



WESTFÄLISCHE  
WILHELMS-UNIVERSITÄT  
MÜNSTER



FACHBEREICH 10  
MATHEMATIK UND  
INFORMATIK

---

# CAT(0) kubische Komplexe

---

gelesen von

**DR. OLGA VARGHESE**

im Wintersemester 2015/2016



Vorlesungsmitschrift von Phil Steinhorst

Stand: 2. März 2016



## Vorwort

Der vorliegende Text ist eine Mitschrift zur Vorlesung *CAT(0) kubische Komplexe*, gelesen von Dr. Olga VARGHESE an der WWU Münster im Wintersemester 2015/2016. Der Inhalt entspricht weitestgehend dem Tafelanschrieb und den Vorlesungsnotizen, welche auf der Vorlesungswebsite bereitgestellt werden. Dieses Werk ist daher keine Eigenleistung des Autors und wird nicht von der Dozentin der Veranstaltung korrektur gelesen. Für die Korrektheit des Inhalts wird keinerlei Garantie übernommen. Bemerkungen, Korrekturen und Ergänzungen kann man folgenderweise loswerden:

- persönlich durch Überreichen von Notizen oder per E-Mail
- durch Abändern der entsprechenden TeX-Dateien und Versand per E-Mail an mich
- direktes Mitarbeiten via GitHub. Dieses Skript befindet sich im `latex-wwu`-Repository von Jannes BANTJE:

<https://github.com/JaMeZ-B/latex-wwu>

## Literatur

- BRIDSON, HAEFLIGER: Metric Spaces of Non-Positive Curvature [BH99]
- SERRE: Trees [Ser80]
- BEKKA, DE LA HARPE, VALETTE: Kazhdan's Property (T) [BHV08]

## Kommentar der Dozentin


In der geometrischen Gruppentheorie werden Gruppen als Symmetrien von Räumen betrachtet. Ihre algebraische Eigenschaften werden mittels geometrischer Eigenschaften der Räume, auf denen sie wirken, untersucht. Gruppen, die auf kubischen Komplexen wirken – das sind polyhedrische Komplexe, die aus Würfeln gebaut sind – sind dabei besonders gut verstanden.

Die Vorlesung wird eine Einführung in die Strukturtheorie CAT(0) kubischer Komplexe liefern, sowie Anwendungen in der Gruppentheorie diskutieren.

---

### abstrakte Gruppen

- endliche Gruppen
- $GL_n(\mathbb{Z})$ ,  $SL_n(\mathbb{Z})$
- $Aut(F_n)$ ,  $SAut(F_n)$
- Coxetergruppen

$$\Psi: G \rightarrow \text{Isom}(X)$$


Fixpunkt?

### metrische Räume mit "viel Geometrie"

- $(\mathbb{R}^n, d_2)$
- Hilberträume
- simpliziale Bäume
- $CAT(0)$  kubische Komplexe

### Geplante Themen

- $CAT(0)$ -Räume (simpliziale Bäume, kubische Komplexe)
- Gruppenwirkungen auf  $CAT(0)$  kubische Komplexe
- BRUHAT-TITS-Fixpunktsatz für  $CAT(0)$  kubische Komplexe
- HELLY's Theorem
- Kazhdan-Eigenschaft (T)

### Vorlesungswebsite

Das handgeschriebene Skript sowie weiteres Material findet man unter folgendem Link:

[http://wwwmath.uni-muenster.de/u/ag\\_kramer/index.php?name=KubischeKomplexe\\_15&menu=teach&lang=de](http://wwwmath.uni-muenster.de/u/ag_kramer/index.php?name=KubischeKomplexe_15&menu=teach&lang=de)

Phil Steinhorst  
p.st@wwu.de

# Inhaltsverzeichnis

|  |           |
|--|-----------|
| <b>1. CAT(0)-Räume</b>                                       | <b>1</b>  |
| <b>2. Der Satz von CARTAN-HADAMARD</b>                       | <b>23</b> |
| 2.1. Längenräume . . . . .                                   | 25        |
| 2.2. Längenmetrik auf Überlagerungsräumen . . . . .          | 38        |
| 2.3. Die Exponentialabbildung . . . . .                      | 44        |
| 2.4. Winkel in metrischen Räumen . . . . .                   | 54        |
| <b>3. Gruppenwirkungen auf kubischen Komplexen</b>           | <b>65</b> |
| 3.1. Kubische Komplexe . . . . .                             | 65        |
| 3.1.1. Simpliciale Bäume . . . . .                           | 67        |
| 3.1.2. HELLYS Theorem für CAT(0) kubische Komplexe . . . . . | 70        |
| 3.2. GROMOVs Link-Bedingung . . . . .                        | 76        |
| <b>A. Übungsaufgaben</b>                                     | <b>80</b> |
| <b>Literatur</b>   | <b>86</b> |
| <b>Index</b>   | <b>87</b> |



# 1. CAT(0)-Räume

## 1.1 Definition (Metrischer Raum)

Sei  $X$  eine Menge. Eine Abbildung  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  heißt **Metrik**, wenn für alle  $x, y, z \in X$  gilt:

- (i)  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- (ii)  $d(x, y) = d(y, x)$
- (iii)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Das Paar  $(X, d)$  heißt dann **metrischer Raum**.

## 1.2 Beispiel

- (i) Für  $n \in \mathbb{N}$  ist  $\mathbb{E}^n := (\mathbb{R}^n, d_2)$  mit

$$d_2: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$
$$(x, y) \longmapsto \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

- (ii) Sei  $X$  eine Menge. Wir definieren:

$$d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$
$$(x, y) \longmapsto \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

Dann ist  $d$  eine Metrik und  $(X, d)$  heißt ein **diskreter metrischer Raum**.

## 1.3 Definition (Geodätischer Raum)

- (i) Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $x, y \in X$ . Eine **Geodäte** von  $x$  nach  $y$  ist eine Abbildung  $\gamma: [a, b] \rightarrow X$  mit  $\gamma(a) = x, \gamma(b) = y$  und  $d(\gamma(t), \gamma(t')) = |t - t'|$  für alle  $t, t' \in [a, b]$ . Wir schreiben  $\gamma: x \rightsquigarrow y$ .

- (ii) Der Raum  $(X, d)$  ist ein **geodätischer Raum**, wenn für alle  $x, y \in X$  eine Geodäte  $x \rightsquigarrow y$  existiert.

- (iii) Ein geodätischer Raum heißt **eindeutig geodätisch**, wenn genau eine solche Geodäte existiert.

Sofern nichts anderes gesagt wird, ist  $[0, d(x, y)]$  der Definitionsbereich einer Geodäte  $\alpha: x \rightsquigarrow y$ .

#### 1.4 Beispiel

- (i) Sei  $(V, \|\cdot\|)$  ein normierter reeller Vektorraum. Dann ist  $(V, d_{\|\cdot\|})$  ein geodätischer Raum. Im Detail: Seien  $u, v \in V$  paarweise verschieden und  $L := \|u - v\| \neq 0$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \gamma: [0, L] &\longrightarrow V \\ t &\longmapsto \left(1 - \frac{t}{L}\right) \cdot u + \frac{t}{L} \cdot v \end{aligned}$$

eine Geodäte von  $u$  nach  $v$ .

- (ii)  $(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, d_2)$  ist nicht geodätisch: Es existiert keine Geodäte  $(-1, 0) \rightsquigarrow (1, 0)$ .
- (iii)  $(\mathbb{R}^2, d_1)$  ist geodätisch, aber nicht eindeutig geodätisch: In der folgenden Abbildung sind zwei Geodäten von  $(1, 0) \rightsquigarrow (0, 1)$  dargestellt.

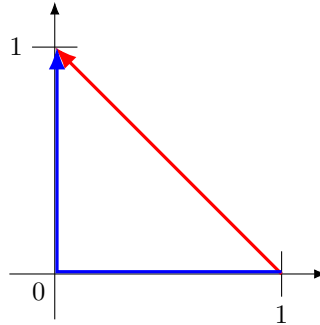


Abbildung 1.1.: Der metrische Raum  $(\mathbb{R}^2, d_1)$  ist nicht eindeutig geodätisch.

#### 1.5 Definition (Geodätisches Dreieck)

Ein **geodätisches Dreieck**  $\Delta = \Delta(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$  in einem geodätischen Raum  $(X, d)$  ist gegeben durch ein Tripel  $(x, y, z) \in X^3$  und Geodäten  $\alpha: x \rightsquigarrow y$ ,  $\beta: y \rightsquigarrow z$ ,  $\gamma: z \rightsquigarrow x$  – den Seiten von  $\Delta$ .

#### 1.6 Beispiel



Abbildung 1.2.: Geodätische Dreiecke sind im Allgemeinen durch ihre Ecken nicht eindeutig bestimmt.



Die Dreiecksungleichung garantiert, dass es Punkte  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathbb{E}^2$  gibt mit  $d(x, y) = d_2(\bar{x}, \bar{y})$ ,  $d(y, z) = d_2(\bar{y}, \bar{z})$ ,  $d(z, x) = d_2(\bar{z}, \bar{x})$  und Geodäten

$$\bar{\alpha}(t) = \bar{x} + t \cdot \frac{\bar{y} - \bar{x}}{d_2(\bar{y}, \bar{x})}, \quad \bar{\beta}(t) = \bar{y} + t \cdot \frac{\bar{z} - \bar{y}}{d_2(\bar{z}, \bar{y})}, \quad \bar{\gamma}(t) = \bar{z} + t \cdot \frac{\bar{x} - \bar{z}}{d_2(\bar{x}, \bar{z})}.$$

$\bar{\Delta} = \bar{\Delta}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma})$  heißt **Vergleichsdreieck** zu  $\Delta(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$ . Ist  $v = \gamma(s)$  für ein  $s$ , so heißt  $\bar{v} = \bar{\gamma}(s)$  **Vergleichspunkt** von  $v$ .

### 1.7 Definition (CAT(0)-Raum)

- (i) Ein Dreieck  $\Delta$  in  $(X, d)$  hat die **CAT(0)-Eigenschaft**, wenn für alle  $n, m$  auf den Seiten von  $\Delta$  und ihre Vergleichspunkte  $\bar{n}, \bar{m}$  auf den Seiten von  $\bar{\Delta}$  gilt:

$$d(n, m) \leq d_2(\bar{n}, \bar{m})$$

- (ii) Ein metrischer Raum  $(X, d)$  ist ein **CAT(0)-Raum**, wenn  $(X, d)$  geodätisch ist und alle seine Dreiecke die CAT(0)-Eigenschaft erfüllen.
- (iii) Ein metrischer Raum  $(X, d)$  heißt **lokal CAT(0)**, wenn für alle  $x \in X$  ein  $r_x > 0$  existiert, sodass

$$B_{r_x}(x) = \{y \in X : d(y, x) < r_x\}$$

mit der induzierten Metrik ein CAT(0)-Raum ist.

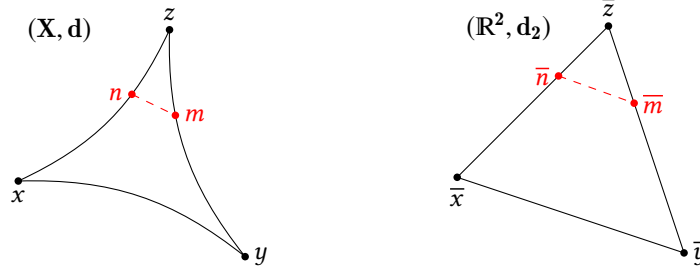


Abbildung 1.3.: Anschaulich gesprochen sind Dreiecke in CAT(0)-Räumen „mindestens so dünn“ wie ihre Vergleichsdreiecke im euklidischen Raum.

### 1.8 Bemerkung

- (i) Lokal CAT(0)-Räume heißen auch nichtpositiv gekrümmte oder Alexandrov-Räume.
- (ii) CAT(0) steht für CARTAN-ALEXANDROV-TOPOGONOV und Krümmung  $\leq 0$ .

### 1.9 Beispiel

(i) Der euklidische Raum  $\mathbb{E}^n$  ist CAT(0).

(ii)  $(\mathbb{R}^2, d_1)$  ist nicht CAT(0): In der folgenden Abbildung 1.4 ist  $d_1(n, m) = 2$ , aber  $d_2(\bar{n}, \bar{m}) = \sqrt{3}$ .

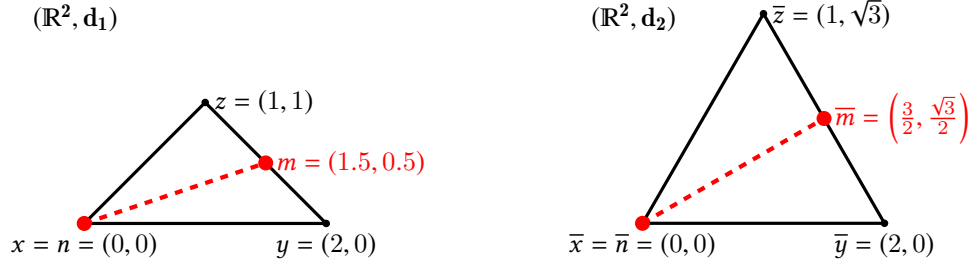


Abbildung 1.4.: Der Raum  $(\mathbb{R}^2, d_1)$  ist nicht CAT(0).

(iii) Hilberträume sind CAT(0).

(iv) Komplemente von Polygonen im  $\mathbb{R}^2$  sind lokal CAT(0), aber nicht CAT(0).

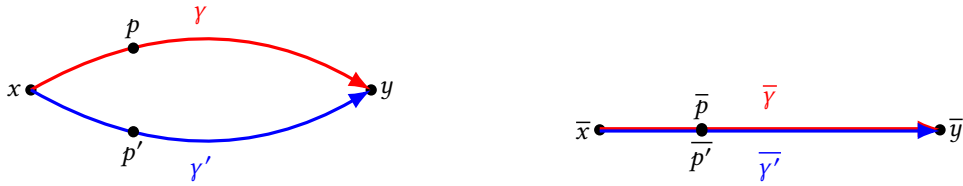
### 1.10 Beobachtung

Sei  $(X, d)$  ein CAT(0)-Raum. Dann ist  $X$  eindeutig geodätisch.

**BEWEIS:** Seien  $\gamma: x \rightsquigarrow y$  und  $\gamma': x \rightsquigarrow y$  zwei Geodäten von  $x$  nach  $y$ . Seien  $p$  und  $p'$  zwei Punkte auf  $\gamma$  und  $\gamma'$  mit  $d(x, p) = d(x, p')$ . Das Vergleichsdreieck  $\bar{\Delta}$  zum Dreieck

$$\Delta = \Delta\left(x, p, y, \gamma|_{[0, d(x, p)]}, \gamma'|_{[d(x, p), d(x, y)]}, \gamma'\right)$$

ist degeneriert:



Wegen der CAT(0)-Eigenschaft gilt  $d(p, p') \leq d(\bar{p}, \bar{p}') = 0$ , also folgt  $d(p, p') = 0$  und  $p = p'$ .  $\square$

### 1.11 Definition (Konvexe Menge)

Sei  $X$  ein CAT(0)-Raum. Eine nichtleere Teilmenge  $C \subseteq X$  heißt **konvex**, wenn zu allen  $p, q \in C$  die Geodäte  $\gamma: p \rightsquigarrow q$  in  $C$  liegt.

Offensichtlich ist  $C$  wieder ein CAT(0)-Raum und Durchschnitte konvexer Mengen sind wieder konvex.

**1.12 Theorem** ([BH99, 1A.6])

Sei  $\mathcal{M}$  eine einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit nichtpositiver Krümmung. Dann ist  $\mathcal{M}$  CAT(0).

**1.13 Satz**

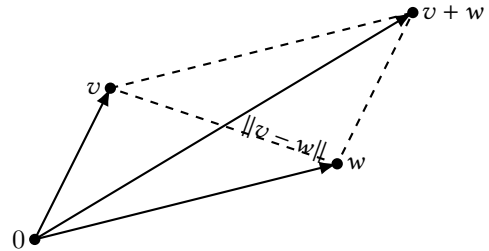
Sei  $(V, \|\cdot\|)$  ein reeller normierter Vektorraum. Dann ist  $(V, \|\cdot\|)$  genau dann ein CAT(0)-Raum, wenn  $(V, \|\cdot\|)$  ein Prähilbertraum ist, das heißt es existiert eine symmetrische positiv definite Bilinearform  $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$  für  $v \in V$ .

Für den Beweis brauchen wir eine metrische Charakterisierung von Prähilberträumen:

**1.14 Proposition** (VON NEUMANN, 1935)

Ein reeller normierter Vektorraum  $(V, \|\cdot\|)$  ist ein Prähilbertraum genau dann, wenn für alle  $v, w \in V$  die **Parallelogrammgleichung** gilt:

$$\|v - w\|^2 + \|v + w\|^2 = 2 \cdot (\|v\|^2 + \|w\|^2) \quad (\text{PG})$$

**BEWEIS:**

" $\Rightarrow$ ": Seien  $u, v \in V$ .

$$\begin{aligned} & \|u - v\|^2 + \|u + v\|^2 \\ &= \langle u - v, u - v \rangle + \langle u + v, u + v \rangle \\ &= \langle u, u \rangle - \langle u, v \rangle - \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle + \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle \\ &= 2 \cdot (\langle v, v \rangle + \langle u, u \rangle) \end{aligned}$$

" $\Leftarrow$ ": Definiere:

$$\begin{aligned} b: V \times V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto \frac{1}{4}(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2). \end{aligned}$$

Wir zeigen, dass  $b$  ein Skalarprodukt ist:

- Offensichtlich ist  $b$  symmetrisch.
- $b$  ist positiv definit, denn für  $v \in V$  gilt:

$$\begin{aligned} b(v, v) &= \frac{1}{4}(2 \cdot \|v\|^2) = \|v\|^2 \geq 0 \\ b(v, v) &= 0 \Leftrightarrow v = 0 \end{aligned}$$

- Sei nun  $w \in V$  beliebig. Zu zeigen ist, dass  $b(\cdot, w): V \rightarrow \mathbb{R}$  linear ist. Seien also  $u, v \in V$  beliebig, dann gilt:

$$\begin{aligned}
 & b(u + v, w) + b(u - v, w) \\
 \stackrel{\text{Def}}{=} & \frac{1}{4}(\|u + v + w\|^2 - \|u + v - w\|^2 + \|u - v + w\|^2 - \|u - v - w\|^2) \\
 \stackrel{(\text{PG})}{=} & \frac{1}{4}(2 \cdot \|u + w\|^2 + 2 \cdot \|v\|^2 - 2 \cdot \|u - w\|^2 - 2 \cdot \|v\|^2) \\
 = & \frac{1}{2}(\|u + w\|^2 - \|u - w\|^2) \\
 \stackrel{\text{Def}}{=} & 2 \cdot b(u, w)
 \end{aligned} \tag{1}$$

Analog erhalten wir

$$b(u + v, w) - b(u - v, w) = 2 \cdot b(v, w). \tag{2}$$

Addition von (1) und (2) liefert:

$$b(u + v, w) = b(u, w) + b(v, w)$$

Bleibt zu zeigen: Für alle  $r \in \mathbb{R}$  gilt  $b(rv, w) = r \cdot b(v, w)$ .

**1. Fall:**  $r = -1$ . Mit  $u = 0$  folgt aus (1):

$$b(v, w) + b(-v, w) = 2 \cdot b(0, w) = 2 \cdot \frac{1}{4}(\|w\|^2 - \|-w\|^2) = 0$$

und somit  $b(-v, w) = -b(v, w)$ .

**2. Fall:**  $r = n \in \mathbb{N}$ . Für  $n = 2$  folgt mit  $u = v$  aus (1)

$$b(2v, w) + \underbrace{b(0, w)}_{=0} = 2 \cdot b(v, w)$$

und weiter induktiv

$$\begin{aligned}
 b(nv, w) &= b((n-1)v + v, w) = b((n-1)v, w) + b(v, w) \\
 &= (n-1)b(v, w) + b(v, w) = n \cdot b(v, w).
 \end{aligned}$$

**3. Fall:**  $r = \frac{1}{n}$  mit  $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ . Es gilt  $\frac{1}{n} \cdot b(nv, w) = b(v, w)$  und damit

$$b\left(\frac{1}{n}v, w\right) = \frac{1}{n} \cdot b\left(n \cdot \frac{1}{n}v, w\right) = \frac{1}{n}b(v, w)$$

Aus allen drei Fällen folgt nun  $b(qv, w) = q \cdot b(v, w)$  für alle  $q \in \mathbb{Q}$ . Da  $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$  eine dichte Teilmenge und  $b(\cdot, w)$  stetig ist, folgt  $b(rv, w) = r \cdot b(v, w)$  für alle  $r \in \mathbb{R}$ .  $\square$

**BEWEIS** (Satz 1.13):

" $\Leftarrow$ ": Sei  $\Delta \subseteq (V, \|\cdot\|) = \mathcal{H}$  ein geodätisches Dreieck. Dann ist die lineare Hülle  $\langle \Delta \rangle$  isometrisch isomorph zum  $\mathbb{E}^2$ , bzw. zum  $\mathbb{E}^1$  oder zu  $\{0\}$ , falls  $\Delta$  degeneriert ist.

" $\Rightarrow$ ": Sei  $u, v \in V$  beliebig. Zeige, dass für  $v, w$  das Parallelogrammgesetz gilt: Wir betrachten das Dreieck  $\Delta(0, u, v)$  und das Vergleichsdreieck  $\bar{\Delta}(0, \bar{u}, \bar{v})$ . Es gilt:

$$\begin{aligned} d\left(\frac{u+v}{2}, 0\right) &\stackrel{\text{CAT}(0)}{\leq} d_2\left(\frac{\bar{u}+\bar{v}}{2}, 0\right) \\ \Rightarrow d(u+v, 0) &\leq d_2(\bar{u}+\bar{v}, 0) \\ \Rightarrow \|u+v\|^2 &\leq \|\bar{u}+\bar{v}\|_2^2 \stackrel{(\text{PG})}{=} 2 \cdot \|\bar{u}\|_2^2 + 2 \cdot \|\bar{v}\|_2^2 - \|\bar{u}-\bar{v}\|_2^2 \\ &\stackrel{\text{CAT}(0)}{=} 2 \cdot \|u\|^2 + 2 \cdot \|v\|^2 - \|u-v\|^2 \end{aligned} \quad (3)$$

Betrachte das Dreieck  $\Delta(0-v, u)$  und das Vergleichsdreieck  $\bar{\Delta}(0-\bar{v}, \bar{u})$ . Wir erhalten genauso wie oben die Ungleichung

$$\|u-v\|^2 \leq 2 \cdot \|u\|^2 + 2 \cdot \|v\|^2 - \|u+v\|^2. \quad (4)$$

Insgesamt haben wir also:

$$\|u+v\|^2 \stackrel{(3)}{\leq} 2 \cdot \|u\|^2 + 2 \cdot \|v\|^2 - \|u-v\|^2 \stackrel{(4)}{\leq} \|u+v\|^2 \quad \square$$

### 1.15 Erinnerung (Orthogonale Projektion)

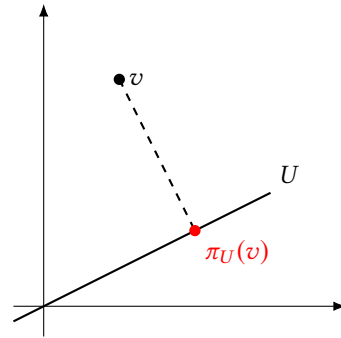
Gegeben sei ein reeller Hilbertraum  $\mathbb{E}^d$  und  $U \subseteq \mathbb{E}^d$  ein Unterraum. Sei weiter  $v_1, \dots, v_n \in U$  eine Orthonormalbasis von  $U$ . Dann ist  $\pi_U: V \rightarrow U$  mit

$$v \mapsto \sum_{i=1}^n \langle v, v_i \rangle \cdot v_i$$

eine lineare Abbildung und es gilt

$$d(v, \pi_U(v)) = \inf_{u \in U} d(v, u) =: d(v, U)$$

und  $v - \pi_U(v) \perp U$ .



### 1.16 Satz (Projektion auf konvexe Teilmengen)

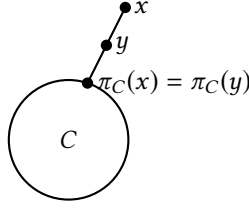
Sei  $X$  ein CAT(0)-Raum und  $C \subseteq X$  konvex und vollständig mit der induzierten Metrik. Dann gilt:

(i) Für alle  $x \in X$  existiert genau ein  $\pi_C(x) \in C$  mit

$$d(x, \pi_C(x)) = \inf_{p \in C} d(x, p) =: d(x, C).$$

Die Abbildung  $\pi_C: X \rightarrow C$  heißt die (orthogonale) Projektion auf  $C$ .

(ii) Ist  $y \in [x, \pi_C(x)] = \text{im}(\gamma : x \rightsquigarrow \pi_C(x))$ , so ist  $\pi_C(y) = \pi_C(x)$ .



(iii) Für alle  $x, y \in X$  gilt

$$d(\pi_C(x), \pi_C(y)) \leq d(x, y),$$

das heißt  $\pi_C$  ist 1-Lipschitz.

**BEWEIS:**

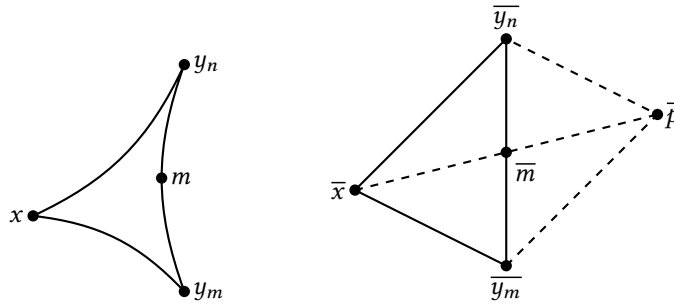
(i) Sei  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq C$  eine Folge mit  $d(x, y_n) \rightarrow d(x, C) =: D$ . Ziel ist es zu zeigen, dass  $(y_n)_n$  eine Cauchy-Folge ist. Da  $C$  vollständig ist, ist die Folge  $(y_n)_n$  konvergent in  $C$  und wir können  $\pi_C(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$  definieren.

Zur Eindeutigkeit von  $\pi_C(x)$ : Angenommen, es existiert ein  $\pi_C(x)' \in C$  mit  $\pi_C(x)' \neq \pi_C(x)$  und  $d(x, \pi_C(x)') = d(x, C)$ . Betrachte die Folge

$$q_n := \begin{cases} \pi_C(x), & n \text{ gerade} \\ \pi_C(x)', & n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Dann ist  $d(x, q_n) \rightarrow d(x, C)$ , aber  $(q_n)_n$  ist keine Cauchy-Folge. Widerspruch.

Zur Existenz: Betrachte folgendes Dreieck und Vergleichsdreieck ergänzt zu einem Parallelogramm:



Es ist  $d(y_n, m) = d(y_m, m) = \frac{1}{2}d(y_n, y_m)$ . Die Parallelogrammgleichung in  $\mathbb{E}^2$  besagt:

$$d_2(\bar{x}, \bar{p})^2 + d_2(\bar{y}_n, \bar{y}_m)^2 = 2(d_2(\bar{x}, \bar{y}_n)^2 + d_2(\bar{x}, \bar{y}_m)^2)$$

Sei  $\varepsilon > 0$ . Sei  $\delta > 0$  die positive Lösung von  $\delta^2 + 2D\delta - \frac{\varepsilon^2}{4} = 0$ , das heißt  $\varepsilon = 2 \cdot \sqrt{\delta^2 + 2D\delta}$ .

Wähle  $n, m$  groß genug, sodass gilt

$$\left. \begin{array}{l} d(x, y_n) < D + \delta \\ d(x, y_m) < D + \delta \end{array} \right\} \forall n, m \geq N. \quad (5)$$

Aus der CAT(0)-Eigenschaft folgt

$$D \leq d(x, m)^2 \leq d_2(\bar{x}, \bar{m}). \quad (6)$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} d(y_n, y_m)^2 &\stackrel{\text{CAT}(0)}{=} d_2(\bar{y}_n, \bar{y}_m) \\ &\stackrel{\text{(PG)}}{=} 2 \cdot (d_2(\bar{x}, \bar{y}_n) + d_2(\bar{x}, \bar{y}_m)^2) - d_2(\bar{x}, \bar{p})^2 \\ &= 2 \cdot (d_2(\bar{x}, \bar{y}_n) + d_2(\bar{x}, \bar{y}_m)^2) - 4 \cdot d_2(\bar{x}, \bar{m})^2 \\ &\stackrel{(6)}{\leq} 2 \cdot (d_2(\bar{x}, \bar{y}_n) + d_2(\bar{x}, \bar{y}_m)^2) - 4D^2 \\ &\stackrel{(5)}{\leq} 2 \cdot (2 \cdot (D + \delta)^2) - 4D^2 \\ &= 4 \cdot (2D\delta + \delta^2) \end{aligned}$$

Somit folgt  $d(y_n, y_m) \leq 2 \cdot \sqrt{2D\delta + \delta^2} = \varepsilon$  für  $n, m \geq N$ . Also ist  $(y_n)_n$  eine Cauchy-Folge und wir setzen  $\pi_C(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ .

- (ii) Es ist  $\text{im}(\gamma: x \rightsquigarrow \pi_C(x)) = \{y \in X : d(x, y) + d(y, \pi_C(x)) = d(x, \pi_C(x))\}$ . Angenommen,  $\pi_C(y) \neq \pi_C(x)$ . Dann ist insbesondere

$$d(y, \pi_C(y)) < d(y, \pi_C(x)) \quad (7)$$

und mit der Dreiecksungleichung folgt

$$\begin{aligned} d(x, \pi_C(y)) &\leq d(x, y) + d(y, \pi_C(y)) \\ &\stackrel{(7)}{<} d(x, y) + d(y, \pi_C(x)) \\ &= d(x, \pi_C(x)), \end{aligned}$$

was ein Widerspruch zur Minimalität von  $\pi_C(x)$  ist.

- (iii) Aufgabe A.4. □

Unser nächstes Ziel ist es zu zeigen, dass CAT(0)-Räume kontrahierbar sind.

**1.17 Definition** (Homotopie)

Seien  $\varphi_0, \varphi_1: X \rightarrow Y$  stetige Abbildungen zwischen topologischen Räumen  $X$  und  $Y$ .

- (i) Die Abbildungen  $\varphi_0, \varphi_1$  heißen **homotop**, wenn es eine stetige Abbildung  $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$  gibt mit  $H(x, 0) = \varphi_0(x)$  und  $H(x, 1) = \varphi_1(x)$  für alle  $x \in X$ .  $H$  heißt **Homotopie** zwischen  $\varphi_0$  und  $\varphi_1$ . Wir schreiben  $\varphi_0 \simeq \varphi_1$ .
- (ii) Ist  $A \subseteq X$  eine Teilmenge mit  $\varphi_0(a) = \varphi_1(a)$  für alle  $a \in A$ , so heißen  $\varphi_0$  und  $\varphi_1$  **homotop relativ zu  $A$** , wenn es eine Homotopie  $H$  zwischen  $\varphi_0$  und  $\varphi_1$  gibt mit  $H(a, t) = \varphi_0(a)$  für alle  $t \in [0, 1]$  und  $a \in A$ . Wir schreiben  $\varphi_0 \simeq \varphi_1 \text{ rel } A$ .
- (iii) Ein topologischer Raum  $X \neq \emptyset$  heißt **kontrahierbar**, wenn die Identität  $\text{id}_X$  und die konstante Abbildung  $\varphi_p: x \mapsto p, p \in X$ , homotop sind.

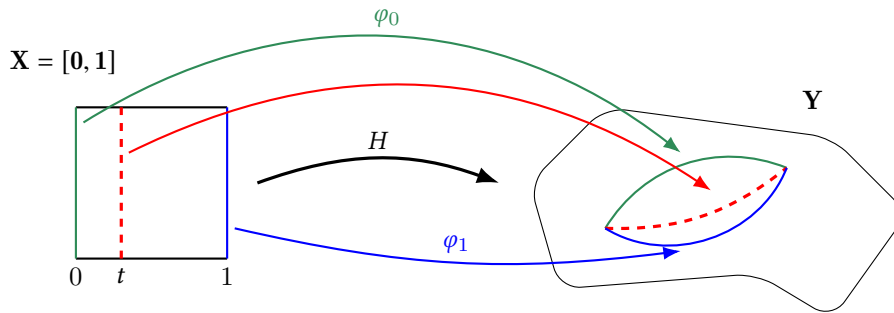


Abbildung 1.5.: Veranschaulichung des Homotopiebegriffs am Beispiel  $X = [0, 1]$ .

**1.18 Bemerkung**

Ist  $X$  ein kontrahierbarer Raum, so ist die Fundamentalgruppe  $\pi_1(X, \{x_0\})$ ,  $x_0 \in X$  trivial.

**1.19 Satz**

Sei  $X$  ein CAT(0)-Raum und  $\emptyset \neq C \subseteq X$  konvex und vollständig. Dann gilt  $\text{id}_X \simeq \pi_C \text{ rel } C$ . Insbesondere erhalten wir für  $C = \{p\}, p \in X$ , dass  $\text{id}_X \simeq \varphi_p \text{ rel } \{p\}$ , und folglich ist der Raum  $X$  kontrahierbar.

**BEWEIS:** Wir brauchen folgendes Resultat (Aufgabe A.2):

Seien  $\alpha: x \rightsquigarrow y, \beta: x' \rightsquigarrow y'$  zwei Geodäten. Dann gilt für alle  $t \in [0, 1]$ :

$$d(\alpha(t \cdot d(x, y)), \beta(t \cdot d(x', y'))) \leq (1 - t) \cdot d(x, x') + t \cdot d(y, y'). \quad (8)$$

Wir definieren

$$\begin{aligned} H: X \times [0, 1] &\longrightarrow X \\ (x, t) &\longmapsto \gamma_x(t \cdot d(x, \pi_C(x))), \end{aligned}$$



wobei  $\gamma_x : x \rightsquigarrow \pi_C(x)$ . Es gilt  $H(x, 0) = \gamma_x(0) = x$  und  $H(x, 1) = \gamma_x(d(x, \pi_C(x))) = \pi_C(x)$ , somit ist  $H(\cdot, 0) = \text{id}_X$  und  $H(\cdot, 1) = \pi_C$ .

Sei weiter  $c \in C$ . Dann gilt  $H(c, t) = c$ , da  $\gamma_c : c \rightsquigarrow \pi_C(c)$  und  $c = \pi_C(c)$ .

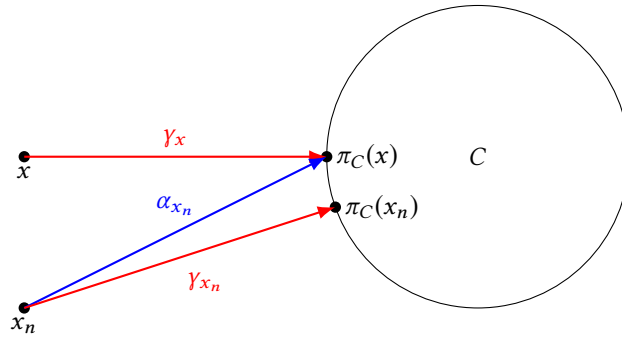
Es bleibt zu zeigen, dass  $H$  stetig ist. Wir wissen, dass Abbildungen zwischen metrischen Räumen genau dann stetig sind, wenn sie folgenstetig sind. Sei  $(x, t) \in X \times [0, 1]$  beliebig und weiter  $(x_n, t_m) \in X \times [0, 1]$  eine Folge mit  $\lim_{n,m} (x_n, t_m) = (x, t)$ . Zu zeigen ist:

$$\begin{aligned} \lim_{n,m} H(x_n, t_m) &= H(x, t) \\ \Leftrightarrow \lim_{n,m} \gamma_{x_n}(t_m \cdot d(x_n, \pi_C(x_n))) &= \gamma_x(t \cdot d(x, \pi_C(x))), \end{aligned}$$

wobei  $\gamma_{x_n} : x_n \rightsquigarrow \pi_C(x_n)$ .

Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben. Wähle  $N_1 \in \mathbb{N}$  so groß, dass mit Satz 1.16(iii) gilt:

$$\left. \begin{aligned} d(x_n, x) &< \frac{\varepsilon}{2} \\ d(\pi_C(x_n), \pi_C(x)) &< \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned} \right\} \forall n \geq N_1 \quad (9)$$



Wir haben:

$$\begin{aligned} &d(H(x, t), H(x_n, t)) \\ &= d(\gamma_x(t \cdot d(x, \pi_C(x))), \gamma_{x_n}(t \cdot d(x_n, \pi_C(x_n)))) \\ &\stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} d(\gamma_x(t \cdot d(x, \pi_C(x))), \alpha_{x_n}(t \cdot d(x_n, \pi_C(x)))) + d(\alpha_{x_n}(t \cdot d(x_n, \pi_C(x))), \gamma_{x_n}(t \cdot d(x_n, \pi_C(x_n)))) \\ &\stackrel{(8)}{\leq} (1-t) \cdot d(x, x_n) + t \cdot \underbrace{d(\pi_C(x), \pi_C(x))}_{=0} + (1-t) \cdot \underbrace{d(x_n, x_n)}_{=0} + t \cdot d(\pi_C(x), \pi_C(x_n)) \\ &\stackrel{(9)}{\leq} (1-t) \cdot \frac{\varepsilon}{2} + t \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall t \in [0, 1], n \geq N_1 \end{aligned} \quad (10)$$

Wähle  $N_2 \in \mathbb{N}$  groß genug mit

$$d(H(x_n, t_m), H(x_n, t)) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall m \geq N_2. \quad (11)$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
 & d(H(x_n, t_m), H(x, t)) \\
 & \stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} d(H(x_n, t_m), H(x_n, t)) + d(H(x_n, t), H(x, t)) \\
 & \stackrel{(10), (11)}{\leq} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall n, m \geq \max(N_1, N_2).
 \end{aligned}
 \quad \square$$

### 1.20 Definition (Durchmesser, Radius)

Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $A \subseteq X$  beschränkt. Der **Durchmesser** von  $A$  ist gegeben durch

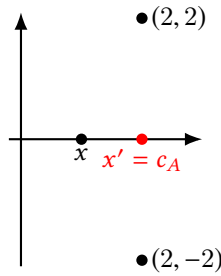
$$\text{diam}(A) := \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}.$$

Für  $x \in X$  definiere nun  $\text{rad}(x, A) := \sup\{d(x, a) : a \in A\}$ . Dann ist der **Radius** von  $A$  definiert durch

$$\text{rad}(A) := \inf\{\text{rad}(x, A) : x \in A\}.$$

### 1.21 Beispiel

Sei  $X := \mathbb{R}^2$  und  $A := \{(2, 2), (2, -2)\}$ . Für  $x := (1, 0)$  und  $x' := (2, 0) = c_A$  ist  $\text{rad}(x, A) = \sqrt{5}$  und  $\text{rad}(x', A) = 2 = \text{rad}(A)$ .



Der Begriff des Radius ist also mit der Idee eines „Zentrums“ ( $c_A \in A$ ) von  $A$  verbunden, welches zwar nicht in  $A$  liegen muss, aber die Mitte von  $A$  gut beschreibt. Im Allgemeinen muss ein Zentrum nicht existieren, aber bei CAT(0)-Räumen kann man es konstruieren.

### 1.22 Theorem

Sei  $X$  ein vollständiger CAT(0)-Raum und  $\emptyset \neq A \subseteq X$  beschränkt. Dann gibt es einen eindeutigen Punkt  $c_A \in X$ , das **Zentrum** von  $A$ , sodass  $A \subseteq \overline{B_{\text{rad}(A)}(c_A)}$  gilt.

**BEWEIS:** Seien  $q, r \in X$  beliebig und  $m \in X$  mit  $d(q, m) = d(m, r) = \frac{d(q, r)}{2}$ . Sei weiter  $a \in X$  beliebig. Wir betrachten  $\Delta(a, r, q)$  und  $\bar{\Delta}(\bar{a}, \bar{r}, \bar{q})$  und ergänzen  $\bar{\Delta}$  zu einem Parallelogramm (vgl. Abb. (i) auf S. 8). Die Parallelogrammgleichung in  $\mathbb{E}^2$  besagt:

$$\begin{aligned}
(2 \cdot d_2(\bar{a}, \bar{m}))^2 + (d_2(\bar{r}, \bar{q}))^2 &= 2 \cdot d_2(\bar{a}, \bar{r})^2 + 2 \cdot d_2(\bar{a}, \bar{q})^2 \\
\Rightarrow d_2(\bar{a}, \bar{m}) &= \frac{1}{2} d_2(\bar{a}, \bar{r})^2 + \frac{1}{2} d_2(\bar{a}, \bar{q})^2 - \frac{1}{4} d_2(\bar{r}, \bar{q})^2.
\end{aligned}$$

Es gilt also

$$\begin{aligned}
d(a, m)^2 &\stackrel{\text{CAT}(0)}{\leq} d_2(\bar{a}, \bar{m}) \\
&= \frac{1}{2} d_2(\bar{a}, \bar{r})^2 + \frac{1}{2} d_2(\bar{a}, \bar{q})^2 - \frac{1}{4} d_2(\bar{r}, \bar{q})^2 \\
&= \frac{1}{2} d_2(a, r)^2 + \frac{1}{2} d_2(a, q)^2 - \frac{1}{4} d_2(r, q)^2 \\
\stackrel{\sup}{\Rightarrow} \text{rad}(m, A)^2 &\leq \frac{1}{2} \text{rad}(r, A)^2 + \frac{1}{2} \text{rad}(q, A)^2 - \frac{1}{4} d(r, q)^2.
\end{aligned}$$

Mit  $\text{rad}(A) \leq \text{rad}(m, A)$  erhalten wir

$$\begin{aligned}
\text{rad}(A)^2 &\leq \frac{1}{2} \text{rad}(r, A)^2 + \frac{1}{2} \text{rad}(q, A)^2 - \frac{1}{4} d(r, q)^2 \\
\Rightarrow \frac{1}{4} d(r, q)^2 &\leq \frac{1}{2} (\text{rad}(r, A)^2 + \text{rad}(q, A)^2) - \text{rad}(A)^2 \\
\Rightarrow d(r, q) &\leq \sqrt{2 \cdot (\text{rad}(r, A)^2 + \text{rad}(q, A)^2) - 4 \text{rad}(A)^2} \quad (12)
\end{aligned}$$

Zur Eindeutigkeit: Angenommen,  $z_1, z_2$  sind zwei Zentren von  $A$ , d.h.  $\text{rad}(z_1, A) = \text{rad}(z_2, A) = \text{rad}(A)$ . Mit (12) folgt

$$d(z_1, z_2) \leq \sqrt{2 \cdot (\text{rad}(A)^2 + \text{rad}(A)^2) - 4 \text{rad}(A)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad z_1 = z_2$$

Zur Existenz: Sei  $x_n \in X$  eine Folge mit  $\text{rad}(x_n, A) \rightarrow \text{rad}(A)$ . Ziel ist zu zeigen, dass  $(x_n)_n$  eine Cauchy-Folge ist. Da  $X$  vollständig ist, konvergiert diese und das Zentrum von  $A$  ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

Sei  $\varepsilon > 0$ . Sei weiter  $\delta > 0$  die positive Lösung von

$$\delta^2 + 2 \cdot \text{rad}(A) - \delta - \frac{\varepsilon}{4} = 0. \quad (13)$$

Wähle  $N \in \mathbb{N}$  groß genug mit

$$\text{rad}(x_n, A) < \text{rad}(A) + \delta \quad \forall n \geq N. \quad (14)$$

Wir betrachten (12) quadriert und für  $r = x_n$  und  $q = x_m$ .

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_m)^2 &\leq 2 \cdot (\text{rad}(x_n, A)^2 + \text{rad}(x_m, A)^2) - 4 \cdot \text{rad}(A)^2 \\
&\stackrel{(14)}{\leq} 2 \cdot (2 \cdot (\text{rad}(A) + \delta)^2) - 4 \cdot \text{rad}(A)^2 \quad \forall n, m \geq N
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 8 \cdot \text{rad}(A)\delta + 4\delta^2 \quad \forall n, m \geq N \\
 \Rightarrow d(x_n, x_m) &\leq 2 \cdot \sqrt{2 \cdot \text{rad}(A)\delta + \delta^2} \stackrel{(13)}{=} \varepsilon \quad \forall n, m \geq N
 \end{aligned}
 \quad \square$$

### 1.23 Definition (Isometrie)

Eine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  von metrischen Räumen  $(X, d_X), (Y, d_Y)$  heißt **isometrische Einbettung**, wenn für alle  $u, v \in X$  gilt:

$$d_Y(f(u), f(v)) = d_X(u, v).$$

Wenn  $f$  zusätzlich surjektiv ist, heißt  $f$  **Isometrie** und  $X$  und  $Y$  zueinander isometrisch. Wir definieren die **Isometriegruppe** von  $X$ :

$$\text{Isom}(X) = \{f: X \rightarrow X : f \text{ ist Isometrie}\}.$$

### 1.24 Bemerkung

Seien  $(X, d_X), (Y, d_Y)$  metrische Räume und  $f: X \rightarrow Y$  isometrische Einbettungen. Dann gilt:

- (i)  $f$  ist injektiv.
- (ii) Ist  $(x_n)_n$  eine Cauchy-Folge in  $X$ , so ist  $(f(x_n))_n$  eine Cauchy-Folge in  $Y$ .
- (iii) Sind  $X$  und  $Y$  isometrisch, so sind sie als topologische Räume homöomorph.

### 1.25 Definition (Isometrische Gruppenwirkung)

Sei  $X$  ein metrischer Raum und  $G$  eine Gruppe. Eine **isometrische Wirkung** von  $G$  auf  $X$  ist ein Gruppenhomomorphismus  $\Phi: G \rightarrow \text{Isom}(X)$ . Die **Fixpunktmenge** von  $\Phi$  ist wie folgt definiert:

$$\text{Fix}_\Phi(G) := \{x \in X : \Phi(g)(x) = x \quad \forall g \in G\}$$

### 1.26 Lemma

Sei  $X$  ein CAT(0)-Raum und  $\Phi: G \rightarrow \text{Isom}(X)$  eine isometrische Wirkung. Dann ist  $\text{Fix}_\Phi(G)$  abgeschlossen. Wenn  $\text{Fix}_\Phi(G) \neq \emptyset$ , dann ist  $\text{Fix}_\Phi(G)$  konvex. (Aufgabe A.6)

### 1.27 Satz (BRUHAT-TITS-Fixpunkttheorem, BTFT)

Sei  $X$  ein vollständiger CAT(0)-Raum, sei  $G$  eine Gruppe und  $\Phi: G \rightarrow \text{Isom}(X)$  eine isometrische Wirkung. Sei weiter  $\emptyset \neq A \subseteq X$  beschränkt mit  $\Phi(g)(A) = A$  für alle  $g \in G$ . Dann ist  $c_A \in \text{Fix}_\Phi(G)$ .

**BEWEIS:** Sei  $g \in G$  beliebig. Es gilt:

$$\begin{aligned}
 \text{rad}(A) &= \text{rad}(c_A, A) \stackrel{\text{Def}}{=} \sup_{a \in A} \{d(c_A, a)\} \\
 &\stackrel{\Phi(g) \text{ isom.}}{=} \sup_{a \in A} \{d(\Phi(g)(c_A), \Phi(g)(a))\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi(g)(A) &= A \\ &\stackrel{\text{Def}}{=} \sup_{a \in A} \{d(\Phi(g)(c_A), a)\} \stackrel{\text{Def}}{=} \text{rad}(\Phi(g)(c_A), A) \\ \xrightarrow{c_A \text{ eind.}} c_A &= \Phi(g)(c_A) \xrightarrow{g \text{ bel.}} c_A \in \text{Fix}_\Phi(G) \end{aligned} \quad \square$$

**1.28 Korollar**

Sei  $X$  ein vollständiger CAT(0)-Raum, sei  $G$  eine Gruppe und  $\Phi: G \rightarrow \text{Isom}(X)$  eine isometrische Wirkung. Sei weiter  $x \in X$  mit  $G(x) := \{\Phi(g)(x) : g \in G\} \subseteq X$  beschränkt. Dann ist  $\text{Fix}_\Phi(G) \neq \emptyset$ .

**BEWEIS:** Betrachte  $A := G(x)$ . Dann ist  $\Phi(g)(A) = A$  für alle  $g \in G$ . Mit Satz 1.27 folgt  $\text{Fix}_\Phi(G) \neq \emptyset$ .  $\square$

**1.29 Bemerkung**

Jede isometrische Wirkung von einer endlichen Gruppe auf einen vollständigen CAT(0)-Raum hat einen Fixpunkt.

**1.30 Korollar**

Sei  $X$  ein vollständiger CAT(0)-Raum,  $G$  eine Gruppe und  $\Phi: G \rightarrow \text{Isom}(X)$  eine isometrische Wirkung, welche folgende Bedingungen erfüllt:

- (i)  $G$  wirkt **eigentlich** (*proper*) auf  $X$ , das heißt für alle  $x \in X$  existiert ein  $\varepsilon > 0$ , sodass gilt:

$$\#\{g \in G : \Phi(g)(B_\varepsilon(x)) \cap B_\varepsilon(x) \neq \emptyset\} < \infty.$$

- (ii)  $G$  wirkt **kokompakt** auf  $X$ , das heißt es existiert eine kompakte Teilmenge  $K \subseteq X$ , sodass

$$\bigcup_{g \in G} \Phi(g)(K) = X.$$

Dann enthält  $G$  nur endlich viele verschiedene Kongruenzklassen von endlichen Untergruppen. Genauer: Definiert man auf der Menge  $\text{UG}_{\text{endl}} := \{U \leq G \text{ endlich}\}$  die Äquivalenzrelation

$$U \sim V \quad :\Leftrightarrow \quad \exists g \in G : U = gVg^{-1},$$

so gilt  $\#\text{UG}_{\text{endl}}/\sim < \infty$ .

**BEWEIS:** Sei  $K$  eine kompakte Teilmenge mit

$$\bigcup_{g \in G} \Phi(g)(K) = X.$$

Wähle eine endliche Überdeckung  $B_{\varepsilon_i}(x_i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , von  $K$  so, dass die Teilmengen

$$\Gamma_i \subseteq G \text{ mit } \Gamma_i = \{g \in G : \Phi(g)(B_{\varepsilon_i}(x_i)) \cap B_{\varepsilon_i}(x_i) \neq \emptyset\}$$

endlich sind. Dann ist  $\Sigma := \bigcup_{i=1}^n \Gamma_i$  endlich.

Sei nun  $x \in X$  beliebig. Wir betrachten die Stabilisatorgruppe  $G_x := \{g \in G : \Phi(g)(x) = x\}$  von  $x$ .

- Wir haben in Korollar 1.28 bzw. Bemerkung 1.29 gesehen, dass jede endliche Untergruppe von  $G$  in einem  $G_x$  für geeignetes  $x \in X$  enthalten ist. Genauer: Ist  $U \subseteq G$  endlich und  $\Phi: G \rightarrow \text{Isom}(X)$ , so ist  $\text{Fix}_{\Phi|_U}(U) \neq \emptyset$ . Für  $x \in \text{Fix}_{\Phi|_U}(U)$  ist  $U \subseteq G_x$ .
- Wir werden zunächst zeigen, dass es nur endlich viele Konjugationsklassen von Untergruppen von  $G$  vom Typ  $G_x$  gibt. Da  $X = \bigcup_{g \in G} \Phi(g)(K)$ , existiert ein  $g \in G$  mit

$$\Phi(g)(x) \in K = \bigcup_{i=1}^n B_{\varepsilon_i}(x_i).$$

Also ist  $\Phi(g)(x)$  in mindestens einen der  $B_{\varepsilon_i}(x_i)$  enthalten und somit  $G_{\Phi(g)(x)} \subseteq \Gamma_i \subseteq \Sigma$ . Es gibt also nur endlich viele solche  $G_{\Phi(g)(x)}$  mit  $\Phi(g)(x) \in K$ .

Nun gilt aber weiter  $gG_xg^{-1} = G_{\Phi(g)(x)}$ , das heißt jedes beliebige  $G_x$  ist konjugiert zu einer von endlich vielen  $G_{\Phi(g)(x)}$ . Also gibt es nur endlich viele Konjugationsklassen von Gruppen  $G_x$ . Da jedes  $G_x$  endlich ist, hat es selbst nur endlich viele Konjugationsklassen von Untergruppen. Da jede endliche Untergruppe von  $G$  automatisch eine Untergruppe eines  $G_x$  ist, kann es damit auch nur endlich viele Konjugationsklassen von endlichen Untergruppen von  $G$  geben.  $\square$

Viele Sätze, die wir über CAT(0)-Räume bewiesen haben, hatten als Voraussetzung die Vollständigkeit. Der Vorteil in diesem Vorgehen ist, dass wir einen CAT(0)-Raum immer als eine dichte Teilmenge eines vollständigen CAT(0)-Raumes realisieren können. Weiter lässt sich jede Isometrie von CAT(0)-Räumen eindeutig zu einer Isometrie eines vollständigen CAT(0)-Raumes erweitern, indem wir sie auf der Vervollständigung fortsetzen. Um zu beweisen, dass die Vervollständigung eines CAT(0)-Raumes wieder CAT(0) ist, brauchen wir viel Vorarbeit.

### 1.31 Erinnerung (Metrische Vervollständigung)

Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Dann existiert ein vollständiger metrischer Raum  $(\widehat{X}, \widehat{d})$  und eine isometrische Einbettung  $\varphi: X \hookrightarrow \widehat{X}$  mit  $\overline{\varphi(X)} = \widehat{X}$ , das heißt  $\varphi(X)$  liegt dicht in  $\widehat{X}$ . Das Paar  $(\widehat{X}, \widehat{d})$  ist bis auf Isometrie eindeutig bestimmt und heißt **metrische Vervollständigung** von  $X$ .

**BEWEIS** (Skizze): Sei  $\text{CF}(X) := \{(x_n)_n \text{ Cauchy-Folge in } X\}$ . Definiere die Äquivalenzrelation

$$(x_n)_n \sim (y_n)_n \quad :\Leftrightarrow \quad (d(x_n, y_n))_n \text{ ist Nullfolge}$$

und setze

$$\widehat{X} := \text{CF}(X) / \sim \quad \widehat{d}([(x_n)_n], [(y_n)_n]) := \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n)$$

und definiere  $\varphi: X \hookrightarrow \widehat{X}$  durch  $x \mapsto [(x)_n]$ .  $\square$

**1.32 Erinnerung**

Seien  $(X, d_X)$  und  $(Y, d_Y)$  metrische Räume und  $f: X \rightarrow Y$  eine Lipschitz-Abbildung. Dann existiert eine eindeutige Fortsetzung  $\widehat{f}: \widehat{X} \rightarrow \widehat{Y}$  mit  $\widehat{f}|_X = f$ .

**1.33 Definition** (Mittelpunkt)

Ein metrischer Raum  $(X, d)$  hat **Mittelpunkte**, wenn für alle  $u, v \in X$  stets ein  $m \in X$  existiert mit  $d(u, m) = d(m, v) = \frac{1}{2}d(u, v)$ .

Man beachte, dass Mittelpunkte nicht eindeutig sein müssen. Zum Beispiel haben  $u := (1, 0)$  und  $v := (0, 1)$  in  $(\mathbb{R}^2, d_1)$  die beiden Mittelpunkte  $m_1 = (0, 0)$  und  $m_2 = (1, 1)$ .

**1.34 Beispiel**

- (i)  $(\mathbb{Q}_2, d_2)$  hat Mittelpunkte.
- (ii) Jeder geodätische Raum hat Mittelpunkte: Für alle  $u, v \in X$  existiert eine Geodäte  $\gamma: [0, d(u, v)] \rightarrow X$  von  $u$  nach  $v$ . Dann ist  $\gamma(\frac{1}{2}d(u, v))$  Mittelpunkt von  $u$  und  $v$ .
- (iii) CAT(0)-Räume haben eindeutige Mittelpunkte, das heißt es existiert eine wohldefinierte Mittelpunktabbildung  $(u, v) \mapsto m(u, v)$ .

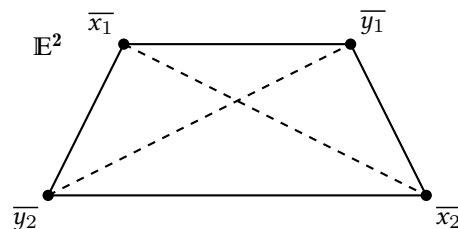
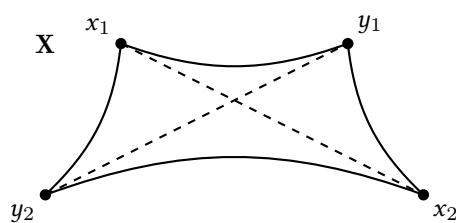
**1.35 Lemma**

Ein vollständiger metrischer Raum, der Mittelpunkte hat, ist geodätisch. (Aufgabe A.3)

**1.36 Definition** (Ungefährer Mittelpunkt, Vierpunktbedingung)

- (i) Ein metrischer Raum  $X$  hat **ungefähre Mittelpunkte**, wenn es zu allen  $u, v \in X$  und  $\varepsilon > 0$  ein  $m \in X$  gibt mit  $d(u, m), d(m, v) \leq \frac{1}{2}d(u, v) + \varepsilon$ .
- (ii) Ein metrischer Raum  $X$  erfüllt die **CAT(0)-Vierpunktbedingung**, wenn es zu allen  $x_1, y_1, x_2, y_2$  in  $X$  stets  $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{y_1}, \overline{y_2} \in \mathbb{E}^2$  gibt mit:

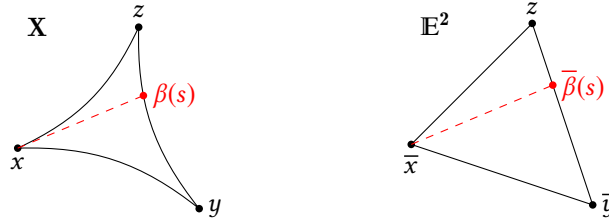
$$d(x_1, y_1) = d_2(\overline{x_1}, \overline{y_1}), \quad d(x_2, y_2) = d_2(\overline{x_2}, \overline{y_2}), \quad d(x_1, x_2) \leq d_2(\overline{x_1}, \overline{x_2}), \quad d(y_1, y_2) \leq d_2(\overline{y_1}, \overline{y_2}).$$



Wir werden sehen, dass man CAT(0)-Räume über die Vierpunktbedingung charakterisieren kann.

### 1.37 Lemma

Ein geodätischer Raum ist genau dann CAT(0), wenn für jedes geodätische Dreieck  $\Delta(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$  mit Vergleichsdreieck  $\bar{\Delta}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma})$  in  $\mathbb{E}^2$  gilt:  $d(x, \beta(s)) \leq d_2(\bar{x}, \bar{\beta}(s))$  für alle  $s \in [0, d(y, z)]$ . (Aufgabe A.10)



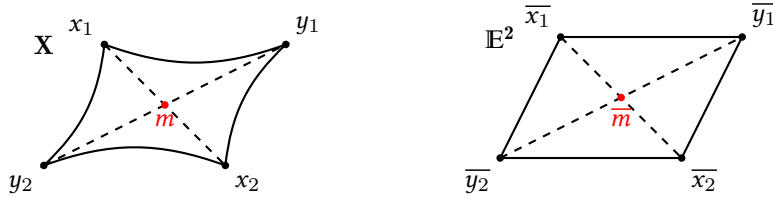
### 1.38 Theorem

Ein vollständiger metrischer Raum ist CAT(0) genau dann, wenn er ungefähre Mittelpunkte hat und die CAT(0)-Vierpunktbedingung erfüllt.

**BEWEIS:**

„ $\Rightarrow$ “: Der Raum  $X$  sei CAT(0). Dann hat  $X$  Mittelpunkte, also auch ungefähre Mittelpunkte. Seien  $x_1, y_1, x_2, y_2 \in X$ . Betrachte die euklidischen Vergleichsdreiecke zu  $\Delta(x_1, x_2, y_2)$  und  $\Delta(x_1, x_2, y_1)$ . Das resultierende Viereck ist entweder konvex oder nicht.

**1. Fall:** Das Viereck ist konvex.



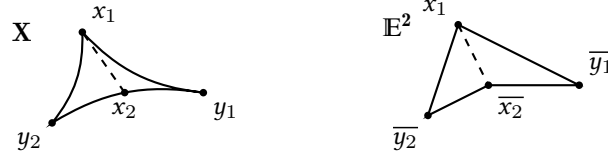
Definiere  $\bar{m}$  als Schnittpunkt der beiden Diagonalen in  $\mathbb{E}^2$  und sei  $t$  so, dass  $\bar{\alpha}(t) = \bar{m}$  für  $\bar{\alpha}: \bar{x}_1 \rightsquigarrow \bar{x}_2$ . Setze dann  $m := \alpha(t)$ .

Da  $X$  CAT(0) ist, gilt  $d(y_2, m) \leq d_2(\bar{y}_2, \bar{m})$  sowie  $d(y_1, m) \leq d_2(\bar{y}_1, \bar{m})$ . Da  $\bar{m}$  auf der Geodäte zwischen  $\bar{y}_1$  und  $\bar{y}_2$  liegt, erhalten wir insgesamt:

$$\begin{aligned} d(y_1, y_2) &\stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{=} d(y_1, m) + d(m, y_2) \\ &\leq d_2(\bar{y}_1, \bar{m}) + d_2(\bar{m}, \bar{y}_2) = d_2(\bar{y}_1, \bar{y}_2) \end{aligned}$$

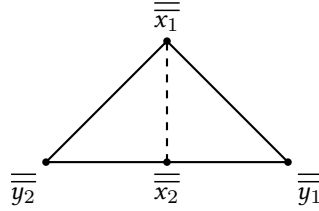


**2. Fall:** Das Viereck ist nicht konvex.



Betrachte dann folgendes Dreieck in  $\mathbb{E}^2$  mit

$$\begin{aligned} d_2(\overline{x_2}, \overline{y_2}) &= d_2(\overline{\overline{x_2}}, \overline{\overline{y_2}}), & d_2(\overline{x_2}, \overline{y_1}) &= d_2(\overline{\overline{x_2}}, \overline{\overline{y_1}}), \\ d_2(\overline{x_1}, \overline{y_1}) &= d_2(\overline{\overline{x_1}}, \overline{\overline{y_1}}), & d_2(\overline{x_1}, \overline{y_2}) &= d_2(\overline{\overline{x_1}}, \overline{\overline{y_2}}). \end{aligned}$$



Es gilt

$$d_2(\overline{\overline{x_1}}, \overline{\overline{x_2}}) \geq d_2(\overline{\overline{x_1}}, \overline{\overline{x_2}}) = d_2(x_1, x_2)$$

sowie

$$\begin{aligned} d_2(\overline{\overline{y_1}}, \overline{\overline{y_2}}) &= d_2(\overline{\overline{y_1}}, \overline{\overline{x_2}}) + d_2(\overline{\overline{x_2}}, \overline{\overline{y_2}}) \\ &= d_2(\overline{\overline{y_1}}, \overline{\overline{x_2}}) + d_2(\overline{\overline{x_2}}, \overline{\overline{y_2}}) \\ &= d(y_1, x_2) + d(x_2, y_2) \\ &\stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\geq} d(y_1, y_2). \end{aligned}$$

” $\Leftarrow$ ”: Nun sei  $X$  vollständig, habe ungefähre Mittelpunkte und erfülle die CAT(0)-Vierpunktbedingung. Zuerst zeigen wir, dass  $X$  geodätisch ist. Nach Lemma 1.35 reicht es zu zeigen, dass  $X$  Mittelpunkte hat. Seien  $u, v \in X$  beliebig. Sei weiter  $\varepsilon_n := \frac{1}{n}$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Da  $X$  ungefähre Mittelpunkte hat, existiert ein  $m_r \in X$  mit  $d(u, m_r), d(v, m_r) \leq \frac{1}{2}d(u, v) + \varepsilon_r$ . Sei  $(m_r)_{r \in \mathbb{N}}$  eine Folge von ungefähren Mittelpunkten mit Fehlerterm  $\varepsilon_r := \frac{1}{r}$ . Unser Ziel ist es zu zeigen, dass  $(m_r)_r$  eine Cauchy-Folge ist. Der Grenzwert  $m := \lim_{r \rightarrow \infty} m_r$  ist dann ein Mittelpunkt, denn:

$$\begin{aligned} d(u, m_r) &\leq \frac{1}{2}d(u, v) + \varepsilon_r \\ \lim_{r \rightarrow \infty} d(u, m_r) &\leq \frac{1}{2}d(u, v) \\ \stackrel{d \text{ stetig}}{\implies} d(u, m) &\leq \frac{1}{2}d(u, v). \end{aligned}$$

Ebenso erhalten wir  $d(v, m) \leq \frac{1}{2}d(u, v)$  und insgesamt  $d(u, m) + d(m, v) \leq d(u, v)$ . Es gilt aber auch die Dreiecksungleichung  $d(u, m) + d(m, v) \geq d(u, v)$ . Folglich erhalten wir Gleichheit

$$\begin{aligned} \underbrace{d(u, m)}_{\leq \frac{1}{2}d(u, v)} + \underbrace{d(m, v)}_{\leq \frac{1}{2}d(u, v)} &= d(u, v) \end{aligned}$$

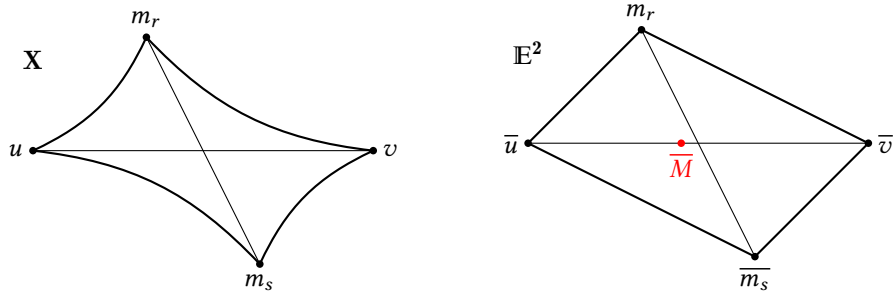
und damit  $d(u, m) = d(m, v) = \frac{1}{2}d(u, v)$ .

Sei nun  $\varepsilon > 0$  und  $\delta > 0$  die positive Lösung von  $-\varepsilon^2 + 4d^2 + 8r\delta = 0$ . Wir definieren  $d(u, v) =: 2r$ .

Da  $(\varepsilon_r)_{r \in \mathbb{N}}$  eine Nullfolge ist, existiert ein  $N \in \mathbb{N}$ , sodass gilt:

$$\left. \begin{aligned} d(u, m_r) \\ d(v, m_r) \\ d(u, m_s) \\ d(v, m_s) \end{aligned} \right\} \leq r + \delta \quad \forall r, s \geq N \quad (15)$$

Betrachte das 4-Tupel  $(u, m_r, v, m_s)$  und die Vergleichspunkte  $(\bar{u}, \bar{m}_r, \bar{v}, \bar{m}_s)$  in  $\mathbb{E}^2$ . Sei  $\bar{M}$  der Mittelpunkt von  $\bar{u}$  und  $\bar{v}$ . Nach Voraussetzung erfüllt  $X$  die CAT(0)-Vierpunktbedingung, also gilt



$$\left. \begin{aligned} d(u, v) &\leq d_2(\bar{u}, \bar{v}) \\ d(m_r, m_s) &\leq d_2(\bar{m}_r, \bar{m}_s) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Aus der Parallelogrammgleichung für  $\mathbb{E}^2$  kann man folgern (siehe Beweis zu Theorem 1.22):

$$d_2(\bar{m}_r, \bar{M})^2 = \frac{1}{2}d_2(\bar{u}, \bar{m}_r)^2 + \frac{1}{2}d_2(\bar{m}_r, \bar{v})^2 - \frac{1}{4}d_2(\bar{u}, \bar{v})^2 \quad (17)$$

Analoges erhalten wir für  $d_2(\bar{m}_s, \bar{M})^2$ . Nun erhalten wir

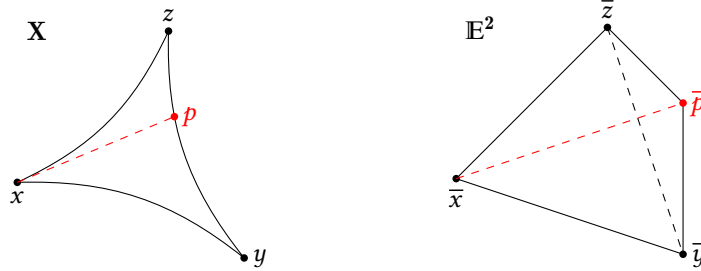
$$\begin{aligned} d(m_r, m_s) &\stackrel{(16)}{\leq} d_2(\bar{m}_r, \bar{m}_s) \\ &\stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} d_2(\bar{m}_r, \bar{M}) + d_2(\bar{M}, \bar{m}_s) \\ &\stackrel{(17)}{=} \sqrt{\frac{1}{2}d_2(\bar{u}, \bar{m}_r)^2 + \frac{1}{2}d_2(\bar{m}_r, \bar{v})^2 - \frac{1}{4}d_2(\bar{u}, \bar{v})^2} + \sqrt{\frac{1}{2}d_2(\bar{u}, \bar{m}_s)^2 + \frac{1}{2}d_2(\bar{m}_s, \bar{v})^2 - \frac{1}{4}d_2(\bar{u}, \bar{v})^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{\frac{1}{2}d(u, m_r)^2 + \frac{1}{2}d(m_r, v)^2 - \frac{1}{4}d_2(\bar{u}, \bar{v})^2} + \sqrt{\frac{1}{2}d(u, m_s)^2 + \frac{1}{2}d(m_s, v)^2 - \frac{1}{4}d_2(\bar{u}, \bar{v})^2} \\
 &\stackrel{(15)}{\leq} 2 \cdot \sqrt{(r + \delta)^2 - \frac{1}{4}d_2(\bar{u}, \bar{v})^2} \quad \forall r, s \geq N \\
 &\stackrel{(16)}{\leq} 2 \cdot \sqrt{(r + \delta)^2 - \frac{1}{4}d(u, v)^2} \quad \forall r, s \geq N \\
 &= 2 \cdot \sqrt{r^2 + 2r\delta + \delta^2 - r^2} = \varepsilon \quad \forall r, s \geq N
 \end{aligned}$$

Somit ist  $(m_r)_r$  eine Cauchy-Folge.

Sei  $\Delta(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$  ein geodätisches Dreieck in  $X$ . Wir betrachten die Bedingung aus Lemma 1.37.

Sei  $p := \beta(s) \in \text{im}(\beta: y \rightsquigarrow z)$  beliebig.



Zu den Punkten  $(x, y, p, z)$  betrachten wir die Vergleichspunkte  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}, \bar{z})$ . Es gilt

$$d(x, p) \leq d_2(\bar{x}, \bar{p}) \quad \text{und} \quad d(z, y) \leq d_2(\bar{z}, \bar{y}) \quad (18)$$

Wir zeigen, dass  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}, \bar{z})$  ein Vergleichsdreieck ist, also dass  $\bar{p}$  auf der Geodäte  $\bar{\beta}: \bar{y} \rightsquigarrow \bar{z}$  liegt. Es gilt

$$d_2(\bar{y}, \bar{z}) \stackrel{(18)}{\geq} d(y, z) = d(y, p) + d(p, z) = d_2(\bar{y}, \bar{p}) + d_2(\bar{p}, \bar{z})$$

und

$$d_2(\bar{y}, \bar{z}) \stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} d_2(\bar{y}, \bar{p}) + d_2(\bar{p}, \bar{z}).$$

Folglich liegt  $\bar{p}$  auf der Geodäte  $\bar{\beta}$ , das heißt wir haben ein Vergleichsdreieck.  $\square$

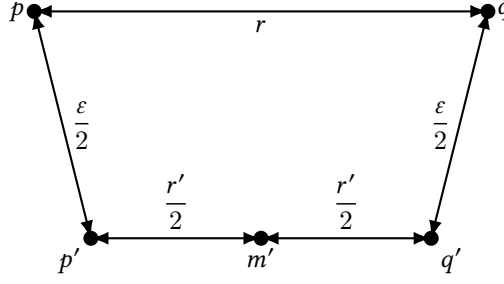
### 1.39 Theorem

Die metrische Vervollständigung eines CAT(0)-Raumes ist ein CAT(0)-Raum.

**BEWEIS:** Sei  $X$  ein CAT(0)-Raum mit Vervollständigung  $\widehat{X}$ . Wir zeigen, dass die Bedingung aus Theorem 1.38 erfüllt sind. Zuerst zeigen wir, dass  $\widehat{X}$  ungefähre Mittelpunkte hat. Seien  $p, q \in \widehat{X}$ ,  $\varepsilon > 0$ . Wähle  $p', q' \in X$  mit

$$d(p, p') < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad d(q, q') < \frac{\varepsilon}{2} \quad (19)$$

und  $m' \in X$  als Mittelpunkt von  $p'$  und  $q'$ . Sei  $r = d(p, q)$  und  $r' = d(p', q')$ .



Wir erhalten mit  $r' = d(p', q') \leq d(p', p) + d(p, q) + d(q, q') \leq \varepsilon + r$ :

$$\begin{aligned}
 d(p, m') &\stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} d(p, p') + d(p', m') \\
 &\stackrel{(19)}{\leq} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{r'}{2} \\
 &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{r}{2} = \frac{r}{2} + \varepsilon.
 \end{aligned}$$

und ebenso  $d(q, m') \leq \frac{r}{2} + \varepsilon$ , das heißt  $\widehat{X}$  hat ungefähre Mittelpunkte.

Sei jetzt  $(x_1, y_1, x_2, y_2) \in \widehat{X}^4$ . Wähle Folgen in  $X$  mit

$$x_1(n) \rightarrow x_1 \quad y_1(n) \rightarrow y_1 \quad x_2(n) \rightarrow x_2 \quad y_2(n) \rightarrow y_2$$

und CAT(0)-Vierpunkt-Vergleichspunkte  $\overline{x_1(n)}, \overline{y_1(n)}, \overline{x_2(n)}, \overline{y_2(n)}$  in  $\mathbb{E}^2$ . Ohne Einschränkung sei  $\overline{x_1(n)} = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Die Folge  $(\overline{x_1(n)}, \overline{y_1(n)}, \overline{x_2(n)}, \overline{y_2(n)})$  hat einen Häufungspunkt in  $(\mathbb{E}^2)^4$ , weil sie beschränkt ist. Wir dürfen ohne Einschränkung annehmen, dass wir Konvergenz haben, das heißt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\overline{x_1(n)}, \overline{y_1(n)}, \overline{x_2(n)}, \overline{y_2(n)}) = (0, \overline{y_1}, \overline{x_2}, \overline{y_2}).$$

Dann folgt:

$$\begin{aligned}
 d(x_i, y_j) &= d\left(\lim_n x_i(n), \lim_n y_j(n)\right) \\
 &\stackrel{d \text{ stetig}}{=} \lim_n d(x_i(n), y_j(n)) \\
 &= \lim_n d_2(\overline{x_i(n)}, \overline{y_j(n)}) \\
 &\stackrel{d_2 \text{ stetig}}{=} d_2(\overline{x_i}, \overline{y_j})
 \end{aligned}$$

Ebenso haben wir  $d(x_1, x_2) \leq d_2(\overline{x_1}, \overline{x_2})$  und  $d(y_1, y_2) \leq d_2(\overline{y_1}, \overline{y_2})$ . □

## 2. Der Satz von CARTAN-HADAMARD

Sei  $X$  ein  $\text{CAT}(0)$ -Raum. Wir haben gesehen, dass  $\text{CAT}(0)$ -Räume viele „schöne“ Eigenschaften haben.

(i) Sie sind eindeutig geodätisch und besitzen damit eindeutige Mittelpunkte.

(ii) Für  $C \subseteq X$  konvex und vollständig haben wir

$$\begin{aligned}\pi_C: X &\longrightarrow C \\ x &\longmapsto \pi_C(x)\end{aligned}$$

mit  $d(x, \pi_C(x)) = d(x, C)$ , das heißt  $X$  ist kontrahierbar.

(iii) Für  $X$  vollständig und alle  $A \subseteq X$  beschränkt existiert ein eindeutiges  $c_A \in X$  mit

$$A \subseteq \overline{B_{\text{rad}(A)}(c_A)}.$$

Daraus folgt, dass jede isometrische Wirkung  $G \curvearrowright X$  einen globalen Fixpunkt besitzt, wenn  $G$  endlich ist.

(iv) Die metrische Vervollständigung von  $X$  ist  $\text{CAT}(0)$ .

Die  $\text{CAT}(0)$ -Bedingung ist eine globale Bedingung und deshalb schwer zu erfüllen. Einfacher ist es zu zeigen, dass ein metrischer Raum lokal  $\text{CAT}(0)$  ist.

Sei  $X$  ein vollständiger metrischer Raum. Wir suchen nun eine „schwache“ globale Bedingung, die einfacher überprüfbar ist als die globale  $\text{CAT}(0)$ -Bedingung, sodass wir eine äquivalente Charakterisierung von  $\text{CAT}(0)$ -Räumen erhalten.

$$X \text{ lokal } \text{CAT}(0) \quad + \quad ??? \quad \Leftrightarrow \quad X \text{ ist } \text{CAT}(0)$$

### 2.1 Satz (CARTAN-HADAMARD)

Sei  $X$  ein vollständiger zusammenhängender lokaler  $\text{CAT}(0)$ -Raum. Sei  $\tilde{X}$  seine universelle Überlagerung. Dann ist  $\tilde{X}$  ein  $\text{CAT}(0)$ -Raum.

### 2.2 Korollar

Sei  $X$  ein vollständiger metrischer Raum. Dann gilt:

$$X \text{ lokal } \text{CAT}(0) \quad + \quad \text{einfach zusammenhängend} \quad \Leftrightarrow \quad X \text{ ist } \text{CAT}(0).$$

Um diesen Satz zu beweisen, brauchen wir viel Vorarbeit.

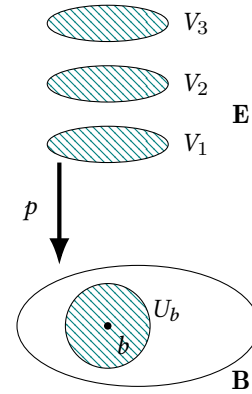
**Erinnerung** (siehe [Kra15, Kap. 3])

Seien  $E, B$  topologische Räume. Sei weiter  $p: E \rightarrow B$  eine stetige surjektive Abbildung. Wir nennen  $p$  eine **Überlagerung** von  $B$ , wenn jeder Punkt  $b \in B$  eine offene Umgebung  $U_b \subseteq B$  von  $b$  besitzt mit folgender Eigenschaft:

Es gibt eine Indexmenge  $I \neq \emptyset$  mit

$$p^{-1}(U_b) = \bigsqcup \{V_i : i \in I\}, V_i \subseteq E \text{ offen}, V_i \cap V_j = \emptyset, i \neq j$$

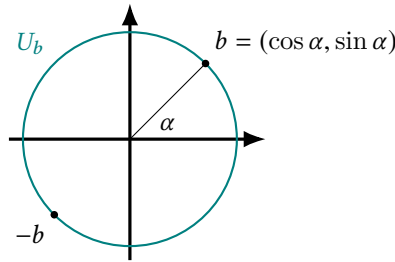
und  $p|_{V_i} \rightarrow U_b$  ist ein Homöomorphismus.



Ein triviales Beispiel einer Überlagerung ist die Identität  $\text{id}_B$ . Ein weiteres, wichtiges Beispiel ist  $E := \mathbb{R}, B := \mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$  und

$$\begin{aligned} p: E &\longrightarrow B \\ t &\longmapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \end{aligned}$$

Das ist eine Überlagerung, denn für  $b = (\cos(\alpha), \sin(\alpha)) \in \mathbb{S}^1$  und  $U_b = \mathbb{S}^1 \setminus \{-b\}$  ist  $p^{-1}(U_b) = \bigcup \{(k + r - \frac{1}{2}, k + r + \frac{1}{2}) : k \in \mathbb{Z}\}$ .



$p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$  ist eine Überlagerung mit  $\pi_1(E, \{e\}) = \pi_2(\mathbb{R}, \{x_0\}) \simeq \{0\}$  und  $\mathbb{R}$  ist wegzusammenhängend.

### Definition

Eine Überlagerung  $p: E \rightarrow B$  heißt **universelle Überlagerung**, wenn  $E$  einfach zusammenhängend ist.

Die Frage ist nun, welche Räume die universelle Überlagerung besitzen.

### Satz (ohne Beweis)

Jeder zusammenhängende topologische Raum  $X$ , welcher lokal wegzusammenhängend ist und semilokal einfach zusammenhängend ist, hat eine universelle Überlagerung.

$X$  heißt genau dann **semilokal einfach zusammenhängend**, wenn für alle  $x \in X$  eine offene Umgebung  $U_x$  von  $x$  existiert, sodass  $\text{id}_* : \pi_1(U_x, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$  trivial ist.

**Bemerkung**

- (i) Wenn  $X$  lokal CAT(0) ist, dann ist  $X$  semilokal einfach zusammenhängend, denn für  $x \in X$  existiert ein  $\varepsilon > 0$ , sodass  $B_\varepsilon(x)$  CAT(0) ist. CAT(0)-Räume sind kontrahierbar, folglich ist  $\pi_1(B_\varepsilon(x), x) \simeq \{0\}$  und damit ist  $\text{id}_*: \pi_1(B_\varepsilon(x), x) \rightarrow \pi_1(X, x)$  trivial.
- (ii) Jeder zusammenhängende lokale CAT(0)-Raum hat also eine universelle Überlagerung.

**BEWEIS** (Korollar 2.2):

” $\Leftarrow$ ”: Ist  $X$  ein CAT(0)-Raum, dann ist  $B_\varepsilon(x)$  für alle  $\varepsilon > 0, x \in X$  konvex (Aufgabe A.13). Also ist  $B_\varepsilon(x)$  CAT(0). In Satz 1.19 haben wir bewiesen, dass  $X$  kontrahierbar ist, folglich ist  $\pi_1(X, \{x\}) \simeq \{0\}$ . Da  $X$  wegzusammenhängend ist, folgt insgesamt, dass  $X$  einfach zusammenhängend ist.

” $\Rightarrow$ ”: Die Identität  $\text{id}_X$  ist die universelle Überlagerung, da  $X$  nach Voraussetzung zusammenhängend ist. Nach Satz 2.1 ist  $X$  dann CAT(0).  $\square$

Der Satz von CARTAN und HADAMARD liefert uns also:

- eine lokal  $\rightarrow$  global-Aussage (Korollar 2.2)
- eine Möglichkeit, viele CAT(0)-Räume zu erhalten
- ein Werkzeug, um zu zeigen, dass die universelle Überlagerung kontrahierbar ist.

Für den Beweis machen wir zuerst ein paar Vorüberlegungen: Wir haben  $p: \tilde{X} \rightarrow X$ , wobei  $X$  ein vollständiger metrischer zusammenhängender lokaler CAT(0)-Raum ist. Wir werden eine Metrik auf  $\tilde{X}$  definieren, sodass  $p$  eine **lokale Isometrie** ist, d.h. für  $\tilde{x} \in \tilde{X}$  existiert ein  $\varepsilon > 0$ , sodass  $p: B_\varepsilon(\tilde{x}) \rightarrow B_\varepsilon(p(\tilde{x}))$  eine Isometrie ist.

## 2.1. Längenräume

Betrachte  $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{E}^2$ . Die induzierte Metrik von  $\mathbb{E}^2$  auf  $\mathbb{S}^1$  ist keine „gute“ Metrik, um Geometrie zu machen. Besser ist folgende Metrik:

$$d_L(x, y) = \text{Bogenlänge zwischen } x \text{ und } y = \cos(\langle x, y \rangle).$$

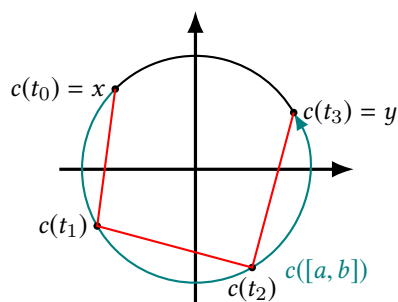
Als allgemeines Konzept betrachten wir also Wege von  $x$  nach  $y$ .

### 2.3 Definition (Weg, Länge, rektifizierbar)

Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $c: [a, b] \rightarrow X$  eine stetige Abbildung. Die Abbildung  $c$  heißt **Weg** von  $c(a)$  nach  $c(b)$ . Wir definieren die **Länge** von  $c$  folgendermaßen:

$$\ell(c) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n d(c(t_{i-1}), c(t_i)) : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b, n \in \mathbb{N} \right\} \in [0, \infty].$$

Falls  $\ell(c) < \infty$ , heißt  $c$  **rektifizierbar**.



$$\ell(c) \geq d(c(t_0), c(t_1)) + d(c(t_1), c(t_2)) + d(c(t_2), c(t_3))$$

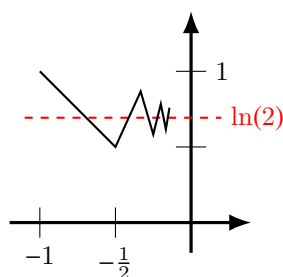
## 2.4 Bemerkung

Es gibt Wege, die nicht rektifizierbar sind. Wir betrachten das folgende Beispiel:

$$c: [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$-\frac{1}{n} \mapsto \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \cdot \frac{1}{n}$$

$$0 \mapsto \ln(2)$$



und stetig linear fortgesetzt auf  $[-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1}]$ .

Betrachte  $t_n = -\frac{1}{n}$ . Damit erhalten wir

$$\ell(c) \geq \ell\left(c|_{[-1, -\frac{1}{n+1}]}\right) \geq \sum_{i=1}^n d_2(c(t_i), c(t_{i+1})) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

## 2.5 Definition

Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $c_1: [a_1, b_1] \rightarrow X$ ,  $c_2: [a_2, b_2] \rightarrow X$  zwei Wege mit  $c_1(b_1) = c_2(a_2)$ .

(i) Der **zusammengesetzte Weg**  $c_1 * c_2$  von  $c_1(a_1)$  nach  $c_2(b_2)$  ist definiert wie folgt:

$$c_1 * c_2: [a_1, b_1 + b_2 - a_2] \rightarrow X$$

$$t \mapsto \begin{cases} c_1(t), & t \in [a_1, b_1] \\ c_2(t + a_2 - b_1), & t \in [b_1, b_1 + b_2 - a_2] \end{cases}$$

(ii) Der **inverse Weg** von  $c_1$  ist definiert wie folgt:

$$\overline{c_1}: [a_1, b_1] \rightarrow X$$

$$t \mapsto c_1(a_1 + b_1 - t)$$



### 2.6 Proposition

Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $c: [a, b] \rightarrow X$  ein Weg. Dann gilt:

- (i)  $\ell(c) \geq d(c(a), c(b))$  und  $\ell(c) = 0$  genau dann, wenn  $c$  konstant ist.
- (ii) Sei  $\varphi: [a', b'] \rightarrow [a, b]$  eine schwach monotone surjektive stetige Funktion. Dann gilt  $\ell(c) = \ell(c \circ \varphi)$ .
- (iii) Additivität: Seien  $c_1: [a_1, b_1] \rightarrow X$  und  $c_2: [a_2, b_2] \rightarrow X$  zwei Wege in  $X$  mit  $c_1(b_1) = c_2(a_2)$ . Dann gilt  $\ell(c_1 * c_2) = \ell(c_1) + \ell(c_2)$ .
- (iv)  $\ell(\bar{c}) = \ell(c)$
- (v) Wenn  $\ell(c) < \infty$ , dann ist

$$\begin{aligned} \lambda_c: [a, b] &\longrightarrow [0, \ell(c)] \\ t &\longmapsto \ell(c|_{[a, t]}) \end{aligned}$$

eine stetige schwach monotone surjektive Funktion.

- (vi) Parametrisierung nach der Bogenlänge: Wenn  $\ell(c) < \infty$ , dann existiert ein eindeutiger Weg  $\tilde{c}: [0, \ell(c)] \rightarrow X$  mit  $\tilde{c} \circ \lambda_c = c$  und  $\ell(\tilde{c}|_{[0, t]}) = t$ .
- (vii) Sei  $(c_n: [a, b] \rightarrow X)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Wegen, die gleichmäßig gegen einen Weg  $c: [a, b] \rightarrow X$  konvergiert. Wenn  $\ell(c) < \infty$ , dann gilt: Für alle  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $N(\varepsilon)$  mit  $\ell(c) \leq \ell(c_n) + \varepsilon$  für alle  $n \geq N(\varepsilon)$ .

**BEWEIS:** (i) bis (iv) und (vi): siehe Aufgabe A.14 und Aufgabe A.15.

- (v) Zuerst zeigen wir, dass  $\lambda_c$  schwach monoton ist. Seien  $t, t' \in [a, b]$  mit  $t \leq t'$ . Dann ist

$$c|_{[a, t']} = c|_{[a, t]} * c|_{[t, t']}.$$

Mit (ii) erhalten wir:

$$\begin{aligned} \ell(c|_{[a, t']}) &= \ell(c|_{[a, t]}) + \ell(c|_{[t, t']}) \\ \Rightarrow \underbrace{\ell(c|_{[a, t]})}_{\lambda_c(t)} &\leq \underbrace{\ell(c|_{[a, t']})}_{\lambda_c(t')} \end{aligned}$$

Zur Stetigkeit: Wir zeigen, dass  $\lambda_c$  gleichmäßig stetig ist. Sei  $\varepsilon > 0$ . Da  $[a, b]$  kompakt ist, ist der Weg  $c$  gleichmäßig stetig. Also existiert ein  $\delta > 0$ , sodass für alle  $t, t' \in [a, b]$  mit  $d(t, t') < \delta$  gilt:

$$d(c(t), c(t')) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Für  $\frac{\varepsilon}{4}$  existiert  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n+1} = b$  mit

$$\sum_{i=0}^n d(c(t_i), c(t_{i+1})) + \frac{\varepsilon}{4} > \ell(c). \quad (20)$$

Weiter können wir annehmen, dass gilt (ansonsten wähle feinere Unterteilung):

$$d(t_i, t_{i+1}) < \delta \text{ für alle } i \in \{0, \dots, n\}$$

Wir erhalten

$$\ell(c) \stackrel{(ii)}{=} \sum_{i=0}^n \ell(c|_{[t_i, t_{i+1}]}) \stackrel{(i)}{\geq} \sum_{i=0}^n d(c(t_i), c(t_{i+1})) \stackrel{(20)}{>} \ell(c) - \frac{\varepsilon}{4}.$$

Folglich:

$$|\ell(c|_{[t_i, t_{i+1}]} - d(c(t_i), c(t_{i+1})))| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Da  $d(c(t_i), c(t_{i+1})) < \frac{\varepsilon}{4}$ , erhalten wir

$$\ell(c|_{[t_i, t_{i+1}]}) < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Insgesamt erhalten wir, dass für alle  $t, t' \in [a, b]$  mit  $d(t, t') < \delta$  gilt:

$$|\lambda_c(t) - \lambda_c(t')| = \ell(c|_{[t, t']}) \leq \ell(c|_{[t_j, t_{j+2}]}) < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

für ein  $j \in \{0, \dots, n-1\}$ .

Zur Surjektivität: Es gilt  $\lambda_c(a) = 0$  und  $\lambda_c(b) = \ell(c)$ . Die Abbildung  $\lambda_c$  ist stetig und  $[a, b]$  ist zusammenhängend. Folglich ist  $\lambda_c([a, b])$  zusammenhängend und wir erhalten  $\lambda_c([a, b]) = [0, \ell(c)]$ .

**(vii)** Sei  $\varepsilon > 0$ . Wähle  $t_i \in [a, b], a = t_0 < t_1 < \dots < t_{k+1} = b$  mit

$$\ell(c) \leq \sum_{i=0}^k d(c(t_i), c(t_{i+1})) + \frac{\varepsilon}{2} \quad (21)$$

Da  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gleichmäßig gegen  $c$  konvergiert, existiert ein  $N \in \mathbb{N}$ , sodass gilt:

$$d(c(t), c_n(t)) < \frac{\varepsilon}{4 \cdot (k+1)} \text{ für alle } N \neq n, t \in [a, b]. \quad (22)$$

Wir erhalten:

$$\ell(c) \stackrel{(21)}{\leq} \sum_{i=0}^k d(c(t_i), c(t_{i+1})) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Nebenrechnung:

$$\begin{aligned} d(c(t_i), c(t_{i+1})) &\stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} d(c(t_i), c_n(t_i)) + d(c_n(t_i), c_n(t_{i+1})) + d(c_n(t_{i+1}), c(t_{i+1})) \\ &\stackrel{(22)}{\leq} \frac{\varepsilon}{2 \cdot (k+1)} + d(c_n(t_i), c_n(t_{i+1})) \quad \forall n \geq N \end{aligned}$$

Also:

$$\ell(c) \leq (k+1) \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot (k+1)} + \sum_{i=0}^k d(c_n(t_i), c_n(t_{i+1})) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \ell(c_n) + \varepsilon \quad \forall n \geq N \quad \square$$

## 2.7 Definition

Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum.  $d$  heißt **Längenmetrik**, falls für alle  $x, y \in X$  gilt:

$$d(x, y) = \inf \{ \ell(c) : c \text{ ist ein rektifizierbarer Weg von } x \text{ nach } y \}$$

Falls  $d$  eine Längenmetrik ist, heißt  $(X, d)$  ein **Längenraum**.

## 2.8 Beispiel

- (i) Jeder geodätische Raum  $X$  ist ein Längenraum. Genauer: Seien  $x, y \in X$  beliebig. Sei weiter  $\gamma : [0, d(x, y)] \rightarrow X$  eine Geodäte zwischen  $x$  und  $y$ . Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig. Wähle  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n+1} = d(x, y)$  mit

$$\begin{aligned} \ell(\gamma) &\leq \sum_{i=0}^n d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) + \varepsilon \\ &\stackrel{\gamma \text{ isom.}}{=} \sum_{i=0}^n d_2(t_i, t_{i+1}) + \varepsilon \\ &= d(x, y) + \varepsilon \end{aligned}$$

Für  $\varepsilon = \frac{1}{n}$  erhalten wir  $\ell(\gamma) \leq d(x, y)$  für  $n \rightarrow \infty$ . Mit  $\ell(\gamma) \geq d(\gamma(0), \gamma(d(x, y))) = d(x, y)$  (Proposition 2.6(i)) folgt Gleichheit.

- (ii) Im Allgemeinen ist ein Längenraum nicht geodätisch. Zum Beispiel ist  $(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, d_2)$  ein Längenraum, aber zwischen  $(-1, 0)$  und  $(1, 0)$  existiert keine Geodäte.

Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Dann induziert  $d$  eine Längenmetrik  $d_L$  auf  $X$  und zwar wie folgt:

## 2.9 Definition

Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Wir definieren

$$\begin{aligned} d_L : X \times X &\longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\} \\ (x, y) &\longmapsto \inf \{ \ell(c) : c \text{ ist ein rektifizierbarer Weg von } x \text{ nach } y \} \end{aligned}$$

Falls kein rektifizierbarer Weg von  $x$  nach  $y$  existiert, dann setzen wir  $d_L(x, y) = \infty$ . Es gilt (folgt direkt mit Proposition 2.6):

- (i)  $d_L$  ist eine Metrik auf  $X$  (Konvention:  $a + \infty = \infty$  für alle  $a \in [0, \infty]$ )

- (ii)  $d_L(x, y) \geq d(x, y)$  für alle  $x, y \in X$

Wir nennen  $d_L$  die zu  $d$  **assoziierte Längenmetrik**.

### 2.10 Beispiel

- (i)  $(\mathbb{Q}, d_2)$ :  $d_{2_L}(x, y) = \infty$  für alle  $x, y \in \mathbb{Q}$  mit  $x \neq y$
- (ii)  $(\mathbb{S}^1, d_2)$ :  $d_{2_L}(x, y) = \arccos(\langle x, y \rangle)$

### 2.11 Proposition

Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum.

- (i) Sei  $c: [a, b] \Rightarrow X$  ein rektifizierbarer Weg in  $(X, d)$ , dann ist  $c$  auch ein rektifizierbarer Weg in  $(X, d_L)$  und  $\ell^d(c) = \ell^{d_L}(c)$ .
- (ii) Es gilt:  $(d_L)_L = d_L$ .

**BEWEIS:**

- (i) Wir zeigen zuerst, dass  $c: [a, b] \rightarrow (X, d_2)$  stetig ist. Sei  $t \in [a, b]$  beliebig. Sei weiter  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $[a, b]$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t$ . Wir müssen zeigen, dass gilt:  $\lim_{n \rightarrow \infty} c(t_n) = c(t)$ . Sei  $\varepsilon > 0$ .

$$d_L(c(t), c(t_n)) \leq \ell(c|_{[t, t_n]}) = |\lambda_c(t_n) - \lambda_c(t)|$$

Da  $\lambda_c$  stetig ist, existiert  $N(\varepsilon)$  mit  $|\lambda_c(t_n) - \lambda_c(t)| < \varepsilon$  für alle  $n \geq N(\varepsilon)$ . Da  $d_L(x, y) \geq d(x, y)$  für alle  $x, y \in X$  gilt, folgt  $\ell^{d_L}(c) \geq \ell^d(c)$ . Weiter haben wir:

$$\begin{aligned} \ell^{d_L}(c) &\stackrel{\text{Def}}{=} \sup \left\{ \sum_{i=0}^n d_L(c(t_i), c(t_{i+1})) : a = t_0 < \dots < t_{n+1} = b, n \in \mathbb{N} \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \sum_{i=0}^n \ell^d(c|_{[t_i, t_{i+1}]}) : a = t_0 < \dots < t_{n+1} = b, n \in \mathbb{N} \right\} \\ &\stackrel{\text{Def}}{=} \ell^d(c). \end{aligned}$$

- (ii) folgt sofort aus (i). □

Im Allgemeinen muss ein Längenraum nicht geodätisch sein. Zum Beispiel ist  $(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, d_2)$  ein (nicht vollständiger) Längenraum, aber nicht geodätisch.

### 2.12 Definition (lokal kompakt)

Ein metrischer Raum  $(X, d)$  heißt **lokal kompakt**, wenn für alle  $x \in X$  ein  $r > 0$  existiert, sodass  $\overline{B_r(x)}$  kompakt ist.

### 2.13 Theorem (HOPF-RINOW)

Sei  $(X, d)$  ein Längenraum. Wenn  $X$  vollständig und lokal kompakt ist, dann gilt:

- (i) Für jedes  $x \in X$  und  $r > 0$  ist  $\overline{B_r(x)}$  kompakt.
- (ii)  $(X, d)$  ist geodätisch.

**BEWEIS** (zu (i)): Sei  $x \in X$  beliebig. Wir definieren:

$$\Sigma := \{r \in \mathbb{R}_{\geq 0} : \overline{B_r(x)} \text{ ist kompakt}\}$$

Wir müssen zeigen, dass gilt:  $\Sigma = \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Dafür zeigen wir  $\Sigma \neq \emptyset$  sowie  $\Sigma$  offen und abgeschlossen. Da  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  zusammenhängend ist, folgt dann  $\Sigma = \mathbb{R}_{\geq 0}$ .

[1]  $\Sigma \neq \emptyset$ , da  $0 \in \Sigma$ .

[2] Falls  $r \in \Sigma$ , dann ist auch  $[0, r] \subseteq \Sigma$ . Genauer: Sei  $r' \in [0, r]$  beliebig, dann ist  $\overline{B_{r'}(x)} \subseteq \overline{B_r(x)}$  als abgeschlossene Teilmenge in einem kompakten Raum kompakt. Folglich:  $r' \in \Sigma$ .

Zur Offenheit von  $\Sigma$ : Sei  $r \in \Sigma$  beliebig. Wir müssen zeigen, dass eine offene Umgebung  $U_r$  von  $r$  existiert mit  $U_r \subseteq \Sigma$ .

**1. Fall:**  $r = 0$ . Da  $X$  lokal kompakt ist, existiert ein  $r' \in \mathbb{R}_{>0}$  mit  $\overline{B_{r'}(x)}$  kompakt. Mit [2] folgt  $[0, r'] \subseteq \Sigma$ , also  $U_0 := [0, r'] \subseteq \Sigma$ .

**2. Fall:**  $r \in \Sigma \cap \mathbb{R}_{>0}$ . Es gilt also, dass  $\overline{B_r(x)}$  kompakt ist. Sei  $x_i \in X$  beliebig. Da  $X$  lokal kompakt ist, existiert ein  $r_i > 0$  mit  $\overline{B_{r_i}(x_i)}$  kompakt. Wir betrachten die offene Überdeckung von  $\overline{B_r(x)}$ :

$$\overline{B_r(x)} \subseteq \bigcup_{x_i \in X} B_{r_i}(x_i)$$

Da  $\overline{B_r(x)}$  kompakt ist, existieren  $x_1, \dots, x_n \in X$  mit

$$\overline{B_r(x)} \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_{r_i}(x_i).$$

Betrachte  $A := \overline{B_r(x)}$  kompakt und  $B := X \setminus \bigcup_{i=1}^n B_{r_i}(x_i)$  abgeschlossen. Es gilt  $A \cap B = \emptyset$ . Dann existiert ein  $\delta > 0$  mit

$$\inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\} > 2\delta. \quad (23)$$

Folglich ist

$$\overline{B_{r+\delta}(x)} \subseteq \bigcup_{i=1}^n \overline{B_{r_i}(x_i)}$$

und damit ist  $\overline{B_{r+\delta}(x)}$  kompakt. Es folgt  $U_r := (\delta - r, r + \delta) \cap [0, r + \delta] \subseteq \Sigma$ .

Zu (23): Angenommen,  $\inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\} = 0$ . Dann existieren Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A, (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq B$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, b_n) = 0$ . Da  $A$  kompakt ist, existiert eine konvergente Teilfolge  $(a_{n_k})$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$ . Wir erhalten

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} d(a_{n_k}, b_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} d(a, b_{n_k}).$$

Also gilt  $b_{n_k} \rightarrow a$ . Da  $B$  abgeschlossen ist, liegt  $a \in B$ . Widerspruch zu  $A \cap B = \emptyset$ .

Zur Abgeschlossenheit von  $\Sigma$ : Wir benutzen das folgende Kriterium für einen metrischen Raum  $Y$ :

$$A \subseteq Y \text{ abg.} \Leftrightarrow \text{für alle Folgen } (y_n)_n \subseteq A, \text{ die in } Y \text{ konvergieren, gilt } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \in A.$$

In unserem Fall reicht es zu zeigen, dass für  $r \in \mathbb{R}_{>0}$  mit  $[0, r] \subseteq \Sigma$  auch  $r \in \Sigma$  ist. Sei also  $r \in \mathbb{R}_{>0}$  mit  $[0, r] \subseteq \Sigma$  beliebig. Wir müssen zeigen, dass  $\overline{B_r(x)}$  kompakt ist. In metrischen Räumen sind die Begriffe Folgenkompaktheit und Kompaktheit äquivalent. Sei also  $(x_n)_n$  eine Folge in  $\overline{B_r(x)}$ . Wir müssen zeigen, dass  $(x_n)_n$  eine konvergente Teilfolge hat.

Wir können annehmen, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = r$  ist. Andernfalls können wir eine Teilfolge  $(x_{n_k})$  von  $(x_n)$  finden, sodass  $x_{n_k} \in \overline{B_{r'}(x)}$  für ein  $r' \in [0, r)$ . Da  $\overline{B_{r'}(x)}$  kompakt ist, existiert eine Teilfolge  $(x_{n_{k_l}})$ , die konvergent ist. Wir konstruieren eine Hilfsfolge:

Seien  $n, m \in \mathbb{N}$  beliebig. Betrachte  $c_n: [a, b] \rightarrow X$  mit  $c(a) = x$ ,  $c(b) = x_n$  und  $\ell(c_n) < r - \frac{1}{2+2m}$ . Sei  $y_n^m \in \text{im}(c_n)$  beliebig mit  $d(x_n, y_n^m) < \frac{1}{m+1}$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} d(x, y_n^m) &< r - \frac{1}{2+2m} \\ d(x_n, y_n^m) &< \frac{1}{m+1} \end{aligned}$$

Für festes  $m$  liegt  $(y_n^m)_n$  in der kompakten Menge  $\overline{B_{r-\frac{1}{2+2m}}(x)}$ . Das heißt, für festes  $m$  hat  $(y_n^m)_n$  eine konvergente Teilfolge. Benutze Diagonaltrick:

$$\begin{aligned} \text{Sei } (y_{n_k^1}^1)_k &\text{ eine konvergente Teilfolge von } (y_n^1)_{n \in \mathbb{N}}. \\ \text{Sei } (y_{n_k^2}^2)_k &\text{ eine konvergente Teilfolge von } (y_{n_k^1}^2)_k. \\ &\vdots \end{aligned}$$

Definiere  $n_k := n_k^k$  für jedes  $k \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $(y_{n_k}^m)_k$  eine konvergente Folge für alle  $m \in \mathbb{N}$ .

**Beh:**  $(x_{n_k})$  konvergiert:

**Bew:** Wir zeigen, dass  $(x_{n_k})$  eine Cauchy-Folge ist. Da  $\overline{B_r(x)}$  eine abgeschlossene Teilmenge in einem vollständigen Raum ist, ist  $\overline{B_r(x)}$  vollständig. Damit liegt dann  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \in \overline{B_r(x)}$ . Sei  $\varepsilon > 0$ . Sei weiter  $m \in \mathbb{N}$  mit  $2 \cdot \frac{1}{m+1} < \frac{\varepsilon}{2}$  beliebig.

$$\begin{aligned} d(x_{n_k}, x_{n_l}) &\stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} d(x_{n_k}, y_{n_k}^m) + d(y_{n_k}^m, y_{n_l}^m) + d(y_{n_l}^m, x_{n_l}) \\ &< 2 \cdot \frac{1}{m+1} + d(y_{n_k}^m, y_{n_l}^m) \end{aligned}$$

Da  $(y_{n_k}^m)$  für alle  $m$  konvergent ist, existiert  $N \in \mathbb{N}$  mit  $d(y_{n_k}^m, y_{n_l}^m) < \frac{\varepsilon}{2}$  für alle  $k, l > N$ . Wir erhalten

$$d(x_{n_k}, x_{n_l}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

für alle  $k, l > N$ . □

Um die Aussage (ii) zu beweisen, brauchen wir ein Resultat von ARZELÀ und ASCOLI.

**2.14 Definition** (gleichstetig)

Seien  $X$  und  $Y$  metrische Räume. Eine Folge von Abbildungen  $(f_n : X \rightarrow Y)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt **gleichstetig**, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, x' \in X, n \in \mathbb{N} : d_X(x, x') < \delta \Rightarrow d_Y(f_n(x), f_n(x')) < \varepsilon$$

**2.15 Lemma** (ARZELÀ-ASCOLI)

Sei  $X$  ein separabler metrischer Raum und  $Y$  ein kompakter metrischer Raum. Dann hat jede gleichstetige Folge von Funktionen  $(f_n : X \rightarrow Y)_{n \in \mathbb{N}}$  eine konvergente Teilfolge  $(f_{n_k})_k$ , die gleichmäßig auf kompakte Teilmengen von  $X$  gegen die stetige Funktion  $f := \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}$  konvergiert.

**BEWEIS:**

- Da  $X$  separabel, existiert eine abzählbare dichte Teilmenge  $Q \subseteq X$ . Wähle so ein  $Q = \{q_j : j \in \mathbb{N}\}$ .
- Für jedes  $q_j \in Q$  betrachten wir die Folge  $(f_n(q_j))_{n \in \mathbb{N}}$ .
- Es ist  $(f_n(q_j))_n$  eine Folge in  $Y$  kompakt und besitzt daher eine konvergente Teilfolge.
- Wir wählen eine Teilfolge  $(n_k^1)_{k \in \mathbb{N}}$ , sodass  $\left(f_{n_k^1}(q_1)\right)_{k \in \mathbb{N}}$  konvergiert, dann induktiv eine Teilfolge  $(n_k^j)_k$  von  $(n_k^{j-1})$ , sodass  $\left(f_{n_k^j}(q_j)\right)_{k \in \mathbb{N}}$  konvergiert. Mittels Diagonaltrick ist dann  $\left(f_{n_k^k}(q_j)\right)_k$  konvergent für jedes  $j \in \mathbb{N}$ .
- Wir definieren

$$\begin{aligned} f : Q &\longrightarrow Y \\ q_j &\longmapsto \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k^k}(q_j) \end{aligned}$$

und zeigen, dass  $f$  gleichmäßig stetig ist:

Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig. Da  $(f_n : X \rightarrow Y)_{n \in \mathbb{N}}$  gleichstetig ist, existiert ein  $\delta > 0$ , sodass für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$d(f_n(x), f_n(x')) \leq \varepsilon \text{ für alle } x, x' \in X \text{ mit } d(x, x') < \delta,$$

also insbesondere

$$d\left(f_{n_k^k}(q), f_{n_k^k}(q')\right) \leq \varepsilon \text{ für alle } q, q' \in Q \text{ mit } d(q, q') < \delta.$$

Somit folgt für  $k \rightarrow \infty$  und mit  $d$  stetig:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} d\left(f_{n_k^k}(q), f_{n_k^k}(q')\right) &\leq \varepsilon \text{ für alle } q, q' \in Q \text{ mit } d(q, q') < \delta \\ \Rightarrow d(f(q), f(q')) &\leq \varepsilon \text{ für alle } q, q' \in Q \text{ mit } d(q, q') < \delta \end{aligned}$$

Folglich ist  $f : Q \rightarrow Y$  gleichmäßig stetig.

- Gleichmäßig stetige Funktionen lassen sich stetig fortsetzen:

$$f: X \longrightarrow Y$$

$$x \longmapsto \lim_{i \rightarrow \infty} f(q_i), \text{ wobei } q_i \in Q \text{ mit } \lim_{i \rightarrow \infty} q_i = x$$

- Da  $f$  gleichmäßig stetig ist, ist  $(f(q_i))_{i \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge.
- Cauchy-Folgen sind beschränkt, also existiert ein  $r > 0$  und  $y \in Y$  mit  $f(q_i) \in \overline{B_r(y)} \subseteq Y$ .
- $\overline{B_r(y)}$  ist als abgeschlossene Teilmenge in einem kompakten Raum wieder kompakt, also insbesondere folgenkompakt. Folglich existiert eine konvergente Teilfolge  $(f(q_{i_k}))_{k \in \mathbb{N}}$ . Sei  $\tilde{y} = \lim_{k \rightarrow \infty} f(q_{i_k})$ . Da  $(f(q_i))$  eine Cauchy-Folge ist, gilt  $\lim_{i \rightarrow \infty} f(q_i) = \tilde{y}$ .
- Sei nun  $K \subseteq X$  kompakt. Wir müssen nun zeigen, dass  $\left(f_{n_k}^k: K \rightarrow Y\right)_{k \in \mathbb{N}}$  gleichmäßig gegen  $f: K \rightarrow Y$  konvergiert. Sei  $\varepsilon > 0$ . Gesucht ist  $N \in \mathbb{N}$ , sodass für alle  $n_k^k > N$  und  $x \in K$  gilt:

$$d\left(f_{n_k^k}(x), f(x)\right) < \varepsilon.$$

- Da  $\left(f_{n_k}^k: X \rightarrow Y\right)_k$  gleichstetig ist, existiert für  $\frac{\varepsilon}{3}$  ein  $\delta > 0$ , sodass für alle  $n_k^k$  gilt:

$$d(f_{n_k^k}(x), f_{n_k^k}(x')) \leq \frac{\varepsilon}{3} \text{ für alle } x, x' \in K \text{ mit } d(x, x') < \delta \quad (24)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(f(x), f(x')) \leq \frac{\varepsilon}{3} \text{ für alle } x, x' \in K \text{ mit } d(x, x') < \delta \quad (25)$$

- Weiter betrachten wir die offene Überdeckung

$$K \subseteq \bigcup_{q_j \in Q} B_\delta(q_j) \xrightarrow{K \text{ kompakt}} K \subseteq \bigcup_{j=1}^l B_\delta(q_j) \quad (26)$$

- Wähle  $N \in \mathbb{N}$ , sodass

$$d\left(f_{n_k^k}(q_j), f(q_j)\right) \leq \frac{\varepsilon}{3} \text{ für alle } n_k^k \geq N \text{ und alle } j \in \{1, \dots, l\}. \quad (27)$$

Insgesamt erhalten wir:

$$\begin{aligned} d\left(f(x), f_{n_k^k}(x)\right) &\stackrel{(26)}{\leq} d(f(x), f(q_j)) + d\left(f(q_j), f_{n_k^k}(q_j)\right) + d\left(f_{n_k^k}(q_j), f_{n_k^k}(x)\right) \\ &\leq \underbrace{\frac{\varepsilon}{3}}_{(25)} + \underbrace{\frac{\varepsilon}{3}}_{(27)} + \underbrace{\frac{\varepsilon}{3}}_{(24)} = \varepsilon \text{ für alle } n_k^k \geq N \text{ und alle } x \in K. \end{aligned}$$

□



**BEWEIS** (Theorem 2.13(ii)): Seien  $x, y \in X, x \neq y$  beliebig. Da  $X$  ein Längenraum ist, existieren Wege

$$\begin{aligned} c_n &: [a_n, b_n] \longrightarrow X \\ a_n &\longmapsto x \\ b_n &\longmapsto y \end{aligned}$$

mit  $\ell(c_n) \leq d(x, y) + \frac{1}{n}$  und betrachten die Folge  $(c'_n: [0, 1] \rightarrow X)_{n \in \mathbb{N}}$ .

- Die Folge  $(c'_n)_n$  ist gleichstetig, denn: Sei  $\varepsilon > 0$ . Wir definieren  $\delta := \frac{\varepsilon}{d(x, y) + 1}$ . Es gilt  $\ell(c'_n) = \ell(c_n) = d(x, y) + \frac{1}{n} \Leftrightarrow 1 \leq \frac{d(x, y) + 1}{\ell(c'_n)}$ , und für  $t, t' \in [0, 1]$  mit  $d(t, t') < \delta$  folgt damit:

$$\begin{aligned} d(c'_n(t), c'_n(t')) &\leq \ell(c'_n|_{[t, t']}) \\ &\leq \frac{\ell(c'_n|_{[t, t']})}{\ell(c'_n)} \cdot (d(x, y) + 1) \\ &= d(t, t') \cdot (d(x, y) + 1) \\ &< \delta \cdot (d(x, y) + 1) \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

- Weiter gilt  $\text{im}(c'_n) \subseteq \overline{B_{d(x, y) + 1}(x)}$ . Nach Theorem 2.13(i) ist  $\overline{B_{d(x, y) + 1}(x)}$ .
- Insgesamt haben wir  $(c'_n: [0, 1] \rightarrow \overline{B_{d(x, y) + 1}(x)})_n$  gleichstetig mit  $[0, 1]$  separabel und  $\overline{B_{d(x, y) + 1}(x)}$  kompakt. Nach Lemma 2.15 existiert also eine konvergente Teilfolge  $(c'_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ , die gleichmäßig gegen den Weg  $c': [0, 1] \rightarrow X$  von  $x$  nach  $y$  konvergiert.
- Für  $\frac{1}{k}$  existiert nach Proposition 2.6 ein  $n \in \mathbb{N}$ , sodass mit  $\ell(c'_{n_k}) \leq d(x, y) + \frac{1}{n_k}$  gilt:

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq \ell(c') \leq \ell(c'_{n_k}) + \frac{1}{k} \text{ für alle } n_k \geq N \\ &\leq d(x, y) + \frac{1}{n_k} + \frac{1}{k} \text{ für alle } n_k \geq N \\ \xRightarrow{\lim} \quad d(x, y) &\leq \ell(c') \leq d(x, y) \\ \Rightarrow \quad \ell(c') &= d(x, y) \end{aligned}$$

Dann ist  $\tilde{c}': [0, d(x, y)] \rightarrow X$  aus Proposition 2.6 eine Geodäte von  $x$  nach  $y$ . □

## 2.16 Korollar

Sei  $X$  ein Längenraum. Dann gilt:

$$X \text{ vollständig und lokal kompakt} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{B_r(x)} \text{ ist kompakt für alle } x \in X \text{ und alle } r \in \mathbb{R}_{>0}.$$

**BEWEIS:**

" $\Rightarrow$ ": Theorem 2.13.

" $\Leftarrow$ ": Dass  $X$  lokal kompakt ist, ist klar.

Sei  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $X$ . Cauchy-Folgen sind beschränkt, folglich existiert ein  $x \in X$  und  $r > 0$  mit  $x_i \in \overline{B_r(x)}$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ . Nach Voraussetzung ist  $\overline{B_r(x)}$  kompakt, also existiert eine konvergente Teilfolge  $(x_{i_n})_n$  mit  $x_{i_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x'$ . Da  $(x_i)_i$  eine Cauchy-Folge ist, gilt  $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = x'$ .  $\square$

### 2.17 Definition (Stetige Abhängigkeit von Endpunkten)

Sei  $X$  ein eindeutig geodätischer Raum. Die Geodäten in  $X$  hängen stetig von ihren Endpunkten ab, wenn folgendes gilt:

Seien  $x, y \in X$  beliebig und  $c: [0, d(x, y)] \rightarrow X$  die Geodäte von  $x$  nach  $y$ . Seien weiter  $(x_n)_n, (y_n)_n$  konvergente Folgen in  $X$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$  und  $c_n: [0, d(x_n, y_n)] \rightarrow X$  die Geodäte von  $x_n$  nach  $y_n$ . Dann konvergiert die Folge von Wegen

$$\left( \begin{array}{ccc} c'_n: [0, 1] & \longrightarrow & [0, d(x_n, y_n)] \longrightarrow X \\ t & \longmapsto & t \cdot d(x_n, y_n) \longmapsto c_n(t \cdot d(x_n, y_n)) \end{array} \right)$$

gleichmäßig gegen

$$\begin{array}{ccc} c': [0, 1] & \longrightarrow & [0, d(x, y)] \longrightarrow X \\ t & \longmapsto & t \cdot d(x, y) \longmapsto c(t \cdot d(x, y)). \end{array}$$

### 2.18 Satz

Sei  $X$  ein CAT(0)-Raum. Dann hängen die Geodäten stetig von ihren Endpunkten ab.

**BEWEIS:** Seien  $x, y \in X$  beliebig. Seien weiter  $(x_n)_n, (y_n)_n$  konvergente Folgen in  $X$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ . Weiter seien  $c: x \rightsquigarrow y$ ,  $c_n: x_n \rightsquigarrow y_n$ ,  $\gamma_n: x_n \rightsquigarrow y$  Geodäten. Sei  $\varepsilon > 0$ . Wähle  $N \in \mathbb{N}$ , sodass  $d(x, x_n), d(y, y_n) < \frac{\varepsilon}{2}$  für alle  $n \geq N$ .

$$\begin{aligned} d(c'(t), c'_n(t)) &\stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} d(c'(t), \gamma'_n(t)) + d(\gamma'_n(t), c'_n(t)) \\ &\stackrel{d \text{ konv.}}{\leq} (1-t) \cdot d(c'(0), \gamma'_n(0)) + t \cdot d(\gamma'_n(1), c'_n(1)) \\ &\leq d(x, x_n) + d(y, y_n) = \varepsilon \text{ für alle } n \geq N. \end{aligned} \quad \square$$

### 2.19 Definition (Linear umparametrisierte Geodäte)

Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $\gamma: x \rightsquigarrow y$  eine Geodäte sowie  $x, y \in X$ . Wir definieren

$$\begin{array}{ccc} \gamma': [0, 1] & \longrightarrow & X \\ t & \longmapsto & \gamma(t \cdot d(x, y)). \end{array}$$

Der stetige Weg  $\gamma'$  heißt **linear umparametrisierte Geodäte**.

**2.20 Korollar**

Sei  $X$  ein kompakter metrischer Raum und  $(c_n : [0, 1] \rightarrow X)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von linear umparametrisierten Geodäten. Dann existiert eine linear umparametrisierte Geodäte  $c : [0, 1] \rightarrow X$  und eine Teilfolge  $(c_{n_k})_k$ , sodass  $(c_{n_k})_k$  gleichmäßig gegen  $c$  konvergiert.

**2.21 Satz**

Sei  $X$  ein eindeutig geodätischer Raum, in dem alle abgeschlossenen Bälle kompakt sind. Dann hängen die Geodäten in  $X$  stetig von ihren Endpunkten ab.

**BEWEIS:** Seien  $x, y \in X$  beliebig. Seien weiter  $(x_n)_n, (y_n)_n$  Folgen in  $X$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ . Seien weiter  $(c_n : [0, 1] \rightarrow X)_n$  linear umparametrisierte Geodäten von  $x_n$  nach  $y_n$ . Sei weiter  $c : [0, 1] \rightarrow X$  die linear umparametrisierte Geodäte von  $x$  nach  $y$ . Wir müssen zeigen, dass  $(c_n)_n$  gleichmäßig gegen  $c$  konvergiert.

Wir zeigen zuerst, dass  $(c_n)_n$  punktweise gegen  $c$  konvergiert. Wähle  $R > 0$ , sodass  $\text{im}(c_n) \subseteq \overline{B_R(x)}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt. Angenommen,  $(c_n)_n$  konvergiere nicht punktweise gegen  $c$ . Dann existiert ein  $\varepsilon > 0$  und  $t_0 \in (0, 1)$  und eine Teilfolge  $(c_{n_k})_k$ , sodass gilt:

$$d(c_{n_k}(t_0), c(t_0)) \geq \varepsilon \text{ für alle } k \in \mathbb{N}. \quad (28)$$

Nach Korollar 2.20 existiert eine Teilfolge  $(c_{n_{k_i}})_i$  von  $(c_{n_k} : [0, 1] \rightarrow \overline{B_R(x)})_k$ , die gleichmäßig gegen eine linear umparametrisierte Geodäte  $c' : [0, 1] \rightarrow X$  konvergiert. Es gilt  $c_{n_{k_i}}(0) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} x = c'(0)$  sowie  $c_{n_{k_i}}(1) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} y = c'(1)$ . Weiter gilt

$$\lim_{i \rightarrow \infty} d(c_{n_{k_i}}(t_0), c(t_0)) \stackrel{(28)}{\geq} \varepsilon \text{ für alle } i \in \mathbb{N}$$

und, da  $d$  stetig ist,  $d(c'(t_0), c(t_0)) \geq \varepsilon$ , was ein Widerspruch zur Eindeutigkeit der Geodäten ist.

Als Übung zeige man nun: Wenn  $(c_n)_n$  punktweise gegen  $c$  konvergiert, dann auch gleichmäßig (für beliebige metrische Räume).  $\square$

**2.22 Bemerkung**

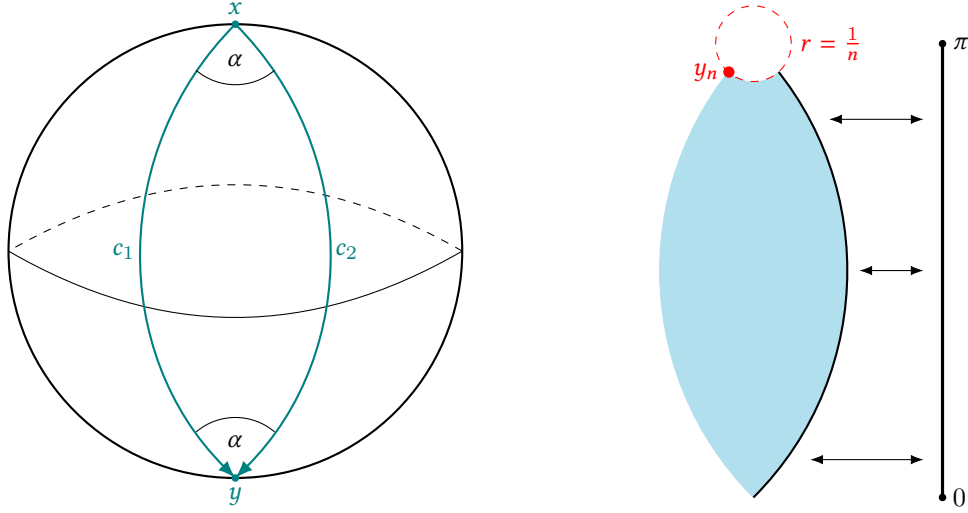
Konstruktionsskizze von einem vollständigen eindeutig geodätischen Raum, in dem die Geodäten nicht stetig von ihren Endpunkten abhängen:

Betrachte  $\mathbb{S}^2$  und definiere für  $n \geq 3$  die Menge  $Y_n$  wie folgt:  $c_1$  und  $c_2$  seien zwei Geodäten von  $x$  nach  $y$  mit Winkel  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  und  $\ell(c_1) = \ell(c_2) = \pi$ .

Die Menge  $Y_n$  sei nun die von den beiden Geodäten begrenzte Fläche der Kugeloberfläche abzüglich der Menge  $B_r(x)$  mit  $r = \frac{1}{n}$ . Verklebe anschließend  $Y_n$  mit  $[0, \pi]$  und definiere

$$X := \left( \bigsqcup_{n \geq 3} Y_n \cup [0, \pi] \right) / \sim .$$

Dann ist  $X$  ausgestattet mit der Längenmetrik der gesuchte Raum. Betrachte Geodäten  $c_n : 0 \rightsquigarrow y_n$ . Diese konvergieren nicht punktweise gegen die Geodäte  $c : 0 \rightsquigarrow \pi$ .



## 2.2. Längenmetrik auf Überlagerungsräumen

### 2.23 Definition (Induzierte Pseudometrik)

Sei  $X$  ein Längenraum,  $\tilde{X}$  ein topologischer Raum und  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  ein **lokaler Homöomorphismus**, das heißt für jeden Punkt  $\tilde{x} \in \tilde{X}$  existiert eine offene Umgebung  $\tilde{U}_{\tilde{x}} \subseteq \tilde{X}$  von  $\tilde{x}$ , sodass  $U := p(\tilde{U}_{\tilde{x}}) \subseteq X$  eine offene Menge ist und  $p|_{\tilde{U}_{\tilde{x}}} : \tilde{U}_{\tilde{x}} \rightarrow U$  ein Homöomorphismus ist.

Sei  $c : [a, b] \rightarrow \tilde{X}$  ein Weg. Wir definieren  $\ell(c) := \ell(p \circ c)$ . Für  $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X}$  setze

$$\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) := \inf \{ \ell(c) : c \text{ ist ein rektifizierbarer Weg von } \tilde{x} \text{ nach } \tilde{y} \}.$$

$\tilde{d}$  heißt die **von  $p$  induzierte Pseudometrik auf  $\tilde{X}$** .

### 2.24 Satz

Sei  $X$  ein Längenraum,  $\tilde{X}$  ein Hausdorff-Raum. Sei weiter  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  ein lokaler Homöomorphismus und  $\tilde{d}$  die von  $p$  induzierte Pseudometrik auf  $\tilde{X}$ . Dann gilt:

- (i)  $\tilde{d}$  ist eine Metrik auf  $\tilde{X}$ .
- (ii)  $p$  ist eine **lokale Isometrie**, das heißt für jedes  $\tilde{x} \in \tilde{X}$  existiert ein  $\varepsilon > 0$ , sodass  $p : B_\varepsilon(\tilde{x}) \rightarrow B_\varepsilon(p(\tilde{x}))$  eine Isometrie ist.
- (iii)  $\tilde{d}$  ist eine Längenmetrik.
- (iv) Die Eigenschaften (ii) und (iii) legen  $\tilde{d}$  eindeutig fest.

**BEWEIS:**

- (i) Es ist nur zu zeigen, dass  $\tilde{d}$  keine Pseudometrik ist. Seien  $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X}$  beliebig und verschieden. Da  $\tilde{X}$  ein Hausdorff-Raum ist, existieren offene Umgebungen  $\tilde{U}_{\tilde{x}}, \tilde{U}_{\tilde{y}}$  von  $\tilde{x}$  bzw.  $\tilde{y}$  in  $\tilde{X}$  mit  $\tilde{U}_{\tilde{x}} \cap \tilde{U}_{\tilde{y}} = \emptyset$ . Wir können  $\tilde{U}_{\tilde{x}}$  so klein wählen, dass  $p|_{\tilde{U}_{\tilde{x}}} \rightarrow U$  ein Homöomorphismus auf eine offene Teilmenge  $U$  von  $X$  ist.

Sei nun  $c$  ein beliebiger Weg von  $\tilde{x}$  nach  $\tilde{y}$ . Dann gilt  $\text{im}(p \circ c) \not\subseteq U$ , denn andernfalls wäre  $\text{im}(p^{-1}|_{\tilde{U}_{\tilde{x}}} \circ p \circ c) = \text{im}(c) \subseteq \tilde{U}_{\tilde{x}}$  und damit  $c(1) = \tilde{y} \in \tilde{U}_{\tilde{x}}$ , was ein Widerspruch ist.

Sei  $r > 0$  so gewählt, dass  $B_r(x) = B_r(p(\tilde{x})) \subseteq U$ . Wir betrachten:

$$p: p|_{\tilde{U}_{\tilde{x}}}^{-1}(B_r(x)) \rightarrow B_r(x)$$

Da  $\text{im}(p \circ c) \not\subseteq B_r(x)$ , existiert ein  $t \in [0, 1]$  mit  $p \circ c(t) \notin B_r(x)$  und somit ein  $s \in [0, 1]$ , sodass  $p \circ c(s) \in \partial B_r(x)$ . Damit folgt

$$\ell(c) = \ell(p \circ c) \geq d(p \circ c(s), p \circ c(0)) = r.$$

Da  $c$  ein beliebiger Weg war, folgt  $\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) \geq r$ .

- (ii) Sei  $\tilde{x} \in \tilde{X}$  beliebig. Da  $p$  ein lokaler Homöomorphismus ist, existiert eine offene Umgebung  $\tilde{U}_{\tilde{x}}$  von  $\tilde{x}$  in  $\tilde{X}$  und eine offene Umgebung  $U \subseteq X$ , sodass  $p|_{\tilde{U}_{\tilde{x}}} : \tilde{U}_{\tilde{x}} \rightarrow U$  ein Homöomorphismus ist. Sei  $s: U \rightarrow \tilde{U}_{\tilde{x}}$  die Inverse von  $p|_{\tilde{U}_{\tilde{x}}}$ . Wähle  $r > 0$ , sodass  $B_{2r}(p(\tilde{x})) \subseteq U$  gilt, und zeige, dass

$$s' := s|_{B_r(p(\tilde{x}))} : B_r(p(\tilde{x})) \rightarrow B_r(\tilde{x})$$

eine Isometrie ist.

**surjektiv:** Sei  $y \in B_r(\tilde{x})$  beliebig. Zu zeigen ist  $p(y) \in B_r(p(\tilde{x}))$ .

$$d(p(y), p(\tilde{x})) \stackrel{\text{Def.}}{\leq} \tilde{d}(y, \tilde{x}) < r \Rightarrow p(y) \in B_r(p(\tilde{x})).$$

Weiter gilt  $s'(p(y)) = y$ , da  $s$  die Inverse  $p|_{\tilde{U}_{\tilde{x}}}$  ist.

**isom. Einbettung:** Seien nun  $a, b \in B_r(p(\tilde{x}))$  beliebig. Wir müssen zeigen, dass  $\tilde{d}(s'(a), s'(b)) = d(a, b)$  gilt. Nach Definition von  $\tilde{d}$  gilt  $\tilde{d}(s'(a), s'(b)) \geq d(a, b)$ .

Sei  $\varepsilon \in (0, r)$  beliebig. Da  $X$  ein Längenraum ist, existiert ein Weg

$$\begin{aligned} c_\varepsilon: [0, \ell(c_\varepsilon)] &\longrightarrow B_{2r}(p(\tilde{x})) \\ 0 &\longmapsto a \\ \ell(c_\varepsilon) &\longmapsto b \end{aligned}$$

mit  $\ell(c_\varepsilon) \leq d(a, b) + \varepsilon$ .

Wir betrachten den Weg

$$\begin{aligned} s \circ c_\varepsilon &: [0, \ell_\varepsilon] \longrightarrow B_{2r}(\tilde{x}) \\ 0 &\longmapsto s'(a) \\ \ell(c_\varepsilon) &\longmapsto s'(b) \end{aligned}$$

Damit gilt  $\tilde{d}(s'(a), s'(b)) \leq \ell(c_\varepsilon) \leq d(a, b) + \varepsilon$  und es folgt für  $s \rightarrow 0$ :  $\tilde{d}(s'(a), s'(b)) \leq d(a, b)$ .

(iii) Da  $p$  eine lokale Isometrie ist, ist die Länge von einem Weg in  $(\tilde{X}, \tilde{d})$  dieselbe wie die Länge von dem Weg unter  $p$ .

(iv) Sei  $d'$  eine andere Längenmetrik auf  $\tilde{X}$ , sodass  $p: (\tilde{X}, d') \rightarrow (X, d)$  eine lokale Isometrie ist. Dann ist  $\text{id}: (\tilde{X}, d') \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{d})$  eine lokale Isometrie, denn:

Sei  $\tilde{x} \in \tilde{X}$  beliebig. Da  $p$  eine lokale Isometrie ist, existiert ein  $\varepsilon_1 > 0$ , sodass  $p: (B_{\varepsilon_1}(\tilde{x}), d') \rightarrow B_{\varepsilon_1}(p(\tilde{x}))$  eine Isometrie ist, und ein  $\varepsilon_2 > 0$ , sodass  $p: (B_{\varepsilon_2}(\tilde{x}), \tilde{d}) \rightarrow B_{\varepsilon_2}(p(\tilde{x}))$  eine Isometrie ist. Sie nun  $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ . Dann ist  $\text{id}_{B_\varepsilon(\tilde{x})} = p^{-1} \circ \text{id}_{B_\varepsilon(p(\tilde{x}))} \circ p$ .

$$\begin{array}{ccc} (B_\varepsilon(\tilde{x}), d') & \xrightarrow{\text{id}} & (B_\varepsilon(\tilde{x}), \tilde{d}) \\ \downarrow p \simeq & & \uparrow \simeq p^{-1} \\ (B_\varepsilon(p(\tilde{x})), d) & \xrightarrow[\simeq]{\text{id}} & (B_\varepsilon(p(\tilde{x})), d) \end{array}$$

Für einen beliebigen Weg  $c: [a, b] \rightarrow \tilde{X}$  gilt somit  $\ell^{d'}(c) = \ell^{\tilde{d}}(c)$ . Da  $d'$  und  $\tilde{d}$  beide Längenmetriken sind, stimmen sie überein.  $\square$

### 2.25 Bemerkung

Jede Überlagerung  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  ist ein lokaler Homöomorphismus, und falls  $X$  hausdorffsch ist, dann ist  $\tilde{X}$  ein Hausdorff-Raum. Man kann also die Konstruktion aus Satz 2.24 insbesondere auf Überlagerungen anwenden.

Wie erkennen wir Überlagerungen?

### 2.26 Definition (Lokal eindeutig geodätisch)

Sei  $X$  ein metrischer Raum.  $X$  heißt **lokal eindeutig geodätisch**, wenn für alle  $x \in X$  ein  $r > 0$  existiert, sodass für beliebige  $y, z \in B_r(x)$  eine eindeutige Geodäte  $\gamma: y \rightsquigarrow z$  existiert und  $\text{im}(\gamma) \subseteq B_r(x)$  gilt.

### 2.27 Beispiel

Sei  $X$  ein lokaler CAT(0)-Raum. Dann ist  $X$  lokal eindeutig geodätisch.

**2.28 Satz**

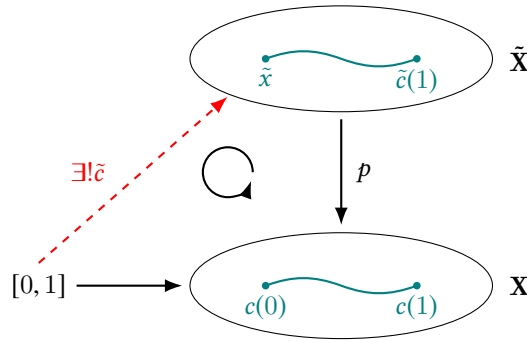
Sei  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  eine Abbildung zwischen Längenräumen mit folgenden Eigenschaften:

- (i)  $X$  ist wegzusammenhängend.
- (ii)  $p$  ist ein lokaler Homöomorphismus.
- (iii) Für jeden Weg  $c: [a, b] \rightarrow X$  gilt  $\ell_{\tilde{X}}(c) \leq \ell_X(p \circ c)$ .
- (iv)  $X$  ist lokal eindeutig geodätisch.
- (v) Für  $x \in X$  beliebig hängen die Geodäten in einem eindeutig geodätischen Ball um  $x$  von ihren Endpunkten ab.
- (vi)  $\tilde{X}$  ist vollständig.

Dann ist  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  eine Überlagerung.

**BEWEIS:** Wir zeigen zuerst, dass wir rektifizierbare Wege  $c: [0, 1] \rightarrow X$  eindeutig liften können. Das heißt:

Sei  $c: [0, 1] \rightarrow X$  ein rektifizierbarer Weg und  $\tilde{x} \in \tilde{X}$  mit  $p(\tilde{x}) = c(0)$ . Dann existiert ein eindeutiger Weg  $\tilde{c}: [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$  mit  $p \circ \tilde{c} = c$  – der **Lift** von  $c$ .



*Zur Eindeutigkeit:* Aufgabe A.18.

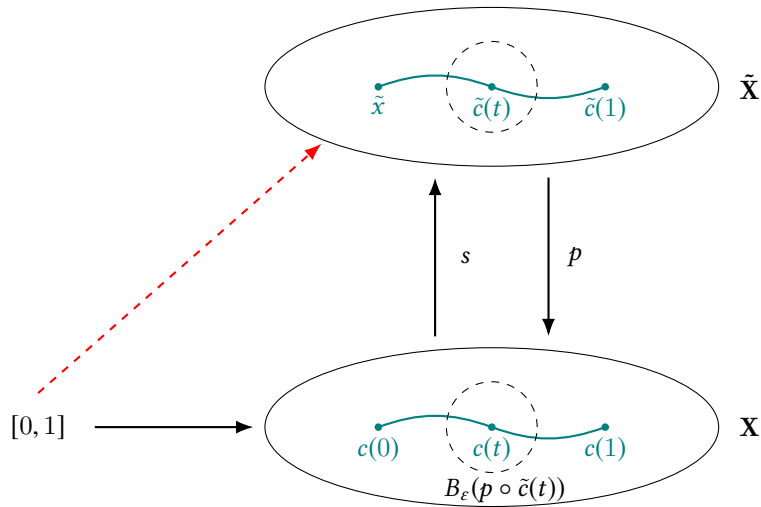
*Zur Existenz:* Sei  $c: [0, 1] \rightarrow X$  ein rektifizierbarer Weg und  $\tilde{x} \in \tilde{X}$  mit  $p(\tilde{x}) = c(0)$ . Wir definieren  $S := \{t \in [0, 1] : \text{es existiert ein Lift } \tilde{c} \text{ von } c|_{[0, t]}\}$  und zeigen, dass  $S$  offen, abgeschlossen und nichtleer ist. Dann folgt  $S = [0, 1]$ , da  $[0, 1]$  zusammenhängend ist.

- $S \neq \emptyset$ , da  $0 \in S$  ( $\tilde{c}: \{0\} \rightarrow \tilde{X}, 0 \mapsto \tilde{x}$ )
- $S$  ist offen: Sei  $t \in S$  beliebig, das heißt es existiert ein Lift  $\tilde{c}|_{[0, t]}$  von  $c|_{[0, t]}$ . Betrachte  $\tilde{c}(t) \in \tilde{X}$ . Da  $p$  ein lokaler Homöomorphismus ist, existiert eine offene Teilmenge  $\tilde{U}_{\tilde{c}(t)} \subseteq \tilde{X}$ , sodass  $p: \tilde{U}_{\tilde{c}(t)} \rightarrow U \subseteq X$  ein Homöomorphismus ist. Da  $U$  offen ist, existiert ein  $\varepsilon > 0$ , sodass  $B_\varepsilon(p \circ \tilde{c}(t)) \subseteq U$ . Sei  $\tilde{U}'_{\tilde{c}(t)} := p^{-1}(B_\varepsilon(p \circ \tilde{c}(t)))$  und  $s: B_\varepsilon(p \circ \tilde{c}(t)) \rightarrow \tilde{U}'_{\tilde{c}(t)}$ . Wir definieren:

$$\tilde{c}: [0, t + \varepsilon) \rightarrow \tilde{X}$$

$$t' \mapsto \begin{cases} \tilde{c}(t'), & t' \in [0, t] \\ s \circ c(t'), & t' \in [t, t + \varepsilon). \end{cases}$$

$\tilde{c}$  ist stetig und ein Lift von  $c|_{[0, t + \varepsilon)}$ , also ist  $[0, t + \varepsilon) \subseteq S$  und  $S$  damit offen.



- $S$  ist abgeschlossen: Wir nehmen an, dass  $[0, a) \subseteq S$ . Zu zeigen ist dann  $a \in S$ . Sei  $t_n \in [0, a)$  eine beliebige Folge mit  $t_n \rightarrow a$ . Seien  $y_n := \tilde{c}(t_n) \in \tilde{X}$ . Da  $\tilde{X}$  ein Längenraum ist, gilt o.B.d.A. für  $t_n \leq t_m$

$$\tilde{d}(y_n, y_m) \leq \ell_{\tilde{X}}(\tilde{c}|_{[t_n, t_m]}) \stackrel{\text{(iii)}}{\leq} \ell_X(c|_{[t_n, t_m]}) \in \mathbb{R},$$

da  $c$  ein rektifizierbarer Weg ist. Wir haben eine konvergente Folge in  $\mathbb{R}$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ell_X(c|_{[0, t_n]}) = \ell_X.$$

Damit erhalten wir

$$\tilde{d}(y_n, y_m) \leq \ell_X(c|_{[t_n, t_m]}) = \ell_X(c|_{[0, t_m]}) - \ell_X(c|_{[0, t_n]}).$$

Somit ist  $\tilde{d}(y_n, y_m)$  eine Nullfolge in  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge. Da  $\tilde{X}$  vollständig ist, existiert ein  $y \in \tilde{X}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ . Wir definieren

$$\begin{aligned} \tilde{c}: [0, a] &\longrightarrow \tilde{X} \\ t &\longmapsto \begin{cases} \tilde{c}(t), & t \in [0, a) \\ y, & t = a. \end{cases} \end{aligned}$$

$\tilde{c}$  ist stetig, denn: Sei  $t_n \in [0, a)$  eine beliebige Folge, die gegen  $a$  konvergiert. Dann erhalten wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{c}(t_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y = \tilde{c}(a) = \tilde{c}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} t_n\right)$$

und  $\tilde{c}$  ist ein Lift von  $c|_{[0, a]}$ , denn:

$$p \circ \tilde{c}(a) = p(y) = p\left(\lim_{n \rightarrow \infty} y_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} p(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} p \circ \tilde{c}(t_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} c(t_n) = c\left(\lim_{n \rightarrow \infty} t_n\right) = c(a).$$

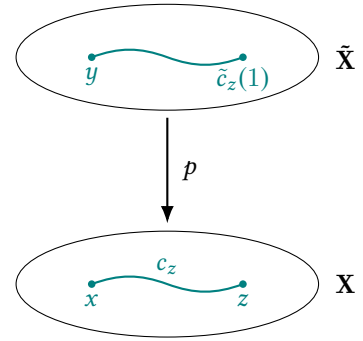


- Nun können wir zeigen, dass  $p$  surjektiv ist: Sei  $x \in X$  und  $y \in \tilde{X}$  beliebig. Da  $X$  wegzusammenhängend ist, existiert ein rektifizierbarer Weg  $c$  von  $p(y)$  nach  $x$ . Sei  $\tilde{c}$  der Lift von  $c$ , das heißt  $p \circ \tilde{c} = c$  und insbesondere  $p \circ \tilde{c}(1) = c(1) = x$ . Dann ist  $\tilde{c}(1)$  ein Urbild von  $x$  unter  $p$ .
- Jetzt müssen wir zeigen, dass jeder Punkt  $x \in X$  eine Umgebung  $U$  hat, sodass  $p^{-1}(U)$  in eine disjunkte Vereinigung von offenen Mengen, die homöomorph zu  $U$  sind, zerfällt. Sei also  $x \in X$  beliebig. Nach (iv) und (v) existiert ein  $r > 0$ , sodass  $B_r(x)$  eindeutig geodätisch ist und die Geodäten in  $B_r(x)$  stetig von ihren Endpunkten abhängen. Sei  $y \in p^{-1}(x)$  beliebig. Wir definieren

$$\begin{aligned} s_y : B_r(x) &\longrightarrow \tilde{X} \\ x' &\longmapsto \tilde{c}_{x'}(1), \end{aligned}$$

wobei  $\tilde{c}_{x'}$  der Lift der linear umparametrisierten Geodäte  $c_{x'} : [0, 1] \rightarrow X, x \rightsquigarrow x'$  mit  $\tilde{c}_{x'}(0) = y$ .

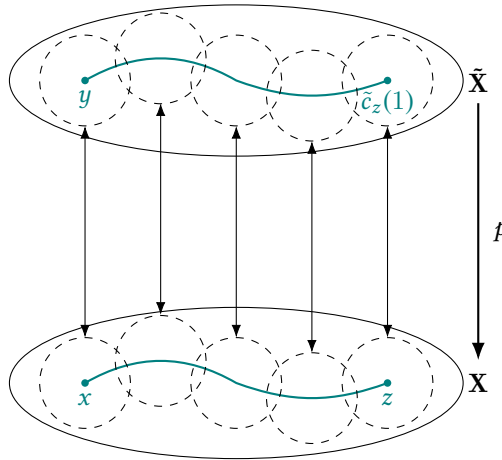
- Nun ist  $s_y : B_r(x) \rightarrow s_y(B_r(x))$  ein Homöomorphismus und  $s_y(B_r(x))$  ist offen: Mit Hilfe von (v) zeigt man, dass  $s_y$  eine Inverse zu  $p$  ist. Wir zeigen die Stetigkeit von  $s_y$  in  $z \in B_r(x)$  beliebig. Betrachte die linear umparametrisierte eindeutige Geodäte  $c_z : [0, 1] \rightarrow B_r(x), x \rightsquigarrow z$  und den eindeutigen Lift  $\tilde{c}_z : [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$  mit  $\tilde{c}_z(0) = y$ .



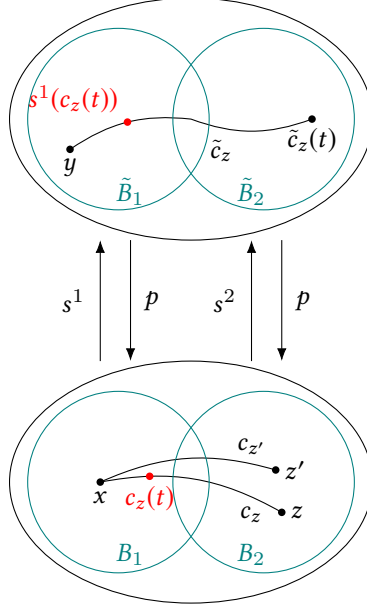
Da  $\tilde{c}_z$  stetig ist und  $[0, 1]$  kompakt, ist das Bild von  $\tilde{c}_z$  kompakt. Weiter ist  $p$  ein lokaler Homöomorphismus. Folglich existieren endlich viele Bälle  $\tilde{B}_1, \dots, \tilde{B}_k$  in  $\tilde{X}$  mit  $\tilde{c}_z([0, 1]) \subseteq \tilde{B}_1 \cup \dots \cup \tilde{B}_k$  und sodass

$$p|_{\tilde{B}_i} : \tilde{B}_i \longrightarrow p(\tilde{B}_i) =: B_i$$

ein Homöomorphismus auf die offene Menge  $B_i$  ist. Da  $p \circ \tilde{c}_z = c_z$  ist, gilt  $c_z([0, 1]) \subseteq B_1 \cup \dots \cup B_k$ .



O.B.d.A. sei  $c_z\left(\left[\frac{l-1}{n}, \frac{l}{n}\right]\right) \subseteq B_l$  für  $l \in \{1, \dots, k\}$ . Sei  $s^l$  die lokale Inverse von  $p|_{\tilde{B}_l}$ . Es gilt also  $s^l: B_l \rightarrow \tilde{B}_l$  und  $s^l \circ p|_{\tilde{B}_l} = \text{id}_{\tilde{B}_l}$  sowie  $p|_{\tilde{B}_l} \circ s^l = \text{id}_{B_l}$ . Wir erhalten  $s^l(c_z(t)) = s_y(c_z(t))$  für  $t \in \left[\frac{l-1}{n}, \frac{l}{n}\right]$ .



Da die Geodäten in  $B_r(x)$  stetig von ihren Endpunkten abhängen, existiert ein  $\delta > 0$ , sodass für alle  $z' \in B_\delta(z) \subseteq B_r(x)$  gilt:

$$c_{z'}\left(\left[\frac{l-1}{n}, \frac{l}{n}\right]\right) \subseteq B_l \text{ für } l \in \{1, \dots, k\}.$$

Wir definieren:

$$\begin{aligned} \tilde{s}: B_\delta(z) \times [0, 1] &\longrightarrow \tilde{X} \\ (z', t) &\longmapsto s^l(c_{z'}(t)) \text{ für } t \in \left[\frac{l-1}{n}, \frac{l}{n}\right]. \end{aligned}$$

$\tilde{s}$  ist wohldefiniert und stetig und es gilt  $s_y|_{B_\delta(z)} = \tilde{s}|_{B_\delta(z) \times \{1\}}$ . Folglich ist  $s_y$  stetig in  $z$ .  $\square$

## 2.3. Die Exponentialabbildung

Sei  $X$  ein metrischer Raum und  $x_0 \in X$  beliebig. Wir werden nun einen Raum  $\tilde{X}_{x_0}$  und eine Abbildung  $\exp: \tilde{X}_{x_0} \rightarrow X$  konstruieren, die für „schöne“ Basisräume die universelle Überlagerung werden wird.

### 2.29 Definition (Exponentialabbildung)

Sei  $(X, d_X)$  ein metrischer Raum und  $x_0 \in X$  beliebig. Wir definieren die Menge

$$\begin{aligned} \tilde{X}_{x_0} := & \{c: [0, 1] \rightarrow X \text{ linear umparametrisierte lokale Geodäte mit } c(0) = x_0\} \\ & \cup \{c_{x_0}: [0, 1] \rightarrow X : c_{x_0}(t) = x_0 \text{ für alle } t \in [0, 1]\} \end{aligned}$$

Weiter definieren wir auf der Menge  $\tilde{X}_{x_0}$  eine Metrik durch

$$d(c_1, c_2) := \sup\{d_X(c_1(t), c_2(t)) : t \in [0, 1]\}$$

für  $c_1, c_2 \in \tilde{X}_{x_0}$  und definieren die **Exponentialabbildung** wie folgt:

$$\begin{aligned} \exp: \tilde{X}_{x_0} &\longrightarrow X \\ c &\longmapsto c(1). \end{aligned}$$

### 2.30 Bemerkung

Die Abbildung  $\exp: (\tilde{X}_{x_0}, d) \rightarrow (X, d_X)$  ist 1-Lipschitz. Genauer: Seien  $c_1, c_2 \in \tilde{X}_{x_0}$  beliebig. Dann haben wir

$$\begin{aligned} d_X(\exp(c_1), \exp(c_2)) &\stackrel{\text{Def.}}{=} d_X(c_1(1), c_2(1)) \\ &\leq \sup_{t \in [0, 1]} d_X(c_1(t), c_2(t)) \\ &\stackrel{\text{Def.}}{=} d(c_1, c_2). \end{aligned}$$

### 2.31 Satz

Sei  $(X, d_X)$  ein metrischer Raum, der lokal CAT(0) und lokal vollständig ist, das heißt für jedes  $x \in X$  existiert ein  $r > 0$ , sodass  $B_r(x)$  CAT(0) und  $\overline{B_r(x)}$  vollständig ist. Dann gilt:

- (i)  $\tilde{X}_{x_0}$  ist zusammenziehbar.
- (ii)  $\exp: \tilde{X}_{x_0} \rightarrow X$  ist eine lokale Isometrie.
- (iii) Wenn  $X$  vollständig ist, dann ist  $\tilde{X}_{x_0}$  vollständig.

**BEWEIS:** Wir zeigen zuerst nur (i). Für (ii) und (iii) brauchen wir ein technisches Lemma.

Wir zeigen, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} H: \tilde{X}_{x_0} \times [0, 1] &\longrightarrow \tilde{X}_{x_0} \\ (c, s) &\longmapsto [c_s : t \mapsto c(s \cdot t)] \end{aligned}$$

eine Homotopie von  $f: \tilde{X}_{x_0} \rightarrow \tilde{X}_{x_0}, c \mapsto c_{x_0}$  und  $\text{id}: \tilde{X}_{x_0} \rightarrow \tilde{X}_{x_0}$  ist.

- $H$  ist wohldefiniert. Für  $c \in \tilde{X}_{x_0}$  beliebig haben wir

$$H(c, 0) = [c_0 : t \mapsto c(0 \cdot t) = c(0) = x_0] = f(c)$$

$$H(c, 1) = [c_1 : t \mapsto c(1 \cdot t) = c(t)] = \text{id}(c)$$

- Wir zeigen Folgenstetigkeit: Sei  $(c_n, s_n) \in \tilde{X}_{x_0} \times [0, 1]$  für  $n \in \mathbb{N}$  eine konvergente Folge mit  $c_n \rightarrow c$ ,  $s_n \rightarrow s$ . Zu zeigen ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} H(c_n, s_n) = H(c, s)$ , also  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_{n_{s_n}} = c_s$ . Es gilt:

$$\begin{aligned} d(c_{n_{s_n}}, c_s) &\stackrel{\text{Def.}}{=} \sup_{t \in [0, 1]} d_X(c_n(s_n \cdot t), c(st)) \\ &\stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \sup_{t \in [0, 1]} d_X(c_n(s_n \cdot t), c(s_n \cdot t)) + \sup_{t \in [0, 1]} d_X(c(s_n \cdot t), c(st)) \\ &\leq d(c_n, c) + \sup_{t \in [0, 1]} d_X(c(s_n \cdot t), c(st)) \\ &\leq d(c_n, c) + \sup_{t \in [0, 1]} \lambda \cdot |s_n t - st| \text{ für ein } \lambda \geq 0, \text{ da } c \text{ lin. ump. Geodäte und } [0, 1] \text{ kompakt} \\ &\leq d(c_n, c) + \lambda \cdot |s_n - s| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

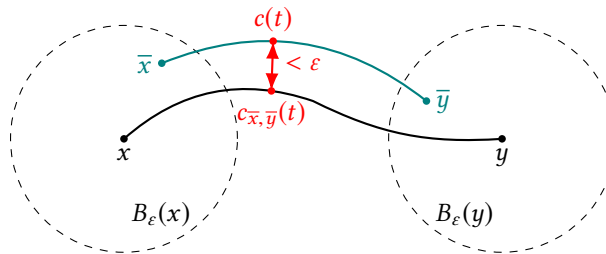
Damit haben wir gezeigt, dass die Folge  $(c_{n_{s_n}})_n$  gegen  $c_s$  konvergiert.  $\square$

Der Beweis von (ii) und (iii) ist wesentlich aufwendiger. Wir müssen zuerst verstehen, wie eine Umgebung einer gegebenen linear umparametrisierten Geodäte aussieht, und welche Beziehung es zwischen den Geodäten in solch einer Umgebung und ihren Endpunkten gibt.

### 2.32 Lemma

Sei  $(X, d_X)$  ein metrischer Raum, der lokal CAT(0) und lokal vollständig ist und  $c : [0, 1] \rightarrow X$  eine linear umparametrisierte lokale Geodäte von  $x \in X$  nach  $y \in X$ . Dann existiert ein  $\varepsilon > 0$ , sodass für alle  $\bar{x} \in B_\varepsilon(x)$  und  $\bar{y} \in B_\varepsilon(y)$  eine eindeutige linear umparametrisierte lokale Geodäte  $c_{\bar{x}, \bar{y}} : [0, 1] \rightarrow X$  existiert mit  $c_{\bar{x}, \bar{y}}(0) = \bar{x}$  und  $c_{\bar{x}, \bar{y}}(1) = \bar{y}$  sowie

$$\sup_{t \in [0, 1]} d_X(c_{\bar{x}, \bar{y}}(t), c(t)) < \varepsilon.$$



Weiter gilt, dass für je zwei linear umparametrisierte Geodäten  $c_1, c_2: [0, 1] \rightarrow X$  mit  $\sup_{t \in [0, 1]} d_X(c_1(t), c(t)) < \varepsilon$  und  $\sup_{t \in [0, 1]} d_X(c_2(t), c(t)) < \varepsilon$  die Funktion

$$\begin{aligned} \Phi: [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ t &\longmapsto d_X(c_1(t), c_2(t)) \end{aligned}$$

konvex ist, das heißt für alle  $s, t, \lambda \in [0, 1]$  gilt

$$\Phi(\lambda s + (1 - \lambda)t) \leq \lambda \Phi(s) + (1 - \lambda)\Phi(t).$$

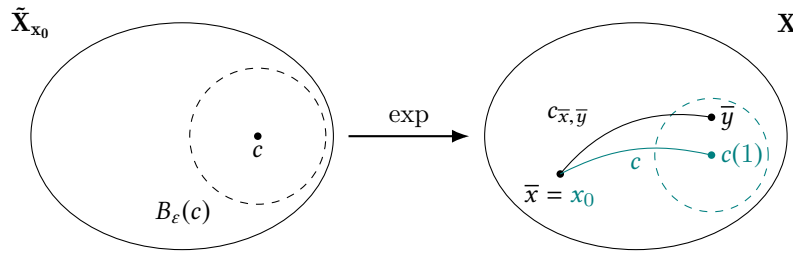
Insbesondere gilt also  $\Phi(t) \leq t \cdot \Phi(1)$  für alle  $t \in [0, 1]$ .

Dieses Lemma beweisen zu einem späteren Zeitpunkt (siehe S. 61).

**BEWEIS** (Fortsetzung von Satz 2.31):

(ii) Sei  $c \in \tilde{X}_{x_0}$  beliebig und  $\varepsilon > 0$  so, wie in Lemma 2.32. Dann ist  $\exp: B_\varepsilon(c) \rightarrow B_\varepsilon(c(1))$  eine Isometrie:

- $\exp$  ist surjektiv: Sei  $\bar{y} \in B_\varepsilon(c(1))$  beliebig. Nach Lemma 2.32 existiert eine linear umparametrisierte Geodäte  $c_{x_0\bar{y}}: [0, 1] \rightarrow X, x_0 \rightsquigarrow \bar{y}$  mit  $d(c_{x_0\bar{y}}, c) = \sup_{t \in [0, 1]} d_X(c_{x_0\bar{y}}(t), c(t)) < \varepsilon$ . Somit ist  $c_{x_0\bar{y}} \in B_\varepsilon(c)$ . Ferner gilt  $\exp(c_{x_0\bar{y}}) = c_{x_0\bar{y}}(1) = \bar{y}$ .



- $\exp$  ist isometrische Einbettung: Seien  $c_1, c_2 \in B_\varepsilon(c)$  beliebig. Aus Lemma 2.32 wissen wir, dass für alle  $t \in [0, 1]$  gilt:

$$\begin{aligned} \Phi(t) &\leq t \cdot \Phi(1) \\ d_X(c_1(t), c_2(t)) &\leq t \cdot d_X(c_1(1), c_2(1)) \leq d_X(c_1(1), c_2(t)) \end{aligned} \tag{29}$$

Wir erhalten

$$d_X(\exp(c_1), \exp(c_2)) \stackrel{\text{Def.}}{=} d_X(c_1(1), c_2(1)) \stackrel{(29)}{=} \sup_{t \in [0, 1]} d_X(c_1(t), c_2(t)) \stackrel{\text{Def.}}{=} d(c_1, c_2).$$

Somit ist  $\exp$  eine Isometrie auf  $B_\varepsilon(c)$ .

(iii) Sei  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $\tilde{X}_{x_0}$ . Dann ist  $(c_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$  für jedes  $t \in [0, 1]$  eine Cauchy-Folge in  $X$  und da  $X$  vollständig ist, konvergiert diese. Wir definieren:

$$\begin{aligned} c: [0, 1] &\longrightarrow X \\ t &\longmapsto \lim_{n \rightarrow \infty} c_n(t) =: c(t). \end{aligned}$$

Es gilt  $c(0) = x_0$ . Wir müssen zeigen, dass  $c \in \tilde{X}_{x_0}$ , das heißt  $c$  ist eine linear umparametrisierte lokale Geodäte.

Sei  $t \in [0, 1]$  beliebig. Wähle  $r > 0$  so, dass  $B_r(c(t))$  CAT(0) ist. Da  $c_n(t) \rightarrow c(t)$  konvergiert, existiert ein  $N \in \mathbb{N}$ , sodass gilt

$$c_n(t) \in B_{\frac{r}{2}}(c(t)) \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Wir finden ein  $\varepsilon > 0$ , sodass für  $I := [t - \varepsilon, t + \varepsilon]$  und  $n \geq N$  gilt:

$$c_n(I) \subseteq \underbrace{B_r(c(t))}_{\text{CAT}(0)} \quad \text{und} \quad c(I) \subseteq B_r(c(t)).$$

Folglich sind die  $c_n|_I$  linear umparametrisierte Geodäten (vgl. Übungsaufgabe). Da die linear umparametrisierten Geodäten  $c_n|_I$  stetig von ihren Endpunkten abhängen, konvergiert  $c_n|_I$  gleichmäßig gegen die eindeutige linear umparametrisierte Geodäte  $\gamma: c(t - \varepsilon) \rightsquigarrow c(t + \varepsilon)$ . Es gilt aber auch  $\gamma = c|_I$  und damit ist  $c|_I$  eine linear umparametrisierte Geodäte. Somit ist  $c$  eine linear umparametrisierte lokale Geodäte. Ferner gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c$ .  $\square$

### 2.33 Satz

Sei  $(X, d)$  ein vollständiger zusammenhängender lokaler CAT(0)-Raum. Dann ist  $\exp: (\tilde{X}_{x_0}, d) \rightarrow (X, d_X)$  die universelle Überlagerung.

**BEWEIS:** Zeige zuerst, dass  $\tilde{X}_{x_0}$  wegzusammenhängend ist. Seien  $c_1, c_2 \in \tilde{X}_{x_0}$  beliebig. Betrachte

$$\begin{aligned} H|_{\{c_1\} \times [0, 1]}: [0, 1] &\longrightarrow \tilde{X}_{x_0} \\ s &\longmapsto [c_1, s: t \mapsto c_1(st)]. \end{aligned}$$

Es gilt  $H|_{\{c_1\} \times [0, 1]}(0) = c_{x_0}$  und  $H|_{\{c_1\} \times [0, 1]}(1) = c_1$ . Folglich ist  $H|_{\{c_1\} \times [0, 1]}$  ein Weg von  $c_{x_0}$  nach  $c_1$ . Dann ist

$$\overline{H|_{\{c_1\} \times [0, 1]} * H|_{\{c_2\} \times [0, 1]}}$$

ein Weg von  $c_1$  nach  $c_2$ .

Weiter haben wir in Satz 2.31 bewiesen, dass  $\tilde{X}_{x_0}$  zusammenziehbar ist. Insgesamt ist also  $\tilde{X}_{x_0}$  einfach zusammenhängend. Wenn also  $\exp$  eine Überlagerung ist, handelt es sich um die universelle Überlagerung.

- Wir ersetzen nun die Metriken auf  $X$  und  $\tilde{X}_{x_0}$  durch die induzierten Längenmetriken  $\tilde{d}$  auf  $\tilde{X}_{x_0}$  und  $\tilde{d}_X$  auf  $X$ . Da  $X$  lokal geodätisch ist, ändert sich die Topologie auf  $X$  nicht, und da  $\exp$  eine lokale Isometrie ist, auch nicht auf  $\tilde{X}_{x_0}$ . Das bedeutet:

$$\exp: (\tilde{X}_{x_0}, d) \rightarrow (X, d_X) \text{ ist Überlagerung} \Leftrightarrow \text{Exp}: (\tilde{X}_{x_0}, \tilde{d}) \rightarrow \tilde{d}_X \text{ ist Überlagerung.}$$

- Da die Metriken lokal nicht verändert werden, bleibt  $\text{Exp}$  eine lokale Isometrie. Nach Satz 2.24 ist  $\tilde{d} =: d_{\exp}$  die von  $\exp$  induzierte Längenmetrik. Die Bedingungen von Satz 2.28 sind für  $\text{Exp}: (\tilde{X}_{x_0}, d_{\exp}) \rightarrow (X, \tilde{d}_X)$  erfüllt:
  - (i) gilt, da  $X$  lokal wegzusammenhängend und zusammenhängend
  - (ii) gilt, da  $\text{Exp}$  lokale Isometrie ist.
  - (iii) gilt, da  $d_{\exp}$  die von  $\exp$  induzierte Längenmetrik ist.
  - (iv) gilt, da  $X$  lokal  $\text{CAT}(0)$  ist.
  - (v) gilt, da  $X$  lokal  $\text{CAT}(0)$  ist (Satz 2.18).
  - (vi) gilt, da  $X$  vollständig ist (Satz 2.31).

Damit ist  $\text{Exp}$  eine Überlagerung. □

### 2.34 Bemerkung

Da  $\text{Exp}$  eine lokale Isometrie ist, ist  $(\tilde{X}_{x_0}, d_{\exp})$  lokal  $\text{CAT}(0)$ .

Unser Ziel ist es, nun zu zeigen, dass  $(\tilde{X}_{x_0}, d_{\exp})$  global  $\text{CAT}(0)$  ist. Wir zeigen:

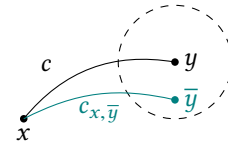
- (1) Für je zwei Punkte  $c_1, c_2 \in \tilde{X}_{x_0}$  existiert eine eindeutige linear umparametrisierte lokale Geodäte von  $c_1$  nach  $c_2$  und diese hängen stetig von ihren Endpunkten ab.
- (2) Jede linear umparametrisierte lokale Geodäte in  $\tilde{X}_{x_0}$  ist schon eine globale Geodäte.

Folglich ist  $(\tilde{X}_{x_0}, d_{\exp})$  eindeutig geodätisch, lokal  $\text{CAT}(0)$  und die Geodäten hängen stetig von ihren Endpunkten ab. Daraus folgt, dass  $(\tilde{X}_{x_0}, d_{\exp})$  global  $\text{CAT}(0)$  ist. Um dies zu beweisen, brauchen wir eine Umformulierung der  $\text{CAT}(0)$ -Eigenschaft mit Hilfe von Winkeln in metrischen Räumen, siehe Abschnitt 2.4.

### 2.35 Korollar

Sei  $(X, d_X)$  ein metrischer Raum, der lokal  $\text{CAT}(0)$  und lokal vollständig ist und  $c: [0, 1] \rightarrow X$  eine linear umparametrisierte Geodäte von  $x \in X$  nach  $y \in X$ . Sei weiter  $\varepsilon > 0$  so, wie in Lemma 2.32. Sei nun  $\bar{y} \in B_\varepsilon(y)$  beliebig und  $c_{x\bar{y}}$  die eindeutige linear umparametrisierte Geodäte von  $x$  nach  $\bar{y}$ . Dann gilt:

$$\ell(c_{x\bar{y}}) \leq \ell(c) + d_X(y, \bar{y}).$$



**BEWEIS:** Wähle  $t > 0$  so, dass  $c|_{[0,t]}$  und  $c_{x\bar{y}}|_{[0,t]}$  linear umparametrisierte Geodäten sind. Es gilt:

$$t \cdot \ell(c_{x\bar{y}}) = d_X(c_{x\bar{y}}(0), c_{x\bar{y}}(t)) \quad (30)$$

$$t \cdot \ell(c) = d_X(c(0), c(t)) \quad (31)$$

Wir haben:

$$\begin{aligned} t \cdot \ell(c_{x\bar{y}}) &\stackrel{(30)}{=} d_X(\underbrace{c_{x\bar{y}}(0)}_{=c(0)}, c_{x\bar{y}}(t)) \\ &\stackrel{\Delta\text{-Ungl}}{\leq} d_X(c(0), c(t)) + d_X(c(t), c_{x\bar{y}}(t)) \\ &\stackrel{(31)}{=} t \cdot \ell(c) + d_X(c(t), c_{x\bar{y}}(t)) \\ &\stackrel{2.32}{\leq} t \cdot \ell(c) + t \cdot d_X(y, \bar{y}) \quad (\Phi \text{ ist konvex}) \end{aligned} \quad \square$$

### 2.36 Bemerkung ([Mun74, § 12])

Seien  $E, B, Y$  lokal wegzusammenhängende und wegzusammenhängende topologische Räume.

- (i) Sei  $p: E \rightarrow B$  eine universelle Überlagerung. Sei  $r: Y \rightarrow B$  eine weitere Überlagerung. Sei weiter  $b_0 \in B$  beliebig und  $e_0 \in E$  mit  $p(e_0) = b_0$  und  $y_0 \in Y$  mit  $r(y_0) = b_0$ . Dann existiert eine Überlagerung  $q: E \rightarrow Y$ , sodass  $r \circ q = p$  und  $q(e_0) = y_0$  gilt.
- (ii) Seien  $p: E \rightarrow B, r: Y \rightarrow B$  zwei universelle Überlagerungen und  $e_0, y_0, b_0$  wie in (i). Dann existiert ein Homöomorphismus  $q: E \rightarrow Y$ , sodass  $r \circ q = p$  und  $q(e_0) = y_0$  gilt.

### 2.37 Bemerkung

Sei  $(X, d_X)$  ein vollständiger zusammenhängender lokaler CAT(0)-Raum. Sei  $x_0 \in X$  beliebig. Sei weiter  $p \in (\tilde{X}_{x_0}, d_{\exp})$  beliebig. Wir haben in Satz 2.33 bewiesen, dass  $(\tilde{X}_{x_0}, d_{\exp}), (\tilde{X}_{p(1)}, d_{\exp})$  universelle Überlagerungen sind. Es existiert also ein Homöomorphismus  $\alpha: \tilde{X}_{x_0} \rightarrow \tilde{X}_{p(1)}$ , sodass  $\text{Exp}_{x_1} \circ \alpha = \text{Exp}_{x_0}$  und  $\alpha(p) = c_{p(1)}$  für  $b_0 = p(1)$  gilt.

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X}_{x_0} & \xrightarrow{\alpha} & \tilde{X}_{p(1)} \\ & \searrow \text{Exp}_{x_0} & \swarrow \text{Exp}_{x_1} \\ & X & \end{array}$$

Weiter ist  $\alpha$  eine lokale Isometrie, da  $\text{Exp}_{x_0}$  und  $\text{Exp}_{x_1}$  lokale Isometrien sind.

### 2.38 Lemma

Sei  $(X, d_X)$  ein vollständiger zusammenhängender lokaler CAT(0)-Raum. Sei weiter  $x_0 \in X$  beliebig. Seien nun  $p, q \in (\tilde{X}_{x_0}, d_{\exp})$  beliebig. Dann existiert genau eine linear umparametrisierte lokale Geodäte zwischen  $p$  und  $q$ .



**BEWEIS:**

**1. Fall:**

$$\begin{aligned} p = c_{x_0} : [0, 1] &\longrightarrow X \\ t &\longmapsto x_0 \end{aligned}$$

Zur Existenz: Wir definieren

$$\begin{aligned} C_{pq} : [0, 1] &\longrightarrow \tilde{X}_{x_0} \\ s &\longmapsto [q_s : t \mapsto q(st)] \end{aligned}$$

- $C_{pq}$  ist stetig, da  $C_{pq} = H|_{\{q\} \times [0, 1]}$ , siehe Satz 2.31.
- Es gilt  $C_{pq}(0) = c_{x_0}$  und  $C_{pq} = q$ .
- Weiter gilt  $\text{Exp} \circ C_{pq} = q$ , wobei  $\text{Exp}$  eine lokale Isometrie und  $q$  eine linear umparametrisierte Geodäte ist. Folglich ist  $C_{pq}$  linear umparametrisierte lokale Geodäte von  $c_{x_0}$  nach  $q$ .

Zur Eindeutigkeit: Sei  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \tilde{X}_{x_0}$  eine linear umparametrisierte lokale Geodäte von  $c_{x_0}$  nach  $q$ . Da  $\text{Exp}$  eine lokale Isometrie ist, ist  $\text{Exp} \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow X$  eine linear umparametrisierte lokale Geodäte von  $\text{Exp} : \gamma(0) = \text{Exp}(c_{x_0}) = c_{x_0}(1) = x_0$  nach  $\text{Exp} \circ \gamma(1) = \text{Exp}(q) = q(1)$ . Aber  $q$  ist auch eine linear umparametrisierte lokale Geodäte von  $x_0$  nach  $q(1)$ . Aus der in Lemma 2.32 formulierten Eindeutigkeit folgt somit  $\text{Exp} \circ \gamma = q$ , und damit

$$\begin{aligned} \text{Exp} \circ \gamma(s) &= q(s) \text{ für alle } s \in [0, 1] \\ \Leftrightarrow \gamma(s)(1) &= q(s) \text{ für alle } s \in [0, 1] \end{aligned}$$

Sei  $s \in [0, 1]$  beliebig. Wir wissen, dass  $\gamma(s) : [0, 1] \rightarrow X$  und  $q_s : [0, 1] \rightarrow X, t \mapsto q(st)$  zwei linear umparametrisierte lokale Geodäten von  $x_0$  nach  $q(s)$  sind. Mit Lemma 2.32 folgt somit wieder  $\gamma(s) = q_s$ . Insgesamt erhalten wir  $\gamma = C_{pq}$ .

**allgemein:** Seien  $p, q \in \tilde{X}_{x_0}$  beliebig. Wir betrachten die universelle Überlagerung  $\text{Exp}_{p(1)} : \tilde{X}_{p(1)} \rightarrow X$ . Nach Bemerkung 2.37 existiert ein Homöomorphismus  $\alpha : \tilde{X}_{x_0} \rightarrow \tilde{X}_{p(1)}$  mit  $\alpha^{-1}(c_{p(1)}) = p$ , der eine lokale Isometrie ist und sodass das dort angegebene Diagramm kommutiert. Wir haben im ersten Fall gesehen, dass es eine eindeutige linear umparametrisierte lokale Geodäte existiert:

$$\begin{aligned} C_{c_{p(1)}\alpha(q)} : [0, 1] &\longrightarrow \tilde{X}_{p(1)} \\ 0 &\longmapsto c_{p(1)} \\ 1 &\longmapsto \alpha(q) \end{aligned}$$

Zur Existenz: Wir zeigen, dass  $\alpha^{-1} \circ C_{c_{p(1)}\alpha(q)} : [0, 1] \rightarrow \tilde{X}_{x_0}$  eine linear umparametrisierte lokale Geodäte von  $p$  nach  $q$  ist.

- $\alpha \circ C_{c_p(1)\alpha(q)}$  ist eine linear umparametrisierte lokale Geodäte, da dies für  $C_{c_p(1)\alpha(q)}$  der Fall ist und  $\alpha$  eine lokale Isometrie ist.
- Weiter gilt  $\alpha^{-1} \circ C_{c_p(1)\alpha(q)}(0) = \alpha^{-1}(C_{p(1)}) = p$  und  $\alpha^{-1} \circ C_{c_p(1)\alpha(q)}(1) = \alpha^{-1}(\alpha(q)) = q$ .

Zur Eindeutigkeit: Sei  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \tilde{X}_{x_0}$  eine weitere linear umparametrisierte lokale Geodäte von  $p$  nach  $q$ . Dann ist  $\alpha \circ \gamma: [0, 1] \rightarrow \tilde{X}_{p(1)}$  eine linear umparametrisierte lokale Geodäte von  $\alpha \circ \gamma(0) = \alpha(p) = c_{x_0}$  nach  $\alpha \circ \gamma(1) = \alpha(q)$ . Aus der Eindeutigkeit im ersten Fall folgt  $\alpha \circ \gamma = C_{c_p(1)\alpha(q)}$  und damit  $\gamma = \alpha^{-1} \circ C_{c_p(1)\alpha(q)}$ .  $\square$

### 2.39 Lemma

Die linear umparametrisierten lokalen Geodäten in  $\tilde{X}_{x_0}$  hängen stetig von ihren Endpunkten ab. (Aufgabe A.22)

### 2.40 Lemma

Sei  $C_{pq}: [0, 1] \rightarrow (\tilde{X}_{x_0}, d_{\exp})$  die eindeutige linear umparametrisierte lokale Geodäte von  $p$  nach  $q$ ,  $p, q \in \tilde{X}_{x_0}$ . Dann ist  $C_{pq}$  eine linear umparametrisierte globale Geodäte.

**BEWEIS:** Nach Proposition 2.6(iv) genügt zu zeigen, dass  $\ell(C_{pq}) = d_{\exp}(p, q)$  gilt.

Es gilt  $\ell(C_{pq}) \geq d_{\exp}(p, q)$  (vgl. Aufgabe A.14). Es bleibt zu zeigen:

$$\ell(C_{pq}) \leq d_{\exp}(p, q) = \inf\{\ell(\gamma) : \gamma \text{ ist ein rektifizierbarer Weg von } p \text{ nach } q\}.$$

Sei also  $\gamma$  ein beliebiger rektifizierbarer Weg von  $p$  nach  $q$ . Wir müssen also zeigen, dass  $\ell(C_{pq}) \leq \ell(\gamma)$  gilt. Das zeigen wir mit dem Zusammenhangsargument: Wir definieren

$$S := \{t_0 \in [0, 1] : \text{Für alle } t \leq t_0 \text{ gilt } \ell(C_{\gamma(0)\gamma(t)}) \leq \ell(\gamma|_{[0, t]})\},$$

wobei  $C_{\gamma(0)\gamma(t)}$  die eindeutige linear umparametrisierte lokale Geodäte von  $\gamma(0)$  nach  $\gamma(t)$  bezeichnet.

- Es ist  $S \neq \emptyset$ , da  $0 \in S$ .

- $S$  ist offen: Sei  $t_0 \in S$  beliebig.

**1. Fall:**  $t_0 = 0$ . Da  $\tilde{X}_{x_0}$  lokal CAT(0) ist, existiert ein  $\varepsilon > 0$ , sodass  $B_\varepsilon(\gamma(0)) = B_\varepsilon(p)$  CAT(0) ist.

Dann existiert ein  $\eta > 0$ , sodass  $\text{im}(C_{\gamma(0)\gamma(\eta)}) \subseteq B_\varepsilon(\gamma(0))$ . Da  $B_\varepsilon(\gamma(0))$  ein CAT(0)-Raum ist, ist die linear umparametrisierte lokale Geodäte  $C_{\gamma(0)\gamma(\eta)}$  eine linear umparametrisierte globale Geodäte und es gilt

$$\ell(C_{\gamma(0)\gamma(\eta)}) = d_{\exp}(\gamma(0), \gamma(\eta)) \leq \ell(\gamma|_{[0, \eta]}).$$

Somit ist  $[0, \eta] \subseteq S$ .

**2. Fall:**  $t_0 > 0$ . Wähle  $\varepsilon > 0$  so, wie in Lemma 2.32 für die linear umparametrisierte lokale Geodäte  $\text{Exp} \circ C_{\gamma(0)\gamma(t_0)}$ . Weiter wähle  $\eta > 0$ , sodass für alle  $t' \in (t_0 - \eta, t_0 + \eta)$  gilt, dass  $\text{Exp} \circ \gamma(t') \in B_\varepsilon(\text{Exp} \circ \gamma(t_0))$  ist und  $\text{Exp}: B_\eta(\gamma(0)) \rightarrow B_\eta(\text{Exp} \circ \gamma(t_0))$  eine Isometrie ist.

Dann gilt für alle  $t' \in (t_0 - \eta, t_0 + \eta)$ :

$$\begin{aligned}
 \ell(C_{Y(0)Y(t')}) &= \ell(\text{Exp} \circ C_{Y(0)Y(t')}) \\
 &\stackrel{\text{Bem. 2.35}}{\leq} \ell(\text{Exp} \circ C_{Y(0)Y(t_0)}) + d_X(\text{Exp} \circ \gamma(t_0), \text{Exp} \circ \gamma(t')) \\
 &= \ell(C_{Y(0)Y(t_0)}) + d_X(\text{Exp} \circ \gamma(t_0), \text{Exp} \circ \gamma(t')) \\
 &\stackrel{t_0 \in S}{\leq} \ell(\gamma|_{[0, t_0]}) + d_{\text{exp}}(\gamma(t_0), \gamma(t')) \\
 &\leq \ell(\gamma|_{[0, t_0]}) + \ell(\gamma|_{[t_0, t']}) \\
 &\stackrel{\text{Aufg. 4.2}}{=} \ell(\gamma|_{[0, t']})
 \end{aligned}$$

Also ist  $[0, t_0 + \eta) \subseteq S$  und  $S$  ist offen.

- $S$  ist abgeschlossen: Es reicht zu zeigen:  $[0, t_0) \subseteq S \Rightarrow t_0 \in S$ .

Wir wissen nach Proposition 2.6(v), dass die Funktion

$$\begin{aligned}
 \lambda_Y : [0, 1] &\longrightarrow [0, \ell(\gamma)] \\
 t &\longmapsto \ell(\gamma|_{[0, t]})
 \end{aligned}$$

stetig ist. Sei  $(t_n)_n$  eine Folge in  $S$  mit  $t_n \rightarrow t_0$  beliebig. Da die linear umparametrisierten lokalen Geodäten nach Lemma 2.39 stetig von ihren Endpunkten abhängen, konvergiert  $C_{Y(0)Y(t_n)}$  gleichmäßig gegen  $C_{Y(0)Y(t_0)}$ . Nach Proposition 2.6(vii) existiert somit für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$ , sodass

$$\ell(C_{Y(0)Y(t_0)}) \leq \ell(C_{Y(0)Y(t_n)}) + \varepsilon \quad (32)$$

für alle  $n \geq N$ . Wähle  $\varepsilon > 0$  so, wie in Lemma 2.32 für die linear umparametrisierte lokale Geodäte  $\text{Exp} \circ C_{Y(0)Y(t_0)}$ . Sei  $N \geq \mathbb{N}$  so groß, dass  $\text{Exp} \circ \gamma(t_n) \in B_\varepsilon(\text{Exp} \circ \gamma(t_0))$  für alle  $n \geq N$ . Nach Korollar 2.35 gilt o.B.d.A.

$$\begin{aligned}
 \ell(C_{Y(0)Y(t_n)}) &= \ell(\text{Exp} \circ C_{Y(0)Y(t_n)}) \leq \ell(\text{Exp} \circ C_{Y(0)Y(t_0)}) + d_X(\text{Exp} \circ \gamma(t_0), \text{Exp} \circ \gamma(t_n)) \\
 &= \ell(C_{Y(0)Y(t_0)}) + d_{\text{exp}}(\gamma(t_0), \gamma(t_n)),
 \end{aligned} \quad (33)$$

da  $\text{Exp}$  eine Isometrie auf  $B_\varepsilon(\gamma(0))$  ist.

Nun können wir zeigen, dass gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ell(C_{Y(0)Y(t_n)}) = \ell(C_{Y(0)Y(t_0)}).$$

Sei  $\eta > 0$  beliebig. Dann existiert nach (32) ein  $N \in \mathbb{N}$ , sodass gilt:

$$\ell(C_{Y(0)Y(t_0)}) - \ell(C_{Y(0)Y(t_n)}) < \eta \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Weiter existiert nach (33) ein  $M \in \mathbb{N}$ , sodass gilt:

$$\ell(C_{Y(0)Y(t_n)}) - \ell(C_{Y(0)Y(t_0)}) < \eta \quad \text{für alle } n \geq M.$$

Folglich gilt  $|\ell(C_{Y(0)Y(t_0)}) - \ell(C_{Y(0)Y(t_n)})| < \eta$  für alle  $n \geq \max\{N, M\}$ , und wir erhalten insgesamt:

$$\begin{aligned} \ell(C_{Y(0)Y(t_n)}) &\stackrel{t_n \in S}{\leq} \ell(Y|_{[0, t_n]}) \\ \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell(C_{Y(0)Y(t_0)}) &\leq \ell(Y|_{[0, t_0]}) \end{aligned}$$

Also ist  $t_0 \in S$ .

Insgesamt folgt  $S = [0, 1]$  und damit  $\ell(C_{pq}) \leq \ell(Y)$ . □

## 2.4. Winkel in metrischen Räumen

### 2.4.1 Definition (Dreieck, Winkel)

(i) Sei  $(X, d_X)$  ein metrischer Raum. Ein **Dreieck** in  $X$  ist gegeben durch ein 3-Tupel aus  $X^3$ .

Sei  $(x, y, z)$  ein Dreieck in  $X$ . Ein **Vergleichsdreieck** in  $\mathbb{E}^2$  zu  $\Delta = (x, y, z) \in X^3$  ist ein Dreieck  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  in  $\mathbb{E}^2$ , sodass gilt:

$$d_X(x, y) = d_2(\bar{x}, \bar{y}), \quad d_X(y, z) = d_2(\bar{y}, \bar{z}), \quad d_X(x, z) = d_2(\bar{x}, \bar{z}).$$

Das Vergleichsdreieck  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  in  $\mathbb{E}^2$  ist eindeutig bis auf Isometrie und wir schreiben dafür  $\bar{\Delta} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ . Weiter bezeichnen wir mit  $\angle_{\bar{x}}(\bar{y}, \bar{z}) \in [0, \pi]$  den **Winkel** in  $\bar{\Delta}$  in  $\bar{x}$ .

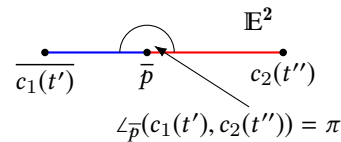
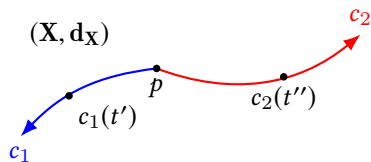
(ii) Seien  $c_1, c_2$  zwei Geodäten in  $(X, d_X)$  mit  $c_1(0) = c_2(0) =: p$ . Wir definieren

$$\begin{aligned} \angle(c_1, c_2) &:= \limsup_{t, t' \rightarrow 0} \angle_{\bar{p}}(\overline{c_1(t)}, \overline{c_2(t')}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \left\{ \angle_{\bar{p}}(\overline{c_1(t)}, \overline{c_2(t')}) : t, t' \in \left(0, \frac{1}{n}\right) \right\}. \end{aligned}$$

$\angle(c_1, c_2)$  heißt der **Winkel** zwischen  $c_1$  und  $c_2$ .

### 2.4.2 Beispiel

Seien  $c_1, c_2$  zwei Geodäten in  $X$  mit  $c_1(0) = c_2(0) =: p$ , sodass  $\overline{c_1} * \overline{c_2}$  eine Geodäte in  $X$  ist. Dann ist  $\angle(c_1, c_2) = \pi$ .



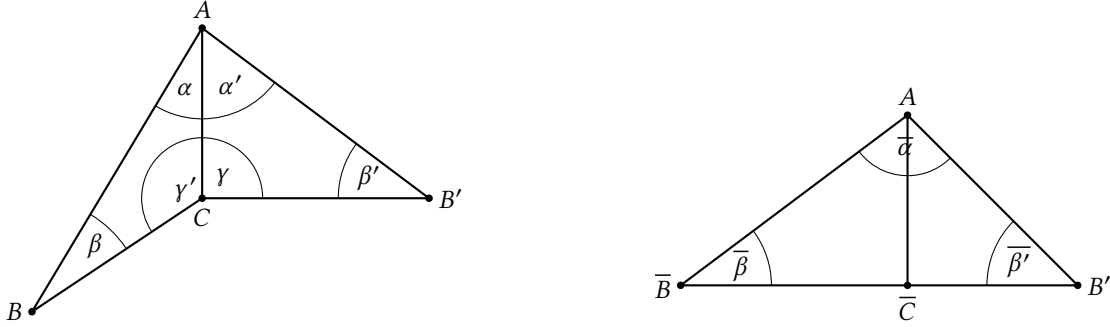
### 2.43 Proposition

Sei  $(X, d_X)$  ein metrischer Raum und  $c_1, c_2, c_3$  Geodäten in  $X$  mit  $c_1(0) = c_2(0) = c_3(0)$ . Dann gilt (Aufgabe A.25):

$$\angle(c_1, c_3) \leq \angle(c_1, c_2) + \angle(c_2, c_3)$$

### 2.44 Lemma (ALEXANDROVS Lemma)

Wir betrachten zwei Dreiecke in  $\mathbb{E}^2$  mit gemeinsamer Seite und  $\gamma + \gamma' \geq \pi$ .



Dann gilt:

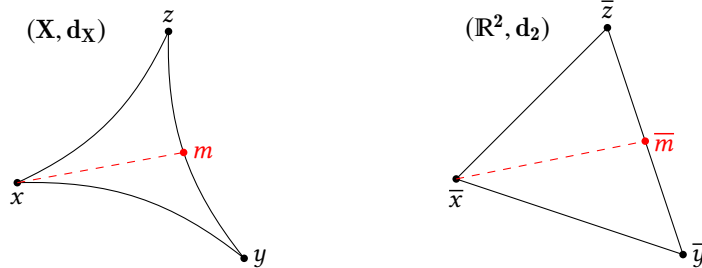
- (i)  $d_2(B, A) + d_2(A, B') \geq d_2(B, C) + d_2(C, B')$
- (ii) Bewege  $C$  ein wenig, sodass  $\gamma + \gamma' = \pi$  und die Seitenlängen des Vierecks  $A, B, C, B'$  gleich bleiben (rechtes Dreieck). Dann gilt:

$$\bar{\alpha} \geq \alpha + \alpha', \quad \bar{\beta} \geq \beta, \quad \bar{\beta}' \geq \beta', \quad d_2(A, \bar{C}) \geq d(A, C).$$

### 2.45 Lemma

Sei  $X$  ein geodätischer Raum. Der Raum  $X$  ist genau dann CAT(0), wenn für alle geodätischen Dreiecke  $\Delta(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$  gilt:

$$d\left(x, \underbrace{\beta\left(\frac{d(z, y)}{2}\right)}_{=: m}\right) \leq d_2\left(\bar{x}, \underbrace{\bar{\beta}\left(\frac{d_2(\bar{z}, \bar{y})}{2}\right)}_{=: \bar{m}}\right)$$



**2.46 Satz** (Winkelbedingung für CAT(0)-Räume)

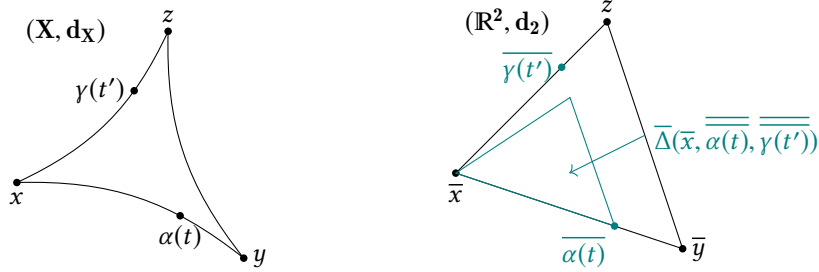
Sei  $(X, d_X)$  ein geodätischer Raum. Dann sind äquivalent:

1.  $X$  ist CAT(0).
2. Für jedes geodätische Dreieck  $\Delta(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$  in  $X$  und Vergleichsdreieck  $\bar{\Delta}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  gilt  $\angle(\alpha, \gamma) \leq \angle_{\bar{x}}(\bar{y}, \bar{z})$ .

**BEWEIS:**

(i)  $\Rightarrow$  (ii): Sei  $\Delta(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$  ein beliebiges geodätisches Dreieck. Da  $X$  CAT(0) ist, gilt für  $t \in [0, d(x, z)]$ ,  $t' \in [0, d(x, y)]$  beliebig:

$$d(\alpha(t), \gamma(t')) \leq d_2(\overline{\alpha(t)}, \overline{\gamma(t')}).$$



Folglich gilt  $\angle_{\bar{x}}(\overline{\alpha(t)}, \overline{\gamma(t')}) \leq \angle_{\bar{x}}(\bar{y}, \bar{z})$  und damit

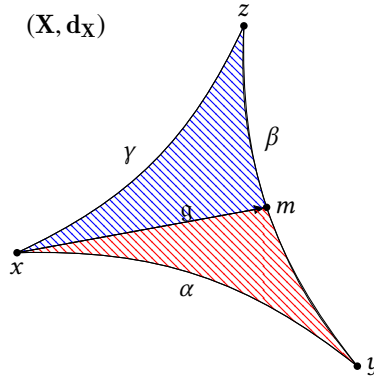
$$\begin{aligned} \angle(\alpha, \gamma) &:= \limsup_{t, t' \rightarrow \infty} \angle_{\bar{x}}(\overline{\alpha(t)}, \overline{\gamma(t')}) \\ &\leq \limsup_{t, t' \rightarrow \infty} \angle_{\bar{x}}(\bar{y}, \bar{z}) \\ &= \angle_{\bar{x}}(\bar{z}, \bar{y}) \end{aligned}$$

(ii)  $\Rightarrow$  (i): Sei  $\Delta(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$  ein beliebiges geodätisches Dreieck in  $X$ . Wir zeigen, dass dann mit  $m := \beta\left(\frac{d(z, y)}{2}\right)$  und Vergleichspunkt  $\bar{m} := \bar{\beta}\left(\frac{d(\bar{z}, \bar{y})}{2}\right)$  gilt:

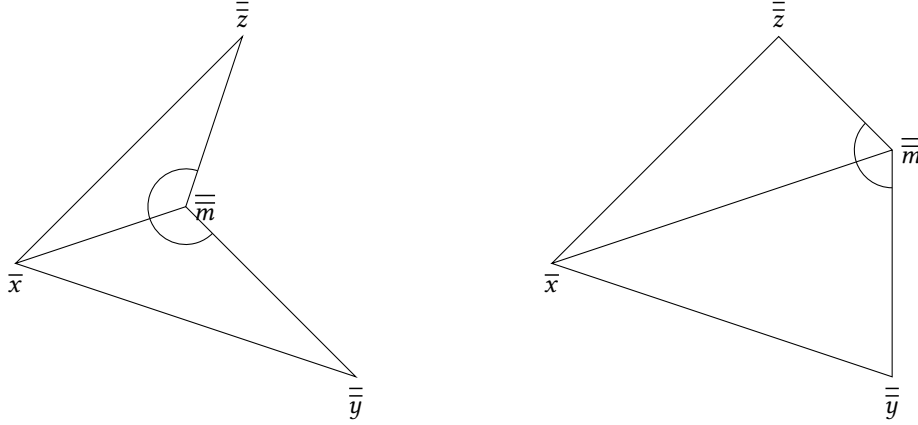
$$d(x, m) \leq d_2(\bar{x}, \bar{m}).$$

Dann folgt mit Lemma 2.45, dass  $X$  CAT(0) ist.

Wähle eine Geodäte zwischen  $x$  und  $m$  und betrachte die beiden schraffierten Dreiecke:



Bezeichne mit  $g$  die Geodäte von  $x$  nach  $m$ . Wir haben zwei Möglichkeiten für die Lage von  $\bar{m}$  für die Vergleichsdreiecke  $\bar{\Delta}(\bar{x}, \bar{m}, \bar{z})$  und  $\bar{\Delta}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{m})$ :



Für die Dreiecke  $\Delta(x, m, z)$  und  $\Delta(x, y, m)$  gilt (i). Wir haben also

$$\angle(\beta|_-, \bar{g}) \leq \angle_{\bar{m}}(\bar{x}, \bar{z}) \quad \angle(\bar{g}, \bar{\beta}|_-) \leq \angle_{\bar{m}}(\bar{x}, \bar{y}),$$

wobei  $\bar{g}, \bar{\beta}$  hier die inversen Geodäten bezeichnen. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} & \angle_{\bar{m}}(\bar{x}, \bar{z}) + \angle_{\bar{m}}(\bar{x}, \bar{y}) \\ & \geq \angle(\beta|_-, \bar{g}) + \angle(\bar{g}, \bar{\beta}|_-) \\ & \stackrel{2.43}{\geq} \angle(\beta|_-, \bar{\beta}|_-) \stackrel{2.42}{=} \pi. \end{aligned}$$

Also ist das Vergleichsdreieck von der Gestalt wie links. Mit Lemma 2.44 folgt:

$$d(x, m) = d_2(\bar{x}, \bar{m}) \leq d_2(\bar{x}, \bar{m}).$$

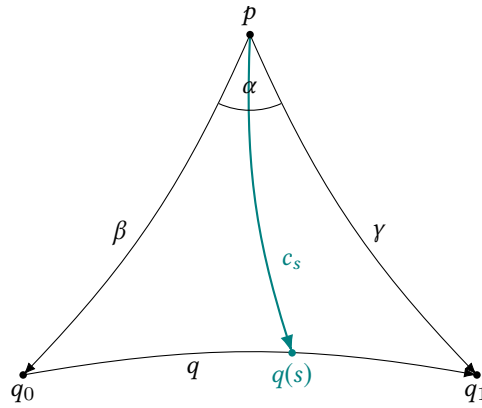
□

### 2.47 Satz

Sei  $Y$  ein lokaler CAT(0)-Raum. Weiter sei  $Y$  eindeutig geodätisch und die Geodäten hängen stetig von ihren Endpunkten ab. Dann ist  $Y$  ein CAT(0)-Raum.

**BEWEIS:** Wir zeigen die Winkelbedingung für CAT(0)-Räume. Seien  $p, q_0, q_1 \in Y$  paarweise verschiedene Punkte und  $\Delta(p, q_0, q_1)$  das geodätische Dreieck. Sei

- $q: [0, 1] \rightarrow Y$  die linear umparametrisierte Geodäte von  $q_0$  nach  $q_1$ ,
- $\beta: [0, 1] \rightarrow Y$  die linear umparametrisierte Geodäte von  $p$  nach  $q_0$  und
- $\gamma: [0, 1] \rightarrow Y$  die linear umparametrisierte Geodäte von  $p$  nach  $q_1$ .



Zu zeigen ist:

$$\alpha := \angle(\beta, \gamma) \leq \angle_{\bar{p}}(\overline{q_0}, \overline{q_1}).$$

Für  $s \in [0, 1]$  sei  $c_s: [0, 1] \rightarrow Y$  die linear umparametrisierte Geodäte von  $p$  zu  $q(s)$ . Wir definieren

$$\begin{aligned} c: [0, 1] \times [0, 1] &\longrightarrow Y \\ (s, t) &\longmapsto c_s(t) \end{aligned}$$

- $c$  ist stetig, da die Geodäten in  $Y$  stetig von ihren Endpunkten abhängen.
- $\text{im}(c) \subseteq Y$  ist kompakt und  $Y$  ist lokal CAT(0), somit ist

$$\text{im}(c) \subseteq B_{\varepsilon_1}(p_1) \cup \dots \cup B_{\varepsilon_n}(p_n)$$

mit  $B_{\varepsilon_i}(p_i)$  CAT(0).

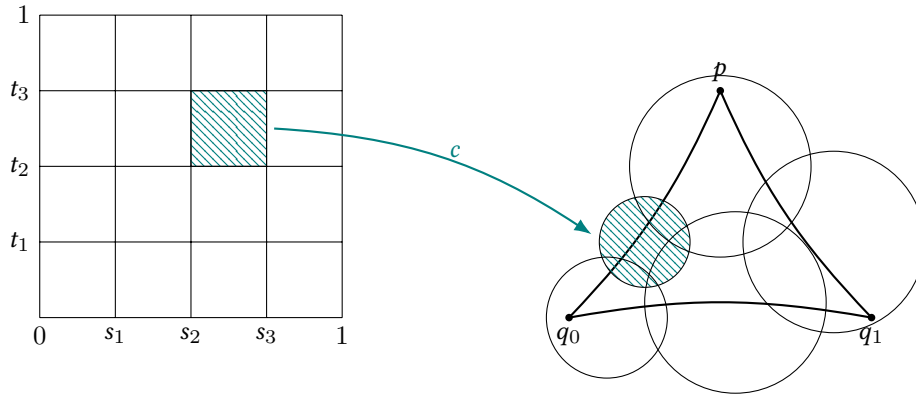
- Wähle Unterteilungen

$$0 = s_0 < s_1 < \dots < s_k = 1$$

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_l = 1$$

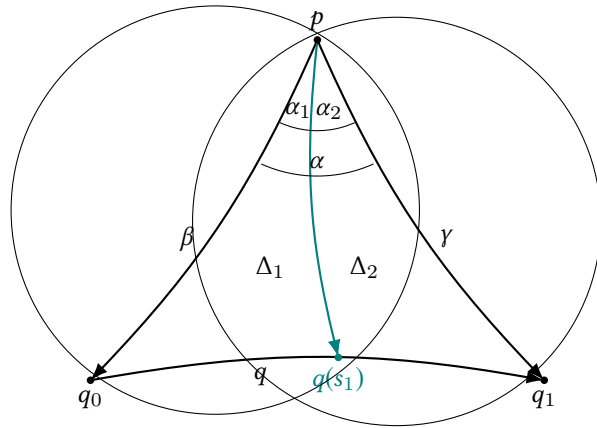
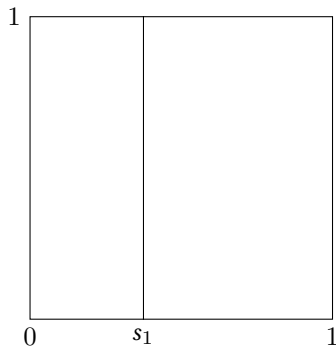
mit  $c([s_i, s_{i+1}] \times [t_j, t_{j+1}]) \subseteq B_{\varepsilon_m}(p_m)$  für  $m \in \{1, \dots, n\}$ .





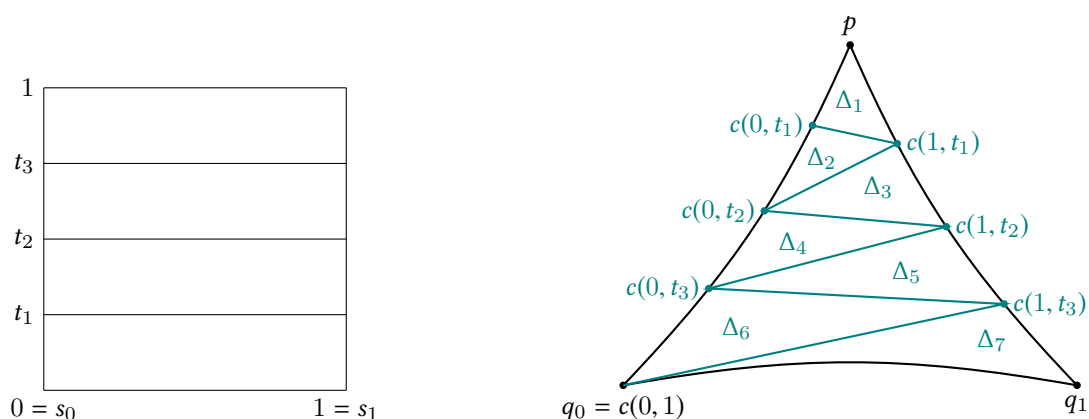
**0. Fall:**  $k = 1, l = 1$ . Nichts zu zeigen.

**1. Fall:**  $k = 2, l = 2$ . Die CAT(0)-Winkelbedingung gilt für  $\Delta_1$  und  $\Delta_2$ .

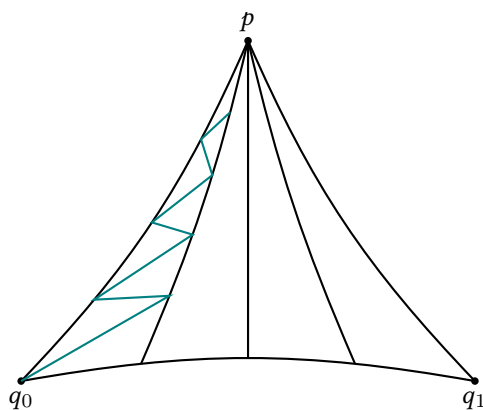


$$\begin{aligned}
 \angle(\beta, \gamma) &\stackrel{2.43}{\leq} \angle(\beta, c_{s_1}) + \angle(c_{s_1}, \gamma) \\
 &\stackrel{2.46}{\leq} \angle_{\bar{p}}(\overline{q_0}, \overline{q(s_1)}) + \angle_{\bar{p}}(\overline{q(s_1)}, \overline{q_1}) \\
 &\stackrel{2.44}{\leq} \angle_{\bar{p}}(\overline{q_0}, \overline{q_1})
 \end{aligned}$$

**2. Fall:**  $k = 1, l > 1$ . Verbinde die Punkte  $c(s_i, t_j)$  mit Geodäten, wie im Bild zu sehen. Die CAT(0)-Winkelbedingung gilt für alle  $\Delta_i$  so wie oben. Wende Fall 1 an auf das zusammengesetzte Dreieck bestehend aus  $\Delta_1$  und  $\Delta_2$ . Demzufolge gilt die Winkelbedingung für das Dreieck  $\Delta(p, c(0, t_2), c(1, t_1))$ . Durch Wiederholung dieser Argumentation haben wir nach endlich vielen Schritten gezeigt, dass die Winkelbedingung für das Dreieck  $\Delta(p, q_0, q_1)$  gilt.



3. Fall:  $k > 1, l > 1$ .



Wende Fall 2 auf jede „Spalte“ des Dreiecks an. Anschließend ist Fall 1 benutzbar.  $\square$

#### 2.48 Definition (konvex)

- (i) Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall. Eine Funktion  $\Phi: I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **konvex**, wenn für alle  $t, s \in I$  und  $\lambda \in [0, 1]$  gilt:

$$\Phi(\lambda s + (1 - \lambda)t) \leq \lambda \Phi(s) + (1 - \lambda)\Phi(t).$$

- (ii) Sei  $X$  ein geodätischer Raum. Eine Funktion  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **konvex**, wenn für alle linear umparametrisierten Geodäten  $c: [0, 1] \rightarrow X$  die Funktion

$$\begin{aligned} \Phi: [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto f(c(t)) \end{aligned}$$

konvex ist.

### 2.49 Lemma

Sei  $X$  ein geodätischer Raum und  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Die Funktion  $f$  ist genau dann konvex, wenn für alle linear umparametrisierten Geodäten  $c: [0, 1] \rightarrow X$  und  $\lambda \in [0, 1]$  gilt:

$$f(c(\lambda)) \leq (1 - \lambda)f(c(0)) + \lambda f(c(1)).$$

### 2.50 Beispiel

Sei  $(X, d)$  ein CAT(0)-Raum. Dann ist  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  konvex, denn:

Sei  $c: [0, 1] \rightarrow X \times X$  eine linear umparametrisierte Geodäte. Dann sind  $\pi_1 \circ c: [0, 1] \rightarrow X$  und  $\pi_2 \circ c: [0, 1] \rightarrow X$  linear umparametrisierte Geodäten, wobei  $\pi_1$  bzw.  $\pi_2$  Projektionen auf die erste bzw. zweite Komponente sind. Sei  $\lambda \in [0, 1]$  beliebig. Wir haben:

$$\begin{aligned} d(c(\lambda)) &= d(\pi_1 \circ c(\lambda), \pi_2 \circ c(\lambda)) \\ &\stackrel{A.2}{\leq} (1 - \lambda) \cdot d(\pi_1 \circ c(0), \pi_2 \circ c(0)) + \lambda \cdot d(\pi_1 \circ c(1), \pi_2 \circ c(1)) \\ &= (1 - \lambda) \cdot d(c(0)) + \lambda \cdot d(c(1)) \end{aligned}$$

Mit Lemma 2.49 folgt, dass  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  konvex ist.

### 2.51 Definition (lokal konvex)

Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall. Eine Funktion  $\Phi: I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **lokal konvex**, wenn für alle  $\lambda \in I$  ein  $\varepsilon_\lambda > 0$  existiert, sodass  $\Phi|_{B_{\varepsilon_\lambda}(\lambda)}: B_{\varepsilon_\lambda}(\lambda) \cap I \rightarrow \mathbb{R}$  konvex ist.

### 2.52 Lemma

Sei  $\Phi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  eine lokal konvexe Funktion. Dann ist  $\Phi$  konvex. (Aufgabe A.26)

Es folgt nun der Beweis von Lemma 2.32.

**BEWEIS:** Da  $X$  lokal CAT(0) und lokal vollständig ist, existiert für jedes  $x \in X$  ein  $r_x > 0$ , sodass  $B_{r_x}(x)$  CAT(0) ist und  $\overline{B_{r_x}(x)}$  vollständig ist. Wir betrachten nun die offene Überdeckung

$$c([0, 1]) \subseteq \bigcup_{t \in [0, 1]} B_{\frac{r_{c(t)}}{2}}(c(t)).$$

Weiter ist  $[0, 1]$  kompakt und  $c: [0, 1] \rightarrow X$  ist stetig. Folglich ist  $c([0, 1])$  kompakt. Es existieren also  $t_1, \dots, t_n \in [0, 1]$  mit

$$c([0, 1]) \subseteq B_{\frac{r_{c(t_1)}}{2}}(c(t_1)) \cup \dots \cup B_{\frac{r_{c(t_n)}}{2}}(c(t_n)). \quad (34)$$

Wir definieren nun

$$\varepsilon := \frac{\min\{r_{c(t_1)}, \dots, r_{c(t_n)}\}}{4}.$$

Für alle  $t \in [0, 1]$  gilt nun, dass  $B_{2\varepsilon}(c(t))$  CAT(0) und  $\overline{B_{2\varepsilon}(c(t))}$  vollständig ist, denn:

Sei  $t \in [0, 1]$  beliebig. Dann existiert nach (34) ein  $i \in \{1, \dots, n\}$  mit  $c(t) \in B_{\frac{r_{c(t_i)}}{2}}(c(t_i))$ . Wir zeigen  $B_{2\varepsilon}(c(t)) \subseteq B_{r_{c(t_i)}}(c(t_i))$ .

Sei also  $x \in B_{2\varepsilon}(c(t))$  beliebig. Es gilt:

$$\begin{aligned} d(x, c(t_i)) &\stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} d(x, c(t)) + d(c(t), c(t_i)) \\ &< 2\varepsilon + \frac{r_{c(t_i)}}{2} \\ &\leq 2 \cdot \frac{r_{c(t_i)}}{4} + \frac{r_{c(t_i)}}{2} = r_{c(t_i)} \end{aligned}$$

Folglich ist  $x \in B_{r_{c(t_i)}}(c(t_i))$ .

Zur Konvexitätsaussage und Eindeutigkeit von  $c_{\bar{x}, \bar{y}}$ : Seien  $c_1, c_2: [0, 1] \rightarrow X$  linear umparametrisierte lokale Geodäten mit  $\sup_{t \in [0, 1]} d(c_i(t), c(t)) < \varepsilon$  für  $i = 1, 2$ . Wir betrachten nun die Funktion

$$\begin{aligned} \Phi: [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ t &\longmapsto d(c_1(t), c_2(t)). \end{aligned}$$

$\Phi$  ist konvex: Sei  $t \in [0, 1]$  beliebig. Es existiert  $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2 > 0$ , sodass

$$\begin{aligned} c_1: [t - \varepsilon'_1, t + \varepsilon'_1] &\longrightarrow B_{2\varepsilon}(c(t)) \\ c_2: [t - \varepsilon'_2, t + \varepsilon'_2] &\longrightarrow B_{2\varepsilon}(c(t)), \end{aligned}$$

und  $B_{2\varepsilon}(c(t))$  ist CAT(0). Wir definieren  $\varepsilon' := \min\{\varepsilon'_1, \varepsilon'_2\}$ . Nach Aufgabe A.5 sind lokale Geodäten in CAT(0)-Räumen schon globale Geodäten. Folglich sind  $c_1|_{[t-\varepsilon', t+\varepsilon']}$  und  $c_2|_{[t-\varepsilon', t+\varepsilon']}$  linear umparametrisierte Geodäten. Nach Beispiel 2.50 ist

$$d|_{B_{2\varepsilon}(c(t))}: B_{2\varepsilon}(c(t)) \times B_{2\varepsilon}(c(t)) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

eine konvexe Funktion. Folglich ist  $\Phi: [t - \varepsilon', t + \varepsilon'] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  konvex. Mit Lemma 2.52 folgt, dass  $\Phi$  global konvex ist.

Damit können wir nun die Eindeutigkeit zeigen: Seien  $\bar{x} \in B_\varepsilon(x)$ ,  $\bar{y} \in B_\varepsilon(y)$  beliebig und  $c_{\bar{x}, \bar{y}}, c'_{\bar{x}, \bar{y}}: [0, 1] \rightarrow X$  linear umparametrisierte Geodäten von  $\bar{x}$  nach  $\bar{y}$  mit der Eigenschaft

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, 1]} d(c_{\bar{x}, \bar{y}}, c(t)) &< \varepsilon \\ \sup_{t \in [0, 1]} d(c'_{\bar{x}, \bar{y}}, c(t)) &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Wir wissen, dass die Funktion

$$\begin{aligned} \Phi: [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ t &\longmapsto d(c_{\bar{x}, \bar{y}}(t), c'_{\bar{x}, \bar{y}}(t)) \end{aligned}$$

konvex ist.

Insbesondere gilt für  $\lambda \in [0, 1]$  beliebig:

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda) &\leq (1 - \lambda) \cdot \Phi(0) + \lambda \cdot \Phi(1) \\ d(c_{\bar{x}, \bar{y}}(\lambda), c'_{\bar{x}, \bar{y}}(\lambda)) &\leq (1 - \lambda) \cdot d(c_{\bar{x}, \bar{y}}(0), c'_{\bar{x}, \bar{y}}(0)) + \lambda \cdot d(c_{\bar{x}, \bar{y}}(1), c'_{\bar{x}, \bar{y}}(1)) \\ &\leq (1 - \lambda) \cdot d(\bar{x}, \bar{x}) + \lambda \cdot d(\bar{y}, \bar{y}) = 0\end{aligned}$$

Folglich erhalten wir  $c_{\bar{x}, \bar{y}}(\lambda) = c'_{\bar{x}, \bar{y}}(\lambda)$ , also  $c_{\bar{x}, \bar{y}} = c'_{\bar{x}, \bar{y}}$ .

Zur Existenz von  $c_{\bar{x}, \bar{y}}$ : Wir definieren für  $A \in (0, 1]$  die **Eigenschaft P(A)**: Für alle  $a, b \in [0, 1]$  mit  $0 < b - a \leq A$  und alle  $\bar{p} \in B_\varepsilon(c(a)), \bar{q} \in B_\varepsilon(c(b))$  existiert eine linear umparametrisierte lokale Geodäte  $c_{\bar{p}, \bar{q}}: [a, b] \rightarrow X$  von  $\bar{p}$  nach  $\bar{q}$  mit

$$\sup_{t \in [a, b]} d(c_{\bar{p}, \bar{q}}(t), c(t)) < \varepsilon.$$

Wir zeigen:

- (1) Es existiert ein  $A \in (0, 1]$ , sodass die Eigenschaft  $P(A)$  wahr ist.
- (2) Ist  $P(A)$  wahr, dann auch  $P(\frac{3A}{2})$ .

Dadurch folgt die Existenz von  $c_{\bar{x}, \bar{y}}$ .

- (1) Für  $A = \frac{\varepsilon}{\ell(c)}$  gilt  $P(A)$ , denn: Seien  $a, b \in [0, 1]$  mit  $0 < b - a \leq \frac{\varepsilon}{\ell(c)}$  beliebig. Dann ist

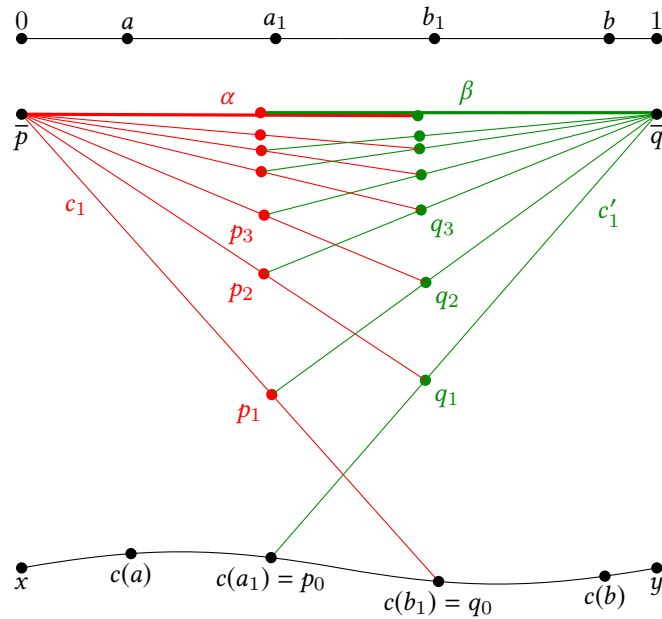
$$d(c(a), c(b)) \leq \ell(c|_{[a, b]}) \stackrel{\text{CAT}(0)}{=} \ell(c) \cdot |b - a| \leq \varepsilon,$$

also ist  $c|_{[a, b]}$  linear umparametrisierte Geodäte. Sei weiter  $\bar{p} \in B_\varepsilon(c(a)), \bar{q} \in B_\varepsilon(c(b))$  beliebig. Dann gilt  $\bar{p}, \bar{q} \in B_{2\varepsilon}(c(a))$ . Da  $B_{2\varepsilon}(c(a))$  CAT(0) ist, existiert eine linear umparametrisierte Geodäte  $c_{\bar{p}, \bar{q}}$  von  $\bar{p}$  nach  $\bar{q}$ .

- (2) Seien  $a, b \in [0, 1]$  mit  $0 < b - a \leq \frac{3}{2}A$  beliebig. Teile das Intervall  $[a, b]$  in drei gleich große Intervalle  $[a, a_1], [a_1, b_1], [b_1, b]$  auf.

Sei weiter  $\bar{p} \in B_\varepsilon(c(a))$  und  $\bar{q} \in B_\varepsilon(c(b))$  beliebig. Wir definieren induktiv Folgen  $p_n$  und  $q_n$  in  $X$ : Setze  $p_0 := c(a_1), q_0 := c(b_1)$ . Seien  $p_{n-1}, q_{n-1}$  bereits konstruiert. Da  $P(A)$  gilt, existieren linear umparametrisierte lokale Geodäten  $c_n: [a, b_1] \rightarrow X$  von  $\bar{p}$  zu  $q_{n-1}$  und  $c'_n: [a_1, b] \rightarrow X$  von  $p_{n-1}$  zu  $\bar{q}$ . Setze dann  $p_n := c_n(a_1)$  und  $q_n := c'_n(b_1)$ . Es gilt (ohne Beweis – nachrechnen):

- (i)  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}, (q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sind Cauchy-Folgen.
- (ii)  $p_n \in \overline{B_\varepsilon(p_0)}, q_n \in \overline{B_\varepsilon(q_0)}$  sind vollständig für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Folglich sind  $(p_n)_n, (q_n)_n$  konvergente Folgen.
- (iii) Für  $t \in [a, b_1]$   $(c_n(t))_n$  eine Cauchy-Folge in  $\overline{B_\varepsilon(c(t))}$ . Folglich ist  $(c_n(t))_n$  eine konvergente Folge.
- (iv) Für  $t \in [a_1, b]$  ist  $(c'_n(t))_n$  eine Cauchy-Folge in  $\overline{B_\varepsilon(c(t))}$ . Folglich ist  $(c'_n(t))_n$  eine konvergente Folge.



Wir definieren

$$\alpha: [a, b_1] \longrightarrow X$$

$$t \longmapsto \lim_{n \rightarrow \infty} c_n(t)$$

und

$$\beta: [a_1, b] \longrightarrow X$$

$$t \longmapsto \lim_{n \rightarrow \infty} c'_n(t).$$

Die Konvergenz  $c_n \rightarrow \alpha$  und  $c'_n \rightarrow \beta$  ist gleichmäßig und  $\alpha$  und  $\beta$  sind linear umparametrisierte lokale Geodäten. Weiter gilt  $\alpha|_{[a_1, b_1]} = \beta|_{[a_1, b_1]}$ . Die Komposition  $\alpha|_{[a, a_2]} * \beta|_{[a_1, b]}$  ist die gesuchte linear umparametrisierte lokale Geodäte  $c_{\bar{p}, \bar{q}}$ .  $\square$

# 3. Gruppenwirkungen auf kubischen Komplexen

## Motivation

- (i) Spezieller Fall des Satzes von CARTAN-HADAMARD:

Sei  $X$  ein vollständiger einfach-zusammenhängender lokaler  $\text{CAT}(0)$ -Raum. Dann ist  $X$   $\text{CAT}(0)$ .  
Also:

$$\left. \begin{array}{l} \text{lokale Eigenschaft: lokal } \text{CAT}(0) \\ \text{globale Eigenschaft: einfach zusammenhängend} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{global } \text{CAT}(0)$$

Frage: Wie kann man die lokale  $\text{CAT}(0)$ -Eigenschaft testen?

Für eine spezielle Klasse von Räumen – kubische Komplexe – kann man diese lokale Eigenschaft in eine kombinatorische Eigenschaft übersetzen und somit leichter testen ( $\Rightarrow$  GROMOV's Link Condition).

- (ii) Fragestellung: Wann besitzt die simpliziale Wirkung einer endlich erzeugten Gruppe  $G$  auf einen  $\text{CAT}(0)$  kubischen Komplex einen Fixpunkt?

Für  $\text{CAT}(0)$  kubische Komplexe werden wir eine Methode sehen, um diese Fragestellung anzugehen.

## 3.1. Kubische Komplexe

Grobe Idee: Wir bauen einen topologischen Raum aus Würfeln.

Als Konvention legen wir fest:  $[0, 1]^0 = \{0\}$ .

### 3.1 Definition (Würfel, Seite)

Sei  $W := [0, 1]^n \subseteq (\mathbb{R}^n, d_2)$  ein **Würfel**. Eine **Seite**  $S \subseteq W$  ist gegeben durch

$$S = S_1 \times \cdots \times S_n \text{ mit } S_i \in \{\{0\}, \{1\}, [0, 1]\}.$$

Die eingeschränkte euklidische Metrik auf  $W$  bezeichnen wir mit  $d_W$ . Weiter definieren wir die **Dimension** von  $W$  wie folgt:

$$\dim(W) := \dim(\langle W \rangle) \text{ mit } \langle W \rangle \text{ als } \mathbb{R}\text{-Vektorraum.}$$

### 3.2 Beispiel

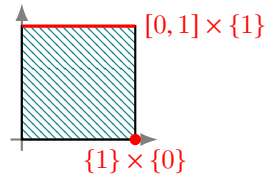


Abbildung 3.1.: Zwei Seiten des Würfels  $W = [0, 1]^2$ .

### 3.3 Definition (Verklebung, kubischer Komplex)

Seien  $W_1, W_2$  zwei Würfel und  $S_1 \subseteq W_1$  und  $S_2 \subseteq W_2$  Seiten. Eine Isometrie  $\varphi: S_1 \rightarrow S_2$  heißt **Verklebung** von  $W_1$  und  $W_2$ . Sei nun  $\mathcal{W}$  eine Familie von Würfeln und  $\mathcal{V}$  eine Familie von Verklebungen von Würfeln aus  $\mathcal{W}$  mit folgenden Eigenschaften:

- (i) Kein Würfel ist mit sich selbst verklebt.
- (ii) Je zwei Würfel aus  $\mathcal{W}$  sind höchstens einmal miteinander verklebt.

Sei  $\sim$  die durch

$$x \sim y \quad :\Leftrightarrow \quad \text{es existiert ein } \varphi \in \mathcal{V} \text{ mit } x \in \text{dom}(\varphi) \text{ und } \varphi(x) = y$$

erzeugte Äquivalenzrelation auf  $\bigsqcup_{W \in \mathcal{W}} W$ . Die Menge

$$X := \left( \bigsqcup_{W \in \mathcal{W}} W \right) / \sim$$

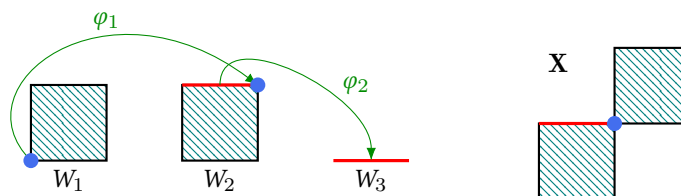
heißt kubischer Komplex definiert durch  $(\mathcal{W}, \mathcal{V})$ . Die Dimension von  $X$  ist definiert durch

$$\dim(X) := \sup\{\dim(W) : W \in \mathcal{W}\}.$$

### 3.4 Beispiel

$$\mathcal{W} := \{W_1 = [0, 1]^2, W_2 = [0, 1]^2, W_3 = [0, 1]\}$$

$$\mathcal{V} := \{\varphi_1: \{0\} \times \{0\} \subseteq W_1 \rightarrow \{1\} \times \{1\} \subseteq W_2, \varphi_2: [0, 1] \times \{1\} \subseteq W_2 \rightarrow [0, 1] = W_3\}$$





### 3.5 Definition

Seien  $x, y \in X$  beliebig. Ein Weg  $c$  von  $x$  nach  $y$  in  $X$  ist definiert als eine endliche Folge  $c = (x_0, \dots, x_m)$ ,  $x_i \in X$  mit  $x_0 = x$ ,  $x_m = y$  und folgender Eigenschaft: Für alle  $i \in \{0, \dots, m-1\}$  existiert ein Würfel  $W_i \in \mathcal{W}$  mit  $x_i, x_{i+1} \in W_i$ .

Weiter definieren wir die Länge von  $c$  als

$$\ell(c) = \ell((x_0, \dots, x_m)) = \sum_{i=0}^{m-1} d_{W_i}(x_i, x_{i+1}).$$

$X$  heißt **wegzusammenhängend**, wenn es für je zwei Elemente aus  $X$  ein solcher Weg existiert.

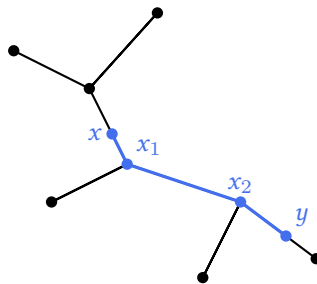
Nun definieren wir auf  $X$  wegzusammenhängend eine Metrik:

$$\begin{aligned} d_X : X \times X &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ (x, y) &\longmapsto \inf\{\ell(c) : c \text{ ist ein Weg von } x \text{ nach } y\} \end{aligned}$$

Ab jetzt betrachten wir einen wegzusammenhängenden kubischen Komplex immer mit der Metrik  $d_X$ .

### 3.6 Beispiel

$c = (x, x_1, x_2, y)$  ist ein Weg von  $x$  nach  $y$ .



#### 3.1.1. Simpliziale Bäume

Erinnerung: Sei  $\Gamma = (V, E)$  ein ungerichteter Graph.  $\Gamma$  heißt (**simplizialer**) **Baum**, wenn  $\Gamma$  wegzusammenhängend ist und  $\Gamma$  keine Kreise hat.

Bäume haben eine natürliche Struktur als 1-dimensionale kubische Komplexe. Wir betrachten nun Bäume mit dieser kubischen Struktur.

### 3.7 Satz

Bäume sind vollständige CAT(0)-Räume. (Aufgabe A.28)

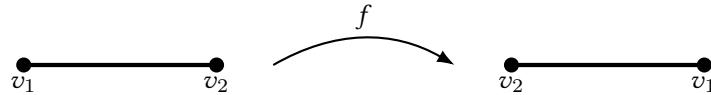
Fragestellung: Sei  $G$  eine endlich erzeugte Gruppe und  $\Phi : G \rightarrow \text{Isom}(X)$  eine isometrische Wirkung auf einem Baum. Hat  $\Phi$  einen globalen Fixpunkt, das heißt existiert ein  $x \in X$ , sodass für alle  $g \in G$  gilt:  $\Phi(g)(x) = x$ ?

Wir betrachten simpliziale Wirkungen, das heißt

$$\Phi(G) \subseteq \text{SIsom}(X) := \{f: X \rightarrow X : f \text{ ist Isometrie und } f(\text{Ecke}) = \text{Ecke}' \text{ für alle Ecken in } X\}$$

Dies ist tatsächlich eine Einschränkung: Für den Baum  $X = \mathbb{R}$  ist  $f: X \rightarrow X, x \mapsto x + \frac{1}{2}$  eine Isometrie, aber keine simpliziale Isometrie.

Wir schränken das Bild von  $\Phi$  noch ein wenig ein: Wir betrachten nur simpliziale Isometrien ohne Inversionen. Eine simpliziale Isometrie  $f: X \rightarrow X$  hat eine Inversion, wenn folgendes passiert:



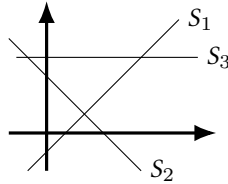
Eine Methode, um die Frage zu beantworten, ist das Theorem von HELLY für simpliziale Bäume.

**Satz** (HELLY, 1923)

Sei  $\mathcal{S} := \{S_1, \dots, S_l : S_i \subseteq \mathbb{R}^d, S_i \neq \emptyset, S_i \text{ ist abgeschlossen und konvex für } i = 1, \dots, l\}$  eine endliche Familie. Wenn sich jeweils  $(d + 1)$  Elemente aus  $\mathcal{S}$  nichttrivial schneiden, dann ist  $\cap \mathcal{S}$  nichtleer.

**Bemerkung**

$d+1$  ist eine minimale Schranke, denn zum Beispiel im  $\mathbb{R}^2$  ist  $S_1 \cap S_2, S_2 \cap S_3, S_1 \cap S_3 \neq \emptyset$  und  $S_1 \cap S_2 \cap S_3 = \emptyset$  möglich.



Gibt es eine Verallgemeinerung des Theorems für CAT(0)-Räume? Ja, zum Beispiel für Bäume:

**Satz** (HELLYS Theorem für Bäume)

Sei  $X$  ein Baum und  $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_l\}$  eine endliche Familie von Teilbäumen. Wenn sich jeweils zwei Elemente aus  $\mathcal{S}$  nichttrivial schneiden, dann ist  $\cap \mathcal{S}$  nicht leer. (Aufgabe A.27)

**3.8 Satz**

Sei  $G = \langle g_1, \dots, g_k \rangle$  eine endlich erzeugte Gruppe. Sei  $X$  ein Baum und  $\Phi: G \rightarrow \text{SIsom}(X)$  eine simpliziale Wirkung ohne Inversionen. Wenn  $\text{Fix}_\Phi(\langle g_i \rangle) \neq \emptyset$  und  $\text{Fix}_\Phi(\langle g_i \rangle) \cap \text{Fix}_\Phi(\langle g_j \rangle) \neq \emptyset$  für alle  $i, j \in \{1, \dots, k\}$ , dann gilt  $\text{Fix}_\Phi(G) \neq \emptyset$ .

**BEWEIS:**  $\text{Fix}_\Phi(\langle g_i \rangle) \subseteq X$  ist ein Teilbaum von  $X$ . Mit HELLYS Theorem für Bäume folgt  $\emptyset \neq \cap \text{Fix}_\Phi(\langle g_i \rangle) = \text{Fix}_\Phi(\langle g_1, \dots, g_k \rangle) = \text{Fix}_\Phi(G)$ .  $\square$

### 3.9 Satz (Verallgemeinerung)

Sei  $G = \langle g_1, \dots, g_k \rangle$  eine endlich erzeugte Gruppe und  $X$  ein Baum. Sei  $\Phi: G \rightarrow \text{Isom}(X)$  eine isometrische Wirkung. Wenn  $\text{Fix}_\Phi(\langle g_i \rangle) \neq \emptyset$  und  $\text{Fix}_\Phi(\langle g_i \rangle) \cap \text{Fix}_\Phi(\langle g_j \rangle) \neq \emptyset$  für alle  $i, j \in \{1, \dots, k\}$ , dann ist  $\text{Fix}_\Phi(G) \neq \emptyset$ . Aufgabe A.27

### Beispiel

Für  $n \geq 3$  sei  $F_n = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$  die freie Gruppe vom Rang  $n$  und  $\text{Aut}(F_n)$  der Automorphismengruppe von  $F_n$ . Für zwei Automorphismen  $\alpha, \beta \in \text{Aut}(F_n)$  ist  $\alpha\beta := \beta \circ \alpha$ . Wir definieren **Rechtsnielsenautomorphismen** für  $i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j$ .

$$\begin{aligned} \rho_{i,j}: F_n &\longrightarrow F_n \\ x_k &\longmapsto \begin{cases} x_i x_j, & \text{falls } k = i \\ x_k, & \text{falls } k \neq i \end{cases} \end{aligned}$$

Weiter definieren wir die Involution

$$\begin{aligned} (x_i, x_j): F_n &\longrightarrow F_n \\ s_k &\longmapsto \begin{cases} x_j, & \text{falls } k = i \\ x_i, & \text{falls } k = j \\ x_k, & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} e_i: F_n &\longrightarrow F_n \\ x_k &\longmapsto \begin{cases} x_i^{-1}, & \text{falls } k = i \\ x_k, & \text{falls } k \neq i. \end{cases} \end{aligned}$$

Es gilt  $\rho_{i,j}, (x_i, x_j), e_i \in \text{Aut}(F_n)$ , und es ist

$$\text{Aut}(F_n) = \underbrace{\langle (x_1, x_2)e_1e_2, (x_2, x_3)e_1, (x_i, x_{i+1}), e_2\rho_{1,2}, e_n : i = 3, \dots, n-1 \rangle}_{=: Y}$$

Es ist  $\text{ord}(\alpha) = 2$  für  $\alpha \in Y$  und  $|\langle \alpha, \beta \rangle| < \infty$  für  $\alpha, \beta \in Y$ .

Sei nun  $X$  ein Baum und  $\Phi: \text{Aut}(F_n) \rightarrow \text{Isom}(X)$  eine isometrische Wirkung. Dann ist  $\text{Fix}_\Phi(\text{Aut}(F_n)) \neq \emptyset$ , denn:

- Nach BRUHAT-TITS (Satz 1.27) ist  $\text{Fix}_\Phi(\langle \alpha \rangle) \neq \emptyset$ , da Bäume  $\text{CAT}(0)$  und vollständig sind.
- Ebenso ist  $\text{Fix}_\Phi(\langle \alpha \rangle) \cap \text{Fix}_\Phi(\langle \beta \rangle) \neq \emptyset$  für  $\alpha, \beta \in Y$  beliebig.
- Mit Satz 3.9 folgt somit  $\text{Fix}_\Phi(\text{Aut}(F_n)) \neq \emptyset$ .

### 3.10 Definition (Eigenschaft $F\mathcal{X}$ )

Sei  $\mathcal{X}$  eine Klasse von metrischen Räumen. Eine Gruppe  $G$  hat die Eigenschaft  $F\mathcal{X}$ , wenn jede isometrische Wirkung auf jedem Raum aus  $\mathcal{X}$  einen globalen Fixpunkt hat.

### 3.11 Beispiel (BOGOPOLSKI, 1973)

Sei  $\mathcal{A}$  die Klasse der Bäume. Für  $n \geq 3$  hat  $\text{Aut}(F_n)$  die Eigenschaft  $F\mathcal{A}$ .

Frage: Sei  $G \leq \text{Aut}(F_n)$ ,  $n \geq 3$  eine Untergruppe mit  $[\text{Aut}(F_n) : G] < \infty$ . Hat  $G$  die Eigenschaft  $F\mathcal{A}$ ? Für  $n = 3$  lautet die Antwort nein, für  $n \geq 4$  ist die Frage bislang ungeklärt.

Eine Anwendung der Eigenschaft  $F\mathcal{A}$  ist die Strukturtheorie: Sei  $G$  eine endlich erzeugte Gruppe. Kann man  $G$  in „einfache“ Bestandteile zerlegen?

- Zum Beispiel in ein kartesisches Produkt  $G \simeq G_1 \times G_2$ .
- Zum Beispiel in ein amalgamiertes Produkt  $G \simeq G_1 *_H G_2$ .

### Satz (SERRE)

Sei  $G$  eine endlich erzeugte Gruppe. Wenn  $G$  die Eigenschaft  $F\mathcal{A}$  hat, dann ist  $G$  kein nichttriviales amalgamiertes Produkt.

Im Seminar im Sommersemester 2016 werden wir sehen, dass  $\text{Aut}(F_n)$  für  $n \geq 3$  kein nichttriviales amalgamiertes Produkt ist.

## 3.1.2. HELLYS Theorem für $\text{CAT}(0)$ kubische Komplexe

### 3.12 Definition

Sei  $X$  ein kubischer Komplex definiert durch  $(\mathcal{W}, \mathcal{V})$ . Eine Teilmenge  $Y \subseteq X$  heißt **kubischer Unterkomplex**, wenn es eine Teilfamilie  $\mathcal{W}' \subseteq \mathcal{W}$  existiert, sodass

$$Y = \bigsqcup_{W \in \mathcal{W}'} W / \sim .$$

Dabei ist  $\sim$  erzeugt durch

$$x \sim y \quad :\Leftrightarrow \quad \text{es existiert ein } \varphi: S_1 \rightarrow S_2 \in \mathcal{V} \text{ mit } S_1, S_2 \text{ sind Seiten von } W_1, W_2 \in \mathcal{W}' \text{ und } \varphi(x) = y$$

### 3.13 Bemerkung

Wir setzen nicht voraus, dass kubische Unterkomplexe wegzusammenhängend sind.



### 3.14 Theorem (HELLYS Theorem für CAT(0) kubische Komplexe)

Sei  $X$  ein CAT(0) kubischer Komplex und  $\mathcal{S}$  eine endliche Familie von nichtleeren konvexen kubischen Unterkomplexen. Wenn der Schnitt von jeweils zwei Elementen aus  $\mathcal{S}$  nicht leer ist, dann ist  $\bigcap \mathcal{S}$  nicht leer.

Um dies zu beweisen, müssen wir zuerst Hyperebenen einführen.

### 3.15 Definition (Quadratäquivalenz)

Sei  $X$  ein kubischer Komplex. Wir definieren

$$\mathcal{K} := \{k \subseteq X : k \text{ ist isometrisch zu } [0, 1] \text{ und es ex. ein } W \in \mathcal{W}, \text{ sodass } k \text{ eine Seite von } W \text{ ist}\}.$$

$\mathcal{K}$  ist also die Menge aller Kanten von  $X$ . Wir definieren wie folgt eine Äquivalenz auf  $\mathcal{K}$ :

$$k \approx k' \quad :\Leftrightarrow \quad k \text{ liegt gegenüber von } k' \text{ in einem zweidimensionalen Würfel von } X.$$

Das ist aber noch keine Äquivalenzrelation, da  $k \not\approx k$ .

Sei nun  $\sim$  die von  $\approx$  erzeugte Äquivalenzrelation. Wenn  $k \sim k'$ , dann sagen wir:  $k$  und  $k'$  sind **quadratäquivalent**.

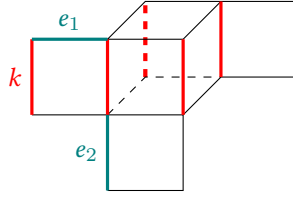
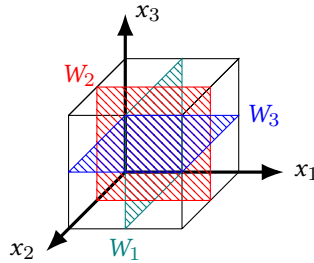


Abbildung 3.2.: Die rot markierten Kanten sind alle zu  $k$  quadratäquivalenten Kanten.  $e_1$  und  $e_2$  sind nicht quadratäquivalent zu  $k$ .

### 3.16 Definition (Mittelwürfel, transversal, Hyperebene)

Sei  $W = [0, 1]^n \in \mathcal{W}$  ein Würfel. Für  $i = 1, \dots, n$  definieren wir den **Mittelwürfel**

$$W_i := [0, 1]^{i-1} \times \left\{ \frac{1}{2} \right\} \times [0, 1]^{n-i}$$

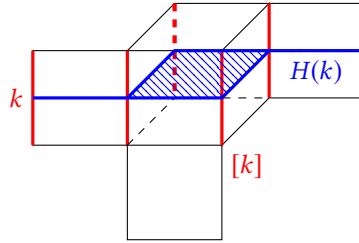


Sei  $k \in \mathcal{K}$  eine beliebige Kante. Ein Mittelwürfel  $W_i$  heißt **transversal** zu  $k$ , wenn gilt

$$W_i \cap \mathcal{K} = \{\text{Mittelpunkte von } k' : k' \in [k]\}.$$

Wir schreiben  $W_i \pitchfork k$ . Die Menge aller zu  $k$  transversalen Mittelwürfel bezeichnen wir mit  $k^\pitchfork$ . Die **Hyperebene** zu  $k$  ist dann definiert durch

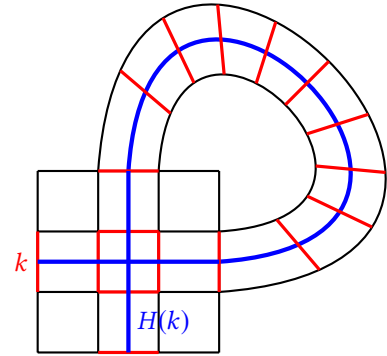
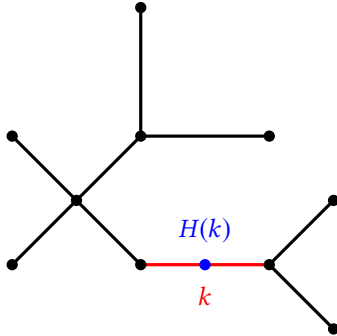
$$H(k) := \bigcup_{W_i \in k^\pitchfork} W_i$$



### 3.17 Beispiel

In einem Baum sind Mittelwürfel gerade die Mittelpunkte der Kanten. Da in einem Baum keine zwei-dimensionalen Würfel existieren, gibt es zu einer Kante  $k$  keine weiteren quadratäquivalenten Kanten. Demzufolge ist der Mittelpunkt von  $k$  die Hyperebene zu  $k$ .

In kubischen Komplexen, die nicht CAT(0) sind, können Hyperebenen sich selbst schneiden.

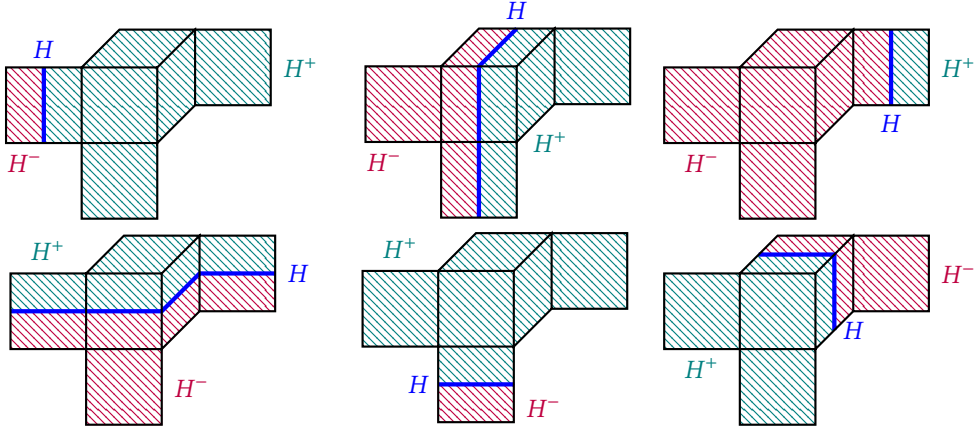


### 3.18 Satz ([Sag95])

Sei  $X$  ein CAT(0) kubischer Komplex und  $H$  eine beliebige Hyperebene. Dann besitzt  $X \setminus H$  genau zwei Zusammenhangskomponenten, also

$$\# \pi_0(X \setminus H) = 2.$$

Wir schreiben  $X - H = H^+ \sqcup H^-$  mit  $H^+, H^- \in \pi_0(X \setminus H)$  und nennen  $H^+, H^-$  **Halbräume** in  $X$ .



### 3.19 Definition

Sei  $X$  ein kubischer Komplex und  $X^{(n)}$  das  $n$ -Skelett von  $X$ , das heißt

$$X^{(n)} = \cup \{S : S \text{ ist Seite von } W \in \mathcal{W} \text{ und isometrisch zu } [0, 1]^i \text{ für ein } i \leq n\} / \sim.$$

Wir definieren wie folgt eine Metrik auf  $X^{(0)}$ :

$$\begin{aligned} D: X^{(0)} \times X^{(0)} &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ (x, y) &\longmapsto \inf\{\ell(c) : c \text{ ist Weg von } x \text{ nach } y \text{ in } X^{(1)}\} \end{aligned}$$

### 3.20 Beispiel

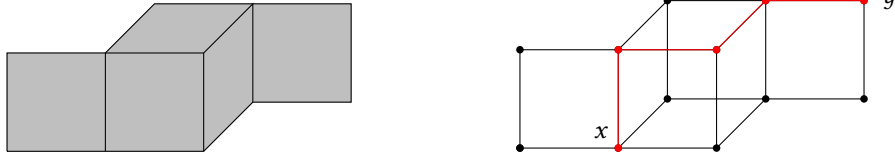
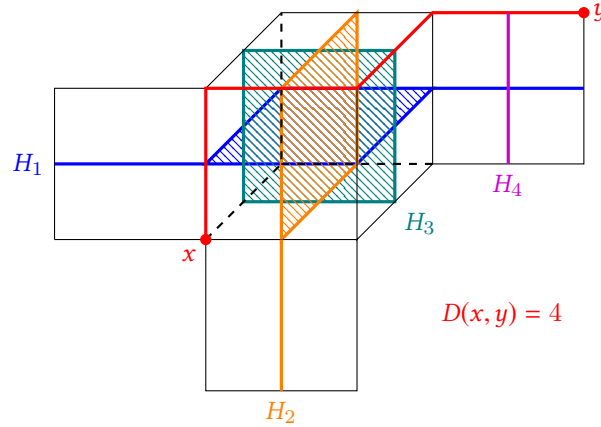


Abbildung 3.3.: Ein kubischer Komplex und sein 1-Skelett. Es gilt  $D(x, y) = 4$ .

### 3.21 Lemma

Sei  $X$  ein CAT(0) kubischer Komplex. Dann gilt für alle  $x, y \in X^{(0)}$ :

$$D(x, y) = \#\{H \subseteq X : H \text{ ist Hyperebene in } X \text{ die } x \text{ und } y \text{ trennt}\}.$$



### 3.22 Definition (medianer Graph)

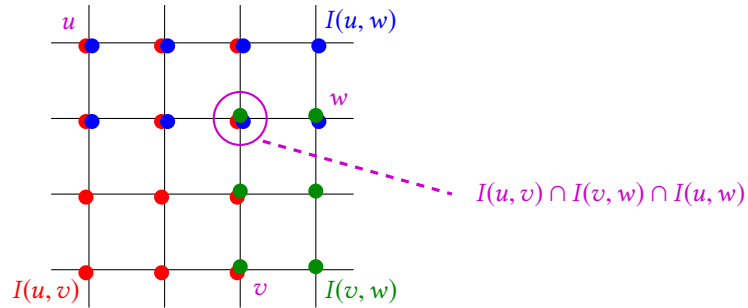
Sei  $\Gamma = (V, E)$  ein Graph. Das Intervall  $I(u, v)$  für  $u, v \in V$  ist definiert durch

$$I(u, v) = \{x \in V : d(u, v) = d(u, x) + d(x, v)\}$$

Ein Graph  $\Gamma$  heißt **median**, falls für  $u, v, w \in V$  paarweise verschieden gilt:

$$\#(I(u, v) \cap I(u, w) \cap I(v, w)) = 1.$$

### 3.23 Beispiel



### 3.24 Satz

Sei  $X$  ein CAT(0) kubischer Komplex und  $X^{(1)}$  das 1-Skelett. Dann ist  $(X^{(1)}, D)$  median.

**BEWEIS:** Wir benötigen folgendes Hilfslemma:

Seie  $x, y \in X^{(0)}$  beliebig. Dann gilt:

$$z \in I(x, y) \Leftrightarrow \text{es existiert keine Hyperebene, die } z \text{ und } \{x, y\} \text{ trennt.}$$



Beweis des Hilfslemmas: Wir definieren

$$W(x, y) := \{H \subseteq X : H \text{ ist Hyperebene, die } x \text{ und } y \text{ trennt.}\}$$

Nach Lemma 3.21 gilt  $D(x, y) = \#W(x, y)$ . Wir erhalten

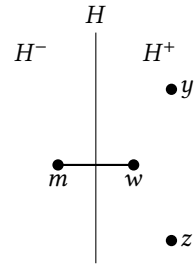
$$\begin{aligned} z \in I(x, y) &\stackrel{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} D(x, y) = D(x, z) + D(z, y) \\ &\stackrel{3.21}{\Leftrightarrow} \#W(x, y) = \#W(x, z) + \#W(z, y) \\ &\Leftrightarrow W(x, y) = W(x, z) \sqcup W(z, y) \\ &\Leftrightarrow \text{es existiert keine Hyperebene, die } z \text{ und } x \text{ trennt und } z \text{ und } y \text{ trennt} \\ &\Leftrightarrow \text{es existiert keine Hyperebene, die } z \text{ und } \{x, y\} \text{ trennt} \end{aligned}$$

Zurück zum eigentlichen Beweis: Seien  $x, y, z \in X^{(0)}$  paarweise verschieden.

- (i) Zuerst zeigen wir  $I(x, y) \cap I(x, z) \cap I(y, z) \neq \emptyset$ . Wähle  $m \in I(x, y) \cap I(x, z)$  mit  $D(x, m)$  maximal. Zu zeigen ist  $m \in I(y, z)$ .

Angenommen,  $m \notin I(y, z)$ . Nach dem Hilfslemma existiert eine Hyperebene  $H$ , die  $m$  und  $\{y, z\}$  trennt. Wähle  $H$  mit minimalem Abstand zu  $m$ .

Wähle  $w \in H^+$  mit  $D(m, w) = 1$ . Es gilt  $w \in I(x, y)$  und  $w \in I(x, z)$ . Weiter gilt  $D(x, w) = D(x, m) + D(m, w) \geq D(x, m)$ . Dies ist ein Widerspruch, da  $m$  mit maximalem Abstand gewählt wurde.



Es ist  $w \in I(x, y)$ : Ansonsten existiert nach Hilfslemma eine Hyperebene  $J$ , die  $w$  und  $\{x, y\}$  trennt. Es gilt  $m \notin J^+$ , denn  $m \in I(x, y)$ , also  $m \in J^-$ . Folglich trennt die Hyperebene  $J$   $w$  und  $m$ . Es gilt  $D(m, w) = 1$ , das heißt  $J = H$ , aber  $H$  trennt  $m$  und  $y$ . Widerspruch.

- (ii) Zur Eindeutigkeit: Wir definieren

$$\mathcal{HR} := \{\text{Halbräume, die mindestens zwei Elemente aus } x, y, z \text{ enthalten}\}.$$

Es gilt  $I(x, y) \subseteq \cap \{\text{Halbräume, die } x \text{ und } y \text{ enthalten}\}$ .

$$I(x, y) \cap I(x, z) \cap I(y, z) \subseteq \cap \mathcal{HR}$$

Angenommen, es existieren  $m_1, m_2 \in I(x, y) \cap I(x, z) \cap I(y, z)$  mit  $m_1 \neq m_2$ . Da  $m_1 \neq m_2$ , ist  $D(m_1, m_2) = \#W(m_1, m_2) > 0$ . Es existiert also eine Hyperebene  $H$ , die  $m_1$  und  $m_2$  trennt. O.B.d.A. seien  $x, y \in H^-$ . Dann folgt  $H^- \in \mathcal{HR}$ , aber  $H^+ \notin \mathcal{HR}$ . Da  $I(x, y) \cap I(x, z) \cap I(y, z) \subseteq \cap \mathcal{HR}$ , ist  $m_2 \notin \cap \mathcal{HR}$ , also auch  $m_2 \notin I(x, y) \cap I(x, z) \cap I(y, z)$ . Widerspruch.  $\square$

**BEWEIS** (Theorem 3.14): Wir zeigen per Induktion, dass für  $k = 2, \dots, m$  die  $k$ -elementigen Mengen aus  $\mathcal{S}$  sich nichttrivial schneiden. Für  $k = 2$  ist dies nach Voraussetzung erfüllt. Wir definieren  $Y := X_3 \cap X_4 \cap \dots \cap X_k$ . Wir wissen:  $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$ ,  $X_1 \cap Y \neq \emptyset$  und  $X_2 \cap Y \neq \emptyset$  nach Induktionsannahme. Nun sind  $Y, X_1 \cap X_2, X_1 \cap Y$  und  $X_2 \cap Y$  konvexe, also insbesondere CAT(0) kubische Unterkomplexe. Wähle Ecken  $p \in X_1 \cap Y$ ,  $q \in X_2 \cap Y$  und  $r \in X_1 \cap X_2$ . Da  $Y$  ein CAT(0) kubischer Unterkomplex ist und  $p, q \in Y$ , liegt auch  $I(p, q) \subseteq Y$ . Ebenso ist  $p, r \in X_1$ , also  $I(p, r) \subseteq X_1$  und  $q, r \in X_2$ , also  $I(q, r) \subseteq X_2$ . Weiter ist  $I(p, q) \cap I(p, r) \cap I(q, r) = \{m(p, q, r)\}$  und  $m(p, q, r) \in Y$ . Folglich ist  $m(p, q, r) \in X_1 \cap X_2 \cap Y$ .  $\square$

### 3.25 Satz

Sei  $G := \langle g_1, \dots, g_k \rangle$  eine endlich erzeugte Gruppe und  $X$  ein CAT(0) kubischer Komplex. Sei weiter  $\Phi: G \rightarrow \text{Isom}(X)$  eine isometrische Wirkung. Wenn  $\text{Fix}_\Phi(\langle g_i \rangle)$  kubische Unterkomplexe sind und  $\text{Fix}_\Phi(\langle g_i \rangle) \cap \text{Fix}_\Phi(\langle g_j \rangle) \neq \emptyset$  für  $i, j = 1, \dots, k$ , dann ist  $\text{Fix}_\Phi(G) \neq \emptyset$ .

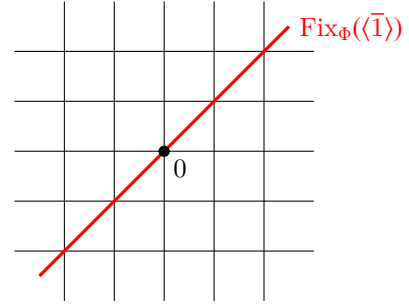
**BEWEIS:** Theorem 3.14 mit  $\mathcal{S} := \{\text{Fix}_\Phi(\langle g_1 \rangle), \dots, \text{Fix}_\Phi(\langle g_k \rangle)\}$ .  $\square$

### Bemerkung

Im Allgemeinen ist  $\text{Fix}_\Phi(\langle g_i \rangle)$  kein kubischer Unterkomplex:

Sei  $G := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  und  $X := \mathbb{R}^2$  und definiere die Wirkung

$$\begin{aligned} \Phi: G &\longrightarrow \text{Isom}(X) \\ \bar{0} &\longmapsto \text{id}_{\mathbb{R}^2} \\ \bar{1} &\longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



### 3.26 Theorem (HELLYS Theorem für CAT(0)-Räume)

Sei  $X$  ein  $d$ -dimensionaler (Überdeckungsdimension) vollständiger CAT(0)-Raum und  $\mathcal{S}$  eine endliche Familie von (nichtleeren) konvexen abgeschlossenen Teilmengen. Wenn sich jeweils  $(d+1)$  Elemente aus  $\mathcal{S}$  nichttrivial schneiden, dann ist  $\cap \mathcal{S} \neq \emptyset$ .

## 3.2. GROMOVs Link-Bedingung

**Leitfrage:** Wie kann man in kubischen Komplexen die lokale CAT(0) Eigenschaft nachprüfen?

Ab jetzt sei  $X$  ein endlich dimensionaler kubischer Komplex.

### 3.27 Definition (Simplizialkomplex)

Sei  $Y$  eine Menge und  $\Delta \subseteq \mathcal{P}(Y)$  eine Menge von endlichen Teilmengen aus  $Y$ . Wir nennen  $(\Delta, \subseteq)$  einen **Simplizialkomplex**, wenn gilt:

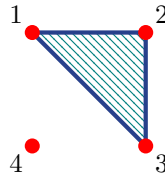
$$a \subseteq b \in \Delta \quad \Rightarrow \quad a \in \Delta,$$

das heißt  $\Delta$  ist abgeschlossen bezüglich Abstieg.

Die Elemente aus  $\Delta$  heißen **Simplizes**. Die Dimension eines Simplex  $a \in \Delta$  ist  $k$ , falls  $\#a = k+1$ . Wir setzen  $\Delta^{(k)} = \{a \in \Delta : \dim(a) = k\}$ .

### 3.28 Beispiel

$Y := \mathbb{N}, \Delta = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$



### 3.29 Definition (Fahnenkomplex)

Ein Simplicialkomplex  $\Delta \subseteq \mathcal{P}(Y)$  heißt **Fahnenkomplex**, wenn folgendes gilt:

Sei  $a \subseteq Y$  eine Teilmenge. Wenn alle zweielementigen Teilmengen aus  $a$  in  $\Delta$  liegen, dann liegt  $a \in \Delta$ .

In Worten ausgedrückt bedeutet dies: Wenn der Rand eines Simplex in  $\Delta$  liegt, dann muss auch schon das gesamte Simplex in  $\Delta$  liegen. Der Simplicialkomplex aus Beispiel 3.28 ist beispielsweise ein Fahnenkomplex. Der Simplicialkomplex definiert durch  $Y := \mathbb{N}, \Delta = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$  ist jedoch kein Fahnenkomplex: Alle zweielementigen Teilmengen von  $\{1, 2, 3\}$  sind in  $\Delta$  enthalten, jedoch nicht  $\{1, 2, 3\}$  selbst.

### 3.30 Definition

Sei  $x \in X$  eine Ecke. Sei  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ . Die kubische Struktur von  $X$  induziert auf  $\partial B_\varepsilon(x)$  eine simpliciale Struktur wie folgt:

Setze die Menge der 0-Simplizes als  $\partial B_\varepsilon(x) \cap k$ ,  $k \subseteq X$  ist Seite eines Würfels und isometrisch zu  $[0, 1]$ .

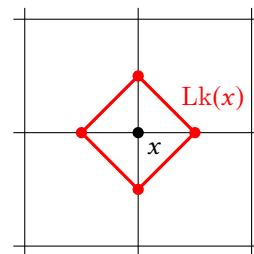
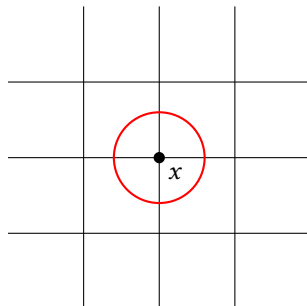
Nun:

$\{x_1, \dots, x_{k+1}\}$  ist  $k$ -Simplex  $\Leftrightarrow$  es ex. Würfel  $W \subseteq X$  mit  $\dim(W) = k + 1$  und  $\{x_1, \dots, x_{k+1}\} \subseteq W$   
 0-Simplizes und paarw. versch.

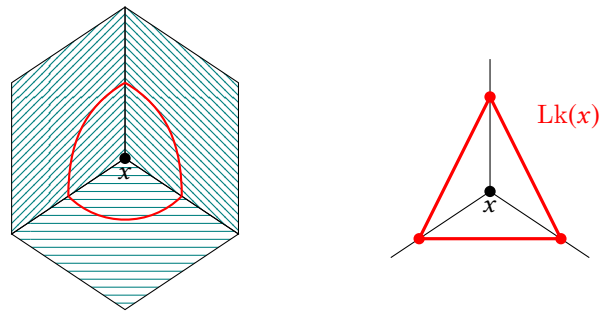
Dieser Simplicialkomplex heißt der **Link** bzw. **Eckenlink** von  $x$  in  $X$ .

### 3.31 Beispiel

(i)



(ii)



**3.32 Theorem** (GROMOVs Link-Bedingung)

Sei  $X$  ein endlich dimensionaler kubischer Komplex.  $X$  ist genau dann lokal  $CAT(0)$ , wenn alle seine Eckenlinks Fahnenkomplexe sind.

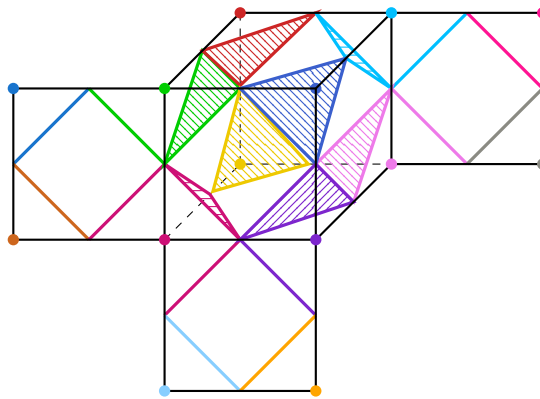


Abbildung 3.4.: Dieser kubische Komplex ist lokal  $CAT(0)$ , da alle seine Links Fahnenkomplexe sind.

## Zusammenfassung

- CAT(0)-Räume
  - eindeutig geodätisch
  - kontrahierbar
  - einfach zusammenhängend
  - Vervollständigung ist ebenfalls CAT(0)
- Beispiele für CAT(0)-Räume
  - $(V, \|\cdot\|)$  ist CAT(0)  $\Leftrightarrow (V, \|\cdot\|)$  ist ein Prähilbertraum
  - konvexe Teilmengen von CAT(0)-Räumen
  - simpliziale Bäume
- Satz von CARTAN-HADAMARD
  - Ist  $X$  ein vollständiger zusammenhängender lokaler CAT(0)-Raum, dann ist seine universelle Überlagerung  $\tilde{X}$  ebenfalls CAT(0).
  - $X$  ist genau dann vollständig, zusammenhängend, lokal CAT(0) und einfach zusammenhängend, wenn  $X$  ein vollständiger CAT(0)-Raum ist.
- Wie kann man die lokale CAT(0)-Eigenschaft testen?
  - Kubische Komplexe und GROMOVs Link-Bedingung
- Gruppenwirkungen auf CAT(0)-Räumen
  - BRUHAT-TITS-Fixpunktsatz: Jede Wirkung einer endlichen Gruppe auf einen vollständigen CAT(0)-Raum besitzt einen globalen Fixpunkt.
  - HELLYS Theorem für Bäume und kubische Komplexe sowie Anwendung auf Gruppenwirkungen
  - HELLYS Theorem für kubische Komplexe
  - Eigenschaft  $F\mathcal{A}$

# A. Übungsaufgaben

## A.1 Aufgabe

Zeigen Sie für metrische Räume  $X_1, X_2$ :

- (i)  $X_1 \times X_2$  ist geodätisch genau dann, wenn  $X_1$  und  $X_2$  geodätisch sind.
- (ii)  $X_1 \times X_2$  ist CAT(0) genau dann, wenn  $X_1$  und  $X_2$  CAT(0) sind.

## A.2 Aufgabe

Sei  $(X, d)$  ein geodätischer Raum. Die Metrik  $d$  heißt **konvex**, wenn für je zwei Geodäten  $\alpha, \beta: [0, 1] \rightarrow X$  die Ungleichung

$$d(\alpha(t), \beta(t)) \leq (1-t) \cdot d(\alpha(0), \beta(0)) + t \cdot d(\alpha(1), \beta(1))$$

für alle  $t \in [0, 1]$  gilt. Zeigen Sie, dass die Metrik eines CAT(0)-Raumes konvex ist.

*Hinweis:* Zeigen Sie die Aussage zunächst für den Spezialfall  $\alpha(0) = \beta(0)$ .

## A.3 Aufgabe

Sei  $(X, d)$  ein vollständiger metrischer Raum. Für alle  $x, y \in X$  existiere ein Mittelpunkt, das heißt ein  $m_{xy} \in X$ , sodass

$$d(x, m_{xy}) = d(m_{xy}, y) = \frac{1}{2}d(x, y)$$

gilt. Zeigen Sie, dass  $(X, d)$  ein geodätischer Raum ist.

## A.4 Aufgabe

Sei  $(X, d)$  ein CAT(0)-Raum,  $C \subseteq X$  eine konvexe vollständige Teilmenge und sei  $\pi_C: X \rightarrow C$  die Projektion auf  $C$ . Zeigen Sie, dass für alle  $x, y \in X$  gilt:

$$d(\pi_C(x), \pi_C(y)) \leq d(x, y).$$

## A.5 Aufgabe

Sei  $X$  ein metrischer Raum. Eine Abbildung  $\gamma: [0, l] \rightarrow X$  heißt **lokale Geodäte**, wenn gilt: Für alle  $t \in [0, l]$  existiert ein  $\varepsilon > 0$ , sodass  $\gamma|_{[t-\varepsilon, t+\varepsilon]}$  eine Geodäte ist.

Sei  $X$  ein CAT(0)-Raum und  $\gamma: [0, l] \rightarrow X$  eine lokale Geodäte. Zeigen Sie, dass  $\gamma$  eine Geodäte ist.

*Hinweis:* Zeigen Sie, dass folgende Menge offen und abgeschlossen in  $[0, l]$  ist.

$$S := \{t \in [0, l] : \gamma|_{[0, t]} \text{ ist Geodäte}\}.$$

### A.6 Aufgabe

Sei  $X$  ein CAT(0)-Raum und  $\Phi: G \rightarrow \text{Isom}(X)$  eine isometrische Wirkung. Zeigen Sie:

- (i) Die Teilmenge  $\text{Fix}_\Phi(G) \subseteq X$  ist abgeschlossen.
- (ii) Wenn  $\text{Fix}_\Phi(G) \neq \emptyset$ , dann ist  $\text{Fix}_\Phi(G)$  abgeschlossen.

### A.7 Aufgabe

Sei  $X$  ein vollständiger CAT(0)-Raum, seien  $A_1, A_2 \subseteq X$  beschränkte Teilmengen mit

$$A_1 \subseteq \overline{B_{\text{rad}(A_1)}(c_{A_1})}, \quad A_2 \subseteq \overline{B_{\text{rad}(A_2)}(c_{A_2})},$$

wobei  $c_{A_1}, c_{A_2} \in X$ . Zeigen Sie: Wenn  $A_1 \subseteq A_2$  gilt, dann ist

$$d(c_{A_1}, c_{A_2}) \leq \sqrt{2 \cdot (\text{rad}(A_2)^2 - \text{rad}(A_1)^2)}.$$

### A.8 Aufgabe

Sei  $X$  ein metrischer Raum. Der Raum  $X$  heißt **sphärisch vollständig**, wenn für alle Folgen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $X$  und  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{R}_{>0}$  mit  $\overline{B_{r_{n+1}}(x_{n+1})} \subseteq \overline{B_{r_n}(x_n)}$  gilt:

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{B_{r_n}(x_n)} \neq \emptyset.$$

Sei  $X$  ein CAT(0)-Raum. Zeigen Sie, dass  $X$  genau dann vollständig ist, wenn er sphärisch vollständig ist.

### A.9 Aufgabe

Sei  $X$  ein CAT(0)-Raum und  $C \subseteq X$  eine konvexe vollständige Teilmenge. Sei weiter  $f \in \text{Isom}(X)$  beliebig. Zeigen Sie, dass gilt:

- (i) Die Teilmenge  $f(C)$  ist konvex und vollständig.
- (ii) Es gilt  $\pi_{f(C)} \circ f = f \circ \pi_C$ .

### A.10 Aufgabe

Sei  $(X, d)$  ein geodätischer Raum. Zeigen Sie, dass  $X$  genau dann CAT(0) ist, wenn für jedes geodätische Dreieck  $\Delta(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$  mit Vergleichsdreieck  $\bar{\Delta}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma})$  gilt:

$$d(x, \beta(s)) \leq d_2(\bar{x}, \bar{\beta}(s)) \text{ für alle } s \in [0, d(y, z)].$$

### A.11 Aufgabe

Sei  $X$  ein vollständiger CAT(0)-Raum und  $G_1, G_2$  Gruppen. Seien weiter  $\Phi_1: G_1 \rightarrow \text{Isom}(X)$ ,  $\Phi_2: G_2 \rightarrow \text{Isom}(X)$  isometrische Wirkungen. Weiter gelte für alle  $g_1 \in G_1, g_2 \in G_2$ :

$$\Phi_1(g_1) \circ \Phi_2(g_2) = \Phi_2(g_2) \circ \Phi_1(g_1).$$

Wir definieren die Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi_1 \times \Phi_2: G_1 \times G_2 &\longrightarrow \text{Isom}(X) \\ (g_1, g_2) &\longmapsto \Phi_1(g_1) \circ \Phi_2(g_2). \end{aligned}$$

- (i) Zeigen Sie, dass  $\Phi_1 \times \Phi_2$  eine isometrische Wirkung ist.
- (ii) Wenn  $\text{Fix}_{\Phi_1}, \text{Fix}_{\Phi_2} \neq \emptyset$ , dann gilt  $\text{Fix}_{\Phi_1 \times \Phi_2}(G_1 \times G_2) \neq \emptyset$ .

### A.12 Aufgabe

Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $c: [a, b] \rightarrow X$  eine stetige Abbildung mit  $d(c(a), c(b)) = b - a$ . Zeigen Sie, dass  $c$  genau dann eine Geodäte ist, wenn gilt:

$$d(c(s), c(t)) = 2 \cdot d\left(c(s), c\left(\frac{s+t}{2}\right)\right) \text{ für alle } s, t \in [a, b].$$

### A.13 Aufgabe

Sei  $(X, d)$  ein CAT(0)-Raum. Weiter sei  $x \in X$  und  $\varepsilon > 0$  beliebig. Zeigen Sie, dass die Teilmenge  $B_\varepsilon(x) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\} \subseteq X$  konvex ist.

### A.14 Aufgabe

Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $c: [a, b] \rightarrow X$  ein Weg. Zeigen Sie:

- (i) Es gilt  $\ell(c) \geq d(c(a), c(b))$ . Weiter gilt  $\ell(c) = 0$  genau dann, wenn  $c$  konstant ist.
- (ii) Sei  $\varphi: [a', b'] \rightarrow [a, b]$  eine stetige schwach monotone surjektive Funktion. Dann gilt  $\ell(c) = \ell(c \circ \varphi)$ .
- (iii) Seien  $c_1: [a_1, b_1] \rightarrow X, c_2: [a_2, b_2] \rightarrow X$  zwei Wege mit  $c_1(b_1) = c_2(a_2)$ . Dann gilt  $\ell(c_1 * c_2) = \ell(c_1) + \ell(c_2)$ .
- (iv) Es gilt  $\ell(\bar{c}) = \ell(c)$ .

### A.15 Aufgabe

Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $c: [a, b] \rightarrow X$  ein rektifizierbarer Weg. Wir definieren

$$\begin{aligned} \lambda_c: [a, b] &\longrightarrow [0, \ell(c)] \\ t &\longmapsto \ell\left(c|_{[a, t]}\right). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass ein eindeutiger Weg  $\tilde{c}: [0, \ell(c)] \rightarrow X$  mit  $\tilde{c} \circ \lambda_c = c$  und  $\ell(\tilde{c}|_{[0, t]}) = t$  existiert.



**A.16 Aufgabe**

Sei  $(X, d)$  ein Längenraum, in dem alle abgeschlossenen Bälle kompakt sind. Zeigen Sie, ohne Lemma 2.15 zu benutzen, dass  $X$  geodätisch ist.

Hinweise: Zeigen Sie, dass  $(X, d)$  Mittelpunkte hat. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

- (i) Seien  $x, y \in X$  beliebig. Da  $X$  ein Längenraum ist, existiert für jedes  $n \in \mathbb{N}$  ein Weg  $c_n$  von  $x$  nach  $y$  mit  $\ell(c_n) \leq d(x, y) + \frac{1}{n}$ . Zeigen Sie, dass ein Punkt  $m_n \in \text{im}(c_n)$  existiert mit  $d(x, m_n) = d(m_n, y)$ .
- (ii) Zeigen Sie weiter, dass die Folge  $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine konvergente Teilfolge  $(m_{n_k})_k$  besitzt. Sei  $m$  der Limes dieser Folge.
- (iii) Zeigen Sie, dass  $m$  Mittelpunkt von  $x$  und  $y$  ist.

**A.17 Aufgabe**

- (i) Sei  $(X, d)$  ein Längenraum und  $x, y \in X, x \neq y$ . Zeigen Sie, dass für alle  $r < d(x, y)$  gilt:

$$d(x, B_r(y)) = d(x, y) - r$$

- (ii) Gilt (i) auch für beliebige metrische Räume?

**A.18 Aufgabe**

Seien  $X, Y$  metrische Räume und  $p: Y \rightarrow X$  ein lokaler Homöomorphismus. Zeigen Sie, dass  $p$  die eindeutige Liftungseigenschaft hat: Für jede stetige Abbildung  $c: [0, 1] \rightarrow X$  und stetige Abbildungen  $f, g: [0, 1] \rightarrow Y$  mit  $p \circ f = p \circ g = c$  und  $f(0) = g(0)$  gilt  $f(t) = g(t)$  für alle  $t \in [0, 1]$ .

Hinweis: Betrachten Sie die Menge  $S := \{t \in [0, 1] : f(t) = g(t)\}$  und zeigen Sie, dass  $S$  nichtleer, offen und abgeschlossen ist.

**A.19 Aufgabe**

Sei  $X$  ein eindeutig geodätischer Raum und  $x, y \in X$  beliebig. Seien weiter  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Folgen in  $X$  mit  $x_n \rightarrow x$  und  $y_n \rightarrow y$ . Sei weiter  $\gamma_n$  die Geodäte von  $x_n$  nach  $y_n$  und  $\gamma$  die Geodäte von  $x$  nach  $y$ . Wir definieren

$$\begin{aligned} \gamma'_n: [0, 1] &\longrightarrow X \\ t &\longmapsto \gamma_n(t \cdot d(x_n, y_n)) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \gamma': [0, 1] &\longrightarrow X \\ t &\longmapsto \gamma(t \cdot d(x, y)). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass gilt:  $\gamma'_n$  konvergiert gleichmäßig gegen  $\gamma'$  genau dann, wenn  $\gamma'_n$  punktweise gegen  $\gamma'$  konvergiert.

Hinweis: Beweis zu Lemma 2.15.

### A.20 Aufgabe

Sei  $X$  ein vollständiger metrischer Raum. Zeigen Sie, dass  $X$  genau dann ein Längenraum ist, wenn  $X$  ungefähre Mittelpunkte hat.

### A.21 Aufgabe

Zeigen Sie, dass die Vervollständigung von einem Längenraum wieder ein Längenraum ist.

### A.22 Aufgabe

Zeigen Sie, dass die linear umparametrisierten lokalen Geodäten in  $\tilde{X}_{x_0}$  stetig von ihren Endpunkten abhängen.

*Hinweis:* Lemma 2.32.

### A.23 Aufgabe

Wir betrachten den metrischen Raum

$$X := \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$$

mit der euklidischen Metrik. Zeigen Sie, dass  $X$  versehen mit der induzierten Längenmetrik ein CAT(0)-Raum ist.

*Hinweis:* Lemma 2.44 und Satz 2.46.

### A.24 Aufgabe

Wir betrachten den metrischen Raum

$$Y := \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, z > 0\}$$

mit der euklidischen Metrik. Zeigen Sie, dass  $Y$  versehen mit der induzierten Längenmetrik kein CAT(0)-Raum ist.

*Hinweis:* Betrachten Sie das Dreieck  $\Delta((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$  in  $Y$ .

### A.25 Aufgabe

Sei  $(X, d_X)$  ein metrischer Raum und  $c_1, c_2, c_3$  Geodäten in  $X$  mit  $c_1(0) = c_2(0) = c_3(0)$ . Zeigen Sie, dass gilt:

$$\angle(c_1, c_3) \leq \angle(c_1, c_2) + \angle(c_2, c_3).$$

### A.26 Aufgabe

Gegeben sei eine lokal konvexe Funktion  $\Phi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ . Zeigen Sie, dass  $\Phi$  konvex ist.

### A.27 Aufgabe

- (i) Sei  $X$  ein Baum und  $\mathcal{S}$  eine endliche Familie von nichtleeren abgeschlossenen konvexen Teilmengen aus  $X$ . Zeigen Sie: Wenn sich jeweils zwei Elemente aus  $\mathcal{S}$  nichttrivial schneiden, dann ist  $\bigcap \mathcal{S}$  nichtleer.
- (ii) Sei  $G := \langle g_1, \dots, g_k \rangle$  eine endlich erzeugte Gruppe. Sei weiter  $X$  ein Baum und  $\Phi: G \rightarrow \text{Isom}(X)$  eine isometrische Wirkung. Zeigen Sie: Wenn  $\text{Fix}_\Phi(\langle g_i \rangle) \neq \emptyset$  und  $\text{Fix}_\Phi(\langle g_i \rangle) \cap \text{Fix}_\Phi(\langle g_j \rangle) \neq \emptyset$  für alle  $i, j = 1, \dots, k$ , dann ist  $\text{Fix}_\Phi(G)$  nichtleer.

### A.28 Aufgabe

Sei  $X$  ein Baum. Zeigen Sie, dass  $X$  ein vollständiger CAT(0)-Raum ist.

### A.29 Aufgabe

Sei  $G$  eine Gruppe und  $N \subseteq G$  ein Normalteiler mit  $[G : N] < \infty$ . Zeigen Sie: Wenn  $N$  die Eigenschaft  $\text{FA}$  hat, dann hat auch  $G$  die Eigenschaft  $\text{FA}$ .

*Hinweis:* Sei  $\Phi: G \rightarrow \text{Isom}(X)$  eine beliebige isometrische Wirkung auf einen Baum  $X$ . Betrachten Sie die induzierte Wirkung der Faktorgruppe  $G/N$  auf  $\text{Fix}_\Phi(N)$ .

# Literatur

- [BH99] Martin R. Bridson, André Haefliger. *Metric Spaces of Non-Positive Curvature*. Springer, 1999 (siehe S. III, 5).
- [BHV08] Mohammed El Bachir Bekka, Pierre de la Harpe, Alain Valette. *Kazhdan's Property (T)*. Cambridge Univ. Press, 2008 (siehe S. III).
- [Kra15] Linus Kramer. „Skript zu Grundlagen der Analysis, Topologie und Geometrie“. Westfälische Wilhelms-Universität Münster. Sommersemester 2015. URL: [http://wwwmath.uni-muenster.de/u/ag\\_kramer/index.php?name=VorlesungGrundlagenAnalysisGeometrieTopologie15&menu=teach&lang=de](http://wwwmath.uni-muenster.de/u/ag_kramer/index.php?name=VorlesungGrundlagenAnalysisGeometrieTopologie15&menu=teach&lang=de) (siehe S. 24).
- [Mun74] James R. Munkres. *Topology – a first course*. Prentice-Hall, 1974 (siehe S. 50).
- [Sag95] Michah Sageev. „Ends of group pairs and non-positively curved cube complexes“. In: *Proceedings of the London Mathematical Society. Third Series* 71.3 (1995) (siehe S. 72).
- [Ser80] Jean-Pierre Serre. *Trees*. Springer-Verlag, 1980 (siehe S. III).

# Index

- Arzelà-Ascoli, 33
- Automorphismus, 69
- Baum, 67
- Bruhat-Tits-Fixpunktsatz, 14
- CAT(0)-Raum, 3
  - lokal, 3
  - Vierpunktbedingung, 17
- Dimension, 65
- Dreieck, 54
- Durchmesser, 12
- Eigenschaft  $FX$ , 70
- Exponentialabbildung, 45
- Fahnenkomplex, 77
- Fixpunkt, 14
- Geodäte, 1
  - linear umparametrisiert, 36
  - lokal, 80
- geodätischer Raum, 1
  - eindeutig, 1
  - lokal eindeutig, 40
- geodätisches Dreieck, 2
- gleichstetig, 33
- Gruppenwirkung
  - eigentlich, 15
  - isometrisch, 14
  - kokompakt, 15
- Halbraum, 72
- Homotopie, 10
- Homöomorphismus
  - lokal, 38
- Hopf-Rinow, 30
- Hyperebene, 72
- Isometrie, 14
  - lokal, 38
- Isometriegruppe, 14
- Kongukationsklasse, 15
- kontrahierbar, 10
- konvex, 4, 14, 60
  - lokal, 61
- Lift, 41
- Link, 77
- Lipschitz, 8, 17
- lokal kompakt, 30
- Länge, 25
- Längenmetrik, 29
  - assoziiert, 29
- Längenraum, 29
- median, 74
- Metrik, 1
  - induzierte Pseudometrik, 38
- metrischer Raum, 1
  - diskret, 1
- Mittelpunkt, 17
- Mittelwürfel, 71
- orthogonale Projektion, 7
- Parallelogrammgleichung, 5

quadratäquivalent, 71

Radius, 12

rektifizierbar, 25

Seite, 65

Simplizialkomplex, 76

n-Skelett, 73

sphärisch vollständig, 81

Stetige Abhängigkeit von Endpunkten, 36

transversal, 72

Vergleichsdreieck, 3, 54

Vergleichspunkt, 3

Verklebung, 66

Vervollständigung, 16

Weg, 25

    invers, 26

    zusammengesetzt, 26

Winkel, 54

Würfel, 65

Zentrum, 12

zusammenhängend

    einfach, 24

    lokal wegzusammenhängend, 24

    semilokal einfach, 24

    wegzusammenhängend, 67

Überlagerung, 24

    universell, 24