

Skript Topologie I.

Mitschrift der Vorlesung „Topologie I.“ von Prof. Dr. Arthur Bartels

Jannes Bantje

5. Januar 2015

Aktuelle Version verfügbar bei:



 **GitHub** (inklusive Sourcecode)
<https://github.com/JaMeZ-B/latex-www>



 **Bittorrent Sync**
B6WH2DISQ5QVYIRYIEZSF4ZR2IDVKN3I

Vorwort — Mitarbeit am Skript

Dieses Dokument ist eine Mitschrift aus der Vorlesung „Topologie I., WiSe 2014/2015“, gelesen von Prof. Dr. Arthur Bartels. Der Inhalt entspricht weitestgehend dem Tafelanschrieb. Für die Korrektheit des Inhalts übernehme ich keinerlei Garantie! Für Bemerkungen und Korrekturen – und seien es nur Rechtschreibfehler – bin ich sehr dankbar. Korrekturen lassen sich prinzipiell auf drei Wegen einreichen:

- Persönliches Ansprechen in der Uni, Mails an ✉ j.bantje@wwu.de (gerne auch mit annotieren PDFs)
- *Direktes* Mitarbeiten am Skript: Den Quellcode poste ich auf GitHub (siehe oben), also stehen vielfältige Möglichkeiten der Zusammenarbeit zur Verfügung: Zum Beispiel durch Kommentare am Code über die Website und die Kombination Fork + Pull Request. Wer sich verdient macht oder ein Skript zu einer Vorlesung, die ich nicht besuche, beisteuern will, dem gewähre ich gerne auch Schreibzugriff.

Beachten sollte man dabei, dass dazu ein Account bei github.com ✉ notwendig ist, der allerdings ohne Angabe von persönlichen Daten angelegt werden kann. Wer bei GitHub (bzw. dem zugrunde liegenden Open-Source-Programm „git“) – verständlicherweise – Hilfe beim Einstieg braucht, dem helfe ich gerne weiter. Es gibt aber auch zahlreiche empfehlenswerte Tutorials im Internet.¹

- *Indirektes* Mitarbeiten: \TeX -Dateien per Mail verschicken.

Dies ist nur dann sinnvoll, wenn man einen ganzen Abschnitt ändern möchte (zB. einen alternativen Beweis geben), da ich die Änderungen dann per Hand einbauen muss!

Vorlesungshomepage



<https://wwwmath.uni-muenster.de/reine/u/topos/lehre/WS2014-2015/Topologie1/Topologie1.html> ✉

¹zB. <https://try.github.io/levels/1/challenges/1> ✉, ist auf Englisch, aber dafür interaktives LearningByDoing

Inhaltsverzeichnis

1	Kategorien, Funktoren und natürliche Transformationen	1
1.1	Definition: Kategorie	1
1.2	Beispiele für Kategorien	1
1.3	Bemerkungen zu Kategorien	2
1.4	Definition: Funktor	2
1.5	Beispiele für Funktoren	2
1.6	Definition: Natürliche Transformation	2
1.7	Ausblick auf Kategorien und Funktoren in der algebraischer Topologie	3
2	Kombinatorische Beschreibungen topologischer Räume	4
2.1	Beispiel einer kombinatorischen Beschreibung eines Raumes	4
2.2	Definition: Simplicialer Komplex	4
2.3	Beispiel für simpliciale Komplexe	4
2.4	Definition: Unterkomplex	4
2.5	Definition: Simpliciale Abbildung	5
2.6	Definition: Geometrische Realisierung	5
2.7	Beispiel: Rand des n -Simplizes und der Torus	5
2.8	Definition: Polyeder	5
2.9	Definition: Euler-Charakteristik	6
2.10	Satz über die Euler-Charakteristik	6
3	Simpliciale Homologie	7
3.1	Definition: Freier R -Modul mit Basis S	7
3.2	Lemma: Universale Eigenschaft von freien Moduln	7
3.3	Beispiel für freie und nicht-freie Moduln	7
3.4	Definition: n -ter Kettenmodul	8
3.5	Definition: Orientierung eines $(n - 1)$ -Simplizes als Teilmenge eines n -Simplizes	8
3.6	Definition: n -te Randabbildung	8
3.7	Proposition: $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$	8
3.8	Lemma: Ein $(n - 2)$ -Simplex ist Seite von genau zwei $(n - 1)$ -Simplizes	9
3.9	Notation für das Weglassen eines Knotens	9
3.10	Definition: n -ter Homologiemodul	9
3.11	Beispiele für Homologiemoduln	9
3.12	Definition: R -Kettenkomplex, n -te Homologie eines R -Kettenkomplexes	10
3.13	Bemerkungen zu Kettenkomplexen	10
3.14	Definition: Simplicialer Kettenkomplex	10
4	Euler-Charakteristik von Kettenkomplexen	11
4.1	Wiederholung: Torsionsgruppe	11
4.2	Lemma: Rang einer endlich erzeugten abelschen Gruppe	11
4.3	Definition: Kurze exakte Sequenz	11
4.4	Beispiele für kurze exakte Folgen	12
4.5	Bemerkung: Spaltung einer kurzen exakten Sequenz	12
4.6	Bemerkung: Existenz einer Spaltung, wenn M_2 frei ist	12
4.7	Bemerkung: Der Rang ist additiv	12
4.8	Proposition: Der Rang ist für kurze exakte Folgen endl. erz., abelscher Gruppen additiv	12
4.9	Definition: Eulercharakteristik von \mathbb{Z} -Kettenkomplexen	14
4.10	Satz: Eulercharakteristik eines endlich erzeugten \mathbb{Z} -Kettenkomplexes	14
4.11	Korollar: Die Eulercharakteristik eines simplicialen Komplexes	14

5	Singuläre Homologie	15
5.1	Definition: Singuläre Simplizes und n -ter singulärer Kettenmodul	15
5.2	Definition: Einschränkung eines singulären Simplizes auf eine Seite	15
5.3	Bemerkung zur Inklusion der j -ten Seite	15
5.4	Definition: n -te singuläre Randabbildung	15
5.5	Proposition: Für die Randabbildungen gilt $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$	15
5.6	Lemma: Hilfslemma für Proposition 5.5	15
5.7	Definition: Singuläre Homologie von X	16
5.8	Definition: n -Ketten, n -Ränder und n -Zykel und Homologieklassen	16
5.9	Beispiel: Die Homologie des Ein-Punkt-Raumes	16
5.10	Proposition: Eigenschaften von $H_0(X)$ für $X \neq \emptyset$ und X wegzusammenhängend	17
5.11	Bemerkung: Vorgehen, um später zu zeigen: $H_*(K; R) \cong H_*(K ; R)$	17
6	Funktorialität	18
6.1	Definition: R -Kettenabbildung	18
6.2	Bemerkung: Induzierte Abbildung einer Kettenabbildung	18
6.3	Bemerkung: Homologie definiert einen Funktor	18
6.4	Definition: Induzierte Abbildung auf Kettenkomplexen	18
6.5	Proposition: Der singuläre Kettenkomplex über R bildet einen Funktor	19
6.6	Korollar: Homologie ist ein Funktor $\text{Top} \rightarrow R\text{-Mod}$	19
6.7	Bemerkung: Notation für die auf Homologie induzierte Abbildung	19
6.8	Definition: Summe oder Koproduct von topologischen Räumen	19
6.9	Definition: Summe von R -Moduln	20
6.10	Satz: Homologie des Koproductes topologischer Räume	20
7	Homotopieinvarianz	21
7.1	Bemerkung: Die induzierte Abbildung eines Homöomorphismus ist ein Isomorphismus	21
7.2	Definition: Homotopieäquivalenz und Homotopieinverse	21
7.3	Satz: Homotopieinvarianz der Homologie	21
7.4	Korollar: Die induzierte Abbildung einer Homotopieäquivalenz ist ein Isomorphismus	21
7.5	Korollar: Homologie eines kontrahierbaren Raumes	21
7.6	Definition: Kettenhomotopie	22
7.7	Prop.: induzierte Abbildungen von kettenhomotopen Kettenabbildungen sind gleich	22
7.8	Lemma: Reduktion von Satz 7.3 auf Beweis eines Spezialfalles	22
7.9	Bemerkung zum Vorgehen beim Beweis von [#]	22
7.10	Definition: Affin lineare Abbildungen zur Konstruktion der Kettenhomotopie	23
7.11	Lemma: Gleichungen für die Abbildungen aus 7.10	23
7.12	Beweis von [##]/Konstruktion der Kettenhomotopie	24
7.13	Bemerkung: Konstruktion einer Kettenhomotopie aus einer Homotopie	25
8	Homologie von Paaren	26
8.1	Definition: Paar von topologischen Räumen	26
8.2	Definition: Singulärer Kettenkomplex und Homologiemodul von Paaren	26
8.3	Definition: Der singuläre Kettenkomplex von Paaren definiert einen Funktor	26
8.4	Bemerkung: Topologische Räume als Paar auffassen	26
8.5	Frage: Können wir $H_n(X, A; R)$ durch $H_n(X; R)$ und $H_n(A; R)$ ausdrücken?	26
8.6	Beispiel: Homologie des Paares $(\Delta^n , \partial\Delta^n)$	26
8.7	Definition: Lange exakte Sequenz von R -Moduln	27
8.8	Satz: Existenz der Paarsequenz	27
8.9	Korollar: Homologiemodul wenn A kontraktibel ist	27
8.10	Definition: Kurze exakte Folge von Kettenkomplexen	28
8.11	Beispiel einer kurzen exakten Folge von Kettenkomplexen	28

8.12	Schlängenlemma	28
8.13	Beweis von Satz 8.8	29
8.14	Bemerkung	30
8.15	Fünfer-Lemma	30
8.16	Lemma ("2 von 3")	31
9	Ausschneidung und die Mayer-Vietoris Folge	32
9.1	Satz: Ausschneidungsisomorphismus	32
9.2	Satz (Mayer-Vietoris Folge)	32
9.3	Bemerkung zur Mayer-Vietoris-Folge	33
9.4	Satz: Homologie der Sphäre S^n	33
9.5	Definition: Reduzierte Homologie	34
9.6	Bemerkung: Die Aussage von Satz 9.4 in reduzierter Homologie	34
9.7	Beweis von [##]	34
10	Anwendungen	36
10.1	Satz: Invarianz der Dimension	36
10.2	Fixpunktsatz von Brouwer	36
10.3	Definition: Abbildungsgrad einer stetigen Abbildung $f: S^n \rightarrow S^n$	36
10.4	Proposition: Einfache Eigenschaften des Abbildungsgrades	36
10.5	Beispiel: Abbildungsgrad der Spiegelung	37
10.6	Beispiel: Grad der Punktspiegelung	37
10.7	Erinnerung: Vektorfelder	38
10.8	Satz: Es gibt ein Vektorfeld ohne Nullstellen auf $S^n \iff n$ ist ungerade	38
10.9	Satz (Jordanscher Kurvensatz)	38
10.10	Satz	39
10.11	Proposition	40
11	CW-Komplexe	41
11.1	Definition: Pushout	41
11.2	Definition: CW-Komplex	41
11.3	Bemerkungen zur Definition von CW-Komplexen	42
11.4	Beispiele für CW-Komplexe	42
11.5	Lemma: Kompaktheit von Teilmengen eines CW-Komplexes	44
11.6	Korollar: Ein CW-Komplex ist genau dann kompakt, wenn er endlich ist.	44
12	Zelluläre Homologie	45
12.1	Definition: n -ter zellulärer Kettenmodul und zelluläre Randabbildung	45
12.2	Lemma	45
12.3	Definition: Zellulärer Kettenkomplex und zelluläre Homologie	45
12.4	Bemerkung: Funktorialität des zellulären Kettenkomplexes und der zellulären Homologie	45
12.5	Lemma	45
12.6	Bemerkung	46
12.7	Definition: Natürlicher Isomorphismus	47
12.8	Satz	47
12.9	Lemma	48
12.10	Korollar	48
12.11	Bemerkung: n -te Bettizahl	49
12.12	Beispiel: Homologie von $\mathbb{C}P^n$	49
12.13	Beispiel: Homologie von $\mathbb{R}P^n$	49
12.14	Satz	51

13 Kleine Simplizes	52
13.1 Satz: Ausschneidungs-Isomorphismus	52
13.2 Definition: \mathcal{U} -klein	52
13.3 Satz über kleine Simplizes	52
13.4 Bemerkung	52
13.5 Beweis des Ausschneidungssatzes (13.1)	52
13.6 Idee zum Beweis des Satzes über kleine Simplizes	53
13.7 Definition	53
13.8 Lemma	53
13.9 Definition	53
Index	A
Abbildungsverzeichnis	C
Todo list	C

1 Kategorien, Funktoren und natürliche Transformationen

1.1 Definition

Eine **Kategorie** \mathcal{C} besteht aus:

- i) Einer Klasse $\text{Ob}(\mathcal{C})$. Die Elemente von $\text{Ob}(\mathcal{C})$ heißen die **Objekte** von \mathcal{C} .
- ii) Zu je zwei Objekten A, B aus \mathcal{C} einer Menge $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$. Die Elemente von $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ heißen **Morphismen** von \mathcal{C} .
- iii) Zu je drei Objekten A, B, C aus \mathcal{C} einer Abbildung:

$$\text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C) \times \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, C), \quad (f, g) \mapsto f \circ g$$

genannt die **Komposition** in \mathcal{C} .

Dabei müssen folgende Axiome erfüllt sein:

- (i) Die Komposition ist **assoziativ**:
Für Objekte A, B, C, D von \mathcal{C} und $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(C, D), g \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C), h \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ gilt immer

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

- (ii) Die Komposition ist **unital**: Für jedes Objekt A von \mathcal{C} gibt es einen Morphismus $\text{id}_A \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, A)$ so, dass

$$\forall f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, A) : \text{id}_A \circ f = f \quad \text{und} \quad \forall f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) : f \circ \text{id}_A = f$$

1.2 Beispiele

- (1) Die Kategorie der Mengen **MENGEN**: Objekte sind Mengen und Morphismen sind Abbildungen.
- (2) Die Kategorie der Gruppen **GRUPPEN**: Objekte sind Gruppen und Morphismen sind Gruppenhomomorphismen.
- (3) Die Kategorie der K -Vektorräume **K -VR**: Objekte sind K -Vektorräume und die Morphismen sind K -lineare Abbildungen.
- (4) Die Kategorie der R -Moduln **R -MOD**: Objekte sind R -Moduln und Morphismen sind R -lineare Abbildungen.
- (5) Die Kategorie der C^∞ -Mannigfaltigkeiten **C^∞ -MAN**: Objekte sind C^∞ -Mannigfaltigkeiten und Morphismen sind C^∞ -Abbildungen.
- (6) Die Kategorie der topologischen Räume **TOP**: Objekte sind topologische Räume und Morphismen sind stetige Abbildungen.
- (7) Die Kategorie der punktierten topologischen Räume **TOP_{*}**: Objekte sind punktiert-topologische Räume und Morphismen sind punktiert-stetige Abbildungen.
- (8) Die Kategorie **HTOP**: Objekte sind topologische Räume und Morphismen sind Homotopieklassen von stetigen Abbildungen.
- (9) Die Kategorie **HTOP_{*}**: Objekte sind punktiert-topologische Räume und Morphismen sind Homotopieklassen von punktiert-stetigen Abbildungen.
- (10) Sei G eine Gruppe. Wir erhalten eine Kategorie \mathcal{C}_G mit genau einem Objekt $*$ und $\text{Mor}_{\mathcal{C}_G}(*, *) = G$. Die Komposition wird durch die Verknüpfung in der Gruppe festgelegt.
- (11) Ist \mathcal{C} eine Kategorie, so ist \mathcal{C}^{op} eine Kategorie, wobei $\text{Ob}(\mathcal{C}^{\text{op}}) = \text{Ob}(\mathcal{C})$ und $\text{Mor}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(A, B) := \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, A)$. Die Komposition ist gegeben durch $f \circ^{\text{op}} g := g \circ f$.

1.3 Bemerkung

- (i) Eine Kategorie heißt **klein**, wenn ihre Objekte eine Menge bilden.
- (ii) Statt $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ schreiben wir oft $f : A \rightarrow B$ oder $A \xrightarrow{f} B$.

1.4 Definition

Seien \mathcal{C} und \mathcal{D} Kategorien: Ein **Funktor** $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ordnet jedem Objekt C von \mathcal{C} ein Objekt $F(C)$ von \mathcal{D} und ordnet jedem Morphismus $f : C \rightarrow C'$ in \mathcal{C} einen Morphismus $F(f) : F(C) \rightarrow F(C')$ in \mathcal{D} zu. Dabei muss gelten:

$$F(f \circ g) = F(f) \circ F(g) \quad \text{und} \quad F(\text{id}_C) = \text{id}_{F(C)}$$

1.5 Beispiele

- (1) Es gibt offensichtliche „Vergiss“-Funktores:

$$\begin{aligned} K\text{-VR} &\longrightarrow \text{MENGEN} \\ R\text{-MOD} &\longrightarrow \text{MENGEN} \\ \text{TOP} &\longrightarrow \text{MENGEN} \\ \text{TOP}_{\bullet} &\longrightarrow \text{MENGEN} \\ \text{TOP}_{\bullet} &\longrightarrow \text{TOP} \end{aligned}$$

- (2) Sei \mathcal{C} eine Kategorie und C ein Objekt von \mathcal{C} . Der durch C **dargestellte Funktor** $F_C : \mathcal{C} \rightarrow \text{MENGEN}$ ist definiert durch

$$\begin{aligned} F_C(A) &= \text{Mor}_{\mathcal{C}}(C, A) && \text{für } A \in \text{Ob}(\mathcal{C}) \\ F_C(f) : \text{Mor}_{\mathcal{C}}(C, A) &\rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}}(C, A'), g \mapsto f \circ g && \text{für } f : A \rightarrow A' \text{ in } \mathcal{C} \end{aligned}$$

- (3) Die Fundamentalgruppe definiert einen Funktor

$$\pi_1 : \text{HTOP}_{\bullet} \longrightarrow \text{GRUPPEN}$$

Bemerkung

- Ist $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ein Funktor so schreiben wir oft kürzer und ungenauer $f_* := F(f)$.
- Kleine Kategorien und Funktores bilden die Kategorie KAT .

1.6 Definition

Seien $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ zwei Funktores. Eine **natürliche Transformation** $\tau : F \rightarrow G$ ordnet jedem $C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ einen Morphismus $\tau_C : F(C) \rightarrow G(C)$ in \mathcal{D} zu, sodass für jedes $f : C \rightarrow C'$ in \mathcal{C}

$$\begin{array}{ccc} F(C) & \xrightarrow{F(f)} & F(C') \\ \downarrow \tau_C & & \downarrow \tau_{C'} \\ G(C) & \xrightarrow{G(f)} & G(C') \end{array}$$

kommutiert.

Bemerkung

Natürliche Transformationen lassen sich komponieren. Für $\tau : F \rightarrow G$, $\eta : G \rightarrow H$ ist $\eta \circ \tau : F \rightarrow H$ gegeben durch

$$(\eta \circ \tau)_C := \eta_C \circ \tau_C : F(C) \rightarrow H(C)$$

$$F, G, H : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$$

Genauer: Für eine feste kleine Kategorie \mathcal{C} und \mathcal{D} bilden die Funktoren $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ mit den natürlichen Transformationen eine Kategorie $\text{FUN}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$.

1.7 Ausblick

In der algebraischen Topologie werden topologische Fragen, wie zum Beispiel, wann \mathbb{R}^n und \mathbb{R}^m homöomorph sind, in algebraische Fragen übersetzt. Eine Möglichkeit für eine solche Übersetzung sind Funktoren von einer Kategorie von topologischen Räumen, z.B. TOP , TOP_\bullet , HTOP_\bullet , in eine algebraisch Kategorie, z.B. GRUPPEN , $K\text{-VR}$, ABEL.GRUPPEN , $R\text{-MOD}$. Ein Beispiel für einen solchen Funktor ist die Fundamentalgruppe π_1 . Ein Nachteil der Fundamentalgruppe ist, dass diese oft schwierig zu berechnen ist. Wir werden in dieser Vorlesung weitere Funktoren und Methoden für ihr Berechnung kennenlernen.

2 Kombinatorische Beschreibungen topologischer Räume

2.1 Beispiel

Graphen sind einerseits topologische Räume und andererseits kombinatorische Objekte:



2.2 Definition

Ein **simplicialer Komplex** $K = (V, \Sigma)$ besteht aus einer Menge V und einer Menge Σ von nichtleeren, endlichen Teilmengen von V , sodass gilt

(i) $\{v\} \in \Sigma$ für alle $v \in V$

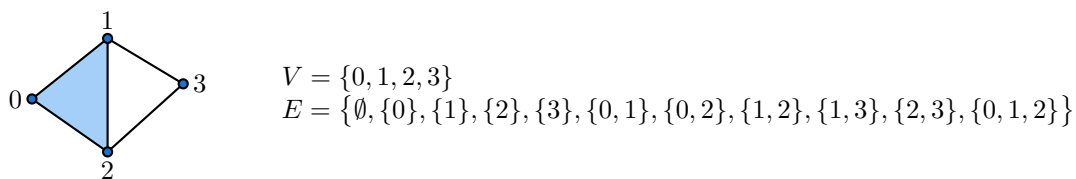
(ii) $\sigma \in \Sigma, \emptyset \neq \tau \subseteq \sigma \implies \tau \in \Sigma$.

(Abgeschlossen bzgl. Teilmengenbildung)

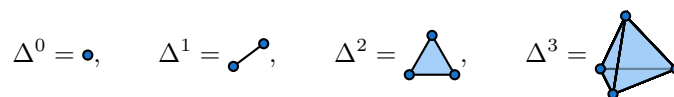
Die Elemente von V heißen die **Ecken** oder **Vertices** von K . Die Elemente von Σ heißen die **Simplizes** von K . Enthält $\sigma \in \Sigma$ genau $n + 1$ Elemente, so heißt σ ein **n-Simplex**. Ist $\tau \subseteq \sigma$ mit σ ein n -Simplex und τ ein $n - 1$ -Simplex, so heißt τ eine **Seite** von σ .

Ist V geordnet, so heißt K geordnet. Ist V endlich, so heißt K endlich.

2.3 Beispiel



Ist σ eine endliche Menge, so heißt $\Delta^\sigma := (\sigma, \mathcal{P}(\sigma) \setminus \{\emptyset\})$ der σ -Simplex. Für $\sigma = \{0, \dots, n\}$ schreiben wir $\Delta^n := \Delta^{\{0, \dots, n\}}$. Es ist



2.4 Definition

Sei $K = (V, \Sigma)$ ein simplicialer Komplex. Ein **Unterkomplex** von K ist ein simplicialer Komplex $K_0 = (V_0, \Sigma_0)$ mit $V_0 \subseteq V$ und $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$.

Beispiel

Sei $K = (V, \Sigma)$ ein endlicher simplizialer Komplex. Dann ist K ein Unterkomplex von Δ^V .

2.5 Definition

Eine **simpliziale Abbildung** $f : K_1 = (V_1, \Sigma_1) \rightarrow K_2 = (V_2, \Sigma_2)$ zwischen simplizialen Komplexen ist eine Abbildung $f : V_1 \rightarrow V_2$, sodass $f(\sigma_1) \in \Sigma_2$ für alle $\sigma_1 \in \Sigma_1$.

2.6 Definition

Sei σ eine endliche Menge. Sei $\mathbb{R}^\sigma = \prod_{v \in \sigma} \mathbb{R}$ mit der Produkttopologie. Sei nun

$$|\Delta^\sigma| := \left\{ x = (x_v)_{v \in \sigma} \in \mathbb{R}^\sigma \mid \sum_{v \in \sigma} x_v = 1, x_v \in [0, 1] \forall v \in \sigma \right\}$$

Ist $\tau \subseteq \sigma$, so erhalten wir eine Abbildung $\iota_\tau^\sigma : |\Delta^\tau| \rightarrow |\Delta^\sigma|$ indem wir $(x_v)_{v \in \tau} \in |\Delta^\tau|$ durch $x_v = 0$ für $v \in \sigma \setminus \tau$ zu $(x_v)_{v \in \sigma}$ auffüllen. Ist $\eta \subseteq \tau \subseteq \sigma$ so gilt $\iota_\eta^\sigma = \iota_\tau^\sigma \circ \iota_\eta^\tau$.

Sei $K = (V, \Sigma)$ ein simplizialer Komplex. Die **geometrische Realisierung** $|K|$ von K ist definiert als

$$|K| := \coprod_{\sigma \in \Sigma} \{\sigma\} \times |\Delta^\sigma| / \sim$$

wobei \sim die durch $(\tau, x) \sim (\sigma, \iota_\tau^\sigma(x))$ für $\tau \subseteq \sigma$ erzeugte Äquivalenzrelation ist. Versehen mit der Quotiententopologie ist $|K|$ ein topologischer Raum.

2.7 Beispiel

- Sei $\partial\Delta^n := \left(\{0, \dots, n\}, \mathcal{P}(\{0, \dots, n\}) \setminus \{\emptyset, \{0, \dots, n\}\} \right) = \Delta^n \setminus \{0, \dots, n\}$. $\partial\Delta^n$ heißt der **Rand des n -Simplizes**. Es gilt

$$\begin{aligned} |\partial\Delta^1| &= \bullet \bullet \cong S^0 \\ |\partial\Delta^2| &= \triangle \cong S^1 \\ |\partial\Delta^3| &= \text{Dreieck} \cong S^2 \end{aligned}$$

Allgemein gilt $|\partial\Delta^n| \cong S^{n-1}$.

$$\bullet \quad T^2 = S^1 \times S^1 \cong \text{Torus} \cong \left| \begin{array}{c} \text{3x3 Gitter mit Randpfeilen} \end{array} \right|$$

2.8 Definition

Ein topologischer Raum X heißt ein **Polyeder**, falls er homöomorph zur Realisierung eines simplizialen Komplexes ist.

2.9 Definition

Sei $K = (V, \Sigma)$ ein endlicher simplizialer Komplex. Sei $a_n := \#\{\sigma \in \Sigma \mid \sigma \text{ ist ein } n\text{-Simplex von } K\}$. Dann heißt $\chi(K) := \sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n a_n$ die **Euler-Charakteristik** von K .

Beispiel

$$\chi(\triangle) = 3 - 3 = 0$$

$$\chi(\square) = 4 - 4 = 0$$

$$\chi([n\text{-Eck}]) = n - n = 0$$

$$\chi(\partial\Delta^3 = \text{Pyramide}) = 4 - 6 + 4 = 2$$

$$\chi(\text{Würfel}) = 8 - 12 + 6 = 2$$

$$\chi(\text{Oktaeder}) = 6 - 12 + 8 = 2$$

2.10 Satz

Seien K und K' endliche simpliziale Komplexe. Gilt $|K| \cong |K'|$, so gilt

$$\chi(K) = \chi(K').$$

Bemerkung

Die Euler-Charakteristik ist also eine topologische Invariante von simplizialen Komplexen. Sie hängt nur von der topologischen Struktur von $|K|$ und nicht von der kombinatorischen Struktur von K ab.

3 Simpliziale Homologie

3.1 Definition

Sei S eine Menge. Sei R ein Ring. Der **freie R -Modul mit Basis S** , $R[S]$, besteht aus allen endlichen formalen R -Linearkombinationen

Ring mit Eins

$$\sum_{s \in S} r_s \cdot s, \quad r_s \in R, r_s \neq 0 \text{ für endliche viele } s \in S$$

Die R -Modulstruktur auf $R[S]$ ist definiert durch:

$$r \cdot \left(\sum_{s \in S} r_s \cdot s \right) := \sum_{s \in S} (r \cdot r_s) \cdot s \quad \left(\sum_{s \in S} r_s \cdot s \right) + \left(\sum_{s \in S} r'_s \cdot s \right) := \sum_{s \in S} (r_s + r'_s) \cdot s$$

Bemerkung

Mittels $s = \sum_{s' \in S} \delta_{s,s'} \cdot s'$ fassen wir S als Teilmenge von $R[S]$ auf.

3.2 Lemma

Sei S eine Menge, R ein Ring. Es gilt

- 1) Ist M ein R -Modul und $i : S \rightarrow M$ eine Abbildung, so gibt es genau eine R -lineare Abbildung $\varphi : R[S] \rightarrow M$, die i fortsetzt.
- 2) Sei $f : R[S] \rightarrow M$ R -linear und $p : N \rightarrow M$ R -linear und surjektiv. Dann gibt es $\hat{f} : R[S] \rightarrow N$ mit $p \circ \hat{f} = f$.

$$\begin{array}{ccc} & & N \\ & \nearrow \hat{f} & \downarrow p \\ R[S] & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

Beweis

- 1) Eine solche Abbildung ist gegeben durch $\varphi(\sum_{s \in S} r_s \cdot s) = \sum_{s \in S} r_s \cdot i(s)$. Ist φ' eine zweite, so gilt

$$\hat{\varphi} \left(\sum_{s \in S} r_s \cdot s \right) = \sum_{s \in S} r_s \cdot \hat{\varphi}(s) = \sum_{s \in S} r_s \cdot i(s)$$

- 2) Wähle für jedes $s \in S$ ein Urbild $j(s) \in N$ für $f(s) \in M$ unter $p : N \rightarrow M$. Nun wende 1) auf $j : S \rightarrow N$ an, um $\hat{f} : R[S] \rightarrow N$ mit $\hat{f}(s) = j(s)$ zu erhalten. Nun ist $p \circ \hat{f}(s) = f(s)$ für alle $s \in S$. Mit der Eindeutigkeit aus 1) folgt $p \circ \hat{f} = f$. \square

3.3 Beispiel

- (i) Sei K ein Körper und V, M, N seien K -Vektorräume, $f : V \rightarrow M$, $p : N \rightarrow M$ seien K -linear, p surjektiv. Dann gibt es $\hat{f} : V \rightarrow N$ mit $p \circ \hat{f} = f$. Wir können Lemma 3.2 benutzen, da V eine Basis B hat, also $V \cong K[B]$.
- (ii) Sei $R = \mathbb{Z}$, sei $V = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $M = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, sowie $f = \text{id} : V \rightarrow M$, $N = \mathbb{Z}$ und $p : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ die Projektion mit $p(n) = n + 2\mathbb{Z}$. Dann gibt es keine \mathbb{Z} -lineare Abbildung $\hat{f} : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ mit $p \circ \hat{f} = f$. Ist $\hat{f}(1 + 2\mathbb{Z}) = n \in \mathbb{Z}$, so folgt

$$2n = 2 \cdot \hat{f}(1 + 2\mathbb{Z}) = \hat{f}(2 \cdot (1 + 2\mathbb{Z})) = \hat{f}(0 + 2\mathbb{Z}) = 0$$

also $n = 0$.

3.4 Definition

Sei $K = (V, \Sigma)$ ein simplizialer Komplex. Sei $\Sigma_n := \{\sigma \in \Sigma \mid \sigma \text{ ist ein } n\text{-Simplex}\}$. Sei R ein Ring. Der **n -te Kettenmodul** von K über R ist definiert als

$$C_n(K; R) := R[\Sigma_n]$$

Ist $R = \mathbb{Z}$, so schreiben wir auch kurz $C_n(K) := C_n(K; \mathbb{Z})$.

3.5 Definition

Sei $K = (V, \Sigma)$ ein geordneter simplizialer Komplex. Sei $\sigma = \{v_0, \dots, v_n\}$ ein n -Simplex von K . Bezüglich der Ordnung von K sei dabei $v_0 < v_1 < \dots < v_n$. Sei τ ein $(n-1)$ -Simplex von K . Definiere

$$\varepsilon_{\sigma}^{\tau} := \begin{cases} (-1)^i, & \text{falls } \tau = \{v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n\} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Bemerkung

$$\varepsilon_{\sigma}^{\tau} \neq 0 \iff \tau \text{ ist eine Seite von } \sigma.$$

Beispiel

Für den folgenden geordneten simplizialen Komplex gilt

$$\begin{array}{c} 1 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 0 \quad \quad 2 \\ \nearrow \quad \nwarrow \end{array} \quad \varepsilon_{\{0,1\}}^{\{0,1\}} = 1, \quad \varepsilon_{\{0,1,2\}}^{\{0,2\}} = -1, \quad \varepsilon_{\{0,1,2\}}^{\{1,2\}} = 1$$

3.6 Definition

Sei $K = (V, \Sigma)$ ein geordneter simplizialer Komplex. Die **n-te Randabbildung**

$$\partial_n : C_n(K; R) \underset{=R[\Sigma_n]}{\longrightarrow} C_{n-1}(K; R) \underset{=R[\Sigma_{n-1}]}{\longrightarrow}$$

ist definiert durch

$$\partial_n(\sigma) = \sum_{\tau \in \Sigma_{n-1}} \varepsilon_\sigma^\tau \cdot \tau \quad \text{für } \sigma \in \Sigma_n$$

3.7 Proposition

$$\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$$

Damit folgt $\text{Im } \partial_n \subseteq \ker \partial_{n-1}$.

Beweis (mit Lemma 3.8)

Sei σ ein n -Simplex von K . Dann gilt

$$\begin{aligned} \partial_{n-1}(\partial_n(\sigma)) &= \partial_{n-1}\left(\sum_{\tau \in \Sigma_{n-1}} \varepsilon_\sigma^\tau \cdot \tau\right) = \sum_{\tau \in \Sigma_{n-1}} \varepsilon_\sigma^\tau \cdot \partial_{n-1}(\tau) = \sum_{\tau \in \Sigma_{n-1}} \varepsilon_\sigma^\tau \left(\sum_{\eta \in \Sigma_{n-2}} \varepsilon_\tau^\eta \cdot \eta\right) \\ &= \sum_{\eta \in \Sigma_{n-2}} \left(\sum_{\tau \in \Sigma_{n-1}, \eta \subseteq \tau \subseteq \sigma} \varepsilon_\tau^\eta \cdot \varepsilon_\sigma^\tau\right) \eta \\ &\stackrel{\text{Lemma 3.8}}{=} 0 \end{aligned}$$

3.8 Lemma

Sei σ ein n -Simplex. Sei $\eta \subseteq \sigma$ ein $(n-2)$ -Simplex. Dann gibt es genau zwei $(n-1)$ -Simplizes τ, τ' von K , die eine Seite von σ sind und η als Seite enthalten. Es gilt

$$\varepsilon_{\tau}^{\eta} \cdot \varepsilon_{\sigma}^{\tau} = -\varepsilon_{\tau'}^{\eta} \cdot \varepsilon_{\sigma}^{\tau'}$$

Beweis

Sei $\sigma = \{v_0, \dots, v_n\}$ mit $v_0 < v_1 < \dots < v_n$. Dann ist $\eta = \{v_0, \dots, v_n\} \setminus \{v_i, v_j\}$ mit $i < j$. Dann sind $\tau = \{v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n\}$ und $\tau' = \{v_0, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n\}$ die gesuchten $(n-1)$ -Simplizes und es gilt

$$\varepsilon_{\sigma}^{\tau} = (-1)^i, \quad \varepsilon_{\sigma}^{\tau'} = (-1)^j, \quad \varepsilon_{\tau}^{\eta} = (-1)^{j-1}, \quad \varepsilon_{\tau'}^{\eta} = (-1)^i \quad \square$$

3.9 Notation

Für $\sigma \in \Sigma_n$, $\sigma = \{v_0, \dots, v_n\}$ mit $v_0 < \dots < v_n$ schreiben wir

$$\delta^j \sigma := \{v_0, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n\} \in \Sigma_{n-1}$$

Dann ist $\partial_n(\sigma) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \cdot \delta^j \sigma$.

3.10 Definition

Sei K ein geordneter simplizialer Komplex. Der **n -te Homologiemodul** von K über R ist definiert als

$$H_n(K; R) := \frac{\ker \partial_n : C_n(K; R) \rightarrow C_{n-1}(K; R)}{\operatorname{Im} \partial_{n+1} : C_{n+1}(K; R) \rightarrow C_n(K; R)}$$

Für $n = 0$ interpretieren wir ∂_0 als die Nullabbildung. Daher gilt

$$H_0(K; R) = \frac{C_0(K; R)}{\operatorname{Im} \partial_1 : C_1(K; R) \rightarrow C_0(K; R)}$$

3.11 Beispiele

- (1) Sei $K = \bullet$. Dann ist $C_0(K; R) \cong R$ und $C_i(K; R) = 0$ für $i > 0$. Weiter ist $H_0(K; R) = C_0(K; R) \cong R$ und $H_i(K; R) = 0$ für $i > 0$.
- (2) Seien nun $K = K_n$ das n -Eck, wobei $n \geq 3$. Also

$$\begin{aligned} \Sigma_0 &= \{\tau_1 = \{1\}, \tau_2 = \{2\}, \dots, \tau_n = \{n\}\} \\ \Sigma_1 &= \{\sigma_1 = \{1, 2\}, \dots, \sigma_{n-1} = \{n_1, n\}, \sigma_n = \{n, 1\}\} \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} C_0(K; R) &= R[\Sigma_0] \cong R^n \\ C_1(K; R) &= R[\Sigma_1] \cong R^n \\ C_i(K; R) &= 0 \text{ für } i > 1, \text{ insbesondere } H_i(K; R) = 0 \text{ für } i > 1 \end{aligned}$$

Es ist dann $\partial_2 = \partial_3 = \dots = 0$. Interessant ist $\partial_1 : C_1(K; R) \rightarrow C_0(K; R)$, denn es gilt

$$\partial_1(\sigma_i) = \begin{cases} \tau_{i+1} - \tau_i, & \text{falls } i = 1, \dots, n-1 \\ \tau_n - \tau_1, & \text{falls } i = n \end{cases}$$

Mit $\sigma'_1 := \sigma_1, \sigma'_2 := \sigma_2, \dots, \sigma'_{n-1} := \sigma_{n-1}$ und $\sigma'_n := -\sigma_n$ gilt dann

$$\partial_1(\sigma'_i) = \tau_{i+1} - \tau_i$$

mit der Konvention $\tau_{n+1} = \tau_1$. Also gilt

$$\partial_1\left(\sum_{i=1}^n r_i \sigma'_i\right) = \sum_{i=1}^n r_i (\tau_{i+1} - \tau_i) = \sum_{i=1}^n (r_{i-1} - r_i) \tau_i$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \ker \partial_1 &= \left\{ \sum_{i=1}^n r_i \cdot \sigma'_i \mid r_1 = r_2 = \dots = r_n \right\} \subseteq C_1(K; R) \\ \operatorname{Im} \partial_1 &= \left\{ \sum_{i=1}^n s_i \cdot \tau_i \mid \sum_{i=1}^n s_i = 0 \right\} \subseteq C_0(K; R) \end{aligned}$$

Ist $\sum_{i=1}^n s_i = 0$, so folgt für $r_n = 0, r_1 = -s_1, r_2 = -s_1 - s_2, \dots, r_{n-1} = -s_1 - s_2 - \dots - s_{n-1}$

$$\partial_1\left(\sum_{i=1}^n r_i \sigma'_i\right) = \sum_{i=1}^n s_i \tau_i$$

Es folgt $[K] \in H_1(K; R) = \ker \partial_1 / \operatorname{Im} \partial_2 = \ker \partial_1 \cong R \ni 1$ und

$$[\tau_i] = [p] \in H_0(K; R) = \ker \partial_0 / \operatorname{Im} \partial_1 = R[\Sigma_0] / \{\sum_{i=1}^n s_i \tau_i \mid \sum_{i=1}^n s_i = 0\} \cong R \ni 1$$

(via $\sum_{i=1}^n s_i \tau_i \mapsto \sum_{i=1}^n s_i$ und Homomorphiesatz)

3.12 Definition

Sei R ein Ring. Ein **R-Kettenkomplex** (C_*, d_*) ist eine Folge von R -Moduln $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zusammen mit R -linearen Abbildungen $(d_n : C_n \rightarrow C_{n-1})_{n \geq 1}$, so dass $d_n \circ d_{n+1} = 0$. Die d_n heißen die **Randabbildungen** von (C_*, d_*) , die C_n die **Kettenmoduln**. Die **n-te Homologie** eines Kettenkomplexes (C_*, d_*) ist definiert als

$$H_n(C_*, d_*) := \frac{\ker d_n : C_n \rightarrow C_{n-1}}{\operatorname{Im} d_{n+1} : C_{n+1} \rightarrow C_n}$$

3.13 Bemerkung

- (i) Oft werden auch Kettenkomplexe betrachtet, die \mathbb{Z} statt \mathbb{N} verwenden.
- (ii) Ein Kettenkomplex (C_*, d_*) heißt endlich erzeugt, wenn alle C_n endlich erzeugte R -Moduln sind und $C_n \neq 0$ nur für endlich viele n ist.

3.14 Definition

Zu einem geordneten simplizialen Komplex K heißt $(C_*(K; R), \partial_*)$ der **simpliziale Kettenkomplex** von K über R .

Bemerkung

Ist K endlich, so ist $(C_*(K; R), \partial_*)$ endlich erzeugt.

4 Euler-Charakteristik von Kettenkomplexen

4.1 Wiederholung

Sei A eine abelsche Gruppe. Dann ist

$$TA := \left\{ a \in A \mid \exists n \geq 1 : n \cdot a = \underbrace{a + \dots + a}_{n\text{-mal}} = 0 \right\}$$

die **Torsionsgruppe** von A . Ist A endlich erzeugt, so ist auch TA endlich erzeugt und es gibt Primzahlpotenzen $p_1^{n_1}, \dots, p_k^{n_k}$ mit

$$TA \cong \mathbb{Z}/(p_1^{n_1}) \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/(p_k^{n_k})$$

abelsche Gruppen
sind \mathbb{Z} -Moduln

Weiter gibt es dann n mit $A \cong \mathbb{Z}^n \oplus TA$. $\text{Rg } A := n$ ist der **Rang** von A .

4.2 Lemma

Sei A eine endlich erzeugte abelsche Gruppe. Dann gilt $\text{Rg } A = \max\{m \mid \exists C \leq A, C \cong \mathbb{Z}^m\}$.

Beweis

Da $A \cong \mathbb{Z}^n \oplus TA$ ist, genügt zu zeigen: Ist $\varphi : \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^n \oplus TA$ ein injektiver Gruppenhomomorphismus, so ist $m \leq n$. Schreibe $\varphi = \varphi_0 \oplus \varphi_1$, also $\varphi(a) = \varphi_0(a) + \varphi_1(a)$ mit $\varphi_0 : \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^n$, $\varphi_1 : \mathbb{Z}^m \rightarrow TA$.

Behauptung: φ_0 ist injektiv. Zu $v \in \mathbb{Z}^m$ wähle $k \geq 1$ mit $k \cdot \varphi_1(v) = 0 \in TA$. Dann ist $\varphi_1(kv) = k\varphi_1(v) = 0$. Ist $v \neq 0$, so ist $k \cdot v \neq 0 \in \mathbb{Z}^m$, also ist $\varphi(kv) \neq 0$ und damit $\varphi_0(kv) \neq 0$. Es folgt $\varphi_0(v) \neq 0$, da sonst $\varphi_0(k \cdot v) = k \cdot \varphi_0(v) = 0$. Damit ist die Behauptung gezeigt.

Gruppenhomomorphismen $\varphi_0 : \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^n$ werden durch $n \times m$ -Matrizen beschrieben: Es gibt $A = (a_{ij}) \in \mathbb{Z}^{n \times m}$ mit

$$\varphi_0 \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m a_{1j} z_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m a_{nj} z_j \end{pmatrix}$$

Ist $m > n$, so hat A , aufgefasst als Matrix über \mathbb{Q} , einen Kern. Es gibt also einen Vektor $w = \begin{pmatrix} a_1/b_1 \\ \vdots \\ a_m/b_m \end{pmatrix}$ mit $Aw = 0$, $w \neq 0$. Dann ist $(b_1, \dots, b_m) \cdot w \in \mathbb{Z}^m$ und

$$\varphi_0((b_1, \dots, b_m) \cdot w) = A \cdot ((b_1, \dots, b_m) \cdot w) = (b_1, \dots, b_m) \cdot A \cdot w = 0$$

Also gilt $m \leq n$. □

4.3 Definition

Seien M_0, M_1, M_2 R -Moduln und $f_0 : M_0 \rightarrow M_1$, $f_1 : M_1 \rightarrow M_2$ R -lineare Abbildungen. Dann heißt

$$M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \quad (*)$$

eine **kurze exakte Sequenz**, wenn gilt:

- (i) f_0 ist injektiv, (ii) $\text{Im } f_0 = \ker f_1$, (iii) f_1 ist surjektiv.

Bemerkung

Oft sagt man $M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} M_2$ ist exakt in M_1 , wenn $\text{Im } f_0 = \ker f_1$ ist. Dann ist $(*)$ eine kurze exakte Folge, wenn

$$0 \longrightarrow M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \longrightarrow 0$$

exakt in M_0, M_1 und M_2 ist.

4.4 Beispiele

1)

$$\begin{aligned} M_0 &\xrightarrow{i} M_0 \oplus M_1 \xrightarrow{p} M_1 \\ v_0 &\xrightarrow{i} (v_0, 0) \quad (v_0, v_1) \xrightarrow{p} v_1 \end{aligned}$$

ist eine kurze exakte Folge.

2) $\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist eine kurze exakte Folge.

4.5 Bemerkung

Eine **Spaltung** für eine kurze exakte Folge $M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} M_2$ ist eine R -lineare Abbildung $s : M_2 \rightarrow M_1$ mit $f_1 \circ s = \text{id}_{M_2}$. In diesem Fall erhalten wir einen Isomorphismus $M_0 \oplus M_2 \rightarrow M_1, (v_0, v_2) \mapsto f_0(v_0) + s(v_2)$.

Injektivität: Sei $(v_0, v_2) \in M_0 \oplus M_2$ mit $f_0(v_0) + s(v_2) = 0$. Dann gilt

$$0 = f_1(f_0(v_0) + s(v_2)) = v_2 \implies f_0(v_0) = 0 \implies v_0 = 0$$

Surjektivität: Sei $v_1 \in M_1$. Betrachte $v_2 := f_1(v_1)$. Dann ist $v_1 - s(v_2) \in \ker f_1 = \text{Im } f_0$, also gibt es v_0 in M_0 mit $f_0(v_0) = v_1 - s(v_2)$. Damit ist $v_1 = f_0(v_0) + s(v_2)$.

4.6 Bemerkung

1) $\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ spaltet nicht.

2) Ist $M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} M_2$ eine kurze exakte Folge mit M_2 frei, also $M_2 \cong R[S]$, so spaltet (\star) . Siehe Lemma 3.2. Insbesondere ist $M_1 \cong M_0 \oplus M_2$.

Moduln mit dieser Eigenschaft bezeichnet man als **projektiv**. Freie Moduln sind also projektiv.

4.7 Bemerkung

Der Rang für alle endlich erzeugten abelschen Gruppen ist additiv:

$$\text{Rg}(A \oplus B) = \text{Rg } A + \text{Rg } B,$$

da $A \cong \mathbb{Z}^{\text{Rg } A} \oplus TA, B \cong \mathbb{Z}^{\text{Rg } B} \oplus TB$, also

$$A \oplus B \cong \mathbb{Z}^{\text{Rg } A + \text{Rg } B} \oplus \underbrace{TA \oplus TB}_{=T(A \oplus B)}$$

4.8 Proposition

Der Rang von endlich erzeugten abelschen Gruppen ist additiv für kurze exakte Folgen: Ist

$$A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \quad [\star]$$

eine kurze exakte Folge von endlich erzeugten abelschen Gruppen, so gilt $\text{Rg } B = \text{Rg } A + \text{Rg } C$.

Beweis

Spaltet $[\star]$, so ist $B \cong A \oplus C$ und die Behauptung folgt aus der Bemerkung 4.7.

Wir können annehmen, dass $C = \mathbb{Z}^n \oplus TC$ gilt. Wir erhalten folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xhookrightarrow{i} & p^{-1}(\mathbb{Z}^n) & \xrightarrow{p} & \mathbb{Z}^n \\
 \parallel & & \downarrow i'' & & \downarrow i' \\
 A & \xhookrightarrow{i} & B & \xrightarrow{p} & C \\
 & & \downarrow p'' & & \downarrow p' \\
 & & B/p^{-1}(\mathbb{Z}^n) & \xrightarrow{p' \circ p} & TC
 \end{array} \quad [\star]$$

Ist $p' \circ p(b) = 0$, so gibt es $v \in \mathbb{Z}^n$ mit $i'(v) = p(b)$. Nun gibt es $v' \in p^{-1}(\mathbb{Z}^n)$ mit $p(v') = v$. Es folgt

$$p(i''(v')) = p(b)$$

also $i''(v') - b \in \ker p = i(A)$. Da $i(A) \subseteq i''(p^{-1}(\mathbb{Z}^n))$, folgt $b \in i''(p^{-1}(\mathbb{Z}^n))$. In dem Diagramm sind die Spalten und Zeilen exakt. Da \mathbb{Z}^n frei ist, spaltet $A \xhookrightarrow{i} p^{-1}(\mathbb{Z}^n) \xrightarrow{p} \mathbb{Z}^n$ und es gilt

$$\text{Rg } A + \text{Rg } C = \text{Rg } A + n = \text{Rg}(p^{-1}(\mathbb{Z}^n))$$

Es bleibt zu zeigen: $\text{Rg } B = \text{Rg}(p^{-1}(\mathbb{Z}^n))$.

Nebenbei: Ist $A' \subseteq B'$, so gilt $\text{Rg } A' \leq \text{Rg } B'$, denn

$$\text{Rg } A' = \max\{n' \mid \mathbb{Z}^{n'} \cong C' \leq A'\} \leq \max\{n' \mid \mathbb{Z}^{n'} \cong C' \leq B'\} = \text{Rg } B'.$$

Betrachte die kurze exakte Folge $p^{-1}(\mathbb{Z}^n) \longrightarrow B \longrightarrow B/p^{-1}(\mathbb{Z}^n)$. Wegen $B/p^{-1}(\mathbb{Z}^n) \cong TC$ gibt es ein k mit $k \cdot (b + p^{-1}(\mathbb{Z}^n)) = 0$ für alle $b \in B$. Also $k \cdot b \in p^{-1}(\mathbb{Z}^n)$. Es folgt $kB \subseteq p^{-1}(\mathbb{Z}^n)$. Ist $B \cong \mathbb{Z}^{\text{Rg } B} + TB$, so ist $kB \cong (k\mathbb{Z})^{\text{Rg } B} + T(kB)$ und $\text{Rg } kB = n = \text{Rg } B$. Mit der Nebenbemerkung folgt $\text{Rg } p^{-1}(\mathbb{Z}^n) = \text{Rg } B$ aus $kB \subseteq p^{-1}(\mathbb{Z}^n) \subseteq B$. \square

Beweis mit Tensorprodukten (Skizze)

- $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z}\text{-Mod} \rightarrow \mathbb{Q}\text{-VR}$ ist ein Funktor.
- $\text{Rg } A = \dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} A)$
 - (a) $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} (X \oplus Y) = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} X \oplus \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} Y$
 - (b) $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^n \cong \mathbb{Q}^n$
 - (c) $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} T \cong 0$ für T ein Torsionsmodul.
- Ist $A \longrightarrow B \longrightarrow C$ eine kurze exakte Folge, so ist auch

$$\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} A \longrightarrow \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} B \longrightarrow \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} C$$

eine kurze exakte Folge.

- Jede kurze exakte Folge $V_0 \longrightarrow V_1 \longrightarrow V_2$ von \mathbb{Q} -Vektorräumen spaltet und daher gilt $V_1 \cong V_0 \oplus V_2$ und $\dim_{\mathbb{Q}}(V \oplus W) = \dim_{\mathbb{Q}}(V) + \dim_{\mathbb{Q}}(W)$.

4.9 Definition

Sei (C_*, d_*) ein endlich erzeugter \mathbb{Z} -Kettenkomplex.

$$\chi(C_*) := \sum_{i=0}^{\infty} \operatorname{Rg}(C_i) = \sum_{i=0}^{n_0} \operatorname{Rg}(C_i)$$

heißt die **Eulercharakteristik** von (C_*, d_*) . Dabei ist n_0 so gewählt, dass $C_n = 0$ für alle $n > n_0$.

4.10 Satz

Sei (C_*, d_*) ein endlich erzeugter \mathbb{Z} -Kettenkomplex. Dann gilt

$$\chi(C_*) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \operatorname{Rg} H_i(C_*, d_*).$$

Beweis

Sei $B_{n+1} := \operatorname{Im} d_{n+1} : C_{n+1} \rightarrow C_n$ und $Z_n := \ker d_n : C_n \rightarrow C_{n-1}$. Also $H_n(C_*, d_*) = Z_n / B_{n+1}$. Als Untermoduln von C_n sind Z_n und B_n endlich erzeugt (LA2). Insbesondere ist auch $H_n(C_*, d_*)$ endlich erzeugt und der Rang somit definiert. Auch B_{n+1} ist Untermodul des endlich erzeugten \mathbb{Z} -Moduls C_n und somit endlich erzeugt. Wir erhalten kurze exakte Folgen:

$$\begin{aligned} B_{n+1} &\hookrightarrow Z_n \twoheadrightarrow H_n(C_*, d_*) \\ Z_n &\hookrightarrow C_n \twoheadrightarrow B_n \end{aligned}$$

Folglich gilt $\operatorname{Rg} Z_n = \operatorname{Rg} B_{n+1} + \operatorname{Rg} H_n(C_*, d_*)$ und $\operatorname{Rg} C_n = \operatorname{Rg} Z_n + \operatorname{Rg} B_n$. Also gilt

$$\begin{aligned} \chi(C_*) &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \operatorname{Rg} C_i = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i (\operatorname{Rg} Z_i + \operatorname{Rg} B_i) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i (\operatorname{Rg} H_i(C_*, d_*) + \operatorname{Rg} B_{i+1} + \operatorname{Rg} B_i) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \operatorname{Rg} H_i(C_*, d_*) + \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \operatorname{Rg} B_{i+1} + \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \operatorname{Rg} B_i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \operatorname{Rg} H_i(C_*, d_*) \quad \square \end{aligned}$$

4.11 Korollar

Sei K ein endlicher, geordneter simplizialer Kettenkomplex. Dann gilt

$$\chi(K) = \sum_{i=1}^{\dim K} (-1)^i \operatorname{Rg} H_i(K; \mathbb{Z})$$

Beweis

Wende den Satz 4.10 auf den simplizialen Kettenkomplex von K an. Da

$$\operatorname{Rg} C_n(K; \mathbb{Z}) = \operatorname{Rg} \mathbb{Z}[\Sigma_n] = \# \text{ } n\text{-Simplizes in } K$$

ist

$$\chi(K) = \chi(C_*(K; \mathbb{Z}), \partial_*) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \operatorname{Rg} H_i(C_*(K; \mathbb{Z}), \partial_*) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \operatorname{Rg} H_i(K; \mathbb{Z}) \quad \square$$

5 Singuläre Homologie

5.1 Definition

Sei X ein topologischer Raum. Sei $S_n(X)$ die Menge aller stetigen Abbildungen $\sigma : |\Delta^n| \rightarrow X$. Elemente von $S_n(X)$ heißen **singuläre Simplizes** in X . Sei R ein Ring. Der **n -te (singuläre) Kettenmodul** von X über R ist

$$C_n(X; R) := R[S_n(X)]$$

5.2 Definition

Für $\sigma \in S_n(X)$ und $j \in \{0, \dots, n\}$ sei $\delta_j \sigma \in S_{n-1}(X)$ die Einschränkung von σ auf die j -te Seite von $|\Delta^n|$, also $\delta_j(\sigma) = \sigma \circ \iota_{n,j}$, wobei $\iota_{n,j} : |\Delta^{n-1}| \rightarrow |\Delta^n|$ die Inklusion der j -ten Seite ist:

$$\iota_{n,j}(x_0, \dots, x_{n-1}) = (x_0, \dots, x_{j-1}, 0, x_j, \dots, x_{n-1})$$

5.3 Bemerkung

Es gilt $\iota_{n,j} = |i_{n,j}|$ wobei $i_{n,j} : \Delta^{n-1} \rightarrow \Delta^n$ gegeben ist durch

$$i_{n,j}(k) = \begin{cases} k, & \text{falls } k < j \\ k+1, & \text{falls } k \geq j \end{cases}$$

vergleiche Blatt 2,
Aufgabe 2

5.4 Definition

Die **n -te singuläre Randabbildung** $\partial_n : C_n(X; R) \rightarrow C_{n-1}(X; R)$ ist definiert durch

$$\partial_n(\sigma) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \cdot \delta_j(\sigma).$$

5.5 Proposition

$$\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$$

Beweis (mit Lemma 5.6)

$$\begin{aligned} \partial_{n-1} \partial_n(\sigma) &= \partial_{n-1} \left(\sum_{j=0}^n (-1)^j \delta_j(\sigma) \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^n (-1)^{j+k} \delta_k \delta_j(\sigma) \\ &= \sum_{0 \leq k < j \leq n} (-1)^{k+j} \delta_k \delta_j(\sigma) + \sum_{0 \leq j \leq k \leq n-1} (-1)^{k+j} \delta_k \delta_j(\sigma) \\ &\stackrel{\text{Lemma 5.6}}{=} \sum_{0 \leq k < j \leq n} (-1)^{k+j} \delta_k \delta_j(\sigma) + \sum_{0 \leq j \leq k \leq n-1} (-1)^{k+j} \delta_j \delta_{k+1}(\sigma) \\ &= \sum_{0 \leq k < j \leq n} (-1)^{k+j} \delta_k \delta_j(\sigma) + \sum_{0 \leq j < k \leq n} (-1)^{k-1+j} \delta_j \delta_k(\sigma) \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

5.6 Lemma

Für $0 \leq j \leq k \leq n-1$ und $\sigma \in S_n(X)$ ist $\delta_k \delta_j(\sigma) = \delta_j \delta_{k+1}(\sigma)$.

Beweis

Es ist

$$\begin{aligned}\delta_k(\delta_j(\sigma))(x_0, \dots, x_{n-2}) &= \delta_j(\sigma)(x_0, \dots, x_{k-1}, 0, x_k, \dots, x_{n-2}) \\ &= (x_0, \dots, x_{j-1}, 0, x_j, \dots, x_{k-1}, 0, x_k, \dots, x_{n-2})\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\delta_j\delta_{k+1}(\sigma)(x_0, \dots, x_{n-2}) &= \delta_{k+1}(\sigma)(x_0, \dots, x_{j-1}, 0, x_j, \dots, x_{n-2}) \\ &= (x_0, \dots, x_{j-1}, 0, x_j, \dots, x_{k-1}, 0, x_k, \dots, x_{n-2})\end{aligned}\quad \square$$

5.7 Definition

Sei X ein topologischer Raum. Die Homologie des **singulären Kettenkomplex** über R , $(C_*(X; R), \partial_*)$, heißt die **singuläre Homologie von X** mit Koeffizienten in R :

$$H_n(X; R) := H_n(C_*(X; R), \partial_*)$$

Für $R = \mathbb{Z}$ schreiben wir kürzer $C_*(X) := C_*(X; \mathbb{Z})$ und $H_n(X) := H_n(X; \mathbb{Z})$.

5.8 Definition

- Die Elemente von $C_n(X; R)$ heißen **n-Ketten**.
- Die Elemente von $\text{Im } \partial_{n+1} \subseteq C_n(X; R)$ heißen **n-Ränder**.
- Die Elemente von $\ker \partial_n \subseteq C_n(X; R)$ heißen **n-Zykel**.

Jeder n -Zykel $\sigma \in C_n(X; R)$ bestimmt eine **Homologieklass** $[\sigma] := \sigma + \text{Im } \partial_{n+1} \in H_n(X; R)$.

5.9 Beispiel

Ist $X = \{x_0\}$ der Ein-Punkt-Raum, so ist

$$H_*(\{x_0\}; R) \cong \begin{cases} R, & \text{falls } * = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis

Es gibt für jedes n genau eine Abbildung, nämlich die konstante, $\sigma_n : |\Delta^n| \rightarrow \{x_0\}$ und diese ist stetig. Also $C_n(\{x_0\}; R) = R[\sigma_n]$. Für alle j ist $\delta_j\sigma_n = \sigma_{n-1}$. Daher ist

$$\partial_n(\sigma_n) = \begin{cases} 0, & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \sigma_{n-1}, & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

Der singuläre Kettenkomplex von $\{x_0\}$ hat also folgende Gestalt:

$$\begin{array}{ccccccc} C_0(\{x_0\}; R) & \xleftarrow{0} & C_1(\{x_0\}; R) & \xleftarrow{\cong} & C_2(\{x_0\}; R) & \xleftarrow{0} & C_3(\{x_0\}; R) & \xleftarrow{\cong} & \dots \\ R & \xleftarrow{0} & R & \xleftarrow{\text{id}} & R & \xleftarrow{0} & R & \xleftarrow{\text{id}} & R \end{array}$$

Es folgt

$$H_n(\{x_0\}; R) \cong \begin{cases} R, & \text{falls } n = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}\quad \square$$

5.10 Proposition

- 1) Ist $X \neq \emptyset$, so ist $H_0(X) \neq 0$.
- 2) Ist X wegzusammenhängend, so gilt $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$

Beweis

- 1) Sei $\varepsilon : C_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ definiert durch $\varepsilon\left(\sum_{\sigma \in S_0(X)} r_\sigma \cdot \sigma\right) := \sum_{\sigma} r_\sigma$. Dann ist $\varepsilon \circ \partial_1 : C_1(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ trivial, denn für $\sigma \in S_1(X)$ ist $\varepsilon \circ \partial_1(\sigma) = \varepsilon(\delta_0\sigma - \delta_1\sigma) = 0$. Daher induziert ε eine Abbildung $\bar{\varepsilon} : H_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$. Da $X \neq \emptyset$ ist, gibt es einen singulären 0-Simplex $\sigma : |\Delta^0| \rightarrow X$. Für σ gilt $\bar{\varepsilon}([\sigma]) = 1$ und daher ist $\bar{\varepsilon}$ surjektiv und $H_0(X) \neq 0$.
- 2) Wir zeigen: $\bar{\varepsilon} : H_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ ist ein Isomorphismus, falls X wegzusammenhängend ist. Dazu zeigen wir $\ker \varepsilon = \text{Im } \partial_1$. Dazu definieren wir $s : C_0(X) \rightarrow C_1(X)$ wie folgt: Sei σ_0 ein fest gewählter singulärer 0-Simplex. Zu $\sigma \in S_0(X)$ gibt es, da X wegzusammenhängend ist, $s(\sigma) \in S_1(X)$ mit $\delta_0 s(\sigma) = \sigma$, $\delta_1 s(\sigma) = \sigma_0$. Es gilt nun

$$\partial_1 \circ s(\sigma) = \sigma - \sigma_0 = (\text{id}_{C_0(X)} - i \circ \varepsilon)(\sigma)$$

wobei $i : \mathbb{Z} \rightarrow C_0(X)$, $n \mapsto n \cdot \sigma_0$. Ist nun $v \in \ker \varepsilon$, so folgt

$$\partial_1 \circ s(v) = v - \underbrace{i \circ \varepsilon(v)}_{=0} = v$$

also $v \in \text{Im } \partial_1$. □

5.11 Bemerkung

Sei $K = (V, \Sigma)$ ein geordneter simplizialer Komplex. Sei $\sigma = \{v_0, \dots, v_n\} \in \Sigma_n$ ein n -Simplex von K mit $v_0 < v_1 < \dots < v_n$. Wir ordnen σ den singulären n -Simplex $f_\sigma : |\Delta^n| \rightarrow |K|$ zu, wobei

$$f_\sigma\left(\sum_{i=0}^n t_i e_i\right) = \sum_{i=0}^n t_i v_i.$$

Nun erhalten wir eine Abbildung

$$C_*(K; R) \rightarrow C_*(|K|, R) \quad , \quad \sum_{\sigma \in \Sigma_n} r_\sigma \cdot \sigma \mapsto \sum_{\sigma \in \Sigma_n} r_\sigma \cdot f_\sigma.$$

Diese Abbildung induziert(!) eine weitere Abbildung $H_*(K; R) \xrightarrow{\cong} H_*(|K|; R)$ von der wir später zeigen werden, dass sie ein Isomorphismus ist.

6 Funktorialität

6.1 Definition

Seien (C_*, d_*) und (C'_*, d'_*) zwei R -Kettenkomplexe. Eine **R -Kettenabbildung** $f_*: (C_*, d_*) \rightarrow (C'_*, d'_*)$ ist eine Folge von R -linearen Abbildungen $f_n: C_n \rightarrow C'_n$, sodass

$$d'_n \circ f_n = f_{n-1} \circ d_n$$

für alle $n \geq 1$ gilt. Also kommutiert folgendes Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} C_0 & \xleftarrow{d_1} & C_1 & \xleftarrow{d_2} & C_2 & \xleftarrow{d_3} & C_3 \xleftarrow{\quad} \dots \\ \downarrow f_0 & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 \\ C'_0 & \xleftarrow{d'_1} & C'_1 & \xleftarrow{d'_2} & C'_2 & \xleftarrow{d'_3} & C'_3 \xleftarrow{\quad} \dots \end{array}$$

6.2 Bemerkung

Ist $f_*: (C_*, d_*) \rightarrow (C'_*, d'_*)$ eine Kettenabbildung, so erhalten wir eine induzierte Abbildung auf Homologie $H_n(f_*): H_n(C_*, d_*) \rightarrow H_n(C'_*, d'_*)$ durch

$$H_n(f_*)([v]) := [f_n(v)]$$

für $v \in \ker d_n$. Dies ist wohldefiniert, denn:

- $d'_n(f_n(v)) = f_{n-1}(d_n(v)) = 0$, also $f_n(v) \in \ker d'_n$ für $v \in \ker d_n$.
- Ist $[v] = [w]$, mit $v, w \in \ker d_n$, so gibt es $x \in C_{n+1}$ mit $d_{n+1}(x) = v - w$. Dann ist

$$d'_{n+1}(f_{n+1}(x)) = f_n(d_{n+1}(x)) = f_n(v) - f_n(w)$$

also $[f_n(v)] = [f_n(w)] \in H_n(C'_*, d'_*)$.

6.3 Bemerkung

a) R -Kettenkomplexe mit Kettenabbildungen bilden die Kategorie $R\text{-KETTEN}$.

b) Homologie definiert nun einen Funktor: $H_n: R\text{-KETTEN} \rightarrow R\text{-MOD}$.

Es gilt $H_n(\text{id}_{(C_*, d_*)}) = \text{id}_{H_n(C_*, d_*)}$ und $H_n(f \circ g) = H_n(f) \circ H_n(g)$, da

$$H_n(f \circ g)([v]) = [f_n \circ g_n(v)] = [f_n(g_n(v))] = H_n(f)([g_n(v)]) = H_n(f)(H_n(g)(v))$$

c) Definiert man die Kategorie der **graduierten** R -Moduln als die Kategorie, deren Objekte Folgen $(V_n)_n$ von R -Moduln sind und deren Morphismen Folgen von R -linearen Abbildungen $(f_n)_n$ sind, so kann man die H_n , $n \in \mathbb{N}$ zu einem Funktor

$$H_*: R\text{-KETTEN} \longrightarrow \text{GR-}R\text{-MOD} \quad , \quad (C_*, d_*) \longmapsto (H_n(C_*, d_*))_n$$

zusammensetzen.

6.4 Definition

Sei $f: X \rightarrow Y$ stetig. Wir definieren $C_n(f; R): C_n(X; R) \rightarrow C_n(Y; R)$ durch

$$C_n(f; R) \left(\sum_{\sigma \in S_n(X)} r_\sigma \cdot \sigma \right) := \sum_{\sigma \in S_n(X)} r_\sigma \cdot (f \circ \sigma)$$

Dies ist wohldefiniert, denn für $\sigma \in S_n(X)$ ist $f \circ \sigma \in S_n(Y)$.

6.5 Proposition

Mit dieser Definition von $C_*(f; R)$ wird der singuläre Kettenkomplex über R zu einem Funktor

$$C_*(-; R): \text{TOP} \rightarrow R\text{-KETTEN}$$

Beweis

(i) $C_*(f; R)$ ist eine R -Kettenabbildung: Es gilt

$$\begin{aligned} C_{n-1}(f; R) \circ \partial_n(\sigma) &= C_{n-1}(f; R) \left(\sum_{l=0}^n (-1)^l \sigma \circ \iota_{n,l} \right) = \sum_{l=0}^n (-1)^l (f \circ \sigma) \circ \iota_{n,l} \\ &= \partial_n(f \circ \sigma) = \partial(C_n(f; R)(\sigma)). \end{aligned}$$

(ii) Zu zeigen: $C_*(f \circ g; R) = C_*(f; R) \circ C_*(g; R)$. Es gilt

$$C_n(f \circ g; R)(\sigma) = f \circ (g \circ \sigma) = C_n(f; R)(g \circ \sigma) = C_n(f; R)(C_n(g; R)(\sigma)).$$

(iii) Zu zeigen: $C_*(\text{id}_X; R) = \text{id}_{C_*(X; R)}$. Es gilt

$$C_n(\text{id}_X; R)(\sigma) = \text{id}_X \circ \sigma = \sigma$$

□

6.6 Korollar

Mit $H_n(f; R) := H_n(C_*(f; R))$ wird $H_n(-; R)$ zu einem Funktor: $H_n(-; R): \text{TOP} \rightarrow R\text{-MOD}$.

Beweis

$H_n(-; R)$ ist die Komposition der Funktoren $C_*(-; R): \text{TOP} \rightarrow R\text{-KETTEN}$ und $H_*: R\text{-KETTEN} \rightarrow R\text{-MOD}$. □

6.7 Bemerkung

• Oft schreiben wir kurz $f_* = H_n(f; R)$.

• Für $\left[\sum_{\sigma \in S_n(X)} r_\sigma \sigma \right] \in H_n(X; R)$ ist $f_* \left(\left[\sum_{\sigma \in S_n(X)} r_\sigma \sigma \right] \right) = \left[\sum_{\sigma \in S_n(X)} r_\sigma f \circ \sigma \right] \in H_n(Y; R)$

6.8 Definition

Seien $X_i, i \in I$ topologische Räume. Mit

$$X := \coprod_{i \in I} X_i$$

bezeichnen wir die **Summe** (oder auch das **Koprodukt**) der X_i . Als Menge ist X die disjunkte Vereinigung der X_i . $U \subseteq X$ ist offen genau dann, wenn $X_i \cap U \subseteq X_i$ offen ist für jedes $i \in I$. Für jedes i_0 erhalten wir eine stetige Inklusion $j_{i_0}: X_{i_0} \rightarrow \coprod_i X_i$.

Bemerkung

Für jedes i_0 ist $X_{i_0} \subseteq \coprod_i X_i$ offen und abgeschlossen.

6.9 Definition

Seien $V_i, i \in I$ R -Moduln. Mit

$$V := \bigoplus_{i \in I} V_i$$

bezeichnen wir die **Summe** (oder auch das **Koprodukt**) der V_i . Elemente von V sind I -Folgen $(v_i)_{i \in I}$ mit $v_i \in V_i$ und $v_i = 0$ für alle bis auf endlich viele i . Die R -Modulstruktur ist erklärt durch:

$$(v_i)_{i \in I} + (w_i)_{i \in I} := (v_i + w_i)_{i \in I}, \quad r \cdot (v_i)_{i \in I} := (r \cdot v_i)_{i \in I}$$

Für jedes $i_0 \in I$ erhalten wir eine R -lineare Abbildung $j_{i_0}: V_{i_0} \rightarrow V$ mit

$$(j_{i_0}(v))_i = \begin{cases} v, & \text{falls } i = i_0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Bemerkung

Seien $V_i, i \in I$ R -Moduln. Sei W ein weiterer R -Modul. Dann gibt es zu jeder Folge $f_i: V_i \rightarrow W$ von R -linearen Abbildungen eine R -lineare Abbildung $\bigoplus_{i \in I} f_i: \bigoplus_{i \in I} V_i \rightarrow W$ mit

$$(\bigoplus_{i \in I} f_i)((v_i)_{i \in I}) = \sum_{i \in I} f_i(v_i)$$

Ist umgekehrt $f: \bigoplus_{i \in I} V_i \rightarrow W$ eine R -lineare Abbildung, so ist $f_i := f \circ j_i$ eine Folge von R -linearen Abbildungen mit $f = \bigoplus_{i \in I} f_i$.

6.10 Satz

Sei $X = \coprod_{i \in I} X_i$. Dann induzieren die Inklusionen $j_i: X_i \rightarrow X$ einen Isomorphismus

$$\bigoplus_{i \in I} H_n(X_i; R) \xrightarrow{\bigoplus_{i \in I} (j_i)_*} H_n(X; R)$$

Beweis

Da die $X_i \subseteq X$ offen und abgeschlossen sind und $|\Delta^n|$ zusammenhängend ist (sogar wegzusammenhängend), gibt es für jedes $\sigma: |\Delta^n| \rightarrow X$ ein eindeutiges i mit $\text{Im } \sigma \subseteq X_i$. Es gilt also $S_n(X) = \bigcup S_n(X_i)$. Daher induzieren die j_i einen Isomorphismus

$$\bigoplus_{i \in I} C_n(j_i; R): \bigoplus_{i \in I} C_n(X_i; R) \xrightarrow{\cong} C_n(X; R)$$

Da diese Isomorphismen mit den Randabbildungen vertauschen, erhalten wir einen Isomorphismus von R -Kettenkomplexen

$$\varphi := \bigoplus_{i \in I} C_*(j_i; R): \bigoplus_{i \in I} C_*(X_i; R) \xrightarrow{\cong} C_*(X; R)$$

Da $\bigoplus H_n(C_*(X_i; R)) \cong H_n(\bigoplus_{i \in I} C_*(X_i; R))$ induzieren dann auch die $(j_i)_*$ einen Isomorphismus

$$\bigoplus_{i \in I} (j_i)_*: \bigoplus_{i \in I} H_n(X_i; R) \xrightarrow{\cong} H_n(X; R)$$

□

7 Homotopieinvarianz

7.1 Bemerkung

Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Homöomorphismus. Dann ist

$$f_* : H_n(X; R) \longrightarrow H_n(Y; R)$$

ein Isomorphismus.

Beweis

Da Homologie ein Funktor ist, gilt

$$\begin{aligned} f_* \circ (f^{-1})_* &= (f \circ f^{-1})_* = (\text{id}_Y)_* = \text{id}_{H_n(Y; R)} & \text{und} \\ (f^{-1})_* \circ f_* &= (f^{-1} \circ f)_* = (\text{id}_X)_* = \text{id}_{H_n(X; R)} \end{aligned}$$

Also ist $(f_*)^{-1} = (f^{-1})_*$. Insbesondere ist f_* ein Isomorphismus. □

7.2 Definition

Eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt eine **Homotopieäquivalenz**, falls es eine stetige Abbildung $g : Y \rightarrow X$ gibt, so dass $g \circ f$ homotop zu id_X ist und $f \circ g$ homotop zu id_Y ist. g heißt dann eine **Homotopieinverse** zu f .

Bemerkung

- (i) f ist genau dann eine Homotopieäquivalenz, wenn $[f]$ in HTop invertierbar ist. In HTop ist dann $[f]^{-1} = [g]$.
- (ii) Die Homotopieinverse ist eindeutig bis auf Homotopie.

7.3 Satz

Seien $f, g : X \rightarrow Y$ stetige Abbildungen. Sind f und g homotop, so gilt $H_n(f; R) = H_n(g; R)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis

Siehe 7.8, sowie 7.13 □

7.4 Korollar

Ist $f : X \rightarrow Y$ eine Homotopieäquivalenz, so ist $f_* : H_n(X; R) \rightarrow H_n(Y; R)$ ein Isomorphismus.

Beweis

Sei $g : Y \rightarrow X$ ein Homotopieinverses zu f . Es folgt

$$\begin{aligned} f_* \circ g_* &\stackrel{\text{Funktor}}{=} (f \circ g)_* \stackrel{\text{Homotopieinvarianz}}{=} (\text{id}_Y)_* \stackrel{\text{Funktor}}{=} \text{id}_{H_n(Y; R)} \\ g_* \circ f_* &\stackrel{\text{Funktor}}{=} (g \circ f)_* \stackrel{\text{Homotopieinvarianz}}{=} (\text{id}_X)_* \stackrel{\text{Funktor}}{=} \text{id}_{H_n(X; R)} \end{aligned}$$

7.5 Korollar

Ist X **kontrahierbar**, d.h. es gibt eine Homotopie $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$ mit $H_0 = \text{id}_X$ und H_1 konstant, so gilt

$$H_n(X; R) \cong \begin{cases} R, & \text{falls } n = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis

Sei $\{x_0\} = \text{Im } H_1$. Dann ist die Inklusion $\{x_0\} \rightarrow X$ eine Homotopieäquivalenz. Also gilt nach 7.4

$$H_n(X; R) \cong H_n(\{x_0\}; R) \stackrel{5.9}{=} \begin{cases} R, & \text{falls } n = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad \square$$

Beispiel

$$H_n(\mathbb{R}^k; R) \cong \begin{cases} R, & \text{falls } n = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad H_n(D^k; R) \cong \begin{cases} R, & \text{falls } n = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

7.6 Definition

Seien (C_*, d_*) und (C'_*, d'_*) R -Kettenkomplexe. Seien $f_*, g_* : (C_*, d_*) \rightarrow (C'_*, d'_*)$ R -Kettenabbildungen. Eine **Kettenhomotopie** von f_* nach g_* ist eine Folge von R -linearen Abbildungen $h_n : C_n \rightarrow C'_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, sodass für alle n gilt:

$$d'_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ d_n = f_n - g_n$$

In diesem Fall heißen f_* und g_* **kettenhomotop**.

7.7 Proposition

Seien $f_*, g_* : (C_*, d_*) \rightarrow (C'_*, d'_*)$ Kettenabbildungen. Sind f_* und g_* kettenhomotop, so gilt für alle n

$$H_n(f_*) = H_n(g_*)$$

Beweis

Sei $x \in H_n(C_*, d_*)$. Also $x = [v]$ mit $v \in \ker d_n : C_n \rightarrow C_{n-1}$. Dann gilt, da $v \in \ker d_n$

$$\begin{aligned} H_n(f_*)(x) &= H_n(f_*)([v]) = [f_n(v)] = \left[g_n(v) + \underbrace{d'_{n+1} \circ h_n(v)}_{\in \text{Im } d'_{n+1}} + \underbrace{h_{n-1} \circ d_n(v)}_{=0} \right] \\ &= [g_n(v)] = H_n(g_*)([v]) = H_n(g_*)(x) \end{aligned} \quad \square$$

7.8 Lemma

Die Homotopieinvarianz von $H_n(-; R)$ folgt aus folgenden Spezialfall:

$$\text{Seien } i_0, i_1 : X \hookrightarrow X \times [0, 1] \text{ Inklusionen mit } i_0(x) = (x, 0), i_1(x) = (x, 1). \implies (i_0)_* = (i_1)_* \quad [\#]$$

Beweis

Sei $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ eine Homotopie zwischen $f, g : X \rightarrow Y$, also $f = H \circ i_0$ und $g = H \circ i_1$. Dann folgt mittels Funktorialität

$$f_* = (H \circ i_0)_* = H_* \circ (i_0)_* = H_* \circ (i_1)_* = (H \circ i_1)_* = g_* \quad \square$$

7.9 Bemerkung

Zum Beweis von $[\#]$ werden wir eine explizite Kettenhomotopie h_* zwischen $C_*(i_0; R)$ und $C_*(i_1; R)$ konstruieren. Wir brauchen also $h_n : C_n(X; R) \rightarrow C_{n+1}(X \times [0, 1]; R)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\partial_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ \partial_n = C_n(i_0; R) - C_n(i_1; R). \quad [\#\#]$$

"Ansatz"

Für $\sigma : |\Delta^n| \rightarrow X$ setze $h_n(\sigma) = \sigma \times \text{id}_{[0,1]} : |\Delta^n| \times [0,1] \rightarrow X \times [0,1]$. Dann ist " $h_{n-1}(\partial_n \sigma) = \partial_n \sigma \times \text{id}_{[0,1]}$ " und

$$\partial_{n+1}(h_n \sigma) = \partial_{n+1}(\sigma \times \text{id}_{[0,1]}) = (\sigma \times \text{id}) \Big|_{\partial(|\Delta^n| \times [0,1])} = \partial_n \sigma \times \text{id}_{[0,1]} + i_0 \sigma + i_1 \sigma$$

da $\partial(|\Delta^n| \times [0,1]) = \partial|\Delta^n| \times [0,1] \dot{\cup} |\Delta^n| \times \{0,1\}$.

Um daraus Sinn zu machen, zerlegen wir $|\Delta^n| \times [0,1]$ in eine Vereinigung von $(n+1)$ -Simplizes. $\Delta^n \times [0,1]$ hat die folgende Form für $n \in \{0,1,2\}$:

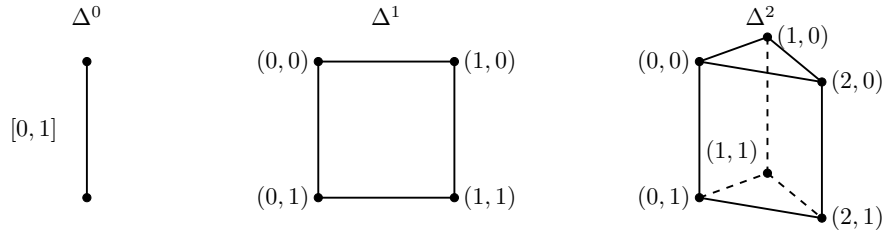


Abbildung 1: $\Delta^n \times [0,1]$ für $n = 0, 1, 2$

Die Zerlegung in 3-Simplizes ist für $\Delta^2 \times [0,1]$ gegeben durch

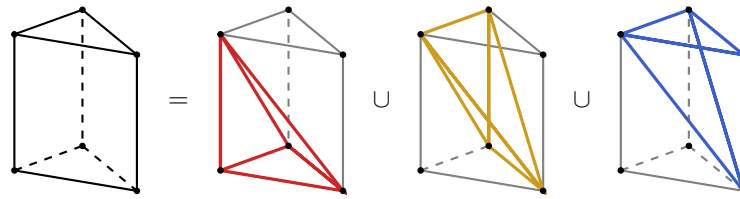


Abbildung 2: Zerlegung von $\Delta^2 \times [0,1]$ in 3-Simplizes

Diese verallgemeinern wir jetzt für beliebiges $n \in \mathbb{N}$:

7.10 Definition

Für $j = 0, \dots, n$ seien $k_{n,j} : |\Delta^{n+1}| \rightarrow |\Delta^n| \times [0,1]$ und $\iota_{n,j} : |\Delta^{n-1}| \rightarrow |\Delta^n|$ die eindeutigen affin linearen Abbildungen, für die gilt:

$$\begin{aligned} k_{n,j}(e_0) &= (e_0, 0) & \iota_{n,j}(e_0) &= e_0 \\ k_{n,j}(e_1) &= (e_1, 0) \dots & \iota_{n,j}(e_1) &= e_1 \dots \\ k_{n,j}(e_j) &= (e_j, 0) & \iota_{n,j}(e_{j-1}) &= e_{j-1} \\ k_{n,j}(e_{j+1}) &= (e_j, 1) \dots & \iota_{n,j}(e_j) &= e_{j+1} \dots \\ k_{n,j}(e_{n+1}) &= (e_n, 1) & \iota_{n,j}(e_{n-1}) &= e_n \end{aligned}$$

e_1, \dots, e_n sind
wieder die
Einheitsvektoren
von \mathbb{R}^n

7.11 Lemma

Es gelten folgende fünf Gleichungen für die Abbildungen $k_{n,j}$ und $\iota_{n,j}$:

- (i) Für $0 \leq l < j \leq n$ gilt $k_{n,j} \circ \iota_{n+1,l} = (\iota_{n,l} \times \text{id}_{[0,1]}) \circ k_{n-1,j-1}$

- (ii) Für $1 \leq j+1 < l \leq n+1$ gilt $k_{n,j} \circ \iota_{n+1,l} = (\iota_{n,l-1} \times \text{id}_{[0,1]}) \circ k_{n-1,j}$
- (iii) Für $1 \leq j+1 = l \leq n$ gilt $k_{n,j} \circ \iota_{n+1,l} = k_{n,j+1} \circ \iota_{n+1,l}$
- (iv) Für $l=0, j=0$ ist $k_{n,j} \circ \iota_{n+1,l} = i_1 : \Delta^n \rightarrow \Delta^n \times [0,1]$
- (v) Für $l=n, j=n+1$ ist $k_{n,j} \circ \iota_{n+1,l} = i_0 : \Delta^n \rightarrow \Delta^n \times [0,1]$

Beweis

Wir zeigen hier nur exemplarisch die erste Gleichung: Die linke Seite der Gleichung entspricht



und die rechte Seite entspricht



Also folgt insgesamt die Gleichheit. Die anderen Gleichungen folgen genauso. \square

7.12 Beweis von [##]

Sei $h_n : C_n(X; R) \rightarrow C_{n+1}(X \times [0,1]; R)$ definiert durch

$$h_n(\sigma) := \sum_{j=0}^n (-1)^j \cdot (\sigma \times \text{id}) \circ k_{n,j}$$

h_* ist die gesuchte Kettenhomotopie, da für $n \in \mathbb{N}$ unter Anwendung der Gleichungen aus 7.12 gilt:

$$\begin{aligned}
 \partial_{n+1}(h_n(\sigma)) &= \partial_{n+1} \left(\sum_{j=0}^n (-1)^j \cdot (\sigma \times \text{id}) \circ k_{n,j} \right) \\
 &= \sum_{l=0}^{n+1} \sum_{j=0}^n (-1)^{j+l} \cdot (\sigma \times \text{id}) \circ k_{n,j} \circ \iota_{n+1,l} \quad (\text{nach Definition 5.2}) \\
 &= \sum_{0 \leq l < j \leq n} (-1)^{j+l} ((\sigma \circ \iota_{n,l}) \times \text{id}) \circ k_{n-1,j-1} + \sum_{1 \leq j+1 < l \leq n+1} (-1)^{j+l} ((\sigma \circ \iota_{n,l-1}) \times \text{id}) \circ k_{n-1,j} \\
 &\quad + \sum_{1 \leq j+1=l \leq n} (-1)^{j+l} (\sigma \times \text{id}) \circ k_{n,j+1} \circ \iota_{n+1,l} + \sum_{1 \leq j=l \leq n} (-1)^{j+l} (\sigma \times \text{id}) \circ k_{n,j} \circ \iota_{n+1,l} \\
 &\quad + \sum_{0=l=j} (-1)^{j+l} (\sigma \times \text{id}) \circ i_1 + \sum_{n+1=j+1=l} (-1)^{j+l} (\sigma \times \text{id}) \circ i_0 \\
 &= \sum_{0 \leq j \leq n-1} (-1)^{j+l+1} ((\sigma \circ \iota_{n,l}) \times \text{id}) \circ k_{n-1,j} + \sum_{1 \leq j+1 \leq l \leq n} (-1)^{j+l+1} ((\sigma \circ \iota_{n,l}) \times \text{id}) \circ k_{n-1,j} \\
 &\quad + \underbrace{\sum_{1 \leq j=l \leq n} (-1)^{j+l-1} (\sigma \times \text{id}) \circ k_{n,j} \circ \iota_{n+1,l} + \sum_{1 \leq j=l \leq n} (-1)^{j+l} (\sigma \times \text{id}) \circ k_{n,j} \circ \iota_{n+1,l}}_{=0} \\
 &\quad + \sum_{0=l=j} (-1)^{j+l} (\sigma \times \text{id}) \circ i_1 + \sum_{n+1=j+1=l} (-1)^{j+l} (\sigma \times \text{id}) \circ i_0 \\
 &= - \sum_{\substack{0 \leq l \leq n \\ 0 \leq j \leq n-1}} (-1)^{j+l} ((\sigma \circ \iota_{n,l}) \times \text{id}) \circ k_{n-1,j} + (\sigma \times \text{id}) \circ i_1 - (\sigma \times \text{id}) \circ i_0 \\
 &= - \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \sum_{l=0}^n (-1)^l ((\sigma \circ \iota_{n,l}) \times \text{id}) \circ k_{n-1,j} + \underbrace{(\sigma \times \text{id}) \circ i_1}_{=i_1 \circ \sigma} - \underbrace{(\sigma \times \text{id}) \circ i_0}_{=i_0 \circ \sigma} \\
 &= -h_{n-1}(\partial_n \sigma) + C_n(i_1; R)(\sigma) - C_n(i_0; R)(\sigma) \quad \square
 \end{aligned}$$

7.13 Bemerkung

Ist $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ eine Homotopie zwischen f und g , so erhalten wir eine Kettenhomotopie k zwischen $C_*(f; R)$ und $C_*(g; R)$ durch

$$k_n(\sigma) := C_{n+1}(H; R) \circ h_n = \sum_{j=0}^n (-1)^j H \circ (\sigma \times \text{id}) \circ k_{n,j}$$

8 Homologie von Paaren

8.1 Definition

Sei A ein Teilraum von X , dann heißt (X, A) ein **Paar von topologischen Räumen**. Eine Abbildung von Paaren $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ ist eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ mit $f(A) \subseteq B$. Manchmal schreiben wir $(f, f|_A): (X, A) \rightarrow (Y, B)$.

Die Kategorie von Paaren von topologischen Räumen bezeichnen wir mit Top^2 .

8.2 Definition

Sei (X, A) ein Paar. Dann definieren wir den **singulären Kettenkomplex** von (X, A) über R durch

$$C_n(X, A; R) := C_n(X; R) / C_n(A; R)$$

$$\partial_n(\sigma + C_n(A; R)) := \partial_n \sigma + C_{n-1}(A; R)$$

Dies ist wohldefiniert, da $\partial_n(C_n(A; R)) \subseteq C_{n-1}(A; R)$. Weiter heißt

$$H_n(X, A; R) := H_n(C_*(X, A; R), \partial_*)$$

der **n-te singuläre Homologiemodul** von (X, A) mit Koeffizienten in R .

8.3 Bemerkung

Der singuläre Kettenkomplex von Paaren definiert einen Funktor: $\text{Top}^2 \rightarrow R\text{-KETTEN}$. Durch Komposition mit Homologie (als Funktor $R\text{-KETTEN} \rightarrow R\text{-MOD}$) erhalten wir einen Funktor

$$H_n(-, -; R) : \text{Top}^2 \longrightarrow R\text{-MOD}$$

8.4 Bemerkung

Via $X \mapsto (X, \emptyset)$ können wir jeden Raum auch als Paar auffassen. Es gilt $H_n(X, \emptyset; R) = H_n(X; R)$.

8.5 Frage

Können wir $H_n(X, A; R)$ durch $H_n(X; R)$ und $H_n(A; R)$ ausdrücken?

Ansatz 1:

$$H_n(X, A; R) \cong H_n(X; R) / H_n(A; R)$$

⚠ Problem: $H_n(A; R)$ ist kein Untermodul von $H_n(X; R)$

Ansatz 2: Ist $H_n(X; R) \rightarrow H_n(X, A; R)$ surjektiv?

Sei $x \in H_n(X, A; R)$. Dann gibt es $\sigma + C_n(A; R) \in C_n(X, A; R)$ mit $\partial_n(\sigma + C_n(A; R)) = 0$ und $x = [\sigma]$. Es ist $\sigma \in C_n(X; R)$, aber wir wissen nur $\partial_n \sigma \in C_{n-1}(A; R)$, nicht $\partial_n(\sigma) = 0$. 😊

8.6 Beispiel

In $C_n(|\Delta^n|, |\partial\Delta^n|; R)$ gilt für $\sigma := \text{id}: |\Delta^n| \rightarrow |\Delta^n|$, dass $\partial_n([\sigma]) = 0$ ist, da $\partial_n \sigma \in C_{n-1}(|\partial\Delta^n|; R)$. Wir werden später sehen, dass $[\sigma]$ den Homologiemodul

$$H_n(|\Delta^n|, |\partial\Delta^n|; R) \cong R$$

erzeugt.

8.7 Definition

Eine Folge von R -linearen Abbildungen zwischen R -Moduln M_i

$$\cdots \longrightarrow M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_{n-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_0$$

heißt **lange exakte Folge**, wenn sie exakt an jeder Stelle M_i ist, d.h. für alle i gilt $\text{Im } f_i = \ker f_{i-1}$.

8.8 Satz

Es gibt eine natürliche Transformation ∂_n von $(X, A) \mapsto H_n(X, A; R)$ nach $(X, A) \mapsto H_{n-1}(A; R)$, sodass für jedes Paar (X, A)

$$\begin{aligned} \cdots &\xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(A; R) \xrightarrow{i_*} H_n(X; R) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A; R) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A; R) \longrightarrow \cdots \\ \cdots &\xrightarrow{\partial_1} H_0(A; R) \longrightarrow H_0(X; R) \longrightarrow H_0(X, A; R) \longrightarrow 0 \end{aligned} \quad [*]$$

eine lange exakte Folge ist. Dabei sind $i : A \hookrightarrow X$ und $j : (X, \emptyset) \hookrightarrow (X, A)$ die Inklusionen. Das bedeutet:

Für jedes Paar (X, A) haben wir eine R -lineare Abbildung $\partial_n : H_n(X, A; R) \rightarrow H_{n-1}(A; R)$, sodass für jede Abbildung $(f, f|_A) : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ von Paaren folgendes Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} H_n(X, A; R) & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(A; R) \\ \downarrow (f, f|_A)_* & & \downarrow (f|_A)_* \\ H_n(Y, B; R) & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(B; R) \end{array}$$

Beweis

siehe 8.13.

8.9 Korollar

- (1) Ist die Inklusion $i : A \rightarrow X$ eine Homotopieäquivalenz, so ist $H_n(X, A; R) = 0$ für alle n .
- (2) Sei A kontraktibel. Dann gilt für alle $n \geq 1$. $H_n(X; R) \cong H_n(X, A; R)$

Beweis

- (1) Betrachte den folgenden Ausschnitt aus der langen exakten Folge:

$$H_n(A; R) \xrightarrow{i_*} H_n(X; R) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A; R) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A; R) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(X; R)$$

Nach 7.4 ist $i_* : H_n(A; R) \rightarrow H_n(X; R)$ ein Isomorphismus. Wegen der Exaktheit gilt $\ker j_* = \text{Im } i_* = H_n(X; R)$, also folgt $j_* = 0$. Da $\text{Im } \partial_n = \ker i_* = 0$, folgt $\partial_n = 0$. Nun ist

$$H_n(X, A; R) = \ker \partial_n = \text{Im } j_* = 0$$

- (2) Übung!

□

8.10 Definition

Seien

$$(C_*, d_*) \xrightarrow{i_*} (C'_*, d'_*) \xrightarrow{p_*} (C''_*, d''_*) \quad [\#]$$

R -Kettenabbildungen. Ist für jedes n die Folge $C_n \xrightarrow{i_n} C'_n \xrightarrow{p_n} C''_n$ kurz exakt, so heißt $[\#]$ eine **kurze exakte Folge von Kettenkomplexen**.

8.11 Beispiel

Für jedes Paar (X, A) ist

$$(C_*(A; R), \partial_*) \xrightarrow{i_*} (C_*(X; R), \partial_*) \xrightarrow{j_*} (C_*(X, A; R), \partial_*)$$

eine kurze exakte Folge von R -Kettenkomplexen.

8.12 Schlangenlemma

Sei

$$(C_*, d_*) \xrightarrow{i_*} (C'_*, d'_*) \xrightarrow{p_*} (C''_*, d''_*)$$

eine kurze exakte Folge von R -Kettenkomplexen.

- a) Für jedes n gibt es eine eindeutige wohldefinierte R -lineare Abbildung $\partial_n: H_n(C''_*, d''_*) \rightarrow H_{n-1}(C_*, d_*)$ mit: Für $v' \in C'_n$ mit $d''_n \circ p_n(v') = 0$ ist

$$\partial_n \left(\underbrace{[p_n(v')]}_{\in H_n(C''_*, d''_*)} \right) = [v] \in H_{n-1}(C_*, d_*)$$

wobei $v \in C_{n-1}$ bestimmt ist durch $i_{n-1}(v) = d'_n(v')$.

- b)

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & H_n(C_*, d_*) & \xrightarrow{i_*} & H_n(C'_*, d'_*) & \xrightarrow{p_*} & H_n(C''_*, d''_*) \\ & & & & & & \downarrow \partial_n \\ & & & & & & H_{n-1}(C_*, d_*) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(C'_*, d'_*) \xrightarrow{p_*} \dots \\ & & & & & & \downarrow \partial_1 \\ & & & & & & H_0(C_*, d_*) \xrightarrow{i_*} H_0(C'_*, d'_*) \xrightarrow{p_*} H_0(C''_*, d''_*) \longrightarrow 0 \end{array}$$

ist eine lange exakte Folge.

Beweis

$$\begin{array}{ccccc} C_{n+1} & \xrightarrow{i_{n+1}} & C'_{n+1} & \xrightarrow{p_{n+1}} & C''_{n+1} \\ \downarrow d_{n+1} & & \downarrow d'_{n+1} & & \downarrow d''_{n+1} \\ C_n & \xrightarrow{i_n} & C'_n & \xrightarrow{p_n} & C''_n \\ \downarrow d_n & & \downarrow d'_n & & \downarrow d''_n \\ C_{n-1} & \xrightarrow{i_{n-1}} & C'_{n-1} & \xrightarrow{p_{n-1}} & C''_{n-1} \\ \downarrow d_{n-1} & & \downarrow d'_{n-1} & & \downarrow d''_{n-1} \\ C_{n-2} & \xrightarrow{i_{n-2}} & C'_{n-2} & \xrightarrow{p_{n-2}} & C''_{n-2} \end{array}$$

Sei $x'' \in H_n(C''_*, d''_*)$, also $x'' = [v'']$ mit $v'' \in \ker d''_n$. Da p_n surjektiv ist, existiert $v' \in C'_n$ mit $p_n(v') = v''$. Es gilt

$$p_{n-1}d'_n(v') = d''_np_n(v') = d''_n(v'') = 0$$

$\Rightarrow v' \in \ker p_{n-1}$. Weiter gilt $\ker p_{n-1} = \text{Im } i_{n-1}$, also $\exists v \in C_{n-1} : i_{n-1}(v) = d'_n(v')$. Dann gilt

$$i_{n-2}(d_{n-1}(v)) = d'_{n-1}(i_{n-1}(v)) = d'_{n-1}(d'_n(v')) = 0$$

Da i_{n-2} injektiv ist, folgt somit $d_{n-1}(v) = 0$. Setze $\partial_n(x'') := [v]$. Zu zeigen: $[v] \in H_{n-1}(C_*, d_*)$ ist unabhängig von der Wahl von v'' und v' . Seien $w'' \in \ker d''_n$, $w' \in C'_n$, $w \in C_{n-1}$ mit $x'' = [w'']$, $p_n(w') = w''$ und $i_{n-1}(w) = d'_n(w')$.

$[v''] = [w'']$, also folgt $\exists a'' \in C''_{n+1} : d''_{n+1}(a'') = v'' - w''$. p_{n+1} ist surjektiv, also existiert $a' \in C'_{n+1}$ mit $p_{n+1}(a') = a''$. Es gilt

$$p_n(v' - w' - d'_{n+1}(a')) = v'' - w'' - \underbrace{d_{n+1}(p_{n+1}(a'))}_{v'' - w''} = 0$$

Mit $\ker p_n = \text{Im } i_n$ folgt: $\exists a \in C_n$ mit $i_n(a) = v' - w' - d_{n+1}(a')$. Es bleibt zu zeigen: $d_n(-a) = v - w$.

$$\begin{aligned} i_{n-1}(-d_n(a) - (v - w)) &= -i_{n-1}(d_n(a)) - i_{n-1}(v - w) \\ &= -d'_n(i_n(a)) - (d'_n(v') - d'_n(w')) \\ &= -d'_n(d'_{n+1}(a') - (v' - w')) - (d'_n(v') - d'_n(w')) \\ &= -d'_nd'_{n+1}(a') + d'_n(v' - w') - (d'_n(v') - d'_n(w')) = 0 \end{aligned}$$

da i_{n-1} injektiv ist, folgt $-d_n(a) - (v - w) = 0$, also $d_n(-a) = (v - w)$.

$\text{Im}(i_n)_* = \ker(p_n)_*$: " \subseteq ": $(p_n)_* \circ (i_n)_* = (p_n - i_n)_* = (0)_* = 0$

" \supseteq ": Sei $x' \in \ker(p_n)_*$. Sei $x' = [v']$ mit $v' \in C'_n$, $d'_n(v') = 0$. Da $[p_n(v')] = (p_n)_*[x'] = 0$ gibt es $a'' \in C''_{n+1}$ mit $d''_{n+1}(a'') = p_n(v')$. Da p_{n+2} surjektiv ist, existiert $a' \in C'_{n+1}$ mit $p_{n+1}(a') = a''$. Dann gilt

$$p_n(v' - d'_{n+1}(a')) = p_n(v') - p_nd'_{n+1}(a') = p_n(v') - \underbrace{d''_{n+1}(p_{n+1}(a'))}_{=a''}_{p_n(v')} = 0$$

Da $\ker p_n = \text{Im } i_n$ gibt es $a \in C_n$ mit $i_n(a) = v' - d'_{n+1}(a')$. Nun ist

$$i_{n-1}(d_n(a)) = d'_n(i_n(a)) = d'_n(v' - d_{n+1}(a')) = d'_n(v') = 0$$

Da i_{n-1} injektiv ist, folgt $d_n(a) = 0$. Insbesondere $[a] \in H_n((C_*, d_*))$. Nun ist

$$(i_n)_*[a] = [i_n(a)] = [v' - d'_{n+1}(a')] = [v'] = x'$$

Also $x' \in \text{Im}(i_n)_*$.

$\text{Im } \partial_{n+1} = \ker(i_n)_*$: " \subseteq ": $i_n(d_{n+1}(x'')) = 0$ ✓

" \supseteq ": Sei $x \in \ker(i_n)_*$. Sei $v \in C_n$, $d_n(v) = 0$, $[v] = x$. $\leadsto x = d_n[v'']$.

8.13 Beweis von Satz 8.8

Für jedes Paar (X, A) ist die Folge der singulären Kettenkomplexe

$$(C_*(A; R), \partial_*^A) \xrightarrow{C_*(i; R)} (C_*(X; R), \partial_*^X) \xrightarrow{C_*(j; R)} (C_*(X, A; R), \partial_*^{(X, A)})$$

kurz exakt. Das Schlagenlemma 8.12 produziert $\partial_n : H_n(X, A; R) \rightarrow H_{n-1}(A; R)$ und die lange exakte Sequenz $[*]$. Es bleibt zu zeigen, dass die Randabbildungen aus dem Schlagenlemma wie behauptet eine natürliche Transformation definieren: Sei $(f, f|_A) : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ eine Abbildung von Paaren. Zu zeigen ist, dass

$$\begin{array}{ccc} H_n(X, A; R) & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(A; R) \\ \downarrow (f, f|_A)_* & & \downarrow (f|_A)_* \\ H_n(Y, B; R) & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(B; R) \end{array}$$

kommutiert. Sei $x'' \in H_n(X, A; R)$. Sei $v' \in C_n(X; R)$ mit $\partial_n^X(v') \in C_n(A; R)$ und $[v' + C_n(A; R)] = x''$. Dann ist $\partial_n(x'') = [\partial_n^X(v')] \in H_n(A; R)$. Dann ist

$$(f, f|_A)_*(x'') = (f, f|_A)_*[v' + C_n(A; R)] = [f(v') + C_n(B; R)] \in H_n(Y, B; R)$$

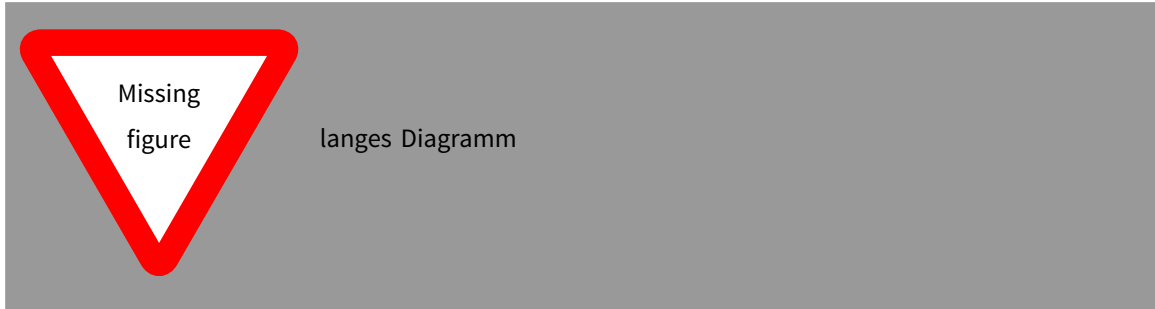
Es ist $\partial_n^Y(f_*(v')) = (f|_A)_*\left(\underbrace{\partial_n^X(v')}_{\in C_n(A; R)}\right) \in C_n(B; R)$. Also

$$\partial_n((f, f|_A)_*(x'')) = [\partial_n^Y(f_*(v'))] = [f_* \circ \partial_n^X(v')] = f_* \partial_n(x'')$$

□

8.14 Bemerkung

Für eine Abbildung $(f, f|_A) : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ erhalten wir ein kommutierendes Diagramm:



8.15 Fünfer-Lemma

Seien die Zeilen in folgendem kommutativen Diagramm von R -Moduln exakt.

$$\begin{array}{ccccccccc} A_4 & \xrightarrow{\alpha_4} & A_3 & \xrightarrow{\alpha_3} & A_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & A_0 \\ f_4 \downarrow \cong & & f_3 \downarrow \cong & & f_2 \downarrow & & f_1 \downarrow \cong & & f_0 \downarrow \cong \\ B_4 & \xrightarrow{\beta_4} & B_3 & \xrightarrow{\beta_3} & B_2 & \xrightarrow{\beta_2} & B_1 & \xrightarrow{\beta_1} & B_0 \end{array}$$

Sind f_4, f_3, f_1 und f_0 Isomorphismen, so ist auch f_2 ein Isomorphismus.

Beweis

Injektivität: Sei $a_2 \in A_2$ und $f_2(a_2) = 0$. $f_1(\alpha_2(a_2)) = \beta_2(f_2(a_2)) = \beta_2(0) = 0$. Da f_1 ein Isomorphismus ist, folgt $\alpha_2(a_2) = 0$. $a_2 \in \ker \alpha_2 = \text{Im } \alpha_3$, also existiert $a_3 \in A_3$ mit $\alpha_3(a_3) = a_2$. Es gilt

$$\beta_3(f_3(a_3)) = f_2(\alpha_3(a_3)) = f_2(a_2) = 0$$

Also $f_3(a_3) \in \ker \beta_3 = \operatorname{Im} \beta_4$. Da f_4 Isomorphismus ist, gibt es $a_4 \in A_4$ mit $\beta_4(f_4(a_4)) = f_3(a_3)$. Nun gilt

$$f_3(\alpha_4(a_4) - a_3) = f_3(\alpha_4(a_4)) - f_3(a_3) = \beta_4(f_4(a_4)) - f_3(a_3) = f_3(a_3) - f_3(a_3) = 0$$

Da f_3 ein Isomorphismus ist, folgt nun $\alpha_4(a_4) = a_3$. Nun ist

$$a_2 = \alpha_3(\alpha_3) = \alpha_3(\alpha_4(a_4)) = \underbrace{\alpha_3 \circ \alpha_4}_{=0}(a_4) = 0$$

Surjektivität: Sei $b_2 \in B_2$. Fall 1: $\beta_2(b_2) = 0$. Da $\operatorname{Im} \beta_3 = \ker \beta_2$ und f_3 Isomorphismus, folgt $\exists a_3 \in A_3$ mit $\beta_3(f_3(a_3)) = b_2$. Also ist $b_2 = \beta_3(f_3(a_3)) = f_2(\alpha_3(a_3)) \in \operatorname{Im} f_2$.

Ist b_2 beliebig, so genügt es zu zeigen: $\exists a_2 \in A_2$ mit $\beta_2(b_2 - f_2(a_2)) = 0$. f_1 ist ein Isomorphismus, also $\exists a_1 \in A_1$ mit $f_1(a_1) = \beta_2(b_2)$. Dann folgt

$$f_0(\alpha_1(a_1)) = \beta_1(f_1(a_1)) = \beta_1(\beta_2(b_2)) = \underbrace{\beta_1 \circ \beta_2}_{=0}(b_2) = 0$$

Da f_0 ein Isomorphismus ist, folgt $\alpha_1(a_1) = 0$. Da $\ker \alpha_1 = \operatorname{Im} \alpha_2$, folgt $\alpha_2(a_2) = a_1$. Es gilt nun

$$\begin{aligned} \beta_2(b_2 - f_2(a_2)) &= \beta_2(b_2) - \beta_2(f_2(a_2)) = \beta_2(b_2) - f_1(\alpha_2(a_2)) \\ &= \beta_2(b_2) - f_1(a_1) = \beta_2(b_2) - \beta_2(b_2) = 0 \quad \square \end{aligned}$$

8.16 Lemma ("2 von 3")

Sei $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ eine Abbildung von Paaren. Seien von den drei Abbildungen

- (i) $(f|_A)_*: H_n(A; R) \rightarrow H_n(B; R)$
- (ii) $f_*: H_n(X; R) \rightarrow H_n(Y; R)$
- (iii) $(f, f|_A)_*: H_n(X, A; R) \rightarrow H_n(Y, B; R)$

zwei für jeweils alle n Isomorphismen. Dann ist auch die dritte für alle n ein Isomorphismus.

Beweis

Da die Randabbildung in der Paarfolge eine natürliche Transformation ist, erhalten wir ein kommutatives Leiterdiagramm:

$$\begin{array}{ccccccccccc} H_{n+1}(A) & \longrightarrow & H_{n+1}(X) & \longrightarrow & H_{n+1}(X, A) & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & H_n(A) & \longrightarrow & H_n(X) & \longrightarrow & H_n(X, A) & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(A) \\ \downarrow (f|_A)_* & & \downarrow f_* & & \downarrow (f, f|_A)_* & & \downarrow (f|_A)_* & & \downarrow f_* & & \downarrow (f, f|_A)_* & & \downarrow (f|_A)_* \\ H_{n+1}(B) & \longrightarrow & H_{n+1}(Y) & \longrightarrow & H_{n+1}(Y, B) & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & H_n(B) & \longrightarrow & H_n(Y) & \longrightarrow & H_n(Y, B) & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(B) \end{array}$$

"R" aus
 Platzgründen
 weggelassen

Da die Zeilen lang exakt sind, folgt die Behauptung aus dem Fünfer-Lemma. □

9 Ausschneidung und die Mayer-Vietoris Folge

9.1 Satz

Sei (X, A) ein Paar und $L \subseteq A$, sodass der Abschluss \bar{L} von im Inneren \mathring{A} von A liegt. Dann induziert die Inklusion $(X \setminus L, A \setminus L) \xrightarrow{j} (X, A)$ einen Isomorphismus $j_*: H_n(X \setminus L, A \setminus L; R) \rightarrow H_n(X, A; R)$.

RevChap9

9.2 Satz (Mayer-Vietoris Folge)

Seien $A, B \subseteq X$ offen und $X = A \cup B$. Seien $i_A: A \hookrightarrow X$, $i_B: B \hookrightarrow X$, $j_A: A \cap B \hookrightarrow A$ und $j_B: A \cap B \hookrightarrow B$ die Inklusionen. Dann gibt es eine Randabbildung $\partial_n = \partial_n^{X=A \cup B}: H_n(X; R) \rightarrow H_{n-1}(A \cap B; R)$, sodass

"R" aus
Platzgründen
weggelassen

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(A \cap B) \xrightarrow{\begin{pmatrix} (j_A)_* \\ (j_B)_* \end{pmatrix}} \bigoplus_{H_n(B)} H_n(A) \xrightarrow{(i_A)_* - (i_B)_*} H_n(X) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A \cap B) \longrightarrow \cdots$$

eine lange exakte Folge ist. Die Randabbildung ist dabei eine natürlicher Transformation: Sei $A', B' \subseteq X'$ offen mit $X' = A' \cup B'$. Ist $f: X \rightarrow X'$ mit $f(A) \subseteq A'$ und $f(B) \subseteq B'$, so kommutiert

$$\begin{array}{ccc} H_n(X; R) & \xrightarrow{\partial_n^{X=A \cup B}} & H_{n-1}(A \cap B; R) \\ \downarrow f_* & & \downarrow (f|_{A \cap B})_* \\ H_n(X'; R) & \xrightarrow{\partial_n^{X'=A' \cup B'}} & H_{n-1}(A' \cap B'; R) \end{array}$$

Beweis

Sei $L := X \setminus B$. Dann ist L abgeschlossen und $L \subseteq A = \mathring{A}$. Wir erhalten daher einen Ausschneideisomorphismus

$$H_n(B, A \cap B; R) = H_n(X \setminus L, A \setminus L; R) \xrightarrow{\cong} H_n(X, A; R)$$

"R" aus
Platzgründen
weggelassen

Betrachte das folgende kommutative Leiterdiagramm:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_{n+1}(B, A \cap B) & \xrightarrow{\partial_{n+1}^{B, A \cap B}} & H_n(A \cap B) & \xrightarrow{(j_B)_*} & H_n(B) & \xrightarrow{(l_B)_*} & H_n(B, A \cap B) & \xrightarrow{\partial_n^{B, A \cap B}} & H_{n-1}(A \cap B) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \cong \downarrow (i_B, j_A)_* & & \downarrow (j_A)_* & & \downarrow (i_B)_* & & \cong \downarrow (i_B, j_A)_* & & \downarrow (j_A)_* & & \\ \cdots & \longrightarrow & H_{n+1}(X, A) & \xrightarrow{\partial_{n+1}^{X, A}} & H_n(A) & \xrightarrow{(i_A)_*} & H_n(X) & \xrightarrow{(l_X)_*} & H_n(X, A) & \xrightarrow{\partial_n^{X, A}} & H_{n-1}(A) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

dabei sind $l_B: (B, \emptyset) \rightarrow (B, A \cap B)$ und $l_X: (X, \emptyset) \rightarrow (X, A)$ die Inklusionen von Paaren. Definiere nun $\partial_n: H_n(X; R) \rightarrow H_{n-1}(A \cap B; R)$ durch

$$\partial_n := \partial_n^{B, A \cap B} \circ (i_B, i_A)_*^{-1} \circ (l_X)_*$$

Die Natürlichkeit von $\partial_n^{B, A \cap B}$ impliziert die Natürlichkeit von ∂_n .

- Zu zeigen: $\text{Im} \begin{pmatrix} (j_A)_* \\ (j_B)_* \end{pmatrix} = \ker((i_A)_* - (i_B)_*)$:

" \supseteq ": Sei $(a, b) \in \ker((i_A)_* - (i_B)_*)$. Also $(i_A)_*(a) = (i_B)_*(b)$. Es ist

$$(i_B, j_A)_*((l_B)_*(b)) = (l_X)_* \circ (j_B)_*(b) = \underbrace{(l_X)_* \circ (i_A)_*}_{=0}(a) = 0$$

$(i_B, j_A)_*$ ist ein Isomorphismus, also $(l_B)_*(b) = 0$. $\ker(l_B)_* = \text{Im}(j_B)_*$. Damit folgt $\exists x \in H_n(A \cap B; R) : (j_B)_*(x) = b$. Dann gilt

$$(i_A)_*(a - (j_A)_*(x)) = (i_A)_*(a) - i_B((j_B)_*(x)) = (i_A)_*(a) - (i_B)_*(b) = 0$$

Mit $\ker(i_A)_* = \text{Im } \partial_n^{X,A}$ und $(i_B, j_A)_*$ ist Isomorphismus, folgt $\exists y \in H_{n+1}(B, A \cap B; R)$ mit

$$\partial_n^{X,A} \circ (i_B, j_A)_*(y) = a - (j_A)_*(x)$$

Es folgt für $z := x + \partial_n^{B, A \cap B}(y)$.

$$\begin{aligned} (j_B)_*(z) &= (j_B)_*(x) = b \\ (j_A)_*(z) &= (j_A)_*(x) + (j_A)_*(\partial_n^{B, A \cap B}(y))_n = (j_A)_*(x) + \partial_n^{X,A} \circ (i_B, j_A)_*(y) \\ &= (j_A)_*(x) + a - (j_A)_*(x) = a \end{aligned}$$

" \subseteq ": Sei $x \in H_n(A \cap B; R)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} ((i_A)_* - (i_B)_*) \begin{pmatrix} (j_A)_* \\ (j_B)_* \end{pmatrix} (x) &= (i_A)_* \circ (j_A)_*(x) - (i_B)_* \circ (j_B)_*(x) \\ &= (i_A \circ j_A)_*(x) - (i_B \circ j_B)_*(x) = 0 \end{aligned}$$

da $i_A \circ j_A = i_B \circ j_B$.

- Wir zeigen nun $\text{Im}((i_A)_* - (i_B)_*) = \ker \partial_n$:

" \supseteq ": Sei $v \in \ker \partial_n$.

" \subseteq ": Sei $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \bigoplus_{H_n(B)}^{H_n(A)}$. Dann gilt

$$\partial_n((i_A)_* - (i_B)_*) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \partial_n((i_A)_*(a) - (i_B)_*(b)) = 0$$

- Noch zu zeigen: $\text{Im } \partial_n = \ker \begin{pmatrix} (j_A)_* \\ (j_B)_* \end{pmatrix}$.

Übung!

Rest hinzufügen

9.3 Bemerkung

Für die Mayer-Vietoris-Folge müssen A und B nicht notwendig offen sein. Es genügt, dass die Inklusion $(B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$ einen Isomorphismus $H_*(B, A \cap B; R) \rightarrow H_*(X, A; R)$ induziert.

9.4 Satz

$$H_k(S^n; R) \cong \begin{cases} R \oplus R, & \text{falls } k = n = 0 \\ R, & \text{falls } k = 0, n \neq 0 \\ R, & \text{falls } k = n \neq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad [\#]$$

9.5 Definition

Sei X ein nichtleerer topologischer Raum. Sei $p: X \rightarrow \{\text{pt}\}$ die Projektion auf den Ein-Punkt-Raum. die **reduzierte singuläre Homologie** von X ist definiert durch

$$\tilde{H}_k(X; R) := \ker(p_* : H_k(X; R) \rightarrow H_k(\{\text{pt}\}; R))$$

Bemerkung

- Es gilt $\tilde{H}_k(X; R) = H_k(X; R)$ für $k > 0$, da $H_k(\{\text{pt}\}; R) = 0$ ist für $k > 0$ (5.9) und somit p_* die Nullabbildung ist.
Weiter gilt $H_0(X; R) = R \oplus \tilde{H}_0(X; R)$, da $H_0(\{\text{pt}\}; R) = R$ frei ist.
- Es ist nicht schwer die Eigenschaften von singulärer Homologie auf die reduzierte singuläre Homologie zu übertragen. Insbesondere ist \tilde{H}_* homotopieinvariant und es gibt eine Mayer-Vietoris-Folge.
- Es ist $\tilde{H}_k(\{\text{pt}\}) = 0$.

9.6 Bemerkung

In reduzierter singulärer Homologie wird $[\#]$ zu

$$\tilde{H}_k(S^n; R) \cong \begin{cases} R, & \text{falls } k = n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad [\#\#]$$

9.7 Beweis von $[\#\#]$

Per Induktion nach n :

Induktionsanfang: $n = 0$: Es gilt

$$H_k(S^0; R) \xleftarrow{\varphi} H_k(\{\text{pt}\}; R) \oplus H_k(\{\text{pt}\}; R) = \begin{cases} R \oplus R, & \text{falls } k = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Sei $i_- : \{\text{pt}\} \hookrightarrow S^0$, $i_+ : \{\text{pt}\} \hookrightarrow S^0$. Im $i_{pm} = \{\pm 1\}$. Der Isomorphismus φ ist gegeben durch $\varphi = (i_-)_* + (i_+)_*$. Für $(a, b) \in H_k(\{-1\}; R) \oplus H_k(\{+1\}; R)$ gilt dann

$$p_*(i_-(a), i_+(b)) = (p \circ i_-)_*(a) + (p \circ i_+)_*(b) = \text{id}_*(a) + \text{id}_*(b) = a + b$$

Also $\ker p_* = \{(a, -a) \mid a \in H_k(\{\text{pt}\}; R)\}$. Also

$$\tilde{H}_k(S^0) = \begin{cases} 0, & \text{falls } k \neq 0 \\ R, & \text{falls } k = 0 \end{cases}$$

Induktionsschritt: $n - 1 \mapsto n$: Sei $D_n^+ = S^n \setminus \{(-1, 0, \dots, 0)\}$ und $D_n^- = S^n \setminus \{(1, 0, \dots, 0)\}$. Dann gilt $S^n = D_n^+ \cup D_n^-$ und $D_n^+, D_n^- \subseteq S^n$ offen und $D_n^+ \simeq \{\text{pt}\}$ und $D_n^- \simeq \{\text{pt}\}$. Weiter gilt

$$D_n^+ \cap D_n^- = \{x = (x_0, \dots, x_n) \in S^n \mid x_0 \notin \{\pm 1\}\} \simeq S^{n-1} = \{x = (0, x_1, \dots, x_n) \in S^n\}.$$

Betrachte nun die Mayer-Vietoris-Folge zu $S^n = D_n^+ \cup D_n^-$:

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{H}_k(D_n^+) \oplus \tilde{H}_k(D_n^-) & \longrightarrow & \tilde{H}_k(S^n) & \xrightarrow{\partial_k} & \tilde{H}_{k-1}(D_n^+ \cup D_n^-) & \longrightarrow & \tilde{H}_{k-1}(D_n^+) \oplus \tilde{H}_{k-1}(D_n^-) \\ \cong & & & & \uparrow & & \cong \\ & & & & (\iota_*) & & \\ & & & & \tilde{H}_{k-1}(S^{n-1}) & & \end{array}$$

"R" aus
Platzgründen
weggelassen

$$\text{Es folgt } \tilde{H}_k(S^n; R) \cong \tilde{H}_{k-1}(S^{n-1}; R) \stackrel{\text{IA}}{=} \begin{cases} R, & \text{falls } k = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad \square$$

10 Anwendungen

10.1 Satz (Invarianz der Dimension)

RevChap10

Sind \mathbb{R}^n und \mathbb{R}^m homöomorph, so gilt $n = m$.

Beweis

Sei $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ein Homöomorphismus. Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Dann erhalten wir auch einen Homöomorphismus $k := h|_{\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}} : \mathbb{R}^n \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{h(x_0)\}$. Nun ist $\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}$ homotopieäquivalent zu S^{n-1} und $\mathbb{R}^m \setminus \{h(x_0)\}$ ist homotopieäquivalent zu S^{m-1} . Da k ein Homöomorphismus ist, ist k_* ein Isomorphismus. Wir erhalten

$$H_*(S^{n-1}) \cong H_*(\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}) \cong H_*(\mathbb{R}^m \setminus \{h(x_0)\}) \cong H_*(S^{m-1})$$

Es ist aber $H_*(S^{n-1}) \cong H_*(S^{m-1})$ genau dann, wenn $n = m$. □

10.2 Fixpunktsatz von Brouwer

Jede stetige Abbildung $f : D^n \rightarrow D^n$ besitzt einen Fixpunkt.

Beweis

Durch Widerspruch: Angenommen es gibt $f : D^n \rightarrow D^n$ ohne Fixpunkt. Aus dem letzten Semester wissen wir, dass es dann eine stetige Abbildung $F : D^n \rightarrow S^{n-1}$ gibt mit $F|_{S^{n-1}} = \text{id}_{S^{n-1}}$. In Homologie erhalten wir folgendes kommutatives Diagramm

$\mathbb{C}: n \geq 2$

$$\begin{array}{ccc} 0 = H_{n-1}(D^n) & \xrightarrow{(F)_*} & H_{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbb{Z} \\ i_* \uparrow & \nearrow (\text{id}_{S^{n-1}})_* = \text{id}_{H_{n-1}(S^{n-1})} & \\ H_{n-1}(S^{n-1}) & & \end{array}$$

wobei $i : S^{n-1} \hookrightarrow D^n$ die Inklusion ist. Da $F \circ i = \text{id}_{S^{n-1}}$ ist, gilt $F_* \circ i_* = \text{id}_{H_{n-1}(S^{n-1})}$. □

Abbildungsgrad

10.3 Definition

Sei $f : S^n \rightarrow S^n$ eine stetige Abbildung. Da $\tilde{H}_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ ist, gibt es eine ganze Zahl $d(f)$, so dass $f_*(x) = d(f) \cdot x$ für alle $x \in \tilde{H}_n(S^n)$. Diese Zahl heißt der **Abbildungsgrad** von f .

10.4 Proposition

- a) $d(\text{id}_{S^n}) = 1$.
- b) Sind f und g homotop, so gilt $d(f) = d(g)$.
- c) $d(f \circ g) = d(f) \cdot d(g)$.

Beweis

- a) $(\text{id}_{S^n})_*(x) = \text{id}(x) = x$.
- b) Sind f und g homotop, so gilt $f_* = g_*$.
- c) Für alle $x \in \tilde{H}_n(S^n)$ gilt: $d(f \circ g) \cdot x = (f \circ g)_*(x) = f_* \circ g_*(x) = d(f) \cdot d(g) \cdot x$. Da $\tilde{H}_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ folgt $d(f \circ g) = d(f) \cdot d(g)$. □

10.5 Beispiel

Sei $i \in \{0, \dots, n\}$ und $R_i : S^n \rightarrow S^n$ die Spiegelung $R_i(x_0, \dots, x_n) = (x_0, \dots, -x_i, \dots, x_n)$. Dann ist $d(R_i) = -1$.

Beweis

Sei $f : S^n \rightarrow S^n$ der Homöomorphismus, der die 0-te und die i -te Koordinate vertauscht: $f(x_0, \dots, x_n) = (x_i, \dots, x_0, \dots, x_m)$. Dann ist $R_i = f \circ R_0 \circ f$. Da f ein Homöomorphismus ist, ist f_* ein Isomorphismus und daher $d(f)$ invertierbar, also $d(f) \in \{\pm 1\}$ mit $d(R_i) = d(f) \cdot d(R_0) \cdot d(f)$ folgt $d(R_0) = d(R_i)$. Es genügt also R_0 zu betrachten.

Wir zeigen $d(R_0) = -1$ durch Induktion nach n .

Induktionsanfang: Sei $i_- : \{\text{pt}\} \rightarrow S^0$ mit $\text{Im } i_- = \{-1\}$ und $i_+ : \{\text{pt}\} \rightarrow S^0$ mit $\text{Im } i_+ = \{+1\}$. Dann ist

$$\begin{aligned} H_0(S^0) &= \{(i_-)_*(a) + (i_+)_*(b) \mid a, b \in H_0(\{\text{pt}\})\} \quad \text{und} \\ \tilde{H}_-(S^0) &= \{(i_-)_*(a) - (i_+)_*(a) \mid a \in H_0(\{\text{pt}\})\} \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} (R_0)_*((i_-)_*(a) - (i_+)_*(a)) &= (R_0)_*(i_-)_*(a) - (R_0)_*(i_+)_*(a) = (R_0 \circ i_-)_*(a) - (R_0 \circ i_+)_*(a) \\ &= (i_+)_*(a) - (i_-)_*(a) \\ &= -((i_-)_*(a) + (i_+)_*(a)) \end{aligned}$$

Also folgt $d(R_0) = -1$.

Induktionsschritt: Sei

$$\begin{aligned} D_+^n &= \{(x_0, \dots, x_n) \in S^n \mid x_n \neq -1\} \\ D_-^n &= \{(x_0, \dots, x_n) \in S^n \mid x_n \neq +1\} \end{aligned}$$

Wir wissen schon, dass die Randabbildung aus der dazugehörigen Mayer-Vietoris-Folge $\tilde{H}_n(S^1) \xrightarrow{\partial_n} \tilde{H}_{n-1}(D_+^n \cap D_-^n)$ ein Isomorphismus ist. Da die Randabbildung natürlich ist, erhalten wir ein kommutatives Diagramm

fertig stellen

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}_n(S^n) & \xrightarrow[\cong]{\partial_n} & \tilde{H}_n(D_-^n \cap D_+^n) \xleftarrow[\cong]{i_*} \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) \\ \downarrow (R_0)_* & & \downarrow (R_0|_{(D_-^n \cap D_+^n)})_* \\ \tilde{H}_n(S^n) & \xrightarrow[\cong]{\partial_n} & \tilde{H}_{n+1}(D_-^n \cap D_+^n) \quad H_{n-1}(S^{n-1}) \end{array}$$

dabei ist $i : S^{n-1} \rightarrow D_-^n \cap D_+^n$ die Homotopieäquivalenz $i(x_0, \dots, x_{n-1}) = (x_0, \dots, x_{n-1}, 0)$. Nach Induktionsannahme ist $(R_0|_{S^{n-1}})_*(y) = -y$ für alle $y \in \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1})$. Für $x \in \tilde{H}_n(S^n)$ folgt

$$\begin{aligned} (R_0)_+(x) &= (\partial_n)^{-1} \circ (i_*) \circ (R_0|_{S^{n-1}})_*((i_*^{-1} \circ \partial_n) \cdot (x)) \\ &= (\partial_n)^{-1} \circ (i_*) \circ (-i_*^{-1}(\partial_n(x))) \\ &= -\partial_n^{-1} \circ (i_*) \circ (i_*)^{-1} \circ \partial_n(x) = -x \end{aligned}$$

Also $d(R_0) = -1$. □

10.6 Beispiel

Der Grad der Punktspiegelung $R : S^n \rightarrow S^n$ $x \mapsto -x$ ist $(-1)^{n+1}$.

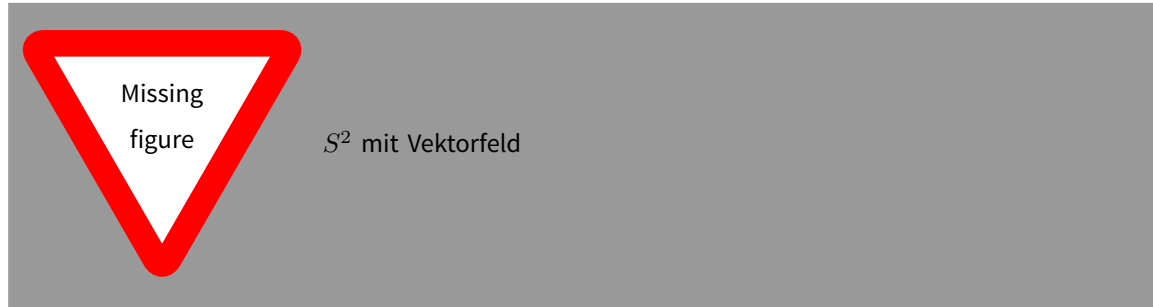
Beweis

$$d(R) = d(R_0 \circ R_1 \circ \dots \circ R_n) = d(R_0) \cdot \dots \cdot d(R_n) = (-1)^{n+1}.$$

□

10.7 Erinnerung

Sei M eine C^∞ -Mannigfaltigkeit. Ein **Vektorfeld** auf M ist eine stetige Abbildung $v : M \rightarrow TM$ mit $v(x) \in T_x M$ für alle $x \in M$. Für $M = S^n$ entspricht ein Vektorfeld genau einer stetigen Abbildung $v : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ mit $\langle v(x) | x \rangle = 0$ für alle $x \in S^n$.



10.8 Satz

Es gibt genau dann ein Vektorfeld ohne Nullstellen auf S^n , wenn n ungerade ist.

Beweis

Ist n ungerade, so ist $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{C}^k$ mit $k = \frac{n+1}{2}$. Punkte in S^n sind dann genau k -Tupel $z = (z_1, \dots, z_k)$ mit $|z_1|^2 + \dots + |z_k|^2 = 1$. Ein Vektorfeld entspricht dann einer stetigen Abbildung $v : S^n \rightarrow \mathbb{C}^k$, so dass für das kanonische komplexe Skalarprodukt $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbb{C}}$ auf \mathbb{C}^k gilt

$$\langle z | v(z) \rangle_{\mathbb{C}} \in i\mathbb{R}$$

Definiere nun $v : S^n \rightarrow \mathbb{C}^k$ durch $v(z) := iz$. Dann $iz \neq 0$ für alle $z \in S^n$ und $\langle z | iz \rangle = -i\|z\|_2^2 \in i\mathbb{R}$. Sei umgekehrt $v : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ ein Vektorfeld ohne Nullstellen. Zu zeigen: $d(\text{Punktspiegelung } R) = 1$ (Da $d(R) = (-1)^{n+1}$ folgt dann die Behauptung). Zeige dazu: R ist homotop zu id . Seien $H, K : S^n \times [0, 1] \rightarrow S^n$ definiert durch

$$H(x, t) := \frac{tx + (1-t)v(x)}{\|tx + (1-t)v(x)\|} \quad \text{bzw.} \quad K(x, t) := \frac{-tx + (1-t)v(x)}{\|-tx + (1-t)v(x)\|}$$

Da $\langle v(x) | x \rangle = 0$ folgt für alle x und $v(x) \neq 0$ ist, folgt

$$\begin{aligned} \|tx + (1-t)v(x)\|^2 &= \|tx\|^2 + \|(1-t)v(x)\|^2 \neq 0 \\ \|-tx + (1-t)v(x)\|^2 &= \|-tx\|^2 + \|(1-t)v(x)\|^2 \neq 0 \end{aligned}$$

Also sind H und K wohldefiniert. H ist Homotopie zwischen id und $x \mapsto \frac{v(x)}{\|v(x)\|}$ und K ist Homotopie zwischen $-\text{id}$ und $x \mapsto \frac{v(x)}{\|v(x)\|}$. □

10.9 Satz (Jordanscher Kurvensatz)

Sei $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine stetige, injektive Abbildung. Dann hat $\mathbb{R}^2 \setminus f(S^1)$ genau zwei Wegzusammenhangskomponenten. Eine davon ist beschränkt, die andere nicht.

Beweis (mit 10.10)

Wir können f auch als injektive Abbildung $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \subseteq S^2 = \mathbb{R}^1 \cup \{\infty\}$ auffassen. Nun ist $\tilde{H}_0(S^2 \setminus f(S^1)) = \mathbb{Z}$. Also $H_0(S^2 \setminus f(S^1)) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Daher besteht $S^2 \setminus f(S^1)$ aus zwei Wegzusammenhangskomponenten U_1 und U_2 . Sei $\infty \in U_2$. Dann sind U_1 und $U_2 \setminus \{\infty\}$ die Wegzusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^2 \setminus f(S^1)$. U_1 ist beschränkt und U_2 ist unbeschränkt. \square

Warum ist $U_2 \setminus \{\infty\}$ noch wegzusammenhängend?

Antwort

Seien $x, y \in U_2$, dann gibt es eine Umgebung V von $\infty \in S^2$ mit $V \setminus \{\infty\} \equiv D^2 \setminus \{0\}$, $x, y \notin V$ und $f(S^1) \cap V = \emptyset$

10.10 Satz

- a) Sei $f: D^k \rightarrow S^n$ eine stetige, injektive Abbildung mit $0 \leq k < n$. Dann gilt $\tilde{H}_i(S^n \setminus f(D^k)) = 0$ für alle i .
- b) Sei $f: S^k \rightarrow S^n$ eine stetige, injektive Abbildung mit $0 \leq k < n$. Dann gilt

$$\tilde{H}_i(S^n \setminus f(S^k)) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{falls } i = n - k - 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis (mit 10.11)

- a) Durch Induktion nach k . Für $k = 0$ ist $S^n \setminus f(D^0)$ homöomorph zu \mathbb{R}^n und die Behauptung folgt. Induktionsschritt $k \mapsto k + 1$: Da D^{k+1} und $[0, 1]^{k+1}$ homöomorph sind, können wir D^{k+1} durch $[0, 1]^{k+1}$ ersetzen. Sei $x \in \tilde{H}_i(S^n \setminus f([0, 1]^{k+1}))$. Es ist

$$S^n \setminus f(\{1/2\} \times [0, 1]^k) = S^n \setminus f([0, 1/2] \times [0, 1]^k) \cup S^n \setminus f([1/2, 1] \times [0, 1]^k)$$

eine Vereinigung von offenen Mengen. Weiter ist

$$(S^n \setminus f([0, 1/2] \times [0, 1]^k)) \cap (S^n \setminus f([1/2, 1] \times [0, 1]^k)) = S^n \setminus f([0, 1]^{k+1})$$

Nun benutzen wir die zugehörige Mayer-Vietoris-Folge:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}_{i+1}(S^n \setminus f(\{1/2\} \times [0, 1]^k)) & \longrightarrow & \tilde{H}_i(S^n \setminus f([0, 1]^{k+1})) \\ \text{=0 nach I.A.} & & \downarrow \cong \\ & & \tilde{H}_i(S^n \setminus f([0, 1/2] \times [0, 1]^k)) \\ & & \oplus \\ & & \tilde{H}_i(S^n \setminus f([1/2, 1] \times [0, 1]^k)) \end{array} \longrightarrow \tilde{H}_i(S^n \setminus f(\{1/2\} \times [0, 1]^k))$$

=0 nach I.A.

Angenommen $x \neq 0$. Dann ist das Bild von x in $\tilde{H}_i(S^n \setminus f([0, 1/2] \times [0, 1]^k))$ ungleich Null oder in $\tilde{H}_i(S^n \setminus f([1/2, 1] \times [0, 1]^k))$ ungleich Null. Indem wir dieses Argument iterieren erhalten wir eine Folge von Intervallen

$$[0, 1] \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots \text{ mit } \bigcap_n I_n = \{t\}$$

und das Bild von $x \in \tilde{H}_i(S^n \setminus f([0, 1]^{k+1}))$ unter der von der Inklusion $i_a: S^n \setminus f([0, 1]^{k+1}) \rightarrow S^n \setminus f(I_a \times [0, 1]^k)$ induzierten Abbildung $(i_a)_*: \tilde{H}_i(S^n \setminus f([0, 1]^{k+1})) \rightarrow \tilde{H}_i(S^n \setminus f(I_a \times [0, 1]^k))$ ungleich Null ist. Nun ist aber

$$\bigcup_a (S^n \setminus f(I_a \times [0, 1]^k)) = S^n \setminus f(\{t\} \times [0, 1]^k)$$

schöner machen

und wieder nach Induktionsannahme das Bild von x in $\tilde{H}_i(S^n \setminus f(\{t\} \times [0, 1]^k)) = 0$ Null. Nach Proposition 10.11(2) muss x aber schon in einer $\tilde{H}_i(S^n \setminus f(I_a \times [0, 1]^k))$ trivial sein. \nexists

- b) Durch Induktion nach k . Für $k = 0$ ist $S^n \setminus f(S^0) \cong \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Da $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \simeq S^{n-1}$ folgt für $k = 0$ die Behauptung.

Induktionsschritt $k-1 \mapsto k$: Seien $D_+^k := \{(x_0, \dots, x_k) \mid x_k \geq 0\}$ und $D_-^k := \{(x_0, \dots, x_k) \mid x_k \leq 0\}$. Dann ist $D_+^k \cap D_-^k = \{(x_0, \dots, x_k) \mid x_k = 0\} \cong S^{k-1}$. Wieder ist

$$S^n \setminus f(D_+^k \cap D_-^k) = (S^n \setminus f(D_+^k)) \cup (S^n \setminus f(D_-^k))$$

eine offene Vereinigung mit $(S^n \setminus f(D_+^k)) \cap (S^n \setminus f(D_-^k)) = S^n \setminus f(S^k)$. Wegen a) ist die Randabbildung in der zugehörigen Mayer-Vietoris-Folge

$$\tilde{H}_i(S^n \setminus f(D_+^k \cap D_-^k)) \xrightarrow{\partial_i \cong} \tilde{H}_{i-1}(S^n \setminus f(S^k))$$

ein Isomorphismus. Die Behauptung folgt per Induktion. \square

10.11 Proposition

Seien $U_1 \subseteq U_2 \subseteq \dots \subseteq X$ offen mit $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$. Seien $i_{a,b}: U_a \hookrightarrow U_b$ für $a < b$ und $i_a: U_a \hookrightarrow X$ die Inklusionen.

- (1) Für jedes $x \in H_k(X; R)$ gibt es $a > 0$ und $x_a \in H_k(U_a; R)$ mit $(i_a)_*(x_a) = x$.
- (2) Ist $x_a \in H_k(U_a; R)$ mit $(i_a)_*(x_a) = 0$, so gibt es $b > a$ mit $(i_{a,b})_*(x_a) = 0$.

Bemerkung

Diese Proposition gilt genauso für reduzierte Homologie.

Beweis

Sei $\sigma: |\Delta^n| \rightarrow X$ ein singulärer Simplex in X . Dann ist $\sigma^{-1}(U_a)$, $a \in \mathbb{N}$ eine offene Überdeckung von $|\Delta^n|$. Da $|\Delta^n|$ kompakt ist, gibt es a mit $|\Delta^n| \subseteq \sigma^{-1}(U_a)$, also $\sigma(|\Delta^n|) \subseteq U_a$. Da Elemente von $C_n(X; R)$ endliche R -Linearkombinationen von singulären Simplizes sind, folgt

$$C_n(X; R) = \bigcup_a C_n(U_a; R).$$

Damit ergeben sich leicht (1) und (2). \square

11 CW-Komplexe

11.1 Definition

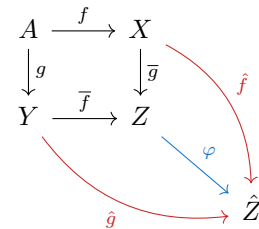
Ein kommutatives Diagramm von topologischen Räumen der Form

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow g & & \downarrow \bar{g} \\ Y & \xrightarrow{\bar{f}} & Z \end{array} \quad [\#]$$

heißt ein **Pushout**, falls es folgende universelle Eigenschaft hat:

$$\forall \hat{f}: X \rightarrow \hat{Z}, \hat{g}: Y \rightarrow \hat{Z} \text{ mit } \hat{f} \circ f = \hat{g} \circ g \text{ gilt:}$$

$$\exists! \varphi: Z \rightarrow \hat{Z} \text{ mit } \hat{f} = \varphi \circ \bar{g}, \hat{g} = \varphi \circ \bar{f}.$$



Wir sagen dann auch: $[\#]$ ist der Pushout von $\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow g & & \\ Y & & \end{array}$

Bemerkung

Jedes Diagramm $\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow g & & \\ Y & & \end{array}$ lässt sich zu einem Pushout vervollständigen: Betrachte dazu den Raum

$X \cup_A Y := X \amalg Y / f(a) \sim g(a) \forall a \in A$ mit der Quotiententopologie. Sind $\bar{f}: Y \rightarrow X \cup_A Y$ und $\bar{g}: X \rightarrow X \cup_A Y$ die von den Inklusionen $X \hookrightarrow X \amalg Y$ und $Y \hookrightarrow X \amalg Y$ induzierten Abbildungen. So ist

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow g & & \downarrow \bar{g} \\ Y & \xrightarrow{\bar{f}} & X \cup_A Y \end{array}$$

Existenz und Eindeutigkeit aus der universellen Eigenschaft können benutzt werden um zu zeigen, dass der Pushout eindeutig bis auf kanonischen Homöomorphismus ist.

11.2 Definition

Ein **CW-Komplex** ist ein topologischer Raum X zusammen mit einer Filtrierung der Unterräume von X :

$$\emptyset = X^{(-1)} \subseteq X^{(0)} \subseteq X^{(1)} \subseteq X^{(2)} \subseteq \dots \subseteq X^{(n)} \subseteq X^{(n+1)} \subseteq \dots \subseteq X$$

sodass die folgenden zwei Eigenschaften erfüllt sind:

(i) **Zellstruktur:** Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt einen Pushout von topologischen Räumen

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{i \in I^{(n)}} S^{n-1} & \xrightarrow{\coprod_{i \in I^{(n)}} q_i^{(n)}} & X^{(n-1)} \\ \downarrow \coprod_{i \in I^{(n)}} j_i & & \downarrow k^{(n)} \\ \coprod_{i \in I^{(n)}} D^n & \xrightarrow{\coprod_{i \in I^{(n)}} Q_i^{(n)}} & X^{(n)} \end{array}$$

wobei $j_i: S^{n-1} \hookrightarrow D^n$ und $k_n: X^{(n-1)} \rightarrow X^{(n)}$ die Inklusionen sind.

- (ii) **Schwache Topologie:** Es ist $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^{(n)}$ und $U \subseteq X$ ist genau dann offen, wenn $U \cap X^{(n)} \subseteq X^{(n)}$ für alle n offen ist.

Eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ zwischen CW-Komplexen heißt **zellulär**, falls $f(X^{(n)}) \rightarrow Y^{(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

11.3 Bemerkung

- (i) Die Abbildungen $q_i^{(n)}$ und $Q_i^{(n)}$ sind *nicht* Teil der Struktur eines CW-Komplex. Nur die Existenz von $q_i^{(n)}$ und $Q_i^{(n)}$ wird gefordert – sie ist nicht notwendig eindeutig. Hat man $q_i^{(n)}$ und $Q_i^{(n)}$ gewählt, so heißen $q_i^{(n)}$ die **anklebende Abbildung** der i -ten n -Zelle und $Q_i^{(n)}$ die **charakteristische Abbildung** der i -ten n -Zelle.

- (ii) Sei $\mathring{D}^n = D^n \setminus S^{n-1}$ das Innere von D^n . Die Abbildungen $Q_i^{(n)}$ schränken sich zu einem Homöomorphismus $\coprod_{i \in I^{(n)}} \mathring{D}^n \rightarrow X^{(n)} \setminus X^{(n-1)}$ ein. Insbesondere lässt sich $I^{(n)}$ mit der Menge der Wegzusammenhangskomponenten von $X^{(n)} \setminus X^{(n-1)}$ identifizieren. Die Wegzusammenhangskomponenten heißen die **offenen Zellen** von X . Damit ist jeder CW-Komplex die disjunkte Vereinigung seiner offenen Zellen.

⚠ Achtung: Jede offene n -Zelle ist offen in $X^{(n)}$, aber nicht notwendig in X .

- (iii) Der Abschluss einer offenen Zelle $Q_i^{(n)}(\mathring{D}^n)$ ist $Q_i^{(n)}(D^n)$ und insbesondere kompakt. Die $Q_i^{(n)}(D^n)$ heißen die **abgeschlossenen Zellen** und sind als Abschluss von offenen Zellen unabhängig von der Wahl der $q_i^{(n)}, Q_i^{(n)}$.

⚠ Achtung: Abgeschlossene Zellen sind Bilder von D^n unter stetigen Abbildungen, aber nicht notwendig homöomorph zu D^n .

- (iv) Ein CW-Komplex X heißt **endlich**, wenn er nur aus endlich vielen Zellen besteht, also wenn $I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I^{(n)}$ endlich ist. Insbesondere gibt es dann ein n mit $X = X^{(n)}$.

Die Dimension von X ist die maximale Dimension von Zellen von X : $\dim X = N$, falls $X^{(N)} = X$, $X^{(N-1)} \subsetneq X$. Gibt es kein solches N so $\dim X = \infty$.

11.4 Beispiele

- (i) S^n mit

$$(S^n)^{(k)} = \begin{cases} \emptyset, & \text{falls } k = -1 \\ \{(1, 0, \dots, 0)\}, & \text{falls } k = 0, \dots, n-1 \\ S^n, & \text{falls } k \geq n \end{cases}$$

ist ein CW-Komplex via $S^n \cong D^n / S^{n-1}$

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \longrightarrow & (S^n)^{(n-1)} = \{(1, 0, \dots, 0)\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^n & \longrightarrow & S^n \end{array}$$

- (ii) S^n mit $(S^n)^{(k)} = \{(x_0, \dots, x_k, 0, \dots, 0) \in S^n\}$ ist ebenfalls eine CW-Struktur auf S^n .
- (iii) Sei $K = (V, \Sigma)$ ein simplizialer Komplex. Es ist $|\Delta^n| \cong D^n$ und $|\partial \Delta^n| \cong S^{n-1}$. Sei $\Sigma^{(n)} := \Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup \dots \cup \Sigma_n$. Dann wird $|K|$ durch $|K|^{(n)} := |(V, \Sigma^{(n)})|$ für $n \geq 0$ zu einem CW-Komplex. Ist $f: K \rightarrow L$ eine simpliziale Abbildung, so ist $|f|: |K| \rightarrow |L|$ eine zelluläre Abbildung.

(iv) Der n -dimensionale reelle projektive Raum $\mathbb{R}P^n$ kann definiert werden durch

$$\mathbb{R}P^n := \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / x \sim \lambda x = S^n / x \sim -x$$

Punkte in $\mathbb{R}P^n$ sind Äquivalenzklassen von $(n+1)$ -Tupeln reeller Zahlen und werden als die sogenannten homogenen Koordinaten $[x_0 : \dots : x_n]$ geschrieben. Es ist

$$\mathbb{R}P^n = \left\{ [x_0 : \dots : x_n] \mid (x_0, \dots, x_n) \in S^n \right\} = \left\{ [x_0 : \dots : x_n] \mid (x_0, \dots, x_n) \in S^n, x_n \geq 0 \right\}$$

Wir erhalten einen Homöomorphismus $f^{(n)} : D^n / x \sim -x, x \in S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}P^n$ mit

$$f(x_1, \dots, x_n) = \left[x_1 : \dots : x_n : \sqrt{1 - \sum_{i=1}^n x_i^2} \right]$$

Ist $Q^{(n)} : D^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ die Komposition von $f^{(n)}$ mit der Projektion $D^n \rightarrow D^n / x \sim -x, x \in S^{n-1}$ und $q^{(n)} : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}P^{n-1}$ die Projektion, so erhalten wir einen Pushout

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \xrightarrow{q^{(n)}} & \mathbb{R}P^{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^n & \xrightarrow{Q^{(n)}} & \mathbb{R}P^n \end{array}$$

Induktiv erhalten wir einen CW-Struktur auf $\mathbb{R}P^n$ mit genau einer k -Zelle für $k = 0, \dots, n$ und

$$(\mathbb{R}P^n)^{(k)} \cong \mathbb{R}P^k$$

(v) Der n -dimensionale komplexe projektive Raum $\mathbb{C}P^n$ kann definiert werden durch

$$\mathbb{C}P^n := \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} / z \sim \lambda z = S^{2n+1} / z \sim \lambda z, \lambda \in S^1$$

Punkte in $\mathbb{C}P^n$ sind Äquivalenzklassen von $(n+1)$ -Tupeln komplexer Zahlen und werden als die sogenannten homogenen Koordinaten $[z_0 : \dots : z_n]$ geschrieben. Es ist

$$\mathbb{C}P^n = \left\{ [z_0 : \dots : z_n] \mid (z_0, \dots, z_n) \in S^{2n+1} \right\} = \left\{ [z_0 : \dots : z_n] \mid (z_0, \dots, z_n) \in S^{2n+1}, z_n \geq 0 \right\}$$

Wir erhalten einen Homöomorphismus $f^{(n)} : D^{2n+1} / z \sim \lambda z, \lambda \in S^1 \rightarrow \mathbb{C}P^n$ mit

$$f(z_1, \dots, z_n) = \left[z_1 : \dots : z_n : \sqrt{1 - \sum_{i=1}^n |z_i|^2} \right]$$

Ist $Q^{(2n)} : D^{2n} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ die Komposition von $f^{(n)}$ mit der Projektion $D^{2n} \rightarrow D^{2n} / z \sim \lambda z, z \in S^{2n}$ und $q^{(n)} : S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^{n-1}$ die Projektion, so erhalten wir einen Pushout

$$\begin{array}{ccc} S^{2n+1} & \xrightarrow{q^{(n)}} & \mathbb{C}P^{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^{2n} & \xrightarrow{Q^{(n)}} & \mathbb{C}P^n \end{array}$$

Induktiv erhalten wir einen CW-Struktur auf $\mathbb{C}P^n$ mit genau einer k -Zelle für $k = 0, 2, \dots, 2n$ und

$$(\mathbb{C}P^n)^{(k)} \cong \mathbb{C}P^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}$$

11.5 Lemma

Sei X ein CW-Komplex und $K \subseteq X$. Dann ist K genau dann kompakt, wenn K abgeschlossen ist und K nur endlich viele offene Zellen von X schneidet.

Beweis

Zunächst: Ist $S \subseteq X$ ein Unterraum der jede offene Zelle höchstens in einem Punkt schneidet, so ist S diskret. Für $S_0 \subseteq S$ ist $S_0 \cap (X^{(n)} \setminus X^{(n-1)})$ abgeschlossen in $X^{(n)}$, da S_0 jede offene n -Zelle von X höchstens in einem Punkt schneidet. Daher ist $S_0 \cap X^{(n)} \subseteq X^{(n)}$ abgeschlossen für alle n . Damit ist auch $S_0 \subseteq X$ abgeschlossen und S diskret.

Sei nun $K \subseteq X$ kompakt. Dann ist K sicher abgeschlossen. Sei $S \subseteq K$ ein Teilraum der aus jeder offenen Zelle von X , die K schneidet, genau einen Punkt enthält. Wegen der Vorüberlegung ist S diskret. Da $S \subseteq K$ abgeschlossen und K kompakt ist, ist S auch kompakt. Damit ist S endlich und K schneidet nur endlich viele offene Zellen.

Ist nun umgekehrt K abgeschlossen und schneidet nur endlich viele offene Zellen, so ist K enthalten in einer endlichen Vereinigung von abgeschlossen Zellen von X . Da diese abgeschlossen Zellen kompakt sind, ist auch diese Vereinigung kompakt, K ist also eine abgeschlossener Teilraum eines kompakten Teilraums und damit selbst kompakt. \square

11.6 Korollar

Ein CW-Komplex ist genau dann kompakt, wenn er endlich ist.

12 Zelluläre Homologie

12.1 Definition

Sei X ein CW-Komplex. Dann heißt

RevChap12

$$C_n^{\text{cell}}(X; R) := H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}; R)$$

der **n -te zelluläre Kettenmodul** von X mit Koeffizienten in R . Die n -te Randabbildung $\partial_n^{\text{cell}} : C_n^{\text{cell}}(X; R) \rightarrow C_{n-1}^{\text{cell}}(X; R)$ wird durch die Komposition

$$\begin{array}{ccc} H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}; R) & \xrightarrow{\partial_n^{(X^{(n)}, X^{(n-1)})}} & H_{n-1}(X^{(n-1)}; R) \\ & & \downarrow (j^{(n-1)})_* \\ & & H_{n-1}(X^{(n-1)}, X^{(n-2)}; R) \end{array}$$

definiert. Dabei ist $\partial_n^{(X^{(n)}, X^{(n-1)})}$ die Randabbildung aus der Paarfolge für $(X^{(n)}, X^{(n-1)})$ und $j^{(n-1)}$ die Inklusion $(X^{(n-1)}, \emptyset) \hookrightarrow (X^{(n-1)}, X^{(n-2)})$.

12.2 Lemma

$$\partial_{n-1}^{\text{cell}} \circ \partial_n^{\text{cell}} = 0$$

Beweis

$$\begin{array}{ccccccc} H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}) & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(X^{(n-1)}) & \longrightarrow & \dots \\ & & \parallel & & \\ & & H_{n-1}(X^{(n-1)}) & \xrightarrow{j_*^{(n-1)}} & H_{n-1}(X^{(n-1)}, X^{(n-2)}) & \xrightarrow{\partial_{n-1}} & H_{n-2}(X^{(n-2)}) \longrightarrow \dots \\ & & & & & & \parallel \\ & & & & & & H_{n-2}(X^{(n-2)}) \xrightarrow{j_*^{(n-2)}} H_{n-2}(X^{(n-2)}, X^{(n-3)}) \end{array}$$

Also $\partial_{n-1}^{\text{cell}} \circ \partial_n^{\text{cell}} = 0$, da schon $\partial_{n-2} \circ j_*^{(n-1)} = 0$. □

12.3 Definition

$(C_*^{\text{cell}}(X; R), \partial_*^{\text{cell}})$ heißt der **zelluläre Kettenkomplex** von X über R . Seine Homologie $H_*^{\text{cell}}(X; R)$ heißt die **zelluläre Homologie** von X .

12.4 Bemerkung

Der zelluläre Kettenkomplex und die zelluläre Homologie sind Funktoren auf der Kategorie der CW-Komplexe und zellulären Abbildungen.

12.5 Lemma

Sei X ein CW-Komplex. Wähle $q_i^{(n)}$ und $Q_i^{(n)}$ für die Zellstruktur auf X .

a)

$$\left(\coprod_{i \in I^{(n)}} Q_i^{(n)}, \coprod_{i \in I^{(n)}} q_i^{(n)} \right) : \left(\coprod_i D^n, \coprod_i S^{n-1}; R \right) \longrightarrow \left(X^{(n)}, X^{(n-1)}; R \right)$$

induziert einen Isomorphismus in H_* .

b)

$$H_k \left(\coprod_i D^n, \coprod_i S^{n-1}; R \right) = \begin{cases} R[I^{(n)}], & \text{falls } k = n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis

a) Sei $D_0^n = D^n \setminus \{0\}$, $\frac{1}{2}D^n = \{x \mid x \in D^n\}$ und $\frac{1}{2}D_0^n = \frac{1}{2}D^n \setminus \{0\}$. Wir definieren

$$X_{++}^{(n-1)} := X^{(n)} \setminus \bigcup_{i \in I^{(n)}} Q_i^{(n)}(\{0\}) \quad \text{und} \quad X_+^{(n-1)} := X^{(n)} \setminus \bigcup_{i \in I^{(n)}} Q_i^{(n)}\left(\frac{1}{2}D^n\right)$$

Dann sind $X^{(n-1)} \hookrightarrow X_{++}^{(n-1)} \hookrightarrow X_+^{(n-1)}$ Homotopieäquivalenzen. Betrachte:

$$\begin{array}{ccccc} (\coprod D^n, \coprod S^{n-1}) & \xrightarrow{(1)} & (\coprod D^n, \coprod D_0^n) & \xleftarrow{(2)} & (\coprod \frac{1}{2}D^n, \coprod_{i \in I^{(n)}} \frac{1}{2}D_0^n) \\ \downarrow (\coprod Q_i^{(n)}, \coprod q_i^{(n)}) & & \downarrow & & \downarrow (3) \\ (X^{(n)}, X^{(n-1)}) & \xrightarrow{(5)} & (X^{(n)}, X_{++}^{(n-1)}) & \xleftarrow{(4)} & (X^{(n)} \setminus X_+^{(n-1)}, X_{++}^{(n-1)} \setminus X_+^{(n-1)}) \end{array}$$

(1), (2), (5) sind Homotopieäquivalenzen und induzieren Isomorphismen in Homologie. (3) ist ein Homöomorphismus und induziert einen Isomorphismus in Homologie. (4) erfüllt die Voraussetzungen für den Ausschneideisomorphismus und induziert daher auch einen Isomorphismus in Homologie. Damit folgt a).

b) Es gilt

$$\begin{aligned} H_k \left(\coprod_i D^n, \coprod_i S^{n-1}; R \right) &\xleftarrow{\cong} \bigoplus_i H_k(D^n, S^{n-1}; R) \xrightarrow{\cong} \bigoplus_i \tilde{H}_{k-1}(S^{n-1}; R) \\ &\cong \bigoplus_i \begin{cases} R, & \text{falls } k = n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\ &\cong \begin{cases} R[I^{(n)}], & \text{falls } k = n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad \square \end{aligned}$$

12.6 Bemerkung

$$\begin{array}{ccc} C_n^{\text{cell}}(X; R) & \xrightarrow{\partial_n^{\text{cell}}} & C_{n-1}^{\text{cell}}(X; R) \\ \parallel & & \parallel \\ H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}; R) & \longrightarrow & H_{n-1}(X^{(n-1)}, X^{(n-2)}; R) \\ \parallel & & \parallel \\ R[I^{(n)}] & \longrightarrow & R[I^{(n)}] \end{array}$$

Die Randabbildung ∂_n^{cell} wird unter diesen Isomorphismen zu einer $I^{(n-1)} \times I^{(n)}$ -Matrix. Für $j \in I^{(n-1)}$ und $k \in I^{(n)}$ ist der (j, k) -Eintrag dieser Matrix genau der Abbildungsgrad einer Selbstabbildung

der $(n-1)$ -Sphäre. Diese $(Q_i^{(n-1)}, q_i^{(n-1)})$ induzieren einen Homöomorphismus $\coprod_i D^{n-1} / \coprod_i S^{n-2} \xrightarrow{\cong} X^{(n)} / X^{(n-1)}$. Durch Komposition mit der Projektion auf die j -te Zelle: $\coprod_i D^{n-1} / \coprod_i S^{n-2} \xrightarrow{p_j^{(n-1)}} D^{n-1} / S^{n-2} \cong S^{n-1}$. Der (j, k) -te Eintrag ist nun der Abbildungsgrad von

$$S^{n-1} \xrightarrow{q_k^{(n-2)}} X^{(n-1)} \longrightarrow X^{(n-1)} / X^{(n-2)} \xrightarrow{\cong} \coprod_i D^{n-1} / \coprod_i S^{n-2} \xrightarrow{p_j^{(n-1)}} S^{n-1}$$

12.7 Definition

Eine natürliche Transformation τ zwischen Funktoren $F, G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ heißt ein **natürlicher Isomorphismus**, wenn $\tau_C: F(C) \rightarrow G(C)$ für alle Objekte C von \mathcal{C} ein Isomorphismus in \mathcal{D} ist.

12.8 Satz

Für CW-Komplexe gibt es einen natürlichen Isomorphismus $\tau_X: H_*^{\text{cell}}(X; R) \xrightarrow{\cong} H_*(X; R)$.

Beweis (mit Lemma 12.9)

Betrachte folgendes Diagramm

"R" aus
Platzgründen
weggelassen

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & H_n(X^{(n+1)}, X^{(n)}) \\
 & & & & = 0 \\
 & & & \nearrow & \\
 0 = H_n(X^{(n-1)}) & & H_n(X^{(n+1)}) & \xrightarrow[\text{Lemma b)}]{\cong} & H_n(X) \\
 & \searrow & \nearrow & & \\
 & & H_n(X^{(n)}) & & \\
 & \nearrow & \searrow & & \\
 H_{n+1}(X^{(n+1)}, X^{(n)}) & \xrightarrow{\partial_{n+1}^{\text{cell}}} & H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}) & \xrightarrow{\partial_n^{\text{cell}}} & H_{n-1}(X^{(n-1)}, X^{(n-2)}) \\
 & & \searrow & \nearrow & \\
 & & H_{n-1}(X^{(n-1)}) & & \\
 & \nearrow & \searrow & & \\
 & & H_{n-1}(X^{(n-2)}) \\
 & & = 0
 \end{array}$$

Additional arrows in the diagram:
 - Red arrow from $0 = H_n(X^{(n-1)})$ to $H_n(X^{(n)})$.
 - Yellow arrow from $H_n(X^{(n)})$ to $H_n(X^{(n+1)})$.
 - Red arrow from $H_n(X^{(n)})$ to $H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)})$ labeled $j_*^{(n)}$.
 - Red arrow from $H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)})$ to $H_{n-1}(X^{(n-1)}, X^{(n-2)})$ labeled $\partial_n^{X^{(n)}, X^{(n-1)}}$.
 - Blue arrow from $H_{n-1}(X^{(n-1)}, X^{(n-2)})$ to $H_{n-1}(X^{(n-1)})$.
 - Blue arrow from $H_{n-1}(X^{(n-1)})$ to $H_{n-1}(X^{(n-2)})$.

Es folgt, dass $j_*^{(n)}$ ein Isomorphismus ist, $H_n(X^{(n)}; R) \xrightarrow{\cong} \ker \partial_n^{\text{cell}}$ und $\text{Im } \partial_{n+1}^{X^{(n+1)}, X^{(n)}} \xrightarrow{\cong} \text{Im } \partial_{n+1}^{\text{cell}}$. Weiter erhalten wir einen Isomorphismus

$$H_n(X; R) \cong H_n(X^{(n+1)}; R) \xleftarrow{\cong} H_n(X^{(n)}; R) / \text{Im } \partial_{n+1}^{X^{(n+1)}, X^{(n)}}$$

Damit folgt die Behauptung. □

12.9 Lemma

Sei X ein CW-Komplex.

- a) Für $k > n$ ist $H_k(X^{(n)}; R) = 0$.
- b) Für $k < n$ induziert die Inklusion $l_n : X^{(n)} \hookrightarrow X$ einen Isomorphismus $(l_n)_* : H_k(X^{(n)}; R) \rightarrow H_k(X; R)$.

Beweis

- a) Ist $k > n$, so erhalten wir aus der Paarfolge einen Isomorphismus

$$H_{k+1}(X^{(n)}, X^{(n-1)}; R) \xrightarrow{=0} H_k(X^{(n-1)}; R) \xrightarrow{\cong} H_k(X^{(n)}; R) \xrightarrow{=0} H_k(X^{(n)}, X^{(n-1)}; R)$$

Da $H_k(X^{(0)}; R) = 0$ für $k > 0$ folgt a) nun durch endliche Induktion für $n = 0, 1, \dots, k-1$.

- b) Ist $n > k$, so erhalten wir

$$H_{k+1}(X^{(n+1)}, X^{(n)}; R) \xrightarrow{=0} H_k(X^{(n)}; R) \xrightarrow{\cong} H_k(X^{(n+1)}; R) \xrightarrow{=0} H_k(X^{(n+1)}, X^{(n)}; R)$$

Für $m \geq n > k$ induziert die Inklusion $X^{(n)} \hookrightarrow X^{(m)}$ daher einen Isomorphismus $H_k(X^{(n)}; R) \rightarrow H_k(X^{(m)}; R)$. Ist $\dim X$ endlich, so folgt die Behauptung.

Für den allgemeinen Fall beobachten wir zunächst, dass es zu jeder stetigen Abbildung $\sigma : |\Delta^j| \rightarrow X$ ein n gibt mit $\text{Im } \sigma \subseteq X^{(n)}$, da $\text{Im } \sigma \subseteq X$ kompakt ist und daher nur endlich viele offene Zellen von X trifft (11.5).

$$\implies C_*(X; R) = \bigcup_n C_*(X^{(n)}; R)$$

Damit folgt

- (1) $\forall x \in H_k(X; R) : \exists n : x \in \text{Im}(H_k(X^{(n)}; R) \rightarrow H_k(X; R))$
- (2) $\forall x \in H_k(X^{(n)}; R)$ sodass das Bild von x in $H_k(X; R)$ trivial ist, so $\exists n \geq n$, sodass das Bild von x in $H_k(X^{(m)}; R)$ trivial ist.

Da für $m \geq n > k$ $H_k(X^{(n)}; R) \rightarrow H_k(X^{(m)}; R)$ ein Isomorphismus ist, ergibt sich damit die Behauptung. \square

12.10 Korollar

Die Eulercharakteristik eines endlichen simplizialen Komplexes ist eine topologische Invariante.

Beweis

Sei a_n die Anzahl der n -Simplizes von K . Dann gibt es eine CW-Struktur auf $|K|$, die für jedes n genau a_n Zellen hat.

$$\chi(K) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i a_i = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \text{Rg } C_i^{\text{cell}}(|K|) \stackrel{\text{Kapitel 4}}{=} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \text{Rg } H_i^{\text{cell}}(|K|) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \text{Rg } H_i(|K_i|)$$

Da die $H_i(|K_i|)$ eine topologische Invariante sind, ist auch $\chi(K)$ eine topologische Invariante. \square

12.11 Bemerkung

Ist X ein CW-Komplex mit endlich vielen n -Zellen, so ist $H_n(X)$ ein endlich erzeugter \mathbb{Z} -Modul. Man definiert dann die **n -te Bettizahl** von X als $b_n := \operatorname{Rg} H_n(X)$. Ist X ein endlicher CW-Komplex, so definiert man die Eulercharakteristik von X als

$$\chi(X) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n.$$

Ist a_n die Anzahl der n -Zellen von X , so gilt $\chi(X) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$.

12.12 Beispiel

Es gilt

$$H_k(\mathbb{C}P^n; R) \cong \begin{cases} R, & \text{falls } k = 0, 2, 4, \dots, 2n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis

Aus Kapitel 11 wissen wir, dass es auf $\mathbb{C}P^n$ eine CW-Struktur gibt mit genau einer Zelle in der Dimension $0, 2, 4, \dots, 2n$ (und keine weiteren Zellen). Der zelluläre Kettenkomplex hat daher folgende Form:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} 0 & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & \dots & & 2n-1 & & 2n & & 2n+1 & & \dots \\ R \longleftarrow & 0 \longleftarrow & R \longleftarrow & 0 \longleftarrow & R \longleftarrow & \dots \longleftarrow & 0 \longleftarrow & R \longleftarrow & 0 \longleftarrow & \dots \end{array}$$

Alle Randabbildungen sind trivial und die Homologie von $\mathbb{C}P^n$ stimmt mit den zellulären Kettenkomplexen überein. \square

12.13 Beispiel

Es ist

$$H_k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{falls } k = 0 \text{ oder } (k = n \text{ und } k \text{ ungerade}) \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & \text{falls } 0 < k < n \text{ und } k \text{ ungerade} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis

Aus Kapitel 11 wissen wir, dass es eine CW-Struktur auf $\mathbb{R}P^n$ gibt, die für $k = 0, \dots, n$ genau eine k -Zelle und keine weiteren Zellen besitzt. Der zelluläre Kettenkomplex von $\mathbb{R}P^n$ (über \mathbb{Z}) hat also die Form:

$$\mathbb{Z} \xleftarrow{\partial_1^{\text{cell}}} \mathbb{Z} \xleftarrow{\partial_2^{\text{cell}}} \mathbb{Z} \xleftarrow{\quad} \dots \xleftarrow{\quad} \mathbb{Z} \xleftarrow{\partial_n^{\text{cell}}} \mathbb{Z} \xleftarrow{\quad} 0$$

Wir müssen die Randabbildung verstehen. In der CW-Struktur können wir $(\mathbb{R}P^n)^{(k)}$ mit $\mathbb{R}P^k$ identifizieren. Die anklebende Abbildung $q^{(k+1)}: S^k \rightarrow \mathbb{R}P^k$ der $(k+1)$ -Zelle ist die Projektion $(x_0, \dots, x_k) \mapsto [x_0 : \dots : x_k]$. Die charakteristische Abbildung $Q^{(k+1)}: D^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}P^{k+1}$ der $(k+1)$ -Zelle ist gegeben durch

$$(x_0, \dots, x_k) \mapsto \left[x_0 : \dots : x_k : \sqrt{1 - \|(x_1, \dots, x_k)\|_2^2} \right]$$

Betrachte folgendes kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
 C_{k+1}^{\text{cell}}(\mathbb{R}P^n) & \xrightarrow{\partial_{k+1}^{\text{cell}}} & C_k^{\text{cell}}(\mathbb{R}P^n) & & \\
 \parallel & & \parallel & & \\
 H_{k+1}(\mathbb{R}P^{k+1}, \mathbb{R}P^k) & \xrightarrow{\partial^{\mathbb{R}P^{k+1}, \mathbb{R}P^k}} & H_k(\mathbb{R}P^k) & \xrightarrow{\quad} & H_k(\mathbb{R}P^k, \mathbb{R}P^{k-1}) \\
 \uparrow (Q^{(k+1)}, q^{(k+1)})_* \cong & & \uparrow q_*^{(k+1)} & & \uparrow (q^{(k+1)}, q^{(k)})_* \\
 H_{k+1}(D^{k+1}, S^k) & \xrightarrow[\cong]{\partial^{D^{k+1}, S^k}} & \tilde{H}_k(S^k) & \xrightarrow{j_*} & H_k(S^k, S^{k-1})
 \end{array}$$

Das Bild von $\partial_{k+1}^{\text{cell}}$ stimmt also mit dem Bild der Komposition

$$H_k(S^k) \xrightarrow{j_*} H_k(S^k, S^{k-1}) \xrightarrow{(q^{(k+1)}, q^{(k)})_*} H_k(\mathbb{R}P^k, \mathbb{R}P^{k-1})$$

überein. Sei $i_{\pm}: D^k \rightarrow S^k$ definiert durch $i_{\pm}(x) = (\pm x, \pm \sqrt{1 - \|x\|_2^2})$. Sei $l: S^{k-1} \rightarrow i_-(D^k)$ die Inklusion und $R: S^k \rightarrow S^k$ die Punktspiegelung $x \mapsto -x$. Es ist $i_+ = R \circ i_-$. Betrachte

$$\begin{array}{ccc}
 & \tilde{H}_k(S^k) & \\
 & \downarrow j_* & \\
 \begin{array}{l} y_+ \in H_k(D^k, S^{k-1}) \\ \oplus \\ y_- \in H_k(D^k, S^{k-1}) \end{array} & \xrightarrow[\cong]{\begin{array}{l} (i_+, i_+|_{S^{k-1}}) \\ \oplus \\ (i_-, i_-|_{S^{k-1}}) \end{array}} & H_k(S^k, S^{k-1}) \xrightarrow[\cong]{\begin{array}{l} ((\text{id}_{S^k}, l)_*) \\ (R, R|_{S^{k-1}}) \end{array}} \begin{array}{l} H_k(S^k, i_-(D^k)) \ni x_+ \\ \oplus \\ H_k(S^k, i_-(D^k)) \ni x_- \end{array} \quad [\#] \\
 & \downarrow (q^{(k+1)}, q^{(k)})_* & \\
 & H_k(\mathbb{R}P^k, \mathbb{R}P^{k-1}) &
 \end{array}$$

Sei $x \in \tilde{H}_k(S^k)$ ein Erzeuger. Seien (x_+, x_-) und (y_+, y_-) die Elemente, die $j_+(x)$ unter den horizontalen Isomorphismen in $[\#]$ entsprechen. Mit Hilfe der Paarfolge zu $(S^k, i_-(D^k))$ sehen wir, dass x_+ ein Erzeuger von $H_k(S^k, i_-(D^k))$ ist. Es ist $x_+ = (\text{id}_{S^k}, l)_*(j_*(x))$ und

$$x_- = (R, R|_{S^{k-1}})_* \circ j_*(x) = (\text{id}_{S^k}, l) \circ j_* \circ R_*(x) = (\text{id}_{S^k}, l)_* \circ j_*((-1)^{k+1}x) = (-1)^{k+1}x_+$$

Die Komposition der horizontalen Isomorphismen in $[\#]$ ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} (i_+, l \circ i_+|_{S^{k-1}})_* & 0 \\ 0 & (R, R|_{S^{k-1}})_* \circ (i_-, i_-|_{S^{k-1}})_* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (i_+, l \circ i_+|_{S^{k-1}})_* & \\ & (i_+, l \circ i_+|_{S^{k-1}})_* \end{pmatrix}$$

Es folgt, dass y_+ ein Erzeuger von $H_k(D^k, S^{k-1})$ ist und $y_- = (-1)^{k+1}y_+$ ist. In $[\#]$ wird y_+ auf $(Q^{(k)}, q^{(k)})_*(y_+)$ abgebildet. Insbesondere wird y_+ auf einen Erzeuger $z_k \in H_k(\mathbb{R}P^k, \mathbb{R}P^{k-1})$ abgebildet. Es folgt

$$\begin{aligned}
 (q^{(k+1)}, q^{(k)})_*(j_*(x)) &= (q^{(k+1)}, q^{(k)})_* \left((i_+, i_+|_{S^{k-1}})_*(y_+) + (i_-, i_-|_{S^{k-1}})_*(y_-) \right) \\
 &= (Q^{(k)}, q^{(k)})_*(y_+(-1)^{k+1}y_+) \\
 &= \begin{cases} 2z_k, & \text{falls } k \text{ ungerade} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Es folgt

$$\operatorname{Im} \partial_{k+1}^{\text{cell}} = \begin{cases} 2 \cdot C_k^{\text{cell}}(X), & \text{falls } k \text{ ungerade} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Der zelluläre Kettenkomplex ist daher isomorph zu:

$$\mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \xleftarrow{2} \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \xleftarrow{\quad} \dots \xleftarrow{\quad} \mathbb{Z} \xleftarrow{\quad} 0 \xleftarrow{\quad} 0$$

Für $R = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist somit

$$H_k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & \text{falls } k = 0, \dots, n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad \square$$

12.14 Satz

Sei K ein geordneter simplizialer Komplex. Für $\sigma = \{v_0, \dots, v_n\} \in \Sigma_n$ mit $v_0 < v_1 < \dots < v_n$ sei $f_\sigma: |\Delta^n| \rightarrow |K|$ gegeben durch $f_\sigma(\sum_{i=0}^n t_i e_i) = \sum_{i=0}^n t_i v_i$. Wir erhalten

$$[f_\sigma] \in H_n(|K|^{(n)}, |K|^{(n-1)}; R) = C_n^{\text{cell}}(|K|; R).$$

Diese Zuordnung definiert einen Isomorphismus zwischen dem simplizialen Kettenkomplex von K und dem zellulären Kettenkomplex von $|K|$

$$\tau: C_*(K; R) \longrightarrow C_*^{\text{cell}}(|K|, R)$$

Insbesondere ist $H_*(K; R) \cong H_*(|K|; R)$ eine topologische Invariante von K .

Beweis

Betrachte

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_n} R & \xrightarrow{\cong} & \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_n} H_n(|\Delta^\sigma|, |\partial \Delta^\sigma|; R) \\ \cong \downarrow & & \cong \downarrow \\ C_n(K; R) & \xrightarrow{\tau} & H_n(|K|^{(n)}, |K|^{(n-1)}; R) \end{array}$$

Nun ist auch τ ein Isomorphismus, da $[f_\sigma]$ ein Erzeuger von $H_n(|\Delta^\sigma|, |\partial \Delta^\sigma|; R)$ ist, siehe Übungen. Es bleibt zu zeigen, dass $\sigma \mapsto [f_\sigma]$ mit den Randabbildungen vertauscht. Dies ergibt sich sofort aus $f_{\partial_j \sigma} = \partial_j f_\sigma$. \square

13 Kleine Simplizes

13.1 Satz

Sei (X, A) ein Paar von topologischen Räumen. Sei $L \subseteq A$ mit $\bar{L} \subseteq \mathring{A}$. Dann induziert die Inklusion $(X \setminus L, A \setminus L) \hookrightarrow (X, A)$ den Ausschneidungs-Isomorphismus $H_*(X \setminus L, A \setminus L; R) \xrightarrow{\cong} H_*(X, A; R)$. Es ist

$$H_*(X, A; R) = H_*(C_*(X; R)/C_*(A; R), \partial_*) \text{ und } H_*(X \setminus L, A \setminus L; R) = H_*(C_*(X \setminus L; R)/C_*(A \setminus L; R), \partial_*)$$



13.2 Definition

Sei \mathcal{U} eine offene Überdeckung von X . Ein singulärer Simplex $\sigma: |\Delta^n| \rightarrow X$ heißt \mathcal{U} -**klein**, falls es ein $U \in \mathcal{U}$ gibt mit $\text{Im } \sigma \subseteq U$. Die \mathcal{U} -kleinen Simplizes erzeugen den Unterkettenkomplex $(C_*^{\mathcal{U}}, \partial_*)$ des simplizialen Kettenkomplexes $C_*(X; R)$.

13.3 Satz über kleine Simplizes

Die Inklusion $C_*^{\mathcal{U}}(X; R) \rightarrow C_*(X; R)$ induziert einen Isomorphismus in Homologie.

13.4 Bemerkung

Der Satz über kleine Simplizes lässt sich auf Paare von topologischen Räumen verallgemeinern. Für eine Überdeckung \mathcal{U} von X setzen wir

$$C_*^{\mathcal{U}}(X, A; R) := C_*^{\mathcal{U}}(X; R)/C_*(A; R) \cap C_*^{\mathcal{U}}(X; R)$$

Dann induziert die Inklusion $C_*^{\mathcal{U}}(X, A; R) \rightarrow C_*(X, A; R)$ einen Isomorphismus in Homologie. Beweis mit Paarfolge und 5er-Lemma.

13.5 Beweis des Ausschneidungssatzes (13.1)

Seien $\mathcal{U} := \{\mathring{A}, X \setminus \bar{L}\}$ und $\mathcal{U}_L := \{\mathring{A} \setminus L, X \setminus \bar{L}\}$. Dann gilt nach dem Satz über kleine Simplizes

$$\begin{array}{ccc} C_*^{\mathcal{U}_L}(X \setminus L, A \setminus L; R) & \xrightarrow{\cong} & C_*^{\mathcal{U}}(X, A; R) \\ \cong_{H_*} \downarrow & & \downarrow \cong_{H_*} \\ C_*(X \setminus L, A \setminus L; R) & \xrightarrow{(\star)} & C_*(X, A; R) \end{array}$$

Daher induziert auch die Inklusion (\star) einen Isomorphismus in H_* . □

13.6 Idee zum Beweis des Satzes über kleine Simplizes



13.7 Definition

$s_n := \left(\frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1}\right) \in |\Delta^n|$ heißt der **Schwerpunkt** von $|\Delta^n|$. Ist $\sigma: |\Delta^p| \rightarrow |\Delta^n|$ ein singulärer p -Simplex, so definieren wir $(K_{\Delta^n})(\sigma): |\Delta^{p+1}| \rightarrow |\Delta^n|$ durch

$$(K_{\Delta^n})(\sigma)(t_0, \dots, t_{p+1}) = t_0 \cdot s_n + (1 - t_0) \cdot \sigma\left(\frac{(t_1, \dots, t_{p+1})}{1 - t_0}\right)$$

Wir erhalten eine Abbildung $(K_{\Delta^n})_p: C_p(|\Delta^n|; R) \rightarrow C_{p+1}(|\Delta^n|; R)$.

13.8 Lemma

Sei $p_n: |\Delta^n| \rightarrow |\Delta^n|$ die konstante Abbildung mit $\text{Im } p_n = \{s_n\}$. Dann ist $(K_{\Delta^n})_*$ eine Kettenhomotopie zwischen id und $(p_n)_*$.

Beweis

Sei σ ein singulärer p -Simplex in $|\Delta^n|$. Dann ist


$$\begin{aligned} \partial_{p+1} \circ (K_{\Delta^n})_p(\sigma) &= \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j (K_{\Delta^n})_p(\sigma) \circ \iota_{p+1,j} = \sigma + \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^j (K_{\Delta^n})_p(\sigma) \circ \iota_{p+1,j} \\ &= \sigma + \begin{cases} \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^j (K_{\Delta^n})_{p-1}(\sigma \circ \iota_{p+1,j}), & \text{falls } p \geq 1 \\ -c_{\{s_n\}}: |\Delta^0| \rightarrow \{s_n\}, & \text{falls } p = 0 \end{cases} \\ &= \sigma - \begin{cases} (K_{\Delta^n})_{p-1}(\partial_p \circ \sigma), & \text{falls } p \geq 1 \\ c_{\{s_0\}}, & \text{falls } p = 0 \end{cases} \quad \square \end{aligned}$$

13.9 Definition

Wir definieren induktiv natürliche Transformationen $B_n: C_n(-; R) \rightarrow C_n(-; R)$ und $H_n: C_n(-; R) \rightarrow C_{n+1}(-; R)$ wie folgt: Für $n = 0$ setzen wir $(B_0)_X = \text{id}$. Sei B_k nun schon für $k = 0, \dots, n-1$ definiert. Betrachte $\text{id}_{|\Delta^n|} \in C_n(|\Delta^n|; R)$. Setze

$$(B_n)_{|\Delta^n|}(\text{id}_{|\Delta^n|}) := (K_{\Delta^n})_{n-1} \circ (B_{n-1})_{|\Delta^n|} \circ \partial_n(\text{id}_{|\Delta^n|})$$

Index

Die Seitenzahlen sind mit Hyperlinks zu den entsprechenden Seiten versehen, also anklickbar 

Abbildungsgrad, 36
abgeschlossene Zelle, 42
anklebende Abbildung, 42
assoziativ, 1

charakteristische Abbildung, 42
CW-Komplex, 41
 endlicher, 42

Ecken, 4
Euler-Charakteristik, 6
 von \mathbb{Z} -Kettenkomplexen, 14

freier Modul, 7
Funktork, 2
 dargestellt, 2

geometrische Realisierung, 5
graduierten, 18
Graphen, 4

Homologiekategorie, 16
Homotopieinverse, 21
Homotopieäquivalenz, 21

Kategorie, 1
 klein, 2
kettenhomotop, 22
Kettenhomotopie, 22
Kettenmoduln, 10
Komposition, 1
kontrahierbar, 21
Koprodukt
 topologischer Räume, 19
 von R -Moduln, 20
kurze exakte Folge von Kettenkomplexen, 28
kurze exakte Sequenz, 11

lange exakte Folge, 27

Morphismen, 1

n -Ketten, 16
 n -Ränder, 16
 n -Simplex, 4
 n -te Bettizahl, 49
 n -te Homologie, 10

n -te Randabbildung
 simplicial, 8
 singulär, 15
 n -ter Homologiemodul
 simplicial, 9
 singulär, von Paaren, 26
 n -ter Kettenmodul
 simplicial, 8
 singulär, 15
 n -ter zelluläre Kettenmodul, 45
 n -Zykel, 16
natürliche Transformation, 2
natürlicher Isomorphismus, 47

Objekte, 1
offene Zelle, 42

Paar von topologischen Räumen, 26
Polyeder, 5
projektiver Modul, 12
Pushout, 41

R -Kettenabbildung, 18
 R -Kettenkomplex, 10
Rand des n -Simplizes, 5
Randabbildungen, 10
Rang einer abelschen Gruppe, 11
reduzierte singuläre Homologie, 34

Schwache Topologie, 42
Seite, 4
Simplizes, 4
simpliciale Abbildung, 5
simplicialer Kettenkomplex, 10
simplicialer Komplex, 4
singuläre Homologie von X , 16
singuläre Simplizes, 15
singulärer Kettenkomplex, 16
 von Paaren, 26
Spaltung, 12
Summe
 topologischer Räume, 19
 von R -Moduln, 20

Torsionsgruppe, 11

\mathcal{U} -klein, 52
unital, 1
Unterkomplex, 4

Vektorfeld, 38

Vertices, 4

Zellstruktur, 41

zellulär, 42

zelluläre Homologie, 45

zelluläre Kettenkomplex, 45

Abbildungsverzeichnis

1 $\Delta^n \times [0, 1]$ für $n = 0, 1, 2$	23
2 Zerlegung von $\Delta^2 \times [0, 1]$ in 3-Simplizes	23

Todo's und andere Baustellen

RevChap8	28
Figure: langes Diagramm	30
RevChap9	32
Rest hinzufügen	33
RevChap10	36
fertig stellen	37
Figure: S^2 mit Vektorfeld	38
schöner machen	39
RevChap11	41
RevChap12	45
Figure: Skizze der Ausschneidung mit kleinen Simplizes	52
Figure: Zerteilung Simplex mit Bild in X	53