Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Fachbereich 10 Mathematik und Informatik

Skript Analysis 2

Mitschrift der Vorlesung „Analysis 2“ von Prof. Ebert

Tim Keil

13. April 2015

Vorwort — Mitarbeit am Skript

Dieses Dokument ist eine Mitschrift aus der Vorlesung „Analysis 2, SoSe 2015“, gelesen von Prof. Ebert. Der Inhalt entspricht weitestgehend dem Tafelanschrieb. Für die Korrektheit des Inhalts übernehme ich keinerlei Garantie! Für Bemerkungen und Korrekturen – und seien es nur Rechtschreibfehler – bin ich sehr dankbar. Korrekturen bitte durch persönliches Ansprechen oder per Mail an keil.menden@web.de.

Inhaltsverzeichnis

I. Normierte und metrische Räume

$\mathbb{R}$ → $\mathbb{R}^n$ → Normierte Vektorräume → Metrische Räume

I.1. Der $\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| x_i \in \mathbb{R} \right\}$$

Der $\mathbb{R}^n$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) = n$.
Sei

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{i-ter Eintrag}$$

$(e_1, \ldots, e_n)$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^n$ und heißt **Standardbasis**.
Ist $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, so gilt $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$

I.1.1. Definition

Das Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ ist die Abbildung

$$\langle\, . \,,\, . \,\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

mit

$$x = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i \in \mathbb{R}$$

es gilt:

(S1) (Bilinearität) $\forall x_0, x_1, y_0, y_1, \in \mathbb{R}^n \ \forall a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \langle x_0 + x_1 \,,\, y_0 + y_1 \rangle &= \langle x_0 \,,\, y_0 \rangle + \langle x_1 \,,\, y_1 \rangle + \langle x_1 \,,\, y_0 \rangle + \langle x_1 \,,\, y_1 \rangle \\ \langle a x_0 \,,\, b y_0 \rangle &= ab \langle x_0 \,,\, y_0 \rangle \end{aligned}$$

(S2) (Symmetrie) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt $\langle x \,,\, y \rangle = \langle y \,,\, x \rangle$

(S3) (positive Definitheit) $\forall x \in \mathbb{R}$ gilt $\langle x \,,\, x \rangle \geq 0$ und $\langle x \,,\, x \rangle = 0$ nur dann, wenn $x = 0$

Desweiteren gilt $\langle e_i \,,\, e_j \rangle = \delta_y := \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ (Kronecker-Symbol)

Ist

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in \mathbb{R}^n \qquad (x_i \in \mathbb{R})$$

so ist

$$\langle x\,,\,e_j\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i\,,\,e_j\rangle \overset{(S1)}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i \langle e_i\,,\,e_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \delta_{ij} = x_j$$
$$\Rightarrow x = \sum_{j=1}^{n} \langle x\,,\,e_j\rangle e_j$$

I.1.2. Definition

Sei $x \in \mathbb{R}^n$. Die l^2-Norm von x ist die Zahl

$$\|x\|_2 := \sqrt{\langle x\,,\,x\rangle}$$

Schreibweise manchmal auch: $\|x\|_2 = \|x\|$

I.2. Euklidsche und normierte Vektorräume

I.2.1. Definition

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Ein **Skalarprodukt** auf V ist eine Abbildung $\langle .\,,\,.\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$, welche die Axiome S1,S2,S3 erfüllt.
Ein **euklidscher Vektorraum** ist ein Paar $(V, \langle\,,\,\rangle)$. V ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\langle\,,\,\rangle$ ist Skalarprodukt auf V.
Ist $(V, \langle\,,\,\rangle)$ ein eukdlischer Vektorraum, so ist die durch $\langle\,,\,\rangle$ induzierte Norm definiert als

$$\|v\| = \sqrt{\langle v\,,\,v\rangle} \qquad v \in V$$

I.2.2. Beispiele

- $\mathbb{R}^n$ mit Standardskalarprodukt
- Die Abbildung

$$\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$$
$$(z, w) \mapsto Re(\bar{z} \cdot w)$$

  ist ein Skalarprodukt. Die induzierte Norm ist der Absolutbetrag.

I.2.3. Definition

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine **Norm** auf V ist eine Abbildung $\|.\| : V \to \mathbb{R}, v \mapsto \|v\|$ mit

(N1) $\|v\| \geq 0 \qquad \forall\, v \in V$

(N2) $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$

(N3) $\|av\| = |a| \cdot \|v\| \qquad \forall\, v \in V, a \in \mathbb{R}$

(N4) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \qquad \forall\, v, w \in V$ (Dreiecksungleichung)

Ein normierter Vektorraum ist ein Paar $(V, \|.\|)$ bestehend aus einem $\mathbb{R}$-VR V und einer Norm auf V.

I.2.4. Satz

Sei $(V, \langle\,,\,\rangle)$ ein euklidscher Vektorraum. Für $v \in V$ setzte $\|v\| = \sqrt{\langle v\,,\,v\rangle}$
Dann gilt:

1.) $\|.\|$ ist eine Norm auf V

2.) $\forall\, v, w \in V$ gilt die **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**:

$$|\langle v\,,\,w\rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

Beweis:

1. **N1:** $\|v\| = \sqrt{\underbrace{\langle v\,,\,v\rangle}_{\geq 0}} \geq 0$

   N2: $\|v\| = \sqrt{\langle v\,,\,v\rangle} = 0 \Rightarrow \langle v\,,\,v\rangle = 0 \overset{\text{S3}}{\Rightarrow} v = 0$

   N3: $a \in \mathbb{R}, v \in V$

$$\|av\| = \sqrt{\langle av\,,\,av\rangle} \overset{\text{S1}}{=} \sqrt{a^2\langle v\,,\,v\rangle} = \sqrt{a^2}\sqrt{\langle v\,,\,v\rangle} = |a|\|v\|$$

2. CS-Ungleichung ist trivial, wenn $w = 0$
   Ann.: $w \neq 0$: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} f(t) &= \langle v + tw\,,\,v + tw\rangle \\ &= \langle v\,,\,v\rangle + 2t\langle v\,,\,w\rangle + t^2\langle w\,,\,w\rangle \\ &= \|v\|^2 + 2t\underbrace{\langle v\,,\,w\rangle}_{\in\mathbb{R}} + t^2\|w\|^2 \end{aligned}$$

   aus S3 folgt $f(t) \geq 0$. f ist Polynom

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t_0 = -\frac{\langle v\,,\,w\rangle}{\|w\|^2}$$
$$f''(t) = 2\|w\|^2 > 0$$

   $\Rightarrow f$ nimmt bei t_0 globales Minimum an

$$0 \leq f(t_0) = \|v\|^2 - \frac{2\langle v\,,\,w\rangle^2}{\|w\|^2} + \frac{\langle v\,,\,w\rangle^2}{\|w\|^4}\|w\|^2 = \|v\|^2 - \frac{\langle v\,,\,w\rangle^2}{\|w\|^2}$$
$$\Rightarrow \frac{\langle v\,,\,w\rangle^2}{\|w\|^2} \leq \|v\|^2$$
$$\Rightarrow \langle v\,,\,w\rangle^2 \leq \|v\|^2\|w\|^2$$
$$\Rightarrow |\langle v\,,\,w\rangle| = \sqrt{\langle v\,,\,w\rangle^2} \leq \sqrt{\|v\|^2\|w\|^2} = \|v\| \cdot \|w\|$$

□

(N4)

$$\begin{aligned} \|v + w\|^2 &= \langle v + w\,,\,v + w\rangle \\ &\overset{\text{S1}}{=} \|v\|^2 + 2\langle v\,,\,w\rangle + \|w\|^2 \\ &\leq \|v\| + 2|\langle v\,,\,w\rangle| + \|w\|^2 \\ &\overset{\text{CS}}{\leq} \|v\|^2 + 2\|v\|\|w\| + \|w\|^2 \\ &= (\|v\| + \|w\|)^2 \end{aligned}$$

Wurzel ziehen zeigt N4 □

I.2.5. Weitere Beispiele für Normen auf $\mathbb{R}$

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \qquad x_i \in \mathbb{R}$$

- l^1-Norm $\quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$
- l^∞-Norm $\quad \|x\|_\infty = \max\{|x_i| \mid i = 1, \dots, n\}$
- Ist $p \in [1, \infty)$, so ist die l^p-Norm

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \qquad \text{(Beweis Schwer)}$$

I.2.6. Definition

V $\mathbb{R}$-VR , $\|.\|_0, \|.\|_1$ Normen auf V. Die Normen $\|.\|_0, \|.\|_1$ heißen **äquivalent**, falls $C, c > 0$ existieren, so dass für alle $v \in V$ gilt:

$$c\|v\|_0 \leq \|v\|_1 \leq C\|v\|_0$$

Bemerkung:
Das ist eine Äquivalenzrelation

- **Reflexiv**: klar
- **Symmetrie**:

$$c\|v\|_0 \leq \|v\|_1 \leq C\|v\|_0$$
$$\Rightarrow \frac{1}{c}\|v\|_1 \leq \|v\|_0 \leq \frac{1}{C}\|v\|_1$$

- **Transitiv**:

$$c\|v\|_0 \leq \|v\|_1 \leq C\|v\|_0 \quad \text{und} \quad d\|v\|_1 \leq \|v\|_2 \leq D\|v\|_1 \qquad (C, c, D, d > 0)$$
$$\Rightarrow cd\|v\|_0 \leq CD\|v\|_0$$

I.2.7. Beispiel

Die l^1, l^2 und l^∞-Norm auf $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent und zwar gilt:

$$\|v\|_\infty \leq \|v\|_2 \leq \|v\|_1 \leq n\|v\|_\infty \qquad \text{(Beweis Übung)}$$

I.3. Metrische Räume

I.3.1. Definition

$(V, \|.\|)$ normierter Vektorraum, $v, w \in V$
Der **Abstand** von v und w ist

$$d(v, w) := \|v - w\|$$

I.3.2. Definition

Sei X eine Menge
Eine **Metrik** (oder Abstandsfunktion) ist eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto d(x, y)$, sodass gilt:

(M1) $\forall\, x, y \in X: \qquad d(x, y) \geq 0$

(M2) $\forall\, x, y \in X: \qquad d(x, x) = 0$ und $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$

(M3) $\forall\, x, y \in X: \qquad d(x, y) = d(y, x)$

(M4) $\forall\, x, y, z \in X: \qquad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ **(Dreiecksungleichung)**

Ein **Metrischer Raum** ist ein Paar (X, d), X Menge, d Metrik auf X

Beispiele:

- Ist $(V, \|.\|)$ normierter Vektorraum, so ist durch $d(v, w) := \|v - w\|$ eine Metrik auf V gegeben.

$$v, w, u \in V \qquad \begin{aligned} d(v, u) &= \|v - u\| = \|v - w + w - u\| \\ &\overset{\triangle\text{-Ungl.}}{\leq} \|v - w\| + \|w - u\| \\ &= d(v, w) + d(w, u) \end{aligned}$$

  Unterbeispiel:

  $V = \mathbb{R}$. Dann ist $x \mapsto |x|$ eine Norm auf $\mathbb{R}$ und die induzierte Metrik auf $\mathbb{R}$ ist $d(x, y) = \|x - y\|$

- (X, d_X) metrischer Raum $Y \subseteq X$ Teilmenge. Dann ist (Y, d_y) ein metrischer Raum, wobei für $y_0, y_1 \in Y$ gilt, dass $d_y(y_0, y_1) := d_x(y_0, y_1)$
  Vereinbarung: Ist $X \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge, so ist X immer mit der durch das Standardskalarprodukt induzierte Metrik versehen. (es sei denn, etwas anderes ist gesagt)

Konvergenz
Erinnerung (Ana I): $(x_n)_n$ Folge in $\mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$. Dann

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x :\Leftrightarrow \forall\, \epsilon > 0 \exists n_0 \forall\, n \geq n_0 : |x - x_1| < \epsilon$$

I.3.3. Definition

(X, d) metrischer Raum, $(x_n)_n$ FOlge in X (d.h eine Abbildung $x : \mathbb{N} \to X$). $y \in X$ Dann Konvergiert die Folge $(x_n)_n$ gegen $y :\Leftrightarrow \forall\, \epsilon > 0 \exists n_0 : \forall\, n \geq n_0\, d(x_n, y) < \epsilon$