Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

Fachbereich 10
Mathematik und
Informatik

Höhere Algebra II

gelesen von Prof. Dr. Lutz Hille

Mitschrift von Phil Steinhorst

Wintersemester 2014/2015

Stand: 30. Oktober 2014

Vorwort

Der vorliegende Text ist eine Mitschrift zur Vorlesung Höhere Algebra II, gelesen von Prof. Dr. Lutz Hille an der WWU Münster im Wintersemester 2014/2015. Der Inhalt entspricht weitestgehend dem Tafelanschrieb während der Vorlesung. Für die Korrektheit des Inhalts wird keinerlei Garantie übernommen. Bemerkungen, Korrekturen und Ergänzungen kann man folgenderweise loswerden:

- persönlich durch Überreichen von Notizen oder per E-Mail
- durch Abändern der entsprechenden TeX-Dateien und Versand per E-Mail an mich
- direktes Mitarbeiten via GitHub. Dieses Skript befindet sich im `latex-wwu`-Repository von Jannes Bantje:

https://github.com/JaMeZ-B/latex-wwu

Themenübersicht

Hier kommt eine Themenübersicht hin – oder vielleicht auch nicht.

Literatur

- T. A. Springer: Linear Algebraic Groups
- H. Kraft: Geometrische Methoden in der Invariantentheorie (Aspekte der Mathematik)
- W. Crawley-Boevey: Lectures on representations of quivers

Vorlesungswebsite

Folgt noch.

Phil Steinhorst
p.st@wwu.de

Inhaltsverzeichnis

0 Einführung

0.1 Einführung und erste Beispiele

13.10. 1. Wir betrachten die algebraische Gruppe $\mathrm{GL}_n = \mathrm{GL}_n(k)$; meist ist $k = \mathbb{C}$ oder allgemeiner $k = \overline{k}$ algebraisch abgeschlossen und $\mathrm{char}(k) = 0$. $\mathrm{GL}_n = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \subseteq M_n(\mathbb{C})$ ist (bzgl. der üblichen Topologie) eine offene Teilmenge. Später betrachten wir die viel gröbere **Zariski-Topologie**.
Sei $m = n^2$ und $\mathbb{A}^m \subseteq \mathbb{C}^m$ ein m-dimensionaler affiner Vektorraum. Wir können $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ auch folgendermaßen charakterisieren:
$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) = M_n(\mathbb{C}) \setminus V(\det = 0),$$
wobei $V(f = 0) = \{x \in \mathbb{A}^m : f(x) = 0\}$ die Nullstellenmenge oder **Verschwindungsmenge** der polynomialen Funktion $f\colon \mathbb{A}^m \to \mathbb{C}$, $f \in k[x_1, \dots, x_m]$ bezeichnet.

2. **Beispiel:** Sei $\mathbb{A}^m = M_n(\mathbb{C})$. $G := \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ist eine Gruppe. Können wir die Gruppenverknüpfung, die Inversenbildung und das neutrale Element als polynomiale Funktion auffassen?
$$\begin{aligned} \mu\colon G \times G &\longrightarrow G \\ (g,h) &\longmapsto gh \end{aligned} \qquad \begin{aligned} i\colon G &\longrightarrow G \\ g &\longmapsto g^{-1} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} e\colon \{x\} &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto e = \mathbb{1}_n \end{aligned}$$
e ist offensichtlich polynomial und μ auch (vgl. Matrixmultiplikation). Jedoch ist i nicht polynomial, da nach Cramerscher Regel gilt:
$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \mathrm{adj}(A)$$
Daher müssen wir auch Quotienten polynomialer Abbildungen mit Nenner ungleich 0 zulassen.

Idee

Eine lineare algebraische Gruppe ist abgeschlossen in GL_n und die Gruppenabbildungen sind Quotienten polynomialer Abbildungen, sodass folgende Eigenschaften erfüllt sind (d.h. die folgenden Diagramme sind kommutativ):

Assoziativität: $\mu \circ (\mu, \mathrm{id}) = \mu \circ (\mathrm{id}, \mu)$

$$\begin{tikzcd} G \times G \times G \arrow[r, "(\mu,\mathrm{id})"] \arrow[d, "(\mathrm{id},\mu)"] & G \times G \arrow[d, "\mu"] \\ G \times G \arrow[r, "\mu"] & G \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (g,h,l) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (gh,l) \arrow[d, mapsto] \\ (g,hl) \arrow[r, mapsto] & g(hl) \overset{!}{=} (gh)l \end{tikzcd}$$

Inverse: $e \circ p = \mu \circ (\mathrm{id}, i) \circ \Delta$ bzw. $e \circ p = \mu \circ (i, \mathrm{id}) \circ \Delta$

$$\begin{tikzcd} & G \times G \arrow[d, "(\mathrm{id},i)"] \\ G \arrow[ur, "\Delta"] \arrow[r] \arrow[d, "p"] & G \times G \arrow[d, "\mu"] \\ \{x\} \arrow[r, "e"] & G \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & (g,g) \arrow[d, mapsto] \\ g \arrow[ur, mapsto] \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (g,g^{-1}) \arrow[d, mapsto] \\ e \arrow[r, mapsto] & e \overset{!}{=} g \cdot g^{-1} \end{tikzcd}$$

Neutrales Element: $\mu \circ (e, \mathrm{id}) = \mathrm{id} = \mu \circ (\mathrm{id}, e)$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "(e,\mathrm{id})"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}"'] & G \times G \arrow[r, "\mu"] & G \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} g \arrow[r, mapsto] \arrow[rr, bend right, mapsto] & (e,g) \arrow[r, mapsto] & eg \overset{!}{=} g \end{tikzcd}$$

Definition 0.1 (polynomiale und rationale Funktion)

- $f\colon \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$ heißt **polynomial** bzw. **Morphismus affiner Varietäten**, falls
$$\big(f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_m(x_1,\dots,x_n)\big) = f(x_1,\dots,x_n)$$
mit $f_j \in k[x_1,\dots,x_n]$ für alle $j \in \{1,\dots,n\}$.

- Sei $U \subseteq \mathbb{A}^n$ offen (im klassischen Sinne oder bzgl. Zariski-Topologie). $f\colon U \to \mathbb{A}^m$ heißt **polynomial**, falls $f = \frac{h}{g}$ mit $h, g \in k[x_1,\dots,x_n]$ und $g(x) \neq 0$ für alle $x \in U$. $\lceil f_j = \frac{h_j}{g_j}$ komponentenweise$\rfloor$

- f wie oben heißt **rational**, fall $f = \frac{h}{g}$ wie oben mit $g \not\equiv 0$ auf U. f ist im Allgemeinen keine Abbildung, sondern nur auf $U \setminus V(g=0)$ definiert.

Beispiel 0.2 (Beispiele für polynomiale und rationale Funktionen)

- $\mathrm{GL}_n \to \mathrm{GL}_n$ mit $g \mapsto g^{-1}$ ist polynomial, $M_n \to M_n$ mit „$g \mapsto g^{-1}$“ ist rational.

- $\det\colon \mathrm{GL}_n \to \mathbb{C}$ und $\det\colon M_n \to \mathbb{C}$ ist polynomial.

- $\det^{-1}\colon M_n \to \mathbb{C}$ ist rational und $\det^{-1}\colon \mathrm{GL}_n \to \mathbb{C}$?

- $\mathbb{A}^1 = \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$ mit $z \mapsto e^{2\pi i z}$ ist nicht polynomial.

Definition 0.3 (Zariski-Topologie)

Seien $g_1,\dots,g_m \in k[x_1,\dots,x_n]$ und $I = \langle g_1,\dots,g_m\rangle$ das von $g_1,\dots,g_m$ erzeugte Ideal in $k[x_1,\dots,x_n]$. 16.10.
$M \subseteq \mathbb{A}^n$ heißt abgeschlossen bzgl. der **Zariski-Topologie**, falls gilt:
$$M = V(I) = \{x \in \mathbb{A}^n : g_i(x) = 0 \text{ für } 1 \leq i \leq m\}$$

Beispiel

- Es ist $V(0) = \mathbb{A}^n$ und $V(1) = \emptyset$.

- $GL_n(\mathbb{C})$ ist offen in $M_n(\mathbb{C})$.

- $GL_n(\mathbb{C})$ lässt sich jedoch auch ”abschließen” vermöge:
$$\begin{aligned} \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) &\hookrightarrow M_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C} \\ A &\mapsto \left(A, \frac{1}{\det(A)}\right) \end{aligned}$$

Ab jetzt immer, wenn nichts anderes gesagt, offen und abgeschlossen bezüglich Zariski-Topologie!

Definition 0.4 (Lie-Algebra und Lie-Klammer)

Sei V ein (endlichdimensionaler) k-Vektorraum. Eine Abbildung
$$\begin{aligned} [\cdot,\cdot]\colon V \times V &\longrightarrow V \\ (v,w) &\longmapsto [v,w] \end{aligned}$$
heißt **Lie-Klammer**, falls sie folgende Eigenschaften erfüllt:

1) bilinear

2) schiefsymmetrisch, d.h. $[v,w] = -[w,v]$

3) **Jacobi-Identität**: $[[u,v],w]+[[v,w],u]+[[w,u],v]=0$

Das Paar $(V,[\cdot,\cdot])$ heißt **Lie-Algebra**.

Beispiele

- Der k-Vektorraum V mit der trivialen Lie-Klammer $[v,w]:=0$ heißt abelsche Lie-Algebra.
- Die allgemeine lineare Lie-Algebra $\mathfrak{gl}_n(k):=M_n(k)$ mit der Lie-Klammer $[A,B]:=AB-BA$.
- Die spezielle lineare Lie-Algebra $\mathfrak{sl}_n(k):=\mathrm{SL}_n(k)$ als Lie-Unter-Algebra von $\mathfrak{gl}_n(k)$, zum Beispiel für $n=2$ und $k=\mathbb{C}$:

  $$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}):=\{A\in M_2(\mathbb{C}):\mathrm{tr}(A)=0\}=\left\langle h=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},e=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},f=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right\rangle$$

  Es ist $[h,e]=2e,[h,f]=-2f$ und $[e,f]=h$, also besitzt die Abbildung $[h,\cdot]\colon V\to V$ die Eigenwerte 2 und -2.

Definition 0.5 (lineare algebraische Gruppe)
Sei $G\leq\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ eine abgeschlossene Untergruppe, dann heißt G **lineare algebraische Gruppe**.

Ab jetzt: "algebraische Gruppe" = "lineare algebraische Gruppe" = "affine algebraische Gruppe"

Zu einer algebraischen Gruppe G definieren wir die zugehörige Lie-Algebra durch

$$\mathrm{Lie}(G):=\mathfrak{g}:=T_eG,$$

wobei T_eG den Tangentialraum in $e\in G$ bezeichnet.

$$T_eV(f_1,\dots,f_n)=\left\{x\in\mathbb{A}^n:\frac{d}{dt}f_i(e+tx)\Big|_{t=0}=0\right\}\text{ über }k=\mathbb{C}$$

Beispiele

- Betrachte $f=x_1^2-x_2$ in $\mathbb{A}^2$, dann ist

  $$\begin{aligned}T_{(0,0)}V(f)&=\left\{x\in\mathbb{A}^2:\frac{d}{dt}f((0,0)+t(x_1,x_2))\big|_{t=0}=0\right\}=\left\{x\in\mathbb{A}^2:\frac{d}{dt}(tx_1)^2-tx_2\big|_{t=0}=0\right\}\\&=\left\{x\in\mathbb{A}^2:2tx_1-x_2\big|_{t=0}=0\right\}=\{x\in\mathbb{A}^2:x_2=0\}\\T_{(1,1)}V(f)&=\{x\in\mathbb{A}^2:2x_1-x_2=0\}\end{aligned}$$

- $T_E\,\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})=\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})=\left\{A\in M_n(\mathbb{C}):\frac{d}{dt}\det(E+tA)-1\big|_{t=0}=0\right\}=\{A\in M_n(\mathbb{C}):\mathrm{tr}(A)=0\}$, denn:

  $$\det(E+tA)=\det\underbrace{\begin{pmatrix}1+ta_{11}&&ta_{ij}\\&\ddots&\\ta_{ij}&&1+ta_{nn}\end{pmatrix}}_{=:(c_ij)_{ij}}=\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)\prod_{i=1}^n c_{i,\sigma(i)}=1+t\cdot\mathrm{tr}(A)+t^2\dots+t^n$$

  $$\Rightarrow\frac{d}{dt}\det(E+tA)\big|_{t=0}=\mathrm{tr}(A)$$

- Die Untergruppe

$$B := \{b \in \mathrm{GL}_n : b_{ij} = 0 \text{ für } i > j\} = \left\{(b_{ij}) \in M_n(\mathbb{C}) : b_{ii} \in \mathbb{C}^\times, b_{ij} = 0 \text{ für } i > j\right\} \subseteq \mathrm{GL}_n = G$$

heißt **Borel-Untergruppe**. Die zugehörige Lie-Algebra ist gegeben durch:

$$\mathrm{Lie}(B) = \mathfrak{b} = \{(b_{ij}) : b_{ij} = 0 \text{ für } i > j\} \supseteq B \text{ offen}$$

G/B ist eine algebraische Varietät und nicht affin.

$$U := \{(b_{ij}) \in M_n(\mathbb{C}) : b_{ii} = 1, b_{ij} = 0 \text{ für } i > j\} \subseteq B$$

heißt **unipotente Gruppe**.

- Der n-dimensionale (algebraische) Torus $\mathbb{T} := (\mathbb{C}^\times)^n$ mit $T_e\mathbb{T} = \mathbb{A}^n$ kann als Untergruppe aufgefasst werden:

$$\mathbb{T}_n = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} : \lambda_i \in \mathbb{C}^\times \right\} =: H =: T \subseteq B \subseteq \mathrm{GL}_n$$

$\mathrm{Lie}\,\mathbb{T} = \mathfrak{h}$ und $B/H = U$.

0.2 Aktionen algebraischer Gruppen

Definition 0.6 (Darstellung einer linearen algebraischen Gruppe)
Sei G eine lineare algebraische Gruppe und $X = V(f_1, \ldots, f_r)$ abgeschlossene Teilmenge in ^{n}. Eine **Darstellung** 20.10.
von G auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum W ist ein polynomialer Gruppenhomomorphismus $G \to \mathrm{GL}(W)$. G operiert dann auf W vermöge

$$\begin{aligned} G \times W &\longrightarrow W \\ (g, w) &\longmapsto f(g)w \end{aligned}$$

Eine Aktion von G auf x ist eine polynomiale Abbildung $G \times X \to X$, sodass $(gh)x = g(hx)$ und $ex = x$ für alle $g, h \in G, x \in X$.

Beispiel 0.7

1) $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) = \mathrm{GL}(\mathbb{C}^n) = \mathrm{GL}(W)$ mit Standardaktion auf $W = \mathbb{C}^n$.
   Orbiten: $\{0\}, W \setminus \{0\}$
   Stabilisatoren: $\mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_n}(\{0\}) = \mathrm{GL}_n$ und

$$\mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_n}(e_1) = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 1 & * \\ \hline 0 & \mathrm{GL}_{n-1} \end{array} \right) \right\} = P(1, n-1) \qquad \text{(parabolische Untergruppe)}$$

2)

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{GL}_n \longrightarrow \mathbb{C}^\times & & \text{Polynomialer Gruppenhomomorphismus gegeben durch } \det^m \text{ mit } m \in \mathbb{Z} \\ \cup\!\! \mid & & \\ B \longrightarrow \mathbb{C}^\times & & B \twoheadrightarrow H \to \mathbb{C}^\times, A \mapsto \lambda_1^{a_1} \cdots \lambda_n^{a_n}, a_i \in \mathbb{Z} \qquad (B/H = U) \\ \cup\!\! \mid & & \\ H \longrightarrow \mathbb{C}^\times & & \text{z.B. } (t_1, \ldots, t_n) \mapsto t_1^{a_1} \cdots t_n^{a_n}, a_i \in \mathbb{Z} \\ \cup\!\! \mid & & \\ \mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times & & t \mapsto t^m, m \in \mathbb{Z} \end{array}$$

Charaktere von G: $X^*(G) = \{\chi : G \to \mathbb{C}^\times : \chi \text{ ist Homomorphismus linearer algebraischer Gruppen}\}$.

3) Sei $G = \mathrm{GL}_n, \mathrm{SO}_n, \mathrm{Sp}, \ldots$ mit $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$.
G operiert auf $\mathfrak{g}$ ($G \curvearrowright \mathfrak{g}$) durch Konjugation.

Missing figure

Ab hier kommen viele schöne Beispiele, Diagramme, Köcher, Wirkungen, Matrizen, ... Da aber ein Großteil der Begrifflichkeiten nicht definiert wurde und es an Struktur mangelt, füge ich das hier nicht hinzu. Jedenfalls nicht jetzt.

Missing figure

HIER FEHLT ALLES!

Insbesondere fehlt hier etwas.

1 Affine algebraische Gruppen

1.1 Affine algebraische Varietät

Definition 1.1 (Affine algebraische Menge)
Sei $k = \overline{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper, $\mathbb{A}_k^n := \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in k\}$ sowie $I = (f_1, \ldots, f_r) \subseteq$ 27.10.
$k[x_1, \ldots, x_n]$ ein Ideal. Wir bezeichnen

$$V(I) = \{x \in \mathbb{A}_k^n : f(x) = 0 \text{ für } f \in I\}$$

als **affine algebraische Menge**.

Beispiel 1.2

a) Sei $f = \sum_{i=1}^n a_i x_i + c$ eine allgemeine lineare Gleichung, o.E. $a_1 \neq 0$. Dann ist $V(f)$ eine Hyperebene isomorph zu $\mathbb{A}_k^{n-1}$.
Im Fall $f = 0$ ist $V(0) = \mathbb{A}^n$ und im Fall $f = c \neq 0$ ist $V(c) = \emptyset$.

b) Wir betrachten Quadriken. Sei f quadratisch von der Gestalt

$$f = \underbrace{\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} x_i x_j}_{=:q \neq 0} + \underbrace{\sum_{x=1}^{n} b_i x_i}_{=:l} + c$$

Idee: f auf einfachere Gestalt bringen, z.B. mit q in Diagonalform:

$$f = \sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{i=1}^n b_i x_i + c$$

mit $a_i \in \{0, 1\}$ nach Skalierung. Koordinaten vertauschen:

$$f = \sum_{i=1}^m x_i^2 + \sum_{i=1}^n b_i x_i + c, \quad 1 \leq m \leq n$$

Quadratische Ergänzung:

$$f = \sum_{i=1}^m x_i^2 + \sum_{i=m+1}^n b_i x_i + c$$

Nun Beispiel a) anwenden:

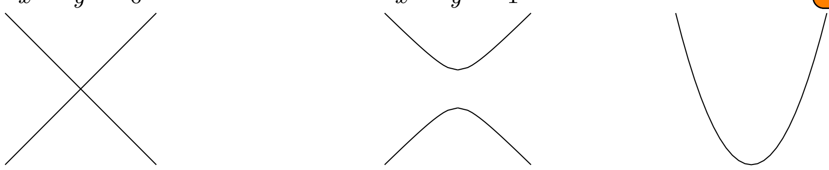
$$f = \sum_{i=1}^n x_i^2 + c, c \in \{0, 1\} \qquad f = \sum_{i=1}^m x_i^2 + x_n, m < n$$

$n = 2$:

	$x^2 + y^2 = 0$	$x^2 + y^2 = 1$	$x^2 = y$
andere Varianten:	$x^2 - y^2 = 0$	$x^2 - y^2 = 1$	

Das Wort "Skizze" sollte etwas höher stehen.

Skizze:



zwei sich schneidende Geraden — Kreis (reell) bzw. Hyperbel (komplex) — Parabel

$n = 3$:

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0 \quad x^2 + y^2 - z^2 = 1 \quad x^2 + y^2 = z$$

Hier fehlen drei Grafiken.

Sei $f = x^2 + y^2 + z^2$ und $g = x^2 + y^2 + z$.

$$\begin{aligned} f(\vec{x_0} + t\vec{x}) &= (x_0 + tx)^2 + (y_0 + ty)^2 + (z_0 + tz)^2 \\ &= 2t(x_0x + y_0y + z_0z) + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + \text{ quad. Term} \\ g(\vec{x_0} + t\vec{x}) &= 2t(x_0x + y_0y) + tz + x_0^2 + y_0^2 + \text{ quad. Term} \end{aligned}$$

$$T_{(x_0,y_0,z_0)}Q = \{(x,y,z) : \langle (x_0,y_0,z_0),(x,y,z)\rangle = 0\} \qquad T_{(x_0,y_0,z_0)}Q = \{(x,y,z) : z = -2(x_0x + y_0y)\}$$

$$\dim T_{x_0}Q = \begin{cases} 2 & (x_0,y_0,z_0) \neq 0 \\ 3 & (x_0,y_0,z_0) \neq 0 \end{cases} \qquad \dim T_{x_0}Q = 2$$

1.2 Affine algebraische Varietät (ja, der Abschnitt hieß auch so!)

Bezeichnungen ändern sich aus irgendeinem nicht ersichtlichen Grund!

$Z(I) := V(I)$
$a \subseteq S := k[x_1, \ldots, x_n] \ni f_1, \ldots, f_r, \quad I = (f_1, \ldots, f_r)$
$T \subseteq S$ beliebige Teilmenge
$Z(T) = \{p \in \mathbb{A}^n : f(p) = 0$ für alle $f \in T\}$ Nullstellenmenge

Definition 1.3
Eine Teilmenge $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ heißt genau dann **algebraisch**, falls $Y = Z(T)$ für eine Teilmenge $T \subseteq S$.

Satz 1.4
1) $Z(T_1) \cup Z(T_2) = Z(T_1 \cdot T_2)$,
2) $Z\left(\bigcup_{i\in I} T_i\right) = \bigcap_{i\in I} Z(T_i)$,

d.h. die abgeschlossenen Teilmengen bilden eine Topologie.

Beispiel 1.5
- In $\mathbb{A}^1$ sind die abgeschlossenen Teilmengen genau die endlichen Mengen und $\mathbb{A}^1$.
- In $\mathbb{A}^2$ sind die abgeschlossenen Teilmengen genau die endlichen Mengen, $\mathbb{A}^2$ sowie endliche Vereinigungen $V(f_1) \cup \ldots \cup V(f_r)$ (ohne Beweis)
- Die von den abgeschlossenen Mengen erzeugte Topologie ist nicht T_2: $p \in \mathbb{A}^1$, $U \ni p$ offen, $Q \in \mathbb{A}^1 \setminus U$, $V \supset Q$ offen $\Rightarrow U \cap V \neq \emptyset$.

Definition 1.6 (Irreduzibler topologischer Raum)
Ein topologischer Raum $Y \neq \emptyset$ heißt **irreduzibel**, falls gilt:

$$Y = Y_1 \cup Y_2 \text{ mit } Y_1, Y_2 \text{ abgeschlossen} \quad \Rightarrow \quad Y_1 \subseteq Y_2 \text{ oder } Y_2 \subseteq Y_1$$

Beispiel 1.7
- $\mathbb{A}^1$ ist irreduzibel (später: $\mathbb{A}^n$ ist irreduzibel)
- Folgende Quadriken sind irreduzibel: $f = X_1^2 + \ldots + X_{n-1}^2 + X_n$ für $n \geq 1$, $f = X_1^2 + \ldots + x_n^2 + 1$ für $n \geq 2$, $f = \sum_{i=1}^{n\geq 3} x_i^2$
- $V(x(x-1)) = \{(0),(1)\}$ ist nicht irreduzibel.
- $x_1^2 + 1$, $x_1^2 + x_2^2 = 0$ sind nicht irreduzibel
- $Y \subseteq X$ irreduzibel (mit induzierter Topologie) $\Rightarrow \overline{Y}$ irreduzibel.

Index

Liste der Sätze und Definitionen