



WESTFÄLISCHE  
WILHELMS-UNIVERSITÄT  
MÜNSTER



FACHBEREICH 10  
MATHEMATIK UND  
INFORMATIK

# Skript Topologie I.

Mitschrift der Vorlesung „Topologie I.“ von Prof. Dr. Arthur Bartels

Jannes Bantje

6. März 2015

Aktuelle Version verfügbar bei



<https://github.com/JaMeZ-B/latex-wwu>

GitHub ist eine Internetplattform, auf der viele OpenSource-Projekte gehostet werden. Diese Plattform nutzen wir zur Zusammenarbeit, also findet man hier neben den PDFs auch die  $\text{\TeX}$ -Dateien. Außerdem ist über diese Plattform auch direktes Mitarbeiten möglich, siehe nächste Seite.



<https://uni-muenster.sciebo.de/public.php?service=files&t=965ae79080a473eb5b6d927d7d8b0462>

Sciebo ist ein Dropbox-Ersatz der Hochschulen in NRW, der von der Uni Münster in leitender Position auf Basis der OpenSource-Software Owncloud aufgebaut wurde. Wenn man auf den Link klickt, kann man die Freigabe zum eigenen Speicher hinzufügen und hat dann immer automatisch die aktuellste Version.



B6WH2DISQ5QVYIRYIEZSF4ZR2IDVKPN3I

BTSync ist ein peer-to-peer Dateisynchronisations-Tool. Dabei werden die Dateien nur auf den Computern der Teilnehmer an einer Freigabe gespeichert. Ein Mini-Computer ist permanent online, sodass jederzeit die aktuellste Version verfügbar ist. Clients gibt es für jedes Betriebssystem. Zugang ist über das obige „Secret“ bzw. den QR-Code möglich




## Vorlesungshomepage

<https://wwwmath.uni-muenster.de/reine/u/topos/lehre/WS2014-2015/Topologie1/Topologie1.html>

Hier ist ein Link zur offiziellen Vorlesungshomepage.

## Vorwort — Mitarbeit am Skript

Dieses Dokument ist eine Mitschrift aus der Vorlesung „Topologie I., WiSe 2014/2015“, gelesen von Prof. Dr. Arthur Bartels. Der Inhalt entspricht weitestgehend dem Tafelanschrieb. Für die Korrektheit des Inhalts übernehme ich keinerlei Garantie! Für Bemerkungen und Korrekturen – und seien es nur Rechtschreibfehler – bin ich sehr dankbar. Korrekturen lassen sich prinzipiell auf drei Wegen einreichen:

- Persönliches Ansprechen in der Uni, Mails an [✉ j.bantje@wwu.de](mailto:j.bantje@wwu.de) (gerne auch mit annotieren PDFs) oder Kommentare auf <https://github.com/JaMeZ-B/latex-wwu> .
- *Direktes* Mitarbeiten am Skript: Den Quellcode poste ich auf GitHub (siehe oben), also stehen vielfältige Möglichkeiten der Zusammenarbeit zur Verfügung: Zum Beispiel durch Kommentare am Code über die Website und die Kombination Fork + Pull Request. Wer sich verdient macht oder ein Skript zu einer Vorlesung, die ich nicht besuche, beisteuern will, dem gewähre ich gerne auch Schreibzugriff.

Beachten sollte man dabei, dass dazu ein Account bei [github.com](https://github.com)  notwendig ist, der allerdings ohne Angabe von persönlichen Daten angelegt werden kann. Wer bei GitHub (bzw. dem zugrunde liegenden Open-Source-Programm „git“) – verständlicherweise – Hilfe beim Einstieg braucht, dem helfe ich gerne weiter. Es gibt aber auch zahlreiche empfehlenswerte Tutorials im Internet.<sup>1</sup>

- *Indirektes* Mitarbeiten:  $\text{\TeX}$ -Dateien per Mail verschicken.

Dies ist nur dann sinnvoll, wenn man einen ganzen Abschnitt ändern möchte (zB. einen alternativen Beweis geben), da ich die Änderungen dann per Hand einbauen muss! Ich freue mich aber auch über solche Beiträge!

---

<sup>1</sup> zB. <https://try.github.io/levels/1/challenges/1> , ist auf Englisch, aber dafür interaktives LearningByDoing

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Kategorien, Funktoren und natürliche Transformationen</b>	<b>1</b>
1.1	Definition: Kategorie . . . . .	1
1.2	Beispiele für Kategorien . . . . .	1
1.3	Bemerkungen zu Kategorien . . . . .	2
1.4	Definition: Funktor . . . . .	2
1.5	Beispiele für Funktoren . . . . .	2
1.6	Definition: Natürliche Transformation . . . . .	2
1.7	Ausblick auf Kategorien und Funktoren in der algebraischer Topologie . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Kombinatorische Beschreibungen topologischer Räume</b>	<b>4</b>
2.1	Beispiel einer kombinatorischen Beschreibung eines Raumes . . . . .	4
2.2	Definition: Simplicialer Komplex . . . . .	4
2.3	Beispiel für simpliciale Komplexe . . . . .	4
2.4	Definition: Unterkomplex . . . . .	4
2.5	Definition: Simpliciale Abbildung . . . . .	5
2.6	Definition: Geometrische Realisierung . . . . .	5
2.7	Beispiel: Rand des $n$ -Simplizes und der Torus . . . . .	5
2.8	Definition: Polyeder . . . . .	6
2.9	Definition: Euler-Charakteristik . . . . .	6
2.10	Satz über die Euler-Charakteristik . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Simpliciale Homologie</b>	<b>7</b>
3.1	Definition: Freier $R$ -Modul mit Basis $S$ . . . . .	7
3.2	Lemma: Universale Eigenschaft von freien Moduln . . . . .	7
3.3	Beispiel für freie und nicht-freie Moduln . . . . .	7
3.4	Definition: $n$ -ter Kettenmodul . . . . .	8
3.5	Definition: Orientierung eines $(n - 1)$ -Simplizes als Teilmenge eines $n$ -Simplizes . . . . .	8
3.6	Definition: $n$ -te Randabbildung . . . . .	8
3.7	Proposition: Für die Randabbildung gilt $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$ . . . . .	8
3.8	Lemma: Ein $(n - 2)$ -Simplex ist Seite von genau zwei $(n - 1)$ -Simplizes . . . . .	9
3.9	Notation für das Weglassen eines Knotens . . . . .	9
3.10	Definition: $n$ -ter Homologiemodul . . . . .	9
3.11	Beispiele für Homologiemoduln . . . . .	9
3.12	Definition: $R$ -Kettenkomplex, $n$ -te Homologie eines $R$ -Kettenkomplexes . . . . .	10
3.13	Bemerkungen zu Kettenkomplexen . . . . .	10
3.14	Definition: Simplicialer Kettenkomplex . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Euler-Charakteristik von Kettenkomplexen</b>	<b>11</b>
4.1	Wiederholung: Torsionsgruppe . . . . .	11
4.2	Lemma: Rang einer endlich erzeugten abelschen Gruppe . . . . .	11
4.3	Definition: Kurze exakte Sequenz . . . . .	11
4.4	Beispiele für kurze exakte Folgen . . . . .	12
4.5	Bemerkung: Spaltung einer kurzen exakten Sequenz . . . . .	12
4.6	Bemerkung: Existenz einer Spaltung, wenn $M_2$ frei ist . . . . .	12
4.7	Bemerkung: Der Rang ist additiv . . . . .	12
4.8	Proposition: Der Rang ist für kurze exakte Folgen endl. erz., abelscher Gruppen additiv . . . . .	13
4.9	Definition: Eulercharakteristik von $\mathbb{Z}$ -Kettenkomplexen . . . . .	14
4.10	Satz: Eulercharakteristik eines endlich erzeugten $\mathbb{Z}$ -Kettenkomplexes . . . . .	14

4.11	Korollar: Die Eulercharakteristik eines simplizialen Komplexes . . . . .	14
<b>5</b>	<b>Singuläre Homologie</b>	<b>15</b>
5.1	Definition: Singuläre Simplizes und $n$ -ter singulärer Kettenmodul . . . . .	15
5.2	Definition: Einschränkung eines singulären Simplizes auf eine Seite . . . . .	15
5.3	Bemerkung zur Inklusion der $j$ -ten Seite . . . . .	15
5.4	Definition: $n$ -te singuläre Randabbildung . . . . .	15
5.5	Proposition: Für die Randabbildungen gilt $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$ . . . . .	15
5.6	Lemma: Hilfslemma für Proposition 5.5 . . . . .	15
5.7	Definition: Singuläre Homologie von $X$ . . . . .	16
5.8	Definition: $n$ -Ketten, $n$ -Ränder und $n$ -Zykel und Homologiekategorie . . . . .	16
5.9	Beispiel: Die Homologie des Ein-Punkt-Raumes . . . . .	16
5.10	Proposition: Eigenschaften von $H_0(X)$ für $X \neq \emptyset$ und $X$ wegzusammenhängend . . . .	17
5.11	Bemerkung: Vorgehen, um später zu zeigen: $H_*(K; R) \cong H_*( K ; R)$ . . . . .	17
<b>6</b>	<b>Funktorialität</b>	<b>18</b>
6.1	Definition: $R$ -Kettenabbildung . . . . .	18
6.2	Bemerkung: Induzierte Abbildung einer Kettenabbildung auf Homologie . . . . .	18
6.3	Bemerkung: Homologie definiert einen Funktor . . . . .	18
6.4	Definition: Induzierte Abbildung auf Kettenkomplexen . . . . .	18
6.5	Proposition: Der singuläre Kettenkomplex über $R$ bildet einen Funktor . . . . .	19
6.6	Korollar: Homologie ist ein Funktor $\text{TOP} \rightarrow R\text{-MOD}$ . . . . .	19
6.7	Bemerkung: Notation für die auf Homologie induzierte Abbildung . . . . .	19
6.8	Definition: Summe oder Koprodukt von topologischen Räumen . . . . .	19
6.9	Definition: Summe von $R$ -Moduln . . . . .	20
6.10	Satz: Homologie des Koproduktes topologischer Räume . . . . .	20
<b>7</b>	<b>Homotopieinvarianz</b>	<b>21</b>
7.1	Bemerkung: Die induzierte Abbildung eines Homöomorphismus ist ein Isomorphismus . .	21
7.2	Definition: Homotopieäquivalenz und Homotopieinverse . . . . .	21
7.3	Satz: Homotopieinvarianz der Homologie . . . . .	21
7.4	Korollar: Die induzierte Abbildung einer Homotopieäquivalenz ist ein Isomorphismus . .	21
7.5	Korollar: Homologie eines kontrahierbaren Raumes . . . . .	21
7.6	Definition: Kettenhomotopie . . . . .	22
7.7	Prop.: induzierte Abbildungen von kettenhomotopen Kettenabbildungen sind gleich . .	22
7.8	Lemma: Reduktion von Satz 7.3 auf Beweis eines Spezialfalles . . . . .	22
7.9	Bemerkung zum Vorgehen beim Beweis von [#] . . . . .	22
7.10	Definition: Affin lineare Abbildungen zur Konstruktion der Kettenhomotopie . . . . .	23
7.11	Lemma: Gleichungen für die Abbildungen aus 7.10 . . . . .	24
7.12	Beweis von [##]/Konstruktion der Kettenhomotopie . . . . .	25
7.13	Bemerkung: Konstruktion einer Kettenhomotopie aus einer Homotopie . . . . .	25
<b>8</b>	<b>Homologie von Paaren</b>	<b>26</b>
8.1	Definition: Paar von topologischen Räumen . . . . .	26
8.2	Definition: Singulärer Kettenkomplex und Homologiemodul von Paaren . . . . .	26
8.3	Definition: Der singuläre Kettenkomplex von Paaren definiert einen Funktor . . . . .	26
8.4	Bemerkung: Topologische Räume als Paar auffassen . . . . .	26
8.5	Frage: Können wir $H_n(X, A; R)$ durch $H_n(X; R)$ und $H_n(A; R)$ ausdrücken? . . . . .	26
8.6	Beispiel: Homologie des Paares $( \Delta^n ,  \partial\Delta^n )$ . . . . .	26
8.7	Definition: Lange exakte Sequenz von $R$ -Moduln . . . . .	27
8.8	Satz: Existenz der Paarsequenz . . . . .	27

8.9	Korollar: Hologiemodul wenn $A$ kontraktibel ist . . . . .	27
8.10	Definition: Kurze exakte Folge von Kettenkomplexen . . . . .	28
8.11	Beispiel einer kurzen exakten Folge von Kettenkomplexen . . . . .	28
8.12	Schlangenlemma . . . . .	28
8.13	Beweis von Satz 8.8 . . . . .	30
8.14	Bemerkung . . . . .	30
8.15	Fünfer-Lemma . . . . .	31
8.16	Lemma („2 von 3“) . . . . .	31
<b>9</b>	<b>Ausschneidung und die Mayer-Vietoris Folge</b>	<b>33</b>
9.1	Satz: Ausschneidungsisomorphismus . . . . .	33
9.2	Satz (Mayer-Vietoris-Folge) . . . . .	33
9.3	Bemerkung zur Anwendbarkeit der Mayer-Vietoris-Folge . . . . .	35
9.4	Satz: Homologie der Sphäre $S^n$ . . . . .	35
9.5	Definition: Reduzierte Homologie . . . . .	35
9.6	Bemerkung: Die Aussage von Satz 9.4 in reduzierter Homologie . . . . .	35
9.7	Beweis von [##] . . . . .	36
<b>10</b>	<b>Anwendungen</b>	<b>37</b>
10.1	Satz: Invarianz der Dimension . . . . .	37
10.2	Fixpunktsatz von Brouwer . . . . .	37
10.3	Definition: Abbildungsgrad einer stetigen Abbildung $f: S^n \rightarrow S^n$ . . . . .	37
10.4	Proposition: Einfache Eigenschaften des Abbildungsgrades . . . . .	37
10.5	Beispiel: Abbildungsgrad der Spiegelung $R_i: S^n \rightarrow S^n$ . . . . .	38
10.6	Beispiel: Grad der Punktspiegelung . . . . .	39
10.7	Erinnerung: Vektorfelder . . . . .	39
10.8	Satz: Es gibt ein Vektorfeld ohne Nullstellen auf $S^n \iff n$ ist ungerade . . . . .	39
10.9	Satz (Jordanscher Kurvensatz) . . . . .	40
10.10	Satz: Homologie von $S^n$ ohne Einbettung von Scheiben $D^k$ und Sphären $S^k$ mit $k < n$ . . . . .	40
10.11	Proposition über Homologie von $X = \bigcup_{a \in N} U_a$ wobei $U_a \subseteq U_{a+1}$ . . . . .	40
10.12	Beweis von Satz 10.10 . . . . .	41
<b>11</b>	<b>CW-Komplexe</b>	<b>42</b>
11.1	Definition: Pushout . . . . .	42
11.2	Bemerkung zur Existenz und zur Eindeutigkeit des Pushouts . . . . .	42
11.3	Definition: CW-Komplex . . . . .	42
11.4	Bemerkungen zur Definition von CW-Komplexen . . . . .	43
11.5	Beispiele für CW-Komplexe . . . . .	43
11.6	Lemma: Kompaktheit von Teilmengen eines CW-Komplexes . . . . .	45
11.7	Korollar: Ein CW-Komplex ist genau dann kompakt, wenn er endlich ist. . . . .	45
<b>12</b>	<b>Zelluläre Homologie</b>	<b>46</b>
12.1	Definition: $n$ -ter zellulärer Kettenmodul und zelluläre Randabbildung . . . . .	46
12.2	Lemma: Für die zellulären Randabbildungen gilt $\partial_{n-1}^{\text{cell}} \circ \partial_n^{\text{cell}} = 0$ . . . . .	46
12.3	Definition: Zellulärer Kettenkomplex und zelluläre Homologie . . . . .	46
12.4	Bem.: Funktorialität des zellulären Kettenkomplexes und der zellulären Homologie . . . . .	46
12.5	Lemma über $(\coprod Q_i^{(n)}, \coprod q_i^{(n)})_*$ und $H_k(\coprod_i D^n, \coprod_i S^{n-1}; R)$ . . . . .	47
12.6	Bemerkung: Matrixform der Randabbildung $\partial_n^{\text{cell}}$ . . . . .	47
12.7	Definition: Natürlicher Isomorphismus . . . . .	48
12.8	Satz: Natürlicher Isomorphismus zwischen zellulärer und singulärer Homologie . . . . .	48
12.9	Lemma: Die Homologie des $n$ -Gerüsts und die von $X^{(n)} \hookrightarrow X$ induzierte Abbildung . . . . .	49

12.10	Korollar: Die Eulercharakteristik ist eine topologische Invariante . . . . .	49
12.11	Bemerkung: $n$ -te Bettizahl und Eulercharakteristik eines CW-Komplexes . . . . .	49
12.12	Beispiel: Homologie von $\mathbb{C}P^n$ . . . . .	50
12.13	Beispiel: Homologie von $\mathbb{R}P^n$ . . . . .	50
12.14	Satz: Isomorphie zwischen $C_*(K; R)$ und $C_n^{\text{cell}}( K ; R)$ . . . . .	52
<b>13</b>	<b>Kleine Simplizes</b> . . . . .	<b>53</b>
13.1	Satz: Ausschneidungs-Isomorphismus . . . . .	53
13.2	Definition: $\mathcal{U}$ -klein . . . . .	53
13.3	Satz über kleine Simplizes . . . . .	53
13.4	Bemerkung . . . . .	53
13.5	Beweis des Ausschneidungssatzes (13.1) . . . . .	53
13.6	Idee zum Beweis des Satzes über kleine Simplizes . . . . .	54
13.7	Definition: Schwerpunkt und „Abkegeln“ . . . . .	54
13.8	Lemma . . . . .	54
13.9	Definition von Zerteilungsoperatoren . . . . .	54
13.10	Lemma 1 . . . . .	55
13.11	Lemma 2 . . . . .	55
13.12	Beweis des Satzes über kleine Simplizes (13.3) . . . . .	55
13.13	Bemerkung . . . . .	55
13.14	Definition: Affiner singulärer Simplex . . . . .	56
13.15	Definition: Durchmesser eines Simplizes . . . . .	56
13.16	Lemma 3 . . . . .	56
<b>14</b>	<b>Axiome für Homologie</b> . . . . .	<b>58</b>
14.1	Bezeichnung: Funktor mit $(X, A) \mapsto (X, \emptyset)$ . . . . .	58
14.2	Definition: Homologietheorie . . . . .	58
14.3	Bemerkung zur Homotopieinvarianz von Homologietheorien . . . . .	58
14.4	Bemerkung zu Mayer-Vietoris-Folge und disjunkten Vereinigungen . . . . .	58
14.5	Definition: Dimensionsaxiom und Axiom über disjunkte Vereinigungen . . . . .	58
14.6	Bemerkung: Statt $\mathbb{N}$ -graduierten Moduln sind oft auch $\mathbb{Z}$ -graduierte Moduln nötig . . . . .	59
14.7	Bemerkung zur Homologie der Sphäre und zur zellulären Homologie . . . . .	59
14.8	Definition: Morphismus von Homologietheorien . . . . .	59
14.9	Satz: Isomorphie der Homologie von CW-Komplexen von zwei Homologietheorien . . . . .	59
<b>15</b>	<b>Zusammenhang zwischen <math>\pi_1(X, x_0)</math> und <math>H_1(X; \mathbb{Z})</math></b> . . . . .	<b>61</b>
15.1	Definition: Kommutatorgruppe . . . . .	61
15.2	Lemma . . . . .	61
15.3	Definition: Abelianisierung . . . . .	61
15.4	Bemerkung: Funktorialität der Abelianisierung . . . . .	61
15.5	Schleifen und 1-Zykel . . . . .	61
15.6	Lemma 1 . . . . .	61
15.7	Lemma 2 . . . . .	62
15.8	Lemma 3 . . . . .	62
15.9	Die Hurewicz-Abbildung . . . . .	63
15.10	Theorem (Hurewicz) . . . . .	63
15.11	Lemma 4 . . . . .	63
15.12	Lemma 5 . . . . .	64
15.13	Corollar . . . . .	64
15.14	Definition . . . . .	64
15.15	Eigenschaften von $\pi_n(X, x_0)$ . . . . .	65

15.16	Definition: $n$ -zusammenhängender Raum . . . . .	65
15.17	Bemerkung . . . . .	65
15.18	Beispiel . . . . .	65
15.19	Definition: Relative Homotopiegruppen . . . . .	65
15.20	Bemerkung . . . . .	66
15.21	Die Hurewicz-Abbildung . . . . .	66
15.22	Lemma . . . . .	66
15.23	Theorem (Hurwicz) . . . . .	66
15.24	Korollar . . . . .	66
15.25	Satz . . . . .	66
<b>16</b>	<b>Die Fundamentalklasse</b>	<b>68</b>
16.1	Beispiele für die Homologiegruppen verschiedener Mannigfaltigkeiten . . . . .	68
16.2	Bemerkung . . . . .	68
16.3	Definition: Homologische Orientierung . . . . .	68
16.4	Notation . . . . .	68
16.5	Definition: Homologische Orientierung auf der gesamten Mannigfaltigkeit . . . . .	68
16.6	Beispiel . . . . .	68
16.7	Beispiel: Orientierung von $S^n$ . . . . .	69
16.8	Bezeichnung: Geschlossene Mannigfaltigkeit . . . . .	69
16.9	Satz . . . . .	69
16.10	Definition . . . . .	69
16.11	Bemerkung . . . . .	69
16.12	Bemerkung . . . . .	70
16.13	Beispiel . . . . .	70
16.14	Lemma . . . . .	70
16.15	Bemerkung . . . . .	70
<b>Index</b>		<b>A</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b>		<b>C</b>
<b>Todo list</b>		<b>C</b>



# 1 Kategorien, Funktoren und natürliche Transformationen

## 1.1 Definition

Eine **Kategorie**  $\mathcal{C}$  besteht aus:

- i) Einer Klasse  $\text{Ob}(\mathcal{C})$ . Die Elemente von  $\text{Ob}(\mathcal{C})$  heißen die **Objekte** von  $\mathcal{C}$ .
- ii) Zu je zwei Objekten  $A, B$  aus  $\mathcal{C}$  einer Menge  $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ . Die Elemente von  $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$  heißen **Morphismen** von  $\mathcal{C}$ .
- iii) Zu je drei Objekten  $A, B, C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  aus einer Abbildung:

$$\text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C) \times \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, C), \quad (f, g) \mapsto f \circ g$$

genannt die **Komposition** in  $\mathcal{C}$ .

Dabei müssen folgende Axiome erfüllt sein:

- (i) Die Komposition ist **assoziativ**: Für Objekte  $A, B, C, D$  von  $\mathcal{C}$  und  $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(C, D), g \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C)$  und  $h \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$  gilt immer

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

- (ii) Die Komposition ist **unital**: Für jedes Objekt  $A$  von  $\mathcal{C}$  gibt es einen Morphismus  $\text{id}_A \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, A)$  so, dass

$$\forall f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, A) : \text{id}_A \circ f = f \quad \text{und} \quad \forall f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) : f \circ \text{id}_A = f$$

## 1.2 Beispiele

- (1) Die Kategorie der Mengen **MENGEN**: Objekte sind Mengen und Morphismen sind Abbildungen.
- (2) Die Kategorie der Gruppen **GRUPPEN**: Objekte sind Gruppen und Morphismen sind Gruppenhomomorphismen.
- (3) Die Kategorie der  $K$ -Vektorräume  **$K$ -VR**: Objekte sind  $K$ -Vektorräume und die Morphismen sind  $K$ -lineare Abbildungen.
- (4) Die Kategorie der  $R$ -Moduln  **$R$ -MOD**: Objekte sind  $R$ -Moduln und Morphismen sind  $R$ -lineare Abbildungen.
- (5) Die Kategorie der  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeiten  **$C^\infty$ -MAN**: Objekte sind  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeiten und Morphismen sind  $C^\infty$ -Abbildungen.
- (6) Die Kategorie der topologischen Räume **TOP**: Objekte sind topologische Räume und Morphismen sind stetige Abbildungen.
- (7) Die Kategorie der punktierten topologischen Räume **TOP $_{\bullet}$** : Objekte sind punktiert-topologische Räume und Morphismen sind punktiert-stetige Abbildungen.
- (8) Die Kategorie **HTOP**: Objekte sind topologische Räume und Morphismen sind Homotopieklassen von stetigen Abbildungen.
- (9) Die Kategorie **HTOP $_{\bullet}$** : Objekte sind punktiert-topologische Räume und Morphismen sind Homotopieklassen von punktiert-stetigen Abbildungen.
- (10) Sei  $G$  eine Gruppe. Wir erhalten eine Kategorie  $\mathcal{C}_G$  mit genau einem Objekt  $*$  und  $\text{Mor}_{\mathcal{C}_G}(*, *) = G$ . Die Komposition wird durch die Verknüpfung in der Gruppe festgelegt.
- (11) Ist  $\mathcal{C}$  eine Kategorie, so ist  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  eine Kategorie, wobei  $\text{Ob}(\mathcal{C}^{\text{op}}) = \text{Ob}(\mathcal{C})$  und  $\text{Mor}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(A, B) := \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, A)$ . Die Komposition ist gegeben durch  $f \circ^{\text{op}} g := g \circ f$ .

### 1.3 Bemerkung

- (i) Eine Kategorie heißt **klein**, wenn ihre Objekte eine Menge bilden.
- (ii) Statt  $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$  schreiben wir oft  $f: A \rightarrow B$  oder  $A \xrightarrow{f} B$ .

### 1.4 Definition

Seien  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{D}$  Kategorien: Ein **Funktor**  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ordnet jedem Objekt  $C$  von  $\mathcal{C}$  ein Objekt  $F(C)$  von  $\mathcal{D}$  und ordnet jedem Morphismus  $f: C \rightarrow C'$  in  $\mathcal{C}$  einen Morphismus  $F(f): F(C) \rightarrow F(C')$  in  $\mathcal{D}$  zu. Dabei muss gelten:

$$F(f \circ g) = F(f) \circ F(g) \quad \text{und} \quad F(\text{id}_C) = \text{id}_{F(C)}$$

### 1.5 Beispiele

- (1) Es gibt offensichtliche „Vergiss“-Funktoen:

$$\begin{aligned} K\text{-VR} &\longrightarrow \text{MENGEN} \\ R\text{-MOD} &\longrightarrow \text{MENGEN} \\ \text{TOP} &\longrightarrow \text{MENGEN} \\ \text{TOP}_{\bullet} &\longrightarrow \text{MENGEN} \\ \text{TOP}_{\bullet} &\longrightarrow \text{TOP} \end{aligned}$$

- (2) Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie und  $C$  ein Objekt von  $\mathcal{C}$ . Der durch  $C$  **dargestellte Funktor**  $F_C: \mathcal{C} \rightarrow \text{MENGEN}$  ist definiert durch

$$\begin{aligned} F_C(A) &= \text{Mor}_{\mathcal{C}}(C, A) && \text{für } A \in \text{Ob}(\mathcal{C}) \\ F_C(f): \text{Mor}_{\mathcal{C}}(C, A) &\rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}}(C, A'), g \mapsto f \circ g && \text{für } f: A \rightarrow A' \text{ in } \text{Mor}(A, A') \end{aligned}$$

- (3) Die Fundamentalgruppe definiert einen Funktor

$$\pi_1: \text{HTOP}_{\bullet} \longrightarrow \text{GRUPPEN}$$

#### Bemerkung

- Ist  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ein Funktor so schreiben wir oft kürzer und ungenauer  $f_* := F(f)$ .
- Kleine Kategorien und Funktoen bilden die Kategorie  $\text{KAT}$ .

### 1.6 Definition

Seien  $F, G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  zwei Funktoen. Eine **natürliche Transformation**  $\tau: F \rightarrow G$  ordnet jedem  $C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  einen Morphismus  $\tau_C: F(C) \rightarrow G(C)$  in  $\mathcal{D}$  zu, sodass für jedes  $f: C \rightarrow C'$  in  $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccc} F(C) & \xrightarrow{F(f)} & F(C') \\ \downarrow \tau_C & & \downarrow \tau_{C'} \\ G(C) & \xrightarrow{G(f)} & G(C') \end{array}$$

kommutiert.

**Bemerkung**

Natürliche Transformationen lassen sich komponieren. Für  $\tau: F \rightarrow G$ ,  $\eta: G \rightarrow H$  ist  $\eta \circ \tau: F \rightarrow H$  gegeben durch

$$(\eta \circ \tau)_C := \eta_C \circ \tau_C: F(C) \rightarrow H(C)$$

$$F, G, H: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$$

Genauer: Für feste kleine Kategorien  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{D}$  bilden die Funktoren  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  mit den natürlichen Transformationen eine Kategorie  $\text{FUN}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ .

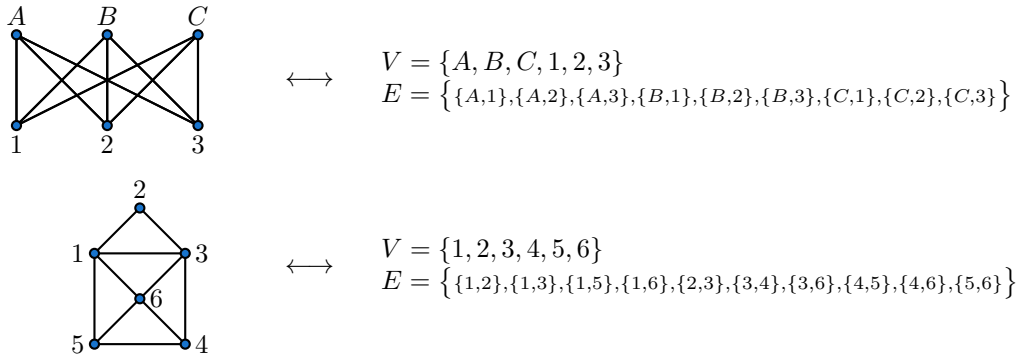
**1.7 Ausblick**

In der algebraischen Topologie werden topologische Fragen, wie zum Beispiel, wann  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{R}^m$  homöomorph sind, in algebraische Fragen übersetzt. Eine Möglichkeit für eine solche Übersetzung sind Funktoren von einer Kategorie von topologischen Räumen, z.B.  $\text{TOP}$ ,  $\text{TOP}_\bullet$ ,  $\text{HTOP}_\bullet$ , in eine algebraisch Kategorie, z.B.  $\text{GRUPPEN}$ ,  $K\text{-VR}$ ,  $\text{ABEL.GRUPPEN}$ ,  $R\text{-MOD}$ . Ein Beispiel für einen solchen Funktor ist die Fundamentalgruppe  $\pi_1$ . Ein Nachteil der Fundamentalgruppe ist, dass diese oft schwierig zu berechnen ist. Wir werden in dieser Vorlesung weitere Funktoren und Methoden für ihre Berechnung kennenlernen.

## 2 Kombinatorische Beschreibungen topologischer Räume

### 2.1 Beispiel

**Graphen** sind einerseits topologische Räume und andererseits kombinatorische Objekte:



### 2.2 Definition

Ein **simplicialer Komplex**  $K = (V, \Sigma)$  besteht aus einer Menge  $V$  und einer Menge  $\Sigma$  von nichtleeren, endlichen Teilmengen von  $V$ , sodass gilt

(i)  $\{v\} \in \Sigma$  für alle  $v \in V$

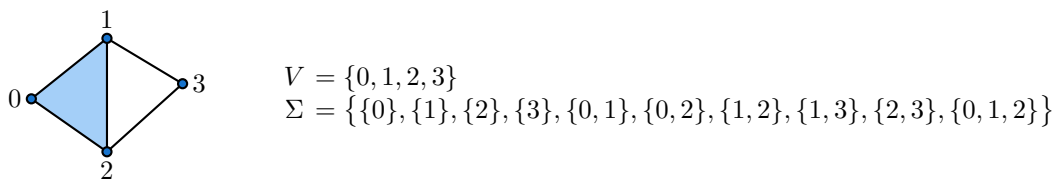
(ii)  $\sigma \in \Sigma, \emptyset \neq \tau \subseteq \sigma \implies \tau \in \Sigma$ .

(Abgeschlossen bzgl. Teilmengenbildung)

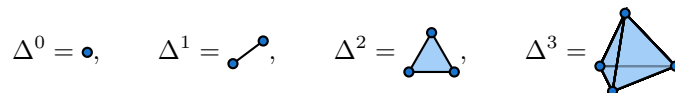
Die Elemente von  $V$  heißen die **Ecken** oder **Vertices** von  $K$ . Die Elemente von  $\Sigma$  heißen die **Simplizes** von  $K$ . Enthält  $\sigma \in \Sigma$  genau  $n + 1$  Elemente, so heißt  $\sigma$  ein **n-Simplex**. Ist  $\tau \subseteq \sigma$ , wobei  $\sigma$  ein  $n$ -Simplex und  $\tau$  ein  $n - 1$ -Simplex ist, so heißt  $\tau$  eine **Seite** von  $\sigma$ .

Ist  $V$  geordnet, so heißt  $K$  geordnet. Ist  $V$  endlich, so heißt  $K$  endlich.

### 2.3 Beispiel



Ist  $\sigma$  eine endliche Menge, so heißt  $\Delta^\sigma := (\sigma, \mathcal{P}(\sigma) \setminus \{\emptyset\})$  der  $\sigma$ -Simplex. Für  $\sigma = \{0, \dots, n\}$  schreiben wir  $\Delta^n := \Delta^{\{0, \dots, n\}}$ . Es ist



### 2.4 Definition

Sei  $K = (V, \Sigma)$  ein simplicialer Komplex. Ein **Unterkomplex** von  $K$  ist ein simplicialer Komplex  $K_0 = (V_0, \Sigma_0)$  mit  $V_0 \subseteq V$  und  $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ .

**Beispiel**

Sei  $K = (V, \Sigma)$  ein endlicher simplizialer Komplex. Dann ist  $K$  ein Unterkomplex von  $\Delta^V$ .

**2.5 Definition**

Eine **simpliziale Abbildung**  $f: K_1 = (V_1, \Sigma_1) \rightarrow K_2 = (V_2, \Sigma_2)$  zwischen simplizialen Komplexen ist eine Abbildung  $f: V_1 \rightarrow V_2$ , sodass  $f(\sigma_1) \in \Sigma_2$  für alle  $\sigma_1 \in \Sigma_1$ . Simpliziale Komplexe zusammen mit simplizialen Abbildungen bilden eine Kategorie  $\text{SIMP}$ .

**2.6 Definition**

Sei  $\sigma$  eine endliche Menge. Sei  $\mathbb{R}^\sigma = \prod_{v \in \sigma} \mathbb{R}$  mit der Produkttopologie. Wir setzen nun

$$|\Delta^\sigma| := \left\{ x = (x_v)_{v \in \sigma} \in \mathbb{R}^\sigma \mid \sum_{v \in \sigma} x_v = 1, x_v \in [0, 1] \forall v \in \sigma \right\}$$

Ist  $\tau \subseteq \sigma$ , so erhalten wir eine Abbildung  $\iota_\tau^\sigma: |\Delta^\tau| \rightarrow |\Delta^\sigma|$  indem wir  $(x_v)_{v \in \tau} \in |\Delta^\tau|$  durch  $x_v = 0$  für  $v \in \sigma \setminus \tau$  zu  $(x_v)_{v \in \sigma}$  auffüllen. Ist  $\eta \subseteq \tau \subseteq \sigma$  so gilt offensichtlich  $\iota_\eta^\sigma = \iota_\tau^\sigma \circ \iota_\eta^\tau$ .

Sei nun  $K = (V, \Sigma)$  ein simplizialer Komplex. Die **geometrische Realisierung**  $|K|$  von  $K$  ist definiert als

$$|K| := \coprod_{\sigma \in \Sigma} \{\sigma\} \times |\Delta^\sigma| / \sim$$

wobei  $\sim$  die durch  $(\tau, x) \sim (\sigma, \iota_\tau^\sigma(x))$  für  $\tau \subseteq \sigma$  erzeugte Äquivalenzrelation ist. Versehen mit der Quotiententopologie ist  $|K|$  ein topologischer Raum.

Anschaulich „klebt“  
 $\sim$  die geometrischen  
 Realisierungen aller  
 Einzelteile passend  
 zusammen

**Bemerkung**

- In Aufgabe 4 von Blatt 1 haben wir gezeigt, dass  $|K|$  homöomorph zu einem Unterraum  $X$  von  $\mathbb{R}^n$  mit  $n := \#V$  ist via  $[(\sigma, (x_{v_i})_{v_i \in \sigma})] \mapsto \sum_{v_i \in \sigma} x_{v_i} \cdot e_i$ .
- In Aufgabe 2 von Blatt 2 haben wir gezeigt, dass  $|\cdot|$  einen Funktor  $\text{SIMP} \rightarrow \text{TOP}$  definiert. Dazu definiert man eine Abbildung zunächst auf den zugrunde liegenden Räumen durch

$$\left( \sigma, \sum_{v \in \sigma} x_v \cdot v \right) \mapsto \left( f(\sigma), \sum_{v \in \sigma} x_v \cdot f(v) \right)$$

und wendet diese unter Benutzung der universellen Eigenschaft der Quotiententopologie auf Repräsentanten an.<sup>2</sup>

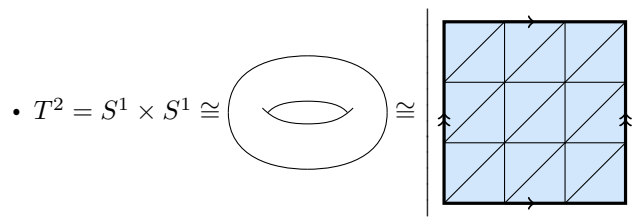
**2.7 Beispiel**

- Sei  $\partial \Delta^n := \left( \{0, \dots, n\}, \mathcal{P}(\{0, \dots, n\}) \setminus \{\emptyset, \{0, \dots, n\}\} \right) = \Delta^n \setminus \{0, \dots, n\}$ .  $\partial \Delta^n$  heißt der **Rand des  $n$ -Simplizes**. Es gilt

$$\begin{aligned} |\partial \Delta^1| &= \bullet \bullet \cong S^0 \\ |\partial \Delta^2| &= \triangle \cong S^1 \\ |\partial \Delta^3| &= \text{Pyramide} \cong S^2 \end{aligned}$$

Allgemein gilt  $|\partial \Delta^n| \cong S^{n-1}$ , siehe Aufgabe 1 von Blatt 3.

<sup>2</sup> hier wird eine formale Summe anstatt eines Tupels benutzt; da  $\sigma$  stets eine endliche Menge ist, macht dies aber keinen Unterschied.



## 2.8 Definition

Ein topologischer Raum  $X$  heißt ein **Polyeder**, falls er homöomorph zur geometrischen Realisierung eines simplizialen Komplexes ist.

## 2.9 Definition

Sei  $K = (V, \Sigma)$  ein endlicher simplizialer Komplex. Sei  $a_n := \#\{\sigma \in \Sigma \mid \sigma \text{ ist ein } n\text{-Simplex von } K\}$ . Dann heißt  $\chi(K) := \sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n \cdot a_n$  die **Euler-Charakteristik** von  $K$ .

**Beispiel**

$$\chi(\triangle) = 3 - 3 = 0$$

$$\chi(\square) = 4 - 4 = 0$$

$$\chi([n\text{-Eck}]) = n - n = 0$$

$$\chi(\partial\Delta^3 = \text{Pyramide}) = 4 - 6 + 4 = 2$$

$$\chi(\text{Würfel}) = 8 - 12 + 6 = 2$$

$$\chi(\text{Oktaeder}) = 6 - 12 + 8 = 2$$

## 2.10 Satz

Seien  $K$  und  $K'$  endliche simpliziale Komplexe. Gilt  $|K| \cong |K'|$ , so gilt

$$\chi(K) = \chi(K').$$

### Bemerkung

Die Euler-Charakteristik ist also eine topologische Invariante von simplizialen Komplexen. Sie hängt nur von der topologischen Struktur von  $|K|$  und nicht von der kombinatorischen Struktur von  $K$  ab.

### Beweis

Siehe 12.10.

### 3 Simpliciale Homologie

#### 3.1 Definition

Sei  $S$  eine Menge. Sei  $R$  ein Ring. Der **freie  $R$ -Modul mit Basis  $S$** ,  $R[S]$ , besteht aus allen endlichen formalen  $R$ -Linearkombinationen Ring mit Eins

$$\sum_{s \in S} r_s \cdot s, \quad r_s \in R \text{ und } r_s \neq 0 \text{ für endliche viele } s \in S$$

Die  $R$ -Modulstruktur auf  $R[S]$  ist definiert durch:

$$r \cdot \left( \sum_{s \in S} r_s \cdot s \right) := \sum_{s \in S} (r \cdot r_s) \cdot s \quad \left( \sum_{s \in S} r_s \cdot s \right) + \left( \sum_{s \in S} r'_s \cdot s \right) := \sum_{s \in S} (r_s + r'_s) \cdot s$$

#### Bemerkung

Mittels  $s = \sum_{s' \in S} \delta_{s,s'} \cdot s'$  fassen wir  $S$  als Teilmenge von  $R[S]$  auf.

#### 3.2 Lemma

Sei  $S$  eine Menge,  $R$  ein Ring. Es gilt

- 1) Ist  $M$  ein  $R$ -Modul und  $i: S \rightarrow M$  eine Abbildung, so gibt es genau eine  $R$ -lineare Abbildung  $\varphi: R[S] \rightarrow M$ , die  $i$  fortsetzt.
- 2) Sei  $f: R[S] \rightarrow M$   $R$ -linear und  $p: N \twoheadrightarrow M$   $R$ -linear und surjektiv. Dann gibt es  $\hat{f}: R[S] \rightarrow N$  mit  $p \circ \hat{f} = f$ .

Moduln mit dieser Eigenschaft bezeichnet man als **projektiv**. Freie Moduln sind also projektiv.

$$\begin{array}{ccc} & N & \\ \hat{f} \nearrow & \downarrow p & \\ R[S] & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

#### Beweis

- 1) Eine solche Abbildung ist gegeben durch  $\varphi(\sum_{s \in S} r_s \cdot s) = \sum_{s \in S} r_s \cdot i(s)$ . Ist  $\varphi'$  eine zweite, so gilt

$$\hat{\varphi} \left( \sum_{s \in S} r_s \cdot s \right) = \sum_{s \in S} r_s \cdot \hat{\varphi}(s) = \sum_{s \in S} r_s \cdot i(s)$$

- 2) Wähle für jedes  $s \in S$  ein Urbild  $j(s) \in N$  für  $f(s) \in M$  unter  $p: N \twoheadrightarrow M$ . Nun wende 1) auf  $j: S \rightarrow N$  an, um  $\hat{f}: R[S] \rightarrow N$  mit  $\hat{f}(s) = j(s)$  zu erhalten. Nun ist  $p \circ \hat{f}(s) = f(s)$  für alle  $s \in S$ . Mit der Eindeutigkeit aus 1) folgt  $p \circ \hat{f} = f$ . □

#### 3.3 Beispiel

- (i) Sei  $K$  ein Körper und  $V, M, N$  seien  $K$ -Vektorräume,  $f: V \rightarrow M$ ,  $p: N \rightarrow M$  seien  $K$ -linear und  $p$  surjektiv. Dann gibt es  $\hat{f}: V \rightarrow N$  mit  $p \circ \hat{f} = f$ . Wir können Lemma 3.2 benutzen, da  $V$  eine Basis  $B$  hat, also  $V \cong K[B]$ .
- (ii) Sei  $R = \mathbb{Z}$ , sei  $V = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  und  $M = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , sowie  $f = \text{id}: V \rightarrow M$ ,  $N = \mathbb{Z}$  und  $p: \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  die Projektion mit  $p(n) = n + 2\mathbb{Z}$ . Dann gibt es **keine**  $\mathbb{Z}$ -lineare Abbildung  $\hat{f}: \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  mit  $p \circ \hat{f} = f$  denn falls  $\hat{f}(1 + 2\mathbb{Z}) = n \in \mathbb{Z}$  ist, so folgt

$$2n = 2 \cdot \hat{f}(1 + 2\mathbb{Z}) = \hat{f}(2 \cdot (1 + 2\mathbb{Z})) = \hat{f}(0 + 2\mathbb{Z}) = 0$$

also  $n = 0$  und somit  $p \circ \hat{f} = 0$ .  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  ist also kein freier Modul.

### 3.4 Definition

Sei  $K = (V, \Sigma)$  ein simplizialer Komplex. Sei  $\Sigma_n := \{\sigma \in \Sigma \mid \sigma \text{ ist ein } n\text{-Simplex}\}$ . Sei  $R$  ein Ring. Der  **$n$ -te Kettenmodul** von  $K$  über  $R$  ist definiert als

$$C_n(K; R) := R[\Sigma_n]$$

Ist  $R = \mathbb{Z}$ , so schreiben wir auch kurz  $C_n(K) := C_n(K; \mathbb{Z})$ .

### 3.5 Definition

Sei  $K = (V, \Sigma)$  ein geordneter simplizialer Komplex. Sei  $\sigma = \{v_0, \dots, v_n\}$  ein  $n$ -Simplex von  $K$ . Bezüglich der Ordnung von  $K$  sei dabei  $v_0 < v_1 < \dots < v_n$ . Sei  $\tau$  ein  $(n-1)$ -Simplex von  $K$ . Definiere

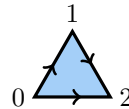
$$\varepsilon_\sigma^\tau := \begin{cases} (-1)^i, & \text{falls } \tau = \{v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n\} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

#### Bemerkung

Es gilt:  $\varepsilon_\sigma^\tau \neq 0 \iff \tau$  ist eine Seite von  $\sigma$ .

#### Beispiel

Für den folgenden geordneten simplizialen Komplex gilt



$$\varepsilon_{\{0,1,2\}}^{\{0,1\}} = 1, \quad \varepsilon_{\{0,1,2\}}^{\{0,2\}} = -1, \quad \varepsilon_{\{0,1,2\}}^{\{1,2\}} = 1$$

### 3.6 Definition

Sei  $K = (V, \Sigma)$  ein geordneter simplizialer Komplex. Die  **$n$ -te Randabbildung**

$$\partial_n : C_n(K; R) \longrightarrow C_{n-1}(K; R)$$

$= R[\Sigma_n] \qquad \qquad \qquad = R[\Sigma_{n-1}]$

ist für ein Basiselement  $\sigma \in \Sigma_n$  definiert durch

$$\partial_n(\sigma) = \sum_{\tau \in \Sigma_{n-1}} \varepsilon_\sigma^\tau \cdot \tau$$

### 3.7 Proposition

$$\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$$

Damit folgt  $\text{Im } \partial_n \subseteq \ker \partial_{n-1}$ .

#### Beweis (mit Lemma 3.8)

Sei  $\sigma$  ein  $n$ -Simplex von  $K$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \partial_{n-1}(\partial_n(\sigma)) &= \partial_{n-1} \left( \sum_{\tau \in \Sigma_{n-1}} \varepsilon_\sigma^\tau \cdot \tau \right) = \sum_{\tau \in \Sigma_{n-1}} \varepsilon_\sigma^\tau \cdot \partial_{n-1}(\tau) = \sum_{\tau \in \Sigma_{n-1}} \varepsilon_\sigma^\tau \left( \sum_{\eta \in \Sigma_{n-2}} \varepsilon_\tau^\eta \cdot \eta \right) \\ &= \sum_{\eta \in \Sigma_{n-2}} \left( \sum_{\tau \in \Sigma_{n-1}, \eta \subseteq \tau \subseteq \sigma} \varepsilon_\tau^\eta \cdot \varepsilon_\sigma^\tau \right) \eta \\ &\stackrel{\text{Lemma 3.8}}{=} 0 \end{aligned}$$

□



### 3.8 Lemma

Sei  $\sigma$  ein  $n$ -Simplex. Sei  $\eta \subseteq \sigma$  ein  $(n-2)$ -Simplex. Dann gibt es genau zwei  $(n-1)$ -Simplizes  $\tau, \tau'$  von  $K$ , die eine Seite von  $\sigma$  sind und  $\eta$  als Seite enthalten. Es gilt

$$\varepsilon_{\tau}^{\eta} \cdot \varepsilon_{\sigma}^{\tau} = -\varepsilon_{\tau'}^{\eta} \cdot \varepsilon_{\sigma}^{\tau'}$$

#### Beweis

Sei  $\sigma = \{v_0, \dots, v_n\}$  mit  $v_0 < v_1 < \dots < v_n$ . Dann ist  $\eta = \{v_0, \dots, v_n\} \setminus \{v_i, v_j\}$  mit  $i < j$ . Dann sind  $\tau = \{v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n\}$  und  $\tau' = \{v_0, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n\}$  die gesuchten  $(n-1)$ -Simplizes und es gilt

$$\varepsilon_{\sigma}^{\tau} = (-1)^i, \quad \varepsilon_{\sigma}^{\tau'} = (-1)^j, \quad \varepsilon_{\tau}^{\eta} = (-1)^{j-1}, \quad \varepsilon_{\tau'}^{\eta} = (-1)^i \quad \square$$

### 3.9 Notation

Für  $\sigma \in \Sigma_n$ ,  $\sigma = \{v_0, \dots, v_n\}$  mit  $v_0 < \dots < v_n$  schreiben wir

$$\delta^j \sigma := \{v_0, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n\} \in \Sigma_{n-1}$$

Dann ist  $\partial_n(\sigma) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \cdot \delta^j \sigma$ .

### 3.10 Definition

Sei  $K$  ein geordneter simplizialer Komplex. Der  **$n$ -te Homologiemodul** von  $K$  über  $R$  ist definiert als

$$H_n(K; R) := \frac{\ker \partial_n: C_n(K; R) \rightarrow C_{n-1}(K; R)}{\operatorname{Im} \partial_{n+1}: C_{n+1}(K; R) \rightarrow C_n(K; R)}$$

Für  $n = 0$  interpretieren wir  $\partial_0$  als die Nullabbildung. Daher gilt

$$H_0(K; R) = \frac{C_0(K; R)}{\operatorname{Im} \partial_1: C_1(K; R) \rightarrow C_0(K; R)}$$

*In Aufgabe 3 von Blatt 3 haben wir gezeigt, dass die Homologiemoduln für verschiedene Ordnungen auf der gleichen Menge isomorph sind.*

### 3.11 Beispiele

- (1) Sei  $K = \bullet$ . Dann ist  $C_0(K; R) \cong R$  und  $C_i(K; R) = 0$  für  $i > 0$ . Weiter ist  $H_0(K; R) = C_0(K; R) \cong R$  und  $H_i(K; R) = 0$  für  $i > 0$ .
- (2) Seien nun  $K = K_n$  das  $n$ -Eck, wobei  $n \geq 3$ . Also

$$\begin{aligned} \Sigma_0 &= \{\tau_1 = \{1\}, \tau_2 = \{2\}, \dots, \tau_n = \{n\}\} \\ \Sigma_1 &= \{\sigma_1 = \{1, 2\}, \dots, \sigma_{n-1} = \{n-1, n\}, \sigma_n = \{1, n\}\} \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} C_0(K; R) &= R[\Sigma_0] \cong R^n \\ C_1(K; R) &= R[\Sigma_1] \cong R^n \\ C_i(K; R) &= 0 \text{ für } i > 1, \text{ insbesondere } H_i(K; R) = 0 \text{ für } i > 1 \end{aligned}$$

Es ist dann  $\partial_2 = \partial_3 = \dots = 0$ . Interessant ist  $\partial_1: C_1(K; R) \rightarrow C_0(K; R)$ , denn es gilt

$$\partial_1(\sigma_i) = \begin{cases} \tau_{i+1} - \tau_i, & \text{falls } i = 1, \dots, n-1 \\ \tau_n - \tau_1, & \text{falls } i = n \end{cases}$$

Mit  $\sigma'_1 := \sigma_1, \sigma'_2 := \sigma_2, \dots, \sigma'_{n-1} := \sigma_{n-1}$  und  $\sigma'_n := -\sigma_n$  gilt dann

$$\partial_1(\sigma'_i) = \tau_{i+1} - \tau_i$$

mit der Konvention  $\tau_{n+1} = \tau_1$ . Also gilt

$$\partial_1\left(\sum_{i=1}^n r_i \sigma'_i\right) = \sum_{i=1}^n r_i (\tau_{i+1} - \tau_i) = \sum_{i=1}^n (r_{i-1} - r_i) \tau_i$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \ker \partial_1 &= \left\{ \sum_{i=1}^n r_i \cdot \sigma'_i \mid r_1 = r_2 = \dots = r_n \right\} \subseteq C_1(K; R) \\ \operatorname{Im} \partial_1 &= \left\{ \sum_{i=1}^n s_i \cdot \tau_i \mid \sum_{i=1}^n s_i = 0 \right\} \subseteq C_0(K; R) \end{aligned}$$

Ist  $\sum_{i=1}^n s_i = 0$ , so folgt für  $r_n = 0, r_1 = -s_1, r_2 = -s_1 - s_2, \dots, r_{n-1} = -s_1 - s_2 - \dots - s_{n-1}$

$$\partial_1\left(\sum_{i=1}^n r_i \sigma'_i\right) = \sum_{i=1}^n s_i \tau_i$$

Es folgt  $H_1(K; R) = \ker \partial_1 / \operatorname{Im} \partial_2 = \ker \partial_1 \cong R$  und

$$H_0(K; R) = \ker \partial_0 / \operatorname{Im} \partial_1 = R[\Sigma_0] / \{\sum_{i=1}^n s_i \tau_i \mid \sum_{i=1}^n s_i = 0\} \cong R$$

(via  $\sum_{i=1}^n s_i \tau_i \mapsto \sum_{i=1}^n s_i$  und Homomorphiesatz)

### 3.12 Definition

Sei  $R$  ein Ring. Ein **R-Kettenkomplex**  $(C_*, d_*)$  ist eine Folge von  $R$ -Moduln  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zusammen mit  $R$ -linearen Abbildungen  $(d_n: C_n \rightarrow C_{n-1})_{n \geq 1}$ , so dass  $d_n \circ d_{n+1} = 0$ . Die  $d_n$  heißen die **Randabbildungen** von  $(C_*, d_*)$ , die  $C_n$  die **Kettenmoduln**. Die **n-te Homologie** eines Kettenkomplexes  $(C_*, d_*)$  ist definiert als

$$H_n(C_*, d_*) := \frac{\ker d_n: C_n \rightarrow C_{n-1}}{\operatorname{Im} d_{n+1}: C_{n+1} \rightarrow C_n}$$

### 3.13 Bemerkung

- (i) Oft werden auch Kettenkomplexe betrachtet, die  $\mathbb{Z}$  statt  $\mathbb{N}$  verwenden.
- (ii) Ein Kettenkomplex  $(C_*, d_*)$  heißt endlich erzeugt, wenn alle  $C_n$  endlich erzeugte  $R$ -Moduln sind und  $C_n \neq 0$  nur für endlich viele  $n$  ist.

### 3.14 Definition

Zu einem geordneten simplizialen Komplex  $K$  heißt  $(C_*(K; R), \partial_*)$  der **simpliziale Kettenkomplex** von  $K$  über  $R$ .

#### Bemerkung

Ist  $K$  endlich, so ist  $(C_*(K; R), \partial_*)$  endlich erzeugt.

## 4 Euler-Charakteristik von Kettenkomplexen

### 4.1 Wiederholung

Sei  $A$  eine abelsche Gruppe. Dann ist

$$TA := \left\{ a \in A \mid \exists n \geq 1 : n \cdot a = \underbrace{a + \dots + a}_{n\text{-mal}} = 0 \right\}$$

die **Torsionsgruppe** von  $A$ . Ist  $A$  endlich erzeugt, so ist auch  $TA$  endlich erzeugt und es gibt Primzahlpotenzen  $p_1^{n_1}, \dots, p_k^{n_k}$  mit

$$TA \cong \mathbb{Z}/(p_1^{n_1}) \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/(p_k^{n_k})$$

abelsche Gruppen  
sind  $\mathbb{Z}$ -Moduln

Weiter gibt es dann  $n$  mit  $A \cong \mathbb{Z}^n \oplus TA$ .  $\text{Rg } A := n$  ist der **Rang** von  $A$ .

### 4.2 Lemma

Sei  $A$  eine endlich erzeugte abelsche Gruppe. Dann gilt  $\text{Rg } A = \max\{m \mid \exists C \leq A, C \cong \mathbb{Z}^m\}$ .

#### Beweis

Da  $A \cong \mathbb{Z}^n \oplus TA$  ist, genügt zu zeigen: Ist  $\varphi: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^n \oplus TA$  ein injektiver Gruppenhomomorphismus, so ist  $m \leq n$ . Schreibe  $\varphi = \varphi_0 \oplus \varphi_1$ , also  $\varphi(a) = \varphi_0(a) + \varphi_1(a)$  mit  $\varphi_0: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^n$ ,  $\varphi_1: \mathbb{Z}^m \rightarrow TA$ .

Behauptung:  $\varphi_0$  ist injektiv. Zu  $v \in \mathbb{Z}^m$  wähle  $k \geq 1$  mit  $k \cdot \varphi_1(v) = 0 \in TA$ . Dann ist  $\varphi_1(kv) = k\varphi_1(v) = 0$ . Ist  $v \neq 0$ , so ist  $k \cdot v \neq 0 \in \mathbb{Z}^m$ , also ist  $\varphi(kv) \neq 0$  und damit  $\varphi_0(kv) \neq 0$ . Es folgt  $\varphi_0(v) \neq 0$ , da sonst  $\varphi_0(k \cdot v) = k \cdot \varphi_0(v) = 0$ . Damit ist die Behauptung gezeigt.

Gruppenhomomorphismen  $\varphi_0: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^n$  werden durch  $n \times m$ -Matrizen beschrieben: Es gibt  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{Z}^{n \times m}$  mit

$$\varphi_0 \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m a_{1j} \cdot z_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m a_{nj} \cdot z_j \end{pmatrix}$$

Ist  $m > n$ , so hat  $A$ , aufgefasst als Matrix über  $\mathbb{Q}$ , einen Kern. Es gibt also einen Vektor  $w = \begin{pmatrix} a_1/b_1 \\ \vdots \\ a_m/b_m \end{pmatrix}$  mit  $Aw = 0$ ,  $w \neq 0$ . Dann ist  $(b_1, \dots, b_m) \cdot w \in \mathbb{Z}^m$  und

$$\varphi_0((b_1, \dots, b_m) \cdot w) = A \cdot ((b_1, \dots, b_m) \cdot w) = (b_1, \dots, b_m) \cdot A \cdot w = 0 \quad \nexists$$

Dies ist ein Widerspruch zur Injektivität von  $\varphi_0$ . Also gilt  $m \leq n$ . □

### 4.3 Definition

Seien  $M_0, M_1, M_2$   $R$ -Moduln und  $f_0: M_0 \rightarrow M_1$ ,  $f_1: M_1 \rightarrow M_2$   $R$ -lineare Abbildungen. Dann heißt

$$M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} M_2$$

eine **kurze exakte Sequenz**, wenn gilt:

- (i)  $f_0$  ist injektiv,
- (ii)  $\text{Im } f_0 = \ker f_1$ ,
- (iii)  $f_1$  ist surjektiv.

#### Bemerkung

Oft sagt man  $M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} M_2$  ist exakt in  $M_1$ , wenn  $\text{Im } f_0 = \ker f_1$  ist. Dann ist  $(\star)$  eine kurze exakte Folge, wenn

$$0 \longrightarrow M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \longrightarrow 0$$

exakt in  $M_0, M_1$  und  $M_2$  ist.

#### 4.4 Beispiele

1)

$$\begin{aligned} M_0 &\xhookrightarrow{i} M_0 \oplus M_1 \xrightarrow{p} M_1 \\ v_0 &\mapsto (v_0, 0) \quad (v_0, v_1) \mapsto v_1 \end{aligned}$$

ist eine kurze exakte Folge.

2)  $\mathbb{Z} \xhookrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  ist eine kurze exakte Folge.

#### 4.5 Bemerkung

Eine **Spaltung** für eine kurze exakte Folge  $M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} M_2$  ist eine  $R$ -lineare Abbildung  $s: M_2 \rightarrow M_1$  mit  $f_1 \circ s = \text{id}_{M_2}$ . In diesem Fall erhalten wir einen Isomorphismus  $M_0 \oplus M_2 \rightarrow M_1, (v_0, v_2) \mapsto f_0(v_0) + s(v_2)$ .

**Injektivität:** Sei  $(v_0, v_2) \in M_0 \oplus M_2$  mit  $f_0(v_0) + s(v_2) = 0$ . Dann gilt

$$0 = f_1(f_0(v_0) + s(v_2)) = v_2 \implies f_0(v_0) = 0 \implies v_0 = 0$$

**Surjektivität:** Sei  $v_1 \in M_1$ . Betrachte  $v_2 := f_1(v_1)$ . Dann ist  $v_1 - s(v_2) \in \ker f_1 = \text{Im } f_0$ , also gibt es  $v_0$  in  $M_0$  mit  $f_0(v_0) = v_1 - s(v_2)$ . Damit ist  $v_1 = f_0(v_0) + s(v_2)$ .  $\square$

#### 4.6 Bemerkung

1) Die kurze exakte Sequenz  $\mathbb{Z} \xhookrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  spaltet nicht.

2) Ist  $M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} M_2$  eine kurze exakte Folge mit  $M_2$  frei, also  $M_2 \cong R[S]$ , so spaltet die Folge. Insbesondere ist  $M_1 \cong M_0 \oplus M_2$ . Dazu wenden wir Lemma 3.2 an und erhalten eine  $R$ -lineare Abbildung  $s: M_2 \rightarrow M_1$ , sodass folgendes Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} & & M_1 \\ & \nearrow s & \downarrow f_1 \\ R[S] & \xrightarrow{\text{id}} & R[S] \end{array}$$

$s$  ist also die gesuchte Spaltung. Dieses Vorgehen funktioniert bei jedem projektiven Modul.

#### 4.7 Bemerkung

Der Rang für alle endlich erzeugten abelschen Gruppen ist additiv:

$$\text{Rg}(A \oplus B) = \text{Rg } A + \text{Rg } B,$$

da  $A \cong \mathbb{Z}^{\text{Rg } A} \oplus TA, B \cong \mathbb{Z}^{\text{Rg } B} \oplus TB$ , also

$$A \oplus B \cong \mathbb{Z}^{\text{Rg } A + \text{Rg } B} \oplus \underbrace{TA \oplus TB}_{=T(A \oplus B)}$$

## 4.8 Proposition

Der Rang von endlich erzeugten abelschen Gruppen ist additiv für kurze exakte Folgen: Ist

$$A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \quad [\star]$$

eine kurze exakte Folge von endlich erzeugten abelschen Gruppen, so gilt  $\text{Rg } B = \text{Rg } A + \text{Rg } C$ .

### Beweis

Spaltet  $[\star]$ , so ist  $B \cong A \oplus C$  und die Behauptung folgt aus der Bemerkung 4.7.

Wir können annehmen, dass  $C = \mathbb{Z}^n \oplus TC$  gilt. Wir erhalten folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{i} & p^{-1}(\mathbb{Z}^n) & \xrightarrow{p} & \mathbb{Z}^n \\
 \parallel & & \downarrow i'' & & \downarrow i' \\
 A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{p} & C \\
 & & \downarrow p'' & & \downarrow p' \\
 & & B/p^{-1}(\mathbb{Z}^n) & \xrightarrow{p' \circ p} & TC
 \end{array} \quad [\star]$$

Ist  $p' \circ p(b) = 0$ , so gibt es  $v \in \mathbb{Z}^n$  mit  $i'(v) = p(b)$ . Nun gibt es  $v' \in p^{-1}(\mathbb{Z}^n)$  mit  $p(v') = v$ . Es folgt

$$p(i''(v')) = p(b)$$

also  $i''(v') - b \in \ker p = i(A)$ . Da  $i(A) \subseteq i''(p^{-1}(\mathbb{Z}^n))$ , folgt  $b \in i''(p^{-1}(\mathbb{Z}^n))$ . In dem Diagramm sind die Spalten und Zeilen exakt. Da  $\mathbb{Z}^n$  frei ist, spaltet  $A \xrightarrow{i} p^{-1}(\mathbb{Z}^n) \xrightarrow{p} \mathbb{Z}^n$  und es gilt

$$\text{Rg } A + \text{Rg } C = \text{Rg } A + n = \text{Rg}(p^{-1}(\mathbb{Z}^n))$$

Es bleibt zu zeigen:  $\text{Rg } B = \text{Rg}(p^{-1}(\mathbb{Z}^n))$ .

Nebenbei: Ist  $A' \subseteq B'$ , so gilt  $\text{Rg } A' \leq \text{Rg } B'$ , denn

$$\text{Rg } A' = \max\{n' \mid \mathbb{Z}^{n'} \cong C' \leq A'\} \leq \max\{n' \mid \mathbb{Z}^{n'} \cong C' \leq B'\} = \text{Rg } B'.$$

Betrachte die kurze exakte Folge

$$p^{-1}(\mathbb{Z}^n) \longrightarrow B \longrightarrow B/p^{-1}(\mathbb{Z}^n)$$

Wegen  $B/p^{-1}(\mathbb{Z}^n) \cong TC$  gibt es ein  $k$  mit  $k \cdot (b + p^{-1}(\mathbb{Z}^n)) = 0$  für alle  $b \in B$ . Also  $k \cdot b \in p^{-1}(\mathbb{Z}^n)$ . Es folgt  $kB \subseteq p^{-1}(\mathbb{Z}^n)$ . Ist  $B \cong \mathbb{Z}^{\text{Rg } B} + TB$ , so ist  $kB \cong (k\mathbb{Z})^{\text{Rg } B} + T(kB)$  und  $\text{Rg } kB = n = \text{Rg } B$ . Mit der Nebenbemerkung folgt  $\text{Rg } p^{-1}(\mathbb{Z}^n) = \text{Rg } B$  aus  $kB \subseteq p^{-1}(\mathbb{Z}^n) \subseteq B$ .  $\square$

### Beweis mit Tensorprodukten (Skizze)

- $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}}: \mathbb{Z}\text{-Mod} \rightarrow \mathbb{Q}\text{-VR}$  ist ein Funktor.
- $\text{Rg } A = \dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} A)$ 
  - (a)  $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} (X \oplus Y) = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} X \oplus \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} Y$
  - (b)  $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^n \cong \mathbb{Q}^n$
  - (c)  $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} T \cong 0$  für  $T$  ein Torsionsmodul.
- Ist  $A \longrightarrow B \longrightarrow C$  eine kurze exakte Folge, so ist auch  $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} A \rightarrow \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} B \rightarrow \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} C$  eine kurze exakte Folge.
- Jede kurze exakte Folge  $V_0 \longrightarrow V_1 \longrightarrow V_2$  von  $\mathbb{Q}$ -Vektorräumen spaltet und daher gilt  $V_1 \cong V_0 \oplus V_2$  und  $\dim_{\mathbb{Q}}(V \oplus W) = \dim_{\mathbb{Q}}(V) + \dim_{\mathbb{Q}}(W)$ .

## 4.9 Definition

Sei  $(C_*, d_*)$  ein endlich erzeugter  $\mathbb{Z}$ -Kettenkomplex.

$$\chi(C_*) := \sum_{i=0}^{\infty} \operatorname{Rg}(C_i) = \sum_{i=0}^{n_0} \operatorname{Rg}(C_i)$$

heißt die **Eulercharakteristik** von  $(C_*, d_*)$ . Dabei ist  $n_0$  so gewählt, dass  $C_n = 0$  für alle  $n > n_0$ .

## 4.10 Satz

Sei  $(C_*, d_*)$  ein endlich erzeugter  $\mathbb{Z}$ -Kettenkomplex. Dann gilt

$$\chi(C_*) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \operatorname{Rg} H_i(C_*, d_*).$$

### Beweis

Sei  $B_{n+1} := \operatorname{Im} d_{n+1} : C_{n+1} \rightarrow C_n$  und  $Z_n := \ker d_n : C_n \rightarrow C_{n-1}$ . Also  $H_n(C_*, d_*) = Z_n / B_{n+1}$ . Als Untermoduln von  $C_n$  sind  $Z_n$  und  $B_n$  endlich erzeugt (LA2). Insbesondere ist auch  $H_n(C_*, d_*)$  endlich erzeugt und der Rang somit definiert. Auch  $B_{n+1}$  ist Untermodul des endlich erzeugten  $\mathbb{Z}$ -Moduls  $C_n$  und somit endlich erzeugt. Wir erhalten kurze exakte Folgen:

$$\begin{aligned} B_{n+1} &\hookrightarrow Z_n \twoheadrightarrow H_n(C_*, d_*) \\ Z_n &\hookrightarrow C_n \twoheadrightarrow B_n \end{aligned}$$

Nach Proposition 4.8 gilt  $\operatorname{Rg} Z_n = \operatorname{Rg} B_{n+1} + \operatorname{Rg} H_n(C_*, d_*)$  und  $\operatorname{Rg} C_n = \operatorname{Rg} Z_n + \operatorname{Rg} B_n$ . Also gilt

$$\begin{aligned} \chi(C_*) &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \operatorname{Rg} C_i = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i (\operatorname{Rg} Z_i + \operatorname{Rg} B_i) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i (\operatorname{Rg} H_i(C_*, d_*) + \operatorname{Rg} B_{i+1} + \operatorname{Rg} B_i) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \operatorname{Rg} H_i(C_*, d_*) + \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \operatorname{Rg} B_{i+1} + \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \operatorname{Rg} B_i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \operatorname{Rg} H_i(C_*, d_*) \end{aligned} \quad \square$$

## 4.11 Korollar

Sei  $K$  ein endlicher, geordneter simplizialer Kettenkomplex. Dann gilt

$$\chi(K) = \sum_{i=1}^{\dim K} (-1)^i \operatorname{Rg} H_i(K; \mathbb{Z})$$

### Beweis

Wende den Satz 4.10 auf den simplizialen Kettenkomplex von  $K$  an. Da

$$\operatorname{Rg} C_n(K; \mathbb{Z}) = \operatorname{Rg} \mathbb{Z}[\Sigma_n] = \# \text{ } n\text{-Simplizes in } K$$

ist

$$\chi(K) = \chi(C_*(K; \mathbb{Z}), \partial_*) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \operatorname{Rg} H_i(C_*(K; \mathbb{Z}), \partial_*) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \operatorname{Rg} H_i(K; \mathbb{Z}) \quad \square$$

Eine vereinfachte Variante dieser Aussage kam in Aufgabe 2 von Blatt3 vor: Dort haben wir den Homologiemodul über einen Körper betrachtet. Deshalb konnte wir da dann die Dimensionsformeln anwenden, um die beiden Voraussetzungen für die Rechnung in 4.10 zu erhalten.

## 5 Singuläre Homologie

### 5.1 Definition

Sei  $X$  ein topologischer Raum. Sei  $S_n(X)$  die Menge aller stetigen Abbildungen  $\sigma: |\Delta^n| \rightarrow X$ . Elemente von  $S_n(X)$  heißen **singuläre Simplizes** in  $X$ . Sei  $R$  ein Ring. Der  **$n$ -te (singuläre) Kettenmodul** von  $X$  über  $R$  ist

$$C_n(X; R) := R[S_n(X)]$$

### 5.2 Definition

Für  $\sigma \in S_n(X)$  und  $j \in \{0, \dots, n\}$  sei  $\delta_j \sigma \in S_{n-1}(X)$  die Einschränkung von  $\sigma$  auf die  $j$ -te Seite von  $|\Delta^n|$ , also  $\delta_j(\sigma) = \sigma \circ \iota_{n,j}$ , wobei  $\iota_{n,j}: |\Delta^{n-1}| \rightarrow |\Delta^n|$  die Inklusion der  $j$ -ten Seite ist:

$$\iota_{n,j}(x_0, \dots, x_{n-1}) = (x_0, \dots, x_{j-1}, 0, x_j, \dots, x_{n-1})$$

### 5.3 Bemerkung

Es gilt  $\iota_{n,j} = |i_{n,j}|$  wobei  $i_{n,j}: \Delta^{n-1} \rightarrow \Delta^n$  gegeben ist durch

$$i_{n,j}(k) = \begin{cases} k, & \text{falls } k < j \\ k+1, & \text{falls } k \geq j \end{cases}$$

vergleiche Blatt 2,  
Aufgabe 2

### 5.4 Definition

Die  **$n$ -te singuläre Randabbildung**  $\partial_n: C_n(X; R) \rightarrow C_{n-1}(X; R)$  ist definiert durch

$$\partial_n(\sigma) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \cdot \delta_j(\sigma).$$

### 5.5 Proposition

$$\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$$

**Beweis (mit Lemma 5.6)**

$$\begin{aligned} \partial_{n-1} \circ \partial_n(\sigma) &= \partial_{n-1} \left( \sum_{j=0}^n (-1)^j \delta_j(\sigma) \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^n (-1)^{j+k} \delta_k \delta_j(\sigma) \\ &= \sum_{0 \leq k < j \leq n} (-1)^{k+j} \delta_k \delta_j(\sigma) + \sum_{0 \leq j \leq k \leq n-1} (-1)^{k+j} \delta_k \delta_j(\sigma) \\ &\stackrel{\text{Lemma 5.6}}{=} \sum_{0 \leq k < j \leq n} (-1)^{k+j} \delta_k \delta_j(\sigma) + \sum_{0 \leq j \leq k \leq n-1} (-1)^{k+j} \delta_j \delta_{k+1}(\sigma) \\ &= \sum_{0 \leq k < j \leq n} (-1)^{k+j} \delta_k \delta_j(\sigma) + \sum_{0 \leq j < k \leq n} (-1)^{k-1+j} \delta_j \delta_k(\sigma) \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

### 5.6 Lemma

Für  $0 \leq j \leq k \leq n-1$  und  $\sigma \in S_n(X)$  ist  $\delta_k \delta_j(\sigma) = \delta_j \delta_{k+1}(\sigma)$ .

### Beweis

Es ist

$$\begin{aligned}\delta_k(\delta_j(\sigma))(x_0, \dots, x_{n-2}) &= \delta_j(\sigma)(x_0, \dots, x_{k-1}, 0, x_k, \dots, x_{n-2}) \\ &= (x_0, \dots, x_{j-1}, 0, x_j, \dots, x_{k-1}, 0, x_k, \dots, x_{n-2})\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\delta_j\delta_{k+1}(\sigma)(x_0, \dots, x_{n-2}) &= \delta_{k+1}(\sigma)(x_0, \dots, x_{j-1}, 0, x_j, \dots, x_{n-2}) \\ &= (x_0, \dots, x_{j-1}, 0, x_j, \dots, x_{k-1}, 0, x_k, \dots, x_{n-2})\end{aligned}$$

□

### 5.7 Definition

Sei  $X$  ein topologischer Raum. Die Homologie des **singulären Kettenkomplex** über  $R$ ,  $(C_*(X; R), \partial_*)$ , heißt die **singuläre Homologie von  $X$**  mit Koeffizienten in  $R$ :

$$H_n(X; R) := H_n(C_*(X; R), \partial_*)$$

Für  $R = \mathbb{Z}$  schreiben wir kürzer  $C_*(X) := C_*(X; \mathbb{Z})$  und  $H_n(X) := H_n(X; \mathbb{Z})$ .

### 5.8 Definition

- Die Elemente von  $C_n(X; R)$  heißen **n-Ketten**.
- Die Elemente von  $\text{Im } \partial_{n+1} \subseteq C_n(X; R)$  heißen **n-Ränder**.
- Die Elemente von  $\ker \partial_n \subseteq C_n(X; R)$  heißen **n-Zykel**.

Jeder  $n$ -Zykel  $\sigma \in C_n(X; R)$  bestimmt eine **Homologieklass**  $[\sigma] := \sigma + \text{Im } \partial_{n+1} \in H_n(X; R)$ .

### 5.9 Beispiel

Ist  $X = \{x_0\}$  der Ein-Punkt-Raum, so ist

$$H_*(\{x_0\}; R) \cong \begin{cases} R, & \text{falls } * = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

### Beweis

Es gibt für jedes  $n$  genau eine Abbildung  $\sigma_n: |\Delta^n| \rightarrow \{x_0\}$  nämlich die konstant. Diese ist offensichtlich stetig. Also ist  $C_n(\{x_0\}; R) = R[\sigma_n]$ . Für alle  $j$  ist  $\delta_j\sigma_n = \sigma_{n-1}$ . Daher ist

$$\partial_n(\sigma_n) = \begin{cases} 0, & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \sigma_{n-1}, & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

Der singuläre Kettenkomplex von  $\{x_0\}$  hat also folgende Gestalt:

$$\begin{array}{ccccccc} C_0(\{x_0\}; R) & \xleftarrow{0} & C_1(\{x_0\}; R) & \xleftarrow{\cong} & C_2(\{x_0\}; R) & \xleftarrow{0} & C_3(\{x_0\}; R) & \xleftarrow{\cong} & \dots \\ \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ R & \xleftarrow{0} & R & \xleftarrow{\text{id}} & R & \xleftarrow{0} & R & \xleftarrow{\text{id}} & R \end{array}$$

Es folgt

$$H_n(\{x_0\}; R) \cong \begin{cases} R, & \text{falls } n = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

□



## 5.10 Proposition

- 1) Ist  $X \neq \emptyset$ , so ist  $H_0(X) \neq 0$ .
- 2) Ist  $X$  wegzusammenhängend, so gilt  $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ .<sup>3</sup>

Eine analoge Aussage für simpliziale Komplexe haben wir in Aufgabe 3 von Blatt 2 bewiesen

### Beweis

- 1) Sei die sogenannte **Augmentierung**  $\epsilon: C_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$  definiert durch

$$\epsilon \left( \sum_{\sigma \in S_0(X)} r_\sigma \cdot \sigma \right) := \sum_{\sigma} r_\sigma.$$

Dann ist  $\epsilon \circ \partial_1: C_1(X) \rightarrow \mathbb{Z}$  trivial, denn für  $\sigma \in S_1(X)$  ist  $\epsilon \circ \partial_1(\sigma) = \epsilon(\delta_0\sigma - \delta_1\sigma) = 0$ . Daher induziert  $\epsilon$  eine Abbildung  $\bar{\epsilon}: H_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ . Da  $X \neq \emptyset$  ist, gibt es einen singulären 0-Simplex  $\sigma: |\Delta^0| \rightarrow X$ . Für  $\sigma$  gilt  $\bar{\epsilon}([\sigma]) = 1$  und daher ist  $\bar{\epsilon}$  surjektiv und  $H_0(X) \neq 0$ .

- 2) Wir zeigen, dass  $\bar{\epsilon}: H_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$  ein Isomorphismus ist, falls  $X$  wegzusammenhängend ist. Dazu zeigen wir  $\ker \epsilon = \text{Im } \partial_1$ . Dazu definieren wir  $s: C_0(X) \rightarrow C_1(X)$  wie folgt: Sei  $\sigma_0$  ein fest gewählter singulärer 0-Simplex. Zu  $\sigma \in S_0(X)$  gibt es, da  $X$  wegzusammenhängend ist,  $s(\sigma) \in S_1(X)$  mit  $\delta_0 s(\sigma) = \sigma$ ,  $\delta_1 s(\sigma) = \sigma_0$ . Es gilt nun

$$\partial_1 \circ s(\sigma) = \sigma - \sigma_0 = (\text{id}_{C_0(X)} - i \circ \epsilon)(\sigma)$$

wobei  $i: \mathbb{Z} \rightarrow C_0(X)$ ,  $n \mapsto n \cdot \sigma_0$ . Ist nun  $v \in \ker \epsilon$ , so folgt

$$\partial_1 \circ s(v) = v - \underbrace{i \circ \epsilon(v)}_{=0} = v$$

also ist  $v \in \text{Im } \partial_1$  und es folgt die Behauptung. □

## 5.11 Bemerkung

Sei  $K = (V, \Sigma)$  ein geordneter simplizialer Komplex. Sei  $\sigma = \{v_0, \dots, v_n\} \in \Sigma_n$  ein  $n$ -Simplex von  $K$  mit  $v_0 < v_1 < \dots < v_n$ . Wir ordnen  $\sigma$  den singulären  $n$ -Simplex  $f_\sigma: |\Delta^n| \rightarrow |K|$  zu, wobei

$$f_\sigma \left( \sum_{i=0}^n t_i \cdot e_i \right) = \sum_{i=0}^n t_i \cdot v_i.$$

Nun erhalten wir eine Abbildung

$$C_*(K; R) \rightarrow C_*(|K|, R) \quad , \quad \sum_{\sigma \in \Sigma_n} r_\sigma \cdot \sigma \mapsto \sum_{\sigma \in \Sigma_n} r_\sigma \cdot f_\sigma.$$

Diese Abbildung induziert(!) eine weitere Abbildung  $H_*(K; R) \xrightarrow{\cong} H_*(|K|; R)$  von der wir später zeigen werden, dass sie ein Isomorphismus ist.

<sup>3</sup> Tatsächlich gilt auch die Umkehrung, wie in Aufgabe 4 von Blatt 3 gezeigt.

## 6 Funktorialität

### 6.1 Definition

Seien  $(C_*, d_*)$  und  $(C'_*, d'_*)$  zwei  $R$ -Kettenkomplexe. Eine **R-Kettenabbildung**  $f_*: (C_*, d_*) \rightarrow (C'_*, d'_*)$  ist eine Folge von  $R$ -linearen Abbildungen  $f_n: C_n \rightarrow C'_n$ , sodass

$$d'_n \circ f_n = f_{n-1} \circ d_n$$

für alle  $n \geq 1$  gilt. Also kommutiert folgendes Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} C_0 & \xleftarrow{d_1} & C_1 & \xleftarrow{d_2} & C_2 & \xleftarrow{d_3} & C_3 \xleftarrow{\quad} \dots \\ \downarrow f_0 & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 \\ C'_0 & \xleftarrow{d'_1} & C'_1 & \xleftarrow{d'_2} & C'_2 & \xleftarrow{d'_3} & C'_3 \xleftarrow{\quad} \dots \end{array}$$

### 6.2 Bemerkung

Ist  $f_*: (C_*, d_*) \rightarrow (C'_*, d'_*)$  eine Kettenabbildung, so erhalten wir eine induzierte Abbildung auf Homologie  $H_n(f_*): H_n(C_*, d_*) \rightarrow H_n(C'_*, d'_*)$  durch

$$H_n(f_*)([v]) := [f_n(v)]$$

für  $v \in \ker d_n$ . Dies ist wohldefiniert, denn:

- $d'_n(f_n(v)) = f_{n-1}(d_n(v)) = 0$ , also  $f_n(v) \in \ker d'_n$  für  $v \in \ker d_n$ .
- Ist  $[v] = [w]$ , mit  $v, w \in \ker d_n$ , so gibt es  $x \in C_{n+1}$  mit  $d_{n+1}(x) = v - w$ . Dann ist

$$d'_{n+1}(f_{n+1}(x)) = f_n(d_{n+1}(x)) = f_n(v) - f_n(w)$$

$$\text{also } [f_n(v)] = [f_n(w)] \in H_n(C'_*, d'_*).$$

### 6.3 Bemerkung

a)  $R$ -Kettenkomplexe mit  $R$ -Kettenabbildungen bilden die Kategorie  $R\text{-KETTEN}$ .

b) Homologie definiert nun einen Funktor:  $H_n: R\text{-KETTEN} \rightarrow R\text{-MOD}$ .

Es gilt  $H_n(\text{id}_{(C_*, d_*)}) = \text{id}_{H_n(C_*, d_*)}$  und  $H_n(f \circ g) = H_n(f) \circ H_n(g)$ , da

$$H_n(f \circ g)([v]) = [f_n \circ g_n(v)] = [f_n(g_n(v))] = H_n(f)([g_n(v)]) = H_n(f)(H_n(g)(v))$$

c) Definiert man die Kategorie der **graduerten**  $R$ -Moduln als die Kategorie, deren Objekte Folgen  $(V_n)_n$  von  $\mathbb{R}$ -Moduln sind und deren Morphismen Folgen von  $R$ -linearen Abbildungen  $(f_n)_n$  sind, so kann man die  $H_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  zu einem Funktor

$$H_*: R\text{-KETTEN} \longrightarrow \text{GR-}R\text{-MOD} \quad , \quad (C_*, d_*) \longmapsto (H_n(C_*, d_*))_n$$

zusammensetzen.

### 6.4 Definition

Sei  $f: X \rightarrow Y$  stetig. Wir definieren  $C_n(f; R): C_n(X; R) \rightarrow C_n(Y; R)$  durch

$$C_n(f; R) \left( \sum_{\sigma \in S_n(X)} r_\sigma \cdot \sigma \right) := \sum_{\sigma \in S_n(X)} r_\sigma \cdot (f \circ \sigma)$$

Dies ist wohldefiniert, denn für  $\sigma \in S_n(X)$  ist  $f \circ \sigma \in S_n(Y)$ .

## 6.5 Proposition

Mit dieser Definition von  $C_*(f; R)$  wird der singuläre Kettenkomplex über  $R$  zu einem Funktor

$$C_*(-; R): \text{TOP} \rightarrow R\text{-KETTEN}$$

### Beweis

(i)  $C_*(f; R)$  ist eine  $R$ -Kettenabbildung: Es gilt

$$\begin{aligned} C_{n-1}(f; R) \circ \partial_n(\sigma) &= C_{n-1}(f; R) \left( \sum_{l=0}^n (-1)^l \cdot \sigma \circ \iota_{n,l} \right) = \sum_{l=0}^n (-1)^l \cdot (f \circ \sigma) \circ \iota_{n,l} \\ &= \partial_n(f \circ \sigma) = \partial(C_n(f; R)(\sigma)). \end{aligned}$$

(ii) Zu zeigen:  $C_*(f \circ g; R) = C_*(f; R) \circ C_*(g; R)$ . Es gilt

$$C_n(f \circ g; R)(\sigma) = f \circ (g \circ \sigma) = C_n(f; R)(g \circ \sigma) = C_n(f; R)(C_n(g; R)(\sigma)).$$

(iii) Zu zeigen:  $C_*(\text{id}_X; R) = \text{id}_{C_*(X; R)}$ . Es gilt

$$C_n(\text{id}_X; R)(\sigma) = \text{id}_X \circ \sigma = \sigma$$

□

## 6.6 Korollar

Mit  $H_n(f; R) := H_n(C_*(f; R))$  wird  $H_n(-; R)$  zu einem Funktor:  $H_n(-; R): \text{TOP} \rightarrow R\text{-MOD}$ .

### Beweis

$H_n(-; R)$  ist die Komposition des Funktors  $C_*(-; R): \text{TOP} \rightarrow R\text{-KETTEN}$  aus 6.5 mit dem Funktor  $H_n: R\text{-KETTEN} \rightarrow R\text{-MOD}$  aus 6.3. □

## 6.7 Bemerkung

- Oft schreiben wir kurz  $f_* = H_n(f; R)$ .

- Für  $\left[ \sum_{\sigma \in S_n(X)} r_\sigma \sigma \right] \in H_n(X; R)$  ist  $f_* \left( \left[ \sum_{\sigma \in S_n(X)} r_\sigma \sigma \right] \right) = \left[ \sum_{\sigma \in S_n(X)} r_\sigma f \circ \sigma \right] \in H_n(Y; R)$

## 6.8 Definition

Seien  $X_i, i \in I$  topologische Räume. Mit

$$X := \coprod_{i \in I} X_i$$

bezeichnen wir die **Summe** (oder auch das **Koprodukt**) der  $X_i$ . Als Menge ist  $X$  die disjunkte Vereinigung der  $X_i$ .  $U \subseteq X$  ist offen genau dann, wenn  $X_i \cap U \subseteq X_i$  offen ist für jedes  $i \in I$ . Für jedes  $i_0$  erhalten wir eine stetige Inklusion  $j_{i_0}: X_{i_0} \rightarrow \coprod_i X_i$ .

### Bemerkung

Für jedes  $i_0$  ist  $X_{i_0} \subseteq \coprod_i X_i$  offen und abgeschlossen.

## 6.9 Definition

Seien  $V_i, i \in I$   $R$ -Moduln. Mit

$$V := \bigoplus_{i \in I} V_i$$

bezeichnen wir die **Summe** (oder auch das **Koprodukt**) der  $V_i$ . Elemente von  $V$  sind  $I$ -Folgen  $(v_i)_{i \in I}$  mit  $v_i \in V_i$  und  $v_i = 0$  für alle bis auf endlich viele  $i$ . Die  $R$ -Modulstruktur ist erklärt durch:

$$(v_i)_{i \in I} + (w_i)_{i \in I} := (v_i + w_i)_{i \in I} \quad , \quad r \cdot (v_i)_{i \in I} := (r \cdot v_i)_{i \in I}$$

Für jedes  $i_0 \in I$  erhalten wir eine  $R$ -lineare Abbildung  $j_{i_0}: V_{i_0} \rightarrow V$  mit

$$(j_{i_0}(v))_i = \begin{cases} v, & \text{falls } i = i_0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

### Bemerkung

Seien  $V_i$  für  $i \in I$   $R$ -Moduln. Sei  $W$  ein weiterer  $R$ -Modul. Dann gibt es zu jeder Folge  $f_i: V_i \rightarrow W$  von  $R$ -linearen Abbildungen eine  $R$ -lineare Abbildung  $\bigoplus_{i \in I} f_i: \bigoplus_{i \in I} V_i \rightarrow W$  mit

$$(\bigoplus_{i \in I} f_i)((v_i)_{i \in I}) = \sum_{i \in I} f_i(v_i)$$

Ist umgekehrt  $f: \bigoplus_{i \in I} V_i \rightarrow W$  eine  $R$ -lineare Abbildung, so ist  $f_i := f \circ j_i$  eine Folge von  $R$ -linearen Abbildungen mit  $f = \bigoplus_{i \in I} f_i$ .

## 6.10 Satz

Sei  $X = \coprod_{i \in I} X_i$ . Dann induzieren die Inklusionen  $j_i: X_i \hookrightarrow X$  einen Isomorphismus

$$\bigoplus_{i \in I} H_n(X_i; R) \xrightarrow{\bigoplus_{i \in I} (j_i)_*} H_n(X; R)$$

### Beweis

Da die  $X_i \subseteq X$  offen und abgeschlossen sind und  $|\Delta^n|$  zusammenhängend ist (sogar wegzusammenhängend), gibt es für jedes  $\sigma: |\Delta^n| \rightarrow X$  ein eindeutiges  $i$  mit  $\text{Im } \sigma \subseteq X_i$ . Es gilt also  $S_n(X) = \bigcup S_n(X_i)$ . Daher induzieren die  $j_i$  für jedes  $n$  einen Isomorphismus

$$\bigoplus_{i \in I} C_n(j_i; R): \bigoplus_{i \in I} C_n(X_i; R) \xrightarrow{\cong} C_n(X; R)$$

Da diese Isomorphismen mit den Randabbildungen vertauschen, erhalten wir einen Isomorphismus von  $R$ -Kettenkomplexen

$$\varphi := \bigoplus_{i \in I} C_*(j_i; R): \bigoplus_{i \in I} C_*(X_i; R) \xrightarrow{\cong} C_*(X; R)$$

Da  $\bigoplus_i H_n(C_*(X_i; R)) \cong H_n(\bigoplus_i C_*(X_i; R))$  induzieren dann auch die  $(j_i)_*$  einen Isomorphismus

$$\bigoplus_{i \in I} (j_i)_*: \bigoplus_{i \in I} H_n(X_i; R) \xrightarrow{\cong} H_n(X; R)$$

□

## 7 Homotopieinvarianz

### 7.1 Bemerkung

Sei  $f: X \rightarrow Y$  ein Homöomorphismus. Dann ist  $f_*: H_n(X; R) \rightarrow H_n(Y; R)$  ein Isomorphismus.

#### Beweis

Da Homologie ein Funktor ist, gilt

$$\begin{aligned} f_* \circ (f^{-1})_* &= (f \circ f^{-1})_* = (\text{id}_Y)_* = \text{id}_{H_n(Y; R)} & \text{und} \\ (f^{-1})_* \circ f_* &= (f^{-1} \circ f)_* = (\text{id}_X)_* = \text{id}_{H_n(X; R)} \end{aligned}$$

Also ist  $(f_*)^{-1} = (f^{-1})_*$ . Insbesondere ist  $f_*$  ein Isomorphismus. □

### 7.2 Definition

Eine stetige Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  heißt eine **Homotopieäquivalenz**, falls es eine stetige Abbildung  $g: Y \rightarrow X$  gibt, so dass  $g \circ f$  homotop zu  $\text{id}_X$  ist und  $f \circ g$  homotop zu  $\text{id}_Y$  ist.  $g$  heißt dann eine **Homotopieinverse** zu  $f$ .

#### Bemerkung

- (i)  $f$  ist genau dann eine Homotopieäquivalenz, wenn  $[f]$  in  $\text{HTOP}$  invertierbar ist. In  $\text{HTOP}$  ist dann  $[f]^{-1} = [g]$ .
- (ii) Die Homotopieinverse ist eindeutig bis auf Homotopie.

### 7.3 Satz

Seien  $f, g: X \rightarrow Y$  stetige Abbildungen. Sind  $f$  und  $g$  homotop, so gilt für die induzierten Abbildungen  $H_n(f; R) = H_n(g; R)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

#### Beweis

Siehe 7.8, sowie 7.13 □

### 7.4 Korollar

Ist  $f: X \rightarrow Y$  eine Homotopieäquivalenz, so ist  $f_*: H_n(X; R) \rightarrow H_n(Y; R)$  ein Isomorphismus.

#### Beweis

Sei  $g: Y \rightarrow X$  ein Homotopieinverses zu  $f$ . Es folgt

$$\begin{aligned} f_* \circ g_* &\stackrel{\text{Funktor}}{=} (f \circ g)_* \stackrel{\text{Homotopieinvarianz}}{=} (\text{id}_Y)_* \stackrel{\text{Funktor}}{=} \text{id}_{H_n(Y; R)} \\ g_* \circ f_* &\stackrel{\text{Funktor}}{=} (g \circ f)_* \stackrel{\text{Homotopieinvarianz}}{=} (\text{id}_X)_* \stackrel{\text{Funktor}}{=} \text{id}_{H_n(X; R)} \end{aligned} \quad \square$$

### 7.5 Korollar

Ist  $X$  **kontrahierbar**, d.h. es gibt eine Homotopie  $H: X \times [0, 1] \rightarrow X$  mit  $H_0 = \text{id}_X$  und  $H_1$  konstant, so gilt

$$H_n(X; R) \cong \begin{cases} R, & \text{falls } n = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

### Beweis

Sei  $\{x_0\} = \text{Im } H_1$ . Dann ist die Inklusion  $\{x_0\} \rightarrow X$  eine Homotopieäquivalenz. Also gilt nach 7.4

$$H_n(X; R) \cong H_n(\{x_0\}; R) \stackrel{5.9}{=} \begin{cases} R, & \text{falls } n = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad \square$$

### Beispiel

$$H_n(\mathbb{R}^k; R) \cong \begin{cases} R, & \text{falls } n = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad H_n(D^k; R) \cong \begin{cases} R, & \text{falls } n = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

## 7.6 Definition

Seien  $(C_*, d_*)$  und  $(C'_*, d'_*)$   $R$ -Kettenkomplexe. Seien  $f_*, g_*: (C_*, d_*) \rightarrow (C'_*, d'_*)$   $R$ -Kettenabbildungen. Eine **Kettenhomotopie** von  $f_*$  nach  $g_*$  ist eine Folge von  $R$ -linearen Abbildungen  $h_n: C_n \rightarrow C'_{n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , sodass für alle  $n$  gilt:

$$d'_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ d_n = f_n - g_n$$

In diesem Fall heißen  $f_*$  und  $g_*$  **kettenhomotop**.

$$\begin{array}{ccccc} C_{n-1} & \xleftarrow{d_n} & C_n & & \\ & \searrow h_{n-1} & \downarrow g_n & \downarrow f_n & \searrow h_n \\ & & C'_n & \xleftarrow{d'_{n+1}} & C'_{n+1} \end{array}$$

## 7.7 Proposition

Seien  $f_*, g_*: (C_*, d_*) \rightarrow (C'_*, d'_*)$  Kettenabbildungen. Sind  $f_*$  und  $g_*$  kettenhomotop, so gilt für alle  $n$

$$H_n(f_*) = H_n(g_*)$$

### Beweis

Sei  $x \in H_n(C_*, d_*)$ . Also  $x = [v]$  mit  $v \in \ker d_n: C_n \rightarrow C_{n-1}$ . Dann gilt, da  $v \in \ker d_n$

$$\begin{aligned} H_n(f_*)(x) &= H_n(f_*)([v]) = [f_n(v)] = \left[ g_n(v) + \underbrace{d'_{n+1} \circ h_n(v)}_{\in \text{Im } d'_{n+1}} + \underbrace{h_{n-1} \circ d_n(v)}_{=0} \right] \\ &= [g_n(v)] = H_n(g_*)([v]) = H_n(g_*)(x) \end{aligned} \quad \square$$

## 7.8 Lemma

Die Homotopieinvarianz von  $H_n(-; R)$ , also Satz 7.3, folgt aus folgenden Spezialfall:

$$\text{Seien } i_0, i_1: X \hookrightarrow X \times [0, 1] \text{ Inklusionen mit } i_0(x) = (x, 0), i_1(x) = (x, 1). \implies (i_0)_* = (i_1)_* \quad [\#]$$

### Beweis

Sei  $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$  eine Homotopie zwischen  $f, g: X \rightarrow Y$ , also  $f = H \circ i_0$  und  $g = H \circ i_1$ . Dann folgt mittels Funktorialität

$$f_* = (H \circ i_0)_* = H_* \circ (i_0)_* = H_* \circ (i_1)_* = (H \circ i_1)_* = g_* \quad \square$$

## 7.9 Bemerkung

Zum Beweis von  $[\#]$  werden wir eine explizite Kettenhomotopie  $h_*$  zwischen  $C_*(i_0; R)$  und  $C_*(i_1; R)$  konstruieren. Wir brauchen also  $h_n: C_n(X; R) \rightarrow C_{n+1}(X \times [0, 1]; R)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit

$$\partial_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ \partial_n = C_n(i_0; R) - C_n(i_1; R). \quad [\#\#]$$

Kettenhomotopie  
definiert eine Äquiva-  
lenzrelation wie in Auf-  
gabe 2 von Blatt 5 ge-  
zeigt.

**"Ansatz"**

Für  $\sigma: |\Delta^n| \rightarrow X$  setze  $h_n(\sigma) = \sigma \times \text{id}_{[0,1]}: |\Delta^n| \times [0,1] \rightarrow X \times [0,1]$ . Dann ist " $h_{n-1}(\partial_n \sigma) = \partial_n \sigma \times \text{id}_{[0,1]}$ " und

$$\partial_{n+1}(h_n \sigma) = \partial_{n+1}(\sigma \times \text{id}_{[0,1]}) = (\sigma \times \text{id}) \Big|_{\partial(|\Delta^n| \times [0,1])} = \partial_n \sigma \times \text{id}_{[0,1]} + i_0 \sigma + i_1 \sigma$$

da  $\partial(|\Delta^n| \times [0,1]) = \partial|\Delta^n| \times [0,1] \dot{\cup} |\Delta^n| \times \{0,1\}$ .

Um daraus Sinn zu machen, zerlegen wir  $|\Delta^n| \times [0,1]$  in eine Vereinigung von  $(n+1)$ -Simplizes.  $\Delta^n \times [0,1]$  hat die folgende Form für  $n \in \{0,1,2\}$ :



Abbildung 1:  $\Delta^n \times [0,1]$  für  $n = 0, 1, 2$

Die Zerlegung in 3-Simplizes ist für  $\Delta^2 \times [0,1]$  gegeben durch

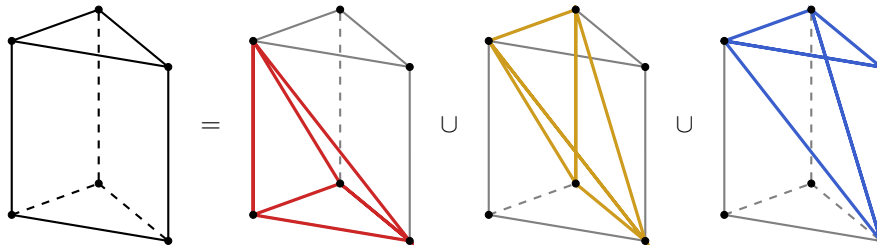


Abbildung 2: Zerlegung von  $\Delta^2 \times [0,1]$  in 3-Simplizes

Dieses Vorgehen verallgemeinern wir jetzt für beliebiges  $n \in \mathbb{N}$ :

**7.10 Definition**

Für  $j = 0, \dots, n$  seien  $k_{n,j}: |\Delta^{n+1}| \rightarrow |\Delta^n| \times [0,1]$  und  $\iota_{n,j}: |\Delta^{n-1}| \rightarrow |\Delta^n|$  die eindeutigen affin linearen Abbildungen, für die gilt:

$$\begin{aligned} k_{n,j}(e_0) &= (e_0, 0) \\ k_{n,j}(e_1) &= (e_1, 0) \dots \\ k_{n,j}(e_j) &= (e_j, 0) \\ k_{n,j}(e_{j+1}) &= (e_j, 1) \dots \\ k_{n,j}(e_{n+1}) &= (e_n, 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iota_{n,j}(e_0) &= e_0 \\ \iota_{n,j}(e_1) &= e_1 \dots \\ \iota_{n,j}(e_{j-1}) &= e_{j-1} \\ \iota_{n,j}(e_j) &= e_{j+1} \dots \\ \iota_{n,j}(e_{n-1}) &= e_n \end{aligned}$$

$e_1, \dots, e_n$  sind wieder die Einheitsvektoren von  $\mathbb{R}^n$

## 7.11 Lemma

Es gelten folgende fünf Gleichungen für die Abbildungen  $k_{n,j}$  und  $\iota_{n,j}$ :

- (i) Für  $0 \leq l < j \leq n$  gilt  $k_{n,j} \circ \iota_{n+1,l} = (\iota_{n,l} \times \text{id}_{[0,1]}) \circ k_{n-1,j-1}$
- (ii) Für  $1 \leq j+1 < l \leq n+1$  gilt  $k_{n,j} \circ \iota_{n+1,l} = (\iota_{n,l-1} \times \text{id}_{[0,1]}) \circ k_{n-1,j}$
- (iii) Für  $1 \leq j+1 = l \leq n$  gilt  $k_{n,j} \circ \iota_{n+1,l} = k_{n,j+1} \circ \iota_{n+1,l}$
- (iv) Für  $l = 0, j = 0$  ist  $k_{n,j} \circ \iota_{n+1,l} = i_1 : \Delta^n \rightarrow \Delta^n \times [0, 1]$
- (v) Für  $l = n, j = n+1$  ist  $k_{n,j} \circ \iota_{n+1,l} = i_0 : \Delta^n \rightarrow \Delta^n \times [0, 1]$

### Beweis

Wir zeigen hier nur exemplarisch die erste Gleichung: Die linke Seite der Gleichung entspricht



und die rechte Seite entspricht



Also folgt insgesamt die Gleichheit. Die anderen Gleichungen folgen genauso.  $\square$



## 7.12 Beweis von [##]

Sei  $h_n: C_n(X; R) \rightarrow C_{n+1}(X \times [0, 1]; R)$  definiert durch

$$h_n(\sigma) := \sum_{j=0}^n (-1)^j \cdot (\sigma \times \text{id}) \circ k_{n,j}$$

$h_*$  ist die gesuchte Kettenhomotopie, da für  $n \in \mathbb{N}$  unter Anwendung der Gleichungen aus 7.12 gilt:

$$\begin{aligned}
 \partial_{n+1}(h_n(\sigma)) &= \partial_{n+1} \left( \sum_{j=0}^n (-1)^j \cdot (\sigma \times \text{id}) \circ k_{n,j} \right) \\
 &= \sum_{l=0}^{n+1} \sum_{j=0}^n (-1)^{j+l} \cdot (\sigma \times \text{id}) \circ k_{n,j} \circ \iota_{n+1,l} && \text{(nach Definition 5.2)} \\
 &= \sum_{0 \leq l < j \leq n} (-1)^{j+l} ((\sigma \circ \iota_{n,l}) \times \text{id}) \circ k_{n-1,j-1} + \sum_{1 \leq j+1 < l \leq n+1} (-1)^{j+l} ((\sigma \circ \iota_{n,l-1}) \times \text{id}) \circ k_{n-1,j} \\
 &\quad + \sum_{1 \leq j+1=l \leq n} (-1)^{j+l} (\sigma \times \text{id}) \circ k_{n,j+1} \circ \iota_{n+1,l} + \sum_{1 \leq j=l \leq n} (-1)^{j+l} (\sigma \times \text{id}) \circ k_{n,j} \circ \iota_{n+1,l} \\
 &\quad + \sum_{0=l=j} (-1)^{j+l} (\sigma \times \text{id}) \circ i_1 + \sum_{n+1=j+1=l} (-1)^{j+l} (\sigma \times \text{id}) \circ i_0 \\
 &= \sum_{0 \leq l \leq j \leq n-1} (-1)^{j+l+1} ((\sigma \circ \iota_{n,l}) \times \text{id}) \circ k_{n-1,j} + \sum_{1 \leq j+1 \leq l \leq n} (-1)^{j+l+1} ((\sigma \circ \iota_{n,l}) \times \text{id}) \circ k_{n-1,j} \\
 &\quad + \underbrace{\sum_{1 \leq j=l \leq n} (-1)^{j+l-1} (\sigma \times \text{id}) \circ k_{n,j} \circ \iota_{n+1,l} + \sum_{1 \leq j=l \leq n} (-1)^{j+l} (\sigma \times \text{id}) \circ k_{n,j} \circ \iota_{n+1,l}}_{=0} \\
 &\quad + \sum_{0=l=j} (-1)^{j+l} (\sigma \times \text{id}) \circ i_1 + \sum_{n+1=j+1=l} (-1)^{j+l} (\sigma \times \text{id}) \circ i_0 \\
 &= - \sum_{\substack{0 \leq l \leq n \\ 0 \leq j \leq n-1}} (-1)^{j+l} ((\sigma \circ \iota_{n,l}) \times \text{id}) \circ k_{n-1,j} + (\sigma \times \text{id}) \circ i_1 - (\sigma \times \text{id}) \circ i_0 \\
 &= - \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \sum_{l=0}^n (-1)^l ((\sigma \circ \iota_{n,l}) \times \text{id}) \circ k_{n-1,j} + \underbrace{(\sigma \times \text{id}) \circ i_1}_{=i_1 \circ \sigma} - \underbrace{(\sigma \times \text{id}) \circ i_0}_{=i_0 \circ \sigma} \\
 &= -h_{n-1}(\partial_n \sigma) + C_n(i_1; R)(\sigma) - C_n(i_0; R)(\sigma) \quad \square
 \end{aligned}$$

## 7.13 Bemerkung

Ist  $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$  eine Homotopie zwischen  $f$  und  $g$ , so erhalten wir eine Kettenhomotopie  $k$  zwischen  $C_*(f; R)$  und  $C_*(g; R)$  durch

$$k_n(\sigma) := C_{n+1}(H; R) \circ h_n = \sum_{j=0}^n (-1)^j H \circ (\sigma \times \text{id}) \circ k_{n,j}$$

## 8 Homologie von Paaren

### 8.1 Definition

Sei  $A$  ein Teilraum von  $X$ , dann heißt  $(X, A)$  ein **Paar von topologischen Räumen**. Eine Abbildung von Paaren  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  ist eine stetige Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  mit  $f(A) \subseteq B$ . Manchmal schreiben wir  $(f, f|_A): (X, A) \rightarrow (Y, B)$ .

Die Kategorie von Paaren von topologischen Räumen bezeichnen wir mit  $\text{Top}^2$ .

### 8.2 Definition

Sei  $(X, A)$  ein Paar. Dann definieren wir den **singulären Kettenkomplex** von  $(X, A)$  über  $R$  durch

$$\begin{aligned} C_n(X, A; R) &:= C_n(X; R) / C_n(A; R) \\ \partial_n(\sigma + C_n(A; R)) &:= \partial_n \sigma + C_{n-1}(A; R) \end{aligned}$$

Dies ist wohldefiniert, da  $\partial_n(C_n(A; R)) \subseteq C_{n-1}(A; R)$ . Weiter heißt

$$H_n(X, A; R) := H_n(C_*(X, A; R), \partial_*)$$

der **n-te singuläre Homologiemodul** von  $(X, A)$  mit Koeffizienten in  $R$ .

### 8.3 Bemerkung

Homologie von Paaren ist auch wieder homotopieinvariant, wie in Aufgabe 1 von Blatt 7 gezeigt.

Der singuläre Kettenkomplex von Paaren definiert einen Funktor  $\text{Top}^2 \rightarrow R\text{-KETTEN}$ . Durch Komposition mit Homologie (als Funktor  $R\text{-KETTEN} \rightarrow R\text{-MOD}$ ) erhalten wir einen Funktor

$$H_n(-, -; R): \text{Top}^2 \longrightarrow R\text{-MOD}$$

### 8.4 Bemerkung

Via  $X \mapsto (X, \emptyset)$  können wir jeden Raum auch als Paar auffassen. Es gilt  $H_n(X, \emptyset; R) = H_n(X; R)$ .

### 8.5 Frage

Können wir  $H_n(X, A; R)$  durch  $H_n(X; R)$  und  $H_n(A; R)$  ausdrücken?

**Ansatz 1:**

$$H_n(X, A; R) \cong H_n(X; R) / H_n(A; R)$$

▲ Problem:  $H_n(A; R)$  ist kein Untermodul von  $H_n(X; R)$ .

**Ansatz 2:** Ist  $H_n(X; R) \rightarrow H_n(X, A; R)$  surjektiv?

Sei  $x \in H_n(X, A; R)$ . Dann gibt es  $\sigma + C_n(A; R) \in C_n(X, A; R)$  mit  $\partial_n(\sigma + C_n(A; R)) = 0$  und  $x = [\sigma]$ . Es ist  $\sigma \in C_n(X; R)$ , aber wir wissen nur  $\partial_n \sigma \in C_{n-1}(A; R)$ , nicht  $\partial_n(\sigma) = 0$ . ☺

### 8.6 Beispiel

In  $C_n(|\Delta^n|, |\partial\Delta^n|; R)$  gilt für  $\sigma := \text{id}: |\Delta^n| \rightarrow |\Delta^n|$ , dass  $\partial_n([\sigma]) = 0$  ist, da  $\partial_n \sigma \in C_{n-1}(|\partial\Delta^n|; R)$ . Wir werden später sehen, dass  $[\sigma]$  den Homologiemodul

$$H_n(|\Delta^n|, |\partial\Delta^n|; R) \cong R$$

erzeugt.

## 8.7 Definition

Eine Folge von  $R$ -linearen Abbildungen zwischen  $R$ -Moduln  $M_i$

$$\cdots \longrightarrow M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_{n-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_0$$

heißt **lange exakte Folge**, wenn sie exakt an jeder Stelle  $M_i$  ist, d.h. für alle  $i$  gilt  $\text{Im } f_i = \ker f_{i-1}$ .

## 8.8 Satz

Es gibt eine natürliche Transformation  $\partial_n$  von  $(X, A) \mapsto H_n(X, A; R)$  nach  $(X, A) \mapsto H_{n-1}(A; R)$ , sodass für jedes Paar  $(X, A)$

$$\begin{aligned} \cdots &\xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(A; R) \xrightarrow{i_*} H_n(X; R) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A; R) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A; R) \longrightarrow \cdots \\ &\cdots \xrightarrow{\partial_1} H_0(A; R) \longrightarrow H_0(X; R) \longrightarrow H_0(X, A; R) \longrightarrow 0 \end{aligned} \quad [*]$$

eine lange exakte Folge ist. Dabei sind  $i: A \hookrightarrow X$  und  $j: (X, \emptyset) \hookrightarrow (X, A)$  die Inklusionen. Das bedeutet:

Für jedes Paar  $(X, A)$  haben wir eine  $R$ -lineare Abbildung  $\partial_n: H_n(X, A; R) \rightarrow H_{n-1}(A; R)$ , sodass für jede Abbildung  $(f, f|_A): (X, A) \rightarrow (Y, B)$  von Paaren folgendes Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} H_n(X, A; R) & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(A; R) \\ \downarrow (f, f|_A)_* & & \downarrow (f|_A)_* \\ H_n(Y, B; R) & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(B; R) \end{array}$$

### Beweis

siehe 8.13.

## 8.9 Korollar

- (1) Ist die Inklusion  $i: A \rightarrow X$  eine Homotopieäquivalenz, so ist  $H_n(X, A; R) = 0$  für alle  $n$ .
- (2) Sei  $A$  kontraktibel. Dann gilt für alle  $n \geq 1$ .  $H_n(X; R) \cong H_n(X, A; R)$

### Beweis

- (1) Betrachte den folgenden Ausschnitt aus der langen exakten Folge:

$$H_n(A; R) \xrightarrow{i_*} H_n(X; R) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A; R) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A; R) \xrightarrow{i_*} H_n(X; R)$$

Nach 7.4 ist  $i_*: H_n(A; R) \rightarrow H_n(X; R)$  ein Isomorphismus. Wegen der Exaktheit gilt  $\ker j_* = \text{Im } i_* = H_n(X; R)$ , also folgt  $j_* = 0$ . Da  $\text{Im } \partial_n = \ker i_* = 0$ , folgt  $\partial_n = 0$ . Nun ist

$$H_n(X, A; R) = \ker \partial_n = \text{Im } j_* = 0$$

- (2) Folgt leicht aus 7.5 und der Exaktheit der Parsequenz [\*]. Für  $n = 1$  brauchen wir außerdem, dass  $\partial_1$  für  $A$  wegzusammenhängend trivial ist. Dies folgt aus Aufgabe 1a) von Blatt 6, denn dort wurde gezeigt, dass  $i_*: H_0(A) \rightarrow H_0(X)$  injektiv ist.  $\square$

## 8.10 Definition

Seien

$$(C_*, d_*) \xrightarrow{i_*} (C'_*, d'_*) \xrightarrow{p_*} (C''_*, d''_*) \quad [\#]$$

$R$ -Kettenabbildungen. Ist für jedes  $n$  die Folge  $C_n \xrightarrow{i_n} C'_n \xrightarrow{p_n} C''_n$  kurz exakt, so heißt  $[\#]$  eine **kurze exakte Folge von Kettenkomplexen**.

## 8.11 Beispiel

Für jedes Paar  $(X, A)$  ist

$$(C_*(A; R), \partial_*) \xrightarrow{i_*} (C_*(X; R), \partial_*) \xrightarrow{j_*} (C_*(X, A; R), \partial_*)$$

eine kurze exakte Folge von  $R$ -Kettenkomplexen.

## 8.12 Schlangenlemma

Sei

$$(C_*, d_*) \xrightarrow{i_*} (C'_*, d'_*) \xrightarrow{p_*} (C''_*, d''_*)$$

eine kurze exakte Folge von  $R$ -Kettenkomplexen.

- a) Für jedes  $n$  gibt es eine eindeutige wohldefinierte  $R$ -lineare Abbildung  $\partial_n : H_n(C''_*, d''_*) \rightarrow H_{n-1}(C_*, d_*)$  mit: Für  $v' \in C'_n$  mit  $d''_n \circ p_n(v') = 0$  ist

$$\partial_n \left( \underbrace{[p_n(v')]}_{\in H_n(C''_*, d''_*)} \right) = [v] \in H_{n-1}(C_*, d_*)$$

wobei  $v \in C_{n-1}$  bestimmt ist durch  $i_{n-1}(v) = d'_n(v')$ .

b)

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & H_n(C_*, d_*) & \xrightarrow{i_*} & H_n(C'_*, d'_*) & \xrightarrow{p_*} & H_n(C''_*, d''_*) \\ & & & & & & \downarrow \partial_n \\ & & H_{n-1}(C_*, d_*) & \xrightarrow{i_*} & H_{n-1}(C'_*, d'_*) & \xrightarrow{p_*} & \dots \\ & & & & & & \downarrow \partial_1 \\ & & H_0(C_*, d_*) & \xrightarrow{i_*} & H_0(C'_*, d'_*) & \xrightarrow{p_*} & H_0(C''_*, d''_*) \longrightarrow 0 \end{array}$$

ist eine lange exakte Folge.

**Beweis**

$$\begin{array}{ccccc} C_{n+1} & \xrightarrow{i_{n+1}} & C'_{n+1} & \xrightarrow{p_{n+1}} & C''_{n+1} \\ \downarrow d_{n+1} & & \downarrow d'_{n+1} & & \downarrow d''_{n+1} \\ C_n & \xrightarrow{i_n} & C'_n & \xrightarrow{p_n} & C''_n \\ \downarrow d_n & & \downarrow d'_n & & \downarrow d''_n \\ C_{n-1} & \xrightarrow{i_{n-1}} & C'_{n-1} & \xrightarrow{p_{n-1}} & C''_{n-1} \\ \downarrow d_{n-1} & & \downarrow d'_{n-1} & & \downarrow d''_{n-1} \\ C_{n-2} & \xrightarrow{i_{n-2}} & C'_{n-2} & \xrightarrow{p_{n-2}} & C''_{n-2} \end{array}$$

- a) Sei  $x'' \in H_n(C''_*, d''_*)$ , also  $x'' = [v'']$  mit  $v'' \in \ker d''_n$ . Da  $p_n$  surjektiv ist, existiert  $v' \in C'_n$  mit  $p_n(v') = v''$ . Es gilt

$$p_{n-1} \circ d'_n(v') = d''_n \circ p_n(v') = d''_n(v'') = 0$$

Also ist  $d'_n(v') \in \ker p_{n-1}$ . Weiter gilt  $\ker p_{n-1} = \text{Im } i_{n-1}$ , also existiert ein  $v \in C_{n-1}$  mit  $i_{n-1}(v) = d'_n(v')$ . Dann gilt

$$i_{n-2}(d_{n-1}(v)) = d'_{n-1}(i_{n-1}(v)) = d'_{n-1}(d'_n(v')) = 0$$

Da  $i_{n-2}$  injektiv ist, folgt somit  $d_{n-1}(v) = 0$ . Also setzen wir  $\partial_n(x'') := [v] \in H_{n-1}(C_*, d_*)$ .

Es bleibt zu zeigen, dass  $[v] \in H_{n-1}(C_*, d_*)$  unabhängig von der Wahl von  $v''$  und  $v'$  ist. Seien  $w'' \in \ker d''_n$ ,  $w' \in C'_n$  und  $w \in C_{n-1}$  mit  $x'' = [w'']$ ,  $p_n(w') = w''$  und  $i_{n-1}(w) = d'_n(w')$ . Es ist  $[v''] = [w'']$ , also existiert ein  $a'' \in C''_{n+1}$  mit  $d''_{n+1}(a'') = v'' - w''$ .  $p_{n+1}$  ist surjektiv, also existiert  $a' \in C'_{n+1}$  mit  $p_{n+1}(a') = a''$ . Es gilt

$$p_n(v' - w' - d'_{n+1}(a')) = v'' - w'' - \underbrace{d''_{n+1}(p_{n+1}(a'))}_{=v''-w''} = 0$$

Mit  $\ker p_n = \text{Im } i_n$  folgt die Existenz von  $a \in C_n$  mit  $i_n(a) = v' - w' - d_{n+1}(a')$ . Es gilt nun

$$\begin{aligned} i_{n-1}(d_n(a) - (v - w)) &= i_{n-1}(d_n(a)) - i_{n-1}(v - w) \\ &= d'_n(i_n(a)) - (d'_n(v') - d'_n(w')) \\ &= d'_n(-d'_{n+1}(a') + v' - w') - d'_n(v' - w') \\ &= -d'_n d'_{n+1}(a') + d'_n(v' - w') - d'_n(v' - w') = 0 \end{aligned}$$

Da  $i_{n-1}$  injektiv ist, folgt  $d_n(a) - (v - w) = 0$ , also  $d_n(a) = (v - w)$ . Es folgt  $[v] = [w]$ .

- b) Exaktheit der langen Folge:

$$\boxed{\text{Im}(i_n)_* = \ker(p_n)_*} : \text{„}\subseteq\text{“ folgt aus } (p_n)_* \circ (i_n)_* = (p_n \circ i_n)_* = (0)_* = 0.$$

Für „ $\supseteq$ “ betrachte  $x' \in \ker(p_n)_*$ , wobei  $x' = [v']$  mit  $v' \in C'_n$  und  $d'_n(v') = 0$ . Da nun  $[p_n(v')] = (p_n)_*[x'] = 0$  ist, gibt es  $a'' \in C''_{n+1}$  mit  $d''_{n+1}(a'') = p_n(v')$ . Da  $p_{n+1}$  surjektiv ist, existiert  $a' \in C'_{n+1}$  mit  $p_{n+1}(a') = a''$ . Dann gilt

$$p_n(v' - d'_{n+1}(a')) = p_n(v') - p_n \circ d'_{n+1}(a') = p_n(v') - d''_{n+1}(\underbrace{p_{n+1}(a')}_{=a''}) = 0$$

Da  $\ker p_n = \text{Im } i_n$ , gibt es  $a \in C_n$  mit  $i_n(a) = v' - d'_{n+1}(a')$ . Nun ist

$$i_{n-1}(d_n(a)) = d'_n(i_n(a)) = d'_n(v' - d'_{n+1}(a')) = d'_n(v') = 0$$

Da  $i_{n-1}$  injektiv ist, folgt  $d_n(a) = 0$ . Insbesondere  $[a] \in H_n(C_*, d_*)$ . Nun ist

$$(i_n)_*[a] = [i_n(a)] = [v' - d'_{n+1}(a')] = [v'] = x'$$

Also ist  $x' \in \text{Im}(i_n)_*$ .

$$\boxed{\text{Im}(p_n)_* = \ker \partial_n} : \text{Für „}\subseteq\text{“ betrachte } x'' \in \text{Im}(p_n)_*. \text{ Dann gibt es } v' \in C'_n \text{ mit } d'_n(v') = 0 \text{ und } x'' = [p_n(v')]. \text{ Es ist } d'_n(v') \in \ker p_{n-1} = \text{Im } i_{n-1}, \text{ also existiert ein } v \in C_{n-1} \text{ mit } i_{n-1}(v) = d'_n(v'). \text{ Es gilt nun } \partial_n(x'') = [v]. \text{ Wegen der Injektivität von } i_{n-1} \text{ ist } v = 0, \text{ also } \partial_n(x'') = [0].$$

Sei nun umgekehrt  $x'' \in \ker \partial_n$ . Wir finden wieder  $v' \in C'_n$  und  $v \in C_{n-1}$  mit  $x'' = [p_n(v')]$ ,  $i_{n-1}(v) = d'_n(v')$  und  $0 = \partial_n(x'') = [v]$ . Daher gibt es  $a \in C_n$  mit  $d_n(a) = v$ . Es folgt

$$d'_n(v' - i_n(a)) = i_{n-1}(v) - i_{n-1}(d_n(a)) = 0$$

Es gilt nun  $(p_n)_*[v' - i_n(a)] = [p_n(v') - p_n(i_n(a))] = [p_n(v')] = x''$ .

Im  $\partial_n = \ker(i_{n-1})_*$ : Für „ $\subseteq$ “ sei  $x \in \text{Im } \partial_n$ . Dann gibt es wieder  $v' \in C'_n$  und  $v \in C_{n-1}$  mit  $d''_n(p_n(v')) = 0$ ,  $d'_n(v') = i_{n-1}(v)$  und  $x = [v]$ . Dann gilt

$$(i_{n-1})_*(x) = (i_{n-1})_*[v] = [i_{n-1}(v)] = [d'_n(v')] = 0$$

Sei nun umgekehrt  $x \in \ker(i_{n-1})_*$  und  $v \in C_{n-1}$  mit  $d_{n-1}(v) = 0$  und  $x = [v]$ . Da nun  $(i_{n-1})_*(x) = [i_{n-1}(v)]$  und  $x \in \ker(i_{n-1})_*$  ist, gibt es  $v' \in C'_n$  mit  $d'_n(v') = i_{n-1}(v)$ . Es gilt nun

$$d''_n(p_n(v')) = p_{n-1}(d'_n(v')) = p_{n-1}(i_{n-1}(v)) = 0$$

Daraus folgt  $\partial_n[p_n(v')] = x$ . □

### 8.13 Beweis von Satz 8.8

Für jedes Paar  $(X, A)$  ist die Folge der singulären Kettenkomplexe

$$(C_*(A; R), \partial_*^A) \xrightarrow{C_*(i; R)} (C_*(X; R), \partial_*^X) \xrightarrow{C_*(j; R)} (C_*(X, A; R), \partial_*^{(X, A)})$$

kurz exakt. Das Schlangenlemma 8.12 produziert  $\partial_n: H_n(X, A; R) \rightarrow H_{n-1}(A; R)$  und die lange exakte Sequenz  $[\star]$ . Es bleibt zu zeigen, dass die Randabbildungen aus dem Schlangenlemma wie behauptet eine natürliche Transformation definieren: Sei  $(f, f|_A): (X, A) \rightarrow (Y, B)$  eine Abbildung von Paaren. Zu zeigen ist, dass

$$\begin{array}{ccc} H_n(X, A; R) & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(A; R) \\ \downarrow (f, f|_A)_* & & \downarrow (f|_A)_* \\ H_n(Y, B; R) & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(B; R) \end{array}$$

kommutiert. Sei  $x'' \in H_n(X, A; R)$ . Sei  $v' \in C_n(X; R)$  mit  $\partial_n^X(v') \in C_n(A; R)$  und  $[v' + C_n(A; R)] = x''$ . Dann ist  $\partial_n(x'') = [\partial_n^X(v')] \in H_{n-1}(A; R)$ . Dann ist

$$(f, f|_A)_*(x'') = (f, f|_A)_*[v' + C_n(A; R)] = [f_*(v') + C_n(B; R)] \in H_n(Y, B; R)$$

Es ist  $\partial_n^Y(f_*(v')) = (f|_A)_*\left(\underbrace{\partial_n^X(v')}_{\in C_n(A; R)}\right) \in C_n(B; R)$ . Also

$$\partial_n^Y((f, f|_A)_*(x'')) = [\partial_n^Y(f_*(v'))] = [f_* \circ \partial_n^X(v')] = f_* \circ \partial_n(x'') \quad \square$$

### 8.14 Bemerkung

Für eine Abbildung  $(f, f|_A): (X, A) \rightarrow (Y, B)$  erhalten wir ein kommutierendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & H_n(A; R) & \xrightarrow{i_*^A} & H_n(X; R) & \xrightarrow{j_*^X} & H_n(X, A; R) & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(A; R) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow (f|_A)_* & & \downarrow f_* & & \downarrow (f, f|_A)_* & & \downarrow (f|_A)_* & & \\ \cdots & \longrightarrow & H_n(B; R) & \xrightarrow{i_*^B} & H_n(Y; R) & \xrightarrow{j_*^Y} & H_n(Y, B; R) & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(B; R) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

## 8.15 Fünfer-Lemma

Seien die Zeilen in folgendem kommutativen Diagramm von  $R$ -Moduln exakt.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 A_4 & \xrightarrow{\alpha_4} & A_3 & \xrightarrow{\alpha_3} & A_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & A_0 \\
 f_4 \downarrow \cong & & f_3 \downarrow \cong & & f_2 \downarrow & & f_1 \downarrow \cong & & f_0 \downarrow \cong \\
 B_4 & \xrightarrow{\beta_4} & B_3 & \xrightarrow{\beta_3} & B_2 & \xrightarrow{\beta_2} & B_1 & \xrightarrow{\beta_1} & B_0
 \end{array}$$

Sind  $f_4, f_3, f_1$  und  $f_0$  Isomorphismen, so ist auch  $f_2$  ein Isomorphismus.

### Beweis

**Injektivität:** Sei  $a_2 \in A_2$  mit  $f_2(a_2) = 0$ . Wir erhalten

$$f_1(\alpha_2(a_2)) = \beta_2(f_2(a_2)) = \beta_2(0) = 0.$$

Da  $f_1$  ein Isomorphismus ist, folgt  $\alpha_2(a_2) = 0$ . Damit ist  $a_2 \in \ker \alpha_2 = \text{Im } \alpha_3$ , also existiert  $a_3 \in A_3$  mit  $\alpha_3(a_3) = a_2$ . Es gilt

$$\beta_3(f_3(a_3)) = f_2(\alpha_3(a_3)) = f_2(a_2) = 0$$

Also ist  $f_3(a_3) \in \ker \beta_3 = \text{Im } \beta_4$ . Da  $f_4$  Isomorphismus ist, gibt es  $a_4 \in A_4$  mit  $\beta_4(f_4(a_4)) = f_3(a_3)$ . Nun gilt

$$f_3(\alpha_4(a_4) - a_3) = f_3(\alpha_4(a_4)) - f_3(a_3) = \beta_4(f_4(a_4)) - f_3(a_3) = f_3(a_3) - f_3(a_3) = 0$$

Da  $f_3$  ein Isomorphismus ist, folgt nun  $\alpha_4(a_4) = a_3$ . Nun ist

$$a_2 = \alpha_3(a_3) = \alpha_3(\alpha_4(a_4)) = \underbrace{\alpha_3 \circ \alpha_4}_{=0}(a_4) = 0$$

**Surjektivität:** Sei  $b_2 \in B_2$ . Fall 1:  $\beta_2(b_2) = 0$ . Da  $\text{Im } \beta_3 = \ker \beta_2$  und  $f_3$  Isomorphismus, existiert  $a_3 \in A_3$  mit  $\beta_3(f_3(a_3)) = b_2$ . Also ist  $b_2 = \beta_3(f_3(a_3)) = f_2(\alpha_3(a_3)) \in \text{Im } f_2$ .

Ist  $b_2$  beliebig, so genügt es zu zeigen: Es existiert ein  $a_2 \in A_2$  mit  $\beta_2(b_2 - f_2(a_2)) = 0$ .  $f_1$  ist ein Isomorphismus, also existiert ein  $a_1 \in A_1$  mit  $f_1(a_1) = \beta_2(b_2)$ . Dann folgt

$$f_0(\alpha_1(a_1)) = \beta_1(f_1(a_1)) = \beta_1(\beta_2(b_2)) = \underbrace{\beta_1 \circ \beta_2}_{=0}(b_2) = 0$$

Da  $f_0$  ein Isomorphismus ist, folgt  $\alpha_1(a_1) = 0$ . Da  $\ker \alpha_1 = \text{Im } \alpha_2$ , folgt  $\alpha_2(a_2) = a_1$ . Es gilt nun

$$\begin{aligned}
 \beta_2(b_2 - f_2(a_2)) &= \beta_2(b_2) - \beta_2(f_2(a_2)) = \beta_2(b_2) - f_1(\alpha_2(a_2)) \\
 &= \beta_2(b_2) - f_1(a_1) = \beta_2(b_2) - \beta_2(b_2) = 0 \quad \square
 \end{aligned}$$

## 8.16 Lemma („2 von 3“)

Sei  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  eine Abbildung von Paaren. Seien von den drei Abbildungen

(i)  $(f|_A)_*: H_n(A; R) \rightarrow H_n(B; R)$

(ii)  $f_*: H_n(X; R) \rightarrow H_n(Y; R)$

(iii)  $(f, f|_A)_*: H_n(X, A; R) \rightarrow H_n(Y, B; R)$

zwei für jeweils alle  $n$  Isomorphismen. Dann ist auch die dritte für alle  $n$  ein Isomorphismus.

### Beweis

Da die Randabbildung in der Paarfolge eine natürliche Transformation ist, erhalten wir ein kommutatives Leiterdiagramm:

"R" aus Platzgründen weggelassen

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 H_{n+1}(A) & \longrightarrow & H_{n+1}(X) & \longrightarrow & H_{n+1}(X, A) & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & H_n(A) & \longrightarrow & H_n(X) & \longrightarrow & H_n(X, A) & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(A) \\
 \downarrow (f|_A)_* & & \downarrow f_* & & \downarrow (f, f|_A)_* & & \downarrow (f|_A)_* & & \downarrow f_* & & \downarrow (f, f|_A)_* & & \downarrow (f|_A)_* \\
 H_{n+1}(B) & \longrightarrow & H_{n+1}(Y) & \longrightarrow & H_{n+1}(Y, B) & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & H_n(B) & \longrightarrow & H_n(Y) & \longrightarrow & H_n(Y, B) & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(B)
 \end{array}$$

Da die Zeilen lang exakt sind, folgt die Behauptung aus dem Fünfer-Lemma.  $\square$



## 9 Ausschneidung und die Mayer-Vietoris Folge

### 9.1 Satz

Sei  $(X, A)$  ein Paar und  $L \subseteq A$ , sodass der Abschluss  $\overline{L}$  von im Inneren  $\overset{\circ}{A}$  von  $A$  liegt. Dann induziert die Inklusion  $(X \setminus L, A \setminus L) \xrightarrow{j} (X, A)$  einen Isomorphismus  $j_*: H_n(X \setminus L, A \setminus L; R) \rightarrow H_n(X, A; R)$ .

#### Beweis

Siehe Kapitel 13.

### 9.2 Satz (Mayer-Vietoris-Folge)

Seien  $A, B \subseteq X$  offen und  $X = A \cup B$ . Seien  $i_A: A \hookrightarrow X, i_B: B \hookrightarrow X, j_A: A \cap B \hookrightarrow A$  und  $j_B: A \cap B \hookrightarrow B$  die Inklusionen. Dann gibt es eine Randabbildung  $\partial_n = \partial_n^{X=A \cup B}: H_n(X; R) \rightarrow H_{n-1}(A \cap B; R)$ , sodass

Für simpliziale Homologie gibt es auch eine Mayer-Vietoris-Folge, siehe Aufgabe 4 von Blatt 6

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(A \cap B) \xrightarrow{\begin{pmatrix} (j_A)_* \\ (j_B)_* \end{pmatrix}} \bigoplus_{H_n(B)}^{H_n(A)} \xrightarrow{(i_A)_* - (i_B)_*} H_n(X) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A \cap B) \longrightarrow \cdots$$

"R" aus Platzgründen weggelassen

eine lange exakte Folge ist. Die Randabbildung ist dabei eine natürlicher Transformation: Seien  $A', B' \subseteq X'$  offen mit  $X' = A' \cup B'$  und sei  $f: X \rightarrow X'$  mit  $f(A) \subseteq A'$  und  $f(B) \subseteq B'$ . Dann kommutiert

$$\begin{array}{ccc} H_n(X; R) & \xrightarrow{\partial_n^{X=A \cup B}} & H_{n-1}(A \cap B; R) \\ \downarrow f_* & & \downarrow (f|_{A \cap B})_* \\ H_n(X'; R) & \xrightarrow{\partial_n^{X'=A' \cup B'}} & H_{n-1}(A' \cap B'; R) \end{array}$$

#### Beweis

Sei  $L := X \setminus B$ . Dann ist  $L$  abgeschlossen und  $L \subseteq A = \overset{\circ}{A}$ . Wir erhalten daher einen Ausschneideisomorphismus

$$H_n(B, A \cap B; R) = H_n(X \setminus L, A \setminus L; R) \xrightarrow{\cong} H_n(X, A; R)$$

Betrachte nun das folgende kommutative Leiterdiagramm, das zwei Paarfolgen vergleicht:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_{n+1}(B, A \cap B) & \xrightarrow{\partial_{n+1}^{B, A \cap B}} & H_n(A \cap B) & \xrightarrow{(j_B)_*} & H_n(B) & \xrightarrow{(l_B)_*} & H_n(B, A \cap B) & \xrightarrow{\partial_n^{B, A \cap B}} & H_{n-1}(A \cap B) & \longrightarrow \cdots \\ & & \cong \downarrow (i_B, j_A)_* & & \downarrow (j_A)_* & & \downarrow (i_B)_* & & \downarrow (i_B, j_A)_* & & \downarrow (j_A)_* & \\ \cdots & \longrightarrow & H_{n+1}(X, A) & \xrightarrow{\partial_{n+1}^{X, A}} & H_n(A) & \xrightarrow{(i_A)_*} & H_n(X) & \xrightarrow{(l_X)_*} & H_n(X, A) & \xrightarrow{\partial_n^{X, A}} & H_{n-1}(A) & \longrightarrow \cdots \end{array}$$

"R" aus Platzgründen weggelassen

dabei sind  $l_B: (B, \emptyset) \rightarrow (B, A \cap B)$  und  $l_X: (X, \emptyset) \rightarrow (X, A)$  die Inklusionen von Paaren. Definiere nun  $\partial_n: H_n(X; R) \rightarrow H_{n-1}(A \cap B; R)$  durch

$$\partial_n := \partial_n^{B, A \cap B} \circ (i_B, j_A)_*^{-1} \circ (l_X)_*$$

Die Natürlichkeit von  $\partial_n^{B, A \cap B}$  impliziert die Natürlichkeit von  $\partial_n$  (siehe auch 8.8). Wir müssen noch die Exaktheit zeigen:

- Zu zeigen:  $\text{Im}\left(\begin{pmatrix} (j_A)_* \\ (j_B)_* \end{pmatrix}\right) = \ker((i_A)_* - (i_B)_*)$ :

" $\supseteq$ ": Sei  $(a, b) \in \ker((i_A)_* - (i_B)_*)$ . Also  $(i_A)_*(a) = (i_B)_*(b)$ . Es ist

$$(i_B, j_A)_*((l_B)_*(b)) = (l_X)_* \circ (i_B)_*(b) = \underbrace{(l_X)_* \circ (i_A)_*(a)}_{=0} = 0$$

$(i_B, j_A)_*$  ist ein Isomorphismus, also  $(l_B)_*(b) = 0$ . Es gilt  $\ker(l_B)_* = \text{Im}(j_B)_*$ , also folgt  $\exists x \in H_n(A \cap B; R) : (j_B)_*(x) = b$ . Dann gilt

$$(i_A)_*(a - (j_A)_*(x)) = (i_A)_*(a) - (i_B)_*((j_B)_*(x)) = (i_A)_*(a) - (i_B)_*(b) = 0$$

Mit  $\ker(i_A)_* = \text{Im } \partial_{n+1}^{X,A}$  und  $(i_B, j_A)_*$  ist Isomorphismus, folgt  $\exists y \in H_{n+1}(B, A \cap B; R)$  mit

$$\partial_{n+1}^{X,A} \circ (i_B, j_A)_*(y) = a - (j_A)_*(x)$$

Es folgt für  $z := x + \partial_{n+1}^{B,A \cap B}(y)$  nun  $(j_B)_*(z) = (j_B)_*(x) = b$  und

$$\begin{aligned} (j_A)_*(z) &= (j_A)_*(x) + (j_A)_*(\partial_{n+1}^{B,A \cap B}(y)) = (j_A)_*(x) + \partial_{n+1}^{X,A} \circ (i_B, j_A)_*(y) \\ &= (j_A)_*(x) + a - (j_A)_*(x) = a \end{aligned}$$

" $\subseteq$ ": Sei  $x \in H_n(A \cap B; R)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} ((i_A)_* - (i_B)_*) \left( \begin{pmatrix} (j_A)_* \\ (j_B)_* \end{pmatrix} (x) \right) &= (i_A)_* \circ (j_A)_*(x) - (i_B)_* \circ (j_B)_*(x) \\ &= (i_A)_* \circ (j_A)_*(x) - (i_A)_* \circ (j_A)_*(x) = 0 \end{aligned}$$

da  $i_A \circ j_A = i_B \circ j_B$ .

• Wir zeigen nun  $\text{Im}((i_A)_* - (i_B)_*) = \ker \partial_n$ :

" $\supseteq$ ": Sei  $v \in \ker \partial_n$ , also  $\partial_n^{B,A \cap B} \circ (i_B, j_A)_*^{-1} \circ (l_X)_*(v) = 0$ . Da  $\ker \partial_n^{B,A \cap B} = \text{Im}(l_B)_*$ , gibt es ein  $b \in H_n(B; R)$  mit

$$(l_B)_*(b) = (i_B, j_A)_*^{-1} \circ (l_X)_*(v) \iff (i_B, j_A)_* \circ (l_B)_*(b) = (l_X)_*(v)$$

Nun ist

$$(l_X)_*(v - (i_B)_*(b)) = (l_X)_*(v) - (l_X)_* \circ (i_B)_*(b) = (l_X)_*(v) - (i_B, j_A)_* \circ (l_B)_*(b) = 0$$

Da  $\ker(l_X)_* = \text{Im}(i_A)_*$  ist, gibt es ein  $a \in H_n(A; R)$  mit  $(i_A)_*(a) = v - (i_B)_*(b)$  und somit ist  $((i_A)_* - (i_B)_*)(a, -b) = v$ .

" $\subseteq$ ": Sei  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \bigoplus_{H_n(B)}^{H_n(A)}$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \partial_n((i_A)_* - (i_B)_*) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= \partial_n^{B,A \cap B} \circ (i_B, j_A)_*^{-1} \circ (l_X)_*((i_A)_*(a) - (i_B)_*(b)) \\ &= \partial_n^{B,A \cap B} \circ (i_B, j_A)_*^{-1} \circ \underbrace{(l_X)_* \circ (i_A)_*(a)}_{=0} \\ &\quad - \underbrace{\partial_n^{B,A \cap B} \circ (l_B)_*(b)}_{=0} = 0 \end{aligned}$$

• Noch zu zeigen:  $\text{Im } \partial_n = \ker \begin{pmatrix} (j_A)_* \\ (j_B)_* \end{pmatrix}$ .

" $\supseteq$ ": Sei  $x \in \ker((j_A)_* \oplus (j_B)_*)$ , also  $(j_A)_*(x) = 0 = (j_B)_*(x)$ . Da  $\text{Im } \partial_n^{B, A \cap B} = \ker(j_B)_*$  ist, gibt es  $v \in H_n(B, A \cap B; R)$  mit  $\partial_n^{B, A \cap B}(v) = x$ . Nun ist

$$\partial_n^{X, A} \circ (i_B, j_A)_*(v) = (j_A)_*(\partial_n^{B, A \cap B}(v)) = (j_A)_*(x) = 0$$

Da  $\ker \partial_n^{X, A} = \text{Im}(l_X)_*$ , finden wir  $w \in H_n(X; R)$  mit  $(l_X)_*(w) = (i_B, j_A)_*(v)$ . Also folgt

$$\partial_n(w) = \partial_n^{B, A \cap B} \circ (i_B, j_A)_*^{-1} \circ (l_X)_*(w) = \partial_n^{B, A \cap B} \circ (i_B, j_A)_*^{-1} \circ (i_B, j_A)_*(v) = \partial_n^{B, A \cap B}(v) = x$$

" $\subseteq$ ": Für  $v \in H_n(X; R)$  ist

$$\begin{aligned} & ((j_A)_* \oplus (j_B)_*) \circ \partial_n(v) \\ &= \left( (j_A)_* \circ \partial_n^{B, A \cap B} \circ (i_B, j_A)_*^{-1} \circ (l_X)_*(v), \underbrace{(j_B)_* \circ \partial_n^{B, A \cap B} \circ (i_B, j_A)_*^{-1} \circ (l_X)_*(v)}_{=0} \right) \\ &= \left( \underbrace{\partial_n^{X, A} \circ (l_X)_*}_{=0}(v), 0 \right) = (0, 0) \end{aligned}$$

### 9.3 Bemerkung

Für die Mayer-Vietoris-Folge müssen  $A$  und  $B$  nicht notwendig offen sein. Es genügt, dass die Inklusion  $(B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$  einen Isomorphismus  $H_*(B, A \cap B; R) \rightarrow H_*(X, A; R)$  induziert.

### 9.4 Satz

Für die Homologie der  $n$ -Sphäre  $S^n$  gilt

$$H_k(S^n; R) \cong \begin{cases} R \oplus R, & \text{falls } k = n = 0 \\ R, & \text{falls } k = 0, n \neq 0 \\ R, & \text{falls } k = n \neq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad [\#]$$

### 9.5 Definition

Sei  $X$  ein nichtleerer topologischer Raum. Sei  $p: X \rightarrow \{\text{pt}\}$  die Projektion auf den Ein-Punkt-Raum. Die **reduzierte singuläre Homologie** von  $X$  ist definiert durch

$$\tilde{H}_k(X; R) := \ker(p_*: H_k(X; R) \rightarrow H_k(\{\text{pt}\}; R))$$

#### Bemerkung

- Es gilt  $\tilde{H}_k(X; R) = H_k(X; R)$  für  $k > 0$ , da  $H_k(\{\text{pt}\}; R) = 0$  ist für  $k > 0$  (siehe 5.9) und somit  $p_*$  die Nullabbildung ist.  
Weiter gilt  $H_0(X; R) = R \oplus \tilde{H}_0(X; R)$ , da  $H_0(\{\text{pt}\}; R) = R$  frei ist.
- Es ist nicht schwer die Eigenschaften von singulärer Homologie auf die reduzierte singuläre Homologie zu übertragen. Insbesondere ist  $\tilde{H}_*$  homotopieinvariant und es gibt eine Mayer-Vietoris-Folge.
- Es ist  $\tilde{H}_k(\{\text{pt}\}) = 0$  und für jeden kontrahierbaren Raum  $X$  ist somit  $\tilde{H}_n(X; R) = 0$  für alle  $n$ .

### 9.6 Bemerkung

In reduzierter singulärer Homologie wird  $[\#]$  zu

$$\tilde{H}_k(S^n; R) \cong \begin{cases} R, & \text{falls } k = n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad [\#\#]$$

## 9.7 Beweis von [##]

Wir berechnen die reduzierte Homologie der Sphäre per Induktion nach  $n$ :

**Induktionsanfang:**  $n = 0$ : Es gilt

$$H_k(S^0; R) \xleftarrow{\varphi} H_k(\{\text{pt}\}; R) \oplus H_k(\{\text{pt}\}; R) = \begin{cases} R \oplus R, & \text{falls } k = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Seien  $i_-: \{\text{pt}\} \hookrightarrow S^0$  und  $i_+: \{\text{pt}\} \hookrightarrow S^0$  die Inklusionen mit  $\text{Im } i_{\pm} = \{\pm 1\}$ . Der Isomorphismus  $\varphi$  ist gegeben durch  $\varphi = (i_-)_* + (i_+)_*$ . Für  $(a, b) \in H_k(\{-1\}; R) \oplus H_k(\{+1\}; R)$  gilt dann

$$p_*(i_-(a) + i_+(b)) = (p \circ i_-)_*(a) + (p \circ i_+)_*(b) = \text{id}_*(a) + \text{id}_*(b) = a + b$$

Also ist  $\ker p_* = \{(a, -a) \mid a \in H_k(\{\text{pt}\}; R)\}$  und damit folgt

$$\tilde{H}_k(S^0; R) = \begin{cases} 0, & \text{falls } k \neq 0 \\ R, & \text{falls } k = 0 \end{cases}$$

**Induktionsschritt:**  $n - 1 \mapsto n$ : Sei  $D_+^n = S^n \setminus \{(1, 0, \dots, 0)\}$  und  $D_-^n = S^n \setminus \{(-1, 0, \dots, 0)\}$ . Dann sind  $D_+^n$  und  $D_-^n$  offene Teilmengen von  $S^n$  mit  $S^n = D_+^n \cup D_-^n$ . Weiter gilt  $D_+^n \simeq \{\text{pt}\}$  und  $D_-^n \simeq \{\text{pt}\}$ . Für den Schnitt der beiden Mengen erhalten wir

$$D_+^n \cap D_-^n = \{x = (x_0, \dots, x_n) \in S^n \mid x_0 \neq \pm 1\} \simeq S^{n-1} = \{x = (0, x_1, \dots, x_n) \in S^n\}.$$

Betrachte nun die Mayer-Vietoris-Folge zu  $S^n = D_+^n \cup D_-^n$ :

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{H}_k(D_+^n) \oplus \tilde{H}_k(D_-^n) & \longrightarrow & \tilde{H}_k(S^n) & \xrightarrow{\partial_k} & \tilde{H}_{k-1}(D_+^n \cap D_-^n) & \longrightarrow & \tilde{H}_{k-1}(D_+^n) \oplus \tilde{H}_{k-1}(D_-^n) \\ \underset{=0}{=} & & & & \uparrow \cong & & \underset{=0}{=} \oplus \underset{=0}{=} \\ & & & & \tilde{H}_{k-1}(S^{n-1}) & & \end{array}$$

$$\text{Es folgt } \tilde{H}_k(S^n; R) \cong \tilde{H}_{k-1}(S^{n-1}; R) \stackrel{\text{l.A.}}{=} \begin{cases} R, & \text{falls } k = n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

□

"R" aus Platzgrün-  
den weggelassen

## 10 Anwendungen

### 10.1 Satz (Invarianz der Dimension)

Sind  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{R}^m$  homöomorph, so gilt  $n = m$ .

#### Beweis

Sei  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  ein Homöomorphismus. Sei  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  beliebig. Dann erhalten wir auch einen Homöomorphismus  $k := h|_{\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}}: \mathbb{R}^n \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{h(x_0)\}$ . Nun ist  $\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}$  homotopieäquivalent zu  $S^{n-1}$  und  $\mathbb{R}^m \setminus \{h(x_0)\}$  ist homotopieäquivalent zu  $S^{m-1}$ . Da  $k$  ein Homöomorphismus ist, ist  $k_*$  ein Isomorphismus. Wir erhalten

$$H_*(S^{n-1}) \cong H_*(\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}) \cong H_*(\mathbb{R}^m \setminus \{h(x_0)\}) \cong H_*(S^{m-1})$$

Es ist aber  $H_*(S^{n-1}) \cong H_*(S^{m-1})$  genau dann, wenn  $n = m$ . □

### 10.2 Fixpunktsatz von Brouwer

Jede stetige Abbildung  $f: D^n \rightarrow D^n$  besitzt einen Fixpunkt.

#### Beweis

Durch Widerspruch: Angenommen es gibt  $f: D^n \rightarrow D^n$  ohne Fixpunkt. Aus dem letzten Semester wissen wir, dass es dann eine stetige Abbildung  $F: D^n \rightarrow S^{n-1}$  gibt mit  $F|_{S^{n-1}} = \text{id}_{S^{n-1}}$ . In Homologie erhalten wir folgendes kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{Z} \cong H_{n-1}(S^{n-1}) & \xrightarrow{(\text{id}_{S^{n-1}})_* = \text{id}} & H_{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbb{Z} \\
 & \searrow i_* & \nearrow (F)_* \\
 & H_{n-1}(D^n) = 0 &
 \end{array}$$

(E:  $n \geq 2$ ,  $n = 1$  haben wir bereits im letzten Semester bewiesen)

wobei  $i: S^{n-1} \hookrightarrow D^n$  die Inklusion ist. Da  $F \circ i = \text{id}_{S^{n-1}}$  ist, gilt  $F_* \circ i_* = \text{id}_{H_{n-1}(S^{n-1})}$ . □

## Der Abbildungsgrad

### 10.3 Definition

Sei  $f: S^n \rightarrow S^n$  eine stetige Abbildung. Da  $\tilde{H}_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$  ist, gibt es eine ganze Zahl  $d(f)$ , so dass  $f_*(x) = d(f) \cdot x$  für alle  $x \in \tilde{H}_n(S^n)$ . Diese Zahl heißt der **Abbildungsgrad** von  $f$ . reduzierte Homologie!

### 10.4 Proposition

Für den Abbildungsgrad  $d$  gilt

- a)  $d(\text{id}_{S^n}) = 1$ .
- b) Sind  $f$  und  $g$  homotop, so gilt  $d(f) = d(g)$ .
- c)  $d(f \circ g) = d(f) \cdot d(g)$ .

### Beweis

- a) Es ist  $(\text{id}_{S^n})_*(x) = \text{id}_{\mathbb{Z}}(x) = x$ .
- b) Sind  $f$  und  $g$  homotop, so gilt  $f_* = g_*$  und damit folgt  $d(f) = d(g)$ .
- c) Für alle  $x \in \tilde{H}_n(S^n)$  gilt:  $d(f \circ g) \cdot x = (f \circ g)_*(x) = f_* \circ g_*(x) = d(f) \cdot d(g) \cdot x$ . Da  $\tilde{H}_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$  folgt  $d(f \circ g) = d(f) \cdot d(g)$ .  $\square$

## 10.5 Beispiel

Sei  $i \in \{0, \dots, n\}$  und  $R_i: S^n \rightarrow S^n$  die Spiegelung an der  $x_i$ -Achse, also

$$R_i(x_0, \dots, x_n) = (x_0, \dots, -x_i, \dots, x_n)$$

Dann ist  $d(R_i) = -1$ .

### Beweis

Sei  $f: S^n \rightarrow S^n$  der Homöomorphismus, der die 0-te und die  $i$ -te Koordinate vertauscht, also gilt  $f(x_0, \dots, x_n) = (x_i, \dots, x_0, \dots, x_m)$ . Dann ist  $R_i = f \circ R_0 \circ f$ . Da  $f$  ein Homöomorphismus ist, ist  $f_*$  ein Isomorphismus und daher ist  $d(f)$  invertierbar, also  $d(f) \in \{\pm 1\}$ . Mit  $d(R_i) = d(f) \cdot d(R_0) \cdot d(f)$  folgt  $d(R_0) = d(R_i)$ . Es genügt also  $R_0$  zu betrachten. Wir zeigen  $d(R_0) = -1$  durch Induktion nach  $n$ .

**Induktionsanfang:** Sei  $i_-: \{\text{pt}\} \rightarrow S^0$  die Abbildung mit  $\text{Im } i_- = \{-1\}$  und  $i_+: \{\text{pt}\} \rightarrow S^0$  die Abbildung mit  $\text{Im } i_+ = \{+1\}$ . Dann ist

$$H_0(S^0) = \left\{ (i_-)_*(a) + (i_+)_*(b) \mid a, b \in H_0(\{\text{pt}\}) \right\} \quad \text{und} \\ \tilde{H}_0(S^0) = \left\{ (i_-)_*(a) - (i_+)_*(a) \mid a \in H_0(\{\text{pt}\}) \right\}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} (R_0)_* \left( (i_-)_*(a) - (i_+)_*(a) \right) &= (R_0)_* (i_-)_*(a) - (R_0)_* (i_+)_*(a) = (R_0 \circ i_-)_*(a) - (R_0 \circ i_+)_*(a) \\ &= (i_+)_*(a) - (i_-)_*(a) \\ &= -((i_-)_*(a) - (i_+)_*(a)) \end{aligned}$$

Also folgt  $d(R_0) = -1$ , da wir den Abbildungsgrad für reduzierte Homologie definiert hatten.

**Induktionsschritt:** Wir definieren zwei offene Teilmengen von  $S^n$  wie folgt

$$D_+^n = \{(x_0, \dots, x_n) \in S^n \mid x_n \neq -1\} \\ D_-^n = \{(x_0, \dots, x_m) \in S^n \mid x_n \neq +1\}$$

Wir wissen schon aus 9.7, dass die Randabbildung aus der dazugehörigen Mayer-Vietoris-Folge  $\tilde{H}_n(S^n) \xrightarrow{\partial_n} \tilde{H}_{n-1}(D_+^n \cap D_-^n)$  ein Isomorphismus ist. Da die Randabbildung natürlich ist, erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{H}_n(S^n) & \xrightarrow[\cong]{\partial_n} & \tilde{H}_{n-1}(D_-^n \cap D_+^n) & \xleftarrow[\cong]{i_*} & \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) \\ \downarrow (R_0)_* & & \downarrow (R_0|_{D_-^n \cap D_+^n})_* & & \downarrow (R_0|_{S^{n-1}})_* \\ \tilde{H}_n(S^n) & \xrightarrow[\cong]{\partial_n} & \tilde{H}_{n-1}(D_-^n \cap D_+^n) & \xleftarrow[\cong]{i_*} & \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) \end{array}$$

dabei ist  $i: S^{n-1} \rightarrow D_-^n \cap D_+^n$  die Homotopieäquivalenz  $i(x_0, \dots, x_{n-1}) = (x_0, \dots, x_{n-1}, 0)$ . Nach Induktionsannahme ist  $(R_0|_{S^{n-1}})_*(y) = -y$  für alle  $y \in \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1})$ . Für  $x \in \tilde{H}_n(S^n)$  folgt dann

$$\begin{aligned} (R_0)_*(x) &= (\partial_n)^{-1} \circ (i_*) \circ (R_0|_{S^{n-1}})_*((i_*^{-1} \circ \partial_n)(x)) \\ &= (\partial_n)^{-1} \circ (i_*)(-i_*^{-1}(\partial_n(x))) \\ &= -\partial_n^{-1} \circ (i_*) \circ (i_*)^{-1} \circ \partial_n(x) = -x \end{aligned}$$

Also gilt für den Abbildungsgrad der Spiegelung  $d(R_0) = -1$ . □

## 10.6 Beispiel

Der Grad der Punktspiegelung  $R: S^n \rightarrow S^n, x \mapsto -x$  ist  $d(R) = (-1)^{n+1}$ .

**Beweis**

$$d(R) = d(R_0 \circ R_1 \circ \dots \circ R_n) = d(R_0) \cdot \dots \cdot d(R_n) = (-1)^{n+1}. \quad \square$$

## 10.7 Erinnerung

Sei  $M$  eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit. Ein **Vektorfeld** auf  $M$  ist eine stetige Abbildung  $v: M \rightarrow TM$  mit  $v(x) \in T_x M$  für alle  $x \in M$ . Für  $M = S^n$  entspricht ein Vektorfeld genau einer stetigen Abbildung  $v: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  mit  $\langle v(x) | x \rangle = 0$  für alle  $x \in S^n$ .

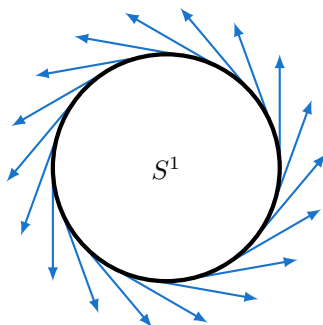


Abbildung 3: Ein nirgends verschwindendes Vektorfeld auf  $S^1$

## 10.8 Satz

Es gibt genau dann ein Vektorfeld ohne Nullstellen auf  $S^n$ , wenn  $n$  ungerade ist.

**Beweis**

Ist  $n$  ungerade, so ist  $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{C}^k$  mit  $k = \frac{n+1}{2}$ . Punkte in  $S^n$  sind dann genau  $k$ -Tupel  $z = (z_1, \dots, z_k)$  mit  $|z_1|^2 + \dots + |z_k|^2 = 1$ . Ein Vektorfeld entspricht dann einer stetigen Abbildung  $v: S^n \rightarrow \mathbb{C}^k$ , so dass für das kanonische komplexe Skalarprodukt  $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbb{C}}$  auf  $\mathbb{C}^k$  gilt

$$\langle z | v(z) \rangle_{\mathbb{C}} \in i\mathbb{R}$$

einfach nachzurechnen

Definiere nun  $v: S^n \rightarrow \mathbb{C}^k$  durch  $v(z) := iz$ . Dann  $iz \neq 0$  für alle  $z \in S^n$  und  $\langle z | iz \rangle = -i\|z\|_2^2 \in i\mathbb{R}$ . Sei umgekehrt  $v: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  ein Vektorfeld ohne Nullstellen. Zu zeigen:  $d(R) = 1$ , denn dann folgt die Behauptung, da  $d(R) = (-1)^{n+1}$ . Zeige dazu:  $R$  ist homotop zu  $\text{id}$ . Seien  $H, K: S^n \times [0, 1] \rightarrow S^n$  definiert durch

$$H(x, t) := \frac{tx + (1-t)v(x)}{\|tx + (1-t)v(x)\|} \quad \text{bzw.} \quad K(x, t) := \frac{-tx + (1-t)v(x)}{\|-tx + (1-t)v(x)\|}$$

für orthogonale Vektoren gilt der Satz von Pythagoras

Da  $\langle v(x) | x \rangle = 0$  und  $v(x) \neq 0$  folgt für alle  $x \in S^n$ , folgt

$$\begin{aligned}\|tx + (1-t)v(x)\|^2 &= \|tx\|^2 + \|(1-t)v(x)\|^2 \neq 0 \\ \|-tx + (1-t)v(x)\|^2 &= \|-tx\|^2 + \|(1-t)v(x)\|^2 \neq 0\end{aligned}$$

Also sind  $H$  und  $K$  wohldefiniert.  $H$  ist Homotopie zwischen  $\text{id}$  und  $x \mapsto \frac{v(x)}{\|v(x)\|}$  und  $K$  ist Homotopie zwischen  $-\text{id} = R$  und  $x \mapsto \frac{v(x)}{\|v(x)\|}$ .  $\square$

## 10.9 Satz (Jordanscher Kurvensatz)

Sei  $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine stetige, injektive Abbildung. Dann hat  $\mathbb{R}^2 \setminus f(S^1)$  genau zwei Wegzusammenhangskomponenten. Eine davon ist beschränkt, die andere nicht.

### Beweis (mit 10.10)

Wir können  $f$  auch als injektive Abbildung  $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \subseteq S^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$  auffassen. Nun ist  $\tilde{H}_0(S^2 \setminus f(S^1)) = \mathbb{Z}$  nach Satz 10.10 b). Also  $H_0(S^2 \setminus f(S^1)) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ . Daher besteht  $S^2 \setminus f(S^1)$  aus zwei Wegzusammenhangskomponenten  $U_1$  und  $U_2$ . Sei ohne Einschränkungen  $\infty \in U_2$ . Dann ist  $U_2 \setminus \{\infty\}$  immer noch wegzusammenhängend: Seien  $x, y \in U_2$ , dann gibt es eine Umgebung  $V$  von  $\infty \in S^2$  mit  $V \setminus \{\infty\} \cong D^2 \setminus \{0\}$ ,  $x, y \notin V$  und  $f(S^1) \cap V = \emptyset$ . Also sind  $U_1$  und  $U_2 \setminus \{\infty\}$  die Wegzusammenhangskomponenten von  $\mathbb{R}^2 \setminus f(S^1)$ .  $U_1$  ist beschränkt und  $U_2$  ist unbeschränkt.  $\square$

## 10.10 Satz

- a) Sei  $f: D^k \rightarrow S^n$  eine stetige, injektive Abbildung mit  $0 \leq k < n$ . Dann gilt  $\tilde{H}_i(S^n \setminus f(D^k)) = 0$  für alle  $i$ .
- b) Sei  $f: S^k \rightarrow S^n$  eine stetige, injektive Abbildung mit  $0 \leq k < n$ . Dann gilt

$$\tilde{H}_i(S^n \setminus f(S^k)) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{falls } i = n - k - 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

## 10.11 Proposition

Seien  $U_1 \subseteq U_2 \subseteq \dots \subseteq X$  offen mit  $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ . Seien  $i_{a,b}: U_a \hookrightarrow U_b$  für  $a < b$  und  $i_a: U_a \hookrightarrow X$  die entsprechenden Inklusionen. Dann gilt

- (1) Für jedes  $x \in H_k(X; R)$  gibt es  $a > 0$  und  $x_a \in H_k(U_a; R)$  mit  $(i_a)_*(x_a) = x$ .
- (2) Ist  $x_a \in H_k(U_a; R)$  mit  $(i_a)_*(x_a) = 0$ , so gibt es  $b > a$  mit  $(i_{a,b})_*(x_a) = 0$ .

### Bemerkung

Diese Proposition gilt genauso für reduzierte Homologie.

### Beweis

Sei  $\sigma: |\Delta^n| \rightarrow X$  ein singulärer Simplex in  $X$ . Dann ist  $\{\sigma^{-1}(U_a)\}_{a \in \mathbb{N}}$  eine offene Überdeckung von  $|\Delta^n|$ . Da  $|\Delta^n|$  kompakt ist, gibt es  $a$  mit  $|\Delta^n| \subseteq \sigma^{-1}(U_a)$ , also  $\sigma(|\Delta^n|) \subseteq U_a$ . Da Elemente von  $C_n(X; R)$  endliche  $R$ -Linearkombinationen von singulären Simplexes sind, folgt

$$C_n(X; R) = \bigcup_a C_n(U_a; R).$$

Damit ergeben sich direkt (1) und (2).  $\square$



## 10.12 Beweis von Satz 10.10

- a) Durch Induktion nach  $k$ . Für  $k = 0$  ist  $S^n \setminus f(D^0)$  homöomorph zu  $\mathbb{R}^n$  und die Behauptung folgt. Induktionsschritt  $k \mapsto k + 1$ : Da  $D^{k+1}$  und  $[0, 1]^{k+1}$  homöomorph sind, können wir  $D^{k+1}$  durch  $[0, 1]^{k+1}$  ersetzen. Sei  $x \in \tilde{H}_i(S^n \setminus f([0, 1]^{k+1}))$ . Es ist

$$S^n \setminus f(\{1/2\} \times [0, 1]^k) = \underbrace{S^n \setminus f([0, 1/2] \times [0, 1]^k)}_{=: A} \cup \underbrace{S^n \setminus f([1/2, 1] \times [0, 1]^k)}_{=: B} = A \cup B$$

eine Vereinigung von offenen Mengen. Weiter ist

$$A \cap B = (S^n \setminus f([0, 1/2] \times [0, 1]^k)) \cap (S^n \setminus f([1/2, 1] \times [0, 1]^k)) = S^n \setminus f([0, 1]^{k+1})$$

Die zugehörige Mayer-Vietoris-Folge liefert nun einen Isomorphismus:

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{H}_{i+1}(A \cup B) & \longrightarrow & \tilde{H}_i(A \cap B) & \xrightarrow{\cong} & \tilde{H}_i(A) \oplus \tilde{H}_i(B) & \longrightarrow & \tilde{H}_i(A \cup B) \\ \text{=0 nach I.A.} & & & & & & \text{=0 nach I.A.} \end{array}$$

Angenommen  $x \neq 0$ . Dann ist das Bild von  $x$  in  $\tilde{H}_i(A)$  ungleich Null oder in  $\tilde{H}_i(B)$  ungleich Null. Indem wir dieses Argument iterieren, erhalten wir eine Folge von Intervallen

$$[0, 1] \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots \quad \text{so dass} \quad \bigcap_a I_a = \{t\}$$

und das Bild von  $x \in \tilde{H}_i(S^n \setminus f([0, 1]^{k+1}))$  unter der von der Inklusion  $\iota_{0,a}: S^n \setminus f([0, 1]^{k+1}) \rightarrow S^n \setminus f(I_a \times [0, 1]^k)$  induzierten Abbildung  $(\iota_{0,a})_*$  ungleich Null ist. Nun ist aber

$$\bigcup_a (S^n \setminus f(I_a \times [0, 1]^k)) = S^n \setminus f(\{t\} \times [0, 1]^k)$$

und wieder nach Induktionsannahme ist  $\tilde{H}_i(S^n \setminus f(\{t\} \times [0, 1]^k)) = 0$ . Für die von der Inklusion  $\iota_a: S^n \setminus f(I_a \times [0, 1]^k) \rightarrow S^n \setminus f(\{t\} \times [0, 1]^k)$  induzierte Abbildung gilt also  $(\iota_a)_*(x) = 0$ . Nach Proposition 10.11(2) muss  $x$  dann aber schon für ein  $i$  in  $\tilde{H}_i(S^n \setminus f(I_a \times [0, 1]^k))$  trivial sein.  $\nmid$

- b) Durch Induktion nach  $k$ . Für  $k = 0$  ist  $S^n \setminus f(S^0) \cong \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Da  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \simeq S^{n-1}$  folgt für  $k = 0$  die Behauptung.

Induktionsschritt  $k - 1 \mapsto k$ : Wir setzen

$$\begin{aligned} D_+^k &:= \{(x_0, \dots, x_k) \in S^k \mid x_k \geq 0\} \\ D_-^k &:= \{(x_0, \dots, x_k) \in S^k \mid x_k \leq 0\} \end{aligned}$$

Dann ist  $D_+^k \cap D_-^k = \{(x_0, \dots, x_k) \in S^k \mid x_k = 0\} \cong S^{k-1}$ . Wieder ist

$$S^n \setminus f(D_+^k \cap D_-^k) = (S^n \setminus f(D_+^k)) \cup (S^n \setminus f(D_-^k))$$

eine offene Vereinigung mit  $(S^n \setminus f(D_+^k)) \cap (S^n \setminus f(D_-^k)) = S^n \setminus f(S^k)$ . Es ist  $D_\pm^k \cong D^k$ , also ist wegen a) ist die Randabbildung in der zugehörigen Mayer-Vietoris-Folge

$$\tilde{H}_i(S^n \setminus f(D_+^k \cap D_-^k)) \xrightarrow[\cong]{\partial_i} \tilde{H}_{i-1}(S^n \setminus f(S^k))$$

ein Isomorphismus. Die Behauptung folgt dann per Induktion.  $\square$

## 11 CW-Komplexe

### 11.1 Definition

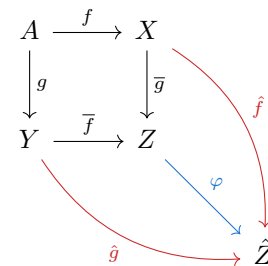
Ein kommutatives Diagramm von topologischen Räumen der Form

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow g & & \downarrow \bar{g} \\ Y & \xrightarrow{\bar{f}} & Z \end{array} \quad [\#]$$

heißt ein **Pushout**, falls es folgende universelle Eigenschaft hat:

$\forall \hat{f}: X \rightarrow \hat{Z}, \hat{g}: Y \rightarrow \hat{Z}$  mit  $\hat{f} \circ f = \hat{g} \circ g$  gilt:

$\exists! \varphi: Z \rightarrow \hat{Z}$  mit  $\hat{f} = \varphi \circ \bar{g}, \hat{g} = \varphi \circ \bar{f}$ .



Wir sagen dann auch:  $[\#]$  ist der Pushout von  $Y \xleftarrow{g} A \xrightarrow{f} X$ .

### 11.2 Bemerkung

Jedes Diagramm  $Y \xleftarrow{g} A \xrightarrow{f} X$  lässt sich zu einem Pushout vervollständigen: Betrachte dazu den Raum  $X \cup_A Y := X \amalg Y / f(a) \sim g(a) \forall a \in A$  mit der Quotiententopologie. Sind  $\bar{f}: Y \rightarrow X \cup_A Y$  und  $\bar{g}: X \rightarrow X \cup_A Y$  die von den Inklusionen  $X \hookrightarrow X \amalg Y$  und  $Y \hookrightarrow X \amalg Y$  induzierten Abbildungen, so ist

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow g & & \downarrow \bar{g} \\ Y & \xrightarrow{\bar{f}} & X \cup_A Y \end{array}$$

ein Pushout. Existenz und Eindeutigkeit aus der universellen Eigenschaft können benutzt werden um zu zeigen, dass der Pushout eindeutig bis auf kanonischen Homöomorphismus ist.

### 11.3 Definition

Ein **CW-Komplex**<sup>4</sup> ist ein topologischer Raum  $X$  zusammen mit einer Filtrierung<sup>5</sup> durch Unterräume von  $X$ :

$$\emptyset = X^{(-1)} \subseteq X^{(0)} \subseteq X^{(1)} \subseteq X^{(2)} \subseteq \dots \subseteq X^{(n)} \subseteq X^{(n+1)} \subseteq \dots \subseteq X$$

sodass die folgenden zwei Eigenschaften erfüllt sind:

$X^{(i)}$  bezeichnet  
man auch als  $i$ -  
Gerüst oder  $i$ -Skelett

<sup>4</sup> Zitat von Wikipedia [zum Namen](#): *The C stands for closure-finite, and the W for "weak topology". C für cell* scheint mir allerdings auch sinnvoll.

<sup>5</sup> siehe auch [https://de.wikipedia.org/wiki/Filter\\_\(Mathematik\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Filter_(Mathematik))

- (i) **Zellstruktur:** Zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  gibt einen Pushout von topologischen Räumen

$$\begin{array}{ccc}
 \coprod_{i \in I^{(n)}} S^{n-1} & \xrightarrow{\coprod_{i \in I^{(n)}} q_i^{(n)}} & X^{(n-1)} \\
 \downarrow \coprod_{i \in I^{(n)}} j_i & & \downarrow k^{(n)} \\
 \coprod_{i \in I^{(n)}} D^n & \xrightarrow{\coprod_{i \in I^{(n)}} Q_i^{(n)}} & X^{(n)}
 \end{array}$$

wobei  $j_i: S^{n-1} \hookrightarrow D^n$  und  $k_n: X^{(n-1)} \hookrightarrow X^{(n)}$  die Inklusionen sind.

- (ii) **Schwache Topologie:** Es ist  $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^{(n)}$  und  $U \subseteq X$  ist genau dann offen, wenn  $U \cap X^{(n)} \subseteq X^{(n)}$  für alle  $n$  offen ist.

Eine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  zwischen CW-Komplexen heißt **zellulär**, falls  $f(X^{(n)}) \subseteq Y^{(n)}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt.

## 11.4 Bemerkung

- (i) Die Abbildungen  $q_i^{(n)}$  und  $Q_i^{(n)}$  sind *nicht* Teil der Struktur eines CW-Komplex. Nur die Existenz von  $q_i^{(n)}$  und  $Q_i^{(n)}$  wird gefordert — sie ist nicht notwendig eindeutig. Hat man  $q_i^{(n)}$  und  $Q_i^{(n)}$  gewählt, so heißt  $q_i^{(n)}$  die **anklebende Abbildung** der  $i$ -ten  $n$ -Zelle und  $Q_i^{(n)}$  die **charakteristische Abbildung** der  $i$ -ten  $n$ -Zelle.
- (ii) Sei  $\mathring{D}^n = D^n \setminus S^{n-1}$  das Innere von  $D^n$ . Die Abbildungen  $Q_i^{(n)}$  schränken sich zu einem Homöomorphismus  $\coprod_{i \in I^{(n)}} \mathring{D}^n \rightarrow X^{(n)} \setminus X^{(n-1)}$  ein.<sup>6</sup> Insbesondere lässt sich  $I^{(n)}$  mit der Menge der Wegzusammenhangskomponenten von  $X^{(n)} \setminus X^{(n-1)}$  identifizieren. Die Wegzusammenhangskomponenten heißen die **offenen Zellen** von  $X$ . Damit ist jeder CW-Komplex die disjunkte Vereinigung seiner offenen Zellen.
- ▲ Achtung: Jede offene  $n$ -Zelle ist offen in  $X^{(n)}$ , aber nicht notwendig in  $X$ .
- (iii) Der Abschluss einer offenen Zelle  $Q_i^{(n)}(\mathring{D}^n)$  ist  $Q_i^{(n)}(D^n)$  und insbesondere kompakt. Die  $Q_i^{(n)}(D^n)$  heißen die **abgeschlossenen Zellen** und sind als Abschluss von offenen Zellen unabhängig von der Wahl der  $Q_i^{(n)}$ .
- ▲ Achtung: Abgeschlossene Zellen sind Bilder von  $D^n$  unter stetigen Abbildungen, aber nicht notwendig homöomorph zu  $D^n$ .
- (iv) Ein CW-Komplex  $X$  heißt **endlich**, wenn er nur aus endlich vielen Zellen besteht, also wenn  $I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I^{(n)}$  endlich ist. Insbesondere gibt es dann ein  $n$  mit  $X = X^{(n)}$ .
- Die Dimension von  $X$  ist die maximale Dimension von Zellen von  $X$ , also  $\dim X := N$ , falls  $X^{(N)} = X$ ,  $X^{(N-1)} \subsetneq X$ . Gibt es kein solches  $N$  so setzen wir  $\dim X := \infty$ .

## 11.5 Beispiele

- (i)  $S^n$  mit

$$(S^n)^{(k)} = \begin{cases} \emptyset, & \text{falls } k = -1 \\ \{(1, 0, \dots, 0)\}, & \text{falls } k = 0, \dots, n-1 \\ S^n, & \text{falls } k \geq n \end{cases}$$

<sup>6</sup> Dass dies ein Homöomorphismus ist, folgt aus der Pushout-Eigenschaft und dem letzten Teil der Bemerkung 11.2, denn es gilt demnach  $X^{(n)} \cong X^{(n-1)} \cup \coprod_{i \in I^{(n)}} \mathring{D}^n$ .

ist ein CW-Komplex via  $S^n \cong D^n/S^{n-1}$

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \longrightarrow & (S^n)^{(n-1)} = \{(1, 0, \dots, 0)\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^n & \longrightarrow & S^n \end{array}$$

- (ii)  $S^n$  mit  $(S^n)^{(k)} = \{(x_0, \dots, x_k, 0, \dots, 0) \in S^n\}$  ist ebenfalls eine CW-Struktur auf  $S^n$ .
- (iii) Sei  $K = (V, \Sigma)$  ein simplizialer Komplex. Es ist  $|\Delta^n| \cong D^n$  und  $|\partial\Delta^n| \cong S^{n-1}$ . Sei  $\Sigma^{(n)} := \Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup \dots \cup \Sigma_n$ . Dann wird  $|K|$  durch  $|K|^{(n)} := |(V, \Sigma^{(n)})|$  für  $n \geq 0$  zu einem CW-Komplex. Ist  $f: K \rightarrow L$  eine simpliziale Abbildung, so ist  $|f|: |K| \rightarrow |L|$  eine zelluläre Abbildung.
- (iv) Der  $n$ -dimensionale reelle projektive Raum  $\mathbb{R}P^n$  kann definiert werden durch

$$\mathbb{R}P^n := \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / x \sim \lambda x = S^n / x \sim -x$$

Punkte in  $\mathbb{R}P^n$  sind Äquivalenzklassen von  $(n+1)$ -Tupeln reeller Zahlen und werden als die sogenannten homogenen Koordinaten  $[x_0 : \dots : x_n]$  geschrieben. Es ist

$$\mathbb{R}P^n = \left\{ [x_0 : \dots : x_n] \mid (x_0, \dots, x_n) \in S^n \right\} = \left\{ [x_0 : \dots : x_n] \mid (x_0, \dots, x_n) \in S^n, x_n \geq 0 \right\}$$

Wir erhalten einen Homöomorphismus  $f^{(n)}: D^n / x \sim -x, x \in S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}P^n$  mit

$$f^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \left[ x_1 : \dots : x_n : \sqrt{1 - \sum_{i=1}^n x_i^2} \right]$$

Ist  $Q^{(n)}: D^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$  die Komposition von  $f^{(n)}$  mit der Projektion  $D^n \twoheadrightarrow D^n / x \sim -x, x \in S^{n-1}$  und  $q^{(n)}: S^{n-1} \twoheadrightarrow \mathbb{R}P^{n-1}$  die Projektion, so erhalten wir einen Pushout

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \xrightarrow{q^{(n)}} & \mathbb{R}P^{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^n & \xrightarrow{Q^{(n)}} & \mathbb{R}P^n \end{array}$$

Induktiv erhalten wir einen CW-Struktur auf  $\mathbb{R}P^n$  mit genau einer  $k$ -Zelle für  $k = 0, \dots, n$  und

$$(\mathbb{R}P^n)^{(k)} \cong \mathbb{R}P^k$$

- (v) Der  $n$ -dimensionale komplexe projektive Raum  $\mathbb{C}P^n$  kann definiert werden durch

$$\mathbb{C}P^n := \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} / z \sim \lambda z = S^{2n+1} / z \sim \lambda z, \lambda \in S^1 \subseteq \mathbb{C}$$

Punkte in  $\mathbb{C}P^n$  sind Äquivalenzklassen von  $(n+1)$ -Tupeln komplexer Zahlen und werden als homogenen Koordinaten  $[z_0 : \dots : z_n]$  geschrieben. Es ist wieder

$$\mathbb{C}P^n = \left\{ [z_0 : \dots : z_n] \mid (z_0, \dots, z_n) \in S^{2n+1} \right\} = \left\{ [z_0 : \dots : z_n] \mid (z_0, \dots, z_n) \in S^{2n+1}, |z_n| \geq 0 \right\}$$

Wir erhalten wieder einen Homöomorphismus  $f^{(n)}: D^{2n+1} / z \sim \lambda z, z \in S^{2n-1}, \lambda \in S^1 \rightarrow \mathbb{C}P^n$  durch

$$f^{(n)}(z_1, \dots, z_n) = \left[ z_1 : \dots : z_n : \sqrt{1 - \sum_{i=1}^n |z_i|^2} \right]$$

Ist  $Q^{(2n)}: D^{2n} \rightarrow \mathbb{C}P^n$  die Komposition von  $f^{(n)}$  mit der Projektion  $D^{2n} \rightarrow D^{2n}/z \sim \lambda z, z \in S^{2n}$  und  $q^{(n)}: S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^{n-1}$  die Projektion, so erhalten wir auch wieder einen Pushout

$$\begin{array}{ccc} S^{2n-1} & \xrightarrow{q^{(n)}} & \mathbb{C}P^{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^{2n} & \xrightarrow{Q^{(n)}} & \mathbb{C}P^n \end{array}$$

Induktiv erhalten wir einen CW-Struktur auf  $\mathbb{C}P^n$  mit genau einer  $k$ -Zelle für  $k = 0, 2, \dots, 2n$  und

$$(\mathbb{C}P^n)^{(k)} \cong \mathbb{C}P^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}$$

## 11.6 Lemma

Sei  $X$  ein CW-Komplex und  $K \subseteq X$ . Dann ist  $K$  genau dann kompakt, wenn  $K$  abgeschlossen ist und  $K$  nur endlich viele offene Zellen von  $X$  schneidet.

### Beweis

Zunächst: Ist  $S \subseteq X$  ein Unterraum der jede offene Zelle höchstens in einem Punkt schneidet, so ist  $S$  diskret. Für  $S_0 \subseteq S$  ist  $S_0 \cap (X^{(n)} \setminus X^{(n-1)})$  abgeschlossen in  $X^{(n)}$ , da  $S_0$  jede offene  $n$ -Zelle von  $X$  höchstens in einem Punkt schneidet. Daher ist  $S_0 \cap X^{(n)} \subseteq X^{(n)}$  abgeschlossen für alle  $n$ . Damit ist also jede Teilmenge  $S_0 \subseteq S$  abgeschlossen in  $X$  und  $S$  somit diskret.

Sei nun  $K \subseteq X$  kompakt. Dann ist  $K$  sicher abgeschlossen. Sei  $S \subseteq K$  ein Teilraum, der aus jeder offenen Zelle von  $X$ , die  $K$  schneidet, genau einen Punkt enthält. Wegen der Vorüberlegung ist  $S$  diskret. Da  $S \subseteq K$  abgeschlossen und  $K$  kompakt ist, ist  $S$  auch kompakt. Damit ist  $S$  endlich und  $K$  schneidet nur endlich viele offene Zellen.

Ist nun umgekehrt  $K$  abgeschlossen und schneidet nur endlich viele offene Zellen, so ist  $K$  enthalten in einer endlichen Vereinigung von abgeschlossen Zellen von  $X$ . Da diese abgeschlossen Zellen kompakt sind, ist auch diese Vereinigung kompakt,  $K$  ist also ein abgeschlossener Teilraum eines kompakten Teilraums und damit selbst kompakt.  $\square$

## 11.7 Korollar

Ein CW-Komplex ist genau dann kompakt, wenn er endlich ist.

## 12 Zelluläre Homologie

### 12.1 Definition

Sei  $X$  ein CW-Komplex. Dann heißt

$$C_n^{\text{cell}}(X; R) := H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}; R)$$

der  **$n$ -te zelluläre Kettenmodul** von  $X$  mit Koeffizienten in  $R$ . Die  **$n$ -te Randabbildung**  $\partial_n^{\text{cell}}: C_n^{\text{cell}}(X; R) \rightarrow C_{n-1}^{\text{cell}}(X; R)$  wird durch die Komposition

$$\begin{array}{ccc} H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}; R) & \xrightarrow{\partial_n^{(X^{(n)}, X^{(n-1)})}} & H_{n-1}(X^{(n-1)}; R) \\ & & \downarrow (j^{(n-1)})_* \\ & & H_{n-1}(X^{(n-1)}, X^{(n-2)}; R) \end{array}$$

definiert. Dabei ist  $\partial_n^{(X^{(n)}, X^{(n-1)})}$  die Randabbildung aus der Paarfolge für  $(X^{(n)}, X^{(n-1)})$  und  $j^{(n-1)}$  die Inklusion  $(X^{(n-1)}, \emptyset) \hookrightarrow (X^{(n-1)}, X^{(n-2)})$ .

### 12.2 Lemma

$$\partial_{n-1}^{\text{cell}} \circ \partial_n^{\text{cell}} = 0$$

#### Beweis

Wir schreiben die Paarsequenz für  $(X^{(n)}, X^{(n-1)})$  dreimal übereinander und erhalten:

"R" aus Platzgründen weggelassen

$$\begin{array}{ccccccc} H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}) & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(X^{(n-1)}) & \longrightarrow & \dots & & \\ & & \parallel & & & & \\ & & H_{n-1}(X^{(n-1)}) & \xrightarrow{j_*^{(n-1)}} & H_{n-1}(X^{(n-1)}, X^{(n-2)}) & \xrightarrow{\partial_{n-1}} & H_{n-2}(X^{(n-2)}) \longrightarrow \dots \\ & \searrow \partial_n^{\text{cell}} & & \nearrow \partial_{n-1}^{\text{cell}} & & & \\ & & H_{n-2}(X^{(n-2)}) & \xrightarrow{j_*^{(n-2)}} & H_{n-2}(X^{(n-2)}, X^{(n-3)}) & & \end{array}$$

Also  $\partial_{n-1}^{\text{cell}} \circ \partial_n^{\text{cell}} = 0$ , da wegen der Exaktheit der Paarfolge schon  $\partial_{n-1} \circ j_*^{(n-1)} = 0$  ist.  $\square$

### 12.3 Definition

$(C_*^{\text{cell}}(X; R), \partial_*^{\text{cell}})$  heißt der **zelluläre Kettenkomplex** von  $X$  über  $R$ . Seine Homologie  $H_*^{\text{cell}}(X; R)$  heißt die **zelluläre Homologie** von  $X$ .

### 12.4 Bemerkung

Der zelluläre Kettenkomplex und die zelluläre Homologie sind Funktoren auf der Kategorie der CW-Komplexe und zellulären Abbildungen.

## 12.5 Lemma

Sei  $X$  ein CW-Komplex. Wähle  $q_i^{(n)}$  und  $Q_i^{(n)}$  für die Zellstruktur auf  $X$ . Dann gilt

a) Die Abbildung

$$\left( \coprod_{i \in I^{(n)}} Q_i^{(n)}, \coprod_{i \in I^{(n)}} q_i^{(n)} \right) : \left( \coprod_i D^n, \coprod_i S^{n-1}; R \right) \longrightarrow (X^{(n)}, X^{(n-1)}; R)$$

induziert einen Isomorphismus in Homologie.

b) Es gilt

$$H_k \left( \coprod_i D^n, \coprod_i S^{n-1}; R \right) = \begin{cases} R[I^{(n)}], & \text{falls } k = n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

### Beweis

a) Sei  $D_0^n := D^n \setminus \{0\}$ ,  $\frac{1}{2}D^n := \{\frac{x}{2} \mid x \in D^n\}$  und  $\frac{1}{2}D_0^n := \frac{1}{2}D^n \setminus \{0\}$ . Wir definieren

$$X_{++}^{(n-1)} := X^{(n)} \setminus \bigcup_{i \in I^{(n)}} Q_i^{(n)}(\{0\}) \quad \text{und} \quad X_+^{(n-1)} := X^{(n)} \setminus \bigcup_{i \in I^{(n)}} Q_i^{(n)}\left(\frac{1}{2}D^n\right)$$

Dann sind  $X^{(n-1)} \hookrightarrow X_+^{(n-1)} \hookrightarrow X_{++}^{(n-1)}$  Homotopieäquivalenzen, da  $\coprod_{i \in I^{(n)}} Q_i^{(n)}$  ein Homöomorphismus auf den offenen  $n$ -Zellen ist. Betrachte:

$$\begin{array}{ccccc} (\coprod D^n, \coprod S^{n-1}) & \xrightarrow{(1)} & (\coprod D^n, \coprod D_0^n) & \xleftarrow{(2)} & (\coprod \frac{1}{2}D^n, \coprod \frac{1}{2}D_0^n) \\ \downarrow (\coprod Q_i^{(n)}, \coprod q_i^{(n)}) & & \downarrow & & \downarrow (3) \\ (X^{(n)}, X^{(n-1)}) & \xrightarrow{(5)} & (X^{(n)}, X_{++}^{(n-1)}) & \xleftarrow{(4)} & (X^{(n)} \setminus X_+^{(n-1)}, X_{++}^{(n-1)} \setminus X_+^{(n-1)}) \end{array}$$

(1), (2) und (5) sind Homotopieäquivalenzen und induzieren Isomorphismen in Homologie. (3) ist ein Homöomorphismus und induziert einen Isomorphismus in Homologie. (4) erfüllt die Voraussetzungen für den Ausschneideisomorphismus und induziert daher auch einen Isomorphismus in Homologie. Damit folgt a).

b) Da die Randabbildung aus der Paarsequenz in diesem Fall ein Isomorphismus ist, gilt

$$\begin{aligned} H_k \left( \coprod_i D^n, \coprod_i S^{n-1}; R \right) &\xleftarrow{\cong} \bigoplus_i H_k(D^n, S^{n-1}; R) \xrightarrow{\cong} \bigoplus_i \tilde{H}_{k-1}(S^{n-1}; R) \\ &\cong \bigoplus_i \begin{cases} R, & \text{falls } k = n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\ &\cong \begin{cases} R[I^{(n)}], & \text{falls } k = n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad \square \end{aligned}$$

## 12.6 Bemerkung

Wir haben soeben gezeigt, dass die folgenden Isomorphismen existieren:

$$\begin{array}{ccc} C_n^{\text{cell}}(X; R) & \xrightarrow{\partial_n^{\text{cell}}} & C_{n-1}^{\text{cell}}(X; R) \\ \parallel & & \parallel \\ H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}; R) & \longrightarrow & H_{n-1}(X^{(n-1)}, X^{(n-2)}; R) \\ \parallel & & \parallel \\ R[I^{(n)}] & \longrightarrow & R[I^{(n-1)}] \end{array}$$

Die Randabbildung  $\partial_n^{\text{cell}}$  wird unter diesen Isomorphismen zu einer  $I^{(n-1)} \times I^{(n)}$ -Matrix. Für  $j \in I^{(n-1)}$  und  $k \in I^{(n)}$  ist der  $(j, k)$ -Eintrag dieser Matrix genau der Abbildungsgrad einer Selbstabbildung der  $(n-1)$ -Sphäre:

Die  $(Q_i^{(n-1)}, q_i^{(n-1)})$  induzieren einen Homöomorphismus  $\coprod_i D^{n-1} / \coprod_i S^{n-2} \cong X^{(n)} / X^{(n-1)}$ . Durch Komposition mit der Projektion auf die  $j$ -te Zelle erhalten wir die folgende Abbildung

$$\coprod_i D^{n-1} / \coprod_i S^{n-2} \xrightarrow{p_j^{(n-1)}} D^{n-1} / S^{n-2} \cong S^{n-1}.$$

Der  $(j, k)$ -te Eintrag ist nun der Abbildungsgrad von

$$S^{n-1} \xrightarrow{q_k^{(n-2)}} X^{(n-1)} \longrightarrow X^{(n-1)} / X^{(n-2)} \xrightarrow{\cong} \coprod_i D^{n-1} / \coprod_i S^{n-2} \xrightarrow{p_j^{(n-1)}} S^{n-1}$$

## 12.7 Definition

Eine natürliche Transformation  $\tau$  zwischen Funktoren  $F, G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  heißt ein **natürlicher Isomorphismus**, wenn  $\tau_C: F(C) \rightarrow G(C)$  für alle Objekte  $C$  von  $\mathcal{C}$  ein Isomorphismus in  $\mathcal{D}$  ist.

## 12.8 Satz

Für CW-Komplexe gibt es einen natürlichen Isomorphismus  $\tau_X: H_*^{\text{cell}}(X; R) \xrightarrow{\cong} H_*(X; R)$ .

**Beweis (mit Lemma 12.9)**

Betrachte folgendes Diagramm; die diagonalen Folgen sind Ausschnitte aus den Paarsequenzen:

"R" aus Platzgründen weggelassen

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & H_n(X^{(n+1)}, X^{(n)}) \\
 & & & & = 0 \\
 & & & \nearrow & \\
 0 \stackrel{12.9 \text{ a)}}{=} H_n(X^{(n-1)}) & & H_n(X^{(n+1)}) & \xrightarrow[\cong]{12.9 \text{ b)}} & H_n(X) \\
 & \searrow & \nearrow & & \\
 & & H_n(X^{(n)}) & & \\
 & \nearrow & \searrow & & \\
 H_{n+1}(X^{(n+1)}, X^{(n)}) & \xrightarrow{\partial_{n+1}^{\text{cell}}} & H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}) & \xrightarrow{\partial_n^{\text{cell}}} & H_{n-1}(X^{(n-1)}, X^{(n-2)}) \\
 & \nearrow & \searrow & \nearrow & \\
 & & H_{n-1}(X^{(n-1)}) & & \\
 & & \nearrow & & \\
 & & H_{n-1}(X^{(n-2)}) \\
 & & = 0
 \end{array}$$

Labels for arrows in the diagram:

- Red arrow from  $H_n(X^{(n-1)})$  to  $H_n(X^{(n)})$ :  $\partial_{n+1}^{X^{(n+1)}, X^{(n)}}$
- Yellow arrow from  $H_n(X^{(n+1)})$  to  $H_n(X^{(n)})$ :  $j_*^{(n)}$
- Red arrow from  $H_n(X^{(n)})$  to  $H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)})$ :  $\partial_n^{X^{(n)}, X^{(n-1)}}$
- Blue arrow from  $H_{n-1}(X^{(n-1)}, X^{(n-2)})$  to  $H_{n-1}(X^{(n-1)})$ :  $j_*^{(n-1)}$

Es folgt, dass  $j_*^{(n)}$  wegen Exaktheit einen Isomorphismus  $H_n(X^{(n)}; R) \xrightarrow{\cong} \ker \partial_n^{\text{cell}}$  induziert. Da  $j_*^{(n)}$  injektiv ist, induziert  $j_*^{(n)}$  außerdem einen Isomorphismus  $\text{Im } \partial_{n+1}^{X^{(n+1)}, X^{(n)}} \xrightarrow{\cong} \text{Im } \partial_{n+1}^{\text{cell}}$ . Insgesamt erhalten wir natürliche Isomorphismen

$$H_n(X; R) \cong H_n(X^{(n+1)}; R) \cong H_n(X^{(n)}; R) / \text{Im } \partial_{n+1}^{X^{(n+1)}, X^{(n)}} \cong \ker \partial_n^{\text{cell}} / \text{Im } \partial_{n+1}^{\text{cell}} \cong H_n^{\text{cell}}(X; R) \quad \square$$



## 12.9 Lemma

Sei  $X$  ein CW-Komplex.

- a) Für  $k > n$  ist  $H_k(X^{(n)}; R) = 0$ .
- b) Für  $k < n$  induziert die Inklusion  $l_n: X^{(n)} \hookrightarrow X$  einen Isomorphismus  $(l_n)_*: H_k(X^{(n)}; R) \rightarrow H_k(X; R)$ .

### Beweis

- a) Ist  $k > n$ , so erhalten wir aus der Paarfolge einen Isomorphismus

$$H_{k+1}(X^{(n)}, X^{(n-1)}; R) \rightarrow H_k(X^{(n-1)}; R) \xrightarrow{\cong} H_k(X^{(n)}; R) \rightarrow H_k(X^{(n)}, X^{(n-1)}; R) \xrightarrow{12.5} 0$$

Da  $H_k(X^{(0)}; R) = 0$  für  $k > 0$ , folgt a) nun durch endliche Induktion für  $n = 0, 1, \dots, k-1$ .

- b) Ist  $n > k$ , so erhalten wir aus der Paarfolge

$$H_{k+1}(X^{(n+1)}, X^{(n)}; R) \rightarrow H_k(X^{(n)}; R) \xrightarrow{\cong} H_k(X^{(n+1)}; R) \rightarrow H_k(X^{(n+1)}, X^{(n)}; R) \xrightarrow{12.5} 0$$

Für  $m \geq n > k$  induziert die Inklusion  $X^{(n)} \hookrightarrow X^{(m)}$  daher einen Isomorphismus  $H_k(X^{(n)}; R) \rightarrow H_k(X^{(m)}; R)$ . Ist  $\dim X$  endlich, so folgt die Behauptung.

Für den allgemeinen Fall beobachten wir zunächst, dass es zu jeder stetigen Abbildung  $\sigma: |\Delta^j| \rightarrow X$  ein  $n$  gibt mit  $\text{Im } \sigma \subseteq X^{(n)}$ , da  $\text{Im } \sigma \subseteq X$  kompakt ist und daher nur endlich viele offene Zellen von  $X$  trifft (siehe 11.5). Also gilt  $C_*(X; R) = \bigcup_n C_*(X^{(n)}; R)$ . Damit folgt

- (1)  $\forall x \in H_k(X; R)$  existiert ein  $n$ , sodass  $x$  im Bild von  $H_k(X^{(n)}; R) \rightarrow H_k(X; R)$ .
- (2)  $\forall x \in H_k(X^{(n)}; R)$  mit trivialem Bild von  $x$  in  $H_k(X; R)$ , gibt es ein  $m \geq n$ , sodass das Bild von  $x$  in  $H_k(X^{(m)}; R)$  trivial ist.

Da für  $m \geq n > k$  die Abbildung  $H_k(X^{(n)}; R) \rightarrow H_k(X^{(m)}; R)$  ein Isomorphismus ist, ergibt sich damit die Behauptung.  $\square$

## 12.10 Korollar

Die Eulercharakteristik eines endlichen simplizialen Komplexes ist eine topologische Invariante.

### Beweis

Sei  $a_n$  die Anzahl der  $n$ -Simplizes von  $K$ . Dann gibt es eine CW-Struktur auf  $|K|$ , die für jedes  $n$  genau  $a_n$  Zellen hat.

$$\chi(K) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i a_i \stackrel{12.5}{=} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \text{Rg } C_i^{\text{cell}}(|K|) \stackrel{4.10}{=} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \text{Rg } H_i^{\text{cell}}(|K|) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \text{Rg } H_i(|K|)$$

Da die  $H_i(|K|)$  eine topologische Invariante sind, ist auch  $\chi(K)$  eine topologische Invariante.  $\square$

Man beachte, dass 4.10 für beliebige  $\mathbb{Z}$ -Kettenkomplexe und deren Homologie gilt

## 12.11 Bemerkung

Ist  $X$  ein CW-Komplex mit endlich vielen  $n$ - und  $n+1$ -Zellen, so ist  $H_n(X)$  ein endlich erzeugter  $\mathbb{Z}$ -Modul. Man definiert dann die  **$n$ -te Bettizahl** von  $X$  als  $b_n := \text{Rg } H_n(X)$ . Ist  $X$  ein endlicher CW-Komplex, so definiert man die Euler-Charakteristik von  $X$  als

$$\chi(X) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n.$$

Ist  $a_n$  die Anzahl der  $n$ -Zellen von  $X$ , so gilt  $\chi(X) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ .

## 12.12 Beispiel

Es gilt

$$H_k(\mathbb{C}P^n; R) \cong \begin{cases} R, & \text{falls } k = 0, 2, 4, \dots, 2n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

### Beweis

Aus Beispiel 11.5 (v) wissen wir, dass es auf  $\mathbb{C}P^n$  eine CW-Struktur gibt mit genau einer Zelle in der Dimension  $0, 2, 4, \dots, 2n$  (und keine weiteren Zellen). Der zelluläre Kettenkomplex hat daher folgende Form:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 2n-1 & 2n & 2n+1 & \dots \\ R \longleftarrow 0 \longleftarrow R \longleftarrow 0 \longleftarrow R \longleftarrow \dots \longleftarrow 0 \longleftarrow R \longleftarrow 0 \longleftarrow \dots \end{array}$$

Alle Randabbildungen sind trivial und die Homologie von  $\mathbb{C}P^n$  stimmt mit den zellulären Kettenkomplexen überein.  $\square$

RevChap12

## 12.13 Beispiel

Es gilt

$$H_k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{falls } k = 0 \text{ oder } (k = n \text{ und } k \text{ ungerade}) \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & \text{falls } 0 < k < n \text{ und } k \text{ ungerade} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

### Beweis

Aus Beispiel 11.5 (iv) wissen wir, dass es eine CW-Struktur auf  $\mathbb{R}P^n$  gibt, die für  $k = 0, \dots, n$  genau eine  $k$ -Zelle und keine weiteren Zellen besitzt. Der zelluläre Kettenkomplex von  $\mathbb{R}P^n$  (über  $\mathbb{Z}$ ) hat also die Form:

$$\mathbb{Z} \xleftarrow{\partial_1^{\text{cell}}} \mathbb{Z} \xleftarrow{\partial_2^{\text{cell}}} \mathbb{Z} \xleftarrow{\quad} \dots \xleftarrow{\quad} \mathbb{Z} \xleftarrow{\partial_n^{\text{cell}}} \mathbb{Z} \xleftarrow{\quad} 0$$

Wir müssen die Randabbildung verstehen. In der CW-Struktur können wir  $(\mathbb{R}P^n)^{(k)}$  mit  $\mathbb{R}P^k$  identifizieren. Die anklebende Abbildung  $q^{(k+1)}: S^k \rightarrow \mathbb{R}P^k$  der  $(k+1)$ -Zelle ist die Projektion  $(x_0, \dots, x_k) \mapsto [x_0 : \dots : x_k]$ . Die charakteristische Abbildung  $Q^{(k+1)}: D^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}P^{k+1}$  der  $(k+1)$ -Zelle ist gegeben durch

$$(x_0, \dots, x_k) \mapsto \left[ x_0 : \dots : x_k : \sqrt{1 - \|(x_1, \dots, x_k)\|^2} \right]$$

Betrachte folgendes kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} C_{k+1}^{\text{cell}}(\mathbb{R}P^n) & \xrightarrow{\partial_{k+1}^{\text{cell}}} & C_k^{\text{cell}}(\mathbb{R}P^n) & & \\ \parallel & & \parallel & & \\ H_{k+1}(\mathbb{R}P^{k+1}, \mathbb{R}P^k) & \xrightarrow{\partial_{\mathbb{R}P^{k+1}, \mathbb{R}P^k}} & H_k(\mathbb{R}P^k) & \longrightarrow & H_k(\mathbb{R}P^k, \mathbb{R}P^{k-1}) \\ \uparrow (Q^{(k+1)}, q^{(k+1)})_* \cong & & \uparrow (q^{(k+1)})_* & & \uparrow (q^{(k+1)}, q^{(k)})_* \\ H_{k+1}(D^{k+1}, S^k) & \xrightarrow[\cong]{\partial_{D^{k+1}, S^k}} & \tilde{H}_k(S^k) & \xrightarrow{j_*} & H_k(S^k, S^{k-1}) \end{array}$$

Das linke untere Quadrat kommutiert, da die Randabbildung aus der Paarfolge eine natürliche Transformation ist. Das rechte, da die zugrunde liegenden Abbildungen kommutieren.

Das Bild von  $\partial_{k+1}^{\text{cell}}$  stimmt also mit dem Bild der Komposition

$$H_k(S^k) \xrightarrow{j_*} H_k(S^k, S^{k-1}) \xrightarrow{(q^{(k+1)}, q^{(k)})_*} H_k(\mathbb{R}P^k, \mathbb{R}P^{k-1})$$

überein. Sei  $i_{\pm}: D^k \rightarrow S^k$  definiert durch  $i_{\pm}(x) = (\pm x, \pm\sqrt{1-\|x\|^2})$ . Sei  $l: S^{k-1} \hookrightarrow i_-(D^k)$  die Inklusion und  $R: S^k \rightarrow S^k$  die Punktspiegelung  $x \mapsto -x$ . Es ist  $i_+ = R \circ i_-$ . Betrachte

faktorisieren über 0

$$\begin{array}{ccc}
 & \tilde{H}_k(S^k) & \\
 & \downarrow j_* & \\
 \begin{array}{c} y_+ \in H_k(D^k, S^{k-1}) \\ \oplus \\ y_- \in H_k(D^k, S^{k-1}) \end{array} & \xrightarrow[\cong]{\begin{array}{c} (i_+, i_+|_{S^{k-1}})_* \\ (i_-, i_-|_{S^{k-1}})_* \end{array}} & H_k(S^k, S^{k-1}) \xrightarrow[\cong]{\begin{array}{c} (\text{id}_{S^k}, l)_* \\ (R, R|_{S^{k-1}})_* \end{array}} \begin{array}{c} H_k(S^k, i_-(D^k)) \ni x_+ \\ \oplus \\ H_k(S^k, i_-(D^k)) \ni x_- \end{array} \quad [\#] \\
 & \downarrow (q^{(k+1)}, q^{(k)})_* & \\
 & H_k(\mathbb{R}P^k, \mathbb{R}P^{k-1}) & 
 \end{array}$$

In der Übungen haben wir gesehen, dass die horizontalen Abbildungen Isomorphismen sind. Sei  $x \in \tilde{H}_k(S^k)$  ein Erzeuger. Seien  $(x_+, x_-)$  und  $(y_+, y_-)$  die Elemente, die  $j_*(x)$  unter den horizontalen Isomorphismen in  $[\#]$  entsprechen. Mit Hilfe der Paarfolge zu  $(S^k, i_-(D^k))$  sehen wir, dass die Inklusion  $j_-: (S^k, \emptyset) \hookrightarrow (S^k, i_-(D^k))$  einen Isomorphismus  $(j_-)_*: \tilde{H}_k(S^k) \rightarrow \tilde{H}_k(S^k, i_-(D^k))$  induziert. Es ist nun  $(\text{id}_{S^k}, l) \circ j = j_-$  und  $(R, R|_{S^{k-1}}) \circ j = j_- \circ R$ . Damit ist  $x_+$  ein Erzeuger von  $H_k(S^k, i_+(D^k))$ . Weiter entspricht  $R_*$  der Multiplikation mit  $(-1)^{k+1}$  nach 10.6. Damit folgt

eventuell in Anhang?

$$x_- = (R, R|_{S^{k-1}})_* \circ j_*(x) = (\text{id}_{S^k}, l)_* \circ j_* \circ R_*(x) = (\text{id}_{S^k}, l)_* \circ j_*((-1)^{k+1}x) = (-1)^{k+1} \cdot x_+$$

Die Komposition der horizontalen Isomorphismen in  $[\#]$  ist gegeben durch

Da bin ich anderer Meinung, bzw. sehe ich nicht ein warum ...

Problem beheben/Details hinzufügen

$$\begin{pmatrix} (i_+, l \circ i_+|_{S^{k-1}})_* & 0 \\ 0 & (R, R|_{S^{k-1}})_* \circ (i_-, i_-|_{S^{k-1}})_* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (i_+, l \circ i_+|_{S^{k-1}})_* & \\ & (i_+, l \circ i_+|_{S^{k-1}})_* \end{pmatrix}$$

Es folgt, dass  $y_+$  ein Erzeuger von  $H_k(D^k, S^{k-1})$  ist und  $y_- = (-1)^{k+1}y_+$  ist. In  $[\#]$  wird  $y_+$  auf  $(q^{(k+1)}, q^{(k)})_* \circ (i_+, i_+|_{S^{k-1}})_*(y_+) = (Q^{(k)}, q^{(k)})_*(y_+)$  abgebildet. Insbesondere wird  $y_+$  auf einen Erzeuger  $z_k \in H_k(\mathbb{R}P^k, \mathbb{R}P^{k-1})$  abgebildet, da diese Abbildung nach 12.5 ein Isomorphismus ist. Es folgt

Für die Gleichung unten brauchen wir doch  $(i_-, i_-|_{S^{k-1}})_*(y_-) = (-1)^{k+1}(i_+, i_+|_{S^{k-1}})_*(y_+)$  ??

$$\begin{aligned}
 (q^{(k+1)}, q^{(k)})_*(j_*(x)) &= (q^{(k+1)}, q^{(k)})_*((i_+, i_+|_{S^{k-1}})_*(y_+) + (i_-, i_-|_{S^{k-1}})_*(y_-)) \\
 &= (Q^{(k)}, q^{(k)})_*(y_+ + (-1)^{k+1}y_+) \\
 &= \begin{cases} 2z_k, & \text{falls } k \text{ ungerade} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Es folgt

$$\text{Im } \partial_{k+1}^{\text{cell}} = \begin{cases} 2 \cdot C_k^{\text{cell}}(X), & \text{falls } k \text{ ungerade} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Der zelluläre Kettenkomplex ist daher isomorph zu:

$$\mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \xleftarrow{2} \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \xleftarrow{\quad} \cdots \xleftarrow{\quad} \mathbb{Z} \xleftarrow{n} \mathbb{Z} \xleftarrow{\quad} 0 \xleftarrow{\quad} 0$$

Womit die Behauptung folgt.  $\square$

### Beispiel

Für  $R = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  ist

$$H_k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & \text{falls } k = 0, \dots, n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad \square$$

### 12.14 Satz

Sei  $K$  ein geordneter simplizialer Komplex. Für  $\sigma = \{v_0, \dots, v_n\} \in \Sigma_n$  mit  $v_0 < v_1 < \dots < v_n$  sei  $f_\sigma: |\Delta^n| \rightarrow |K|$  gegeben durch  $f_\sigma(\sum_{i=0}^n t_i e_i) = \sum_{i=0}^n t_i v_i$ . Wir erhalten

$$[f_\sigma] \in H_n(|K|^{(n)}, |K|^{(n-1)}; R) = C_n^{\text{cell}}(|K|; R).$$

Diese Zuordnung definiert einen Isomorphismus zwischen dem simplizialen Kettenkomplex von  $K$  und dem zellulären Kettenkomplex von  $|K|$

$$\tau: C_*(K; R) \longrightarrow C_*^{\text{cell}}(|K|, R)$$

Insbesondere ist  $H_*(K; R) \cong H_*(|K|; R)$  eine topologische Invariante von  $K$ .

### Beweis

Betrachte

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_n} R & \xrightarrow{\cong} & \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_n} H_n(|\Delta^\sigma|, |\partial \Delta^\sigma|; R) \\ \cong \downarrow & & \cong \downarrow \\ C_n(K; R) & \xrightarrow{\tau} & H_n(|K|^{(n)}, |K|^{(n-1)}; R) \end{array}$$

Nun ist auch  $\tau$  ein Isomorphismus, da  $[f_\sigma]$  ein Erzeuger von  $H_n(|\Delta^\sigma|, |\partial \Delta^\sigma|; R)$  ist, siehe Blatt 8. Es bleibt zu zeigen, dass  $\sigma \mapsto [f_\sigma]$  mit den Randabbildungen vertauscht. Dies ergibt sich sofort aus  $f_{\partial_j \sigma} = \partial_j f_\sigma$ .  
 $\square$

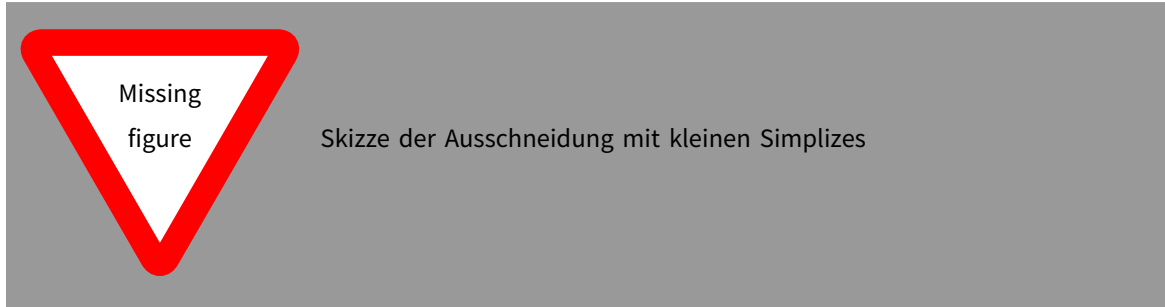
## 13 Kleine Simplizes

### 13.1 Satz

Sei  $(X, A)$  ein Paar von topologischen Räumen. Sei  $L \subseteq A$  mit  $\bar{L} \subseteq \mathring{A}$ . Dann induziert die Inklusion  $(X \setminus L, A \setminus L) \hookrightarrow (X, A)$  den Ausschneidungs-Isomorphismus  $H_*(X \setminus L, A \setminus L; R) \xrightarrow{\cong} H_*(X, A; R)$ .  
Es ist

RevChap13

$$H_*(X, A; R) = H_*(C_*(X; R)/C_*(A; R), \partial_*) \text{ und } H_*(X \setminus L, A \setminus L; R) = H_*(C_*(X \setminus L; R)/C_*(A \setminus L; R), \partial_*)$$



### 13.2 Definition

Sei  $\mathcal{U}$  eine offene Überdeckung von  $X$ . Ein singulärer Simplex  $\sigma: |\Delta^n| \rightarrow X$  heißt  **$\mathcal{U}$ -klein**, falls es ein  $U \in \mathcal{U}$  gibt mit  $\text{Im } \sigma \subseteq U$ . Die  $\mathcal{U}$ -kleinen Simplizes erzeugen den Unterkettenkomplex  $(C_*^{\mathcal{U}}(X; R), \partial_*)$  des simplizialen Kettenkomplexes  $(C_*(X; R), \partial_*)$ .

### 13.3 Satz über kleine Simplizes

Die Inklusion  $C_*^{\mathcal{U}}(X; R) \hookrightarrow C_*(X; R)$  induziert einen Isomorphismus in Homologie.

### 13.4 Bemerkung

Der Satz über kleine Simplizes lässt sich leicht auf Paare von topologischen Räumen verallgemeinern. Für eine Überdeckung  $\mathcal{U}$  von  $X$  setzen wir

$$C_*^{\mathcal{U}}(X, A; R) := C_*^{\mathcal{U}}(X; R)/C_*(A; R) \cap C_*^{\mathcal{U}}(X; R)$$

Dann induziert die Inklusion  $C_*^{\mathcal{U}}(X, A; R) \rightarrow C_*(X, A; R)$  einen Isomorphismus in Homologie. Beweis mit Paarfolge und 5er-Lemma.

### 13.5 Beweis des Ausschneidungssatzes (13.1)

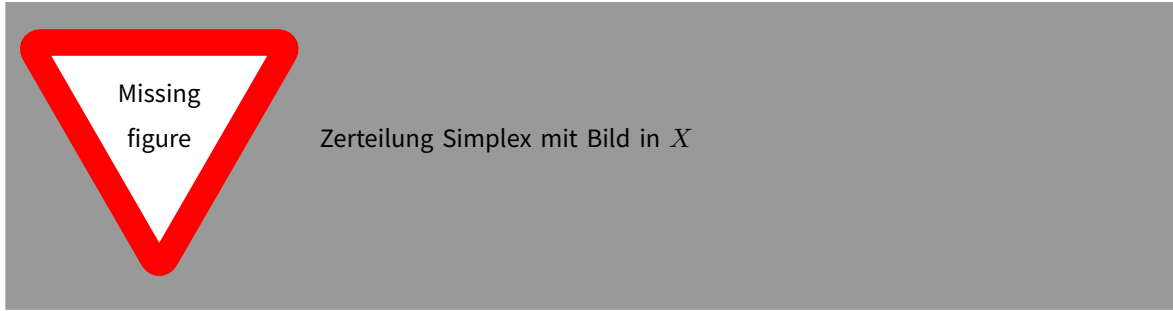
Seien  $\mathcal{U} := \{\mathring{A}, X \setminus \bar{L}\}$  und  $\mathcal{U}_L := \{\mathring{A} \setminus L, X \setminus \bar{L}\}$ . Dann gilt nach dem Satz über kleine Simplizes

Details hinzufügen

$$\begin{array}{ccc} C_*^{\mathcal{U}_L}(X \setminus L, A \setminus L; R) & \xrightarrow{\cong} & C_*^{\mathcal{U}}(X, A; R) \\ \cong_{H_*} \downarrow & & \downarrow \cong_{H_*} \\ C_*(X \setminus L, A \setminus L; R) & \xrightarrow{(\star)} & C_*(X, A; R) \end{array}$$

Daher induziert auch die Inklusion  $(\star)$  einen Isomorphismus in  $H_*$ . □

### 13.6 Idee zum Beweis des Satzes über kleine Simplex



### 13.7 Definition

„Abkegeln“  
 $s_n := \left(\frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1}\right) \in |\Delta^n|$  heißt der **Schwerpunkt** von  $|\Delta^n|$ . Ist  $\sigma: |\Delta^p| \rightarrow |\Delta^n|$  ein singulärer  $p$ -Simplex, so definieren wir  $(K_{\Delta^n})(\sigma): |\Delta^{p+1}| \rightarrow |\Delta^n|$  durch

$$(K_{\Delta^n})(\sigma)(t_0, \dots, t_{p+1}) = t_0 \cdot s_n + (1 - t_0) \cdot \sigma\left(\frac{(t_1, \dots, t_{p+1})}{1 - t_0}\right)$$

Wir erhalten eine Abbildung  $(K_{\Delta^n})_p: C_p(|\Delta^n|; R) \rightarrow C_{p+1}(|\Delta^n|; R)$ .

### 13.8 Lemma

Sei  $\text{const}_{s_n}: |\Delta^n| \rightarrow |\Delta^n|$  die konstante Abbildung mit  $\text{Im}(\text{const}_{s_n}) = \{s_n\}$ . Dann ist  $(K_{\Delta^n})_*$  eine Kettenhomotopie zwischen  $\text{id}$  und  $(\text{const}_{s_n})_*$ .

#### Beweis

Sei  $\sigma$  ein singulärer  $p$ -Simplex in  $|\Delta^n|$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \partial_{p+1} \circ (K_{\Delta^n})_p(\sigma) &= \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j (K_{\Delta^n})_p(\sigma) \circ \iota_{p+1,j} = \sigma + \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^j (K_{\Delta^n})_p(\sigma) \circ \iota_{p+1,j} \\ &= \sigma + \begin{cases} \sum_{j=0}^p (-1)^{j+1} (K_{\Delta^n})_{p-1}(\sigma \circ \iota_{p,j}), & p \geq 1 \\ -\text{const}_{s_n}: |\Delta^0| \rightarrow \{s_n\}, & p = 0 \end{cases} \\ &= \sigma - \begin{cases} (K_{\Delta^n})_{p-1}(\partial_p \circ \sigma), & \text{falls } p \geq 1 \\ \text{const}_{s_0}, & \text{falls } p = 0 \end{cases} \quad \square \end{aligned}$$

Die Rechnung stimmt noch nicht so ganz ...

### 13.9 Definition

Wir definieren induktiv natürliche Transformationen  $B_n: C_n(-; R) \rightarrow C_n(-; R)$  und  $H_n: C_n(-; R) \rightarrow C_{n+1}(-; R)$  wie folgt: Für  $n = 0$  setzen wir  $(B_0)_X = \text{id}$ . Sei  $B_k$  nun schon für  $k = 0, \dots, n-1$  definiert. Betrachte zunächst  $\text{id}_{|\Delta^n|} \in C_n(|\Delta^n|; R)$ . Setze

$$(B_n)_{|\Delta^n|}(\text{id}_{|\Delta^n|}) := (K_{\Delta^n})_{n-1} \circ (B_{n-1})_{|\Delta^n|} \circ \partial_n(\text{id}_{|\Delta^n|})$$

Ist  $\sigma: |\Delta^n| \rightarrow X$  ein beliebiger singulärer  $n$ -Simplex in  $X$ , so ist  $\sigma = \sigma_*(\text{id}_{|\Delta^n|})$ , also setzen wir <sup>7</sup>

$$(B_n)_X(\sigma) := \sigma_*((B_n)_{|\Delta^n|}(\text{id}_{|\Delta^n|}))$$

Für  $n = 0$  und  $\sigma: |\Delta^0| \rightarrow X$  setzen wir  $(H_0)_X(\sigma)$  als den konstanten 1-Simplex  $\tau$  mit  $\text{Im } \tau = \text{Im } \sigma$ . Ist  $H_{n-1}$  schon definiert, so setzen wir für einen singulären  $n$ -Simplex  $\sigma: |\Delta^n| \rightarrow X$

$$(H_n)_X(\sigma) := \sigma_*((K_{\Delta^n})_n(\text{id}_{|\Delta^n|} - (H_{n-1})_{|\Delta^n|} \circ \partial_n(\text{id}_{|\Delta^n|})))$$

### 13.10 Lemma 1

Für jeden topologischen Raum  $X$  ist  $(B_*)_X$  eine Kettenabbildung und  $(H_*)_X$  eine Kettenhomotopie zwischen  $(B_*)_X$  und der Identität.

### 13.11 Lemma 2

Sei  $\mathcal{U}$  eine offene Überdeckung von  $X$ . Sei  $\alpha \in C_n(X; R)$ . Dann gibt es  $k_0 \geq 0$  so, dass  $(B_n)_X^k(\alpha) \in C_n^{\mathcal{U}}(X; R)$  für alle  $k \geq k_0$ .

**Beweis (mit Lemma 3, 13.16)**

Es genügt  $\alpha = \sigma: |\Delta^n| \rightarrow X$  zu betrachten. Sei  $\sigma^*\mathcal{U} = \{\sigma^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{U}\}$ . Dann gilt

$$\sigma^*(C_*^{\sigma^*\mathcal{U}}(|\Delta^n|; R)) \subseteq C_*^{\mathcal{U}}(X; R).$$

Da  $(B_n)_X^k(\sigma) = \sigma_*((B_n)_{|\Delta^n|}^k(\text{id}_{|\Delta^n|}))$  genügt es zu zeigen:  $(B_n)_{|\Delta^n|}^k(\text{id}_{|\Delta^n|}) \in C_*^{\sigma^*\mathcal{U}}(|\Delta^n|; R)$ . Sei  $\varepsilon > 0$  eine Lebesguezahl<sup>8</sup> für  $\sigma^*\mathcal{U}$ , das heißt  $\forall x \in |\Delta^n| : \exists V \in \sigma^*\mathcal{U} : B_\varepsilon(x) \subseteq V$ . Ist  $k > 0$  mit  $\left(\frac{n}{n+1}\right)^k \text{diam}(\text{id}_{|\Delta^n|}) < \varepsilon$ , so ist  $((B_n)_{|\Delta^n|}^k(\text{id}_{|\Delta^n|})) \in C_*^{\sigma^*\mathcal{U}}(|\Delta^n|; R)$  nach Lemma 3 (iii).  $\square$

### 13.12 Beweis des Satzes über kleine Simplizes (13.3)

Sei  $x \in H_n(X; R)$ . Wähle  $\alpha \in C_n(X; R)$  mit  $[\alpha] = x$ . Nach Lemma 2 gibt es ein  $k$  mit  $(B_n)_X^k(\alpha) \in C_n^{\mathcal{U}}(X; R)$ . Mit Lemma 1 folgt  $x = [\alpha] = [(B_n)_X^k(\alpha)]$ . Daher ist die von  $C_*^{\mathcal{U}} \rightarrow C_*(X; R)$  induzierte Abbildung in  $H_*$  surjektiv.

Sei nun  $x \in \ker H_n(C_*^{\mathcal{U}}(X; R) \rightarrow C_*(X; R))$ . Sei  $\alpha \in C_n^{\mathcal{U}}(X; R)$  mit  $x = [\alpha]$ . Da  $x$  im Kern liegt, gibt es  $\beta \in C_{n+1}(X; R)$  mit  $\partial_n(\beta) = \alpha$ . Nach Lemma 2 gibt es  $k$  mit  $(B_n)_X^k(\beta) \in C_n^{\mathcal{U}}(X; R)$ . Mit Lemma 1 folgt

$$x = [\alpha] = [(B_n)_X^k(\alpha)] = [(B_n)_X^k(\partial_n \beta)] = [\partial_n((B_{n+1})_X^k(\beta))]$$

Also ist  $x = 0$  in  $H_*(C_*^{\mathcal{U}}(X; R))$ .  $\square$


### 13.13 Bemerkung

Seien  $(C_*, \partial_*)$  und  $(C'_*, \partial'_*)$  Kettenkomplexe.  $s_n: C_n \rightarrow C'_{n+1}$  eine Abbildung, die den Grad um 1 erhöht. Dann ist  $s_{n-1} \circ \partial_n + \partial'_{n+1} \circ s_n$  eine Kettenabbildung:

$$(s_{n-1} \circ \partial_n + \partial'_{n+1} \circ s_n) \circ \partial_{n+1} = \partial'_{n+1} \circ (s_n \circ \partial_{n+1} + \partial'_{n+2} \circ s_{n+1})$$

Insbesondere ist  $s \circ \partial + \partial' \circ s = f - g$  mit  $f$  eine Kettenabbildung. Dann ist auch  $g$  eine Kettenabbildung.

<sup>7</sup>  $(B_n)_X(\sigma) = (B_n)_X(\sigma_*(\text{id}_{|\Delta^n|})) = \sigma_*((B_n)_{|\Delta^n|}(\text{id}_{|\Delta^n|}))$  muss wegen Natürlichkeit gelten

<sup>8</sup> siehe <https://de.wikipedia.org/wiki/Lebesguezahl> 

### 13.14 Definition

Seien  $v_0, \dots, v_p \in |\Delta^n|$ . Dann bezeichnen wir mit  $[v_0, \dots, v_p]$  den singulären  $p$ -Simplex mit  $\sum_{i=0}^p t_i e_i \rightarrow \sum_{i=1}^p t_i v_i$ . Singuläre Simplexes dieser Form heißen **affin**.

### 13.15 Definition

Sei  $\|\cdot\|$  eine Norm auf  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Für einen singulären Simplex  $\sigma: |\Delta^p| \rightarrow |\Delta^n|$  definieren wir den **Durchmesser** durch

$$\text{diam}(\sigma) := \max\{\|\sigma(x) - \sigma(y)\| \mid x, y \in |\Delta^p|\}$$

### 13.16 Lemma 3

Sei  $[v_0, \dots, v_p]$  ein affiner singulärer  $p$ -Simplex in  $|\Delta^n|$ . Dann gilt:

(i)  $\text{diam}([v_0, \dots, v_p]) = \max\{\|v_i - v_j\| \mid 0 \leq i, j \leq p\}$

(ii) Es ist

$$(B_p)_{|\Delta^n|}([v_0, \dots, v_p]) = \sum_{\sigma \in \Sigma_{\{v_0, \dots, v_p\}}} \text{sgn}(\sigma) \underbrace{\left[ \frac{\sum_{i=0}^p \sigma(v_i)}{p+1}, \frac{\sum_{i=0}^{p-1} \sigma(v_i)}{p}, \dots, \sigma(v_0) \right]}_{=: \tau_\sigma}$$

(iii) Für  $\sigma \in \Sigma_{\{v_0, \dots, v_p\}}$  ist  $\text{diam } \tau_\sigma \leq \frac{n}{n+1} \text{diam}[v_0, \dots, v_p]$ .

**Beweis**

(i) Seien  $v, v' \in \text{Im}[v_0, \dots, v_p]$ . Dann ist  $v = \sum_{i=0}^p t_i v_i$ ,  $v' = \sum_{i=0}^p t'_i v_i$  mit  $t_i, t'_i \geq 0$ ,  $\sum_{i=0}^p t_i = 1 = \sum_{i=0}^p t'_i$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \|v - v'\| &= \left\| \sum_{i=0}^p t_i v_i - v' \right\| = \left\| \sum_{i=0}^p t_i v_i - \sum_{i=0}^p t'_i v_i \right\| = \left\| \sum_{i=0}^p t_i (v_i - v') \right\| \leq \sum_{i=0}^p \|v_i - v'\| \\ &\leq \left( \sum_{i=0}^p t_i \right) \max_i \|v_i - v'\| = \max_i \|v_i - v'\| \leq \max_{i,j} \|v_i - v_j\|. \end{aligned}$$

(ii) Per Induktion nach  $p$ .

$p = 0$ : Klar.

$p - 1 \mapsto p$ : Es genügt  $n = p$ ,  $v_0 = e_0, \dots, v_n = e_n$  zu betrachten. Es gilt

$$\begin{aligned} (B_{|\Delta^p|})_p([v_0, \dots, v_p]) &= (K_{\Delta^p}) \circ (B_{|\Delta^p|})_{p-1} \circ \partial_p[e_0, \dots, e_p] \\ &= \sum_{i=0}^p (-1)^i (K_{\Delta^p}) \circ (B_{|\Delta^p|})_{p-1} \circ [e_0, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_p] \\ &= \sum_{i=0}^p (-1)^i \sum_{\sigma \in \Sigma_{\{e_0, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_p\}}} \text{sgn}(\sigma) (K_{\Delta^p}) \left( \left[ \frac{\sigma(e_0) + \dots + \sigma(e_{i-1}) + \sigma(e_{i+1}) + \dots + \sigma(e_p)}{p} \right] \right) \\ &= \sum_{i=0}^p (-1)^i \sum_{\sigma \in \Sigma_{\{e_0, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_p\}}} \text{sgn}(\sigma) \left[ \frac{e_0 + \dots + e_p}{p+1}, \frac{\sigma(e_0) + \dots + \sigma(e_{i-1}) + \sigma(e_{i+1}) + \dots + \sigma(e_p)}{p}, \dots \right] \\ &= \dots = \sum_{\sigma \in \Sigma_{\{e_0, \dots, e_n\}}} \text{sgn}(\sigma) \left[ \frac{\sum_{i=0}^p \sigma(e_i)}{p}, \dots, \dots \right] \end{aligned}$$



(iii) Es genügt  $\sigma = \text{id}$  zu betrachten. Es ist

$$\begin{aligned}
 \text{diam} \left[ \frac{v_0 + \dots + v_p}{p+1}, \frac{v_0 + \dots + v_{p-1}}{p}, \dots, v_0 \right] &\stackrel{(i)}{=} \max_{i < j} \left\| \frac{v_0 + \dots + v_i}{i+1} - \frac{v_0 + \dots + v_j}{j+1} \right\| \\
 &= \max_{i < j} \left\| \frac{v_0 + \dots + v_i}{i+1} - \frac{v_0 + \dots + v_j}{j+1} - \frac{v_{i+1} + \dots + v_j}{j+1} \right\| \\
 &= \max_{i < j} \left\| \frac{(j+1) - (i+1)}{(i+1)(j+1)} (v_0 + \dots + v_i) - \frac{1}{j+1} (v_{i+1} + \dots + v_j) \right\| \\
 &= \max_{i < j} \frac{j-1}{j+1} \left\| \underbrace{\frac{v_0 + \dots + v_i}{i+1}}_{\in \text{Im}[v_0, \dots, v_n]} - \underbrace{\frac{v_{i+1} + \dots + v_j}{j-1}}_{\in \text{Im}[v_0, \dots, v_n]} \right\| \\
 &\leq \max_{i < j} \frac{j-1}{j+1} \text{diam}[v_0, v_i, v_j] \\
 &\leq \max_j \frac{j}{j+1} \text{diam}[v_0, \dots, v_n] \leq \frac{n}{n+1} \text{diam}[v_0, \dots, v_n]
 \end{aligned}$$

## 14 Axiome für Homologie

### 14.1 Bezeichnung

Mit  $V: \text{Top}^2 \rightarrow \text{Top}^2$  bezeichnen wir den Funktor  $V(X, A) = (A, \emptyset) = A$ .

### 14.2 Definition

Eine **Homologietheorie** mit Werten in  $R$ -Moduln ist ein Funktor

$$E_*: \text{HTop}^2 \longrightarrow \text{Gr-}R\text{-Mod}$$

zusammen mit einer natürlichen Transformation  $\partial_{*+1}: E_{*+1} \rightarrow E_* \circ V$ ,<sup>9</sup> sodass folgende Axiome gelten:

- (i) **Paarfolge:** Sei  $(X, A)$  ein Paar von topologischen Räumen. Seien  $X = (X, \emptyset) \xrightarrow{j} (X, A)$  und  $A = (A, \emptyset) \xrightarrow{i} X = (X, \emptyset)$  die Inklusionen. Dann ist

$$\cdots \longrightarrow E_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\partial_{n+1}} E_n(A) \xrightarrow{E_n(i)} E_n(X) \xrightarrow{E_n(j)} E_n(X, A) \xrightarrow{\partial_{n-1}} E_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots$$

eine lange exakte Folge.

- (ii) **Ausschneidung:** Sei  $(X, A)$  ein Paar von topologischen Räumen und  $L \subseteq A$  mit  $\bar{L} \subseteq \overset{\circ}{A}$ . Dann induziert die Inklusion  $i: (X \setminus L, A \setminus L) \hookrightarrow (X, A)$  einen Isomorphismus

$$E_*(i): E_*(X \setminus L, A \setminus L) \xrightarrow{\cong} E_*(X, A)$$

### 14.3 Bemerkung

Homologietheorien sind homotopieinvariant. Oft wird dies als eigenes Axiom formuliert.

### 14.4 Bemerkung

Für jede Homologietheorie gibt es eine Mayer-Vietoris-Folge. Dies ist eine formale Konsequenz aus der Paarfolge und dem Ausschneidungsisomorphismus. Eine einfache Folgerung aus der Mayer-Vietoris-Folge ist, dass jede Homologietheorie mit *endlichen* disjunkten Vereinigungen verträglich ist: Sei dazu  $X = X_1 \amalg \cdots \amalg X_n$  und  $j_i: X_i \rightarrow X$  die Inklusion, dann ist

$$E_*(X_1) \oplus \cdots \oplus E_*(X_n) \xrightarrow{E_*(j_1) \oplus \cdots \oplus E_*(j_n)} E_*(X)$$

ein Isomorphismus.

### 14.5 Definition

Zwei weitere Axiome, die Homologietheorien mit Werten in  $R$ -Moduln erfüllen können, sind:

**Dimensionsaxiom:** Für den Einpunktraum  $\{x_0\}$  ist  $E_0(\{x_0\}) \cong R$  und  $E_n(\{x_0\}) = 0$  für  $n \neq 0$ .

**Disjunkte Vereinigung:** Sei  $X = \coprod_{i \in I} X_i$  und  $j_i: X_i \rightarrow X$  die Inklusion. Dann ist

$$\bigoplus_{i \in I} E_*(j_i): \bigoplus_{i \in I} E_*(X_i) \longrightarrow E_*(X)$$

ein Isomorphismus.

<sup>9</sup> Genauer: Sei  $S: \text{Gr-}R\text{-Mod} \rightarrow \text{Gr-}R\text{-Mod}$  der Funktor  $(SM)_n = M_{n+1}$ . Dann ist  $\partial_*$  eine natürliche Transformation  $S \circ E_* \rightarrow E_* \circ V$ , für  $(X, A)$  also  $S(E_*(X, A)) \rightarrow E_*(V(X, A))$ ,  $E_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\partial_*} E_n(A)$ .

## 14.6 Bemerkung

In Kapitel 6 haben wir  $\text{GR-}R\text{-MOD}$  als die Kategorie der  $\mathbb{N}$ -graduierten  $R$ -Moduln definiert. Für viele Homologietheorien muss man diese Kategorie etwas vergrößern und  $\mathbb{Z}$ -graduierte  $R$ -Moduln zulassen. Objekte sind dann Folgen  $(M_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  über  $\mathbb{Z}$  von  $R$ -Moduln  $M_n$ .

## 14.7 Bemerkung

- Für jede Homologietheorie  $E_*$  gilt:  $E_*(S^n) \cong E_*(\{\text{pt}\}) \oplus E_{*-n}(\{\text{pt}\})$
- Die Konstruktion des zellulären Kettenkomplexes in singulärer Homologie benutzte nur die Axiome aus 14.2. Für die Identifikation der zellulären Homologie mit der singulären Homologie waren zusätzlich die Axiome aus 14.5 notwendig. Ohne das Axiom über disjunkte Vereinigungen kann man nur endliche CW-Komplexe behandeln. Ohne das Dimensionsaxiom erhält man an der Stelle der zellulären Kettenkomplex eine sogenannte **Spektralfolge**, die Atiyah-Hirzebruch Spektralfolge.

Aufgabe 1 Blatt 12

## 14.8 Definition

Seien  $(E_*, \partial_*^E)$  und  $(F_*, \partial_*^F)$  Homologietheorien. Ein **Morphismus von Homologietheorien** ist eine natürliche Transformation  $\tau_*: E_* \rightarrow F_*$ , sodass  $\tau_* \circ \partial_{*+1}^E = \partial_{*+1}^F \circ \tau_{*+1}$ . Also kommutiert für alle  $(X, A)$  das folgende Diagramm

$$\begin{array}{ccc} E_{n+1}(X, A) & \xrightarrow{\partial_{n+1}^E} & E_n(A) \\ \downarrow \tau_{n+1, (X, A)} & & \downarrow \tau_{n, A} \\ F_{n+1}(X, A) & \xrightarrow{\partial_{n+1}^F} & F_n(A) \end{array}$$

## 14.9 Satz

Sei  $\tau_*: (E_*, \partial_*^E) \rightarrow (F_*, \partial_*^F)$  ein Morphismus von Homologietheorien. Ist

$$(\tau_*)_{\{\text{pt}\}}: E_*(\{\text{pt}\}) \rightarrow F_*(\{\text{pt}\})$$

ein Isomorphismus, dann ist  $(\tau_*)_X$  für jeden endlichen CW-Komplex ein Isomorphismus. Sind  $E_*$  und  $F_*$  mit beliebigen disjunkten Vereinigungen verträglich, so ist  $(\tau_*)_X$  für alle CW-Komplexe ein Isomorphismus.

### Beweis

**Schritt 1:** Sei  $X$  ein 0-dimensionaler endlicher CW-Komplex, also eine endliche Menge mit der diskreten Topologie. Für  $x \in X$  sei  $i_x: \{x\} \rightarrow X$  die Inklusion. Wir erhalten folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} E_*(X) & \xrightarrow{(\tau_*)_X} & F_*(X) \\ \uparrow \cong & & \uparrow \cong \\ \bigoplus_{x \in X} E_*(\{x\}) & \xrightarrow[\cong]{\bigoplus_{x \in X} (\tau_*)_{\{x\}}} & \bigoplus_{x \in X} F_*(\{x\}) \end{array}$$

Das Diagramm kommutiert, da  $\tau_*$  eine natürliche Transformation ist.

**Schritt 2:** Angenommen  $(\tau_*)_X$  ist ein Isomorphismus für jeden endlichen CW-Komplex von Dimension echt kleiner als  $n$ . Sei  $X$  ein  $n$ -dimensionaler endlicher CW-Komplex:

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{i \in I} S^{n-1} & \xrightarrow{\coprod q_i^{(n)}} & X^{(n-1)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{i \in I} D^n & \xrightarrow{\coprod Q_i^{(n)}} & X \end{array}$$

Sei  $X_+^{(n-1)} := X^{(n-1)} \cup \coprod_{i \in I} Q_i^{(n)}(D^n \setminus \{0\})$  und  $Z := \coprod_{i \in I} Q_i^{(n)}(D^n)$ . Dann sind  $X_+^{(n-1)}$ ,  $Z$  und  $Z \cap X_+^{(n-1)}$  homotopieäquivalent zu endlichen CW-Komplexen mit Dimension echt kleiner  $n$ . Insbesondere sind  $(\tau_*)_{X_+^{(n-1)}}$ ,  $(\tau_*)_Z$  und  $(\tau_*)_{X_+^{(n-1)} \cap Z}$  Isomorphismen. Da  $X_+^{(n-1)} \subseteq X$  und  $Z \subseteq X$  offen sind, erhalten wir in  $E_*$  und  $F_*$  zugehörigen Mayer-Vietoris-Folgen:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots \longrightarrow & E_*(X_+^{(n-1)} \cap Z) & \longrightarrow & E_*(X_+^{(n-1)}) \oplus E_*(Z) & \longrightarrow & E_*(X) & \xrightarrow{\partial_*^{MV,E}} E_{*-1}(X_+^{(n-1)} \cap Z) \longrightarrow \cdots \\ & \cong \downarrow (\tau_*)_{X_+^{(n-1)} \cap Z} & & \cong \downarrow (\tau_*)_{X_+^{(n-1)} \oplus (\tau_*)_Z} & & \downarrow (\tau_*)_X & & \cong \downarrow (\tau_{*-1})_{X_+^{(n-1)} \cap Z} \\ \cdots \longrightarrow & F_*(X_+^{(n-1)} \cap Z) & \longrightarrow & F_*(X_+^{(n-1)}) \oplus F_*(Z) & \longrightarrow & F_*(X) & \xrightarrow{\partial_*^{MV,F}} F_{*-1}(X_+^{(n-1)} \cap Z) \longrightarrow \cdots \end{array}$$

Da  $\tau_*$  eine natürliche Transformation ist, kommutierten die beiden linken Vierecke. Da  $\tau_*$  mit der Randabbildung der Paarfolgen von  $E_*$  und  $F_*$  kommutiert, kommutiert auch  $\tau_*$  mit den Randabbildungen der Mayer-Vietoris-Folgen in  $E_*$  und  $F_*$ . Also kommutiert auch das dritte Viereck. Mit dem 5er-Lemma (8.15) folgt, dass auch  $(\tau_*)_X$  ein Isomorphismus ist.

Erfüllen  $E_*$  und  $F_*$  auch das Dimensionsaxiom, so zeigen die Argumente aus Schritt 1 und 2, dass  $(\tau_*)_X$  ein Isomorphismus ist für jeden endlich dimensionalen CW-Komplex.

**Schritt 3:** Sei  $X$  ein CW-Komplex. Sei

$$X^+ := \left\{ (x, t) \mid x \in X^{(n)}, t \in (n + 1/2, \infty) \right\} \subseteq X \times (1/2, \infty)$$

Sei weiter

$$X_0 := X^+ \cap \left( X \times ((1/2, \infty) \setminus \{1, 3, 4, \dots\}) \right) \quad X_1 := X^+ \cap \left( X \times ((1/2, \infty) \setminus \{2, 4, 6, \dots\}) \right)$$

Dann sind  $X_0$ ,  $X_1$  und  $X_0 \cap X_1$  homotopieäquivalent zu disjunkten Vereinigungen von endlichen dimensional CW-Komplexen. Sind  $E_*$  und  $F_*$  mit beliebigen Vereinigungen verträglich, so folgt dass  $(\tau_*)_{X_0}$ ,  $(\tau_*)_{X_1}$  und  $(\tau_*)_{X_0 \cap X_1}$  Isomorphismen sind. Da  $X$  homotopieäquivalent zu  $X^+$  ist,  $X^+ = X_0 \cup X_1$  und  $X_0$  und  $X_1$  offen in  $X^+$  sind, folgt wie in Schritt 2 mit der 5er-Lemma und der Mayer-Vietoris-Folge, dass auch  $(\tau_*)_X$  ein Isomorphismus ist.  $\square$

## 15 Zusammenhang zwischen $\pi_1(X, x_0)$ und $H_1(X; \mathbb{Z})$

Zur Vorbereitung müssen wir kurz wiederholen, was eine Abelsonierung ist:

RevChap15

### 15.1 Definition

Sei  $G$  eine Gruppe. Dann heißt die Untergruppe von  $G$ , die erzeugt wird von Elementen der Form  $[g, h] := ghg^{-1}h^{-1}$ , **Kommutatorgruppe** von  $G$ . Wir schreiben hierfür auch  $[G, G] \subset G$ .

### 15.2 Lemma

$[G, G] \subset G$  ist ein Normalteiler von  $G$ .

#### Beweis

Seien  $g_0, \dots, g_n, h \in G$ . Dann ist

$$h[g_0, g_1] \cdot \dots \cdot [g_{n-1}, g_n] \cdot h^{-1} = [hg_0h^{-1}, hg_1h^{-1}] \cdot \dots \cdot [hg_{n-1}h^{-1}, hg_nh^{-1}] \quad \square$$

### 15.3 Definition

Der Quotient  $G^{\text{ab}} := G/[G, G]$  heißt **Abelsonierung** (manchmal auch Abelianisierung) von  $G$ .

Für eine abelsche Gruppe  $G$  ist sinnigerweise  $G^{\text{ab}} = G$ .

### 15.4 Bemerkung

- $\text{GRUPPEN} \xrightarrow{\text{ab}} \text{ABEL.GRUPPEN}, \quad G \mapsto G^{\text{ab}}$  definiert einen Funktor.
- Dieser Funktor hat die folgende universelle Eigenschaft: Zu jeder abelschen Gruppe  $A$  und einem Homomorphismus  $\varphi: G \rightarrow A$  existiert ein eindeutiger Gruppenhomomorphismus  $\varphi^{\text{ab}}: G^{\text{ab}} \rightarrow A$  sodass folgendes Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi} & A \\ \downarrow & \nearrow \varphi^{\text{ab}} & \\ G^{\text{ab}} & & \end{array}$$

### 15.5 Schleifen und 1-Zykel

Sei  $X$  ein topologischer Raum. Da  $|\Delta^1| \cong [0, 1]$ , liefert jeder Pfad  $\omega: [0, 1] \rightarrow X$  einen 1-Simplex in  $C_1(X; \mathbb{Z})$ .

### 15.6 Lemma 1

Seien  $\omega, \omega': [0, 1] \rightarrow X$  Pfade in  $X$  mit  $\omega(1) = \omega'(0)$ , dann ist  $\omega * \omega' - \omega - \omega' \in C_1(X; \mathbb{Z})$  der Rand eines 2-Simplex.

#### Beweis

Zur Erinnerung:  $|\Delta^2| = \left\{ (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 \mid \sum_{i=0}^2 x_i = 1, x_j \geq 0 \forall j \in \{0, 1, 2\} \right\}$ . Betrachte:  $\sigma: |\Delta^2| \rightarrow X$  definiert durch

$$(x_0, x_1, x_2) \mapsto (\omega * \omega')\left(\frac{1}{2}(1 - x_0 - x_2)\right) = \omega * \omega'\left(\frac{1}{2}(2x_0 + x_1)\right)$$

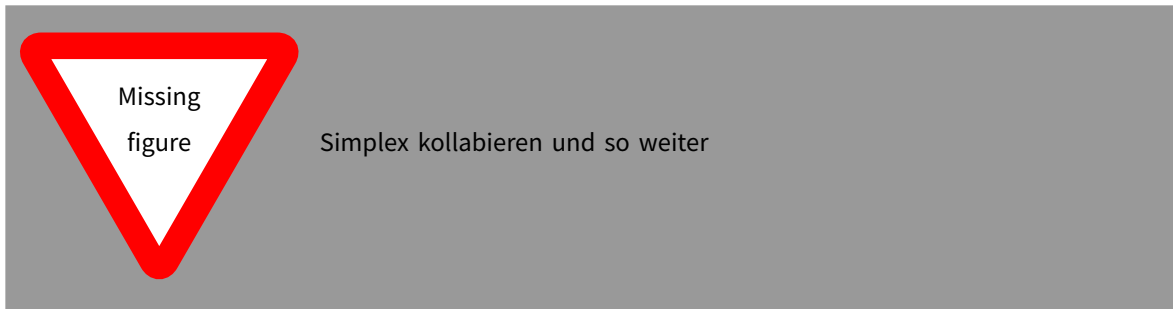
Es gilt

$$(\delta_0 \sigma)(s) = \sigma(0, s, 1-s) = \omega * \omega' \left( \frac{1}{2}s \right) = \omega(s)$$

$$(\delta_1 \sigma)(s) = \sigma(s, 0, 1-s) = \omega * \omega * (s)$$

$$(\delta_2 \sigma)(s) = \sigma(s, 1-s, 0) = (\omega * \omega') \left( \frac{1}{2}(1+s) \right) = \omega'(s)$$

Dann folgt  $\partial \sigma = \delta_0 \sigma - \delta_1 \sigma + \delta_2 \sigma = \omega - \omega * \omega' + \omega'$ . Bild: □



## 15.7 Lemma 2

- a) Sei  $\omega: [0, 1] \rightarrow X$  ein Pfad, sei  $\omega^{-1}(s) = \omega(1-s)$ . Dann ist  $\omega + \omega^{-1}$  Rand einer 2-Kette, also von einem Element von  $C_2(X; \mathbb{Z})$
- b) Der konstante Pfad ist Rand einer 2-Kette.

**Beweis**

- a) Sei  $\sigma: |\Delta^2| \rightarrow X$  gegeben durch  $\sigma(x_0, x_1, x_2) = \omega(x_1)$ . Dann ist

$$\partial \sigma = \omega - \underbrace{\text{const}_{\omega(0)}}_{=\partial \tau} + \omega^{-1}$$

Also ist nach b)  $\omega + \omega^{-1} = \partial(\sigma - \tau)$ .

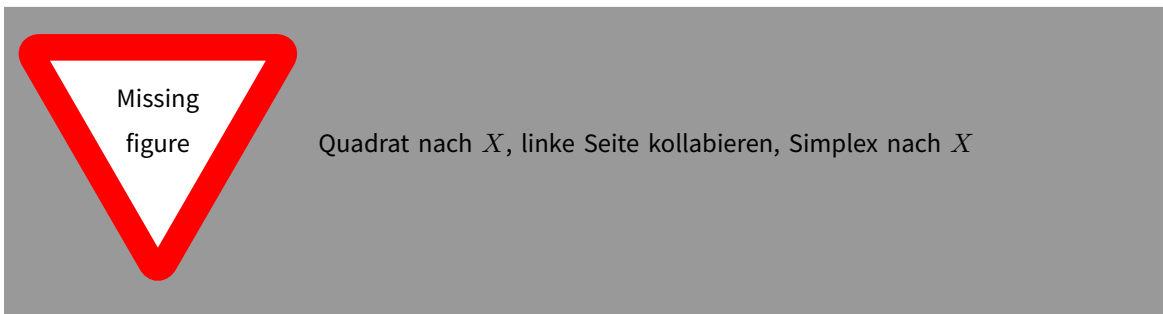
- b) Der Rand des konstanten 2-Simplex ist der konstante Pfad. □

## 15.8 Lemma 3

Sind  $\omega, \omega': [0, 1] \rightarrow X$  Pfade in  $X$  mit  $\omega(0) = \omega'(0)$  und  $\omega(1) = \omega'(1)$ , dann gilt: Ist  $\omega$  homotop zu  $\omega'$  relativ Endpunkte, dann ist  $\omega - \omega'$  Rand einer 2-Kette.

**Beweis**

Sei  $H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  eine Homotopie zwischen  $\omega$  und  $\omega'$  mit  $H(0, s) = \omega(s)$ ,  $H(1, s) = \omega'(s)$ ,  $H(t, 0) = \text{const}_{\omega(0)}$  und  $H(t, 1) = \text{const}_{\omega(1)}$ .



Wähle Homöomorphismus durch

$$\kappa: [0,1] \times [0,1] / [0,1] \times \{0\} \rightarrow |\Delta^2|, \quad [t,s] \mapsto (st, s(1-t), (1-s))$$

Betrachte  $\sigma := H \circ \kappa^{-1}: |\Delta^2| \rightarrow X$ . Die Ränder sind  $\delta_0\sigma = \omega$  und  $\delta_1\sigma = \omega'$  und  $\delta_2\sigma = \text{const}_{\omega(1)}$ . Also folgt, dass  $\omega - \omega'$  der Rand einer 2-Kette ist.

## 15.9 Die Hurewicz-Abbildung

Falls  $\omega: [0,1] \rightarrow X$  eine Schleife ist, dann ist  $\partial\omega = \omega(1) - \omega(0) = 0$ . Also repräsentiert  $\omega$  ein Element  $[\omega] \in H_1(X)$ . Nach Lemma 3 erhalten wir eine wohldefinierte Abbildung  $\theta: \pi_1(X, x_0) \rightarrow H_1(X)$ . Nach Lemma 1 bildet diese Abbildung die Verknüpfung von Schleifen auf Summen von 1-Ketten ab.

$[\cdot]$  für die Homotopieklassen und  $[\cdot]$  für Homotopieklassen

$$[\omega * \omega'] = [\omega] + [\omega'] \quad , \quad [\omega^{-1}] = -[\omega]$$

Zusammen mit Lemma 2 erhalten wir einen Gruppenhomomorphismus. Aus der universellen Eigenschaft der Abelsierung erhalten wir

$$\theta^{\text{ab}}: \pi_1(X, x_0)^{\text{ab}} \longrightarrow H_1(X; \mathbb{Z})$$

## 15.10 Theorem (Hurewicz)

Für wegzusammenhängende Räume ist  $\theta^{\text{ab}}$  ein Isomorphismus.

### Beweis

Sei  $X$  wegzusammenhängend. Wähle für jedes  $x \in X$  einen Pfad  $\lambda_x$  von  $x_0$  nach  $x$ . Wähle  $\lambda_{x_0} = \text{const}_{x_0}$ . Betrachte

$$\bar{\rho}: C_1(X; \mathbb{Z}) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)^{\text{ab}} \quad , \quad \omega \mapsto [\lambda_{\omega(0)} * \omega * \lambda_{\omega(1)}^{-1}]$$

Somit (nach Lemma 4) induziert  $\bar{\rho}$  einen Homomorphismus:  $\rho: H_1(X; \mathbb{Z}) \rightarrow \pi_1(X, x_0)^{\text{ab}}$ . Es gilt:

$$(\rho \circ \theta)[\omega] = [\lambda_{\omega(0)} * \omega * \lambda_{\omega(0)}^{-1}] = [\omega]$$

Wir haben  $\lambda: C_0(X; \mathbb{Z}) \rightarrow C_1(X; \mathbb{Z})$ ,  $\sum_i n_i x_i \mapsto \sum_i n_i \lambda_{x_i}$ . Mit Lemma 5 folgt, dass  $\theta^{\text{ab}}$  ein Isomorphismus ist für wegzusammenhängende Räume  $X$ .  $\square$

## 15.11 Lemma 4

$\bar{\rho}$  bildet die Ränder von 2-Simplizes auf  $1 \in \pi_1(X, x_0)^{\text{ab}}$  ab.

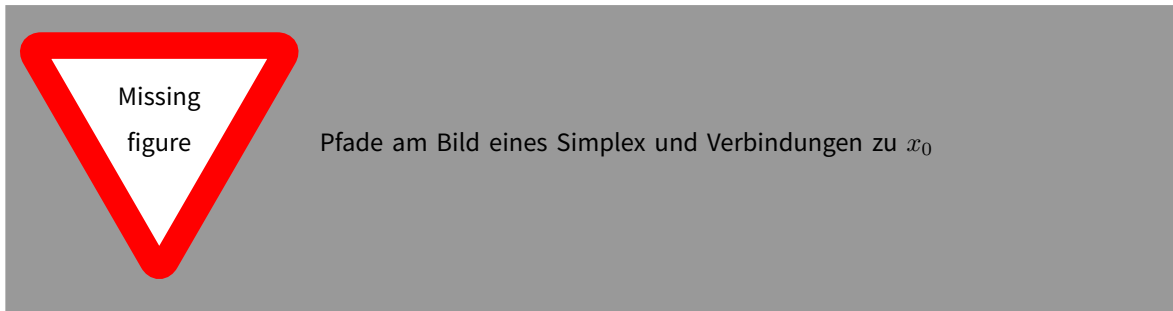
### Beweis

Sei  $\sigma \in C_2(X; \mathbb{Z})$  ein 2-Simplex. Es gilt

$$\begin{aligned}\bar{\rho}(\partial\sigma) &= \bar{\rho}(\partial_0\sigma - \partial_1\sigma + \partial_2\sigma) = \bar{\rho}(\omega_0) \cdot \bar{\rho}(\omega_1)^{-1} \cdot \bar{\rho}(\omega_2) \\ &= \left[ \lambda_{\omega_0(0)} * \omega_0 * \lambda_{\omega_0(1)}^{-1} * \underbrace{(\lambda_{\omega_1(0)} * \omega_1 * \lambda_{\omega_1(1)})^{-1}}_{=\lambda_{\omega_0(1)} * \omega_1^{-1} * \lambda_{\omega_1(0)}^{-1}} * \lambda_{\omega_2(0)} * \omega_2 * \lambda_{\omega_2(1)} \right] \\ &= \left[ \lambda_{\omega_0(0)} * \underbrace{\omega_0 * \omega_1^{-1} * \omega_2}_{=:\gamma} * \lambda_{\omega_2(1)=\omega_0(0)}^{-1} \right]\end{aligned}$$

Der Pfad  $\gamma$  ist die Schleife, die einmal auf dem Rand des 2-Simplex herumläuft. Also  $\gamma: [0, 1] \rightarrow |\partial\Delta^2| \hookrightarrow |\delta^2| \rightarrow X$ . Aber  $|\partial\Delta^2| \hookrightarrow |\Delta^2|$  ist homotop zur konstanten Abbildung auf  $\omega_0(0)$  mit einer Homotopie, die den Punkt  $\omega_0(0)$  fixiert.

$$= \left[ \lambda_{\omega_0(0)} * \lambda_{\omega_0(0)}^{-1} \right] = 1$$



### 15.12 Lemma 5

Sei  $\omega: \Delta^1 \rightarrow X$  ein 1-Simplex, dann gilt  $\theta \circ \bar{\rho}(\omega) = \llbracket \omega - \lambda_{\partial\omega} \rrbracket$

#### Beweis

Es gilt

$$(\theta \circ \bar{\rho})(\omega) = \theta\left(\left[\lambda_{\omega(0)} * \omega * \lambda_{\omega(1)}^{-1}\right]\right) = \llbracket \lambda_{\omega(0)} * \omega * \lambda_{\omega(1)}^{-1} \rrbracket = \llbracket \omega \rrbracket - \underbrace{\llbracket \lambda_{\omega(1)} \rrbracket + \llbracket \lambda_{\omega(0)} \rrbracket}_{\lambda_{\omega(1)} - \omega(0) = \lambda_{\partial\omega}}$$

### 15.13 Corollar

$$(\theta \circ \rho)(\llbracket c \rrbracket) = \llbracket c \rrbracket. \llbracket c \rrbracket \in H_1(X; \mathbb{Z})$$

## Der Satz von Hurewicz

### 15.14 Definition

Sei  $X$  ein topologischer Raum mit Basispunkt  $x_0 \in X$ , sei  $I = [0, 1]$ . Sei  $n \in \mathbb{N}_0$ . Die **n-te absolute Homotopiegruppe**  $\pi_n(X, x_0)$  ist die Menge der Äquivalenzklassen von stetigen Abbildungen  $\omega: I^n \rightarrow X$



mit  $\omega(\partial I^n) = x_0$ . Die Äquivalenzrelation ist Homotopie relativ zu  $\partial I^n$ , d.h.  $H: I^n \times [0, 1] \rightarrow X$  erfüllt  $H_t(\partial I^n) = x_0$  für alle  $t \in [0, 1]$ . Die Gruppenverknüpfung in  $\pi_n(X, x_0)$  ist gegeben durch

$$(\omega * \omega')(s_1, \dots, s_n) = \begin{cases} \omega(2s_1, s_2, \dots, s_n), & \text{falls } 0 \leq s_1 \leq \frac{1}{2} \\ \omega'(2s_1 - 1, s_2, \dots, s_n), & \text{falls } \frac{1}{2} \leq s_1 \leq 1 \end{cases}$$

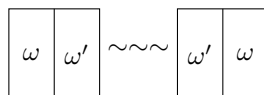
Bild für  $n = 2$ :



### 15.15 Eigenschaften von $\pi_n(X, x_0)$

- „ $*$ “ ist assoziativ, hat die konstante Abbildung auf  $x_0$  als neutrales Element und  $\omega^{-1}(s_1, \dots, s_n) = \omega(1 - s_1, s_2, \dots, s_n)$  als inverses Element.
- „ $*$ “ ist abelsch für  $n \geq 2$  (Eckmann-Hilton Argument)

Zeichnung fertig machen



- $\pi_n: \text{TOP} \rightarrow \text{ABEL.GRUPPEN}$  ist ein Funktor, d.h.  $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  induziert  $\pi_n(f): \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$ .
- Da  $I^n / \partial I^n \cong S^n$ , ergibt sich  $\pi_n(X, x_0)$  auch aus den punktierten Homotopieklassen von Abbildungen  $(S^n, *) \rightarrow (X, x_0)$ .
- Falls  $x_0$  und  $x'_0$  in der gleichen Wegzusammenhangskomponente von  $X$  liegen, dann induziert ein Weg von  $x_0$  nach  $x'_0$  einen Isomorphismus  $\pi_n(X, x_0) \cong \pi_n(X, x'_0)$

### 15.16 Definition

Sei  $n \in \mathbb{N}_0$ . Ein topologischer Raum  $X$  heißt **n-zusammenhängend**, falls  $\pi_0(X) = \{*\}$  und  $\pi_k(X, x_0)$  trivial ist für alle  $k \leq n$  und einen Basispunkt  $x_0 \in X$ .

### 15.17 Bemerkung

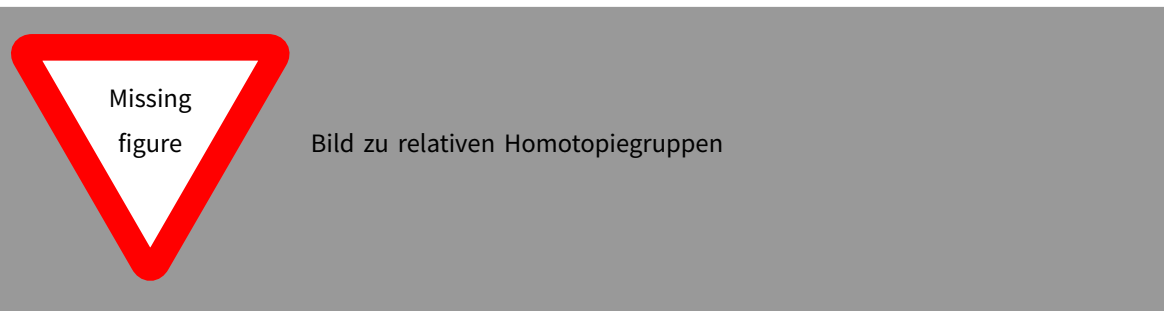
Da ein  $n$ -zusammenhängender Raum  $X$  für  $n \geq 0$  mindestens wegzusammenhängend ist, gilt  $\pi_k(X, x_0) \cong \pi_k(X, x'_0)$ . Somit ist die Definition unabhängig von der Wahl des Basispunktes.

### 15.18 Beispiel

0-zusammenhängend entspricht wegzusammenhängend und 1-zusammenhängend entspricht wegzusammenhängend und einfach zusammenhängend.

### 15.19 Definition: Relative Homotopiegruppen

Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $A \subset X$  ein Unterraum und  $x_0 \in A$  ein Basispunkt von  $A$  und  $X$ . Wir identifizieren  $I^{n-1} \subset I^n$  mit der Seitenfläche von  $I^n$ , für die  $s_n = 0$  gilt. Außerdem setzen wir  $J^{n-1} = \partial I^n \setminus I^{n-1}$ . Die **relative Homotopiegruppe**  $\pi_n(X, A, x_0)$  besteht aus den Homotopieklassen von stetigen Abbildungen  $\omega: I^n \rightarrow X$  mit  $\omega(I^{n-1}) \subset A$ ,  $\omega(J^{n-1}) = x_0$ . Die Homotopien müssen ebenfalls  $H_t(I^{n-1}) \subset A$  und  $H_t(J^{n-1}) = x_0$  für alle  $t \in [0, 1]$  erfüllen.



Alternativ:  $\pi_n(X, A, x_0)$  sind Homotopieklassen von Abbildungen  $(D^n, S^{n-1}, *) \rightarrow (X, A, x_0)$

### 15.20 Bemerkung

- Homotopiegruppen bilden *keine* verallgemeinerte Homologietheorie.
- Es gibt eine lange exakte Sequenz von Homotopiegruppen:

$$\cdots \longrightarrow \pi_n(A, x_0) \longrightarrow \pi_n(X, x_0) \longrightarrow \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, x_0) \longrightarrow \cdots$$

### 15.21 Die Hurewicz-Abbildung

Sei  $\vartheta: |\Delta^n| \xrightarrow{\cong} D^n$  ein Homöomorphismus. Dies liefert eine Homologieklass  $[\vartheta] \in H_n(D^n, S^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$ . Diese Klasse ist ein Generator der Gruppe  $H_n(D^n, S^{n-1})$ . Sei  $[\omega] \in \pi_n(X, A, x_0)$  repräsentiert durch  $\omega: (D^n, S^{n-1}, *) \rightarrow (X, A, x_0)$ . Setze

$$\theta_n: \pi_n(X, A, x_0) \longrightarrow H_n(X, A), \quad [\omega] \longmapsto \omega_*[\vartheta]$$

für  $n \geq 2$ . Dies ist wohldefiniert, denn falls  $\omega$  homotop zu  $\omega'$  (bezüglich  $(A, x_0)$ ), dann ist  $\omega_* = \omega'_*$

### 15.22 Lemma

$\theta_n$  ist ein Gruppenhomomorphismus.

### 15.23 Theorem (Hurwicz)

Seien  $(X, A)$  mit  $A \subset X$  beide wegzusammenhängend. Sei  $\pi_1(A, x_0) = 1$  und seien  $\pi_k(X, A, x_0) = 0$  für  $k \leq n-1$ ,  $n \geq 2$ . Dann ist

$$\theta_n: \pi_n(X, A, x_0) \longrightarrow H_n(X, A)$$

ein Isomorphismus.

### 15.24 Korollar

Ist  $X$  ein  $(n-1)$ -zusammenhängender Raum für ein  $n \geq 2$ , dann ist

$$\theta_n: \pi_n(X, x_0) = (X, x_0, x_0) \longrightarrow H_n(X, x_0) \cong H_n(X)$$

ein Isomorphismus.

### 15.25 Satz

Sei  $n \geq 1$ . Dann ist  $\pi_n(S^n, *) \cong \mathbb{Z}$  und  $\pi_k(S^n, *) = 0$  für  $k < n$ .

**Beweis**

Für  $n = 1$  gilt  $\pi_0(S^n, *) = \{*\}$  und  $\pi_1(S^1, *) \cong \mathbb{Z}$ . Für  $n > 1$  wissen wir aus dem letzten Semester  $\pi_1(S^n, *) = 1$  und  $S^n$  wegzusammenhängend, also ist  $S^n$  1-zusammenhängend.

Angenommen  $\pi_i(S^n, *) = 0$  für  $i = 0, \dots, k$ ,  $0 \leq k < n$ . Dann ist  $S^n$   $k$ -zusammenhängend und wir erhalten

$$\pi_{k+1}(S^n, *) \xrightarrow{\cong} H_{k+1}(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{falls } k+1 = n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Falls  $k+1 < n$ , so ist auch  $\pi_{k+1}(S^n, *) = 0$ , sonst sind wir fertig. □

## 16 Die Fundamentalklasse

### 16.1 Beispiel

Wir betrachten zu einigen uns gut bekannten Mannigfaltigkeiten die Homologiegruppen in der Dimension der Mannigfaltigkeit:

- $H_n(\mathbb{R}^n) = 0$
- $H_n(S^n) = \mathbb{Z}$
- $H_2(T^2) = \mathbb{Z}$
- $H_{2n}(\mathbb{C}P^n) = \mathbb{Z}$
- $H_{2n}(S^n \times \mathbb{R}^n) = 0$
- $H_n(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}$ , falls  $n$  ungerade, 0 sonst.

RevChap16

### 16.2 Bemerkung

Sei  $M$  ein  $n$ -Mannigfaltigkeit und  $x \in M$ . Dann gilt (wegen Ausschneidung und der Paarfolge)

$$H_n(M, M \setminus \{x\}; R) \cong H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}; R) \cong H_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}; R) \cong H_{n-1}(S^{n-1}; R) \cong R$$

### 16.3 Definition

Sei  $M$  eine  $n$ -Mannigfaltigkeit und  $x \in M$ . Eine (homologische) **Orientierung** (über  $R$ ) im Punkt  $x$  ist ein Erzeuger  $\mu_x$  von  $H_n(M, M \setminus \{x\}, R)$ .

#### Bemerkung

Über  $R = \mathbb{Z}$  gibt es in jedem Punkt genau zwei Orientierungen, da  $\mathbb{Z}$  genau zwei Erzeuger hat. Über  $R = \mathbb{F}_2$  gibt es in jedem Punkt eine eindeutige Orientierung, da  $\mathbb{F}_2$  genau einen Erzeuger hat.

### 16.4 Notation

Seien  $A \subseteq B \subseteq X$  Unterräume. Sei  $i: (X, X \setminus B) \hookrightarrow (X, X \setminus A)$  die Inklusion. Ist  $v \in H_n(X, X \setminus B; R)$ , so nennen wir

$$v|_A := i_*(v)$$

die Einschränkung von  $v$  auf  $A$ . Für  $A = \{x\}$  schreiben wir  $v|_x := v|_{\{x\}}$ .

### 16.5 Definition

Sei  $M$  eine  $n$ -Mannigfaltigkeit. Eine (homologische) **Orientierung** von  $M$  über  $R$  ist eine Zuordnung  $M \ni x \mapsto \mu_x \in H_n(M, M \setminus \{x\}; R)$ , die für jeden Punkt  $x \in M$  eine Orientierung über  $R$  im Punkt  $x$  auswählt, sodass folgende Bedingung erfüllt ist: Für alle  $x \in M$  gibt es eine Umgebung  $U$  von  $x \in M$  und  $\mu_U \in H_n(M, M \setminus U; R)$  mit  $\mu_y = \mu_U|_y$  für alle  $y \in U$ .

Gibt es eine solche Orientierung, so heißt  $M$  **orientierbar**. Eine Mannigfaltigkeit zusammen mit einer Orientierung heißt eine **orientierte Mannigfaltigkeit**.

### 16.6 Beispiel

Für  $M = \mathbb{R}^n$  betrachte  $U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$ . Dann ist wegen Homotopieinvarianz

$$H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}; R) \cong H_n(\overline{U}, \overline{U} \setminus U; R) \cong H_n(D^n, S^{n-1}; R) = R$$

mit  $\overline{U} = D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$  und  $\overline{U} \setminus U = S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ . Für jedes  $y \in U$  ist  $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus U) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{y\})$  eine Homotopieinvarianz. Ist  $\mu_U \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}; R)$  ein Erzeuger, so ist also  $\mu_y = \mu_U|_y$  eine Orientierung von  $\mathbb{R}^n$  in  $y$  für alle  $y \in U$ .

## 16.7 Beispiel

Sei  $\mu_{S^n} \in \tilde{H}_n(S^n; R)$  ein Erzeuger. Für  $x \in S^n$  ist  $\tilde{H}_*(S^n \setminus \{x\}; R) = 0$  und daher die Einschränkungsabbildung  $\tilde{H}_n(S^n; R) \rightarrow \tilde{H}_*(S^n \setminus \{x\}; R) = 0$  ein Isomorphismus und  $\mu_{S^n}|_x$  ist ein Erzeuger von  $\tilde{H}_n(S^n, S^n \setminus \{x\}; R)$ . Daher ist  $(\mu_{S^n}|_x)_{x \in S^n}$  eine Orientierung von  $M$  über  $R$ .

## 16.8 Bezeichnung

Eine **geschlossene Mannigfaltigkeit** ist eine kompakte Mannigfaltigkeit (ohne Rand).

## 16.9 Satz

Sei  $M$  eine geschlossene  $n$ -Mannigfaltigkeit. Dann ist  $M$  genau dann  $R$ -orientierbar, wenn es  $\mu \in H_n(M; R)$  gibt, sodass  $\mu|_x \in H_n(M, M \setminus \{x\}; R)$  für jedes  $x$  eine Orientierung von  $M$  in  $x$  ist. Ist  $M$  zusammenhängend, so ist  $\mu$  ein Erzeuger von  $H_n(M; R)$  und  $H_n(M; R) \cong R$ .

### Beweis (mit 16.14)

$H_n(M; R)$  und  $\Gamma(M, \mathcal{H})$  sind beide mit  $\coprod$  verträglich. Daher können wir auch annehmen, dass  $M$  zusammenhängend ist. Da  $M$  kompakt ist, können wir in dem Lemma 16.14  $A = M$  setzen und wir erhalten für jede Orientierung  $s \in \Gamma(M, \mathcal{H})$  eine Klasse  $\mu \in H_n(M; R)$  mit  $\mu|_x$ . Nach der Überlagerungstheorie aus dem letzten Semester ist jeder Schnitt von  $\mathcal{H}$  schon durch seinen Wert an einem Punkt festgelegt. Insbesondere ist  $\text{ev}_x: \Gamma(M, \mathcal{H}) \rightarrow H_n(M, M \setminus \{x\}; R) \cong R$  injektiv. Ist  $M$   $R$ -orientierbar, so ist  $\text{ev}_x$  ein Isomorphismus.  $\square$

## 16.10 Definition

Sei  $M$  eine geschlossene  $n$ -Mannigfaltigkeit. Sei  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_R$  die disjunkte Vereinigung aller  $H_n(M, M \setminus \{x\}; R)$  mit  $x \in M$ . Wir definieren eine Topologie auf  $\mathcal{H}$  durch:

$$V \subseteq \mathcal{H} \text{ offen} \Leftrightarrow \forall v \in V \text{ mit } v \in H_n(M, M \setminus \{x\}; R) \text{ gibt es eine Umgebung } U \text{ von } x \text{ in } M \\ \text{und } v_U \in H_n(M, M \setminus U, R) \text{ mit } v_U|_x = v \text{ und } v_U|_y \in V \text{ für alle } y \in U.$$

Wir definieren  $\pi: \mathcal{H} \rightarrow M$  durch  $\pi(v) = x$  für  $v \in H_n(M, M \setminus \{x\}; R)$ . Es gilt  $\pi^{-1}(\{x\}) = H_n(M, M \setminus \{x\}; R)$ . Mit  $\Gamma(M, \mathcal{H})$  bezeichnen wir die Menge aller stetigen Schnitte  $s: M \rightarrow \mathcal{H}$  für  $\pi$ , das heißt

$$\Gamma(M, \mathcal{H}) = \{s: M \rightarrow \mathcal{H} \text{ stetig} \mid \pi \circ s = \text{id}_M\}$$

## 16.11 Bemerkung

- 1) Für jedes  $x \in M$  erbt  $H_n(M, M \setminus \{x\}; R) \subseteq \mathcal{H}$  die diskrete Topologie.
- 2)  $\pi: \mathcal{H} \rightarrow M$  ist eine Überlagerung.
- 3)  $\Gamma(M, \mathcal{H})$  ist ein  $R$ -Modul. Sind  $s, s' \in \Gamma(M, \mathcal{H})$  und  $r \in R$ , so können wir  $s + s'$  und  $r \cdot s$  punktweise erklären:

$$(s + s')(x) := s(x) + s'(x) \in H_n(M, M \setminus \{x\}; R) \\ (r \cdot s)(x) := r \cdot s(x) \in H_n(M, M \setminus \{x\}; R)$$

- 4)  $R$ -Orientierungen von  $M$  entsprechen genau den Schnitten  $s \in \Gamma(M, \mathcal{H})$  für die  $s(x) \in H_n(M, M \setminus \{x\}; R)$  für alle  $x \in M$  ein Erzeuger ist.

- 5) Eine Folgerung aus der Eindeutigkeit im Hebungssatz aus der Überlagerungstheorie ist folgende Aussage:  
Sei  $M$  zusammenhängend. Dann ist für jedes  $x \in M$  die Auswertungsabbildung  $\text{ev}_x: \Gamma(M, \mathcal{H}) \rightarrow H_n(M, M \setminus \{x\}; R)$ ,  $\text{ev}_x(s) = s(x)$  injektiv.
- 6) Sei  $v \in H_n(M; R)$ . Dann erhalten wir durch  $(s_v)(x) := v|_x$  einen Schnitt  $s_v \in \Gamma(M, \mathcal{H})$ . Wir erhalten einen  $R$ -Modul-Homomorphismus  $H_n(M; R) \rightarrow \Gamma(M, \mathcal{H})$ ,  $v \mapsto s_v$ .
- 7) Es gibt immer den Nullschnitt in  $\Gamma(M, \mathcal{H})$ ,  $x \mapsto 0 \in H_n(M, M \setminus \{x\}; R)$ .
- 8) Ist  $M$  zusammenhängend, so ist  $\Gamma(M, \mathcal{H}) \neq 0$  genau dann, wenn  $M$   $R$ -orientierbar ist.

## 16.12 Bemerkung

Für  $M$  zusammenhängend gilt:  $M$  ist  $R$ -orientierbar  $\iff H_n(M; R) \cong R$ .

## 16.13 Beispiel

Für  $R = \mathbb{F}_2$  ist  $\pi: \mathcal{H} \rightarrow M$  eine 2-fache Überlagerung. Da  $\mathcal{H}$  immer den Nullschnitt zulässt, ist  $\mathcal{H}$  dann trivial. Insbesondere ist jede  $n$ -Mannigfaltigkeit  $\mathbb{F}_2$ -orientierbar.

## 16.14 Lemma

Sei  $M$  eine  $n$ -Mannigfaltigkeit und  $A \subseteq M$  kompakt. Dann gilt

- a) Zu jedem  $s \in \Gamma(M, \mathcal{H})$  gibt es ein eindeutiges  $v_A \in H_n(M, M \setminus A; R)$  mit  $v_A|_x = s(x)$  für alle  $x \in A$ .
- b) Für  $i > n$  ist  $H_i(M, M \setminus A; R) = 0$ .

### Beweisskizze

**Schritt 1:** Mit der MV-Folge (siehe 16.15) folgt: Sind die Aussagen a) und b) für  $A_1, A_2$  und  $A_1 \cap A_2$  richtig, so auch für  $A_1 \cup A_2$ .

**Schritt 2:** Das Lemma ist richtig, wenn  $A$  eine abgeschlossene konvexe Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  ist. Dazu benutze wir den Isomorphismus  $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus A; R) \xrightarrow{\cong} H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\}; R)$  (für jedes  $x \in A$ ). Mit Schritt 1 folgt die Aussage für  $M = \mathbb{R}^n$  und  $A$  endliche Vereinigung von abgeschlossen konvexen Teilmengen.

**Schritt 3:** Das Lemma gilt für  $M = \mathbb{R}^n$  und  $A$  beliebig.

Für den allgemeinen Fall schreibt man  $A = A_1 \cup \dots \cup A_n$ , sodass jedes  $A_i$  in einer Kartenumgebung von  $M$  enthalten ist. Mit Schritt 1 und 3 folgt dann die Aussage für  $A$ .  $\square$

## 16.15 Bemerkung

- 1) Zu Unterräumen  $A \subseteq X$  gibt es eine kurze exakte Folge von Kettenkomplexen  $C_*(B, A; R) \hookrightarrow C_*(X, A; R) \rightarrow C_*(X, B; R)$ . Damit erhalten wir eine lange exakte Sequenz:

$$\cdots \rightarrow H_{n+1}(X, B; R) \xrightarrow{\partial} H_n(B, A; R) \rightarrow H_n(X, A; R) \rightarrow H_n(X, B; R) \rightarrow \cdots$$

- 2) Zu abgeschlossenen Unterräumen  $A, B \subseteq X$  ist  $A \setminus B \subseteq X \setminus A \cap B$  abgeschlossen und  $X \setminus B \subseteq X \setminus A \cap B$  offen. Da  $A \setminus B \subseteq X \setminus B$  und

$$\begin{aligned}(X \setminus A \cap B) \setminus (A \setminus B) &= X \setminus A \\ (X \setminus B) \setminus (A \setminus B) &= X \setminus (A \cup B)\end{aligned}$$

erhalten wir einen Ausschneideisomorphismus  $H_*(X \setminus A, X \setminus (A \cup B)) \cong H_*(X \setminus A \cap B, X \setminus B; R)$ . Zusammen mit der Paarfolge aus 1) erhalten wir eine Mayer-Vietoris-Folge:


$$\cdots \longrightarrow H_{n+1}(X, X \setminus A \cap B) \xrightarrow{\partial} H_n(X, X \setminus A \cup B) \longrightarrow \bigoplus_{H_n(X, X \setminus B)}^{H_n(X, X \setminus A)} \longrightarrow H_n(X, X \setminus A \cap B) \longrightarrow \cdots$$

*„R“ aus Platzgründen weggelassen*





## Index

Die **Seitenzahlen** sind mit **Hyperlinks** zu den entsprechenden Seiten versehen, also anklickbar 

Abbildungsgrad, 37  
Abelisierung, 61  
abgeschlossene Zelle, 43  
affin, 56  
anklebende Abbildung, 43  
assoziativ, 1  
Augmentierung, 17  
Ausschneidung, 58  
  
charakteristische Abbildung, 43  
CW-Komplex, 42  
    endlicher, 43  
  
Dimensionsaxiom, 58  
disjunkte Vereinigung  
    Axiom, 58  
Durchmesser, 56  
  
Ecken, 4  
Euler-Charakteristik, 6  
    eines CW-Komplex, 49  
    von  $\mathbb{Z}$ -Kettenkomplexen, 14  
  
freier Modul, 7  
Funktorkomplex, 2  
    dargestellter, 2  
  
geometrische Realisierung, 5  
geschlossene Mannigfaltigkeit, 69  
graduierter, 18  
Graphen, 4  
  
homogene Koordinaten, 44  
Homologiekategorie, 16  
Homologietheorie, 58  
homologische Orientierung  
    im Punkt, 68  
    überall, 68  
Homotopiegruppe, 64  
Homotopieinverse, 21  
Homotopieäquivalenz, 21  
  
Jordanscher Kurvensatz, 40  
  
Kategorie, 1  
    klein, 2

kettenhomotop, 22  
Kettenhomotopie, 22  
Kettenmodul, 10  
Kommutatorgruppe, 61  
Komposition, 1  
kontrahierbar, 21  
Koprodukt  
    topologischer Räume, 19  
    von  $R$ -Moduln, 20  
kurze exakte Folge von Kettenkomplexen, 28  
kurze exakte Sequenz, 11  
  
lange exakte Folge, 27  
  
Morphismen, 1  
Morphismus von Homologietheorien, 59  
  
 $n$ -Ketten, 16  
 $n$ -Ränder, 16  
 $n$ -Simplex, 4  
 $n$ -te Bettizahl, 49  
 $n$ -te Homologie, 10  
 $n$ -te Randabbildung  
    simplicial, 8  
    singulär, 15  
    zellulär, 46  
 $n$ -ter Homologiemodul  
    simplicial, 9  
    singulär, von Paaren, 26  
 $n$ -ter Kettenmodul  
    simplicial, 8  
    singulär, 15  
 $n$ -ter zelluläre Kettenmodul, 46  
 $n$ -zusammenhängend, 65  
 $n$ -Zykel, 16  
natürliche Transformation, 2, 33  
natürlicher Isomorphismus, 48  
  
Objekte, 1  
offene Zelle, 43  
orientierbar, 68  
orientierte Mannigfaltigkeit, 68  
  
Paar von topologischen Räumen, 26  
Paarfolge, 58  
Polyeder, 6  
projektiver Modul, 7, 12  
Pushout, 42

$R$ -Kettenabbildung, 18  
 $R$ -Kettenkomplex, 10  
Rand des  $n$ -Simplizes, 5  
Randabbildungen, 10  
Rang einer abelschen Gruppe, 11  
reduzierte singuläre Homologie, 35  
reell projektiver Raum, 44  
relative Homotopiegruppe, 65  
  
Schwache Topologie, 43  
Schwerpunkt, 54  
Seite, 4  
Simplizes, 4  
simpliciale Abbildung, 5  
simplicialer Kettenkomplex, 10  
simplicialer Komplex, 4  
singuläre Homologie von  $X$ , 16  
singuläre Simplizes, 15  
singulärer Kettenkomplex, 16  
    von Paaren, 26  
Skalarprodukt, 39  
Spaltung, 12  
Spektralfolge, 59  
Summe  
    topologischer Räume, 19  
    von  $R$ -Moduln, 20  
  
Torsionsgruppe, 11  
  
 $\mathcal{U}$ -klein, 53  
unital, 1  
Unterkomplex, 4  
  
Vektorfeld, 39  
Vertices, 4  
  
Zellstruktur, 43  
zellulär, 43  
zelluläre Homologie, 46  
zellulärer Kettenkomplex, 46

## Abbildungsverzeichnis

1 $\Delta^n \times [0, 1]$ für $n = 0, 1, 2$	23
2 Zerlegung von $\Delta^2 \times [0, 1]$ in 3-Simplizes	23
3 Ein nirgends verschwindendes Vektorfeld auf $S^1$	39

## To-do's und andere Baustellen

RevChap12	50
eventuell in Anhang?	51
Problem beheben/Details hinzufügen	51
Für die Gleichung unten brauchen wir doch $(i_-, i_-  _{S^{k-1}})_* (y_-) = (-1)^{k+1} (i_+, i_+  _{S^{k-1}})_* (y_+) ??$	51
RevChap13	53
Figure: Skizze der Ausschneidung mit kleinen Simplizes	53
Details hinzufügen	53
Figure: Zerteilung Simplex mit Bild in $X$	54
Die Rechnung stimmt noch nicht so ganz ...	54
RevChap15	61
Figure: Simplex kollabieren und so weiter	62
Figure: Quadrat nach $X$ , linke Seite kollabieren, Simplex nach $X$	62
Figure: Pfade am Bild eines Simplex und Verbindungen zu $x_0$	64
Zeichnung fertig machen	65
Figure: Bild zu relativen Homotopiegruppen	65
RevChap16	68