Fachbereich 10
Mathematik und
Informatik

Numerik partieller Differentialgleichungen

Mitschrift der Tafelnotizen

Tobias Wedemeier

19. Oktober 2015
gelesen von
Dr. Schindler

Hierbei handelt es sich um eine Mitschrift der Tafelnotizenvon **Dr. Schindler**, WWU Münster, aus der Vorlesung **Numerik partieller Differentialgleichungen** im Wintersemester 2015/16. Dies ist kein Skript der Vorlesung und keine eigene Arbeit des Autors.

Für Fehler in der Mitschrift wird keine Haftung übernommen. Hinweise auf Fehler sind gerne gesehen, hierfür kann man mich in der Uni ansprechen oder alternativ eine e-Mail an: *tobias.wedemeier@gmx.de*
Auch ist eine Mitarbeit über Github möglich.

Wenn Teile aus der Vorlesung selber fehlen, können diese gerne an meine e-Mail versandt werden. Ich werde diese dann einarbeiten.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Beispiele in einer Raumdimension

(i) Poisson-Gleichung:

$$-\partial_{xx} u(x) = f(x),\ x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}$$

(ii) Wärmeleitungsgleichung (parabolisch):

$$\partial_t u(x,t) - \partial_{xx} u(x,t) = f(x,t),\ (x,t) \in \Omega_T \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$$

(iii) Wellengleichung (hyperbolisch):

$$\partial_{tt} u(x,t) = c \cdot \partial_{xx} u(x,t),\ (x,t) \in \Omega_T \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$$

1.1 Modellierung mit partiellen Differentialgleichungen

1.1.1 Erhaltungsgleichungen:

Beispiel: Ausbreitung eines Tintenkleckses in Wasser
$\Omega \subseteq \mathbb{R}^d,\ d = 1, 2, 3,$ Gebiet (offen, zusammenhängend, beschränkt)
$u : \Omega \times \mathbb{R}^+ \to [0, 1]$ Konzentration der Tinte.

Definition 0.1 (Erhaltungsprinzip)

(i) Physikalisches Prinzip: für eine extensive Zustandsgröße (Masse, Impuls, Energie) gilt: die Änderung dieser Größe in einem beliebigen Volumen $V \subseteq \Omega$ kann nur Transport der Größe über den Rand des Volumens geschehen.

(ii) Mathematisches Äquivalent: ist $u(x,t)$ die Dichteverteilung einer extensiven Zustandsgröße,so gilt für ein beliebiges Teilvolumen $V \subseteq \Omega$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int\limits_V u(x,t)\mathrm{d}x = -\int\limits_{\partial V} q(x,t) \cdot n(x,t)\mathrm{d}\sigma(x) \tag{1.1}$$

Dabei ist $n \in \mathbb{R}^d$ die äußere Normale an den Rand von V und q die Flussdichte der Zustandsgröße.
Annahme: Ruhendes Wasser
$\rightsquigarrow$ mit dem 1. Fickschen Gesetz: "Fluss $\widehat{=}$ negativer Gradient der Dichte "

$$q(x,t) = -D \cdot \nabla u(x,t),\ D > 0,$$

wobei D der Diffusionskoeffizient ist.
$\rightsquigarrow$ mit der Gleichung (0.1):

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int\limits_V u(x,t)\mathrm{d}x}_{\int \lim\limits_V \partial_t u(x,t)\mathrm{d}x} = \underbrace{\int \lim\limits_{\partial V} D \cdot \nabla u(x,t) \cdot n(x,t)\mathrm{d}x}_{= \int \lim\limits_V \mathrm{div}(D \cdot \nabla u(x,t))\mathrm{d}x}$$

$\Rightarrow$ da V beliebig war gilt dies für jeden Punkt:

$$\partial_t u(x,t) = \mathrm{div}(D \cdot u(x,t))\ \forall (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+$$

Spezialfälle: D konstant,$d = 1$

$$\Rightarrow \partial_t u(x,t) - D \cdot \partial_{xx} u(x,t) = 0$$

Definition 0.2 (Anfangs-Randwertproblem für die instationäre Diffusionsgleichung)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ für $d \in \mathbb{N}$ ein Gebiet (offen, zsmhängend, beschränkt), $T > 0$ eine Endzeit und Anfangswerte $u_0 \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ und Randwerte $g \in C^1([0,T]; C^0(\partial\Omega))$ gegeben. Dann heißt eine Funktion $u \in C^1([0,T]; C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ **klassische Lösung des Dirichletsproblem für die instationäre Diffusionsgleichung** (homogene Wärmeleitgleichung), falls

$$\begin{aligned}\partial_t u(x,t) - \operatorname{div}(Du(x,t)) = 0,\ \forall (x,t) \in \Omega \times (0,T),\\ u(x,t) = g(x,t),\ \forall (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T),\\ u(x,t) = u_0(x),\ \forall x \in \Omega.\end{aligned}$$

Aufgaben der Angewandten Mathematik

- Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen
- Regularität der Lösung
- Beschränktheit der Lösung
- Geschlossene Form der Lösung
- Numerische Verfahren zur Approximation
- Konvergenz gegen die exakte Lösung (**Konvergenzrate**)
- Visualisierung der Ergebnisse
- Validierung des mathematischen Modells (anhand physikalischer Experimente)

Theorem 0.3 (Langzeitverhalten/stationäre Diffunsionsgleichung)

Gilt $g(x,t) = \bar{g}(x)\ \forall t \in \mathbb{R}^+$ in Definition 0.2 für eine Funktion $j \in C^0(\partial\Omega)$, so konvergiert die Lösung u für große Zeiten gegen eine Funktion $\bar{u} \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, die nicht von der Zeit abhängt. Die Funktion $\bar{u}$ ist dabei eine **klassische Lösung des Dirichletsproblems für die stationäre Diffusionsgleichung**, d.h. $\bar{u}$ löst

$$-\operatorname{div}(D \cdot \nabla \bar{u}(x)) = 0\ \forall x \in \Omega;\ \bar{u}(x) = \bar{g}(x)\ \forall x \in \partial\Omega.$$

1.1.2 Variationsgleichung

Physikalisches Prinzip:Energieminimierung
Beispiel: Verhalten eines elastischen Körpers
f: äußere Kraft, $u(x,t) \in \mathbb{R}^d$ Auslenkung/Verschiebevektor, σ: Spannungstensor (symmetrisch), $\varepsilon(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T) \in \mathbb{R}^{d \times d}$ Verzerrungstensor
Die potenzielle Gesamtenergie eine belasteten, elastischen Körpers:

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega \underbrace{\sigma : \varepsilon(u)}_{\text{Skalarprodukt}}\ \mathrm{d}x - \int \lim_\Omega f u \mathrm{d}x,$$

wobei das Skalarprodukt $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n} : A : B = \operatorname{tr}(A^T \cdot B) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} B_{ij}$.

Annahme

- kleine Deformationen
- idealisiertes Material
- mit dem Hookschen Gesetz gilt: $\sigma(u) = A \cdot \varepsilon(u)$

Definition 0.4 (Energieminimierung/Variationsprinzip)

(i) Physikalisches Prinzip: Ein physikalisches System strebt immer in den Zustand minimaler Energie.

(ii) Mathematisches Äquivalent: Sei $u(x,t)$ eine Zustandsvariable und $E(u)$ die Energie des Systems. Dann strebt u gegen einen optimalen Zustand $\bar{u}(x)$, der die Energie minimiert. D.h., falls E genügend glatt ist, gilt

$$\frac{\partial}{\partial \xi} E(\bar{u}+\xi\varphi)|_\xi = 0 \text{ für beliebige Variationen } \varphi. \tag{1.2}$$

Einsetzen von E, σ in (0.2) ergibt:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial \xi}\left\{ \frac{1}{2}\int \lim_\Omega A\cdot\varepsilon(\bar{u}+\xi\varphi) : \varepsilon(\bar{u}+\xi\varphi)\mathrm{d}x - \int\limits_\Omega f(\bar{u}+\xi\varphi)\mathrm{d}x \right\}|_{\xi=0} \\ &= \left\{ \frac{1}{2}\int \lim_\Omega A(\xi\varepsilon(\bar{u}) : \varepsilon(\varphi) + \frac{1}{2}\xi\varepsilon(\varphi) : \varepsilon(\varphi)\mathrm{d}x - \int\limits_\Omega f\varphi\mathrm{d}x \right\}|_{\xi=0} \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass

$$\int \lim_\Omega -\operatorname{div}(A\cdot\varepsilon(\bar{u}))\varphi\mathrm{d}x = \int \lim_\Omega A\cdot\varepsilon(\bar{u}) : \varepsilon(\varphi)\mathrm{d}x = \int \lim_\Omega f\varphi\mathrm{d}x \;\forall \text{ ' zulässige ' } \varphi.$$

Mit dem Hauptsatz der Variationsrechnung ergibt dies $-\operatorname{div}(A\cdot\varepsilon(\bar{u})) = f$, oder ausführlich:

$$-\sum_{i=1}^n \partial_{x_i} \sum_{k=1}^n A_{jk}\varepsilon(\bar{u})_{ki} = f_j \;\forall 1 \le j \le d.$$

1.2 Grundideen Numerischer Methoden

1.2.1 Finite Differenzen

Idee
Approximation von Differenzenoperatoren durch Differenzenquotienten. Sei als Beispiel $d = 1$, dann approximiere u' durch:

- 'Vorwärtsdifferenzenquotient: $u'(x) \approx \partial^{+h}u(x) := \frac{u(x+h)-u(x)}{h}$
- 'Rückwärtsdifferenzenquotient: $u'(x) \approx \partial^{-h}u(x) := \frac{u(x)-u(x-h)}{h}$
- 'Zentrierter Differenzenquotient: $u'(x) \approx \partial^{ch}u(x) := \frac{u(x+h)-u(x-h)}{2h}$

Obwohl $\partial^{+h}u, \partial^{-h}u, \partial^{ch}u \overset{h\to 0}{\to} u'$ (falls $u \in C^1$), führt nicht jede Wahl auf ein konvergentes Verfahren. Beispiel: linearer Transport $a \in \mathbb{R}$, $\partial_t u + a\partial_x u = 0$; mit dem Vorwärtseulerverfahren: $\frac{u(x,t_{n+1})-u(x,t_n)}{\Delta t}$. Für $a > 0$ nutze ∂^{-h}, für $a < 0$ nutze ∂^{+h} und erhalte ein endlichdimensionales LGS.

Index

Die Seitenzahlen *sind mit Hyperlinks zu den entsprechenden Seiten versehen, also anklickbar!*

Abbildungsverzeichnis