

Skript Einführung in die Funktionalanalysis


Mitschrift der Vorlesung „Einführung in die Funktionalanalysis“ von
Prof. Dr. Wilhelm Winter

Jannes Bantje

17. Oktober 2014

Aktuelle Version verfügbar bei:



 **GitHub** (inklusive Sourcecode)
<https://github.com/JaMeZ-B/latex-www>



 **Bittorrent Sync**
B6WH2DISQ5QVYIRYIEZSF4ZR2IDVKPN3I

Vorwort — Mitarbeit am Skript

Dieses Dokument ist eine Mitschrift aus der Vorlesung „Einführung in die Funktionalanalysis, WiSe 2014“, gelesen von Prof. Dr. Wilhelm Winter. Der Inhalt entspricht weitestgehend dem Tafelanschrieb. Für die Korrektheit des Inhalts übernehme ich keinerlei Garantie! Für Bemerkungen und Korrekturen – und seien es nur Rechtschreibfehler – bin ich sehr dankbar. Korrekturen lassen sich prinzipiell auf drei Wegen einreichen:

- Persönliches Ansprechen in der Uni, Mails an ✉ j.bantje@wwu.de (gerne auch mit annotieren PDFs)
- *Direktes* Mitarbeiten am Skript: Den Quellcode poste ich auf GitHub (siehe oben), also stehen vielfältige Möglichkeiten der Zusammenarbeit zur Verfügung: Zum Beispiel durch Kommentare am Code über die Website und die Kombination Fork + Pull Request. Wer sich verdient macht oder ein Skript zu einer Vorlesung, die ich nicht besuche, beisteuern will, dem gewähre ich gerne auch Schreibzugriff.

Beachten sollte man dabei, dass dazu ein Account bei github.com  notwendig ist, der allerdings ohne Angabe von persönlichen Daten angelegt werden kann. Wer bei GitHub (bzw. dem zugrunde liegenden Open-Source-Programm „git“) – verständlicherweise – Hilfe beim Einstieg braucht, dem helfe ich gerne weiter. Es gibt aber auch zahlreiche empfehlenswerte Tutorials im Internet.¹

- *Indirektes* Mitarbeiten: \TeX -Dateien per Mail verschicken.

Dies ist nur dann sinnvoll, wenn man einen ganzen Abschnitt ändern möchte (zB. einen alternativen Beweis geben), da ich die Änderungen dann per Hand einbauen muss!

Vorlesungshomepage



<https://wwwmath.uni-muenster.de/u/wilhelm.winter/wwinter/funktionalanalysis.html> 

¹zB. <https://try.github.io/levels/1/challenges/1> , ist auf Englisch, aber dafür interaktives LearningByDoing

Inhaltsverzeichnis

1. Metrische Räume und der Satz von Baire	1
1.1. Definition: Metrischer Raum	1
1.2. Definition: Offen, abgeschlossen und Abschluss	1
1.3. Definition: Stetigkeit, gleichmäßige Stetigkeit, Isometrie	1
1.4. Definition: Cauchy-Folge und Vollständigkeit	1
1.5. Satz: Existenz einer eindeutigen Vervollständigung metrischer Räume	2
1.6. Definition: Raum der beschränkten, stetigen Abbildungen	3
1.7. Bemerkung: $d_{W,X}$ als Metrik auf $C(W, X)$	3
1.8. Proposition: X vollständig $\Rightarrow C - B(W, X)$ und $C(W, X)$ vollständig	3
1.9. Proposition über eine Folge von Bällen	4
1.10. Satz von Baire	4
A. Anhang	7
A.1. Vierecksungleichung	7
Index	A
Abbildungsverzeichnis	B

1. Metrische Räume und der Satz von Baire

1.1. Definition

Ein **metrischer Raum** ist ein Paar (X, d) , wobei X eine Menge und $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ ist, sodass

14 Okt

- 1) $d(x, y) = 0 \iff x = y \quad \forall x, y \in X$
- 2) $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$
- 3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \forall x, y, z \in X$

1.2. Definition

Sei (X, d) ein metrischer Raum

- Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt **offen**, falls für jedes $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass

$$B(x, \varepsilon) := \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\} \subset U$$

- Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt **abgeschlossen**, falls $X \setminus A$ offen ist (als Teilmenge von X).
- $\mathcal{T}_X := \{U \subset X \mid U \text{ offen}\}$ ist die Topologie auf X (die von der Metrik d induziert wird)
- Falls $W \subset X$ eine Teilmenge ist, dann bezeichnet \overline{W} den **Abschluss** von W , d.h. die kleinste abgeschlossene Teilmenge von X , die W enthält. Es gilt

$$\overline{W} = \bigcap_{A \subset X \text{ abg., } W \subset A} A$$

Für metrische Räume gilt: $\overline{W} = \{\lim_n x_n \mid (x_n)_n \subset W \text{ konvergente Folge}\}$. Warum gilt $W \subset \overline{W}$?

1.3. Definition

Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen zwei metrischen Räumen (X, d_X) und (Y, d_Y) heißt

- **stetig in** $x \in X$, falls $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x' \in X : d_X(x, x') < \delta \implies d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$
- **stetig**, falls f an jedem Punkt $x \in X$ stetig ist.
(Äquivalent: Für jede offene Menge V in Y ist $f^{-1}(V)$ offen in X)
- **gleichmäßig stetig**, falls $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x, x' \in X : d_X(x, x') < \delta \implies d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$.
- f heißt **Isometrie**, falls $\forall x, x' \in X : d_X(x, x') = d_Y(f(x), f(x'))$.
- f heißt **isometrischer Isomorphismus**, falls f bijektiv und isometrisch ist.

automatisch injektiv

 f^{-1} auch

1.4. Definition

Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum (X, d) heißt **Cauchy**, falls

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, k > N : d(x_n, x_k) < \varepsilon.$$

(X, d) heißt **vollständig**, falls jede Cauchy-Folge in X konvergiert.

1.5. Satz

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann existiert ein vollständiger metrischer Raum (\tilde{X}, \tilde{d}) und eine Isometrie $\iota : X \hookrightarrow \tilde{X}$, sodass $\overline{\iota(X)} = \tilde{X}$ (d.h. $\iota(X)$ ist dicht in \tilde{X}). (\tilde{X}, \tilde{d}) heißt **Vervollständigung** von (X, d) und ist eindeutig bis auf isometrische Isomorphie.

Beweis

Eindeutigkeit: Angenommen, (\hat{X}, \hat{d}) ist ein weiterer vollständiger metrischer Raum und $\kappa : X \rightarrow \hat{X}$ eine Isometrie mit $\overline{\kappa(X)} = \hat{X}$. Definiere $\gamma : \hat{X} \rightarrow \tilde{X}$ wie folgt: Falls $y \in \hat{X}$, wähle eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X , sodass $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \kappa(x_n)$. Setze nun

$$\gamma(y) := \lim_{n \rightarrow \infty} \iota(x_n) \in \tilde{X}$$

Zu zeigen: γ ist ein isometrischer Isomorphismus.

Injektivität: Seien $y, y' \in \hat{X}$ mit $\gamma(y) = \gamma(y')$. Dann existieren Folgen $(x_n)_n, (x'_n)_n$ in X mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iota(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \iota(x'_n)$$

Existenz: Konstruktion von (\tilde{X}, \tilde{d}) : Setze $Y := \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid (x_n)_n \text{ ist Cauchy-Folge in } X\}$. Definiere

$$(x_n)_n \sim (x'_n)_n : \iff \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x'_n) = 0$$

\sim ist eine Äquivalenzrelation auf Y . Definiere nun $\tilde{X} := Y/\sim$ und $\tilde{d} : \tilde{X} \times \tilde{X} \rightarrow [0, \infty)$ durch

$$\tilde{d}([(x_n)_n], [(x'_n)_n]) := \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x'_n)$$

\tilde{d} ist wohldefiniert, d.h. falls $[(x_n)_n] = [(y_n)_n]$ und $[(x'_n)_n] = [(y'_n)_n]$, dann ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(y_n, y'_n). \quad (\text{leichte Übung})$$

Weiter ist $(d(x_n, x'_n))_n$ eine Cauchy-Folge in dem vollständigen Raum $[0, \infty)$ und somit konvergent: Sei dazu $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $d(x_n, x_m) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ und $d(x'_n, x'_m) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n, m \geq N$. Dann gilt nach der Vierecksungleichung (siehe Anhang A.1)

$$|d(x_n, x'_n) - d(x_m, x'_m)| \leq d(x_n, x_m) + d(x'_n, x'_m) \leq \varepsilon$$

Einbettung von X : Definiere nun $\iota : X \rightarrow \tilde{X}$ durch $x \mapsto [(x, x, x, \dots)] \in \tilde{X}$. ι ist Isometrie, da

$$\tilde{d}(\iota(x), \iota(y)) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x, y) = d(x, y)$$

Sei nun $[(x_n)_n] \in \tilde{X}$ und $\varepsilon > 0$. Da $(x_n)_n$ eine Cauchy-Folge ist, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n, m \geq N$ gilt $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Dann gilt

$$\tilde{d}(\iota(x_N), [(x_n)_n]) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_N, x_n) < \varepsilon$$

$\bar{x} \in \tilde{X}$

Vollständigkeit von (\tilde{X}, \tilde{d}) : Sei $(\bar{x}^m)_m$ eine Cauchyfolge in \tilde{X} .

$$\implies \forall \varepsilon > 0 : \exists M(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall m, m' > M : \tilde{d}(\bar{x}^m, \bar{x}^{m'}) < \frac{\varepsilon}{3}$$

Wenn $\bar{x}^m = [(x_n^m)_n]$ und $\bar{x}^{m'} = [(x_n^{m'})_n]$, dann gilt also für alle $m, m' > M(\varepsilon)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n^m, x_n^{m'}) < \frac{\varepsilon}{3} \quad [*]$$

Für alle m ist $(x_n^m)_n$ eine Cauchyfolge, also gilt

$$\forall m : \exists N(m) : \forall n, n' \geq N(m) : d(x_n^m, x_{n'}^m) < \frac{1}{m} \quad [**]$$

Setze nun $z_n := x_{N(n)}^n$. Behauptung: $(z_n)_n$ ist eine Cauchyfolge. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt für $n, m > N = \max\{M(\varepsilon), \frac{3}{\varepsilon}\}$ für ein $k > N(m), N(n)$

$$d(z_n, z_m) = d(x_{N(n)}^n, x_{N(m)}^m) \leq \underbrace{d(x_{N(n)}^n, x_k^n)}_{[**] < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} \leq \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{d(x_k^n, x_k^m)}_{[*] \leq \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{d(x_k^m, x_{N(m)}^m)}_{[**] < \frac{1}{m} < \frac{1}{N} \leq \frac{\varepsilon}{3}} < \varepsilon$$

$d(z_n, z_m)$ ist
unabhängig von k ,
also kann man k
beliebig groß
wählen

$\Rightarrow (z_n)_n$ ist eine Cauchyfolge, also

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N_z(\varepsilon) : \forall n, m > N_z(\varepsilon) : d(z_n, z_m) < \varepsilon \quad [\#]$$

Es bleibt zu zeigen: $\lim_{m \rightarrow \infty} \bar{x}^m = [(z_n)_n]$. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Dann gilt für $m \geq \max\{\frac{2}{\varepsilon}, N_z(\varepsilon)\}$

$$\tilde{d}(\bar{x}^m, [(z_n)_n]) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n^m, x_{N(n)}^n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\underbrace{d(x_n^m, x_{N(m)}^m)}_{[**] < \frac{1}{m} \leq \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{d(x_{N(m)}^m, x_{N(n)}^n)}_{=d(z_m, z_n) \stackrel{[\#]}{<} \frac{\varepsilon}{2}} \right) < \varepsilon$$

Also gilt $\bar{x}^m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} [(z_n)_n]$ und (\tilde{X}, \tilde{d}) ist vollständig. \square

1.6. Definition

Sei (W, \mathcal{T}) ein topologischer Raum und (X, d) ein metrischer Raum. Sei

$$C_b(W, X) = \{f : W \rightarrow X \mid f \text{ stetig und beschränkt}\}$$

versehen mit der Metrik $d_{W,X}$, definiert durch

$$d_{W,X}(f, g) = \sup_{t \in W} d(f(t), g(t))$$

1.7. Bemerkung

Auf $C(W, X) = \{f : W \rightarrow X \text{ stetig}\}$ ist $d_{W,X}$ eine **erweiterte Metrik**, d.h. der Wert ∞ ist möglich. $\tilde{d}_{W,X} := \min\{1, d_{W,X}\}$ ist eine „echte“ Metrik auf $C(W, X)$.

1.8. Proposition

Falls X vollständig ist, dann sind $C_b(W, X)$ und $C(W, X)$ vollständig (bezüglich $d_{W,X}$ bzw. $\tilde{d}_{W,X}$).

Beweis

Sei $(f_n)_n$ eine Cauchy-Folge in $C_b(W, X)$, also

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m > N : \sup_{t \in W} d(f_n(t), f_m(t)) < \varepsilon$$

\Rightarrow für alle t ist $(f_n(t))_n$ eine Cauchyfolge in X . Da X vollständig ist, existiert ein $x_t \in X$ sodass $f_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_t$. Definiere $f(t) := x_t$ punktweise.

Vorbereitung: Es gilt $\forall \varepsilon > 0 : \exists N_t$ sodass $d(x_t, f_{N_t}(t)) \leq \varepsilon$. Weiter ist

$$\sup_{t \in W} d(f_n(t), f_m(t)) \leq \varepsilon \quad \forall n, m \geq N_t$$

$$\Rightarrow \forall t : d(f_n(t), f_m(t)) \leq \varepsilon \quad \forall n, m \geq N$$

Beweis zu
Ende führen

1.9. Proposition

Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $(\overline{B}(x_n, \varepsilon_n))_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\overline{B}(x_{n+1}, \varepsilon_{n+1}) \subseteq \overline{B}(x_n, \varepsilon_n)$ und $\varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Dann existiert genau ein Punkt in $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{B}(x_n, \varepsilon_n)$.

Beweis

Existenz: Behauptung: Die Folge der Mittelpunkte $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge: Sei $\varepsilon > 0$. Finde $N \in \mathbb{N}$, sodass $\varepsilon_n \leq \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Dann gilt für alle $n \geq m \geq N$

$$d(x_n, x_m) \leq \varepsilon_m \leq \varepsilon,$$

da $x_n \in \overline{B}(x_m, \varepsilon)$ ist. Da X vollständig ist, existiert ein $x \in X$ mit $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$.

Behauptung: $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{B}(x_n, \varepsilon_n)$. Wähle dazu ein $N \in \mathbb{N}$. Dann ist $(x_n)_{n \geq N}$ eine Cauchy-Folge in $\overline{B}(x_N, \varepsilon_N)$. $\overline{B}(x_N, \varepsilon_N)$ ist ein abgeschlossener Teilraum von X und somit vollständig. Also ist $x \in \overline{B}(x_N, \varepsilon_N)$. Da N beliebig war, gilt $x \in \overline{B}(x_n, \varepsilon_n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Eindeutigkeit: Es seien $x, y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{B}(x_n, \varepsilon_n)$, also $x, y \in \overline{B}(x_n, \varepsilon_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) \leq 2 \cdot \varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ und somit $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$. □

1.10. Satz von Baire²

Es gelten folgende äquivalente Formulierungen:

- a) Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und A_0, A_1, \dots eine Folge abgeschlossener Teilmengen. Falls $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ eine offene Kugel enthält, so auch eines der A_n .
- b) In einem vollständigen metrischen Raum hat eine abzählbare Vereinigung von abgeschlossenen Mengen ohne innere Punkte keine inneren Punkte.
- c) In einem vollständigen metrischen Raum ist ein abzählbarer Durchschnitt von dichten offenen Mengen wieder dicht.

Beweis

Zunächst die Äquivalenz:

a) \Rightarrow b): Klar, da b) Kontraposition von a) ist.

b) \Rightarrow c): Sei $U_n \subseteq X$ offen und dicht $\Rightarrow X \setminus U_n \subseteq X$ abgeschlossen und hat somit keine inneren Punkte. Aus b) folgt nun

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X \setminus U_n = X \setminus \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$$


hat keine inneren Punkte. Also ist $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$ dicht in X .

c) \Rightarrow a): ebenso.

Wir wollen nun a) durch Widerspruch beweisen, d.h. wir nehmen an, dass gilt: Jede offene Kugel schneidet $X \setminus A_k$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Dazu wollen wir Folgen $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset X$, $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset (0, 1]$ finden mit

$$(i) \quad \varepsilon_k < \frac{1}{k+1},$$

$$(ii) \quad \overline{B}(x_{k+1}, \varepsilon_{k+1}) \subset (X \setminus A_k) \cap B(x_k, \varepsilon_k) \subset \overline{B}(x_k, \varepsilon_k),$$

²nach René Louis Baire, [https://de.wikipedia.org/wiki/René_Louis_Baire](https://de.wikipedia.org/wiki/Ren%C3%A9_Louis_Baire) 

$$(iii) \overline{B}(x_k, \varepsilon_k) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

für $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \stackrel{(iii), (ii)}{\supset} \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \overline{B}(x_k, \varepsilon_k) \stackrel{(ii)}{\subset} \bigcap_{k \in \mathbb{N}} (X \setminus A_k) \cap B(x_k, \varepsilon_k) \subset \bigcap_{k \in \mathbb{N}} X \setminus A_k = X \setminus \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \right)$$

Aber wegen (i) und (ii) existiert nach Proposition 1.9 ein $x \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \overline{B}(x_k, \varepsilon_k)$. \nmid

A. Anhang

A.1. Vierecksungleichung

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $x, y, u, v \in X$. Dann gilt

$$|d(x, y) - d(u, v)| \leq d(x, u) + d(y, v)$$

Beweis

Einerseits gilt nach der Dreiecksungleichung


$$d(x, y) \leq d(x, u) + d(u, v) + d(v, y) \implies d(x, y) - d(u, v) \leq d(x, u) + d(y, v)$$

Andererseits aber auch

$$d(u, v) \leq d(u, x) + d(x, y) + d(y, v) \implies d(u, v) - d(x, y) \leq d(x, u) + d(y, v)$$

Insgesamt folgt also die Behauptung. □

Index

Die **Seitenzahlen** sind mit *Hyperlinks* zu den entsprechenden Seiten versehen, also anklickbar 

abgeschlossen, 1

Abschluss, 1

Cauchy-Folge, 1

erweiterte Metrik, 3

gleichmäßig stetig, 1

Isometrie, 1

isometrischer Isomorphismus, 1

metrischer Raum, 1

offen, 1

stetig, 1

Vervollständigung, 2

vollständig, 1

Abbildungsverzeichnis