

Skript Differentialgeometrie I.


Mitschrift der Vorlesung „Differentialgeometrie I.“ von Frederik Witt

Arne Grauer

9. Dezember 2014

Aktuelle Version verfügbar bei:



 **GitHub** (inklusive Sourcecode)
<https://github.com/JaMeZ-B/latex-www>




 **Bittorrent Sync**
B6WH2DISQ5QVYIRYIEZSF4ZR2IDVKPN3I

Vorwort — Mitarbeit am Skript

Dieses Dokument ist eine Mitschrift aus der Vorlesung „Differentialgeometrie I., WiSe 2014“, gelesen von Frederik Witt. Der Inhalt entspricht weitestgehend dem Tafelanschrieb. Für die Korrektheit des Inhalts übernehme ich keinerlei Garantie! Für Bemerkungen und Korrekturen – und seien es nur Rechtschreibfehler – bin ich sehr dankbar. Korrekturen lassen sich prinzipiell auf drei Wegen einreichen:

- Persönliches Ansprechen in der Uni, Mails an ✉ j.bantje@wwu.de (gerne auch mit annotieren PDFs)
- *Direktes* Mitarbeiten am Skript: Den Quellcode poste ich auf GitHub (siehe oben), also stehen vielfältige Möglichkeiten der Zusammenarbeit zur Verfügung: Zum Beispiel durch Kommentare am Code über die Website und die Kombination Fork + Pull Request. Wer sich verdient macht oder ein Skript zu einer Vorlesung, die ich nicht besuche, beisteuern will, dem gewähre ich gerne auch Schreibzugriff.


Beachten sollte man dabei, dass dazu ein Account bei github.com  notwendig ist, der allerdings ohne Angabe von persönlichen Daten angelegt werden kann. Wer bei GitHub (bzw. dem zugrunde liegenden Open-Source-Programm „git“) – verständlicherweise – Hilfe beim Einstieg braucht, dem helfe ich gerne weiter. Es gibt aber auch zahlreiche empfehlenswerte Tutorials im Internet.¹

- *Indirektes* Mitarbeiten: \TeX -Dateien per Mail verschicken.

Dies ist nur dann sinnvoll, wenn man einen ganzen Abschnitt ändern möchte (zB. einen alternativen Beweis geben), da ich die Änderungen dann per Hand einbauen muss!


Vorlesungshomepage



<https://wwwmath.uni-muenster.de/u/frederik.witt/diffgeoI.html> 

Über die Differentialgeometrie

1. **Differentialgeometrie** Mannigfaltigkeiten \Rightarrow Differentialtopologie
2. **Riemannsche Geometrie** Längen und Winkel messen \leadsto Geodäte (lokal) kürzeste Verbindung zwischen 2 Punkten einer Mannigfaltigkeit.
Krümmung
Allgemeine Relativitätstheorie: Krümmung = Gravitation ist für solche Effekte verantwortlich

¹zB. <https://try.github.io/levels/1/challenges/1> , ist auf Englisch, aber dafür interaktives LearningByDoing

Inhaltsverzeichnis

1 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten	1
1.1 Untermannigfaltigkeiten	1
1.1.1 Definition: Submersion, Immersion und Étale	1
1.1.2 Bemerkung: Submersiv/immersiv/étale sind offene Bedingungen	1
1.1.3 Satz über inverse Funktionen (inverse function theorem)	1
1.1.4 Satz über implizite Funktionen (implicit function theorem)	1
1.1.5 Satz (Normalenformen von Submersionen/Immersionen)	1
1.1.6 Definition: Untermannigfaltigkeit	2
1.1.7 Beispiele für Untermannigfaltigkeiten	2
1.1.8 Bemerkung:	3
1.1.9 Satz: lokale Parametrisierung von Untermannigfaltigkeiten	3
1.1.10 Beispiele zur lokalen Parametrisierung	4
1.1.11 Bemerkung	4
1.1.12 Satz: Wechsel lok. Parametrisierungen	5
1.2 Abstrakte Mannigfaltigkeit	5
1.2.1 Definition: Karte und Atlas	5
1.2.2 Definition: Abstrakte differenzierbare Mannigfaltigkeit	6
1.2.3 Beispiele für differenzierbare Mannigfaltigkeiten	6
1.2.4 Bemerkungen zu abstrakten Mannigfaltigkeiten	9
1.3 Glatte Abbildung	9
1.3.1 Definition: Glatte Funktionen zwischen zwei Mannigfaltigkeiten	9
1.3.2 Bemerkung	10
1.3.3 Definition	10
1.3.4 Beispiele	10
1.3.5 Definition	11
1.3.6 Theorem	11
1.3.7 Whitney Theorem	11
1.3.8 Bemerkung	12
1.4 Das Tangentialbündel einer Untermannigfaltigkeit	12
1.4.1 Definition	12
1.4.2 Satz: Vektorraumstruktur des Tangentialraumes	12
1.4.3 Satz	13
1.5 Das Tangentialbündel einer abstrakten Mannigfaltigkeit	13
1.5.1 Definition	13
1.5.2 Bemerkung	14
1.5.3 Definition	14
1.5.4 Bemerkung	15
1.5.5 Definition	15
1.5.6 Theorem	15
1.5.7 Lemma	15
1.5.8 Bemerkung	16
1.5.9 Definition: Vektorbündel	16
1.5.10 Beispiel	17
1.5.11 Bemerkung	17
1.6 Das Differential einer glatten Abbildung	17
1.6.1 Definition	17
1.6.2 Theorem: Kettenregel für Differentiale	18
1.7 Vektorfelder	18
1.7.1 Definition: Vektorfeld	18

1.7.2	Bemerkung: Vektorraumstruktur des $\Gamma(E)$	18
1.7.3	Beispiel	18
1.7.4	Satz: Parallelisierbarkeit des Tangentialbündels	19
1.7.5	Bemerkung	19
1.7.6	Definition	19
1.7.7	Bemerkung	19
1.7.8	Definition	19
1.7.9	Satz	20
1.7.10	Theorem	21
1.7.11	Definition: Derivation auf M	22
1.7.12	Bemerkung	22
1.7.13	Theorem	22
1.7.14	Definition und Satz	23
1.8	Der Fluß eines Vektorfeldes	23
1.8.1	Satz und Definition	23
1.8.2	Bemerkung	23
1.8.3	Satz und Definition	24
1.8.4	Beispiel	24
1.8.5	Definition	24
1.8.6	Proposition	24
1.8.7	Bemerkung	24
1.8.8	Satz	25
1.9	Verhalten von Vektorfeldern unter Diffeomorphismen	25
1.9.1	Proposition und Definition: Push-Forward	25
1.9.2	Bemerkung	26
1.9.3	Korollar	26
1.9.4	Proposition	26
1.9.5	Theorem	27
1.9.6	Korollar: Jacobi-Identität	27
1.9.7	Bemerkung	27
1.10	Tensorbündel	27
1.10.1	Wiederholung: Tensorprodukt von Vektorräumen	27
1.10.2	Beispiel	28
1.10.3	Tensorprodukt der linearen Abbildung	29
1.10.4	Tensorbündel	29
1.10.5	Kotangentialbündel von M	29
1.10.6	Tensorbündel	29
1.10.7	Operatoren für Tensoren	30
1.10.8	Beispiel	31
1.10.9	Satz	31
1.10.10	Lemma	32
1.10.11	Bemerkung	32
1.10.12	Definition	32
1.10.13	Satz: Funktionelle Eigenschaften	32
1.10.14	Bemerkung	33
1.10.15	Verkleben von Tensoren	33
1.10.16	Definition	33
1.10.17	Satz: Eigenschaften von \mathcal{L}_X	33
1.10.18	Korollar	34
1.11	Äußere Formen (Differentialformen)	34
1.11.1	Äußeres Produkt von Vektorräumen	34
1.11.2	Definition	35

1.11.3	Bemerkung	35
1.11.4	Satz/Definition	35
1.11.5	Korollar	36
1.11.6	Bemerkung	36
1.11.7	Beispiel	36
1.11.8	Proposition: Cartansche Formel	36
1.12	Volumenformen und Integration	37
1.12.1	Definition	37
1.12.2	Bemerkung	37
1.12.3	Integration auf Mannigfaltigkeiten	37
1.12.4	Bemerkung: Volumen von kompakten Mannigfaltigkeiten	37
1.12.5	Definition	37
1.12.6	Beispiel	38
1.12.7	Proposition	38
2	Riemannsche Geometrie	38
2.1	Riemannsche Metriken	38
2.1.1	Definition: Riemannsche Metrik	38
2.1.2	Bemerkung	39
2.1.3	Definition: Riemannsche Metrik	39
	Index	A
	Abbildungsverzeichnis	B

1 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Konvention: glatt = C^∞ .

Wiederholung: Diffeomorphismus $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ glatt, bijektiv und f^{-1} glatt.

1.1 Untermannigfaltigkeiten

1.1.1 Definition

Eine Abbildung $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ glatt heißt **Submersion/Immersion/Étale** in $x \in U$, falls $d_x f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ surjektiv/injektiv/Isomorphismus ist. f heißt schlechthin **Submersion/Immersion/Étale**, falls f Submersion/Immersion/Étale für alle $x \in U$ ist.

Insbesondere $n \geq m/n \leq m/n = m$

1.1.2 Bemerkung

Submersiv/immersiv/étale sind offene Bedingungen, d.h. ist f Submersion/Immersion/Étale in x , so auch in einer hinreichend kleinen Umgebung von x (vergleiche auch Satz 15 unten)

1.1.3 Satz über inverse Funktionen (inverse function theorem)

Sei $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ étale in x . Dann existiert eine offene Menge $x \in V \subset U \subset \mathbb{R}^n$, sodass $f|_V$ ein Diffeomorphismus auf seinem Bild ist, d.h. $f|_V : V \xrightarrow{\sim} f(V)$ ist bijektiv und $f|_V, (f|_V)^{-1}$ glatt.

1.1.4 Satz über implizite Funktionen (implicit function theorem)

Sei $f : U \subset \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Submersion in 0 mit $f(0) = 0$. Dann existiert eine glatte Funktion g auf einer Umgebung von $0 \in \mathbb{R}^n$ mit Werten in \mathbb{R}^k , d.h.

$$g = g(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} g_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ g_k(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

mit

$$f(x_1, \dots, x_n, g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_k(x_1, \dots, x_n)) = f(x, g(x)) = 0$$

1.1.5 Satz (Normalenformen von Submersionen/Immersionen)

a) Sei $f : U \subseteq \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Submersion mit $f(0) = 0$. Dann existiert ein Diffeomorphismus $\varphi : 0 \in V \subset \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ mit $\varphi(V) \subset U$ und $f \circ \varphi(x_1, \dots, x_{n+k}) = (x_1, \dots, x_n) = \pi_{\mathbb{R}^n}(x_1, \dots, x_{n+k})$, d.h. modulo einer Diffeomorphismus ist jede Submersion äquivalent zu einer Projektion.

b) Sei $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ eine Immersion in 0, $f(0) = 0$. Dann existiert ein Diffeomorphismus

$$\varphi : 0 \in V \subset \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$$

mit $\varphi(0) = 0$ und

$$\varphi \circ f(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0) = i(x_1, \dots, x_n)$$

d.h. modulo Diffeomorphismen ist f äquivalent zur kanonischen Einbettung von $\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+k}$.

Beweis

- (i) Wähle Koordinaten x_1, \dots, x_n mit $d_0 f = (A \ B)$ mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{k \times n}$ mit $\det A \neq 0$.
Definiere $F : U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ durch $(p, q) \mapsto (f(p, q), q)$. Dann gilt

$$d_{(0,0)} F = \begin{pmatrix} d_0 f & 0 \\ 0 & \text{id}_{k \times k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & \text{id}_{k \times k} \end{pmatrix} \implies \det d_0 F \neq 0$$

Mit 1.1.3 folgt: $\varphi = F^{-1}$ Diffeomorphismus um $0 \in \mathbb{R}^{n+k}$ herum.

- (ii) Definiere $F : U \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$. $F(p, q) = f(p) + (0, q)$.

$$d_{(0,0)} F = \begin{pmatrix} d_0 f & 0 \\ 0 & \text{id}_{k \times k} \end{pmatrix},$$

also $\det d_{(0,0)} F \neq 0 \implies \exists \varphi = F^{-1}$ um 0 mit $\varphi(f(p)) = \varphi \circ F(p, 0) = (p, 0) = i(p)$ \square

Bemerkung

Durch Komposition mit Translationen können Submersionen/Immersionen mit $F(x) = y$ (nicht notwendigerweise $= 0$) behandelt werden.

1.1.6 Definition

$M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ heißt n -dimensionale **Untermannigfaltigkeit**, falls $\forall x \in M : \exists U \subset \mathbb{R}^{n+k}$ Umgebung, sowie eine Submersion $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ mit $U \cap M = f^{-1}(0)$.

1.1.7 Beispiele

- (i) Die n -**Sphäre** $S^n := \{x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x|^2 = 1\}$ ist eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^{n+1} . Definiere $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f(x_1, \dots, x_{n+1}) = x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 - 1$.
 $\implies f^{-1}(0) = S^n$ nach Definition.

$$d_x f = (2x_1, \dots, 2x_{n+1}) : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$$

- (ii) Die hyperbolischen Räume $H_c^n := \{x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid -x_1^2 + \sum_{i=2}^{n+1} x_i^2 = c\}$

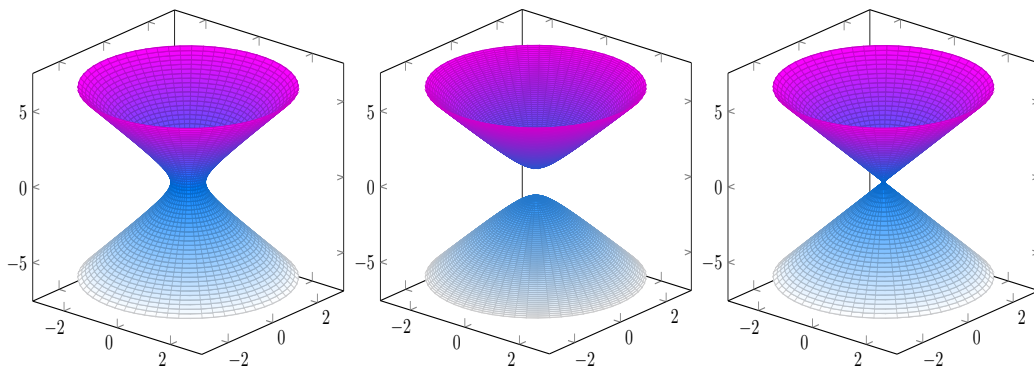


Abbildung 1: hyperbolischer Raum für $c > 0$, $c < 0$, $c = 0$

Sei $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f_c(x) = -x_1^2 + \sum_{i=2}^{n+1} x_i^2 - c$.

$\implies f$ ist glatt und $f_c^{-1}(0) = H_c^n$

Es bleibt zu zeigen, dass f eine Submersion ist.

$$d_x f = (-2x_1, 2x_2, \dots, 2x_{n+1}) : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$$

Es gilt $d_x f(\nu) = 0 \forall \nu \in \mathbb{R}^{n+1} \Leftrightarrow x_i = 0 \forall i = 1, \dots, n+1$.

Das heißt $\exists i : x_i \neq 0 \Rightarrow d_x f$ Submersion, wobei $\exists i : x_i \neq 0$ gilt, falls $x \in H_c^n, c \neq 0$. Also ist für $c \neq 0$ H_c^n eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Für $c = 0$ ist $H_0^n \setminus \{0\}$ eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit.

(iii) Der n -Torus $T^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_{2n-1}, x_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n} \mid x_1^2 + x_2^2 = 1, \dots, x_{2n-1}^2 + x_{2n}^2 = 1\}$

$$f : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 1 \\ \vdots \\ x_{2n-1}^2 + x_{2n}^2 - 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow f$ glatt, $f^{-1}(0) = T^n$

$$d_x f = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2x_3 & 2x_4 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & & 2x_{2n-1} & 2x_{2n} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow d_x f$ ist eine Submersion.

(iv) Die orthogonale Gruppe $O(n) \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ ist eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $\frac{n(n-1)}{2}$.

$$O(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid AA^T = \text{id}_{\mathbb{R}^n} = f^{-1}(0)\}, f(A) = AA^T - \text{id}_{\mathbb{R}^n}$$

Es gilt $f(A)^T = A^{TT} \cdot A^T - \text{id}^T = AA^T - \text{id} = f(A)$. Also $f : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \text{Sym}(\mathbb{R}^{n \times n}) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^T = A\}$.

$\Rightarrow f$ glatt, $f^{-1}(0) = O(n)$

$$d_A f : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \text{Sym}(\mathbb{R}^{n \times n}), d_A f = HA^T + AH^T$$

Sei $S \in \text{Sym}(\mathbb{R}^{n \times})$. Setze $H = \frac{SA}{2} \Rightarrow d_A f(\frac{SA}{2}) = \frac{1}{2}(SAA^T + ASAT) = \frac{1}{2}(S + S) = S$
 $\Rightarrow O(n)$ ist eine Untermannigfaltigkeit

1.1.8 Bemerkung

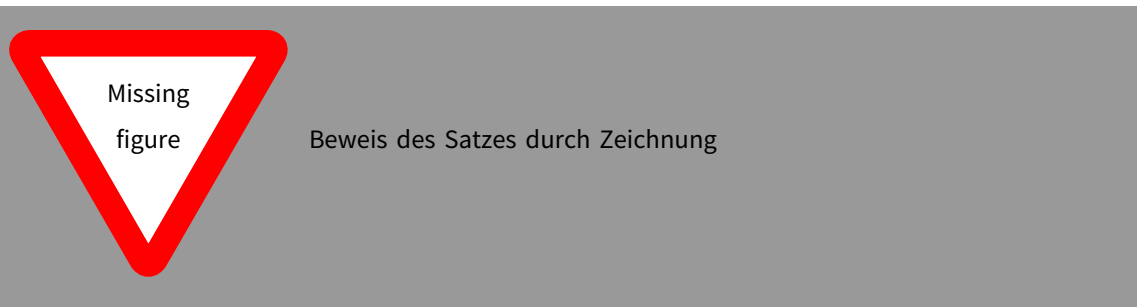
M kann von der Form $M = f^{-1}(0)$ sein, f glatt, aber keine Submersion. Zum Beispiel

$$M = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\} = f^{-1}(0), f(x, y) = x^3 + y^3$$

1.1.9 Satz

Es sind äquivalent:

- (i) $M^n \subset \mathbb{R}^{n+k}$ ist n -dim Untermannigfaltigkeit
- (ii) $\forall x \in M^n \exists$ Umgebungen U und $V \subset \mathbb{R}^{n+k}$ von x und 0 , und ein Diffeomorphismus $\phi : U \rightarrow V$ mit $\phi(M \cap U) \rightarrow \underbrace{(\mathbb{R}^n \times \{0\}) \cap V}_{=: W}$
- (iii) $\forall x \in M^n \exists$ Umgebungen $U \subset \mathbb{R}^{n+k}$ und $W \subset \mathbb{R}^n$, sowie eine glatte Abbildung $g : W \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$, sodass g ein Homöomorphismus von W auf $M \cap U$ und eine Immersion ist. g nennt man eine **lokale Parametrisierung**



1.1.10 Beispiele

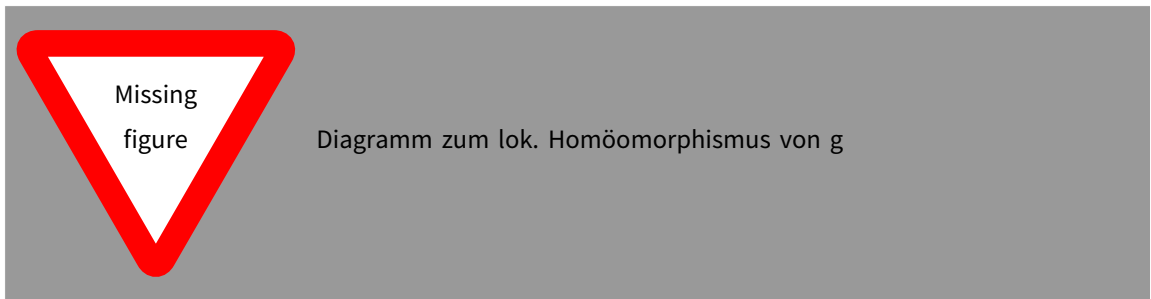
(i) Der 2-Torus T^2 ist das Bild von

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4, g(x, y) = (\cos(x), \sin(x), \cos(y), \sin(y)) \subset T^2 \subset \mathbb{R}^4$$

g ist lokale Parametrisierung:

$$d_{(x,y)}g = \begin{pmatrix} -\sin(x) & 0 \\ \cos(x) & 0 \\ 0 & -\sin(y) \\ 0 & \cos(y) \end{pmatrix}$$

$d_{(x,y)}g$ hat somit immer vollen Rang 2, also ist $d_{(x,y)}g$ injektiv. Es folgt somit, dass g eine Immersion ist.



\hat{g} ist stetig (Quotiententopologie), \hat{g} bijektiv und T^2 kompakt. Damit folgt, dass \hat{g} ein Homöomorphismus und somit g ein lokaler Homöomorphismus ist.

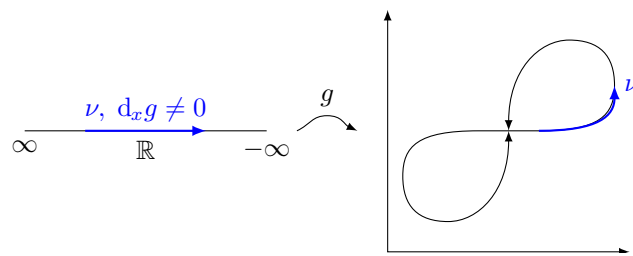
(ii)

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, g(x, y) = (\sin(x) \cos(y), \sin(x) \sin(y), \cos(x)) \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$$

g ist ein lokaler Homöomorphismus, jedoch ist $d_{(x,y)}$ nicht injektiv, das heißt keine lokale Parametrisierung nahe der Pole. Also müssen wir eine andere Parametrisierung wählen, zum Beispiel $g(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$

1.1.11 Bemerkung

(i) Betrachte:



g ist immersiv, hat aber keine Umkehrfunktion und ist somit kein Homöomorphismus.



Weiteres Beispiel zur lok. Par.

(ii)

g ist keine lokale Parametrisierung, da g nicht immersiv in 0 ist. $g(t) = (g_1(t), g_2(t)) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow g_1^2(t) = g_2^3(t) \Rightarrow d_0g = 0$

1.1.12 Satz

Sei M^n eine n -dim glatte Untermannigfaltigkeit, $x \in M$, und seien U_1, U_2 Umgebungen von x in \mathbb{R}^{k+n} mit lok. Parametrisierung g_1 und g_2 von $U_1 \cap M$ und $U_2 \cap M$ definiert auf Ω_1 und Ω_2 (das heißt $g_i : \Omega_i \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$). Dann ist

$$g_2^{-1} \circ g_1 : \Omega_1 \cap g_1^{-1}(U_2) \xrightarrow{g_1} g_1(\Omega_1) \cap U_2 \xrightarrow{g_2^{-1}} \Omega_2 \cap g_2^{-1}(U_1)$$

ein C^∞ -Diffeomorphismus.



Veranschaulichung des Wechsel lok. Parametrisierung

Bemerkung

- $h : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ Homöomorphismus, offene Menge in $\Omega_1 \leftrightarrow$ offene Menge in Ω_2
- $\varphi : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ Diffeomorphismus, falls Homöom. und $C^\infty(\Omega_1) \leftrightarrow C^\infty(\Omega_2)$

1.2 Abstrakte Mannigfaltigkeit

1.2.1 Definition

Sei M ein topologischer Raum. Ein **Atlas** ist eine Familie $\{(U_i, \varphi_i)\}_i \in I$ mit

- (i) $U_i \subset M$ offen, $M = \bigcup_{i \in I} U_i$ ($\{U_i\}$ offene Überdeckung)
- (ii) $\{\varphi_i : U_i \rightarrow \Omega_i \subset \mathbb{R}^n\}$ ist eine Familie von Homöomorphismen mit:

$$U_{ij} = U_i \cap U_j \neq \emptyset, \text{ dann ist } \varphi_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_{ij}) \rightarrow \varphi_i(U_{ij})$$

ein C^∞ -Diffeomorphismus.

Ein Paar (U_i, φ_i) heißt **Karte** und φ_{ij} heißt Übergangsfunktion oder .

1.2.2 Definiton

Sei M ein topologischer Raum.

- (i) Zwei Atlanten $\mathcal{A}_1 = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ und $\mathcal{A}_2 = \{(V_j, \psi_j)\}_{j \in J}$ sind äquivalent, genau dann wenn $\forall i \in I, j \in J$ mit $U_i \cap V_j \neq \emptyset$

$$\varphi_i \circ \psi_j^{-1} : \psi_j(U_i \cap V_j) \rightarrow \varphi_i(U_i \cap V_j)$$

ein C^∞ -Diffeomorphismus, das heißt die Vereinigung und $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ ist wieder ein Atlas von M .

- (ii) **Differenzierbare Struktur** auf M ist die Äquivalenzklasse eines Atlanten. Ein Hausdorffraum M mit einer differenzierbaren Struktur heißt **(abstrakte) differenzierbare Mannigfaltigkeit** oder Mannigfaltigkeit.
- (iii) Nehmen alle Karten eines Atlanten Werte in \mathbb{R}^n an, so heißt n die Dimension der Mannigfaltigkeit.

1.2.3 Beispiele

- (i) \mathbb{R}^n ist Mannigfaltigkeit der Dimension n , Atlas: $\{\mathbb{R}^n, \text{id}_{\mathbb{R}^n}\}$ und $U \subset \mathbb{R}^n$ ist Mannigfaltigkeit der Dimension n , Atlas: $\{U, \text{id}_{\mathbb{R}^n}|_U\}$
- (ii) Untermannigfaltigkeit im Sinne von Abschnitt 1.1 sind abstrakte Mannigfaltigkeiten.
- (iii) Mannigfaltigkeit $N \subset M$ ist eine Untermannigfaltigkeit von M , falls für alle $y \in N$ eine Karte (U, φ) von M um y existiert, sodass $\varphi(U \cap N)$ Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n im Sinne von Abschnitt 1.1 ist.
Dann gilt zum Beispiel $U \overset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}^n$ ist Untermannigfaltigkeit im "abstrakten" Sinne. Untermannigfaltigkeit $N \subset \mathbb{R}^n$ im Sinne von 1.1 ist Untermannigfaltigkeit im abstrakten Sinne.
- (iv) Die n -Sphäre, z.B $n = 1$

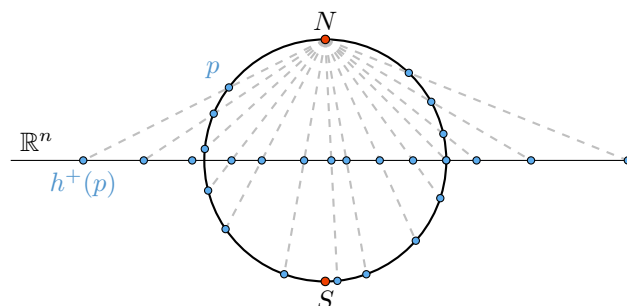


Abbildung 2: Stereografische Projektion

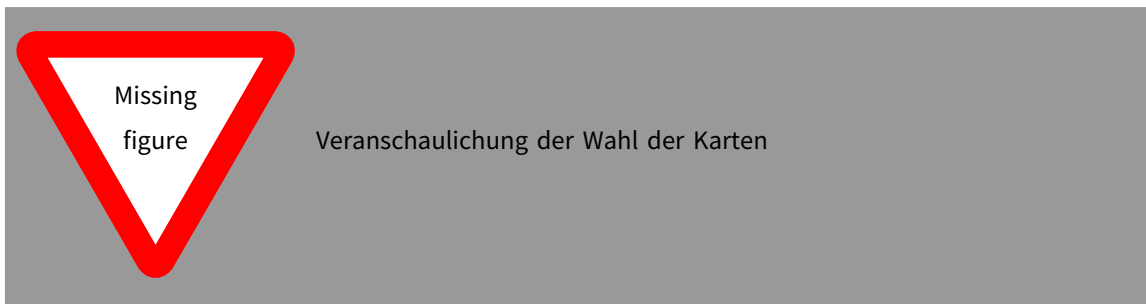
Allgemein: $U_N = S^n \setminus \{N\}$, $U_S = S^n \setminus \{S\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$

$$\begin{aligned}\varphi_N : U_N &\rightarrow \mathbb{R}^n, (x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n) \\ \varphi_S : U_S &\rightarrow \mathbb{R}^n, (x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto \frac{1}{1 + x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n) \\ \varphi_S \circ \varphi_N^{-1} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \mapsto \frac{x}{\|x\|^2}\end{aligned}$$

Bemerkung

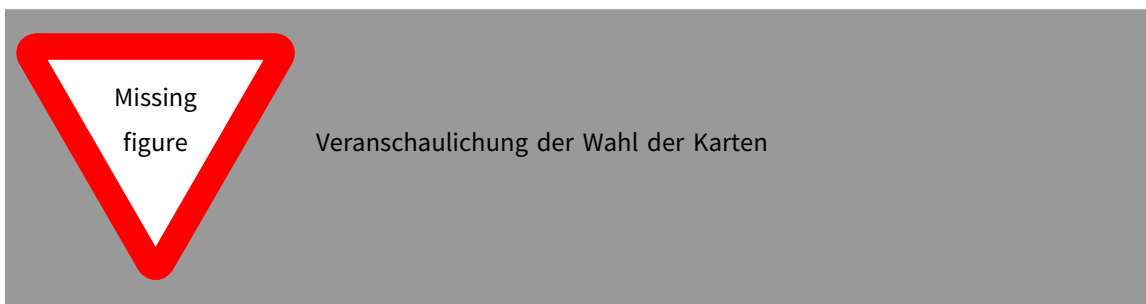
$\{(S^n, \text{id}_{\mathbb{R}^{n+1}}|_{S^n})\}$ ist kein Atlas, denn S^n ist nicht offen im \mathbb{R}^{n+1} .

- (v) Der n -Torus T^n . Betrachte $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}^n, (x_1, \dots, x_n) \mapsto (\exp(ix_1), \dots, \exp(ix_n)) \in \underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_{n\text{-mal}} \subset \mathbb{C} \times \dots \times \mathbb{C}$, so folgt $f(\mathbb{R}^n) = T^n$



Schränke $f|_{(a_1-\epsilon, a_1+\epsilon) \times \dots \times (a_n-\epsilon, a_n+\epsilon)}$ auf sein Bild ein. $\varphi_a := f^{-1} : f(I_a) \rightarrow I_a \overset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}^n$. So mit ist $\{(U_a, \varphi_a)\}_{a \in \mathbb{R}^n}$ eine Familie von Karten, die T^n überdeckt. Es bleibt zu zeigen, dass $\varphi_{ab} = \varphi_a \circ \varphi_b^{-1}$ ein Diffeomorphismus ist, was wir an dieser Stelle dem Leser überlassen. Somit folgt, dass $\{(U_a, \varphi_a)\}_{a \in \mathbb{R}^n}$ ein Atlas ist.

- (vi) Betrachte den Hyperbolischen Raum H^n .



H^n ist eine Mannigfaltigkeit mit einer Karte, gegeben durch stereographische Projektion. Man sagt daher, dass H^n diffeomorph zu \mathbb{R}^n

- (vii) Würfel $Q \subset \mathbb{R}^n$

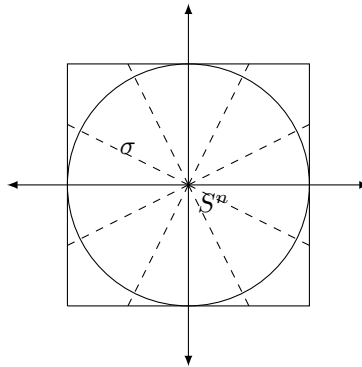


Abbildung 3: Der Würfel Q ist keine Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n !

Q ist jedoch eine abstrakte Mannigfaltigkeit, denn Q ist ein Hausdorffraum und bijektiv zu S^n durch Projektion σ . So ist $\mathcal{A} := \{(\sigma^{-1}(U_N), \varphi_N \circ \sigma), (\sigma^{-1}(U_S), \varphi_S \circ \sigma)\}$ ein Atlas, da $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} = \varphi_S \circ \sigma \circ \sigma^{-1} \circ \varphi_N$ und somit ist Q eine abstrakte Mannigfaltigkeit.

(viii) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. So ist der **projektive Raum**

$$\begin{aligned} \mathbb{KP}^n &= \text{Menge der Ursprungsgraden in } \mathbb{K}^{n+1} \\ &= \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim, \quad x, y \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} \text{ seien äquivalent, } x \sim y \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} : x = \lambda y \\ &= \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} / \mathbb{K}^* \text{ wobei} \\ [x] &\in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} / \mathbb{K}^* \mapsto \langle x \rangle_{\mathbb{K}} \text{ lineare Erzeugnis von } x \text{ in } \mathbb{K}^{n+1} \end{aligned}$$

Wir schreiben $[x] = [x_0 : \dots : x_n]$, falls $x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$, "homogene Koordinaten".

Bemerkung

$$[x_0 : \dots : x_n] = [\lambda x_0 : \dots : \lambda x_n], \quad \lambda \in \mathbb{K}^{n+1}$$

(1) Betrachte $p : x \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} \mapsto [x] = p(x) \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$ so folgt, dass \mathbb{KP}^n versehen mit der Quotiententopologie ein Hausdorff-Raum ist.

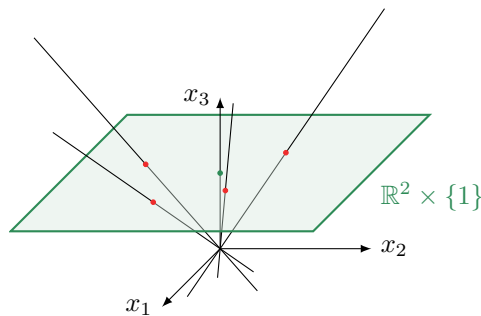


Abbildung 4: Der 2-dimensionale projektive Raum \mathbb{RP}^2 (projektive Ebene)

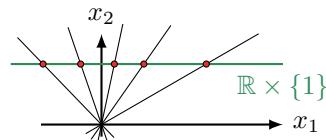


Abbildung 5: Der eindimensionale projektive Raum \mathbb{RP}^1

Aus Abbildung 3 bzw. 2 folgt somit $\mathbb{RP}^n = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cong S^2$ und analog $\mathbb{R}^2 \cup \{N\} \cong S^2$. Um zu zeigen, dass \mathbb{KP}^n eine abstrakte Mannigfaltigkeit ist, muss die Existenz eines Atlanten gezeigt werden. Betrachte $U_i = \{[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{KP}^n \mid x_i \neq 0\}$. So folgt, dass $\bigcup_{i=0}^n U_i = \mathbb{KP}^n$, da $(0, \dots, 0) \notin \mathbb{KP}^{n+1} \setminus \{0\}$, also $\nexists [0 : \dots : 0]$. Da $[x_0 : \dots : x_n] \in U_i \Rightarrow x_i \neq 0$, ist $\varphi_i : [x_0 : \dots : x_n] = [\frac{x_0}{x_i} : \dots : \frac{x_n}{x_i}] \xrightarrow{\varphi_i} [\frac{x_0}{x_i} : \dots : \frac{\hat{x}_i}{x_i} : \dots : \frac{x_n}{x_i}]$ wohldefiniert. Es bleibt als Übung zu zeigen, dass $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ ein Diffeomorphismus ist.

1.2.4 Bemerkung

- (i) Die Vereinigung aller äquivalenten Atlanten ist wieder ein Atlas, der sogenannte maximale Atlas (eindeutig bestimmt). In der Praxis arbeitet man mit konkreten Atlanten.
- (ii) Allgemein kann man C^p -Atlanten betrachten, das heißt φ_{ij} C^p -Diffeomorphismen $\rightarrow C^p$ -Mannigfaltigkeiten. Ebenso kann man Karten mit allgemeinen Zielräumen betrachten, wo der Begriff der Differenzierbarkeit/Diffeomorphismus Sinn hat. Zum Beispiel Banach- und Hilbertraum \rightarrow Banach- und Hilbertmannigfaltigkeiten oder Frécheraum \rightarrow Fréchemannigfaltigkeiten.
- (iii) Sei M ein topologischer Raum mit differenzierbarer Struktur, so ist er nicht automatisch Hausdorff! Zum Beispiel

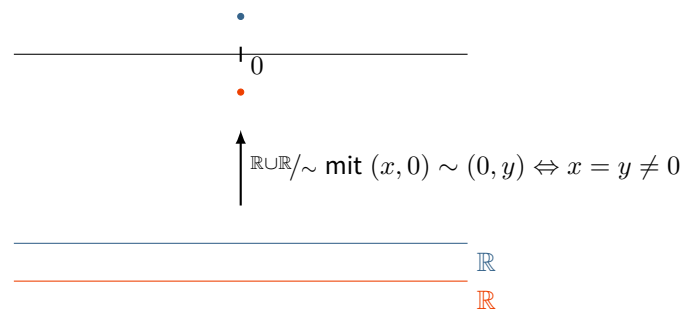


Abbildung 6: Beispiel einer Nichthausdorffmenge

Benutze Atlas $\{(U_1 = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}, \text{id}), (U_2 = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}, \text{id})\}$. Dies ist ein Atlas, da $U_1 \cap U_2 = M \setminus \{:\}$.

- (iv) Wir nehmen künftig zwei zusätzliche Bedingungen für Mannigfaltigkeiten an:
 - (a) M zusammenhängend \rightarrow jede Mannigfaltigkeit hat wohldefinierte Dimension schreibe M^n
 - (b) M erfüllt das 2. Abzählbarkeitsaxiom. Für uns: \exists abzählbarer Atlas.

1.3 Glatte Abbildung

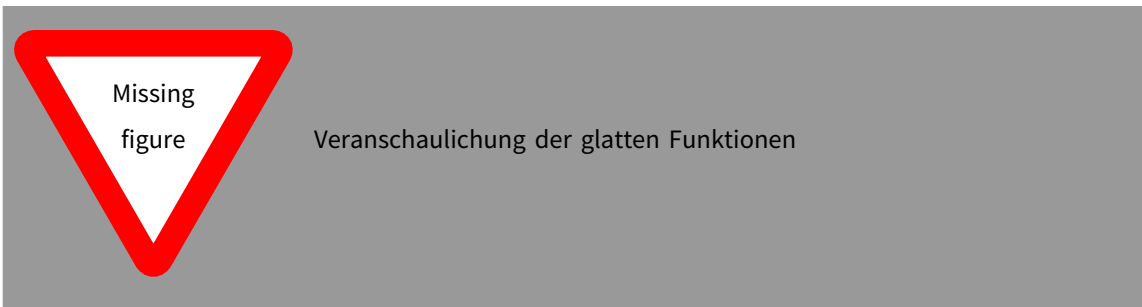
1.3.1 Definition

Seien M^n, N^m zwei Mannigfaltigkeiten und sei $f : M^n \rightarrow N^m$ eine stetige Abbildung. Dann heißt f glatt, falls für alle x Karten $(U, \varphi) \subset M$ und $(V, \psi) \subset N$ um x beziehungsweise $f^{-1}(x)$ existieren mit $f(U) \subset V$ und

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$$

$\subset \mathbb{R}^n \qquad \subset \mathbb{R}^m$

glatt ist. ("f in Karten gelesen ist glatt")



Wir schreiben $C^\infty(M, N) = \{f : M \rightarrow N \mid f \text{ glatt}\}$ und als Spezialfall $C^\infty(M) = C^\infty(M, \mathbb{R})$.

1.3.2 Bemerkung

Glattheit ist unabhängig von der Wahl der Karten! (\leadsto Diffeomorphismusbedingung!)

1.3.3 Definition

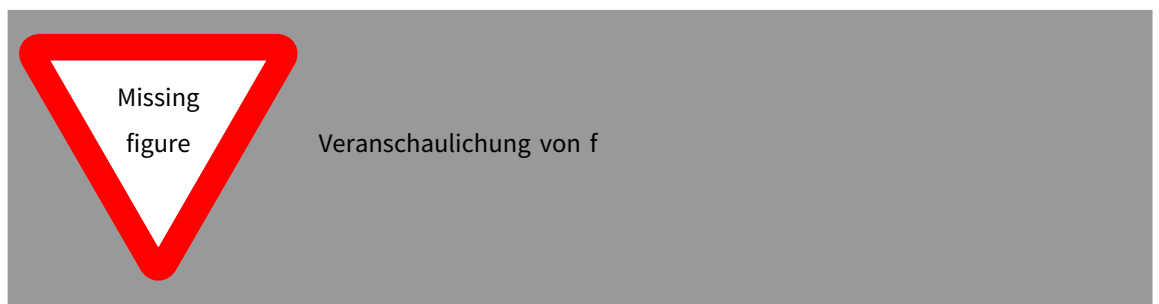
- (i) Eine glatte Abbildung $f : M \rightarrow N$ heißt Submersion/Immersion/étale, falls für ein Paar (und damit alle Karten) $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ eine Submersion/Immersion/étale ist.
- (ii) f ist Diffeomorphismus zwischen M und N (M und N sind "diffeomorph"), falls f bijektiv ist und f sowie f^{-1} glatt ist.
- (iii) $f : M \rightarrow N$ heißt Einbettung, falls f Immersion und Homöomorphismus auf sein Bild ist.

1.3.4 Beispiele

- (i) Wenn M eine Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^{n+k} , $f : \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^m$ glatte Funktion, dann ist auch $f|_M$ glatt.
 - $\{\mathbb{R}^n, \text{id}\}, \{\mathbb{R}^m, \text{id}\} \Rightarrow f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ glatt im Sinne von Definition 1.3.1 \Leftrightarrow glatt im üblichen Sinne
 - $x \in M$, Karte um x : $\varphi : U \subset \mathbb{R}^{n+k} \xrightarrow{\text{Diffeo.}} V = \varphi(U) \subset \mathbb{R}^{n+k}$ mit $\varphi(U \cap M) = U \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$ (aus 1.3.3), so gilt

$$f \circ \varphi^{-1} : V \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}) \xrightarrow{\varphi^{-1}|_{V \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})} \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+k})} M \cap U \xrightarrow{f \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+k}, \mathbb{R}^m)} \mathbb{R}^m$$

Somit folgt, dass $f|_M$ glatt ist.



- (ii) S^2 ist diffeomorph zu $\mathbb{CP}^1 = \{\text{Ursprungsgeraden in } \mathbb{C}^2\} = \mathbb{C} \setminus \{0\} / \mathbb{C}^*$. Definiere

$$f : S^2 \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{CP}^1, (x, y, z) \mapsto \begin{cases} z \neq -1 : [\frac{x+iy}{1+z} : 1] \\ z = -1 : [1 : 0] \end{cases}$$

Somit folgt

(1) f ist bijektiv

(2) Wir "lesen nun in Karten", wobei $U_1 = \{z_1 : z_2 \neq 0\} \xrightarrow{\psi_2} \frac{z_1}{z_2}$:

$$\psi \circ f \circ \varphi_S^{-1}(x, y) = \psi_2[x + iy : 1] = x + iy \stackrel{\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}}{=} (x, y)$$

Also ist $\psi \circ f \circ \varphi_S^{-1} = \text{id}$ und somit $f|_{S^2 \setminus \{S\}}$ ist C^∞ und f^{-1} auch C^∞ . Nun brauchen wir nur noch eine Karte um S ! Zum Beispiel φ_N . Hier $\varphi_N(S) = (0, 0)$. Es gilt:

$$f \circ \varphi_N^{-1}(x, y) = \begin{cases} (x, y) \neq (0, 0) : [\varphi_S \circ \varphi_N^{-1}(x, y) : 1] \stackrel{\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}}{=} [\frac{x+iy}{x^2+y^2} : 1] \in U_0 \\ [1 : 0] \in U_0 \end{cases}$$

Somit folgt:

$$\psi_1 \circ f \circ \varphi_N^{-1}(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{x+iy} = x - iy & = (x, -y) \text{ glatt} \\ 0 & \end{cases}$$

1.3.5 Definition

- (i) Eine Mannigfaltigkeit erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom, falls es einen abzählbaren Atlas besitzt.
- (ii) Seien M^n eine Mannigfaltigkeit. Eine Familie $\{f_i : M \rightarrow \mathbb{R}\}$ glatter Funktionen heißt **Zerlegung der Eins**, falls
 - $\text{supp } f_i = \overline{\{x \in M \mid f_i(x) \neq 0\}}$ "Träger von f_i " sind kompakt und bilden "lokal endliche Familie" (das heißt, sei $K \subset M$ kompakt, so gilt $\text{supp } f_i \cap K = \emptyset$ außer für endlich viele $i \in I$)
 - $\forall x \sum_{i \in I} f_i(x) = 1$ (wohldefiniert, also \sum endlich, da lokal endlich)

1.3.6 Theorem

Sei $\{U_i\}_{i \in I}$ eine Überdeckung von M . Ist M zweifach abzählbar, so existiert eine Zerlegung der Eins, die \mathcal{U} untergeordnet ist, das heißt $\text{supp } f_i \subset U_i$. Dies ist nützlich um beliebig definierte Objekte zu globalen Objekten zu verkleben.



Untergeordnete Zerlegung der Eins

1.3.7 Whitney Theorem

Sei M^n eine zweifach abzählbare Mannigfaltigkeit. Dann existiert eine Einbettung $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ von M (bzw. Immersion $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n-1}$) als Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^{2n} (bzw. \mathbb{R}^{2n-1})

1.3.8 Bemerkung

- (i) Können jede "abstrakte" Mannigfaltigkeit M^n als eine Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^{2n-1} realisieren.

Aber

Die Einbettung ist nicht kanonisch (oder "natürlich"), das heißt gewisse Eigenschaften der Untermannigfaltigkeit entstehen durch die Einbettung und sind keine intrinsische Einbettung von M !

- (ii) Die Dimension $2n - 1$ des Bildraumes ist optimal im folgenden Sinne

\exists Mannigfaltigkeit M^n , die sich nicht in \mathbb{R}^N mit $N < 2n - 1$ einbetten lassen.

Beweisskizze

Wir nehmen an, dass die Mannigfaltigkeit M kompakt ist. So folgt mit 1.5.8, dass ein endlicher Atlas $\{(U_i, \varphi_i : U_i \rightarrow \Omega_i \subset \mathbb{R}^n)\}_{i=1}^n$ mit untergeordneter Zerlegung der Eins $\{f_i : M \rightarrow \mathbb{R}\}_{i=1}^n$, $\text{supp } f_i \subset U_i$ existiert. Definiere $\psi_i : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch $\psi_i(x) = \varphi_i(x)f_i(x)$, so folgt $\psi_i(x) \equiv 0$ für $x \in U_i^c$ und ψ_i ist glatt. Dann definiert $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^{nr+r}$, $\psi(x) = (\psi_1(x), \dots, \psi_r(x), f_1(x), \dots, f_r(x))$ eine Einbettung. Von jetzt an ist M^n stets eine glatte zweifach abzählbare Mannigfaltigkeit.

1.4 Das Tangentialbündel einer Untermannigfaltigkeit

1.4.1 Definition

Sei $M^n \subset \mathbb{R}^{n+k}$ eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Sei $x \in M$, $v \in \mathbb{R}^{n+k}$ ist tangential an M in x , falls eine C^∞ -Abbildung $c : 0 \in I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ existiert mit

- $c(I) \subset M$
- $c(0) = x$
- $c'(t) = v$

Notation

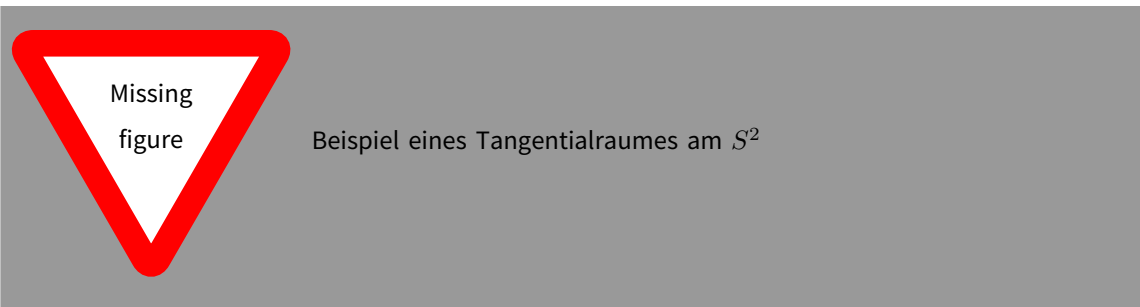
$T_x M^n$ = Menge der Tangentialvektoren v in x .

1.4.2 Satz

$T_x M^n$ ist ein n -dim Vektorraum $_{|\mathbb{R}}$ ($\cong \mathbb{R}^n$)

Beweis

Sei M eine Untermannigfaltigkeit, $x \in M$, so existiert Umgebung $U \subset \mathbb{R}^{n+k}$ offen, $\varphi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^{n+k}$ diffeomorph mit $\varphi(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$. Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ ein Weg mit $c(I) \subset M \cap U$, so ist $\varphi \circ c$ ein Weg im $V \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$. Es folgt, dass $T_x M \cong d_{\varphi(x)} \varphi^{-1}(\mathbb{R}^n \times \{0\})$, das heißt $T_x M$ übernimmt die Vektorraumstruktur von $\mathbb{R}^n \times \{0\}$



1.4.3 Satz

Sei $M^n \subset \mathbb{R}^{n+k}$ eine Untermannigfaltigkeit der Dimension n , $x \in M$ und $U \subset \mathbb{R}^{n+k}$ offene Umgebung um x .

- (i) $U \cap M = f^{-1}(0)$ für $f : \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine Submersion, so ist $T_x M^n = \ker d_x f$.
Sei zum Beispiel $M = S^2$. So ist $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ eine Submersion mit $S^2 = f^{-1}(0)$. Betrachte nun den Tangentialraum am Nordpol N . Es gilt $d_N f = (0, 0, z) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, also gilt für den Tangentialraum:

$$T_N S^2 = \ker d_N f = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

- (ii) Sei $\varphi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^{n+k}$ ein Diffeomorphismus mit $\varphi(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$, dann ist $T_x M = d_{\varphi(x)} \varphi^{-1}(\mathbb{R}^n \times \{0\})$
- (iii) Ist (Ω, g) eine Parametrisierung von $U \cap M$, so ist der Tangentialraum $T_{g(y)} M = d_y g(\mathbb{R}^n)$

Beweis

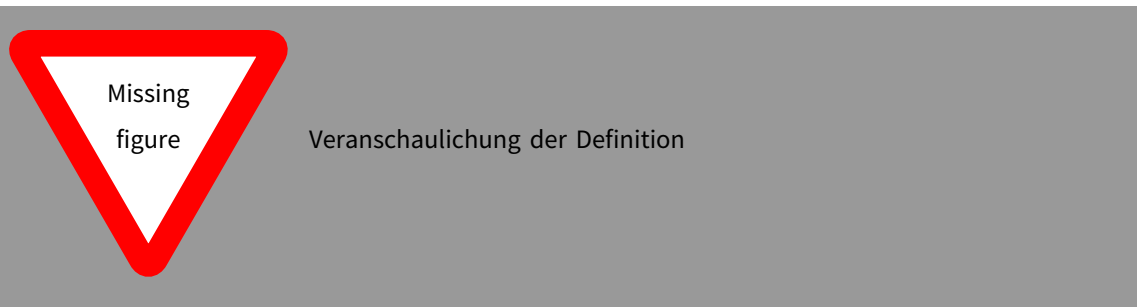
- (i) Sei $v \in T_x M$, das heißt $v = c'(0)$, $c(0) = x$. So gilt $f \circ c(t) = 0$, da $c(t) \subset M \cap U = f^{-1}(0)$. Somit folgt mit der Kettenregel, dass $d_{c(0)} f \circ c'(0) = d_x f(v) = 0$. Also ist $v \in \ker d_x f$ und es gilt $T_x M \subset \ker d_x f$. Da $T_x M$ und $\ker d_x f$ n -dimensional, folgt somit die Gleichheit.
- (ii) Siehe 1.7.2
- (iii) Sei $\tilde{c} \subset \Omega$ eine Kurve, $c := g \circ \tilde{c}$ Kurve durch $c(0) = g(\tilde{c}(0)) \in M$. So ist $c'(0) = d_{\tilde{c}(0)} g(c'(\tilde{c}(0))) \in T_{c(0)} M$. Also gilt $d_y g(\mathbb{R}^n) \subset T_{g(y)} M$ und die Gleichheit folgt wie in (i) durch die Dimension.

1.5 Das Tangentialbündel einer abstrakten Mannigfaltigkeit

1.5.1 Definition

Sei M^n eine abstrakte Mannigfaltigkeit, $x \in M$. Ein **Tangentialvektor** von M in x ist eine Äquivalenzklasse von Kurven $\alpha : I \rightarrow M$ mit $\alpha(0) = x$. Dabei heißen $\alpha : I \rightarrow M$ und $\beta : J \rightarrow M$ äquivalent, falls eine Karte (U, φ) um x existiert mit

$$(\varphi \circ \alpha)'(0) = (\varphi \circ \beta)'(0)$$



Notation

$T_x M$ = Raum der Tangentialvektoren

1.5.2 Bemerkung

- (i) Gilt die oben genannte Äquivalenzbedingung für eine Karte, dann gilt sie für alle.

Beweis

Sei (V, ψ) eine andere Karte. Es gilt

$$\begin{aligned} (\psi \circ \alpha)'(0) &= (\psi \circ \varphi^{-1} \varphi \circ \alpha)'(0) \\ &= d_{\varphi(\alpha(0))}(\psi \circ \varphi^{-1})((\varphi \circ \alpha)'(0)) \\ &= d_{\varphi(\beta(0))}(\psi \circ \varphi^{-1})((\varphi \circ \beta)'(0)) = (\psi \circ \beta)'(0) \end{aligned}$$

- (ii) $T_x M$ ist n -dimensionaler Vektorraum $_{\mathbb{R}}$.

Beweis

Sei (U, φ) eine Karte um x . Sei $\Gamma_{(U, \varphi, x)} : T_x M \rightarrow \mathbb{R}^n$, $[\alpha] \mapsto (\varphi \circ \alpha)'(0)$. Aus der Äquivalenzrelation folgt, dass Γ wohldefiniert und bijektiv. Also können wir die Vektorraumstruktur auf $T_x M$ durch $\Gamma_{(U, \varphi, x)}$ erklären. Dies ist wohldefiniert, da $d_{\varphi(x)}(\psi \circ \varphi^{-1})$ für jede weitere Karte (V, ψ) um x ein linearer Isomorphismus ist. (Da $\psi \circ \varphi^{-1}$ Diffeomorphismus.)

1.5.3 Definition

Sei M eine Mannigfaltigkeit, $x \in M$, (U, φ) und (V, ψ) zwei Karten um x . Seien $u, v \in \mathbb{R}^n$. Als Äquivalenzrelation ist definiert:

$$u \sim v \stackrel{\text{Def.}}{\iff} v = d_{\varphi(x)}(\psi \circ \varphi^{-1})(u)$$

Ein **Tangentialvektor** in x auf M ist eine solche Äquivalenzklasse $[(U, \varphi, u)]$



1.5.4 Bemerkung

Sei $x \in M$, (U, φ) Karte um x . So ist

$$\Theta_{(U, \varphi, x)} : \begin{matrix} u \\ \in \varphi(x) + \mathbb{R}^n \end{matrix} \rightarrow [(U, \varphi, u)] \in T_x M$$

eine Bijektion, die wohldefiniert $\text{VR}|_{\mathbb{R}^n}$ auf $T_x M$ induziert.

1.5.5 Definition

$TM := \bigcup_{x \in M} T_x M$ ist das **Tangentialbündel** von M .

1.5.6 Theorem

TM^n trägt eine natürliche Differentialstruktur und hat die Dimension $2n$. (Beweis benutzt 1.8.2)

Beweis

Definiere $\pi : TM \rightarrow M$, $\xi \in T_x M \mapsto \pi(\xi) = x \in M$ "Fußpunkt". π ist surjektiv. Wir wollen nun 1.8.3 anwenden. Für Karte (U, φ) um $x \in M$ definiere $(\pi^{-1}(U), \Phi_{(U, \varphi)})$ durch

$$\Phi_{(U, \varphi)}(\xi) = (\varphi \circ \pi(\xi), \Theta_{(U, \varphi, \pi(\xi))}^{-1}(\xi))$$

Es gilt $\bigcup_{(U, \varphi)} \pi^{-1}(U) = TM$ und $\Phi_{(U, \varphi)}(\pi^{-1}(U)) = \varphi(U) \times \mathbb{R}^n \stackrel{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ist eine Bijektion, da Θ bijektiv.

Verifiziere (i) und (ii):

(i)

$$\underbrace{\Phi_{(V, \psi)}^{-1} \left(\begin{matrix} a \\ \in \varphi(v) \end{matrix}, v \right)}_{T_{\psi^{-1}(a)} M} = \Theta_{(V, \psi, \psi^{-1}(a))}(v) \xrightarrow{\Phi_{(V, \psi)}} \left(\psi(\psi^{-1}(a)), \Theta_{(V, \psi, \psi^{-1}(a))}^{-1}(\Theta_{(V, \psi, \psi^{-1}(a))}(v)) \right)$$

Berechne Übergangsfunktion:

$$\Phi_{(U, \varphi)} \circ \Phi_{(V, \psi)}^{-1}(a, v) = \Phi_{(U, \varphi)}(\Theta_{(V, \psi, \psi^{-1}(a))}(v)) = (\varphi \circ \psi^{-1}(a), d_{\varphi(a)}(\varphi \circ \psi^{-1})(v))$$

(Beachte hierbei, das $T_{\varphi^{-1}(a)} \ni [(V, \psi, v)] = [(U, \varphi, d_{\psi(a)}(\varphi \circ \psi^{-1})(v))]$)

(ii) Seien $\xi, \eta \in TM$. Falls $\pi(\xi) = \pi(\eta)$, so sind $\xi, \eta \in \pi^{-1}(U)$ für eine Karte um x . Falls $\pi(\xi) = x$, $\pi(\eta) = y$, $x \neq y$, so ist $\xi \in \pi^{-1}(U)$, $\eta \in \pi^{-1}(V)$ für Karten U, V von x, y mit $U \cap V = \emptyset$, (diese existieren, da M Hausdorff). Also $\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V) = \emptyset$.

1.5.7 Lemma

Sei M eine Menge mit Überdeckung $\{U_i \subset M\}_{i \in I}$, das heißt $\bigcup_{i \in I} U_i = M$. Seien für alle $i \in I$ $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ Bijektionen mit offene Mengen $\varphi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^n$. Falls

(i) $\forall i, j \in I$ $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ ist glatt

(ii) $\forall x, y \in M$ gilt $\exists i \in I$ $x, y \in U_i$ oder $\exists i, j$ und $U_i \cap U_j = \emptyset$ mit $x \in U_i$ und $y \in U_j$

dann existiert eine eindeutig bestimmte Hausdorff-Topologie auf M und eine differenzierbare Struktur, für die $\{U_i, \varphi_i\}$ ein Atlas ist.

Beweis

(i) \leadsto Übergangsfunktion sind Diffeomorphismen

(ii) \leadsto Hausdorff

Siehe auch O'Neill.

Θ aus 1.7.14. Wieso genügt es nicht, Φ als Θ^{-1} zu erklären? Ich denke um zu gewährleisten, dass Φ bijektiv ist.

1.5.8 Bemerkung

Ist M eine sogenannte C^p -Mannigfaltigkeit, das heißt die Übergangsfunktionen sind C^p , so folgt mit dem Beweis von 1.8.2, dass TM eine C^{p-1} -Mannigfaltigkeit ist.

TM ist ein spezielles Beispiel der folgenden Klasse an Mannigfaltigkeiten.

1.5.9 Definition

Seien E, B zwei Mannigfaltigkeiten und $\pi : E \rightarrow B$ glatt. (E, B, π) heißt **Vektorbündel** vom Rang r über B , falls

- (i) π surjektiv
- (ii) Es existiert eine offene Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ von B und Diffeomorphismen $\Phi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{R}^r$, sodass $\forall x \in U_i : \Phi_i(\pi^{-1}(x)) = \{x\} \times \mathbb{R}^r$.
- (iii) Die "Übergangsfunktionen"

$$\Phi_{ji} = \Phi_j \circ \Phi_i^{-1} : U_{ji} \times \mathbb{R}^r \rightarrow U_{ji} \times \mathbb{R}^r$$

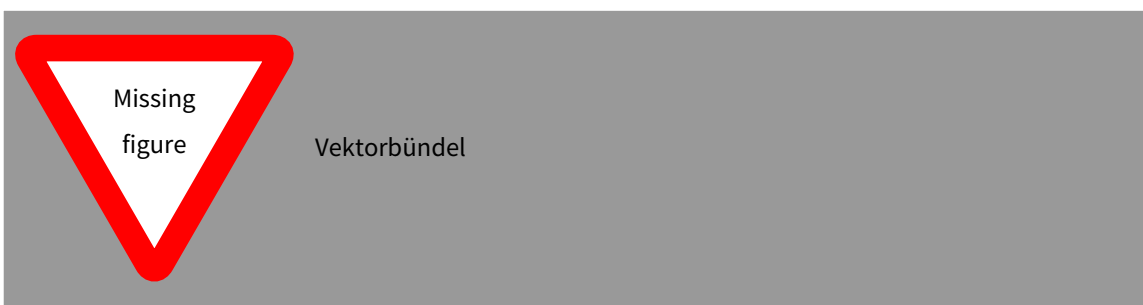
sind von der Form $\Phi_{ji}(x, v) = (x, g_{ji}(x)v)$, wobei $g_{ji} : U_{ji} \rightarrow GL(r, \mathbb{R})$, das heißt $g_{ji} = \left((u_{kl}(x))_{k,l=1}^r \right)$

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\Phi_i} & U_i \times \mathbb{R}^n \\ & \searrow \pi & \swarrow pr_1 \\ & U_i & \end{array}$$

Insbesondere ist $\Phi_{ji}(x, \cdot) : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^r$ ein linearer Isomorphismus gegeben durch $g_{ji}(x) \in GL(r, \mathbb{R})$

Notation

- E Totalraum
- B Basis
- $\pi^{-1}(x)$ Faser über x



1.5.10 Beispiel

- (i) Sei M eine Mannigfaltigkeit. $E = M^n \times \mathbb{R}^r \xrightarrow{\pi=pr_1} M$ surjektiv und glatt, so ist dies ein "triviales Bündel", $\Phi: \pi^{-1}(M) = M^n \times \mathbb{R}^r \xrightarrow{\text{id}} M^n \times \mathbb{R}^r$, $\Phi(x, \cdot) = \text{id} \in GL(r, \mathbb{R})$. Allgemein sagen wir, das (E, π, B) trivial ist, falls ein Diffeomorphismus $\Phi: E \rightarrow B \times \mathbb{R}^r$ existiert mit

$$r = \text{Rang von } E$$

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\Phi_i} & B \times \mathbb{R}^n \\ \searrow \pi & & \swarrow pr_1 \\ & B & \end{array}$$

kommutativ und $\forall x \in B$ ist $\Phi|_{\pi^{-1}(x)}$ ein linearer Isomorphismus.

- (ii) $TM \rightarrow M$ ist ein Vektorbündel vom Rang $n = \dim M$. Vergleiche dazu Karten $\Phi_{(U, \varphi)}$ aus 1.8.1.

1.5.11 Bemerkung

- (i) Insbesondere gilt für alle $x \in B$ ist $\pi^{-1}(x)$ Faser über x ein r -dim $VR|_{\mathbb{R}} \rightsquigarrow$ "Vektorbündel". So sei $\xi, \eta \in \pi^{-1}(x) \simeq \mathbb{R}^r$. Es gilt

$$\xi + \eta = \Phi^{-1}(\overbrace{\underbrace{\Phi(\xi)}_{=(x,u)} + \underbrace{\Phi(\eta)}_{=(x,v)}}^{=(x,u+v)})$$

- (ii) Ist B zusammenhängend, so ist E zusammenhängend. (Dies folgt aus der Tatsache das Fasern zusammenhängend sind und allgemeinen topologischen Argumenten.)

1.6 Das Differential einer glatten Abbildung

1.6.1 Definition

Das **Differential** einer glatten Abbildung $f : M \rightarrow N$ in $x \in M$ ist definiert durch

$$d_x : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N, \quad d_x f([(U, \varphi, u)]) = [(V, \psi, d_{\varphi(x)}(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(u))]$$

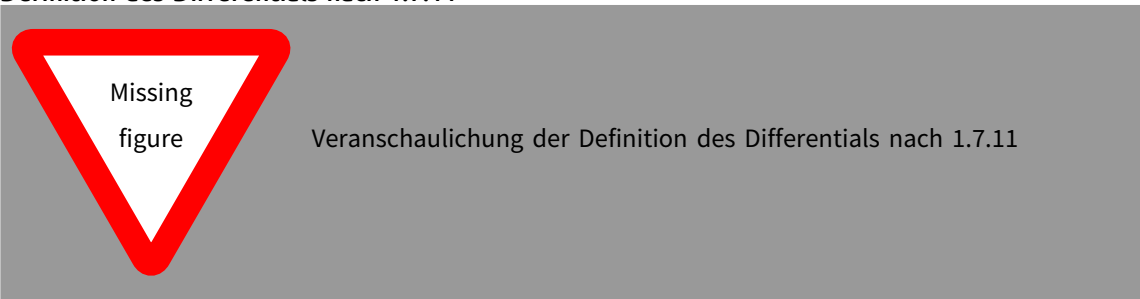
(kurz: $d_x f(u) = v \in T_x N$ für Karten (U, φ) um x und (V, ψ) um $f(x)$)

Dies ist wohldefiniert, denn sei $(\tilde{U}, \tilde{\varphi}, \tilde{u}) \sim (U, \varphi, u)$, so gilt mit der Kettenregel

$$d_{\tilde{\varphi}(x)}(\psi \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1})(\tilde{u}) = d_{\tilde{\varphi}(x)}(\psi \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1})(d_{\varphi(x)}(\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1})(u)) = d_{\varphi(x)}(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(u)$$

Genauso hängt das Bild nicht von ψ und φ ab, das heißt das Differential von f ist intrinsisch definiert.

Definition des Differentials nach 1.7.11



Sei $f : M \rightarrow N$ glatt, $[\alpha] \in T_x M$ im Sinne von 1.7.11, so gilt für das **Differential**

$$d_x f([\alpha]) = [f \circ \alpha] \in T_{f(x)} N$$

1.6.2 Theorem

Seien $f : M \rightarrow N$ und $g : N \rightarrow P$ zwei glatte Abbildungen in $x \in M$ bzw. $f(x) \in N$. Dann ist $g \circ f : M \rightarrow P$ glatt in x und

$$d_x(g \circ f) = d_{f(x)}g \circ d_xf : T_xM \rightarrow T_{f(x)}N \rightarrow T_{(g \circ f)(x)}P$$

Beweis

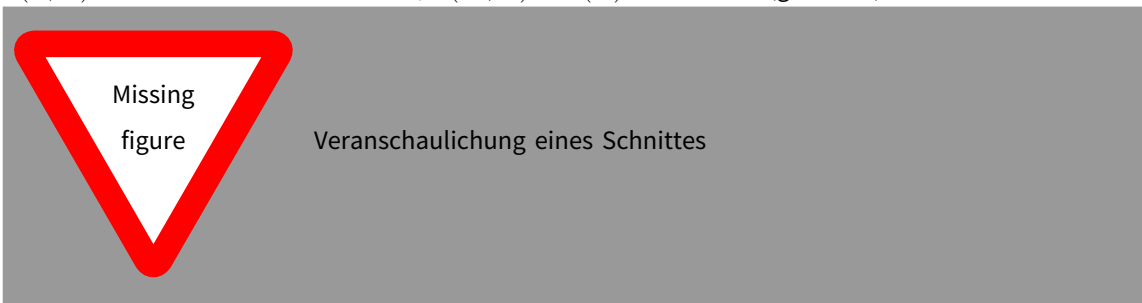
Übung

1.7 Vektorfelder

Sei $E \xrightarrow{\pi} B$ ein Vektorbündel. Eine glatte Abbildung $\sigma : M \rightarrow E$ heißt Schnitt von E , falls $\pi \circ \sigma = \text{id}_M$.

($\sigma : U \xrightarrow{\text{offen}} M \rightarrow E$ glatt heißt lokaler Schnitt, falls $\pi \circ \sigma = \text{id}_U$.)

$\Gamma(U, E)$ = Raum der lokalen Schnitte, $\Gamma(M, E) = \Gamma(E)$ = Raum der (globalen) Schnitte.



1.7.1 Definition

Ein **Vektorfeld** X ist ein Schnitt von TM , das heißt $X \in \Gamma(TM)(=: \mathcal{X}(M))$

Das X muss anders
aussehen..

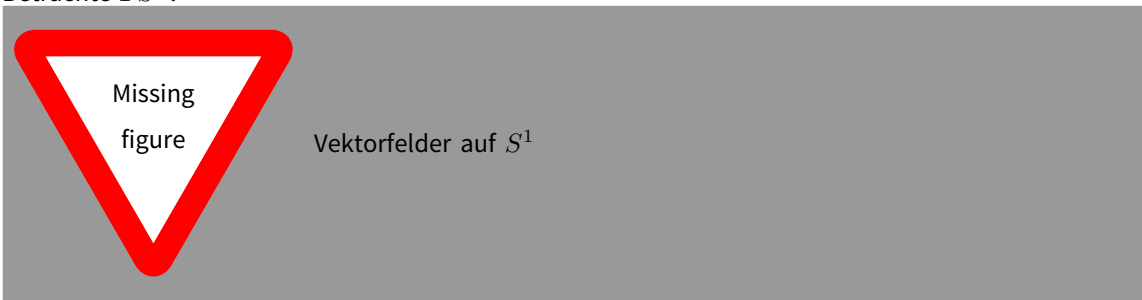
1.7.2 Bemerkung

$\Gamma(TM)$ (allgemein $\Gamma(E)$ für E Vektorbündel) ist ein \mathbb{R} -Vektorraum. Es gilt

$$(X + Y)(x) := X(x) + Y(x) \in T_xM \xrightarrow{\pi} \{x\}$$

1.7.3 Beispiel

Betrachte TS^n :



$X \in \Gamma(TS^n)$ ist $X : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ glatt mit $g_0(X(x), x) = 0$, wobei g_0 das Skalarprodukt.

Übungsaufgabe

E ist genau dann trivial, wenn r Schnitte $\sigma_1(x), \dots, \sigma_r(x) \in \Gamma(E)$ existieren, die in jeden Punkt linear unabhängig sind, das heißt $\forall x \in M : \sigma_1(x), \dots, \sigma_r(x)$ Basis von $\pi^{-1} =: E_x$

1.7.4 Satz

TM^n ist genau dann trivial, wenn n Vektorfelder X_1, \dots, X_n existieren, die in jeden Punkt linear unabhängig sind. Man nennt M^n dann auch **parallelisierbar**.

1.7.5 Bemerkung

Parallelisierbarkeit ist eine sehr starke Bedingung! So ist zum Beispiel der S^1 parallelisierbar, der S^2 jedoch nicht.

Wir beginnen nun den 3. Ansatz zur Definition des Tangentialraums vorzustellen, die Definition des Algebraiters.

1.7.6 Definition

Seien $x \in M$, U und V offene Umgebungen um x . Sei ferner $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ zwei glatte Funktionen. Wir sagen, dass f äquivalent zu g ist, falls offene Umgebung $W \subset U \cap V$ existiert mit $f|_W = g|_W$. Die Äquivalenzklasse heißt **Keim** von f in x und wird $[f, x]$ geschrieben (oder einfach nur $[f]$ falls x klar, oder sogar nur f). Die Menge der Keime in x wird mit $C_x^\infty(M)$ oder kurz C_x^∞ bezeichnet.

1.7.7 Bemerkung

- (i) C_x^∞ ist (∞) -dimensionaler reeller Vektorraum: $[f] + [g] = [f + g]$. Es ist sogar eine Algebra.
- (ii) Es gilt $C_x^\infty(M) \simeq C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Sei (U, φ) Karte um x mit $\varphi(x) = 0$. So ist $[f] \in C_x^\infty(M) \mapsto [f \circ \varphi^{-1}] \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ der gewünschte Isomorphismus. Aber: Dieses Isomorphismus ist nicht kanonisch, das heißt er hängt von φ ab!
- (iii) $U \subset M$ offen und $x \in U$, dann ist $C_x^\infty(U) = \{[f|_U] \mid f : U \rightarrow \mathbb{R} \text{ glatt}\} \simeq C_x^\infty(M)$.
 Klar: $[f] \in C_x^\infty(M) \mapsto [f|_U] \in C_x^\infty(U)$. Bleibt die Surjektivität zu zeigen: Sei $[g] \in C_x^\infty(M)$, $g : U \rightarrow \mathbb{R}$. Sei $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Cut-Off Funktion, also mit $\text{supp } \psi \subset U$ und $\psi \equiv 1$ auf Umgebung W von x . So ist $\psi|_U \cdot g : U \rightarrow \mathbb{R}$ glatt und $(\psi|_U \cdot g)|_{U \cap (\text{supp } \psi)^c} \equiv 0$. Setze $\psi|_U \cdot g$ durch 0 auf U^c fort, es ergibt sich $\tilde{g} : M \rightarrow \mathbb{R}$ glatt mit $\tilde{g}|_W = \psi|_W \cdot g|_W = g|_W$, also $[\tilde{g}] \in C_x^\infty(M) \mapsto [\tilde{g}|_U] = [g] \in C_x^\infty(U)$.

In meiner Mitschrift steht $[f \circ \varphi]$ und nicht $[f \circ \varphi^{-1}]$, das macht jedoch keinen Sinn. Meinungen sind erwünscht.

1.7.8 Definition

Eine **Derivation** auf $C_x^\infty(M)$ ist eine lineare Abbildung $\delta : C_x^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\delta(fg) = f(x)\delta(g) + \delta(f)g(x)$$

Notation

D_x = Raum der Derivationen auf C_x^∞

1.7.9 Satz

Jede Derivation $\delta \in D_0(\mathbb{R}^n)$ ist von der Form

$$\delta(f) = \sum_{j=1}^n v^j \frac{\partial f}{\partial x^j}(0) \quad \text{für } v^j \in \mathbb{R}$$

Beweis

- Sei $U \subset \mathbb{R}^n$. $f \mapsto \frac{\partial}{\partial x^j} f(0)$ ist eine Derivation, da $\frac{\partial}{\partial x^j} f(0)$ nur von $[f]$ abhängt.
- $\delta(c) = c \cdot \delta(1) = 0$, da $\delta(1) = \delta(1 \cdot 1) = \delta(1) + \delta(1) = 2\delta(1)$. Es folgt $\delta(f - f(0)) = \delta(f)$, wobei

$$f - f(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx) dt = \sum_{j=1}^n x^j \underbrace{\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x^j} f(tx) dt}_{h_j(x)}$$

Somit gilt

$$\delta(f) = \delta(f - f(0)) = \delta\left(\sum_{j=1}^n x^j h_j(x)\right) = \sum_{j=1}^n \delta(x^j) h_j(0) + x^j(0) \delta(h_j) = \sum_{j=1}^n v^j \frac{\partial f}{\partial x^j}(0)$$

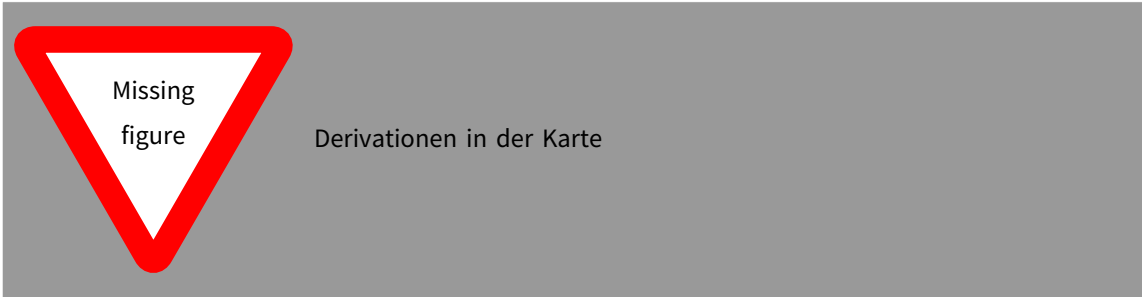
Einschub

δ lin. Abb. und
 $\delta : C_x^\infty \rightarrow \mathbb{R}$, also
 $\delta \in C_x^\infty(M)^*$

Wie schaut $\delta \in C_x^\infty(M)^*$ Derivation in der Karte φ aus?
Sei $\varphi(x) = (x^1(x), \dots, x^n(x))$. Dann definiert

$$\frac{\partial}{\partial x^j}(x) : C_x^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \frac{\partial f}{\partial x^j}(x) := \frac{\partial}{\partial x^j} (f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))$$

eine Derivation.



Insbesondere gilt dann (vgl. 1.10.10), wobei $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$, also $x^j : U \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\delta f \in C_x^\infty(M) \simeq C_0^\infty(\mathbb{R}^n) = \sum_j \delta(x^j) \frac{\partial}{\partial x^j}(x)$$

Definiere für $v \in T_x M$ die Derivation:

$$\mathcal{L}_v f := d_x f(v) \in \mathbb{R}$$

das heißt $\mathcal{L}_v : C_x^\infty(M) \rightarrow (\mathbb{R})$.

1.7.10 Theorem

$v \in T_x M \rightarrow \mathcal{L}_v \in \mathcal{D}_x(M)$ ist ein linearer Isomorphismus.

Beweis

- Linearität klar
- Surjektivität: Sei $v = [(U, \varphi, u)] \in T_x M$, $f \in C_x^\infty(M)$. Es gilt

$$\mathcal{L}_v f = d_x f(v) = d_{\varphi(x)}(f \circ \varphi^{-1})(u) = \sum_{j=1}^n u^j \frac{\partial}{\partial x^j} (f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)) = \sum_{j=1}^n u^j \frac{\partial}{\partial x^j} f(x)$$

Ist also $\delta \in \mathcal{D}_x(M)$, dann $\delta = \mathcal{L}_{v_\delta} f$ mit $v_\delta = [U, \varphi, (\delta(x^1), \dots, \delta(x^n))]$

- Injektivität: Angenommen $\mathcal{L}_v f = 0$ für alle $f \in C_x^\infty(M)$ und $v = [(U, \varphi, u)]$ mit oBdA $u = (u^1, \dots, u^n)$, $u^1 \neq 0$. Sei g auf $\varphi(U)$ C^∞ mit $\partial_1 g(\varphi(x)) \neq 0$, $g \equiv g(x^1)$. Es folgt $\partial_j g(\varphi(x)) = \partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $j \geq 2$. So ist

$$\mathcal{L}_v(g \circ \varphi) = \sum_{j=1}^n u^j \frac{\partial}{\partial x^j} g(\varphi(x)) = u^1 \frac{\partial}{\partial x^1} g(\varphi(x)) \neq 0$$

Also folgt aus $\mathcal{L}_v f = 0$ für alle $f \in C_x^\infty(M)$, dass $v = 0$, das heißt Injektivität.

Insbesondere definiert $\frac{\partial}{\partial x^j}(x)$ für $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ Karte einen Vektor in $T_x M$.

Übungsaufgabe

- $x \in U \mapsto \frac{\partial}{\partial x^j}(x) \in T_x M$ glatt, das heißt $\frac{\partial}{\partial x^j} \in \Gamma(U, TM|_U)$ "Schnitt von TM über U" oder ein Vektorfeld auf U.
- $\forall x \in U$ ist $(\partial_{x^1}, \dots, \partial_{x^n})$ eine Basis von $T_x M$.



Insbesondere folgt: Sind a^1, \dots, a^n glatte Funktionen auf $U \subset M$, (U, φ) Karte. So folgt

$$X(x) = \sum_i a^i(x) \partial_{x^i}(x) \in T_x M$$

ist ein glattes Vektorfeld auf U. Umgekehrt ist jedes $X \in \Gamma(U, TM)$ von dieser Form, das heißt ist $X \in \Gamma(TM)$, so gilt

$$X|_{(U, \varphi)} = \sum a^j(x) \partial_j(x) = \begin{pmatrix} a^1(x) \\ \vdots \\ a^n(x) \end{pmatrix} \quad \text{Vektor mit glatten Einträgen}$$

beschreibt Vektorfeld lokal.

1.7.11 Definition

Eine **Derivation** auf M ist eine Abbildung $\delta : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ mit

$$\delta(fg) = f\delta(g) + \delta(f)g$$

Beispiel

Sei $X \in \Gamma(TM)$, so definiert

$$\left(\mathcal{L}_X \begin{matrix} f \\ \in C^\infty(M) \end{matrix} \right)(x) = \mathcal{L}_{X(x)}[f, x] = d_x f(X(x)) =: df(X)(x)$$

eine Derivation auf M .

1.7.12 Bemerkung

Eine Derivation auf M ist ein lokaler Operator $\delta : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$, das heißt ist $f \in C^\infty(M)$ mit $f|_U = 0$, so folgt $(\delta f)|_U = 0$. Sei nämlich $x \in U$. Dann nehme $\psi \in C^\infty(M)$ mit $\psi(x) = 1$, $\text{supp } \psi \subset U$, also $\psi|_{U^c} \equiv 0$. So gilt $\psi \cdot f \equiv 0$ auf M , das heißt $\delta(\psi f) = 0$. Es gilt

$$\delta(\psi f)(x) = \underbrace{\delta(\psi)(x)}_{=0} f(x) + \underbrace{\psi(x)}_{=1} \delta(f)(x) = \delta(f)(x)$$

für alle $x \in U$. Also $(\delta f)|_U = (\delta(\psi f))|_U = 0$.

1.7.13 Theorem

$\Gamma(TM) \rightarrow \mathcal{D}$, $X \mapsto \mathcal{L}_X$ ist ein Linearer Isomorphismus.

Beweis

- Abbildung ist wohldefiniert:

Sei $X|_U = \sum_j a^j \delta X_j$, so gilt $\mathcal{L}_{X(x)}[f, x] = \sum_j \underbrace{a^j(x)}_{C^\infty} \underbrace{\delta_j f(x)}_{C^\infty}$. Also $\mathcal{L}_X : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$.

- Abbildung injektiv:

Angenommen $\mathcal{L}_X f = 0$ für alle $f \in C^\infty(M)$, das heißt $\mathcal{L}_X = 0$. Es ist zu zeigen, dass $X = 0$. Dazu:

$$\mathcal{L}_X f(x) = \mathcal{L}_{X(x)}[f, x] = 0 \quad \forall [f, x] \in C_x^\infty(M)$$

In 1.7.10 wurde gezeigt, dass $T_x M \simeq D_x$, also aus $\mathcal{L}_v[f, x] = 0$ für alle $[f, x] \in C_x^\infty(M)$ folgt $v = 0$. Somit gilt $\mathcal{L}_X f(x) = 0 \quad \forall f \in C^\infty(M) \Rightarrow X(x) = 0 \quad \forall x$, also $X = 0$.

- Abbildung surjektiv:

Sei $\delta \in \mathcal{D}(M)$. Gesucht ist dann $X \in \Gamma(TM)$ mit $\mathcal{L}_X = \delta$. Dazu sei $\underbrace{X(x)}_{\in T_x M \simeq \mathcal{D}_x} = \delta_x$ definiert durch

$\delta_x[f, x] = (\delta f)(x)$. Es muss gezeigt werden, dass δ_x wohldefiniert ist. Dafür nehmen wir $[f, x] = [g, x]$ an. Nach der Definition 1.10.7 der Keime existiert eine Umgebung V von x mit $f|_V = g|_V$, also $(f - g)|_V = 0$. Mit Bemerkung 1.7.12 folgt $\delta(f - g)|_V = 0$ und insbesondere $\delta(f)(x) = \delta(g)(x)$. Also ist die Definition von X wohldefiniert und es gilt $X : M \rightarrow TM$ mit $\pi \circ X = \text{id}_M$. Es bleibt zu zeigen, dass X glatt ist. Dazu gilt für geeignete Karte (U, φ)

$$\delta_x(f) \stackrel{1.10.10}{=} \sum_j \delta_x(x^j) \delta_{x^j} f(x) = \sum_j \delta(x^j)(x) \cdot \delta_x^j f(x)$$

Also

$$X(x) = \sum_j \delta_x(x^j) \delta_{x^j}(x) = \sum_j \underbrace{\delta(x^j)(x)}_{C^\infty} \cdot \delta_x^j(x)$$

das heißt X ist C^∞ .

Im nächsten Abschnitt wollen wir uns anschauen, wie \mathcal{L}_X und \mathcal{L}_Y sinnvoll verkettet werden können. So ist

$$\mathcal{L}_X \circ \mathcal{L}_Y : C^\infty(M) \xrightarrow{\mathcal{L}_Y} C^\infty(M) \xrightarrow{\mathcal{L}_X} C^\infty(M)$$

im Allgemeinen falsch, aber

1.7.14 Definition und Satz

Sei $X, Y \in \Gamma(TM) \rightarrow \mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y \in \mathcal{D}$. So ist

$$[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] := \mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X$$

der **Kommutator** bzw. die **Lie-Klammer** von X und Y eine Derivation von M . Das zugehörige Vektorfeld wird $[X, Y]$ geschrieben, das heißt $\mathcal{L}_{[X, Y]} = [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y]$

Beweis

Es ist zu zeigen, das $[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y]$ die Leibniz-Regel für $f, g \in C^\infty(M)$ erfüllt.

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y](fg) &= \mathcal{L}_X(f\mathcal{L}_Y g + g\mathcal{L}_X f) - (\mathcal{L}_Y)(f\mathcal{L}_X g) \\ &= \mathcal{L}_X f \mathcal{L}_Y g + f \mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y g + \mathcal{L}_X g \mathcal{L}_Y f + g \mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y f \\ &\quad - \mathcal{L}_Y f \mathcal{L}_X g - f \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X g - \mathcal{L}_Y g \mathcal{L}_X f - g \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X f \\ &= f[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y](g) + g[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y](f) \end{aligned}$$

1.8 Der Fluß eines Vektorfeldes

Frage: Existiert $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $c(0) = x$, $\frac{d}{dt}c(t) = c'(t) = X(c(t))$

Wir wissen aus Analysis (I-IV), das Lösung mit Startbedingung $c(0) = x$ lokal um 0 (das heißt $I = (-\epsilon, \epsilon)$) existieren und $\psi_X : U \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\psi(x, t) = c_x(t)$ glatte Abbildung. Wie sieht das auf Mannigfaltigkeiten aus?

1.8.1 Satz und Definition

Sei $X \in \Gamma(TM)$, $x \in M$. Dann existiert eine Kurve $c_x : 0 \in I \rightarrow M$ mit $c_x(0) = x$, $c'_x(t) := d_t c_x(\frac{d}{dt}) = X(c(t))$, die sogenannte **Integralkurve** von X durch x .

Beweis

Lesen in Karte + Standard ODE Theorie (\leadsto Berger-Gostiaux)

1.8.2 Bemerkung

Es folgt mit ODE - Theorie: Sind $c_x : I \rightarrow M$, $\tilde{c}_x : \tilde{I} \rightarrow M$ zwei Integralkurven von X durch x , dann gilt $\tilde{c}_x = c_x$ auf $\tilde{I} \cap I$. Es existiert ein maximales Intervall I_x mit Integralkurve $c_x : I_x \rightarrow M$

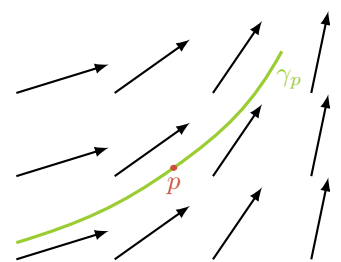


Abb. 7: Integralkurve in einem Vektorfeld des \mathbb{R}^2

Ausführlich wurde Picard - Lindelöf für Mfkt. in der Mitschrift zu Diffformen und Mfkt. aus dem letzten Semester behandelt

1.8.3 Satz und Definition

Für $x \in M$ existiert Umgebung U um x und I Intervall um 0, sodass die Abbildung

$$\psi_X : U \times I \rightarrow M, \psi_X(x, t) := c_x(t)$$

glatt ist. ψ_X heißt **lokaler Fluß** von X . (c_x kann auf I_X mit $I \subsetneq I_X$ definiert sein.)

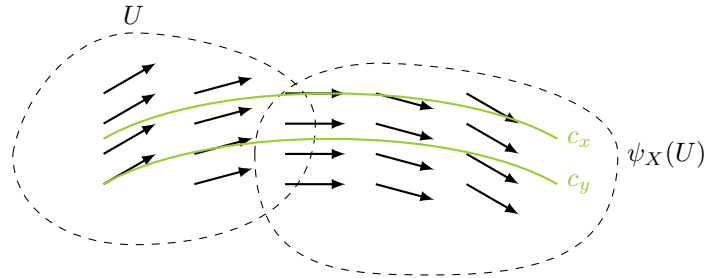


Abbildung 8: lokaler Fluß eines Vektorfeldes

1.8.4 Beispiel

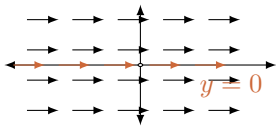


Abb. 9: Vektorfeld auf \mathbb{R}^2

Sei $X(x, y) = \partial_{x^1}(x, y)$ Vektorfeld auf \mathbb{R}^2 , so ist $c_{(x, y)} = (x, y) + (t, 0)$ eine Integralkurve von X , denn $c'_{(x, y)}(t) = \partial_{x^1}(c(t)) = X(c(t))$.

Für $y \neq 0$ ist $c_{(x, y)}(t)$ auf ganz \mathbb{R}^2 definiert. Falls $y = 0$ ist $c_{(x, 0)} : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$ für $x > 0$ und $c_{(x, 0)} : (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}^2$ für $x < 0$.

.

1.8.5 Definition

Sei $X \in \Gamma(TM)$, definiere

$$\mathcal{D}_X := \{(x, y) \mid x \in M, t \in I_X\} \stackrel{\text{offen}}{\subset}$$

wobei I_X max. Intervall von c_x . Die glatte Abbildung $\psi_X : \mathcal{D}_X \rightarrow M$, $(x, t) \mapsto \psi_X(x, t) = c_x(t)$ heißt **globaler Fluß**. X heißt vollständig, falls $\mathcal{D}_X = M \times \mathbb{R}$.

1.8.6 Proposition

Für einen vollständigen Fluß Ψ gilt. (Schreibweise $\Psi_t(x) = \Psi(x, t)$, $\Psi : M \rightarrow M$)

1. $\Psi_0 = \text{id}_M$
2. $\Psi_s \circ \Psi_t = \Psi_{s+t}$
3. Ψ_t ist ein Diffeomorphismus und $(\Psi_t)^{-1} = \Psi_{-t}$

Das heißt Ψ definiert einen Gruppenhomomorphismus $(\mathbb{R}, +) \rightarrow \text{Diff}(M)$. So etwas nennt man eine 1-Parametergruppe.

1.8.7 Bemerkung

1.10.17 gilt für lokale Flüsse, sofern die Ausdrücke definiert sind. Ein lokaler Fluß: $\Psi_t : U \rightarrow M$ ist ein Diffeomorphismus auf das Bild.

1.8.8 Satz

Jedes Vektorfeld mit kompakten Träger ist schon vollständig. Insbesondere ist jedes Vektorfeld auf kompakten Mannigfaltigkeiten vollständig.

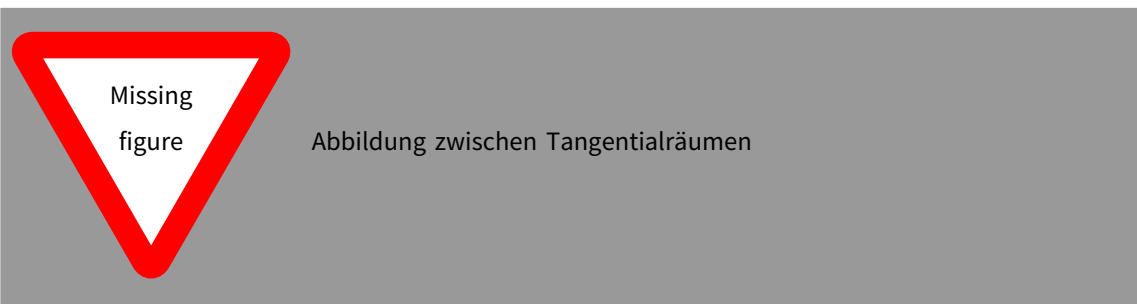
Beweis

- (i) Sei $K = \text{supp } X = \overline{\{x \in M \mid X(x) \neq 0\}}$. Für $x \in K^c$ ist $c_x(t) = x \forall t \in \mathbb{R}$ die Integralkurve von X um x . $\text{da } c'_x(t) = X(c(t)) = 0$
- (ii) Es gibt eine endliche Überdeckung $K \subset \bigcup_j U_j$, sodass der lokale Fluss $\Psi^{(j)} : U_j \times (-\epsilon_j, \epsilon_j) \rightarrow M$ definiert ist. Setze $\epsilon = \min_j \epsilon_j > 0$, dann ist $M \times (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathcal{D}_X$.
- (iii) Angenommen $c < \infty$, sodass $c_x(s) = \Psi_s(x)$ nur für $|s| < c$ existiert. Dann betrachte

$$c_{\Psi_s(x)}(t) = \Psi(\Psi_s(x), t) = \Psi_t(\Psi_s(x)) = \Psi_{t+s}(x)$$

definiert für $|t| < \epsilon$ (nach (ii)). Wähle s, t , sodass $s + t > c$. \nexists Also existiert $c_x(s)$ für alle $s \in \mathbb{R}$.

1.9 Verhalten von Vektorfeldern unter Diffeomorphismen



1.9.1 Proposition und Definition

Sei $\phi : M \rightarrow N$ ein Diffeomorphismus. $X \in \Gamma(TM)$, dann ist durch $y \mapsto \phi_* X(y) = d_{\phi^{-1}(y)} \phi(X(\phi^{-1}(y)))$ ein Vektorfeld auf N gegeben, der **Push-Forward** von X . Die assoziierte Derivation ist $(\mathcal{L}_{\phi_* X} f)(x) = \mathcal{L}_X(f \circ \phi)(\phi^{-1}(y))$ für $f \in C^\infty(N)$

Beweis

- (i) Es ist zu zeigen, dass $\phi_* X$ ein Vektorfeld ist. Da $\phi_* X$ ein Schnitt auf $\Gamma(TN)$ ist, bleibt Glattheit von $\phi_* X$ zu zeigen. Wähle Karten $(U, \Phi = (x^1, \dots, x^n))$ um $\phi^{-1}(y) \in M$ und $(\phi(U), \Psi = \Phi \circ \phi = (y^1, \dots, y^n))$ um $y \in N$.

Step 1: Zeige zunächst $\phi_* \delta_{x^j} = \delta_{y^j}$. Es ist $\delta_{x^j} = [U, \Phi, e_j]$, $\delta_{y^j} = [\phi(U), \Psi, e_j]$ wobei e_j Standardbasis des \mathbb{R}^n . Nach Definition gilt

$$\begin{aligned} \phi_* \delta_{x^j}(\phi^{-1}(y)) &= d_{\phi^{-1}(y)} \phi([U, \Phi, e_j]) \\ &= [\phi(U), \Psi, d_{\Phi(\phi^{-1}(y))} (\underbrace{\Psi \circ \phi \circ \Phi^{-1}}_{\text{id}_{\mathbb{R}^n}})(e_j)] \\ &= [\phi(U), \Psi, e_j] = \delta_{y^j}(y) \end{aligned}$$

Step 2: Sei $X = \sum_j a^j \delta_{x^j}$, dann gilt

$$\phi_* X(y) = \sum_j a^j(\phi^{-1}(y)) \phi_* \delta_{x^j}(y) = \sum_j a^j(\underbrace{\phi^{-1}(y)}_{\text{glatt}}) \delta_{y^j}(y)$$

Also ist $\phi_* X$ ein glattes Vektorfeld.

(ii) Mit der lokalen Form der Lie-Ableitung und der oben gezeigten Darstellung von $\phi_* X$ folgt

$$\mathcal{L}_{\phi_* X} f(y) = \sum_j a^j(\phi^{-1}(y)) \partial_{y^j} f(y)$$

für $f \in C^\infty(N)$. Nach 1.10.10 gilt

$$\begin{aligned} \partial_{y^j}(y) &= \sum_k \partial_{y^j} y^k(y) \partial_k (f \circ \Psi^{-1})(\Psi(y)) \\ &= \partial_j (f \circ \Psi^{-1})(\Psi(y)) = \partial_j (f \circ \phi \circ \Phi^{-1}) = \partial_{x^j} (f \circ \phi)(\phi^{-1}(y)) \end{aligned}$$

Somit folgt

$$\mathcal{L}_{\phi_* X} f(y) = \sum_j a^j(\phi^{-1}(y)) \partial_{x^j} (f \circ \phi)(\phi^{-1}(y)) = \mathcal{L}_X (f \circ \phi)(\phi^{-1}(y))$$

1.9.2 Bemerkung

(i) Wir schreiben $\phi^* f = f \circ \phi$ für den **Pullback** von f . Dann ist

$$\mathcal{L}_{\phi_* X} = (\phi^{-1})^* \circ \mathcal{L}_X \circ \phi$$

(ii) Es ist $(\phi \circ \psi)^* f = f \circ \phi \circ \psi = \psi^*(f \circ \phi) = \psi^* \phi^* f$, das heißt der Pullback $(\phi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \phi^*$ ist kontravariant und der Push-Forward $(\phi \circ \psi)_* X = \phi_* \circ \psi_* X$ ist kovariant.

1.9.3 Korollar

Sei $\phi : M \rightarrow N$ ein Diffeomorphismus, X, Y Vektorfelder auf M . Dann gilt

$$\phi_*[X, Y] = [\phi_* X, \phi_* Y]$$

Beweis

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{[\phi_* X, \phi_* Y]} &= \mathcal{L}_{\phi_* X} \mathcal{L}_{\phi_* Y} - \mathcal{L}_{\phi_* Y} \mathcal{L}_{\phi_* X} \\ &= (\phi^{-1})^* \circ \mathcal{L}_X \circ \phi^* \circ (\phi^{-1})^* \circ \mathcal{L}_Y \circ \phi^* - (\phi^{-1})^* \circ \mathcal{L}_Y \circ \phi^* \circ (\phi^{-1})^* \circ \mathcal{L}_X \circ \phi^* \\ &= (\phi^{-1})^* \circ \mathcal{L}_X \circ \mathcal{L}_Y \circ \phi^* - (\phi^{-1})^* \circ \mathcal{L}_Y \circ \mathcal{L}_X \circ \phi^* \\ &= (\phi^{-1})^* \circ (\mathcal{L}_X \circ \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \circ \mathcal{L}_X) \circ \phi^* \\ &= (\phi^{-1})^* \circ \mathcal{L}_{[X, Y]} \circ \phi^* = \mathcal{L}_{\phi_*[X, Y]} \end{aligned}$$

1.9.4 Proposition

Für (lokale) Flüsse gilt:

$$\Psi_{\phi_* X, t} = \phi \circ \Psi_{X, t} \circ \phi^{-1}$$

Beweis

Es ist zu zeigen, dass für alle s , für die $\Psi_{X, s}(x)$ definiert ist, gilt:

$$\frac{d}{dt} \phi \circ \Psi_{X, t} \circ \phi^{-1} \Big|_{t=s} = \phi_* X(\phi \circ \Psi_{X, s} \circ \phi^{-1})$$

(i) Sei $s = 0$. Es gilt

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{d}{dt} \phi \circ \Psi_{X,t} \circ \phi^{-1}(y) \right|_{t=0} &= \left. \frac{d}{dt} \phi(\Psi_{X,t} \circ \phi^{-1}(y)) \right|_{t=0} \\
 &= d_{\phi^{-1}(y)} \phi \left(\left. \frac{d}{dt} \Psi_{X,t}(\phi^{-1}(y)) \right|_{t=0} \right) \\
 &= d_{\phi^{-1}(y)} \phi(X(\phi^{-1}(y))) \\
 &= \phi_* X(y)
 \end{aligned}$$

(ii) Setze $r = t - s$, $\Psi_{X,t} = \Psi_{X,r} \circ \Psi_{X,s}$. Es gilt

$$\left. \frac{d}{dt} \phi \circ \Psi_{X,t} \circ \phi^{-1}(y) \right|_{t=s} = \left. \frac{d}{dr} \phi \circ \Psi_{X,r} \circ \Psi_{X,s} \circ \phi^{-1}(y) \right|_{r=0} = \phi_* X(\phi \circ \Psi_{X,s}(\phi^{-1}(y)))$$

1.9.5 Theorem

Seien $X, Y \in \Gamma(TM)$, Ψ_t sei der Fluss von Y . Dann gilt

$$\left. \frac{d}{dt} (\Psi_t^{-1})_* X \right|_{t=0} = [Y, X]$$

Beweis

siehe Skript

1.9.6 Korollar (Jacobi-Identität)

Seien $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$. Dann gilt

$$[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0$$

Beweis

Übungsaufgabe

1.9.7 Bemerkung

Sei V ein Vektorraum (in der Regel \mathbb{R} oder \mathbb{C}). Sei $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow V$ eine schiefsymmetrische bilineare Abbildung mit Jacobi-Identität, zum Beispiel $V = \Gamma(TM)$ mit $[\cdot, \cdot] = \text{Lie-Klammer}$. Dann heißt $(V, [\cdot, \cdot])$ Lie-Algebra. Ein weiteres Beispiel ist $\mathbb{R}^{n \times n}$ mit $[A, B] = AB - BA$ "Matrixkommutator". Die Lie-Algebra ist ein zentrales Objekt der Darstellungstheorie von Lie-Gruppen, zum Beispiel $GL(n, \mathbb{R})$, $O(n)$, $SU(n)$

1.10 Tensorbündel

1.10.1 Wiederholung

Seien V, W (endlich) dimensionale $\text{VR}_{|\mathbb{R}}$. Dann existiert ein $\text{VR}_{|\mathbb{R}}$ mit folgender Eigenschaft. Ist $U \text{ VR}_{|\mathbb{R}}$, dann

$$\underbrace{L_2(V \times W, U)}_{\text{bilineare Abb. } V \times W \rightarrow U} \cong \underbrace{L(V \otimes W, U)}_{\text{lineare Abb. } V \otimes W \rightarrow U}$$

Genauer:

$$\begin{array}{ccc} & & V \otimes W \\ L_2(V \times W, V \otimes W) \ni \otimes & \nearrow & \downarrow \hat{B} \\ V \times W & \xrightarrow{B} & U \end{array}$$

Abbildung 10: "universelle Eigenschaft" von \otimes

wobei $B \in L_2(V \times W, U) \simeq L(V \otimes W, U)$ gegeben durch $B \mapsto \hat{B}$. \hat{B} ist eindeutig bestimmt, das heißt $B(v, w) = \hat{B}(v \otimes w)$.

Im Allgemeinen:

$$\underbrace{L_n(V_1 \times \dots \times V_n, U)}_{n\text{-lineare Abbildung}} \simeq L(V_1 \otimes \dots \otimes V_n, U)$$

Es gilt $V \otimes W \cong W \otimes V$ und $(V \otimes W) \otimes U \cong V \otimes (W \otimes U)$, das heißt \otimes ist kommutativ und assoziativ.

Konkret

Ist $\{e_i\}_{i=1}^n, \{f_j\}_{j=1}^m$ Basis von V beziehungsweise W , so ist die Basis von $V \otimes W$ gegeben durch $\{e_i \otimes f_j\}_{i,j=1}^{n,m}$, wobei das Bild von (e_i, f_j) unter \otimes : $\otimes(e_i, f_j) = e_i \otimes f_j$. Insbesondere ist $\dim V \otimes W = \dim V \cdot \dim W$. Dann gilt für $v = \sum v^i e_i, w = \sum w^j f_j$.

$$\otimes(v, w) = v \otimes w = \otimes\left(\sum v^i e_i, \sum w^j f_j\right) = \sum_{i,j} v^i w^j e_i \otimes f_j$$

Bemerkung

(i) Seien $v, v' \in V, w \in W$, so ist $v \otimes w \in V \otimes W$ und

$$(v + v') \otimes w = \otimes(v + v', w) = \otimes(v, w) + \otimes(v', w) = v \otimes w + v' \otimes w$$

(ii) In der Regel lässt sich $t \in V \otimes W$ nicht als $v \otimes w$ für $v \in V, w \in W$ schreiben, denn sei $\{e_i \otimes f_j\}$ Basis von $V \otimes W$, das heißt $t = \sum t^{ij} e_i \otimes f_j$ für $t^{ij} \in \mathbb{R}$. Ist $t = v \otimes w = \sum_{i,j} (v^i e_i) \otimes (w^j f_j) \stackrel{(i)}{=} \sum v^i w^j e_i \otimes f_j$, das heißt $t^{ij} = v^i \cdot w^j, \forall i, j$ ist im Allgemeinen falsch. Aber $\{v \otimes w \mid v \in V, w \in W\}$ ist ein Erzeugendensystem von $V \otimes W$.

1.10.2 Beispiel

Seien $V, W \text{ VR}_{|\mathbb{R}}$, also V^*, W^* der zugehörige duale Vektorraum. Dann ist

$$\begin{aligned} V^* \otimes W^* &\cong L_2(V \times W, \mathbb{R}) \cong L(V \otimes W, \mathbb{R}) = (V \otimes W)^* \\ \alpha \otimes \beta &\in V^* \otimes W^* \mapsto ((v, w) \in V \times W \rightarrow \alpha(v)\beta(w) \in \mathbb{R}) \in L_2(V \times W, \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Zum Beispiel

Sei $V = \mathbb{R}^2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, W = \mathbb{R}^3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. So ist

$$L_2(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \mid x_j, y_j \in \mathbb{R} \right\}, \quad (\alpha_1, \alpha_2) \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = B(v, w)$$

$B = x_1 e^1 \otimes f^1 + x_2 e^1 \otimes f^2 + x_3 e^1 \otimes f^3 + \sum_{j=1}^3 y^j e^2 \otimes f^j$, e^i, f^j duale Basis. Zum Beispiel

$$B\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \sum_{j=1}^3 (x_j e^1 \otimes f^j + y_j e^2 \otimes f^j)(e_1, f_2) = \sum_{j=1}^3 x_j \underbrace{e^1(e_1)}_1 \cdot \underbrace{f^j(f_2)}_0 + y_j e^2(e_1) f^j(f_2) = x_2$$

Übungsaufgabe: $L(V, W) \simeq W \otimes V^*$

1.10.3 Tensorprodukt der linearen Abbildung

Erinnerung: Sei V, W Vektorräume und V^*, W^* der zugehörige duale Vektorraum. Sei $f : V \rightarrow W$ linearer Morphismus, so ist $f^T : W^* \rightarrow V^*$ die Transponierte von f . Seien $a \in L(V, V'), b \in L(W, W')$, so ist $a \otimes b \in L(V \otimes W, V' \otimes W')$ das Tensorprodukt von a und b definiert durch $a \otimes (v \otimes w) = a(v) \otimes b(w) \in V' \otimes W'$ und setzen es linear fort.

$$a \otimes b(v \otimes w + v' \otimes w') = a \otimes b(v \otimes w) + a \otimes b(v' \otimes w')$$

etc. Zum Beispiel

$$a \otimes b(v \otimes w + v \otimes w') = a(v) \otimes b(w) + a(v) \otimes b(w') = a(v) \otimes (b(w) + b(w')) = a(v) \otimes b(w + w')$$

1.10.4 Tensorbündel

Wir betrachten Tensoren nun über Mannigfaltigkeiten M . Definiere

$$\bigotimes^p TM = \bigcup_{x \in M} \bigotimes^p T_x M \times \{x\}$$

wobei $\bigotimes^p T_x M = \underbrace{T_x M \otimes \dots \otimes T_x M}_{p\text{-mal}} = T_x M^{\otimes p}$, das p -te Tensorprodukt von $T_x M$. Dies ist ein Vektorbündel $\pi_{\bigotimes^p TM} : \bigotimes^p TM \rightarrow M$ von Rang $(\dim M)^p$

- $v \in T_x M^{\otimes p} \times \{x\} \mapsto x = \pi_{\bigotimes^p TM}(v) \in M$
- Sei (U, φ) Karte von M , $(\pi_{\bigotimes^p TM}^{-1}(U), \Theta_{U, \varphi}^{-1})$ Karten von $\bigotimes^p TM$, so ist $(\pi_{\bigotimes^p TM}^{-1}(U), \Theta_{U, \varphi}^{-1} \otimes \dots \otimes \Theta_{U, \varphi}^{-1})$ Karte von $\bigotimes^p TM$

1.10.5 Kotangentenbündel von M

Idee: Ersetze $T_x M$ durch $T_x^* M$ und erhalte das **Kotangentenbündel** $T^* M = \bigcup_{x \in M} T_x^* M \times \{x\}$. Atlas ist gegeben durch $(\pi_{\bigotimes^1 TM}^{-1}(U), (\Theta_{U, \varphi}^{-1})^T)$. 1.10.4 und 1.10.5 können allgemein für jedes Vektorfeld durchgeführt werden, das heißt sind $E \rightarrow M, F \rightarrow M$ Vektorbündel über M , so können $E^* \rightarrow M, E \oplus F \rightarrow M, E \otimes F \rightarrow M$ etc. konstruiert werden. Insbesondere gilt: Ist x^1, \dots, x^n Koordinatensystem auf $U \subset M$, $\partial_{x^1}, \dots, \partial_{x^n}$ Basis von $TM|_U$, so ist $\partial_{x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \partial_{x^{i_p}}$ Basis von $TM^{\otimes p}$ und $(\partial_{x^i})^* =: dx^i$ Basis von $T^* M|_U$

1.10.6 Tensorbündel

Sei $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, so ist

$$\mathcal{T}_q^p M := TM^{\otimes p} \otimes T^* M^{\otimes q} \rightarrow M$$

Bündel der (p, q) -Tensoren, glatte Schnitte aus $\Gamma(\mathcal{T}_q^p M)$ heißen (p, q) -Tensor(felder).

Spezialfall

- $\mathcal{T}_0^0 M := M \times \mathbb{R}, \Gamma(\mathcal{T}_0^0) = C^\infty(M)$
- $\mathcal{T}_0^1 M := TM, \Gamma(TM)$ Vektorfelder
- $\mathcal{T}_1^0 M := T^* M, \Gamma(T^* M)$ 1-Formen
- $\mathcal{T}_0^p M := \mathcal{T}_0^p M$ kovariante Tensoren

1.10.7 Operatoren für Tensoren

Eine kleine Zeitreise zurück in die lineare Algebra.

(i) **Tensorprodukt:** $\mathcal{T}_q^p V \times \mathcal{T}_{q'}^{p'} V \rightarrow \mathcal{T}_{q+q'}^{p+p'} V$ bilinear, definiert durch:

$$\begin{aligned} & \left(v_1 \otimes \dots \otimes v_p \otimes v^1 \otimes \dots \otimes v^p, w_1 \otimes \dots \otimes w_{p'} \otimes w^1 \otimes \dots \otimes w^{p'} \right) \\ & \mapsto v_1 \otimes \dots \otimes v_p \otimes w_1 \otimes \dots \otimes w_{p'} \otimes v^1 \otimes \dots \otimes v^p \otimes w^1 \otimes \dots \otimes w^{p'} \end{aligned}$$

(ii) **Kontraktion ("Tensorverjüngung"):** $C_j^i : \mathcal{T}_q^p V \rightarrow \mathcal{T}_{q-1}^{p-1} V$, definiert durch:

$$\begin{aligned} & C_j^i(v_1 \otimes \dots \otimes v_i \otimes \dots \otimes v_p \otimes v^1 \otimes \dots \otimes v^i \otimes \dots \otimes v^q) \\ & = v^j(v_i)v_1 \otimes \dots \otimes \hat{v}_i \otimes \dots \otimes v_p \otimes v^1 \otimes \dots \otimes \hat{v}^i \otimes \dots \otimes v^q \end{aligned}$$

Beispiel

Spurbildung eines Endomorphismus $A \in \text{End}(V)$.

Ist e_1, \dots, e_n Basis von V , so können wir A also als $A = (A_j^i) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ betrachten und die Spur definieren $\text{Tr}(A) = \sum A_i^i$. Da $\text{Tr}(\Gamma A \Gamma^{-1}) = \text{Tr}(A)$ für $\Gamma \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$, ist die Definition der Spur unabhängig von der Basis.

Alternativ:

$\text{End}(V) \cong V \otimes V^*$, dann $\text{Tr}(A) = C_1^1(A)$. Zum Beispiel $v \otimes \alpha \cong A \cdot w \mapsto \alpha(w) \cdot v$, $\text{Tr}(A) = \alpha(v) \in \mathbb{R}$.

(iii) Ein Spezialfall von (ii), das **innere Produkt** für kovariante Tensoren und Vektoren. Sei $v \in V$, $\alpha \in \mathcal{T}_q^0 V = \mathcal{T}_q V$.

$$i_v \alpha := C_1^1(\underbrace{v \otimes \alpha}_{\in \mathcal{T}_q^1 V}) \in \mathcal{T}_{q-1} V = \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{q-1\text{-mal}} \cong L_{q-1}(V \times \dots \times V, \mathbb{R})$$

Konkret $i_v \alpha(v_1, \dots, v_{q-1}) = \alpha(v, v_1, \dots, v_{q-1})$.

Dies induziert entsprechende Operationen auf Mannigfaltigkeiten indem man Tensoren durch Tensorfelder ersetzt und faserweise definiert. Sei zum Beispiel $S \in \Gamma(\mathcal{T}_q^p M)$, $S' \in \Gamma(\mathcal{T}_{q'}^{p'} M)$, so ist $S \otimes S' \in \Gamma(\mathcal{T}_{q+q'}^{p+p'} M)$ definiert durch $(S \otimes S')_{x \in M} = S_x \otimes S'_x \in \mathcal{T}_{q+q'}^{p+p'} T_x M$. Es bleibt zu zeigen, das $S \otimes S'$ wirklich glatt ist. Dies ist klar, denn lokal gilt

$$\begin{aligned} S|_U &= \sum S_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_p} \otimes dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_q} \\ S'|_U &= \sum (S')_{k_1, \dots, k_{q'}}^{l_1, \dots, l_{p'}} \partial_{l_1} \otimes \dots \otimes \partial_{l_{p'}} \otimes dx^{k_1} \otimes \dots \otimes dx^{k_{q'}} \end{aligned}$$

und somit folgt lokal für das Tensorprodukt $S \otimes S'$

$$S \otimes S'|_U = \sum \underbrace{S_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p}}_{\text{glatt}} \sum (S')_{k_1, \dots, k_{q'}}^{l_1, \dots, l_{p'}} \partial_{l_1} \otimes \dots \otimes \partial_{l_{p'}} \otimes dx^{k_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_q + k_{q'}}$$

oder sei $X \in \Gamma(TM) = \Gamma(\mathcal{T}_0^1 M)$, $\alpha \in \Gamma(\mathcal{T}_1^0 M) = \Gamma(T^*M)$ mit

$$i_x(\alpha) = C_1^1(X, \alpha) = \alpha(X) \in C^\infty(M), \quad \alpha(X) \in M \stackrel{(x)}{=} T_x^* M \quad (X(x)) \in \mathbb{R}$$

so ist $\tilde{\alpha} : \Gamma(TM) \rightarrow C^\infty(M)$, definiert durch $X \mapsto \alpha(X) = i_X(\alpha)$ \mathbb{R} -linear und insbesondere auch $C^\infty(M)$ -linear.

$\Gamma(TM)$, allgemein $\Gamma(\mathcal{T}_q^p M)$ sind

(a) \mathbb{R} -Vektorräume (punktweise Addition + Skalarmultiplikation)

(b) $\underbrace{C^p(M)}_{\text{Ring}}$ -Modul: $f \in C^\infty(M)$, $S \in \Gamma(\mathcal{T}_q^p M)$, so gilt $(fS)_x = f(x) \cdot S_x$

$$\text{Dann } \alpha(fX)(x) = \alpha_x(f(x) \cdot X(x)) \underset{\mathbb{R}\text{-linear}}{=} f(x) \underbrace{\alpha_x(X(x))}_{\alpha(X)(x)} = (f \cdot \alpha(X))(x).$$

Allgemein: Sei $S \in \Gamma(\mathcal{T}_q^p M) = \Gamma(\bigotimes^p TM \otimes \bigotimes^q T^*M)$, so ist

$$\tilde{S} : \Gamma(TM) \times \dots \times \Gamma(TM) \times \Gamma(T^*M) \times \dots \times \Gamma(T^*M) \rightarrow C^\infty(M)$$

mit $\tilde{S} \in L_{q+p}(\bigtimes^q \Gamma(TM) \times \bigtimes^p \Gamma(T^*M), C^\infty(M))$ definiert durch

$$\tilde{S}(X_1, \dots, X_q, \alpha^1, \dots, \alpha^p)(x) = S_x(\alpha^1(x), \dots, \alpha^p(x), X_1(x), \dots, X_q(x))$$

 Hier fehlt
noch etwas

1.10.8 Beispiel

Betrachte Lie-Klammer als Abbildung

$$\Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(T^*M) \rightarrow C^\infty(M), \quad (X, Y, \alpha) \mapsto \alpha([X, Y]) = i_{[X, Y]}\alpha$$

Wobei beachte $L_r(V \times \dots \times V, W) \simeq L_r(V \times \dots \times W^*, \mathbb{R})$, zum Beispiel

$$L(V, W) \simeq L(V \times W^*, \mathbb{R}) = V \otimes W^*, \quad V \rightarrow W \simeq V \times W^* \rightarrow \mathbb{R}$$

für Mannigfaltigkeiten :

$$\Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \xrightarrow{[\cdot, \cdot] \mathbb{R}\text{-linear}} \Gamma(TM) \cong \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(T^*M) \rightarrow C^\infty(M)$$

Dann ist $[\cdot, \cdot]$ nicht $C^\infty(M)$ -linear (aber natürlich \mathbb{R} -linear). Zum Beispiel sei $f \in C^\infty(M)$

$$\begin{aligned} (f \cdot X, Y, \alpha) &\mapsto \alpha(\underbrace{[fX, Y]}_{fX(Y) - Y(fX) = fX(Y) - Y(f)X - fY(X)}) = \alpha(-df(Y) \cdot X + f([X, Y])) \\ &= -df(Y)\alpha(X) + f\alpha([X, Y]) \\ &\neq f\alpha([X, Y]) \end{aligned}$$

1.10.9 Satz

Sei $\Lambda \in L_{p+q}(\bigtimes^p \Gamma(T^*M) \times \bigtimes^q \Gamma(TM), C^\infty(M))$. Dann ist Λ C^∞ -linear $\Leftrightarrow \Lambda = \tilde{S}$ für $S \in \Gamma(\mathcal{T}_q^p M)$.

Hier ist $\tilde{S} : \Gamma(T^*M) \times \dots \times \Gamma(T^*M) \times \Gamma(TM) \times \dots \times \Gamma(TM) \rightarrow C^\infty(M)$ definiert durch

$$\tilde{S}(\alpha^1, \dots, \alpha^p, X_1, \dots, X_q)(x) = S_x(\alpha_x^1, \dots, \alpha_x^p, X_1(x), \dots, X_q(x))$$

Beweis

• " \Leftarrow ":

• " \Rightarrow ": Sei Λ C^∞ -linear gegeben. Definiere $S_x \in \mathcal{T}_q^p T_x M \cong L_{p+q}(\bigtimes^p T_x^* M \times \bigtimes^q T_x M, \mathbb{R})$ durch

$$S_x(\alpha^1, \dots, \alpha^p, v_1, \dots, v_q) = \underbrace{\Lambda(\hat{\alpha}^1, \dots, \hat{\alpha}^p, \hat{v}_1, \dots, \hat{v}_q)}_{C^\infty(M)}(x) \in \mathbb{R}$$

mit $\hat{\alpha}_j \in \Gamma(T^*M)$, $\hat{v}_j \in \Gamma(TM)$ glatte Fortsetzung nach 1.10.10

- (a) Es ist zu zeigen, dass S ein wohldefinierter Schnitt ist, das heißt unabhängig von der Fortsetzung. Dazu oBdA $\Lambda : \Gamma(TM) \rightarrow C^\infty(M)$ (allgemeiner Fall läuft genauso). Dann gilt Λ lokaler Operator. Stärker noch:

$$X(x) = 0 \Rightarrow \Lambda(X)(x) = 0$$

,denn

$$\Lambda(X)|_U(x) = \Lambda(X)|_U(x) \underset{\text{lok. Operator}}{=} \underbrace{\Lambda(X|_U)}_{\sum X^j \partial_j, X^j \in C^\infty(M)}(x) = \sum X^j(x) \Lambda(\partial_j)(x) = 0$$

da $X(x) = \sum X^j(x) \partial_j(x) = 0 \Leftrightarrow X^j(x) = 0$. Sei nun $X, X' \in \Gamma(TM)$ mit $X(x) = X'(x) = v$. So gilt $S_x(v) = \Lambda(X)(x) = \Lambda(X')(x)$, da $\Lambda(X - X')(x) = 0 = \Lambda(X)(x) - \Lambda(X')(x)$.

- (b) S also definiert als Schnitt mit: Ist $X \in \Gamma(TM)$, dann $S_x(X(x)) = \Lambda(X)(x)$. Also gilt lokal: $S|_U = \sum_j \Lambda(\partial_j) dx^j$ glatt, da Λ glatt.

1.10.10 Lemma

Sei $E \rightarrow B$ ein Vektorbündel, $x \in E_x$. Dann existiert ein glatter Schnitt $s_v \in \Gamma(E)$ mit $s_v(x) = v$. Anders gesagt: Jeder Schnitt $s : \{x\} \rightarrow E_x$ über einen Punkt kann glatt auf ganz M fortgesetzt werden.

Beweis

Übung

1.10.11 Bemerkung

In diesem Sinne sind $C^\infty(M)$ -lineare Abbildung nicht nur lokal (wie zum Beispiel $[\cdot, \cdot]$), sondern punktweise bestimmte Objekt, das heißt zum Beispiel für $\Lambda : \Gamma(TM) \rightarrow C^\infty(M)$ $C^\infty(M)$ -linear hängt $\Lambda(X)(x)$ nur von $X(x)$ ab.

1.10.12 Definition

Sei $f : M \rightarrow N$ glatte Abbildung, $S \in \Gamma(\mathcal{T}_q N)$. Der **Pullback** von S unter f ist der Tensor $f^*S \in \Gamma(\mathcal{T}_q M)$ definiert durch

$$(f^*S)_x(v_1, \dots, v_q) := S_{f(x)}(df(v_1), \dots, df(v_q))$$

$\in L_q(\times^q T_x M, \mathbb{R})$ $\in L_q(\times^q T_{f(x)} N, \mathbb{R})$ $\underbrace{df(v_1), \dots, df(v_q)}_{T_x M \rightarrow T_{f(x)} N}$

1.10.13 Satz

- (i) Ist $f : M \rightarrow N, g : M \rightarrow N$ glatt, so ist $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$. ($f^* : \Gamma(\mathcal{T}_q N) \rightarrow \Gamma(\mathcal{T}_q M), g^* : \Gamma(\mathcal{T}_q P) \rightarrow \Gamma(\mathcal{T}_q N)$)

- (ii) Ist $S \in \Gamma(\mathcal{T}_q N), T \in \Gamma(\mathcal{T}_q N)$, so gilt

$$f^*(\underbrace{S \otimes T}_{\in \mathcal{T}_{q+q'} N}) = f^*S \otimes f^*T$$

1.10.14 Bemerkung

- (i) Ist $f : M \rightarrow N$ ein Diffeomorphismus, so kann man den **Pullback** auf kontravarianten Tensoren via dem **Push-Forward** definieren, nämlich ist zum Beispiel $X \in \Gamma(TN)$, so ist: $f^*X := (f^{-1})_*X \in \Gamma(TM)$. Also $f^* : \Gamma(\mathcal{T}_q^p N) \rightarrow \Gamma(\mathcal{T}_q^p M)$.
- (ii) f^* kommutiert mit C_j^i -Kontraktion

1.10.15 Verkleben von Tensoren

Sei (U_i, ϕ_i) Karten und $S \in \Gamma(\mathcal{T}_q^p M)$ Tensorfeld. Dann gilt für $S_i = (\phi_i^{-1})^* S \in \Gamma(\mathcal{T}_q^p U_i)$

$$(\phi_i \circ \phi_j^{-1})^* S_j \Big|_{\phi_j(U_j \cap U_i)} = S_i \Big|_{\phi_i(U_j \cap U_i)}$$

Sind Tensorfelder S_i gegeben, die diese Bedingung erfüllen, so lassen sie sich eindeutig zu einem Tensorfeld auf M verkleben.

Setzt damit nun \mathcal{L}_X "Lie-Ableitung" (definiert für $f \in C^\infty(M), Y \in \Gamma(TM)$) auf $\Gamma(\mathcal{T}_q^p M)$ fort.

1.10.16 Definition

Sei $X \in \Gamma(TM)$. Dann ist

$$\mathcal{L}_X : \Gamma(\mathcal{T}_q^p M) \rightarrow \Gamma(\mathcal{T}_q^p M)$$

definiert durch

$$\mathcal{L}_X S := \frac{d}{dt} \underbrace{\Psi_{X,t}^*}_{\text{Fluss von } X} S|_{t=0}$$

(Beachte $\Psi_{X,t} S$ Kurve in $\Gamma(\mathcal{T}_q^p M)$)

1.10.17 Satz

- (i) $\mathcal{L}_X f = df(X) = \underbrace{X \cdot f}_{f \text{ in Richtung } X \text{ ableiten}} \in C^\infty(M), \quad f \in C^\infty(M)$
- (ii) $\mathcal{L}_X Y = [X, Y], \quad Y \in \Gamma(TM)$
- (iii) $\mathcal{L}_X(S \otimes T) = \mathcal{L}_X S \otimes T + S \otimes \mathcal{L}_X T$
- (iv) $\mathcal{L}_X(C_j^i(S)) = C_j^i(\mathcal{L}_X S)$
- (v) $\underbrace{(\mathcal{L}_X \alpha)}_{\in \Gamma(T^*M)}(Y) = \underbrace{\mathcal{L}_X(\alpha(Y))}_{\in C^\infty(M)} - \underbrace{\alpha(\mathcal{L}_X Y)}_{\in C^\infty(M)} = X \cdot (\alpha(Y)) - \alpha([X, Y])$

Beweis

- (i) $(\mathcal{L}_X f)(x) = \frac{d}{dt} (\Psi_{X,t}^* f)(x)|_{t=0} = \frac{d}{dt} f(\Psi_{X,t}(x))|_{t=0} = df\left(\frac{d}{dt} \Psi_{X,t}(x)|_{t=0}\right) = df(X(\Psi_{X,0}(x))) = df(X)(x)$
- (ii) Theorem 1.9.5
- (iii) Leite die Identifikation $\Psi_{X,t}^*(S \otimes T) = \Psi_{X,t}^* S \otimes \Psi_{X,t}^* T$ und $C_j^i(\Psi_{X,t}^* S) = \Psi_{X,t}^* C_j^i(S)$ ab.
- (iv) Siehe (iii)
- (v) Sei $\alpha \in \Gamma(T^*M)$, Dann ist $C_1^1(Y \otimes \alpha) = \alpha(Y) \in C^\infty(M)$.

$$\begin{aligned} X \cdot (\alpha(Y)) &= \mathcal{L}_X(\alpha(Y)) = \mathcal{L}_X(C_1^1(Y \otimes \alpha)) = C_1^1 \mathcal{L}_X(Y \otimes \alpha) \\ &= C_1^1(\mathcal{L}_X Y \otimes \alpha) + C_1^1(Y \otimes \mathcal{L}_X \alpha) = \alpha(\mathcal{L}_X Y) + (\mathcal{L}_X \alpha)(Y) \end{aligned}$$

1.10.18 Korollar

1. \mathcal{L}_X ist lokaler Operator, der durch die Eigenschaften (i) - (iv) in 1.10.18 eindeutig bestimmt ist.
2. $\mathcal{L}_{[X,Y]} = [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y]$ auf $\Gamma(\mathcal{T}_q^p M)$ (wissen dies bereits auf $\Gamma(\mathcal{T}_0^0 M) = C^\infty(M)$)

1.11 Äußere Formen (Differentialformen)

1.11.1 Äußeres Produkt von Vektorräumen

Sei V ein n -dimensionaler Vektorraum. Auf $\otimes^p V$ definieren wir den **Antisymmetrisierungsoperator** A_p durch

$$A_p(v_1 \otimes \dots \otimes v_p) = \sum_{\sigma \in S_p} \text{sgn}(\sigma) v_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(p)}$$

Zum Beispiel:

$$\begin{aligned} A_2(v \otimes w) &= v \otimes w - w \otimes v \\ A_3(v \otimes w \otimes u) &= v \otimes w \otimes u + u \otimes v \otimes w + w \otimes u \otimes v \\ &\quad - v \otimes u \otimes w - u \otimes w \otimes v - w \otimes v \otimes u \end{aligned}$$

Definiere $\Lambda^p V = \text{Im } A_p \subset \otimes^p V$. Sei (e_i) eine Basis von V , so hat $\Lambda^p V$ die Basis $(\underbrace{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}}_{=A_p(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p})})_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n}$

Spezialfälle

- $\Lambda^0 V = \mathbb{R}$
- $\Lambda^1 V = V$

$$\begin{aligned} 0 &\equiv (v+w) \otimes (v+w) \\ &= v \otimes v + v \otimes w \\ &\quad + v \otimes w + w \otimes w \equiv \\ &\quad v \otimes w + w \otimes v \end{aligned}$$

Alles auf einmal: $\Lambda \cdot V := \bigoplus_p \Lambda^p V$, alternativ: $\Lambda \cdot V = \mathcal{T} \cdot V / \text{Ideal erzeugt von } v \otimes v$. Auf $\Lambda \cdot V$ definieren wir das

äußere (Wedge-, Dach-, Keil-,)Produkt

$$\wedge : \Lambda^p V \times \Lambda^q V \rightarrow \Lambda^{p+q} V, \quad (a, b) \mapsto a \wedge b := \frac{1}{p!q!} A_{p+q}(a \otimes b)$$

Das Wedgeprodukt ist

- bilinear
- assoziativ: $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$
- graduiert kommutativ: $a \wedge b = (-1)^{pq} b \wedge a$, wenn $a \in \Lambda^p V, b \in \Lambda^q V$

Beispiel

Sei $\alpha \in \Lambda^1 V^*, \beta \in \Lambda^1 V^*$, so ist mit $(\alpha \otimes \beta)(v, w) = \alpha(v)\beta(w)$:

$$\begin{aligned} (\alpha \wedge \beta)(v, w) &= (\alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha)(v, w) \\ &= \alpha(v)\beta(w) - \beta(v)\alpha(w) \\ &= -(\alpha(w)\beta(v) - \beta(w)\alpha(v)) \\ &= -(\alpha \wedge \beta)(w, v) \end{aligned}$$

Für $\alpha : V \rightarrow V$ lineare Abbildung erhalten wir eine lineare Abbildung

$$\wedge^p \alpha : \Lambda^p V \rightarrow \Lambda^p V \text{ durch } \wedge^p \alpha(v_1 \wedge \dots \wedge v_p) = \alpha(v_1) \wedge \dots \wedge \alpha(v_p) \text{ für } v_i \in V$$

Übungsaufgabe

- $\Lambda^p V^* = (\Lambda^p V)^*$

- $\wedge^n \alpha$ ist die Multiplikation mit der Determinante von α

Für die Dimension von $\Lambda^p V$ gilt: $\dim \Lambda^p V = \binom{n}{p}$ (somit $\dim \Lambda^0 V = 1$, $\dim \Lambda^1 V = n$, $\dim \Lambda^n V = 0$).

1.11.2 Definition

Das Bündel der äußeren p -Formen (Differentialformen) ist das Vektorbündel $\Lambda^p T^*M$. Die glatten Schnitte heißen (äußere) p -Formen (Differentialformen), wir schreiben $\Omega^p(M) = \Gamma(\Lambda^p T^*M)$. Wir haben $\Lambda^0 T^*M = M \times \mathbb{R}$, $\Omega^0(M) = C^\infty(M)$. In lokalen Koordinaten (U, x^i) :

$$\alpha \in \Omega^p(M) \leadsto \alpha|_U = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \alpha_{i_1, \dots, i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$$

1.11.3 Bemerkung

Sei $f : M \rightarrow N$, so ist $f^* : \Omega^p(N) \rightarrow \Omega^p(M)$ definiert durch

$$(f^*\omega)(v_1, \dots, v_p) = \omega|_{f(x)}(df|_x(v_1), \dots, df|_x(v_p))$$

Es gilt:

- $(f \circ g)^* g^* \circ f^*$
- $f^*(\alpha \wedge \beta) = (f^*\alpha) \wedge (f^*\beta)$ für α, β Differentialformen
- $\mathcal{L}_X \alpha$ ist wieder eine Differentialformen

$$\mathcal{L}_X(\alpha \wedge \beta) = \mathcal{L}_X \alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \mathcal{L}_X \beta$$

- Es gilt das "innere Produkt": (innere Ableitung)

$$i_X : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{p-1}(M), \quad \omega \mapsto \omega(X, \cdot)$$

Für $\alpha \in \Omega^p(M), \beta \in \Omega^q(M)$ ist

$$i_X(\alpha \wedge \beta) = (i_X \alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge i_X(\beta)$$

1.11.4 Satz/Definition

Auf $\Omega^p(M)$ gibt es einen lokalen linearen Operator $d : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{p+1}(M)$, der durch folgende Eigenschaften eindeutig bestimmt ist:

- Für $p = 0$ ist $d : C^\infty(M) \rightarrow \Omega^1(M)$ das gewöhnliche Differential
- Für $f \in C^\infty(M)$ ist $d(df) = 0$
- Für $\alpha \in \Omega^p(M), \beta \in \Omega^q(M)$ ist:

$$d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge (d\beta)$$

Beweis:

- Eindeutigkeit: Sei (U, x^1, \dots, x^n) Karte, so gilt

$$\begin{aligned} (d\alpha)|_U &\stackrel{\text{lokal}}{=} d(\alpha|_U) \stackrel{\text{linear}}{=} \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_p \leq n} d(\alpha_{i_1, \dots, i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}) \\ &\stackrel{(i), (ii), (iii)}{=} \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_p \leq n} \underbrace{d\alpha_{i_1, \dots, i_p}}_{\text{bekannt (i)}} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \quad (\star) \end{aligned}$$

- Lokal definieren durch (\star) (also auf $\Omega^p(V)$, $V \subset \overset{\text{offen}}{\mathbb{R}^n}$. Dann ist zu zeigen, dass dies die Eigenschaften erfüllt.
- $\phi : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$ glatt $\leadsto \phi^* \circ d = d \circ \phi^*$
- Zusammenkleben mit Bemerkung 1.10.15 um d auf ganz M fortzusetzen.

1.11.5 Korollar

- $d \circ d = 0$
- Für $f : M \rightarrow N$ ist $d \circ f^* = f^* \circ d$

1.11.6 Bemerkung

1. Wir erhalten eine Folge

$$0 \rightarrow \Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega^n(M) \xrightarrow{d} 0$$

\leadsto Kettenkomplex

2. Es gibt auch eine explizite Formel ohne Koordinate für d für $\alpha \in \Omega^1(M)$:

$$d\alpha(X, Y) = X.\alpha(Y) - Y.\alpha(X) - \alpha([X, Y])$$

1.11.7 Beispiel

Für $\alpha \in \Omega^1(M)$, $\alpha = \sum \alpha_j dx^j$ gilt

$$(d\alpha)|_U = d(\alpha|_U) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \sum_j (\partial_j \alpha_{i_1, \dots, i_p}) dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$$

1.11.8 Proposition

Für $X \in \Gamma(TM)$:

$$\mathcal{L}_X = d \circ i_X + i_X \circ d$$

Beweis

Definiere $P_X = d \circ i_X + i_X \circ d$. Die ist ein linearer lokaler Operator, da Verknüpfung von lokalen linearen Operatoren. Sei $\alpha \in \Omega^p(M)$, so ist α von der Form:

$$\alpha|_U = \sum \alpha_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$$

Es genügt zu zeigen:

$w \text{ exakt} \Leftrightarrow \exists \alpha : \omega = d\alpha$

(i) $\mathcal{L}_X = P_X$ gilt für 0-Formen und exakte 1-Formen

(ii) rechte Seite erfüllt Leibnizregel (selber Rechnen)

(i) Für $f \in \Omega^0(M)$: $P_X f = (i_X \circ d)f = df(X) = \mathcal{L}_X f$

(ii) Für $df \in \Omega^1(M)$: $P_X(df) = di_X df + i_X \underbrace{dd}_{=0} f$. Sei $Y \in \Gamma(TM)$, so gilt $(P_X df)(Y) = (di_X df)(Y) = d(df(X))(Y) = Y.X.f$. Außerdem gilt

$$(\mathcal{L}_X df)(Y) = \mathcal{L}_X(df(Y)) = df(\mathcal{L}_X Y) = X.Y.f - [X, Y].f = Y.X.f$$

1.12 Volumenformen und Integration

1.12.1 Definition

Eine **Volumenform** ist ein $\omega \in \Omega^n(M)$ ($n = \dim M$) mit $\omega_x \neq 0 \forall x \in M$

1.12.2 Bemerkung

Aus der Existenz einer Volumenform folgt $\Lambda^n T^*M = M \times \mathbb{R}$. Das ist nicht immer der Fall, das heißt nicht auf jedes Mannigfaltigkeit existiert eine Volumenform.

1.12.3 Integration auf Mannigfaltigkeiten

Sei $\omega \in \Omega^n(M^n)$ Volumenformen, (U, ϕ) Karte, $\phi^{-1*}\omega|_U = \omega_U dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$. Sei $f \in C_c^0(M)$ mit $\text{supp}(f) \subset U$. Setze

$$\Lambda_\omega(f) = \int_{\phi(U)} \phi^{-1*} f \omega_U \underbrace{dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n}_{dL^n}$$

Ist dies unabhängig von der Wahl der Karte? Dazu sei (V, ψ) Karte, $\text{supp } f \subset U \cap V$ mit $\psi^{-1*}\omega = \omega_V dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$. Setze $F := \phi \circ \psi^{-1}|_{\psi(U \cap V)}$ und wir nehmen zunächst an, dass $\det dF > 0$. Es gilt

Es gilt $\omega_V = \det dF(\omega_U \circ F)$

$$\begin{aligned} \int_{\psi(U \cap V)} (f \circ \psi^{-1}) \cdot \omega_V dL^n &= \int_{\psi(U \cap V)} (f \circ \phi^{-1} \circ F) \cdot \det F \cdot \omega_U \circ F dL^n \\ &= \int_{F \circ \psi(U \cap V)} (f \circ \phi^{-1}) \cdot \omega_U dL^n \\ &= \int_{\phi(U \cap V)} (f \circ \phi^{-1}) \cdot \omega_U dL^n \end{aligned}$$

Also ist $\Lambda_\omega(f)$ unabhängig von der Wahl der Karten. Für beliebige $f \in C_c^0(M)$ wähle Atlas (U_i, ϕ_i) und eine untergeordnete Teilung der Eins (ρ_i) , das heißt $\text{supp } \rho_i \in U_i$. Dann setze

$$\Lambda_\omega f := \sum_i \Lambda_{\omega}(\rho_i \cdot f)$$

Die Unabhängigkeit von (ρ_i) und dem Atlas ist eine Übungsaufgabe. Mit dem Rieszschen Darstellungssatz folgt die Existenz des Radon-Maß ω auf M mit $\Lambda_\omega f = \int_M f d\omega$.

1.12.4 Bemerkung

Wenn M kompakt und alle Jacobideterminanten der Übergangsfunktion positiv sind, setze

$$\text{Vol}_\omega(M) = \int_M \omega$$

1.12.5 Definition

M heißt **orientierbar**, falls es einen Atlas mit positiven Jacobideterminanten der Übergangsfunktionen gibt. So ein Atlas heißt **Orientierungsatlas** von M .

1.12.6 Beispiel

TM ist immer orientierbar. Der angegebene Atlas hat Übergangsfunktion

$$\Phi_{ij}(x, v) = (\phi_i \circ \phi_j^{-1}(x), d_{\phi_j(x)}(\phi_i \circ \phi_j^{-1})(v))$$

, das heißt

$$d_{(x,v)}\Phi_{ij} = \begin{pmatrix} d_x\phi_{ij} & * \\ 0 & d_x\phi_{ij} \end{pmatrix}$$

Somit folgt, dass $\det d_{(x,v)}\Phi_{ij} > 0$.

1.12.7 Proposition

M ist orientierbar, genau dann wenn eine Volumenform auf M existiert.

Beweis

- "⇒": Sei ω Volumenform. Wähle Atlas mit (U_i, ϕ_i) mit $\phi_i^{-1*}\omega = \omega_i dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$, sodass $\omega_i > 0$. Das ist möglich, da $\omega_i(x) \neq 0 \forall x \in U_i$ und man für $\omega_i < 0$ die Karte ϕ_i mit der Abbildung $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ verknüpfen kann um eine neue Karte mit $\omega'_i > 0$ zu erhalten. Mit $\omega_V = \det dF(\omega_U \circ F)$ folgt, dass die Jacobideterminante der Übergangsfunktion größer 0 ist.
- "⇐": Wähle Orientierungsatlas (U_i, ϕ_i) und untergeordnete Teilung der Eins (ρ_i) . Setze $\omega_i = \phi_i^*(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n)$. Dann ist $\omega := \sum_i \rho_i \omega_i$ Volumenform auf M , da

$$\begin{aligned} \phi_k^{-1*}\omega &= \sum_i \rho_i \phi_k^{-1*} \phi_i^*(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n) \\ &= \sum_i \rho_i (\phi_i \circ \phi_k^{-1})^*(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n) \\ &= \sum_i \rho_i \underbrace{\det d\phi_{ik}}_0 (dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n) \\ &\geq \min_{\rho_i \neq 0} \det d\phi_{ik} \underbrace{\sum_i \rho_i}_{=1} > 0 \end{aligned}$$

2 Riemannsche Geometrie

2.1 Riemannsche Metriken

2.1.1 Definition

Riemannsche Metrik g ist ein symmetrischer positiv definit (0,2) Tensor auf M , das heißt $g \in \Gamma(\mathcal{T}_2 M)$ (beziehungsweise $g : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow C^\infty(M)$) mit

- $g(X, Y) = g(Y, X) \quad \forall X, Y \in \Gamma(TM)$ (Symmetrie)
- $g_x(v, v) \geq 0$ mit Gleichheit genau dann wenn $v = 0$

das heißt $(T_x M, g_x)$ ist ein euklidischer Vektorraum.

- (M, g) ist eine Riemannsche Mannigfaltigkeit


- $\varphi \in \text{Diff}(M) = \{\varphi : M \rightarrow M \text{ Diffeomorphismus}\}$ heißt **Isometrie** von (M, g) , falls $\varphi^*g = g$
- Ist $\varphi : M \rightarrow M$ lokaler Diffeomorphismus mit $\varphi^*g = g$ heißt φ lokale Isometrie
- $\text{Isom}(M, g) = \text{Gruppe der Isometrien}$
- $(M, g), (N, h)$ Riemannsche Mannigfaltigkeiten heißen isometrisch, falls ein Diffeomorphismus $\varphi : M \rightarrow N$ existiert mit $\varphi^*h = g$ (insbesondere ist dann $(T_{\varphi(x)}N, h_{\varphi(x)})$ isometrisch als euklidischer Vektorraum zu (T_xM, g_x))

2.1.2 Bemerkung

Sind x^1, \dots, x^n lokale Koordinaten, so gilt lokal

$$g|_U = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i \otimes dx^j, \quad (g_{ij}(x))_{i,j=1}^n \text{ sym. pos. def. Matrix für alle } x \in U$$

Index

Die **Seitenzahlen** sind mit [Hyperlinks](#) zu den entsprechenden Seiten versehen, also anklickbar 

(abstrakte) differenzierbare Mannigfaltigkeit, 6

Atlas, 5

Derivation, 19, 22

Differenzierbare Struktur, 6

Differential, 17

globaler Fluss, 24

Immersion, 1

innere Produkt, 30

Integralkurve, 23

Karte, 6

Kartenwechsel, 6

Keim, 19

Kommutator, 23

Kontraktion, 30

Kotangentialbündel, 29

Lie-Klammer, 23

lokale Parametrisierung, 3

lokaler Fluß, 24

parallelisierbar, 19

projektive Raum, 8

Pullback, 26, 32, 33

Push-Forward, 25, 33

Sphäre, 2

Submersion, 1

Tangentialbündel, 15

Tangentialvektor, 13, 14

Tensorprodukt, 30

Tensorverjüngung, 30

Untermannigfaltigkeit, 2

Vektorbündel, 16

Vektorfeld, 18

Zerlegung der Eins, 11

Étale, 1

Abbildungsverzeichnis

1	hyperbolischer Raum für $c > 0$, $c < 0$, $c = 0$	2
2	Stereografische Projektion	6
3	Der Würfel Q ist keine Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n !	8
4	Der 2-dimensionale projektive Raum $\mathbb{R}P^2$ (projektive Ebene)	8
5	Der eindimensionale projektive Raum $\mathbb{R}P^1$	8
6	Beispiel einer Nichthäufungsmenge	9
7	Integalkurve in einem Vektorfeld des \mathbb{R}^2	23
8	lokaler Fluß eines Vektorfeldes	24
9	Vektorfeld auf \mathbb{R}^2	24
10	”universelle Eigenschaft” von \otimes	28