

# Skript Differentialformen und Mannigfaltigkeiten


Mitschrift der Vorlesung „Differentialformen und Mannigfaltigkeiten“ von  
Prof. Dr. Kai Zehmisch

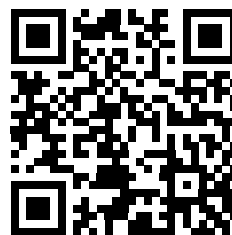
Jannes Bantje

4. August 2014

Aktuelle Version verfügbar bei:



 **GitHub** (inklusive Sourcecode)  
<https://github.com/JaMeZ-B/latex-www>



 **Bittorrent Sync**  
B6WH2DISQ5QVYIRYIEZSF4ZR2IDVKPN3I

## Vorwort — Mitarbeit am Skript

Dieses Dokument ist eine Mitschrift aus der Vorlesung „Differentialformen und Mannigfaltigkeiten, SoSe 2014“, gelesen von Prof. Dr. Kai Zehmisch. Der Inhalt entspricht weitestgehend dem Tafelanschrieb. Für die Korrektheit des Inhalts übernehme ich keinerlei Garantie! Für Bemerkungen und Korrekturen – und seien es nur Rechtschreibfehler – bin ich sehr dankbar. Korrekturen lassen sich prinzipiell auf drei Wegen einreichen:

- Persönliches Ansprechen in der Uni, Mails an [j.bantje@wwu.de](mailto:j.bantje@wwu.de) (gerne auch mit annotierten PDFs)
- *Direktes* Mitarbeiten am Skript: Den Quellcode poste ich auf GitHub (siehe oben), also stehen vielfältige Möglichkeiten der Zusammenarbeit zur Verfügung: Zum Beispiel durch Kommentare am Code über die Website und die Kombination Fork + Pull Request. Wer sich verdient macht oder ein Skript zu einer Vorlesung, die ich nicht besuche, beisteuern will, dem gewähre ich auch Schreibzugriff.

Beachten sollte man dabei, dass dazu ein Account bei [github.com](https://github.com) notwendig ist, der allerdings ohne Angabe von persönlichen Daten angelegt werden kann. Wer bei GitHub (bzw. dem zugrunde liegenden Open-Source-Programm „git“) – verständlicherweise – Hilfe beim Einstieg braucht, dem helfe ich gerne weiter. Es gibt aber auch zahlreiche empfehlenswerte Tutorials im Internet<sup>1</sup>.

- *Indirektes* Mitarbeiten:  $\text{\TeX}$ -Dateien per Mail verschicken.

Dies ist nur dann sinnvoll, wenn man einen ganzen Abschnitt ändern möchte (zB. einen alternativen Beweis geben), da ich die Änderungen dann per Hand einbauen muss!

## Vorlesungshomepage

<http://wwwmath.uni-muenster.de/u/kai.zehmisch/>

---

<sup>1</sup>zB. <https://try.github.io/levels/1/challenges/1>, ist auf Englisch, aber dafür interaktives LearningByDoing

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Mannigfaltigkeiten</b>	<b>1</b>
1.1 Sphären	1
1.1.1 Definition: Differenzierbarkeit auf $S^n$	1
1.2 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten	1
1.2.1 Definition: $n$ -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit	1
1.2.2 Definition: Atlas und Kartenwechsel	2
1.2.3 Definition: Differenzierbarer Atlas	2
1.2.4 Definition: Kompatibilität von Karten	3
1.2.5 Definition: Maximaler Atlas, differenzierbare Struktur und Mannigfaltigkeit	3
1.3 Beispiel: Der reell projektive Raum	3
1.4 Differenzierbare Funktionen	5
1.4.1 Definition: Differenzierbarkeit auf einer Mannigfaltigkeit	5
1.4.2 Definition: Diffeomorphismus	6
1.5 Der Tangentialraum	6
1.5.1 Definition: Tangentialraum (geometrisch)	7
1.5.2 Definition: Tangentialraum (algebraisch)	7
1.5.3 Definition: Differential (algebraisch)	7
1.5.4 Satz 1: Die partiellen Ableitungen bilden eine Basis des $T_0\mathbb{R}^m$	8
1.5.5 Lemma 2 (Morse)	8
1.5.6 Definition: Differential (geometrisch)	8
1.5.7 Satz 3: In lokalen Koordinaten ist das Differential durch die Jacobi-Matrix gegeben	9
1.5.8 Definition (des Physikers ...)	9
1.5.9 Äquivalenz der geometrischen und der algebraischen Definition	9
<b>2 Vektorfelder</b>	<b>11</b>
2.1 Vektorfelder und Lie-Klammer	11
2.1.1 Definition: Vektorfeld	11
2.1.2 Lemma 4: Differenzierbarkeit eines Vektorfeldes	11
2.1.3 Bemerkung: Modul der differenzierbaren Vektorfelder auf einer Mannigfaltigkeit	11
2.1.4 Definition: Lie-Klammer	11
2.1.5 Lemma 5: Die Lie-Klammer ist ein Vektorfeld	12
2.1.6 Beispiel: Lie-Klammer im $\mathbb{R}^2$	12
2.2 Integralkurven	12
2.3 Satz von Picard-Lindelöf	13
2.3.1 Satz 6: (Picard-Lindelöf)	13
2.3.2 Bemerkung (Quantisierung)	14
2.3.3 Bemerkung (höhere Regularität)	15
2.4 Flüsse und die Lie-Ableitung	16
2.4.1 Definition: lokaler Fluss	16
2.4.2 Satz 7: Verkettung von lokalen Flüssen	16
2.4.3 Definition: Lie-Ableitung	16
2.4.4 Satz 8: Identitäten der Lie-Ableitung	16
2.4.5 Notation für Pushforward	17
2.4.6 Beispiel zu 2.4.5: Vektorfeld aus einem Diffeomorphismus und einem Vektorfeld	17
2.4.7 Lemma 9: Fluss des Pushforwards eines Vektorfeldes	18
2.4.8 Satz 10: Zusammenhang zwischen Flüssen von Vektorfeldern und der Lie-Klammer	18
2.5 Dynamische Systeme	18
2.5.1 Definition: Dynamisches System	18
2.5.2 Beispiele für dynamische Systeme	19

2.5.3	Einparameterfamilie von Diffeomorphismen . . . . .	20
2.5.4	Nach $M$ parametrisierte Kurvenscharen . . . . .	20
2.5.5	Bemerkung: Zerlegung von $M$ in ihre Bahnen . . . . .	20
2.5.6	Notation: Derivation definiert durch eine Kurve . . . . .	21
2.5.7	Satz 11: Eigenschaften von Flusslinien . . . . .	21
2.5.8	Definition: lokaler Fluss . . . . .	21
2.5.9	Beispiel: Lokaler Fluss in $\mathbb{R}$ . . . . .	23
2.5.10	Satz 12: Jedes Vektorfeld ist Geschwindigkeitsfeld genau eines maximalen Flusses . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Teilung der Eins</b> . . . . .	<b>25</b>
3.1	Parakompaktheit . . . . .	25
3.1.1	Satz 13: Differenzierbare Mannigfaltigkeiten sind parakompakt . . . . .	25
3.1.2	Definition: Untergeordnete Teilung der Eins . . . . .	26
3.1.3	Lemma 13b . . . . .	26
3.1.4	Satz 14 . . . . .	27
3.2	Riemannsche Metriken . . . . .	28
3.2.1	Definition . . . . .	28
3.2.2	Satz 15 . . . . .	28
3.3	Sternförmige Gebiete . . . . .	28
3.3.1	Definition: Sternförmiges Gebiet . . . . .	28
3.3.2	Beispiel: Der Einheitsball ist diffeomorph zum $\mathbb{R}^n$ . . . . .	28
3.3.3	Satz 16: Jede offene sternförmige Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist diffeomorph zu $\mathbb{R}^n$ . . . . .	29
3.4	Existenz globaler Flüsse . . . . .	30
3.4.1	Satz 17 . . . . .	30
3.4.2	Satz 18 . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Vektorraumbündel</b> . . . . .	<b>32</b>
4.1	Das Tangentialbündel . . . . .	32
4.1.1	Definition: Tangentialbündel . . . . .	32
4.2	Das Kotangentialbündel . . . . .	33
4.2.1	Definition: 1-Form . . . . .	33
4.2.2	Definition: Totales Differential . . . . .	33
4.3	Vektorraumbündel . . . . .	34
4.3.1	Definition: Vektorraumbündel . . . . .	34
4.3.2	Definition: Bündelmorphismus . . . . .	35
4.3.3	Definition: Bündeläquivalenz . . . . .	35
4.3.4	Produktbündel: $\xi \times \eta$ . . . . .	36
4.3.5	Whitney-Summe: $\xi \oplus \eta$ . . . . .	36
4.3.6	Einschränkung eines Bündels . . . . .	37
4.3.7	Definition: Schnitt von Bündeln . . . . .	37
4.3.8	Definition: Bündelatlas . . . . .	37
<b>5</b>	<b>Formen</b> . . . . .	<b>39</b>
5.1	Alternierende Formen . . . . .	39
5.1.1	Definition: Alternierende $k$ -Form . . . . .	39
5.1.2	Definition: Äußeres Produkt, Dachprodukt . . . . .	39
5.1.3	Lemma 20: Basis des Vektorraumes $\Lambda^k V^*$ . . . . .	40
5.1.4	Lemma 21 (Antikommutativität) . . . . .	40
5.1.5	Lemma 22 . . . . .	40
5.2	Differentialformen . . . . .	41
5.2.1	Definition: Differentialform . . . . .	41
5.2.2	Bemerkung . . . . .	41

5.2.3	Lemma 23 (Tensorialitätseigenschaft)	42
5.2.4	Definition: Induzierte Abbildung	43
5.3	Das äußere Differential	43
5.3.1	Satz 24	43
5.3.2	Folgerung 25 (Natürlichkeit)	45
5.4	Orientierung	46
5.4.1	Definition: Orientierung von Vektorräumen	46
5.4.2	Definition: Orientierung einer Mannigfaltigkeit	46
5.4.3	Lemma 26	47
5.4.4	Beispiel	48
5.5	Integration	49
5.5.1	Definition: Messbare Teilmenge einer Mannigfaltigkeit	49
5.5.2	Lemma 27	49
5.5.3	Definition: Integrierbarkeit und das Integral einer $k$ -Form	50
5.5.4	Satz 28	50
5.5.5	Folgerung 29	51
5.5.6	Folgerung 30	51
5.5.7	Folgerung 31	52
5.5.8	Folgerung 32 (Transformationsformel)	52
<b>6</b>	<b>Topologie des deRham-Komplexes</b>	<b>53</b>
6.1	Der Satz von Stokes	53
6.1.1	Einschub: Untermannigfaltigkeit	54
6.1.2	Satz 33 (Gauß-Stokes)	56
6.1.3	Folgerung 34 (Fixpunktsatz von Brouwer)	56
6.2	Homotopieinvarianz	58
6.2.1	Definition: Homotopie	58
6.2.2	Satz 34 (Monotoniesatz)	58
6.2.3	Satz vom Igel	59
6.3	Das Poincaré-Lemma	60
6.3.1	Satz 35 (Kettenhomotopie)	60
6.3.2	Poincaré-Lemma	60
6.4	Die deRham-Kohomologie	60
6.4.1	Poincaré-Dualität	61
	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>A</b>
	<b>Todo list</b>	<b>A</b>

# 1 Mannigfaltigkeiten

## 1.1 Sphären

Die  $n$ -Sphäre ist gegeben durch

$$S^n := \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

Für  $i = 1, \dots, n+1$  betrachten wir die (bzgl. der Relativtopologie) offenen Teilmengen

$$U_i^\pm = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n \mid \pm x_i > 0\}$$

und lokale Karten ( $\hat{x}_i$  heißt, dass diese Koordinate entfällt)

$$h_i^\pm : U_i^\pm \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1})$$

Die  $h_i^\pm$  sind Homöomorphismen auf ihrem Bild mit Inversen (etwa  $x_i > 0$ )

$$(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1}) \text{ mit } \sum_{k \neq i} x_k^2 < 1 \xrightarrow{(h_i^\pm)^{-1}} \left( x_1, \dots, \sqrt{1 - \sum_{k \neq i} x_k^2}, \dots, x_{n+1} \right) \in S^n$$

Wir wollen differenzierbare Funktionen auf  $S^n$  erklären. Dazu betrachte ( $x_j > 0, i < j$ ) die Komposition  $h_j^+ \circ (h_i^+)^{-1}$ . Diese bildet  $(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1})$  nach  $\left( x_1, \dots, \sqrt{1 - \sum_{k \neq i} x_k^2}, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_{n+1} \right)$  ab und ist auf  $h_i^+(U_i^+ \cap U_j^+)$  (beliebig oft) differenzierbar. Daher sagen wir:

### 1.1.1 Definition: Differenzierbarkeit auf $S^n$

Eine Funktion  $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}$  ist **differenzierbar**, falls alle Abbildungen

$$f \circ (h_i^\pm)^{-1} : h_i^\pm(U_i^\pm) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\} \rightarrow \mathbb{R}$$

(beliebig oft) differenzierbar sind. Diese Definition ist korrekt, da

$$f \circ (h_j^\pm)^{-1} = f \circ (h_i^\pm)^{-1} \circ \underbrace{h_i^\pm \circ (h_j^\pm)^{-1}}_{\in C^\infty}$$

## 1.2 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

### 1.2.1 Definition: $n$ -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit

Eine  **$n$ -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit**  $M$  ist ein Hausdorff-Raum, mit abzählbarer Basis der Topologie, der lokal homöomorph zum  $\mathbb{R}^n$  ist.

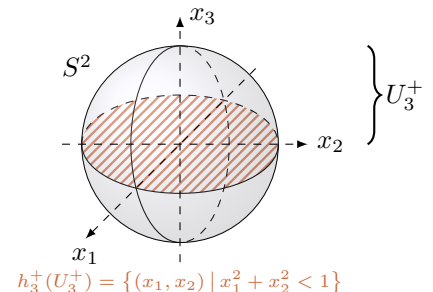
**lokal homöomorph:**  $\forall p \in M \exists$  offene Umgebung  $U \subset M$  um  $p$  und einen Homöomorphismus  $h : U \rightarrow U' \subset \mathbb{R}^n$  auf eine offene Teilmenge  $U'$  des  $\mathbb{R}^n$ .

**Hausdorffsch:** Zu je zwei Punkten  $p, q \in M$  mit  $p \neq q$  gibt es offene Umgebungen  $U, V$  von  $p$  bzw.  $q$ , die  $U \cap V = \emptyset$ . Beispiel: Jeder metrische Raum ist Hausdorffsch:  $U := \{x \in M \mid d(x, p) < \frac{1}{3}d(p, q)\}$ , analog  $V$

**Basis einer Topologie:** Ist ein System  $\mathcal{B}$  offener Mengen des topologischen Raumes  $M$ , sodass sich jede offene Menge in  $M$  als Vereinigung von Mengen aus dem System  $\mathcal{B}$  schreiben lässt.

Beispiel: Basis des  $\mathbb{R}^n$ : offene Bälle  $B_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| < r\}$ ,  $a \in \mathbb{R}^n, r \in (0, \infty)$ . Eine abzählbare Basis des  $\mathbb{R}^n$ :

$$\mathcal{B} := \{B_r(a) \mid a \in \mathbb{Q}^n, r \in (0, \infty) \text{ rational}\}$$



### Beispiel (topologische Mannigfaltigkeit)

- offene Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$
- Untermannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^{n+k}$

(näheres in der ersten Übung)

### Bemerkung

Die Hausdorff-Eigenschaft folgt *nicht* aus der lokalen Homöomorphie zum  $\mathbb{R}^n$ ! Betrachte dazu die Topologie auf  $M = \mathbb{R} \cup \{p\}$  definiert durch:

$U$  ist offen in  $M$ , falls

- $U \subset \mathbb{R}$  offen
- $U = V \setminus \{0\} \cup \{p\}$  mit  $V \subset \mathbb{R}$  offen und  $0 \in V$
- oder Vereinigung solcher Mengen

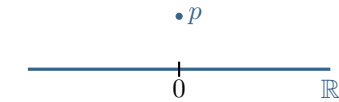


Abbildung 1: Beispiel einer nicht-Hausdorffmenge

### 1.2.2 Definition: Atlas und Kartenwechsel

$h$  heißt Karte,  $U$  das zugehörige Kartengebiet. Eine Menge von Karten  $\{h_\alpha : U_\alpha \rightarrow U'_\alpha \subset \mathbb{R}^n \mid \alpha \in A\}$  heißt **Atlas** von  $M$ , falls  $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$ .

Ein **Kartenwechsel** ist ein Homöomorphismus

$$h_{\beta\alpha} := h_\beta \circ h_\alpha^{-1} : h_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow h_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

### 1.2.3 Definition: Differenzierbarer Atlas

Ein Atlas einer topologischen Mannigfaltigkeit heißt **differenzierbar**, falls alle Kartenwechsel (beliebig oft) differenzierbar sind.

### Beispiele

- $U \subset \mathbb{R}^n$  offen, Atlas  $\{\text{id} : U \rightarrow U\}$ . Zum Beispiel  $GL(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \subset Mat_{n \times n}(\mathbb{R})$ .

**Bemerkung:** Die Hausdorff-Eigenschaft folgt zum Beispiel daraus, dass  $U$  ein metrischer Raum ist. Eine topologische Mannigfaltigkeit mit einem abzählbaren Atlas hat eine abzählbare Basis der Topologie.

- $S^n$  mit Atlas  $\{h_i^\pm : U_i^\pm \rightarrow \mathbb{R}^n \mid i = 1, \dots, n+1\}$
- $S^n$  mit Atlas  $\{h^\pm : S^n \setminus \{(0, \dots, 0, \pm 1)\} \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n\}$  (**stereographische Projektion**, siehe Blatt 1).

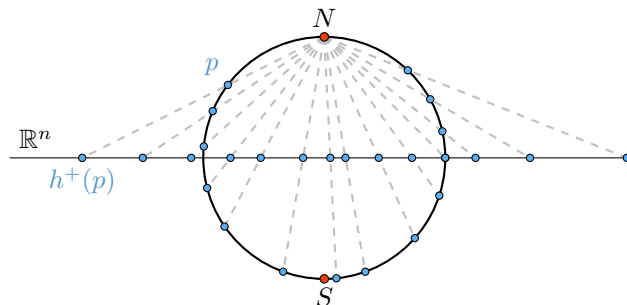


Abbildung 2: Stereografische Projektion

### 1.2.4 Definition: Kompatibilität von Karten

Zwei Karten  $(U_\alpha, h_\alpha)$  und  $(U_\beta, h_\beta)$  einer topologischen Mannigfaltigkeit heißen **kompatibel**, falls der Kartenwechsel  $h_{\beta\alpha} = h_\beta \circ h_\alpha^{-1}$  ein Diffeomorphismus ist, d.h.  $h_{\beta\alpha}$  ist differenzierbar und  $h_{\alpha\beta}$  ebenfalls.

Die  $n$ -Sphäre hat zwei Atlanten  $\{h_i^\pm\}$  und  $\{h^\pm\}$ . Die beiden sind jeweils miteinander kompatibel, siehe Blatt 1. Wir wollen daher die beiden Atlanten  $\{h_i^\pm\}$  und  $\{h^\pm\}$  als ein und dieselbe differenzierbare Mannigfaltigkeit auffassen.

### 1.2.5 Definition: Maximaler Atlas, differenzierbare Struktur und Mannigfaltigkeit

Ein differenzierbarer Atlas  $\mathcal{A}$  heißt **maximal**, falls jede Karte von  $M$ , die mit allen Karten von  $\mathcal{A}$  kompatibel ist, selbst bereits zu  $\mathcal{A}$  gehört. Eine **differenzierbare Struktur** auf einer topologischen Mannigfaltigkeit ist ein maximaler differenzierbarer Atlas. Eine **differenzierbare Mannigfaltigkeit** ist eine topologische Mannigfaltigkeit mit einer differenzierbaren Struktur.

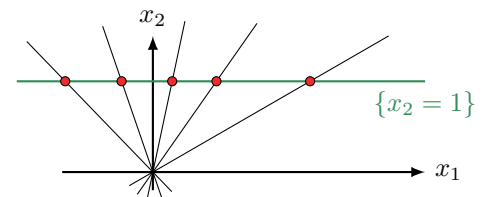
#### Bemerkung

Jeder differenzierbare Atlas ist in einem eindeutig bestimmten maximalen Atlas enthalten, den man durch Hinzunahme aller kompatiblen Karten erhält. Zur Angabe einer differenzierbaren Struktur genügt es daher, einen differenzierbaren Atlas zu beschreiben (siehe Blatt 2).

## 1.3 Beispiel: Der reell projektive Raum

Der reell projektive Raum ist definiert durch:

$$\begin{aligned}\mathbb{R}P^n &:= \frac{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}{x \sim y \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : y = \lambda x} \\ &= \text{Menge aller Ursprungsgeraden im } \mathbb{R}^{n+1} \\ &= S^n / x \sim -x\end{aligned}$$



Für  $n = 1$

Jede Ursprungsgerade außer  $\{x_2 = 0\}$  entspricht genau einem Punkt auf der affinen Gerade  $\{x_2 = 1\}$ ;  $\infty := \{x_2 = 0\}$ .  $\mathbb{R}P^1 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ .

Abb. 3: Der eindimensionale projektive Raum  $\mathbb{R}P^1$

Für  $n = 2$ : Jede Ursprungsgerade im  $\mathbb{R}^3$ , die nicht in der  $x_1$ - $x_2$ -Ebene liegt, entspricht genau ein Punkt

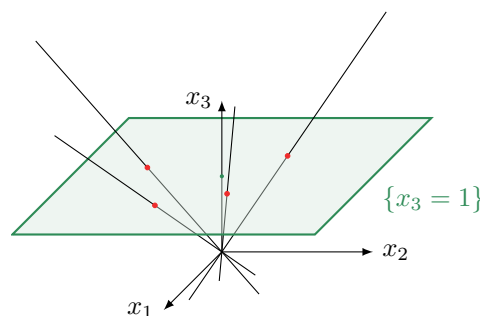


Abbildung 4: Der 2-dimensionale projektive Raum  $\mathbb{R}P^2$  (projektive Ebene)

in der affinen Ebene  $\{x_3 = 1\}$ . Die Ursprungsgeraden in der  $x_1$ - $x_2$ -Ebene bilden einen  $\mathbb{R}P^1$

$$\mathbb{R}P^2 = \mathbb{R}^2 \cup \mathbb{R}P^1$$



## Quotientenabbildung

$$\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}P^n, \quad x \mapsto [x] \text{ (Ursprungsgerade durch } x \text{)}$$

- (i)
- Topologie auf  $\mathbb{R}P^n$  (Quotiententopologie)  $U \subset \mathbb{R}P^n$  sei offen  $:\Leftrightarrow \pi^{-1}(U) \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  offen ist ( $\Rightarrow \pi$  stetig)
  - Hausdorff-Eigenschaft: Seien  $[x] \neq [y]$  im  $\mathbb{R}P^n$ . Dann gibt es disjunkte offene Mengen  $X, Y$  im  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ , die aus Ursprungsgeraden bestehen (ohne 0) und die die Ursprungsgeraden durch  $x$  und  $y$  (mit 0 entfernt) erhalten:

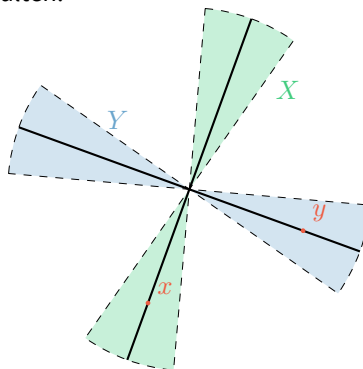


Abbildung 5: Zeichnung zur Hausdorffeigenschaft von  $\mathbb{R}P^n$

$\Rightarrow \pi^{-1}(\pi(X)) = X, \pi^{-1}(\pi(Y)) = Y$  sind offen. Also sind  $\pi(X), \pi(Y)$  offene disjunkte Umgebungen von  $[x]$  bzw.  $[y]$ .

- abzählbare Basis der Topologie:

Zeichnung unfertig  
...umbauen mit elipsis

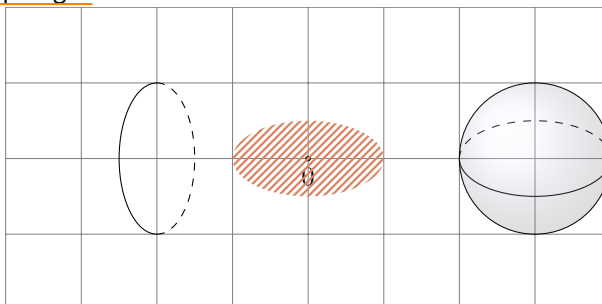


Abbildung 6: Basis der Topologie von  $\mathbb{R}P^n$  (unfertig)

$$\mathcal{B} = \{\pi(X_{a,r}) \mid a \in \mathbb{Q}^n, r \in (0, \infty) \cap \mathbb{Q}\}$$

- (ii) Differenzierbare Struktur auf  $\mathbb{R}P^n$ :  $[x_0 : x_1 : \dots : x_n] \in \mathbb{R}P^n$  sei die Ursprungsgerade durch  $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ . Dies sind die sogenannten **homogenen Koordinaten**.

$$[x_0 : \dots : x_n] = [\lambda x_0 : \dots : \lambda x_n] \quad \text{mit } \lambda \neq 0$$

Setze  $U_i := \{[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{R}P^n \mid x_i \neq 0\}$  für  $i = 0, 1, \dots, n$ . Dann ist

$$\pi^{-1}(U_i) = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \mid x_i \neq 0\} \text{ offen.}$$

$\Rightarrow U_i$  ist offen. Betrachte nun folgende Karte

$$h_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad [x_0 : \dots : x_n] \mapsto \left( \frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{\widehat{x_i}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right)$$

Folgendes ist erfüllt:

- Die Definition hängt nicht von der Wahl des Repräsentanten ab.
- $h_i$  ist bijektiv mit Inverser  $h_i^{-1}(y_1, \dots, y_n) = [y_1 : \dots : y_i : 1 : y_{i+1} : \dots : y_n]$
- $h_i^{-1}$  ist stetig:

$$h_i^{-1} : (y_1, \dots, y_n) \xrightarrow{\text{stetig}} (y_1, \dots, 1, \dots, y_n) \xrightarrow{\pi} [y_1 : \dots : 1 : \dots : y_n]$$

- $h_i$  ist stetig

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \supset \pi^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\tilde{h}_i} & \mathbb{R}^n \\ \downarrow \pi & & \downarrow \text{id} \\ \mathbb{R}P^n \supset U_i & \xrightarrow{h_i} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

Es gilt  $\tilde{h}_i(x_0, \dots, x_n) = \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \widehat{\frac{x_i}{x_i}}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right)$ . Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen. Also  $\pi^{-1}(h_i^{-1}(U)) = \tilde{h}_i^{-1}(U)$  ist offen, da  $\tilde{h}_i$  stetig ist.  $\Rightarrow$  Nach der Quotiententopologie ist  $h_i^{-1}(U)$  offen.

- $\{(U_i, h_i)\}_{i=0, \dots, n}$  ist ein differenzierbarer Atlas ( $\Rightarrow$  abzählbare Basis der Topologie)
  - $\diamond \bigcup_{i=0, \dots, n} U_i = \mathbb{R}P^n$
  - $\diamond$

$$\begin{aligned} h_j \circ h_i^{-1}(y_1, \dots, y_n) &= h_j([y_1 : \dots : \underset{0}{1} : \dots : y_n]) \\ &= \begin{cases} \left(\frac{y_1}{y_j}, \dots, \frac{1}{y_j}, \dots, \widehat{\frac{y_j}{y_j}}, \dots, \frac{y_n}{y_j}\right), & \text{falls } i < j \\ \left(\frac{y_1}{y_{j+1}}, \dots, \widehat{\frac{y_{j+1}}{y_{j+1}}}, \dots, \frac{1}{y_{j+1}}, \dots, \frac{y_n}{y_{j+1}}\right), & \text{falls } i > j \end{cases} \end{aligned}$$

ist  $C^\infty$  auf

$$h_i(U_i \cap U_j) = \begin{cases} \{y \in \mathbb{R}^n \mid y_j \neq 0\}, & \text{falls } i < j \\ \{y \in \mathbb{R}^n \mid y_{j+1} \neq 0\}, & \text{falls } i > j \end{cases}$$

## 1.4 Differenzierbare Funktionen

### 1.4.1 Definition

Eine stetige Abbildung  $f : M \rightarrow N$  zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten heißt **differenzierbar** in  $p \in M$ , falls für zwei Karten

$$h : U \xrightarrow{\ni p} U' \quad \text{und} \quad k : V \xrightarrow{\ni f(p)} V'$$

die Abbildung  $k \circ f \circ h^{-1}$  in  $h(p) \in U'$  (beliebig oft) differenzierbar ist.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \downarrow h & & \downarrow k \\ \mathbb{R}^m & \xrightarrow{k \circ f \circ h^{-1}} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

- Die Stetigkeit von  $f$  wird vorausgesetzt, um sicherzustellen, dass  $f^{-1}(V)$  und damit auch  $h(f^{-1}(V) \cap U)$  eine offene Menge ist.
- Wie in 1.1 erklärt, ist die Definition eines differenzierbaren Atlases gerade so gewählt, dass die obige Definition unabhängig von der Wahl der lokalen Karten ist.

Wir setzen:

$$C^\infty(M, N) := \{(\text{in jedem Punkt}) \text{ differenzierbare Abbildungen } M \rightarrow N\}$$

$$C^\infty(M) := C^\infty(M, \mathbb{R}),$$

wobei  $(\mathbb{R}, \text{id})$  eine differenzierbare Struktur auf  $\mathbb{R}$  definiert. Mit  $V = \mathbb{R}$  muss man in diesem Spezialfall die Stetigkeit von  $f$  *nicht* voraussetzen, da  $f^{-1}(\mathbb{R}) = M$  offen ist. Differenzierbare Funktionen sind stetig.

#### 1.4.2 Definition

Ein **Diffeomorphismus** ist ein differenzierbarer Homöomorphismus mit differenzierbarer Inverser.

##### Beispiel

Sei  $M$  der topologische Raum  $\mathbb{R}$ . Homöomorphismen:  $h_1 = \text{id}$ ,  $h_2(x) = x^3$ .  $h_1$  und  $h_2$  definieren differenzierbare Strukturen auf  $\mathbb{R}$ . Wegen

$$h_1 \circ h_2^{-1} : x \mapsto \sqrt[3]{x}$$

(nicht in 0 differenzierbar!) sind diese differenzierbare Strukturen *nicht* gleich. Sie sind aber diffeomorph:

$$\begin{array}{ccc} (M, \mathcal{A}_1) & \xrightarrow{x \mapsto \sqrt[3]{x}} & (M, \mathcal{A}_2) \\ \downarrow h_1 & & \downarrow h_2 \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{\text{id} = h_2 \circ f \circ h_1^{-1}} & \mathbb{R} \end{array}$$

Es ist sinnvoll differenzierbare Mannigfaltigkeiten bis auf Diffeomorphie zu klassifizieren. Auf  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \neq 4$  gibt es bis auf Diffeomorphie genau eine differenzierbare Struktur. Auf  $\mathbb{R}^4$  gibt es überabzählbar viele. *mind = blown*  
Auf  $S^n$  mit  $n \leq 6$  genau eine. Auf  $S^7$  genau 28.

#### 1.5 Der Tangentialraum

Sei  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  differenzierbar. Das **Differential** von  $f$  ist in  $p \in \mathbb{R}^m$  eine lineare Abbildung  $T_p \mathbb{R}^m \rightarrow T_{f(p)} \mathbb{R}^n$  gegeben durch die Jacobi-Matrix

$$J_f(p) = \left( \frac{\partial f^i}{\partial x^j} \right)_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m}}$$

mit  $f = (f^1, \dots, f^n)$ . Der **Geschwindigkeitsvektor** in  $p$  einer Kurve durch  $p$  wird auf den Geschwindigkeitsvektor der Bildkurve in  $f(p)$  abgebildet.

$T_p \mathbb{R}^m$  heißt der **Tangentialraum** und ist der Raum aller solchen Geschwindigkeitsvektoren, der hier kanonisch zu  $\mathbb{R}^m$  isomorph ist.

**Ziel:** Differential von  $f : M \xrightarrow{\text{diffb.}} N$  zu erklären.

**Idee:** • Tangentialebene  $T_p M$  einer Fläche  $M \subset \mathbb{R}^3$

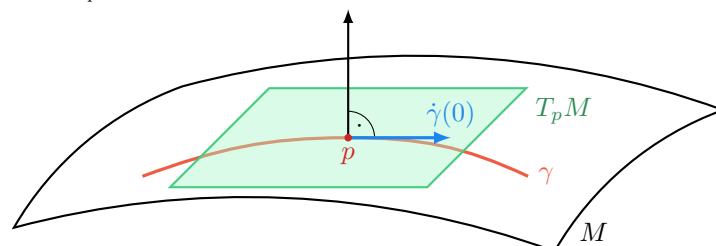


Abbildung 7: Tangentialebene im  $\mathbb{R}^3$

= Raum aller Geschwindigkeitsvektoren  $\dot{\gamma}(0)$  von Kurven  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  mit  $\gamma(0) = p$ .

- Für  $v, w \in T_0\mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^m$  gilt  $v = w$  genau dann, wenn für die Richtungsableitungen aller  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$  gilt

$$D_v f(0) = D_w f(0)$$

### 1.5.1 Definition (des Geometers)

Testfunktionen  
bezeichnen wir  
meist mit  $\varphi$

Ein **Tangentialvektor** im Punkt  $p \in M$  ist eine Äquivalenzklasse  $[\gamma]$  von differenzierbaren Wegen  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  mit  $\gamma(0) = p$  und  $\varepsilon = \varepsilon(p) > 0$  unter der Äquivalenzrelation

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 :\Leftrightarrow \quad \forall \varphi \in C^\infty(M) : \quad \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_1)(0) = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_2)(0)$$

$X_\gamma(\varphi) := \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma)(0)$  ist Richtungsableitung von  $\varphi$  in Richtung des Tangentialvektors  $[\gamma]$ . Es gilt

**Linearität:** Für  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi, \psi \in C^\infty(M)$  ist

$$X_\gamma(\lambda \cdot \varphi + \mu \cdot \psi) = \lambda \cdot X_\gamma(\varphi) + \mu \cdot X_\gamma(\psi)$$

$\gamma(0) = p$  **Leibnizsche Produktregel:**  $\forall \varphi, \psi \in C^\infty(M)$  gilt

$$X_\gamma(\varphi \cdot \psi) = X_\gamma(\varphi) \cdot \psi(p) + \varphi(p) \cdot X_\gamma(\psi)$$

Beispiele:

- $X(1) = X(1 \cdot 1) = X(1) \cdot 1 + 1 \cdot X(1) \Rightarrow X(1) = 0$
- $X(c) = cX(1) = 0$  für alle  $c \in \mathbb{R}$  aufgefasst als konstante Funktionen.

### 1.5.2 Definition (des Algebraikers)

Eine Abbildung  $X : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ , die linear ist und der Leibnizschen Produktregel genügt (siehe oben), heißt **Derivation** (in  $p \in M$ ). Der **Tangentialraum**  $T_p M$  der differenzierbaren Mannigfaltigkeit  $M$  in  $p \in M$  ist der Vektorraum der Derivationen in  $p$ . Vektorraumstruktur auf  $T_p M$

$$(a_1 X_{\gamma_1} + a_2 X_{\gamma_2})(\varphi) := a_1 X_{\gamma_1}(\varphi) + a_2 X_{\gamma_2}(\varphi)$$

### 1.5.3 Definition (des Algebraikers)

Das **Differential**  $T_p f$  einer differenzierbaren Abbildung  $f : M \rightarrow N$  in  $p$  ist die lineare Abbildung  $T_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  definiert durch

$$(T_p f)(X)(\varphi) = X(\varphi \circ f)$$

für  $\varphi \in C^\infty(N)$ .

#### Behauptung

hängt von Karte ab  $T_p M$  ist ein  $m$ -dimensionaler Vektorraum. Dazu genügt es  $T_0 \mathbb{R}^m$  zu betrachten, vgl. Blatt 3.

#### 1.5.4 Satz 1

Die Derivationen  $\frac{\partial}{\partial x^i} : C^\infty(\mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}$  für  $i = 1, \dots, m$

$$\varphi \mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}(0)$$

bilden eine Basis des  $T_0\mathbb{R}^m$ .

#### Beweis

- $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}$  sind linear unabhängig: Falls  $\sum_{i=1}^m a^i \frac{\partial}{\partial x^i} = 0$ , dann

$$0 = \left( \sum_{i=1}^m a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) (x^k) = a^k, \quad k = 1, \dots, m$$

- Sei  $X \in T_0\mathbb{R}^m$ . Setze  $a^i := X(x^i)$ . Behauptung:  $X = \sum_{i=1}^m a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ .  
Schreibe  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$  als  $\varphi = \varphi(0) + \sum_{k=1}^m x^k \varphi_k$  nach Lemma 2 (1.5.5).

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left( X - \sum_i a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) (\varphi) &= \sum_{k=1}^m \left( X - \sum_i a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) (x^k) \cdot \varphi_k(0) \\ &= \sum_k \left( a^k - \sum_i a^i \delta_i^k \right) \varphi_k(0) = 0 \end{aligned}$$

Da  $\varphi$  beliebig war, folgt  $X = \sum_i a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ . □

#### 1.5.5 Lemma 2 (Morse)

$U \subseteq \mathbb{R}^m$  konvex,  $0 \in U$ .  $f \in C^\infty(U)$ . Dann gibt es  $f_1, \dots, f_m \in C^\infty(U)$ , sodass

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^m x^i f_i(x).$$

#### Beweis

$$\begin{aligned} f(x) - f(0) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} (f(tx^1, \dots, tx^m)) dt && \text{(MWS)} \\ &= \sum_{i=1}^m x^i \underbrace{\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i} (tx^1, \dots, tx^m) dt}_{=: f_i(x)} && \square \end{aligned}$$

#### 1.5.6 Definition (des Geometers)

Das **Differential**  $T_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  einer differenzierbaren Abbildung  $f : M \rightarrow N$  in  $p \in M$  ist definiert durch

$$T_p f([\gamma]) = [f \circ \gamma]$$

Dies ist wohldefiniert, da

$$\frac{d}{dt} (\varphi \circ f \circ \gamma_1)(0) = \frac{d}{dt} (\varphi \circ f \circ \gamma_2)(0)$$

und Definition von "[.]".

### 1.5.7 Satz 3

In lokalen Koordinaten ist das Differential einer differenzierbaren Abbildung  $f : M \rightarrow N$  durch die Jacobi-Matrix gegeben.

#### Beweis

Mit  $q = f(p)$  und lokalen Karten erhalten wir

$$\begin{array}{ccc} (M, p) & \xrightarrow{f} & (N, q) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathbb{R}^m, 0) & \xrightarrow{f'} & (\mathbb{R}^n, 0) \end{array}$$

Schreibe für die induzierte Abbildung  $f'$  wieder  $f$ .

$$(y^1, \dots, y^n) = (f^1(x^1, \dots, x^m), \dots, f^n(x^1, \dots, x^m))$$

Dann gilt für alle  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ :

Kettenregel

$$T_0 f \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right) (\varphi) = \frac{\partial}{\partial x^i} (\varphi \circ f)(0) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial y^j}(0) \cdot \frac{\partial f^j}{\partial x^i}(0)$$

Also

$$T_0 f \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \sum_{j=1}^n \underbrace{\frac{\partial f^j}{\partial x^i}(0)}_{=J_f(0)} \frac{\partial}{\partial y^j}$$

□

### 1.5.8 Definition (des Physikers ...)

Linearisierung  
Kartenwechsel

Ein **Tangentialvektor** im Punkt  $p \in M$  ist eine Zuordnung, die jeder Karte  $h : (M, p) \rightarrow (\mathbb{R}^m, 0)$  um  $p$  einen Vektor  $v \in \mathbb{R}^m$  so zuordnet, dass der Karte  $k : (M, p) \rightarrow (\mathbb{R}^m, 0)$  der Vektor

$$J_{k \circ h^{-1}}(0)(v)$$

zugeordnet wird.

### 1.5.9 Äquivalenz der geometrischen und der algebraischen Definition

$$T_p^{\text{geom}} M \rightarrow T_p^{\text{alg}} M, [\gamma] \mapsto X_\gamma$$

Wegen  $X_\gamma(\varphi) = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma)(0)$  und der Definition von  $[\gamma]$  ist diese Abbildung wohldefiniert und injektiv. Die Abbildung ist auch surjektiv: In lokalen Koordinaten sei  $\gamma(t) = (a^1 t, \dots, a^m t)$ . Dann gilt

$$X_\gamma = \sum_{i=1}^m a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Mit dieser Bijektion übertragen wir die Vektorraumstruktur von  $T_p^{\text{alg}} M$  auf  $T_p^{\text{geom}} M$ . Auch die Definitionen der Differentiale sind miteinander verträglich.

$$\begin{array}{ccc}
 [\gamma] & \xrightarrow{\quad} & [f \circ \gamma] \\
 \downarrow \epsilon & & \downarrow \epsilon \\
 & \begin{array}{ccc}
 T_p^{\text{geom}} M & \xrightarrow{T_p^{\text{geom}} f} & T_{f(p)}^{\text{geom}} N \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 T_p^{\text{alg}} M & \xrightarrow{T_p^{\text{alg}} f} & T_{f(p)}^{\text{alg}} N
 \end{array} & \\
 \downarrow \epsilon & & \downarrow \epsilon \\
 X_\gamma & \xrightarrow{\quad} & X_{f \circ \gamma}
 \end{array}$$

Zu zeigen:  $T_p^{\text{alg}} f(X_\gamma) = X_{f \circ \gamma}$ . Es gilt

$$X_{f \circ \gamma}(\varphi) = \frac{\partial}{\partial t}(\varphi \circ f \circ \gamma)(0) = X_\gamma(\varphi \circ f) = T_p^{\text{alg}} f(X_\gamma)(\varphi)$$

□

## 2 Vektorfelder

### 2.1 Vektorfelder und Lie-Klammer

#### 2.1.1 Definition

Ein (differenzierbares) **Vektorfeld**  $X$  auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit  $M$  ist eine Abbildung, die jedem Punkt  $p \in M$  einen Tangentialvektor  $X_p \in T_p M$  so zuordnet, dass in lokalen Koordinaten  $(U, (x^1, \dots, x^m))$  gilt

*Wir unterdrücken  
das  $p$  oft in der  
Notation!*

$$X|_U = \sum_{i=1}^m a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

mit  $a^i \in C^\infty(U) \forall i = 1, \dots, m$ .

#### 2.1.2 Lemma 4

Die Differenzierbarkeit eines Vektorfeldes  $X$  ist äquivalent zu der Aussage:

$$X(\varphi) \in C^\infty(M) \quad \forall \varphi \in C^\infty(M), \text{ wobei } X(\varphi)(p) := X_p(\varphi)$$

#### Beweis

" $\Rightarrow$ ": Für  $a^i \in C^\infty(U)$  gelte lokal:  $X|_U = \sum_{i=1}^m a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ . Damit folgt

$$X(\varphi)|_U = \sum_{i=1}^m a^i \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \in C^\infty(U)$$

$$\Rightarrow X(\varphi) \in C^\infty(M)$$

" $\Leftarrow$ ": Sei  $X(\varphi) \in C^\infty(M)$  für alle  $\varphi \in C^\infty(M)$ . Schreibe lokal  $X|_U = \sum_{i=1}^m a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ . Sei  $p \in U$  ein Punkt. Sei  $\varphi \in C^\infty(M)$  eine Testfunktion mit  $\varphi \equiv x^k$  in einer Umgebung  $V$  von  $p$  in  $U$ .

$$a^k|_V = X(\varphi)|_V \in C^\infty(V)$$

$$\Rightarrow a^i \in C^\infty(U).$$

□

#### 2.1.3 Bemerkung

Die differenzierbaren Vektorfelder auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit  $M$  bilden einen Modul über  $C^\infty(M)$ . Die Verknüpfungen sind wie folgt definiert:

$$(X + Y)_p = X_p + Y_p \quad (fX)_p = f(p) \cdot X_p \quad f \in C^\infty(M)$$

#### 2.1.4 Definition

Die **Lie-Klammer** zweier Vektorfelder  $X, Y$  auf  $M$  ist das Vektorfeld, das durch

$$[X, Y]_p \varphi := X_p(Y\varphi) - Y_p(X\varphi)$$

definiert ist, wobei  $\varphi \in C^\infty(M)$ .



### 2.1.5 Lemma 5

Die Lie-Klammer  $[X, Y]$  ist ein Vektorfeld.

**Beweis**

- $[X, Y]\varphi$  ist  $\mathbb{R}$ -linear in  $\varphi$
- $[X, Y]\varphi \in C^\infty(M)$
- Leibnizregel:

$$\begin{aligned}
 [X, Y]_p(\varphi \cdot \psi) &= X_p(Y(\varphi \cdot \psi)) - Y_p(X(\varphi \cdot \psi)) && \text{(Leibniz)} \\
 &= X_p(Y\varphi \cdot \psi + \varphi \cdot Y\psi) - Y_p(X\varphi \cdot \psi + \varphi \cdot X\psi) && \text{(linear+Leibniz)} \\
 &= X_p(Y\varphi) \cdot \psi(p) + \underbrace{(Y\varphi)(p) \cdot X_p\psi}_{\text{grün}} + \underbrace{X_p\varphi \cdot (Y\psi)(p)}_{\text{rot}} + \varphi(p)X_p(Y\psi) \\
 &\quad - Y_p(X\varphi) \cdot \psi(p) - \underbrace{(X\varphi)(p) \cdot Y_p\psi}_{\text{grün}} - \underbrace{Y_p\varphi \cdot (X\psi)(p)}_{\text{grün}} - \varphi(p) \cdot Y_p(X\psi) \\
 &= [X, Y]_p\psi(p) + \varphi(p) \cdot [X, Y]_p\psi
 \end{aligned}$$

□

Achtung:  $\varphi \mapsto X_p(Y\varphi)$  definiert im Allgemeinen *kein* Vektorfeld, da die Leibniz-Regel verletzt ist.

### 2.1.6 Beispiel

Sei  $M = \mathbb{R}^2$ . Dann ist  $\left[x \frac{\partial}{\partial y}, xy \frac{\partial}{\partial x}\right] = x^2 \frac{\partial}{\partial x} - xy \frac{\partial}{\partial y}$ .

## 2.2 Integralkurven

Betrachte  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  eine differenzierbare Kurve. Für den dadurch in  $\gamma(t)$  definierten Tangentialvektor  $[\gamma]_{\gamma(t)} \in T_{\gamma(t)}M$  schreiben wir einfach  $\dot{\gamma}(t)$ . Ein Vektorfeld  $X$  auf  $M$  definiert eine Differentialgleichung erster Ordnung durch

$$\dot{\gamma} = X(\gamma),$$

d.h. für jeden Punkt  $p \in M$  erhält man

$$\varepsilon = \varepsilon(p)$$

$$\gamma_p : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \dot{\gamma}_p(t) = X_{\gamma_p(t)}, & t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \\ \gamma_p(0) = p \end{cases}$$

Die Kurve  $\gamma_p$  heißt **Integralkurve** von  $X$  durch  $p$ . In lokalen Koordinaten:

$$\begin{aligned}
 X &= X^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \\
 \gamma(t) &= (\gamma^1(t), \dots, \gamma^m(t)) \\
 \dot{\gamma}^i(t) &= X^i(\gamma(t)) \quad , \quad i = 1, \dots, m
 \end{aligned}$$

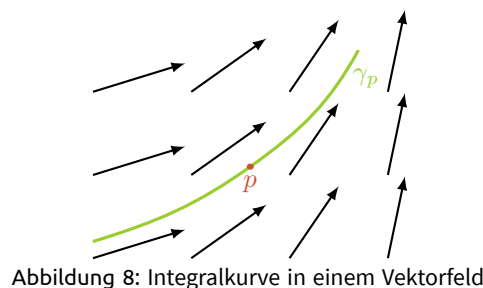


Abbildung 8: Integralkurve in einem Vektorfeld

## 2.3 Satz von Picard-Lindelöf

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen - Phasenraum.

Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein nichtleeres offenes Intervall - Zeitintervall.

$X : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  sei ein stetiges, zeitabhängiges Vektorfeld auf  $U$ . Für eine Anfangszeit  $t_0 \in I$  und einen Anfangspunkt  $x_0 \in U$  suchen wir eine  $C^1$ -Lösung  $u : I_1 \rightarrow U$  der Differentialgleichung

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = X(t, u(t)) \\ u(t_0) = x_0 \end{cases}$$

für alle  $t \in I_1$ , wobei  $I_1 := I \cap (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$  für ein geeignetes  $\varepsilon > 0$ . Ändert man den Anfangspunkt  $x$  in  $U_1 = U \cap B_r(x_0)$ , so soll die gefundene  $C^1$ -Lösung  $u = u_x$ ,  $u_x(t_0) = x$ , stetig von  $x \in U_1$  abhängen. Also:

$$u \in C^0(I_1 \times U_1, U) \quad u(t, x) = u_x(t)$$

### 2.3.1 Satz 6

Wenn  $X$  der folgenden **Lipschitz-Bedingung** genügt

$$\exists L > 0 : \forall x_1, x_2 \in U : \forall t \in I : |X(t, x_1) - X(t, x_2)| \leq L \cdot |x_1 - x_2|$$

Dann gibt es  $\varepsilon > 0, r > 0$  und eine eindeutig bestimmte Lösung  $u = u_x : I_1 \rightarrow U$  von  $\dot{u}(t) = X(t, u(t))$ ,  $u(t_0) = x$  für jedes  $x \in B_r(x_0)$ . Die Abbildung  $u : I_1 \times U_1 \rightarrow U$  ist stetig.

#### Bemerkung

$X$  ist also lokal eindeutig lösbar und die Lösung hängt stetig von den Anfangspunkten ab.

#### Beweis

Betrachte folgenden Operator

$$(Tu)(t, x) = x + \int_{t_0}^t X(s, u(s, x)) \, ds$$

Ist  $u$  ein Fixpunkt des Operators  $T$ , d.h.  $Tu = u$ , so ist  $u$  stetig differenzierbar und es gilt:  $\frac{d}{dt}U(t, x) = X(t, u(t, x))$  und  $u(t_0, x) = x$ . Durch Ersetzen von  $U$  und  $I$  durch eventuell kleinere Umgebungen von  $x_0$  und  $t_0$  können wir annehmen:

$$\exists K > 0 : |X| < K \text{ auf } I \times U$$

Wähle  $R > 0$ , so dass  $B_{2R}(x_0) \subset U$ . Sei  $r \leq R$ . Damit eine  $C^1$ -Kurve  $u : I_1 \rightarrow U$  mit Anfangspunkt  $x \in B_r(x_0)$  und Geschwindigkeit  $|\dot{u}| \leq K$  immer im  $B_{2R}(u(x_0))$  bleibt, wählen wir  $\varepsilon < \frac{R}{K}$ . Denn dann gilt nach dem Mittelwertsatz:

$$|u(t) - u(t_0)| \leq K \cdot |t - t_0| < K \cdot \varepsilon < R$$

D.h.  $|u(t) - x_0| < R + |u(t_0) - x_0| \leq 2R$ .

**Ziel:** lokal eindeutige Lösbarkeit von  $\dot{u}(t) = X(t, u(t))$ ,  $u(t_0) = x \in B_r(x_0)$ .

Sei  $A$  der Raum aller stetigen Funktionen  $u : I_1 \times B_r(x_0) \rightarrow B_{2R}(x_0)$  mit  $u(t_0, x) = x \, \forall x \in B_r(x_0)$  versehen mit der Metrik

$$d(u, v) = \|u - v\| := \sup_{(t, x) \in I_1 \times B_r(x_0)} |u(t, x) - v(t, x)|$$

$A$  ist vollständig. **Behauptung:** Es gilt  $T(A) \subset A$ . Da

$$|(Tu)(t, x) - x| = \left| \int_{t_0}^t X(s, u(s, x)) \, ds \right| \leq |t - t_0| \cdot \sup_{I \times U} |X| < \varepsilon \cdot K < R$$

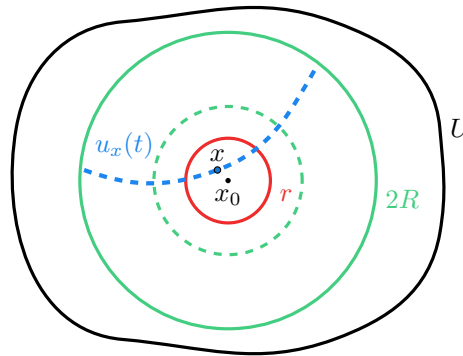


Abbildung 9: Beachte:  $u_x(t)$  ist für  $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$  gezeichnet

gilt  $(Tu)(t, x) \in B_{2R}(x_0)$  für alle  $x \in B_r(x_0)$ .  $T$  ist kontrahierend, da für alle  $u, v \in A$  gilt

$$\begin{aligned} |(Tu)(t, x) - (Tv)(t, x)| &= \left| \int_{t_0}^t X(s, u(s, x)) \, ds - \int_{t_0}^t X(s, v(s, x)) \, ds \right| \\ &\leq |t - t_0| \cdot L \cdot \sup_{I_1 \times B_r(x_0)} |u - v| \end{aligned}$$

d.h.  $\|Tu - Tv\| \leq \varepsilon \cdot L \cdot \|u - v\|$ . Wir wählen<sup>2</sup>  $\varepsilon < \frac{1}{L}$ , sodass  $T$  kontrahierend ist. Nach dem Banachschen Fixpunktsatz hat  $Tu = u$  genau eine Lösung. Damit haben wir gezeigt, dass  $X$  lokal eine Lösung hat. Diese hängt stetig vom Anfangspunkt ab.

Um zu zeigen, dass diese Lösung eindeutig ist, wiederhole man den Beweis mit Abbildungen  $u$ , die in  $t$  aber *nicht* notwendig in  $x$  stetig sind (vgl. Definition von  $A$ ).  $\square$

### 2.3.2 Bemerkung (Quantisierung)

Sei  $X : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \times B_{2R}(x_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig und erfülle eine Lipschitz-Bedingung bezüglich  $x$  mit  $L > 0$ . Sei weiter  $|X| < K$ ,  $\varepsilon < \frac{R}{K}$  und  $r < R$ . Dann ist  $X$  für alle Anfangspunkte in  $B_r(x_0)$  lokal eindeutig lösbar. Die Bedingung  $\varepsilon < \frac{1}{L}$  ist dazu *nicht* notwendig.

In der Tat: Sei  $u^0(t, x) := x$  und definiere iterativ  $u^{\nu+1} := Tu^\nu \, \forall \nu \in \mathbb{N}$ . Es gilt die Kontraktionsabschätzung

$$\|u^{\nu+1} - u^\nu\| \leq \frac{K \cdot L^\nu \cdot \varepsilon^{\nu+1}}{(\nu+1)!},$$

wie eine Induktion zeigt. Ein Vergleich mit der Exponentialreihe zeigt, dass die Folge  $u^\nu$  gleichmäßig gegen ein  $u$  konvergiert. (Teleskopsumme:  $u^0 - u^1 + u^1 - u^2 + u^2 - u^3 \pm \dots - u^\nu$ ) Der Reihenrest kann durch

$$\|u^\nu - u\| < \frac{K}{L} \cdot \frac{(L \cdot \varepsilon)^{\nu+1}}{(\nu+1)!} \cdot e^{L \cdot \varepsilon}$$

abgeschätzt werden. Also ist wegen

$$Tu = \lim_{\nu \rightarrow \infty} Tu^\nu = \lim_{\nu \rightarrow \infty} u^\nu = u$$

( $T$  ist (Lipschitz)-stetig)  $u$  ein Fixpunkt. (vgl. Blatt 5).

Randbemerkung:

$$\|u\|' := \sup_{(t,x)} \left( e^{-2 \cdot L \cdot |t-t_0|} \cdot |u(t, x)| \right) \rightsquigarrow \varepsilon L \leftrightarrow \frac{1}{2}$$

<sup>2</sup>wir haben schon  $\varepsilon < \frac{R}{K}$ , also  $\varepsilon < \min \left\{ \frac{R}{K}, \frac{1}{L} \right\}$

### 2.3.3 Bemerkung (höhere Regularität)

Sei  $X : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  beliebig oft differenzierbar,  $u : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \times B_r(x_0) \rightarrow U$  die lokale Lösung bestimmt durch  $(t_0, x_0)$ . Auf  $B_{2R}(x_0)$  ist  $X$  zusammen mit allen Ableitungen beschränkt (uniform in  $t$ ). Wir wollen zeigen, dass  $u$  eine  $C^\infty$ -Abbildung ist. Wegen

$$\frac{d}{dt}u(t, x) = X(t, u(t, x))$$

ist  $t \mapsto u(t, x)$  beliebig oft differenzierbar für alle  $x$ . Ist  $u$  auch bezüglich  $x$  beliebig oft differenzierbar, so

$$\frac{d}{dt}D_x u(t, x) = D_2 X(t, u(t, x)) \cdot D_x u(t, x) \quad D_x u(t_0, x) = \text{id}$$

mit anderen Worten:  $D_x u(t, x)$  löst die lineare Gleichung:

$$\frac{d}{dt}v(t, x) = D_2 X(t, u(t, x)) \cdot v(t, x) \quad v(t_0, x) = \text{id}_{n \times n}$$

für Matrix-wertige Abbildungen  $v$ . Um die Differenzierbarkeit von  $u$  nach  $x$  zu sehen, gehen wir wie folgt vor: Sei  $h \in \mathbb{R}^n$  mit  $|h|$  klein ( $|h| \searrow 0$ ). Setze

$$\Delta u(t, h) := u(t, x + h) - u(t, x) \quad , \quad Y_{t,h} := \int_0^1 D_2 X(t, u(t, x) + s\Delta u(t, h)) \, ds$$

(Der Parameter  $x$  ist in der Notation unterdrückt. Die Ortsvariable ist  $h$ . Beachte:  $Y(t, 0) = D_2 X(t, u(t, x))$ )

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{d}{dt}\Delta u(t, h) &= X(t, u(t, x + h)) - X(t, u(t, x)) = \int_0^1 \frac{d}{ds} X(t, u(t, x) + s\Delta u(t, h)) \, ds \\ &= Y(t, h) \cdot \Delta u(t, h) \end{aligned}$$

$\Delta u(t_0, h) = h$ . Das lineare Problem für unbekannte Matrizen ( $n \times n$ )

$$\dot{V}(t, h) = Y(t, h) \cdot V(t, h) \quad , \quad V(t_0, h) = \text{id}_{n \times n}$$

hat lokal genau eine Lösung  $V$ , die stetig in  $x$  (Parameter) und  $h$  (Ortsvariable, hier als Parameter) ist. vgl. Satz 6 & Blatt 5 Das lineare Problem für unbekannte Vektoren

$$\dot{v}(t, h) = Y(t, h) \cdot v(t, h) \quad , \quad v(t_0, h) = h$$

wird dann von  $v(t, h) = V(t, h) \cdot h$  gelöst. Die Eindeutigkeit liefert

$$\Delta u(t, h) = V(t, h) \cdot h$$

Damit ist  $x \mapsto u(t, x)$  von der Klasse  $C^1$  für alle  $x$  und es gilt:  $D_x u(t, x) = V(t, 0)$  (löst das linearisierte Problem)

Um zu zeigen, dass  $u$  von der Klasse  $C^2$  ist, betrachten wir nun direkt das System

$$\dot{u}(t, x) = X(t, u(t, x)), \quad \dot{v}(t, x) = D_2 X(t, u(t, x)) \cdot v(t, x), \quad u(t_0, x) = x, \quad v(t_0, x) = \text{id}_{n \times n}$$

(Beachte: Rechte Seite ist nur  $C^1$ !)

Mit dem eben gezeigten ( $C^1$  reicht!) ist die Lösung  $(u, D_x u)$  von der Klasse  $C^1$ , also  $u$  selbst  $C^2$ . Durch Wiederholen dieser Argumentation erhält man  $u \in C^3$  usw., also  $u \in C^\infty$ .  $\square$

## 2.4 Flüsse und die Lie-Ableitung

Sei  $X$  ein differenzierbares Vektorfeld auf  $M$ . Aus dem Satz von Picard-Lindelöf folgt, dass für jedes  $p \in M$  eine offene Umgebung  $U$  von  $p$  und ein  $\varepsilon > 0$  so existiert, dass für alle  $q \in U$  die Integralkurve  $\gamma_q(t)$  von  $X$  auf  $(-\varepsilon, \varepsilon)$  eindeutig bestimmt ist. Die Abbildung  $(q, t) \mapsto \gamma_q(t)$  ist differenzierbar.

### 2.4.1 Definition

Die Abbildung  $(q, t) \mapsto \gamma_q(t) =: \Phi_t(q)$  heißt **lokaler Fluss** von  $X$ .

### 2.4.2 Satz 7

$$\Phi_t \circ \Phi_s(q) = \Phi_{t+s}(q) \quad , \quad \text{da wo definiert.}$$

#### Beweis

$t \mapsto \gamma_q(t+s)$  und  $t \mapsto \gamma_{\Phi_s(q)}(t)$  sind Integralkurven von  $X$  mit identischem Anfangspunkt (also  $t = 0$ ):

$$\gamma_q(s) = \Phi_s(q).$$

Die Eindeutigkeitsaussage im Satz von Picard-Lindelöf (2.3) impliziert:

$$\gamma_q(t+s) = \gamma_{\Phi_s(q)}(t),$$

$$\text{d.h. } \Phi_{t+s}(q) = \Phi_t \circ \Phi_s(q). \quad \square$$

Wegen  $\Phi_t \circ \Phi_{-t} = \Phi_0 = \text{id} = \Phi_{-t} \circ \Phi_t$  ist  $\Phi_t : M \rightarrow M$  (falls global definiert) ein Diffeomorphismus mit Inverser  $(\Phi_t)^{-1} = \Phi_{-t}$ .

### 2.4.3 Definition

Sei  $X$  ein Vektorfeld auf  $M$ ,  $\Phi_t$  ein lokaler Fluss zu  $X$ . Für Funktionen  $f \in C^\infty(M)$  setze

$$\mathcal{L}_X f := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f \circ \Phi_t - f) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ \Phi_t)$$

$\mathcal{L}_X$  heißt die **Lie-Ableitung**. Für Vektorfelder  $Y$  auf  $M$  definieren wir

$$(\mathcal{L}_X Y)_p := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (T\Phi_{-t}(Y_{\Phi_t(p)}) - Y_p) = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} (T\Phi_{-t}(Y_{\Phi_t(p)}))$$

### 2.4.4 Satz 8

$$\text{a) } \mathcal{L}_X f = X(f)$$

$$\text{b) } \mathcal{L}_X Y = [X, Y]$$

#### Beweis

zu a): Da  $t \mapsto \Phi_t(p) = \gamma_p(t)$  Integralkurve von  $X$  ist, also  $\dot{\Phi}_t = X_{\Phi_t}$ , gilt nach Definition

vgl.: 1.5.1

$$\mathcal{L}_X f = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} (f \circ \Phi_t) = X(f).$$

zu b): In lokalen Koordinaten:  $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ ,  $Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ . Dann gilt

$$\mathcal{L}_X \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} T\Phi_{-t} \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \frac{\partial \Phi_{-t}^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} = - \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

( $\Phi_{-t}$  ist der Fluss zu  $-X$ ) In Analogie zur Produktregel für die gewöhnliche Ableitung für reellwertige Funktionen zeigt man:

$$L_X(fY) = (L_X f)Y + f \cdot L_X Y$$

Daraus folgt

$$\mathcal{L}_X \left( Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \mathcal{L}_X Y^j \cdot \frac{\partial}{\partial x^j} + Y^j \cdot \mathcal{L}_X \frac{\partial}{\partial x^j} = X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} = [X, Y]$$

vgl. Blatt 4

□

### 2.4.5 Notation für Diffeomorphismen (Pushforward)

Sei  $f : M \xrightarrow{\cong} N$  ein Diffeomorphismus und  $X$  ein Vektorfeld auf  $M$ . Dann erhält man ein neues Vektorfeld  $N$  in  $q \in N$  durch

$$(f_* X)_q := T_{f^{-1}(q)} f(X_{f^{-1}(q)})$$

Damit können wir

$$\mathcal{L}_X Y = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\Phi_{-t})_* Y$$

schreiben

### 2.4.6 Beispiel

$M = N = \mathbb{R}^2$ .  $f(x, y) = (x, x^2 + y) \Rightarrow f^{-1}(x, y) = (x, -x^2 + y)$ . Dann  $X_{x,y} = y \frac{\partial}{\partial x} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}$ .

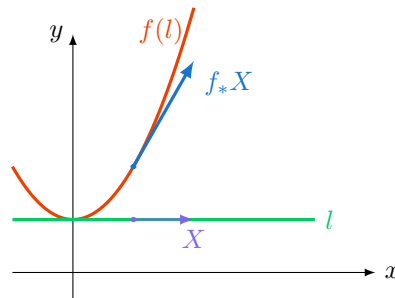


Abbildung 10: Zeichnung zu Beispiel 2.4.6 mit  $l(t) = 1$

Es gilt  $T_{(x,y)}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2x & 1 \end{pmatrix}$ . Damit folgt

$$\begin{aligned} (f_* X)_{(x,y)} &= T_{(x,-x^2+y)} f(X_{(x,-x^2+y)}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2x & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -x^2 + y \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= (-x^2 + y) \begin{pmatrix} 1 \\ 2x \end{pmatrix} = (-x^2 + y) \left( \frac{\partial}{\partial x} + 2x \frac{\partial}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

### 2.4.7 Lemma 9

Ist  $f : M \xrightarrow{\cong} N$  ein Diffeomorphismus und  $\Phi_t$  der (lokale) Fluss eines Vektorfeldes  $X$  auf  $M$ , so ist  $f \circ \Phi_t \circ f^{-1}$  der Fluss von  $f_*X$  auf  $N$ .

#### Beweis

Es gilt

$$\frac{d}{dt}(\Phi_t \circ f^{-1}(q)) = X_{f^{-1}(q)}$$

Damit folgt

$$\frac{\partial}{\partial t}(f \circ \Phi_t \circ f^{-1}(q)) = T_{f^{-1}(q)}f(X_{f^{-1}(q)}) = (f_*X)_q \quad \square$$

Insbesondere für  $M = N$  gilt

$$f_*X = X \iff \forall t : \Phi_t \circ f = f \circ \Phi_t$$

### 2.4.8 Satz 10

Seien  $X, Y$  Vektorfelder auf  $M$  mit Fluss  $\Phi_t$  bzw.  $\Psi_s$ . Dann gilt:

$$[X, Y] = 0 \iff \Phi_t \circ \Psi_s = \Psi_s \circ \Phi_t$$

#### Beweis

" $\Leftarrow$ ": Gelte  $\Phi_t \circ \Psi_s = \Psi_s \circ \Phi_t$ . Dann gilt auch

$$\frac{d}{ds}\Phi_t \circ \Psi_s(p) = \frac{d}{ds}\Psi_s \circ \Phi_t(p)$$

d.h.  $T_p\Phi_t(Y_p) = Y_{\Phi_t(p)} \forall p, t$  und  $(\Phi_{-t})_*Y = Y$ . Dann erhalten wir

$$[X, Y] = L_X Y = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} (\Phi_{-t})Y = 0$$

" $\Rightarrow$ ": Gelte  $[X, Y] = 0$ . Nach Lemma 9 (2.4.7) ist zu zeigen, dass  $(\Phi_t)_*Y = Y \quad \forall t$ . Dann gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=t_0} (\Phi_{-t})_*Y = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} (\Phi_{-t_0-t})_*Y = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} (\Phi_{-t_0})_*(\Phi_{-t})_*Y = (\Phi_{-t_0})_* \underbrace{L_X Y}_{=[X,Y]=0} = 0 \quad \square$$

## 2.5 Dynamische Systeme

### 2.5.1 Definition

Eine differenzierbare Abbildung  $\Phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  heißt **dynamisches System** oder ein **globaler Fluss** auf der differenzierbaren Mannigfaltigkeit  $M$ , wenn für alle  $s, t \in \mathbb{R}$  und  $p \in M$  gilt:

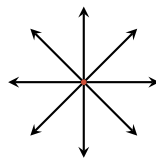
- $\Phi(0, p) = p$
- $\Phi(s + t, p) = \Phi(s, \Phi(t, p))$


### 2.5.2 Beispiel

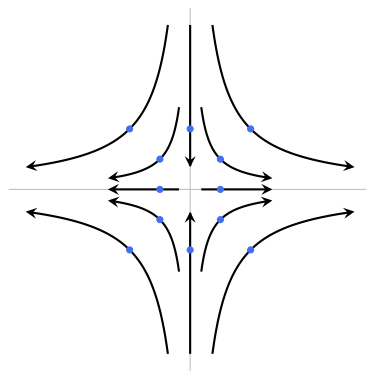
Matrixexponential,  $M = \mathbb{R}^n$  Betrachte  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .  $\dot{x} = Ax$  hat den Fluss  $\Phi(t, x) = e^{A \cdot t} \cdot x$ , wobei


$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$$

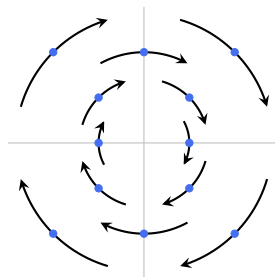
Für  $A = \text{id}$  entspricht dies einer Skalierung:



Für  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ , Startpunkte  $\hat{=}$   und  $t \in [-1, 1]$



Für  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ , Startpunkte  $\hat{=}$   und  $t \in [-1/2, 1/2]$



Betrachte  $S^1 \times S^1 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$  (2-Torus) mit dem Fluss

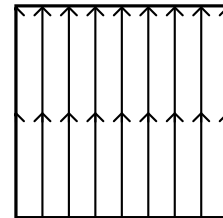
$$\Phi(t, (z_1, z_2)) = (e^{it} z_1, e^{ait} z_2), \quad a \in \mathbb{R}$$



$$a = 0$$



Torus



Wie ich das mit  
einem Torus  
hinbekomme, muss  
ich nochmal gucken  
...

$$a = \sqrt{11}$$



Torus + Fundamentalgebiet zum zweiten

Be-

trachte nun  $S^2 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R}$  2-Sphäre

### 2.5.3 Einparameterfamilie von Diffeomorphismen

Betrachte die Abbildung  $\Phi_t : M \rightarrow M, p \mapsto \Phi(t, p)$  mit

- $\Phi_0 = \text{id}_M$
- $\Phi_s \circ \Phi_t = \Phi_{s+t}$

Daraus folgt  $(\Phi_t)^{-1} = \Phi_{-t}$ . Eine differenzierbare Abbildung  $\Phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  ist ein dynamisches System, falls

$$(\mathbb{R}, +) \rightarrow (\{\text{Diffeomorphismen auf } M\}, \circ), t \mapsto \Phi(t, \cdot)$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

### 2.5.4 Nach $M$ parametrisierte Kurvenscharen

$$\gamma_p : \mathbb{R} \rightarrow M, t \mapsto \Phi(t, p)$$

$\gamma_p$  heißt **Flusslinie**, **Integralkurve**, **Lösungskurve**.  $\gamma(\mathbb{R})$  heißt **Orbit** oder **Bahn** durch  $p$ .

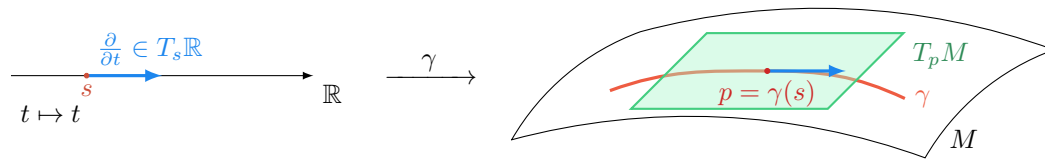
### 2.5.5 Bemerkung

Ein dynamisches System zerlegt eine Mannigfaltigkeit disjunkt in ihre Bahnen:

$$q \sim p \Leftrightarrow q = \gamma_p(t) \text{ für ein } t$$

Die Bahnen entsprechen genau den Äquivalenzklassen.

## 2.5.6 Notation



$\dot{\gamma}(s)$  steht für die Derivation, die durch  $\dot{\gamma}(s)(\varphi) = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma)(s)$ ,  $\varphi \in C^\infty(M)$  gegeben ist. Es gilt  $\dot{\gamma}(s) = T_s \gamma \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)$ . (mehr auf Blatt 6)

## 2.5.7 Satz 11

Eine Flusslinie eines dynamischen Systems  $\gamma = \gamma_p : \mathbb{R} \rightarrow M$  ist

- entweder **konstant**, d.h.  $\gamma(t) = p \ \forall t$  oder **regulär**, d.h.  $\dot{\gamma}(t) \neq 0 \ \forall t$
- entweder injektiv oder **periodisch**, d.h.  $\exists \pi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  mit  $\gamma(t) = \gamma(t + \pi) \ \forall t$

## Beweis

( $\gamma = \gamma_p$ ) Es gilt

$$\gamma(s+t) = \Phi_{s+t}(p) = \Phi_s(\Phi_t(p)) = \Phi_s(\gamma(t))$$

Also

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(s) &= T_0 \gamma(s + \cdot) \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) = T_0(\Phi_s \circ \gamma) \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) = T_{\gamma(0)} \Phi \circ T_0 \gamma \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \\ &= T_{\gamma(0)} \Phi_s(\dot{\gamma}(0)) \end{aligned}$$

Da  $\Phi_s$  ein Diffeomorphismus ist, gilt entweder  $\dot{\gamma}(t) = 0 \ \forall t$  oder  $\dot{\gamma}(t) \neq 0 \ \forall t$ . Ist  $\gamma$  nicht injektiv, so gibt es  $r < s$  mit  $\gamma(r) = \gamma(s)$ , d.h.  $\Phi_r(p) = \Phi_s(p)$ , also

$$\gamma(t) = \Phi_t(p) = \Phi_{t+s-r}(p) = \gamma(t + (s-r)) \quad \forall t$$

□

Sei  $U \subseteq M$  offen. Die Flusslinien brauchen *nicht* ganz in  $U$  zu verlaufen! Da  $\Phi^{-1}(U)$  offen in  $\mathbb{R} \times M$  ist, verlaufen die Flusslinien  $\gamma_p$ ,  $p \in U$  wenigstens für ein kleines Intervall  $(a_p, b_p)$  um  $0 \in \mathbb{R}$ .

## 2.5.8 Definition

Ein **lokaler Fluss** auf  $M$  ist eine differenzierbare Abbildung  $\Phi : D \rightarrow M$ , definiert auf einer  $\{0\} \times M$  enthaltener offenen Teilmenge von  $D \subset \mathbb{R} \times M$ , sodass für jeden Punkt  $p \in M$  die Menge  $D \cap (\mathbb{R} \times \{p\})$  ein Intervall ist. Weiter gelte  $\Phi(0, p) = p$  und  $\Phi(s+t, p) = \Phi(s, \Phi(t, p))$  für alle  $s, t, p$ , für die beide Seiten erklärt sind.

Auf  $\{t\} \times M$  ist  $\Phi_t$  kein Diffeomorphismus auf  $M$ , da  $\Phi_t$  nicht überall erklärt ist.

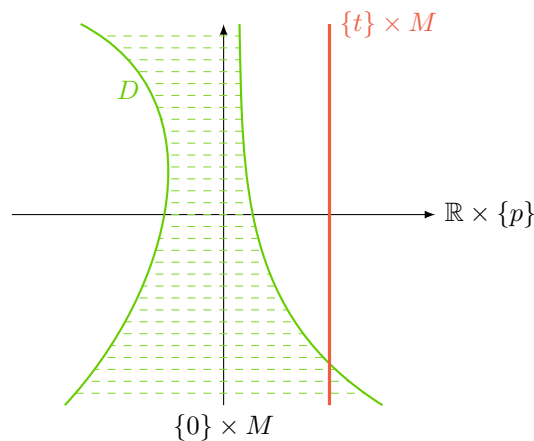


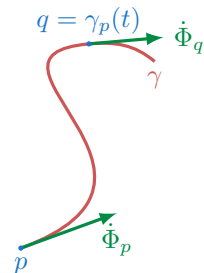
Abbildung 11: Veranschaulichung zu lokalen Flüssen

### Bemerkung

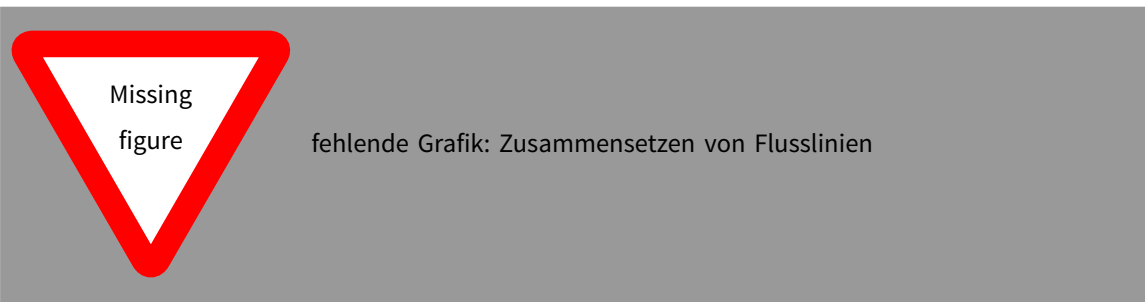
- Gilt  $D = \mathbb{R} \times M$ , so ist  $\Phi$  ein globaler Fluss.
- Das Vektorfeld  $\dot{\Phi}$  gegeben durch  $p \mapsto X_{\gamma(p)} \equiv \dot{\gamma}(0)$  ist das **Geschwindigkeitsfeld** des Flusses  $\Phi$ . Da

$$q = \gamma_p(t) \Rightarrow \gamma_q(s) = \gamma_p(s+t) \Rightarrow \dot{\gamma}_q(0) = \dot{\gamma}_p(t)$$

gilt  $\dot{\gamma}_p(t) = \dot{\gamma}_q(0) = \dot{\Phi}_{\gamma_q(0)}$  für alle  $t \in (a_p, b_p)$ . (Und nicht nur für  $t = 0$  wie in der Definition angegeben.)



- Der Fluss eines Vektorfeldes ist ein (lokaler) Fluss. Zwei Flusslinien  $\gamma_p^1 : I_1 \rightarrow M$  und  $\gamma_p^2 : I_2 \rightarrow M$ , die durch  $\gamma_p^1(0) = p = \gamma_p^2(0)$  verlaufen, stimmen auf  $I_1 \cap I_2$  überein. Dies gilt, da aus Stetigkeitsgründen die Menge aller  $t$ , auf der beide Lösungen übereinstimmen, abgeschlossen ist. Nach dem Satz von Picard-Lindelöf ist sie auch offen. Auf der Vereinigung aller Definitionsbereiche aller Lösungskurven  $\gamma_p$  ist die eindeutig bestimmte **maximale** Lösungskurve gegeben. Wir wollen mit  $D$  stets den maximalen Definitionsbereich eines Flusses angeben, d.h. es gelte stets  $D \cap (\mathbb{R} \times \{p\})$  ist das maximale Definitionsintervall der maximalen Lösungskurve.

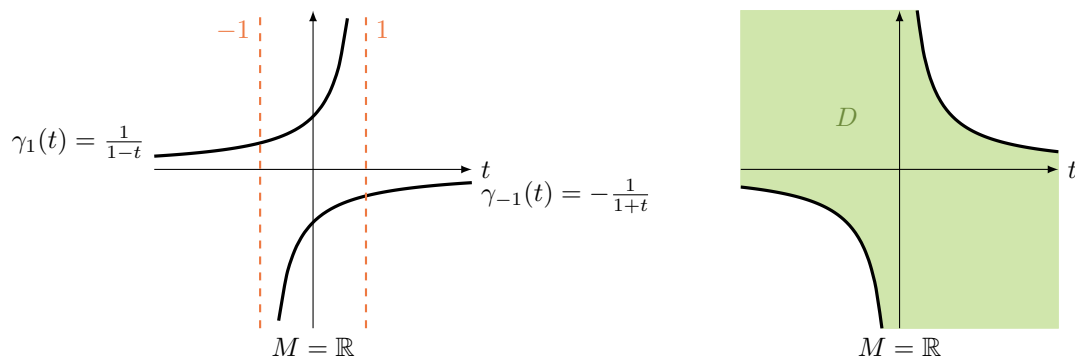


## 2.5.9 Beispiel

Betrachte die Mannigfaltigkeit  $\mathbb{R}$  mit dem Vektorfeld  $x^2 \frac{\partial}{\partial x}$ . Dann ist  $\Phi(t, x) = \frac{x}{1-tx}$  ein lokaler Fluss. Es gilt

$$\begin{cases} \Phi(0, x) = x \\ \dot{\Phi}(t, x) = -\frac{(-x)x}{(1-tx)^2} = \left(\frac{x}{1-tx}\right)^2 \frac{\partial}{\partial x} = (\Phi(t, x))^2 \frac{\partial}{\partial x} \end{cases}$$

$$\gamma_1(t) = \Phi(t, 1) = \frac{1}{1-t}$$



Definitionsbereich:  $1 - tx = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{t}$

**Bemerkung**

Enthält  $D$  eine Teilmenge der Form  $(-\varepsilon, \varepsilon) \times M$ , dann auch eine Teilmenge der Form  $(-2\varepsilon, 2\varepsilon) \times M$ .  $\Phi$  kann auf  $(-2\varepsilon, 2\varepsilon) \times M$  durch

$$\Phi(t, p) := \Phi\left(\frac{t}{2}, \Phi\left(\frac{t}{2}, p\right)\right)$$

ausgedehnt werden. Da  $D$  maximal ist, enthält  $D$  also  $\mathbb{R} \times M$ , d.h.  $\Phi$  ist global (vollständig). Dies ist beispielsweise der Fall, wenn der Träger  $\{X \neq 0\}$  des  $\Phi$  erzeugenden Vektorfeldes  $X$  kompakt ist. (Beispiel:  $M$  kompakt)

Analog sieht man, dass jedes auf  $\mathbb{R}^n$  definierte und beschränkte Vektorfeld global integrierbar ist. (Blatt 7)

## 2.5.10 Satz 12

Jedes Vektorfeld ist Geschwindigkeitsfeld genau eines maximalen Flusses.

**Beweis**

Sei  $X$  ein Vektorfeld auf  $M$ ,  $\Phi$  der zugehörige Fluss (lokal). Sei  $p \in M$  und  $(a_p, b_p)$  maximales Definitionsintervall der Lösungskurve  $\gamma_p$ . Dann ist  $D = \bigcup_{p \in M} (a_p, b_p) \times \{p\}$ . Es reicht zu zeigen:  $D$  ist offen und  $\Phi : D \rightarrow M$  ist differenzierbar.

Sei  $I_p \subset [0, \infty)$  ein Intervall bestehend aus allen  $t > 0$ , sodass  $D$  eine Umgebung von  $[0, t] \times \{p\}$  enthält, auf der  $\Phi$  differenzierbar ist.

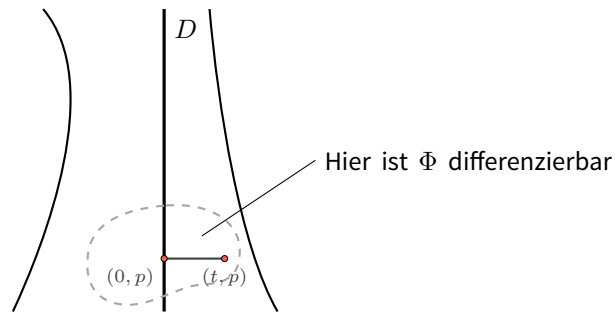


Abbildung 12: Das Intervall  $I_p$ , das in einer Umgebung liegt, in der  $\Phi$  differenzierbar ist

$\Rightarrow I_p$  ist offen.

$I_p$  ist **nicht** leer: Für jeden Punkt  $p \in M$  gibt es  $\varepsilon > 0$  und eine Umgebung  $U$  von  $p$ , sodass

$$\Phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \rightarrow M$$

differenzierbar ist. Wegen der Eindeutigkeit enthält  $D$  eine Umgebung von  $\{0\} \times M$  auf der  $\Phi$  differenzierbar ist  $\Rightarrow I_p \neq \emptyset$ .

$I_p$  ist **abgeschlossen**: Sei  $t_0$  Häufungspunkt von  $I_p$  in  $[0, b_p)$ . Sei  $q := \gamma_p(t_0)$ . Nach Definition von  $I_p$  gibt es eine Umgebung  $V$  von  $p$ ,  $\varepsilon > 0$  mit  $t_0 - 2\varepsilon > 0$ , sodass  $D$  eine Umgebung von  $[0, t_0 - \varepsilon] \times U$  enthält, auf der  $\Phi$  erklärt und differenzierbar ist. Dabei ist  $U$  eine Umgebung von  $q$ , sodass (für ein eventuell kleineres  $\varepsilon > 0$ )  $\Phi$  auf  $(t_0 - 2\varepsilon, t_0 + 2\varepsilon) \times U$  definiert und differenzierbar ist.

Zeichnung  
vervollständigen



Setze:  $W := \Phi_{-(t_0 - \varepsilon)}(\Phi_{-\varepsilon}(U))$ . Also ist  $\Phi$  in einer Umgebung von  $[0, t_0 + \varepsilon] \times W \supset [0, t_0] \times \{p\}$  erklärt und differenzierbar, wenn die Abbildung

$$(t_0 - 2\varepsilon, t_0 + 2\varepsilon) \times W \rightarrow M \quad (t, r) \mapsto \Phi(t - t_0, \Phi(t_0, r))$$

setzt aufgrund der Eindeutigkeit die auf  $[0, t_0 - \varepsilon] \times W$  durch  $\Phi$  gegebene Lösungskurven richtig fort. Damit folgt  $t_0 \in I_p$  und somit ist  $I_p$  abgeschlossen. Argumentiert man für  $(a_p, 0]$  analog, so folgt  $I_p = (a_p, b_p)$ .  $\square$

### 3 Teilung der Eins

#### Ziel

Konstruktion globaler Objekte aus lokalen Daten.

#### 3.1 Parakompaktheit

Wir setzen für  $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$C(r) := \text{offener Würfel der Kantenlänge } 2r = \{x \in \mathbb{R}^m \mid |x_1|, \dots, |x_m| < r\}$$

##### 3.1.1 Satz 13

Sei  $\mathcal{U} = \{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$  eine offene Überdeckung einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit  $M$ . Dann gibt es einen Atlas

$$\mathcal{A} = \left\{ h_j : V_j \xrightarrow{\cong} C(3) \mid j \in \mathbb{N} \right\}$$

von  $M$ , sodass

- $\{V_j\}$  ist **lokal endliche Verkleinerung** von  $\{U_\alpha\}$ , d.h. jeder Punkt von  $M$  hat eine Umgebung, die nur endlich viele der  $V_j$  nicht trivial schneidet, und für jedes  $j$  existiert ein  $\alpha(j)$  mit  $V_j \subset U_{\alpha(j)}$ .
- $M = \bigcup_j h_j^{-1}(C(1))$

Die Existenz einer lokal endlichen Verfeinerung zu jeder gegebenen offenen Überdeckung bezeichnet man als **Parakompaktheit** des Raumes  $M$ .  $\mathcal{A}$  heißt einer der Überdeckung  $\mathcal{U}$  **untergeordneter guter Atlas**.

#### Beweis

$M$  ist **lokal kompakt**<sup>3</sup>, da  $M$  lokal homöomorph zu  $\mathbb{R}^n$  ist. Weiter hat  $M$  eine abzählbare Basis der Topologie<sup>4</sup>. Daraus folgt: Es gibt eine offene Überdeckung  $B_1, B_2, \dots, B_l, \dots$   $l \in \mathbb{N}$  von  $M$  mit  $\overline{B_l}$  kompakt für alle  $l \in \mathbb{N}$ .

Sei  $A_1 := \overline{B_1}$ . Seien  $A_1, \dots, A_i$  induktiv konstruiert. Sei  $k \in \mathbb{N}$  die kleinste Zahl mit

$$A_i \subset B_1 \cup \dots \cup B_k, \quad k = k(i)$$

Setze  $A_{i+1} := \overline{B_1 \cup \dots \cup B_k}$ .

(Dieser Prozess endet genau dann nach endlich vielen Schritten, wenn  $M$  kompakt ist.)

Nach Konstruktion gilt nun

- $A_i \subset \text{Int}(A_{i+1})$
- $A_i$  ist kompakt.
- $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

d.h.  $\{A_i\}$  ist eine **kompakte Ausschöpfung** von  $M$ .

<sup>3</sup>d.h. jeder Punkt hat eine kompakte Umgebung

<sup>4</sup>Siehe auch 1.2.1

Dazu kommt noch  
eine  
Übungsaufgabe

Int für „interior“

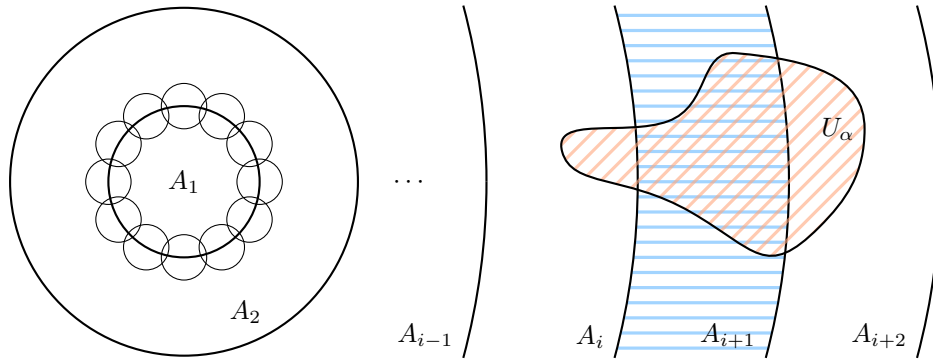


Abbildung 13: Konstruktion in Satz 13 (3.1.1)

$\text{Int}(A_{i+1}) \setminus A_{i-1}$  ist offene Überdeckung der kompakten Menge  $A_{i+1} \setminus \text{Int}(A_i)$ . Also gibt es endlich viele Karten  $h_j : V_j \xrightarrow{\cong} C(3)$ ,  $j = j(i)$ , sodass

- $V_i \subset \text{Int}_{A_{i+2}} \setminus A_{i-1}$
- die  $h_j^{-1}(C(1))$  überdecken  $A_{i+1} \setminus \text{Int}(A_i)$
- $V_j \subset U_\alpha$  für ein geeignetes  $\alpha$ .

Man erhält also abzählbar viele Mengen  $V_j$ . Jede kompakte Umgebung eines Punktes ist für hinreichend großes  $i$  in einem  $A_i$  enthalten. Daher schneiden nur endlich viele der  $V_j$  diese Umgebung.  $\square$

### 3.1.2 Definition

Eine  $\mathcal{U}$  **untergeordnete Teilung der Eins** ist eine Familie  $\{\varphi_i : M \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R} \mid i \in I\}$  differenzierbarer Funktionen mit:

- Das Mengensystem der **Träger**  $\{\text{supp } \varphi_i \mid i \in I\}$  ist lokal endlich, wobei  $\text{supp } \varphi := \overline{\{p \in M \mid \varphi(p) \neq 0\}}$ .
- $\forall i : \exists \alpha : \text{supp } \varphi_i \subset U_\alpha$
- $\varphi_i \geq 0$  und  $\sum_{i \in I} \varphi_i(p) = 1 \quad \forall p \in M$ . Die Summe ist endlich, da  $\{\text{supp } \varphi_i\}$  lokal endlich ist.

### 3.1.3 Lemma 13b

Es gibt eine offene Überdeckung  $B_1, B_2, \dots, B_l, \dots$   $l \in \mathbb{N}$  von  $M$  mit  $\overline{B_l}$  kompakt für alle  $l$ .

#### Beweis

Für jeden Punkt  $p \in M$  wählen wir eine Karte  $(h_p, U_p)$  mit  $p \in U_p$ . Für  $\varepsilon_p > 0$  so klein gewählt, dass  $\overline{B_{\varepsilon_p}(0)} \subset h_p(U_p)$  setzen wir

$$\Omega_p := h_p^{-1}(B_{\varepsilon_p}(0)).$$

$\{\Omega_p\}_{p \in M}$  ist eine offene Überdeckung von  $M$ , so dass  $\overline{\Omega_p}$  kompakt in  $M$  ist. Da  $M$  eine abzählbare Basis der Topologie hat, gibt es eine offene Überdeckung  $\{B_l\}_{l \in \mathbb{N}}$  mit:

- $\forall l \in \mathbb{N} : \exists p = p(l) : B_l \subset \Omega_p$ . Damit ist insbesondere  $\overline{B_l}$  kompakt.
- $\Omega_p = \bigcup_{B_l \subset \Omega_p} B_l$ . Damit ist  $B_l$  a posteriori eine Überdeckung.  $\square$

**3.1.4 Satz 14**

Zu jeder offenen Überdeckung  $\mathcal{U}$  von  $M$  gibt es eine abzählbare untergeordnete Teilung der Eins.

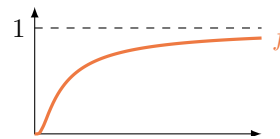
**Beweis**

Es gibt eine differenzierbare Funktion  $\psi$  auf  $\mathbb{R}^m$ , sodass

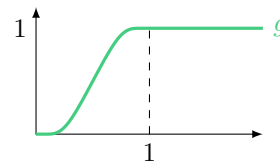
- $\psi \geq 0, \psi \leq 1$ ,
- $\psi = 1$  auf  $\overline{C(1)}$ ,
- $\psi = 0$  auf  $\mathbb{R}^m \setminus C(2)$

Betrachte:

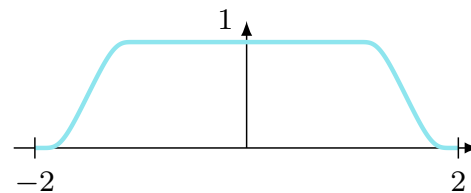
$$f(t) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}}, & \text{falls } t > 0 \\ 0, & \text{falls } t \leq 0 \end{cases}$$

Abbildung 14: Funktion  $f$  aus 3.1.3

$$g(t) := \frac{f(t)}{f(t) + f(1-t)}$$

Abbildung 15: Funktion  $g$  aus 3.1.3

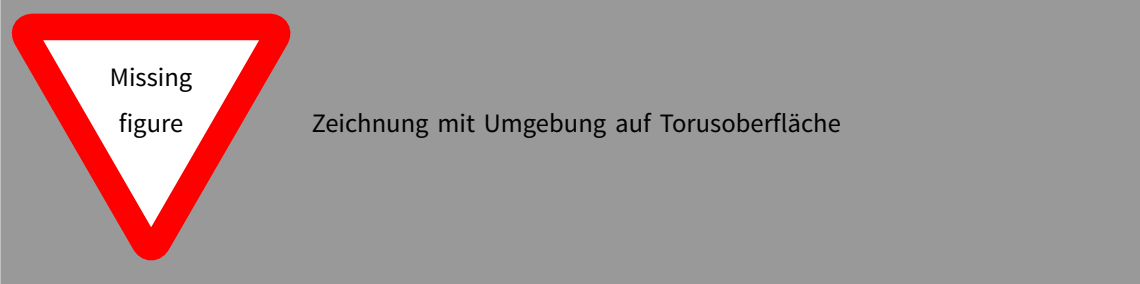
$$h(t) := g(t+2)g(2-t)$$

Abbildung 16: Funktion  $h$  aus 3.1.3

Für den mehrdimensionalen Fall setze:  $\psi(x) := h(|x_1|) \cdot h(|x_2|) \cdots h(|x_m|)$ . Sei

$$\left\{ h_j : V_j \xrightarrow{\cong} C(3) \mid j \in \mathbb{N} \right\}$$

ein  $\mathcal{U}$  untergeordneter guter Atlas (Satz 13).



Set-

ze  $\psi_j := \begin{cases} \psi \circ h_j, & \text{auf } V_j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ . Dann gilt

$$\varphi_j := \frac{\psi_j}{\sum_k \psi_k}$$

□



## 3.2 Riemannsche Metriken

### 3.2.1 Definition

Eine **Riemannsche Metrik** auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit  $M$  ist eine Zuordnung eines Skalarproduktes  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  auf  $T_p M$  zu jedem Punkt  $p \in M$ , das differenzierbar von  $p$  abhängt. D.h. in jeder lokalen Karte sind die **metrischen Koeffizienten**

$$g_{ij}(p) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i} \middle| \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle_p$$

differenzierbare Funktionen in  $p$ .

### 3.2.2 Satz 15

Jede differenzierbare Mannigfaltigkeit besitzt eine Riemannsche Metrik.

#### Beweis

Sei  $\{(U_\alpha, h_\alpha)\}$  ein Atlas von  $M$  und  $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  eine untergeordnete Teilung der Eins. Das Standardskalarprodukt des  $\mathbb{R}^m$  induziert eine Riemannsche Metrik  $\langle \cdot | \cdot \rangle_\alpha$  auf allen Kartengebieten  $U_\alpha$ . Für jedes  $j \in \mathbb{N}$  wähle ein  $\alpha(j)$  mit  $\text{supp } \varphi_j \subset U_{\alpha(j)}$ . Dann ist

$$\langle \cdot | \cdot \rangle_p := \sum_j \varphi_j(p) \langle \cdot | \cdot \rangle_{\alpha(j)}$$

eine Riemannsche Metrik auf  $M$ , da Symmetrie und positive Definitheit konvexe Eigenschaften sind.  $\square$

## 3.3 Sternförmige Gebiete

### 3.3.1 Definition

Eine Teilmenge  $M$  des  $\mathbb{R}^n$  heißt **sternförmig** (mit Zentrum 0), falls mit jedem Punkt  $x \in M$  auch die Strecke  $\{t \cdot x \mid t \in [0, 1]\}$  in  $M$  enthalten ist.

### 3.3.2 Beispiel

$$\varphi : B_1(0) \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n,$$

$$x \mapsto \begin{cases} \tan\left(\frac{\pi}{2} \cdot |x|\right) \cdot \frac{x}{|x|}, & \text{falls } x \neq 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

$\tan\left(\frac{\pi}{2} \cdot |x|\right) \cdot \frac{1}{|x|}$  ist Potenzreihe mit geraden Potenzen in  $|x|$ . Die Umkehrfunktion ist

$$\frac{2}{\pi} \arctan(|y|) \frac{y}{|y|} \longleftarrow y$$

Es gilt

$$\mathbb{R}^n \cong B_1^{n_1}(0) \times \dots \times B_1^{n_k}(0) \quad , \quad \sum_i n_i = n$$

### 3.3.3 Satz 16

Jede offene sternförmige Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  ist diffeomorph zu  $\mathbb{R}^n$ .

#### Beweis

$M$  offen, sternförmig, Zentrum 0. Ziel: Konstruiere einen Diffeomorphismus  $\mathbb{R}^n \rightarrow M$ , der die Strahlen  $\{t \cdot x \mid t \in [0, \infty)\}$  auf ihren Durchschnitt mit  $M$  abbildet. Diese Strahlen sind die Orbits des Vektorfeldes  $X(x) = x$  auf  $\mathbb{R}^n$ .

Idee: Finde eine positive Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , sodass das Vektorfeld  $Y = f \cdot X$  auf  $M$  einen globalen Fluss definiert. Wir bilden dann die Orbits von  $X$  auf die von  $Y$  ab.

#### Upparametrisierung

Sei  $\gamma$  eine Integralkurve von  $X$ , also  $\dot{\gamma} = X(\gamma)$ .  $s : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  ist so zu bestimmen, dass gilt

$$(\gamma \circ s)'(t) = \dot{\gamma}(s(t)) \dot{s}(t) \stackrel{!}{=} X_{(\gamma \circ s)(t)} \cdot f((\gamma \circ s)(t)) = Y_{(\gamma \circ s)(t)}$$

also  $\gamma \circ s$  Lösung von  $Y = f \cdot X$  ist. Nach dem Satz von Picard-Lindelöf existiert solch eine Lösung von  $\dot{s}(t) = f((\gamma \circ s)(t))$  zumindest lokal. Es werden dieselben Orbits mit Geschwindigkeit  $|fX|$  statt  $|X|$  in gleicher Richtung durchlaufen.

Genauer:  $\mathcal{C} : M \supset K := \overline{B_1(0)}$ . Wir suchen  $g : M \rightarrow \mathbb{R}$  positiv und **eigentlich**, d.h. für jedes  $j \in \mathbb{N}$  ist  $g^{-1}([0, j])$  kompakt. Sei  $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  eine Teilung der Eins auf  $M$  mit kompaktem Träger,  $\text{supp } \varphi_j$ . Setze

$$g := \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot \varphi_j$$

Sei  $K_{1+\delta}$  kompakte  $\delta$ -Umgebung von  $K$ , die noch in  $M$  enthalten ist.

$$f := \begin{cases} 1, & \text{auf } K \\ e^{-\langle \text{grad } g \mid x \rangle^2}, & \text{sonst} \end{cases}$$

Definiere  $Y(x) := f(x) \cdot x$  für alle  $x \in M \subseteq \mathbb{R}^n$ . Sei  $\Phi$  der zugehörige (lokale) Fluss auf  $M$ .

$$\varphi : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\cong} M, \quad x \mapsto \begin{cases} \Phi_{\log|x|}\left(\frac{x}{|x|}\right), & \text{falls } x \neq 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

•  $\varphi$  ist wohldefiniert:

- auf  $K$ :  $Y(x) = x$  mit Fluss  $(t, x) \mapsto e^t \cdot x$ , also  $\varphi(x) = e^{\log|x|} \cdot \frac{x}{|x|} = x$
- $\Phi_t$  ist für alle Zeiten  $t$  definiert ( $\mathcal{C}t > 0$ ). Auf einer Flusslinie  $\gamma$  von  $Y = f \cdot X$  gilt:

$$\left| (g \circ \gamma)' \right| = |\langle \text{grad } g \mid \dot{\gamma} \rangle| = f(x) \cdot |\langle \text{grad } g \mid x \rangle| = e^{-\langle \text{grad } g \mid x \rangle^2} \cdot |\langle \text{grad } g \mid x \rangle| \leq 1$$

Benutzt:  $\dot{\gamma} = f(\gamma)X(\gamma) = f(x) \cdot x \Big|_{\gamma}$ . Daraus folgt (für alle  $t$ , für die  $\gamma(t)$  existiert)

$$\int_0^t \left| (g \circ \gamma)'(s) \right| ds \leq t,$$

also

$$|g(\gamma(t)) - g(\gamma(0))| = \left| \int_0^t (g \circ \gamma)'(s) ds \right| \leq t$$

Wäre  $(-\infty, b)$  das maximale Lösungsintervall von  $\gamma$  für ein  $b \in (0, \infty)$ , so

$$|g(\gamma(t)) - g(\gamma(0))| \leq b \text{ für alle } t \in (-\infty, b)$$

Da  $g$  eigentlich ist, verliefte  $\gamma$  in einem Kompaktum  $K'$ . Dann gäbe es ein  $\varepsilon > 0$ , so dass sich die Lösung  $\gamma = \gamma(t)$  an jedem Punkt des Orbits  $\gamma((-\infty, b))$  um  $\varepsilon > 0$  fortsetzen ließe. Damit wäre also  $b = +\infty$ . (vgl. mit Bemerkung 2.5.9)

Also ist  $\Phi_t$  für alle Zeiten  $t$  definiert, d.h.  $\Phi$  ist global.

- $\varphi$  ist ein Diffeomorphismus:  $\varphi$  ist Komposition von

$$\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \times S^{n-1}, \quad x \mapsto \left( \log|x|, \frac{x}{|x|} \right) \quad e^t \cdot x \mapsto (t, x)$$

und  $\psi : \mathbb{R} \times S^{n-1} \rightarrow M \setminus \{0\}$ ,  $(t, x) \mapsto \Phi_t(x)$ ,  $\left(t(y), \frac{y}{|y|}\right) \mapsto y$ . Wegen  $\frac{\partial}{\partial t} \Phi_t(x) = Y(x) = f(x) \cdot x$  und  $f > 0$  ist die Funktion:  $t \mapsto |\Phi_t(x)|$  streng monoton wachsend für alle  $x \neq 0$ . Die Umkehrfunktion bezeichnen wir mit  $y \mapsto t(y)$ . Also ist  $\psi$  surjektiv. Mit einem analogen Argument sieht man, dass  $\psi$  auch injektiv ist, da  $M \setminus \{0\}$  disjunkt in die Bahnen von  $\Phi$  ( $\hat{=}$  offene Strahlen) zerlegt ist, welche monoton wachsend durchlaufen werden. Dies und die Flusseigenschaft sichern, dass  $\psi$  ein Diffeomorphismus ist (Implizite-Funktionen-Theorem).  $\square$

### 3.4 Existenz globaler Flüsse

Im Abschnitt 3.3 haben wir gesehen: Existiert eine Flusslinie nur für endliche Zeit, so verlässt sie jedes Kompaktum. Damit erhalten wir analog zu Satz 16 (3.3.3) den folgenden Satz 17

#### 3.4.1 Satz 17

Zu jedem Vektorfeld  $X$  auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit  $M$  gibt es ein **vollständig integrierbares Vektorfeld** (d.h. der erzeugte Fluss ist global), dessen Orbits mit den Orbits von  $X$  übereinstimmen.

**Beweis (wie bei Satz 16)**

$g := \sum_{j=1}^{\infty} g \cdot \varphi_j$ ,  $\{\varphi_j\}$  Teilung der Eins auf  $M$ .  $\Rightarrow g$  ist eigentlich. Setze  $f := e^{-(Xg)^2} \in (0, 1]$ ,  $Y := f \cdot X$ . Behauptung  $Y$  ist vollständig integrierbar. Entlang einer Flusslinie  $\gamma$  von  $Y$  gilt:

$$(g \circ \dot{\gamma}) = T_{\gamma} g(\dot{\gamma}) = f(\gamma) \cdot (Xg)_{\gamma}$$

$$\Rightarrow |(g \circ \dot{\gamma})| \leq 1$$

$$\Rightarrow |g(\gamma(t)) - g(\gamma(0))| \leq \int_0^{|t|} |(g \circ \dot{\gamma})| \leq |t|$$

Da  $g$  eine eigentlich Abbildung ist, bliebe die Lösungskurve  $\gamma$  in einem Kompaktum, falls  $\gamma$  nur für endliche Zeiten existiert. Da dies *nicht* möglich ist, ist der Fluss von  $Y$  global.  $\square$  Auf einer


vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeit  $(M, g)$  kann man die Vollständigkeit von Flüssen durch die Beschränktheit der integrierenden Vektorfelder erzwingen: Sei

- $M$  eine zusammenhängende differenzierbare Mannigfaltigkeit
- $g$  eine Riemannsche Metrik auf  $M$

$$d(p, q) := \inf_{\gamma} \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt$$

definiert eine Metrik  $d$  auf  $M$ , wobei das Infimum über alle stückweisen  $C^1$ -Kurven  $\gamma$ , die  $p = \gamma(a)$  mit  $q = \gamma(b)$  verbinden, erstreckt wird.

Nach dem Satz von Hopf-Rinow<sup>5</sup> ist eine Riemannsche Mannigfaltigkeit  $(M, g)$  **vollständig** genau dann, wenn im metrischen Raum  $(M, d)$  die abgeschlossenen und beschränkten Mengen kompakt sind. ( $\Leftrightarrow (M, d)$  ist vollständig.)

<sup>5</sup>Sollen wir anscheinend kennen: [https://de.wikipedia.org/wiki/Satz\\_von\\_Hopf-Rinow](https://de.wikipedia.org/wiki/Satz_von_Hopf-Rinow) 

**3.4.2 Satz 18**

Jedes beschränkte Vektorfeld auf einer vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeit ist vollständig integrabel.

**Beweis**

Sei  $(M, g)$  eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit,  $X$  ein beschränktes Vektorfeld auf  $M$ , d.h.

$$\exists K > 0 : |X| := \sqrt{g(X, X)} < K.$$

Wegen

$$d(\gamma(t), \gamma(0)) \leq \int_0^{|t|} |\dot{\gamma}(s)| \, ds \leq K \cdot |t| \quad \text{da } \dot{\gamma} = X_{\gamma}$$

und der Kompaktheit von  $\overline{B_{K \cdot |t|}(\gamma(0))}$  kann man wie in Satz 17 (3.4.1) argumentieren.  $\square$

## 4 Vektorraumbündel

### 4.1 Das Tangentialbündel

Die Gesamtheit der Tangentialräume einer  $m$ -dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeit hat die Struktur einer  $2m$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit und die eines sogenannten Vektorraumbündels.

$$TM := \bigsqcup_{p \in M} T_p M$$

Es existiert eine Projektion  $\pi : TM \rightarrow M$ ,  $X \mapsto p$ , falls  $X \in T_p M$ . Betrachte den Atlas  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, h_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  für  $M$  mit  $h_\alpha = (x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^m)$ . Wir wollen die Karten definieren, die  $TM$  zu einer Mannigfaltigkeit machen:

#### 4.1.1 Definition

Setze für  $\tilde{h}_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow \mathbb{R}^{2m} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$

$$X \mapsto (h_\alpha(\pi(X)); X(x_\alpha^1), \dots, X(x_\alpha^m))$$

D.h. mit  $p \in U_\alpha$  und  $X \in T_p M$ ,  $h_\alpha(p) = (x^1, \dots, x^m)$  und  $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  gilt:

$$\tilde{h}_\alpha(X) = ((x^1, \dots, x^m), X^1, \dots, X^m)$$

**Topologie auf  $TM$ :** Wird erzeugt von  $\{\tilde{h}_\alpha^{-1}(U) \mid U \subseteq \mathbb{R}^{2m} \text{ offen}, (U_\alpha, h_\alpha) \in \mathcal{A}\}$ , d.h. die offenen Mengen von  $TM$  sind genau Vereinigungen von endlichen Durchschnitten solcher Mengen. *dadurch sind  $\tilde{h}_\alpha$  und  $\pi$  stetig*

**Atlas für  $TM$ :**  $\tilde{\mathcal{A}} = \{(\pi^{-1}(U_\alpha), \tilde{h}_\alpha) \mid \alpha \in A\}$

**Kartenwechsel:** Sei  $y \in \mathbb{R}^m$ ,  $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ . Die Kartenwechsel

$$\tilde{h}_\beta \circ \tilde{h}_\alpha^{-1} \left( y; \begin{pmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^m \end{pmatrix} \right) = \left( h_\beta \circ h_\alpha^{-1}; J_y(h_\beta \circ h_\alpha^{-1}) \begin{pmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^m \end{pmatrix} \right)$$

sind differenzierbar.

Die  $2m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit  $TM$  heißt das **Tangentialbündel** von  $M$ . Die Abbildung  $\pi : TM \rightarrow M$  ist eine surjektive **Submersion**, d.h. eine differenzierbare Abbildung mit surjektivem Differential in jedem Punkt. Für jedes  $p \in M$  ist  $\pi^{-1}(p) = T_p M$  ein  $m$ -dimensionaler Vektorraum. Daher ist  $TM$  ein Beispiel eines sogenannten **Vektorraumbündels**.

Ein Vektorfeld  $X$  auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit ist ein **Schnitt** des Tangentialbündels, d.h. eine differenzierbare Abbildung  $X : M \rightarrow TM$  mit  $\pi \circ X = \text{id}_M$ . Wir üblich schreiben wir  $X_p := X(p) \in T_p M$ ,

$$X(\varphi)(p) := X_p(\varphi) \quad , \quad \varphi \in C^\infty(M)$$

$\Gamma(TM) := \{\text{Vektorfelder auf } M\}$  ist ein reeller Vektorraum und ein Modul über dem Ring  $C^\infty(M)$ .

## 4.2 Das Kotangentialbündel

Wir erinnern uns an die Definition des Dualraumes aus LA II:

$$\begin{aligned} T_p^* M &:= (T_p M)^* = \text{Hom}(T_p M, \mathbb{R}) = \text{Vektorraum dual zu } T_p M \\ &= \text{Vektorraum aller Linearformen (oder 1-Formen) auf } T_p M \end{aligned}$$

Wir setzen  $T^* M := \bigsqcup_{p \in M} T_p^* M$ . Sei weiter  $\pi^{(*)} : T^* M \rightarrow M$  mit  $\omega \mapsto p$ , falls  $\omega \in T_p^* M$ . Ein Atlas  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, h_\alpha) \mid \alpha \in A\}$  definiert eine differenzierbare Struktur auf  $T^* M$  analog zum Tangentialbündel:

**Karten:**  $\tilde{h}_\alpha^{(*)} : (\pi^{(*)})^{-1}(U_\alpha) \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$ ,

$$\omega \mapsto \left( h_\alpha \left( \pi^{(*)}(\omega) \right); \omega \left( \frac{\partial}{\partial x^1} \right), \dots, \omega \left( \frac{\partial}{\partial x^m} \right) \right)$$

Sei  $dx^1, \dots, dx^m$  die zu  $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}$  duale Basis definiert durch  $dx^i \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \delta_{ij}$  und  $\omega = \omega_i dx^i$ . Dann ist

$$\tilde{h}_\alpha^{(*)}(\omega) = (x^1, \dots, x^m, \omega_1, \dots, \omega_m)$$

**Kartenwechsel:** Eine differenzierbare Abbildung  $f : M \rightarrow N$  induziert eine lineare Abbildung  $f^* : T_{f(p)}^* N \rightarrow T_p^* M$  definiert durch

$$(f^* \omega)(X) := \omega(T_p f(X)) \quad \omega \in T_{f(p)}^* N, \quad X \in T_p M$$

In lokalen Koordinaten ist diese Abbildung durch die Transponierte  $J(f)^T$  der Jacobischen gegeben:

siehe auch 1.5.7

$$(f^*(dy^j)) \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right) = dy^j \left( \underbrace{Tf \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)}_{= \frac{\partial f^k}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^k}} \right) = dy^j \left( \frac{\partial f^k}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^k} \right) = \frac{\partial f^k}{\partial x^i} dy^j \left( \frac{\partial}{\partial y^k} \right) = \frac{\partial f^j}{\partial x^i}$$

Damit folgt  $f^* dy^j = \frac{\partial f^j}{\partial x^i} dx^i$ , wobei  $j$  der Zeilenindex und  $i$  der Spaltenindex ist. Wie für die Kartenwechsel für  $TM$  sehen wir, dass die Kartenwechsel von  $T^* M$  in den ersten  $m$ -Komponenten durch die Kartenwechsel auf  $M$  gegeben sind. In den zweiten  $m$  Komponenten durch die Transponierte der Jacobischen dieser Kartenwechsel.

### 4.2.1 Definition

Eine **1-Form**  $\omega$  auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit  $M$  ist ein differenzierbarer Schnitt des Kotangentialbündels, d.h.  $\omega \in C^\infty(M, T^* M)$  mit  $\pi^{(*)} \circ \omega = \text{id}_M$ . Wir definieren wieder  $\Gamma(T^* M) := \{1\text{-Formen auf } M\}$ .

Sei  $f \in C^\infty(M)$ . Betrachte Testfunktion auf  $\mathbb{R}$ :  $\mathbb{R} \ni t \xrightarrow{\text{id}} t \in \mathbb{R}$ . Dann gilt

$$T_p f(X)(\text{id}) = X(\text{id} \circ f) = X(f)$$

d.h. lokal gilt  $T_p f(X) = X(f) \frac{\partial}{\partial t}$ .

### 4.2.2 Definition

Für  $f \in C^\infty(M)$  sei  $df(X) := X(f)$ . Also  $(df)_p(X_p) = X_p f$ . Dies ist das **totale** oder **äußere Differential**.  $df$  ist eine 1-Form auf  $M$ . Seien  $(x^1, \dots, x^m)$  lokale Koordinaten, dann gilt

$$dx^i \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \frac{\partial}{\partial x^i} x^i = \delta_{ij}$$

Ist also verträglich mit der Eigenschaft duale Basis zu sein. Insbesondere für  $f \in C^\infty(M)$  lokal:

$$df_p \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p (f) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$$

d.h.  $df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$  ist das **totale Differential**.

## 4.3 Vektorraumbündel

### 4.3.1 Definition

Ein ( $n$ -dimensionales reelles topologisches) **Vektorraumbündel** über  $B$  ist ein Tripel  $(E, \pi, B)$  mit

- $E, B$  sind Hausdorff-Räume.
- $\pi : E \rightarrow B$  ist stetige Surjektion, sodass jede **Faser**  $E_b := \pi^{-1}(b)$  für  $b \in B$  die Struktur eines  $n$ -dimensionalen Vektorraumes hat, und sodass
- **lokale Trivialität** gilt: Für jedes  $b \in B$  gibt es eine Umgebung  $U$  von  $b$  und einen Homöomorphismus  $\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$ , sodass

$$\varphi_{b'} := \varphi|_{E_{b'}} : E_{b'} \rightarrow \{b'\} \times \mathbb{R}^n$$

ein Vektorraumisomorphismus für jedes  $b' \in U$  ist.

$E$  heißt der **Totalraum**,  $\pi$  die **Bündelprojektion**,  $B$  die **Basis**,  $n$  der **Rang** des Bündels und  $(U, \varphi)$  **Bündelkarte**.

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi} & U \times \mathbb{R}^n \\ \downarrow \pi & \swarrow \text{pr}_1 & \\ U & & \end{array}$$

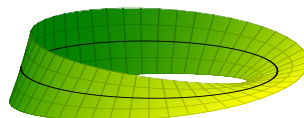
Ein Bündel heißt **trivial**, falls es eine (globale) Bündelkarte  $(B, \varphi)$  gibt, d.h.

$$\varphi : E \xrightarrow{\cong} B \times \mathbb{R}^n$$

### Beispiele

- $B \times \mathbb{R}^n$  triviales Bündel
- $(TM, \pi, M), (T^*M, \pi^*, M)$

- Möbiusband:



$$\not\cong S^1 \times \mathbb{R}$$

- $B = \mathbb{R}P^1 = S^1 / x \sim -x$ ,  $E = \{([x], \lambda x) \in \mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}^2 \mid x \in S^1, \lambda \in \mathbb{R}\}$  **Kanonomisches Bündel**,  $\pi : E \rightarrow B$  mit  $([x], \lambda x) \mapsto [x]$ . Dann ist  $E_{[x]}$  eine Gerade durch  $x$  aufgefasst als Vektorraum.

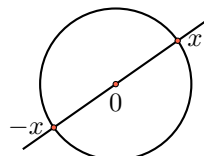


Abbildung 17: Kanonomisches Geradenbündel

Mischwesen  
aus Diagramm  
und Zeich-  
nung vervoll-  
ständigen

Bündelstruktur  
im Möbi-  
usband  
hervorheben

$B$  als  
Mannigfaltigkeit,  $E$   
als Menge der  
Tangentialräume  
vorstellen  $\Rightarrow$   
Tangentialbündel

## 4.3.2 Definition

Ein **Bündelmorphismus**  $(E, \pi, B) \rightarrow (E', \pi', B')$  ist ein Paar  $(f, \bar{f})$  stetiger Abbildungen  $f : E \rightarrow E'$  und  $\bar{f} : B \rightarrow B'$  mit  $\bar{f} \circ \pi = \pi' \circ f$ , d.h.

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E' \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi' \\ B & \xrightarrow{\bar{f}} & B' \end{array}$$

und mit  $f_b := f|_{E_b} : E_b \rightarrow E'_{\bar{f}(b)}$  linear für alle  $b \in B$ .

**Bemerkung**

Da  $\pi$  surjektiv ist, ist  $\bar{f}$  durch  $f$  und durch  $\bar{f} \circ \pi = \pi' \circ f$  eindeutig festgelegt. Daher schreiben wir auch  $f : E \rightarrow E'$  für einen Bündelmorphismus.

**Beispiele**

- Das Differential  $Tf : TM \rightarrow TN$  einer differenzierbaren Abbildung  $f : M \rightarrow N$  ist ein Bündelmorphismus.
- Falls  $f : M \xrightarrow{\cong} N$ , dann ist die induzierte Abbildung  $f^* : T^*N \rightarrow T^*M$ ,  $\omega \mapsto \omega \circ Tf$  ein Bündelmorphismus.

## 4.3.3 Definition

Eine **Bündeläquivalenz** ist ein Bündelmorphismus mit  $B = B'$ ,  $\bar{f} = \text{id}_B$  und  $f_b$  ein Isomorphismus für jedes  $b \in B$ .

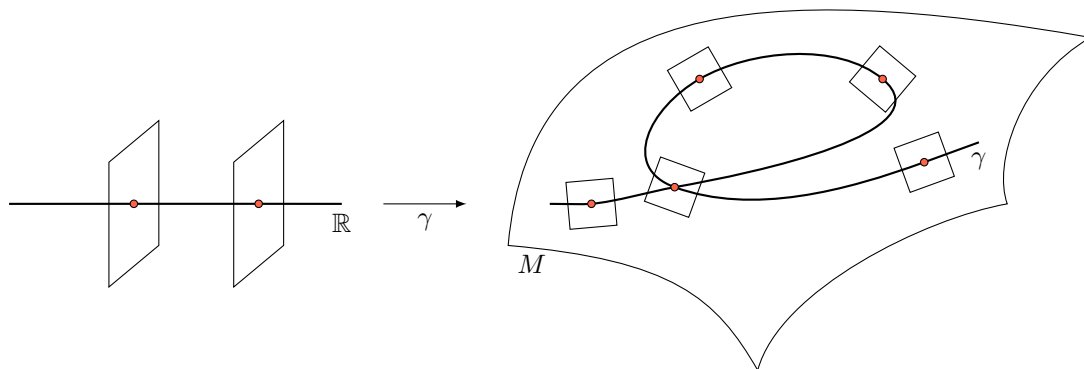
**Beispiel**

Abbildung 18: Beispiel für das induzierte Bündel

$(E, \pi, B)$  gegebenes Bündel.  $f : B_0 \rightarrow B$  stetige Abbildung. Dann gibt es ein Bündel  $(f^*E, f^*\pi, B_0)$  und einen faserweisen isomorphen Bündelmorphismus  $(\tilde{f}, f) : (f^*E, f^*\pi, B_0) \rightarrow (E, \pi, B)$

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \xrightarrow{\tilde{f}} & E \\ \downarrow f^*\pi & & \downarrow \pi \\ B_0 & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Dieses Bündel ist eindeutig bis auf Bündeläquivalenz.



## Konstruktion

Setze

$$f^*E := \{(b_0, e) \in B_0 \times E \mid f(b_0) = \pi(e)\}$$

$f^*\pi : f^*E \rightarrow B_0, (b_0, e) \mapsto b_0$  und  $\tilde{f} : f^*E \rightarrow E, (b_0, e) \mapsto e$ . Es gilt

$$f \circ f^*\pi(b_0, e) = f(b_0) = \pi(e) = \pi \circ \tilde{f}(b_0, e),$$

d.h.  $\tilde{f}$  ist ein Bündelmorphismus, falls  $f^*E$  ein Bündel ist, der faserweise isomorph ist:

$$\{(b_0, e) \mid \pi(e) = f(b_0)\} = (f^*E)_{b_0} \xrightarrow{\cong} E_{f(b_0)}, (b_0, e) \mapsto e$$

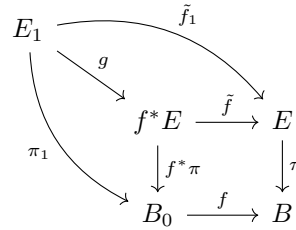
$f^*E$  ist lokal trivial: Für einen Punkt in  $B_0$  wählen wir eine Umgebung  $U_0 \subset B$ , sodass  $f(U_0) \subset U$  für eine Bündelkarte  $(U, \varphi)$  für  $E$ . Das heißt  $\varphi : \pi^{-1}(u) \xrightarrow{\cong} U \times \mathbb{R}^n$  und

$$\varphi_b = \varphi|_{\pi^{-1}(b)} : \pi^{-1}(b) \xrightarrow[\text{linear}]{\cong} \{b\} \times \mathbb{R}^n$$

Wir setzen:  $\varphi_0 : \pi^{-1}(U_0) \rightarrow U_0 \times \mathbb{R}^n, (b_0, e) \mapsto (b_0, \text{pr}_2 \circ \varphi_{f(b_0)}(e))$ , wobei  $\text{pr}_2$  die Projektion auf die zweite Komponente ist.  $\varphi_0$  ist faserweise isomorph. Die Inverse ist

$$(b_0, \varphi^{-1}(f(b_0), v)) \mapsto (b_0, v)$$

Eindeutigkeit: Sei mit  $\tilde{f}_1$  faserweise isomorph



wobei  $g(e_1) = (\pi_1(e_1), \tilde{f}_1(e_1))$ . Das Diagramm ist kommutativ.

### 4.3.4 Produktbündel: $\xi \times \eta$

$$\xi := (E(\xi), \pi(\xi), B(\xi))$$

$$\eta := (E(\eta), \pi(\eta), B(\eta))$$

Wir setzen:

$$E(\xi \times \eta) := E(\xi) \times E(\eta)$$

$$B(\xi \times \eta) := B(\xi) \times B(\eta)$$

$$\pi_{\xi \times \eta}(e, f) := (\pi_\xi(e), \pi_\eta(f))$$

### 4.3.5 Whitney-Summe: $\xi \oplus \eta$

Seien  $\xi, \eta$  Bündel über  $B$ . Definiere nun die **Diagonalabbildung**

$$\Delta : B \rightarrow B \times B \quad b \mapsto (b, b)$$

Setze nun  $\xi \oplus \eta := \Delta^*(\xi \times \eta)$ . Dann gilt  $E_b(\xi \oplus \eta) = E_b(\xi) \oplus E_b(\eta)$ . Weiter gilt auch

$$\xi \oplus \eta \cong \eta \oplus \xi \quad , \quad (\xi \oplus \eta) \oplus \zeta \cong \xi \oplus (\eta \oplus \zeta)$$

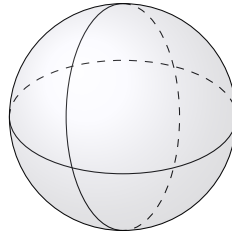
#### 4.3.6 Einschränkung eines Bündels

Sei  $B_0 \subset B(\xi)$ . Dann betrachte

$$\xi|_{B_0} = (\pi^{-1}(B_0), \pi|_{\pi^{-1}(B_0)}, B_0)$$

Für die Inklusionsabbildung  $i : B_0 \hookrightarrow B$  gilt:  $i^*\xi = \xi|_{B_0}$  ist ein Bündel.

**Beispiel:**  $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$



Zeichnung vervollständigen!

Es gibt drei Bündel:  $\mathbb{R}^3|_{S^2}$ ,  $\mathbb{R}\underline{n}$ ,  $TS^2$ . Sei  $\varepsilon^k$  das triviale,  $k$ -dimensionale Bündel (hier über  $S^2$ ). Es gilt

$$\mathbb{R}^3|_{S^2} = \varepsilon^3 = S^2 \times \mathbb{R}^3$$

$$\mathbb{R}\underline{n} = \varepsilon^1 = S^2 \times \mathbb{R}$$

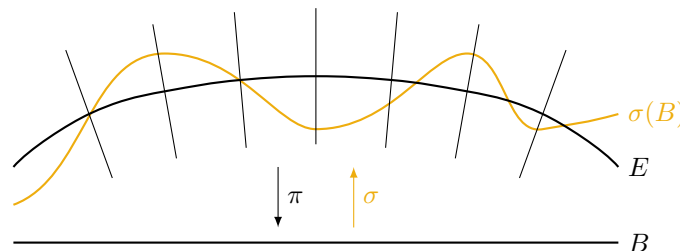
$$TS^2 \neq \varepsilon^2$$

Nun gilt

$$TS^2 \oplus \varepsilon^1 \cong T\mathbb{R}^3|_{S^2} \cong \varepsilon^3 \cong \varepsilon^2 \oplus \varepsilon^1$$

#### 4.3.7 Definition

Eine stetige Abbildung  $\sigma : B \rightarrow E$  mit  $\pi \circ \sigma = \text{id}_B$  heißt **Schnitt** des Bündels  $(E, \pi, B)$ .



Zeichnung  
vervollständigen!

#### 4.3.8 Definition

Eine Menge  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) \mid \alpha \in A\}$  von Bündelkarten für  $(E, \pi, B)$  heißt **Bündelatlant**, falls  $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = E$ . Die stetigen Abbildungen

$$\varphi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \text{Gl}(k, \mathbb{R}) \quad , \quad b \longmapsto \varphi_{\beta,b} \circ \varphi_{\alpha,b}^{-1}$$

$$\left( \varphi_{\alpha,b} := (\text{pr}_2 \circ \varphi_\alpha)|_{E_b} : E_b \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^k \right)$$

heißen **Übergangsfunktionen**.

### Beispiel

$h_\beta \circ h_\alpha^{-1}$  Kartenwechsel einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit  $M$ . Dann ist  $J_{h_\beta \circ h_\alpha^{-1}}$  sind die Übergangsfunktionen von  $T_p M$ .

Ein Bündelatlas eines Bündels über einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit heißt **differenzierbar**, falls also Übergangsfunktionen differenzierbar sind. Ein **differenzierbares Vektorbündel** ist ein Vektorbündel mit einem maximalen differenzierbaren Bündelatlas.  $\Rightarrow$  Der Totalraum eines differenzierbaren  $\mathbb{R}^k$ -Bündels über  $M^m$  ist in kanonischer Weise eine  $m+k$ -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit.

Mittels der Übergangsfunktionen lässt sich der Totalraum  $E$  auch wie folgt darstellen:

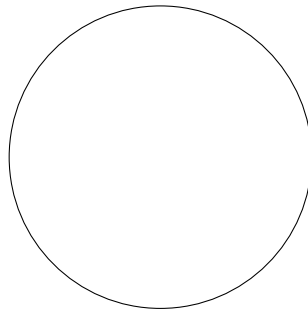
$$E := \frac{\bigsqcup_{\alpha \in A} U_\alpha \times \mathbb{R}^k}{(x, v) \sim (x, \varphi_{\alpha\beta}(x) \cdot v)}$$

wobei  $(x, v) \in U_\alpha \times \mathbb{R}^k$ ,  $x \in U_\alpha \cap U_\beta$  und  $(x, \varphi_{\alpha\beta}(x) \cdot v) \in U_\beta \times \mathbb{R}^k$

### Beispiel

Bis auf Äquivalenz gibt es genau zwei  $\mathbb{R}^k$ -Bündel über  $S^1$ , da  $Gl(k, \mathbb{R})$  zwei Zusammenhangskomponenten hat.

Zeichnung  
vervollständigen



### Anwendung

Whitney-Summe: Betrachte

$$\{(U_\alpha \cap V_\beta, \varphi_\alpha \oplus \psi_\beta)\}$$

Dann gilt

$$E(\xi \oplus \eta) = \frac{\bigsqcup_{\alpha, \beta} (U_\alpha \cap V_\beta) \times (\mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^l)}{(x, (v, w)) \sim (x, (\varphi_{\alpha\alpha'}(x) \cdot v, \psi_{\beta\beta'}(x) \cdot w))}$$

wobei  $(x, (v, w)) \in (U_\alpha \cap V_\beta) \times (\mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^l)$  und  $(x, (\varphi_{\alpha\alpha'}(x) \cdot v, \psi_{\beta\beta'}(x) \cdot w)) \in (U_{\alpha'} \cap V_{\beta'}) \times (\mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^l)$ .

Analog:  $\xi \otimes \eta, \xi^*, \text{Hom}(\xi, \eta), \eta \subseteq \xi: \xi/\eta, \dots$

## 5 Formen

### 5.1 Alternierende Formen

#### 5.1.1 Definition

Eine (alternierende)  $k$ -Form auf einem  $n$ -dimensionalen Vektorraum  $V$  ist eine multilineare Abbildung

$$\omega : \underbrace{V \times \dots \times V}_{k\text{-mal}} \rightarrow \mathbb{R},$$

die in folgendem Sinne **alternierend** ist:

$$\forall v_1, \dots, v_k \in V : \forall \pi \in S_k : \omega(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}) = \text{sgn}(\pi) \cdot \omega(v_1, \dots, v_k)$$

Beispiel: Die Determinante als multilineare Abbildung in ihren Spalten (Zeilen) ist eine  $n$ -Form.  $\Lambda^k V^*$  ist der reelle Vektorraum der  $k$ -Formen auf  $V$ . Es ist  $\Lambda^1 V^* = V^*$ ,  $\Lambda^0 V^* := \mathbb{R}$ .

#### 5.1.2 Definition

Das **äußere Produkt** (oder auch **Dachprodukt**) zweier Formen ist eine bilineare Abbildung

$$\Lambda^k V^* \times \Lambda^l V^* \rightarrow \Lambda^{k+l} V^*, \quad (\omega, \sigma) \mapsto \omega \wedge \sigma$$

das wie folgt erklärt ist:  $\forall v_1, \dots, v_{k+l} \in V :$

$$(\omega \wedge \sigma)(v_1, \dots, v_{k+l}) = \frac{1}{k! \cdot l!} \sum_{\pi \in S_{k+l}} \text{sgn}(\pi) \cdot \omega(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}) \cdot \sigma(v_{\pi(k+1)}, \dots, v_{\pi(k+l)})$$

#### Bemerkung

Die rechte Seite ist gleich

$$\sum_{\pi \in S_{k+l}} \text{sgn}(\pi) \cdot \omega(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}) \cdot \sigma(v_{\pi(k+1)}, \dots, v_{\pi(k+l)})$$

wobei die Summe über alle Permutationen mit  $\pi(1) < \dots < \pi(k)$ ,  $\pi(k+1) < \dots < \pi(k+l)$  erstreckt wird. In der alternierenden Summe der Definition kommen genau diejenigen Summanden mehrfach vor, deren Permutationen gewisse Zerlegungen

$$\{1, \dots, k+l\} = \{\pi(1), \dots, \pi(k)\} \sqcup \{\pi(k+1), \dots, \pi(k+l)\}$$

erhalten. Fasst man diese in Äquivalenzklassen zusammen, in sogenannte **Zerlegungen**  $[\pi] \in \mathcal{Z}_{k+l}$ , so hat jede solche Klasse  $k! \cdot l!$  Vertreter. In der Summe der Bemerkung haben wir einen solchen Vertreter ausgezeichnet.

Das äußere Produkt ist assoziativ:

$$(\omega \wedge \sigma) \wedge \tau = \omega \wedge (\sigma \wedge \tau)$$

Dazu betrachte man Zerlegungen aus  $\mathcal{Z}_{k,l,m}$  und stellt fest, dass beide Seiten angewandt auf  $(v_1, \dots, v_{k+l+m})$  geben:

$$\sum_{\pi \in S_{k+l+m}} \text{sgn}(\pi) \cdot \omega(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}) \cdot \sigma(v_{\pi(k+1)}, \dots, v_{\pi(k+l)}) \cdot \tau(v_{\pi(k+l+1)}, \dots, v_{\pi(k+l+m)})$$

### 5.1.3 Lemma 20

Sei  $e_1^*, \dots, e_n^*$  eine Basis von  $V^*$ , dann ist

$$\{e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^* \mid i_1 < \dots < i_k\} = \{e_I^* \mid I = (i_1 < \dots < i_k)\}$$

eine Basis von  $\Lambda^k V^*$ .

#### Beweis

Sei  $e_1, \dots, e_n$  die duale Basis von  $V$  ( $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$ ). Sei  $\omega$  eine  $k$ -Form. Setze

$$\omega_{i_1, \dots, i_k} := \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$$

Dann gilt

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1, \dots, i_k} e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*$$

$\Rightarrow$  die  $e_I^*$  erzeugen  $\Lambda^k V^*$ . Aus  $0 = \sum_I' \omega_I e_I^*$  folgt durch Auswerten auf  $e_{i_1}, \dots, e_{i_k} : \omega_I = 0 \forall I$ . Also sind die  $e_I^*$  linear unabhängig.  $\square$

Also ist  $\dim \Lambda^k V^* = \binom{n}{k}$ .

### 5.1.4 Lemma 21 (Antikommutativität)

Sei  $\omega \in \Lambda^k V^*, \sigma \in \Lambda^l V^*$ . Dann gilt

$$\omega \wedge \sigma = (-1)^{kl} \sigma \wedge \omega$$

#### Beweis

Beide Seiten sind linear in  $\omega$  und  $\sigma$ . Damit reicht es die Behauptung für alle Basiselemente zu zeigen. Dies folgt aus der entsprechenden Behauptung für 1-Formen:  $\omega \wedge \sigma = -\sigma \wedge \omega$ . Dies folgt nun mit:

$$\omega \wedge \sigma(v, w) = \omega(v) \cdot \sigma(w) - \omega(w) \cdot \sigma(v)$$

ist antisymmetrisch in  $\omega$  und  $\sigma$ .  $\square$

Sei nun  $\omega \in \Lambda^k V^*$ , wobei  $k$  ungerade ist. Dann ist  $\omega \wedge \omega = 0$ . Dies führt zu:

### 5.1.5 Lemma 22

Sind  $\omega_1, \dots, \omega_k$  1-Formen, so gilt  $\forall v_j \in V$ :

$$(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k)(v_1, \dots, v_k) = \det(\omega_i(v_j))$$

#### Beweis

Beide Seiten sind multilinear und in gleicher Weise alternierend. OE:  $\omega_j = e_j^*, v_j = e_j$ . Dann gilt

$$e_1^* \wedge \dots \wedge e_k^*(e_1, \dots, e_k) = 1 = \det(\delta_{ij}) = \det(e_i^*(e_j)). \quad \square$$

$\Lambda V^* = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Lambda^k V^*$  ist, versehen mit dem äußeren Produkt, eine reelle, graduierte, assoziative, antikommutative,  $2^n$ -dimensionale, unitale Algebra, die **äußere Algebra** (oder auch die **Graßmann-Algebra**).

Betrachte nun  $f : V \rightarrow W$  linear. Die **induzierte Abbildung** ist eine Abbildung

$$f^* : \Lambda W^* \rightarrow \Lambda V^*, \quad \omega \mapsto f^* \omega$$

wobei  $\omega$  eine  $k$ -Form ist, gegeben durch

$$(f^*\omega)(v_1, \dots, v_k) := \omega(f(v_1), \dots, f(v_k))$$

$f^*$  ist ein Algebrenhomomorphismus:

$$f^*(\omega \wedge \sigma) = (f^*\omega) \wedge (f^*\sigma)$$

Betrachtet man nun  $f : V \rightarrow V$ , wobei  $\dim V = n$  und eine nichttriviale  $n$ -Form  $\omega$ , d.h.  $\omega \in \Lambda^n V^* \setminus \{0\}$  ( $\dim \Lambda^n V^* = 1$ ), eine sogenannte **Volumenform**.  $\det f$  ist die eindeutig bestimmte reelle Zahl, für die gilt:  $(f^*\omega) = \det(f) \cdot \omega$ . Dies hängt nicht von der Wahl der Volumenform ab! Sei  $e_1, \dots, e_n$  eine Basis von  $V$ ,  $e_1^*, \dots, e_n^*$  die duale Basis und  $\omega = e_1^* \wedge \dots \wedge e_n^*$ . Dann ist  $f$  durch die Matrix

$$A = (a_{ij}) = [f(e_1), \dots, f(e_n)]$$

gegeben. Damit:

$$\begin{aligned} (f^*\omega)(e_1, \dots, e_n) &= \omega(f(e_1), \dots, f(e_n)) = e_1^* \wedge \dots \wedge e_n^* \left( \sum_k a_{k1} e_k, \dots, \sum_k a_{kn} e_k \right) \\ &= \det \left( e_i^* \left( \sum_k a_{kj} e_k \right) \right) \\ &= \det(a_{ij}) = \det A \end{aligned}$$

$\Rightarrow \det f$  stimmt mit der Determinante der Matrix  $A$  überein. Diese koordinatenfreie Definition wird es uns erlauben, einen Integralbegriff auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten einzuführen.

## 5.2 Differentialformen

### 5.2.1 Definition

Eine **Differentialform** vom Grad  $k$  (oder  $k$ -Form) auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit  $M$  ist eine Zuordnung einer  $k$ -Form  $\omega_p$  auf  $T_p M$  zu jedem Punkt der Mannigfaltigkeit, die differenzierbar von  $p$  abhängt, d.h. in jeder lokalen Karte  $(U, x^1, \dots, x^m)$  hängen die Komponentenfunktionen

$$\omega_{i_1, \dots, i_k} := \omega \left( \frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_k}} \right) : U \longrightarrow \mathbb{R}$$

differenzierbar von  $p$  ab. Wir setzen:

$$\begin{aligned} \Omega^k M &:= \mathbb{R}\text{-Vektorraum aller } k\text{-Formen auf } M; C^\infty(M)\text{-Modul} \\ \Omega^0 M &:= C^\infty(M) \end{aligned}$$

### 5.2.2 Bemerkung

Das **äußere Bündel**  $\Lambda^k(T^*M)$  habe die Fasern  $\Lambda^k(T_p^*M)$  für alle  $p \in M$ . Die Übergangsfunktionen entsprechen dem komponentenweisen Anwenden von  $J_{h_\beta \circ h_\alpha^{-1}}^T$  auf das  $k$ -fache äußere Produkt von 1-Formen. Ein Element  $\omega \in \Lambda^k(T^*M)$  lässt sich in lokalen Koordinaten durch

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

vgl. Riemannsche  
Metrik

eindeutig darstellen. Eine  $k$ -Form auf  $M$  ist ein differenzierbarer Schnitt in  $\Lambda^k(T^*M)$

$$\begin{aligned}\Omega^k M &= \Gamma(\Lambda^k(T^*M)) && \text{Schnitte in } \Lambda^k T^*M \\ \Omega^1 M &= \Gamma(T^*M) \\ \Omega^0 M &= C^\infty(M) = \Gamma(\varepsilon^1 = M \times \mathbb{R})\end{aligned}$$

Das äußere Produkt  $\omega \wedge \sigma$  zweier Differentialformen ist punktweise durch

$$(\omega \wedge \sigma)_p := \omega_p \wedge \sigma_p \quad \forall p \in M$$

gegeben.  $\Omega M := \bigoplus_{k=0}^\infty \Omega^k M$  ist die **Graßmann-Algebra**.

### 5.2.3 Lemma 23 (Tensorialitätseigenschaft)

$k$ -Formen auf  $M$  entsprechen genau den  $C^\infty(M)$ -multilinearen alternierenden Abbildungen

$$\underbrace{\Gamma(TM) \times \dots \times \Gamma(TM)}_{k\text{-mal}} \longrightarrow$$

#### Beweis

" $\Rightarrow$ ": Sei  $\omega$  eine  $k$ -Form,  $X_1, \dots, X_k$  Vektorfelder. Betrachte

$$(\omega(X_1, \dots, X_k))(p) := \omega_p(X_{1p}, \dots, X_{kp})$$

Dies definiert eine alternierende  $C^\infty(M)$ -multilineare Abbildung.

" $\Leftarrow$ ": Sei  $0 \leq k \leq 1$ . Sei  $\omega : \Gamma(TM) \rightarrow C^\infty(M)$ ,  $x \mapsto \omega(x)$  eine  $C^\infty(M)$ -lineare Abbildung. Wir wollen eine 1-Form auf  $M$  erklären durch

$$p \longmapsto (\omega_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}) \quad \omega_p(v) := (\omega(X))(p)$$

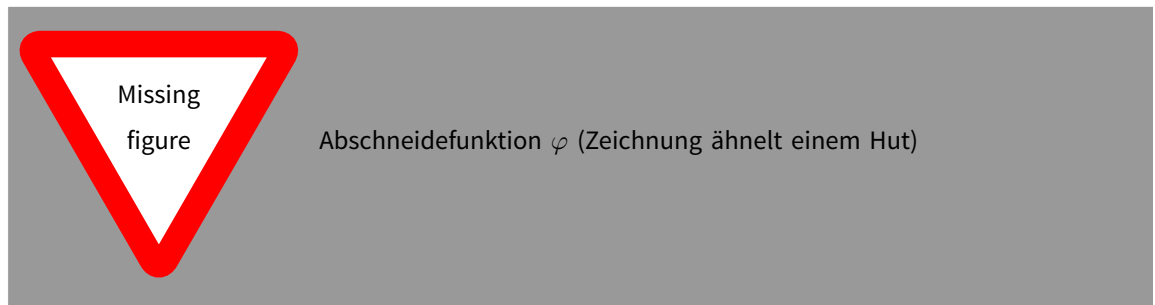
Dabei ist  $X$  ein Vektorfeld auf  $M$  mit  $X_p = v$ . Gilt für ein weiteres  $X'$   $X'_p = v$ , so folgt

$$\omega(X - X')(p) = \omega(X)(p) - \omega(X')(p)$$

**Behauptung:** Sei  $Y$  ein Vektorfeld auf  $M$  mit  $Y_p = 0$ , dann gilt  $\omega(Y)(p) = 0$

Mit  $Y := X - X'$  folgt dann die Unabhängigkeit der Definition von der Wahl des Vektorfeldes  $X$ .

Betrachte dazu die Abschneidefunktion  $\varphi \in C^\infty(M)$  mit  $\text{supp } \varphi \subset U$



Sei  $(U, x^1, \dots, x^m)$  eine Karte mit  $p \equiv 0$ . Schreibe  $Y = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ ,  $Y^i(0) = 0$  und setze

$$Y_i := \varphi \frac{\partial}{\partial x^i} \in \Gamma(TM) \quad a_i := \varphi Y^i \in C^\infty(M)$$

Dann gilt  $\sum_i a_i Y_i = \varphi^2 Y$  und es folgt  $Y = \sum_i a_i Y_i + (1 - \varphi^2)Y$ . Wir erhalten

$$\omega(Y)(p) = \left( \sum_i a_i \omega(Y_i) + (1 - \varphi^2) \omega(Y) \right)(p) = 0$$

da  $a_i(p) = 0$  und  $\varphi(p) = 1$ . Durch Einsetzen von Vektorfeldern  $Y_i$  in  $\omega$  folgt die Differenzierbarkeit der Zuordnung  $p \mapsto \omega_p$ .  $\square$

Damit lassen sich alle natürlichen Konzepte für alternierende  $k$ -Formen auf differenzierbare  $k$ -Formen übertragen:

#### 5.2.4 Definition

- Sei  $f : M \rightarrow N$  differenzierbar. Die **induzierte Abbildung**  $f^* : \Omega^k N \rightarrow \Omega^k M$  ist durch

$$(f^* \omega)(X_1, \dots, X_k) := \omega(Tf(X_1), \dots, Tf(X_k))$$

für Vektorfelder  $X_1, \dots, X_k$  erklärt. Mit Lemma 23 5.2.3 erhält man:

$$(f^* \omega)_p(v_1, \dots, v_k) = \omega_{f(p)}(T_p f(v_1), \dots, T_p f(v_k))$$

für alle  $v_1, \dots, v_k \in T_p M$  und  $p \in M$ . Die Zuordnung  $p \mapsto (f^* \omega)_p$  ist in der Tat differenzierbar.

- $f^*(\omega \wedge \sigma) = (f^* \omega) \wedge (f^* \sigma)$
- Aus der Kettenregel:  $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$  für  $g : L \rightarrow M$  differenzierbar. (siehe Blatt 10, Aufgabe 1)

### 5.3 Das äußere Differential

Sei  $f \in C^\infty(M)$ ,  $X$  ein Vektorfeld auf  $M$ . Das äußere Differential von  $f$  war  $df(X) = X(f)$ . Lokal:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

Die äußere Ableitung ist eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung  $d : C^\infty(M) \rightarrow \Omega^1(M)$ ,  $f \mapsto df$ , die wegen

$$\begin{aligned} X(f \cdot g) &= X(f) \cdot g + f \cdot X(g) \\ d(f \cdot g) &= df \cdot g + f \cdot dg \end{aligned}$$

der Leibnizregel genügt. Ziel:  $d : \Omega^{k+1} \rightarrow \Omega^k$

#### 5.3.1 Satz 24

Auf jeder differenzierbaren Mannigfaltigkeit  $M$  gibt es genau eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung

$$d : \Omega M \rightarrow \Omega M$$

vom Grad 1, so dass gilt

- $d|_{C^\infty(M)}$  stimmt mit der äußeren Ableitung für Funktionen überein,
- $d \circ d = 0$ , (Komplexeigenschaft)
- Für  $\omega \in \Omega^k M$ ,  $\sigma \in \Omega^l M$  gilt

$$d(\omega \wedge \sigma) = d\omega \wedge \sigma + (-1)^k \omega \wedge d\sigma$$



$d\omega$  ist die **äußere Ableitung**

$$0 \rightarrow \sigma^0 M \xrightarrow{d} \Omega^1 M \xrightarrow{d} \Omega^2 M \rightarrow \dots$$

heißt der **deRham-Komplex**.

**Beweis**

**Schritt I:**  $U$  Kartengebiet  $(x^1, \dots, x^m)$ . Sei  $\omega$  eine  $k$ -Form auf  $M$ , also  $\omega \stackrel{\text{auf } U}{=} \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ . Falls es einen solchen Operator  $d$  gibt, so gilt

$$d\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} d\omega_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

$\Rightarrow$  Eindeutigkeit. Um die Existenz zu zeigen, legen wir obige Darstellung als Definition für  $d$  zugrunde. Damit ist  $d$   $\mathbb{R}$ -linear und stimmt mit dem äußeren Differential für Funktionen überein.

**Produktregel:**  $\boxtimes$

$$\begin{aligned}\omega &= f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\ \sigma &= g dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l}\end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}d(\omega \wedge \sigma) &= d(f \cdot g) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l} \\ &= (df \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) \wedge (g dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l}) \\ &\quad + (-1)^k (f dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l}) \wedge (dg \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) \\ &= d\omega \wedge \sigma + (-1)^k \omega \wedge d\sigma\end{aligned}$$

**Komplexeigenschaft:** Es reicht zu zeigen;  $ddf = 0$  für alle  $f \in C^\infty(M)$

$$dd\omega = d \sum_I d\omega_I \wedge dx^I = \sum_I d(d\omega_I \wedge dx^I)$$

Es gilt

$$ddf = d\left(\frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^j \wedge dx^i$$

Die Hessesche von  $f$  ist symmetrisch; das äußere Produkt ist antisymmetrisch. Daher verschwindet die Summe auf der rechten Seite.

**Schritt II:** Allgemeiner Fall: Sei  $\omega$  eine  $k$ -Form auf  $M$ ,  $(U, h)$  eine Karte,  $i : U \hookrightarrow M$  Inklusion. Setze

$$\omega|_{TU} := i^* \omega$$

Für  $p \in U$ , mit  $d_u$  Differential aus Schritt I für  $(U, h)$

$$(d\omega)_p := (d_u \omega|_{TU})_p$$

Dies ist wohldefiniert: Sei also  $(V_k)$  eine zweite Karte mit  $p \in V$ . Dann gilt

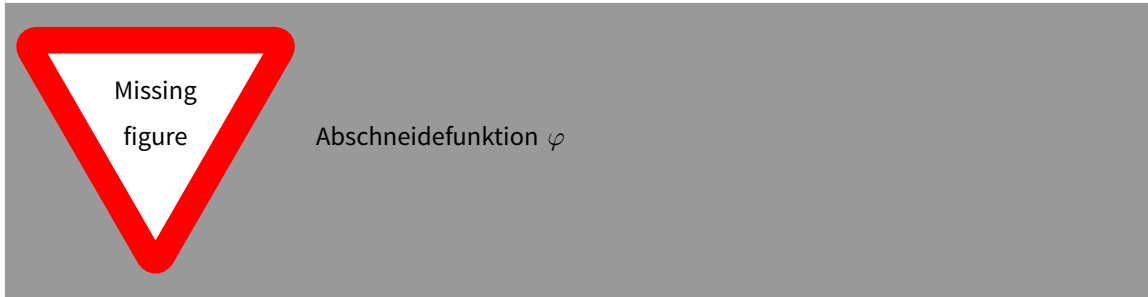
$$\begin{aligned}d_u \omega|_{T(U \cap V)} &\stackrel{\text{lokale Def.}}{=} \sum_I d\omega_I \wedge dh^I|_{T(U \cap V)} \\ &\stackrel{\text{lokale Def.}}{=} d_{U \cap V} \omega|_{T(U \cap V)} \\ &\stackrel{\text{lokale Def.}}{=} \sum_I d\tilde{\omega}_I \wedge dk^I|_{T(U \cap V)} \\ &\stackrel{\text{lokale Def.}}{=} d_V \omega|_{T(U \cap V)}.\end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Wir erhalten einen Operator  $d : \Omega^k M \rightarrow \Omega^{k+1} M$  wie im Satz.

**Eindeutigkeit:** Sei  $d'$  ein weiterer Operator wie im Satz,  $(U, h)$  Karte,  $p \in U$ .

$$\Rightarrow \omega|_{TU} = \sum_{i_1, \dots, i_k} \omega_{i_1, \dots, i_k} dh^{i_1} \wedge \dots \wedge dh^{i_k}.$$

Betrachte die Abschneidefunktion  $\varphi \in C^\infty(M, [0, 1])$



Setze  $\tilde{\omega}_{i_1, \dots, i_k} := \varphi \cdot \omega_{i_1, \dots, i_k}$  und  $\tilde{h}^{i_j} := \varphi \cdot h^{i_j}$ . Dies sind globale Funktionen durch Null auf ganz  $M$  fortgesetzt. Wir erhalten eine globale  $k$ -Form  $(d' d' \tilde{h}^{i_j})$

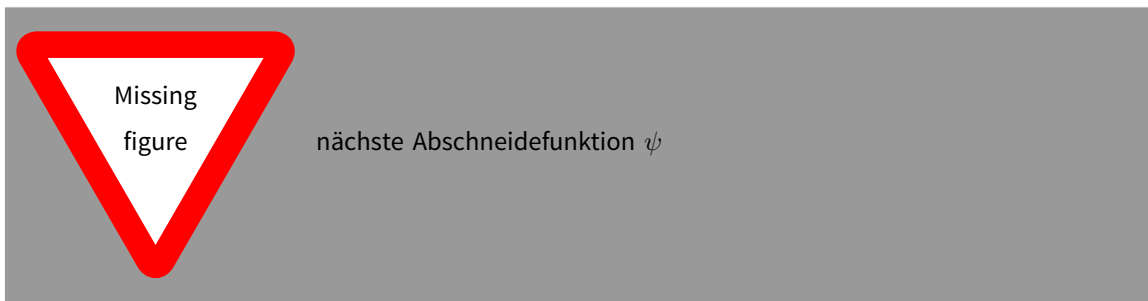
$$\tilde{\omega} := \sum_{i_1, \dots, i_k} \tilde{\omega}_{i_1, \dots, i_k} d\tilde{h}^{i_1} \wedge \dots \wedge d\tilde{h}^{i_k}$$

$\Rightarrow d'\tilde{\omega} = \sum_{i_1, \dots, i_k} d\omega_{i_1, \dots, i_k} \wedge d\tilde{h}^{i_1} \wedge \dots \wedge d\tilde{h}^{i_k}$ . Mit Schritt I und  $\omega = \tilde{\omega}$  auf  $V$  folgt

$$(d'\tilde{\omega})_p \stackrel{(I)}{=} (d_u \tilde{\omega})_p = (d_U \omega)_p$$

Wir wollen  $(d'\omega)_p = (d'\tilde{\omega})_p$  zeigen: (denn dann  $(d'\omega)_p = (d_U \omega)_p = (d\omega)_p$ )

Wähle wieder eine Abschneidefunktion  $\psi \in C^\infty(M, [0, 1])$



Da  $\omega = \tilde{\omega}$  auf  $V$ :  $\psi(\tilde{\omega} - \omega) = \tilde{\omega} - \omega$ . Dann folgt

$$(d'\tilde{\omega})_p - (d'\omega)_p = d'(\psi(\tilde{\omega} - \omega))|_p = (d'\psi)_p \wedge \underbrace{(\tilde{\omega} - \omega)_p}_{=0} + \underbrace{\psi(p)}_{=0} d'(\tilde{\omega} - \omega) = 0 \quad \square$$

### 5.3.2 Folgerung 25 (Natürlichkeit)

Sei  $f : M \rightarrow N$  eine differenzierbare Abbildung,  $\omega \in \Omega^k(N)$ . Dann gilt

$$f^*(d\omega) = d(f^*\omega)$$

#### Beweis

Ist  $\omega = g : N \rightarrow \mathbb{R}$ , dann ist die Behauptung eine Umformulierung der Kettenregel:

$$dg_f(Tf(\cdot)) = d(g \circ f)(\cdot)$$

$$\begin{cases} dh(Y) = Y(h) \\ Y(h) \frac{\partial}{\partial t} = Th(Y) \end{cases}, \quad h : M \rightarrow \mathbb{R} \ni t$$

Sei  $\omega$  eine beliebige  $k$ -Form,  $k > 0$ .  $i : U \hookrightarrow N$  Inklusion einer Karte  $(U, h)$ .

$$i^*(d\omega) = (d\omega)|_{TU} = d(\omega|_{TU}) = d(i^*\omega)$$

Wir können daher  $N = U$  und  $f = f|_{f^{-1}(U)}$  annehmen.  $\mathfrak{E}: f : M \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$ .

$$\omega = \sum' \omega_{i_1, \dots, i_k} dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_k}$$

Dann ist  $d\omega = \sum' d\omega_{i_1, \dots, i_k} \wedge dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_k}$ . Dann gilt weiter

$$\begin{aligned} f^*\omega &= \sum' f^*\omega_{i_1, \dots, i_k} f^*dy^{i_1} \wedge \dots \wedge f^*dy^{i_k} \\ f^*d\omega &= \sum' f^*d\omega_{i_1, \dots, i_k} f^*dy^{i_1} \wedge \dots \wedge f^*dy^{i_k} \end{aligned}$$

Da  $f^*dy^j = df^*y^j \implies df^*dy^j = dd f^*y^j = 0$  folgt

$$\begin{aligned} df^*\omega &= \sum' \underbrace{df^*\omega_{i_1, \dots, i_k}}_{f^*d\omega_{i_1, \dots, i_k}} \wedge f^*dy^{i_1} \wedge \dots \wedge f^*dy^{i_k} \\ &= f^*d\omega \end{aligned}$$

□

## 5.4 Orientierung

### 5.4.1 Definition

Eine **Orientierung** eines  $n$ -dimensionalen Vektorraumes  $V$  ist eine Äquivalenzklasse geordneter Basen  $b = (b_1, \dots, b_n)$  von  $V$  mit

$b \sim b' :\Leftrightarrow$  Die Basistransformation  $T : V \rightarrow V$  mit  $T(b) = b'$  hat positive Determinante.

- Es gibt genau zwei Orientierungen auf  $V$ , da  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  aus zwei Zusammenhangskomponenten besteht.
- $\{0\}, \pm 1$ .
- Im Fall von  $\mathbb{R}^n$  ist  $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$  die **Standardorientierung**.

### 5.4.2 Definition

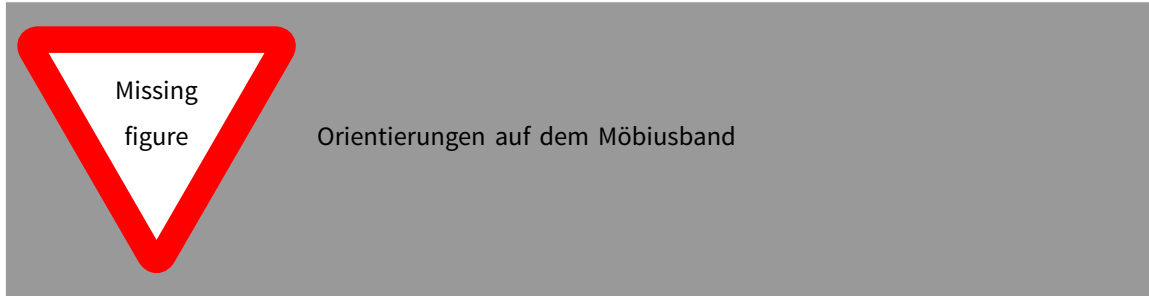
Eine **Orientierung** einer  $m$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit  $M$  ist die Wahl einer Orientierung für jeden Tangentialraum  $T_p M$ , sodass ein Atlas  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, h_\alpha) \mid \alpha \in A\}$  so existiert, dass für alle  $p \in U_\alpha$  und für alle  $\alpha \in A$  die Abbildung

$$T_p h_\alpha : T_p M \rightarrow T_{h_\alpha(p)} \mathbb{R}^m \equiv \mathbb{R}^m$$

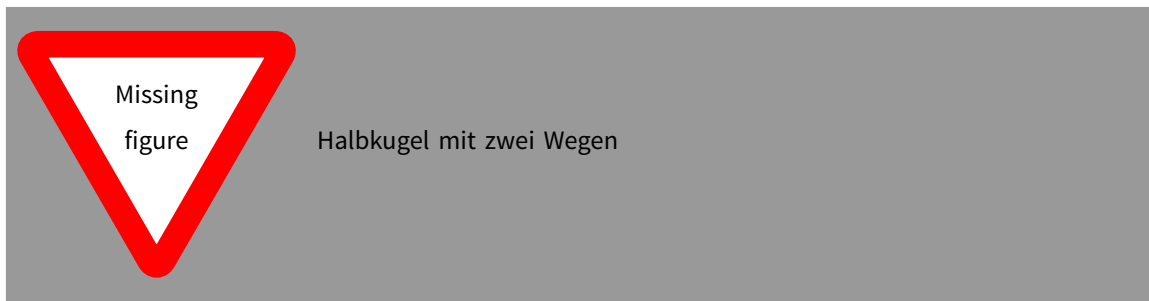
**orientierungstreu** ist, d.h. die gewählte Orientierung auf  $T_p M$  auf die Standardorientierung des  $\mathbb{R}^m$  abbildet.  $\mathcal{A}$  heißt dann ein **orientierter Atlas**.

- Ein Atlas ist genau dann orientiert, wenn die Jacobische aller Kartenwechsel positive Determinante hat.

- Eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit hat entweder keine oder genau zwei Orientierungen. (Eine Karte  $(U, h)$  orientiert die Mannigfaltigkeit auf ganz  $U$  vermöge des Differentials  $Th$ , welches  $TM$  auf  $U$  trivialisiert.)
- Das Möbiusband ist *nicht* orientierbar:



- $\mathbb{R}P^2$  ist *nicht* orientierbar, da  $\mathbb{R}P^2$  ein Möbiusband erhält.



### 5.4.3 Lemma 26

Eine  $m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit ist genau dann orientierbar, wenn es auf ihr eine nirgends verschwindende  $m$ -Form gibt.

$$\omega \in \Gamma(\Lambda^m T^*M \setminus \{0\})$$

heißt dann **Volumenform**.

#### Beweis

Sei  $\omega$  eine Volumenform. Sei  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, h_\alpha)\}$  ein Atlas. Betrachte

$$(h_\alpha^1, \dots, h_\alpha^m) : U_\alpha \xrightarrow{\cong} U'_\alpha \subset \mathbb{R}^m(x^1, \dots, x^m)$$

Auf  $\mathbb{R}^m(x^1, \dots, x^m)$  haben wir die  $m$ -Form  $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$ . Es gilt

$$h_\alpha^*(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m) = f_\alpha \omega|_{TU_\alpha}$$

Durch eventuelles Tauschen zweier Komponentenfunktionen können wir annehmen, dass  $f_\alpha > 0$ .

Behauptung:  $\{(U_\alpha, h_\alpha)\}_\alpha$  ist dann ein orientierter Atlas.

$$\begin{aligned} (h_\beta \circ h_\alpha^{-1})^*(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m) &= (h_\alpha^{-1})^* \underbrace{f_\beta \cdot \omega}_{\frac{f_\beta}{f_\alpha} h_\alpha^*(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m)} \\ &= \underbrace{\left(\frac{f_\beta}{f_\alpha} \circ h_\alpha^{-1}\right)}_{>0} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m \end{aligned}$$

$\det J_{h_\beta \circ h_\alpha^{-1}} > 0$ . Sei umgekehrt  $\{(U_\alpha, h_\alpha)\}$  ein orientierter Atlas

$$\omega_\alpha := h_\alpha^*(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m) \in \Omega^m(U_\alpha)$$

Da die Jacobischen aller Kartenwechsel positive Determinante haben, zeigt obige Rechnung

$$(h_\beta \circ h_\alpha^{-1})^* dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m = f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$$

für eine positive Funktion  $f \equiv f_{\alpha\beta} \in C^\infty(h_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta))$ . Wir erhalten

$$\omega_\beta = h_\beta^*(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m) = (f \circ h_\alpha) h_\alpha^*(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m) = \underbrace{(f \circ h_\alpha)}_{>0} \omega_\alpha.$$

Sei  $(\varphi_i)_{i \in I}$  eine untergeordnete Teilung der Eins mit  $\text{supp } \varphi_i \subset U_{\alpha(i)}$ . Setze

$$\omega := \sum_{i \in I} \varphi_i \omega_{\alpha(i)}$$

Behauptung:  $\omega$  ist nullstellenfrei: Fixiere  $p \in U_{\alpha_0}$

$$\omega_p = \left( \sum_i \varphi_i(p) f_{\alpha_0 \alpha_i}(p) \right) \underbrace{(\omega_{\alpha_0})_p}_{\neq 0}$$

Konvexkombination positiver reeller Zahlen, ist also positiv. □

#### 5.4.4 Beispiel

(i)  $Q^n$  Mannigfaltigkeit.  $\lambda = p_i dq^i$  (lokal) Liouville 1-Form auf  $T^*Q$

$$\omega = d\lambda \quad d\omega = 0, \omega^n \neq 0$$

Es ist lokal  $\omega^n = (dp_i \wedge dq^i)^n = n! dp_1 \wedge dq^1 \wedge \dots \wedge dp_n \wedge dq^n \Rightarrow T^*Q$  (als Mannigfaltigkeit!) ist orientiert. Ist nun  $g$  eine Metrik auf  $Q$ , so ist

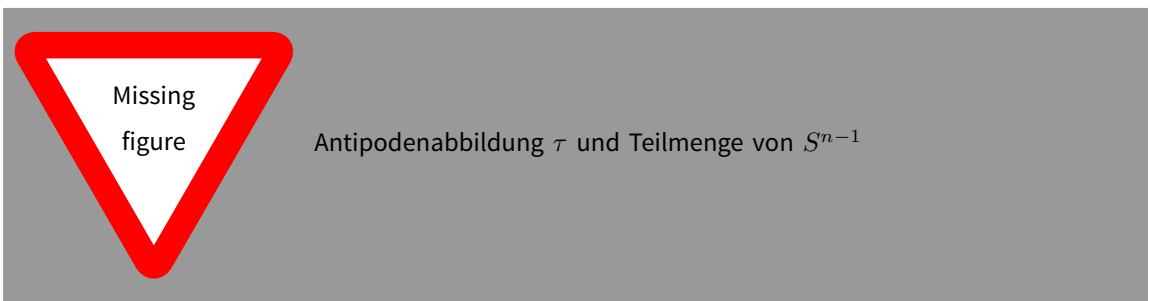
$$TQ \xrightarrow{\cong} T^*Q; X \mapsto g(X, \cdot)$$

$\Rightarrow TQ$  ist (als Mannigfaltigkeit) orientierbar.

(ii) Auf  $\mathbb{R}^n$  sei  $\tau(x) := -x$  (Involution). Dann gilt

$$\tau^*(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n) = (-1)^n dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

$\Rightarrow \tau$  ist orientierungstreu, falls  $n$  gerade, sonst umkehrend. Sei nun  $\tau : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$  die induzierte Antipodenabbildung.



$$\omega_p(v_1, \dots, v_{n-1}) = \det(p, v_1, \dots, v_{n-1})$$

$\omega$  ist Volumenform auf  $S^{n-1}$ .  $\tau^* \omega = (-1)^n \omega$ . Also ist  $\tau$  Orientierungstreu ( $\tau : S^m \rightarrow S^m, m = n - 1$ ), wenn  $m$  ungerade ist, sonst umkehrend.

Betrachte  $\mathbb{R}P^m = S^m / \tau$

$$\begin{array}{ccc} S^m & \xrightarrow{\tau} & S^m \\ 2:1 \downarrow & \swarrow 2:1 & \\ \mathbb{R}P^m & & \end{array}$$

$m$  ungerade  $\exists!$  eine Orientierung auf  $\mathbb{R}P^m$ , sodass  $\pi : S^m \rightarrow \mathbb{R}P^m$  Orientierungstreu ist.

$$\alpha_{[x]}(v_1, \dots, v_m) := \omega_x((T_x \pi)^{-1} v_1, \dots, (T_x \pi)^{-1} v_m)$$

( $\tau^* \omega = \omega$ ),  $\alpha$  ist Volumenform auf  $\mathbb{R}P^m$ .

$m$  gerade  $\tau^* \omega = \omega$ . Wäre  $\alpha$  eine Volumenform auf  $\mathbb{R}P^m$ , so gibt es eine positive Funktion  $f$  mit  $\pi^* \alpha = f \omega$ . Da  $\pi^* \alpha$  invariant unter  $\pi^*$  ist, folgt

$$f \omega = \pi^* \alpha = \tau^* \pi^* \alpha = (f \circ \tau) \tau^* \omega = -(f \circ \tau) \omega \quad \nexists \quad \square$$

## 5.5 Integration

Betrachte einen Diffeomorphismus  $\varphi : U \xrightarrow{\cong} V$  für  $U, V \subseteq \mathbb{R}^m$  offen. Sei  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar. Dann ist

$$f \circ \varphi \cdot |\det J_\varphi| : U \rightarrow \mathbb{R}$$

integrierbar. Es gilt nach dem Transformationssatz

$$\int_{V=\varphi(U)} f \, dx = \int_U (f \circ \varphi) |\det J_\varphi| \, dx$$

Insbesondere sind diffeomorphe Bilder messbarer Mengen wieder messbar (analoges für Nullmengen).

### 5.5.1 Definition

Sei  $A \subseteq M$ ,  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, heißt **messbar**, wenn für eine Überlagerung von Karten  $(U, h)$  alle

$$h(U \cap A) \subset \mathbb{R}^m$$

messbar sind. Analoges für Nullmengen.

### 5.5.2 Lemma 27

Jede Mannigfaltigkeit ist abzählbare Vereinigung messbarer Teilmengen, die in einem Kartengebiet enthalten sind.

#### Beweis

Sei  $\{(U_i, h_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$  ein abzählbarer Atlas (Lemma 13b, 3.1.3). Setze

$$A_1 := U_1 \quad \text{und} \quad A_{i+1} := U_{i+1} \setminus \bigcup_{k=1}^i A_k, \quad i \geq 1$$

$$\Rightarrow M = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i. \quad \square$$

Eine eventuell unstetige  $k$ -Form ist eine Abbildung  $\omega : M \rightarrow \Lambda^k T^* M$  mit  $\pi^{(*)} \circ \omega = \text{id}_M$ .

### 5.5.3 Definition

Sei  $\omega$  eine eventuell unstetige  $m$ -Form auf  $M$ , wobei  $M^m$  eine differenzierbare, orientierte Mannigfaltigkeit.  $\omega$  heißt **integrierbar**, falls:

- $\exists$  Zerlegung  $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$  von  $M$  in abzählbar viele messbare Mengen,
- $\exists$  orientierten Atlas  $\{(U_i, h_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$  mit  $A_i \subset U_i$  (vgl. Lemma 27 (5.5.2)), sodass gilt: Die Abbildungen

$$h_i(U_i) \xrightarrow{a_i := \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}\right) \circ h_i^{-1}} \mathbb{R}$$

sind für alle  $i \in \mathbb{N}$  über  $h_i(A_i)$  Lebesgue-integrierbar und es gilt:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_{h_i(A_i)} |a_i(x)| dx < \infty$$

Das **Integral** von  $\omega$  ist dann:

$$\int_M \omega := \sum_{i=1}^{\infty} \int_{h_i(A_i)} a_i(x) dx$$

### 5.5.4 Satz 28

Die Definition ist unabhängig von der Wahl der Zerlegung in messbare Teilmengen und der Wahl des orientierten Atlases.

#### Beweis

Sei  $(B_j)$  eine weitere Zerlegung.  $(V_j, k_j)$  orientierte Karten,  $B_j \subset V_j$ . Weiter seien  $k_j(V_j) \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $b_j := \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}\right) \circ k_j^{-1}$ . Behauptung:

- $b_j$  ist über  $k_j(B_j)$  integrierbar  $\forall j$
- $\sum_{j=1}^{\infty} \int_{k_j(B_j)} |b_j| dx < \infty$
- $\sum_{i=1}^{\infty} \int_{h_i(A_i)} a_i(x) dx = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{k_j(B_j)} b_j(x) dx$

$\forall i \in \mathbb{N}$  setze  $a_{ij} := a_i|_{h_i(A_i \cap B_j)}$ . Dann sind die  $a_{ij}$  für alle  $j$  über  $h_i(A_i \cap B_j)$  integrierbar. Also ist auch

$$f_n := \sum_{j=1}^n a_{ij}$$

integrierbar und es gilt:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = a_i|_{h_i(A_i)}$
- $|f_n| \leq |a_i|$  für alle  $n \in \mathbb{N}$

Mit dem Konvergenzsatz von Lebesgue folgt

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_{h_i(A_i \cap B_j)} a_i dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n dx = \int_{h_i(A_i)} a_i dx$$

Analog für  $|a_i|$  statt  $a_i$ . Setze

$$\varphi := h_i \circ k_j^{-1} : \underset{=k_j(u_i \cap V_j)}{U} \rightarrow \underset{=h_i(U_i \cap V_j)}{V}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
 b_j dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m &= (k_j^{-1})^* \omega = (h_i^{-1} \circ h_i \circ k_j^{-1})^* \omega = \varphi^* \circ (h_i^{-1})^* \omega \\
 &= \varphi^* (a_i dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m) \\
 &= (a_i \circ \varphi) \det(J_\varphi) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m
 \end{aligned}$$

Da  $\det(J_\varphi) > 0$ , gilt auf  $U$

$$b_j = (a_i \circ \varphi) |\det J_\varphi| \quad \text{analog } |b_j|, |a_i|$$

$\Rightarrow b_j$  ist auf  $k_j(A_i \cap B_j)$  integrierbar (nach der Transformationsformel) und es gilt

$$\int_{k_j(A_i \cap B_j)} b_j dx = \int_{k_j(A_i \cap B_j)} (a_i \circ \varphi) |\det J_\varphi| dx = \int_{h_i(A_i \cap B_j)} a_i dx$$

(Analog mit „|·|“). Es folgt

$$\infty > \sum_{i=1}^{\infty} \int_{h_i(A_i)} |a_i| = \sum_{i,j} \int_{h_i(A_i \cap B_j)} |a_i| dx = \sum_{i,j} \int_{k_j(A_i \cap B_j)} |b_j| dx$$

Mit dem Konvergenzsatz von Lebesgue folgt:  $|b_j|$  ist über  $k_j(B_j)$  integrierbar (wie oben) und

$$\int_{k_j(B_j)} b_j dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{k_j(A_i \cap B_j)} b_j dx \quad \text{Analog für } |b_j|$$

Also gilt

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_{k_j(B_j)} |b_j| dx < \infty$$

und Punkt 3 der Auzählung gilt. Die Integrale sind gleich. □

### 5.5.5 Folgerung 29

jede stetige  $m$ -Form mit kompaktem Träger  $\text{supp } \omega := \overline{\{p \in M \mid \omega_p \neq 0\}}$  ist integrierbar.

**Beweis**

- alle „lokalen“ Integrale existieren.
- die Reihe wird zu einer Summe □

Sei  $\{(U_\alpha, h_\alpha)\}$  ein orientierter Atlas,  $\{\varphi_i\}$  eine Zerlegung der Eins,  $\text{supp } \varphi_i \subset U_{\alpha(i)}$ . Dann setze  $\omega_i := \varphi_i \cdot \omega$ . Dann ist  $\omega = \sum_i \omega_i$  lokal endlich zerlegt.  $\omega$  ist integrierbar

$$\begin{aligned}
 \iff \forall i : h_{\alpha(i)}(U_{\alpha(i)}) \xrightarrow{a_i := \omega_i \left( \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m} \circ h_{\alpha(i)}^{-1} \right)} \mathbb{R} \text{ integrierbar und} \\
 \sum_i \int_{h_{\alpha(i)}(U_{\alpha(i)})} |a_i| dx < \infty
 \end{aligned}$$

Es gilt  $\int_M \omega = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{h_{\alpha(i)}(U_{\alpha(i)})} a_i dx$

### 5.5.6 Folgerung 30

$$\int_{-M} \omega = - \int_M \omega$$

( $-M$  ist die Mannigfaltigkeit  $M$  mit der umgekehrten Orientierung)



### 5.5.7 Folgerung 31

Sei  $\varphi : M \xrightarrow{\cong} M$  ein orientierungstreuer Diffeomorphismus. Dann ist mit  $\omega \in \Omega^m(M)$ ,  $m = \dim M$ , auch  $\varphi^*\omega$  integrierbar und es gilt die Transformationsformel

$$\int_{M=\varphi(M)} \omega = \int_M \varphi^*\omega$$

#### Beweis

Benutze zur Berechnung von  $\int_M \varphi^*\omega$  die Zerlegung  $M = \bigcup_i \varphi^{-1}(A_i)$  und Karten  $(\varphi^{-1}(u_i), h_i \circ \varphi)$   $\square$

Analog für  $A \subset M$  messbar:  $\int_A \omega := \int_M \mathbb{1}_A \cdot \omega$

### 5.5.8 Folgerung 32 (Transformationsformel)

$$\int_A \varphi^*\omega = \int_{\varphi(A)} \omega$$

Sei  $\Omega$  eine Volumenform auf  $M$ .  $\mu(A) := \int_A \Omega$  ein Maß auf der  $\sigma$ -Algebra der messbaren Mengen von  $M$ .  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  ist **integrierbar**, falls  $f\Omega$  integrierbar ist und es gilt

$$\int_M f \, d\mu = \int_M f\Omega$$

$\leadsto$  Maßraum  $(M, \mathfrak{M}, \mu)$ .

Sei  $(M^m, g)$  eine orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit: lokal:

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i} \left| \frac{\partial}{\partial x^j} \right. \right\rangle, \quad g := \det(g_{ij}), \quad \Omega := \sqrt{g} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$$

ist wohldefiniert: Sei  $T$  die Jacobische eines Kartenwechsels

$$(\tilde{g}_{ij}) = T^T g_{ij} T$$

(Ähnlichkeitstransformation symmetrischer Bilinearformen)  $\Rightarrow$  da  $\det T > 0$ :  $\sqrt{\tilde{g}} = \det(T) \sqrt{g}$ .

$$\Rightarrow \sqrt{g} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m = \sqrt{\tilde{g}} dy^1 \wedge \dots \wedge dy^m$$

$\square$

## 6 Topologie des deRham-Komplexes

### 6.1 Der Satz von Stokes

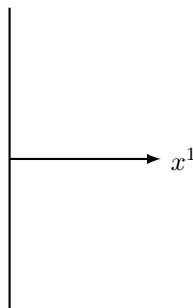
$$f \in C^1[a, b]$$

$$\text{-----} \mathbb{R}^1$$

$\partial[a, b] = b \cup -a$ . Mit dem Hauptsatz gilt

$$\int_a^b f'(t) dt = \int_{[a,b]} df = \int_{\partial[a,b]} f = f(b) - f(a)$$

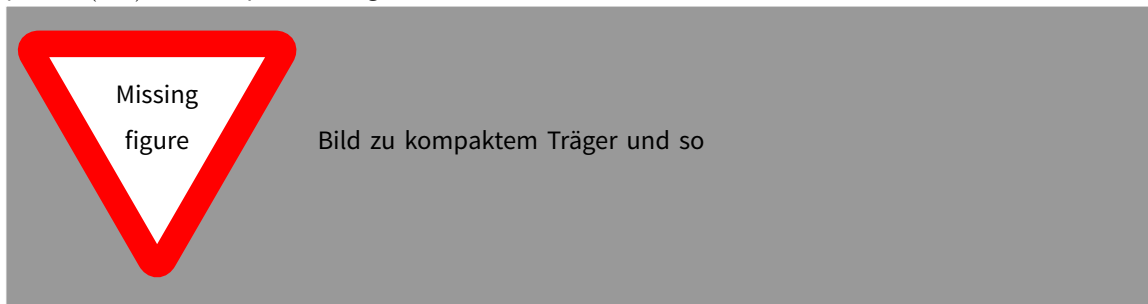
Ziel: Verallgemeinerung auf berandete Gebiete in Mannigfaltigkeiten. Definiere  $\mathbb{R}_-^n = \{x^1 \leq 0\}$



$$\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1} \equiv \partial \mathbb{R}_-^n$$

$$i_{\frac{\partial}{\partial x^1}} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n$$

$f \in C^1(\mathbb{R}_-^n)$  mit kompakten Träger.



$$f dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n \in \Omega^{n-1}(\mathbb{R}_-^n). \Rightarrow d\omega = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n. \quad \omega =$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}_-^n} d\omega = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \underbrace{\left( \int_{-\infty}^0 \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 \right)}_{f(0, x^2, \dots, x^n)} dx^2 \dots dx^n = \int_{\partial \mathbb{R}_-^n} \omega$$

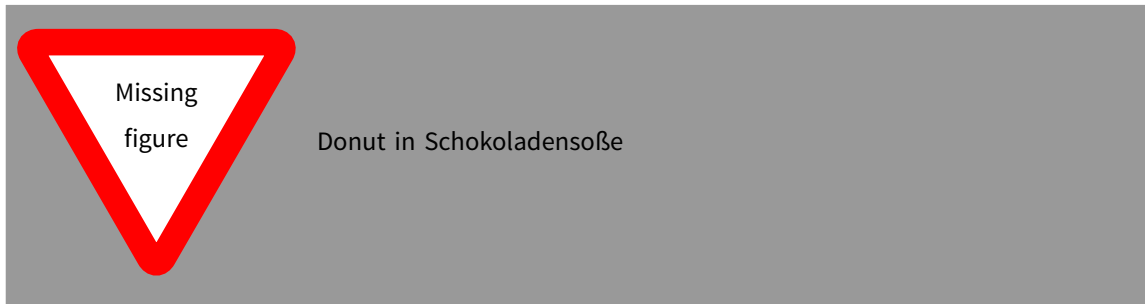
Analog für  $\omega = \omega_i dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n$ .

Sei nun  $M$  eine  $m$ -dimensionale orientierte Mannigfaltigkeit.  $\omega$  eine  $(m-1)$ -Form mit kompaktem Träger. Sei  $\{(U_j, h_j)\}_{j=1, \dots, k}$  eine endliche Überdeckung von  $\text{supp } \omega$  durch Karten. Sei  $\varphi_j$  eine untergeordnete Teilung der Eins. Es gilt

$$\omega = \omega_1 + \dots + \omega_k, \quad \omega_j = \varphi_j \cdot \omega$$

hat Träger in  $U_j$ . Es gilt  $(d(h_j^{-1})^*\omega_j)$  hat kompakten Träger in  $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}\int_{U_j} d\omega_j &= \int_{h_j(U_j) \subset \mathbb{R}^m} \overbrace{(h_j^{-1})^* d\omega_j}^{=d(h_j^{-1})^*\omega_j} = 0 \\ \Rightarrow \int_M d\omega &= \sum_{j=1}^k \int_{U_j} d\omega_j = 0\end{aligned}$$



Sei

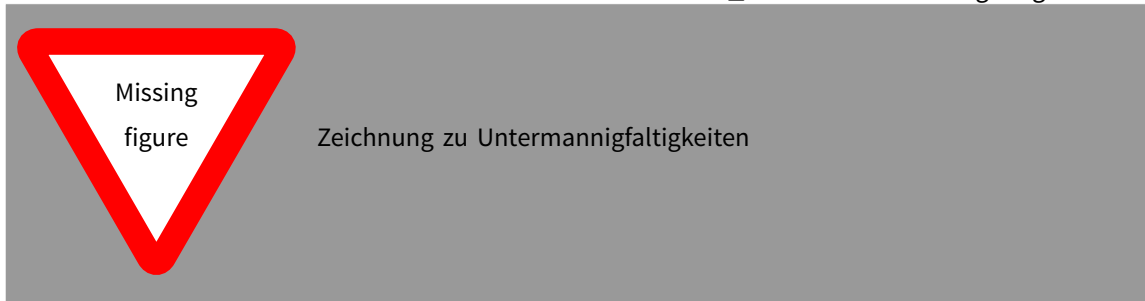
$N$   $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit.  $L \subset N$  Untermannigfaltigkeit, die Rand einer offenen Teilmenge  $M$  von  $N$  ist und deren Abschluss wir mit  $\bar{M}$  bezeichnen.  $\bar{M} \neq N$ .

### 6.1.1 Einschub: Untermannigfaltigkeit

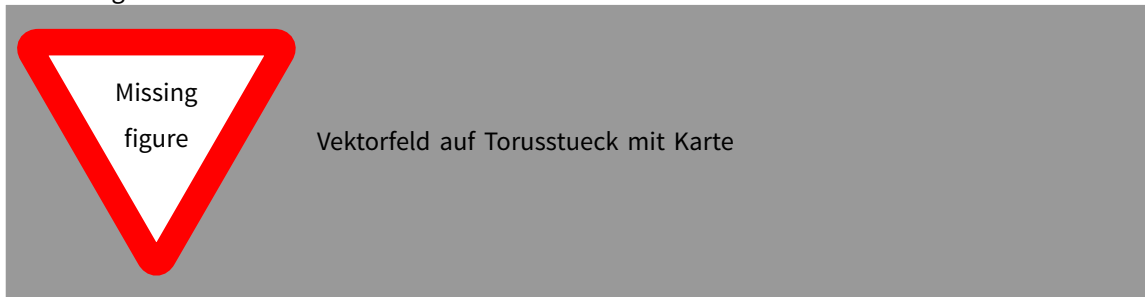
$L \subset N$  heißt **Untermannigfaltigkeit** von  $N$ , wenn es zu jedem Punkt  $p \in L$  eine Karte  $(U, h)$  von  $N$  gibt mit

$$h(U \cap L) = h(U) \cap \mathbb{R}^l.$$

$l$  ist die Dimension von  $L$  und  $n - l$  ist die **Kodimension** von  $L \subseteq N$ .  $L$  ist eine Mannigfaltigkeit.



Sei nun  $\Omega$  eine Volumenform auf  $N$ ,  $X$  ein Vektorfeld auf  $N$ , welches entlang  $L = \partial M$  aus  $M$  herauszeigt:



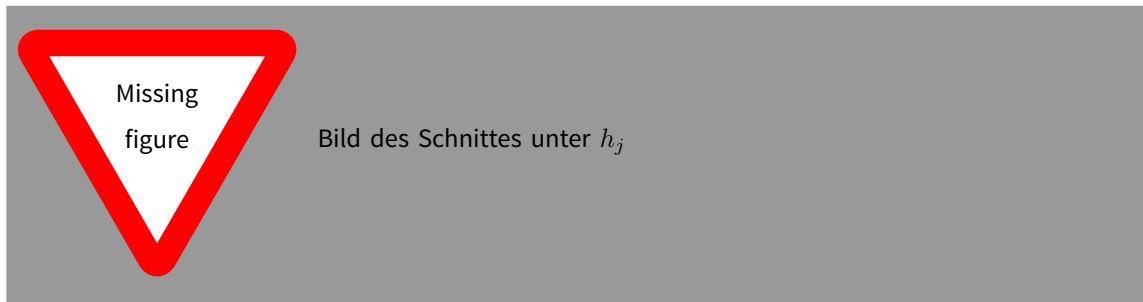
Konstruktion von  $X$  mit Teilung der Eins und orientierten Atlas.  $\Rightarrow (i_X \Omega)|_{T\partial M}$  ist Volumenform auf  $\partial M$ . Sei nun  $\omega \in \Omega^{n-1}N$  mit kompaktem Träger und  $\{(U_j, h_j)\}$  orientierte Karten von  $N$ , die

entlang  $\partial M$  Untermannigfaltigkeits-Karten sind und  $\text{supp } \omega$  überdecken. Sei  $\varphi_j$  wieder eine Teilung der Eins.

$$\omega = \omega_1 + \dots + \omega_k, \quad \omega_j := \varphi_j \cdot \omega$$

Dann gilt:

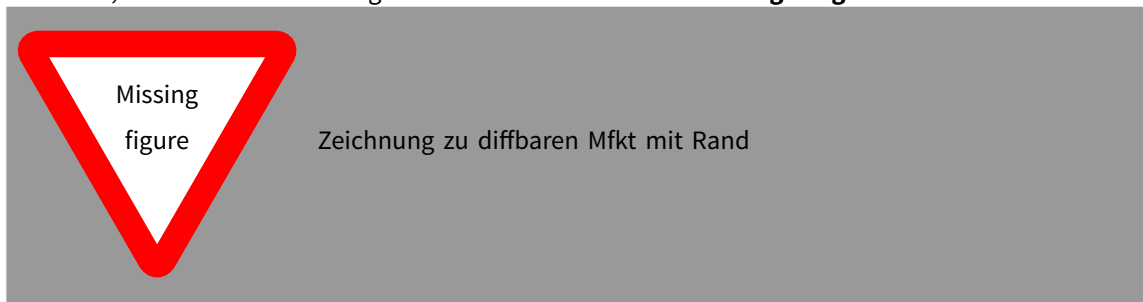
$$\int_{U_j \cap M} d\omega_j = \int_{h_j(U_j \cap M)} d(h_j^{-1})^* \omega_j = \int_{h_j(U_j \cap \partial M)} (h_j^{-1})^* \omega_j = \int_{U_j \cap \partial M} \omega_j$$



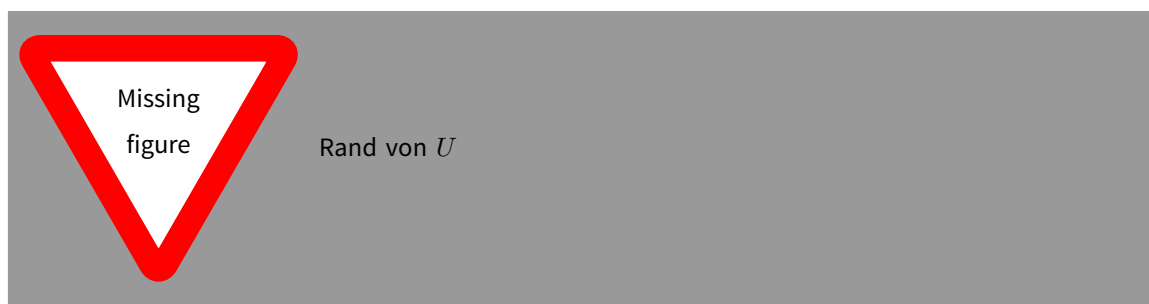
$\varphi_j|_{\partial M}$  ist Teilung  
der Eins auf  $\partial M$

$$\Rightarrow \int_M d\omega = \sum_{j=1}^k \int_{\partial M \cap U_j} \varphi_j \cdot \omega$$

Tauscht man in der Definition einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit die Karten durch Karten im Halb-raum aus, so erhält man den Begriff einer **differenzierbaren Mannigfaltigkeit mit Rand**.

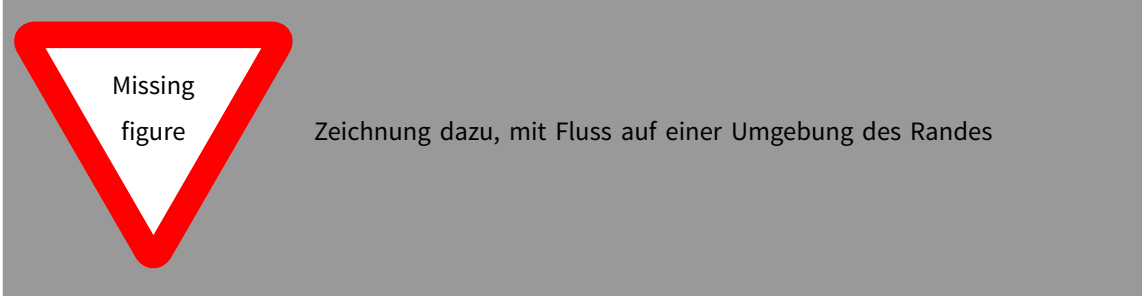


- $\mathbb{R}_-^m = \{x^1 \leq 0\}$  hat Teilraumtopologie
- $U \subset \mathbb{R}_-^m$  offen,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  ist dann differenzierbar, wenn  $f$  eine differenzierbare Fortsetzung besitzt, deren Definitionsbereich eine Umgebung von  $\partial U := U \cap \partial \mathbb{R}_-^m$  im  $\mathbb{R}^m$  enthält.



- Ein **Diffeomorphismus** zwischen offenen Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  ist eine in beide Richtungen differenzierbare Bijektion. Dieser bildet dann Randpunkte auf Randpunkte, innere Punkte auf innere Punkte ab.

$p \in \partial M : T_p M := T_p^{\text{alg}} \equiv T_p^{\text{Phys}}$ . Sei  $X$  ein Vektorfeld auf  $M$ , welches entlang  $\partial M$  mit der "äußeren Normalen" übereinstimmt

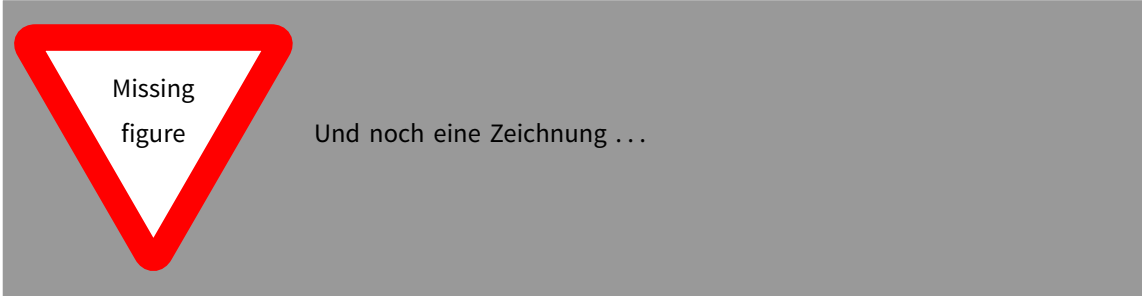


Sei

also  $\Phi$  ein lokaler Fluss zu  $X$ .  $\Rightarrow \exists$  Umgebung  $U \subset (-\infty, 0] \times \partial M$  von  $\{0\} \times \partial M$ , sodass

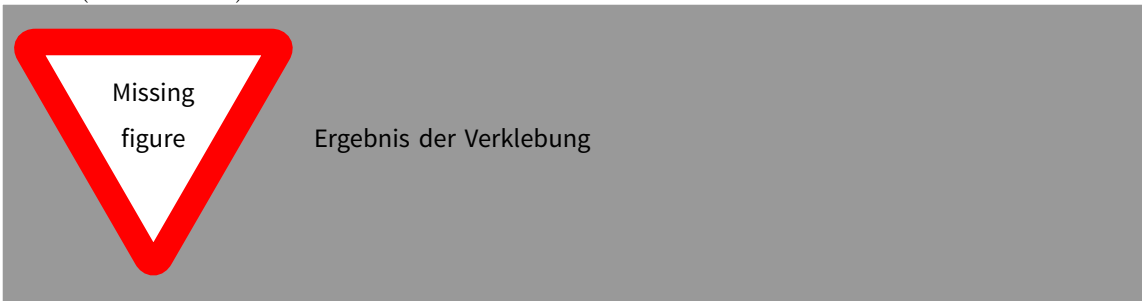
$$U \longrightarrow M, \quad (t, p) \mapsto \Phi(t, p)$$

ein Diffeomorphismus auf das Bild (Einbettung) ist, der auf  $\{0\} \times \partial M = \partial M$  die Identität ist.



$N :=$

$$M \cup_{\Phi} ([0, \infty) \times \partial M)$$



### 6.1.2 Satz 33 (Gauß-Stokes)

Sei  $M$  eine orientierte  $m$ -dimensionale berandete Mannigfaltigkeit und  $\omega$  eine  $(m-1)$ -Form auf  $M$  mit kompaktem Träger. Dann gilt:

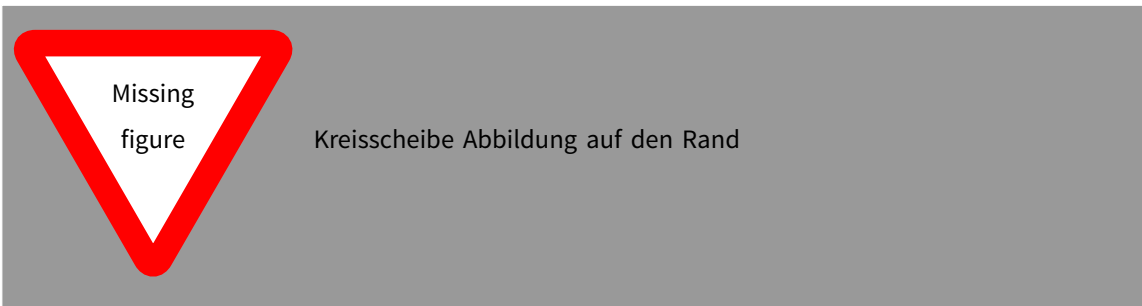
$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega \quad \square$$

### 6.1.3 Folgerung 34 (Fixpunktsatz von Brouwer)

Jede (differenzierbare, stetige) Abbildung der abgeschlossenen  $n$ -dimensionalen Scheibe  $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\}$  in sich, hat einen Fixpunkt.

#### Beweis (indirekt)

Betrachte  $f : D^n \rightarrow D^n$  fixpunktfrei  $\Rightarrow \rho : D^n \rightarrow S^{n-1}$  mit  $\rho|_{\partial} = \text{id}_{S^{n-1}}$  (Retraktion).



Sei  $\eta$  positive Volumenform auf  $S^{n-1}$  und  $i : S^{n-1} \hookrightarrow D^n$  die Inklusion, also  $\rho \circ i = \text{id}$  und  $i^* \rho^* = (\rho \circ i)^* = \text{id}^*$

$$0 < \int_{\partial D^n} \eta = \int_{\partial D^n} \rho^* \eta \stackrel{6.1.2}{=} \int_{D^n} d\rho^* \eta = \int_{D^n} \rho^* d\eta = 0 \neq$$

( $d\eta = 0$  aus Gradgründen)

□

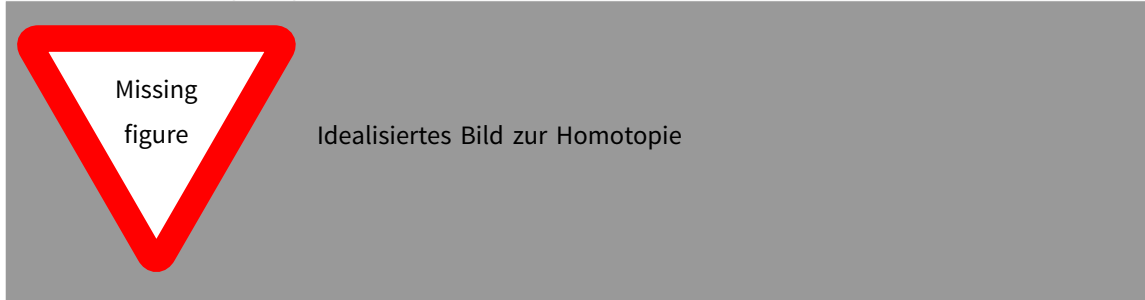
## 6.2 Homotopieinvarianz

### 6.2.1 Definition

Sei  $I = [0, 1]$ ,  $f_0, f_1 : M \rightarrow N$  differenzierbar. Eine differenzierbare Abbildung  $F : I \times M \rightarrow N$  heißt eine **Homotopie** zwischen  $f_0$  und  $f_1$ , falls

$$F(0, \cdot) = f_0 \quad , \quad F(1, \cdot) = f_1$$

Wir schreiben dann  $f_0 \sim f_1$



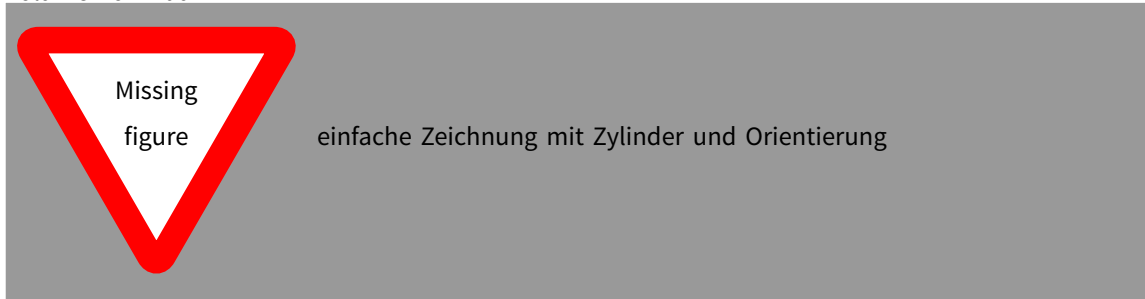
### 6.2.2 Satz 34 (Monotoniesatz)

Sei  $M$  orientiert, geschlossen (kompakt, ohne Rand). Sei  $\alpha \in \Omega^m(N)$ ,  $d\alpha = 0$  ( $\alpha$  geschlossen) und  $f_0 \sim f_1$ . Dann gilt

$$\int_M f_0^* \alpha = \int_M f_1^* \alpha$$

#### Beweis

Sei  $I \times M$  kompakte Mannigfaltigkeit mit Rand. Sei  $\omega$  eine Volumenform auf  $M$ . Dann ist  $dt \wedge \omega$  Volumenform auf  $I \times M$



Es gilt  $\partial(I \times M) = -\{0\} \times M \cup \{1\} \times M$ ,  $f_0 \sim f_1$ . Es gilt

$$d\alpha \implies 0 = F^* d\alpha = dF^* \alpha.$$

Stokes liefert

$$0 = \int_{I \times M} dF^* \alpha \stackrel{\text{Satz 33}}{=} \int_{\partial(I \times M)} F^* \alpha = \int_M f_1^* \alpha - \int_M f_0^* \alpha \quad \square$$

$\pi : M \rightarrow p \in M$ .  $\text{id} : M \rightarrow M$ .  $M$  heißt **zusammenziehbar** (kontrahierbar), falls  $\text{id} \sim \pi$ . Beispiel:  $\mathbb{R}^n$ ,  $D^n$ , sternförmige Gebiete.

$\xrightarrow{\text{Satz 34}} M$  kompakt ohne Rand, orientiert  $\implies M$  ist nicht zusammenziehbar:  $\omega$  Volumenform:  $0 < \int_M \text{id}^* \omega$ .

$$T\pi = 0 \implies \pi^* \omega \implies \int_M \pi^* \omega = 0$$

**Beispiel** $S^n, T^n, \mathbb{R}P^{2m+1}$ .

**Fundamentalsatz der Algebra:** Sei  $g(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$  ein  $\mathbb{C}$ -Polynom.  $g$  habe keine Nullstellen:  $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$\varphi : \mathbb{C} \rightarrow S^1 = \{|z| = 1\} \subset \mathbb{C} \quad , \quad \varphi(z) := \frac{g(z)}{|g(z)|}$$

$\varphi|_{S^1}$  ist homotop (via  $F(z, t) = \varphi(t \cdot z)$ ) zu  $\pi : S^1 \rightarrow \frac{a_n}{|a_n|}$ . Weiter ist  $\varphi|_{S^1}$  homotop zu

$$f : S^1 \rightarrow S^1 \quad , \quad z \mapsto z^n$$

via

$$F(z, t) = \varphi\left(\frac{z}{t}\right) = \frac{z^n + ta_1 z^{n-1} + \dots + t^n a_n}{|z^n + ta_1 z^{n-1} + \dots + t^n a_n|}$$

Es gilt

$$0 = \int_{S^1} \pi^* \alpha = \int_{S^1} \varphi^* \alpha = \int_{S^1} f^* \alpha = n \cdot \int_{S^1 = \partial D^2} \alpha = n \cdot \int_D d\alpha = n \cdot \pi$$

mit  $\alpha := \frac{1}{2}(x dy - y dx) \Rightarrow d\alpha = dx \wedge dy$ . Es folgt  $n = 0$ . Also gilt  $g(z) = a_n = a_0$ .

**6.2.3 Satz vom Igel**

Die Antipodenabbildung  $\tau : S^n \rightarrow S^n, x \mapsto -x$  ist genau dann homotop zur Identität, wenn  $n$  ungerade ist und genau dann gibt es ein nullstellenfreies Vektorfeld auf  $S^n$ .

**Beweis**

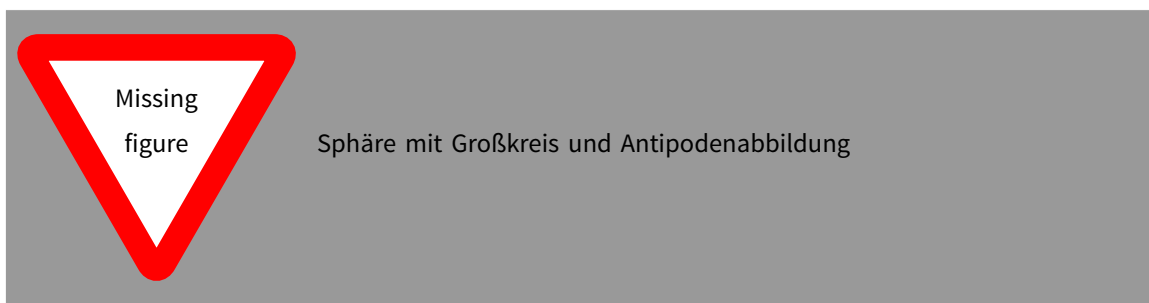
$\tau \sim \text{id}$ : Sei  $\omega$  eine Volumenform auf  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ .  $\omega_x(v_1, \dots, v_n) = \det(x, v_1, \dots, v_n)$

$$0 \neq \int_{S^n} \omega \stackrel{\text{Satz 33}}{=} \int_{S^n} \tau^* \omega = (-1)^{n+1} \int_{S^n} \omega$$

$\Rightarrow n$  ungerade

$n = 2m - 1$ :  $S^{2m-1} \subset \mathbb{C}^m = \mathbb{R}^{2m}$  ( $z_j = x_j + iy_j$ ).  $X(z) = i \cdot z \perp z$ ,  $|X| = 1$  ist nullstellenfreies Vektorfeld auf  $S^n$ .

$X$  ist ein Vektorfeld auf  $S^n$ ,  $|X| = 1$ .  $X : S^n \rightarrow S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ . Es gilt  $x \perp X(x)$ .



$F(x, t) = (\cos \pi t)x + (\sin \pi t)X(x)$  liefert  $\text{id} \stackrel{F}{\sim} \tau$ . □



## 6.3 Das Poincaré-Lemma

### 6.3.1 Satz 35 (Kettenhomotopie)

Sei  $f_0, f_1 : M \rightarrow N$  mit  $f_0 \sim f_1$ .  $\exists \mathbb{R}$ -lineare Abbildung  $K : \Omega^k N \rightarrow \Omega^{k-1} M$  mit  $f_1^* - f_0^* = dK + Kd$ .

**Beweis**

$f_0 \stackrel{F}{\sim} f_1$ . Es gilt also

$$\begin{array}{ccc} I \times M & \xrightarrow{F} & M \\ \uparrow i_0, i_1 & \nearrow f_0, f_1 & \\ M & & \end{array}$$

Bemerkung:  $\exists K$  wie oben:  $K : \Omega^k(I \times M) \rightarrow \Omega^{k-1} M$ ,  $i_1^* - i_0^* = dK + Kd$ .  $\tilde{K} := K \circ F^* \leadsto$  Satz.

$$f_1^* - f_0^* = (F \circ i_1)^* - (F \circ i_0)^* = (i_1 - i_0)^* \circ F^* = (dK + Kd) \circ F^* = d\tilde{K} + \tilde{K}d.$$

Beweis der Behauptung:  $\alpha \in \Omega^k(I \times M)$ ,  $K_\alpha = \int_0^1 (i_{\frac{\partial}{\partial t}} \alpha) dt$ .  $\mathbb{A}M = \mathbb{R}^n$

(i)  $\alpha = f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \Rightarrow dK\alpha = 0$ .

$$Kd\alpha = K(df \wedge dx^{i_1} \wedge \dots) = \left( \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t} dt \right) \cdot dx^{i_1} \wedge \dots = (i_1^* - i_0^*)\alpha$$

(ii)  $\alpha = f dt \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k-1}}$ . Dann ist

$$i_{1,0}^* dt = 0 \Rightarrow i_0^* \alpha = 0 = i_1^* \alpha$$

$$dK\alpha = \sum_j \left( \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^j} dt \right) dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots$$

$$\Rightarrow Kd\alpha = K\left(-\frac{\partial f}{\partial x^j} dt \wedge dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots\right) = -dK\alpha. \quad \square$$

$d\alpha = 0$ ,  $\alpha$  geschlossen.

$$f_1^* \alpha - f_0^* \alpha = d(K\alpha) \equiv d\beta \Rightarrow \text{Satz 34}$$

$\alpha$  ist **exakt**  $\iff k \geq 1$  und  $\exists \beta \in \Omega^{k-1}(M)$  mit  $d\beta = \alpha$ .  $\beta$  heißt **Primitive** (oder Potential).

### 6.3.2 Poincaré-Lemma

Sei  $M$  zusammenziehbar. Dann ist jede geschlossene Form exakt.

**Beweis**

(mit Satz 35).

## 6.4 Die deRham-Kohomologie

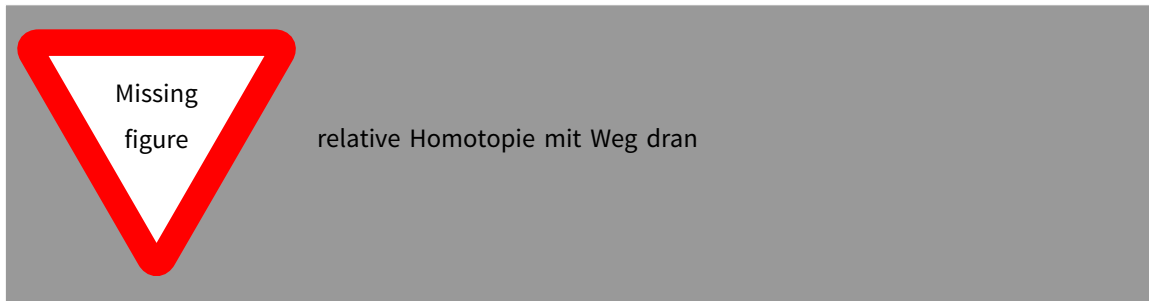
$$H_{\text{dR}}^k M := Z^k M / B^k M$$

$Z^k M$  = geschlossene  $k$ -Formen auf  $M$ .  $B^k M$  = exakte  $k$ -Formen auf  $M$ .

$$H_{\text{dR}}^0 M = \mathbb{R}^{\# \text{ Zusammenhangskomponenten}}$$

- $M$  heißt 1-fach zusammenhängend, falls  $M$  0-zusammenhängend ist und jede Abbildung  $S^1 \rightarrow M$  homotop zu  $S^1 \rightarrow * \in M$  ist ( $\Rightarrow M$  orientierbar).

$\Rightarrow H_{\text{dR}}^1 M = 0, \alpha \in Z^1, f(p) = \int_0^1 \gamma_p^* \alpha$ . wobei  $\gamma_p$  ein Weg von  $O$  nach  $p$  ist. Ist OK nach Stokes



$$df(v) = \alpha(v)$$

Beispiele  $S^n$  für  $n \geq 2, \mathbb{R}^n$

- $f; : M \rightarrow N$  d  $\circ f^* = f^* \circ d \leadsto f^* : H_{\text{dR}}^k N \rightarrow H_{\text{dR}}^k M. \Rightarrow f_0 \sim f_1$  dann ist  $f_0^* = f_1^*$  auf  $H_{\text{dR}}^*$ .

#### 6.4.1 Poincaré-Dualität

$H_{\text{dR}}^k M \simeq H_{\text{dR}}^{n-k} M$ , falls  $M$  geschlossen, orientiert und von Dimension  $n$  ist. Insbesondere:

$$H_{\text{dR}}^n M \xrightarrow[\int_M]{\cong} \mathbb{R},$$

$M$  zusammenhängend.  $H_{\text{dR}}^{2m}(\mathbb{R}P^{2m}) = 0, H_{\text{dR}}^n(M \text{ nicht orientierbar}) = 0.$



## Abbildungsverzeichnis

1	Beispiel einer nicht-Hausdorffmenge	2
2	Stereografische Projektion	2
3	Der eindimensionale projektive Raum $\mathbb{R}P^1$	3
4	Der 2-dimensionale projektive Raum $\mathbb{R}P^2$ (projektive Ebene)	3
5	Zeichnung zur Hausdorffeigenschaft von $\mathbb{R}P^n$	4
6	Basis der Topologie von $\mathbb{R}P^n$ (unfertig)	4
7	Tangentialebene im $\mathbb{R}^3$	6
8	Integralkurve in einem Vektorfeld	12
9	Zeichnung zum Beweis von Picard-Lindelöf	14
10	Zeichnung zu Beispiel 2.4.6 mit $l(t) = 1$	17
11	Veranschaulichung zu lokalen Flüssen	22
12	Das Intervall $I_p$ aus Satz 12 (2.5.10)	24
13	Konstruktion in Satz 13 (3.1.1)	26
14	Funktion $f$ aus 3.1.3	27
15	Funktion $g$ aus 3.1.3	27
16	Funktion $h$ aus 3.1.3	27
17	Kanonisches Geradenbündel	34
18	Beispiel für das induzierte Bündel	35

## Todo's und andere Baustellen

Zeichnung unfertig ...umbauen mit <code>elipsis</code>	4
Figure: Torus + Fundamentalgebiet zum zweiten	20
Figure: fehlende Grafik: Zusammensetzen von Flusslinien	22
Zeichnung vervollständigen	24
Figure: Zeichnung mit Umgebung auf Torusoberfläche	27
Mischwesen aus Diagramm und Zeichnung vervollständigen	34
Bündelstruktur im Möbiusband hervorheben	34

Zeichnung vervollständigen!	37
Zeichnung vervollständigen!	37
Zeichnung vervollständigen	38
Figure: Abschneidefunktion $\varphi$ (Zeichnung ähnelt einem Hut)	42
Figure: Abschneidefunktion $\varphi$	45
Figure: nächste Abschneidefunktion $\psi$	45
Figure: Orientierungen auf dem Möbiusband	47
Figure: Halbkugel mit zwei Wegen	47
Figure: Antipodenabbildung $\tau$ und Teilmenge von $S^{n-1}$	48
Figure: Bild zu kompaktem Träger und so	53
Figure: Donut in Schokoladensoße	54
Figure: Zeichnung zu Untermannigfaltigkeiten	54
Figure: Vektorfeld auf Torusstueck mit Karte	54
Figure: Bild des Schnittes unter $h_j$	55
Figure: Zeichnung zu diffbaren Mfkt mit Rand	55
Figure: Rand von $U$	55
Figure: Zeichnung dazu, mit Fluss auf einer Umgebung des Randes	56
Figure: Und noch eine Zeichnung ...	56
Figure: Ergebnis der Verklebung	56
Figure: Kreisscheibe Abbildung auf den Rand	56
Figure: Idealisiertes Bild zur Homotopie	58
Figure: einfache Zeichnung mit Zylinder und Orientierung	58
Figure: Sphäre mit Großkreis und Antipodenabbildung	59
Figure: relative Homotopie mit Weg dran	61