



# Skript Grundlagen der Analysis, Topologie, Geometrie

Mitschrift der Vorlesung „Grundlagen der Analysis, Topologie, Geometrie“  
von Prof. Dr. Arthur Bartels

Jannes Bantje

5. Juni 2014

Erstellt mit  $\text{\LaTeX}$

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Topologische Räume</b>	<b>1</b>
1.1	Definition: Metrischer Raum	1
1.2	Definition: Norm auf einem $\mathbb{R}$ -Vektorraum	1
1.3	Beispiel: Normen auf $\mathbb{R}^n$	1
1.4	Beispiele für Metriken	1
1.5	Definition: Isometrie und Stetigkeit	2
1.6	Definition: offene Teilmenge	2
1.7	Lemma: Charakterisierung von Stetigkeit über offene Mengen	2
1.8	Definition: Topologischer Raum	2
1.9	Beispiele für Topologien	2
1.10	Definition: Stetigkeit in topologischen Räumen	2
1.11	Lemma: Kompositionen stetiger Abbildungen sind stetig	3
1.12	Definition: Homöomorphismus	3
1.13	Beispiele für homöomorphe Mengen	3
1.14	Definition: Basis der Topologie	3
1.15	Beispiel: Basis der Topologie in einem metrischen Raum	3
1.16	Proposition: Bedingung, dass eine Familie von Teilmengen eine Topologie ist	3
1.17	Bemerkung: Eindeutigkeit von Proposition 1.16	4
1.18	Beispiel: Topologie der punktweisen bzw. gleichmäßigen Konvergenz	4
1.19	Definition: Inneres, Abschluss und Rand	4
1.20	Bemerkung: Gleichungen für Inneres, Abschluss und Rand	4
1.21	Definition: Umgebung	4
1.22	Definition: Hausdorffraum	5
1.23	Definition: topologische Mannigfaltigkeit	5

<b>2</b>	<b>Konstruktion topologischer Räume</b>	<b>6</b>
2.1	Definition: Spurtopologie	6
2.2	Bemerkung: Stetigkeit durch Verknüpfung mit Inklusion	6
2.3	Definition: Produkttopologie	6
2.4	Definition: Produkttopologie mit unendlichen vielen Faktoren	6
2.5	Bemerkung zur Stetigkeit der Projektionen und Stetigkeit im Produktraum	6
2.6	Bemerkung zur üblichen Topologie auf $\mathbb{R}^n$	6
2.7	Beispiel: Torus	7
2.8	Definition: Homotopie und homotop	7
2.9	Definition: Quotiententopologie	7
2.10	Beispiele zur Quotiententopologie	7
<b>3</b>	<b>Konvergenz</b>	<b>9</b>
3.1	Definition: Konvergenz in topologischen Räumen	9
3.2	Lemma (Eindeutigkeit von Grenzwerten)	9
3.3	Definition: Gerichtete Menge	9
3.4	Definition: Netz und Konvergenz bezüglich eines Netzes	9
3.5	Lemma (Eindeutigkeit von Grenzwerten)	10
3.6	Definition: Teilnetz	10
<b>4</b>	<b>Kompakte Räume</b>	<b>11</b>
4.1	Definition: Offene Überdeckung und Teilüberdeckung	11
4.2	Definition: Kompaktheit	11
4.3	Definition: Endliche Durchschnittseigenschaft	11
4.4	Lemma: Äquivalenz zur Kompaktheit eines Hausdorffraumes	11
4.5	Satz: Charakterisierung von Kompaktheit durch konvergente Teilnetze	11
4.6	Bemerkung zu Kompaktheit in metrischen Räumen	12
4.7	Satz von Tychonov	12
4.8	Beispiel: Metrik auf dem Produkt metrischer Räume, die Produkttopologie induziert	13
4.9	Definition: Netze immer wieder und schließlich in $A$	13
4.10	Definition: Universelles Netz	13
4.11	Lemma: Universelle Netze konvergieren in kompakten Räumen	13
4.12	Proposition: Jedes Netz besitzt universelles Teilnetz	14
4.13	Definition: Vektorraum der beschränkten Abbildungen	14
4.14	Satz (Mittelbarkeit von $\mathbb{Z}$ )	14
<b>5</b>	<b>Kompaktifizierungen</b>	<b>16</b>
5.1	Definition: Kompaktifizierung	16
5.2	Beispiele für Kompaktifizierungen	16
5.3	Definition: lokalkompakt	16
5.4	Beispiele für lokalkompakte Hausdorffräume	16
5.5	Proposition: Offene Teilmengen kompakter Räume sind lokalkompakt	16
5.6	Definition: Einpunktkompaktifizierung (EPK)	17
5.7	Proposition über Eigenschaften der Einpunktkompaktifizierung	17
5.8	Frage nach Fortsetzungen stetiger Funktionen in der Einpunktkompaktifizierung	17
5.9	Definition: Eigentliche stetige Abbildung	18
5.10	Satz: Charakterisierung von eigentlichen stetigen Abbildungen	18
<b>6</b>	<b>Der Approximationssatz von Stone-Weierstraß</b>	<b>19</b>
6.1	Definition: Verschwinden stetiger Funktionen im Unendlichen	19
6.2	Definition: $\mathcal{B} \subseteq C_0(X)$ trennt $x, y \in X$ streng	19
6.3	Satz (Stone-Weierstraß)	19

6.4	Satz von Dini . . . . .	20
6.5	Lemma 1: Folge reeller Polynome, die gleichmäßig gegen Wurzelfunktion konvergiert . . . . .	20
6.6	Bemerkung: Komposition mit Polynomen ist auch der Algebra . . . . .	21
6.7	Lemma 2: Betrag von $f \in \mathcal{A}$ liegt in $\bar{\mathcal{A}}$ . . . . .	21
6.8	Bemerkung: $\max, \min$ von Funktionen aus $\mathcal{A}$ liegen in $\bar{\mathcal{A}}$ . . . . .	21
6.9	Lemma 3: Existenz von $f \in \mathcal{A}$ mit $f(x) = \alpha, f(y) = \beta$ , wenn $\mathcal{A}$ streng trennt . . . . .	21
<b>7</b>	<b>Metrisierbarkeit</b> . . . . .	<b>22</b>
7.1	Definition: Metrisierbar . . . . .	22
7.2	Definition: Normaler Hausdorffraum . . . . .	22
7.3	Satz (Urysohn) . . . . .	22
7.4	Urysohns Lemma . . . . .	23
<b>8</b>	<b>Zusammenhängende topologische Räume</b> . . . . .	<b>24</b>
8.1	Definition: Zusammenhängender, wegzusammenhängender topologischer Raum . . . . .	24
8.2	Bemerkungen zu zusammenhängenden und wegzusammenhängenden Räumen . . . . .	24
8.3	Beispiele zu (weg-)zusammenhängenden Räumen . . . . .	24
8.4	Satz (Topologische Invarianz der Dimension) . . . . .	25
<b>9</b>	<b>Die Fundamentalgruppe</b> . . . . .	<b>26</b>
9.1	Definition: Einfach zusammenhängender topologischer Raum . . . . .	26
9.2	Bemerkungen zu einfach zusammenhängenden Räumen . . . . .	26
9.3	Definition: Homotopie zwischen Wegen . . . . .	26
9.4	Definition: Schleife . . . . .	26
9.5	Lemma: Charakterisierung von einfach zusammenhängend über Schleifen . . . . .	26
9.6	Notation: Konstante Schleife . . . . .	27
9.7	Definition: Kompositionsweg . . . . .	27
9.8	Lemma: Eigenschaften des Kompositionsweg als Verknüpfung . . . . .	27
9.9	Korollar: Gruppenstruktur auf der Menge der Homotopieklassen von Schleifen . . . . .	27
9.10	Definition: Fundamentalgruppe . . . . .	27
9.11	Bemerkung: Isomorphie zwischen Fundamentalgruppen . . . . .	28
<b>10</b>	<b>Die Windungszahl</b> . . . . .	<b>29</b>
10.1	Frage nach der Gruppenstruktur von Fundamentalgruppen . . . . .	29
10.2	Proposition: Hebung eines Weges auf $S^1$ nach $\mathbb{R}$ . . . . .	29
10.3	Definition: Windungszahl . . . . .	29
10.4	Satz: Die Windungszahl definiert einen Isomorphismus $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$ . . . . .	29
10.5	Definition: Überlagerung und elementare Umgebung . . . . .	30
10.6	Beispiele für Überlagerungen . . . . .	30
10.7	Definition: Hebung . . . . .	30
10.8	Homotopiehebungssatz . . . . .	30
<b>11</b>	<b>Induzierte Abbildungen</b> . . . . .	<b>32</b>
11.1	Lemma: Gruppenhom. zwischen Fundamentalgruppen durch induzierte Abbildung . . . . .	32
11.2	Definition: Induzierte Abbildung . . . . .	32
11.3	Definition: Punktierte Raum, punktierte Abbildung und punktiert homotop . . . . .	32
11.4	Proposition (Homotopieinvarianz von $\pi_1$ ) . . . . .	32
11.5	Definition: Homotopieäquivalent und zusammenziehbar . . . . .	32
11.6	Beispiele für Homotopieäquivalenzen und zusammenziehbare Räume . . . . .	33
11.7	Korollar: Die induzierte Abbildung einer Homotopieäquivalenz ist ein Isomorphismus . . . . .	33
11.8	Fixpunktsatz von Brouwer . . . . .	33
11.9	Proposition: Induzierte Abbildung von $f : S^1 \rightarrow S^1, z \mapsto z^n$ . . . . .	34

11.10	Lemma: Konstruktion einer punktierten Homotopie aus einer nicht punktierten . . . .	35
11.11	Hauptsatz der Algebra . . . . .	35
<b>12</b>	<b>Eigentlich diskontinuierliche Wirkungen</b>	<b>36</b>
12.1	Definition: Eigentlich diskontinuierliche Wirkung . . . . .	36
12.2	Lemma: edk-Wirkungen definieren Überlagerungen . . . . .	36
12.3	Beispiele für edk-Wirkungen . . . . .	36
12.4	Satz: Zusammenhang der Fundamentalgruppe mit einer edk-Wirkung . . . . .	37
12.5	Bemerkung . . . . .	37
12.6	Definition: Decktransformation . . . . .	38
12.7	Lemma . . . . .	38
12.8	Bemerkung . . . . .	38
12.9	Definition . . . . .	38
12.10	Proposition . . . . .	38
<b>13</b>	<b>Klassifikation von Überlagerungen</b>	<b>39</b>
13.1	Hebungssatz . . . . .	39
	<b>Index</b>	<b>A</b>
	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>C</b>

# 1 Topologische Räume

## 1.1 Definition

Ein **metrischer Raum**  $(X, d)$  ist eine Menge  $X$  mit einer Abbildung  $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$  mit folgenden Eigenschaften:

- (i)  $\forall x, y \in X : d(x, y) = d(y, x)$
- (ii)  $\forall x, y \in X : d(x, y) = 0 \iff x = y$
- (iii)  $\forall x, y, z \in X : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  (Dreiecksungleichung)

## 1.2 Definition

Sei  $V$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Eine **Norm** auf  $V$  ist eine Abbildung  $\|\cdot\| : V \rightarrow [0, \infty)$  mit folgenden Eigenschaften:

- (i)  $\forall v \in V, \lambda \in \mathbb{R} : \|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$
- (ii)  $\forall v, w \in V : \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$  (Dreiecksungleichung)
- (iii)  $\forall v \in V : \|v\| = 0 \iff v = 0$

Durch  $d(v, w) := \|v - w\|$  erhalten wir eine Metrik auf  $V$ .

## 1.3 Beispiel

Auf  $\mathbb{R}^n$  gibt es verschiedene Normen und damit auch verschiedene Metriken: Für  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

- (i)  $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$
- (ii)  $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$
- (iii)  $\|x\|_\infty = \max\{|x_i| \mid i = 1, \dots, n\}$

## 1.4 Beispiele

(i)

$$S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

$$\text{mit } d(z, z') := \min\{|\theta| \mid \theta \in \mathbb{R} : z = e^{i\theta} z'\}$$

(ii) Ist  $X$  ein metrischer Raum und  $A$  eine Teilmenge von  $X$ , so wird  $A$  durch die Einschränkung der Metrik auf  $A$  zu einem metrischen Raum. Wir sagen dann  $A$  ist ein Unterraum von  $X$ .

(iii) Sei  $X$  eine beliebige Menge. Durch

$$d(x, y) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x = y \\ 1, & \text{falls } x \neq y \end{cases}$$

wir auf  $X$  eine Metrik (die **diskrete Metrik**) definiert.

(iv) Sei  $p$  eine Primzahl. Jedes  $x \neq 0 \in \mathbb{Q}$  lässt sich eindeutig schreiben als  $x = \frac{a}{b} p^n$  mit  $n, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$  und  $a, b, p$  paarweise teilerfremd. Dann heißt

$$|x|_p := p^{-n}$$

der  **$p$ -adische Betrag** von  $x$ , ( $|0|_p := 0$ ). Durch  $d_p(x, y) := |x - y|_p$  erhält man die  $p$ -adische Metrik auf  $\mathbb{Q}$ .

## 1.5 Definition

Seien  $(X, d_X)$  und  $(Y, d_Y)$  zwei metrische Räume. Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  heißt eine **Isometrie**, falls gilt:

$$\forall x, x' \in X : d_Y(f(x), f(x')) = d_X(x, x')$$

$f$  heißt **stetig**, falls für alle  $x_0 \in X$  gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : d_X(x, x_0) < \delta \implies d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

## 1.6 Definition

Eine Teilmenge  $U$  eines metrischen Raums  $X$  heißt **offen**, falls gilt

$$\forall x \in U \exists \delta > 0 \text{ mit } B_\delta(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < \delta\} \subseteq U$$

## 1.7 Lemma

Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung zwischen metrischen Räumen. Dann sind äquivalent:

- (i)  $f$  ist stetig
- (ii) Urbilder (unter  $f$ ) offener Mengen in  $Y$  sind offen in  $X$ . ( $\forall U \subseteq Y$  offen ist  $f^{-1}(U) \subseteq X$  offen)

### Beweis

Analysis II. □

## 1.8 Definition

Ein **topologischer Raum**  $(X, \mathcal{O})$  ist eine Menge  $X$  zusammen mit einer Familie  $\mathcal{O}$  von Teilmengen von  $X$  so dass gilt:

- (i)  $\emptyset, X \in \mathcal{O}$
- (ii)  $U, V \in \mathcal{O} \implies U \cap V \in \mathcal{O}$
- (iii) Ist  $I$  eine Indexmenge und  $U_i \in \mathcal{O}$  für  $i \in I$ , so gilt  $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{O}$ .

$\mathcal{O}$  heißt dann eine **Topologie** auf  $X$ .  $U \subseteq X$  heißt **offen**, falls  $U \in \mathcal{O}$ .  $A \subseteq X$  heißt **abgeschlossen**, falls  $X \setminus A$  offen ist.

## 1.9 Beispiele

- (i) Jeder metrische Raum wird durch  $\mathcal{O} := \{U \subseteq X \mid U \text{ ist offen}\}$  zu einem topologischen Raum.
- (ii) Sei  $X$  eine beliebige Menge.
  - (i) Die **grobe Topologie** ist  $\mathcal{O}_{\text{grob}} := \{\emptyset, X\}$
  - (ii) Die **diskrete Topologie** ist  $\mathcal{O}_{\text{diskret}} := \mathcal{P}(X)$
  - (iii) Die **koendliche Topologie** ist  $\mathcal{O}_{\text{koendl.}} := \{U \subseteq X \mid X \setminus U \text{ endlich}\} \cup \{\emptyset\}$

## 1.10 Definition

Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  zwischen topologischen Räumen heißt **stetig**, wenn Urbilder von offener Mengen offen sind.

### 1.11 Lemma

Seien  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : Y \rightarrow Z$  stetige Abbildungen. Dann ist auch  $g \circ f : X \rightarrow Z$  stetig.

#### Beweis

Sei  $U \subseteq Z$  offen. Dann ist  $g^{-1}(U) \subseteq Y$  offen, da  $g$  stetig ist. Da auch  $f$  stetig ist, gilt  $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U)) \subseteq X$  offen.  $\square$

### 1.12 Definition

Seien  $X, Y$  topologische Räume. Eine bijektive stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  heißt ein **Homöomorphismus**, falls auch ihre Umkehrabbildung  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  stetig ist.

Gibt es einen solchen Homöomorphismus, so heißen  $X$  und  $Y$  **homöomorph** und wir schreiben  $X \cong Y$ , andernfalls  $X \not\cong Y$ .

### 1.13 Beispiel

- (i)  $(0, 1) \cong (0, \infty) \cong (-\infty, 0) \cong \mathbb{R}$  (einfach)
- (ii)  $(0, 1) \not\cong [0, 1] \not\cong [0, 1] \not\cong (0, 1)$  (Übung)
- (iii)  $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m \iff n = m$  (schwer)

### 1.14 Definition

Sei  $X$  ein topologischer Raum. Eine Familie  $\mathcal{U}$  von offenen Teilmengen von  $X$  heißt eine **Basis der Topologie**, falls für jede Teilmenge  $W \subseteq X$  äquivalent sind:

- (1)  $W$  ist offen
- (2)  $\forall x \in W : \exists U \in \mathcal{U} \text{ mit } x \in U \subseteq W \iff W = \bigcup_{\substack{u \in \mathcal{U} \\ u \subseteq W}} u$

Man sagt  $X$  erfüllt das **zweite Abzählbarkeitsaxiom**, falls  $X$  eine abzählbare Basis der Topologie besitzt.

### 1.15 Beispiel

Sei  $X$  ein metrischer Raum. Dann ist  $\{B_\delta(x) \mid x \in X, \delta > 0\}$  eine Basis der Topologie von  $X$ . Gibt es eine abzählbare dichte Teilmenge  $X_0 \subseteq X$ , so ist  $\{B_{1/n}(x) \mid x \in X_0, n \in \mathbb{N}\}$  eine abzählbare Basis der Topologie von  $X$  und  $X$  erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom.

### 1.16 Proposition

Sei  $X$  eine Menge und  $\mathcal{U}$  eine Familie von Teilmengen von  $X$  mit  $X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ . Dann ist  $\mathcal{U}$  genau dann die Basis einer Topologie  $\mathcal{O}$  auf  $X$ , wenn  $\mathcal{U}$  folgende Bedingungen erfüllt:

$$\forall U, V \in \mathcal{U} : \forall x \in U \cap V : \exists W \in \mathcal{U} \text{ mit } x \in W \subseteq U \cap V \quad (\star)$$

#### Beweis

Sei  $\mathcal{U}$  die Basis der Topologie  $\mathcal{O}$  und  $U, V \in \mathcal{U}$ .  $\Rightarrow U, V$  offen, also ist auch  $U \cap V$  offen. Da  $\mathcal{U}$  eine Basis der Topologie ist, gibt es zu jedem  $x \in U \cap V$  ein  $W \in \mathcal{U}$  mit  $x \in W \subseteq U \cap V$ . Daher gilt  $(\star)$

Sei umgekehrt  $(\star)$  erfüllt. Definiere  $\mathcal{O}$  durch

$$W \in \mathcal{O} :\iff \forall x \in W : \exists U \in \mathcal{U} : x \in U \subseteq W.$$

Dann  $\emptyset \in \mathcal{O}$ . Wegen  $X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$  gilt auch  $X \in \mathcal{O}$ . Weiter ist  $\mathcal{O}$  unter Vereinigungen abgeschlossen. Seien  $W_1, W_2 \in \mathcal{O}$ . Sei  $x \in W_1 \cap W_2$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} x \in W_1, W_1 \text{ offen} &\Rightarrow \exists U_1 \in \mathcal{U} : x \in U_1 \subseteq W_1 \\ x \in W_2, W_2 \text{ offen} &\Rightarrow \exists U_2 \in \mathcal{U} : x \in U_2 \subseteq W_2 \end{aligned}$$

Also  $x \in U_1 \cap U_2$ . Mit  $(\star)$  folgt:  $\exists W \in \mathcal{U}$  mit  $x \in W \subseteq U_1 \cap U_2 \subseteq W_1 \cap W_2$ .  $\square$

## 1.17 Bemerkung

Die Topologie  $\mathcal{O}$  in der Proposition 1.16 wird eindeutig durch  $\mathcal{U}$  bestimmt.

## 1.18 Beispiel

- Sei  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  der  $\mathbb{R}$ -Vektorraum aller reellen Folgen. Für  $\delta > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$  sei

$$U_{n,\delta,\alpha_1,\dots,\alpha_n} := \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \mid |x_i - \alpha_i| < \delta \text{ für } i = 1, \dots, n\}$$

Dann erfüllt  $\mathcal{U} := \{U_{n,\delta,\alpha_1,\dots,\alpha_n}\}$  die Bedingung  $(\star)$  und ist die Basis der **Topologie der punktweisen Konvergenz**.

- Sei  $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  der  $\mathbb{R}$ -Vektorraum aller stetigen Abbildungen. Zu  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ,  $\delta > 0$ ,  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig sei

$$U_{a,b,\delta,g} := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig} \mid \forall t \in [a, b] : |f(t) - g(t)| < \delta\}.$$

Dann erfüllt  $\mathcal{U} := \{U_{a,b,\delta,g}\}$   $(\star)$  und ist die Basis der **Topologie der gleichmäßigen Konvergenz** auf kompakten Intervallen.

## 1.19 Definition

Sei  $Y$  eine Teilmenge eines topologischen Raums  $X$ .

$\mathring{Y} := \{y \in Y \mid \exists U \subseteq X \text{ offen mit } y \in U \subseteq Y\}$  heißt das **Innere** von  $Y$

$\overline{Y} := \{x \in X \mid \forall U \subseteq X \text{ offen mit } x \in U : U \cap Y \neq \emptyset\}$  heißt **Abschluss** von  $Y$

$\partial Y := \overline{Y} \setminus \mathring{Y}$  heißt der **Rand** von  $Y$ .

## 1.20 Bemerkung

- $\mathring{Y} = X \setminus (\overline{X \setminus Y})$ ,  $\overline{Y} = X \setminus (X \setminus Y)^\circ$
- $\mathring{Y} = \bigcup_{\substack{U \subseteq Y \\ U \text{ offen}}} U$  ist offen
- $\overline{Y} = \bigcap_{\substack{A \supseteq Y \\ A \text{ abgeschlossen}}} A$  ist abgeschlossen
- $\partial Y = \overline{Y} \setminus \mathring{Y}$  ist abgeschlossen.

## 1.21 Definition

Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $x \in X$ .  $V \subseteq X$  heißt eine **Umgebung** von  $x$ , falls es  $U \subseteq X$  offen gibt mit  $x \in U \subseteq V$ . Ist  $V$  offen, so heißt  $V$  eine **offene Umgebung** von  $x$ .



## 1.22 Definition

Ein topologischer Raum  $X$  heißt **hausdorffsch** (oder eine **Hausdorffraum**), falls es zu jedem Paar  $x, y \in X, x \neq y$  offene Umgebungen  $U$  von  $x$  und  $V$  von  $y$  gibt mit  $U \cap V = \emptyset$ .

Bsp:

- Metrische Räume sind hausdorffsch.
- Ist  $|X| \geq 2$  so ist  $(X, \mathcal{O}_{\text{grob}})$  nicht hausdorffsch.

## 1.23 Definition

Ein Hausdorffraum  $M$ , der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, heißt eine **topologische Mannigfaltigkeit** der Dimension  $n$  (oder eine  $n$ -Mannigfaltigkeit), falls er lokal homöomorph zum  $\mathbb{R}^n$  ist; d.h.  $\forall x \in M \exists$  offene Umgebung  $U$  von  $x$  mit  $U \cong \mathbb{R}^n$ .

## 2 Konstruktion topologischer Räume

### 2.1 Definition

Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $A \subseteq X$  eine Teilmenge. Die **Spurtopologie** auf  $A$  besteht aus allen Teilmengen von  $A$  der Form  $A \cap U$  mit  $U \subseteq X$  offen. Mit dieser Topologie heißt  $A$  ein Unterraum von  $X$ .

**Achtung:**  $U \subseteq A$  offen  $\not\Rightarrow U \subseteq X$  offen!

### 2.2 Bemerkung

Sei  $i : A \rightarrow X$  die Inklusion.

(i)  $i$  ist stetig.

(ii) Ist  $Y$  ein weiterer topologischer Raum und  $f : Y \rightarrow A$  eine Abbildung. Dann gilt:

$$f \text{ stetig} \iff i \circ f : Y \rightarrow X \text{ stetig}$$

### 2.3 Definition

Seien  $X, Y$  topologische Räume. Eine Basis für die **Produkttopologie** auf  $X \times Y$  ist

$$\mathcal{U} := \{U \times V \mid U \subseteq X \text{ offen}, V \subseteq Y \text{ offen}\}.$$

### 2.4 Definition

Seien  $X_i$  für  $i \in I$  topologische Räume. Die Produkttopologie auf ihrem Produkt

$$\prod_{i \in I} X_i = \{(x_i)_{i \in I} \mid x_i \in X_i\}$$

hat als Basis alle Mengen der Form  $\prod_{i \in I} U_i$  mit

1)  $U_i \subseteq X_i$  ist offen

2) Für fast alle  $i$  ist  $U_i = X_i$ .

### 2.5 Bemerkung

Seien  $p_j : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_j$  die Projektionen.

(i) Die  $p_j$  sind stetig.

(ii) Ist  $Y$  ein weiterer topologischer Raum und  $f : Y \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$  eine Abbildung, so gilt:  
 $f$  ist stetig  $\iff \forall j$  ist  $f_j := p_j \circ f$  stetig.

### 2.6 Bemerkung

Die übliche Topologie auf  $\mathbb{R}^n = \prod_{i=1}^n \mathbb{R}$  stimmt mit der Produkttopologie überein.

## 2.7 Beispiel

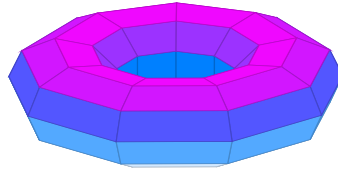


Abbildung 1: Der Torus  $T^2$ , Quelle [\[1\]](#)

$T^n := \underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_n = \prod_{i=1}^n S^1$  heißt der  $n$ -Torus. Der  $n$ -Torus ist eine  $n$ -Mannigfaltigkeit.

## 2.8 Definition

Seien  $X$  und  $Y$  topologische Räume und  $(f_t)_{t \in [0,1]}$  eine Familie von stetigen Abbildungen  $f_t : X \rightarrow Y$ . Wir sagen, dass die  $f_t$  stetig von  $t$  abhängen, falls

$$H : X \times [0, 1] \rightarrow Y \text{ mit } H(x, t) = f_t(x)$$

stetig bezüglich der Produkttopologie ist. In diesem Fall heißen  $f_0$  und  $f_1$  **homotop** und  $H$  eine **Homotopie** zwischen  $f_0$  und  $f_1$ .

### Beispiel

Je zwei Abbildungen  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  sind homotop; eine Homotopie wird gegeben durch  $H(x, t) := (1-t) \cdot f(x) + t \cdot g(x)$ . Wir werden später sehen, dass  $\text{id} : S^1 \rightarrow S^1$  nicht homotop zu einer konstanten Abbildung ist.

## 2.9 Definition

Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $M$  eine Menge und  $q : X \rightarrow M$  eine surjektive Abbildung. Die offenen Mengen der **Quotiententopologie** auf  $M$  (bezüglich  $q$ ) sind alle  $U \subseteq M$  für die  $q^{-1}(U) \subseteq X$  offen ist.

### Bemerkung

- (i)  $q : X \rightarrow M$  ist stetig.
- (ii) Ist  $Y$  ein weiterer topologischer Raum und  $f : M \rightarrow Y$  eine Abbildung, so gilt

$$f \text{ ist stetig} \iff f \circ q \text{ ist stetig}$$

### Bemerkung

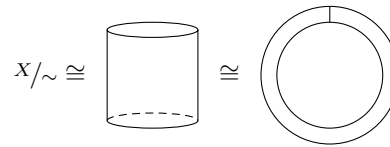
Sei  $\sim$  eine Äquivalenzrelation auf dem topologischen Raum  $X$ . Dann ist die Äquivalenzklassenabbildung  $q : X \rightarrow X/\sim, x \mapsto [x]_\sim$  surjektiv. Insbesondere wird  $X/\sim$  durch die Quotiententopologie zu einem topologischen Raum.

## 2.10 Beispiele

$X = [0, 1] \times [0, 1]$ : Definiere

"Zusammenkleben"  
der Seiten

- (i)  $(s, t) \sim (s', t') : \Leftrightarrow (s = s' \text{ und } t = t') \text{ oder } (s = 0, s' = 1, t = t')$ . Dann



Möbiusband:  
Verdrehen und  
dann  
Zusammenkleben

- (ii)  $(s, t) \sim (s', t') : \Leftrightarrow (s = s' \text{ und } t = t') \text{ oder } (s = 0, s' = 1 \text{ und } t = 1 - t')$ . Dann

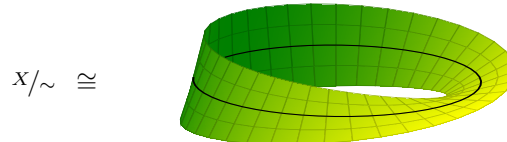


Abbildung 2: Möbius-Band, Quelle

- (iii) Sei  $\mathbb{R}P^n$  die Menge aller 1-dimensionalen Unterräume des  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Wir erhalten eine surjektive Abbildung

$$q : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}P^n, \quad q(v) := \langle v \rangle$$

$\mathbb{R}P^n$  mit der Quotiententopologie bezüglich  $q$  heißt der **reell projektive Raum** der Dimension  $n$ . Er ist eine  $n$ -Mannigfaltigkeit.

- (iv) Betrachte auf  $\mathbb{R}$  die Relation  $x \sim y : \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$ . Der Raum der Äquivalenzklassen bezeichnen wir mit  $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ . Dann ist  $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$  mit der Quotiententopologie nicht hausdorffsch, obwohl  $\mathbb{R}$  natürlich hausdorffsch ist.

(Übung: Die Quotiententopologie auf  $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$  ist die grobe Topologie.)

- (v) Sei  $f : X \rightarrow X$  eine stetige Abbildung. Betrachte auf  $X \times [0, 1]$  die Äquivalenzrelation

$$(x, t) \sim (x', t') : \Leftrightarrow (x = x' \text{ und } t = t') \text{ oder } (t = 0, t' = 1 \text{ und } x' = f(x))$$

Der Quotient  $T_f := X \times [0, 1] / \sim$  heißt der **Abbildungstorus** von  $f$ .

## 3 Konvergenz

### 3.1 Definition

Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $X$ . Dann sagen wir  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert gegen  $x \in X$ , falls gilt: Zu jeder offenen Umgebung  $V$  von  $x$ , gibt es  $N \in \mathbb{N}$ , sodass  $x_n \in V$  für alle  $n \geq N$ . Wir schreiben dann  $x_n \rightarrow x$  oder  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ .  $x$  heißt ein Grenzwert von  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

#### Bemerkung

Bezüglich der groben Topologie ist jeder Punkt Grenzwert jeder Folge.

#### Beispiel

Betrachte die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Teilmengen auf dem Raum  $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Dann gilt für Folgen  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von stetigen Abbildungen  $f_n \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$f_n \rightarrow f \iff \forall a < b \text{ konvergiert } f_n|_{[a,b]} \rightarrow f|_{[a,b]} \text{ gleichmäßig.}$$

### 3.2 Lemma (Eindeutigkeit von Grenzwerten)

Sei  $X$  hausdorffsch. Gilt  $x_n \rightarrow x$  und  $x_n \rightarrow y$ , so folgt  $x = y$ .

#### Beweis

Übung!

### 3.3 Definition

Eine nichtleere Menge  $\Lambda$  mit einer Relation " $\leq$ " heißt **gerichtet**, falls gilt

$$(i) \quad \forall \lambda \in \Lambda : \lambda \leq \lambda$$

$$(ii) \quad \forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \Lambda : \lambda_1 \leq \lambda_2 \wedge \lambda_2 \leq \lambda_3 \Rightarrow \lambda_1 \leq \lambda_3 \quad (\text{transitiv})$$

$$(iii) \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda : \exists \mu : \lambda_1 \leq \mu \wedge \lambda_2 \leq \mu$$

### 3.4 Definition

Sei  $X$  ein topologischer Raum. Ein **Netz**  $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  in  $X$  besteht aus einer gerichteten Menge  $\Lambda$  und Elementen  $x_\lambda \in X$  für  $\lambda \in \Lambda$ . Für  $x \in X$  sagen wir  $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  konvergiert gegen  $x$ , falls gilt:

$$\forall \text{ Umgebungen } U \text{ von } x : \exists \lambda_0 \in \Lambda : \forall \lambda \in \Lambda \text{ mit } \lambda \geq \lambda_0 \text{ gilt } x_\lambda \in U$$

Wir schreiben dann  $x_\lambda \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} x$  oder  $x_\lambda \rightarrow x$ .

#### Beispiel

Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $x \in X$ . Dann ist  $\Lambda := \{U \mid U \text{ ist offene Umgebung von } x\}$  gerichtet bezüglich

$$U \leq V :\Leftrightarrow V \subseteq U$$

Ist nun  $x_U \in U$  für alle  $U \in \Lambda$  so  $x_U \rightarrow x$ .

### 3.5 Lemma (Eindeutigkeit von Grenzwerten)

Sei  $X$  hausdorffsch. Gilt  $x_\lambda \rightarrow x$  und  $x_\lambda \rightarrow y$ , so folgt  $x = y$ .

#### Beweis

Angenommen  $x \neq y$ . Da  $X$  hausdorffsch ist existiert eine Umgebung  $U$  von  $x$  und  $V$  von  $y$  mit  $U \cap V = \emptyset$ .

$$x_\lambda \rightarrow x \Rightarrow \exists \lambda_U : x_\lambda \in U : \forall \lambda \geq \lambda_U$$

$$x_\lambda \rightarrow y \Rightarrow \exists \lambda_V : x_\lambda \in V : \forall \lambda \geq \lambda_V$$

Sei nun  $\mu \in \Lambda$  mit  $\mu \geq \lambda_U, \mu \geq \lambda_V$ . Dann folgt  $x_\mu \in U \cap V = \emptyset$  □

### 3.6 Definition

Sei  $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  ein Netz in  $X$ . Ein **Teilnetz** von  $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  ist eine gerichtete Menge  $\Lambda'$  mit einer Abbildung  $f : \Lambda' \rightarrow \Lambda$ , so dass gilt

$$\text{i) } \lambda'_1 \leq \lambda'_2 \Rightarrow f(\lambda'_1) \leq f(\lambda'_2) \quad (f \text{ erhält } \leq)$$

$$\text{ii) } \forall \lambda \in \Lambda : \exists \lambda' \in \Lambda' \text{ mit } \lambda \leq f(\lambda') \quad (f \text{ ist kofinal})$$

Oft schreiben wir  $(x_{f(\lambda')})_{\lambda' \in \Lambda'}$  für ein Teilnetz.

#### Bemerkung

Ein Teilnetz einer Folge ist *nicht* notwendig eine Teilfolge.

## 4 Kompakte Räume

### 4.1 Definition

Eine Familie  $\mathcal{U}$  von offenen Teilmengen von  $X$  heißt eine **offene Überdeckung**, falls

$$\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U = X.$$

$\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$  heißt eine **Teilüberdeckung**, falls immer noch  $X \subseteq \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V$ .

### 4.2 Definition

Ein topologischer Hausdorffraum  $X$  heißt **kompakt**, wenn jede offene Überdeckung von  $X$  eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

### 4.3 Definition

Eine Familie  $\mathcal{A}$  von abgeschlossenen Teilmengen von  $X$  hat die **endliche Durchschnittseigenschaft**, wenn für jedes  $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$  mit  $|\mathcal{A}_0| < \infty$  gilt

$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}_0} A \neq \emptyset.$$

### 4.4 Lemma

Sei  $X$  ein Hausdorffraum. Dann ist  $X$  genau dann kompakt, wenn gilt: Hat eine Familie  $\mathcal{A}$  von abgeschlossenen Teilmengen von  $X$  die endliche Durchschnittseigenschaft, so gilt

$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \neq \emptyset$$

#### Beweis

Ist  $\mathcal{U}$  eine Familie von offenen Teilmengen, so ist  $\mathcal{A} := \{X \setminus U \mid U \in \mathcal{U}\}$  eine Familie von abgeschlossenen Teilmengen. Ist umgekehrt  $\mathcal{A}$  eine Familie von abgeschlossenen Teilmengen, so ist

$$\mathcal{U} := \{X \setminus A \mid A \in \mathcal{A}\}$$

eine Familie von offenen Teilmengen. Dann gilt:

- $\mathcal{U}$  hat eine endliche Teilüberdeckung  $\iff \mathcal{A}$  hat nicht die endliche Durchschnittseigenschaft.
- $\mathcal{U}$  ist eine Überdeckung  $\iff \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \emptyset$ . □

### 4.5 Satz

Sei  $X$  ein Hausdorffraum. Dann sind äquivalent:

- 1)  $X$  ist kompakt.
- 2) Jedes Netz in  $X$  besitzt ein konvergentes Teilnetz.

### Beweis

"1)  $\Rightarrow$  2)": Sei  $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  ein Netz in  $X$ . Für  $\lambda \in \Lambda$  sei  $A_\lambda := \overline{\{x_{\lambda'} \mid \lambda' \geq \lambda\}}$ .

Behauptung(\*):  $\mathcal{A} := \{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$  hat die endliche Durchschnittseigenschaft. Sei  $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$  endlich, also  $\mathcal{A}_0 = \{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda_0\}$  für ein  $\Lambda_0 \subseteq \Lambda$  endlich. Da  $\Lambda$  gerichtet ist, gibt es  $\lambda \in \Lambda$  mit  $\lambda \geq \mu$  für alle  $\mu \in \Lambda_0$ . Es folgt  $x_\lambda \in \{x_{\lambda'} \mid \lambda' \geq \mu\}$  für alle  $\mu \in \Lambda_0$ . Insbesondere folgt aus

$$x_\lambda \in \bigcap_{\mu \in \Lambda_0} A_\mu$$

Da  $X$  kompakt ist, folgt aus (\*)

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \neq \emptyset.$$

Wähle  $x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ . Sei  $\mathcal{U}$  die Menge aller offenen Umgebungen von  $x$ . Sei

$$\Lambda_{\mathcal{U}} := \{(\lambda, U) \mid \lambda \in \Lambda, x_\lambda \in U \in \mathcal{U}\}$$

Durch  $(\lambda, U) \leq (\lambda', U') :\Leftrightarrow \lambda \leq \lambda' \text{ und } U \supseteq U'$  wird  $\Lambda_{\mathcal{U}}$  zu einer gerichteten Menge: Sei  $(\lambda_1, U_1)$  und  $(\lambda_2, U_2) \in \Lambda_{\mathcal{U}}$ . Sei  $U := U_1 \cap U_2$ . Wähle  $\lambda \in \Lambda$  mit  $\lambda \geq \lambda_1$  und  $\lambda \geq \lambda_2$ . Da  $x \in A_\lambda = \overline{\{x_{\lambda'} \mid \lambda' \geq \lambda\}}$  gibt es  $\lambda' \geq \lambda$  mit  $x_{\lambda'} \in U$ . Also  $(\lambda', U) \in \Lambda_{\mathcal{U}}$  und  $(\lambda_1, U_1), (\lambda_2, U_2) \leq (\lambda', U)$ . Mit  $x_{(\lambda, U)} = x_\lambda$  ist  $(x_\lambda, U)_{(\lambda, U) \in \Lambda_{\mathcal{U}}}$  das gesuchte Teilnetz.

"2)  $\Rightarrow$  1)": Sei  $\mathcal{A}$  eine Familie von abgeschlossenen Teilmengen mit der endlichen Durchschnittseigenschaft. Sei  $\Lambda := \{\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A} \mid \mathcal{A}_0 \text{ ist endlich}\}$ .  $\Lambda$  ist gerichtet bezüglich  $\mathcal{A}_0 \leq \mathcal{A}_1 :\Leftrightarrow \mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}_1$ . Zu  $\mathcal{A}_0 \in \Lambda$  wähle

$$x_{\mathcal{A}_0} \in \bigcap_{A \in \mathcal{A}_0} A \neq \emptyset$$

Sei nun  $(x_{f(\lambda)})_{\lambda \in \Lambda'}$  mit  $f : \Lambda' \rightarrow \Lambda$  ein konvergentes Teilnetz von  $(x_{\mathcal{A}_0})_{\mathcal{A}_0 \in \Lambda}$ . Sei  $x$  der Grenzwert von  $(x_{f(\lambda')})_{\lambda' \in \Lambda'}$ .

Behauptung:  $x \in \bigcap_{A \in \mathcal{A}_0} A$ .

Sei  $A \in \mathcal{A}_0$  und  $U = X \setminus A$ . Angenommen  $x \in U$ . Da  $U$  eine offene Umgebung von  $x$  ist und  $x_{f(\lambda')} \rightarrow x$  gilt, gibt es  $\lambda'_0 \in \Lambda'$  mit  $x_{f(\lambda')} \in U$  für alle  $\lambda' \geq \lambda'_0$ . Zu  $\{A\} \in \Lambda$  gibt es  $\mu \in \Lambda'$  mit  $f(\mu) \geq \{A\}$ . Da  $\Lambda'$  gerichtet ist, gibt es  $\mu' \geq \mu$  und  $\mu' \geq \lambda'_0$ . Es folgt  $A \in f(\mu')$  und damit  $x_{f(\mu')} \in A$ , aber andererseits  $x_{f(\mu')} \in U = X \setminus A$ , da  $\mu' \geq \lambda'_0$ .  $\nexists$   $\square$

## 4.6 Bemerkung

Sei  $X$  ein metrischer Raum. Dann sind äquivalent:

- 1)  $X$  ist kompakt.
- 2) Jede Folge in  $X$  besitzt eine konvergente Teilfolge.

## 4.7 Satz von Tychonov

Sei  $(X_i)_{i \in I}$  eine Familie von kompakten topologischen Räumen. Dann ist auch  $X := \prod_{i \in I} X_i$  kompakt.

### Beweis

(unter Benutzung der nachfolgenden Punkte)

Ist  $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  ein Netz in  $\prod_i X_i$ , so besitzt dieses Netz ein universelles Teilnetz  $(x_{f(\mu)})_{\mu \in \Lambda'}$ . Für jedes  $i$  ist dann  $p_i(x_{f(\mu)})_{\mu \in \Lambda'}$  ein universelles Netz in  $X_i$  und nach dem Lemma 4.11 konvergent. Daher ist  $(x_{f(\mu)})_{\mu \in \Lambda'}$  bezüglich der Produkttopologie konvergent



## 4.8 Beispiel

Seien  $(X_i, d_i)_{i \in \mathbb{N}}$  kompakte metrische Räume. Dann gibt es eine Metrik  $d$  auf  $\prod X_i$ , so dass die zugehörige Topologie die Produkttopologie ist. (Übung)

### Beweis

Sei  $p_j : \prod_i X_i \rightarrow X_j$  die Projektion auf den  $j$ -ten Faktor. Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\prod_i X_i$ . Wähle induktiv  $\mathbb{N} = N_0 \supseteq N_1 \supseteq N_2 \supseteq \dots$  mit

- (i)  $|N_i| = \infty$
- (ii)  $(p_i(x_n))_{n \in N_i}$  ist eine konvergente Folge in  $X_i$ .

(Dies ist möglich, da  $X_i$  kompakt ist.) Wähle nun  $n_k \in N_k$  induktiv, so dass  $n_k > n_{k-1}$ . Dann ist  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  eine Teilfolge von  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Für  $i \in \mathbb{N}$  ist  $(p_i(x_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}, k \geq i}$  eine Teilfolge der konvergenten Folge  $(p_i(x_n))_{n \in N_i}$  und daher konvergent. Damit konvergiert auch  $(p_i(x_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$  für jedes  $i$ . Daher konvergiert  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  punktweise, also in der Produkttopologie (Übung).  $\square$

## 4.9 Definition

Sei  $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  ein Netz in  $X$  und  $A \subseteq X$ . Wir sagen  $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  ist **immer wieder in  $A$** , falls gilt:

$$\forall \lambda \in \Lambda : \exists \mu \in \Lambda \text{ mit } \mu \geq \lambda \text{ und } x_\mu \in A$$

Wir sagen  $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  ist **schließlich in  $A$** , falls gilt

$$\exists \lambda \in \Lambda : \forall \mu \in \Lambda \text{ mit } \mu \geq \lambda \text{ gilt } x_\mu \in A$$

### Bemerkung

$x_\lambda \rightarrow X \iff$  Für jede Umgebung  $U$  von  $x$  ist  $x_\lambda$  schließlich in  $U$ .

## 4.10 Definition

Ein Netz  $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  in  $X$  heißt **universell**, falls für jede Teilmenge  $A \subseteq X$  gilt: Entweder ist  $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  schließlich in  $A$  oder schließlich in  $X \setminus A$ .

### Bemerkung

- Ist  $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  universell und immer wieder in  $A$ , dann ist  $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  schließlich in  $A$ .
- Ist  $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  ein universelles Netz in  $X$  und  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung, so ist auch  $(f(x_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$  ein universelles Netz in  $Y$ .

## 4.11 Lemma

Ist  $X$  kompakt und  $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  ein universelles Netz in  $X$ , so konvergiert  $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  in  $X$ .

### Beweis

Sei  $X$  kompakt und  $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  ein universelles Netz in  $X$ . Angenommen  $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  konvergiert nicht in  $X$ . Dann gibt es zu jedem  $x \in X$  genau eine offene Umgebung  $U_x$  von  $x$ , so dass  $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  nicht schließlich in  $U_x$  ist. Da  $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  universell ist, ist  $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  schließlich in  $X \setminus U_x$ . Da  $X = \bigcup_{x \in X} U_x$  und  $X$  kompakt ist, gibt es  $x_1, \dots, x_k \in X$  mit  $X = U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_k}$ . Für jedes  $i \in \{1, \dots, k\}$  sei  $\lambda_i \in \Lambda$  mit  $x_{\lambda_i} \in X \setminus U_{x_i}$  für  $\mu \geq \lambda_i$ . Sei nun  $\mu \in \Lambda$  mit  $\mu \geq \lambda_i$  für  $i = 1, \dots, k$ . Es folgt

$$x_\mu \in \bigcap_{i=1}^k (X \setminus U_{x_i}) = X \setminus \left( \bigcup_{i=1}^k U_{x_i} \right) = X \setminus X = \emptyset \quad \not\sqsubset \quad \square$$

## 4.12 Proposition

Jedes Netz besitzt ein universelles Teilnetz.

### Beweis

Sei  $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  ein Netz in  $X$ . Sei

$$\mathfrak{M} := \left\{ \mathfrak{B} \subseteq \mathcal{P}(X) \mid \begin{array}{l} (1) \quad B \in \mathfrak{B} \Rightarrow (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \text{ ist immer wieder in } B \\ (2) \quad B, B' \in \mathfrak{B} \Rightarrow B \cap B' \in \mathfrak{B} \end{array} \right\}$$

Dann ist  $\{X\} \in \mathfrak{M}$ , insbesondere  $\mathfrak{M} \neq \emptyset$ . Ist  $\mathfrak{M}_0 \subseteq \mathfrak{M}$  mit

$$\mathfrak{B}, \mathfrak{B}' \in \mathfrak{M}_0 \Rightarrow \mathfrak{B} \subseteq (B')' \text{ oder } \mathfrak{B}' \subseteq \mathfrak{B}$$

so gilt  $\bigcup_{\mathfrak{B} \in \mathfrak{M}_0} \mathfrak{B} \in \mathfrak{M}$ . Nach dem Zornschen Lemma enthält  $\mathfrak{M}$  ein maximales Element  $\mathfrak{B}$ . Da  $\mathfrak{B}$  maximal ist, ist  $X \in \mathfrak{B}$ . Sei

$$\Lambda' := \{(B, \lambda) \mid B \in \mathfrak{B}, \lambda \in \Lambda, x_\lambda \in B\}.$$

Durch  $(B, \lambda) \leq (B', \lambda') :\Leftrightarrow B \supseteq B', \lambda \leq \lambda'$  wird  $\Lambda'$  gerichtet.

Behauptung:  $(x_\lambda)_{(B, \lambda) \in \Lambda'}$  ist universell.

### Hilfssatz

Sei  $(x_\lambda)_{(B, \lambda) \in \Lambda'}$  immer wieder in  $S$ . Dann gilt  $S \in \mathfrak{B}$ .

Beweis: Wir zeigen:  $\mathfrak{B}^+ := \mathfrak{B} \cup \{S \cap B \mid B \in \mathfrak{B}\} \in \mathfrak{M}$ . Da  $\mathfrak{B}$  maximal ist und  $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{B}^+$  folgt  $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}^+$  und  $S \in \mathfrak{B}^+ = \mathfrak{B}$ . Offenbar erfüllt  $\mathfrak{B}^+$  (2). Es bleibt (1) zu zeigen.

Da  $\mathfrak{B} \in \mathfrak{M}$  bleibt zu zeigen:  $\forall B \in \mathfrak{B}$  ist  $(x_\lambda)_{(\lambda \in \Lambda)}$  immer wieder in  $B \cap S$ . Sei  $\lambda \in \Lambda$ . Gesucht ist nun  $\mu \geq \lambda$  mit  $x_\mu \in B \cap S$ . Da  $B \in \mathfrak{B} \in \mathfrak{M}$  gibt es  $\lambda' \in \Lambda, \lambda' \geq \lambda$  mit  $x_{\lambda'} \in B$ . Also  $(B, \lambda') \in \Lambda'$ . Da  $(x_\lambda)_{(B, \lambda) \in \Lambda'}$  immer wieder in  $S$  ist, gibt es

$$\Lambda' \ni (A, \mu) \geq (B, \lambda')$$

mit  $x_\mu \in S$ . Da  $(A, \mu) \in \Lambda'$  ist  $x_\mu \in A \stackrel{(*)}{\subseteq} B$ . Sei  $S \subseteq X$ . Ist  $(x_\lambda)_{(B, \lambda) \in \Lambda'}$  weder schließlich in  $S$  noch schließlich in  $X \setminus S$ , so ist  $(x_\lambda)_{(B, \lambda) \in \Lambda'}$  immer wieder in  $S$  und immer wieder in  $X \setminus S$ . Mit dem Hilfssatz folgt  $S, X \setminus S \in \mathfrak{B} \Rightarrow \emptyset = S \cap (X \setminus S) \in \mathfrak{B} \nmid$   $\square$

## 4.13 Definition

Sei  $\ell^\infty(\mathbb{Z})$  der  $\mathbb{R}$ -Vektorraum aller beschränkten Abbildungen  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(n)| \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

ist eine Norm auf  $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ .

## 4.14 Satz (Mittelbarkeit von $\mathbb{Z}$ )

Es gibt eine Abbildung  $M : \ell^\infty(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}$  mit

- a)  $M$  ist  $\mathbb{R}$ -linear
- b)  $M$  ist positiv:  $f \geq 0 \Rightarrow M(f) \geq 0$
- c)  $M(\mathbb{1}) = 1$  für  $\mathbb{1} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\mathbb{1}(n) = 1$  für alle  $n \in \mathbb{Z}$

d)  $M$  ist  $\mathbb{Z}$ -invariant: Für  $f \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$  sei  $Tf \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$  mit  $(Tf)(n) = f(n+1)$ , dann gilt  $M(f) = M(Tf)$ .

### Beweis

Sei  $\mathfrak{M} := \{M : \ell^\infty(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R} \mid M \text{ erfüllt a), b), c)\}$ . Sei  $M_n \in \mathfrak{M}$  mit  $M_n(f) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n f(i)$ . Dann gilt für  $f \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$

$$\begin{aligned} M_n(f) &= M_n(Tf) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n f(i) - Tf(i) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n (f(i) - f(i+1)) \\ &= \frac{1}{n+1} (f(0) - f(n+1)) \end{aligned}$$

Es folgt  $|M_n(f) - M_n(Tf)| \leq \frac{2 \cdot \|f\|_\infty}{n+1}$ . Wir konstruieren nun eine kompakte Topologie auf  $\mathfrak{M}$ , dann können wir anschließend ein konvergentes Teilnetz der Folge  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  betrachten. Sei

$$X := \prod_{f \in \ell^\infty(\mathbb{Z})} [-\|f\|_\infty, \|f\|_\infty]$$

Aus a), b), c) folgt für  $f \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$ ,  $M \in \mathfrak{M}$   $M(f) \in [-\|f\|_\infty, \|f\|_\infty]$ . Mittels

$$\mathfrak{M} \ni M \mapsto (M(f))_{f \in \ell^\infty(\mathbb{Z})} \in X$$

wird  $\mathfrak{M}$  zu einem abgeschlossenen Unterraum von  $X$ .  $\mathfrak{M}$  ist kompakt bezüglich der Produkttopologie auf  $X$ , also bezüglich punktweiser Konvergenz.

Sei nun  $\alpha : \Lambda \rightarrow \mathbb{N}$ , sodass  $M_{\alpha(\lambda)} \rightarrow M \in \mathfrak{M}$  (existiert da  $\mathfrak{M}$  kompakt). Es folgt

$$\forall f \in \ell^\infty(\mathbb{Z}) : M_{\alpha(\lambda)}(f) \rightarrow M(f)$$

Wegen  $M_{\alpha(\lambda)}(f) - M_{\alpha(\lambda)}(Tf) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} M(f) - M(Tf)$  und

$$|M_{\alpha(\lambda)}(f) - M_{\alpha(\lambda)}(Tf)| \leq \frac{2 \cdot \|f\|_\infty}{\alpha(\lambda) + 1} \rightarrow 0$$

folgt  $M(f) = M(Tf)$  für alle  $f \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$ . □

## 5 Kompaktifizierungen

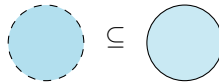
### 5.1 Definition

Sei  $X$  ein topologischer Raum. Ein kompakter Raum  $\bar{X}$  heißt eine **Kompaktifizierung** von  $X$ , falls er  $X$  als offenen, dichten Unterraum enthält. (Oft heißt  $\partial X := \bar{X} \setminus X$  der Rand der Kompaktifizierung)

### 5.2 Beispiele

(i)  $(-1, 1) \subseteq [-1, 1]$

(ii)  $\mathring{D}^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 < 1\} \subseteq D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 \leq 1\}$ . Für  $n = 2$ :



$$\partial D^n = S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1\}$$

(iii)  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathring{D}^n$ ,  $f(x) := \frac{x}{1+\|x\|_2}$  ist ein Homöomorphismus. Daher können wir  $\mathbb{R}^n$  zu

$$\bar{\mathbb{R}}^n := \mathbb{R}^n \cup (S^{n-1} \times \{\infty\}) \cong D^n$$

kompaktifizieren.

(iv) Definiere auf  $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$  folgende Topologie

$$\mathcal{O} := \{U \mid U \subseteq \mathbb{R}^n \text{ ist offen}\} \cup \{U \cup \{\infty\} \mid U \subseteq \mathbb{R}^n \text{ offen und } \exists R > 0 : \mathbb{R}^n \setminus B_R(0) \subseteq U\}$$

Dann ist  $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$  eine weitere Kompaktifizierung von  $\mathbb{R}^n$ . Übung:  $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\} \cong S^n$

### 5.3 Definition

Ein Hausdorffraum  $X$  heißt **lokalkompakt**, wenn für jedes  $x \in X$  und jede offene Umgebung  $U$  von  $x$  eine kompakte Umgebung  $K$  von  $x$  existiert mit  $K \subseteq U$ .

### 5.4 Beispiel

(i)  $\mathbb{R}^n$  ist lokalkompakt: Sei  $x \in \mathbb{R}^n$  und  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Umgebung von  $x$ .  $U$  offen  $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$  mit  $B_\varepsilon(x) \subseteq U$ . Es folgt  $\overline{B_{\varepsilon/2}(x)} \subseteq B_\varepsilon(x) \subseteq U$ . Dann ist  $\overline{B_{\varepsilon/2}(x)}$  eine kompakte Umgebung von  $x$ , die in  $U$  liegt.

(ii) Topologische Mannigfaltigkeiten sind lokalkompakt.

(iii) Offene Teilräume von lokalkompakten Räumen sind lokalkompakt.

### 5.5 Proposition

Sei  $K$  kompakt und  $W \subseteq K$  offen. Dann ist  $W$  lokalkompakt. Insbesondere sind kompakte Räume auch lokalkompakt.

#### Beweis

Sei  $x \in W$  und  $U$  eine offene Umgebung von  $x$  in  $W$ .  $K$  Hausdorff  $\Rightarrow \forall y \in K \setminus U$  gibt es offene Umgebungen  $V_y$  von  $y$  und  $W_y$  von  $x$  mit  $V_y \cap W_y = \emptyset$ . Dann ist  $\{V_y \mid y \in K \setminus U\}$  eine offene Überdeckung von  $K \setminus U$ . Da mit  $K$  auch  $K \setminus U$  kompakt ist, gibt es  $Y_0 \subseteq K \setminus U$  endlich mit

$$K \setminus U \subseteq \bigcup_{y \in Y_0} V_y$$

Nun ist  $L := K \setminus \bigcup_{y \in Y_0} V_y$  kompakt. Da  $\bigcap_{y \in Y_0} W_y \cap U$  offen ist und  $(\bigcap_{y \in Y_0} W_y) \cap U \subseteq L$  ist  $L$  eine Umgebung von  $x$ .  $\square$

## 5.6 Definition

Sei  $X$  lokalkompakt. Die **Einpunktkompaktifizierung** (EPK) von  $X$  ist  $\text{EPK}(X) := X \cup \{\infty\}$  mit der folgenden Topologie:

$$U \subseteq X \cup \{\infty\} \text{ offen} : \Leftrightarrow U \subseteq X \text{ ist offen oder } U = (X \setminus K) \cup \{\infty\} \text{ mit } K \subseteq X \text{ kompakt}$$

## 5.7 Proposition

$\text{EPK}(X)$  ist kompakt. Ist  $X$  nicht kompakt, so ist  $\text{EPK}(X)$  eine Kompaktifizierung von  $X$ .

### Beweis

Sei  $\mathcal{U}$  eine offene Überdeckung von  $\text{EPK}(X)$ . Sei  $U_0 \in \mathcal{U}$  mit  $\infty \in U_0$ . Dann existiert  $K \subseteq X$  kompakt mit  $U_0 = (X \setminus K) \cup \{\infty\}$ . Da  $K$  kompakt ist, gibt es  $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$  mit  $K \subseteq U_1 \cup \dots \cup U_n$ . Dann ist  $U_0, U_1, \dots, U_n$  eine endliche Teilüberdeckung von  $\text{EPK}(X)$ .

Zu zeigen:  $\text{EPK}(X)$  ist Hausdorff. Seien  $x, y \in \text{EPK}(X)$ ,  $x \neq y$ . Gilt  $x \neq \infty \neq y$  so gibt es  $U, V \subseteq X$  mit  $x \in U$ ,  $y \in V$  und  $U \cap V = \emptyset$ , da  $X$  hausdorffsch ist. Nach Definition sind dann  $U, V$  auch offen in  $\text{EPK}(X)$ . Andernfalls sei o.B.d.A.  $x = \infty$ . Da  $X$  lokalkompakt ist, gibt es eine Umgebung  $K$  von  $y$  mit  $K \subseteq X$  kompakt. Dann sind  $U := K$  und  $V := (X \setminus K) \cup \{\infty\}$  disjunkte offene Umgebungen von  $x$  und  $y$ .

Insgesamt gezeigt:  $\text{EPK}(X)$  ist kompakt. Sei  $X$  nicht kompakt. Ist  $U$  eine Umgebung von  $\infty \in \text{EPK}(X)$ , so gibt es  $K \subseteq X$  kompakt mit  $U = (X \setminus K) \cup \{\infty\}$ . Dann ist  $U \cap X = X \setminus K$ . Da  $X$  nicht kompakt ist, ist  $X \neq K$ , also  $X \setminus K \neq \emptyset$ . Daher hat jede Umgebung von  $\infty \in \text{EPK}(X)$  einen nicht-trivialen Schnitt mit  $X$ . Also ist  $X \subseteq \text{EPK}(X)$  dicht.  $\square$

## 5.8 Frage

Sei  $f : X \rightarrow Y$  stetig,  $X, Y$  lokalkompakt. Gibt es dann eine stetige Fortsetzung  $\bar{f} : \text{EPK}(X) \rightarrow \text{EPK}(Y)$  mit  $\bar{f}(\infty) = \infty$ ?

### Beispiel

(i)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) \equiv 0$ . Dann ist  $\bar{f} : \text{EPK}(\mathbb{R}) \rightarrow \text{EPK}(\mathbb{R})$  mit

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) = 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R} \\ \infty, & \text{falls } x = \infty \end{cases}$$

sicher nicht stetig. Natürlich ist aber  $\tilde{f} : \text{EPK}(\mathbb{R}) \rightarrow \text{EPK}(\mathbb{R})$  mit  $\tilde{f}(x) = 0 \forall x \in \text{EPK}(\mathbb{R})$  stetig.

(ii)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \geq 1 \\ x, & \text{falls } x \in [0, 1] \\ 0, & \text{falls } x \leq 0 \end{cases}$$

Dann gibt es keine stetige Fortsetzung  $\bar{f} : \text{EPK}(\mathbb{R}) \rightarrow \text{EPK}(\mathbb{R})$ , denn die Folge  $x_n = n$  konvergiert in  $\text{EPK}(\mathbb{R})$  gegen  $\infty$ . Da  $f(x_n) = 1 \forall n$  müsste  $\bar{f}(\infty) = 1$  sein. Die Folge  $y_n = -n$  konvergiert in  $\text{EPK}(\mathbb{R})$  auch gegen  $\infty$ . Da  $f(y_n) = 0 \forall n$  müsste  $\bar{f}(\infty) = 0$  sein  $\nmid$ .

## 5.9 Definition

Seien  $X$  und  $Y$  lokalkompakt. Eine stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  heißt **eigentlich**, wenn für jede kompakte Teilmenge  $K \subseteq Y$  auch  $f^{-1}(K) \subseteq X$  kompakt ist.

## 5.10 Satz

Seien  $X, Y$  lokalkompakt und  $f : X \rightarrow Y$  stetig. Dann sind äquivalent:

- (1)  $f$  ist eigentlich
- (2)  $\bar{f} : \text{EPK}(X) \rightarrow \text{EPK}(Y)$  mit

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \in X \\ \infty, & \text{falls } x = \infty \end{cases}$$

ist stetig

### Beweis

"(1) $\Rightarrow$ (2)": Sei  $U \subseteq \text{EPK}(Y)$  offen. Ist  $\infty \notin U$ , so ist  $\bar{f}^{-1}(U) = f^{-1}(U)$  offen, da  $f$  stetig ist. Ist  $\infty \in U$ , so gibt es  $K \subseteq Y$  mit  $U = (X \setminus K) \cup \{\infty\}$ . Da  $f$  eigentlich ist, ist auch  $L := f^{-1}(K) \subseteq X$  kompakt und  $\bar{f}^{-1}(U) = (X \setminus L) \cup \{\infty\}$  ist offen in  $\text{EPK}(X)$ .

"(2) $\Rightarrow$ (1)": Sei  $K \subseteq Y$  kompakt. Dann ist  $U = (Y \setminus K) \cup \{\infty\} \subseteq Y$  offen. Da  $\bar{f}$  stetig ist, ist auch  $\bar{f}^{-1}(U) = (X \setminus f^{-1}(K)) \cup \{\infty\}$  offen. Damit ist  $f^{-1}(K) \subseteq X$  kompakt.  $\square$

## 6 Der Approximationssatz von Stone-Weierstraß

### 6.1 Definition

Sei  $X$  ein lokalkompakter Raum. Eine stetige Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  **verschwindet** im Unendlichen, falls für jedes  $\varepsilon > 0$

$$K_\varepsilon := \{x \in X \mid |f(x)| \geq \varepsilon\}$$

kompakt ist. Die **Algebra** aller solchen Funktionen bezeichnen wir mit  $C_0(X)$  und für  $f \in C_0(X)$  setzen wir

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)| = \max_{x \in X} |f(x)|$$

$\|\cdot\|_\infty$  ist eine Norm auf  $C_0(X)$ .

#### Bemerkung

$f : X \rightarrow \mathbb{R}$  liegt in  $C_0(X) \iff \bar{f} : \text{EPK}(X) \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \in X \\ 0, & \text{falls } x = \infty \end{cases}$  ist stetig.

### 6.2 Definition

Sei  $\mathcal{B} \subseteq C_0(X)$ . Wir sagen, dass  $\mathcal{B}$  die Punkte von  $X$  **streng trennt**, falls es zu  $x, y \in X, x \neq y$  ein  $f \in \mathcal{B}$  gibt mit  $0 \neq f(x) \neq f(y) \neq 0$ .

#### Bemerkung

Sei  $\mathcal{A} \subseteq C_0(X)$  eine Unteralgebra. Gilt

- a)  $\forall x, y \in X : \exists f \in \mathcal{A} : f(x) \neq f(y)$
- b)  $\forall x \in X : \exists g \in \mathcal{A} : g(x) \neq 0$

so trennt  $\mathcal{A}$  die Punkte von  $X$  streng.

#### Beispiel

Sei  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$  ein kompaktes Intervall. Sei  $\mathcal{A} := \{x \mapsto p(x) \mid p \in R[t]\} \subseteq C_0([a, b])$ . Dann trennt  $\mathcal{A}$  die Punkte von  $[a, b]$  streng.

### 6.3 Satz (Stone-Weierstraß)

Sei  $X$  ein lokalkompakter Raum und sei  $\mathcal{A} \subseteq C_0(X)$  eine Unteralgebra, die die Punkte von  $X$  streng trennt. Dann ist  $\mathcal{A} \subseteq C_0(X)$  dicht bezüglich  $\|\cdot\|_\infty$ .

#### Beweis (mit Lemma 1, 2, 3)

Sei  $h \in C_0(X)$  beliebig. Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig. Zu zeigen:  $\exists f \in \bar{\mathcal{A}} : \|f - h\|_\infty < \varepsilon$

**Schritt 1:** Wir konstruieren für  $y \in X$   $f_y \in \bar{\mathcal{A}}$  mit

- a)  $f_y(y) = h(y)$
- b)  $f_y(z) \geq h(z) - \varepsilon$  für alle  $z \in X$

Zu  $x \in X$  gibt es nach Lemma 3 (6.9)  $g_x \in \mathcal{A}$  mit

$$g_x(y) = h(y) \quad \text{und} \quad g_x(x) = h(x).$$

Sei  $U_x := \{z \in X \mid g_x(z) > h(z) - \varepsilon\}$ . Da  $g_x$  und  $h$  stetig sind, ist  $U_x$  offen. Da  $g_x$  und  $h$  in  $\infty$  verschwinden, ist  $X \setminus U_x$  kompakt. Wegen  $g_x(x) = h(x)$  ist  $x \in U_x$ . Zu festem  $x_1 \in X$  gibt es

dann  $x_2, \dots, x_k$  mit  $X \setminus U_{x_1} \subseteq \bigcup_{i=2}^k U_{x_i}$ . Dann gilt auch

$$X \subseteq \bigcup_{i=2}^k U_{x_i}$$

$f_y := \max\{g_{x_1}, \dots, g_{x_k}\}$  ist die gesuchte Funktion. Wegen Lemma 2 (6.7) bzw. der Bemerkung 6.8 gilt  $f_y \in \mathcal{A}$ .

**Schritt 2:** Konstruktion von  $f$ . Zu  $y \in X$  sei  $V_y := \{z \in X \mid f_y(z) < h(z) + \varepsilon\}$ . Wieder ist  $V_y$  offen,  $X \setminus V_y$  kompakt und  $y \in V_y$ . Also gibt es wieder  $y_1, \dots, y_l$  mit  $X = \bigcup_{i=1}^l V_{y_i}$ . Für  $f := \min\{f_{y_1}, \dots, f_{y_l}\}$  gilt dann

$$h(z) - f(z) = \max_i h(z) - f_{y_i}(z) < \varepsilon$$

da  $f_{y_i}(z) \geq h(z) - \varepsilon \stackrel{a)}{\Rightarrow} h(z) - f_{y_i}(z) \leq \varepsilon$  für jedes  $i$ . Weiter gilt

$$f(z) - h(z) = \min_i f_{y_i}(z) - h(z) < \varepsilon$$

nach Definition der  $V_{y_i}$ . Also  $\|f - h\|_\infty < \varepsilon$ . □

## 6.4 Satz von Dini

Sei  $(f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}}$  eine punktweise monoton wachsende Folge stetiger Funktionen, die punktweise gegen die stetige Funktion  $f$  konvergiert. Dann  $f_n \rightarrow f$  gleichmäßig, d.h.  $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ .

**Beweis**

Sei  $\varepsilon > 0$ . Zu jedem  $t \in [0, 1]$  gibt es  $n_t$  mit

$$\forall n \geq n_t : f(t) \geq f_n(t) \geq f_{n_t}(t) \geq f(t) - \varepsilon.$$

Da  $f$  und  $f_{n_t}$  stetig sind, ist  $U_t := \{s \in [0, 1] \mid f(s) - f_{n_t}(s) < \varepsilon\}$  offen. Da  $[0, 1]$  kompakt ist, gibt es  $t_0, \dots, t_k \in [0, 1]$  mit

$$[0, 1] = U_{t_0} \cup \dots \cup U_{t_k}$$

Für alle  $n \geq \max\{n_{t_0}, \dots, n_{t_k}\}$  folgt  $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$ . □

## 6.5 Lemma 1

Sei  $g(t) = \sqrt{t}$  für  $t \in [0, 1]$ . Es gibt eine Folge  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von reellen Polynomen so dass  $p_n \rightarrow g$  gleichmäßig auf  $[0, 1]$  und  $p_n(0) = 0$ .

**Beweis**

Sei  $p_0 \equiv 0$  und für  $n > 0$

$$p_{n+1}(t) := p_n(t) - \frac{1}{2} \cdot (p_n(t)^2 - t)$$

Dann  $p_n(0) = 0$ . Per Induktion nach  $n$  zeigen wir:  $0 \leq p_n(t) \leq \sqrt{t}$  für alle  $t \in [0, 1]$

$n = 0$  ✓

$n \mapsto n + 1$

$$\begin{aligned} p_{n+1}(t) - \sqrt{t} &= p_n(t) - \sqrt{t} - \frac{1}{2}(p_n(t)^2 - t) = (p_n(t) - \sqrt{t}) - \frac{1}{2}(p_n(t) - \sqrt{t})(p_n(t) + \sqrt{t}) \\ &= \underbrace{(p_n(t) - \sqrt{t})}_{\leq 0} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2}(p_n(t) + \sqrt{t})\right)}_{\substack{\text{IV.: } \leq 2\sqrt{t} \\ \geq 0}} \end{aligned}$$



Also  $p_{n+1}(t) - \sqrt{t} \leq 0$ . Es folgt, dass  $p_n(t)$  monoton wachsend ist für jedes  $t$ . Wegen  $p_n(t) \leq \sqrt{t}$  existiert  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(t)$  für  $t \in [0, 1]$ . Es folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} p_{n+1}(t) - \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} (p_{n+1}(t) - p_n(t)) = \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{2}(p_n(t)^2 - t) \\ &= -\frac{1}{2} \left( \left( \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(t) \right)^2 - t \right) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(t) = \sqrt{t}$ . Mit Dini (6.4) folgt  $p_n \rightarrow g$  gleichmäßig.  $\square$

## 6.6 Bemerkung

Sei  $\mathcal{A} \subseteq C_0(X)$  eine Algebra. Ist  $p \in \mathbb{R}[t]$  ein Polynom mit  $p(0) = 0$  und  $f \in \mathcal{A}$ , so liegt auch  $p \circ f \in \mathcal{A}$ :  $p = \sum_{i=1}^n a_i t^i$ . Denn

$$p(f(t)) = \sum_{i=1}^n a_i f(t)^i = \left( \sum_{i=1}^n a_i f^i \right)(t) \in \mathcal{A}.$$

## 6.7 Lemma 2

Sei  $X$  lokalkompakt,  $\mathcal{A} \subseteq C_0(X)$  eine Unterlgebra. Dann gilt:  $f \in \mathcal{A} \Rightarrow |f| \in \bar{\mathcal{A}}$  ( $\bar{\mathcal{A}}$  := Abschluss von  $\mathcal{A}$  bezüglich  $\|\cdot\|_\infty$ )

### Beweis

Sei  $f \in \mathcal{A}$ . O.B.d.A. sei  $f(X) \subseteq [-1, 1]$ . Dann  $f(x)^2 \in [0, 1]$  für alle  $x \in X$ . Seien die  $p_n$  die Polynome aus Lemma 1 (6.5). Dann

$$\left| p_n(f(x)^2) - \sqrt{f(x)^2} \right| = |p_n(f(x)^2) - |f(x)|| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

gleichmäßig in  $x \in X$ . Es folgt  $\|p_n(f^2) - |f|\|_\infty \rightarrow 0$ . Wegen  $f \in \mathcal{A}$  gilt  $f^2 \in \mathcal{A}$  und nach 6.6  $p_n(f^2) \in \mathcal{A}$ . Also  $|f| \in \bar{\mathcal{A}}$ .  $\square$

## 6.8 Bemerkung

(i) Für  $f, g \in \mathcal{A}$  liegen

$$\max(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|) \quad , \quad \min(f, g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|) \in \bar{\mathcal{A}}$$

(ii) Wegen  $\bar{\mathcal{A}} = \bar{\bar{\mathcal{A}}}$  gilt auch  $f, g \in \bar{\mathcal{A}} \Rightarrow \min(f, g), \max(f, g) \in \bar{\mathcal{A}}$ .

## 6.9 Lemma 3

Sei  $X$  lokalkompakt,  $\mathcal{A} \subseteq C_0(X)$  eine Unterlgebra, die die Punkte von  $X$  streng trennt. Zu  $x, y \in X$ ,  $x \neq y$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  gibt es dann  $f \in \mathcal{A}$  mit  $f(x) = \alpha$ ,  $f(y) = \beta$ .

### Beweis

Es gibt  $g \in \mathcal{A}$  mit  $0 \neq g(x) \neq g(y) \neq 0$ . Ansatz: Für  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  betrachte  $f := \lambda g + \mu g^2$ .

$$\begin{aligned} f(x) = \alpha &\iff g(x)\lambda + g(x)^2\mu = \alpha \\ f(y) = \beta &\iff g(y)\lambda + g(y)^2\mu = \beta \end{aligned}$$

Da

$$\det \begin{pmatrix} g(x) & g(x)^2 \\ g(y) & g(y)^2 \end{pmatrix} = g(x)g(y)^2 - g(y)g(x)^2 = g(x)g(y)(g(y) - g(x)) \neq 0$$

gibt es  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , sodass das Gleichungssystem eine Lösung hat.  $\square$

## 7 Metrisierbarkeit

### 7.1 Definition

Ein topologischer Raum  $X$  heißt **metrisierbar**, wenn es eine Metrik auf  $X$  gibt, so dass die zugehörige Topologie die Topologie von  $X$  ist.

#### Bemerkung

Ist  $X$  metrisierbar, so gibt es für jedes  $x \in X$  eine abzählbare Umgebungsbasis  $\mathcal{U}_x$  bei  $x$ , also eine abzählbare Menge von offenen Umgebungen von  $x$ , sodass jede Umgebung von  $x$  eine Menge aus  $\mathcal{U}_x$  enthält.

#### Beispiel

$(X, \mathcal{O}_{\text{dis}})$  ist metrisierbar:  $d_{\text{dis}}(x, y) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \neq y \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

### 7.2 Definition

Ein topologischer Hausdorffraum  $X$  heißt **normal**, wenn er die folgende Trennungseigenschaft hat: Sind  $A, B \subseteq X$  abgeschlossen mit  $A \cap B = \emptyset$ , so gibt es  $U, V \subseteq X$  offen mit  $A \subseteq U$ ,  $B \subseteq V$  mit  $U \cap V = \emptyset$ .

#### Bemerkung

Metrisierbare Räume sind normal.

(Übung)

### 7.3 Satz (Urysohn)

Sei  $X$  ein normaler Raum, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt (1.14). Dann ist  $X$  metrisierbar.

#### Beweis (mit Urysohns Lemma, 7.4)

Sei  $\mathcal{U}$  eine abzählbare Basis der Topologie von  $X$ . Da  $X$  normal ist, gibt es zu jedem Paar  $U, V \in \mathcal{U}$  mit  $\bar{U} \subseteq V$  (also  $\bar{U} \cap X \setminus V = \emptyset$ ) eine stetige Funktion  $f_{U,V} : X \rightarrow [0, 1]$  mit  $f_{U,V}(x) = 0$  für  $x \in \bar{U}$  und  $f_{U,V}(y) = 1$  für  $y \notin V$  (7.4). Da  $\mathcal{U}$  abzählbar ist, ist das abzählbare Produkt

$$Z := \prod_{\substack{U, V \in \mathcal{U} \\ \bar{U} \subseteq V}} [0, 1]$$

metrisierbar (Übung, Blatt 4). Wir definieren  $F : X \rightarrow Z$  durch

$$F(x) := \left( f_{U,V}(x) \right)_{\substack{U, V \in \mathcal{U} \\ \bar{U} \subseteq V}}$$

Da die  $f_{U,V}$  stetig sind, ist  $F$  bezüglich der Produkttopologie auf  $Z$  auch stetig. Es bleibt zu zeigen:  $F : X \rightarrow F(X) \subseteq Z$  ist ein Homöomorphismus.

Sind  $x, y \in X$  mit  $x \neq y$ , so gibt es  $U, V \in \mathcal{U}$  mit  $\bar{U} \subseteq V$ ,  $x \in U$ ,  $y \notin V$ . Daher gilt  $f_{U,V}(x) = 0 \neq 1 = f_{U,V}(y)$ . Insbesondere ist  $F$  injektiv; durch Einschränkung auf das Bild also bijektiv. Es genügt nun zu zeigen, dass  $F$  offene Mengen von  $X$  auf offene Mengen in  $F(X)$  abbildet. Sei  $W \subseteq X$  offen, sei  $x \in W$ . Wir müssen eine offene Menge  $O \subseteq Z$  finden mit  $F(x) \in O$  und  $F^{-1}(O) \subseteq W$ .

Behauptung:  $\exists U_0 \in \mathcal{U}$  mit  $x \in U_0, \bar{U}_0 \subseteq W$ .

Sei  $O := \prod_{\bar{U} \subseteq V} I_{U,V}$  mit

$$I_{U,V} = \begin{cases} [0, 1), & \text{falls } U = U_0, V = W \\ [0, 1], & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist  $F^{-1}(O) = f_{U_0, W}^{-1}([0, 1)) \subseteq W$  und  $F(x) \in O$ , da  $f_{U_0, W}(x) = 0$ .

### Beweis der Behauptung

Da  $X$  Hausdorff ist, ist  $\{x\}$  abgeschlossen. Da auch  $X \setminus W$  abgeschlossen ist, gibt es offene Mengen  $U_1$  und  $V_1$  mit  $U_1 \cap V_1 = \emptyset$ ,  $x \in U_1$  und  $X \setminus W \subseteq V_1$ . Insbesondere ist  $\overline{U_1} \subseteq X \setminus V_1 \subseteq W$ . Da  $\mathcal{U}$  eine Basis ist, gibt es  $U_0 \in \mathcal{U}$  mit  $x \in U_0$  und  $U_0 \subseteq U_1$ .  $\square$

## 7.4 Urysohns Lemma

Sei  $X$  normal und  $A, B \subseteq X$  abgeschlossen mit  $A \cap B = \emptyset$ . Dann gibt es eine stetige Funktion  $f : X \rightarrow [0, 1]$  mit  $f(a) = 0$  für alle  $a \in A$  und  $f(b) = 1$  für alle  $b \in B$ .

### Beweis

Sei  $U_1 := X \setminus B$ . Da  $X$  normal ist, gibt es  $U_0 \subseteq X$  offen mit  $A \subseteq U_0$  und  $U_0 \cap B = \emptyset$ , also  $\overline{U_0} \subseteq U_1$ . ( $A \subseteq U_0$  und  $V_0 \supseteq B$  mit  $U_0 \cap V_0 = \emptyset \Rightarrow \overline{U_0} \cap B = \emptyset$  also  $\overline{U_0} \subseteq U_1$ )

Ebenso finden wir

- $U_{1/2} \subseteq X$  offen mit  $\overline{U_0} \subseteq U_{1/2}$  und  $\overline{U_{1/2}} \subseteq U_1$ ,
- $U_{1/4}, U_{3/4} \subseteq X$  offen mit  $\overline{U_0} \subseteq U_{1/4}$ ,  $\overline{U_{1/4}} \subseteq U_{1/2}$  und  $\overline{U_{1/2}} \subseteq U_{3/4}$ ,  $\overline{U_{3/4}} \subseteq U_1, \dots$

Induktiv finden wir für jedes  $r = \frac{m}{2^n}$  mit  $0 \leq m \leq 2^n$  eine offene Menge  $U_r \subseteq X$  so dass gilt:  $\overline{U_r} \subseteq U_s$  für  $r < s$  mit  $A \subseteq U_0$  und  $B = X \setminus U_1$ . Sei nun  $f : X \rightarrow [0, 1]$  definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in B \\ \inf\{r \mid x \in U_r\}, & \text{falls } x \notin B \end{cases}$$

Für  $\alpha \in [0, 1]$  ist  $f^{-1}([0, \alpha)) = \bigcup_{r < \alpha} U_r$  offen und

$$f^{-1}((\alpha, 1]) = \bigcup_{r > \alpha} X \setminus U_r = \bigcup_{r > \alpha} X \setminus \overline{U_r}$$

offen. Damit ergibt sich leicht die Stetigkeit von  $f$ .  $\square$

## 8 Zusammenhängende topologische Räume

### 8.1 Definition

Sei  $X$  ein topologischer Raum.

- (1)  $X$  heißt **zusammenhängend**, falls er nicht als die disjunkte Vereinigung von zwei nicht leeren offenen Mengen geschrieben werden kann.
- (2)  $X$  heißt **wegzusammenhängend**, falls es zu allen  $x, y \in X$  eine stetige Abbildung  $\omega : [0, 1] \rightarrow X$  gibt mit  $\omega(0) = x$  und  $\omega(1) = y$ .  $\omega$  heißt dann ein **Weg** von  $x$  nach  $y$ .
- (3)  $X$  heißt **lokal zusammenhängend**, falls es für jedes  $x \in X$  und jede offene Umgebung  $U$  von  $x$  eine zusammenhängende Umgebung  $V$  von  $x$  gibt mit  $V \subseteq U$ .
- (4)  $X$  heißt **lokal wegzusammenhängend**, falls es für jedes  $x \in X$  und jede offene Umgebung  $U$  von  $x$  eine wegzusammenhängende Umgebung  $V$  von  $x$  gibt mit  $V \subseteq U$ .

### 8.2 Bemerkung

- (1)  $\mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$  ist nicht zusammenhängend und auch nicht wegzusammenhängend (ZWS!).
- (2)  $[0, 1]$  ist zusammenhängend: Angenommen es wäre  $[0, 1] = U \cup V$  mit  $U, V$  offen,  $U \cap V = \emptyset$ . Dann sind  $U = [0, 1] \setminus V$  und  $V = [0, 1] \setminus U$  auch abgeschlossen. O.B.d.A. sei  $0 \in U$ . Dann liegt  $\inf V$  sowohl in  $\overline{U}$  als auch in  $\overline{V}$ . Also  $U \cap V = \overline{U} \cap \overline{V} \neq \emptyset$   $\nmid$ .  
Natürlich ist  $[0, 1]$  auch wegzusammenhängend: Zu  $x, y \in [0, 1]$  ist  $\omega : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  mit  $\omega(t) = (1-t) \cdot x + t \cdot y$  ein stetiger Weg von  $x$  nach  $y$ .
- (3) Ist  $f : X \rightarrow Y$  stetig und surjektiv und  $X$  zusammenhängend, so ist auch  $Y$  zusammenhängend: Ist  $Y = U \cup V$ , so ist auch  $X = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$  und es gilt  $U \neq \emptyset \iff f^{-1}(U) \neq \emptyset$  und  $V \neq \emptyset \iff f^{-1}(V) \neq \emptyset$ .
- (4) Ist  $X$  wegzusammenhängend, so ist  $X$  auch zusammenhängend: Sei  $X = U \cup V$  mit  $U, V$  offen und  $U \neq \emptyset, V \neq \emptyset$ . Sei  $x \in U$  und  $y \in V$ . Da  $X$  wegzusammenhängend ist, gibt es einen Weg  $\omega : [0, 1] \rightarrow X$  von  $x$  nach  $y$ . Dann ist  $[0, 1] = \omega^{-1}(U) \cup \omega^{-1}(V)$ . Es ist  $0 \in \omega^{-1}(U)$  und  $1 \in \omega^{-1}(V)$ . Also  $\omega^{-1}(U) \neq \emptyset \neq \omega^{-1}(V)$ . Da  $[0, 1]$  nach (1) zusammenhängend ist, ist  $\omega^{-1}(U) \cap \omega^{-1}(V) \neq \emptyset$ . Damit ist auch  $U \cap V \neq \emptyset$ .
- (5) Ist  $f : X \rightarrow Y$  ein Homöomorphismus, so gelten:

$$\begin{aligned} X \text{ wegzusammenhängend} &\iff Y \text{ wegzusammenhängend} \\ X \text{ zusammenhängend} &\iff Y \text{ zusammenhängend} \end{aligned}$$

### 8.3 Beispiel

Zeichnung  
hinzufügen

- (i) Der sogenannte **Polnische Kreis**  $PK$  gegeben durch

$$PK = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \left| \begin{array}{ll} (x \in [-1, 1] \wedge y = 1) \\ \vee (x \in \{-1, 1\} \wedge y \in [0, 1]) \\ \vee (x \in [-1, 0] \wedge y = 0) \\ \vee (x = 0 \wedge y \in [-1/2, 1/2]) \\ \vee (x \in (0, 1] \wedge y = 1/2 \cdot \sin(\pi/x)) \end{array} \right. \right\}$$

ist wegzusammenhängend, aber nicht lokal wegzusammenhängend.

(ii)

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{ll} x = 0 & \wedge \quad y \in [-1/2, 1/2] \\ \vee \quad x \in (0, 1] & \wedge \quad y = 1/2 \cdot \sin(\pi/x) \end{array} \right\}$$

ist zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend.

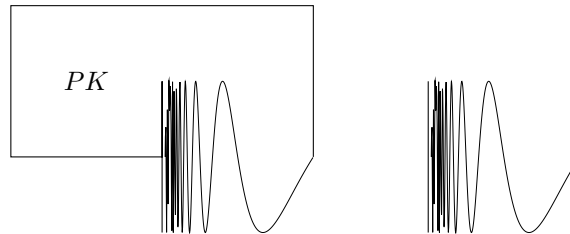


Abbildung 3: Der Polnische Kreis und eine nicht wegzusammenhängende Teilmenge

## 8.4 Satz (Topologische Invarianz der Dimension)

Es gilt:  $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m \iff n = m$

**Beweis für  $n = 1$**

Angenommen es gibt einen Homöomorphismus  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit  $m \geq 2$ . Durch Einschränkung von  $f$  erhalten wir dann auch einen Homöomorphismus  $\mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{f(0)\}$ . Es ist aber  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  nicht wegzusammenhängend und für  $m \geq 2$ ,  $x \in \mathbb{R}^m$  ist  $\mathbb{R}^m \setminus \{x\}$  wegzusammenhängend  $\nexists$ .  $\square$

**Bemerkung**

Eine Variante dieses Arguments kann benutzt werden, um zu zeigen, dass  $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m$  genau dann gilt, wenn  $n = m$ . Dafür benötigt man aber höher dimensionale Varianten des Begriffs wegzusammenhängend.

## 9 Die Fundamentalgruppe

### 9.1 Definition

Ein topologischer Raum  $X$  heißt **einfach zusammenhängend**, wenn jede stetige Abbildung  $f : S^1 \rightarrow X$  eine stetige Fortsetzung  $F : D^2 \rightarrow X$  besitzt.

#### Bemerkung

Ein topologischer Raum  $X$  ist genau dann wegzusammenhängend, wenn jede stetige Abbildung  $f : S^0 \rightarrow X$  eine stetige Fortsetzung  $F : D^1 \rightarrow X$  besitzt.

### 9.2 Bemerkung

(i)  $\mathbb{R}^n$  ist einfach zusammenhängend: Sei  $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig. Definiere  $F : D^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  durch:

$$F(t \cdot v) := t \cdot f(v) \quad \text{für } t \in [0, 1], v \in S^1$$

(ii) Ist  $X \cong Y$  dann:  $X$  einfach zusammenhängend  $\Leftrightarrow Y$  einfach zusammenhängend.

(iii) Später:  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  ist nicht einfach zusammenhängend.

### 9.3 Definition

Seien  $\omega_0, \omega_1 : [0, 1] \rightarrow X$  Wege in  $X$ . Eine Homotopie mit festen Endpunkten (oder relativ  $\{0, 1\}$ ) zwischen  $\omega_0$  und  $\omega_1$  ist eine stetige Abbildung  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ , so dass gilt:

$$(i) \quad H(s, 0) = \omega_0(s) \quad \forall s \in [0, 1]$$

$$(ii) \quad H(s, 1) = \omega_1(s) \quad \forall s \in [0, 1]$$

$$(iii) \quad H(0, t) = \omega_0(0) = \omega_1(0) \quad \forall t \in [0, 1]$$

$$(iv) \quad H(1, t) = \omega_0(1) = \omega_1(1) \quad \forall t \in [0, 1]$$

Durch

$$\omega_0 \sim \omega_1 :\Leftrightarrow \exists \text{ Homotopie relativ } \{0, 1\} \text{ zwischen } \omega_0 \text{ und } \omega_1$$

wird eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Wege in  $X$  erklärt. Die Äquivalenzklassen heißen **Homotopieklassen**, wir schreiben  $[\omega]$  für die Homotopieklasse von  $\omega$ .

### 9.4 Definition

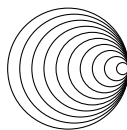
Ein Weg  $\omega : [0, 1] \rightarrow X$  heißt eine **Schleife** in  $X$ , falls  $\omega(0) = \omega(1)$ .

### 9.5 Lemma

$X$  ist genau dann einfach zusammenhängend, wenn jede Schleife in  $X$  homotop relativ  $\{0, 1\}$  zu einer konstanten Schleife ist.

#### Beweis

Beweis per Zeichnung:



## 9.6 Notation

Für  $x \in X$  bezeichne  $c_x : [0, 1] \rightarrow X$  die konstante Schleife bei  $x$ ;  $c_x(t) = x \quad \forall t \in [0, 1]$ .

## 9.7 Definition

Seien  $\omega$  und  $\omega'$  Wege in  $X$  mit  $\omega(1) = \omega'(0)$ . Dann ist der **Kompositionsweg**  $\omega * \omega' : [0, 1] \rightarrow X$  definiert durch

$$\omega * \omega'(t) = \begin{cases} \omega(2t), & \text{falls } t \in [0, 1/2] \\ \omega'(2t - 1), & \text{falls } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

## 9.8 Lemma

a) Seien  $\omega, \omega', \omega''$  Wege in  $X$  mit  $\omega(1) = \omega'(0)$  und  $\omega'(1) = \omega''(0)$ . Dann gilt

$$[(\omega * \omega') * \omega''] = [\omega * (\omega' * \omega'')]$$

b) Seien  $\omega_0, \omega'_0, \omega_1, \omega'_1$  Wege in  $X$  mit  $\omega_0(1) = \omega'_0(0)$ ,  $\omega_1(1) = \omega'_1(0)$  und  $[\omega_0] = [\omega_1]$  und  $[\omega'_0] = [\omega'_1]$ . Dann gilt

$$[\omega_0 * \omega'_0] = [\omega_1 * \omega'_1]$$

c) Sei  $\omega$  ein Weg in  $X$ . Sei  $\bar{\omega} : [0, 1] \rightarrow X$  der umgekehrte Weg, also  $\bar{\omega}(t) := \omega(1 - t)$ . Dann gilt  $[\omega * \bar{\omega}] = [c_{\omega(0)}]$ ,  $[\bar{\omega} * \omega] = [c_{\omega(1)}]$ .

d) Sei  $\omega$  ein Weg in  $X$ . Dann gilt

$$[\omega * c_{\omega(1)}] = [\omega]$$

### Beweis (nur a)

Sei  $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  gegeben wie in Abbildung 4 gezeichnet.

Dann gilt

$$(\omega * (\omega' * \omega''))(s) = ((\omega * \omega') * \omega'')(\varphi(s))$$

Die gesuchte Homotopie mit festen Endpunkten wird durch

$$H(s, t) := ((\omega * \omega') * \omega'')((1 - t)s + t\varphi(s))$$

definiert. □

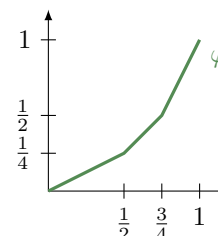


Abb. 4: Funktion  $\varphi$  aus dem Beweis zu 9.8

## 9.9 Korollar

Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $x_0 \in X$  fest. Dann wird

$$\pi_1(X, x_0) := \{[\omega] \mid \omega \text{ ist eine Schleife in } X \text{ mit } \omega(0) = x_0\}$$

durch die Komposition von Wegen zu einer Gruppe mit neutralem Element  $e = [c_{x_0}]$ .

## 9.10 Definition

$\pi_1(X, x_0)$  heißt die **Fundamentalgruppe** von  $X$  bezüglich des **Basispunktes**  $x_0$ .

### Bemerkung

$X$  ist genau dann einfach zusammenhängend, wenn  $\pi_1(X, x_0)$  für alle  $x_0 \in X$  die triviale Gruppe ist.

## 9.11 Bemerkung

Sei  $\eta$  ein Weg in  $X$  von  $x_1$  nach  $x_0$ . Dann definiert

$$\pi_1(X, x_0) \ni [\omega] \xrightarrow{\text{conj}_\eta} [\eta * \omega * \bar{\eta}] \in \pi_1(X, x_1)$$

einen Isomorphismus zwischen  $\pi_1(X, x_0)$  und  $\pi_1(X, x_1)$ . Wir zeigen nur:  $\text{conj}_\eta$  ist ein Gruppenhomomorphismus.

$$\begin{aligned} \text{conj}_\eta([\omega] * [\omega']) &= \text{conj}_\eta([\omega * \omega']) = [(\eta * (\omega * \omega')) * \bar{\eta}] \\ \text{conj}_\eta([\omega]) \cdot \text{conj}_\eta([\omega']) &= [(\eta * \omega) * \bar{\eta}] \cdot [(\eta * \omega') * \bar{\eta}] = [((\eta * \omega) * \bar{\eta}) * ((\eta * \omega') * \bar{\eta})] \\ &\stackrel{\text{a)}}{=} \left[ \left( \eta * (\omega * (\bar{\eta} * \eta)) * \omega' \right) * \bar{\eta} \right] \stackrel{\text{c)}}{=} \left[ \left( \eta * ((\omega * c_{\omega(1)}) * \omega') \right) * \bar{\eta} \right] \\ &\stackrel{\text{d)}}{=} [(\eta * (\omega * \omega')) * \bar{\eta}] \end{aligned}$$

Insbesondere hängt der Isomorphismus von  $\pi_1(X, x_0)$  für wegzusammenhängende Räume nicht von der Wahl des Basispunktes ab.



## 10 Die Windungszahl

### 10.1 Frage

$$\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, x_0) = ? \quad \pi_1(S^1, x_0) = ?$$

### 10.2 Proposition

Sei  $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  definiert durch  $p(t) = e^{2\pi i t}$ . Sei  $\omega : [0, 1] \rightarrow S^1$  stetig und  $t_0 \in \mathbb{R}$  mit  $p(t_0) = \omega(0)$ . Dann gibt es eine eindeutige stetige Abbildung  $\hat{\omega} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\hat{\omega}(0) = t_0$  und  $p \circ \hat{\omega} = \omega$ .

$$\begin{array}{ccc} \{0\} & \xrightarrow{t_0} & \mathbb{R} \\ \downarrow & \searrow \hat{\omega} & \downarrow p \\ [0, 1] & \xrightarrow{\omega} & S^1 \end{array}$$

Ist  $\eta : [0, 1] \rightarrow S^1$  mit  $[\eta] = [\omega]$  und  $\hat{\eta} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\hat{\eta}(0) = t_0$ ,  $p \circ \hat{\eta} = \eta$  so gilt  $\hat{\eta}(1) = \hat{\omega}(1)$ .

#### Beweis

Homotopiehebungssatz (später)

□

### 10.3 Definition

Sei  $\omega : [0, 1] \rightarrow S^1$  eine Schleife in  $S^1$  mit  $\omega(0) = \omega(1) = 1$ . Sei  $\hat{\omega} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $p \circ \hat{\omega} = \omega$  und  $\hat{\omega}(0) = 0$ . Dann heißt  $\hat{\omega}(1) \in \mathbb{Z} = p^{-1}(1)$  die **Windungszahl** von  $\omega$ .

### 10.4 Satz

Die Windungszahl definiert einen Isomorphismus  $d : \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $[\omega] \mapsto \hat{\omega}(1)$ .

#### Beweis

Nach Proposition 10.2 ist  $d$  eine wohldefinierte Abbildung.

**$d$  ist surjektiv:** Sei für  $n \in \mathbb{Z}$   $\hat{\omega}_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\hat{\omega}_n(t) = t \cdot n$ . Dann ist

$$d([p \circ \hat{\omega}_n]) = \hat{\omega}_n(1) = n$$

**$d$  ist Gruppenhomomorphismus:** Seien  $\omega, \eta : [0, 1] \rightarrow S^1$  Schleifen mit  $\omega(0) = \eta(0) = 1$ . Sei  $\hat{\omega}, \hat{\eta} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\hat{\omega}(0) = 0, \hat{\eta}(0) = 0, p \circ \hat{\omega} = \omega, p \circ \hat{\eta} = \eta$ . Also  $d([\omega]) = \hat{\omega}(1)$  und  $d([\eta]) = \hat{\eta}(1)$ . Sei  $\hat{\eta}_+ : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\hat{\eta}_+(s) = \hat{\eta}(s) + \hat{\omega}(1)$ . Dann ist  $\hat{\omega} * \hat{\eta}_+$  definiert,  $(\hat{\omega} * \hat{\eta}_+)(0) = 0$ ,  $(\hat{\omega} * \hat{\eta}_+)(1) = \hat{\eta}(1) + \hat{\omega}(1)$ . Also

$$d([\omega * \eta]) = (\hat{\omega} * \hat{\eta}_+)(1) = \hat{\eta}(1) + \hat{\omega}(1) = d([\omega]) + d([\eta])$$

**$d$  ist injektiv:** Sei  $\omega : [0, 1] \rightarrow S^1$  eine Schleife mit  $d([\omega]) = 0$ . Dann gibt es  $\hat{\omega} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\hat{\omega}(0) = 0 = \hat{\omega}(1)$  und  $p \circ \hat{\omega} = \omega$ . Nun ist  $\hat{H} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\hat{H}(s, t) := (1 - t) \cdot \hat{\omega}(s)$$

eine Homotopie mit festen Endpunkten zwischen  $\hat{\omega}$  und  $c_0$ . Dann ist  $p \circ \hat{H}$  eine Homotopie mit festen Endpunkten zwischen  $\omega$  und  $c_1$ . Also  $[\omega] = e \in \pi_1(S^1, 1)$ . □

## 10.5 Definition

Eine surjektive stetige Abbildung  $p : \hat{X} \rightarrow X$  heißt eine **Überlagerung**, falls es zu jedem  $x \in X$  eine Umgebung  $U$  gibt, so dass sich  $p^{-1}(U)$  schreiben lässt als die disjunkte Vereinigung von offenen Mengen  $U_i \subseteq \hat{X}$ , sodass für jedes  $i$  die Einschränkung  $p|_{U_i} : U_i \rightarrow U$  ein Homöomorphismus ist. Eine solche Umgebung  $U$  heißt eine **elementare Umgebung**.

## 10.6 Beispiel

- (1)  $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1, t \mapsto e^{2\pi i t}$  ist eine Überlagerung.
- (2)  $p_n : S^1 \rightarrow S^1, z \mapsto z^n$  ist eine Überlagerung.
- (3) Sind  $p : \hat{X} \rightarrow X, q : \hat{Y} \rightarrow Y$  Überlagerungen, so ist  $p \times q : \hat{X} \times \hat{Y} \rightarrow X \times Y$  eine Überlagerung.  
zB:  $\mathbb{R}^2 \rightarrow T^2 = S^1 \times S^1$
- (4)  $S^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2 = S^2 / x \sim -x$  ist eine Überlagerung. (Übung!)

## 10.7 Definition

Sei  $p : \hat{X} \rightarrow X$  eine Überlagerung und  $f : Z \rightarrow X$  eine stetige Abbildung. Eine **Hebung** von  $f$  (bezüglich  $p$ ) ist eine stetige Abbildung  $\hat{f} : Z \rightarrow \hat{X}$  mit  $p \circ \hat{f} = f$

$$\begin{array}{ccc} \hat{X} & & \\ \hat{f} \uparrow & \searrow p & \\ Z & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

## 10.8 Homotopiehebungssatz

Sei  $\hat{p} : \hat{X} \rightarrow X$  eine Überlagerung,  $H : Z \times [0, 1] \rightarrow X$  eine Homotopie und  $\hat{f} : Z \rightarrow \hat{X}$  eine Hebung von  $f = H(-, 0) := H|_{Z \times \{0\}}$ . Dann gibt es eine *eindeutige* Hebung von  $H$  mit  $\hat{H}(-, 0) = \hat{f}$

$$\begin{array}{ccc} Z \times \{0\} & \xrightarrow{\hat{f}} & \hat{X} \\ \downarrow i & \nearrow \hat{H} & \downarrow p \\ Z \times [0, 1] & \xrightarrow{H} & X \end{array}$$

### Beweis

Sei  $\mathcal{U}$  eine Überdeckung von  $X$  durch elementare Umgebungen. Wir können  $H$  zurückziehen und erhalten eine offene Überdeckung  $H^{-1}(\mathcal{U}) := \{H^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{U}\}$  von  $Z \times [0, 1]$ . Sei  $z_0 \in Z$ . Da  $\{z_0\} \times [0, 1]$  kompakt ist, gibt es  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$  und  $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$  mit

$$H(\{z_0\} \times [t_i, t_{i+1}]) \subseteq U_i$$

Da die  $U_i$  offen sind gibt es zu jedem  $i$  eine offene Umgebung  $V_i$  von  $z_0$  mit  $H(V_i \times [t_i, t_{i+1}]) \subseteq U_i$ . Sei  $V := \bigcap_{i=1}^n V_i$ , dann  $H(V \times [t_i, t_{i+1}]) \subseteq U_i$ . Da alle  $U_i$  elementar sind, finden wir induktiv eindeutige Hebungen  $\hat{H}_i^V$  von  $H|_{V \times [t_i, t_{i+1}]}$  mit

$$\hat{H}_1^V(-, 0) = \hat{f}|_V \quad \text{und} \quad \hat{H}_i^V(-, t_{i-1}) = \hat{H}_{i-1}^V(-, t_{i-1}).$$

Nun erhalten wir mit  $\hat{H}^V(z, t) := \hat{H}_i^V(z, t)$  für  $z \in V$ ,  $t \in [t_{i-1}, t_i]$  eine eindeutige Hebung von  $H|_{V \times [0,1]}$  mit  $\hat{H}^V(-, 0) = \hat{f}|_V$ . Dabei bleibt  $\hat{H}^V$  eindeutig auch wenn wir  $V$  verkleinern. Nun finden wir für jedes  $z \in Z$  eine Umgebung  $V_z$  und eine eindeutige Hebung  $\hat{H}^{V_z}$  von  $H|_{V_z \times [0,1]}$  mit  $\hat{H}^{V_z}(-, 0) = \hat{f}|_{V_z}$ . Wegen der Eindeutigkeit gilt

$$\hat{H}^{V_z}(\xi, 0) = \hat{H}^{V_{z'}}(\xi, t)$$

für  $\xi \in V_z \cap V_{z'}$ . Daher definiert  $\hat{H}(z, t) := \hat{H}^{V_z}(z, t)$  die gesuchte eindeutige Hebung.  $\square$

## 11 Induzierte Abbildungen

### 11.1 Lemma

Sei  $f : X \rightarrow Y$  stetig mit  $f(x_0) = y_0$ . Dann definiert  $f_*([\omega]) := [f \circ \omega]$  einen Gruppenhomomorphismus  $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ .

#### Beweis

Wir zeigen nur, dass  $f_*$  wohldefiniert ist. Seien  $\omega, \eta : [0, 1] \rightarrow X$  Schleifen mit  $\omega(0) = x_0 = \eta(0)$  und  $[\omega] = [\eta]$ . Dann gibt es eine Homotopie  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  mit festen Endpunkten zwischen  $\omega$  und  $\eta$ .<sup>1</sup> Dann ist  $f \circ H$  eine Homotopie mit festen Endpunkten zwischen  $f \circ \omega$  und  $f \circ \eta$ . Also

$$f_*([\omega]) = [f \circ \omega] = [f \circ \eta] = f_*([\eta]) \text{ in } \pi_1(Y, y_0) \quad \square$$

### 11.2 Definition

$f_*$  heißt die von  $f$  **induzierte Abbildung**. Manchmal schreibt man auch  $\pi_1(f)$  für  $f_*$ , um  $f_*$  von anderen induzierten Abbildungen zu unterscheiden.

#### Bemerkung

- (i)  $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$
- (ii)  $(\text{id}_X)_* = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)}$

### 11.3 Definition

Ein topologischer Raum  $X$  zusammen mit einem Basispunkt  $x_0 \in X$ ,  $(X, x_0)$  heißt ein **punktierter Raum**. Eine **punktierte Abbildung** zwischen punktierten Räumen  $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  ist eine stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  mit  $f(x_0) = y_0$ . Punktierte Abbildungen  $f, g : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  heißen **punktiert homotop**, falls es eine Homotopie  $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  von  $f$  nach  $g$  gibt mit  $H(x_0, t) = y_0 \quad \forall t \in [0, 1]$ .

### 11.4 Proposition (Homotopieinvarianz von $\pi_1$ )

Seien  $f, g : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  homotop. Dann gilt

$$f_* = g_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

#### Beweis

Sei  $H$  eine Homotopie zwischen  $f$  und  $g$ . Für  $[\omega] \in \pi_1(X, x_0)$  ist  $H \circ \omega$  eine Homotopie mit festen Endpunkten zwischen  $f \circ \omega$  und  $g \circ \omega$ . Also

$$f_*([\omega]) = [f \circ \omega] = [g \circ \omega] = g_*([\omega]) \quad \square$$

### 11.5 Definition

Seien  $X, Y$  topologische Räume. Dann heißen  $X$  und  $Y$  **homotopieäquivalent**, falls es stetige Abbildungen  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : Y \rightarrow X$  gibt, so dass

$$f \circ g \simeq \text{id}_Y \text{ und } g \circ f \simeq \text{id}_X$$

Wir schreiben dann  $X \simeq Y$  oder  $X \xrightarrow{f} Y$ . Entsprechendes benutzen wir auch für punktierte Räume. Falls  $X \simeq \{0\}$ , so sagen wir:  $X$  ist **zusammenziehbar**.

<sup>1</sup> $H(-, 0) = \omega, H(-, 1) = \eta, H(t, 0) = H(t, 1) = x_0$  für alle  $t \in [0, 1]$

$f \simeq g : \Leftrightarrow f$   
homotop zu  $g$

## 11.6 Beispiel

- (1)  $S^{n-1}$  ist homotopieäquivalent zu  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ : Benutze  $i : S^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  die Inklusion und  $p : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow S^{n-1}, v \mapsto \frac{v}{\|v\|}$ . Dann gilt

$$p \circ i = \text{id}_{S^{n-1}} \quad , \quad i \circ p \simeq \text{id}_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$$

mit der Homotopie  $H(v, t) = t + (1-t)\frac{v}{\|v\|}$ .

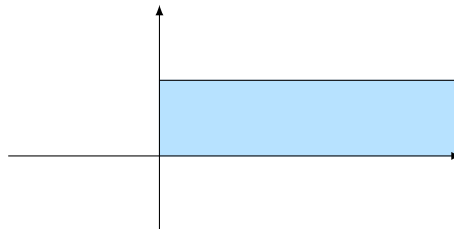
- (2) Sei  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  eine konvexe Teilmenge und  $x_0 \in K$ . Dann ist  $(K, x_0)$  zusammenziehbar:

$i : (\{x_0\}, x_0) \rightarrow (K, x_0)$  die Inklusion

$p : (K, x_0) \rightarrow (\{x_0\}, x_0)$  die konstante Abbildung

$p \circ i = \text{id}_{(\{x_0\}, x_0)}$  und  $i \circ p \simeq \text{id}_{(K, x_0)}$  mit der Homotopie  $H(k, t) = t \cdot k + (1-t)x_0$

- (3) Auch  $X := \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \mid x \in (0, \infty), y \in [0, 1]\}$  ist kontrahierbar.



Setze  $H := \{(x, y) \mid x \leq 0\}$ . Dann ist  $X \simeq H \simeq \{x_0\}$

## 11.7 Korollar

Ist  $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  eine Homotopieäquivalenz, so ist  $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$  ein Isomorphismus. Insbesondere ist  $\pi_1(X, x_0) = \{1\}$ , falls  $(X, x_0)$  zusammenziehbar ist.

### Beweis

Sei  $g : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$  eine Homotopieinverse zu  $f$ , also  $g \circ f \simeq \text{id}_X$ ,  $f \circ g \simeq \text{id}_Y$ . Dann ist  $g_* = (f_*)^{-1}$  (und  $f_*$  ein Isomorphismus):

$$f_* \circ g_* = (f \circ g)_* = (\text{id}_Y)_* = \text{id}_{\pi_1(Y, y_0)}$$

$$g_* \circ f_* = (g \circ f)_* = (\text{id}_X)_* = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)}$$

□

## 11.8 Fixpunktsatz von Brouwer

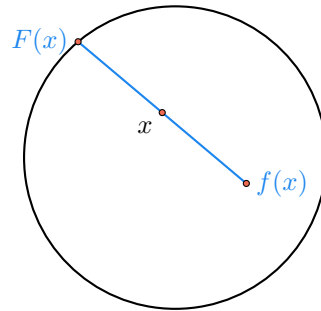
Jede stetige Abbildung  $f : D^n \rightarrow D^n$  hat einen Fixpunkt.

### Beweis

Für  $n = 1$  ist dies eine Folgerung aus dem Zwischenwertsatz.

Angenommen  $f : D^n \rightarrow D^n$  hat keinen Fixpunkt, also  $f(x) \neq x$  für alle  $x \in D^n$ . Dann gibt es eine

stetige Abbildung  $F : D^n \rightarrow S^{n-1}$  mit  $F|_{S^{n-1}} = \text{id}_{S^{n-1}}$ . Konstruktion von  $F$



$$(i) \quad F(x) = t(x - f(x)) + x, \quad t \geq 0$$

$$(ii) \quad F(x) \in S^{n-1}$$

Sei  $x_0 \in S^{n-1}$ . Wir haben also

$$\begin{array}{ccc} (S^{n-1}, x_0) & \xrightarrow{\text{id}} & (S^{n-1}, x_0) \\ \downarrow i & \nearrow F & \\ (D^n, x_0) & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \pi_1(S^{n-1}, x_0) & \xrightarrow{(\text{id})_* = \text{id}} & \pi_1(S^{n-1}, x_0) \\ \downarrow i_* & \nearrow F_* & \\ \pi_1(D^n, x_0) & & \end{array}$$

Für  $n = 2$  ist das zweite Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{(\text{id})_* = \text{id}} & \mathbb{Z} \\ \downarrow i_* & \nearrow F_* & \\ \{e\} & & \end{array}$$

Daher folgt  $\text{id} = F_* \circ i_* = \text{triviale Abbildung}$   $\nexists$

□

## 11.9 Proposition

Für  $n \in \mathbb{Z}$  sei  $f_n : S^1 \rightarrow S^1, z \mapsto z^n$ . Dann ist  $(f_n)_* : \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \pi_1(S^1, 1)$  gegeben durch Multiplikation mit  $n$ :

$$(f_n)_*([\omega]) = n \cdot [\omega] \in \pi_1(S^1, 1) = \mathbb{Z}$$

Weiter sind die  $f_n$  paarweise nicht homotop zueinander.

### Beweis

Sei  $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1, t \mapsto e^{2\pi i t}$ . Zu jeder Schleife  $\omega : [0, 1] \rightarrow S^1$  mit  $\omega(0) = \omega(1) = 1$  gibt es eine eindeutige Hebung  $\hat{\omega} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  zu einem Weg mit  $\hat{\omega}(0) = 0$ . Der Isomorphismus  $d : \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \mathbb{Z}$  bildet  $[\omega]$  auf  $\hat{\omega}(1) \in \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$  ab. Sei  $\hat{f}_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto nt$ . Dann gilt  $p \circ \hat{f}_n = f_n \circ p$  und  $\hat{f}_n(0) = 0$ . Ist  $\hat{\omega}$  eine Hebung von  $\omega$ , so ist  $\hat{f}_n \circ \hat{\omega}$  eine Hebung von  $f_n \circ \omega$ :

$$\begin{aligned} (\hat{f}_n \circ \hat{\omega})(0) &= \hat{f}_n(0) = 0 \\ p \circ \hat{f}_n \circ \hat{\omega} &= f_n \circ p \circ \hat{\omega} = f_n \circ \omega \end{aligned}$$

Es folgt

$$d([f_n \circ \omega]) = (\hat{f}_n \circ \hat{\omega})(1) = \hat{f}_n(\hat{\omega}(1)) = \hat{f}_n(d[\omega]) = n \cdot d[\omega]$$

Da  $d$  ein Isomorphismus ist, folgt die Behauptung.

Mit der Homotopieinvarianz von induzierten Abbildungen folgt, dass die  $f_n : (S^1, 1) \rightarrow (S^1, 1)$  als punktierte Abbildungen nicht punktiert homotop sind. Mit dem nächsten Lemma folgt das die  $f_n$  paarweise nicht homotop sind.  $\square$

### 11.10 Lemma

Seien  $f, g : (X, x_0) \rightarrow (S^1, 1)$  stetig. Sei  $H : X \times [0, 1] \rightarrow S^1$  eine (unpunktierte) Homotopie zwischen  $f$  und  $g$ . Dann ist  $\tilde{H} : X \times [0, 1] \rightarrow S^1$ ,

$$\tilde{H}(x, t) = \frac{H(x, t)}{H(x_0, t)}$$

ein punktierte Homotopie zwischen  $f$  und  $g$ .

### 11.11 Hauptsatz der Algebra

Jedes Polynom  $p = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0 \in \mathbb{C}[X]$  von  $\text{grad } f = n \geq 1$  hat eine Nullstelle.

#### Beweis

Angenommen  $p$  hat keine Nullstelle. In den Übungen haben wir gezeigt, dass dann  $f_n : S^1 \rightarrow S^1$  homotop zu einer konstanten Abbildung ist. Aus der Proposition 11.9 folgt dann aber  $n = 0$ .  $\square$

## 12 Eigentlich diskontinuierliche Wirkungen

### 12.1 Definition

Sei  $G$  eine Gruppe und  $X$  ein topologischer Raum.

- (1) Eine Wirkung  $G \curvearrowright X$  von  $G$  auf  $X$  ist eine Abbildung  $G \times X \rightarrow X$ ,  $(g, x) \mapsto g \cdot x$  so dass
  - Für  $g \in G$  ist  $L_g : X \rightarrow X$ ,  $x \mapsto g \cdot x$  stetig.
  - Für  $g, h \in G$  gilt  $g \cdot (h \cdot x) = (g \cdot h) \cdot x$
  - Für das neutrale Element  $e \in G$  gilt  $e \cdot x = x$  für alle  $x \in X$
- (2) Eine Wirkung heißt **frei**, falls  $g \cdot x = x \Rightarrow g = e$
- (3) Eine Wirkung heißt **eigentlich diskontinuierlich** (e.d.k.), falls es zu jedem  $x \in X$  eine Umgebung  $U$  von  $x$  gibt mit  $gU \cap U = \emptyset$  für alle  $g \in G \setminus \{e\}$ .
- (4) Durch  $x \sim y :\Leftrightarrow \exists g \in G : g \cdot x = y (\Leftrightarrow Gx = Gy)$  wird eine Äquivalenzrelation auf  $X$  erklärt. Die Äquivalenzklassen dieser Äquivalenzrelation sind genau die **Bahnen**  $Gx = \{g \cdot x \mid g \in G\}$  der Wirkung. Die Menge der Äquivalenzklassen bezeichnen wir mit  $G \backslash X := X / \sim$ . Durch die Quotiententopologie bezüglich der Quotientenabbildung  $X \rightarrow G \backslash X$ ,  $x \mapsto Gx$  wird  $G \backslash X$  zu einem topologischen Raum.

### 12.2 Lemma

Sei  $G \curvearrowright X$  eine e.d.k Wirkung. Dann ist  $p : X \rightarrow G \backslash X$ ,  $x \mapsto Gx$  eine Überlagerung.

**Beweis**

Offenbar ist  $p$  surjektiv und stetig. Sei  $\bar{x} := Gx \in G \backslash X$ . Sei  $U$  eine offene Umgebung von  $x \in X$  für die  $gU \cap U = \emptyset$  für alle  $g \neq e$  ist. Dann ist  $p(U)$  eine elementare Umgebung von  $\bar{x}$ , denn

$$p^{-1}(p(U)) = \bigcup_{g \in G} gU$$

ist die disjunkte Vereinigung der  $gU$ ,  $g \in G$ . □

### 12.3 Beispiel

- (1)  $\mathbb{Z}^n \curvearrowright \mathbb{R}^n$  mit  $z \cdot x := x + z$  ist eine e.d.k. Wirkung: Ist  $\varepsilon < \frac{1}{2}$  so gilt

$$B_\varepsilon(x) \cap B_\varepsilon(x) + z = B_\varepsilon(x) \cap B_\varepsilon(x + z) = \emptyset$$

für alle  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $z \in \mathbb{Z}^n$ . Da  $\mathbb{Z} \backslash \mathbb{R} \cong S^1$  folgt  $\mathbb{Z}^n \backslash \mathbb{R}^n = (\mathbb{Z} \backslash \mathbb{R})^n = (S^1)^n = T^n$ . Wir erhalten eine Überlagerung  $\mathbb{R}^n \rightarrow T^n$ .

- (2) Sei  $\mathbb{Z}/2 = \{e, \tau\}$ . Durch  $\tau \cdot v := -v$  erhalten wir eine e.d.k. Wirkung  $\mathbb{Z}/2 \curvearrowright S^n$ . Dann gilt

$$\mathbb{Z}/2 \backslash S^n \cong \mathbb{R}P^n$$

Wir erhalten eine Überlagerung  $S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ .

- (3) Zu  $m, n \in \mathbb{Z}$  sei  $f_{n,m} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $f_{n,m}(x, y) = (x + n, (-1)^n y + m)$ . Dann ist

$$G := \{f_{n,m} \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$$



eine Gruppe bezüglich der Verknüpfung von Abbildungen.  $f_{n,m} \circ f_{n',m'} = f_{n+n',m+(-1)^n m'}$ . Die kanonische Wirkung von  $G$  auf  $\mathbb{R}^2$   $f_{n,m} \cdot x := f_{n,m}(x)$  ist e.d.k., da

$$f_{n,m}(U_\varepsilon(x)) \cap f_{n',m'}(U_\varepsilon(x)) = \emptyset$$

für  $(n,m) \neq (n',m')$  und  $\varepsilon < \frac{1}{2}$ . Der Quotient  $G \backslash \mathbb{R}^2 =: K$  heißt die **Kleinsche Flasche**. Wir erhalten eine Wirkung  $\mathbb{R}^2 \rightarrow K$ . Übung:  $K \cong T_{S^1 \rightarrow S^1}^{z \mapsto -z}$

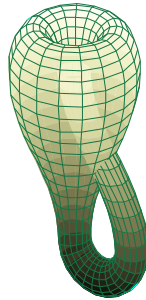


Abbildung 5: Kleinsche Flasche, Quelle

## 12.4 Satz

Sei  $X$  wegzusammenhängend und einfach zusammenhängend. Sei  $G \curvearrowright X$  eine e.d.k. Wirkung. Für jedes  $\bar{x}_0 \in G \backslash X$  ist dann

$$\pi_1(G \backslash X, \bar{x}_0) \cong G.$$

### Beweis

Sei  $x_0 \in X$  ein Urbild von  $\bar{x}_0$ , also  $\bar{x}_0 = G \cdot x_0$ . Zu jeder Schleife  $\omega : [0, 1] \rightarrow G \backslash X$  mit  $\omega(0) = \omega(1) = \bar{x}_0$  gibt es eine Hebung  $\hat{\omega} : [0, 1] \rightarrow X$  mit  $\hat{\omega}(0) = x_0$ . Hier heben wir bezüglich der Überlagerung  $p : X \rightarrow G \backslash X$ ,  $x \mapsto Gx$ , also  $p \circ \hat{\omega} = \omega$ .

Da  $p(\hat{\omega}(1)) = \omega(1) = \bar{x}_0$  folgt  $\omega(1) \in p^{-1}(\bar{x}_0) = G \cdot x_0$ . Es gibt also  $g_\omega \in G$  mit  $g_\omega \cdot x_0 = \hat{\omega}(1)$ . Wie im Fall der Überlagerung  $\mathbb{R} \rightarrow S^1$  zeigt man mit Hilfe des Homotopiehebungssatzes, dass  $[\omega] \mapsto g_\omega$  ein Gruppenhomomorphismus  $\varphi : \pi_1(G \backslash X, \bar{x}_0) \rightarrow G$  definiert.

**Surjektivität von  $\varphi$  :** Sei  $g \in G$ . Sei  $\hat{\omega} : [0, 1] \rightarrow X$  ein Weg von  $x_0$  nach  $g \cdot x_0$  (Solch ein Weg gibt es, da  $X$  wegzusammenhängend ist). Dann ist  $\hat{\omega}$  die Hebung von  $\omega := p \circ \hat{\omega}$  und es folgt  $\varphi([\omega]) = g_\omega = g$ , da  $\hat{\omega}(1) = g \cdot x_0$ . Also  $g \in \text{Im } \varphi$ .

**Injektivität von  $\varphi$  :** Sei  $\omega : [0, 1] \rightarrow G \backslash X$  eine Schleife und  $\omega(0) = \omega(1) = \bar{x}_0$  für die  $\varphi([\omega]) = e$ . Sei  $\hat{\omega} : [0, 1] \rightarrow X$  die Hebung von  $\omega$  mit  $\hat{\omega}(0) = x_0$ . Da  $\varphi([\omega]) = e$  gilt  $\hat{\omega}(1) = x_0$ ,  $\hat{\omega}$  ist also eine Schleife in  $X$ . Da  $X$  einfach zusammenhängend ist, ist  $[\hat{\omega}] = e \in \pi_1(X, x_0)$ . Es folgt

$$[\omega] = [p \circ \hat{\omega}] = p_*[\hat{\omega}] = p_*(e) = e.$$

□

## 12.5 Bemerkung

Für  $n \geq 1$  ist  $S^n$  wegzusammenhängend.

(einfache Übung)

Für  $n \geq 2$  ist  $S^n$  einfach zusammenhängend.

(weniger einfache Übung)

Nach Satz 12.4 ist daher  $\pi_1(\mathbb{R}P^n, x_0) = \mathbb{Z}/2$  für  $n \geq 2$ . Es folgt  $\mathbb{R}P^n \not\cong S^n$  für  $n \geq 2$ . (Andererseits ist  $\mathbb{R}P^1 \cong S^1$ .)

## 12.6 Definition

Sei  $p : \hat{X} \rightarrow X$  eine Überlagerung. Eine **Decktransformation** von  $p$  ist ein Homöomorphismus  $f : \hat{X} \rightarrow \hat{X}$ , sodass  $p \circ f = p$ . Die Decktransformationen von  $p$  bilden eine Gruppe  $\Delta(p)$ . Diese Gruppe wirkt in kanonischer Weise auf  $\hat{X}$ .

## 12.7 Lemma

Sei  $p : \hat{X} \rightarrow X$  eine Überdeckung wobei  $\hat{X}$  wegzusammenhängend ist. Dann ist die Wirkung der Decktransmutationsgruppe  $\Delta(p)$  auf  $\hat{X}$  eigentlich diskontinuierlich.

### Beweis

Wir zeigen zunächst, dass die Wirkung frei ist. Sei  $f \in \Delta(p)$  und  $x \in \hat{X}$  mit  $f(x) = x$ . Zu zeigen:  $f = \text{id}_{\hat{X}}$ . Sei  $y \in \hat{X}$  und  $\hat{\omega} : [0, 1] \rightarrow \hat{X}$  ein Weg von  $x$  nach  $y$ . Dann sind  $\hat{\omega}$  und  $f \circ \hat{\omega}$  zwei Hebungen von  $\omega := p \circ \hat{\omega}$ . Da  $\hat{\omega}(0) = x = f(x) = f \circ \hat{\omega}(0)$  folgt mit der Eindeutigkeit im Homotopiehebungssatz  $\hat{\omega} = f \circ \hat{\omega}$  und insbesondere  $y = f(y)$ . Da  $y$  beliebig war, ist  $f = \text{id}_{\hat{X}}$ .

Wir können nun zeigen, dass die Wirkung eigentlich diskontinuierlich ist. Sei  $x \in \hat{X}$ . Sei  $U$  eine elementare Umgebung von  $p(x)$ . Dann ist  $p^{-1}(U)$  die disjunkte Vereinigung von offenen Mengen  $V$ ,  $V \in \mathcal{V}$  von denen jede homöomorph auf  $U$  abgebildet wird. Sei  $V_0 \in \mathcal{V}$  mit  $x \in V_0$ . Sei  $f \in \Delta(p)$ ,  $f \neq \text{id}$ . Für  $y \in V_0$  gilt dann  $p(f(y)) = p(y)$ ,  $f(y) \neq y$  folgt  $f(y) \notin V_0$ . Andernfalls wäre  $p|_{V_0}$  nicht injektiv. Daher  $f(V_0) \cap V_0 = \emptyset$ .  $\square$

## 12.8 Bemerkung

Sei  $p : \hat{X} \rightarrow X$  eine Überlagerung wobei  $\hat{X}$  wegzusammenhängend ist. Sei  $H \leq \Delta(p)$  eine Untergruppe. Dann ist auch die Wirkung  $H \curvearrowright \hat{X}$  eigentlich diskontinuierlich und die Quotientenabbildung  $q : \hat{X} \rightarrow H \backslash \hat{X}$  eine Überlagerung. Weiter ist  $q' : H \backslash \hat{X} \rightarrow X$  mit  $q'(Hx) := p(x)$  stetig, da  $q' \circ q = p$  stetig ist. Ist  $U \subseteq X$  elementar für  $p$ , so ist  $U$  auch elementar für  $q'$ .  $q'$  ist also auch eine Überlagerung. Insgesamt haben wir also jeder Untergruppe von  $\Delta(p)$  eine Überlagerung  $H \backslash \hat{X}$  zugeordnet, die zwischen  $\hat{X}$  und  $X$  liegt.

$$\begin{array}{ccc} \hat{X} & \xrightarrow{p} & X \\ \downarrow q & \nearrow q' & \\ H \backslash \hat{X} & & \end{array}$$

## 12.9 Definition

Sei  $p : \hat{X} \rightarrow X$  eine Überlagerung. Für  $x \in X$  wirkt dann  $\Delta(p)$  auf  $p^{-1}(x)$ . Die Überlagerung heißt **normal**, falls diese Wirkung transitiv ist, d.h. falls es zu  $\hat{x}, \hat{y} \in p^{-1}(x)$  immer  $f \in \Delta(p)$  gibt mit  $f(\hat{x}) = \hat{y}$ .

## 12.10 Proposition

Sei  $\hat{X} \xrightarrow{p} X$  eine normale Überlagerung wobei  $\hat{X}$  wegzusammenhängend ist. Dann ist die Abbildung  $q' : \Delta(p) \backslash \hat{X} \rightarrow X$ ,  $q'(\Delta(p)x) = p(x)$  ein Homöomorphismus.

### Beweis

Wir haben schon gesehen, dass  $q'$  eine Überlagerung ist. Unabhängig davon ob  $p$  normal ist. Ist  $p$  normal, so ist  $q'$  bijektive Überlagerung und daher Homöomorphismus.  $\square$

## 13 Klassifikation von Überlagerungen

### 13.1 Hebungssatz

Sei  $p : \hat{X} \rightarrow X$  eine Überlagerung. Sei  $x_0 \in X, \hat{x}_0 \in \hat{X}, p(\hat{x}_0) = x_0$ . Sei  $Z$  wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Sei  $z_0 \in Z, f : Z \rightarrow X$  stetig mit  $f(z_0) = x_0$ . Dann gibt es eine Hebung  $\hat{f} : Z \rightarrow \hat{X}$  mit  $\hat{f}(z_0) = \hat{x}_0$  genau dann, wenn

$$f_*(\pi_1(Z, z_0)) \subseteq p_*(\pi_1(\hat{X}, \hat{x}_0)) \quad (*)$$

als Untergruppe von  $\pi_1(X, x_0)$  gilt. In diesem Fall ist  $\hat{f}$  eindeutig.

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{p} & \hat{X} \\ f \uparrow & & \\ Z & & \end{array}$$

#### Beweis

Existiert  $\hat{f}$ , so folgt (\*) aus  $f_* = p_* \circ \hat{f}_*$ . Sei umgekehrt (\*) erfüllt. Sei  $z \in Z$ . Sei  $\omega : [0, 1] \rightarrow Z$  ein Weg von  $z_0$  nach  $z$ . Sei  $\hat{\omega} : [0, 1] \rightarrow \hat{X}$  die eindeutige Hebung von  $f \circ \omega$  mit  $\hat{\omega}(0) = \hat{x}_0$  (Homotopiehebungssatz, 10.8). Existiert  $\hat{f}$  so ist auch  $\hat{f} \circ \omega$  eine Hebung von  $f \circ \omega$  mit  $\hat{f} \circ \omega(0) = \hat{f}(z_0) = \hat{x}_0$ , also  $\hat{\omega} = \hat{f} \circ \omega$  und insbesondere ist  $\hat{f}(z) = \hat{f}(\omega(1)) = \hat{\omega}(1)$ . Daher ist  $\hat{f}$  eindeutig, falls es existiert.

Zur Existenz setzen wir  $\hat{f}(z) := \hat{\omega}(1)$ . Wir müssen zeigen:

**Wohldefiniertheit:** Sei  $\eta : [0, 1] \rightarrow Z$  ein zweiter Weg von  $z_0$  nach  $z$ . Sei  $\hat{\eta} : [0, 1] \rightarrow \hat{X}$  die zugehörige Hebung. Zu zeigen:  $\hat{\eta}(1) = \hat{\omega}(1)$ . Betrachte die Schleife  $\bar{\omega} * \eta$  in  $Z$ . Dann ist  $\bar{\omega} * \hat{\eta}$  eine Hebung von  $f \circ (\bar{\omega} * \eta)$ . Aus (\*) folgt, dass  $f \circ (\bar{\omega} * \eta)$  im Bild von  $p_* : \pi_1(\hat{X}, \hat{x}_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$  liegt. Mit dem Homotopiehebungssatz ergibt sich, dass auch  $\bar{\omega} * \hat{\eta}$  eine Schleife ist (Übung!). Damit folgt  $\hat{\omega}(1) = \hat{\eta}(1)$ .

**Stetigkeit:** Sei  $U \subseteq \hat{X}$  offen. Sei  $z \in \hat{f}^{-1}(U)$ . Sei  $V$  eine elementare Umgebung von  $f(z)$ . Indem wir  $V$  wenn nötig klein machen erhalten wir eine offene Umgebung  $V'$  von  $\hat{f}(z)$ , die unter  $p$  homöomorph auf  $V$  abgebildet wird. Da  $f$  stetig ist und  $Z$  lokal wegzusammenhängend ist, gibt es eine wegzusammenhängende Umgebung  $W$  von  $z$  mit  $f(W) \subseteq V$ . Sei nun  $\omega : [0, 1] \rightarrow Z$  ein Weg von  $z_0$  nach  $z$ . Zu  $z' \in W$  gibt es einen Weg  $\eta : [0, 1] \rightarrow W$  von  $z$  nach  $z'$  und  $\omega * \eta$  ist ein Weg von  $z_0$  nach  $z'$ . Insbesondere ist

$$\hat{f}(z') = \widehat{(\omega * \eta)}(1) = \hat{\omega} * p|_{V'}^{-1}(\eta)(1) = (p|_{V'})^{-1}(\eta(1)) \in V$$

Also  $\hat{f}(W) \subseteq V' \subseteq U$ . □



## Index

Die Seitenzahlen sind mit Hyperlinks zu den entsprechenden Seiten versehen, also anklickbar 

Abbildungstorus, 8  
abgeschlossen, 2  
Abschluss von  $Y$ , 4  
Algebra, 19

Bahn, 36  
Basis der Topologie, 3  
Basispunkt, 27

Decktransformation, 38  
diskrete Metrik, 1

eigentliche Abbildung, 18  
Einpunktkompaktifizierung, 17  
elementare Umgebung, 30  
endliche Durchschnittseigenschaft, 11

Fundamentalgruppe, 27

gerichtete Menge, 9

Hausdorffraum, 5  
    normal, 22  
hausdorffsch, 5  
Hebung, 30  
homotop, 7  
    punktiert, 32  
Homotopie, 7  
Homotopieklassen, 26  
homotopieäquivalent, 32  
homöomorph, 3  
Homöomorphismus, 3

immer wieder in, 13  
induzierte Abbildung, 32  
Innere, 4  
Isometrie, 2

Kleinsche Flasche, 37  
kompakt, 11  
Kompaktifizierung, 16  
Kompositionsweg, 27

lokal kompakt, 16

metrischer Raum, 1  
metrisierbar, 22

Netz, 9  
    universell, 13

Norm, 1

offen, 2  
offene Umgebung, 4  
offene Überdeckung, 11

$p$ -adischer Betrag, 1  
Polnischer Kreis, 24  
Produkttopologie, 6  
punktierte Abbildung, 32

Quotiententopologie, 7

Rand, 4  
reell projektive Raum, 8

Schleife, 26  
schließlich in, 13  
Spurtopologie, 6  
stetig, 2

Teilnetz, 10  
Teilüberdeckung, 11  
Topologie, 2  
    diskrete, 2  
    grobe, 2  
    koendliche, 2

Topologie der gleichmäßigen Konvergenz, 4  
Topologie der punktweisen Konvergenz, 4  
topologische Mannigfaltigkeit, 5  
topologischer Raum, 2  
    lokal wegzusammenhängend, 24  
    lokal zusammenhängend, 24  
    einfach zusammenhängend, 26  
    punktiert, 32  
    wegzusammenhängend, 24  
    zusammenhängend, 24

Umgebung, 4

verschwindende Funktion, 19







Weg, 24  
Windungszahl, 29  
Wirkung  
    eigentlich diskontinuierlich, 36  
    frei, 36

zusammenziehbar, 32

zweites Abzählbarkeitsaxiom, 3

Überlagerung, 30  
normal, 38

## Abbildungsverzeichnis

1 Der Torus $T^2$ , Quelle  	7
2 Möbius-Band, Quelle  	8
3 Der Polnische Kreis und eine nicht wegzusammenhängende Teilmenge	25
4 Funktion $\varphi$ aus dem Beweis zu 9.8	27
5 Kleinsche Flasche, Quelle  	37