



WESTFÄLISCHE
WILHELMS-UNIVERSITÄT
MÜNSTER



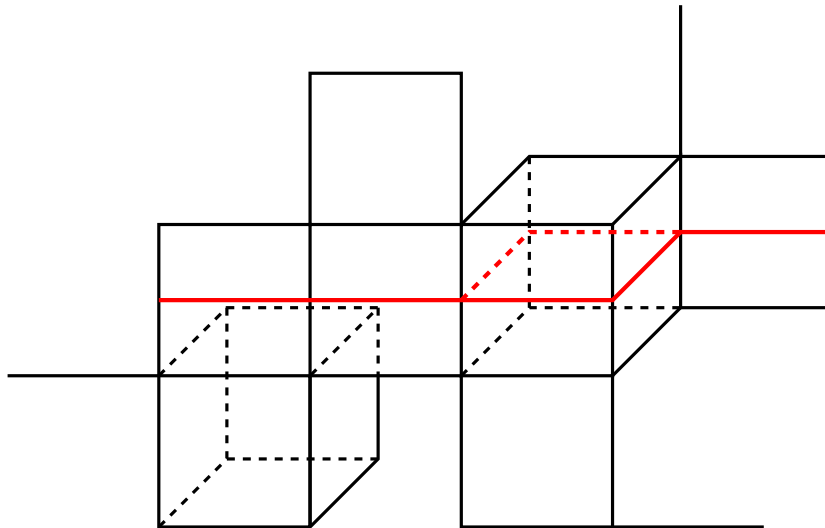
FACHBEREICH 10
MATHEMATIK UND
INFORMATIK

CAT(0) kubische Komplexe

gelesen von

DR. OLGA VARGHESE

im Wintersemester 2015/2016



Vorlesungsmitschrift von Phil Steinhorst

Stand: 23. Dezember 2015

Vorwort

Der vorliegende Text ist eine Mitschrift zur Vorlesung $CAT(0)$ kubische Komplexe, gelesen von Dr. Olga Varghese an der WWU Münster im Wintersemester 2015/2016. Der Inhalt entspricht weitestgehend dem Tafelanschrieb und den Vorlesungsnotizen, welche auf der Vorlesungswebsite bereitgestellt werden. Dieses Werk ist daher keine Eigenleistung des Autors und wird nicht von der Dozentin der Veranstaltung korrektur gelesen. Für die Korrektheit des Inhalts wird keinerlei Garantie übernommen. Bemerkungen, Korrekturen und Ergänzungen kann man folgenderweise loswerden:

- persönlich durch Überreichen von Notizen oder per E-Mail
- durch Abändern der entsprechenden TeX-Dateien und Versand per E-Mail an mich
- direktes Mitarbeiten via GitHub. Dieses Skript befindet sich im `latex-wwu`-Repository von Jannes Bantje:

<https://github.com/JaMeZ-B/latex-wwu>

Literatur

- BRIDSON, HAEFLIGER: Metric Spaces of Non-Positive Curvature [BH99]
- SERRE: Trees [Ser80]
- BEKKA, DE LA HARPE, VALETTE: Kazhdan's Property (T) [BHV08]

Kommentar der Dozentin

In der geometrischen Gruppentheorie werden Gruppen als Symmetrien von Räumen betrachtet. Ihre algebraische Eigenschaften werden mittels geometrischer Eigenschaften der Räume, auf denen sie wirken, untersucht. Gruppen, die auf kubischen Komplexen wirken – das sind polyedrische Komplexe, die aus Würfeln gebaut sind – sind dabei besonders gut verstanden.

Die Vorlesung wird eine Einführung in die Strukturtheorie $CAT(0)$ kubischer Komplexe liefern, sowie Anwendungen in der Gruppentheorie diskutieren.

abstrakte Gruppen

- endliche Gruppen
- $GL_n(\mathbb{Z})$, $SL_n(\mathbb{Z})$
- $Aut(F_n)$, $SAut(F_n)$
- Coxetergruppen

$$\begin{array}{c} \Psi: G \rightarrow \text{Isom}(X) \\ \curvearrowright \\ \text{Fixpunkt?} \end{array}$$

metrische Räume mit "viel Geometrie"

- (\mathbb{R}^n, d_2)
- Hilberträume
- simpliziale Bäume
- $CAT(0)$ kubische Komplexe

Geplante Themen

- $CAT(0)$ -Räume (simpliziale Bäume, kubische Komplexe)
- Gruppenwirkungen auf $CAT(0)$ kubische Komplexe
- BRUHAT-TITS-Fixpunktsatz für $CAT(0)$ kubische Komplexe
- HELLY's Theorem
- Kazhdan-Eigenschaft (T)

Vorlesungswebsite

Das handgeschriebene Skript sowie weiteres Material findet man unter folgendem Link:

http://wwwmath.uni-muenster.de/u/ag_kramer/index.php?name=KubischeKomplexe_15&menu=teach&lang=de

Phil Steinhorst
p.st@wwu.de

Inhaltsverzeichnis

1	CAT(0)-Räume	1
2	Der Satz von CARTAN-HADAMARD	23
2.1	Längenräume	25
2.2	Längenmetrik auf Überlagerungsräumen	37
2.3	Die Exponentialabbildung	42
	Literatur	47
	Index	48

1 CAT(0)-Räume

1.1 Definition (Metrischer Raum)

Sei X eine Menge. Eine Abbildung $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt **Metrik**, wenn für alle $x, y, z \in X$ gilt:

21.10.15
[1]

- (i) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- (ii) $d(x, y) = d(y, x)$
- (iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Das Paar (X, d) heißt dann **metrischer Raum**.

1.2 Beispiel

- (i) Für $n \in \mathbb{N}$ ist $\mathbb{E}^n := (\mathbb{R}^n, d_2)$ mit

$$d_2: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$
$$(x, y) \longmapsto \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

- (ii) Sei X eine Menge. Wir definieren:

$$d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$
$$(x, y) \longmapsto \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

Dann ist d eine Metrik und (X, d) heißt ein **diskreter metrischer Raum**.

1.3 Definition (Geodätischer Raum)

- (i) Sei (X, d) ein metrischer Raum und $x, y \in X$. Eine **Geodäte** von x nach y ist eine Abbildung $\gamma: [a, b] \rightarrow X$ mit $\gamma(a) = x, \gamma(b) = y$ und $d(\gamma(t), \gamma(t')) = |t - t'|$ für alle $t, t' \in [a, b]$. Wir schreiben $\gamma: x \rightsquigarrow y$.

- (ii) Der Raum (X, d) ist ein **geodätischer Raum**, wenn für alle $x, y \in X$ eine Geodäte $x \rightsquigarrow y$ existiert.

- (iii) Ein geodätischer Raum heißt **eindeutig geodätisch**, wenn genau eine solche Geodäte existiert.

Sofern nichts anderes gesagt wird, ist $[0, d(x, y)]$ der Definitionsbereich einer Geodäte $\alpha: x \rightsquigarrow y$.

1.4 Beispiel

- (i) Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter reeller Vektorraum. Dann ist $(V, d_{\|\cdot\|})$ ein geodätischer Raum. Im Detail: Seien $u, v \in V$ paarweise verschieden und $L := \|u - v\| \neq 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} \gamma: [0, L] &\longrightarrow V \\ t &\longmapsto \left(1 - \frac{t}{L}\right) \cdot u + \frac{t}{L} \cdot v \end{aligned}$$

eine Geodäte von u nach v .

- (ii) $(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, d_2)$ ist nicht geodätisch: Es existiert keine Geodäte $(-1, 0) \rightsquigarrow (1, 0)$.
- (iii) (\mathbb{R}^2, d_1) ist geodätisch, aber nicht eindeutig geodätisch: In der folgenden Abbildung sind zwei Geodäten von $(1, 0) \rightsquigarrow (0, 1)$ dargestellt.



Abbildung 1.1: Der metrische Raum (\mathbb{R}^2, d_1) ist nicht eindeutig geodätisch.

1.5 Definition (Geodätisches Dreieck)

Ein **geodätisches Dreieck** $\Delta = \Delta(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$ in einem geodätischen Raum (X, d) ist gegeben durch ein Tripel $(x, y, z) \in X^3$ und Geodäten $\alpha: x \rightsquigarrow y$, $\beta: y \rightsquigarrow z$, $\gamma: z \rightsquigarrow x$ – den Seiten von Δ .

1.6 Beispiel

Abbildung 1.2: Geodätische Dreiecke sind im Allgemeinen durch ihre Ecken nicht eindeutig bestimmt.

Die Dreiecksungleichung garantiert, dass es Punkte $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathbb{E}^2$ gibt mit $d(x, y) = d_2(\bar{x}, \bar{y})$, $d(y, z) = d_2(\bar{y}, \bar{z})$, $d(z, x) = d_2(\bar{z}, \bar{x})$ und Geodäten

$$\bar{\alpha}(t) = \bar{x} + t \cdot \frac{\bar{y} - \bar{x}}{d_2(\bar{y}, \bar{x})}, \quad \bar{\beta}(t) = \bar{y} + t \cdot \frac{\bar{z} - \bar{y}}{d_2(\bar{z}, \bar{y})}, \quad \bar{\gamma}(t) = \bar{z} + t \cdot \frac{\bar{x} - \bar{z}}{d_2(\bar{x}, \bar{z})}.$$

$\bar{\Delta} = \bar{\Delta}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma})$ heißt **Vergleichsdreieck** zu $\Delta(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$. Ist $v = \gamma(s)$ für ein s , so heißt $\bar{v} = \bar{\gamma}(s)$ **Vergleichspunkt** von v .

1.7 Definition (CAT(0)-Raum)

- (i) Ein Dreieck Δ in (X, d) hat die **CAT(0)-Eigenschaft**, wenn für alle n, m auf den Seiten von Δ und ihre Vergleichspunkte \bar{n}, \bar{m} auf den Seiten von $\bar{\Delta}$ gilt:

$$d(n, m) \leq d_2(\bar{n}, \bar{m})$$

- (ii) Ein metrischer Raum (X, d) ist ein **CAT(0)-Raum**, wenn (X, d) geodätisch ist und alle seine Dreiecke die CAT(0)-Eigenschaft erfüllen.
- (iii) Ein metrischer Raum (X, d) heißt **lokal CAT(0)**, wenn für alle $x \in X$ ein $r_x > 0$ existiert, sodass

$$B_{r_x}(x) = \{y \in X : d(y, x) < r_x\}$$

mit der induzierten Metrik ein CAT(0)-Raum ist.

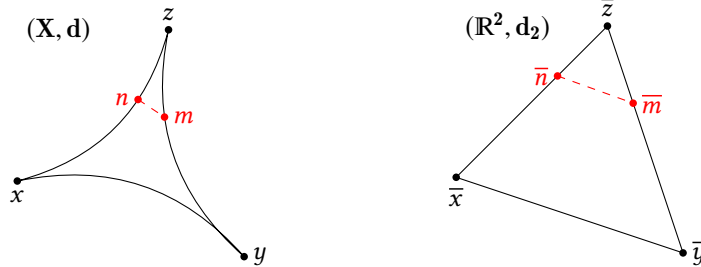


Abbildung 1.3: Anschaulich gesprochen sind Dreiecke in CAT(0)-Räumen „mindestens so dünn“ wie ihre Vergleichsdreiecke im euklidischen Raum.

1.8 Bemerkung

- (i) Lokal CAT(0)-Räume heißen auch nichtpositiv gekrümmte oder Alexandrov-Räume.
- (ii) CAT(0) steht für CARTAN-ALEXANDROV-TOPOGONOV und Krümmung ≤ 0 .

1.9 Beispiel

- (i) Der euklidische Raum \mathbb{E}^n ist CAT(0).

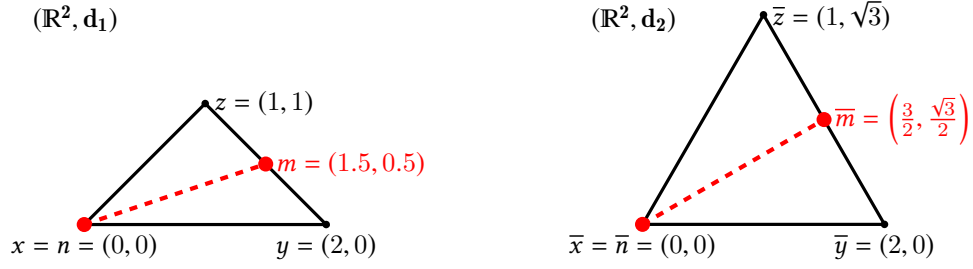


Abbildung 1.4: Der Raum (\mathbb{R}^2, d_1) ist nicht CAT(0).

(ii) (\mathbb{R}^2, d_1) ist nicht CAT(0): In der folgenden Abbildung 1.4 ist $d_1(n, m) = 2$, aber $d_2(\bar{n}, \bar{m}) = \sqrt{3}$.

(iii) Hilberträume sind CAT(0).

(iv) Komplemente von Polygonen im \mathbb{R}^2 sind lokal CAT(0), aber nicht CAT(0).

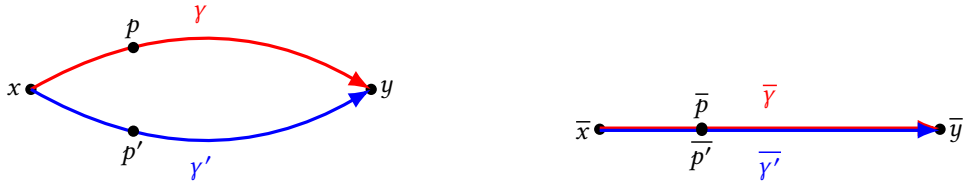
1.10 Beobachtung

Sei (X, d) ein CAT(0)-Raum. Dann ist X eindeutig geodätisch.

BEWEIS: Seien $\gamma: x \rightsquigarrow y$ und $\gamma': x \rightsquigarrow y$ zwei Geodäten von x nach y . Seien p und p' zwei Punkte auf γ und γ' mit $d(x, p) = d(x, p')$. Das Vergleichsdreieck $\bar{\Delta}$ zum Dreieck

$$\Delta = \Delta(x, p, y, \gamma|_{[0, d(x, p)]}, \gamma'|_{[d(x, p), d(x, y)]}, \gamma')$$

ist degeneriert:



Wegen der CAT(0)-Eigenschaft gilt $d(p, p') \leq d(\bar{p}, \bar{p}') = 0$, also folgt $d(p, p') = 0$ und $p = p'$. \square

1.11 Definition (Konvexe Menge)

Sei X ein CAT(0)-Raum. Eine nichtleere Teilmenge $C \subseteq X$ heißt **konvex**, wenn zu allen $p, q \in C$ die Geodäte $\gamma: p \rightsquigarrow q$ in C liegt.

Offensichtlich ist C wieder ein CAT(0)-Raum und Durchschnitte konvexer Mengen sind wieder konvex.

1.12 Theorem ([BH99, 1A.6])

Sei \mathcal{M} eine einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit nichtpositiver Krümmung. Dann ist \mathcal{M} CAT(0).

23.10.15
[2]

1.13 Satz

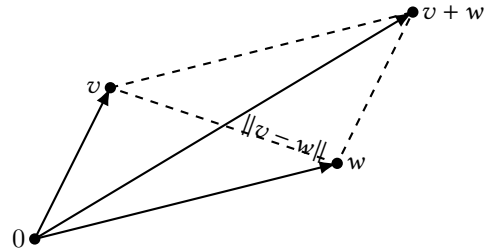
Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein reeller normierter Vektorraum. Dann ist $(V, \|\cdot\|)$ genau dann ein CAT(0)-Raum, wenn $(V, \|\cdot\|)$ ein Prähilbertraum ist, das heißt es existiert eine symmetrische positiv definite Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ für $v \in V$.

Für den Beweis brauchen wir eine metrische Charakterisierung von Prähilberträumen:

1.14 Proposition (VON NEUMANN, 1935)

Ein reeller normierter Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$ ist ein Prähilbertraum genau dann, wenn für alle $v, w \in V$ die **Parallelogrammgleichung** gilt:

$$\|v - w\|^2 + \|v + w\|^2 = 2 \cdot (\|v\|^2 + \|w\|^2) \quad (\text{PG})$$

**BEWEIS:**

" \Rightarrow ": Seien $u, v \in V$.

$$\begin{aligned} & \|u - v\|^2 + \|u + v\|^2 \\ &= \langle u - v, u - v \rangle + \langle u + v, u + v \rangle \\ &= \langle u, u \rangle - \langle u, v \rangle - \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle + \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle \\ &= 2 \cdot (\langle v, v \rangle + \langle u, u \rangle) \end{aligned}$$

" \Leftarrow ": Definiere:

$$\begin{aligned} b: V \times V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto \frac{1}{4}(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2). \end{aligned}$$

Wir zeigen, dass b ein Skalarprodukt ist:

- Offensichtlich ist b symmetrisch.
- b ist positiv definit, denn für $v \in V$ gilt:

$$\begin{aligned} b(v, v) &= \frac{1}{4}(2 \cdot \|v\|^2) = \|v\|^2 \geq 0 \\ b(v, v) &= 0 \Leftrightarrow v = 0 \end{aligned}$$

- Sei nun $w \in V$ beliebig. Zu zeigen ist, dass $b(\cdot, w): V \rightarrow \mathbb{R}$ linear ist. Seien also $u, v \in V$ beliebig, dann gilt:

$$\begin{aligned} & b(u + v, w) + b(u - v, w) \\ &\stackrel{\text{Def}}{=} \frac{1}{4}(\|u + v + w\|^2 - \|u + v - w\|^2 + \|u - v + w\|^2 - \|u - v - w\|^2) \\ &\stackrel{(\text{PG})}{=} \frac{1}{4}(2 \cdot \|u + w\|^2 + 2 \cdot \|v\|^2 - 2 \cdot \|u - w\|^2 - 2 \cdot \|v\|^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}(\|u + w\|^2 - \|u - w\|^2) \\
&\stackrel{\text{Def}}{=} 2 \cdot b(u, w)
\end{aligned} \tag{1}$$

Analog erhalten wir

$$b(u + v, w) - b(u - v, w) = 2 \cdot b(v, w). \tag{2}$$

Addition von (1) und (2) liefert:

$$b(u + v, w) = b(u, w) + b(v, w)$$

Bleibt zu zeigen: Für alle $r \in \mathbb{R}$ gilt $b(rv, w) = r \cdot b(v, w)$.

1. Fall: $r = -1$. Mit $u = 0$ folgt aus (1):

$$b(v, w) + b(-v, w) = 2 \cdot b(0, w) = 2 \cdot \frac{1}{4}(\|w\|^2 - \|-w\|^2) = 0$$

und somit $b(-v, w) = -b(v, w)$.

2. Fall: $r = n \in \mathbb{N}$. Für $n = 2$ folgt mit $u = v$ aus (1)

$$b(2v, w) + \underbrace{b(0, w)}_{=0} = 2 \cdot b(v, w)$$

und weiter induktiv

$$\begin{aligned}
b(nv, w) &= b((n-1)v + v, w) = b((n-1)v, w) + b(v, w) \\
&= (n-1)b(v, w) + b(v, w) = n \cdot b(v, w).
\end{aligned}$$

3. Fall: $r = \frac{1}{n}$ mit $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Es gilt $\frac{1}{n} \cdot b(nv, w) = b(v, w)$ und damit

$$b\left(\frac{1}{n}v, w\right) = \frac{1}{n} \cdot b\left(n \cdot \frac{1}{n}v, w\right) = \frac{1}{n}b(v, w)$$

Aus allen drei Fällen folgt nun $b(qv, w) = q \cdot b(v, w)$ für alle $q \in \mathbb{Q}$. Da $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ eine dichte Teilmenge und $b(\cdot, w)$ stetig ist, folgt $b(rv, w) = r \cdot b(v, w)$ für alle $r \in \mathbb{R}$. \square

BEWEIS (Satz 1.13):

” \Leftarrow ”: Sei $\Delta \subseteq (V, \|\cdot\|) = \mathcal{H}$ ein geodätisches Dreieck. Dann ist die lineare Hülle $\langle \Delta \rangle$ isometrisch isomorph zum \mathbb{E}^2 , bzw. zum \mathbb{E}^1 oder zu $\{0\}$, falls Δ degeneriert ist.

” \Rightarrow ”: Sei $u, v \in V$ beliebig. Zeige, dass für v, w das Parallelogrammgesetz gilt: Wir betrachten das Dreieck $\Delta(0, u, v)$ und das Vergleichsdreieck $\bar{\Delta}(0, \bar{u}, \bar{v})$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
d\left(\frac{u+v}{2}, 0\right) &\stackrel{\text{CAT}(0)}{\leq} d_2\left(\frac{\bar{u}+\bar{v}}{2}, 0\right) \\
\Rightarrow d(u+v, 0) &\leq d_2(\bar{u}+\bar{v}, 0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|u + v\|^2 &\leq \|\bar{u} + \bar{v}\|_2^2 \stackrel{\text{(PG)}}{=} 2 \cdot \|\bar{u}\|_2^2 + 2 \cdot \|\bar{v}\|_2^2 - \|\bar{u} - \bar{v}\|_2^2 \\ &\stackrel{\text{CAT}(0)}{=} 2 \cdot \|u\|^2 + 2 \cdot \|v\|^2 - \|u - v\|^2 \end{aligned} \quad (3)$$

Betrachte das Dreieck $\Delta(0 - v, u)$ und das Vergleichsdreieck $\bar{\Delta}(0 - \bar{v}, \bar{u})$. Wir erhalten genauso wie oben die Ungleichung

$$\|u - v\|^2 \leq 2 \cdot \|u\|^2 + 2 \cdot \|v\|^2 - \|u + v\|^2. \quad (4)$$

Insgesamt haben wir also:

$$\|u + v\|^2 \stackrel{(3)}{\leq} 2 \cdot \|u\|^2 + 2 \cdot \|v\|^2 - \|u - v\|^2 \stackrel{(4)}{\leq} \|u + v\|^2 \quad \square$$

1.15 Erinnerung (Orthogonale Projektion)

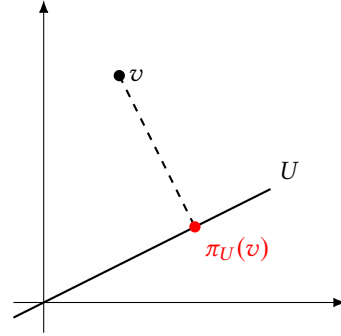
Gegeben sei ein reeller Hilbertraum \mathbb{E}^d und $U \subseteq \mathbb{E}^d$ ein Unterraum. Sei weiter $v_1, \dots, v_n \in U$ eine Orthonormalbasis von U . Dann ist

$$\begin{aligned} \pi_U : V &\longrightarrow U \\ v &\longmapsto \sum_{i=1}^n \langle v, v_i \rangle \cdot v_i \end{aligned}$$

eine lineare Abbildung und es gilt

$$d(v, \pi_U(v)) = \inf_{u \in U} d(v, u) =: d(v, U)$$

und $v - \pi_U(v) \perp U$.



1.16 Satz (Projektion auf konvexe Teilmengen)

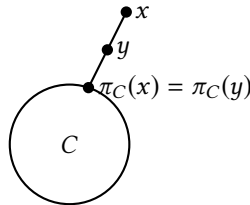
Sei X ein CAT(0)-Raum und $C \subseteq X$ konvex und vollständig mit der induzierten Metrik. Dann gilt:

- (i) Für alle $x \in X$ existiert genau ein $\pi_C(x) \in C$ mit

$$d(x, \pi_C(x)) = \inf_{p \in C} d(x, p) =: d(x, C).$$

Die Abbildung $\pi_C : X \rightarrow C$ heißt die **(orthogonale) Projektion** auf C .

- (ii) Ist $y \in [x, \pi_C(x)] = \text{im}(\gamma : x \rightsquigarrow \pi_C(x))$, so ist $\pi_C(y) = \pi_C(x)$.



(iii) Für alle $x, y \in X$ gilt

$$d(\pi_C(x), \pi_C(y)) \leq d(x, y),$$

das heißt π_C ist 1-Lipschitz.

BEWEIS:

(i) Sei $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq C$ eine Folge mit $d(x, y_n) \rightarrow d(x, C) =: D$. Ziel ist es zu zeigen, dass $(y_n)_n$ eine Cauchy-Folge ist. Da C vollständig ist, ist die Folge $(y_n)_n$ konvergent in C und wir können $\pi_C(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ definieren.

Zur Eindeutigkeit von $\pi_C(x)$: Angenommen, es existiert ein $\pi_C(x') \in C$ mit $\pi_C(x') \neq \pi_C(x)$ und $d(x, \pi_C(x')) = d(x, C)$. Betrachte die Folge

$$q_n := \begin{cases} \pi_C(x), & n \text{ gerade} \\ \pi_C(x)', & n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Dann ist $d(x, q_n) \rightarrow d(x, C)$, aber $(q_n)_n$ ist keine Cauchy-Folge. Widerspruch.

Zur Existenz: Betrachte folgendes Dreieck und Vergleichsdreieck ergänzt zu einem Parallelogramm:

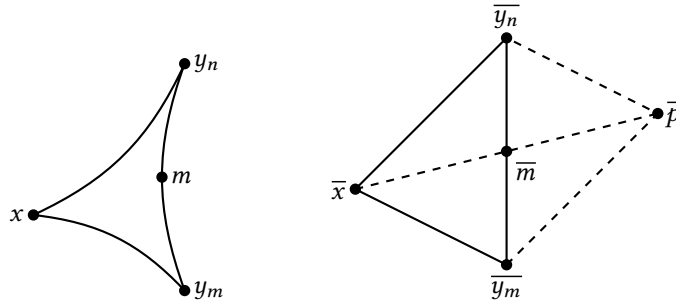


Abbildung 1.5: Zu einem Parallelogramm ergänztes Vergleichsdreieck.

Es ist $d(y_n, m) = d(y_m, m) = \frac{1}{2}d(y_n, y_m)$. Die Parallelogrammgleichung in \mathbb{E}^2 besagt:

$$d_2(\bar{x}, \bar{p})^2 + d_2(\bar{y}_n, \bar{y}_m)^2 = 2(d_2(\bar{x}, \bar{y}_n)^2 + d_2(\bar{x}, \bar{y}_m)^2)$$

Sei $\varepsilon > 0$. Sei $\delta > 0$ die positive Lösung von $\delta^2 + 2D\delta - \frac{\varepsilon^2}{4} = 0$, das heißt $\varepsilon = 2 \cdot \sqrt{\delta^2 + 2D\delta}$.

Wähle n, m groß genug, sodass gilt

$$\left. \begin{aligned} d(x, y_n) &< D + \delta \\ d(x, y_m) &< D + \delta \end{aligned} \right\} \forall n, m \geq N. \quad (5)$$

Aus der CAT(0)-Eigenschaft folgt

$$D \leq d(x, m)^2 \leq d_2(\bar{x}, \bar{m}). \quad (6)$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
 d(y_n, y_m)^2 &\stackrel{\text{CAT}(0)}{=} d_2(\overline{y_n}, \overline{y_m}) \\
 &\stackrel{\text{(PG)}}{=} 2 \cdot (d_2(\overline{x}, \overline{y_n}) + d_2(\overline{x}, \overline{y_m})^2) - d_2(\overline{x}, \overline{p})^2 \\
 &= 2 \cdot (d_2(\overline{x}, \overline{y_n}) + d_2(\overline{x}, \overline{y_m})^2) - 4 \cdot d_2(\overline{x}, \overline{m})^2 \\
 &\stackrel{(6)}{\leq} 2 \cdot (d_2(\overline{x}, \overline{y_n}) + d_2(\overline{x}, \overline{y_m})^2) - 4D^2 \\
 &\stackrel{(5)}{\leq} 2 \cdot (2 \cdot (D + \delta)^2) - 4D^2 \\
 &= 4 \cdot (2D\delta + \delta^2)
 \end{aligned}$$

Somit folgt $d(y_n, y_m) \leq 2 \cdot \sqrt{2D\delta + \delta^2} = \varepsilon$ für $n, m \geq N$. Also ist $(y_n)_n$ eine Cauchy-Folge und wir setzen $\pi_C(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

- (ii) Es ist $\text{im}(\gamma: x \rightsquigarrow \pi_C(x)) = \{y \in X : d(x, y) + d(y, \pi_C(x)) = d(x, \pi_C(x))\}$. Angenommen, $\pi_C(y) \neq \pi_C(x)$. Dann ist insbesondere

28.10.15
[3]

$$d(y, \pi_C(y)) < d(y, \pi_C(x)) \quad (7)$$

und mit der Dreiecksungleichung folgt

$$\begin{aligned}
 d(x, \pi_C(y)) &\leq d(x, y) + d(y, \pi_C(y)) \\
 &\stackrel{(7)}{<} d(x, y) + d(y, \pi_C(x)) \\
 &= d(x, \pi_C(x)),
 \end{aligned}$$

was ein Widerspruch zur Minimalität von $\pi_C(x)$ ist.

- (iii) Übungsaufgabe. □

Unser nächstes Ziel ist es zu zeigen, dass CAT(0)-Räume kontrahierbar sind.

1.17 Definition (Homotopie)

Seien $\varphi_0, \varphi_1: X \rightarrow Y$ stetige Abbildungen zwischen topologischen Räumen X und Y .

- (i) Die Abbildungen φ_0, φ_1 heißen **homotop**, wenn es eine stetige Abbildung $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ gibt mit $H(x, 0) = \varphi_0(x)$ und $H(x, 1) = \varphi_1(x)$ für alle $x \in X$. H heißt **Homotopie** zwischen φ_0 und φ_1 . Wir schreiben $\varphi_0 \simeq \varphi_1$.
- (ii) Ist $A \subseteq X$ eine Teilmenge mit $\varphi_0(a) = \varphi_1(a)$ für alle $a \in A$, so heißen φ_0 und φ_1 **homotop relativ zu A** , wenn es eine Homotopie H zwischen φ_0 und φ_1 gibt mit $H(a, t) = \varphi_0(a)$ für alle $t \in [0, 1]$ und $a \in A$. Wir schreiben $\varphi_0 \simeq \varphi_1 \text{ rel } A$.
- (iii) Ein topologischer Raum $X \neq \emptyset$ heißt **kontrahierbar**, wenn die Identität id_X und die konstante Abbildung $\varphi_p: x \mapsto p, p \in X$, homotop sind.

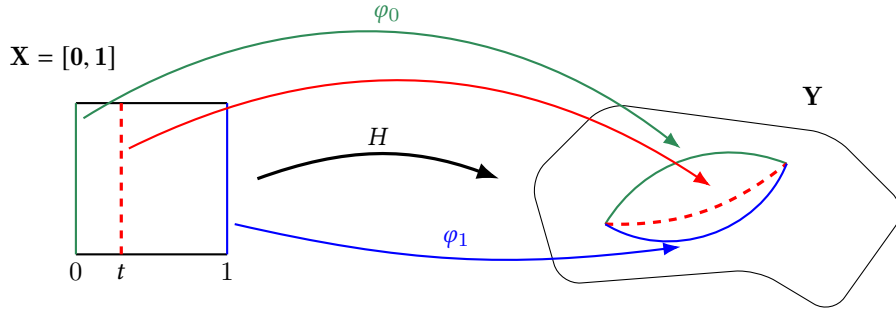


Abbildung 1.6: Veranschaulichung des Homotopiebegriffs am Beispiel $X = [0, 1]$.

1.18 Bemerkung

Ist X ein kontrahierbarer Raum, so ist die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, \{x_0\})$, $x_0 \in X$ trivial.

1.19 Satz

Sei X ein CAT(0)-Raum und $\emptyset \neq C \subseteq X$ konvex und vollständig. Dann gilt $\text{id}_X \simeq \pi_C \text{ rel } C$. Insbesondere erhalten wir für $C = \{p\}$, $p \in X$, dass $\text{id}_X \simeq \varphi_p \text{ rel } \{p\}$, und folglich ist der Raum X kontrahierbar.

BEWEIS: Wir brauchen folgendes Resultat (Übungsaufgabe):

Seien $\alpha: x \rightsquigarrow y, \beta: x' \rightsquigarrow y'$ zwei Geodäten. Dann gilt für alle $t \in [0, 1]$:

$$d(\alpha(t \cdot d(x, y)), \beta(t \cdot d(x', y'))) \leq (1 - t) \cdot d(x, x') + t \cdot d(y, y'). \quad (8)$$

Wir definieren

$$\begin{aligned} H: X \times [0, 1] &\longrightarrow X \\ (x, t) &\longmapsto \gamma_x(t \cdot d(x, \pi_C(x))), \end{aligned}$$

wobei $\gamma_x: x \rightsquigarrow \pi_C(x)$. Es gilt $H(x, 0) = \gamma_x(0) = x$ und $H(x, 1) = \gamma_x(d(x, \pi_C(x))) = \pi_C(x)$, somit ist $H(\cdot, 0) = \text{id}_X$ und $H(\cdot, 1) = \pi_C$.

Sei weiter $c \in C$. Dann gilt $H(c, t) = c$, da $\gamma_c: c \rightsquigarrow \pi_C(c)$ und $c = \pi_C(c)$.

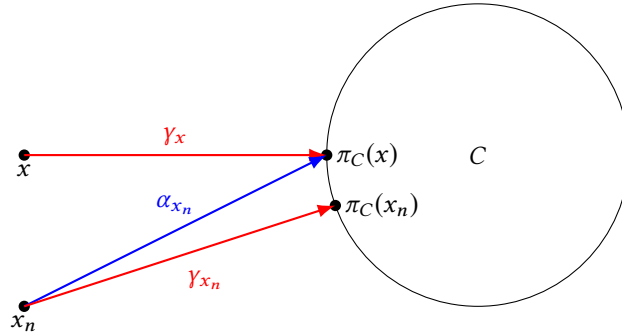
Es bleibt zu zeigen, dass H stetig ist. Wir wissen, dass Abbildungen zwischen metrischen Räumen genau dann stetig sind, wenn sie folgenstetig sind. Sei $(x, t) \in X \times [0, 1]$ beliebig und weiter $(x_n, t_m) \in X \times [0, 1]$ eine Folge mit $\lim_{n,m} (x_n, t_m) = (x, t)$. Zu zeigen ist:

$$\begin{aligned} \lim_{n,m} H(x_n, t_m) &= H(x, t) \\ \stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \lim_{n,m} \gamma_{x_n}(t_m \cdot d(x_n, \pi_C(x_n))) &= \gamma_x(t \cdot d(x, \pi_C(x))), \end{aligned}$$

wobei $\gamma_{x_n}: x_n \rightsquigarrow \pi_C(x_n)$.

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle $N_1 \in \mathbb{N}$ so groß, dass mit Satz 1.16(iii) gilt:

$$\left. \begin{aligned} d(x_n, x) &< \frac{\varepsilon}{2} \\ d(\pi_C(x_n), \pi_C(x)) &< \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned} \right\} \forall n \geq N_1 \quad (9)$$



Wir haben:

$$\begin{aligned} & d(H(x, t), H(x_n, t)) \\ &= d(\gamma_x(t \cdot d(x, \pi_C(x))), \gamma_{x_n}(t \cdot d(x_n, \pi_C(x_n)))) \\ &\stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} d(\gamma_x(t \cdot d(x, \pi_C(x))), \alpha_{x_n}(t \cdot d(x_n, \pi_C(x)))) + d(\alpha_{x_n}(t \cdot d(x_n, \pi_C(x))), \gamma_{x_n}(t \cdot d(x_n, \pi_C(x_n)))) \\ &\stackrel{(8)}{\leq} (1-t) \cdot d(x, x_n) + t \cdot \underbrace{d(\pi_C(x), \pi_C(x))}_{=0} + (1-t) \cdot \underbrace{d(x_n, x_n)}_{=0} + t \cdot d(\pi_C(x), \pi_C(x_n)) \\ &\stackrel{(9)}{\leq} (1-t) \cdot \frac{\varepsilon}{2} + t \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall t \in [0, 1], n \geq N_1 \end{aligned} \quad (10)$$

Wähle $N_2 \in \mathbb{N}$ groß genug mit

$$d(H(x_n, t_m), H(x_n, t)) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall m \geq N_2. \quad (11)$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} & d(H(x_n, t_m), H(x, t)) \\ &\stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} d(H(x_n, t_m), H(x_n, t)) + d(H(x_n, t), H(x, t)) \\ &\stackrel{(10), (11)}{\leq} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall n, m \geq \max(N_1, N_2). \end{aligned} \quad \square$$

1.20 Definition (Durchmesser, Radius)04.11.15
[4]

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$ beschränkt. Der **Durchmesser** von A ist gegeben durch

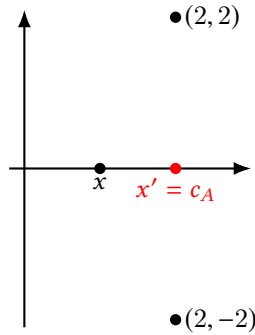
$$\text{diam}(A) := \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}.$$

Für $x \in X$ definiere nun $\text{rad}(x, A) := \sup\{d(x, a) : a \in A\}$. Dann ist der **Radius** von A definiert durch

$$\text{rad}(A) := \inf\{\text{rad}(x, A) : x \in X\}.$$

1.21 Beispiel

Sei $X := \mathbb{R}^2$ und $A := \{(2, 2), (2, -2)\}$. Für $x := (1, 0)$ und $x' := (2, 0) = c_A$ ist $\text{rad}(x, A) = \sqrt{5}$ und $\text{rad}(x', A) = 2 = \text{rad}(A)$.



Der Begriff des Radius ist also mit der Idee eines „Zentrums“ ($c_A \in A$) von A verbunden, welches zwar nicht in A liegen muss, aber die Mitte von A gut beschreibt. Im Allgemeinen muss ein Zentrum nicht existieren, aber bei CAT(0)-Räumen kann man es konstruieren.

1.22 Theorem

Sei X ein vollständiger CAT(0)-Raum und $\emptyset \neq A \subseteq X$ beschränkt. Dann gibt es einen eindeutigen Punkt $c_A \in X$, das **Zentrum** von A , sodass $A \subseteq \overline{B_{\text{rad}(A)}(c_A)}$ gilt.

BEWEIS: Seien $q, r \in X$ beliebig und $m \in X$ mit $d(q, m) = d(m, r) = \frac{d(q, r)}{2}$. Sei weiter $a \in X$ beliebig. Wir betrachten $\Delta(a, r, q)$ und $\bar{\Delta}(\bar{a}, \bar{r}, \bar{q})$ und ergänzen $\bar{\Delta}$ zu einem Parallelogramm (vgl. Abb. 1.5 auf S. 8). Die Parallelogrammgleichung in \mathbb{E}^2 besagt:

$$\begin{aligned} (2 \cdot d_2(\bar{a}, \bar{m}))^2 + (d_2(\bar{r}, \bar{q}))^2 &= 2 \cdot d_2(\bar{a}, \bar{r})^2 + 2 \cdot d_2(\bar{a}, \bar{q})^2 \\ \Rightarrow d_2(\bar{a}, \bar{m}) &= \frac{1}{2} d_2(\bar{a}, \bar{r})^2 + \frac{1}{2} d_2(\bar{a}, \bar{q})^2 - \frac{1}{4} d_2(\bar{r}, \bar{q})^2. \end{aligned}$$

Es gilt also

$$\begin{aligned}
d(a, m)^2 &\stackrel{\text{CAT}(0)}{\leq} d_2(\bar{a}, \bar{m}) \\
&= \frac{1}{2}d_2(\bar{a}, \bar{r})^2 + \frac{1}{2}d_2(\bar{a}, \bar{q})^2 - \frac{1}{4}d_2(\bar{r}, \bar{q})^2 \\
&= \frac{1}{2}d_2(a, r)^2 + \frac{1}{2}d_2(a, q)^2 - \frac{1}{4}d_2(r, q)^2 \\
\stackrel{\sup}{\implies} \text{rad}(m, A)^2 &\leq \frac{1}{2}\text{rad}(r, A)^2 + \frac{1}{2}\text{rad}(q, A)^2 - \frac{1}{4}d(r, q)^2.
\end{aligned}$$

Mit $\text{rad}(A) \leq \text{rad}(m, A)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\text{rad}(A)^2 &\leq \frac{1}{2}\text{rad}(r, A)^2 + \frac{1}{2}\text{rad}(q, A)^2 - \frac{1}{4}d(r, q)^2 \\
\Rightarrow \frac{1}{4}d(r, q)^2 &\leq \frac{1}{2}(\text{rad}(r, A)^2 + \text{rad}(q, A)^2) - \text{rad}(A)^2 \\
\Rightarrow d(r, q) &\leq \sqrt{2 \cdot (\text{rad}(r, A)^2 + \text{rad}(q, A)^2) - 4\text{rad}(A)^2} \quad (12)
\end{aligned}$$

Zur Eindeutigkeit: Angenommen, z_1, z_2 sind zwei Zentren von A , d.h. $\text{rad}(z_1, A) = \text{rad}(z_2, A) = \text{rad}(A)$.

Mit (12) folgt

$$d(z_1, z_2) \leq \sqrt{2 \cdot (\text{rad}(A)^2 + \text{rad}(A)^2) - 4\text{rad}(A)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad z_1 = z_2$$

Zur Existenz: Sei $x_n \in X$ eine Folge mit $\text{rad}(x_n, A) \rightarrow \text{rad}(A)$. Ziel ist zu zeigen, dass $(x_n)_n$ eine Cauchy-Folge ist. Da X vollständig ist, konvergiert diese und das Zentrum von A ist $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Sei $\varepsilon > 0$. Sei weiter $\delta > 0$ die positive Lösung von

$$\delta^2 + 2 \cdot \text{rad}(A) - \delta - \frac{\varepsilon}{4} = 0. \quad (13)$$

Wähle $N \in \mathbb{N}$ groß genug mit

$$\text{rad}(x_n, A) < \text{rad}(A) + \delta \quad \forall n \geq N. \quad (14)$$

Wir betrachten (12) quadriert und für $r = x_n$ und $q = x_m$.

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_m)^2 &\leq 2 \cdot (\text{rad}(x_n, A)^2 + \text{rad}(x_m, A)^2) - 4 \cdot \text{rad}(A)^2 \\
&\stackrel{(14)}{\leq} 2 \cdot (2 \cdot (\text{rad}(A) + \delta)^2) - 4 \cdot \text{rad}(A)^2 \quad \forall n, m \geq N \\
&= 8 \cdot \text{rad}(A)\delta + 4\delta^2 \quad \forall n, m \geq N \\
\Rightarrow d(x_n, x_m) &\leq 2 \cdot \sqrt{2 \cdot \text{rad}(A)\delta + \delta^2} \stackrel{(13)}{=} \varepsilon \quad \forall n, m \geq N \quad \square
\end{aligned}$$

1.23 Definition (Isometrie)

Eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ von metrischen Räumen $(X, d_X), (Y, d_Y)$ heißt **isometrische Einbettung**, wenn für alle $u, v \in X$ gilt:

$$d_Y(f(u), f(v)) = d_X(u, v).$$

Wenn f zusätzlich surjektiv ist, heißt f **Isometrie** und X und Y zueinander isometrisch. Wir definieren die **Isometriegruppe** von X :

$$\text{Isom}(X) = \{f: X \rightarrow X : f \text{ ist Isometrie}\}.$$

1.24 Bemerkung

Seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume und $f: X \rightarrow Y$ isometrische Einbettungen. Dann gilt:

- (i) f ist injektiv.
- (ii) Ist $(x_n)_n$ eine Cauchy-Folge in X , so ist $(f(x_n))_n$ eine Cauchy-Folge in Y .
- (iii) Sind X und Y isometrisch, so sind sie als topologische Räume homöomorph.

1.25 Definition (Isometrische Gruppenwirkung)

Sei X ein metrischer Raum und G eine Gruppe. Eine **isometrische Wirkung** von G auf X ist ein Gruppenhomomorphismus $\Phi: G \rightarrow \text{Isom}(X)$. Die **Fixpunktmenge** von Φ ist wie folgt definiert:

$$\text{Fix}_\Phi(G) := \{x \in X : \Phi(g)(x) = x \forall g \in G\}$$

1.26 Lemma

Sei X ein CAT(0)-Raum und $\Phi: G \rightarrow \text{Isom}(X)$ eine isometrische Wirkung. Dann ist $\text{Fix}_\Phi(G)$ abgeschlossen. Wenn $\text{Fix}_\Phi(G) \neq \emptyset$, dann ist $\text{Fix}_\Phi(G)$ konvex.

Beweis: ÜA!

1.27 Satz (BRUHAT-TITS-Fixpunkttheorem, BTFT)

Sei X ein vollständiger CAT(0)-Raum, sei G eine Gruppe und $\Phi: G \rightarrow \text{Isom}(X)$ eine isometrische Wirkung. Sei weiter $\emptyset \neq A \subseteq X$ beschränkt mit $\Phi(g)(A) = A$ für alle $g \in G$. Dann ist $c_A \in \text{Fix}_\Phi(G)$.

BEWEIS: Sei $g \in G$ beliebig. Es gilt:

$$\begin{aligned} \text{rad}(A) &= \text{rad}(c_A, A) \stackrel{\text{Def}}{=} \sup_{a \in A} \{d(c_A, a)\} \\ &\stackrel{\Phi(g) \text{ isom.}}{=} \sup_{a \in A} \{d(\Phi(g)(c_A), \Phi(g)(a))\} \\ &\stackrel{\Phi(g)(A)=A}{=} \sup_{a \in A} \{d(\Phi(g)(c_A), a)\} \stackrel{\text{Def}}{=} \text{rad}(\Phi(g)(c_A), A) \\ \xrightarrow{c_A \text{ eind.}} c_A &= \Phi(g)(c_A) \xrightarrow{g \text{ bel.}} c_A \in \text{Fix}_\Phi(G) \quad \square \end{aligned}$$

1.28 Korollar

Sei X ein vollständiger CAT(0)-Raum, sei G eine Gruppe und $\Phi: G \rightarrow \text{Isom}(X)$ eine isometrische Wirkung. Sei weiter $x \in X$ mit $G(x) := \{\Phi(g)(x) : g \in G\} \subseteq X$ beschränkt. Dann ist $\text{Fix}_\Phi(G) \neq \emptyset$.

BEWEIS: Betrachte $A := G(x)$. Dann ist $\Phi(g)(A) = A$ für alle $g \in G$. Mit Satz 1.27 folgt $\text{Fix}_\Phi(G) \neq \emptyset$. \square

1.29 Bemerkung

Jede isometrische Wirkung von einer endlichen Gruppe auf einen vollständigen CAT(0)-Raum hat einen Fixpunkt.

1.30 Korollar

Sei X ein vollständiger CAT(0)-Raum, G eine Gruppe und $\Phi: G \rightarrow \text{Isom}(X)$ eine isometrische Wirkung, welche folgende Bedingungen erfüllt:

- (i) G wirkt **eigentlich** (*proper*) auf X , das heißt für alle $x \in X$ existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass gilt:

$$\#\{g \in G : \Phi(g)(B_\varepsilon(x)) \cap B_\varepsilon(x) \neq \emptyset\} < \infty.$$

- (ii) G wirkt **kompakt** auf X , das heißt es existiert eine kompakte Teilmenge $K \subseteq X$, sodass

$$\bigcup_{g \in G} \Phi(g)(K) = X.$$

Dann enthält G nur endlich viele verschiedene Kongruenzklassen von endlichen Untergruppen. Genauer: Definiert man auf der Menge $\text{UG}_{\text{endl}} := \{U \leq G \text{ endlich}\}$ die Äquivalenzrelation

$$U \sim V \quad :\Leftrightarrow \quad \exists g \in G : U = gVg^{-1},$$

so gilt

$$\#\text{UG}_{\text{endl}}/\sim < \infty.$$

BEWEIS: Sei K eine kompakte Teilmenge mit

$$\bigcup_{g \in G} \Phi(g)(K) = X.$$

Wähle eine endliche Überdeckung $B_{\varepsilon_i}(x_i), 1 \leq i \leq n$, von K so, dass die Teilmengen

$$\Gamma_i \subseteq G \text{ mit } \Gamma_i = \{g \in G : \Phi(g)(B_{\varepsilon_i}(x_i)) \cap B_{\varepsilon_i}(x_i) \neq \emptyset\}$$

endlich sind. Dann ist $\Sigma := \bigcup_{i=1}^n \Gamma_i$ endlich.

Sei nun $x \in X$ beliebig. Wir betrachten die Stabilisatorgruppe $G_x := \{g \in G : \Phi(g)(x) = x\}$ von x .

- Wir haben in Korollar 1.28 bzw. Bemerkung 1.29 gesehen, dass jede endliche Untergruppe von G in einem G_x für geeignetes $x \in X$ enthalten ist. Genauer: Ist $U \subseteq G$ endlich und $\Phi: G \rightarrow \text{Isom}(X)$, so ist $\text{Fix}_{\Phi|_U}(U) \neq \emptyset$. Für $x \in \text{Fix}_{\Phi|_U}(U)$ ist $U \subseteq G_x$.
- Wir werden zunächst zeigen, dass es nur endlich viele Konjugationsklassen von Untergruppen von G vom Typ G_x gibt. Da $X = \bigcup_{g \in G} \Phi(g)(K)$, existiert ein $g \in G$ mit

$$\Phi(g)(x) \in K = \bigcup_{i=1}^n B_{\varepsilon_i}(x_i).$$

Also ist $\Phi(g)(x)$ in mindestens einen der $B_{\varepsilon_i}(x_i)$ enthalten und somit $G_{\Phi(g)(x)} \subseteq \Gamma_i \subseteq \Sigma$. Es gibt also nur endlich viele solche $G_{\Phi(g)(x)}$ mit $\Phi(g)(x) \in K$.

Nun gilt aber weiter $gG_xg^{-1} = G_{\Phi(g)(x)}$, das heißt jedes beliebige G_x ist konjugiert zu einer von endlich vielen $G_{\Phi(g)(x)}$. Also gibt es nur endlich viele Konjugationsklassen von Gruppen G_x . Da jedes G_x endlich ist, hat es selbst nur endlich viele Konjugationsklassen von Untergruppen. Da jede endliche Untergruppe von G automatisch eine Untergruppe eines G_x ist, kann es damit auch nur endlich viele Konjugationsklassen von endlichen Untergruppen von G geben. \square

06.11.15
[5]

Viele Sätze, die wir über CAT(0)-Räume bewiesen haben, hatten als Voraussetzung die Vollständigkeit. Der Vorteil in diesem Vorgehen ist, dass wir einen CAT(0)-Raum immer als eine dichte Teilmenge eines vollständigen CAT(0)-Raumes realisieren können. Weiter lässt sich jede Isometrie von CAT(0)-Räumen eindeutig zu einer Isometrie eines vollständigen CAT(0)-Raumes erweitern, indem wir sie auf der Vervollständigung fortsetzen. Um zu beweisen, dass die Vervollständigung eines CAT(0)-Raumes wieder CAT(0) ist, brauchen wir viel Vorarbeit.

1.31 Erinnerung (Metrische Vervollständigung)

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann existiert ein vollständiger metrischer Raum $(\widehat{X}, \widehat{d})$ und eine isometrische Einbettung $\varphi: X \hookrightarrow \widehat{X}$ mit $\overline{\varphi(X)} = \widehat{X}$, das heißt $\varphi(X)$ liegt dicht in \widehat{X} . Das Paar $(\widehat{X}, \widehat{d})$ ist bis auf Isometrie eindeutig bestimmt und heißt **metrische Vervollständigung** von X .

BEWEIS (Skizze): Sei $\text{CF}(X) := \{(x_n)_n \text{ Cauchy-Folge in } X\}$. Definiere die Äquivalenzrelation

$$(x_n)_n \sim (y_n)_n \quad :\Leftrightarrow \quad (d(x_n, y_n))_n \text{ ist Nullfolge}$$

und setze

$$\widehat{X} := \text{CF}(X)/\sim \quad \widehat{d}([(x_n)_n], [(y_n)_n]) := \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n)$$

und definiere $\varphi: X \hookrightarrow \widehat{X}$ durch $x \mapsto [(x)_n]$. \square

1.32 Erinnerung

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $f: X \rightarrow Y$ eine Lipschitz-Abbildung. Dann existiert eine eindeutige Fortsetzung $\widehat{f}: \widehat{X} \rightarrow \widehat{Y}$ mit $\widehat{f}|_X = f$.

1.33 Definition (Mittelpunkt)

Ein metrischer Raum (X, d) hat **Mittelpunkte**, wenn für alle $u, v \in X$ stets ein $m \in X$ existiert mit $d(u, m) = d(m, v) = \frac{1}{2}d(u, v)$.

Man beachte, dass Mittelpunkte nicht eindeutig sein müssen. Zum Beispiel haben $u := (1, 0)$ und $v := (0, 1)$ in (\mathbb{R}^2, d_1) die beiden Mittelpunkte $m_1 = (0, 0)$ und $m_2 = (1, 1)$.

1.34 Beispiel

- (i) (\mathbb{Q}_2, d_2) hat Mittelpunkte.
- (ii) Jeder geodätische Raum hat Mittelpunkte: Für alle $u, v \in X$ existiert eine Geodäte $\gamma: [0, d(u, v)] \rightarrow X$ von u nach v . Dann ist $\gamma(\frac{1}{2}d(u, v))$ Mittelpunkt von u und v .
- (iii) CAT(0)-Räume haben eindeutige Mittelpunkte, das heißt es existiert eine wohldefinierte Mittelpunktabbildung $(u, v) \mapsto m(u, v)$.

1.35 Lemma

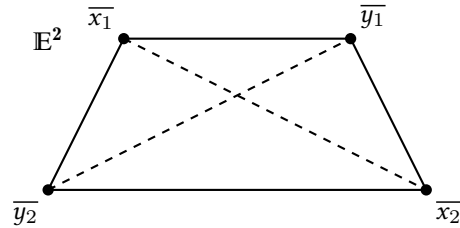
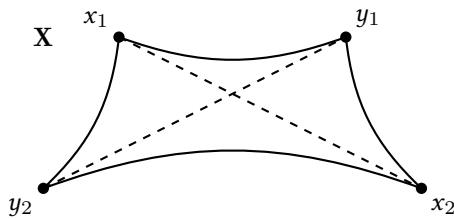
Ein vollständiger metrischer Raum, der Mittelpunkte hat, ist geodätisch.

Beweis: Übung.

1.36 Definition (Ungefährer Mittelpunkt, Vierpunktbedingung)

- (i) Ein metrischer Raum X hat **ungefähre Mittelpunkte**, wenn es zu allen $u, v \in X$ und $\varepsilon > 0$ ein $m \in X$ gibt mit $d(u, m), d(v, m) \leq \frac{1}{2}d(u, v) + \varepsilon$.
- (ii) Ein metrischer Raum X erfüllt die **CAT(0)-Vierpunktbedingung**, wenn es zu allen $x_1, y_1, x_2, y_2 \in X$ stets $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2 \in \mathbb{E}^2$ gibt mit:

$$d(x_1, y_1) = d_2(\bar{x}_1, \bar{y}_1), \quad d(x_2, y_2) = d_2(\bar{x}_2, \bar{y}_2), \quad d(x_1, x_2) \leq d_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2), \quad d(y_1, y_2) \leq d_2(\bar{y}_1, \bar{y}_2).$$

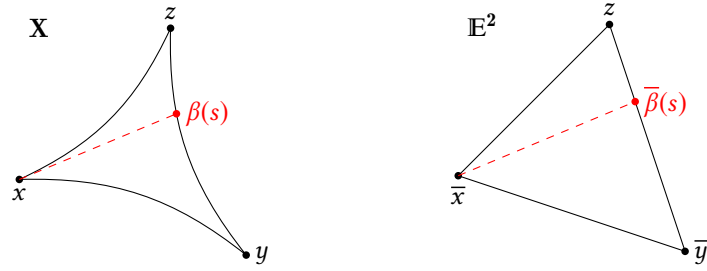


Wir werden sehen, dass man CAT(0)-Räume über die Vierpunktbedingung charakterisieren kann.

1.37 Lemma

Ein geodätischer Raum ist genau dann CAT(0), wenn für jedes geodätische Dreieck $\Delta(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$ mit Vergleichsdreieck $\bar{\Delta}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma})$ in \mathbb{E}^2 gilt: $d(x, \beta(s)) \leq d_2(\bar{x}, \bar{\beta}(s))$ für alle $s \in [0, d(y, z)]$.

Beweis: Übung.



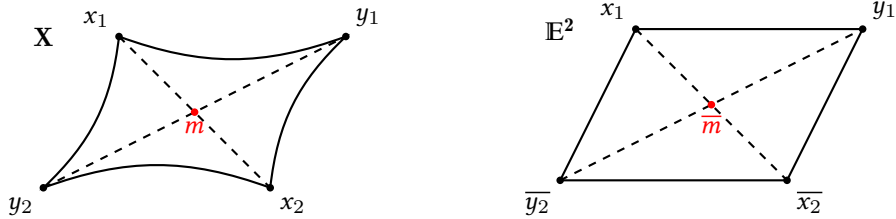
1.38 Theorem

Ein vollständiger metrischer Raum ist CAT(0) genau dann, wenn er ungefähre Mittelpunkte hat und die CAT(0)-Vierpunktbedingung erfüllt.

BEWEIS:

" \Rightarrow ": Der Raum X sei CAT(0). Dann hat X Mittelpunkte, also auch ungefähre Mittelpunkte. Seien $x_1, y_1, x_2, y_2 \in X$. Betrachte die euklidischen Vergleichsdreiecke zu $\Delta(x_1, x_2, y_2)$ und $\Delta(x_1, x_2, y_1)$. Das resultierende Viereck ist entweder konvex oder nicht.

1. Fall: Das Viereck ist konvex.

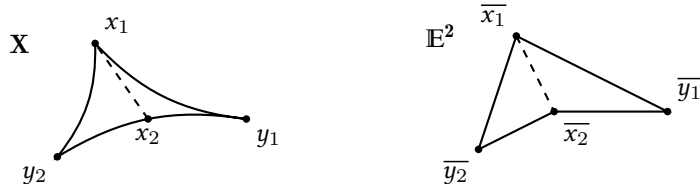


Definiere \bar{m} als Schnittpunkt der beiden Diagonalen in \mathbb{E}^2 und sei t so, dass $\bar{\alpha}(t) = \bar{m}$ für $\bar{\alpha}: \bar{x}_1 \rightsquigarrow \bar{x}_2$. Setze dann $m := \alpha(t)$.

Da X CAT(0) ist, gilt $d(y_2, m) \leq d_2(\bar{y}_2, \bar{m})$ sowie $d(y_1, m) \leq d_2(\bar{y}_1, \bar{m})$. Da \bar{m} auf der Geodäte zwischen \bar{y}_1 und \bar{y}_2 liegt, erhalten wir insgesamt:

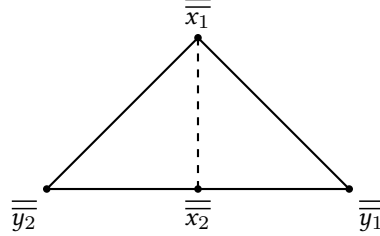
$$\begin{aligned} d(y_1, y_2) &\stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{=} d(y_1, m) + d(m, y_2) \\ &\leq d_2(\bar{y}_1, \bar{m}) + d_2(\bar{m}, \bar{y}_2) = d_2(\bar{y}_1, \bar{y}_2) \end{aligned}$$

2. Fall: Das Viereck ist nicht konvex.



Betrachte dann folgendes Dreieck in E^2 mit

$$\begin{aligned} d_2(\overline{x_2}, \overline{y_2}) &= d_2(\overline{\overline{x_2}}, \overline{\overline{y_2}}), & d_2(\overline{x_2}, \overline{y_1}) &= d_2(\overline{\overline{x_2}}, \overline{\overline{y_1}}), \\ d_2(\overline{x_1}, \overline{y_1}) &= d_2(\overline{\overline{x_1}}, \overline{\overline{y_1}}), & d_2(\overline{x_1}, \overline{y_2}) &= d_2(\overline{\overline{x_1}}, \overline{\overline{y_2}}). \end{aligned}$$



Es gilt

$$d_2(\overline{\overline{x_1}}, \overline{\overline{x_2}}) \geq d_2(\overline{x_1}, \overline{x_2}) = d_2(x_1, x_2)$$

sowie

$$\begin{aligned} d_2(\overline{\overline{y_1}}, \overline{\overline{y_2}}) &= d_2(\overline{\overline{y_1}}, \overline{\overline{x_2}}) + d_2(\overline{\overline{x_2}}, \overline{\overline{y_2}}) \\ &= d_2(\overline{\overline{y_1}}, \overline{\overline{x_2}}) + d_2(\overline{\overline{x_2}}, \overline{\overline{y_2}}) \\ &= d(y_1, x_2) + d(x_2, y_2) \\ &\stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\geq} d(y_1, y_2). \end{aligned}$$

” \Leftarrow ”: Nun sei X vollständig, habe ungefähre Mittelpunkte und erfülle die CAT(0)-Vierpunktbedingung.

Zuerst zeigen wir, dass X geodätisch ist. Nach Lemma 1.35 reicht es zu zeigen, dass X Mittelpunkte hat. Seien $u, v \in X$ beliebig. Sei weiter $\varepsilon_n := \frac{1}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Da X ungefähre Mittelpunkte hat, existiert ein $m_r \in X$ mit $d(u, m_r), d(v, m_r) \leq \frac{1}{2}d(u, v) + \varepsilon_r$. Sei $(m_r)_{r \in \mathbb{N}}$ eine Folge von ungefähren Mittelpunkten mit Fehlerterm $\varepsilon_r := \frac{1}{r}$. Unser Ziel ist es zu zeigen, dass $(m_r)_r$ eine Cauchy-Folge ist. Der Grenzwert $m := \lim_{r \rightarrow \infty} m_r$ ist dann ein Mittelpunkt, denn:

11.11.15
[6]

$$\begin{aligned} d(u, m_r) &\leq \frac{1}{2}d(u, v) + \varepsilon_r \\ \lim_{r \rightarrow \infty} d(u, m_r) &\leq \frac{1}{2}d(u, v) \\ \stackrel{d \text{ stetig}}{\implies} d(u, m) &\leq \frac{1}{2}d(u, v). \end{aligned}$$

Ebenso erhalten wir $d(v, m) \leq \frac{1}{2}d(u, v)$ und insgesamt $d(u, m) + d(m, v) \leq d(u, v)$. Es gilt aber auch die Dreiecksungleichung $d(u, m) + d(m, v) \geq d(u, v)$. Folglich erhalten wir Gleichheit

$$\begin{aligned} \underbrace{d(u, m)}_{\leq \frac{1}{2}d(u, v)} + \underbrace{d(m, v)}_{\leq \frac{1}{2}d(u, v)} &= d(u, v) \end{aligned}$$

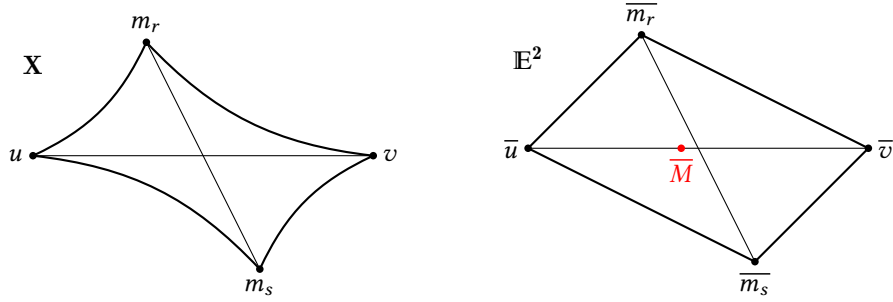
und damit $d(u, m) = d(m, v) = \frac{1}{2}d(u, v)$.

Sei nun $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ die positive Lösung von $-\varepsilon^2 + 4d^2 + 8r\delta = 0$. Wir definieren $d(u, v) =: 2r$.

Da $(\varepsilon_r)_{r \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass gilt:

$$\left. \begin{array}{l} d(u, m_r) \\ d(v, m_r) \\ d(u, m_s) \\ d(v, m_s) \end{array} \right\} \leq r + \delta \quad \forall r, s \geq N \quad (15)$$

Betrachte das 4-Tupel (u, m_r, v, m_s) und die Vergleichspunkte $(\bar{u}, \bar{m}_r, \bar{v}, \bar{m}_s)$ in \mathbb{E}^2 . Sei \bar{M} der Mittelpunkt von \bar{u} und \bar{v} . Nach Voraussetzung erfüllt X die CAT(0)-Vierpunktbedingung, also gilt



$$\left. \begin{array}{l} d(u, v) \leq d_2(\bar{u}, \bar{v}) \\ d(m_r, m_s) \leq d_2(\bar{m}_r, \bar{m}_s) \end{array} \right\} \quad (16)$$

Aus der Parallelogrammgleichung für \mathbb{E}^2 kann man folgern (siehe Beweis zu Theorem 1.22):

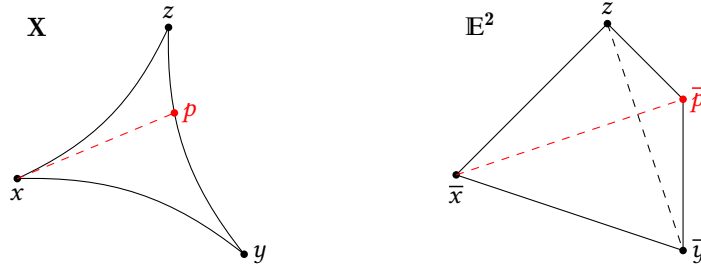
$$d_2(\bar{m}_r, \bar{M})^2 = \frac{1}{2}d_2(\bar{u}, \bar{m}_r)^2 + \frac{1}{2}d_2(\bar{m}_r, \bar{v})^2 - \frac{1}{4}d_2(\bar{u}, \bar{v})^2 \quad (17)$$

Analoges erhalten wir für $d_2(\bar{m}_s, \bar{M})^2$. Nun erhalten wir

$$\begin{aligned} d(m_r, m_s) &\stackrel{(16)}{\leq} d_2(\bar{m}_r, \bar{m}_s) \\ &\stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} d_2(\bar{m}_r, \bar{M}) + d_2(\bar{M}, \bar{m}_s) \\ &\stackrel{(17)}{=} \sqrt{\frac{1}{2}d_2(\bar{u}, \bar{m}_r)^2 + \frac{1}{2}d_2(\bar{m}_r, \bar{v})^2 - \frac{1}{4}d_2(\bar{u}, \bar{v})^2} + \sqrt{\frac{1}{2}d_2(\bar{u}, \bar{m}_s)^2 + \frac{1}{2}d_2(\bar{m}_s, \bar{v})^2 - \frac{1}{4}d_2(\bar{u}, \bar{v})^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}d(u, m_r)^2 + \frac{1}{2}d(m_r, v)^2 - \frac{1}{4}d_2(\bar{u}, \bar{v})^2} + \sqrt{\frac{1}{2}d(u, m_s)^2 + \frac{1}{2}d(m_s, v)^2 - \frac{1}{4}d_2(\bar{u}, \bar{v})^2} \\ &\stackrel{(15)}{\leq} 2 \cdot \sqrt{(r + \delta)^2 - \frac{1}{4}d_2(\bar{u}, \bar{v})^2} \quad \forall r, s \geq N \\ &\stackrel{(16)}{\leq} 2 \cdot \sqrt{(r + \delta)^2 - \frac{1}{4}d(u, v)^2} \quad \forall r, s \geq N \\ &= 2 \cdot \sqrt{r^2 + 2r\delta + \delta^2 - r^2} = \varepsilon \quad \forall r, s \geq N \end{aligned}$$

Somit ist $(m_r)_r$ eine Cauchy-Folge.

Sei $\Delta(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$ ein geodätisches Dreieck in X . Wir betrachten die Bedingung aus Lemma 1.37. Sei $p := \beta(s) \in \text{im}(\beta: y \rightsquigarrow z)$ beliebig. Zu den Punkten (x, y, p, z) betrachten wir die Vergleichs-



punkte $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}, \bar{z})$. Es gilt

$$d(x, p) \leq d_2(\bar{x}, \bar{p}) \quad \text{und} \quad d(z, y) \leq d_2(\bar{z}, \bar{y}) \quad (18)$$

Wir zeigen, dass $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}, \bar{z})$ ein Vergleichsdreieck ist, also dass \bar{p} auf der Geodäte $\bar{\beta}: \bar{y} \rightsquigarrow \bar{z}$ liegt. Es gilt

$$d_2(\bar{y}, \bar{z}) \stackrel{(18)}{\geq} d(y, z) = d(y, p) + d(p, z) = d_2(\bar{y}, \bar{p}) + d_2(\bar{p}, \bar{z})$$

und

$$d_2(\bar{y}, \bar{z}) \stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} d_2(\bar{y}, \bar{p}) + d_2(\bar{p}, \bar{z}).$$

Folglich liegt \bar{p} auf der Geodäte $\bar{\beta}$, das heißt wir haben ein Vergleichsdreieck. \square

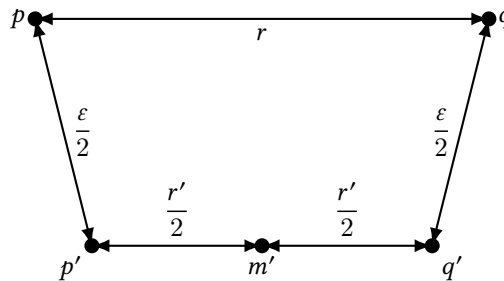
1.39 Theorem

Die metrische Vervollständigung eines CAT(0)-Raumes ist ein CAT(0)-Raum.

BEWEIS: Sei X ein CAT(0)-Raum mit Vervollständigung \widehat{X} . Wir zeigen, dass die Bedingung aus Theorem 1.38 erfüllt sind. Zuerst zeigen wir, dass \widehat{X} ungefähre Mittelpunkte hat. Seien $p, q \in \widehat{X}$, $\varepsilon > 0$. Wähle $p', q' \in X$ mit

$$d(p, p') < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad d(q, q') < \frac{\varepsilon}{2} \quad (19)$$

und $m' \in X$ als Mittelpunkt von p' und q' . Sei $r = d(p, q)$ und $r' = d(p', q')$.



Wir erhalten mit $r' = d(p', q') \leq d(p', p) + d(p, q) + d(q, q') \leq \varepsilon + r$:

$$\begin{aligned} d(p, m') &\stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} d(p, p') + d(p', m') \\ &\stackrel{(19)}{\leq} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{r'}{2} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{r}{2} = \frac{r}{2} + \varepsilon. \end{aligned}$$

und ebenso $d(q, m') \leq \frac{r}{2} + \varepsilon$, das heißt \widehat{X} hat ungefähre Mittelpunkte.

Sei jetzt $(x_1, y_1, x_2, y_2) \in \widehat{X}^4$. Wähle Folgen in X mit

$$x_1(n) \rightarrow x_1 \quad y_1(n) \rightarrow y_1 \quad x_2(n) \rightarrow x_2 \quad y_2(n) \rightarrow y_2$$

und CAT(0)-Vierpunkt-Vergleichspunkte $\overline{x_1(n)}, \overline{y_1(n)}, \overline{x_2(n)}, \overline{y_2(n)}$ in \mathbb{E}^2 . Ohne Einschränkung sei $\overline{x_1(n)} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Folge $(\overline{x_1(n)}, \overline{y_1(n)}, \overline{x_2(n)}, \overline{y_2(n)})$ hat einen Häufungspunkt in $(\mathbb{E}^2)^4$, weil sie beschränkt ist. Wir dürfen ohne Einschränkung annehmen, dass wir Konvergenz haben, das heißt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\overline{x_1(n)}, \overline{y_1(n)}, \overline{x_2(n)}, \overline{y_2(n)}) = (0, \overline{y_1}, \overline{x_2}, \overline{y_2}).$$

Dann folgt:

$$\begin{aligned} d(x_i, y_j) &= d\left(\lim_n x_i(n), \lim_n y_j(n)\right) \\ &\stackrel{d \text{ stetig}}{=} \lim_n d(x_i(n), y_j(n)) \\ &= \lim_n d_2(\overline{x_i(n)}, \overline{y_j(n)}) \\ &\stackrel{d_2 \text{ stetig}}{=} d_2(\overline{x_i}, \overline{y_j}) \end{aligned}$$

Ebenso haben wir $d(x_1, x_2) \leq d_2(\overline{x_1}, \overline{x_2})$ und $d(y_1, y_2) \leq d_2(\overline{y_1}, \overline{y_2})$. □

2 Der Satz von CARTAN-HADAMARD

Sei X ein $\text{CAT}(0)$ -Raum. Wir haben gesehen, dass $\text{CAT}(0)$ -Räume viele „schöne“ Eigenschaften haben.

- (i) Sie sind eindeutig geodätisch und besitzen damit eindeutige Mittelpunkte.
- (ii) Für $C \subseteq X$ konvex und vollständig haben wir

$$\begin{aligned}\pi_C: X &\longrightarrow C \\ x &\longmapsto \pi_C(x)\end{aligned}$$

mit $d(x, \pi_C(x)) = d(x, C)$, das heißt X ist kontrahierbar.

- (iii) Für X vollständig und alle $A \subseteq X$ beschränkt existiert ein eindeutiges $c_A \in X$ mit

$$A \subseteq \overline{B_{\text{rad}(A)}(c_A)}.$$

Daraus folgt, dass jede isometrische Wirkung $G \curvearrowright X$ einen globalen Fixpunkt besitzt, wenn G endlich ist.

- (iv) Die metrische Vervollständigung von X ist $\text{CAT}(0)$.

Die $\text{CAT}(0)$ -Bedingung ist eine globale Bedingung und deshalb schwer zu erfüllen. Einfacher ist es zu zeigen, dass ein metrischer Raum lokal $\text{CAT}(0)$ ist.

Sei X ein vollständiger metrischer Raum. Wir suchen nun eine „schwache“ globale Bedingung, die einfacher überprüfbar ist als die globale $\text{CAT}(0)$ -Bedingung, sodass wir eine äquivalente Charakterisierung von $\text{CAT}(0)$ -Räumen erhalten.

$$X \text{ lokal } \text{CAT}(0) \quad + \quad ??? \quad \Leftrightarrow \quad X \text{ ist } \text{CAT}(0)$$

2.1 Satz (CARTAN-HADAMARD)

Sei X ein vollständiger zusammenhängender lokaler $\text{CAT}(0)$ -Raum. Sei \tilde{X} seine universelle Überlagerung. Dann ist \tilde{X} ein $\text{CAT}(0)$ -Raum.

2.2 Korollar

Sei X ein vollständiger metrischer Raum. Dann gilt:

$$X \text{ lokal } \text{CAT}(0) \quad + \quad \text{einfach zusammenhängend} \quad \Leftrightarrow \quad X \text{ ist } \text{CAT}(0).$$

Um diesen Satz zu beweisen, brauchen wir viel Vorarbeit.

Erinnerung (siehe [Kra15, Kap. 3])

18.11.15

[7]

Seien E, B topologische Räume. Sei weiter $p: E \rightarrow B$ eine stetige surjektive Abbildung. Wir nennen p eine **Überlagerung** von B , wenn jeder Punkt $b \in B$ eine offene Umgebung $U_b \subseteq B$ von b besitzt mit folgender Eigenschaft:

Es gibt eine Indexmenge $I \neq \emptyset$ mit

$$p^{-1}(U_b) = \bigsqcup \{V_i : i \in I\}, V_i \subseteq E \text{ offen}, V_i \cap V_j = \emptyset, i \neq j$$

und $p|_{V_i} \rightarrow U_b$ ist ein Homöomorphismus.

Bild einfügen!

Ein triviales Beispiel einer Überlagerung ist die Identität id_B . Ein weiteres, wichtiges Beispiel ist $E := \mathbb{R}, B = \mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ und

$$\begin{aligned} p: E &\longrightarrow B \\ t &\longmapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \end{aligned}$$

Das ist eine Überlagerung, denn für $b = (\cos(\alpha), \sin(\alpha)) \in \mathbb{S}^1$ und $U_b = \mathbb{S}^1 \setminus \{-b\}$ ist $p^{-1}(U_b) = \bigcup \{(k + r - \frac{1}{2}, k + r + \frac{1}{2}) : k \in \mathbb{Z}\}$.

Bild einfügen!

$p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ ist eine Überlagerung mit $\pi_1(E, \{e\}) = \pi_2(\mathbb{R}, \{x_0\}) \simeq \{0\}$ und \mathbb{R} ist wegzusammenhängend.

Definition

Eine Überlagerung $p: E \rightarrow B$ heißt **universelle Überlagerung**, wenn E einfach zusammenhängend ist. zusammenhängend!einfach

Die Frage ist nun, welche Räume die universelle Überlagerung besitzen.

Satz (ohne Beweis)

Jeder zusammenhängende topologische Raum X , welcher lokal wegzusammenhängend ist und semilokal einfach zusammenhängend ist, hat eine universelle Überlagerung.

X heißt genau dann **semilokal einfach zusammenhängend**, wenn für alle $x \in X$ eine offene Umgebung U_x von x existiert, sodass $\text{id}_*: \pi_1(U_x, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$ trivial ist.

Bemerkung

- (i) Wenn X lokal CAT(0) ist, dann ist X semilokal einfach zusammenhängend: Denn für $x \in X$ existiert ein $\varepsilon > 0$ sodass $B_\varepsilon(x)$ CAT(0) ist. CAT(0)-Räume sind kontrahierbar, folglich ist $\pi_1(B_\varepsilon(x), x) \simeq \{0\}$ und damit ist $\text{id}_*: \pi_1(B_\varepsilon(x), x) \rightarrow \pi_1(X, x)$ trivial.

- (ii) Jeder zusammenhängende lokale CAT(0)-Raum hat also eine universelle Überlagerung.

BEWEIS (Korollar 2.2):

” \Leftarrow ”: Ist X ein CAT(0)-Raum, dann ist $B_\varepsilon(x)$ für alle $\varepsilon > 0, x \in X$ konvex (Übung). Also ist $B_\varepsilon(x)$ CAT(0).

In Satz 1.19 haben wir bewiesen, dass X kontrahierbar ist, folglich ist $\pi_1(X, \{x\}) \simeq \{0\}$. Da X wegzusammenhängend ist, folgt insgesamt, dass X einfach zusammenhängend ist.

” \Rightarrow ”: Die Identität id_X ist die universelle Überlagerung, da X nach Annahme zusammenhängend ist. Nach Satz 2.1 ist X dann CAT(0). \square

Der Satz von CARTAN und HADAMARD liefert uns also:

- eine lokal \rightarrow global-Aussage (Korollar 2.2)
- eine Möglichkeit, viele CAT(0)-Räume zu erhalten
- ein Werkzeug, um zu zeigen, dass die universelle Überlagerung kontrahierbar ist.

Für den Beweis machen wir zuerst ein paar Vorüberlegungen: Wir haben $p: \tilde{X} \rightarrow X$, wobei X ein vollständiger metrischer zusammenhängender lokaler CAT(0)-Raum ist. Wir werden eine Metrik auf \tilde{X} definieren, sodass p eine **lokale Isometrie** ist, d.h. für $\tilde{x} \in \tilde{X}$ existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass $p: B_\varepsilon(\tilde{x}) \rightarrow B_\varepsilon(p(\tilde{x}))$ eine Isometrie ist.

2.1 Längenräume

Betrachte $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{E}^2$. Die induzierte Metrik von \mathbb{E}^2 auf \mathbb{S}^1 ist keine „gute“ Metrik, um Geometrie zu machen. Besser ist folgende Metrik:

$$\begin{aligned} d_L(x, y) &= \text{Bogenlänge zwischen } x \text{ und } y \\ &= \arccos(\langle x, y \rangle) \end{aligned}$$

Als allgemeines Konzept betrachten wir also Wege von x nach y .

2.3 Definition (Weg, Länge, rektifizierbar)

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $c: [a, b] \rightarrow X$ eine stetige Abbildung. Die Abbildung c heißt **Weg** von $c(a)$ nach $c(b)$. Wir definieren die **Länge** von c folgendermaßen:

$$\ell(c) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n d(c(t_{i-1}), c(t_i)) : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b, n \in \mathbb{N} \right\} \in [0, \infty].$$

Falls $\ell(c) < \infty$, heißt c **rektifizierbar**.

Grafik einfügen.

2.4 Bemerkung

Es gibt Wege, die nicht rektifizierbar sind. Wir betrachten das folgende Beispiel:

$$\begin{aligned} c: [-1, 0] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ -\frac{1}{n} &\longmapsto \sum_{i=1}^n (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} \\ 0 &\longmapsto \ln(2) \end{aligned}$$

Grafik einfügen.

und stetig linear fortgesetzt auf $[-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1}]$.

Betrachte $t_n = -\frac{1}{n}$. Damit erhalten wir

$$\ell(c) \geq \ell\left(c|_{[-1, -\frac{1}{n+1}]}\right) \geq \sum_{i=1}^n d_2(c(t_i), c(t_{i+1})) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

2.5 Definition

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $c_1: [a_1, b_1] \rightarrow X$, $c_2: [a_2, b_2] \rightarrow X$ zwei Wege mit $c_1(b_1) = c_2(a_2)$.

(i) Der **zusammengesetzte Weg** $c_1 * c_2$ von $c_1(a_1)$ nach $c_2(b_2)$ ist definiert wie folgt:

$$\begin{aligned} c_1 * c_2: [a_1, b_1 + b_2 - a_2] &\longrightarrow X \\ t &\longmapsto \begin{cases} c_1(t), & t \in [a_1, b_1] \\ c_2(t + a_2 - b_1), & t \in [b_1, b_1 + b_2 - a_2] \end{cases} \end{aligned}$$

(ii) Der **inverse Weg** von c_1 ist definiert wie folgt:

$$\begin{aligned} \overline{c_1}: [a_1, b_1] &\longrightarrow X \\ t &\longmapsto c_1(a_1 + b_1 - t) \end{aligned}$$

2.6 Proposition

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $c: [a, b] \rightarrow X$ ein Weg. Dann gilt:

(i) $\ell(c) \geq d(c(a), c(b))$ und $\ell(c) = 0$ genau dann, wenn c konstant ist.

(ii) Sei $\varphi: [a', b'] \rightarrow [a, b]$ eine schwach monotone surjektive stetige Funktion. Dann gilt $\ell(c) = \ell(c \circ \varphi)$.

(iii) Additivität: Seien $c_1: [a_1, b_1] \rightarrow X$ und $c_2: [a_2, b_2] \rightarrow X$ zwei Wege in X mit $c_1(b_1) = c_2(a_2)$. Dann gilt $\ell(c_1 * c_2) = \ell(c_1) + \ell(c_2)$.

(iv) $\ell(\overline{c}) = \ell(c)$

(v) Wenn $\ell(c) < \infty$, dann ist

$$\begin{aligned} \lambda_c: [a, b] &\longrightarrow [0, \ell(c)] \\ t &\longmapsto \ell\left(c|_{[a, t]}\right) \end{aligned}$$

eine stetige schwach monotone surjektive Funktion.

- (vi) Parametrisierung nah der Bogenlänge: Wenn $\ell(c) < \infty$, dann existiert ein eindeutiger Weg $\tilde{c}: [0, \ell(c)] \rightarrow X$ mit $\tilde{c} \circ \lambda_c = c$ und $\ell(\tilde{c}|_{[0, t]}) = t$.
- (vii) Sei $(c_n: [a, b] \rightarrow X)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Wegen, die gleichmäßig gegen einen Weg $c: [a, b] \rightarrow X$ konvergiert. Wenn $\ell(c) < \infty$, dann gilt: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $N(\varepsilon)$ mit $\ell(c) \leq \ell(c_n) + \varepsilon$ für alle $n \geq N(\varepsilon)$.

BEWEIS: (i) bis (iv) und (vi) sind Übungsaufgaben.

- (v) Zuerst zeigen wir, dass λ_c schwach monoton ist. Seien $t, t' \in [a, b]$ mit $t \leq t'$. Dann ist

$$c|_{[a, t']} = c|_{[a, t]} * c|_{[t, t']}.$$

Mit (ii) erhalten wir:

$$\begin{aligned} \ell(c|_{[a, t']}) &= \ell(c|_{[a, t]}) + \ell(c|_{[t, t']}) \\ \Rightarrow \underbrace{\ell(c|_{[a, t]})}_{\lambda_c(t)} &\leq \underbrace{\ell(c|_{[a, t']})}_{\lambda_c(t')} \end{aligned}$$

Zur Stetigkeit: Wir zeigen, dass λ_c gleichmäßig stetig ist. Sei $\varepsilon > 0$. Da $[a, b]$ kompakt ist, ist der Weg c gleichmäßig stetig. Also existiert ein $\delta > 0$, sodass für alle $t, t' \in [a, b]$ mit $d(t, t') < \delta$ gilt:

$$d(c(t), c(t')) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Für $\frac{\varepsilon}{4}$ existiert $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n+1} = b$ mit

$$\sum_{i=0}^n d(c(t_i), c(t_{i+1})) + \frac{\varepsilon}{4} > \ell(c). \quad (20)$$

Weiter können wir annehmen, dass gilt (ansonsten wähle feinere Unterteilung):

$$d(t_i, t_{i+1}) < \delta \text{ für alle } i \in \{0, \dots, n\}$$

Wir erhalten

$$\ell(c) \stackrel{(ii)}{=} \sum_{i=0}^n \ell(c|_{[t_i, t_{i+1}]}) \stackrel{(i)}{\geq} \sum_{i=0}^n d(c(t_i), c(t_{i+1})) \stackrel{(20)}{>} \ell(c) - \frac{\varepsilon}{4}.$$

Folglich:

$$|\ell(c|_{[t_i, t_{i+1}]}) - d(c(t_i), c(t_{i+1}))| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Da $d(c(t_i), c(t_{i+1})) < \frac{\varepsilon}{4}$, erhalten wir

$$\ell(c|_{[t_i, t_{i+1}]}) < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Insgesamt erhalten wir, dass für alle $t, t' \in [a, b]$ mit $d(t, t') < \delta$ gilt:

$$|\lambda_c(t) - \lambda_c(t')| = \ell(c|_{[t, t']}) \leq \ell(c|_{[t_j, t_{j+2}]}) < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

für ein $j \in \{0, \dots, n-1\}$.

Zur Surjektivität: Es gilt $\lambda_c(a) = 0$ und $\lambda_c(b) = \ell(c)$. Die Abbildung λ_c ist stetig und $[a, b]$ ist zusammenhängend. Folglich ist $\lambda_c([a, b])$ zusammenhängend und wir erhalten $\lambda_c([a, b]) = [0, \ell(c)]$.

20.11.15
[8]

(vii) Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $t_i \in [a, b]$, $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{k+1} = b$ mit

$$\ell(c) \leq \sum_{i=0}^k d(c(t_i), c(t_{i+1})) + \frac{\varepsilon}{2} \quad (21)$$

Da $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen c konvergiert, existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass gilt:

$$d(c(t), c_n(t)) < \frac{\varepsilon}{4 \cdot (k+1)} \text{ für alle } N \neq n, t \in [a, b]. \quad (22)$$

Wir erhalten:

$$\ell(c) \stackrel{(21)}{\leq} \sum_{i=0}^k d(c(t_i), c(t_{i+1})) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Nebenrechnung:

$$\begin{aligned} d(c(t_i), c(t_{i+1})) &\stackrel{(22)}{\leq} d(c(t_i), c_n(t_i)) + d(c_n(t_i), c_n(t_{i+1})) + d(c_n(t_{i+1}), c(t_{i+1})) \\ &\stackrel{(22)}{\leq} \frac{\varepsilon}{2 \cdot (k+1)} + d(c_n(t_i), c_n(t_{i+1})) \quad \forall n \geq N \end{aligned}$$

Also:

$$\ell(c) \leq (k+1) \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot (k+1)} + \sum_{i=0}^k d(c_n(t_i), c_n(t_{i+1})) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \ell(c_n) + \varepsilon \quad \forall n \geq N \quad \square$$

2.7 Definition

Sei (X, d) ein metrischer Raum. d heißt **Längenmetrik**, falls für alle $x, y \in X$ gilt:

$$d(x, y) = \inf\{\ell(c) : c \text{ ist ein rektifizierbarer Weg von } x \text{ nach } y\}$$

Falls d eine Längenmetrik ist, heißt (X, d) ein **Längenraum**.

2.8 Beispiel

(i) Jeder geodätische Raum X ist ein Längenraum. Genauer: Seien $x, y \in X$ beliebig. Sei weiter $\gamma : [0, d(x, y)] \rightarrow X$ eine Geodäte zwischen x und y . Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n+1} = d(x, y)$ mit

$$\ell(\gamma) \leq \sum_{i=0}^n d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) + \varepsilon$$

$$\begin{aligned}
\gamma &\stackrel{\text{isom.}}{=} \sum_{i=0}^n d_2(t_i, t_{i+1}) + \varepsilon \\
&= d(x, y) + \varepsilon
\end{aligned}$$

Für $\varepsilon = \frac{1}{n}$ erhalten wir für $n \rightarrow \infty$: $\ell(\gamma) \leq d(x, y)$. Mit $\ell(\gamma) \geq d(\gamma(0), \gamma(d(x, y))) = d(x, y)$ (Proposition 2.6(i)) folgt Gleichheit.

- (ii) Im Allgemeinen ist ein Längenraum nicht geodätisch. Zum Beispiel ist $(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, d_2)$ ein Längenraum, aber zwischen $(-1, 0)$ und $(1, 0)$ existiert keine Geodäte.

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann induziert d eine Längenmetrik d_L auf X und zwar wie folgt:

2.9 Definition

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Wir definieren

$$\begin{aligned}
d_L : X \times X &\longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\} \\
(x, y) &\longmapsto \inf \{ \ell(c) : c \text{ ist ein rektifizierbarer Weg von } x \text{ nach } y \}
\end{aligned}$$

Falls kein rektifizierbarer Weg von x nach y existiert, dann setzen wir $d_L(x, y) = \infty$. Es gilt (folgt direkt mit Proposition 2.6):

- (i) d_L ist eine Metrik auf X (Konvention: $a + \infty = \infty$ für alle $a \in [0, \infty]$)
- (ii) $d_L(x, y) \geq d(x, y)$ für alle $x, y \in X$

Wir nennen d_L die zu d **assoziierte Längenmetrik**.

2.10 Beispiel

- (i) (\mathbb{Q}, d_2) : $d_{2L}(x, y) = \infty$ für alle $x, y \in \mathbb{Q}$ mit $x \neq y$
- (ii) (\mathbb{S}^1, d_2) : $d_{2L}(x, y) = \arccos(\langle x, y \rangle)$

2.11 Proposition

Sei (X, d) ein metrischer Raum.

- (i) Sei $c : [a, b] \Rightarrow X$ ein rektifizierbarer Weg in (X, d) , dann ist c auch ein rektifizierbarer Weg in (X, d_L) und $\ell^d(c) = \ell^{d_L}(c)$.
- (ii) Es gilt: $(d_L)_L = d_L$.

BEWEIS:

- (i) Wir zeigen zuerst, dass $c : [a, b] \rightarrow (X, d_2)$ stetig ist. Sei $t \in [a, b]$ beliebig. Sei weiter $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $[a, b]$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t$. Wir müssen zeigen, dass gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} c(t_n) = c(t)$. Sei $\varepsilon > 0$.

$$d_L(c(t), c(t_n)) \leq \ell(c|_{[t, t_n]}) = |\lambda_c(t_n) - \lambda_c(t)|$$

Da λ_c stetig ist, existiert $N(\varepsilon)$ mit $|\lambda_c(t_n) - \lambda_c(t)| < \varepsilon$ für alle $n \geq N(\varepsilon)$. Da $d_L(x, y) \geq d(x, y)$ für alle $x, y \in X$ gilt, folgt $\ell^{d_L}(c) \geq \ell^d(c)$. Weiter haben wir:

$$\begin{aligned} \ell^{d_L}(c) &\stackrel{\text{Def}}{=} \sup \left\{ \sum_{i=0}^n d_L(c(t_i), c(t_{i+1})) : a = t_0 < \dots < t_{n+1} = b, n \in \mathbb{N} \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \sum_{i=0}^n \ell^d(c|_{[t_i, t_{i+1}]}) : a = t_0 < \dots < t_{n+1} = b, n \in \mathbb{N} \right\} \\ &\stackrel{\text{Def}}{=} \ell^d(c). \end{aligned}$$

(ii) folgt sofort aus (i). □

Im Allgemeinen muss ein Längenraum nicht geodätisch sein. Zum Beispiel ist $(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, d_2)$ ein (nicht vollständiger) Längenraum, aber nicht geodätisch.

2.12 Definition (lokal kompakt)

Ein metrischer Raum (X, d) heißt **lokal kompakt**, wenn für alle $x \in X$ ein $r > 0$ existiert, sodass $\overline{B_r(x)}$ kompakt ist.

2.13 Theorem (HOPF-RINOW)

Sei (X, d) ein Längenraum. Wenn X vollständig und lokal kompakt ist, dann gilt:

- (i) Für jedes $x \in X$ und $r > 0$ ist $\overline{B_r(x)}$ kompakt.
- (ii) (X, d) ist geodätisch.

BEWEIS (zu (i)): Sei $x \in X$ beliebig. Wir definieren:

$$\{r \in \mathbb{R}_{\geq 0} : \overline{B_r(x)} \text{ ist kompakt}\}$$

Wir müssen zeigen, dass gilt: $\Sigma = \mathbb{R}_{\geq 0}$. Dafür zeigen wir $\Sigma \neq \emptyset$ sowie Σ offen und abgeschlossen. Da $\mathbb{R}_{\geq 0}$ zusammenhängend ist, folgt dann $\Sigma = \mathbb{R}_{\geq 0}$.

[1] $\Sigma \neq \emptyset$, da $0 \in \Sigma$.

[2] Falls $r \in \Sigma$, dann ist auch $[0, r] \subseteq \Sigma$. Genauer: Sei $r' \in [0, r]$ beliebig, dann ist $\overline{B_{r'}(x)} \subseteq \overline{B_r(x)}$ als abgeschlossene Teilmenge in einem kompakten Raum kompakt. Folglich: $r' \in \Sigma$

Zur Offenheit von Σ : Sei $r \in \Sigma$ beliebig. Wir müssen zeigen, dass eine offene Umgebung U_r von r existiert mit $U_r \subseteq \Sigma$.

1. Fall: $r = 0$. Da X lokal kompakt ist, existiert ein $r' \in \mathbb{R}_{> 0}$ mit $\overline{B_{r'}(x)}$ kompakt. Mit [2] folgt $[0, r'] \subseteq \Sigma$, also $U_0 := [0, r'] \subseteq \Sigma$.

2. Fall: $r \in \Sigma \cap \mathbb{R}_{>0}$. Es gilt also, dass $\overline{B_r(x)}$ kompakt ist. Sei $x_i \in X$ beliebig. Da X lokal kompakt ist, existiert ein $r_i > 0$ mit $\overline{B_{r_i}(x_i)}$ kompakt. Wir betrachten die offene Überdeckung von $\overline{B_r(x)}$:

$$\overline{B_r(x)} \subseteq \bigcup_{x_i \in X} B_{r_i}(x_i)$$

Da $\overline{B_r(x)}$ kompakt ist, existieren $x_1, \dots, x_n \in X$ mit

$$\overline{B_r(x)} \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_{r_i}(x_i).$$

Betrachte $A := \overline{B_r(x)}$ kompakt und $B := X \setminus \bigcup_{i=1}^n B_{r_i}(x_i)$ abgeschlossen. Es gilt $A \cap B = \emptyset$. Dann existiert ein $\delta > 0$ mit

$$\inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\} > 2\delta. \quad (23)$$

Folglich ist

$$\overline{B_{r+\delta}(x)} \subseteq \bigcup_{i=1}^n \overline{B_{r_i}(x_i)}$$

und damit ist $\overline{B_{r+\delta}(x)}$ kompakt. Es folgt $U_r := (\delta - r, r + \delta) \cap [0, r + \delta) \subseteq \Sigma$.

zu (23): Angenommen, $\inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\} = 0$. Dann existieren Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq B$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, b_n) = 0$. Da A kompakt ist, existiert eine konvergente Teilfolge (a_{n_k}) mit $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$. Wir erhalten

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} d(a_{n_k}, b_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} d(a, b_{n_k}).$$

Also gilt $b_{n_k} \rightarrow a$. Da B abgeschlossen ist, liegt $a \in B$. Widerspruch zu $A \cap B = \emptyset$.

Zur Abgeschlossenheit von Σ : Wir benutzen das folgende Kriterium für einen metrischen Raum Y :

$$A \subseteq Y \text{ abg.} \quad \Leftrightarrow \quad \text{für alle Folgen } (y_n)_n \subseteq A, \text{ die in } Y \text{ konvergieren, gilt } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \in A.$$

In unserem Fall reicht es zu zeigen, dass für $r \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $[0, r) \subseteq \Sigma$ auch $r \in \Sigma$ ist. Sei also $r \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $[0, r) \subseteq \Sigma$ beliebig. Wir müssen zeigen, dass $\overline{B_r(x)}$ kompakt ist. In metrischen Räumen sind die Begriffe Folgenkompaktheit und Kompaktheit äquivalent. Sei also $(x_n)_n$ eine Folge in $\overline{B_r(x)}$. Wir müssen zeigen, dass $(x_n)_n$ eine konvergente Teilfolge hat.

Wir können annehmen, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = r$ ist. Andernfalls können wir eine Teilfolge (x_{n_k}) von (x_n) finden, sodass $x_{n_k} \in \overline{B_{r'}(x)}$ für ein $r' \in [0, r)$. Da $\overline{B_{r'}(x)}$ kompakt ist, existiert eine Teilfolge $(x_{n_{k_l}})$, die konvergent ist. Wir konstruieren eine Hilfsfolge:

Seien $n, m \in \mathbb{N}$ beliebig. Betrachte $c_n : [a, b] \rightarrow X$ mit $c(a) = x$, $c(b) = x_n$ und $\ell(c_n) < r - \frac{1}{2+2m}$. Sei $y_n^m \in \text{im}(c_n)$ beliebig mit $d(x_n, y_n^m) < \frac{1}{m+1}$. Dann gilt

$$d(x, y_n^m) < r - \frac{1}{2+2m}$$

$$d(x_n, y_n^m) < \frac{1}{m+1}$$

Für festes m liegt $(y_n^m)_n$ in der kompakten Menge $\overline{B_{r-\frac{1}{2+2m}}(x)}$. Das heißt, für festes m hat $(y_n^m)_n$ eine konvergente Teilfolge. Benutze Diagonaltrick:

Sei $(y_{n_k^1}^1)_k$ eine konvergente Teilfolge von $(y_n^1)_{n \in \mathbb{N}}$.
 Sei $(y_{n_k^2}^2)_k$ eine konvergente Teilfolge von $(y_{n_k^1}^2)_k$.
 \vdots

Definiere $n_k := n_k^k$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Dann ist $(y_{n_k}^m)_k$ eine konvergente Folge für alle $m \in \mathbb{N}$.

Beh: (x_{n_k}) konvergiert:

Bew: Wir zeigen, dass (x_{n_k}) eine Cauchy-Folge ist. Da $\overline{B_r(x)}$ eine abgeschlossene Teilmenge in einem vollständigen Raum ist, ist $\overline{B_r(x)}$ vollständig. Damit liegt dann $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \in \overline{B_r(x)}$. Sei $\varepsilon > 0$. Sei weiter $m \in \mathbb{N}$ mit $2 \cdot \frac{1}{m+1} < \frac{\varepsilon}{2}$ beliebig.

$$\begin{aligned} d(x_{n_k}, x_{n_l}) &\stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} d(x_{n_k}, y_{n_k}^m) + d(y_{n_k}^m, y_{n_l}^m) + d(y_{n_l}^m, x_{n_l}) \\ &< 2 \cdot \frac{1}{m+1} + d(y_{n_k}^m, y_{n_l}^m) \end{aligned}$$

Da $(y_{n_k}^m)$ für alle m konvergent ist, existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $d(y_{n_k}^m, y_{n_l}^m) < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $k, l > N$. Wir erhalten

$$d(x_{n_k}, x_{n_l}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

für alle $k, l > N$. □

25.11. [9] Um die Aussage (ii) zu beweisen, brauchen wir ein Resultat von ARZELÀ und ASCOLI.

2.14 Definition (gleichstetig)

Seien X und Y metrische Räume. Eine Folge von Abbildungen $(f_n: X \rightarrow Y)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt **gleichstetig**, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, x' \in X, n \in \mathbb{N} : d_X(x, x') < \delta \Rightarrow d_Y(f_n(x), f_n(x')) < \varepsilon$$

2.15 Lemma (ARZELÀ-ASCOLI)

Sei X ein separabler metrischer Raum und Y ein kompakter metrischer Raum. Dann hat jede gleichstetige Folge von Funktionen $(f_n: X \rightarrow Y)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(f_{n_k})_k$, die gleichmäßig auf kompakte Teilmengen von X gegen die stetige Funktion $f := \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}$ konvergiert.

BEWEIS:

- Da X separabel ist, existiert eine abzählbare dichte Teilmenge Q von X . Wähle so ein $Q = \{q_j : j \in \mathbb{N}\}$.
- Für jedes $q_j \in Q$ betrachten wir die Folge $(f_n(q_j))_{n \in \mathbb{N}}$.

- Es ist $(f_n(q_j))_n$ eine Folge in Y kompakt und besitzt daher eine konvergente Teilfolge.
- Wir wählen eine Teilfolge $(n_k^1)_{k \in \mathbb{N}}$, sodass $(f_{n_k^1}(q_1))_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert, dann induktiv eine Teilfolge $(n_k^j)_{k \in \mathbb{N}}$ von (n_k^{j-1}) , sodass $(f_{n_k^j}(q_j))_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert. Mittels Diagonaltrick ist dann $(f_{n_k^k}(q_j))_k$ konvergent für jedes $j \in \mathbb{N}$.
- Wir definieren

$$f: Q \longrightarrow Y$$

$$q_j \longmapsto \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k^k}(q_j)$$

und zeigen, dass f gleichmäßig stetig ist:

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da $(f_n: X \rightarrow Y)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichstetig ist, existiert ein $\delta > 0$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$d(f_n(x), f_n(x')) \leq \varepsilon \text{ für alle } x, x' \in X \text{ mit } d(x, x') < \delta,$$

also insbesondere

$$d(f_{n_k^k}(q), f_{n_k^k}(q')) \leq \varepsilon \text{ für alle } q, q' \in Q \text{ mit } d(q, q') < \delta.$$

Somit folgt für $k \rightarrow \infty$ und mit d stetig:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} d(f_{n_k^k}(q), f_{n_k^k}(q')) &\leq \varepsilon \text{ für alle } q, q' \in Q \text{ mit } d(q, q') < \delta \\ \Rightarrow d(f(q), f(q')) &\leq \varepsilon \text{ für alle } q, q' \in Q \text{ mit } d(q, q') < \delta \end{aligned}$$

Folglich ist $f: Q \rightarrow Y$ gleichmäßig stetig.

- Gleichmäßig stetige Funktionen lassen sich stetig fortsetzen:

$$f: X \longrightarrow Y$$

$$x \longmapsto \lim_{i \rightarrow \infty} f(q_i), \text{ wobei } q_i \in Q \text{ mit } \lim_{i \rightarrow \infty} q_i = x$$

- Da f gleichmäßig stetig ist, ist $(f(q_i))_{i \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge.
- Cauchy-Folgen sind beschränkt, das heißt es existiert ein $r > 0$ und $y \in Y$ mit $f(q_i) \in \overline{B_r(y)} \subseteq Y$.
- $\overline{B_r(y)}$ ist als abgeschlossene Teilmenge in einem kompakten Raum wieder kompakt, also insbesondere folgenkompakt. Folglich existiert eine konvergente Teilfolge $(f(q_{i_k}))_{k \in \mathbb{N}}$. Sei $\tilde{y} = \lim_{k \rightarrow \infty} f(q_{i_k})$. Da $(f(q_i))$ eine Cauchy-Folge ist, gilt $\lim_{i \rightarrow \infty} f(q_i) = \tilde{y}$.
- Sei nun $K \subseteq X$ kompakt. Wir müssen nun zeigen, dass $(f_{n_k^k}: K \rightarrow Y)_{k \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $f: K \rightarrow Y$ konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$. Gesucht ist $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n_k^k > N$ und $x \in K$ gilt:

$$d(f_{n_k^k}(x), f(x)) < \varepsilon.$$

- Da $(f_{n_k} : X \rightarrow Y)_k$ gleichstetig ist, existiert für $\frac{\varepsilon}{3}$ ein $\delta > 0$, sodass für alle n_k^k gilt:

$$d(f_{n_k}(x), f_{n_k}(x')) \leq \frac{\varepsilon}{3} \text{ für alle } x, x' \in K \text{ mit } d(x, x') < \delta \quad (24)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(f_{n_k}(x), f_{n_k}(x')) \leq \frac{\varepsilon}{3} \text{ für alle } x, x' \in K \text{ mit } d(x, x') < \delta \quad (25)$$

- Weiter betrachten wir die offene Überdeckung

$$K \subseteq \bigcup_{q_j \in Q} B_\delta(q_j) \xrightarrow{K \text{ kompakt}} K \subseteq \bigcup_{j=1}^l B_\delta(q_j) \quad (26)$$

- Wähle $N \in \mathbb{N}$, sodass

$$d(f_{n_k}(q_j), f(q_j)) \leq \frac{\varepsilon}{3} \text{ für alle } n_k \geq N \text{ und alle } j \in \{1, \dots, l\} \quad (27)$$

Insgesamt erhalten wir:

$$\begin{aligned} d(f(x), f_{n_k}(x)) &\stackrel{(26)}{\leq} d(f(x), f(q_j)) + d(f(q_j), f_{n_k}(q_j)) + d(f_{n_k}(q_j), f_{n_k}(x)) \\ &\leq \underbrace{\frac{\varepsilon}{3}}_{(25)} + \underbrace{\frac{\varepsilon}{3}}_{(27)} + \underbrace{\frac{\varepsilon}{3}}_{(24)} = \varepsilon \text{ für alle } n_k \geq N \text{ und alle } x \in K. \end{aligned}$$

□

BEWEIS (Theorem 2.13(ii)): Seien $x, y \in X, x \neq y$ beliebig. Da X ein Längenraum ist, existieren Wege

$$\begin{aligned} c_n : [a_n, b_n] &\longrightarrow X \\ a_n &\longmapsto x \\ b_n &\longmapsto y \end{aligned}$$

mit $\ell(c_n) \leq d(x, y) + \frac{1}{n}$ und betrachten die Folge $(c'_n : [0, 1] \rightarrow X)_{n \in \mathbb{N}}$.

- Die Folge $(c'_n)_n$ ist gleichstetig, denn: Sei $\varepsilon > 0$. Wir definieren $\delta := \frac{\varepsilon}{d(x, y) + 1}$. Es gilt $\ell(c'_n) = \ell(c_n) = d(x, y) + \frac{1}{n} \Leftrightarrow 1 \leq \frac{d(x, y) + 1}{\ell(c'_n)}$, und für $t, t' \in [0, 1]$ mit $d(t, t') < \delta$ folgt damit:

$$\begin{aligned} d(c'_n(t), c'_n(t')) &\leq \ell(c'_n|_{[t, t']}) \\ &\leq \frac{\ell(c'_n|_{[t, t']})}{\ell(c'_n)} \cdot (d(x, y) + 1) \\ &= d(t, t') \cdot (d(x, y) + 1) \\ &< \delta \cdot (d(x, y) + 1) \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

- Weiter gilt $\text{im}(c'_n) \subseteq \overline{B_{d(x,y)+1}(x)}$. Nach Theorem 2.13(i) ist $\overline{B_{d(x,y)+1}(x)}$.
- Insgesamt haben wir $(c'_n: [0, 1] \rightarrow \overline{B_{d(x,y)+1}(x)})_n$ gleichstetig mit $[0, 1]$ separabel und $\overline{B_{d(x,y)+1}(x)}$ kompakt. Nach Lemma 2.15 existiert also eine konvergente Teilfolge $(c'_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, die gleichmäßig gegen den Weg $c': [0, 1] \rightarrow X$ von x nach y konvergiert.
- Für $\frac{1}{k}$ existiert nach Proposition 2.6 ein $n \in \mathbb{N}$, sodass mit $\ell(c'_{n_k}) \leq d(x, y) + \frac{1}{n_k}$ gilt:

$$\begin{aligned}
 d(x, y) &\leq \ell(c') \leq \ell(c'_{n_k}) + \frac{1}{k} \text{ für alle } n_k \geq N \\
 &\leq d(x, y) + \frac{1}{n_k} + \frac{1}{k} \text{ für alle } n_k \geq N \\
 &\xRightarrow{\lim} d(x, y) \leq \ell(c') \leq d(x, y) \\
 &\Rightarrow \ell(c') = d(x, y)
 \end{aligned}$$

Dann ist $\tilde{c}': [0, d(x, y)] \rightarrow X$ aus Proposition 2.6 eine Geodäte von x nach y . \square

2.16 Korollar

Sei X ein Längenraum. Dann gilt:

$$X \text{ vollständig und lokal kompakt} \Leftrightarrow \overline{B_r(x)} \text{ ist kompakt für alle } x \in X \text{ und alle } r \in \mathbb{R}_{>0}.$$

BEWEIS:

" \Rightarrow ": Theorem 2.13.

" \Leftarrow ": Dass X lokal kompakt ist, ist klar.

Sei $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in X . Cauchy-Folgen sind beschränkt, folglich existiert ein $x \in X$ und $r > 0$ mit $x_i \in \overline{B_r(x)}$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Nach Voraussetzung ist $\overline{B_r(x)}$ kompakt, also existiert eine konvergente Teilfolge $(x_{i_n})_n$ mit $x_{i_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x'$. Da $(x_i)_i$ eine Cauchy-Folge ist, gilt $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = x'$. \square

2.17 Definition (Stetige Abhängigkeit von Endpunkten)

Sei X ein eindeutig geodätischer Raum. Die Geodäten in X hängen stetig von ihren Endpunkten ab, wenn folgendes gilt:

Seien $x, y \in X$ beliebig und $c: [0, d(x, y)] \rightarrow X$ die Geodäte von x nach y . Seien weiter $(x_n)_n, (y_n)_n$ konvergente Folgen in X mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ und $c_n: [0, d(x_n, y_n)] \rightarrow X$ die Geodäten von x_n nach y_n . Dann konvergiert die Folge von Wegen

$$\left(\begin{array}{ccc} c_n: [0, 1] & \longrightarrow & [0, d(x_n, y_n)] \longrightarrow X \\ t & \longmapsto & t \cdot d(x_n, y_n) \longmapsto c_n(t \cdot d(x_n, y_n)) \end{array} \right)$$

gleichmäßig gegen

$$\begin{array}{ccc} c': [0, 1] & \longrightarrow & [0, d(x, y)] \longrightarrow X \\ t & \longmapsto & t \cdot d(x, y) \longmapsto c(t \cdot d(x, y)). \end{array}$$

2.18 Satz

Sei X ein CAT(0)-Raum. Dann hängen die Geodäten stetig von ihren Endpunkten ab.

BEWEIS: Seien $x, y \in X$ beliebig. Seien weiter $(x_n)_n, (y_n)_n$ konvergente Folgen in X mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$. Weiter seien $c: x \rightsquigarrow y, c_n: x_n \rightsquigarrow y_n, \gamma_n: x_n \rightsquigarrow y$ Geodäten. Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $N \in \mathbb{N}$, sodass $d(x, x_n), d(y, y_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq N$.

$$\begin{aligned} d(c'(t), c'_n(t)) &\stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} d(c'(t), \gamma'_n(t)) + d(\gamma'_n(t), c'_n(t)) \\ &\stackrel{d \text{ konv.}}{\leq} (1-t) \cdot d(c'(0), \gamma'_n(0)) + t \cdot d(\gamma'_n(1), c'_n(1)) \\ &\leq d(x, x_n) + d(y, y_n) = \varepsilon \text{ für alle } n \geq N. \end{aligned} \quad \square$$

2.19 Definition (Linear umparametrisierte Geodäte)

02.12. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $\gamma: x \rightsquigarrow y$ eine Geodäte sowie $x, y \in X$. Wir definieren [10]

$$\begin{aligned} \gamma': [0, 1] &\longrightarrow X \\ t &\longmapsto \gamma(t \cdot d(x, y)). \end{aligned}$$

Der stetige Weg γ' heißt **linear umparametrisierte Geodäte**.

2.20 Korollar

Beweis: Übung!

Sei X ein kompakter metrischer Raum und $(c_n: [0, 1] \rightarrow X)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von linear umparametrisierten Geodäten. Dann existiert eine linear umparametrisierte Geodäte $c: [0, 1] \rightarrow X$ und eine Teilfolge $(c_{n_k})_k$, sodass $(c_{n_k})_k$ gleichmäßig gegen c konvergiert.

2.21 Satz

Sei X ein eindeutig geodätischer Raum, in dem alle abgeschlossenen Bälle kompakt sind. Dann hängen die Geodäten in X stetig von ihren Endpunkten ab.

BEWEIS: Seien $x, y \in X$ beliebig. Seien weiter $(x_n)_n, (y_n)_n$ Folgen in X mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$. Seien weiter $(c_n: [0, 1] \rightarrow X)_n$ linear umparametrisierte Geodäten von x_n nach y_n . Sei weiter $c: [0, 1] \rightarrow X$ die linear umparametrisierte Geodäte von x nach y . Wir müssen zeigen, dass $(c_n)_n$ gleichmäßig gegen c konvergiert.

Wir zeigen zuerst, dass $(c_n)_n$ punktweise gegen c konvergiert. Wähle $R > 0$, sodass $\text{im}(c_n) \subseteq \overline{B_R(x)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Angenommen, $(c_n)_n$ konvergiere nicht punktweise gegen c . Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ und $t_0 \in (0, 1)$ und eine Teilfolge $(c_{n_k})_k$, sodass gilt:

$$d(c_{n_k}(t_0), c(t_0)) \geq \varepsilon \text{ für alle } k \in \mathbb{N}. \quad (28)$$

Nach Korollar 2.20 existiert eine Teilfolge $(c_{n_{k_i}})_i$ von $(c_{n_k}: [0, 1] \rightarrow \overline{B_R(x)})_k$, die gleichmäßig gegen eine linear umparametrisierte Geodäte $c': [0, 1] \rightarrow X$ konvergiert. Es gilt $c_{n_{k_i}}(0) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} x = c'(0)$ sowie

$c_{n_{k_i}}(1) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} y = c'(1)$. Weiter gilt

$$\lim_{i \rightarrow \infty} d(c_{n_{k_i}}(t_0), c(t_0)) \stackrel{(28)}{\geq} \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N}$$

und wegen d stetig

$$d(c'(t_0), c(t_0)) \geq \varepsilon,$$

was ein Widerspruch zur Eindeutigkeit der Geodäten ist.

Als Übung zeige man nun: Wenn $(c_n)_n$ punktweise gegen c konvergiert, dann auch gleichmäßig (für beliebige metrische Räume). \square

2.22 Bemerkung

Konstruktionsskizze von einem vollständigen eindeutig geodätischen Raum, in dem die Geodäten nicht stetig von ihren Endpunkten abhängen:

Späßige Konstruktion einfügen!

2.2 Längenmetrik auf Überlagerungsräumen

2.23 Definition (Induzierte Pseudometrik)

Sei X ein Längenraum, \tilde{X} ein topologischer Raum und $p: \tilde{X} \rightarrow X$ ein **lokaler Homöomorphismus**, das heißt für jeden Punkt $\tilde{x} \in \tilde{X}$ existiert eine offene Umgebung $\tilde{U}_{\tilde{x}} \subseteq \tilde{X}$ von \tilde{x} , sodass $U := p(\tilde{U}_{\tilde{x}}) \subseteq X$ eine offene Menge ist und $p|_{\tilde{U}_{\tilde{x}}}: \tilde{U}_{\tilde{x}} \rightarrow U$ ein Homöomorphismus ist.

Sei $c: [a, b] \rightarrow \tilde{X}$ ein Weg. Wir definieren $\ell(c) := \ell(p \circ c)$. Für $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X}$ setze

$$\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) := \inf \{ \ell(c) : c \text{ ist ein rektifizierbarer Weg von } \tilde{x} \text{ nach } \tilde{y} \}.$$

\tilde{d} heißt die **von p induzierte Pseudometrik auf \tilde{X}** .

2.24 Satz

Sei X ein Längenraum, \tilde{X} ein Hausdorff-Raum. Sei weiter $p: \tilde{X} \rightarrow X$ ein lokaler Homöomorphismus und \tilde{d} die von p induzierte Pseudometrik auf \tilde{X} . Dann gilt:

- (i) \tilde{d} ist eine Metrik auf \tilde{X} .
- (ii) p ist eine **lokale Isometrie**, das heißt für jedes $\tilde{x} \in \tilde{X}$ existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass $p: B_\varepsilon(\tilde{x}) \rightarrow B_\varepsilon(p(\tilde{x}))$ eine Isometrie ist.
- (iii) \tilde{d} ist eine Längenmetrik.
- (iv) Die Eigenschaften (ii) und (iii) legen \tilde{d} eindeutig fest.

BEWEIS:

- (i) Es ist nur zu zeigen, dass \tilde{d} keine Pseudometrik ist. Seien $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X}$ beliebig und verschieden. Da \tilde{X} ein Hausdorff-Raum ist, existieren offene Umgebungen $\tilde{U}_{\tilde{x}}, \tilde{U}_{\tilde{y}}$ von \tilde{x} bzw. \tilde{y} in \tilde{X} mit $\tilde{U}_{\tilde{x}} \cap \tilde{U}_{\tilde{y}} = \emptyset$.

04.12.
[11]

Wir können $\tilde{U}_{\tilde{x}}$ so klein wählen, dass $p|_{\tilde{U}_{\tilde{x}}} \rightarrow U$ ein Homöomorphismus auf eine offene Teilmenge U von X ist.

Sei nun c ein beliebiger Weg von \tilde{x} nach \tilde{y} . Dann gilt $\text{im}(p \circ c) \not\subseteq U$, denn andernfalls wäre $\text{im}(p^{-1}|_{\tilde{U}_{\tilde{x}}} \circ p \circ c) = \text{im}(c) \subseteq \tilde{U}_{\tilde{x}}$ und damit $c(1) = \tilde{y} \in \tilde{U}_{\tilde{x}}$, was ein Widerspruch ist.

Sei $r > 0$ so gewählt, dass $B_r(x) = B_r(p(\tilde{x})) \subseteq U$. Wir betrachten:

$$p: p|_{\tilde{U}_{\tilde{x}}}^{-1}(B_r(x)) \rightarrow B_r(x)$$

Da $\text{im}(p \circ c) \not\subseteq B_r(x)$, existiert ein $t \in [0, 1]$ mit $p \circ c(t) \notin B_r(x)$ und somit ein $s \in [0, 1]$, sodass $p \circ c(s) \in \partial B_r(x)$. Damit folgt

$$\ell(c) = \ell(p \circ c) \geq d(p \circ c(s), p \circ c(0)) = r.$$

Da c ein beliebiger Weg war, folgt $\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) \geq r$.

- (ii) Sei $\tilde{x} \in \tilde{X}$ beliebig. Da p ein lokaler Homöomorphismus ist, existiert eine offene Umgebung $\tilde{U}_{\tilde{x}}$ von \tilde{x} in \tilde{X} und eine offene Umgebung $U \subseteq X$, sodass $p|_{\tilde{U}_{\tilde{x}}} : \tilde{U}_{\tilde{x}} \rightarrow U$ ein Homöomorphismus ist. Sei $s: U \rightarrow \tilde{U}_{\tilde{x}}$ die Inverse von $p|_{\tilde{U}_{\tilde{x}}}$. Wähle $r > 0$, sodass $B_{2r}(p(\tilde{x})) \subseteq U$ gilt, und zeige, dass

$$s' := s|_{B_r(p(\tilde{x}))} : B_r(p(\tilde{x})) \rightarrow B_r(\tilde{x})$$

eine Isometrie ist.

surjektiv: Sei $y \in B_r(\tilde{x})$ beliebig. Zu zeigen ist $p(y) \in B_r(p(\tilde{x}))$.

$$d(p(y), p(\tilde{x})) \stackrel{\text{Def.}}{\leq} \tilde{d}(y, \tilde{x}) < r \implies p(y) \in B_r(p(\tilde{x})).$$

Weiter gilt $s'(p(y)) = y$, da s die Inverse $p|_{\tilde{U}_{\tilde{x}}}$ ist.

isom. Einbettung: Seien nun $a, b \in B_r(p(\tilde{x}))$ beliebig. Wir müssen zeigen, dass $\tilde{d}(s'(a), s'(b)) = d(a, b)$ gilt. Nach Definition von \tilde{d} gilt $\tilde{d}(s'(a), s'(b)) \geq d(a, b)$.

Sei $\varepsilon \in (0, r)$ beliebig. Da X ein Längenraum ist, existiert ein Weg

$$c_\varepsilon: [0, \ell(c_\varepsilon)] \longrightarrow B_{2r}(p(\tilde{x}))$$

$$0 \longmapsto a$$

$$\ell(c_\varepsilon) \longmapsto b$$

mit $\ell(c_\varepsilon) \leq d(a, b) + \varepsilon$. Wir betrachten den Weg

$$s \circ c_\varepsilon: [0, \ell_\varepsilon] \longrightarrow B_{2r}(\tilde{x})$$

$$0 \longmapsto s'(a)$$

$$\ell(c_\varepsilon) \longmapsto s'(b)$$

Damit gilt $\tilde{d}(s'(a), s'(b)) \leq \ell(c_\varepsilon) \leq d(a, b) + \varepsilon$ und es folgt für $s \rightarrow 0$: $\tilde{d}(s'(a), s'(b)) \leq d(a, b)$.

(iii) Da p eine lokale Isometrie ist, ist die Länge von einem Weg in (\tilde{X}, \tilde{d}) dieselbe wie die Länge von dem Weg unter p .

(iv) Sei d' eine andere Längenmetrik auf \tilde{X} , sodass $p: (\tilde{X}, d') \rightarrow (X, d)$ eine lokale Isometrie ist. Dann ist $\text{id}: (\tilde{X}, d') \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{d})$ eine lokale Isometrie, denn:

Sei $\tilde{x} \in \tilde{X}$ beliebig. Da p eine lokale Isometrie ist, existiert ein $\varepsilon_1 > 0$, sodass $p: (B_{\varepsilon_1}(\tilde{x}), d') \rightarrow B_{\varepsilon_1}(p(\tilde{x}))$ eine Isometrie ist, und ein $\varepsilon_2 > 0$, sodass $p: (B_{\varepsilon_2}(\tilde{x}), \tilde{d}) \rightarrow B_{\varepsilon_2}(p(\tilde{x}))$ eine Isometrie ist. Sie nun $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Dann ist $\text{id}_{B_\varepsilon(\tilde{x})} = p^{-1} \circ \text{id}_{B_\varepsilon(p(\tilde{x}))} \circ p$.

$$\begin{array}{ccc} (B_\varepsilon(\tilde{x}), d') & \xrightarrow{\text{id}} & (B_\varepsilon(\tilde{x}), \tilde{d}) \\ p \downarrow \simeq & & \simeq \uparrow p^{-1} \\ (B_\varepsilon(p(\tilde{x})), d) & \xrightarrow[\simeq]{\text{id}} & (B_\varepsilon(p(\tilde{x})), d) \end{array}$$

Für einen beliebigen Weg $c: [a, b] \rightarrow \tilde{X}$ gilt somit $\ell^{d'}(c) = \ell^{\tilde{d}}(c)$. Da d' und \tilde{d} beide Längenmetriken sind, stimmen sie überein. \square

2.25 Bemerkung

Jede Überlagerung $p: \tilde{X} \rightarrow X$ ist ein lokaler Homöomorphismus, und falls X hausdorffsch ist, dann ist \tilde{X} ein Hausdorff-Raum. Man kann also die Konstruktion aus Satz 2.24 insbesondere auf Überlagerungen anwenden.

Wie erkennen wir Überlagerungen?

2.26 Definition (Lokal eindeutig geodätisch)

Sei X ein metrischer Raum. X heißt **lokal eindeutig geodätisch**, wenn für alle $x \in X$ ein $r > 0$ existiert, sodass für beliebige $y, z \in B_r(x)$ eine eindeutige Geodäte $\gamma: y \rightsquigarrow z$ existiert und $\text{im}(\gamma) \subseteq B_r(x)$ gilt.

2.27 Beispiel

Sei X ein lokaler CAT(0)-Raum. Dann ist X lokal eindeutig geodätisch.

2.28 Satz

Sei $p: \tilde{X} \rightarrow X$ eine Abbildung zwischen Längenträumen mit folgenden Eigenschaften:

- (i) X ist wegzusammenhängend.
- (ii) p ist ein lokaler Homöomorphismus.
- (iii) Für jeden Weg $c: [a, b] \rightarrow \tilde{X}$ gilt $\ell_{\tilde{X}}(c) \leq \ell_X(p \circ c)$.
- (iv) X ist lokal eindeutig geodätisch.

(v) Für $x \in X$ beliebig hängen die Geodäten in einem eundeutig geodätischen Ball um x von ihren Endpunkten ab.

(vi) \tilde{X} ist vollständig.

Dann ist $p: \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung.

BEWEIS: Wir zeigen zuerst, dass wir rektifizierbare Wege $c: [0, 1] \rightarrow X$ eindeutig liften können. Das heißt:

Sei $c: [0, 1] \rightarrow X$ ein rektifizierbarer Weg und $\tilde{x} \in \tilde{X}$ mit $p(\tilde{x}) = c(0)$. Dann existiert ein eindeutiger Weg $\tilde{c}: [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ mit $p \circ \tilde{c} = c$ – der **Lift** von c .

Zur Eindeutigkeit: Übungsaufgabe.

Zur Existenz: Sei $c: [0, 1] \rightarrow X$ ein rektifizierbarer Weg und $\tilde{x} \in \tilde{X}$ mit $p(\tilde{x}) = c(0)$. Wir definieren $S := \{t \in [0, 1] : \text{es existiert ein Lift } \tilde{c} \text{ von } c|_{[0, t]}\}$ und zeigen, dass S offen, abgeschlossen und nichtleer ist. Dann folgt $S = [0, 1]$, da $[0, 1]$ zusammenhängend ist.

- $S \neq \emptyset$, da $0 \in S$ ($\tilde{c}: \{0\} \rightarrow \tilde{X}, 0 \mapsto \tilde{x}$)
- S ist offen: Sei $t \in S$ beliebig, das heißt es existiert ein Lift $\tilde{c}|_{[0, t]}$ von $c|_{[0, t]}$. Betrachte $\tilde{c}(t) \in \tilde{X}$. Da p ein lokaler Homöomorphismus ist, existiert eine offene Teilmenge $\tilde{U}_{\tilde{c}(t)} \subseteq \tilde{X}$, sodass $p: \tilde{U}_{\tilde{c}(t)} \rightarrow U \subseteq X$ ein Homöomorphismus ist. Da U offen ist, existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass $B_\varepsilon(p \circ \tilde{c}(t)) \subseteq U$. Sei $\tilde{U}'_{\tilde{c}(t)} := p^{-1}(B_\varepsilon(p \circ \tilde{c}(t)))$ und $s: B_\varepsilon(p \circ \tilde{c}(t)) \rightarrow \tilde{U}'_{\tilde{c}(t)}$. Wir definieren:

$$\begin{aligned} \tilde{c}: [0, t + \varepsilon) &\longrightarrow \tilde{X} \\ t' &\longmapsto \begin{cases} \tilde{c}(t'), & t' \in [0, t] \\ s \circ c(t'), & t' \in [t, t + \varepsilon). \end{cases} \end{aligned}$$

Bild einfügen!

\tilde{c} ist stetig und ein Lift von $c|_{[0, t + \varepsilon)}$, also ist $[0, t + \varepsilon) \subseteq S$ und S damit offen.

- S ist abgeschlossen: Wir nehmen an, dass $[0, a) \subseteq S$. Zu zeigen ist dann $a \in S$. Sei $t_n \in [0, a)$ eine beliebige Folge mit $t_n \rightarrow a$. Seien $y_n := \tilde{c}(t_n) \in \tilde{X}$. Da \tilde{X} ein Längenraum ist, gilt o.B.d.A. für $t_n \leq t_m$

$$\tilde{d}(y_n, y_m) \leq \ell_{\tilde{X}}(\tilde{c}|_{[t_n, t_m]}) \stackrel{\text{(iii)}}{\leq} \ell_X(c|_{[t_n, t_m]}) \in \mathbb{R},$$

da c ein rektifizierbarer Weg ist. Wir haben eine konvergente Folge in \mathbb{R} :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ell_X(c|_{[0, t_n]}) = \ell_X.$$

Damit erhalten wir

$$\tilde{d}(y_n, y_m) \leq \ell_X(c|_{[t_n, t_m]}) = \ell_X(c|_{[0, t_m]}) - \ell_X(c|_{[0, t_n]}).$$

Somit ist $\tilde{d}(y_n, y_m)$ eine Nullfolge in $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. Da \tilde{X} vollständig ist, existiert ein

$y \in \tilde{X}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$. Wir definieren

$$\tilde{c}: [0, a] \longrightarrow \tilde{X}$$

$$t \longmapsto \begin{cases} \tilde{c}(t), & t \in [0, a) \\ y, & t = a. \end{cases}$$

\tilde{c} ist stetig, denn: Sei $t_n \in [0, a)$ eine beliebige Folge, die gegen a konvergiert. Dann erhalten wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{c}(t_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y = \tilde{c}(a) = \tilde{c}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} t_n\right)$$

und \tilde{c} ist ein Lift von $c|_{[0, a]}$, denn:

$$p \circ \tilde{c}(a) = p(y) = p\left(\lim_{n \rightarrow \infty} y_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} p(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} p \circ \tilde{c}(t_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} c(t_n) = c\left(\lim_{n \rightarrow \infty} t_n\right) = c(a).$$

- Nun können wir zeigen, dass p surjektiv ist: Sei $x \in X$ und $y \in \tilde{X}$ beliebig. Da X wegzusammenhängend ist, existiert ein rektifizierbarer Weg c von $p(y)$ nach x . Sei \tilde{c} der Lift von c , das heißt $p \circ \tilde{c} = c$ und insbesondere $p \circ \tilde{c}(1) = c(1) = x$. Dann ist $\tilde{c}(1)$ ein Urbild von x unter p .
- Jetzt müssen wir zeigen, dass jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung U hat, sodass $p^{-1}(U)$ in eine disjunkte Vereinigung von offenen Mengen, die homöomorph zu U sind, zerfällt. Sei also $x \in X$ beliebig. Nach (iv) und (v) existiert ein $r > 0$, sodass $B_r(x)$ eindeutig geodätisch ist und die Geodäten in $B_r(x)$ stetig von ihren Endpunkten abhängen. Sei $y \in p^{-1}(x)$ beliebig. Wir definieren

$$s_y: B_r(x) \longrightarrow \tilde{X}$$

$$x' \longmapsto \tilde{c}_{x'}(1),$$

wobei $\tilde{c}_{x'}$ der Lift der linear umparametrisierten Geodäte $c_{x'}: [0, 1] \rightarrow X, x \rightsquigarrow x'$ mit $\tilde{c}_{x'}(0) = y$.

- Nun ist $s_y: B_r(x) \rightarrow s_y(B_r(x))$ ein Homöomorphismus und $s_y(B_r(x))$ ist offen: Mit Hilfe von (v) zeigt man, dass s_y eine Inverse zu p ist. Wir zeigen die Stetigkeit von s_y in $z \in B_r(x)$ beliebig. Betrachte die linear umparametrisierte eindeutige Geodäte $c_z: [0, 1] \rightarrow B_r(x), x \rightsquigarrow z$ und den eindeutigen Lift $\tilde{c}_z: [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ mit $\tilde{c}_z(0) = y$. Da \tilde{c}_z stetig ist und $[0, 1]$ kompakt, ist das Bild von \tilde{c}_z kompakt. Weiter ist p ein lokaler Homöomorphismus. Folglich existieren endlich viele Bälle $\tilde{B}_1, \dots, \tilde{B}_k$ in \tilde{X} mit $\tilde{c}_z([0, 1]) \subseteq \tilde{B}_1 \cup \dots \cup \tilde{B}_k$ und sodass

$$p|_{\tilde{B}_i}: \tilde{B}_i \longrightarrow p(\tilde{B}_i) =: B_i$$

ein Homöomorphismus auf die offene Menge B_i ist. Da $p \circ \tilde{c}_z = c_z$ ist, gilt $c_z([0, 1]) \subseteq B_1 \cup \dots \cup B_k$. O.B.d.A. sei $c_z\left(\left[\frac{l-1}{n}, \frac{l}{n}\right]\right) \subseteq B_l$ für $l \in \{1, \dots, k\}$. Sei s^l die lokale Inverse von $p|_{\tilde{B}_l}$. Es gilt also $s^l: B_l \rightarrow \tilde{B}_l$ und $s^l \circ p|_{\tilde{B}_l} = \text{id}_{\tilde{B}_l}$ sowie $p|_{\tilde{B}_l} \circ s^l = \text{id}_{B_l}$. Wir erhalten $s^l(c_z(t)) = s_y(c_z(t))$ für $t \in \left[\frac{l-1}{n}, \frac{l}{n}\right]$.

Da die Geodäten in $B_r(x)$ stetig von ihren Endpunkten abhängen, existiert ein $\delta > 0$, sodass für

Bild einfügen

Bild einfügen

Bild einfügen

alle $z' \in B_\delta(z) \subseteq B_r(x)$ gilt:

$$c_{z'}\left(\left[\frac{l-1}{n}, \frac{l}{n}\right]\right) \subseteq B_l \text{ für } l \in \{1, \dots, k\}.$$

Wir definieren:

$$\begin{aligned} \tilde{s}: B_\delta(z) \times [0, 1] &\longrightarrow \tilde{X} \\ (z', t) &\longmapsto s^l(c_{z'}(t)) \text{ für } t \in \left[\frac{l-1}{n}, \frac{l}{n}\right]. \end{aligned}$$

\tilde{s} ist wohldefiniert und stetig und es gilt $s_y|_{B_\delta(z)} = \tilde{s}|_{B_\delta(z) \times \{1\}}$. Folglich ist s_y stetig in z . \square

2.3 Die Exponentialabbildung

09.12. Sei X ein metrischer Raum und $x_0 \in X$ beliebig. Wir werden nun einen Raum \tilde{X}_{x_0} und eine Abbildung
[12] $\exp: \tilde{X}_{x_0} \rightarrow X$ konstruieren, die für „schöne“ Basisräume die universelle Überlagerung werden wird.

2.29 Definition (Exponentialabbildung)

Sei (X, d_X) ein metrischer Raum und $x_0 \in X$ beliebig. Wir definieren die Menge

$$\begin{aligned} \tilde{X}_{x_0} := & \{c: [0, 1] \rightarrow X \text{ linear unparametrisierte lokale Geodäte mit } c(0) = x_0\} \\ & \cup \{c_{x_0}: [0, 1] \rightarrow X : c_{x_0}(t) = x_0 \text{ für alle } t \in [0, 1]\} \end{aligned}$$

Weiter definieren wir auf der Menge \tilde{X}_{x_0} eine Metrik durch

$$d(c_1, c_2) := \sup\{d_X(c_1(t), c_2(t)) : t \in [0, 1]\}$$

für $c_1, c_2 \in \tilde{X}_{x_0}$ und definieren die **Exponentialabbildung** wie folgt:

$$\begin{aligned} \exp: \tilde{X}_{x_0} &\longrightarrow X \\ c &\longmapsto c(1). \end{aligned}$$

2.30 Bemerkung

Die Abbildung $\exp: (\tilde{X}_{x_0}, d) \rightarrow (X, d_X)$ ist 1-Lipschitz. Genauer: Seien $c_1, c_2 \in \tilde{X}_{x_0}$ beliebig. Dann haben wir

$$\begin{aligned} d_X(\exp(c_1), \exp(c_2)) &\stackrel{\text{Def.}}{=} d_X(c_1(1), c_2(1)) \\ &\leq \sup_{t \in [0, 1]} d_X(c_1(t), c_2(t)) \\ &\stackrel{\text{Def.}}{=} d(c_1, c_2). \end{aligned}$$

2.31 Satz

Sei (X, d_X) ein metrischer Raum, der lokal CAT(0) und lokal vollständig ist, das heißt für jedes $x \in X$ existiert ein $r > 0$, sodass $B_r(x)$ CAT(0) und $\overline{B_r(x)}$ vollständig ist. Dann gilt:

- (i) \tilde{X}_{x_0} ist zusammenziehbar.
- (ii) $\exp: \tilde{X}_{x_0} \rightarrow X$ ist eine lokale Isometrie.
- (iii) Wenn X vollständig ist, dann ist \tilde{X}_{x_0} vollständig.

BEWEIS: Wir zeigen zuerst nur (i). Für (ii) und (iii) brauchen wir ein technisches Lemma.

Wir zeigen, dass die Abbildung

$$H: \tilde{X}_{x_0} \times [0, 1] \longrightarrow \tilde{X}_{x_0}$$

$$(c, s) \longmapsto [c_s: t \mapsto c(s \cdot t)]$$

eine Homotopie von $f: \tilde{X}_{x_0} \rightarrow \tilde{X}_{x_0}, c \mapsto c_{x_0}$ und $\text{id}: \tilde{X}_{c_0} \rightarrow \tilde{X}_{c_0}$ ist.

- H ist wohldefiniert. Für $c \in \tilde{X}_{x_0}$ beliebig haben wir

$$H(c, 0) = [c_0: t \mapsto c(0 \cdot t) = c(0) = x_0] = f(c)$$

$$H(c, 1) = [c_1: t \mapsto c(1 \cdot t) = c(t)] = \text{id}(c)$$

- Wir zeigen Folgenstetigkeit: Sei $(c_n, s_n) \in \tilde{X}_{x_0} \times [0, 1]$ für $n \in \mathbb{N}$ eine konvergente Folge mit $c_n \rightarrow c$, $s_n \rightarrow s$. Zu zeigen ist $\lim_{n \rightarrow \infty} H(c_n, s_n) = H(c, s)$, also $\lim_{n \rightarrow \infty} c_{n_{s_n}} = c_s$. Es gilt:

$$\begin{aligned} d(c_{n_{s_n}}, c_s) &\stackrel{\text{Def.}}{=} \sup_{t \in [0, 1]} d_X(c_n(s_n \cdot t), c(st)) \\ &\stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \sup_{t \in [0, 1]} d_X(c_n(s_n \cdot t), c(s_n \cdot t)) + \sup_{t \in [0, 1]} d_X(c(s_n \cdot t), c(st)) \\ &\leq d(c_n, c) + \sup_{t \in [0, 1]} d_X(c(s_n \cdot t), c(st)) \\ &\leq d(c_n, c) + \sup_{t \in [0, 1]} \lambda \cdot |s_n t - st| \text{ für ein } \lambda \geq 0, \text{ da } c \text{ lin. ump. Geodäte und } [0, 1] \text{ kompakt} \\ &\leq d(c_n, c) + \lambda \cdot |s_n - s| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt, dass die Folge $(c_{n_{s_n}})_n$ gegen c_s konvergiert. □

Der Beweis von (ii) und (iii) ist wesentlich aufwändiger. Wir müssen zuerst verstehen, wie eine Umgebung einer gegebenen linear umparametrisierten Geodäte aussieht, und welche Beziehung es zwischen den Geodäten in solch einer Umgebung und ihren Endpunkten gibt.

2.32 Lemma

Sei (X, d_X) ein metrischer Raum, der lokal CAT(0) und lokal vollständig ist und $c: [0, 1] \rightarrow X$ eine

linear umparametrisierte lokale Geodäte von $x \in X$ nach $y \in X$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass für alle $\bar{x} \in B_\varepsilon(x)$ und $\bar{y} \in B_\varepsilon(y)$ eine eindeutige linear umparametrisierte lokale Geodäte $c_{\bar{x},\bar{y}}: [0, 1] \rightarrow X$ existiert mit $c_{\bar{x},\bar{y}}(0) = \bar{x}$ und $c_{\bar{x},\bar{y}}(1) = \bar{y}$ sowie

$$\sup_{t \in [0,1]} d_X(c_{\bar{x},\bar{y}}(t), c(t)) < \varepsilon.$$

Bild einfügen.

Weiter gilt, dass für je zwei linear umparametrisierte Geodäten $c_1, c_2: [0, 1] \rightarrow X$ mit $\sup_{t \in [0,1]} d_X(c_1(t), c(t)) < \varepsilon$ und $\sup_{t \in [0,1]} d_X(c_2(t), c(t)) < \varepsilon$ die Funktion

$$\begin{aligned} \Phi: [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ t &\longmapsto d_X(c_1(t), c_2(t)) \end{aligned}$$

konvex ist, das heißt für alle $s, t, \lambda \in [0, 1]$ gilt

$$\Phi(\lambda s + (1 - \lambda)t) \leq \lambda \Phi(s) + (1 - \lambda)\Phi(t).$$

Insbesondere gilt also $\Phi(t) \leq t \cdot \Phi(1)$ für alle $t \in [0, 1]$.

Referenz einfügen

Dieses Lemma beweisen zu einem späteren Zeitpunkt (siehe ??).

BEWEIS (Fortsetzung von Satz 2.31):

(ii) Sei $c \in \tilde{X}_{x_0}$ beliebig und $\varepsilon > 0$ so, wie in Lemma 2.32. Dann ist $\exp: B_\varepsilon(c) \rightarrow B_\varepsilon(c(1))$ eine Isometrie:

- \exp ist surjektiv: Sei $\bar{y} \in B_\varepsilon(c(1))$ beliebig. Nach Lemma 2.32 existiert eine linear umparametrisierte Geodäte $c_{x_0\bar{y}}: [0, 1] \rightarrow X$, $x_0 \rightsquigarrow \bar{y}$ mit $d(c_{x_0\bar{y}}, c) = \sup_{t \in [0,1]} d_X(c_{x_0\bar{y}}(t), c(t)) < \varepsilon$. Somit ist $c_{x_0\bar{y}} \in B_\varepsilon(c)$. Ferner gilt $\exp(c_{x_0\bar{y}}) = c_{x_0\bar{y}}(1) = \bar{y}$.

Bild einfügen

- \exp ist isometrische Einbettung: Seien $c_1, c_2 \in B_\varepsilon(c)$ beliebig. Aus Lemma 2.32 wissen wir, dass für alle $t \in [0, 1]$ gilt:

$$\begin{aligned} \Phi(t) &\leq t \cdot \Phi(1) \\ d_X(c_1(t), c_2(t)) &\leq t \cdot d_X(c_1(1), c_2(1)) \leq d_X(c_1(1), c_2(t)) \end{aligned} \tag{29}$$

Wir erhalten

$$d_X(\exp(c_1), \exp(c_2)) \stackrel{\text{Def.}}{=} d_X(c_1(1), c_2(1)) \stackrel{(29)}{=} \sup_{t \in [0,1]} d_X(c_1(t), c_2(t)) \stackrel{\text{Def.}}{=} d(c_1, c_2).$$

Somit ist \exp eine Isometrie auf $B_\varepsilon(c)$.

(iii) Sei $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in \tilde{X}_{x_0} . Dann ist $(c_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ für jedes $t \in [0, 1]$ eine Cauchy-Folge in X und da X vollständig ist, konvergiert diese. Wir definieren:

$$\begin{aligned} c: [0, 1] &\longrightarrow X \\ t &\longmapsto \lim_{n \rightarrow \infty} c_n(t) =: c(t). \end{aligned}$$

Es gilt $c(0) = x_0$. Wir müssen zeigen, dass $c \in \tilde{X}_{x_0}$, das heißt c ist eine linear umparametrisierte lokale Geodäte.

Sei $t \in [0, 1]$ beliebig. Wähle $r > 0$ so, dass $B_r(c(t))$ CAT(0) ist. Da $c_n(t) \rightarrow c(t)$ konvergiert, existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass gilt

$$c_n(t) \in B_{\frac{r}{2}}(c(t)) \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Wir finden ein $\varepsilon > 0$, sodass für $I := [t - \varepsilon, t + \varepsilon]$ und $n \geq N$ gilt:

$$c_n(I) \subseteq \underbrace{B_r(c(t))}_{\text{CAT}(0)} \quad \text{und} \quad c(I) \subseteq B_r(c(t)).$$

Folglich sind die $c_n|_I$ linear umparametrisierte Geodäten (vgl. Übungsaufgabe). Da die linear umparametrisierten Geodäten $c_n|_I$ stetig von ihren Endpunkten abhängen, konvergiert $c_n|_I$ gleichmäßig gegen die eindeutige linear umparametrisierte Geodäte $\gamma: c(t - \varepsilon) \rightsquigarrow c(t + \varepsilon)$. Es gilt aber auch $\gamma = c|_I$ und damit ist $c|_I$ eine linear umparametrisierte Geodäte und damit haben wir gezeigt, dass c eine linear umparametrisierte lokale Geodäte ist. Ferner gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c$. \square

Literatur

- [BH99] Martin R. Bridson, André Haefliger. *Metric Spaces of Non-Positive Curvature*. Springer, 1999 (siehe S. III, 4).
- [BHV08] Mohammed El Bachir Bekka, Pierre de la Harpe, Alain Valette. *Kazhdan's Property (T)*. Cambridge Univ. Press, 2008 (siehe S. III).
- [Kra15] Linus Kramer. „Skript zu Grundlagen der Analysis, Topologie und Geometrie“. Westfälische Wilhelms-Universität Münster. Sommersemester 2015. URL: http://wwwmath.uni-muenster.de/u/ag_kramer/index.php?name=VorlesungGrundlagenAnalysisGeometrieTopologie15&menu=teach&lang=de (siehe S. 24).
- [Ser80] Jean-Pierre Serre. *Trees*. Springer-Verlag, 1980 (siehe S. III).

Index

- Arzelà-Ascoli, 32
- Bruhat-Tits-Fixpunktsatz, 14
- CAT(0)-Raum, 3
 - lokal, 3
 - Vierpunktbedingung, 17
- Durchmesser, 12
- Exponentialabbildung, 42
- Fixpunkt, 14
- Geodäte, 1
 - linear umparametrisiert, 36
- geodätischer Raum, 1
 - eindeutig, 1
 - lokal eindeutig, 39
- geodäisches Dreieck, 2
- gleichstetig, 32
- Gruppenwirkung
 - eigentlich, 15
 - isometrisch, 14
 - kokompakt, 15
- Homotopie, 9
- Homöomorphismus
 - lokal, 37
- Hopf-Rinow, 30
- Isometrie, 14
 - lokal, 37
- Isometriegruppe, 14
- Kongukationsklasse, 15
- kontrahierbar, 9
- konvex, 4, 14
- Lift, 40
- Lipschitz, 8, 16
- lokal kompakt, 30
- Länge, 25
- Längenmetrik, 28
 - assoziiert, 29
- Längenraum, 28
- Metrik, 1
 - induzierte Pseudometrik, 37
- metrischer Raum, 1
 - diskret, 1
- Mittelpunkt, 17
- orthogonale Projektion, 7
- Parallelogrammgleichung, 5
- Radius, 12
- rektifizierbar, 25
- Stetige Abhängigkeit von Endpunkten, 35
- Vergleichsdreieck, 3
- Vergleichspunkt, 3
- Vervollständigung, 16
- Weg, 25
 - invers, 26
 - zusammengesetzt, 26
- Zentrum, 12
- zusammenhängend

lokal wegzusammenhängend, 24
semilokal einfach, 24

Überlagerung, 24
 universell, 24