Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

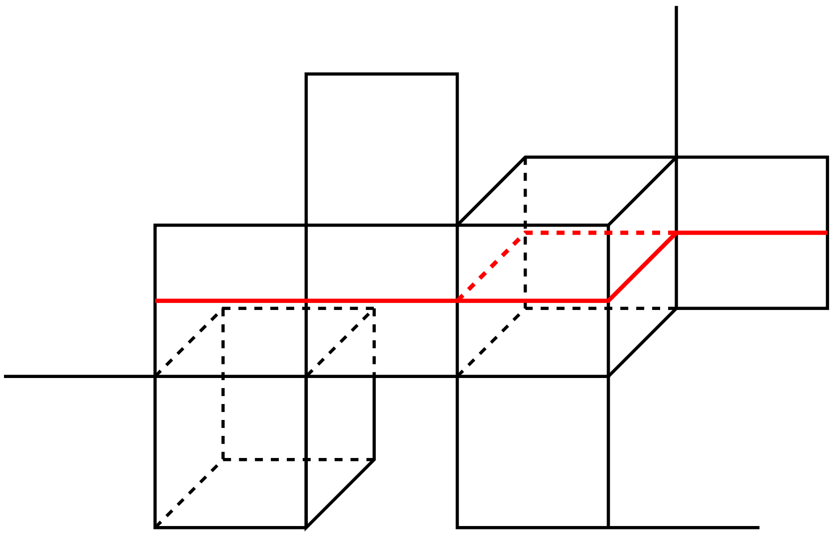
Fachbereich 10
Mathematik und
Informatik

CAT(0) kubische Komplexe

gelesen von

Dr. Olga Varghese

im Wintersemester 2015/2016



Vorlesungsmitschrift von Phil Steinhorst

Stand: 6. November 2015

Vorwort

Der vorliegende Text ist eine Mitschrift zur Vorlesung $\mathrm{CAT}(0)$ kubische Komplexe, gelesen von Dr. Olga Varghese an der WWU Münster im Wintersemester 2015/2016. Der Inhalt entspricht weitestgehend dem Tafelanschrieb und den Vorlesungsnotizen, welche auf der Vorlesungswebsite bereitsgestellt werden. Dieses Werk ist daher keine Eigenleistung des Autors und wird nicht von der Dozentin der Veranstaltung korrekturgelesen. Für die Korrektheit des Inhalts wird keinerlei Garantie übernommen. Bemerkungen, Korrekturen und Ergänzungen kann man folgenderweise loswerden:

- persönlich durch Überreichen von Notizen oder per E-Mail
- durch Abändern der entsprechenden TeX-Dateien und Versand per E-Mail an mich
- direktes Mitarbeiten via GitHub. Dieses Skript befindet sich im `latex-wwu`-Repository von Jannes Bantje:

  `https://github.com/JaMeZ-B/latex-wwu`

Literatur

- Bridson, Haefliger: Metric Spaces of Non-Positive Curvature [BH99]
- Serre: Trees [Ser80]
- Bekka, de la Harpe, Valette: Kazhdan's Property (T) [BHV08]

Kommentar der Dozentin

In der geometrischen Gruppentheorie werden Gruppen als Symmetrien von Räumen betrachtet. Ihre algebraische Eigenschaften werden mittels geometrischer Eigenschaften der Räume, auf denen sie wirken, untersucht. Gruppen, die auf kubischen Komplexen wirken – das sind polyhedrische Komplexe, die aus Würfeln gebaut sind – sind dabei besonders gut verstanden.
Die Vorlesung wird eine Einführung in die Strukturtheorie $\mathrm{CAT}(0)$ kubischer Komplexe liefern, sowie Anwendungen in der Gruppentheorie diskutieren.

abstrakte Gruppen

- endliche Gruppen
- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$
- $\mathrm{Aut}(F_n)$, $\mathrm{SAut}(F_n)$
- Coxetergruppen

$$\xrightarrow[\text{Fixpunkt?}]{\Psi\colon G \to \mathrm{Isom}(X)}$$

metrische Räume mit ”viel Geometrie”

- $(\mathbb{R}^n, d_2)$
- Hilberträume
- simpliziale Bäume
- CAT(0) kubische Komplexe

Geplante Themen

- CAT(0)-Räume (simpliziale Bäume, kubische Komplexe)
- Gruppenwirkungen auf CAT(0) kubische Komplexe
- Bruhat-Tits-Fixpunktsatz für CAT(0) kubische Komplexe
- Helly’s Theorem
- Kazhdan-Eigenschaft (T)

Vorlesungswebsite

Das handgeschriebene Skript sowie weiteres Material findet man unter folgendem Link:

`http://wwwmath.uni-muenster.de/u/ag_kramer/index.php?name=KubischeKomplexe_15&menu=teach&lang=de`

Phil Steinhorst
p.st@wwu.de

Inhaltsverzeichnis

1 CAT(0)-Räume

1.1 Definition (Metrischer Raum)
Sei X eine Menge. Eine Abbildung $d\colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt **Metrik**, wenn für alle $x, y, z \in X$ gilt: 21.10.15 [1]

(i) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$

(iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Das Paar (X, d) heißt dann **metrischer Raum**.

1.2 Beispiel

(i) Für $n \in \mathbb{N}$ ist $\mathbb{E}^n := (\mathbb{R}^n, d_2)$ mit

$$\begin{aligned} d_2\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ (x, y) &\longmapsto \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}. \end{aligned}$$

(ii) Sei X eine Menge. Wir definieren:

$$\begin{aligned} d\colon X \times X &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ (x, y) &\longmapsto \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y. \end{cases} \end{aligned}$$

Dann ist d eine Metrik und (X, d) heißt ein **diskreter metrischer Raum**.

1.3 Definition (Geodätischer Raum)

(i) Sei (X, d) ein metrischer Raum und $x, y \in X$. Eine **Geodäte** von x nach y ist eine Abbildung $\gamma\colon [a, b] \to X$ mit $\gamma(a) = x, \gamma(b) = y$ und $d(\gamma(t), \gamma(t')) = |t - t'|$ für alle $t, t' \in [a, b]$. Wir schreiben $\gamma\colon x \rightsquigarrow y$.

(ii) Der Raum (X, d) ist ein **geodätischer Raum**, wenn für alle $x, y \in X$ eine Geodäte $x \rightsquigarrow y$ existiert.

(iii) Ein geodätischer Raum heißt **eindeutig geodätisch**, wenn genau eine solche Geodäte existiert.

Sofern nichts anderes gesagt wird, ist $[0, d(x, y)]$ der Definitionsbereich einer Geodäte $\alpha\colon x \rightsquigarrow y$.

1.4 Beispiel

(i) Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter reeller Vektorraum. Dann ist $(V, d_{\|\cdot\|})$ ein geodätischer Raum. Im Detail: Seien $u, v \in V$ paarweise verschieden und $L := \|u - v\| \neq 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} \gamma\colon [0, L] &\longrightarrow V \\ t &\longmapsto \left(1 - \frac{t}{L}\right) \cdot u + \frac{t}{L} \cdot v \end{aligned}$$

eine Geodäte von u nach v.

(ii) $(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, d_2)$ ist nicht geodätisch: Es existiert keine Geodäte $(-1, 0) \rightsquigarrow (1, 0)$.

(iii) $(\mathbb{R}^2, d_1)$ ist geodätisch, aber nicht eindeutig geodätisch: In der folgenden Abbildung sind zwei Geodäten von $(1, 0) \rightsquigarrow (0, 1)$ dargestellt.

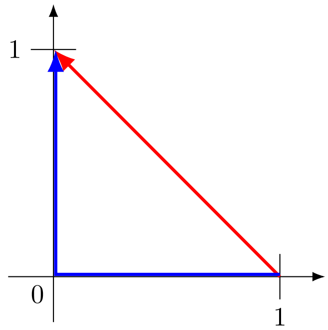
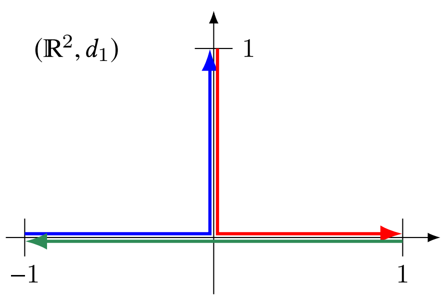


Abbildung 1.1: Der metrische Raum $(\mathbb{R}^2, d_1)$ ist nicht eindeutig geodätisch.

1.5 Definition (Geodätisches Dreieck)
Ein **geodätisches Dreieck** $\Delta = \Delta(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$ in einem geodätischen Raum (X, d) ist gegeben durch ein Tripel $(x, y, z) \in X^3$ und Geodäten $\alpha\colon x \rightsquigarrow y$, $\beta\colon y \rightsquigarrow z$, $\gamma\colon z \rightsquigarrow x$ – den Seiten von Δ.

1.6 Beispiel



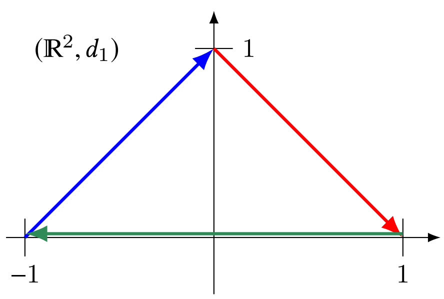


Abbildung 1.2: Geodätische Dreiecke sind im Allgemeinen durch ihre Ecken nicht eindeutig bestimmt.

Die Dreiecksungleichung garantiert, dass es Punkte $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in \mathbb{E}^2$ gibt mit $d(x,y) = d_2(\overline{x}, \overline{y})$, $d(y,z) = d_2(\overline{y}, \overline{z})$, $d(z,x) = d_2(\overline{z}, \overline{x})$ und Geodäten

$$\overline{\alpha}(t) = \overline{x} + t \cdot \frac{\overline{y} - \overline{x}}{d_2(\overline{y}, \overline{x})}, \qquad \overline{\beta}(t) = \overline{y} + t \cdot \frac{\overline{z} - \overline{y}}{d_2(\overline{z}, \overline{y})}, \qquad \overline{\gamma}(t) = \overline{z} + t \cdot \frac{\overline{x} - \overline{z}}{d_2(\overline{x}, \overline{z})}.$$

$\overline{\Delta} = \overline{\Delta}(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma})$ heißt **Vergleichsdreieck** zu $\Delta(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$. Ist $v = \gamma(s)$ für ein s, so heißt $\overline{v} = \overline{\gamma}(s)$ **Vergleichspunkt** von v.

1.7 Definition (CAT(0)-Raum)

(i) Ein Dreieck Δ in (X,d) hat die **CAT(0)-Eigenschaft**, wenn für alle n, m auf den Seiten von Δ und ihre Vergleichspunkte $\overline{n}, \overline{m}$ auf den Seiten von $\overline{\Delta}$.

(ii) Ein metrischer Raum (X,d) ist ein **CAT(0)-Raum**, wenn (X,d) geodätisch ist und alle seine Dreiecke die CAT(0)-Eigenschaft erfüllen.

(iii) Ein metrischer Raum (X,d) heißt **lokal CAT(0)**, wenn für alle $x \in X$ ein $r_x > 0$ existiert, sodass

$$B_{r_x}(x) = \{y \in X : d(y,x) < r_x\}$$

mit der induzierten Metrik ein CAT(0)-Raum ist.

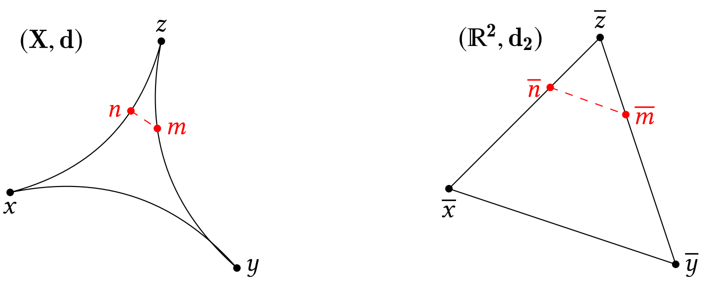


Abbildung 1.3: Anschaulich gesprochen sind Dreiecke in CAT(0)-Räumen „mindestens so dünn" wie ihre Vergleichsdreiecke im euklidischen Raum.

1.8 Bemerkung

(i) Lokal CAT(0)-Räume heißen auch nichtpositiv gekrümmte oder Alexandrov-Räume.

(ii) CAT(0) steht für Cartan-Alexandrov-Topogonov und Krümmung ≤ 0.

1.9 Beispiel

(i) Der euklidische Raum $\mathbb{E}^n$ ist CAT(0).

(ii) $(\mathbb{R}^2, d_1)$ ist nicht CAT(0): In der folgenden Abbildung 1.4 ist $d_1(n,m) = 2$, aber $d_2(\overline{n}, \overline{m}) = \sqrt{3}$.

(iii) Hilberträume sind CAT(0).

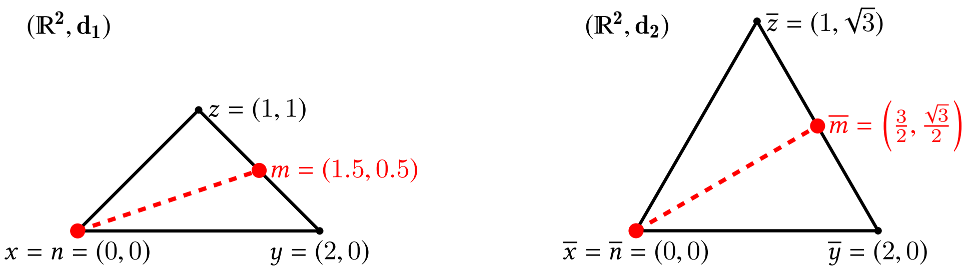


Abbildung 1.4: Der Raum $(\mathbb{R}^2, d_1)$ ist nicht CAT(0).

(iv) Komplemente von Polygonen im $\mathbb{R}^2$ sind lokal CAT(0), aber nicht CAT(0).

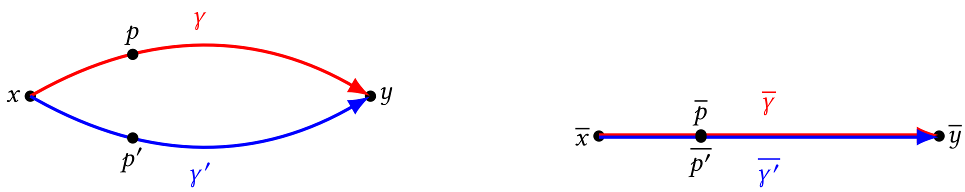
1.10 Beobachtung

Sei (X, d) ein CAT(0)-Raum. Dann ist X eindeutig geodätisch.

Beweis: Seien $\gamma : x \rightsquigarrow y$ und $\gamma' : x \rightsquigarrow y$ zwei Geodäten von x nach y. Seien p und p' zwei Punkte auf γ und γ' mit $d(x, p) = d(x, p')$. Das Vergleichsdreieck $\overline{\Delta}$ zum Dreieck

$$\Delta = \Delta\Big(x, p, y\gamma\big|_{[0, d(x,p)]}, \gamma\big|_{[d(x,p), d(x,y)]}, \gamma'\Big)$$

ist degeneriert:



Wegen der CAT(0)-Eigenschaft gilt $d(p, p') \leq d(\overline{p}, \overline{p'}) = 0$, also folgt $d(p, p') = 0$ und $p = p'$. □

1.11 Definition (Konvexe Menge)

Sei X ein CAT(0)-Raum. Eine nichtleere Teilmenge $C \subseteq X$ heißt **konvex**, wenn zu allen $p, q \in C$ die Geodäte $\gamma : p \rightsquigarrow q$ in C liegt.

Offensichtlich ist C wieder ein CAT(0)-Raum und Durchschnitte konvexer Mengen sind wieder konvex.

1.12 Theorem ([BH99, 1A.6])

23.10.15 [2] Sei $\mathcal{M}$ eine einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit nichtpositiver Krümmung. Dann ist $\mathcal{M}$ CAT(0).

1.13 Satz

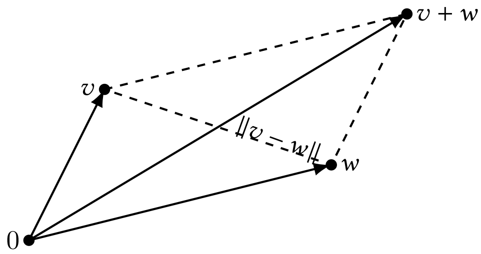
Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein reeller normierter Vektorraum. Dann ist $(V, \|\cdot\|)$ genau dann ein CAT(0)-Raum, wenn $(V, \|\cdot\|)$ ein Prähilbertraum ist, das heißt es existiert eine symmetrische positiv definite Bilinearform $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon V \times V \to \mathbb{R}$ mit $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ für $v \in V$.

Für den Beweis brauchen wir eine metrische Charakterisierung von Prähilberträumen:

1.14 Proposition (von Neumann, 1935)

Ein reeller normierter Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$ ist ein Prähilbertraum genau dann, wenn für alle $v, w \in V$ die **Parallelogrammgleichung** gilt:

$$\|v - w\|^2 + \|v + w\|^2 = 2 \cdot (\|v\|^2 + \|w\|^2) \qquad \text{(PG)}$$



Beweis:

"⇒": Seien $u, v \in V$.

$$\begin{aligned}
&\|u - v\|^2 + \|u + v\|^2 \\
&= \langle u - v, u - v\rangle + \langle u + v, u + v\rangle \\
&= \langle u, u\rangle - \langle u, v\rangle - \langle v, u\rangle + \langle v, v\rangle + \langle u, u\rangle + \langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle + \langle v, v\rangle \\
&= 2 \cdot (\langle v, v\rangle^2 + \langle u, u\rangle^2)
\end{aligned}$$

"⇐": Definiere:

$$\begin{aligned}
b\colon V \times V &\longrightarrow \mathbb{R} \\
(u, v) &\longmapsto \frac{1}{4}(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2).
\end{aligned}$$

Wir zeigen, dass b ein Skalarprodukt ist:

- Offensichtlich ist b symmetrisch.
- b ist positiv definit, denn für $v \in V$ gilt:

$$\begin{aligned}
b(v, v) &= \frac{1}{4}(2 \cdot \|v\|)^2 = \|v\|^2 \geq 0 \\
b(v, v) &= 0 \Leftrightarrow v = 0
\end{aligned}$$

- Sei nun $w \in V$ beliebig. Zu zeigen ist, dass $b(\cdot, w)\colon V \to \mathbb{R}$ linear ist. Seien also $u, v \in V$ beliebig, dann gilt:

$$\begin{aligned}
&b(u + v, w) + b(u - v, w) \\
&\overset{\text{Def}}{=} \frac{1}{4}(\|u + v + w\|^2 - \|u + v - w\|^2 + \|u - v + w\|^2 - \|u - v - w\|^2) \\
&\overset{\text{(PG)}}{=} \frac{1}{4}(2 \cdot \|u + w\|^2 + 2 \cdot \|v\|^2 - 2 \cdot \|u - w\|^2 - 2 \cdot \|v\|^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}(\|u+w\|^2 - \|u-w\|^2) \\ &\overset{\text{Def}}{=} 2 \cdot b(u,w) \end{aligned} \tag{1}$$

Analog erhalten wir

$$b(u+v,w) - b(u-v,w) = 2 \cdot b(v,w). \tag{2}$$

Addition von (1) und (2) liefert:

$$b(u+v,w) = b(u,w) + b(v,w)$$

Bleibt zu zeigen: Für alle $r \in \mathbb{R}$ gilt $b(rv,w) = r \cdot b(v,w)$.

1. Fall: $r = -1$. Mit $u = 0$ folgt aus (1):

$$b(v,w) + b(-v,w) = 2 \cdot b(0,w) = 2 \cdot \frac{1}{4}(\|w\|^2 - \|-w\|^2) = 0$$

und somit $b(-v,w) = -b(v,w)$.

2. Fall: $r = n \in \mathbb{N}$. Für $n = 2$ folgt mit $u = v$ aus (1)

$$b(2v,w) + \underbrace{b(0,w)}_{=0} = 2 \cdot b(v,w)$$

und weiter induktiv

$$\begin{aligned} b(nv,w) &= b((n-1)v + v, w) = b((n-1)v,w) + b(v,w) \\ &= (n-1)b(v,w) + b(v,w) = n \cdot b(v,w). \end{aligned}$$

3. Fall: $r = \frac{1}{n}$ mit $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Es gilt $\frac{1}{n} \cdot b(nv,w) = b(v,w)$ und damit

$$b\left(\frac{1}{n}v,w\right) = \frac{1}{n} \cdot b(n \cdot \frac{1}{n}v,w) = \frac{1}{n}b(v,w)$$

Aus allen drei Fällen folgt nun $b(qv,w) = q \cdot b(v,w)$ für alle $q \in \mathbb{Q}$. Da $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ eine dichte Teilmenge und $b(\cdot,w)$ stetig ist, folgt $b(rv,w) = r \cdot b(v,w)$ für alle $r \in \mathbb{R}$. □

Beweis (Satz 1.13):

"⇐": Sei $\Delta \subseteq (V, \|\cdot\|) = \mathcal{H}$ ein geodätisches Dreieck. Dann ist die lineare Hülle $\langle\Delta\rangle$ isometrisch isomorph zum $\mathbb{E}^2$, bzw. zum $\mathbb{E}^1$ oder zu $\{0\}$, falls Δ degeneriert ist.

"⇒": Sei $u, v \in V$ beliebig. Zeige, dass für v, w das Parallelogrammgesetz gilt: Wir betrachten das Dreieck $\Delta(0,u,v)$ und das Vergleichsdreieck $\overline{\Delta}(0,\overline{u},\overline{v})$. Es gilt:

$$\begin{aligned} d\left(\frac{u+v}{2},0\right) &\overset{\text{CAT(0)}}{\leq} d_2\left(\frac{\overline{u}+\overline{v}}{2},0\right) \\ \Rightarrow d(u+v,0) &\leq d_2(\overline{u}+\overline{v},0) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|u+v\|^2 \leq \|\overline{u}+\overline{v}\|_2^2 \overset{\text{(PG)}}{=} 2\cdot\|\overline{u}\|_2^2 + 2\cdot\|\overline{v}\|_2^2 - \|\overline{u}-\overline{v}\|_2^2$$
$$\overset{\text{CAT(0)}}{=} 2\cdot\|u\|^2 + 2\cdot\|v\|^2 - \|u-v\|^2 \tag{3}$$

Betrachte das Dreieck $\Delta(0-v,u)$ und das Vergleichsdreieck $\overline{\Delta}(0-\overline{v},\overline{u})$. Wir erhalten genauso wie oben die Ungleichung

$$\|u-v\|^2 \leq 2\cdot\|u\|^2 + 2\cdot\|v\|^2 - \|u+v\|^2. \tag{4}$$

Insgesamt haben wir also:

$$\|u+v\|^2 \overset{(3)}{\leq} 2\cdot\|u\|^2 + 2\cdot\|v\|^2 - \|u-v\|^2 \overset{(4)}{\leq} \|u+v\|^2 \qquad \square$$

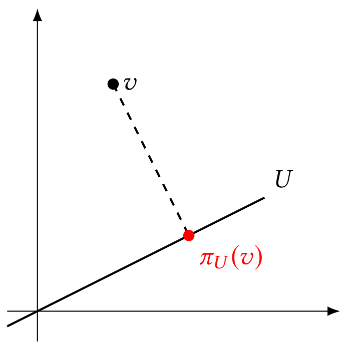
1.15 Erinnerung (Orthogonale Projektion)
Gegeben sei ein reeller Hilbertraum $\mathbb{E}^d$ und $U \subseteq \mathbb{E}^d$ ein Unterraum. Sei weiter $v_1,\dots,v_n \in U$ eine Orthonormalbasis von U. Dann ist

$$\begin{aligned}\pi_U : V &\longrightarrow U\\ v &\longmapsto \sum_{i=0}^{n}\langle v, v_i\rangle \cdot v_i\end{aligned}$$

eine lineare Abbildung und es gilt

$$d(v,\pi_U(v)) = \inf_{u\in U} d(v,u) =: d(v,U)$$

und $v - \pi_U(v) \perp U$.



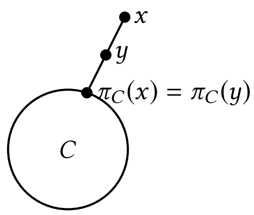
1.16 Satz (Projektion auf konvexe Teilmengen)
Sei X ein CAT(0)-Raum und $C \subseteq X$ konvex und vollständig mit der induzierten Metrik. Dann gilt:

(i) Für alle $x \in X$ existiert genau ein $\pi_C(x) \in C$ mit

$$d(x,\pi_C(x)) = \inf_{p\in C} d(x,p) =: d(x,C).$$

Die Abbildung $\pi_C : X \to C$ heißt die **(orthogonale) Projektion** auf C.

(ii) Ist $y \in [X,\pi_C(x)] = \operatorname{im}(\gamma : x \rightsquigarrow \pi_C(x))$, so ist $\pi_C(y) = \pi_C(x)$.



(iii) Für alle $x, y \in X$ gilt

$$d(\pi_C(x), \pi_C(y)) \leq d(x, y),$$

das heißt π_C ist 1-Lipschitz.

Beweis:

(i) Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C$ eine Folge mit $d(x, y_n) \to d(x, C) =: D$. Zeil ist es zu zeigen, dass $(y_n)_n$ eine Cauchy-Folge ist. Da C vollständig ist, ist die Folge $(y_n)_n$ konvergent in C und wir können $\pi_C(x) := \lim_{n\to\infty} y_n$ definieren.

Zur Eindeutigkeit von $\pi_C(x)$: Angenommen, es existiert ein $\pi_C(x') \in C$ mit $\pi_C(x)' \neq \pi_C(x)$ und $d(x, \pi_C(x)') = d(x, C)$. Betrachte die Folge

$$q_n := \begin{cases} \pi_C(x), & n \text{ gerade} \\ \pi_C(x)', & n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Dann ist $d(x, q_n) \to d(x, C)$, aber $(q_n)_n$ ist keine Cauchy-Folge. Widerspruch.

Zur Existenz: Betrachte folgendes Dreieck und Vergleichsdreieck ergänzt zu einem Parallelogramm:

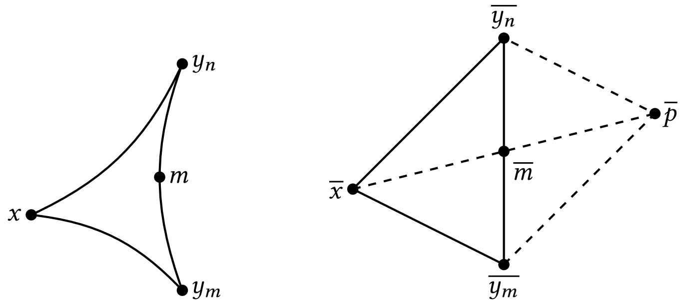


Abbildung 1.5: Zu einem Parallelogramm ergänztes Vergleichsdreieck.

Es ist $d(y_n, m) = d(y_m, m) = \frac{1}{2} d(y_n, y_m)$. Die Parallelogrammgleichung in $\mathbb{E}^2$ besagt:

$$d_2(\overline{x}, \overline{p})^2 + d_2(\overline{y_n}, \overline{y_m})^2 = 2(d_2(\overline{x}, \overline{y_n})^2 + d_2(\overline{x}, \overline{y_m})^2)$$

Sei $\varepsilon > 0$. Sei $\delta > 0$ die positive Lösung von $\delta^2 + 2D\delta - \frac{\varepsilon^2}{4} = 0$, das heißt $\varepsilon = 2 \cdot \sqrt{\delta^2 + 2D\delta}$.

Wähle n, m groß genug, sodass gilt

$$\left.\begin{aligned} d(x, y_n) < D + \delta \\ d(x, y_m) < D + \delta \end{aligned}\right\} \forall n, m \geq N. \tag{5}$$

Aus der CAT(0)-Eigenschaft folgt

$$D \leq d(x, m)^2 \leq d_2(\overline{x}, \overline{m}). \tag{6}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
d(y_n, y_m)^2 &\overset{\mathrm{CAT}(0)}{=} d_2(\overline{y_n}, \overline{y_m}) \\
&\overset{(\mathrm{PG})}{=} 2 \cdot (d_2(\overline{x}, \overline{y_n}) + d_2(\overline{x}, \overline{y_m})^2) - d_2(\overline{x}, \overline{p})^2 \\
&= 2 \cdot (d_2(\overline{x}, \overline{y_n}) + d_2(\overline{x}, \overline{y_m})^2) - 4 \cdot d_2(\overline{x}, \overline{m})^2 \\
&\overset{(6)}{\leq} 2 \cdot (d_2(\overline{x}, \overline{y_n}) + d_2(\overline{x}, \overline{y_m})^2) - 4D^2 \\
&\overset{(5)}{\leq} 2 \cdot (2 \cdot (D + \delta)^2) - 4D^2 \\
&= 4 \cdot (2D\delta + \delta^2)
\end{aligned}$$

Somit folgt $d(y_n, y_m) \leq 2 \cdot \sqrt{2D\delta + \delta^2} = \varepsilon$ für $n, m \geq N$. Also ist $(y_n)_n$ eine Cauchy-Folge und wir setzen $\pi_C(x) := \lim_{n\to\infty} y_n$.

(ii) Es ist $\mathrm{im}(\gamma\colon x \rightsquigarrow \pi_C(x)) = \{y \in X : d(x, y) + d(y, \pi_C(x)) = d(x, \pi_C(x))\}$. Angenommen, $\pi_C(y) \neq \pi_C(x)$. Dann ist insbesondere 28.10.15 [3]

$$d(y, \pi_C(y)) < d(y, \pi_C(x)) \tag{7}$$

und mit der Dreiecksungleichung folgt

$$\begin{aligned}
d(x, \pi_C(y)) &\leq d(x, y) + d(y, \pi_C(y)) \\
&\overset{(7)}{<} d(x, y) + d(y, \pi_C(x)) \\
&= d(x, \pi_C(x)),
\end{aligned}$$

was ein Widerspruch zur Minimalität von $\pi_C(x)$ ist.

(iii) Übungsaufgabe. □

Unser nächstes Ziel ist es zu zeigen, das CAT(0)-Räume kontrahierbar sind.

1.17 Definition (Homotopie)
Seien $\varphi_0, \varphi_1 : X \to Y$ stetige Abbildungen zwischen topologischen Räumen X und Y.

(i) Die Abbildungen φ_0, φ_1 heißen **homotop**, wenn es eine stetige Abbildung $H\colon X \times [0, 1] \to Y$ gibt mit $H(x, 0) = \varphi_0(x)$ und $H(x, 1) = \varphi_1(x)$ für alle $x \in X$. H heißt **Homotopie** zwischen φ_0 und φ_1. Wir schreiben $\varphi_0 \simeq \varphi_1$.

(ii) Ist $A \subseteq X$ eine Teilmenge mit $\varphi_0(a) = \varphi_1(a)$ für alle $a \in A$, so heißen φ_0 und φ_1 **homotop relativ zu** A, wenn es eine Homotopie H zwischen φ_0 und φ_1 gibt mit $H(a, t) = \varphi_0(a)$ für alle $t \in [0, 1]$ und $a \in A$. Wir schreiben $\varphi_0 \simeq \varphi_1 \operatorname{rel} A$.

(iii) Ein topologischer Raum $X \neq \emptyset$ heißt **kontrahierbar**, wenn die Identität id_X und die konstante Abbildung $\varphi_p\colon x \mapsto p, p \in X$, homotop sind.

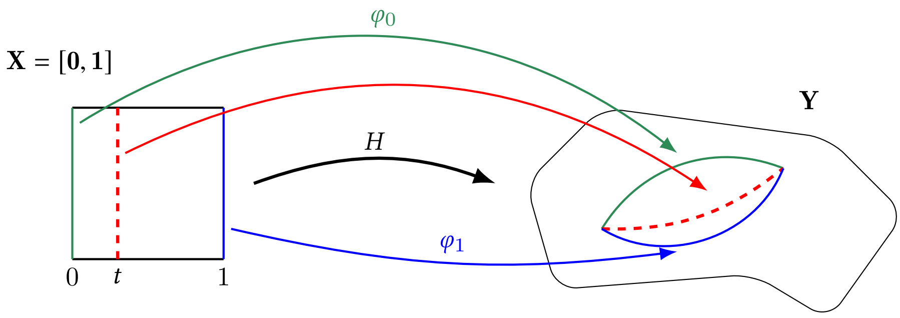


Abbildung 1.6: Veranschaulichung des Homotopiebegriffs am Beispiel $X = [0, 1]$.

1.18 Bemerkung

Ist X ein kontrahierbarer Raum, so ist die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, \{x_0\}), x_0 \in X$ trivial.

1.19 Satz

Sei X ein CAT(0)-Raum und $\emptyset \neq C \subseteq X$ konvex und vollständig. Dann gilt $\mathrm{id}_X \simeq \pi_C \operatorname{rel} C$. Insbesondere erhalten wir für $C = \{p\}, p \in X$, dass $\mathrm{id}_X \simeq \varphi_p \operatorname{rel}\{p\}$, und folglich ist der Raum X kontrahierbar.

Beweis: Wir brauchen folgendes Resultat (Übungsaufgabe):

Seien $\alpha\colon x \rightsquigarrow y, \beta\colon x' \rightsquigarrow y'$ zwei Geodäten. Dann gilt für alle $t \in [0, 1]$:

$$d(\alpha(t \cdot d(x, y)), \beta(t \cdot d(x', y'))) \leq (1 - t) \cdot d(x, x') + t \cdot d(y, y'). \tag{8}$$

Wir definieren

$$\begin{aligned} H\colon X \times [0, 1] &\longrightarrow X \\ (x, t) &\longmapsto \gamma_x(t \cdot d(x, \pi_C(x)), \end{aligned}$$

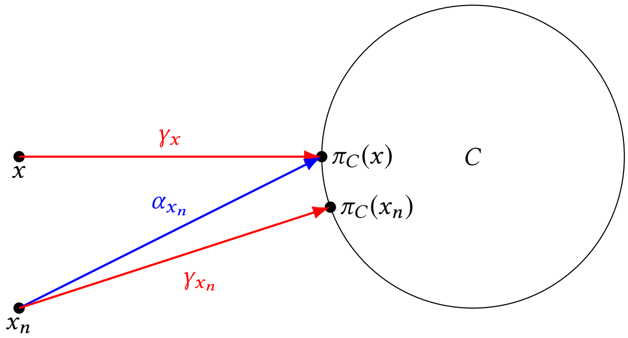
wobei $\gamma_x\colon x \rightsquigarrow \pi_C(x)$. Es gilt $H(x, 0) = \gamma_x(0) = x$ und $H(x, 1) = \gamma_x(d(x, \pi_C(x))) = \pi_C(x)$, somit ist $H(\cdot, 0) = \mathrm{id}_X$ und $H(\cdot, 1) = \pi_C$.
Sei weiter $c \in C$. Dann gilt $H(c, t) = c$, da $\gamma_C\colon c \rightsquigarrow \pi_C(c)$ und $c = \pi_C(c)$.
Es bleibt zu zeigen, dass H stetig ist. Wir wissen, dass Abbildungen zwischen metrischen Räumen genau dann stetig sind, wenn sie folgenstetig sind. Sei $(x, t) \in X \times [0, 1]$ beliebig und weiter $(x_n, t_m) \in X \times [0, 1]$ eine Folge mit $\lim_{n,m}(x_n, t_m) = (x, t)$. Zu zeigen ist:

$$\begin{aligned} &\lim_{n,m} H(x_n, t_m) = H(x, t) \\ \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \quad &\lim_{n,m} \gamma_{x_n}(t_m \cdot d(x_n, \pi_C(x_n))) = \gamma_x(t \cdot d(x, \pi_C(x))), \end{aligned}$$

wobei $\gamma_{x_n}\colon x_n \rightsquigarrow \pi_C(x_n)$.

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle $N_1 \in \mathbb{N}$ so groß, dass mit Satz 1.16(iii) gilt:

$$\left.\begin{aligned} d(x_n, x) &< \frac{\varepsilon}{2} \\ d(\pi_C(x_n), \pi_C(x)) &< \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}\right\} \forall n \geq N_1 \tag{9}$$



Wir haben:

$$\begin{aligned}
& d(H(x,t), H(x_n,t)) \\
= \; & d(\gamma_x(t \cdot d(x, \pi_C(x))), \gamma_{x_n}(t \cdot d(x_n, \pi_C(x_n)))) \\
\overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \; & d(\gamma_x(t \cdot d(x, \pi_C(x))), \alpha_{x_n}(t \cdot d(x_n, \pi_C(x)))) + d(\alpha_{x_n}(t \cdot d(x_n, \pi_C(x))), \gamma_{x_n}(t \cdot d(x_n, \pi_C(x_n)))) \\
\overset{(8)}{\leq} \; & (1-t) \cdot d(x, x_n) + t \cdot \underbrace{d(\pi_C(x), \pi_C(x))}_{=0} + (1-t) \cdot \underbrace{d(x_n, x_n)}_{=0} + t \cdot d(\pi_C(x), \pi_C(x_n)) \\
\overset{(9)}{\leq} \; & (1-t) \cdot \frac{\varepsilon}{2} + t \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall t \in [0,1], n \geq N_1
\end{aligned} \tag{10}$$

Wähle $N_2 \in \mathbb{N}$ groß genug mit

$$d(H(x_n, t_m), H(x_n, t)) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall m \geq N_2. \tag{11}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
& d(H(x_n, t_m), H(x,t)) \\
\overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \; & d(H(x_n, t_m), H(x_n, t)) + d(H(x_n, t), H(x, t)) \\
\overset{(10),(11)}{\leq} \; & \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall n, m \geq \max(N_1, N_2).
\end{aligned}$$

□

1.20 Definition (Durchmesser, Radius)

04.11.15 [4] Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$ beschränkt. Der **Durchmesser** von A ist gegeben durch

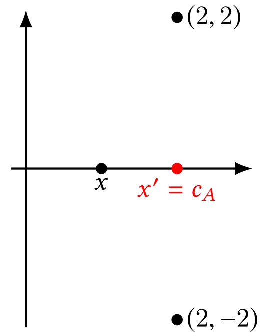
$$\operatorname{diam}(A) := \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}.$$

Für $x \in X$ definiere nun $\operatorname{rad}(x, A) := \sup\{d(x, a) : a \in A\}$. Dann ist der **Radius** von A definiert durch

$$\operatorname{rad}(A) := \inf\{\operatorname{rad}(x, A) : x \in A\}.$$

1.21 Beispiel

Sei $X := \mathbb{R}^2$ und $A := \{(2, 2), (2, -2)\}$. Für $x := (1, 0)$ und $x' := (2, 0) = c_A$ ist $\operatorname{rad}(x, A) = \sqrt{5}$ und $\operatorname{rad}(x', A) = 2 = \operatorname{rad}(A)$.



Der Begriff des Radius ist also mit der Idee eines „**Zentrums**" ($c_A \in A$) von A verbunden, welches zwar nicht in A liegen muss, aber die Mitte von A gut beschreibt. Im Allgemeinen muss ein Zentrum nicht existieren, aber bei CAT(0)-Räumen kann man es konstruieren.

1.22 Satz

Sei X ein vollständiger CAT(0)-Raum und $\emptyset \neq A \subseteq X$ beschränkt. Dann gibt es einen eindeutigen Punkt $c_A \in X$, das **Zentrum** von A, sodass $A \subseteq \overline{B_{\operatorname{rad}(A)}(c_A)}$ gilt.

Beweis: Seien $q, r \in X$ beliebig und $m \in X$ mit $d(q, m) = d(m, r) = \frac{d(q,r)}{2}$. Sei weiter $a \in X$ beliebig. Wir betrachten $\Delta(a, r, q)$ und $\overline{\Delta}(\overline{a}, \overline{r}, \overline{q})$ und ergänzen $\overline{\Delta}$ zu einem Parallelogramm (vgl. Abb. 1.5 auf S. 8). Die Parallelogrammgleichung in $\mathbb{E}^2$ besagt:

$$\begin{aligned}(2 \cdot d_2(\overline{a}, \overline{m}))^2 + (d_2(\overline{r}, \overline{q}))^2 &= 2 \cdot d_2(\overline{a}, \overline{r})^2 + 2 \cdot d_2(\overline{a}, \overline{q})^2 \\ \Rightarrow \qquad d_2(\overline{a}, \overline{m}) &= \frac{1}{2} d_2(\overline{a}, \overline{r})^2 + \frac{1}{2} d_2(\overline{a}, \overline{q})^2 - \frac{1}{4} d_2(\overline{r}, \overline{q})^2.\end{aligned}$$

Es gilt also

$$\begin{aligned}
d(a,m)^2 &\overset{\text{CAT(0)}}{\leq} d_2(\overline{a},\overline{m}) \\
&= \frac{1}{2}d_2(\overline{a},\overline{r})^2 + \frac{1}{2}d_2(\overline{a},\overline{q})^2 - \frac{1}{4}d_2(\overline{r},\overline{q})^2 \\
&= \frac{1}{2}d_2(a,r)^2 + \frac{1}{2}d_2(a,q)^2 - \frac{1}{4}d_2(r,q)^2 \\
\overset{\sup}{\Longrightarrow} \quad \operatorname{rad}(m,A)^2 &\leq \frac{1}{2}\operatorname{rad}(r,A)^2 + \frac{1}{2}\operatorname{rad}(q,A)^2 - \frac{1}{4}d(r,q)^2.
\end{aligned}$$

Mit $\operatorname{rad}(A) \leq \operatorname{rad}(m,A)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\operatorname{rad}(A)^2 &\leq \frac{1}{2}\operatorname{rad}(r,A)^2 + \frac{1}{2}\operatorname{rad}(q,A)^2 - \frac{1}{4}d(r,q)^2 \\
\Rightarrow \quad \frac{1}{4}d(r,q)^2 &\leq \frac{1}{2}(\operatorname{rad}(r,A)^2 + \operatorname{rad}(q,A)^2) - \operatorname{rad}(A)^2 \\
\Rightarrow \quad d(r,q) &\leq \sqrt{2\cdot(\operatorname{rad}(r,A)^2 + \operatorname{rad}(q,A)^2) - 4\operatorname{rad}(A)^2}
\end{aligned} \tag{12}$$

Zur Eindeutigkeit: Angenommen, z_1, z_2 sind zwei Zentren von A, d.h. $\operatorname{rad}(z_1,A) = \operatorname{rad}(z_2,A) = \operatorname{rad}(A)$. Mit (12) folgt

$$d(z_1,z_2) \leq \sqrt{2\cdot(\operatorname{rad}(A)^2 + \operatorname{rad}(A)^2) - 4\operatorname{rad}(A)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad z_1 = z_2$$

Zur Existenz: Sei $x_n \in X$ eine Folge mit $\operatorname{rad}(x_n,A) \to \operatorname{rad}(A)$. Ziel ist zu zeigen, dass $(x_n)_n$ eine Cauchy-Folge ist. Da X vollständig ist, konvergiert diese und das Zentrum von A ist $\lim_{n\to\infty} x_n$.
Sei $\varepsilon > 0$. Sei weiter $\delta > 0$ die positive Lösung von

$$\delta^2 + 2\cdot\operatorname{rad}(A) - \delta - \frac{\varepsilon}{4} = 0. \tag{13}$$

Wähle $N \in \mathbb{N}$ groß genug mit

$$\operatorname{rad}(x_n,A) < \operatorname{rad}(A) + \delta \quad \forall n \geq N. \tag{14}$$

Wir betrachten (12) quadriert und für $r = x_n$ und $q = x_m$.

$$\begin{aligned}
d(x_n,x_m)^2 &\leq 2\cdot(\operatorname{rad}(x_n,A)^2 + \operatorname{rad}(x_m,A)^2) - 4\cdot\operatorname{rad}(A)^2 \\
&\overset{(14)}{\leq} 2\cdot(2\cdot(\operatorname{rad}(A)+\delta)^2) - 4\cdot\operatorname{rad}(A)^2 \quad \forall n,m \geq N \\
&= 8\cdot\operatorname{rad}(A)\delta + 4\delta^2 \quad \forall n,m \geq N \\
\Rightarrow \quad d(x_n,x_m) &\leq 2\cdot\sqrt{2\cdot\operatorname{rad}(A)\delta + \delta^2} \overset{(13)}{=} \varepsilon \quad \forall n,m \geq N
\end{aligned}$$

□

1.23 Definition (Isometrie)
Eine Abbildung $f: X \to Y$ von metrischen Räumen $(X, d_X), (Y, d_Y)$ heißt **isometrische Einbettung**, wenn für alle $u, v \in X$ gilt:

$$d_Y(f(u), f(v)) = d_X(u, v).$$

Wenn f zusätzlich surjektiv ist, heißt f **Isometrie** und X und Y zueinander isometrisch. Wir definieren die **Isometriegruppe** von X:

$$\mathrm{Isom}(X) = \{f: X \to X : f \text{ ist Isometrie}\}.$$

1.24 Bemerkung
Seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume und $f: X \to Y$ isometrische Einbettungen. Dann gilt:

(i) f ist injektiv.

(ii) Ist $(x_n)_n$ eine Cauchy-Folge in X, so ist $(f(x_n))_n$ eine Cauchy-Folge in Y.

(iii) Sind X und Y isometrisch, so sind sie als topologische Räume homöomorph.

1.25 Definition (Isometrische Gruppenwirkung)
Sei X ein metrischer Raum und G eine Gruppe. Eine **isometrische Wirkung** von G auf X ist ein Gruppenhomomorphismus $\Phi: G \to \mathrm{Isom}(X)$. Die **Fixpunktmenge** von Φ ist wie folgt definiert:

$$\mathrm{Fix}_\Phi(G) := \{x \in X : \Phi(g)(x) = x \ \forall g \in G\}$$

1.26 Lemma
Sei X ein CAT(0)-Raum und $\Phi: G \to \mathrm{Isom}(X)$ eine isometrische Wirkung. Dann ist $\mathrm{Fix}_\Phi(G)$ abgeschlossen. Wenn $\mathrm{Fix}_\Phi(G) \neq \emptyset$, dann ist $\mathrm{Fix}_\Phi(G)$ konvex.

Beweis: ÜA!

1.27 Satz (Bruhat-Tits-Fixpunkttheorem, BTFT)
Sei X ein vollständiger CAT(0)-Raum, sei G eine Gruppe und $\Phi: G \to \mathrm{Isom}(X)$ eine isometrische Wirkung. Sei weiter $\emptyset \neq A \subseteq X$ beschränkt mit $\Phi(g)(A) = A$ für alle $g \in G$. Dann ist $c_A \in \mathrm{Fix}_\Phi(G)$.

Beweis: Sei $g \in G$ beliebig. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{rad}(A) &= \mathrm{rad}(c_A, A) \overset{\text{Def}}{=} \sup_{a \in A}\{d(c_A, A)\} \\
&\overset{\Phi(g)\text{ isom.}}{=} \sup_{a \in A}\{d(\Phi(g)(c_A), \Phi(g)(a))\} \\
&\overset{\Phi(g)(A)=A}{=} \sup_{a \in A}\{d(\Phi(g)(c_A), a)\} \overset{\text{Def}}{=} \mathrm{rad}(\Phi(g)(c_A), A) \\
\overset{c_A \text{ eind.}}{\Longrightarrow} c_A &= \Phi(g)(c_A) \overset{g \text{ bel.}}{\Longrightarrow} c_A \in \mathrm{Fix}_\Phi(G)
\end{aligned}$$

□

1.28 Korollar
Sei X ein vollständiger $\mathrm{CAT}(0)$-Raum, sei G eine Gruppe und $\Phi\colon G \to \mathrm{Isom}(X)$ eine isometrische Wirkung. Sei weiter $x \in X$ mit $G(x) := \{\Phi(g)(x) : g \in G\} \subseteq X$ beschränkt. Dann ist $\mathrm{Fix}_\Phi(G) \neq \emptyset$.

Beweis: Betrachte $A := G(x)$. Dann ist $\Phi(g)(A) = A$ für alle $g \in G$. Mit Satz 1.27 folgt $\mathrm{Fix}_\Phi(G) \neq \emptyset$. □

1.29 Bemerkung
Jede isometrische Wirkung von einer endlichen Gruppe auf einen vollständigen $\mathrm{CAT}(0)$-Raum hat einen Fixpunkt.

1.30 Korollar
Sei X ein vollständiger $\mathrm{CAT}(0)$-Raum, G eine Gruppe und $\Phi\colon G \to \mathrm{Isom}(X)$ eine isometrische Wirkung, welche folgende Bedingungen erfüllt:

(i) G wirkt **eigentlich** (*proper*) auf X, das heißt für alle $x \in X$ existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass gilt:

$$\#\{g \in G : \Phi(g)(B_\varepsilon(x)) \cap B_\varepsilon(x) \neq \emptyset\} < \infty.$$

(ii) G wirkt **kokompakt** auf X, das heißt es existiert eine kompakte Teilmenge $K \subseteq X$, sodass

$$\bigcup_{g \in G} \Phi(g)(K) = X.$$

Dann enthält G nur endlich viele verschiedene Kongukationsklassen von endlichen Untergruppen. Genauer: Definiert man auf der Menge $\mathrm{UG}_{\mathrm{endl}} := \{U \leq G \text{ endlich}\}$ die Äquivalenzrelation

$$U \sim V \quad :\Leftrightarrow \quad \exists g \in G : U = gVg^{-1},$$

so gilt

$$\# {}^{\mathrm{UG}_{\mathrm{endl}}}\!/\!_{\sim} < \infty.$$

Beweis: Sei K eine kompakte Teilmenge mit

$$\bigcup_{g \in G} \Phi(g)(K) = X.$$

Wähle eine endliche Überdeckung $B_{\varepsilon_i}(x_i)$, $1 \leq i \leq n$, von K so, dass die Teilmengen

$$\Gamma_i \subseteq G \text{ mit } \Gamma_i = \{g \in G : \Phi(g)(B_{\varepsilon_i}(x_i)) \cap B_{\varepsilon_i}(x_i) \neq \emptyset\}$$

endlich sind. Dann ist $\Sigma := \bigcup_{i=1}^n$ endlich.
Sei nun $x \in X$ beliebig. Wir betrachten die Stabilisatorgruppe $G_x := \{g \in G : \Phi(g)(x) = x\}$ von x.

- Wir haben in Korollar 1.28 bzw. Bemerkung 1.29 gesehen, dass jede endliche Untergruppe von G in einem G_x für geeignetes $x \in X$ enthalten ist. Genauer: Ist $U \subseteq G$ endlich und $\Phi\colon G \to \mathrm{Isom}(X)$, so ist $\mathrm{Fix}_{\Phi|_U}(U) \neq \emptyset$. Für $x \in \mathrm{Fix}_{\Phi|_U}(U)$ ist $U \subseteq G_x$.
- Wir werden zunächst zeigen, dass es nur endlich viele Konjugationsklassen von Untergruppen von G vom Typ G_x gibt. Da $X = \bigcup_{g \in G} \Phi(g)(K)$, existiert ein $g \in G$ mit

  $$\Phi(g)(x) \in K = \bigcup_{i=1}^{n} B_{\varepsilon_i}(x_i).$$

  Also ist $\Phi(g)(x)$ in mindestens einen der $B_{\varepsilon_i}(x_i)$ enthalten und somit $G_{\Phi(g)(x)} \subseteq \Gamma_i \subseteq \Sigma$. Es gibt also nur endlich viele solche $G_{\Phi(g)(x)}$ mit $\Phi(g)(x) \in K$.

  Nun gilt aber weiter $gG_xg^{-1} = G_{\Phi(g)(x)}$, das heißt jedes beliebige G_x ist konjugiert zu einer von endlich vielen $G_{\Phi(g)(x)}$. Also gibt es nur endlich viele Konjugationsklassen von Gruppen G_x. Da jedes G_x endlich ist, hat es selbst nur endlich viele Konjugationsklassen von Untergruppen. Da jede endliche Untergruppe von G automatisch eine Untergruppe eines G_x ist, kann es damit auch nur endlich viele Konjugationsklassen von endlichen Untergruppen von G geben. □

06.11.15 [5]

Viele Sätze, die wir über CAT(0)-Räume bewiesen haben, hatten als Voraussetzung die Vollständigkeit. Der Vorteil in diesem Vorgehen ist, dass wir einen CAT(0)-Raum immer als eine dichte Teilmenge eines vollständigen CAT(0)-Raumes realisieren können. Weiter lässt sich jede Isometrie von CAT(0)-Räumen eindeutig zu einer Isometrie eines vollständigen CAT(0)-Raumes erweitern, indem wir sie auf der Vervollständigung fortsetzen. Um zu beweisen, dass die Vervollständigung eines CAT(0)-Raumes wieder CAT(0) ist, brauchen wir viel Vorarbeit.

1.31 Erinnerung (Metrische Vervollständigung)
Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann existiert ein vollständiger metrischer Raum $(\widehat{X}, \widehat{d})$ und eine isometrische Einbettung $\varphi\colon X \hookrightarrow \widehat{X}$ mit $\overline{\varphi(X)} = \widehat{X}$, das heißt $\varphi(X)$ liegt dicht in $\widehat{X}$. Das Paar $(\widehat{X}, \widehat{d})$ ist bis auf Isometrie eindeutig bestimmt und heißt **metrische Vervollständigung** von X.

Beweis (Skizze): Sei $\mathrm{CF}(X) := \{(x_n)_n \text{ Cauchy-Folge in } X\}$. Definiere die Äquivalenzrelation

$$(x_n)_n \sim (y_n)_n \quad :\Leftrightarrow \quad (d(x_n, y_n))_n \text{ ist Nullfolge}$$

und setze

$$\widehat{X} := \mathrm{CF}(X)/\sim \qquad \widehat{d}([(x_n)_n], [(y_n)_n]) := \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$$

und definiere $\varphi\colon X \hookrightarrow \widehat{X}$ durch $x \mapsto [(x)_n]$. □

1.32 Erinnerung
Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $f\colon X \to Y$ eine Lipschitz-Abbildung. Dann existiert eine eindeutige Fortsetzung $\widehat{f}\colon \widehat{X} \to \widehat{Y}$ mit $\widehat{f}\big|_X = f$.

1.33 Definition (Mittelpunkt)
Ein metrischer Raum (X, d) hat **Mittelpunkte**, wenn für alle $u, v \in X$ stets ein $m \in X$ existiert mit $d(u, m) = d(m, v) = \frac{1}{2}d(u, v)$.

Man beachte, dass Mittelpunkte nicht eindeutig sein müssen. Zum Beispiel haben $u := (1, 0)$ und $v := (0, 1)$ in $(\mathbb{R}^2, d_1)$ die beiden Mittelpunkte $m_1 = (0, 0)$ und $m_2 = (1, 1)$.

1.34 Beispiel

(i) $(\mathbb{Q}_2, d_2)$ hat Mittelpunkte.

(ii) Jeder geodätische Raum hat Mittelpunkte: Für alle $u, v \in X$ existiert eine Geodäte $\gamma \colon [0, d(u, v)] \to X$ von u nach v. Dann ist $\gamma\big(\frac{1}{2}d(u, v)\big)$ Mittelpunkt von u und v.

(iii) CAT(0)-Räume haben eindeutige Mittelpunkte, das heißt es existiert eine wohldefinierte Mittelpunktabbildung $(u, v) \mapsto m(u, v)$.

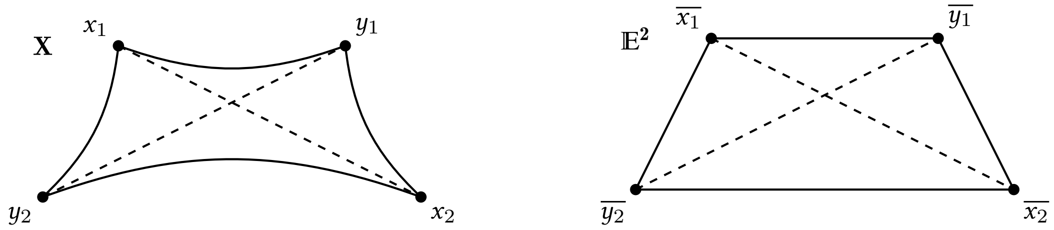
1.35 Lemma
Ein vollständiger metrischer Raum, der Mittelpunkte hat, ist geodätisch. Beweis: Übung.

1.36 Definition (Ungefährer Mittelpunkt, Vierpunktbedingung)

(i) Ein metrischer Raum X hat **ungefähre Mittelpunkte**, wenn es zu allen $u, v \in X$ und $\varepsilon > 0$ ein $m \in X$ gibt mit $d(u, m), d(u, v) \leq \frac{1}{2}d(u, v) + \varepsilon$.

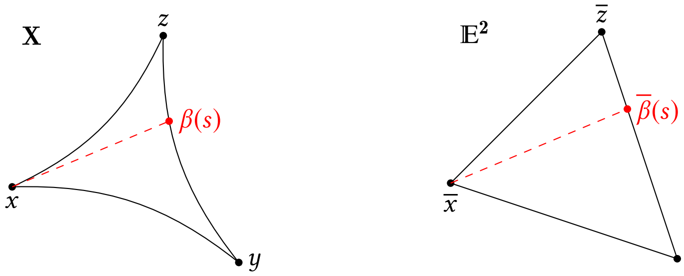
(ii) Ein metrischer Raum X erfüllt die **CAT(0)-Vierpunktbedingung**, wenn es zu allen $x_1, y_1, x_2, y_2 inX$ stets $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{y_1}, \overline{y_2} \in \mathbb{E}^2$ gibt mit:

$$d(x_1, y_1) = d_2(\overline{x_1}, \overline{y_1}), \quad d(x_2, y_2) = d_2(\overline{x_2}, \overline{y_2}), \quad d(x_1, x_2) = d_2(\overline{x_1}, \overline{x_2}), \quad d(y_1, y_2) = d_2(\overline{y_1}, \overline{y_2}).$$



Wir werden sehen, dass man CAT(0)-Räume über die Vierpunktbedingung charakterisieren kann.

1.37 Lemma
Ein geodätischer Raum ist genau dann CAT(0), wenn für jedes geodätische Dreieck $\Delta(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$ mit Vergleichsdreieck $\overline{\Delta}(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma})$ in $\mathbb{E}^2$ gilt: $d(x, \beta(s)) \leq d_2(\overline{x}, \overline{\beta}(s))$ für alle $s \in [0, d(y, z)]$. Beweis: Übung.



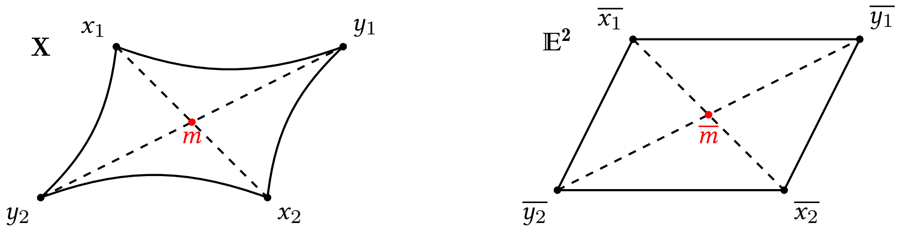
1.38 Theorem

Ein vollständiger metrischer Raum ist CAT(0) genau dann, wenn er er ungefähre Mittelpunkte hat und die CAT(0)-Vierpunktbedingung erfüllt.

Beweis:

"$\Rightarrow$": Angenommen, X ist CAT(0). Dann hat X Mittelpunkte, also auch ungefähre Mittelpunkte. Seien $x_1, y_1, x_2, y_2 \in X$. Betrachte die euklidischen Vergleichsdreiecke zu $\Delta(x_1, x_2, y_2)$ und $\Delta(x_1, x_2, y_2)$. Das resultierende Viereck ist entweder konvex oder nicht.

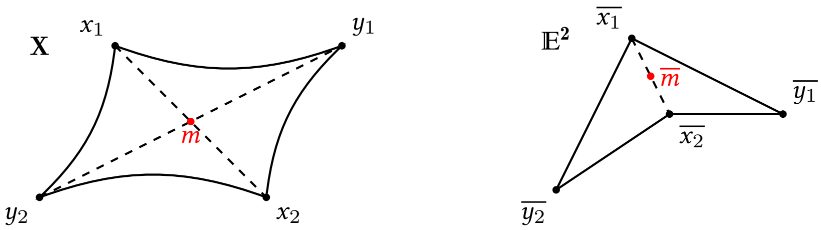
1. Fall: Das Viereck ist konvex.



Da X CAT(0) ist, gilt $d(y_2, m) \leq d_2(\overline{y_2}, \overline{m})$ sowie $d(y_1, m) \leq d_2(\overline{y_1}, \overline{m})$. Da $\overline{m}$ auf der Geodäte zwischen $\overline{y_1}$ und $\overline{y_2}$ liegt, erhalten wir insgesamt:

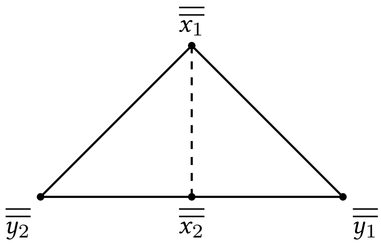
$$\begin{aligned} d(y_1, y_2) &\overset{\Delta\text{-Ungl.}}{=} d(y_1, m) + d(m, y_2) \\ &\leq d_2(\overline{y_1}, \overline{m}) + d_2(\overline{m}, \overline{y_2}) = d_2(\overline{y_1}, \overline{y_2}) \end{aligned}$$

2. Fall: Das Viereck ist nicht konvex.



Betrachte dann folgendes Dreieck in $\mathbb{E}^2$ mit

$$\begin{aligned} d_2(\overline{x_2},\overline{y_2}) &= d_2(\overline{\overline{x_2}},\overline{\overline{y_2}}), \quad d_2(\overline{x_2},\overline{y_1}) = d_2(\overline{\overline{x_2}},\overline{\overline{y_1}}),\\ d_2(\overline{x_1},\overline{y_1}) &= d_2(\overline{\overline{x_1}},\overline{\overline{y_1}}), \quad d_2(\overline{x_1},\overline{y_2}) = d_2(\overline{\overline{x_1}},\overline{\overline{y_2}}). \end{aligned}$$



Es gilt

$$d_2(\overline{\overline{x_1}},\overline{\overline{x_2}}) \geq d_2(\overline{x_1},\overline{x_2}) = d_2(x_1,x_2)$$

sowie

$$\begin{aligned} d_2(\overline{\overline{y_1}},\overline{\overline{y_2}}) &= d_2(\overline{\overline{y_1}},\overline{\overline{x_2}}) + d_2(\overline{\overline{x_2}},\overline{\overline{y_2}})\\ &= d_2(\overline{\overline{y_1}},\overline{\overline{x_2}}) + d_2(\overline{x_2},\overline{y_2})\\ &= d(y_1,x_2) + d(x_2,y_2)\\ &\overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\geq} d(y_1,y_2). \end{aligned}$$

"$\Leftarrow$": ...

$\square$

Literatur

[BH99] Martin R. Bridson, André Haefliger. *Metric Spaces of Non-Positive Curvature.* Springer, 1999 (siehe S. III, 4).

[BHV08] Mohammed El Bachir Bekka, Pierre de la Harpe, Alain Valette. *Kazhdan's Property (T).* Cambridge Univ. Press, 2008 (siehe S. III).

[Ser80] Jean-Pierre Serre. *Trees.* Springer-Verlag, 1980 (siehe S. III).

Index