



WESTFÄLISCHE
WILHELMS-UNIVERSITÄT
MÜNSTER



FACHBEREICH 10
MATHEMATIK UND
INFORMATIK

Skript Topologie II.

Mitschrift der Vorlesung „Topologie II.“ von Prof. Dr. Arthur Bartels

Jannes Bantje

19. Oktober 2015

Aktuelle Version verfügbar bei



<https://github.com/JaMeZ-B/latex-wwu>

GitHub ist eine Internetplattform, auf der viele OpenSource-Projekte gehostet werden. Diese Plattform nutzen wir zur Zusammenarbeit, also findet man hier neben den PDFs auch die \TeX -Dateien. Außerdem ist über diese Plattform auch direktes Mitarbeiten möglich, siehe nächste Seite.



<https://uni-muenster.sciebo.de/public.php?service=files&t=965ae79080a473eb5b6d927d7d8b0462>

Sciebo ist ein Dropbox-Ersatz der Hochschulen in NRW, der von der Uni Münster in leitender Position auf Basis der OpenSource-Software Owncloud aufgebaut wurde. Wenn man auf den Link klickt, kann man die Freigabe zum eigenen Speicher hinzufügen und hat dann immer automatisch die aktuellste Version.



B6WH2DISQ5QVYIRYIEZSF4ZR2IDVKPN3I

BTSync ist ein peer-to-peer Dateisynchronisations-Tool. Dabei werden die Dateien nur auf den Computern der Teilnehmer an einer Freigabe gespeichert. Ein RasPi ist permanent online, sodass stets die aktuellste Version verfügbar ist. Clients gibt es für jedes Betriebssystem. Zugang ist über das obige „Secret“ bzw. den QR-Code möglich.



Vorlesungshomepage

<https://wwwmath.uni-muenster.de/reine/u/topos/lehre/SS2015/KTheorie-Hopf/Hopf.html>

Hier ist ein Link zur offiziellen Vorlesungshomepage.

Vorwort — Mitarbeit am Skript

Dieses Dokument ist eine Mitschrift aus der Vorlesung „Topologie II., WiSe 2015“, gelesen von Prof. Dr. Arthur Bartels. Der Inhalt entspricht weitestgehend dem Tafelanschrieb. Für die Korrektheit des Inhalts übernehme ich keinerlei Garantie! Für Bemerkungen und Korrekturen – und seien es nur Rechtschreibfehler – bin ich sehr dankbar. Korrekturen lassen sich prinzipiell auf drei Wegen einreichen:

- ▶ Persönliches Ansprechen in der Uni, Mails an j.bantje@wwu.de (gerne auch mit annotierten PDFs) oder Kommentare auf <https://github.com/JaMeZ-B/latex-www>.
- ▶ *Direktes* Mitarbeiten am Skript: Den Quellcode poste ich auf GitHub (siehe oben), also stehen vielfältige Möglichkeiten der Zusammenarbeit zur Verfügung: Zum Beispiel durch Kommentare am Code über die Website und die Kombination Fork + Pull Request. Wer sich verdient macht oder ein Skript zu einer Vorlesung, die ich nicht besuche, beisteuern will, dem gewähre ich gerne auch Schreibzugriff.

Beachten sollte man dabei, dass dazu ein Account bei github.com notwendig ist, der allerdings ohne Angabe von persönlichen Daten angelegt werden kann. Wer bei GitHub (bzw. dem zugrunde liegenden Open-Source-Programm „git“) – verständlicherweise – Hilfe beim Einstieg braucht, dem helfe ich gerne weiter. Es gibt aber auch zahlreiche empfehlenswerte Tutorials im Internet.¹

- ▶ *Indirektes* Mitarbeiten: \TeX -Dateien per Mail verschicken.

Dies ist nur dann sinnvoll, wenn man einen ganzen Abschnitt ändern möchte (zB. einen alternativen Beweis geben), da ich die Änderungen dann per Hand einbauen muss! Ich freue mich aber auch über solche Beiträge!

¹ zB. <https://try.github.io/levels/1/challenges/1>, ist auf Englisch, aber dafür interaktives LearningByDoing

Inhaltsverzeichnis

1 Kohomologie	1
Index	A
Abbildungsverzeichnis	B
Todo list	B

1 Kohomologie

1.1 Definition. Sei R ein Ring. Ein R -Kokettenkomplex (C^*, d^*) ist eine Folge von R -Moduln $(C^n)_{n \in \mathbb{N}}$ zusammen mit R -linearen Abbildungen $d^n: C^n \rightarrow C^{n+1}$, sodass $d^{n+1} \circ d^n = 0$. Der n -te Kohomologiemodul von (C^*, d^*) ist definiert als

$$H^n(C^*, d^*) = \frac{\ker d^n: C^n \rightarrow C^{n+1}}{\operatorname{im} d^{n-1}: C^{n-1} \rightarrow C^n}$$

Kokettenabbildungen, Kokettenhomotopien, induzierte Abbildungen, ...

hinzufügen

Bemerkung:

- i) Sei (C_*, d_*) ein R -Kettenkomplex und V ein R -Modul. Dann erhalten wir einen R -Kokettenkomplex (C^*, d^*) durch

$$C^n := \operatorname{Hom}_R(C_n, V)$$

und $d^n: C^n \rightarrow C^{n+1}$ definiert durch $\alpha \mapsto \alpha \circ d_{n+1}$. (C^*, d^*) heißt der V -duale Kettenkomplex zu (C_*, d_*) .

- ii) Benutzen wir \mathbb{Z} statt \mathbb{N} als Indexmenge, so können wir durch $(C^n, d^n) \rightsquigarrow (C_n := C^{-n}, d_n := d^{-n})$ jeden Kokettenkomplex einem Kettenkomplex zuordnen. Dieser Prozess ist offensichtlich umkehrbar.

Beispiel: Sei $(C_*, d_*) = (\mathbb{Z} \xleftarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xleftarrow{\cdot 2} 0 \xleftarrow{\cdot 2} \dots)$ Dann ist

$$H_k(C_*, d_*) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & \text{falls } k = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Der \mathbb{Z} -duale Kokettenkomplex ist

$$\begin{array}{ccccccc} \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{d^1} & \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & & & \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{\cdot 2} & \mathbb{Z} & & & & \end{array}$$

Damit ist die Kohomologie $H^k(C^*, d^*)$ isomorph zu $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ für $k = 1$ und 0 in jedem anderen Fall. Es gilt also nicht immer $H^*(\operatorname{Hom}(C_*, R), d^*) = \operatorname{Hom}(H_*(C_*, d_*), R)$.

1.2 Definition. Sei (X, A) ein Paar von topologischen Räumen und V eine abelsche Gruppe. Der *singuläre Kokettenkomplex* von (X, A) mit Koeffizienten in V ist definiert durch

$$C_{\text{sing}}^*(X, A; V) := \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_{\text{sing}}^*(X, A), V)$$

und $d_{\text{sing}}^*(\alpha) := -(-1)^{|\alpha|} \alpha \circ d_{\text{sing}}^*$. Dabei ist $|\alpha| = n$ für $\alpha \in C_{\text{sing}}^n(X, A; R)$. Die Kohomologie von $(C_{\text{sing}}^*(X, A; V), d_{\text{sing}}^*)$ heißt die *singuläre Kohomologie* von (X, A) mit Koeffizienten in R .

Bemerkung: Sei R ein kommutativer Ring und V ein R -Modul. Dann ist

$$(C_{\text{sing}}^*(X, A; V), d_{\text{sing}}^*)$$

isomorph zum V -dualen R -Kokettenkomplex des R -Kettenkomplexes $(C_{\text{sing}}^*(X, A; R), d_{\text{sing}}^*)$.

1.3 Definition. Sei $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ eine stetige Abbildung von Paaren. Dann erhalten wir eine Kokettenabbildung $f^*: C_{\text{sing}}^*(Y, B; V) \rightarrow C_{\text{sing}}^*(X, A; V)$ durch

$$f^*(\alpha) := \alpha \circ f_*$$

Bemerkung: Ist $g: (Y, B) \rightarrow (Z, C)$ eine weitere Abbildung von Paaren, so gilt $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

1.4 Definition. Seien \mathcal{C} und \mathcal{D} Kategorien. Ein *kontravarianter Funktor* $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ordnet jedem Objekt C in \mathcal{C} ein Objekt D in \mathcal{D} zu und jedem Morphismus $f: C \rightarrow C'$ einem Morphismus $F(f): F(C') \rightarrow F(C)$ in \mathcal{D} zu. Dabei muss gelten:

- i) $F(\text{id}_C) = \text{id}_{F(C)}$
- ii) Für $C \xrightarrow{f} C' \xrightarrow{f'} C''$ gilt $F(f' \circ f) = F(f) \circ F(f')$.

Kürzer ist ein *kontravarianter Funktor* $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ das selbe wie ein *kovarianter Funktor* $\mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}^{\text{op}}$.

Beispiel: i) $\text{id}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^{\text{op}}$ ist kontravariant.

ii) Sei V eine abelsche Gruppe. Wir erhalten einen kontravarianten Funktor

$$\text{Hom}(-, V): \mathbb{Z}\text{-MOD} \rightarrow \mathbb{Z}\text{-MOD}$$

iii) Sei V eine abelsche Gruppe. Dann sind

$$\begin{aligned} C_{\text{sing}}^*(-, V): \text{TOP}^2 &\rightarrow \mathbb{Z}\text{-KOKETTENKOMPLEXE} \\ H_{\text{sing}}^*(C_{\text{sing}}^*(-, V), d_{\text{sing}}^*): \text{TOP}^2 &\rightarrow \text{GR-}\mathbb{Z}\text{-MOD} \end{aligned}$$

kontravariante Funktoren.

1.5 Satz. Singuläre Kohomologie hat die folgenden Eigenschaften:

- i) **Dimensionsaxiom:** $H_{\text{sing}}^n(\{\text{pt}\}; V) = V$, falls $n = 0$ ist und sonst 0 .
- ii) **Paarfolge:** Es gibt eine natürliche Transformation $\partial^*: H^*(A; V) \rightarrow H^{*+1}(X, A; V)$ sodass für jedes Paar

$$0 \longrightarrow H^0(X, A; V) \longrightarrow H^0(X, V) \longrightarrow H^0(A; V) \xrightarrow{\partial} H^1(X, A; V) \longrightarrow \dots$$

eine lange exakte Folge ist. ∂ bezeichnet man auch als *verbindende Abbildung*.

iii) **Ausschneidung:** Sei $L \subseteq A$ mit $\bar{L} \subseteq \mathring{A}$. Dann induziert die Inklusion $i: (X \setminus L, A \setminus L) \hookrightarrow (X, A)$ einen Isomorphismus $i^*: H^*(X, A; V) \rightarrow H^*(X \setminus L, A \setminus L; V)$.

iv) **Homotopieinvarianz:** Sind $f, g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ homotope Abbildungen von Paaren, so gilt $f^* = g^*$ für die induzierten Abbildungen in singulärer Kohomologie.

BEWEIS: Für singuläre Homologie haben wir die entsprechenden Aussagen schon bewiesen. In allen vier Fällen folgt die Aussage für Kohomologie aus schon bewiesenen Aussagen über den singulären Kettenkomplex.

Wir führen dies an dieser Stelle nur für iv) aus. Seien $f, g: X \rightarrow Y$ homotop. Dann gibt es eine Kettenhomotopie $H: C_{*+1}^{\text{sing}}(X) \rightarrow C_{*}^{\text{sing}}(Y)$ zwischen den auf dem singulären Kettenkomplex induzierten Abbildungen f_* und g_* . Es gilt also

nochmal durch-
gucken

$$d_{n+1} \circ H + H \circ d_n = f_* - g_*$$

H induziert $H^\# : C_{\text{sing}}^*(Y; V) \rightarrow C_{\text{sing}}^*(X; V)$ mit $H^\#(\alpha) := (-1)^{|\alpha|} \alpha \circ H$. Es gilt nun

$$\begin{aligned} (d^{n-1} \circ H^\# + H^\# \circ d^n)(\alpha) &= d^{n-1} \circ H^\#(\alpha) + H^\# \circ d^n(\alpha) \\ &= d^{n-1}((-1)^n(\alpha \circ H)) - (-1)^n H^\#(\alpha \circ d^{n+1}) \\ &= (-1)^n((-1)^n \alpha \circ H \circ d_n - (-1)^{n+1} \alpha \circ d_{n+1} \circ H) \\ &= \alpha \circ H \circ d_n + \alpha \circ d_{n+1} \circ H \\ &= \alpha(f_* - g_*) = f^*(\alpha) - g^*(\alpha) \end{aligned}$$

□

Index

Die *Seitenzahlen* sind mit Hyperlinks versehen und somit anklickbar

[Ausschneidung](#), 2

[Dimensionsaxiom](#), 2

[Homotopieinvarianz](#), 2

[Kohomologiemodul](#), 1

[Kokettenkomplex](#), 1

[kontravarianter Funktor](#), 2

[Paarfolge](#), 2

[singuläre Kohomologie](#), 1

[singuläre Kokettenkomplex](#), 1

[verbindende Abbildung](#), 2

Abbildungsverzeichnis

To-do's und andere Baustellen

hinzufügen	1
nochmal durchgucken	2