



WESTFÄLISCHE  
WILHELMS-UNIVERSITÄT  
MÜNSTER



FACHBEREICH 10  
MATHEMATIK UND  
INFORMATIK

# **Skript Topologie I.**

**Mitschrift der Vorlesung „Topologie I.“ von Prof. Dr. Arthur Bartels**

Jannes Bantje

18. Januar 2016

## Aktuelle Version verfügbar bei



<https://github.com/JaMeZ-B/latex-wwu>

GitHub ist eine Internetplattform, auf der viele OpenSource-Projekte gehostet werden. Diese Plattform nutzen wir zur Zusammenarbeit, also findet man hier neben den PDFs auch die  $\text{\TeX}$ -Dateien. Außerdem ist über diese Plattform auch direktes Mitarbeiten möglich, siehe nächste Seite.



**sciebo** die Campuscloud

<https://uni-muenster.sciebo.de/public.php?service=files&t=965ae79080a473eb5b6d927d7d8b0462>

Sciebo ist ein Dropbox-Ersatz der Hochschulen in NRW, der von der Uni Münster in leitender Position auf Basis der OpenSource-Software Owncloud aufgebaut wurde. Wenn man auf den Link klickt, kann man die Freigabe zum eigenen Speicher hinzufügen und hat dann immer automatisch die aktuellste Version.



**Bittorrent Sync**

B6WH2DISQ5QVYIRYIEZSF4ZR2IDVKPN3I

BTSync ist ein peer-to-peer Dateisynchronisations-Tool. Dabei werden die Dateien nur auf den Computern der Teilnehmer an einer Freigabe gespeichert. Ein RasPi ist permanent online, sodass stets die aktuellste Version verfügbar ist. Clients gibt es für jedes Betriebssystem. Zugang ist über das obige „Secret“ bzw. den QR-Code möglich.



---

## Vorlesungshomepage

<https://wwwmath.uni-muenster.de/reine/u/topos/lehre/WS2014-2015/Topologie1/Topologie1.html>

Hier ist ein Link zur offiziellen Vorlesungshomepage.

## Vorwort — Mitarbeit am Skript

Dieses Dokument ist eine Mitschrift aus der Vorlesung „Topologie I., WiSe 2014/2015“, gelesen von Prof. Dr. Arthur Bartels. Der Inhalt entspricht weitestgehend dem Tafelanschrieb. Für die Korrektheit des Inhalts übernehme ich keinerlei Garantie! Für Bemerkungen und Korrekturen – und seien es nur Rechtschreibfehler – bin ich sehr dankbar. Korrekturen lassen sich prinzipiell auf drei Wegen einreichen:

- Persönliches Ansprechen in der Uni, Mails an [✉ j.bantje@wwu.de](mailto:j.bantje@wwu.de) (gerne auch mit annotierten PDFs) oder Kommentare auf <https://github.com/JaMeZ-B/latex-www> [↗](#).
- *Direktes* Mitarbeiten am Skript: Den Quellcode poste ich auf GitHub (siehe oben), also stehen vielfältige Möglichkeiten der Zusammenarbeit zur Verfügung: Zum Beispiel durch Kommentare am Code über die Website und die Kombination Fork + Pull Request. Wer sich verdient macht oder ein Skript zu einer Vorlesung, die ich nicht besuche, beisteuern will, dem gewähre ich gerne auch Schreibzugriff.  
Beachten sollte man dabei, dass dazu ein Account bei [github.com](https://github.com) [↗](#) notwendig ist, der allerdings ohne Angabe von persönlichen Daten angelegt werden kann. Wer bei GitHub (bzw. dem zugrunde liegenden Open-Source-Programm „git“) – verständlicherweise – Hilfe beim Einstieg braucht, dem helfe ich gerne weiter. Es gibt aber auch zahlreiche empfehlenswerte Tutorials im Internet.<sup>1</sup>
- *Indirektes* Mitarbeiten:  $\text{\TeX}$ -Dateien per Mail verschicken.  
Dies ist nur dann sinnvoll, wenn man einen ganzen Abschnitt ändern möchte (zB. einen alternativen Beweis geben), da ich die Änderungen dann per Hand einbauen muss! Ich freue mich aber auch über solche Beiträge!

## Inhalt der Vorlesung

In der Vorlesung werden wir uns mit algebraischer Topologie beschäftigen. In der algebraischen Topologie werden topologische Fragen, wie zum Beispiel wann  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{R}^m$  homöomorph sind, in algebraische Fragen übersetzt. Ein wichtiges Hilfsmittel für solche Übersetzungen sind Homologiegruppen. Wir werden in der Vorlesung diese Homologiegruppen definieren und Hilfsmittel entwickeln, um Homologiegruppen zu berechnen. Es ergeben sich dann schöne topologische Anwendungen, wie zum Beispiel die topologische Invarianz der Dimension.

## Literatur

- BREDON, G.E.: *Topology and Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, Springer Verlag 1993
- HATCHER, A.: *Algebraic Topology* [↗](#), Cambridge University Press, 2002
- LÜCK, W.: *Algebraische Topologie - Homologie und Mannigfaltigkeiten*, Vieweg, 2005
- TOM DIECK, T.: *Topologie*, 2. Auflage, de Gruyter 2000
- WALDHAUSEN, F.: *Skript zur Einführung in die Topologie* [↗](#), *Skript zur Topologie* [↗](#)

<sup>1</sup> zB. <https://try.github.io/levels/1/challenges/1> [↗](#), ist auf Englisch, aber dafür interaktives LearningByDoing

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Kategorien, Funktoren und natürliche Transformationen</b>	<b>1</b>
1.1	Definition: Kategorie . . . . .	1
1.2	Beispiele für Kategorien . . . . .	1
1.3	Bemerkungen zu Kategorien . . . . .	2
1.4	Definition: Funktor . . . . .	2
1.5	Beispiele für Funktoren . . . . .	2
1.6	Definition: Natürliche Transformation . . . . .	2
1.7	Ausblick auf Kategorien und Funktoren in der algebraischer Topologie . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Kombinatorische Beschreibungen topologischer Räume</b>	<b>4</b>
2.1	Beispiel einer kombinatorischen Beschreibung eines Raumes . . . . .	4
2.2	Definition: Simplicialer Komplex . . . . .	4
2.3	Beispiel für simpliciale Komplexe . . . . .	4
2.4	Definition: Unterkomplex . . . . .	4
2.5	Definition: Simpliciale Abbildung . . . . .	4
2.6	Definition: Geometrische Realisierung . . . . .	5
2.7	Beispiel: Rand des $n$ -Simplizes und der Torus . . . . .	5
2.8	Definition: Polyeder . . . . .	6
2.9	Definition: Euler-Charakteristik . . . . .	6
2.10	Satz über die Euler-Charakteristik . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Simpliciale Homologie</b>	<b>7</b>
3.1	Definition: Freier $R$ -Modul mit Basis $S$ . . . . .	7
3.2	Lemma: Universale Eigenschaft von freien Moduln . . . . .	7
3.3	Beispiel für freie und nicht-freie Moduln . . . . .	7
3.4	Definition: $n$ -ter Kettenmodul . . . . .	8
3.5	Definition: Orientierung eines $(n - 1)$ -Simplizes als Teilmenge eines $n$ -Simplizes . . . . .	8
3.6	Definition: $n$ -te Randabbildung . . . . .	8
3.7	Proposition: Für die Randabbildung gilt $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$ . . . . .	8
3.8	Lemma: Ein $(n - 2)$ -Simplex ist Seite von genau zwei $(n - 1)$ -Simplizes . . . . .	8
3.9	Notation für das Weglassen eines Knotens . . . . .	9
3.10	Definition: $n$ -ter Homologiemodul . . . . .	9
3.11	Beispiele für Homologiemoduln . . . . .	9
3.12	Definition: $R$ -Kettenkomplex, $n$ -te Homologie eines $R$ -Kettenkomplexes . . . . .	10
3.13	Bemerkungen zu Kettenkomplexen . . . . .	10
3.14	Definition: Simplicialer Kettenkomplex . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Euler-Charakteristik von Kettenkomplexen</b>	<b>11</b>
4.1	Wiederholung: Torsionsgruppe . . . . .	11
4.2	Lemma: Rang einer endlich erzeugten abelschen Gruppe . . . . .	11
4.3	Definition: Kurze exakte Sequenz . . . . .	11
4.4	Beispiele für kurze exakte Folgen . . . . .	12
4.5	Bemerkung: Spaltung einer kurzen exakten Sequenz . . . . .	12
4.6	Bemerkung: Existenz einer Spaltung, wenn $M_2$ frei ist . . . . .	12
4.7	Bemerkung: Der Rang ist additiv . . . . .	12

4.8	Proposition: Der Rang ist für kurze exakte Folgen endl. erz., abelscher Gruppen additiv	12
4.9	Definition: Eulercharakteristik von $\mathbb{Z}$ -Kettenkomplexen	14
4.10	Satz: Eulercharakteristik eines endlich erzeugten $\mathbb{Z}$ -Kettenkomplexes	14
4.11	Korollar: Die Eulercharakteristik eines simplizialen Komplexes	14
<b>5</b>	<b>Singuläre Homologie</b>	<b>15</b>
5.1	Definition: Singuläre Simplizes und $n$ -ter singulärer Kettenmodul	15
5.2	Definition: Einschränkung eines singulären Simplizes auf eine Seite	15
5.3	Bemerkung zur Inklusion der $j$ -ten Seite	15
5.4	Definition: $n$ -te singuläre Randabbildung	15
5.5	Proposition: Für die Randabbildungen gilt $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$	15
5.6	Lemma: Hilfslemma für Proposition 5.5	15
5.7	Definition: Singuläre Homologie von $X$	16
5.8	Definition: $n$ -Ketten, $n$ -Ränder und $n$ -Zykel und Homologieklassse	16
5.9	Beispiel: Die Homologie des Ein-Punkt-Raumes	16
5.10	Proposition: Eigenschaften von $H_0(X)$ für $X \neq \emptyset$ und $X$ wegzusammenhängend	16
5.11	Bemerkung: Vorgehen, um später zu zeigen: $H_*(K; R) \cong H_*( K ; R)$	17
<b>6</b>	<b>Funktorialität</b>	<b>18</b>
6.1	Definition: $R$ -Kettenabbildung	18
6.2	Bemerkung: Induzierte Abbildung einer Kettenabbildung auf Homologie	18
6.3	Bemerkung: Homologie definiert einen Funktor	18
6.4	Definition: Induzierte Abbildung auf Kettenkomplexen	18
6.5	Proposition: Der singuläre Kettenkomplex über $R$ bildet einen Funktor	19
6.6	Korollar: Homologie ist ein Funktor $\text{TOP} \rightarrow R\text{-MOD}$	19
6.7	Bemerkung: Notation für die auf Homologie induzierte Abbildung	19
6.8	Definition: Summe oder Koproduct von topologischen Räumen	19
6.9	Definition: Summe von $R$ -Moduln	20
6.10	Satz: Homologie des Koproductes topologischer Räume	20
<b>7</b>	<b>Homotopieinvarianz</b>	<b>21</b>
7.1	Bemerkung: Die induzierte Abbildung eines Homöomorphismus ist ein Isomorphismus	21
7.2	Definition: Homotopieäquivalenz und Homotopieinverse	21
7.3	Satz: Homotopieinvarianz der Homologie	21
7.4	Korollar: Die induzierte Abbildung einer Homotopieäquivalenz ist ein Isomorphismus	21
7.5	Korollar: Homologie eines kontrahierbaren Raumes	21
7.6	Definition: Kettenhomotopie	22
7.7	Prop.: induzierte Abbildungen von kettenhomotopen Kettenabbildungen sind gleich	22
7.8	Lemma: Reduktion von Satz 7.3 auf Beweis eines Spezialfalles	22
7.9	Bemerkung zum Vorgehen beim Beweis von [#]	22
7.10	Definition: Affin lineare Abbildungen zur Konstruktion der Kettenhomotopie	23
7.11	Lemma: Gleichungen für die Abbildungen aus 7.10	23
7.12	Beweis von [##]/Konstruktion der Kettenhomotopie	24
7.13	Bemerkung: Konstruktion einer Kettenhomotopie aus einer Homotopie	25
<b>8</b>	<b>Homologie von Paaren</b>	<b>26</b>
8.1	Definition: Paar von topologischen Räumen	26
8.2	Definition: Singulärer Kettenkomplex und Homologiemodul von Paaren	26
8.3	Definition: Der singuläre Kettenkomplex von Paaren definiert einen Funktor	26

8.4	Bemerkung: Topologische Räume als Paar auffassen . . . . .	26
8.5	Frage: Können wir $H_n(X, A; R)$ durch $H_n(X; R)$ und $H_n(A; R)$ ausdrücken? . . . . .	26
8.6	Beispiel: Homologie des Paares $( \Delta^n ,  \partial\Delta^n )$ . . . . .	26
8.7	Definition: Lange exakte Sequenz von $R$ -Moduln . . . . .	26
8.8	Satz: Existenz der Paarsequenz . . . . .	27
8.9	Korollar: Hologiemodul wenn $A$ kontraktibel ist . . . . .	27
8.10	Definition: Kurze exakte Folge von Kettenkomplexen . . . . .	27
8.11	Beispiel einer kurzen exakten Folge von Kettenkomplexen . . . . .	27
8.12	Schlangenlemma . . . . .	28
8.13	Beweis von Satz 8.8 . . . . .	30
8.14	Bemerkung . . . . .	30
8.15	Fünfer-Lemma . . . . .	30
8.16	Lemma („2 von 3“) . . . . .	31
<b>9</b>	<b>Ausschneidung und die Mayer-Vietoris Folge</b>	<b>32</b>
9.1	Satz: Ausschneidungsisomorphismus . . . . .	32
9.2	Satz (Mayer-Vietoris-Folge) . . . . .	32
9.3	Bemerkung zur Anwendbarkeit der Mayer-Vietoris-Folge . . . . .	34
9.4	Satz: Homologie der Sphäre $S^n$ . . . . .	34
9.5	Definition: Reduzierte Homologie . . . . .	34
9.6	Bemerkung: Die Aussage von Satz 9.4 in reduzierter Homologie . . . . .	34
9.7	Beweis von [##] . . . . .	35
<b>10</b>	<b>Anwendungen</b>	<b>36</b>
10.1	Satz: Invarianz der Dimension . . . . .	36
10.2	Fixpunktsatz von Brouwer . . . . .	36
10.3	Definition: Abbildungsgrad einer stetigen Abbildung $f: S^n \rightarrow S^n$ . . . . .	36
10.4	Proposition: Einfache Eigenschaften des Abbildungsgrades . . . . .	36
10.5	Beispiel: Abbildungsgrad der Spiegelung $R_i: S^n \rightarrow S^n$ . . . . .	37
10.6	Beispiel: Grad der Punktspiegelung . . . . .	38
10.7	Erinnerung: Vektorfelder . . . . .	38
10.8	Satz: Es gibt ein Vektorfeld ohne Nullstellen auf $S^n \iff n$ ist ungerade . . . . .	38
10.9	Satz (Jordanscher Kurvensatz) . . . . .	38
10.10	Satz: Homologie von $S^n$ ohne Einbettung von Scheiben $D^k$ und Sphären $S^k$ mit $k < n$ . . . . .	39
10.11	Proposition über Homologie von $X = \bigcup_{a \in N} U_a$ wobei $U_a \subseteq U_{a+1}$ . . . . .	39
10.12	Beweis von Satz 10.10 . . . . .	39
<b>11</b>	<b>CW-Komplexe</b>	<b>41</b>
11.1	Definition: Pushout . . . . .	41
11.2	Bemerkung zur Existenz und zur Eindeutigkeit des Pushouts . . . . .	41
11.3	Definition: CW-Komplex . . . . .	41
11.4	Bemerkungen zur Definition von CW-Komplexen . . . . .	42
11.5	Beispiele für CW-Komplexe . . . . .	42
11.6	Lemma: Kompaktheit von Teilmengen eines CW-Komplexes . . . . .	44
11.7	Korollar: Ein CW-Komplex ist genau dann kompakt, wenn er endlich ist. . . . .	44
<b>12</b>	<b>Zelluläre Homologie</b>	<b>45</b>
12.1	Definition: $n$ -ter zellulärer Kettenmodul und zelluläre Randabbildung . . . . .	45
12.2	Lemma: Für die zellulären Randabbildungen gilt $\partial_{n-1}^{\text{cell}} \circ \partial_n^{\text{cell}} = 0$ . . . . .	45

12.3	Definition: Zellulärer Kettenkomplex und zelluläre Homologie . . . . .	45
12.4	Bem.: Funktorialität des zellulären Kettenkomplexes und der zellulären Homologie . . . . .	45
12.5	Lemma über $(\coprod Q_i^{(n)}, \coprod q_i^{(n)})_*$ und $H_k(\coprod D^n, \coprod S^{n-1}; R)$ . . . . .	45
12.6	Bemerkung: Matrixform der Randabbildung $\partial_n^{\text{cell}}$ . . . . .	46
12.7	Definition: Natürlicher Isomorphismus . . . . .	47
12.8	Satz: Natürlicher Isomorphismus zwischen zellulärer und singulärer Homologie . . . . .	47
12.9	Lemma: Die Homologie des $n$ -Gerüsts und die von $X^{(n)} \hookrightarrow X$ induzierte Abbildung . . . . .	47
12.10	Korollar: Die Eulercharakteristik ist eine topologische Invariante . . . . .	48
12.11	Bemerkung: $n$ -te Bettizahl und Eulercharakteristik eines CW-Komplexes . . . . .	48
12.12	Beispiel: Homologie von $\mathbb{C}P^n$ . . . . .	48
12.13	Beispiel: Homologie von $\mathbb{R}P^n$ . . . . .	49
12.14	Satz: Isomorphie zwischen $C_*(K; R)$ und $C_n^{\text{cell}}( K ; R)$ . . . . .	50
<b>13</b>	<b>Kleine Simplizes</b>	<b>52</b>
13.1	Satz: Ausschneidungs-Isomorphismus . . . . .	52
13.2	Definition: $\mathcal{U}$ -klein . . . . .	52
13.3	Satz über kleine Simplizes . . . . .	52
13.4	Bemerkung: Satz über kleine Simplizes für Paare von topologischen Räumen . . . . .	52
13.5	Beweis des Ausschneidungssatzes (13.1) . . . . .	52
13.6	Idee zum Beweis des Satzes über kleine Simplizes . . . . .	52
13.7	Definition: Schwerpunkt und „Abkegeln“ . . . . .	53
13.8	Lemma: Kettenhomotopie zwischen $\text{const}_{s_n}$ und $\text{id}$ auf $ \Delta^n $ . . . . .	53
13.9	Definition von Zerteilungsoperatoren . . . . .	53
13.10	Lemma 1: Kettenhomotopie zwischen $(H_*)_X$ und der Identität . . . . .	54
13.11	Lemma 2: Eigenschaft von $(B_n)_X$ in Bezug auf eine offene Überdeckung $\mathcal{U}$ von $X$ . . . . .	55
13.12	Beweis des Satzes über kleine Simplizes (13.3) . . . . .	55
13.13	Bemerkung über Abbildungen $s_n: C_n \rightarrow C'_{n+1}$ , die den Rang erhöhen . . . . .	55
13.14	Definition: Affiner singulärer Simplex . . . . .	55
13.15	Definition: Durchmesser eines singulären Simplizes $ \Delta^p  \rightarrow  \Delta^n $ . . . . .	55
13.16	Lemma 3: Eigenschaften von affinen singulären Simplizes . . . . .	55
<b>14</b>	<b>Axiome für Homologie</b>	<b>57</b>
14.1	Bezeichnung: Funktor mit $(X, A) \mapsto (X, \emptyset)$ . . . . .	57
14.2	Definition: Homologietheorie . . . . .	57
14.3	Bemerkung zur Homotopieinvarianz von Homologietheorien . . . . .	57
14.4	Bemerkung zu Mayer-Vietoris-Folge und disjunkten Vereinigungen . . . . .	57
14.5	Definition: Dimensionsaxiom und Axiom über disjunkte Vereinigungen . . . . .	57
14.6	Bemerkung: Statt $\mathbb{N}$ -graduerten Moduln sind oft auch $\mathbb{Z}$ -graduierte Moduln nötig . . . . .	57
14.7	Bemerkung zur Homologie der Sphäre und zur zellulären Homologie . . . . .	58
14.8	Definition: Morphismus von Homologietheorien . . . . .	58
14.9	Satz: Isomorphie der Homologie von CW-Komplexen von zwei Homologietheorien . . . . .	58
<b>15</b>	<b>Zusammenhang zwischen <math>\pi_1(X, x_0)</math> und <math>H_1(X; \mathbb{Z})</math></b>	<b>60</b>
15.1	Definition: Kommutatorgruppe . . . . .	60
15.2	Lemma: Die Kommutatorgruppe ist ein Normalteiler . . . . .	60
15.3	Definition: Abelianisierung . . . . .	60
15.4	Bemerkung: Funktorialität der Abelianisierung . . . . .	60
15.5	Schleifen und 1-Zykel . . . . .	60

15.6	Lemma 1: Für Pfade $\omega, \omega'$ ist $\omega * \omega' - \omega - \omega'$ der Rand eines 2-Simplex . . . . .	60
15.7	Lemma 2: $\omega + \omega^{-1}$ und der konstante Pfad sind im Rand einer 2-Kette . . . . .	61
15.8	Lemma 3: Für punktiert homotope Pfade $\omega$ und $\omega'$ ist $\omega - \omega'$ im Rand einer 2-Kette . . . . .	61
15.9	Die Hurewicz-Abbildung . . . . .	62
15.10	Theorem (Hurewicz) . . . . .	62
15.11	Lemma 4: $\bar{\rho}$ bildet Ränder von 2-Simplizes auf das neutrale Element ab . . . . .	62
15.12	Lemma 5: Für einen 1-Simplex $\omega$ gilt $\theta \circ \bar{\rho}(\omega) = \llbracket \omega - \lambda_{\partial\omega} \rrbracket$ . . . . .	63
15.13	Korollar: Erste Homologiegruppe des Produkts wegzusammenhängender Räume . . . . .	63
15.14	Definition: $n$ -te absolute Homotopiegruppe . . . . .	63
15.15	Eigenschaften von $\pi_n(X, x_0)$ . . . . .	64
15.16	Definition: $n$ -zusammenhängender Raum . . . . .	64
15.17	Bemerkung: Abhängigkeit von der Wahl eines Basispunktes . . . . .	64
15.18	Beispiele: 0-zusammenhängend und 1-zusammenhängend . . . . .	64
15.19	Definition: Relative Homotopiegruppen . . . . .	64
15.20	Bemerkung: Homotopiegruppen bilden keine verallgemeinerte Homologietheorie . . . . .	65
15.21	Die Hurewicz-Abbildung . . . . .	65
15.22	Lemma: $\theta_n: \pi_n(X, A, x_0) \longrightarrow H_n(X, A)$ ist ein Gruppenhomomorphismus . . . . .	65
15.23	Theorem (Hurewicz) . . . . .	66
15.24	Korollar: Isomorphie von Homotopie- und Homologiegruppen für $(n-1)$ -zsmhg. Räume . . . . .	66
15.25	Satz über höhere Homotopiegruppen der Sphäre . . . . .	66
<b>16</b>	<b>Die Fundamentalklasse</b> . . . . .	<b>67</b>
16.1	Beispiele für die Homologiegruppen verschiedener Mannigfaltigkeiten . . . . .	67
16.2	Bemerkung zur Homologie von Mannigfaltigkeiten . . . . .	67
16.3	Definition: Homologische Orientierung in einem Punkt . . . . .	67
16.4	Notation: Einschränkung eines Elementes $v \in H_n(X, X \setminus B; R)$ . . . . .	67
16.5	Definition: Homologische Orientierung der gesamten Mannigfaltigkeit . . . . .	67
16.6	Beispiel: Orientierung von $\mathbb{R}^n$ . . . . .	67
16.7	Beispiel: Orientierung von $S^n$ . . . . .	67
16.8	Bezeichnung: Geschlossene Mannigfaltigkeit . . . . .	68
16.9	Satz über $R$ -Orientierbarkeit . . . . .	68
16.10	Definition: Disjunkte Vereinigung der $H_n(M, M \setminus \{x\}; R)$ und $\Gamma(M, \mathcal{H})$ . . . . .	68
16.11	Bemerkung: Eigenschaften von $\mathcal{H}$ und $\mathcal{H} \xrightarrow{\pi} M$ . . . . .	68
16.12	Beispiel: Für $R = \mathbb{F}_2$ ist $\pi: \mathcal{H} \rightarrow M$ eine 2-fache Überlagerung . . . . .	69
16.13	Lemma über kompakten Teilraum einer $n$ -Mannigfaltigkeit . . . . .	69
16.14	Bemerkung: Existenz einer Mayer-Vietoris-Folge für $A, B \subseteq X$ abgeschlossen . . . . .	70
	<b>Index</b> . . . . .	<b>A</b>
	<b>Abbildungsverzeichnis</b> . . . . .	<b>C</b>



# 1 Kategorien, Funktoren und natürliche Transformationen

**1.1 Definition** Eine **Kategorie**  $\mathcal{C}$  besteht aus:

- i) Einer Klasse  $\text{Ob}(\mathcal{C})$ . Die Elemente von  $\text{Ob}(\mathcal{C})$  heißen die **Objekte** von  $\mathcal{C}$ .
- ii) Zu je zwei Objekten  $A, B$  aus  $\mathcal{C}$  einer Menge  $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ . Die Elemente von  $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$  heißen **Morphismen** von  $\mathcal{C}$ .
- iii) Zu je drei Objekten  $A, B, C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  aus einer Abbildung:

$$\text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C) \times \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, C) \quad , \quad (f, g) \mapsto f \circ g$$

genannt die **Komposition** in  $\mathcal{C}$ .

Dabei müssen folgende Axiome erfüllt sein:

- (i) Die Komposition ist **assoziativ**: Für Objekte  $A, B, C, D$  von  $\mathcal{C}$  und  $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(C, D)$ ,  $g \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C)$  und  $h \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$  gilt immer

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

- (ii) Die Komposition ist **unital**: Für jedes Objekt  $A$  von  $\mathcal{C}$  gibt es einen Morphismus  $\text{id}_A \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, A)$  so, dass

$$\forall f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, A) : \text{id}_A \circ f = f \quad \text{und} \quad \forall f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) : f \circ \text{id}_A = f$$

## 1.2 Beispiele

- (1) Die Kategorie der Mengen **MENGEN**: Objekte sind Mengen und Morphismen sind Abbildungen.
- (2) Die Kategorie der Gruppen **GRUPPEN**: Objekte sind Gruppen und Morphismen sind Gruppenhomomorphismen.
- (3) Die Kategorie der  $K$ -Vektorräume  **$K$ -VR**: Objekte sind  $K$ -Vektorräume und die Morphismen sind  $K$ -lineare Abbildungen.
- (4) Die Kategorie der  $R$ -Moduln  **$R$ -MOD**: Objekte sind  $R$ -Moduln und Morphismen sind  $R$ -lineare Abbildungen.
- (5) Die Kategorie der  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeiten  **$C^\infty$ -MAN**: Objekte sind  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeiten und Morphismen sind  $C^\infty$ -Abbildungen.
- (6) Die Kategorie der topologischen Räume **TOP**: Objekte sind topologische Räume und Morphismen sind stetige Abbildungen.
- (7) Die Kategorie der punktierten topologischen Räume **TOP<sub>\*</sub>**: Objekte sind punktiert-topologische Räume und Morphismen sind punktiert-stetige Abbildungen.
- (8) Die Kategorie **HTOP**: Objekte sind topologische Räume und Morphismen sind Homotopieklassen von stetigen Abbildungen.
- (9) Die Kategorie **HTOP<sub>\*</sub>**: Objekte sind punktiert-topologische Räume und Morphismen sind Homotopieklassen von punktiert-stetigen Abbildungen.
- (10) Sei  $G$  eine Gruppe. Wir erhalten eine Kategorie  $\mathcal{C}_G$  mit genau einem Objekt  $*$  und Morphismen  $\text{Mor}_{\mathcal{C}_G}(*, *) = G$ . Die Komposition wird durch die Verknüpfung in der Gruppe festgelegt.
- (11) Ist  $\mathcal{C}$  eine Kategorie, so ist  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  eine Kategorie, wobei  $\text{Ob}(\mathcal{C}^{\text{op}}) = \text{Ob}(\mathcal{C})$  und  $\text{Mor}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(A, B) := \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, A)$ . Die Komposition ist gegeben durch  $f \circ^{\text{op}} g := g \circ f$ .

### 1.3 Bemerkung

- (i) Eine Kategorie heißt **klein**, wenn ihre Objekte eine Menge bilden.
- (ii) Statt  $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$  schreiben wir oft  $f: A \rightarrow B$  oder  $A \xrightarrow{f} B$ .

**1.4 Definition** Seien  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{D}$  Kategorien: Ein **Funktor**  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ordnet jedem Objekt  $C$  von  $\mathcal{C}$  ein Objekt  $F(C)$  von  $\mathcal{D}$  und ordnet jedem Morphismus  $f: C \rightarrow C'$  in  $\mathcal{C}$  einen Morphismus  $F(f): F(C) \rightarrow F(C')$  in  $\mathcal{D}$  zu. Dabei muss gelten:

$$F(f \circ g) = F(f) \circ F(g) \quad \text{und} \quad F(\text{id}_C) = \text{id}_{F(C)}$$

### 1.5 Beispiele

- (1) Es gibt offensichtliche „Vergiss“-Funkoren:

$$\begin{aligned} K\text{-VR} &\longrightarrow \text{MENGEN} \\ R\text{-MOD} &\longrightarrow \text{MENGEN} \\ \text{TOP} &\longrightarrow \text{MENGEN} \\ \text{TOP}_{\bullet} &\longrightarrow \text{MENGEN} \\ \text{TOP}_{\bullet} &\longrightarrow \text{TOP} \end{aligned}$$

- (2) Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie und  $C$  ein Objekt von  $\mathcal{C}$ . Der durch  $C$  **dargestellte Funktor**  $F_C: \mathcal{C} \rightarrow \text{MENGEN}$  ist definiert durch

$$\begin{aligned} F_C(A) &= \text{Mor}_{\mathcal{C}}(C, A) && \text{für } A \in \text{Ob}(\mathcal{C}) \\ F_C(f): \text{Mor}_{\mathcal{C}}(C, A) &\rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}}(C, A'), g \mapsto f \circ g && \text{für } f: A \rightarrow A' \text{ in } \text{Mor}(A, A') \end{aligned}$$

- (3) Die Fundamentalgruppe definiert einen Funktor

$$\pi_1: \text{HTOP}_{\bullet} \longrightarrow \text{GRUPPEN}$$

#### BEMERKUNG:

- Ist  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ein Funktor so schreiben wir oft kürzer und ungenauer  $f_* := F(f)$ .
- Kleine Kategorien und Funktoren bilden die Kategorie  $\text{KAT}$ .

**1.6 Definition** Seien  $F, G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  zwei Funktoren. Eine **natürliche Transformation**  $\tau: F \rightarrow G$  ordnet jedem  $C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  einen Morphismus  $\tau_C: F(C) \rightarrow G(C)$  in  $\mathcal{D}$  zu, sodass für jedes  $f: C \rightarrow C'$  in  $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccc} F(C) & \xrightarrow{F(f)} & F(C') \\ \downarrow \tau_C & & \downarrow \tau_{C'} \\ G(C) & \xrightarrow{G(f)} & G(C') \end{array}$$

kommutiert.

**BEMERKUNG:** Natürliche Transformationen lassen sich komponieren. Für  $\tau: F \rightarrow G$ ,  $\eta: G \rightarrow H$  ist  $\eta \circ \tau: F \rightarrow H$  gegeben durch

 $F, G, H: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 

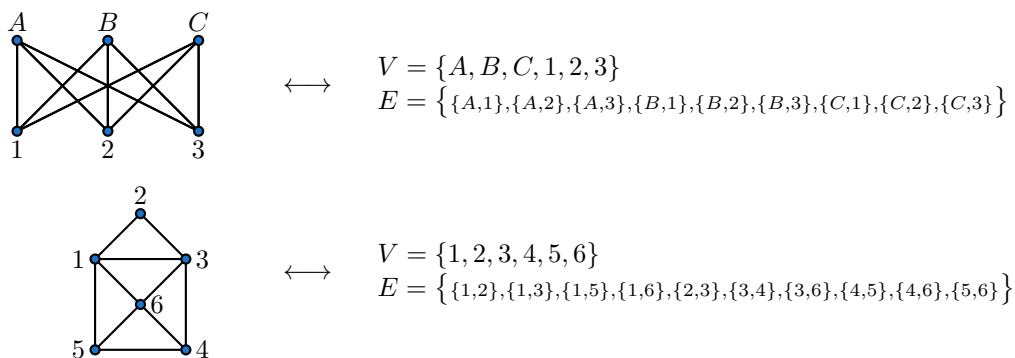
$$(\eta \circ \tau)_C := \eta_C \circ \tau_C: F(C) \rightarrow H(C)$$

Genauer: Für feste kleine Kategorien  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{D}$  bilden die Funktoren  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  mit den natürlichen Transformationen eine Kategorie  $\text{FUN}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ .

**1.7 Ausblick** In der algebraischen Topologie werden topologische Fragen, wie zum Beispiel, wann  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{R}^m$  homöomorph sind, in algebraische Fragen übersetzt. Eine Möglichkeit für eine solche Übersetzung sind Funktoren von einer Kategorie von topologischen Räumen, z.B.  $\text{TOP}$ ,  $\text{TOP}_\bullet$ ,  $\text{HTOP}_\bullet$ , in eine algebraische Kategorie, z.B.  $\text{GRUPPEN}$ ,  $K\text{-VR}$ ,  $\text{ABEL.GRUPPEN}$ ,  $R\text{-MOD}$ . Ein Beispiel für einen solchen Funktor ist die Fundamentalgruppe  $\pi_1$ . Ein Nachteil der Fundamentalgruppe ist, dass diese oft schwierig zu berechnen ist. Wir werden in dieser Vorlesung weitere Funktoren und Methoden für ihre Berechnung kennenlernen.

## 2 Kombinatorische Beschreibungen topologischer Räume

**2.1 Beispiel** *Graphen* sind einerseits topologische Räume und andererseits kombinatorische Objekte:



**2.2 Definition** Ein **simplicialer Komplex**  $K = (V, \Sigma)$  besteht aus einer Menge  $V$  und einer Menge  $\Sigma$  von nichtleeren, endlichen Teilmengen von  $V$ , sodass gilt

(i)  $\{v\} \in \Sigma$  für alle  $v \in V$

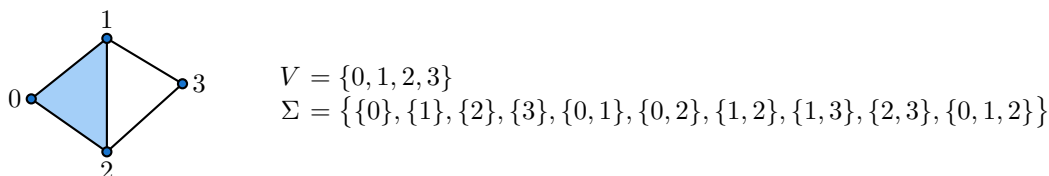
(ii)  $\sigma \in \Sigma, \emptyset \neq \tau \subseteq \sigma \implies \tau \in \Sigma$ .

(Abgeschlossen bzgl. Teilmengenbildung)

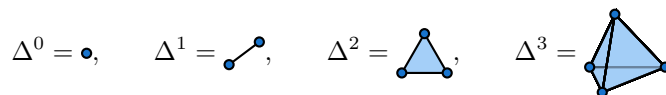
Die Elemente von  $V$  heißen die **Ecken** oder **Vertices** von  $K$ . Die Elemente von  $\Sigma$  heißen die **Simplizes** von  $K$ . Enthält  $\sigma \in \Sigma$  genau  $n + 1$  Elemente, so heißt  $\sigma$  ein  **$n$ -Simplex**. Ist  $\tau \subseteq \sigma$ , wobei  $\sigma$  ein  $n$ -Simplex und  $\tau$  ein  $n - 1$ -Simplex ist, so heißt  $\tau$  eine **Seite** von  $\sigma$ .

Ist  $V$  geordnet, so heißt  $K$  geordnet. Ist  $V$  endlich, so heißt  $K$  endlich.

**2.3 Beispiel**



Ist  $\sigma$  eine endliche Menge, so heißt  $\Delta^\sigma := (\sigma, \mathcal{P}(\sigma) \setminus \{\emptyset\})$  der  $\sigma$ -Simplex. Für  $\sigma = \{0, \dots, n\}$  schreiben wir  $\Delta^n := \Delta^{\{0, \dots, n\}}$ . Es ist



**2.4 Definition** Sei  $K = (V, \Sigma)$  ein simplicialer Komplex. Ein **Unterkomplex** von  $K$  ist ein simplicialer Komplex  $K_0 = (V_0, \Sigma_0)$  mit  $V_0 \subseteq V$  und  $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ .

**BEISPIEL:** Sei  $K = (V, \Sigma)$  ein endlicher simplicialer Komplex. Dann ist  $K$  ein Unterkomplex von  $\Delta^V$ .

**2.5 Definition** Eine **simpliciale Abbildung**  $f: K_1 = (V_1, \Sigma_1) \rightarrow K_2 = (V_2, \Sigma_2)$  zwischen simplicialen Komplexen ist eine Abbildung  $f: V_1 \rightarrow V_2$ , sodass  $f(\sigma_1) \in \Sigma_2$  für alle  $\sigma_1 \in \Sigma_1$ . Simpliciale Komplexe zusammen mit simplicialen Abbildungen bilden eine Kategorie **SIMP**.

**2.6 Definition** Sei  $\sigma$  eine endliche Menge. Sei  $\mathbb{R}^\sigma = \prod_{v \in \sigma} \mathbb{R}$  mit der Produkttopologie. Wir setzen nun

$$|\Delta^\sigma| := \left\{ x = (x_v)_{v \in \sigma} \in \mathbb{R}^\sigma \mid \sum_{v \in \sigma} x_v = 1, x_v \in [0, 1] \forall v \in \sigma \right\}$$

Ist  $\tau \subseteq \sigma$ , so erhalten wir eine Abbildung  $\iota_\tau^\sigma: |\Delta^\tau| \rightarrow |\Delta^\sigma|$  indem wir  $(x_v)_{v \in \tau} \in |\Delta^\tau|$  durch  $x_v = 0$  für  $v \in \sigma \setminus \tau$  zu  $(x_v)_{v \in \sigma}$  auffüllen. Ist  $\eta \subseteq \tau \subseteq \sigma$  so gilt offensichtlich  $\iota_\eta^\sigma = \iota_\tau^\sigma \circ \iota_\eta^\tau$ .

Sei nun  $K = (V, \Sigma)$  ein simplizialer Komplex. Die **geometrische Realisierung**  $|K|$  von  $K$  ist definiert als

$$|K| := \coprod_{\sigma \in \Sigma} \{\sigma\} \times |\Delta^\sigma| / \sim$$

wobei  $\sim$  die durch  $(\tau, x) \sim (\sigma, \iota_\tau^\sigma(x))$  für  $\tau \subseteq \sigma$  erzeugte Äquivalenzrelation ist. Versehen mit der Quotiententopologie ist  $|K|$  ein topologischer Raum.

Anschaulich „klebt“  
~ die geometrischen Realisierungen aller Einzelteile  
passend zusammen

**BEMERKUNG:**

- In Aufgabe 4 von Blatt 1 haben wir gezeigt, dass  $|K|$  homöomorph zu einem Unterraum  $X$  von  $\mathbb{R}^n$  mit  $n := \#V$  ist via  $[(\{\sigma\}, (x_{v_i})_{v_i \in \sigma})] \mapsto \sum_{v_i \in \sigma} x_{v_i} \cdot e_i$ .
- In Aufgabe 2 von Blatt 2 haben wir gezeigt, dass  $|\cdot|$  einen Funktor  $\text{SIMP} \rightarrow \text{TOP}$  definiert. Dazu definiert man eine Abbildung zunächst auf den zugrunde liegenden Räumen durch

$$\left( \sigma, \sum_{v \in \sigma} x_v \cdot v \right) \mapsto \left( f(\sigma), \sum_{v \in \sigma} x_v \cdot f(v) \right)$$

und wendet diese unter Benutzung der universellen Eigenschaft der Quotiententopologie auf Repräsentanten an.<sup>1</sup>

**2.7 Beispiel**

- Sei  $\partial\Delta^n := (\{0, \dots, n\}, \mathcal{P}(\{0, \dots, n\}) \setminus \{\emptyset, \{0, \dots, n\}\}) = \Delta^n \setminus \{0, \dots, n\}$ .  $\partial\Delta^n$  heißt der **Rand des  $n$ -Simplizes**. Es gilt

$$\begin{aligned} |\partial\Delta^1| &= \bullet \bullet \cong S^0 \\ |\partial\Delta^2| &= \triangle \cong S^1 \\ |\partial\Delta^3| &= \text{Dreieck} \cong S^2 \end{aligned}$$

Allgemein gilt  $|\partial\Delta^n| \cong S^{n-1}$ , siehe Aufgabe 1 von Blatt 3.

$$\bullet \quad T^2 = S^1 \times S^1 \cong \text{Torus} \cong \left| \begin{array}{c} \text{Quadrat mit Diagonalen} \end{array} \right|$$

<sup>1</sup> hier wird eine formale Summe anstatt eines Tupels benutzt; da  $\sigma$  stets eine endliche Menge ist, macht dies aber keinen Unterschied.

**2.8 Definition** Ein topologischer Raum  $X$  heißt ein **Polyeder**, falls er homöomorph zur geometrischen Realisierung eines simplizialen Komplexes ist.

**2.9 Definition** Sei  $K = (V, \Sigma)$  ein endlicher simplizialer Komplex. Sei

$$a_n := \#\{\sigma \in \Sigma \mid \sigma \text{ ist ein } n\text{-Simplex von } K\}$$

Dann heißt  $\chi(K) := \sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n \cdot a_n$  die **Euler-Charakteristik** von  $K$ .

**BEISPIEL:**

$$\chi(\triangle) = 3 - 3 = 0$$

$$\chi(\square) = 4 - 4 = 0$$

$$\chi([n\text{-Eck}]) = n - n = 0$$

$$\chi(\partial\Delta^3 = \text{Dreieck}) = 4 - 6 + 4 = 2$$

$$\chi(\text{Würfel}) = 8 - 12 + 6 = 2$$

$$\chi(\text{Oktaeder}) = 6 - 12 + 8 = 2$$

**2.10 Satz** Seien  $K$  und  $K'$  endliche simpliziale Komplexe. Gilt  $|K| \cong |K'|$ , so gilt

$$\chi(K) = \chi(K').$$

**BEMERKUNG:** Die Euler-Charakteristik ist also eine topologische Invariante von simplizialen Komplexen. Sie hängt nur von der topologischen Struktur von  $|K|$  und nicht von der kombinatorischen Struktur von  $K$  ab.

**BEWEIS:** Siehe 12.10.

### 3 Simpliziale Homologie

**3.1 Definition** Sei  $S$  eine Menge. Sei  $R$  ein Ring. Der **freie  $R$ -Modul mit Basis  $S$** ,  $R[S]$ , besteht aus allen endlichen formalen  $R$ -Linearkombinationen Ring mit Eins

$$\sum_{s \in S} r_s \cdot s, \quad r_s \in R \text{ und } r_s \neq 0 \text{ für endliche viele } s \in S$$

Die  $R$ -Modulstruktur auf  $R[S]$  ist definiert durch:

$$r \cdot \left( \sum_{s \in S} r_s \cdot s \right) := \sum_{s \in S} (r \cdot r_s) \cdot s \quad \left( \sum_{s \in S} r_s \cdot s \right) + \left( \sum_{s \in S} r'_s \cdot s \right) := \sum_{s \in S} (r_s + r'_s) \cdot s$$

**BEMERKUNG:** Mittels  $s = \sum_{s' \in S} \delta_{s,s'} \cdot s'$  fassen wir  $S$  als Teilmenge von  $R[S]$  auf.

**3.2 Lemma** Sei  $S$  eine Menge,  $R$  ein Ring. Es gilt

- 1) Ist  $M$  ein  $R$ -Modul und  $i: S \rightarrow M$  eine Abbildung, so gibt es genau eine  $R$ -lineare Abbildung  $\varphi: R[S] \rightarrow M$ , die  $i$  fortsetzt.
- 2) Sei  $f: R[S] \rightarrow M$   $R$ -linear und  $p: N \rightarrow M$   $R$ -linear und surjektiv. Dann gibt es  $\hat{f}: R[S] \rightarrow N$  mit  $p \circ \hat{f} = f$ .

Moduln mit dieser Eigenschaft bezeichnet man als **projektiv**.  
 Freie Moduln sind also projektiv.

$$\begin{array}{ccc} & & N \\ & \nearrow \hat{f} & \downarrow p \\ R[S] & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

**BEWEIS:**

- 1) Eine solche Abbildung ist gegeben durch  $\varphi(\sum_{s \in S} r_s \cdot s) = \sum_{s \in S} r_s \cdot i(s)$ . Ist  $\varphi'$  eine zweite, so gilt

$$\hat{\varphi} \left( \sum_{s \in S} r_s \cdot s \right) = \sum_{s \in S} r_s \cdot \hat{\varphi}(s) = \sum_{s \in S} r_s \cdot i(s)$$

- 2) Wähle für jedes  $s \in S$  ein Urbild  $j(s) \in N$  für  $f(s) \in M$  unter  $p: N \rightarrow M$ . Nun wende 1) auf  $j: S \rightarrow N$  an, um  $\hat{f}: R[S] \rightarrow N$  mit  $\hat{f}(s) = j(s)$  zu erhalten. Nun ist  $p \circ \hat{f}(s) = f(s)$  für alle  $s \in S$ . Mit der Eindeutigkeit aus 1) folgt  $p \circ \hat{f} = f$ .  $\square$

### 3.3 Beispiel

- (i) Sei  $K$  ein Körper und  $V, M, N$  seien  $K$ -Vektorräume,  $f: V \rightarrow M$ ,  $p: N \rightarrow M$  seien  $K$ -linear und  $p$  surjektiv. Dann gibt es  $\hat{f}: V \rightarrow N$  mit  $p \circ \hat{f} = f$ . Wir können Lemma 3.2 benutzen, da  $V$  eine Basis  $B$  hat, also  $V \cong K[B]$ .
- (ii) Sei  $R = \mathbb{Z}$ , sei  $V = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  und  $M = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , sowie  $f = \text{id}: V \rightarrow M$ ,  $N = \mathbb{Z}$  und  $p: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  die Projektion mit  $p(n) = n + 2\mathbb{Z}$ . Dann gibt es **keine**  $\mathbb{Z}$ -lineare Abbildung  $\hat{f}: \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  mit  $p \circ \hat{f} = f$  denn falls  $\hat{f}(1 + 2\mathbb{Z}) = n \in \mathbb{Z}$  ist, so folgt

$$2n = 2 \cdot \hat{f}(1 + 2\mathbb{Z}) = \hat{f}(2 \cdot (1 + 2\mathbb{Z})) = \hat{f}(0 + 2\mathbb{Z}) = 0$$

also  $n = 0$  und somit  $p \circ \hat{f} = 0$ .  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  ist also kein freier Modul.

**3.4 Definition** Sei  $K = (V, \Sigma)$  ein simplizialer Komplex. Sei  $\Sigma_n := \{\sigma \in \Sigma \mid \sigma \text{ ist ein } n\text{-Simplex}\}$ . Sei  $R$  ein Ring. Der  **$n$ -te Kettenmodul** von  $K$  über  $R$  ist definiert als

$$C_n(K; R) := R[\Sigma_n]$$

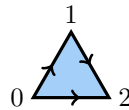
Ist  $R = \mathbb{Z}$ , so schreiben wir auch kurz  $C_n(K) := C_n(K; \mathbb{Z})$ .

**3.5 Definition** Sei  $K = (V, \Sigma)$  ein geordneter simplizialer Komplex. Sei  $\sigma = \{v_0, \dots, v_n\}$  ein  $n$ -Simplex von  $K$ . Bezüglich der Ordnung von  $K$  sei dabei  $v_0 < v_1 < \dots < v_n$ . Sei  $\tau$  ein  $(n-1)$ -Simplex von  $K$ . Definiere

$$\varepsilon_\sigma^\tau := \begin{cases} (-1)^i, & \text{falls } \tau = \{v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n\} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

**BEMERKUNG:** Es gilt:  $\varepsilon_\sigma^\tau \neq 0 \iff \tau$  ist eine Seite von  $\sigma$ .

**BEISPIEL:** Für den folgenden geordneten simplizialen Komplex gilt



$$\varepsilon_{\{0,1,2\}}^{\{0,1\}} = 1, \quad \varepsilon_{\{0,1,2\}}^{\{0,2\}} = -1, \quad \varepsilon_{\{0,1,2\}}^{\{1,2\}} = 1$$

**3.6 Definition** Sei  $K = (V, \Sigma)$  ein geordneter simplizialer Komplex. Die  **$n$ -te Randabbildung**

$$\partial_n: C_n(K; R) \longrightarrow C_{n-1}(K; R)$$

$= R[\Sigma_n] \qquad \qquad \qquad = R[\Sigma_{n-1}]$

ist für ein Basiselement  $\sigma \in \Sigma_n$  definiert durch

$$\partial_n(\sigma) = \sum_{\tau \in \Sigma_{n-1}} \varepsilon_\sigma^\tau \cdot \tau$$

**3.7 Proposition**

$$\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$$

Damit folgt  $\text{Im } \partial_n \subseteq \ker \partial_{n-1}$ .

**BEWEIS (MIT LEMMA 3.8):** Sei  $\sigma$  ein  $n$ -Simplex von  $K$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \partial_{n-1}(\partial_n(\sigma)) &= \partial_{n-1}\left(\sum_{\tau \in \Sigma_{n-1}} \varepsilon_\sigma^\tau \cdot \tau\right) = \sum_{\tau \in \Sigma_{n-1}} \varepsilon_\sigma^\tau \cdot \partial_{n-1}(\tau) = \sum_{\tau \in \Sigma_{n-1}} \varepsilon_\sigma^\tau \left(\sum_{\eta \in \Sigma_{n-2}} \varepsilon_\tau^\eta \cdot \eta\right) \\ &= \sum_{\eta \in \Sigma_{n-2}} \left(\sum_{\tau \in \Sigma_{n-1}, \eta \subseteq \tau \subseteq \sigma} \varepsilon_\tau^\eta \cdot \varepsilon_\sigma^\tau\right) \eta \\ &\stackrel{\text{Lemma 3.8}}{=} 0 \end{aligned} \quad \square$$

**3.8 Lemma** Sei  $\sigma$  ein  $n$ -Simplex. Sei  $\eta \subseteq \sigma$  ein  $(n-2)$ -Simplex. Dann gibt es genau zwei  $(n-1)$ -Simplizes  $\tau, \tau'$  von  $K$ , die eine Seite von  $\sigma$  sind und  $\eta$  als Seite enthalten. Es gilt

$$\varepsilon_\tau^\eta \cdot \varepsilon_\sigma^\tau = -\varepsilon_{\tau'}^\eta \cdot \varepsilon_\sigma^{\tau'}$$



**BEWEIS:** Sei  $\sigma = \{v_0, \dots, v_n\}$  mit  $v_0 < v_1 < \dots < v_n$ . Dann ist  $\eta = \{v_0, \dots, v_n\} \setminus \{v_i, v_j\}$  mit  $i < j$ . Dann sind  $\tau = \{v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n\}$  und  $\tau' = \{v_0, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n\}$  die gesuchten  $(n-1)$ -Simplexes und es gilt

$$\varepsilon_\sigma^\tau = (-1)^i, \quad \varepsilon_\sigma^{\tau'} = (-1)^j, \quad \varepsilon_\tau^\eta = (-1)^{j-1}, \quad \varepsilon_{\tau'}^\eta = (-1)^i \quad \square$$

**3.9 Notation** Für  $\sigma \in \Sigma_n$ ,  $\sigma = \{v_0, \dots, v_n\}$  mit  $v_0 < \dots < v_n$  schreiben wir

$$\delta^j \sigma := \{v_0, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n\} \in \Sigma_{n-1}$$

Dann ist  $\partial_n(\sigma) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \cdot \delta^j \sigma$ .

**3.10 Definition** Sei  $K$  ein geordneter simplizialer Komplex. Der  **$n$ -te Homologiemodul** von  $K$  über  $R$  ist definiert als

$$H_n(K; R) := \frac{\ker \partial_n: C_n(K; R) \rightarrow C_{n-1}(K; R)}{\operatorname{Im} \partial_{n+1}: C_{n+1}(K; R) \rightarrow C_n(K; R)}$$

Für  $n = 0$  interpretieren wir  $\partial_0$  als die Nullabbildung. Daher gilt

$$H_0(K; R) = \frac{C_0(K; R)}{\operatorname{Im} \partial_1: C_1(K; R) \rightarrow C_0(K; R)}$$

In Aufgabe 3 von Blatt 3 haben wir gezeigt, dass die Homologiemoduln für verschiedene Ordnungen auf der gleichen Menge isomorph sind.

### 3.11 Beispiele

(1) Sei  $K = \bullet$ . Dann ist  $C_0(K; R) \cong R$  und  $C_i(K; R) = 0$  für  $i > 0$ . Weiter ist  $H_0(K; R) = C_0(K; R) \cong R$  und  $H_i(K; R) = 0$  für  $i > 0$ .

(2) Seien nun  $K = K_n$  das  $n$ -Eck, wobei  $n \geq 3$ . Also

$$\begin{aligned} \Sigma_0 &= \{\tau_1 = \{1\}, \tau_2 = \{2\}, \dots, \tau_n = \{n\}\} \\ \Sigma_1 &= \{\sigma_1 = \{1, 2\}, \dots, \sigma_{n-1} = \{n-1, n\}, \sigma_n = \{1, n\}\} \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} C_0(K; R) &= R[\Sigma_0] \cong R^n \\ C_1(K; R) &= R[\Sigma_1] \cong R^n \\ C_i(K; R) &= 0 \text{ für } i > 1, \text{ insbesondere } H_i(K; R) = 0 \text{ für } i > 1 \end{aligned}$$

Es ist dann  $\partial_2 = \partial_3 = \dots = 0$ . Interessant ist  $\partial_1: C_1(K; R) \rightarrow C_0(K; R)$ , denn es gilt

$$\partial_1(\sigma_i) = \begin{cases} \tau_{i+1} - \tau_i, & \text{falls } i = 1, \dots, n-1 \\ \tau_n - \tau_1, & \text{falls } i = n \end{cases}$$

Mit  $\sigma'_1 := \sigma_1, \sigma'_2 := \sigma_2, \dots, \sigma'_{n-1} := \sigma_{n-1}$  und  $\sigma'_n := -\sigma_n$  gilt dann

$$\partial_1(\sigma'_i) = \tau_{i+1} - \tau_i$$

mit der Konvention  $\tau_{n+1} = \tau_1$ . Also gilt

$$\partial_1\left(\sum_{i=1}^n r_i \sigma'_i\right) = \sum_{i=1}^n r_i (\tau_{i+1} - \tau_i) = \sum_{i=1}^n (r_{i-1} - r_i) \tau_i$$

Es folgt

$$\ker \partial_1 = \left\{ \sum_{i=1}^n r_i \cdot \sigma'_i \mid r_1 = r_2 = \dots = r_n \right\} \subseteq C_1(K; R)$$

$$\operatorname{Im} \partial_1 = \left\{ \sum_{i=1}^n s_i \cdot \tau_i \mid \sum_{i=1}^n s_i = 0 \right\} \subseteq C_0(K; R)$$

Ist  $\sum_{i=1}^n s_i = 0$ , so folgt für  $r_n = 0, r_1 = -s_1, r_2 = -s_1 - s_2, \dots, r_{n-1} = -s_1 - s_2 - \dots - s_{n-1}$

$$\partial_1 \left( \sum_{i=1}^n r_i \sigma'_i \right) = \sum_{i=1}^n s_i \tau_i$$

Es folgt  $H_1(K; R) = \ker \partial_1 / \operatorname{Im} \partial_2 = \ker \partial_1 \cong R$  und

$$H_0(K; R) = \ker \partial_0 / \operatorname{Im} \partial_1 = R[\Sigma_0] / \{ \sum_{i=1}^n s_i \tau_i \mid \sum_{i=1}^n s_i = 0 \} \cong R$$

(via  $\sum_{i=1}^n s_i \tau_i \mapsto \sum_{i=1}^n s_i$  und Homomorphiesatz)

**3.12 Definition** Sei  $R$  ein Ring. Ein  **$R$ -Kettenkomplex**  $(C_*, d_*)$  ist eine Folge von  $R$ -Moduln  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zusammen mit  $R$ -linearen Abbildungen  $(d_n: C_n \rightarrow C_{n-1})_{n \geq 1}$ , so dass  $d_n \circ d_{n+1} = 0$ . Die  $d_n$  heißen die **Randabbildungen** von  $(C_*, d_*)$ , die  $C_n$  die **Kettenmoduln**. Die  **$n$ -te Homologie** eines Kettenkomplexes  $(C_*, d_*)$  ist definiert als

$$H_n(C_*, d_*) := \frac{\ker d_n: C_n \rightarrow C_{n-1}}{\operatorname{Im} d_{n+1}: C_{n+1} \rightarrow C_n}$$

### 3.13 Bemerkung

- (i) Oft werden auch Kettenkomplexe betrachtet, die  $\mathbb{Z}$  statt  $\mathbb{N}$  verwenden.
- (ii) Ein Kettenkomplex  $(C_*, d_*)$  heißt endlich erzeugt, wenn alle  $C_n$  endlich erzeugte  $R$ -Moduln sind und  $C_n \neq 0$  nur für endlich viele  $n$  ist.

**3.14 Definition** Zu einem geordneten simplizialen Komplex  $K$  heißt  $(C_*(K; R), \partial_*)$  der **simpliziale Kettenkomplex** von  $K$  über  $R$ .

**BEMERKUNG:** Ist  $K$  endlich, so ist  $(C_*(K; R), \partial_*)$  endlich erzeugt.

## 4 Euler-Charakteristik von Kettenkomplexen

**4.1 Wiederholung** Sei  $A$  eine abelsche Gruppe. Dann ist

$$TA := \left\{ a \in A \mid \exists n \geq 1 : n \cdot a = \underbrace{a + \dots + a}_{n\text{-mal}} = 0 \right\}$$

die **Torsionsgruppe** von  $A$ . Ist  $A$  endlich erzeugt, so ist auch  $TA$  endlich erzeugt und es gibt Primzahlpotenzen  $p_1^{n_1}, \dots, p_k^{n_k}$  mit

$$TA \cong \mathbb{Z}/(p_1^{n_1}) \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/(p_k^{n_k})$$

abelsche Gruppen  
sind  $\mathbb{Z}$ -Moduln

Weiter gibt es dann  $n$  mit  $A \cong \mathbb{Z}^n \oplus TA$ .  $\text{Rg } A := n$  ist der **Rang** von  $A$ .

**4.2 Lemma** Sei  $A$  eine endlich erzeugte abelsche Gruppe. Dann gilt

$$\text{Rg } A = \max\{m \mid \exists C \leq A, C \cong \mathbb{Z}^m\}.$$

**BEWEIS:** Da  $A \cong \mathbb{Z}^n \oplus TA$  ist, genügt zu zeigen: Ist  $\varphi: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^n \oplus TA$  ein injektiver Gruppenhomomorphismus, so ist  $m \leq n$ . Schreibe  $\varphi = \varphi_0 \oplus \varphi_1$ , also  $\varphi(a) = \varphi_0(a) + \varphi_1(a)$  mit  $\varphi_0: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^n$ ,  $\varphi_1: \mathbb{Z}^m \rightarrow TA$ .

Behauptung:  $\varphi_0$  ist injektiv. Zu  $v \in \mathbb{Z}^m$  wähle  $k \geq 1$  mit  $k \cdot \varphi_1(v) = 0 \in TA$ . Dann ist  $\varphi_1(kv) = k\varphi_1(v) = 0$ . Ist  $v \neq 0$ , so ist  $k \cdot v \neq 0 \in \mathbb{Z}^m$ , also ist  $\varphi(kv) \neq 0$  und damit  $\varphi_0(kv) \neq 0$ . Es folgt  $\varphi_0(v) \neq 0$ , da sonst  $\varphi_0(k \cdot v) = k \cdot \varphi_0(v) = 0$ . Damit ist die Behauptung gezeigt.

Gruppenhomomorphismen  $\varphi_0: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^n$  werden durch  $n \times m$ -Matrizen beschrieben: Es gibt  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{Z}^{n \times m}$  mit

$$\varphi_0 \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m a_{1j} \cdot z_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m a_{nj} \cdot z_j \end{pmatrix}$$

Ist  $m > n$ , so hat  $A$ , aufgefasst als Matrix über  $\mathbb{Q}$ , einen Kern. Es gibt also einen Vektor  $w = \begin{pmatrix} a_1/b_1 \\ \vdots \\ a_m/b_m \end{pmatrix}$  mit  $Aw = 0$ ,  $w \neq 0$ . Dann ist  $(b_1, \dots, b_m) \cdot w \in \mathbb{Z}^m$  und

$$\varphi_0((b_1, \dots, b_m) \cdot w) = A \cdot ((b_1, \dots, b_m) \cdot w) = (b_1, \dots, b_m) \cdot A \cdot w = 0 \quad \nexists$$

Dies ist ein Widerspruch zur Injektivität von  $\varphi_0$ . Also gilt  $m \leq n$ . □

**4.3 Definition** Seien  $M_0, M_1, M_2$   $R$ -Moduln und  $f_0: M_0 \rightarrow M_1$ ,  $f_1: M_1 \rightarrow M_2$   $R$ -lineare Abbildungen. Dann heißt

$$M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} M_2$$

eine **kurze exakte Sequenz**, wenn gilt:

- (i)  $f_0$  ist injektiv,                      (ii)  $\text{Im } f_0 = \ker f_1$ ,                      (iii)  $f_1$  ist surjektiv.

**BEMERKUNG:** Oft sagt man  $M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} M_2$  ist exakt in  $M_1$ , wenn  $\text{Im } f_0 = \ker f_1$  ist. Dann ist  $(\star)$  eine kurze exakte Folge, wenn

$$0 \longrightarrow M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \longrightarrow 0$$

exakt in  $M_0, M_1$  und  $M_2$  ist.

## 4.4 Beispiele

1)

$$\begin{aligned} M_0 &\xhookrightarrow{i} M_0 \oplus M_1 \xrightarrow{p} M_1 \\ v_0 &\xmapsto{i} (v_0, 0) \quad (v_0, v_1) \xmapsto{p} v_1 \end{aligned}$$

ist eine kurze exakte Folge.

2)  $\mathbb{Z} \xhookrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  ist eine kurze exakte Folge.

**4.5 Bemerkung** Eine **Spaltung** für eine kurze exakte Folge  $M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} M_2$  ist eine  $R$ -lineare Abbildung  $s: M_2 \rightarrow M_1$  mit  $f_1 \circ s = \text{id}_{M_2}$ . In diesem Fall erhalten wir einen Isomorphismus  $M_0 \oplus M_2 \rightarrow M_1$ ,  $(v_0, v_2) \mapsto f_0(v_0) + s(v_2)$ .

**Injektivität:** Sei  $(v_0, v_2) \in M_0 \oplus M_2$  mit  $f_0(v_0) + s(v_2) = 0$ . Dann gilt

$$0 = f_1(f_0(v_0) + s(v_2)) = v_2 \implies f_0(v_0) = 0 \implies v_0 = 0$$

**Surjektivität:** Sei  $v_1 \in M_1$ . Betrachte  $v_2 := f_1(v_1)$ . Dann ist  $v_1 - s(v_2) \in \ker f_1 = \text{Im } f_0$ , also gibt es  $v_0$  in  $M_0$  mit  $f_0(v_0) = v_1 - s(v_2)$ . Damit ist  $v_1 = f_0(v_0) + s(v_2)$ .  $\square$

## 4.6 Bemerkung

1) Die kurze exakte Sequenz  $\mathbb{Z} \xhookrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  spaltet nicht.

2) Ist  $M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} M_2$  eine kurze exakte Folge mit  $M_2$  frei, also  $M_2 \cong R[S]$ , so spaltet die Folge. Insbesondere ist  $M_1 \cong M_0 \oplus M_2$ . Dazu wenden wir Lemma 3.2 an und erhalten eine  $R$ -lineare Abbildung  $s: M_2 \rightarrow M_1$ , sodass folgendes Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} & & M_1 \\ & \nearrow s & \downarrow f_1 \\ R[S] & \xrightarrow{\text{id}} & R[S] \end{array}$$

$s$  ist also die gesuchte Spaltung. Dieses Vorgehen funktioniert bei jedem projektiven Modul.

**4.7 Bemerkung** Der Rang für alle endlich erzeugten abelschen Gruppen ist additiv:

$$\text{Rg}(A \oplus B) = \text{Rg } A + \text{Rg } B,$$

da  $A \cong \mathbb{Z}^{\text{Rg } A} \oplus TA$ ,  $B \cong \mathbb{Z}^{\text{Rg } B} \oplus TB$ , also

$$A \oplus B \cong \mathbb{Z}^{\text{Rg } A + \text{Rg } B} \oplus \underbrace{TA \oplus TB}_{=T(A \oplus B)}$$

**4.8 Proposition** Der Rang von endlich erzeugten abelschen Gruppen ist additiv für kurze exakte Folgen: Ist

$$A \xhookrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \quad [\star]$$

eine kurze exakte Folge von endlich erzeugten abelschen Gruppen, so gilt  $\text{Rg } B = \text{Rg } A + \text{Rg } C$ .

**BEWEIS:** Spaltet  $[\star]$ , so ist  $B \cong A \oplus C$  und die Behauptung folgt aus der Bemerkung 4.7.

Wir können annehmen, dass  $C = \mathbb{Z}^n \oplus TC$  gilt. Wir erhalten folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xhookrightarrow{i} & p^{-1}(\mathbb{Z}^n) & \xrightarrow{p} & \mathbb{Z}^n \\
 \parallel & & \downarrow i'' & & \downarrow i' \\
 A & \xhookrightarrow{i} & B & \xrightarrow{p} & C \\
 & & \downarrow p'' & & \downarrow p' \\
 & & B/p^{-1}(\mathbb{Z}^n) & \xrightarrow{p' \circ p} & TC
 \end{array} \quad [\star]$$

Ist  $p' \circ p(b) = 0$ , so gibt es  $v \in \mathbb{Z}^n$  mit  $i'(v) = p(b)$ . Nun gibt es  $v' \in p^{-1}(\mathbb{Z}^n)$  mit  $p(v') = v$ . Es folgt

$$p(i''(v')) = p(b)$$

also  $i''(v') - b \in \ker p = i(A)$ . Da  $i(A) \subseteq i''(p^{-1}(\mathbb{Z}^n))$ , folgt  $b \in i''(p^{-1}(\mathbb{Z}^n))$ . In dem Diagramm sind die Spalten und Zeilen exakt. Da  $\mathbb{Z}^n$  frei ist, spaltet  $A \xhookrightarrow{i} p^{-1}(\mathbb{Z}^n) \xrightarrow{p} \mathbb{Z}^n$  und es gilt

$$\operatorname{Rg} A + \operatorname{Rg} C = \operatorname{Rg} A + n = \operatorname{Rg}(p^{-1}(\mathbb{Z}^n))$$

Es bleibt zu zeigen:  $\operatorname{Rg} B = \operatorname{Rg}(p^{-1}(\mathbb{Z}^n))$ .

Nebenbei: Ist  $A' \subseteq B'$ , so gilt  $\operatorname{Rg} A' \leq \operatorname{Rg} B'$ , denn

$$\operatorname{Rg} A' = \max \left\{ n' \mid \mathbb{Z}^{n'} \cong C' \leq A' \right\} \leq \max \left\{ n' \mid \mathbb{Z}^{n'} \cong C' \leq B' \right\} = \operatorname{Rg} B'.$$

Betrachte die kurze exakte Folge

$$p^{-1}(\mathbb{Z}^n) \longrightarrow B \longrightarrow B/p^{-1}(\mathbb{Z}^n)$$

Wegen  $B/p^{-1}(\mathbb{Z}^n) \cong TC$  gibt es ein  $k$  mit  $k \cdot (b + p^{-1}(\mathbb{Z}^n)) = 0$  für alle  $b \in B$ . Also  $k \cdot b \in p^{-1}(\mathbb{Z}^n)$ . Es folgt  $kB \subseteq p^{-1}(\mathbb{Z}^n)$ . Ist  $B \cong \mathbb{Z}^{\operatorname{Rg} B} + TB$ , so ist  $kB \cong (k\mathbb{Z})^{\operatorname{Rg} B} + T(kB)$  und  $\operatorname{Rg} kB = n = \operatorname{Rg} B$ . Mit der Nebenbemerkung folgt  $\operatorname{Rg} p^{-1}(\mathbb{Z}^n) = \operatorname{Rg} B$  aus  $kB \subseteq p^{-1}(\mathbb{Z}^n) \subseteq B$ .  $\square$

#### BEWEIS MIT TENSORPRODUKTEN (SKIZZE):

- $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}}: \mathbb{Z}\text{-MOD} \rightarrow \mathbb{Q}\text{-VR}$  ist ein Funktor.
- $\operatorname{Rg} A = \dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} A)$ 
  - (a)  $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} (X \oplus Y) = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} X \oplus \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} Y$
  - (b)  $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^n \cong \mathbb{Q}^n$
  - (c)  $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} T \cong 0$  für  $T$  ein Torsionsmodul.
- Ist  $A \rightarrow B \rightarrow C$  eine kurze exakte Folge, so ist auch  $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} A \rightarrow \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} B \rightarrow \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} C$  eine kurze exakte Folge.
- Jede kurze exakte Folge  $V_0 \longrightarrow V_1 \longrightarrow V_2$  von  $\mathbb{Q}$ -Vektorräumen spaltet und daher gilt  $V_1 \cong V_0 \oplus V_2$  und  $\dim_{\mathbb{Q}}(V \oplus W) = \dim_{\mathbb{Q}}(V) + \dim_{\mathbb{Q}}(W)$ .

**4.9 Definition** Sei  $(C_*, d_*)$  ein endlich erzeugter  $\mathbb{Z}$ -Kettenkomplex.

$$\chi(C_*) := \sum_{i=0}^{\infty} \operatorname{Rg}(C_i) = \sum_{i=0}^{n_0} \operatorname{Rg}(C_i)$$

heißt die **Eulercharakteristik** von  $(C_*, d_*)$ . Dabei ist  $n_0$  so gewählt, dass  $C_n = 0$  für alle  $n > n_0$ .

**4.10 Satz** Sei  $(C_*, d_*)$  ein endlich erzeugter  $\mathbb{Z}$ -Kettenkomplex. Dann gilt

$$\chi(C_*) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \operatorname{Rg} H_i(C_*, d_*).$$

**BEWEIS:** Sei  $B_{n+1} := \operatorname{Im} d_{n+1}: C_{n+1} \rightarrow C_n$  und  $Z_n := \ker d_n: C_n \rightarrow C_{n-1}$ . Also  $H_n(C_*, d_*) = Z_n/B_{n+1}$ . Als Untermoduln von  $C_n$  sind  $Z_n$  und  $B_n$  endlich erzeugt (LA2). Insbesondere ist auch  $H_n(C_*, d_*)$  endlich erzeugt und der Rang somit definiert. Auch  $B_{n+1}$  ist Untermodul des endlich erzeugten  $\mathbb{Z}$ -Moduls  $C_n$  und somit endlich erzeugt. Wir erhalten kurze exakte Folgen:

$$\begin{aligned} B_{n+1} &\hookrightarrow Z_n \twoheadrightarrow H_n(C_*, d_*) \\ Z_n &\hookrightarrow C_n \twoheadrightarrow B_n \end{aligned}$$

Nach Proposition 4.8 gilt  $\operatorname{Rg} Z_n = \operatorname{Rg} B_{n+1} + \operatorname{Rg} H_n(C_*, d_*)$  und  $\operatorname{Rg} C_n = \operatorname{Rg} Z_n + \operatorname{Rg} B_n$ . Also gilt

$$\begin{aligned} \chi(C_*) &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \operatorname{Rg} C_i = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i (\operatorname{Rg} Z_i + \operatorname{Rg} B_i) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i (\operatorname{Rg} H_i(C_*, d_*) + \operatorname{Rg} B_{i+1} + \operatorname{Rg} B_i) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \operatorname{Rg} H_i(C_*, d_*) + \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \operatorname{Rg} B_{i+1} + \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \operatorname{Rg} B_i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \operatorname{Rg} H_i(C_*, d_*) \quad \square \end{aligned}$$

Eine vereinfachte Variante dieser Aussage kam in Aufgabe 2 von Blatt 3 vor: Dort haben wir den Homologiemodul über einen Körper betrachtet. Deshalb konnte wir da dann die Dimensionsformeln anwenden, um die beiden Voraussetzungen für die Rechnung in 4.10 zu erhalten.

**4.11 Korollar** Sei  $K$  ein endlicher, geordneter simplizialer Kettenkomplex. Dann gilt

$$\chi(K) = \sum_{i=1}^{\dim K} (-1)^i \operatorname{Rg} H_i(K; \mathbb{Z})$$

**BEWEIS:** Wende den Satz 4.10 auf den simplizialen Kettenkomplex von  $K$  an. Da

$$\operatorname{Rg} C_n(K; \mathbb{Z}) = \operatorname{Rg} \mathbb{Z}[\Sigma_n] = \# \text{ } n\text{-Simplizes in } K$$

ist

$$\chi(K) = \chi(C_*(K; \mathbb{Z}), \partial_*) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \operatorname{Rg} H_i(C_*(K; \mathbb{Z}), \partial_*) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \operatorname{Rg} H_i(K; \mathbb{Z}) \quad \square$$

## 5 Singuläre Homologie

**5.1 Definition** Sei  $X$  ein topologischer Raum. Sei  $S_n(X)$  die Menge aller stetigen Abbildungen  $\sigma: |\Delta^n| \rightarrow X$ . Elemente von  $S_n(X)$  heißen **singuläre Simplexes** in  $X$ . Sei  $R$  ein Ring. Der  **$n$ -te (singuläre) Kettenmodul** von  $X$  über  $R$  ist

$$C_n(X; R) := R[S_n(X)]$$

**5.2 Definition** Für  $\sigma \in S_n(X)$  und  $j \in \{0, \dots, n\}$  sei  $\delta_j \sigma \in S_{n-1}(X)$  die Einschränkung von  $\sigma$  auf die  $j$ -te Seite von  $|\Delta^n|$ , also  $\delta_j(\sigma) = \sigma \circ \iota_{n,j}$ , wobei  $\iota_{n,j}: |\Delta^{n-1}| \rightarrow |\Delta^n|$  die Inklusion der  $j$ -ten Seite ist:

$$\iota_{n,j}(x_0, \dots, x_{n-1}) = (x_0, \dots, x_{j-1}, 0, x_j, \dots, x_{n-1})$$

**5.3 Bemerkung** Es gilt  $\iota_{n,j} = |i_{n,j}|$  wobei  $i_{n,j}: \Delta^{n-1} \rightarrow \Delta^n$  gegeben ist durch

$$i_{n,j}(k) = \begin{cases} k, & \text{falls } k < j \\ k+1, & \text{falls } k \geq j \end{cases}$$

vergleiche Blatt 2,  
Aufgabe 2

**5.4 Definition** Die  **$n$ -te singuläre Randabbildung**  $\partial_n: C_n(X; R) \rightarrow C_{n-1}(X; R)$  ist definiert durch

$$\partial_n(\sigma) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \cdot \delta_j(\sigma).$$

**5.5 Proposition**

$$\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$$

**BEWEIS (MIT LEMMA 5.6):**

$$\begin{aligned} \partial_{n-1} \circ \partial_n(\sigma) &= \partial_{n-1} \left( \sum_{j=0}^n (-1)^j \delta_j(\sigma) \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^n (-1)^{j+k} \delta_k \delta_j(\sigma) \\ &= \sum_{0 \leq k < j \leq n} (-1)^{k+j} \delta_k \delta_j(\sigma) + \sum_{0 \leq j \leq k \leq n-1} (-1)^{k+j} \delta_k \delta_j(\sigma) \\ &\stackrel{\text{Lemma 5.6}}{=} \sum_{0 \leq k < j \leq n} (-1)^{k+j} \delta_k \delta_j(\sigma) + \sum_{0 \leq j \leq k \leq n-1} (-1)^{k+j} \delta_j \delta_{k+1}(\sigma) \\ &= \sum_{0 \leq k < j \leq n} (-1)^{k+j} \delta_k \delta_j(\sigma) + \sum_{0 \leq j < k \leq n} (-1)^{k-1+j} \delta_j \delta_k(\sigma) \\ &= 0 \end{aligned} \quad \square$$

**5.6 Lemma** Für  $0 \leq j \leq k \leq n-1$  und  $\sigma \in S_n(X)$  ist  $\delta_k \delta_j(\sigma) = \delta_j \delta_{k+1}(\sigma)$ .

**BEWEIS:** Es ist

$$\begin{aligned} \delta_k(\delta_j(\sigma))(x_0, \dots, x_{n-2}) &= \delta_j(\sigma)(x_0, \dots, x_{k-1}, 0, x_k, \dots, x_{n-2}) \\ &= (x_0, \dots, x_{j-1}, 0, x_j, \dots, x_{k-1}, 0, x_k, \dots, x_{n-2}) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \delta_j \delta_{k+1}(\sigma)(x_0, \dots, x_{n-2}) &= \delta_{k+1}(\sigma)(x_0, \dots, x_{j-1}, 0, x_j, \dots, x_{n-2}) \\ &= (x_0, \dots, x_{j-1}, 0, x_j, \dots, x_{k-1}, 0, x_k, \dots, x_{n-2}) \end{aligned} \quad \square$$

**5.7 Definition** Sei  $X$  ein topologischer Raum. Die Homologie des **singulären Kettenkomplex** über  $R$ ,  $(C_*(X; R), \partial_*)$ , heißt die **singuläre Homologie von  $X$**  mit Koeffizienten in  $R$ :

$$H_n(X; R) := H_n(C_*(X; R), \partial_*)$$

Für  $R = \mathbb{Z}$  schreiben wir kürzer  $C_*(X) := C_*(X; \mathbb{Z})$  und  $H_n(X) := H_n(X; \mathbb{Z})$ .

### 5.8 Definition

- Die Elemente von  $C_n(X; R)$  heißen **n-Ketten**.
- Die Elemente von  $\text{Im } \partial_{n+1} \subseteq C_n(X; R)$  heißen **n-Ränder**.
- Die Elemente von  $\ker \partial_n \subseteq C_n(X; R)$  heißen **n-Zykel**.

Jeder  $n$ -Zykel  $\sigma \in C_n(X; R)$  bestimmt eine **Homologieklass**  $[\sigma] := \sigma + \text{Im } \partial_{n+1} \in H_n(X; R)$ .

**5.9 Beispiel** Ist  $X = \{x_0\}$  der Ein-Punkt-Raum, so ist

$$H_*(\{x_0\}; R) \cong \begin{cases} R, & \text{falls } * = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

**BEWEIS:** Es gibt für jedes  $n$  genau eine Abbildung  $\sigma_n: |\Delta^n| \rightarrow \{x_0\}$  nämlich die konstant. Diese ist offensichtlich stetig. Also ist  $C_n(\{x_0\}; R) = R[\sigma_n]$ . Für alle  $j$  ist  $\delta_j \sigma_n = \sigma_{n-1}$ . Daher ist

$$\partial_n(\sigma_n) = \begin{cases} 0, & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \sigma_{n-1}, & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

Der singuläre Kettenkomplex von  $\{x_0\}$  hat also folgende Gestalt:

$$\begin{array}{ccccccc} C_0(\{x_0\}; R) & \xleftarrow{0} & C_1(\{x_0\}; R) & \xleftarrow{\cong} & C_2(\{x_0\}; R) & \xleftarrow{0} & C_3(\{x_0\}; R) & \xleftarrow{\cong} & \dots \\ \text{\scriptsize } \mathbb{R} & & \text{\scriptsize } \mathbb{R} & & \text{\scriptsize } \mathbb{R} & & \text{\scriptsize } \mathbb{R} & & \text{\scriptsize } \mathbb{R} \\ R & \xleftarrow{0} & R & \xleftarrow{\text{id}} & R & \xleftarrow{0} & R & \xleftarrow{\text{id}} & R \end{array}$$

Es folgt

$$H_n(\{x_0\}; R) \cong \begin{cases} R, & \text{falls } n = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

□

### 5.10 Proposition

- 1) Ist  $X \neq \emptyset$ , so ist  $H_0(X) \neq 0$ .
- 2) Ist  $X$  wegzusammenhängend, so gilt  $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ .<sup>2</sup>

<sup>2</sup> Tatsächlich gilt auch die Umkehrung, wie in Aufgabe 4 von Blatt 3 gezeigt.

Eine analoge Aussage für simpliziale Komplexe haben wir in Aufgabe 3 von Blatt 2 bewiesen



**BEWEIS:**

1) Sei die sogenannte **Augmentierung**  $\epsilon: C_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$  definiert durch

$$\epsilon \left( \sum_{\sigma \in S_0(X)} r_\sigma \cdot \sigma \right) := \sum_{\sigma} r_\sigma.$$

Dann ist  $\epsilon \circ \partial_1: C_1(X) \rightarrow \mathbb{Z}$  trivial, denn für  $\sigma \in S_1(X)$  ist  $\epsilon \circ \partial_1(\sigma) = \epsilon(\delta_0\sigma - \delta_1\sigma) = 0$ . Daher induziert  $\epsilon$  eine Abbildung  $\bar{\epsilon}: H_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ . Da  $X \neq \emptyset$  ist, gibt es einen singulären 0-Simplex  $\sigma: |\Delta^0| \rightarrow X$ . Für  $\sigma$  gilt  $\bar{\epsilon}([\sigma]) = 1$  und daher ist  $\bar{\epsilon}$  surjektiv und  $H_0(X) \neq 0$ .

2) Wir zeigen, dass  $\bar{\epsilon}: H_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$  ein Isomorphismus ist, falls  $X$  wegzusammenhängend ist. Dazu zeigen wir  $\ker \epsilon = \text{Im } \partial_1$ . Dazu definieren wir  $s: C_0(X) \rightarrow C_1(X)$  wie folgt: Sei  $\sigma_0$  ein fest gewählter singulärer 0-Simplex. Zu  $\sigma \in S_0(X)$  gibt es, da  $X$  wegzusammenhängend ist,  $s(\sigma) \in S_1(X)$  mit  $\delta_0 s(\sigma) = \sigma$ ,  $\delta_1 s(\sigma) = \sigma_0$ . Es gilt nun

$$\partial_1 \circ s(\sigma) = \sigma - \sigma_0 = (\text{id}_{C_0(X)} - i \circ \epsilon)(\sigma)$$

wobei  $i: \mathbb{Z} \rightarrow C_0(X)$ ,  $n \mapsto n \cdot \sigma_0$ . Ist nun  $v \in \ker \epsilon$ , so folgt

$$\partial_1 \circ s(v) = v - \underbrace{i \circ \epsilon(v)}_{=0} = v$$

also ist  $v \in \text{Im } \partial_1$  und es folgt die Behauptung.  $\square$

**5.11 Bemerkung** Sei  $K = (V, \Sigma)$  ein geordneter simplizialer Komplex. Sei  $\sigma = \{v_0, \dots, v_n\} \in \Sigma_n$  ein  $n$ -Simplex von  $K$  mit  $v_0 < v_1 < \dots < v_n$ . Wir ordnen  $\sigma$  den singulären  $n$ -Simplex  $f_\sigma: |\Delta^n| \rightarrow |\Delta^\sigma| \subseteq |K|$  zu, wobei

$$f_\sigma \left( \sum_{i=0}^n t_i \cdot e_i \right) = \sum_{i=0}^n t_i \cdot v_i.$$

Nun erhalten wir eine Abbildung

$$C_*(K; R) \rightarrow C_*(|K|, R) \quad , \quad \sum_{\sigma \in \Sigma_n} r_\sigma \cdot \sigma \longmapsto \sum_{\sigma \in \Sigma_n} r_\sigma \cdot f_\sigma.$$

Diese Abbildung induziert(!) eine weitere Abbildung  $H_*(K; R) \xrightarrow{\cong} H_*(|K|; R)$  von der wir später zeigen werden, dass sie ein Isomorphismus ist.

## 6 Funktorialität

**6.1 Definition** Seien  $(C_*, d_*)$  und  $(C'_*, d'_*)$  zwei  $R$ -Kettenkomplexe. Dann ist eine  **$R$ -Kettenabbildung**  $f_*: (C_*, d_*) \rightarrow (C'_*, d'_*)$  eine Folge von  $R$ -linearen Abbildungen  $f_n: C_n \rightarrow C'_n$ , sodass

$$d'_n \circ f_n = f_{n-1} \circ d_n$$

für alle  $n \geq 1$  gilt. Also kommutiert folgendes Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} C_0 & \xleftarrow{d_1} & C_1 & \xleftarrow{d_2} & C_2 & \xleftarrow{d_3} & C_3 \xleftarrow{\quad} \dots \\ \downarrow f_0 & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 \\ C'_0 & \xleftarrow{d'_1} & C'_1 & \xleftarrow{d'_2} & C'_2 & \xleftarrow{d'_3} & C'_3 \xleftarrow{\quad} \dots \end{array}$$

**6.2 Bemerkung** Ist  $f_*: (C_*, d_*) \rightarrow (C'_*, d'_*)$  eine Kettenabbildung, so erhalten wir eine induzierte Abbildung auf Homologie  $H_n(f_*): H_n(C_*, d_*) \rightarrow H_n(C'_*, d'_*)$  durch

$$H_n(f_*)([v]) := [f_n(v)]$$

für  $v \in \ker d_n$ . Dies ist wohldefiniert, denn:

- $d'_n(f_n(v)) = f_{n-1}(d_n(v)) = 0$ , also  $f_n(v) \in \ker d'_n$  für  $v \in \ker d_n$ .
- Ist  $[v] = [w]$ , mit  $v, w \in \ker d_n$ , so gibt es  $x \in C_{n+1}$  mit  $d_{n+1}(x) = v - w$ . Dann ist

$$d'_{n+1}(f_{n+1}(x)) = f_n(d_{n+1}(x)) = f_n(v) - f_n(w)$$

$$\text{also } [f_n(v)] = [f_n(w)] \in H_n(C'_*, d'_*).$$

### 6.3 Bemerkung

a)  $R$ -Kettenkomplexe mit  $R$ -Kettenabbildungen bilden die Kategorie  $R\text{-KETTEN}$ .

b) Homologie definiert nun einen Funktor:  $H_n: R\text{-KETTEN} \rightarrow R\text{-MOD}$ .

Es gilt  $H_n(\text{id}_{(C_*, d_*)}) = \text{id}_{H_n(C_*, d_*)}$  und  $H_n(f \circ g) = H_n(f) \circ H_n(g)$ , da

$$H_n(f \circ g)([v]) = [f_n \circ g_n(v)] = [f_n(g_n(v))] = H_n(f)([g_n(v)]) = H_n(f)(H_n(g)(v))$$

c) Definiert man die Kategorie der **graduerten**  $R$ -Moduln als die Kategorie, deren Objekte Folgen  $(V_n)_n$  von  $\mathbb{R}$ -Moduln sind und deren Morphismen Folgen von  $R$ -linearen Abbildungen  $(f_n)_n$  sind, so kann man die  $H_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  zu einem Funktor

$$H_*: R\text{-KETTEN} \longrightarrow \text{GR-}R\text{-MOD} \quad , \quad (C_*, d_*) \longmapsto (H_n(C_*, d_*))_n$$

zusammensetzen.

**6.4 Definition** Sei  $f: X \rightarrow Y$  stetig. Wir definieren  $C_n(f; R): C_n(X; R) \rightarrow C_n(Y; R)$  durch

$$C_n(f; R) \left( \sum_{\sigma \in S_n(X)} r_\sigma \cdot \sigma \right) := \sum_{\sigma \in S_n(X)} r_\sigma \cdot (f \circ \sigma)$$

Dies ist wohldefiniert, denn für  $\sigma \in S_n(X)$  ist  $f \circ \sigma \in S_n(Y)$ .

**6.5 Proposition** Mit dieser Definition von  $C_*(f; R)$  wird der singuläre Kettenkomplex über  $R$  zu einem Funktor

$$C_*(-; R): \text{TOP} \rightarrow R\text{-KETTEN}$$

**BEWEIS:**

(i)  $C_*(f; R)$  ist eine  $R$ -Kettenabbildung: Es gilt

$$\begin{aligned} C_{n-1}(f; R) \circ \partial_n(\sigma) &= C_{n-1}(f; R) \left( \sum_{l=0}^n (-1)^l \cdot \sigma \circ \iota_{n,l} \right) = \sum_{l=0}^n (-1)^l \cdot (f \circ \sigma) \circ \iota_{n,l} \\ &= \partial_n(f \circ \sigma) = \partial(C_n(f; R)(\sigma)). \end{aligned}$$

(ii) Zu zeigen:  $C_*(f \circ g; R) = C_*(f; R) \circ C_*(g; R)$ . Es gilt

$$C_n(f \circ g; R)(\sigma) = f \circ (g \circ \sigma) = C_n(f; R)(g \circ \sigma) = C_n(f; R)(C_n(g; R)(\sigma)).$$

(iii) Zu zeigen:  $C_*(\text{id}_X; R) = \text{id}_{C_*(X; R)}$ . Es gilt

$$C_n(\text{id}_X; R)(\sigma) = \text{id}_X \circ \sigma = \sigma$$

□

**6.6 Korollar** Mit  $H_n(f; R) := H_n(C_*(f; R))$  wird  $H_n(-; R)$  zu einem Funktor:  $H_n(-; R): \text{TOP} \rightarrow R\text{-MOD}$ .

**BEWEIS:**  $H_n(-; R)$  ist die Komposition des Funktors  $C_*(-; R): \text{TOP} \rightarrow R\text{-KETTEN}$  aus 6.5 mit dem Funktor  $H_n: R\text{-KETTEN} \rightarrow R\text{-MOD}$  aus 6.3. □

### 6.7 Bemerkung

- Oft schreiben wir kurz  $f_* = H_n(f; R)$ .
- Für  $\left[ \sum_{\sigma \in S_n(X)} r_\sigma \sigma \right] \in H_n(X; R)$  ist  $f_* \left( \left[ \sum_{\sigma \in S_n(X)} r_\sigma \sigma \right] \right) = \left[ \sum_{\sigma \in S_n(X)} r_\sigma f \circ \sigma \right] \in H_n(Y; R)$

**6.8 Definition** Seien  $X_i, i \in I$  topologische Räume. Mit

$$X := \coprod_{i \in I} X_i$$

bezeichnen wir die **Summe** (oder auch das **Koprodukt**) der  $X_i$ . Als Menge ist  $X$  die disjunkte Vereinigung der  $X_i$ .  $U \subseteq X$  ist offen genau dann, wenn  $X_i \cap U \subseteq X_i$  offen ist für jedes  $i \in I$ . Für jedes  $i_0$  erhalten wir eine stetige Inklusion  $j_{i_0}: X_{i_0} \rightarrow \coprod_i X_i$ .

**BEMERKUNG:** Für jedes  $i_0$  ist  $X_{i_0} \subseteq \coprod_i X_i$  offen und abgeschlossen.

**6.9 Definition** Seien  $V_i, i \in I$   $R$ -Moduln. Mit

$$V := \bigoplus_{i \in I} V_i$$

bezeichnen wir die **Summe** (auch das **Koprodukt**) der  $V_i$ . Elemente von  $V$  sind  $I$ -Folgen  $(v_i)_{i \in I}$  mit  $v_i \in V_i$  und  $v_i = 0$  für alle bis auf endlich viele  $i$ . Die  $R$ -Modulstruktur ist erklärt durch:

$$(v_i)_{i \in I} + (w_i)_{i \in I} := (v_i + w_i)_{i \in I} \quad , \quad r \cdot (v_i)_{i \in I} := (r \cdot v_i)_{i \in I}$$

Für jedes  $i_0 \in I$  erhalten wir eine  $R$ -lineare Abbildung  $j_{i_0}: V_{i_0} \rightarrow V$  mit

$$(j_{i_0}(v))_i = \begin{cases} v, & \text{falls } i = i_0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

**BEMERKUNG:** Seien  $V_i$  für  $i \in I$   $R$ -Moduln. Sei  $W$  ein weiterer  $R$ -Modul. Dann gibt es zu jeder Folge  $f_i: V_i \rightarrow W$  von  $R$ -linearen Abbildungen eine  $R$ -lineare Abbildung  $\bigoplus_{i \in I} f_i: \bigoplus_{i \in I} V_i \rightarrow W$  mit

$$(\bigoplus_{i \in I} f_i)((v_i)_{i \in I}) = \sum_{i \in I} f_i(v_i)$$

Ist umgekehrt  $f: \bigoplus_{i \in I} V_i \rightarrow W$  eine  $R$ -lineare Abbildung, so ist  $f_i := f \circ j_i$  eine Folge von  $R$ -linearen Abbildungen mit  $f = \bigoplus_{i \in I} f_i$ .

**6.10 Satz** Sei  $X = \coprod_{i \in I} X_i$ . Dann induzieren die Inklusionen  $j_i: X_i \hookrightarrow X$  einen Isomorphismus

$$\bigoplus_{i \in I} H_n(X_i; R) \xrightarrow{\bigoplus_{i \in I} (j_i)_*} H_n(X; R)$$

**BEWEIS:** Da die  $X_i \subseteq X$  offen und abgeschlossen sind und  $|\Delta^n|$  zusammenhängend ist (sogar wegzusammenhängend), gibt es für jedes  $\sigma: |\Delta^n| \rightarrow X$  ein eindeutiges  $i$  mit  $\text{Im } \sigma \subseteq X_i$ . Es gilt also  $S_n(X) = \bigcup S_n(X_i)$ . Daher induzieren die  $j_i$  für jedes  $n$  einen Isomorphismus

$$\bigoplus_{i \in I} C_n(j_i; R): \bigoplus_{i \in I} C_n(X_i; R) \xrightarrow{\cong} C_n(X; R)$$

Da diese Isomorphismen mit den Randabbildungen vertauschen, erhalten wir einen Isomorphismus von  $R$ -Kettenkomplexen

$$\varphi := \bigoplus_{i \in I} C_*(j_i; R): \bigoplus_{i \in I} C_*(X_i; R) \xrightarrow{\cong} C_*(X; R)$$

Da  $\bigoplus_i H_n(C_*(X_i; R)) \cong H_n(\bigoplus_i C_*(X_i; R))$  induzieren dann auch die  $(j_i)_*$  einen Isomorphismus

$$\bigoplus_{i \in I} (j_i)_*: \bigoplus_{i \in I} H_n(X_i; R) \xrightarrow{\cong} H_n(X; R) \quad \square$$

## 7 Homotopieinvarianz

**7.1 Bemerkung** Sei  $f: X \rightarrow Y$  ein Homöomorphismus. Dann ist  $f_*: H_n(X; R) \rightarrow H_n(Y; R)$  ein Isomorphismus.

**BEWEIS:** Da Homologie ein Funktor ist, gilt

$$\begin{aligned} f_* \circ (f^{-1})_* &= (f \circ f^{-1})_* = (\text{id}_Y)_* = \text{id}_{H_n(Y; R)} & \text{und} \\ (f^{-1})_* \circ f_* &= (f^{-1} \circ f)_* = (\text{id}_X)_* = \text{id}_{H_n(X; R)} \end{aligned}$$

Also ist  $(f_*)^{-1} = (f^{-1})_*$ . Insbesondere ist  $f_*$  ein Isomorphismus.  $\square$

**7.2 Definition** Eine stetige Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  heißt eine **Homotopieäquivalenz**, falls es eine stetige Abbildung  $g: Y \rightarrow X$  gibt, so dass  $g \circ f$  homotop zu  $\text{id}_X$  ist und  $f \circ g$  homotop zu  $\text{id}_Y$  ist.  $g$  heißt dann eine **Homotopieinverse** zu  $f$ .

**BEMERKUNG:**

(i)  $f$  ist genau dann eine Homotopieäquivalenz, wenn  $[f]$  in  $\text{HTOP}$  invertierbar ist. In  $\text{HTOP}$  ist dann  $[f]^{-1} = [g]$ .

(ii) Die Homotopieinverse ist eindeutig bis auf Homotopie.

**7.3 Satz** Seien  $f, g: X \rightarrow Y$  stetige Abbildungen. Sind  $f$  und  $g$  homotop, so gilt für die induzierten Abbildungen  $H_n(f; R) = H_n(g; R)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

**BEWEIS:** Siehe 7.8, sowie 7.13  $\square$

**7.4 Korollar** Ist  $f: X \rightarrow Y$  eine Homotopieäquivalenz, so ist  $f_*: H_n(X; R) \rightarrow H_n(Y; R)$  ein Isomorphismus.

**BEWEIS:** Sei  $g: Y \rightarrow X$  ein Homotopieinverses zu  $f$ . Es folgt

$$\begin{aligned} f_* \circ g_* &\stackrel{\text{Funktor}}{=} (f \circ g)_* \stackrel{\text{Homotopieinvarianz}}{=} (\text{id}_Y)_* \stackrel{\text{Funktor}}{=} \text{id}_{H_n(Y; R)} \\ g_* \circ f_* &\stackrel{\text{Funktor}}{=} (g \circ f)_* \stackrel{\text{Homotopieinvarianz}}{=} (\text{id}_X)_* \stackrel{\text{Funktor}}{=} \text{id}_{H_n(X; R)} \end{aligned} \quad \square$$

**7.5 Korollar** Ist  $X$  **kontrahierbar**, d.h. es gibt eine Homotopie  $H: X \times [0, 1] \rightarrow X$  mit  $H_0 = \text{id}_X$  und  $H_1$  konstant, so gilt

$$H_n(X; R) \cong \begin{cases} R, & \text{falls } n = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

**BEWEIS:** Sei  $\{x_0\} = \text{Im } H_1$ . Dann ist die Inklusion  $\{x_0\} \rightarrow X$  eine Homotopieäquivalenz. Also gilt nach 7.4

$$H_n(X; R) \cong H_n(\{x_0\}; R) \stackrel{5.9}{=} \begin{cases} R, & \text{falls } n = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad \square$$

**BEISPIEL:**

$$H_n(\mathbb{R}^k; R) \cong \begin{cases} R, & \text{falls } n = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad H_n(D^k; R) \cong \begin{cases} R, & \text{falls } n = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Kettenhomotopie  
definiert eine Äqui-  
valenzrelation wie  
in Aufgabe 2 von  
Blatt 5 gezeigt.

**7.6 Definition** Seien  $(C_*, d_*)$  und  $(C'_*, d'_*)$   $R$ -Kettenkomplexe. Seien  $f_*, g_*: (C_*, d_*) \rightarrow (C'_*, d'_*)$   $R$ -Kettenabbildungen. Eine **Kettenhomotopie** von  $f_*$  nach  $g_*$  ist eine Folge von  $R$ -linearen Abbildungen  $h_n: C_n \rightarrow C'_{n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , sodass für alle  $n$  gilt:

$$d'_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ d_n = f_n - g_n$$

In diesem Fall heißen  $f_*$  und  $g_*$  **kettenhomotop**.

$$\begin{array}{ccccc} C_{n-1} & \xleftarrow{d_n} & C_n & & \\ & \searrow h_{n-1} & \downarrow g_n & \searrow f_n & \\ & & C'_n & \xleftarrow{d'_{n+1}} & C'_{n+1} \end{array}$$

**7.7 Proposition** Seien  $f_*, g_*: (C_*, d_*) \rightarrow (C'_*, d'_*)$  Kettenabbildungen. Sind  $f_*$  und  $g_*$  kettenhomotop, so gilt für alle  $n$

$$H_n(f_*) = H_n(g_*)$$

**BEWEIS:** Sei  $x \in H_n(C_*, d_*)$ . Also  $x = [v]$  mit  $v \in \ker d_n: C_n \rightarrow C_{n-1}$ . Dann gilt, da  $v \in \ker d_n$

$$\begin{aligned} H_n(f_*)(x) &= H_n(f_*)([v]) = [f_n(v)] = \left[ g_n(v) + \underbrace{d'_{n+1} \circ h_n(v)}_{\in \text{Im } d'_{n+1}} + \underbrace{h_{n-1} \circ d_n(v)}_{=0} \right] \\ &= [g_n(v)] = H_n(g_*)([v]) = H_n(g_*)(x) \end{aligned} \quad \square$$

**7.8 Lemma** Die Homotopieinvarianz von  $H_n(-; R)$ , also Satz 7.3, folgt aus folgenden Spezialfall:

Seien  $i_0, i_1: X \hookrightarrow X \times [0, 1]$  Inklusionen mit  $i_0(x) = (x, 0)$ ,  $i_1(x) = (x, 1)$ .  $\implies (i_0)_* = (i_1)_*$   **[# ]**

**BEWEIS:** Sei  $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$  eine Homotopie zwischen  $f, g: X \rightarrow Y$ , also  $f = H \circ i_0$  und  $g = H \circ i_1$ . Dann folgt mittels Funktorialität

$$f_* = (H \circ i_0)_* = H_* \circ (i_0)_* = H_* \circ (i_1)_* = (H \circ i_1)_* = g_* \quad \square$$

**7.9 Bemerkung** Zum Beweis von  **[# ]** werden wir eine explizite Kettenhomotopie  $h_*$  zwischen  $C_*(i_0; R)$  und  $C_*(i_1; R)$  konstruieren. Wir brauchen also  $h_n: C_n(X; R) \rightarrow C_{n+1}(X \times [0, 1]; R)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit

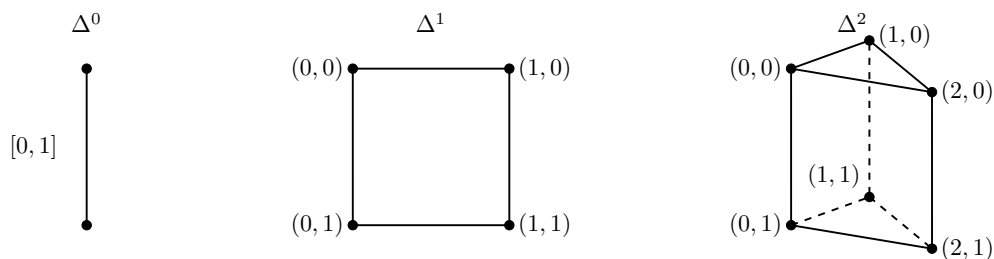
$$\partial_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ \partial_n = C_n(i_0; R) - C_n(i_1; R). \quad \mathbf{[##]}$$

**„Ansatz“** Für  $\sigma: |\Delta^n| \rightarrow X$  setze  $h_n(\sigma) = \sigma \times \text{id}_{[0,1]}: |\Delta^n| \times [0, 1] \rightarrow X \times [0, 1]$ . Dann ist  $h_{n-1}(\partial_n \sigma) = \partial_n \sigma \times \text{id}_{[0,1]}$  und

$$\partial_{n+1}(h_n \sigma) = \partial_{n+1}(\sigma \times \text{id}_{[0,1]}) = (\sigma \times \text{id}) \Big|_{\partial(|\Delta^n| \times [0,1])} = \partial_n \sigma \times \text{id}_{[0,1]} + i_0 \sigma + i_1 \sigma$$

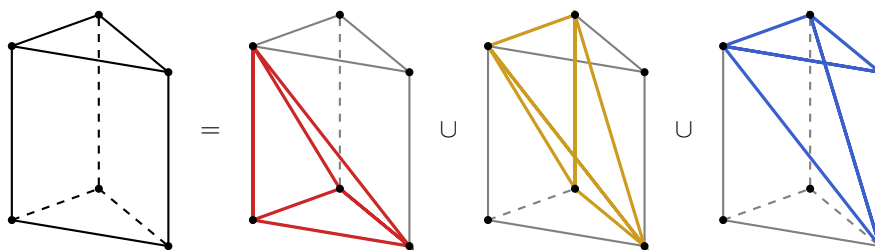
da  $\partial(|\Delta^n| \times [0, 1]) = \partial|\Delta^n| \times [0, 1] \cup |\Delta^n| \times \{0, 1\}$ .

Um daraus Sinn zu machen, zerlegen wir  $|\Delta^n| \times [0, 1]$  in eine Vereinigung von  $(n + 1)$ -Simplizes.  $\Delta^n \times [0, 1]$  hat die folgende Form für  $n \in \{0, 1, 2\}$ :



**Abbildung 1:**  $\Delta^n \times [0, 1]$  für  $n = 0, 1, 2$

Die Zerlegung in 3-Simplizes ist für  $\Delta^2 \times [0, 1]$  gegeben durch



**Abbildung 2:** Zerlegung von  $\Delta^2 \times [0, 1]$  in 3-Simplizes

Dieses Vorgehen verallgemeinern wir jetzt für beliebiges  $n \in \mathbb{N}$ :

**7.10 Definition** Für  $j = 0, \dots, n$  seien  $k_{n,j}: |\Delta^{n+1}| \rightarrow |\Delta^n| \times [0, 1]$  und  $\iota_{n,j}: |\Delta^{n-1}| \rightarrow |\Delta^n|$  die eindeutigen affin linearen Abbildungen, für die gilt:

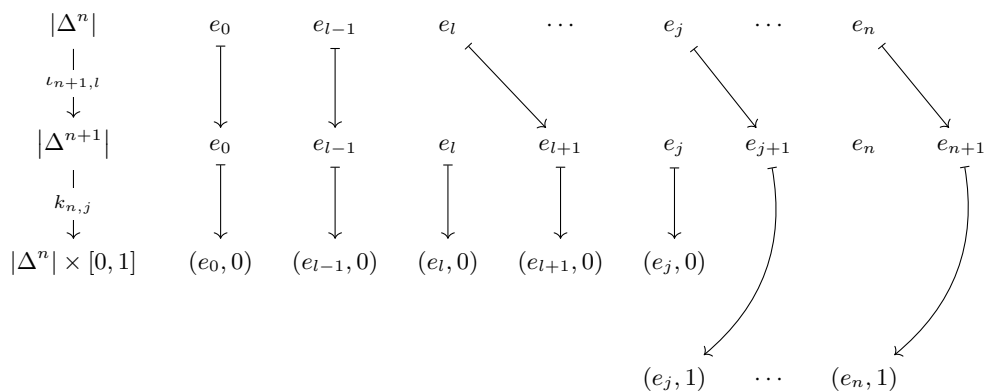
$$\begin{aligned}
 k_{n,j}(e_0) &= (e_0, 0) & \iota_{n,j}(e_0) &= e_0 \\
 k_{n,j}(e_1) &= (e_1, 0) \dots & \iota_{n,j}(e_1) &= e_1 \dots \\
 k_{n,j}(e_j) &= (e_j, 0) & \iota_{n,j}(e_{j-1}) &= e_{j-1} \\
 k_{n,j}(e_{j+1}) &= (e_j, 1) \dots & \iota_{n,j}(e_j) &= e_{j+1} \dots \\
 k_{n,j}(e_{n+1}) &= (e_n, 1) & \iota_{n,j}(e_{n-1}) &= e_n
 \end{aligned}$$

$e_1, \dots, e_n$  sind wieder die Einheitsvektoren von  $\mathbb{R}^n$

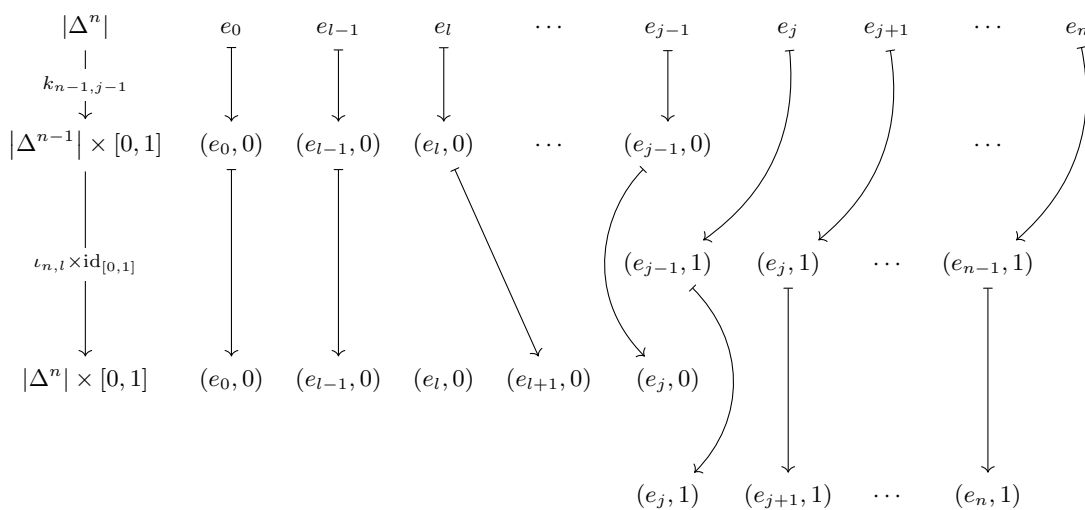
**7.11 Lemma** Es gelten folgende fünf Gleichungen für die Abbildungen  $k_{n,j}$  und  $\iota_{n,j}$ :

- (i) Für  $0 \leq l < j \leq n$  gilt  $k_{n,j} \circ \iota_{n+1,l} = (\iota_{n,l} \times \text{id}_{[0,1]}) \circ k_{n-1,j-1}$
- (ii) Für  $1 \leq j+1 < l \leq n+1$  gilt  $k_{n,j} \circ \iota_{n+1,l} = (\iota_{n,l-1} \times \text{id}_{[0,1]}) \circ k_{n-1,j}$
- (iii) Für  $1 \leq j+1 = l \leq n$  gilt  $k_{n,j} \circ \iota_{n+1,l} = k_{n,j+1} \circ \iota_{n+1,l}$
- (iv) Für  $l = 0, j = 0$  ist  $k_{n,j} \circ \iota_{n+1,l} = i_1: \Delta^n \rightarrow \Delta^n \times [0, 1]$
- (v) Für  $l = n, j = n+1$  ist  $k_{n,j} \circ \iota_{n+1,l} = i_0: \Delta^n \rightarrow \Delta^n \times [0, 1]$

**BEWEIS:** Wir zeigen hier nur exemplarisch die erste Gleichung: Die linke Seite der Gleichung entspricht



und die rechte Seite entspricht



Also folgt insgesamt die Gleichheit. Die anderen Gleichungen folgen genauso.  $\square$

**7.12 Beweis von [##]** Sei  $h_n: C_n(X; R) \rightarrow C_{n+1}(X \times [0, 1]; R)$  definiert durch

$$h_n(\sigma) := \sum_{j=0}^n (-1)^j \cdot (\sigma \times \text{id}) \circ k_{n,j}$$



$h_*$  ist die gesuchte Kettenhomotopie, da für  $n \in \mathbb{N}$  unter Anwendung der Gleichungen aus 7.12 gilt:

$$\begin{aligned}
 \partial_{n+1}(h_n(\sigma)) &= \partial_{n+1} \left( \sum_{j=0}^n (-1)^j \cdot (\sigma \times \text{id}) \circ k_{n,j} \right) \\
 &= \sum_{l=0}^{n+1} \sum_{j=0}^n (-1)^{j+l} \cdot (\sigma \times \text{id}) \circ k_{n,j} \circ \iota_{n+1,l} && \text{(nach Definition 5.2)} \\
 &= \sum_{0 \leq l < j \leq n} (-1)^{j+l} ((\sigma \circ \iota_{n,l}) \times \text{id}) \circ k_{n-1,j-1} + \sum_{1 \leq j+1 < l \leq n+1} (-1)^{j+l} ((\sigma \circ \iota_{n,l-1}) \times \text{id}) \circ k_{n-1,j} \\
 &\quad + \sum_{1 \leq j+1=l \leq n} (-1)^{j+l} (\sigma \times \text{id}) \circ k_{n,j+1} \circ \iota_{n+1,l} + \sum_{1 \leq j=l \leq n} (-1)^{j+l} (\sigma \times \text{id}) \circ k_{n,j} \circ \iota_{n+1,l} \\
 &\quad + \sum_{0=l=j} (-1)^{j+l} (\sigma \times \text{id}) \circ i_1 + \sum_{n+1=j+1=l} (-1)^{j+l} (\sigma \times \text{id}) \circ i_0 \\
 &= \sum_{0 \leq l \leq j \leq n-1} (-1)^{j+l+1} ((\sigma \circ \iota_{n,l}) \times \text{id}) \circ k_{n-1,j} + \sum_{1 \leq j+1 \leq l \leq n} (-1)^{j+l+1} ((\sigma \circ \iota_{n,l}) \times \text{id}) \circ k_{n-1,j} \\
 &\quad + \underbrace{\sum_{1 \leq j=l \leq n} (-1)^{j+l-1} (\sigma \times \text{id}) \circ k_{n,j} \circ \iota_{n+1,l} + \sum_{1 \leq j=l \leq n} (-1)^{j+l} (\sigma \times \text{id}) \circ k_{n,j} \circ \iota_{n+1,l}}_{=0} \\
 &\quad + \sum_{0=l=j} (-1)^{j+l} (\sigma \times \text{id}) \circ i_1 + \sum_{n+1=j+1=l} (-1)^{j+l} (\sigma \times \text{id}) \circ i_0 \\
 &= - \sum_{\substack{0 \leq l \leq n \\ 0 \leq j \leq n-1}} (-1)^{j+l} ((\sigma \circ \iota_{n,l}) \times \text{id}) \circ k_{n-1,j} + (\sigma \times \text{id}) \circ i_1 - (\sigma \times \text{id}) \circ i_0 \\
 &= - \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \sum_{l=0}^n (-1)^l ((\sigma \circ \iota_{n,l}) \times \text{id}) \circ k_{n-1,j} + \underbrace{(\sigma \times \text{id}) \circ i_1}_{=i_1 \circ \sigma} - \underbrace{(\sigma \times \text{id}) \circ i_0}_{=i_0 \circ \sigma} \\
 &= -h_{n-1}(\partial_n \sigma) + C_n(i_1; R)(\sigma) - C_n(i_0; R)(\sigma) \quad \square
 \end{aligned}$$

**7.13 Bemerkung** Ist  $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$  eine Homotopie zwischen  $f$  und  $g$ , so erhalten wir eine Kettenhomotopie  $k$  zwischen  $C_*(f; R)$  und  $C_*(g; R)$  durch

$$k_n(\sigma) := C_{n+1}(H; R) \circ h_n = \sum_{j=0}^n (-1)^j H \circ (\sigma \times \text{id}) \circ k_{n,j}$$

## 8 Homologie von Paaren

**8.1 Definition** Sei  $A$  ein Teilraum von  $X$ , dann heißt  $(X, A)$  ein **Paar von topologischen Räumen**. Eine Abbildung von Paaren  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  ist eine stetige Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  mit  $f(A) \subseteq B$ . Manchmal schreiben wir  $(f, f|_A): (X, A) \rightarrow (Y, B)$ .

Die Kategorie von Paaren von topologischen Räumen bezeichnen wir mit  $\text{TOP}^2$ .

**8.2 Definition** Sei  $(X, A)$  ein Paar. Dann definieren wir den **singulären Kettenkomplex** von  $(X, A)$  über  $R$  durch

$$C_n(X, A; R) := C_n(X; R) / C_n(A; R)$$

$$\partial_n(\sigma + C_n(A; R)) := \partial_n \sigma + C_{n-1}(A; R)$$

Dies ist wohldefiniert, da  $\partial_n(C_n(A; R)) \subseteq C_{n-1}(A; R)$ . Weiter heißt

$$H_n(X, A; R) := H_n(C_*(X, A; R), \partial_*)$$

der  **$n$ -te singuläre Homologiemodul** von  $(X, A)$  mit Koeffizienten in  $R$ .

**8.3 Bemerkung** Der singuläre Kettenkomplex von Paaren definiert einen Funktor  $\text{TOP}^2 \rightarrow R\text{-KETTEN}$ . Durch Komposition mit Homologie (als Funktor  $R\text{-KETTEN} \rightarrow R\text{-MOD}$ ) erhalten wir einen Funktor

$$H_n(-, -; R): \text{TOP}^2 \rightarrow R\text{-MOD}$$

**8.4 Bemerkung** Via  $X \mapsto (X, \emptyset)$  können wir jeden Raum auch als Paar auffassen. Es gilt dann offensichtlich  $H_n(X, \emptyset; R) = H_n(X; R)$ .

**8.5 Frage** Können wir  $H_n(X, A; R)$  durch  $H_n(X; R)$  und  $H_n(A; R)$  ausdrücken?

**Ansatz 1:**

$$H_n(X, A; R) \cong H_n(X; R) / H_n(A; R)$$

▲ Problem:  $H_n(A; R)$  ist kein Untermodul von  $H_n(X; R)$ .

**Ansatz 2:** Ist  $H_n(X; R) \rightarrow H_n(X, A; R)$  surjektiv?

Sei  $x \in H_n(X, A; R)$ . Dann gibt es  $\sigma + C_n(A; R) \in C_n(X, A; R)$  mit  $\partial_n(\sigma + C_n(A; R)) = 0$  und  $x = [\sigma]$ . Es ist  $\sigma \in C_n(X; R)$ , aber wir wissen nur  $\partial_n \sigma \in C_{n-1}(A; R)$ , nicht  $\partial_n(\sigma) = 0$ . 😊

**8.6 Beispiel** In  $C_n(|\Delta^n|, |\partial\Delta^n|; R)$  gilt für  $\sigma := \text{id}: |\Delta^n| \rightarrow |\Delta^n|$ , dass  $\partial_n([\sigma]) = 0$  ist, da  $\partial_n \sigma \in C_{n-1}(|\partial\Delta^n|; R)$ . Wir werden später sehen, dass  $[\sigma]$  den Homologiemodul

$$H_n(|\Delta^n|, |\partial\Delta^n|; R) \cong R$$

erzeugt.

**8.7 Definition** Eine Folge von  $R$ -linearen Abbildungen zwischen  $R$ -Moduln  $M_i$

$$\cdots \longrightarrow M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_{n-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_0$$

heißt **lange exakte Folge**, wenn sie exakt an jeder Stelle  $M_i$  ist, d.h. für alle  $i$  gilt  $\text{Im } f_i = \ker f_{i-1}$ .

**8.8 Satz** Es gibt eine natürliche Transformation  $\partial_n$  von  $(X, A) \mapsto H_n(X, A; R)$  nach  $(X, A) \mapsto H_{n-1}(A; R)$ , sodass für jedes Paar  $(X, A)$

$$\begin{aligned} \dots &\xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(A; R) \xrightarrow{i_*} H_n(X; R) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A; R) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A; R) \longrightarrow \dots \\ \dots &\xrightarrow{\partial_1} H_0(A; R) \longrightarrow H_0(X; R) \longrightarrow H_0(X, A; R) \longrightarrow 0 \end{aligned} \quad [*]$$

eine lange exakte Folge ist. Dabei sind  $i: A \hookrightarrow X$  und  $j: (X, \emptyset) \hookrightarrow (X, A)$  die Inklusionen. Das bedeutet:

Für jedes Paar  $(X, A)$  haben wir eine  $R$ -lineare Abbildung  $\partial_n: H_n(X, A; R) \rightarrow H_{n-1}(A; R)$ , sodass für jede Abbildung  $(f, f|_A): (X, A) \rightarrow (Y, B)$  von Paaren folgendes Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} H_n(X, A; R) & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(A; R) \\ \downarrow (f, f|_A)_* & & \downarrow (f|_A)_* \\ H_n(Y, B; R) & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(B; R) \end{array}$$

**BEWEIS:** siehe 8.13.

### 8.9 Korollar

- (1) Ist die Inklusion  $i: A \rightarrow X$  eine Homotopieäquivalenz, so ist  $H_n(X, A; R) = 0$  für alle  $n$ .
- (2) Sei  $A$  kontraktibel. Dann gilt für alle  $n \geq 1$ .  $H_n(X; R) \cong H_n(X, A; R)$

**BEWEIS:**

- (1) Betrachte den folgenden Ausschnitt aus der langen exakten Folge:

$$H_n(A; R) \xrightarrow{i_*} H_n(X; R) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A; R) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A; R) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(X; R)$$

Nach 7.4 ist  $i_*: H_n(A; R) \rightarrow H_n(X; R)$  ein Isomorphismus. Wegen der Exaktheit gilt  $\ker j_* = \text{Im } i_* = H_n(X; R)$ , also folgt  $j_* = 0$ . Da  $\text{Im } \partial_n = \ker i_* = 0$ , folgt  $\partial_n = 0$ . Nun ist

$$H_n(X, A; R) = \ker \partial_n = \text{Im } j_* = 0$$

- (2) Folgt leicht aus 7.5 und der Exaktheit der Paarsequenz  $[*]$ . Für  $n = 1$  brauchen wir außerdem, dass  $\partial_1$  für  $A$  wegzusammenhängend trivial ist. Dies folgt aus Aufgabe 1a) von Blatt 6, denn dort wurde gezeigt, dass  $i_*: H_0(A) \rightarrow H_0(X)$  injektiv ist.  $\square$

**8.10 Definition** Seien

$$(C_*, d_*) \xrightarrow{i_*} (C'_*, d'_*) \xrightarrow{p_*} (C''_*, d''_*) \quad [\#]$$

$R$ -Kettenabbildungen. Ist für jedes  $n$  die Folge  $C_n \xrightarrow{i_n} C'_n \xrightarrow{p_n} C''_n$  kurz exakt, so heißt  $[\#]$  eine **kurze exakte Folge von Kettenkomplexen**.

**8.11 Beispiel** Für jedes Paar  $(X, A)$  ist

$$(C_*(A; R), \partial_*) \xrightarrow{i_*} (C_*(X; R), \partial_*) \xrightarrow{j_*} (C_*(X, A; R), \partial_*)$$

eine kurze exakte Folge von  $R$ -Kettenkomplexen.

## 8.12 Schlangenlemma Sei

$$(C_*, d_*) \xrightarrow{i_*} (C'_*, d'_*) \xrightarrow{p_*} (C''_*, d''_*)$$

eine kurze exakte Folge von  $R$ -Kettenkomplexen.

- a) Für jedes  $n$  gibt es eine eindeutige wohldefinierte  $R$ -lineare Abbildung  $\partial_n: H_n(C''_*, d''_*) \rightarrow H_{n-1}(C_*, d_*)$  mit: Für  $v' \in C'_n$  mit  $d''_n \circ p_n(v') = 0$  ist

$$\partial_n \left( \underbrace{[p_n(v')]}_{\in H_n(C''_*, d''_*)} \right) = [v] \in H_{n-1}(C_*, d_*)$$

wobei  $v \in C_{n-1}$  bestimmt ist durch  $i_{n-1}(v) = d'_n(v')$ .

b)

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & H_n(C_*, d_*) & \xrightarrow{i_*} & H_n(C'_*, d'_*) & \xrightarrow{p_*} & H_n(C''_*, d''_*) \\ & & & & & & \downarrow \partial_n \\ & & \xrightarrow{\quad} & \xrightarrow{i_*} & \xrightarrow{p_*} & \cdots & \\ & & & & & & \downarrow \partial_1 \\ & & \xrightarrow{\quad} & \xrightarrow{i_*} & \xrightarrow{p_*} & \xrightarrow{\quad} & 0 \end{array}$$

ist eine lange exakte Folge.

BEWEIS:

$$\begin{array}{ccccc} C_{n+1} & \xrightarrow{i_{n+1}} & C'_{n+1} & \xrightarrow{p_{n+1}} & C''_{n+1} \\ \downarrow d_{n+1} & & \downarrow d'_{n+1} & & \downarrow d''_{n+1} \\ C_n & \xrightarrow{i_n} & C'_n & \xrightarrow{p_n} & C''_n \\ \downarrow d_n & & \downarrow d'_n & & \downarrow d''_n \\ C_{n-1} & \xrightarrow{i_{n-1}} & C'_{n-1} & \xrightarrow{p_{n-1}} & C''_{n-1} \\ \downarrow d_{n-1} & & \downarrow d'_{n-1} & & \downarrow d''_{n-1} \\ C_{n-2} & \xrightarrow{i_{n-2}} & C'_{n-2} & \xrightarrow{p_{n-2}} & C''_{n-2} \end{array}$$

- a) Sei  $x'' \in H_n(C''_*, d''_*)$ , also  $x'' = [v'']$  mit  $v'' \in \ker d''_n$ . Da  $p_n$  surjektiv ist, existiert  $v' \in C'_n$  mit  $p_n(v') = v''$ . Es gilt

$$p_{n-1} \circ d'_n(v') = d''_n \circ p_n(v') = d''_n(v'') = 0$$

Also ist  $d'_n(v') \in \ker p_{n-1}$ . Weiter gilt  $\ker p_{n-1} = \text{Im } i_{n-1}$ , also existiert ein  $v \in C_{n-1}$  mit  $i_{n-1}(v) = d'_n(v')$ . Dann gilt

$$i_{n-2}(d_{n-1}(v)) = d'_{n-1}(i_{n-1}(v)) = d'_{n-1}(d'_n(v')) = 0$$

Da  $i_{n-2}$  injektiv ist, folgt somit  $d_{n-1}(v) = 0$ . Also setzen wir  $\partial_n(x'') := [v] \in H_{n-1}(C_*, d_*)$ .

Es bleibt zu zeigen, dass  $[v] \in H_{n-1}(C_*, d_*)$  unabhängig von der Wahl von  $v''$  und  $v'$  ist. Seien  $w'' \in \ker d''_n$ ,  $w' \in C'_n$  und  $w \in C_{n-1}$  mit  $x'' = [w'']$ ,  $p_n(w') = w''$  und  $i_{n-1}(w) = d'_n(w')$ . Es

ist  $[v''] = [w'']$ , also existiert ein  $a'' \in C''_{n+1}$  mit  $d''_{n+1}(a'') = v'' - w''$ .  $p_{n+1}$  ist surjektiv, also existiert  $a' \in C'_{n+1}$  mit  $p_{n+1}(a') = a''$ . Es gilt

$$p_n(v' - w' - d'_{n+1}(a')) = v'' - w'' - \underbrace{d''_{n+1}(p_{n+1}(a'))}_{=v''-w''} = 0$$

Mit  $\ker p_n = \text{Im } i_n$  folgt die Existenz von  $a \in C_n$  mit  $i_n(a) = v' - w' - d_{n+1}(a')$ . Es gilt nun

$$\begin{aligned} i_{n-1}(d_n(a) - (v - w)) &= i_{n-1}(d_n(a)) - i_{n-1}(v - w) \\ &= d'_n(i_n(a)) - (d'_n(v') - d'_n(w')) \\ &= d'_n(-d'_{n+1}(a') + v' - w') - d'_n(v' - w') \\ &= -d'_n d'_{n+1}(a') + d'_n(v' - w') - d'_n(v' - w') = 0 \end{aligned}$$

Da  $i_{n-1}$  injektiv ist, folgt  $d_n(a) - (v - w) = 0$ , also  $d_n(a) = (v - w)$ . Es folgt  $[v] = [w]$ .

**b) Exaktheit der langen Folge:**

$\boxed{\text{Im}(i_n)_* = \ker(p_n)_*}$  : „ $\subseteq$ “ folgt aus  $(p_n)_* \circ (i_n)_* = (p_n \circ i_n)_* = (0)_* = 0$ .

Für „ $\supseteq$ “ betrachte  $x' \in \ker(p_n)_*$ , wobei  $x' = [v']$  mit  $v' \in C'_n$  und  $d'_n(v') = 0$ . Da nun  $[p_n(v')] = (p_n)_*[x'] = 0$  ist, gibt es  $a'' \in C''_{n+1}$  mit  $d''_{n+1}(a'') = p_n(v')$ . Da  $p_{n+1}$  surjektiv ist, existiert  $a' \in C'_{n+1}$  mit  $p_{n+1}(a') = a''$ . Dann gilt

$$p_n(v' - d'_{n+1}(a')) = p_n(v') - p_n \circ d'_{n+1}(a') = p_n(v') - \underbrace{d''_{n+1}(p_{n+1}(a'))}_{=a''}_{=p_n(v')} = 0$$

Da  $\ker p_n = \text{Im } i_n$ , gibt es  $a \in C_n$  mit  $i_n(a) = v' - d'_{n+1}(a')$ . Nun ist

$$i_{n-1}(d_n(a)) = d'_n(i_n(a)) = d'_n(v' - d'_{n+1}(a')) = d'_n(v') = 0$$

Da  $i_{n-1}$  injektiv ist, folgt  $d_n(a) = 0$ . Insbesondere  $[a] \in H_n(C_*, d_*)$ . Nun ist

$$(i_n)_*[a] = [i_n(a)] = [v' - d'_{n+1}(a')] = [v'] = x'$$

Also ist  $x' \in \text{Im}(i_n)_*$ .

$\boxed{\text{Im } \partial_n = \ker \partial_n}$  : Für „ $\subseteq$ “ betrachte  $x'' \in \text{Im } \partial_n$ . Dann gibt es  $v' \in C'_n$  mit  $d'_n(v') = 0$  und  $x'' = [p_n(v')]$ . Es ist  $d'_n(v') \in \ker p_{n-1} = \text{Im } i_{n-1}$ , also existiert ein  $v \in C_{n-1}$  mit  $i_{n-1}(v) = d'_n(v')$ . Es gilt nun  $\partial_n(x'') = [v]$ . Wegen der Injektivität von  $i_{n-1}$  ist  $v = 0$ , also  $\partial_n(x'') = [0]$ .

Sei nun umgekehrt  $x'' \in \ker \partial_n$ . Wir finden wieder  $v' \in C'_n$  und  $v \in C_{n-1}$  mit  $x'' = [p_n(v')]$ ,  $i_{n-1}(v) = d'_n(v')$  und  $0 = \partial_n(x'') = [v]$ . Daher gibt es  $a \in C_n$  mit  $d_n(a) = v$ . Es folgt

$$d'_n(v' - i_n(a)) = i_{n-1}(v) - i_{n-1}(d_n(a)) = 0$$

Es gilt nun  $(p_n)_*[v' - i_n(a)] = [p_n(v') - p_n(i_n(a))] = [p_n(v')] = x''$ .

$\boxed{\text{Im } \partial_n = \ker(i_{n-1})_*}$  : Für „ $\subseteq$ “ sei  $x \in \text{Im } \partial_n$ . Dann gibt es wieder  $v' \in C'_n$  und  $v \in C_{n-1}$  mit  $d''_n(p_n(v')) = 0$ ,  $d'_n(v') = i_{n-1}(v)$  und  $x = [v]$ . Dann gilt

$$(i_{n-1})_*(x) = (i_{n-1})_*[v] = [i_{n-1}(v)] = [d'_n(v')] = 0$$

Sei nun umgekehrt  $x \in \ker(i_{n-1})_*$  und  $v \in C_{n-1}$  mit  $d_{n-1}(v) = 0$  und  $x = [v]$ . Da nun  $(i_{n-1})_*(x) = [i_{n-1}(v)]$  und  $x \in \ker(i_{n-1})_*$  ist, gibt es  $v' \in C'_n$  mit  $d'_n(v') = i_{n-1}(v)$ . Es gilt nun

$$d''_n(p_n(v')) = p_{n-1}(d'_n(v')) = p_{n-1}(i_{n-1}(v)) = 0$$

Daraus folgt  $\partial_n[p_n(v')] = x$ . □

### 8.13 Beweis von Satz 8.8

Für jedes Paar  $(X, A)$  ist die Folge der singulären Kettenkomplexe

$$(C_*(A; R), \partial_*^A) \xrightarrow{C_*(i; R)} (C_*(X; R), \partial_*^X) \xrightarrow{C_*(j; R)} (C_*(X, A; R), \partial_*^{(X, A)})$$

kurz exakt. Das Schlangenlemma 8.12 produziert  $\partial_n: H_n(X, A; R) \rightarrow H_{n-1}(A; R)$  und die lange exakte Sequenz  $[\ast]$ . Es bleibt zu zeigen, dass die Randabbildungen aus dem Schlangenlemma wie behauptet eine natürliche Transformation definieren: Sei  $(f, f|_A): (X, A) \rightarrow (Y, B)$  eine Abbildung von Paaren. Zu zeigen ist, dass

$$\begin{array}{ccc} H_n(X, A; R) & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(A; R) \\ \downarrow (f, f|_A)_* & & \downarrow (f|_A)_* \\ H_n(Y, B; R) & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(B; R) \end{array}$$

kommutiert. Sei  $x'' \in H_n(X, A; R)$ . Sei  $v' \in C_n(X; R)$  mit  $\partial_n^X(v') \in C_n(A; R)$  und  $[v' + C_n(A; R)] = x''$ . Dann ist  $\partial_n(x'') = [\partial_n^X(v')] \in H_{n-1}(A; R)$ . Dann ist

$$(f, f|_A)_*(x'') = (f, f|_A)_*[v' + C_n(A; R)] = [f_*(v') + C_n(B; R)] \in H_n(Y, B; R)$$

Es ist  $\partial_n^Y(f_*(v')) = (f|_A)_*\left(\underbrace{\partial_n^X(v')}_{\in C_n(A; R)}\right) \in C_n(B; R)$ . Also

$$\partial_n^Y((f, f|_A)_*(x'')) = [\partial_n^Y(f_*(v'))] = [f_* \circ \partial_n^X(v')] = f_* \circ \partial_n(x'') \quad \square$$

### 8.14 Bemerkung

Für eine Abbildung  $(f, f|_A): (X, A) \rightarrow (Y, B)$  erhalten wir ein kommutierendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & H_n(A; R) & \xrightarrow{i_*^A} & H_n(X; R) & \xrightarrow{j_*^X} & H_n(X, A; R) & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(A; R) & \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow (f|_A)_* & & \downarrow f_* & & \downarrow (f, f|_A)_* & & \downarrow (f|_A)_* & \\ \cdots & \longrightarrow & H_n(B; R) & \xrightarrow{i_*^B} & H_n(Y; R) & \xrightarrow{j_*^Y} & H_n(Y, B; R) & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(B; R) & \longrightarrow \cdots \end{array}$$

### 8.15 Fünfer-Lemma

Seien die Zeilen in folgendem kommutativen Diagramm von  $R$ -Moduln exakt.

$$\begin{array}{ccccccccc} A_4 & \xrightarrow{\alpha_4} & A_3 & \xrightarrow{\alpha_3} & A_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & A_0 \\ f_4 \downarrow \cong & & f_3 \downarrow \cong & & f_2 \downarrow & & f_1 \downarrow \cong & & f_0 \downarrow \cong \\ B_4 & \xrightarrow{\beta_4} & B_3 & \xrightarrow{\beta_3} & B_2 & \xrightarrow{\beta_2} & B_1 & \xrightarrow{\beta_1} & B_0 \end{array}$$

Sind  $f_4, f_3, f_1$  und  $f_0$  Isomorphismen, so ist auch  $f_2$  ein Isomorphismus.

#### BEWEIS:

**Injektivität:** Sei  $a_2 \in A_2$  mit  $f_2(a_2) = 0$ . Wir erhalten

$$f_1(\alpha_2(a_2)) = \beta_2(f_2(a_2)) = \beta_2(0) = 0.$$

Da  $f_1$  ein Isomorphismus ist, folgt  $\alpha_2(a_2) = 0$ . Damit ist  $a_2 \in \ker \alpha_2 = \operatorname{Im} \alpha_3$ , also existiert  $a_3 \in A_3$  mit  $\alpha_3(a_3) = a_2$ . Es gilt

$$\beta_3(f_3(a_3)) = f_2(\alpha_3(a_3)) = f_2(a_2) = 0$$

Also ist  $f_3(a_3) \in \ker \beta_3 = \operatorname{Im} \beta_4$ . Da  $f_4$  Isomorphismus ist, gibt es  $a_4 \in A_4$  mit  $\beta_4(f_4(a_4)) = f_3(a_3)$ . Nun gilt

$$f_3(\alpha_4(a_4) - a_3) = f_3(\alpha_4(a_4)) - f_3(a_3) = \beta_4(f_4(a_4)) - f_3(a_3) = f_3(a_3) - f_3(a_3) = 0$$

Da  $f_3$  ein Isomorphismus ist, folgt nun  $\alpha_4(a_4) = a_3$ . Nun ist

$$a_2 = \alpha_3(\alpha_3) = \alpha_3(\alpha_4(a_4)) = \underbrace{\alpha_3 \circ \alpha_4}_{=0}(a_4) = 0$$

**Surjektivität:** Sei  $b_2 \in B_2$ . Fall 1:  $\beta_2(b_2) = 0$ . Da  $\operatorname{Im} \beta_3 = \ker \beta_2$  und  $f_3$  Isomorphismus, existiert  $a_3 \in A_3$  mit  $\beta_3(f_3(a_3)) = b_2$ . Also ist  $b_2 = \beta_3(f_3(a_3)) = f_2(\alpha_3(a_3)) \in \operatorname{Im} f_2$ .

Ist  $b_2$  beliebig, so genügt es zu zeigen: Es existiert ein  $a_2 \in A_2$  mit  $\beta_2(b_2 - f_2(a_2)) = 0$ .  $f_1$  ist ein Isomorphismus, also existiert ein  $a_1 \in A_1$  mit  $f_1(a_1) = \beta_2(b_2)$ . Dann folgt

$$f_0(\alpha_1(a_1)) = \beta_1(f_1(a_1)) = \beta_1(\beta_2(b_2)) = \underbrace{\beta_1 \circ \beta_2}_{=0}(b_2) = 0$$

Da  $f_0$  ein Isomorphismus ist, folgt  $\alpha_1(a_1) = 0$ . Da  $\ker \alpha_1 = \operatorname{Im} \alpha_2$ , folgt  $\alpha_2(a_2) = a_1$ . Es gilt nun

$$\begin{aligned} \beta_2(b_2 - f_2(a_2)) &= \beta_2(b_2) - \beta_2(f_2(a_2)) = \beta_2(b_2) - f_1(\alpha_2(a_2)) \\ &= \beta_2(b_2) - f_1(a_1) = \beta_2(b_2) - \beta_2(b_2) = 0 \quad \square \end{aligned}$$

**8.16 Lemma („2 von 3“)** Sei  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  eine Abbildung von Paaren. Seien von den drei Abbildungen

- (i)  $(f|_A)_*: H_n(A; R) \rightarrow H_n(B; R)$
- (ii)  $f_*: H_n(X; R) \rightarrow H_n(Y; R)$
- (iii)  $(f, f|_A)_*: H_n(X, A; R) \rightarrow H_n(Y, B; R)$

zwei für jeweils alle  $n$  Isomorphismen. Dann ist auch die dritte für alle  $n$  ein Isomorphismus.

**BEWEIS:** Da die Randabbildung in der Paarfolge eine natürliche Transformation ist, erhalten wir ein kommutatives Leiterdiagramm:

$$\begin{array}{ccccccccccc} H_{n+1}(A) & \longrightarrow & H_{n+1}(X) & \longrightarrow & H_{n+1}(X, A) & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & H_n(A) & \longrightarrow & H_n(X) & \longrightarrow & H_n(X, A) & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(A) \\ \downarrow (f|_A)_* & & \downarrow f_* & & \downarrow (f, f|_A)_* & & \downarrow (f|_A)_* & & \downarrow f_* & & \downarrow (f, f|_A)_* & & \downarrow (f|_A)_* \\ H_{n+1}(B) & \longrightarrow & H_{n+1}(Y) & \longrightarrow & H_{n+1}(Y, B) & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & H_n(B) & \longrightarrow & H_n(Y) & \longrightarrow & H_n(Y, B) & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(B) \end{array}$$

„R“ aus Platzgründen weggelassen

Da die Zeilen lang exakt sind, folgt die Behauptung aus dem Fünfer-Lemma. □

## 9 Ausschneidung und die Mayer-Vietoris Folge

**9.1 Satz** Sei  $(X, A)$  ein Paar und  $L \subseteq A$ , sodass der Abschluss  $\bar{L}$  von im Inneren  $\overset{\circ}{A}$  von  $A$  liegt. Dann induziert die Inklusion  $(X \setminus L, A \setminus L) \xrightarrow{j} (X, A)$  einen Isomorphismus  $j_*: H_n(X \setminus L, A \setminus L; R) \rightarrow H_n(X, A; R)$ .

**BEWEIS:** Siehe Kapitel 13.

**9.2 Satz (Mayer-Vietoris-Folge)** Seien  $A, B \subseteq X$  offen und  $X = A \cup B$ . Seien  $i_A: A \hookrightarrow X$ ,  $i_B: B \hookrightarrow X$ ,  $j_A: A \cap B \hookrightarrow A$  und  $j_B: A \cap B \hookrightarrow B$  die Inklusionen. Dann gibt es eine Randabbildung  $\partial_n = \partial_n^{X=A \cup B}: H_n(X; R) \rightarrow H_{n-1}(A \cap B; R)$ , sodass

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(A \cap B) \xrightarrow{\begin{pmatrix} (j_A)_* \\ (j_B)_* \end{pmatrix}} \bigoplus_{H_n(B)} H_n(A) \xrightarrow{(i_A)_* - (i_B)_*} H_n(X) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A \cap B) \longrightarrow \cdots$$

eine lange exakte Folge ist. Die Randabbildung ist dabei eine natürlicher Transformation: Seien  $A', B' \subseteq X'$  offen mit  $X' = A' \cup B'$  und sei  $f: X \rightarrow X'$  mit  $f(A) \subseteq A'$  und  $f(B) \subseteq B'$ . Dann kommutiert

$$\begin{array}{ccc} H_n(X; R) & \xrightarrow{\partial_n^{X=A \cup B}} & H_{n-1}(A \cap B; R) \\ \downarrow f_* & & \downarrow (f|_{A \cap B})_* \\ H_n(X'; R) & \xrightarrow{\partial_n^{X'=A' \cup B'}} & H_{n-1}(A' \cap B'; R) \end{array}$$

**BEWEIS:** Sei  $L := X \setminus B$ . Dann ist  $L$  abgeschlossen und  $L \subseteq A = \overset{\circ}{A}$ . Wir erhalten daher einen Ausschneideisomorphismus

$$H_n(B, A \cap B; R) = H_n(X \setminus L, A \setminus L; R) \xrightarrow{\cong} H_n(X, A; R)$$

Betrachte nun das folgende kommutative Leiterdiagramm, das zwei Paarfolgen vergleicht:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_{n+1}(B, A \cap B) & \xrightarrow{\partial_{n+1}^{B, A \cap B}} & H_n(A \cap B) & \xrightarrow{(j_B)_*} & H_n(B) & \xrightarrow{(l_B)_*} & H_n(B, A \cap B) & \xrightarrow{\partial_n^{B, A \cap B}} & H_{n-1}(A \cap B) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \cong \downarrow (i_B, j_A)_* & & \downarrow (j_A)_* & & \downarrow (i_B)_* & & \cong \downarrow (i_B, j_A)_* & & \downarrow (j_A)_* & & \\ \cdots & \longrightarrow & H_{n+1}(X, A) & \xrightarrow{\partial_{n+1}^{X, A}} & H_n(A) & \xrightarrow{(i_A)_*} & H_n(X) & \xrightarrow{(l_X)_*} & H_n(X, A) & \xrightarrow{\partial_n^{X, A}} & H_{n-1}(A) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

dabei sind  $l_B: (B, \emptyset) \rightarrow (B, A \cap B)$  und  $l_X: (X, \emptyset) \rightarrow (X, A)$  die Inklusionen von Paaren. Definiere nun  $\partial_n: H_n(X; R) \rightarrow H_{n-1}(A \cap B; R)$  durch

$$\partial_n := \partial_n^{B, A \cap B} \circ (i_B, j_A)_*^{-1} \circ (l_X)_*$$

Die Natürlichkeit von  $\partial_n^{B, A \cap B}$  impliziert die Natürlichkeit von  $\partial_n$  (siehe auch 8.8). Wir müssen noch die Exaktheit zeigen:

- Zu zeigen:  $\text{Im} \begin{pmatrix} (j_A)_* \\ (j_B)_* \end{pmatrix} = \ker((i_A)_* - (i_B)_*)$ :



" $\supseteq$ ": Sei  $(a, b) \in \ker((i_A)_* - (i_B)_*)$ . Also  $(i_A)_*(a) = (i_B)_*(b)$ . Es ist

$$(i_B, j_A)_*((l_B)_*(b)) = (l_X)_* \circ (i_B)_*(b) = \underbrace{(l_X)_* \circ (i_A)_*}_{=0}(a) = 0$$

$(i_B, j_A)_*$  ist ein Isomorphismus, also  $(l_B)_*(b) = 0$ . Es gilt  $\ker(l_B)_* = \text{Im}(j_B)_*$ , also folgt  $\exists x \in H_n(A \cap B; R) : (j_B)_*(x) = b$ . Dann gilt

$$(i_A)_*(a - (j_A)_*(x)) = (i_A)_*(a) - (i_B)_*((j_B)_*(x)) = (i_A)_*(a) - (i_B)_*(b) = 0$$

Mit  $\ker(i_A)_* = \text{Im } \partial_{n+1}^{X,A}$  und  $(i_B, j_A)_*$  ist Isomorphismus, folgt  $\exists y \in H_{n+1}(B, A \cap B; R)$  mit

$$\partial_{n+1}^{X,A} \circ (i_B, j_A)_*(y) = a - (j_A)_*(x)$$

Es folgt für  $z := x + \partial_{n+1}^{B, A \cap B}(y)$  nun  $(j_B)_*(z) = (j_B)_*(x) = b$  und

$$\begin{aligned} (j_A)_*(z) &= (j_A)_*(x) + (j_A)_*(\partial_{n+1}^{B, A \cap B}(y)) = (j_A)_*(x) + \partial_{n+1}^{X,A} \circ (i_B, j_A)_*(y) \\ &= (j_A)_*(x) + a - (j_A)_*(x) = a \end{aligned}$$

" $\subseteq$ ": Sei  $x \in H_n(A \cap B; R)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} ((i_A)_* - (i_B)_*) \left( \begin{pmatrix} (j_A)_* \\ (j_B)_* \end{pmatrix} (x) \right) &= (i_A)_* \circ (j_A)_*(x) - (i_B)_* \circ (j_B)_*(x) \\ &= (i_A)_* \circ (j_A)_*(x) - (i_A)_* \circ (j_A)_*(x) = 0 \end{aligned}$$

da  $i_A \circ j_A = i_B \circ j_B$ .

- Wir zeigen nun  $\text{Im}((i_A)_* - (i_B)_*) = \ker \partial_n$ :

" $\supseteq$ ": Sei  $v \in \ker \partial_n$ , also  $\partial_n^{B, A \cap B} \circ (i_B, j_A)_*^{-1} \circ (l_X)_*(v) = 0$ . Da  $\ker \partial_n^{B, A \cap B} = \text{Im}(l_B)_*$ , gibt es ein  $b \in H_n(B; R)$  mit

$$(l_B)_*(b) = (i_B, j_A)_*^{-1} \circ (l_X)_*(v) \iff (i_B, j_A)_* \circ (l_B)_*(b) = (l_X)_*(v)$$

Nun ist

$$(l_X)_*(v - (i_B)_*(b)) = (l_X)_*(v) - (l_X)_* \circ (i_B)_*(b) = (l_X)_*(v) - (i_B, j_A)_* \circ (l_B)_*(b) = 0$$

Da  $\ker(l_X)_* = \text{Im}(i_A)_*$  ist, gibt es ein  $a \in H_n(A; R)$  mit  $(i_A)_*(a) = v - (i_B)_*(b)$  und somit ist  $((i_A)_* - (i_B)_*)(a, -b) = v$ .

" $\subseteq$ ": Sei  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \bigoplus_{H_n(B)}^{H_n(A)}$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \partial_n((i_A)_* - (i_B)_*) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= \partial_n^{B, A \cap B} \circ (i_B, j_A)_*^{-1} \circ (l_X)_*((i_A)_*(a) - (i_B)_*(b)) \\ &= \partial_n^{B, A \cap B} \circ (i_B, j_A)_*^{-1} \circ \underbrace{(l_X)_* \circ (i_A)_*}_{=0}(a) \\ &\quad - \underbrace{\partial_n^{B, A \cap B} \circ (l_B)_*}_{=0}(b) = 0 \end{aligned}$$

- Noch zu zeigen:  $\text{Im } \partial_n = \ker \begin{pmatrix} (j_A)_* \\ (j_B)_* \end{pmatrix}$ .

" $\supseteq$ ": Sei  $x \in \ker((j_A)_* \oplus (j_B)_*)$ , also  $(j_A)_*(x) = 0 = (j_B)_*(x)$ . Da  $\text{Im } \partial_n^{B, A \cap B} = \ker(j_B)_*$  ist, gibt es  $v \in H_n(B, A \cap B; R)$  mit  $\partial_n^{B, A \cap B}(v) = x$ . Nun ist

$$\partial_n^{X, A} \circ (i_B, j_A)_*(v) = (j_A)_*(\partial_n^{B, A \cap B}(v)) = (j_A)_*(x) = 0$$

Da  $\ker \partial_n^{X, A} = \text{Im}(l_X)_*$ , finden wir  $w \in H_n(X; R)$  mit  $(l_X)_*(w) = (i_B, j_A)_*(v)$ . Also folgt

$$\partial_n(w) = \partial_n^{B, A \cap B} \circ (i_B, j_A)_*^{-1} \circ (l_X)_*(w) = \partial_n^{B, A \cap B} \circ (i_B, j_A)_*^{-1} \circ (i_B, j_A)_*(v) = \partial_n^{B, A \cap B}(v) = x$$

" $\subseteq$ ": Für  $v \in H_n(X; R)$  ist

$$\begin{aligned} & ((j_A)_* \oplus (j_B)_*) \circ \partial_n(v) \\ &= \left( (j_A)_* \circ \partial_n^{B, A \cap B} \circ (i_B, j_A)_*^{-1} \circ (l_X)_*(v), \underbrace{(j_B)_* \circ \partial_n^{B, A \cap B} \circ (i_B, j_A)_*^{-1} \circ (l_X)_*(v)}_{=0} \right) \\ &= \left( \underbrace{\partial_n^{X, A} \circ (l_X)_*(v)}_{=0}, 0 \right) = (0, 0) \end{aligned}$$

**9.3 Bemerkung** Für die Mayer-Vietoris-Folge müssen  $A$  und  $B$  nicht notwendig offen sein. Es genügt, dass die Inklusion  $(B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$  einen Isomorphismus  $H_*(B, A \cap B; R) \rightarrow H_*(X, A; R)$  induziert.

**9.4 Satz** Für die Homologie der  $n$ -Sphäre  $S^n$  gilt

$$H_k(S^n; R) \cong \begin{cases} R \oplus R, & \text{falls } k = n = 0 \\ R, & \text{falls } k = 0, n \neq 0 \\ R, & \text{falls } k = n \neq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad [\#]$$

**9.5 Definition** Sei  $X$  ein nichtleerer topologischer Raum. Sei  $p: X \rightarrow \{\text{pt}\}$  die Projektion auf den Ein-Punkt-Raum. Die **reduzierte singuläre Homologie** von  $X$  ist definiert durch

$$\tilde{H}_k(X; R) := \ker(p_*: H_k(X; R) \rightarrow H_k(\{\text{pt}\}; R))$$

**BEMERKUNG:**

- Es gilt  $\tilde{H}_k(X; R) = H_k(X; R)$  für  $k > 0$ , da  $H_k(\{\text{pt}\}; R) = 0$  ist für  $k > 0$  (siehe 5.9) und somit  $p_*$  die Nullabbildung ist.  
Weiter gilt  $H_0(X; R) = R \oplus \tilde{H}_0(X; R)$ , da  $H_0(\{\text{pt}\}; R) = R$  frei ist.
- Es ist nicht schwer die Eigenschaften von singulärer Homologie auf die reduzierte singuläre Homologie zu übertragen. Insbesondere ist  $\tilde{H}_*$  homotopieinvariant und es gibt eine Mayer-Vietoris-Folge.
- Es ist  $\tilde{H}_k(\{\text{pt}\}) = 0$  und für jeden kontrahierbaren Raum  $X$  ist somit  $\tilde{H}_n(X; R) = 0$  für alle  $n$ .

**9.6 Bemerkung** In reduzierter singulärer Homologie wird **[\#]** zu

$$\tilde{H}_k(S^n; R) \cong \begin{cases} R, & \text{falls } k = n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad [\#\#]$$

## 9.7 Beweis von [##] Wir berechnen die reduzierte Homologie der Sphäre per Induktion nach $n$ :

**Induktionsanfang:**  $n = 0$ : Es gilt

$$H_k(S^0; R) \xleftarrow{\varphi} H_k(\{\text{pt}\}; R) \oplus H_k(\{\text{pt}\}; R) = \begin{cases} R \oplus R, & \text{falls } k = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Seien  $i_-: \{\text{pt}\} \hookrightarrow S^0$  und  $i_+: \{\text{pt}\} \hookrightarrow S^0$  die Inklusionen mit  $\text{Im } i_{\pm} = \{\pm 1\}$ . Der Isomorphismus  $\varphi$  ist gegeben durch  $\varphi = (i_-)_* + (i_+)_*$ . Für  $(a, b) \in H_k(\{-1\}; R) \oplus H_k(\{+1\}; R)$  gilt dann

$$p_*(i_-(a) + i_+(b)) = (p \circ i_-)_*(a) + (p \circ i_+)_*(b) = \text{id}_*(a) + \text{id}_*(b) = a + b$$

Also ist  $\ker p_* = \{(a, -a) \mid a \in H_k(\{\text{pt}\}; R)\}$  und damit folgt

$$\tilde{H}_k(S^0; R) = \begin{cases} 0, & \text{falls } k \neq 0 \\ R, & \text{falls } k = 0 \end{cases}$$

**Induktionsschritt:**  $n - 1 \mapsto n$ : Sei  $D_+^n = S^n \setminus \{(1, 0, \dots, 0)\}$  und  $D_-^n = S^n \setminus \{(-1, 0, \dots, 0)\}$ . Dann sind  $D_+^n$  und  $D_-^n$  offene Teilmengen von  $S^n$  mit  $S^n = D_+^n \cup D_-^n$ . Weiter gilt  $D_+^n \simeq \{\text{pt}\}$  und  $D_-^n \simeq \{\text{pt}\}$ . Für den Schnitt der beiden Mengen erhalten wir

$$D_+^n \cap D_-^n = \{x = (x_0, \dots, x_n) \in S^n \mid x_0 \notin \{\pm 1\}\} \simeq S^{n-1} = \{x = (0, x_1, \dots, x_n) \in S^n\}.$$

Betrachte nun die Mayer-Vietoris-Folge zu  $S^n = D_+^n \cup D_-^n$ :

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{H}_k(D_+^n) \oplus \tilde{H}_k(D_-^n) & \longrightarrow & \tilde{H}_k(S^n) & \xrightarrow{\partial_k} & \tilde{H}_{k-1}(D_+^n \cap D_-^n) & \longrightarrow & \tilde{H}_{k-1}(D_+^n) \oplus \tilde{H}_{k-1}(D_-^n) \\ \underset{=0}{=} & & & & \underset{\cong}{\uparrow} & & \underset{=0}{=} \\ & & & & \tilde{H}_{k-1}(S^{n-1}) & & \end{array}$$

„ $R$ “ aus Platzgründen weggelassen

$$\text{Es folgt } \tilde{H}_k(S^n; R) \cong \tilde{H}_{k-1}(S^{n-1}; R) \stackrel{\text{I.A.}}{=} \begin{cases} R, & \text{falls } k = n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

□

## 10 Anwendungen

**10.1 Satz (Invarianz der Dimension)** Sind  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{R}^m$  homöomorph, so gilt  $n = m$ .

**BEWEIS:** Sei  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  ein Homöomorphismus. Sei  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  beliebig. Dann erhalten wir auch einen Homöomorphismus  $k := h|_{\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}}: \mathbb{R}^n \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{h(x_0)\}$ . Nun ist  $\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}$  homotopieäquivalent zu  $S^{n-1}$  und  $\mathbb{R}^m \setminus \{h(x_0)\}$  ist homotopieäquivalent zu  $S^{m-1}$ . Da  $k$  ein Homöomorphismus ist, ist  $k_*$  ein Isomorphismus. Wir erhalten

$$H_*(S^{n-1}) \cong H_*(\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}) \cong H_*(\mathbb{R}^m \setminus \{h(x_0)\}) \cong H_*(S^{m-1})$$

Es ist aber  $H_*(S^{n-1}) \cong H_*(S^{m-1})$  genau dann, wenn  $n = m$ .  $\square$

**10.2 Fixpunktsatz von Brouwer** Jede stetige Abbildung  $f: D^n \rightarrow D^n$  besitzt einen Fixpunkt.

**BEWEIS:** Durch Widerspruch: Angenommen es gibt  $f: D^n \rightarrow D^n$  ohne Fixpunkt. Aus dem letzten Semester wissen wir, dass es dann eine stetige Abbildung  $F: D^n \rightarrow S^{n-1}$  gibt mit  $F|_{S^{n-1}} = \text{id}_{S^{n-1}}$ . In Homologie erhalten wir folgendes kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} \cong H_{n-1}(S^{n-1}) & \xrightarrow{(\text{id}_{S^{n-1}})_* = \text{id}} & H_{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbb{Z} \\ & \searrow i_* & \nearrow (F)_* \\ & H_{n-1}(D^n) = 0 & \end{array}$$

wobei  $i: S^{n-1} \hookrightarrow D^n$  die Inklusion ist. Da  $F \circ i = \text{id}_{S^{n-1}}$  ist, gilt  $F_* \circ i_* = \text{id}_{H_{n-1}(S^{n-1})}$ .  $\nexists$   $\square$

## Der Abbildungsgrad

reduzierte Homologie!

**10.3 Definition** Sei  $f: S^n \rightarrow S^n$  eine stetige Abbildung. Da  $\tilde{H}_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$  ist, gibt es eine ganze Zahl  $d(f)$ , so dass  $f_*(x) = d(f) \cdot x$  für alle  $x \in \tilde{H}_n(S^n)$ . Diese Zahl heißt der **Abbildungsgrad** von  $f$ .

**10.4 Proposition** Für den Abbildungsgrad  $d$  gilt

- a)  $d(\text{id}_{S^n}) = 1$ .
- b) Sind  $f$  und  $g$  homotop, so gilt  $d(f) = d(g)$ .
- c)  $d(f \circ g) = d(f) \cdot d(g)$ .

**BEWEIS:**

- a) Es ist  $(\text{id}_{S^n})_*(x) = \text{id}_{\mathbb{Z}}(x) = x$ .
- b) Sind  $f$  und  $g$  homotop, so gilt  $f_* = g_*$  und damit folgt  $d(f) = d(g)$ .
- c) Für alle  $x \in \tilde{H}_n(S^n)$  gilt:  $d(f \circ g) \cdot x = (f \circ g)_*(x) = f_* \circ g_*(x) = d(f) \cdot d(g) \cdot x$ . Da  $\tilde{H}_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$  folgt  $d(f \circ g) = d(f) \cdot d(g)$ .  $\square$

**10.5 Beispiel** Sei  $i \in \{0, \dots, n\}$  und  $R_i: S^n \rightarrow S^n$  die Spiegelung an der  $x_i$ -Achse, also

$$R_i(x_0, \dots, x_n) = (x_0, \dots, -x_i, \dots, x_n)$$

Dann ist  $d(R_i) = -1$ .

**BEWEIS:** Sei  $f: S^n \rightarrow S^n$  der Homöomorphismus, der die 0-te und die  $i$ -te Koordinate vertauscht, also gilt  $f(x_0, \dots, x_n) = (x_i, \dots, x_0, \dots, x_n)$ . Dann ist  $R_i = f \circ R_0 \circ f$ . Da  $f$  ein Homöomorphismus ist, ist  $f_*$  ein Isomorphismus und daher ist  $d(f)$  invertierbar, also  $d(f) \in \{\pm 1\}$ . Mit  $d(R_i) = d(f) \cdot d(R_0) \cdot d(f)$  folgt  $d(R_0) = d(R_i)$ . Es genügt also  $R_0$  zu betrachten. Wir zeigen  $d(R_0) = -1$  durch Induktion nach  $n$ .

**Induktionsanfang:** Sei  $i_-: \{\text{pt}\} \rightarrow S^0$  die Abbildung mit  $\text{Im } i_- = \{-1\}$  und  $i_+: \{\text{pt}\} \rightarrow S^0$  die Abbildung mit  $\text{Im } i_+ = \{+1\}$ . Dann ist

Unter  $H_0(S_0) \cong \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}$  induziert  $R_0$   $(x, y) \mapsto (y, x)$

$$\begin{aligned} H_0(S^0) &= \left\{ (i_-)_*(a) + (i_+)_*(b) \mid a, b \in H_0(\{\text{pt}\}) \right\} \quad \text{und} \\ \tilde{H}_0(S^0) &= \left\{ (i_-)_*(a) - (i_+)_*(a) \mid a \in H_0(\{\text{pt}\}) \right\} \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} (R_0)_* \left( (i_-)_*(a) - (i_+)_*(a) \right) &= (R_0)_* (i_-)_*(a) - (R_0)_* (i_+)_*(a) = (R_0 \circ i_-)_*(a) - (R_0 \circ i_+)_*(a) \\ &= (i_+)_*(a) - (i_-)_*(a) \\ &= -((i_-)_*(a) - (i_+)_*(a)) \end{aligned}$$

Also folgt  $d(R_0) = -1$ , da wir den Abbildungsgrad für reduzierte Homologie definiert hatten.

**Induktionsschritt:** Wir definieren zwei offene Teilmengen von  $S^n$  wie folgt

$$\begin{aligned} D_+^n &= \{(x_0, \dots, x_n) \in S^n \mid x_n \neq -1\} \\ D_-^n &= \{(x_0, \dots, x_n) \in S^n \mid x_n \neq +1\} \end{aligned}$$

Wir wissen schon aus 9.7, dass die Randabbildung aus der dazugehörigen Mayer-Vietoris-Folge  $\tilde{H}_n(S^n) \xrightarrow{\partial_n} \tilde{H}_{n-1}(D_+^n \cap D_-^n)$  ein Isomorphismus ist. Da die Randabbildung natürlich ist, erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{H}_n(S^n) & \xrightarrow[\cong]{\partial_n} & \tilde{H}_{n-1}(D_-^n \cap D_+^n) & \xleftarrow[\cong]{i_*} & \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) \\ \downarrow (R_0)_* & & \downarrow (R_0|_{D_-^n \cap D_+^n})_* & & \downarrow (R_0|_{S^{n-1}})_* \\ \tilde{H}_n(S^n) & \xrightarrow[\cong]{\partial_n} & \tilde{H}_{n-1}(D_-^n \cap D_+^n) & \xleftarrow[\cong]{i_*} & \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) \end{array}$$

dabei ist  $i: S^{n-1} \rightarrow D_-^n \cap D_+^n$  die Homotopieäquivalenz  $i(x_0, \dots, x_{n-1}) = (x_0, \dots, x_{n-1}, 0)$ . Nach Induktionsannahme ist  $(R_0|_{S^{n-1}})_*(y) = -y$  für alle  $y \in \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1})$ . Für  $x \in \tilde{H}_n(S^n)$  folgt dann

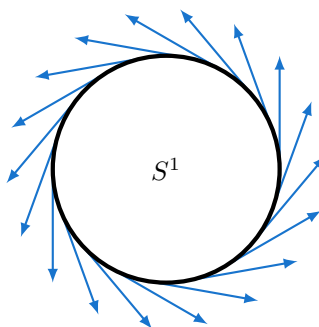
$$\begin{aligned} (R_0)_*(x) &= (\partial_n)^{-1} \circ (i_*) \circ (R_0|_{S^{n-1}})_* ((i_*^{-1} \circ \partial_n)(x)) \\ &= (\partial_n)^{-1} \circ (i_*) (-i_*^{-1}(\partial_n(x))) \\ &= -\partial_n^{-1} \circ (i_*) \circ (i_*)^{-1} \circ \partial_n(x) = -x \end{aligned}$$

Also gilt für den Abbildungsgrad der Spiegelung  $d(R_0) = -1$ . □

**10.6 Beispiel** Der Grad der Punktspiegelung  $R: S^n \rightarrow S^n, x \mapsto -x$  ist  $d(R) = (-1)^{n+1}$ .

**BEWEIS:**  $d(R) = d(R_0 \circ R_1 \circ \dots \circ R_n) = d(R_0) \cdot \dots \cdot d(R_n) = (-1)^{n+1}$ .  $\square$

**10.7 Erinnerung** Sei  $M$  eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit. Ein **Vektorfeld** auf  $M$  ist eine stetige Abbildung  $v: M \rightarrow TM$  mit  $v(x) \in T_x M$  für alle  $x \in M$ . Für  $M = S^n$  entspricht ein Vektorfeld genau einer stetigen Abbildung  $v: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  mit  $\langle v(x) | x \rangle = 0$  für alle  $x \in S^n$ .



**Abbildung 3:** Ein nirgends verschwindendes Vektorfeld auf  $S^1$

**10.8 Satz** Es gibt genau dann ein Vektorfeld ohne Nullstellen auf  $S^n$ , wenn  $n$  ungerade ist.

**BEWEIS:** Ist  $n$  ungerade, so ist  $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{C}^k$  mit  $k = \frac{n+1}{2}$ . Punkte in  $S^n$  sind dann genau  $k$ -Tupel  $z = (z_1, \dots, z_k)$  mit  $|z_1|^2 + \dots + |z_k|^2 = 1$ . Ein Vektorfeld entspricht dann einer stetigen Abbildung  $v: S^n \rightarrow \mathbb{C}^k$ , so dass für das kanonische komplexe Skalarprodukt  $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbb{C}}$  auf  $\mathbb{C}^k$  gilt

$$\langle z | v(z) \rangle_{\mathbb{C}} \in i\mathbb{R}$$

Definiere nun  $v: S^n \rightarrow \mathbb{C}^k$  durch  $v(z) := iz$ . Dann  $iz \neq 0$  für alle  $z \in S^n$  und  $\langle z | iz \rangle = -i\|z\|_2^2 \in i\mathbb{R}$ . Sei umgekehrt  $v: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  ein Vektorfeld ohne Nullstellen. Zu zeigen:  $d(R) = 1$ , denn dann folgt die Behauptung, da  $d(R) = (-1)^{n+1}$ . Zeige dazu:  $R$  ist homotop zu  $\text{id}$ . Seien  $H, K: S^n \times [0, 1] \rightarrow S^n$  definiert durch

$$H(x, t) := \frac{tx + (1-t)v(x)}{\|tx + (1-t)v(x)\|} \quad \text{bzw.} \quad K(x, t) := \frac{-tx + (1-t)v(x)}{\|-tx + (1-t)v(x)\|}$$

Da  $\langle v(x) | x \rangle = 0$  und  $v(x) \neq 0$  folgt für alle  $x \in S^n$ , folgt

$$\begin{aligned} \|tx + (1-t)v(x)\|^2 &= \|tx\|^2 + \|(1-t)v(x)\|^2 \neq 0 \\ \|-tx + (1-t)v(x)\|^2 &= \|-tx\|^2 + \|(1-t)v(x)\|^2 \neq 0 \end{aligned}$$

Also sind  $H$  und  $K$  wohldefiniert.  $H$  ist Homotopie zwischen  $\text{id}$  und  $x \mapsto \frac{v(x)}{\|v(x)\|}$  und  $K$  ist Homotopie zwischen  $-\text{id} = R$  und  $x \mapsto \frac{v(x)}{\|v(x)\|}$ .  $\square$

**10.9 Satz (Jordanscher Kurvensatz)** Sei  $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine stetige, injektive Abbildung. Dann hat  $\mathbb{R}^2 \setminus f(S^1)$  genau zwei Wegzusammenhangskomponenten. Eine davon ist beschränkt, die andere nicht.

einfach nachzurechnen

für orthogonale Vektoren gilt der Satz von Pythagoras

**BEWEIS (MIT 10.10):** Wir können  $f$  auch als injektive Abbildung  $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \subseteq S^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$  auffassen. Nun ist  $\tilde{H}_0(S^2 \setminus f(S^1)) = \mathbb{Z}$  nach Satz 10.10 b). Also  $H_0(S^2 \setminus f(S^1)) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ . Daher besteht  $S^2 \setminus f(S^1)$  aus zwei Wegzusammenhangskomponenten  $U_1$  und  $U_2$ . Sei ohne Einschränkungen  $\infty \in U_2$ . Dann ist  $U_2 \setminus \{\infty\}$  immer noch wegzusammenhängend: Seien  $x, y \in U_2$ , dann gibt es eine Umgebung  $V$  von  $\infty \in S^2$  mit  $V \setminus \{\infty\} \cong D^2 \setminus \{0\}$ ,  $x, y \notin V$  und  $f(S^1) \cap V = \emptyset$ . Also sind  $U_1$  und  $U_2 \setminus \{\infty\}$  die Wegzusammenhangskomponenten von  $\mathbb{R}^2 \setminus f(S^1)$ .  $U_1$  ist beschränkt und  $U_2$  ist unbeschränkt.  $\square$

### 10.10 Satz

- a) Sei  $f: D^k \rightarrow S^n$  eine stetige, injektive Abbildung mit  $0 \leq k < n$ . Dann gilt  $\tilde{H}_i(S^n \setminus f(D^k)) = 0$  für alle  $i$ .
- b) Sei  $f: S^k \rightarrow S^n$  eine stetige, injektive Abbildung mit  $0 \leq k < n$ . Dann gilt

$$\tilde{H}_i(S^n \setminus f(S^k)) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{falls } i = n - k - 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

**10.11 Proposition** Seien  $U_1 \subseteq U_2 \subseteq \dots \subseteq X$  offen mit  $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ . Seien  $i_{a,b}: U_a \hookrightarrow U_b$  für  $a < b$  und  $i_a: U_a \hookrightarrow X$  die entsprechenden Inklusionen. Dann gilt

- (1) Für jedes  $x \in H_k(X; R)$  gibt es  $a > 0$  und  $x_a \in H_k(U_a; R)$  mit  $(i_a)_*(x_a) = x$ .
- (2) Ist  $x_a \in H_k(U_a; R)$  mit  $(i_a)_*(x_a) = 0$ , so gibt es  $b > a$  mit  $(i_{a,b})_*(x_a) = 0$ .

**BEMERKUNG:** Diese Proposition gilt genauso für reduzierte Homologie.

**BEWEIS:** Sei  $\sigma: |\Delta^n| \rightarrow X$  ein singulärer Simplex in  $X$ . Dann ist  $\{\sigma^{-1}(U_a)\}_{a \in \mathbb{N}}$  eine offene Überdeckung von  $|\Delta^n|$ . Da  $|\Delta^n|$  kompakt ist, gibt es  $a$  mit  $|\Delta^n| \subseteq \sigma^{-1}(U_a)$ , also  $\sigma(|\Delta^n|) \subseteq U_a$ . Da Elemente von  $C_n(X; R)$  endliche  $R$ -Linearkombinationen von singulären Simplizes sind, folgt

$$C_n(X; R) = \bigcup_a C_n(U_a; R).$$

Damit ergeben sich direkt (1) und (2).  $\square$

### 10.12 Beweis von Satz 10.10

- a) Durch Induktion nach  $k$ . Für  $k = 0$  ist  $S^n \setminus f(D^0)$  homöomorph zu  $\mathbb{R}^n$  und die Behauptung folgt.

Induktionsschritt  $k \mapsto k+1$ : Da  $D^{k+1}$  und  $[0, 1]^{k+1}$  homöomorph sind, können wir  $D^{k+1}$  durch  $[0, 1]^{k+1}$  ersetzen. Sei  $x \in \tilde{H}_i(S^n \setminus f([0, 1]^{k+1}))$ . Es ist

$$S^n \setminus f(\{1/2\} \times [0, 1]^k) = \underbrace{S^n \setminus f([0, 1/2] \times [0, 1]^k)}_{=: A} \cup \underbrace{S^n \setminus f([1/2, 1] \times [0, 1]^k)}_{=: B} = A \cup B$$

eine Vereinigung von offenen Mengen. Weiter ist

$$A \cap B = (S^n \setminus f([0, 1/2] \times [0, 1]^k)) \cap (S^n \setminus f([1/2, 1] \times [0, 1]^k)) = S^n \setminus f([0, 1]^{k+1})$$

Die zugehörige Mayer-Vietoris-Folge liefert nun einen Isomorphismus:

$$\tilde{H}_{i+1}(A \cup B) \xrightarrow{=0 \text{ nach I.A.}} \tilde{H}_i(A \cap B) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_i(A) \oplus \tilde{H}_i(B) \xrightarrow{=0 \text{ nach I.A.}} \tilde{H}_i(A \cup B)$$

Angenommen  $x \neq 0$ . Dann ist das Bild von  $x$  in  $\tilde{H}_i(A)$  ungleich Null oder in  $\tilde{H}_i(B)$  ungleich Null. Indem wir dieses Argument iterieren, erhalten wir eine Folge von Intervallen

$$[0, 1] \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots \quad \text{sodass} \quad \bigcap_a I_a = \{t\}$$

und das Bild von  $x \in \tilde{H}_i(S^n \setminus f([0, 1]^{k+1}))$  unter der von der Inklusion  $\iota_{0,a}: S^n \setminus f([0, 1]^{k+1}) \rightarrow S^n \setminus f(I_a \times [0, 1]^k)$  induzierten Abbildung  $(\iota_{0,a})_*$  ungleich Null ist. Nun ist aber

$$\bigcup_a (S^n \setminus f(I_a \times [0, 1]^k)) = S^n \setminus f(\{t\} \times [0, 1]^k)$$

und wieder nach Induktionsannahme ist  $\tilde{H}_i(S^n \setminus f(\{t\} \times [0, 1]^k)) = 0$ . Für die von der Inklusion  $\iota_a: S^n \setminus f(I_a \times [0, 1]^k) \rightarrow S^n \setminus f(\{t\} \times [0, 1]^k)$  induzierte Abbildung gilt also  $(\iota_a)_*(x) = 0$ . Nach Proposition 10.11(2) muss  $x$  dann aber schon für ein  $i$  in der reduzierten Homologie  $\tilde{H}_i(S^n \setminus f(I_a \times [0, 1]^k))$  trivial sein.  $\nexists$

- b)** Durch Induktion nach  $k$ . Für  $k = 0$  ist  $S^n \setminus f(S^0) \cong \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Da  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \simeq S^{n-1}$  folgt für  $k = 0$  die Behauptung.

Induktionsschritt  $k - 1 \mapsto k$ : Wir setzen

$$D_+^k := \{(x_0, \dots, x_k) \in S^k \mid x_k \geq 0\}$$

$$D_-^k := \{(x_0, \dots, x_k) \in S^k \mid x_k \leq 0\}$$

Dann ist  $D_+^k \cap D_-^k = \{(x_0, \dots, x_k) \in S^k \mid x_k = 0\} \cong S^{k-1}$ . Wieder ist

$$S^n \setminus f(D_+^k \cap D_-^k) = (S^n \setminus f(D_+^k)) \cup (S^n \setminus f(D_-^k))$$

eine offene Vereinigung mit  $(S^n \setminus f(D_+^k)) \cap (S^n \setminus f(D_-^k)) = S^n \setminus f(S^k)$ . Es ist  $D_\pm^k \cong D^k$ , also ist wegen a) ist die Randabbildung in der zugehörigen Mayer-Vietoris-Folge

$$\tilde{H}_i(S^n \setminus f(D_+^k \cap D_-^k)) \xrightarrow[\cong]{\partial_i} \tilde{H}_{i-1}(S^n \setminus f(S^k))$$

ein Isomorphismus. Die Behauptung folgt dann per Induktion.  $\square$



## 11 CW-Komplexe

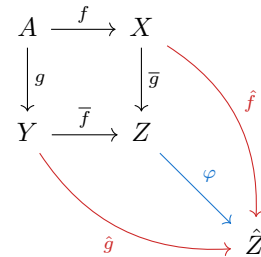
**11.1 Definition** Ein kommutatives Diagramm von topologischen Räumen der Form

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow g & & \downarrow \bar{g} \\ Y & \xrightarrow{\bar{f}} & Z \end{array} \quad [\#]$$

heißt ein **Pushout**, falls es folgende universelle Eigenschaft hat:

$$\forall \hat{f}: X \rightarrow \hat{Z}, \hat{g}: Y \rightarrow \hat{Z} \text{ mit } \hat{f} \circ f = \hat{g} \circ g \text{ gilt:}$$

$$\exists ! \varphi: Z \rightarrow \hat{Z} \text{ mit } \hat{f} = \varphi \circ \bar{g}, \hat{g} = \varphi \circ \bar{f}.$$



Wir sagen dann auch:  $[\#]$  ist der Pushout von  $Y \xleftarrow{g} A \xrightarrow{f} X$ .

**11.2 Bemerkung** Jedes Diagramm  $Y \xleftarrow{g} A \xrightarrow{f} X$  lässt sich zu einem Pushout vervollständigen: Betrachte dazu den Raum  $X \cup_A Y := X \amalg Y / f(a) \sim g(a) \forall a \in A$  mit der Quotiententopologie. Sind  $\bar{f}: Y \rightarrow X \cup_A Y$  und  $\bar{g}: X \rightarrow X \cup_A Y$  die von den Inklusionen  $X \hookrightarrow X \amalg Y$  und  $Y \hookrightarrow X \amalg Y$  induzierten Abbildungen, so ist

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ g \downarrow & & \downarrow \bar{g} \\ Y & \xrightarrow{\bar{f}} & X \cup_A Y \end{array}$$

ein Pushout. Existenz und Eindeutigkeit aus der universellen Eigenschaft können benutzt werden um zu zeigen, dass der Pushout eindeutig bis auf kanonischen Homöomorphismus ist.

**11.3 Definition** Ein **CW-Komplex**<sup>3</sup> ist ein topologischer Raum  $X$  zusammen mit einer Filtrierung<sup>4</sup> durch Unterräume von  $X$ :

$$\emptyset = X^{(-1)} \subseteq X^{(0)} \subseteq X^{(1)} \subseteq X^{(2)} \subseteq \dots \subseteq X^{(n)} \subseteq X^{(n+1)} \subseteq \dots \subseteq X$$

$X^{(i)}$  bezeichnet  
man auch als  $i$ -  
Gerüst oder  $i$ -Skelett

sodass die folgenden zwei Eigenschaften erfüllt sind:

(i) **Zellstruktur:** Zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  gibt einen Pushout von topologischen Räumen

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{i \in I^{(n)}} S^{n-1} & \xrightarrow{\coprod_{i \in I^{(n)}} q_i^{(n)}} & X^{(n-1)} \\ \downarrow \coprod_{i \in I^{(n)}} j_i & & \downarrow k^{(n)} \\ \coprod_{i \in I^{(n)}} D^n & \xrightarrow{\coprod_{i \in I^{(n)}} Q_i^{(n)}} & X^{(n)} \end{array}$$

<sup>3</sup> Zitat von Wikipedia [\[3\]](#) zum Namen: The  $C$  stands for „closure-finite“, and the  $W$  for „weak topology“.  $C$  für „cell“ scheint mir allerdings auch sinnvoll.

<sup>4</sup> siehe auch [https://de.wikipedia.org/wiki/Filter\\_\(Mathematik\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Filter_(Mathematik)) [\[4\]](#)

wobei  $j_i: S^{n-1} \hookrightarrow D^n$  und  $k_n: X^{(n-1)} \hookrightarrow X^{(n)}$  die Inklusionen sind.

- (ii) **Schwache Topologie:** Es ist  $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^{(n)}$  und  $U \subseteq X$  ist genau dann offen, wenn  $U \cap X^{(n)} \subseteq X^{(n)}$  für alle  $n$  offen ist.

Eine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  zwischen CW-Komplexen heißt **zellulär**, falls  $f(X^{(n)}) \subseteq Y^{(n)}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt.

#### 11.4 Bemerkung

- (i) Die Abbildungen  $q_i^{(n)}$  und  $Q_i^{(n)}$  sind *nicht* Teil der Struktur eines CW-Komplex. Nur die Existenz von  $q_i^{(n)}$  und  $Q_i^{(n)}$  wird gefordert – sie ist nicht notwendig eindeutig. Hat man  $q_i^{(n)}$  und  $Q_i^{(n)}$  gewählt, so heißt  $q_i^{(n)}$  die **anklebende Abbildung** der  $i$ -ten  $n$ -Zelle und  $Q_i^{(n)}$  die **charakteristische Abbildung** der  $i$ -ten  $n$ -Zelle.
- (ii) Sei  $\mathring{D}^n = D^n \setminus S^{n-1}$  das Innere von  $D^n$ . Die Abbildungen  $Q_i^{(n)}$  schränken sich zu einem Homöomorphismus  $\coprod_{i \in I^{(n)}} \mathring{D}^n \rightarrow X^{(n)} \setminus X^{(n-1)}$  ein.<sup>5</sup> Insbesondere lässt sich  $I^{(n)}$  mit der Menge der Wegzusammenhangskomponenten von  $X^{(n)} \setminus X^{(n-1)}$  identifizieren. Die Wegzusammenhangskomponenten heißen die **offenen Zellen** von  $X$ . Damit ist jeder CW-Komplex die disjunkte Vereinigung seiner offenen Zellen.
- ▲ Achtung: Jede offene  $n$ -Zelle ist offen in  $X^{(n)}$ , aber nicht notwendig in  $X$ .
- (iii) Der Abschluss einer offenen Zelle  $Q_i^{(n)}(\mathring{D}^n)$  ist  $Q_i^{(n)}(D^n)$  und insbesondere kompakt. Die  $Q_i^{(n)}(D^n)$  heißen die **abgeschlossenen Zellen** und sind als Abschluss von offenen Zellen unabhängig von der Wahl der  $Q_i^{(n)}$ .
- ▲ Achtung: Abgeschlossene Zellen sind Bilder von  $D^n$  unter stetigen Abbildungen, aber nicht notwendig homöomorph zu  $D^n$ .
- (iv) Ein CW-Komplex  $X$  heißt **endlich**, wenn er nur aus endlich vielen Zellen besteht, also wenn  $I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I^{(n)}$  endlich ist. Insbesondere gibt es dann ein  $n$  mit  $X = X^{(n)}$ .
- Die Dimension von  $X$  ist die maximale Dimension von Zellen von  $X$ , also  $\dim X := N$ , falls  $X^{(N)} = X$ ,  $X^{(N-1)} \subsetneq X$ . Gibt es kein solches  $N$  so setzen wir  $\dim X := \infty$ .

#### 11.5 Beispiele

- (i)  $S^n$  mit

$$(S^n)^{(k)} = \begin{cases} \emptyset, & \text{falls } k = -1 \\ \{(1, 0, \dots, 0)\}, & \text{falls } k = 0, \dots, n-1 \\ S^n, & \text{falls } k \geq n \end{cases}$$

ist ein CW-Komplex via  $S^n \cong D^n / S^{n-1}$

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \longrightarrow & (S^n)^{(n-1)} = \{(1, 0, \dots, 0)\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^n & \longrightarrow & S^n \end{array}$$

- (ii)  $S^n$  mit  $(S^n)^{(k)} = \{(x_0, \dots, x_k, 0, \dots, 0) \in S^n\}$  ist ebenfalls eine CW-Struktur auf  $S^n$ .

<sup>5</sup> Dass dies ein Homöomorphismus ist, folgt aus der Pushout-Eigenschaft und dem letzten Teil der Bemerkung 11.2, denn es gilt demnach  $X^{(n)} \cong X^{(n-1)} \cup_{\coprod S^{n-1}} \coprod D^n$ .

(iii) Sei  $K = (V, \Sigma)$  ein simplizialer Komplex. Es ist  $|\Delta^n| \cong D^n$  und  $|\partial\Delta^n| \cong S^{n-1}$ . Sei  $\Sigma^{(n)} := \Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup \dots \cup \Sigma_n$ . Dann wird  $|K|$  durch  $|K|^{(n)} := |(V, \Sigma^{(n)})|$  für  $n \geq 0$  zu einem CW-Komplex. Ist  $f: K \rightarrow L$  eine simpliziale Abbildung, so ist  $|f|: |K| \rightarrow |L|$  eine zelluläre Abbildung.

(iv) Der  $n$ -dimensionale reelle projektive Raum  $\mathbb{R}P^n$  kann definiert werden durch

$$\mathbb{R}P^n := \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / x \sim \lambda x = S^n / x \sim -x$$

Punkte in  $\mathbb{R}P^n$  sind Äquivalenzklassen von  $(n+1)$ -Tupeln reeller Zahlen und werden als die sogenannten homogenen Koordinaten  $[x_0 : \dots : x_n]$  geschrieben. Es ist

$$\mathbb{R}P^n = \left\{ [x_0 : \dots : x_n] \mid (x_0, \dots, x_n) \in S^n \right\} = \left\{ [x_0 : \dots : x_n] \mid (x_0, \dots, x_n) \in S^n, x_n \geq 0 \right\}$$

Wir erhalten einen Homöomorphismus  $f^{(n)}: D^n / x \sim -x, x \in S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}P^n$  mit

$$f^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \left[ x_1 : \dots : x_n : \sqrt{1 - \sum_{i=1}^n x_i^2} \right]$$

Ist  $Q^{(n)}: D^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$  die Komposition von  $f^{(n)}$  mit der Projektion  $D^n \twoheadrightarrow D^n / x \sim -x, x \in S^{n-1}$  und  $q^{(n)}: S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}P^{n-1}$  die Projektion, so erhalten wir einen Pushout

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \xrightarrow{q^{(n)}} & \mathbb{R}P^{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^n & \xrightarrow{Q^{(n)}} & \mathbb{R}P^n \end{array}$$

Induktiv erhalten wir einen CW-Struktur auf  $\mathbb{R}P^n$  mit genau einer  $k$ -Zelle für  $k = 0, \dots, n$  und

$$(\mathbb{R}P^n)^{(k)} \cong \mathbb{R}P^k$$

(v) Der  $n$ -dimensionale komplexe projektive Raum  $\mathbb{C}P^n$  kann definiert werden durch

$$\mathbb{C}P^n := \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} / z \sim \lambda z = S^{2n+1} / z \sim \lambda z, \lambda \in S^1 \subseteq \mathbb{C}$$

Punkte in  $\mathbb{C}P^n$  sind Äquivalenzklassen von  $(n+1)$ -Tupeln komplexer Zahlen und werden als homogenen Koordinaten  $[z_0 : \dots : z_n]$  geschrieben. Es ist wieder

$$\mathbb{C}P^n = \left\{ [z_0 : \dots : z_n] \mid (z_0, \dots, z_n) \in S^{2n+1} \right\} = \left\{ [z_0 : \dots : z_n] \mid (z_0, \dots, z_n) \in S^{2n+1}, |z_n| \geq 0 \right\}$$

Wir erhalten wieder einen Homöomorphismus  $f^{(n)}: D^{2n+1} / z \sim \lambda z, z \in S^{2n-1}, \lambda \in S^1 \rightarrow \mathbb{C}P^n$  durch

$$f^{(n)}(z_1, \dots, z_n) = \left[ z_1 : \dots : z_n : \sqrt{1 - \sum_{i=1}^n |z_i|^2} \right]$$

Ist  $Q^{(2n)}: D^{2n} \rightarrow \mathbb{C}P^n$  die Komposition von  $f^{(n)}$  mit der Projektion  $D^{2n} \twoheadrightarrow D^{2n} / z \sim \lambda z, z \in S^{2n-1}$  und  $q^{(n)}: S^{2n-1} \rightarrow \mathbb{C}P^{n-1}$  die Projektion, so erhalten wir auch wieder einen Pushout

$$\begin{array}{ccc} S^{2n-1} & \xrightarrow{q^{(n)}} & \mathbb{C}P^{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^{2n} & \xrightarrow{Q^{(n)}} & \mathbb{C}P^n \end{array}$$

Induktiv erhalten wir einen CW-Struktur auf  $\mathbb{C}P^n$  mit genau einer  $k$ -Zelle für  $k = 0, 2, \dots, 2n$  und

$$(\mathbb{C}P^n)^{(k)} \cong \mathbb{C}P^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}$$

**11.6 Lemma** Sei  $X$  ein CW-Komplex und  $K \subseteq X$ . Dann ist  $K$  genau dann kompakt, wenn  $K$  abgeschlossen ist und  $K$  nur endlich viele offene Zellen von  $X$  schneidet.

**BEWEIS:** Zunächst: Ist  $S \subseteq X$  ein Unterraum der jede offene Zelle höchstens in einem Punkt schneidet, so ist  $S$  diskret. Für  $S_0 \subseteq S$  ist  $S_0 \cap (X^{(n)} \setminus X^{(n-1)})$  abgeschlossen in  $X^{(n)}$ , da  $S_0$  jede offene  $n$ -Zelle von  $X$  höchstens in einem Punkt schneidet. Daher ist  $S_0 \cap X^{(n)} \subseteq X^{(n)}$  abgeschlossen für alle  $n$ . Damit ist also jede Teilmenge  $S_0 \subseteq S$  abgeschlossen in  $X$  und  $S$  somit diskret.

Sei nun  $K \subseteq X$  kompakt. Dann ist  $K$  sicher abgeschlossen. Sei  $S \subseteq K$  ein Teilraum, der aus jeder offenen Zelle von  $X$ , die  $K$  schneidet, genau einen Punkt enthält. Wegen der Vorüberlegung ist  $S$  diskret. Da  $S \subseteq K$  abgeschlossen und  $K$  kompakt ist, ist  $S$  auch kompakt. Damit ist  $S$  endlich und  $K$  schneidet nur endlich viele offene Zellen.

Ist nun umgekehrt  $K$  abgeschlossen und schneidet nur endlich viele offene Zellen, so ist  $K$  enthalten in einer endlichen Vereinigung von abgeschlossen Zellen von  $X$ . Da diese abgeschlossen Zellen kompakt sind, ist auch diese Vereinigung kompakt,  $K$  ist also ein abgeschlossener Teilraum eines kompakten Teilraums und damit selbst kompakt.  $\square$

**11.7 Korollar** Ein CW-Komplex ist genau dann kompakt, wenn er endlich ist.

## 12 Zelluläre Homologie

**12.1 Definition** Sei  $X$  ein CW-Komplex. Dann heißt

$$C_n^{\text{cell}}(X; R) := H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}; R)$$

der  **$n$ -te zelluläre Kettenmodul** von  $X$  mit Koeffizienten in  $R$ . Wir definieren die  **$n$ -te Randabbildung**  $\partial_n^{\text{cell}}: C_n^{\text{cell}}(X; R) \rightarrow C_{n-1}^{\text{cell}}(X; R)$  durch die Komposition

$$\begin{array}{ccc} H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}; R) & \xrightarrow{\partial_n^{(X^{(n)}, X^{(n-1)})}} & H_{n-1}(X^{(n-1)}; R) \\ & & \downarrow (j^{(n-1)})_* \\ & & H_{n-1}(X^{(n-1)}, X^{(n-2)}; R) \end{array}$$

Dabei ist  $\partial_n^{(X^{(n)}, X^{(n-1)})}$  die Randabbildung aus der Paarfolge für  $(X^{(n)}, X^{(n-1)})$  und  $j^{(n-1)}$  die Inklusion  $(X^{(n-1)}, \emptyset) \hookrightarrow (X^{(n-1)}, X^{(n-2)})$ .

**12.2 Lemma**

$$\partial_{n-1}^{\text{cell}} \circ \partial_n^{\text{cell}} = 0$$

**BEWEIS:** Wir schreiben die Paarsequenz für  $(X^{(n)}, X^{(n-1)})$  dreimal übereinander und erhalten:

$$\begin{array}{ccccccc} H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}) & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(X^{(n-1)}) & \longrightarrow & \dots & & \\ & & \parallel & & & & \\ & & H_{n-1}(X^{(n-1)}) & \xrightarrow{j_*^{(n-1)}} & H_{n-1}(X^{(n-1)}, X^{(n-2)}) & \xrightarrow{\partial_{n-1}} & H_{n-2}(X^{(n-2)}) \longrightarrow \dots \\ & \searrow \partial_n^{\text{cell}} & & & & & \\ & & & & \parallel & & \\ & & & & H_{n-2}(X^{(n-2)}) & \xrightarrow{j_*^{(n-2)}} & H_{n-2}(X^{(n-2)}, X^{(n-3)}) \\ & & & & \nearrow \partial_{n-1}^{\text{cell}} & & \end{array}$$

„ $R$ “ aus Platzgründen weggelassen

Also  $\partial_{n-1}^{\text{cell}} \circ \partial_n^{\text{cell}} = 0$ , da wegen der Exaktheit der Paarfolge schon  $\partial_{n-1} \circ j_*^{(n-1)} = 0$  ist.  $\square$

**12.3 Definition**  $(C_*^{\text{cell}}(X; R), \partial_*^{\text{cell}})$  heißt der **zelluläre Kettenkomplex** von  $X$  über  $R$ . Seine Homologie  $H_*^{\text{cell}}(X; R)$  heißt die **zelluläre Homologie** von  $X$ .

**12.4 Bemerkung** Der zelluläre Kettenkomplex und die zelluläre Homologie sind Funktoren auf der Kategorie der CW-Komplexe und zellulären Abbildungen.

**12.5 Lemma** Sei  $X$  ein CW-Komplex. Wähle  $q_i^{(n)}$  und  $Q_i^{(n)}$  für die Zellstruktur auf  $X$ . Dann gilt

a) Die Abbildung

$$\left( \coprod_{i \in I^{(n)}} Q_i^{(n)}, \coprod_{i \in I^{(n)}} q_i^{(n)} \right) : \left( \coprod_i D^n, \coprod_i S^{n-1}; R \right) \longrightarrow (X^{(n)}, X^{(n-1)}; R)$$

induziert einen Isomorphismus in Homologie.

b) Es gilt

$$H_k \left( \coprod_{i \in I^{(n)}} D^n, \coprod_{i \in I^{(n)}} S^{n-1}; R \right) = \begin{cases} R[I^{(n)}], & \text{falls } k = n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

**BEWEIS:**

a) Sei  $D_0^n := D^n \setminus \{0\}$ ,  $\frac{1}{2}D^n := \{\frac{x}{2} \mid x \in D^n\}$  und  $\frac{1}{2}D_0^n := \frac{1}{2}D^n \setminus \{0\}$ . Wir definieren

$$X_{++}^{(n-1)} := X^{(n)} \setminus \bigcup_{i \in I^{(n)}} Q_i^{(n)}(\{0\}) \quad \text{und} \quad X_+^{(n-1)} := X^{(n)} \setminus \bigcup_{i \in I^{(n)}} Q_i^{(n)}\left(\frac{1}{2}D^n\right)$$

Dann sind  $X^{(n-1)} \hookrightarrow X_+^{(n-1)} \hookrightarrow X_{++}^{(n-1)}$  Homotopieäquivalenzen, da  $\coprod_{i \in I^{(n)}} Q_i^{(n)}$  ein Homöomorphismus auf den offenen  $n$ -Zellen ist. Betrachte:

$$\begin{array}{ccccc} (\coprod D^n, \coprod S^{n-1}) & \xrightarrow{(1)} & (\coprod D^n, \coprod D_0^n) & \xleftarrow{(2)} & (\coprod \frac{1}{2}D^n, \coprod \frac{1}{2}D_0^n) \\ \downarrow (\coprod Q_i^{(n)}, \coprod q_i^{(n)}) & & \downarrow & & \downarrow (3) \\ (X^{(n)}, X^{(n-1)}) & \xrightarrow{(5)} & (X^{(n)}, X_{++}^{(n-1)}) & \xleftarrow{(4)} & (X^{(n)} \setminus X_+^{(n-1)}, X_{++}^{(n-1)} \setminus X_+^{(n-1)}) \end{array}$$

(1), (2) und (5) sind Homotopieäquivalenzen und induzieren Isomorphismen in Homologie. (3) ist ein Homöomorphismus und induziert einen Isomorphismus in Homologie. (4) erfüllt die Voraussetzungen für den Ausschneideisomorphismus und induziert daher auch einen Isomorphismus in Homologie. Damit folgt a).

b) Da die Randabbildung aus der Paarsequenz in diesem Fall ein Isomorphismus ist, gilt

$$\begin{aligned} H_k\left(\coprod_i D^n, \coprod_i S^{n-1}; R\right) &\xleftarrow{\cong} \bigoplus_i H_k(D^n, S^{n-1}; R) \xrightarrow{\cong} \bigoplus_i \tilde{H}_{k-1}(S^{n-1}; R) \\ &\cong \bigoplus_i \begin{cases} R, & \text{falls } k = n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\ &\cong \begin{cases} R[I^{(n)}], & \text{falls } k = n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad \square \end{aligned}$$

**12.6 Bemerkung** Wir haben soeben gezeigt, dass die folgenden Isomorphismen existieren:

$$\begin{array}{ccc} C_n^{\text{cell}}(X; R) & \xrightarrow{\partial_n^{\text{cell}}} & C_{n-1}^{\text{cell}}(X; R) \\ \parallel & & \parallel \\ H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}; R) & \longrightarrow & H_{n-1}(X^{(n-1)}, X^{(n-2)}; R) \\ \parallel & & \parallel \\ R[I^{(n)}] & \longrightarrow & R[I^{(n-1)}] \end{array}$$

Die Randabbildung  $\partial_n^{\text{cell}}$  wird unter diesen Isomorphismen zu einer  $I^{(n-1)} \times I^{(n)}$ -Matrix. Für  $j \in I^{(n-1)}$  und  $k \in I^{(n)}$  ist der  $(j, k)$ -Eintrag dieser Matrix genau der Abbildungsgrad einer Selbstabbildung der  $(n-1)$ -Sphäre:

Die  $(Q_i^{(n-1)}, q_i^{(n-1)})$  induzieren einen Homöomorphismus  $\coprod_i D^{n-1} / \coprod_i S^{n-2} \cong X^{(n)} / X^{(n-1)}$ . Durch Komposition mit der Projektion auf die  $j$ -te Zelle erhalten wir die folgende Abbildung

$$\coprod_i D^{n-1} / \coprod_i S^{n-2} \xrightarrow{p_j^{(n-1)}} D^{n-1} / S^{n-2} \cong S^{n-1}.$$

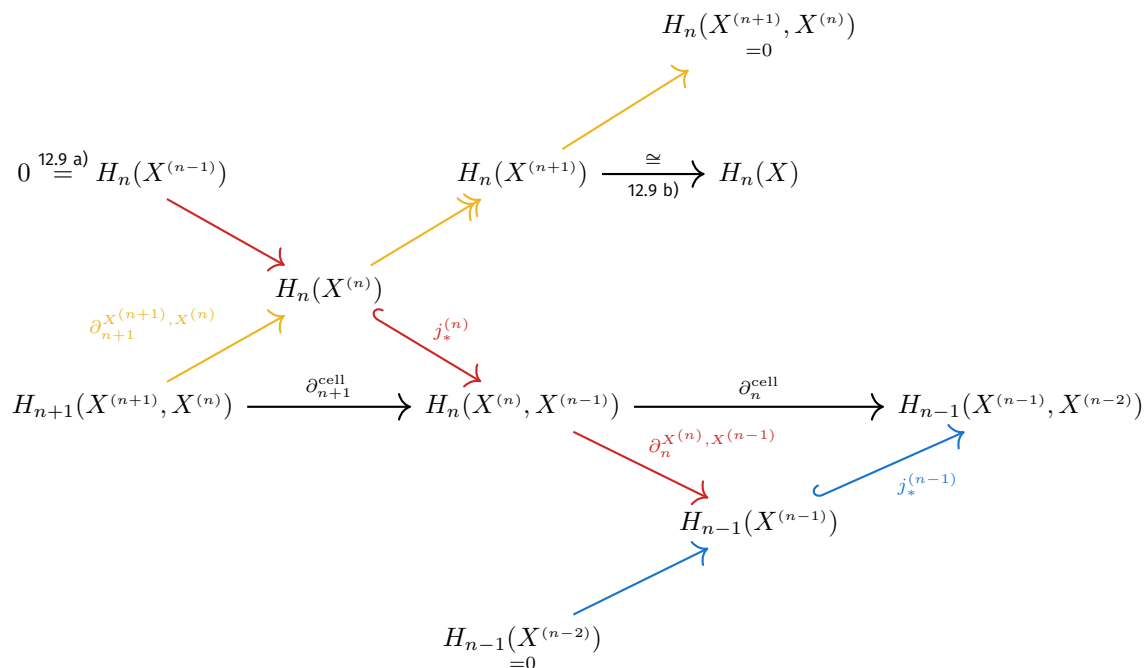
Der  $(j, k)$ -te Eintrag ist nun der Abbildungsgrad von

$$S^{n-1} \xrightarrow{q_k^{(n-2)}} X^{(n-1)} \longrightarrow X^{(n-1)} / X^{(n-2)} \xrightarrow{\cong} \coprod_i D^{n-1} / \coprod_i S^{n-2} \xrightarrow{p_j^{(n-1)}} S^{n-1}$$

**12.7 Definition** Eine natürliche Transformation  $\tau$  zwischen Funktoren  $F, G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  heißt ein **natürlicher Isomorphismus**, wenn  $\tau_C: F(C) \rightarrow G(C)$  für alle Objekte  $C$  von  $\mathcal{C}$  ein Isomorphismus in  $\mathcal{D}$  ist.

**12.8 Satz** Für CW-Komplexe gibt es einen natürlichen Isomorphismus  $\tau_X: H_*^{\text{cell}}(X; R) \xrightarrow{\cong} H_*(X; R)$ .

**BEWEIS (MIT LEMMA 12.9):** Betrachte folgendes Diagramm; die diagonalen Folgen sind Ausschnitte aus den Paarsequenzen:



Es folgt, dass  $j_*^{(n)}$  wegen Exaktheit einen Isomorphismus  $H_n(X^{(n)}; R) \xrightarrow{\cong} \ker \partial_n^{\text{cell}}$  induziert. Da  $j_*^{(n)}$  injektiv ist, induziert  $j_*^{(n)}$  außerdem einen Isomorphismus  $\text{Im } \partial_{n+1}^{X^{(n+1)}, X^{(n)}} \xrightarrow{\cong} \text{Im } \partial_{n+1}^{\text{cell}}$ . Insgesamt erhalten wir natürliche Isomorphismen

$$H_n(X; R) \cong H_n(X^{(n+1)}; R) \cong H_n(X^{(n)}; R) / \text{Im } \partial_{n+1}^{X^{(n+1)}, X^{(n)}} \cong \ker \partial_n^{\text{cell}} / \text{Im } \partial_{n+1}^{\text{cell}} \cong H_n^{\text{cell}}(X; R) \quad \square$$

**12.9 Lemma** Sei  $X$  ein CW-Komplex.

- a) Für  $k > n$  ist  $H_k(X^{(n)}; R) = 0$ .
- b) Für  $k < n$  induziert die Inklusion  $l_n: X^{(n)} \hookrightarrow X$  einen Isomorphismus  $(l_n)_*: H_k(X^{(n)}; R) \rightarrow H_k(X; R)$ .

**BEWEIS:**

- a) Ist  $k > n$ , so erhalten wir aus der Paarfolge einen Isomorphismus

$$\begin{array}{ccccccc} H_{k+1}(X^{(n)}, X^{(n-1)}; R) & \rightarrow & H_k(X^{(n-1)}; R) & \xrightarrow{\cong} & H_k(X^{(n)}; R) & \rightarrow & H_k(X^{(n)}, X^{(n-1)}; R) \\ \stackrel{\text{12.5}}{=} 0 & & & & & & \stackrel{\text{12.5}}{=} 0 \end{array}$$

Da  $H_k(X^{(0)}; R) = 0$  für  $k > 0$ , folgt a) nun durch endliche Induktion für  $n = 0, 1, \dots, k-1$ .

b) Ist  $n > k$ , so erhalten wir aus der Paarfolge

$$H_{k+1}(X^{(n+1)}, X^{(n)}; R) \rightarrow H_k(X^{(n)}; R) \xrightarrow{\cong} H_k(X^{(n+1)}; R) \rightarrow H_k(X^{(n+1)}, X^{(n)}; R) \xrightarrow{12.5} 0$$

Für  $m \geq n > k$  induziert die Inklusion  $X^{(n)} \hookrightarrow X^{(m)}$  daher einen Isomorphismus in Homologie  $H_k(X^{(n)}; R) \rightarrow H_k(X^{(m)}; R)$ . Ist  $\dim X$  endlich, so folgt die Behauptung.

Für den allgemeinen Fall beobachten wir zunächst, dass es zu jeder stetigen Abbildung  $\sigma: |\Delta^j| \rightarrow X$  ein  $n$  gibt mit  $\text{Im } \sigma \subseteq X^{(n)}$ , da  $\text{Im } \sigma \subseteq X$  kompakt ist und daher nur endlich viele offene Zellen von  $X$  trifft (siehe 11.5). Also gilt  $C_*(X; R) = \bigcup_n C_*(X^{(n)}; R)$ . Damit folgt

- (1)  $\forall x \in H_k(X; R)$  existiert ein  $n$ , sodass  $x$  im Bild von  $H_k(X^{(n)}; R) \rightarrow H_k(X; R)$ .
- (2)  $\forall x \in H_k(X^{(n)}; R)$  mit trivialem Bild von  $x$  in  $H_k(X; R)$ , gibt es ein  $m \geq n$ , sodass das Bild von  $x$  in  $H_k(X^{(m)}; R)$  trivial ist.

Da für  $m \geq n > k$  die Abbildung  $H_k(X^{(n)}; R) \rightarrow H_k(X^{(m)}; R)$  ein Isomorphismus ist, ergibt sich damit die Behauptung.  $\square$

**12.10 Korollar** Die Eulercharakteristik eines endlichen simplizialen Komplexes ist eine topologische Invariante.

**BEWEIS:** Sei  $a_n$  die Anzahl der  $n$ -Simplizes von  $K$ . Dann gibt es eine CW-Struktur auf  $|K|$ , die für jedes  $n$  genau  $a_n$  Zellen hat.

$$\chi(K) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i a_i \stackrel{12.5}{=} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \text{Rg } C_i^{\text{cell}}(|K|) \stackrel{4.10}{=} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \text{Rg } H_i^{\text{cell}}(|K|) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \text{Rg } H_i(|K|)$$

Da die  $H_i(|K|)$  eine topologische Invariante sind, ist auch  $\chi(K)$  eine topologische Invariante.  $\square$

**12.11 Bemerkung** Ist  $X$  ein CW-Komplex mit endlich vielen  $n$ - und  $n+1$ -Zellen, so ist  $H_n(X)$  ein endlich erzeugter  $\mathbb{Z}$ -Modul. Man definiert dann die  **$n$ -te Bettizahl** von  $X$  als  $b_n := \text{Rg } H_n(X)$ . Ist  $X$  ein endlicher CW-Komplex, so definiert man die Euler-Charakteristik von  $X$  als

$$\chi(X) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n.$$

Ist  $a_n$  die Anzahl der  $n$ -Zellen von  $X$ , so gilt  $\chi(X) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ .

**12.12 Beispiel** Es gilt

$$H_k(\mathbb{C}P^n; R) \cong \begin{cases} R, & \text{falls } k = 0, 2, 4, \dots, 2n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

**BEWEIS:** Aus Beispiel 11.5 ((v)) wissen wir, dass es auf  $\mathbb{C}P^n$  eine CW-Struktur gibt mit genau einer Zelle in der Dimension  $0, 2, 4, \dots, 2n$  (und keine weiteren Zellen). Der zelluläre Kettenkomplex hat daher folgende Form:

$$\begin{array}{cccccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 2n-1 & 2n & 2n+1 & \dots \\ R & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & R & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & R & \longleftarrow & \dots \end{array}$$

Alle Randabbildungen sind trivial und die Homologie von  $\mathbb{C}P^n$  stimmt mit den zellulären Kettenkomplexen überein.  $\square$



**12.13 Beispiel** Es gilt

$$H_k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{falls } k = 0 \text{ oder } (k = n \text{ und } k \text{ ungerade}) \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & \text{falls } 0 < k < n \text{ und } k \text{ ungerade} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

**BEWEIS:** Aus Beispiel 11.5 ((iv)) wissen wir, dass es eine CW-Struktur auf  $\mathbb{R}P^n$  gibt, die für  $k = 0, \dots, n$  genau eine  $k$ -Zelle und keine weiteren Zellen besitzt. Der zelluläre Kettenkomplex von  $\mathbb{R}P^n$  (über  $\mathbb{Z}$ ) hat also die Form:

$$\mathbb{Z} \xleftarrow{\partial_1^{\text{cell}}} \mathbb{Z} \xleftarrow{\partial_2^{\text{cell}}} \mathbb{Z} \xleftarrow{\quad} \dots \xleftarrow{\quad} \mathbb{Z} \xleftarrow{\partial_n^{\text{cell}}} \mathbb{Z} \xleftarrow{\quad} 0$$

Wir müssen die Randabbildung verstehen. In der CW-Struktur können wir  $(\mathbb{R}P^n)^{(k)}$  mit  $\mathbb{R}P^k$  identifizieren. Die anklebende Abbildung  $q^{(k+1)}: S^k \rightarrow \mathbb{R}P^k$  der  $(k+1)$ -Zelle ist die Projektion  $(x_0, \dots, x_k) \mapsto [x_0 : \dots : x_k]$ . Die charakteristische Abbildung  $Q^{(k+1)}: D^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}P^{k+1}$  der  $(k+1)$ -Zelle ist gegeben durch

$$(x_0, \dots, x_k) \mapsto \left[ x_0 : \dots : x_k : \sqrt{1 - \|(x_1, \dots, x_k)\|^2} \right]$$

Betrachte folgendes kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} C_{k+1}^{\text{cell}}(\mathbb{R}P^n) & \xrightarrow{\partial_{k+1}^{\text{cell}}} & C_k^{\text{cell}}(\mathbb{R}P^n) & & \\ \parallel & & \parallel & & \\ H_{k+1}(\mathbb{R}P^{k+1}, \mathbb{R}P^k) & \xrightarrow{\partial_{\mathbb{R}P^{k+1}, \mathbb{R}P^k}} & H_k(\mathbb{R}P^k) & \longrightarrow & H_k(\mathbb{R}P^k, \mathbb{R}P^{k-1}) \\ \uparrow (Q^{(k+1)}, q^{(k+1)})_* \cong & & \uparrow (q^{(k+1)})_* & & \uparrow (q^{(k+1)}, q^{(k)})_* \\ H_{k+1}(D^{k+1}, S^k) & \xrightarrow[\cong]{\partial_{D^{k+1}, S^k}} & \tilde{H}_k(S^k) & \xrightarrow{j_*} & H_k(S^k, S^{k-1}) \end{array}$$

Das Bild von  $\partial_{k+1}^{\text{cell}}$  stimmt also mit dem Bild der Komposition

$$H_k(S^k) \xrightarrow{j_*} H_k(S^k, S^{k-1}) \xrightarrow{(q^{(k+1)}, q^{(k)})_*} H_k(\mathbb{R}P^k, \mathbb{R}P^{k-1})$$

überein. Sei  $i_{\pm}: D^k \rightarrow S^k$  definiert durch  $i_{\pm}(x) = (\pm x, \pm \sqrt{1 - \|x\|^2})$ . Sei  $l: S^{k-1} \hookrightarrow i_-(D^k)$  die Inklusion und  $R: S^k \rightarrow S^k$  die Punktspiegelung  $x \mapsto -x$ . Es ist  $i_+ = R \circ i_-$ . Betrachte

Das linke untere Quadrat kommutiert, da die Randabbildung aus der Paarfolge eine natürliche Transformation ist. Das rechte, da die zugrunde liegenden Abbildungen kommutieren.

faktorisieren über 0

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}_k(S^k) & & \\ \downarrow j_* & & \\ \begin{array}{c} y_+ \in H_k(D^k, S^{k-1}) \\ \oplus \\ y_- \in H_k(D^k, S^{k-1}) \end{array} & \xrightarrow[\cong]{\begin{array}{c} (i_+, i_+|_{S^{k-1}})_* \\ + \\ (i_-, i_-|_{S^{k-1}})_* \end{array}} & H_k(S^k, S^{k-1}) \xrightarrow[\cong]{\begin{array}{c} (\text{id}_{S^k}, l)_* \\ (R, R|_{S^{k-1}})_* \end{array}} H_k(S^k, i_-(D^k)) \oplus H_k(S^k, i_+(D^k)) \ni x_+ \\ & & \downarrow (q^{(k+1)}, q^{(k)})_* \\ & & H_k(\mathbb{R}P^k, \mathbb{R}P^{k-1}) \end{array} \quad \text{[#]}$$

In der Übungen haben wir gesehen, dass die horizontalen Abbildungen Isomorphismen sind. Sei  $x \in \tilde{H}_k(S^k)$  ein Erzeuger. Seien  $(x_+, x_-)$  und  $(y_+, y_-)$  die Elemente, die  $j_*(x)$  unter den horizontalen Isomorphismen in **[#]** entsprechen. Mit Hilfe der Paarfolge zu  $(S^k, i_-(D^k))$  sehen wir, dass die Inklusion  $j_-: (S^k, \emptyset) \hookrightarrow (S^k, i_-(D^k))$  einen Isomorphismus  $(j_-)_*: \tilde{H}_k(S^k) \rightarrow \tilde{H}_k(S^k, i_-(D^k))$  induziert. Es ist nun  $(\text{id}_{S^k}, l) \circ j = j_-$  und  $(R, R|_{S^{k-1}}) \circ j = j_- \circ R$ . Damit ist  $x_+$  ein Erzeuger von  $H_k(S^k, i_+(D^k))$ . Weiter entspricht  $R_*$  der Multiplikation mit  $(-1)^{k+1}$  nach 10.6. Damit folgt

$$x_- = (R, R|_{S^{k+1}})_* \circ j_*(x) = (\text{id}_{S^k}, l) \circ j_* \circ R_*(x) = (\text{id}_{S^k}, l)_* \circ j_*((-1)^{k+1}x) = (-1)^{k+1} \cdot x_+$$

*Ich sehe noch immer nicht ganz ein, warum dies so ist. Über genauere Ausführungen wäre ich sehr dankbar*

Die Komposition der horizontalen Isomorphismen in **[#]** ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} (i_+, l \circ i_+|_{S^{k-1}})_* & 0 \\ 0 & (R, R|_{S^{k-1}})_* \circ (i_-, i_-|_{S^{k-1}})_* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (i_+, l \circ i_+|_{S^{k-1}})_* & \\ & (i_+, l \circ i_+|_{S^{k-1}})_* \end{pmatrix}$$

Es folgt, dass  $y_+$  ein Erzeuger von  $H_k(D^k, S^{k-1})$  ist und  $y_- = (-1)^{k+1}y_+$  ist. In **[#]** wird  $y_+$  auf  $(q^{(k+1)}, q^{(k)})_* \circ (i_+, i_+|_{S^{k-1}})_*(y_+) = (Q^{(k)}, q^{(k)})_*(y_+)$  abgebildet. Insbesondere wird  $y_+$  auf einen Erzeuger  $z_k \in H_k(\mathbb{R}P^k, \mathbb{R}P^{k-1})$  abgebildet, da diese Abbildung nach 12.5 ein Isomorphismus ist. Es folgt

$$\begin{aligned} (q^{(k+1)}, q^{(k)})_*(j_*(x)) &= (q^{(k+1)}, q^{(k)})_* \left( (i_+, i_+|_{S^{k-1}})_*(y_+) + (i_-, i_-|_{S^{k-1}})_*(y_-) \right) \\ &= (Q^{(k)}, q^{(k)})_*(y_+ + (-1)^{k+1}y_+) \\ &= \begin{cases} 2z_k, & \text{falls } k \text{ ungerade} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Es folgt

$$\text{Im } \partial_{k+1}^{\text{cell}} = \begin{cases} 2 \cdot C_k^{\text{cell}}(X), & \text{falls } k \text{ ungerade} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Der zelluläre Kettenkomplex ist daher isomorph zu:

$$\mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \xleftarrow{2} \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \xleftarrow{\quad} \cdots \xleftarrow{\quad} \mathbb{Z} \xleftarrow{n} 0 \xleftarrow{\quad} 0$$

Womit die Behauptung folgt. □

**BEISPIEL:** Für  $R = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  ist

$$H_k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & \text{falls } k = 0, \dots, n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad \square$$

**12.14 Satz** Sei  $K$  ein geordneter simplizialer Komplex. Für  $\sigma = \{v_0, \dots, v_n\} \in \Sigma_n$  mit  $v_0 < v_1 < \dots < v_n$  sei  $f_\sigma: |\Delta^n| \rightarrow |K|$  gegeben durch  $f_\sigma(\sum_{i=0}^n t_i e_i) = \sum_{i=0}^n t_i v_i$ . Wir erhalten

$$[f_\sigma] \in H_n(|K|^{(n)}, |K|^{(n-1)}; R) = C_n^{\text{cell}}(|K|; R).$$

Diese Zuordnung definiert einen Isomorphismus zwischen dem simplizialen Kettenkomplex von  $K$  und dem zellulären Kettenkomplex von  $|K|$

$$\tau: C_*(K; R) \longrightarrow C_*^{\text{cell}}(|K|, R)$$

Insbesondere ist  $H_*(K; R) \cong H_*(|K|; R)$  eine topologische Invariante von  $K$ .

**BEWEIS:** Betrachte

$$\begin{array}{ccc}
 \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_n} R & \xrightarrow{\cong} & \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_n} H_n(|\Delta^\sigma|, |\partial \Delta^\sigma|; R) \\
 \cong \downarrow & & \cong \downarrow \\
 C_n(K; R) & \xrightarrow{\tau} & H_n(|K|^{(n)}, |K|^{(n-1)}; R)
 \end{array}$$

Nun ist auch  $\tau$  ein Isomorphismus, da  $[f_\sigma]$  ein Erzeuger von  $H_n(|\Delta^\sigma|, |\partial \Delta^\sigma|; R)$  ist, siehe Blatt 8. Es bleibt zu zeigen, dass  $\sigma \mapsto [f_\sigma]$  mit den Randabbildungen vertauscht. Dies ergibt sich sofort aus  $f_{\partial_j \sigma} = \partial_j f_\sigma$ .  $\square$

## 13 Kleine Simplexiz

**13.1 Ausschneidungssatz** Sei  $(X, A)$  ein Paar von topologischen Räumen. Sei  $L \subseteq A$  mit  $\bar{L} \subseteq \mathring{A}$ . Dann induziert die Inklusion  $(X \setminus L, A \setminus L) \hookrightarrow (X, A)$  den Ausschneidungs-Isomorphismus  $H_*(X \setminus L, A \setminus L; R) \xrightarrow{\cong} H_*(X, A; R)$ .

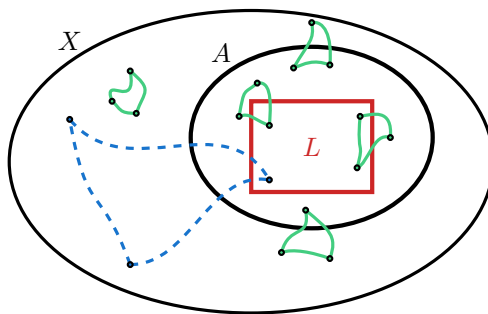


Abbildung 4: Skizze zur Ausschneidung mit kleinen Simplexiz

**13.2 Definition** Sei  $\mathcal{U}$  eine offene Überdeckung von  $X$ . Ein singulärer Simplex  $\sigma: |\Delta^n| \rightarrow X$  heißt  $\mathcal{U}$ -*klein*, falls es ein  $U \in \mathcal{U}$  gibt mit  $\text{Im } \sigma \subseteq U$ . Die  $\mathcal{U}$ -kleinen Simplexiz erzeugen den Unterkettenkomplex  $(C_*^{\mathcal{U}}(X; R), \partial_*)$  des simplizialen Kettenkomplexes  $(C_*(X; R), \partial_*)$ .

**13.3 Satz über kleine Simplexiz** Die Inklusion  $C_*^{\mathcal{U}}(X; R) \hookrightarrow C_*(X; R)$  induziert einen Isomorphismus in Homologie.

**13.4 Bemerkung** Der Satz über kleine Simplexiz lässt sich leicht auf Paare von topologischen Räumen verallgemeinern. Für eine Überdeckung  $\mathcal{U}$  von  $X$  setzen wir

$$C_*^{\mathcal{U}}(X, A; R) := C_*^{\mathcal{U}}(X; R) / C_*(A; R) \cap C_*^{\mathcal{U}}(X; R)$$

Dann induziert die Inklusion  $C_*^{\mathcal{U}}(X, A; R) \hookrightarrow C_*(X, A; R)$  einen Isomorphismus in Homologie. Der Beweis benutzt die Paarfolge und das Fünfer-Lemma.

**13.5 Beweis des Ausschneidungssatzes (13.1)** Seien  $\mathcal{U} := \{\mathring{A}, X \setminus \bar{L}\}$  und  $\mathcal{U}_L := \{\mathring{A} \setminus L, X \setminus \bar{L}\}$ . Nach dem Satz über kleine Simplexiz induzieren die beiden vertikalen Inklusionen in folgendem Diagramm Isomorphismen in Homologie:

$$\begin{array}{ccc} C_*^{\mathcal{U}_L}(X \setminus L, A \setminus L; R) & \xrightarrow{\cong} & C_*^{\mathcal{U}}(X, A; R) \\ \downarrow & & \downarrow \\ C_*(X \setminus L, A \setminus L; R) & \xrightarrow{(\star)} & C_*(X, A; R) \end{array}$$

Wie man sich leicht überlegt, ist außerdem die obere Abbildung ein Isomorphismus. Daher induziert auch die Inklusion  $(\star)$  einen Isomorphismus in  $H_*$ .  $\square$

**13.6 Idee zum Beweis des Satzes über kleine Simplexiz** Um den Satz über kleine Simplexiz beweisen zu können, müssen wir uns überlegen, wie wir einen Simplex systematisch in kleinere zerlegen können:

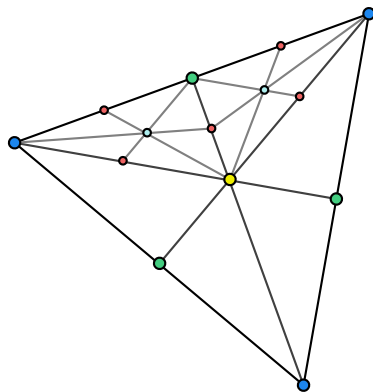
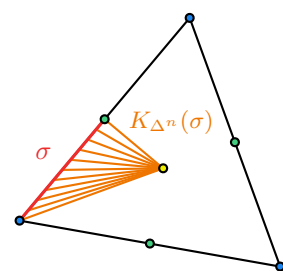


Abbildung 5: Zerteilung eines 2-Simplex

**13.7 Definition**  $s_n := \left(\frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1}\right) \in |\Delta^n|$  heißt der **Schwerpunkt** von  $|\Delta^n|$ . Ist  $\sigma: |\Delta^p| \rightarrow |\Delta^n|$  ein singulärer  $p$ -Simplex, so definieren wir  $(K_{\Delta^n})(\sigma): |\Delta^{p+1}| \rightarrow |\Delta^n|$  durch

$$(K_{\Delta^n})(\sigma)(t_0, \dots, t_{p+1}) = t_0 \cdot s_n + (1 - t_0) \cdot \sigma\left(\frac{(t_1, \dots, t_{p+1})}{1 - t_0}\right)$$

Wir erhalten eine Abbildung  $(K_{\Delta^n})_p: C_p(|\Delta^n|; R) \rightarrow C_{p+1}(|\Delta^n|; R)$ . **Abb. 6:** Skizze des „Abkegeln“



„Abkegeln“

**13.8 Lemma** Sei  $\text{const}_{s_n}: |\Delta^n| \rightarrow |\Delta^n|$  die konstante Abbildung mit  $\text{Im}(\text{const}_{s_n}) = \{s_n\}$ . Dann ist  $(K_{\Delta^n})_*$  eine Kettenhomotopie zwischen  $\text{id}$  und  $(\text{const}_{s_n})_*$ .

**BEWEIS:** Sei  $\sigma$  ein singulärer  $p$ -Simplex in  $|\Delta^n|$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \partial_{p+1} \circ (K_{\Delta^n})_p(\sigma) &= \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j (K_{\Delta^n})_p(\sigma) \circ \iota_{p+1,j} = \sigma + \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^j (K_{\Delta^n})_p(\sigma) \circ \iota_{p+1,j} \\ &= \sigma + \begin{cases} \sum_{j=0}^p (-1)^{j+1} (K_{\Delta^n})_{p-1}(\sigma \circ \iota_{p,j}), & p \geq 1 \\ -\text{const}_{s_n}: |\Delta^0| \rightarrow \{s_n\}, & p = 0 \end{cases} \\ &= \sigma - \begin{cases} (K_{\Delta^n})_{p-1}(\partial_p \circ \sigma), & \text{falls } p \geq 1 \\ \text{const}_{s_n}, & \text{falls } p = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Also ist  $\partial_{p+1} \circ (K_{\Delta^n})_p + (K_{\Delta^n})_{p-1} \circ \partial_p = \text{id} - (\text{const}_{s_n})_*$ .  $\square$

**13.9 Definition** Wir definieren induktiv natürliche Transformationen  $B_n: C_n(-; R) \rightarrow C_n(-; R)$  und  $H_n: C_n(-; R) \rightarrow C_{n+1}(-; R)$  wie folgt: Für  $n = 0$  setzen wir  $(B_0)_X = \text{id}$ . Sei  $B_k$  nun schon für  $k = 0, \dots, n-1$  definiert. Betrachte zunächst  $\text{id}_{|\Delta^n|} \in C_n(|\Delta^n|; R)$ . Dafür setzen wir

$$(B_n)_{|\Delta^n|}(\text{id}_{|\Delta^n|}) := (K_{\Delta^n})_{n-1} \circ (B_{n-1})_{|\Delta^n|} \circ \partial_n(\text{id}_{|\Delta^n|})$$

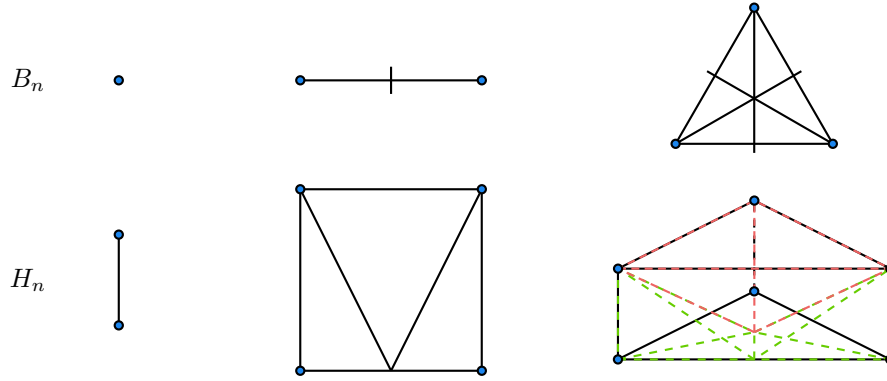
Ist  $\sigma: |\Delta^n| \rightarrow X$  ein beliebiger singulärer  $n$ -Simplex in  $X$ , so ist  $\sigma = \sigma_*(\text{id}_{|\Delta^n|})$ , also setzen wir<sup>6</sup>

$$(B_n)_X(\sigma) := \sigma_*((B_n)_{|\Delta^n|}(\text{id}_{|\Delta^n|}))$$

<sup>6</sup>  $(B_n)_X(\sigma) = (B_n)_X(\sigma_*(\text{id}_{|\Delta^n|})) = \sigma_*((B_n)_{|\Delta^n|}(\text{id}_{|\Delta^n|}))$  muss wegen Natürlichkeit gelten

Für  $n = 0$  und  $\sigma: |\Delta^0| \rightarrow X$  setzen wir  $(H_0)_X(\sigma)$  als den konstanten 1-Simplex, dessen Bild der Punkt  $\sigma(|\Delta^0|)$  ist. Ist  $H_{n-1}$  schon definiert, so setzen wir für einen singulären  $n$ -Simplex  $\sigma: |\Delta^n| \rightarrow X$

$$(H_n)_X(\sigma) := \sigma_* \left( (K_{\Delta^n})_n (\text{id}_{|\Delta^n|} - (H_{n-1})_{|\Delta^n|} \circ \partial_n (\text{id}_{|\Delta^n|})) \right)$$



**Abbildung 7:** Die natürlichen Transformationen  $B_n$  und  $H_n$  für  $n = 0, 1, 2$

**13.10 Lemma 1** Für jeden topologischen Raum  $X$  ist  $(B_*)_X$  eine Kettenabbildung und  $(H_*)_X$  eine Kettenhomotopie zwischen  $(B_*)_X$  und der Identität.

**BEWEIS:** Wir müssen zeigen, dass folgende Gleichung gilt

$$\partial_{n+1} \circ (H_n)_X + (H_{n-1})_X \circ \partial_n = (B_n)_X - \text{id} \quad [\#]$$

Da  $\text{id}$  eine Kettenabbildung ist, ist dann auch  $(B_*)_X$  eine Kettenabbildung und  $(H_*)_X$  eine Kettenhomotopie zwischen  $\text{id}$  und  $(B_*)_X$ . Wir beweisen  $[\#]$  durch Induktion nach  $n$ . Für  $n = 0$  und  $\sigma: |\Delta^0| \rightarrow X$  ist

$$\partial_1((H_0)_X(\sigma)) = 0 \quad \text{und} \quad (B_0)_X(\sigma) = \sigma$$

Also gilt  $[\#]$  für  $n = 0$ . Für den Induktionsschritt  $n - 1 \mapsto n$  betrachten wir  $\sigma: |\Delta^n| \rightarrow X$ . Es gilt

$$\begin{aligned} \partial_{n+1} \circ (H_n)_X(\sigma) &= \sigma_* \circ \partial_{n+1} \circ (H_n)_{|\Delta^n|}(\text{id}_{|\Delta^n|}) \\ &= \sigma_* \circ \partial_{n+1} \left( (K_{|\Delta^n|})_n (\text{id}_{|\Delta^n|} - (H_{n-1})_{|\Delta^n|} \circ \partial_n (\text{id}_{|\Delta^n|})) \right) \\ &\stackrel{\text{vgl. 13.8}}{=} \sigma_* \left( -(K_{|\Delta^n|})_{n-1} \circ \partial_n (\text{id}_{|\Delta^n|} - (H_{n-1})_{|\Delta^n|} \circ \partial_n (\text{id}_{|\Delta^n|})) \right) \\ &\quad + \sigma_* (\text{id}_{|\Delta^n|} - (H_{n-1})_{|\Delta^n|} \circ \partial_n (\text{id}_{|\Delta^n|})) \\ &\stackrel{\text{I.A.}}{=} \sigma_* \left( -(K_{|\Delta^n|})_{n-1} \circ \partial_n (\text{id}_{|\Delta^n|}) \right) - \sigma_* \left( -(K_{|\Delta^n|})_{n-1} (\text{id} - (B_{n-1})_{|\Delta^n|}) \partial_n (\text{id}_{|\Delta^n|}) \right) \\ &\quad + \sigma - (H_{n-1})_X \circ \partial_n(\sigma) \\ &= -\sigma_* \left( (K_{|\Delta^n|})_{n-1} \circ (B_{n-1})_{|\Delta^n|} \circ \partial_n (\text{id}_{|\Delta^n|}) \right) + \sigma - (H_{n-1})_X \circ \partial_n(\sigma) \\ &= -\sigma_* \left( (B_n)_{|\Delta^n|} (\text{id}_{|\Delta^n|}) \right) + \sigma - (H_{n-1})_X \circ \partial_n(\sigma) \\ &= -(B_n)_X(\sigma) + \sigma - (H_{n-1})_X \circ \partial_n(\sigma) \end{aligned}$$

Also ist  $\partial_{n+1} \circ H_n(\sigma) + H_{n-1} \circ \partial_n(\sigma) = \sigma - (B_n)_X(\sigma)$ .  $\square$

**13.11 Lemma 2** Sei  $\mathcal{U}$  eine offene Überdeckung von  $X$ . Sei  $\alpha \in C_n(X; R)$ . Dann existiert ein  $k_0 \geq 0$  so, dass  $(B_n)_X^k(\alpha) \in C_n^{\mathcal{U}}(X; R)$  für alle  $k \geq k_0$ .

$(B_n)_X^k$  meint die  $k$ -fache Komposition von  $(B_n) - X$

**BEWEIS (MIT LEMMA 3, 13.16):** Es genügt einen singulären Simplex  $\sigma: |\Delta^n| \rightarrow X$  zu betrachten. Wir setzen  $\sigma^*\mathcal{U} := \{\sigma^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{U}\}$ . Dann gilt

$$\sigma_*(C_*^{\sigma^*\mathcal{U}}(|\Delta^n|; R)) \subseteq C_*^{\mathcal{U}}(X; R).$$

Da  $(B_n)_X^k(\sigma) = \sigma_*((B_n)_{|\Delta^n|}^k(\text{id}_{|\Delta^n|}))$  genügt es zu zeigen, dass  $(B_n)_{|\Delta^n|}^k(\text{id}_{|\Delta^n|}) \in C_*^{\sigma^*\mathcal{U}}(|\Delta^n|; R)$  für ein geeignetes  $k > 0$ . Sei  $\varepsilon > 0$  eine Lebesguezahl<sup>7</sup> für  $\sigma^*\mathcal{U}$ , das heißt

$$\forall x \in |\Delta^n| : \exists V \in \sigma^*\mathcal{U} : B_\varepsilon(x) \subseteq V$$

Wähle nun  $k > 0$  mit  $\left(\frac{n}{n+1}\right)^k \cdot \text{diam}(\text{id}_{|\Delta^n|}) < \varepsilon$ . Dann gilt nach Lemma 3 (iii)

$$(B_n)_{|\Delta^n|}^k(\text{id}_{|\Delta^n|}) \in C_*^{\sigma^*\mathcal{U}}(|\Delta^n|; R) \quad \square$$

**13.12 Beweis des Satzes über kleine Simplex (13.3)** Sei  $x \in H_n(X; R)$ . Wähle  $\alpha \in C_n(X; R)$  mit  $[\alpha] = x$ . Nach Lemma 2 gibt es ein  $k$  mit  $(B_n)_X^k(\alpha) \in C_n^{\mathcal{U}}(X; R)$ . Mit Lemma 1 folgt  $x = [\alpha] = [(B_n)_X^k(\alpha)]$ . Daher ist die von  $C_*^{\mathcal{U}}(X; R) \hookrightarrow C_*(X; R)$  induzierte Abbildung in  $H_*$  surjektiv.

Sei nun  $x$  im Kern von  $H_n(C_*^{\mathcal{U}}(X; R)) \rightarrow H_n(C_*(X; R))$ . Sei  $\alpha \in C_n^{\mathcal{U}}(X; R)$  mit  $x = [\alpha]$ . Da  $x$  im Kern liegt, gibt es  $\beta \in C_{n+1}(X; R)$  mit  $\partial_{n+1}(\beta) = \alpha$ . Nach Lemma 2 gibt es ein  $k$  mit  $(B_n)_X^k(\beta) \in C_n^{\mathcal{U}}(X; R)$ . Mit Lemma 1 folgt nun

$$x = [\alpha] = [(B_n)_X^k(\alpha)] = [(B_n)_X^k(\partial_{n+1}\beta)] = [\partial_n((B_{n+1})_X^k(\beta))]$$

Also ist  $x = 0$  in  $H_*(C_*^{\mathcal{U}}(X; R))$ .  $\square$

**13.13 Bemerkung** Seien  $(C_*, \partial_*)$  und  $(C'_*, \partial'_*)$  Kettenkomplexe und  $s_n: C_n \rightarrow C'_{n+1}$  eine Abbildung, die den Grad um 1 erhöht. Dann ist  $s_{n-1} \circ \partial_n + \partial'_{n+1} \circ s_n$  eine Kettenabbildung, da

$$(s_{n-1} \circ \partial_n + \partial'_{n+1} \circ s_n) \circ \partial_{n+1} = \partial'_{n+1} \circ (s_n \circ \partial_{n+1} + \partial'_{n+2} \circ s_{n+1})$$

Insbesondere gilt: Wenn  $s \circ \partial + \partial' \circ s = f - g$  für eine Kettenabbildung  $f: C_* \rightarrow C'_*$ , dann ist auch  $g$  eine Kettenabbildung.

**13.14 Definition** Seien  $v_0, \dots, v_p \in |\Delta^n|$ . Dann bezeichnen wir mit  $[v_0, \dots, v_p]$  den singulären  $p$ -Simplex mit  $\sum_{i=0}^p t_i e_i \rightarrow \sum_{i=1}^p t_i v_i$ . Singuläre Simplex dieser Form heißen **affin**.

**13.15 Definition** Sei  $\|\cdot\|$  eine Norm auf  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Für einen singulären Simplex  $\sigma: |\Delta^p| \rightarrow |\Delta^n|$  definieren wir den **Durchmesser** von  $\sigma$  durch

$$\text{diam}(\sigma) := \max\{\|\sigma(x) - \sigma(y)\| \mid x, y \in |\Delta^p|\}$$


**13.16 Lemma 3** Sei  $[v_0, \dots, v_p]$  ein affiner singulärer  $p$ -Simplex in  $|\Delta^n|$ . Dann gilt:

(i) Es gilt  $\text{diam}([v_0, \dots, v_p]) = \max\{\|v_i - v_j\| \mid 0 \leq i, j \leq p\}$

(ii) Es ist

$$(B_p)_{|\Delta^n|}([v_0, \dots, v_p]) = \sum_{\sigma \in \Sigma_{\{v_0, \dots, v_p\}}} \text{sgn}(\sigma) \cdot \underbrace{\left[ \frac{\sum_{i=0}^p \sigma(v_i)}{p+1}, \frac{\sum_{i=0}^{p-1} \sigma(v_i)}{p}, \dots, \sigma(v_0) \right]}_{=: \tau_\sigma}$$

(iii) Für  $\sigma \in \Sigma_{\{v_0, \dots, v_p\}}$  ist  $\text{diam} \tau_\sigma \leq \frac{n}{n+1} \text{diam}[v_0, \dots, v_p]$ .

<sup>7</sup> siehe <https://de.wikipedia.org/wiki/Lebesguezahl> 

**BEWEIS:**

(i) Seien  $v, v' \in \text{Im}([v_0, \dots, v_p])$ . Dann ist  $v = \sum_{i=0}^p t_i v_i$  und  $v' = \sum_{i=0}^p t'_i v_i$  mit  $t_i, t'_i \in [0, 1]$ , sowie  $\sum_{i=0}^p t_i = 1 = \sum_{i=0}^p t'_i$ . Es gilt nun

$$\begin{aligned} \|v - v'\| &= \left\| \sum_{i=0}^p t_i v_i - v' \right\| = \left\| \sum_{i=0}^p t_i v_i - \sum_{i=0}^p t'_i v_i \right\| = \left\| \sum_{i=0}^p t_i (v_i - v') \right\| \leq \sum_{i=0}^p t_i \|v_i - v'\| \\ &\leq \left( \sum_{i=0}^p t_i \right) \max_i \|v_i - v'\| = \max_i \|v_i - v'\| \\ &= \max_i \left\| v_i - \sum_{j=0}^p t'_j v_j \right\| \\ &= \max_i \left\| \sum_{j=0}^p t'_j v_i + \sum_{j=0}^p t'_j v_j \right\| \leq \dots \leq \max_{i,j} \|v_i - v_j\|. \end{aligned}$$

(ii) Per Induktion nach  $p$ . Für  $p = 0$  ist  $(B_0)_{|\Delta^n|} = \text{id}$  und die Aussage wahr.

Für  $p - 1 \mapsto p$  genügt es  $n = p$  und  $[v_0, \dots, v_p] = [e_0, \dots, e_p]$  zu betrachten. Es gilt

$$\begin{aligned} B_p([v_0, \dots, v_p]) &= K_{p-1} \circ B_{p-1} \circ \partial_p([e_0, \dots, e_p]) \\ &= \sum_{i=0}^p (-1)^i \cdot K_{p-1} \circ B_{p-1}([e_0, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_p]) \\ &\stackrel{\text{i.V.}}{=} \sum_{i=0}^p (-1)^i \cdot \sum_{\sigma \in \sum_{\{e_0, \dots, e_p\} \setminus \{e_i\}}} \text{sgn}(\sigma) \cdot K_{p-1} \left( \left[ \frac{\sigma(e_0) + \dots + \sigma(e_{i-1}) + \sigma(e_{i+1}) + \dots + \sigma(e_p)}{p}, \dots \right] \right) \\ &= \sum_{i=0}^p (-1)^i \cdot \sum_{\sigma \in \sum_{\{e_0, \dots, e_p\} \setminus \{e_i\}}} \text{sgn}(\sigma) \cdot \left[ \frac{e_0 + \dots + e_p}{p+1}, \frac{\sigma(e_0) + \dots + \sigma(e_{i-1}) + \sigma(e_{i+1}) + \dots + \sigma(e_p)}{p}, \dots \right] \\ &= \dots = \sum_{\sigma \in \sum_{\{e_0, \dots, e_n\}}} \text{sgn}(\sigma) \cdot \left[ \frac{\sum_{i=0}^p \sigma(e_i)}{p+1}, \dots, \sigma(e_0) \right] \end{aligned}$$

(iii) Es genügt  $\sigma = \text{id}$  zu betrachten. Es ist

$$\begin{aligned} \text{diam} \left[ \frac{v_0 + \dots + v_p}{p+1}, \frac{v_0 + \dots + v_{p-1}}{p}, \dots, v_0 \right] &\stackrel{(i)}{=} \max_{i < j} \left\| \frac{v_0 + \dots + v_i}{i+1} - \frac{v_0 + \dots + v_j}{j+1} \right\| \\ &= \max_{i < j} \left\| \frac{v_0 + \dots + v_i}{i+1} - \frac{v_0 + \dots + v_i}{j+1} - \frac{v_{i+1} + \dots + v_j}{j+1} \right\| \\ &= \max_{i < j} \left\| \frac{(j+1) - (i+1)}{(i+1)(j+1)} (v_0 + \dots + v_i) - \frac{1}{j+1} (v_{i+1} + \dots + v_j) \right\| \\ &= \max_{i < j} \frac{j-i}{j+1} \cdot \left\| \underbrace{\frac{v_0 + \dots + v_i}{i+1}}_{\in \text{Im}[v_0, \dots, v_n]} - \underbrace{\frac{v_{i+1} + \dots + v_j}{j-i}}_{\in \text{Im}[v_0, \dots, v_n]} \right\| \\ &\leq \max_{i < j} \frac{j-i}{j+1} \text{diam}[v_0, \dots, v_n] \\ &\leq \max_j \frac{j}{j+1} \text{diam}[v_0, \dots, v_n] \leq \frac{n}{n+1} \text{diam}[v_0, \dots, v_n] \quad \square \end{aligned}$$

Aus Platzgründen  
wird der Index  $|\Delta^p|$   
bei den Abbildungen  
 $(K_{|\Delta^p|})_*$  und  
 $(B_*)_{|\Delta^p|}$  weggelassen



## 14 Axiome für Homologie

**14.1 Bezeichnung** Mit  $V: \text{Top}^2 \rightarrow \text{Top}^2$  bezeichnen wir den Funktor  $V(X, A) = (A, \emptyset) = A$ .

**14.2 Definition** Eine *Homologietheorie* mit Werten in  $R$ -Moduln ist ein Funktor

$$E_*: \text{HTop}^2 \longrightarrow \text{GR-}R\text{-MOD}$$

zusammen mit einer natürlichen Transformation  $\partial_{*+1}: E_{*+1} \rightarrow E_* \circ V$ ,<sup>8</sup> sodass folgende Axiome gelten:

(i) **Paarfolge:** Sei  $(X, A)$  ein Paar von topologischen Räumen. Seien  $X = (X, \emptyset) \xrightarrow{j} (X, A)$  und  $A = (A, \emptyset) \xrightarrow{i} X = (X, \emptyset)$  die Inklusionen. Dann ist

$$\cdots \longrightarrow E_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\partial_{n+1}} E_n(A) \xrightarrow{E_n(i)} E_n(X) \xrightarrow{E_n(j)} E_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n} E_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots$$

eine lange exakte Folge.

(ii) **Ausschneidung:** Sei  $(X, A)$  ein Paar von topologischen Räumen und  $L \subseteq A$  mit  $\bar{L} \subseteq \mathring{A}$ . Dann induziert die Inklusion  $i: (X \setminus L, A \setminus L) \hookrightarrow (X, A)$  einen Isomorphismus

$$E_*(i): E_*(X \setminus L, A \setminus L) \xrightarrow{\cong} E_*(X, A)$$

**14.3 Bemerkung** Homologietheorien sind homotopieinvariant. Oft wird dies als eigenes Axiom formuliert.

**14.4 Bemerkung** Für jede Homologietheorie gibt es eine Mayer-Vietoris-Folge. Dies ist eine formale Konsequenz aus der Paarfolge und dem Ausschneidungsisomorphismus. Eine einfache Folgerung aus der Mayer-Vietoris-Folge ist, dass jede Homologietheorie mit *endlichen* disjunkten Vereinigungen verträglich ist: Sei dazu  $X = X_1 \amalg \cdots \amalg X_n$  und  $j_i: X_i \rightarrow X$  die Inklusion, dann ist

$$E_*(X_1) \oplus \cdots \oplus E_*(X_n) \xrightarrow{E_*(j_1) \oplus \cdots \oplus E_*(j_n)} E_*(X)$$

ein Isomorphismus.

**14.5 Definition** Zwei weitere Axiome, die Homologietheorien mit Werten in  $R$ -Moduln erfüllen können, sind:

**Dimensionsaxiom:** Für den Einpunktraum  $\{x_0\}$  ist  $E_0(\{x_0\}) \cong R$  und  $E_n(\{x_0\}) = 0$  für  $n \neq 0$ .

**Disjunkte Vereinigung:** Sei  $X = \coprod_{i \in I} X_i$  und  $j_i: X_i \rightarrow X$  die Inklusion. Dann ist

$$\bigoplus_{i \in I} E_*(j_i): \bigoplus_{i \in I} E_*(X_i) \longrightarrow E_*(X)$$

ein Isomorphismus.

**14.6 Bemerkung** In Kapitel 6 haben wir  $\text{GR-}R\text{-MOD}$  als die Kategorie der  $\mathbb{N}$ -graduierten  $R$ -Moduln definiert. Für viele Homologietheorien muss man diese Kategorie etwas vergrößern und  $\mathbb{Z}$ -graduierte  $R$ -Moduln zulassen. Objekte sind dann Folgen  $(M_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  über  $\mathbb{Z}$  von  $R$ -Moduln  $M_n$ .

<sup>8</sup> Genauer: Sei  $S: \text{GR-}R\text{-MOD} \rightarrow \text{GR-}R\text{-MOD}$  der Funktor  $(SM)_n = M_{n+1}$ . Dann ist  $\partial_*$  eine natürliche Transformation  $S \circ E_* \rightarrow E_* \circ V$ , für  $(X, A)$  also  $S(E_*(X, A)) \rightarrow E_*(V(X, A))$ ,  $E_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\partial_*} E_n(A)$ .

## 14.7 Bemerkung

Aufgabe 1 Blatt 12

- Für jede Homologietheorie  $E_*$  gilt:  $E_*(S^n) \cong E_*(\{\text{pt}\}) \oplus E_{*-n}(\{\text{pt}\})$
- Die Konstruktion des zellulären Kettenkomplexes in singulärer Homologie benutzte nur die Axiome aus 14.2. Für die Identifikation der zellulären Homologie mit der singulären Homologie waren zusätzlich die Axiome aus 14.5 notwendig. Ohne das Axiom über disjunkte Vereinigungen kann man nur endliche CW-Komplexe behandeln. Ohne das Dimensionsaxiom erhält man an der Stelle der zellulären Kettenkomplex eine sogenannte **Spektralfolge**, die Atiyah-Hirzebruch Spektralfolge.

**14.8 Definition** Seien  $(E_*, \partial_*^E)$  und  $(F_*, \partial_*^F)$  Homologietheorien. Ein **Morphismus von Homologietheorien** ist eine natürliche Transformation  $\tau_*: E_* \rightarrow F_*$ , sodass  $\tau_* \circ \partial_{*+1}^E = \partial_*^F \circ \tau_{*+1}$ . Also kommutiert für alle  $(X, A)$  das folgende Diagramm

$$\begin{array}{ccc} E_{n+1}(X, A) & \xrightarrow{\partial_{n+1}^E} & E_n(A) \\ \downarrow \tau_{n+1, (X, A)} & & \downarrow \tau_{n, A} \\ F_{n+1}(X, A) & \xrightarrow{\partial_{n+1}^F} & F_n(A) \end{array}$$

**14.9 Satz** Sei  $\tau_*: (E_*, \partial_*^E) \rightarrow (F_*, \partial_*^F)$  ein Morphismus von Homologietheorien. Ist

$$(\tau_*)_{\{\text{pt}\}}: E_*(\{\text{pt}\}) \rightarrow F_*(\{\text{pt}\})$$

ein Isomorphismus, dann ist  $(\tau_*)_X$  für jeden endlichen CW-Komplex ein Isomorphismus. Sind  $E_*$  und  $F_*$  mit beliebigen disjunkten Vereinigungen verträglich, so ist  $(\tau_*)_X$  für alle CW-Komplexe ein Isomorphismus.

**BEWEIS:**

**Schritt 1:** Sei  $X$  ein 0-dimensionaler endlicher CW-Komplex, also eine endliche Menge mit der diskreten Topologie. Für  $x \in X$  sei  $i_x: \{x\} \rightarrow X$  die Inklusion. Wir erhalten folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} E_*(X) & \xrightarrow{(\tau_*)_X} & F_*(X) \\ \cong \uparrow & & \cong \uparrow \\ \bigoplus_{x \in X} E_*(\{x\}) & \xrightarrow[\cong]{\bigoplus_{x \in X} (\tau_*)_{\{x\}}} & \bigoplus_{x \in X} F_*(\{x\}) \end{array}$$

Das Diagramm kommutiert, da  $\tau_*$  eine natürliche Transformation ist.

**Schritt 2:** Angenommen  $(\tau_*)_X$  ist ein Isomorphismus für jeden endlichen CW-Komplex von Dimension echt kleiner als  $n$ . Sei  $X$  ein  $n$ -dimensionaler endlicher CW-Komplex:

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{i \in I} S^{n-1} & \xrightarrow{\coprod q_i^{(n)}} & X^{(n-1)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{i \in I} D^n & \xrightarrow{\coprod Q_i^{(n)}} & X \end{array}$$

Sei  $X_+^{(n-1)} := X^{(n-1)} \cup \coprod_{i \in I} Q_i^{(n)}(D^n \setminus \{0\})$  und  $Z := \coprod_{i \in I} Q_i^{(n)}(\mathring{D}^n)$ . Dann sind  $X_+^{(n-1)}$ ,  $Z$  und  $Z \cap X_+^{(n-1)}$  homotopieäquivalent zu endlichen CW-Komplexen mit Dimension echt kleiner  $n$ . Insbesondere sind  $(\tau_*)_{X_+^{(n-1)}}$ ,  $(\tau_*)_Z$  und  $(\tau_*)_{X_+^{(n-1)} \cap Z}$  Isomorphismen. Da  $X_+^{(n-1)} \subseteq X$  und  $Z \subseteq X$  offen sind, erhalten wir in  $E_*$  und  $F_*$  zugehörigen Mayer-Vietoris-Folgen:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & E_*(X_+^{(n-1)} \cap Z) & \longrightarrow & E_*(X_+^{(n-1)}) \oplus E_*(Z) & \longrightarrow & E_*(X) \xrightarrow{\partial_*^{\text{MV}, E}} E_{*-1}(X_+^{(n-1)} \cap Z) \longrightarrow \cdots \\
 & & \cong \downarrow (\tau_*)_{X_+^{(n-1)} \cap Z} & & \cong \downarrow (\tau_*)_{X_+^{(n-1)} \oplus (\tau_*)_Z} & & \downarrow (\tau_*)_X & & \cong \downarrow (\tau_{*-1})_{X_+^{(n-1)} \cap Z} \\
 \cdots & \longrightarrow & F_*(X_+^{(n-1)} \cap Z) & \longrightarrow & F_*(X_+^{(n-1)}) \oplus F_*(Z) & \longrightarrow & F_*(X) \xrightarrow{\partial_*^{\text{MV}, F}} F_{*-1}(X_+^{(n-1)} \cap Z) \longrightarrow \cdots
 \end{array}$$

Da  $\tau_*$  eine natürliche Transformation ist, kommutierten die beiden linken Vierecke. Da  $\tau_*$  mit der Randabbildung der Paarfolgen von  $E_*$  und  $F_*$  kommutiert, kommutiert auch  $\tau_*$  mit den Randabbildungen der Mayer-Vietoris-Folgen in  $E_*$  und  $F_*$ . Also kommutiert auch das dritte Viereck. Mit dem 5er-Lemma (8.15) folgt, dass auch  $(\tau_*)_X$  ein Isomorphismus ist.

Erfüllen  $E_*$  und  $F_*$  auch das Dimensionsaxiom, so zeigen die Argumente aus Schritt 1 und 2, dass  $(\tau_*)_X$  ein Isomorphismus ist für jeden endlich dimensional CW-Komplex.

**Schritt 3:** Sei  $X$  ein CW-Komplex. Sei

$$X^+ := \left\{ (x, t) \mid x \in X^{(n)}, t \in (n + 1/2, \infty) \right\} \subseteq X \times (1/2, \infty)$$

Sei weiter

$$X_0 := X^+ \cap \left( X \times ((1/2, \infty) \setminus \{1, 3, 4, \dots\}) \right) \quad X_1 := X^+ \cap \left( X \times ((1/2, \infty) \setminus \{2, 4, 6, \dots\}) \right)$$

Dann sind  $X_0$ ,  $X_1$  und  $X_0 \cap X_1$  homotopieäquivalent zu disjunkten Vereinigungen von endlich-dimensionalen CW-Komplexen. Sind  $E_*$  und  $F_*$  mit beliebigen Vereinigungen verträglich, so folgt dass  $(\tau_*)_{X_0}$ ,  $(\tau_*)_{X_1}$  und  $(\tau_*)_{X_0 \cap X_1}$  Isomorphismen sind. Da  $X$  homotopieäquivalent zu  $X^+$  ist,  $X^+ = X_0 \cup X_1$  und  $X_0$  und  $X_1$  offen in  $X^+$  sind, folgt wie in Schritt 2 mit der 5er-Lemma und der Mayer-Vietoris-Folge, dass auch  $(\tau_*)_X$  ein Isomorphismus ist.  $\square$

## 15 Zusammenhang zwischen $\pi_1(X, x_0)$ und $H_1(X; \mathbb{Z})$

Zur Vorbereitung müssen wir kurz wiederholen, was eine Abelisierung ist:

**15.1 Definition** Sei  $G$  eine Gruppe. Dann heißt die Untergruppe von  $G$ , die von Elementen der Form  $[g, h] := ghg^{-1}h^{-1}$  erzeugt wird, **Kommutatorgruppe** von  $G$ . Wir schreiben hierfür auch  $[G, G] \subset G$ .

**15.2 Lemma**  $[G, G] \subset G$  ist ein Normalteiler von  $G$ .

**BEWEIS:** Seien  $g_0, \dots, g_n, h \in G$ . Dann ist

$$h[g_0, g_1] \cdot \dots \cdot [g_{n-1}, g_n] \cdot h^{-1} = [hg_0h^{-1}, hg_1h^{-1}] \cdot \dots \cdot [hg_{n-1}h^{-1}, hg_nh^{-1}] \quad \square$$

**15.3 Definition** Der Quotient  $G^{\text{ab}} := G/[G, G]$  heißt **Abelisierung** (manchmal auch Abelianisierung) von  $G$  und ist offensichtlich stets abelsch.

Für eine abelsche Gruppe  $G$  ist sinnigerweise  $G^{\text{ab}} = G$ .

**15.4 Bemerkung**

- GRUPPEN  $\xrightarrow{\text{ab}}$  ABEL.GRUPPEN,  $G \mapsto G^{\text{ab}}$  definiert einen Funktor.
- Dieser Funktor hat die folgende universelle Eigenschaft: Zu jeder abelschen Gruppe  $A$  und einem Gruppenhomomorphismus  $\varphi: G \rightarrow A$  existiert ein eindeutiger Gruppenhomomorphismus  $\varphi^{\text{ab}}: G^{\text{ab}} \rightarrow A$ , sodass folgendes Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi} & A \\ \downarrow & \nearrow \varphi^{\text{ab}} & \\ G^{\text{ab}} & & \end{array}$$

**15.5 Schleifen und 1-Zykel** Sei  $X$  ein topologischer Raum. Da  $|\Delta^1| \cong [0, 1]$ , liefert jeder Pfad  $\omega: [0, 1] \rightarrow X$  einen 1-Simplex in  $C_1(X; \mathbb{Z})$ .

**15.6 Lemma 1** Seien  $\omega, \omega': [0, 1] \rightarrow X$  Pfade in  $X$  mit  $\omega(1) = \omega'(0)$ , dann ist  $\omega * \omega' - \omega - \omega' \in C_1(X; \mathbb{Z})$  der Rand eines 2-Simplex.

„\*“ bezeichnet die Verkettung von Pfaden und wird noch links nach rechts gelesen

**BEWEIS:** Zur Erinnerung: Die geometrische Realisierung des 2-Simplex ist gegeben durch

$$|\Delta^2| = \left\{ (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 \mid \sum_{i=0}^2 x_i = 1, x_j \geq 0 \forall j \in \{0, 1, 2\} \right\}.$$

Betrachte nun folgenden singulären Simplex  $\sigma: |\Delta^2| \rightarrow X$  definiert durch

$$(x_0, x_1, x_2) \mapsto (\omega * \omega')\left(\frac{1}{2}(1 + x_0 - x_2)\right) = \omega * \omega'\left(\frac{1}{2}(2x_0 + x_1)\right)$$

Die Ränder sind

$$(\delta_0\sigma)(s) = \sigma(0, s, 1-s) = \omega * \omega'\left(\frac{1}{2}s\right) = \omega(s)$$

$$(\delta_1\sigma)(s) = \sigma(s, 0, 1-s) = \omega * \omega'(s)$$

$$(\delta_2\sigma)(s) = \sigma(s, 1-s, 0) = (\omega * \omega')\left(\frac{1}{2}(1+s)\right) = \omega'(s)$$

Dann folgt  $\partial\sigma = \delta_0\sigma - \delta_1\sigma + \delta_2\sigma = \omega - \omega * \omega' + \omega'$ .  $\square$

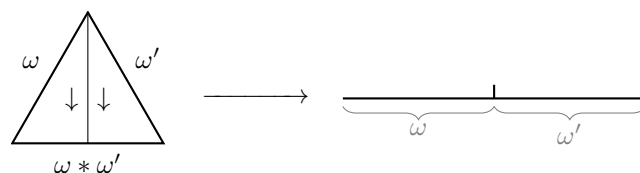


Abbildung 8: Skizze zum Beweis von Lemma 15.6

## 15.7 Lemma 2

- a) Sei  $\omega: [0, 1] \rightarrow X$  ein Pfad und  $\omega^{-1}(s) = \omega(1 - s)$  der umgekehrte Pfad. Dann ist  $\omega + \omega^{-1}$  der Rand einer 2-Kette, also von einem Element aus  $C_2(X; \mathbb{Z})$ .
- b) Der konstante Pfad ist der Rand einer 2-Kette.

## BEWEIS:

- a) Sei  $\sigma: |\Delta^2| \rightarrow X$  gegeben durch  $\sigma(x_0, x_1, x_2) = \omega(x_1)$ . Dann ist

$$\partial\sigma = \omega - \underbrace{\text{const}_{\omega(0)}}_{=: \partial\tau} + \omega^{-1}$$

Also gilt nach b)  $\omega + \omega^{-1} = \partial(\sigma + \tau)$ .

- b) Der Rand des konstanten 2-Simplex ist der konstante Pfad. □

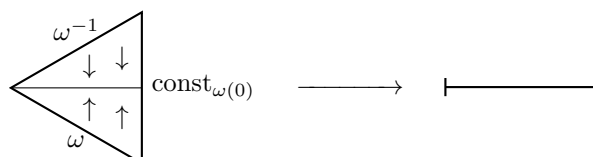


Abbildung 9: Skizze zum Beweis von Lemma 15.7

**15.8 Lemma 3** Sind  $\omega, \omega': [0, 1] \rightarrow X$  Pfade in  $X$  mit  $\omega(0) = \omega'(0)$  und  $\omega(1) = \omega'(1)$ , dann gilt: Ist  $\omega$  homotop zu  $\omega'$  relativ zu den Endpunkten, dann ist  $\omega - \omega'$  der Rand einer 2-Kette.

**BEWEIS:** Sei  $H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  eine Homotopie zwischen  $\omega$  und  $\omega'$  mit  $H(0, s) = \omega(s)$ ,  $H(1, s) = \omega'(s)$ ,  $H(t, 0) = \text{const}_{\omega(0)}$  und  $H(t, 1) = \text{const}_{\omega(1)}$ . Wähle einen Homöomorphismus durch

$$\kappa: [0, 1] \times [0, 1] / [0, 1] \times \{0\} \rightarrow |\Delta^2|, \quad [t, s] \mapsto (st, s(1-t), (1-s))$$

Betrachte nun  $\sigma := H \circ \kappa^{-1}: |\Delta^2| \rightarrow X$ . Die Ränder sind  $\delta_0\sigma = \omega$  und  $\delta_1\sigma = \omega'$  und  $\delta_2\sigma = \text{const}_{\omega(1)}$ . Also folgt, dass  $\omega - \omega'$  der Rand einer 2-Kette ist. □

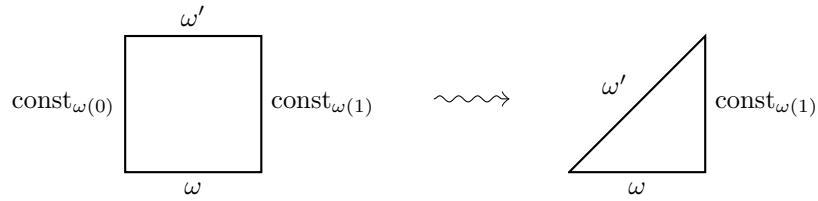


Abbildung 10: Skizze zum Beweis von Lemma 15.8

$[\cdot]$  für die Homotopieklassen und  $[\cdot]$  für Homotopieklassen

**15.9 Die Hurewicz-Abbildung** Falls  $\omega: [0, 1] \rightarrow X$  eine Schleife ist, dann ist  $\partial\omega = \omega(1) - \omega(0) = 0$ . Also repräsentiert  $\omega$  ein Element  $[\omega] \in H_1(X)$ . Nach Lemma 3 erhalten wir eine wohldefinierte Abbildung  $\theta: \pi_1(X, x_0) \rightarrow H_1(X)$ . Nach Lemma 1 bildet diese Abbildung die Verknüpfung von Schleifen auf Summen von 1-Ketten ab.

$$[\omega * \omega'] = [\omega] + [\omega'] \quad , \quad [\omega^{-1}] = -[\omega]$$

Zusammen mit Lemma 2 erhalten wir einen Gruppenhomomorphismus. Aus der universellen Eigenschaft der Abelsierung erhalten wir

$$\theta^{\text{ab}}: \pi_1(X, x_0)^{\text{ab}} \longrightarrow H_1(X; \mathbb{Z})$$

**15.10 Theorem (Hurewicz)** Für wegzusammenhängende Räume ist  $\theta^{\text{ab}}$  ein Isomorphismus.

**BEWEIS (MIT LEMMA 4 UND 5):** Sei  $X$  wegzusammenhängend. Wähle für jedes  $x \in X$  einen Pfad  $\lambda_x$  von  $x_0$  nach  $x$ . Wähle  $\lambda_{x_0} = \text{const}_{x_0}$ . Betrachte

$$\bar{\rho}: C_1(X; \mathbb{Z}) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)^{\text{ab}} \quad , \quad \omega \longmapsto [\lambda_{\omega(0)} * \omega * \lambda_{\omega(1)}^{-1}]$$

Dies ist ein Gruppenhomomorphismus, den wir auf den Generatoren angegeben haben. Hier benutzen wir, dass  $\pi_1(X, x_0)^{\text{ab}}$  abelsch ist. Nach Lemma 4 induziert  $\bar{\rho}$  einen Gruppenhomomorphismus  $\rho: H_1(X; \mathbb{Z}) \rightarrow \pi_1(X, x_0)^{\text{ab}}$ . Für eine Schleife  $\omega$  in  $x_0$  gilt

$$(\rho \circ \theta)[\omega] = [\lambda_{\omega(0)} * \omega * \lambda_{\omega(0)}^{-1}] = [\lambda_{x_0} * \omega * \lambda_{x_0}^{-1}] = [\omega]$$

Die Zuordnung  $x \mapsto \lambda_x$  liefert einen Gruppenhomomorphismus  $\lambda: C_0(X; \mathbb{Z}) \rightarrow C_1(X; \mathbb{Z})$

$$\sum_i n_i \cdot x_i \longmapsto \sum_i n_i \cdot \lambda_{x_i}$$

Mit Lemma 5 folgt  $(\theta \circ \rho)([c]) = [c]$  für alle  $[c] \in H_1(X)$ . Damit ist  $\theta^{\text{ab}}$  ein Isomorphismus für wegzusammenhängende Räume  $X$ .  $\square$

**15.11 Lemma 4**  $\bar{\rho}$  bildet die Ränder von 2-Simplizes auf 1  $\in \pi_1(X, x_0)^{\text{ab}}$  ab.

**BEWEIS:** Sei  $\sigma \in C_2(X; \mathbb{Z})$  ein 2-Simplex. Es gilt mit  $\omega_i := \delta_i \sigma$

$$\begin{aligned} \bar{\rho}(\partial\sigma) &= \bar{\rho}(\delta_0\sigma - \delta_1\sigma + \delta_2\sigma) = \bar{\rho}(\omega_0) \cdot \bar{\rho}(\omega_1)^{-1} \cdot \bar{\rho}(\omega_2) \\ &= [\lambda_{\omega_0(0)} * \omega_0 * \lambda_{\omega_0(1)}^{-1}] * \underbrace{\left( \lambda_{\omega_1(0)} * \omega_1 * \lambda_{\omega_1(1)}^{-1} \right)^{-1}}_{= \lambda_{\omega_0(1)} * \omega_1^{-1} * \lambda_{\omega_1(0)}^{-1}} * \lambda_{\omega_2(0)} * \omega_2 * \lambda_{\omega_2(1)} \\ &= [\lambda_{\omega_0(0)} * \underbrace{\omega_0 * \omega_1^{-1} * \omega_2}_{=: \gamma} * \lambda_{\omega_2(1)=\omega_0(0)}^{-1}] \end{aligned}$$

Der Pfad  $\gamma$  ist die Schleife, die einmal auf dem Rand des 2-Simplex herumläuft. Also  $\gamma: [0, 1] \rightarrow |\partial\Delta^2| \hookrightarrow |\Delta^2| \rightarrow X$ . Aber  $|\partial\Delta^2| \hookrightarrow |\Delta^2|$  ist homotop zur konstanten Abbildung auf  $\omega_0(0)$  mit einer Homotopie, die den Punkt  $\omega_0(0)$  fixiert.

$$= [\lambda_{\omega_0(0)} * \lambda_{\omega_0(0)}^{-1}] = 1 \quad \square$$

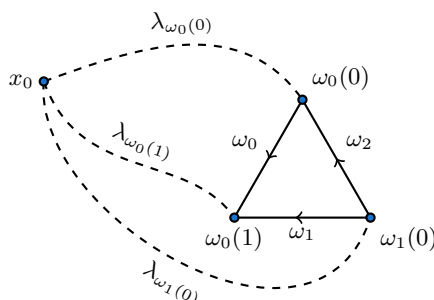


Abbildung 11: Skizze zum Beweis von Lemma 15.11

**15.12 Lemma 5** Sei  $\omega: |\Delta^1| \rightarrow X$  ein 1-Simplex, dann gilt  $\theta \circ \bar{\rho}(\omega) = \llbracket \omega + \lambda_{\partial\omega} \rrbracket$

**BEWEIS:** Es gilt  $(\theta \circ \bar{\rho})(\omega) = \theta\left([\lambda_{\omega(0)} * \omega * \lambda_{\omega(1)}^{-1}]\right) = \llbracket \lambda_{\omega(0)} * \omega * \lambda_{\omega(1)}^{-1} \rrbracket = \llbracket \omega \rrbracket - \underbrace{\llbracket \lambda_{\omega(1)} \rrbracket + \llbracket \lambda_{\omega(0)} \rrbracket}_{\lambda_{\omega(0)} - \omega(1) = \lambda_{\partial\omega}}$

$\square$

**15.13 Corollar** Sind  $X_1, \dots, X_n$  wegzusammenhängende Räume, dann gilt

$$H_1(X_1 \times \dots \times X_n) \cong H_1(X_1) \oplus \dots \oplus H_1(X_n)$$

**BEWEIS:**

$$\begin{aligned} H_1(X_1 \times \dots \times X_n) &\cong \pi_1(X_1 \times \dots \times X_n, (x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(n)}))^{\text{ab}} \\ &\cong (\pi_1(X_1, x_0^{(1)}) \times \dots \times \pi_1(X_n, x_0^{(n)}))^{\text{ab}} \\ &\cong \pi_1(X_1, x_0^{(1)})^{\text{ab}} \oplus \dots \oplus \pi_1(X_n, x_0^{(n)})^{\text{ab}} \quad (\text{Übungsaufgabe}) \\ &\cong H_1(X_1) \oplus \dots \oplus H_1(X_n) \quad \square \end{aligned}$$

## Der Satz von Hurewicz

**15.14 Definition** Sei  $X$  ein topologischer Raum mit Basispunkt  $x_0 \in X$ , sei  $I = [0, 1]$  und  $n \in \mathbb{N}_0$ . Die **n-te absolute Homotopiegruppe**  $\pi_n(X, x_0)$  ist die Menge der Äquivalenzklassen von stetigen Abbildungen  $\omega: I^n \rightarrow X$  mit  $\omega(\partial I^n) = \{x_0\}$ . Die Äquivalenzrelation ist Homotopie relativ zu  $\partial I^n$ , d.h.  $H: I^n \times [0, 1] \rightarrow X$  erfüllt  $H_t(\partial I^n) = \{x_0\}$  für alle  $t \in [0, 1]$ . Die Gruppenverknüpfung in  $\pi_n(X, x_0)$  ist gegeben durch

$$(\omega * \omega')(s_1, \dots, s_n) = \begin{cases} \omega(2s_1, s_2, \dots, s_n), & \text{falls } 0 \leq s_1 \leq \frac{1}{2} \\ \omega'(2s_1 - 1, s_2, \dots, s_n), & \text{falls } \frac{1}{2} \leq s_1 \leq 1 \end{cases}$$

Bild für  $n = 2$ :

$$\boxed{\omega} * \boxed{\omega'} = \boxed{\omega} \boxed{\omega'}$$

### 15.15 Eigenschaften von $\pi_n(X, x_0)$

- Die Verknüpfung „ $*$ “ ist assoziativ, hat  $\text{const}_{x_0}$ , also die konstante Abbildung auf  $x_0$ , als neutrales Element und  $\omega^{-1}(s_1, \dots, s_n) = \omega(1 - s_1, s_2, \dots, s_n)$  als inverses Element.
- Die Verknüpfung „ $*$ “ ist abelsch für  $n \geq 2$  (Eckmann-Hilton Argument<sup>9</sup>)

$$\boxed{\omega} \boxed{\omega'} \rightsquigarrow \begin{array}{|c|c|} \hline \omega & \omega' \\ \hline \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{|c|c|} \hline \omega & \omega' \\ \hline \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{|c|c|} \hline \omega' & \omega \\ \hline \end{array}$$

- $\pi_n: \text{TOP} \rightarrow \text{ABEL.GRUPPEN}$  ist ein Funktor, das heißt eine stetige Abbildung  $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  induziert einen Gruppenhomomorphismus  $\pi_n(f): \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$ .
- Da  $I^n / \partial I^n \cong S^n$  ist, ergibt sich  $\pi_n(X, x_0)$  auch aus den punktierten Homotopieklassen von Abbildungen  $(S^n, *) \rightarrow (X, x_0)$ .
- Falls  $x_0$  und  $x'_0$  in der gleichen Wegzusammenhangskomponente von  $X$  liegen, dann induziert ein Weg von  $x_0$  nach  $x'_0$  einen Isomorphismus  $\pi_n(X, x_0) \cong \pi_n(X, x'_0)$ .

**15.16 Definition** Sei  $n \in \mathbb{N}_0$ . Ein topologischer Raum  $X$  heißt  **$n$ -zusammenhängend**, falls  $\pi_0(X) = \{*\}$  und  $\pi_k(X, x_0)$  trivial ist für alle  $k \leq n$  und einen Basispunkt  $x_0 \in X$ .

**15.17 Bemerkung** Da ein  $n$ -zusammenhängender Raum  $X$  für  $n \geq 0$  mindestens wegzusammenhängend ist, gilt  $\pi_k(X, x_0) \cong \pi_k(X, x'_0)$ . Somit ist die Definition unabhängig von der Wahl des Basispunktes.

**15.18 Beispiel** 0-zusammenhängend entspricht wegzusammenhängend und 1-zusammenhängend entspricht wegzusammenhängend und einfach zusammenhängend.

**15.19 Definition: Relative Homotopiegruppen** Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $A \subset X$  ein Unterraum und  $x_0 \in A$  ein Basispunkt von  $A$  und  $X$ . Wir identifizieren  $I^{n-1} \subset I^n$  mit der Seitenfläche von  $I^n$ , für die  $s_n = 0$  gilt. Außerdem setzen wir

$$J^{n-1} := \overline{\partial I^n \setminus I^{n-1}}$$

Die **relative Homotopiegruppe**  $\pi_n(X, A, x_0)$  besteht aus den Homotopieklassen von stetigen Abbildungen  $\omega: I^n \rightarrow X$  mit  $\omega(I^{n-1}) \subset A$  und  $\omega(J^{n-1}) = \{x_0\}$ . Die Homotopien müssen ebenfalls  $H_t(I^{n-1}) \subset A$  und  $H_t(J^{n-1}) = \{x_0\}$  für alle  $t \in [0, 1]$  erfüllen.  $\pi_n(X, A, x_0)$  ist eine Menge für  $n \geq 1$ , eine Gruppe für  $n \geq 2$  und eine abelsche Gruppe für  $n > 2$ . Alternativ können wir relative Homotopiegruppen auch wie folgt beschreiben:  $\pi_n(X, A, x_0)$  sind Homotopieklassen von Abbildungen  $(D^n, S^{n-1}, *) \rightarrow (X, A, x_0)$ .

<sup>9</sup> siehe auch letztes Semester 14.5 und 14.6



$$\left( \begin{array}{c} \text{const}_{x_0} \\ \text{const}_{x_0} \begin{array}{|c|} \hline \omega \\ \hline \end{array} \text{const}_{x_0} \\ \hline \rightarrow A \end{array} \right) * \left( \begin{array}{c} \text{const}_{x_0} \\ \text{const}_{x_0} \begin{array}{|c|} \hline \omega' \\ \hline \end{array} \text{const}_{x_0} \\ \hline \rightarrow A \end{array} \right) = \begin{array}{c} \text{const}_{x_0} \\ \text{const}_{x_0} \begin{array}{|c|c|} \hline \omega & \omega' \\ \hline \end{array} \text{const}_{x_0} \\ \hline \rightarrow A \end{array}$$

**Abbildung 12:** Verknüpfung in der relativen Homotopiegruppe für  $n = 2$ **15.20 Bemerkung**

- Homotopiegruppen bilden *keine* verallgemeinerte Homologietheorie, da sie nicht das Ausschneidungsaxiom erfüllen.
- Es gibt eine lange exakte Sequenz von Homotopiegruppen:

$$\cdots \longrightarrow \pi_n(A, x_0) \longrightarrow \pi_n(X, x_0) \longrightarrow \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, x_0) \longrightarrow \cdots$$

**15.21 Die Hurewicz-Abbildung** Sei  $\vartheta: |\Delta^n| \xrightarrow{\cong} D^n$  ein Homöomorphismus. Dann gilt  $\vartheta(|\partial\Delta^n|) = S^{n-1}$  und  $\vartheta$  liefert eine Homologieklass  $[\vartheta] \in H_n(D^n, S^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$ . Diese Klasse ist ein Generator der Gruppe  $H_n(D^n, S^{n-1})$ . Sei nun  $[\omega] \in \pi_n(X, A, x_0)$  repräsentiert durch  $\omega: (D^n, S^{n-1}, *) \rightarrow (X, A, x_0)$ . Setze

$$\theta_n: \pi_n(X, A, x_0) \longrightarrow H_n(X, A), \quad [\omega] \longmapsto \omega_*[\vartheta]$$

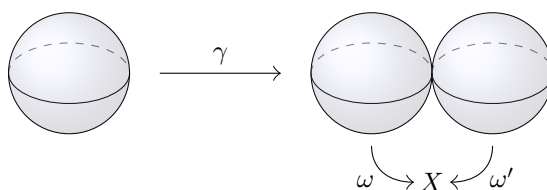
für  $n \geq 2$ . Dies ist wohldefiniert, denn falls  $\omega$  homotop zu  $\omega'$  ist (bezüglich  $(A, x_0)$ ), dann ist  $\omega_* = \omega'_*$ .

**15.22 Lemma**  $\theta_n: \pi_n(X, A, x_0) \longrightarrow H_n(X, A)$  ist ein Gruppenhomomorphismus.

**BEWEIS:** Wir brauchen eine alternative Beschreibung der Gruppenverknüpfung: Sei dazu  $\gamma$  die Projektion  $D^n \rightarrow D^n/S^{n-2} \cong D^n \vee D^n$ . Dann gilt  $\gamma(S^{n-1}) = S^{n-1} \vee S^{n-1}$  und folglich ist  $\gamma$  eine Abbildung von Raumpaaren  $\gamma: (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (D^n \vee D^n, S^{n-1} \vee S^{n-1})$ . Seien nun  $\omega, \omega': (D^n, S^{n-1}, *) \rightarrow (X, A, x_0)$ . Für die Verknüpfung  $[\omega * \omega'] \in \pi_n(X, A, x_0)$  gilt

$$[(\omega \vee \omega') \circ \gamma] = [\omega * \omega']$$

Sei  $p_j: (D^n \vee D^n, S^{n-1} \vee S^{n-1}) \rightarrow (D^n, S^{n-1})$  die Abbildung, die die  $j$ -te Kopie von  $D^n$  auf den

**Abbildung 13:** Die Abbildung  $\gamma$  aus Lemma 15.22

Basispunkt abbildet und auf der anderen Kopie die Identität ist. Sei weiter  $i_k: (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (D^n \vee D^n, S^{n-1} \vee S^{n-1})$  die Inklusion auf die  $k$ -te Kopie von  $(D^n, S^{n-1})$ . Betrachte nun die Abbildung

$$((p_1)_*, (p_2)_*): H_n(D^n \vee D^n, S^{n-1} \vee S^{n-1}) \longrightarrow H_n(D^n, S^{n-1}) \oplus H_n(D^n, S^{n-1})$$

Dies ist ein Isomorphismus mit inverser Abbildung

$$(i_1)_* + (i_2)_*: H_n(D^n, S^{n-1}) \oplus H_n(D^n, S^{n-1}) \longrightarrow H_n(D^n \vee D^n, S^{n-1} \vee S^{n-1})$$

denn es gilt

$$((p_1)_*, (p_2)_*) \circ ((i_1)_* + (i_2)_*) = \left( \left( \frac{p_1 \circ i_1}{\text{id}} \right)_* + \left( \frac{p_1 \circ i_2}{\text{const}} \right)_*, \left( \frac{p_2 \circ i_1}{\text{const}} \right)_* + \left( \frac{p_2 \circ i_2}{\text{id}} \right)_* \right) = \text{id}$$

Also ist  $((p_1)_*, (p_2)_*)$  eine surjektive Abbildung und Quelle und Ziel sind freie abelsche Gruppen von gleichem Rang. Die Abbildung  $p_j \circ \gamma$  ist homotop zur Identität (Übung). Also folgt  $((p_1)_*, (p_2)_*) \circ \gamma(\llbracket \vartheta \rrbracket) = (\llbracket \vartheta \rrbracket, \llbracket \vartheta \rrbracket)$  und weiter

$$\begin{aligned} \theta_n([\omega * \omega']) &= (\omega \vee \omega')_* \circ \gamma_*(\llbracket \vartheta \rrbracket) = (\omega \vee \omega')_* \circ ((i_1)_* + (i_2)_*) \circ ((p_1)_*, (p_2)_*) \circ \gamma_*(\llbracket \vartheta \rrbracket) \\ &= (\omega \vee \omega')_* \circ ((i_1)_*(\llbracket \vartheta \rrbracket) + (i_2)_*(\llbracket \vartheta \rrbracket)) \\ &= \omega_*(\llbracket \vartheta \rrbracket) + \omega'_*(\llbracket \vartheta \rrbracket) \end{aligned} \quad \square$$

**15.23 Theorem (Hurewicz)** Seien  $(X, A)$  mit  $A \subset X$  beide wegzusammenhängend. Es gelte weiter  $\pi_1(A, x_0) = 1$  und  $\pi_k(X, A, x_0) = 0$  für  $1 \leq k \leq n-1$ ,  $n \geq 2$ . Dann ist

$$\theta_n: \pi_n(X, A, x_0) \longrightarrow H_n(X, A)$$

ein Isomorphismus.

**15.24 Korollar** Ist  $X$  ein  $(n-1)$ -zusammenhängender Raum für ein  $n \geq 2$ , dann ist

$$\theta_n: \underbrace{\pi_n(X, x_0)}_{=\pi_n(X, \{x_0\}, x_0)} \longrightarrow H_n(X, x_0) \cong H_n(X)$$

ein Isomorphismus.

**15.25 Satz** Sei  $n \geq 1$ . Dann ist  $\pi_n(S^n, *) \cong \mathbb{Z}$  und  $\pi_k(S^n, *) = 0$  für  $k < n$ .

**BEWEIS:** Für  $n = 1$  gilt  $\pi_0(S^1, *) = \{*\}$  und  $\pi_1(S^1, *) \cong \mathbb{Z}$ . Für  $n > 1$  wissen wir aus dem letzten Semester, dass  $\pi_1(S^n, *) = 1$  und  $S^n$  wegzusammenhängend ist, also 1-zusammenhängend ist.

Angenommen  $\pi_i(S^n, *) = 0$  für  $i = 0, \dots, k$  und  $0 \leq k < n$ . Dann ist  $S^n$   $k$ -zusammenhängend und wir erhalten aus dem vorigen Korollar

$$\pi_{k+1}(S^n, *) \xrightarrow{\cong} H_{k+1}(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{falls } k+1 = n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Falls  $k+1 < n$  ist, so ist auch  $\pi_{k+1}(S^n, *) = 0$ , sonst sind wir fertig.  $\square$

## 16 Die Fundamentalklasse

**16.1 Beispiel** Wir betrachten zu einigen uns gut bekannten Mannigfaltigkeiten die Homologiegruppen in der Dimension der Mannigfaltigkeit:

- $H_n(\mathbb{R}^n) = 0$
- $H_n(S^n) = \mathbb{Z}$
- $H_2(T^2) = \mathbb{Z}$
- $H_{2n}(\mathbb{C}P^n) = \mathbb{Z}$
- $H_{2n}(S^n \times \mathbb{R}^n) = 0$
- $H_n(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}$ , falls  $n$  ungerade, 0 sonst.

**16.2 Bemerkung** Sei  $M$  eine  $n$ -Mannigfaltigkeit und  $x \in M$ . Da  $x$  in  $M$  eine Umgebung hat, die homöomorph zu  $\mathbb{R}^n$  ist, folgt mit dem Ausschneidungsisomorphismus und der Paarfolge

*Ausgeschnitten wird das Komplement dieser Umgebung!*

$$H_k(M, M \setminus \{x\}; R) \cong H_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}; R) \cong H_{k-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}; R) \cong H_{k-1}(S^{n-1}; R) \cong \begin{cases} R & \text{falls } k = n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

**16.3 Definition** Sei  $M$  eine  $n$ -Mannigfaltigkeit und  $x \in M$ . Eine (homologische) **Orientierung** (über  $R$ ) im Punkt  $x$  ist ein Erzeuger  $\mu_x$  von  $H_n(M, M \setminus \{x\}; R)$ .

**BEMERKUNG:** Über  $R = \mathbb{Z}$  gibt es in jedem Punkt genau zwei Orientierungen, da  $\mathbb{Z}$  genau zwei Erzeuger hat. Über  $R = \mathbb{F}_2$  gibt es in jedem Punkt eine eindeutige Orientierung, da  $\mathbb{F}_2$  genau einen Erzeuger hat.

**16.4 Notation** Seien  $A \subseteq B \subseteq X$  Unterräume. Sei  $i: (X, X \setminus B) \hookrightarrow (X, X \setminus A)$  die Inklusion. Ist  $v \in H_n(X, X \setminus B; R)$ , so nennen wir

$$v|_A := i_*(v)$$

die Einschränkung von  $v$  auf  $A$ . Für  $A = \{x\}$  schreiben wir  $v|_x := v|_{\{x\}}$ .

**16.5 Definition** Sei  $M$  eine  $n$ -Mannigfaltigkeit. Eine (homologische) **Orientierung** von  $M$  über  $R$  ist eine Zuordnung  $M \ni x \mapsto \mu_x \in H_n(M, M \setminus \{x\}; R)$ , die für jeden Punkt  $x \in M$  eine Orientierung über  $R$  im Punkt  $x$  auswählt, sodass folgende Bedingung erfüllt ist: Für alle  $x \in M$  gibt es eine Umgebung  $U$  von  $x \in M$  und  $\mu_U \in H_n(M, M \setminus U; R)$  mit  $\mu_y = \mu_U|_y$  für alle  $y \in U$ .

Gibt es eine solche Orientierung, so heißt  $M$   **$R$ -orientierbar**. Eine Mannigfaltigkeit zusammen mit einer Orientierung heißt eine  **$R$ -orientierte Mannigfaltigkeit**. Lassen wir  $R$  in den Bezeichnungen weg, so ist immer  $R = \mathbb{Z}$  gemeint.

**16.6 Beispiel** Für  $M = \mathbb{R}^n$  betrachte  $U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$ . Dann ist wegen Homotopieinvarianz

$$H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}; R) \cong H_n(\overline{U}, \overline{U} \setminus U; R) \cong H_n(D^n, S^{n-1}; R) = R$$

mit  $\overline{U} = D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$  und  $\overline{U} \setminus U = S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ . Für jedes  $y \in U$  ist  $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus U) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{y\})$  eine Homotopieäquivalenz. Ist  $\mu_U \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}; R)$  ein Erzeuger, so ist also  $\mu_y = \mu_U|_y$  eine Orientierung von  $\mathbb{R}^n$  in  $y$  für alle  $y \in U$ .

**16.7 Beispiel** Sei  $\mu_{S^n} \in \tilde{H}_n(S^n; R)$  ein Erzeuger. Für  $x \in S^n$  ist  $\tilde{H}_*(S^n \setminus \{x\}; R) = 0$  und daher die Einschränkungsabbildung  $\tilde{H}_n(S^n; R) \rightarrow \tilde{H}_*(S^n, S^n \setminus \{x\}; R) = 0$  ein Isomorphismus und  $\mu_{S^n}|_x$  ist ein Erzeuger von  $\tilde{H}_n(S^n, S^n \setminus \{x\}; R)$ . Daher ist  $x \mapsto \mu_{S^n}|_x$  eine Orientierung von  $M$  über  $R$ .

**16.8 Bezeichnung** Eine *geschlossene Mannigfaltigkeit* ist eine kompakte Mannigfaltigkeit (ohne Rand).

**16.9 Satz** Sei  $M$  eine geschlossene  $n$ -Mannigfaltigkeit. Dann ist  $M$  genau dann  $R$ -orientierbar, wenn es  $\mu \in H_n(M; R)$  gibt, sodass  $\mu|_x \in H_n(M, M \setminus \{x\}; R)$  für jedes  $x$  eine Orientierung von  $M$  in  $x$  ist. Ist  $M$  zusammenhängend, so ist  $\mu$  ein Erzeuger von  $H_n(M; R)$  und  $H_n(M; R) \cong R$ .

**BEWEIS (MIT 16.13):**  $H_n(M; R)$  und  $\Gamma(M, \mathcal{H})$  sind beide mit  $\coprod$  verträglich. Daher können wir auch annehmen, dass  $M$  zusammenhängend ist. Da  $M$  kompakt ist, können wir in dem Lemma 16.13  $A = M$  setzen und wir erhalten für jede Orientierung  $s \in \Gamma(M, \mathcal{H})$  eine Klasse  $\mu \in H_n(M; R)$  mit  $\mu|_x = s(x)$ . Nach der Überlagerungstheorie aus dem letzten Semester ist jeder Schnitt von  $\mathcal{H}$  schon durch seinen Wert an einem Punkt festgelegt. Insbesondere ist  $\text{ev}_x: \Gamma(M, \mathcal{H}) \rightarrow H_n(M, M \setminus \{x\}; R) \cong R$  injektiv. Ist  $M$   $R$ -orientierbar, so ist  $\text{ev}_x$  ein Isomorphismus und es folgt

$$H_n(M; R) \cong \Gamma(M, \mathcal{H}) \cong H_n(M, M \setminus \{x\}; R) \cong R \quad \square$$

**16.10 Definition** Sei  $M$  eine geschlossene  $n$ -Mannigfaltigkeit. Wir definieren  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_R$  als die disjunkte Vereinigung aller  $H_n(M, M \setminus \{x\}; R)$  mit  $x \in M$ . Auf  $\mathcal{H}$  definieren wir nun eine Topologie durch:

$$V \subseteq \mathcal{H} \text{ offen} \Leftrightarrow \forall v \in V \text{ mit } v \in H_n(M, M \setminus \{x\}; R) \text{ gibt es eine Umgebung } U \text{ von } x \text{ in } M \\ \text{und } v_U \in H_n(M, M \setminus U; R) \text{ mit } v_U|_x = v \text{ und } v_U|_y \in V \text{ für alle } y \in U.$$

Wir definieren  $\pi: \mathcal{H} \rightarrow M$  durch  $\pi(v) = x$  für  $v \in H_n(M, M \setminus \{x\}; R)$ . Es gilt  $\pi^{-1}(\{x\}) = H_n(M, M \setminus \{x\}; R)$ . Mit  $\Gamma(M, \mathcal{H})$  bezeichnen wir die Menge aller stetigen Schnitte  $s: M \rightarrow \mathcal{H}$  für  $\pi$ , das heißt

$$\Gamma(M, \mathcal{H}) = \{s: M \rightarrow \mathcal{H} \text{ stetig} \mid \pi \circ s = \text{id}_M\}$$

### 16.11 Bemerkungen

- 1) Für jedes  $x \in M$  erbt  $H_n(M, M \setminus \{x\}; R) \subseteq \mathcal{H}$  die diskrete Topologie.
- 2)  $\pi: \mathcal{H} \rightarrow M$  ist eine Überlagerung.
- 3)  $\Gamma(M, \mathcal{H})$  ist ein  $R$ -Modul. Sind  $s, s' \in \Gamma(M, \mathcal{H})$  und  $r \in R$ , so können wir  $s + s'$  und  $r \cdot s$  punktweise erklären:

$$(s + s')(x) := s(x) + s'(x) \in H_n(M, M \setminus \{x\}; R) \\ (r \cdot s)(x) := r \cdot s(x) \in H_n(M, M \setminus \{x\}; R)$$

- 4)  $R$ -Orientierungen von  $M$  entsprechen genau den Schnitten  $s \in \Gamma(M, \mathcal{H})$ , für die gilt: Für alle  $x \in M$  ist  $s(x) \in H_n(M, M \setminus \{x\}; R)$  ein Erzeuger.
- 5) Eine Folgerung aus der Eindeutigkeit im Hebungssatz aus der Überlagerungstheorie ist folgende Aussage:  
Sei  $M$  zusammenhängend. Dann ist für jedes  $x \in M$  die offensichtliche Auswertungsabbildung  $\text{ev}_x: \Gamma(M, \mathcal{H}) \rightarrow H_n(M, M \setminus \{x\}; R)$ ,  $\text{ev}_x(s) = s(x)$  injektiv.
- 6) Sei  $v \in H_n(M; R)$ . Dann erhalten wir durch  $(s_v)(x) := v|_x$  einen Schnitt  $s_v \in \Gamma(M, \mathcal{H})$ . Dies definiert einen  $R$ -Modul-Homomorphismus  $H_n(M; R) \rightarrow \Gamma(M, \mathcal{H})$ ,  $v \mapsto s_v$ .
- 7) Es gibt immer den Nullschnitt in  $\Gamma(M, \mathcal{H})$ ,  $x \mapsto 0 \in H_n(M, M \setminus \{x\}; R)$ .
- 8) Ist  $M$  zusammenhängend, so ist  $\Gamma(M, \mathcal{H}) \neq 0$  genau dann, wenn  $M$   $R$ -orientierbar ist.
- 9) Für  $M$  zusammenhängend gilt:  $M$  ist  $R$ -orientierbar  $\iff H_n(M; R) \cong R$ .

**16.12 Beispiel** Für  $R = \mathbb{F}_2$  ist  $\pi: \mathcal{H} \rightarrow M$  eine 2-fache Überlagerung. Da  $\mathcal{H}$  immer den Nullschnitt zulässt, ist  $\mathcal{H}$  dann trivial. Insbesondere ist jede  $n$ -Mannigfaltigkeit  $\mathbb{F}_2$ -orientierbar.

**16.13 Lemma** Sei  $M$  eine  $n$ -Mannigfaltigkeit und  $A \subseteq M$  kompakt. Dann gilt

- a) Zu jedem  $s \in \Gamma(M, \mathcal{H})$  gibt es ein eindeutiges  $v_A \in H_n(M, M \setminus A; R)$  mit  $v_A|_x = s(x)$  für alle  $x \in A$ .
- b) Für  $i > n$  ist  $H_i(M, M \setminus A; R) = 0$ .

**BEWEIS:** Wir beweisen die Aussage in vier Schritten:

**Schritt 1:** Seien  $A_1, A_2 \subseteq M$  kompakt. Wir zeigen: Gelten a) und b) für  $A_1, A_2$  und  $A_1 \cap A_2$ , so auch für  $A_1 \cup A_2$ . Mit der Mayer-Vietoris-Sequenz aus 16.14 folgt aus

$$H_i(M, M \setminus A_1; R) = H_i(M, M \setminus A_2; R) = H_{i+1}(M, M \setminus A_1 \cap A_2; R) = 0$$

direkt  $H_i(M, M \setminus A_1 \cup A_2; R) = 0$ . Daher gilt b) für  $A_1 \cup A_2$ . Seien  $v_1 \in H_n(M, M \setminus A_1; R)$  und  $v_2 \in H_n(M, M \setminus A_2; R)$  mit  $v_1|_x = s(x)$  für alle  $x \in A_1$  und  $v_2|_x = s(x)$  für alle  $x \in A_2$ . Dann gilt

$$(v_1|_{A_1 \cap A_2})|_x = s(x) = (v_2|_{A_1 \cap A_2})|_x$$

für alle  $x \in A_1 \cap A_2$ . Da  $A_1 \cap A_2$  die Eindeutigkeitsaussage aus a) erfüllt, folgt  $v_1|_{A_1 \cap A_2} = v_2|_{A_1 \cap A_2}$ . Betrachte nun die Mayer-Vietoris-Folge

$$\begin{array}{ccccccc}
 H_{n+1}(M, M \setminus A_1 \cap A_2) & \xrightarrow{\partial} & H_n(M, M \setminus A_1 \cup A_2) & \longrightarrow & \bigoplus_{\substack{H_n(M, M \setminus A_1) \\ H_n(M, M \setminus A_2)}} & \longrightarrow & H_n(M, M \setminus A_1 \cap A_2) \\
 \parallel & & & & \downarrow \psi & & \\
 0 & & & & (v_1, v_2) & & v_1|_{A_1 \cap A_2} = v_2|_{A_1 \cap A_2}
 \end{array}$$

„R“ aus Platzgründen weggelassen

Daher gibt es ein eindeutiges  $v \in H_n(M, M \setminus A_1 \cup A_2; R)$  mit  $v|_{A_1} = v_1$  und  $v|_{A_2} = v_2$ . Für  $x \in A_1$  folgt  $v|_x = v_1|_x = s(x)$  und für  $x \in A_2$  folgt genauso  $v|_x = v_2|_x = s(x)$ . Ist nun  $v' \in H_n(M, M \setminus A_1 \cup A_2; R)$  eine weitere Homologiekategorie mit  $v'|_x = s(x)$  für alle  $x \in A_1 \cup A_2$ , so folgt  $v'|_{A_1} = v_1$  und  $v'|_{A_2} = v_2$  aus der Eindeutigkeit von  $v_1$  und  $v_2$ . Daher gilt auch  $v = v'$ .

**Schritt 2:** Das Lemma ist richtig, wenn  $A$  eine abgeschlossene konvexe Teilmenge von  $M = \mathbb{R}^n$  ist. Dann ist  $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus A) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\})$  eine Homotopieäquivalenz von Paaren und daher  $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus A; R) \rightarrow H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\}; R)$  ein Isomorphismus. Folglich gibt es  $v \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus A; R)$  mit  $v|_x = s(x)$ . Da  $s|_A$  und  $s_v$  beides Schnitte der Überlagerung  $\pi^{-1}(A) \rightarrow A$  sind, folgt mit der Eindeutigkeit im Hebungssatz für alle  $y \in A$

$$v|_y = s_v(y) = s(y)$$

Ist  $v' \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus A; R)$  eine zweite Homologiekategorie mit  $v'|_x = s(x)$ , so folgt  $v = v'$ , da  $v'|_x = s(x) = v|_x$  ist und  $w \mapsto w|_x$  ein Isomorphismus  $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus A; R) \rightarrow H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\}; R)$  ist. Offenbar ist  $\mathbb{R}^n \setminus A \simeq S^{n-1}$  und daher  $H_i(\mathbb{R}^n \setminus A; R) = 0$  für alle  $i > n$ .

**Schritt 3:** Das Lemma gilt für  $M = \mathbb{R}^n$  und eine beliebige kompakte Teilmenge  $A \subseteq M$ : Ist  $A$  die Vereinigung von endlichen vielen konvexen und kompakten Teilmengen von  $\mathbb{R}^n$ , so folgt die Behauptung für  $A$  aus Schritt 1 und 2. Für ein beliebiges kompaktes  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  folgt die Existenzaussage in a) aus Schritt 2. Wähle dazu  $B \subseteq \mathbb{R}^n$  konvex und kompakt mit  $A \subseteq B$ . Nach Schritt 2 gibt es  $v \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B; R)$  mit  $v|_x = s(x)$  für alle  $x \in B$ . Für  $v|_A \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus A; R)$  gilt dann  $(v|_A)|_x = v|_x = s(x)$  für alle  $x \in A$ .

Sei nun  $v \in H_d(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus A; R)$  mit  $d \geq n$ . Falls  $d = n$  ist, so sei  $v|_x = 0$  für alle  $x \in A$ . Wir müssen zeigen:  $v = 0$ . Sei  $z \in C_d(\mathbb{R}^n; R)$  ein Repräsentant von  $v$ . Insbesondere ist  $\partial z \in C_{d-1}(\mathbb{R}^n \setminus A; R)$ .  $\partial z$  ist eine  $R$ -Linearkombination von endlich vielen singulären  $d-1$ -Simplizes in  $\mathbb{R}^n \setminus A$ . Da jeder dieser singulären  $d-1$ -Simplizes ein kompaktes Bild in  $\mathbb{R}^n \setminus A$  hat, finden wir endlich viele Bälle  $B_i \subseteq \mathbb{R}^n$  mit

(1)  $\forall i : B_i \cap A \neq \emptyset$ , (2)  $A \subseteq B_1 \cup \dots \cup B_n$  und (3)  $\partial z \in C_{d-1}(\mathbb{R}^n \setminus (B_1 \cup \dots \cup B_n); R)$

Es folgt, dass  $z$  auch eine Homologiekategorie  $v' \in H_d(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus (B_1 \cup \dots \cup B_n); R)$  repräsentiert mit  $v'|_A = v$ . Ist  $d > n$ , so folgt  $v' = 0$  und daher auch  $v = v'|_A = 0$ . Ist  $d = n$ , so wählen wir  $x_i \in B_i \cap A$ . Da  $v'|_{x_i} = v|_{x_i} = 0$  ist, folgt  $v'|_{B_i} = 0$ , weil die Einschränkungabbildung  $w \mapsto w|_{x_i}$  einen Isomorphismus  $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B_i; R) \rightarrow H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x_i\}; R)$  definiert. Daher gilt  $v'|_y = 0$  für alle  $y \in B_1 \cup \dots \cup B_n$ . Es folgt  $v' = 0$  und damit auch  $v = v'|_A = 0$ .

**Schritt 4:** Für den allgemeinen Fall schreibt man  $A = A_1 \cup \dots \cup A_n$ , sodass jedes  $A_i$  kompakt ist und in einem Kartengebiet  $U_i$  von  $M$  enthalten ist. Da wir Ausschneidungsisomorphismen  $H_*(U_i, U_i \setminus A; R) \rightarrow H_*(M, M \setminus A; R)$  erhalten und  $U_i \cong \mathbb{R}^n$  ist, gilt die Behauptung nach Schritt 3 für jedes  $A_i$ . Mit Schritt 1 folgt die Behauptung auch für  $A$ .  $\square$

#### 16.14 Bemerkung

1) Zu Unterräumen  $A \subseteq B \subseteq X$  gibt es eine kurze exakte Folge von Kettenkomplexen

$$C_*(B, A; R) \hookrightarrow C_*(X, A; R) \twoheadrightarrow C_*(X, B; R)$$

Damit erhalten wir eine lange exakte Folge in Homologie, die man als lange exakte Folge des Tripels bezeichnet:

$$\dots \rightarrow H_{n+1}(X, B; R) \xrightarrow{\partial} H_n(B, A; R) \rightarrow H_n(X, A; R) \rightarrow H_n(X, B; R) \rightarrow \dots$$

2) Zu abgeschlossenen Unterräumen  $A, B \subseteq X$  ist  $A \setminus B \subseteq X \setminus A \cap B$  abgeschlossen und  $X \setminus B \subseteq X \setminus A \cap B$  offen. Da  $A \setminus B \subseteq X \setminus B$  und

$$(X \setminus A \cap B) \setminus (A \setminus B) = X \setminus A \quad \text{sowie} \\ (X \setminus B) \setminus (A \setminus B) = X \setminus (A \cup B)$$

erhalten wir einen Ausschneideisomorphismus

$$H_*(X \setminus A, X \setminus (A \cup B)) \cong H_*(X \setminus A \cap B, X \setminus B; R)$$

Zusammen mit der Paarfolge aus 1) erhalten wir eine Mayer-Vietoris-Folge:

$$\dots \rightarrow H_{n+1}(X, X \setminus A \cap B) \xrightarrow{\partial} H_n(X, X \setminus A \cup B) \rightarrow \bigoplus_{H_n(X, X \setminus B)}^{H_n(X, X \setminus A)} \rightarrow H_n(X, X \setminus A \cap B) \rightarrow \dots$$

„ $R$ “ aus Platzgründen  
weggelassen

## Index

*Die Seitenzahlen sind mit Hyperlinks zu den entsprechenden Seiten versehen, also anklickbar*

- Abbildungsgrad, 36
- Abelisierung, 60
- abgeschlossene Zelle, 42
- affiner singulärer Simplex, 55
- anklebende Abbildung, 42
- assoziativ, 1
- Augmentierung, 17
- Ausschneidung, 57
- charakteristische Abbildung, 42
- CW-Komplex, 41
  - endlicher, 42
- Dimensionsaxiom, 57
- disjunkte Vereinigung
  - Axiom, 57
- Durchmesser, 55
- Ecken, 4
- Euler-Charakteristik, 6
  - eines CW-Komplex, 48
  - von  $\mathbb{Z}$ -Kettenkomplexen, 14
- freier Modul, 7
- Funktor, 2
  - dargestellter, 2
- geometrische Realisierung, 5
- geschlossene Mannigfaltigkeit, 68
- graduierten, 18
- Graphen, 4
- homogene Koordinaten, 43
- Homologiekategorie, 16
- Homologietheorie, 57
- homologische Orientierung
  - global, 67
  - im Punkt, 67
- Homotopiegruppe, 63
- Homotopieinverse, 21
- Homotopieäquivalenz, 21

- Jordanscher Kurvensatz, 38
- Kategorie, 1
  - klein, 2
- kettenhomotop, 22
- Kettenhomotopie, 22
- Kettenmoduln, 10
- Kommutatorgruppe, 60
- Komposition, 1
- kontrahierbar, 21
- Koprodukt
  - topologischer Räume, 19
  - von  $R$ -Moduln, 20
- kurze exakte Folge von Kettenkomplexen, 27
- kurze exakte Sequenz, 11
- lange exakte Folge, 26
- Morphismen, 1
- Morphismus von Homologietheorien, 58
- $n$ -Ketten, 16
- $n$ -Ränder, 16
- $n$ -Simplex, 4
- $n$ -te Bettizahl, 48
- $n$ -te Homologie, 10
- $n$ -te Randabbildung
  - simplicial, 8
  - singulär, 15
  - zellulär, 45
- $n$ -ter Homologiemodul
  - simplicial, 9
  - singulär, von Paaren, 26
- $n$ -ter Kettenmodul
  - simplicial, 8
  - singulär, 15
- $n$ -ter zelluläre Kettenmodul, 45
- $n$ -zusammenhängend, 64
- $n$ -Zykel, 16
- natürliche Transformation, 2, 32
- natürlicher Isomorphismus, 47
- Objekte, 1
- offene Zelle, 42
- orientierbare Mannigfaltigkeit, 67
- orientierte Mannigfaltigkeit, 67

Paar von topologischen Räumen, 26

Paarfolge, 57

Polyeder, 6

projektiver Modul, 7, 12

Pushout, 41

$R$ -Kettenabbildung, 18

$R$ -Kettenkomplex, 10

Rand des  $n$ -Simplizes, 5

Randabbildungen, 10

Rang einer abelschen Gruppe, 11

reduzierte singuläre Homologie, 34

reell projektiver Raum, 43

relative Homotopiegruppe, 64

Schwache Topologie, 42

Schwerpunkt, 53

Seite, 4

Simplizes, 4

simpliziale Abbildung, 4

simplizialer Kettenkomplex, 10

simplizialer Komplex, 4

singuläre Homologie von  $X$ , 16

singuläre Simplizes, 15

singulärer Kettenkomplex, 16

von Paaren, 26

Skalarprodukt, 38

Spaltung, 12

Spektralfolge, 58

Summe

topologischer Räume, 19

von  $R$ -Moduln, 20

Torsionsgruppe, 11

$\mathcal{U}$ -klein, 52

unital, 1

Unterkomplex, 4

Vektorfeld, 38

Vertices, 4

Zellstruktur, 41

zelluläre Abbildung, 42

zelluläre Homologie, 45

zellulärer Kettenkomplex, 45



## Abbildungsverzeichnis

1	$\Delta^n \times [0, 1]$ für $n = 0, 1, 2$	23
2	Zerlegung von $\Delta^2 \times [0, 1]$ in 3-Simplizes	23
3	Ein nirgends verschwindendes Vektorfeld auf $S^1$	38
4	Skizze zur Ausschneidung mit kleinen Simplizes	52
5	Zerteilung eines 2-Simplex	53
6	Skizze des „Abkegelns“	53
7	Die natürlichen Transformationen $B_n$ und $H_n$ für $n = 0, 1, 2$	54
8	Skizze zum Beweis von Lemma 15.6	61
9	Skizze zum Beweis von Lemma 15.7	61
10	Skizze zum Beweis von Lemma 15.8	62
11	Skizze zum Beweis von Lemma 15.11	63
12	Verknüpfung in der relativen Homotopiegruppe für $n = 2$	65
13	Die Abbildung $\gamma$ aus Lemma 15.22	65