

# Skript Differentialgeometrie I.


Mitschrift der Vorlesung „Differentialgeometrie I.“ von Frederik Witt

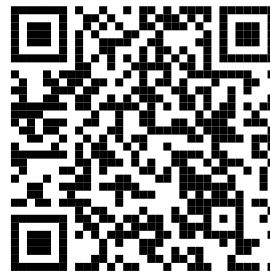
Arne Grauer

11. November 2014

Aktuelle Version verfügbar bei:



 **GitHub** (inklusive Sourcecode)  
<https://github.com/JaMeZ-B/latex-www>




 **Bittorrent Sync**  
B6WH2DISQ5QVYIRYIEZSF4ZR2IDVKPN3I

## Vorwort — Mitarbeit am Skript

Dieses Dokument ist eine Mitschrift aus der Vorlesung „Differentialgeometrie I., WiSe 2014“, gelesen von Frederik Witt. Der Inhalt entspricht weitestgehend dem Tafelanschrieb. Für die Korrektheit des Inhalts übernehme ich keinerlei Garantie! Für Bemerkungen und Korrekturen – und seien es nur Rechtschreibfehler – bin ich sehr dankbar. Korrekturen lassen sich prinzipiell auf drei Wegen einreichen:

- Persönliches Ansprechen in der Uni, Mails an ✉ [j.bantje@wwu.de](mailto:j.bantje@wwu.de) (gerne auch mit annotieren PDFs)
- *Direktes* Mitarbeiten am Skript: Den Quellcode poste ich auf GitHub (siehe oben), also stehen vielfältige Möglichkeiten der Zusammenarbeit zur Verfügung: Zum Beispiel durch Kommentare am Code über die Website und die Kombination Fork + Pull Request. Wer sich verdient macht oder ein Skript zu einer Vorlesung, die ich nicht besuche, beisteuern will, dem gewähre ich gerne auch Schreibzugriff.


Beachten sollte man dabei, dass dazu ein Account bei [github.com](https://github.com)  notwendig ist, der allerdings ohne Angabe von persönlichen Daten angelegt werden kann. Wer bei GitHub (bzw. dem zugrunde liegenden Open-Source-Programm „git“) – verständlicherweise – Hilfe beim Einstieg braucht, dem helfe ich gerne weiter. Es gibt aber auch zahlreiche empfehlenswerte Tutorials im Internet.<sup>1</sup>

- *Indirektes* Mitarbeiten:  $\text{\TeX}$ -Dateien per Mail verschicken.

Dies ist nur dann sinnvoll, wenn man einen ganzen Abschnitt ändern möchte (zB. einen alternativen Beweis geben), da ich die Änderungen dann per Hand einbauen muss!

## Vorlesungshomepage




<https://wwwmath.uni-muenster.de/u/frederik.witt/diffgeoI.html> 

## Über die Differentialgeometrie

1. **Differentialgeometrie** Mannigfaltigkeiten  $\Rightarrow$  Differentialtopologie
2. **Riemannsche Geometrie** Längen und Winkel messen  $\leadsto$  Geodäte (lokal) kürzeste Verbindung zwischen 2 Punkten einer Mannigfaltigkeit.  
Krümmung  
Allgemeine Relativitätstheorie: Krümmung = Gravitation ist für solche Effekte verantwortlich

---

<sup>1</sup>zB. <https://try.github.io/levels/1/challenges/1> , ist auf Englisch, aber dafür interaktives LearningByDoing

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten</b>	<b>1</b>
1.1 Untermannigfaltigkeiten	1
1.1.1 Definition: Submersion, Immersion und Étale	1
1.1.2 Bemerkung: Submersiv/immersiv/étale sind offene Bedingungen	1
1.1.3 Satz über inverse Funktionen (inverse function theorem)	1
1.1.4 Satz über implizite Funktionen (implicit function theorem)	1
1.1.5 Satz (Normalenformen von Submersionen/Immersionen)	1
1.1.6 Definition: Untermannigfaltigkeit	2
1.1.7 Beispiele für Untermannigfaltigkeiten	2
1.1.8 Bemerkung:	3
1.1.9 Satz: lokale Parametrisierung von Untermannigfaltigkeiten	3
1.1.10 Beispiele zur lokalen Parametrisierung	4
1.1.11 Bemerkung	4
1.1.12 Satz: Wechsel lok. Parametrisierungen	4
1.2 Abstrakte Mannigfaltigkeit	5
1.2.1 Definition: Karte und Atlas	5
1.2.2 Definition: Abstrakte differenzierbare Mannigfaltigkeit	5
1.2.3 Beispiele für differenzierbare Mannigfaltigkeiten	5
1.2.4 Bemerkungen zu abstrakten Mannigfaltigkeiten	7
1.3 Glatte Abbildung	8
1.3.1 Definition: Glatte Funktionen zwischen zwei Mannigfaltigkeiten	8
1.3.2 Bemerkung	8
1.3.3 Definition	8
1.3.4 Beispiele	8
1.3.5 Definition	9
1.3.6 Theorem	9
1.3.7 Whitney Theorem	9
1.3.8 Bemerkung	10
1.4 Das Tangentialbündel einer Untermannigfaltigkeit	10
1.4.1 Definition	10
1.4.2 Satz: Vektorraumstruktur des Tangentialraumes	10
1.4.3 Satz	10
1.5 Das Tangentialbündel einer abstrakten Mannigfaltigkeit	11
1.5.1 Definition	11
1.5.2 Bemerkung	11
1.5.3 Definition	12
1.5.4 Bemerkung	12
1.5.5 Definition	12
1.5.6 Theorem	12
1.5.7 Lemma	13
1.5.8 Bemerkung	13
1.5.9 Definition: Vektorbündel	13
1.5.10 Beispiel	14
1.5.11 Bemerkung	14
1.6 Das Differential einer glatten Abbildung	14
1.6.1 Definition	14
1.6.2 Theorem: Kettenregel für Differentiale	14
1.7 Vektorfelder	15
1.7.1 Definition: Vektorfeld	15

1.7.2	Bemerkung: Vektorraumstruktur des $\Gamma(E)$ . . . . .	15
1.7.3	Beispiel . . . . .	15
1.7.4	Satz: Parallelisierbarkeit des Tangentialbündels . . . . .	15
1.7.5	Bemerkung . . . . .	15
1.7.6	Definition . . . . .	15
1.7.7	Bemerkung . . . . .	15
1.7.8	Definition . . . . .	16
1.7.9	Satz . . . . .	16
<b>Index</b>		<b>A</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b>		<b>B</b>

# 1 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Konvention: glatt =  $C^\infty$ .

Wiederholung: Diffeomorphismus  $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  glatt, bijektiv und  $f^{-1}$  glatt.

## 1.1 Untermannigfaltigkeiten

### 1.1.1 Definition

Eine Abbildung  $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  glatt heißt **Submersion/Immersion/Étale** in  $x \in U$ , falls  $d_x f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  surjektiv/injektiv/Isomorphismus ist.  $f$  heißt schlechthin **Submersion/Immersion/Étale**, falls  $f$  Submersion/Immersion/Étale für alle  $x \in U$  ist.

Insbesondere  $n \geq m/n \leq m/n = m$

### 1.1.2 Bemerkung

Submersiv/immersiv/étale sind offene Bedingungen, d.h. ist  $f$  Submersion/Immersion/Étale in  $x$ , so auch in einer hinreichend kleinen Umgebung von  $x$  (vergleiche auch Satz 15 unten)

### 1.1.3 Satz über inverse Funktionen (inverse function theorem)

Sei  $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  étale in  $x$ . Dann existiert eine offene Menge  $x \in V \subset U \subset \mathbb{R}^n$ , sodass  $f|_V$  ein Diffeomorphismus auf seinem Bild ist, d.h.  $f|_V : V \xrightarrow{\sim} f(V)$  ist bijektiv und  $f|_V, (f|_V)^{-1}$  glatt.

### 1.1.4 Satz über implizite Funktionen (implicit function theorem)

Sei  $f : U \subset \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Submersion in 0 mit  $f(0) = 0$ . Dann existiert eine glatte Funktion  $g$  auf einer Umgebung von  $0 \in \mathbb{R}^n$  mit Werten in  $\mathbb{R}^k$ , d.h.

$$g = g(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} g_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ g_k(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

mit

$$f(x_1, \dots, x_n, g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_k(x_1, \dots, x_n)) = f(x, g(x)) = 0$$

### 1.1.5 Satz (Normalenformen von Submersionen/Immersionen)

a) Sei  $f : U \subseteq \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Submersion mit  $f(0) = 0$ . Dann existiert ein Diffeomorphismus  $\varphi : 0 \in V \subset \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$  mit  $\varphi(V) \subset U$  und  $f \circ \varphi(x_1, \dots, x_{n+k}) = (x_1, \dots, x_n) = \pi_{\mathbb{R}^n}(x_1, \dots, x_{n+k})$ , d.h. modulo einer Diffeomorphismus ist jede Submersion äquivalent zu einer Projektion.

b) Sei  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$  eine Immersion in 0,  $f(0) = 0$ . Dann existiert ein Diffeomorphismus

$$\varphi : 0 \in V \subset \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$$

mit  $\varphi(0) = 0$  und

$$\varphi \circ f(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0) = i(x_1, \dots, x_n)$$

d.h. modulo Diffeomorphismen ist  $f$  äquivalent zur kanonischen Einbettung von  $\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ .

### Beweis

- (i) Wähle Koordinaten  $x_1, \dots, x_n$  mit  $d_0 f = (A \ B)$  mit  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{k \times n}$  mit  $\det A \neq 0$ .  
Definiere  $F : U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$  durch  $(p, q) \mapsto (f(p, q), q)$ . Dann gilt

$$d_{(0,0)} F = \begin{pmatrix} d_0 f & 0 \\ 0 & \text{id}_{k \times k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & \text{id}_{k \times k} \end{pmatrix} \implies \det d_0 F \neq 0$$

Mit 1.1.3 folgt:  $\varphi = F^{-1}$  Diffeomorphismus um  $0 \in \mathbb{R}^{n+k}$  herum.

- (ii) Definiere  $F : U \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ .  $F(p, q) = f(p) + (0, q)$ .

$$d_{(0,0)} F = \begin{pmatrix} d_0 f & 0 \\ 0 & \text{id}_{k \times k} \end{pmatrix},$$

also  $\det d_{(0,0)} F \neq 0 \implies \exists \varphi = F^{-1}$  um 0 mit  $\varphi(f(p)) = \varphi \circ F(p, 0) = (p, 0) = i(p)$   $\square$

### Bemerkung

Durch Komposition mit Translationen können Submersionen/Immersionen mit  $F(x) = y$  (nicht notwendigerweise  $= 0$ ) behandelt werden.

### 1.1.6 Definition

$M \subset \mathbb{R}^{n+k}$  heißt  $n$ -dimensionale **Untermannigfaltigkeit**, falls  $\forall x \in M : \exists U \subset \mathbb{R}^{n+k}$  Umgebung, sowie eine Submersion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$  mit  $U \cap M = f^{-1}(0)$ .

### 1.1.7 Beispiele

- (i) Die  $n$ -**Sphäre**  $S^n := \{x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x|^2 = 1\}$  ist eine  $n$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Definiere  $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $f(x_1, \dots, x_{n+1}) = x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 - 1$ .  
 $\implies f^{-1}(0) = S^n$  nach Definition.

$$d_x f = (2x_1, \dots, 2x_{n+1}) : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$$

- (ii) Die hyperbolischen Räume  $H_c^n := \{x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid -x_1^2 + \sum_{i=2}^{n+1} x_i^2 = c\}$

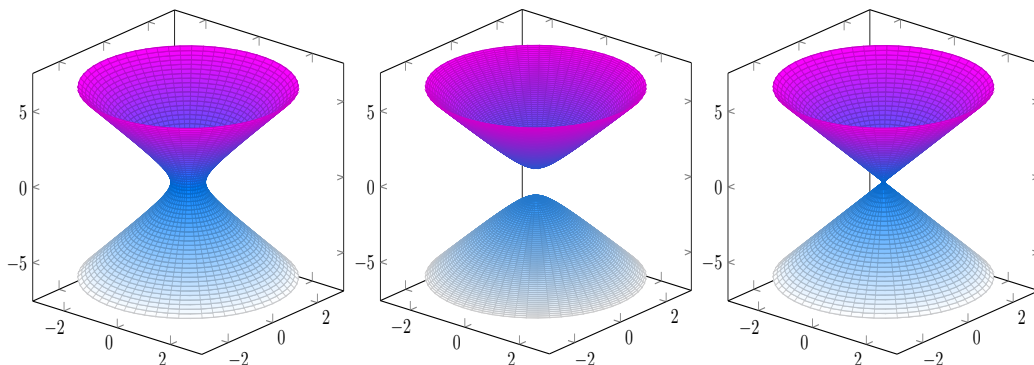


Abbildung 1: hyperbolischer Raum für  $c > 0$ ,  $c < 0$ ,  $c = 0$

Sei  $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $f_c(x) = -x_1^2 + \sum_{i=2}^{n+1} x_i^2 - c$ .

$\implies f$  ist glatt und  $f_c^{-1}(0) = H_c^n$

Es bleibt zu zeigen, dass  $f$  eine Submersion ist.

$$d_x f = (-2x_1, 2x_2, \dots, 2x_{n+1}) : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$$

Es gilt  $d_x f(\nu) = 0 \forall \nu \in \mathbb{R}^{n+1} \Leftrightarrow x_i = 0 \forall i = 1, \dots, n+1$ .

Das heißt  $\exists i : x_i \neq 0 \Rightarrow d_x f$  Submersion, wobei  $\exists i : x_i \neq 0$  gilt, falls  $x \in H_c^n, c \neq 0$ . Also ist für  $c \neq 0$   $H_c^n$  eine  $n$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Für  $c = 0$  ist  $H_0^n \setminus \{0\}$  eine  $n$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit.

(iii) Der  $n$ -Torus  $T^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_{2n-1}, x_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n} \mid x_1^2 + x_2^2 = 1, \dots, x_{2n-1}^2 + x_{2n}^2 = 1\}$

$$f : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 1 \\ \vdots \\ x_{2n-1}^2 + x_{2n}^2 - 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow f$  glatt,  $f^{-1}(0) = T^n$

$$d_x f = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2x_3 & 2x_4 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & & 2x_{2n-1} & 2x_{2n} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow d_x f$  ist eine Submersion.

(iv) Die orthogonale Gruppe  $O(n) \subset \mathbb{R}^{n \times n}$  ist eine Untermannigfaltigkeit der Dimension  $\frac{n(n-1)}{2}$ .

$$O(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid AA^T = \text{id}_{\mathbb{R}^n} = f^{-1}(0)\}, f(A) = AA^T - \text{id}_{\mathbb{R}^n}$$

Es gilt  $f(A)^T = A^{TT} \cdot A^T - \text{id}^T = AA^T - \text{id} = f(A)$ . Also  $f : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \text{Sym}(\mathbb{R}^{n \times n}) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^T = A\}$ .

$\Rightarrow f$  glatt,  $f^{-1}(0) = O(n)$

$$d_A f : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \text{Sym}(\mathbb{R}^{n \times n}), d_A f = HA^T + AH^T$$

Sei  $S \in \text{Sym}(\mathbb{R}^{n \times n})$ . Setze  $H = \frac{SA}{2} \Rightarrow d_A f\left(\frac{SA}{2}\right) = \frac{1}{2}(SAA^T + ASA^T) = \frac{1}{2}(S + S) = S$   
 $\Rightarrow O(n)$  ist eine Untermannigfaltigkeit

### 1.1.8 Bemerkung

$M$  kann von der Form  $M = f^{-1}(0)$  sein,  $f$  glatt, aber keine Submersion. Zum Beispiel

$$M = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\} = f^{-1}(0), f(x, y) = x^3 + y^3$$

### 1.1.9 Satz

Es sind äquivalent:

- (i)  $M^n \subset \mathbb{R}^{n+k}$  ist  $n$ -dim Untermannigfaltigkeit
- (ii)  $\forall x \in M^n \exists$  Umgebungen  $U$  und  $V \subset \mathbb{R}^{n+k}$  von  $x$  und  $0$ , und ein Diffeomorphismus  $\phi : U \rightarrow V$  mit  $\phi(M \cap U) \rightarrow \underbrace{(\mathbb{R}^n \times \{0\}) \cap V}_{=: W}$
- (iii)  $\forall x \in M^n \exists$  Umgebungen  $U \subset \mathbb{R}^{n+k}$  und  $W \subset \mathbb{R}^n$ , sowie eine glatte Abbildung  $g : W \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ , sodass  $g$  ein Homöomorphismus von  $W$  auf  $M \cap U$  und eine Immersion ist.  $g$  nennt man eine **lokale Parametrisierung**

### 1.1.10 Beispiele

(i) Der 2-Torus  $T^2$  ist das Bild von

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4, g(x, y) = (\cos(x), \sin(x), \cos(y), \sin(y)) \subset T^2 \subset \mathbb{R}^4$$

$g$  ist lokale Parametrisierung:

$$d_{(x,y)}g = \begin{pmatrix} -\sin(x) & 0 \\ \cos(x) & 0 \\ 0 & -\sin(y) \\ 0 & \cos(y) \end{pmatrix}$$

$d_{(x,y)}g$  hat somit immer vollen Rang 2, also ist  $d_{(x,y)}g$  injektiv. Es folgt somit, dass  $g$  eine Immersion ist.  $\hat{g}$  ist stetig (Quotiententopologie),  $\hat{g}$  bijektiv und  $T^2$  kompakt. Damit folgt, dass  $\hat{g}$  ein Homöomorphismus und somit  $g$  ein lokaler Homöomorphismus ist.

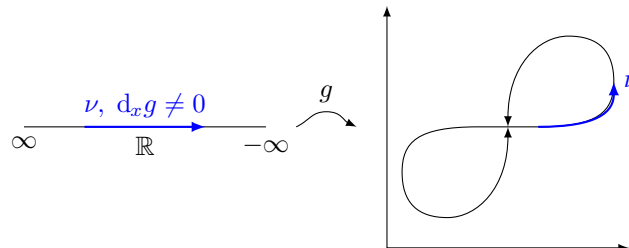
(ii)

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, g(x, y) = (\sin(x) \cos(y), \sin(x) \sin(y), \cos(x)) \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$$

$g$  ist ein lokaler Homöomorphismus, jedoch ist  $d_{(x,y)}g$  nicht injektiv, das heißt keine lokale Parametrisierung nahe der Pole. Also müssen wir eine andere Parametrisierung wählen, zum Beispiel  $g(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$

### 1.1.11 Bemerkung

(i) Betrachte:



$g$  ist immersiv, hat aber keine Umkehrfunktion und ist somit kein Homöomorphismus.

(ii)  $g$  ist keine lokale Parametrisierung, da  $g$  nicht immersiv in 0 ist.  $g(t) = (g_1(t), g_2(t)) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow g_1^2(t) = g_2^2(t) \Rightarrow d_0 g = 0$

### 1.1.12 Satz

Sei  $M^n$  eine  $n$ -dim glatte Untermannigfaltigkeit,  $x \in M$ , und seien  $U_1, U_2$  Umgebungen von  $x$  in  $\mathbb{R}^{k+n}$  mit lok. Parametrisierung  $g_1$  und  $g_2$  von  $U_1 \cap M$  und  $U_2 \cap M$  definiert auf  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  (das heißt  $g_i : \Omega_i \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ ). Dann ist

$$g_2^{-1} \circ g_1 : \Omega_1 \cap g_1^{-1}(U_2) \xrightarrow{g_1} g_1(\Omega_1) \cap U_2 \xrightarrow{g_2^{-1}} \Omega_2 \cap g_2^{-1}(U_1)$$

ein  $C^\infty$ -Diffeomorphismus.

#### Bemerkung

- $h : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  Homöomorphismus, offene Menge in  $\Omega_1 \leftrightarrow$  offene Menge in  $\Omega_2$
- $\varphi : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  Diffeomorphismus, falls Homöom. und  $C^\infty(\Omega_1) \leftrightarrow C^\infty(\Omega_2)$



## 1.2 Abstrakte Mannigfaltigkeit

### 1.2.1 Definition

Sei  $M$  ein topologischer Raum. Ein **Atlas** ist eine Familie  $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$  mit

- (i)  $U_i \subset M$  offen,  $M = \bigcup_{i \in I} U_i$  ( $\{U_i\}$  offene Überdeckung)
- (ii)  $\{\varphi_i : U_i \rightarrow \Omega_i \subset \mathbb{R}^n\}$  ist eine Familie von Homöomorphismen mit:  

$$U_{ij} = U_i \cap U_j \neq \emptyset, \text{ dann ist } \varphi_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_{ij}) \rightarrow \varphi_i(U_{ij})$$
ein  $C^\infty$ -Diffeomorphismus.

Ein Paar  $(U_i, \varphi_i)$  heißt **Karte** und  $\varphi_{ij}$  heißt Übergangsfunktion oder .

### 1.2.2 Definiton

Sei  $M$  ein topologischer Raum.

- (i) Zwei Atlanten  $\mathcal{A}_1 = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$  und  $\mathcal{A}_2 = \{(V_j, \psi_j)\}_{j \in J}$  sind äquivalent, genau dann wenn  
 $\forall i \in I, j \in J \text{ mit } U_i \cap V_j \neq \emptyset$ 

$$\varphi_i \circ \psi_j^{-1} : \psi_j(U_i \cap V_j) \rightarrow \varphi_i(U_i \cap V_j)$$
ein  $C^\infty$ -Diffeomorphismus, das heißt die Vereinigung und  $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$  ist wieder ein Atlas von  $M$ .
- (ii) **Differenzierbare Struktur** auf  $M$  ist die Äquivalenzklasse eines Atlanten. Ein Hausdorffraum  $M$  mit einer differenzierbaren Struktur heißt **(abstrakte) differenzierbare Mannigfaltigkeit** oder Mannigfaltigkeit.
- (iii) Nehmen alle Karten eines Atlanten Werte in  $\mathbb{R}^n$  an, so heißt  $n$  die Dimension der Mannigfaltigkeit.

### 1.2.3 Beispiele

- (i)  $\mathbb{R}^n$  ist Mannigfaltigkeit der Dimension  $n$ , Atlas:  $\{\mathbb{R}^n, \text{id}_{\mathbb{R}^n}\}$  und  $U \subset \mathbb{R}^n$  ist Mannigfaltigkeit der Dimension  $n$ , Atlas:  $\{U, \text{id}_{\mathbb{R}^n}|_U\}$
- (ii) Untermannigfaltigkeit im Sinne von Abschnitt 1.1 sind abstrakte Mannigfaltigkeiten.
- (iii) Mannigfaltigkeit  $N \subset M$  ist eine Untermannigfaltigkeit von  $M$ , falls für alle  $y \in N$  eine Karte  $(U, \varphi)$  von  $M$  um  $y$  existiert, sodass  $\varphi(U \cap N)$  Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^n$  im Sinne von Abschnitt 1.1 ist.  
Dann gilt zum Beispiel  $U \stackrel{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}^n$  ist Untermannigfaltigkeit im "abstrakten" Sinne. Untermannigfaltigkeit  $N \subset \mathbb{R}^n$  im Sinne von 1.1 ist Untermannigfaltigkeit im abstrakten Sinne.
- (iv) Die  $n$ -Sphäre, z.B.  $n = 1$

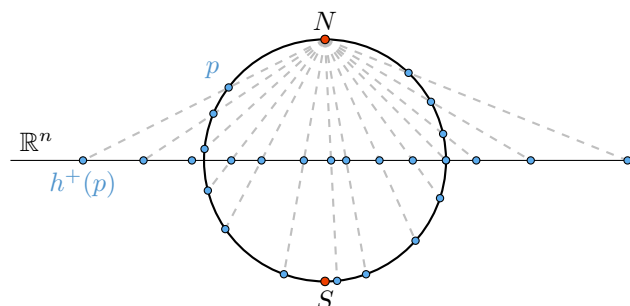


Abbildung 2: Stereografische Projektion

Allgemein:  $U_N = S^n \setminus \{N\}$ ,  $U_S = S^n \setminus \{S\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$

$$\varphi_N : U_N \rightarrow \mathbb{R}^n, (x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n)$$

$$\varphi_S : U_S \rightarrow \mathbb{R}^n, (x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto \frac{1}{1 + x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n)$$

$$\varphi_S \circ \varphi_N^{-1} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \mapsto \frac{x}{\|x\|^2}$$

### Bemerkung

$\{(S^n, \text{id}_{\mathbb{R}^{n+1}}|_{S^n})\}$  ist kein Atlas, denn  $S^n$  ist nicht offen im  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

(v) Der  $n$ -Torus  $T^n$ . Betrachte  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ ,  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (\exp(ix_1), \dots, \exp(ix_n)) \in \underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_{n\text{-mal}} \subset$

$\mathbb{C} \times \dots \times \mathbb{C}$ , so folgt  $f(\mathbb{R}^n) = T^n$  Schränke  $f|_{(a_1-\epsilon, a_1+\epsilon) \times \dots \times (a_n-\epsilon, a_n+\epsilon)}$  auf sein Bild ein.

$\varphi_a := f^{-1} : f(I_a) \rightarrow I_a \stackrel{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}^n$ . Somit ist  $\{(U_a, \varphi_a)\}_{a \in \mathbb{R}^n}$  eine Familie von Karten, die  $T^n$

überdeckt. Es bleibt zu zeigen, dass  $\varphi_{ab} = \varphi_a \circ \varphi_b$  ein Diffeomorphismus ist, was wir an dieser Stelle dem Leser überlassen. Somit folgt, dass  $\{(U_a, \varphi_a)\}_{a \in \mathbb{R}^n}$  ein Atlas ist.

(vi) Betrachte den Hyperbolischen Raum  $H^n$ .  $H^n$  ist eine Mannigfaltigkeit mit einer Karte, gegeben durch stereographische Projektion. Man sagt daher, dass  $H^n$  diffeomorph zu  $\mathbb{R}^n$

(vii) Würfel  $Q \subset \mathbb{R}^n$

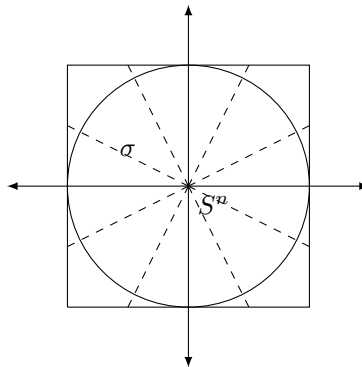


Abbildung 3: Der Würfel  $Q$  ist keine Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$ !

$Q$  ist jedoch eine abstrakte Mannigfaltigkeit, denn  $Q$  ist ein Hausdorffraum und bijektiv zu  $S^n$  durch Projektion  $sigma$ . So ist  $\mathcal{A} := \{(\sigma^{-1}(U_N), \varphi_N \circ \sigma), (\sigma^{-1}(U_S), \varphi_S \circ \sigma)\}$  ein Atlas, da  $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} = \varphi_S \circ \sigma \circ \sigma^{-1} \circ \varphi_N$  und somit ist  $Q$  eine abstrakte Mannigfaltigkeit.

(viii) Sei  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ . So ist der **projektive Raum**

$\mathbb{KP}^n$  = Menge der Ursprungsgraden in  $\mathbb{K}^{n+1}$

$= \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$ ,  $x, y \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$  seien äquivalent,  $x \sim y \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} : x = \lambda y$

$= \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} / \mathbb{K}^*$  wobei

$[x] \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} / \mathbb{K}^* \mapsto \langle x \rangle_{\mathbb{K}}$  lineare Erzeugnis von  $x$  in  $\mathbb{K}^{n+1}$

Wir schreiben  $[x] = [x_0 : \dots : x_n]$ , falls  $x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ , "homogene Koordinaten".

### Bemerkung

$$[x_0 : \dots : x_n] = [\lambda x_0 : \dots : \lambda x_n], \lambda \in \mathbb{K}^{n+1}$$

- (1) Betrachte  $p : x \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} \mapsto [x] = p(x) \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$  so folgt, dass  $\mathbb{K}P^n$  versehen mit der Quotiententopologie ein Hausdorff-Raum ist.

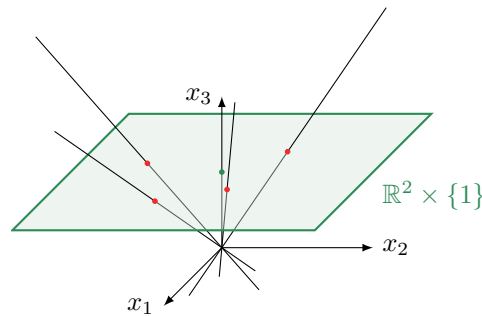


Abbildung 4: Der 2-dimensionale projektive Raum  $\mathbb{R}P^2$  (projektive Ebene)

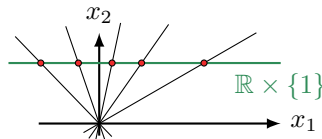


Abbildung 5: Der eindimensionale projektive Raum  $\mathbb{R}P^1$

Aus Abbildung 3 bzw. 2 folgt somit  $\mathbb{R}P^n = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cong S^2$  und analog  $\mathbb{R}^2 \cup \{N\} \cong S^2$ . Um zu zeigen, dass  $\mathbb{K}P^n$  eine abstrakte Mannigfaltigkeit ist, muss die Existenz eines Atlanten gezeigt werden. Betrachte  $U_i = \{[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{K}P^n \mid x_i \neq 0\}$ . So folgt, dass  $\bigcup_{i=0}^n U_i = \mathbb{K}P^n$ , da  $(0, \dots, 0) \notin \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ , also  $\nexists : [0 : \dots : 0]$ . Da  $[x_0 : \dots : x_n] \in U_i \Rightarrow x_i \neq 0$ , ist  $\varphi_i : [x_0 : \dots : x_n] = [\frac{x_0}{x_i} : \dots : \frac{x_n}{x_i}] \xrightarrow{\varphi_i} [\frac{x_0}{x_i} : \dots : \frac{\hat{x}_i}{x_i} : \dots : \frac{x_n}{x_i}]$  wohldefiniert. Es bleibt als Übung zu zeigen, dass  $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$  ein Diffeomorphismus ist.

### 1.2.4 Bemerkung

- (i) Die Vereinigung aller äquivalenten Atlanten ist wieder ein Atlas, der sogenannte maximale Atlas (eindeutig bestimmt). In der Praxis arbeitet man mit konkreten Atlanten.
- (ii) Allgemein kann man  $C^p$ -Atlanten betrachten, das heißt  $\varphi_{ij}$   $C^p$ -Diffeomorphismen  $\rightarrow C^p$ -Mannigfaltigkeiten. Ebenso kann man Karten mit allgemeinen Zielräumen betrachten, wo der Begriff der Differenzierbarkeit/Diffeomorphismus Sinn hat. Zum Beispiel Banach- und Hilbertraum  $\rightarrow$  Banach- und Hilbertmannigfaltigkeiten oder Fréchetraum  $\rightarrow$  Fréchemannigfaltigkeiten.
- (iii) Sei  $M$  ein topologischer Raum mit differenzierbarer Struktur, so ist er nicht automatisch Hausdorff! Zum Beispiel

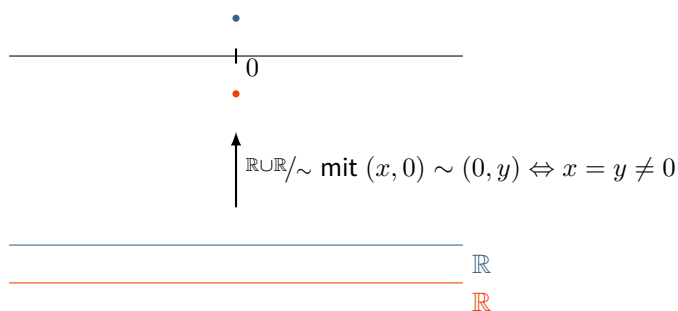


Abbildung 6: Beispiel einer Nicht-Hausdorffmenge

Benutze Atlas  $\{(U_1 = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}, \text{id}), (U_2 = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}, \text{id})\}$ . Dies ist ein Atlas, da  $U_1 \cap U_2 = M \setminus \{ \cdot \}$ .

- (iv) Wir nehmen künftig zwei zusätzliche Bedingungen für Mannigfaltigkeiten an:
- (a)  $M$  zusammenhängend  $\rightarrow$  jede Mannigfaltigkeit hat wohldefinierte Dimension schreibe  $M^n$
  - (b)  $M$  erfüllt das 2. Abzählbarkeitsaxiom. Für uns:  $\exists$  abzählbarer Atlas.

## 1.3 Glatte Abbildung

### 1.3.1 Definition

Seien  $M^n, N^m$  zwei Mannigfaltigkeiten und sei  $f : M^n \rightarrow N^m$  eine stetige Abbildung. Dann heißt  $f$  glatt, falls für alle  $x$  Karten  $(U, \varphi) \subset M$  und  $(V, \psi) \subset N$  um  $x$  beziehungsweise  $f^{-1}(x)$  existieren mit  $f(U) \subset V$  und

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$$

$\subset \mathbb{R}^n \quad \subset \mathbb{R}^m$

glatt ist. ("f in Karten gelesen ist glatt") Wir schreiben  $C^\infty(M, N) = \{f : M \rightarrow N \mid f \text{ glatt}\}$  und als Spezialfall  $C^\infty(M) = C^\infty(M, \mathbb{R})$ .

### 1.3.2 Bemerkung

Glattheit ist unabhängig von der Wahl der Karten! ( $\sim$  Diffeomorphismusbedingung!)

### 1.3.3 Definition

- (i) Eine glatte Abbildung  $f : M \rightarrow N$  heißt Submersion/Immersion/étale, falls für ein Paar (und damit alle Karten)  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$  eine Submersion/Immersion/étale ist.
- (ii)  $f$  ist Diffeomorphismus zwischen  $M$  und  $N$  ( $M$  und  $N$  sind "diffeomorph"), falls  $f$  bijektiv ist und  $f$  sowie  $f^{-1}$  glatt ist.
- (iii)  $f : M \rightarrow N$  heißt Einbettung, falls  $f$  Immersion und Homöomorphismus auf sein Bild ist.

### 1.3.4 Beispiele

- (i) Wenn  $M$  eine Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^{n+k}$ ,  $f : \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^m$  glatte Funktion, dann ist auch  $f|_M$  glatt.
  - $\{\mathbb{R}^n, \text{id}\}, \{\mathbb{R}^m, \text{id}\} \Rightarrow f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  glatt im Sinne von Definition 1.3.1  $\Leftrightarrow$  glatt im üblichen Sinne

- $x \in M$ , Karte um  $x$ :  $\varphi : U \subset \mathbb{R}^{n+k} \xrightarrow{\text{Diffeo.}} V = \varphi(U) \subset \mathbb{R}^{n+k}$  mit  $\varphi(U \cap M) = U \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$  (aus 1.1.9), so gilt

$$f \circ \varphi^{-1} : V \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}) \xrightarrow{\varphi^{-1}|_{V \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})} \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+k})} M \cap U \xrightarrow{f \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+k}, \mathbb{R}^m)} \mathbb{R}^m$$

Somit folgt, dass  $f|_M$  glatt ist.

- (ii)  $S^2$  ist diffeomorph zu  $\mathbb{CP}^1 = \{\text{Ursprungsgeraden in } \mathbb{C}^2\} = \mathbb{C} \setminus \{0\} / \mathbb{C}^*$ . Definiere

$$f : S^2 \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{CP}^1, (x, y, z) \mapsto \begin{cases} z \neq -1 : [\frac{x+iy}{1+z} : 1] \\ z = -1 : [1 : 0] \end{cases}$$

Somit folgt

- (1)  $f$  ist bijektiv

- (2) Wir "lesen nun in Karten", wobei  $U_1 = \{z_1 : z_2 \neq 0\} \xrightarrow{\psi_2} \frac{z_1}{z_2}$ :

$$\psi \circ f \circ \varphi_S^{-1}(x, y) = \psi_2[x + iy : 1] = x + iy \underset{\in U_1}{=} x + iy \underset{\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}}{=} (x, y)$$

Also ist  $\psi \circ f \circ \varphi_S^{-1} = \text{id}$  und somit  $f|_{S^2 \setminus \{S\}}$  ist  $C^\infty$  und  $f^{-1}$  auch  $C^\infty$ . Nun brauchen wir nur noch eine Karte um  $S$ ! Zum Beispiel  $\varphi_N$ . Hier  $\varphi_N(S) = (0, 0)$ . Es gilt:

$$f \circ \varphi_N^{-1}(x, y) = \begin{cases} (x, y) \neq (0, 0) : [\varphi_S \circ \varphi_N^{-1}(x, y) : 1] \stackrel{\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}}{=} [\frac{x+iy}{x^2+y^2} : 1] \in U_0 \\ [1 : 0] \in U_0 \end{cases}$$

Somit folgt:

$$\psi_1 \circ f \circ \varphi_N^{-1}(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{x+iy} = x - iy \\ 0 \end{cases} = (x, -y) \text{ glatt}$$

### 1.3.5 Definition

- (i) Eine Mannigfaltigkeit erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom, falls es einen abzählbaren Atlas besitzt.
- (ii) Seien  $M^n$  eine Mannigfaltigkeit. Eine Familie  $\{f_i : M \rightarrow \mathbb{R}\}$  glatter Funktionen heißt **Zerlegung der Eins**, falls
- $\text{supp } f_i = \overline{\{x \in M \mid f_i(x) \neq 0\}}$  "Träger von  $f_i$ " sind kompakt und bilden "lokal endliche Familie" (das heißt, sei  $K \subset M$  kompakt, so gilt  $\text{supp } f_i \cap K = \emptyset$  außer für endlich viele  $i \in I$ )
  - $\forall x \sum_{i \in I} f_i(x) = 1$  (wohldefiniert, also  $\sum$  endlich, da lokal endlich)

### 1.3.6 Theorem

Sei  $\{U_i\}_{i \in I}$  eine Überdeckung von  $M$ . Ist  $M$  zweifach abzählbar, so existiert eine Zerlegung der Eins, die  $\mathcal{U}$  untergeordnet ist, das heißt  $\text{supp } f_i \subset U_i$ . Dies ist nützlich um beliebig definierte Objekte zu globalen Objekten zu verkleben.

### 1.3.7 Whitney Theorem

Sei  $M^n$  eine zweifach abzählbare Mannigfaltigkeit. Dann existiert eine Einbettung  $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  von  $M$  (bzw. Immersion  $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n-1}$ ) als Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^{2n}$  (bzw.  $\mathbb{R}^{2n-1}$ )

### 1.3.8 Bemerkung

- (i) Können jede "abstrakte" Mannigfaltigkeit  $M^n$  als eine Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^{2n-1}$  realisieren.

#### Aber

Die Einbettung ist nicht kanonisch (oder "natürlich"), das heißt gewisse Eigenschaften der Untermannigfaltigkeit entstehen durch die Einbettung und sind keine intrinsische Einbettung von  $M$ !

- (ii) Die Dimension  $2n - 1$  des Bildraumes ist optimal im folgenden Sinne

$\exists$  Mannigfaltigkeit  $M^n$ , die sich nicht in  $\mathbb{R}^N$  mit  $N < 2n - 1$  einbetten lassen.

#### Beweisskizze

Wir nehmen an, dass die Mannigfaltigkeit  $M$  kompakt ist. So folgt mit 1.3.5, dass ein endlicher Atlas  $\{(U_i, \varphi_i : U_i \rightarrow \Omega_i \subset \mathbb{R}^n)\}_{i=1}^n$  mit untergeordneter Zerlegung der Eins  $\{f_i : M \rightarrow \mathbb{R}\}_{i=1}^n$ ,  $\text{supp } f_i \subset U_i$  existiert. Definiere  $\psi_i : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  durch  $\psi_i(x) = \varphi_i(x)f_i(x)$ , so folgt  $\psi_i(x) \equiv 0$  für  $x \in U_i^c$  und  $\psi_i$  ist glatt. Dann definiert  $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^{nr+r}$ ,  $\psi(x) = (\psi_1(x), \dots, \psi_r(x), f_1(x), \dots, f_r(x))$  eine Einbettung. Von jetzt an ist  $M^n$  stets eine glatte zweifach abzählbare Mannigfaltigkeit.

## 1.4 Das Tangentialbündel einer Untermannigfaltigkeit

### 1.4.1 Definition

Sei  $M^n \subset \mathbb{R}^{n+k}$  eine  $n$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Sei  $x \in M$ ,  $v \in \mathbb{R}^{n+k}$  ist tangential an  $M$  in  $x$ , falls eine  $C^\infty$ -Abbildung  $c : 0 \in I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$  existiert mit

- $c(I) \subset M$
- $c(0) = x$
- $c'(t) = v$

#### Notation

$T_x M^n$  = Menge der Tangentialvektoren  $v$  in  $x$ .

### 1.4.2 Satz

$T_x M^n$  ist ein  $n$ -dim Vektorraum $_{|\mathbb{R}}$  ( $\cong \mathbb{R}^n$ )

#### Beweis

Sei  $M$  eine Untermannigfaltigkeit,  $x \in M$ , so existiert Umgebung  $U \subset \mathbb{R}^{n+k}$  offen,  $\varphi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^{n+k}$  diffeomorph mit  $\varphi(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$ . Sei  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$  ein Weg mit  $c(I) \subset M \cap U$ , so ist  $\varphi \circ c$  ein Weg im  $V \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$ . Es folgt, dass  $T_x M \cong d_{\varphi(x)} \varphi^{-1}(\mathbb{R}^n \times \{0\})$ , das heißt  $T_x M$  übernimmt die Vektorraumstruktur von  $\mathbb{R}^n \times \{0\}$

### 1.4.3 Satz

Sei  $M^n \subset \mathbb{R}^{n+k}$  eine Untermannigfaltigkeit der Dimension  $n$ ,  $x \in M$  und  $U \subset \mathbb{R}^{n+k}$  offene Umgebung um  $x$ .

- (i)  $U \cap M = f^{-1}(0)$  für  $f : \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$  eine Submersion, so ist  $T_x M^n = \ker d_x f$ .  
 Sei zum Beispiel  $M = S^2$ . So ist  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$  eine Submersion mit  $S^2 = f^{-1}(0)$ .  
 Betrachte nun den Tangentialraum am Nordpol  $N$ . Es gilt  $d_N f = (0, 0, z) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , also gilt für den Tangentialraum:

$$T_N S^2 = \ker d_N f = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

- (ii) Sei  $\varphi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^{n+k}$  ein Diffeomorphismus mit  $\varphi(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$ , dann ist  $T_x M = d_{\varphi(x)} \varphi^{-1}(\mathbb{R}^n \times \{0\})$
- (iii) Ist  $(\Omega, g)$  eine Parametrisierung von  $U \cap M$ , so ist der Tangentialraum  $T_{g(y)} M = d_y g(\mathbb{R}^n)$

### Beweis

- (i) Sei  $v \in T_x M$ , das heißt  $v = c'(0)$ ,  $c(0) = x$ . So gilt  $f \circ c(t) = 0$ , da  $c(t) \in M \cap U = f^{-1}(0)$ .  
 Somit folgt mit der Kettenregel, das  $d_{c(0)} f \circ c'(0) = d_x f(v) = 0$ . Also ist  $v \in \ker d_x f$  und es gilt  $T_x M \subset \ker d_x f$ . Da  $T_x M$  und  $\ker d_x f$   $n$ -dimensional, folgt somit die Gleichheit.
- (ii) Siehe 1.4.2
- (iii) Sei  $\tilde{c} \subset \Omega$  eine Kurve,  $c := g \circ \tilde{c}$  Kurve durch  $c(0) = g(\tilde{c}(0)) \in M$ . So ist  $c'(0) = d_{\tilde{c}(0)} g(\tilde{c}'(0)) \in T_{c(0)} M$ . Also gilt  $d_y g(\mathbb{R}^n) \subset T_{g(y)} M$  und die Gleichheit folgt wie in (i) durch die Dimension.

## 1.5 Das Tangentialbündel einer abstrakten Mannigfaltigkeit

### 1.5.1 Definition

Sei  $M^n$  eine abstrakte Mannigfaltigkeit,  $x \in M$ . Ein **Tangentialvektor** von  $M$  in  $x$  ist eine Äquivalenzklasse von Kurven  $\alpha : I \rightarrow M$  mit  $\alpha(0) = x$ . Dabei heißen  $\alpha : I \rightarrow M$  und  $\beta : J \rightarrow M$  äquivalent, falls eine Karte  $(U, \varphi)$  um  $x$  existiert mit

$$(\varphi \circ \alpha)'(0) = (\varphi \circ \beta)'(0)$$

### Notation

$T_x M$  = Raum der Tangentialvektoren

### 1.5.2 Bemerkung

- (i) Gilt die oben genannte Äquivalenzbedingung für eine Karte, dann gilt sie für alle.

### Beweis

Sei  $(V, \psi)$  eine andere Karte. Es gilt

$$\begin{aligned} (\psi \circ \alpha)'(0) &= (\psi \circ \varphi^{-1} \varphi \circ \alpha)'(0) \\ &= d_{\varphi(\alpha(0))} (\psi \circ \varphi^{-1}) ((\varphi \circ \alpha)'(0)) \\ &= d_{\varphi(\beta(0))} (\psi \circ \varphi^{-1}) ((\varphi \circ \beta)'(0)) = (\psi \circ \beta)'(0) \end{aligned}$$

- (ii)  $T_x M$  ist  $n$ -dimensionaler Vektorraum $_{\mathbb{R}}$ .

### Beweis

Sei  $(U, \varphi)$  eine Karte um  $x$ . Sei  $\Gamma_{(U, \varphi, x)} : T_x M \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $[\alpha]_{\in T_x M} \mapsto (\varphi \circ \alpha)'(0)$ . Aus der Äquivalenzrelation folgt, das  $\Gamma$  wohldefiniert und bijektiv. Also können wir die Vektorraumstruktur auf  $T_x M$

durch  $\Gamma_{(U,\varphi,x)}$  erklären. Dies ist wohldefiniert, da  $d_{\varphi(x)}(\psi \circ \varphi^{-1})$  für jede weitere Karte  $(V, \psi)$  um  $x$  ein linearer Isomorphismus ist. (Da  $\psi \circ \varphi^{-1}$  Diffeomorphismus.)

### 1.5.3 Definition

Sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit,  $x \in M$ ,  $(U, \varphi)$  und  $(V, \psi)$  zwei Karten um  $x$ . Seien  $u, v \in \mathbb{R}^n$ . Als Äquivalenzrelation ist definiert:

$$u \sim v \stackrel{\text{Def.}}{\iff} v = d_{\varphi(x)}(\psi \circ \varphi^{-1})(u)$$

Ein **Tangentenvektor** in  $x$  auf  $M$  ist eine solche Äquivalenzklasse  $[(U, \varphi, u)]$

### 1.5.4 Bemerkung

Sei  $x \in M$ ,  $(U, \varphi)$  Karte um  $x$ . So ist

$$\Theta_{(U,\varphi,x)} : \frac{u}{\in \varphi(x) + \mathbb{R}^n} \rightarrow [(U, \varphi, u)] \in T_x M$$

eine Bijektion, die wohldefiniert  $\text{VR}|_{\mathbb{R}^n}$  auf  $T_x M$  induziert.

### 1.5.5 Definition

$TM := \bigcup_{x \in M} T_x M$  ist das **Tangentenbündel** von  $M$ .

### 1.5.6 Theorem

$TM^n$  trägt eine natürliche Differentialstruktur und hat die Dimension  $2n$ . (Beweis benutzt 1.5.6)

#### Beweis

Definiere  $\pi : TM \rightarrow M$ ,  $\xi \in T_x M \mapsto \pi(\xi) = x \in M$  "Fußpunkt".  $\pi$  ist surjektiv. Wir wollen nun 1.5.7 anwenden. Für Karte  $(U, \varphi)$  um  $x \in M$  definiere  $(\pi^{-1}(U), \Phi_{(U,\varphi)})$  durch

$$\Phi_{(U,\varphi)}(\xi) = (\varphi \circ \pi(\xi), \Theta_{(U,\varphi,\pi(\xi))}^{-1}(\xi))$$

Es gilt  $\bigcup_{(U,\varphi)} \pi^{-1}(U) = TM$  und  $\Phi_{(U,\varphi)}(\pi^{-1}(U)) = \varphi(U) \times \mathbb{R}^n \stackrel{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  ist eine Bijektion, da  $\Theta$  bijektiv.

Verifiziere (i) und (ii):

(i)

$$\underbrace{\Phi_{(V,\psi)}^{-1}\left(\frac{a}{\in \varphi(v)}, v\right)}_{T_{\psi^{-1}(a)} M} = \Theta_{(V,\psi,\psi^{-1}(a))}(v) \xrightarrow{\Phi_{(V,\psi)}} \left(\psi(\psi^{-1}(a)), \Theta_{(V,\psi,\psi^{-1}(a))}^{-1}(\Theta_{(V,\psi,\psi^{-1}(a))}(v))\right)$$

Berechne Übergangsfunktion:

$$\Phi_{(U,\varphi)} \circ \Phi_{(V,\psi)}^{-1}(a, v) = \Phi_{(U,\varphi)}(\Theta_{(V,\psi,\psi^{-1}(a))}(v)) = (\varphi \circ \psi^{-1}(a), d_{\varphi(a)}(\varphi \circ \psi^{-1})(v))$$

(Beachte hierbei, das  $T_{\varphi^{-1}(a)} \ni [(V, \psi, v)] = [(U, \varphi, d_{\psi(a)}(\varphi \circ \psi^{-1})(v))]$ )

(ii) Seien  $\xi, \eta \in TM$ . Falls  $\pi(\xi) = \pi(\eta)$ , so sind  $\xi, \eta \in \pi^{-1}(U)$  für eine Karte um  $x$ . Falls  $\pi(\xi) = x$ ,  $\pi(\eta) = y$ ,  $x \neq y$ , so ist  $\xi \in \pi^{-1}(U)$ ,  $\eta \in \pi^{-1}(V)$  für Karten  $U, V$  von  $x, y$  mit  $U \cap V = \emptyset$ , (diese existieren, da  $M$  Hausdorff). Also  $\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V) = \emptyset$ .

$\Theta$  aus 1.5.4. Wieso genügt es nicht,  $\Phi$  als  $\Theta^{-1}$  zu erklären? Ich denke um zu gewährleisten, dass  $\Phi$  bijektiv ist.



### 1.5.7 Lemma

Sei  $M$  eine Menge mit Überdeckung  $\{U_i \subset M\}_{i \in I}$ , das heißt  $\bigcup_{i \in I} U_i = M$ . Seien für alle  $i \in I$   $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$  Bijektionen mit offenen Mengen  $\varphi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^n$ . Falls

(i)  $\forall i, j \in I$   $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$  ist glatt

(ii)  $\forall x, y \in M$  gilt  $\exists i \in I$   $x, y \in U_i$  oder  $\exists i, j$  und  $U_i \cap U_j = \emptyset$  mit  $x \in U_i$  und  $y \in U_j$

dann existiert eine eindeutig bestimmte Hausdorff-Topologie auf  $M$  und eine differenzierbare Struktur, für die  $\{U_i, \varphi_i\}$  ein Atlas ist.

#### Beweis

(i)  $\leadsto$  Übergangsfunktion sind Diffeomorphismen

(ii)  $\leadsto$  Hausdorff

Siehe auch O'Neill.

### 1.5.8 Bemerkung

Ist  $M$  eine sogenannte  $C^p$ -Mannigfaltigkeit, das heißt die Übergangsfunktionen sind  $C^p$ , so folgt mit dem Beweis von 1.5.6, dass  $TM$  eine  $C^{p-1}$ -Mannigfaltigkeit ist.

$TM$  ist ein spezielles Beispiel der folgenden Klasse an Mannigfaltigkeiten.

### 1.5.9 Definition

Seien  $E, B$  zwei Mannigfaltigkeiten und  $\pi : E \rightarrow B$  glatt.  $(E, B, \pi)$  heißt **Vektorbündel** vom Rang  $r$  über  $B$ , falls

(i)  $\pi$  surjektiv

(ii) Es existiert eine offene Überdeckung  $\{U_i\}_{i \in I}$  von  $B$  und Diffeomorphismen  $\Phi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{R}^r$ , sodass  $\forall x \in U_i : \Phi_i(\pi^{-1}(x)) = \{x\} \times \mathbb{R}^r$ .

(iii) Die "Übergangsfunktionen"

$$\Phi_{ji} = \Phi_j \circ \Phi_i^{-1} : U_{ji} \times \mathbb{R}^r \rightarrow U_{ji} \times \mathbb{R}^r$$

sind von der Form  $\Phi_{ji}(x, v) = (x, g_{ji}(x)v)$ , wobei  $g_{ji} : U_{ji} \rightarrow GL(r, \mathbb{R})$ , das heißt  $g_{ji} = \left( (u_{kl}(x))_{k,l=1}^r \right)$

$$\begin{array}{ccc}
 \pi^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\Phi_i} & U_i \times \mathbb{R}^n \\
 \searrow \pi & & \swarrow pr_1 \\
 & U_i &
 \end{array}$$

Insbesondere ist  $\Phi_{ji}(x, \cdot) : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^r$  ein linearer Isomorphismus gegeben durch  $g_{ji}(x) \in GL(r, \mathbb{R})$

#### Notation

- $E$  Totalraum
- $B$  Basis
- $\pi^{-1}(x)$  Faser über  $x$

(i) Sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit.  $E = M^n \times \mathbb{R}^r \xrightarrow{\pi=pr_1} M$  surjektiv und glatt, so ist dies ein "triviales Bündel",  $\Phi : \pi^{-1}(M) = M^n \times \mathbb{R}^r \xrightarrow{\text{id}} M^n \times \mathbb{R}^r$ ,  $\Phi(x, \cdot) = \text{id} \in GL(r, \mathbb{R})$ . Allgemein sagen wir, das  $(E, \pi, B)$  trivial ist, falls ein Diffeomorphismus  $\Phi : E^r \rightarrow B \times \mathbb{R}^r$  existiert mit

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\Phi_i} & B \times \mathbb{R}^n \\ \searrow \pi & & \swarrow pr_1 \\ & B & \end{array}$$

$$\xi + \eta = \Phi^{-1}(\overbrace{\Phi(\xi) + \Phi(\eta))}^{=(x,u+v)})$$

## 1.7 Vektorfelder

Sei  $E \xrightarrow{\pi} B$  ein Vektorbündel. Eine glatte Abbildung  $\sigma : M \rightarrow E$  heißt Schnitt von  $E$ , falls  $\pi \circ \sigma = \text{id}_M$ .

( $\sigma : U \xrightarrow{\text{offen}} M \rightarrow E$  glatt heißt lokaler Schnitt, falls  $\pi \circ \sigma = \text{id}_U$ .)

$\Gamma(U, E)$  = Raum der lokalen Schnitte,  $\Gamma(M, E) = \Gamma(E)$  = Raum der (globalen) Schnitte.

### 1.7.1 Definition

Ein **Vektorfeld**  $X$  ist ein Schnitt von  $TM$ , das heißt  $X \in \Gamma(TM)(=:\mathcal{X}(M))$

Das  $X$  muss anders aussehen..

### 1.7.2 Bemerkung

$\Gamma(TM)$  (allgemein  $\Gamma(E)$  für  $E$  Vektorbündel) ist ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Es gilt

$$(X + Y)(x) := X(x) + Y(x) \in T_x M \xrightarrow{\pi} \{x\}$$

### 1.7.3 Beispiel

Betrachte  $TS^n$ :  $X \in \Gamma(TS^n)$  ist  $X : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  glatt mit  $g_0(X(x), x) = 0$ , wobei  $g_0$  das Skalarprodukt.

### Übungsaufgabe

$E$  ist genau dann trivial, wenn  $r$  Schnitte  $\sigma_1(x), \dots, \sigma_r(x) \in \Gamma(E)$  existieren, die in jeden Punkt linear unabhängig sind, das heißt  $\forall x \in M : \sigma_1(x), \dots, \sigma_r(x)$  Basis von  $\pi^{-1} =: E_x$

### 1.7.4 Satz

$TM^n$  ist genau dann trivial, wenn  $n$  Vektorfelder  $X_1, \dots, X_n$  existieren, die in jeden Punkt linear unabhängig sind. Man nennt  $M^n$  dann auch **parallelisierbar**.

### 1.7.5 Bemerkung

Parallelisierbarkeit ist eine sehr starke Bedingung! So ist zum Beispiel der  $S^1$  parallelisierbar, der  $S^2$  jedoch nicht.

Wir beginnen nun den 3. Ansatz zur Definition des Tangentialraums vorzustellen, die Definition des Algebriakers.

### 1.7.6 Definition

Seien  $x \in M$ ,  $U$  und  $V$  offene Umgebungen um  $x$ . Sei ferner  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : V \rightarrow \mathbb{R}$  zwei glatte Funktionen. Wir sagen, dass  $f$  äquivalent zu  $g$  ist, falls offene Umgebung  $W \subset U \cap V$  existiert mit  $f|_W = g|_W$ . Die Äquivalenzklasse heißt **Keim** von  $f$  in  $x$  und wird  $[f, x]$  geschrieben (oder einfach nur  $[f]$  falls  $x$  klar, oder sogar nur  $f$ ). Die Menge der Keime in  $x$  wird mit  $C_x^\infty(M)$  oder kurz  $C_x^\infty$  bezeichnet.

### 1.7.7 Bemerkung

- (i)  $C_x^\infty$  ist  $(\infty)$ -dimensionaler reeller Vektorraum:  $[f] + [g] = [f + g]$ . Es ist sogar eine Algebra.
- (ii) Es gilt  $C_x^\infty(M) \simeq C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Sei  $(U, \varphi)$  Karte um  $x$  mit  $\varphi(x) = 0$ . So ist  $[f] \in C_x^\infty(M) \mapsto [f \circ \varphi^{-1}] \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  der gewünschte Isomorphismus. Aber: Dieser Isomorphismus ist nicht kanonisch, das heißt er hängt von  $\varphi$  ab!

In meiner Mitschrift steht  $[f \circ \varphi]$  und nicht  $[f \circ \varphi^{-1}]$ , das macht jedoch keinen Sinn. Meinungen sind erwünscht.

(iii)  $U \subset M$  offen und  $x \in U$ , dann ist  $C_x^\infty(U) = \{[f] \mid f : U \rightarrow \mathbb{R} \text{ glatt}\} \simeq C_x^\infty(M)$ .

Klar:  $[f] \in C_x^\infty(M) \leftrightarrow [f|_U] \in C_x^\infty(U)$ . Bleibt die Surjektivität zu zeigen: Sei  $[g] \in C_x^\infty(M)$ ,  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ . Sei  $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}$  eine Cut-Off Funktion, also mit  $\text{supp } \psi \subset U$  und  $\psi \equiv 1$  auf Umgebung  $W$  von  $x$ . So ist  $\psi|_U \cdot g : U \rightarrow \mathbb{R}$  glatt und  $(\psi|_U \cdot g)|_{U \cap (\text{supp } \psi)^c} \equiv 0$ . Setze  $\psi|_U \cdot g$  durch 0 auf  $U^c$  fort, es ergibt sich  $\tilde{g} : M \rightarrow \mathbb{R}$  glatt mit  $\tilde{g}|_W = \psi|_W \cdot g|_W = g|_W$ , also  $[\tilde{g}] \in C_x^\infty(M) \rightarrow [\tilde{g}|_U] = [g] \in C_x^\infty(U)$ .

### 1.7.8 Definition

Eine **Derivation** auf  $C_x^\infty(M)$  ist eine lineare Abbildung  $\delta : C_x^\infty \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\delta(fg) = f(x)\delta(g) + \delta(f)g(x)$$

### Notation

$D_x =$  Raum der Derivationen auf  $C_x^\infty$

### 1.7.9 Satz

Jede Derivation  $\delta \in D_0(\mathbb{R}^n)$  ist von der Form

$$\delta(f) = \sum_{j=1}^n v^j \frac{\partial f}{\partial x^j}(0) \quad \text{für } v^j \in \mathbb{R}$$

### Beweis

- Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$ .  $f \mapsto \frac{\partial}{\partial x^j} f(0)$  ist eine Derivation, da  $\frac{\partial}{\partial x^j} f(0)$  nur von  $[f]$  abhängt.
- $\delta(c) = c \cdot \delta(1) = 0$ , da  $\delta(1) = \delta(1 \cdot 1) = \delta(1) + \delta(1) = 2\delta(1)$ . Es folgt  $\delta(f - f(0)) = \delta(f)$ , wobei


$$f - f(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx) dt = \sum_{j=1}^n x^j \underbrace{\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x^j} f(tx) dt}_{h_j(x)}$$

Somit gilt

$$\delta(f) = \delta(f - f(0)) = \delta\left(\sum_{j=1}^n x^j h_j(x)\right) = \sum_{j=1}^n \delta(x^j) h_j(0) + \underbrace{x^j(0)}_{=0} \delta(h_j) = \sum_{j=1}^n \underbrace{\delta(x^j)}_{=: v^j = \frac{\partial}{\partial x^j}} h_j(0)$$

Nochmal zur Erinnerung:  $v^j$  ist keine Potenz sondern ein Indize.

## Index

Die **Seitenzahlen** sind mit [Hyperlinks](#) zu den entsprechenden Seiten versehen, also anklickbar 

(abstrakte) differenzierbare Mannigfaltigkeit, 6

Atlas, 5

Differenzierbare Struktur, 6

Immersion, 1

Karte, 6

Kartenwechsel, 6

lokale Parametrisierung, 3

projektive Raum, 8

Sphäre, 2

Submersion, 1

Tangentialbündel, 14

Tangentialvektor, 13, 14

Untermannigfaltigkeit, 2

Zerlegung der Eins, 11

Étale, 1

## Abbildungsverzeichnis

1	hyperbolischer Raum für $c > 0$ , $c < 0$ , $c = 0$	2
2	Stereografische Projektion	5
3	Der Würfel $Q$ ist keine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ !	6
4	Der 2-dimensionale projektive Raum $\mathbb{R}P^2$ (projektive Ebene)	7
5	Der eindimensionale projektive Raum $\mathbb{R}P^1$	7
6	Beispiel einer Nichthäufungsmenge	8