Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

Fachbereich 10
Mathematik und
Informatik

Lineare Algebra II

gelesen von

Prof. Dr. Siegfried Echterhoff

im Sommersemester 2016

Vorlesungsmitschrift von Phil Steinhorst

Stand: 24. Februar 2016

Vorwort

Der vorliegende Text ist eine Mitschrift zur Vorlesung *Lineare Algebra II*, gelesen von Prof. Dr. Siegfried Echterhoff an der WWU Münster im Sommersemester 2016. Der Inhalt entspricht weitestgehend den Vorlesungsnotizen, welche auf der Vorlesungswebsite bereitsgestellt werden. Dieses Werk ist daher keine Eigenleistung des Autors und wird nicht vom Dozenten der Veranstaltung korrekturgelesen. Für die Korrektheit des Inhalts wird keinerlei Garantie übernommen. Bemerkungen, Korrekturen und Ergänzungen kann man folgenderweise loswerden:

- persönlich durch Überreichen von Notizen oder per E-Mail
- durch Abändern der entsprechenden TeX-Dateien und Versand per E-Mail an mich
- direktes Mitarbeiten via GitHub. Dieses Skript befindet sich im `latex-wwu`-Repository von Jannes Bantje:

  `https://github.com/JaMeZ-B/latex-wwu`

Literatur

- Literatur hinzufügen

Kommentar des Dozenten

einfügen

Geplante Themen

- einfügen

Vorlesungswebsite

Das handgeschriebene Skript sowie weiteres Material findet man unter folgendem Link: Link einfügen

Phil Steinhorst
p.st@wwu.de

Inhaltsverzeichnis

I. Lineare Algebra I (Zusammenfassung)

3. Lineare Gleichungssysteme

3.5 Definition (Matrix)
Sei K ein Körper (siehe Definition 4.7).

(1) Ein Schema der Form

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$$

mit $a_{ij} \in K$ heißt $\boldsymbol{m \times n}$**-Matrix** über K. Wir bezeichnen mit $M(m \times n, K)$ die Menge aller $m \times n$-Matrizen über K.

(2) Wir identifizieren $M(n \times 1, K)$ mit K^n (vgl.), das heißt wir schreiben die Elemente des K^n in der Regel als Spalten. Für $x, y \in K^n$ und $\lambda \in K$ definieren wir: Ref. Isom.

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \lambda \cdot x = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

(3) Ist $A = (a_{ij})_{i,j} \in M(m \times n, K)$ und $x = (x_i)_i \in K^n$, so definieren wir $b = (b_i)_i := Ax \in K^m$ durch $b_i := \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$. (Dies ist ein Spezialfall der Matrixmultiplikation, vgl. Definition 6.17)

3.7 Definition (Lineares Gleichungssystem)
Sei K ein Körper, $A = (a_{ij})_{i,j} \in M(m \times n, K)$, $b = (b_i)_i \in K^m$. Die Gleichung

$$Ax = b$$

mit Unbekannten $x = (x_i)_i \in K^n$ heißt ein **lineares Gleichungssystem (LGS)** über K. Ein Tupel $\tilde{x} \in K^n$ mit $A\tilde{x} = b$ **heißt** Lösung des LGS.

3.9 Definition (Elementare Zeilenumformungen)
Sei $Ax = b$ ein LGS über K. Folgende **elementare Zeilenumformungen** ändern die Lösungsmenge des LGS nicht:

(I) Vertauschen zweier Zeilen in A und der entsprechenden Einträge in b.

(II) Addition der i-ten Zeile von A auf die j-te Zeile von A und entsprechend den i-ten Eintrag von b auf den j-ten Eintrag von b, $i \neq j$.

(III) Multiplikation einer Zeile von A und dem entsprechenden Eintrag von b mit einer Konstanten $\lambda \in K \setminus \{0\}$.

(IV) Addition des λ-fachen der i-ten Zeile auf die j-te Zeile von A, $i \neq j$, und Entsprechendes für die Einträge von b.

Durch diese Umformungen wird das Lösungstupel x nicht verändert. Wir betrachten daher oft nur das Schema $(A \mid b)$, das heißt die Matrix, die aus A durch Ergänzen der Spalte b entsteht.

3.11 Satz (Gaußsches Eliminationsverfahren)
Sei $A \in M(m \times n, K)$ eine Matrix. Dann lässt sich A durch endlich viele elementare Zeilenumformungen der Form auf **Zeilenstufenform** bringen, das heißt auf eine Form

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & * & 0 & \dots & & & & & 0 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & 1 & * & 0 & \dots & & & 0 \\ 0 & \dots & & & & \dots & 0 & 1 & * & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & & & & & & \dots & 0 & 1 & * \\ 0 & \dots & & & & & & & & & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & & & & & & & & & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

3.12 Satz (Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen)
Ein LGS $Ax = b$ ist genau dann lösbar, wenn für die Zeilenstufenform $(\tilde{A} \mid \tilde{b})$ der Matrix $(A \mid b)$ gilt: Für jede Nullzeile in $\tilde{A}$ ist auch der entsprechende Eintrag in $\tilde{b}$ null (mit anderen Worten: Keine der führenden Einsen liegt in $\tilde{b}$).

4. Gruppen, Ringe, Körper

4.1 Definition (Gruppe)

(1) Eine **Gruppe** $(G, *)$ besteht aus einer Menge G zusammen mit einer Verknüpfung $* \colon G \times G \to G, (x, y) \mapsto x * y$ mit folgenden Eigenschaften:

a) $*$ ist **assoziativ**, das heißt es gilt $(x * y) * z = x * (y * z)$ für alle $x, y, z \in G$.

b) Es existiert ein **neutrales Element** $1 \in G$ für $*$, das heißt für alle $x \in G$ gilt $1 * x = x * 1 = x$.

c) Zu jedem $x \in G$ existiert ein **inverses Element** $x^{-1} \in G$ mit $x * x^{-1} = x^{-1} * x = 1$.

(2) Eine Gruppe $(G, *)$ heißt **abelsche Gruppe**, falls zusätzlich das Kommutativgesetz gilt, das heißt für alle $x, y \in G$ gilt $x * y = y * x$.

4.4 Beispiel (Symmetrische Gruppe)
Sei X eine Menge. Die Gruppe $S(X) := \{f : X \to X : f \text{ ist bijektiv}\}$ mit der Komposition $\circ$ als Verknüpfung heißt **symmetrische Gruppe** von X. Besitzt X mehr als zwei Elemente, so ist $(S(X), \circ)$ nicht abelsch. Für $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ schreiben wir $S_n := S(X)$.

4.5 Definition (Ring)
Ein **Ring** $(R, +, \cdot)$ besteht aus einer abelschen Gruppe $(R, +)$ zusammen mit einer zusätzlichen Verknäpfung $\cdot : R \times R \to R, (x, y) \mapsto x \cdot y$, sodass Folgendes gilt:

(1) Ist $0 \in R$ das neutrale Element für $(R, +)$, so gilt $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$ für alle $x \in R$.

(2) Die Verknüpfung $\cdot$ ist assoziativ.

(3) Es gelden die **Distributivgesetze**, das heißt für alle $x, y, z \in R$ gilt $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ und $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Ist $\cdot$ kommutativ, so heißt R ein kommutativer Ring. Existiert zusätzlich ein neutrales Element $1 \in R$ für $\cdot$, so heißt R ein **unitaler Ring** oder **Ring mit Eins**. Die Menge $R^* := \{x \in R : \text{es existiert ein } x^{-1} \in R \text{ mit } x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1\}$ heißt dann die **Einheitengruppe** von R.

4.7 Definition (Schiefkörper, Körper)
Sei R ein Ring mit Eins. Gilt $R^* = R \setminus \{0\}$, so heißt R ein **Schiefkörper**. Ist R zusätzlich kommutativ, so heißt R ein **Körper**.

4.10 Definition (Komplexe Zahlen)
Sei $\mathbb{C}$ die Menge der formalen Summen der Gestalt $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, also

$$\mathbb{C} := \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Vermöge $i^2 := -1$ und der Verknüpfungen

$$\begin{aligned}(a + ib) + (c + id) &:= (a + c) + i(b + d)\\ (a + ib) \cdot (c + id) &:= (ac - bd) + i(bc + ad)\end{aligned}$$

ist $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ein Körper – der Körper der **komplexen Zahlen**. Wir definieren weiter für $z = a + ib \in \mathbb{C}$:

a) $\operatorname{Re}(z) := a$ – der **Realteil** von z.

b) $\operatorname{Im}(z) := b$ – der **Imaginärteil** von z.

c) $\overline{z} := a - ib$ – das **komplex Konjugierte** von z.

d) $|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$ – der **Betrag** von z.

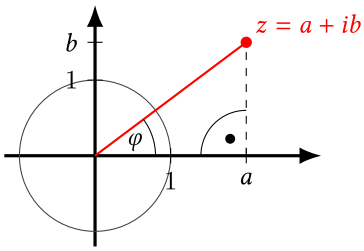
4.12 Lemma
Für alle $z = a + ib, w = c + id \in \mathbb{C}$ gilt:

(1) $|z|^2 = z\overline{z}$ und $|zw| = |z| \cdot |w|$.

(2) Ist $z \neq 0$, so auch $|z|$, und es gilt $z^{-1} = \frac{1}{|z|^2}\overline{z}$.

4.13 Bemerkung (Polardarstellung komplexer Zahlen)
Ist $z = a + ib \in \mathbb{C}$, so existiert ein $\varphi \in [0, 2\pi]$ mit $\cos(\varphi) = \frac{a}{|z|}$ und $\sin(\varphi) = \frac{b}{|z|}$, das heißt es gilt

$$z = |z| \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi).$$



5. Vektorräume und lineare Abbildungen

5.1 Definition (Vektorraum)
Sei K ein Körper. Ein ***K*-Vektorraum** besteht aus einer Menge $V \neq \emptyset$ versehen mit zwei Verknüpfungen

$$+\colon V \times V \to V, (u, v) \mapsto u + v$$
$$\cdot\colon K \times V \to V, (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v,$$

sodass $(V, +)$ eine abelsche Gruppe ist und für alle $\lambda, \mu \in K$ und $u, v \in V$ gilt:

(1) $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$

(2) $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$

(3) $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$

(4) $1 \cdot v = v$

5.2 Beispiel (Diverse Vektorräume)
(1) K^n ist ein Vektorraum mit den Verknüpfungen aus Definition 3.5(2).

(2) $M(m \times n, K)$ ist ein Vektorraum vermöge komponentenweiser Addition und skalarer Multiplikation.

(3) Für eine Menge $X \neq \emptyset$ und einen K-Vektorraum V ist $\mathrm{Abb}(X, V) := \{f : X \to V\}$ ein Vektorraum vermöge

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x)$$
$$(\lambda f)(x) := \lambda \cdot (f(x))$$

f+r $\lambda \in K, x \in X$ und $f, g \in \mathrm{Abb}(X, V)$.

(4) Der **Polynomring** $K[T] := \{a_0 + a_1 T + a_2 T^2 + \cdots + a_n T^n : a_i \in K, n \in \mathbb{N}_0\}$ ist ein Vektorraum vermöge

$$\sum_{k=0}^{n} a_k T^k + \sum_{k=0}^{m} b_k T^k := \sum_{k=0}^{\max(m,n)} (a_k + b_k) T^k$$
$$\lambda \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} a_k T^k \right) := \sum_{k=0}^{n} (\lambda a_k) T^k$$

5.4 Definition (Untervektorraum)
Sei V ein K-Vektorraum und $U \subseteq V$ nichtleer. U heißt **Untervektorraum** von V, wenn gilt:

(1) Für alle $v, w \in U$ ist $v + w \in U$.

(2) Für alle $\lambda \in K$ und $v \in U$ ist $\lambda v \in U$.

5.7 Definition (Lineare Abbildung)
Sei K ein Körper und V, W zwei K-Vektorräume. Eine Abbildung $F \colon V \to W$ heißt **K-linear** oder **K-Vektorraum-Homomorphismus**, wenn für alle $v, w \in V$ und $\lambda \in K$ gilt:

$$F(\lambda v + w) = \lambda \cdot F(v) + F(w).$$

Wir definieren $\mathrm{Hom}(V, W) = \{F \colon V \to W \text{ linear}\}$. $\mathrm{Hom}(V, W)$ ist ein Untervektorraum von $\mathrm{Abb}(V, W)$.

5.8 Beispiel (Auswertungsabbildung)
Für jedes $x \in K$ ist die **Auswertungsabbildung**

$$\begin{aligned} \mathrm{ev}_x \colon K[T] &\longrightarrow K \\ p = \sum_{k=0}^{n} a_k T^k &\longmapsto p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \end{aligned}$$

eine lineare Abbildung

5.9 Definition (Isomorphismus, Kern, Bild)
Sei $F\colon V \to W$ linear.

(1) Ist F bijektiv, so heißt F ein **Isomorphismus**. F^{-1} ist ebenfalls linear. Existiert für zwei Vektorräume V, W ein Isomorphismus $V \to W$, so heißen V, W **isomorph** und wir schreiben $V \simeq W$.

(2) Der Untervektorraum $\mathrm{Kern}(F) := \{v \in V : F(v) = 0_W\} \subseteq V$ heißt **Kern** von F.
Es gilt: F injektiv $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Kern}(F) = \{0\}$.

(3) Der Untervektorraum $\mathrm{Bild}(F) := F(V) := \{F(V) : v \in V\} \subseteq W$ heißt **Bild** von F.

6. Lineare Abbildungen von K^{n} nach K^{m} und Matrizen

6.1 Definition (Linearkombination)
Sei V ein K-Vektorraum, $v_1, \dots, v_m \in V$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$, so heißt

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i$$

eine **Linearkombination** der Vektoren $v_1, \dots, v_m$ in V.

6.3 Lemma
Sei $A \in M(m \times n, K)$, dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} F_A\colon K^n &\longrightarrow K^m \\ x &\longmapsto Ax \end{aligned}$$

mit Ax wie in Definition 3.5(3) linear.

6.4 Satz (Umkehrung von Lemma 6.3)
Ist $F\colon K^n \to K^m$ eine lineare Abbildung, dann ist $A_F = (F(e_1), \dots, F(e_n)) \in M(m \times n, K)$ die eindeutige Matrix mit $F(x) = A_F x$ für alle $x \in K^n$.

6.6 Satz
Die Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi\colon \mathrm{Hom}(K^n, K^m) &\longrightarrow M(m \times n, K) \\ F &\longmapsto A_F \end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus von K-Vektorräumen mit Umkehrabbildung $\Phi^{-1}(A) = F_A$. Für $A \in M(m \times n, A)$ setzen wir $\mathrm{Kern}(A) := \mathrm{Kern}(F_A)$ und $\mathrm{Bild}(A) := \mathrm{Bild}(F_A)$.

6.8 Satz
Seien $A \in M(m \times n, K)$ und $b \in K^m$. Dann gilt:

(1) Das LGS $Ax = b$ besitzt genau dann eine Lösung $x \in K^n$, wenn $b \in \mathrm{Bild}(A)$.

(2) Ist $x_s \in K^n$ eine spezielle Lösung von $Ax = b$, so ist die Menge $\mathbb{L}$ aller Lösungen von $Ax = b$ gegeben durch
$$\mathbb{L} = x_s + \mathrm{Kern}(A) = \{x_s + x : x \in \mathrm{Kern}(A)\}.$$

6.9 Korollar
Sei $A \in M(m \times n, K)$. Dann sind äquivalent:

(1) Die Gleichung $Ax = b$ besitzt für jedes $b \in K^m$ genau eine Lösung $x \in K^n$.

(2) Es gilt $\mathrm{Kern}(A) = \{0\}$ und $\mathrm{Bild}(A) = K^m$.

(3) Die Abbildung F_A ist bijektiv.

6.13 Definition (Matrixmultiplikation)
Für $B \in M(l \times m, K)$ und $A \in (m \times n, K)$ definieren wir das Produkt $C := B \cdot A = (c_{ij})_{i,j} \in M(l \times n, K)$ durch
$$c_{ij} := \sum_{k=1}^{m} b_{ik} a_{kj} \quad \text{für } 1 \le i \le l \text{ und } 1 \le j \le n.$$

6.14 Satz
Seien $F\colon K^n \to K^m, G\colon K^m \to K^l$ linear. Dann gilt $A_{G \circ F} = A_G \cdot A_F$.
Ist umgekehrt $A \in M(m \times n, K), B \in M(l \times m, K)$, so ist $F_{BA} = F_B \circ F_A$.

6.17 Definition (Inverse Matrix)
$A \in M(n \times n, K)$ heißt **invertierbar**, falls eine Matrix $B \in M(n \times n, K)$ existiert mit $BA = AB = E_n$. B heißt die zu A **inverse Matrix** und ist eindeutig bestimmt. Wir schreiben $A^{-1} := B$.

6.19 Satz
Sei $A \in M(n \times n, K)$. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(1) A ist invertierbar.

(2) $F_A\colon K^n \to K^n$ ist invertierbar und es gilt $(F_A)^{-1} = F_{A^{-1}}$.

(3) Für jedes $b \in K^n$ existiert genau eine Lösung $x \in K^n$ für das LGS $Ax = b$, und es gilt $x = A^{-1}b$.

(4) A lässt sich durch elementare Zeilenumformungen in die Einheitsmatrix E_n

6.22 Definition (allgemeine lineare Gruppe)
Sei K ein Körper und sei $n \in \mathbb{N}$. Die Menge

$$\mathrm{GL}(n, K) := \{A \in M(n \times n, K) : A \text{ ist invertierbar}\} \subseteq M(n \times n, K)$$

ist versehen mit der Matrixmultiplikation eine Gruppe – die **allgemeine lineare Gruppe**.

II. Lineare Algebra II

1. Erster Abschnitt

1.1 Definition (Eine Definition)
Ich bin Definition.

$$\text{und ich eine Gleichung.} \tag{1}$$

Beweis: Ich bin ein Beweis, der die Gleichung referenziert: (1) □

Referenz auf die Definition: 1.1.

Index

Todo list