



WESTFÄLISCHE  
WILHELMS-UNIVERSITÄT  
MÜNSTER



FACHBEREICH 10  
MATHEMATIK UND  
INFORMATIK

# **Skript Analysis 2**

**Mitschrift der Vorlesung „Analysis 2“ von Prof. Ebert**

Tim Keil

25. Juni 2015



## Vorwort — Mitarbeit am Skript

Dieses Dokument ist eine Mitschrift aus der Vorlesung „Analysis 2, SoSe 2015“, gelesen von Prof. Ebert. Der Inhalt entspricht weitestgehend dem Tafelanschrieb. Für die Korrektheit des Inhalts übernehme ich keinerlei Garantie! Für Bemerkungen und Korrekturen – und seien es nur Rechtschreibfehler – bin ich sehr dankbar. Korrekturen bitte durch persönliches Ansprechen oder per Mail an [keil.menden@web.de](mailto:keil.menden@web.de).

## Inhaltsverzeichnis

<b>I. Normierte und metrische Räume</b>	<b>1</b>
I.1. Der $\mathbb{R}^n$	1
I.1.1. Das Skalarprodukt	1
I.1.2. Die $l^2$ -Norm	2
I.2. Euklidische und normierte Vektorräume	2
I.2.1. Euklidischer Vektorraum	2
I.2.2. Beispiel euklidischer Vektorraum	2
I.2.3. Norm	2
I.2.4. Cauchy-Schwarz-Ungleichung	3
I.2.5. Beispiele für Normen auf $\mathbb{R}$	4
I.2.6. Äquivalenz von Normen	4
I.2.7. Beispiel Äquivalente Normen	4
I.3. Metrische Räume	4
I.3.1. Abstand	4
I.3.2. Metrik	5
I.3.3. Konvergenz im metrischen Raum	5
I.3.4. Beispiel Metrik	5
I.3.5. Cauchyfolge im metrischen Raum	6
I.3.6. Vollständigkeit	7
I.3.7. Satz	7
I.3.8. Stetigkeit	8
I.3.9. Satz	8
I.3.10. Satz	8
I.3.11. Beispiele	8
I.3.12. Lipschitz-stetig	9
I.3.13. Beispiel Lipschitz-stetig	9
I.3.14. Satz	9
I.3.15. Korollar:	10
I.3.16. Operatornorm	10
I.4. Topologische Grundbegriffe	11
I.4.1. $\varepsilon$ -Ball	11
I.4.2. Innerer Punkt, Umgebung	11
I.4.3. Offen, Abgeschlossen	11
I.4.4. Beispiel	12
I.4.5. Satz	12
I.4.6. Satz	14
I.4.7. Satz	14
I.4.8. Beispiel	15
I.5. Kompaktheit	15
I.5.1. Satz von Bolzano-Weierstraß im $\mathbb{R}^n$	16
I.5.2. Definition	16
I.5.3. Beispiel:	16
I.5.4. Satz	17
I.5.5. Satz von Heine-Borel	17
I.5.6. Satz	18
I.5.7. Satz vom Minimum und Maximum	18
I.5.8. Satz	19
I.5.9. Erinnerung/Definition	20

I.5.10.	Definition . . . . .	20
I.5.11.	Satz Lebesgue-Lemma . . . . .	20
I.5.12.	Korollar . . . . .	21
I.5.13.	Definition . . . . .	21
I.5.14.	Definition . . . . .	21
I.5.15.	Satz von Heine-Borel . . . . .	21
I.5.16.	Lemma . . . . .	22
<b>II.</b>	<b>Differentialrechnung im <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>24</b>
II.1.	Die Definition . . . . .	24
II.1.1.	Notation . . . . .	24
II.1.2.	Bemerkung . . . . .	24
II.1.3.	Definition . . . . .	25
II.1.4.	Satz . . . . .	25
II.1.5.	Definition . . . . .	26
II.1.6.	Satz . . . . .	26
II.1.7.	Definition . . . . .	27
II.1.8.	Satz . . . . .	29
II.1.9.	Definition . . . . .	30
II.1.10.	Kettenregel . . . . .	30
II.1.11.	Definition . . . . .	32
II.2.	Differentiation unter dem Integral . . . . .	32
II.2.1.	Satz . . . . .	33
II.2.2.	Satz . . . . .	33
II.2.3.	Korollar . . . . .	34
II.2.4.	Satz von Schwarz . . . . .	35
II.2.5.	Definition . . . . .	36
II.3.	Taylorentwicklung . . . . .	37
II.3.1.	Lemma/Definition . . . . .	37
II.3.2.	Taylorischer Satz . . . . .	38
II.3.3.	Mittelwertsatz der Integralrechnung . . . . .	38
II.3.4.	Lagrange-Darstellung des Restgliedes . . . . .	39
II.3.5.	Bemerkung . . . . .	39
II.3.6.	Definition . . . . .	40
II.3.7.	Taylorentwicklung in $\mathbb{R}^n$ . . . . .	40
II.4.	Extremwertprobleme . . . . .	40
II.4.1.	Satz . . . . .	40
II.4.2.	Definition . . . . .	41
II.4.3.	Definition . . . . .	41
II.4.4.	Spektralsatz für symmetrische Matrizen . . . . .	42
II.4.5.	Satz . . . . .	42
II.4.6.	Satz . . . . .	43
II.4.7.	Definition . . . . .	44
<b>III.</b>	<b>Der Umkehrsatz und seine geometrischen Konsequenzen</b>	<b>45</b>
III.1.	Umkehrbare differenzierbare Abbildungen . . . . .	45
III.1.1.	Definition . . . . .	45
III.1.2.	Lemma . . . . .	45
III.1.3.	Lemma . . . . .	45
III.1.4.	Satz . . . . .	46
III.1.5.	Beispiel . . . . .	46

III.1.6.	Der Umkehrsatz . . . . .	47
III.1.7.	Definition . . . . .	47
III.1.8.	Korollar . . . . .	47
III.2.	Beweis des Umkehrsatzes . . . . .	48
III.2.1.	Schranksatz . . . . .	48
III.2.2.	Banach'scher Fixpunktsatz . . . . .	48
III.2.3.	Lemma . . . . .	50
III.2.4.	Beweis des Umkehrsatzes, Teil 1 (Spezialfall und Hauptarbeit) . . . . .	50
III.2.5.	Beweis des Umkehrsatzes, Teil 2 . . . . .	51
III.2.6.	Satz über implizite Funktionen . . . . .	52
III.2.7.	Beispiel . . . . .	53
III.2.8.	Definition . . . . .	54
III.2.9.	Satz . . . . .	54
III.2.10.	Definition . . . . .	56
III.2.11.	Beispiele . . . . .	56
<b>IV.</b>	<b>Anfangsgründe der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen</b>	<b>56</b>
IV.1.	Einleitung . . . . .	56
IV.1.1.	Definition . . . . .	56
IV.1.2.	Beispiel . . . . .	56
IV.1.3.	Beispiel . . . . .	57
IV.1.4.	Beispiel . . . . .	57
IV.1.5.	Beispiel . . . . .	57
IV.1.6.	Beispiel . . . . .	58
IV.2.	Lineare Differentialgleichungen mit Konstanten Koeffizienten . . . . .	58
IV.2.1.	Definition . . . . .	58
IV.2.2.	Lemma . . . . .	58
IV.2.3.	Satz . . . . .	58
IV.2.4.	Korollar . . . . .	61
<b>Index</b>		<b>A</b>

# I. Normierte und metrische Räume

## I.1. Der $\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_i \in \mathbb{R} \right\}$$

Der  $\mathbb{R}^n$  ist ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum und  $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) = n$ .

Sei

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-ter Eintrag}$$

$(e_1, \dots, e_n)$  ist eine Basis von  $\mathbb{R}^n$  und heißt **Standardbasis**.

Ist  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ , so gilt  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$

### I.1.1. Definition

Das **Skalarprodukt** auf  $\mathbb{R}^n$  ist die Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$x = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i \in \mathbb{R}$$

es gilt:

**(S1)** (Bilinearität)  $\forall x_0, x_1, y_0, y_1 \in \mathbb{R}^n \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \langle x_0 + x_1, y_0 + y_1 \rangle &= \langle x_0, y_0 \rangle + \langle x_1, y_1 \rangle + \langle x_1, y_0 \rangle + \langle x_0, y_1 \rangle \\ \langle ax_0, by_0 \rangle &= ab \langle x_0, y_0 \rangle \end{aligned}$$

**(S2)** (Symmetrie)  $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$  gilt  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

**(S3)** (positive Definitheit)  $\forall x \in \mathbb{R}^n$  gilt  $\langle x, x \rangle \geq 0$  und  $\langle x, x \rangle = 0$  nur dann, wenn  $x = 0$

Desweiteren gilt  $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$  (Kronecker-Symbol)

Ist

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in \mathbb{R}^n \quad (x_i \in \mathbb{R})$$

so ist

$$\begin{aligned}\langle x, e_j \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n x_i e_i, e_j \right\rangle \stackrel{(S1)}{=} \sum_{i=1}^n x_i \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \delta_{ij} = x_j \\ \Rightarrow x &= \sum_{j=1}^n \langle x, e_j \rangle e_j\end{aligned}$$

### I.1.2. Definition

Sei  $x \in \mathbb{R}^n$ . Die  $l^2$ -Norm von  $x$  ist die Zahl

$$\|x\|_2 := \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Schreibweise manchmal auch:  $\|x\|_2 = \|x\|$

## I.2. Euklidische und normierte Vektorräume

### I.2.1. Definition

Sei  $V$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Ein **Skalarprodukt** auf  $V$  ist eine Abbildung  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ , welche die Axiome S1, S2, S3 erfüllt.

Ein **euklidischer Vektorraum** ist ein Paar  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ .  $V$  ist ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum und  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ist Skalarprodukt auf  $V$ .

Ist  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein euklidischer Vektorraum, so ist die durch  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  induzierte Norm definiert als

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} \quad v \in V$$

### I.2.2. Beispiele

- $\mathbb{R}^n$  mit Standardskalarprodukt
- Die Abbildung

$$\begin{aligned}\mathbb{C} \times \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (z, w) &\mapsto \operatorname{Re}(\bar{z} \cdot w)\end{aligned}$$

ist ein Skalarprodukt. Die induzierte Norm ist der Absolutbetrag.

### I.2.3. Definition

Sei  $V$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Eine **Norm** auf  $V$  ist eine Abbildung  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}, v \mapsto \|v\|$  mit

$$(N1) \quad \|v\| \geq 0 \quad \forall v \in V$$

$$(N2) \quad \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$$

$$(N3) \quad \|av\| = |a| \cdot \|v\| \quad \forall v \in V, a \in \mathbb{R}$$

$$(N4) \quad \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \quad \forall v, w \in V \quad (\text{Dreiecksungleichung})$$

Ein normierter Vektorraum ist ein Paar  $(V, \|\cdot\|)$  bestehend aus einem  $\mathbb{R}$ -VR  $V$  und einer Norm auf  $V$ .



**I.2.4. Satz**

Sei  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein euklidischer Vektorraum. Für  $v \in V$  setze  $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$   
Dann gilt:

1.  $\|\cdot\|$  ist eine Norm auf  $V$
2.  $\forall v, w \in V$  gilt die **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**:

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

**Beweis:**

$$1. \text{ N1: } \|v\| = \sqrt{\underbrace{\langle v, v \rangle}_{\geq 0}} \geq 0$$

$$\text{N2: } \|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} = 0 \Rightarrow \langle v, v \rangle = 0 \stackrel{\text{S3}}{\Rightarrow} v = 0$$

$$\text{N3: } a \in \mathbb{R}, v \in V$$

$$\|av\| = \sqrt{\langle av, av \rangle} \stackrel{\text{S1}}{=} \sqrt{a^2 \langle v, v \rangle} = \sqrt{a^2} \sqrt{\langle v, v \rangle} = |a| \|v\|$$

2. CS-Ungleichung ist trivial, wenn  $w = 0$

Ann.:  $w \neq 0$ : Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\begin{aligned} f(t) &= \langle v + tw, v + tw \rangle \\ &= \langle v, v \rangle + 2t \langle v, w \rangle + t^2 \langle w, w \rangle \\ &= \|v\|^2 + 2t \underbrace{\langle v, w \rangle}_{\in \mathbb{R}} + t^2 \|w\|^2 \end{aligned}$$

aus S3 folgt  $f(t) \geq 0$ .  $f$  ist Polynom

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t_0 = -\frac{\langle v, w \rangle}{\|w\|^2}$$

$$f''(t) = 2\|w\|^2 > 0$$

$\Rightarrow f$  nimmt bei  $t_0$  globales Minimum an

$$\begin{aligned} 0 \leq f(t_0) &= \|v\|^2 - \frac{2\langle v, w \rangle^2}{\|w\|^2} + \frac{\langle v, w \rangle^2}{\|w\|^4} \|w\|^2 = \|v\|^2 - \frac{\langle v, w \rangle^2}{\|w\|^2} \\ &\Rightarrow \frac{\langle v, w \rangle^2}{\|w\|^2} \leq \|v\|^2 \\ &\Rightarrow \langle v, w \rangle^2 \leq \|v\|^2 \|w\|^2 \\ &\Rightarrow |\langle v, w \rangle| = \sqrt{\langle v, w \rangle^2} \leq \sqrt{\|v\|^2 \|w\|^2} = \|v\| \cdot \|w\| \end{aligned}$$

□

Schließlich können wir N4 zeigen:

N4:

$$\begin{aligned} \|v + w\|^2 &= \langle v + w, v + w \rangle \\ &\stackrel{\text{S1}}{=} \|v\|^2 + 2\langle v, w \rangle + \|w\|^2 \\ &\leq \|v\|^2 + 2|\langle v, w \rangle| + \|w\|^2 \\ &\stackrel{\text{CS}}{\leq} \|v\|^2 + 2\|v\|\|w\| + \|w\|^2 \\ &= (\|v\| + \|w\|)^2 \end{aligned}$$

Wurzel ziehen zeigt N4

□

### I.2.5. Weitere Beispiele für Normen auf $\mathbb{R}$

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \quad x_i \in \mathbb{R}$$

- $l^1$ -Norm  $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$
- $l^\infty$ -Norm  $\|x\|_\infty = \max\{|x_i| \mid i = 1, \dots, n\}$
- Ist  $p \in [1, \infty)$ , so ist die  $l^p$ -Norm

$$\|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (\text{Beweis Schwer})$$

### I.2.6. Definition

$V$   $\mathbb{R}$ -VR,  $\|\cdot\|_0, \|\cdot\|_1$  Normen auf  $V$ . Die Normen  $\|\cdot\|_0, \|\cdot\|_1$  heißen **äquivalent**, falls  $C, c > 0$  existieren, so dass für alle  $v \in V$  gilt:

$$c\|v\|_0 \leq \|v\|_1 \leq C\|v\|_0$$

#### Bemerkung:

Das ist eine Äquivalenzrelation

- **Reflexiv:** klar
- **Symmetrie:**

$$\begin{aligned} c\|v\|_0 &\leq \|v\|_1 \leq C\|v\|_0 \\ \Rightarrow \frac{1}{C}\|v\|_1 &\leq \|v\|_0 \leq \frac{1}{c}\|v\|_1 \end{aligned}$$

- **Transitiv:**

$$\begin{aligned} c\|v\|_0 &\leq \|v\|_1 \leq C\|v\|_0 \quad \text{und} \quad d\|v\|_1 \leq \|v\|_2 \leq D\|v\|_1 \quad (C, c, D, d > 0) \\ \Rightarrow cd\|v\|_0 &\leq CD\|v\|_0 \end{aligned}$$

### I.2.7. Beispiel

Die  $l^1, l^2$  und  $l^\infty$ -Norm auf  $\mathbb{R}^n$  sind äquivalent und zwar gilt:

$$\|v\|_\infty \leq \|v\|_2 \leq \|v\|_1 \leq n\|v\|_\infty \quad (\text{Beweis Übung})$$

## I.3. Metrische Räume

### I.3.1. Definition

$(V, \|\cdot\|)$  normierter Vektorraum,  $v, w \in V$

Der **Abstand** von  $v$  und  $w$  ist

$$d(v, w) := \|v - w\|$$

### I.3.2. Definition

Sei  $X$  eine Menge

Eine **Metrik** (oder Abstandsfunktion) ist eine Abbildung  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto d(x, y)$ , sodass gilt:

$$(M1) \quad \forall x, y \in X : \quad d(x, y) \geq 0$$

$$(M2) \quad \forall x, y \in X : \quad d(x, x) = 0 \quad \text{und} \quad d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$$

$$(M3) \quad \forall x, y \in X : \quad d(x, y) = d(y, x)$$

$$(M4) \quad \forall x, y, z \in X : \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad (\text{Dreiecksungleichung})$$

Ein **Metrischer Raum** ist ein Paar  $(X, d)$ ,  $X$  Menge,  $d$  Metrik auf  $X$

**Beispiele:**

- Ist  $(V, \|\cdot\|)$  normierter Vektorraum, so ist durch  $d(v, w) := \|v - w\|$  eine Metrik auf  $V$  gegeben.

$$\begin{aligned} v, w, u \in V \quad d(v, u) &= \|v - u\| = \|v - w + w - u\| \\ &\stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \|v - w\| + \|w - u\| \\ &= d(v, w) + d(w, u) \end{aligned}$$

**Unterbeispiel:**

$V = \mathbb{R}$ . Dann ist  $x \mapsto |x|$  eine Norm auf  $\mathbb{R}$  und die induzierte Metrik auf  $\mathbb{R}$  ist  $d(x, y) = \|x - y\|$

- $(X, d_X)$  metrischer Raum  $Y \subseteq X$  Teilmenge. Dann ist  $(Y, d_Y)$  ein metrischer Raum, wobei für  $y_0, y_1 \in Y$  gilt, dass  $d_Y(y_0, y_1) := d_X(y_0, y_1)$

Vereinbarung: Ist  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  eine Teilmenge, so ist  $X$  immer mit der durch das Standardskalarprodukt induzierte Metrik versehen. (es sei denn, etwas anderes ist gesagt)

### Konvergenz

Erinnerung (Ana I):  $(x_n)_n$  Folge in  $\mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 : |x - x_n| < \varepsilon$$

### I.3.3. Definition

$(X, d)$  metrischer Raum,  $(x_n)_n$  Folge in  $X$  (d.h. eine Abbildung  $x : \mathbb{N} \rightarrow X$ )  $y \in X$ . Dann Konvergiert die Folge  $(x_n)_n$  gegen  $y \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \quad d(x_n, y) < \varepsilon$

Äquivalent: Die Folge (in  $\mathbb{R}$ )  $d(x_n, y)$  ist eine Nullfolge.

### I.3.4. Beispiel

$X = \mathbb{R}^n$  mit Metrik, die durch  $l^1$ - $l^2$ - oder  $l^\infty$ - Norm induziert wird. Folge  $k \mapsto x(k) \in \mathbb{R}^n$ .

$$x(k) = \sum_{i=1}^n x_i(k) e_i \quad e_i \text{ Standard-Basisvektor} \quad x_i(k) \in \mathbb{R} \quad x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$$

Dann sind äquivalent

- für alle  $i = 1, \dots, n$  gilt  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_i(k) = x_i$

$$2. \lim_{k \rightarrow \infty} \|x(k) - x\|_1 = 0$$

$$3. \lim_{k \rightarrow \infty} \|x(k) - x\|_2 = 0$$

$$4. \lim_{k \rightarrow \infty} \|x(k) - x\|_\infty = 0$$

**Beweis:**

1  $\rightarrow$  2:

$$\|x(k) - x\|_1 := \sum_{i=1}^n \underbrace{|x_i(k) - x_i|}_{\xrightarrow{(wg. 1)} 0} \rightarrow 0$$

2  $\rightarrow$  3  $\rightarrow$  4: Benutze Ungleichungen ( $y \in \mathbb{R}^n$ )

$$\|y\|_\infty \leq \|y\|_2 \leq \|y\|_1 \leq n \cdot \|y\|_\infty$$

also

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \|x(k) - x\|_1 &= 0 \\ \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \|x(k) - x\|_2 &= 0 \\ \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \|x(k) - x\|_\infty &= 0 \end{aligned}$$

4  $\rightarrow$  1:

$$\|x(k) - x\|_\infty = \max\{|x_i(k) - x| \mid i = 1, \dots, n\} \Rightarrow \text{für alle } i: |x_i(k) - x_i| \leq \|x(k) - x\|_\infty$$

Also

$$\left[ \|x(k) - x\|_\infty \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \right] \Rightarrow [\forall i = 1, \dots, n \quad |x_i(k) - x_i| \rightarrow 0]$$

$\Rightarrow$  1)

□

**Bemerkung:**

$X$  metrischer Raum  $(x_n)_n, (y_n)_n$  Folgen in  $X$   $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$

$$\Rightarrow d(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) \quad (\text{Blatt 2, Aufgabe 2})$$

Daraus folgt:

Ist  $(x_n)_n$  Folge in  $X$  und gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  sowie  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x'$  dann ist  $x = x'$

Denn

$$\begin{aligned} d(x, x') &= \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{d(x_n, x_n)}_{=0} = 0 \\ &\stackrel{(M2)}{\Rightarrow} x = x' \end{aligned}$$

□

### I.3.5. Definition

Sei  $(X, d)$  metrischer Raum und  $(x_n)_n$  Folge in  $X$ . Dann heißt  $(x_n)_n$  **Cauchyfolge**, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n, m \geq n_0 : d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

**Bemerkung:**

$(X, d)$  metrischer Raum  $(x_n)_n$  Folgen in  $X$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in X$ .

Dann ist  $(x_n)_n$  Cauchyfolge, denn

Sei  $\varepsilon > 0$ . Wähle  $n_0$ , sodass

$$\forall n \geq n_0 \quad d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Falls  $n, m \geq n_0$

$$d(x_n, y_n) \leq \underbrace{d(x_n, x)}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{d(x, y_n)}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

**I.3.6. Definition**

$(X, d)$  metrischer Raum. Dann heißt  $X$  **vollständig**, falls jede Cauchy-Folge  $(x_n)_n$  in  $X$  gegen ein  $x \in X$  konvergiert (Ana I)

**Bsp:**

$(0, 1) \subseteq \mathbb{R}$ .  $x_n = \frac{1}{n}$  Folge in  $X$  ist Cauchyfolge.

$(x_n)_n$  konvergiert nicht in  $X$ , denn der einzig möglicher Grenzwert (0) liegt nicht in  $X$ .

**I.3.7. Satz**

$\mathbb{R}^n$ , mit der durch die Norm  $\|\cdot\|_p$   $p = 1, 2, \infty$  induzierten Metrik ist vollständig

**Beweis:**

$p = \infty$ : Sei  $x(k)$   $l^\infty$ -Cauchyfolge in  $\mathbb{R}^n$ . Dann gilt für  $i = 1, \dots, n$ :

$$|x_i(k) - x_i(l)| \leq \|x(k) - x(l)\|_\infty$$

Da  $(x(k))_k$   $l^\infty$ -Cauchyfolge, ist  $(x_i(k))_k$  eine Cauchyfolge in  $\mathbb{R}$  für alle  $1 \leq i \leq n$

Nach dem Cauchy-Kriterium aus Analysis I sind die Folgen  $(x_i(k))_k$  Konvergent.  $x_i = \lim_{k \rightarrow \infty} x_i(k) \in \mathbb{R}$

$$x := \sum_{i=1}^n x_i e_i \in \mathbb{R}^n$$

Dann gilt

$$\|x(k) - x\|_\infty = \max\{\underbrace{|x_i(k) - x_i|}_{\rightarrow 0} \mid i = 1, \dots, n\} \rightarrow 0$$

also

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x(k) - x\|_\infty = 0$$

$p = 2$ :  $x(k)$   $l^2$ -Cauchyfolge, weil  $\|x(k) - x(l)\|_\infty \leq \|x(k) - x(l)\|_2$

Ist  $(x_k)_k$  eine  $l^\infty$ -Cauchyfolge, so gibt es ein  $x \in \mathbb{R}^n$  mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x(k) - x\|_\infty = 0$$

$$\Rightarrow \|x(k) - x\|_2 \leq n \cdot \underbrace{\|x(k) - x\|_\infty}_{\rightarrow 0} \rightarrow 0$$

$p = 1$ : Analog zum Fall  $p = 1$ , benutze  $\|y\|_\infty \leq \|y\|_1 \leq n \cdot \|y\|_\infty$

□

### I.3.8. Definition

Seien  $(X, d_X)$  und  $(Y, d_Y)$  metrische Räume und  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung sowie  $x \in X$ .

(i)  $f$  heißt  $\varepsilon$ - $\delta$ -**stetig** (oder **stetig**) bei  $x$ , wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x' \in X \text{ mit } d_X(x, x') < \delta \text{ gilt: } d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$$

(ii)  $f$  heißt **folgenstetig** in  $x \Leftrightarrow$  Ist  $(x_n)_n$  eine Folge in  $X$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ , so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$$

$f$  ist stetig (folgenstetig) auf  $X$ , wenn  $f$  stetig (folgenstetig) bei  $x$  ist für alle  $x \in X$ .

### I.3.9. Satz

$f$  stetig in  $x \Leftrightarrow f$  folgenstetig in  $x$

#### Beweis

wie in Analysis I, wird bald nachgeliefert

### I.3.10. Satz

$(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$ ,  $(Z, d_Z)$  metrische Räume.

$$f : X \rightarrow Y \quad g : Y \rightarrow Z \quad x \in X$$

Falls  $f$  stetig bei  $x$  und stetig bei  $f(x)$  so ist  $g \circ f$  stetig bei  $x$ .

#### Beweis:

Siehe Analysis I

### I.3.11. Beispiele

$$\mu : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \mu(x, y) := xy \quad (\text{Multiplikation})$$

$$\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \alpha(x, y) := x + y \quad (\text{Addition})$$

$$q : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \quad q(x, y) := \frac{x}{y} \quad (\text{Division})$$

sind auf ihrem gesamten Definitionsbereich stetig.

#### Beweis:

z. B.  $q$  ist folgenstetig, denn:

Sei  $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$  (d.h.  $y \neq 0$ ) und  $(x_n, y_n)$  Folge in  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$  mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (x, y)$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \neq 0 \\ \Rightarrow q(x_n, y_n) = \frac{x_n}{y_n} \xrightarrow{\text{Grenzwertsätze}} \frac{x}{y} = q(x, y) \\ \Rightarrow q \text{ ist folgenstetig} \end{aligned}$$

$\alpha, \mu$  analog. □

**Bsp:**

Sei  $X$  metrischer Raum,  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  stetig

$\Rightarrow$  Die Funktion

$$(f, g) : X \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ x \mapsto (f(x), g(x)) \in \mathbb{R}^2$$

ist stetig.

Denn,  $(x_n)_n$  Folge in  $X$ ,  $x_n \rightarrow x \in X$

$$\Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x) \text{ und } g(x_n) \rightarrow g(x) \quad (f, g \text{ stetig})$$

$$\stackrel{\text{Tatsache}}{\Rightarrow} (f, g)(x_n) = (f(x_n), g(x_n)) \rightarrow (f(x), g(x)) \in \mathbb{R}^2 \\ \Rightarrow (f, g) \text{ stetig}$$

Betrachte Kompositionen

$$X \xrightarrow{(f, g)} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mu} \mathbb{R} \\ x \mapsto (f(x), g(x)) \mapsto f(x)g(x) \\ \Rightarrow \underbrace{\mu}_{\text{stetig}} \circ \underbrace{(f, g)}_{\text{stetig}} = fg \\ \Rightarrow \text{stetig}$$

$\Rightarrow$  Produkte stetiger Funktionen sind wieder stetig

**Analog**

Summen Quotienten stetiger Funktionen sind stetig

**I.3.12. Definition**

$(X, d_X), (Y, d_Y)$  metrische Räume  $f : X \rightarrow Y$  heißt **Lipschitz-stetig**  $\Leftrightarrow \exists L \geq 0$ , so dass gilt:

$$\forall x, x' \in X : d_Y(f(x), f(x')) \leq L d_X(x, x')$$

**Bem:**

ist  $f$  Lipschitz-stetig, so ist  $f$  stetig:

sei  $\varepsilon > 0$  Wähle  $\delta$ , so dass  $\delta L \leq \varepsilon$

Dann:

$$\text{Ist } d_X(x, x') < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) \leq L \cdot d_X(x, x') < \delta L \leq \varepsilon \quad \Rightarrow f \text{ stetig.}$$

**I.3.13. Beispiel**

Betrachte  $\mathbb{R}^n$  mit der durch die  $l^p$ -Normen induzierten Metrik  $p \in \{1, 2, \infty\}$

Dann gilt: Sind  $p, q \in \{1, 2, \infty\}$ , so ist

$$\text{id} : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_q)$$

Lipschitz-stetig.

**Grund:**

$\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n \cdot \|x\|_\infty$$

**I.3.14. Satz**

Jede lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  ist Lipschitz-stetig.

**Beweis:**

Aus LA I ist bekannt:

Es gibt genau ein  $A \in \text{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$ , so dass  $f(x) = Ax \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n)$

$$\mathbf{M}_{m,n}(\mathbb{R}) = \text{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$$

**Beh:**

$\exists L = L_A$ , so dass für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  gilt

$$\|Ax\|_2 \leq L\|x\|_2$$

Es gilt

$$\|Ax\|_2 \leq \|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^m |(Ax)_i| = \sum_{i=1}^m \left| \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \right|$$

nach Cauchy-Schwarz gilt:

$$\left| \sum_{j=1}^n y_j z_j \right| = |\langle y, z \rangle| \stackrel{\text{CS}}{\leq} \|y\|_2 \cdot \|z\|_2 = \left( \sum_{j=1}^m y_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{j=1}^n z_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Also

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left| \sum_{j=1}^m a_{ij}x_j \right| &\leq \left( \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \underbrace{\left( \sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{\|x\|_2} \\ \Rightarrow \|Ax\|_2 &\leq \sum_{i=1}^m \left( \left( \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|x\|_2 \right) = \sum_{i=1}^m \underbrace{\left( \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{=L} \|x\|_2 \end{aligned}$$

□

**I.3.15. Korollar:**

$A \in \text{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$

Dann ist

$$\|A\| := \sup_{\|x\|_2 \leq 1} \|Ax\|_2 < \infty$$

**Beweis:**

Ist  $L \geq 0$  mit  $\|Ax\|_2 \leq L \cdot \|x\|_2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

so gilt für  $\|x\|_2 \leq 1$ :  $\|Ax\|_2 \leq L$

$$\Rightarrow \sup_{\|x\|_2 \leq 1} \|Ax\|_2 \leq L < \infty$$

□

**I.3.16. Definition**

Die Zahl  $\|A\|$  heißt **Operatornorm** von  $A$

Es gilt: Die Operatornorm ist eine Norm auf dem  $\mathbb{R}$ -VR  $\text{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$  (Übung)

Es gibt keine einfache Formel für  $\|A\|$



## I.4. Topologische Grundbegriffe

### I.4.1. Definition

$(X, d)$  sei metrischer Raum,  $\varepsilon > 0$  und  $x \in X$ . Der  $\varepsilon$ -Ball in  $X$  um  $x$  ist

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$$

in  $\mathbb{R}$ :

$$B_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$$

### I.4.2. Definition

$(X, D)$  metrischer Raum  $Y \subseteq X, x \in X$

1.  $x$  heißt **innerer Punkt** von  $Y$

$$\exists \delta > 0 \text{ mit } B_\delta(x) \subseteq Y$$

In diesem Fall heißt eine **Umgebung** von  $x$  in  $X$

2.  $x \in X$  heißt **Berührungspunkt** von  $Y$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists y \in Y \text{ mit } d(x, y) < \varepsilon$$

(Äquivalent:  $\forall \varepsilon > 0 \quad B_\varepsilon(x) \cap Y \neq \emptyset$ )

$$\overset{\circ}{Y} = \{x \in X \mid x \text{ innerer Punkt von } Y\}$$

$$\overline{Y} = \{x \in X \mid x \text{ ist Berührungspunkt von } Y\}$$

### I.4.3. Definition

1.  $(X, d)$  metrischer Raum,  $Y \subseteq X$ . Dann heißt  $Y$  **offen** in  $X \Leftrightarrow$  jedes  $x \in Y$  ist innerer Punkt von  $Y$   
 $(\Leftrightarrow \forall x \in Y \exists \delta > 0 : B_\delta \subseteq Y)$
2.  $Y$  heißt **abgeschlossen** in  $X \Leftrightarrow$  Das Komplement  $X - Y$  ist offen in  $X$

**Bsp:**

$X = \mathbb{R}$

1. Offene Intervalle  $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$  sind offen in  $\mathbb{R}$ , denn

$$\begin{aligned} x \in (a, b), \delta = \min\{x - a, b - x\} > 0 \\ \Rightarrow (x - \delta, x + \delta) \subseteq (a, b) \end{aligned}$$

2. Abgeschlossene Intervalle  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$  sind abgeschlossen:

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \setminus [a, b] &= (-\infty, a) \cup (b, +\infty) \\ \Rightarrow (x - \delta, x + \delta) &\subseteq \mathbb{R} \setminus [a, b] \\ \Rightarrow x > b &\text{ innerer Punkt von } \mathbb{R} \setminus [a, b] \\ \text{analog } x < a &\text{ ist innerer Punkt von } \mathbb{R} \setminus [a, b] \\ \Rightarrow \mathbb{R} \setminus [a, b] &\text{ offen in } \mathbb{R} \Rightarrow [a, b] \text{ abgeschlossen in } \mathbb{R} \end{aligned}$$

### Warnung:

Offenheit ist eine Eigenschaft von Teilmengen metrischer Räume, nicht der Mengen selber. 'Y offen' sinnlos!  
! 'Y offen in X' sinnvoll! Analog für Abgeschlossen

$$X = \mathbb{R}^2$$

$$Z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$$

$$Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0, 0 < x < 1\}$$

Y offen in Z

Y nicht offen in X

### I.4.4. Beispiel

X metrischer Raum,  $x \in X, \varepsilon > 0$ . Dann ist  $B_\varepsilon^X(x)$  offen in X

#### Beweis:

zu zeigen: für jedes  $y \in B_\varepsilon(x) \exists \delta > 0 : B_\delta(y) \subseteq B_\varepsilon(x)$

$$d(x, y) < \varepsilon \Rightarrow \exists \delta > 0 : d(x, y) + \delta < \varepsilon$$

Beh:  $B_\delta(y) \subseteq B_\varepsilon(x)$

Das ist wahr, denn

$$z \in B_\delta(y) \Rightarrow d(y, z) < \delta$$

Ferner:

$$d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x) < \delta + d(y, x) < \varepsilon, \text{ d.h. } z \in B_\varepsilon(x)$$

### I.4.5. Satz

Es sei  $(X, d)$  metrischer Raum.

Dann gilt:

1.  $\emptyset$  und X sind offen in X
2. Falls  $U_0, U_1$  offen in X sind, so auch  $U_0 \cap U_1$
3. Falls  $(U_i)_{i \in I}$  eine durch I induzierte Familie von Teilmengen von X ist, so ist  $\bigcup_{i \in I} U_i$  offen in X  
'beliebige Vereinigungen offener Mengen sind offen'
4.  $\emptyset, X$  sind abgeschlossen in X
5.  $A_0, A_1$  abgeschlossen in X, dann ist  $A_0 \cup A_1$  abgeschlossen in X
6.  $(A_i)_{i \in I}, A_i$  abgeschlossen in X, so ist  $\bigcap_{i \in I} A_i$  abgeschlossen in X

**Beweis:**

1.  $\emptyset \subseteq X$  offen trivial  
 $X \subseteq X$  offen trivial

2. Sei  $x \in U_0 \cap U_1$  Dann existieren Bälle

$$B_{\varepsilon_1}^X(x) \subseteq U_1 \quad B_{\varepsilon_0}^X(x) \subseteq U_0$$

Wähle nun  $\varepsilon = \min\{\varepsilon_0, \varepsilon_1\} > 0$

$$\Rightarrow B_\varepsilon(x) \subseteq U_0 \cap U_1$$

$$\Rightarrow x \text{ innerer Punkt von } U_0 \cap U_1$$

3. Sei  $x \in \bigcup_{i \in I} U_i \subseteq X$

$$\Rightarrow \exists i \in I : x \in U_i, \text{ weil } U_i \subseteq X \text{ offen, gibt es } \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subseteq U_i.$$

Aber

$$U_i \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i, \text{ daher: } B_\varepsilon(x) \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$$

4.

$$\emptyset = X \setminus \underbrace{X}_{\text{offen nach 1)} \Rightarrow \emptyset \text{ abgeschlossen in } X$$

$$X = X \setminus \underbrace{\emptyset}_{\text{offen}} \Rightarrow X \subseteq X \text{ abgeschlossen}$$

5.

$$X \setminus (A_0 \cup A_1) = \underbrace{(X \setminus A_0)}_{\text{offen in } X} \cap \underbrace{(X \setminus A_1)}_{\text{offen in } X}$$

offen in  $X$

$$\Rightarrow A_0 \cup A_1 \subseteq X \text{ abgeschlossen}$$

6.

$$X \setminus \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} \underbrace{X \setminus A_i}_{\text{offen in } X}$$

offen nach 3)

$$\Rightarrow \bigcap_{i \in I} A_i \text{ abgeschlossen in } X$$

**Bemerkung:**

Beliebige Durchschnitte offener Mengen sind i.A. nicht offen

**Beispiel:**

$$U_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \text{ ist offen in } \mathbb{R}$$

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n = \{0\} \text{ ist nicht offen in } \mathbb{R}$$

#### I.4.6. Satz

$X$  metrischer Raum,  $Y \subseteq X$ . Dann sind Äquivalent:

1.  $Y \subseteq X$  abgeschlossen in  $X$
2. Für jede Folge  $(y_n)$  mit  $y_n \subseteq Y$ , welche in  $X$  konvergiert, gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \in Y$$

**Beweis:**

**Vorbemerkung:**

$y \in X$  ist genau dann ein Berührungspunkt von  $Y \subseteq X$ , wenn es eine Folge  $(y_n)_n$  gibt mit  $(y_n) \in Y$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$

**Beweis der Vorbemerkung:**

" $\Leftarrow$ ": Ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \quad y_n \in Y$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n : d(y, y_n) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 y_n \in B_\varepsilon(y) \cap Y \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow y \text{ ist Berührungspunkt von } Y$$

" $\Rightarrow$ ":

$y$  Berührungspunkt von  $Y$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists y' \in Y : d(y, y') < \varepsilon$$

Wähle für  $n \in \mathbb{N}$  ein  $y_n \in Y$  mit  $d(y, y_n) < \frac{1}{n}$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{y_n}_{\in Y} = y$$

□

**Beweis des Satzes:**

Sei 1) nicht erfüllt. Dann:

$$\Leftrightarrow Y \subseteq X \text{ nicht abgeschlossen in } X$$

$$\Leftrightarrow X \setminus Y \text{ nicht offen in } X$$

$$\Leftrightarrow \exists y \in X \setminus Y, y \text{ kein innerer Punkt von } X \setminus Y$$

$$\Leftrightarrow \exists y \in X \setminus Y, \forall \varepsilon > 0 \quad B_\varepsilon(y) \not\subseteq X \setminus Y$$

$$\Leftrightarrow \exists y \in X \setminus Y, \forall \varepsilon > 0 \quad B_\varepsilon(y) \cap Y \neq \emptyset$$

$$\Leftrightarrow \exists y \in X \setminus Y, y \text{ ist Berührungspunkt von } Y$$

$$\stackrel{\text{Vorbem.}}{\Leftrightarrow} \exists \text{ Folge } y_n \text{ in } Y, y_n \rightarrow y \notin Y$$

und dazu ist Äquivalent, dass 2) nicht erfüllt ist.

□

#### I.4.7. Satz

$(X, d_X), (Y, d_Y)$  metrischer Räume,  $f : X \rightarrow Y$  Abbildung. Dann sind Äquivalent:

1.  $f$  ist folgenstetig.
2. Für jede abgeschlossene Teilmenge  $A \subseteq Y$  ist  $f^{-1}(A) \subseteq X$  abgeschlossen.
3. Für jede offene Teilmenge  $U \subseteq Y$  ist  $f^{-1}(U)$  offen in  $X$
4.  $f$  ist  $\varepsilon$ - $\delta$ -stetig

**Beweis:**1  $\Rightarrow$  2: Sei  $f$  folgenstetig,  $A \subseteq Y$  abgeschlossen.zu zeigen: (wegen I.4.7) ist  $x_n \in f^{-1}(A)$  und  $x_n \rightarrow x$ , so gilt  $x \in f^{-1}(A)$ 

$$x_n \rightarrow x \Rightarrow \underbrace{f(x_n)}_{\in A} \rightarrow \underbrace{f(x)}_{\in A} \quad (f \text{ ist folgenstetig})$$

$$A \subseteq Y \text{ abgeschlossen} \Rightarrow f(x) \in A$$

$$\Rightarrow x \in f^{-1}(A)$$

2  $\Rightarrow$  3:

$$U \subseteq Y \text{ offen} \Rightarrow Y \setminus U \subseteq Y \text{ abgeschlossen}$$

$$\stackrel{2)}{\Rightarrow} f^{-1}(Y \setminus U) \subseteq X \text{ abgeschlossen.}$$

$$f^{-1}(Y \setminus U) = X \setminus f^{-1}(U) \Rightarrow f^{-1}(U) \subseteq X \text{ offen}$$

3  $\Rightarrow$  4: Sei  $x \in X$ ,  $\varepsilon > 0$ 

$$\Rightarrow B_\varepsilon^Y(f(x)) \subseteq Y \text{ offen in } Y$$

$$\stackrel{3)}{\Rightarrow} f^{-1}(B_\varepsilon^Y(f(x))) \subseteq X \text{ offen}$$

$$\stackrel{\text{def. offen}}{\Rightarrow} \exists \delta > 0 \ B_\delta^X(x) \subseteq f^{-1}(B_\varepsilon^Y(f(x)))$$

Das heißt: ist  $x' \in X$  mit  $d(x, x') < \delta$ 

$$\Rightarrow d(f(x), f(x')) < \varepsilon$$

4  $\Rightarrow$  1: Sei  $f$   $\varepsilon$ - $\delta$ -stetig und  $(x_n)_n$  Folge in  $x$ .  $x_n \rightarrow x \in X$ . Dann gilt  $f(x_n) \rightarrow f(x)$ , denn:Sei  $\varepsilon > 0$ 

$$\Rightarrow \exists \delta > 0 : x' \in X \ d(x, x') < \delta$$

$$\Rightarrow d(f(x), f(x')) < \varepsilon \Rightarrow \text{weil } x_n \rightarrow x : \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : d(x, x_n) < \delta$$

$$\Rightarrow \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : d(f(x), f(x_n)) < \varepsilon \text{ d.h. } f(x_n) \rightarrow f(x)$$

**I.4.8. Beispiel** $(V, \|\cdot\|)$  normierter Vektorraum

$$\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig, denn } \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$$

Also sind die Mengen (für  $x \in V$ ,  $r \geq 0$ )

$$\{y \in V \mid \|x - y\| \leq r\} \subseteq V \text{ und } \{y \in V \mid \|x - y\| = r\} \subseteq V$$

abgeschlossen.

**I.5. Kompaktheit****Erinnerung: Satz von Bolzano-Weierstraß**'Jede beschränkte Folge in  $\mathbb{R}$  besitzt eine konvergente Teilfolge'

- $\rightarrow$  Cauchy-Konvergenzkriterium

- → Satz vom Minimum und Maximum (Wenn  $f : A \rightarrow B$  stetig, dann gilt:  $f$  nimmt Minimum und Maximum an)
- → Mittelwertsatz der Differentialrechnung
- → Satz:  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig  $\Rightarrow f$  ist gleichmäßig stetig.  
 $\Rightarrow$  stetige Funktionen sind Riemann-integrierbar

### I.5.1. Satz von Bolzano-Weierstraß im $\mathbb{R}^n$

Jede beschränkte Folge in  $\mathbb{R}^n$  besitzt eine konvergente Teilfolge.

**Beweis:**

Sei  $(x(k))_k$  Folge in  $\mathbb{R}^n$ ,  $\|x(k)\|_2 \leq C \quad \forall k$ .

$x_i(k) \quad i = 1, \dots, n$  Komponenten

$$\Rightarrow \underbrace{|x_i(k)|}_{\text{Folge in } \mathbb{R}} \leq \|x(k)\|^2 \leq C$$

Nach Bolzano-Weierstraß gibt es eine Teilfolge  $(x(k_l))_l$  von  $x(k)$ , so dass  $x_1(k_l)$  (in  $\mathbb{R}$ ) Konvergiert Nenne

$$x(1, l) = x(k_l)$$

1. Komponente    2. Komponente     $n$ -te Komponente

$$x(k_1) = x(1, 1) \quad x(2, 1) \quad x(n, 1)$$

$$x(k_2) = x(1, 2) \quad x(2, 2) \quad x(n, 2)$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$\text{Teilfolge} \quad (x(1, k))_k \quad (x_1(1, k))_k \text{ Konvergiert}$$

$$\text{Teilfolge} \quad (x(2, k))_k \quad (x_2(2, k))_k \text{ Konvergiert}$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$\text{Teilfolge} \quad (x(n, k))_k \quad (x_n(n, k))_k \text{ Konvergiert}$$

$\Rightarrow$  Alle Komponentenfolgen von  $(x(n, k))_k$  konvergieren

$\Rightarrow (x(n, k))_k$  ist Konvergent

□

### I.5.2. Definition

Ein metrischer Raum  $X$  heißt **folgenkompakt**, falls für jede Folge  $(x_n)_n$  in  $X$  eine konvergente Teilfolge hat.

Eine Teilmenge  $Y \subseteq X$  eines metrischen Raumes heißt folgenkompakt, falls jede Folge in  $(y_n)_n$  in  $Y$  eine (in  $Y$ !) konvergente Teilfolge besitzt.

( $\Leftrightarrow Y$  mit der von  $X$  eingeschränkten Metrik, ist folgenkompakt)

### I.5.3. Beispiel:

1.  $[a, b]$  folgenkompakt

2.  $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 \leq C\}$  ist folgenkompakt:  $(x_k)_k$  Folge in  $X$

$$\stackrel{I.5.1}{\Rightarrow} \exists \text{ TF } x_k \rightarrow x \in \mathbb{R}^n$$

aber  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  ist abgeschlossen, also  $x \in X$

3.  $(0, 1), (0, 1]$  nicht folgenkompakt (betrachte Folge  $(\frac{1}{n})_n$ )
4.  $\mathbb{R}$  nicht folgenkompakt (Die Folge  $(n)_n$  hat keine Konvergente TF)
5.  $\mathbb{Q} \cap [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$  nicht folgenkompakt.

Ist  $x \in [0, 1]$ , so gibt es eine Folge  $x_n \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$  mit  $x_n \rightarrow x$

Dann hat  $x_n$  keine in  $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$  konvergente Teilfolge (falls  $x$  irrational)

#### I.5.4. Satz

$X$  metrischer Raum

1. Ist  $X$  folgenkompakt, so ist  $X$  vollständig
2.  $X$  folgenkompakt,  $Y \subseteq X$  abgeschlossen  $\Rightarrow Y$  folgenkompakt
3.  $Y \subseteq X$ ,  $Y$  folgenkompakt  $\Rightarrow Y \subseteq X$  abgeschlossen

#### Beweis:

1. Sei  $(x_n)_n$  Cauchyfolge in  $X$

$X$  folgenkompakt  $\Rightarrow$  es gibt konvergente Teilfolge  $x_{n_k} \rightarrow x \in X$

#### Beh.

$x_n \rightarrow x$

Denn

$$d(x, x_n) \leq d(x, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_n)$$

Sei  $\varepsilon > 0$  Wähle  $n_0 \quad \forall n, m \geq n_0 : d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$

Wähle  $k : n_k \geq n_0$

$$\text{für } n \geq n_k \quad d(x, x_n) \leq \underbrace{d(x, x_{n_k})}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{d(x_{n_k}, x_n)}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

2. Sei  $(y_n)_n$  Folge in  $Y \subseteq X$

$X$  folgenkompakt  $\Rightarrow \exists$  TF  $y_{n_k}$ , welche gegen ein  $x \in X$  konvergiert

Weil  $Y \subseteq X$  abgeschlossen, gilt

$$x = \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} \in Y \quad \Rightarrow \quad (y_{n_k})_k \text{ ist in } Y \text{ konvergent}$$

$\Rightarrow Y$  folgenkompakt

3. zu zeigen: Ist  $(y_n)_k$  Folge in  $Y$ .  $y_n \rightarrow x \in X \Rightarrow x \in Y$   
 $(y_n)$  ist Cauchyfolge.

Nach 1) ist  $Y$  vollständig, dh  $\exists z \in Y : y_n \rightarrow z$

$$\Rightarrow x = z, \text{ daher } x \in Y$$

#### I.5.5. Satz von Heine-Borel

Eine Teilmenge  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  ist folgenkompakt  $\Leftrightarrow X$  ist beschränkt und abgeschlossen in  $\mathbb{R}^n$

**Beweis:**

' $\Rightarrow$ ': Sei  $X$  folgenkompakt. Dann folgt aus I.5.4 3):  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  abgeschlossen

Wäre  $X$  nicht beschränkt, dann gäbe es zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  ein  $x_n \in X$  mit  $\|x\|_2 \geq n$

Die Folge  $(x_n)$  kann dann keine konvergente Teilfolge enthalten, also kann  $X$  nicht folgenkompakt sein!

' $\Leftarrow$ ': Sei  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  beschränkt und abgeschlossen

Sei  $(x_n)_n$  Folge in  $X$ .

Die Folge  $(x_n)_n$  ist beschränkt.

$\stackrel{I.5.1}{\Rightarrow}$  es gibt konvergente Teilfolge  $x_{n_k} \rightarrow x \in \mathbb{R}^n$

Weil  $X$  abgeschlossen in  $\mathbb{R}^n$ , ist  $x \in X$

$\Rightarrow X$  folgenkompakt

□

**Beispiele:**

•  $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^n$  abgeschlossene Einheitskugel

•  $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^n$  Einheitssphäre

$\Rightarrow D^n, S^{n-1}$  folgenkompakt, denn  $D^n, S^{n-1}$  beschränkt und:

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \|x\|_2 \quad f \text{ stetig}$$

$$D^n = f^{-1}(\underbrace{[0, 1]}_{\text{abg. in } \mathbb{R}}) \quad S^{n-1} = f^{-1}(\underbrace{\{1\}}_{\text{abg. in } \mathbb{R}})$$

$\Rightarrow D^n, S^{n-1}$  abgeschlossen

**I.5.6. Satz**

$X, Y$  metrische Räume,  $f: X \rightarrow Y$  stetig. Sei  $X$  folgenkompakt

$\Rightarrow f(X) \subseteq Y$  ist folgenkompakt

**Beweis:**

Sei  $y_n$  Folge in  $f(X)$

$$\forall n \exists x_n \in X \text{ mit } f(x_n) = y_n$$

$(x_n)_n$  Folge in  $X$

$X$  folgenkompakt  $\Rightarrow \exists$  konvergente Teilfolge  $x_{n_k} \rightarrow x \in X$

$$f \text{ stetig} \Rightarrow y_{n_k} = f(x_{n_k}) \rightarrow f(x) \in f(X)$$

Damit folgt die Behauptung

□

**I.5.7. Satz vom Minimum und Maximum**

$X$  folgenkompakt,  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  stetig.

Dann existieren  $x_{\min}, x_{\max} \in X$ , so dass für alle  $x \in X$  gilt:

$$f(x_{\min}) \leq f(x) \leq f(x_{\max})$$



**Beweis:**

$f(X) \subseteq \mathbb{R}$  ist folgenkompakt (Satz I.5.6)

Nach I.5.5 ist  $f(X) \subseteq \mathbb{R}$  abgeschlossen und beschränkt.

Seien  $c, C \in \mathbb{R}$  definiert durch

$$c := \inf f(x)$$

$$C := \sup f(x)$$

Dann sind nach Ana I  $c, C$  Berührungspunkte um  $f(x)$

$$f(x) \text{ abgeschlossen} \Rightarrow c, C \in f(x)$$

Wähle nun  $x_{\min}, x_{\max} \in X$  mit

$$f(x_{\min}) = c, f(x_{\max}) = C$$

□

**I.5.8. Satz**

Je zwei Normen auf  $\mathbb{R}^n$  sind äquivalent

**Beweis:**

Da die Äquivalenz von Normen die Äquivalenzrelation ist, genügt es zu zeigen, dass jede Norm auf  $\mathbb{R}^n$  zur  $l^2$ -Norm äquivalent ist.

Sei  $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  diese Norm.

zu zeigen:  $\exists c, C > 0 \forall x \in \mathbb{R}^n : c\|x\|_2 \leq \|x\| \leq C\|x\|_2$

Sei

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, \quad x_i \in \mathbb{R}$$

Dann gilt:

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n \|x_i e_i\| = \sum_{i=1}^n |x_i| \|e_i\| \leq \underbrace{\left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{\|x\|_2} \cdot \underbrace{\left( \sum_{i=1}^n \|e_i\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{=: C > 0} = C\|x\|_2$$

Weiter ist

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \|x\|$$

ist stetig, denn  $(\|x\| - \|y\|) \leq \|x - y\| \leq C\|x - y\|_2$

Nach dem Satz vom Minimum und Maximum gibt es  $x_{\min} \in S^{n-1}$  mit:

$$\forall x \in S^{n-1} : \|x\| \geq \|x_{\min}\| =: c > 0 \text{ (da } x_{\min} \neq 0)$$

Sei  $y \in \mathbb{R}^n$  beliebig aber  $y \neq 0$ . Dann folgt:

$$\|y\| = \left\| \underbrace{\|y\|_2}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{\frac{y}{\|y\|_2}}_{\in S^{n-1}} \right\| = \|y\|_2 \cdot \left\| \frac{y}{\|y\|_2} \right\| \geq \|y\|_2 \cdot \|x_{\min}\| = c \cdot \|y\|_2$$

□

### I.5.9. Erinnerung/Definition

$X$  metrischer Raum,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **gleichmäßig stetig**, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, x' \in X : \|x - x'\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x')\| < \varepsilon$$

**Behauptung:**

$X$  folgenkompakt,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  stetig  $\Rightarrow f$  ist gleichmäßig stetig

$$X \xrightarrow{f} \mathbb{R} \text{ stetig, } \varepsilon > 0$$

$$x \in X : U_x = \{x' \in X \mid |f(x') - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\} = f^{-1}\left(\left(f(x) - \frac{\varepsilon}{2}, f(x) + \frac{\varepsilon}{2}\right)\right) \stackrel{\text{offen, } f \text{ stetig}}{\subseteq} X$$

Beispiel:  $f(x) = \frac{1}{x}$

Um zu beweisen, dass  $f$  glm stetig ist, brauchen wir:

$$\exists \delta > 0 \forall y \in X \text{ gibt es } x \in X : B_\delta(y) \subseteq U_x$$

Denn

$$\begin{aligned} d(y, y') < \delta &\Rightarrow y' \in B_\delta(y) \subseteq U_x \\ &\Rightarrow |f(y') - f(y)| \leq \underbrace{|f(y') - f(x)|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|f(x) - f(y)|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon \end{aligned}$$

### I.5.10. Definition

$X$  metrischer Raum, Eine **offene Überdeckung** von  $X$  ist eine Familie  $U = (U_i)_{i \in I}$ ,  $U_i \subseteq X$  offen für alle  $i \in I$  und es gilt:

$$\bigcup_{i \in I} U_i = X$$

**Beispiel:**

$$\begin{aligned} f : X &\rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig, } x \in X, \varepsilon > 0 \\ U_x &= \{x' \in X \mid |f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2}\} \subseteq X \\ (U_x)_{x \in X} &= U \text{ offene Überdeckung von } X \end{aligned}$$

### I.5.11. Satz Lebesgue-Lemma

Sei  $X$  ein folgenkompakter, metrischer Raum und  $U = (U_i)_{i \in I}$  offene Überdeckung von  $X$ . Dann existiert  $\delta > 0$ , so dass gilt:

$$\forall x \in X \exists i \in I : B_\delta(x) \subseteq U_i$$

Ein solches  $\delta$  heißt **Lebesgue Zahl** der Überdeckung von  $U$

**Beweis:**

Durch Widerspruch:

Annahme:  $X$  folgenkompakt,  $U = (U_i)_{i \in I}$  offene Überdeckung, welche keine Lebesgue-Zahl hat

$\Rightarrow \forall \delta > 0 \exists x \in X : B_\delta(x)$  ist in keiner der Mengen  $U_i$  enthalten

$\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in X : B_{\frac{1}{n}}(x_n)$  ist in keinem  $U_i, i \in I$  enthalten.

Da  $X$  folgenkompakt ist, gibt es eine konvergente Teilfolge  $(x_{n_k})_k$  so dass  $B_{\frac{1}{n_k}}(x_{n_k})$  in keinem  $U_i$  enthalten ist.

$$x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \in X \Rightarrow \exists i_0 \in I, x \in U_{i_0} \subseteq X \text{ offen} \quad \exists \varepsilon > 0 \quad B_\varepsilon(x) \subseteq U_{i_0}$$

Das ist ein Widerspruch, denn

Wähle  $h$  so, dass  $\frac{1}{n_k} < \varepsilon$  und  $d(x, x_{n_k}) < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\Rightarrow B_{\frac{1}{n_k}}(x_{n_k}) \subseteq B_\varepsilon(x) = U_{i_0}$$

$$d(y, x_{n_k}) < \frac{1}{n_k} \Rightarrow d(y, x) \leq d(y, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) < \frac{1}{n_k} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \nmid$$

□

### I.5.12. Korollar

$X$  folgenkompakt

$$f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig} \Rightarrow f \text{ gleichmäßig stetig}$$

**Beweis:**

s.o

### I.5.13. Definition

$X$  metrischer Raum,  $U = (U_i)_{i \in I}$  eine offene Überdeckung. Eine **Teilüberdeckung von  $U$**  ist eine offene Überdeckung  $V = (V_j)_{j \in J}$  von  $X$ , so dass gilt:

$$\forall j \in J \exists i \in I : V_j \subseteq U_i$$

### I.5.14. Definition

Ein metrischer Raum heißt **überdeckungskompakt** (oder **Kompakt**) falls **jede** offene Überdeckung  $U = (U_i)_{i \in I}$  eine endliche Teilüberdeckung  $V = (V_j)_{j \in J}$  besitzt. (d.h die Indexmenge  $J$  ist endlich)

### I.5.15. Satz von Heine-Borel

$X$  metrischer Raum. Dann sind äquivalent:

1.  $X$  folgenkompakt
2.  $X$  ist überdeckungskompakt

**Beweis:**

2  $\Rightarrow$  1: Wir zeigen nun:

$$\text{überdeckungskompakt} \Rightarrow \text{folgenkompakt}$$

Durch Widerspruch: Sei  $X$  überdeckungskompakt, und  $(x_n)_n$  Folge in  $X$ , welche keine konvergente Teilfolge hat.

Beobachte:  $(x_n)_n$  hat keine Konvergente Teilfolge

$$\Rightarrow \forall x \in X \exists \varepsilon > 0, \text{ so dass } x_n \in B_\varepsilon(x) \text{ nur für endlich viele } n \text{ gilt}$$

$$\Rightarrow \forall x \in X \exists \varepsilon_x > 0, \text{ so dass } x_n \in B_{\varepsilon_x}(x) \text{ nur für unendliche viele } n \in \mathbb{N} \text{ gilt.}$$

Dann ist:

$$U = (B_{\varepsilon_x}(x))_{x \in X}$$

eine offene Überdeckung von  $X$

Weil  $X$  überdeckungskompakt ist, gibt es endliche Teilüberdeckung

$$\Rightarrow \exists y_1, \dots, y_r \in X \text{ mit:}$$

$$X = B_{\varepsilon_{y_1}}(y_1) \cup \dots \cup B_{\varepsilon_{y_r}}(y_r)$$

□

**Bemerkung:**

$X$  metrischer Raum. Man kann zeigen, dass folgendes äquivalent ist:

1.  $X$  kompakt
2.  $X$  ist vollständig und total beschränkt
3.  $X$  hat folgende Eigenschaft:

Sind  $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$  abgeschlossene Teilmengen von  $X$  und  $A_n \neq \emptyset \forall n$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$$

ohne Beweis

1  $\Rightarrow$  2: Wir setzen hierfür Lemma I.5.16 voraus.  $X$  folgenkompakt,  $U = (U_i)_{i \in I}$  offene Überdeckung von  $X$

zu zeigen: Es gibt endliche Teilüberdeckung  $V = (V_j)_{j \in J}$

Sei  $\delta > 0$  eine Lebesgue-Zahl von  $U$  (existiert nach I.5.11)

$$5.16 \Rightarrow \exists x_1, \dots, x_r \in X \quad \bigcup_{j=1}^r B_\delta(x_j) = X$$

$$\Rightarrow \forall j = 1, \dots, r \exists i, j \in I : \quad B_\delta(x_j) \subseteq U_{ij}$$

$$\Rightarrow X = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_r}$$

□

**I.5.16. Lemma**

$X$  folgenkompakter metrischer Raum.

Dann ist  $X$  **total beschränkt**, d.h.  $\forall \varepsilon > 0$  gibt es endlich viele  $x_1, \dots, x_r \in X$ , so dass:

$$\bigcup_{i=1}^r B_\varepsilon(x_i) = X$$

**Beweis:**

Wir zeigen:

$$X \text{ nicht total beschränkt} \Rightarrow X \text{ nicht folgenkompakt}$$

Sei  $X$  also nicht total beschränkt.  $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ , so dass gilt:

Sind  $x_1, \dots, x_r \in X$  beliebig

$$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^r B_\varepsilon(x_i) \neq X$$

$$\Rightarrow X \setminus \bigcup_{i=1}^r B_\varepsilon(x_i) \neq \emptyset$$

Wähle  $x_1 \in X \Rightarrow X \setminus B_\varepsilon(x_1) \neq \emptyset$

Wähle  $x_2 \in X \setminus B_\varepsilon(x_1) \Rightarrow X \setminus (B_\varepsilon(x_1) \cup B_\varepsilon(x_2)) \neq \emptyset$

Wähle  $x_3 \dots$

Wähle  $x_r \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{r-1} B_\varepsilon(x_i)$

$\Rightarrow (x_r)_r$  Folge in  $X$

Für  $n \neq m$  gilt:

$$d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$$

Dann ist  $n > m$ , so ist nach Konstruktion  $x_n \notin B_\varepsilon(x_m)$  und dann kann keine Teilfolge von  $(x_r)_r$  eine Cauchyfolge sein.

$\Rightarrow (x_r)_r$  hat keine konvergente Teilfolge

$X$  nicht folgenkompakt

□

## II. Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$

### II.1. Die Definition

Ziel:  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$

Wann heißt  $f$  differenzierbar?

Was ist die Ableitung von  $f$ ?

#### II.1.1. Notation

$U \subseteq \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^n.$

$$x + U = \{x + y \mid y \in U\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

Analysis I:  $n = m = 1, U \subseteq \mathbb{R}$  offen,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}, x \in U. f$  diffbar  $\Leftrightarrow$  der Grenzwert

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}(f(x+h) - f(x)) \in \mathbb{R}$$

existiert.

Verallgemeinerung:  $\mathbb{R} \supseteq U \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$  ohne Problem.

$n > 1$  problematisch, denn man kann nicht durch Elemente  $h \in \mathbb{R}^n$  dividieren.

Umformulierung: (aus Analysis I)

$U \subseteq \mathbb{R}$  offen,  $x \in U, f : U \rightarrow \mathbb{R}$

$$A : -x + U \rightarrow \mathbb{R} \quad (-x + U = \{h \in \mathbb{R} \mid h + x \in U\})$$

definiert durch:

$$A(h) := \begin{cases} \frac{1}{h}(f(x+h) - f(x)), & \text{falls } h \neq 0 \\ f'(x), & \text{falls } h = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow A$  stetig bei 0

$$\forall h \in -x + U \quad f(x+h) = f(x) + A(h)h$$

Umgekehrt: Nimm an, es gibt Funktion  $A : -x + U \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass

1.  $A$  stetig bei 0

2.  $f(x+h) = f(x) + A(h)h$

$\Rightarrow f$  differenzierbar bei  $x$ , und  $f'(x) = A(0)$

**Beweis:**

$$\frac{1}{h}(f(x+h) - f(x)) = \frac{1}{h}(f(x) + A(h)h - f(x)) = \frac{1}{h}A(h)h = A(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} A(0)$$

#### II.1.2. Bemerkung

1. für  $n = m = 1$  erhält man den bekannten Begriff aus Ana I

2. hier ist  $\text{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$  isomorph zu  $\mathbb{R}^{m \times n}$  mit irgendeiner Norm ausgestattet (welche, ist gleichgültig, weil alle Normen Äquivalent sind)

$$3. f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$f$  diffbar bei  $x \Leftrightarrow f$  diffbar bei  $x$  ( $\forall i \in \{1, \dots, m\}$ )

und

$$Df(x) = \begin{pmatrix} Df_1(x) \\ \vdots \\ Df_n(x) \end{pmatrix} \quad Df(x) \in \text{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$$

4. Wir identifizieren Matrizen und lineare Abbildungen mittels Isomorphismen

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{m,n}(\mathbb{R}) &\rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m) \\ A &\mapsto (x \mapsto A \cdot x) \end{aligned}$$

### II.1.3. Definition

$U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$   $x \in U$ .  $f$  heißt **differenzierbar** bei  $x$ , falls eine Funktion  $A : -x + U \rightarrow \text{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$  existiert, so dass gilt:

1.  $A$  stetig bei 0
2.  $\forall h \in -x + U :$

$$\underbrace{f(x+h)}_{\in \mathbb{R}^m} = \underbrace{f(x)}_{\in \mathbb{R}^m} + \underbrace{A(h)}_{\in \text{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})} \underbrace{h}_{\in \mathbb{R}^n}$$

Die Matrix  $A(0) \in \text{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$  heißt **Ableitung** von  $f$  in  $x$  und wird mit

$$Df(x) \in \text{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$$

bezeichnet

Alternative Bezeichnung: 'total differenzierbar'

$$Df(x) = \text{'Totales Diferential'}$$

### II.1.4. Satz

$U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $x \in U, f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  sei differenzierbar. Sei  $v \in \mathbb{R}^n$  setze  $g_v(t) = f(x + tv)$  mit

$$g_v : \{t \in \mathbb{R} \mid x + tv \in U\} \rightarrow \mathbb{R}^m$$

Dann gilt:

$$Df(x)v = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (g_v(t) - g_v(0))$$

**Beweis:**

Schreibe  $f(x+h) = f(x) + A(h)h$ .  $A$  stetig bei 0 und  $A(0) = Df(x)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{t} (g_v(t) - g_v(0)) &= \frac{1}{t} (f(x+tv) - f(x)) \\ &= \frac{1}{t} (f(x) + A(tv)tv - f(x)) \\ &= \frac{1}{t} A(tv)tv \\ &= \frac{1}{t} t A(tv)v = A(tv)v \longrightarrow A(0)v = Df(x)v \end{aligned}$$

$t \mapsto A(tv)v$  ist stetig bei 0

□

**Bemerkung:**

In Def II.1.2 ist  $A(h)$  **nicht** eindeutig durch  $f$  bestimmt. Aber  $A(0)$  ist eindeutig bestimmt, nach II.1.3

**II.1.5. Definition**

$U, x, f, v$  wie in Satz II.1.3. Dann heißt  $Df(x)v$  die **Richtungsableitung** von  $f$  in Richtung  $v$ .

$$D_v f(x) = Df(x)v$$

**Bemerkung:**

Ist  $f$  diffbar bei  $x$ , so ist  $v \mapsto g'_v(0) = D_v f(x)$  linear.

**Beispiel:**

$$f(x) = \langle x, x \rangle = \|x\|_2^2$$

$$f(x+h) = \langle x, x \rangle + \langle h, h \rangle + 2\langle x, h \rangle = f(x) + \langle h, h \rangle + 2\langle x, h \rangle$$

$$A(h) \in \text{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$$

$$A(h)h = \langle h, h \rangle + 2\langle x, h \rangle$$

**II.1.6. Satz**

die Numerierung  
ist hier nicht richtig

$U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $x \in U$ ,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ .  $C \in \text{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$ .

Es sind Äquivalent:

1.  $f$  ist differenzierbar bei  $x$ , und  $Df(x) = C$
2. Es gilt:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - C \cdot h\|}{\|h\|} = 0$$

2 besagt, dass  $h \mapsto f(x) + C \cdot h$  eine gute Approximation an  $h \mapsto f(x+h)$  ist)

Außerdem liefern Satz II.1.8 und II.1.5 ein 'Kochrezept' um die differenzierbarkeit von  $f$  nachzuprüfen:

1. Berechne  $D_v f(x)$  für alle  $v \in \mathbb{R}^n$
2. Finde Matrix  $C \in \text{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$  mit  $(v = D_v f(x), \forall v \in \mathbb{R}^n)$
3. Prüfe

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\|h\|} \|f(x+h) - f(x) - C \cdot h\| = 0$$

$$\Rightarrow Df(x) = C$$

**Beweis:**

1  $\Rightarrow$  2: Sei  $A : -x + U \rightarrow \text{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$  mit

$$f(x+h) = f(x) + A(h)h \quad (\forall h)$$

$A$  stetig bei 0 und  $A(0) = C$

$$\Rightarrow \frac{\|f(x+h) - f(x) - C \cdot h\|}{\|h\|} = \frac{A(h)h - C \cdot h}{\|h\|} \leq \underbrace{\|A(h) - C\|}_{\substack{\rightarrow 0 \\ \text{für } h \rightarrow 0 \\ (A \text{ stetig bei } 0)}} \|h\|$$



$2 \Rightarrow 1$ :

Vorbemerkung:  $h \in \mathbb{R}^n, v \in \mathbb{R}^n, h \neq 0$ . Dann ist durch

$$y \mapsto \frac{\langle h, y \rangle}{\|h\|^2} v, \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

eine lineare Abbildung gegeben, welche mit  $h \mapsto v$

Setze  $\varphi(h) = f(x+h) - f(x) - C \cdot h, \varphi : -x + U \rightarrow \mathbb{R}^m$

Nach Voraussetzung 2) gilt:

$$\frac{\|\varphi(h)\|}{\|h\|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

Definiere Funktion  $A : -x + U \rightarrow \text{Mat}_{m,n}(\mathbb{R}), A(0) = C \quad h \neq 0$

Sei  $A(h)$  die Matrix, welche die lineare Abbildung

$$y \mapsto C \cdot y + \frac{\langle h, y \rangle}{\|h\|^2} \varphi(h)$$

darstellt, wobei  $\varphi(h) = A(h)y$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(x) + A(h)h &= f(x) + C \cdot h + \frac{\langle h, h \rangle}{\|h\|^2} \varphi(h) \\ &= f(x) + C \cdot h + \varphi(h) \\ &= f(x+h) \end{aligned}$$

Ferner ist  $A$  stetig bei 0, denn

$$\begin{aligned} \|A(h) - A(0)\| &= \sup_{\|y\| \leq 1} \|A(h)y - A(0)y\| \\ &= \sup_{\|y\| \leq 1} \left\| Cy + \frac{\langle h, y \rangle}{\|h\|^2} \varphi(h) - Cy \right\| \\ &= \sup_{\|y\| \leq 1} \frac{|\langle h, y \rangle|}{\|h\|^2} \|\varphi(h)\| \\ &\leq \sup_{\|y\| \leq 1} \frac{\|h\| \|y\|}{\|h\|^2} \|\varphi(h)\| \\ &= \frac{\|\varphi(h)\|}{\|h\|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow f$  differenzierbar bei  $x$

$$Df(x) = C$$

### II.1.7. Definition

$U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $x \in U, f : \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Die  $i$ -te partielle Ableitung von  $f$  bei  $x$  ist

$$D_i f(x) := D_{e_i} f(x) \quad (i = 1, \dots, n)$$

Man schreibt oft auch

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(x) := D_i f(x)$$

Es gilt folgendes:

Wenn  $f$  differenzierbar bei  $x$  ist, so gilt:

Der  $(i, j)$ te Eintrag von  $Df(x)$  ist

$$(Df(x))_{i,j} = D_j f_i(x) \quad i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$$

$$Df(x) = \begin{pmatrix} D_1 f_1(x) & \dots & D_n f_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ D_1 f_m(x) & \dots & D_n f_m(x) \end{pmatrix} \quad (\text{Jacobi-Matrix})$$

Wie berechnet man  $D_j f_i(x)$ ?

$$D_j f_i(x) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f_i(x + t e_j) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f_i(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + t, x_{j+1}, \dots, x_n)$$

**Beispiel:**

$U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \neq 0\}$  offen in  $\mathbb{R}^2$

$$q(x_1, x_2) = \frac{x_1}{x_2}$$

Berechnung der partiellen Ableitungen:

$$D_1 q(x_1, x_2) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} q(x_1 + t, x_2) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \frac{x_1 + t}{x_2} = \frac{1}{x_2} \left( = \frac{d}{dx_2} \frac{x_1}{x_2} \right)$$

$$D_2 q(x_1, x_2) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} q(x_1, x_2 + t) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \frac{x_1}{x_2 + t} = \left. \frac{-x_1}{(x_2 + t)^2} \right|_{t=0} = -\frac{x_1}{x_2^2} \left( = -\frac{d}{dx_2} \frac{x_1}{x_2} \right)$$

$\Rightarrow$  falls  $q$  diffbar ist, so muss

$$Dq(x_1, x_2) = \left( \frac{1}{x_2}, -\frac{x_1}{x_2^2} \right)$$

Ist  $q$  diffbar?

$x = (x_1, x_2) \in U$  fest,  $h = (h_1, h_2) \in -x + U$ . Setze

$$A_x(h) := \left( \frac{1}{x_2 + h_2}, \frac{-x_1}{x_2(x_2 + h_2)} \right)$$

Dann gilt  $q(x + h) = q(x) + A_x(h)h$ , denn

$$\begin{aligned} q(x) + A_x(h)h &= \frac{x_1}{x_2} + \left( \frac{h_1}{x_2 + h_2} - \frac{x_1 h_1}{x_2(x_2 + h_2)} \right) \\ &= \frac{x_1(x_2 + h_2) + x_2 h_1 - x_1 h_1}{x_2(x_2 + h_2)} \\ &= \frac{x_1 x_2 + x_2 h_1}{x_2(x_2 + h_2)} \\ &= \frac{x_1 + h_1}{x_2 + h_2} \\ &= q(x + h) \end{aligned}$$

$h \mapsto A_x(h)$  stetig bei 0, denn

$$A_x(h) = \left( \underbrace{\frac{1}{x_2 + h_2}}_{\rightarrow \frac{1}{x_2}}, \underbrace{-\frac{x_1}{x_2(x_2 + h_2)}}_{\rightarrow -\frac{x_1}{x_2^2}} \right)$$

**Beispiel:**

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = \langle x, x \rangle$ .

Wir haben gesehen, dass  $f$  differenzierbar ist mit

$$D_v f(x) = 2\langle x, v \rangle \quad \forall x, v \in \mathbb{R}^n$$

$$\begin{aligned} D_v f(x) &= \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} \langle x + tv, x + tv \rangle \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} (\langle x, x \rangle^2 + 2\langle x, v \rangle + t^2 \langle v, v \rangle) \\ &= 2\langle x, v \rangle \end{aligned}$$

Somit folgt, dass gilt:

$$\begin{aligned} D_i f(x) &= 2\langle x, e_i \rangle = 2x_i \\ Df(x) &= (2x_1, \dots, 2x_n) \end{aligned}$$

Dieses hätte man auch sehen können, wenn man

$$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2$$

betrachtet mit

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(x) = 2x_i$$

**II.1.8. Satz**

$U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $x \in U$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Falls die partiellen Ableitungen  $D_1 f, \dots, D_n f$  auf ganz  $U$  existieren, und stetig sind (also Funktionen  $D_i f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ ) dann ist  $f$  differenzierbar in  $x$

**Beweis:**

Weil  $f$  genau dann differenzierbar ist, wenn alle  $f_1, \dots, f_n : U \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar sind, genügt es den Fall  $m = 1$  zu betrachten.

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= f(x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n) - f(x_1, \dots, x_n) \\ &= \sum_{i=1}^n (f(x_1 + h_1, \dots, x_i + h_i, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1 + h_1, \dots, x_{i-1} + h_{i-1}, x_i, \dots, x_n)) \end{aligned}$$

Nach dem Mittelwertsatz gibt es  $\theta_1, \dots, \theta_n \in (0, 1)$ , so dass

$$\begin{aligned} f(x_1 + h_1, \dots, x_{i-1} + h_{i-1}, x_i + h_i, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1 + h_1, \dots, x_{i-1} + h_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \\ = D_i f(x_1 + h_1, \dots, x_{i-1} + h_{i-1}, x_i + \theta_i h_i, x_{i+1}, \dots, x_n) h_i \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x+h) - f(x) = \sum_{i=1}^n D_i f(x_1 + h_1, \dots, x_{i-1} + h_{i-1}, x_i + \theta_i h_i, x_{i+1}, \dots, x_n) h_i$$

Setze  $A(h) \in \text{Mat}_{n,m}(\mathbb{R})$  mit

$$\begin{aligned} A(h) &:= D_i f(x_1 + h_1, \dots, x_{i-1} + h_{i-1}, x_i + \theta_i h_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \\ &\Rightarrow f(x+h) = f(x) + A(h)h \end{aligned}$$

Weil  $D_i f$  stetig bei  $x$  ist, gilt

$$A(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} A(0)$$

□

Wir haben gesehen:

$$f \text{ diffbar} \Rightarrow f \text{ partiell diffbar}$$

$$f \text{ stetig partiell diffbar} \Rightarrow f \text{ diffbar}$$

### II.1.9. Definition

$f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  heißt **stetig differenzierbar**, falls  $f$  differenzierbar ist und falls  $Df : U \rightarrow \text{Mat}_{n,m}(\mathbb{R})$  stetig ist.

### II.1.10. Kettenregel

$U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $V \subseteq \mathbb{R}^m$  offen,  $f : U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^m$ ,  $g : V \rightarrow \mathbb{R}^p$ ,  $x \in U$ ,  $y = f(x) \in V$ . Falls  $f$  differenzierbar ist, dann ist  $g \circ f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$  differenzierbar, und es gilt:

$$D(g \circ f)(x) = Dg(f(x))Df(x)$$

**Beweis:**

Sei  $A : -x + U \rightarrow \text{Mat}_{n,m}(\mathbb{R})$  und  $f(x+h) = f(x) + A(h) \cdot h$  für alle  $h$ .  $A$  stetig in 0

$B : -y + V \rightarrow \text{Mat}_{p,m}(\mathbb{R})$  und  $g(y+k) = g(y) + B(k) \cdot k$  für alle  $k \in -y + V$ .  $B$  stetig in 0

$$\Rightarrow g \circ f(x+h) = g(\underbrace{f(x)}_{=y} + \underbrace{A(h)h}_{=k}) = g(f(x)) + B(A(h)h)A(h)h =: g(f(x)) + C(h)h$$

wobei

$$C(h) := \underbrace{B(A(h)h)}_{\in \text{Mat}_{p,m}(\mathbb{R})} \underbrace{A(h)}_{\in \text{Mat}_{n,m}(\mathbb{R})} \in \text{Mat}_{p,n}(\mathbb{R})$$

$$\begin{aligned} C(0) &= B(A(0)0)A(0) \\ &= B(0)A(0) \\ &= Dg(y)Df(x) \\ &= Dg(f(x))Df(x) \end{aligned}$$

Außerdem ist die Funktion

$$\begin{aligned} C : -x + U &\rightarrow \text{Mat}_{p,n}(\mathbb{R}) \\ h &\mapsto C(h) \end{aligned}$$

stetig.

□

**Formulierung der Kettenregel mit partiellen Ableitungen:**

$f, g$  wie in II.1.14

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} \quad g = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_p \end{pmatrix}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 Dg(f(x)) &= \begin{pmatrix} D_1 g_1(f(x)) & \dots & D_m g_1(f(x)) \\ \vdots & & \vdots \\ D_1 g_p(f(x)) & \dots & D_m g_p(f(x)) \end{pmatrix} \\
 Df(x) &= \begin{pmatrix} D_1 f_1(x) & \dots & D_n f_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ D_1 f_m(x) & \dots & D_n f_m(x) \end{pmatrix} \\
 \Rightarrow D(g \circ f)(x) &= \begin{pmatrix} D_1 g_1 & \dots & D_m g_1 \\ \vdots & & \vdots \\ D_1 g_p & \dots & D_m g_p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D_1 f_1(x) & \dots & D_n f_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ D_1 f_m(x) & \dots & D_n f_m(x) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Der  $(k, l)$ -te Eintrag von  $D(g \circ f)(x)$  ist

$$\sum_{j=1}^m D_j g_k(f(x)) D_l f_j(x) = D_l g_k(f(x)) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial g_k}{\partial y_j}(f(x)) \frac{\partial f_j}{\partial x_l}(x)$$

### Beispiele für Kettenregel:

$U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : U \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$  seien differenzierbar.

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} : U &\rightarrow \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \\
 x &\mapsto \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

ist differenzierbar, und

$$D\left(\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} D_1 f(x) & \dots & D_n f(x) \\ D_1 g(x) & \dots & D_n g(x) \end{pmatrix}$$

Die Funktion

$$\begin{aligned}
 q : \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) &\rightarrow \mathbb{R} \\
 (y, z) &\mapsto \frac{y}{z}
 \end{aligned}$$

ist differenzierbar mit

$$\begin{aligned}
 Dq(y, z) &= \left( \frac{1}{z} \quad -\frac{y}{z^2} \right) \\
 \Rightarrow q \circ \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} : U &\rightarrow \mathbb{R} \\
 x &\mapsto \frac{f(x)}{g(x)}
 \end{aligned}$$

ist differenzierbar.

$$\begin{aligned}
 D\left(q \circ \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}\right) &= Dq\left(\begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix}\right) D\left(\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}\right)(x) \\
 &= \left( \frac{1}{g(x)} \quad -\frac{f(x)}{g(x)^2} \right) \cdot \begin{pmatrix} D_1 f(x) & \dots & D_n f(x) \\ D_1 g(x) & \dots & D_n g(x) \end{pmatrix} \\
 &= \left( \frac{D_1 f(x)}{g(x)} - \frac{f(x) D_1 g(x)}{g(x)^2}, \dots, \frac{D_n f(x)}{g(x)} - \frac{f(x) D_n g(x)}{g(x)^2} \right) \\
 &= \left( \frac{D_1 f(x) g(x) - f(x) D_1 g(x)}{g(x)^2}, \dots, \frac{D_n f(x) g(x) - f(x) D_n g(x)}{g(x)^2} \right)
 \end{aligned}$$

Analog erhält man durch Betrachtung der Funktion  $\mu : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\mu(y, z) = yz$ , die **Produktregel**

**Beispiel:**

$A \in \text{Mat}_{m,n}(\mathbb{R}), F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, F(x) = A \cdot x$

$\Rightarrow F$  ist differenzierbar und es gilt  $DF(x) = A$

**Beweis:**

$$F(x+h) = A(x+h) = Ax + Ah = F(x) + Ah$$

□

$U \subseteq \mathbb{R}^p$  offen,  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  differenzierbar.

$\xRightarrow{\text{Kettenregel}} F \circ f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  ist differenzierbar, und

$$D(f \circ f)(x) = DF(f(x))Df(x) = A \cdot Df(x)$$

wobei

$$F \circ f(x) = A \cdot f(x)$$

Das heißt Differenzieren vertauscht mit linearen Abbildungen.

**Beispiel:**

$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{1,2}(\mathbb{R})$

$$f: U \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$$

$$Af = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)$$

$$\Rightarrow D(Af)(x) = ADf(x) = (a_1 D_1 f_1(x) + a_2 D_1 f_2(x), \dots, a_1 D_n f_1 + a_2 D_n f_2(x)) = a_1 Df_1 + a_2 Df_2(x)$$

Dieses ist die Summenregel

**Bemerkung:**

$X, Y$  endliche-dimensionale  $\mathbb{R}$ -VR. Dann gibt es Normen auf  $X$  und  $Y$ .

(z.B.  $(v_1, \dots, v_n)$  Basis von  $X$  und  $x = \sum_{i=1}^n x_i v_i \in X, x_i \in \mathbb{R}$  wobei  $\|x\| := \sum_{i=1}^n |x_i|$ )

Je zwei Normen auf  $X$  sind äquivalent (weil  $\dim X < \infty$ ).

Also gibt es die Begriffe 'Konvergente Folge', 'Stetigkeit', 'offene Mengen', etc, unabhängig von der Wahl der Norm.

**II.1.11. Definition**

$X, Y$  endlich-dimensionale  $\mathbb{R}$ -VR,  $U \subseteq X$  offen,  $x \in U, f: U \rightarrow Y$  heißt **differenzierbar** bei  $x$ , falls gilt: es gibt eine Abbildung  $A: -x + U \rightarrow \text{Hom}(X, Y)$ , so dass gilt:

$$1. f(x+h) = f(x) + \underbrace{A(h)}_{\in \text{Hom}(X,Y)} \quad (h) \in Y \text{ für alle } h \in -x + U$$

2.  $A$  stetig bei 0 (Diese Aussage ist wohldefiniert, weil  $\text{Hom}(X, Y)$  ein endlich-dimensionaler  $\mathbb{R}$ -VR ist)

$$A(0) = Df(x)$$

**II.2. Differentiation unter dem Integral**

Betrachte  $f: [a, b] \times U \rightarrow \mathbb{R}, a, b \in \mathbb{R}, U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $f$  stetig.

$$F: U \rightarrow \mathbb{R}$$

$$F(x) = \int_a^b f(t, x) dt$$

**Frage:**

1. ist  $F$  stetig?
2. falls  $D_i f$  existiert ( $i = 1, \dots, n$ ), existiert dann  $D_i F$ , und gilt

$$D_i F(x) = \int_a^b D_i f(t, x) dt?$$

**II.2.1. Satz**

Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen. Sei  $f : [a, b] \times U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und setze  $F(x) := \int_a^b f(t, x) dt$ . Dann ist  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig.

**Beweis:**

Sei  $x \in U$  und sei  $\varepsilon > 0$ .  $U$  ist offen, es gibt also  $r > 0$  mit:

$$\bar{B}_r(x) = \{y \in U \mid \|x - y\| \leq r\} \subseteq U$$

$[a, b] \times \bar{B}_r(x)$  ist Kompakt (denn es ist abgeschlossen und beschränkte Teilmenge des  $\mathbb{R}^{n+1}$ )

$$f|_{[a, b] \times \bar{B}_r(x)} : [a, b] \times \bar{B}_r(x) \rightarrow \mathbb{R}$$

ist gleichmäßig stetig!!

$\Rightarrow$  es gibt ein  $\delta > 0$ , so dass gilt falls  $y \in U$ ,  $t \in [a, b]$  und  $\|y - x\| \leq \delta$  und  $\|y - x\| \leq r$

$$\Rightarrow |f(t, y) - f(t, x)| < \varepsilon \quad (\delta \leq r)$$

Falls  $\|y - x\| < \delta \leq r$ , so gilt also:

$$|F(x) - F(y)| = \left| \int_a^b f(t, x) - f(t, y) dt \right| \leq \int_a^b |f(t, x) - f(t, y)| dt < \int_a^b \varepsilon dt = \varepsilon |b - a|$$

□

**II.2.2. Satz**

Seien  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen. Sei  $f : [a, b] \times U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Angenommen, es existiert  $D_2 f(t, x) = \frac{\partial}{\partial x} f(t, x)$ , und  $D_2 f : [a, b] \times U \rightarrow \mathbb{R}$  sei stetig.

Dann ist  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $F(x) := \int_a^b f(t, x) dt$  differenzierbar und es gilt:

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(t, x) dt$$

**Beweis:**

Seien  $x, x+h \in U$ . Dann gilt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und weil  $D_e f$  stetig:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}(F(x+h) - F(x)) - \int_a^b D_2 f(t, x) dt &= \frac{1}{h} \int_a^b (f(t, x+h) - f(t, x) - D_2 f(t, x)h) dt \\ &\stackrel{*}{=} \frac{1}{h} \int_a^b \left( \int_x^{x+h} D_2 f(t, y) dy \right) - D_2 f(t, x)h dt \\ &= \frac{1}{h} \int_a^b \left( \int_x^{x+h} (D_2 f(t, x) - D_2 f(t, y)) dy \right) dt \end{aligned}$$

Nun sei  $\varepsilon > 0$ . Wie im Beweis von II.2.1 gibt es ein  $r > 0$ ,  $0 < \delta \leq r$ , so dass gilt:

$$|x - y| < \delta, t \in [a, b] \Rightarrow |D_2 f(t, x) - D_2 f(t, y)| < \varepsilon \quad (D_2 \text{ stetig})$$

Ist also  $|h| < \delta$ , so folgt:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{h}(F(x+h) - F(x)) - \int_a^b D_2 f(t, x) dt \right| &= \left| \frac{1}{h} \cdot \int_a^b \left( \int_x^{x+h} (D_2 f(t, x) - D_2 f(t, y)) dy \right) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{|h|} \int_a^b \left( \underbrace{\int_x^{x+h} \underbrace{|D_2 f(t, x) - D_2 f(t, y)|}_{< \varepsilon} dy}_{< |h|\varepsilon} \right) dt \\ &< \frac{1}{|h|} |b-a| \cdot |h| \\ &= \varepsilon |b-a| \end{aligned}$$

□

**II.2.3. Korollar**

$U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen.  $f : [a, b] \times U \rightarrow \mathbb{R}$ .  $f$  sei stetig und  $\frac{\partial}{\partial x_i} f(t, x)$ ,  $i = 1, \dots, n$  existiere und sei stetig. Dann ist  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $F(x) := \int_a^b f(t, x) dt$  stetig differenzierbar, und es gilt:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} F(x) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x_i} f(t, x) dt$$

**Beweis:**

Sei  $x \in U$ , und  $I = \{s \in \mathbb{R} \mid x + se_i \in U\} \subseteq \mathbb{R}^n$  offen

Sei  $g : [a, b] \times I \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(t, s) = f(t, x + se_i)$ . Dann ist  $g$  stetig und  $\frac{\partial}{\partial s} g$  existiert und ist stetig, weil  $\frac{\partial}{\partial s} g(t, s) = \frac{\partial}{\partial x_i} f(t, x + se_i)$

$$\stackrel{II.2.3}{\Rightarrow} G(s) = \int_a^b g(t, s) dt \text{ ist differenzierbar, und}$$



$$G'(x) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x_i} f(t, x + se_i) dt$$

aber  $G(s) = F(x + se_i)$ , also  $G'(0) = \frac{\partial}{\partial x_i} F(x)$ .

$\Rightarrow$  alle partiellen Ableitungen von  $F$  existieren, und es gilt:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} F(t, x) = \int_a^b \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} f(t, x)}_{\text{stetig!}} dt$$

Damit folgt, dass  $\frac{\partial}{\partial x_i} F(t, x)$  stetig ist.

$\stackrel{II.1,12}{\Rightarrow} F(t, x)$  ist differenzierbar, und  $DF$  ist stetig. □

## II.2.4. Satz von Schwarz

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ .  $v, w \in \mathbb{R}^n$ .

Annahmen:

- $f$  stetig
- $D_v f, D_w f$  existieren und seien stetig
- $D_v D_w f$  existiere und sei stetig

Dann gilt:

$$D_w D_v f \text{ existiert und es gilt } D_w D_v f = D_v D_w f$$

**Beweis:**

1. Spezialfall:  $n = 2$ ,  $U = B_r(0)$  mit  $r > 0$ .  $v = e_1$ ,  $w = e_2$

Nach dem Hauptsatz und weil  $D_2 f$  stetig ist gilt:

$$f(x, y) = f(x, 0) + \int_0^y D_2 f(x, t) dt$$

$$\Rightarrow D_1 f(x, y) = D_1 f(x, 0) + D_1 \int_0^y D_2 f(x, t) dt$$

$$= D_1 f(x, 0) + \int_0^y D_1 D_2 f(x, t) dt$$

Weil  $D_1 D_2$  stetig.

$$D_1 f(x, y) = \underbrace{D_1 f(x, 0)}_{\substack{\text{hängt nicht} \\ \text{von } y \text{ ab} \\ \Rightarrow D_2 D_1 f(x, 0) = 0}} + \underbrace{\int_0^y D_1 D_2 f(x, t) dt}_{\substack{D_2 \left( \int_0^y D_1 D_2 f(x, t) dt \right) \\ \stackrel{HS}{=} D_1 D_2 f(x, y)}}$$

$\Rightarrow D_2 D_1 f(x, y)$  existiert, und es gilt:

$$D_2 D_1 f(x, y) = D_1 D_2 f(x, y)$$

**2. Allgemeiner Fall:** Sei  $x \in U$ ,  $v, w \in \mathbb{R}^n$ .

$0 \in \tilde{U} = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid x + st + tw \in U\} \subseteq \mathbb{R}^2$  offen.

Sei  $g : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g(s, t) = f(x + sv + tw)$ . Dann ist  $g$  stetig und

$$\begin{aligned} D_1 g(s, t) &= D_v f(x + sv + tw) \\ D_2 g(s, t) &= D_w f(x + sv + tw) \\ D_1 D_2 g(s, t) &= D_v D_w f(x + sv + tw) \end{aligned}$$

existieren und sind stetig.

Nach Schritt 1 existiert  $D_2 D_1 g$  in 0, und

$$D_w D_v g(x) = D_2 D_1 g(0, 0) = D_1 D_2 g(0, 0) = D_v D_w f(x)$$

□

## II.2.5. Definition

$U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Dann heißt  $f$  **r-mal stetig differenzierbar** (oder  $C^r$ -Funktion), falls gilt: für alle  $s = 0, \dots, r$  und alle  $v_1, \dots, v_s \in \mathbb{R}^n$  existiert die **iterierte Richtungsableitung**

$$D_{v_1} D_{v_2} \dots D_{v_s} f = D_{v_1} (D_{v_2} \dots D_{v_s} f)$$

auf ganz  $U$ , und ist stetig auf  $U$ .

**Definition:**

$U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $C^2$ -Funktion. Die **Hessematrix** von  $f$  bei  $x$  ist

$$Hf(x) := \begin{pmatrix} D_1 D_1 f(x) & \dots & D_n D_1 f(x) \\ \vdots & & \vdots \\ D_1 D_n f(x) & \dots & D_n D_n f(x) \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow Hf(x)$  ist symmetrisch, denn

$$Hf(x)^T \stackrel{\text{Satz von Schwarz}}{=} Hf(x)$$

Ferner gilt: sind  $v, w \in \mathbb{R}^n$ , so ist

$$D_v D_w f(x) = \langle Hf(x)v, w \rangle = \langle v, Hf(x)w \rangle$$

**Beweis:**

$$v = \sum_{i=1}^n v_i e_i \quad w = \sum_{i=1}^n w_i e_i \quad v_i, w_i \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow D_v D_w f(x) &= \sum_{i=1}^n v_i D_i D_w f(x) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v_i w_j D_i D_j f(x) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v_i w_j (Hf(x))_{ji} \\ &= \sum_{i=1}^n w_j (Hf(x)v)_j = \langle Hf(x)v, w \rangle = \langle v, Hf(x)w \rangle \end{aligned}$$

Die Identität

$$\langle Hf(x)v, w \rangle = \langle v, Hf(x)w \rangle$$

folgt daraus, dass  $Hf(x)$  symmetrisch ist, denn

$$\langle Av, w \rangle = \langle v, A^T w \rangle \quad A \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$$

## II.3. Taylorentwicklung

Der eindimensionale Fall

$(a, b) \subseteq \mathbb{R}$   $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  sei  $m$ -mal stetig differenzierbar,  $p \in (a, b)$ ,  $h \in \mathbb{R}$  mit  $p + h \in (a, b)$

### II.3.1. Lemma/Definition

Sei  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$   $m$ -mal stetig differenzierbar,  $p \in (a, b)$ . Dann gibt es genau ein Polynom  $T_p^m f(h)$ , so dass gilt

(i) Der Graph von  $T_p^m f$  ist  $m$ -mal stetig differenzierbar

(ii) Es gilt

$$\left( \frac{d}{dh} \right)^k T_p^m f(0) = f^{(k)}(p) \quad \forall k = 0, \dots, m$$

Dieses Polynom heißt  $m$ -tes **Taylorpolynom** von  $f$  bei  $p$ .

**Beweis:**

Setze

$$T_p^m f(h) = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} f^{(k)}(p) h^k$$

Dann gilt (i) und (ii)  $\Rightarrow$  Existenz Eindeutigkeit: Sei  $q(h)$  ein Polynom mit (i) und (ii)

$$q(h) = \sum_{k=0}^m c_k h^k \quad c_k \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} q(0) = c_0 &\Rightarrow c_0 = f^{(0)}(p) \\ q'(0) = c_1 &\Rightarrow c_1 = f^{(1)}(p) \\ q''(0) = 2c_2 &\Rightarrow c_2 = \frac{1}{2} f^{(2)}(p) \\ &\vdots \\ q^{(l)}(0) = c_l &\Rightarrow c_l = \frac{1}{l!} f^{(l)}(p) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} q^{(l)}(h) &= \sum_{k=l}^m c_k k(k-1) \cdots (k-l) h^{k-l} \\ &\Rightarrow q(h) = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} f^{(k)}(p) h^k \end{aligned}$$

□

### II.3.2. Taylorscher Satz

Sei  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$   $(m+1)$ -mal stetig differenzierbar,  $p, p+h \in (a, b)$ .

Dann gilt

$$f(p+h) = \underbrace{\sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} f^{(k)}(p) h^k}_{=T_p^m f(h)} + \underbrace{\frac{1}{m!} h^{m+1} \int_0^1 (1-t)^m f^{(m+1)}(p+th) dt}_{\text{Restglied}}$$

**Beweis:**

Induktion über  $m$ :

$m = 0$ : Hauptsatz

$m \mapsto m+1$ : siehe Übung A3B1. partielle Integration

$$(1-t)^m = -\frac{1}{m+1} \frac{d}{dt} (1-t)^{m+1}$$

□

Schreibe Restglied in einfacher Form

### II.3.3. Mittelwertsatz der Integralrechnung

Sei  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$  und  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig.  $g(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$ .

Dann gilt

$$\exists \xi \in [a, b] \text{ mit } \int_a^b f(t)g(t) dt = f(\xi) \int_a^b g(t) dt$$

**Beweis:**

Aus dem Satz vom Minimum und Maximum folgt:  $\exists x_{\min}, x_{\max} \in [a, b] \forall x \in [a, b]$  mit

$$f(x_{\min}) := c \leq f(x) \leq C =: f(x_{\max})$$

$$cg(x) \leq f(x)g(x) \leq Cg(x), \quad g(x) \geq 0$$

Dann folgt

$$c \int_a^b g(t) dt \leq \int_a^b f(t)g(t) dt \leq C \int_a^b g(t) dt$$

Wir definieren uns eine Hilfsfunktion

$$F(x) := f(x) \int_a^b g(t) dt$$

Dann ist  $F$  stetig und es gilt

$$F(x_{\min}) = c \int_a^b g(t) dt, \quad F(x_{\max}) = C \int_a^b g(t) dt$$

$$\Rightarrow F(x_{\min}) \leq \int_a^b f(t)g(t) dt \leq F(x_{\max})$$

Benutze nun den Zwischenwertsatz und erhalte

$$\exists \xi \in [x_{\min}, x_{\max}] \text{ mit } F(\xi) = \int_a^b f(t)g(t) dt$$

□

### II.3.4. Lagrange-Darstellung des Restgliedes

Seien  $a, b, p, p+h \in \mathbb{R}$  und  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  wie in II.3.2. Dann gilt

$$\exists \xi \in [0, 1] \text{ mit } f(p+h) = T_p^m f(h) + \frac{h^{(m+1)}}{(m+1)!} f^{(m+1)}(p+\xi h)$$

**Beweis:**

zu Zeigen ist:

$$\exists \xi \in [0, 1] \text{ mit } \frac{1}{m!} h^{m+1} \int_0^1 (1-t)^m f^{(m+1)}(p+th) dt = \frac{1}{(m+1)!} f^{(m+1)}(p+\xi h)$$

Aus II.3.3 folgt

$$\begin{aligned} \exists \xi \in [0, 1] \text{ mit } \int_0^1 (1-t)^m f^{(m+1)}(p+th) dt &= f^{(m+1)}(p+\xi h) \underbrace{\int_0^1 (1-t)^m dt}_{\frac{1}{m+1}} \\ &= \frac{1}{m+1} f^{(m+1)}(p+\xi h) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Vorfaktoren einsetzen  
Taylorpolynom

□

$$f(p+h) = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} f^{(k)}(p) h^k + \frac{1}{(m+1)!} f^{(m+1)}(p+\xi h) h^{(m+1)}$$

### II.3.5. Bemerkung

Ist  $f$  beliebig oft stetig differenzierbar, so heißt die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(p) h^k$$

**Taylorreihe** von  $f$  bei  $p$  und ist eine Potenzreihe.

- Die Taylorreihe von  $f$  muss nicht konvergieren, und selbst wenn sie konvergiert braucht die Grenzfunktion nicht gleich  $f$  zu sein.

**Gegenbeispiel:**

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{falls } x \neq 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow f$  beliebig oft stetig differenzierbar  $f^{(k)}(0) = 0 \forall k \Rightarrow$  Taylorreihe ist  $0 \neq f$

- Ist  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $R > 0$ , und  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ . Dann gilt

$$T_0^m f(h) = \sum_{k=0}^m a_k h^k \quad (\text{Übungsaufgabe})$$

Der mehrdimensionale Fall:

$U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$   $(m+1)$ -mal stetig differenzierbar,  $x \in U$

### II.3.6. Definition

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $x \in U$ . Dann heißt  $U$  **sternförmig** bezüglich  $x$ , falls gilt:

$$y \in U, t \in [0, 1] \Rightarrow (1 - t)x + ty \in U$$

Nun sei  $p \in U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $U$  sternförmig bzgl.  $p$ . Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$   $(m + 1)$ -mal stetig differenzierbar.  $v \in \mathbb{R}^n$  mit  $p + v \in U$ . Setze  $g(t) := f(p + tv)$  mit

$$g : \{t \in \mathbb{R} \mid p + tv \in U\} \rightarrow \mathbb{R}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} g(1) &= \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} g^{(k)}(0) + \frac{1}{(m+1)!} g^{(m+1)}(\xi) \\ &\Rightarrow g^{(k)}(0) = \underbrace{D_v \dots D_v f(p)}_{k\text{-mal}} \end{aligned}$$

**Beweis:**

mit Induktion:

$k = 0$ : klar

$k - 1 \mapsto k$

$$g^{(k)}(t) = \frac{d}{dt} g^{(k-1)}(t) = \frac{d}{dt} \underbrace{(D_v \dots D_v f(x + tv))}_{(k-1)\text{-mal}} = \underbrace{D_v \dots D_v f(x + tv)}_{k\text{-mal}}$$

### II.3.7. Taylorentwicklung in $\mathbb{R}^n$

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  sternförmig bzgl.  $x \in U$ ,  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen.  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$   $(m + 1)$ -mal stetig differenzierbar und  $v \in \mathbb{R}^n, x + v \in U$ .

Dann gilt

$$\exists \xi \in [0, 1] \text{ mit } f(x + v) = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \underbrace{D_v \dots D_v f(x)}_{k\text{-mal}} + \frac{1}{(m+1)!} \underbrace{D_v \dots D_v f(x + \xi v)}_{(m+1)\text{-mal}}$$

Interessanter Spezialfall  $m = 1$ :

$$\begin{aligned} f(x + v) &= f(x) + D_v f(x) + \frac{1}{2} D_v D_v f(x + \xi v) \\ &= f(x) + Df(x) \cdot v + \frac{1}{2} \langle Hf(x + \xi v)v, v \rangle \end{aligned}$$

Dies ist die Taylorformel für  $m = 1$

## II.4. Extremwertprobleme

$U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar

### II.4.1. Satz

Falls  $f$  bei  $x \in U$  ein lokales Minimum oder Maximum hat, so gilt  $Df(x) = 0$ .

Lokales Minimum bei  $x$  bedeutet:

$$\exists \text{ Umgebung } x \in V \subseteq U, \text{ so dass } \forall y \in V : f(y) \geq f(x)$$

(lokales Maximum analog mit  $f(y) \leq f(x)$ )

**Beweis:**

Betrachte Funktion  $g_v(t) = f(x + tv)$  ( $x$  lokales Minimum/Maximum,  $v \in \mathbb{R}^n$ ).

$g_v$  ist definiert auf einer offenen Umgebung  $I \subseteq \mathbb{R}$  von 0.  $g_v$  ist differenzierbar (Kettenregel).

$g_v$  hat lokales Minimum oder Maximum bei 0

$$g_v'(0) = 0 \text{ (Analysis I)}$$

$$\text{aber } g_v'(0) = D_v f(x) = Df(x) \cdot v$$

$$\Rightarrow Df(x) = 0$$

□

**II.4.2. Definition**

$f : U \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar und  $x \in U$ .  $x$  heißt **kritischer Punkt** von  $f$  genau dann, wenn

$$Df(x) = 0$$

Sei  $f$  von nun an 2-mal stetig differenzierbar. Sei  $x \in U$  kritischer Punkt von  $f$ .

Wähle  $r > 0$  mit

$$\underbrace{B_r(x)}_{\text{sternförmig}} \subseteq U$$

Dann gilt für alle  $v \in U$  mit  $\|v\| < r$

$$f(x+v) = f(x) + \frac{1}{2} \langle Hf(x+\xi v)v, v \rangle \text{ mit } \xi \in [0, 1]$$

**Bispiele für  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ :**

1.  $f_0(x, y) = x^2 + y^2$

2.  $f_1(x, y) = x^2 - y^2$

3.  $f_2(x, y) = -x^2 - y^2$

Alle drei haben den kritischen Punkt  $(0, 0)$  und es gilt

$$Hf_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad Hf_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad Hf_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$f_0$  hat lokales Maximum in 0.

Graph von  $f_0$  ist Paraboloid. Niveaulinien sind Kreise.  $f_2$  analog und  $f_2 = -f_0$ .

$f_1$  hat kein lokales Minimum/Maximum

**Exkurs über symmetrische Matrizen:****II.4.3. Definition**

$A \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  heißt **Eigenwert** von  $A$  genau dann, wenn

$$\exists x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0 \text{ und } Ax = \lambda x$$

Die **Eigenvektoren** zum Eigenwert  $\lambda$  sind die  $x \in \mathbb{R}^n$  mit  $Ax = \lambda x$

$$\text{Eig}(A, \lambda) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = \lambda x\}$$

Das **Charakteristische Polynom** ist definiert durch

$$\chi_A(t) = \det(A - t \cdot I_n)$$

und ist ein Polynom vom Grad  $n$ .

Die Eigenwerte von  $A$  sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms. Das heißt es gibt höchstens  $n$  verschiedene Eigenwerte.

#### II.4.4. Spektralsatz für symmetrische Matrizen

Sei  $A \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$  symmetrisch. Dann gibt es eine Orthogonalbasis von  $\mathbb{R}^n$ , welche nur aus Eigenvektoren von  $A$  besteht.

Mit anderen Worten:

Es gibt  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n \in \mathbb{R}$  und  $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$  mit

$$\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}, \quad Av_i = \lambda_i v_i$$

**Bemerkung:**

$B = (v_1, \dots, v_n)$  Basis

$$M_B^B(A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Für den Beweis siehe Lineare Algebra

#### II.4.5. Satz

Sei  $A \in S(n)$ ,  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$  seien Eigenwerte von  $A$ .

Dann gilt

1.  $\forall x \in \mathbb{R}^n : \lambda_1 \|x\|^2 \leq \langle Ax, x \rangle \leq \lambda_n \|x\|^2$
2.  $\{\langle Ax, x \rangle \mid \|x\| = 1\} = [\lambda_1, \lambda_n]$

**Beweis:**

1.  $(v_1, \dots, v_n)$  Orthogonalbasis aus Eigenvektoren mit  $Av_i = \lambda_i v_i$ .  $x \in \mathbb{R}^n$  mit  $x = \sum_{i=1}^n x_i v_i$ .  
Dann gilt

$$\begin{aligned} \langle Ax, x \rangle &= \sum_{i,j=1}^n \langle Ax_i v_i, x_j v_j \rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^n x_i x_j \langle Av_i, v_j \rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^n x_i x_j \lambda_i \langle v_i, v_j \rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^n \lambda_i x_i^2 \leq \lambda_n \sum_{i=1}^n x_i^2 = \lambda_n \|x\|^2 \\ &\geq \lambda_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \lambda_1 \|x\|^2 \end{aligned}$$

2. Betrachte

$$f(t) = (A(\cos(t)v_n + \sin(t)v_1), (\cos(t)v_1 + \sin(t)v_n))$$

Dann ist  $f$  stetig und  $\|\cos(t)v_n + \sin(t)v_1\| = 1$

$$f(0) = \langle Av_1, v_n \rangle = \lambda_n \langle v_n, v_n \rangle = \lambda_n$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \langle Av_n, v_1 \rangle = \lambda_1$$

Mit Zwischenwertsatz gilt

$$[\lambda_1, \lambda_n] \subseteq f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$$

□



**II.4.6. Satz**

Seien  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $x \in U$ ,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal stetig differenzierbar. Sei  $x$  ein kritischer Punkt von  $f$ .

1. Falls alle Eigenwerte von  $Hf(x)$  positiv sind, so hat  $f$  ein lokales Minimum bei  $x$  (positiv definit)
2. Falls  $Hf(x)$  negativ definit, so hat  $f$  ein lokales Maximum bei  $x$
3. Falls  $f$  einen positiven Eigenwert hat, so hat  $f$  bei  $x$  kein lokales Maximum
4. Falls  $f$  einen negativen Eigenwert hat, so hat  $f$  bei  $x$  kein lokales Minimum
5. In allen anderen Fällen kann durch Betrachtung von  $Hf(x)$  keine Entscheidung getroffen werden.

**Beweis:**

1)  $\Rightarrow$  2, 3  $\Rightarrow$  4 gehe zu  $-f$  über

3) Sei  $\|v\| = 1$ ,  $Hf(x)v = \lambda v$ ,  $\lambda > 0$ ,  $t \in [-1, 1]$ .  
 $\Rightarrow \exists \xi \in [0, 1]$  mit

$$\begin{aligned}
 f(x + tv) &= f(x) + \frac{1}{2} \langle Hf(x + t\xi)v, tv \rangle \\
 &= f(x) + \underbrace{\frac{t^2}{2} \langle Hf(x)v, v \rangle}_{= \frac{t^2}{2} \lambda} + \frac{t^2}{2} \underbrace{\langle (Hf(x + \xi t) - Hf(x))v, v \rangle}_{\text{klein, falls } |t| \text{ klein}} \\
 &> f(x) \text{ für kleine } t
 \end{aligned}$$

1) selbe Idee:

Taylorentwicklung,  $v \in \mathbb{R}^n$ , so dass  $x + tv \in U \forall t \in [-1, 1]$ .

Dann existiert ein  $\theta \in [0, 1]$  mit

$$\begin{aligned}
 f(x + v) &= f(x) + \underbrace{Df(x)v}_{=0} + \frac{1}{2} \langle Hf(x + \theta v), v \rangle \\
 &= f(x) + \frac{1}{2} \langle Hf(x)v, v \rangle + \frac{1}{2} \langle (Hf(x + \theta v) - Hf(x))v, v \rangle
 \end{aligned}$$

Seien  $0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$  die Eigenwerte von  $Hf(x)$

$$\stackrel{II.4.5}{\Rightarrow} \langle Hf(x)v, v \rangle \geq \lambda_1 \cdot \|v\|^2$$

Da  $f \in C^2$  ist, ist  $x \mapsto Hf(x)$  stetig und damit folgt

$$\exists \delta > 0, \text{ so dass } \|Hf(x + \theta v) - Hf(x)\| < \frac{\lambda_1}{2} \text{ für } \|v\| < \delta \text{ und } \|\theta\| \leq 1$$

$\Rightarrow$  für  $\|v\| < \delta$  gilt also:

$$\begin{aligned}
 f(x + v) &= f(x) + \frac{1}{2} \langle Hf(x)v, v \rangle + \frac{1}{2} \langle Hf(x + \theta v)v, v \rangle \\
 &\geq f(x) + \frac{1}{2} \lambda_1 \|v\|^2 - \frac{1}{2} \underbrace{\|Hf(x + \theta v) - Hf(x)\|}_{\leq \frac{\lambda_1}{2}} \|v\|^2 \\
 &\geq f(x) + \frac{1}{4} \lambda_1 \|v\|^2 \\
 &> f(x) \\
 &\Rightarrow f(x + v) > f(x), \text{ falls } \|v\| < \delta \text{ und } v \neq 0
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow f$  hat lokales Minimum. □

#### II.4.7. Definition

Definiere

$$S(n) := \{A \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{R}) \mid A^T = A\}$$

- $A \in S(n)$  heißt **positiv definit**, falls für alle  $v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0$  gilt:

$$\langle Av, v \rangle > 0$$

- $A \in S(n)$  heißt **negativ definit**, falls für alle  $v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0$  gilt:

$$\langle Av, v \rangle < 0$$

**Bemerkung:**

Es gilt

- $A$  positiv definit  $\Leftrightarrow$  alle Eigenwerte sind positiv
- $A$  negativ definit  $\Leftrightarrow$  alle Eigenwerte sind negativ

Denn: Sind  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$  die Eigenwerte von  $A$ , so gilt:

$$\lambda_1 \|v\|^2 \leq \langle Av, v \rangle \leq \lambda_n \|v\|^2$$

und falls  $Av_1 = \lambda_1 v_1$  und  $Av_n = \lambda_n v_n$ , gilt  $\|v_1\| = \|v_n\| = 1$

### III. Der Umkehrsatz und seine geometrischen Konsequenzen

#### III.1. Umkehrbare differenzierbare Abbildungen

Analysis I: Ist  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes Intervall,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar und  $f'(x) \neq 0$  für alle  $x \in I$ .

Dann folgt, dass  $f(I) \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes Intervall ist.

Ist  $f : I \rightarrow f(I)$  bijektiv, so ist die Umkehrfunktion  $g : f(I) \rightarrow I$  stetig differenzierbar, und es gilt  $g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$

##### III.1.1. Definition

$U \subseteq \mathbb{R}^n, V \subseteq \mathbb{R}^m$  offen. Ein Diffeomorphismus  $f : U \rightarrow V$  ist eine  $C^1$ -Abbildung, für die gilt, dass  $f : U \rightarrow V$  bijektiv ist und die Umkehrabbildung  $g : V \rightarrow U$  auch eine  $C^1$ -Abbildung ist.

##### III.1.2. Lemma

$U \subseteq \mathbb{R}^n, V \subseteq \mathbb{R}^m$  offen.  $f : U \rightarrow V$  Diffeomorphismus mit Umkehrabbildung  $g : V \rightarrow U$ .

Dann gilt:

1.  $m = n$
2.  $\forall x \in U$  ist  $Df(x) \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$  invertierbar
3.  $Dg(f(x)) = (Df(x))^{-1} \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$

**Beweis:**

Es gilt

$$\forall x \in U : g(f(x)) = x \quad \Rightarrow \quad g \circ f = \text{id}_U$$

$$\forall y \in V : f(g(y)) = y \quad \Rightarrow \quad f \circ g = \text{id}_V$$

Dann folgt aus der Kettenregel

$$Dg(f(x))Df(x) = D\text{id}(x) = \mathbb{1}_n$$

$$\text{und } Df(g(y))Dg(y) = D\text{id}(y) = \mathbb{1}_m$$

Setze nun  $y := f(x) (\Leftrightarrow g(y) = x)$

$$\Rightarrow Df(x)Dg(f(x)) = \mathbb{1}_m \stackrel{\text{L.A. I}}{\Rightarrow} m = n$$

Außerdem ist dann  $Df(x)$  invertierbar und  $(Df(x))^{-1} = Dg(f(x))$

□

##### III.1.3. Lemma

Definiere

$$\text{GL}_n(\mathbb{R}) := \{A \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{R}) \mid A \text{ invertierbar}\}$$

Dann gilt

1.  $\text{GL}_n(\mathbb{R}) \subseteq \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$  ist offen
2. Die Funktion

$$F : \text{GL}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$$

$$A \mapsto A^{-1}$$

ist beliebig oft stetig differenzierbar

**Beweis:**

1. B3A5
2. B6A4

**III.1.4. Satz**

$U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen.  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar.

Es gelte

1.  $Df(x)$  ist invertierbar für alle  $x \in U$
2.  $f(U) \subseteq \mathbb{R}^n$  ist offen
3.  $f : U \rightarrow f(U)$  bijektiv
4. Die Umkehrfunktion  $g : f(U) \rightarrow U$  ist stetig

Dann ist  $g$  stetig differenzierbar (also ist  $f$  Diffeomorphismus)

**Beweis:**

$x \in U, y = f(x)$ . Sei  $A : -x + U \rightarrow \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$  stetig bei 0 und  $f(x+h) = f(x) + A(h)h$  für alle  $h$  (Dies existiert, da  $f$  differenzierbar bei  $x$ ).

Sei  $k$  mit  $y+k \in f(U)$ . Setze  $h := -x + g(y+k) (\Leftrightarrow x+h = g(y+k))$  und  $h \neq g(y+k) - g(y)$ .

Da  $A(0) = Df(x)$  invertierbar und  $h \mapsto A(h)$  stetig bei 0 ist und  $\text{GL}_n(\mathbb{R}) \subseteq \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$  offen, ist  $A(h)$  invertierbar für kleine  $h$ .

Setze nun  $B(h) := (A(h))^{-1}$ . Dann ist  $B$  stetig bei 0 (weil  $A \mapsto A^{-1}$  stetig ist)

$$\begin{aligned} \Rightarrow g(y+k) &= g(y) + h \\ &= g(y) + \underbrace{B(h)A(h)h}_{\mathbb{1}_n} \\ &= g(y) + B(h) \underbrace{(f(x+h) - f(x))}_{=k} \\ &= g(y) + B(h)k \\ &= g(y) + B(\underbrace{-x + g(y+k)}_{\xrightarrow{k \rightarrow 0} -x + g(y)})k \\ &\quad \underbrace{B(0)}_{(B \text{ stetig bei } 0)} \end{aligned}$$

□

**Bemerkung:**

1. Wir werden zeigen, dass  $1 \& 2 \Rightarrow 3 \& 4$
2. Man kann zeigen, dass in der Situation von (1.4) gilt:  
Ist  $f$  sogar eine  $C^k$ -Abbildung. ( $k \geq 2$ ), dann ist auch  $g$  eine  $C^k$ -Abbildung. (ohne Beweis)

**III.1.5. Beispiel**

Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^x \begin{pmatrix} \cos(y) \\ \sin(y) \end{pmatrix}$$

Dies entspricht der komplexen Exponentialfunktion

$$x, y \in \mathbb{R} \quad e^{x+iy} = e^x (\cos(y) + i \sin(y))$$

$f$  ist differenzierbar mit

$$Df \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^x \begin{pmatrix} \cos(y) & -\sin(y) \\ \sin(y) & \cos(y) \end{pmatrix}$$

$$\det Df \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{2x} \neq 0$$

$$f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

$$\left\| f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|_2 = e^x, \quad f \begin{pmatrix} x \\ y + 2\pi \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$f$  ist nicht injektiv Sei

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < 2\pi \right\}$$

$f : U \rightarrow f(U)$  ist bijektiv

$$f(U) = \mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \mid x > 0 \right\}$$

$f$  ist nicht injektiv, aber es gilt jeder Punkt in  $\mathbb{R}^2$  hat offene Umgebung  $V \subseteq \mathbb{R}^2$

$f : V \rightarrow f(V)$  ist bijektiv

### III.1.6. Der Umkehrsatz

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine  $C^1$ -Abbildung.

Annahme: Für alle  $x \in U$  ist  $Df(x) \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$  invertierbar.

Dann gilt:

- (i) Für alle  $V \subseteq U$  offen ist  $f(V) \subseteq \mathbb{R}^n$  offen.
- (ii) Zu jedem  $x \in U$  existiert eine offene Umgebung  $V \subseteq U$  von  $x$ , so dass

$$f|_V : V \rightarrow f(V)$$

bijektiv ist, und die Umkehrabbildung  $g : f(V) \rightarrow V$  ist stetig differenzierbar.

### III.1.7. Definition

Eine Abbildung  $f$ , welche die Voraussetzungen von III.1.6 erfüllt, heißt **lokaler Diffeomorphismus**

### III.1.8. Korollar

$U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  in  $C^1$ ,  $Df(x)$  invertierbar für alle  $x \in U$ ,  $f$  injektiv. Dann gilt:

$f(U)$  ist offen in  $\mathbb{R}^n$  und  $f$  ist ein Diffeomorphismus.

(Verschärfung von III.1.4)

#### Beweis:

$f(U)$  ist offen (folgt aus III.1.6)

Nach III.1.6 bleibt zu zeigen, dass die Umkehrabbildung  $g : f(U) \rightarrow U$  stetig ist. Zunächst eine Bemerkung:

**Allgemeine Bemerkung:**

$X$  metrischer Raum,  $U \subseteq X$  offen,  $V \subseteq U$ . Dann gilt:

$$V \text{ ist offen in } X \Leftrightarrow V \text{ ist offen in } U$$

zu Zeigen:  $g$  stetig  $g : f(U) \rightarrow U$ . Sei  $V \subseteq U$  offen.  $g^{-1}(V) = f(V)$ , weil  $g = f^{-1}$

$$\stackrel{(\text{Bem})}{\Rightarrow} V \subseteq \mathbb{R}^n \text{ offen in } \mathbb{R}^n$$

$$\stackrel{III.1.6}{\Rightarrow} f(V) \text{ offen in } \mathbb{R}^n$$

$$\stackrel{(\text{Bem})}{\Rightarrow} f(V) = g^{-1}(V) \text{ offen in } f(U)$$

Damit folgt, dass das Urbild jeder offenen Teilmenge in  $U$  unter  $g$  ist offen in  $f(U)$  und damit ist  $g : f(U) \rightarrow U$  stetig □

## III.2. Beweis des Umkehrsatzes

**Vorbereitungen:**

### III.2.1. Schrankensatz

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und **Konvex**, (d.h.  $x, y \in U, t \in [0, 1]$ , dann ist  $(1-t)x + ty \in U$ ).

Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine  $C^1$ -Abbildung, und es gebe  $L \geq 0$ , so dass gilt:

$$\|Df(x)\| \leq L \quad \text{für alle } x \in U$$

$\Rightarrow f$  ist  $L$ -Lipschitzstetig, d.h.  $\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|$ ,  $\forall x, y \in U$

**Beweis:**

Seien  $x, y \in U$ . Nach dem Hauptsatz der Differentialrechnung und Integralrechnung gilt dann

$$f(y) = f(x) + \int_0^1 \underbrace{Df(x + t(y-x))}_{=(1-t)x + ty \in U} (y-x) dt$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} \|f(y) - f(x)\| &= \left\| \int_0^1 Df(x + t(y-x))(y-x) dt \right\| \\ &\leq \int_0^1 \|Df(x + t(y-x))(y-x)\| dt \\ &\leq \int_0^1 \underbrace{\|Df(x + t(y-x))\|}_{\leq L} \|y-x\| dt \\ &\leq L\|y-x\| \end{aligned}$$

□

### III.2.2. Banach'scher Fixpunktsatz

Sei  $X \neq \emptyset$  ein vollständiger metrischer Raum und  $f : X \rightarrow X$  eine Abbildung. Sei  $f$   $q$ -Lipschitzstetig mit  $q < 1$  (d.h.  $d(f(x), f(y)) \leq qd(x, y)$ ,  $q < 1$ ).

Dann besitzt  $f$  genau einen **Fixpunkt**  $x \in X$ , d.h.  $f(x) = x$

**Beweis:**

Eindeutigkeit: Seien  $x, y \in X$  mit  $f(x) = x$  und  $f(y) = y$ . Dann gilt

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq qd(x, y)$$

Also gilt

$$\underbrace{(1-q)}_{>0} \underbrace{d(x, y)}_{\geq 0} \leq 0$$

Dann muss aber  $d(x, y) = 0$  gelten und damit  $x = y$ , weil  $d(\cdot, \cdot)$  eine Metrik ist.

Existenz: Setze  $f^n : X \rightarrow X$  mit  $n \in \mathbb{N}_0$  und

$$f^0 := \text{id}, f^1 := f, f^n := f \circ f^{n-1}$$

Sei  $x_0 \in X$  beliebig,  $x_n := f^n(x_0)$ .

Behauptung:  $(x_n)_n$  konvergiert gegen ein  $x_\infty$  mit  $f(x_\infty) = x_\infty$ .

Wir zeigen, dass  $(x_n)_n$  eine Cauchyfolge ist:

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \\ &\leq qd(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq \dots \leq q^n d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

Dann folgt mit der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+m}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + d(x_{n-1+m}, x_{n+m}) \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} d(x_{n+k}, x_{n+k+1}) \\ &\leq \sum_{k=0}^{m-1} q^k d(x_n, x_{n+1}) \\ &\leq \sum_{k=0}^{m-1} q^k q^n d(x_0, x_1) \\ &\leq q^n d(x_0, x_1) \sum_{k=0}^{\infty} q^k \\ &= q^n d(x_0, x_1) \frac{1}{1-q} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Damit ist  $(x_n)_n$  eine Cauchy-Folge. Weil  $X$  vollständig ist, konvergiert dann  $x_n \rightarrow x_\infty \in X$ .

Nun gilt:

$$\begin{aligned} d(x_\infty, f(x_\infty)) &= d(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n, f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)) \\ &\stackrel{f \text{ stetig}}{=} d(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)) \\ &\stackrel{d \text{ stetig}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{d(x_n, f(x_n))}_{\leq q^n d(x_0, x_1)} = 0 \end{aligned}$$

Darauf folgt dann insgesamt  $f(x_\infty) = x_\infty$

□

### III.2.3. Lemma

Wenn  $T \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$  mit  $\|T\| \leq 1$  Dann ist  $1 - T$  invertierbar.

**Beweis:**

Wir zeigen:  $\forall y \in \mathbb{R}^n \exists! x \in \mathbb{R}^n$ , so dass  $(1 - T)x = y \Leftrightarrow x = y + Tx$

$$\begin{aligned} F_y : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto y + Tx \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\|F_y(x_0) - F_y(x_1)\| = \|T(x_0 - x_1)\| \leq \|T\| \|x_0 - x_1\|$$

Dann folgt mit dem Banachschen Fixpunktsatz genau einen Fixpunkt.  $\square$

### III.2.4. Beweis des Umkehrsatzes, Teil 1 (Spezialfall und Hauptarbeit)

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $0 \in U$ . Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine  $C^1$ -Funktion.  $Df(x)$  invertierbar für alle  $x \in U$  und  $f(0) = 0$ ,  $Df(0) = \mathbb{1}_n \Rightarrow \exists V \subseteq U$  offen,  $0 \in V$  und  $f(V) \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $f : V \rightarrow f(V)$  bijektiv und die Umkehrabbildung  $g : f(V) \rightarrow V$  ist stetig differenzierbar

**Beweis:**

Wir müssen die Gleichung  $f(x) = y$  für kleine  $y$  lösen.  $\Leftrightarrow x = y + x - f(x)$

Setze  $h_y(x) := y + x - f(x)$

Fixpunkte von  $h_y(x)$  sind Lösungen von  $f(x) = y$ . Suche einen abgeschlossenen Ball  $\overline{B}_r(0) \subseteq U$ , sodass für genügend kleine  $y$

1.  $h_y : \overline{B}_r(0) \rightarrow \overline{B}_r(0)$
2.  $h_y$  ist  $\frac{1}{2}$ -Lipschitz-stetig.

Wähle  $r > 0$  so, dass  $\overline{B}_r(0) \subseteq U$  und für alle  $x$  mit  $\|x\| \leq r$  gelte  $\|\mathbb{1}_n - Df(x)\| \leq \frac{1}{2}$  (das geht, weil  $Df(0) = \mathbb{1}_n$  und  $x \mapsto Df(x)$  stetig)

Sei nun  $\|y\| \leq \frac{1}{2}r$  und  $\|x\| \leq r$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \|h_y(x)\| &= \|y + x - f(x)\| \leq \|y\| + \|x - f(x)\| \\ &\leq \|y\| + \|(x - f(x)) - (0 - f(0))\| \\ &\stackrel{*}{\leq} \|y\| + \frac{1}{2}\|x - 0\| \\ &= \|y\| + \frac{1}{2}\|x\| \\ &\leq r, \end{aligned}$$

wobei sich (\*) mit dem Schrankensatz ( $D(x - f(x)) \leq \frac{1}{2}, \|x\| \leq r$ )

$\Rightarrow$  für  $\|y\| \leq \frac{1}{2}r$  gilt  $h_y(\overline{B}_r(0)) \subseteq \overline{B}_r(0)$ .

Es gilt sogar für  $\|y\| \leq \frac{r}{2}$ , dass  $h_y(\overline{B}_r(0)) \subseteq B_r(0)$  (offener Ball).

Sei nun  $\|y\| \leq \frac{r}{2}$ ,  $x, z \in \overline{B}_r(0)$

$$\begin{aligned} \|h_y(x) - h_y(z)\| &= \|y + x - f(x) - y - z + f(z)\| \\ &= \|(x - f(x)) - (z - f(z))\| \\ &\leq \frac{1}{2}\|x - z\| \end{aligned}$$



$\Rightarrow$  Für  $\|y\| \leq \frac{r}{2}$  ist  $h_y : \overline{B_r}(0) \rightarrow \overline{B_r}(0)$  Lipschitzstetig mit  $L = \frac{1}{2}$ .

Aus dem Banachschen Fixpunktsatz folgt:

$$\text{Es gibt genau ein } x \in \underbrace{\overline{B_r}(0)}_{\text{vollständig}} \text{ mit } h_y(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = y \quad (\|y\| \leq \frac{r}{2})$$

Wir haben jetzt gezeigt:

$$\text{Falls } \|y\| \leq \frac{r}{2}, \text{ so gibt es genau ein } x \in B_r(0) \text{ mit } f(x) = y$$

Setze  $V := \{x \in U \mid \|x\| < r, \|f(x)\| < \frac{r}{2}\} \subseteq U$  offen,  $0 \in V$ .

(und  $V \xrightarrow{f} B_{\frac{1}{2}}(0)$  ist bijektiv).

$$h_0(x) + f(x) = x - f(x) + f(x) = x$$

Sei nun  $x, z \in B_r(0)$

$$\begin{aligned} \|x - z\| &= \|h_0(x) + f(x) - h_0(z) - f(z)\| \\ &\leq \|h_0(x) - h_0(z)\| + \|f(x) - f(z)\| \\ &\leq \frac{1}{2}\|x - z\| + \|f(x) - f(z)\| \\ &\Rightarrow \|x - z\| \leq 2\|f(x) - f(z)\|. \end{aligned}$$

Daraus folgt nun:

$$u, v \in B_{\frac{1}{2}}(0) \quad g(u), g(v) \in V$$

und

$$\|g(u) - g(v)\| \leq 2\|f(g(u)) - f(g(v))\| = 2\|u - v\|$$

$\Rightarrow g : B_{\frac{1}{2}} \rightarrow V$  ist 2-Lipschitz stetig, also stetig!

Dann ist nach III.1.4  $g$  differenzierbar und

$$Dg(u) = \underbrace{(Df(g(u)))^{-1}}_{\substack{\text{stetig} \\ \text{stetig} \\ \text{stetig}}}$$

Damit ist  $g$  in  $C^1$ .

□

### III.2.5. Beweis des Umkehrsatzes, Teil 2

$U, f$  wie im Umkehrsatz,  $x_0 \in U$ . Betrachte Komposition

$$f := -x_0 + U \xrightarrow{a_1} U \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n \xrightarrow{a_2} \mathbb{R}^n \xrightarrow{a_3} \mathbb{R}^n$$

$$\left. \begin{aligned} a_1(x) &= x + x_0 \\ a_2(y) &= y - f(x_0) \\ a_3(y) &= Df(x_0)^{-1}y \end{aligned} \right\} \text{Diffeomorphismen}$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}(0) &= 0, \quad D\tilde{f}(0) = D_{a_3}(0)D_{a_2}(f(x_0))Df(x_0)D_{a_1}(0) \\ &= (Df(x_0))^{-1}\mathbb{1}_n Df(x_0)\mathbb{1}_n \\ &= \mathbb{1}_n \end{aligned}$$

⇒ aus der Behauptung folgt:  $\exists V \subseteq -x_0 + U$ , sodass  $\tilde{f} : V \rightarrow \tilde{f}(V)$  ein Diffeomorphismus ist.

$$\Rightarrow a_1(V) \subseteq U \text{ offen}$$

$$a_1(V) \xrightarrow{a_1^{-1}} V \xrightarrow{\tilde{f}} \tilde{f}(V) \xrightarrow{(a_3 \circ a_2)^{-1}} (a_3 \circ a_2)^{-1}(\tilde{f}(V)) \subseteq \mathbb{R}^n \text{ offen}$$

⇒ Teil 2 des Umkehrsatzes.

Aus Teil 2 folgt: Ist  $x_0 \in U$ , so ist  $f(x_0) \in f(U) \subseteq \mathbb{R}^n$  ein innerer Punkt von  $f(U)$ .

⇒ jeder Punkt von  $f(U)$  ist ein innerer Punkt von  $f(U)$ .

⇒  $f(U) \subseteq \mathbb{R}^n$  offen.

$V \subseteq U$  offen  $\Rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$  offen  $\Rightarrow f|_V(V) \subseteq \mathbb{R}^n$  offen, d.h.  $f(V) \subseteq \mathbb{R}^n$  offen. □

### Satz über implizite Funktionen:

**Situation:**  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$

**Frage:** Kann man die Gleichung  $f(x, y) = z_0$  nach  $x$  auflösen, bzw. gibt es eine Funktion  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  mit  $f(x, h(x)) = z_0$ ?

**Notation:** •  $U \subseteq \mathbb{R}^n, V \subseteq \mathbb{R}^k$  offen.

•  $f : U \times V \rightarrow \mathbb{R}^m$  stetig differenzierbar.

• Schreibe

$$D_1 f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}, D_2 f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_n} \end{pmatrix}$$

### III.2.6. Satz über implizite Funktionen

Seien  $U \subseteq \mathbb{R}^n, V \subseteq \mathbb{R}^k$  offen,  $f : U \times V \rightarrow \mathbb{R}^k$  eine  $C^1$ -Funktion,  $(x_0, y_0) \in U \times V$  und  $z_0 = f(x_0, y_0)$ .

Annahme:  $D_2 f(x_0, y_0) \in \text{Mat}_{k,k}(\mathbb{R})$  sei invertierbar.

Dann gibt es  $x_0 \in U_0 \subseteq U$  offen,  $y_0 \in V_0 \subseteq V$  offen und eine  $C^1$ -Funktion  $h : U_0 \rightarrow V_0$ , sodass gilt:

$$\bullet h(x_0) = y_0$$

$$\bullet f(x, h(x)) = z_0 \quad \forall x \in U_0.$$

Wenn  $f(x, y) = z_0$  für  $x \in U_0, y \in V_0$  gilt, dann ist  $y = h(x)$ .

#### Bemerkung:

Die Gleichung  $f(x, y) = z_0$  lässt sich lokal nach  $x$  auflösen.

Warum die Voraussetzung, dass  $D_2 f$  invertierbar ist?

Differenzieren der Identität  $f(x, h(x)) = z_0$  nach  $x$  ergibt

$$\underbrace{D_1 f(x, h(x))}_{\in \text{Mat}_{k,n}(\mathbb{R})} + \underbrace{D_2 f(x, h(x))}_{\in \text{Mat}_{k,k}(\mathbb{R})} \underbrace{Dh(x)}_{\in \text{Mat}_{k,n}(\mathbb{R})} = 0$$

$$\Leftrightarrow Dh(x) = -(D_2 f(x, h(x)))^{-1} D_1 f(x, h(x))$$

Insbesondere

$$Dh(x_0) = -(D_2 f(x_0, y_0))^{-1} D_1 f(x_0, y_0)$$

Wenn die lineare Gleichung

$$D_1 f(x_0, y_0) + D_2 f(x_0, y_0) Dh(x_0) = 0$$

nach  $Dh(x_0)$  aufgelöst werden kann, dann auch lokal  $f(x, h(x)) = z_0$

**Beweis von III.2.6:**

Da  $D_2f$  stetig,  $D_2f(x_0, y_0)$  invertierbar ist  $D_2f(x, y)$  invertierbar falls  $(x, y)$  nahe bei  $(x_0, y_0)$ . O.B.d.A gilt  $D_2f(x, y)$  invertierbar, für alle  $x \in U, y \in V$ . (Verkleinerung von  $U$  und  $V$ ).

Definiere Hilfsfunktion  $g : U \times V \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$  mit  $g(x, y) = (x, f(x, y))$  und wobei

$$Dg(x, y) = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_n & 0 \\ D_1f(x, y) & D_2f(x, y) \end{pmatrix}$$

$$\det Dg(x, y) = \det D_2f(x, y) \neq 0$$

$$\Rightarrow Dg(x, y) \text{ ist invertierbar}$$

Dann folgt mit dem Umkehrsatz:

$\exists$  offene Umgebung  $x_0 \in U_1 \subseteq U, y_0 \in V_1 \subseteq V$ , sodass  $g : U_1 \times V_1 \rightarrow g(U_1 \times V_1)$  Diffeomorphismus

Wähle  $U_0$  mit  $x_0 \in U_0 \subseteq U_1$  so, dass  $U_0 \times \{z_0\} \subseteq g(U_1 \times V_1)$  (geht, da  $g(x_0, y_0) = (x_0, z_0)$ ). Sei

$$\text{pr}_{\mathbb{R}^k} : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$$

$$(x, y) \mapsto y$$

$$\text{und } \text{pr}_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(x, y) \mapsto x$$

Setze nun  $h : U_0 \rightarrow V_1$  mit  $h(x) := \text{pr}_{\mathbb{R}^k}(g^{-1}(x, z_0)) \in V_1$ . Dann ist  $h$  in  $C^1$ , da  $g^{-1}$  in  $C^k$  ist und  $\text{pr}_{\mathbb{R}^k}$  in  $C^\infty$ .

$$h(x_0) = \text{pr}_{\mathbb{R}^k}(g^{-1}(x_0, z_0)) = \text{pr}_{\mathbb{R}^k}(x_0, y_0) = y_0$$

$$\begin{aligned} f(x, h(x)) &= f(x, \text{pr}_{\mathbb{R}^k}(g^{-1}(x, z_0))) \\ &= f(\text{pr}_{\mathbb{R}^n}(g^{-1}(x, z_0)), \text{pr}_{\mathbb{R}^k}(g^{-1}(x, z_0))) \\ &= f(g^{-1}(x, z_0)) \\ &= (\text{pr}_{\mathbb{R}^k} \circ g)(g^{-1}(x, z_0)) \\ &= \text{pr}_{\mathbb{R}^k}(x, z_0) \\ &= z_0 \end{aligned}$$

Eindeutigkeitsaussage: Setze  $V_0 = V_1$ .

Falls  $x \in U_0, y \in V_0, f(x, y) = z_0$

$$\Rightarrow g(x, y) = (x, z_0) \in U_0 \times \{z_0\} \subseteq g(U_1 \times V_0)$$

$$\Rightarrow (x, y) = g^{-1}(x, z_0)$$

$$\Rightarrow y = \text{pr}_{\mathbb{R}^k}(g^{-1}(x, z_0)) = h(x)$$

□

**III.2.7. Beispiel****Nullstellen von Polynomen:**

$f : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x, y) := y^n + \sum_{l=0}^{n-1} x_{n-1-l} y^l$  für festes  $x$  ist dann  $f_x(y) = f(x, y)$  ein Polynom.

Sei  $(x_0, y_0)$  so, dass  $f(x_0, y_0) = 0$  ( $f_{x_0}(y_0) = 0$ )

Wenn  $h$  wie in III.2.6, so ist  $h(x)$  eine Nullstelle von  $f_x$ .

$$D_2f(x, y) = ny^{n-1} + \sum_{l=1}^{n-1} x_{n-l} ly^{l-1} = f'_x(y)$$

$\Rightarrow$  Falls  $f_{x_0}(y_0) = 0$  und  $f'_{x_0}(y_0) \neq 0$ , so gibt es eine Funktion  $h : U \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, h(x)) = 0 = f_x(h(x)), \quad h(x_0) = y_0$$

$\Rightarrow$  Falls  $f'_{x_0}(y_0) \neq 0$  (\*), so hängen die Nullstellen von  $f_x$  differenzierbar von  $x$  ab.

$$(*) \Leftrightarrow y_0 \text{ einfacher Nullstelle von } f_{x_0}$$

$n = 2$ :

$$f(x_1, x_2, y) = y^2 + x_1 y + x_2$$

$$y = -\frac{x_1}{2} \pm \sqrt{\frac{x_1^2}{4} - x_2} \text{ ist differenzierbar, falls } \frac{x_1^2}{4} - x_2 > 0$$

## Geometrische Version des Satzes über implizite Funktionen

### III.2.8. Definition

$U \subseteq \mathbb{R}^m$  offen,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$  in  $C^1$ .

- $x \in U$  heißt **regulärer Punkt**, von  $f$ , falls  $Df(x) \in \text{Mat}_{k,m}(\mathbb{R})$  den Rang  $k$  hat (d.h.  $Df(x)$  stellt eine surjektive lineare Abbildung von  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  dar.)
- $x \in U$  heißt **singulärer** (oder **kritischer Punkt**) von  $f$ , falls  $x$  kein regulärer Punkt von  $f$  ist. (d.h.  $\text{Rang } Df(x) < k$ )
- $y \in \mathbb{R}^k$  heißt **regulärer Wert** von  $f$ , falls jedes  $x \in U$  mit  $f(x) = y$  ein regulärer Punkt ist.

#### Bemerkung:

1. Falls  $k = 1$ , so ist  $x \in U$  ein kritischer Punkt von  $f$  genau dann, wenn  $Df(x) = 0 \in \text{Mat}_{1,m}(\mathbb{R})$ . (Setze Definition von 'kritischer Punkt' wie zuvor)
2. Falls  $f^{-1}(y) = \emptyset$  ( $\Leftrightarrow y \notin f(U)$ ), so ist  $y$  ein regulärer Wert von  $f$ .
3. Falls  $k > m$ , so ist  $y \in \mathbb{R}^k$  ein regulärer Wert von  $f$  genau dann, wenn  $y \notin f(U)$ .
4. Falls  $k = m$ , so ist  $x \in U$  ein regulärer Punkt von  $f$  genau dann, wenn  $Df(x) \in \text{Mat}_{m,m}(\mathbb{R})$  und  $T$  invertierbar ist.

### III.2.9. Satz

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  offen,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$  eine  $C^1$ -Abbildung und  $y_0 \in \mathbb{R}^k$  sei ein regulärer Wert von  $f$ .

$$M := f^{-1}(y_0) \subseteq U$$

Dann existiert zu jedem  $x_0 \in M$  eine offene Umgebung  $x_0 \in U_0 \subseteq U$  und ein Diffeomorphismus  $h : U_0 \rightarrow h(U_0) \subseteq \mathbb{R}^m$  offen, sodass

$$h(M \cap U_0) = \{0\} \times \mathbb{R}^{m-k} \subseteq \mathbb{R}^m$$

**Beispiel:**

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \langle x, x \rangle = \|x\|_2^2$$

Dann gilt

$$Df(x)v = 2\langle x, v \rangle$$

 $\Rightarrow$  Jedes  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x \neq 0$  ist regulärer Punkt von  $f$ . $\Rightarrow$  Jedes  $y \in \mathbb{R}$ ,  $y \neq 0$  ist regulärer Wert.

$$f^{-1}(1) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1\} = S^{n-1}$$

**Beweis von III.2.9:**Sei  $x_0 \in M$  (d.h.  $f(x_0) = y_0$ ).  $Df(x_0) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  surjektiv.Wähle Basis  $(v_1, \dots, v_m)$  von  $\mathbb{R}^m$  so, dass  $Df(x_0)v_i = e_i$  für  $i < k$  und  $Df(x_0)v_j = 0$  für  $j > k$ .Erklärung:  $\dim(\ker Df(x_0)) = m - k$  (Dimensionsformel)

- Sei  $(v_{k+1}, \dots, v_m)$  Basis von  $\ker Df(x_0)$
- Weil  $Df(x_0)$  surjektiv ist, gibt es  $v_1, \dots, v_k$  mit  $Df(x_0)v_i = e_i$  für  $i = 1, \dots, k$
- Dann ist  $(v_1, \dots, v_m)$  eine Basis von  $\mathbb{R}^m$  (weil linear unabhängig)

Sei  $p : \mathbb{R}^m \rightarrow \{0\} \times \mathbb{R}^{m-k} \subseteq \mathbb{R}^m$  mit  $p(x) = \text{span}\{e_{k+1}, \dots, e_m\}$  die lineare Abbildung.

Dann gilt

$$p(v_i) = \begin{cases} 0, & \text{falls } i \leq k \\ e_i, & \text{falls } i > k \end{cases}$$

Setze nun  $h : U \rightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}$  mit  $h(x) := (f(x) - y_0, p(x))$ . Dann ist  $h$  in  $C^1$ .Behauptung:  $Dh(x_0) \in \text{Mat}_{m,m}(\mathbb{R})$  ist invertierbar.

Dies gilt denn

$$Dh(x_0)v_i = (Df(x_0)v_i, p(v_i)) = \begin{cases} (e_i, 0), & \text{falls } i \leq k \\ (0, e_i), & \text{falls } i > k \end{cases}$$

Also ist  $Dh(x_0)$  invertierbar.Weil  $x \mapsto Dh(x)$  stetig ist, gibt es Umgebung  $x_0 \in U_1 \subseteq U$ , sodass  $Dh(x)$  invertierbar ist  $\forall x \in U_1$ . Mit dem Umkehrsatz folgt dann

$$\exists x_0 \in U_0 \subseteq U_1 \subseteq U : \quad h : U_0 \rightarrow h(U_0) \text{ ist Diffeomorphismus}$$

offen

Es gilt

$$h(U_0 \cap M) = h(U_0) \cap \{0\} \times \mathbb{R}^{m-k}$$

$$x \in U_0 \cap M \quad \Rightarrow \quad f(x) = y_0 \quad \Rightarrow \quad h(x) = (f(x) - y_0, p(x)) = (0, p(x)) \in \{0\} \times \mathbb{R}^{m-k}$$

$$h(x) \in \{0\} \times \mathbb{R}^{m-k} \quad \Rightarrow \quad h(x) - y_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad x \in U_0 \cap M$$

□

Man kann zeigen:

Ist  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  abgeschlossen, so gibt es eine  $C^\infty$ -Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f^{-1}(0) = A$

### III.2.10. Definition

Eine Teilmenge  $M \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$  heißt  **$n$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit** von  $\mathbb{R}^{n+k}$ , falls gilt:  
zu jedem  $x_0 \in M$  existiert eine offene Umgebung  $x_0 \in U \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$  und ein Diffeomorphismus  $h: U \rightarrow h(U) \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$  mit  $h(U \cap M) = \{0\} \times \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ .

Ein solches Paar  $(U, h)$  heißt **Karte** von  $M$ .

Eine Familie  $(U_i, h_i)_{i \in I}$  von Karten heißt **Atlas** von  $M$ , falls  $\bigcup_{i \in I} U_i \cap M = M$

### III.2.11. Beispiele

1.  $U \subseteq \mathbb{R}^m$ ,  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^k$  eine  $C^1$ -Abbildung.  
 $y_0 \in \mathbb{R}^k$  regulärer Wert, dann ist  $f^{-1}(y_0) \subseteq \mathbb{R}^m$  ist eine Untermannigfaltigkeit der Dimension  $m - k$ .  
z.B.:  $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1\}$  ist eine  $(n - 1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit.

Eine offene Teilmenge  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  ist eine  $n$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^n$  (!!)

## IV. Anfangsgründe der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen

### IV.1. Einleitung

$x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  Massepunkt.

Newton:  $\ddot{x}(t) = F(x(t))$  (zweite Ableitung).

$F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  'Kraft'

#### IV.1.1. Definition

Eine **gewöhnliche Differentialgleichung**  $m$ -ter Ordnung ist eine Gleichung der Form

$$x^{(m)} = F(x(t), \dots, x^{(m-1)}, t)$$

für eine Funktion  $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $F: \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{m\text{-mal}} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Eine **Lösung** der Gleichung ist eine Funktion  $x$ , welche die Gleichung erfüllt.

Wir schreiben immer ' $t$ ' für die unabhängige Variable und

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}x(t), \quad \ddot{x}(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t)$$

#### IV.1.2. Beispiel

$a \in \mathbb{R}$ ,  $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = ax(t)$$

( $n = m = 1$  und  $F(x, t) = ax$ )

Die Lösungen sind genau die Funktionen  $t \mapsto ce^{at}$  mit  $c \in \mathbb{R}$ ,

denn falls  $\dot{x} = ax$ , so gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \underbrace{(e^{-at}x(t))}_{\text{konstant}} &= -ae^{-at}x(t) + e^{-at}ax(t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Dann folgt

$$x(t) = e^{at} \underbrace{x(0)}_{=:c}$$

Es gilt: zu jedem  $c \in \mathbb{R}$  gibt es genau eine Lösung von  $\dot{x}(t) = ax(t)$  mit  $x(0) = c$ , nämlich  $x = ce^{at}$

#### IV.1.3. Beispiel

$n = 1, x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Differentialgleichung

$$x^{(m)}(t) = 0$$

Die Lösungen von dieser Differentialgleichung sind genau die Funktionen

$$x(t) = \sum_{k=0}^{m-1} c_k t^k$$

Es gilt

$$x^{(k)}(0) = c_k k! \quad c_k = \frac{1}{k!} x^{(k)}(0)$$

$\Rightarrow$  zu gegebenen  $x_0, \dots, x_{m-1} \in \mathbb{R}$  gibt es genau eine Lösung der Gleichung

$$x^{(m)}(t) = 0$$

mit

$$x^{(k)}(0) = x_k \quad k = 0, \dots, m-1$$

$$x(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x_k}{k!} t^k$$

#### IV.1.4. Beispiel

$x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ x_1(t) \end{pmatrix}$$

Die Lösungen sind dann gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix}$$

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ mit } F \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

#### IV.1.5. Beispiel

$$\dot{x}(t) = (x(t))^2$$

Die Lösungen sind genau die Funktionen

$$x(t) = \frac{1}{c-t} \quad x = \frac{1}{x(0)}$$

sowie  $x(t) = 0$

Hier ist die Lösung nur für  $t \in (-\infty, c)$  (falls  $c > 0$ ) definiert.

#### IV.1.6. Beispiel

$$\dot{x}(t) = \sqrt{|x(t)|}$$

hat z.B die Lösungen:

$$x(t) = \begin{cases} 0, & \text{falls } t \leq a \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{4}(t-a)^2 & \text{falls } t \geq a \end{cases}$$

⇒ Lösungen nicht eindeutig.

Erwartung: Das **Anfangswertproblem**  $x^{(m)}(t) = F(x(t), \dots, x^{m-1}(t), t)$  hat zu gegebenen  $x_0, \dots, x_{m-1} \in \mathbb{R}^n$  genau eine Lösung  $x : (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $\delta > 0$  und Anfangsdaten  $x^{(k)}(t_0) = x_k$  für  $k = 0, \dots, m-1$  unter 'vernünftigen' Voraussetzungen an  $F$ .

#### IV.2. Lineare Differentialgleichungen mit Konstanten Koeffizienten

Sei  $A \in \text{Mat}_{n,m}(\mathbb{C})$  und sei ein Anfangswertproblem mit Lösungen  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$  gegeben durch

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{C}^n$$

##### IV.2.1. Definition

Sei  $A \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{C})$ . Dann

$$\exp(A) = e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{C}) \quad (\text{Matrix-Exponentialfunktion})$$

##### IV.2.2. Lemma

Die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$  konvergiert für jedes  $A \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{C})$ .

**Beweis:**

$$\left\| \frac{1}{k!} A^k \right\| \leq \frac{1}{k!} \|A\|^k$$

Wobei die linke Norm die Operatornorm bezeichnet.

$$\Rightarrow \left\| \sum_{k=p}^q \frac{1}{k!} A^k \right\| \leq \sum_{k=p}^q \frac{1}{k!} \|A\|^k \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0,$$

weil  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \|A\|^k$  konvergiert.

⇒ Die Folge  $(F_m(A))_m$  mit  $F_m(A) = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} A^k$  ist eine Cauchy-Folge in  $\text{Mat}_{n,n}(\mathbb{C})$ .

Weil  $\text{Mat}_{n,n}(\mathbb{C})$  vollständig ist, konvergiert  $F_m(A) \rightarrow \exp(A)$

##### IV.2.3. Satz

Seien  $A, B \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{C})$ .

Dann gilt

(i) Die Funktion

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{C}) \\ t &\mapsto \exp(tA) \end{aligned}$$



ist differenzierbar und es gilt

$$\frac{d}{dt}(\exp(tA)) = A \exp(tA)$$

(ii) Falls  $AB = BA$ , so gilt

$$B \exp(A) = \exp(A)B$$

(iii) Es gilt

$$\exp(A) \exp(-A) = \mathbb{1}_n$$

(iv) Falls  $X : \mathbb{R} \rightarrow \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{C})$  differenzierbar, und  $\dot{X}(t) = AX(t)$  so gilt

$$X(t) = \exp(tA)X(0)$$

(v) Falls  $AB = BA$ , so gilt

$$\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$$

(vi) Falls  $B \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ , so gilt

$$B \exp(A) B^{-1} = \exp(BAB^{-1})$$

### Bemerkung:

Man kann zeigen, dass die Funktion  $\exp : \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{C}) \rightarrow \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{C})$  eine  $C^\infty$ -Funktion ist. Die naheliegende Formel

$$D_H \exp(A) = \exp(A)H$$

ist Falsch!

### Beweis:

(i)  $F_m : \mathbb{R} \rightarrow \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{C})$  mit  $F_m(t) = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} A^k t^k$ . Dann konvergiert  $F_m(t)$  punktweise gegen  $\exp(tA)$ .

Es gilt

$$\begin{aligned} F'_m(t) &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{(k-1)!} A^k t^{k-1} \\ &= A \sum_{k=1}^m \frac{1}{(k-1)!} A^{(k-1)} t^{(k-1)} \\ &= A F_{m-1}(t) \end{aligned}$$

zu zeigen bleibt: Die Folge  $F_m$  konvergiert gleichmäßig auf  $[-R, R]$ , für jedes  $R \in \mathbb{R}$ . Aber:  $|t| \leq R$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|\exp(tA) - F_m(A)\| &\leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k!} |t|^k \|A\|^k \\ &\leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k!} (R\|A\|)^k \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} B \exp(A) &= B \lim_{m \rightarrow \infty} F_m(A) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} (B F_m(A)) \\ &\stackrel{!}{=} \lim_{m \rightarrow \infty} (F_m(A) B) \\ &= \left( \lim_{m \rightarrow \infty} F_m(A) \right) B \\ &= \exp(A) B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_m(A)B &= \left( \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} A^k \right) B \\
 &= \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} A^k B \\
 &\stackrel{AB=BA}{=} \sum_{k=0}^m B \frac{1}{k!} A^k \\
 &= B F_m(A)
 \end{aligned}$$

(iii) Betrachte  $G : \mathbb{R} \rightarrow \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{C})$  mit

$$\begin{aligned}
 G(t) &= \exp(tA) \exp(-tA) \\
 G(0) &= \exp(0) \exp(0) = \mathbb{1}_n
 \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} G(t) &= \frac{d}{dt} (\exp(tA)) \exp(-tA) + \exp(tA) \frac{d}{dt} (\exp(-tA)) \\
 &= A \exp(tA) \exp(-tA) + \exp(tA) (-A) \exp(-tA) \\
 &= AG(t) - A \exp(tA) \exp(-tA) \\
 &= AG(t) - AG(t) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Und dann folgt

$$G(t) = G(0)$$

(iv) Setze  $y(t) = \exp(-tA)X(t)$  mit  $y(0) = \exp(0)X(0) = x_0$ .  
Dann gilt

$$\begin{aligned}
 \dot{y}(t) &\stackrel{1)}{=} -A \exp(-tA)X(t) + \exp(-tA)AX(t) \\
 &\stackrel{2)}{=} -A \exp(-tA)X(t) + A \exp(-tA)X(t) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Dann folgt

$$\begin{aligned}
 y(t) &= x_0 \quad \forall t \\
 &\stackrel{3)}{\Rightarrow} X(t) = \exp(tA)x_0 \quad \forall t
 \end{aligned}$$

(v)

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} (\exp(tA) \exp(tB)) &\stackrel{1)}{=} A \exp(tA) \exp(tB) + \exp(tA) B \exp(tB) \\
 &\stackrel{2)}{=} (A + B) \exp(tA) \exp(tB)
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Die Funktion  $X : \mathbb{R} \rightarrow \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{C})$  mit  $X(t) = \exp(tA) \exp(tB)$  erfüllt die Differentialgleichung

$$\begin{aligned}
 \dot{X}(t) &= (A + B)X(t) \quad \text{und} \quad X(0) = \mathbb{1}_n \\
 &\stackrel{4)}{\Rightarrow} X(t) = \exp(t(A + B)) \quad t = 1
 \end{aligned}$$

□

(vi) Setze  $X(t) = B \exp(tA) B^{-1}$  und  $X(0) = B \mathbb{1}_n B^{-1} = \mathbb{1}_n$ .  
Dann gilt

$$\begin{aligned} B A \exp(tA) B^{-1} &= B A B^{-1} \underbrace{B \exp(tA) B^{-1}}_{X(t)} \\ &= (B A B^{-1}) X(t) \\ \Rightarrow X(t) &= \exp(t B A B^{-1}) \end{aligned}$$

□

Betrachte das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A x(t) \\ \dot{x}(0) &= x_0 \end{aligned}$$

$x$  ist eine Funktion  $\mathbb{R} \xrightarrow{x} \mathbb{C}^n$  und  $A \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{C})$

#### IV.2.4. Korollar

Zu jedem  $x_0 \in \mathbb{C}^n$  gibt es genau eine Lösung von obigen Anfangswertproblem, nämlich

$$X(t) = \exp(tA) x_0$$

**Beweis:**

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\exp(tA) x_0) &= A \exp(tA) x_0 \\ \exp(0A) x_0 &= \mathbb{1}_n x_0 = x_0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow x(t) := \exp(tA) x_0$  löst das Anfangswertproblem.

Eindeutigkeit: Sei  $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$  eine Lösung des AWP. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \exp(-tA) x(t) &= -A \exp(-tA) x(t) + \exp(-tA) \dot{x}(t) \\ &= -A \exp(-tA) x(t) + \exp(-tA) A x(t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \exp(-tA) x(t) = \underbrace{\exp(0A)}_{=\mathbb{1}_n} \underbrace{x(0)}_{x_0} = x_0$$

$$\Rightarrow x(t) = \exp(tA) x_0$$

**Bemerkung:**

Sei  $A \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{C})$  fest. Dann gilt

$x, y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$   $\dot{x}(t) = A x(t), \dot{y}(t) = A y(t)$ . Wenn  $a \in \mathbb{C}$ , dann gilt

$$\frac{d}{dt}(x(t) + a y(t)) = A(x(t) + a y(t))$$

$\Rightarrow$  Jede Linearkombination von Lösungen von  $Ax(t) = \dot{x}(t)$  ist wieder eine Lösung.

$$\{x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n \mid \dot{x}(t) = A x(t)\}$$

ist Vektorraum der Dimension  $n$ .

$$\{x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid \dot{x}(t) = Ax(t)\} \rightarrow \mathbb{C}^n$$

$$x \mapsto x(0)$$

ist linear und bijektiv.

Die Funktion

$$x_i(t) := \exp(tA)e_i \quad i = 1, \dots, n$$

bilden eine Basis des Lösungsraumes.  $\Rightarrow$  Die  $i$ -te Spalte von  $\exp(tA)$  ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = e_i$$

#### IV.2.5. Inhomogene Differentialgleichung

$A \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{C})$ ,  $x_0 \in \mathbb{C}^n$ ,  $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$  stetig. Dann heißt

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + b(t)$$

$$x(0) = x_0$$

**inhomogene Differentialgleichung Ansatz:** Suche  $x$  in der Form

$$x(t) = \exp(tA)c(t)$$

mit  $c : \mathbb{R} \rightarrow \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{C})$  in  $C^1$ .

$$\exp(0)c(0) = c(0) \stackrel{!}{=} x_0$$

Dann gilt

$$\frac{d}{dt}(\exp(tA)c(t)) = A(\exp(tA)c(t)) + \underbrace{\exp(tA)\dot{c}(t)}_{\stackrel{!}{=} b(t)}$$

$$\Rightarrow \dot{c}(t) = \exp(-tA)b(t)$$

$$c(t) = x_0 + \int_0^t \exp(-sA)b(s) \, ds$$

Dann folgt

$$\Rightarrow x(t) = \exp(tA) \left( x_0 + \int_0^t \exp(-sA)b(s) \, ds \right)$$

ist eine Lösung von

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + b(t)$$

$$x(0) = x_0$$

$$x(t) = \underbrace{\exp(tA)x_0}_{\text{löst die inhomogene Gleichung}} + \underbrace{\int_0^t \exp((t-s)A)b(s) \, ds}_{\text{Variation der Konstanten}}$$

Wie berechnet man  $\exp(tA)$ ?

#### IV.2.6. Beispiele

1.

$$A = (\text{hier fehlt was})$$

## Index

*Die Seitenzahlen sind mit Hyperlinks zu den entsprechenden Seiten versehen, also anklickbar*

$n$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit, 56

$\varepsilon$ - $\delta$ -stetig, 8

$\varepsilon$ -Ball, 11

$i$ -te partielle Ableitung von  $f$ , 27

äquivalent, 4

überdeckungskompakt, 21

abgeschlossen, 11

Ableitung, 25

Abstand, 4

Berührungspunkt, 11

Cauchy-Schwarz-Ungleichung, 3

Cauchyfolge, 6

Charakteristische Polynom, 41

differenzierbar, 25, 32

Dreiecksungleichung, 5

Eigenvektoren, 41

Eigenwert, 41

euklidischer Vektorraum, 2

folgenkompakt, 16

folgenstetig, 8

gleichmäßig stetig, 20

Hessematrix, 36

innerer Punkt, 11

iterierte Richtungsableitung, 36

Kompakt, 21

kritischer Punkt, 41

Lebesgue Zahl, 20

Lipschitz-stetig, 9

Metrik, 5

Metrischer Raum, 5

negativ definit, 44

Norm, 2

offen, 11

offene Überdeckung, 20

Operatornorm, 10

positiv definit, 44

Produktregel, 31

$r$ -mal stetig differenzierbar, 36

Richtungsableitung, 26

Skalarprodukt, 1, 2

Standardbasis, 1

sternförmig, 40

stetig, 8

stetig differenzierbar, 30

Taylorpolynom, 37

Taylorreihe, 39

Teilüberdeckung von  $U$ , 21

total beschränkt, 22

Umgebung, 11

vollständig, 7

Anfangswertproblem, 58

Atlas, 56

Fixpunkt, 48

gewöhnliche Differentialgleichung, 56

Karte, 56

Konvex, 48

kritischer Punkt, 54

Lösung, 56

lokaler Diffeomorphismus, 47

regulärer Punkt, 54

regulärer Wert, 54

singulärer, 54