stetig. Sei $\varepsilon = 1$. Sei $\delta > 0$. Wähle $n \in \mathbb{N}^*$ mit $|\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}| < \delta$. Dann

$$\left| f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{2n}\right) \right| = |n - 2n| = n \geqslant \varepsilon$$

□

9.15 Satz Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig

$$\Rightarrow f \text{ ist gleichmäßig stetig}$$

Beweis:
Annahme: f ist nicht gleichmäßig stetig. dann

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 : \exists x, x' \in D : |x - x'| < \delta \ \wedge \ |f(x) - f(-x)| \geqslant \varepsilon$$

Zu $\delta = \frac{1}{n+1}$ existieren $x_n, x'_n \in [a, b]$ mit $|x_n - x'_n| < \frac{1}{n+1}$ und $\left|f(x_n) - f(x'_n)\right| \geqslant \varepsilon$

$$\rightsquigarrow \text{ Folgen } (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [a, b]$$

Bolzano-Weierstraß $\rightsquigarrow$ konvergente Teilfolgen $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $\left(x'_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$. Dann gilt

$$\overline{x} := \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \lim_{k\to\infty} x'_{n_k} \in [a, b]$$

f stetig $\Rightarrow$

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f\left(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}\right) = f(\overline{x}) = f\left(\lim_{k\to\infty} x'_{n_k}\right) = \lim_{k\to\infty} f\left(x'_{n_k}\right)$$

$\Rightarrow \left|f(x_{n_k}) - f\left(x'_{n_k}\right)\right| \xrightarrow{k\to\infty} 0$ ↯ zu $|f(x_n) - f(x'_n)| \geqslant \varepsilon$ $\square$

Korrektur: Wähle zuert Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $(x_{n_k}) \xrightarrow{k\to\infty} \overline{x}$. $\left(x'_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}} \subset [a, b]$ besitzt konvergente Teilfolge $\left(x'_{n_{k_l}}\right)_{l\in\mathbb{N}}$, die auch gegen $\overline{x}$ konvergiert.

9.16 Definition $f : D \to \mathbb{R}$ heißt (streng) monoton wachsend, falls gilt

$$x, x' \in D, x < x' \Rightarrow f(x) \leqslant f(x') \qquad (\Rightarrow f(x) < f(x'))$$

$f : D \to \mathbb{R}$ heißt (streng) monoton fallend, falls gilt

$$x, x' \in D, x < x' \Rightarrow f(x) \geqslant f(x') \qquad (\Rightarrow f(x) > f(x'))$$

9.17 Satz Sei $a \leqslant b, f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend (oder auch streng monoton fallend).

Dann ist $f : [a, b] \to [f(a), f(b)]$ (bzw. $f : [a, b] \to [f(b), f(a)]$) bijektiv und die Umkehrabbildung f^{-1} ist ebenfalls stetig und streng monoton wachsend bzw. streng monoton fallend.

Beweis:
Sei f O.E.d.A streng monoton wachsend.
f injektiv: trivial (aufgrund der strengen Monotonie)

f surjektiv:

$$a < xb \Rightarrow f(a) < f(x) < f(b)$$
$$\Rightarrow f([a, b]) \subset [f(a), f(b)]$$
$$\text{nach dem Zwischenwertsatz gilt} \quad f([a, b]) = [f(a), f(b)]$$

$\Rightarrow f$ ist bijektiv

Sei nun $f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a,b]$ die Umkehrfunktion von f.

f^{-1} ist streng monoton wachsend: klar (warum?)

Beweis der Stetigkeit von f^{-1} (Widerspruchsbeweis)
Angenommen f^{-1} ist nicht stetig. Dann existiert $\overline{y} \in [f(a), f(b)]$ und eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [f(a), f(b)]$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \overline{y}$, aber $f^{-1}(y_n) \overset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} f^{-1}(\overline{y})$

$$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \text{ und Teilfolge } (y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \text{ mit } \left|f^{-1}(y_{n_k}) - f^{-1}(\overline{y})\right| \geqslant \varepsilon \;\; \forall k \in \mathbb{N}$$

(Negation 9.5 (ii))

Nach Bolzano-Weierstraß existiert eine Teilfolge der Teilfolge $f^{-1}\left((y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}\right)$

$$f^{-1}\left(y_{n_{k_l}}\right)_{l\in\mathbb{N}}$$

mit

$$\lim_{l\to\infty} f^{-1}\left(y_{n_{k_l}}\right) = \overline{x} \quad \text{für ein} \quad \overline{x} \in [a,b]$$

Dann gilt: $\left|f^{-1}\left(y_{n_{k_l}}\right) - f^{-1}(\overline{y})\right| \geqslant \varepsilon$ also auch $\left|\overline{x} - f^{-1}(\overline{y})\right| \geqslant \varepsilon$. Andererseits gilt:

$$\overline{y} = \lim_{l\to\infty} y_{n_{k_l}} = \lim_{l\to\infty} f \circ f^{-1}\left(y_{n_{k_l}}\right) \overset{f \text{ stetig}}{=} f\left(\lim_{l\to\infty} f^{-1}\left(y_{n_{k_l}}\right)\right) = f(\overline{x})$$

also auch

$$f^{-1}(\overline{y}) = f^{-1}\left(f(\overline{x})\right) = \overline{x} \qquad \lightning$$

$\square$

9.18 Bemerkung Allgemeiner gilt: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend (streng monoton fallend). Dann ist $f(I)$ ein Intervall und $f : I \to f(I)$ ist bijektiv. $f^{-1} : f(I) \to I$ ist wieder streng monoton wachsend (streng monoton fallend) und stetig.

<u>Beweis:</u>
Übung Blatt 4 Aufgabe 1

9.19 Beispiel Sei $k \in \mathbb{N}^*$, dann ist $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \quad x \mapsto x^k$ streng monoton wachsend (Bemerkung 2.5(vi) + Induktion)

$$\Rightarrow \exists \text{ stetige und streng monoton wachsende Umkehrfunktion } \quad f^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$$

Wegen Eindeutigkeit der k-ten Wurzel gilt

$$f^{-1}(y) = \sqrt[k]{y} \qquad \text{(vergleiche Satz 3.3)}$$

9.20 Definition und Satz $\exp : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ besitzt eine stetige und streng monoton wachsende Umkehrfunktion $\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R}$. Es gilt

$$\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y) \qquad \text{für } x, y \in (0,\infty)$$

Beweis:
$\exp$ ist stetig und streng monoton wachsend nach Übung.
$\exp : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ ist surjektiv nach Zwischenwertsatz (warum?)

9.17/9.18 $\Rightarrow$ Umkehrfunktion $\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend

$$\begin{aligned} \ln(x \cdot y) &= \ln\Big(\exp\big(\ln(x)\big) \cdot \exp\big(\ln(y)\big)\Big) \\ &= \ln\big(\exp(\ln x + \ln y)\big) \\ &= \ln x + \ln y \end{aligned}$$

□

9.21 Definition und Proposition Für $a > 0$ setzen wir

$$a^x := \exp(x \cdot \ln a) \quad x \in \mathbb{R}$$

Es gilt $a^{x+y} = a^x \cdot a^y, x, y \in \mathbb{R}$. Für $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ stimmt die Definition mit der früheren überein, das heißt

$$\exp\left(\frac{p}{q} \cdot \ln a\right) = \sqrt[q]{a^p}$$

Beweis:

(i)

$$\begin{aligned} a^{x+y} &= \exp((x+y)\ln a) \\ &= \exp(x \ln a + y \ln a) \\ &= \exp(x \ln a) \cdot \exp(y \ln a) \\ &= a^x \cdot a^y \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \left(\exp\left(\frac{p}{q}\ln a\right)\right)^q &= \exp\underbrace{\left(\frac{p}{q}\ln a + \frac{p}{q}\ln a + \ldots + \frac{p}{q}\ln a\right)}_{q\text{-mal}} \\ &= \exp(p \cdot \ln a) \\ &= a^p \\ \exp\left(\frac{p}{q}\ln a\right) &= \sqrt[q]{a^p} \end{aligned}$$

wegen Eindeutigkeit der q-ten Wurzel □

9.22 Bemerkung

(i) Für $a > 0$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$

(ii)

$$\begin{aligned} (a^x)^y &= a^{xy} \\ a^x b^x &= (ab)^x \\ (a^{-1})^x &= a^{-x} \\ \ln a^x &= x \cdot \ln a \qquad a, b > 0 \;\; x, y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

<u>Beweis:</u>

(i)

$$a^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{1}{n} \cdot \ln a\right) \xrightarrow[\exp \text{ stetig}]{n\to\infty} \exp(0) = 1$$

(ii) Übung

9.23 Satz Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(x+y) = f(x) \cdot f(y) \forall x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$f \underbrace{\equiv}_{\text{genau äquivalent}} 0 \quad (f(x) = 0 \;\; \forall x)$$

oder

$$f(x) = a^x \text{ mit } a = f(1) > 0$$

9.24 Definition Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $a \in [-\infty, +\infty] = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ ein Punkt, so dass eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ existiert mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$
Sei $b \in [-\infty, +\infty]$

(i) Wir schreiben $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$ falls gilt:

$$\text{Für jede Folge } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D \text{ mit } \lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ gilt } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = b$$

(ii) Wir schreiben $\lim\limits_{x\searrow a} f(x) = b$, falls gilt

$$\text{Für jede Folge } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D \cap (a, \infty) \text{ mit } \lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ gilt } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = b$$

(falls eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D \cap (a; \infty)$ exisitert mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$)

(iii) Analog für $\lim\limits_{x\nearrow a} f(x) = b$

9.25 Beispiele

(i) Für $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^k} = \infty \qquad \left(\frac{e^x}{x^k} : (0,\infty) \to \mathbb{R}\right)$$

Für $x > 0$ gilt

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} > \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \quad \text{also} \quad \frac{e^x}{x^k} > \frac{x}{(k+1)!} \xrightarrow{x\to\infty} \infty$$

Genauer: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (0,\infty)$ eine Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. Zu zeigen:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{x_n}}{x_n^k} = \infty$$

Sei $K \in \mathbb{R}$. Wähle $N \in \mathbb{N}$ so, dass $x_n \geqslant K \cdot (k+1)!$ falls $n \geqslant N$. Dann gilt

$$\frac{e^{x_n}}{x_n^k} > \frac{x_n}{(k+1)!} \geqslant K \quad \text{falls } n \geqslant N$$

$\square$

(ii) Für $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{x\to\infty} x^k e^{-x} = 0 \quad \xrightarrow{x\neq 0} \quad \lim_{x\to\infty} \left(\frac{e^x}{x^k}\right)^{-1} = 0$$

Es gilt

$$\lim_{x\searrow 0} x^k e^{\frac{1}{x}} = 0$$

da (Substitution $y_n := \frac{1}{x_n}$)

$$\lim_{y\to\infty} \left(\left(\frac{1}{y}\right)^k \cdot e^y\right) = \lim_{y\to\infty} \frac{e^y}{y^k} = \infty$$

(iii) $\lim\limits_{x\to\infty} \ln x = \infty \quad , \quad \lim\limits_{x\searrow 0} \ln x = -\infty$

$\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend
Falls $x > e^K$, so gilt $\ln x > \ln(e^K) = K$
$\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \ln x = \infty$
$\lim\limits_{x\searrow 0} \ln x = \lim\limits_{y\to\infty} \ln \frac{1}{y} = \lim\limits_{y\to\infty} \ln y^{-1} = \lim\limits_{y\to\infty} -\ln y = -\lim\limits_{y\to\infty} \ln y = -\infty$

(iv) Für $\alpha > 0$ gilt $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$
Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (0,\infty)$ eine Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. Dann

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\ln x_n}{x_n^\alpha} &= \lim_{n\to\infty} (\ln x_n) x_n^{-\alpha} \\
&= \frac{1}{\alpha} \cdot \lim_{n\to\infty} (\alpha \ln x_n) x_n^{-\alpha} \\
&= \frac{1}{\alpha} \lim_{n\to\infty} (\alpha \ln x_n) e^{-\alpha \ln x_n} \\
&= 0
\end{aligned}$$

(v) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{e^x-1}{x} = 1$

$$|e^x - (1-x)| \leqslant |x^2|, \text{ falls } |x| \leqslant \frac{3}{2}$$

Also:

$$\left|\frac{e^x-(1+x)}{x}\right| \leqslant |x|, \text{ falls } 0 < |x| \leqslant \frac{3}{2}$$

$$\left|\frac{e^x-(1+x)}{x}\right| = \left|\frac{e^x-1}{x} - 1\right| \Longrightarrow \lim_{x\to 0}\left|\frac{e^x-1}{x} - 1\right| = 0$$

(vi) Für $\alpha > 0$ gilt $\lim\limits_{x\searrow 0} x^\alpha = 0$

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (0,\infty)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \alpha \ln x_n \overset{\text{(iii)}}{=} -\infty$$

Nach (ii) gilt (mit $k=0$)

$$\lim_{y\to-\infty} e^y = \lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$$

Also: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} e^{\alpha \ln x_n} = 0$

Mit $0^\alpha = 0$ erhalten wir eine stetige Funktion $[0,\infty) \to \mathbb{R}\ \ x \mapsto x^\alpha$

10 Die komplexen Zahlen

10.1 Definition

(i) Wir definieren

$$\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

mit Operationen $+, \cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$
$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ bildet einen Körper mit $0_\mathbb{C} = (0,0), 1_\mathbb{C} = (1,0)$ und

$$(x,y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2} \right) \quad , \quad \text{falls } (x,y) \neq 0_\mathbb{C}$$

(ii) Die Abbildung $\mathbb{R} \to \{x, 0 \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C} \;\; x \mapsto (x, 0)$ ist ein Isomorphismus. Mit dieser Indentifikation und $i := (0,1)$ schreiben wir $(x,y) = x + i \cdot y$

(iii) Es gilt $\boxed{i^2 = -1}$

(iv) Wir definieren $\mathrm{Re}(x+iy) := x \;\; , \;\; \mathrm{Im}(x+iy) := y$.
Es gilt $z = z' \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z') \wedge \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z')$. Außerdem gilt

$$z = \mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z), \text{ für } z \in \mathbb{C}$$

(v) Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ definieren wir das **komplex Konjugierte**

$$\overline{z} := x - iy$$

Das heißt $\overline{z} =$ Re$(z) - i$ Im(z). Es gilt daher

a) Re$(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$

b) Im$(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$

c) $\overline{\overline{z}} = z$

d) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

e) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

(vi) Wir definieren $|.| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_+$ durch $|z| := \sqrt{z \cdot \overline{z}}$
(falls $z = x + iy$, dann $z\overline{z} = x^2 + y^2 \geqslant 0$)
(Für $z \in \mathbb{R}$ stimmen die Definitionen überein.)
Es gilt

a) $|z| \geqslant 0 \;\; , \;\; |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

b) $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$

c) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

Das heißt $\mathbb{C}$ ist mit $|.|$ ein **bewerteter Körper**
Beweis: Übung!

10.2 Definition Eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ konvergiert gegen $z \in \mathbb{C}$, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} : |z_n - z| < \varepsilon \text{ falls } n \geqslant N$$

10.3 Proposition $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert $\Leftrightarrow (\mathrm{Re}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}, (\mathrm{Im}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren

In diesem Fall gilt $\mathrm{Re}(\lim\limits_{n\to\infty} z_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(\mathrm{Re}(z_n)) \quad \mathrm{Im}(\lim\limits_{n\to\infty} z_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(\mathrm{Im}(z_n))$

<u>Beweis:</u>
Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ Folge, sei $z_n = x_n + iy_n, n \in \mathbb{N}$

“$\Rightarrow$“
Sei $\lim\limits_{n\to\infty} z_n =: z = x + iy$. Sei $\varepsilon > 0$. Sei $N \in \mathbb{N}$, so dass gilt

$$|z_n - z| < \varepsilon \text{ falls } n \geqslant N$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} |x_n - x| &= |\mathrm{Re}(z_n - z)| \leqslant |z_n - z| < \varepsilon \\ |y_n - y| &= |\mathrm{Im}(z_n - z)| \leqslant |z_n - z| < \varepsilon \end{aligned}$$

Nebenrechnung:

$$|\mathrm{Re}(w)| \leqslant |w| \qquad |w| = \sqrt{w\overline{w}} = \sqrt{\mathrm{Re}(w)^2 + \mathrm{Im}(w)^2} \geqslant \sqrt{\mathrm{Re}(w)^2} = |\mathrm{Re}(w)|$$

“ $\Leftarrow$“
Sei $\lim\limits_{n\to\infty} x_n =: x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n =: y$. Setze $z := x + iy$. Sei $\varepsilon > 0$. Sei $N \in \mathbb{N}$ so dass

$$|x_n - x|, |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ falls } n \geqslant N$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} |z_n - z| &= |(x_n - x) + i(y_n - y)| \\ &\leqslant |x_n - x| + |i(y_n - y)| \\ &= |x_n - x| + \underbrace{|i|}_{=1} \cdot |y_n - y| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{falls } n \geqslant N \end{aligned}$$

□

10.4 Corollar Seien $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} w_n =: w$ und $\lim\limits_{n\to\infty} z_n =: z$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

Dann konvergieren $(\lambda w_n + \mu z_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n \cdot z_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\overline{w_n})_{n\in\mathbb{N}}$ und es gilt

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}(\lambda w_n + \mu z_n) = \lambda \cdot w + \mu \cdot z$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} w_n \cdot z_n = w \cdot z$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{w_n} = \overline{w}$

Falls $z_n \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ und $z \neq 0$, so gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{w_n}{z_n} = \frac{w}{z}$

Beweis:

$$\overline{w_n} = \underbrace{\operatorname{Re}(w_n)}_{\xrightarrow{n\to\infty}\operatorname{Re}(w)} + i \underbrace{(-\operatorname{Im} w_n)}_{\xrightarrow{n\to\infty} -\operatorname{Im}(w)}$$

10.3 $\Rightarrow \bar{w}_n \xrightarrow{n\to\infty} \operatorname{Re}(w) + i \cdot (-\operatorname{Im}(w)) = \bar{w}$

Rest: Übung! □

10.5 Defintion $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ heißt Cauchyfolge, falls gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : |z_n - z_m| < \varepsilon \text{ falls } n, m \geqslant N$$

10.6 Proposition $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ ist Cauchy $\Leftrightarrow (\operatorname{Re} z_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\operatorname{Im} z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind Cauchy

Beweis:

Analog zu 10.3 (benutze wieder:

$$|w| \leqslant |\operatorname{Re} w| + |\operatorname{Im} w| \leqslant |w| + |w|$$

10.7 Satz $\mathbb{C}$ ist vollständig, d.h. jede Cauchy-Folge konvergiert.

Beweis:

$(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ Cauchy $\Rightarrow$10.6

$$(\operatorname{Re} z_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\operatorname{Im} z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R} \text{ sind Cauchy}$$

$\mathbb{R}$ vollständig $\Rightarrow (\operatorname{Re} z_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\operatorname{Im} z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren

$$10.3 \Rightarrow (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert}$$

□

10.8 Definition Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ eine Folge.

a) Wir schreiben $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ für die Folge $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen

$$s := \sum_{n=0}^{k} z_n$$

im Falle der Konvergenz bezeichnet $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ auch den Limes.

b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ konvergiert absolut, falls $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |z_n|$ konvergiert

10.9 Bemerkung absolute Konvergenz $\Rightarrow$ Konvergenz

Beweis:

Wie 7.10 □

10.10 Satz (Majorantenkriterium) Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ Folgen mit

$$|z_n| \leqslant c_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

Falls $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergiert, so konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ absolut und es gilt

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} z_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |z_n| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

Beweis:
wie 7.11

10.11 Satz (Quotientenkriterium) Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}^*$ eine Folge. Falls $0 \leqslant \theta < 1$ existiert mit

$$\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| \leqslant \theta \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

so konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ absolut.

Beweis:
wie 7.13

10.12 Satz Für jedes $z \in \mathbb{C}$ konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ absolut. Den Limes bezeichnen wir mit $\exp(z)$.

Falls $N \in \mathbb{N}$ und $|z| \leqslant \frac{N}{2} + 1$, so gilt

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \leqslant \frac{2 \cdot |z|^{N+1}}{(N+1)!}$$

Außerdem gilt $\exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)}$

Beweis:
Konvergenz und Restgliedabschätzung wie in 8.1
Konjugation: benutze:

$$\sum_{n=0}^{k} \frac{(\overline{z})^n}{n!} = \sum_{n=0}^{k} \frac{\overline{(z^n)}}{n!} = \overline{\sum_{n=0}^{k} \frac{z^n}{n!}} \xrightarrow{k\to\infty} \exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)}$$

10.13 Satz Für $w, z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\exp(w+z) = \exp(w) \cdot \exp(z)$$

Beweis:
Wie 8.2 (einschließlich Cauchy-Produkt von Reihen) □

10.14 Definition Sei $D \subset \mathbb{C}$, $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion, $z_0 \in D$. f heißt stetig in z_0, falls gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall z \in D : (|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon)$$

f heißt stetig, falls f stetig ist in jedem Punkt von D ist.

10.15 Bemerkung Stetigkeit in z_0 lässt sich auch mit Hilfe von Folgen charakterisieren. (Übung!)

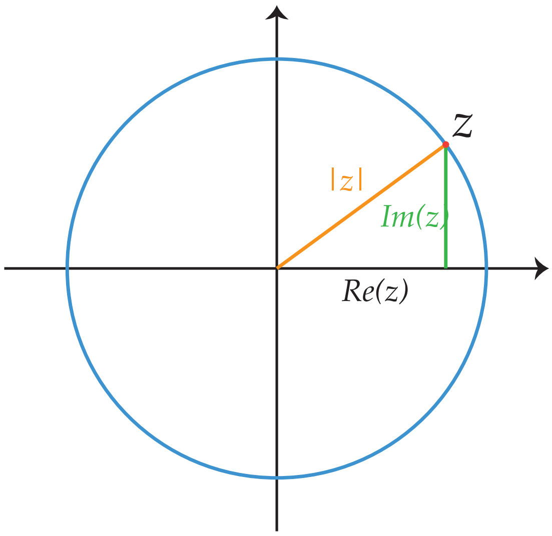
10.16 Satz $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist stetig.

Beweis:
$\exp(z)\exp(-z) = \exp(0) = 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$. $\Rightarrow \forall z \in \mathbb{C} : \exp(z) \neq 0$. Sei $z_0 \in \mathbb{C}$. Sei $\varepsilon > 0$. Sei $\delta := \min\left\{2, \frac{\varepsilon}{|\exp(z_0)|\cdot 2}\right\}$. Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < \delta$ gilt:

$$\begin{aligned}
|\exp(z) - \exp(z_0)| &= |\exp(z_0) \cdot (\exp(z - z_0) - 1)| \\
&\leqslant |\exp(z_0)| \cdot |\exp(z - z_0) - 1| \\
&\leqslant |\exp(z_0)| \cdot |r_2(z - z_0)| \\
&\leqslant |\exp(z_0)| \cdot 2|z - z_0| \\
&< |\exp(z_0)| \cdot 2\delta \\
&\leqslant \varepsilon
\end{aligned}$$

□

10.17 geometrische Interpretation



jetzt: $z = e^{ix} := \exp(ix)$ Dann

$$\begin{aligned}
|e^{ix}| &= \sqrt{e^{ix}\overline{e^{ix}}} \\
&= \sqrt{e^{ix}e^{\overline{ix}}} \\
&= \sqrt{e^{ix}e^{-ix}} = e^0 = 1
\end{aligned}$$

11 Winkelfunktion

11.1 Definition Wir definieren Funktionen

(i) $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \operatorname{Re}(e^{ix})$

(ii) $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \operatorname{Im}(e^{ix})$

11.2 Bemerkung

(i) $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ (Euler'sche Formel)

(ii) $\cos x, \sin x \in [-1, 1]$ für alle $x \in \mathbb{R}$, da $|\operatorname{Re}(e^{ix})|, |\operatorname{Im}(e^{ix})| \leqslant |e^{ix}| = 1$

11.3 Proposition $\forall x \in \mathbb{R}:$

(i) $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$

(ii) $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$

(iii) $\cos(-x) = \cos x$

(iv) $\sin(-x) = -\sin x$

(v) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Beweis:
(ii)

$$\begin{aligned} z - \overline{z} &= \operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z) - \Big(\operatorname{Re}(z) - i \operatorname{Im}(z)\Big) \\ &= 2i \operatorname{Im}(z) \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} \cos(-x) &= \operatorname{Re}(e^{-ix}) \overset{10.12}{=} \operatorname{Re}\left(\overline{e^{ix}}\right) \\ &= \operatorname{Re}(e^{ix}) \\ &= \cos x \end{aligned}$$

(v)

$$\begin{aligned} \cos^2 x + \sin^2 x &= (\operatorname{Re}(e^{ix}))^2 + (\operatorname{Im}(e^{ix}))^2 \\ &= |e^{ix}|^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

11.4 Satz $\cos, \sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ sind stetig.

Beweis:
Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist stetig, daher existiert $\delta > 0$, so dass gilt:

$$z \in \mathbb{C}, |z - ix_0| < \delta \implies |\exp(z) - \exp(ix_0)| < \varepsilon$$

Sei $x \in \mathbb{R}$ ein Punkt mit $|x - x_0| < \delta$. Dann gilt:

$$|\underbrace{ix}_{z} - ix_0| = |i| \cdot |x - x_0| = |x - x_0| < \delta$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned}|\cos x - \cos x_0| &= |\operatorname{Re}(e^{ix}) - \operatorname{Re}(e^{ix_0})| \\ &= |\operatorname{Re}(e^{ix} - e^{ix_0})| \\ &\leqslant |e^{ix} - e^{ix_0}| \\ &< \varepsilon\end{aligned}$$

[bzw. mit 11.3] $\square$

11.5 Satz: Additionstheoreme $\forall x, y \in \mathbb{R}:$

$$\begin{aligned}\cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \sin(x+y) &= \cos x \sin y + \sin x \cos y\end{aligned}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}\cos(x+y) + i\sin(x+y) = e^{i(x+y)} &= e^{ix}e^{iy} \\ &= (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) \\ &= \cos x \cos y - \sin x \sin y + i(\cos x \sin y + \sin x \cos y)\end{aligned}$$

11.6 Corollar $\forall x, y \in \mathbb{R}:$

$$\begin{aligned}\sin x - \sin y &= 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \\ \cos x - \cos y &= -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\end{aligned}$$

Beweis:
Setze $u := \frac{x+y}{2}$, $v := \frac{x-y}{2}$, dann

$$x = u + v \quad , \quad y = u - v$$

$$\begin{aligned}\sin x - \sin y &= \sin(u+v) - \sin(u-v) \\ &= \cos u \sin v + \sin u \cos v - (\sin u \cos(-v) + \cos u \sin(-v)) \\ &= 2\cos u \sin v \\ &= 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\end{aligned}$$

11.7 Satz Für $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \dots$$

Die Reihen konvergieren absolut.

Weiter gilt

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + r_{2n+2}(x)$$
$$\sin x = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + r_{2n+3}(x)$$

wobei $|r_m(x)| \leqslant \frac{|x|^m}{m!}$ falls $|x| \leqslant m+1$, $m = 2n+2, 2n+3$

Beweis:

- absolute Konvergenz:
  $\exp(x)$ ist Majorante □

- $$\begin{aligned}\cos x = \operatorname{Re}(e^{ix}) &= \operatorname{Re}\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(ix)^k}{k!}\right)\\ &= \operatorname{Re}\left(\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{2n+1}\frac{(ix)^k}{k!}\right)\right)\\ &= \operatorname{Re}\left(\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(ix)^{2k}}{(2k)!}+\sum_{k=0}^{n}\frac{(ix)^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\operatorname{Re}\left(\sum\ldots+\sum\ldots\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{i^{2k}x^{2k}}{(2k)!}+\sum_{k=0}^{n}\frac{i^{2k+1}x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\operatorname{Re}\left(\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}}_{\in\mathbb{R}}+i\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{\in\mathbb{R}}\right)\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}\right)\end{aligned}$$

  ebenso für $\sin x$

- Restglied:

$$\begin{aligned}|r_{2n+2}(x)| &= \left|\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}\right|\\ &= \left|\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\right|\cdot|(1-a_1+a_2-a_3+\ldots)|\end{aligned}$$

  wo $0 \leqslant a_k = a_{k-1}\frac{x^2}{(2n+2k+1)(2n+2k+2)} \underset{|x|\leqslant 2n+2+1}{\leqslant} a_{k-1}$, mit $k \geqslant 1$ (durch simples Anstarren!)

Es gilt

$$0 \leqslant (\underbrace{1 - a_1}_{\geqslant 0} + \underbrace{a_2 - a_3}_{\geqslant 0} + \underbrace{a_4 - a_5}_{\geqslant 0} + \ldots) \leqslant 1$$

Es folgt

$$|r_{2n+2}(x)| \leqslant \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \quad , \quad m = 2n+3 \text{ analog}$$

□

11.8 Proposition

$$\cos(2) \leqslant -\frac{1}{3}$$

Beweis:

$$\cos(2) = 1 - \frac{2^2}{2} + r_4(2) = -1 + r_4(2)$$

$$|r_4(2)| \leqslant \frac{2^4}{4!} = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \cos(2) \leqslant -\frac{1}{3}$$

□

11.9 Proposition

$$\forall x \in (0,2] : \sin x > 0$$

Beweis:

$$\sin x = x + r_3(x)$$

$$|r_3(x)| < \frac{|x|^3}{3!} = |x|\frac{|x|^2}{3 \cdot 2} < |x| \quad \Rightarrow \quad \sin x > 0$$

11.10 Propostion $\cos$ ist auf $[0,2]$ streng monoton fallend.

Beweis:
Sei $0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 2$.

$$\cos x - \cos y = -2 \underbrace{\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)}_{>0} \underbrace{\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}_{>0} < 0$$

$\Rightarrow \cos$ auf $[0,2]$ streng monoton fallend

11.11 Definition und Satz $\cos$ hat in $(0,2)$ genau eine Nullstelle. Das Zweifache dieser Nullstelle nennen wir π.

Beweis:

$$\cos(0) = \mathrm{Re}(e^{i0}) - 1 \quad , \quad \cos(2) < -\frac{1}{3}$$

$\cos$ stetig $\Rightarrow \exists$ Nullstelle in $(0,2)$

$\cos$ ist streng monoton fallend $\Rightarrow \exists!$ Nullstelle

□

11.12 Bemerkung

(i)
- $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$
- $e^{i\pi} = -1$ (Eulersche Identität)
- $e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$
- $e^{2\pi i} = 1$

Beweis:

(i)
$$\mathrm{Re}(e^{i\frac{\pi}{2}}) = \cos\frac{\pi}{2} = 0 \quad |e^{i\frac{\pi}{2}}| = 1 \Rightarrow \mathrm{Im}(e^{i\frac{\pi}{2}})^2 = 1$$
$\mathrm{Im}(e^{i\frac{\pi}{2}}) = \sin\frac{\pi}{2} > 0$ Rest: Funktionalgleichung

(ii)
- $\cos(x + 2\pi) = \cos x$
- $\sin(x + 2\pi) = \sin x$

da $e^{ix} = e^{i(x+2\pi)}$
- $\cos(x + \pi) = -\cos x$
- $\sin(x + \pi) = -\sin x$

da $e^{ix} = -e^{i(x+\pi)}$
- $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$
- $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$

da
$$\begin{aligned}\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + isin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= e^{i(x+\frac{\pi}{2})}\\ &= e^{ix} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{ix} \cdot i = (\cos x + i\sin x) \cdot i\\ &= -\sin x + i\cos x\end{aligned}$$

Es genügt daher, das Verhalten von $\cos$ auf $[0, \frac{\pi}{2}]$ zu kennen.

(iii) Für die Nullstellen gilt
$$\{x \in \mathbb{R} \mid \cos x = 0\} = \left\{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$
$$\{x \in \mathbb{R} \mid \sin x = 0\} = \{k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}0 = \cos\frac{\pi}{2} &= -1^k \cos(\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi)\\ &\Rightarrow \text{ für } k \in \mathbb{Z} \text{ ist } \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \text{ Nullstelle von } \cos\end{aligned}$$

11.11 $\Rightarrow \cos$ hat keine Nullstellen in $[0, \frac{\pi}{2})$
$$\cos x = \cos(-x) \quad \Rightarrow \quad \cos \text{ hat keine Nullstelle in } \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$
$\cos(x + k \cdot \pi) = (-1)^k \cos x \Rightarrow \cos$ hat keine Nullstellen in $\left(k \cdot \pi - \frac{\pi}{2}, k \cdot \pi + \frac{\pi}{2}\right)$. Nullstellen von $\sin$ analog.

(iv)

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad \underbrace{e^{ix} = 1}_{\Leftrightarrow \sin x = 0 \text{ und } \cos x \geqslant 0} \quad \Leftrightarrow x = k \cdot 2\pi \text{ für ein } k \in \mathbb{Z}$$

(v) $\cos$ ist auf dem $[0, \pi]$ streng monoton fallend und auf $[\pi, 2\pi]$ streng monoton wachsend.

$\sin$ ist auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ streng monoton wachsend und auf $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ streng monoton fallend.

Beweis:
$\cos$ streng monoton fallend auf $[0, \frac{\pi}{2}]$ nach 11.11

$$\cos x = -\cos(x - \pi) = \underbrace{- \underbrace{\cos(\pi - x)}_{\text{streng monoton wachsend auf } [\frac{\pi}{2}, \pi]}}_{\text{streng monoton fallend auf } [\frac{\pi}{2}, \pi]}$$

$$\cos x \begin{cases} \geqslant 0, & x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \leqslant 0, & x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

$\Rightarrow \cos$ streng monoton fallend auf $[0, \pi]$ $\square$

$$\cos 0 = 1 \quad \cos \pi = -1 \quad \sin -\frac{\pi}{2} = -1 \quad \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

stetig auf Intervallen

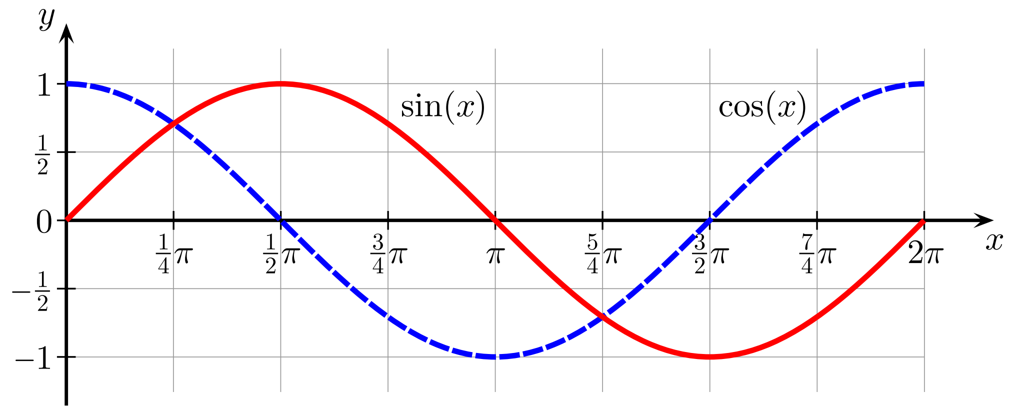
$\Rightarrow \cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ besitzt stetige Umkehrfunktion

$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$$

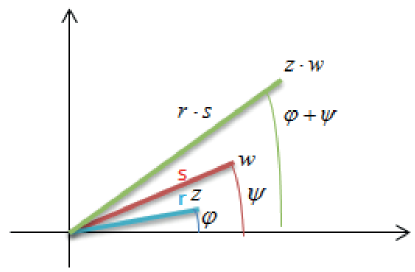
$\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ besitzt stetige Umkehrfunktion

$$\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

(vi)



11.13 Satz: Polarzerlegung



Jedes $0 \neq z \in \mathbb{C}$ lässt sich eindeutig in der Form

$$z = r \cdot e^{i\varphi} \quad , \; r > 0 \; , \; \varphi \in [0, 2\pi)$$

schreiben. Insbesondere gilt: Die Abbildung

$$[0, 2\pi) \to \{z \mid |z| = 1\} \subset \mathbb{C}$$

ist bijektiv.

Beweis:
Setze $r := |z|$ und $w := \frac{z}{r}$, dann $|w| = \left|\frac{z}{r}\right| = \frac{|z|}{|r|} = 1$ und $\mathrm{Re}(w) \in [-1, 1]$. Setze

$$\varphi := \begin{cases} \arccos\big(\mathrm{Re}(w)\big) \in [0, \pi], & \text{falls } \mathrm{Im}(w) \geqslant 0 \\ \arccos\big(-\mathrm{Re}(w)\big) + \pi \in (\pi, 2\pi), & \text{falls } \mathrm{Im}(w) < 0 \end{cases}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} &= \cos\varphi + i\sin\varphi \\ &= \begin{cases} \mathrm{Re}(w) + i\,\mathrm{Im}(w), & \text{falls } \varphi \in [0, \pi], \mathrm{Im}\, w \geqslant 0 \\ \mathrm{Re}(w) + i\,\mathrm{Im}(w), & \text{falls } \varphi \in (\pi, 2\pi), \mathrm{Im}(w) < 0 \end{cases} \\ &= w \end{aligned}$$

Nebenrechnung:

$$\cos(\arccos(-\mathrm{Re}(w)) + \pi) = -\cos(\arccos(-\mathrm{Re}(w))) = -(-\mathrm{Re}(w)) = \mathrm{Re}\, w$$

$\Rightarrow r \cdot e^{i\varphi} = r \cdot w = z$
Eindeutigkeit: Sei $z = r \cdot e^{i\varphi} = s \cdot e^{i\psi}$, wo $r, s > 0$ und $\varphi, \psi \in [0, 2\pi)$

$$\Rightarrow r = |r| \cdot \left|e^{i\varphi}\right| = |z| = |s| \cdot \left|e^{i\psi}\right| = s$$

$1 = \frac{z\overline{z}}{r \cdot s} = e^{i\varphi} \cdot e^{-i\psi} = e^{i(\varphi - \psi)}$
$\varphi - \psi \overset{11.12}{=} k \cdot 2\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$, $\varphi, \psi \in [0, 2\pi) \Rightarrow k = 0 \Rightarrow \varphi = \psi$ $\square$

11.14 Bemerkung $z = r \cdot e^{i\varphi}, w = s \cdot e^{i\psi}$ dann

$$z \cdot w = r \cdot s \cdot e^{i(\varphi+\psi)}$$

“Beträge multiplizieren, Winkel addieren“

11.15 Corollar Für $n \in \mathbb{N}^*$ besitzt die Gleichung $z^n = 1$ genau n Lösungen, $e^{i\frac{2\pi k}{n}}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$

Beweis:
$e^{i\frac{2\pi k}{n}}$ ist Lösung für $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Sei nun z eine Lösung. Dann $z = re^{i\varphi}$, $r = |z| = 1$.

$$2 = z^n = e^{i\varphi n} \Rightarrow \varphi \cdot n = k \cdot 2\pi \text{ für ein } k \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow \varphi = \frac{2\pi k}{n}$ für eine $k \in \mathbb{Z}$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$

12 Differentiation

12.1 Definiton Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $\overline{x} \in D$ ein Punkt, so dass eine Folge in D mit Limes $\overline{x}$ existiert.
f heißt differenzierbar in $\overline{x}$ falls der Limes

$$f'(\overline{x}) := \lim_{\substack{x \to \overline{x} \\ x \in D \setminus \{\overline{x}\}}} \frac{f(x) - f(\overline{x})}{x - \overline{x}} \in \mathbb{R}$$

existiert. $f'(\overline{x})$ heißt Ableitung von f im Punkt $\overline{x}$, wir schreiben auch

$$\frac{df}{dx}(\overline{x}) \quad , \quad Df(\overline{x})$$

d.h. für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D\setminus\{\overline{x}\}$ mit $x_n \xrightarrow{n\to\infty} \overline{x}$, konvergiert

$$\left(\frac{f(x_n) - f(\overline{x})}{x_n - \overline{x}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

gegen ein und denselben Grenzwert.

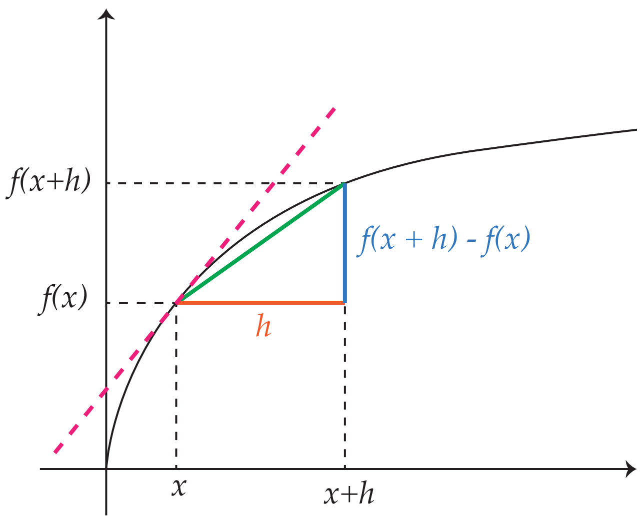
12.2 Bemerkung

(i) Falls $D \subset \mathbb{R}$ ein echtes Intervall ist, so existiert für jedes $\overline{x} \in D$ eine Folge in D mit Limes $\overline{x}$.

(ii) Falls f in $\overline{x}$ differenzierbar ist, so gilt

$$f'(\overline{x}) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0 \\ (\overline{x}+h \in D)}} \frac{f(\overline{x}+h) - f(\overline{x})}{h}$$

(iii)



(iv) $D, f, \overline{x}$ wie in 12.1
f differenzierbar in $\overline{x}$, genau dann, wenn $\varphi : D \to \mathbb{R}$ existiert mit

a) φ ist stetig in $\overline{x}$

b) $f(x) = f(\overline{x}) + (x - \overline{x})\varphi(x)$, $x \in D$

Beweis:
$\Leftarrow$ Übung!
$\Rightarrow$ Übung mit

$$\varphi(x) := \begin{cases} \frac{f(x)-f(\overline{x})}{x-\overline{x}}, & \text{falls } x \in D\backslash\{\overline{x}\} \\ f'(\overline{x}), & \text{falls } x = \overline{x} \end{cases}$$

12.3 Beispiel

(i) $f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}$) ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar.
$n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{f(x) - f(\overline{x})}{x - \overline{x}} = \frac{x^n - \overline{x}^n}{x - \overline{x}} = x^{n-1} + x^{n-2}\overline{x} + \ldots + x\overline{x}^{n-2} + \overline{x}^{n-1}$$

$x \to \overline{x}$: $\quad n \cdot \overline{x}^{n-1}$

$n = 0$:

$$\frac{f(x) - f(\overline{x})}{x - \overline{x}} = \frac{1 - 1}{x - \overline{x}} = 0 \to 0$$

(ii) $f(x) = e^x$

$$\frac{f(\overline{x} + h) - f(\overline{x})}{h} = \frac{e^{\overline{x}+h} - e^{\overline{x}}}{h} = e^{\overline{x}} \cdot \frac{e^h - 1}{h} \xrightarrow[\text{wegen 9.25 (v)}]{h \to 0} e^{\overline{x}}$$

(iii) $f(x) = x^{-1}$ ist auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ differenzierbar

$$\begin{aligned} \frac{f(\overline{x} + h) - f(\overline{x})}{h} &= \frac{1}{h}(\frac{1}{\overline{x} + h} - \frac{1}{x}) \\ &= \frac{1}{h}\frac{\overline{x} - (\overline{x} + h)}{(\overline{x} + h)\overline{x}} \\ &= -\frac{1}{(\overline{x} + h)\overline{x}} \xrightarrow{h \to 0} -\frac{1}{\overline{x}^2} = f'(\overline{x}) \end{aligned}$$

(iv) $f(x) = \sin x$

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{\sin h}{h} - 1 &= \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{\sin h - h}{h} \\ &= \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{h + r_3(h) - h}{h} \\ &= \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{r_3(h)}{h} = 0 \end{aligned}$$

Restgliedabschätzung:

$$\left| \frac{r_3(h)}{h} \right| = \frac{|r_3(h)|}{|h|} \leqslant \frac{\frac{|h|^3}{3!}}{|h|} = \frac{|h|^2}{6} \quad \text{für } |h| \leqslant 4$$

Es folgt (mit den Additionstheoremen 11.6)

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{\sin(\overline{x}+h)-\sin(\overline{x})}{h} &= \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{2\cos(\frac{\overline{x}+h+\overline{x}}{2})\sin(\frac{\overline{x}+h-\overline{x}}{2})}{h}\\ &= \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \cos\left(\frac{\overline{x}+h+\overline{x}}{2}\right) \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{\sin(\frac{\overline{x}+h-\overline{x}}{2})}{\frac{h}{2}}\\ &= \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \cos\left(\overline{x}+\frac{h}{2}\right) \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\\ &= \cos(\overline{x})\cdot 1 = \cos\overline{x} = \sin'(\overline{x})\end{aligned}$$

(v) Analog: $\cos'(\overline{x}) = -\sin(\overline{x})$, $\overline{x}\in\mathbb{R}$

12.4 Satz $f,g : D\to\mathbb{R}$ differenzierbar in $\overline{x}\in D$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. Dann sind $\lambda f+\mu g$ und $f\cdot g$ differenzierbar in $\overline{x}$ und

$$\begin{aligned}(\lambda\cdot f+\mu\cdot g)'(\overline{x}) &= \lambda\cdot f'(\overline{x})+\mu\cdot g'(\overline{x})\\ (f\cdot g)'(\overline{x}) &= f'(\overline{x})\cdot g(\overline{x})+f(\overline{x})\cdot g'(\overline{x})\end{aligned}$$

Falls $g(x)\neq 0$ für alle $x\in D$, so ist $\frac{f}{g}$ in $\overline{x}$ differenzierbar mit

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(\overline{x}) = \frac{f'(\overline{x})g(\overline{x})-f(\overline{x})g'(\overline{x})}{g(\overline{x})^2}$$

<u>**Beweis:**</u>

$$\begin{aligned}&\frac{(\lambda\cdot f+\mu\cdot g)(\overline{x}+h)-(\lambda\cdot f+\mu\cdot g)(\overline{x})}{h}\\ &=\lambda\frac{f(\overline{x}+h)-f(\overline{x})}{h}+\mu\frac{g(\overline{x}+h)-g(\overline{x})}{h}\\ &\xrightarrow{h\to 0}\lambda f'(\overline{x})+\mu g'(\overline{x})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{(fg)(\overline{x}+h)-(fg)(\overline{x})}{h} &= \frac{f(\overline{x}+h)g(\overline{x}+h)-f(\overline{x})g(\overline{x})}{h}\\ &= \frac{f(\overline{x}+h)-f(\overline{x})}{h}\cdot g(\overline{x}+h)+f(\overline{x})\cdot\frac{g(\overline{x}+h)-g(\overline{x})}{h}\\ &\xrightarrow{h\to 0} f'(\overline{x})\cdot g(\overline{x})+f(\overline{x})g'(\overline{x})\end{aligned}$$

Haben benutzt: g ist stetig in $\overline{x}$ nach Übung. (nach 12.2(iv) gilt

$$g(x) = g(\overline{x})+(x-\overline{x})\varphi(x)$$

mit $\varphi: D\to\mathbb{R}$ stetig in $\overline{x}$)

$$\begin{aligned}\frac{\frac{f}{g}(\overline{x}+h)-\frac{f}{g}(\overline{x})}{h} &= \frac{1}{g(\overline{x}+h)g(\overline{x})}\left(\frac{(f(\overline{x}+h)-f(\overline{x}))g(\overline{x})}{h}-\frac{f(\overline{x})(g(\overline{x}+h)-g(\overline{x}))}{h}\right)\\ &\xrightarrow{h\to 0}\frac{1}{g(\overline{x})^2}\cdot(f'(\overline{x})\cdot g(\overline{x})-f(\overline{x})g'(\overline{x}))\end{aligned}$$

12.5 Beispiel

(i) $f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}$

$$f'(x) = \frac{0 \cdot x^n - 1 \cdot n \cdot x^{n-1}}{(x^n)^2} = -n \cdot x^{n-1-2n} = -nx^{-n-1}$$

also $\frac{dx^k}{dx} = kx^{k-1}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$

(ii) $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ definiert durch $\tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$

$$\tan'(x) = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

12.6 Satz $I \subset \mathbb{R}$ echtes Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton. Sei $g : f(I) \to I$ die Umkehrfunktion (9.18).
Falls f in $\overline{x} \in I$ differenzierbar ist mit $f'(\overline{x}) \neq 0$, so ist g in $f(\overline{x}) \in f(I)$ differenzierbar mit

$$g'\big(f(\overline{x})\big) = \frac{1}{f'(\overline{x})}$$

Falls also f in I differenzierbar ist mit $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$, so ist g differenzierbar in $f(I)$ und

$$g'(y) = \frac{1}{f'\big(g(y)\big)} \quad , \quad y \in f(I)$$

Beweis:
Wollen:

$$\lim_{\substack{y \to f(\overline{x}) \\ y \neq f(\overline{x})}} \frac{g(y) - g(f(\overline{x}))}{y - f(\overline{x})}$$

Sei $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset f(I) \backslash \{f(\overline{x})\}$ eine Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = f(\overline{x}) =: \overline{y}$.
g ist stetig nach 9.18, also

$$\overline{x} = g \circ f(\overline{x}) = g(\overline{y}) = g\left(\lim_{n\to\infty} y_n\right) = \lim_{n\to\infty} g(y_n)$$

$g(y_n) \neq g(\overline{y})$ da g bijektiv

$$\begin{aligned} g'(f(\overline{x})) = \lim_{n\to\infty} \frac{g(y_n) - g(\overline{y})}{y_n - \overline{y}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{y_n - \overline{y}}{g(y_n) - g(\overline{y})}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{f(g(y_n)) - f(g(\overline{y}))}{g(y_n) - g(\overline{y})}} \\ &= \frac{1}{f'(g(\overline{y}))} \\ &= \frac{1}{f'(\overline{x})} \end{aligned}$$

□

12.7 Beispiel

(i) $\ln'(y) = \frac{1}{\exp\left(\ln(y)\right)} = \frac{1}{y}$

(ii) Für $y \in (-1,1)$ gilt

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sin'(\arcsin y)} = \frac{1}{\cos(\underbrace{\arcsin y}_{\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})})} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin y)}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

Nebenrechnung $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$:

$$\cos(x) = |\cos(x)| = \sqrt{\cos^2(x)} = \sqrt{1-\sin^2(x)}$$

(iii) $\arctan : (-\infty, \infty) \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
Umkehrfunktion von tan. (Übung!)

$$\arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}$$

12.8 Satz (Kettenregel) Seien $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : E \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(D) \subset E$. Falls f in $\overline{x} \in D$ und g in $f(\overline{x}) \in E$ differenzierbar sind, so ist $g \circ f$ differenzierbar in $\overline{x}$ und es gilt

$$(g \circ f)'(\overline{x}) = g'\left(f(\overline{x})\right) \cdot f'(\overline{x})$$

Beweis:
Sei $\overline{y} := f(\overline{x})$. Definiere $\varphi : E \to \mathbb{R}$ durch

$$\varphi(y) := \begin{cases} \frac{g(y)-g(\overline{y})}{y-\overline{y}}, & \text{falls } y \neq \overline{y} \\ g'(\overline{y}), & \text{falls } y = \overline{y} \end{cases}$$

Dann ist φ stetig in $\overline{y}$ und es gilt

$$g(y) - g(\overline{y}) = \varphi(y) \cdot (y - \overline{y}) \quad , y \in E$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \frac{g \circ f(x) - g \circ f(\overline{x})}{x - \overline{x}} &= \frac{g\big(f(x)\big) - g\big(f(\overline{x})\big)}{x-\overline{x}} \\ &= \varphi(f(x))\frac{f(x)-f(\overline{x})}{x-\overline{x}} \\ &\xrightarrow{x \to \overline{x}} \underbrace{\varphi\big(f(\overline{x})\big)}_{\substack{f \text{ stetig in } \overline{x} \\ \varphi \text{ stetig in } f(\overline{x})}} \cdot f'(\overline{x}) = g'\big(f(\overline{x})\big) \cdot f'(\overline{x}) \end{aligned}$$

□

12.9 Beispiel

(i) $a \in \mathbb{R}$ $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ $x \mapsto x^a = \exp(a \ln x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \exp'(a \ln x) \cdot \frac{d(a \ln x)}{dx} \\ &= \exp(a \ln x) \cdot a \cdot x^{-1} \\ &= a x^{a-1} \end{aligned}$$

(ii) allgemein:

$$\frac{d\, e^{f(x)}}{dx} = f'(x) e^{f(x)}$$

12.10 Definition Sei $f : D \to \mathbb{R}$ in D differenzierbar. Dann ist $f' : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Falls f' in D differenzierbar ist, so heißt f in D **zweimal differenzierbar** und $f''(x) := (f')'(x)$. Wir schreiben auch $D^2 f(x)$, $\frac{d^2 f}{dx^2}(x)$, $f^{(2)}(x)$.

f heißt **k-mal differenzierbar** in D, falls f $(k-1)$-mal differenzierbar ist und $f^{(k-1)}$ differenzierbar ist.

$$f^{(k)}(x) := \left(f^{(k-1)}\right)'(x) \quad , \quad D^k f(x) \quad , \quad \frac{d^k f}{dx^k}(x)$$

f heißt **∞-oft differenzierbar** oder **glatt**, falls f k-mal diffrenzierbar ist für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$f^{(0)}(x) = f(x)$$

12.11 Beispiel Polynome, e^x , $\sin(x)$, $\cos(x)$, …sind glatt.

$$f(x) := \begin{cases} x^2, & \text{falls } x > 0 \\ -x^2, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

ist 1-mal differenzierbar, aber nicht 2-mal denn $f'(x) = 2|x|$

12.12 Definition $f : D \to \mathbb{R}$ hat in $\overline{x} \in D$ ein **lokales Maximum (Minimum)**, falls ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass

$$f(x) \underset{(\geqslant)}{\leqslant} f(\overline{x}) \forall x \in D \cap (\overline{x} - \varepsilon, \overline{x} + \varepsilon)$$

D.h.

$$f\,|_{D \cap (\overline{x} - \varepsilon, \overline{x} + \varepsilon)}$$

besitzt Maximum (Minimum) in $\overline{x}$.

12.13 Satz $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ besitze in $\overline{x} \in (a, b)$ ein lokales **Extremum** (d.h. Maximum oder Minimum) und sei in $\overline{x}$ differenzierbar. Dann gilt $f'(\overline{x}) = 0$.

Beweis:
O.E.d.A besitzt f in $\overline{x}$ ein lokales Maximum.

Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ so , dass $f(x) \leqslant f(\overline{x})$ für alle $x \in (\overline{x} - \varepsilon, \overline{x} + \varepsilon)$. Es folgt

$$\begin{aligned} 0 \geqslant \underbrace{\lim_{\substack{x \searrow \overline{x} \\ x \neq \overline{x}}} \frac{f(x) - f(\overline{x})}{x - \overline{x}}}_{f'(\overline{x})} &= \lim_{\substack{x \to \overline{x} \\ x \neq \overline{x}}} \frac{f(x) - f(\overline{x})}{x - \overline{x}} \\ &= \lim_{\substack{x \nearrow \overline{x} \\ x \neq \overline{x}}} \frac{f(x) - f(\overline{x})}{x - \overline{x}} \\ &\geqslant 0 \end{aligned}$$

□

12.14 Bemerkung $f'(\overline{x}) = 0$ ist notwendig, aber nicht hinreichend für Existenz eines lokalen Extremums.
zB $f(x) = x^3$, $f'(0) = 0$

12.15 Satz von Rolle Sei $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) = f(b)$. Sei f in (a, b) differenzierbar.
Dann exisitiet $\overline{x} \in (a, b)$ mit $f'(\overline{x}) = 0$

Beweis:
Trivial falls f konstant. Andernfalls existiert ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f(x_0) > f(a)$ oder $f(x_0) < f(a) = f(b)$.
f stetig auf $[a, b]$ besitzt also Maximum und Minimum (nach 9.12). O.E. sei das Maximum von f größer als $f(x_0) > f(a) = f(b)$. Das Maximum werde in $\overline{x} \in (a, b)$ angenommen.
$\Rightarrow f$ hat in $\overline{x} \in (a, b)$ ein lokales Maximum.
$\Rightarrow f'(\overline{x}) = 0$

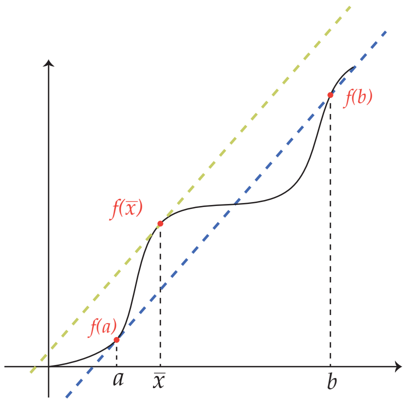
12.16 Mittelwertsatz Sei $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Sei f in (a, b) differenzierbar. Dann existiert ein $\overline{x} \in (a, b)$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\overline{x})$$

Beweis:
Definiere: $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ durch $F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x - a)$. Dann ist F stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b). Außerdem gilt $F(a) = f(a) = F(b)$.
$\underset{\text{Rolle}}{\Rightarrow}$

$$\exists\ \overline{x} \in (a, b) \text{ mit } f'(\overline{x}) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = F'(\overline{x}) = 0$$

□



12.17 Korollar Sei $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$, differenzierbar auf (a,b) mit $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a,b)$.
Dann ist f konstant.

Beweis:
Für $a \leqslant x < y \leqslant b$ gilt

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(\overline{x}) = 0 \quad \Rightarrow f(y) = f(x)$$

für ein $\overline{x} \in (x,y)$ □

12.18 Korollar Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x) = \lambda \cdot f(x)$. Dann gilt

$$f(x) = f(0) \cdot e^{\lambda \cdot x}$$

Beweis:
Setze: $F(x) := f(x) \cdot e^{-\lambda x}$, dann ist F differenzierbar mit

$$F'(x) = f'(x) \cdot e^{-\lambda x} + f(x)(-\lambda e^{-\lambda x}) = 0$$

$\Rightarrow F$ ist konstant mit

$$f(x) \cdot e^{-\lambda x} = F(x) = F(0) = f(0)$$

Multiplizieren mit $e^{-\lambda x}$ □

12.19 Satz (l'Hospital) Seien $f, g(a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$. Es gelte entweder oder

a) $\lim\limits_{x \searrow a} f(x) = \lim\limits_{x \searrow a} g(x) = 0$

b) $\lim\limits_{x \searrow a} f(x) = \lim\limits_{x \searrow a} g(x) = \infty$

Falls $\lim\limits_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, so auch $\lim\limits_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ und

$$\lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Ebenso für $\lim\limits_{x\nearrow b} \dots$

Eine Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes. liefert

$$\frac{f}{g}$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}{\frac{g(b)-g(a)}{b-a}} = \frac{f'(\overline{x})}{g'(\overline{\overline{x}})}$$

12.20 Beispiel

(i) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x}$ für $\alpha > 0$ Bedingung b) von obigem Satz

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\alpha \cdot e^{\alpha x}}{1} = \infty$$

$\alpha, \beta > 0$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{e^{\frac{\alpha}{\beta}x}}{x} \right)^\beta = \infty$$

ebenso:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{\alpha x}}{|p(x)|} \quad , \quad a > 0 \quad , \quad p \text{ ein Polynom}$$

(ii)

$$\lim_{x\searrow 0} x\ln(x) = \lim_{x\searrow 0} - \frac{-\ln x}{\frac{1}{x}}$$

$$= -\lim_{x\searrow 0} \frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\searrow 0} x = 0$$

Folgerung:

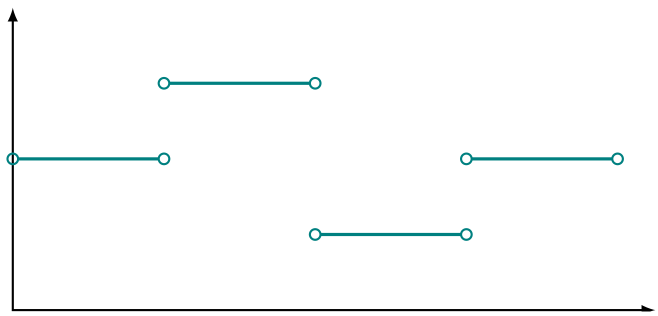
$$\lim_{x\searrow 0} x^x = \lim_{x\searrow 0} e^{x\ln x} = \exp\left(\lim_{x\searrow 0} x\ln x\right) = e^0 = 1$$

13 Integration

13.1 Definition $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt **Treppenfunktion**, falls eine Zerlegung

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

existiert, sodass für jedes $k = 1, \ldots, n$ $f\,|_{(x_{k-1},x_k)}$ konstant ist.



$$\mathcal{T}([a,b]) := \{ \text{ Treppenfunktionen auf } [a,b]\}$$

13.2 Bemerkung $\mathcal{T}([a,b])$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektrorraum.

Beweis:
$f, g \in \mathcal{T}([a,b])$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b \quad &\text{Zerlegung für } f \\ a = y_0 < y_1 < \ldots < y_m = b \quad &\text{Zerlegung für } g \end{aligned}$$

Dann existiert eine Zerlegung

$$a = z_0 < z_1 < \ldots < z_q = b$$

so dass für jedes $l \in \{1, \ldots, q\}$ $k \in \{1, \ldots, n\}$ und $r \in \{1, \ldots, m\}$ existieren mit $(z_{l-1}, z_l) \subset (x_{k-1}, x_k) \cap (y_{r-1}, y_r)$.

$$\{x_0, \ldots, x_n\} \cup \{y_0, \ldots, y_m\} = \underbrace{\{z_0, \ldots, z_q\}}_{\text{aufsteigend}}$$

Dann ist aber $(\lambda f + \mu g) \mid_{(z_{l-1}, z_l)} = \lambda f \mid_{(z_{l-1}, z_l)} + \mu g \mid_{(z_{l-1}, z_l)}$ konstant. □

13.3 Definition und Proposition Sei $f \in \mathcal{T}([a,b])$. Wir definieren das **Integral**

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \sum_{k=1}^n \gamma_k \cdot (x_k - x_{k-1}),$$

wo

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

Eine Zerlegung ist, so dass

$$f \mid_{(x_{k-1}, x_k)} \equiv \gamma_k \quad , \quad k \in \{1, \ldots, n\}$$

$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ist unabhängig von der Zerlegung für f

Beweis:
Sei $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ bzw $a = y_0 < y_1 < \ldots < y_m = b$ Zerlegungen für f mit $f \mid_{x_{k-1}, x_k} \equiv \gamma_k$ bzw $g \mid_{y_{r-1}, r_k} \equiv \delta_k$.
Sei $a = z_0 < z_1 < \ldots < z_q = b$ eine Zerlegung, so dass für jedes $l \in \{1, \ldots, q\}$ $k_l \in \{1, \ldots, n\}$ und $r_l \in \{1, \ldots, m\}$ existieren mit

$$(z_{l-1}, z_l) \subset (x_{k_l - 1}, k_{k_l}) \cap (y_{r_l - 1}, y_{r_l})$$

$$\{z_0, \ldots, z_q\} \supset \{x_1, \ldots, x_n\} \cup \{y_0, \ldots, y_m\}$$

Dann gilt

$$\{1, \ldots, q\} = \bigcup_{k=1}^n \{l \mid k_l = k\}$$

also auch

$$\bigcup_{\{l \mid k_l = k\}} [z_{l-1}, z_l] = [x_{k-1}, x_k]$$

und

$$\sum_{\{l \mid k_l = k\}} (z_l - z_{l-1}) = x_k - x_{k-1}$$

Setze: $\zeta_l := \gamma_{k_l} (= \delta_{r_l})$

$$\begin{aligned}\sum_{l\in\{1,\dots,q\}} \zeta_l(z_l - z_{l-1}) &= \sum_{k\in\{1,\dots,n\}} \sum_{\{l|k_l=k\}} \zeta_l(z_l - z_{l-1}) \\ &= \sum_{k\in\{1,\dots,n\}} \left(\sum_{\{l|k_l=k\}} \gamma_{k_l}(z_l - z_{l-1}) \right) \\ &= \sum_{k\in\{1,\dots,n\}} \left(\sum_{\{l|k_l=k\}} \gamma_k(z_l - z_{l-1}) \right) \\ &= \sum_{k\in\{1,\dots,n\}} \gamma_k \cdot \sum_{\{l|k_l=k\}} (z_l - z_{l-1}) \\ &= \sum_{k\in\{1,\dots,n\}} \gamma_k \cdot (x_k - x_{k-1})\end{aligned}$$

Ebenso: $\sum\limits_{l\in\{1,\dots,q\}} \zeta_l(z_l - z_{l-1}) = \sum\limits_{r\in\{1,\dots,m\}} \delta_r(y_r - y_{r-1})$ □

13.4 Propostion $f, g \in \mathcal{T}([a,b])$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

(i)

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(x)\mathrm{d}x = \lambda \cdot \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \mu \cdot \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

(ii)

$$\left| \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \leqslant (b-a) \cdot \sup\Big\{ |f(x)| \mid x \in [a,b] \Big\}$$

(iii)

$$f \leqslant g \Rightarrow \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

Beweis:
Sei $a = z_0 < \ldots < z_n = b$ Zerlegung für f und g (wie 13.3) mit $f\mid_{z_{k-1},z_k} \equiv \gamma_k$ bzw $g\mid_{z_{k-1},z_k} \equiv \delta_k$

(i)

$$\begin{aligned}\int_a^b (\lambda f + \mu g)(x)\mathrm{d}x &= \sum_{k=1}^n (\lambda\gamma_k + \mu\delta_k) \cdot (z_k - z_{k-1}) \\ &= \lambda \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^n \gamma_k \cdot (z_k - z_{k-1})}_{=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x} + \mu \underbrace{\sum_{k=1}^n \delta_k \cdot (z_k - z_{k-1})}_{=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}\end{aligned}$$

(ii) analog

(iii) analog

13.5 Definition Sei M eine Menge. Für $f : M \to \mathbb{K}$ beschränkt definieren wir

$$||f||_{\infty,M} := \sup\Big\{|f(x)| \mid x \in M\Big\} \in \mathbb{R}_+$$

Wir schreiben oft auch $||f||_\infty$

13.6 Proposition $||.||_\infty$ ist eine **Norm**, d.h.

(i) $||f||_\infty \geqslant 0$ und $||f||_\infty = 0$ genau dann wenn $f = 0$

(ii) $||\lambda \cdot f||_\infty = |\lambda| \cdot ||f||_\infty$

(iii) $||f+g||_\infty \leqslant ||f||_\infty + ||g||_\infty$

Beweis: (iii)

$$\begin{aligned}
\sup\{|(f+g)(x)| \mid x \in M\} &= \sup\{|f(x)+g(x)| \mid x \in M\} \\
&\leqslant \sup\{|f(x)|+|g(x)| \mid x \in M\} \\
&\leqslant \sup\{|f(x)|+|g(y)| \mid x,y \in M\} \\
&= \sup\{|f(x)| \mid x \in M\} + \sup\{|g(y)| \mid y \in M\} \\
&= ||f||_\infty + ||g||_\infty
\end{aligned}$$

Rest Eigenschaften von $|.|$ □

13.7 Definition $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt **Regelfunktion**, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists g \in \mathcal{T}([a,b]) : ||f-g||_\infty < \varepsilon$$

$\mathcal{R}([a,b]) := \{$Regelfunktionen auf $[a,b]\}$

13.8 Proposition Für $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sind äquivalent:

(i) $f \in \mathcal{R}([a,b])$

(ii) $\forall \overline{x} \in [a,b)$ existiert $\lim\limits_{\substack{x \searrow \overline{x} \\ x \neq \overline{x}}} f(x)$ und

$\forall \overline{x} \in (a,b]$ existiert $\lim\limits_{\substack{x \nearrow \overline{x} \\ x \neq \overline{x}}} f(x)$

Beweis: (Skizze) (ii) $\Rightarrow$ (i)
Annahme $f \notin \mathcal{R}([a,b])$. Finde $\varepsilon > 0$ und Intervallschachtelung $[a_n,b_n], n \in \mathbb{N}$ mit $\nexists g \in \mathcal{T}([a_n,b_n])$ mit $\left|\left| f\big|_{[a_n,b_n]} - g \right|\right|_{\infty,[a_n,b_n]} < \varepsilon$

$$\Longrightarrow \exists \overline{x} \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n,b_n]$$

Wegen (ii) existiert $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\left| f(t) - \lim_{\substack{x \nearrow \overline{x} \\ x \neq \overline{x}}} f(x) \right| < \varepsilon \quad , \quad t \in [a_N, \overline{x})$$

$$\left| f(t) - \lim_{\substack{x \searrow \overline{x} \\ x \neq \overline{x}}} f(x) \right| < \varepsilon \quad , \quad t \in (\overline{x}, b_N] \qquad \lightning \text{ zu IVS}$$

(i) $\Rightarrow$ (ii) Übung!

13.9 Beispiel

(i) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow f \in \mathcal{R}([a,b])$

(ii) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton $\Rightarrow f \in \mathcal{R}([a,b])$
Übung!

(iii) $\chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}} \notin \mathcal{R}([a,b])$, wo

$$\chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in [0,1]\cap\mathbb{Q} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Übung!

13.10 Definition und Satz Für $f \in \mathcal{R}([a,b])$ definieren wir

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x := \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b g_n(x)\mathrm{d}x$$

wo $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}([a,b])$ eine Folge ist mit

$$||g_n - f||_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Insbesondere existiert der Limes und hängt nicht von der Wahl der Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ab. Weiter gilt:

$$\int_b^a f(x)\mathrm{d}x := -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \qquad \int_a^a f(x)\mathrm{d}x := 0$$

Beweis:
Sei $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}([a,b])$ mit $||g_n - f||_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$ (warum existiert $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$?).
Setze $I_n := \int_a^b g_n(x)\mathrm{d}x$, dann ist $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge: Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $N \in \mathbb{N}$ so, dass $||g_n - f||_\infty < \frac{\varepsilon}{2\cdot(b-a)}$ falls $n \geqslant N$. Dann gilt für $n, m \geqslant N$:

$$\begin{aligned} |I_n - I_m| &= \left| \int_a^b g_n(x)\mathrm{d}x - \int_a^b g_m(x)\mathrm{d}x \right| \\ &= \left| \int_a^b (g_n - g_m)(x)\mathrm{d}x \right| && \text{nach 13.4(i)} \\ &\leqslant ||g_n - g_m||_\infty (b-a) && \text{13.4.(ii)} \\ &\leqslant \big(||g_n - f||_\infty + ||f - g_n||_\infty\big)(b-a) \\ &< 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \varepsilon \end{aligned}$$

$\Rightarrow (I_n)$ konvergiert, also existiert $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b g_n(x)\mathrm{d}x$.

Sei nun $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}([a,b])$ weitere Folge mit $(\star)$ $||h_n - f||_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Setze $J_n := \int_a^b h_n(x)\mathrm{d}x$.

$$(g_0, h_0, g_1, h_1, \ldots)$$

erfüllt auch $(\star)$.

$$\rightsquigarrow (I_0, J_0, I_1, J_1, \ldots) \quad \text{konvergiert}$$

$\Rightarrow (I_n)_{\mathbb{N}}$ und $(J_n)_{\mathbb{N}}$ konvergieren gegen denselben Limes. □

13.11 Proposition $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(i)

$$\int\limits_a^b (\lambda \cdot f + \mu \cdot g)(x)\mathrm{d}x = \lambda \cdot \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x + \mu \int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

(ii)

$$\left| \int\limits_a^b f(x)dx \right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \leqslant (b-a) \cdot ||f||_\infty$$

(iii)

$$f \leqslant g \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

Beweis:
Seien $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}([a,b])$ mit $||d_n - f||_\infty$, $||e_n - f||_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$

(i) Dann gilt

$$||\lambda \cdot d_n + \mu \cdot e_n - (\lambda \cdot f + \mu \cdot g)||_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$\begin{aligned} \int_a^b (\lambda f + \mu g)(x)\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty} \int_a^b (\lambda d_n + \mu e_n)(x)\mathrm{d}x \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\lambda \cdot \int_a^b d_n(x)\mathrm{d}x + \mu \cdot \int_a^b e_n(x)\mathrm{d}x \right) \\ &= \lambda \cdot \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \mu \cdot \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

13.12 Bemerkung $a < b < c$, $f \in \mathcal{R}([a,c])$. Dann gilt $f\,|_{[a,b]} \in \mathcal{R}([a,b])$, $f\,|_{[b,c]} \in \mathcal{R}([a,b])$ und

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x$$

Beweis:
Klar für Treppenfunktionen, damit auch für Limites. □

13.13 Mittelwertsatz der Integralrechnung $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $g \in \mathcal{R}([a,b]), g \geqslant 0$. Dann existiert $\overline{x} \in [a,b]$ mit :

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\overline{x}) \cdot \int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

Insbesondere (für $g \equiv 1$) existiert $\overline{\overline{x}} \in [a,b]$ mit

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\overline{\overline{x}}) \cdot (b-a)$$

Beweis:
Setze

$$M := \sup\Big\{f(x) \mid x \in [a,b]\Big\} = \max\Big\{f(x) \mid x \in [a,b]\Big\}$$
$$m := \inf\Big\{f(x) \mid x \in [a,b]\Big\} = \min\Big\{f(x) \mid x \in [a,b]\Big\}$$

Dann gilt: (benutze: $m \cdot g(x) \leqslant f(x)g(x)$ und $f(x)g(x) \leqslant M \cdot g(x)$)

$$\begin{aligned} m \cdot \int_a^b g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b m \cdot g(x)\mathrm{d}x &\leqslant \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_a^b Mg(x)\mathrm{d}x \\ &= M \cdot \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

$\Rightarrow \exists \mu \in [m,M] : \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \mu \cdot \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

$m = \min\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$
$\Rightarrow \exists x_{\min} \in [a,b] : f(x_{\min}) = m$ und $\exists x_{\max} \in [a,b] : f(x_{\max}) = M$

ZWS $\Rightarrow \exists \overline{x} \in [a,b] : F(\overline{x}) = \mu$ □

13.14 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung Sei I ein echtes Intervall , $a \in I$ und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Wir definieren $F : I \to \mathbb{R}$ durch

$$F(t) := \int\limits_a^t f(x)\mathrm{d}x$$

(i) F ist **Stammfunktion** von f, d.h. F ist differenzierbar auf I mit $F'(t) = f(t)$ für alle $t \in I$.

(ii) Ist $G : I \to \mathbb{R}$ weitere Stammfunktion von f, so gilt

$$F(t) = G(t) - G(a) =: G(x)\Big|_a^t$$

für alle $t \in I$

Beweis:
Sei $t_0 \in I$. Für $t_0 < t \in I$ gilt

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(t)-F(t_0)}{t-t_0} - f(t_0)\right| &= \frac{|F(t)-F(t_0)-f(t_0)(t-t_0)|}{t-t_0}\\ &= \frac{\left|F(t)-F(t_0)-\int_{t_0}^{t} f(t_0)\mathrm{d}x\right|}{t-t_0}\\ &= \frac{\left|\int_a^t f(x)\mathrm{d}x - \int_a^{t_0} f(x)dx - \int_{t_0}^{t} f(t_0)\mathrm{d}x\right|}{t-t_0}\\ &= \frac{\left|\int_a^{t_0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{t_0}^{t} f(x)\mathrm{d}x - \int_a^{t_0} f(x)\mathrm{d}x - \int_{t_0}^{t} f(t_0)\mathrm{d}x\right|}{t-t_0}\\ &= \frac{\left|\int_{t_0}^{t} f(x)\mathrm{d}x - \int_{t_0}^{t} f(t_0)\mathrm{d}x\right|}{t-t_0}\\ &= \frac{\left|\int_{t_0}^{t} (f(x)-f(t_0))\,\mathrm{d}x\right|}{t-t_0}\\ &\leqslant \frac{\sup\{|f(x)-f(t_0)| \mid x \in [t_0,t]\}\cdot(t-t_0)}{t-t_0}\\ &\xrightarrow{t\searrow t_0} 0\end{aligned}$$

ebenso für $t_0 > t \in I$
$\Rightarrow \lim\limits_{\substack{t\to t_0\\ t\neq t_0}} \frac{F(t)-F(t_0)}{t-t_0} = f(t_0)$

beweis (ii)

$$(G-F)'(t) = f(t) - f(t) = 0 \forall t$$

$\Rightarrow G - F$ konstant (Korollar 12.17)

$$G - F \equiv G(a) - F(a) = G(a)$$

□

13.15 Bemerkung Der Satz lässt sich auch für Regelfunktionen formulieren mit $\lim\limits_{x\nearrow x_0} \ldots$ und $\lim\limits_{x\searrow x_0} \ldots$

13.16 Beispiele

(i) $-1 \neq s \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b x^s \mathrm{d}x = \left.\frac{x^{s+1}}{s+1}\right|_a^b \left(= \frac{b^{s+1}-a^{s+1}}{s+1}\right)$$

wir schreiben auch

$$\int x^s \mathrm{d}x = \frac{x^{s+1}}{s+1} + c$$

Beweis:
Sei $f(t) = t^s$, dann ist $G(t) := \frac{t^{s+1}}{s+1}$ Stammfunktion, denn $G'(t) = f(t)$. Also gilt

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = G(b) - G(a) = G(x)\Big|_a^b$$

(ii) Für $s = -1$ gilt ($0 < a < b$)

$$\int_a^b x^{-1}\mathrm{d}x = \ln(x)\Big|_a^b$$

denn

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln x = \frac{1}{x} = x^{-1} \quad \text{für } x > 0$$

$(a < b < 0)$

$$\int_a^b x^{-1}\mathrm{d}x = \ln(-x)\Big|_a^b$$

da

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(-x) = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

Wir schreiben auch

$$\int x^{-1}\mathrm{d}x = \ln|x| + C$$

(iii)

$$\int \exp(x)\mathrm{d}x = \exp(x) + C$$

(iv)

$$\int \sin(x)\mathrm{d}x = -\cos(x) + C$$
$$\int \cos(x)\mathrm{d}x = \sin(x) + C$$

(v)

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan(x) + C$$

(vi) $-\frac{\pi}{2} < a < b < \frac{\pi}{2}$

$$\int_a^b \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \tan(x)\Big|_a^b$$

13.17 Satz: Substitutionsregel $I, [a,b] \subset \mathbb{R}$ Intervalle. $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, $g : [a,b] \to I$ **stetig differenzierbar**(d.h. g' existiert und ist stetig). Dann gilt

$$\int\limits_a^b f\big(g(x)\big)g'(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{g(a)}^{g(b)} f(x)\mathrm{d}x$$

Beweis:
Sei $G : I \to \mathbb{R}$ Stammfunktion von f, d.h. $G'(t) = f(t)$ für $t \in I$.

$$\begin{aligned}(G \circ g)'(t) &= G'(g(t)) \cdot g'(t)\\ &= f(g(t)) \cdot g'(t)\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\mathrm{d}x = (G \circ g)(x)\Big|_a^b &= G(g(b)) - G(g(a))\\ &= G(x)\Big|_{g(a)}^{g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

□

13.18 Beispiel

(i)

$$\int_a^b f(x+\lambda)\mathrm{d}x = \int_{a+\lambda}^{b+\lambda} f(x)\mathrm{d}x$$

(ii)

$$\int_a^b f(x^2)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{a^2}^{b^2} f(x)\mathrm{d}x$$

(iii) $g : [a,b] \to \mathbb{R}^*$ ist stetig differenzierbar $0 \notin [a,b]$

$$\int_a^b \frac{g'(x)}{g(x)}\mathrm{d}x = \ln|g(x)|\Big|_a^b$$

Insbesondere $(-\frac{\pi}{2} < a < b < \frac{\pi}{2})$

$$\int_a^b \tan x\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\mathrm{d}x = -\int_a^b \frac{\cos'(x)}{\cos(x)} = -\ln(\cos(x))\Big|_a^b$$

13.19 Satz: Partielle Integration $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int\limits_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x$$

Beweis:
Für $F := f \cdot g$ gilt

$$f(x)g(x)\Big|_a^b = \int_a^b F'(x) = \int_a^b f(x)g'(x) + \int_a^b f'(x)g(x)$$

13.20 Beispiel

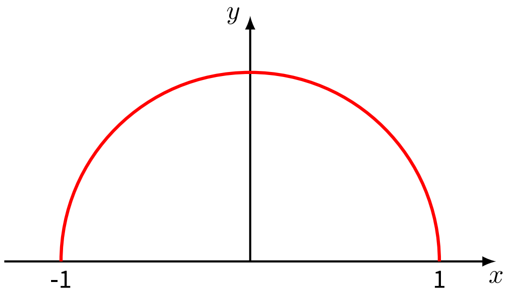
(i)

$$\int_a^b \ln x \cdot 1 \mathrm{d}x = x \cdot \ln(x)\Big|_a^b - \int_a^b \frac{x}{x} \mathrm{d}x = x \cdot \ln(x)\Big|_a^b - x\Big|_a^b = x \cdot \ln(x) - 1\Big|_a^b$$

(ii)

$$\int_0^1 x^n (1-x)^m \mathrm{d}x = \frac{n! \cdot m!}{(n+m+1)}$$

(iii) Betrachte $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(t) = \sqrt{1-t^2}$



Für $b \in [0,1)$ gilt

$$\begin{aligned}
\int_0^b f(x)\mathrm{d}x &= \int_0^b f(x) \cdot 1 \mathrm{d}x \\
&= f(x) \cdot x\Big|_0^b - \int_0^b x f'(x) \mathrm{d}x \\
&= \sqrt{1-x^2} \cdot x\Big|_0^b - \int_0^b x(-2x)\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x \\
&= \sqrt{1-b^2}b + \int_0^b \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x \\
&= \sqrt{1-b^2}b + \int_0^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x - \int_0^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x + \int_0^b \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x \\
\int_0^b f(x)\mathrm{d}x &= \sqrt{1-b^2}b + \int_0^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x - \int_0^b \sqrt{1-x^2} \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
2 \cdot \int_0^b \sqrt{1-x^2} \mathrm{d}x &= \sqrt{1-b^2}b + \int_0^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
&= \sqrt{1-b^2}b + \arcsin(x)\Big|_0^b \\
&\xrightarrow{b \to 1} 0 + \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Abbildungsverzeichnis