



FACHBEREICH 10
MATHEMATIK UND
INFORMATIK

Modellreduktion und partielle Differentialgleichungen

Mitschrift der Tafelnotizen

Tobias Wedemeier

22. Oktober 2015

gelesen von

Dr. Smetana

Hierbei handelt es sich um eine Mitschrift der Tafelnotizen von **Dr. Smetana**, WWU Münster, aus der Vorlesung **Modellreduktion und partielle Differentialgleichungen** im Wintersemester 2015/16. Dies ist kein Skript der Vorlesung und keine eigene Arbeit des Autors.

Für Fehler in der Mitschrift wird keine Haftung übernommen. Hinweise auf Fehler sind gerne gesehen, hierfür kann man mich in der Uni ansprechen oder alternativ eine e-Mail an: tobias.wedemeier@gmx.de. Auch ist eine Mitarbeit über Github möglich.

Wenn Teile aus der Vorlesung selber fehlen, können diese gerne an meine e-Mail versandt werden. Ich werde diese dann einarbeiten.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung und Motivation	III
1.1	Parameterabhängige PDGL	III
1.2	Definition (schwache Formulierung in Hilberträumen)	III
1.3	Definition (hochdimensionales, diskretes Modell)	III
1.4	Parameterabhängige Lösungsmenge	IV
1.5	Beispiel	IV
1.6	Definition (reduziertes Modell)	IV
1.7	Bemerkung (Begrifflichkeit)	IV
1.8	Organisation der Vorlesung	V
2	Grundlagen	V
2.1	Lineare Funktionalanalysis in Hilberträumen	V
2.1.1	Lineare Operatoren	V
2.1	Definition	V
2.2	Beispiele	VI
2.3	Lemma	VI
2.4	Definition	VI
2.5	Definition	VI
2.6	Beispiel	VII
2.7	Satz	VII
2.8	Folgerung	VII
2.9	Satz	VII
	Abbildungsverzeichnis	A

1 Einleitung und Motivation

1.1 Parameterabhängige PDGL

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ein polygonales Gebiet. Zu einem Parametervektor $\mu \in P \subseteq \mathbb{R}^d$ aus einer Menge von 'erlaubten' Parametern ist eine Funktion, z.B. 'Temperatur'

$$u(\mu) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

gesucht, so dass $-\nabla(\kappa(\mu)\nabla u(\mu)) = q(\mu)$ in Ω , wobei $u(\mu) = 0$ auf $\partial\Omega$, mit $\kappa(\mu) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dem 'Wärmeleitkoeffizient' und $q(\mu)$ eine 'Wärmequelle', z.B. $q(\mu) = 1$. Weiter kann eine Ausgabe erwünscht sein, z.B.

$$s(\mu) = \frac{1}{|\Omega_s|} \int_{\Omega_s} \lim_{\Omega_s} u(x, \mu) dx,$$

die mittlere Temperatur auf Ω_s .

1.2 Definition (schwache Formulierung in Hilberträumen)

Sei X ein reeller Hilbertraum. Zu $\mu \in P$ ist gesucht ein $u(\mu) \in X$ und eine Ausgabe $s(\mu) \in \mathbb{R}$, so dass

$$b(u(\mu), v; \mu) = f(v; \mu), \quad s(\mu) = l(u(\mu); \mu) \quad \forall v \in X$$

für eine Bilinearform $b(\cdot, \cdot; \mu) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ und linearen Funktionalen $f(\cdot; \mu), l(\cdot; \mu) : X \rightarrow \mathbb{R}$. Die schwache Formulierung für Beispiel 1.1 lautet:

$$X := H_0^1(\Omega) = \left(f \in L^2(\Omega) : + \frac{d}{dx_1} f \in L^2(\Omega), f|_{\partial\Omega=0} \right)$$

Dann kann man die Bilinearform über

$$b(u(\mu), v; \mu) := \int_{\Omega} \kappa(\mu) \nabla u(\mu) \nabla v dx; \quad f(v; \mu) := \int_{\Omega} \lim_{\Omega} q(\mu) v dx$$

ausdrücken und

$$s(\mu) = \frac{1}{|\Omega_s|} \int_{\Omega_s} \lim_{\Omega_s} u(x; \mu) dx =: l(u(\mu); \mu)$$

ABER: Für sehr wenige PDGL's können wir die Lösung analytisch bestimmen. Daher sind wir an einer numerische Approximation interessiert. Ein weit verbreitetes Diskretisierungsverfahren ist die Finite Elemente Methode. Diese Methode basiert auf obiger schwacher Formulierung.

1.3 Definition (hochdimensionales, diskretes Modell)

Sei $X_h \subseteq X$ mit $\dim(X_h) = N_h < \infty$. Der Index h bezeichnet hier die Gitterweite. Zu $\mu \in P$ ist gesucht ein $u_h(\mu) \in X_h$ und eine Ausgabe $s_h(\mu) \in \mathbb{R}$, so dass

$$b(u_h(\mu), v_h; \mu) = f(v_h; \mu), \quad s_h(\mu) = l_h(v_h(\mu); \mu) \quad \forall v_h \in X_h. \quad (1.1)$$

Anwendungen für die Standarddiskretisierungsverfahren sehr teuer oder zu teuer sind:

many-query context

- Parameterstudien
- Design
- Parameteridentifikation / inverse Probleme

- Optimierung
- Statistische Analyse

schnelle Simulationsantwort

- Echtzeit-Steuerung technischer Geräte
- interaktive Benutzeroberflächen

1.4 Parameterabhängige Lösungsmenge

Sei $\mu := \{u(\mu) : \mu \in P\} \subseteq P$ für $P \in \mathbb{R}^p$ ist die durch μ parametrisierte Lösungsmenge. X ist die im Allgemeinen unendlichdimensional. \Rightarrow Motivation für die Suche nach einem 'niedrigdimensionalen' Teilraum $X_N \subseteq X$ zur Approximation von M und einer Approximation $u_N(\mu) \approx u(\mu)$, $u_N \in X_N$. Eine Möglichkeit eine reduzierte Basis zu generieren besteht darin geschickt Parameterwerte $\mu_1, \dots, \mu_N \in P$ zu wählen und den Raum als $X_N := \text{span}\{u(\mu_1), \dots, u(\mu_N)\}$ zu definieren. Eine Lösung $u(\mu_i)$ für einen Parameterwert $\mu \in P$ wird auch **Snapshot** genannt.

1.5 Beispiel

Gesucht ist $u(\cdot; \mu) \in C^2([0, 1])$ mit $(1 + \mu)u'' = 1$ auf $(0, 1)$ und $u(0) = u(1) = 1$ für den Parameter $\mu \in P := [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$.

Snapshots:

$\mu_1 = 0 \Rightarrow u_1 := u(\cdot; \mu_1) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1$, $\mu_2 = 0 \Rightarrow u_2 := u(\cdot; \mu_2) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x + 1$ und $X_N := \text{span}\{u_1, u_2\}$. Dann ist die reduzierte Lösung $u_N(\mu) \in X_N$ gegeben durch

$$u_N(\mu) = \alpha_1(\mu)u_1 + \alpha_2(\mu)u_2,$$

mit $\alpha_1 = \frac{2}{\mu+1} - 1$ und $\alpha_2 = 2 - \frac{2}{\mu-1}$. Diese erfüllt folgende Fehleraussage und ist somit exakt:

$$\|u_N(\mu) - u(\mu)\|_\infty = \sup_{\lambda \in [0,1]} |U_N(x; \mu) - u(x; \mu)| = 0$$

Da $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ und $0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq 1$ ist M die Menge der Konvexkombinationen von u_1 und u_2 .

1.6 Definition (reduziertes Modell)

Sei $X_N \subseteq X$ ein reduzierter Basisraum mit $\dim(X_N) < \infty$. Zu $\mu \in P$ ist gesucht ein $u_N(\mu) \in X_N$ und eine Ausgabe $s_N(\mu) \in \mathbb{R}$, so dass

$$b(u_N(\mu), v_N; \mu) = f(v_N; \mu), \quad s_N(\mu) = l_N(u_N(\mu); \mu) \quad \forall v_N \in X_N \quad (1.2)$$

1.7 Bemerkung (Begrifflichkeit)

Zusammengefasst unterscheiden wir zwischen den folgenden drei Modellen:

- 1) Eine partielle DGL ist ein **analytisches Modell**, welches die analytische Lösung $u(\mu) \in X$ in einem (typischerweise) ∞ -dimensionalen Funktionenraum charakterisiert ist.
- 2) Ein **hochdimensionales, diskretes Modell** ist ein Berechnungsverfahren zur Bestimmung einer Näherung $u_h(\mu) \in X_h$, wobei X_h ein hochdimensionaler Funktionenraum ist. Beispiele sind **Finite Elemente** oder **Finite Volumenräume** und typischerweise hat X_h eine Dimension von mindestens 10^5 .

- 3) Ein **reduziertes Modell** ist ein Berechnungsverfahren zur Bestimmung einer Näherung $u_N(\mu) \in X_N$ in einem sehr problemangepassten und daher niedrigdimensionalen Raum von typischerweise $\dim X_N < 100$.
- 4) **Modellreduktion** beschäftigt sich mit Modellen der Erzeugung von reduzierten Modellen aus hochdimensionalen, diskreten (oder auch analytischen) Modellen und Untersuchungen ihrer Eigenschaften.

1.8 Organisation der Vorlesung

Zentrale Fragen:

- **Reduzierte Basis:** Wie kann ein möglichst kompakter Teilraum konstruiert werden?
- **Reduziertes Modell:** Existenz von reduzierten Lösungen $u_N(\mu)$? Wie kann eine reduzierte Lösung $u_N(\mu)$ berechnet werden?
- **Effizienz:** Wie kann $u_N(\mu)$ schnell berechnet werden?
- **Stabilität:** Wie kann die Stabilität des reduzierten Modells für wachsendes N garantiert werden?
- **Approximationsgüte:** Warum können wir erwarten, dass eine relativ kleine Anzahl von Basisfunktionen ausreicht?
- **Fehlerschätzer:** Kann der Fehler des reduzierten zum vollen Modell beschränkt werden?
- **Effektivität:** Kann garantiert werden, dass der Fehlerschätzer den Fehler nicht beliebig überschätzt?

Vorläufige Gliederung (bis Weihnachten)

- 1) Einleitung / Motivation
- 2) Grundlagen:
 - Kurze Einführung in lineare Funktionalanalysis
 - Kurze Einführung in Finite Elemente
- 3) Reduzierte Basis Methoden für lineare, koerzive Probleme
 - Reduzierte Basis Verfahren
 - Offline-/ Online-Zerlegung
 - Fehlerschätzer
 - Basisgenerierung

2 Grundlagen

2.1 Lineare Funktionalanalysis in Hilberträumen

2.1.1 Lineare Operatoren

2.1 Definition (Hilbertraum)

Sei X ein reeller Vektorraum mit $(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt und induzierter Norm $\|x\| := \sqrt{(x, x)}$. falls X vollständig bzgl. $\|\cdot\|$, ist X ein (reeller) **Hilbertraum** (HR).

2.2 Beispiele (Hilbertraum)

- (1) $X := \mathbb{R}^d$ mit $(x, y) := \sum_{i=1}^d x_i y_i$ ist ein HR.
- (2) $X := L^2(\Omega)$ mit $(x, y) := \int_{\Omega} f(x)g(x)dx$ ist ein HR.
- (3) $X := C^0([0, 1])$ mit $(f, g) := \int_0^1 f(x)g(x)dx$ ist kein HR.

2.3 Lemma

Seien X und Y reelle vektorräume. Ist die Abbildung $T : X \rightarrow Y$ linear und $x_0 \in X$, so sind äquivalent:

- (1) T ist stetig.
- (2) T ist stetig in x_0 .
- (3) $\sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y < \infty$.
- (4) \exists Konstante (mit $\|Tx\|_Y \leq c \|x\|_X \quad \forall x \in X$)

2.4 Definition (Lineare Operatoren)

Seien X und Y reelle Vektorräume. Wir definieren

$$L(X; Y) := \{T : X \rightarrow Y ; T \text{ ist linear und stetig}\}.$$

Abbildungen in $L(X; Y)$ nennen wir **lineare Operatoren**. Nach Lemma 2.3 (3) ist für jeden Operator $T \in L(X; Y)$ die **Operatornorm** von T definiert durch

$$\|T\|_{L(X; Y)} := \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y < \infty,$$

oder in kurz $\|T\|$. Es ist $L(X) := L(X; X)$.

2.5 Definition (Spezielle lineare Operatoren)

- (1) $X' := L(X; \mathbb{R})$ ist der **Dualraum** von X . Die Elemente von X' nennen wir auch **lineare Funktionale**.
- (2) Die Menge der kompakten (linearen) Operatoren von X nach Y ist definiert durch

$$K(X; Y) := \left\{ T \in L(X; Y) ; T(\overline{B_1(0)}) \text{ kompakt} \right\}.$$

- (3) Eine lineare Abbildung $P : X \rightarrow X$ heißt (lineare) **Projektion**, falls $P^2 = P$.
- (4) Für $T \in L(X; Y)$ ist $\ker(T) := \{x \in X ; Tx = 0\}$ der **Nullraum** oder **Kern** von T . Aus der Stetigkeit von T folgt, dass $\ker(T)$ ein abgeschlossener Unterraum ist. Der **Bildraum** von T ist $\text{bild}(T) := \{Tx \in Y ; x \in X\}$.
- (5) Ist $T \in L(X; Y)$ bijektiv, so ist $T^{-1} \in L(Y; X)$. Dann heißt T (linear, stetiger) **Isomorphismus**.
- (6) $T \in L(X; Y)$ heißt **Isometrie**, falls

$$\|Tx\|_Y = \|x\|_X \quad \forall x \in X$$

2.6 Beispiel

Sei $g \in L^2(\Omega)$. Dann ist nach der Hölderungleichung durch

$$T_g f := \int_{\Omega} f(x)g(x)dx$$

ein Funktional $T_g \in L^2(\Omega)'$ definiert.

2.7 Satz (Projektionssatz)

Sei X ein Hilbertraum und $A \subseteq X$ nicht leer, abgeschlossen und konvex. Dann gibt es genau eine Abbildung $P : X \rightarrow A$ mit

$$\|x - Px\|_X = \text{dist}(x, A) = \inf_{y \in A} \|x - y\|_X \quad \forall x \in X.$$

Die Abbildung $P : X \rightarrow A$ heißt orthogonale Projektion von X auf A .

Beweis: [Alt, Satz 2.2, S.96]

2.8 Folgerung

Ist $A \subseteq X$ nicht-leer, abgeschlossen und Unterraum, so ist P linear und $Px \in A$ charakterisiert durch $(x - Px, a)_X = 0 \quad \forall a \in A$. Falls $\dim(A) = n < \infty$ und $(\varphi_i)_{i=1}^n$ Orthonormalbasis von A , gilt

$$Px = \sum_{i=1}^n (x, \varphi_i)_X \varphi_i.$$

2.9 Satz (Riesz'scher Darstellungssatz)

Ist X Hilbertraum, so ist $J : X \rightarrow X'$ definiert durch

$$J(v)(w) := (v, w)_X \quad \forall v, w \in X$$

eine stetige, lineare, bijektive Isometrie. Insbesondere existiert zu $l \in X'$ ein eindeutiger **Riesz Repräsentant** $V_l := J^{-1}(l) \in X$ mit $l(\cdot) = (v_l, \cdot)_X$.

Beweis:

C-S-Ungleichung: $|J(v)(w)| \leq \|v\|_X \|w\|_X$. Dann folgt: $J(v) \in X'$ mit

$$\|J(v)\|_{X'} = \sup_{w \in X \setminus \{0\}} \frac{|J(v)(w)|}{\|w\|_X} = \sup_{w \in X \setminus \{0\}} \frac{|(v, w)_X|}{\|w\|_X} \leq \|v\|_X \Rightarrow J \text{ stetig.}$$

Da $|J(v)(v)| = \|v\|_X^2$ folgt:

$$\sup_{w \in X \setminus \{0\}} \frac{|J(v)(w)|}{\|w\|_X} \geq \frac{|J(v)(v)|}{\|v\|_X} = \frac{\|v\|_X^2}{\|v\|_X} = \|v\|_X.$$

Also ist J eine Isometrie und insbesondere ist J injektiv.



Abbildungsverzeichnis