Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Fachbereich 10 Mathematik und Informatik

Skript Einführung in die Funktionalanalysis

Mitschrift der Vorlesung „Einführung in die Funktionalanalysis“ von Prof. Dr. Wilhelm Winter

Jannes Bantje

16. November 2015

„Das folgt mit Hahn-Banach“

Aktuelle Version verfügbar bei

GitHub

`https://github.com/JaMeZ-B/latex-wwu`

GitHub ist eine Internetplattform, auf der viele OpenSource-Projekte gehostet werden. Diese Plattform nutzen wir zur Zusammenarbeit, also findet man hier neben den PDFs auch die TEX-Dateien. Außerdem ist über diese Plattform auch direktes Mitarbeiten möglich, siehe nächste Seite.

sciebo die Campuscloud

`https://uni-muenster.sciebo.de/public.php?service=files&t=965ae79080a473eb5b6d927d7d8b0462`

Sciebo ist ein Dropbox-Ersatz der Hochschulen in NRW, der von der Uni Münster in leitender Position auf Basis der OpenSource-Software Owncloud aufgebaut wurde. Wenn man auf den Link klickt, kann man die Freigabe zum eigenen Speicher hinzufügen und hat dann immer automatisch die aktuellste Version.

Bittorrent Sync

`B6WH2DISQ5QVYIRYIEZSF4ZR2IDVKPN3I`

BTSync ist ein peer-to-peer Dateisynchronisations-Tool. Dabei werden die Dateien nur auf den Computern der Teilnehmer an einer Freigabe gespeichert. Ein RasPi ist permanent online, sodass stets die aktuellste Version verfügbar ist. `Clients` gibt es für jedes Betriebssystem. Zugang ist über das obige „Secret“ bzw. den QR-Code möglich.

Vorlesungshomepage

`https://wwwmath.uni-muenster.de/u/wilhelm.winter/wwinter/funktionalanalysis.html`

Hier ist ein Link zur offiziellen Vorlesungshomepage.

Vorwort — Mitarbeit am Skript

Dieses Dokument ist eine Mitschrift aus der Vorlesung „Einführung in die Funktionalanalysis, WiSe 2014“, gelesen von Prof. Dr. Wilhelm Winter. Der Inhalt entspricht weitestgehend dem Tafelanschrieb. Für die Korrektheit des Inhalts übernehme ich keinerlei Garantie! Für Bemerkungen und Korrekturen – und seien es nur Rechtschreibfehler – bin ich sehr dankbar. Korrekturen lassen sich prinzipiell auf drei Wegen einreichen:

- Persönliches Ansprechen in der Uni, Mails an `j.bantje@wwu.de` (gerne auch mit annotieren PDFs) oder Kommentare auf `https://github.com/JaMeZ-B/latex-wwu`.

- *Direktes* Mitarbeiten am Skript: Den Quellcode poste ich auf GitHub (siehe oben), also stehen vielfältige Möglichkeiten der Zusammenarbeit zur Verfügung: Zum Beispiel durch Kommentare am Code über die Website und die Kombination Fork + Pull Request. Wer sich verdient macht oder ein Skript zu einer Vorlesung, die ich nicht besuche, beisteuern will, dem gewähre ich gerne auch Schreibzugriff.

  Beachten sollte man dabei, dass dazu ein Account bei `github.com` notwendig ist, der allerdings ohne Angabe von persönlichen Daten angelegt werden kann. Wer bei GitHub (bzw. dem zugrunde liegenden Open-Source-Programm „`git`“) – verständlicherweise – Hilfe beim Einstieg braucht, dem helfe ich gerne weiter. Es gibt aber auch zahlreiche empfehlenswerte Tutorials im Internet.[1]

- *Indirektes* Mitarbeiten: TEX-Dateien per Mail verschicken.

  Dies ist nur dann sinnvoll, wenn man einen ganzen Abschnitt ändern möchte (zB. einen alternativen Beweis geben), da ich die Änderungen dann per Hand einbauen muss! Ich freue mich aber auch über solche Beiträge!

Anmerkung

Innerhalb dieser Mitschrift wird man öfter den Ausdruck „Warum?“ finden. Dies sind vom Dozenten bewusst weggelassene Details, die zu verstärktem Mitdenken beim Lesen animieren sollen. Oftmals sind dies schon aus vorherigen Semestern bekannte Sachverhalte. Nur an wenigen Stellen habe ich die fehlenden Details hinzugefügt.

[1] zB. `https://try.github.io/levels/1/challenges/1`, ist auf Englisch, aber dafür interaktives LearningByDoing

Inhaltsverzeichnis

1. Metrische Räume und der Satz von Baire

1.1. Definition Ein ***metrischer Raum*** ist ein Paar (X, d), wobei X eine Menge und $d\colon X \times X \to [0, \infty)$ ist, sodass

1) $d(x, y) = 0 \iff x = y \quad \forall x, y \in X$

2) $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$

3) $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z) \quad \forall x, y, z \in X$

1.2. Definition Sei (X, d) ein metrischer Raum

- Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt ***offen***, falls für jedes $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass
$$B(x, \varepsilon) := \{y \in X \,|\, d(x, y) < \varepsilon\} \subset U$$
- Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt ***abgeschlossen***, falls $X \setminus A$ offen ist (als Teilmenge von X).
- $\mathcal{T}_X := \{U \subset X \,|\, U \text{ offen im obigen Sinne}\}$ ist die von der Metrik induzierte Topologie auf X.
- Falls $W \subset X$ eine Teilmenge ist, dann bezeichnet $\overline{W}$ den ***Abschluss*** von W, d.h. die kleinste abgeschlossene Teilmenge von X, die W enthält. Es gilt
$$\overline{W} = \bigcap_{A \subset X \text{abg.}, W \subset A} A$$
Für metrische Räume ist dies äquivalent zu
$$\overline{W} = \left\{x \in X \,\middle|\, \exists (x_n)_n \subset W : \lim_{n\to\infty} x_n = x\right\} \qquad \text{(warum?)}$$

1.3. Definition Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen zwei metrischen Räumen (X, d_X) und (Y, d_Y) heißt

- ***stetig in*** $x \in X$, falls $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x' \in X : d_X(x, x') < \delta \implies d_Y\big(f(x), f(x')\big) < \varepsilon$
- ***stetig***, falls f in jedem Punkt $x \in X$ stetig ist.
(Äquivalent: Für jede offene Menge V in Y ist $f^{-1}(V)$ offen in X)
- ***gleichmäßig stetig***, falls $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x, x' \in X : d_X(x, x') < \delta \implies d_Y\big(f(x), f(x')\big) < \varepsilon$.
- f heißt ***Isometrie***, falls $\forall x, x' \in X : d_X(x, x') = d_Y\big(f(x), f(x')\big)$.
- f heißt ***isometrischer Isomorphismus***, falls f bijektiv und isometrisch ist.

automatisch injektiv und stetig f^{-1} auch

1.4. Definition Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum (X, d) heißt ***Cauchy-Folge***, falls
$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, k > N : d(x_n, x_k) < \varepsilon.$$
(X, d) heißt ***vollständig***, falls jede Cauchy-Folge in X konvergiert.

1.5. Satz Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann existiert ein vollständiger metrischer Raum $(\tilde{X}, \tilde{d})$ und eine Isometrie $\iota\colon X \hookrightarrow \tilde{X}$, sodass $\overline{\iota(X)} = \tilde{X}$ (d.h. $\iota(X)$ ist dicht in $\tilde{X}$). $(\tilde{X}, \tilde{d})$ heißt ***Vervollständigung*** von (X, d) und ist eindeutig bis auf isometrische Isomorphie.

Beweis:

Eindeutigkeit: Angenommen, $(\hat{X}, \hat{d})$ ist ein weiterer vollständiger metrischer Raum und $\kappa\colon X \to \hat{X}$ eine Isometrie mit $\overline{\kappa(X)} = \hat{X}$. Definiere $\gamma\colon \hat{X} \to \tilde{X}$ wie folgt: Falls $y \in \hat{X}$, wähle eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X, sodass $y = \lim_{n\to\infty} \kappa(x_n)$. Setze nun

$$\gamma(y) := \lim_{n\to\infty} \iota(x_n) \in \tilde{X}$$

Der Grenzwert existiert, da $\tilde{X}$ vollständig ist. Zu zeigen: γ ist ein wohldefinierter isometrischer Isomorphismus.

Wohldefiniertheit: $(\kappa(x_n))_n$ ist konvergent, also auch Cauchy. Da κ eine Isometrie ist, muss $(x_n)_n$ auch eine Cauchyfolge in X sein. Nun ist aber auch ι eine Isometrie und somit $(\iota(x_n))_n$ eine Cauchyfolge in $\tilde{X}$. Da $\tilde{X}$ vollständig ist, existiert also obiger Grenzwert

Wir müssen außerdem zeigen, dass die Definition nicht von der Wahl der Folge abhängt: Angenommen $(x'_n)_n$ ist eine weitere Folge, sodass $\kappa(x'_n) \to y$. Sei $z \in \tilde{X}$ der Grenzwert dieser Folge unter ι. Dann folgt $\gamma(y) = z$ aus

$$\tilde{d}\big(\gamma(y), z\big) = \lim_{n\to\infty} \tilde{d}\big(\iota(x_n), \iota(x'_n)\big) = \lim_{n\to\infty} d\big(x_n, x'_n\big) = \lim_{n\to\infty} \hat{d}\big(\kappa(x_n), \kappa(x'_n)\big) = \hat{d}(y, y) = 0$$

Isometrie: Analog zu obiger Rechnung folgt für $z, z' \in \hat{X}$ und Folgen $(x_n)_n$, $(x'_n)_n$ mit $\kappa(x_n) \to z$ und $\kappa(x'_n) \to z'$

$$\tilde{d}\big(\gamma(z), \gamma(z')\big) = \lim_{n\to\infty} \tilde{d}\big(\iota(x_n), \iota(x'_n)\big) = \lim_{n\to\infty} d\big(x_n, x'_n\big) = \lim_{n\to\infty} \hat{d}\big(\kappa(x_n), \kappa(x'_n)\big) = \hat{d}(z, z')$$

Bijektivität: Eine Umkehrabbildung lässt sich leicht konstruieren, indem man in obiger Konstruktion die Rollen von $\hat{X}$ und $\tilde{X}$ vertauscht.

Existenz: **Konstruktion von** $(\tilde{X}, \tilde{d})$: Setze $Y := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (x_n)_n \text{ ist Cauchy-Folge in } X\}$. Definiere

$$(x_n)_n \sim (x'_n)_n :\iff \lim_{n\to\infty} d(x_n, x'_n) = 0$$

$\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf Y. Definiere nun $\tilde{X} := {}^{Y}\!/\!{\sim}$ und $\tilde{d}\colon \tilde{X} \times \tilde{X} \to [0, \infty)$ durch

$$\tilde{d}\big(\big[(x_n)_n\big], \big[(x'_n)_n\big]\big) := \lim_{n\to\infty} d(x_n, x'_n)$$

$\tilde{d}$ ist eine wohldefinierte Abbildung, d.h. falls $[(x_n)_n] = [(y_n)_n]$ und $[(x'_n)_n] = [(y'_n)_n]$, dann erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x'_n) = \lim_{n\to\infty} d(y_n, y'_n). \qquad \text{(leichte Übung)}$$

Weiter ist $\big(d(x_n, x'_n)\big)_n$ eine Cauchy-Folge in dem vollständigen Raum $[0, \infty)$ und somit konvergent: Sei nun $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $d(x_n, x_m) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ und $d(x'_n, x'_m) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n, m \geqslant N$. Dann gilt nach der Vierecksungleichung (siehe Anhang A.1)

$$\big|d(x_n, x'_n) - d(x_m, x'_m)\big| \leqslant d(x_n, x_m) + d(x'_n, x'_m) \leqslant \varepsilon$$

Also existiert der Grenzwert und $\tilde{d}$ ist wohldefiniert.

Einbettung von X: Definiere nun $\iota\colon X \to \tilde{X}$ durch $x \mapsto [(x,x,x,\ldots)] \in \tilde{X}$. ι ist Isometrie, da

$$\tilde{d}\big(\iota(x),\iota(y)\big) = \lim_{n\to\infty} d(x,y) = d(x,y)$$

Sei nun $[(x_n)_n] \in \tilde{X}$ und $\varepsilon > 0$. Da $(x_n)_n$ eine Cauchy-Folge ist, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n,m \geqslant N$ gilt $d(x_n,x_m) < \varepsilon$. Dann gilt

$$\tilde{d}\big(\iota(x_N),[(x_n)_n]\big) = \lim_{n\to\infty} d(x_N,x_n) < \varepsilon$$

Damit hat ι ein dichtes Bild.

Vollständigkeit von $(\tilde{X},\tilde{d})$: Sei $(\overline{x}^m)_m$ eine Cauchyfolge in $\tilde{X}$. $\overline{x} \in \tilde{X}$

$$\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists M(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall m,m' > M : \tilde{d}\Big(\overline{x}^m,\overline{x}^{m'}\Big) < \frac{\varepsilon}{3}$$

Wenn $\overline{x}^m = [(x_n^m)_n]$ und $\overline{x}^{m'} = \Big[(x_n^{m'})_n\Big]$, dann gilt also für alle $m,m' > M(\varepsilon)$

$$\lim_{n\to\infty} d\Big(x_n^m,x_n^{m'}\Big) < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{[*]}$$

Für alle m ist $(x_n^m)_n$ eine Cauchyfolge, also gilt

$$\forall m : \exists N(m) : \forall n,n' \geqslant N(m) : d(x_n^m,x_{n'}^m) < \frac{1}{m} \qquad \text{[**]}$$

Setze nun $z_n := x_{N(n)}^n$. Behauptung: $(z_n)_n$ ist eine Cauchyfolge. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt für $n,m > N = \max\big\{M(\varepsilon),\frac{3}{\varepsilon}\big\}$ für ein $k > N(m),N(n)$

$d(z_n,z_m)$ ist unabhängig von k, also kann man k beliebig groß wählen

$$d(z_n,z_m) = d\Big(x_{N(n)}^n,x_{N(m)}^m\Big) \leqslant \underbrace{d\Big(x_{N(n)}^n,x_k^n\Big)}_{\overset{[**]}{<}\frac{1}{n}<\frac{1}{N}\leqslant\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{d\Big(x_k^n,x_k^m\Big)}_{\overset{[*]}{\leqslant}\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{d\Big(x_k^m,x_{N(m)}^m\Big)}_{\overset{[**]}{<}\frac{1}{m}<\frac{1}{N}\leqslant\frac{\varepsilon}{3}} < \varepsilon$$

$\Rightarrow (z_n)_n$ ist eine Cauchyfolge, also

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N_z(\varepsilon) : \forall n,m > N_z(\varepsilon) : d(z_n,z_m) < \varepsilon \qquad \text{[\#]}$$

Es bleibt zu zeigen: $\lim_{m\to\infty} \overline{x}^m = [(z_n)_n]$. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Dann gilt für $m \geqslant \max\big\{\frac{2}{\varepsilon},N_z(\varepsilon)\big\}$

$$\tilde{d}(\overline{x}^m,[(z_n)_n]) = \lim_{n\to\infty} d\Big(x_n^m,x_{N(n)}^n\Big) \leqslant \lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{d\Big(x_n^m,x_{N(m)}^m\Big)}_{\overset{[**]}{<}\frac{1}{m}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{d\Big(x_{N(m)}^m,x_{N(n)}^n\Big)}_{=d(z_m,z_n)\overset{[\#]}{<}\frac{\varepsilon}{2}}\right) < \varepsilon$$

Also gilt $\overline{x}^m \xrightarrow{m\to\infty} [(z_n)_n]$ und $(\tilde{X},\tilde{d})$ ist vollständig. □

1.6. Definition Sei $(W,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum und (X,d) ein metrischer Raum. Sei

$$C_b(W,X) := \{f\colon W \to X \mid f \text{ stetig und beschränkt}\}$$

versehen mit der Metrik $d_{W,X}$, die definiert ist durch

$$d_{W,X}(f,g) = \sup_{t\in W} d\big(f(t),g(t)\big)$$

1.7. Bemerkung Auf $C(W,X) = \{f\colon W \to X \text{ stetig}\}$ ist $d_{W,X}$ eine ***erweiterte Metrik***, d.h. der Wert ∞ ist möglich. $\tilde{d}_{W,X} := \min\{1, d_{W,X}\}$ ist dann eine „echte“ Metrik auf $C(W,X)$.

1.8. Proposition Falls X vollständig ist, dann sind $C_b(W,X)$ und $C(W,X)$ vollständig (bezüglich $d_{W,X}$ bzw. $\tilde{d}_{W,X}$).

Beweis: Sei $(f_n)_n$ eine Cauchy-Folge in $C_b(W,X)$, also

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n,m > N : \sup_{t\in W} d\big(f_n(t), f_m(t)\big) < \varepsilon$$

Also ist $\big(f_n(t)\big)_n$ für alle t eine Cauchyfolge in X. Da X vollständig ist, existiert ein $x_t \in X$ sodass $f_n(t) \xrightarrow{n\to\infty} x_t$. Definiere also $f(t) := x_t$ punktweise.

f ist Grenzwert: Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $d_{W,X}(f_k, f_l) < \varepsilon$ für alle $k,l \geqslant N$ gilt, da $(f_n)_n$ Cauchy ist. Für $n \geqslant N$ gilt nun $d_{W,X}(f, f_n) \leqslant \varepsilon$, da

$$\sup_{t\in W} d\big(f(t), f_n(t)\big) = \sup_{t\in W} \lim_{k\to\infty} d\big(f_k(t), f_n(t)\big) \leqslant \varepsilon$$

f ist stetig: Sei $\varepsilon > 0$ und $t \in W$. Wir finden ein $N \in \mathbb{N}$ mit $d_{W,X}(f, f_N) < \frac{\varepsilon}{3}$. Da f_N stetig ist in t, existiert eine offene Umgebung U von t, sodass $d\big(f_N(t), f_N(s)\big) < \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $s \in U$. Es folgt

$$d\big(f(t), f(s)\big) \leqslant d\big(f(t), f_N(t)\big) + d\big(f_N(t), f_N(s)\big) + d\big(f_N(s), f(s)\big) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Damit ist f stetig in $t \in W$, also auch auf ganz W, da t beliebig war.

f ist beschränkt: Seien $x,y \in W$. Sei $c > 0$. Finde $N \in \mathbb{N}$, sodass $d_{W,X}(f, f_N) < c$. Dann gilt

$$d\big(f(x), f(y)\big) \leqslant d\big(f(x), f_N(x)\big) + d\big(f_N(x), f_N(y)\big) + d\big(f_N(y), f(y)\big) < 2c + d\big(f_N(x), f_N(y)\big) < \infty,$$

da f_N beschränkt ist. □

1.9. Proposition Sei (X,d) ein vollständiger metrischer Raum und $\big(\overline{B}(x_n, \varepsilon_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\overline{B}(x_{n+1}, \varepsilon_{n+1}) \subseteq \overline{B}(x_n, \varepsilon_n)$ und $\varepsilon_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Dann existiert genau ein Punkt in $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{B}(x_n, \varepsilon_n)$.

Beweis:

Existenz: Behauptung: Die Folge der Mittelpunkte $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge: Sei $\varepsilon > 0$. Finde $N \in \mathbb{N}$, sodass $\varepsilon_n \leqslant \varepsilon$ für alle $n \geqslant N$. Dann gilt für alle $n \geqslant m \geqslant N$

$$d(x_n, x_m) \leqslant \varepsilon_m \leqslant \varepsilon,$$

da $x_n \in \overline{B}(x_m, \varepsilon)$ ist. Da X vollständig ist, existiert ein $x \in X$ mit $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$.

Behauptung: $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{B}(x_n, \varepsilon_n)$. Wähle dazu ein $N \in \mathbb{N}$. Dann ist $(x_n)_{n\geqslant N}$ eine Cauchy-Folge in $\overline{B}(x_N, \varepsilon_N)$. $\overline{B}(x_N, \varepsilon_N)$ ist ein abgeschlossener Teilraum von X und somit vollständig. Also ist $x \in \overline{B}(x_N, \varepsilon_N)$. Da N beliebig war, gilt $x \in \overline{B}(x_n, \varepsilon_n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Eindeutigkeit: Es seien $x,y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{B}(x_n, \varepsilon_n)$, also $x,y \in \overline{B}(x_n, \varepsilon_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$d(x,y) \leqslant d(x, x_n) + d(x_n, y) \leqslant 2 \cdot \varepsilon_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ und somit $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$. □

1.10. Satz von Baire[1] Es gelten folgende äquivalente Formulierungen:

a) Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $A_0, A_1, \dots$ eine Folge abgeschlossener Teilmengen. Falls $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ eine offene Kugel enthält, so auch eines der A_n.

b) In einem vollständigen metrischen Raum hat eine abzählbare Vereinigung von abgeschlossenen Mengen ohne innere Punkte keine inneren Punkte.

c) In einem vollständigen metrischen Raum ist ein abzählbarer Durchschnitt von dichten offenen Mengen wieder dicht.

Beweis: Zunächst die Äquivalenz:

a)⇒b): Klar, da b) Kontraposition von a) ist.

b)⇒c): Für $n \in N$ sei $U_n \subseteq X$ offen und dicht. Dann ist $X \setminus U_n \subseteq X$ abgeschlossen und hat keine inneren Punkte. Aus b) folgt nun, dass

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X \setminus U_n = X \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$$

keine inneren Punkte hat. Also ist $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ dicht in X.

c)⇒a): Ebenso (Zeige: Keines der A_n enthält offene Kugel $\Rightarrow \bigcup_n A_n$ enthält keine offen Kugel).

Wir wollen nun a) durch Widerspruch beweisen, d.h. wir nehmen an, dass gilt: Jede offene Kugel schneidet $X \setminus A_k$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Dazu wollen wir Folgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset X$, $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset (0, 1]$ finden mit

(i) $\varepsilon_k < \frac{1}{k+1}$,

(ii) $\overline{B}(x_{k+1}, \varepsilon_{k+1}) \subset (X \setminus A_k) \cap B(x_k, \varepsilon_k) \subset \overline{B}(x_k, \varepsilon_k)$,

(iii) $\overline{B}(x_k, \varepsilon_k) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$

für $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \overset{\text{(iii)}}{\supset} \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \overline{B}(x_k, \varepsilon_k) \overset{\text{(ii)}}{\subset} \bigcap_{k\in\mathbb{N}} (X \setminus A_k) \cap B(x_k, \varepsilon_k) \subset \bigcap_{k\in\mathbb{N}} X \setminus A_k = X \setminus \left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \right)$$

Aber wegen (i) und (ii) existiert nach Proposition 1.9 ein $x \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \overline{B}(x_k, \varepsilon_k)$. $\lightning$

Wir suchen also eine Abbildung $\overline{c}\colon \mathbb{N} \to X \times (0, 1], k \mapsto (x_k, \varepsilon_k)$ mit (i),(ii),(iii) für $k \in \mathbb{N}$. Wir setzen

$$P_m := \left\{ c\colon \{0, \dots, m\} \to X \times (0, 1] \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{(i),(iii) gilt für } k \in \{0, \dots, m\}, \\ \text{(ii) gilt für } k \in \{0, \dots, m-1\} \end{array} \right\}$$

$$P_\infty := \left\{ c\colon \mathbb{N} \to X \times (0, 1] \;\middle|\; \text{(i),(ii),(iii) gilt für } k \in \mathbb{N} \right\}$$

Die Menge $P := \left(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} P_m\right) \cup P_\infty$ ist partiell geordnet bezüglich „$\prec$“:

$$c \prec c' :\iff m \leqslant m' \text{ und } c'\big|_{\{0,\dots,m\}} = c, \text{ bzw. } c' = c \text{ falls } m = m' = \infty$$

P ist nicht leer, denn nach Vorraussetzung existiert (x_0, ε_0) mit $0 < \varepsilon_0 < 1$ und $\overline{B}(x_0, \varepsilon_0) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, d.h. $(0 \mapsto (x_0, \varepsilon_0)) \in P_0$. Jede total geordnete Teilmenge $\emptyset \neq \Gamma$ von P besitzt eine obere Schranke:

[1] nach René Louis Baire, https://de.wikipedia.org/wiki/René_Louis_Baire

- Falls Γ ein $c \in P_\infty$ enthält, so ist c obere Schranke (Warum?).
- Ebenso falls Γ ein $c \in P_{\overline{m}}$ enthält und $\Gamma \cap P_{m'} = \emptyset$ für alle $\overline{m} < m' \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.
- Falls $\Gamma \subset \bigcup_{\mathbb{N}} P_m$, aber $\Gamma \not\subset \bigcup_{m \leqslant \overline{m}} P_m$ für jedes $\overline{m}$, so definieren wir eine obere Schranke in P_∞ durch Einschränkung (Wie genau?).

Mit dem Lemma von Zorn folgt, dass P ein maximales Element $\overline{c}$ besitzt. Wir müssen noch zeigen, dass $\overline{c} \in P_\infty$ wie gewünscht:

Falls $\overline{c} \in P_m$ für ein $m \in \mathbb{N}$, so gilt nach Annahme, dass $(X \setminus A_m) \cap B(x_m, \varepsilon_m) \neq \emptyset$. Dann existiert aber $(x_{m+1}, \varepsilon_{m+1}) \in X \times (0,1]$ mit $\varepsilon_{m+1} < \frac{1}{m+2}$ und

$$\overline{B}(x_{m+1}, \varepsilon_{m+1}) \subset (X \setminus A_m) \cap B(x_m, \varepsilon_m),$$

da $(X \setminus A_m) \cap B(x_m, \varepsilon_m)$ offen ist. Definiere $\overline{\overline{c}} : \{0, \dots, m+1\} \to X \times (0,1]$ durch

$$k \longmapsto \begin{cases} (x_k, \varepsilon_k), & \text{falls } k = m+1 \\ \overline{c}(k), & \text{falls } k \in \{0, \dots, m\} \end{cases},$$

dann gilt $\overline{c} \prec \overline{\overline{c}} \in P_{m+1}$ im Widerspruch zur Maximalität von $\overline{c}$. ☐

1.11. Bemerkungen

(i) Die Aussage gilt auch für lokalkompakte Hausdorffräume. (Übung, Blatt 2, Aufgabe 2)

(ii) Tatsächlich genügt eine schwächere Form des Auswahlaxioms (DC); das abzählbare Auswahlaxiom jedoch nicht.

(iii) Falls X ***separabel*** ist (d.h. falls eine abzählbare dichte Teilmenge von X existiert), dann lässt sich der Satz auch ohne (AC) beweisen. (Übung, Blatt 2, Aufgabe 1)

1.12. Corollar: Satz der gleichmäßigen Beschränktheit Sei (X,d) ein vollständiger metrischer Raum. Sei $F \subset C(X, \mathbb{R})$ eine Menge, die ***punktweise gleichmäßig beschränkt*** ist, d.h. für jedes $x \in X$ existiert $K_x \in \mathbb{R}$, sodass

$$|f(x)| \leqslant K_x \ \ \forall f \in F.$$

Dann existieren $\emptyset \neq U \subset X$ offen und $K \in \mathbb{R}$ so, dass

$$|f(x)| \leqslant K \ \ \forall x \in U, f \in F$$

Beweis: Definiere für $n \in \mathbb{N}$

$$X \supset A_n := \big\{ x \in X \,\big|\, |f(x)| \leqslant n \ \ \forall f \in F \big\} = \bigcap_{f \in F} f^{-1}\big([-n,n]\big)$$

Also sind die $A_n \subset X$ abgeschlossen. Es ist $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = X$, wegen der Voraussetzung von punktweiser gleichmäßiger Beschränktheit. Da X eine nichtleere, offene Teilmenge U enthält, existiert nach dem Satz von Baire ein $n \in N$ mit $U \subset A_n$. ☐

2. Normierte Räume, Hahn-Banach Sätze

2.1. Definition Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit einer Topologie $\mathcal{T}$. Wir sagen, X ist ein ***topologischer Vektorraum***, falls Addition und Skalarmultiplikation stetig sind:

$$+\colon X \times X \to X \quad , \quad (x, y) \mapsto x + y$$
$$\cdot : \mathbb{K} \times X \to X \quad , \quad (\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x$$

2.2. Proposition Sei X ein topologischer $\mathbb{K}$-Vektorraum und $Y \subset X$ ein Untervektorraum. Dann sind Y und $\overline{Y}$ topologische Vektorräume mit der Unterraumtopologie.

Beweis:

- Klar für Y.
- Zu zeigen: $\overline{Y}$ ist ein Untervektorraum. Seien $x_0, y_0 \in \overline{Y}$ und sei U eine offene Menge in X mit $x_0 + y_0 \in U$. Dann existieren offene Mengen V, W von X mit $x_0 \in V$, $y_0 \in W$ und $V + W \subset U$, da die Addition stetig ist. Da $x_0 \in \overline{Y}$ und $x_0 \in V$, existiert $x_1 \in Y$ mit $x_1 \in V$. Analog existiert $y_1 \in Y$ mit $y_1 \in W$. Daher ist $x_1 + y_1 \in Y \cap U$. Da U eine beliebige offene Umgebung um $x_0 + y_0$ ist, folgt $x_0 + y_0 \in \overline{Y}$.

  Skalarmultiplikation genauso. □

2.3. Proposition Ein normierter Vektorraum $(X, \|\cdot\|)$ ist ein topologischer Vektorraum bezüglich der von $\|\cdot\|$ induzierten Topologie.

Beweis: Es gilt

$$\|(x + y) - (x' + y')\|_X \leqslant \|x - x'\|_X + \|y - y'\|_X$$

Daher ist $+\colon X \times X \to X$ gleichmäßig stetig bezüglich der Norm $\|(z, z')\|_{X\times X} := \|z\|_X + \|z'\|_X$ auf $X \times X$. Ähnlich folgt

$$\|\lambda x - \lambda' x'\|_X = \|\lambda(x - x') + (\lambda - \lambda')x'\|_X \leqslant |\lambda| \cdot \|x - x'\|_X + |\lambda - \lambda'| \cdot \|x'\|_X$$

Daher ist $\cdot\colon \mathbb{K} \times X \to X$ stetig, denn falls $(\lambda_i)_{i\in I}$ ein Netz in $\mathbb{K}$ und $(x_i)_{i\in I}$ ein Netz in X ist mit $\lambda_i \to \lambda$, $x_i \to x$, dann gilt $\lambda_i x_i \to \lambda x$, also $\|\lambda_i x_i - \lambda x\|_X \to 0$. □

2.4. Proposition Seien X, Y topologische Vektorräume, $T : X \to Y$ linear. Dann sind äquivalent:

(1) T ist stetig.

(2) T ist stetig in 0.

(3) T ist stetig in einem Punkt $\overline{x}$.

Beweis: (1) ⇒ (2) ⇒ (3) ist klar. Wir zeigen (3) ⇒ (1):

Für $y \in X$ definiere $L_y\colon X \to X$, $x \mapsto y + x$. Dann ist L_y bijektiv und stetig. Da auch L_{-y} stetig ist, ist L_y ein Homöomorphismus. Sei nun T in $\overline{x}$ stetig. Sei $x_0 \in X$. Wir zeigen: T ist stetig in x_0. Setze $y := \overline{x} - x_0$. Dann ist

$$T(x_0) = T(x_0 + y - y) = T(-y) + T(x_0 + y) = L_{T(-y)} \circ T \circ L_y(x_0)$$

Da $L_y(x_0) = \overline{x}$, T stetig in $\overline{x}$ ist und L_y, $L_{T(-y)}$ stetig sind, ist somit T stetig in x_0. □

2.5. Definition Für topologische Vektorräume X, Y definieren wir

$$\mathcal{L}(X,Y) = \{T\colon X \to Y \mid T \text{ linear und stetig}\}$$

Wir schreiben $X^* := \mathcal{L}(X,\mathbb{K})$ für den ***Dualraum*** von X. Die Elemente von X^* heißen (stetige) ***Funktionale***.[2] Die Elemente von $\mathcal{L}(X,X)$ heißen (stetige) ***Operatoren*** auf X.

2.6. Bemerkung $\mathcal{L}(X,Y)$ und $\mathcal{L}(X,\mathbb{K}) = X^*$ sind Vektorräume, wobei die Vektorraumstruktur punktweise definiert ist. $\mathcal{L}(X,X)$ ist sogar eine Algebra mittels Komposition.

2.7. Proposition Seien X, Y normierte Vektorräume, $T\colon X \to Y$ linear. Dann ist T stetig genau dann, wenn ein $\mu \geqslant 0$ existiert, sodass

$$\|T(x)\|_Y \leqslant \mu \cdot \|x\|_X \quad \forall x \in X$$

Ein stetiger Operator zwischen normierten Vektorräumen heißt deswegen auch ***beschränkt***.

Beweis:

„$\Leftarrow$“: Klar: Wenn $x_n \to 0$, dann $T(x_n) \to 0$, denn $\|T(x_n)\| \leqslant \mu \|x_n\| \to 0$. Also ist T stetig in 0 und nach 2.4 überall stetig.

„$\Rightarrow$“: Angenommen T ist stetig. Dann setzen wir

$$\mu := \sup\left\{ \frac{1}{\|x\|_X} \cdot \|T(x)\|_Y \,\middle|\, x \in X \setminus \{0\} \right\}$$

Angenommen, $\mu = \infty$. Dann existieren $x_n \in X$ mit $\frac{1}{\|x_n\|_X} \cdot \|T(x_n)\|_Y \geqslant n$. Betrachte $x_n' := \frac{1}{n \cdot \|x_n\|_X} \cdot x_n$, dann $\|x_n'\| = \frac{1}{n}$, also $x_n' \to 0$. Aber es gilt $T(x_n') \not\longrightarrow 0$, denn

$$\|T(x_n')\|_Y = \frac{1}{n \cdot \|x_n\|_X} \cdot \|T(x_n)\|_Y \geqslant 1$$

für alle n im Widerspruch zur Stetigkeit von T. Also $\mu < \infty$. □

2.8. Definition Seien X, Y normierte Vektorräume, $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Die ***Norm*** (oder ***Operatornorm***) von T ist

$$\|T\| = \sup\left\{ \frac{1}{\|x\|_X} \cdot \|T(x)\|_Y \,\middle|\, x \in X \setminus \{0\} \right\} = \sup\left\{ \|T(x)\|_Y \,\middle|\, x \in X \text{ mit } \|x\|_X = 1 \right\}$$

Nach 2.7 ist $\|T\| < \infty$ und $\|Tx\|_Y \leqslant \|T\| \cdot \|x\|_X$ für alle $x \in X$.

2.9. Proposition Seien X, Y normierte Räume, betrachte $\mathcal{L}(X,Y)$ mit $\|\cdot\|$. Dann ist $\mathcal{L}(X,Y)$ ein normierter Raum.

[2] Aus der linearen Algebra: $X^* = \mathrm{Hom}(X,\mathbb{R}) = \{T : X \to \mathbb{R} \mid T \text{ linear}\}$. Die Elemente von X^* heißen Funktionale.

Beweis:

- $\|T\| \geqslant 0$ für alle $T \in \mathcal{L}(X,Y)$.
- Es gilt
$$\begin{aligned}\|T\| = 0 &\iff \forall x \in X, \|x\|_X = 1 : \|Tx\|_Y = 0 \iff \forall x \in X, \|x\|_X = 1 : Tx = 0 \\ &\iff \forall x \in X : Tx = 0 \iff T = 0\end{aligned}$$
- Sei $\lambda \in \mathbb{K}$, $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Dann gilt
$$\|\lambda \cdot T\| = \sup_{\|x\|_X=1} \|\lambda \cdot T(x)\|_Y = \sup_{\|x\|_X=1} |\lambda| \cdot \|Tx\|_Y = |\lambda| \cdot \sup_{\|x\|_X=1} \|Tx\|_Y = |\lambda| \cdot \|T\|$$
- Seien $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(X,Y)$ und $x \in X$ mit $\|x\|_X = 1$. Dann gilt
$$\|(T_1 + T_2)(x)\|_Y = \|T_1 x + T_2 x\|_Y \leqslant \|T_1 x\|_Y + \|T_2 x\|_Y$$
Damit folgt weiter
$$\begin{aligned}\|T_1 + T_2\| = \sup_{\|x\|_X=1} \|(T_1+T_2)(x)\|_Y &\leqslant \sup_{\|x\|_X=1} \big(\|T_1 x\|_Y + \|T_2 x\|_Y\big) \\ &\leqslant \sup_{\|x\|_X=1} \sup_{\|x'\|_X=1} \big(\|T_1 x\|_Y + \|T_2 x'\|_Y\big) = \|T_1\| + \|T_2\|\end{aligned}$$

□

2.10. Definition Eine $\mathbb{K}$-Algebra A heißt ***normiert***, falls A mit einer Norm $\|\cdot\|$ versehen ist, so dass $(A, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum ist und folgende Ungleichung gilt
$$\|ab\| \leqslant \|a\| \cdot \|b\| \quad \forall a, b \in A$$
Falls A ***unital*** ist, d.h. es existiert ein Einselement 1_A, dann gilt $\|1_A\| \leqslant 1$. Wenn $\|1_A\| < 1$, dann ist $\|1_A\| = \|1_A \cdot 1_A\| \leqslant \|1_A\| \cdot \|1_A\| \Rightarrow \|1_A\| = 0$. Also $1_A = 0$ und damit $A = \{0\}$.

2.11. Beispiele

(i) $C(\Omega, \mathbb{K})$, wobei Ω ein kompakter Hausdorffraum und die Multiplikation punktweise ist. Betrachte die Norm $\|.\|_\infty$. Für $f, g \colon \Omega \to K$ gilt dann $\|f \cdot g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \cdot \|g\|_\infty$

(ii) $\mathcal{L}(X,X)$ für einen normierten Raum X mit $\|.\|$, denn für $S, T \in \mathcal{L}(X,X)$ gilt
$$\|ST\| = \sup_{\|x\|_X=1} \|S(T(x))\|_X \leqslant \sup_{\|x\|_X=1} \big(\|S\| \cdot \|Tx\|_X\big) = \|S\| \cdot \|T\|.$$

2.12. Proposition Seien X, Y normierte Räume. Dann ist $X \times Y$ ein normierter Raum mit
$$\|(x,y)\|_1 := \|x\|_X + \|y\|_Y \quad \text{für } (x,y) \in X \times Y$$
oder
$$\|(x,y)\|_\infty := \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\}$$
Beide Normen sind äquivalent.

Beweis: *Übung!* □

2.13. Proposition und Definition Sei X ein normierter Raum und $Y \subseteq X$ ein abgeschlossener Unterraum. Dann ist $X/Y = \{x+Y \mid x \in X\}$ ein normierter Raum mit

$$\|x+Y\|_{X/Y} := \inf\{\|x+y\|_X \mid y \in Y\}$$

Die Quotientenabbildung $q\colon X \twoheadrightarrow X/Y$, $x \mapsto x+Y$ ist stetig und linear. Weiter ist $\|q\| \leqslant 1$ und q offen, d.h. bildet offene Mengen in X auf offene Mengen in X/Y ab.

Bemerkung: Daraus folgt, dass Normtopologie und Quotiententopologie auf X/Y gleich sind.

Beweis:

a) X/Y ist ein Vektorraum mit $(x+Y)+(x'+Y) = (x+x')+Y$.

b) Sei $\overline{x} = x+Y \in X/Y$. Es gilt
- $\|\overline{x}\| \geqslant 0$ ist klar für alle $\overline{x} \in X/Y$
- Angenommen $\|\overline{x}\|_{X/Y} = 0$, d.h. $\inf_{y\in Y}\|x+y\|_X = 0$. Also existiert eine Folge $(y_n)_n \subset Y$ mit $\|x+y_n\|_X \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow y_n \xrightarrow{n\to\infty} -x$. Also ist $-x$ und damit auch x in Y, da Y abgeschlossen ist. Damit ist $\overline{x} = 0$

c) Sei $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$, $x \in X$. Dann gilt

$$\|\lambda\cdot\overline{x}\|_{X/Y} = \inf_{y\in Y}\|\lambda x + y\|_X = \inf_{y\in Y}\|\lambda x + \lambda y\|_X = \inf_{y\in Y}|\lambda|\cdot\|x+y\|_X = |\lambda|\cdot\|\overline{x}\|_{X/Y}$$

d) Seien $\overline{x}, \overline{y} \in X/Y$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\|\overline{x}+\overline{y}\|_{X/Y} = \inf_{z\in Y}\|x+y+z\|_X = \inf_{z,z'\in Y}\|x+y+z+z'\|_X &\leqslant \inf_{z,z'\in Y}\Big(\|x+z\|_X + \|y+z'\|_X\Big)\\ &= \|\overline{x}\|_{X/Y} + \|\overline{y}\|_{X/Y}\end{aligned}$$

Damit ist $\|.\|_{X/Y}$ eine Norm auf X/Y.

e) Die Linearität von q ist klar. Es gilt $\|\overline{x}\|_{X/Y} = \inf_{y\in Y}\|x+y\|_X \leqslant \|x\|_X$. Also

$$\|q\| = \sup_{\|x\|_X=1}\|q(x)\|_{X/Y} \leqslant \sup_{\|x\|_X=1}\|x\|_X = 1$$

f) Zu zeigen: q ist offen. Sei $x \in X$, $\varepsilon > 0$. Betrachte die offene Kugel $B(x,\varepsilon) \subset X$. Wir zeigen $B(\overline{x},\varepsilon) \subset q(B(x,\varepsilon))$. Sei also $\overline{z} = z+Y$ in $B(\overline{x},\varepsilon)$. Dann gilt $\|\overline{x}-\overline{z}\|_{X/Y} < \varepsilon$, worauf folgt

$$\inf_{y\in Y}\|x-z+y\|_X < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ es existiert $y \in Y : \|x-z+y\|_X < \varepsilon$. Es gilt $\overline{z} = \overline{z-y} \in q(B(x,\varepsilon))$, da $z-y \in B(x,\varepsilon)$.

Sei $V \subset X$ offen, zeige $q(V) \subset X/Y$ offen. Für $x \in V$ finde $\varepsilon > 0$, sodass $B(x,\varepsilon) \subset V$. Dann folgt $B(\overline{x},\varepsilon) \subseteq q\big(B(x,\varepsilon)\big) \subseteq q(V)$. Da $x \in V$ beliebig gewählt war, folgt $B(\overline{x},\varepsilon) \subseteq q(V)$ für jedes $\overline{x} \in q(V)$. □

2.14. Definition Ein ***Banachraum*** ist ein vollständiger, normierter Raum. Eine ***Banachalgebra*** ist eine vollständige normierte Algebra.

2.15. Beispiel $C(\Omega, \mathbb{K})$, wobei Ω ein kompakter Hausdorffraum ist, ist eine Banachalgebra.

2.16. Proposition Produkte und Quotienten (nach abgeschlossenen Unterräumen) von Banachräumen sind wieder Banachräume.

Beweis:

Produkt $X \times Y$: Es gilt $\|(x, y)\|_\infty = \max\{\|x\|, \|y\|\}$. Sei $((x_n, y_n))_n \subset X \times Y$ eine Cauchyfolge. Dann sind $(x_n)_n$ und $(y_n)_n$ Cauchyfolgen und es gilt $x_n \to x$ und $y_n \to y$ und somit auch $(x_n, y_n) \to (x, y)$.

Quotient ${}^X/_Y$: Sei X ein Banachraum und $Y \subseteq X$ ein abgeschlossener Unterraum. Falls $\overline{x}, \overline{y} \in {}^X/_Y$, so existiert $y' \in X$, sodass $\overline{y} = \overline{y'}$ und

$$\|x - y'\|_X \leqslant 2 \cdot \|\overline{x} - \overline{y}\|_{X/Y}$$

Sei nun $(\overline{x}_n)_n$ eine Cauchyfolge in ${}^X/_Y$. Es gibt eine Teilfolge $(\overline{x}_{n_k})_k$, sodass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\|\overline{x}_{n_{k-1}} - \overline{x}_{n_k}\right\|_{X/Y} < \infty$$

Falls $(\overline{x}_{n_k})_k$ konvergiert, dann auch $(\overline{x}_n)_n$. Wir dürfen also ohne Einschränkungen annehmen, dass bereits $\sum_{n=1}^{\infty} \|\overline{x}_{n-1} - \overline{x}_n\| < \infty$ gilt. Wähle $x'_1 \in \overline{x}_1$. Wähle induktiv $x'_n \in X$ mit

$$\left\|x'_{n-1} - x'_n\right\|_X \leqslant 2 \cdot \|\overline{x}_{n-1} - \overline{x}_n\|_{X/Y}$$

und $x'_n \in \overline{x}_n$. Dann gilt $\sum_{n=1}^{\infty} \left\|x'_{n-1} - x'_n\right\|_X < \infty$. Daher ist $(x'_n)_n$ eine Cauchyfolge in X. Also existiert $x \in X$ mit $x_n \to x$. Dann gilt auch $\overline{x}_n \to \overline{x}$. □

2.17. Definition Sei X ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine Abbildung $\varphi \colon X \to \mathbb{R}$ heißt ***sublinear***, falls gilt:

(i) $\varphi(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot \varphi(x)$, für $x \in X$, $\lambda \in [0, \infty)$

(ii) $\varphi(x + y) \leqslant \varphi(x) + \varphi(y)$, für $x, y \in X$.

Setze $\mathcal{S}(X) := \{\varphi \colon X \to \mathbb{R} \mid \varphi \text{ sublinear}\}$. $\mathcal{S}(X)$ ist partiell geordnet mit

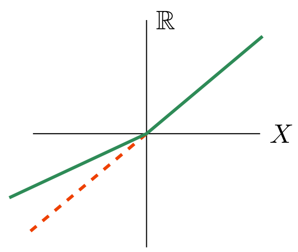
$$\varphi \leqslant \psi :\iff \varphi(x) \leqslant \psi(x), \quad x \in X$$

2.18. Beispiele

(i) Halbnormen, also nicht positiv definite Normen, sind sublinear.

(ii) Folgende Abbildung $X \to \mathbb{R}$ ist sublinear:

Benutze $0 = \varphi(0) = \varphi(x - x) \leqslant \varphi(x) + \varphi(-x)$.



2.19. Proposition Sei X ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. $\mathcal{S}(X)$ ist nach unten ***induktiv geordnet***, d.h. jede nichtleere total geordnete Teilmenge besitzt eine untere Schranke.

Beweis: Sei $\emptyset \neq (\varphi_i)_I \subseteq \mathcal{S}(X)$ total geordnet. Setze $\varphi(x) := \inf_{i\in I} \varphi_i(x)$, dann gilt

$$-\varphi_i(-x) \leqslant \varphi_i(x) \implies -\varphi(-x) \leqslant \varphi(x) \leqslant \varphi_i(x) < \infty$$

ebenso $-\varphi(x) \leqslant \varphi(-x) \leqslant \varphi_i(-x)$ für $x \in X$, $i \in I$. Insbesondere gilt $-\infty < \varphi(x) < \infty$, $x \in X$. Die Sublinearität von φ und $\varphi \leqslant \varphi_i$, $i \in I$ sind klar (Warum?). □

2.20. Proposition Sei X ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\varphi \in \mathcal{S}(X)$. Dann ist φ in $\mathcal{S}(X)$ minimal genau dann, wenn φ linear ist.

Beweis:

"⇐": Sei $\psi \leqslant \varphi$ mit ψ sublinear und φ linear. Dann folgt $\psi(x) \leqslant \varphi(x)$ und $\psi(-x) \leqslant \varphi(-x)$ für $x \in X$.

$$\implies -\psi(x) \leqslant \psi(-x) \leqslant \varphi(-x) = -\varphi(x)$$

Daraus folgt $\varphi(x) \leqslant \psi(x)$ und somit muss $\varphi = \psi$ gelten. Also ist φ minimal.

"⇒": Sei $\varphi \in \mathcal{S}(X)$ minimal. Zu $\overline{x} \in X$ definiere $\varphi_{\overline{x}} \colon X \to \mathbb{R}$ durch

$$\varphi_{\overline{x}}(x) := \inf_{\lambda \geqslant 0} \Big(\varphi(x + \lambda \cdot \overline{x}) - \lambda \cdot \varphi(\overline{x}) \Big)$$

Es gilt $\varphi_{\overline{x}}(x) \in (-\infty, \infty)$, denn für $x \in X, \lambda \geqslant 0$ ist

$$\begin{aligned} & \varphi(\lambda \cdot \overline{x}) = \varphi(x + \lambda \cdot \overline{x} - x) \leqslant \varphi(x + \lambda \cdot \overline{x}) + \varphi(-x) \\ \iff & -\varphi(\lambda \cdot \overline{x}) \geqslant -\varphi(-x) - \varphi(x + \lambda \cdot \overline{x}) \\ \iff & -\varphi(-x) \leqslant \varphi(x + \lambda \cdot \overline{x}) - \lambda \cdot \varphi(\overline{x}) \overset{\text{2.17 (ii)}}{\leqslant} \varphi(x) \end{aligned}$$

$\varphi_{\overline{x}}$ ist sublinear:

(i) Sei $\mu > 0$. Dann gilt für $x \in X$:

$$\begin{aligned} \varphi_{\overline{x}}(\mu \cdot x) = \inf_{\lambda \geqslant 0} \Big(\varphi(\mu \cdot x + \lambda \cdot \overline{x}) - \lambda \cdot \varphi(\overline{x}) \Big) &= \inf_{\lambda \geqslant 0} \mu \cdot \left(\varphi\left(x + \frac{\lambda}{\mu} \cdot \overline{x} \right) - \frac{\lambda}{\mu} \cdot \varphi(\overline{x}) \right) \\ &= \mu \cdot \inf_{\lambda' \geqslant 0} \Big(\varphi(x + \lambda' \cdot \overline{x}) - \lambda' \varphi(\overline{x}) \Big) \\ &= \mu \cdot \varphi_{\overline{x}}(x) \end{aligned}$$

$\varphi_{\overline{x}}(0 \cdot x) = 0$ ist klar.

(ii) Zu $x, y \in X$, $\varepsilon > 0$ wähle $\lambda_x, \lambda_y \geqslant 0$ mit

$$\begin{aligned} \varphi_{\overline{x}}(x) &\geqslant \varphi(x + \lambda_x \cdot \overline{x}) - \lambda_x \cdot \varphi(\overline{x}) - \varepsilon \\ \varphi_{\overline{x}}(y) &\geqslant \varphi(y + \lambda_y \cdot \overline{x}) - \lambda_y \cdot \varphi(\overline{x}) - \varepsilon \end{aligned}$$

Setze $\lambda := \lambda_x + \lambda_y$, dann gilt

$$\begin{aligned} \varphi_{\overline{x}}(x) + \varphi_{\overline{x}}(y) &\geqslant \varphi(x + \lambda_x \cdot \overline{x}) + \varphi(y + \lambda_y \cdot \overline{x}) - \lambda \cdot \varphi(\overline{x}) - 2\varepsilon \\ &\geqslant \varphi(x + y + \lambda \cdot \overline{x}) - \lambda \cdot \varphi(\overline{x}) - 2\varepsilon \\ &\geqslant \varphi_{\overline{x}}(x + y) - 2\varepsilon \qquad \text{(nach Definition)} \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, gilt $\varphi_{\overline{x}}(x) + \varphi_{\overline{x}}(y) \geqslant \varphi_{\overline{x}}(x + y)$. Also ist $\varphi_{\overline{x}}$ sublinear.

$\varphi_{\overline{x}} \leqslant \varphi$ ist klar mit $\lambda = 0$. Da φ minimal ist, folgt $\varphi_{\overline{x}} = \varphi$. Wir erhalten

$$\varphi(x) + 1 \cdot \varphi(\overline{x}) \leqslant \varphi(x + 1 \cdot \overline{x}) \overset{\text{sublinear}}{\leqslant} \varphi(x) + 1 \cdot \varphi(\overline{x})$$

für jedes $x, \overline{x} \in X$. Also ist φ additiv und somit linear. □

2.21. Satz von Hahn-Banach Sei X ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\varphi \in \mathcal{S}(X)$. Dann existiert $\psi\colon X \to \mathbb{R}$ linear mit $\psi \leqslant \varphi$.

X ist nicht zwangsweise endlich-dimensional!

Beweis: Sei $\mathcal{S}_\varphi := \{\varphi' \in \mathcal{S}(X) \,|\, \varphi' \leqslant \varphi\} \ni \varphi$. Nach Proposition 2.19 ist $\mathcal{S}(X)$ und damit auch $\mathcal{S}_\varphi$ nach unten induktiv geordnet. Nach dem Lemma von Zorn enthält $\mathcal{S}_\varphi$ ein minimales Element ψ. ψ ist auch minimal in $\mathcal{S}(X)$ (Warum?). Also ist ψ linear nach Proposition 2.20. □

Wichtige Folgerungen: Fortsetzungs- und Trennungssätze.

2.22. Satz Sei X ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ sublinear. Sei $Y \subset X$ ein linearer Unterraum und $\psi\colon Y \to \mathbb{R}$ linear mit $\psi \leqslant \varphi|_Y$. Dann existiert $\overline{\psi}\colon X \to \mathbb{R}$ linear mit $\overline{\psi}|_Y = \psi$ und $\overline{\psi} \leqslant \varphi$.

Beweis: Definiere $\tilde{\varphi}\colon X \to \mathbb{R}$ durch $\tilde{\varphi}(x) := \inf_{y \in Y}\big(\varphi(x-y) + \psi(y)\big)$, $x \in X$. Es gilt $0 = \varphi(-y) - \varphi(-y) = \varphi(x - y - x) - \varphi(-y) \leqslant \varphi(x-y) + \varphi(-x) - \varphi(-y)$, womit folgt

$$\varphi(x-y) + \psi(y) \geqslant \varphi(-y) - \varphi(-x) - \psi(-y) \geqslant -\varphi(-x) > -\infty \qquad \forall x \in X, y \in Y$$

Also ist $\tilde{\varphi}$ wohldefiniert. Analog zu 2.20 folgt, dass $\tilde{\varphi}$ sublinear ist. Nach dem Satz von Hahn-Banach (2.21) existiert ein $\overline{\psi}\colon X \to \mathbb{R}$ linear mit $\overline{\psi} \leqslant \tilde{\varphi} \leqslant \varphi$. Es bleibt nur $\overline{\psi}|_Y = \psi$ zu zeigen.

Für $y_0 \in Y$ gilt $\tilde{\varphi}(y_0) = \inf_{y \in Y}\big(\varphi(y_0 - y) + \psi(y)\big)$ und somit folgt $\tilde{\varphi}|_Y \leqslant \psi$ mittels $y = y_0$. Weiter folgt aus 2.20, dass ψ minimal in $\mathcal{S}(Y)$ ist. Also muss insgesamt gelten:

$$\overline{\psi}|_Y \leqslant \tilde{\varphi}|_Y \leqslant \psi \quad \Longrightarrow \quad \psi = \overline{\psi}|_Y$$ □

2.23. Satz Sei nun X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $p\colon X \to \mathbb{R}$ eine Halbnorm. Sei $Y \subset X$ ein Untervektorraum und $\psi\colon Y \to \mathbb{K}$ linear mit $|\psi(y)| \leqslant p(y)$ für $y \in Y$. Dann existiert $\overline{\psi}\colon X \to \mathbb{K}$ linear mit $\overline{\psi}|_Y = \psi$ und

$$\big|\overline{\psi}(x)\big| \leqslant p(x) \quad \text{für } x \in X$$

Beweis: Sei zunächst $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. p ist sublinear und es gilt $\psi \leqslant p|_Y$. Nach 2.22 existiert eine lineare Fortsetzung $\overline{\psi}\colon X \to \mathbb{R}$ mit $\overline{\psi} \leqslant p$. Es gilt auch

$$-\overline{\psi}(x) = \overline{\psi}(-x) \leqslant p(-x) = p(x) \quad \Longrightarrow \quad \big|\overline{\psi}(x)\big| \leqslant p(x) \quad \text{für } x \in X$$

Sei nun $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Definiere $\psi_1 := \mathrm{Re}(\psi)\colon Y \to \mathbb{R}$. Dann ist ψ_1 $\mathbb{R}$-linear (warum?). Es gilt $|\psi_1(y)| \leqslant |\psi(y)| \leqslant p(y)$, $y \in Y$. Es existiert also ein $\mathbb{R}$-lineares $\overline{\psi}_1\colon X \to \mathbb{R}$ mit

$$\overline{\psi}_1(y) = \psi_1(y), \;\; y \in Y \quad \text{und} \quad \big|\overline{\psi}_1(x)\big| \leqslant p(x), \;\; x \in X$$

Definiere jetzt $\overline{\psi}\colon X \to \mathbb{C}$ durch $\overline{\psi}(x) := \overline{\psi}_1(x) - i \cdot \overline{\psi}_1(i \cdot x)$, $x \in X$. Dann ist $\overline{\psi}$ $\mathbb{C}$-linear (warum?). Weiter gilt $\overline{\psi}(y) = \psi(y)$ für $y \in Y$. ($\mathrm{Re}(\overline{\psi}|_Y) = \mathrm{Re}(\psi)$ und $\overline{\psi}|_Y$ und ψ sind beide $\mathbb{C}$-linear). Zu $x \in X$ wähle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| = 1$ und

$$\big|\overline{\psi}(x)\big| = \lambda \cdot \overline{\psi}(x) = \overline{\psi}(\lambda \cdot x) = \overline{\psi}_1(\lambda \cdot x) \leqslant p(\lambda \cdot x) = |\lambda| \cdot p(x) = p(x)$$ □

2.24. Satz Sei X ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum, $Y \subset X$ ein Unterraum und $\psi\colon Y \to \mathbb{K}$ linear und stetig. Dann existiert eine stetige, lineare Fortsetzung $\overline{\psi}\colon X \to \mathbb{K}$ mit $\|\overline{\psi}\|_{\mathcal{L}(X,\mathbb{K})} = \|\psi\|_{\mathcal{L}(Y,\mathbb{K})}$.

Beweis: Definiere eine Halbnorm durch $p(x) := \|x\| \cdot \|\psi\|$. Wegen 2.7 gilt $|\psi(x)| \leqslant p(x)$, also besitzt ψ nach Satz 2.23 eine lineare Fortsetzung $\overline{\psi}$ mit $|\overline{\psi}(x)| \leqslant p(x) = \|\psi\| \cdot \|x\|$, $x \in X$. Es folgt $\|\overline{\psi}\| \leqslant \|\psi\|$. $\|\psi\| \leqslant \|\overline{\psi}\|$ ist trivial, da $\psi|_Y = \overline{\psi}$. ☐

2.25. Definition Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Sei $M \subset X$ eine Teilmenge. M heißt ***konvex***, falls für $a, b \in M$, $\lambda \in [0,1]$ gilt

$$(1-\lambda) \cdot a + \lambda \cdot b \in M$$

Ist X ein topologischer Vektorraum und $M \subset X$ konvex, so ist auch $\overline{M}$ konvex.[3] Ist $N \subset X$ eine beliebige Teilmenge, so definieren wir die ***konvexe Hülle*** von N durch

$$\operatorname{conv}(N) := \bigcap_{\substack{N \subset M \subset X \\ M \text{ konvex}}} M$$

$\operatorname{conv}(N)$ ist konvex. (warum?)

2.26. Satz Sei X ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, $\emptyset \neq M \subset X$ konvex, $\varphi \in \mathcal{S}(X)$. Dann existiert $\psi\colon X \to \mathbb{R}$ linear mit $\psi \leqslant \varphi$ und

$$\inf_{y \in M} \varphi(y) = \inf_{y \in M} \psi(y) \qquad [*]$$

Beweis: Setze $\mu := \inf_{y \in M} \varphi(y)$. Falls $\mu = -\infty$, so folgt die Behauptung aus dem Satz von Hahn-Banach 2.21. [*] ist dann trivialerweise erfüllt. Sei also $\mu \in \mathbb{R}$. Definiere $\tilde{\varphi}\colon X \to \mathbb{R}$ durch

$$\tilde{\varphi}(x) := \inf_{y \in M, \lambda \geqslant 0} \big(\varphi(x + \lambda \cdot y) - \lambda \cdot \mu\big), \quad x \in X$$

Es gilt $\varphi(x + \lambda \cdot y) - \lambda \cdot \mu \geqslant -\varphi(-x)$ für $x \in X$, $y \in M$, $\lambda \geqslant 0$ (siehe 2.20). Also ist $\tilde{\varphi}(x) \geqslant -\varphi(-x) > -\infty$ und $\tilde{\varphi}$ somit wohldefiniert. $\tilde{\varphi}$ ist sublinear:

(i) $\tilde{\varphi}(\gamma \cdot x) = \gamma \cdot \tilde{\varphi}(x)$, für $x \in X$, $\gamma \in \geqslant 0$, wie in 2.22.

(ii) Seien $x, z \in X$ und $\varepsilon > 0$. Wähle $y_x, y_z \in M$, $\lambda_x, \lambda_z \geqslant 0$ mit

$$\tilde{\varphi}(x) \geqslant \varphi(x + \lambda_x \cdot y_x) - \lambda_x \cdot \mu - \varepsilon \quad \text{und} \quad \tilde{\varphi}(x) \geqslant \varphi(z + \lambda_z \cdot y_z) - \lambda_z \cdot \mu - \varepsilon$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi}(x) + \tilde{\varphi}(z) &\geqslant \varphi\big(x + z + \lambda_x \cdot y_x + \lambda_z \cdot y_z\big) - (\lambda_x + \lambda_z) \cdot \mu - 2\varepsilon \\
&= \varphi\left(x + z + (\lambda_x + \lambda_z) \cdot \underbrace{\left(\frac{\lambda_x}{\lambda_x + \lambda_z} \cdot y_x + \frac{\lambda_z}{\lambda_x + \lambda_z} \cdot y_z\right)}_{\in M}\right) - (\lambda_x + \lambda_z) \cdot \mu - 2\varepsilon \\
&\geqslant \tilde{\varphi}(x + z) - 2\varepsilon
\end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, gilt $\tilde{\varphi}(x) + \tilde{\varphi}(z) \geqslant \tilde{\varphi}(x + z)$ für alle $x, z \in X$.

Nach Hahn-Banach (2.21) existiert $\psi\colon X \to \mathbb{R}$ linear mit $\psi \leqslant \tilde{\varphi} \leqslant \varphi$. Für $y \in M$ gilt

$$-\psi(y) = \psi(-y) \leqslant \tilde{\varphi}(-y) \leqslant \varphi(-y + 1 \cdot y) - 1 \cdot \mu = -\mu$$

also $\mu \leqslant \psi(y) \leqslant \varphi(y)$, woraus [*] folgt. ☐

[3] für normierte Vektorräume siehe Anhang A.2

2.27. Satz Sei X ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum und $A, B \subset X$ nichtleere konvexe Teilmengen mit

$$\operatorname{dist}(A, B) := \inf\{\|a-b\| \mid a \in A, b \in B\} > 0$$

Dann existiert $\psi\colon X \to \mathbb{R}$ stetig und linear mit $\psi(A) \cap \psi(B) = \emptyset$.

Beweis: $A - B := \{a - b \mid a \in A, b \in B\} \subset X$ ist konvex. (Warum?) Nach Satz 2.26 existiert, da Normen sublinear sind, $\psi\colon X \to \mathbb{R}$ linear mit $\psi \leqslant \|.\|$, und

$$0 < \operatorname{dist}(A, B) = \inf_{y \in A-B} \|y\| = \inf_{y \in A-B} \psi(y) = \inf_{a \in A} \psi(a) - \sup_{b \in B} \psi(b). \qquad \square$$

3. Operatoren zwischen Banachräumen. Die Sätze von der offenen Abbildung und vom abgeschlossenen Graphen

3.1. Proposition Seien X, Y normierte Vektorräume, Y vollständig. Dann ist $\mathcal{L}(X,Y)$ vollständig bezüglich $\|.\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$.

Beweis: Sei $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}(X,Y)$ eine Cauchy-Folge bezüglich $\|.\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$. Für $x \in X$ ist dann auch $(T_n x)_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ Cauchy bezüglich $\|.\|_Y$ (Warum?)[4]. Da Y ein Banachraum ist, folgt $T_n x \to y$ für ein $y \in Y$. Wir definieren $T\colon X \to Y$ durch

$$T(x) := \lim_{n\to\infty} T_n(x)$$

für $x \in X$. T ist linear: Klar, da die T_n linear sind. T ist stetig: $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy, also auch $(\|T_n\|)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Cauchyfolge, da wegen der umgekehrten Dreiecksungleich gilt

$$\big|\|T_n\| - \|T_m\|\big| \leqslant \|T_n - T_m\| \leqslant \varepsilon$$

Dann existiert $C \geqslant 0$ mit $\|T_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leqslant C$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also gilt $\|Tx\|_Y \leqslant C \cdot \|x\|$, $x \in X$, woraus $\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leqslant C$ und die Stetigkeit von T folgt. Also ist $T \in \mathcal{L}(X,Y)$.

Wir müssen nun noch zeigen, dass $(T_n)_n \to T$ in der Operatornorm gilt. Da $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist, existiert für $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\|T_n - T_m\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n, m \geqslant n_0$. Insbesondere gilt

$$\|(T_n - T_m)(x)\|_Y \leqslant \|T_n - T_m\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \cdot \|x\|_X < \frac{\varepsilon}{2} \cdot \|x\|_X$$

für $n, m \geqslant n_0$, $x \in X$. Weiter gilt

$$\begin{aligned}\|(T_n - T)(x)\|_Y &\leqslant \|(T_n - T_m)(x)\|_Y + \|(T_m - T)(x)\|_Y \leqslant \|T_n - T_m\| \cdot \|x\|_X + \|(T_m - T)x\|_Y \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} \cdot \|x\|_X + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \|x\|_X = \varepsilon \cdot \|x\|_X\end{aligned}$$

für $n, m \geqslant n_0$ und m groß genug, $x \in X$. Damit folgt nun $\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leqslant \varepsilon$ für $n \geqslant n_0$, also $T_n \to T$ bezüglich $\|.\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$. □

3.2. Corollar

(i) Der Dualraum X^* eines normierten $\mathbb{K}$-Vektorraumes X ist vollständig.

(ii) Falls $\{0\} \neq X$ ein Banachraum ist, so ist $\mathcal{L}(X,X)$ eine Banachalgebra.

Beweis:

(i) $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ und $\mathbb{K}$ ist vollständig. Wende 3.1 an.

(ii) $\mathcal{L}(X,X)$ ist ein Banachraum nach 3.1. $\mathcal{L}(X,X)$ ist eine normierte Algebra:
- Es gilt $\|\mathrm{id}_X\|_{\mathcal{L}(X,X)} = 1$
- Für $S, T \in \mathcal{L}(X,X)$, $x \in X$ gilt

$$\|(S \circ T)(x)\|_X \leqslant \|S\| \cdot \|Tx\|_X \leqslant \|S\| \cdot \|T\| \cdot \|x\|_X$$

Also ist $\|S \circ T\| \leqslant \|S\| \cdot \|T\|$. □

[4] mit $\|T_n x - T_m x\|_Y \leqslant \|T_n - T_m\| \cdot \|x\|$

3.3. Definition und Proposition Sei X ein normierter Raum. Definiere $\iota_X\colon X \to X^{**}$ $(= (X^*)^*)$ durch

$$x \longmapsto (\varphi \mapsto \varphi(x))$$

für $x \in X$. Die Abbildung ι_X ist eine lineare Isometrie.

Beweis:

Wohldefiniertheit: Die Linearität von $\iota_X(x)$ ist klar. Mit

$$|\iota_X(x)(\varphi)| = |\varphi(x)| \leqslant \|\varphi\|_{X^*} \cdot \|x\|_X = \|x\|_X \cdot \|\varphi\|_{X^*}$$

folgt $\|\iota_X(x)\|_{X^{**}} \leqslant \|x\|_X$, also ist $\iota_X(x)$ stetig.

ι_X ist linear: Für $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $x, y \in X$, $\varphi \in \mathcal{L}(X, \mathbb{K}) = X^*$ gilt

$$\begin{aligned}\iota_X(\alpha \cdot x + \beta \cdot y)(\varphi) = \varphi(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) = \alpha \cdot \varphi(x) + \beta \cdot \varphi(y) &= \alpha \cdot \iota_X(x)(\varphi) + \beta \cdot \iota_X(y)(\varphi) \\ &= \big(\alpha \cdot \iota_X(x) + \beta \cdot \iota_X(y)\big)(\varphi)\end{aligned}$$

Isometrie: Es bleibt zu zeigen: $\|\iota_X(x)\|_{X^{**}} \geqslant \|x\|_X$ für $0 \neq x \in X$. Sei $Y := \mathbb{K} \cdot x$ und $\psi\colon Y \to \mathbb{K}$ gegeben durch $\psi(\alpha \cdot x) := \alpha \cdot \|x\|_X$. Dann ist $Y \subset X$ ein linearer Unterraum und ψ linear mit $\|\psi\| = 1$. Nach Satz 2.24 existiert nun $\overline{\psi}\colon X \to \mathbb{K}$ linear mit $\overline{\psi}(x) = \psi(x) = \|x\|_X$ und $\|\overline{\psi}\| = \|\psi\| = 1$. Es gilt

$$\|\iota_X(x)\|_{X^{**}} \geqslant \big|\iota_X(x)(\overline{\psi})\big| = \big|\overline{\psi}(x)\big| = \|x\|_X$$ □

3.4. Definition und Proposition Seien X, Y normierte Räume. Wir definieren eine Abbildung $.^{\mathrm{tr}}\colon \mathcal{L}(X, Y) \to \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ durch $T \mapsto T^{\mathrm{tr}} = (\varphi \mapsto \varphi \circ T)$. $.^{\mathrm{tr}}$ ist eine lineare Isometrie und das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\iota_X} & X^{**} \\ \big\downarrow T & & \big\downarrow T^{\mathrm{tr\,tr}} = (T^{\mathrm{tr}})^{\mathrm{tr}} \\ Y & \xrightarrow{\iota_Y} & Y^{**} \end{array}$$

kommutiert für jedes $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Für $\iota_{X^*}\colon X^* \to X^{***}$ und $\iota_X^{\mathrm{tr}}\colon X^{***} \to X^*$ gilt

$$\iota_X^{\mathrm{tr}} \circ \iota_{X^*} = \mathrm{id}_{X^*}$$

Beweis:

(i) Für $T, S \in \mathcal{L}(X, Y)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\varphi \in Y^*$ gilt

$$\begin{aligned}(\alpha \cdot T + \beta \cdot S)^{\mathrm{tr}}(\varphi) = \varphi \circ (\alpha \cdot T + \beta \cdot S) \overset{\text{linear}}{=} \alpha \cdot (\varphi \circ T) + \beta \cdot (\varphi \circ S) &= \alpha \cdot T^{\mathrm{tr}}(\varphi) + \beta \cdot S^{\mathrm{tr}}(\varphi) \\ &= \big(\alpha \cdot T^{\mathrm{tr}} + \beta \cdot S^{\mathrm{tr}}\big)(\varphi)\end{aligned}$$

Damit ist $.^{\mathrm{tr}}$ eine lineare Abbildung.

(ii) Für $x \in X$, $\psi \in Y^*$ gilt $\big(\iota_Y \circ T(x)\big)(\psi) = \psi\big(T(x)\big)$. Weiter gilt dann

$$\begin{aligned}\big(T^{\mathrm{tr\,tr}} \circ \iota_X(x)\big)(\psi) = \big((T^{\mathrm{tr}})^{\mathrm{tr}} \circ \iota_X(x)\big)(\psi) = \big(\iota_X(x) \circ T^{\mathrm{tr}}\big)(\psi) &= \iota_X(x)\big(T^{\mathrm{tr}}(\psi)\big) \\ &= T^{\mathrm{tr}}(\psi)(x) = \psi \circ T(x) \\ &= \iota_Y\big(T(x)\big)(\psi)\end{aligned}$$

$\Rightarrow T^{\mathrm{tr\,tr}}\iota_X(x) = \iota_Y\big(T(x)\big) = \iota_Y \circ T(x)$. Also $T^{\mathrm{tr\,tr}} \circ \iota_X = \iota_Y \circ T$ und das Diagramm kommutiert.

(iii) Es ist $|(T^{\text{tr}}\psi)(x)| = |\psi \circ T(x)| \leqslant \|\psi\|_{Y^*} \cdot \|Tx\|_Y \leqslant \|\psi\|_{Y^*} \cdot \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \cdot \|x\|_X$. Also ist $\|T^{\text{tr}}\psi\|_{X^*} \leqslant \|\psi\|_{Y^*} \cdot \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$ und damit folgt

$$\left\|T^{\text{tr}}\right\|_{\mathcal{L}(Y^*,X^*)} \leqslant \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$$

Ebenso ist $\|T^{\text{tr}\,\text{tr}}\|_{\mathcal{L}(X^{**},Y^{**})} \leqslant \|T^{\text{tr}}\|_{\mathcal{L}(Y^*,X^*)} \leqslant \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$. Andererseits gilt $\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leqslant \|T^{\text{tr}\,\text{tr}}\|_{\mathcal{L}(X^{**},Y^{**})}$ nach 3.3 und da das Diagramm kommutiert (Warum?).

$$\Rightarrow \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leqslant \left\|T^{\text{tr}}\right\|_{\mathcal{L}(Y^*,X^*)} \leqslant \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$$

also ist $.^{\text{tr}}$ eine Isometrie.

(iv) Für $\varphi \in X^*$, $x \in X$ gilt

$$\left(\iota_X^{\text{tr}} \circ \iota_{X^*}(\varphi)\right)(x) = (\iota_{X^*}(\varphi) \circ \iota_X)(x) = \iota_X(x)(\varphi) = \varphi(x)$$

$\Rightarrow \iota_X^{\text{tr}} \circ \iota_{X^*}(\varphi) = \varphi$, also erhalten wir $\iota_X^{\text{tr}} \circ \iota_{X^*} = \mathrm{id}_{X^*}$. □

Vergleiche 1.12, diese Aussage ist deutlich stärker! Dies verdanken wir in erster Linie der Linearität der betrachteten Abbildungen.

3.5. Satz: Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit für Banachräume Sei X ein Banachraum und Y ein normierter Raum. Sei $M \subset \mathcal{L}(X,Y)$, sodass die Menge

$$\left\{x \mapsto \|Tx\|_Y \,\middle|\, T \in M\right\} \subset C(X,\mathbb{R})$$

punktweise gleichmäßig beschränkt ist, d.h. für $x \in X$ existiert $C_x \geqslant 0$ mit $\|Tx\|_Y \leqslant C_x$, $T \in M$. Dann existiert $C \geqslant 0$ mit $\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leqslant C$, $T \in M$.

Beweis: Nach Corollar 1.12 (Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit für metrische Räume) existieren eine offene Kugel $\emptyset \neq B(x_0,\varepsilon) \subset X$ und $K \geqslant 0$ mit $\|Tx\|_Y \leqslant K$ für $x \in B(x_0,\varepsilon)$, $T \in M$. Für $x \in X$ mit $\|x\| \leqslant 1$ gilt

$$\begin{aligned}
\|Tx\|_Y = \frac{2}{\varepsilon} \cdot \left\|T\left(\frac{\varepsilon}{2} \cdot x\right)\right\|_Y &= \frac{2}{\varepsilon} \cdot \left\|T\left(\frac{\varepsilon}{2} \cdot x + x_0 - x_0\right)\right\|_Y \\
&\leqslant \frac{2}{\varepsilon} \cdot \left(\left\|T\Big(\underbrace{\frac{\varepsilon}{2} \cdot x + x_0}_{\in B(x_0,\varepsilon)}\Big)\right\|_Y + \left\|T\Big(\underbrace{x_0}_{\in B(x_0,\varepsilon)}\Big)\right\|_Y\right) \\
&\leqslant \frac{2}{\varepsilon}(K+K) = \frac{4K}{\varepsilon}
\end{aligned}$$

Es folgt $\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leqslant \frac{4K}{\varepsilon} =: C$, also haben wir die gesuchte Konstante gefunden. □

3.6. Corollar Sei Z ein normierter Raum und $N \subset Z$ eine Teilmenge, so dass gilt: Für alle $\varphi \in Z^*$ existiert $C_\varphi \geqslant 0$ mit $|\varphi(z)| \leqslant C_\varphi$, $z \in N$. Dann ist N beschränkt.

Beweis: $\iota_Z\colon Z \to Z^{**}$ ist eine Isometrie nach 3.3. Wende Satz 3.5 an mit

$$\begin{aligned}
X &= Z^* \\
Y &= \mathbb{K} \\
M &= \iota_Z(N) \subset Z^{**} = \mathcal{L}(Z^*,\mathbb{K})
\end{aligned}$$

Für $\varphi \in X = Z^*$ existiert $C_\varphi \geqslant 0$ mit $|T\varphi| = |\iota_Z(z)(\varphi)| = |\varphi(z)| \leqslant C_\varphi$, wo $T = \iota_Z(z) \in M$ für ein $z \in N$. Nach 3.5 folgt: Es existiert ein $C \geqslant 0$ mit $\|z\|_Z = \|\iota_Z(z)\|_{Z^{**}} \leqslant C$, $z \in N$. □

3.7. Corollar Sei X ein Banachraum und Z ein normierter Raum. $M \subset \mathcal{L}(X, Z)$ eine Teilmenge, so dass gilt: Für alle $\varphi \in Z^*$ und $x \in X$ existiert $C_{x,\varphi} \geqslant 0$ mit

$$\left|\varphi(Tx)\right| \leqslant C_{x,\varphi} \;, \qquad T \in M$$

Dann ist M beschränkt.

Beweis: Für jedes $x \in X$ folgt aus Corollar 3.6 mit $N := \{T(x) \,|\, T \in M\}$, dass N beschränkt ist. Es folgt, dass $\{x \mapsto \|T(x)\| \,|\, T \in M\}$ punktweise gleichmäßig beschränkt ist. Mit Satz 3.5 folgt: M ist beschränkt. □

3.8. Satz: Prinzip der offenen Abbildung Seien X, Y Banachräume, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ surjektiv. Dann ist T offen, d.h. für eine offene Menge $U \subset X$ ist $T(U) \subset Y$ offen.

Beweis:

(i) Sei $0 \in W \subset X$ offen, dann existiert $\emptyset \neq V \subset Y$ offen mit $V \subset \overline{T(W)}$:
$0 \in W \subset X \Rightarrow B(0, \varepsilon) \subset W$ für ein $\varepsilon > 0$. Dann gilt

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} n \cdot B(0, \varepsilon) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} n \cdot W$$

Aus der Surjektivität von T folgt $Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} n \cdot T(W) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} n \cdot \overline{T(W)}$. Nach dem Satz von Baire (1.10) folgt: Ein $n \cdot \overline{T(W)}$ enthält eine nichtleere offene Teilmenge, also auch $\overline{T(W)}$.

(ii) Sei $0 \in M \subset X$ offen, dann ist 0 ein innerer Punkt von $\overline{T(M)}$:
Die Abbildung $X \times X \to X$, $(x_1, x_2) \mapsto x_1 - x_2$ ist stetig.[5] $\Rightarrow$ es gibt $0 \in W \subset X$ offen mit

mit W als Urbild einer offenen Umgebung der 0 in M

$$W - W = \{x_1 - x_2 \,|\, x_1, x_2 \in W\} \subset M$$

Es folgt

$$\overline{T(M)} \supset \overline{T(W - W)} = \overline{T(W) - T(W)} \overset{\text{(Warum?)}}{\supset} \overline{T(W)} - \overline{T(W)} \overset{\text{(i)}}{\supset} V - V$$

für $\emptyset \neq V$ offen in Y wie in (i). Aber $0 \in V - V = \bigcup_{y \in V} \{y\} - V$ ist offen in Y. Also ist 0 ein innerer Punkt von $\overline{T(M)}$.

(iii) Ist $0 \in N \subset X$ offen, so existiert $0 \in Z \subset Y$ offen mit $Z \subset T(N)$:
Sei $\varepsilon_0 > 0$. Wähle $\varepsilon_i > 0$, $1 \leqslant i \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i < \varepsilon_0$. Nach (ii) gilt: Zu ε_i, $i \in N$ existiert ein $\delta_i > 0$ mit

$$B_Y(0, \delta_i) \subset \overline{T(B_X(0, \varepsilon_i))}.$$

Es gilt $\delta_i \xrightarrow{i \to \infty} 0$. Sei nun $y \in B_Y(0, \delta_0) =: Z$. Dann gilt $y \in \overline{T(B_X(0, \varepsilon_0))}$, also existiert $x_0 \in B_X(0, \varepsilon_0)$ mit $\|y - T(x_0)\|_Y < \delta_1$. Folglich existiert $x_1 \in B_X(0, \varepsilon_1)$ mit $\|y - T(x_0) - T(x_1)\|_Y < \delta_2$. Per Induktion folgt

$$\exists x_i \in B_X(0, \varepsilon_i) \text{ mit } \left\| y - \sum_{j=0}^{i} T(x_i) \right\|_Y < \delta_{i+1}, \qquad i \in \mathbb{N}$$

$\sum_{i \in \mathbb{N}} x_i$ konvergiert in X und $\left\|\sum_{i \in \mathbb{N}} x_i\right\|_X < 2 \cdot \varepsilon_0$, es gilt $T\left(\sum_{i \in \mathbb{N}} x_i\right) = y$. Es folgt

$$Z = B_Y(0, \delta_0) \subset T\big(B_X(0, 2 \cdot \varepsilon_0)\big) \subset T(N)$$

[5] Banachräume sind topologische Vektorräume

(iv) Sei $U \subset X$ offen. Dann ist $T(U) \subset Y$ offen:

Zu $x \in U$ existiert $0 \in N \subset X$ offen mit $x + N \subset U$, also $T(x) + T(N) \subset T(U)$. Nach (iii) existiert $0 \in Z \subset Y$ offen mit $Z \subset T(N)$, also $T(x) + Z \subset T(U)$. Aber $T(x) \in T(x) + Z$ ist offen in Y und $T(U)$ ist Umgebung von $T(x)$. $x \in U$ war beliebig, also ist $T(U)$ offen. □

3.9. Corollar: Satz von der inversen Abbildung Seien X, Y Banachräume, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ bijektiv. Dann gilt $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$, d.h. T ist ein Homöomorphismus.

Beweis: Nach Satz 3.8 ist T offen und somit ist T^{-1} stetig. □

3.10. Corollar Sei X ein Vektorraum und seien $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ zwei Topologien auf X, die durch Banachraumnormen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ induziert sind. Falls $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$, so gilt bereits $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.

Beweis: $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2 \Rightarrow (X, \mathcal{T}_2) \xrightarrow{\mathrm{id}_X} (X, \mathcal{T}_1)$ ist stetig und bijektiv, also ist id_X nach 3.9 ein Homöomorphismus. □

3.11. Corollar Sei X ein Banachraum mit abgeschlossenen Teilräumen X_1, X_2, sodass $X_1 \cap X_2 = \{0\}$ und $X = X_1 + X_2$. Dann sind X und $X_1 \times X_2$ als topologische Vektorräume isomorph.

Beweis: Die Abbildung $X_1 \times X_2 \to X$, $(x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$ ist linear und bijektiv. Sie ist stetig, wegen

$$\|x_1 + x_2\|_X \leqslant \|x_1\|_X + \|x_2\|_X = \|(x_1, x_2)\|_{1, X_1 \times X_2}$$

Mit Corollar 3.9 folgt die Behauptung. □

4. L^p-Räume und der Satz von Riesz-Fischer

4.1. Erinnerung Sei (X, Σ, μ) ein ***Maßraum***.[6] Eine Abbildung $f\colon X \to (-\infty, \infty]$ heißt ***messbar***, falls $f^{-1}(E) \in \Sigma$ gilt für $E \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (Borelmengen[7]). Eine Abbildung $s\colon X \to (-\infty, \infty]$ heißt ***einfach***, falls $s(X)$ endlich ist. Für $f\colon X \to [0, \infty]$ messbar setzen wir

$$\int f \,\mathrm{d}\mu := \sup\left\{ \int s \,\mathrm{d}\mu \,\middle|\, s \text{ einfach, messbar mit } 0 \leqslant s \leqslant f \right\}$$

Für $f\colon X \to (-\infty, \infty]$ messbar setze $\int f \,\mathrm{d}\mu := \int f_+ \,\mathrm{d}\mu - \int f_- \,\mathrm{d}\mu$, falls $\int f_- \,\mathrm{d}\mu < \infty$. Betrachte

$$\mathcal{L}^1(\mu) := \left\{ f\colon X \to \mathbb{R} \text{ messbar} \,\middle|\, \int |f| \,\mathrm{d}\mu < \infty \right\}$$

mit der Halbnorm $\|f\|_1 := \int |f| \,\mathrm{d}\mu$. Setze nun $\mathcal{N}^1 := \left\{ f\colon X \to \mathbb{R} \text{ messbar} \,\middle|\, \int |f| \,\mathrm{d}\mu = 0 \right\}$. $L^1(\mu)$ ist ein topologischer Vektorraum (Topologie induziert durch $\|\cdot\|_1$) und $\mathcal{N}^1 \subset \mathcal{L}^1(\mu)$ ist ein abgeschlossener Untervektorraum. Definiere

$$L^1(\mu) := {}^{\mathcal{L}^1(\mu)}/_{\mathcal{N}^1}$$

$\|\cdot\|_1$ induziert eine wohldefinierte Norm auf $L^1(\mu)$ – die wir auch wieder mit $\|\cdot\|_1$ bezeichnen – via

$$\left\| f + \mathcal{N}^1 \right\|_1 := \|f\|_1 \quad , \quad f \in \mathcal{L}^1(\mu) \qquad \text{(Übung)}$$

$(L^1(\mu), \|\cdot\|_1)$ ist ein Banachraum (siehe Analysis III, 9.23).

4.2. Beispiele

(i) $L^1(\mathbb{R}^n) := L^1(\mathbb{R}^n, \Lambda, \lambda)$, wobei Λ die Lebesgue-messbaren Mengen sind und λ das Lebesgue-Maß ist.

(ii) $\ell^1(\mathbb{N}) := L^1\big(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \delta\big) = \{f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \sum |f(n)| < \infty\}$, wobei δ das Zählmaß[8] ist.

4.3. Definition und Proposition Ähnlich wie oben definieren wir für einen Maßraum (X, Σ, μ)

$$\mathcal{L}^p(\mu) := \left\{ f\colon X \to \mathbb{R} \text{ messbar} \,\middle|\, \int |f|^p \mathrm{d}\mu < \infty \right\}$$
$$\mathcal{N}^p := \left\{ f\colon X \to \mathbb{R} \text{ messbar} \,\middle|\, \int |f|^p \mathrm{d}\mu = 0 \right\}$$

$\mathcal{L}^p(\mu)$ und $\mathcal{N}^p$ sind Vektorräume. Wir setzen wieder

$$L^p(\mu) := {}^{\mathcal{L}^p(\mu)}/_{\mathcal{N}^p}$$

Definiere $\|\cdot\|_p\colon \mathcal{L}^p(\mu) \to [0, \infty)$ durch $\|f\|_p := \left(\int |f|^p \mathrm{d}\mu\right)^{1/p}$. $\|\cdot\|_p$ induziert wieder eine Abbildung $\|\cdot\|_p\colon L^p(\mu) \to [0, \infty)$ via $\|f + \mathcal{N}^p\|_p := \|f\|_p$ für $f \in \mathcal{L}^p$.

---

[6] X Menge, Σ eine σ-Algebra auf X, μ Maß
[7] σ-Algebra, die von den offenen Intervallen mit rationalen Endpunkten aufgespannt wird, siehe auch https://de.wikipedia.org/wiki/Borelsche_σ-Algebra
[8] siehe auch http://de.wikipedia.org/wiki/Zählmaß_(Maßtheorie)

Beweis:

$\mathcal{L}^p(\mu)$ ist Vektorraum: Für $f,g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ und $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\int |\alpha \cdot f + \beta \cdot g|^p \mathrm{d}\mu \leqslant \int \big(|\alpha \cdot f| + |\beta \cdot g|\big)^p \mathrm{d}\mu &\leqslant \int \big(2 \cdot \sup\{|\alpha \cdot f|, |\beta \cdot g|\}\big)^p \mathrm{d}\mu \\ &\leqslant \int \Big(2^p \cdot \sup\Big\{|\alpha \cdot f|^p, |\beta \cdot g|^p\Big\}\Big)\mathrm{d}\mu \\ &\leqslant \int 2^p \cdot \big(|\alpha \cdot f|^p + |\beta \cdot g|^p\big)\mathrm{d}\mu < \infty\end{aligned}$$

$\mathcal{N}^p$ ist Vektorraum: Wie obige Ungleichung, dann Linearität des Integrals anwenden.

$\|\cdot\|_p$ wohldefiniert auf $L^p(\mu)$: Übung (Blatt 6, Aufgabe 3). □

4.4. Proposition Für $\alpha,\beta \geqslant 0$, $p,q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt die folgende Ungleichung

$$\alpha \cdot \beta \leqslant \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q} \tag{\#}$$

Dies ist ein Spezialfall der Youngschen Ungleichung, `Wikipedia-Link`.

Beweis:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \iff p + q = pq \iff (p-1)(q-1) = 1 \iff p(q-1) = q \iff q(p-1) = p$$

Falls $\beta = \alpha^{p-1}$, so gilt $\alpha \cdot \beta = \alpha^p$ und

$$\frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q} = \frac{\alpha^p}{p} + \frac{(\alpha^{p-1})^q}{q} = \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\alpha^p}{q} = \alpha^p = \alpha \cdot \beta$$

Also gilt in diesem Fall Gleichheit in **[#]**. Für festes $\alpha \geqslant 0$ betrachte $f_\alpha \colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ gegeben durch $f_\alpha(\beta) := \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q} - \alpha \cdot \beta$. Dann ist f_α stetig auf $[0,\infty)$ und differenzierbar auf $(0,\infty)$. Es gilt $f'_\alpha(\beta) = \beta^{q-1} - \alpha$ und weiter

$$f'_\alpha(\beta) = 0 \iff \beta^{q-1} = \alpha \iff \beta = \alpha^{p-1}$$

Es ist $f''_\alpha(\alpha^{p-1}) \geqslant 0$, also hat f_α bei $\beta = \alpha^{p-1}$ ein lokales Minimum. Es gilt $f_\alpha(\alpha^{p-1}) = 0 \leqslant f_\alpha(0)$, also hat f_α bei $\beta = \alpha^{p-1}$ ein globales Minimum. Damit ist **[#]** bewiesen. □

4.5. Satz: Höldersche Ungleichung Sei (X,Σ,μ) ein Maßraum. Seien $p,q \geqslant 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, $g \in \mathcal{L}^q(\mu)$. Dann gilt $f \cdot g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ und

$$\|f \cdot g\|_1 \leqslant \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

Die entsprechenden Aussagen gelten dann auch für $L^p(\mu)$, $L^q(\mu)$ und $L^1(\mu)$.

Beweis: Klar, falls $\|f\|_p = 0$ oder $\|g\|_q = 0$ (Warum?). Sei also $\|f\|_p, \|g\|_q \neq 0$. Nach Proposition 4.4 gilt für $x \in X$

$$0 \leqslant \underbrace{\underbrace{\frac{|f(x)|}{\|f\|_p}}_{=\alpha} \cdot \underbrace{\frac{|g(x)|}{\|g\|_q}}_{=\beta}}_{\text{messbar}} \leqslant \underbrace{\frac{1}{p} \cdot \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}}_{\text{integrierbar}}$$

Es ist $|f|^p, |g|^q \in \mathcal{L}^1(\mu)$, also folgt aus obiger Ungleichung $\frac{|f \cdot g|}{\|f\|_p \cdot \|g\|_q} \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Weiter gilt nun

$$\frac{\int |f \cdot g| \mathrm{d}\mu}{\|f\|_p \cdot \|g\|_q} \leqslant \frac{1}{p} \cdot \frac{\int |f|^p \mathrm{d}\mu}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{\int |g|^q \mathrm{d}\mu}{\|g\|_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Es folgt also $\int |f \cdot g| \mathrm{d}\mu \leqslant \|f\|_p \cdot \|g\|_q$. □

4.6. Satz: Minkowskische Ungleichung Für $1 < p < \infty$, $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ (bzw. $L^p(\mu)$) gilt die ***Minkowski-Ungleichung***

$$\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$$

Beweis: Sei $\|f + g\|_p > 0$ (sonst ist die Aussage trivial). Es gilt

$$|f + g|^p = |f + g|^{p-1} \cdot |f + g| \leqslant |f + g|^{p-1} \cdot \big(|f| + |g|\big)$$

Sei $q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Es gilt $|f + g|^{p-1} \in \mathcal{L}^q(\mu)$, da $|f + g|^{(p-1)q} = |f + g|^p \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Nach der Hölderschen Ungleichung 4.5 gilt

$$\begin{aligned}\int |f + g|^p \mathrm{d}\mu \leqslant \int |f + g|^{p-1} |f| \mathrm{d}\mu + \int |f + g|^{p-1} |g| \mathrm{d}\mu &\leqslant \|f\|_p \cdot \left\| |f + g|^{p-1} \right\|_q + \|g\|_p \cdot \left\| |f + g|^{p-1} \right\|_q \\ &= \Big(\|f\|_p + \|g\|_p\Big) \cdot \left(\int |f + g|^{(p-1)q} \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \Big(\|f\|_p + \|g\|_p\Big) \cdot \left(\int |f + g|^p \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

Nach Umstellen der Ungleichung gilt also

$$\left(\int |f + g|^p \mathrm{d}\mu\right)^{1 - \frac{1}{q}} = \left(\int |f + g|^p \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$$ □

4.7. Corollar $L^p(\mu)$ ist ein normierter Vektorraum für $1 \leqslant p < \infty$.

4.8. Definition und Proposition

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^\infty(\mu) &:= \big\{ f \colon X \to \mathbb{R} \text{ messbar} \,\big|\, \exists C \geqslant 0 : |f| \leqslant C \text{ fast überall} \big\} \\ \mathcal{N}^\infty &:= \big\{ f \colon X \to \mathbb{R} \,\big|\, f = 0 \text{ fast überall} \big\}\end{aligned}$$

Wir definieren $L^\infty(\mu) := {}^{\mathcal{L}^\infty(\mu)}/_{\mathcal{N}^\infty}$. Wir definieren eine Halbnorm auf $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ durch

$$\|f\|_\infty := \inf\big\{ C \,\big|\, |f| \leqslant C \text{ fast überall} \big\}$$

Dies induziert wieder eine Norm auf $L^\infty(\mu)$ durch $\|f + \mathcal{N}\|_\infty := \|f\|_\infty$. Damit ist $(L^\infty(\mu), \|\cdot\|_\infty)$ ein normierter Vektorraum. Für $f \in L^1(\mu)$, $g \in L^\infty(\mu)$ gilt die Höldersche Ungleichung $\|f \cdot g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \cdot \|g\|_\infty$, also gilt $f \cdot g \in L^1(\mu)$.

Beweis: *Übung!* □

4.9. Beispiele

(i) $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$, $1 \leqslant p < \infty$, also $X = \{1, \ldots, n\}, \Sigma = \mathcal{P}(X), \mu =$ Zählmaß.

auch: Raum der p-summierbaren Folgen

(ii) $\left(\ell^p(\mathbb{N}), \|\cdot\|_p\right)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, also $X = \mathbb{N}, \Sigma = \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu =$ Zählmaß. Dabei ist

$$\ell^p(\mathbb{N}) = \left\{ (a_n)_n \,\middle|\, a_n \in \mathbb{R}, \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^p < \infty \right\}$$

für $p < \infty$ bzw. $\ell^p(\mathbb{N}) = \{\text{beschränkte Folgen}\}$ für $p = \infty$.

4.10. Proposition Sei (X, Σ, μ) ein Maßraum und $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, bzw. $p = 1$ und $q = \infty$. Die Abbildung $\iota_p \colon L^p(\mu) \to L^q(\mu)^*$, gegeben durch

In 6.11 werden wir diese Aussage noch etwas verstärken

$$\iota_p(f)(g) := \int f \cdot g \,\mathrm{d}\mu$$

ist eine lineare Isometrie.

Beweis:

$\iota_p(f) \colon L^q(\mu) \to \mathbb{R}$ ist linear und wohldefiniert: Übung!

ι_p ist linear und wohldefiniert: Übung!

$\iota_p(f)$ ist beschränkt durch $\|f\|_p$ nach Hölder (4.5), also ist ι_p beschränkt durch 1. Noch zu zeigen: Zu $f \in L^p(\mu)$ existiert $g \in L^q(\mu)$ mit $|\iota_p(f)(g)| = \|f\|_p \cdot \|g\|_q$, denn dann gilt $\|\iota_p(f)\|_{L^q(\mu)^*} \geqslant \|f\|_p$. Gegeben $f \in L^p(\mu)$ setzen wir $g := \operatorname{sgn}(f) \cdot |f|^{p-1}$. Dann ist $|g|^q = |f|^p$, also $g \in L^q(\mu)$. Weiter gilt dann

$$\int f \cdot g \,\mathrm{d}\mu = \int |f \cdot g| \mathrm{d}\mu = \int |f|^p \mathrm{d}\mu = \left(\int |f|^p \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int |f|^p \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

Für $p = 1$ und $q = \infty$ ist die Aussage eine Übungsaufgabe. □

4.11. Satz von Riesz-Fischer Sei (X, Σ, μ) ein Maßraum. $L^p(\mu)$ ist vollständig für $p \in [1, \infty]$.

Beweis: Für $p = \infty$ ist dies eine Übung (Blatt 7, Aufgabe 1). Sei also $p < \infty$ und sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(\mu)$ Cauchy.

Behauptung: Es gibt $E_l \subset X$, $l \in \mathbb{N}$, messbare Teilmenge mit $\mu(E_l) < \infty$ und sodass für $E := \bigcup_{l\in\mathbb{N}} E_l$ gilt $\chi_{X\setminus E} \cdot f_n = 0$ in $L^p(\mu)$ für $n \in \mathbb{N}$. Beweis: Übung (Blatt 7, Aufgabe 2, siehe Anhang A.3)

Wähle $n_0 < n_1 < \ldots$ mit $\|f_n - f_{n_k}\|_p < \frac{1}{2^k}$ für $n > n_k$, $k \in \mathbb{N}$. Für jedes $l, k \in \mathbb{N}$ gilt $\left|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right| \in L^p(\mu)$ und $\chi_{E_l} \in L^q(\mu)$, wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Also ist nach Hölder (4.5) auch $\left|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right| \cdot \chi_{E_l} \in L^1(\mu)$. Weiter gilt für $j \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{j} \left\| \left|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right| \cdot \chi_{E_l} \right\|_1 \leqslant \sum_{k=0}^{j} \left\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\|_p \cdot \|\chi_{E_l}\|_q \leqslant \sum_{k=0}^{j} \frac{1}{2^k} \cdot \|\chi_{E_l}\|_q$$

$\left(\sum_{k=0}^{j} \left|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right| \cdot \chi_{E_l}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ ist eine aufsteigende Folge von integrierbaren Funktionen. Nach dem Satz von Lebesgue über monotone Konvergenz gilt: $\sum_{k=0}^{\infty} \left|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right|$ konvergiert auf E_l fast überall. Da abzählbare Vereinigungen von Nullmengen Nullmengen sind, folgt, dass $\sum_{k=0}^{\infty} \left|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right|$ fast überall auf E konvergiert. Also konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} \left|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right|$ auf X fast überall. Damit konvergiert auch $\sum_{k=0}^{\infty} f_{n_{k+1}} - f_{n_k}$ auf X fast überall. Nach Auflösen der Wechselsumme stellen wir fest, dass also auch $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ auf X fast überall konvergiert. Setze

$$f(x) := \begin{cases} \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x), & \text{falls der Limes existiert} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

f ist als Limes messbarer Funktionen messbar. Weiter gilt $|f_{n_k}|^p \to |f|^p$ fast überall. Noch zu zeigen: $f \in L^p(\mu)$. Die Folge $\left(\|f_{n_k}\|_p^p\right)_k$ ist beschränkt, da $(f_n)_n$ eine Cauchyfolge bezüglich $\|\cdot\|_p$ ist. Es gilt $|f|^p \overset{\text{f.ü.}}{=} \liminf |f_{n_k}|^p$

$$\int |f|^p \mathrm{d}\mu \leqslant \liminf_{k\to\infty} \int |f_{n_k}|^p \mathrm{d}\mu < \infty$$

nach dem Lemma von Fatou[9]. Also gilt $f \in L^p(\mu)$. Noch zu zeigen: $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ bezüglich $\|\cdot\|_p$. Sei dazu $j \in \mathbb{N}$. Sei $n \geqslant n_j$. Für $i > j$ gilt

$$\|f_n - f_{n_i}\|_p \leqslant \left\|f_n - f_{n_j}\right\|_p + \left\|f_{n_j} - f_{n_i}\right\|_p < 2 \cdot \frac{1}{2^j}$$

Weiter gilt $|f_n - f_{n_i}|^p \xrightarrow{i\to\infty} |f_n - f|^p$ fast überall. Mit dem Lemma von Fatou folgt

$$\int |f_n - f|^p \mathrm{d}\mu \leqslant \liminf_{i\to\infty} \int |f_n - f_{n_i}|^p \mathrm{d}\mu \leqslant \left(2 \cdot \frac{1}{2^j}\right)^p$$

$\Rightarrow \|f_n - f\|_p \leqslant 2 \cdot \frac{1}{2^j}$, falls $n \geqslant n_j$. Also gilt $\|f_n - f\|_p \xrightarrow{n\to\infty} 0$. □

[9] siehe Analysis III. 9.23 oder https://de.wikipedia.org/wiki/Lemma_von_Fatou

5. Schwache Topologien, Reflexivität

5.1. Definition Sei X ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum. Die ***schwache Topologie*** $\mathcal{T}_X^{\mathrm{w}}$ ist die gröbste[10] Topologie auf X, sodass alle $\varphi \in X^*$ stetig sind.

5.2. Bemerkung

(i) Jedes $\varphi \in X^*$ ist – nach Definition von $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ – stetig bezüglich $\mathcal{T}_X^{\|\cdot\|}$, d.h. $\mathcal{T}_X^{\mathrm{w}} \subset \mathcal{T}_X^{\|\cdot\|}$. Mit anderen Worten: Die Abbildung $\mathrm{id}_X : \left(X, \mathcal{T}_X^{\|\cdot\|}\right) \to \left(X, \mathcal{T}_X^{\mathrm{w}}\right)$ ist stetig.

(ii) Mengen der Form $\varphi^{-1}(U)$ für $U \subset K$ offen, $\varphi \in X^*$ bilden eine Subbasis für $\mathcal{T}_X^{\mathrm{w}}$. Mengen der Form

$$\bigcap_{i=1}^{n} \varphi_i^{-1}(U_i) \quad , \qquad U_i \subset \mathbb{K} \text{ offen}, \varphi_i \in X^*$$

bilden eine Basis für $\mathcal{T}_X^{\mathrm{w}}$.

5.3. Proposition Die schwache Topologie $(X, \mathcal{T}_X^{\mathrm{w}})$ ist Hausdorffsch.

Beweis: Seien $x \neq y \in X$. Nach Hahn-Banach existiert $\varphi \in X^*$ mit $\varphi(x) \neq \varphi(y)$. Setze $\varepsilon := \frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{2} > 0$, dann sind $\varphi^{-1}\big(B_{\mathbb{K}}(\varphi(x), \varepsilon)\big)$ und $\varphi^{-1}\big(B_{\mathbb{K}}(\varphi(y), \varepsilon)\big)$ disjunkte offene Umgebungen von x bzw. y. □

5.4. Proposition Sei X ein normierter Raum, $x \in X$, $(x_\lambda)_\Lambda \subset X$ ein Netz. Dann sind äquivalent:

(i) $x_\lambda \xrightarrow{\mathrm{w}} x$, d.h. x_λ konvergiert gegen x in der schwachen Topologie $\mathcal{T}_X^{\mathrm{w}}$.

(ii) $\varphi(x_\lambda) \to \varphi(x)$ für alle $\varphi \in X^*$.

Beweis:

(i)⇒(ii): Sei $\varphi \in X^*$ und $\varepsilon > 0$. Es ist $\varphi(x) \in B_{\mathbb{K}}\big(\varphi(x), \varepsilon\big) \subset \mathbb{K}$ offen und φ stetig bezüglich $\mathcal{T}_X^{\mathrm{w}}$, also

$$x \in \varphi^{-1}\Big(B_{\mathbb{K}}\big(\varphi(x), \varepsilon\big)\Big) \underset{\text{w-offen}}{\subset} X$$

Da $x_\lambda \xrightarrow{\mathrm{w}} x$ existiert ein $\overline{\lambda} \in \Lambda$ mit $x_\lambda \in \varphi^{-1}\big(B_{\mathbb{K}}(\varphi(x), \varepsilon)\big)$, falls $\lambda \geqslant \overline{\lambda}$. Dann folgt $\varphi(x_\lambda) \in B_{\mathbb{K}}(\varphi(x), \varepsilon)$ falls $\lambda \geqslant \overline{\lambda}$, also $\varphi(x_\lambda) \to \varphi(x)$ in $\mathbb{K}$.

(ii)⇒(i): Sei $x \in V \subset X$ w-offen. Nach 5.2(ii) existieren $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in X^*$, $U_1, \ldots, U_m$ offen in $\mathbb{K}$ mit

$$x \in \varphi_1^{-1}(U_1) \cap \ldots \cap \varphi_m^{-1}(U_m) \subset V$$

Wegen (ii) existieren $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \Lambda$ mit $\varphi_i(x_\lambda) \in U_i$, falls $\lambda \geqslant \lambda_i$. Wähle $\overline{\lambda} \in \Lambda$ mit $\overline{\lambda} \geqslant \lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Dann gilt $\varphi_i(x_\lambda) \in U_i$, falls $\lambda \geqslant \overline{\lambda}$ für alle i. Damit ist dann auch $x_\lambda \in \varphi_i^{-1}(U_i)$ für alle i, falls $\lambda \geqslant \overline{\lambda}$. Also gilt $x_\lambda \in \bigcap_{i=1}^m \varphi_i^{-1}(U_i) \subset V$, falls $\lambda \geqslant \overline{\lambda}$. □

5.5. Corollar Wenn $x_\lambda \xrightarrow{\mathrm{w}} x$, dann ist $(x_\lambda)_\Lambda \subset X$ beschränkt.

[10] auch: „dollste“

Beweis: Wir betrachten zunächst die folgende Menge

$$\{\iota_X(x_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\} \subset \mathcal{L}(X^*, \mathbb{K}) = X^{**}.$$

Wir wollen zeigen, dass diese punktweise gleichmäßig beschränkt ist. Sei dazu $\varphi \in X^*$ beliebig. Da $\varphi(x_\lambda)$ nach 5.4 konvergent und somit auch beschränkt ist, gibt es ein $C_\varphi > 0$ mit

$$|\iota_X(x_\lambda)(\varphi)| = |\varphi(x_\lambda)| \leqslant C_\varphi.$$

Nach 3.1 ist X^* vollständig, also können wir nun das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit anwenden und erhalten ein $C > 0$ mit $\|\iota_X(x_\lambda)\| \leqslant C$ für alle $\lambda \in \Lambda$. Da ι_X isometrisch ist, gilt also auch $\|x_\lambda\| \leqslant C$ für alle $\lambda \in \Lambda$, also ist das Netz beschränkt. □

5.6. Beispiel Im Allgemeinen gilt

$$x_\lambda \xrightarrow{\|\cdot\|} x \quad \overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow} \quad x_\lambda \xrightarrow{\mathrm{w}} x$$

Betrachte $X = \ell^2(\mathbb{N})$ mit $\|\cdot\|_2$. Sei $e_n \in \ell^2(\mathbb{N})$ gegeben durch $e_n(m) := \delta_{n,m}$. Dann gilt $e_n \not\to 0$ für $n \to \infty$ in $\mathcal{T}^{\|\cdot\|_2}$, denn $\|e_n - 0\|_2 = \|e_n\|_2 \equiv 1 \not\to 0$. Aber $e_n \xrightarrow{\mathrm{w}} 0$ für $n \to \infty$, denn es ist – wie wir später sehen werden – $\ell^2(\mathbb{N})^* \cong \ell^2(\mathbb{N})$ via $\langle a \mid b\rangle = \sum \overline{a(k)} \cdot b(k)$. Es gilt aber *Kronecker-Delta*

$$\langle a \mid e_n\rangle = \sum \overline{a(k)} \cdot e_n(k) = \overline{a(n)} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Also gilt $e_n \xrightarrow{\mathrm{w}} 0$ für $n \to \infty$.
Direktes Argument: Übung (Aufgabe 3 von Blatt 7)

5.7. Proposition Seien X, Y normierte Räume, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ ein beschränkter (d.h. normstetiger) linearer Operator. Dann ist T auch stetig bezüglich der schwachen Topologie auf X und Y.

Beweis: Zu zeigen: Falls $U \subset Y$ schwach-offen ist, so ist $T^{-1}(U)$ schwach-offen in X. Wir können annehmen, dass U von der Form $\varphi^{-1}(B_\mathbb{K}(\lambda, \varepsilon))$, $\varphi \in Y^*, \lambda \in \mathbb{K}, \varepsilon > 0$ ist, da diese Mengen eine Subbasis bilden. Es gilt nun

$$T^{-1}\Big(\varphi^{-1}\big(B_\mathbb{K}(\lambda,\varepsilon)\big)\Big) = \Big(\underbrace{\varphi \circ T}_{\in X^*}\Big)^{-1}\big(B_\mathbb{K}(\lambda,\varepsilon)\big) \underset{\text{w-offen}}{\subset} X \qquad \square$$

5.8. Definition Sei X ein normierter Raum. Die $\mathbf{w}^*$***-Topologie*** $\mathcal{T}^{\mathrm{w}^*}$ ist die gröbste Topologie auf X^*, sodass alle $\iota_X(x) \in X^{**}$ stetig sind.

5.9. Bemerkung

(i) Es gilt $\mathcal{T}^{\mathrm{w}^*}_{X^*} \subset \mathcal{T}^{\mathrm{w}}_{X^*} \subset \mathcal{T}^{\|\cdot\|}_{X^*}$.

(ii) Mengen der Form $W(\varphi, x, \varepsilon) := \{\psi \in X^* \mid |\psi(x) - \varphi(x)| < \varepsilon\}$ bilden eine Subbasis für $\mathcal{T}^{\mathrm{w}^*}_{X^*}$. Mengen der Form $\{\psi \mid \psi(x) \in U\}$ für $U \subseteq \mathbb{K}$ offen bilden ebenfalls eine Subbasis für $\mathcal{T}^{\mathrm{w}^*}_{X^*}$.

(iii) Ein Netz $(\varphi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset X^*$ konvergiert w^* gegen $\varphi \in X^*$ genau dann, wenn

$$\iota_X(x)(\varphi_\lambda) = \varphi_\lambda(x) \xrightarrow{\lambda} \varphi(x) = \iota_X(x)(\varphi)$$

für jedes $x \in X$.

(iv) $\mathcal{T}^{\mathrm{w}^*}_{X^*}$ ist Hausdorff.

Beweis: *Übung!*

5.10. Satz (Banach-Alaoglu) Sei X ein normierter Raum. Dann ist die abgeschlossene Einheitskugel in X^*

$$\overline{B}_{X^*}(0,1) = \{\varphi \in X^* \mid \|\varphi\|_{X^*} \leqslant 1\}$$

w^*-kompakt.

Beweis: Für $x \in X$ setze $F_x := \mathbb{K}$ und $F := \prod_{x\in X} F_x$. Wir versehen F mit der Produkttopologie $\mathcal{T}_F^\Pi$. Definiere eine Abbildung $\kappa\colon X^* \to F$ durch $\kappa(\varphi)_x := \varphi(x)$, $x \in X$. Dann ist κ injektiv (warum?) und $\mathcal{T}_{X^*}^{\mathrm{w}^*}$ stimmt überein mit der durch κ und $\mathcal{T}_F^\Pi$ induzierten Topologie auf X^*. Diese besteht aus den Mengen $\{\kappa^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{T}_F^\Pi\}$. Eine Basis für $\mathcal{T}_F^\Pi$ sind Mengen der Form

$$\prod_{x\in X} U_x, \quad U_x \subset \mathbb{K} \text{ offen}$$

mit $U_x = \mathbb{K}$ für alle bis auf endlich viele $x \in X$. Eine Basis, für die durch κ und $\mathcal{T}_F^\Pi$ induzierte Topologie auf X^* sind Mengen der Form

$$\kappa^{-1}\left(\prod_{x\in X} U_x\right) = \underbrace{\bigcap_{i=1}^n \{\varphi \mid \varphi(x_i) \in U_{x_i}\}}_{\text{bilden Basis für } \mathcal{T}_{X^*}^{\mathrm{w}^*}\text{, 5.9(ii)}}$$

mit U_x wie oben. Dabei erhalten wir die x_i durch $\kappa^{-1}\big(\prod_{x\in X} V_x\big) = \{\varphi \mid \varphi(x_i) \in U_{x_i}\}$, wobei

$$V_x = \begin{cases} \mathbb{K}, & \text{falls } x \neq x_i \\ U_{x_i}, & \text{falls } x = x_i \end{cases}$$

Falls $\|\varphi\| \leqslant 1$, so gilt $|\varphi(x)| \leqslant \|x\|_X$, also

$$\kappa\big(\overline{B}_{X^*}(0,1)\big) \subset \underbrace{\prod_{x\in X} \overline{B}_{\mathbb{K}}(0,\|x\|)}_{\text{kompakt nach Tychonov}} \subset F$$

Bleibt zu zeigen: $\kappa\big(\overline{B}_{X^*}(0,1)\big) \subset F$ ist abgeschlossen. Sei $f \in \overline{\kappa\big(\overline{B}_{X^*}(0,1)\big)}$. Dies definiert eine Abbildung $\varphi_f\colon X \to \mathbb{K}$ durch $\varphi_f(x) := f_x$. Falls nun φ_f linear und stetig ist mit $\|\varphi_f\| \leqslant 1$, so gilt $\kappa(\varphi_f) = f$, denn $\kappa(\varphi_f)_x = \varphi_f(x) = f_x$. Damit folgt $f \in \kappa\big(\overline{B}_{X^*}(0,1)\big)$ und dann ist $\overline{B}_{X^*}(0,1)$ kompakt.

Additivität: Seien $y, z \in X$, $\varepsilon > 0$. Dann ist

$$W_\varepsilon := \left\{ g \in \prod_{x\in X} \overline{B}_{\mathbb{K}}(0,\|x\|) \;\middle|\; \begin{array}{r} |g_{y+z} - f_{y+z}| < \varepsilon \\ |g_y - f_y| < \varepsilon \\ |g_z - f_z| < \varepsilon \end{array} \right\} \underset{\text{offen}}{\subset} \prod_{x\in X} \overline{B}_{\mathbb{K}}(0,\|x\|)$$

Da $f \in \overline{\kappa\big(\overline{B}_{X^*}(0,1)\big)}$ existiert ein $g \in W_\varepsilon \cap \kappa\big(\overline{B}_{X^*}(0,1)\big)$. Sei $g' \in \overline{B}_{X^*}(0,1)$ mit $\kappa(g') = g$. $g' \in X^*$ ist linear, also gilt auch $g_{y+z} = g_y + g_z$ und daher

$$|f_{y+z} - (f_y + f_z)| < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon$$

$\varepsilon > 0$ war beliebig, also $f_{y+z} = f_y + f_z$ und $\varphi_f(y+z) = \varphi_f(y) + \varphi_f(z)$. Also ist φ additiv.

Skalarmultiplikation: analog.

Es gilt $|\varphi_f(x)| = |f_x| \leqslant \|x\|$, $x \in X$, also $\|\varphi_f\|_{X^*} \leqslant 1$. $\square$

5.11. Erinnerung

(a) Ein topologischer Raum X heißt

(i) ***separabel***, falls X eine abzählbare dichte Teilmenge enthält.

(ii) ***1. abzählbar***, falls gilt: Jedes $x \in X$ besitzt abzählbar viele Umgebungen U_i, $i \in \mathbb{N}$, sodass jede Umgebung V von x wenigstens ein U_i enthält.

(iii) ***2. abzählbar***, falls gilt: $\mathcal{T}_X$ besitzt eine abzählbare Basis, d.h. es gibt offene Mengen W_i, $i \in N$, sodass für jedes $V \subset X$ offen gilt: $V = \bigcup_{W_i \subset V} W_i$.

(b) 2. abzählbar $\Rightarrow$ 1. abzählbar und separabel.

(c) Ist X kompakt und 1. abzählbar, so besitzt jede Folge in X eine konvergente Teilfolge.

Beweisskizze: $(x_n)_n \subset X$, setze $A_n := \overline{\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}}$. Dann ist $\bigcap_n A_n$ nichtleer wegen Kompaktheit, also hat $(x_n)_n$ einen Häufungspunkt. Benutze nun 1. abzählbar.

(d) Sei X kompakt und Hausdorff. Dann ist X metrisierbar $\iff$ X ist 2. abzählbar.

Die Hinrichtung ist eine einfache Übungsaufgabe (Blatt 10, Aufgabe 3). Die Rückrichtung benutzt Urysohn und Metrisierungssätze. Den Satz von Urysohn haben wir auch in „Grundlagen der Analysis, Topologie und Geometrie“ im letzen Semester bewiesen.

5.12. Satz Sei X ein separabler normierter Raum. Dann ist $\overline{B}_{X^*}(0,1)$ bezüglich $\mathcal{T}_{X^*}^{w^*}$ metrisierbar. Insbesondere ist $\overline{B}_{X^*}(0,1)$ bezüglich $\mathcal{T}_{X^*}^{w^*}$ 2. abzählbar und kompakt, und jede Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beweis: Sei $\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} \subset \overline{B}_X(0,1)$ dicht.[11] Definiere eine Abbildung $d\colon X^* \times X^* \to [0,\infty)$ durch

Konvergenz mit Abschätzung durch Operatornorm und $\|x_n\| \leqslant 1$

$$d(\varphi,\psi) := \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \cdot \big|\varphi(x_n) - \psi(x_n)\big|$$

Wir zeigen, dass d eine Metrik ist: d ist offensichtlich symmetrisch und erfüllt die Dreiecksungleichung. Noch zu zeigen: d ist definit. Wenn $\varphi \neq \psi$, dann existiert $x \in \overline{B}_X(0,1)$ mit $\varphi(x) \neq \psi(x)$. Da φ und ψ stetig sind und $\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ dicht ist, existiert x_n mit $\varphi(x_n) \neq \psi(x_n)$. Dann ist $d(\varphi,\psi) \neq 0$.
Sei nun $(\varphi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset \overline{B}_{X^*}(0,1)$ ein Netz und $\varphi \in \overline{B}_{X^*}(0,1)$. Es genügt zu zeigen

$$\varphi_\lambda \xrightarrow{w^*} \varphi \quad \iff \quad d(\varphi_\lambda, \varphi) \longrightarrow 0$$

denn dann stimmen $\mathcal{T}_{X^*}^{w^*}$ und $\mathcal{T}_{X^*}^{d}$ überein. (siehe Nachtrag)

"$\Rightarrow$": Es gelte $\varphi_\lambda \xrightarrow{w^*} \varphi$, also $\varphi_\lambda(x_n) \to \varphi(x_n)$ für $n \in \mathbb{N}$ nach 5.9(iii). Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{n\geqslant n_0} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{4}$ und $\overline{\lambda} \in \Lambda$ mit $|\varphi_\lambda(x_n) - \varphi(x_n)| < \frac{\varepsilon}{4}$ falls $n < n_0$, $\lambda \geqslant \overline{\lambda}$. Dann gilt für $\lambda \geqslant \overline{\lambda}$

$$\begin{aligned} d(\varphi_\lambda,\varphi) &\leqslant \sum_{n<n_0} \frac{1}{2^n} \cdot \big|\varphi_\lambda(x_n) - \varphi(x_n)\big| + \sum_{n\geqslant n_0} \frac{1}{2^n} \cdot \underbrace{\big|\varphi_\lambda(x_n) - \varphi(x_n)\big|}_{\leqslant 2} \\ &< 2\cdot\frac{\varepsilon}{4} + 2\cdot\frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon \end{aligned}$$

[11] Im Allgemeinen sind Unterräume separabler topologischer Räume nicht separabel. Für metrische Räume allerdings schon.

"$\Leftarrow$": Da $d(\varphi_\lambda, \varphi) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \cdot \left|\varphi_\lambda(x_n) - \varphi(x_n)\right| \to 0$, muss bereits $|\varphi_\lambda(x_n) - \varphi(x_n)| \to 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten, da alle Summanden positiv sind. Wir haben also $\forall n : \varphi_\lambda(x_n) \to \varphi(x_n)$. Sei nun $x \in X$ und $\varepsilon > 0$. Wähle $N \in \mathbb{N}$ sodass $\|x - x_N\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Weiter finden wir $\overline{\lambda} \in \Lambda$, sodass $|\varphi_\lambda(x_n) - \varphi(x_n)| < \frac{\varepsilon}{3}$ für $\lambda \geqslant \overline{\lambda}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |\varphi_\lambda(x) - \varphi(x)| &\leqslant \left|\varphi_\lambda(x) - \varphi_\lambda(x_N)\right| + \underbrace{\left|\varphi_\lambda(x_N) - \varphi(x_N)\right|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} + \left|\varphi(x_N) - \varphi(x)\right| \\ &\leqslant \underbrace{\|\varphi_\lambda\|}_{\leqslant 1} \cdot \underbrace{\|x - x_N\|}_{\leqslant\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|\varphi_\lambda(x_N) - \varphi(x_N)|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{\|\varphi\|}_{\leqslant 1} \cdot \underbrace{\|x_N - x\|}_{\leqslant\frac{\varepsilon}{3}} = \varepsilon \end{aligned}$$

Damit haben wir $\varphi_\lambda(x) \to \varphi(x)$ für alle x gezeigt. Mit 5.9(iii) folgt also $\varphi_\lambda \xrightarrow{\mathrm{w}^*} \varphi$. □

Nachtrag: Topologien sind durch Konvergenz von Netzen bestimmt: Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.

$$\begin{aligned} U \subset X \text{ offen} &\iff \forall x \in U : \exists x \in V \subset U, V \in \mathcal{T} \\ U \subset X \text{ nicht offen} &\iff \exists x \in U : \text{ für jedes } x \in V \underset{\text{offen}}{\subset} X \text{ gilt } V \cap (X \setminus U) \neq \emptyset \\ &\overset{(\#)}{\iff} \exists x \in U, \exists \text{ Netz } (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset X \setminus U \text{ mit } x_\lambda \to x \end{aligned}$$

Auswahlaxiom wird benötig!

Die Implikation $\overset{(\#)}{\Longleftarrow}$ ist trivial. Für $\overset{(\#)}{\Longrightarrow}$ betrachten wir die Menge $\Lambda := \{V \mid x \in V \subset X \text{ offen}\}$. Diese ist gerichtet bezüglich "$\subset$". Zu jedem $V \in \Lambda$ wählen wir $x_V \in (X \setminus U) \cap V$. Dann gilt $(x_V)_{V\in\Lambda} \subset X \setminus U$ und $x_V \to x$. □

5.13. Definition Der normierte Raum X heißt ***reflexiv***, falls die kanonische Abbildung $\iota_X : X \to X^{**}$ ein Isomorphismus ist. (ι_X ist ein Isomorphismus genau dann, wenn ι_X surjektiv ist.)

5.14. Proposition Sei X ein reflexiver Banachraum und $Y \subset X$ ein abgeschlossener Teilraum. Dann ist Y reflexiv.

Beweis: Sei $\kappa \colon Y \hookrightarrow X$ die Inklusion. Dann ist $\kappa \in \mathcal{L}(Y, X)$ und nach 3.4 kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, hook, "\iota_Y"] \arrow[d, hook, "\kappa"'] & Y^{**} \arrow[d, "\kappa^{\mathrm{tr\,tr}}"] \\ X \arrow[r, hook, "\iota_X", "\cong"'] & X^{**} \end{tikzcd}$$

Sei $f \in Y^{**}$, dann existiert $x \in X$ mit $\iota_X(x) = \kappa^{\mathrm{tr\,tr}}(f)$. Für $\varphi \in X^*$ gilt dann also

$$\varphi(x) = \iota_X(x)(\varphi) = \kappa^{\mathrm{tr\,tr}}(f)(\varphi).$$

Aber $(\kappa^{\mathrm{tr}})^{\mathrm{tr}}(f) = f \circ \kappa^{\mathrm{tr}}$ und $\kappa^{\mathrm{tr}}(\varphi) = \varphi \circ \kappa = \varphi|_Y$, also gilt $\varphi(x) = f(\varphi|_Y)$ für jedes $\varphi \in X^*$. Falls $x \notin Y$, so existiert nach Hahn-Banach ein $\psi \in X^*$ mit $\psi|_Y = 0$, $\psi(x) \neq 0$. Damit folgt

$$0 \neq \psi(x) = f(\psi|_Y) = 0 \ \lightning$$

Also gilt $x \in Y$. Weiter gilt $\iota_Y(x) = f$, denn $\kappa^{\mathrm{tr\,tr}}$ ist injektiv. Andernfalls existiert $0 \neq g \in Y^{**}$ mit $\kappa^{\mathrm{tr\,tr}}(g) = 0$. Da $g \neq 0$, existiert ein $\sigma \in Y^*$ mit $g(\sigma) \neq 0$. Nach Hahn-Banach existiert eine Fortsetzung $\rho \in X^*$ mit $\rho|_Y = \sigma$. Nun gilt

$$0 = \kappa^{\mathrm{tr\,tr}}(g)(\rho) = g \circ \kappa^{\mathrm{tr}}(\rho) = g(\rho|_Y) = g(\sigma) \neq 0 \ \lightning$$

Also ist $\kappa^{\mathrm{tr\,tr}}$ ist injektiv. $\square$

5.15. Proposition Für einen Banachraum X gilt: X reflexiv $\iff$ X^* reflexiv.

Beweis:

"⇒": $\iota_X : X \xrightarrow{\cong} X^{**}$ ist ein isometrischer Isomorphismus. Nach Blatt 6, Aufgabe 2 ist $\iota_X^{\mathrm{tr}} : X^{***} \to X^*$ auch ein isometrischer Isomorphismus. Nach 3.4 gilt $\iota_X^{\mathrm{tr}} \circ \iota_{X^*} = \mathrm{id}_{X^*}$, also ist $(\iota_X^{\mathrm{tr}})^{-1} = \iota_{X^*}$ ebenfalls ein isometrischer Isomorphismus.

"⇐": Wenn X^* reflexiv ist, dann ist nach "⇒"auch X^{**} reflexiv. Nun ist aber $\iota_X(X) \subset X^{**}$ abgeschlossen (da ι_X Isometrie und X vollständig ist). Mit 5.14 folgt dann, dass auch $\iota_X(X) \cong X$ reflexiv ist. $\square$

Alternativ: ι_{X^*} ist ein isometrischer Isomorphismus und es gilt wieder $\iota_X^{\mathrm{tr}} \circ \iota_{X^*} = \mathrm{id}_{X^*}$. Also ist auch ι_X^{tr} ein isometrischer Isomorphismus und mit der Übungsaufgabe folgt dann wieder, dass auch ι_X ein isometrischer Isomorphismus ist. $\square$

5.16. Satz Sei X ein Banachraum. Dann gilt (unter der Inklusion $\iota_X : X \hookrightarrow X^{**}$)

$$\overline{B}_X(0,1) \underset{\mathrm{w}^*\text{-dicht}}{\subset} \overline{B}_{X^{**}}(0,1)$$

Beweis: Zu zeigen: Zu $f \in \overline{B}_{X^{**}}(0,1)$ und $\varepsilon > 0$, sowie $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in X^*$, existiert ein $x \in \overline{B}_X(0,1)$ mit $|f(\varphi_i) - \varphi_i(x)| < \varepsilon$ für $i = 1, \dots, n$. Behauptung: Gegeben f und $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ gilt

$$\inf_{x \in \overline{B}_X(0,1)} \sum_{i=1}^n \left|f(\varphi_i) - \varphi_i(x)\right|^2 = 0$$

Sei $h(x) := \sum_{i=1}^n \left|f(\varphi_i) - \varphi_i(x)\right|^2$ und $\inf_{x \in \overline{B}_X(0,1)} h(x) =: \mu \geqslant 0$. Wähle $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \overline{B}_X(0,1)$ mit $\lim_{k\to\infty} h(x_k) = \mu$. Nach Übergang zu einer Teilfolge dürfen wir annehmen, dass $\big(\varphi_i(x_k)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen $\gamma_i \in \mathbb{K}$ konvergiert für $i = 1, \dots, n$. Setze $\delta_i := f(\varphi_i) - \gamma_i$, dann gilt $\mu = \sum_{i=1}^n |\delta_i|^2$. Für $y \in \overline{B}_X(0,1)$ und $t \in [0,1]$ gilt nun

$$\begin{aligned}
\mu \leqslant h\Big(\underbrace{(1-t)\cdot x_k + t\cdot y}_{\in \overline{B}_X(0,1)}\Big) &= \sum_{i=1}^n \Big|f(\varphi_i) - (1-t)\cdot\varphi_i(x_k) - t\cdot\varphi_i(y)\Big|^2 \\
&= \sum_{i=1}^n \Big|\big(f(\varphi_i) - \varphi_i(x_k)\big) - t\cdot\big(\varphi_i(y) - \varphi_i(x_k)\big)\Big|^2 \\
&= \sum_{i=1}^n \left|f(\varphi_i) - \varphi_i(x_k)\right|^2 + t^2\cdot\sum_{i=1}^n \left|\varphi_i(y) - \varphi_i(x_k)\right|^2 \\
&\quad - 2t\cdot\mathrm{Re}\left(\sum_{i=1}^n \big(\varphi_i(y) - \varphi_i(x_k)\big)\cdot\overline{\big(f(\varphi_i) - \varphi_i(x_k)\big)}\right) \\
&\xrightarrow{k\to\infty} \underbrace{\sum_{i=1}^n \left|f(\varphi_i) - \gamma_i\right|^2}_{=\mu} + t^2\cdot\sum_{i=1}^n \left|\varphi_i(y) - \gamma_i\right|^2 - 2t\cdot\mathrm{Re}\sum_{i=1}^n \big(\varphi_i(y) - \gamma_i\big)\cdot\overline{\delta_i}
\end{aligned}$$

mit $z\cdot\overline{z} = |z|^2$ und $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$

Nach Abziehen von μ folgt für $t > 0$

$$0 \leqslant t \cdot \sum_{i=1}^n \left|\varphi_i(y) - \gamma_i\right|^2 - 2 \cdot \operatorname{Re} \sum_{i=1}^n \big(\varphi_i(y) - \gamma_i\big) \cdot \overline{\delta_i}$$

$$\xRightarrow{t \searrow 0} \; 2 \cdot \operatorname{Re} \sum_{i=1}^n \big(\varphi_i(y) - \gamma_i\big) \cdot \overline{\delta_i} \leqslant 0 \text{ für alle } y \in \overline{B}_X(0,1)$$

Definiere nun $\varphi \in X^*$ durch $\varphi := \sum_{i=1}^n \overline{\delta_i} \cdot \varphi_i \in X^*$. Dann gilt für $y \in \overline{B}_X(0,1)$

$$\operatorname{Re} \varphi(y) \leqslant \operatorname{Re} \sum_{i=1}^n \gamma_i \cdot \overline{\delta_i},$$

also ist $\|\varphi\|_{X^*} \leqslant \operatorname{Re} \sum_{i=1}^n \gamma_i \cdot \overline{\delta_i}$. Dies folgt durch Einsetzen der Definition von $\|\varphi\|$ und Multiplikation mit $|\lambda|$ für ein geeignetes $\lambda \in S^1 \subset \mathbb{C}$. Andererseits gilt aber

$$\varphi(x_k) = \sum_{i=1}^n \overline{\delta_i} \cdot \varphi_i(x_k) \xrightarrow{k \to \infty} \sum_{i=1}^n \overline{\delta_i} \cdot \gamma_i,$$

das heißt $\left|\sum_{i=1}^n \overline{\delta_i} \cdot \gamma_i\right| \leqslant \|\varphi\| \leqslant \operatorname{Re} \sum_{i=1}^n \gamma_i \cdot \overline{\delta_i}$ und somit $\sum_{i=1}^n \overline{\delta_i} \cdot \gamma_i = \|\varphi\|_{X^*}$. Wir erhalten

$$\mu = \sum_{i=1}^n \overline{\delta_i} \cdot \delta_i = \sum_{i=1}^n \overline{\delta_i} \cdot \big(f(\varphi_i) - \gamma_i\big) = f(\varphi) - \|\varphi\|_{X^*} \overset{\|f\| \leqslant 1}{\leqslant} 0$$ □

5.17. Corollar Sei X ein Banachraum, $f \in \overline{B}_{X^{**}}(0,1)$ und $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in X^*$. Falls $\overline{B}_X(0,1)$ w-kompakt ist, so existiert $x \in \overline{B}_X(0,1)$ mit $f(\varphi_i) = \varphi_i(x)$ für $i = 1, \ldots, n$.

Beweis: Definiere $h \colon X \to \mathbb{R}$ durch $h(x) := \sum_{i=1}^n |f(\varphi_i) - \varphi_i(x)|^2$ wie in Satz 5.16. h ist stetig auf X bezüglich $\mathcal{T}_X^{\mathrm{w}}$, nimmt also auf $\overline{B}_X(0,1)$ ihr Minimum an. □

5.18. Satz Sei X ein Banachraum. Dann sind äquivalent:

- **(i)** X ist reflexiv.
- **(ii)** $\overline{B}_X(0,1)$ ist w-kompakt.
- **(iii)** $\mathcal{T}_{X^*}^{\mathrm{w}} = \mathcal{T}_{X^*}^{\mathrm{w}^*}$.

Beweis:

(i)⇒(ii): $\overline{B}_{X^{**}}(0,1)$ ist w^*-kompakt nach 5.10. Nach 5.15 ist X^* reflexiv, daher stimmen auf X^{**} die w^*- und die w-Topologie überein. Damit ist $\overline{B}_{X^{**}}(0,1)$ w-kompakt. Aber unter $X \cong X^{**}$ stimmen die jeweiligen w-Topologien überein; daher ist $\overline{B}_X(0,1) \cong \overline{B}_{X^{**}}(0,1)$ w-kompakt.

(ii)⇒(i): Es gilt $(X, \mathcal{T}_X^{\mathrm{w}}) \subset (X^{**}, \mathcal{T}_{X^{**}}^{\mathrm{w}^*})$ in der Relativtopologie (warum?). $\overline{B}_X(0,1)$ ist w-kompakt, also ist $\overline{B}_X(0,1) \subset \overline{B}_{X^{**}}(0,1)$ w^*-abgeschlossen. Nach 5.16 ist $\overline{B}_X(0,1)$ sogar w^*-dicht. Also folgt $\overline{B}_X(0,1) = \overline{B}_{X^{**}}(0,1)$ und somit $X \cong X^{**}$.

(iii)⇒(i): $\overline{B}_{X^*}(0,1)$ ist w^*-kompakt nach Banach-Alaoglu (5.10). Mit (iii) folgt, dass $\overline{B}_{X^*}(0,1)$ w-kompakt ist. Da (ii)⇒(i) folgt, dass X^* reflexiv ist und somit ist nach 5.15 auch X reflexiv.

(i)⇒(iii): klar. □

5.19. Bemerkung

a) Sei X ein normierter Raum. Falls X^* separabel ist, so ist X separabel. *bezüglich der Normtopologie*

b) Für einen Banachraum X gilt: X reflexiv $\iff$ $\overline{B}_X(0,1)$ ist folgenkompakt bezüglich $\mathcal{T}_X^{\mathrm{w}}$.

BEWEIS:

a) *Übung (Blatt 10, Aufgabe 2)*

b) "$\Rightarrow$": leicht.
"$\Leftarrow$": nicht so leicht. $\square$

6. Gleichmäßig konvexe Räume, noch einmal L^p

6.1. Definition und Proposition Ein normierter Raum X heißt ***gleichmäßig konvex***, falls eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

(i) Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$, sodass für $x, y \in X$ mit $\|x\|, \|y\| \leqslant 1$ gilt:

$$\|x - y\| \geqslant \varepsilon \implies \left\| \frac{1}{2}(x+y) \right\| \leqslant 1 - \delta$$

(ii) Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$, sodass für $x, y \in X$ mit $\|x\|, \|y\| = 1$ gilt:

$$\|x - y\| \geqslant \varepsilon \implies \left\| \frac{1}{2}(x+y) \right\| \leqslant 1 - \delta$$

(iii) Für $(x_n)_{\mathbb{N}}, (y_n)_{\mathbb{N}} \subset X$ mit $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{1}{2}(x_n + y_n) \right\| = 1 \implies \lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0$$

(iv) Für $(x_n)_{\mathbb{N}}, (y_n)_{\mathbb{N}} \subset X$ mit $\limsup_n \|x_n\|, \limsup_n \|y_n\| \leqslant 1$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{1}{2}(x_n + y_n) \right\| = 1 \implies \lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0$$

Beweis:

(i)⇒(ii)⇒(iii): trivial; für (ii)⇒(iii) einfach Implikation umkehren und Aussagen negieren.

(iii)⇒(iv): Aus $\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{1}{2}(x_n + y_n) \right\| = 1$ folgt $\lim_{n\to\infty} \|x_n + y_n\| = 2$. Wir haben

$$2 = \lim_{n\to\infty} \|x_n + y_n\| = \liminf_{n\to\infty} \|x_n + y_n\| \leqslant \liminf_{n\to\infty} \big(\|x_n\| + \|y_n\|\big)$$

Also stimmen Limes superior und Limes inferior jeweils überein und es folgt $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 1$ und $\lim_{n\to\infty} \|y_n\| = 1$, woraus mit (iii) dann wiederum die gewünschte Implikation folgt.

(iv)⇒(i): Angenommen (i) gilt nicht, d.h. $\exists \varepsilon > 0$ und für jedes $\delta_n = \frac{1}{n+1}$ existieren $x_n, y_n \in X$ mit $\|x_n\|, \|y_n\| \leqslant 1$, $\|x_n - y_n\| \geqslant \varepsilon$ und $\left\| \frac{1}{2}(x_n + y_n) \right\| > 1 - \frac{1}{n+1}$. $\lightning$ zu (iv). $\square$

6.2. Beispiel $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ ist gleichmäßig konvex für $1 < p < \infty$ aber nicht für $p = 1, p = \infty$

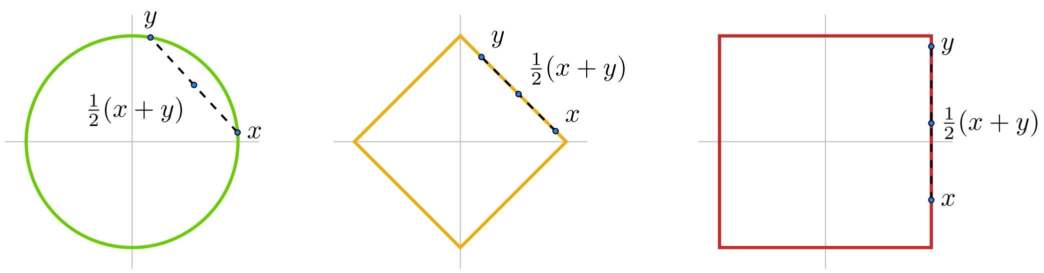


Abbildung 1: Einheitskugeln der p-Norm auf $\mathbb{R}^2$ für $p = 2$, $p = 1$ und $p = \infty$. Nur für $p \notin \{1, \infty\}$ ist ((ii)) aus 6.1 erfüllt. Anschaulich gesprochen bedeutet dies, dass nur in gleichmäßig konvexen Räumen Bälle auch tatsächlich „rund“ oder zumindest „rundlich“ sind.

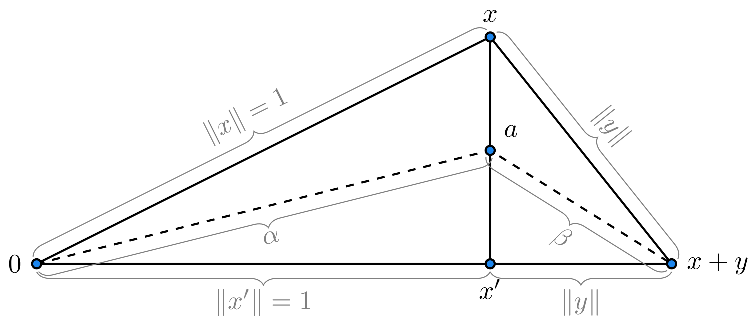


Abbildung 2: Zeichnung zum Beweis von 6.3. Die Tatsache, dass $\|x\|$ und $\|x'\|$ in dieser Zeichnung nicht gleich sind, weißt schon darauf hin, dass diese Zeichnung in Wahrheit „degeneriert“.

6.3. Definition und Proposition Ein gleichmäßig konvexer normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum ist ***strikt konvex***, d.h. für alle $0 \neq x, y \in X$ mit $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ existiert $\lambda > 0$ mit $x = \lambda \cdot y$.

Beweis: Seien x, y wie angegeben. Ohne Einschränkungen sei $\|x\| = 1$. Wir setzen nun $x' := \frac{x+y}{\|x+y\|}$, $a := \frac{x+x'}{2}$, $\alpha := \|a\|$ und $\beta := \|x+y-a\|$. Es gilt dann

$$\|x+y-x'\| = \left(1 - \frac{1}{\|x+y\|}\right) \cdot \|x+y\| = \|x+y\| - 1 = 1 + \|y\| - 1 = \|y\|$$

Also ist $\beta = \|x+y-a\| \leqslant \left\|\frac{x+y-x}{2}\right\| + \left\|\frac{x+y-x'}{2}\right\| = \frac{\|y\|}{2} + \frac{\|y\|}{2} = \|y\|$. Weiter gilt $\alpha = \|a\| \leqslant \frac{\|x\|}{2} + \frac{\|x'\|}{2} = 1$ und

$$1 + \|y\| = \|x+y\| \leqslant \|a\| + \|x+y-a\| \leqslant \alpha + \beta \leqslant 1 + \|y\|$$

also $1 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Wegen $\|x\| = 1$, $\|x'\| = 1$ und $\left\|\frac{1}{2}(x+x')\right\| = \|a\| = \alpha = 1 > 1 - \delta$ für jedes $\delta > 0$ erhalten wir aus gleichmäßiger Konvexität $\|x - x'\| \leqslant \varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$, also$x = x'$. Es folgt nun

$$x = \frac{x+y}{\|x+y\|} \iff \|x\| \cdot x + \|y\| \cdot x = x + y \iff \|y\| \cdot x = y \qquad \square$$

6.4. Proposition Sei X ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum, $a \in X$, $W \subset X$ konvex und abgeschlossen.

(i) Ist W strikt konvex, so existiert höchstens ein $x \in W$ mit $\|a - x\| = \inf_{y \in W} \|a - y\|$.

(ii) Ist X vollständig und gleichmäßig konvex, so existiert genau ein $x \in W$ mit $\|a - x\| = \inf_{y \in W} \|a - y\|$

Beweis: Wir dürfen ohne Einschränkungen $a = 0$ annehmen. Für $a \in W$ ist nichts zu beweisen. Für $a \notin W$ gilt $\inf_{y \in W} \|a - y\| > 0$, denn W ist abgeschlossen. Ohne Einschränkungen dürfen wir außerdem $\inf_{y \in W} \|a - y\| = 1$ annehmen.

(i) Sei $x, x' \in W$ mit $\|a - x\| = \|a - x'\| = \inf_{y \in W} \|a - y\|$, also $\|x\| = \|x'\| = 1$. Dann gilt

$$1 = \inf_{y \in W} \|a - y\| \leqslant \Bigg\| \underbrace{\frac{1}{2}(x + x')}_{\in W} \Bigg\| \leqslant \frac{1}{2}\|x\| + \frac{1}{2}\|x'\| = 1$$

Es folgt aus strikter Konvexität, dass $x = \lambda \cdot x'$ für ein $\lambda \geqslant 0$. Wegen $\|x\| = \|x'\| = 1$ folgt $\lambda = 1$ und $x = x'$.

(ii) Wähle eine Folge $(x_n)_{\mathbb{N}} \subset W$ mit

Œ wieder $a = 0$ und $\inf_{y\in W}\|a-y\| = 1$

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n\| = \lim_{n\to\infty}\|a - x_n\| = \inf_{y\in W}\|a-y\| = 1$$

Behauptung: Diese Folge ist Cauchy. W ist konvex, also folgt $\frac{1}{2}(x_n + x_m) \in W$. Es gilt dann

$$1 \leqslant \left\|\frac{1}{2}(x_n + x_m)\right\| \leqslant \frac{1}{2}\big(\|x_n\| + \|x_m\|\big) \quad \text{für } n, m \in \mathbb{N} \qquad \textbf{[\#]}$$

Angenommen $(x_n)_{\mathbb{N}}$ sei nicht Cauchy. Dann existiert $\varepsilon > 0$, so dass gilt: Für jedes $N \in \mathbb{N}$ existieren $n, m > N$ mit $\|x_n + x_m\| > \varepsilon$. Wir können daher Teilfolgen $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, $(x_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ bilden mit $\liminf_k\|x_{n_k} - x_{m_k}\| \geqslant \varepsilon$. Es gilt aber $\lim_{k\to\infty}\|x_{n_k}\| = \lim_{k\to\infty}\|x_{m_k}\| = 1$ und wegen **[#]** gilt $\lim_{k\to\infty}\big\|\frac{1}{2}(x_{n_k} + x_{m_k})\big\| = 1$ ↯ zu 6.1 ((iv)). Die Folge ist also Cauchy und konvergiert damit gegen ein $x \in W$, da W vollständig ist. Nach (i) ist x eindeutig. $\square$

6.5. Bemerkung Der Beweis von (ii) zeigt auch: Sei X gleichmäßig konvex und $(x_n)_{\mathbb{N}} \subset X$ eine Folge mit $\limsup_n\|x_n\| \leqslant 1$ und $\lim_{n,m\to\infty}\big\|\frac{1}{2}(x_n + x_m)\big\| = 1$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty}\|x_n\| = 1$ und $(x_n)_{\mathbb{N}}$ ist Cauchy.

6.6. Proposition: Jensensche Ungleichung Für $\alpha, \beta \geqslant 0$, $p \geqslant r > 0$ gilt

$$(\alpha^p + \beta^p)^{\frac{1}{p}} \leqslant (\alpha^r + \beta^r)^{\frac{1}{r}}.$$

Beweis: Setze $A := (\alpha^r + \beta^r)^{\frac{1}{r}}$, wobei wir o.B.d.A. annehmen können, dass $A \neq 0$ ist. Dann gilt

$$1 = \frac{1}{A^r}\cdot(\alpha^r + \beta^r) = \Big(\underbrace{\frac{\alpha}{A}}_{\leqslant 1}\Big)^r + \Big(\underbrace{\frac{\beta}{A}}_{\leqslant 1}\Big)^r \geqslant \Big(\frac{\alpha}{A}\Big)^p + \Big(\frac{\beta}{A}\Big)^p$$

Es folgt $\big(\frac{1}{A^p}\cdot(\alpha^p + \beta^p)\big)^{\frac{1}{p}} \leqslant 1 = \big(\frac{1}{A^r}(\alpha^r + \beta^r)\big)^{\frac{1}{r}}$. Kürzen von $\frac{1}{A}$ liefert die Behauptung. $\square$

6.7. Proposition Sei (X, Σ, μ) ein Maßraum, $1 < p, q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $f, g \in L^p(\mu)$.

(i) Falls $p \geqslant 2$, so gilt $\|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p \leqslant 2^{p-1}\Big(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\Big)$.

(ii) Falls $p < 2$, so gilt $\|f+g\|_p^q + \|f-g\|_p^q \leqslant 2\cdot\Big(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\Big)^{q-1}$.

Beweis:

(i) Nach der Jensenschen Ungleichung (6.6) gilt für $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$

$$\Big(|\gamma+\delta|^p + |\gamma-\delta|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leqslant \Big(|\gamma+\delta|^2 + |\gamma-\delta|^2\Big)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\cdot(\gamma^2 + \delta^2)^{\frac{1}{2}} \qquad \textbf{[*]}$$

Wir betrachten nun zunächst den Fall $p > 2$. Setze $r := \frac{p}{p-2}$. Dann gilt $\frac{1}{\frac{p}{2}} + \frac{1}{r} = 1$. Die Höldersche Ungleichung (4.5) für $\mathbb{R}^2$ liefert für (γ^2, δ^2) und $(1,1)$

$$\gamma^2\cdot 1 + \delta^2\cdot 1 \leqslant \Big((\gamma^2)^{\frac{p}{2}} + (\delta^2)^{\frac{p}{2}}\Big)^{\frac{2}{p}}\cdot(1^r + 1^r)^{\frac{1}{r}} = \big(|\gamma|^p + |\delta|^p\big)^{\frac{2}{p}}\cdot 2^{\frac{p-2}{p}}$$

Es folgt

$$\sqrt{2}\cdot\left(\gamma^2+\delta^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant 2^{\frac{1}{2}}\cdot\left(|\gamma|^p+|\delta|^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot 2^{\frac{p-2}{2p}} = 2^{\frac{p-1}{p}}\cdot\left(|\gamma|^p+|\delta|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Mit [*] folgt insgesamt $|\gamma+\delta|^p+|\gamma-\delta|^p \leqslant 2^{p-1}\cdot\left(|\gamma|^p+|\delta|^p\right)$. Integration liefert nun (i). Für $p=2$ gilt Gleichheit in [*] und auch hier liefert Integration das gewünschte Ergebnis.

(ii) *Übung!* □

6.8. Satz Sei (X,Σ,μ) ein Maßraum und $1<p<\infty$. Dann ist $L^p(\mu)$ gleichmäßig konvex.

Beweis: Seien $(f_n)_{\mathbb{N}},(g_n)_{\mathbb{N}}\subset L^P(\mu)$ Folgen mit $\|f_n\|_p=\|g_n\|_p=1$ für $n\in\mathbb{N}$ und Grenzwert $\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{1}{2}(f_n+g_n)\right\|_p=1$. Wir zeigen, dass 6.1(iii) gilt, also $\|f_n-g_n\|_p\xrightarrow{n\to\infty}0$. Nach 6.7 gilt

$$\underbrace{\|f_n+g_n\|_p^p}_{\xrightarrow{n\to\infty}2^p}+\|f_n-g_n\|_p^p\leqslant 2^p$$

falls $p\geqslant 2$. Für $p<2$ erhalten wir mit $q>0$, sodass $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

$$\underbrace{\|f_n+g_n\|_p^q}_{\xrightarrow{n\to\infty}2^q}+\|f_n-g_n\|_p^q\leqslant 2^q$$

Also folgt $\|f_n-g_n\|_p^p\xrightarrow{n\to\infty}0$ bzw. $\|f_n-g_n\|_p^q\xrightarrow{n\to\infty}0$. Also gilt $\|f_n-g_n\|_p\xrightarrow{n\to\infty}0$. □

6.9. Satz Sei X ein gleichmäßig konvexer Banachraum. Dann ist X reflexiv.

Beweis: Sei $f\in X^{**}$ mit $\|f\|_{X^{**}}=1$. Zu zeigen: $f\in\iota(X)$. Wir wählen $\varphi_n\in X^*$ mit $\|\varphi_n\|_{X^*}=1$ und $f(\varphi_n)>1-\frac{1}{n+1}$ für $n\in\mathbb{N}$. Nach dem Beweis von 5.16 gilt für $n\in\mathbb{N}$

$$\inf_{x\in\overline{B}_X(0,1)}\sum_{i=0}^{n}\left|f(\varphi_i)-\varphi_i(x)\right|^2=0$$

Also gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset X$, sodass $\|x_n\|_X=1$ und für $0\leqslant m\leqslant n$

Frag mich nicht, wie man auf die zweite Abschätzung kommt …

$$|f(\varphi_m)-\varphi_m(x_n)|<\frac{1}{2(n+1)}\quad\text{also auch}\quad 1-\frac{3}{2(m+1)}\leqslant\varphi_m(x_n)\leqslant 1$$

Behauptung: $(x_n)_{\mathbb{N}}$ ist Cauchy. Es gilt für $n\geqslant m$

$$\begin{aligned}\underbrace{1-\frac{3}{2(m+1)}+1-\frac{3}{2(m+1)}}_{\xrightarrow{n,m\to\infty}2}&\leqslant\varphi_m(x_m)+\varphi_m(x_n)=\varphi_m(x_m+x_n)\leqslant\|\varphi_m\|\cdot\|x_m+x_n\|_X\\&\leqslant\|x_m\|_X+\|x_n\|_X=2\end{aligned}$$

Also gilt $\left\|\frac{1}{2}(x_m+x_n)\right\|_X\xrightarrow{n,m\to\infty}1$. Mit Bemerkung 6.5 folgt nun, dass $(x_n)_{\mathbb{N}}$ Cauchy ist. Sei $\overline{x}:=\lim_{n\to\infty}x_n$. Es gilt $\|\overline{x}\|_X=1$. Behauptung: $\iota_X(\overline{x})=f$. Für $n\geqslant m$ gilt

$$\Big|f(\varphi_m)-\underbrace{\varphi_m(x_n)}_{\xrightarrow{n\to\infty}\varphi_m(\overline{x})}\Big|<\frac{1}{2(n+1)}$$

φ_m ist stetig, also ist $f(\varphi_m) = \varphi_m(\overline{x}) = \iota(\overline{x})(\varphi_m)$ für jedes $m \in \mathbb{N}$. Sei $\tilde{x} \in X$ ein weiterer Punkt mit $\|\tilde{x}\| = 1$ und $f(\varphi_m) = \varphi_m(\tilde{x})$, $m \in \mathbb{N}$. Das obige Argument für die Folge $(\overline{x}, \tilde{x}, \overline{x}, \tilde{x}, \dots)$ liefert: $(\overline{x}, \tilde{x}, \overline{x}, \tilde{x}, \dots)$ ist Cauchy und somit $\overline{x} = \tilde{x}$.

Noch zu zeigen: $f(\varphi) = \varphi(\overline{x})$ für alle $\varphi \in X^*$. Das obige Argument für $(\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \dots)$ an Stelle von $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots)$ liefert eine Folge $(y_n)_{\mathbb{N}} \subset X$ mit $\|y_n\| = 1$, $(y_n)_{\mathbb{N}}$ ist Cauchy; Dann erfüllt $\overline{y} := \lim_{n\to\infty} y_n$ die Gleichung $f(\varphi_m) = \varphi_m(\overline{y})$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Also gilt auch $f(\varphi) = \varphi(\overline{y})$. Die Eindeutigkeit von $\overline{x}$ liefert $\overline{y} = \overline{x}$. Damit folgt $\iota(\overline{x})(\varphi) = \varphi(\overline{x}) = \varphi(\overline{y}) = f(\varphi)$ für jedes $\varphi \in X^*$, also ist $\iota(\overline{x}) = f$. □

6.10. Corollar Für einen Maßraum (X, Σ, μ) und $1 < p < \infty$ ist $L^p(\mu)$ reflexiv.

Beweis: Kombiniere die Aussagen aus 6.8 und 6.9. □

6.11. Satz Sei (X, Σ, μ) ein Maßraum und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann ist die Abbildung $\iota_p \colon L^p(\mu) \to L^q(\mu)^*$ gegeben durch

$$\iota_p(f)(g) := \int fg \,\mathrm{d}\mu$$

ein isometrischer Isomorphismus.

Beweis: ι_p ist eine lineare Isometrie nach Proposition 4.10, wir müssen also nur Surjektivität zeigen. $\iota_p(L^p(\mu))$ ist vollständig, also abgeschlossen in $L^q(\mu)^*$. Falls $\iota_p(L^p(\mu)) \subsetneq L^q(\mu)^*$, so existiert nach Hahn-Banach ein $0 \neq \psi \in L^q(\mu)^{**}$ mit $\psi\big(\iota_p(L^p(\mu))\big) = 0$. $L^q(\mu)$ ist reflexiv nach 6.10, also existiert $g \in L^q(\mu)$ mit $\iota(g) = \psi$, d.h. $\varphi(g) = \iota(g)(\varphi) = \psi(\varphi)$ für alle $\varphi \in L^q(\mu)^*$. Für jedes $f \in L^p(\mu)$ gilt dann

$$0 = \psi\big(\iota_p(f)\big) = \iota_p(f)(g) = \int fg \,\mathrm{d}\mu \implies g = 0 \ ↯$$

Also kann ein solches ψ nicht existieren und es folgt die Surjektivität von ι_p. □

6.12. Bemerkung

Ich meine irgendwo gelesen zu haben, dass dafür das Maß aber σ-endlich sein muss

- Weiter kann man zeigen, dass die kanonische Abbildung

  $$\iota_\infty \colon L^\infty(\mu) \to L^1(\mu)^* \quad , \quad \iota_\infty(f)(g) = \int fg \,\mathrm{d}\mu$$

  ein isometrischer Isomorphismus ist. *(ohne Beweis)*
- Die Isometrie $\iota_1 \colon L^1(\mu) \to L^\infty(\mu)^*$ ist jedoch *nicht* surjektiv! *(Übung, Blatt 10, Aufgabe 1)*

7. Hilberträume und selbstadjungierte Operatoren

7.1. Definition Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine ***hermitesche Form*** auf X ist eine Abbildung $\langle \cdot\,, \cdot \rangle \colon X \times X \to \mathbb{K}$ mit

$$\begin{aligned} \langle x\,,\, y + y' \rangle &= \langle x\,,\, y \rangle + \langle x\,,\, y' \rangle \\ \langle x\,,\, \alpha \cdot y \rangle &= \alpha \cdot \langle x\,,\, y \rangle \\ \langle x\,,\, y \rangle &= \overline{\langle y\,,\, x \rangle} \qquad \text{für } x, y, y' \in X, \alpha \in \mathbb{K} \end{aligned}$$

linear im zweiten Eintrag

$\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ heißt ***positiv semidefinit***, falls $\langle x\,,\, x \rangle \geqslant 0$ für $x \in X$ und ***positiv definit***, falls $\langle x\,,\, x \rangle > 0$ für $0 \neq x \in X$. In diesem Fall heißt $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ auch ***Skalarprodukt***.

7.2. Bemerkung Für eine hermitesche Form $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ und $x, x', y \in X$, $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt

$$\langle x + x'\,,\, y \rangle = \langle x\,,\, y \rangle + \langle x'\,,\, y \rangle \quad , \qquad \langle \alpha \cdot x\,,\, y \rangle = \overline{\alpha} \cdot \langle x\,,\, y \rangle \qquad \text{und} \qquad \langle x\,,\, x \rangle \in \mathbb{R}$$

konjugiert linear im ersten Eintrag

7.3. Beispiele

(i) Auf $\mathbb{C}^n$ definiert $\langle \underline{x}\,,\, \underline{y} \rangle := \sum_{i=1}^n \overline{x}_i \cdot y_i$ ein Skalarprodukt.

(ii) Auf $L^2(\mathbb{R})$ definiert $\langle f\,,\, g \rangle := \int f g \,\mathrm{d}\lambda$ ein Skalarprodukt. Auf

wohldefiniert nach Hölder

$$L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) := \left\{ f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C} \,\middle|\, \operatorname{Re} f \text{ und } \operatorname{Im} f \text{ messbar}, \int \bar{f} f \,\mathrm{d}\lambda < \infty \right\} / \mathcal{N}$$

definiert $\langle f\,,\, g \rangle := \int \bar{f} g \,\mathrm{d}\lambda$ ein Skalarprodukt.

(iii) Auf $\ell^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$ definieren wir ein Skalarprodukt durch $\langle (a_n)\,,\, (b_n) \rangle := \sum_{n \in \mathbb{N}} \overline{a}_n b_n$.

7.4. Proposition (Cauchy-Schwarz-Ungleichung) Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit einer positiv semidefiniten hermiteschen Form. Dann gilt für $x, y \in X$

$$\left| \langle x\,,\, y \rangle \right|^2 \leqslant \langle x\,,\, x \rangle \cdot \langle y\,,\, y \rangle$$

Beweis: Für $\lambda \in \mathbb{K}$, $x, y \in X$ gilt:

$$0 \leqslant \langle x + \lambda y\,,\, x + \lambda y \rangle = \langle x\,,\, x \rangle + \lambda \cdot \langle x\,,\, y \rangle + \overline{\lambda} \cdot \langle y\,,\, x \rangle + \lambda \cdot \overline{\lambda} \cdot \langle y\,,\, y \rangle$$

Falls $\langle y\,,\, y \rangle \neq 0$, so setze $\lambda := -\frac{\langle y\,,\, x \rangle}{\langle y\,,\, y \rangle}$. Es folgt

$$0 \leqslant \langle x\,,\, x \rangle - \frac{\langle y\,,\, x \rangle \cdot \langle x\,,\, y \rangle}{\langle y\,,\, y \rangle} + \overline{\lambda} \cdot \left(\langle y\,,\, x \rangle - \frac{\langle y\,,\, x \rangle}{\langle y\,,\, y \rangle} \langle y\,,\, y \rangle \right) = \langle x\,,\, x \rangle - \frac{|\langle x\,,\, y \rangle|^2}{\langle y\,,\, y \rangle}$$

Falls $\langle x\,,\, x \rangle \neq 0$, so vertausche die Rollen von x und y. Falls $\langle x\,,\, x \rangle = \langle y\,,\, y \rangle = 0$ gilt, so setzen wir $\lambda := -\langle y\,,\, x \rangle$ und erhalten

$$0 \leqslant -\langle y\,,\, x \rangle \cdot \langle x\,,\, y \rangle - \overline{\langle y\,,\, x \rangle} \cdot \langle y\,,\, x \rangle = -2 \cdot |\langle x\,,\, y \rangle|^2$$

Also muss in diesem Fall bereits $|\langle x\,,\, y \rangle|^2 = 0$ und somit die gewünschte (Un-)Gleichung gelten. □

7.5. Proposition Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt. Dann definiert $x \mapsto \|x\| := \langle x\,,\,x\rangle^{\frac{1}{2}}$ eine Norm auf X.

Beweis: $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle$ ist positiv definit, also ist auch $\|\cdot\|$ positiv definit. Weiter gilt

$$\|\lambda\cdot x\| = \langle \lambda\cdot x\,,\,\lambda\cdot x\rangle^{\frac{1}{2}} = \big(\overline{\lambda}\lambda\cdot\langle x\,,\,x\rangle\big)^{\frac{1}{2}} = |\lambda|\cdot\|x\|$$

Die Dreiecksungleichung gilt, da

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 = \langle x+y\,,\,x+y\rangle &= \langle x\,,\,x\rangle + \langle x\,,\,y\rangle + \langle y\,,\,x\rangle + \langle y\,,\,y\rangle\\ &\overset{\text{C.S.}}{\leqslant} \langle x\,,\,x\rangle + 2\cdot\big(\langle x\,,\,x\rangle\cdot\langle y\,,\,y\rangle\big)^{\frac{1}{2}} + \langle y\,,\,y\rangle\\ &= \|x\|^2 + 2\cdot\|x\|\cdot\|y\| + \|y\|^2 = \big(\|x\|+\|y\|\big)^2\end{aligned}$$

Durch Wurzelziehen folg $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$. □

7.6. Bemerkung

(i) Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung schreibt sich auch als $|\langle x\,,\,y\rangle| \leqslant \|x\|\cdot\|y\|$.

(ii) Die Abbildung $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle\colon X\times X\to\mathbb{K}$ ist stetig:

$$\begin{aligned}\big|\langle x\,,\,y\rangle - \langle x'\,,\,y'\rangle\big| = \big|\langle x\,,\,y\rangle - \langle x'\,,\,y\rangle + \langle x'\,,\,y\rangle - \langle x'\,,\,y'\rangle\big| &= \big|\langle x-x'\,,\,y\rangle + \langle x'\,,\,y'-y\rangle\big|\\ &\leqslant \big|\langle x-x'\,,\,y\rangle\big| + \big|\langle x'\,,\,y'-y\rangle\big|\\ &\overset{\text{C.S.}}{\leqslant} \|x-x'\|\cdot\|y\| + \|x'\|\cdot\|y'-y\|\end{aligned}$$

7.7. Proposition Für einen normierten Raum X sind äquivalent:

(i) Es gilt das ***Parallelogrammgesetz***: $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\Big(\|x\|^2 + \|y\|^2\Big)$ für alle $x, y\in X$.

(ii)

$$\langle x\,,\,y\rangle := \begin{cases}\frac{1}{4}\Big(\|x+y\|^2 - \|-x+y\|^2 + i\cdot\|i\cdot x+y\|^2 - i\cdot\|-i\cdot x+y\|^2\Big), & \text{falls } \mathbb{K}=\mathbb{C}\\ \frac{1}{4}\Big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\Big), & \text{falls } \mathbb{K}=\mathbb{R}\end{cases}$$

definiert ein Skalarprodukt auf X. In diesem Fall gilt $\langle x\,,\,x\rangle = \|x\|^2$ für alle $x\in X$; insbesondere ist $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle$ stetig auf $X\times X$.

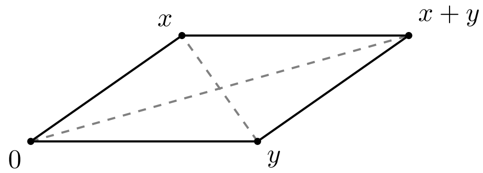


Abbildung 3: Die Parallelogrammgleichung in $\mathbb{C}\cong\mathbb{R}^2$. Die gestrichelten Linien sind zusammen genauso lang wie die durchgezogenen. In $\mathbb{C}$ lässt sich die Gleichung sehr einfach mittels $|z|^2 = z\cdot\overline{z}$ beweisen. Ein andere einfache Möglichkeit ist der Kosinussatz aus der Schule; `Wikipedia-Link`.

Beweis:

(ii)⇒(i): Wie man leicht nachrechnet gilt $\|x\|^2 = \langle x\,,\,x\rangle$ für $x \in X$. (i) folgt ebenfalls durch eine einfache Rechnung.

(i)⇒(ii): $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle\colon X \times X \to X$ ist stetig (klar). Linearität (für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$): Es gilt

$$\langle x\,,\,y+y'\rangle = \frac{1}{4}\Big(\|x+y+y'\|^2 - \|-x+y+y'\|^2 + i\|ix+y+y'\|^2 - i\|-ix+y+y'\|^2\Big) \quad \textbf{[*]}$$

$$\begin{aligned}\langle x\,,\,y\rangle + \langle x\,,\,y'\rangle = \frac{1}{4}\Big(&\|x+y\|^2 - \|-x+y\|^2 + i\|ix+y\|^2 - i\|-ix+y\|^2 + \\ &\|x+y'\|^2 - \|-x+y'\| + i\|ix+y'\| - i\|-ix+y'\|\Big)\end{aligned} \quad \textbf{[**]}$$

Vergleich der Imaginärteile: Es gilt nach (i) sowohl

$$\|x+y+y'\|^2 = -\|x+y-y'\|^2 + 2\|x+y\|^2 + 2\|y'\|$$

als auch

$$\|x+y+y'\|^2 = -\|x-y+y'\|^2 + 2\|x+y'\| + 2\|y\|^2$$

Wir multiplizieren beide Gleichungen mit $\frac{1}{2}$, addieren diese und erhalten

$$\|x+y+y'\|^2 = -\frac{1}{2}\Big(\|x+y-y'\|^2 + \|x-y+y'\|^2\Big) + \|x+y\|^2 + \|x+y'\|^2 + \|y'\|^2 + \|y\|^2$$

Wir substituieren x mit $-x$ und ziehen die Gleichungen voneinander ab

$$\|x+y+y'\|^2 - \|-x+y+y'\|^2 = \|x+y\|^2 + \|x+y'\|^2 - \|-x+y\|^2 - \|-x+y'\|^2$$

Also stimmen die Realteile von **[*]** und **[**]** überein. Der Beweis für die Imaginärteile erfolgt analog. Es gilt also $\langle x\,,\,y\rangle + \langle x\,,\,y'\rangle = \langle x\,,\,y+y'\rangle$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} &\langle x\,,\,\alpha\cdot y\rangle = \alpha\cdot\langle x\,,\,y\rangle && \text{für } \alpha\in\mathbb{N}\setminus\{0\} \\ \Longrightarrow\ &\langle x\,,\,\alpha\cdot y\rangle = \alpha\cdot\langle x\,,\,y\rangle && \text{für } \alpha\in\mathbb{Z}\ (\langle x\,,\,0\rangle = 0 \text{ ist trivial}) \end{aligned}$$

Es gilt nun für $\alpha = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$

$$\langle x\,,\,\alpha\cdot y\rangle = \frac{n}{n}\cdot\Big\langle x\,,\,\frac{m}{n}\cdot y\Big\rangle = \frac{m}{n}\cdot\Big\langle x\,,\,\frac{n}{n}\cdot y\Big\rangle = \alpha\cdot\langle x\,,\,y\rangle$$

Mit der Stetigkeit von $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle$ folgt nun $\langle x\,,\,\alpha\cdot y\rangle = \alpha\cdot\langle x\,,\,y\rangle$ auch für $\alpha\in\mathbb{R}$. $\langle x\,,\,i\cdot y\rangle = i\cdot\langle x\,,\,y\rangle$ ist klar und damit ist $\langle x\,,\,\alpha\cdot y\rangle = \alpha\cdot\langle x\,,\,y\rangle$ für $\alpha\in\mathbb{C}$. Also ist $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle$ linear in der zweiten Variablen. $\langle x\,,\,y\rangle = \overline{\langle y\,,\,x\rangle}$ ist trivial. □

7.8. Bemerkung Ist X ein $\mathbb{C}$-Vektorraum und $q\colon X\times X \to \mathbb{C}$ eine ***Sesquilinearform*** (d.h. q ist linear in der zweiten Variable und konjugiert linear in der ersten), dann ist q durch die Abbildung $n_q\colon X\to\mathbb{C}$, $n_q(x) := q(x,x)$ eindeutig bestimmt durch die ***Polarisierungsidentität***

$$q(x,y) = \frac{1}{4}\Big(n_q(x+y) - n_q(-x+y) + i\cdot n_q(ix+y) - i\cdot n_q(-ix+y)\Big).$$

7.9. Definition Ein $\mathbb{K}$-Vektorraum $\mathcal{H}$ heißt ***Prä-Hilbertraum***, falls $\mathcal{H}$ ein Skalarprodukt besitzt. $\mathcal{H}$ heißt ***Hilbertraum***, falls $\mathcal{H}$ vollständig ist bezüglich der durch $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle$ induzierten Norm.

7.10. Proposition Sei $\mathcal{H}$ ein Prä-Hilbertraum und $\overline{\mathcal{H}}^{\|\cdot\|}$ die Vervollständigung bezüglich $\|x\| = \langle x\,,\,x\rangle^{\frac{1}{2}}$. Dann ist $\overline{\mathcal{H}}^{\|\cdot\|}$ in kanonischer Weise ein Hilbertraum.

Beweis: $(\mathcal{H}, \|\cdot\|) \hookrightarrow (\overline{\mathcal{H}}^{\|\cdot\|}, \|\cdot\|_{\overline{\mathcal{H}}^{\|\cdot\|}})$ ist isometrisch mit dichtem Bild nach Satz 1.5. $\|\cdot\|$ erfüllt das Parallelogrammgesetz und daher auch $\|\cdot\|_{\overline{\mathcal{H}}^{\|\cdot\|}}$. Mit 7.7 folgt, dass $\overline{\mathcal{H}}^{\|\cdot\|}$ ein Skalarprodukt besitzt, welches die Norm $\|\cdot\|_{\overline{\mathcal{H}}^{\|\cdot\|}}$ induziert und auf $\mathcal{H}$ mit $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle$ übereinstimmt. Das Skalarprodukt auf $\overline{\mathcal{H}}^{\|\cdot\|}$ ist wegen Stetigkeit hierdurch eindeutig bestimmt. ☐

Diese Aussage wird manchmal als Rieszscher Darstellungssatz bezeichnet

7.11. Proposition Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $\kappa\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}^*$ definiert durch $\kappa(x)(y) := \langle x\,,\,y\rangle$, $x, y \in \mathcal{H}$. Dann gilt:

(i) κ ist ***konjugiert linear***, das heißt $\kappa(\alpha x + \alpha' x') = \overline{\alpha}\kappa(x) + \overline{\alpha'}\kappa(x')$ mit $x, x' \in \mathcal{H}$, $\alpha, \alpha' \in \mathbb{K}$.

(ii) κ ist isometrisch, also insbesondere injektiv.

(iii) κ ist surjektiv.

Beweis: Es gilt $\kappa(x) \in \mathcal{H}^*$, da $\kappa(x)\colon \mathcal{H} \to \mathbb{K}$ offensichtlich linear ist. Weiter ist $\kappa(x)$ stetig, da

$$|\kappa(x)(y)| = |\langle x\,,\,y\rangle| \overset{\text{C.S.}}{\leqslant} \|x\| \cdot \|y\| \Longrightarrow \|\kappa(x)\|_{\mathcal{H}^*} \leqslant \|x\|$$

(i) klar.

(ii) Es gilt $\kappa(x)\Big(\frac{1}{\|x\|}x\Big) = \frac{1}{\|x\|}\langle x\,,\,x\rangle = \|x\|$. Daraus folgt $\|\kappa(x)\|_{\mathcal{H}^*} \geqslant \|x\|$, also auch $\|\kappa(x)\|_{\mathcal{H}^*} = \|x\|$, da wir die andere Abschätzung eben gezeigt haben.

(iii) Sei $\varphi \in \mathcal{H}^*$. Ohne Einschränkungen gelte $\|\varphi\|_{\mathcal{H}^*} = 1$. Behauptung: Es gibt ein $\overline{x} \in \mathcal{H}$ mit $\|\overline{x}\| = 1$ und $\varphi(\overline{x}) = 1$.

Wähle dazu $(x_n)_{\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ mit $\|x_n\| = 1$ und $0 \leqslant \varphi(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} 1$. Zu $1 > \varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\varphi(x_n) > 1 - \frac{\varepsilon}{8}$ für $n \geqslant N$, also $\varphi(x_n + x_m) > 2 - \frac{\varepsilon}{4}$. Aus dem Parallelogrammgesetz folgt nun für $n, m \geqslant N$

$$\|x_n - x_m\|^2 = 2 \cdot \|x_n\|^2 + 2 \cdot \|x_m\|^2 - \|x_n + x_m\|^2 \leqslant 4 - \Big(2 - \frac{\varepsilon}{4}\Big)^2 \leqslant \varepsilon$$

Es folgt, dass $(x_n)_{\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist. $\overline{x} := \lim_{n\to\infty} x_n$ erfüllt die Behauptung.

Wir zeigen nun, dass $\overline{x}$ ein Urbild von φ unter κ ist, das heißt für $y \in \mathcal{H}$ ist $\varphi(y) = \kappa(\overline{x})(y)$. Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Für $\lambda > 0$ gilt wegen der Dreiecksungleichung und $\|\varphi\|_{\mathcal{H}*} \leqslant 1$

$$-\frac{1}{\lambda}\big(\|\overline{x} - \lambda \cdot y\| - \|\overline{x}\|\big) \leqslant -\frac{1}{\lambda}\big(\varphi(\overline{x} - \lambda \cdot y) - \varphi(\overline{x})\big) = \varphi(y)$$

und

$$\varphi(y) = \frac{1}{\lambda}\Big(\varphi(\overline{x} + \lambda \cdot y) - \underbrace{\varphi(\overline{x})}_{=1}\Big) \leqslant \frac{1}{\lambda} \cdot \Big(\|\overline{x} + \lambda \cdot y\| - \underbrace{\|\overline{x}\|}_{=1}\Big)$$

also insgesamt

$$\underbrace{-\frac{1}{\lambda}\Big(\|\overline{x} - \lambda \cdot y\| - \|\overline{x}\|\Big)}_{\xrightarrow{\lambda\to 0}\langle \overline{x}\,,\,y\rangle} \leqslant \varphi(y) \leqslant \underbrace{\frac{1}{\lambda} \cdot \Big(\|\overline{x} + \lambda \cdot y\| - \|\overline{x}\|\Big)}_{\xrightarrow{\lambda\to 0}\langle \overline{x}\,,\,y\rangle}$$

nach l'Hospital. Im Detail:

$$\|\overline{x} \pm \lambda y\| - \|\overline{x}\| = \langle \overline{x} \pm \lambda y \,,\, \overline{x} \pm \lambda y \rangle^{\frac{1}{2}} - \|\overline{x}\| = \big(\langle \overline{x} \,,\, \overline{x} \rangle \pm 2 \cdot \langle \overline{x} \,,\, \lambda y \rangle + \lambda^2 \cdot \langle y \,,\, y \rangle\big)^{\frac{1}{2}} - \langle \overline{x} \,,\, \overline{x} \rangle^{\frac{1}{2}}$$

ist in $\lambda = 0$ differenzierbar nach λ mit

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}(\ldots) &= \Big(2\langle \overline{x} \,,\, y \rangle \pm 2\lambda\|y\|^2\Big) \cdot \frac{1}{2}\Big(\langle \overline{x} \,,\, \overline{x} \rangle \pm 2 \cdot \langle \overline{x} \,,\, \lambda y \rangle + \lambda^2 \cdot \langle y \,,\, y \rangle\Big)^{-\frac{1}{2}} \\ &\xrightarrow{\lambda \to 0} 2 \cdot \langle \overline{x} \,,\, y \rangle \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\|\overline{x}\|} = \langle \overline{x} \,,\, y \rangle \end{aligned}$$

Wir erhalten $\varphi(y) = \langle \overline{x} \,,\, y \rangle = \kappa(\overline{x})(y)$, also $\varphi = \kappa(\overline{x})$.

Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ stellen wir fest, dass $\mathcal{H}$ ein reeller Hilbertraum ist mit $\langle \cdot \,,\, \cdot \rangle_{\mathbb{R}} := \mathrm{Re}(\langle \cdot \,,\, \cdot \rangle)$. Es gilt dann $\varphi(y) = \rho(y) - i \cdot \rho(i \cdot y)$ mit $\rho(\cdot) := \mathrm{Re}(\varphi(\cdot))$, da folgendes gilt

$$\mathrm{Im}\big(\varphi(y)\big) = -\,\mathrm{Re}\big(i \cdot \varphi(y)\big) = -\,\mathrm{Re}\big(\varphi(i \cdot y)\big) = -\rho(i \cdot y)$$

Analog zum reellen Fall ist dann $\rho(y) = \langle \overline{x} \,,\, y \rangle_{\mathbb{R}} = \mathrm{Re}(\langle \overline{x} \,,\, y \rangle)$ für ein $\overline{x} \in \mathcal{H}$. Also gilt

$$\varphi(y) = \rho(y) - i \cdot \rho(iy) = \langle \overline{x} \,,\, y \rangle_{\mathbb{R}} - i \cdot \langle \overline{x} \,,\, iy \rangle_{\mathbb{R}} = \mathrm{Re}\big(\langle \overline{x} \,,\, y \rangle\big) - i \cdot \mathrm{Im}\big(-\langle \overline{x} \,,\, y \rangle\big) = \langle \overline{x} \,,\, y \rangle \quad \square$$

7.12. Corollar Hilberträume sind reflexiv.

BEWEIS: Das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H} \arrow[r, "\iota_{\mathcal{H}}"] \arrow[d, "\kappa"] & \mathcal{H}^{**} \arrow[d, "\kappa^{\mathrm{tr}}"] \\ \mathcal{H}^* \arrow[r, "\varphi \mapsto \overline{\varphi}"] & \mathcal{H}^* \end{tikzcd}$$

kommutiert, da folgendes gilt:

$$\kappa^{\mathrm{tr}} \circ \iota_{\mathcal{H}}(x)(y) = \kappa^{\mathrm{tr}}(\iota_{\mathcal{H}}(x))(y) = \iota_{\mathcal{H}}(x) \circ \kappa(y) = \kappa(y)(x) = \langle y \,,\, x \rangle = \overline{\langle x \,,\, y \rangle} = \overline{\kappa(x)(y)}$$

Die Abbildungen $\kappa, \kappa^{\mathrm{tr}}$ und $(\varphi \mapsto \overline{\varphi})$ sind surjektive Isometrien, also ist auch $\iota_{\mathcal{H}} \colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}^{**}$ eine surjektive Isometrie. $\square$

κ^{tr} nach Aufgabe 2, Blatt 6

7.13. Definition Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum.

(i) $x, y \in \mathcal{H}$ heißen ***orthogonal***, $x \perp y$, falls $\langle x \,,\, y \rangle = 0$.

(ii) $A, B \subset \mathcal{H}$ heißen ***orthogonal***, falls $x \perp y$ für alle $x \in A$, $y \in B$.

(iii) Für $A \subset \mathcal{H}$ heißt $A^{\perp} := \{x \in \mathcal{H} \,|\, \langle x \,,\, y \rangle = 0$ für alle $y \in A\}$ ***orthogonales Komplement*** von A.

(iv) $\{x_i\}_I \subset \mathcal{H}$ heißt ***Orthonormalsystem***, falls $\langle x_i \,,\, x_j \rangle = \delta_{ij}$ für $i, j \in I$.

(v) $\{x_i\}_I \subset \mathcal{H}$ heißt ***Hilbertraumbasis*** (bzw. Basis), falls es ein maximales Orthonormalsystem ist.

7.14. Bemerkung

(i) Für $x \perp y \in \mathcal{H}$ gilt der ***Satz des Pythagoras***: $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

(ii) Wir werden sehen, dass jeder Hilbertraum eine Hilbertraumbasis besitzt.

(iii) Im Allgemeinen ist eine Hilbertraumbasis *keine* Vektorraumbasis (***Hamelbasis***).

7.15. Proposition Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$ ein abgeschlossener Unterraum. Dann gilt $\mathcal{H}_0 \cap \mathcal{H}_0^\perp = \{0\}$ und $\mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_0^\perp = \mathcal{H}$. Wir schreiben in diesem Fall auch $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_0^\perp$ (***Direkte Summe***).

Beweis: $\mathcal{H}_0 \cap \mathcal{H}_0^\perp = \{0\}$ ist klar. Sei $x \in \mathcal{H}$. Dann ist $\kappa(x) \in \mathcal{H}^*$ gegeben durch $\kappa(x)(y) = \langle x\,,\, y\rangle$ und es ist $\kappa(x)|_{\mathcal{H}_0} \in \mathcal{H}_0^*$. Nun ist $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$ abgeschlossen und somit selbst ein Hilbertraum. Sei $\kappa_0 \colon \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_0^*$ der konjugiert lineare, isometrische Isomorphismus aus 7.11. Wegen der Surjektivität von κ_0 existiert $x_0 \in \mathcal{H}_0$ mit $\kappa_0(x_0) = \kappa(x)|_{\mathcal{H}_0}$. Das heißt für $y \in \mathcal{H}_0$ gilt

$$\langle x_0\,,\, y\rangle = \kappa_0(x_0)(y) = \kappa(x)\big|_{\mathcal{H}_0}(y) = \kappa(x)(y) = \langle x\,,\, y\rangle$$

Daraus folgt $\langle x - x_0\,,\, y\rangle = 0$ für jedes $y \in \mathcal{H}_0$, also ist $x_1 := x - x_0 \in \mathcal{H}_0^\perp$ und $x = x_0 + x_1$. $\square$

7.16. Definition Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Eine Familie $\{x_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{H}$ heißt ***summierbar*** zu $x \in \mathcal{H}$, falls gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert $\overline{J} \subset\subset I$ endlich, sodass für alle $\overline{J} \subset J \subset\subset I$ endlich gilt

$$\left\|\sum_{i\in J} x_i - x\right\| < \varepsilon.$$

Wir schreiben dann auch $x = \sum_{i\in I} x_i$. (Warum kann es höchstens ein solches x geben?) Formulierung mit Netzen:

$$\left(\sum_{i\in J} x_i\right)_{\{J \mid J\subset\subset I \text{ endlich}\}} \longrightarrow x \qquad \text{oder} \qquad \sum_{i\in J} x_i \xrightarrow{J\subset\subset I} x$$

Dabei ist $\{J \mid J \subset\subset I \text{ endlich}\}$ gerichtet bezüglich Inklusion.

7.17. Proposition Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $\{x_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{H}$ eine Familie in $\mathcal{H}$.

(i) $\{x_i\}_{i\in I}$ ist genau dann summierbar, wenn gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert $\overline{J} \subset\subset I$ endlich, sodass $\left\|\sum_{i\in J'} x_i\right\| < \varepsilon$ für jedes $J' \subset\subset I$ endlich mit $J' \cap \overline{J} = \emptyset$.

(ii) $\{x_i\}_{i\in I}$ ist genau dann summierbar zu $x \in \mathcal{H}$, wenn gilt: Es sind höchstens abzählbar viele der $x_i \neq 0$ und für jede Abzählung $x_{i_0}, x_{i_1}, \dots$ dieser x_i gilt

$$x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} x_{i_k}.$$

Beweis:

(i) Angenommen $\sum_{i\in I} x_i \in \mathcal{H}$ existiert. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $\overline{J} \subset\subset I$, sodass für $\overline{J} \subset J \subset \subset I$ gilt $\left\|\sum_{i\in J} x_i - \sum_{i\in I} x_i\right\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Für $J' \subset\subset I$ mit $J' \cap \overline{J} = \emptyset$ gilt dann

$$\left\|\sum_{i\in J'} x_i\right\| = \left\|\sum_{i\in J'\cup\overline{J}} x_i - \sum_{i\in\overline{J}} x_i\right\| \leqslant \left\|\sum_{i\in J'\cup\overline{J}} x_i - \sum_{i\in I} x_i\right\| + \left\|\sum_{i\in I} x_i - \sum_{i\in\overline{J}} x_i\right\| < \varepsilon$$

Zur Rückrichtung: Für $n \in \mathbb{N}$ existiert $J_n \subset\subset I$ endlich, sodass für $J' \subset\subset I$ mit $J' \cap J_n = \emptyset$ gilt $\left\|\sum_{i\in J'} x_i\right\| < \frac{1}{n+1}$. Aber dann ist

$$\left(\sum_{i\in J_0\cup J_1\cup\ldots\cup J_n} x_i\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$$

eine Cauchyfolge. Für den Limes x gilt $x = \sum_{i\in I} x_i$.

Sei dazu $\varepsilon > 0$. Wähle $n \in \mathbb{N}$, sodass $\frac{1}{n+1} < \frac{\varepsilon}{2}$ und außerdem $\left\|x - \sum_{i\in J_0\cup\ldots\cup J_n} x_i\right\| < \frac{\varepsilon}{2}$ gilt. Setze nun $\overline{J} := J_n$. Dann gilt für $\overline{J} \subset J \subset\subset I$

$$\left\|x - \sum_{i\in J} x_i\right\| \leqslant \left\|x - \sum_{i\in J_0\cup\ldots\cup J_n} x_i\right\| + \left\|\sum_{i\in J_0\cup\ldots\cup J_n} x_i - \sum_{i\in J} x_i\right\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

(ii) Angenommen $\{x_i\}_{i\in I}$ ist summierbar. Seien die J_n wie oben. Dann ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n$ abzählbar. Falls $I \ni i \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n$, so gilt $\|x_i\| < \frac{1}{n+1}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, also $x_i = 0$.

Die Rückrichtung ist klar. (sonst noch einmal an Analysis I. erinnern …) □

7.18. Proposition Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $z \in \mathcal{H}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\{x_i\}_{i\in I}, \{y_i\}_{i\in I}$ summierbare Familien. Dann gilt

$$\alpha \cdot \sum_{i\in I} x_i + \beta \cdot \sum_{i\in I} y_i = \sum_{i\in I}(\alpha \cdot x_i + \beta \cdot y_i) \qquad \text{und} \qquad \left\langle \sum_{i\in I} x_i\,,\, z\right\rangle = \sum_{i\in I}\langle x_i\,,\, z\rangle$$

Beweis: *Übung!* □

7.19. Proposition Sei $\{x_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{H}$ eine Familie paarweise orthogonaler Vektoren. Dann ist $\{x_i\}_{i\in I}$ summierbar genau dann, wenn $\sum_{i\in I}\|x_i\|^2$ endlich ist. In diesem Fall gilt

$$\left\|\sum_{i\in I} x_i\right\|^2 = \sum_{i\in I}\|x_i\|^2$$

Beweis: Falls $\{x_i\}_{i\in I}$ summierbar ist, so gilt

$$\left\|\sum_{i\in I} x_i\right\|^2 = \left\langle \sum_{i\in I} x_i\,,\, \sum_{j\in I} x_j\right\rangle \overset{7.18}{=} \sum_{i\in I}\left\langle x_i\,,\, \sum_{j\in I} x_j\right\rangle \overset{7.18}{=} \sum_{i\in I}\sum_{j\in I}\langle x_i\,,\, x_j\rangle = \sum_{i\in I}\|x_i\|^2$$

Äquivalenz: Übung mit

$$\left\|\sum_{i\in I} x_i\right\|^2 \xleftarrow{J\subset\subset I} \left\|\sum_{i\in J} x_i\right\|^2 = \sum_{i\in J}\|x_i\|^2 \xrightarrow{J\subset\subset I} \sum_{i\in I}\|x_i\|^2$$

für $J \subset\subset I$ endlich und 7.17. □

7.20. Proposition Sei $\{x_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{H}$ ein Orthonormalsystem und $x \in \mathcal{H}$.

(i) Es gilt $\sum_{i\in I} |\langle x_i\,,\,x\rangle|^2 \leqslant \|x\|^2$ (***Besselsche Ungleichung***[12]).

(ii) Es gilt $\sum_{i\in I} |\langle x_i\,,\,x\rangle|^2 = \|x\|^2$ (***Parselvalsche Gleichung***[13]) genau dann, wenn

$$x = \sum_{i\in I} \langle x_i\,,\,x\rangle \cdot x_i.$$

Beweis:

(i) Für $J \subset\subset I$ endlich gilt

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \left\| x - \sum_{i\in J} \langle x_i\,,\,x\rangle x_i \right\|^2 &= \langle x\,,\,x\rangle - \sum_{i\in J} \big\langle \langle x_i\,,\,x\rangle x_i\,,\,x\big\rangle - \sum_{i\in J} \big\langle x\,,\,\langle x_i\,,\,x\rangle x_i\big\rangle \\ &\quad + \sum_{i\in J}\sum_{j\in J} \big\langle \langle x_i\,,\,x\rangle x_i\,,\,\langle x_j\,,\,x\rangle x_j\big\rangle \\ &= \langle x\,,\,x\rangle - \sum_{i\in J} \overline{\langle x_i\,,\,x\rangle}\langle x_i\,,\,x\rangle - \sum_{i\in J} \langle x_i\,,\,x\rangle\overline{\langle x_i\,,\,x\rangle} + \sum_{i\in J} \overline{\langle x_i\,,\,x\rangle}\langle x_i\,,\,x\rangle \end{aligned}$$

Also $\sum_{i\in J} |\langle x_i\,,\,x\rangle|^2 \leqslant \|x\|^2 < \infty$ und somit folgt $\sum_{i\in I} |\langle x_i\,,\,x\rangle|^2 \leqslant \|x\|^2$.

(ii) Die Rechnung aus (i) zeigt auch:

$$\sum_{i\in J} |\langle x_i\,,\,x\rangle|^2 \xrightarrow{J\subset\subset I} \|x\|^2 \iff \sum_{i\in J} \langle x_i\,,\,x\rangle \cdot x_i \xrightarrow{J\subset\subset I} x \qquad \square$$

7.21. Definition und Proposition Seien $\mathcal{H}_i$ für $i \in I$ Hilberträume. Dann ist

$$\bigoplus_{i\in I} \mathcal{H}_i := \left\{ (x_i)_{i\in I} \,\middle|\, x_i \in \mathcal{H}_i, \sum_{i\in I} \|x_i\|^2_{\mathcal{H}_i} < \infty \right\}$$

ein Hilbertraum mit $\langle (x_i)_{i\in I}\,,\,(y_i)_{i\in I}\rangle := \sum_{i\in I} \langle x_i\,,\,y_i\rangle_{\mathcal{H}_i}$.

Beweis: *Übung, Aufgabe 1 von Blatt 12* $\square$

7.22. Satz Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $\{x_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{H}$ ein Orthonormalsystem. Dann sind äquivalent:

(i) $\{x_i\}_{i\in I}$ ist eine Hilbertraumbasis.

(ii) Falls $x \perp x_i$ für alle $i \in I$, so gilt $x = 0$.

(iii) Es gibt einen isometrischen Isomorphismus $\bigoplus_{i\in I} \mathcal{H}_i \cong \mathcal{H}$ gegeben durch $(\lambda_i \cdot x_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} \lambda_i \cdot x_i$ wobei $\mathcal{H}_i = \mathbb{K} \cdot x_i$ der von x_i erzeugte Unterhilbertraum ist.

(iv) Für jedes $x \in \mathcal{H}$ gilt $x = \sum_{i\in I} \langle x_i\,,\,x\rangle \cdot x_i$.

(v) Für alle $x, y \in \mathcal{H}$ gilt $\langle x\,,\,y\rangle = \sum_{i\in I} \langle x\,,\,x_i\rangle \cdot \langle x_i\,,\,y\rangle$.

(vi) Für alle $x \in \mathcal{H}$ gilt die Parsevalsche Gleichung $\|x\|^2 = \sum |\langle x_i\,,\,x\rangle|^2$.

[12] nach Friedrich Wilhelm Bessel, http://de.wikipedia.org/wiki/Friedrich_Wilhelm_Bessel
[13] nach Marc-Antoine Parseval, http://de.wikipedia.org/wiki/Marc-Antoine_Parseval

Beweis:

(i)⇒(ii): Falls $0 \neq x \perp x_i$ für alle $i \in I$, so ist $\{x_i\}_{i\in I} \cup \left\{\frac{1}{\|x\|} \cdot x\right\}$ ein Orthonormalsystem. $\lightning$

(ii)⇒(iii): $\gamma\colon \bigoplus_{i\in I} \mathcal{H}_i \to \mathcal{H}$ gegeben durch $(\lambda_i \cdot x_i)_I \mapsto \sum \lambda_i \cdot x_i$ ist eine wohldefinierte lineare Isometrie nach 7.18,7.19 und 7.21. Außerdem erhält γ das Skalarprodukt. $\gamma\big(\bigoplus_{i\in I} \mathcal{H}_i\big)$ ist vollständig,[14] also abgeschlossen in $\mathcal{H}$. Falls $\gamma\big(\bigoplus_{i\in I} \mathcal{H}_o\big) \neq \mathcal{H}$, so ist nach 7.15 $\gamma\big(\bigoplus_{i\in I} \mathcal{H}_i\big)^\perp \neq \{0\}$. $\lightning$ zu (ii).

(iii)⇒(iv): Für $x \in \mathcal{H}$ existieren $\lambda_i \in \mathbb{K}$, sodass $x = \gamma\big((\lambda_i \cdot x_i)_{i\in I}\big) = \sum_{i\in I} \lambda_i \cdot x_i$ gilt. Es gilt

$$\langle x_j\,,\,x\rangle = \left\langle x_j\,,\,\sum_{i\in I} \lambda_i \cdot x_i \right\rangle = \sum_{i\in I} \langle x_j\,,\,\lambda_i \cdot x_i\rangle = \sum_{i\in I} \lambda_i \cdot \delta_{ij} = \lambda_j$$

Damit folgt (iv).

(iv)⇒(v): Es gilt

$$\langle x\,,\,y\rangle = \left\langle \sum_{i\in I} \langle x_i\,,\,x\rangle x_i\,,\,\sum_{j\in I} \langle x_j\,,\,y\rangle x_j \right\rangle = \sum_{i\in I}\sum_{j\in I} \overline{\langle x_i\,,\,x\rangle} \langle x_j\,,\,y\rangle \langle x_i\,,\,x_j\rangle = \sum_{i\in I} \langle x\,,\,x_i\rangle \langle x_i\,,\,y\rangle$$

(v)⇒(vi): Klar.

(vi)⇒(i): Falls $x \perp x_i$ für alle $i \in I$, so gilt $\|x\|^2 = \sum_{i\in I} |\langle x_i\,,\,x\rangle|^2 = 0$. Also ist $x = 0$ und damit ist das Orthonormalsystem maximal. □

7.23. Bemerkung

(i) Jeder Hilbertraum besitzt eine Basis (Lemma von Zorn).

(ii) Wegen 7.22 (iii) ist ein Hilbertraum bis auf isometrischen Isomorphismus durch die Mächtigkeit seiner Basis eindeutig bestimmt.

(iii) Jeder separable Hilbertraum ist isometrisch isomorph zu $\mathbb{K}^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ oder zu $\ell^2(\mathbb{N})$. Dies folgt mit Aufgabe 2 von Blatt 12: Jeder separable Hilbertraum hat eine höchstens abzählbare Hilbertraumbasis.

7.24. Beispiele

(i) $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ bzw. $\{e_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ bilden Basen von $\ell^2(\mathbb{N})$ bzw. $\ell^2(\mathbb{Z})$, wobei $e_i(j) = \delta_{ij}$ ist.

(ii) $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $e_n(t) = \exp(2\pi i n t)$ ist, definiert eine Basis von $L^2([0,1])$.

7.25. Definition und Proposition Seien $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ Hilberträume und $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Dann existiert genau ein Operator $T^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$, sodass für alle $x \in \mathcal{H}_1$, $y \in \mathcal{H}_2$ gilt

$$\langle T^* y\,,\,x\rangle_{\mathcal{H}_1} = \langle y\,,\,Tx\rangle_{\mathcal{H}_2} \qquad \textbf{[\#]}$$

Die Abbildung ${}^*\colon \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) \to \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ ist konjugiert linear und isometrisch. Weiter gilt $T^{**} = T$. Ist $\mathcal{H}_3$ ein weiterer Hilbertraum und $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3)$, so gilt

$$(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$$

T^* heißt der zu T ***adjungierte Operator***.

[14] Das Bild eines vollständigen Raumes unter eine stetigen Abbildung $f\colon (X,d) \to (X'.d')$ mit $d(x,y) \leqslant d'\big(f(x), f(y)\big)$ ist vollständig.

Beweis: Sei $\kappa_i\colon \mathcal{H}_i \to \mathcal{H}_i^*$ wie in 7.11. Wir haben

$$\begin{aligned} &\langle T^*y\,,\,x\rangle_{\mathcal{H}_1} = \langle y\,,\,Tx\rangle_{\mathcal{H}_2} && \textbf{[\#]}\\ \iff& \kappa_1(T^*y)(x) = \kappa_2(y)(Tx) && \text{für } x\in\mathcal{H}_1, y\in\mathcal{H}_2\\ \iff& \kappa_1(T^*y) = \kappa_2(y)\circ T && \text{für } y\in\mathcal{H}_2\\ \iff& \kappa_1(T^*y) = T^{\mathrm{tr}}\circ\kappa_2(y) && \text{für } y\in\mathcal{H}_2\\ \iff& T^*y = \kappa_1^{-1}\circ T^{\mathrm{tr}}\circ\kappa_2(y) && \text{für } y\in\mathcal{H}_2 \end{aligned}$$

Also definieren wir $T^* := \kappa_1^{-1}\circ T^{\mathrm{tr}}\circ\kappa_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2,\mathcal{H}_1)$. Durch **[#]** ist T^* eindeutig bestimmt. κ_1^{-1} und κ_2 sind Isometrien; da außerdem $\|T^{\mathrm{tr}}\| = \|T\|$, gilt $\|T^*\| = \|T\|$ und somit ist $T\mapsto T^*$ isometrisch. κ_1^{-1} ist konjugiert linear, also auch $T\mapsto T^*$. Weiter gilt

$$(ST)^* = \kappa_1^{-1}(ST)^{\mathrm{tr}}\kappa_3 = \kappa_1^{-1}T^{\mathrm{tr}}S^{\mathrm{tr}}\kappa_3 = \kappa_1^{-1}T^{\mathrm{tr}}\kappa_2\kappa_2^{-1}S^{\mathrm{tr}}\kappa_3 = T^*S^*$$

Des Weiteren erfüllt $T^{**} = (T^*)^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$ für alle $x\in\mathcal{H}_1, y\in\mathcal{H}_2$ die Gleichung

$$\langle T^{**}x\,,\,y\rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle x\,,\,T^*y\rangle_{\mathcal{H}_1}$$

Ebenso gilt $\langle Tx\,,\,y\rangle_{\mathcal{H}_2} = \overline{\langle y\,,\,T_x\rangle}_{\mathcal{H}_2} = \overline{\langle T^*y\,,\,x\rangle}_{\mathcal{H}_1} = \langle x\,,\,T^*y\rangle_{\mathcal{H}_1}$ für alle $x\in\mathcal{H}_1$, $y\in\mathcal{H}_2$. Folglich muss $T^{**}x = Tx$ gelten. □

7.26. Proposition Für $T\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$ gilt:

$$\begin{aligned} \|T\| &= \inf\Big\{\lambda\in\mathbb{R}\,\Big|\,\big|\langle y\,,\,Tx\rangle_{\mathcal{H}_2}\big| \leqslant \lambda\cdot\|y\|\cdot\|x\|\;\forall x\in\mathcal{H}_1, y\in\mathcal{H}_2\Big\}\\ &= \sup\Big\{|\langle y\,,\,Tx\rangle|_{\mathcal{H}_2}\,\Big|\,x\in\overline{B}_{\mathcal{H}_1}(0,1), y\in\overline{B}_{\mathcal{H}_2}(0,1)\Big\} \end{aligned}$$

Beweis: Sei γ die rechte Seite der oberen Gleichung. Es gilt $\big|\langle y\,,\,Tx\rangle_{\mathcal{H}_2}\big| \leqslant \|T\|\cdot\|y\|\cdot\|x\|$ für $x\in\mathcal{H}_1$, $y\in\mathcal{H}_2$, also ist $\gamma\leqslant\|T\|$. Weiter gilt

$$\|Tx\|^2 = |\langle Tx\,,\,Tx\rangle| \leqslant \gamma\cdot\|Tx\|\cdot\|x\| \leqslant \gamma\cdot\|T\|\cdot\|x\|^2$$

also ist $\|Tx\|\leqslant\sqrt{\gamma}\cdot\sqrt{\|T\|}\cdot\|x\|$ für $x\in\mathcal{H}_1$ und es folgt $\|T\|\leqslant\sqrt{\gamma}\cdot\sqrt{\|T\|}$. Also gilt $\sqrt{\|T\|}\leqslant\sqrt{\gamma}$, woraus $\|T\|\leqslant\gamma$ folgt und somit insgesamt $\gamma = \|T\|$. Die zweite Gleichheit ist klar. □

7.27. Proposition Sei $\mathcal{H}$ ein $\mathbb{K}$-Hilbertraum, $T\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ und $\beta\geqslant 0$. Falls $|\langle x\,,\,Tx\rangle|\leqslant\beta\|x\|^2$ für alle $x\in\mathcal{H}$, so gilt für $x,y\in\mathcal{H}$

$$|\langle y\,,\,Tx\rangle + \langle Ty\,,\,x\rangle| \leqslant 2\beta\cdot\|x\|\cdot\|y\|$$

Falls $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ ist, gilt sogar

$$|\langle y\,,\,Tx\rangle| + |\langle Ty\,,\,x\rangle| \leqslant 2\beta\cdot\|x\|\cdot\|y\|$$

In diesem Fall gilt also $T = 0 \iff \langle x\,,\,Tx\rangle = 0$ für alle $x\in\mathcal{H}$.

Beweis: Für alle $x,y\in\mathcal{H}\setminus\{0\}$ gilt (für 0 ist die Ungleichung trivial)

$$\begin{aligned} 2\big|\langle y\,,\,Tx\rangle + \langle Ty\,,\,x\rangle\big| = \big|\langle x+y\,,\,T(x+y)\rangle - \langle x-y\,,\,T(x-y)\rangle\big| &\leqslant \beta\|x+y\|^2 + \beta\|x-y\|^2\\ &\leqslant 2\beta\Big(\|x\|^2+\|y\|^2\Big) \end{aligned}$$

Ersetze x durch $\left(\frac{\|y\|}{\|x\|}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot x$ und y durch $\left(\frac{\|x\|}{\|y\|}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot y$. Dann folgt

$$\cancel{2} \cdot |\langle y\,,\,Tx\rangle + \langle Ty\,,\,x\rangle| \leqslant \cancel{2} \cdot \beta \cdot \Big(\|x\| \cdot \|y\| + \|x\| \cdot \|y\|\Big) = \cancel{2} \cdot 2 \cdot \beta \cdot \|x\| \cdot \|y\| \qquad [*]$$

Damit ist die Aussage für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ gezeigt. Falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist, so finden wir $\rho, \sigma \in \mathbb{R}_+$, sodass

Das stimmt noch nicht so ganz. Man bräuchte noch $e^{-i\sigma}\langle x\,,\,Ty\rangle \in \mathbb{R}$ oder Ähnliches, um die Konjugation loszuwerden. Solche ρ, σ muss es aber nicht unbedingt geben …

$$\begin{aligned}
|\langle y\,,\,Tx\rangle| + |\langle Ty\,,\,x\rangle| &= \left|e^{i(\rho+\sigma)} \cdot \langle y\,,\,Tx\rangle + e^{i(\rho-\sigma)} \cdot \langle x\,,\,Ty\rangle\right| \\
&= \left|e^{i\rho} \cdot \big(\big\langle y\,,\,T(e^{i\sigma} \cdot x)\big\rangle + \big\langle e^{i\sigma} \cdot x\,,\,Ty\big\rangle\big)\right| \\
&= \left|\big\langle y\,,\,T(e^{i\sigma} \cdot x)\big\rangle + \overline{\langle Ty\,,\,e^{i\sigma} \cdot x\rangle}\right| \\
\ldots &\overset{[*]}{\leqslant} 2 \cdot \beta \cdot \|x\| \cdot \|y\|
\end{aligned}$$

□

7.28. Definition $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ heißt ***selbstadjungiert***, falls $T = T^*$. Wir setzen

$$\mathcal{L}(\mathcal{H})_{\text{s.a.}} := \{T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \,|\, T \text{ selbstadjungiert}\}$$

7.29. Bemerkung Für T selbstadjungiert gilt

$$\|T\| = \inf\left\{\lambda \in \mathbb{R} \,\middle|\, |\langle x\,,\,Tx\rangle| \leqslant \lambda\|x\|^2 \text{ für alle } x \in \mathcal{H}\right\}$$

BEWEIS: Sei β das Infimum auf der rechten Seite. Dann gilt für $x, y \in \mathcal{H}$

$$2 \cdot |\langle y\,,\,Tx\rangle| = |\langle y\,,\,Tx\rangle + \langle Ty\,,\,x\rangle| \overset{7.27}{\leqslant} 2 \cdot \beta \cdot \|x\| \cdot \|y\|$$

Nach 7.26 folgt nun $\|T\| \leqslant \beta \leqslant \|T\|$. □

7.30. Proposition Falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, so gilt

$$T \text{ selbstadjungiert} \iff \langle x\,,\,Tx\rangle \in \mathbb{R} \text{ für alle } x \in \mathcal{H}$$

BEWEIS: Die Hinrichtung folgt aus $\langle x\,,\,Tx\rangle = \langle Tx\,,\,x\rangle = \overline{\langle x\,,\,Tx\rangle}$ für $x \in \mathcal{H}$. Für die Rückrichtung betrachte $\langle x\,,\,Tx\rangle = \langle Tx\,,\,x\rangle = \langle x\,,\,T^*x\rangle$. Dann ist $\langle x\,,\,(T - T^*)x\rangle = 0$ für $x \in \mathcal{H}$. Es folgt dann $T - T^* = 0$. □

7.31. Definition und Proposition Seien $R, S, T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ selbstadjungiert. Wir schreiben

- $T \geqslant 0$, falls $\langle x\,,\,Tx\rangle \geqslant 0$ für alle $x \in \mathcal{H}$ gilt.
- $T \geqslant S$, falls $T - S \geqslant 0$

„$\geqslant$“ ist eine partielle Ordnung auf $\mathcal{L}(\mathcal{H})_{\text{s.a.}}$. Das heißt

$$T \geqslant T \qquad T \geqslant S, S \geqslant T \Longrightarrow S = T \qquad T \geqslant S, S \geqslant R \Longrightarrow T \geqslant R$$

folgt mit 7.29

Es gilt $-\|T\| \cdot \mathrm{id}_{\mathcal{H}} \leqslant T \leqslant \|T\| \cdot \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$. Falls $T \geqslant 0$ ist, so gilt

$$|\langle y\,,\,Tx\rangle|^2 \leqslant \langle x\,,\,Tx\rangle \cdot \langle y\,,\,Ty\rangle \qquad [*]$$

insbesondere gilt $\langle x\,,\,Tx\rangle = 0 \iff Tx = 0$

Beweis: *Übung, siehe Anhang A.4.* □

7.32. Satz Sei $(T_j)_{j\in I} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})_{\text{s.a.}}$ ein monoton wachsendes und beschränktes Netz selbstadjungierter Operatoren. Dann konvergiert $(T_j)_{j\in I}$ punktweise gegen ein $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})_{\text{s.a.}}$, das heißt T_jx konvergiert gegen Tx in Norm für jedes $x \in \mathcal{H}$.
Wir schreiben auch $T_j \xrightarrow{\text{s.o.}} T$, d.h. $(T_j)_{j\in I}$ konvergiert gegen T in der ***starken Operatortopologie***.

Beweis: Nach Polarisierung (vergleiche Bemerkung 7.8) gilt für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

$$\langle x\,,\,T_jy\rangle = \frac{1}{4}\Big(\big\langle x+y\,,\,T_j(x+y)\big\rangle - \big\langle x-y\,,\,T_j(x-y)\big\rangle + i\big\langle ix+y\,,\,T_j(ix+y)\big\rangle - i\big\langle ix-y\,,\,T_j(ix-y)\big\rangle\Big)$$

Die rechte Seite konvergiert (warum?), also auch die linke Seite. Damit folgt: Für jedes $x \in \mathcal{H}$ konvergiert $\langle x\,,\,T_j(\cdot)\rangle\colon \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ gegen ein $\varphi_x\colon \mathcal{H} \to \mathbb{C}$. Aber $\varphi_x \in \mathcal{H}^*$, denn es gilt

$$\|\varphi_x\|_{\mathcal{H}^*} \leqslant \limsup_j \|T_j\| \cdot \|x\| < \infty.$$

Die Abbildung $x \mapsto \kappa^{-1}(\varphi_x)$ ist linear (warum?). Definiere nun $T\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ durch $T(x) := \kappa^{-1}(\varphi_x)$. Es gilt $\|T(x)\| = \|\varphi_x\|$, also $\|T\| \leqslant \limsup_j \|T_j\| \leqslant \infty$. Damit ist $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Außerdem gilt für $x, y \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned}\langle Tx\,,\,y\rangle = \kappa(Tx)(y) = \varphi_x(y) = \lim_j \big\langle x\,,\,T_jy\big\rangle = \lim_j \langle T_jx\,,\,y\rangle = \overline{\lim_j \langle y\,,\,T_jx\rangle} = \overline{\varphi_y(x)} = \overline{\langle Ty\,,\,x\rangle} \\ = \langle x\,,\,Ty\rangle\end{aligned}$$

Also ist T auch selbstadjungiert. Es ist $\lim_j \langle x\,,\,T_jy\rangle = \langle x\,,\,Ty\rangle$ für $x, y \in \mathcal{H}$, das heißt $T_j \xrightarrow{\text{w.o.}} T$ ($T_j \to T$ in der schwachen Operatortopologie). Für $j \geqslant j'$ gilt $T_j - T_{j'} \geqslant 0$, also gilt nach 7.31 für $x \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned}\Big|\Big\langle (T_j - T_{j'})(x)\,,\,(T_j - T_{j'})(x)\Big\rangle\Big|^2 &\overset{[*]}{\leqslant} \Big\langle x\,,\,(T_j - T_{j'})(x)\Big\rangle \cdot \Big|\Big\langle (T_j - T_{j'})(x)\,,\,(T_j - T_{j'})^2(x)\Big\rangle\Big| \\ &\leqslant \Big\langle x\,,\,(T_j - T_{j'})(x)\Big\rangle \cdot \Big(2 \cdot \limsup_j \|T_j\|\Big)^3 \cdot \|x\|^2 < \varepsilon\end{aligned}$$

falls j' groß genug ist. Also $\|T_j(x) - T_{j'}(x)\| < \varepsilon$ falls $j \geqslant j'$ groß. Damit folgt dann $T_j(x) \to T(x)$ in Norm (warum?). □

8. Kompakte Operatoren und ein Spektralsatz

8.1. Definition Sei X ein $\mathbb{K}$-Banachraum und $T \in \mathcal{L}(X)$. Wir definieren das ***Spektrum*** von T als

$$\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{K} \,|\, T - \lambda \cdot \mathrm{id}_X \text{ ist nicht invertierbar}\} \subset \mathbb{K}$$

auch $\mathrm{spec}(T)$

Die ***Resolventenmenge*** ist $\mathrm{res}(T) := \rho(T) := \mathbb{K} \setminus \sigma(T)$. Wir schreiben $\mathrm{R}(T,\lambda) := (T - \lambda \cdot \mathrm{id}_X)^{-1}$ für die ***Resolvente*** von T in $\lambda \in \rho(T)$.

8.2. Bemerkung

(i) Jeder Eigenwert von T ist ein Spektralwert.

(ii) Für X endlichdimensional gilt auch die Umkehrung, für beliebige X jedoch nicht: Sei $X = \ell^2(\mathbb{N})$, dann ist $S \in \mathcal{L}\big(\ell^2(\mathbb{N})\big)$ gegeben durch $S(x_0, x_i, \ldots) := (0, x_0, x_1, \ldots)$ (***unilateraler Shift***) linear, stetig und sogar isometrisch, aber *nicht* surjektiv. Dann ist $0 \in \sigma(S)$, aber 0 ist kein Eigenwert, da S injektiv ist.

8.3. Proposition Seien X, Y Banachräume und $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ bijektiv (also injektiv). Falls für $S \in \mathcal{L}(X,Y)$ gilt

$$\|T - S\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \left\|T^{-1}\right\|^{-1}_{\mathcal{L}(Y,X)},$$

so ist auch S bijektiv.

Beweis: Es gilt $S = T\big(\mathrm{id}_X - T^{-1}(T-S)\big)$. Setze $C := \left\|T^{-1}\right\| \cdot \|T - S\| < 1$. Für $k \leqslant l$ gilt dann

Ausführlicher Beweis im Anhang A.5

$$\left\|\sum_{n=k}^{l} \big(T^{-1}(T-S)\big)^n\right\| \leqslant \sum_{n=k}^{l} \left\|\big(T^{-1}(T-S)\big)^n\right\| \leqslant \sum_{n=k}^{l} \left\|T^{-1}\right\|^n \cdot \|T-S\|^n = \sum_{n=k}^{l} C^n$$

also ist $\sum_{n=0}^{\infty} \big(T^{-1}(T-S)\big)^n$ konvergent in $\mathcal{L}(X,X)$. Weiter ist $\big(\sum_{n=0}^{\infty}\big(T^{-1}(T-S)\big)^n\big)T^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$ das Inverse von S (warum?). □

8.4. Corollar Für $T \in \mathcal{L}(X)$ ist die Resolventenmenge offen in $\mathbb{K}$.

8.5. Satz Sei X ein Banachraum und $T \in \mathcal{L}(X)$. Dann ist die ***Resolventenabbildung*** $R(T,\cdot)\colon \rho(T) \to \mathcal{L}(X)$, $\lambda \mapsto R(T,\lambda)$ lokal durch eine Potenzreihe mit Koeffizienten in $\mathcal{L}(X)$ gegeben. Mit anderen Worten $R(T,\cdot)$ ist lokal analytisch.

Beweis: Sei $\lambda_0 \in \rho(T)$. Setze $S_0 := T - \lambda_0 \cdot \mathrm{id}_X$ und $S_\lambda := T - \lambda \cdot \mathrm{id}_X$ für $\lambda \in \rho(T)$. Sei $\lambda \in \rho(T)$ mit

$$\|S_0 - S_\lambda\| = |\lambda - \lambda_0| < \left\|S_0^{-1}\right\|^{-1}$$

Nach Proposition 8.3 ist S_λ invertierbar und es gilt

$$R(T,\lambda) = S_\lambda^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \big(S_0^{-1}(S_0 - S_\lambda)\big)^n S_0^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n \cdot S_0^{-(n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n R(T,\lambda_0)^{n+1}$$

Durch Abschätzung mit der geometrischen Reihe folgt die Beschränktheit. □

8.6. Satz Sei X ein $\mathbb{C}$-Banachraum und $T \in \mathcal{L}(X)$. Dann ist $\sigma(T)$ nichtleer, kompakt und es gilt

$$\sigma(T) \subset \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \leqslant \|T\|\}$$

Beweis: Wir wissen bereits, dass $\sigma(T)$ abgeschlossen in $\mathbb{C}$ ist. Für $\lambda \neq 0$ ist $S_\lambda := -\lambda \cdot \mathrm{id}_X$ invertierbar und es gilt $\|S_\lambda^{-1}\|^{-1} = |\lambda|$. Falls $\|S_\lambda - (T - \lambda \cdot \mathrm{id}_X)\| = \|T\| < |\lambda| = \|S_\lambda^{-1}\|^{-1}$, so ist nach 8.3 $T - \lambda \cdot \mathrm{id}_X$ invertierbar, also ist $\lambda \notin \sigma(T)$. Damit folgt $\sigma(T) \subset \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \leqslant \|T\|\}$ und die Kompaktheit von $\sigma(T)$.

Angenommen $\sigma(T) = \emptyset$. $R(T, \lambda)$ ist stetig auf $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \leqslant 2 \cdot \|T\|\}$, also beschränkt. Weiter gilt für $|\lambda| \geqslant 2 \cdot \|T\|$

$$R(T, \lambda) = (T - \lambda \cdot \mathrm{id}_X)^{-1} = -\lambda^{-1} \cdot \left(-\frac{T}{\lambda} + \mathrm{id}_X\right)^{-1} = -\lambda^{-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{T}{\lambda}\right)^n$$

also $\|R(T, \lambda)\| \leqslant |\lambda|^{-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left\|\frac{T}{\lambda}\right\|^n \leqslant \frac{1}{2\|T\|} \cdot 2 = \frac{1}{\|T\|}$. Damit ist $R(T, \lambda)$ auf $\mathbb{C}$ beschränkt. Für $x \in X$ und $\varphi \in X^*$ gilt:

$$\lambda \mapsto \varphi\big(R(T, \lambda)(x)\big) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n \underbrace{\varphi\big(R(T, \lambda_0)^{n+1}(x)\big)}_{\in \mathbb{C}}$$

ist lokal analytisch (auf ganz $\mathbb{C}$), also ganz und beschränkt. Nach dem Satz von Liouville[15] folgt

$$\begin{aligned} & \varphi\big(R(T, \lambda)(x)\big) \equiv \varphi\big(R(T, 0)(x)\big) \\ \Longrightarrow \quad & R(T, \lambda)(x) \equiv R(T, 0)(x) \quad , x \in X \\ \Longrightarrow \quad & (T - \lambda \cdot \mathrm{id}_X)^{-1} = R(T, \lambda) \equiv R(T, 0) = T^{-1} \lightning \end{aligned}$$

□

8.7. Definition und Proposition Sei X ein Banachraum. $T \in \mathcal{L}(X)$ heißt ***kompakt***, falls eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

(i) Das Bild jeder beschränkten Menge M unter T ist relativ kompakt, d.h. $\overline{T(M)} \subset X$ kompakt.

(ii) $\overline{T(B_X(0,1))}$ ist kompakt.

(iii) Ist $(x_n)_\mathbb{N} \subset X$ beschränkt, so enthält $(T(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge.

Wir schreiben $\mathcal{K}(X)$ für die Menge der kompakten Operatoren auf X.

Beweis:

(i)⇔(ii): Klar, da T linear ist.

(i)⇔(iii): Für metrische Räume ist kompakt äquivalent zu folgenkompakt. □

[15] f ganz $\rightsquigarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n$ mit $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \overset{\text{Cauchy}}{=} \frac{1}{2\pi i} \cdot \oint_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}} \mathrm{d}\zeta$, wobei C_r der Kreis mit Radius r ist. Dann folgt $|f(z)| \leqslant M$, also $|a_k| \leqslant \frac{1}{r^k}$, $r > 0$, $k \geqslant 1 \Rightarrow a_k = 0, k \geqslant 1$.
Siehe auch https://de.wikipedia.org/wiki/Satz_von_Liouville_(Funktionentheorie)

8.8. Bemerkung

(i) Sei X ein Banachraum. Dann gilt *(Übung!)*

$$\overline{B}_X(0,1) \text{ ist kompakt} \iff \mathrm{id}_X \text{ ist kompakt} \iff X \text{ ist endlichdimensional}$$

Je nach Vorgehen, hat man in Aufgabe 1 von Blatt 8 schon $\overline{B}_r(0) \subseteq X$ kompakt $\iff X$ endlichdimensional gezeigt

(ii) Entsprechend kann man $\mathcal{K}(X,Y)$ definieren.

8.9. Proposition Sei X ein Banachraum. Dann ist $\mathcal{K}(X) \lhd \mathcal{L}(X)$ ein abgeschlossenes Ideal.

Beweis:

$\mathcal{K}(X) \subset \mathcal{L}(X)$ **ist ein linearer Unterraum:** $T, T' \in \mathcal{K}(X)$, $\alpha \in \mathbb{K}$. $\alpha \cdot T \in \mathcal{K}(X)$ ist klar. Wir müssen nur $T + T' \in \mathcal{K}(X)$ zeigen: Sei $(x_n)_\mathbb{N} \subset X$ beschränkt. Da T kompakt ist, existiert eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, sodass $(Tx_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Da T' kompakt ist, gibt es wiederum eine Teilfolge $(x_{n_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}}$, sodass $(Tx_{n_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Dann muss auch $\big((T+T')(x_{n_{k_l}})\big)_{l\in\mathbb{N}}$ konvergieren.

$\mathcal{K}(X)$ **ist Ideal:** Sei $T \in \mathcal{K}(X)$, $S \in \mathcal{L}(X)$. Dann gilt auch $TS, ST \in \mathcal{K}(X)$, wie man sich leicht überlegt. (Stetige Abbildungen bilden Kompakta auf Kompakta ab)

$\mathcal{K}(X)$ **ist abgeschlossen:** Zu $T \in \overline{\mathcal{K}(X)}$ existiert eine Folge $(T_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{K}(X)$ mit $\|T - T_k\| \to 0$. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ beschränkt. Wähle eine Teilfolge $(x_n^{(0)})_{n\in\mathbb{N}}$, sodass $(T_0 x_n^{(0)})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und in einem $\frac{1}{1}$-Ball liegt. Wähle nun wiederum eine Teilfolge $(x_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}$ von $(x_n^{(0)})_{n\in\mathbb{N}}$ mit: $(T_1 x_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und liegt in einem $\frac{1}{2}$-Ball. Induktiv folgt, dass für $(x_n^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ gilt: $(x_n^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ ist Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(Tx_n^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. □

8.10. Satz (Spektralsatz) Sei $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ ein selbstadjungierter, kompakter Operator auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$. Dann ist T diagonalisierbar. Genauer gilt:

(i) $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$ ist abzählbar und der einzige mögliche Häufungspunkt ist 0.

(ii) Jedes $\lambda \in \sigma(T)$ ist ein Eigenwert. Die Eigenräume zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.

Letzteres gilt allgemein für selbstadjungierte Operatoren

(iii) Seien $\tilde{\lambda}_0, \tilde{\lambda}_1, \ldots$ die unterschiedlichen Spektralwerte (d.h. Eigenwerte *ohne* Vielfachheiten) und $\tilde{X}_0, \tilde{X}_1, \ldots$ die zugehörigen Eigenräume. Dann ist $\tilde{X}_i$ für jedes $\tilde{\lambda}_i \neq 0$ endlichdimensional und es gilt $\mathcal{H} = \bigoplus_i \tilde{X}_i$.

(iv) Seien $\lambda_0, \lambda_1, \ldots$ die nichtverschwindenden Eigenwerte, gezählt *mit* Vielfachheiten. Dann existiert ein Orthonormalsystem $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ von zugehörigen Eigenvektoren und für jedes solche Orthonormalsystem gilt für $x \in \mathcal{H}$

$$Tx = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i \cdot \langle e_i \, , \, x \rangle \cdot e_i$$

Falls $T \geqslant 0$ ist, kann man die λ_i absteigend wählen und es gilt $\lambda_i \to 0$, falls es unendlich viele $\lambda_i \neq 0$ gibt.

Beweis (für $T \geqslant 0$): Für $x \in \mathcal{H}$ setze $\mu(x) := \frac{\langle x\,,\,Tx\rangle}{\langle x\,,\,x\rangle} \geqslant 0$ und

$$\overline{\mu} := \sup_{x\in\mathcal{H}} \mu(x) = \sup_{x\in\overline{B}(0,1)} \langle x\,,\,Tx\rangle \leqslant \|T\|$$

Wir nehmen $\overline{\mu} > 0$ an, denn andernfalls ist $T = 0$ nach Bemerkung 7.29. Wähle $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ mit $\|x_k\| = 1$ und $\mu(x_k) = \langle x_k\,,\,Tx_k\rangle \to \overline{\mu}$. Da T kompakt ist, dürfen wir (eventuell nach Übergang zu einer Teilfolge) annehmen, dass $Tx_k \to \overline{y}$ für ein $\overline{y} \in \mathcal{H}$. Nach 5.10 ist $\overline{B}_{\mathcal{H}^*}(0,1)$ w^*-kompakt, also gilt (wieder eventuell nach Übergang zu einer Teilfolge)

$$\kappa(x_k) \xrightarrow{\mathrm{w}^*} \overline{\varphi} \in \mathcal{H}^*$$

Setze nun $\overline{x} := \kappa^{-1}(\overline{\varphi})$. Für jedes $x \in \mathcal{H}$ gilt $\langle x_k\,,\,Tx\rangle = \kappa(x_k)(Tx) \xrightarrow{k\to\infty} \overline{\varphi}(Tx) = \langle \overline{x}\,,\,Tx\rangle$. Also insbesondere

$$0 = \lim_{k\to\infty} \langle x_k - \overline{x}\,,\,Tx\rangle = \lim_{k\to\infty} \langle Tx_k - T\overline{x}\,,\,x\rangle = \left\langle \lim_{k\to\infty} Tx_k - T\overline{x}\,,\,x\right\rangle = \langle \overline{y} - T\overline{x}\,,\,x\rangle$$

Da $x \in \mathcal{H}$ beliebig war, folgt $\overline{y} = T\overline{x}$. Es gilt $\|\overline{x}\| = 1$ und[16]

$$\overline{\mu} = \lim_{k\to\infty} \langle x_k\,,\,Tx_k\rangle = \lim_{k\to\infty} \langle x_k\,,\,\overline{y}\rangle = \langle \overline{x}\,,\,\overline{y}\rangle = \langle \overline{x}\,,\,T\overline{x}\rangle = \mu(\overline{x})$$

Das heißt $\overline{\mu}$ ist das Maximum von $\mu\colon \mathcal{H} \to \mathbb{R}$. Für $z \in \mathcal{H}$ definiere $f_z\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f_z(t) := \mu(\overline{x} + t\cdot z)$. Dann ist f_z in $t = 0$ differenzierbar und es gilt

$$0 = f_z'(0) = \frac{2\cdot\langle z\,,\,T\overline{x}\rangle\cdot\|\overline{x}\|^2 - 2\cdot\langle \overline{x}\,,\,T\overline{x}\rangle\cdot\langle z\,,\,\overline{x}\rangle}{\|\overline{x}\|^4}$$

Also ist $\langle z\,,\,T\overline{x} - \overline{\mu}\cdot\overline{x}\rangle = 0$ für alle $z \in \mathcal{H}$. Es folgt $T\overline{x} = \overline{\mu}\cdot\overline{x}$. Setze nun $\lambda_0 := \overline{\mu}$, $e_0 := \overline{x}$ und definiere $\mathcal{H}_1 := \{e_0\}^\perp$. Dann ist $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}$ ein Untervektorraum. Für $x \in \mathcal{H}_1$ gilt $\langle e_0\,,\,Tx\rangle = \langle Te_0\,,\,x\rangle = \lambda_0\cdot\langle e_0\,,\,x\rangle = 0$. Also ist $Tx \in \mathcal{H}_1$. Wir können also

$$T_1 := T\big|_{\mathcal{H}_1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$$

definieren. Tatsächlich gilt $0 \leqslant T_1 = T_1^* \in \mathcal{K}(\mathcal{H}_1)$. Wir können also die gleiche Konstruktion für T_1 durchführen und erhalten induktiv Eigenwerte $\lambda_0 \geqslant \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots > 0$ zu normierten Eigenvektoren $e_0, e_1, e_2, \ldots$. Die Folge ist endlich, falls ein $\lambda_i = 0$ ist oder $\dim\mathcal{H} < \infty$ gilt. Die Eigenvektoren sind paarweise orthogonal und für jedes $X_k := \operatorname{span}\{e_0, \ldots, e_k\}$ und $x \in X_k^\perp$ gilt $\mu(x) \leqslant \lambda_k$.

Für $\tilde{\mathcal{H}} := \overline{\bigcup_{k=0}^\infty X_k}$ und $x \in \tilde{\mathcal{H}}^\perp$ gilt $\mu(x) \leqslant \lambda_k$, $k \in \mathbb{N}$, also $\mu(x) = 0$. Damit folgt $\langle x\,,\,Tx\rangle = 0$ und wegen $T|_{\tilde{\mathcal{H}}^\perp} \in \mathcal{K}(\tilde{\mathcal{H}}^\perp)$ selbstadjungiert gilt nach Bemerkung 7.29 $T|_{\tilde{\mathcal{H}}^\perp} = 0$, das heißt $\tilde{\mathcal{H}}^\perp \subset \ker T$. Wir zeigen nun, dass die e_k eine Orthonormalbasis von $\tilde{\mathcal{H}}$ bilden: Für $x \in \mathcal{H}$ existieren $\tilde{x} \in \tilde{\mathcal{H}}$ und $\tilde{x}^\perp \in \tilde{\mathcal{H}}^\perp$ mit $x = \tilde{x} + \tilde{x}^\perp$. Es gilt dann

$$Tx = T\tilde{x} + \underbrace{T(\tilde{x}^\perp)}_{=0} = T\tilde{x} = T\left(\sum_{k=0}^\infty \langle e_k\,,\,\tilde{x}\rangle\cdot e_k\right) = \sum_{k=0}^\infty \langle e_k\,,\,x\rangle\cdot Te_k = \sum_{k=0}^\infty \lambda_k\cdot\langle e_k\,,\,x\rangle\cdot e_k$$

Also gilt (iv). Damit folgt auch (ii) (Warum?). $\sigma(T)$ ist abzählbar nach (iv) und (ii). Da T kompakt ist, existiert eine konvergente Teilfolge $(Te_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$ von $(Te_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Es gilt

$$0 = \lim_{l,m\to\infty} \|Te_{k_l} - Te_{k_m}\| = \lim_{l,m\to\infty} \|\lambda_{k_l}\cdot e_{k_l} - \lambda_{k_m} e_{k_m}\| = \lim_{l,m\to\infty} \sqrt{\lambda_{k_l}^2 + \lambda_{k_m}^2}$$

Damit folgt $\lambda_{k_l} \xrightarrow{l\to\infty} 0$. Damit muss wegen der absteigenden Folge auch $\lambda_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$ gelten. Die verbleibende Aussage (iii) folgt aus (i). □

[16] „teilweiser Limes“ mit: $|\langle x_k\,,\,Tx_k\rangle - \langle x_k\,,\,\overline{y}\rangle| = |\langle x_k\,,\,Tx_k - \overline{y}\rangle| \leqslant \|x_k\|\cdot\|Tx_k - \overline{y}\| \to 0$

8.11. Corollar

Kompakte Operatoren lassen sich also gut approximieren

(i) $\mathcal{K}(\mathcal{H}) = \overline{\mathcal{F}(\mathcal{H})}^{\|\cdot\|}$, wobei $\mathcal{F}(\mathcal{H}) := \{T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \mid T(\mathcal{H})$ endlichdimensional$\}$.

(ii) $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ ist selbstadjungiert, das heißt $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ genau dann, wenn $T^* \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$.

Beweis: *Übung! (Blatt 14)* □

9. Fredholm-Operatoren. Ein Index

9.1. Definition Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Ein Operator $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ heißt ***Fredholm-Operator***[17], falls gilt:

(i) $\ker T$ ist endlichdimensional.

(ii) $\operatorname{Im} T \subset \mathcal{H}$ ist abgeschlossen.

(iii) $\mathcal{H}/\operatorname{Im} T$ ist endlichdimensional (endliche Kodimension).

In diesem Fall definieren wir den ***Fredholm-Index*** von T als

$$\operatorname{ind}(T) := \dim(\ker T) - \dim(\mathcal{H}/\operatorname{Im} T) \in \mathbb{Z}$$

Wir schreiben $\operatorname{Fred}(\mathcal{H}) := \{T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \,|\, T \text{ ist Fredholm}\}$ für die Menge der Fredholm-Operatoren auf $\mathcal{H}$.

9.2. Satz (Fredholm-Riesz) Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $S \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Dann ist $T := \operatorname{id}_{\mathcal{H}} - S$ Fredholm.

Beweis:

(i) $\ker T \subset \mathcal{H}$ ist abgeschlossen, also ein Unterhilbertraum. Sei $P := \operatorname{proj}_{\ker T}$ die orthogonale Projektion auf $\ker T$, das heißt für $\mathcal{H} \ni x = x_0 + x_1$ mit $x_0 \in \ker T$ und $x_1 \in (\ker T)^\perp$ ist $P(x) = x_0$. Es ist $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ (warum?). Dann ist

$\mathcal{K}(\mathcal{H})$ ist Ideal

$$P = \operatorname{id}_{\mathcal{H}} \circ P \overset{T \circ P = 0}{=} S \circ P \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$$

Also ist $P|_{\ker T} = \operatorname{id}_{\ker T} \in \mathcal{K}(\ker T)$. Damit ist $\ker T$ endlichdimensional nach 8.8.

(ii) Es ist $T|_{(\ker T)^\perp} \colon (\ker T)^\perp \to \operatorname{Im} T$ ist bijektiv und stetig. Zu zeigen ist, dass $\left(T|_{(\ker T)^\perp}\right)^{-1}$ stetig ist, denn dann ist $\operatorname{Im} T$ vollständig, also auch abgeschlossen.

Falls $\left(T|_{(\ker T)^\perp}\right)^{-1}$ nicht stetig ist, so existiert eine Folge $(x_n)_n \subset (\ker T)^\perp$ mit $\|x_n\| = 1$ und $Tx_n \to 0$. Nach Übergang zu einer Teilfolge dürfen wir $Sx_n \to \overline{y}$ für ein $\overline{y} \in \mathcal{H}$ annehmen. Da $Tx_n \to 0$, folgt $x_n = \operatorname{id}_x x_n \to \overline{y}$. Aber dann ist auch $\overline{y} \in (\ker T)^\perp$, $\|\overline{y}\| = 1$ und $\overline{y} \in \ker T$. $\lightning$

(iii) Es ist

$$\begin{aligned}(\mathcal{H}/\operatorname{Im} T)^* \cong \left((\operatorname{Im} T)^\perp\right)^* = \kappa\left((\operatorname{Im} T)^\perp\right) &= \{\langle y\,,\,\cdot\rangle \,|\, \langle y\,,\,Tx\rangle = 0 \text{ für alle } x \in \mathcal{H}\} \\ &= \{\langle y\,,\,\cdot\rangle \,|\, \langle T^*y\,,\,x\rangle = 0 \text{ für alle } x \in \mathcal{H}\} \\ &= \{\langle y\,,\,\cdot\rangle \,|\, y \in \ker T^*\} \\ &= \kappa(\ker T^*) \cong \ker T^* = \ker(\operatorname{id}_{\mathcal{H}} - S^*)\end{aligned}$$

Dies ist endlichdimensional nach (i), da $S^* \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ nach 8.11. □

9.3. Satz $\operatorname{Fred}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ist offen bezüglich der Normtopologie. Die Abbildung $\operatorname{ind}\colon \operatorname{Fred}(\mathcal{H}) \to \mathbb{Z}$ ist stetig.

[17] nach Erik Ivar Fredholm, siehe https://de.wikipedia.org/wiki/Erik_Ivar_Fredholm

Beweis: Sei $T \in \operatorname{Fred}(\mathcal{H})$. Wir haben $\ker T \oplus (\ker T)^\perp = \mathcal{H} = \operatorname{Im} T \oplus (\operatorname{Im} T)^\perp$, wobei $\operatorname{Im} T$ abgeschlossen ist.

(i) Für $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ definiere $\tilde{S}\colon \tilde{H} := (\ker T)^\perp \oplus (\operatorname{Im} T)^\perp \to \mathcal{H}$ durch $\tilde{S}(v, w) := S(v) + w$. Dann ist $\tilde{S}$ stetig und die Abbildung

$$\tilde{\ }\colon \mathcal{L}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{L}(\tilde{\mathcal{H}}, \mathcal{H}), \quad S \longmapsto \tilde{S}$$

stetig. $\tilde{T}$ ist bijektiv und stetig. Nach dem Satz von Inversen Operator ist $\tilde{T}$ also ein Homöomorphismus. Mit 8.3 folgt, dass $\tilde{T}$ eine Umgebung von Homöomorphismen $\tilde{U} \subset \mathcal{L}(\tilde{\mathcal{H}}, \mathcal{H})$ besitzt. Also besitzt T eine Umgebung $U \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$, sodass für alle $S \in U$ der Operator $\tilde{S}$ ein Homöomorphismus ist. Für jedes $S \in U$ gilt:

1) $S\big((\ker T)^\perp\big) \subset \mathcal{H}$ ist abgeschlossen, denn $\tilde{S}\big((\ker T)^\perp\big)$ ist das Urbild von $\tilde{S}^{-1}$, $(\ker T)^\perp$ ist abgeschlossen und es gilt $S\big((\ker T)^\perp\big) = \tilde{S}\big((\ker T)^\perp\big)$.

2) Es gilt $\dim \mathcal{H}/S\big((\ker T)^\perp\big) = \dim \mathcal{H}/\tilde{S}\big((\ker T)^\perp\big) = \dim \tilde{\mathcal{H}}/(\ker T)^\perp = \dim(\operatorname{Im} T)^\perp$.

3) Es gilt $(\ker S) \cap (\ker T)^\perp = \{0\}$, denn es gilt $S|_{(\ker T)^\perp} = \tilde{S}|_{(\ker T)^\perp}$, aber $\tilde{S}$ ist injektiv, da $S \in U$. Insbesondere ist $\dim(\ker S) \leqslant \dim(\ker T) < \infty$.

4) $\operatorname{Im} S \subseteq \mathcal{H}$ ist abgeschlossen: $S\big((\ker T)^\perp\big) \subset S(\mathcal{H}) = \operatorname{Im} S$. Nach 1) ist $S\big((\ker T)^\perp\big) \subset \mathcal{H}$ abgeschlossen. Es gilt

$$\dim S(\mathcal{H})/S\big((\ker T)^\perp\big) \leqslant \dim \mathcal{H}/S\big((\ker T)^\perp\big) \overset{2)}{=} \dim(\operatorname{Im} T)^\perp < \infty$$

Also ist $S(\mathcal{H}) = S\big((\ker T)^\perp\big) + V$ für ein $V \subset \mathcal{H}$ endlichdimensional und damit ist $S(\mathcal{H}) \subset \mathcal{H}$ abgeschlossen.

5) Es ist $\dim \mathcal{H}/S(\mathcal{H}) \leqslant \dim \mathcal{H}/S\big((\ker T)^\perp\big) < \infty$.

Aus 3), 4) und 5) folgt nun, dass $S \in U$ ein Fredholm-Operator ist.

(ii) Sei $S \in U$. Dann ist $(\ker S) \cap (\ker T)^\perp \overset{3)}{=} \{0\}$, also $\ker S \times (\ker T)^\perp \times Z \cong \mathcal{H}$ als Vektorräume für ein $Z \subset \mathcal{H}$ endlichdimensional. Dann gilt

$$\dim(\ker S) + \dim Z = \dim(\ker T)$$

Wir wissen bereits, dass $\dim\big(\mathcal{H}/S\big((\ker T)^\perp\big)\big) = \dim(\operatorname{Im} T)^\perp = \dim(\mathcal{H}/\operatorname{Im} T)$ gilt. Es ist $\operatorname{Im} S \cong S\big((\ker T)^\perp\big) \times S(Z)$, also

$$\dim(\mathcal{H}/\operatorname{Im} S) = \dim\big(\mathcal{H}/S\big((\ker T)^\perp\big)\big) - \dim(S(Z)) = \underbrace{\dim(\mathcal{H}/\operatorname{Im} T) - \dim(\ker T)}_{=\operatorname{ind} T} + \dim(\ker S)$$

Also ist $\operatorname{ind} S = \operatorname{ind} T$ und damit der Fredholm-Index stetig. □

9.4. Corollar Sei $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Dann gilt $\operatorname{ind}(\operatorname{id}_{\mathcal{H}} - K) = 0$.

Beweis: Die Abbildung $t \mapsto \operatorname{id}_{\mathcal{H}} - t \cdot K$ ist stetig und wohldefiniert, da K ein kompakter Operator ist. Also ist $\operatorname{ind}(\operatorname{id}_{\mathcal{H}} - t \cdot K) = \operatorname{ind}(\operatorname{id}_{\mathcal{H}}) = 0$. □

9.5. Beispiele

(i) Sei $S \in \mathcal{L}\big(\ell^2(\mathbb{N})\big)$ der unilaterale Shift, das heißt $S((\alpha_i)_i) = (0, \alpha_0, \alpha_1, \ldots)$. S ist offensichtlich isometrisch, also auch injektiv und somit ist $\dim(\ker S) = 0$. Weiter ist $\dim\big(\ell^2(\mathbb{N})/\operatorname{Im} S\big) = 1$. Damit ist S ein Fredholm-Operator mit $\operatorname{ind} S = -1$.

(ii) Für $k \in C([0,1] \times [0,1])$ sei $K \in \mathcal{L}\big(L^2([0,1])\big)$ gegeben durch

$$K(f)(t) := \int_{[0,1]} k(s,t) \cdot f(s) \,\mathrm{d}s$$

Es ist $K \in \mathcal{K}\big(L^2([0,1])\big)$ und weiter ist $\ker(\mathrm{id} - K)$ der Lösungsraum der Integralgleichung $f(t) = \int k(s,t) \cdot f(s) \mathrm{d}s$.

(iii) Sei M ein C^∞-Mannigfaltigkeit, μ ein verträgliches Borelmaß. Dann ist $C^\infty(M) \subset L^2(M)$ dicht. Sei $\mathrm{D}\colon C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ ein geeigneter Differentialoperator. D ist im Allgemeinen nicht beschränkt. Aber dann ist der Operator

$$\tilde{\mathrm{D}} := \frac{\mathrm{D}}{\sqrt{1 + \mathrm{D}^*\mathrm{D}}}$$

beschränkt und dicht definiert und lässt sich auf ganz $L^2(M)$ fortsetzen. Unter geeigneten Bedingungen ist $\tilde{\mathrm{D}}$ Fredholm. $\ker \tilde{\mathrm{D}}$ bzw. $\operatorname{coker} \tilde{\mathrm{D}}$ entsprechen dann Lösungsräumen von partielle Differentialgleichungen.

10. Ausblick

10.1. Frage Sei $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. ¿Existiert ein nicht trivialer Unterraum $X \subset \mathcal{H}$ mit $T(X) \subset X$? Das gilt nicht für Operatoren auf Banachräumen (Per Enflo, `https://de.wikipedia.org/wiki/Per_Enflo`).

10.2. Beispiel

(i) Sie G eine abzählbare diskrete Gruppe. Sei $u\colon G \to \mathcal{L}\big(\ell^2(G)\big)$ gegeben durch $u_g(f)(h) := f(g^{-1}h)$ für $g \in G, f \in \ell^2(G), h \in G$. Betrachte

$$C_r^*(G) := \overline{\mathrm{Alg}(u_g : g \in G)}^{\|\cdot\|} \subset \mathcal{L}\big(\ell^2(G)\big)$$
$$\mathrm{VN}(G) := \overline{\mathrm{Alg}(u_g : g \in G)}^{\mathrm{w.o.t.}} \subset \mathcal{L}\big(\ell^2(\mathbb{N})\big)$$

Was ist die Struktur dieser Algebren? Wie lassen sich Informationen über G entnehmen?

$$¿\mathrm{VN}(\mathbb{F}_m) \cong \mathrm{VN}(\mathbb{F}_n)?$$

(ii) Sei Ω ein kompakter Hausdorffraum, $\alpha\colon \Omega \to \Omega$ ein Homöomorphismus. Man erhält eine Wirkung von $\mathbb{Z}$ auf $C(\Omega)$. (Ω, α) heißt dynamisches System. Zum Beispiel $\Omega = S^1$, α Rotation um $2\pi\Theta$. Nun ist interessant, ob $\Theta \in \mathbb{Q}$ oder $\Theta \notin \mathbb{Q}$. Damit ergibt sich die Rotationsalgebra A_Θ, die sich den Winkel Θ „merkt".

A. Anhang

A.1. Vierecksungleichung Sei (X,d) ein metrischer Raum und $x,y,u,v \in X$. Dann gilt

$$\big|d(x,y) - d(u,v)\big| \leqslant d(x,u) + d(y,v)$$

Beweis: Einerseits gilt nach der Dreiecksungleichung

$$d(x,y) \leqslant d(x,u) + d(u,v) + d(v,y) \quad \Longrightarrow \quad d(x,y) - d(u,v) \leqslant d(x,u) + d(y,v)$$

Andererseits aber auch

$$d(u,v) \leqslant d(u,x) + d(x,y) + d(y,v) \quad \Longrightarrow \quad d(u,v) - d(x,y) \leqslant d(x,u) + d(y,v)$$

Insgesamt folgt also die Behauptung. □

A.2. Abschluss einer konvexen Menge ist konvex Sei X ein topologischer Vektorraum, von dem wir der Einfachheit halber annehmen, dass die Topologie von einer Norm induziert wird. Sei $M \subset X$ konvex. Dann ist auch $\overline{M}$ konvex.

Beweis: Seien $a, b \in \overline{M}$, $\lambda \in [0,1]$. Dann existieren für jedes $\varepsilon > 0$ Elemente $a', b' \in M$ mit $\|a - a'\| < \varepsilon$ und $\|b - b'\| < \varepsilon$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\big\|\big((1-\lambda)\cdot a + \lambda \cdot b\big) - \big((1-\lambda)\cdot a' + \lambda\cdot b'\big)\big\| &= \|(1-\lambda)\cdot(a-a') + \lambda\cdot(b-b')\| \\ &\leqslant |1-\lambda|\cdot\|a-a'\| + |\lambda|\cdot\|b-b'\| \\ &\leqslant |1-\lambda+\lambda|\cdot\varepsilon = \varepsilon\end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt somit $(1-\lambda)\cdot a + \lambda\cdot b \in \overline{M}$. □

A.3. Beweis von Aufgabe 2 von Blatt 7 *Dies ist eine Teilaussage im Beweis des Satzes von Riesz-Fischer (4.11).*
Es sei (X, Σ, μ) ein Maßraum, $p \in [1,\infty)$ und $(f_n)_n \subset \mathcal{L}^p(\mu)$ eine Folge p-integrierbarer Funktionen.

Behauptung: Es existieren messbare Mengen $E_l \subset X$ mit $\mu(E_l) < \infty$, $l \in \mathbb{N}$, sodass für $E := \bigcup_{l\in\mathbb{N}} E_l$ gilt $\chi_E \cdot f_n = f_n$ fast überall für $n \in \mathbb{N}$.

Beweis: Sei $n \in \mathbb{N}$. Für $l \in \mathbb{N}$ definieren wir $E_{l,n} := f_n^{-1}\Big(\big(-\infty, -\frac{1}{l}\big) \cup \big(\frac{1}{l}, \infty\big)\Big)$. Da $\big(-\infty, -\frac{1}{l}\big)$ und $\big(\frac{1}{l}, \infty\big)$ Borelmengen sind und f_n messbar ist, ist $E_{l,n} \subset X$ messbar, also $E_{l,n} \in \Sigma$. Wir zeigen, dass $\mu(E_{l,n}) < \infty$ gilt: Für $x \in E_{l,n}$ gilt $|f_n(x)| > \frac{1}{l} \Rightarrow |f_n(x)|^p > \frac{1}{l^p}$. Es folgt mit der Monotonie des Integrals

$$\int_{E_{l,n}} \frac{1}{l^p} \mathrm{d}\mu < \int_{E_{l,n}} |f_n|^p \mathrm{d}\mu < \infty$$

da $f_n \in \mathcal{L}^p(\mu)$. Da $\frac{1}{l^p} < \infty$, folgt also $\mu(E_{l,n}) < \infty$. Setze nun $E := \bigcup_{l,n} E_{l,n}$. Dies ist eine abzählbare Vereinigung. Es bleibt $\chi_E \cdot f_n = f_n$ fast überall zu zeigen. Sei also $x \in X$ beliebig. Wenn $f_n(x) = 0$, dann gilt die Gleichung trivialerweise. Andernfalls existiert ein $l \in \mathbb{N}$ mit $|f_n(x)| > \frac{1}{l}$, also $x \in E_{l,n} \subset E$. Wenn wir für f_n den Wert ∞ zulassen, dann gilt die Gleichung auf der Nullmenge $\{x \in X \mid f_n(x) = \infty\}$ nicht. Also gilt die Gleichung fast überall. □

A.4. Beweis der Aussagen aus 7.31 Wir zeigen zunächst $T \leqslant \|T\| \cdot \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$

$$\langle x\,,\, \|T\| \cdot x - Tx\rangle = \|T\| \cdot \langle x\,,\, x\rangle - \langle x\,,\, Tx\rangle \overset{7.29}{\geqslant} \|T\| \cdot \|x\|^2 - \|T\| \cdot \|x\|^2 = 0$$

Genauso folgt $-\|T\| \cdot \mathrm{id}_{\mathcal{H}} \leqslant T$ aus der Abschätzung $|\langle x\,,\, Tx\rangle| \leqslant \|T\| \cdot \|x\|^2$ (7.29)

$$\big\langle x\,,\, Tx - (-\|T\| \cdot x)\big\rangle = \langle x\,,\, Tx\rangle + \|T\| \cdot \langle x\,,\, x\rangle \geqslant 0$$

Die Abbildung $\langle \cdot\,,\, \cdot\rangle_T \colon (y,x) \mapsto \langle y\,,\, Tx\rangle$ ist positiv-semidefinit hermitesch, da T selbstadjungiert ist und $T \geqslant 0$ gilt. Also können wir die Cauchy-Schwarz-Ungleichung anwenden:

$$|\langle y\,,\, Tx\rangle|^2 = |\langle y\,,\, x\rangle_T|^2 \leqslant \langle y\,,\, y\rangle_T \cdot \langle x\,,\, x\rangle_T = \langle y\,,\, Ty\rangle \cdot \langle x\,,\, Tx\rangle$$

Damit ist auch die letzte Aussage bewiesen. □

A.5. Ausführlicher Beweis zu 8.3 mit Neumann-Reihen (Aufgabe 2 von Blatt 5) Seien X, Y Banachräume und $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ bijektiv (also injektiv). Falls für $S \in \mathcal{L}(X,Y)$ gilt

$$\|T - S\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \left\|T^{-1}\right\|^{-1}_{\mathcal{L}(Y,X)},$$

so ist auch S bijektiv.

Über Neumann-Reihen: Für $T \in \mathcal{L}(X,X)$ ist die ***Neumann-Reihe*** definiert als

$$\sum_{n=0}^{\infty} T^n$$

Sie hat unter anderem die folgenden wichtigen Eigenschaften[18]

(i) Wenn $\sum_{n=0}^{\infty} T^n$ bezüglich $\|\cdot\|$ konvergiert, so ist $\mathrm{id}_X - T$ invertierbar mit $(\mathrm{id}_X - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$

(ii) Die Reihe konvergiert, falls $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum ist und $\|T\| < 1$ gilt.

Ersteres sieht man leicht, denn wenn die Summe konvergiert, dann gilt

$$\lim_{k\to\infty} (\mathrm{id}_X - T)\left(\sum_{n=0}^{k} T^n\right) = \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{n=0}^{k} T^n - \sum_{n=0}^{k} T^{n+1}\right) = \lim_{k\to\infty} \big(\mathrm{id}_X - T^{k+1}\big) = \mathrm{id}_X$$

Für die zweite Aussage zeigt man, dass $\sum_{n=0}^{\infty} \|T^n\|$ konvergiert:

$$\sum_{n=0}^{k} \|T^n\| \leqslant \sum_{n=0}^{k} \|T\|^n \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \|T\|^n \overset{\|T\|<1}{=} \frac{1}{1 - \|T\|} < \infty$$

Jetzt muss man nur noch zeigen, dass in Banachräumen aus absoluter Konvergenz normale Konvergenz folgt, um das Argument abzuschließen.

Beweis der der eigentlichen Aussage: Es gilt $S = T - (T - S) = T\big(\mathrm{id}_X - T^{-1}(T - S)\big)$. Wir erhalten nun

$$\left\|T^{-1}(T - S)\right\| = \sup_{x\in X} \left\|T^{-1}(Tx - Sx)\right\|_X \leqslant \sup_{x\in X} \left\|T^{-1}\right\| \cdot \|Tx - Sx\|_Y = \left\|T^{-1}\right\| \cdot \|T - S\| < 1$$

Also ist $\mathrm{id}_X - T^{-1}(T - S)$ nach den obigen Eigenschaften der Neumann-Reihe invertierbar. Da T invertierbar ist, ist $S = T\big(\mathrm{id}_X - T^{-1}(T - S)\big)$ als Komposition invertierbarer Abbildungen auch invertierbar mit $S^{-1} = \big(\sum_{n=0}^{\infty} \big(T^{-1}(T - S)\big)^n\big) T^{-1}$. □

[18] siehe auch https://de.wikipedia.org/wiki/Neumann-Reihe

Index

Die Seitenzahlen *sind mit Hyperlinks zu den entsprechenden Seiten versehen, also anklickbar*

Abbildungsverzeichnis

To-do's und andere Baustellen