



WESTFÄLISCHE  
WILHELMS-UNIVERSITÄT  
MÜNSTER



FACHBEREICH 10  
MATHEMATIK UND  
INFORMATIK

# Skript Operatoralgebren

Mitschrift der Vorlesung „Operatoralgebren“ von Prof. Dr. Wilhelm Winter

Jannes Bantje

22. Januar 2016

## Aktuelle Version verfügbar bei



<https://github.com/JaMeZ-B/latex-wwu>

GitHub ist eine Internetplattform, auf der viele OpenSource-Projekte gehostet werden. Diese Plattform nutzen wir zur Zusammenarbeit, also findet man hier neben den PDFs auch die  $\text{\TeX}$ -Dateien. Außerdem ist über diese Plattform auch direktes Mitarbeiten möglich, siehe nächste Seite.



<https://uni-muenster.sciebo.de/public.php?service=files&t=965ae79080a473eb5b6d927d7d8b0462>

Sciebo ist ein Dropbox-Ersatz der Hochschulen in NRW, der von der Uni Münster in leitender Position auf Basis der OpenSource-Software Owncloud aufgebaut wurde. Wenn man auf den Link klickt, kann man die Freigabe zum eigenen Speicher hinzufügen und hat dann immer automatisch die aktuellste Version.



B6WH2DISQ5QVYIRYIEZSF4ZR2IDVKPN3I

BTSync ist ein peer-to-peer Dateisynchronisations-Tool. Dabei werden die Dateien nur auf den Computern der Teilnehmer an einer Freigabe gespeichert. Ein RasPi ist permanent online, sodass stets die aktuellste Version verfügbar ist. Clients gibt es für jedes Betriebssystem. Zugang ist über das obige „Secret“ bzw. den QR-Code möglich.



## Vorlesungshomepage

<https://wwwmath.uni-muenster.de/u/wilhelm.winter/wwinter/operatoralgebren.html>

Hier ist ein Link zur offiziellen Vorlesungshomepage.

## Vorwort — Mitarbeit am Skript

Dieses Dokument ist eine Mitschrift aus der Vorlesung „Operatoralgebren, WiSe 2015“, gelesen von Prof. Dr. Wilhelm Winter. Der Inhalt entspricht weitestgehend dem Tafelanschrieb. Für die Korrektheit des Inhalts übernehme ich keinerlei Garantie! Für Bemerkungen und Korrekturen – und seien es nur Rechtschreibfehler – bin ich sehr dankbar. Korrekturen lassen sich prinzipiell auf drei Wegen einreichen:

- ▶ Persönliches Ansprechen in der Uni, Mails an [j.bantje@wwu.de](mailto:j.bantje@wwu.de) (gerne auch mit annotierten PDFs) oder Kommentare auf <https://github.com/JaMeZ-B/latex-wwu>.

- ▶ *Direktes* Mitarbeiten am Skript: Den Quellcode poste ich auf GitHub (siehe oben), also stehen vielfältige Möglichkeiten der Zusammenarbeit zur Verfügung: Zum Beispiel durch Kommentare am Code über die Website und die Kombination Fork + Pull Request. Wer sich verdient macht oder ein Skript zu einer Vorlesung, die ich nicht besuche, beisteuern will, dem gewähre ich gerne auch Schreibzugriff.

Beachten sollte man dabei, dass dazu ein Account bei [github.com](https://github.com) notwendig ist, der allerdings ohne Angabe von persönlichen Daten angelegt werden kann. Wer bei GitHub (bzw. dem zugrunde liegenden Open-Source-Programm „git“) – verständlicherweise – Hilfe beim Einstieg braucht, dem helfe ich gerne weiter. Es gibt aber auch zahlreiche empfehlenswerte Tutorials im Internet.<sup>1</sup>

- ▶ *Indirektes* Mitarbeiten:  $\text{\TeX}$ -Dateien per Mail verschicken.

Dies ist nur dann sinnvoll, wenn man einen ganzen Abschnitt ändern möchte (zB. einen alternativen Beweis geben), da ich die Änderungen dann per Hand einbauen muss! Ich freue mich aber auch über solche Beiträge!

## Anmerkung

Innerhalb dieser Mitschrift wird man öfter den Ausdruck „Warum?“ finden. Dies sind vom Dozenten bewusst weggelassene Details, die zu verstärktem Mitdenken beim Lesen animieren sollen. Oftmals sind dies schon aus vorherigen Semestern bekannte Sachverhalte. Nur an wenigen Stellen habe ich die fehlenden Details hinzugefügt.

---

<sup>1</sup> zB. <https://try.github.io/levels/1/challenges/1>, ist auf Englisch, aber dafür interaktives LearningByDoing

## Inhaltsverzeichnis

1. Spektraltheorie in Banachalgebren	1
2. $C^*$ -Algebren und Funktionalkalkül	5
3. Positivität	12
4. Ideale, Quotienten und Limiten	16
5. Zustände und die GNS-Konstruktion	21
6. Von-Neumann-Algebren und der Bikommutantensatz	29
7. Reine Zustände und irreduzible Darstellungen	40
A. Anhang	A
A.1. Die GNS-Darstellung ist zyklisch . . . . .	A
A.2. Monotones Netz von Projektionen . . . . .	A
Index	C
Abbildungsverzeichnis	D
Todo list	D

# 1. Spektraltheorie in Banachalgebren

**1.1 Definition.** Eine *Banachalgebra* ist eine vollständige normierte Algebra. Für die Multiplikation gilt also  $\|ab\| \leq \|a\| \cdot \|b\|$ . Wir betrachten in dieser Vorlesung fast ausschließlich Algebren über  $\mathbb{C}$ . Eine Banachalgebra heißt *unital*, falls sie ein Einselement  $\mathbb{1}$  mit  $\|\mathbb{1}\| = 1$  enthält.

**1.2 Definition.** Für eine unitale  $\mathbb{C}$ -Algebra  $A$  setzen wir

$$\begin{aligned} \text{Inv}(A) &:= \{a \in A \text{ invertierbar}\} \\ \sigma(a) &:= \sigma_A(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda \cdot \mathbb{1} - a \notin \text{Inv}(A)\} \end{aligned}$$

$\sigma(a)$  heißt *Spektrum* von  $a$ .

das Vorzeichen der Differenz spielt für die Definition der Menge keine Rolle

**1.3 Bemerkung.** Sei  $A$  wie oben und  $a, b \in A$ . Dann gilt

$$\mathbb{1} - ab \in \text{Inv}(A) \iff \mathbb{1} - ba \in \text{Inv}(A)$$

**BEWEIS:** Durch simples Nachrechnen verifiziert man, dass  $(\mathbb{1} - ba)^{-1} = \mathbb{1} + b(\mathbb{1} - ab)^{-1}a$  gilt.  $\square$

**1.4 Satz.** Sei  $A$  eine unitale  $\mathbb{C}$ -Algebra und  $a \in A$  mit  $\sigma(a) \neq \emptyset$ . Sei weiter  $p \in \mathbb{C}[Z]$  ein Polynom. Dann gilt

$$\sigma(p(a)) = p(\sigma(a))$$

**BEWEIS:** Die Aussage ist trivial, falls  $p$  konstant ist. Sei also  $p$  nicht konstant. Zu  $\mu \in \mathbb{C}$  existieren  $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$  mit  $\lambda_0 \neq 0$  und  $p(z) - \mu = \lambda_0 \cdot (z - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (z - \lambda_n)$ , also

$$p(a) - \mu = \lambda_0 \cdot (a - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (a - \lambda_n)$$

Damit gilt:  $p(a) - \mu$  ist genau dann invertierbar, wenn  $a - \lambda_1, \dots, a - \lambda_n$  invertierbar sind. Also

$$\begin{aligned} \mu \in \sigma(p(a)) &\iff \lambda_i \in \sigma(a) \text{ ist für ein } i \in \{1, \dots, n\} \\ &\iff p(\lambda) - \mu = 0 \text{ für ein } \lambda \in \sigma(a) \\ &\iff p(\lambda) = \mu \text{ für ein } \lambda \in \sigma(a) \end{aligned}$$

Somit folgt dann  $\sigma(p(a)) = p(\sigma(a))$ .  $\square$

**1.5 Satz.** Sei  $A$  eine unitale Banachalgebra und  $a \in A$ . Falls  $\|a\| < 1$ , so ist  $\mathbb{1} - a$  invertierbar und

$$(\mathbb{1} - a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \quad (\text{Neumannsche Reihe})$$

**BEWEIS:** Die Folge der Partialsummen  $(\sum_{n=0}^k a^n)_{k \in \mathbb{N}} \subset A$  ist eine Cauchyfolge (warum?), sodass wegen Vollständigkeit die unendliche Summe existiert. Es gilt dann

$$(\mathbb{1} - a) \left( \sum_{n=0}^{\infty} a^n \right) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (\mathbb{1} - a) \left( \sum_{n=0}^k a^n \right) = \mathbb{1} - a^{k+1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \mathbb{1}$$

Die Summe ist also ein Rechtsinverses. Genauso folgt, dass sie auch ein Linksinverses ist.  $\square$

**1.6 Korollar.** Für jede unitale Banachalgebra  $A$  ist  $\text{Inv}(A) \subset A$  offen.

**BEWEIS:** Falls  $a \in \text{Inv}(A)$  und  $\|b - a\| < \|a^{-1}\|^{-1}$ , so gilt  $\|ba^{-1} - \mathbb{1}\| \leq \|b - a\| \cdot \|a^{-1}\| < 1$ . Also ist auch  $-(\mathbb{1} - (ba^{-1} - \mathbb{1})) = ba^{-1}$  invertierbar nach Satz 1.5 und damit auch  $b \in \text{Inv}(A)$ , denn  $b$  ist ein Linksinverses für  $a^{-1}(ba^{-1})^{-1} \in \text{Inv}(A)$ .  $\square$

**1.7 Definition.** Sei  $A$  eine unitale Banachalgebra. Für  $a \in A$  definieren wir den *Spektralradius* durch

$$r(a) := \sup_{\lambda \in \sigma(a)} |\lambda|$$

**1.8 Proposition.** Sei  $a \in A$  wie oben. Dann ist das Spektrum  $\sigma(a)$  kompakt und  $r(a) \leq \|a\|$ .

**BEWEIS:** Angenommen  $|\lambda| > \|a\|$ , dann gilt  $\|\lambda^{-1}a\| < 1$ , also ist  $\mathbb{1} - \lambda^{-1}a$  invertierbar nach Satz 1.5 und damit auch  $\lambda - a \iff \lambda \notin \sigma(a)$ . Insgesamt folgt, dass  $r(a) \leq \|a\|$  ist. Es ist  $\mathbb{C} \setminus \sigma(a) \subset \mathbb{C}$  offen, da  $\text{Inv}(A) \subset A$  offen ist. Damit muss  $\sigma(a)$  nach Heine-Borel kompakt sein.  $\square$

**1.9 Satz.** Sei  $A$  eine unitale Banachalgebra. Für jedes  $a \in A$  ist  $\sigma(a)$  nichtleer.

**BEWEIS:** Falls  $|\lambda| > \|a\|$ , so existiert  $(\mathbb{1} - \lambda^{-1}a)^{-1}$  und  $(\lambda - a)^{-1}$  mit der gleichen Begründung wie oben. Es gilt dann

$$(\lambda - a)^{-1} = \lambda^{-1}(\mathbb{1} - \lambda^{-1}a)^{-1} \stackrel{1.5}{=} \lambda^{-1} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} a^n \right)$$

und weiter

$$\|(\lambda - a)^{-1}\| \leq |\lambda|^{-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (|\lambda|^{-1} \cdot \|a\|)^n \xrightarrow{|\lambda| \rightarrow \infty} 0 \quad [*]$$

da man die Summe als geometrische Reihe mit 2 abschätzen kann, falls  $|\lambda| > 2 \cdot \|a\|$  ist. Sei nun  $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \sigma(a)$  und  $|\lambda - \lambda_0| < \|(\lambda - \lambda_0)^{-1}\|^{-1}$ . Dann gilt

$$\|(\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_0)^{-1}\| \leq |\lambda - \lambda_0| \cdot \|(\lambda - \lambda_0)^{-1}\| < 1$$

Also ist wieder nach Satz 1.5  $(\mathbb{1} - (\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_0)^{-1})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n (\lambda - \lambda_0)^{-n}$  und

$$\begin{aligned} - \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n (\lambda - \lambda_0)^{-(n+1)} &= (\lambda - \lambda_0)^{-1} ((\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_0)^{-1} - \mathbb{1})^{-1} \\ &= \left( (\lambda - \lambda_0) \underbrace{(\lambda - \lambda_0)^{-1} (\lambda - \lambda_0)}_{=1} - (\lambda - \lambda_0) \right)^{-1} = (\lambda - a)^{-1} \end{aligned}$$

Für ein stetiges Funktional  $\varphi \in A^*$  erhalten wir

$$\varphi((\lambda - a)^{-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} -\varphi((\lambda - \lambda_0)^{-(n+1)}) \cdot (\lambda - \lambda_0)^n$$

falls  $|\lambda - \lambda_0| < \|(\lambda - \lambda_0)^{-1}\|^{-1}$ . Daher ist  $\lambda \mapsto \varphi((\lambda - a)^{-1})$  *holomorph* auf  $\mathbb{C} \setminus \sigma(a)$ . Falls  $\sigma(a) = \emptyset$ , so ist  $\lambda \mapsto \varphi((\lambda - a)^{-1})$  *ganz*, d.h. holomorph auf ganz  $\mathbb{C}$ . Wegen [\*] und dem Satz von Liouville<sup>1</sup> ist dann  $\varphi((\lambda - a)^{-1}) = 0$  für alle  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Aber  $\varphi \in A^*$  war beliebig, und wegen Hahn-Banach gilt  $(\lambda - a)^{-1} = 0$ . Dies ist ein Widerspruch.  $\square$

<sup>1</sup> siehe [https://de.wikipedia.org/wiki/Satz\\_von\\_Liouville\\_%28Funktionentheorie%29](https://de.wikipedia.org/wiki/Satz_von_Liouville_%28Funktionentheorie%29)

**1.10 Satz.** Sei  $A$  eine unitale Banachalgebra. Für  $a \in A$  gilt dann

$$r(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$$

**BEWEIS:** Sei  $\varphi \in A^*$  ein stetiges Funktional. Wir haben im Beweis von Satz 1.9 gesehen, dass die Zuordnung  $\lambda \mapsto \varphi((\lambda - a)^{-1})$  analytisch ist für  $\lambda \notin \sigma(a)$ . Insbesondere gilt dies für  $|\lambda| > r(a)$ . Dann ist auch  $\lambda \mapsto \varphi((\lambda^{-1} - a)^{-1})$  analytisch für  $0 < |\lambda| < 1/r(a)$ , ebenso  $\lambda \mapsto \varphi((1 - \lambda a)^{-1})$ . Die Singularität bei 0 ist hebbbar, also definiert  $f(\lambda) := \varphi((1 - \lambda a)^{-1})$  eine analytische Funktion für  $|\lambda| < 1/r(a)$ . Dann existiert eine Folge  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$  mit  $f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cdot \lambda^n$  für  $|\lambda| < 1/r(a)$ . Die Konvergenz ist absolut und gleichmäßig, also gilt insbesondere  $|\alpha_n \cdot \lambda^n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Falls andererseits  $|\lambda| < 1/\|a\| \leq 1/r(a)$  ist, so gilt

$$f(\lambda) = \varphi((1 - \lambda \cdot a)^{-1}) \stackrel{1.5}{=} \varphi\left(\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda \cdot a)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi((\lambda \cdot a)^n) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(a^n) \cdot \lambda^n$$

also  $\alpha_n = \varphi(a^n)$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Es gilt  $\varphi(a^n) \cdot \lambda^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Aber  $\varphi \in A^*$  war beliebig, also ist für jedes  $\varphi \in A^*$  die Folge  $(\varphi(\lambda^n a^n))_{n \in \mathbb{N}} = (\varphi(a^n) \cdot \lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt für  $|\lambda| < 1/r(a)$ .

Nach dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit ist dann  $(\lambda^n a^n)_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt für jedes  $\lambda$  mit  $|\lambda| < 1/r(a)$ . Damit existiert für  $0 < |\lambda| < 1/r(a)$  ein  $M \geq 0$  mit  $\|\lambda^n a^n\| \leq M$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , also

$$\|a^n\|^{1/n} \leq \frac{M^{1/n}}{|\lambda|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\lambda|}$$

Es folgt  $\limsup_n \|a^n\|^{1/n} \leq r(a)$ . Falls  $\lambda \in \sigma(a)$ , so gilt nach Satz 1.4  $\lambda^n \in \sigma(a^n)$  und wegen Proposition 1.8  $|\lambda^n| \leq \|a^n\|$ , also  $|\lambda| \leq \|a^n\|^{1/n}$  und es folgt insgesamt

$$r(a) \leq \inf_n \|a^n\|^{1/n} \leq \liminf_n \|a^n\|^{1/n} \leq \limsup_n \|a^n\|^{1/n} \leq r(a)$$

und damit  $\lim_n \|a^n\|^{1/n} = r(a)$ , woraus die Behauptung folgt.  $\square$

**1.11 Proposition.** Sei  $A$  eine abelsche unitale Banachalgebra. Falls  $A$  einfach ist, so ist  $A \cong \mathbb{C}$ .

*einfach = besitzt keine nichttrivialen Ideale*

**BEWEIS:** Sei  $a \in A$ ,  $\alpha \in \sigma(a)$ . Dann ist  $J := \overline{(a - \alpha \cdot 1) \cdot A} \triangleleft A$  ein abgeschlossenes Ideal. Für jedes  $b \in A$  ist  $(a - \alpha)b$  nicht invertierbar. Damit folgt dann  $\|(a - \alpha)b - 1\| \geq 1$  für jedes  $b \in A$  nach Satz 1.5. Damit ist auch  $\text{dist}((a - \alpha \cdot 1) \cdot A, 1) \geq 1$ , also  $1 \notin J$  und damit  $J \neq A$ . Da  $A$  einfach ist, folgt  $J = \{0\}$ , also muss  $a - \alpha \cdot 1 = 0$  und weiter  $a \in \mathbb{C} \cdot 1$  gelten. Damit ist  $A = \mathbb{C} \cdot 1 \cong \mathbb{C}$ .  $\square$

**1.12 Definition.** Sei  $A$  eine abelsche unitale Banachalgebra. Eine lineare, multiplikative, nicht verschwindende Abbildung  $\chi: A \rightarrow \mathbb{C}$  heißt **Charakter** auf  $A$ . Es gilt dann  $\chi(1) = 1$ . Wir setzen  $\Omega(A) := \{\chi \mid \chi \text{ Charakter auf } A\}$  (**Charakterspektrum** oder einfach nur **Spektrum** von  $A$ ).

**1.13 Satz.** Sei  $A$  eine abelsche unitale Banachalgebra. Dann gilt

- (i) Jeder Charakter auf  $A$  ist stetig mit Norm 1.
- (ii)  $\chi \mapsto \ker \chi$  definiert eine Bijektion  $\Omega(A) \rightarrow J_{\max} := \{J \mid J \subsetneq A \text{ ist maximales Ideal}\}$

**BEWEIS:**

- (i) Sei  $a \in A$  mit  $\|a\| < 1$  und  $\chi(a) = 1$ . Setze  $b = \sum_{n=1}^{\infty} a^n$ , dann ist  $1 + b = \sum_{n=0}^{\infty} a^n = (1 - a)^{-1}$ . Also ist  $1 = (1 + b)(1 - a) = 1 + b - a - ab$  und damit  $ab + a = b$ . Es folgt  $\chi(a)\chi(b) + \chi(a) = \chi(b)$ . Dies ist ein Widerspruch. Also muss  $\|\chi\| \leq 1$  sein. Mit  $\chi(1) = 1$  folgt  $\|\chi\| = 1$ .

(ii) Für jedes  $\chi \in \Omega(A)$  ist  $\ker \chi \triangleleft A$  ein Ideal. Weiter ist der Kern abgeschlossen in  $A$ , da  $\chi$  stetig ist. Wir zeigen, dass  $\ker \chi$  maximal ist. Es ist  $\ker \chi \neq A$ , denn es gilt  $\chi \neq 0$ . Falls  $c \in A \setminus \ker \chi$ , so gilt  $\chi(c)^{-1} \cdot c - \mathbb{1} \in \ker \chi$ . Also ist  $\ker \chi + \mathbb{C} \cdot c = \ker \chi + \mathbb{C} \cdot \mathbb{1} = A$ , da für  $a \in A$  gilt  $a - \chi(a) \cdot \mathbb{1} \in \ker \chi$  und damit  $a = (a - \chi(a) \cdot \mathbb{1}) + \chi(a) \cdot \mathbb{1} \in \ker \chi + \mathbb{C} \cdot \mathbb{1}$ . Damit ist der Kern von  $\chi$  maximal.

Zur Injektivität: Es seien  $\chi_1, \chi_2 \in \Omega(A)$  Charaktere mit  $\ker \chi_1 = \ker \chi_2$ . Dann gilt für  $a \in A$

$$\chi_1(a) - \chi_2(a) = \chi_1 \left( \underbrace{a - \chi_2(a) \cdot \mathbb{1}}_{\in \ker \chi_2 = \ker \chi_1} \right) = 0$$

Also ist  $\chi_1 = \chi_2$ . Für die Surjektivität betrachten wir ein maximales, nichttriviales Ideal  $J \subsetneq A$ . Dann ist  $\text{dist}(J, \mathbb{1}) = 1$ , denn für den offenen Ball mit Radius 1 um  $\mathbb{1}$  gilt  $\mathring{B}_A(\mathbb{1}, 1) \subset \text{Inv}(A)$  nach Satz 1.5. Dann ist  $\mathbb{1} \notin J \triangleleft A$ . Da  $J$  maximal ist, folgt  $J = \bar{J}$  und damit ist  $A/J$  eine einfache, abelsche, unitale Banachalgebra und mit Proposition 1.11 folgt  $A/J \cong \mathbb{C}$ . Also ist  $\chi: A \rightarrow A/J \cong \mathbb{C}$  ein Charakter mit  $\ker \chi = J$ .  $\square$

**1.14 Satz.** Sei  $A$  eine abelsche unitale Banachalgebra. Für  $a \in A$  gilt  $\sigma(a) = \{\chi(a) \mid \chi \in \Omega(A)\}$ .

**BEWEIS:** Für  $\lambda \in \sigma(a)$  ist  $J := (a - \lambda)A \triangleleft A$  ein echtes Ideal, da  $(a - \lambda)$  nicht invertierbar ist. Nach dem Lemma von Zorn ist  $J$  in einem maximalen echten Ideal enthalten, also ist  $J \subset \ker \chi$  für ein  $\chi \in \Omega(A)$  nach Satz 1.13. Dann ist  $\chi(a - \lambda) = 0$  für einen Charakter  $\chi$  und somit auch  $\chi(a) = \lambda$ . Es gilt also  $\sigma(a) \subseteq \{\chi(a) \mid \chi \in \Omega(A)\}$ . Für  $\chi \in \Omega(A)$  gilt  $a - \chi(a) \cdot \mathbb{1} \in \ker \chi$ . Damit kann  $a - \chi(a) \cdot \mathbb{1}$  nicht invertierbar sein. Also ist  $\chi(a) \in \sigma(a)$  und es folgt die zweite Inklusion.  $\square$

**1.15 Satz.** Sei  $A$  eine abelsche unitale Banachalgebra. Dann ist  $\Omega(A)$  ein kompakter Hausdorffraum bezüglich der  $w^*$ -Topologie.

**BEWEIS:** Es ist  $\Omega(A) \subset B^1(A^*)$ , wobei die Einheitskugel kompakt und Hausdorffsch ist bezüglich der  $w^*$ -Topologie nach Banach-Alaoglu und da der Raum lokalkonvex ist. Sei  $\chi_\gamma \xrightarrow{w^*} \chi$  ein Netz.  $\chi_\gamma$  ist multiplikativ für jedes  $\gamma$  und  $\chi_\gamma(\mathbb{1}) = 1$ . Damit gelten diese Eigenschaften auch für  $\chi$ .  $\square$

**1.16 Definition.** Sei  $A$  eine abelsche unitale Banachalgebra.  $\Omega(A)$  mit der  $w^*$ -Topologie heißt *Spektrum* von  $A$ . Für  $a \in A$  definieren wir die *Gelfandtransformation*  $\hat{a}: \Omega(A) \rightarrow \mathbb{C}$  durch  $\hat{a}(\chi) = \chi(a)$ .

**1.17 Satz.** Sei  $A$  eine abelsche unitale Banachalgebra. Dann ist  $\hat{\cdot}: A \rightarrow C(\Omega(A))$ ,  $a \mapsto \hat{a}$  ein normvermindernder Homomorphismus und  $r(a) = \|\hat{a}\|_\infty$  für  $a \in A$ . Weiter gilt  $\sigma(a) = \hat{a}(\Omega(A))$ .

**BEWEIS:**  $\hat{a}: \Omega(A) \rightarrow \mathbb{C}$  ist stetig nach Definition der  $w^*$ -Topologie, denn die  $w^*$ -Topologie ist per Definition die grösste Topologie auf  $A^*$ , sodass die Einsetzungshomomorphismen stetig sind. Wir haben weiter

$$\sigma(a) \stackrel{1.14}{=} \{\chi(a) \mid \chi \in \Omega(A)\} = \{\hat{a}(\chi) \mid \chi \in \Omega(A)\} = \hat{a}(\Omega(A))$$

Also gilt außerdem

$$\|a\| \stackrel{1.8}{\leq} r(a) = \sup_{\lambda \in \sigma(a)} |\lambda| \stackrel{1.14}{=} \sup_{\chi \in \Omega(A)} |\hat{a}(\chi)| = \|\hat{a}\|_\infty \quad \square$$



## 2. $C^*$ -Algebren und Funktionalkalkül

**2.1 Definition.** Eine Banachalgebra heißt *involutiv*, falls eine antilineare Abbildung  $*$ :  $A \rightarrow A$  existiert, für die folgenden Identitäten gelten:

$$a^{**} = a \quad (ab)^* = b^* a^* \quad \|a^*\| = \|a\|$$

**2.2 Definition.** Eine  $C^*$ -Algebra ist eine involutive Banachalgebra mit  $\|a^* a\| = \|a\|^2$  für  $a \in A$ .

**2.3 Definition.** Sei  $A$  eine  $C^*$ -Algebra.  $a \in A$  heißt

$$\begin{cases} \text{selbstadjungiert} & \text{falls } a = a^* \\ \text{normal} & \text{falls } aa^* = a^* a \\ \text{unitär} & \text{falls } aa^* = a^* a = \mathbb{1} \\ \text{Projektion} & \text{falls } a = a^* = a^2 \\ \text{Isometrie} & \text{falls } a^* a = \mathbb{1} \end{cases}$$

Wo die Existenz eines Einselements nötig ist, fordern wir zusätzlich, dass  $A$  unital ist.

**2.4 Definition.** Es seien  $A, B$  zwei  $C^*$ -Algebren. Eine Abbildung  $\pi: A \rightarrow B$  heißt  *$*$ -Homomorphismus*, falls  $\pi$  linear, multiplikativ und  $*$ -erhaltend ist.  $\pi$  heißt  *$*$ -Einbettung*, falls  $\pi$  zusätzlich isometrisch ist.

**2.5 Bemerkung.** Falls  $A$  eine (involutive) Banachalgebra ist, so ist  $A \oplus \mathbb{C}$  mit offensichtlichen Vektorraumoperationen, der naheliegenden Multiplikation  $(a, \lambda) \cdot (b, \mu) = (ab + \mu a + \lambda b, \lambda \mu)$  sowie  $(a, \lambda)^* = (a^*, \bar{\lambda})$  im involutiven Fall und Norm definiert wir durch  $\|(a, \lambda)\| := \|a\|_A + |\lambda|$  eine unitale (involutive) Banachalgebra mit  $\mathbb{1} = (0, 1)$ .  $A \oplus \mathbb{C}$  ist jedoch keine  $C^*$ -Algebra, auch wenn  $A$  eine  $C^*$ -Algebra ist.

**2.6 Satz.** Sei  $A$  eine  $C^*$ -Algebra. Dann existiert eine unitale  $C^*$ -Algebra  $A^\sim$  mit einer isometrischen  $*$ -Einbettung  $\iota: A \hookrightarrow A^\sim$ , sodass  $\iota(A) \triangleleft A^\sim$  ein Ideal ist mit

$$A^\sim / \iota(A) \cong \begin{cases} 0, & \text{falls } A \text{ unital} \\ \mathbb{C}, & \text{sonst} \end{cases}$$

**BEWEIS:** Für  $a \in A$  definieren wir  $\iota(a) \in \mathcal{B}(A)$ , wobei  $\mathcal{B}(A)$  die beschränkten Operatoren auf  $A$  aufgefasst als Banachraum sind, durch  $\iota(a)(b) = ab$ . Definiere  $A^\sim := \iota(A) + \mathbb{C} \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(A)} \subset \mathcal{B}(A)$ . Dann ist  $A^\sim$  eine unitale Algebra mit Involution

$$(\iota(a) + \lambda \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(A)})^* := \iota(a^*) + \bar{\lambda} \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(A)}$$

Dass  $\iota(A) \triangleleft A^\sim$  ein Ideal ist, ist klar.  $A^\sim$  ist normiert mittels der Operatornorm. Für  $0 \neq a \in A$  gilt

$$\begin{aligned} \|a\|_A &= \frac{1}{\|a\|_A} \|aa^*\|_A = \left\| a \left( \frac{1}{\|a^*\|} \cdot a^* \right) \right\|_A \leq \left\| \iota(a) \left( \frac{1}{\|a^*\|} \cdot a^* \right) \right\|_A \\ &\leq \sup_{\|b\|_A \leq 1} \|\iota(a)(b)\|_A = \|\iota(a)\|_{\mathcal{B}(A)} \\ &= \sup_{\|b\|_A \leq 1} \|ab\|_A \\ &\leq \|a\|_A \end{aligned}$$

Also ist  $\iota$  isometrisch. Es folgt, dass  $\iota(A) \subset \mathcal{B}(A)$  abgeschlossen ist, da  $A$  vollständig ist. Weiter folgt, dass auch  $A^\sim = \iota(A) + \mathbb{C} \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(A)}$  vollständig ist bezüglich  $\|\cdot\|_{\mathcal{B}(A)}$ . Wir zeigen nun, dass  $\|\cdot\|_{\mathcal{B}(A)}$  eine  $C^*$ -Norm ist auf  $A^\sim$ :

$$\begin{aligned} \|\iota(a) + \lambda \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(A)}\|_{\mathcal{B}(A)}^2 &= \sup_{b \in A, \|b\| \leq 1} \|\iota(ab + \lambda b)\|_A^2 \\ &= \sup_{b \in A, \|b\| \leq 1} \|(\iota(ab + \lambda b))^*(\iota(ab + \lambda b))\|_A \\ &= \sup_{b \in A, \|b\| \leq 1} \|b^* a^* a b + \lambda b^* a^* b + \bar{\lambda} b^* a b + |\lambda|^2 b^* b\|_A \\ &\leq \sup_{b \in A, \|b\| \leq 1} \|a^* a b + \lambda a^* b + \bar{\lambda} a b + |\lambda|^2 b\|_A \quad [*] \\ &= \|\iota(a^* a + \lambda a^* + \bar{\lambda} a) + |\lambda|^2 \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(A)}\|_{\mathcal{B}(A)} \\ &= \|(\iota(a) + \lambda \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(A)})^* (\iota(a) + \lambda \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(A)})\|_{\mathcal{B}(A)} \\ &\leq \|(\iota(a) + \lambda \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(A)})^*\|_{\mathcal{B}(A)} \|\iota(a) + \lambda \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(A)}\|_{\mathcal{B}(A)} \quad [**] \end{aligned}$$

Es folgt, dass

$$\|\iota(a) + \lambda \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(A)}\|_{\mathcal{B}(A)} \leq \|(\iota(a) + \lambda \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(A)})^*\|_{\mathcal{B}(A)} \leq \|\iota(a) + \lambda \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(A)}\|_{\mathcal{B}(A)}$$

Damit folgt, dass [\*] und [\*\*] Gleichungen sind und  $\|\cdot\|_{\mathcal{B}(A)}$  eine  $C^*$ -Norm auf  $A^\sim$  ist. Falls  $A$  unital ist, gilt  $\iota(\mathbb{1}_A) = \mathbb{1}_{\mathcal{B}(A)}$  und somit  $\iota(A) = A^\sim$ . Ist  $A$  nicht unital, so ist  $A^\sim \cong \iota(A) \oplus \mathbb{C}$  als Vektorräume und es muss  $A^\sim / \iota(A) \cong \mathbb{C}$  gelten.  $\square$

**2.7 Bemerkung.** Man definiert oft auch eine unitale  $C^*$ -Algebra

$$A^+ := \begin{cases} A^\sim, & \text{falls } A \text{ nicht unital} \\ A \oplus \mathbb{C}, & \text{falls } A \text{ unital} \end{cases}$$

mit  $\|(a, \lambda)\| := \max\{\|a\|_A, |\lambda|\}$ . Dann ist in jedem Fall  $A^+ \cong A \oplus \mathbb{C}$  als Vektorraum.  $A^+$  lässt sich charakterisieren durch die universelle Eigenschaft:

Blatt3 Aufgabe 2

$$\begin{array}{ccc} & & B \\ & \nearrow & \uparrow \exists! \\ A & \hookrightarrow & A^+ \end{array}$$

wobei  $B$  eine unitale  $C^*$ -Algebra ist und  $A \rightarrow B$  ein  $*$ -Homomorphismus ist. Eine ähnliche Beschreibung für  $A^\sim$  ist möglich, aber etwas „subtiler“.

**2.8 Definition.** Sei  $A$  eine nichtunitale  $C^*$ -Algebra. Für  $a \in A$  setzen wir

$$\sigma(a) := \sigma_{A^\sim}(\iota(a)) \quad \text{und} \quad r(a) := r_{A^\sim}(\iota(a))$$

Wieder schreiben wir  $\Omega(A) := \{\chi: A \rightarrow \mathbb{C} \text{ Charaktere}\}$  und

$$J_{\max}(A) = \{J \mid J \triangleleft A \text{ echtes maximales abgeschlossenes Ideal}\}$$

**2.9 Satz.** Sei  $A$  eine nichtunitale abelsche  $C^*$ -Algebra. Dann ist  $\Omega(A)$  ein lokalkompakter Hausdorffraum bezüglich der  $w^*$ -Topologie. Für  $a \in A$  gilt  $\sigma(a) = \{\chi(a) \mid \chi \in \Omega(A)\} \cup \{0\}$ .

**BEWEIS:** Für  $\chi \in \Omega(A)$  sei  $\tilde{\chi}: A^- \rightarrow \mathbb{C}$  die eindeutig bestimmte, lineare, unitale Fortsetzung. Es gilt  $\tilde{\chi} \in \Omega(A^-)$  und

$$\Omega(A^-) = \{\tilde{\chi} \mid \chi \in \Omega(A)\} \cup \{\chi_\infty\}$$

wo  $\chi_\infty: A^- \rightarrow A^-/\iota(A) \cong \mathbb{C}$ .  $\Omega(A^-)$  ist ein kompakter Hausdorffraum nach Satz 1.15, also muss der linke Teil der Vereinigung ein lokalkompakter Hausdorffraum sein. Man überprüft, dass  $\chi \mapsto \tilde{\chi}$  ein Homöomorphismus  $\Omega(A) \rightarrow \Omega(A^-) \setminus \{\chi_\infty\}$  bezüglich der  $w^*$ -Topologie ist. Es gilt

Blatt 2 Aufgabe 2

$$\sigma(a) := \sigma_{A^-}(\iota(a)) \stackrel{1.17}{=} \{\chi(\iota(a)) \mid \chi \in \Omega(A^-)\} = \underbrace{\{\tilde{\chi}(\iota(a)) \mid \chi \in \Omega(A)\}}_{=\{\chi(a) \mid \chi \in \Omega(A)\}} \cup \underbrace{\{\chi_\infty(\iota(a))\}}_{=\{0\}} \quad \square$$

**2.10 Proposition.** Sei  $A$  eine  $C^*$ -Algebra. Dann gilt

- (i) Für eine Projektion  $0 \neq p \in A$  gilt  $\|p\| = 1$ .
- (ii) Ist  $\mathbb{1} \in A$  und  $u \in A$  unitär, dann ist  $\|u\| = 1$  und  $\sigma(u) \subset \mathbb{T}$ .
- (iii) Für  $a \in A_{sa}$  ist  $r(a) = \|a\|$  und  $\sigma(a) \subset \mathbb{R}$ .
- (iv) Für  $a \in A$  beliebig gilt  $\|a\| = \|a^*a\|^{1/2} = r(a^*a)^{1/2}$ .

**BEWEIS:**

- (i) Es gilt  $\|p\| = \|p^*p\| = \|p\|^2$  und somit muss  $\|p\| = 1$  gelten.
- (ii) Es gilt  $\|u\|^2 = \|u^*u\| = \|\mathbb{1}\| = 1$ , also  $\|u\| = 1 = \|u^*\|$ . Wenn  $\lambda \in \sigma(u)$ , dann gilt  $\lambda \neq 0$  und es gilt  $\lambda^{-1} \in \sigma(u^*)$ . Da die Spektralradien von  $u$  und  $u^*$  kleiner gleich 1 sind, muss  $|\lambda|, |\lambda^{-1}| \leq 1$  gelten, also  $|\lambda| = 1$  und damit  $\lambda \in \mathbb{T}$ .
- (iii) Es gilt  $\|a^2\| = \|a^*a\| = \|a\|^2$ . Eine Induktion liefert  $\|a^{2^n}\| = \|a\|^{2^n}$ , also nach Satz 1.10

$$r(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a^{2^n}\|^{1/2^n} = \|a\|$$

Weiter existiert<sup>2</sup>  $e^{ia} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (ia)^n \in A^-$  und ist unitär mit  $(e^{ia})^* = e^{(ia)^*} = e^{-ia} = (e^{ia})^{-1}$ , also ist  $\sigma(e^{ia}) \subset \mathbb{T}$  nach (ii). Falls  $\lambda \in \sigma(a)$ , dann setze  $b := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} i^n (a - \lambda)^{n-1}$ . Dann gilt

$$(a - \lambda)be^{i\lambda} = (e^{i(a-\lambda)} - \mathbb{1})e^{i\lambda} = e^{ia} - e^{i\lambda}$$

Also ist  $e^{i\lambda} \in \sigma(e^{ia}) \subset \mathbb{T}$  und somit  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

- (iv) Folgt direkt aus (iii). □

**2.11 Korollar.** Es seien  $A$  und  $B$  zwei  $C^*$ -Algebren und  $\pi: A \rightarrow B$  ein  $*$ -Homomorphismus. Dann ist  $\pi$  kontraktiv. Die Aussage bleibt richtig, falls  $A$  nur eine involutive Banachalgebra ist.

**BEWEIS:** Wir dürfen  $\pi$  als unital annehmen (betrachte sonst  $\pi^+: A^+ \rightarrow B^+$ ). Für  $d \in A$  gilt  $\sigma_B(\pi(d)) \subset \sigma_A(d)$ , also  $r_B(\pi(d)) \leq r_A(d)$ . Für  $a \in A$  gilt nach Proposition 2.10 (iii)

$$\|\pi(a)\|^2 = \|\pi(a)^*\pi(a)\| = \|\pi(a^*a)\| = r_B(\pi(a^*a)) \leq r_A(a^*a) = \|a\|^2 \quad \square$$

**2.12 Korollar.** Auf einer  $*$ -Algebra gibt es höchstens eine  $C^*$ -Norm.

<sup>2</sup>  $(ia)^0 = \mathbb{1}_{A^-}$  falls  $A$  nicht unital

**BEWEIS:** Sei  $A$  eine  $*$ -Algebra mit  $C^*$ -Normen  $\|\cdot\|_1$  und  $\|\cdot\|_2$ . Wir bezeichnen die  $C^*$ -Algebren entsprechend mit  $A_1$  und  $A_2$ . Es seien  $\pi_1: A_1 \rightarrow A_2$  und  $\pi_2: A_2 \rightarrow A_1$  die Identitäten. Dann gilt

$$\|a\|_1 = \|\pi_2(a)\|_1 \leq \|a\|_2 = \|\pi_1(a)\|_2 \leq \|a\|_1 \quad \square$$

**2.13 Korollar.** Sei  $A$  eine  $C^*$ -Algebra und  $\chi$  ein Charakter auf  $A$ . Dann gilt  $\chi(a^*) = \overline{\chi(a)}$  für  $a \in A$ , das heißt  $\chi$  ist ein  $*$ -Homomorphismus.

**BEWEIS:** Sei  $a \in A$ , dann ist  $a = \frac{1}{2}(a + a^*) + i \cdot \frac{1}{2i}(a - a^*) =: b + i \cdot c$  und  $b, c$  sind selbstadjungiert. Es gilt

$$\chi(b) \stackrel{2.9}{\in} \sigma(b) \stackrel{2.10(iii)}{\subset} \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \chi(c) \in \sigma(c) \subset \mathbb{R}$$

Damit folgt  $\chi(a^*) = \chi(b - i \cdot c) = \chi(b) - i \cdot \chi(c) = \overline{\chi(b) + i \cdot \chi(c)} = \overline{\chi(a)}$ .  $\square$

Aus dem bisher gezeigten können wir nun eine Version von Satz 1.13 für nicht notwendigerweise unitale  $C^*$ -Algebren ableiten:

**2.14 Korollar.** Sei  $A$  eine abelsche  $C^*$ -Algebra. Dann gilt

- (i) Jeder Charakter  $\chi: A \rightarrow \mathbb{C}$  ist stetig mit Norm  $\leq 1$ .
- (ii) Die Abbildung  $\chi \mapsto \ker \chi$  definiert eine Bijektion

$$\Omega(A) \rightarrow J_{\max} = \{J \mid J \subsetneq A \text{ maximales, abgeschlossenes Ideal}\}$$

**BEWEIS:**

- (i) folgt aus Korollar 2.11 und Korollar 2.13 oder auch aus Satz 1.13 und Satz 2.6.
- (ii) Wir zeigen nur die Surjektivität: Sie  $J \subsetneq A$  ein abgeschlossenes, maximales Ideal. Dann ist  $J \subsetneq A^\sim$  ein abgeschlossenes Ideal und es gilt

$$J \subset A \cap \bigcap_{\substack{I \triangleleft A^\sim \\ J \subset I}} I \stackrel{1.13}{=} A \cap \bigcap_{\substack{\chi \in \Omega(A^\sim) \\ J \subset \ker \chi}} \ker \chi \stackrel{2.9}{=} A \cap \ker \chi_\infty \cap \bigcap_{\substack{\chi \in \Omega(A) \\ J \subset \ker \chi}} \ker \chi$$

Damit ist  $J$  enthalten im Schnitt über alle Kerne der  $\chi \in \Omega(A)$ , wobei  $J \subset \ker \chi$ . Damit ist  $J \subset \ker \chi$  für ein  $\chi \in \Omega(A)$  und da  $\ker \chi \triangleleft A$  abgeschlossen und maximal ist, folgt  $J = \ker \chi$ .  $\square$

**2.15 Beispiel.** Wir haben nun schon einiges über  $C^*$ -Algebren gelernt, es dabei aber total versäumt konkrete Beispiele anzugeben. Dies holen wir nun nach:

- (i) Sei  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum. Dann ist  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  eine  $C^*$ -Algebra mit Operatornorm und Adjunktion: Für  $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  gilt  $\|T\| = \sup\{|\langle \eta, T\xi \rangle| \mid \|\xi\|, \|\eta\| \leq 1\}$  also

$$\begin{aligned} \|T^*T\| &= \sup\{|\langle \eta, T^*T\xi \rangle| \mid \|\xi\|, \|\eta\| \leq 1\} \geq \sup\{|\langle T\eta, T\eta \rangle| \mid \|\eta\| \leq 1\} \\ &= (\sup\{\|T\eta\| \mid \|\eta\| \leq 1\})^2 = \|T\|^2 \geq \|T^*T\| \end{aligned}$$

- (ii) Insbesondere ist  $M_n := M_n(\mathbb{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$  eine  $C^*$ -Algebra für  $n \in \mathbb{N}$ .
- (iii) Jede abgeschlossene  $*$ -Unteralgebra von  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  ist eine  $C^*$ -Algebra, zum Beispiel  $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ .
- (iv) Sei  $X$  ein lokalkompakter Hausdorffraum. Dann ist  $C_0(X)$  eine  $C^*$ -Algebra mit punktweisen Operationen, Involution  $f^* = \bar{f}$  und der Supremumsnorm. Tatsächlich ist jede abelsche  $C^*$ -Algebra von dieser Form:

**2.16 Satz (GELFAND).** Sei  $A \neq 0$  eine abelsche  $C^*$ -Algebra. Dann ist die Gelfandtransformation  $\hat{\cdot}: A \rightarrow C_0(\Omega(A))$  ein isometrischer  $*$ -Isomorphismus.

$C_0(\Omega(A)) = C(\Omega(A))$ , falls  $A$  unital nach Satz 1.15

**BEWEIS:** Betrachte das folgende Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 a & \xrightarrow{\quad} & (\chi \mapsto \chi(a)) \\
 \cap & & \cap \\
 A & \xrightarrow{\quad \hat{\cdot} \quad} & \{f \in C(\Omega(A) \cup \{\chi_\infty\}) \mid f(\chi_\infty) = 0\} \cong C_0(\Omega(A)) \\
 \downarrow \iota & & \downarrow \\
 A^\sim & \xrightarrow{\quad \hat{\cdot} \quad} & C(\Omega(A^\sim)) = C(\{\chi^\sim \mid \chi \in \Omega(A)\} \cup \{\chi_\infty\}) \stackrel{2.9}{\cong} C(\Omega(A) \cup \{\chi_\infty\})
 \end{array}$$

Die Gelfandtransformation ist ein  $*$ -Homomorphismus nach Korollar 2.13 und Satz 1.17. Weiter gilt

$$\|a\|^2 = \|a^*a\| \stackrel{2.10}{=} r(a^*a) \stackrel{1.17}{=} \|\widehat{a^*a}\|_\infty = \|\widehat{a^*}\widehat{a}\|_\infty = \|\widehat{a}^*\widehat{a}\|_\infty = \|\widehat{a}\|^2_\infty = \|\widehat{a}\|_\infty^2$$

Damit ist  $a \mapsto \widehat{a}$  isometrisch. Damit folgt, dass  $C := \{\widehat{a} \mid a \in A\} \subset C_0(\Omega(A))$  abgeschlossen ist. Außerdem ist  $C$  eine  $*$ -Unteralgebra, also insbesondere invariant unter komplexer Konjugation. Weiter trennt  $C$  die Punkte von  $\Omega(A)$  und zu jedem  $\chi \in \Omega(A)$  existiert ein  $a \in A$  mit  $\widehat{a}(\chi) = \chi(a) \neq 0$ , das heißt  $\text{ev}_\chi(C) \neq \{0\}$  für alle  $\chi \in \Omega(A)$ . Mit Stone-Weierstraß folgt, dass  $C \subset C_0(\Omega(A))$  dicht ist. Da  $C$  abgeschlossen ist, folgt also  $C = C_0(\Omega(A))$ .  $\square$

**2.17 Bemerkung.** Sei  $X$  ein kompakter Hausdorffraum und  $f \in C(X)$ , dann ist  $\sigma_{C(X)}(f) = f(X)$ .

**BEWEIS:** Die Abbildung  $\delta: X \rightarrow \Omega(C(X))$  definiert durch  $x \mapsto (f \mapsto f(x))$  ist ein Homöomorphismus wegen  $C(X) \cong C(\Omega(C(X)))$ . Es gilt

$$\begin{aligned}
 \sigma_{C(X)}(f) &\stackrel{1.17}{=} \widehat{f}(\Omega(C(X))) = \{\widehat{f}(\chi) \mid \chi \in \Omega(C(X))\} = \{\chi(f) \mid \chi \in \Omega(C(X))\} \\
 &= \{\delta(x)(f) \mid x \in X\} = f(X)
 \end{aligned}$$

**2.18 Definition.** Sei  $S \subset A$  Teilmenge einer  $C^*$ -Algebra  $A$ . Dann bezeichnet  $C^*(S) \subset A$  die kleinste  $C^*$ -Unteralgebra von  $A$ , die  $S$  enthält; also

$$C^*(S) := \bigcap_{\substack{B \subset A \text{ Unteralg.} \\ \text{mit } S \subset B}} B$$

**2.19 Satz (FUNKTIONALKALKÜL).** Sei  $A$  eine  $C^*$ -Algebra und  $a \in A$  normal. Dann existiert ein eindeutig bestimmter  $*$ -Isomorphismus

$$C^*(a) \cong C_0(\sigma(a) \setminus \{0\}) \quad \text{mit} \quad a \mapsto \text{id}_{\sigma(a) \setminus \{0\}}$$

Falls  $A$  unital ist, so existiert ein eindeutig bestimmter unitaler  $*$ -Isomorphismus

$$C^*(a, 1) \cong C(\sigma(a)) \quad \text{mit} \quad a \mapsto \text{id}_{\sigma(a)}$$

Für  $f \in C_0(\sigma(a) \setminus \{0\})$  bzw.  $f \in C(\sigma(a))$  bezeichnen wir mit  $f(a) \in A$  das Urbild von  $f$  unter diesem Isomorphismus. Es gilt  $f(a) \in C^*(a, 1_{A^\sim}) \subset A^\sim$ , falls  $f(0) \neq 0$ . Weiter gilt

$$\sigma(f(a)) = f(\sigma(a))$$

Für  $g \in C(f(\sigma(a)))$  gilt dann  $g(f(a)) = (g \circ f)(a)$ .

**BEWEIS:** Sei zunächst  $A$  unital. Da  $a \in A$  normal ist, ist  $C^*(a, \mathbb{1}) = \overline{\text{Alg}(a, a^*, \mathbb{1})} \subset A$  abelsch. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \alpha: \Omega(C^*(a, \mathbb{1})) &\longrightarrow \widehat{a}(\Omega(C^*(a, \mathbb{1}))) \stackrel{1.17}{=} \sigma_{C^*(a, \mathbb{1})}(a) \subset \mathbb{C} \\ \chi &\longmapsto \widehat{a}(\chi) = \chi(a) \end{aligned}$$

ist ein Homöomorphismus: Die Stetigkeit ist klar, denn  $\Omega(C^*(a, \mathbb{1}))$  trägt die  $w^*$ -Topologie. Die Surjektivität ist trivial. Zur Injektivität: Falls  $\chi_1(a) = \widehat{a}(\chi_1) = \widehat{a}(\chi_2) = \chi_2(a)$  ist, so ist  $\chi_1|_{\text{Alg}(a, a^*, \mathbb{1})} = \chi_2|_{\text{Alg}(a, a^*, \mathbb{1})}$  und mit der Stetigkeit von  $\chi_1$  und  $\chi_2$  folgt, dass  $\chi_1 = \chi_2$  sein muss. Die Inverse ist stetig, da  $\Omega(C^*(a, \mathbb{1}))$  kompakt ist.

Wir erhalten nach Satz 2.16  $C^*(a, \mathbb{1}) \cong C(\Omega(C^*(a, \mathbb{1})))$  mittels  $a \mapsto \widehat{a}$  und  $C(\Omega(C^*(a, \mathbb{1}))) \cong C(\sigma_{C^*(a, \mathbb{1})}(a))$  mittels  $\widehat{a} \mapsto \widehat{a} \circ \alpha^{-1}$ . Für  $\alpha(\chi) = t \in \sigma_{C^*(a, \mathbb{1})}(a)$  haben wir

$$(\widehat{a} \circ \alpha^{-1})(t) = (\widehat{a} \circ \alpha^{-1})(\alpha(\chi)) = \widehat{a}(\chi) = \alpha(\chi) = t$$

Also ist  $\widehat{a} \circ \alpha^{-1} = \text{id}_{\sigma_{C^*(a, \mathbb{1})}(a)}$ . Wir nennen die Komposition der beiden Isomorphismen  $\beta$  und zeigen, dass  $\beta$  tatsächlich die in der Behauptung geforderten Eigenschaften hat: Für  $f \in C(\sigma_{C^*(a, \mathbb{1})}(a))$  gilt

$$\sigma_{C^*(a, \mathbb{1})}(f(a)) = \sigma_{C^*(a, \mathbb{1})}(\beta^{-1}(f)) = \sigma_{\beta(C^*(a, \mathbb{1}))}(f) = \sigma_{C(\sigma_{C^*(a, \mathbb{1})}(a))}(f) \stackrel{2.17}{=} f(\sigma_{C^*(a, \mathbb{1})}(a))$$

Falls  $A$  nicht unital ist, so haben wir

$$\begin{array}{ccccc} C^*(a, \mathbb{1}_{A^\sim}) & \xrightarrow{\stackrel{2.16}{\cong}} & C(\Omega(C^*(a, \mathbb{1}_{A^\sim}))) & \xrightarrow{\stackrel{\text{s.o.}}{\cong}} & C(\sigma_{C^*(a, \mathbb{1}_{A^\sim})}(a)) \\ \cup & & \cup & & \cup \\ C^*(a) & \xrightarrow{\stackrel{2.16}{\cong}} & \frac{C_0(\Omega(C^*(a)))}{C_0(\Omega(C^*(a, \mathbb{1}_{A^\sim})) \setminus \{\chi_\infty\})} \stackrel{2.9}{\cong} & \xrightarrow{\cong} & \frac{C_0(\sigma_{C^*(a, \mathbb{1}_{A^\sim})}(a) \setminus \{0\})}{\{f \in C(\sigma_{C^*(a, \mathbb{1}_{A^\sim})}(a)) \mid f(0) = 0\}} \\ \psi & & \psi & & \psi \\ a & \longmapsto & \widehat{a} & \longmapsto & \text{id}_{\sigma_{C^*(a, \mathbb{1}_{A^\sim})}(a)} \end{array}$$

Der Funktionalkalkül  $\beta^{-1}$  ist ein  $*$ -Homomorphismus, daher gilt für  $*$ -Polynome  $g$ , dass

$$g(f(a)) = g(\beta^{-1}(f)) = \beta^{-1}(g \circ f) = (g \circ f)(a)$$

Für eine beliebige Funktion  $g \in C(\sigma_{C^*(a, \mathbb{1})}(a))$  approximieren wir  $g$  gleichmäßig auf  $\sigma_{C^*(a, \mathbb{1})}(a)$  durch  $*$ -Polynome und benutzen die Stetigkeit von  $\beta^{-1}$ .

Es bleibt zu zeigen, dass  $\sigma_{C^*(a, \mathbb{1})}(a) = \sigma_A(a)$  ist (der unitale Fall genügt). Offensichtlich gilt  $\text{Inv}(C^*(a, \mathbb{1}_A)) \subseteq \text{Inv}(A)$  und somit  $\sigma_A(a) \subseteq \sigma_{C^*(a, \mathbb{1}_A)}(a)$ . Um zu zeigen, dass auch die andere Inklusion gilt, sei  $b \in C^*(a, \mathbb{1}_A)$  mit  $\|b\| \leq 1$  und  $b \in \text{Inv}(A)$ . Dann ist  $b$  normal, denn  $b$  und  $b^*$  sind in  $C^*(a, \mathbb{1}_A)$  und diese Algebra ist abelsch.  $C^*(b, b^{-1})$  ist auch abelsch, da  $(b^{-1})^* = (b^*)^{-1}$  und

$$b(b^*)^{-1} = b(b^*)^{-1}b^{-1}b = b(bb^*)^{-1}b = b(b^*b)^{-1}b = bb^{-1}(b^*)^{-1}b = (b^*)^{-1}b$$

Weiter ist  $\|b^*b\| \leq 1$  nach der  $C^*$ -Gleichung und  $\mathbb{1} - b^*b$  ist selbstadjungiert. Ferner gilt  $0 < \chi(b^*b) \leq 1$  für alle Charaktere  $\chi \in \Omega(C^*(b, b^{-1}))$ . Damit ist

$$\sigma_{C^*(b, b^{-1})}(\mathbb{1} - b^*b) \stackrel{1.17}{=} \{\chi(\mathbb{1} - b^*b) \mid \chi \in \Omega(C^*(b, b^{-1}))\} \subseteq [0, 1]$$

Da das Spektrum  $\sigma_{C^*(b, b^{-1})}(\mathbb{1} - b^*b)$  kompakt ist, folgt  $1 > r(\mathbb{1} - b^*b) = \|\mathbb{1} - b^*b\|$ . Damit existiert die Neumannsche Reihe

$$(b^*b)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\mathbb{1} - b^*b)^n \in C^*(b, \mathbb{1})$$

und es folgt  $b^{-1} = (b^*b)^{-1}b^* \in C^*(b, \mathbb{1}) \subseteq C^*(a, \mathbb{1})$ . Wenn  $b \in C^*(a, \mathbb{1})$  invertierbar in  $A$  ist, so ist also tatsächlich auch  $b^{-1} \in C^*(a, \mathbb{1})$ , womit die andere Inklusion  $\sigma_{C^*(a, \mathbb{1})}(a) \subseteq \sigma_A(a)$  folgt. Ebenso folgt  $\sigma_{C^*(a, \mathbb{1})}(f(a)) = \sigma_A(f(a))$  für  $f \in C(\sigma(a))$ .  $\square$

**2.20 Korollar.** Es seien  $A \subseteq B$   $C^*$ -Algebren und  $a \in A$ . Dann gilt

$$\sigma_A(a) \cup \{0\} = \sigma_B(a) \cup \{0\}$$

- (i) Wenn  $A$  und  $B$  unital sind und  $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$  ist, dann gilt  $\sigma_A(a) = \sigma_B(a)$ .
- (ii) Wenn  $A$  nicht unital ist und  $B$  unital ist, so ist  $0 \in \sigma_A(a) = \sigma_B(a)$ .
- (iii) Wenn beide unital sind, die Einselemente aber nicht übereinstimmen, so gilt  $\sigma_A(a) \cup \{0\} = \sigma_B(a)$ .

**BEWEIS:**

- (i) Es gilt wieder  $\text{Inv}(A) \subset \text{Inv}(B)$ , also  $\sigma_B(a) \subset \sigma_A(a)$ . Für  $b \in A \cap \text{Inv}(B)$  normal gilt dann  $b \in \text{Inv}(A)$  wie im Beweis von Satz 2.19. Damit folgt

$$\sigma_A(a) \subset \sigma_B(a) \implies \sigma_A(a) = \sigma_B(a)$$

Falls  $b$  nicht normal ist, betrachten wir  $b^*b \in \text{Inv}(B)$ . Dann gilt

$$(b^*b)^{-1}b^* = b^{-1} \in A$$

- (ii) Betrachte  $A^\sim \cong C^*(a, \mathbb{1}_B) \subset B$  (algebraisch klar, als  $C^*$ -Algebren nach Korollar 2.11). Dann gilt

$$\overline{\sigma}_A(a) := \sigma_{A^\sim}(a) \stackrel{(i)}{=} \sigma_B(a)$$

- (iii) Wenn  $\mathbb{1}_A \neq \mathbb{1}_B$ , so gilt für  $a \in \text{Inv}(B)$  auch  $a^{-1} \in A$ . Dann folgt aber  $\mathbb{1}_B = a^{-1}a \in A$  (Beweis 2.19). Dies ist ein Widerspruch, also muss  $0 \in \sigma_B(a)$  gelten. Wenn  $\lambda \neq 0$ , dann gilt  $\lambda \cdot \mathbb{1}_A - a \in \text{Inv}(A)$  genau dann, wenn  $\lambda \cdot \mathbb{1}_B - a \in \text{Inv}(B)$ . Dies sieht man wie folgt:

$$(\lambda \cdot \mathbb{1}_B - a)^{-1} = (\lambda \cdot \mathbb{1}_A - a)^{-1} + \lambda^{-1}(\mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A)$$

Damit ist  $\sigma_A(a) \setminus \{0\} = \sigma_B(a) \setminus \{0\}$ .  $\square$

### 3. Positivität

**3.1 Definition.** Sei  $A$  eine  $C^*$ -Algebra. Ein Element  $a \in A$  heißt **positiv** ( $a \geq 0$ ), wenn  $a = a^*$  und  $\sigma(a) \subseteq [0, \infty)$  ist. Mit  $A_+$  bezeichnen wir die Menge der positiven Elemente. Wenn  $b, c \in A_{sa}$  sind, dann definieren wir

$$b \leq c \iff c - b \geq 0$$

#### 3.2 Bemerkung.

- (i) Für  $a \in A \subseteq B$  gilt  $a \geq 0$  in  $A$  genau dann, wenn  $a \geq 0$  in  $B$  gilt (nach Korollar 2.20).
- (ii) Für  $a \in A = C_0(X)$  ist  $a \geq 0$  genau dann, wenn  $a(x) \geq 0$  für alle  $x \in X$  gilt (nach 2.17).

**3.3 Proposition.** Sei  $A$  eine  $C^*$ -Algebra und  $a \in A_+$ . Dann gibt es ein eindeutiges  $b \in A_+$ , sodass  $b^2 = a$ . Wir schreiben  $a^{1/2}$  für dieses Element  $b$ .

**BEWEIS:** Ein solches  $b \in C^*(a) \subseteq A$  existiert nach dem Funktionalkalkül, da  $C^*(a) \cong C_0(\sigma(a) \setminus \{0\})$  via  $a \mapsto \text{id}_{\sigma(a)} \geq 0$ . Sei  $c \in A_+$  ein weiteres Element mit  $c^2 = a$ . Dann gilt  $ca = c^3 = ac$  und damit ist  $C^*(a, c)$  abelsch. Sei  $\Omega := \Omega(C^*(a, c))$  das Charakterspektrum und  $\Phi: C^*(a, c) \rightarrow C_0(\Omega)$  die Gelfandtransformation. Dann sind  $\Phi(b)$  und  $\Phi(c)$  Quadratwurzeln von  $\Phi(a)$ . Anders ausgedrückt gilt für alle  $\omega \in \Omega$

$$\Phi(b)(\omega)^2 = \Phi(a)(\omega) = \Phi(c)(\omega)^2$$

Damit folgt  $\Phi(b)(\omega) = \Phi(c)(\omega)$  für alle  $\omega$  und somit  $\Phi(b) = \Phi(c)$ , also  $b = c$ .  $\square$

**3.4 Proposition.** Sei  $a$  eine unitale  $C^*$ -Algebra,  $a \in A_{sa}$ ,  $t \in \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ . Dann gilt

- (i) Aus  $\|a - t\| \leq t$  folgt  $a \geq 0$
- (ii) Aus  $a \geq 0$  und  $\|a\| \leq t$  folgt  $\|a - t\| \leq t$

**BEWEIS:** Wir können annehmen, dass  $A = C^*(a, 1) = C(\sigma(a))$  gilt. (Warum?)

- (i) Es gilt  $\sup_{x \in \sigma(a)} |x - t| = \|a - t\| \leq t$ , woraus  $|x - t| \leq t$  für alle  $x \in \sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$  folgt. Damit folgt  $x \geq 0$  für alle  $x \in \sigma(a)$ , also  $a \geq 0$ .
- (ii) Aus  $\|a\| \leq t$  und  $a \geq 0$  folgt  $0 \leq x \leq t$  für alle  $x \in \sigma(a)$ . Subtrahieren mit  $t$  liefert  $-t \leq x - t \leq 0$  für alle  $x$ , also  $|x - t| \leq t$ . Damit folgt wieder  $\|a - t\| \leq t$ .  $\square$

**3.5 Korollar.** Sei  $A$  eine  $C^*$ -Algebra. Dann ist  $A_+$  ein Kegel, d.h. für  $a, b \in A_+$  und  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+$  gilt

$$\lambda \cdot a + \mu \cdot b \in A_+$$

**BEWEIS:** Wir dürfen annehmen, dass  $A$  unital ist. Dass  $\lambda a \geq 0$  und  $\mu b \geq 0$  gilt, ist klar. Wir müssen also nur zeigen, dass aus  $a, b \in A_+$   $a + b \in A_+$  folgt. Es gilt

$$\|a - \|a\| \cdot 1_A\| \leq \|a\| \quad \text{und} \quad \|b - \|b\| \cdot 1_A\| \leq \|b\|$$

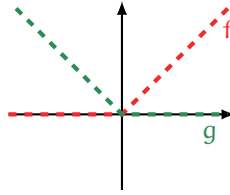
nach voriger Proposition 3.4(ii). Damit folgt weiter aus der Dreiecksungleichung

$$\|a + b - (\|a\| + \|b\|) \cdot 1_A\| \leq \|a - \|a\| \cdot 1_A\| + \|b - \|b\| \cdot 1_A\| \leq \|a\| + \|b\|$$

Also ist  $a + b \geq 0$  nach Proposition 3.4(i).  $\square$

**3.6 Satz.** Sei  $A$  eine  $C^*$ -Algebra und  $a \in A$ . Dann gilt  $a^*a \geq 0$ .





**Abbildung 1:** Zerlegen der Identität in zwei Funktionen  $f$  und  $g$ , sodass  $\text{id} = f - g$

**BEWEIS:** Definiere Funktionen  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  wie in Abbildung 1 und  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $h(t) = t^{1/3}$ . Es gilt  $a^*a \in A_{\text{sa}}$ ,  $a^*a = f(a^*a) - g(a^*a)$  und  $f(a^*a) \cdot g(a^*a) = 0$ . Für  $c = a g(a^*a)$  ergibt sich

$$-c^*c = -g(a^*a)a^*ag(a^*a) = -g(a^*a)(f(a^*a) - g(a^*a))g(a^*a) = g(a^*a)^3 \in A_+$$

Nach Bemerkung 1.3 gilt  $\sigma(-cc^*) \setminus \{0\} = \sigma(-c^*c) \setminus \{0\}$ , also  $-cc^* \in A_+$ . Schreibe nun  $c = d + ie$  mit  $d, e \in A_{\text{sa}}$ . Dann gilt

$$c^*c + cc^* = 2d^2 + 2e^2$$

Also ist  $c^*c = 2d^2 + 2e^2 - cc^* \geq 0$ . Damit ist  $\sigma(c^*c) \subseteq \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_- = \{0\}$ . Also ist  $\|c\|^2 = \|c^*c\| = r(c^*c) = 0$ . Insgesamt ist  $g(a^*a)^3 = 0$ , also  $g(a^*a) = h(g(a^*a)^3) = 0$  und  $a^*a = f(a^*a) \geq 0$ .  $\square$

**3.7 Satz.** Sei  $A$  eine  $C^*$ -Algebra. Dann gilt

- (i)  $A_+ = \{a^*a \mid a \in A\}$
- (ii)  $A = \text{span } A_+$
- (iii)  $A_+$  ist ein abgeschlossener Kegel in  $A$
- (iv)  $\leq$  ist eine partielle Ordnung auf  $A_{\text{sa}}$
- (v) Für  $a, b \in A_{\text{sa}}$  und  $c \in A$  mit  $a \leq b$  gilt  $cac^* \leq cbc^*$
- (vi) Für  $0 \leq a \leq b$  gilt  $\|a\| \leq \|b\|$
- (vii) Wenn  $A$  unital ist und  $a \in A$  positiv und invertierbar, dann folgt aus  $a \leq b$  stets, dass auch  $b$  invertierbar ist und  $0 \leq b^{-1} \leq a^{-1}$  gilt

**BEWEIS:**

- (i) Folgt aus Satz 3.6 und Proposition 3.3.
- (ii) Wenn  $a \in A$  ist, dann können wir  $a = b + ic$  mit  $b, c \in A_{\text{sa}}$  schreiben. Definiere  $b_+ := f(b)$ ,  $b_- := g(b)$ ,  $c_+ := f(c)$ ,  $c_- := g(c)$ . Diese liegen alle in  $A_+$ . Dann gilt  $b = b_+ - b_-$ ,  $c = c_+ - c_-$  und  $a = b_+ - b_- + i(c_+ - c_-) \in \text{span } A_+$ .
- (iii) Die Kegeleigenschaft ist klar nach Korollar 3.5. Zur Abgeschlossenheit: Sei  $a \in \overline{A_+}$ . Dann gilt  $a = a^*$ , da  $A_{\text{sa}}$  abgeschlossen ist. Für jedes  $\varepsilon > 0$  gibt es  $b \in A_+$  mit  $\|b - a\| < \varepsilon$ . Dann gilt

$$\|(a + \varepsilon - b) - \varepsilon\| \leq \varepsilon$$

und somit  $a + \varepsilon - b \geq 0$  nach Proposition 3.4. Dann ist  $a + \varepsilon = a + \varepsilon - b + b \geq 0$  nach Korollar 3.5 und es folgt  $\sigma(a + \varepsilon) \subseteq [0, \infty)$ . Damit ist  $\sigma(a) \subseteq [\varepsilon, \infty)$ . Lassen wir  $\varepsilon$  gegen 0 gehen, so folgt  $\sigma(a) \subseteq [0, \infty)$ . Insgesamt folgt  $a \geq 0$  und damit  $\overline{A_+} = A_+$ .

- (iv) Reflexivität: Es gilt offensichtlich  $a \leq a$ .

Antisymmetrie: Aus  $a \leq b$  und  $b \leq a$  folgt  $\sigma(b - a) \subset \mathbb{R}_+$  sowie  $\sigma(a - b) \subset \mathbb{R}_+$  und damit folgt  $\sigma(a - b) = \sigma(b - a) = \{0\}$ . Da  $a - b$  selbstadjungiert ist, folgt aus Proposition 2.10  $a - b = 0$ .

Transitivität: Gilt  $a \leq b$  und  $b \leq c$ , so ist  $c - a = c - b + b - a \stackrel{3.5}{\geq} 0 \implies c \geq a$ .

(v) Es gilt  $c^*bc - c^*ac = c^*(b - a)c = c^*(b - a)^{1/2}(b - a)^{1/2}c = d^*d \geq 0$  mit  $d := (b - a)^{1/2}c$ .

(vi) Sei  $0 \leq a \leq b$ . Wir haben  $\|b\| \cdot \mathbb{1}_{A^\sim} \geq b$  nach Gelfand für  $C^*(b, \mathbb{1}_{A^\sim})$ . Damit ist  $a \leq \|b\| \cdot \mathbb{1}_{A^\sim}$ . Gelfand für  $C^*(a, \mathbb{1}_{A^\sim})$  liefert  $\|b\| \cdot \mathbb{1}_{A^\sim} \geq \|a\| \cdot \mathbb{1}_{A^\sim}$ . Damit muss dann bereits  $\|b\| \geq \|a\|$  sein.

vlt noch T<sub>E</sub>Xen

(vii) Übungsaufgabe 1 b) von Blatt 5!

□

**3.8 Satz.** Sei  $A$  eine  $C^*$ -Algebra. Für  $0 \leq a \leq b \in A$  gilt  $a^{1/2} \leq b^{1/2}$ .

**BEWEIS:** Es seien eine reelle Zahl  $t > 0$  und  $c, d \in A_{sa}^\sim$  gegeben mit

$$(t \cdot \mathbb{1} + b^{1/2} + a^{1/2})(t \cdot \mathbb{1} + b^{1/2} - a^{1/2}) = c + id$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{2} \cdot \left( (t \cdot \mathbb{1} + b^{1/2} + a^{1/2})(t \cdot \mathbb{1} + b^{1/2} - a^{1/2}) + (t \cdot \mathbb{1} + b^{1/2} - a^{1/2})(t \cdot \mathbb{1} + b^{1/2} + a^{1/2}) \right) \\ &= t^2 \cdot \mathbb{1} + 2t \cdot \underbrace{b^{1/2}}_{\geq 0} + \underbrace{b - a}_{\geq 0} \geq t^2 \cdot \mathbb{1} \end{aligned}$$

Da  $t \neq 0$  ist, folgt  $c \in \text{Inv}(A^\sim) \cap A_+$  nach Satz 3.7(vii). Da  $c^{-1/2}dc^{-1/2}$  positiv ist, ist das Spektrum von  $\mathbb{1} + i \cdot c^{-1/2}dc^{-1/2}$  in  $1 + i \cdot \mathbb{R}$  enthalten. Weiter gilt

$$\mathbb{1} + i \cdot c^{1/2}dc^{1/2} = c^{-1/2}(c + i \cdot d)c^{-1/2} \in \text{Inv}(A^\sim)$$

Also ist  $c + i \cdot d$  invertierbar und damit  $(t \cdot \mathbb{1} + b^{1/2} - a^{1/2})$  linksinvertierbar. Dieses Element ist aber selbstadjungiert und muss damit dann auch rechtsinvertierbar, also invertierbar sein. Damit folgt nun  $-t \notin \sigma(b^{1/2} - a^{1/2})$  und somit ist  $\sigma(b^{1/2} - a^{1/2}) \subset \mathbb{R}_+$  und  $b^{1/2} \geq a^{1/2}$ . □

**3.9 Beispiel.** Im Allgemeinen folgt aus  $0 \leq a \leq b$  nicht  $a^2 \leq b^2$ . Betrachte dafür die  $C^*$ -Algebra  $A = M_2$  und die beiden Projektionen

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad q = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dann gilt  $p \leq p + q$ , aber  $p^2 = p \not\leq (p + q)^2 = p + q + pq + qp$ , denn

$$q + pq + qp = \frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Matrix hat einen negativen Eigenwert, da die Determinante  $-1$  ist.

**3.10 Bemerkung.** Falls für alle  $a, b \in A$  mit  $0 \leq a \leq b$  schon  $a^2 \leq b^2$  gilt, so ist  $A$  bereits abelsch.

**3.11 Lemma.** Sei  $A$  eine  $C^*$ -Algebra. Dann ist  $\Lambda := \{a \in A_+ \mid \|a\| < 1\}$  gerichtet bezüglich „ $\leq$ “.

**BEWEIS:** Für  $a, b \in \Lambda$  setze  $a' := a(1_{\Lambda} - a)^{-1}$  und  $b' := b(1_{\Lambda} - b)^{-1}$ . Durch Betrachtung der von-Neumann-Reihe sieht man sofort, dass  $a'$  und  $b'$  positiv sind. Dann gilt

$$c := (a' + b')(1_{\Lambda} + a' + b')^{-1} \in \Lambda$$

nach Gelfand. Es ist nun

$$\begin{aligned} a &= a(1 - a)^{-1}((1 - a)^{-1})^{-1} \stackrel{1.3}{=} a(1 - a)^{-1}(1 + a(1 - a)^{-1})^{-1} = a'(1 + a')^{-1} \\ &= ((1 + a') - 1)(1 + a')^{-1} = 1 - (1 + a')^{-1} \end{aligned}$$

Da  $0 \leq 1 + a' \leq 1 + a' + b'$  jeweils invertierbar sind, ist  $(1 + a' + b')^{-1} \leq (1 + a')^{-1}$  nach Satz 3.7

$$\begin{aligned} &\leq 1 - (1 + a' + b')^{-1} \stackrel{1.3}{=} 1 - (1 + (a' + b'))(1 + a' + b')^{-1} \\ &= (a' + b')(1 + a' + b')^{-1} \end{aligned}$$

Damit ist  $a \leq c$ . Die Relation  $b \leq c$  folgt ebenso.  $\square$

**3.12 Definition.** Eine *approximative Eins* in einer  $C^*$ -Algebra  $A$  ist (aufsteigendes) Netz  $(e_\lambda)_\Lambda \subset A_+^1$  mit  $a = \lim_\lambda a e_\lambda$  beziehungsweise  $a = \lim_\lambda e_\lambda a$  für jedes  $a \in A$ .

**3.13 Satz.** Jede  $C^*$ -Algebra  $A$  besitzt eine approximative Eins.

**BEWEIS:** Sei  $\Lambda := \{a \in A_+ \mid \|a\| < 1\}$  wie in Lemma 3.11 und setze  $e_\lambda := \lambda$  für  $\lambda \in \Lambda$ . Dann ist  $(e_\lambda)_\Lambda \subset A_+^1$  ein aufsteigendes Netz (aufsteigend bezüglich „ $\leq$ “, gerichtet nach Lemma 3.11). Sei nun  $a \in \Lambda$  und  $1 \geq \varepsilon > 0$ . Sei  $\Omega := \sigma(a) \setminus \{0\} \subset (0, 1]$  und  $\Phi: C^*(a) \rightarrow C_0(\Omega)$  der Gelfandisomorphismus. Betrachte  $f := \Phi(a) = \text{id}_\Omega$  und die kompakte Menge  $K := \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \geq \varepsilon\} \subset \Omega$ . Nach Urysohn existiert ein  $g: \Omega \rightarrow [0, 1]$  stetig mit kompaktem Träger und  $g(\omega) = 1$  für  $\omega \in K$ . Wähle  $\delta > 0$  mit  $\delta < 1$  und  $1 - \delta < \varepsilon$ . Dann gilt

$$\|f - \delta \cdot g f\|_\infty = \|(1 - \delta \cdot g)f\|_\infty \leq \varepsilon$$

ich meine man sollte  $\delta$  so wählen, dass hier  $\varepsilon/\|a\|$  steht, sonst kommt das später nicht wirklich hin

Mit  $\bar{\lambda} := \Phi^{-1}(\delta \cdot g) \in \Lambda$  ergibt sich  $\|a - \bar{\lambda} a\|_A \leq \varepsilon$ . Falls nun  $\lambda \in \Lambda$  ist mit  $\lambda \geq \bar{\lambda}$ , so gilt  $0 \leq a(1 - e_\lambda)a \leq a(1 - e_{\bar{\lambda}})a$  nach Satz 3.7(v), da  $0 \leq 1 - e_\lambda \leq 1 - e_{\bar{\lambda}}$ . Dann folgt

$$\begin{aligned} \|a - e_\lambda a\|^2 &= \|(1 - e_\lambda)^{1/2}(1 - e_\lambda)^{1/2}a\|^2 \leq \|(1 - e_\lambda)^{1/2}a\|^2 = \|a^*(1 - e_\lambda)^{1/2}(1 - e_\lambda)^{1/2}a\| \\ &\leq \|a^*(1 - e_{\bar{\lambda}})a\| \leq \varepsilon \end{aligned}$$

Damit folgt  $a = \lim_\lambda e_\lambda a$  für  $a \in \Lambda$ . Da  $A = \text{span } \Lambda$  gilt, sind wir fertig.  $\square$

**3.14 Proposition.** Sei  $A$  eine separable  $C^*$ -Algebra – das heißt  $A$  besitzt eine abzählbare dichte Teilmenge – dann besitzt  $A$  eine abzählbare idempotente approximative Eins  $(e_n)_\mathbb{N}$ , das heißt es gilt  $e_n e_{n+1} = e_n$ .

**BEWEIS:** Übung! (Blatt 5 Aufgaben 3 und 4)  $\square$

## 4. Ideale, Quotienten und Limiten

**4.1 Proposition.** Sei  $L$  ein abgeschlossenes Linksideal in der  $C^*$ -Algebra  $A$ . Dann existiert ein aufsteigendes Netz  $(e_\lambda)_\Lambda \subset L \cap A_+^1$  mit  $a = \lim_\lambda a e_\lambda$  für  $a \in L$  und  $L \cap L^* \subset A$  ist eine  $C^*$ -Unteralgebra.

**BEWEIS:** Sei  $B := L \cap L^*$ , dann ist  $B \subset A$  eine  $C^*$ -Unteralgebra:

- ▶  $L^* \subset A$  abgeschlossen, da  $*$  isometrisch ist. Damit ist auch  $L \cap L^*$  abgeschlossen in  $A$
- ▶  $L \cap L^* \subset A$  ist ein Untervektorraum.
- ▶  $L^* \subset A$  ist ein Rechtsideal:  $l^* a = (a^* l)^* \in L^*$ . Damit ist  $L \cap L^*$  bereits eine Unteralgebra:

$$a, b \in L \cap L^* \Rightarrow \underbrace{a}_{\in L^*} \underbrace{b}_{\in L} \in L \cap L^*$$

- ▶  $L \cap L^* = (L \cap L^*)^*$  ist klar.

Mit Satz 3.13 folgt, dass  $B$  eine approximative Eins  $(e_\lambda)_\Lambda$  besitzt. Für  $a \in L$  ist  $a^* a \in B$  und damit

$$\lim_\lambda \|a - a e_\lambda\| = \lim_\lambda \|(\mathbb{1} - e_\lambda) a^* a (\mathbb{1} - e_\lambda)\|^{1/2} = 0 \quad \square$$

**4.2 Satz.** Sei  $A$  eine  $C^*$ -Algebra und  $J \triangleleft A$  ein (abgeschlossenes, zweiseitiges) Ideal. Dann ist  $J \subset A$  eine  $C^*$ -Unteralgebra. Falls  $(e_\lambda)_\Lambda \subset J$  eine approximative Eins ist, so gilt für  $a \in A$

$$\|a + J\|_{A/J} = \lim_\lambda \|a - a e_\lambda\| = \lim_\lambda \|a - e_\lambda a\|$$

wobei  $\|a + J\|_{A/J} = \inf_{b \in J} \|a + b\|$  die Quotientennorm bezeichnet.

**BEWEIS:** Nach Proposition 4.1 existiert  $(u_\gamma)_\Gamma \subset J \cap A_+^1$  mit  $a = \lim_\gamma a u_\gamma$  für  $a \in J$ . Dann gilt

$$a^* = \lim_\gamma (a u_\gamma)^* = \lim_\gamma u_\gamma a^* \in J$$

für  $a \in J$ , also ist  $J = J^*$ . Mit Proposition 4.1 folgt dann wiederum, dass  $J = J \cap J^*$  eine  $C^*$ -Unteralgebra von  $A$  ist. Sei nun  $(e_\lambda)_\Lambda \subset J$  eine beliebige approximative Eins für  $J$ . Gegeben  $a \in A$  und  $\varepsilon > 0$ , so wähle  $b \in J$  mit  $\|a + b\| \leq \|a + J\|_{A/J} + \frac{\varepsilon}{2}$ . Wähle dann  $\lambda_0 \in \Lambda$  mit  $\|b - e_\lambda b\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$  für alle  $\lambda \geq \lambda_0$ . Für  $\lambda \geq \lambda_0$  gilt dann

$$\begin{aligned} \|a + J\|_{A/J} &\leq \|a - e_\lambda a\| \leq \|(\mathbb{1} - e_\lambda)(a + b)\| + \|(\mathbb{1} - e_\lambda)b\| \leq \|a + b\| + \|(\mathbb{1} - e_\lambda)b\| \\ &\leq \|a + J\|_{A/J} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Damit folgt  $\|a - e_\lambda a\| \xrightarrow{\lambda} \|a + J\|_{A/J}$ .  $\|a - a e_\lambda\| \xrightarrow{\lambda} \|a + J\|_{A/J}$  folgt ebenso.  $\square$

**4.3 Bemerkung.** Für Ideale  $J \triangleleft A$  und  $I \triangleleft J$  gilt  $I \triangleleft A$ .

**BEWEIS:** Es sei  $a \in A$  und  $b \in I_+$ . Dann gilt  $ab = \underbrace{a b^{1/2} b^{1/2}}_{\in I} \in I$ .  $\square$

**4.4 Satz.** Sei  $A$  eine  $C^*$ -Algebra und  $J \triangleleft A$  ein Ideal. Dann ist  $A/J$  eine  $C^*$ -Algebra (mit induzierten Operationen und der Quotientennorm).

**BEWEIS:** Fixiere eine approximative Eins  $(e_\lambda)_\lambda$  für  $J$ . Sei  $a \in A$  und  $b \in J$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \|a + J\|_{A/J}^2 &\stackrel{4.2}{=} \lim_{\lambda} \|a - ae_\lambda\|^2 = \lim_{\lambda} \|(1 - e_\lambda)a^*a(1 - e_\lambda)\| \\ &\leq \sup_{\lambda} \|(1 - e_\lambda)(a^*a + b)(1 - e_\lambda)\| + \underbrace{\lim_{\lambda} \|(1 - e_\lambda)b(1 - e_\lambda)\|}_{=0} \\ &\leq \|a^*a + b\| \end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\|a + J\|_{A/J}^2 \leq \inf_{b \in J} \|a^*a + b\| = \|a^*a + J\|_{A/J} \leq \|a^* + J\|_{A/J} \cdot \|a + J\|_{A/J} = \|a + J\|_{A/J}^2$$

Damit ist  $\|(a^* + J)(a + J)\|_{A/J} = \|a + J\|_{A/J}^2$  und somit ist die  $C^*$ -Gleichung erfüllt. Dass  $A/J$  ein Banachraum ist, haben wir bereits in Funktionalanalysis, Proposition 2.16 gesehen.  $\square$

**4.5 Proposition.** Es seien  $A, B$   $C^*$ -Algebren,  $\pi: A \rightarrow B$  ein injektiver  $*$ -Homomorphismus. Dann ist  $\pi$  bereits isometrisch.

**BEWEIS:** Zu zeigen:  $\|\pi(a^*a)\| = \|\pi(a)\|^2 = \|a\|^2 = \|a^*a\|$  für  $a \in A$ . Wir dürfen also annehmen, dass  $A = C^*(a^*a)$  und  $B = \overline{\pi(A)}$  abelsch sind. Weiter können wir  $\pi$  durch  $\tilde{\pi}: A^\sim \rightarrow B^\sim$  ersetzen, falls  $A$  nicht unital ist. Wir dürfen also auch  $A$  und  $B$  als unital annehmen.  $\pi$  induziert eine stetige Abbildung  $\pi^*: \Omega(B) \rightarrow \Omega(A)$  durch  $\chi \mapsto \chi \circ \pi$ , also ist  $\pi^*(\Omega(B)) \subset \Omega(A)$  kompakt nach Satz 1.15 und insbesondere auch abgeschlossen. Falls  $\pi^*$  nicht surjektiv wäre, so gäbe es ein  $0 \neq f \in C(\Omega(A))_+ \cong A_+$  mit  $f|_{\pi^*(\Omega(B))} = 0$ . Dann gilt

$$0 = f(\pi^*(\chi)) = \chi \circ \pi(f)$$

für alle Charaktere  $\chi \in \Omega(B)$ . Also ist  $\pi(f) = 0$ , woraus mit der Injektivität wieder  $f = 0$  folgt. Dies ist ein Widerspruch und somit ist  $\pi^*$  surjektiv. Für  $a \in A$  gilt dann

$$\|a\|_A \stackrel{\text{Gelfand-Isom.}}{=} \sup_{\rho \in \Omega(A)} |\rho(a)| = \sup_{\chi \in \Omega(B)} |\chi \circ \pi(a)| = \|\pi(a)\|_B \quad \square$$

$a^*a$  normal  $\Rightarrow$   
 $C^*(a^*a)$  abelsch

Gelfand-Isomorphismus in der Notation unterdrückt

**4.6 Satz.** Seien  $A, B$   $C^*$ -Algebren,  $\pi: A \rightarrow B$  ein  $*$ -Homomorphismus. Dann ist  $\pi(A) \subset B$  eine  $C^*$ -Unteralgebra.

**BEWEIS:** Betrachte die  $C^*$ -Algebra  $A/\ker \pi$  (siehe 4.4) und den wohldefinierten  $*$ -Homomorphismus

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}: A/\ker \pi &\longrightarrow B \\ a + \ker \pi &\longmapsto \pi(a) \end{aligned}$$

$\tilde{\pi}$  ist injektiv, also isometrisch nach Proposition 4.5. Damit ist  $\pi(A)$  vollständig und  $\pi(A) \subset B$  abgeschlossen. Also ist  $\pi(A)$  eine  $C^*$ -Unteralgebra von  $B$ .  $\square$

**4.7 Proposition.** Sei  $A$  eine  $C^*$ -Algebra,  $B \subset A$  eine  $C^*$ -Unteralgebra und  $J \triangleleft A$  ein Ideal. Dann ist  $B + J \subset A$  eine  $C^*$ -Unteralgebra.

**BEWEIS:** Übung! (Blatt 7, Aufgabe 1)  $\square$

**4.8 Definition.** Eine  $C^*$ -Unteralgebra  $B \subset A$  heißt *hereditär*,  $B \subset_{\text{her}} A$ , falls gilt

$$a \in A_+, b \in B_+, a \leq b \implies a \in B$$

**4.9 Satz.** Für eine  $C^*$ -Algebra  $A$  definiert

$$\begin{aligned} \{L \subset A \mid L \text{ ist abg. Linksideal}\} &\longrightarrow \{B \subset_{\text{her}} A\} \\ L &\longmapsto L \cap L^* \\ \{a \in A \mid a^*a \in B\} &\longleftarrow B \end{aligned}$$

eine natürliche Bijektion.

**BEWEIS:** Sei  $B \subset_{\text{her}} A$ . Dann ist  $L_B := \{a \in A \mid a^*a \in B\} \subset A$  ein abgeschlossenes Linksideal: Wenn  $a, b \in L_B$ , dann gilt

$$(a^* + b^*)(a + b) \leq (a^* + b^*)(a + b) + (a - b)^*(a - b) = 2a^*a + 2b^*b \in B$$

also  $(a^* + b^*)(a + b) \in B$ , da  $B$  hereditär ist, und somit  $a + b \in L_B$ . Für  $a \in A$  und  $b \in L_B$  gilt

$$(ab)^*ab = b^*a^*ab \leq b^*(\|a^*a\| \cdot 1_{A^-})b = \|a^*a\|b^*b \in B$$

Da  $B$  hereditär ist, folgt  $(ab)^*ab \in B$  und somit  $ab \in L_B$ . Also ist  $L_B$  wirklich ein Linksideal und  $L_B \subset A$  ist abgeschlossen, da  $L_B$  das Urbild von  $B$  unter  $a \mapsto a^*a$  ist.

Mit Proposition 4.1 folgt, dass  $L_B \cap L_B^* \subset A$  eine  $C^*$ -Algebra ist. Es gilt

$$0 \leq b \in L_B \cap L_B^* \implies 0 \leq b^{1/2} \in L_B \cap L_B^*$$

Also ist  $b \in B$  und somit  $L_B \cap L_B^* \subset B$ . Weiter ist klar, dass  $B \subset L_B \cap L_B^*$  ist, also insgesamt  $B = L_B \cap L_B^*$  gilt. Die Verknüpfung  $B \mapsto L_B \mapsto L_B \cap L_B^*$  entspricht also der Identität.

Für die zweite Verknüpfung verifizieren wir zunächst, dass  $L \cap L^*$  eine hereditäre  $C^*$ -Unteralgebra ist: Nach Proposition 4.1 müssen wir dafür nur noch zeigen, dass  $L \cap L^*$  hereditär ist. Sei dazu  $a \in A_+$  und  $0 \leq a \leq b$  für ein  $b \in L \cap L^*$ . Sei  $(e_\lambda)_\Lambda$  ein Netz wie in Proposition 4.1. Es gilt  $0 \leq (1 - e_\lambda)a(1 - e_\lambda) \leq (1 - e_\lambda)b(1 - e_\lambda)$  für alle  $\lambda \in \Lambda$ . Damit erhalten wir

$$\|a^{1/2}(1 - e_\lambda)\|^2 = \|(1 - e_\lambda)a(1 - e_\lambda)\| \leq \|(1 - e_\lambda)b(1 - e_\lambda)\| \leq \|b(1 - e_\lambda)\|$$

Damit ist  $a^{1/2} = \lim_\lambda a^{1/2}e_\lambda$  und damit  $a^{1/2} \in L$ , da  $L$  ein Linksideal ist. Dann ist aber auch  $a \in L$ . Es bleibt nun  $L = L_{L \cap L^*}$  zu zeigen.  $L \subseteq L_{L \cap L^*}$  folgt sofort, da  $L$  ein Linksideal und  $L^*$  ein Rechtsideal ist. Sei nun  $a \in L_{L \cap L^*}$  positiv, also  $a \in A$  mit  $a^*a \in L \cap L^*$ . Dann gilt  $a^2 = a^*a \in L \cap L^*$  und somit  $a \in L \cap L^* \subset L$ , da  $L \cap L^*$  eine  $C^*$ -Algebra ist. Wir haben nun  $(L_{L \cap L^*})_+ \subseteq L_+$  und es folgt  $L_{L \cap L^*} \subseteq L$ . Also entspricht auch  $L \mapsto L \cap L \mapsto L_{L \cap L^*}$  der Identität.  $\square$

**4.10 Satz.** Sei  $B \subset A$  eine  $C^*$ -Unteralgebra. Dann gilt:

$$B \subset_{\text{her}} A \iff bac \in B \text{ für alle } b, c \in B, a \in A$$

**BEWEIS:** Für die erste Implikation sei  $B = L \cap L^*$  für ein abgeschlossenes Linksideal  $L$  nach Satz 4.9. Für  $b, c \in B$  und  $a \in A$  gilt  $bac \in L$  und

$$(bac)^* = c^*a^*b^* \in L$$

Also ist  $bac \in L \cap L^* = B$  wie gewünscht. Für die zweite Implikation seien  $a \in A_+$ ,  $b \in B_+$  mit  $0 \leq a \leq b$ . Sei weiter  $(e_\lambda)_\Lambda \subset B$  eine approximative Eins für  $B$ . Dann gilt  $e_\lambda a e_\lambda \in B$  für  $\lambda \in \Lambda$  nach Voraussetzung. Wir haben nun wie im vorigen Beweis

$$0 \leq (1 - e_\lambda)a(1 - e_\lambda) \leq (1 - e_\lambda)b(1 - e_\lambda) \xrightarrow{\lambda} 0$$

Wie eben gilt auch  $a^{1/2}(1 - e_\lambda) \xrightarrow{\lambda} 0$  und es folgt  $B \ni e_\lambda a e_\lambda \rightarrow a \in B$ . Also ist  $B$  hereditär.  $\square$

**4.11 Korollar.** Sei  $J \triangleleft A$  ein Ideal, dann gilt  $J \subset_{\text{her}} A$ . □

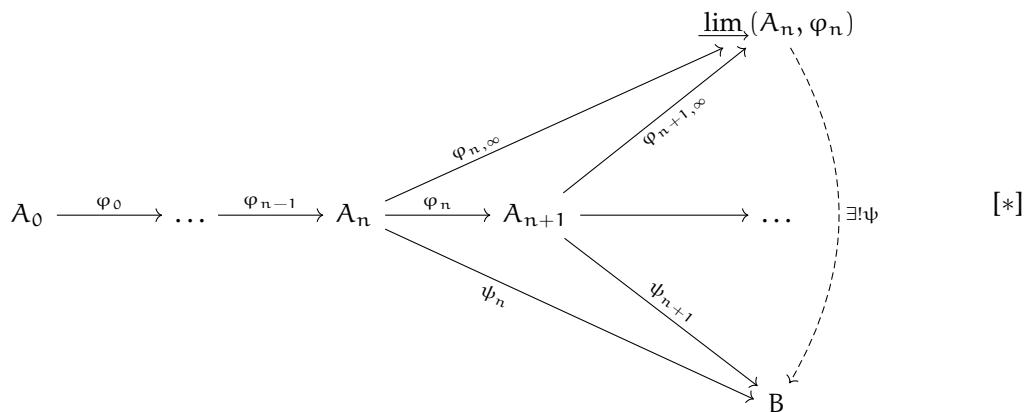
**4.12 Korollar.** Sei  $A$  eine  $C^*$ -Algebra,  $a \in A_+$  ein positives Element. Dann gilt  $\overline{aAa} \subset_{\text{her}} A$ . Falls  $A$  separabel ist und  $B \subset_{\text{her}} A$ , so gilt  $B = \overline{hAh}$  für ein  $h \in A_+$ .

**BEWEIS:** Übung! (Blatt5, Aufgaben 3 und 4 zusammen mit Blatt 7, Aufgabe 3) □

**4.13 Satz.** Sei  $(A_n, \varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ein *induktives System von  $C^*$ -Algebren*, das heißt die  $A_n$  sind  $C^*$ -Algebren und die  $\varphi_n: A_n \rightarrow A_{n+1}$  sind  $*$ -Homomorphismen. Dann existiert eine (bis auf Isomorphie) eindeutig bestimmte  $C^*$ -Algebra  $\varinjlim (A_n, \varphi_n)$  mit folgender universeller Eigenschaft:

- ▶ Es existieren  $*$ -Homomorphismen  $\varphi_{n,\infty}: A_n \rightarrow \varinjlim (A_n, \varphi_n)$  mit  $\varphi_{n,\infty} = \varphi_{n+1,\infty} \circ \varphi_n$ .
- ▶ Falls  $\psi_n: A_n \rightarrow B$  für  $n \in \mathbb{N}$   $*$ -Homomorphismen sind mit  $\psi_n = \psi_{n+1} \circ \varphi_n$ , so existiert ein eindeutig bestimmter  $*$ -Homomorphismus  $\psi: \varinjlim (A_n, \varphi_n) \rightarrow B$  mit  $\psi_n = \psi \circ \varphi_{n,\infty}$  für  $n \in \mathbb{N}$ .

Kürzer: Folgendes Diagramm kommutiert



**BEWEIS:** Die Menge

$$\prod_{\mathbb{N}} A_n := \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid a_n \in A_n, \sup_n \|a_n\| < \infty\}$$

ist eine  $C^*$ -Algebra mit komponentenweisen Operationen und Supremumsnorm, denn sie ist eine Banachalgebra nach Blatt 1, Aufgabe 1 c) und  $\|\cdot\|_\infty$  ist offensichtlich eine  $C^*$ -Norm. Es ist nun

$$\bigoplus_{\mathbb{N}} A_n := \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid a_n \in A_n, \lim_{n \rightarrow \infty} \|a_n\| = 0\} \triangleleft \prod_{\mathbb{N}} A_n$$

warum?

Sei  $q: \prod_{\mathbb{N}} A_n \rightarrow \prod_{\mathbb{N}} A_n / \bigoplus_{\mathbb{N}} A_n$  die Quotientenabbildung und weiter

$$C := \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \prod_{\mathbb{N}} A_n \mid \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ mit } a_{n+1} = \varphi_n(a_n) \text{ für } n \geq n_0\}$$

$C \subset \prod_{\mathbb{N}} A_n$  ist eine  $*$ -Unteralgebra und folglich ist  $\overline{C} \subset \prod_{\mathbb{N}} A_n$  eine  $C^*$ -Unteralgebra. Wir definieren

$$\varinjlim (A_n, \varphi_n) := q(\overline{C}) \subset \prod_{\mathbb{N}} A_n / \bigoplus_{\mathbb{N}} A_n$$

Wir definieren  $*$ -Homomorphismen  $\varphi'_n: A_n \rightarrow C$  durch

$$\varphi'_n(a) := (0, \dots, 0, a, \varphi_n(a), \varphi_{n+1}(\varphi_n(a)), \dots)$$

und  $\varphi_{n,\infty} := q \circ \varphi'_n: A_n \rightarrow \varinjlim (A_n, \varphi_n)$ . Gegeben  $B$  und  $\psi_n: A_n \rightarrow B$ , so ist  $\psi$  auf  $q(C)$  eindeutig bestimmt durch  $[*]$ , das heißt  $\psi_n = \psi \circ \varphi_{n,\infty}: A_n \rightarrow B$ . Aber  $q(C) \subset q(\overline{C}) = \varinjlim (A_n, \varphi_n)$  ist dicht und  $\psi$  ist normvermindernd auf  $q(C)$ , setzt sich also eindeutig auf  $q(\overline{C})$  fort. Eindeutigkeit von  $\varinjlim (A_n, \varphi_n)$  ist klar. □

der folgende Absatz könnte noch ausführlicher sein

#### 4.14 Beispiel. Beispiele für den gerichteten Limes

(i) Betrachte

$$M_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow M_n \xrightarrow{\varphi_n} M_{n+1} \longrightarrow \dots \longrightarrow \varinjlim (M_n, \varphi_n) \cong \mathcal{K}(\ell^2(\mathbb{N}))$$

wobei die  $\varphi_n$  eine Matrix rechts unten mit Nullen auffüllt. Es gilt

$$\mathcal{K}(\ell^2(\mathbb{N})) = \bigcup_{\mathbb{N}} \underbrace{\mathcal{B}(\underbrace{\text{span}\{\eta_0, \dots, \eta_n\}}_{\cong \mathbb{C}^{n+1}})}_{\cong M_{n+1}} \subset \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$$

nach Korollar 8.11 aus Funktionalanalysis.

(ii) Betrachtet man den folgenden Limes

$$M_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow M_{2^n} \xrightarrow{\varphi_n} M_{2^{n+1}} \longrightarrow \dots \longrightarrow \varinjlim (M_{2^n}, \varphi_n) =: M_{2^\infty}$$

wobei die verbindenden Abbildungen die Matrizen zweimal auf der Diagonalen platzieren, also  $X \mapsto \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix}$ , so erhält man die sogenannte **CAR-Algebra**  $M_{2^\infty}$ . Wikipedia zum Namen:

„Es handelt sich um eine  $C^*$ -Algebra, die eng mit den in der Quantenmechanik untersuchten kanonischen Antivertauschungsrelationen (engl. **canonical anticommutation relation**, daher der Name CAR) verbunden ist und daher auch Fermionenalgebra genannt wird.“ (<https://de.wikipedia.org/wiki/CAR-Algebra>)



## 5. Zustände und die GNS-Konstruktion

**5.1 Definition.** Sei  $A$  eine  $C^*$ -Algebra. Eine Abbildung  $\varphi: A \rightarrow \mathbb{C}$  heißt *positives Funktional*, falls  $\varphi$  linear ist und  $\varphi(A_+) \subset \mathbb{R}_+$  gilt.  $\varphi$  heißt *Zustand*, falls außerdem  $\|\varphi\| = 1$  gilt. Wir schreiben  $S(A) := \{\text{Zustände auf } A\}$ .

engl. states

**5.2 Proposition.** Sei  $\varphi: A \rightarrow \mathbb{C}$  ein positives Funktional. Dann ist  $(a, b) \mapsto \varphi(a^*b)$  eine positiv semidefinite Sesquilinearform auf  $A$ . Insbesondere gilt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|\varphi(a^*b)| \leq \varphi(a^*a)^{1/2} \varphi(b^*b)^{1/2}$$

**BEWEIS:** Das einzige, was man sich kurz überlegen muss, ist die Eigenschaft von  $(a, b) \mapsto \varphi(a^*b)$  hermitesch zu sein: Dies folgt mit (ii) aus folgendem Satz 5.3

$$\overline{\varphi(a^*b)} = \varphi((a^*b)^*) = \varphi(b^*a) \longleftrightarrow (b, a)$$

□

**5.3 Satz.** Sei  $\varphi$  ein positives Funktional auf  $A$ . Dann gilt

- (i)  $\varphi$  ist beschränkt,
- (ii)  $\varphi(a^*) = \overline{\varphi(a)}$  für  $a \in A$  und
- (iii)  $|\varphi(a)|^2 \leq \|\varphi\| \cdot \varphi(a^*a)$  für  $a \in A$ .

**BEWEIS:**

- (i) Falls  $\varphi$  unbeschränkt ist, so existiert  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A_+^1$  mit  $\varphi(a_n) > 2^n$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Setze  $h := \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \cdot a_n \in A_+$ . Dann gilt für alle  $k \in \mathbb{N}$

$$\varphi(h) \geq \varphi\left(\sum_{n=0}^k \frac{1}{2^n} \cdot a_n\right) > k + 1,$$

was ein Widerspruch ist.

- (ii) Es sei  $a = b - c + i \cdot d - i \cdot e$  mit  $b, c, d, e \in A_+$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \varphi(a^*) &= \varphi(b - c - i \cdot d + i \cdot e) = \varphi(b) - \varphi(c) - i \cdot \varphi(d) + i \cdot \varphi(e) \\ &= \overline{\varphi(b) - \varphi(c) + i \cdot \varphi(d) - i \cdot \varphi(e)} = \overline{\varphi(a)} \end{aligned}$$

- (iii) Sei  $(e_\lambda)_\lambda$  eine approximative Eins. Dann gilt

$$|\varphi(a)|^2 = \lim_\lambda |\varphi(e_\lambda \cdot a)|^2 \stackrel{\text{C.S.}}{\leq} \lim_\lambda \varphi(e_\lambda^2) \cdot \varphi(a^*a) \stackrel{5.4}{\leq} \|\varphi\| \cdot \varphi(a^*a)$$

□

**5.4 Satz.** Sei  $A$  eine  $C^*$ -Algebra und  $\varphi \in A^*$  ein (beschränktes) Funktional. Dann sind äquivalent:

- (i)  $\varphi$  ist positiv.
- (ii)  $\|\varphi\| = \lim_\lambda \varphi(e_\lambda)$  für jede approximative Eins  $(e_\lambda)_\lambda$  in  $A$ .
- (iii)  $\|\varphi\| = \lim_\lambda \varphi(e_\lambda)$  für eine approximative Eins  $(e_\lambda)_\lambda$  in  $A$ .

Falls  $A$  unital ist, so ist  $\varphi$  genau dann positiv, wenn  $\varphi(1) = \|\varphi\|$  ist.

**BEWEIS:** Für die Implikation (i)⇒(ii) sei  $\varphi$  positiv und  $(e_\lambda)_\lambda$  eine approximative Eins. Dann ist  $(\varphi(e_\lambda))_\lambda \subset [0, \|\varphi\|]$  ein aufsteigendes Netz, da  $\varphi$  positiv und linear ist, also existiert der Limes und es gilt  $\lim_\lambda \varphi(e_\lambda) \leq \|\varphi\|$ . Sei  $a \in A^1$ . Dann gilt

$$|\varphi(a)|^2 \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} |\varphi(e_\lambda a)|^2 \stackrel{\text{C.S.}}{\leq} \varphi(e_\lambda^2) \cdot \varphi(a^* a) \stackrel{e_\lambda^2 \leq e_\lambda}{\leq} \varphi(e_\lambda) \cdot \varphi(a^* a) \leq \lim_\lambda \varphi(e_\lambda) \cdot \|\varphi\|$$

Damit folgt  $\|\varphi\|^2 \leq \lim_\lambda \varphi(e_\lambda) \cdot \|\varphi\| \leq \|\varphi\|^2$ , also  $\|\varphi\| = \lim_\lambda \varphi(e_\lambda)$ .

Die Implikation (ii)⇒(iii) ist trivial. Für (iii)⇒(i) sei  $(e_\lambda)_\lambda$  die approximative Eins mit  $\|\varphi\| = \lim_\lambda \varphi(e_\lambda)$ . Behauptung:  $\varphi(A_{sa}) \subset \mathbb{R}$ . Sei  $a \in A_{sa}^1$  mit  $\varphi(a) = \alpha + i \cdot \beta$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Wir dürfen  $\beta \leq 0$  annehmen (betrachte sonst  $a^*$ ). Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \|a - i \cdot n \cdot e_\lambda\|^2 &= \|(a + i \cdot n \cdot e_\lambda)(a - i \cdot n \cdot e_\lambda)\| = \|a^2 + n^2 \cdot e_\lambda^2 + i \cdot n \cdot (e_\lambda a - a e_\lambda)\| \\ &\leq 1 + n^2 + n \cdot \|e_\lambda a - a e_\lambda\| \end{aligned}$$

Erweitern mit  $\|\varphi\|^2$  liefert

$$\begin{array}{ccc} |\varphi(a - i \cdot n \cdot e_\lambda)|^2 & \leq & \|\varphi\|^2 (1 + n^2 + n \cdot \|e_\lambda a - a e_\lambda\|) \\ \downarrow \lambda & & \downarrow \lambda \\ |\varphi(a) - i \cdot n \cdot \|\varphi\|^2| & & \|\varphi\|^2 (1 + n^2) \\ = |\alpha + i \cdot \beta - i \cdot n \cdot \|\varphi\|^2| & & \\ = \alpha^2 + \beta^2 - 2 \cdot n \cdot \|\varphi\| \cdot \beta + n^2 \|\varphi\|^2 & & \end{array}$$

Wir erhalten

$$-2 \cdot n \cdot \|\varphi\| \cdot \beta \leq \|\varphi\|^2 - \alpha^2 - \beta^2$$

Damit folgt  $\|\varphi\| = 0$  oder  $\beta \geq 0$ . Insgesamt also in jedem Fall  $\varphi(A_{sa}) \subset \mathbb{R}$ . Sei  $a \in A_+^1$ . Dann gilt  $e_\lambda - a \in A_{sa}$  und  $\|e_\lambda - a\| \leq 1$  (denn  $-\mathbb{1}_{A^-} \leq e_\lambda - a \leq \mathbb{1}_{A^-}$ ). Also ist  $\varphi(e_\lambda - a) \leq |\varphi(e_\lambda - a)| \leq \|\varphi\| \cdot \|e_\lambda - a\| \leq \|\varphi\|$ . Dann gilt aber

$$\|\varphi\| - \varphi(a) = \lim_\lambda \varphi(e_\lambda) - \varphi(a) = \lim_\lambda \varphi(e_\lambda - a) \leq \|\varphi\|$$

Also ist  $\varphi(a) \geq 0$  und wir sind fertig. □

**5.5 Satz.** Sei  $A$  eine  $C^*$ -Algebra und  $0 \neq a \in A$  normal. Dann existiert ein Zustand  $\varphi$  auf  $A$  mit  $\|a\| = |\varphi(a)|$ .

**BEWEIS:** Die  $C^*$ -Algebra  $B := C^*(a, \mathbb{1}) \subset A^\sim$  ist abelsch, da  $a$  normal ist. Insbesondere existiert ein Charakter  $\varphi_2$  auf  $B$  mit  $|\varphi_2(a)| = \|a\|$ . Nach Hahn-Banach können wir  $\varphi_2$  stetig und linear zu  $\varphi_1$  auf  $A^\sim$  fortsetzen mit  $\|\varphi_1\| = \|\varphi_2\| = 1$ . Weiter gilt  $\varphi_1(\mathbb{1}) = \varphi_2(\mathbb{1}) = 1$  und damit ist  $\varphi_1$  ein stetiges lineares Funktional auf  $A^\sim$  mit

$$\|\varphi_1\| = \|\varphi_2\| \stackrel{5.4}{=} \varphi_2(\mathbb{1}) = \varphi_1(\mathbb{1})$$

Mit Satz 5.4 folgt dann auch, dass  $\varphi_1$  positiv ist.  $\varphi := \varphi_1|_A$  ist also positiv mit  $\|a\| = |\varphi(a)|$  wie gewünscht. Weiter ist  $\|\varphi\| \leq \|\varphi_1\| \leq 1$  und außerdem

$$\|a\| = |\varphi(a)| \leq \|\varphi\| \cdot \|a\| \Rightarrow \|\varphi\| \geq 1$$

Also ist  $\varphi$  auch ein Zustand. □

**5.6 Proposition.** Sei  $\varphi$  ein positives stetiges Funktional auf  $A$ .

- (i) Für alle  $a \in A$  gilt  $\varphi(a^*a) = 0 \iff \varphi(ba) = 0$  für alle  $b \in A$ .
- (ii) Für alle  $a, b \in A$  gilt:  $\varphi(b^*a^*ab) \leq \|a^*a\| \varphi(b^*b)$ .

**BEWEIS:**

- (i) Die nicht triviale Implikation folgt mit Cauchy-Schwarz.
- (ii) Benutze  $b^*a^*ab \leq b^*(\|a^*a\| \cdot \mathbb{1}_{A^-})b = \|a^*a\| \cdot b^*b$ . □

**5.7 Satz.** Sei  $B \subset A$  eine  $C^*$ -Unteralgebra und  $\varphi$  ein positives Funktional auf  $B$ . Dann besitzt  $\varphi$  eine positive Fortsetzung  $\bar{\varphi}$  auf  $A$  mit  $\|\bar{\varphi}\| = \|\varphi\|$ .

**BEWEIS:** Definiere  $\varphi^+ : B^+ \rightarrow \mathbb{C}$  durch  $\varphi^+((b, \mu)) := \varphi(b) + \mu \cdot \|\varphi\|$ . Für  $(b, \mu) \in B^+$  erhalten wir vgl. 2.7 für  $B^+$

$$\begin{aligned} |\varphi^+((b, \mu))| &= |\varphi(b) + \mu \cdot \|\varphi\|| = \left| \lim_{\lambda} \varphi(b e_{\lambda}) + \mu \cdot \lim_{\lambda} \varphi(e_{\lambda}) \right| = \left| \lim_{\lambda} \varphi((b + \mu \cdot \mathbb{1}_{B^+}) e_{\lambda}) \right| \\ &\leq \|\varphi\| \cdot \|b + \mu \cdot \mathbb{1}_{B^+}\|_{B^+} \\ &= \|\varphi\| \cdot \|(b, \mu)\| \end{aligned}$$

wobei  $(e_{\lambda})_{\lambda}$  eine approximative Eins für  $B$  ist. Damit ist  $\|\varphi^+\| \leq \|\varphi\|$  ( $\leq \|\varphi^+\|$ ) und es folgt  $\|\varphi^+\| = \|\varphi\| = \varphi^+(\mathbb{1}_{B^+})$  nach Definition von  $\varphi^+$ . Mit Satz 5.4 folgt, dass  $\varphi^+$  positiv ist.

Die Einbettung  $\iota : B \hookrightarrow A \hookrightarrow A^-$  setzt sich zu einem unitalen  $*$ -Homomorphismus  $\iota^+ : B^+ \rightarrow A^-$  fort mittels

$$(\iota^+(b, \mu)) := \iota(b) + \mu \cdot \mathbb{1}_{A^-}$$

Definiere nun  $\hat{\varphi} : \iota^+(B^+) \rightarrow \mathbb{C}$  durch  $\hat{\varphi}(\iota^+(b, \mu)) := \varphi^+(b, \mu)$ . Dies ist wohldefiniert, denn nur der Fall  $B \ni \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_A \in A$  ist zu überprüfen. Dann ist  $\hat{\varphi}$  positiv, denn  $\varphi^+$  ist positiv und  $(\iota^+(B^+))_+ = \iota^+(B^+)$  (warum?). Nach Hahn-Banach existiert eine stetige lineare Fortsetzung  $\hat{\varphi} : A^- \rightarrow \mathbb{C}$  von  $\hat{\varphi}$  mit  $\|\hat{\varphi}\| = \|\varphi\| = \hat{\varphi}(\mathbb{1}_{A^-}) = \hat{\varphi}(\mathbb{1}_{A^-})$  und es folgt wieder mit Satz 5.4, dass  $\hat{\varphi}$  positiv ist. Dann ist  $\bar{\varphi} := \hat{\varphi}|_A$  die gesuchte positive Fortsetzung. □

**5.8 Satz.** Sei  $B \subset_{\text{her}} A$  eine hereditäre  $C^*$ -Unteralgebra und  $\varphi$  ein positives Funktional auf  $B$ . Dann besitzt  $\varphi$  eine *eindeutige* positive lineare Fortsetzung  $\bar{\varphi}$  auf  $A$  mit  $\|\bar{\varphi}\| = \|\varphi\|$ . Falls  $(e_{\lambda})_{\lambda} \subset B$  eine approximative Eins für  $B$  ist, so gilt  $\bar{\varphi}(a) = \lim_{\lambda} \varphi(e_{\lambda} a e_{\lambda})$  für  $a \in A$ .

**BEWEIS:** Eine positive Fortsetzung  $\bar{\varphi}$  existiert nach Satz 5.7. Sei nun  $\psi : A \rightarrow \mathbb{C}$  irgendeine positive lineare Fortsetzung von  $\varphi$  mit  $\|\psi\| = \|\varphi\|$ . Sei  $\psi^- : A^- \rightarrow \mathbb{C}$  eine (die) positive lineare Fortsetzung von  $\psi$  mit  $\|\psi\| = \|\psi^-\|$  nach Satz 5.7. Wir haben  $\lim_{\lambda} \varphi(e_{\lambda}) = \|\varphi\| = \|\psi^-\| = \psi^-(\mathbb{1}_{A^-})$ , also ist

$$\lim_{\lambda} \psi^-(\mathbb{1}_{A^-} - e_{\lambda}) = 0$$

Für  $a \in A$  ergibt sich nun

$$\begin{aligned} |\psi(a) - \varphi(e_{\lambda} a e_{\lambda})| &\leq |\psi^-(a) - \psi^-(e_{\lambda} a)| + |\psi^-(e_{\lambda} a - e_{\lambda} a e_{\lambda})| \\ &= |\psi^-(\mathbb{1} - e_{\lambda})a| + |\psi^-(e_{\lambda} a(\mathbb{1} - e_{\lambda}))| \\ &\stackrel{\text{C.S.}}{\leq} \psi^-(\mathbb{1} - e_{\lambda})^2)^{1/2} \cdot \psi^-(a^* a)^{1/2} + \psi^-(a^* e_{\lambda}^2 a)^{1/2} \cdot \psi^-(\mathbb{1} - e_{\lambda})^2)^{1/2} \\ &\leq \underbrace{\psi^-(\mathbb{1} - e_{\lambda})^2)^{1/2}}_{\rightarrow 0} \cdot \psi^-(a^* a)^{1/2} + \psi^-(a^* e_{\lambda}^2 a)^{1/2} \cdot \underbrace{\psi^-(\mathbb{1} - e_{\lambda})^2)^{1/2}}_{\rightarrow 0} \end{aligned}$$

Damit folgt  $\psi(a) = \lim_{\lambda} \varphi(e_{\lambda} a e_{\lambda})$  und die Eindeutigkeit. □

### 5.9 Beispiel.

- (i) Folgende Abbildung ist ein Zustand aber kein Charakter, da das Integral nicht multiplikativ ist Positivität mit Bemerkung 3.2:

$$\begin{aligned} C([0, 1]) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ f &\longmapsto \int f \, d\lambda \end{aligned}$$

- (ii) Die normalisierte Spurabbildung

$$\begin{aligned} M_n &\longrightarrow \mathbb{C} \\ X &\longmapsto \operatorname{tr} X \end{aligned}$$

bezeichnet man als *Spurzustand*, was allgemein ein Zustand  $\tau: A \rightarrow \mathbb{C}$  ist mit  $\tau(a^*a) = \tau(aa^*)$  für alle  $a \in A$ .

- (iii) Sei  $A_0 \rightarrow A_1 \rightarrow \dots \rightarrow A = \varinjlim A_i$  ein unitales induktives System von  $C^*$ -Algebren. Falls jedes  $A_i$  einen Spurzustand  $\tau_i$  besitzt, so auch  $A$ : Wir haben

$$A \hookrightarrow \prod_{\mathbb{N}} A_i / \bigoplus_{\mathbb{N}} (A_i)$$

Für  $a = [(a_i)_{\mathbb{N}}] \in A \subset \prod_{\mathbb{N}} A_i / \bigoplus_{\mathbb{N}} (A_i)$  definieren wir  $\tau(a) := \lim_{\omega} \tau_i(a_i)$ , wobei  $\omega \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$  ein freier Ultrafilter ist. Man verifiziert nun leicht, dass  $\tau$  wohldefiniert, unital, positiv und linear ist und außerdem die Spurbedingung erfüllt.

Alternativ kann man auch wie folgt vorgehen: Betrachte folgendes Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} (a_i)_{\mathbb{N}} & \longmapsto & (\tau_i(a_i))_{\mathbb{N}} & & \\ & & \downarrow & & \\ \prod_{\mathbb{N}} A_i & \longrightarrow & \ell^\infty(\mathbb{N}) & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ A \hookrightarrow \prod_{\mathbb{N}} A_i / \bigoplus_{\mathbb{N}} (A_i) & \longrightarrow & \ell^\infty(\mathbb{N}) / c_0(\mathbb{N}) & \xrightarrow{\chi} & \mathbb{C} \end{array}$$

Die Menge rechts unten ist eine abelsche, unitale  $C^*$ -Algebra. Wähle einen Charakter  $\chi$ . Man sieht auch, dass die freien Ultrafilter in 1-zu-1-Zusammenhang zu  $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$  stehen.

**5.10 Definition.** Sei  $A$  eine  $C^*$ -Algebra. Eine *Darstellung* von  $A$  ist ein Paar  $(\mathcal{H}, \pi)$ , wobei  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum ist und  $\pi$  ein  $*$ -Homomorphismus  $A \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ .

- $(\mathcal{H}, \pi)$  heißt *treu*, falls  $\pi$  injektiv ist.
- $(\mathcal{H}, \pi, \xi)$  heißt *zyklisch*, falls  $(\mathcal{H}, \pi)$  eine Darstellung ist und  $\xi \in \mathcal{H}$  ein Vektor mit  $\overline{\pi(A)\xi} = \mathcal{H}$ .
- $(\mathcal{H}, \pi)$  heißt *algebraisch irreduzibel*, falls gilt: Für einen beliebigen Untervektorraum  $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$  mit  $\pi(A)\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}_0$  ist  $\mathcal{H}_0 = \{0\}$  oder  $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}$ .
- $(\mathcal{H}, \pi)$  heißt *(topologisch) irreduzibel*, falls gilt: Für einen abgeschlossenen Untervektorraum  $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$  mit  $\pi(A)\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}_0$  ist  $\mathcal{H}_0 = \{0\}$  oder  $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}$ .
- $(\mathcal{H}, \pi)$  heißt *nicht degeneriert*, falls  $\overline{\pi(A)\mathcal{H}} = \mathcal{H}$ . Äquivalent:  $\pi(A)\xi = \{0\} \Rightarrow \xi = 0$ .

**5.11 Satz (GNS-KONSTRUKTION).** Sei  $A$  eine  $C^*$ -Algebra und  $\varphi: A \rightarrow \mathbb{C}$  ein positives Funktional. Wir setzen

$$N_\varphi := \{a \in A \mid \varphi(a^*a) = 0\} \stackrel{5.6(i)}{=} \{a \in A \mid \varphi(ba) = 0 \text{ für alle } b \in A\}$$

Dann ist  $N_\varphi \subset A$  ein abgeschlossenes Linksideal. Definiere eine Abbildung

$$\begin{aligned} A/N_\varphi \times A/N_\varphi &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (a + N_\varphi, b + N_\varphi) &\longmapsto \langle a + N_\varphi, b + N_\varphi \rangle := \varphi(a^*b) \end{aligned}$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$  ist dann ein wohldefiniertes Skalarprodukt auf  $A/N_\varphi$ : Für die Wohldefiniertheit seien  $a + N_\varphi = c + N_\varphi$  und  $b + N_\varphi = d + N_\varphi$ . Dann gilt  $a - c \in N_\varphi$  und  $b - d \in N_\varphi$ . Damit folgt dann

$$\begin{aligned} |\varphi(a^*b) - \varphi(c^*d)| &\leq |\varphi(a^*b) - \varphi(c^*b)| + |\varphi(c^*b) - \varphi(c^*d)| = |\varphi((a^* - c^*)b)| + |\varphi(c^*(b - d))| \\ &\stackrel{5.3}{=} |\overline{\varphi(b^*(a - c))}| + |\varphi(c^*(b - d))| \\ &= 0 \end{aligned}$$

Dass  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  sesquilinear ist, ist klar. Die Antisymmetrie folgt mit  $\varphi(a^*b) = \overline{\varphi(b^*a)}$  (nach Satz 5.3). Die positive Definitheit rechnet man einfach wie folgt nach:

$$\langle a + N_\varphi, a + N_\varphi \rangle = 0 \iff \varphi(a^*a) = 0 \iff a \in N_\varphi \iff a + N_\varphi = N_\varphi = 0 \in A/N_\varphi$$

Insgesamt ist  $A/N_\varphi$  also ein Prä-Hilbertraum mit  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Sei  $\mathcal{H}_\varphi := \overline{A/N_\varphi}^{\langle \cdot, \cdot \rangle}$  der Hilbertraumvervollständigung und definiere  $\tilde{\pi}: A \rightarrow \mathcal{B}(A/N_\varphi)$  durch  $\tilde{\pi}(a)(b + N_\varphi) := ab + N_\varphi$  für  $a, b \in A$ . Dann ist  $\tilde{\pi}$  ein wohldefinierter kontraktiver Homomorphismus von Algebren: Da  $N_\varphi$  ein Linksideal ist, ist  $\tilde{\pi}(a)$  linear auf  $A/N_\varphi$ . Weiter ist  $\tilde{\pi}$  linear und multiplikativ als Abbildung  $A \rightarrow \mathcal{L}(A/N_\varphi)$ . Kontraktivität:

$$\begin{aligned} \|\tilde{\pi}(a)(b + N_\varphi)\|_{A/N_\varphi}^2 &= \langle ab + N_\varphi, ab + N_\varphi \rangle = \varphi(b^*a^*ab) \stackrel{5.6(ii)}{\leq} \|a\|_A^2 \cdot \varphi(b^*b) \\ &= \|a\|_A^2 \cdot \|b + N_\varphi\|_{A/N_\varphi}^2 \end{aligned}$$

Damit gilt  $\|\tilde{\pi}(a)(b + N_\varphi)\|_{A/N_\varphi} \leq \|a\|_A \cdot \|b + N_\varphi\|_{A/N_\varphi}$ , also  $\|\tilde{\pi}(a)\|_{\mathcal{B}(A/N_\varphi)} \leq \|a\|_A$ . Insgesamt ist  $\tilde{\pi}: A \rightarrow \mathcal{B}(A/N_\varphi)$  also ein kontraktiver Homomorphismus. Für jedes  $a \in A$  ist  $\|\tilde{\pi}(a)\|$  beschränkt durch  $\|a\|$ , daher besitzt  $\tilde{\pi}(a)$  eine eindeutig bestimmte Fortsetzung  $\pi_\varphi(a) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\varphi)$  mit  $\|\pi_\varphi(a)\| = \|\tilde{\pi}(a)\| \leq \|a\|$ . Wir zeigen nun, dass  $\pi_\varphi: A \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_\varphi)$  ein  $*$ -Homomorphismus und damit nach Korollar 2.11 kontraktiv ist. Dazu zeigen zunächst  $\tilde{\pi}(a^*) = \tilde{\pi}(a)^*$ . Für  $b + N_\varphi, c + N_\varphi \in A/N_\varphi$  gilt

$$\langle c + N_\varphi, \tilde{\pi}(a)b + N_\varphi \rangle = \varphi(c^*ab) = \varphi((a^*c)^*b) = \langle a^*c + N_\varphi, b + N_\varphi \rangle = \langle \tilde{\pi}(a^*)c + N_\varphi, b + N_\varphi \rangle$$

Da  $\tilde{\pi}$  stetig fortgesetzt wird, gilt dann auch  $\pi_\varphi(a^*) = \pi_\varphi(a)^*$ .

$(\mathcal{H}_\varphi, \pi_\varphi)$  ist die **GNS-Darstellung**<sup>3</sup> von  $\varphi$ .  $(\mathcal{H}_\varphi, \pi_\varphi, \xi_\varphi)$  ist zyklisch mit  $\xi_\varphi = \lim_\lambda e_\lambda + N_\varphi$ , wobei  $(e_\lambda)_\lambda$  eine approximative Eins von  $A$  ist. *Übungsaufgabe 2 von Blatt 8, siehe Anhang A.1*

**5.12 Satz.** Jede  $C^*$ -Algebra  $A$  besitzt eine treue Darstellung, die **universelle Darstellung**. Falls  $A$  separabel ist, so existiert eine treue Darstellung auf einem separablen Hilbertraum.

**BEWEIS:** Wir definieren die universelle Darstellung  $(\mathcal{H}_u, \pi_u)$  durch

$$\mathcal{H}_u := \bigoplus_{\varphi \in S(A)} \mathcal{H}_\varphi = \left\{ (\eta_\varphi)_{\varphi \in S(A)} \mid \eta_\varphi \in \mathcal{H}_\varphi, \sum_\varphi \langle \eta_\varphi, \eta_\varphi \rangle < \infty \right\}$$

<sup>3</sup> nach GELFAND, NAIMARK, SEGAL

und  $\pi_u: A \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_u)$  mit  $\pi_u(a)((\eta_\varphi)_\varphi) := (\pi_\varphi(a)\eta_\varphi)_\varphi$  für  $a \in A$ . Sei  $0 \neq a \in A^1$ . Dann existiert nach Satz 5.5 ein  $\overline{\varphi} \in S(A)$  mit  $\overline{\varphi}(a^*a) = \|a^*a\| = \|a\|^2$ . Es gilt nun

$$\begin{aligned} \|a\|^2 = \overline{\varphi}(a^*a) &\stackrel{A.1}{=} \langle \pi_{\overline{\varphi}}(a^*a)\xi_{\overline{\varphi}}, \xi_{\overline{\varphi}} \rangle \stackrel{C.S.}{\leq} \|\pi_{\overline{\varphi}}(a^*a)\| \cdot \|\xi_{\overline{\varphi}}\|_{\mathcal{H}_{\overline{\varphi}}}^2 = \|\pi_{\overline{\varphi}}(a^*a)\| \cdot \langle \xi_{\overline{\varphi}}, \xi_{\overline{\varphi}} \rangle \\ &= \|\pi_{\overline{\varphi}}(a^*a)\| \cdot \overline{\varphi}(\lim_\lambda e_\lambda^2) \\ &\stackrel{5.4}{=} \|\pi_{\overline{\varphi}}(a)\|^2 \cdot \underbrace{\|\overline{\varphi}\|}_{=1} \end{aligned}$$

Da  $\pi_\varphi$  nach Korollar 2.11 kontraktiv ist, folgt also  $\|\pi_\varphi(a)\| = \|a\|$ . Damit erhalten wir weiter  $\|a\| = \|\pi_\varphi(a)\| \leq \|\pi_u(a)\| \leq \|a\|$  und somit ist  $\pi_u$  als Isometrie treu. Falls  $A$  separabel ist, so wählen wir eine abzählbare dichte Teilmenge  $\{a_0, a_1, \dots\} \subset A^1$  und Zustände  $\varphi_0, \varphi_1, \dots \in S(A)$  mit  $\varphi_i(a_i^*a_i) = \|a_i^*a_i\| = \|a_i\|^2$ . Für  $a \in A^1$  existiert dann ein  $i \in \mathbb{N}$  mit  $\varphi_i(a_i^*a_i) \geq \frac{1}{2}\|a\|^2$ . Dann ist

$$\|\pi_{\varphi_i}(a)\| \geq \|\pi_{\varphi_i}(a)\xi_{\varphi_i}\|_{\mathcal{H}_{\varphi_i}} = \varphi_i(a^*a)^{1/2} \geq 1/\sqrt{2} \cdot \|a\|$$

Wir definieren  $\mathcal{H}_{\text{sep}} := \bigoplus_{\mathbb{N}} \mathcal{H}_{\varphi_i}$  und  $\pi_{\text{sep}}: A \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\text{sep}})$  durch  $\pi_{\text{sep}}(a)((\eta_i)_{i \in \mathbb{N}}) := (\pi_{\varphi_i}(a)(\eta_i))_{i \in \mathbb{N}}$ . Mit obiger Ungleichung folgt  $\|\pi_{\text{sep}}(a)\| \geq 1/\sqrt{2}\|a\| \geq 0$  und damit ist  $\pi_{\text{sep}}$  treu, denn nur für  $a = 0$  kann dann  $\pi_{\text{sep}}(a) = 0$  gelten.  $\square$

**5.13 Korollar.** Sei  $A$  eine  $C^*$ -Algebra und  $n \geq 1$  eine natürliche Zahl. Dann ist  $M_n(A)$  eine  $C^*$ -Algebra mit Operationen

$$(a_{ij})_{ij} \cdot (b_{ij})_{ij} = \left( \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right)_{ij} \quad \text{und} \quad (a_{ij})_{ij}^* = (a_{ji}^*)_{ij}$$

Wegen Korollar 2.12 ist die  $C^*$ -Norm auf  $M_n(A)$  eindeutig bestimmt.

**BEWEIS:** Wir müssen eine geeignete Norm auf  $M_n(A)$  definieren. Sei dazu  $(\mathcal{H}_u, \pi_u)$  die universelle Darstellung von  $A$ . Definiere

$$\begin{aligned} \pi_u^{(n)}: M_n(A) &\longrightarrow M_n(\mathcal{B}(\mathcal{H}_u)) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_u^{\oplus n}) \\ (a_{ij})_{ij} &\longmapsto (\pi_u(a_{ij}))_{ij} \longmapsto \pi_u^{(n)}((a_{ij})_{ij}) \end{aligned}$$

wobei analog zur Matrix-Vektor-Multiplikation gilt

$$\pi_u^{(n)}((a_{ij})_{ij}) \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \left( \sum_j \pi_u(a_{ij})\xi_j \right)_{i=1, \dots, n}$$

Damit ist  $\pi_u^{(n)}$  ein  $*$ -Homomorphismus;  $\pi_u^{(n)}$  ist injektiv, da  $\pi_u$  injektiv ist. Nun definiert

$$\|(a_{ij})_{ij}\|_{M_n(A)} := \|\pi_u^{(n)}((a_{ij})_{ij})\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_u^{\oplus n})}$$

eine  $*$ -Algebra Norm, welche die  $C^*$ -Bedingung erfüllt. Weiter gilt für  $i, j = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} \|a_{ij}\|_A = \|\pi_u(a_{ij})\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_u)} &\leq \|\pi_u^{(n)}((a_{kl})_{kl})\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_u^{\oplus n})} = \|(a_{kl})_{kl}\|_{M_n(A)} \leq \sum_{k,l} \|\pi_u(a_{kl})\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_u)} \\ &= \sum_{k,l} \|a_{kl}\|_A \end{aligned}$$

Mit der Vollständigkeit von  $A$  folgt, dass  $M_n(A)$  vollständig ist bezüglich  $\|\cdot\|_{M_n(A)}$ .  $\square$

Hat jemand mal  
Lust das alles nach-  
zurechnen und mir  
zu schicken? ☺

**5.14 Korollar.** Sie  $A$  eine  $C^*$ -Algebra und  $a \in A$ . Dann gilt

- (i)  $a \in A_{sa}$  genau dann, wenn  $\varphi(a) \in \mathbb{R}$  für jeden Zustand  $\varphi \in S(A)$ .
- (ii)  $a \in A_+$  genau dann, wenn  $\varphi(a) \geq 0$  ist für jeden Zustand  $\varphi \in S(A)$ .

**BEWEIS:**

- (i) Die erste Implikation folgt mit Satz 5.3 (ii). Für die umgekehrte Implikation betrachte das Element  $i(a - a^*) \in A_{sa}$ . Dann gilt für  $\varphi \in S(A)$

$$\varphi(i \cdot (a - a^*)) = i(\varphi(a) - \varphi(a^*)) = i \cdot (\varphi(a) - \overline{\varphi(a)}) = 0$$

Da  $\varphi$  beliebig war folgt mit Satz 5.5  $i \cdot (a - a^*) = 0$  und damit  $a = a^*$ .

- (ii) Hier ist die erste Implikation trivial. Für die umgekehrte Implikation sei  $(\mathcal{H}_u, \pi_u)$  die universelle Darstellung von  $A$  und  $a \in A$ , sodass  $a$  unter jedem Zustand auf eine positive Zahl abgebildet wird. Für einen Vektor  $\xi \in \mathcal{H}_u$  ist  $\varphi_\xi: A \rightarrow \mathbb{C}, b \mapsto \langle \xi, \pi_u(b)\xi \rangle$  ein positives Funktional, wie man sich leicht anhand Satz 5.4 überlegt. Also ist  $\langle \xi, \pi_u(a)\xi \rangle = \varphi_\xi(a) \geq 0$  für  $\xi \in \mathcal{H}_u$ . Sei  $\lambda < 0$  und  $\xi \in \mathcal{H}_u$ . Dann gilt, da  $a$  nach (i) selbstadjungiert ist

$$\begin{aligned} \|(\pi_u(a) - \lambda)\xi\|_{\mathcal{H}_u}^2 &= \langle (\pi_u(a) - \lambda)\xi, (\pi_u(a) - \lambda)\xi \rangle \\ &= \|\pi_u(a)\xi\|^2 + |\lambda|^2 \cdot \|\xi\|^2 - \underbrace{2 \cdot \lambda \cdot \langle \xi, \pi_u(a)\xi \rangle}_{\geq 0} \geq |\lambda|^2 \cdot \|\xi\|^2 \end{aligned}$$

Damit folgt  $\ker(\pi_u(a) - \lambda) = \{0\}$  und  $(\pi_u(a) - \lambda)(\mathcal{H}_u) \subset \mathcal{H}_u$  ist abgeschlossen. Also ist

$$\text{im}(\pi_u(a) - \lambda) = (\ker(\pi_u(a) - \lambda)^*)^\perp \stackrel{a^*=a}{=} (\ker(\pi_u(a) - \lambda))^\perp = \mathcal{H}_u$$

und folglich ist  $\pi_u(a) - \lambda$  surjektiv und somit auch invertierbar. Damit ist  $\lambda$  also kein Element des Spektrums von  $\pi_u(a)$ . Da  $\pi_u$  isometrisch ist, ist  $\lambda$  auch kein Element von  $\sigma(a)$  und es folgt  $a \geq 0$  wie gewünscht.  $\square$

**5.15 Beispiel.** Sei  $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N})$  mit der Standard-Orthonormalbasis  $(\eta_i)_{i \in \mathbb{N}}$ . Definiere den unilateralen Shift  $v \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  durch  $v(\eta_i) := \eta_{i+1}$ . Dann ist  $v^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  gegeben durch

$$v^*(\eta_i) = \begin{cases} \eta_{i-1} & \text{falls } i \geq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Es gilt  $v^*v = \mathbb{1}_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} (= \text{id})$  und

$$\mathbb{1} - vv^* = p_{\eta_0} = e_{00} \in \mathcal{K} = \mathcal{K}(\ell^2(\mathbb{N}))$$

Wir definieren nun die *Toeplitz-Algebra*  $\mathcal{T}$  durch

$$\mathcal{T} := C^*(v) \subset \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$$

Weiter sei  $J := \langle \mathbb{1} - vv^* \rangle \triangleleft \mathcal{T}$  das von  $\mathbb{1} - vv^*$  in  $\mathcal{T}$  erzeugte (abgeschlossene zweiseitige) Ideal. Wir zeigen, dass  $J = \mathcal{K}$  ist: Offensichtlich ist  $J \subset \mathcal{K}$ , denn  $\mathbb{1} - vv^* \in \mathcal{K}$ . Für die Matrixeinheiten  $e_{ij} \in \mathcal{K}$  gilt  $e_{ij} = v^i(\mathbb{1} - vv^*)(v^*)^j \in J$  wie man leicht auf Basiselementen nachrechnet. Damit ist

$$e_{ij}(\eta_k) = \delta_{jk}\eta_i$$

$$\mathcal{K} \stackrel{\text{F.A.}}{\underset{\text{Blatt 14}}{=}} \overline{\text{span}\{e_{ij}\}} \subset J$$

Für die Quotientenabbildung  $\pi: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}/I$  gilt  $\mathcal{T}/I = C^*(\pi(v))$  und  $\pi(1 - vv^*) = 0$ , also ist

$$\pi(v)^* \pi(v) = 1_{\mathcal{T}/I} = \pi(v) \pi(v^*)$$

und damit ist  $\pi(v) \in \mathcal{T}/I$  unitär. Man zeigt mit dem Fredholmindex  $\sigma(\pi(v)) = \mathbb{T}$  und erhält einen Isomorphismus  $\mathcal{T}/I \cong C(\mathbb{T})$ . Wir haben nun eine kurze exakte Sequenz von  $C^*$ -Algebren

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \hookrightarrow \mathcal{T} \twoheadrightarrow C(\mathbb{T}) \longrightarrow 0$$

Für jede unitale  $C^*$ -Algebra  $A$  mit einer Isometrie  $w$ , das heißt  $w^*w = 1$ , existiert ein  $*$ -Homomorphismus  $\varphi: \mathcal{T} \rightarrow A$  mit  $\varphi(v) = w$ , dies besagt der *Satz von Coburn*.

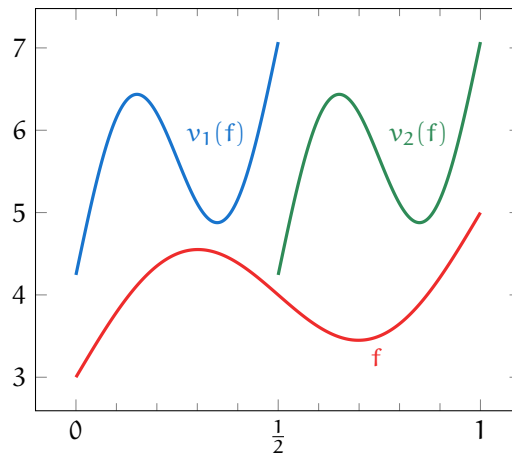
**5.16 Beispiel.** Sei  $\mathcal{H} = L^2([0, 1])$ . Definiere  $v_1, v_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  durch

$$v_1(f)(t) := \begin{cases} \sqrt{2} \cdot f(2t) & \text{falls } t \in [0, 1/2] \\ 0 & \text{falls } t \in (1/2, 1] \end{cases} \quad \text{und} \quad v_2(f)(t) := \begin{cases} \sqrt{2} \cdot f(2t - 1) & \text{falls } t \in [1/2, 1] \\ 0 & \text{falls } t \in [0, 1/2] \end{cases}$$

Wie man sich leicht überlegt, ist  $v_i^*v_i = 1$  und  $v_1v_1^* + v_2v_2^* = 1$ . Die von  $v_1$  und  $v_2$  erzeugte  $C^*$ -Algebra

$$\mathcal{O}_2 := C^*(v_1, v_2) \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

ist eine *Cuntz-Algebra*. Ähnlich lassen sich  $\mathcal{O}_n$  und  $\mathcal{O}_\infty$  definieren.  $\mathcal{O}_2$  besitzt keinen Spurzustand und ist einfach (d.h. es gibt keine nichttrivialen abgeschlossenen zweiseitigen Ideale). Ist nun  $A$  eine beliebige unitale  $C^*$ -Algebra mit  $s_1, s_2 \in A$ , sodass  $s_1^*s_1 = s_2^*s_2 = 1 = s_1s_1^* + s_2s_2^*$ . Dann existiert ein  $*$ -Homomorphismus  $\pi: \mathcal{O}_2 \rightarrow A$  mit  $\pi(v_i) = s_i$  für  $i = 1, 2$ .



**Abbildung 2:** Wirkung von  $v_1$  und  $v_2$  in der Cuntz-Algebra  $\mathcal{O}_2$  über  $\mathcal{H} = L^2([0, 1])$



## 6. Von-Neumann-Algebren und der Bikommutantensatz

**6.1 Erinnerung.** Die *starke Operatortopologie*  $\mathcal{T}_{s.o.}$  auf  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  ist die lokalkonvexe Topologie, welche von den Halbnormen  $p_\xi: \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto \|x\xi\|_{\mathcal{H}}$  für  $\xi \in \mathcal{H}$  erzeugt wird. Das heißt  $\mathcal{T}_{s.o.}$  ist die grösste Topologie, sodass Addition, skalare Multiplikation und alle Halbnormen  $p_\xi$  stetig sind. „Typische“ offene Mengen sind der Form

$$U_{x,\xi,\varepsilon} := \{y \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mid \|(x-y)\xi\| < \varepsilon\}$$

wobei  $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ,  $\xi \in \mathcal{H}$  und  $\varepsilon > 0$ . Die  $U_{x,\xi,\varepsilon}$  bilden eine Subbasis für  $\mathcal{T}_{s.o.}$ . Für ein Netz  $(x_\lambda)_\lambda \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$  und  $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  gilt

$$\begin{aligned} x_\lambda \xrightarrow{s.o.} x &\iff \|(x_\lambda - x)\xi\|_{\mathcal{H}} \longrightarrow 0 \quad \text{für jedes } \xi \in \mathcal{H} \\ &\iff x_\lambda \xi \longrightarrow x\xi \quad \text{für jedes } \xi \in \mathcal{H} \end{aligned}$$

Damit ist  $\mathcal{T}_{s.o.}$  die Topologie der punktweisen Konvergenz

$\mathcal{T}_{s.o.}$  ist schwächer als  $\mathcal{T}_{\|\cdot\|}$ , das heißt  $(\mathcal{B}(\mathcal{H}), \mathcal{T}_{\|\cdot\|}) \xrightarrow{\text{id}} (\mathcal{B}(\mathcal{H}), \mathcal{T}_{s.o.})$  ist stetig. Äquivalent dazu: Wenn  $A \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$  s.o.-abgeschlossen ist, so ist  $A$  auch  $\|\cdot\|$ -abgeschlossen. Alternativ: Wenn  $x_\lambda \rightarrow x$  in der Normtopologie, dann auch in der starken Operatortopologie.

Die Norm  $\|\cdot\|$ , die Multiplikation und Involution sind nicht stetig bezüglich der starken Operatortopologie: Sei dazu  $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N})$  mit Standardorthonormalbasis  $(\eta_k)_{\mathbb{N}}$  und Matrixeinheiten  $e_{ij}$ . Dann gilt  $e_{0,n} \xrightarrow{s.o.} 0$  aber weder  $1 = \|e_{0,n}\|$  noch  $e_{0,n}^* = e_{n,0}$  konvergieren gegen 0 für  $n \rightarrow \infty$ . Dass die Multiplikation nicht stetig ist, ist etwas subtiler (Übungsaufgabe 5 von Blatt 9).

$$e_{ij}\eta_k = \delta_{jk} \cdot \eta_i$$

**6.2 Satz.** Sei  $(x_\lambda)_\lambda \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})_{sa}$  ein monotonen und beschränktes Netz selbstadjungierter Operatoren. Dann existiert ein  $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  mit

$$x_\lambda \xrightarrow{s.o.} x$$

Falls  $(x_\lambda)_\lambda$  ein aufsteigendes Netz von orthogonalen Projektionen ist, so ist  $x$  die (orthogonale) Projektion auf  $\overline{\bigcup_\lambda x_\lambda \mathcal{H}}$ . Falls  $(x_\lambda)_\lambda$  ein absteigendes Netz aus Projektionen ist, so ist  $x$  die Projektion auf  $\bigcap_\lambda \overline{x_\lambda \mathcal{H}}$ .

**BEWEIS:** Der erste Teil wurde schon in Funktionalanalysis Satz 7.32 bewiesen. Hier noch einmal kurz die Idee: Mittels Polarisierung und der Monotonie sieht man, dass  $\langle x_\lambda \xi, \cdot \rangle \in \mathcal{H}^* \cong \mathcal{H}$  schwach gegen ein  $\eta := x\xi$  konvergiert. Also

$$x_\lambda \xrightarrow{w.o.} x$$

da  $\langle \eta, x_\lambda \xi \rangle \rightarrow \langle \eta, x\xi \rangle$  für  $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ . Mit Beschränktheit folgt dann  $x_\lambda \xrightarrow{s.o.} x$ . In dem Fall, dass die  $x_\lambda$  Projektionen sind, folgt  $x^2 = x$  mittels

$$\langle \eta, x\xi \rangle = \lim_\lambda \langle \eta, x_\lambda \xi \rangle = \lim_\lambda \langle x_\lambda \eta, x_\lambda \xi \rangle = \langle x\eta, x\xi \rangle = \langle \eta, x^* x\xi \rangle$$

Also ist  $x = x^* x = x^2$ . Der Rest ist Übungsaufgabe 4 von Blatt 9, siehe Anhang A.2 □

**6.3 Bemerkung.** In Funktionalanalysis hatten wir  $0 \leq x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  definiert als  $\langle \xi, x\xi \rangle \geq 0$  für alle  $\xi \in \mathcal{H}$  (und  $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_{sa}$ ). Dies ist äquivalent zu  $0 \leq x$  in unserem Sinne: Ist  $x$  positiv in unserem Sinne, so haben wir  $x = y^* y$  und es folgt

$$\langle \xi, x\xi \rangle = \langle \xi, y^* y\xi \rangle = \langle y\xi, y\xi \rangle \geq 0$$

für  $\xi \in \mathcal{H}$ . Die Gegenrichtung zeigt man wie im Beweis von Korollar 5.14.

**6.4 Definition.** Eine *von-Neumann-Algebra* auf dem Hilbertraum  $\mathcal{H}$  ist eine in der starken Operator-topologie abgeschlossene \*-Unteralgebra von  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ .

**6.5 Definition & Proposition.** Sei  $B$  eine Algebra und  $S \subset B$  eine Teilmenge.

$$S' := \{b \in B \mid bs = sb, s \in S\}$$

heißt *Kommutante* von  $S$  in  $B$ .  $S'' := (S')'$  heißt *Bikommutante*. Sowohl  $S'$  als auch  $S''$  sind Unter-algebren. Falls  $B$  eine \*-Algebra und  $S = S^*$  ist, so sind  $S'$  und  $S''$  auch \*-Unteralgebren. Falls  $A \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$  eine \*-Unteralgebra ist, so ist  $A' \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$  eine von-Neumann-Algebra.

**BEWEIS:** Wir zeigen nun, dass  $A'$  abgeschlossen ist in der starken Operator-topologie. Sei dazu  $(x_\lambda) \subset A'$  ein Netz mit  $x_\lambda \xrightarrow{s.o.} x$ ,  $a \in A$  beliebig sowie  $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ . Dann gilt

$$\langle \eta, ax\xi \rangle = \langle \eta, a \lim_\lambda x_\lambda \xi \rangle = \lim_\lambda \langle \eta, ax_\lambda \xi \rangle = \lim_\lambda \langle \eta, x_\lambda a\xi \rangle = \langle \eta, xa\xi \rangle$$

Also ist  $ax = xa$ . Alle weiteren Behauptungen sind trivial.  $\square$

**6.6 Lemma.** Sei  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum und  $1_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \in A \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$  eine unitale \*-Unteralgebra. Dann ist  $A$  s.o.-dicht in der Bikommutante  $A''$ .

**BEWEIS:** Sei  $x \in A''$ . Zu zeigen: Jede s.o.-offene Umgebung  $U$  von  $x$  mit  $x \in U = \bigcap_{i=1}^n U_{x, \xi_i, \varepsilon}$  für  $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathcal{H}$  besitzt nichtleeren Schnitt mit  $A$ . Die Abbildung

$$\begin{aligned} \pi^{(n)}: \mathcal{B}(\mathcal{H}) &\longrightarrow M_n(\mathcal{B}(\mathcal{H})) \cong \mathcal{B}(\mathcal{H}^{\oplus n}) \\ y &\longmapsto \begin{pmatrix} y & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ist ein \*-Homomorphismus und  $\pi^{(n)}(A) \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}^{\oplus n})$  ist \*-Unteralgebra von  $\mathcal{B}(\mathcal{H}^{\oplus n})$  mit  $1_{\mathcal{B}(\mathcal{H}^{\oplus n})} \in \pi^{(n)}(A)$ . Wir zeigen, dass  $\pi^{(n)}(x) \in \pi^{(n)}(A)''$  ist: Sei dafür  $y \in \pi^{(n)}(A)'$  und  $a \in A$ . Dann gilt

$$e_{ij}(\eta_k) = \delta_{jk}\eta_i \quad \pi^{(n)}(a) e_{ii} y e_{jj} = e_{ii} \pi^{(n)}(a) y e_{jj} = e_{ii} y \pi^{(n)}(a) e_{jj} = \underbrace{e_{ii} y e_{jj}}_{=y_{ij} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})} \pi^{(n)}(a)$$

Dann ist  $y_{ij} a = a y_{ij}$  für  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  und es folgt  $y_{ij} \in A'$ , also  $y_{ij} x = x y_{ij}$  für  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ . Damit folgt dann aber auch  $\pi^{(n)}(x) y = y \pi^{(n)}(x)$  und somit die Zwischenbehauptung. Sei nun

$$\underline{\xi} := \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \in \mathcal{H}^{\oplus n} \quad \text{und} \quad K := \overline{\pi^{(n)}(A) \underline{\xi}} \subset \mathcal{H}^{\oplus n}$$

Dann ist  $K$  ein abgeschlossener Unterraum und  $\pi^{(n)}(A)$ -invariant. Da  $\pi^{(n)}(A) = \pi^{(n)}(A)^*$  ist, ist  $K$  *reduzierend* für jedes  $\pi^{(n)}(a) \in \pi^{(n)}(A)$ , das heißt

- ▶  $\pi^{(n)}(a)K \subset K$  und  $\pi^{(n)}(a)^*K \subset K$  bzw.
- ▶  $\pi^{(n)}(a)K \subset K$  und  $\pi^{(n)}(a)(K^\perp) \subset K^\perp$  bzw.
- ▶  $p_K \pi^{(n)}(a) = \pi^{(n)}(a) p_K$  wobei  $p_K: \mathcal{H}^{\oplus n} \rightarrow K$  die orthogonale Projektion ist.

Damit ist  $p_K$  in der Kommutante  $\pi^{(n)}(A)'$  und somit auch  $\pi^{(n)}(x) p_K = p_K \pi^{(n)}(x)$ . Insgesamt gilt

$$\pi^{(n)}(x) \underline{\xi} = \pi^{(n)}(x) \underbrace{p_K \underline{\xi}}_{=\underline{\xi}} = p_K \pi^{(n)}(x) \underline{\xi} \in K$$

Also existiert eine Folge  $(a_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset A$ , so dass  $\pi^{(n)}(x)\xi = \lim_{m \rightarrow \infty} \pi^{(n)}(a_m)\xi$ . Dieser Ausdruck hat folgende Gestalt

$$\begin{pmatrix} x\xi_1 \\ \vdots \\ x\xi_n \end{pmatrix} = \lim_{m \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} a_m \xi_1 \\ \vdots \\ a_m \xi_n \end{pmatrix} = \lim_{m \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} a_m & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

Also gilt  $a_m \xi_j \xrightarrow{m \rightarrow \infty} x\xi_j$  für  $j = 1, \dots, n$  und damit  $\|a_m \xi_j - x\xi_j\| < \varepsilon$  für  $m$  groß genug. Damit ist  $a_m \in U_{x, \xi_j, \varepsilon}$  für  $m$  groß genug und  $j = 1, \dots, n$ . Dies war zu zeigen.  $\square$

**6.7 Korollar** (VON NEUMANN'S BIKOMMUTANTENSATZ). Sei  $A \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$  eine unitale \*-Unteralgebra mit  $\mathbb{1}_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \in A$ . Dann ist  $A$  eine von-Neumann-Algebra genau dann, wenn  $A = A''$  ist.

**BEWEIS:** Für die erste Implikation ist  $A = \overline{A}^{\text{s.o.}}$ , also  $A = A''$  nach Lemma 6.6 Für die Rückrichtung beachte, dass  $A''$  eine s.o.-abgeschlossene \*-Unteralgebra ist nach Proposition 6.5.  $\square$

**6.8 Proposition.** Jede von-Neumann-Algebra  $\{0\} \neq A \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$  besitzt ein Einselement.

**BEWEIS:** Sei  $(e_\lambda)_\lambda \subset A$  eine approximative Eins für  $A$ . Dann gilt  $e_\lambda \xrightarrow{\text{s.o.}} e$  für ein  $e \in A_{\text{sa}}$  nach Satz 6.2. Für  $\xi \in \mathcal{H}$  und  $a \in A$  gilt

$$(ea)(\xi) = e(a\xi) = (\text{s.o.}\text{-}\lim_\lambda e_\lambda)(a\xi) = (\text{s.o.}\text{-}\lim_\lambda (e_\lambda a))(\xi) = (\|\cdot\|\text{-}\lim_\lambda (e_\lambda a))(\xi) = a(\xi)$$

Damit ist  $ea = a$  für alle  $a$  und damit auch  $e a^* = a^*$ . Also ist  $a e = a$  und  $e$  somit ein Einselement.  $\square$

**6.9 Proposition.** Sei  $A \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$  eine von-Neumann-Algebra mit Einselement  $e$ . Dann ist  $A$  aufgefasst als Unteralgebra  $A_e$  von  $\mathcal{B}(e\mathcal{H})$  eine unitale von-Neumann-Algebra ( $\mathbb{1}_{A_e} = \mathbb{1}_{\mathcal{B}(e\mathcal{H})}$ ) und es gilt  $A_e = (A_e)''$ .

Revision 6

**BEWEIS:** Es gilt  $e = e^2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_{\text{sa}}$ , das heißt  $e$  ist eine orthogonale Projektion. Weiter ist  $e\mathcal{H} \subset \mathcal{H}$  abgeschlossen, denn  $e\xi_\lambda \rightarrow \xi \in \mathcal{H}$  impliziert

$$(\mathbb{1}_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} - e)\xi = (\mathbb{1}_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} - e)\left(\lim_\lambda e\xi_\lambda\right) = \lim_\lambda ((\mathbb{1}_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} - e)e\xi_\lambda) = 0$$

Damit folgt, dass  $e\mathcal{H} \subset \mathcal{H}$  ein Unterhilbertraum ist. Wir haben

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(e\mathcal{H}) &\xhookrightarrow{\iota} \mathcal{B}(\mathcal{H}) \xrightarrow{\kappa} \mathcal{B}(e\mathcal{H}) \\ x &\longmapsto e \cdot x|_{e\mathcal{H}} \end{aligned}$$

$\kappa$  ist \*-linear und kontraktiv, aber nicht multiplikativ

Dabei gilt  $\kappa \circ \iota = \text{id}_{\mathcal{B}(e\mathcal{H})}$  und  $\kappa|_A: A \rightarrow \kappa(A) =: A_e$  ist ein \*-Isomorphismus. Wir müssen noch zeigen, dass  $A_e \subset \mathcal{B}(e\mathcal{H})$  s.o.-abgeschlossen ist: Sei dazu  $(x_\lambda)_\lambda \subset A_e$  ein Netz mit  $x_\lambda \xrightarrow{\text{s.o.}} x \in \mathcal{B}(e\mathcal{H})$ . Für  $\xi \in \mathcal{H}$  gilt dann

$$\iota(x_\lambda)(\xi) = \iota(x_\lambda)(e\xi + (\mathbb{1} - e)\xi) = \iota(x_\lambda)(e\xi) \longrightarrow \iota(x)(e\xi) = \iota(x)(e\xi + (\mathbb{1} - e)\xi) = \iota(x)(\xi)$$

Also gilt  $\iota(x_\lambda) \xrightarrow{\text{s.o.}} \iota(x)$  und damit  $\iota(x) \in A$ , da  $(\iota(x_\lambda)) \subset A$ . Damit folgt weiter  $x = \kappa \circ \iota(x) \in A_e$  und  $\mathbb{1}_{\mathcal{B}(e\mathcal{H})} = \kappa(e) \in A_e$ . Mit Korollar 6.7 folgt  $A_e = (A_e)''$ .  $\square$

**6.10 Definition & Proposition.** Sei  $A \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$  eine von-Neumann-Algebra und  $x \in A$ . Wir definieren die **Bildprojektion**  $[x]$  als orthogonale Projektion auf  $\overline{\text{im } x} = \overline{x\mathcal{H}} \subset \mathcal{H}$ . Es gilt

$$[x] = [xx^*] \in A$$

**BEWEIS:** Da  $x^*\xi = 0 \Rightarrow xx^*\xi = 0 \Rightarrow \langle \xi, xx^*\xi \rangle = 0 \Rightarrow x^*\xi = 0$  gilt, folgt

$$\overline{\text{im } x} = (\ker x^*)^\perp = (\ker(xx^*))^\perp = \overline{\text{im } xx^*}$$

Damit ist  $[x] = [xx^*]$ . Die Folge  $((1/n \cdot \mathbb{1} + xx^*)^{-1}xx^*)_{n \in \mathbb{N}} \subset A_+^1$  ist monoton aufsteigend und beschränkt nach Funktionalkalkül, konvergiert also nach Satz 6.2 stark gegen ein  $e \in A_{\text{sa}}$ . Für  $\xi \in \mathcal{H}$  gilt

$$\begin{aligned} \text{exx}^*\xi &= \lim_n (1/n \cdot \mathbb{1} + xx^*)^{-1}xx^*xx^*\xi = \lim_n (1/n \cdot \mathbb{1} + xx^*)^{-1}xx^*(1/n \cdot \mathbb{1} + xx^*)\xi \\ &= \lim_n xx^*\xi = xx^*\xi \end{aligned}$$

Also ist  $\text{exx}^* = xx^*$  und damit auch  $xx^*e = (\text{exx}^*)^* = (xx^*)^* = xx^*$ . Weiter ist dann  $e[xx^*] = [xx^*] = [xx^*]e$ . Andererseits gilt für  $\xi \in \mathcal{H}$

$$e\xi = \lim_n (1/n \cdot \mathbb{1} + xx^*)^{-1}xx^*\xi \in \overline{\text{im } xx^*} = [xx^*]\mathcal{H}$$

Damit ist  $[xx^*]e\xi = e\xi$ , also  $[xx^*]e = e = e$  und weiter  $[xx^*] = e$ . Insgesamt ist  $[xx^*] = e \in A$ .  $\square$

**6.11 Satz (POLARZERLEGUNG).** Sei  $A \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$  eine von-Neumann-Algebra und  $x \in A$ . Dann existiert genau eine partielle Isometrie  $u \in A$  mit  $u^*u = [x]$  und  $x = u \cdot |x|$ , wobei  $|x| = (x^*x)^{1/2}$ .

**BEWEIS:** Setze  $u_n := x(1/n \cdot \mathbb{1} + |x|)^{-1} \in A^{1,4}$ . Nach Proposition 6.10 ist  $[|x|] = [x^*x] = [x^*]$  und  $[x^*]x^* = x^*$ , also folgt  $x = x[x^*] = x[|x|]$ . Wegen  $|x| = [|x|]|x| = |x|[|x|]$  erhalten wir  $u_n[|x|] = u_n$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Weiter gilt  $u_n|x| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$  in Norm, denn

$$\|x - u_n|x|\| \leq \underbrace{\|x - u_n(1/n \cdot \mathbb{1} + |x|)\|}_{=0} + \underbrace{\|u_n(1/n \cdot \mathbb{1} + |x|) - u_n|x|\|}_{=\|u_n \cdot 1/n \cdot |x|\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0}$$

Wegen  $x^*x = |x|^2$  haben wir für  $n, m \in \mathbb{N}$

$$(u_n^* - u_m^*)(u_n - u_m) = \left( (1/n \cdot \mathbb{1} + |x|)^{-1} - (1/m \cdot \mathbb{1} + |x|)^{-1} \right)^2 |x|^2$$

Für  $\xi \in |x|^2\mathcal{H}$  sehen wir genau wie in Proposition 6.10, dass

$$(u_n^* - u_m^*)(u_n - u_m)\xi \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$$

Wegen der Beschränktheit der  $(u_n^* - u_m^*)(u_n - u_m)$  gilt dies auch für  $\xi \in \overline{|x|^2\mathcal{H}} = \overline{|x|\mathcal{H}}$ . Für  $\xi \in \overline{|x|\mathcal{H}}^\perp$  gilt  $(u_n^* - u_m^*)(u_n - u_m)\xi = 0$ , also insgesamt

$$(u_n^* - u_m^*)(u_n - u_m)\xi \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$$

für beliebiges  $\xi \in \mathcal{H}$ . Es folgt  $\|(u_n - u_m)\xi\| \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$  für  $\xi \in \mathcal{H}$  und damit ist  $(u_n\xi)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $\mathcal{H}$ , also konvergent.  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist s.o.-konvergent, das heißt es existiert ein  $u \in A$  mit  $u = \text{s.o.-lim}_n u_n$ . Wegen

$$u\xi = \lim_n u_n\xi = \lim_n u_n[|x|]\xi = (\text{s.o.-lim}_n u_n)[|x|]\xi = u[|x|]\xi$$

<sup>4</sup> Benutze für die Normabschätzung  $u_n^*u_n \leq 1$

für  $\xi \in \mathcal{H}$  gilt  $u = u|[\xi]$ . Außerdem habe wir für  $\xi \in \mathcal{H}$

$$(u|[\xi] - x)\xi = \lim_n (u_n|[\xi] - x)\xi = 0$$

Also ist  $u|[\xi] = x$ . Für  $\xi, \eta \in \mathcal{H}$  gilt

$$\langle [\xi]|\eta, [\xi]|\xi \rangle = \langle \eta, x^*x\xi \rangle = \langle \eta, [\xi]u^*u|[\xi] \rangle = \langle \eta, [\xi]u^*u|[\xi] \rangle = \langle [\xi]|\eta, [\xi]u^*u|[\xi] \rangle$$

Mit Stetigkeit folgt  $\langle [\xi]|\eta, [\xi]|\xi \rangle = \langle \eta, [\xi]u^*u|[\xi] \rangle$  für alle  $\eta, \xi \in \mathcal{H}$ . Damit folgt  $[\xi] = [\xi]u^*u|[\xi]$ . Wegen  $u = u|[\xi]$  gilt weiter  $[\xi] = u^*u$ , insbesondere ist  $u$  eine partielle Isometrie. Falls  $v \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  die Gleichungen  $x = v|[\xi]$  und  $v^*v = [\xi]$  erfüllt, so gilt wegen  $v|[\xi] = x = u|[\xi]$  auch

$$v = v|[\xi] = u|[\xi] = u$$

wobei man die Gleichung wieder zunächst auf  $\overline{[\xi]|\mathcal{H}}$  nachrechnet.  $\square$

**6.12 Proposition.** Sei  $A \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$  eine von-Neumann-Algebra und  $x \in A$  normal. Für jede offene Menge  $U \subset \sigma(x)$  existiert eine eindeutig bestimmte Projektion  $e \in A \cap \{x\}'$  mit

$$e = \text{s.o.-lim } e_\lambda(x)$$

wobei  $(e_\lambda)_\lambda$  (irgend)eine aufsteigende approximative Eins für  $C_0(U)$  ist. Wir schreiben auch  $\chi_U(x)$  für  $e$ . Es gilt  $ef(x) = f(x)e = f(x)$  für alle  $f \in C_0(U)$ . Für eine weitere offene Menge  $V \subset \sigma(x)$  gilt

$$\chi_U(x) \cdot \chi_V(x) = \chi_{U \cap V}(x) \quad \text{sowie} \quad \chi_U(x) + \chi_V(x) - \chi_{U \cap V}(x) = \chi_{U \cup V}(x)$$

Für  $W \subset \sigma(x)$  abgeschlossen schreiben wir auch  $\chi_W(x) := \mathbb{1}_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} - \chi_{\sigma(x) \setminus W}(x)$ .

**BEWEIS:** Für eine beliebige aufsteigende approximative Eins  $(e_\lambda)_\lambda \subset C_0(U)$  existiert der starke Limes  $e := \text{s.o.-lim } e_\lambda(x)$  nach Satz 6.2. Wir im Beweis von Proposition 6.8 zeigt man, dass für  $f \in C_0(U)$  und alle  $\xi \in \mathcal{H}$  gilt

$$ef(x)\xi = f(x)\xi \implies ef(x) = f(x), f(x)e = f(x)$$

Sei  $(h_\gamma)_\gamma$  eine weitere aufsteigende approximative Eins für  $C_0(U)$  und  $h := \text{s.o.-lim } h_\gamma(x)$ . Dann gilt

$$eh\xi = \lim_\lambda \left( e_\lambda(x) \left( \lim_\gamma h_\gamma(x)\xi \right) \right) = \lim_\lambda \left( \lim_\gamma e_\lambda h_\gamma(x)(\xi) \right) = \lim_\lambda (e_\lambda(x)(\xi)) = e\xi$$

Es folgt  $eh = e = he$  und genauso  $he = h = eh$ , also  $h = e$  und damit die Eindeutigkeit. Rest ähnlich.  $\square$

**6.13 Korollar.** Sei  $A \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$  eine von-Neumann-Algebra.

(i)  $A$  hat reellen Rang 0, das heißt  $A_{\text{sa}} = \overline{\{\xi a \in A_{\text{sa}} \mid \sigma(a) \text{ ist endlich}\}}$ .

(ii) Für die unitäre Gruppe gilt  $\mathcal{U}(A) = \overline{\{e^{i\pi h} \mid h \in A_{\text{sa}}^1\}}$ .

**BEWEIS:**

(i) Sei  $a \in A_{\text{sa}}$ . Ohne Einschränkungen sei  $\sigma(a) \subset [0, 1]$  (Warum?). Für  $N \in \mathbb{N}$  definieren wir eine Zerlegung der Eins von  $[0, 1]$  wie folgt:



$1/N, 2/N, 3/N, \dots$  und dann Hüte über zwei Segmente

Es gilt

$$\begin{aligned} a = \text{id}_{[0,1]}(a) &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} f_i(a) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} \sum_{j=i}^N f_j(a) \geq \underbrace{\sum_{i=1}^N \frac{1}{N} \cdot \chi_{[1/N, 1]}(a)}_{\text{hat endliches Spektrum}} \geq \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} \cdot \sum_{j=i+1}^N f_j(a) \\ &\geq \text{id}_{[0,1]}(a) - \frac{1}{N} \cdot \mathbb{1} \end{aligned}$$

- (ii) Die Abbildung  $(-1, 1] \rightarrow \mathbb{T}$ ,  $t \mapsto e^{i\pi t}$  ist bijektiv und stetig; die Umkehrfunktion  $f$  ist steig auf  $\mathbb{T} \setminus \{-1\}$ . Sei nun  $u \in A$  unitär. Falls  $-1 \notin \sigma(u) \subset \mathbb{T}$ , so ist  $h = f(u) \in A_{\text{sa}}^1$  und  $u = e^{i\pi h}$ .

Falls  $-1$  im Spektrum von  $u$  enthalten ist, so betrachten wir eine offene Umgebung  $V \subset \mathbb{T}$  von  $-1$ . Dann ist  $p := \chi_{V \cap \sigma(u)}(u)$  eine Projektion in  $A \cap \{u\}'$  nach Proposition 6.12. Für diese ist dann  $u(\mathbb{1} - p) \in B := (\mathbb{1} - p)A(\mathbb{1} - p)$  unitär. Es gilt  $-1 \notin \sigma_B(u(\mathbb{1} - p))$ , denn für  $f \in C_0(V)$  gilt  $f(u(\mathbb{1} - p)) = f(u)(\mathbb{1} - p) = 0$  und damit folgt  $\sigma_B(u(\mathbb{1} - p)) \subset \mathbb{T} \setminus V$ . Wir im ersten Teil gilt dann

$$u(\mathbb{1} - p) = e^{i\pi h_0} \in B$$

für ein  $h_0 \in B_{\text{sa}}^1$ . Ähnlich wie in (i) sieht man, dass  $\|u(\mathbb{1} - p) + (-1)p - u\| \leq \text{diam } V$ . Weiter gilt, da  $h_0$  und  $p$  orthogonal zueinander sind

$$u(\mathbb{1} - p) + ((-1)p) = e^{i\pi(h_0 + p)}$$

□

#### 6.14 Bemerkung.

- a) Aus (i) folgt insbesondere, dass  $A = \overline{\text{span}\{p \in A \text{ Projektion}\}}$ .
- b) Die Gleichung in (i) gilt entsprechend auch für normale Elemente.
- c) Mit dem Borel-Funktionalkalkül, Satz 6.15, folgt, dass die Gleichung in (ii) auch ohne Normabschluss gilt.

**6.15 Satz** (BOREL FUNKTIONALKALKÜL). Sei  $A \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$  eine von-Neumann-Algebra und  $a \in A$  normal. Dann existiert ein  $*$ -Homomorphismus

$$\begin{aligned} \mathbb{B}_b(\sigma(x)) &\longrightarrow W^*(x) \subset A \\ f &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

welcher den Gelfandhomomorphismus  $C(\sigma(x)) \rightarrow C^*(x)$  fortsetzt. Für eine aufsteigende beschränkte Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{B}_b(\sigma(x))_{\text{sa}}$  mit punktwisem Limes  $f = \lim_n f_n$  gilt

$$f(x) = \text{s.o.-}\lim f_n(x)$$

$f$  mit Polynomen approximieren

beschränkte Borel-Funktionen bilden  $C^*$ -Algebra mit  $\|\cdot\|_\infty$ ;  $W^*(x)$  erzeugt von-Neumann-Algebra

**Beweis (Skizze):** Für  $\xi, \eta \in \mathcal{H}$  können wir mit Hilfe von  $\mu_{\xi, \eta}(U) := \langle \xi, \chi_U(x)(\eta) \rangle$  für  $U$  offen bzw. abgeschlossen ein Integral auf Treppenfunktionen definieren. Hieraus erhält man ein Integral  $\Phi_{\xi, \eta}$  auf  $\mathbb{B}_b(\sigma(x))$ :

- ▶ entweder mit  $L^1$ -Approximation wie in Analysis III.
- ▶ oder als Regelintegral zunächst für stetige Funktionen, also  $C(\sigma(x))$ , dann für  $\mathbb{B}_b(\sigma(x))$  mit dem Rieszschen Darstellungssatz.

Damit hat man nun  $\Phi_{\xi, \eta}: \mathbb{B}_b(\sigma(x)) \rightarrow \mathbb{C}$  linear und stetig. Für  $f \in \mathbb{B}_b(\sigma(x))$  und  $\eta \in \mathcal{H}$  definiert  $\xi \mapsto \Phi_{\xi, \eta}(f) \in \mathbb{C}$  ein konjugiert lineare stetiges Funktional  $\varphi_{f, \eta}$  auf  $\mathcal{H}$ . Mittels  $\langle \xi, \cdot \rangle$  lässt sich dann schließen, dass man  $\varphi_{f, \eta}$  als Element von  $\mathcal{H}$  auffassen kann, d.h.  $\varphi_{f, \eta}(\xi) = \langle \xi, \varphi_{f, \eta} \rangle$ . Die Abbildung  $\eta \mapsto \varphi_{f, \eta}$  ist linear und stetig, definiert also einen Operator  $f(x) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ . Auf Vektoren in  $\mathcal{H}$  rechnet man nach, dass  $f \mapsto f(x)$  ein isometrischer  $*$ -Homomorphismus  $\mathbb{B}_b(\sigma(x)) \rightarrow \mathcal{B}\mathcal{H}$  ist und  $f(x) \in A'' = \overline{A}^{\text{s.o.}}$  (Bikommutantensatz). Weiter gilt  $\text{id}_{\sigma(x)} \mapsto x$  und daher setzt das Borel-Funktionalkalkül den Gelfandhomomorphismus fort.  $\square$

**6.16 Erinnerung.** Die *schwache Operatortopologie*  $\mathcal{T}_{\text{w.o.}}$  auf  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  ist die lokalkonvexe Topologie, welche von

$$p_{\eta, \xi}(x) := |\langle \eta, x\xi \rangle|$$

für  $\eta, \xi \in \mathcal{H}$  erzeugt wird. Die Mengen  $U_{x, \eta, \xi, \varepsilon} := \{y \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mid |\langle \eta, (x - y)\xi \rangle| < \varepsilon\}$  bilden eine Subbasis von  $\mathcal{T}_{\text{w.o.}}$ . Die Abbildungen

$$(\mathcal{B}(\mathcal{H}), \mathcal{T}_{\|\cdot\|}) \xrightarrow{\text{id}} (\mathcal{B}(\mathcal{H}), \mathcal{T}_{\text{s.o.}}) \xrightarrow{\text{id}} (\mathcal{B}(\mathcal{H}), \mathcal{T}_{\text{w.o.}})$$

sind stetig, denn  $\|(x - y)\xi\| \leq \|x - y\| \cdot \|\xi\|$  und  $|\langle \eta, (x - y)\xi \rangle| \leq \|\eta\| - \|(x - y)\xi\|$ . Die Involution ist w.o.-stetig:

$$\begin{aligned} x_\lambda \xrightarrow{\text{w.o.}} x &\iff |\langle \eta, (x_\lambda - x)\xi \rangle| \rightarrow 0 \text{ für } \eta, \xi \in \mathcal{H} \\ &\iff |\langle (x_\lambda - x)^*\eta, \xi \rangle| \rightarrow 0 \text{ für } \eta, \xi \in \mathcal{H} \\ &\iff |\langle \xi, x_\lambda^* - x^*\eta \rangle| \rightarrow 0 \text{ für } \eta, \xi \in \mathcal{H} \\ &\iff x_\lambda^* \xrightarrow{\text{w.o.}} x^* \end{aligned}$$

Multiplikation ist nicht w.o.-stetig: Sei  $S$  der Shift. Dann gilt  $S^n, S^{*n} \xrightarrow{\text{w.o.}} 0$  aber  $S^{*n}S^n = \mathbb{1}$ .

**6.17 Satz.**  $\mathcal{B}(\mathcal{H})^1$  ist w.o.-kompakt.

**Beweis (Skizze):** Nehme  $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N})$  an und setze  $X = \overline{\text{span}\{e_{ij} \mid i, j = 1, 2, \dots\}}^{\|\cdot\|_1}$ .  $x \mapsto \text{Tr}(|x|)$  ist auf  $\text{span}(e_{ij})$  definiert und ist Norm.  $X$  ist ein abgeschlossenes Ideal in  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ .  $x \mapsto (y \mapsto \text{Tr}(xy))$  liefert eine Abbildung  $\mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow X^*$  (tatsächlich ein Isomorphismus). Sei  $\mathcal{T}_{\text{w}^*}$  die zurückgezogene Topologie auf  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ . Man überprüft:  $x_\lambda \xrightarrow{\text{w}^*} x \Rightarrow x_\lambda \xrightarrow{\text{w.o.}} x$  und damit ist

$$\text{id}: (\mathcal{B}(\mathcal{H}), \mathcal{T}_{\text{w}^*}) \longrightarrow (\mathcal{B}(\mathcal{H}), \mathcal{T}_{\text{w.o.}})$$

stetig. Aber  $\mathcal{B}(\mathcal{H})^1$  ist  $\text{w}^*$  kompakt nach Banach-Alaoglu. Damit ist  $\mathcal{B}(\mathcal{H})^1$  w.o.-kompakt und die Abbildung ist ein Homöomorphismus.  $\square$

**6.18 Satz.** Sei  $\mathbb{1}_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \in A \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$  eine  $*$ -Algebra. Dann gilt

$$(i) \quad \overline{A}^{\text{w.o.}} = A''$$

(ii)  $A$  ist eine von-Neumann-Algebra genau dann, wenn  $A = \overline{A}^{\text{w.o.}}$ .

**BEWEIS:** Zur ersten Aussage: Es gilt  $A'' \stackrel{6.6}{=} \overline{A}^{\text{s.o.}} \subset \overline{A}^{\text{w.o.}}$ . Sei nun  $(x_\lambda)_\lambda \subset A$  ein Netz mit  $x_\lambda \xrightarrow{\text{w.o.}} x$ . Falls  $y \in A'$ , so gilt für  $\eta, \xi \in \mathcal{H}$

$$\langle \eta, (xy)\xi \rangle = \lim_\lambda \langle \eta, x_\lambda y \xi \rangle = \lim_\lambda \langle \eta, y x_\lambda \xi \rangle = \lim_\lambda \langle y^* \eta, x_\lambda \xi \rangle = \langle y^* \eta, x \xi \rangle = \langle \eta, (yx)\xi \rangle$$

Es folgt  $xy = yx$  und somit ist  $x \in A''$ , also  $\overline{A}^{\text{w.o.}} \subseteq A''$ . Die zweite Aussage folgt aus (i) und dem Bikommutantensatz.  $\square$

Wir wollen uns nun noch ein bisschen mehr mit dem Zusammenspiel der verschiedenen Topologien beschäftigen. Für ein lineare Funktional  $\varphi$  auf  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  gilt:

$$\varphi \text{ w.o.-stetig} \implies \varphi \text{ s.o.-stetig} \implies \varphi \|\cdot\| \text{-stetig}$$

$$\begin{array}{ccccc} x_\lambda \xrightarrow{\text{w.o.}} x & \Longleftarrow & x_\lambda \xrightarrow{\text{s.o.}} x & \Longleftarrow & x_\lambda \xrightarrow{\|\cdot\|} x \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ \varphi(x_\lambda) \rightarrow \varphi(x) & \Longleftrightarrow & \varphi(x_\lambda) \rightarrow \varphi(x) & \Longleftrightarrow & \varphi(x_\lambda) \rightarrow \varphi(x) \end{array}$$

Die Umkehrung der zweiten Implikation gilt im Allgemeinen nicht. Wie wir jetzt sehen werden ist die erste aber tatsächlich eine Äquivalenz:

**6.19 Satz.** Für ein lineares Funktional  $\varphi$  auf  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  sind äquivalent:

- (i)  $\varphi$  ist w.o.-stetig.
- (ii)  $\varphi$  ist s.o.-stetig.
- (iii)  $\varphi(\cdot) = \sum_{i=1}^n \langle \eta_i, \cdot \xi_i \rangle$  für  $\eta_1, \xi_1, \dots, \eta_n, \xi_n \in \mathcal{H}$ .

**BEWEIS:** Die Implikation (i) $\Rightarrow$ (ii) haben wir bereits gesehen. (iii) $\Rightarrow$ (i) ist auch klar und wir müssen nur (ii)  $\Rightarrow$ (iii) zeigen: Sei  $\varphi$  s.o.-stetig. Die Menge  $S_\varphi := \{x \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mid |\varphi(x)| < 1\} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$  ist dann s.o.-offen. Dann existieren  $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathcal{H}$  und ein  $\alpha > 0$ , sodass

$$U_{0, \xi_i, \alpha} = \{y \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mid \|(y - 0)\xi_i\| < \alpha\} \subset S_\varphi$$

Das heißt für  $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  gilt: Falls  $\|x\xi_i\| < \alpha$  für  $i = 1, \dots, n$ , so ist  $|\varphi(x)| < 1$ . Nach Skalierung der  $\xi_i$  gilt für  $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ :  $\|x\xi_i\| < 1 \Rightarrow |\varphi(x)| < 1$ . Es folgt

$$|\varphi(x)| \leq \max_i \|x\xi_i\| \leq \left( \sum_{i=1}^n \|x\xi_i\|^2 \right)^{1/2}$$

Setze nun

$$\mathcal{H}_0 := \left\{ \begin{pmatrix} x\xi_1 \\ \vdots \\ x\xi_n \end{pmatrix} \mid x \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \right\} \subset \mathcal{H}^{\oplus n}$$



Dann ist  $\psi: \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathbb{C}, \begin{pmatrix} x\xi_1 \\ \vdots \\ x\xi_n \end{pmatrix} \mapsto \varphi(x)$  wohldefiniert, stetig und linear.  $\psi$  setzt sich also fort zu  $\bar{\psi}: \overline{\mathcal{H}_0} \rightarrow \mathbb{C}$ . Mit Riesz folgt die Existenz von  $\eta \in \overline{\mathcal{H}_0}$  mit  $\bar{\psi}(\cdot) = \langle \eta, \cdot \rangle$ , also

$$\varphi(x) = \bar{\psi} \begin{pmatrix} x\xi_1 \\ \vdots \\ x\xi_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \langle \eta, x\xi_i \rangle \quad \square$$

**6.20 Proposition.** Sei  $C \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$  konvex. Dann ist  $C$  s.o.-abgeschlossen genau dann, wenn  $C$  w.o.-abgeschlossen ist.

**BEWEIS (Idee):** Wenn  $C$  w.o.-abgeschlossen ist, dann ist  $C$  auch s.o.-abgeschlossen, da die schwache Topologie in der starken enthalten ist. Für die andere Implikation sei  $x \in \overline{C}^{w.o.}$ . Zu zeigen ist nun, dass  $x \in \overline{C}^{s.o.}$  ist. Es existiert ein Netz  $(x_\lambda)_\lambda \subset C$  mit  $x_\lambda \xrightarrow{w.o.} x$ . Für jedes w.o.-stetige Funktional  $\varphi$  auf  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  gilt  $\varphi(x_\lambda) \rightarrow \varphi(x)$ . Mit Satz 6.19 folgt, dass für jedes s.o.-stetige Funktional  $\varphi$  auf  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  auch  $\varphi(x_\lambda) \rightarrow \varphi(x)$  gilt. Falls  $x \notin \overline{C}^{s.o.}$ , so folgt mit dem Lemma von Zorn (bzw. mit Hahn-Banach für lokalkonvexe Räume), dass  $\bar{\varphi} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^*$  s.o.-stetig existiert mit  $\text{dist}(\bar{\varphi}(x), \bar{\varphi}(C)) > 0$ . Dies ist ein Widerspruch.  $\square$

**6.21 Proposition.** Die Involution ist s.o.-stetig auf  $\{x \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mid x \text{ normal}\}$ .

**BEWEIS:** Für  $x, y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  normal und  $\xi \in \mathcal{H}$  gilt

$$\begin{aligned} \|(x^* - y^*)\xi\|^2 &= \|x\xi\|^2 - \|y\xi\|^2 + 2\langle \xi, yy^*\xi \rangle - \langle \xi, xy^*\xi \rangle - \langle \xi, yx^*\xi \rangle \\ &= \|x\xi\|^2 - \|y\xi\|^2 + \langle \xi, (y - x)y^*\xi \rangle + \underbrace{\langle \xi, y(y^* - x^*)\xi \rangle}_{= \langle (y - x)y^*\xi, \xi \rangle} \\ &\leq \|x\xi\|^2 - \|y\xi\|^2 + 2 \cdot \|(y - x)y^*\xi\| \cdot \|\xi\| \end{aligned}$$

Falls nun  $x_\lambda \xrightarrow{s.o.} y$  in  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ , so gilt

$$\|(x_\lambda^* - y^*)\xi\| \leq \underbrace{\|x_\lambda\xi\|^2 - \|y\xi\|^2}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\|(y - x_\lambda)y^*\xi\| \cdot \|\xi\|}_{\rightarrow 0} \quad \square$$

**6.22 Definition.** Eine stetige Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  heißt **stark stetig**, falls für jeden Hilbertraum  $\mathcal{H}$  und jedes Netz  $(x_\lambda)_\lambda \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})_{sa}$  mit  $x_\lambda \xrightarrow{s.o.} x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_{sa}$  gilt  $f(x_\lambda) \xrightarrow{s.o.} f(x)$ .

**6.23 Proposition.** Jedes  $h \in C_b(\mathbb{R})$  ist stark stetig.

**BEWEIS:** Sei  $S := \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ stark stetig}\}$  und  $S_b := S \cap C_b(\mathbb{R})$ . Dann sind  $S$  und  $S_b$  Vektorräume. Wegen  $\|ab\xi - a_0b_0\xi\| \leq \|a\| \cdot \|(b - b_0)\xi\| + \|(a - a_0)b_0\xi\|$  haben wir für  $f \in S_b, g \in S$  und  $x_\lambda \xrightarrow{s.o.} x$  in  $\mathcal{B}(\mathcal{H})_{sa}$

$$\|f(x_\lambda)g(x_\lambda)\xi - f(x)g(x)\xi\| \leq \|f\|_\infty \cdot \|(g(x_\lambda) - g(x))\xi\| + \|(f(x_\lambda) - f(x))g(x)\xi\| \longrightarrow 0$$

Damit ist  $f \cdot g \in S$ , das heißt  $S_b \cdot S \subset S$  und  $S_b \cdot S_b \subset S_b$ . Weiter gilt:  $S_b$  ist selbstadjungiert, also  $S_b^* = S_b$  (nach Proposition 6.21, denn  $f(x)$  für  $x$  selbstadjungiert ist normal und  $f(x) \mapsto f(x)^*$  ist s.o.-stetig) und  $S_b$  ist  $\|\cdot\|_\infty$ -abgeschlossen. Insbesondere ist  $S_b \subset C_b(\mathbb{R})$  eine  $C^*$ -Unteralgebra. Ebenso  $S_b \cap C_0(\mathbb{R}) =: S_0 \subset C_0(\mathbb{R})$ . Die Funktionen  $t \mapsto f(t) := \frac{1}{1+t^2}$  und  $t \mapsto g(t) := \frac{t}{1+t^2}$  sind in  $C_0(\mathbb{R})$  mit  $\|f\|_\infty, \|g\|_\infty \leq 1$ . Behauptung:  $f$  und  $g$  sind in  $S_0$  enthalten.



Abbildung 3: Funktionen im Beweis von Satz 6.24

Für  $x, y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_{sa}$  gilt  $g(x) - g(y) = \dots = (1 + x^2)^{-1}(x - y + x(y - x)y)(1 + y^2)^{-1}$ . Für  $\xi \in \mathcal{H}$  gilt dann weiter

$$\|(g(x) - g(y))\xi\| \leq 1 \cdot \|(x - y)(1 + y^2)^{-1}\xi\| + 1 \cdot \|(y - x)y(1 + y^2)^{-1}\xi\|$$

Damit ist  $g \in S_0$ . Weiter ist  $(t \mapsto t) \in S$ , also  $(t \mapsto t \cdot g(t)) \in S$  und  $(t \mapsto 1 - t \cdot g(t)) = f \in S_0$ . Damit ist die Behauptung gezeigt.

Nach Stone-Weierstraß ist  $^* \text{Alg}(f, g) \subset C_0(\mathbb{R})$  dicht, denn diese Algebra trennt Punkte von  $\mathbb{R}$  und enthält eine strikt positive Funktion. Damit folgt  $S_0 = C_0(\mathbb{R})$ . Für  $h \in C_b(\mathbb{R})$  gilt  $hf, hg \in S_0 \subset S_b$  und dann ist auch  $(t \mapsto t \cdot h(t) \cdot g(t)) \in S$  und

$$(t \mapsto h(t) \cdot f(t) + t \cdot h(t) \cdot g(t) = h(t)) \in S_b \quad \square$$

**6.24 Satz** (KAPLANSKY'S DICHTESATZ). Sei  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum,  $A \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$  eine  $C^*$ -Algebra und  $B = \overline{A}^{s.o.} = \overline{A}^{w.o.}$  die von  $A$  in  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  erzeugte von-Neumann-Algebra. Dann gilt

- (i)  $\overline{A_{sa}}^{s.o.} = \overline{A_{sa}}^{w.o.} = B_{sa}$
- (ii)  $\overline{A_{sa}^1}^{s.o.} = \overline{A_{sa}^1}^{w.o.} = B_{sa}^1$
- (iii)  $\overline{A_+^1}^{s.o.} = \overline{A_+^1}^{w.o.} = B_+^1$
- (iv)  $\overline{A^1}^{s.o.} = \overline{A^1}^{w.o.} = B^1$
- (v)  $\overline{\mathcal{U}(A)}^{s.o.} = \mathcal{U}(B)$  falls  $\mathbb{1}_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \in A$

**BEWEIS:** Die starken und schwachen Abschlüsse stimmen überein nach Proposition 6.20.

- (i) Falls  $a \in B_{sa}$ , so existiert  $(a_\lambda)_\lambda \subset A$  mit  $a_\lambda \xrightarrow{w.o.} a$ . Dann gilt aber auch  $a_\lambda^* \xrightarrow{w.o.} a^* = a$  (nach Erinnerung 6.1) und damit

$$A_{sa} \ni \frac{1}{2}(a_\lambda + a_\lambda^*) \xrightarrow{w.o.} a$$

Also ist  $B_{sa} \subset \overline{A_{sa}}^{w.o.} \subset B_{sa}$

- (ii) Sei  $a \in B_{sa}^1$ . Nach (i) existiert ein Netz  $(a_\lambda)_\lambda \subset A_{sa}$  mit  $a_\lambda \xrightarrow{s.o.} a$ . Sei  $f \in C_b(\mathbb{R})$  gegeben durch Abbildung 3.  $f$  ist stark stetig nach Proposition 6.23. Also ist  $A_{sa}^1 \ni f(a_\lambda) \xrightarrow{s.o.} f(a) = a$  und damit  $a \in \overline{A_{sa}^1}^{s.o.}$ . Wir haben also  $B_{sa}^1 \subseteq \overline{A_{sa}^1}^{s.o.}$  gezeigt. Die andere Inklusion ist klar.

- (iii) Wie (ii) mit  $g$  anstatt  $f$ .

- (iv) Sei  $a \in B^1$ . Dann ist  $\begin{pmatrix} 0 & a \\ a^* & 0 \end{pmatrix} \in M_2(B)_{sa} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}^{\oplus 2})$ . Es gilt  $\overline{M_2(A)}^{s.o.} = M_2(B)$  und nach (iii) existiert  $(b_\lambda)_\lambda \subset M_2(A)_{sa}^1$  mit  $\begin{pmatrix} b_{\lambda,1,1} & b_{\lambda,1,2} \\ b_{\lambda,2,1} & b_{\lambda,2,2} \end{pmatrix} = b_\lambda \xrightarrow{s.o.} \begin{pmatrix} 0 & a \\ a^* & 0 \end{pmatrix}$ . Dann gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{\lambda,1,1} & b_{\lambda,1,2} \\ b_{\lambda,2,1} & b_{\lambda,2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b_{\lambda,1,2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also ist  $b_{\lambda,1,2} \in A^1$ , wir erhalten  $b_{\lambda,1,2} \xrightarrow{\text{s.o.}} a$  und damit  $a \in \overline{A^1}^{\text{s.o.}}$ . Wir haben somit die Inklusion  $B^1 \subseteq \overline{A^1}^{\text{s.o.}}$  gezeigt; die andere ist wieder klar.

- (v) Nach Korollar 6.13 (ii) gilt  $\mathcal{U}(B) = \overline{\{e^{i\pi h} \mid h \in B_{\text{sa}}^1\}}^{\|\cdot\|}$ . Zu  $u \in \mathcal{U}(B)$  und  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $h \in B_{\text{sa}}^1 = \overline{A_{\text{sa}}^1}^{\text{s.o.}}$  mit  $\|e^{i\pi h} - u\| < \varepsilon$ . Aber  $(t \mapsto e^{i\pi t}) \in C_b(\mathbb{R})$  ist stark stetig nach Proposition 6.23 und somit ist  $e^{i\pi h} \in \overline{\mathcal{U}(A)}^{\text{s.o.}}$ . Damit haben wir

$$\mathcal{U}(B) \subset \overline{\overline{\mathcal{U}(A)}^{\text{s.o.}}\|^{\|\cdot\|}} = \overline{\mathcal{U}(A)}^{\text{s.o.}}$$

Die umgekehrte Inklusion ist wieder klar. □

## 7. Reine Zustände und irreduzible Darstellungen

### Revision 7

**7.1 Proposition.** Sei  $A$  eine  $C^*$ -Algebra,  $\varphi \in S(A)$  ein Zustand und  $\rho \in A^*$  ein weiteres positives Funktional. Falls  $\varphi - \rho$  positiv ist, so existiert genau ein  $0 \leq h \leq 1 \in \pi_\varphi(A)' \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}_\varphi)$  mit

$$\rho(a) = \langle \xi_\varphi, \pi_\varphi(a) h \xi_\varphi \rangle$$

wo  $(\mathcal{H}_\varphi, \pi_\varphi, \xi_\varphi)$  die GNS-Darstellung zu  $\varphi$  ist.

**BEWEIS:** Wir erinnern uns an die GNS-Konstruktion:  $N_\varphi := \{a \in A \mid \varphi(a^*a) = 0\}$  und  $\mathcal{H}_\varphi = \overline{A/N_\varphi}^{\langle \cdot, \cdot \rangle}$  (vergleiche Satz 5.11). Definiere auf  $A/N_\varphi$  eine hermitesche Sesquilinearform  $\sigma$  durch

$$\sigma(a + N_\varphi, b + N_\varphi) := \rho(a^*b)$$

$\sigma$  ist wohldefiniert, da  $0 \leq \rho \leq \varphi$  ( $N_\varphi \subset N_\rho$ ). Es gilt für  $a, b \in A$

$$\sigma(a + N_\varphi, b + N_\varphi) = \rho(a^*b) \leq \rho(a^*a)^{1/2} \rho(b^*b)^{1/2} \leq \varphi(a^*a)^{1/2} \varphi(b^*b)^{1/2} = \|a + N_\varphi\| \cdot \|b + N_\varphi\|$$

Damit ist  $\|\sigma\| \leq 1$  und  $\sigma$  lässt sich stetig auf  $\mathcal{H}_\varphi$  fortsetzen. Für  $\xi \in \mathcal{H}_\varphi$  ist  $\eta \mapsto \sigma(\xi, \eta)$  eine stetige Linearform auf  $\mathcal{H}_\varphi$ . Nach Riesz existiert genau ein Vektor  $h\xi \in \mathcal{H}_\varphi$  mit  $\sigma(\xi, \eta) = \langle h\xi, \eta \rangle$ .  $\xi \mapsto h\xi$  ist linear und beschränkt. Also existiert genau ein  $h \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\varphi)$  mit  $h\xi = h\xi$ . Es gilt

$$\overline{\sigma(\xi, \xi)} = \sigma(\xi, \xi) = \langle h\xi, \xi \rangle \in \mathbb{R}$$

Damit ist  $h = h^*$  nach Polarisierung. Weiter gilt  $\|h\| \leq \|\sigma\| \leq 1$ . Für  $a \in A$  gilt

$$\langle a + N_\varphi, h(a + N_\varphi) \rangle = \sigma(a^*a) = \rho(a^*a) \geq 0$$

Also ist  $\langle \xi, h\xi \rangle \geq 0$  für  $\xi \in \mathcal{H}_\varphi$ , also ist  $h \geq 0$  (siehe Korollar 5.14) und damit  $0 \leq h \leq 1$ . Für  $a, b, c \in A$  gilt

$$\begin{aligned} \langle a + N_\varphi, \pi_\varphi(c)h(b + N_\varphi) \rangle &= \langle c^*a + N_\varphi, h(b + N_\varphi) \rangle = \rho(a^*cb) = \langle a + N_\varphi, h(cb + N_\varphi) \rangle \\ &= \langle a + N_\varphi, h\pi_\varphi(c)(b + N_\varphi) \rangle \end{aligned}$$

Damit ist  $\pi_\varphi(c)h = h\pi_\varphi(c)$ , also ist  $h \in \pi_\varphi(A)'$ . Sei nun  $(e_\lambda)_\lambda \subset A_+^1$  eine approximative Eins. Dann ist  $\xi_\varphi = \lim_\lambda e_\lambda + N_\varphi \in \mathcal{H}_\varphi$  und es gilt

$$\begin{aligned} \rho(a) &= \lim_{\lambda, \lambda'} \rho(e_\lambda a e_{\lambda'}) = \lim_{\lambda, \lambda'} \langle e_\lambda + N_\varphi, h(a e_{\lambda'} + N_\varphi) \rangle = \lim_{\lambda, \lambda'} \langle e_\lambda + N_\varphi, h\pi_\varphi(a)(e_{\lambda'} + N_\varphi) \rangle \\ &= \langle \xi_\varphi, h\pi_\varphi(a)\xi_\varphi \rangle \end{aligned}$$

Zur Eindeutigkeit: Sei  $d \in (\pi_\varphi(A)')_+^1$  mit  $\rho(a) = \langle \xi_\varphi, \pi_\varphi(a)d\xi_\varphi \rangle$  für alle  $a \in A$ . Dann gilt für  $a, b \in A$ , da  $\xi_\varphi$  zyklisch ist

$$\begin{aligned} \langle a + N_\varphi, d(b + N_\varphi) \rangle &= \langle \pi_\varphi(a)\xi_\varphi, d\pi_\varphi(b)\xi_\varphi \rangle = \langle \xi_\varphi, \pi_\varphi(a^*b)d\xi_\varphi \rangle = \rho(a^*b) \\ &= \langle a + N_\varphi, h(b + N_\varphi) \rangle \end{aligned}$$

Also ist  $d = h$ . □

**7.2 Satz.** Sei  $(\mathcal{H}, \pi)$  eine nicht degenerierte Darstellung einer  $C^*$ -Algebra  $A$ . Dann ist  $(\mathcal{H}, \pi)$  eine direkte Summe von zyklischer Darstellungen.

**BEWEIS:** Sei  $\mathcal{S} := \{S \subset \mathcal{H} \setminus \{0\} \mid \overline{\pi(A)\xi} \perp \overline{\pi(A)\eta} \text{ für alle } \xi \neq \eta \in S\}$ .  $\mathcal{S}$  ist partiell geordnet bezüglich Inklusion und abgeschlossen bezüglich Vereinigungen von aufsteigenden Teilmengen. Nach Zorns Lemma besitzt  $\mathcal{S}$  ein maximales Element  $\tilde{S}$ . Sei  $\eta \in (\bigcup_{\xi \in \tilde{S}} \overline{\pi(A)\xi})^\perp$ , dann gilt für  $a, b \in A$ ,  $\xi \in \tilde{S}$ .

$$\langle \pi(a)\eta, \pi(b)\xi \rangle = \langle \eta, \pi(a^*b)\xi \rangle = 0$$

Dann ist  $\overline{\pi(A)\eta} \perp \overline{\pi(A)\xi}$  für alle  $\xi \in \tilde{S}$ . Da  $\tilde{S}$  maximal ist, muss  $\eta \in \tilde{S}$  oder  $\eta = 0$  sein. Falls  $\eta \in \tilde{S}$ , so gilt  $\overline{\pi(A)\eta} \perp \overline{\pi(A)\eta}$ , was ein Widerspruch ist, denn  $(\mathcal{H}, \pi)$  ist nicht degeneriert ( $\Rightarrow \pi(e_\lambda) \xrightarrow{\text{s.o.}} \mathbb{1}_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}$ ). Also ist  $\eta = 0$  und damit

$$\mathcal{H} = \bigcup_{\xi \in \tilde{S}} \overline{\pi(A)\xi} = \bigoplus_{\xi \in \tilde{S}} \overline{\pi(A)\xi}$$

und  $\pi(\cdot)|_{\overline{\pi(A)\xi}}$  ist zyklisch, denn  $\xi \in \overline{\pi(A)\xi}$ . □

**7.3 Satz.** Sei  $(\mathcal{H}, \pi)$  eine Darstellung einer  $C^*$ -Algebra  $A$  mit  $\pi \neq 0$ . Dann gilt

- (i)  $(\mathcal{H}, \pi)$  ist irreduzibel  $\iff \pi(A)' = \mathbb{C} \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}$ .
- (ii)  $(\mathcal{H}, \pi)$  ist irreduzibel  $\implies$  jedes  $0 \neq \xi \in \mathcal{H}$  ist zyklisch, also  $\overline{\pi(A)\xi} = \mathcal{H}$ .

**BEWEIS:**

- (i) Für die Rückrichtung sei  $(\mathcal{H}, \pi)$  irreduzibel. Dann existiert  $\tilde{\mathcal{H}} \subset \mathcal{H}$  abgeschlossen mit  $\{0\} \neq \tilde{\mathcal{H}} \neq \mathcal{H}$  und  $\pi(A)\tilde{\mathcal{H}} \subset \tilde{\mathcal{H}}$ . Setze  $p := p_{\tilde{\mathcal{H}}}$ , dann gilt  $0 \neq p \neq \mathbb{1}_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}$  und

$$p\pi(a) = (\pi(a)p)^* = (p\pi(a)p)^* = p\pi(a)p = \pi(a)p$$

für  $a \in A_{sa}$ . Also ist  $p \in (A_{sa})'$  und somit  $p \in A'$ . Damit ist  $p = \lambda \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}$  für ein  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Da  $p$  ein Projektion ist, folgt  $\lambda \in \{0, 1\}$  und somit ist  $p = 0$  oder  $p = \mathbb{1}_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}$ , was ein Widerspruch ist.

Für die andere Implikation stellen wir fest, dass  $\pi(A)' \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$  eine von-Neumann-Algebra ist. Falls  $\pi(A)' \neq \mathbb{C} \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}$ , so existiert  $h \in \pi(A)'$  selbstadjungiert, sodass  $\sigma(h)$  mehr als einen Punkt enthält. Ohne Einschränkungen sei  $h \in (\pi(A)')_+^1$  und  $\{0, 1\} \in \sigma(h)$ .  $p := \chi_{(1/2, 1]}(h) \in \pi(A)'$  ist eine Projektion mit  $0 \neq p \neq \mathbb{1}_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}$ . Dann ist  $p\mathcal{H}$  ein  $\pi(A)$ -invarianter Unterraum und damit ist  $(\mathcal{H}, \pi)$  nicht irreduzibel.

Funktionalkalkül

- (ii) Sei  $(\mathcal{H}, \pi)$  irreduzibel. Dann ist  $\overline{\pi(A)\xi} = \{0\}$  oder  $\overline{\pi(A)\xi} = \mathcal{H}$  für  $\xi \in \mathcal{H}$ , da die Darstellung irreduzibel ist. Da  $\pi \neq 0$  ist, existiert ein  $\eta \in \mathcal{H}$  mit  $\pi(A)\eta \neq \{0\}$ . Also ist  $\overline{\pi(A)\eta} = \mathcal{H}$ . Dann folgt  $\overline{\pi_n(A)\xi} \neq \{0\}$  und damit  $\overline{\pi(A)\xi} = \mathcal{H}$ , also ist  $\xi$  zyklisch. □

**7.4 Definition.** Sei  $A$  eine  $C^*$ -Algebra. Ein Zustand  $\varphi \in S(A)$  heißt *rein*, falls gilt: Für jedes  $\rho \in A^*$  positiv mit  $\rho \leq \varphi$  existiert  $\lambda \in [0, 1]$  mit  $\rho = \lambda \cdot \varphi$ . Wir schreiben  $PS(A) := \{\text{reine Zustände auf } A\}$ .

engl. pure states

**7.5 Satz.** Sei  $A$  eine  $C^*$ -Algebra,  $\varphi \in S(A)$ . Dann gilt

$$\varphi \text{ ist rein} \iff (\mathcal{H}_\varphi, \pi_\varphi) \text{ ist irreduzibel}$$

**BEWEIS:** Sei  $\varphi$  rein und  $0 \leq h \leq \mathbb{1}_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \in \pi_\varphi(A)'$ . Dann definiert

$$\begin{aligned} \rho: A &\longrightarrow \mathbb{C} \\ a &\longmapsto \langle \xi_\varphi, h\pi_\varphi(a)\xi_\varphi \rangle \end{aligned}$$

ein positives Funktional auf  $A$ .<sup>5</sup> Es gilt  $\rho \leq \varphi$ .<sup>6</sup>  $\varphi$  ist rein, also existiert  $\lambda \in [0, 1]$  mit  $\rho = \lambda \cdot \varphi$ . Für  $a, b \in A$  erhalten wir:

$$\begin{aligned} \langle a + N_\varphi, h(b + N_\varphi) \rangle &= \langle \pi(a)\xi_\varphi, h\pi(b)\xi_\varphi \rangle = \langle \xi_\varphi, h\pi(a^*b)\xi_\varphi \rangle \\ &= \rho(a^*b) = \lambda \cdot \varphi(a^*b) \\ &= \lambda \cdot \langle a + N_\varphi, b + N_\varphi \rangle \\ &= \langle a + N_\varphi, \lambda \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}(b + N_\varphi) \rangle \end{aligned}$$

Also ist  $\langle \xi, h\eta \rangle = \langle \xi, \lambda \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}(\eta) \rangle$  für  $\xi, \eta \in \mathcal{H}_\varphi$  und damit  $h = \lambda \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}$ . Also ist  $\pi_\varphi(A)' = \mathbb{C} \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}$  und mit Satz 7.3 (i) folgt, dass  $(\mathcal{H}_\varphi, \pi_\varphi)$  irreduzibel ist.

Für die andere Implikation sei  $(\mathcal{H}_\varphi, \pi_\varphi)$  irreduzibel und  $\rho \in A^*$  positiv mit  $\rho \leq \varphi$ . Nach Proposition 7.1 existiert  $0 \leq h \leq \mathbb{1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\varphi)$  mit  $\rho(a) = \langle \xi_\varphi, h\pi_\varphi(a)\xi_\varphi \rangle$  für  $a \in A$ . Nach Satz 7.3 (i) gilt  $\pi_\varphi(A)' = \mathbb{C} \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_\varphi)}$ , also  $h = \lambda \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_\varphi)}$  für ein  $\lambda \in [0, 1]$  und  $\rho(a) = \langle \xi_\varphi, h\pi_\varphi(a)\xi_\varphi \rangle = \lambda \cdot \langle \xi_\varphi, \pi_\varphi(a)\xi_\varphi \rangle = \lambda \cdot \varphi(a)$ .  $\square$

**7.6 Satz.** Sei  $X$  ein lokalkompakter Hausdorffraum. Dann gilt  $\text{PS}(C_0(X)) = \Omega(C_0(X))$ .

**BEWEIS:** Sei  $\varphi \in \text{PS}(C_0(X))$  ein reiner Zustand. Dann gilt

$$\pi_\varphi(C_0(X)) \subset \underbrace{\pi_\varphi(C_0(X))'}_{\stackrel{7.3, 7.5}{=} \mathbb{C} \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_\varphi)}} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}_\varphi)$$

und  $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\varphi) \subset (\mathbb{C} \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_\varphi)})' \subset \pi_\varphi(C_0(X))' = \mathbb{C} \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_\varphi)}$ . Also ist  $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\varphi) = \mathbb{C} \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_\varphi)} \cong \mathbb{C}$ . Für  $a, b \in C_0(X)$  gilt

$$\begin{aligned} \varphi(ab) &= \langle \xi_\varphi, \pi_\varphi(ab)\xi_\varphi \rangle = \pi_\varphi(a) \langle \xi_\varphi, \pi_\varphi(b)\xi_\varphi \rangle = \pi_\varphi(a) \underbrace{\langle \xi_\varphi, \xi_\varphi \rangle}_{=1} \cdot \langle \xi_\varphi, \pi_\varphi(b)\xi_\varphi \rangle \\ &= \langle \xi_\varphi, \pi_\varphi(a)\xi_\varphi \rangle \cdot \langle \xi_\varphi, \pi_\varphi(b)\xi_\varphi \rangle \\ &= \varphi(a) \cdot \varphi(b) \end{aligned}$$

Also ist  $\varphi \in \Omega(C_0(X))$ . Sei nun umgekehrt  $\chi \in \Omega(C_0(X))$  und  $\rho \in C_0(X)^*$  positiv mit  $\rho \leq \chi$ . Für  $a \in C_0(X)$  gilt dann

$$|\rho(a)| \stackrel{5.3}{\leq} \|\rho\|^{1/2} \rho(a^*a)^{1/2} \leq \chi(a^*a)^{1/2} \leq |\chi(a)|$$

Also ist  $\ker \chi \subset \ker \rho$ .  $\rho$  induziert nun ein Funktional  $\tilde{\rho}$  auf  $C_0(X)/\ker \chi \cong \mathbb{C}$

$$\begin{array}{ccc} C_0(X) & \xrightarrow{\rho} & \mathbb{C} \\ & \searrow \chi & \nearrow \tilde{\rho} \\ & C_0(X)/\ker \chi \cong \mathbb{C} & \end{array}$$

Also ist  $\rho = \tilde{\rho} \circ \chi$ . Damit ist  $\rho(\cdot) = \lambda \cdot \chi(\cdot)$  für ein  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Für  $a \in C_0(X)$  mit  $\chi(a) = 1$  gilt  $0 \leq \rho(a^*a) = \lambda \cdot \chi(a^*a) = \lambda$  und außerdem  $\rho(a^*a) \leq \chi(a^*a) = 1$ , womit  $0 \leq \lambda \leq 1$  ist. Daraus folgt, dass  $\chi$  rein ist.  $\square$

**7.7 Definition.** Sei  $X$  ein hausdorffscher lokalkonvexer Vektorraum, das heißt  $X$  ist ein topologischer Vektorraum und die Topologie ist durch eine punkte trennende Familie  $(p_\lambda)_\lambda$  von Halbnormen

<sup>5</sup> mit  $h\pi(b^*b) = h^{1/2}h^{1/2}\pi(b^*b) = h^{1/2}\pi(b^*b)h^{1/2} \geq 0$

<sup>6</sup> mit  $h\pi(b^*b) = \pi(b^*)h\pi(b) \leq \pi(b^*)\pi(b)$

induziert.<sup>7</sup> Sei  $C \subset X$  eine nichtleere, (kompakte,) konvexe Teilmenge und sei  $F \subset C$  eine nichtleere konvexe Teilmenge.  $F$  heißt *Seite* von  $C$ , falls gilt: Für  $x \in F, y, z \in C, t \in (0, 1)$  mit  $x = t \cdot y + (1-t) \cdot z$  gilt bereits  $y, z \in F$ .  $x \in C$  heißt *Extrempunkt* von  $C$ , falls  $\{x\}$  eine Seite von  $C$  ist. Wir schreiben

$$\partial_e C := \{\text{Extrempunkte von } C\}$$

**7.8 Proposition.** Seien  $X, C$  wie oben.

- (i)  $C$  ist eine Seite von  $C$ .
- (ii) Eine nichtleerer Durchschnitt von Seiten ist wieder eine Seite.
- (iii) Für eine Seite  $F$  von  $C$  gilt  $\partial_e F \subset \partial_e C$ .

**BEWEIS:** Klar. □

**7.9 Lemma.** Seien  $X$  und  $C$  wie oben und  $\varphi: X \rightarrow \mathbb{C}$  ein stetige lineares Funktional. Setze  $M := \sup_{x \in C} \operatorname{Re} \varphi(x)$ . Dann ist  $F := \{x \in C \mid \varphi(x) = M\}$  eine kompakte Seite von  $C$ .

**BEWEIS:** Da  $C$  kompakt ist, existiert ein  $x_0 \in C$ , sodass  $\operatorname{Re} \varphi(x_0) = M$ , also ist  $F \neq \emptyset$ . Offensichtlich ist  $F$  konvex. Da  $\varphi$  stetig ist, ist  $F \subset C$  abgeschlossen. Sei nun  $x \in F, y, z \in C$  und  $t \in (0, 1)$  mit  $x = ty + (1-t)z$ . Falls  $y$  oder  $z$  nicht in  $F$  liegt, so gilt  $\operatorname{Re} \varphi(y) < M$  oder  $\operatorname{Re} \varphi(z) < M$ . Damit ist

$$M = \operatorname{Re} \varphi(x) = t \cdot \operatorname{Re} \varphi(y) + (1-t) \cdot \operatorname{Re} \varphi(z) < M$$

Dies ist ein Widerspruch, also müssen  $y, z$  in  $F$  liegen und damit ist  $F$  eine Seite. □

**7.10 Satz (KREIN-MILMAN).** Sei  $X$  ein hausdorffscher lokalkonvexer Vektorraum und  $C \subset X$  eine nichtleere, kompakte, konvexe Teilmenge. Dann gilt

$$C = \overline{\operatorname{conv}(\partial_e C)}$$

**BEWEIS:** Sei  $\Lambda := \{\text{kompakte Seiten von } C\}$ . Dann ist  $C \in \Lambda$ , das heißt  $\Lambda \neq \emptyset$ .  $\Lambda$  ist partiell geordnet bezüglich  $\supset$ . Sei  $\Gamma \subset \Lambda$  eine totalgeordnete Teilmenge, dann gilt unter der Annahme  $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} \gamma = \emptyset$

$$C = C \setminus \bigcap_{\gamma \in \Gamma} \gamma = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \underbrace{C \setminus \gamma}_{\text{offen in } C} \stackrel{C \text{ kpt.}}{=} \bigcup_{i=1}^n C \setminus \gamma_i \stackrel{\text{totalgeord.}}{=} C \setminus \gamma_0 \neq C$$

Damit ist  $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} \gamma \neq \emptyset$  eine kompakte Seite von  $C$  und  $\Gamma$  besitzt eine untere Schranke in  $\Lambda$ . Also ist  $\Lambda$  induktiv geordnet und mit dem Lemma von Zorn folgt die Existenz eines minimalen Elements  $F_0$ . Behauptung:  $F_0 = \{x_0\}$  für ein  $x_0 \in C$ . Angenommen es gäbe  $x_0 \neq y_0 \in F_0$ . Dann existiert  $\varphi: X \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und linear mit  $\operatorname{Re} \varphi(x_0) \neq \operatorname{Re} \varphi(y_0)$  (Hahn-Banach für lokalkonvexe Vektorräume). Dann ist

$$F_1 := \left\{ x \in F_0 \mid \operatorname{Re} \varphi(x) = M = \sup_{x \in F_0} \operatorname{Re} \varphi(x) \right\}$$

eine kompakte Seite von  $F_0$  nach Lemma 7.9 und Proposition 7.8. Es gilt  $F_1 \subset F_0$ , also folgt wegen der Minimalität  $F_0 = F_1$ . Dies ist ein Widerspruch und somit kann  $F_0$  nur genau ein Element  $x_0 \in \partial_e C$  besitzen.

Angenommen es gibt ein  $z \in C \setminus \overline{\operatorname{conv}(\partial_e C)}$ . Dann existiert (wieder nach Hahn-Banach) ein stetiges lineares  $\psi: X \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$\sup_{y \in \overline{\operatorname{conv}(\partial_e C)}} \operatorname{Re}(\psi(y)) \leq \operatorname{Re} \psi(z)$$

<sup>7</sup> zum Beispiel:  $x \mapsto \|x\|$  für die starke Operatorortopologie,  $x \mapsto |\langle \eta, x \xi \rangle|$  für die schwache Operatorortopologie

Setze  $M' := \sup_{x \in C} \operatorname{Re} \psi(x)$  und  $F' := \{x \in C \mid \operatorname{Re} \psi(x) = M'\}$ . Dann ist  $F'$  eine kompakte Seite von  $C$  nach Lemma 7.9. Wie oben sieht man, dass  $F'$  einen Extrempunkt  $y_0$  besitzt, der dann auch ein Extrempunkt von  $C$  ist, also  $y_0 \in \partial_e C$ .

$$M' = \operatorname{Re} \psi(y_0) \leq \sup_{y \in \overline{\operatorname{conv}(\partial_e C)}} \operatorname{Re} \psi(y) < \operatorname{Re} \psi(z) \leq M'$$

Dies ist ein Widerspruch und damit folgt die Behauptung.  $\square$

**7.11 Satz.** Sei  $A$  eine  $C^*$ -Algebra und  $S := \{\varphi \in A^* \mid \varphi \text{ ist positiv, } \|\varphi\| \leq 1\}$ . Dann ist  $S$  konvex und  $w^*$ -kompakt. Weiter gilt  $\partial_e S = \operatorname{PS}(A) \cup \{0\}$  und  $S = \overline{\operatorname{conv}(\partial_e S)}^{w^*}$ . Falls  $A$  unital ist, so gilt  $\partial_e(S(A)) = \operatorname{PS}(A)$  und  $S(A) = \overline{\operatorname{conv}(\operatorname{PS}(A))}^{w^*}$ .

**BEWEIS:** Es ist  $S \subset B^1(A^*)$  abgeschlossen, wobei  $B^1(A^*)$  nach Banach-Alaoglu  $w^*$ -kompakt ist. Also ist  $S$  auch  $w^*$ -kompakt. Offensichtlich ist  $S$  außerdem konvex. Wir zeigen nun, dass für die Extrempunkte von  $S$  gilt:  $\partial_e S = \operatorname{PS}(A) \cup \{0\}$ :

- Es gilt  $0 \in \partial_e S$ : Falls  $0 = t \cdot \varphi + (1-t) \cdot \psi$  mit  $\varphi, \psi \in S$  und  $t \in (0, 1)$ , so gilt

$$\varphi|_{A_+} = \psi|_{A_+} = 0 \implies \varphi = \psi = 0$$

- Es gilt  $\operatorname{PS}(A) \subset \partial_e S$ : Sei  $\rho \in \operatorname{PS}(A)$  und es gelte  $\rho = t \cdot \varphi + (1-t) \cdot \psi$  mit  $\varphi, \psi \in S$  und  $t \in (0, 1)$ . Dann gilt  $t \cdot \varphi, (1-t) \cdot \psi \leq \rho$ , also folgt

$$t \cdot \varphi = \lambda_\varphi \cdot \rho \text{ und } (1-t) \cdot \psi = \lambda_\psi \cdot \rho$$

für geeignete Skalare  $\lambda_\varphi, \lambda_\psi \in [0, 1]$ . Es gilt  $1 = \|\rho\| \leq t \cdot \|\varphi\| + (1-t) \cdot \|\psi\| \leq 1$ , also ist  $\|\varphi\| = \|\psi\| = 1$ . Damit folgt weiter  $t = \lambda_\varphi$  und  $(1-t) = \lambda_\psi$  und somit ist  $\varphi = \rho = \psi$ , also  $\rho \in \partial_e S$ .

- Es gilt  $\partial_e S \setminus \{0\} \subset \operatorname{PS}(A)$ : Für  $0 \neq \tau \in \partial_e S$  ist  $0 < \|\tau\| \leq 1$ . Es gilt dann

$$\tau = \|\tau\| \cdot \underbrace{\frac{1}{\|\tau\|} \cdot \tau}_{\in S} + (1 - \|\tau\|) \cdot 0$$

Falls  $\|\tau\| < 1$ , so ist  $\|\tau\| \in (0, 1)$  und  $\tau = 0$ , was ein Widerspruch ist. Es folgt also  $\tau \in S(A)$ . Sei nun  $0 \neq \rho \leq \tau$  ein positives Funktional auf  $A$ . Dann gilt  $1 - \|\rho\| = \lim_\lambda \tau(e_\lambda) - \rho(e_\lambda) = \|\tau - \rho\|$ , wobei  $(e_\lambda)_\lambda \subset A$  eine approximative Eins ist. Es folgt

$$\tau = \|\rho\| \cdot \underbrace{\frac{1}{\|\rho\|} \cdot \rho}_{\in S} + (1 - \|\rho\|) \cdot \underbrace{\frac{1}{\|\tau - \rho\|} \cdot (\tau - \rho)}_{\in S}$$

Da  $\tau \in \partial_e S$  ist, folgt  $\tau = \frac{1}{\|\rho\|} \cdot \rho$  und somit  $\|\rho\| \cdot \tau = \rho$ , also ist  $\tau \in \operatorname{PS}(A)$ .

Nach dem Satz von Krein-Milman (7.10) ist  $S = \overline{\operatorname{conv}(\partial_e S)}^{w^*}$ . Sei nun  $A$  unital. Dann ist  $S(A)$  nichtleer, konvex und  $w^*$ -kompakt, denn aus  $A$  unital folgt  $\|\varphi\| = \varphi(1)$ . Mit Krein-Milman folgt also

$$S(A) = \overline{\operatorname{conv}(\partial_e(S(A)))}^{w^*}$$

Aber  $S(A) \subset S$  ist eine Seite, also gilt

$$\operatorname{PS}(A) = S(A) \cap \partial_e S \stackrel{7.8(iii)}{=} \partial_e(S(A))$$

$\square$



**7.12 Satz.** Sei  $A$  eine  $C^*$ -Algebra und  $0 \neq a \in A_+$ . Dann existiert  $\rho \in \text{PS}(A)$  mit  $\rho(a) = \|a\|$ .

**BEWEIS:** Die folgende Menge mit  $S$  wie in Satz 7.11 ist  $w^*$ -abgeschlossen und konvex:

$$F := \{\varphi \in S \mid \varphi(a) = \|a\|\}$$

$F$  ist nichtleer nach Satz 5.5 und kompakt nach Banach-Alaoglu. Mit Krein-Milman folgt, dass  $F$  einen Extrempunkt  $\rho$  besitzt. Wie in Lemma 7.9 zeigt man, dass  $F$  eine Seite von  $S$  ist. Nach Proposition 7.8 ist  $\rho$  ein Extrempunkt von  $S$ . Da  $\rho \neq 0$  ist, folgt also  $\rho \in \text{PS}(A)$ .  $\square$

**7.13 Korollar.** Sei  $A$  eine  $C^*$ -Algebra und  $a \in A$ . Dann existiert eine irreduzible Darstellung  $(\mathcal{H}, \pi)$  von  $A$  mit  $\|a\| = \|\pi(a)\|$ .

**BEWEIS:** Ohne Einschränkungen ist  $a \neq 0$ . Nach Satz 7.12 existiert ein reiner Zustand  $\rho \in \text{PS}(A)$  mit  $\rho(a^*a) = \|a\|^2$ . Die GNS-Darstellung  $(\mathcal{H}_\rho, \pi_\rho)$  ist irreduzibel nach Satz 7.5. Es gilt

$$\|a\|^2 = \rho(a^*a) = \langle \xi_\rho, \pi_\rho(a^*a)\xi_\rho \rangle = \|\pi_\rho(a)\xi_\rho\|^2 \leq \|\pi_\rho(a)\|^2 \leq \|a\|^2 \quad \square$$

**7.14 Korollar.** Sei  $B \subset A$  eine  $C^*$ -Unteralgebra und  $\rho \in \text{PS}(B)$ . Dann existiert eine Fortsetzung  $\rho' \in \text{PS}(A)$ . Falls  $B \subset_{\text{her}} A$ , so ist  $\rho'$  eindeutig bestimmt.

**BEWEIS:** Die Menge  $F := \{\varphi \in S(A^*) \mid \varphi|_B = \rho\}$  ist nichtleer nach Satz 5.7 und es ist  $F \subset S(A^*)$   $w^*$ -abgeschlossen, also  $w^*$ -kompakt. Weiter ist  $F$  auch wieder konvex.  $F$  ist eine Seite von  $S = \{\varphi: A^* \rightarrow \mathbb{C} \mid \text{positiv, linear, } \|\varphi\| \leq 1\}$  (Übung). Mit Krein-Milman und Proposition 7.8 folgt, dass ein  $\rho'' \in \partial_e F \subset \partial_e F \setminus \{0\} = \text{PS}(A^*)$  existiert. Setze nun  $\rho' := \rho''|_A \in \text{PS}(A)$ . (Übung) Eindeutigkeit: Satz 5.8.  $\square$



## A. Anhang

Hier findet man einige ausgewählte Beweise, auf die der Vorlesung hingewiesen wurde und die im Rahmen von Übungsaufgaben bearbeitet wurden. Sie stammen also auch hauptsächlich aus den Übungen und deswegen sei hier noch einmal darauf hingewiesen, dass für die Richtigkeit keine Garantie übernommen wird!

### A.1. Die GNS-Darstellung ist zyklisch

Dies war Bestandteil von Blatt 8, Aufgabe 2 und komplettiert die Ausführungen zur GNS-Darstellung in Satz 5.11 und Satz 5.12).

Wir zeigen, dass der Grenzwert  $\xi_\varphi = \lim_\lambda e_\lambda + N_\varphi$  für eine beliebige approximative Eins  $(e_\lambda)_\lambda \subset A_+^1$  existiert, eindeutig ist und ein zyklischer Vektor für die GNS-Darstellung ist (vgl. Satz 5.11). Weiter wird gezeigt, dass folgende Identität für  $a \in A$  gilt:

$$\varphi(a) = \langle \pi_\varphi(a)\xi_\varphi, \xi_\varphi \rangle \quad [\dagger]$$

**BEWEIS:** Da  $(e_\lambda)_\lambda$  aufsteigend ist, gilt  $e_\mu - e_\lambda \geq 0$  für  $\lambda \leq \mu$ . Weiter gilt  $e_\mu - e_\lambda \leq 1_{A^+}$ . Nach Satz 3.7 (v) mit  $c = (e_\mu - e_\lambda)^{1/2}$  folgt  $(e_\mu - e_\lambda)^2 \leq e_\mu - e_\lambda$ . Es gilt nun

$$\|e_\mu - e_\lambda + N_\varphi\|^2 = \varphi((e_\mu - e_\lambda)^2) \leq \varphi(e_\mu - e_\lambda) = \varphi(e_\mu) - \varphi(e_\lambda) \xrightarrow{5.4} 0$$

da positive Operatoren Ungleichungen erhalten (warum?). Also ist  $(e_\lambda + N_\varphi)_\lambda$  ein Cauchy-Netz und konvergiert gegen  $\xi_\varphi$ , da  $\mathcal{H}_\varphi$  vollständig ist. Um zu zeigen, dass  $\xi_\varphi$  zyklisch ist, reicht es  $\pi_\varphi(a)\xi_\varphi = a + N_\varphi$  für  $a \in A$  zu zeigen. Es gilt

$$\pi_\varphi(A)\xi_\varphi = \lim_\lambda \pi_\varphi(a)(e_\lambda + N_\varphi) = \lim_\lambda (ae_\lambda + N_\varphi) = a + N_\varphi$$

Wegen Linearität genügt es nun  $[\dagger]$  für positive Elemente  $a^*a$  zu zeigen: Da  $\xi_\varphi$  zyklisch ist, gilt

$$\varphi(a^*a) = \langle a + N_\varphi, a + N_\varphi \rangle = \langle \pi_\varphi(a)\xi_\varphi, \pi_\varphi(a)\xi_\varphi \rangle = \langle \pi_\varphi(a^*a)\xi_\varphi, \xi_\varphi \rangle \quad \square$$

### A.2. Monotones Netz von Projektionen

Dies war Bestandteil von Blatt 9, Aufgabe 4 und komplettiert Satz 6.2.

Sei  $(p_\lambda)_\lambda$  ein aufsteigendes/absteigendes Netz von Projektionen. Sei  $q$  die Projektion auf  $\overline{\bigcup_\lambda p_\lambda(\mathcal{H})}$  und  $r$  die Projektion auf  $\bigcap_\lambda p_\lambda(\mathcal{H})$ . Dann gilt

(i) Falls  $(p_\lambda)_\lambda$  aufsteigend ist, dann gilt  $p_\lambda \xrightarrow{s.o.} q$ .

(ii) Falls  $(p_\lambda)_\lambda$  absteigend ist, dann gilt  $p_\lambda \xrightarrow{s.o.} r$ .

**BEWEIS:**

(i) Wir müssen zeigen, dass  $p_\lambda \xi \rightarrow q\xi$  für alle  $\xi \in \mathcal{H}$ . Für Projektionen gilt

$$p_\lambda \leq p_\mu \iff p_\lambda(\mathcal{H}) \subset p_\mu(\mathcal{H})$$

Jedes  $\xi \in \mathcal{H}$  lässt sich eindeutig schreiben als  $\xi = \xi_1 + \xi_2$  mit  $\xi_1 \in \overline{\bigcup_\lambda p_\lambda(\mathcal{H})}$  und  $\xi_2 \in \bigcap_\lambda p_\lambda(\mathcal{H})^\perp$ . Wähle eine Folge  $(x_n)_n \rightarrow \xi_1$ . Sei nun  $\varepsilon > 0$ . Wähle  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $\|\xi_1 - x_{n_0}\| < \varepsilon/2$

Beweis davon  
könnte man  
von Thanh  
übernehmen

für  $n \geq n_0$  und passend dazu  $\lambda_0 \in \Lambda$  mit  $x_{n_0} \in p_{\lambda_0}(\mathcal{H})$ . Dann ist  $x_{n_0} \in p_\lambda(\mathcal{H})$  für  $\lambda \geq \lambda_0$  und es gilt

$$\begin{aligned}
 \|p_\lambda \xi - q\xi\| &= \|p_\lambda \xi_1 + p_\lambda \xi_2 - \xi_1\| = \|p_\lambda \xi_1 - \xi_1\| = \|p_\lambda(\xi_1 - x_{n_0} + x_{n_0}) - \xi_1\| \\
 &\leq \|p_\lambda(\xi_1 - x_{n_0})\| + \|x_{n_0} - \xi_1\| \\
 &\leq \underbrace{\|p_\lambda\|}_{=1} \cdot \|\xi_1 - x_{n_0}\| + \|x_{n_0} - \xi_1\| \\
 &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
 \end{aligned}$$

Damit ist  $p_\lambda \xrightarrow{\text{s.o.}} q$  gezeigt.

- (ii) Da  $p_\lambda$  eine Projektion ist, ist  $1 - p_\lambda$  die Projektion auf  $p_\lambda(\mathcal{H})^\perp$ . Weiter ist dann  $(1 - p_\lambda)_\Lambda$  ein aufsteigendes Netz von Projektionen und nach (i) konvergiert dies stark gegen die Projektion auf  $\overline{\bigcup_\lambda p_\lambda(\mathcal{H})}^\perp$ . Damit konvergiert dann aber auch  $p_\lambda$  stark gegen die Projektion auf

$$\overline{\bigcup_\lambda p_\lambda(\mathcal{H})}^\perp = \bigcap_\lambda p_\lambda(\mathcal{H})$$

Also gilt  $p_\lambda \xrightarrow{\text{s.o.}} r$  wie gewünscht. □

## Index

Die *Seitenzahlen* sind mit Hyperlinks versehen und somit anklickbar

approximative Eins, 15

Banachalgebra, 1

Bikommutante, 30

Bildprojektion, 32

C\*-Algebra, 5

erzeugte C\*-Algebra, 9

CAR-Algebra, 20

Charakter, 3

Charakterspektrum, 3

Cuntz-Algebra, 28

Darstellung, 24

algebraisch irreduzibel, 24

irreduzibel (topologisch), 24

nicht degeneriert, 24

treu, 24

zyklisch, 24

einfach, 3

Extrempunkt, 43

Funktionalkalkül, 9

ganze Funktion, 2

Gelfandtransformation, 4

GNS-Darstellung, 25

hereditär, 17

holomorph, 2

induktives System von C\*-Algebren, 19

involutiv, 5

Isometrie, 5

Kommutante, 30

Matrixeinheiten, 29

Neumannsche Reihe, 1

normal, 5

partielle Isometrie, 32

positiv, 12

positives Funktional, 21

Projektion, 5

reeller Rang, 33

schwache Operatortopologie, 35

Seite, 43

selbstadjungiert, 5

Sesquilinearform, 21

Spektralradius, 2

Spektrum, 1, 3

Charakterspektrum, 4

Spurzustand, 24

stark stetig, 37

starke Operatortopologie, 29

Stern-, \*-Einbettung, 5

Sten-, \*-Homomorphismus, 5

Toeplitz-Algebra, 27

unilateraler Shift, 27

unital, 1

unitär, 5

unitäre Gruppe, 33

universelle Darstellung, 25

von-Neumann-Algebra, 30

Zustand, 21

reiner, 41

## Abbildungsverzeichnis

1. Zerlegen der Identität in zwei Funktionen $f$ und $g$ , sodass $\text{id} = f - g$	13
2. Wirkung von $v_1$ und $v_2$ in der Cuntz-Algebra $\mathcal{O}_2$ über $\mathcal{H} = L^2([0, 1])$	28
3. Funktionen im Beweis von Satz 6.24	38

## To-do's und andere Baustellen

vlt noch $\text{\TeX}$	14
ich meine man sollte $\delta$ so wählen, dass hier $\varepsilon/\ a\ $ steht, sonst kommt das später nicht wirklich hin	15
der folgende Absatz könnte noch ausführlicher sein	19
Revision 6	31
Figure: $1/N, 2/N, 3/N, \dots$ und dann Hüte über zwei Segmente	33
Revision 7	40
Beweis davon könnte man von Thanh übernehmen	A