



WESTFÄLISCHE
WILHELMS-UNIVERSITÄT
MÜNSTER



FACHBEREICH 10
MATHEMATIK UND
INFORMATIK

Skript Analysis 2

Mitschrift der Vorlesung „Analysis 2“ von Prof. Ebert

Tim Keil

6. Mai 2015

Vorwort — Mitarbeit am Skript

Dieses Dokument ist eine Mitschrift aus der Vorlesung „Analysis 2, SoSe 2015“, gelesen von Prof. Ebert. Der Inhalt entspricht weitestgehend dem Tafelanschrieb. Für die Korrektheit des Inhalts übernehme ich keinerlei Garantie! Für Bemerkungen und Korrekturen – und seien es nur Rechtschreibfehler – bin ich sehr dankbar. Korrekturen bitte durch persönliches Ansprechen oder per Mail an keil.menden@web.de.

Inhaltsverzeichnis

| | |
|--|----------|
| I. Normierte und metrische Räume | 1 |
| I.1. Der \mathbb{R}^n | 1 |
| I.1.1. Das Skalarprodukt | 1 |
| I.1.2. Die l^2 -Norm | 2 |
| I.2. Euklidische und normierte Vektorräume | 2 |
| I.2.1. Euklidischer Vektorraum | 2 |
| I.2.2. Beispiel euklidischer Vektorraum | 2 |
| I.2.3. Norm | 2 |
| I.2.4. Cauchy-Schwarz-Ungleichung | 3 |
| I.2.5. Beispiele für Normen auf \mathbb{R} | 4 |
| I.2.6. Äquivalenz von Normen | 4 |
| I.2.7. Beispiel Äquivalente Normen | 4 |
| I.3. Metrische Räume | 5 |
| I.3.1. Abstand | 5 |
| I.3.2. Metrik | 5 |
| I.3.3. Konvergenz im metrischen Raum | 5 |
| I.3.4. Beispiel Metrik | 6 |
| I.3.5. Cauchyfolge im metrischen Raum | 7 |
| I.3.6. Vollständigkeit | 7 |
| I.3.7. Satz | 7 |
| I.3.8. Stetigkeit | 8 |
| I.3.9. Satz | 8 |
| I.3.10. Satz | 8 |
| I.3.11. Beispiele | 8 |
| I.3.12. Lipschitz-stetig | 9 |
| I.3.13. Beispiel Lipschitz-stetig | 9 |
| I.3.14. Satz | 9 |
| I.3.15. Korollar: | 10 |
| I.3.16. Operatornorm | 10 |
| I.4. Topologische Grundbegriffe | 11 |
| I.4.1. ε -Ball | 11 |
| I.4.2. Innerer Punkt, Umgebung | 11 |
| I.4.3. Offen, Abgeschlossen | 11 |
| I.4.4. Beispiel | 12 |
| I.4.5. Satz | 12 |
| I.4.6. Satz | 14 |
| I.4.7. Satz | 14 |
| I.4.8. Beispiel | 15 |
| I.5. Kompaktheit | 15 |
| I.5.1. Satz von Bolzano-Weierstraß im \mathbb{R}^n | 16 |
| I.5.2. Definition | 16 |
| I.5.3. Beispiel: | 16 |
| I.5.4. Satz | 17 |
| I.5.5. Satz von Heine-Borel | 18 |
| I.5.6. Satz | 18 |
| I.5.7. Satz vom Minimum und Maximum | 18 |
| I.5.8. Satz | 19 |
| I.5.9. Erinnerung/Definition | 20 |

| | |
|--|-----------|
| I.5.10. Definition | 20 |
| I.5.11. Satz Lebesgue-Lemma | 20 |
| I.5.12. Korollar | 21 |
| I.5.13. Definition | 21 |
| I.5.14. Definition | 21 |
| I.5.15. Satz von Heine-Borel | 21 |
| I.5.16. Lemma | 22 |
| II. Differentialrechnung im \mathbb{R}^n | 24 |
| II.1. Die Definition | 24 |
| II.1.1. Notation | 24 |
| II.1.2. Bemerkung | 24 |
| II.1.3. Definition | 25 |
| II.1.4. Satz | 25 |
| II.1.5. Definition | 26 |
| II.1.6. Satz | 26 |
| II.1.7. Definition | 27 |

I. Normierte und metrische Räume

$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \rightarrow$ Normierte Vektorräume \rightarrow Metrische Räume

I.1. Der \mathbb{R}^n

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_i \in \mathbb{R} \right\}$$

Der \mathbb{R}^n ist ein \mathbb{R} -Vektorraum und $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) = n$.

Sei

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-ter Eintrag}$$

(e_1, \dots, e_n) ist eine Basis von \mathbb{R}^n und heißt **Standardbasis**.

Ist $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, so gilt $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$

I.1.1. Definition

Das **Skalarprodukt** auf \mathbb{R}^n ist die Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$x = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i \in \mathbb{R}$$

es gilt:

(S1) (Bilinearität) $\forall x_0, x_1, y_0, y_1 \in \mathbb{R}^n \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \langle x_0 + x_1, y_0 + y_1 \rangle &= \langle x_0, y_0 \rangle + \langle x_1, y_1 \rangle + \langle x_1, y_0 \rangle + \langle x_0, y_1 \rangle \\ \langle ax_0, by_0 \rangle &= ab \langle x_0, y_0 \rangle \end{aligned}$$

(S2) (Symmetrie) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

(S3) (positive Definitheit) $\forall x \in \mathbb{R}^n$ gilt $\langle x, x \rangle \geq 0$ und $\langle x, x \rangle = 0$ nur dann, wenn $x = 0$

Desweiteren gilt $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ (Kronecker-Symbol)

Ist

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in \mathbb{R}^n \quad (x_i \in \mathbb{R})$$

so ist

$$\begin{aligned}
 \langle x, e_j \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n x_i e_i, e_j \right\rangle \stackrel{(S1)}{=} \sum_{i=1}^n x_i \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \delta_{ij} = x_j \\
 \Rightarrow x &= \sum_{j=1}^n \langle x, e_j \rangle e_j
 \end{aligned}$$

I.1.2. Definition

Sei $x \in \mathbb{R}^n$. Die l^2 -Norm von x ist die Zahl

$$\|x\|_2 := \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Schreibweise manchmal auch: $\|x\|_2 = \|x\|$

I.2. Euklidische und normierte Vektorräume

I.2.1. Definition

Sei V ein \mathbb{R} -Vektorraum. Ein **Skalarprodukt** auf V ist eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, welche die Axiome S1, S2, S3 erfüllt.

Ein **euklidischer Vektorraum** ist ein Paar $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. V ist ein \mathbb{R} -Vektorraum und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist Skalarprodukt auf V .

Ist $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum, so ist die durch $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induzierte Norm definiert als

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} \quad v \in V$$

I.2.2. Beispiele

- \mathbb{R}^n mit Standardskalarprodukt
- Die Abbildung

$$\begin{aligned}
 \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{R} \\
 (z, w) &\mapsto \operatorname{Re}(\bar{z} \cdot w)
 \end{aligned}$$

ist ein Skalarprodukt. Die induzierte Norm ist der Absolutbetrag.

I.2.3. Definition

Sei V ein \mathbb{R} -Vektorraum. Eine **Norm** auf V ist eine Abbildung $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}, v \mapsto \|v\|$ mit

$$(N1) \quad \|v\| \geq 0 \quad \forall v \in V$$

$$(N2) \quad \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$$

$$(N3) \quad \|av\| = |a| \cdot \|v\| \quad \forall v \in V, a \in \mathbb{R}$$

$$(N4) \quad \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \quad \forall v, w \in V \quad (\text{Dreiecksungleichung})$$

Ein normierter Vektorraum ist ein Paar $(V, \|\cdot\|)$ bestehend aus einem \mathbb{R} -VR V und einer Norm auf V .

I.2.4. Satz

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum. Für $v \in V$ setze $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$
 Dann gilt:

1. $\|\cdot\|$ ist eine Norm auf V
2. $\forall v, w \in V$ gilt die **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**:

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

Beweis:

$$1. \text{ N1: } \|v\| = \sqrt{\underbrace{\langle v, v \rangle}_{\geq 0}} \geq 0$$

$$\text{N2: } \|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} = 0 \Rightarrow \langle v, v \rangle = 0 \xrightarrow{\text{S3}} v = 0$$

$$\text{N3: } a \in \mathbb{R}, v \in V$$

$$\|av\| = \sqrt{\langle av, av \rangle} \stackrel{\text{S1}}{=} \sqrt{a^2 \langle v, v \rangle} = \sqrt{a^2} \sqrt{\langle v, v \rangle} = |a| \|v\|$$

2. CS-Ungleichung ist trivial, wenn $w = 0$

Ann.: $w \neq 0$: Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} f(t) &= \langle v + tw, v + tw \rangle \\ &= \langle v, v \rangle + 2t \langle v, w \rangle + t^2 \langle w, w \rangle \\ &= \|v\|^2 + 2t \underbrace{\langle v, w \rangle}_{\in \mathbb{R}} + t^2 \|w\|^2 \end{aligned}$$

aus S3 folgt $f(t) \geq 0$. f ist Polynom

$$\begin{aligned} f'(t) &= 0 \Leftrightarrow t_0 = -\frac{\langle v, w \rangle}{\|w\|^2} \\ f''(t) &= 2\|w\|^2 > 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow f$ nimmt bei t_0 globales Minimum an

$$\begin{aligned} 0 \leq f(t_0) &= \|v\|^2 - \frac{2\langle v, w \rangle^2}{\|w\|^2} + \frac{\langle v, w \rangle^2}{\|w\|^4} \|w\|^2 = \|v\|^2 - \frac{\langle v, w \rangle^2}{\|w\|^2} \\ &\Rightarrow \frac{\langle v, w \rangle^2}{\|w\|^2} \leq \|v\|^2 \\ &\Rightarrow \langle v, w \rangle^2 \leq \|v\|^2 \|w\|^2 \\ &\Rightarrow |\langle v, w \rangle| = \sqrt{\langle v, w \rangle^2} \leq \sqrt{\|v\|^2 \|w\|^2} = \|v\| \cdot \|w\| \end{aligned}$$

□

Schließlich können wir N4 zeigen:

N4:

$$\begin{aligned}\|v+w\|^2 &= \langle v+w, v+w \rangle \\ &\stackrel{S1}{=} \|v\|^2 + 2\langle v, w \rangle + \|w\|^2 \\ &\leq \|v\| + 2|\langle v, w \rangle| + \|w\|^2 \\ &\stackrel{CS}{\leq} \|v\|^2 + 2\|v\|\|w\| + \|w\|^2 \\ &= (\|v\| + \|w\|)^2\end{aligned}$$

Wurzel ziehen zeigt N4

□

I.2.5. Weitere Beispiele für Normen auf \mathbb{R}

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \quad x_i \in \mathbb{R}$$

- l^1 -Norm $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$
- l^∞ -Norm $\|x\|_\infty = \max \{|x_i| \mid i = 1, \dots, n\}$
- Ist $p \in [1, \infty)$, so ist die l^p -Norm

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (\text{Beweis Schwer})$$

I.2.6. Definition

V \mathbb{R} -VR, $\|\cdot\|_0, \|\cdot\|_1$ Normen auf V . Die Normen $\|\cdot\|_0, \|\cdot\|_1$ heißen **äquivalent**, falls $C, c > 0$ existieren, so dass für alle $v \in V$ gilt:

$$c\|v\|_0 \leq \|v\|_1 \leq C\|v\|_0$$

Bemerkung:

Das ist eine Äquivalenzrelation

- **Reflexiv:** klar
- **Symmetrie:**

$$\begin{aligned}c\|v\|_0 &\leq \|v\|_1 \leq C\|v\|_0 \\ \Rightarrow \frac{1}{C}\|v\|_1 &\leq \|v\|_0 \leq \frac{1}{c}\|v\|_1\end{aligned}$$

- **Transitiv:**

$$\begin{aligned}c\|v\|_0 &\leq \|v\|_1 \leq C\|v\|_0 \quad \text{und} \quad d\|v\|_1 \leq \|v\|_2 \leq D\|v\|_1 \quad (C, c, D, d > 0) \\ \Rightarrow cd\|v\|_0 &\leq CD\|v\|_0\end{aligned}$$

I.2.7. Beispiel

Die l^1, l^2 und l^∞ -Norm auf \mathbb{R}^n sind äquivalent und zwar gilt:

$$\|v\|_\infty \leq \|v\|_2 \leq \|v\|_1 \leq n\|v\|_\infty \quad (\text{Beweis Übung})$$

I.3. Metrische Räume

I.3.1. Definition

$(V, \|\cdot\|)$ normierter Vektorraum, $v, w \in V$

Der **Abstand** von v und w ist

$$d(v, w) := \|v - w\|$$

I.3.2. Definition

Sei X eine Menge

Eine **Metrik** (oder Abstandsfunktion) ist eine Abbildung $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto d(x, y)$, sodass gilt:

$$(M1) \quad \forall x, y \in X : \quad d(x, y) \geq 0$$

$$(M2) \quad \forall x, y \in X : \quad d(x, x) = 0 \quad \text{und} \quad d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$$

$$(M3) \quad \forall x, y \in X : \quad d(x, y) = d(y, x)$$

$$(M4) \quad \forall x, y, z \in X : \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad (\text{Dreiecksungleichung})$$

Ein **Metrischer Raum** ist ein Paar (X, d) , X Menge, d Metrik auf X

Beispiele:

- Ist $(V, \|\cdot\|)$ normierter Vektorraum, so ist durch $d(v, w) := \|v - w\|$ eine Metrik auf V gegeben.

$$\begin{aligned} v, w, u \in V \quad d(v, u) &= \|v - u\| = \|v - w + w - u\| \\ &\stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \|v - w\| + \|w - u\| \\ &= d(v, w) + d(w, u) \end{aligned}$$

Unterbeispiel:

$V = \mathbb{R}$. Dann ist $x \mapsto |x|$ eine Norm auf \mathbb{R} und die induzierte Metrik auf \mathbb{R} ist $d(x, y) = \|x - y\|$

- (X, d_X) metrischer Raum $Y \subseteq X$ Teilmenge. Dann ist (Y, d_Y) ein metrischer Raum, wobei für $y_0, y_1 \in Y$ gilt, dass $d_Y(y_0, y_1) := d_X(y_0, y_1)$
Vereinbarung: Ist $X \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge, so ist X immer mit der durch das Standardskalarprodukt induzierte Metrik versehen. (es sei denn, etwas anderes ist gesagt)

Konvergenz

Erinnerung (Ana I): $(x_n)_n$ Folge in \mathbb{R} , $x \in \mathbb{R}$. Dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 : |x - x_n| < \varepsilon$$

I.3.3. Definition

(X, d) metrischer Raum, $(x_n)_n$ Folge in X (d.h. eine Abbildung $x : \mathbb{N} \rightarrow X$) $y \in X$. Dann Konvergiert die Folge $(x_n)_n$ gegen $y \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \, d(x_n, y) < \varepsilon$

Äquivalent: Die Folge (in \mathbb{R}) $d(x_n, y)$ ist eine Nullfolge.

I.3.4. Beispiel

$X = \mathbb{R}^n$ mit Metrik, die durch l^1 - l^2 - oder l^∞ - Norm induziert wird. Folge $k \mapsto x(k) \in \mathbb{R}^n$.

$$x(k) = \sum_{i=1}^n x_i(k) e_i \quad e_i \text{ Standard-Basisvektor} \quad x_i(k) \in \mathbb{R} \quad x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$$

Dann sind äquivalent

1. für alle $i = 1, \dots, n$ gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} x_i(k) = x_i$
2. $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x(k) - x\|_1 = 0$
3. $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x(k) - x\|_2 = 0$
4. $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x(k) - x\|_\infty = 0$

Beweis:

1 \rightarrow 2:

$$\|x(k) - x\|_1 := \sum_{i=1}^n \underbrace{|x_i(k) - x_i|}_{\xrightarrow{(wg\ 1)} 0} \rightarrow 0$$

2 \rightarrow 3 \rightarrow 4: Benutze Ungleichungen ($y \in \mathbb{R}^n$)

$$\|y\|_\infty \leq \|y\|_2 \leq \|y\|_1 \leq n \cdot \|y\|_\infty$$

also

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \|x(k) - x\|_1 &= 0 \\ \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \|x(k) - x\|_2 &= 0 \\ \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \|x(k) - x\|_\infty &= 0 \end{aligned}$$

4 \rightarrow 1:

$$\|x(k) - x\|_\infty = \max\{|x_i(k) - x_i| \mid i = 1, \dots, n\} \Rightarrow \text{für alle } i: |x_i(k) - x_i| \leq \|x(k) - x\|_\infty$$

Also

$$\left[\|x(k) - x\|_\infty \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \right] \Rightarrow [\forall i = 1, \dots, n \quad |x_i(k) - x_i| \rightarrow 0]$$

\Rightarrow 1)

□

Bemerkung:

X metrischer Raum $(x_n)_n, (y_n)_n$ Folgen in X $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$

$$\Rightarrow d(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) \quad (\text{Blatt 2, Aufgabe 2})$$

Daraus folgt:

Ist $(x_n)_n$ Folge in X und gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ sowie $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x'$ dann ist $x = x'$

Denn

$$\begin{aligned} d(x, x') &= \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{d(x_n, x_n)}_{=0} = 0 \\ &\stackrel{(M2)}{\Rightarrow} x = x' \end{aligned}$$

□

1.3.5. Definition

Sei (X, d) metrischer Raum und $(x_n)_n$ Folge in X . Dann heißt $(x_n)_n$ **Cauchyfolge**, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n, m \geq n_0 : d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Bemerkung:

(X, d) metrischer Raum $(x_n)_n$ Folgen in X , $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in X$.

Dann ist $(x_n)_n$ Cauchyfolge, denn

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle n_0 , sodass

$$\forall n \geq n_0 d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Falls $n, m \geq n_0$

$$d(x_n, y_n) \leq \underbrace{d(x_n, x)}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{d(x, y_n)}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

1.3.6. Definition

(X, d) metrischer Raum. Dann heißt X **vollständig**, falls jede Cauchy-Folge $(x_n)_n$ in X gegen ein $x \in X$ konvergiert (Ana I)

Bsp:

$(0, 1) \subseteq \mathbb{R}$. $x_n = \frac{1}{n}$ Folge in X ist Cauchyfolge.

$(x_n)_n$ konvergiert nicht in X , denn der einzig möglicher Grenzwert (0) liegt nicht in X .

1.3.7. Satz

\mathbb{R}^n , mit der durch die Norm $\|\cdot\|_p$ $p = 1, 2, \infty$ induzierten Metrik ist vollständig

Beweis:

$p = \infty$: Sei $x(k)$ l^∞ -Cauchyfolge in \mathbb{R}^n . Dann gilt für $i = 1, \dots, n$:

$$|x_i(k) - x_i(l)| \leq \|x(k) - x(l)\|_\infty$$

Da $(x(k))_k$ l^∞ -Cauchyfolge, ist $(x_i(k))_k$ eine Cauchyfolge in \mathbb{R} für alle $1 \leq i \leq n$

Nach dem Cauchy-Kriterium aus Analysis I sind die Folgen $(x_i(k))_k$ Konvergent. $x_i = \lim_{k \rightarrow \infty} x_i(k) \in \mathbb{R}$

$$x := \sum_{i=1}^n x_i e_i \in \mathbb{R}^n$$

Dann gilt

$$\|x(k) - x\|_\infty = \max\{\underbrace{|x_i(k) - x_i|}_{\rightarrow 0} \mid i = 1, \dots, n\} \rightarrow 0$$

also

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x(k) - x\|_\infty = 0$$

$p = 2$: $x(k)$ l^2 -Cauchyfolge, weil $\|x(k) - x(l)\|_\infty \leq \|x(k) - x(l)\|_2$

Ist $(x_k)_k$ eine l^∞ -Cauchyfolge, so gibt es ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x(k) - x\|_\infty = 0$$

$$\Rightarrow \|x(k) - x\|_2 \leq n \cdot \underbrace{\|x(k) - x\|_\infty}_{\rightarrow 0} \rightarrow 0$$

$p = 1$: Analog zum Fall $p = 1$, benutze $\|y\|_\infty \leq \|y\|_1 \leq n \cdot \|y\|_\infty$

□

I.3.8. Definition

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung sowie $x \in X$.

(i) f heißt ε - δ -**stetig** (oder **stetig**) bei x , wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x' \in X \text{ mit } d_X(x, x') < \delta \text{ gilt: } d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$$

(ii) f heißt **folgenstetig** in $x \Leftrightarrow$ Ist $(x_n)_n$ eine Folge in X mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$$

f ist stetig (folgenstetig) auf X , wenn f stetig (folgenstetig) bei x ist für alle $x \in X$.

I.3.9. Satz

f stetig in $x \Leftrightarrow f$ folgenstetig in x

Beweis

wie in Analysis I, wird bald nachgeliefert

I.3.10. Satz

(X, d_X) , (Y, d_Y) , (Z, d_Z) metrische Räume.

$$f : X \rightarrow Y \quad g : Y \rightarrow Z \quad x \in X$$

Falls f stetig bei x und stetig bei $f(x)$ so ist $g \circ f$ stetig bei x .

Beweis:

Siehe Analysis I

I.3.11. Beispiele

$$\mu : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \mu(x, y) := xy \quad (\text{Multiplikation})$$

$$\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \alpha(x, y) := x + y \quad (\text{Addition})$$

$$q : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \quad q(x, y) := \frac{x}{y} \quad (\text{Division})$$

sind auf ihrem gesamten Definitionsbereich stetig.

Beweis:

z. B. q : q ist folgenstetig, denn:

Sei $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (d.h. $y \neq 0$) und (x_n, y_n) Folge in $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (x, y)$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \neq 0 \\ \Rightarrow q(x_n, y_n) = \frac{x_n}{y_n} \xrightarrow{\text{Grenzwertsätze}} \frac{x}{y} = q(x, y) \\ \Rightarrow q \text{ ist folgenstetig} \end{aligned}$$

α, μ analog. □

Bsp:Sei X metrischer Raum, $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig \Rightarrow Die Funktion

$$(f, g) : X \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ x \mapsto (f(x), g(x)) \in \mathbb{R}^2$$

ist stetig.

Denn, $(x_n)_n$ Folge in X , $x_n \rightarrow x \in X$

$$\Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x) \text{ und } g(x_n) \rightarrow g(x) \quad (f, g \text{ stetig})$$

$$\stackrel{\text{Tatsache}}{\Rightarrow} (f, g)(x_n) = (f(x_n), g(x_n)) \rightarrow (f(x), g(x)) \in \mathbb{R}^2$$

$$\Rightarrow (f, g) \text{ stetig}$$

Betrachte Kompositionen

$$X \xrightarrow{(f, g)} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mu} \mathbb{R} \\ x \mapsto (f(x), g(x)) \mapsto f(x)g(x)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\mu}_{\text{stetig}} \circ \underbrace{(f, g)}_{\text{stetig}} = fg \\ \Rightarrow \text{stetig}$$

 \Rightarrow Produkte stetiger Funktionen sind wieder stetig**Analog**

Summen Quotienten stetiger Funktionen sind stetig

I.3.12. Definition $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume $f : X \rightarrow Y$ heißt **Lipschitz-stetig** : $\Leftrightarrow \exists L \geq 0$, so dass gilt:

$$\forall x, x' \in X : d_Y(f(x), f(x')) \leq L d_X(x, x')$$

Bem:ist f Lipschitz-stetig, so ist f stetig:sei $\varepsilon > 0$ Wähle δ , so dass $\delta L \leq \varepsilon$

Dann:

$$\text{Ist } d_X(x, x') < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) \leq L \cdot d_X(x, x') < \delta L \leq \varepsilon \quad \Rightarrow f \text{ stetig.}$$

I.3.13. BeispielBetrachte \mathbb{R}^n mit der durch die l^p -Normen induzierten Metrik $p \in \{1, 2, \infty\}$ Dann gilt: Sind $p, q \in \{1, 2, \infty\}$, so ist

$$\text{id} : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_q)$$

Lipschitz-stetig.

Grund: $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n \cdot \|x\|_\infty$$

I.3.14. SatzJede lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist Lipschitz-stetig.

Beweis:

Aus LA I ist bekannt:

Es gibt genau ein $A \in \text{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$, so dass $f(x) = Ax \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n)$

$$\text{M}_{m,n}(\mathbb{R}) = \text{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$$

Beh:

$\exists L = L_A$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\|Ax\|_2 \leq L\|x\|_2$$

Es gilt

$$\|Ax\|_2 \leq \|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^m |(Ax)_i| = \sum_{i=1}^m \left| \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \right|$$

nach Cauchy-Schwarz gilt:

$$\left| \sum_{j=1}^n y_j z_j \right| = |\langle y, z \rangle| \stackrel{\text{CS}}{\leq} \|y\|_2 \cdot \|z\|_2 = \left(\sum_{j=1}^m y_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^m z_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Also

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left| \sum_{j=1}^m a_{ij}x_j \right| &\leq \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{\|x\|_2} \\ \Rightarrow \|Ax\|_2 &\leq \sum_{i=1}^m \left(\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|x\|_2 \right) = \sum_{i=1}^m \underbrace{\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{=L} \|x\|_2 \end{aligned}$$

□

I.3.15. Korollar:

$A \in \text{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$

Dann ist

$$\|A\| := \sup_{\|x\|_2 \leq 1} \|Ax\|_2 < \infty$$

Beweis:

Ist $L \geq 0$ mit $\|Ax\|_2 \leq L \cdot \|x\|_2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

so gilt für $\|x\| \leq 1$: $\|Ax\|_2 \leq L$

$$\Rightarrow \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|_2 \leq L < \infty$$

□

I.3.16. Definition

Die Zahl $\|A\|$ heißt **Operatornorm** von A

Es gilt: Die Operatornorm ist eine Norm auf dem \mathbb{R} -VR $\text{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$ (Übung)

Es gibt keine einfache Formel für $\|A\|$

I.4. Topologische Grundbegriffe

I.4.1. Definition

(X, d) sei metrischer Raum, $\varepsilon > 0$ und $x \in X$. Der ε -**Ball** in X um x ist

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$$

in \mathbb{R} :

$$B_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$$

I.4.2. Definition

(X, D) metrischer Raum $Y \subseteq X, x \in X$

1. x heißt **innerer Punkt** von Y

$$\exists \delta > 0 \text{ mit } B_\delta(x) \subseteq Y$$

In diesem Fall heißt eine **Umgebung** von x in X

2. $x \in X$ heißt **Berührungspunkt** von Y

$$\forall \varepsilon > 0 \exists y \in Y \text{ mit } d(x, y) < \varepsilon$$

(Äquivalent: $\forall \varepsilon > 0 \quad B_\varepsilon(x) \cap Y \neq \emptyset$)

$$\overset{\circ}{Y} = \{x \in X \mid x \text{ innerer Punkt von } Y\}$$

$$\overline{Y} = \{x \in X \mid x \text{ ist Berührungspunkt von } Y\}$$

I.4.3. Definition

1. (X, d) metrischer Raum, $Y \subseteq X$. Dann heißt Y **offen** in $X \Leftrightarrow$ jedes $x \in Y$ ist innerer Punkt von Y
 ($\Leftrightarrow \forall x \in Y \exists \delta > 0 : B_\delta(x) \subseteq Y$)
2. Y heißt **abgeschlossen** in $X : \Leftrightarrow$ Das Komplement $X - Y$ ist offen in X

Bsp:

$X = \mathbb{R}$

1. Offene Intervalle $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ sind offen in \mathbb{R} , denn

$$\begin{aligned} x \in (a, b), \delta = \min\{x - a, b - x\} > 0 \\ \Rightarrow (x - \delta, x + \delta) \subseteq (a, b) \end{aligned}$$

2. Abgeschlossene Intervalle $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ sind abgeschlossen:

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \setminus [a, b] &= (-\infty, a) \cup (b, +\infty) \\ \Rightarrow (x - \delta, x + \delta) &\subseteq \mathbb{R} \setminus [a, b] \\ \Rightarrow x > b &\text{ innerer Punkt von } \mathbb{R} \setminus [a, b] \\ \text{analog } x < a &\text{ ist innerer Punkt von } \mathbb{R} \setminus [a, b] \\ \Rightarrow \mathbb{R} \setminus [a, b] &\text{ offen in } \mathbb{R} \Rightarrow [a, b] \text{ abgeschlossen in } \mathbb{R} \end{aligned}$$

Warnung:

Offenheit ist eine Eigenschaft von Teilmengen metrischer Räum, nicht der Mengen selber. 'Y offen' sinnlos!
! 'Y offen in X' sinnvoll! Analog für Abgeschlossen
 $X = \mathbb{R}^2$

$$Z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$$

$$Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0, 0 < x < 1\}$$

Y offen in Z

Y nicht offen in X

I.4.4. Beispiel

X metrischer Raum, $x \in X, \varepsilon > 0$. Dann ist $B_\varepsilon^X(x)$ offen in X

Beweis:

zu zeigen: für jedes $y \in B_\varepsilon(x) \exists \delta > 0 : B_\delta(y) \subseteq B_\varepsilon(x)$

$$d(x, y) < \varepsilon \Rightarrow \exists \delta > 0 : d(x, y) + \delta < \varepsilon$$

Beh: $B_\delta(y) \subseteq B_\varepsilon(x)$

Das ist wahr, denn

$$z \in B_\delta(y) \Rightarrow d(y, z) < \delta$$

Ferner:

$$d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x) < \delta + d(y, x) < \varepsilon, \text{ d.h. } z \in B_\varepsilon(x)$$

I.4.5. Satz

Es sei (X, d) metrischer Raum.

Dann gilt:

1. \emptyset und X sind offen in X
2. Falls U_0, U_1 offen in X sind, so auch $U_0 \cap U_1$
3. Falls $(U_i)_{i \in I}$ eine durch I induzierte Familie von Teilmengen von X ist, so ist $\bigcup_{i \in I} U_i$ offen in X
'beliebige Vereinigungen offener Mengen sind offen'
4. \emptyset, X sind abgeschlossen in X
5. A_0, A_1 abgeschlossen in X, dann ist $A_0 \cup A_1$ abgeschlossen in X
6. $(A_i)_{i \in I}, A_i$ abgeschlossen in X, so ist $\bigcap_{i \in I} A_i$ abgeschlossen in X

Beweis:

1. $\emptyset \subseteq X$ offen trivial
 $X \subseteq X$ offen trivial
2. Sei $x \in U_0 \cap U_1$ Dann existieren Bälle

$$B_{\varepsilon_1}^X(x) \subseteq U_1 \quad B_{\varepsilon_0}^X(x) \subseteq U_0$$

Wähle nun $\varepsilon = \min\{\varepsilon_0, \varepsilon_1\} > 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow B_\varepsilon(x) &\subseteq U_0 \cap U_1 \\ \Rightarrow x &\text{ innerer Punkt von } U_0 \cap U_1 \end{aligned}$$

3. Sei $x \in \bigcup_{i \in I} U_i \subseteq X$

$$\Rightarrow \exists i \in I : x \in U_i, \text{ weil } U_i \subseteq X \text{ offen, gibt es } \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subseteq U_i.$$

Aber

$$U_i \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i, \text{ daher: } B_\varepsilon(x) \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$$

4.

$$\begin{aligned} \emptyset &= X \setminus \underbrace{X}_{\text{offen nach 1)}} \Rightarrow \emptyset \text{ abgeschlossen in } X \\ X &= X \setminus \underbrace{\emptyset}_{\text{offen}} \Rightarrow X \subseteq X \text{ abgeschlossen} \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} X \setminus (A_0 \cup A_1) &= \underbrace{(X \setminus A_0)}_{\text{offen in } X} \cap \underbrace{(X \setminus A_1)}_{\text{offen in } X} \\ &\quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\text{offen in } X} \\ \Rightarrow A_0 \cup A_1 &\subseteq X \text{ abgeschlossen} \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned} X \setminus \bigcap_{i \in I} A_i &= \bigcup_{i \in I} \underbrace{X \setminus A_i}_{\text{offen in } X} \\ &\quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\text{offen nach 3)}} \\ \Rightarrow \bigcap_{i \in I} A_i &\text{ abgeschlossen in } X \end{aligned}$$

Bemerkung:

Beliebige Durchschnitte offener Mengen sind i.A. nicht offen

Beispiel:

$$U_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \text{ ist offen in } \mathbb{R}$$

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n = \{0\} \text{ ist nicht offen in } \mathbb{R}$$

I.4.6. Satz

X metrischer Raum, $Y \subseteq X$. Dann sind Äquivalent:

1. $Y \subseteq X$ abgeschlossen in X
2. Für jede Folge (y_n) mit $y_n \subseteq Y$, welche in X konvergiert, gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \in Y$$

Beweis:

Vorbemerkung:

$y \in X$ ist genau dann ein Berührungspunkt von $Y \subseteq X$, wenn es eine Folge $(y_n)_n$ gibt mit $(y_n) \in Y$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$

Beweis der Vorbemerkung:

" \Leftarrow ": Ist $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \quad y_n \in Y$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n : d(y, y_n) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 y_n \in B_\varepsilon(y) \cap Y \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow y \text{ ist Berührungspunkt von } Y$$

" \Rightarrow ":

y Berührungspunkt von Y

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists y' \in Y : d(y, y') < \varepsilon$$

Wähle für $n \in \mathbb{N}$ ein $y_n \in Y$ mit $d(y, y_n) < \frac{1}{n}$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{y_n}_{\in Y} = y$$

□

Beweis des Satzes:

Sei 1) nicht erfüllt. Dann:

$$\Leftrightarrow Y \subseteq X \text{ nicht abgeschlossen in } X$$

$$\Leftrightarrow X \setminus Y \text{ nicht offen in } X$$

$$\Leftrightarrow \exists y \in X \setminus Y, y \text{ kein innerer Punkt von } X \setminus Y$$

$$\Leftrightarrow \exists y \in X \setminus Y, \forall \varepsilon > 0 \quad B_\varepsilon(y) \not\subseteq X \setminus Y$$

$$\Leftrightarrow \exists y \in X \setminus Y, \forall \varepsilon > 0 \quad B_\varepsilon(y) \cap Y \neq \emptyset$$

$$\Leftrightarrow \exists y \in X \setminus Y, y \text{ ist Berührungspunkt von } Y$$

$$\stackrel{\text{Vorbem.}}{\Leftrightarrow} \exists \text{ Folge } y_n \text{ in } Y, y_n \rightarrow y \notin Y$$

und dazu ist Äquivalent, dass 2) nicht erfüllt ist.

□

I.4.7. Satz

$(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrischer Räume, $f : X \rightarrow Y$ Abbildung. Dann sind Äquivalent:

1. f ist folgenstetig.
2. Für jede abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq Y$ ist $f^{-1}(A) \subseteq X$ abgeschlossen.
3. Für jede offene Teilmenge $U \subseteq Y$ ist $f^{-1}(U)$ offen in X
4. f ist ε - δ -stetig

Beweis:1 \Rightarrow 2: Sei f folgenstetig, $A \subseteq Y$ abgeschlossen.zu zeigen: (wegen I.4.7) ist $x_n \in f^{-1}(A)$ und $x_n \rightarrow x$, so gilt $x \in f^{-1}(A)$

$$x_n \rightarrow x \Rightarrow \underbrace{f(x_n)}_{\in A} \rightarrow \underbrace{f(x)}_{\in A} \quad (f \text{ ist folgenstetig})$$

$$A \subseteq Y \text{ abgeschlossen} \Rightarrow f(x) \in A$$

$$\Rightarrow x \in f^{-1}(A)$$

2 \Rightarrow 3:

$$U \subseteq Y \text{ offen} \Rightarrow Y \setminus U \subseteq Y \text{ abgeschlossen}$$

$$\stackrel{2)}{\Rightarrow} f^{-1}(Y \setminus U) \subseteq X \text{ abgeschlossen.}$$

$$f^{-1}(Y \setminus U) = X \setminus f^{-1}(U) \Rightarrow f^{-1}(U) \subseteq X \text{ offen}$$

3 \Rightarrow 4: Sei $x \in X$, $\varepsilon > 0$

$$\Rightarrow B_\varepsilon^Y(f(x)) \subseteq Y \text{ offen in } Y$$

$$\stackrel{3)}{\Rightarrow} f^{-1}(B_\varepsilon^Y(f(x))) \subseteq X \text{ offen}$$

$$\stackrel{\text{def. offen}}{\Rightarrow} \exists \delta > 0 \ B_\delta^X(x) \subseteq f^{-1}(B_\varepsilon^Y(f(x)))$$

Das heißt: ist $x' \in X$ mit $d(x, x') < \delta$

$$\Rightarrow d(f(x), f(x')) < \varepsilon$$

4 \Rightarrow 1: Sei f ε - δ -stetig und $(x_n)_n$ Folge in x . $x_n \rightarrow x \in X$. Dann gilt $f(x_n) \rightarrow f(x)$, denn:Sei $\varepsilon > 0$

$$\Rightarrow \exists \delta > 0 : x' \in X \ d(x, x') < \delta$$

$$\Rightarrow d(f(x), f(x')) < \varepsilon \Rightarrow \text{weil } x_n \rightarrow x : \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : d(x, x_n) < \delta$$

$$\Rightarrow \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : d(f(x), f(x_n)) < \varepsilon \text{ d.h. } f(x_n) \rightarrow f(x)$$

I.4.8. Beispiel $(V, \|\cdot\|)$ normierter Vektorraum

$$\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig, denn } \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$$

Also sind die Mengen (für $x \in V$, $r \geq 0$)

$$\{y \in V \mid \|x - y\| \leq r\} \subseteq V \text{ und } \{y \in V \mid \|x - y\| = r\} \subseteq V$$

abgeschlossen.

I.5. Kompaktheit**Erinnerung: Satz von Bolzano-Weierstraß**'Jede beschränkte Folge in \mathbb{R} besitzt eine konvergente Teilfolge'

- \rightarrow Cauchy-Konvergenzkriterium

- → Satz vom Minimum und Maximum (Wenn $f : A \rightarrow B$ stetig, dann gilt: f nimmt Minimum und Maximum an)
- → Mittelwertsatz der Differentialrechnung
- → Satz: $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow f$ ist gleichmäßig stetig.
 \Rightarrow stetige Funktionen sind Riemann-integrierbar

I.5.1. Satz von Bolzano-Weierstraß im \mathbb{R}^n

Jede beschränkte Folge in \mathbb{R}^n besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beweis:

Sei $(x(k))_k$ Folge in \mathbb{R}^n , $\|x(k)\|_2 \leq C \quad \forall k$.

$x_i(k) \quad i = 1, \dots, n$ Komponenten

$$\Rightarrow \underbrace{|x_i(k)|}_{\text{Folge in } \mathbb{R}} \leq \|x(k)\|^2 \leq C$$

Nach Bolzano-Weierstraß gibt es eine Teilfolge $(x(k_l))_l$ von $x(k)$, so dass $x_1(k_l)$ (in \mathbb{R}) Konvergiert. Nenne

$$x(1, l) = x(k_l)$$

| 1. Komponente | 2. Komponente | n -te Komponente |
|-------------------------|-----------------|--------------------|
| $x(k_1) = x(1, 1)$ | $x(2, 1)$ | $x(n, 1)$ |
| $x(k_2) = x(1, 2)$ | $x(2, 2)$ | $x(n, 2)$ |
| \vdots | \vdots | \vdots |
| Teilfolge $(x(1, k))_k$ | $(x_1(1, k))_k$ | Konvergiert |
| Teilfolge $(x(2, k))_k$ | $(x_2(2, k))_k$ | Konvergiert |
| \vdots | \vdots | \vdots |
| Teilfolge $(x(n, k))_k$ | $(x_n(n, k))_k$ | Konvergiert |

\Rightarrow Alle Komponentenfolgen von $(x(n, k))_k$ konvergieren

$\Rightarrow (x(n, k))_k$ ist Konvergent

□

I.5.2. Definition

Ein metrischer Raum X heißt **folgenkompakt**, falls für jede Folge $(x_n)_n$ in X eine konvergente Teilfolge hat.

Eine Teilmenge $Y \subseteq X$ eines metrischen Raumes heißt folgenkompakt, falls jede Folge in $(y_n)_n$ in Y eine (in Y !) konvergente Teilfolge besitzt.

($\Leftrightarrow Y$ mit der von X eingeschränkten Metrik, ist folgenkompakt)

I.5.3. Beispiel:

1. $[a, b]$ folgenkompakt

2. $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 \leq C\}$ ist folgenkompakt: $(x_k)_k$ Folge in X

$$\stackrel{I.5.1}{\Rightarrow} \exists \text{ TF } x_k \rightarrow x \in \mathbb{R}^n$$

aber $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ist abgeschlossen, also $x \in X$

3. $(0, 1), (0, 1]$ nicht folgenkompakt (betrachte Folge $(\frac{1}{n})_n$)
 4. \mathbb{R} nicht folgenkompakt (Die Folge $(n)_n$ hat keine Konvergente TF)
 5. $\mathbb{Q} \cap [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ nicht folgenkompakt.

Ist $x \in [0, 1]$, so gibt es eine Folge $x_n \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ mit $x_n \rightarrow x$

Dann hat x_n keine in $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ konvergente Teilfolge (falls x irrational)

I.5.4. Satz

X metrischer Raum

1. Ist X folgenkompakt, so ist X vollständig
2. X folgenkompakt, $Y \subseteq X$ abgeschlossen $\Rightarrow Y$ folgenkompakt
3. $Y \subseteq X$, Y folgenkompakt $\Rightarrow Y \subseteq X$ abgeschlossen

Beweis:

1. Sei $(x_n)_n$ Cauchyfolge in X

X folgenkompakt \Rightarrow es gibt konvergente Teilfolge $x_{n_k} \rightarrow x \in X$

Beh.

$$x_n \rightarrow x$$

Denn

$$d(x, x_n) \leq d(x, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_n)$$

Sei $\varepsilon > 0$ Wähle $n_0 \quad \forall n, m \geq n_0 : d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$

Wähle $k : n_k \geq n_0$

$$\text{für } n \geq n_k \quad d(x, x_n) \leq \underbrace{d(x, x_{n_k})}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{d(x_{n_k}, x)}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

2. Sei $(y_n)_n$ Folge in $Y \subseteq X$

X folgenkompakt $\Rightarrow \exists$ TF y_{n_k} , welche gegen ein $x \in X$ konvergiert

Weil $Y \subseteq X$ abgeschlossen, gilt

$$x = \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} \in Y \quad \Rightarrow \quad (y_{n_k})_k \text{ ist in } Y \text{ konvergent}$$

$\Rightarrow Y$ folgenkompakt

3. zu zeigen: Ist $(y_n)_k$ Folge in Y . $y_n \rightarrow x \in X \Rightarrow x \in Y$
 (y_n) ist Cauchyfolge.
 Nach 1) ist Y vollständig, dh $\exists z \in Y : y_n \rightarrow z$

$$\Rightarrow x = z, \text{ daher } x \in Y$$

1.5.5. Satz von Heine-Borel

Eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ist folgenkompakt $\Leftrightarrow X$ ist beschränkt und abgeschlossen in \mathbb{R}^n

Beweis:

' \Rightarrow ': Sei X folgenkompakt. Dann folgt aus 1.5.4 3): $X \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen

Wäre X nicht beschränkt, dann gäbe es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in X$ mit $\|x\|_2 \geq n$

Die Folge (x_n) kann dann keine konvergente Teilfolge enthalten, also kann X nicht folgenkompakt sein!

' \Leftarrow ': Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt und abgeschlossen

Sei $(x_n)_n$ Folge in X .

Die Folge $(x_n)_n$ ist beschränkt.

$$\stackrel{I.5.1}{\Rightarrow} \text{es gibt konvergente Teilfolge } x_{n_k} \rightarrow x \in \mathbb{R}^n$$

Weil X abgeschlossen in \mathbb{R}^n , ist $x \in X$

$$\Rightarrow X \text{ folgenkompakt}$$

□

Beispiele:

▪ $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossene Einheitskugel

▪ $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^n$ Einheitssphäre

$\Rightarrow D^n, S^{n-1}$ folgenkompakt, denn D^n, S^{n-1} beschränkt und:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} & f(x) &= \|x\|_2 & f &\text{ stetig} \\ D^n &= f^{-1}(\underbrace{[0, 1]}_{\text{abg. in } \mathbb{R}}) & S^{n-1} &= f^{-1}(\underbrace{\{1\}}_{\text{abg. in } \mathbb{R}}) \end{aligned}$$

$\Rightarrow D^n, S^{n-1}$ abgeschlossen

1.5.6. Satz

X, Y metrische Räume, $f: X \rightarrow Y$ stetig. Sei X folgenkompakt

$$\Rightarrow f(X) \subseteq Y \text{ ist folgenkompakt}$$

Beweis:

Sei y_n Folge in $f(X)$

$$\forall n \exists x_n \in X \text{ mit } f(x_n) = y_n$$

$(x_n)_n$ Folge in X

$$X \text{ folgenkompakt} \Rightarrow \exists \text{ konvergente Teilfolge } x_{n_k} \rightarrow x \in X$$

$$f \text{ stetig} \Rightarrow y_{n_k} = f(x_{n_k}) \rightarrow f(x) \in f(X)$$

Damit folgt die Behauptung

□

1.5.7. Satz vom Minimum und Maximum

X folgenkompakt, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Dann existieren $x_{\min}, x_{\max} \in X$, so dass für alle $x \in X$ gilt:

$$f(x_{\min}) \leq f(x) \leq x_{\max}$$

Beweis:

$f(X) \subseteq \mathbb{R}$ ist folgenkompakt (Satz I.5.6)

Nach I.5.5 ist $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen und beschränkt.

Seien $c, C \in \mathbb{R}$ definiert durch

$$c := \inf f(x)$$

$$C := \sup f(x)$$

Dann sind nach Ana I c, C Berührungspunkte um $f(x)$

$$f(x) \text{ abgeschlossen} \Rightarrow c, C \in f(x)$$

Wähle nun $x_{\min}, x_{\max} \in X$ mit

$$f(x_{\min}) = c, f(x_{\max}) = C$$

□

I.5.8. Satz

Je zwei Normen auf \mathbb{R}^n sind äquivalent

Beweis:

Da die Äquivalenz von Normen die Äquivalenzrelation ist, genügt es zu zeigen, dass jede Norm auf \mathbb{R}^n zur l^2 -Norm äquivalent ist.

Sei $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diese Norm.

zu zeigen: $\exists c, C > 0 \forall x \in \mathbb{R}^n : c\|x\|_2 \leq \|x\| \leq C\|x\|_2$

Sei

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, \quad x_i \in \mathbb{R}$$

Dann gilt:

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n \|x_i e_i\| = \sum_{i=1}^n |x_i| \|e_i\| \leq \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{\|x\|_2} \cdot \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n \|e_i\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{=: C > 0} = C\|x\|_2$$

Weiter ist

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \|x\|$$

ist stetig, denn $(\|x\| - \|y\|) \leq \|x - y\| \leq C\|x - y\|_2$

Nach dem Satz vom Minimum und Maximum gibt es $x_{\min} \in S^{n-1}$ mit:

$$\forall x \in S^{n-1} : \|x\| \geq \|x_{\min}\| =: c > 0 \text{ (da } x_{\min} \neq 0)$$

Sei $y \in \mathbb{R}^n$ beliebig aber $y \neq 0$. Dann folgt:

$$\|y\| = \left\| \underbrace{\|y\|_2}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{\frac{y}{\|y\|_2}}_{\in S^{n-1}} \right\| = \|y\|_2 \cdot \left\| \frac{y}{\|y\|_2} \right\| \geq \|y\|_2 \cdot \|x_{\min}\| = c \cdot \|y\|_2$$

□

1.5.9. Erinnerung/Definition

X metrischer Raum, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **gleichmäßig stetig**, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, x' \in X : \|x - x'\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x')\| < \varepsilon$$

Behauptung:

X folgenkompakt, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow f$ ist gleichmäßig stetig

$$X \xrightarrow{f} \mathbb{R} \text{ stetig, } \varepsilon > 0$$

$$x \in X : U_x = \{x' \in X \mid |f(x') - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\} = f^{-1}\left(\left(f(x) - \frac{\varepsilon}{2}, f(x) + \frac{\varepsilon}{2}\right)\right) \stackrel{\text{offen, } f \text{ stetig}}{\subseteq} X$$

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{x}$

Um zu beweisen, dass f glm stetig ist, brauchen wir:

$$\exists \delta > 0 \forall y \in X \text{ gibt es } x \in X : B_\delta(y) \subseteq U_x$$

Denn

$$\begin{aligned} d(y, y') < \delta &\Rightarrow y' \in B_\delta(y) \subseteq U_x \\ &\Rightarrow |f(y') - f(y)| \leq \underbrace{|f(y') - f(x)|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|f(x) - f(y)|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon \end{aligned}$$

1.5.10. Definition

X metrischer Raum, Eine **offene Überdeckung** von X ist eine Familie $U = (U_i)_{i \in I}$, $U_i \subseteq X$ offen für alle $i \in I$ und es gilt:

$$\bigcup_{i \in I} U_i = X$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} f : X &\rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig, } x \in X, \varepsilon > 0 \\ U_x &= \{x' \in X \mid |f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2}\} \subseteq X \\ (U_x)_{x \in X} &= U \text{ offene Überdeckung von } X \end{aligned}$$

1.5.11. Satz Lebesgue-Lemma

Sei X ein folgenkompakter, metrischer Raum und $U = (U_i)_{i \in I}$ offene Überdeckung von X . Dann existiert $\delta > 0$, so dass gilt:

$$\forall x \in X \exists i \in I : B_\delta(x) \subseteq U_i$$

Ein solches δ heißt **Lebesgue Zahl** der Überdeckung von U

Beweis:

Durch Widerspruch:

Annahme: X folgenkompakt, $U = (U_i)_{i \in I}$ offene Überdeckung, welche keine Lebesgue-Zahl hat

$\Rightarrow \forall \delta > 0 \exists x \in X : B_\delta(x)$ ist in keiner der Mengen U_i enthalten

$\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in X : B_{\frac{1}{n}}(x_n)$ ist in keinem $U_i, i \in I$ enthalten.

Da X folgenkompakt ist, gibt es eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_k$ so dass $B_{\frac{1}{n_k}}(x_{n_k})$ in keinem U_i enthalten ist.

$$x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \in X \Rightarrow \exists i_0 \in I, x \in U_{i_0} \subseteq X \text{ offen} \quad \exists \varepsilon > 0 \quad B_\varepsilon(x) \subseteq U_{i_0}$$

Das ist ein Widerspruch, denn

Wähle h so, dass $\frac{1}{n_k} < \varepsilon$ und $d(x, x_{n_k}) < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\Rightarrow B_{\frac{1}{n_k}}(x_{n_k}) \subseteq B_\varepsilon(x) = U_{i_0}$$

$$d(y, x_{n_k}) < \frac{1}{n_k} \Rightarrow d(y, x) \leq d(y, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) < \frac{1}{n_k} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \nmid$$

□

I.5.12. Korollar

X folgenkompakt

$$f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig} \Rightarrow f \text{ gleichmäßig stetig}$$

Beweis:

s.o

I.5.13. Definition

X metrischer Raum, $U = (U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung. Eine **Teilüberdeckung von U** ist eine offene Überdeckung $V = (V_j)_{j \in J}$ von X , so dass gilt:

$$\forall j \in J \exists i \in I : V_j \subseteq U_i$$

I.5.14. Definition

Ein metrischer Raum heißt **überdeckungskompakt** (oder **Kompakt**) falls **jede** offene Überdeckung $U = (U_i)_{i \in I}$ eine endliche Teilüberdeckung $V = (V_j)_{j \in J}$ besitzt. (d.h die Indexmenge J ist endlich)

I.5.15. Satz von Heine-Borel

X metrischer Raum. Dann sind äquivalent:

1. X folgenkompakt
2. X ist überdeckungskompakt

Beweis:

2 \Rightarrow 1: Wir zeigen nun:

$$\text{überdeckungskompakt} \Rightarrow \text{folgenkompakt}$$

Durch Widerspruch: Sei X überdeckungskompakt, und $(x_n)_n$ Folge in X , welche keine konvergente Teilfolge hat.

Beobachte: $(x_n)_n$ hat keine Konvergente Teilfolge

$$\Rightarrow \forall x \in X \exists \varepsilon > 0, \text{ so dass } x_n \in B_\varepsilon(x) \text{ nur für endlich viele } n \text{ gilt}$$

$$\Rightarrow \forall x \in X \exists \varepsilon_x > 0, \text{ so dass } x_n \in B_{\varepsilon_x}(x) \text{ nur für unendliche viele } n \in \mathbb{N} \text{ gilt.}$$

Dann ist:

$$U = (B_{\varepsilon_x}(x))_{x \in X}$$

eine offene Überdeckung von X

Weil X Überdeckungskompakt ist, gibt es endliche Teilüberdeckung

$$\Rightarrow \exists y_1, \dots, y_r \in X \text{ mit:}$$

$$X = B_{\varepsilon_{y_1}}(y_1) \cup \dots \cup B_{\varepsilon_{y_r}}(y_r)$$

□

Bemerkung:

X metrischer Raum. Man kann zeigen, dass folgendes äquivalent ist:

1. X kompakt
2. X ist vollständig und total beschränkt
3. X hat folgende Eigenschaft:

Sind $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$ abgeschlossene Teilmengen von X und $A_n \neq \emptyset \forall n$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$$

ohne Beweis

1 \Rightarrow 2: Wir setzen hierfür Lemma I.5.16 voraus. X folgenkompakt, $U = (U_i)_{i \in I}$ offene Überdeckung von X

zu zeigen: Es gibt endliche Teilüberdeckung $V = (V_j)_{j \in J}$

Sei $\delta > 0$ eine Lebesgue-Zahl von U (existiert nach I.5.11)

$$5.16 \Rightarrow \exists x_1, \dots, x_r \in X \quad \bigcup_{j=1}^r B_\delta(x_j) = X$$

$$\Rightarrow \forall j = 1, \dots, r \exists i, j \in I: \quad B_\delta(x_j) \subseteq U_{ij} \\ \Rightarrow X = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_r}$$

□

I.5.16. Lemma

X folgenkompakter metrischer Raum.

Dann ist X **total beschränkt**, d.h. $\forall \varepsilon > 0$ gibt es endlich viele $x_1, \dots, x_r \in X$, so dass:

$$\bigcup_{i=1}^r B_\varepsilon(x_i) = X$$

Beweis:

Wir zeigen:

$$X \text{ nicht total beschränkt} \Rightarrow X \text{ nicht folgenkompakt}$$

Sei X also nicht total beschränkt. $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$, so dass gilt:

Sind $x_1, \dots, x_r \in X$ beliebig

$$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^r B_\varepsilon(x_i) \neq X$$

$$\Rightarrow X \setminus \bigcup_{i=1}^r B_\varepsilon(x_i) \neq \emptyset$$

Wähle $x_1 \in X \Rightarrow X \setminus B_\varepsilon(x_1) \neq \emptyset$

Wähle $x_2 \in X \setminus B_\varepsilon(x_1) \Rightarrow X \setminus (B_\varepsilon(x_1) \cup B_\varepsilon(x_2)) \neq \emptyset$

Wähle $x_3 \dots$

Wähle $x_r \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{r-1} B_\varepsilon(x_i)$

$\Rightarrow (x_r)_r$ Folge in X

Für $n \neq m$ gilt:

$$d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$$

Dann ist $n > m$, so ist nach Konstruktion $x_n \notin B_\varepsilon(x_m)$ und dann kann keine Teilfolge von $(x_r)_r$ eine Cauchyfolge sein.

$\Rightarrow (x_r)_r$ hat keine konvergente Teilfolge

X nicht folgenkompakt

□

II. Differentialrechnung im \mathbb{R}^n

II.1. Die Definition

Ziel: $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$

Wann heißt f differenzierbar?

Was ist die Ableitung von f ?

II.1.1. Notation

$U \subseteq \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^n.$

$$x + U = \{x + y \mid y \in U\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

Analysis I: $n = m = 1, U \subseteq \mathbb{R}$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}, x \in U$. f diffbar \Leftrightarrow der Grenzwert

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}(f(x+h) - f(x)) \in \mathbb{R}$$

existiert.

Verallgemeinerung: $\mathbb{R} \supseteq U \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$ ohne Problem.

$n > 1$ problematisch, denn man kann nicht durch Elemente $h \in \mathbb{R}^n$ dividieren.

Umformulierung: (aus Analysis I)

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $x \in U, f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$A : -x + U \rightarrow \mathbb{R}^m \quad (-x + U = \{h \in \mathbb{R}^n \mid h + x \in U\})$$

definiert durch:

$$A(h) := \begin{cases} \frac{1}{h}(f(x+h) - f(x)), & \text{falls } h \neq 0 \\ f'(x), & \text{falls } h = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow A$ stetig bei 0

$$\forall h \in -x + U \quad f(x+h) = f(x) + A(h)h$$

Umgekehrt: Nimm an, es gibt Funktion $A : -x + U \rightarrow \mathbb{R}^m$, so dass

1. A stetig bei 0

2. $f(x+h) = f(x) + A(h)h$

$\Rightarrow f$ differenzierbar bei x , und $f'(x) = A(0)$

Beweis:

$$\frac{1}{h}(f(x+h) - f(x)) = \frac{1}{h}(f(x) + A(h)h - f(x)) = \frac{1}{h}A(h)h = A(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} A(0)$$

II.1.2. Bemerkung

1. für $n = m = 1$ erhält man den bekannten Begriff aus Ana I

2. hier ist $\text{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$ isomorph zu $\mathbb{R}^{m \times n}$ mit irgendeiner Norm ausgestattet (welche, ist gleichgültig, weil alle Normen Äquivalent sind)

$$3. f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} : U \rightarrow \mathbb{R}^m$$

f diffbar bei $x \Leftrightarrow f_i$ diffbar bei x ($\forall i \in \{1, \dots, m\}$)

und

$$Df(x) = \begin{pmatrix} Df_1(x) \\ \vdots \\ Df_n(x) \end{pmatrix} \quad Df(x) \in \text{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$$

4. Wir identifizieren Matrizen und lineare Abbildungen mittels Isomorphismen

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{m,n}(\mathbb{R}) &\rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m) \\ A &\mapsto (x \mapsto A \cdot x) \end{aligned}$$

II.1.3. Definition

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ $x \in U$. f heißt **differenzierbar** bei x , falls eine Funktion $A : -x + U \rightarrow \text{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$ existiert, so dass gilt:

1. A stetig bei 0
2. $\forall h \in -x + U :$

$$\underbrace{f(x+h)}_{\in \mathbb{R}^m} = \underbrace{f(x)}_{\in \mathbb{R}^m} + \underbrace{A(h)}_{\in \text{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})} \underbrace{h}_{\in \mathbb{R}^n}$$

Die Matrix $A(0) \in \text{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$ heißt **Ableitung** von f in x und wird mit

$$Df(x) \in \text{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$$

bezeichnet

Alternative Bezeichnung: 'total differenzierbar'

$$Df(x) = \text{'Totales Diferential'}$$

II.1.4. Satz

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $x \in U$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ sei differenzierbar. Sei $v \in \mathbb{R}^n$ setze $g_v(t) = f(x + tv)$ mit

$$g_v : \{t \in \mathbb{R} \mid x + tv \in U\} \rightarrow \mathbb{R}^m$$

Dann gilt:

$$Df(x)v = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}(g_v(t) - g_v(0))$$

Beweis:

Schreibe $f(x+h) = f(x) + A(h)h$. A stetig bei 0 und $A(0) = Df(x)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{t}(g_v(t) - g_v(0)) &= \frac{1}{t}(f(x+tv) - f(x)) \\ &= \frac{1}{t}(f(x) + A(tv)tv - f(x)) \\ &= \frac{1}{t}A(tv)tv \\ &= \frac{1}{t}tA(tv)v = A(tv)v \longrightarrow A(0)v = Df(x)v \end{aligned}$$

$t \mapsto A(tv)v$ ist stetig bei 0

□

Bemerkung:

In Def II.1.2 ist $A(h)$ **nicht** eindeutig durch f bestimmt. Aber $A(0)$ ist eindeutig bestimmt, nach II.1.3

II.1.5. Definition

U, x, f, v wie in Satz II.1.3. Dann heißt $Df(x)v$ die **Richtungsableitung** von f in Richtung v .

$$D_v f(x) = Df(x)v$$

Bemerkung:

Ist f diffbar bei x , so ist $v \mapsto g'_v(0) = D_v f(x)$ linear.

Beispiel:

$$f(x) = \langle x, x \rangle = \|x\|_2^2$$

$$f(x+h) = \langle x, x \rangle + \langle h, h \rangle + 2\langle x, h \rangle = f(x) + \langle h, h \rangle + 2\langle x, h \rangle$$

$$A(h) \in \text{Mat}_{n,m}(\mathbb{R})$$

$$A(h)h = \langle h, h \rangle + 2\langle x, h \rangle$$

II.1.6. Satz

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $x \in U$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$. $C \in \text{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$.

Es sind Äquivalent:

die Numerierung ist
hier nicht richtig

1. f ist differenzierbar bei x , und $Df(x) = C$

2. Es gilt:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - C \cdot h\|}{\|h\|} = 0$$

2 besagt, dass $h \mapsto f(x) + C \cdot h$ eine gute Approximation an $h \mapsto f(x+h)$ ist)

Außerdem liefern Satz II.1.8 und II.1.5 ein 'Kochrezept' um die Differenzierbarkeit von f nachzuprüfen:

1. Berechne $D_v f(x)$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$

2. Finde Matrix $C \in \text{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$ mit $(v = D_v f(x), \forall v \in \mathbb{R}^n)$

3. Prüfe

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\|h\|} \|f(x+h) - f(x) - C \cdot h\| = 0$$

$$\Rightarrow Df(x) = C$$

Beweis:

1 \Rightarrow 2: Sei $A : -x + U \rightarrow \text{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$ mit

$$f(x+h) = f(x) + A(h)h \quad (\forall h)$$

A stetig bei 0 und $A(0) = C$

$$\Rightarrow \frac{\|f(x+h) - f(x) - C \cdot h\|}{\|h\|} = \frac{A(h)h - C \cdot h}{\|h\|} \leq \underbrace{\|A(h) - C\|}_{\substack{\rightarrow 0 \\ \text{für } h \rightarrow 0 \\ (A \text{ stetig bei } 0)}} \|h\|$$

$2 \Rightarrow 1$:

Vorbemerkung: $h \in \mathbb{R}^n, v \in \mathbb{R}^n, h \neq 0$. Dann ist durch

$$y \mapsto \frac{\langle h, y \rangle}{\|h\|^2} v, \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

eine lineare Abbildung gegeben, welche mit $h \mapsto v$

Setze $\varphi(h) = f(x+h) - f(x) - C \cdot h, \varphi : -x + U \rightarrow \mathbb{R}^m$

Nach Voraussetzung 2) gilt:

$$\frac{\|\varphi(h)\|}{\|h\|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

Definiere Funktion $A : -x + U \rightarrow \text{Mat}_{m,n}(\mathbb{R}), A(0) = C \quad h \neq 0$

Sei $A(h)$ die Matrix, welche die lineare Abbildung

$$y \mapsto C \cdot y + \frac{\langle h, y \rangle}{\|h\|^2} \varphi(h)$$

darstellt, wobei $\varphi(h) = A(h)y$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(x) + A(h)h &= f(x) + C \cdot h + \frac{\langle h, h \rangle}{\|h\|^2} \varphi(h) \\ &= f(x) + C \cdot h + \varphi(h) \\ &= f(x+h) \end{aligned}$$

Ferner ist A stetig bei 0, denn

$$\begin{aligned} \|A(h) - A(0)\| &= \sup_{\|y\| \leq 1} \|A(h)y - A(0)y\| \\ &= \sup_{\|y\| \leq 1} \left\| C y + \frac{\langle h, y \rangle}{\|h\|^2} \varphi(h) - C y \right\| \\ &= \sup_{\|y\| \leq 1} \frac{|\langle h, y \rangle|}{\|h\|^2} \|\varphi(h)\| \\ &\leq \sup_{\|y\| \leq 1} \frac{\|h\| \|y\|}{\|h\|^2} \|\varphi(h)\| \\ &= \frac{\|\varphi(h)\|}{\|h\|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow f$ differenzierbar bei x

$$Df(x) = C$$

II.1.7. Definition

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $x \in U, f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$. Die i -te partielle Ableitung von f bei x ist

$$D_i f(x) := D_{e_i} f(x) \quad (i = 1, \dots, n)$$

Man schreibt oft auch

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(x) := D_i f(x)$$

Es gilt folgendes:

Wenn f differenzierbar bei x ist, so gilt:

Der (i, j) te Eintrag von $Df(x)$ ist

$$(Df(x))_{i,j} = D_j f_i(x) \quad i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$$

$$Df(x) = \begin{pmatrix} D_1 f_1(x) & \dots & D_n f_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ D_1 f_m(x) & \dots & D_n f_m(x) \end{pmatrix} \quad (\text{Jacobi-Matrix})$$

Wie berechnet man $D_j f_i(x)$?

$$D_j f_i(x) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f_i(x + t e_j) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f_i(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + t, x_{j+1}, \dots, x_n)$$

Beispiel:

$U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \neq 0\}$ offen in \mathbb{R}^2

$$q(x_1, x_2) = \frac{x_1}{x_2}$$

Berechnung der partiellen Ableitungen:

$$D_1 q(x_1, x_2) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} q(x_1 + t, x_2) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \frac{x_1 + t}{x_2} = \frac{1}{x_2} \left(= \frac{d}{dx_2} \frac{x_1}{x_2} \right)$$

$$D_2 q(x_1, x_2) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} q(x_1, x_2 + t) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \frac{x_1}{x_2 + t} = \left. \frac{-x_1}{(x_2 + t)^2} \right|_{t=0} = -\frac{x_1}{x_2^2} \left(= -\frac{d}{dx_2} \frac{x_1}{x_2} \right)$$

\Rightarrow falls q diffbar ist, so muss

$$Dq(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{x_2}, -\frac{x_1}{x_2^2} \right)$$

Ist q diffbar?

$x = (x_1, x_2) \in U$ fest, $h = (h_1, h_2) \in -x + U$. Setze

$$A_x(h) := \left(\frac{1}{x_2 + h_2}, \frac{-x_1}{x_2(x_2 + h_2)} \right)$$

Dann gilt $q(x + h) = q(x) + A_x(h)h$, denn

$$\begin{aligned} q(x) + A_x(h)h &= \frac{x_1}{x_2} + \left(\frac{h_1}{x_2 + h_2} - \frac{x_1 h_1}{x_2(x_2 + h_2)} \right) \\ &= \frac{x_1(x_2 + h_2) + x_2 h_1 - x_1 h_1}{x_2(x_2 + h_2)} \\ &= \frac{x_1 x_2 + x_2 h_1}{x_2(x_2 + h_2)} \\ &= \frac{x_1 + h_1}{x_2 + h_2} \\ &= q(x + h) \end{aligned}$$

$h \mapsto A_x(h)$ stetig bei 0, denn

$$A_x(h) = \left(\underbrace{\frac{1}{x_2 + h_2}}_{\rightarrow \frac{1}{x_2}}, \underbrace{\frac{-x_1}{x_2(x_2 + h_2)}}_{\rightarrow \frac{-x_1}{x_2^2}} \right)$$

Beispiel:

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \langle x, x \rangle$.

Wir haben gesehen, dass f differenzierbar ist mit

$$D_v f(x) = 2\langle x, v \rangle \quad \forall x, v \in \mathbb{R}^n$$

$$\begin{aligned} D_v f(x) &= \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} \langle x + tv, x + tv \rangle \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} \left(\langle x, x \rangle^2 + 2\langle x, v \rangle + t^2 \langle v, v \rangle \right) \\ &= 2\langle x, v \rangle \end{aligned}$$

Somit folgt, dass gilt:

$$D_i f(x) = 2\langle x, e_i \rangle = 2x_i$$

$$Df(x) = (2x_1, \dots, 2x_n)$$

Dieses hätte man auch sehen können, wenn man

$$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2$$

betrachtet mit

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(x) = 2x_i$$