Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

Fachbereich 10
Mathematik und
Informatik

Partielle Differentialgleichungen I

gelesen von Prof. Dr. Benedikt Wirth

Mitschrift von Phil Steinhorst

Sommersemester 2014

http://wwwmath.uni-muenster.de/num/Vorlesungen/PDEI_SS14/

Stand: 25. Juli 2014

Vorwort

Der vorliegende Text ist eine Mitschrift zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen I, gelesen von Prof. Dr. Benedikt Wirth an der WWU Münster im Sommersemester 2014. Der Inhalt entspricht weitestgehend dem Tafelanschrieb während der Vorlesung sowie den mündlichen Erläuterungen des Dozenten. Für Korrektheit des Inhalts wird keinerlei Garantie übernommen. Für Bemerkungen, Korrekturen und Ergänzungen – entweder per E-Mail oder direkt via GitHub – bin ich sehr dankbar (auch, wenn es sich nur um sprachliche Korrekturen handelt).

Themenübersicht des Dozenten

In der Vorlesung werden grundlegende Methoden zur Lösung partieller Differentialgleichungen vorgestellt, insbesondere anhand klassischer Beispiele wie der Transportgleichung, der Laplacegleichung, der Wärmeleitungsgleichung und der Wellengleichung.

Literatur

- Evans, Lawrence Craig – Partial Differential Equations
  American Mathematical Society, 2010
- John, Fritz – Partial Differential Equations
  Springer-Verlag, 1991

Vorlesungswebsite

http://wwwmath.uni-muenster.de/num/Vorlesungen/PDEI_SS14/

GitHub

https://github.com/JaMeZ-B/latex-wwu

Die Nummerierung aus dem Originalskript ist in eckigen Klammern am Seitenrand vermerkt.

Phil Steinhorst
p.st@wwu.de

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

1.1. Definition: Partielle Differentialgleichung

8. Apr Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine **partielle Differentialgleichung** (PDGL, PDE) ist eine Gleichung, die eine Funktion $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ und ihre partiellen Ableitungen miteinander verknüpft.

$$F(D^k u(x), D^{k-1}u(x), \ldots, Du(x), u(x), x) = 0,$$

wobei

$$F\colon \mathbb{R}^{n^k} \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \ldots \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}.$$

k ist die **Ordnung** der partiellen Differentialgleichung. u ist die gesuchte Funktion.

Notation

$$u_{x_1} := \frac{\partial u}{\partial x_1}; \quad u_{x_1 x_2} := \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}; \quad \text{usw.}$$

$$\nabla u := \begin{pmatrix} \partial \,/\, \partial\, x_1 \\ \vdots \\ \partial \,/\, \partial\, x_n \end{pmatrix} u = \begin{pmatrix} u_{x_1} \\ \vdots \\ u_{x_n} \end{pmatrix}$$

$$\Delta u := \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} = \operatorname{div} \nabla u$$

Manchmal ist die erste Variable die Zeit. Dann betrachten wir $\Omega' = (0, \Gamma) \times \Omega$ statt Ω. t bezeichnet dann die Zeitvariable; $(t, x) \in \Omega'$. ∇ und Δ beziehen sich dann nur auf die Raumvariablen.
Ein Vektor $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ heißt **Multiindex** der Ordnung $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. Damit ist:

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

$$\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_n!$$

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} \text{ für } x \in \mathbb{R}^n$$

1.2. Beispiel

- **Transportgleichung**: $u_t + b(x) \cdot \nabla u = 0$
  u_t: z.B. Partikeldichte, $b \in \mathbb{R}^n$: Flüssigkeitsgeschwindigkeit

- **Laplace-Gleichung**: $\Delta u = 0$
  Chemikaliendichte in Lösungsmittel

- **Wärmeleitungsgleichung**: $u_t = \Delta u$
  u: Temperatur

- **Wellengleichung**: $u_{tt} = \Delta u$

1.3. Definition: PDGL-Problem

Ein **PDGL-Problem** ist eine partielle Differentialgleichung mit Randbedingungen auf einem Teil $\Gamma \subset \partial\Omega$.

1.4. Beispiel: PDGL-Probleme

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{auf } (0,\pi)^2 \\ u = 0 & \text{auf } x_1 = 0, x_1 = \pi, x_2 = 0 \\ u = \sin^3(x_1) & \text{auf } x_2 = \pi \end{cases}$$

Eine Lösung ist gegeben durch

$$u(x) = \frac{3}{4}\sin x_1 \frac{\sinh x_2}{\sinh 1} - \frac{1}{4}\sin(3x_1)\frac{\sinh 3x_2}{\sinh 3}$$

$$\begin{cases} u_t = \Delta u \text{ auf } (0,\infty)\times(0,\pi) \\ u(0,x) = \sin^3(x), u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \\ u \to 0 \text{ für } t \to \infty \end{cases}$$

Eine Lösung ist gegeben durch

$$u(t,x) = \frac{3}{4}\sin(x)e^{-t} - \frac{1}{4}\sin(3x)e^{-3t}$$

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} \text{ auf } (0,\infty)\times(0,\pi) \\ u(0,x) = \sin^3(x), u_t(0,x) = 0 \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \end{cases}$$

Eine Lösung ist gegeben durch

$$u(t,x) = \frac{3}{4}\sin(x)\cos(t) - \frac{1}{4}\sin(3x)\cos(3t)$$

1.5. Definition: Typen partieller Differentialgleichungen

Eine PDGL heißt

- **linear**, wenn $\sum\limits_{|\alpha|\leq k} a_\alpha(x)D^\alpha u(x) = f(x)$.
- **semilinear**, wenn $\sum\limits_{|\alpha|=k} a_\alpha(x)D^\alpha u(x) + a_0(D^{k-1}u(x),\ldots,Du(x),u(x),x) = 0$.
- **quasilinear**, wenn $\sum\limits_{|\alpha|=k} a_\alpha(D^{k-1}u(x),\ldots,Du(x),u(x),x)D^\alpha u(x) + a_0(D^{k-1}u(x),\ldots,Du(x),u(x),x) = 0$.
- **nichtlinear** in allen anderen Fällen.

1.6. Definition: wohlgestelltes Problem

Ein (PDGL)-Problem heißt **wohlgestellt** nach Hadamard, wenn

(1) es eine Lösung besitzt

(2) diese eindeutig ist und

(3) diese stetig von den Daten (Randwerte, rechte Seite) abhängt.

Wir möchten die Wohlgestelltheit von verschiedenen partiellen Differentialgleichungen untersuchen, ihre Lösungen angeben und charakterisieren. Was verstehen wir unter einer Lösung? Obige Notation setzt eigentlich k-fache Differenzierbarkeit von u voraus. Manchmal machen auch weniger reguläre Lösungen Sinn, z.B. schwach differenzierbare Lösungen. Allgemeines Vorgehen:

(1) Zeige Existenz einer (wenig regulären) Lösung.

(2) Schätze die Lösung ab in Termen der Daten

(3) Eindeutigkeit und Regularität herleiten (z.B. k-fache Differenzierbarkeit)

2. Ein allgemeines Resultat: Der Satz von Cauchy-Kovalevskaya

Betrachte im Folgenden eine quasilineare PDGL:

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(D^{k-1}u(x), \dots, Du(x), u(x), x) D^\alpha u(x) + a_0(D^{k-1}u(x), \dots, u(x), x) = 0$$

Sei Γ eine glatte, orientierte $(n-1)$-dimensionale Hyperfläche im $\mathbb{R}^n$, $\nu(x) = (\nu_1(x), \dots, \nu_n(x))$ die Einheitsnormale auf Γ an $x \in \Gamma$. Sei

$$\frac{\partial^j u(x)}{\partial \nu^j} = (\nu \cdot \nabla)^j u(x) = \sum_{|\alpha|=j} \frac{j!}{\alpha!} D^\alpha u \cdot \nu^\alpha = \sum_{|\alpha|=j} \frac{j!}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!} \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} \nu_1^{\alpha_1} \cdots \nu_n^{\alpha_n}$$

die j-te Normalenableitung von u an x.

2.1. Definition: Cauchy-Problem

Löse die PDGL (1) mit vorgegebenen **Cauchy-Daten** auf Γ:

$$u(x) = g_0(x), \frac{\partial u}{\partial \nu} = g_1, \dots, \frac{\partial^{k-1} u}{\partial \nu^{k-1}} = g_{k-1}$$

2.2. Definition: analytische Funktion

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt **analytisch** um $x_0 \in \mathbb{R}^n$, wenn ein $r > 0$ und $f_\alpha \in \mathbb{R}$ existiert, sodass

$$f(x) = \sum_\alpha f_\alpha (x - x_0)^\alpha$$

für alle $|x - x_0| < r$.

2.3. Bemerkung

- Ist f analytisch um x_0, dann ist f unendlich oft stetig differenzierbar um x_0, und es gilt $D^\alpha f(x) = f_\alpha \alpha!$. f ist gleich seiner Taylor-Entwicklung auf $|x - x_0| < r$:

$$f(x) = \sum_\alpha \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha$$

- Eine Hyperfläche Γ heißt analytisch um $x_0 \in \Gamma$, wenn es analytische Funktionen $\phi, \psi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und ein $r > 0$ gibt mit $\phi = \psi^{-1}, \phi(\Gamma \cap B_r(x_0)) \subset \{x_n = 0\}$.

2.4. Satz: Cauchy-Kovalevskaya

Seien $\Gamma, g_0, g_1, \dots, g_{k+1}, a_\alpha, a_0$ analytisch um x_0 mit $\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(D_{k-1}, D_{k-2}, \dots, D_0, x) \neq 0$ für alle $x \in \Gamma$ und $D_i \in \mathbb{R}^{n^i}$. Dann existiert ein $r > 0$ und eine Lösung u zu (1) und (2) auf $B_r(x_0)$. u ist dort analytisch.

2.5. Bemerkung

- Dieser Satz ist das einzig wirkliche allgemeine Resultat in der Theroie der partiellen Differentialgleichungen.

11. Apr

- Der Satz besitzt starke, fast nie gegebene Voraussetzungen (Analytizität)

- Der Satz liefert keine Aussage über den Radius r:

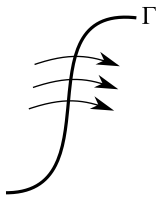
$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ im } \mathbb{R}^2 \\ u = 0 \text{ und } \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\varepsilon \delta^2}{x_1^2 + \delta^2} \text{ auf } \Gamma = \{x_2 = 0\}, \varepsilon, \delta > 0 \end{cases}$$

$\frac{\varepsilon \delta^2}{x_1^2 + \delta}$ ist analytisch und beschränkt durch ε. Eine Lösung ist gegeben durch

$$u(x) = -\frac{\varepsilon \delta}{4} \ln \frac{x_1^2 + (x_2 - \delta)^2}{x_1^2 + (x_2 + \delta)^2}$$

$\Rightarrow$ u explodiert um $(0, \delta), (0, -\delta)$, egal, wie klein ε ist.

- Γ mit $\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha \nu^\alpha \neq 0$ auf Γ heißt **nichtcharakteristisch**. In einer PDGL fließt Information entlang so genannter **charakteristischer Kurven**. Γ nichtcharakteristisch bedeutet, dass Information quer zu Γ fließt. Ein tangentialer Informationsfluss hilft uns nicht.

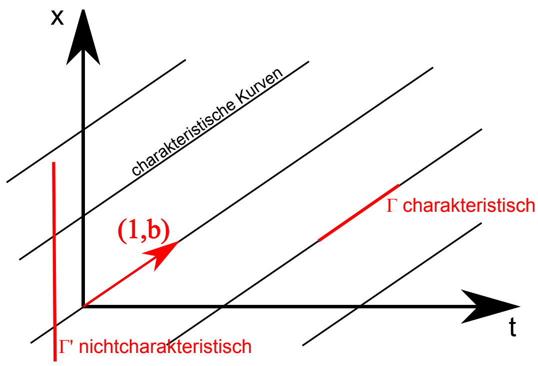


Beispiel:

$$u_t + b \cdot \nabla u = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial u / \partial t \\ \partial u / \partial x_1 \\ \vdots \\ \partial u / \partial x_1 \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$ u ist konstant entlang der Richtung $\begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix}$.

$\Rightarrow$ Anfangsdaten werden entlang charakteristischer Kurven mit Richtung $\begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix}$ transportiert.



Beweis
Beweisschritte:

(1) Reduktion auf $\Gamma = \{x_n = 0\}$.

- Wähle r, ψ, ϕ analytisch mit $\psi = \phi^{-1}, \phi(\Gamma \cap B_r(x_0)) \subset \{x_n = 0\}$. Γ ist analytisch auf $B_\rho(x_0)$ mit $\rho \geq r$.
- $v(x) = u(\psi(x)), u(x) = v(\phi(x))$
- v erfüllt die quasilineare PDGL

$$\sum_{|\alpha|=k} b_\alpha(D^{k-1}v(x), \dots, v(x), x) D^\alpha v(x) + b_0(D^{k-1}v(x), \dots, v(x), x) = 0$$

mit b_α, b_0 analytisch und

ϕ_i: i-te Komponente

- $b_{(0,\dots,0,k)} \neq 0$ auf $\{x_n = 0\}$, denn:

$$D^\alpha u = \frac{\partial^k v}{\partial x_n^k}(D\phi_n)^\alpha + \text{ Terme ohne } \frac{\partial^k v}{\partial x_n^k}$$

$$\Rightarrow 0 = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha D^\alpha u + a_0 = \underbrace{\left(\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha (D\phi_n)^\alpha\right)}_{b_{(0,\dots,0,k)}} \frac{\partial^k v}{\partial x_n^k} + \text{Terme ohne } \frac{\partial^k v}{\partial x_n^k}.$$

$\|$: parallel

$\Rightarrow D\phi_n \parallel \nu$, $\nu = (0,\dots,0,1)$.
$\Rightarrow D\phi_n = \kappa\nu, b_{(0,\dots,0,k)} = \kappa^n \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha \nu^\alpha \neq 0$ mit einer Konstanten κ.

Wir haben also:

$$0 = \sum_{|\alpha|=k} b_\alpha D^\alpha v + b_0, b_{(0,\dots,0,k)} \neq 0, \quad v(x) = g_0(\psi(x))$$

$$\frac{\partial v}{\partial x_n} = \frac{\partial u \circ \psi}{\partial x_n} \text{ hängt ab von } g_1, D\psi$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial^{n-1} v}{\partial x_n^{k-1}} = \frac{\partial^{k-1}(u \circ \psi)}{\partial x_n^{k-1}} \text{ hängt ab von } g_1, g_2, \dots, g_{k-1}, D\psi, D^2\psi, \dots, D^{k-1}\psi$$

$$v(x) =: h_0(x), \quad \frac{\partial v}{\partial x_n}(x) =: h_1(x), \quad \dots, \quad \frac{\partial^{k-1} v}{\partial x_n^{k-1}} =: h_{k-1}(x) \text{ auf } \Gamma$$

alles analytisch um 0.

(2) Ermitte partielle Ableitungen von v auf $\{x_n = 0\}$ (bzw. von u auf Γ).
1. Ordnung normal: $\frac{\partial v}{\partial x_n}(0) = h_1(0)$.
1. Ordnung tangential: $\frac{\partial v}{\partial x_i}(0) = \frac{\partial h_0}{\partial x_i}(0), i \neq n$
2. Ordnung: $\frac{\partial^2 v}{\partial x_n^2}(0) = h_2(0)$
$\frac{\partial^2 v}{\partial x_n \partial x_i}(0) = \frac{\partial h_1}{\partial x_i}(0), i \neq n$
$\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}(0) = \frac{\partial^2 h_0}{\partial x_i \partial x_j}(0), i, j \neq n$
j. Ordnung: $D^\alpha v = \frac{\partial^{|\alpha|-\alpha_n} h_{\alpha_n}}{\partial x^{\alpha'}}$ mit $\alpha' = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, 0)$ für $j < k$
k. Ordnung: analog zu j, außer

$$\frac{\partial^k v}{\partial x_n^k} = -\frac{1}{b_{(0,\dots,0,k)}}\left[\sum_{\substack{|\alpha|=k \\ \alpha \neq (0,\dots,0,k)}} b_\alpha D^\alpha v + b_0\right] =: h_k$$

höhere Ordnung: analog zu k, nur dieses Mal benutze $\frac{\partial^{(\alpha_n - k)}}{\partial x_n^{\alpha_n - k}}$ $(*)$. $\Rightarrow$ h Normalenableitungen auf der nichtcharakteristischen Hyperfläche legen alle partiellen Ableitungen auf der Fläche fest.

15. Apr

(3) Zeige Konvergenz der Taylor-Entwicklung von v um $x = 0$ (bzw. von u um x_0). Die geht einfacher bei 1.-Ordnungs-Systemen:
   - o.B.d.A. sind $h_0, h_1, \dots, h_{k-1} = 0$ (ansonsten subtrahiere eine geeignete analytische Funktion von v)
   - transformiere in 1. Ordnungs-System

$$w := \left(v, \frac{\partial v}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial v}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^{k-1} v}{\partial x_n^{k-1}}\right) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\Rightarrow \begin{cases} w_{x_n} = \sum_{j=1}^{n-1} \underbrace{B_j(w,x)}_{\in \mathbb{R}^{n \times m}} w_{x_j} + \underbrace{c(w,x)}_{\in \mathbb{R}^m} \\ w = 0 \text{ auf } \Gamma \end{cases}$$

B_j und c sind analytisch, d.h.

$$B_j(z,x) = \sum_{\gamma,\delta} B_{j\gamma\delta} z^\gamma x^\delta, \qquad c(z,x) = \sum_{\gamma,\delta} c_{\gamma\delta} z^\gamma x^\delta$$

mit einem Konvergenzradius R, d.h. $|x^2 + |z^2| < R^2$.

- o.B.d.A. sind B_j und c unabhängig von x_n (ansonsten füge weitere Komponente w^{m+1} zu w hinzu mit $w^{m+1} = x_n$, d.h. $w^{m+1}_{x_n} = 1$ als zusätzliche Zeile in $(*)$.)
- Potenzreihenansatz: $w = \sum\limits_\alpha w_\alpha x^\alpha$.
- Drücke w_α aus in Termen der $B_{j\gamma\delta}, c_{\gamma\delta}$:
  - $\alpha_n = 0$:
  $$w_\alpha = \frac{D^\alpha w(0)}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!} = 0,$$
  da $w = 0$ auf $\{x_n = 0\}$.
  - $\alpha_n = 1$: PDGL $(*)$:
  $$\begin{aligned} w_{x_n x_i} &= \sum_{j=1}^{n-1} \left(B_j(w,x) w_{x_j x_i} + B_{j,x_i}(w,x) w_{x_j} + \sum_{p=1}^m B_{j,w^p}(w,x) w^p_{x_i} w_{x_j} \right) \\ &\quad + c_{x_i}(w,x) + \sum_{p=1}^m c_{w^p}(w,x) w^p_{x_i} \\ &= c_{x_i}(w,x) \text{ für } i \neq n, \quad \text{da } w_{x_j x_i} = 0, w_p = 0 \end{aligned}$$
  $$\Rightarrow w_\alpha = \frac{D^\alpha w(0)}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!} = \frac{D^{\alpha'} c(\overbrace{w(0)}^{=0}, 0)}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!} \text{ mit } \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha' = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix}$$
  - allgemeines α:
  $$\begin{aligned} D^\alpha w = D^{\alpha'} \frac{\partial\, \alpha_n}{\partial\, x_1^{\alpha_n}} w = D^{\alpha'} \frac{\partial^{\alpha_n - 1}}{\partial\, x_n^{\alpha_n - 1}} w_{x_n} &\overset{(*)}{=} \widetilde{P}_\alpha(\ldots, D_z^\gamma D_x^\delta B_j, \ldots, D_z^\gamma D_x^\delta c, \ldots D^\beta w, \ldots) \\ &= P_\alpha(\ldots, B_{j\gamma\delta}, \ldots, c_{\gamma\delta}, \ldots, w_\beta, \ldots) \end{aligned}$$
  für ein Polynom P_α mit nicht negativen Koeffizienten und $\beta_n \leq \alpha_n - 1$ für alle Multiindizes β in den Argumenten
  $$w_\alpha = \frac{D^\alpha w}{\alpha!} = \frac{1}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!} P_\alpha(\cdots)$$
  - Wähle $K > 0$ groß genug und $s \leq \frac{R}{\sqrt{m+n}}$ mit R Konvergenzradius von B_j, c, sodass
  $$|B_{j\gamma\delta}|, |c_{\gamma\delta}| < \frac{K|\alpha|!}{\alpha_1! \cdots \alpha_n! s^{|\alpha|}}$$
  Dies ist möglich, da für $\sqrt{z^2 + x^2} < R$ gilt: $|B_{j\gamma\delta} z^\gamma x^\delta|, |c_{\gamma\delta} z^\gamma x^\delta| \leq K$ für ein $K > 0 \Rightarrow |B_{j\gamma\delta}|, |c_{\gamma\delta}| \leq \frac{K}{z^\gamma x^\delta} \leq \frac{K}{s^{|\alpha|}} \leq \frac{K|\alpha|!}{\alpha! s^{|\alpha|}}$. Definiere:
  $$B_j^* := \frac{Ks}{s - (x_1 + \ldots + x_{n-1}) - (z_1 + \ldots + z_n)} \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix} = K \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{m+n-1}} \frac{|\alpha|!}{\alpha! \cdot s^{|\alpha|}} \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$
  $$c^* := \frac{Ks}{s - (x_1 + \ldots + x_{n+1}) + (z_1 + \ldots + z_n)} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = K \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{m+n-1}} \frac{|\alpha|!}{\alpha! \cdot s^{|\alpha|}} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$
  B_j^*, c^* sind analytisch und haben Konvergenzradius $\frac{s}{\sqrt{m+n}}$.

– Betrachte $w^*_{x_n} = \sum\limits_{j=1}^{n-1} B^*_j(w^*, x) w^*_{x_j} + c^*(w^*, x)$ mit $w^* = 0$ auf $\{x_n = 0\}$. Dies hat die Lösung

$$w^*(x) = \frac{1}{mn}(s - (x_1 + \ldots + x_{n-1})) - \sqrt{(s - (x_1 + \ldots + x_{n-1}))^2 - 2mnKsx_n} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

w^* ist analytisch für $|x| < r$ mit r klein genug, d.h. $w^* = \sum\limits_{\alpha} w^*_\alpha x^\alpha$.

$$\begin{aligned} |w^k_\alpha| &= \frac{1}{\alpha!} P_\alpha(\ldots, B_{j\gamma\delta}, \ldots, c_{\gamma\delta}, \ldots, w_\beta, \ldots) \\ &\leq \frac{1}{\alpha!} P_\alpha(\ldots, |B_{j\gamma\delta}|, \ldots, |c_{\gamma\delta}|, \ldots, |w_\beta|, \ldots), \text{ da Koeffizienten nicht negativ} \\ &\leq \frac{1}{\alpha} P_\alpha(\ldots, B^*_{j\gamma\delta}, \ldots, c^*_{\gamma\delta}, \ldots, w^*_\beta, \ldots) \\ &= (w^*_\alpha)^k \text{ per Induktion, da } \beta_n \leq \alpha_n - 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow w^*$ majorisiert $w(x) = \sum_\alpha w_\alpha x^\alpha$.
$\Rightarrow$ auch $\sum\limits_\alpha w_\alpha x^\alpha$ konvergiert um 0. □

2.6. Beispiel

[1] Die PDGL $u_{x_1} + u_{x_2} = 1$ hat die allgemeine Lösung $u = \frac{x_1 + x_2}{2} + F(x_1 - x_2)$ für $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beliebig.

- $$\left.\begin{cases} u_{x_1} + u_{x_2} = 1 \\ u = 0 \text{ auf } \Gamma = \{x_1 = -x_2\} \end{cases}\right\} \Rightarrow u(\alpha, -\alpha) = F(2\alpha) = 0 \Rightarrow F \equiv 0$$
  $$\nu = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \sum_{|\alpha|=1} a_\alpha \nu^\alpha = a_{(1,0)} \nu_1^1 \nu_2^0 + a_{(0,1)} \nu_1^0 \nu_2^1 = \nu_1 + \nu_2 = \sqrt{2} \neq 0$$
  Also ist Γ nichtcharakteristisch.

- $$\left.\begin{cases} u_{x_1} + u_{x_2} = 1 \\ u = 0 \text{ auf } \Gamma = \{x_1 = x_2\} \end{cases}\right\} \Rightarrow u(\alpha, \alpha) = \alpha + F(0) = 0 \Rightarrow \lightning$$
  $$\nu = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \sum_{|\alpha|=1} a_\alpha \nu^\alpha = \nu_1 + \nu_2 = 0$$
  Also ist Γ charakteristisch.

- $$\left.\begin{cases} u_{x_1} + u_{x_2} = 1 \\ u = x_1 \text{ auf } \Gamma = \{x_1 = x_2\} \end{cases}\right\} \Rightarrow u(\alpha, \alpha) = \alpha + F(0) = \alpha \Rightarrow F(0) = 0 \Rightarrow \text{ unendlich viele Lösungen}$$

3. Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung

Motivation: Linearer Fall
Betrachte 22. Apr

$$a(x) \cdot \nabla u(x) + a_0(x) = 0$$

mit Randdaten auf glatter $(n-1)$-dimensionaler Hyperfläche $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$, $u(x) = g(x)$ auf Γ.
Die Richtungsableitung von u in Richtung a ist $a(x) \cdot \nabla u(x) = -a_0(x)$, d.h. wir wissen, wie sich u entlang charakteristischer Kurven $s \mapsto x(s)$ ändert mit

$$\dot{x}(s) = a(x(s)) \tag{3.0}$$

Sei Γ parametrisiert durch $x_0\colon \mathbb{R}^{n-1} \to \Gamma$. Zu $\widehat{x} \in \mathbb{R}^n$ können wir $s \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^{n-1}$ finden, sodass $\widehat{x} = x(s)$ für eine Lösung $x(s)$ von (3) mit $x(0) = x_0(y)$, d.h. wir reparametrisieren $\mathbb{R}^n$ durch eine Funktion $\widehat{x}\colon \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (y,s) \mapsto \widehat{x}(y,s)$. Dann gilt:

$$u(\widehat{x}(y,s)) = \underbrace{u(\widehat{x}(y,0))}_{g(\widehat{x}(y,0))} + \int\limits_0^s \underbrace{\frac{\partial\, u(\widehat{x}(y,t))}{\partial\, \tau}}_{=-a_0(\widehat{x}(y,\tau))} d\tau; \quad u(x) = (u \circ \widehat{x}) \circ \widehat{x}^{-1}$$

3.1. Bemerkung

Damit u auf $\mathbb{R}^n$ definiert ist, muss $\widehat{x}^{-1}$ definiert sein. Für lokale Invertierbarkeit ist hinreichend: [2]

$$\det(D\widehat{x}) \neq 0$$

Auf Γ ist $\det(D\widehat{x}(y,0) = \det(\underbrace{Dx_0(y)}_{\in R^{n\times m-1}} |a(x_0(y)))$, d.h. wir brauchen $a(x_0(y)) \notin \operatorname{span}(Dx_0(y))$. Die Spalten von $Dx_0(y)$ spannen den Tangentialraum von Γ an $x_0(y)$ auf. Damit dies ungleich 0 ist, muss $a \notin \operatorname{span}(Dx_0)$, d.h. $a \cdot \nu \neq 0$ mit ν als Normale auf Γ, d.h. Γ ist nichtcharakteristisch.

3.2. Beispiel

Betrachte [3]

$$\begin{cases} u_{x_1} + u_{x_2} = 1 \text{ auf } \mathbb{R}^2 \\ u = 0 \text{ auf } \Gamma = \{x_1 + x_2 = 0\} \end{cases}$$

Charakteristische Kurven: $\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x(s) = \begin{pmatrix} c_1 + s \\ c_2 + s \end{pmatrix}$.
Parametrisiere Γ:

$$x_0(y) := \begin{pmatrix} y \\ -y \end{pmatrix} = x_0(y)$$

$\Rightarrow \widehat{x}(y,s) = x(s)$ für die Kurve $x(s)$ mit $x(0) = x_0(y) \Rightarrow \widehat{x}(y,s) = \begin{pmatrix} y+s \\ -y+s \end{pmatrix}$
$\Rightarrow \widehat{x}^{-1}(x) = (\frac{x_1 - x_2}{2}, \frac{x_1+x_2}{2})$
$\Rightarrow u(\widehat{x}(y,s)) = 0 + \int\limits_0^s 1 d\tau = s$
$\Rightarrow u(x) = \underbrace{(u \circ \widehat{x})}_{s} \circ \widehat{x}^{-1}(x) = \frac{x_1+x_2}{2}$

Nichtlinearer Fall
Betrachte

$$0 = F(\nabla u(x), u(x), x), \quad u = g \text{ auf } \Gamma, \quad F, g, \Gamma\ C^2\text{-glatt} \tag{3.1}$$

Idee: Information fließt entlang charakteristischer Kurven
Ziel: Finde charakteristische Kurven und wandele die PDGL um in ein System von gewöhnlichen DGL entlang der Kurven.
Notation:

- Für eine Kurve $x(s)$ schreibe $z(s) := u(x(s))$ und $p(s) = \nabla u(x(s))$, d.h.
$$0 = F(p(s), z(s), x(s))$$
- $\dot{} = \frac{\partial}{\partial s}$
- F_p, F_z, F_x sind partielle Ableitungen von F nach erstem, zweitem und drittem Argument.

Suche GDGL für x, p, z.

3.3. Theorem: Charpits Gleichungen

[4] Sei $u \in C^2(\Omega)$ eine Lösung von (3.1). Entlang von Kurven $x(s)$ in Ω mit
$$\dot{x} = F_p \tag{3.2}$$
gilt
$$\dot{z} = p \cdot F_p \tag{3.3}$$
$$\dot{p} = -pF_z - F_x \tag{3.4}$$
Diese GDGLs heißen **Charpits** oder **charakteristische Gleichungen**, Kurven $x(s)$ oder $(x(s), z(s), p(s))$ heißen **charakteristische Kurven**.

Beweis
Betrachte beliebige Kurve $x(s)$. Dann gilt:
$$\dot{z}(s) = \nabla u(x(s)) \cdot \dot{x}(s) = p(s) \cdot \dot{x}(s)$$
$$\dot{p}(s) = D^2 u(x(s))\dot{x}(s)$$
Um D^2u loszuwerden, differenziere (3.1) nach x:
$$0 = \frac{d}{dx} F(\nabla u(x), u(x), x) = D^2 u F_p + F_z \overbrace{\nabla u}^{p} + F_x$$
Wähle die Kurve $x(s)$, sodass $\dot{x}(s) = F_p(p(s), z(s), x(s))$, so erhalten wir
$$\dot{p}(s) = -F_z p - F_x \qquad \dot{z} = p \cdot F_p$$
. □

(3.2), (3.3) und (3.4) können mit Anfangswerten $x(0), z(0), p(0)$ gelöst werden. Sei Γ parametrisiert durch $x_0(y), y \in \mathbb{R}^{n-1}$. Werte für $x(0)$ und $z(0)$ sind auf Γ gegeben durch $x(0) = x_0(y) \in \Gamma$ und $z(0) = g(x_0(y))$. $p(0)$ erhalten wir durch Lösen von
$$\left\{\begin{array}{ll} 0 = F(p(0), z(0), x(0)) & \text{PDGL} \\ 0 = \nabla x_0(y) p(0) - \nabla_y g(x_0(y)) & \text{Abl. von } u(x_0(y)) = g(x_0(y)) \text{ nach } y \end{array}\right\} \tag{3.5}$$
wobei
$$\nabla x_0(y) = \begin{pmatrix} \partial_{y_1} x_{01} & \cdots & \partial_{y_1} x_{0n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{y_{n-1}} x_{01} & \cdots & \partial_{y_{n-1}} x_{0n} \end{pmatrix}$$
Die Lösung von (3.2), (3.3) und (3.4) für diese Anfangswerte liefert eine Parametrisierung $\widehat{x}(y, s)$ des $\mathbb{R}^n$ mit $\widehat{x}(y, s) = x(s)$ für die Kurve $x(s)$ mit $x(0) = x_0(y)$ sowie Funktionen $z(y, s), p(y, s)$.

3.4. Definition: nichtcharakteristisch

[5] Eine glatte $(n-1)$-dimensionale Hyperfläche $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ heißt **nichtcharakteristisch** zu (3.1), wenn für die Einheitsnormale ν an Γ gilt:
$$F_p(p, z, x) \cdot \nu(x) \neq 0 \text{ für alle } x \in \Gamma, z \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{R}^n$$

3.5. Lemma

Wenn gilt: [6]

- Γ ist nichtcharakteristisch
- Für ein gegebenes $y_0 \in \mathbb{R}^{n-1}$ existiert eine Lösung von (3.5)

dann:

- kann (3.5) auch in einer Umgebung U von y_0 nach $p(0)$ gelöst werden
- existieren ein offenes Intervall $I = (-\delta, \delta)$ und eine Umgebung V von $x_0(y_0)$, sodass für alle $x \in V$ ein $y \in U$ und $s \in I$ existiert mit $x = \widehat{x}(y, s)$. $\widehat{x}^{-1}$ ist C^2.

Beweis

- Existenz von $p(0)$ folgt direkt aus dem Satz über implizite Funktionen. (Beachte:
$$\frac{\partial}{\partial\, p(0)} \begin{pmatrix} F(p(0), z(0), x(0)) \\ \nabla x_0(y) p(0) - \nabla_y g(x_0(y)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_p \\ \nabla x_0(y) \end{pmatrix}$$
hat vollen Rang.)
- Existenz und Glattheit von $\widehat{x}^{-1}$ folgt aus dem Satz über inverse Funktionen, da $\det(y_0, 0) = \det \begin{pmatrix} \nabla x_0 \\ F_p \end{pmatrix} \neq 0$
$\square$

3.6. Bemerkung

Auch hier bedeutet nichtcharakteristisch, dass auf Γ nach den partiellen Ableitungen von u gelöst werden kann. [7]

3.7. Theorem: Lokale Existenz

Seien [8]

- Γ, g, F glatt, also C^2
- Γ nichtcharakteristisch und
- es gebe ein $y_0 \in \mathbb{R}^{n-1}$ und ein $p(0) \in \mathbb{R}^n$, das (3.5) löst.

Dann existiert auf der Umgebung V von $x_0(y_0)$ aus Lemma (3.5) eine C^2-Lösung u von (3.1) und (3.2). Es ist $u(x) = z(y, s)$ und $\nabla u(x) = p(y, s)$ für $(y, s) = \widehat{x}^{-1}(x)$.

Beweis

1. Nach Lemma (3.5) existiert $\widehat{x}^{-1}$ auf V sowie $z(y, 0) = g(x_0(y)), p(y, 0)$ mit $F(p(y, 0), z(y, 0), \widehat{x}(y, 0)) = 0$ und $\nabla x_0(y) p(0) - \nabla_y g(x_0(y)) = 0$. Löse Charpits Gleichungen mit diesen Anfangswerten $\Rightarrow z(y, s), p(y, s)$. 25. Apr
2. Zeige: $f(y, s) := F(p(y, s), z(y, s), \widehat{x}(y, s)) = 0$.
$f(y, 0) = 0, \dot{f}(y, s) = F_p \cdot \dot{p} + F_z \cdot \dot{z} + F_x \dot{\widehat{x}} = F_p(-pF_z - F_x) + F_z p F_p + F_x \cdot F_p = 0$
3. Zeige $p(\widehat{x}^{-1}(x)) = \nabla u(x)$ für $u(x) = z(\widehat{x}^{-1}(x))$.
   - $\cdot z(y, s) = p(y, s) \cdot \dot{\widehat{x}}(y, s)$
   - $z_y(y, s) = p^T(y, s) \widehat{x}_y(y, s)$, denn $r(s) := z_y(y, s) - p^T(y, s) \widehat{x}_y(y, s)$ erfüllt
   $$\begin{aligned} \dot{r}(s) &= \underbrace{\dot{z_y}(y, s)}_{p_y^T \dot{\widehat{x}} + p^T \dot{\widehat{x}}_y} - \dot{p}^T(y, s) \widehat{x}_y(y, s) - p^T(y, s) \dot{\widehat{x}}_y(y, s) = p_y^T F_p - (-pF_z - F_x)^T \widehat{x}_y \\ &= \frac{\partial}{\partial\, y} \underbrace{F(p(y, s), z(y, s), \widehat{x}(y, s))}_{=0} + \underbrace{p^T F_z \widehat{x}_y - F_z z_y}_{-F_z r} \end{aligned}$$
   mit Anfangswert $r(0) = \underbrace{z_y(y, 0)}_{\nabla_y g(x_0(y))} - p^T(y, 0) \underbrace{\widehat{x}_y(y, 0)}_{\nabla_y x_0(y)} = 0. \Rightarrow r \equiv 0.$
   - $u_x = z_y y_x + z_s s_x = p^T \widehat{x}_y y_x + p^T \widehat{x}_s s_x = p^T \underbrace{(\widehat{x}_y y_x + \widehat{x}_s s_y)}_{\widehat{x}_x} = p^T, p = \nabla u.$ $\square$

$z \equiv u \circ \widehat{x}^{-1}$
$z_s = \nabla u \cdot \widehat{x}_s = p \cdot \widehat{x}_s$
$z_y = \nabla u \widehat{x}_y = p \cdot \widehat{x}_y$

3.8. Beispiel

[9] Löse das Cauchy-Problem

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 1 & \text{auf } (0,\infty) \times \mathbb{R} \\ u = x & \text{auf } \Gamma = \{t = 0\} \end{cases}$$

Charakteristische Kurven sind gegeben durch $\frac{\partial}{\partial s} \begin{pmatrix} (t,x) \\ z \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1,z) \\ P - 1 + zp_2 \\ -p_2 p \end{pmatrix}$, also

$$\begin{pmatrix} (t,x) \\ z \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (t(0) + s, x(0) + z(0)s + \frac{p_1(0)+z(0)p_2(0)}{2} s^2 \\ p_1(0)s + z(0)(1 + p_2(0)s) \\ \frac{p}{1+p_2(0)s} \end{pmatrix}.$$

Parametrisiere Γ durch $x_0(y) = (0, y)$. Das liefert Anfangswerte $(t(0), x(0)) = x_0(y) = (0, y)$ und $z(0) = y$. Lösen von (3.5) liefert $p(0) = \begin{pmatrix} 1-y \\ 1 \end{pmatrix}$. Insgesamt ergibt sich:

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} (t,x) \\ z \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s, y + ys + \frac{s^2}{2} \\ y + s \\ \frac{1}{1+s} \begin{pmatrix} 1-y \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \Rightarrow (s,y) = \left(t, \frac{x - \frac{t^2}{2}}{1+t}\right) \Rightarrow u(t,x) = z(y,s) = y + s = t + \frac{x - \frac{t^2}{2}}{1+t}$$

3.9. Bemerkung

[10] Für quasilineare PDGL der Form

$$b(u(x), x) \cdot \nabla u(x) + c(u(x), x) = 0$$

können die charakteristischen Gleichungen (3.2), (3.3) und (3.4) vereinfacht werden: $b(z(s), x(s)) \cdot p(s) + c(z(s), x(s)) = 0$ impliziert:

$$\begin{aligned} \dot{x}(s) &= b(z(s), x(s)) \\ \dot{z}(s) &= -c(z(s), x(s)) \\ \dot{p}(s) &= -(b_z \cdot p + c_z) \cdot p - b_x p - c_x \end{aligned} \tag{3.6}$$

Die ersten beiden Gleichungen legen bereits x und z fest, sodass (3.6) ignoriert werden kann.

4. Definitionsgebiet

Den Bereich, auf dem die Lösung einer PDGL wohldefiniert ist, nennen wir Definitionsbereich. Dieser ist im Allgemeinen beschränkt – für Probleme erster Ordnung durch verschiedene Umstände:

- Die charakteristischen Kurven $x(s)$, die Γ schneiden, durchdringen nicht ganz $\mathbb{R}^n$. Nur der von solchen charakteristischen Kurven erreichte Teil des $\mathbb{R}^n$ kann zum Definitionsgebiet gehören.
- Entlang einer charakteristischen Kurve kann die Lösung $z(s)$ der GDGL aufhören zu existieren.
- Charakteristische Kurven $x(s)$ können sich schneiden. Da zu jedem $x(s)$ auch ein Funktionswert $z(s)$ der Lösung gehört, würden an einem Schnittpunkt mehrere Funktionswerte vorliegen. An den Schnittpunkten ist die Parametrisierung $\widehat{x}$ des $\mathbb{R}^n$ nicht mehr wohldefiniert, d.h. wir haben typischerweise $\det D\widehat{x} = 0$.

4.1. Beispiel

Betrachte das Cauchy-Problem [11]

$$\begin{cases} u_{x_1} + u_{x_2} = u^3 \\ u = x_2 \text{ auf } \Gamma = \{x_1 = 0, 0 < x_2 < 3\} \end{cases}$$

Parametrisiere Γ durch $x_0(y) = (0, y), 0 < y < 3$. Die (vereinfachten) charakteristischen Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial s} \begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1,1) \\ z^3 \end{pmatrix}$$

mit Anfangswerten $x(0) = (0, y), z(0) = y$ haben die Lösung

$$\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (s, s+y) \\ y/\sqrt{1-2y^2 s} \end{pmatrix}$$

Das Definitionsgebiet liegt zwischen den charakteristischen Kurven durch den Rand von Γ, $x(s) = (s, s)$ und $x(s) = (s, 3+s)$, und endet auf jeder charakteristischen Kurve, wenn $z \to \infty$, d.h. für $s = \frac{1}{2y^2}$. Insgesamt ergibt sich das Definitionsgebiet

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + 3 > x_2 > x_1, x_2 < x_1 + \frac{1}{\sqrt{2x_1}} \right\}$$

4.2. Beispiel

Betrachte das Cauchy-Problem [12]

$$\begin{cases} u_t + u u_x = 0 \\ u(t,x) = \sin(x) \text{ auf } \Gamma = \{0\} \times (0, 2\pi) \end{cases}$$

Die Lösung der charakteristischen Gleichungen liefert

$$\begin{pmatrix} (t,x) \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (s, y + s\sin(y)) \\ \sin(y) \end{pmatrix}$$

Entlang der Kurve mit $0 = \det D\widehat{x} = \det(\partial(t,x)/\,\partial(y,s)) = -1 - s\cos(y)$ beginnen die charakteristischen Kurven, sich zu schneiden. Das Definitionsgebiet liegt zwischen den randständigen charakteristischen Kurven $x = 0$ und $x = 2\pi$ und der Kurve $\{(t(y,s), x(y,s)) : s = -\frac{1}{cos(y)}\}$,

$$\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 2\pi, t < -\frac{1}{\cos(y)} \text{ für } x = y - \tan(y)\}$$

5. Einschub: Satz von Gauß

29. Apr Wir möchten letztendlich auch nicht-glatte Funktionen u als (verallgemeinerte) Lösungen zulassen. Hierzu nutzen wir Integration, um unerwünschte Ableitungen zu eliminieren. Die Grundidee im Eindimensionalen ist folgende: Gegeben sei:

$$u'(x) = f(x, u(x)) \text{ auf } \Omega = (a, b)$$

Multipliziere beide Seiten mit einer glatten Funktion ψ und integriere partiell:

$$u(b)\psi(b) - u(a)\psi(a) - \int_a^b \psi' u dx = \int_a^b f(x, u(x)) dx$$

Diese Gleichung macht auch für nicht differenzierbares u Sinn. Im $\mathbb{R}^n$ benötigen wir den folgenden Satz:

5.1. Theorem: Satz von Gauß

[13] Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen mit stückweise stetig differenzierbarem Rand. Ist u stetig differenzierbar, gilt

$$\int_\Omega u_{x_i}(x) dx = \int_{\partial\,\Omega} u(x)\nu_i(x) dx$$

für die nach außen zeigende Einheitsnormale ν auf $\partial\,\Omega$.

Beweis

1. Lokalisierung: Überdecke $\partial\,\Omega$ durch offene Mengen $U_1, \dots, U_l$, sodass $\partial\,\Omega \cap U_j$ der Graph einer stückweise stetig differenzierbaren Funktion ist und $\Omega \cap U_j$ auf einer Seite des Graphen liegt. Füge U_0 mit $\overline{U_0} \subseteq \Omega$ hinzu, sodass $U_0, \dots, U_l$ ganz Ω überdecken. Wähle hierzu eine Partition der Eins, d.h. unendlich oft differenzierbare Funktionen $\eta_0, \dots, \eta_l$ mit Träger in $U_0, \dots, U_l$ und $\sum_{j=0}^l \eta_j = 1$. Es bleibt zu zeigen, dass $\sum_{j=0}^l \int_\Omega (\eta_j u)_{x_i} dx = \sum_{j=0}^l \int_{\partial\,\Omega} \eta_j u \nu_i dx$ bzw.

$$\int_\Omega \nabla(\eta_j u) dx = \int_{\partial\,\Omega} \eta_j u \nu dx$$

2. Koordinatentransformation: Nach einer orthogonalen Koordinatentransformation dürfen wir annehmen:

$$U_j \cap \Omega = \{x \in \Omega : x_n > g(\tilde{x})\}$$

für $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_{n-1})$ und eine stückweise glatte Funktion $g\colon \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$. Die Normale an $\partial\,\Omega \cap U_j$ ist dann gegeben durch

$$\nu(\tilde{x}, g(\tilde{x})) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla g(\tilde{x})|^2}} \cdot \begin{pmatrix} \nabla g(\tilde{x}) \\ -1 \end{pmatrix}.$$

3. Partielle Integration: Mit $v(\tilde{x}, h) := (\eta_j u)(\tilde{x}, g(\tilde{x}) + h)$ ist

$$\begin{aligned} &\partial_n\, v(\tilde{x}, h) = \partial_n (\eta_j u)(\tilde{x}, g(\tilde{x}) + h), \\ &\partial_i\, v(\tilde{x}, h) = \partial_i (\eta_j u)(\tilde{x}, g(\tilde{x}) + h) + \partial_i\, g(\tilde{x})\, \partial_n (\eta_j u)(\tilde{x}, g(\tilde{x}) + h) \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla(\eta_j u)(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^\infty \nabla(\eta_j u)(\tilde{x}, g(\tilde{x}) + h) dh d\tilde{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^\infty \left(\nabla v - \partial_n\, v \begin{pmatrix} \nabla g \\ 0 \end{pmatrix} \right) (\tilde{x}, h) dh d\tilde{x} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \left(\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_i\, v(\tilde{x}, h) d\tilde{x}, dh \right) e_i - \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_0^\infty \partial_n\, v(\tilde{x}, h) dh \right) \end{aligned}$$

Durch partielle Integration bzgl. x_i für $i < n$ ergibt sich aufgrund des kompakten Trägers von v:

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_i\, v d\tilde{x} = 0$$

und durch partielle Integration bzgl. h:

$$\int_0^\infty \partial_n \, v(\tilde{x}, h) dh = -v(\tilde{x}, 0) = -(\eta_j u)(\tilde{x}, g(\tilde{x}))$$

$\square$

5.2. Bemerkung: Varianten des Satzes

Der Satz hat verschiedene Varianten: [14]

- $\int_\Omega \nabla u(x) dx = \int_{\partial\,\Omega} u(x)\nu(x) dx$
- $\int \operatorname{div} b(x) dx = \int_{\partial\,\Omega} b(x) \cdot \nu(x) dx$ für stetig differenzierbares $b \colon \Omega \to \mathbb{R}^n$
- $\int_\Omega u v_{x_i} + v u_{x_i} dx = \int_{\partial\,\Omega} u v \nu_i dx$ für u, v stetig differenzierbar
- $\int_\Omega u \nabla v dx = \int_{\partial\,\Omega} u v \nu dx - \int_\Omega v \nabla u dx \ldots$
- Der Satz gilt auch für Lipschitz-Rand $\partial\,\Omega$ und schwach differenzierbare Funktionen.

6. Schwache Lösungen

2. Mai Frage: Wie können auch nicht-glatte Funktionen u als (verallgemeinerte) Lösungen aufgefasst werden?
Idee: Nutze partielle Integration, um Ableitungen loszuwerden.
Häufig kann die PDGL in **Erhaltungsform** oder **Divergenzform** geschrieben werden:

$$\operatorname{div} G(x, u(x)) = R(x, u(x)) \tag{6.1}$$

für Funktionen $G\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, R\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wir wollen (6.1) auf einem Gebiet Ω lösen für Cauchy-Daten

$$u = g \text{ auf } \Gamma \subseteq \partial\,\Omega$$

6.1. Beispiel

[15] $a(x)u_{x_1} + uu_{x_2} = c(x,u)$ ist äquivalent zu $(au)_{x_1} + \left(\frac{u^2}{2}\right)_{x_2} = c(x,u) + a_{x_1}u$ und kann in Erhaltungsform geschrieben werden für $G(x,u) = \begin{pmatrix} au \\ u^2/2 \end{pmatrix}, R(x,u) = c(x,u) + a_{x_1}u.$
Wir multiplizieren (6.1) mit einer sogenannten **Testfunktion**

$$\psi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \psi \text{ ist glatt}, \psi = 0 \text{ auf } \partial\,\Omega \setminus \Gamma$$

und integrieren partiell:

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \psi(x)(\operatorname{div} G(x,u(x)) - R(x,u(x)))dx \\
&= \int_{\partial\,\Omega} \psi(x)G(x,u(x)) \cdot v(x)dx - \int_\Omega \nabla\psi(x) \cdot F(x,u(x)) + \psi(x)R(x,u(x))dx \\
&= \int_\Gamma \psi(x)G(x,g(x)) \cdot v(x)dx - \int_\Omega \nabla\psi(x) \cdot G(x,u(x)) + \psi(x)R(x,u(x))dx
\end{aligned}$$

Die Gleichung macht auch für nicht-differenzierbares u Sinn.

6.2. Definition: schwache Lösung

[16] Eine messbare, beschränkte Funktion $u(x)$ auf Ω heißt schwache Lösung von (6.1), wenn sie

$$0 = \int_\Gamma \psi(x)G(x,g(x)) \cdot v(x)dx - \int_\Gamma \nabla\psi(x) \cdot G(x,u(x)) + \psi(x)R(x,u(x))dx$$

für alle Testfunktionen ψ erfüllt.

6.3. Unstetige Lösungen und Schocks

Seien

- $G \subseteq \Omega$ stückweise glatte Hyperfläche, die Ω in Ω_1 und Ω_2 teilt.
- u eine schwache Lösung von (6.1), die auf Ω_1, Ω_2 stetig differenzierbar ist
- ν_i die äußere Einheitsnormale an $\partial\,\Omega_i$,$i = 1,2$
- $[f]_-^+$: Sprung einer Funktion f über C von Ω_1 nach Ω_2

Für alle Testfunktionen ψ gilt:

$$\begin{aligned}
0 &= \int_\Gamma \psi G(x,g(x)) \cdot \nu(x)dx - \int_{\Omega_1} \nabla\psi \cdot G(x,u(x)) + \psi R(x,u(x))dx - \int_{\Omega_2} \nabla\psi \cdot G(x,u(x)) + \psi R(x,u(x))dx \\
&= \int_\Gamma \psi G(x,g(x)) \cdot \nu(x)dx - \int_{\partial\,\Omega_1} \psi G(x,u(x)) \cdot \nu_1(x)dx + \int_{\Omega_1} \psi(\operatorname{div} G(x,u(x)) - R(x,u(x)))dx \\
&\quad - \int_{\partial\,\Omega_2} \psi G(x,u(x)) \cdot \nu_2(x)dx + \int_{\Omega_2} \psi(\operatorname{div} G(x,u(x)) - R(x,u(x)))dx \\
&= \int_C \psi[G(x,u(x))]_-^+ \cdot \nu_1(x)dx,
\end{aligned}$$

da $\operatorname{div} G(x, u(x)) - R(x, u(x)) = 0$ in Ω_1, Ω_2. Wir erhalten

$$[G(x, u(x))]_-^+ \cdot \nu(x) = 0 \tag{6.2}$$

für die Normale ν an C. Eine Unstetigkeit von u bzw. G, ein sogenannter **Schock**, kann also nur entlang einer Fläche C normal zu $[G]_-^+$ auftreten.

In 2D kann die Kurve C lokal als Graph einer Funktion $x_2(x_1)$ (bzw. $x_1(x_2)$) geschrieben werden. Ein Tangentialvektor ist somit $\begin{pmatrix} 1 \\ dx_2/dx_1 \end{pmatrix}$, ein Normalvektor $\big(dx_2/dx_1\big)$, und (6.2) wird zur sogenannten **Rankine-Hugoniot -Bedingung** für einen Schock:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{[G_2]_-^+}{[G_1]_-^+}$$

6.4. Bemerkung: Rankine-Hugoniot-Bedingung für semilineare PDGL

Für semilineare Gleichungen $0 = b(x) \cdot \nabla u(x) + c(u(x), x)$ wird dies zu $\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{b_2 [u]_-^+}{b_1 [u]_-^+} = \frac{b_1}{b_2}$, d.h. der Schock liegt entlang einer charakteristischen Kurve. [17]

6.5. Beispiel

Betrachte das Cauchy-Problem [18]

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 \text{ auf } (0, \infty) \times \mathbb{R} \\ u(0, x) = g(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \leq 0 \\ 1 - x & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{für } 1 \leq x \end{cases} \end{cases}$$

Entlang der charakteristischen Kurven $s \mapsto (s, y + g(y)s)$ für $y \in \mathbb{R}$ ist $u = z(s) = g(y)$ konstant, somit

$$u(t, x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \leq t \\ \frac{1-x}{1-t} & \text{für } t \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{für } 1 \leq x \end{cases}$$

solange $t < 1$. In $(t, x) = (1, 1)$ schneiden sich die charakteristischen Kurven, und die Lösung mithilfe der Charpits Gleichungen bricht zusammen. An dieser Stelle setzen wir einen Schock entlang einer Kurve $x = X(t)$ ein und betrachten die Erhaltungsform $u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0$. Sei $(0, y_\pm(t))$ der Anfangspunkt der charakteristischen Kurven, die $X(t)$ zur Zeit t von links $(-)$ und von rehts $(+)$ schneiden. Es gilt somit

$$X(t) = y_-(t) + g(y_-(t))t = y_+(t) + g(y_+(t))t$$

Weiterhin gilt die Rankine-Hugoniot-Bedingung

$$\frac{dX}{dt} = \frac{\frac{u_+^2}{2} - \frac{u_-^2}{2}}{u_+ - u_-} = \frac{u_+ + u_-}{2} = \frac{g(y_+(t)) + g(y_-(t))}{2}$$

und $X(1) = 1$. Eine Lösung dieser Gleichungen ist gegeben durch $X(t) = \frac{1+t}{2}, y_-(t) = \frac{1-t}{2}, y_+(t) = \frac{1+t}{2}$ (die Charakteristiken von links und rechts haben $u_- = 1, u_+ = 0$), folglich ist

$$u(t, x) = \left\{ \begin{matrix} 1 & \text{für } x \leq t \\ \frac{1-x}{1-t} & \text{für } t \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{für } 1 \leq x \end{matrix} \right\} \text{ für } t < 1 \text{ und } u(t, x) = \left\{ \begin{matrix} 1 & \text{für } x \leq \frac{1+t}{2} \\ 0 & \text{für } \frac{1+t}{2} \leq x \end{matrix} \right\} \text{ für } t \geq 1$$

eine schwache Lösung des Problems.

6.6. Bemerkung

[19] Schwache Lösungen sind im Allgemeinen nicht eindeutig. Betrachte z.B.

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 \text{ auf } (0,\infty)\times\mathbb{R} \\ u(0,x) = g(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \le 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

mit den schwachen Lösungen:

- $u(t,x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \le t/2 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$

  (Schock zu Erhaltungsform $u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0$; Rankine-Hugoniot: $\frac{dx}{dt} = \frac{\frac{u_+^2}{2} - \frac{u_-^2}{2}}{u_+ - u_-} = \frac{u_+ + u_-}{2}$)

- $u(t,x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \le 2t/3 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$

  (Schock zu Erhaltungsform $\left(\frac{u^2}{2}\right)_t + \left(\frac{u^3}{2}\right)_x = 0$; Rankine-Hugoniot: $\frac{dx}{dt} = \frac{2}{3}\frac{u_+^3 - u_-^3}{u_+^2 - u_-^2} = \frac{2}{3}\frac{u_+^2 + u_- u_+ + u_-^2}{u_+ + u_-}$)

- $u(t,x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \le 0 \\ x/t & \text{für } 0 < x < t \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$

  (Verdünnungswelle)

Welche Erhaltungsform korrekt ist, hängt vom modellierten physikalischen Problem ab – auch, ob ein Schock oder stattdessen eine Verdünnungswelle korrekt sind. Man kann für eine vorgegebene Erhaltungsform eine eindeutige Lösung selektieren durch Hinzunahme einer zusätzlichen Bedingung, zum Beispiel:

1. Entropiebedingung: Wir legen eine bestimmte Funnktion von $f(u)$ fest, die über den Schock zunehmen soll, d.h. $[f(u)]_-^+ \ge 0$. Die Wahl $f(u) = u$ verbietet obige Schocks.
2. Viskosität: Wir betrachten $0 = F(\nabla u, u, x)$ als Grenzfall für $\varepsilon \to 0$ von $\varepsilon\Delta u = F(\nabla u, u, x)$, welches eine eindeutige Lösung besitzt.
3. Kausalität: Ist eine Variable die Zeit, so fließt physikalisch Information entlang der charakteristischen Kurven in Richtung wachsender Zeit. Es soll Information in den Schock hinein und nicht aus ihm hinaus fließen (dies verbietet obige Schocks).

6.7. Viskositätslösungen

6. Mai Betrachte die nichtlineare PDGL 1. Ordnung

$$H(x, u(x), \nabla u(x)) = 0 \text{ auf } \Omega \tag{6.3}$$

mit Randbedingungen auf $\partial\Omega$, wobei $H\colon \Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to R$ stetig ist und konvex in ∇u. (6.3) heißt auch **Hamilton-Jacobi-Gleichung**. Lösungen sind typischerweise weder eindeutig, noch überall differenzierbar.

6.8. Beispiel: Eikonalgleichung

[20] Die **Eikonalgleichung**

$$0 = H(x,u,p) = |p| - 1$$

wird oft verwendet, um den Abstand $u(x) = \operatorname{dist}(x,\Gamma)$ einer Teilmenge $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ zu berechnen. Allerdings existiert bereits für $n = 1$ und Randdaten $u = 0$ auf $\Gamma = \{0,1\}$ keine stetig differenzierbare Lösung u, aber viele Funktionen u, die (6.3) fast überall erfüllen.

Idee, um Wohlgestelltheit zu erhalten: Füge eine "Viskositätsterm" $-\varepsilon\Delta u_\varepsilon$ hinzu und betrachte $\varepsilon \to 0$:

$$-\varepsilon\Delta u_\varepsilon + H(x, u_\varepsilon(x), \nabla u_\varepsilon(x)) = 0$$

6.9. Lemma

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\overline{x} \in \Omega$, $v, v_k \in C^1(\Omega)$ mit $v_k \to v$ lokal gleichmäßig. Hat v ein striktes lokales Minimum in $\overline{x}$, dann existiert eine Folge $x_k \to \overline{x}$ derart, dass v_k ein lokales Minimum in x_k hat. [21]

Beweis
Sei o.B.d.A. $\overline{x} = 0, v(\overline{x}) = 0$.

- Definiere $\omega_\rho := \min_{\partial B_\rho(0)} v > 0$ für $0 < \rho < r$.
- Definiere $\rho_k := \inf\{\rho : \frac{\omega_\rho}{4} \geq \sup_{B_r(0)} |v_k - v|\}$, dann gilt $\rho_k \to 0$.

Angenommen, es wäre $\rho_{k_j} \geq \delta > 0$ für eine Folge $k_j \to \infty$, dann wäre $\frac{\omega_\delta}{4} < \sup_{B_r(0)} |v_{k_j} - v| \to 0$. Widerspruch!
1. Fall: $\rho_k = 0$.
$\Rightarrow v_k = v \Rightarrow x_k = \overline{x}$ ist lokale Minimalstelle von v_k.
2. Fall: $\rho_k > 0$.
$\Rightarrow \min_{\partial B_{\rho_k}(0)} v_k \geq \min_{\partial B_{\rho_k}(0)} v - \frac{\omega_{\rho_k}}{4} = \frac{3\omega_{\rho_k}}{4} \geq \frac{\omega_{\rho_k}}{4} \geq v_k(0) \Rightarrow v_k$ hat ein $x_k \in B_{\rho_k}(0)$ als Minimalstelle.
Damit folgt $x_k \to 0$. □

Sei $u_\varepsilon \in C^2(\Omega)$ eine Lösung von (6.3) mit $u_\varepsilon \to u$ lokal gleichmäßig. Betrachte eine Vergleichsfunktion $\phi \in C^2(\Omega)$ mit $\phi \leq u$, sodass $u - \phi$ ein striktes Minimum in $\overline{x} \in \Omega$.
Lemma 6.9 impliziert, dass eine Folge $\varepsilon_k \to 0$, $x_k \to \overline{x}$ existiert, sodass $u_{\varepsilon_k} - \phi$ ein lokales Minimum in x_k besitzt, das heißt:

$$\begin{aligned} \nabla(u_{\varepsilon_k}(x_k) - \phi(x_k)) &= 0 && \text{(Ableitung = 0)} \\ D^2(u_{\varepsilon_k}(x_k) - \phi(x_k)) &\geq 0 && \text{(Hesse-Matrix positiv semidefinit)} \\ \Delta u_{\varepsilon_k}(x_k) - \Delta\phi(x_k) &\geq 0 && \text{(s.o.)} \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} 0 &= -\varepsilon_k \Delta u_{\varepsilon_k}(x_k) + H(x_k, u_{\varepsilon_k}(x_k)) \\ &\leq -\varepsilon_k \Delta\phi(x_k) + H(x_k, u_{\varepsilon_k}(x_k), \nabla\phi(x_k)) \to H(\overline{x}, u_{\varepsilon_k}(\overline{x}), \nabla\phi(\overline{x})) \end{aligned}$$

das heißt

$$H(\overline{x}, u_{\varepsilon_k}(\overline{x})) \geq 0, \text{ falls } u - \phi \text{ ein striktes lokales Minimum in } \overline{x} \text{ besitzt.}$$

Dies motiviert zu folgendem Begriff:

6.10. Definition: Viskositätslösung

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $H\colon \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ stetig. [22]

1. $u \in C^0(\Omega)$ heißt **Viskositäts-Superlösung**, falls $H(x, u(x), \nabla\phi(x)) \geq 0$ für alle $\phi \in C^1(\Omega)$ derart, dass $u - \phi$ ein Minimum in x besitzt.
2. $u \in C^0(\Omega)$ heißt **Viskositäts-Sublösung**, falls $H(x, u(x), \nabla\phi(x)) \leq 0$ für alle $\phi \in C^1(\Omega)$ derart, dass $u - \phi$ ein Maximum in x besitzt.
3. $u \in C^0(\Omega)$ heißt **Viskositätslösung**, falls u Viskositäts-Superlösung und Viskositäts-Sublösung ist.

6.11. Lemma und Beispiel: Abstandsfunktion

Für $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen ist $u(x) = \operatorname{dist}(x, \Gamma)$ eine Viskositätslösung von $|\nabla u| - 1 = 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus \Gamma$. [23]

Beweis

1. zur Sublösung: Sei x ein lokales Maximum von $u - \phi$, das heißt

$$\begin{aligned} & (u-\phi)(x+z) - (u-\phi)(x) \leq 0 \\ \Leftrightarrow\quad & \phi(x+z) - \phi(x) \geq u(x+z) - u(x) \geq -|z| \\ \Rightarrow\quad & \frac{\phi(x+s\zeta) - \phi(x)}{s} \geq -|\zeta| \text{ und somit } \nabla\phi(x)\cdot\zeta \geq -|\zeta| \ \forall \zeta \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Wähle $\zeta = -\frac{\nabla\phi(x)}{|\nabla\phi(x)|}$ und erhalte $|\nabla\phi(x)| \leq 1$ oder $|\nabla\phi(x)| - 1 \leq 0$.

2. zur Superlösung: Sei x ein lokales Minimum von $u - \phi$, das heißt

$$\begin{aligned} & (u-\phi)(x+z) - (u-\phi)(x) \geq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \phi(x+z) - \phi(x) \leq u(x+z) - u(x) \end{aligned}$$

Sei $\overline{x} \in \Gamma$ mit $u(x) = |x - \overline{x}|$ und wähle $z = -s\frac{x-\overline{x}}{|x-\overline{x}|}$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \frac{\phi\left(x + s\frac{\overline{x}-x}{|\overline{x}-x|}\right) - \phi(x)}{s} \leq \frac{|\overline{x}-x| - s - |\overline{x}-x|}{s} = -1 \\ \Rightarrow \quad & -\nabla\phi(x) \cdot \frac{\overline{x}-x}{|\overline{x}-x|} \geq 1 \quad \Rightarrow \quad |\nabla\phi(x)| \geq 1 \text{ oder } |\nabla\phi(x)| - 1 \geq 0. \end{aligned}$$

□

6.12. Bemerkung

[24] Im Allgemeinen ist $u = -\operatorname{dist}(x, \Gamma)$ keine Viskositätslösung von $|\nabla u| - 1 = 0$: Sei $u_{\min} = u(\overline{x})$ ein lokales Minimum von $-\operatorname{dist}(x, \Gamma)$ und $\phi \equiv u_{\min}$, sodass $u - \phi$ ein lokales Minimum in $\overline{x}$ hat. Dann ist $|\nabla\phi| - 1 = -1 < 0$ und u damit keine Viskositäts-Superlösung.
Allerdings ist u eine Viskositätslösung von $1 - |\nabla u| = 0$.

Wir betrachten nun Hamilton-Jacobi-Gleichungen der Gestalt

$$H(x, \nabla u(x)) = 0$$

mit H stetig, $H(x,\cdot)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gleichmäßig konvex, $H(x,p) \xrightarrow{|p|\to\infty} \infty$ gleichmäßig in x (Koerzivität) und $H(x, 0) \leq 0$.

6.13. Definition: Stützfunktion

[25] Eine Funktion

$$\begin{aligned} L_x \colon \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ w &\longmapsto \sup_{H(x,p)\leq 0} w \cdot p \end{aligned}$$

heißt **Stützfunktion** der Menge $\{p \in \mathbb{R}^n : H(x,p) \leq 0\}$.

6.14. Beispiel

[26] $H(x,p) = |p| - \frac{1}{v(x)}$ für eine Geschwindigkeit $v(x)$ hat die Stützfunktion $L_x(w) = \frac{|w|}{v(x)}$.

6.15. Definition: optische Distanz

$$\delta(x,y) = \inf\left\{\int_0^1 L_{c(t)}(\dot{c}(t))dt : c\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n, c(0) = x, c(1) = y\right\}$$

[27] heißt die **optische Distanz** zwischen x und y.

6.16. Beispiel

Die optische Distanz von $H(x,p) = |p| - \frac{1}{v(x)}$ ist gegeben durch

$$\delta(x,y) = \inf_{\substack{c\colon [0,1]\to\mathbb{R}^n \\ c(0)=x, c(1)=y}} \int_0^1 \frac{|\dot{c}(t)|}{v(c(t))} dt$$

und beschreibt die Zeit, die eine seismische Welle mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit $v(x)$ benötigt, um von x
[28] nach y zu gelangen.

6.17. Theorem: Hopf-Lax-Formel

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $g\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $g(x) - g(y) \leq \delta(y,x)$ für alle $x, y \in \partial\Omega$. 9. Mai [29]
Dann ist

$$u(x) = \inf_{y \in \partial\Omega} \{g(y) + \delta(y,x)\}$$

eine lipschitzstetige Viskositätslösung von $H(x, \nabla u(x)) = 0$ auf Ω mit $u = g$ auf $\partial\Omega$.

6.18. Bemerkung

- Dieser Satz impliziert die Existenz einer Viskositätslösung. [30]
- Für $H(x,p) = |p| - \frac{1}{v(x)}$ und $g \equiv 0$ ist $u(x)$ die Ankunftszeit einer seismischen Welle, die auf $\partial\Omega$ startet.
- $g(x) - g(y) \leq \delta(y,x)$ bedeutet, dass die Wellenfront zum Erreichen von x nicht länger braucht als um von y nach x zu gelangen.

6.19. Lemma

(i) L_x ist konvex. [31]

(ii) $L_x(w) \leq C|w|$ für eine Konstante C unabhängig von w.

(iii) $L_x(\lambda w) = \lambda L_x(w)$ für alle $\lambda > 0$.

Beweis

(i) $L_x(tq + (1-t)w) = \sup_{H(x,p)\leq 0} [tq + (1-t)w] \cdot p = \sup_{H(x,p)\leq 0} tq \cdot p + (1-t) w \cdot p$
$\leq t \sup_{H(x,p)\leq 0} q \cdot p + (1-t) \sup_{H(x,p)\leq 0} w \cdot p = tL_x(q) + (1-t)L_x(w)$ für alle $t \in [0,1]$.

(ii) $L_x(w) = \sup_{H(x,p)\leq 0} w \cdot p \leq \sup_{H(x,p)\leq 0} |w| \cdot |p| \leq (\sup_{H(x,p)\leq 0} |p|)|w|$

(iii) $L_x(\lambda w) = \sup_{H(x,p)\leq 0} \lambda w \cdot p = \lambda \sup_{H(x,p)\leq 0} w \cdot p$ □

6.20. Bemerkung

Das obige Lemma impliziert, dass δ eine Pseudometrik ist, falls $H(x,p) = H(x,-p)$. [32]

Beweis von Theorem 6.17
Wir betrachten den Fall, dass $H(x,P) \equiv H(p)$ und $H(p) = H(-p)$. In diesem Fall gilt $\delta(x,y) = L(y-x)$, da L nicht von x abhängig ist.

a) u ist lipschitzstetig und $u(x) \leq u(y) + \delta(x,y)$ für alle $x, y \in \overline{\Omega}$:

$$\begin{aligned} u(x) - u(y) &= \inf_{z_1 \in \partial\Omega} (g(z_1) + \delta(x, z_1)) - \inf_{z_2 \in \partial\Omega} (g(z_2) + \delta(y, z_2)) \\ &\leq \sup_{z_2 \in \partial\Omega} g(z_2) + \partial(x, z_2) - g(z_2) - \partial(y, z_2) \\ &\leq \partial(x,y) = L(y-x) \overset{(ii)}{\leq} C|y-x| \end{aligned}$$

b) Sublösung:
$u - \phi$ habe ein lokales Maximum in x, d.h. $u(x') - \phi(x') \leq u(x) - \phi(x)$, bzw.

$$\phi(x') - \phi(x) \geq u(x') - u(x) \geq -\delta(x, x')$$

Mit ζ beliebig und $x' = x + s\zeta$ folgt

$$\frac{\phi(x + s\zeta) - \phi(x)}{s} \geq \frac{-\delta(x, x + s\zeta)}{s} \overset{L \text{ unabh. von } x}{=} \frac{-L(s\zeta)}{s} \overset{(iii)}{=} -L(\zeta) \quad \Rightarrow \quad \nabla\phi \cdot \zeta \geq -L(\zeta)$$

Analog folgt $\nabla\phi \cdot \zeta \leq L(\zeta) = \sup_{H(p)\leq 0} \zeta \cdot p$, also $|\nabla\phi \cdot \zeta| \leq L(\zeta)$ für alle $\zeta \in \mathbb{R}^n$. Angenommen, $H(\nabla\phi) > 0$. Da H konvex und stetig ist, existiert eine Hyperfläche mit Normale ν, die $\{p : H(p) \leq 0\}$ und $\nabla\phi$ trennt. Damit wäre $|\nabla\phi \cdot \nu| > \sup_{H(p)\leq 0} p \cdot \nu = L(\nu)$. Widerspruch.

c) Superlösung:
Sei $u(x) = g(\overline{y}) + \delta(x, \overline{y}) = g(\overline{y}) + L(x - \overline{y})$ für ein $\overline{y} \in \partial\,\Omega$ und definiere $c(t) = \overline{y} + t(x - \overline{y})$. Wir haben

$$\begin{aligned} g(\overline{y}) + L(x - \overline{y}) = u(x) &\leq u(c(t)) + \delta(c(t), x))u(c(t)) + (1 - t)L(x - \overline{y}) \\ &\leq g(\overline{y} + \delta(\overline{y}, c(t)) + (1 - t)L(x - \overline{y}) = g(\overline{y}) + L(x - \overline{y}) \end{aligned}$$

sodass $u(c(t)) = g(\overline{y}) + tL(x - \overline{y}) = g(\overline{y}) + L(c(t) - \overline{y})$. Nun besitze $u - \phi$ ein lokales Minimum in x, d.h. $\phi(x) - \phi(x') \geq u(x) - u(x')$, und setze $x = c(1), x' = c(1 - s)$. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} &\frac{\phi(x) - \phi(c(1 - s))}{s} \geq \frac{u(x) - u(c(1 - s))}{s} \\ \Rightarrow \quad &\nabla\phi(x) \cdot (x - \overline{y}) = \nabla\phi(x) \cdot \dot{c}(1) \geq \nabla(u) \cdot \dot{c}(1) = L(x - \overline{y}) = \sup_{H(p) \leq 0} (x - \overline{y}) \cdot p \end{aligned}$$

Daher folgt $(\nabla\phi(x) + \alpha(x - \overline{y})) \cdot (x - \overline{y}) > \sup_{H(p) \leq 0}(x - \overline{y}) \cdot p$ für alle $\alpha > 0$ und somit $H(\nabla\phi(x) + \alpha(x - \overline{y})) > 0$ und $H(\nabla\phi) \geq 0$ wegen Stetigkeit.

d) Randdaten:
Sei $x \in \partial\,\Omega$, dann folgt aus $g(x) - g(y) \leq \delta(y, x)$, dass $g(x) \leq g(y) + \delta(y, x)$ für alle $y \in \partial\,\Omega$ und somit $g(x) \leq u(x)$. Des Weiteren ist $u(x) \leq g(x) + \delta(x, x) = g(x)$ und damit $u(x) = g(x)$. □

Für Eindeutigkeit müssen wir zusätzliche Bedingungen an H stellen, wie das folgende Beispiel zeigt. Anschließend formulieren wir zwei mögliche Resultate für die Eindeutigkeit.

6.21. Beispiel

[33] Sei $\Psi \in C^1(\Omega)$, $\Psi = 0$ auf $\partial\,\Omega$, und betrachte $H(x, p) = |p|^2 - |\nabla\Psi(x)|^2$. Dann ist sowohl $u = \Psi$ als auch $u = -\Psi$ eine (Viskositäts-)Lösung von $0 = H(x, \nabla u(x))$.

6.22. Theorem: Eindeutigkeit durch Vergleich

[34] Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen sowie $H \colon \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ stetig mit

- $H(x, u, p) - H(x, v, p) > \gamma(u - v)$ für ein $\gamma > 0$.
- $|H(x, u, p) - H(y, u, p)| \leq C|y - x|(1 + |p|)$ für ein $C > 0$.

Falls u eine Viskositäts-Sublösung und v eine Viskositäts-Superlösung von $0 = H(x, u(x), \nabla u(x))$ ist mit $u \leq v$ auf $\partial\,\Omega$, dann ist auch $u \leq v$ auf Ω. Damit folgt, dass die Viskositätslösung eindeutig ist.

Beweisidee
Angenommen, u und v seien glatt und $u - v$ habe ein Maximum in $x_0 \in \overline{\Omega}$ mit $u(x_0) - v(x_0) > 0$. Nach Definition 6.10 haben wir

$$\begin{aligned} H(x_0, u(x_0), \nabla v(x_0)) \leq 0 \\ H(x_0, v(x_0), \nabla u(x_0)) \geq 0 \end{aligned}$$

Wegen $\nabla(u - v)(x_0) = 0$ gilt $\nabla u(x_0) = \nabla v(x_0)$, und damit den Widerspruch

$$0 \geq H(x_0, u(x_0), \nabla v(x_0)) = H(x_0, u(x_0), \nabla(u(x_0)) > H(x_0, v(x_0), \nabla u(x_0)) \geq 0$$

Für nichtglatte u, v ist der Beweis aufwändiger. □

6.23. Theorem: Eindeutigkeit für Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung

[35] Sei

$$\begin{aligned} H \colon (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}) \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ ((t, x), (p^t, p^x)) &\longmapsto p^t + \tilde{H}(x, p^x) \end{aligned}$$

mit $\tilde{H}$ stetig und

- $|\tilde{H}(x, p) - \tilde{H}(x - q)| \leq C|p - q|$ für ein $C > 0$

- $|\tilde{H}(x,p) - \tilde{H}(y,p)| \leq C|y-x|(1+|p|)$

Dann existiert höchstens eine Viskositätslösung von $0 = H((t,x),(u_t(t,x),\nabla u(t,x))) = u_t + \tilde{H}(x,\nabla u)$ mit gegebenen Randdaten auf $t = 0$.

Beweis
siehe z.B. Evans, ”PDEs”, S. 587

7. Partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung – Elliptische PDGL

13. Mai In diesem Abschnitt betrachten wir semilineare Gleichungen der Gestalt

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i x_j}(x) + c(\nabla u(x), u(x), x) = 0 \tag{7.1}$$

mit einer symmetrischen Matrix $A := (a_{ij})_{ij}$.

7.1. Definition: Klassifikation einer PDGL zweiter Ordnung

[36] Die Gleichung (7.1) heißt

- **elliptisch**, falls A genau n positive Eigenwerte besitzt
- **parabolisch**, falls A den Eigenwert 0 besitzt
- **hyperbolisch**, falls A einen positiven und $n-1$ negative Eigenwerte besitzt.

Da eine Multiplikation mit -1 die PDGL nicht verändert, lassen sich in der obigen Definition die Begriffe positiv und negativ vertauschen. Nichtlineare PDGL können durch Linearisierung und Betrachtung der zweiten Ableitungen lokal klassifiziert werden. Kleine Änderungen in A können dazu führen, dass die PDGL ihren Typ ändert.

7.2. Definition: Laplace-Gleichung und Harmonische Funktion

Eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, die die **Laplace-Gleichung**

$$\Delta u = 0$$

erfüllt, heißt **harmonische Funktion**.

Harmonische Funktionen besitzen einige praktische Eigenschaften, die alle mehr oder weniger mit der Glattheit der Laplace-Gleichung zusammenhängen.

7.3. Theorem: Mittelwertformel

[38] u ist genau dann harmonisch auf Ω, falls $u \in C^2$ und

$$u(x) = \int_{\partial B_r(x)} u(\tilde{x}) d\tilde{x}$$

für jede Kugel $B_r(x) \subseteq \Omega$.

Beweis

"⇒": Definiere $f(\tau) = \int_{\partial B_r(x)} u(\tilde{x}) d\tilde{x} = \int_{B_1(0)} u(x + rz) dz$.
$f(0) = u(x)$ und $f'(\tau) = \int_{\partial B_1(0)} \nabla u(x+rz) \cdot z dz = \int_{\partial B_r(x)} \nabla u(\tilde{x}) \cdot \nu(\tilde{x}) d\tilde{x} = \frac{1}{|\partial B_1(x)|} \int_{B_r(x)} \underbrace{\Delta u}_{=0} d\tilde{x}$

"⇐": Angenommen, $\Delta u(x) > 0$, d.h. es existiert $B_r(x)$ mit $0 < \int_{B_r(x)} \delta u d\tilde{x}$, aber
$0 = f'(r) = \frac{1}{|\partial B_1(x)|} \int_{B_r(x)} \Delta u d\tilde{x} > 0$ ↯ □

7.4. Bemerkung

[39] Benutzung von $\int_{B_r(x)} u(\tilde{x}) d\tilde{x} = \int_0^r \left(\int_{\partial B_s(x)} u(\tilde{x}) d\tilde{x} \right) ds = u(x) \int_0^r \left(\int_{\partial B_s(x)} d\tilde{x} \right) ds = u(x)$ liefert eine zweite Mittelwertformel.

7.5. Theorem: Starkes Maximumprinzip

Eine nichtkonstante harmonische Funktion $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ hat kein lokales Maximum auf Ω. Insbesondere gilt: [40]

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$$

(Analoges gilt für Minima: ersetze u durch $-u$)

Beweis
Sei $u(x_0) = M := \max_{\overline{\Omega}} u$ für ein $x_0 \in \Omega$. Nach Theorem 7.3 bzw. Bemerkung 7.4 gilt jedoch $M = u(x_0) = \fint_{B_r(x_0)} u dx < M$, sofern nicht $u = M$ auf ganz $B_r(x_0)$. Benutze dieses Argument für jeden Punkt in $\partial B_r(x_0)$, anschließend für die neuen Randpunkte usw. und erhalte $u = M$ auf ganz Ω. □

7.6. Theorem: Harnack-Ungleichung

Für jede zusammenhängende offene Menge $U \subset \Omega$ existiert eine Konstante $C = C(U)$, sodass [41]

$$\sup_u u \leq C \inf_u u$$

für jede nichtnegative harmonische Funktion u auf Ω.

Beweis
Sei $r := \frac{1}{4}\operatorname{dist}(u, \partial\Omega)$ und $x, y \in U$ beliebig mit $|x-y| \leq r$. Dann:

$$u(x) = \fint_{B_{2r}(x)} u d\tilde{x} \geq \frac{1}{2^n} \fint_{B_r(y)} u d\tilde{x} = \frac{1}{2^n} u(y)$$

Da U zusammenhängend und $\overline{U}$ kompakt, können wir $\overline{U}$ überdecken durch eine endlich viele Umgebungen $\{B_i\}_{i=0}^N$ mit Radius $\frac{r}{2}$ und $B_i \cap B_{i-1} \neq \emptyset$. Damit folgt $u(x) \geq \left(\frac{1}{2^n}\right)^{N+1} u(y)$ für alle $x, y \in U$. □

7.7. Theorem: Glattheit harmonischer Funktionen

Eine harmonische Funktion $u \in C^0(\overline{\Omega})$ ist unendlich oft differenzierbar auf Ω. [42]

Beweis
Definiere

$$\eta_\varepsilon(x) = \widetilde{\eta_\varepsilon}(|x|) = \frac{1}{\varepsilon^n}\eta\left(\frac{|x|}{\varepsilon}\right) \text{ für } \eta(|x|) = \begin{cases} Ce^{\frac{1}{|x|^2-1}} & \text{für } |x| < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit C derart, dass $\int_{\mathbb{R}^n} \eta(|x|)dx = 1$. Dann ist $\eta_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.
Setze $u_\varepsilon(x) = (u * \eta_\varepsilon)(x) = \int_\Omega u(y)\eta_\varepsilon(x-y)dy \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$ für $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$. Dann ist $u_\varepsilon = u$ auf Ω_ε:

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x) &= \int_\Omega u(y)\widetilde{\eta_\varepsilon}(|x-y|)dy = \int_{B_\varepsilon(x)} \widetilde{\eta_\varepsilon}(|x-y|)u(y)dy \\ &= \int_0^\varepsilon \widetilde{\eta_\varepsilon}(r) \underbrace{\left(\int_{\partial B_r(x)} u(\tilde{x})d\tilde{x}\right)}_{u(x)|\partial B_r(x)|} dr = u(x) \underbrace{\int_{B_\varepsilon(0)} \eta_\varepsilon(\tilde{x})d\tilde{x}}_{=\int_{B_1(0)} \eta(|x|)dx = 1} = u(x) \end{aligned}$$

□

7.8. Definition: Dirichlet-Problem, Neumann-Problem

Das **Dirichlet-Problem** ist gegeben durch 16. Mai

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x) \\ u = g \text{ auf } \partial\Omega \end{cases} \tag{7.2}$$

Das **Neumann-Problem** ist gegeben durch

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x) \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} \text{ auf } \partial\Omega \end{cases} \tag{7.3}$$

7.9. Theorem: Eindeutige Lösbarkeit des Dirichlet- und Neumann-Problems

[43] Die Lösung des Dirichlet-Problems (7.2) ist eindeutig, falls existent. Das Neumann-Problem (7.3) besitzt nur dann eine Lösung, falls gilt:

$$\int_\Omega f(x)dx = -\int_{\partial\,\Omega} g(x)dx$$

In diesem Fall ist sie eindeutig bis auf eine konstanten Term.

Beweis
Seien u, v zwei Lösungen, dann ist $w := u - v$ eine Lösung von $\Delta w = 0$. Nach Theorem 7.5 nimmt w sein Maximum und Minimum auf $\partial\,\Omega$ an. Im Fall von (7.2) ist ferner $w = 0$ auf $\partial\,\Omega$, also folgt $w \equiv 0$. Im Fall (7.3) ist $\partial\, w/\partial\,\nu = 0$ auf $\partial\,\Omega$, also ist w konstant.
Beachte: Im zweiten Fall haben wir

$$\int_\Omega f(x)dx = \int_\Omega -\Delta u(x)dx = -\int_{\partial\,\Omega} \nabla u \cdot \nu dx = -\int_{\partial\,\Omega} g(x)dx$$

□

Wir erarbeiten nun eine praktische Formel für die Lösung der **Poisson-Gleichung**

$$-\Delta u(x) = f(x)$$

Dafür betrachten wir zunächst Lösungen der Laplace-Gleichung. Sei $r := |x|$ und $v(r) = u(x)$ eine Lösung der Laplace-Gleichung auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Durch Benutzung von $\frac{\partial\, r}{\partial\, x_i} = \frac{x_i}{r}$, also $u_{x_i} = \frac{v'(r)x_i}{r}$ und $u_{x_i x_i} = \frac{v''(r)x_i^2}{r^2} + v'(r)\left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\right)$, erhalten wir

$$v''(r) + \frac{n-1}{r}v'(r) = 0$$

Diese Gleichung besitzt die Lösung $v''(r) = \frac{a}{r^{n-1}}$ für eine Konstante a.

7.10. Definition: Fundamentallösung der Laplace-Gleichung

[44] Die Funktion

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}|x| & (n=1) \\ -\frac{1}{2\pi}\log|x| & (n=2) \\ -\frac{1}{(n-2)|\,\partial\,B_1(0)|}\frac{1}{|x|^{n-2}} & (n \geq 3) \end{cases}$$

löst die Laplace-Gleichung auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und heißt **Fundamentallösung** der Laplace-Gleichung.

7.11. Definition: Delta-Verteilung

[45] Der lineare Operator $\widehat{\delta}\colon C^0(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ mit $\widehat{\delta}(u) = u(0)$ heißt **δ-Verteilung**. Üblich ist auch die Notation

$$\widehat{\delta}(u) = \int_{\mathbb{R}^n} \delta(x)u(x)dx$$

wobei δ eine Funktion mit $\int_{\mathbb{R}^n} \delta(x)dx = 1$ ist, die im Punkt 0 unendlich ist und an allen anderen Stellen den Wert 0 annimmt.

Multiplizieren wir $\Delta\Phi$ mit einer glatten Funktion ψ mit $\psi = 0$ auf $\partial\,\Omega$ und integrieren wir zweimal partiell, erhalten wir:

$$\int_\Omega \psi(x)\Delta\Phi(x)dx = \int_\Omega \Phi(x)\Delta\psi(x)dx$$

7.12. Theorem: Fundamentallösung

Für die δ-Verteilung gilt: [46]

$$\Delta\Phi(x) = \delta(x)$$

d.h. es gilt $\Delta\Phi(x) = 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x)\Delta\psi(x)dx = \psi(0)$ für alle glatten Funktionen ψ mit kompaktem Träger.

Beweis

...

Sei nun $\partial\,\Omega$ Lipschitz. So wie zuvor betrachte die Lösung des folgenden Problems:

$$\begin{cases} -\Delta G^y(x) = \delta(x-y) & \text{auf } \Omega \\ G^y = 0 & \text{auf } \partial\,\Omega \end{cases}$$

Motivation: Finden wir G^y für alle $y \in \Omega$, dann genügt

$$u(x) = \int_\Omega G^x(y) f(y) dy$$

der Gleichung

$$-\Delta u(x) = \int_\Omega -\Delta G^x(y) f(y) dy = f(y)$$

7.13. Bemerkung

Offensichtlich ist $G^y(x) = \Phi(x-y) - \phi^y(x)$, wobei ϕ^x eine Lösung ist von [47]

$$\begin{cases} \Delta\phi^y = 0 & \text{auf } \Omega \\ \phi^y = \Phi(x-y) & \text{auf } \partial\,\Omega \end{cases} \tag{7.4}$$

7.14. Theorem: Greensche Formel

Falls $u \in C^2(\overline{\Omega})$ eine Lösung des Dirichlet-Problems (7.2) ist, dann gilt [48]

$$u(x) = -\int_{\partial\,\Omega} g(y) \frac{\partial\, G^x(y)}{\partial\,\nu} dy + \int_\Omega f(y) G^x(y) dy$$

Beweis

Nach Theorem 7.12 gilt für $x \in \Omega$:

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_\Omega u(y)\Delta\Phi(y-x)dy \\ &= \int_\Omega u(y)\Delta G^x(y)dy \\ &= \int_{\partial\,\Omega} u(y)\nabla G^x(y)\cdot\nu dy - \int_\Omega \nabla u(y)\cdot\nabla G^x(y)dy \\ &= \int_{\partial\,\Omega} g(y)\frac{\partial\, G^x(y)}{\partial\,\nu} dy - \int_{\partial\,\Omega} \nabla u(y)\cdot\nu \underbrace{G^x(y)}_{=0} dy + \int_\Omega \underbrace{\Delta u(y)}_{=f(y)} G^x(y)dy \end{aligned}$$

□

7.15. Beispiel: Greensche Funktion für Halbräume

Die Greensche Funktion G^y für $y \in \Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ kann mit Hilfe der **Spiegelungsmethode** (method of images) gefunden werden: $\phi^y(x) = \Phi(x - (-y))$ erfüllt Gleichung (7.4), sodass [49]

$$G^y(x) = \Phi(x-y) - \Phi(x+y)$$

Speziell in 2D:

$$G^y(x) = \frac{1}{4\pi}\log\left(\frac{|x-y|^2}{|x+y|^2}\right)$$

7.16. Beispiel: Greensche Funktion für eine Scheibe

[50] Die Greensche Funktion G^y für $y \in \Omega = B_r(0)$ kann ähnlich gefunden werden: Für $\widetilde{y} = \frac{r^2}{|y|^2} y$ ist $\frac{|x-y|}{|x+\widetilde{y}|} = \frac{|y|}{r}$ konstant auf $x \in \partial\Omega$. Damit erhalten wir:

$$G^y(x) = \Phi(x-y) - \Phi\left((x-\widetilde{y})\frac{|y|}{r}\right)$$

Ein ähnliches Vorgehen ist für das Neumann-Problem möglich.

8. Exkursion: Hölder- und Sobolevräume

Um die Existenz und Regularität von elliptischen Gleichungen zu verstehen, müssen wir einige Funktionenräume einführen. 20. Mai
Für eine stetige Funktion $u \in C^0(\overline{\Omega})$ auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $\gamma \in [0,1]$ definiere:

$$[u]_\gamma = \sup_{x,y\in\overline{\Omega},x\neq y} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\gamma}$$

8.1. Definition: Hölderraum

Für $u \in C^k(\overline{\Omega})$ definiere die **Höldernorm**: [51]

$$||u||_{C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})} := \sum_{|\alpha|\leq k} ||D^\alpha u||_{C^0(\overline{\Omega})} + \sum_{|\alpha|=k} [D^\alpha u]_\gamma$$

Der Funktionenraum

$$C^{k,\gamma}(\overline{\Omega}) := \{u \in C^k(\overline{\Omega}) : ||u||_{C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})} < \infty\}$$

heißt **Hölderraum** mit Exponent γ.

8.2. Theorem: Hölderräume sind Banachräume

Hölderräume mit der Höldernorm sind Banachräume, d.h. jede Cauchyfolge in einem Hölderraum konvergiert. [52]

Beweis
Übung.

Man stelle fest, dass $C^{k,0} = C^k$. Ferner ist $C^{0,1}$ der Raum der lipschitzstetigen Funktionen.
Als nächstes führen wir einen abgeschwächten Begriff der Differenzierbarkeit ein.

8.3. Definition: Schwache Ableitung

Sei $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ und α ein Multiindex. v heißt die α-te **schwache Ableitung** von u, falls [53]

$$\int_\Omega u D^\alpha \psi dx = (-1)|\alpha| \int_\Omega v\psi dx \tag{8.1}$$

für alle Testfunktionen $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ (d.h. für alle unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger in Ω). Für die schwache Ableitung schreiben wir auch

$$D^\alpha u = v$$

8.4. Bemerkung

Falls u glatt ist, ist (8.1) das exakte Ergebnis, welches man durch k-fache partielle Integration erhält, und v ist die gewöhnliche Ableitung von u. [54]

8.5. Beispiel

Sei $\Omega = (0,2)$. [55]

- Sei $u(x) = \begin{cases} x & \text{falls } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{falls } 1 < x < 2 \end{cases}$ und $v(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{falls } 1 < x < 2 \end{cases}$, dann ist $v = Du$, da für alle $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ gilt:

$$\int_0^2 u\psi' dx = \int_0^1 x\psi' dx + \int_1^2 \psi' dx = -\int_0^1 \psi dx + \psi(1) - \psi(1) = -\int_0^2 v\psi dx$$

- Sei $u(x) = \begin{cases} x & \text{falls} 0 < x \leq 1 \\ 2 & \text{falls} 1 < x < 2 \end{cases}$, dann besitzt u keine schwache Ableitung, denn kein $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ erfüllt

$$-\int_0^2 v\psi dx = \int_0^2 u\psi' dx = \int_0^1 x\psi' dx + 2\int_1^2 \psi' dx = -\int_0^1 \psi dx - \psi(1)$$

für beliebiges $v \in L^1_{loc}(\Omega)$.

8.6. Definition: Lebesgue-Raum

Sei $p \in [1, \infty]$. Dann definieren wir die **Lebesgue-Norm** durch

$$||u||_{L^p(\Omega)} = \begin{cases} \left(\int_\Omega |u|^p dx\right)^{1/p} & (p < \infty) \\ \operatorname{esssup}_\Omega |u| & (p = \infty) \end{cases}$$

Der Funktionenraum

$$L^p(\Omega) := \{u\colon \Omega \to \mathbb{R} : u \text{ ist messbar mit } ||u||_{L^p(\Omega)} < \infty\}$$

heißt mit Exponent p.

8.7. Theorem: Lebesgue-Räume sind Banachräume

Lebesgue-Räume mit der Lebesgue-Norm sind Banachräume.

8.8. Definition: Sobolevraum

[56] Der Funktionenraum

$$W^{k,p}(\Omega) := \{u \in L^1_{loc}(\Omega) : \text{ für alle } |\alpha| \leq k \text{ existiert die schwache Ableitung } D^\alpha u \text{ mit } D^\alpha u \in L^p(\Omega)\}$$

mit der **Sobolevnorm**

$$||u||_W^{k,p}(\Omega) = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega |D^\alpha u|^p dx\right)^{1/p} & 1 \leq p < \infty \\ \sum_{|\alpha| = k} \operatorname{esssup}_\Omega |D^\alpha u| & p = \infty \end{cases}$$

heißt **Sobolevraum**.
$W_0^{k,p}(\Omega)$ ist der Abschluss von $C_c^\infty(\Omega)$ in $W^{k,p}(\Omega)$. Beachte: $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$.

8.9. Theorem: Sobolevräume sind Banachräume

[57] Sobolevräume mit der Sobolevnorm sind Banachräume.

Beweis
siehe z.B. Evans, S. 262.

8.10. Bemerkung

[58] Die Räume

$$H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$$

sind Hilberträume. Ihre Norm wird induziert durch das Skalarprodukt

$$(u, v)_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega D^\alpha u D^\alpha v dx$$

8.11. Theorem: Hölder-Ungleichung

Sei $p, p^* \in [1, \infty], f \in L^p, g \in L^{p^*}$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$. Dann gilt: [59]

$$\int_\Omega |fg| dx \leq ||f||_{L^p(\Omega)} ||g||_{L^{p^*}(\Omega)}$$

Beweis
siehe Alt, "Lineare Funktionalanalysis", S. 52

8.12. Theorem: Spursatz

Sei Ω beschränkt und mit Lipschitzrand. Dann existiert ein stetiger linearer Operator $T\colon W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$, die **Spur**, mit [60]

(i) $Tu = u\big|_{\partial\Omega}$, falls $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$

(ii) $||Tu||_{L^p(\partial\Omega)} \leq C||u||_{W^{1,p}(\Omega)}$

(iii) $Tu = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega)$

wobei $C \geq 0$ nur von p und Ω abhängt. Aus Gründen der Einfachheit meinen wir einfach u auf $\partial\Omega$, wenn wir von der Spur von u sprechen.

Beweis
siehe Evans, S. 272.

8.13. Theorem: Poincaré-Ungleichung

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, offen, zusammenhängend und mit Lipschitzrand. Dann existiert eine Konstante $C = C(n, p, \Omega)$ mit [61]

$$||u - \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u dx||_{L^p(\Omega)} \leq C \cdot ||\nabla u||_{L^p(\Omega)}$$

für alle $u \in W^{1,p}(\Omega)$ und

$$||u||_{L^p}(\Omega) \leq C \cdot ||\nabla u||_{L^p(\Omega)}$$

für alle $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Beweis
siehe Alt, "Lineare Funktionalanalysis", S. 171.

8.14. Theorem: Einbettungssatz von Sobolev

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und mit Lipschitzrand, $m_1, m_2 \in \mathbb{N}_0$ und $p_1, p_2 \in [1, \infty)$. Falls [62]

$$m_1 \geq m_2 \text{ und } m_1 - \frac{n}{p_1} \geq m_2 - \frac{n}{p_2},$$

dann ist $W^{m_1,p_1}(\Omega) \subset W^{m_2,p_2}(\Omega)$ und es existiert eine Konstante $C > 0$, sodass für alle u gilt:

$$||u||_{W^{m_1,p_1}(\Omega)} \leq C \cdot ||u||_{W^{m_2,p_2}(\Omega)}$$

Im dem Fall, dass die Ungleichung strikt ist, ist $W^{m_1,p_1}(\Omega)$ kompakte Teilmenge von $W^{m_2,p_2}(\Omega)$.

Beweis
siehe Alt, "Lineare Funktionalanalysis", S. 328.

8.15. Theorem: Einbettungssatz von Hölder

[63] Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und mit Lipschitzrand, $m, k \in \mathbb{N}_0, p \in [1, \infty)$ und $\alpha \in [0, 1]$. Falls

$$m - \frac{n}{p} \geq k + \alpha \text{ und } \alpha \neq 0, 1$$

dann ist $W^{m,p}(\Omega) \subset C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$, und es existiert eine Konstante $C > 0$, sodass für alle u gilt:

$$||u||_{W^{m,p}(\Omega)} \leq C \cdot ||u||_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})}$$

Falls $m - \frac{n}{p} < k + \alpha$, so ist $W^{m,p}(\Omega)$ kompakte Teilmenge von $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Beweis
siehe Alt, ”Lineare Funktionalanalysis”, S. 333.

9. Schwache Lösungen elliptischer Gleichungen

Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt betrachte das elliptische **Dirichlet-Problem** *27. Mai*

$$\begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{auf } \partial\Omega \end{cases} \tag{9.1}$$

mit $f\colon \Omega \to \mathbb{R}, g \in H^1(\Omega)$ und

$$Lu(x) = -\operatorname{div}(A(x)\nabla u(x)) + b(x) \cdot \nabla u(x) + c(x)u(x)$$

für $A \in \Omega \to \mathbb{R}^{n\times n}_{\text{symm}}, b\colon \Omega \to \mathbb{R}$.

9.1. Definition: Elliptizität

Der Operator L heißt (gleichmäßig) **elliptisch**, falls eine Konstante $\theta > 0$ existiert, sodass *[64]*

$$\xi^T A(x)\xi \geq \lambda|\xi|^2$$

für fast alle $x \in \Omega$ und alle $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Um eine schwache Lösung zu definieren, multiplizieren wir die PDGL wieder mit einer glatten Funktion und integrieren partiell, was zu folgender Definition führt:

9.2. Definition: Schwache Lösung

$u \in g + H^1_0(\Omega)$ heißt eine **schwache Lösung** der Gleichung (9.1), falls *[65]*

$$B(u,v) := \int_\Omega \nabla v(x)^T A(x)\nabla u(x) + b(x) \cdot \nabla u(x)v(x) + c(x)u(x)v(x)dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx \tag{9.2}$$

für alle $v \in H^1_0(\Omega)$.

Im Folgenden nehmen wir an, es existieren Konstanten $\lambda, \Lambda, \nu \geq 0$, sodass für alle $x \in \Omega$ und $\xi, \zeta \in \mathbb{R}^n$ gilt:

- $\xi^T A(x)\xi \geq \lambda|\xi|^2$
- $|\xi^T A(x)\zeta| \leq \Lambda|\xi||\zeta|$
- $\lambda^{-2}|b(x)|^2 + \lambda^{-1}|c(x)| \leq \nu^2$
- $c(x) \geq 0$

Als nächstes beweisen wir wie zuvor mithilfe des Maximumprinzips (Theorem 7.5) die Existenz und Eindeutigkeit schwacher Lösungen. Im Folgenden benutzen wir die Abkürzungen $u^+ := \max u, 0$ und $u^- := \min u, 0$.

9.3. Theorem: Schwaches Maximumprinzip

Sei $u \in H^1(\Omega)$ eine schwache Lösung von $Lu = 0$, dann gilt: *[66]*

$$\sup_\Omega u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+, \qquad \inf_\Omega u \leq \inf_{\partial\Omega} u^-$$

Beweis
Für alle $v \geq 0$ mit $uv \geq 0$ ist $\int_\Omega \nabla v^T A\nabla u + b \cdot \nabla uvdx = -\int_\Omega cuvdx \leq 0$. Falls $b = 0$, folgt mit $v = (u - \sup_{\partial\Omega} u^+)^+$

$$\lambda \int_\Omega |\nabla v|^2 dx \leq 0$$

und damit das erste Ergebnis (das zweite folgt analog). Im Fall $b \neq 0$ ist der Beweis anders zu führen (siehe Übung). □

9.4. Theorem: Eindeutigkeit der schwachen Lösung

[67] Falls eine schwache Lösung von (9.1) existiert, ist sie eindeutig.

Beweis
Seien u_1, u_2 zwei Lösungen, dann ist $w = u_1 - u_2$ schwache Lösung der Gleichung $Lw = 0$ in Ω, $w = 0$ auf $\partial\,\Omega$, und damit folgt $w \equiv 0$. □

Die Existenz einer schwachen Lösung basiert auf folgenden beiden abstrakten Hilfsmitteln:

9.5. Theorem: Rieszscher Darstellungssatz

[68] Sei $f\colon H \to \mathbb{R}$ ein beschränktes lineares Funktional auf einem Hilbertraum H, dann existiert ein $u \in H$ mit $||u||_H = ||f||$, sodass $f(v) = (u, v)_H$ für alle $v \in H$.

9.6. Bemerkung

[69] Ein beschränktes lineares Funktional bzw. ein beschränkter linearer Operator ist eine lineare Abbildung $T\colon V \to W$, wobei V, W normierte Vektorräume sind, sodass $||Tu||_W \leq C||u||_V$ für eine Konstante C und alle $u \in V$. Dies ist gleichbedeutend damit, dass T stetig ist:

"$\Rightarrow$": Sei $u_k \to u$ in V, dann ist $||Tu_k - Tu||_W = ||T(u_k - u)||_W \leq C||u_k - u||_V \to 0$.

"$\Leftarrow$": Angenommen, es existiert ein $u_k \in V$ mit $||u_k||_V = 1$, aber $||Tu_k||_W \to \infty$. Dann ist $v_k := \frac{u_k}{||Tu_k||_W} \to 0$ in V mit $||Tv_k||_W = 1$, was ein Widerspruch zur Stetigkeit von T ist.

Beweis von Theorem 9.5
Sei $u \in H$ derart, dass $f(u) = 1$ und sei $\hat{u} \in \ker(f)$ die orthogonale Projektion auf $\ker(f)$. Definiere $v = u - \hat{u}$. Wir zeigen: $f = \left(\frac{v}{||v||_H^2}, \cdot\right)_H$. Tatsächlich gilt für $w \in H$, $w = w - f(w)v + f(w)v$:

$$\left(\frac{v}{||v||_H^2}, w\right)_H \xRightarrow[v \perp \ker(f)]{w - f(w)v \in \ker(f)} \left(\frac{v}{||v||_H^2}, f(w)v\right)_H = f(w)$$

□

9.7. Theorem: Satz von Lax-Milgram

[70] Sei H ein Hilbertraum und $B\colon H \times H \to \mathbb{R}$ eine beschränkte, koerzitive Bilinearform (d.h. $|B(u, v)| \leq \alpha||u||_H||v||_H$ und $B(u, u) \geq \beta||u||_H^2$ für zwei Konstanten $\alpha, \beta > 0$ und alle $u, v \in H$). Dann existiert ein beschränkter linearer Operator $A\colon H \to H$ mit einer beschränkten Inverse, sodass $B(u, v) = (Au, v)_H$ für alle $u, v \in H$.

Beweis

1. $B(u, \cdot)$ ist beschränktes lineares Funktional auf $H \xRightarrow{\text{Thm. 9.5}}$ es existiert ein $v \in H$ mit $B(u, \cdot) = (v, \cdot)_H$.
2. Definiere $Au = v$, dann ist A klarerweise linear.
3. $||Au||_H^2 = (Au, Au)_H = B(u, Au) \leq \alpha||u||_H||Au||_H$, sodass $||Au||_H \leq \alpha||u||_H$, d.h. A ist beschränkt.
4. $\beta||u||_H^2 \leq B(u, u) = (Au, u)_H \leq ||Au||_H||u||_H$, sodass $||Au||_H \geq \beta||u||_H$, d.h. A^{-1} ist beschränkt, falls existent.
5. Wegen $||Au - Av||_H = ||A(u - v)||_H \geq \beta||u - v||_H$ ist A injektiv.
6. $\mathrm{im}(A)$ ist ein abgeschlossener Unterraum von H.
7. Es ist $\mathrm{im}(A) = H$: Sei $0 \neq u \in \mathrm{im}(A)^\perp$, dann ist $0 = (Au, u)_H = B(u, u) \geq \beta||u||_H^2 > 0$. Widerspruch. Also existiert A^{-1}. □

9.8. Theorem: Existenz einer schwachen Lösung

Sei Ω beschränkt mit Lipschitzrand und $f \in L^2(\Omega$ sowie A, b, c beschränkt. Dann existiert eine schwache Lösung $u \in H^1(\Omega)$ von (9.1). [71]

Beweis
Mit $\tilde{u} = u - g$ müssen wir ein $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$ finden mit $B(\tilde{u}, v) = F(v) := \int_\Omega (f - b \cdot \nabla g - cg)v - \nabla v^T A \nabla g dx$ für alle $v \in H_0^1(\Omega)$.

1. F ist ein beschränktes lineares Funktion auf $H_0^1(\Omega)$. Mit der Hölder-Ungleichung und Theorem (9.5) folgt, dass ein $R(F) \in H_0^1(\Omega)$ existiert mit $F(v) = (R(F), v)_{H_0^1(\Omega)}$ für alle $v \in H_0^1(\Omega)$.

2. $B(\cdot, \cdot)$ ist eine beschränkte Bilinearform auf $H_0^1(\Omega)$.

3. Falls $b = 0$, so folgt $B(v, v) \geq \lambda ||\nabla v||^2_{L^2(\Omega)} \geq c||v||^2_{H_0^1(\Omega)}$ mittels der Poincaré-Ungleichung, d.h. B ist koerzitiv und wir können den Satz von Lax-Milgram anwenden: Es existiert ein Operator A mit beschränkter Inverse derart, dass $B(u, v) = (Au, v)_{H_0^1(\Omega)}$ für alle $u, v \in H_0^1(\Omega)$. Demnach erfüllt $\tilde{u} = A^{-1}R(F)$ die Bedingung $B(\tilde{u}, v) = (R(F), v)_{H_0^1(\Omega)}$ für alle $v \in H_0^1(\Omega)$. Für $b \neq 0$ muss der Beweis angepasst werden (siehe Übung). $\square$

Nachdem wir Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung bewiesen haben, können wir nun ihre Regularität untersuchen.

9.9. Theorem: Innere Regularität

Sei Ω beschränkt mit Lipschitzrand, $f \in L^2(\Omega), A \in C^{0,1}(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^{n \times n}), b \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n), c \in L^\infty(\Omega)$. Sei $u \in H^1(\Omega)$ die schwache Lösung von (9.1). Für jedes $\Omega' \subset\subset \Omega$ (d.h. $\overline{\Omega'} \subset \Omega$) existiert eine Konstante $C \geq 0$, sodass [72]

$$||u||_{H^2(\Omega')} \leq C(||u||_{H^1(\Omega)} + ||f||_{L^2(\Omega)})$$

und damit $u \in H^2(\Omega')$.

Beweis

1. Für $i \in \{0, \ldots, n\}$ und $h \in \mathbb{R}$ definiere den Finite-Differenzen-Operator Δ_i^h durch $\Delta_i^h u := \frac{u(\cdot + h) - u(\cdot)}{h}$. Es ist leicht nachzuprüfen, dass $Du \in L^2(\Omega)$ genau dann, wenn ein $\kappa > 0$ existiert mit $\sum_{i=1}^n ||\Delta_i^h u||_{L^2(\Omega)} < \kappa$ für alle genügen kleinen $|h|$. Beachte ferner: $\Delta_i^h \nabla = \nabla \Delta_i^h$.

2. Sei $2|h| < \operatorname{dist}(\operatorname{supp} v, d\Omega)$. Aus (9.2) folgt:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla v^T \Delta_i^h (A \nabla u) dx &= -\int_\Omega \nabla(\Delta_i^{-h} v)^T A \nabla u dx \\ &= \int_\Omega (\Delta_i^{-h} v) b \cdot \nabla u + c(\Delta_i^{-h} v)u - f(\Delta_i^{-h} v) dx\end{aligned}$$

bzw. äquivalent dazu, vermöge $\Delta_i^h(A\nabla u)(x) = A(x + he_i)\Delta_i^h(\nabla u)(x) + \Delta_i^h(A(x))\nabla u(x)$,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla v^T A(x + he_i)\Delta_i^h \nabla u dx &= \int_\Omega -\nabla v^T \Delta_i^h A \nabla u + \Delta_i^{-h} v b \cdot \nabla u + c \Delta_i^{-h} v u - f \Delta_i^{-h} v dx \\ &\leq \text{const} \cdot (||u||_{H^1(\Omega)} + ||f||_{L^2(\Omega)})||\nabla v||_{L^2(\Omega)}\end{aligned} \tag{9.3}$$

3. Mit $v = \eta^2 \Delta_i^h u$ für eine glatte Cutoff-Funktion $\eta \in C_0^\infty(\Omega, [0, 1])$ mit $\eta = 1$ auf Ω' folgt:

$$\begin{aligned}\lambda \int_\Omega |\eta \nabla \Delta_i^h u|^2 dx &\leq \int_\Omega \eta^2 \Delta_i^h \nabla u^T A(x + he_i)\Delta_i^h \nabla u dx \\ &\overset{(9.3)}{\leq} \text{const} \cdot (||u||_{H^1(\Omega)} + ||f||_{L^2(\Omega)})(||\eta^2 \nabla \Delta_i^h u||_{L^2(\Omega)} + ||2\eta \Delta_i^h u \nabla \eta||_{L^2(\Omega)})\end{aligned}$$

Die Young-Ungleichung $\alpha\beta \leq \frac{\varepsilon\alpha^2}{2} + \frac{\beta^2}{2\varepsilon}$ für $\alpha, \beta, \varepsilon > 0$ sowie $(\alpha+\beta)^2 \leq 2\alpha^2 + 2\beta^2$ liefern:

$$\begin{aligned}\lambda||\eta\nabla\Delta_i^h u||_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \frac{1}{2\varepsilon}\text{const}^2(||u||_{H^1(\Omega)} + ||f||_{L^2(\Omega)})^2 + \frac{\varepsilon}{2}(||\eta^2\nabla\Delta_i^h u||_{L^2(\Omega)} + ||2\eta\Delta_i^h u\nabla\eta||_{L^2(\Omega)})^2 \\ &\leq \text{const}(||u||_{H^1(\Omega)} + ||f||_{L^2(\Omega)} + ||2\eta\Delta_i^h u\nabla\eta||_{L^2(\Omega)})^2 + \varepsilon||\eta^2\nabla\Delta_i^h u||_{L^2(\Omega)}^2\end{aligned}$$

Subtrahiere $\varepsilon||\nabla\Delta_i^h u||_{L^2(\Omega)}^2$ auf beiden Seiten und benutze $||2\eta\Delta_i^h u\nabla\eta||_{L^2(\Omega)}$. Damit erhalten wir:

$$||\nabla\Delta_i^h u||_{L^2(\Omega')} \leq ||\eta\nabla\Delta_i^h u||_{L^2(\Omega)} \leq \text{const}(||u||_{H^1(\Omega)} + ||f||_{L^2(\Omega)}),$$

woraus $||D^2 u||_{L^2(\Omega')} \leq \text{const}(||u||_{H^1(\Omega)} + ||f||_{L^2(\Omega)})$ folgt. □

9.10. Bemerkung

[73] Benutzen wir im Beweis zu Theorem 9.9 Finite-Differenzen-Approximationen höherer Ableitungen, erhalten wir

$$A \in C^{k,1}(\bar{\Omega}), b, c \in C^{k-1,1}(\bar{\Omega}), f \in H^k(\Omega) \quad \Rightarrow \quad u \in H^{k+2}(\Omega').$$

Damit folgt für unendlich oft differenzierbare A, b, c, f, dass auch u unendlich oft differenzierbar ist.

9.11. Bemerkung

[74] Falls die Randdaten glatt sind, kann man sogar die Glattheit von u auf ganz Ω zeigen:

$$\begin{aligned} & A \in C^{k,1}(\overline{\Omega}, b, c \in C^{k-1,1}(\overline{\Omega}), f \in H^k(\Omega), \partial\,\Omega \in C^{k+2}, g \in H^{k+2}(\Omega) \\ \Rightarrow \quad & u \in H^{k+2}(\Omega) \text{ mit } ||u||_{H^{k+2}(\Omega)} \leq C(||u||_{L^2(\Omega)} + ||f||_{H^k(\Omega)} + ||g||_{H^{k+2}(\Omega)})\end{aligned}$$

(siehe z.B. Gilbarg & Trudinger, "Elliptic PDEs of 2nd Order", S. 187.)

10. Variationsrechnung und nichtlineare Gleichungen

Das Lösen einer PDGL ist oft gleichbedeutend mit der Minimierung von Energie. In der Physik sind partielle Differentialgleichungen oft eine Konsequenz aus dem Prinzip der minimalen Energie.
Wir betrachten folgende Situation:

- **Lagrange-Dichte** $L\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}, (p, z, x) \mapsto L(p, z, x)$ (zur Vereinfachung als glatt vorausgesetzt, Ableitungen: L_p, L_z, L_x)
- Energie $E[u] = \int_\Omega L(\nabla u(x), u(x), x)dx$, definiert für (schwach) differenzierbare Funktionen $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$.
- **Gâteaux-Differential** von E in Richtung $v\colon \Omega \to \mathbb{R}$:

$$\partial_u E[u](v) = \frac{d}{dt}E[u + tv] = \int_\Omega L_p(\nabla u, u(x), x) \cdot \nabla v + L_z(\nabla u, u, x)vdx$$

Betrachte das Minimierungsproblem

$$\min_{u\colon \Omega\to\mathbb{R}} E[u] \text{ in Abhängigkeit von } u = g \text{ auf } \partial\Omega$$

Wir nehmen an, es besitzt einen glatten Minimierer u^*. Dann ist 0 ein Minimierer von $t \mapsto E[u^* + tv]$ für jedes $v \in C_c^\infty(\Omega)$, d.h. $\partial_u E[u^*](v) = 0$. Partielle Integration liefert

$$0 = \int_\Omega v(-\operatorname{div} L_p(\nabla u^*, u^*, x) + L_z(\nabla u^*, u^*, x))dx$$

für alle $v \in C_c^\infty(\Omega)$, d.h. u^* löst die PDGL

$$0 = - \div L_p(\nabla u(x), u(x), x) + L_z(\nabla u(x), u(x), x) \text{ auf } \Omega \quad \text{mit } u = g \text{ auf } \partial\Omega$$

10.1. Beispiel

Langrange-Dichte $L(p, z, x)$	Energie $E[u]$	PDGL	[75]
$\frac{1}{2}\lvert p\rvert^2$	$\int_\Omega \frac{1}{2}\lvert\nabla u\rvert^2 dx$	$\Delta u = 0$	(Laplace-Gleichung)
$\frac{1}{2}p^T A(x)p - zf(x)$	$\int_\Omega \frac{1}{2}\nabla u^T A\nabla u - fudx$	$-\operatorname{div}(A\nabla u) = f$	(allgemeine Poisson-Gleichung)
$\frac{1}{2}\lvert p\rvert^2 - F(z)$	$\int_\Omega \frac{1}{2}\lvert\nabla u\rvert^2 - F(u)dx$	$-\Delta u = F'(u)$	(nichtlineare Poisson-Gleichung)
$\sqrt{1 + \lvert p\rvert^2}$	$\int_\Omega \sqrt{1 + \lvert\nabla u\rvert^2}dx$	$\operatorname{div} \frac{\nabla u}{\sqrt{1+\lvert\nabla u\rvert^2}} = 0$	Minimalflächengleichung

Wir führen nun ein paar Hilfsmittel aus der Funktionalanalysis ein und beweisen dann die Existenz von Minimierern (und damit von Lösungen der Differentialgleichungen) für eine umfassende Klasse nichtlinearer Energien.

10.2. Definition: Dualraum

Der **Dualraum** X' eines Banachraums X ist der Raum der beschränkten linearen Funktionale $f\colon X \to \mathbb{R}$ auf X. [76]

10.3. Definition: schwache Konvergenz, schwach-*-Konvergenz

Eine Folge $x_k \in X$ **konvergiert schwach** gegen $x \in X$, falls $f(x_k) \to f(x)$ für alle $f \in X'$. Schreibe: $x_k \rightharpoonup x$. [77]
Eine Folge $f_k \in X'$ **konvergiert schwach-*** gegen $f \in X'$, falls $f_k(x) \to f(x)$ für alle $x \in X$. Schreibe: $f_k \overset{*}{\rightharpoonup} f$.
Offensichtlich folgt aus der Konvergenz in X bzw. X' auch die schwache Konvergenz bzw. die schwach-*-Konvergenz.

10.4. Theorem: Schwach-*-Kompaktheit

Die Einheitskugel (und damit jede abgeschlossene Teilmenge) eines separablen Banachraums X ist schwach-*-folgenkompakt, d.h. jede Folge enthält eine konvergente Teilfolge. [78]

Beweis
siehe z.B. Alt, "Lineare Funktionalanalysis", S. 229.

10.5. Defintion: Reflexivität

[79] Ein Banachrau X heißt **reflexiv**, falls er isometrisch isomorph ist zu seinem Bidualraum $(X')'$.
Hinweis: Nach dem vorigen Satz besitzen beschränkte Folgen in X eine schwach konvergente Teilfolge, falls X separabel ist.

10.6. Theorem: Sobolevräume sind reflexiv

[80] Sei Ω offen, beschränkt und mit Lipschitzrand sowie $k \in \mathbb{N}_0$. Für $p \in (1, \infty)$ ist $W^{k,p}(\Omega)$ separabel und reflexiv.

Beweis
siehe z.B. Alt, "Lineare Funktionalanalysis", S. 234.

10.7. Bemerkung

6. Jun. [81] Mit der Reflexivität von $L^p(\Omega)$ für $p \in (1, \infty)$ und der Hölder-Ungleichung ist leicht zu sehen, dass $L^p(\Omega) \subseteq (L^{p^*}(\Omega))'$. Gleichermaßen erkennt man $L^{p^*}(\Omega) \subseteq (L^p(\Omega))'$. Tatsächlich folgt mit dem Satz von Radon-Nikodým:

$$(L^p(\Omega))' = L^{p^*}(\Omega)$$

10.8. Theorem

[82] Sei

- $L(p, z, x)$ konvex in p
- $L(p, z, x)$ halbstetig von unten in z
- $L(p, z, x) \geq \alpha|p|^q - \beta$ für gewisse $\alpha, \beta > 0, q \in (1, \infty)$.

Falls $g \in W^{1,q}(\Omega)$, dann hat E einen Minimierer in $\{u \in W^{1,q}(\Omega) : u = g \text{ auf } \partial\Omega\}$.

Beweis
"Direkte Methode der Variationsrechnung"

1. Weder gilt $E \equiv \infty$, noch ist E nach unten unbeschränkt.
2. Betrachte eine minimierende Folge u_k mit $E[u_k] \to \inf_u E[u]$ monoton.
3. Zeige die Kompaktheit der Folge, d.h. die Existenz einer (in einem gewissen Sinn) konvergenten Teilfolge $u_k \to u^*$ für ein u^*.
   Es ist $E[u] \geq \alpha||\nabla u||^q_{L^q(\Omega)} - \beta|\Omega|$, daher existiert ein $C > 0$ mit $||\nabla u_k||_{L^q(\Omega)} \leq C$ für alle k. Mit der Poincaré-Ungleichung folgt $||u_k||_{W^{1,q}(\Omega)} \leq C$ für eine (andere) Konstante $C \geq 0$. Da $W^{1,q}(\Omega)$ reflexiv ist, konvergiert eine Teilfolge u_k schwach gegen ein $u^* \in W^{1,q}(\Omega)$.
4. Zeige mit u_k, dass E halbstetig von unten ist, d.h. $E[u] \leq \liminf_{k\to\infty} E[u_k]$.
   Aufgrund der kompakten Einbettung $W^{1,q}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ gilt $u_k \to u^*$ im starken Sinne in $L^q(\Omega)$ für eine Teilfolge und demach sogar punktweise fast überall nach dem Entfernen einer anderen Teilfolge. Mit dem Satz von Egoroff finden wir sogar für jedes $\varepsilon > 0$ eine messbare Menge $\Omega_\varepsilon \subseteq \Omega$ mit $|\Omega \setminus \Omega_\varepsilon| < \varepsilon$ und $u_k \to u^*$ gleichmäßig in Ω_ε.
   O.B.d.A. sei $L \geq 0$. Da L konvex in p, folgt

   $$\liminf_{k\to\infty} \int_\Omega L(\nabla u_k, u_k, x)dx \geq \liminf_{k\to\infty} \left(\int_\Omega L(\nabla u^*, u_k, x)dx + \int_\Omega L_p(\nabla u^*, u_k, x) \cdot (\nabla u_k - \nabla u^*)dx \right).$$

   Damit haben wir

   $$\begin{aligned} \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega L(\nabla u^*, u_k, x)dx &\geq \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega \inf_{j\geq k} L(\nabla u^*, u_j, x) + \beta dx - \beta|\Omega| \\ &\overset{(A)}{=} \int_\Omega \liminf_{k\to\infty} L(\nabla u^*, u_k, x) + \beta dx - \beta|\Omega| \overset{(B)}{\geq} \int_\Omega L(\nabla u^*, u^*, x)dx = E[u^*] \end{aligned}$$

wobei wir bei (A) den Satz von der monotonen Kovergenz (Beppo Levi) bzw. das Lemma von Fatou und bei (B) die Halbstetigkeit von unten von L benutzen. Weiter folgt:

$$\begin{aligned}&\int_\Omega L_p(\nabla u^*, u_k, x)\cdot(\nabla u_k, -\nabla u^*)dx\\ \geq &\int_{\Omega_\varepsilon} L_p(\nabla u^*, u^*, x)\cdot(\nabla u_k, \nabla u^*)dx + \int_{\Omega_\varepsilon}(L_p(\nabla u^*, u_k, x) - L_p(\nabla u^*, u^*, x))\cdot(\nabla u_k - \nabla u^*)dx\end{aligned}$$

Der erste Term konvergiert wegen der schwachen Konvergenz von u_k gegen 0 und der zweite wegen der Hölder-Ungleichung und der gleichmäßigen Konvergenz. Mit $\varepsilon \to 0$ folgt die Behauptung. □

11. Parabolische PDGL

11.1. Definition: Wärmeleitungsgleichung

17. Jun Die **Wärmeleitungsgleichung**

$$u_t - \Delta u = 0 \tag{11.1}$$

beschreibt die zeitliche Entwicklung einer diffundierenden Größe (z.B. Wärme).

Temperatur:	$u\colon (0,T)\times\Omega \to \mathbb{R}$ (in einem Stück Material Ω zur Zeit $(0,T)$)
Leitfähigkeit:	$a > 0$ (Materialparameter)
Wärmekapazität:	$\kappa > 0$ (Materialparameter)
Wärmefluss:	$F = -a\nabla u$ (in Richtung des negativen Temperaturgradienten)
Nettofluss:	$-\int_{\partial V} F\cdot\nu dx$ nach $V \subset \Omega$
Wärmeänderung:	$\frac{d}{dt}\int_V \kappa u dx$ in V

Wärmeänderung = Nettofluss $\Rightarrow$

$$0 = \frac{d}{dt}\int_V \kappa u dx + \int_{\partial V} F\cdot\nu dx = \int_V \kappa u_t + \operatorname{div} F dx = \int_V \kappa u_t - a\Delta u dx$$

und (11.1) folgt für $\kappa = a$, da V beliebig ist.

Parabolische Gleichungen sind eng mit elliptischen verwandt, daher folgen wir etwa den elliptischen Methoden. Diesmal beginnen wir jedoch mit der Fundamentallösung, da Mittelwertformeln und Maximumsprinzipien dann einfacher folgen.

Suche nach einer einfachen, radialsymmetrischen Lösung, z.B. der Form

$$u(t,x) = t^{-\alpha}v(t^{-\beta}r)$$

mit $r = |x|$. Mit $\Delta = \partial_r^2 + \frac{n-1}{r}\partial_r$ und $y = t^{-\beta}r$ ergibt sich

$$-\alpha t^{-\alpha-1}v(y) - \beta t^{-\alpha-1}yv'(y) - t^{-\alpha-2\beta}v''(y) + \frac{n-1}{y}t^{-\alpha-2\beta}v'(y) = 0$$

Wähle $\beta = \frac{1}{2}$. Mit $\alpha = \frac{n}{2}$ wird dies zu

$$0 = [y^{n-1}v' + \frac{1}{2}y^n v]' = [vy^{n-1}(\log v + \frac{y^2}{4})']'$$

d.h. eine Lösung ist $v = c\exp\Big(-\frac{y^2}{4}\Big)$.

11.2. Definition: Fundamentallösung

[83] Die Funktion

$$\Phi(t,x) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\exp\Big(-\frac{|x|^2}{4t}\Big) & (t>0) \\ 0 & (t<0) \end{cases}$$

löst (11.1) auf $(\mathbb{R}\setminus\{0\})\times\mathbb{R}^n$ und heißt **Fundamentallösung** der Wärmeleitungsgleichung.

11.3. Bemerkung

[84] Zur Zeit $t > 0$ ist die Fundamentallösung offfensichtlich eine n-dimensionale Normalverteilung/Gaußsche Glockenkurve mit Mittelwert 0 und Standardabweichung $\sqrt{2t}$.

Beweis
$n = 1$:

$$\left(\int_R \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}dx\right)^2 = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{4\pi t}e^{-\frac{x^2+y^2}{4t}}dxdy \overset{PK}{=} \int_{r=0}^\infty 2\pi r\frac{1}{4\pi t}e^{-\frac{r^2}{4t}}dr = \Big[-e^{-\frac{r^2}{4t}}\Big]_{r=0}^\infty = 1$$

$n > 1$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} dx = \prod_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{|x_i|^2}{4t}} dx_i = 1$$

Definiere:

- $\Omega_T = \Omega \times (0, T]$
- $\Gamma_T = \overline{\Omega}_T \setminus \Omega_T = \{0\} \times \Omega \cup [0, T] \times \partial\Omega$
- **Wärmeball** für $t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$ (ein Levelset der Fundamentallösung)

$$E(t, x, r) = \left\{ (s, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : s \leq t, \Phi(t - s, x - y) \geq \frac{1}{r^n} \right\}$$

11.4. Theorem: Mittelwertformel

Sei $u \in C^1((0, T]), C^2(\Omega, \mathbb{R})$ eine Lösung von (11.1) in Ω_T, dann gilt [85]

$$u(t, x) = \frac{1}{4r^n} \int_{E(t,x,r)} u(s, y) \frac{|x - y|^2}{(t - s)^2} dyds =: U(r)$$

für jedes $E(x, r, t) \subset \Omega_T$. (Beachte: Formel integriert nur über Vergangenheit!)

Beweis
O.B.d.A sei $t = 0, x = 0$. $U(r) = \frac{1}{4} \int_{E(0,0,r)} u(r^2\tilde{s}, r\tilde{y}) \frac{|0-\tilde{y}|^2}{(0-\tilde{s})^2} d\tilde{y}d\tilde{s}$.

$$\begin{aligned} U'(r) &= \frac{1}{4} \int_{E(0,0,1)} 2rsu_t(r^2s, ry)\frac{y^2}{s^2} + yu_x(r^2s, ry)\frac{y^2}{s^2} dyds \\ &= \frac{1}{4r^{n+1}} \int_{E(0,0,r)} \nabla u(s, y) \cdot y \frac{|y|^2}{s^2} + 2u_s \frac{|y|^2}{s} dyds =: A + B. \end{aligned}$$

Sei $\psi := \log(r^n \Phi(-s, y)) = -\frac{n}{2} \log(-urs) + \frac{|y|^2}{4^s} + n \log r$. Wegen $\Phi(-s, y) = r^{-n}$ auf $\partial E(0, 0, r)$ ist dort $\psi = 0$.

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{4r^{n+1}} \int_{E(0,0,r)} 4u_s y \cdot \nabla\psi dyds \overset{P.I.}{=} -\frac{1}{4r^{n+1}} \int_{E(0,0,r)} \psi n u_s + \psi y \cdot \nabla u_s dyds \\ &\overset{P.I.}{=} \frac{1}{r^{n+1}} \int_{E(0,0,r)} -\psi n u_s + \underbrace{\psi_s}_{-\frac{n}{2s} - \frac{|y|^2}{4s^2}} y \cdot \nabla u dydy \\ &= \frac{1}{r^{n+1}} \int_{E(0,0,r)} -\psi n \Delta u - \frac{n}{2s} y \cdot \nabla u dyds - A = \frac{1}{r^{n+1}} \int_{E(0,0,1)} n\nabla\psi \cdot \nabla u - \frac{n}{2s} y \cdot \nabla u dyds - A = -A \end{aligned}$$

$$\Rightarrow U'(r) = 0 \Rightarrow U(r) = \lim_{\rho \to 0} U(\rho) = u(0, 0) \lim_{\rho \to 0} \underbrace{\frac{1}{4\rho^n} \int_{E(0,0,\rho)} \frac{|y|^2}{s^2} dyds}_{= \frac{1}{4} \int_{E(0,0,1)} \frac{|y|^2}{s^2} dyds = 1}$$ □

11.5. Theorem: Starkes Maximumprinzip

$u \in C^1((0, T]; C^2(\Omega, \mathbb{R})) \cap C(\Omega)$ sei eine Lösung von (11.1) in Ω_T, dann gilt: [86]

$$\max_{\Omega_T} = \max_{\Gamma_T} u$$

Ist $u(t, x) = \max_{\overline{\Omega_T}} u$ für $(t, x) \in \Omega_T$, so ist u konstant auf Ω_t, falls Ω zusammenhängend ist.
(Analog für Minima durch Ersetzen von u mit $-u$.)

Beweis
20. Jun Sei $M = u(x,t)$ ein Maximum. Nach Theorem 11.4 ist $M = \frac{1}{4r^n}\int_{E(t,x,r)} u(s,y)\frac{|x-y|^2}{|t-s|^2}dyds \leq M$, da $\int_{E(t,x,r)} \frac{|x-y|^2}{(t-s)^2}dyds = 1$. Gleichheit gilt genau dann, wenn $u \equiv M$ auf $E(t,x,r)$. Um jeden Punkt (s,y) von $E(t,x,r)$ kann wieder ein Wärmeball gezeichnet werden, auf dem $u \equiv M$ ist. So kann Ω_t mit Wärmebällen überdeckt werden, auf denen u jeweils gleich M ist. $\square$

11.6. Bemerkung: Unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit

[87] Sei $u \in C^1((0,T];C^2(\Omega,\mathbb{R})) \cap C(\Omega_T)$ eine Lösung des Anfangs-Randwertproblems

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{auf } \Omega_T \\ u = 0 & \text{auf } [0,T] \times \partial\Omega \\ u = g \text{ auf } \{0\} \times \Omega \end{cases}$$

für $g \geq 0$. Aus dem Maximumsprinzip folgt, dass $u > 0$ auf Ω_T, falls ein $x \in \Omega$ existiert mit $g(x) > 0$, d.h. die Anfagswert-Information ist unendlich schnell überall hingeflossen.

11.7. Definition: Inhomogene Wärmeleitung

Die inhomogene Wärmeleitungsgleichung

$$u_t(t,x) - \Delta u(t,x) = f(t,x) \tag{11.2}$$

hat einen Quellterm f. Adäquate Randbedingungen für parabolische Gleichungen sind eine Anfangsbedingung

$$u = g \text{ für } t = 0 \tag{11.3}$$

und eine Dirichlet- oder Neumann-Randbedingung

$$u = h \text{ auf } \partial\Omega \tag{11.4}$$

oder

$$\partial u/\partial v = h \text{ auf } \partial\Omega$$

11.8. Theorem: Eindeutigkeit

[88] Sei $g \in C(\Omega), h \in C([0,T] \times \partial\Omega)$, dann ist eine Lösung $u \in C^1((0,T];C^2(\Omega,\mathbb{R})) \cap C(\Omega_T)$ von (11.2), (11.3) und (11.4) eindeutig.

Beweis
Das folgt aus dem starken Maximumsprinzip für $u - \tilde{u}$, wenn $u, \tilde{u}$ zwei Lösungen sind. $\square$

11.9. Theorem: Fundamentallösung

[89] Es gilt

$$\begin{cases} \mathcal{L}[\Phi] := \Phi_t - \Delta\Phi = 0 & \text{auf } (0,\infty) \times \mathbb{R}^n \\ \Phi(0,x) = \delta(x) \end{cases}$$

in dem Sinn, dass für jedes $f \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ gilt:

$$\lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t,x)f(x)dx = f(0)$$

Beweis
Nebenrechnung:

$$\left(\overbrace{\int_{\mathbb{R}\setminus[-\sqrt[4]{t},\sqrt[4]{t}]} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} dx}^{=:A_t}\right)^2 = \int_{\mathbb{R}^2\setminus[-\sqrt[4]{t},\sqrt[4]{t}]\times[-\sqrt[4]{t},\sqrt[4]{t}]} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2+y^2}{4t}} dxdy$$
$$\leq \int_{r=2\sqrt[4]{t}}^{\infty} 2\pi r \frac{1}{4\pi t} e^{-\frac{r^2}{4t}} dr = \left[-e^{-\frac{r^2}{4t}}\right]_{r=2\sqrt[4]{t}}^{\infty} = e^{-\frac{1}{\sqrt{t}}}$$
$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t,x) f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n\setminus[-\sqrt[4]{t},\sqrt[4]{t}]^n} \Phi(t,x) f(x) dx + \int_{[-\sqrt[4]{t},\sqrt[4]{t}]^n} \Phi(t,x) f(x) dx$$

Der erste Summand ist betragsäßig kleiner als $A_t^n \max_{\mathbb{R}}^n |f| \xrightarrow[t\to 0]{} 0$. Der zweite Summen liegt zwischen zwischen dem Minimum und dem Maximum von $f(1-A_t)$ auf $[-\sqrt[4]{t},\sqrt[4]{t}]$; beides strebt gegen $f(0)$ für $t \to 0$. □

11.10. Bemerkung

Alternativ (und vielleicht näher zu unserer Vorgehensweise für elliptische Gleichungen) kann Φ aufgefasst werden als Lösung zu 24. Jun [90]

$$\begin{cases} \Phi_t - \Delta\Phi = \delta & \text{auf } \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \\ \Phi(0,x) = 0 \end{cases}$$

Im selben Sinn wie zuvor, betrachte nun für festes (s,y) die Lösung des zu (11.2)-(11.4) *adjungierten Problems* (eine Diffusion rückwärts in der Zeit)

$$\begin{cases} \mathcal{L}^*[G^{(s,y)}] := -G_t^{(s,y)} - \Delta G^{(s,y)} = 0 & \text{auf } (0,s)\times\Omega \\ G^{(s,y)}(t,x) = 0 & \text{auf } \partial\Omega \\ G^{(s,y)}(t,x) = \delta(x-y) & \text{zu } t = s \end{cases} \tag{11.5}$$

Motivation: wenn wir $G^{(s,y)}$ für alle (s,y) finden, gilt (informell; formaler Beweis wie bei elliptischen Differentialgleichungen)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_s} (G^{(s,y)}\mathcal{L}[u] - u\mathcal{L}^*[G^{(s,y)}]) dxdt &= \int_{\Omega_s} \partial_t(G^{(s,y)}u) + \nabla(uG_x^{(s,y)} - G^{(s,y)}u_x) dxdt \\ &= \int_{\Omega_s} \begin{pmatrix} \partial_t \\ \nabla \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} G^{(s,y)}u \\ uG_x^{(s,y)} - G^{(s,y)}u_x \end{pmatrix} dxdt \\ &= \int_{[0,s]\times\partial\Omega} u\,\partial_v G^{(s,y)} - G^{(s,y)}\,\partial_v u dxdt + \int_\Omega G^{(s,y)}u\Big|_{t=s} - G^{(s,y)}u\Big|_{t=0} dx \end{aligned}$$

und somit

$$u(s,y) = \int_{\Omega_s} G^{(s,y)} f dxdt + \int_{\{0\}\times\Omega} G^{(s,y)} g dx - \int_{[0,s]\times\partial\Omega} \partial_v G^{(s,y)} dxdt,$$

eine *Greensche Darstellung* der Lösung.

11.11. Beispiel: Greensche Funktion für Halbraum

$G(s,y)$ für $\Omega = \{x\in\mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ kann wieder mit der Spiegelungsmethode (vgl. 7.15) gefunden werden:

$$G^{(s,y)}(t,x) = \Phi(s-t, x-y) - \Phi(s-t, x+y)$$

erfüllt (11.5).

12. Schwache Lösungen von parabolischen Gleichungen

Erinnerung:

- $H_0^1(\Omega) = \{f\colon \Omega \to \mathbb{R} : \int_\Omega |f|^2 dx < \infty,$ schwache Ableitung Df existiert, $\int_\Omega |Df|^2 dx, f\big|_{\partial\Omega} = 0\}$
- Banachraum: normierter, vollständiger Vektorraum
- Dualraum X^* zu Banachraum X: $X^* = \{f\colon X \to \mathbb{R} : f$ ist linear, $||f||_{X^1} := \sup\limits_{\substack{x\in X\\ ||x||_X \leq 1}} f(x) < \infty\}$

12.1. Definition

$H^{-1}(\Omega)$ bezeichne den Dualraum zu $H_0^1(\Omega)$. Für $f \in H^{-1}(\Omega)$ schreiben wir auch $\langle f, v\rangle$ statt $f(v)$.

$$||f||_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{\substack{u\in H_0^1(\Omega)\\ ||u||_{H_0^1(\Omega)}\leq 1}} \langle f, u\rangle$$

12.2. Theorem

(i) Sei $f \in H^{-1}(\Omega)$, dann gibt es Funktionen $f^0, f^1, \ldots, f^n \in L^2(\Omega)$ mit

$$\langle f, v\rangle = \int_\Omega f^0 v dx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega f^i v_{x_i} dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{12.1}$$

(ii) $||f||_{H^{-1}(\Omega)} = \inf\limits_{f \text{ erf. (12.1)}} \sqrt{\int_\Omega \sum\limits_{i=0}^n |f^i|^2}$

(iii) $(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega uv dx = \langle u, v\rangle$ für alle $v \in H_0^1(\Omega), u \in H^{-1}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$.

Beweis

(i) $H_0^1(\Omega)$ ist mit Skalarprodukt $(u, v)_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega uv + DuDv dx$ ein Hilbertraum. Nach 9.5 kann jedes $f \in H^{-1}(\Omega)$ dargestellt werden durch ein $u_f \in H_0^1(\Omega)$, d.h. $\langle f, v\rangle = (u_f, v)_{H_0^1(\Omega)}$ für alle $v \in H_0^1(\Omega)$. Dann folgt (i) mit $f^0 = u_f$, $f^i = (u_f)_{x_i}$.

(ii) Sei $f \in H^{-1}(\Omega)$ mit $\langle f, v\rangle = \int_\Omega g^0 v + \sum_{i=1}^n g^i v_{x_i} dx$ für $g^0, \ldots, g^n \in L^2(\Omega)$. Es gilt:

$$\begin{aligned}\int_\Omega g^0 v + \sum_{i=1}^n g^i v_{x_i} dx &\overset{\text{Hölder}}{\leq} ||g^0||_{L^2}||v||_{L^2} + \sum_{i=1}^n ||g^i||_{L^2} \\ &\overset{a\cdot b\leq |a||b| \text{ in } \mathbb{R}^{n+1}}{\leq} \sqrt{\sum_{i=0}^n ||g^i||_{L^2}^2}\sqrt{||v||_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^n ||v_{x_i}||_{L^2}^2} \\ &\leq \sqrt{\int_\Omega \sum_{i=0}^n |g^i|^2 dx} \cdot ||v||_{H_0^1(\Omega)}\end{aligned} \tag{12.2}$$

Nun:

$$||f||_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{||u||_{H_0^1(\Omega)}\leq 1} \langle f, u\rangle = \sup_{||u||_{H_0^1(\Omega)}\leq 1} \int_\Omega g^0 u + \sum_{i=1}^n g^i u_{x_i} dx \overset{(12.2)}{\leq} \sqrt{\int_\Omega \sum_{i=0}^n |g^i|^2 dx}$$

und

$$||f||_{H^{-1}(\Omega)} \geq \langle f, \frac{u_f}{||u_f||_{H_0^1}}\rangle = \frac{\int_\Omega f^0 u + \sum\limits_{i=1}^n f^i u_{x_i} dx}{\sqrt{\int_\Omega u_f^2 + |Du_f|^2 dx}} = \frac{\int_\Omega \sum\limits_{i=0}^n |f^i|^2 dx}{\sqrt{\int_\Omega \sum\limits_{i=0}^n |f^i|^2 dx}} = \sqrt{\int_\Omega \sum_{i=0}^n |f^i|^2 dx}$$

(iii) folgt aus (i). □

12.3. Definition

- Für einen Banachraum X sei

$$L^p((0,T);X) := \{u\colon (0,T) \to X : u \text{ ist stark messbar und } ||u||_{L^p((0,T);X)} < \infty\}$$

mit $||u||_{L^p((0,T);X)} = \left(\int_0^T ||u(t)||^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$ für $1 \le p < \infty$ und $||u||_{L^\infty((0,T);X)} = \operatorname{esssup}_{t\in(0,T)} ||u(t)||$.
(Dabei heißt u stark messbar, falls eine fast überall gegen u konvergente Folge von Treppenfunktionen existiert.)

- $C([0,T];X) := \left\{u\colon [0,T] \to X : u \text{ stetig}, ||u||_{C([0,T];X)} := \max\limits_{t\in[0,T]} ||u(t)|| < \infty\right\}$

12.4. Definition: schwache Ableitung

Sei $u \in L^1((0,T);X)$. $v \in L^1((0,T);X)$ heißt **schwache Ableitung** von u und wir schreiben $u' = v$, wenn

$$\int_0^T \phi'(t)u(t)dt = -\int_0^T \phi(t)v(t)dt$$

für alle $\phi \in C_c^\infty((0,T);\mathbb{R})$.

12.5. Bemerkung

$u \in L^2((0,T);H_0^1(\Omega))$ und $u' \in L^2((0,T);H^{-1}(\Omega))$ impliziert:

- $u \in C([0,T];L^2(\Omega))$
- $||u(t)||^2_{L^2(\Omega)} = ||u(0)||^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t 2\langle u'(t), u(t)\rangle dt$
(bzw. $\frac{d}{dt}||u(t)||^2_{L^2} = \frac{d}{dt}\int_\Omega |u(t)|^2 dx = \int_\Omega 2u'(t)u(t)dx$)

Betrachte nun

$$\left.\begin{cases} u_t + Lu = f & \text{in } \Omega_T \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \\ u = y & \text{auf } \{0\}\times\Omega \end{cases}\right\} \text{ mit } f \in L^2(\Omega_T), g \in L^2(\Omega) \tag{12.3}$$

und $Lu = -\operatorname{div}(A\nabla u) + b\cdot\nabla u + cu$, $A, b, c \in L^\infty(\Omega_T)$, A symmetrisch positiv definit mit kleinstem Eigenwert λ.
Idee für schwache Lösung:

- Fasse u auf als Funktion $u\colon [0,T] \to H_0^1(\Omega)$ (analog $f\colon [0,T] \to L^2(\Omega)$)
- Definiere Bilinearform $B_t[u,v] := \int_\Omega \nabla u\cdot A\nabla v + b\cdot\nabla uv + cuvdx = \int_\Omega Lu\cdot vdx$ für alle $u, v \in H_0^1(\Omega)$.
- Multipliziere $u_t + Lu = f$ mit $v \in H_0^1(\Omega)$ und integriere partiell
$\Rightarrow (u_t(t), v)_{L^2(\Omega)} + B_t[u(t), v] = (f(t), v)_{L^2(\Omega)}$
- außerdem $u_t = g^0 + \sum_{i=1}^n g^i_{x_i}$ mit $g^0 = f - b\cdot\nabla u - cu, g^i = \sum_{i=1}^n A_{ij}\cdot u_{x_i}$, d.h.

$$||u_t||_{H^{-1}(\Omega)} \le \sqrt{\sum_{i=0}^n ||g^i||^2_{L^2}} \le C(||u||_{H_0^1(\Omega)^t}||f||_{L^1(\Omega)})$$

$u \in L^2((O,T);H_0^1(\Omega))$ mit $u' \in L^2((0,T);H^{-1}(\Omega))$ heißt **schwache Lösung** von (12.3), wenn $\langle u', v\rangle + B_t[u,v] = (f,v)_{L^2}$ für jedes $v \in H_0^1(\Omega)$ und für alle $t \in [0,T]$ sowie $u(0) = g$. (macht Sinn, da $u \in C([0,T];L^2(\Omega))$)

12.6. Definition: Garlerkin-Approximation

Sei Ω Lipschitz. $L^2(\Omega)$ und $H_0^1(\Omega)$ sind Hilberträume. Man kann zeigen (Evans, Kapitel 6.5.1), dass glatte Funktionen $w_k \in H_0^1$ für $k \geq 1$ existieren, sodass gilt:

(i) $(w_k)_k$ ist eine Orthogonalbasis von $H_0^1(\Omega)$.

(ii) $(w_k)_k$ ist eine Orthonormalbasis von $L^2(\Omega)$.

Für festes $m \in \mathbb{N}$ approximieren wir nun eine schwache Lösung in $\langle w_1, w_2, \ldots \rangle$, d.h. wir suchen

$$u_m(t) = \sum_{k=1}^{m} d_k^m(t) w_k$$

mit Koeffizienten $d_k^m \colon [0,T] \to \mathbb{R}$, sodass

$$\left\{\begin{array}{ll} (u_m', w_k)_{L^2} + B_t[u_m, w_k] = (f, w_k)_{L^2} & \forall t \in [0,T], k = 1, \ldots, m \\ \underbrace{(u_m(0), w_k)_{L^2}}_{d_m^k(0)} = (g, w_k) & \forall k \end{array}\right\} \tag{12.4}$$

12.7. Theorem: Existenz der Galerkin-Approximation

Für jedes $m \in \mathbb{N}$ existiert eine eindeutige Lösung $u_m = \sum_{k=1}^m d_k^m w_k$ von (12.4)

Beweis
Sei $B_t[w_l, w_k] = e_{kl}(t), D_m(t) = (d_m^1(t), \ldots, d_m^m(t))^T, E(t) = (e_{kl}^{(i)})_{k,l=1,\ldots,m} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ sowie $F(t) = ((f(t), w_1)_{L^2}, \ldots, (f(t), w_m)_{L^2})^T$.
(12.4) $\Leftrightarrow$ $D_m'(t) + E(t) D_m(t) = F(t)$ bzw. $D_m'(t) = -E(t)D_m(t) + F(t)$ mit $D_m(0) = ((g, w_1)_{L^2}, \ldots, (g, w_m)_{L^2})^T$.
Beachte: rechte Seite ist für jedes t lipschitzstetig in D_m. Mit einem tiefen Satz für gewöhnliche Differentialgleichungen folgt, dass eine eindeutige Lösung $D_m(t)$ existiert. □

Wie bei den elliptischen Gleichungen wollen wir annehmen, dass $\lambda, \Lambda, \gamma > 0$ existieren mit:

- $\xi' A(t,x)\xi \geq \lambda |\xi|^2$
- $|\xi^T A \xi| \leq \Lambda |\xi||\xi|$
- $\lambda^{-2}|b(t,x)|^2 + \lambda^{-1}|c(t,x)|^2 \leq \gamma^2, c(t,x) \geq 0$

12.8. Theorem: Energieabschätzung

Es existiert ein $C < 0$ unabhängig von m, sodass:

$$\max_{t \in [0,T]} ||u_m(t)||_{L^2(\Omega)} + ||u_m||_{L^2((0,T);H_0^1(\Omega))} + ||u_m'||_{L^2((0,T);H^{-1}(\Omega))} \leq C\big(||f||_{L^2((0,T);L^2(\Omega))} + ||g||_{L^2(\Omega)}\big)$$

Beweis
Multipliziere (12.4) mit d_k^m und summiere $\sum_{k=1}^m \quad \Rightarrow \quad (u_m', u_m)_{L^2} + B_t[u_m, u_m] = (f, u_m)_{L^2}$.
Wir hatten gezeigt (Theorem 9.8 bzw. Übungsblatt 9):

$$\beta ||u_m||^2_{H_0^1(\Omega)} \leq B_t[u_m, u_m] + \gamma ||u_m||^2_{L^2(\Omega)} \text{ für Konstanten } \beta, \gamma > 0$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{d}{dt}\frac{||u_m||^2_{L^2(\Omega)}}{2}}_{=\langle u_m', u_m\rangle} + \beta ||u_m||^2_{H_0^1(\Omega)} &\leq \overbrace{\langle u_m', u_m\rangle + B_t[u_m, u_m]}^{=(f,u_m)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \overbrace{f u_m}^{\leq \frac{1}{2} f^2 + \frac{1}{2} u_m^2} dx} + \gamma ||u_m||^2_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \frac{1}{2}||f||^2_{L^2(\Omega)} + \left(\gamma + \frac{1}{2}\right) ||u_m||^2_{L^2(\Omega)} \end{aligned} \tag{12.5}$$

Mit $\eta(t) := ||u_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}, \xi(t) := \frac{1}{2}||f(t)||^2_{L^2(\Omega)}$ ergibt sich $\eta'(t) \le \xi(t) + (\gamma + \frac{1}{2})\eta(t)$. Mit Gronwall 12.9 folgt:

$$\eta(t) \le e^{(\gamma+\frac{1}{2})t}(\eta(0) + \underbrace{\int_0^t \xi(s)ds}_{=\frac{1}{2}||f||_{L^2((0,T);L^2(\Omega))}}),$$

wobei $\eta(0) = (u_m(0), u_m(0))_{L^2} = \sum_{k=1}^m |d_k^m(0)|^2 \le \sum_{k=1}^\infty |d_k^m(0)|^2 = ||g||^2_{L^2}$.

$$\Rightarrow \max_{t\in[0,T]} ||u_m||_{L^2} \le C\sqrt{||g||^2_{L^2} + ||f||_{L^2((0,T);L^2(\Omega))}} \le \widetilde{C}(||g||_{L^2} + ||f||_{L^2((0,T);L^2(\Omega))})$$

Integriere nun (12.5) von 0 bis T:

$$\frac{||u_m(T)||^2_{L^2} - ||u_m(0)||^2_{L^2}}{2} + \beta||u_m||^2_{L^2((0,T);H_0^1(\Omega))} \le \frac{||f||^2_{L^2((0,T);L^2(\Omega))}}{2} + (\gamma + \frac{1}{2}) \underbrace{\int_0^T ||u_m||^2_{L^2(\Omega)}dt}_{\le T\max_{t\in[0,T]}||u_m||^2_{L^2(\Omega)}}$$

$$\Rightarrow ||u_m||^2_{L^2((0,T);H_0^1(\Omega))} \le C(||f||^2_{L^2((0,T);L^2(\Omega))} + ||g||^2_{L^2(\Omega)})$$

Nun sei $v \in H_0^1(\Omega)$ beliebig mit $||v||_{H_0^1(\Omega)} \le 1$.

$$\langle u_m', v\rangle = (u_m', v)_{L^2} \overset{\text{ONB}}{=} \left(u_m', \sum_{k=1}^\infty (v, w_k)w_k\right)_{L^2} = \left(u_m', \overbrace{\sum_{k=1}^m (v, w_k)w_k}^{=:v_m}\right)_{L^2}$$

$$\overset{(12.4)}{=} -B_t[u_m, v_m] + (f, v_m)_{l^2} \le C(||u_m||_{H_0^1(\Omega)} + ||f||_{L^2(\Omega)}) \underbrace{||v_m||_{H_0^1(\Omega)}}_{\le ||v||_{H_0^1(\Omega)} \le 1}$$

$$\Rightarrow ||u_m'||_{H^{-1}(\Omega)} \le C(||u_m||_{H_0^1(\Omega)} + ||f||_{L^2}) \Rightarrow \int_0^T ||u_m'||^2_{H^{-1}(\Omega)}dt \le 2C(||u_m||^2_{L^2((0,T);H_0^1(\Omega))} + ||f||_{L^2((0,T);L^2(\Omega))})$$

□

12.9. Lemma von Gronwall

Sei $\eta(t) \ge 0$ absolut stetig (d.h. $\eta(t) = \int_{t_0}^t \ldots ds$) mit $\eta'(t) \le \Phi(t)\eta(t) + \Psi(t)$ fast überall für $\Phi, \Psi \ge 0$, $\int_{\mathbb{R}} |\Phi| + |\Psi| dt < \infty$. Dann gilt: 4. Jul

$$\eta(t) \le e^{\int_0^t \Phi(s)ds}\left[\eta(0) + \int_0^t \Psi(s)ds\right]$$

Beweis

$$\frac{d}{ds}(\eta(s)e^{-\int_0^s \Phi(r)dr} = e^{-\int_0^s \Phi(r)dr} \underbrace{(\eta'(s) - \eta(s)\Phi(s))}_{\le\Psi(s)} \Rightarrow \eta(t)e^{-\int_0^s \Phi(r)dr} \le \eta(0) + \int_0^t \underbrace{\Psi(s)e^{-\int_0^s \Phi(r)dr}}_{\le\Psi(s)}ds$$

□

12.10. Theorem: Existenz schwacher Lösungen

(12.3) besitzt eine schwache Lösung.

Beweis

1)
- u_m und u_m' sind wegen 12.8 gleichmäßig beschränkt in $X := L^2((0,T);H_0^1(\Omega))$ bzw. $L^2((0,T);H^{-1}(\Omega))$.
- X ist Hilbertraum mit Skalarprodukt $(u,v) = \int_0^T \int_\Omega uv + \nabla u \cdot \nabla v dxdt$
  $\overset{9.5}{\Longrightarrow}$ jedes Element $f \in X^*$ kann mit einem $u_f \in X$ identifiziert werden mit $||f||_{X^*} = ||u_f||_X$.
  $\Rightarrow X \equiv X^* \Rightarrow X^* \equiv X^{**} \Rightarrow X$ ist reflexiv.

≡: isometrisch isomorph

- $L^2((0,T),H^{-1}(\Omega)$ ist auch reflexiv (gleiches Argument, da $H^{-1}(\Omega) = (H_0^1(\Omega))^* \equiv H_0^1(\Omega)$.
  $\Rightarrow u_m \overset{L^2((0,T);H_0^1(\Omega)}{\rightharpoonup} u$ für Teilfolge und $u_m' \overset{L^2((0,T);H^{-1}(\Omega)}{\rightharpoonup} \widetilde{w}$ für Teilfolge.
  Weiterhin $\widetilde{w} = u'$, denn sei $\Phi \in C_c^\infty((0,T);\mathbb{R}), w \in H_0^1(\Omega)$, dann ist
  $$\underbrace{\langle \int_0^T u_m \Phi' dt, w\rangle}_{=\int_0^T \langle u_m, \Phi' w\rangle dt \xrightarrow{m\to\infty} \int_0^T \langle u, \Phi' w\rangle dt = \langle \int_0^T u\Phi' dt, w\rangle} = \underbrace{\langle -\int_0^T u_m' \Phi dt, w\rangle}_{=-\int_0^T \langle u_m', \Phi w\rangle dt \xrightarrow{m\to\infty} -\int_0^T \langle \widetilde{w}, \Phi w\rangle dt = \langle -\int_0^T \widetilde{w}\Phi dt, w\rangle}$$
  $\Rightarrow \int_0^T u\Phi' dt = -\int_0^T \widetilde{w}\Phi dt$

2) Sei $v(t) = \sum_{k=1}^N d_k(t) w_k$ für ein $N \in \mathbb{N}$, da glatt, $N < m$. Aus (12.4) folgt (multipliziere mit d_k, summiere, integriere):
$$\int_0^T \langle u_m', v\rangle dt + \int_0^T B_t[u_m, v] dt = \int_0^T (f,v)_{L^2} dt \tag{12.6}$$
und mit $m \to \infty$ folgt weiter:
$$\int_0^T \langle u', v\rangle dt + \int_0^T B_t[u, v] dt = \int_0^T (f,v)_{L^2} dt \tag{12.7}$$
Dies gilt für alle $v \in L^2((0,T);H_0^1(\Omega))$, da sich diese durch $\sum_{k=1}^N d_k(t) w_k$ approximieren lassen, d.h.
$$\int_0^T d(t)(\langle u', v\rangle + B_t[u,v] - (f,v)_{L^2}) dt = 0 \quad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega), d(t) \text{ messbar}$$
$$\Rightarrow \langle u', v\rangle + B_t[u,v] = (f,v)_{L^2} \text{ für fast alle } t \in [0,T]$$

3) Sei $v \in C^1([0,T];H_0^1(\Omega))$ mit $v(T) = 0$. (12.6) und (12.7) liefern:
$$\int_0^T -\langle u_m, v'\rangle dt + \int_0^T B_t[u_m, v] dt = \int_0^T (f,v)_{L^2} dt + (u_m(0), v(0))$$
$$\int_0^T -\langle u, v'\rangle dt + \int_0^T B_t[u, v] dt = \int_0^T (f,v)_{L^2} dt + (u(0), v(0))$$
Für $m \to \infty$ folgt aus der ersten Gleichung:
$$\int_0^T -\langle u, v'\rangle dt + \int_0^T B_t[u, v] dt = \int_0^T (f,v)_{L^2} dt + (g, v(0)) \Rightarrow u(0) = g$$

□

12.11. Theorem: Eindeutigkeit schwacher Lösungen

Eine schwache Lösung von (12.3) ist eindeutig.

Beweis
Seien u_1, u_2 schwache Lösungen, dann erfüllt $u := u_1 - u_2$:
$$\begin{cases} \langle u', v\rangle + B_t[u,v] = 0 & \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega) \text{ und fast alle } t \in [0,T] \\ u(0) = 0 \end{cases}$$
Für $v = u$ ergibt sich
$$0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{||u||_{L^2(\Omega)}^2}{2}\right) + \underbrace{B_t[u,u]}_{\geq \beta ||u||_{H_0^1(\Omega)}^2 - \gamma ||u||_{L^2(\Omega)}^2}$$
d.h. $\frac{d}{dt}||u||_{L^2}^2 \leq 2\gamma ||u||_{L^2}^2$. Mit dem Lemma von Gronwall 12.9 folgt $||u||_{L^2}^2 \leq e^{2\gamma t}||u(0)||_{L^2}^2 = 0$. □

13. Hyperbolische PDGL – Wellengleichung

$$u_{tt} - \Delta u = 0$$

physikalishe Interpretation: elastische Schwingung eines Materialstücks Ω.

- Verschiebungsvektor u
- Dichte ρ
- Beschleunigung von $V \subset \Omega$: $\frac{d^2}{dt^2} \int_V u dx = \int_V u_{tt} dx$
- auf V wirkende elastische Kraft: $-\int_{\partial V} F \cdot \nu dx = -\int_V \operatorname{div} F dx$ ($F \in \mathbb{R}^{n \times n}$: Spannungstensor)
- Spannungstensor $F \approx aDu$
- Newtons Gesetz der Bewegung: $\rho \frac{d^2}{dt^2} u dx = -\int_{\partial V} F \cdot \nu dx \Rightarrow \rho u_{tt} = a \Delta u$

Physikalisch (und somit hoffentlich mathematisch) sinnvolle Randbedingungen:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{auf } (0,T) \times \Omega \\ u = g & \text{auf } \{0\} \times \Omega \\ u_t = h & \text{auf } \{0\} \times \Omega \\ u = f & \text{auf } \partial \Omega \end{cases}$$

13.1. Explizite Lösung im Eindimensionalen

- $\Omega = \mathbb{R}$
- $0 = u_{tt} - \Delta u = u_{tt} - u_{xx} = (\partial_t + \partial_x) \overbrace{(\partial_t - \partial_x) u}^{=:v}$
  $\Rightarrow v_t + v_x = 0 \Rightarrow v(t,x) = a(x-t) \Rightarrow u_t - u_x = a(x-t)$
  $\Rightarrow u(t,x) = \int_0^t a(x + (t-s) - s) ds + b(x+t) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} a(y) dy + b(x,t)$
- $u\big|_{t=0} = g = b, u_t\big|_{t=0} = a(x) + b'(x) = h \Rightarrow a = h - g'$

$$\Rightarrow u(t,x) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) - g'(y) dy + g(x+t) = \frac{g(x+t) + g(x-t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy$$

13.2. Bemerkung

- $u(t,x) = F(x+t) + G(x-t)$ für bestimmte F, G. Jede Funktion dieser Form löst $u_{tt} - u_{xx} = 0$.
- Für $g \in C^2(\mathbb{R}), h \in C^1(\mathbb{R})$ ist $u \in C^2$, also tatsächlich eine klassische Lösung.
- Interpretation: $g(x+t)$: Welle, die nach links läuft, $g(x-t)$: Welle nach rechts.

Auf der Halbachse:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{auf } (0,T) \times (0,\infty) \\ u = g & \text{auf } \{0\} \times (0,\infty) \\ u' = h & \text{auf } \{0\} \times (0,\infty) \\ u = 0 & \text{auf } \{0\} \times \{0\} \end{cases}$$

Reflektionsmethode: Definiere

$$\widetilde{u}(t,x) = \begin{cases} u(t,x) & x \geq 0 \\ -u(t,-x) & x < 0 \end{cases}$$

Analog für g und h

$$\Rightarrow \begin{cases} \widetilde{u}_{tt} - \Delta \widetilde{u} = 0 & \text{auf } (0,\infty) \times \mathbb{R} \\ \widetilde{u} = g & \text{auf } \{0\} \times \mathbb{R} \\ \widetilde{u}_t = h & \text{auf } \{0\} \times \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \widetilde{u}(t,x) = \frac{1}{2}(\widetilde{g}(x+t) + \widetilde{g}(x-t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)dy$$

Interpretation: Wellen nach links werden bei 0 reflektiert.

A. Zusatznotizen

Sei $x \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$. Bezeichne im Folgenden mit $B_r(x)$ die offene Kugel um x mit Radius r, also

$$B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < r\},$$

und mit $\partial B_r(x)$ den Rand von $B_r(x)$, also

$$\partial B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| = r\}.$$

Analog bezeichnen wir mit B_r die offene Kugel um den Ursprung und mit ∂B_r entsprechend ihren Rand.

Die Coarea-Formel und Polarkoordinaten
Es gilt die folgende Integrationsregel:

A.1. Theorem

Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig und integrierbar. Dann gilt für alle $x_0 \in \mathbb{R}^n$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \int_0^\infty \left(\int_{\partial B_r(x_0)} f(x)dS(x) \right) dr, \tag{A.1}$$

wobei S das Oberflächenmaß auf $\partial B_r(x_0)$ bezeichnet.

Theorem A.1 kann mithilfe von Polarkoordinaten bewiesen werden und ist ein Spezialfall des folgenden Satzes:

A.2. Theorem: Coarea-Formel

Sei $u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lipschitzstetig und für fast alle $r \in \mathbb{R}$ sei die Niveaumenge $\{x \in \mathbb{R}^n : u(x) = r\}$ eine glatte, $(n-1)$-dimensionale Hyperfläche des $\mathbb{R}^n$. Ferner sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig und integrierbar. Dann gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)|\nabla u(x)|dx = \int_{-\infty}^\infty \left(\int_{\{u=r\}} f(x)dS(x) \right) dr.$$

Die Coarea-Formel ist eine Art "gekrümmte" Version des Satzes von Fubini und ermöglicht die Umformung von n-dimensionalen Integralen in Integrale über Niveaumengen einer geeigneten Funktion.

A.3. Bemerkung

Theorem A.1 folgt aus Theorem A.2 für $u(x) = |x - x_0|$.

Kugelvolumen und Oberfläche
Um das Volumen $|B_r(x)|$ und das Maß $S(\partial B_r(x))$ der Kugeloberfläche bestimmen zu können, benötigen wir zunächst die **Gamma-Funktion**. Für $t > 0$ sei:

$$\Gamma(t) := \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{t-1} dx.$$

Wir prüfen zunächst, ob Γ wohldefiniert ist: Sei $f(x) := e^{-x}x^{t-1}$. Dann ist $f(x) < x^{t-1}$ falls $x > 0$ und $t-1 > -1$. Da andererseits $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{t+1}e^{-x} = 0$, existiert ein $M > 0$, sodass $x^{t+1}e^{-x} < 1$ für alle $x > M$, und damit $f(x) < \frac{1}{x^2}$ für alle $x > M$. Daraus folgt die Integrierbarkeit von f. Also ist $\Gamma(t) < \infty$ für alle $t > 0$.
Die beiden Eigenschaften

(1) $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1$

(2) $\Gamma(t+1) = \int_0^{+\infty} x^t e^{-x}dx = t\Gamma(t)$ für alle $t \geq 0$.

zeigen, dass die Gamma-Funktion die Fakultätsfunktion auf $(0,\infty)$ fortsetzt; tatsächlich gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \ldots = n!\Gamma(1) = n!$$

Ein anderer Ausdruck für die Gamma-Funktion ist gegeben durch

$$\Gamma(t) = 2^{1-t} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} y^{2t-1} dy, \tag{A.2}$$

welchen man durch die Substitution $x = \frac{y^2}{2}$ erhält.
Bezeichnen wir mit $Q_1 := [0,+\infty) \times [0,+\infty)$ den ersten Quadranten in der Ebene, folgt aus (A.2) mithilfe von Fubini und Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned}\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 &= 2\left(\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx\right)\left(\int_0^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}\,dy}\right)\\ &= 2\iint\limits_{Q_1} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_0^{\infty} \rho e^{-\frac{\rho^2}{2}} d\rho = \pi\end{aligned}$$

und damit $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.
Sei nun ω_n das Volumen der Einheitskugel $B_1 \subset \mathbb{R}^n$ und σ_n das Maß der Oberfläche von B_1, d.h.

$$|B_r(x)| = r^n \omega_n, \qquad S(\partial B_r(x)) = r^{n-1}\sigma_n$$

A.4. Theorem

Für $n \geq 2$ ist $\sigma_n = n\omega_n$.

Beweis
Mit $f \equiv 1$ folgt unmittelbar aus (A.1):

$$\omega_n = \int_{B_1} dx = \int_0^1 \left(\int_{\partial B_\rho} dS\right) d\rho = \int_0^1 S(\partial B_\rho) d\rho = \sigma_n \int_0^1 \rho^{n-1} d\rho = \frac{\sigma_n}{n}$$

□

Dies liefert und schließlich das Volumen ω_n der Einheitskugel für jedes $n \in \mathbb{N}$:

A.5. Theorem

Sei $n \geq 1$, dann gilt:

$$\omega_n = \frac{\pi^{n/2}}{(n/2)\Gamma(n/2)}$$

Beweis
Mit $\Gamma(1) = 1$ und $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ folgt, dass die Formel für $n = 1$ und $n = 2$ wahr ist:

$$\omega_1 = \frac{\pi^{1/2}}{(1/2)\Gamma(1/2)} = 2, \qquad \omega_2 = \frac{\pi}{1 \cdot \Gamma(1)} = \pi$$

Für $n \geq 3$ beweisen wir mit Induktion. Die Formel gelte also für $n-2$, wobei $n \geq 3$. Dann gilt sie auch für n, denn:
Für $x \in B_1 \subset \mathbb{R}^n$ schreibe $x = (x', x'')$ mit $x' = (x_1, x_2)$ und $x'' = (x_3, \ldots, x_n)$, dann ist

$$x' \in D_1 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$$

und

$$\begin{aligned}x'' \in (B_1)_{x'} &:= \{x'' \in \mathbb{R}^{n-2} : (x', x'') \in B_1\}\\ &= \{(x_3, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-2} : x_3^2 + \ldots + x_n^2 < 1 - x_1^2 - x_2^2\}\end{aligned}$$

Mit Fubini und der Induktionsannahme folgt:

$$\begin{aligned}\omega_n &= \int_{B_1} dx = \int_{D_1} dx' \int_{(B_1)_{x'}} dx'' = \int_{D_1} \omega_{n-2}(1 - x_1^2 - x_2^2)^{(n-2)/2} dx_1 dx_2 \\ &= \omega_{n-2} \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 (1-\rho)^{(n-2)/2} \rho d\rho = \frac{2\pi}{n} \omega_{n-2} = \frac{2\pi}{n} \frac{\pi^{(n-2)/2}}{\frac{n-2}{2}\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)} \\ &= \frac{2\pi}{n} \frac{\pi^{(n-2)/2}}{\Gamma(n/2)} = \frac{\pi^{n/2}}{(n/2)\Gamma(n/2)}\end{aligned}$$

□