Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Fachbereich 10 Mathematik und Informatik

Skript Analysis 2

Mitschrift der Vorlesung „Analysis 2“ von Prof. Ebert

Tim Keil

9. Juni 2015

Vorwort — Mitarbeit am Skript

Dieses Dokument ist eine Mitschrift aus der Vorlesung „Analysis 2, SoSe 2015“, gelesen von Prof. Ebert. Der Inhalt entspricht weitestgehend dem Tafelanschrieb. Für die Korrektheit des Inhalts übernehme ich keinerlei Garantie! Für Bemerkungen und Korrekturen – und seien es nur Rechtschreibfehler – bin ich sehr dankbar. Korrekturen bitte durch persönliches Ansprechen oder per Mail an keil.menden@web.de.

Inhaltsverzeichnis

I. Normierte und metrische Räume

$\mathbb{R}$ $\rightarrow$ $\mathbb{R}^n$ $\rightarrow$ Normierte Vektorräume $\rightarrow$ Metrische Räume

I.1. Der $\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| x_i \in \mathbb{R} \right\}$$

Der $\mathbb{R}^n$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) = n$.
Sei

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-ter Eintrag}$$

$(e_1, \ldots, e_n)$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^n$ und heißt **Standardbasis**.

Ist $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, so gilt $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

I.1.1. Definition

Das **Skalarprodukt** auf $\mathbb{R}^n$ ist die Abbildung

$$\langle\, . \,, \,. \,\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

mit

$$x = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \in \mathbb{R}$$

es gilt:

(S1) (Bilinearität) $\forall x_0, x_1, y_0, y_1, \in \mathbb{R}^n \ \forall a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \langle x_0 + x_1 \,, \, y_0 + y_1 \rangle &= \langle x_0 \,, \, y_0 \rangle + \langle x_1 \,, \, y_1 \rangle + \langle x_1 \,, \, y_0 \rangle + \langle x_1 \,, \, y_1 \rangle \\ \langle a x_0 \,, \, b y_0 \rangle &= ab \langle x_0 \,, \, y_0 \rangle \end{aligned}$$

(S2) (Symmetrie) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt $\langle x \,, \, y \rangle = \langle y \,, \, x \rangle$

(S3) (positive Definitheit) $\forall x \in \mathbb{R}$ gilt $\langle x \,, \, x \rangle \geq 0$ und $\langle x \,, \, x \rangle = 0$ nur dann, wenn $x = 0$

Desweiteren gilt $\langle e_i \,, \, e_j \rangle = \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ (Kronecker-Symbol)

Ist

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in \mathbb{R}^n \qquad (x_i \in \mathbb{R})$$

so ist

$$\langle x\,,\,e_j\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i\,,\,e_j\rangle \overset{(S1)}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i \langle e_i\,,\,e_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \delta_{ij} = x_j$$
$$\Rightarrow x = \sum_{j=1}^{n} \langle x\,,\,e_j\rangle e_j$$

I.1.2. Definition

Sei $x \in \mathbb{R}^n$. Die l^2-Norm von x ist die Zahl

$$\|x\|_2 := \sqrt{\langle x\,,\,x\rangle}$$

Schreibweise manchmal auch: $\|x\|_2 = \|x\|$

I.2. Euklidsche und normierte Vektorräume

I.2.1. Definition

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Ein **Skalarprodukt** auf V ist eine Abbildung $\langle .\,,\,.\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$, welche die Axiome S1,S2,S3 erfüllt.
Ein **euklidscher Vektorraum** ist ein Paar $(V, \langle\,,\,\rangle)$. V ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\langle\,,\,\rangle$ ist Skalarprodukt auf V.
Ist $(V, \langle\,,\,\rangle)$ ein eukdlischer Vektorraum, so ist die durch $\langle\,,\,\rangle$ induzierte Norm definiert als

$$\|v\| = \sqrt{\langle v\,,\,v\rangle} \qquad v \in V$$

I.2.2. Beispiele

- $\mathbb{R}^n$ mit Standardskalarprodukt
- Die Abbildung

$$\begin{aligned} &\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R} \\ &(z, w) \mapsto Re(\bar{z} \cdot w) \end{aligned}$$

  ist ein Skalarprodukt. Die induzierte Norm ist der Absolutbetrag.

I.2.3. Definition

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine **Norm** auf V ist eine Abbildung $\|.\| : V \to \mathbb{R}, v \mapsto \|v\|$ mit

(N1) $\|v\| \geq 0 \qquad \forall\, v \in V$

(N2) $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$

(N3) $\|av\| = |a| \cdot \|v\| \qquad \forall\, v \in V, a \in \mathbb{R}$

(N4) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \qquad \forall\, v, w \in V$ (Dreiecksungleichung)

Ein normierter Vektorraum ist ein Paar $(V, \|.\|)$ bestehend aus einem $\mathbb{R}$-VR V und einer Norm auf V.

I.2.4. Satz

Sei $(V, \langle\, , \,\rangle)$ ein euklidscher Vektorraum. Für $v \in V$ setzte $\|v\| = \sqrt{\langle v\,,\, v\rangle}$
Dann gilt:

1. $\|.\|$ ist eine Norm auf V

2. $\forall\, v, w \in V$ gilt die **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**:

$$|\langle v\,,\, w\rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

Beweis:

1. N1: $\|v\| = \sqrt{\underbrace{\langle v\,,\, v\rangle}_{\geq 0}} \geq 0$

   N2: $\|v\| = \sqrt{\langle v\,,\, v\rangle} = 0 \Rightarrow \langle v\,,\, v\rangle = 0 \overset{\text{S3}}{\Rightarrow} v = 0$

   N3: $a \in \mathbb{R}, v \in V$

$$\|av\| = \sqrt{\langle av\,,\, av\rangle} \overset{\text{S1}}{=} \sqrt{a^2\langle v\,,\, v\rangle} = \sqrt{a^2}\sqrt{\langle v\,,\, v\rangle} = |a|\|v\|$$

2. CS-Ungleichung ist trivial, wenn $w = 0$
   Ann.: $w \neq 0$: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} f(t) &= \langle v + tw\,,\, v + tw\rangle \\ &= \langle v\,,\, v\rangle + 2t\langle v\,,\, w\rangle + t^2\langle w\,,\, w\rangle \\ &= \|v\|^2 + 2t\underbrace{\langle v\,,\, w\rangle}_{\in\mathbb{R}} + t^2\|w\|^2 \end{aligned}$$

   aus S3 folgt $f(t) \geq 0$. f ist Polynom

$$\begin{aligned} f'(t) = 0 &\Leftrightarrow t_0 = -\frac{\langle v\,,\, w\rangle}{\|w\|^2} \\ f''(t) &= 2\|w\|^2 > 0 \end{aligned}$$

   $\Rightarrow f$ nimmt bei t_0 globales Minimum an

$$\begin{aligned} 0 \leq f(t_0) = \|v\|^2 - \frac{2\langle v\,,\, w\rangle^2}{\|w\|^2} + \frac{\langle v\,,\, w\rangle^2}{\|w\|^4}\|w\|^2 &= \|v\|^2 - \frac{\langle v\,,\, w\rangle^2}{\|w\|^2} \\ \Rightarrow \frac{\langle v\,,\, w\rangle^2}{\|w\|^2} &\leq \|v\|^2 \\ \Rightarrow \langle v\,,\, w\rangle^2 &\leq \|v\|^2\|w\|^2 \\ \Rightarrow |\langle v\,,\, w\rangle| = \sqrt{\langle v\,,\, w\rangle^2} &\leq \sqrt{\|v\|^2\|w\|^2} = \|v\| \cdot \|w\| \end{aligned}$$

$\square$

Schließlich könnnen wir N4 zeigen:

N4:

$$\begin{aligned}\|v+w\|^2 &= \langle v+w\,,\,v+w\rangle \\ &\overset{\text{S1}}{=} \|v\|^2 + 2\langle v\,,\,w\rangle + \|w\|^2 \\ &\le \|v\| + 2|\langle v\,,\,w\rangle| + \|w\|^2 \\ &\overset{\text{CS}}{\le} \|v\|^2 + 2\|v\|\|w\| + \|w\|^2 \\ &= (\|v\| + \|w\|)^2\end{aligned}$$

Wurzel ziehen zeigt N4 □

I.2.5. Weitere Beispiele für Normen auf $\mathbb{R}$

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \qquad x_i \in \mathbb{R}$$

- l^1-Norm $\quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$
- l^∞-Norm $\quad \|x\|_\infty = \max\{|x_i| \mid i = 1, \dots, n\}$
- Ist $p \in [1, \infty)$, so ist die l^p-Norm

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \text{(Beweis Schwer)}$$

I.2.6. Definition

V $\mathbb{R}$-VR , $\|.\|_0, \|.\|_1$ Normen auf V. Die Normen $\|.\|_0, \|.\|_1$ heißen **äquivalent**, falls $C, c > 0$ existieren, so dass für alle $v \in V$ gilt:

$$c\|v\|_0 \le \|v\|_1 \le C\|v\|_0$$

Bemerkung:
Das ist eine Äquivalenzrelation

- **Reflexiv**: klar
- **Symmetrie**:

$$\begin{aligned} c\|v\|_0 \le \|v\|_1 \le C\|v\|_0 \\ \Rightarrow \frac{1}{c}\|v\|_1 \le \|v\|_0 \le \frac{1}{C}\|v\|_1\end{aligned}$$

- **Transitiv**:

$$c\|v\|_0 \le \|v\|_1 \le C\|v\|_0 \quad \text{und} \quad d\|v\|_1 \le \|v\|_2 \le D\|v\|_1 \qquad (C, c, D, d > 0)$$

$$\Rightarrow cd\|v\|_0 \le CD\|v\|_0$$

I.2.7. Beispiel

Die l^1, l^2 und l^∞-Norm auf $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent und zwar gilt:

$$\|v\|_\infty \le \|v\|_2 \le \|v\|_1 \le n\|v\|_\infty \qquad \text{(Beweis Übung)}$$

I.3. Metrische Räume

I.3.1. Definition

$(V, \|.\|)$ normierter Vektorraum, $v, w \in V$
Der **Abstand** von v und w ist

$$d(v, w) := \|v - w\|$$

I.3.2. Definition

Sei X eine Menge
Eine **Metrik** (oder Abstandsfunktion) ist eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto d(x, y)$, sodass gilt:

(M1) $\forall\, x, y \in X : \qquad d(x, y) \geq 0$

(M2) $\forall\, x, y \in X : \qquad d(x, x) = 0$ und $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$

(M3) $\forall\, x, y \in X : \qquad d(x, y) = d(y, x)$

(M4) $\forall\, x, y, z \in X : \qquad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ **(Dreiecksungleichung)**

Ein **Metrischer Raum** ist ein Paar (X, d), X Menge, d Metrik auf X

Beispiele:

- Ist $(V, \|.\|)$ normierter Vektorraum, so ist durch $d(v, w) := \|v - w\|$ eine Metrik auf V gegeben.

$$v, w, u \in V \qquad \begin{aligned} d(v, u) &= \|v - u\| = \|v - w + w - u\| \\ &\overset{\triangle\text{-Ungl.}}{\leq} \|v - w\| + \|w - u\| \\ &= d(v, w) + d(w, u) \end{aligned}$$

  Unterbeispiel:

  $V = \mathbb{R}$. Dann ist $x \mapsto |x|$ eine Norm auf $\mathbb{R}$ und die induzierte Metrik auf $\mathbb{R}$ ist $d(x, y) = \|x - y\|$

- (X, d_X) metrischer Raum $Y \subseteq X$ Teilmenge. Dann ist (Y, d_y) ein metrischer Raum, wobei für $y_0, y_1 \in Y$ gilt, dass $d_y(y_0, y_1) := d_x(y_0, y_1)$
  Vereinbarung: Ist $X \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge, so ist X immer mit der durch das Standardskalarprodukt induzierte Metrik versehen. (es sei denn, etwas anderes ist gesagt)

Konvergenz
Erinnerung (Ana I): $(x_n)_n$ Folge in $\mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$. Dann

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x \;:\Leftrightarrow\; \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, n_0\, \forall\, n \geq n_0 : |x - x_1| < \varepsilon$$

I.3.3. Definition

(X, d) metrischer Raum, $(x_n)_n$ Folge in X (d.h eine Abbildung $x : \mathbb{N} \to X$) $y \in X$. Dann Konvergiert die Folge $(x_n)_n$ gegen $y :\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, n_0 : \forall\, n \geq n_0\; d(x_n, y) < \varepsilon$
Äquivalent: Die Folge (in $\mathbb{R}$) $d(x_n, y)$ ist eine Nullfolge.

I.3.4. Beispiel

$X = \mathbb{R}^n$ mit Metrik, die durch l^1-l^2- oder l^∞- Norm induziert wird. Folge $k \mapsto x(k) \in \mathbb{R}^n$.

$$x(k) = \sum_{i=1}^n x_i(k) e_i \qquad e_i \text{ Standard-Basisvektor} \qquad x_i(k) \in \mathbb{R} \qquad x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$$

Dann sind äquivalent

1. für alle $i = 1, \ldots, n$ gilt $\lim\limits_{k\to\infty} x_i(k) = x_i$
2. $\lim\limits_{k\to\infty} \|x(k) - x\|_1 = 0$
3. $\lim\limits_{k\to\infty} \|x(k) - x\|_2 = 0$
4. $\lim\limits_{k\to\infty} \|x(k) - x\|_\infty = 0$

Beweis:
$\underline{1 \to 2:}$

$$\|x(k) - x\|_1 := \sum_{i=1}^n \underbrace{|x_i(k) - x_i|}_{\overset{\text{(wg 1)}}{\to} 0} \longrightarrow 0$$

$\underline{2 \to 3 \to 4:}$ Benutze Ungleichungen $(y \in \mathbb{R}^n)$

$$\|y\|_\infty \leq \|y\|_2 \leq \|y\|_1 \leq n \cdot \|y\|_\infty$$

also

$$\begin{aligned} &\lim_{k\to\infty} \|x(k) - x\|_1 = 0 \\ &\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \|x(k) - x\|_2 = 0 \\ &\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \|x(k) - x\|_\infty = 0 \end{aligned}$$

$\underline{4 \to 1:}$

$$\|x(k) - x\|_\infty = \max\{|x_i(k) - x| \, | i = 1, \ldots, n\} \Rightarrow \text{für alle } i\text{: } |x_i(k) - x_i| \leq \|x(k) - x\|_\infty$$

Also

$$\left[\|x(k) - x\|_\infty \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0\right] \qquad \Rightarrow \qquad [\forall\, i = 1, \ldots, n \quad |x_i(k) - x_i| \longrightarrow 0]$$

$\Rightarrow 1)$ □

Bemerkung:
X metrischer Raum $(x_n)_n, (y_n)_n$ Folgen in X $\quad \lim_{n\to\infty} x_n = x$ und $\lim_{n\to\infty} y_n = y$

$$\Rightarrow d(x, y) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \qquad \text{(Blatt 2, Aufgabe 2)}$$

Daraus folgt:
Ist $(x_n)_n$ Folge in X und gilt $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ sowie $\lim_{n\to\infty} x_n = x'$ dann ist $x = x'$
Denn

$$d(x, x') = \lim_{n\to\infty} \underbrace{d(x_n, x_n)}_{=0} = 0$$

$$\overset{\text{(M2)}}{\Rightarrow} x = x'$$

□

I.3.5. Definition

Sei (X, d) metrischer Raum und $(x_n)_n$ Folge in X. Dann heißt $(x_n)_n$ **Cauchyfolge**, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0 \, \forall n, m \geq n_0 : \; d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Bemerkung:
(X, d) metrischer Raum $(x_n)_n$ Folgen in X, $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in X$.
Dann ist $(x_n)_n$ Cauchyfolge, denn
Sei $\varepsilon > 0$. Wähle n_0, sodass

$$\forall n \geq n_0 \, d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Falls $n, m \geq n_0$

$$d(x_n, y_n) \leq \underbrace{d(x_n, x)}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{d(x, y_n)}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

I.3.6. Definition

(X, d) metrischer Raum. Dann heißt X **vollständig**, falls jede Cauchy-Folge $(x_n)_n$ in X gegen ein $x \in X$ konvergiert (Ana I)

Bsp:
$(0, 1) \subseteq \mathbb{R}$. $x_n = \frac{1}{n}$ Folge in X ist Cauchyfolge.
$(x_n)_n$ konvergiert <u>nicht</u> in X, denn der einzig möglicher Grenzwert (0) liegt nicht in X.

I.3.7. Satz

$\mathbb{R}^n$, mit der durch die Norm $\|.\|_p \qquad p = 1, 2, \infty$ induzierten Metrik ist vollständig

Beweis:
<u>$p = \infty$:</u> Sei $x(k)$ l^∞-Cauchyfolge in $\mathbb{R}^n$. Dann gilt für $i = 1, \ldots, n$:

$$|x_i(k) - x_i(l)| \leq \|x(k) - x(l)\|_\infty$$

Da $(x(k))_k$ l^∞-Cauchyfolge, ist $(x_i(k))_k$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ für alle $1 \leq i \leq n$
Nach dem Cauchy-Kriterium aus Analysis I sind die Folgen $(x_i(k))_k$ Konvergent. $x_i = \lim_{k\to\infty} x_i(k) \in \mathbb{R}$

$$x := \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in \mathbb{R}^n$$

Dann gilt

$$\|x(k) - x\|_\infty = \max\{\underbrace{|x_i(k) - x_i|}_{\to 0} | i = 1, \ldots, n\} \longrightarrow 0$$

also

$$\lim_{k\to\infty} \|x(k) - x\|_\infty = 0$$

<u>$p = 2$:</u> $x(k)$ l^2-Cauchyfolge, weil $\|x(k) - x(l)\|_\infty \leq \|x(k) - x(l)\|_2$
Ist $(x_k)_k$ eine l^∞-Cauchfolge, so gibt es ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\lim_{k\to\infty} \|x(k) - x\|_\infty = 0$$

$$\Rightarrow \|x(k) - x\|_2 \leq n \cdot \underbrace{\|x(k) - x\|_\infty}_{\to 0} \longrightarrow 0$$

<u>$p = 1$:</u> Analog zum Fall $p = 1$, benutze $\|y\|_\infty \leq \|y\|_1 \leq n \cdot \|y\|_\infty$ □

I.3.8. Definition

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung sowie $x \in X$.

(i) f heißt ε-δ-**stetig** (oder **stetig**) bei x, wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, \delta > 0 \, \forall x' \in X \text{ mit } d_X(x, x') < \delta \text{ gilt: } d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$$

(ii) f heißt **folgenstetig** in x :⇔ Ist $(x_n)_n$ eine Folge in X mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$$

f ist stetig (folgenstetig) auf X, wenn f stetig (folgenstetig) bei x ist für alle $x \in X$.

I.3.9. Satz

f stetig in x ⇔ f folgenstetig in x

Beweis
wie in Analysis I, wird bald nachgeliefert

I.3.10. Satz

(X, d_X) , (Y, d_Y), (Z, d_Z) metrische Räume.

$$f : X \to Y \qquad g : Y \to Z \qquad x \in X$$

Falls f stetig bei x und stetig bei $f(x)$ so ist $g \circ f$ stetig bei x.

Beweis:
Siehe Analysis I

I.3.11. Beispiele

$$\begin{aligned}
&\mu : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad \mu(x, y) := \, xy \qquad \text{(Multiplikation)} \\
&\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad \alpha(x, y) := x + y \qquad \text{(Addition)} \\
&q : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus 0 \to \mathbb{R} \qquad q(x, y) := \frac{x}{y} \qquad \text{(Division)}
\end{aligned}$$

sind auf ihrem gesamten Definitionsbereich stetig.

Beweis:
z. B q: q ist folgenstetig, denn:
Sei $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (d.h $y \neq 0$) und (x_n, y_n) Folge in $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (x, y)$$

Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ und } \lim_{n\to\infty} y_n = y \neq 0$$

$$\Rightarrow q(x_n, y_n) = \frac{x_n}{y_n} \xrightarrow{\text{Grenzwertsätze}} \frac{x}{y} = q(x, y)$$

$$\Rightarrow q \text{ ist folgenstetig}$$

α, μ analog. □

Bsp:
Sei X metrischer Raum, $f, g : X \to \mathbb{R}$ stetig
$\Rightarrow$ Die Funktion

$$\begin{array}{rccl} (f,g): & X & \to & \mathbb{R}^2 \\ & x & \mapsto & (f(x), g(x)) \in \mathbb{R}^2 \end{array}$$

ist stetig.
Denn, $(x_n)_n$ Folge in X, $x_n \to x \in X$

$$\Rightarrow f(x_n) \to f(x) \text{ und } g(x_n) \to g(x) \qquad (f, g \text{ stetig})$$
$$\overset{\text{Tatsache}}{\Rightarrow} (f,g)(x_n) = (f(x_n), g(x_n)) \to (f(x), g(x)) \in \mathbb{R}^2$$
$$\Rightarrow (f,g) \text{ stetig}$$

Betrachte Kompositionen

$$\begin{array}{ccccc} X & \overset{(f,g)}{\to} & \mathbb{R}^2 & \overset{\mu}{\to} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (f(x), g(x)) & \mapsto & f(x)g(x) \end{array}$$
$$\Rightarrow \underbrace{\underbrace{\mu}_{\text{stetig}} \circ \underbrace{(f,g)}_{\text{stetig}}}_{\Rightarrow \text{ stetig}} = fg$$

$$\Rightarrow \text{Produkte stetiger Funktionen sind wieder stetig}$$

Analog
Summen Quotienten stetiger Funktionen sind stetig

I.3.12. Definition

$(X, d_X), (Y, d_y)$ metrische Räume $f : X \to Y$ heißt **Lipschitz-stetig** $:\Leftrightarrow \exists\, L \leq 0,$ so dass gilt:

$$\forall\, x, x' \in X : \qquad d_Y(f(x), f(x')) \leq L d_X(x, x')$$

Bem:
ist f Lipschitz-stetig, so ist f stetig:
sei $\varepsilon > 0$ Wähle δ, so dass $\delta\, L \leq \varepsilon$
Dann:

$$\text{Ist } d_X(x,x') < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) \leq L \cdot d_X(x,x') < \delta L \leq \varepsilon \qquad \Rightarrow f \text{ stetig.}$$

I.3.13. Beispiel

Betrachte $\mathbb{R}^n$ mit der durch die l^p-Normen induzierten Metrik $p \in \{1, 2, \infty\}$
Dann gilt: Sind $p, q \in \{1, 2, \infty\}$, so ist

$$\text{id}:(\mathbb{R}^n, \|.\|_p) \to (\mathbb{R}^n, \|.\|_q)$$

Lipschitz-stetig.

Grund:
$\forall\, x \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n \cdot \|x\|_\infty$$

I.3.14. Satz

Jede lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist Lipschitz-stetig.

Beweis:
Aus LA I ist bekannt:
Es gibt genau ein $A \in$ Mat$_{m,n}(\mathbb{R})$, so dass $f(x) = Ax \qquad (\forall\, x \in \mathbb{R}^n)$

$$\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R}) = \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$$

Beh:
$\exists\, L = L_A$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\|Ax\|_2 \leq L\|x\|_2$$

Es gilt

$$\|Ax\|_2 \leq \|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^{m} |(Ax)_i| = \sum_{i=1}^{m} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \right|$$

nach Cauchy-Schwarz gilt:

$$\left| \sum_{j=1}^{n} y_j z_j \right| = |\langle y\,,\, z\rangle| \overset{\text{CS}}{\leq} \|y\|_2 \cdot \|z\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{m} y_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{m} z_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Also

$$\Rightarrow \left| \sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j \right| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{\|x\|_2}$$

$$\Rightarrow \|Ax\|_2 \leq \sum_{i=1}^{n} \left(\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 y \right)^{\frac{1}{2}} \|x\|^2 \right) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{=L} \|x\|_2$$

□

I.3.15. Korollar:

$A \in$ Mat$_{m,n}(\mathbb{R})$
Dann ist

$$\|A\| := \sup_{\|x\|_2 \leq 1} \|Ax\|_2 < \infty$$

Beweis:
Ist $L \geq 0$ mit $\|Ax\|_2 \leq L \cdot \|x\|_2 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n$
so gilt für $\|x\| \leq 1$: $\|Ax\|_2 \leq L$

$$\Rightarrow \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|_2 \leq L < \infty$$

□

I.3.16. Definition

Die Zahl $\|A\|$ heißt **Operatornorm** von A
Es gilt: Die Operatornorm ist eine Norm auf dem $\mathbb{R}$-VR Mat$_{m,n}(\mathbb{R})$ (Übung)
Es gibt keine einfache Formel für $\|A\|$

I.4. Topologische Grundbegriffe

I.4.1. Definition

(X, d) sei metrischer Raum, $\varepsilon > 0$ und $x \in X$. Der ε-**Ball** in X um x ist

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in X | d(x, y) < \varepsilon\}$$

in $\mathbb{R}$:

$$B_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$$

I.4.2. Definition

(X, D) metrischer Raum $Y \subseteq X, x \in X$

1. x heißt **innerer Punkt** von Y

   $$\exists\, \delta > 0 \text{ mit } B_\delta(x) \subseteq Y$$

   In diesem Fall heißt eine **Umgebung** von x in X

2. $x \in X$ heißt **Berührpunkt** von Y

   $$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, y \in Y \text{ mit } d(x, y) < \varepsilon$$

   (Äquivalent: $\forall\, \varepsilon > 0 \qquad B_\varepsilon(x) \cap \neq \emptyset$)

   $$\mathring{Y} = \{x \in X \,|\, x \text{ innerer Punkt von } Y\}$$
   $$\overline{Y} = \{x \in X \,|\, x \text{ ist Berührpunkt von } Y\}$$

I.4.3. Definition

1. (X, d) metrischer Raum, $Y \subseteq X$. Dann heißt Y **offen** in $X \Leftrightarrow$ jedes $x \in Y$ ist innerer Punkt von Y ($\Leftrightarrow \forall\, x \in Y\, \exists\, \delta > 0 : B_\delta \subseteq Y$)

2. Y heißt **abgeschlossen** in X :$\Leftrightarrow$ Das Komplement $X - Y$ ist offen in X

Bsp:
$X = \mathbb{R}$

1. Offene Intervalle $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ sind offen in $\mathbb{R}$,denn

   $$x \in (a, b)\,,\ \delta = \min\{x - a.b - x\} > 0$$
   $$\Rightarrow (x - \delta, x + \delta) \subseteq (a, b)$$

2. Abgeschlossene Intervalle $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ sind abgeschlossen:

   $$\mathbb{R} \setminus [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$$
   $$\Rightarrow (x - \delta, x + \delta) \subseteq \mathbb{R} \setminus [a, b]$$
   $$\Rightarrow x > b \text{ innerer Punkt von } \mathbb{R} \setminus [a, b]$$
   $$\text{analog } x < a \text{ ist innerer Punkt von } \mathbb{R} \setminus [a, b]$$
   $$\Rightarrow \mathbb{R} \setminus [a, b] \text{ offen in } \mathbb{R} \Rightarrow [a, b] \text{ abgeschlossen in } \mathbb{R}$$

Warnung:
Offenheit ist eine Eigenschaft von Teilmengen metrischer Räum, nicht der Mengen selber. 'Y offen' sinnlos ! 'Y offen in X' sinnvoll! Analog für Abgeschlossen
$X = \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} &Z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\} \\ &Y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0, 0 < x < 1\} \\ &Y \text{ offen in } Z \\ &Y \text{ nicht offen in } X \end{aligned}$$

I.4.4. Beispiel

X metrischer Raum, $x \in X$,$\varepsilon > 0$. Dann ist $B_\varepsilon^X(x)$ offen in X

Beweis:
zu zeigen: für jedes $y \in B_\varepsilon(x) \exists\, \delta > 0 :\, B_\delta(y) \subseteq B_\varepsilon(x)$

$$d(x,y) < \varepsilon \Rightarrow \exists\, \delta > 0 :\, d(x,y) + \delta < \varepsilon$$

Beh: $B_\delta(y) \subseteq B_\varepsilon(x)$
Das ist wahr, denn

$$z \in B_\delta(y) \Rightarrow d(y,z) < \delta$$

Ferner:

$$d(z,x) \leq d(z,y) + d(y,x) < \delta + d(y,x) < \varepsilon, \text{d.h.} z \in B_\varepsilon(x)$$

I.4.5. Satz

Es sei (X,d) metrischer Raum.
Dann gilt:

1. $\emptyset$ und X sind offen in X
2. Falls U_0, U_1 offen in X sind, so auch $U_0 \cap U_1$
3. Falls $(U_i)_{i \in I}$ eine durch I induzierte Familie von Teilmengen von X ist, so ist $\bigcup\limits_{i \in I} U_i$ offen in X
   'beliebige Vereinigungen offener Mengen sind offen'
4. $\emptyset, X$ sind abgeschlossen in X
5. A_0, A_1 abgeschlossen in X, dann ist $A_0 \cup A_1$ abgeschlossen in X
6. $(A_i)_{i \in I}$, A_i abgeschlossen in X, so ist $\bigcap\limits_{i \in I} A_i$ abgeschlossen in X

Beweis:

1. $\emptyset \subseteq X$ offen trivial
   $X \subseteq X$ offen trivial

2. Sei $x \in U_0 \cap U_1$ Dann existieren Bälle

$$B^X_{\varepsilon_1}(x) \subseteq U_1 \qquad B^X_{\varepsilon_0}(x) \subseteq U_0$$

   Wähle nun $\varepsilon = \min\{\varepsilon_0, \varepsilon_1\} > 0$

$$\Rightarrow B_\varepsilon(x) \subseteq U_0 \cap U_1$$
$$\Rightarrow x \text{ innerer Punkt von } U_0 \cap U_1$$

3. Sei $x \in \bigcup_{i \in I} U_i \subseteq X$

$$\Rightarrow \exists\, i \in I : x \in U_i, \text{ weil } U_i \subseteq X \text{ offen, gibt es } \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \in U_i.$$

   Aber

$$U_i \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i, \text{ daher: } B_\varepsilon(x) \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$$

4.

$$\emptyset = X \setminus \underbrace{X}_{\text{offen nach 1)}} \qquad \Rightarrow \emptyset \text{ abgeschlossen in } X$$
$$X = X \setminus \underbrace{\emptyset}_{\text{offen}} \qquad \Rightarrow X \subseteq X \text{ abgeschlossen}$$

5.

$$X \setminus (A_0 \cup A_1) = \underbrace{\underbrace{(X \setminus A_0)}_{\text{offen in } X} \cap \underbrace{(X \setminus A_1)}_{\text{offen in } X}}_{\text{offen in } X}$$
$$\Rightarrow A_0 \cup A_1 \subseteq X \text{ abgeschlossen}$$

6.

$$X \setminus \bigcap_{i \in I} A_i = \underbrace{\bigcup_{i \in I} \underbrace{X \setminus A_i}_{\text{offen in } X}}_{\text{offen nach 3)}}$$
$$\Rightarrow \bigcap_{i \in I} A_i \text{ abgeschlossen in } X$$

Bemerkung:
Beliebige Durchschnitte offener Mengen sind i.A. nicht offen

Beispiel:

$$U_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \text{ ist offen in } \mathbb{R}$$
$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n = \{0\} \text{ ist nicht offen in } \mathbb{R}$$

I.4.6. Satz

X metrischer Raum, $Y \subseteq X$. Dann sind Äquivalent:

1. $Y \subseteq X$ abgeschlossen in X
2. Für jede Folge (y_n) mit $y_n \subseteq Y$, welche in X konvergiert, gilt
$$\lim_{n\to\infty} y_n \in Y$$

Beweis:
Vorbemerkung:
$y \in X$ ist genau dann ein Berührpunkt von $Y \subseteq X$, wenn es eine Folge $(y_n)_n$ gibt mit $(y_n) \in Y$ und $\lim_{n\to\infty} y_n = y$

Beweis der Vorbemerkung:
" $\Leftarrow$ ": Ist $\lim_{n\to\infty} y_n = y \qquad y_n \in Y$
$$\begin{aligned} &\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists n : d(y, y_n) < \varepsilon \\ &\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \, y_n \in B_\varepsilon(y) \cap Y \neq \emptyset \\ &\Rightarrow y \text{ ist Berührpunkt von } Y \end{aligned}$$

" $\Rightarrow$ ":
$$\begin{aligned} &y \text{ Berührpunkt von } Y \\ &\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists y' \in Y : d(y, y') < \varepsilon \end{aligned}$$

Wähle für $n \in \mathbb{N}$ ein $y_n \in Y$ mit $d(y, y_n) < \frac{1}{n}$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \underbrace{y_n}_{\in y} = y$$

$\square$

Beweis des Satzes:
Sei 1) nicht erfüllt. Dann:
$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad Y \subseteq X \text{ nicht abgeschlossen in } X \\ &\Leftrightarrow \quad X \setminus Y \text{ nicht offen in } X \\ &\Leftrightarrow \quad \exists y \in X \setminus Y,\, y \text{ kein innerer Punkt von } X \setminus Y \\ &\Leftrightarrow \quad \exists y \in X \setminus Y,\, \forall \varepsilon > 0 \qquad B_\varepsilon(y) \not\subseteq X \setminus Y \\ &\Leftrightarrow \quad \exists y \in X \setminus Y,\, \forall \varepsilon > 0 \qquad B_\varepsilon(y) \cap Y \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \quad \exists y \in X \setminus Y,\, y \text{ ist Berührpunkt von } Y \\ &\overset{\text{Vorbem.}}{\Leftrightarrow} \quad \exists \text{ Folge } y_n \text{ in } Y, y_n \to y \notin Y \end{aligned}$$

und dazu ist Äquivalent, dass 2) nicht erfüllt ist. $\square$

I.4.7. Satz

(X, d_X),(Y, d_Y) metrischer Räume, $f : X \to Y$ Abbildung. Dann sind Äquivalent:

1. f ist folgenstetig.
2. Für jede abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq Y$ ist $f^{-1}(A) \subseteq X$ abgeschlossen.
3. Für jede offene Teilmenge $U \in Y$ ist $f^{-1}(U)$ offen in X
4. f ist ε-δ-stetig

Beweis:
<u>$1 \Rightarrow 2$</u>: Sei f folgenstetig, $A \subseteq Y$ abgeschlossen.
zu zeigen: (wegen I.4.7) ist $x_n \in f^{-1}(A)$ und $x_n \to x$, so gilt $x \in f^{-1}(A)$

$$\begin{aligned} & x_n \to x \Rightarrow \underbrace{f(x_n)}_{\in A} \to \underbrace{f(x)}_{\in y} \qquad (f \text{ ist folgenstetig}) \\ & A \subseteq Y \text{ abgeschlossen } \Rightarrow f(x) \in A \\ & \Rightarrow x \in f^{-1}(A) \end{aligned}$$

<u>$2 \Rightarrow 3$</u>:

$$\begin{aligned} & U \subseteq Y \text{ offen } \Rightarrow Y \setminus U \subseteq Y \text{ abgeschlossen} \\ & \overset{2)}{\Rightarrow} f^{-1}(Y \setminus U) \subseteq X \text{ abgeschlossen.} \\ & f^{-1}(Y \setminus U) = X \setminus f^{-1}(U) \Rightarrow f^{-1}(U) \subseteq X \text{ offen} \end{aligned}$$

<u>$3 \Rightarrow 4$</u>: Sei $x \in X$, $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} & \Rightarrow B_\varepsilon^Y(f(x)) \subseteq Y \text{ offen in } Y \\ & \overset{3)}{\Rightarrow} f^{-1}(B_\varepsilon^Y(f(x))) \subseteq X \text{ offen} \\ & \overset{\text{def. offen}}{\Rightarrow} \exists\, \delta > 0\, B_\delta^X(x) \subseteq f^{-1}(B_\varepsilon^Y(f(x))) \end{aligned}$$

Das heißt: ist $x' \in X$ mit $d(x, x') < \delta$

$$\Rightarrow d(f(x), f(x')) < \varepsilon$$

<u>$4 \Rightarrow 1$</u>: Sei f ε-δ-stetig und $(x_n)_n$ Folge in x. $x_n \to x \in X$. Dann gilt $f(x_n) \to f(x)$, denn:
Sei $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} & \Rightarrow \exists\, \delta > 0 : x' \in X\, d(x, x') < \delta \\ & \Rightarrow d(f(x), f(x')) < \varepsilon \Rightarrow \text{weil } x_n \to x : \exists\, n_0 : \forall\, n \geq n_0 : d(x, x_n) < \delta \\ & \Rightarrow \exists\, n_0 : \forall\, n \geq n_0 : d(f(x), f(x_n)) < \varepsilon \text{ d.h. } f(x_n) \to f(x) \end{aligned}$$

I.4.8. Beispiel

$(V, \|.\|)$ normierter Vektorraum

$$\|.\| : V \to \mathbb{R} \text{ stetig, denn } \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$$

Also sind die Mengen (für $x \in V$, $r \geq 0$)

$$\{y \in V \mid \|x - y\| \leq r\} \subseteq V \text{ und } \{y \in V \mid \|x - y\| = r\} \subseteq V$$

abgeschlossen.

I.5. Kompaktheit

Erinnerung: Satz von Bolzano-Weierstraß
'Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ besitzt eine konvergente Teilfolge'

- $\to$ Cauchy-Konvergenzkriterium

- $\to$ Satz vom Minimum und Maximum (Wenn $f : A \to B$ stetig, dann gilt: f nimmt Minimum und Maximum an)
- $\to$ Mittelwertsatz der Differentialrechnung
- $\to$ Satz: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow$ f ist gleichmäßig stetig.
  $\Rightarrow$ stetige Funktionen sind Riemann-integrierbar

I.5.1. Satz von Bolzano-Weierstraß im $\mathbb{R}^n$

Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}^n$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beweis:
Sei $(x(k))_k$ Folge in $\mathbb{R}^n$, $\|x(k)\|_2 \le C \quad \forall\, k$.
$x_i(k) \quad i = 1, \dots, n$ Komponenten

$$\Rightarrow \underbrace{|x_i(k)|}_{\text{Folge in } \mathbb{R}} \le \|x(k)\|^2 \le C$$

Nach Bolzano-Weierstraß gibt es eine Teilfolge $(x(k_l))_l$ von $x(k)$, so dass $x_1(k_l)$ (in $\mathbb{R}$) Konvergiert Nenne

$$x(1, l) = x(k_l)$$

1. Komponente	2. Komponente	n-te Komponente
$x(k_1 = x(1, 1)$	$x(2, 1)$	$x(n, 1)$
$x(k_2) = x(1, 2)$	$x(2, 2)$	$x(n, 2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Teilfolge	$(x(1, k))_k$	$(x_1(1, k)_k)$	Konvergiert
Teilfolge	$(x(2, k))_k$	$(x_2(2, k)_k)$	Konvergiert
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
Teilfolge	$(x(n, k))_k$	$(x_n(n, k)_k)$	Konvergiert

$\Rightarrow$ Alle Komponentenfolgen von $(x(n, k))_k$ konvergieren
$\Rightarrow$ $(x(n, k))_k$ ist Konvergent

$\square$

I.5.2. Definition

Ein metrischer Raum X heißt **folgenkompakt**, falls für jede Folge $(x_n)_n$ in X eine konvergente Teilfolge hat.
Eine Teilmenge $Y \subseteq Y$ eines metrischen Raumes heißt folgenkompakt, falls jede Folge in $(y_n)_n$ in Y eine (in Y!) konvergente Teilfolge besitzt.

($\Leftrightarrow Y$ mit der von X eingeschränkten Metrik, ist folgenkompakt)

I.5.3. Beispiel:

1. $[a, b]$ folgenkompakt

2. $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 \leq C\}$ ist folgenkompakt: $(x_k)_k$ Folge in X

$$\overset{I.5.1}{\Rightarrow} \exists \text{ TF } x_k \to x \in \mathbb{R}^n$$

aber $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ist abgeschlossen, also $x \in X$

3. $(0,1)$,$(0,1]$ nicht folgenkompakt (betrachte Folge $(\frac{1}{n})_n$)

4. $\mathbb{R}$ nicht folgenkompakt (Die Folge $(n)_n$ hat keine Konvergente TF)

5. $\mathbb{Q} \cap [0,1] \subseteq \mathbb{R}$ nicht folgenkompakt.

$$\text{Ist } x \in [0,1], \text{ so gibt es eine Folge } x_n \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \text{ mit } x_n \to x$$

Dann hat x_n keine in $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ konvergente Teilfolge (falls x irrational)

I.5.4. Satz

X metrischer Raum

1. Ist X folgenkompakt, so ist X vollständig
2. X folgenkompakt, $Y \subseteq X$ abgeschlossen $\Rightarrow$ Y folgenkompakt
3. $Y \subseteq X$, Y folgenkompakt $\Rightarrow$ $Y \subseteq X$ abgeschlossen

Beweis:

1. Sei $(x_n)_n$ Cauchyfolge in X

$$X \text{ folgenkompakt } \Rightarrow \text{ es gibt konvergente Teilfolge } x_{n_k} \to x \in X$$

Beh.

$x_n \to x$
Denn

$$d(x,x_n) \leq d(x,x_{n_k}) + d(x_{n_k},x_n)$$

Sei $\varepsilon > 0$ Wähle $n_0 \quad \forall n,m \geq n_0 : d(x_n,x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$
Wähle $k: \quad n_k \geq n_0$

$$\text{für } n \geq n_k \quad d(x,x_n) \leq \underbrace{d(x,x_{n_k})}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{d(x_{n_k},x)}_{<\frac{\varepsilon}{2}} y\varepsilon$$

2. Sei $(y_n)_n$ Folge in $Y \subseteq X$

$$X \text{ folgenkompakt } \Rightarrow \exists \text{ TF } y_{n_k}, \text{ welche gegen ein } x \in X \text{ konvergiert}$$

Weil $Y \subseteq X$ abgeschlossen, gilt

$$x = \lim_{k \to \infty} y_{n_k} \in Y \qquad \Rightarrow \qquad (y_{n_k})_k \text{ ist in } Y \text{ konvergent}$$

$\Rightarrow Y$ folgenkompakt

3. zu zeigen: Ist $(y_n)_k$ Folge in Y. $y_n \to x \in X \Rightarrow x \in Y$
(y_n) ist Cauchyfolge.
Nach 1) ist Y vollständig, dh $\exists\, z \in y: \quad y_n \in z$

$$\Rightarrow x = z, \text{ daher } x \in Y$$

I.5.5. Satz von Heine-Borel

Eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ist folgenkompakt $\Leftrightarrow$ X ist beschränkt und abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$

Beweis:
'$\Rightarrow$': Sei X folgenkompakt. Dann folgt aus I.5.4 3): $X \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen
Wäre X nicht beschränkt, dann gäbe es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in X$ mit $\|x\|_2 \geq n$
Die Folge (x_n) kann dann keine konvergente Teilfolge enthalten, also kann X nicht folgenkompakt sein!

'$\Leftarrow$': Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt und abgeschlossen
Sei $(x_n)_n$ Folge in X.
Die Folge $(x_n)_n$ ist beschränkt.

$$\overset{I.5.1}{\Rightarrow} \text{ es gibt konvergente Teilfolge } x_{n_k} \to x \in \mathbb{R}^n$$

Weil X abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$, ist $x \in X$

$$\Rightarrow X \text{ folgenkompakt}$$

□

Beispiele:
- $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossene Einheitskugel
- $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^n$ Einheitssphäre

$\Rightarrow$ D^n,S^{n-1} folgenkompakt, denn D^n,S^{n-1} beschränkt und:

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \|x\|_2 \qquad f \text{ stetig}$$

$$D^n = f^{-1}(\underbrace{[0,1]}_{\text{abg. in } \mathbb{R}}) \qquad S^{n-1} = f^{-1}(\underbrace{\{1\}}_{\text{abg. in } \mathbb{R}})$$

$\Rightarrow$ D^n,S^{n-1} abgeschlossen

I.5.6. Satz

X,Y metrische Räume, $f : X \to Y$ stetig. Sei X folgenkompakt

$$\Rightarrow f(X) \subseteq Y \text{ ist folgenkompakt}$$

Beweis:
Sei y_n Folge in $f(X)$

$$\forall\, n\, \exists\, x_n \in X \text{ mit } f(x_n) = y_n$$

$(x_n)_n$ Folge in X

$$X \text{ folgenkompakt } \Rightarrow \exists \text{ konvergente Teilfolge } x_{n_k} \to x \in X$$

$$f \text{ stetig } \Rightarrow y_{n_k} = f(x_{n_k}) \to f(x) \in f(X)$$

Damit folgt die Behauptung □

I.5.7. Satz vom Minimum und Maximum

X folgenkompakt, $f : X \to \mathbb{R}$ stetig.
Dann existieren $x_{\min}, x_{\max} \in X$, so dass für alle $x \in X$ gilt:

$$f(x_{\min}) \leq f(x) \leq x_{\max}$$

Beweis:
$f(X) \subseteq \mathbb{R}$ ist folgenkompakt (Satz I.5.6)
Nach I.5.5 ist $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen und beschränkt.
Seien $c, C \in \mathbb{R}$ definiert durch

$$\begin{aligned} c &:= \inf f(x) \\ C &:= \sup f(x) \end{aligned}$$

Dann sind nach Ana I c, C Berührpunkte um $f(x)$

$$f(x) \text{ abgeschlossen } \Rightarrow c, C \in f(x)$$

Wähle nun $x_{\min}, x_{\max} \in X$ mit

$$f(x_{\min}) = c\,,\ f(x_{\max}) = C$$

□

I.5.8. Satz

Je zwei Normen auf $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent

Beweis:
Da die Äquivalenz von Normen die Äquivalenzrelation ist, genügt es zu zeigen, dass jede Norm auf $\mathbb{R}^n$ zur l^2-Norm äquivalent ist.
Sei $\|.\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diese Norm.
zu zeigen: $\exists\, c, C > 0 \forall\, x \in \mathbb{R}^n :\quad c\|x\|_2 \le \|x\| \le C\|x\|_2$
Sei

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \qquad , x_i \in \mathbb{R}$$

Dann gilt:

$$\|x\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right\| \le \sum_{i=1}^{n} \|x_i e_i\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|\, \|e_i\| \le \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}}_{\|x\|_2} \cdot \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \|e_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}}}_{=:C>0} = C\|x\|_2$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} \|.\| : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \|x\| \end{aligned}$$

ist stetig, denn $(\|x\| - \|y\|) \le \|x - y\| \le C\|x - y\|_2$
Nach dem Satz vom Minimum und Maximum gibt es $x_{\min} \in S^{n-1}$ mit:

$$\forall\, x \in S^{n-1} : \|x\| \ge \|x_{\min}\| =: c > 0 \text{ (da } x_{\min} \ne 0)$$

Sei $y \in \mathbb{R}^n$ beliebig aber $y \ne 0$. Dann folgt:

$$\|y\| = \left\| \underbrace{\|y\|_2}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{\frac{y}{\|y\|_2}}_{\in S^{n-1}} \right\| = \|y\|_2 \cdot \left\| \frac{y}{\|y\|_2} \right\| \ge \|y\|_2 \cdot \|x_{\min}\| = c \cdot \|y\|_2$$

□

I.5.9. Erinnerung/Definition

X metrischer Raum, $f : X \to \mathbb{R}$ heißt **gleichmäßig stetig**, wenn gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \exists\, \delta > 0 \,:\forall\, x, x' \in X : \, \|x - x'\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x')\| < \varepsilon$$

Behauptung:
X folgenkompakt, $f : X \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow$ f ist gleichmäßig stetig

$$X \xrightarrow{f} \mathbb{R} \text{ stetig, } \varepsilon > 0$$

$$x \in X : \qquad U_x = \{x' \in X \,|\, |f(x') - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\} = f^{-1}((f(x) - \frac{\varepsilon}{2}, f(x) + \frac{\varepsilon}{2})) \overset{\text{offen, } f \text{ stetig}}{\subseteq} X$$

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{x}$
Um zu beweisen, dass f glm stetig ist, brauchen wir:

$$\exists\, \delta > 0 \,\forall\, y \in X \text{ gibt es } x \in X : \qquad B_\delta(y) \subseteq U_x$$

Denn

$$\begin{aligned} d(y, y') < \delta \Rightarrow y' \in B_\delta(y) \subseteq U_x \\ \Rightarrow |f(y') - f(y)| \le \underbrace{|f(y') - f(x)|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|f(x) - f(y)|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon \end{aligned}$$

I.5.10. Definition

X metrischer Raum, Eine **offene Überdeckung** von X ist eine Familie $U = (U_i)_{i \in I}$, $U_i \subseteq X$ offen für alle $i \in I$ und es gilt:

$$\bigcup_{i \in I} U_i = X$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} &f : X \to \mathbb{R} \text{ stetig, } x \in X, \, \varepsilon > 0 \\ &U_x = \{x' \in X \,|\, |f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2}\} \subseteq X \\ &(U_x)_{x \in X} = U \text{ offene Überdeckung von } X \end{aligned}$$

I.5.11. Satz Lebesgue-Lemma

Sei X ein folgenkompakter, metrischer Raum und $U = (U_i)_{i \in I}$ offene Überdeckung von X. Dann existiert $\delta > 0$, so dass gilt:

$$\forall\, x \in X \,\exists\, i \in I : \qquad B_\delta(x) \subseteq U_i$$

Ein solches δ heißt **Lebesgue Zahl** der Überdeckung von U

Beweis:
Durch Wiederspruch:
Annahme: X folgenkompakt, $U = (U_i)_{i \in I}$ offene Überdeckung, welche keine Lebesgue-Zahl hat
$\Rightarrow \forall\, \delta > 0 \exists\, x \in X : B_\delta(x)$ ist in keiner der Mengen U_i enthalten
$\forall\, n \in \mathbb{N} \,\exists\, x_n \in X : B_{\frac{1}{n}}(x_n)$ ist in keinem $U_i, i \in I$ enthalten.
Da X folgenkompakt ist, gibt es eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_k$ so dass $B_{\frac{1}{n_k}}(x_{n_k})$ in keinem U_i enthalten ist.

$$x = \lim_{k \to \infty} x_{n_k} \in X \Rightarrow \exists\, i_0 \in I \qquad , x \in U_{i_0} \subseteq X \text{ offen} \qquad \exists\, \varepsilon > 0 \qquad B_\varepsilon(x) \subseteq U_{i_0}$$

Das ist ein Widerspruch, denn
Wähle h so, dass $\frac{1}{n_k} < \varepsilon$ und $d(x, x_{n_k}) < \frac{\varepsilon}{2}$
$\Rightarrow B_{\frac{1}{n_k}}(x_{n_k}) \subseteq B_\varepsilon(x) = U_{i_0}$

$$d(y, x_{n_k}) < \frac{1}{n_k} \Rightarrow d(y,x) \leq d(y, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) < \frac{1}{n_k} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \lightning$$

□

I.5.12. Korollar

X folgenkompakt

$$f : X \to \mathbb{R} \text{ stetig } \Rightarrow f \text{ gleichmäßig stetig}$$

Beweis:
s.o

I.5.13. Definition

X metrischer Raum, $U = (U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung. Eine **Teilüberdeckung von U** ist eine offene Überdeckung $V = (V_j)_{j \in J}$ von X, so dass gilt:

$$\forall j \in J \, \exists i \in I : V_j = U_i$$

I.5.14. Definition

Ein metrischer Raum heißt **überdeckungskompakt** (oder **Kompakt**) falls **jede** offene Überdeckung $U = (U_i)_{i \in I}$ eine endliche Teilüberdeckung $V = (V_j)_{j \in J}$ besitzt. (d.h die Indexmenge J ist endlich)

I.5.15. Satz von Heine-Borel

X metrischer Raum. Dann sind äquivalent:

1. X folgenkompakt
2. X ist überdeckungskompakt

Beweis:
<u>$2 \Rightarrow 1$</u>: Wir zeigen nun:

$$\text{überdeckungskompakt } \Rightarrow \text{ folgenkompakt}$$

Durch Widerspruch: Sei X überdeckungskompakt, und $(x_n)_n$ Folge in X, welche keine konvergente Teilfolge hat.
<u>Beobachte:</u> $(x_n)_n$ hat keine Konvergente Teilfolge

$$\Rightarrow \forall x \in X \, \exists \varepsilon > 0, \text{ so dass } x_n \in B_\varepsilon(x) \text{ nur für endlich viele } n \text{ gilt}$$

$$\Rightarrow \forall x \in X \, \exists \varepsilon_x > 0 \text{ ,so dass } x_n \in B_\varepsilon(x) \text{ nur für unendliche viele } n \in \mathbb{N} \text{ golt.}$$

Dann ist:

$$U = (B_{\varepsilon_x}(x))_{x \in X}$$

eine offene Überdeckung von X
Weil X Überdeckungskompakt ist, gibt es endliche Teilüberdeckung

$$\Rightarrow \exists \, y_1, \ldots, y_r \in X \text{ mit:}$$

$$X = B_{\varepsilon_{y_1}}(y_1) \cup \ldots \cup B_{\varepsilon_{y_r}}(y_r)$$

□

Bemerkung:
X metrischer Raum. Man kann zeigen, dass folgendes äquivalent ist:

1. X kompakt
2. X ist vollständig und total beschränkt
3. X hat folgende Eigenschaft:

$$\text{Sind } A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots \text{ abgeschlossene Teilmengen von } X \text{ und } A_n \neq 0 \,\forall\, n$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$$

ohne Beweis

<u>1 ⇒ 2</u>: Wir setzen hierfür Lemma I.5.16 voraus. X folgenkompakt, $U = (U_i)_{i \in I}$ offene Überdeckung von X
<u>zu zeigen:</u> Es gibt endliche Teilüberdeckung $V = (V_j)_{j \in J}$
Sei $\delta > 0$ eine Lebesgue-Zahl von U (existiert nach I.5.11)

$$
\begin{aligned}
5.16 \Rightarrow \exists\, x_1, \dots, x_r \in X \qquad & \bigcup_{j=1}^{r} B_\delta(x_j) = X \\
\Rightarrow \forall\, j = 1, \dots, n \,\exists\, i, j \in I: \qquad & B_\delta(x_j) \subseteq U_{ij} \\
\Rightarrow X = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_1} &
\end{aligned}
$$

□

I.5.16. Lemma

X folgenkompakter metrischer Raum.
Dann ist X **total beschränkt**, d.h. $\forall\, \varepsilon > 0$ gibt es endlich viele $x_1, \dots, x_r \in X$, so dass:

$$\bigcup_{i=1}^{r} B_\varepsilon(x_i) = X$$

Beweis:
Wir zeigen:

$$X \text{ nicht total beschränkt } \Rightarrow X \text{ nicht folgenkompakt}$$

Sei X also nicht total beschränkt. $\Rightarrow \exists > 0$, so dass gilt:

$$
\begin{aligned}
&\text{Sind } x_1, \dots, x_r \in X \text{ beliebig} \\
&\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{r} B_\varepsilon(x_i) \neq X \\
&\Rightarrow X \setminus \bigcup_{i=1}^{r} B_\varepsilon(x_i) \neq \emptyset
\end{aligned}
$$

Wähle $x_1 \in X \Rightarrow X \setminus B_\varepsilon(x_1) \neq \emptyset$
Wähle $x_2 \in X \setminus B_{\varepsilon(x_1)} \Rightarrow X \setminus (B_\varepsilon(x_1) \cup (B_\varepsilon(x_2))) \neq \emptyset$

Wähle x_3 ...
Wähle $x_r \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{r-1} B_\varepsilon(x_i)$

$$\Rightarrow (X_r)_r \text{ Folge in } X$$

Für $n \neq m$ gilt:

$$d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$$

Dann ist $n > m$,so ist nach Konstruktion $x_n \notin B_\varepsilon(x_m)$ und dann kann keine Teilfolge von $(x_r)_r$ eine Cauchyfolge sein.

$$\Rightarrow (x_r)_r \text{ hat keine Konvergente Teilfolge}$$

$$X \text{ nicht folgenkompakt}$$

□

II. Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$

II.1. Die Definition

Ziel: $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^m$
Wann heißt f differenzierbar?
Was ist die Ableitung von f?

II.1.1. Notation

$U \subseteq \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$.

$$x + U = \{x + y \,|\, y \in U\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

Analysis I: $n = m = 1$, $U \subseteq \mathbb{R}$ offen, $f : U \to \mathbb{R}\,, x \in U$. f diffbar :⇔ der Grenzwert

$$f'(x) = \lim_{h\to\infty} \frac{1}{h}(f(x+h) - f(x)) \in \mathbb{R}$$

existiert.
Verallgemeinerung: $\mathbb{R} \supseteq U \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$ ohne Problem.
n>1 problematisch, denn man kann nicht durch Elemente $h \in \mathbb{R}^n$ dividieren.
Umformulierung:(aus Analysis I)
$U \subseteq \mathbb{R}$ offen, $x \in U$, $f : U \to \mathbb{R}$

$$A : -x + U \to \mathbb{R} \qquad (-x + U = \{h \in \mathbb{R} \,|\, h + x \in U\})$$

definiert durch:

$$A(h) := \begin{cases} \frac{1}{n} f(x+h) - f(x), & \text{falls } h \neq 0 \\ f(x), & \text{falls } h = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow A$ stetig bei 0

$$\forall\, h \in -x + U \qquad f(x+h) = f(x) + A(h)h$$

Umgekehrt: Nimm an, es gibt Funktion $A : -x + U \to \mathbb{R}$,so dass

1. A stetig bei 0
2. $f(x+h) = f(x) + A(h)h$

$\Rightarrow f$ differenzierbar bei x, und $f'(x) = A(0)$

Beweis:

$$\frac{1}{h}(f(x+h) - f(x)) = \frac{1}{h}(f(x) + A(h)h - f(x)) = \frac{1}{h}A(h)h = A(h) \xrightarrow{h\to 0} A(0)$$

II.1.2. Bemerkung

1. für $n = m = 1$ erhält man den bekannten Begriff aus Ana I
2. hier ist $\mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$ isomorph zu $\mathbb{R}^{m\times n}$ mit irgendeiner Norm ausgestattet (welche, ist gleichgültig, weil alle Normen Äquivalent sind)
3. $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$ $f : U \to \mathbb{R}$
   f diffbar bei $x \Leftrightarrow f$ diffbar bei x $(\forall\, i \in \{1, \ldots, m\})$

und

$$Df(x) = \begin{pmatrix} Df_1(x) \\ \vdots \\ Df_n(x) \end{pmatrix} \qquad Df(x) \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$$

4. Wir identifizieren Matrizen und lineare Abbildungen mittels Isomorphismen

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R}) &\to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m) \\ A &\mapsto (x \mapsto A \cdot x) \end{aligned}$$

II.1.3. Definition

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^m$ $x \in U$. f heißt **differenzierbar** bei x, falls eine Funktion $A : -x + U \to \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$ existiert, so dass gilt:

1. A stetig bei 0
2. $\forall\, h \in -x + U$:

$$\underbrace{f(x+h)}_{\in\mathbb{R}^m} = \underbrace{f(x)}_{\in\mathbb{R}^m} + \underbrace{\underbrace{A(h)}_{\in\mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})}\ \underbrace{h}_{\in\mathbb{R}^n}}_{\in\mathbb{R}^m}$$

Die Matrix $A(0) \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$ heißt **Ableitung** von f in x und wird mit

$$Df(x) \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$$

bezeichnet
Alternative Bezeichnung: 'total differenzierbar'

$$Df(x) = \text{'Totales Diferential'}$$

II.1.4. Satz

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $x \in U$,$f : U \to \mathbb{R}^m$ sei differenzierbar. Sei $v \in \mathbb{R}^n$
setze $g_v(t) = f(x + tv)$ mit

$$g_v : \{t \in \mathbb{R} \,|\, x + tv \in U\} \to \mathbb{R}^m$$

Dann gilt:

$$Df(x)v = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(g_v(t) - g_v(0))$$

Beweis:
Schreibe $f(x + h) = f(x) + A(h)h$. A stetig bei 0 und $A(0) = Df(x)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{t}(g_v(t) - g_v(0)) &= \frac{1}{t}(f(x+tv) - f(x)) \\ &= \frac{1}{t}(f(x) + A(tv)tv - f(x)) \\ &= \frac{1}{t}A(tv)tv \\ &= \frac{1}{t}tA(tv)v = A(tv)v \longrightarrow A(0)v = Df(x)v \end{aligned}$$

$$t \mapsto A(tv)v \text{ ist stetig bei } 0$$

□

Bemerkung:
In Def II1.2 ist $A(h)$ **nicht** eindeutig durch f bestimmt. Aber $A(0)$ ist eindeutig bestimmt, nach II.1.3

II.1.5. Definition

U, x, f, v wie in Satz II.1.3. Dann heißt $Df(x)v$ die **Richtungsableitung** von f in Richtung v.

$$D_v f(x) = Df(x)v$$

Bemerkung:
Ist f diffbar bei x, so ist $v \mapsto g_v'(0) = D_v f(x)$ linear.

Beispiel:

$$f(x) = \langle x\,,\, x\rangle = \|x\|_2^2$$

$$f(x+h) = \langle x\,,\, x\rangle + \langle h\,,\, h\rangle + 2\langle x\,,\, h\rangle = f(x) + \langle h\,,\, h\rangle + 2\langle x\,,\, h\rangle$$

$A(h) \in \mathrm{Mat}_{n,m}(\mathbb{R})$

$$A(h)h = \langle h\,,\, h\rangle + 2\langle x\,,\, h\rangle$$

II.1.6. Satz

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $x \in U$, $f : U \to \mathbb{R}^m$. $C \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$.
Es sind Äquivalent:

die Numerierung ist hier nicht richtig

1. f ist differenzierbar bei x, und $Df(x) = C$
2. Es gilt:
$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - C\cdot h\|}{\|h\|} = 0$$

2 besagt, dass $h \mapsto f(x) + C \cdot h$ eine gute Approximation an $h \mapsto f(x+h)$ ist)
Außerdem liefern Satz II.1.8 und II.1.5 ein 'Kochrezept' um die differenzierbarkeit von f nachzuprüfen:

1. Berechne $D_v f(x)$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$
2. Finde Matrix $C \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$ mit $(v = D_v f(x), \forall\, v \in \mathbb{R}^n)$
3. Prüfe
$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{\|h\|} \|f(x+h) - f(x) - C\cdot h\| = 0$$
$$\Rightarrow Df(x) = C$$

Beweis:
<u>1 ⇒ 2</u>: Sei $A : -x + U \to \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$ mit

$$f(x+h) = f(x) + A(h)h \qquad (\forall\, h)$$

A stetig bei 0 und $A(0) = C$

$$\Rightarrow \frac{\|f(x+h) - f(x) - C\cdot h\|}{\|h\|} = \frac{A(h)h - C\cdot h}{\|h\|} \leq \underbrace{\|A(h) - C\|}_{\substack{\to 0 \\ \text{für } h\to 0 \\ (A \text{ stetig bei } 0)}} \frac{\|h\|}{\|h\|}$$

2 ⇒ 1:
Vorbemerkung: $h \in \mathbb{R}^n$,$v \in \mathbb{R}^n$,$h \neq 0$. Dann ist durch

$$y \mapsto \frac{\langle h\,,\,y\rangle}{\|h\|^2}v, \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

eine lineare Abbildung gegeben, welche mit $h \mapsto v$
Setze $\varphi(h) = f(x+h) - f(x) - C \cdot h, \varphi : -x + U \to \mathbb{R}^m$
Nach Voraussetzung 2) gilt:

$$\frac{\|\varphi(h)\|}{\|h\|} \xrightarrow{h \to 0} 0$$

Definiere Funktion $A : -x + U \to \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$, $A(0) = C \qquad h \neq 0$
Sei $A(h)$ die Matrix, welche die lineare Abbildung

$$y \mapsto C \cdot y + \frac{\langle h\,,\,y\rangle}{\|h\|^2}\varphi(h)$$

darstellt. wobei $\varphi(h) = A(h)y$

$$\begin{aligned}\Rightarrow f(x) + A(h)h &= f(x) + C \cdot h + \frac{\langle h\,,\,h\rangle}{\|h\|^2}\varphi(h)\\ &= f(x) + C \cdot h + \varphi(h)\\ &= f(x+h)\end{aligned}$$

Ferner ist A stetig bei 0 ,denn

$$\begin{aligned}\|A(h) - A(0)\| &= \sup_{\|y\|\leq 1} \|A(h)y - A(0)y\|\\ &= \sup_{\|y\|\leq 1} \left\| Cy + \frac{\langle h\,,\,y\rangle}{\|h\|^2}\varphi(h) - Cy \right\|\\ &= \sup_{\|y\|\leq 1} \frac{|\langle h\,,\,y\rangle|}{\|h\|^2}\|\varphi(h)\|\\ &\leq \sup_{\|y\|\leq 1} \frac{\|h\|\|y\|}{\|h\|^2}\|\varphi(h)\|\\ &= \frac{\|\varphi(h)\|}{\|h\|} \xrightarrow{h \to 0} 0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow f \text{ differenzierbar bei } x$$

$$Df(x) = C$$

II.1.7. Definition

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $x \in U$, $f :\to \mathbb{R}^m$. Die i-**te partielle Ableitung von** f bei x ist

$$D_i f(x) := D_{e_i} f(x) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

Man schreibt oft auch

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(x) := D_i f(x)$$

Es gilt folgendes:
Wenn f differenzierbar bei x ist, so gilt:
Der (i,j)te Eintrag von $Df(x)$ ist

$$(Df(x))_{i,j} = D_j f_i(x) \qquad i = 1,\dots,m, j = 1,\dots,n$$

$$Df(x) = \begin{pmatrix} D_1 f_1(x) & \dots & D_n f_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ D_1 f_m(x) & \dots & D_n f_m(x) \end{pmatrix} \text{ (Jacobi-Matrix)}$$

Wie berechnet man $D_j f_i(x)$?

$$D_j f_i(x) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} f_i(x + te_j) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} f_i(x_1,\dots,x_{j-1},x_j+t,x_{j+1},\dots,x_n)$$

Beispiel:
$U = \left\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_2 \neq 0\right\}$ offen in $\mathbb{R}^2$

$$q(x_1,x_2) = \frac{x_1}{x_2}$$

Berechnung der partiellen Ableitungen:

$$D_1 q(x_1,x_2) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} q(x_1+t,x_2) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \frac{x_1+t}{x_2} = \frac{1}{x_2} \left(= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_2}\frac{x_1}{x_2}\right)$$

$$D_2 q(x_1,x_2) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} q(x_1,x_2+t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \frac{x_1}{x_2+t} = \frac{-x_1}{(x_2+t)^2}\Big|_{t=0} = -\frac{x_1}{x_2} \left(= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_2}\frac{x_1}{x_2}\right)$$

$\Rightarrow$ falls q diffbar ist, so muss

$$Dq(x_1,x_2) = \left(\frac{1}{x_2}, -\frac{x_1}{x_2}\right)$$

Ist q diffbar?
$x = (x_1,x_2) \in U$ fest, $h = (h_1,h_2) \in -x + U$. Setze

$$A_x(h) := \left(\frac{1}{x_2+h_2}, \frac{-x_1}{x_2(x_2+h_2)}\right)$$

Dann gilt $q(x+h) = q(x) + A_x(h)h$, denn

$$\begin{aligned} q(x) + A_x(h)h &= \frac{x_1}{x_2} + \left(\frac{h_1}{x_2+h_2} - \frac{x_1 h_1}{x_2(x_2+h_2)}\right) \\ &= \frac{x_1(x_2+h_2) + x_2 h_1 - x_1 h_2}{x_2(x_2+h_2)} \\ &= \frac{x_1 x_2 + x_2 h_1}{x_2(x_2+h_2)} \\ &= \frac{x_1+h_1}{x_2+h_2} \\ &= q(x+h) \end{aligned}$$

$h \mapsto A_x(h)$ stetig bei 0, denn

$$A_x(h) = \left(\underbrace{\frac{1}{x_2+h_2}}_{\to \frac{1}{x_2}}, \underbrace{-\frac{x_1}{x_2(x_2+h_2)}}_{\to \frac{-x_1}{x_2^2}}\right)$$

Beispiel:
$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \langle x\,,\, x\rangle$.
Wir haben gesehen, dass f differenzierbar ist mit

$$D_v f(x) = 2\langle x\,,\, v\rangle \qquad \forall\, x, v \in \mathbb{R}^n$$

$$\begin{aligned} D_v f(x) &= \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} \langle x + tv\,,\, x + tv\rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} \left(\langle x\,,\, x\rangle^2 + 2\langle x\,,\, v\rangle + t^2\langle v\,,\, v\rangle\right) \\ &= 2\langle x\,,\, v\rangle \end{aligned}$$

Somit folgt, dass gilt:

$$D_i f(x) = 2\langle x\,,\, e_i\rangle = 2x_i$$

$$Df(x) = (2x_1, \ldots, 2x_n)$$

Dieses hätte man auch sehen können, wenn man

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

betrachtet mit

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(x) = 2x_i$$

II.1.8. Satz

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $x \in U$ und $f : U \to \mathbb{R}^n$. Falls die partiellen Ableitungen $D_1 f, \ldots, D_n f$ auf ganz U existieren, und stetig sind (also Funktionen $D_i f : U \to \mathbb{R}^m$) dann ist f differenzierbar in x

Beweis:
Weil f genau dann differenzierbar ist, wenn alle $f_1, \ldots, f_n : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar sind, genügt es den Fall $m = 1$ zu betrachten.

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= f(x_1 + h_1, \ldots, x_n + h_n) - f(x_1, \ldots, x_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_1 + h_1, \ldots, x_i + h_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x_1 + h_1, \ldots, x_{i-1} + h_{i-1}, x_i, \ldots, x_n)\right) \end{aligned}$$

Nach dem Mittelwertsatz gibt es $\theta_1, \ldots, \theta_n \in (0, 1)$, so dass

$$\begin{aligned} f(x_1 + h_1, \ldots, x_{i-1} + h_{i-1}, x_i + h_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x_1 + h_1, \ldots, x_{i-1} + h_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \\ = D_i f(x_1 + h_1, \ldots, x_{i-1} + h_{i-1}, x_i + \theta_i h_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) h_i \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x+h) - f(x) = \sum_{i=1}^{n} D_i f(x_1 + h_1, \ldots, x_{i-1} + h_{i-1}, x_i + \theta_i h_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) h_i$$

Setze $A(h) \in \operatorname{Mat}_{n,m}(\mathbb{R})$ mit

$$A(h) := D_i f(x_1 + h_1, \ldots, x_{i-1} + h_{i-1}, x_i + \theta_i h_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

$$\Rightarrow f(x+h) = f(x) - A(h)h$$

Weil $D_i f$ stetig bei x ist, gilt

$$A(h) \overset{h\to 0}{\longrightarrow} A(0)$$

$\square$

Wir haben gesehen:

$$f \text{ diffbar } \Rightarrow f \text{ partiell diffbar}$$

$$f \text{ stetig partiell diffbar } \Rightarrow f \text{ diffbar}$$

II.1.9. Definition

$f : U \to \mathbb{R}^m$ heißt **stetig differenzierbar**, falls f differenzierbar ist und falls $Df : U \to \mathrm{Mat}_{n,m}(\mathbb{R})$ stetig ist.

II.1.10. Kettenregel

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \to V\mathbb{R}^m$, $g : V \to \mathbb{R}^p$, $x \in U$, $y = f(x) \in V$. Falls f differenzierbar ist, dann ist $g \circ f : U \to \mathbb{R}^p$ differenzierbar, und es gilt:

$$D(g \circ f)(x) = Dg(f(x))Df(x)$$

Beweis:
Sei $A : -x + U \to \mathrm{Mat}_{n,m}(\mathbb{R})$ und $f(x+h) = f(x) + A(h) \cdot h$ für alle h. A stetig in 0
$B : -y + V \to \mathrm{Mat}_{p,m}(\mathbb{R})$ und $g(y+k) = g(y) + B(k) \cdot k$ für alle $k \in -y + V$. B stetig in 0

$$\Rightarrow g \circ f(x+h) = g(\underbrace{f(x)}_{=y} + \underbrace{A(h)h}_{=k}) = g(f(x)) + B(A(h)h)A(h)h =: g(f(x)) + C(h)h$$

wobei

$$C(h) := \underbrace{\underbrace{B(A(h)h)}_{\in \mathrm{Mat}_{p,m}(\mathbb{R})} \quad \underbrace{A(h)}_{\in \mathrm{Mat}_{n,m}(\mathbb{R})}}_{\mathrm{Mat}_{p,n}(\mathbb{R})}$$

$$\begin{aligned} C(0) &= B(A(0)0)A(0) \\ &= B(0)A(0) \\ &= Dg(y)Df(x) \\ &= Dg(f(x))Df(x) \end{aligned}$$

Außerden ist die Funktion

$$\begin{aligned} C : -x + U &\to \mathrm{Mat}_{p,n}(\mathbb{R}) \\ h &\mapsto C(h) \end{aligned}$$

stetig. $\square$

Formulierung der Kettenregel mit partiellen Ableitungen:
f, g wie in II.1.14

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} \qquad g = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_p \end{pmatrix}$$

Dann gilt:

$$Dg(f(x)) = \begin{pmatrix} D_1 g_1(f(x)) & \dots & D_m g_1(f(x)) \\ \vdots & & \vdots \\ D_1 g_p(f(x)) & \dots & D_m g_p(f(x)) \end{pmatrix}$$

$$Df(x) = \begin{pmatrix} D_1 f_1(x) & \dots & D_n f_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ D_1 f_m(x) & \dots & D_n f_m(x) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow D(g \circ f)(x) = \begin{pmatrix} D_1 g_1 & \dots & D_m g_1 \\ \vdots & & \vdots \\ D_1 g_p & \dots & D_m g_p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D_1 f_1(x) & \dots & D_n f_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ D_1 f_m(x) & \dots & D_n f_m(x) \end{pmatrix}$$

Der (k,l)-te Eintrag von $D(g \circ f)(x)$ ist

$$\sum_{j=1}^{m} D_j g_k(f(x)) D_l f_g(x) = D_l g_k(f(x)) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g_k}{\partial y_g}(f(x)) \frac{\partial f_g}{\partial x_l}(x)$$

Beispiele für Kettenregel:
$U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$, $g : U \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ seien differenzierbar.

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} : U \to \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$$
$$x \mapsto \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix}$$

ist differenzierbar, und

$$D(\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} D_1 f(x) & \dots & D_n f(x) \\ D_1 g(x) & \dots & D_n g(x) \end{pmatrix}$$

Die Funktion

$$q : \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}$$
$$(y,z) \mapsto \frac{y}{z}$$

ist differenzierbar mit

$$Dq(y,z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{z} & -\frac{y}{z^2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow q \circ \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} : U \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$$

ist differenzierbar.

$$\begin{aligned} D\left(q \circ \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}\right) &= Dq\left(\begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix}\right) D\left(\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}\right)(x) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{g(x)} & -\frac{f(x)}{g(x)^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D_1 f(x) & \dots & D_n f(x) \\ D_1 g(x) & \dots & D_n g(x) \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{D_1 f(x)}{g(x)} - \frac{f(x) D_1 g(x)}{g(x)^2}, \dots, \frac{D_n f(x)}{g(x)} - \frac{f(x) D_n f(x)}{g(x)^2} \right) \\ &= \left(\frac{D_1 f(x) g(x) - f(x) D_1 g(x)}{g(x)^2}, \dots, \frac{D_n f(x) g(x) - f(x) D_n g(x)}{g(x)^2} \right) \end{aligned}$$

Analog erhält man durch Betrachtung der Funktion $\mu : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\mu(y,z) = yz$, die **Produktregel**

Beispiel:
$A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$, $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $F(x) = A \cdot x$

$$\Rightarrow F \text{ ist differenzierbar und es gilt } DF(x) = A$$

Beweis:

$$F(x+h) = A(x+h) = Ax + Ah = F(x) + Ah$$

□

$U \subseteq \mathbb{R}^p$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar.
$\overset{\text{Kettenregel}}{\Rightarrow}$ $F \circ f : U \to \mathbb{R}^m$ ist differenzierbar, und

$$D(f \circ f)(x) = DF(f(x))Df(x) = A \cdot Df(x)$$

wobei

$$F \circ f(x) = A \cdot f(x)$$

Das heißt Differenzieren vertauscht mit linearen Abbildungen.

Beispiel:
$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{1,2}(\mathbb{R})$

$$f : U \to \mathbb{R}^2 \qquad f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$$

$$Af = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)$$

$\Rightarrow D(Af)(x) = ADf(x) = (a_1 D_1 f_1(x) + a_2 D_1 f_2(x), \ldots, a_1 D_n f_1 + a_2 D_n f_2(x)) = a_1 Df_1 + a_2 Df_2(x)$

Dieses ist die Summenregel

Bemerkung:
X, Y endliche-dimensionale $\mathbb{R}$-VR. Dann gibt es Normen auf X und Y.
(z.B $(v_1, \ldots, v_n)$ Basis von X und $x = \sum_{i=1}^n x_i v_i \in X$, $x_i \in \mathbb{R}$ wobei $\|x\| := \sum_{i=1}^n |x_i|$)
Je zwei Normen auf X sind äquivalent (weil $\dim X < \infty$).
Also gibt es die Begriffe 'Konvergente Folge','Stetigkeit','offene Mengen', etc, unabhängig von der Wahl der Norm.

II.1.11. Definition

X, Y endlich-dimensionale $\mathbb{R}$-VR, $U \subseteq X$ offen, $x \in U$,$f : U \to Y$ heißt **differenzierbar** bei x, falls gilt: es gibt eine Abbildung $A : -x + U \to \mathrm{Hom}(X, Y)$, so dass gilt:

1. $f(x+h) = f(x) + \underbrace{A(h)}_{\in \mathrm{Hom}(X,Y)} (h) \in Y$ für alle $h \in -x + U$

2. A stetig bei 0 (Diese Aussage ist wohldefiniert, weil $\mathrm{Hom}(X, Y)$ ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-VR ist)

$$A(0) = Df(x)$$

II.2. Differentiation unter dem Integral

Betrachte $f : [a, b] \times U \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, f stetig.

$$F : U \to \mathbb{R}$$

$$F(x) = \int_a^b f(t, x) \, \mathrm{d}t$$

Frage:

1. ist F stetig?

2. falls $D_i f$ existiert ($i = 1, \dots, n$), existiert dann $D_i F$, und gilt

$$D_i F(x) = \int\limits_a^b D_i f(t,x)\,\mathrm{d}t?$$

II.2.1. Satz

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Sei $f : [a,b] \times U :\to \mathbb{R}$ stetig und setze $F(x) := \int\limits_a^b f(t,x)\,\mathrm{d}t$. Dann ist $F : U \to \mathbb{R}$ stetig.

Beweis:
Sei $x \in U$ und sei $\varepsilon > 0$. U ist offen, es gibt also $r > 0$ mit:

$$\bar{B}_r(x) = \{y \in U \mid \|x - y\| \leq r\} \subseteq U$$

$[a,b] \times \bar{B}_r(x)$ ist Kompakt (denn es ist abgeschlossen und beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^{n+1}$)

$$f\Big|_{[a,b]\times\bar{B}_r(x)} : [a,b] \times \bar{B}_r(x) \to \mathbb{R}$$

ist gleichmäßig stetig!!
$\Rightarrow$ es gibt ein $\delta > 0$, so dass gilt falls $y \in U$, $t \in [a,b]$ und $\|y - x\| \leq \delta$ und $\|y - x\| \leq r$

$$\Rightarrow |f(t,y) - f(t,x)| < \varepsilon \qquad (\delta \leq r)$$

Falls $\|y - x\| < \delta \leq r$, so gilt also:

$$|F(x) - F(y)| = |\int\limits_a^b f(t,x) - f(t,y)\,\mathrm{d}t| \leq \int\limits_a^b |f(t,x) - f(t,y)|\,\mathrm{d}t < \int\limits_a^b \varepsilon\,\mathrm{d}t = \varepsilon|b-a|$$

$\square$

II.2.2. Satz

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}$ offen. Sei $f : [a,b] \times U \to \mathbb{R}$ stetig. Angenommen, es existert $D_2 f(t,x) = \frac{\partial}{\partial x} f(t,x)$, und $D_2 f : [a,b] \times U \to \mathbb{R}$ sei stetig.
Dann ist $F : U \to \mathbb{R}$ mit $F(x) := \int\limits_a^b f(t,x)\,\mathrm{d}t$ differenzierbar und es gilt:

$$F'(x) = \int\limits_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(t,x)\,\mathrm{d}t$$

Beweis:
Seien $x, x+h \in U$ Dann gilt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und weil $D_e f$ stetig:

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}(F(x+h)-F(x)) - \int_a^b D_2 f(t,x)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{h}\int_a^b (f(t,x+h)-f(t,x)-D_2 f(t,x)h)\,\mathrm{d}t \\ &\overset{*}{=} \frac{1}{h}\int_a^b (\int_x^{x+h} D_2 f(t,x)\,\mathrm{d}y) - D_2 f(t,y)h\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{h}\int_a^b (\int_x^{x+h} (D_2 f(t,x)-D_2 f(t,y))\,\mathrm{d}y)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Nun sei $\varepsilon > 0$. Wie im Beweis von II.2.1 gibt es ein $r > 0$, $0 < \delta \leq r$, so dass gilt:

$$|x-y| < \delta\,, t \in [a,b] \Rightarrow |D_2 f(t,x) - D_2 f(t,y)| < \varepsilon \qquad (D_2 \text{ stetig})$$

Ist also $|h| < \delta$,so folgt:

$$\begin{aligned}|\frac{1}{h}(F(x+h)-F(x)) - \int_a^b D_2 f(t,x)\,\mathrm{d}t| &= |\frac{1}{h}|\cdot|\int_a^b \left(\int_x^{x+h} (D_2 f(t,x)-D_2 f(t,y))\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}t| \\ &\leq \frac{1}{|h|}\int_a^b \underbrace{\left(\int_x^{x+h} \underbrace{|D_2 f(t,x)-D_2 f(t,y)|}_{<\varepsilon}\,\mathrm{d}y\right)}_{<|h|\varepsilon}\,\mathrm{d}t \\ &< \frac{1}{|h|}|b-a|\cdot|h| \\ &= \varepsilon|b-a|\end{aligned}$$

□

II.2.3. Korollar

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. $f : [a,b] \times U \to \mathbb{R}$. f sei stetig und $\frac{\partial}{\partial x_i} f(t,x), i = 1,\ldots,n$ existiere und sei stetig. Dann ist $F : U \to \mathbb{R}$ mit $F(x) := \int_a^b f(t,x)\,\mathrm{d}t$ stetig differenzierbar, und es gilt:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}F(x) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x_i} f(t,x)\,\mathrm{d}t$$

Beweis:
Sei $x \in U$, und $I = \{s \in \mathbb{R} \,|\, x + se_i \in U\} \subseteq \mathbb{R}^n$ offen
Sei $g : [a,b] \times I \to \mathbb{R}$ mit $f(t,s) = f(t, x+se_i)$. Dann ist g stetig und $\frac{\partial}{\partial s} g$ existiert und ist stetig, weil $\frac{\partial}{\partial s} g(t,s) = \frac{\partial}{\partial x_i} f(t, x+se_i)$

$$\overset{II.2.3}{\Rightarrow} G(s) = \int_a^b g(t,s)\,\mathrm{d}t \text{ ist differenzierbar, und}$$

$$G'(x) = \int\limits_a^b \frac{\partial}{\partial x_i} f(t, x + se_i)\,\mathrm{d}$$

aber $G(s) = F(x + se_i)$, also $G'(0) = \frac{\partial}{\partial x_i} F(x)$.
$\Rightarrow$ alle partiellen Ableitungen von F existieren, und es gilt:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} F(t, x) = \int\limits_a^b \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} f(t, x)}_{\text{stetig!}}\,\mathrm{d}t$$

Damit folgt, dass $\frac{\partial}{\partial x_i} F(t, x)$ stetig ist.
$\overset{II.1.12}{\Rightarrow} F(t, x)$ ist differenzierbar, und DF ist stetig. □

II.2.4. Satz von Schwarz

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$. $v, w \in \mathbb{R}^n$.
Annahmen:

- f stetig
- $D_v f$,$D_w f$ existieren und seien stetig
- $D_v D_w f$ existiere und sei stetig

Dann gilt:

$$D_w D_v f \text{ existiert und es gilt } D_w D_v f = D_v D_w f$$

Beweis:
1.Spezialfall: $n = 2$, $U = B_r(0)$ mit $r > 0$. $v = e_1$, $w = e_2$
Nach dem Hauptsatz und weil $D_2 f$ stetig ist gilt:

$$f(x, y) = f(x, 0) + \int\limits_0^y D_2 f(x, t)\,\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow D_1 f(x, y) = D_1 f(x, 0) + D_1 \int\limits_0^y D_2 f(x, t)\,\mathrm{d}t$$

$$= D_1 f(x, 0) + \int\limits_0^y D_1 D_2 f(x, t)\,\mathrm{d}t$$

Weil $D_1 D_2$ stetig.

$$D_1 f(x, y) = \underbrace{D_1 f(x, 0)}_{\substack{\text{hängt nicht} \\ \text{von } y \text{ ab} \\ \Rightarrow D_2 D_1 f(x,0) = 0}} + \underbrace{\int\limits_0^y D_1 D_2 f(x, t)\,\mathrm{d}t}_{\substack{D_2\left(\int\limits_0^y D_1 D_2 f(x,t)\,\mathrm{d}t\right) \\ \overset{HS}{=} D_1 D_2 f(x,y)}}$$

$\Rightarrow D_2 D_1 f(x,y)$ existiert, und es gilt:

$$D_2 D_1 f(x,y) = D_1 D_2 f(x,y)$$

2.Allgemeiner Fall: Sei $x \in U$, $v, w \in \mathbb{R}^n$.
$0 \in \tilde{U} = \left\{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x + st + tw \in U\right\} \subseteq \mathbb{R}^2$ offen.
Sei $g : \tilde{U} \to \mathbb{R}$ mit $g(s,t) = f(x + sv + tw)$. Dann ist g stetig und

$$\begin{aligned} D_1 g(s,t) &= D_v f(x + sv + tw) \\ D_2 g(s,t) &= D_w f(x + sv + tw) \\ D_1 D_2 g(s,t) &= D_v D_w f(x + sv + tw) \end{aligned}$$

existieren und sind stetig.
Nach Schritt 1 existiert $D_2 D_1 g$ in 0, und

$$D_w D_v g(x) = D_2 D_1 g(0,0) = D_1 D_2 g(0,0) = D_v D_w f(x)$$

□

II.2.5. Definition

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^m$. Dann heißt f **r-mal stetig differenzierbar** (oder C^r-Funktion), falls gilt: für alle $s = 0, \dots, r$ und alle $v_1, \dots, v_s \in \mathbb{R}^m$ existiert die **iterierte Richtungsableitung**

$$D_{v_1} D_{v_2} \cdot \ldots \cdot D_{v_s} f = D_{v_1}(D_{v_2} \cdot \ldots \cdot D_{v_s})$$

auf ganz U, und ist stetig auf U.

Definition:
$U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ eine $C^2 - Funktion$. Die **Hessematrix** von f bei x ist

$$Hf(x) := \begin{pmatrix} D_1 D_1 f(x) & \dots & D_n D_1 f(x) \\ \vdots & & \vdots \\ D_1 D_n f(x) & \dots & D_n D_n f(x) \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow Hf(x)$ ist symmetrisch, denn

$$Hf(x)^T \overset{\text{Satz von Schwarz}}{=} Hf(x)$$

Ferner gilt: sind $v, w \in \mathbb{R}^n$, so ist

$$D_v D_w f(x) = \langle Hf(x)v \,,\, w \rangle = \langle v \,,\, Hf(x)w \rangle$$

Beweis:

$$v = \sum_{i=1}^n V_i e_i \qquad w = \sum_{i=1}^n w_i e_i \qquad v_i, w_i \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow D_v D_w f(x) &= \sum_{i=1}^n v_i D_i D_w f(x) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v_i w_j D_i D_j(x) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v_i w_j (Hf(x))_{ji} \\ &= \sum_{i=1}^n w_j (Hf(x)v)_j = \langle Hf(x)v \,,\, w \rangle = \langle v \,,\, Hf(x)w \rangle \end{aligned}$$

Die Identität

$$\langle Hf(x)v\,,\,w\rangle = \langle v\,,\,Hf(x)w\rangle$$

folgt daraus, dass $Hf(x)$ symmetrisch ist, denn

$$\langle Av\,,\,w\rangle = \langle v\,,\,A^T w\rangle \qquad A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$$

II.3. Taylorentwicklung

Der eindimensionale Fall
$(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ $\quad f:(a,b)\to\mathbb{R}$ f sei m-mal stetig differenzierbar, $p\in(a,b), h\in\mathbb{R}$ mit $p+h\in(a,b)$

II.3.1. Lemma/Definition

Sei $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ m-mal stetig differenzierbar, $p\in(a,b)$. Dann gibt es genau ein Polynom $T_p^m f(h)$, so dass gilt

(i) Der Graph von $T_p^m f$ ist m-mal stetig differenzierbar

(ii) Es gilt

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h}\right)^k T_p^m f(0) = f^{(k)}(p) \qquad \forall\, k = 0,\dots,m$$

Dieses Polynom heißt m-tes **Taylorpolynom** von f bei p.

Beweis:
Setze

$$T_p^m f(h) = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} f^{(k)}(p) h^k$$

Dann gilt (i) und (ii) $\Rightarrow$ Existenz <u>Eindeutigkeit</u>: Sei $q(h)$ ein Polynom mit (i) und (ii)

$$q(h) = \sum_{k=0}^m c_k h^k \qquad c_k \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
q(0) = c_0 \quad &\Rightarrow \quad c_0 = f^{(0)}(p)\\
q'(0) = c_1 \quad &\Rightarrow \quad c_1 = f^{(1)}(p)\\
q''(0) = 2c_2 \quad &\Rightarrow \quad c_2 = \tfrac{1}{2} f^{(2)}(p)\\
&\vdots\\
q^{(l)}(0) = c_l \quad &\Rightarrow \quad c_l = \tfrac{1}{l!} f^{(l)}(p)
\end{aligned}$$

mit

$$q^(l)(h) = \sum_{k=l}^m c_k k(k-1)\cdot\ldots\cdot(k-l)h^{k-l}$$

$$\Rightarrow q(h) = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} f^{(k)}(p) h^k$$

$\square$

II.3.2. Taylorscher Satz

Sei $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ $(m+1)$-mal stetig differenzierbar, $p, p+h \in (a,b)$.
Dann gilt

$$f(p+h) = \underbrace{\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} f^{(k)}(p) h^k}_{=T_p^m f(h)} + \underbrace{\frac{1}{m!} h^{m+1} \int_0^1 (1-t)^m f^{(m+1)}(p+th)\,\mathrm{d}t}_{\text{Restglied}}$$

Beweis:
Induktion über m:

$m=0$**:** Hauptsatz

$m\mapsto m+1$**:** siehe Übung A3B1. partielle Integration

$$(1-t)^m = -\frac{1}{m+1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(1-t)^{m+1}$$

□

Schreibe Restglied in einfacher Form

II.3.3. Mittelwertsatz der Integralrechnung

Sei $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$ und $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig. $g(x)\geq 0 \forall x\in[a,b]$.
Dann gilt

$$\exists \xi\in[a,b] \text{ mit } \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(\xi)\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

Beweis:
Aus dem Satz vom Minimum und Maximum folgt: $\exists\, x_{\min}.x_{\max}\in[a,b]\;\forall\, x\in[a,b]$ mit

$$f(x_{\min}) := c \leq f(x) \leq C =: f(x_{\max})$$
$$cg(x) \leq f(x)g(x) \leq Cg(x), \qquad g(x)\leq 0$$

Dann folgt

$$c\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \leq C\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

Wir definieren uns eine Hilfsfunktion

$$F(x) := f(x)\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

Dann ist F stetig und es gilt

$$F(x_{\min}) = c\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \qquad , \qquad F(x_{\max}) = C\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow F(x_{\min}) \leq \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \leq F(x_{\max})$$

Benutze nun den Zwischenwertsatz und erhalte

$$\exists\xi\in[x_{\min},x_{\max}] \text{ mit } F(\xi) = \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

□

II.3.4. Lagrange-Darstellung des Restgliedes

Seien $a, b, p, p+h \in \mathbb{R}$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ wie in II.3.2. Dann gilt

$$\exists\, \xi \in [0,1] \text{ mit } f(p+h) = T_p^m f(h) + \frac{h^{(m+1)}}{(m+1)!} f^{(m+1)}(p+\xi h)$$

Beweis:
zu Zeigen ist:

$$\exists\, \xi \in [0,1] \text{ mit } \frac{1}{m!} h^{m+1} \int_0^1 (1-t)^m f^{(m+1)(p+th)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(m+1)!} f^{(m+1)}(p+th)$$

Aus II.3.3 folgt

$$\begin{aligned}\exists\, \xi \in [0,1] \text{ mit } \int_0^1 (1-t)^m f^{(m+1)}(p+th)\,\mathrm{d}t &= f^{(m+1)}(p+\xi h) \underbrace{\int_0^1 (1-t)^m \,\mathrm{d}t}_{\frac{1}{m+1}} \\ &= \frac{1}{m+1} f^{(m+1)}(p+\xi h)\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Vorfaktoren einsetzen □
Taylorpolynom

$$f(p+h) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} f^{(k)}(p) h^k + \frac{1}{(m+1)!} f^{(m+1)}(p+\xi h) h^{(m+1)}$$

II.3.5. Bemerkung

Ist f beliebig oft stetig differenzierbar, so heißt die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(p) h^k$$

Taylorreihe von f bei p und ist eine Potenzreihe.

- Die Taylorreihe von f muss nicht konvergieren, und selbst wenn sie konvergiert braucht die Grenzfunktion nicht gleich f zu sein.

  Gegenbeispiel:

  $$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{falls } x \neq 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

  $\Rightarrow$ f beliebig oft stetig differenzierbar $f^{(k)}(0) = 0 \forall\, k \Rightarrow$ Taylorreihe ist $0 \neq f$

- Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$, und $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Dann gilt

  $$T_0^m f(h) = \sum_{k=0}^{m} a_k h^k \qquad \text{(Übungsaufgabe)}$$

Der mehrdimensionale Fall:
$U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \subseteq \mathbb{R}$ $(m+1)$-mal stetig differenzierbar, $x \in U$

II.3.6. Definition

$U \subseteq \mathbb{R}^n$, $x \in U$. Dann heißt U **sternförmig** bezüglich x, falls gilt:

$$y \in U,\, t \in [0,1] \Rightarrow (1-t)x + ty \in U$$

Nun sei $p \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, U steinförmig bzgl. p. Sei $f : U \to \mathbb{R}$ $(m+1)$-mal stetig differenzierbar. $v \in \mathbb{R}^n$ mit $p + v \in U$. Setze $g(t) := f(p+tv)$ mit

$$g : \{t \in \mathbb{R} \,|\, p + tv \in U\} \to \mathbb{R}$$

Dann gilt

$$g(1) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} g^{(k)}(0) + \frac{1}{(m+1)!} g^{(m+1)}(\xi)$$
$$\Rightarrow g^{(k)}(0) = \underbrace{D_v \dots D_v f(p)}_{k\text{-mal}}$$

Beweis:
mit Indutkion:

$k = 0$**:** klar

$k - 1 \mapsto k$

$$g^{(k)}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g^{(k-1)}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\underbrace{D_v \dots D_v}_{(k-1)\text{-mal}} f(x+tv)) = \underbrace{D_v \dots D_v}_{k\text{-mal}} f(x+tv)$$

II.3.7. Taylorentwicklung in $\mathbb{R}^n$

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ sternförmig bzgl. $x \in U$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. $f : U \to \mathbb{R}$ $(m+1)$-mal stetig differenzierbar und $v \in \mathbb{R}^n$,$x + v \in U$.
Dann gilt

$$\exists \xi \in [0,1] \text{ mit } f(x+v) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \underbrace{D_v \dots D_v f(x)}_{k\text{-mal}} + \frac{1}{(m+1)!} \underbrace{D_v \dots D_v}_{(m+1)\text{-mal}} f(x+\xi v)$$

Interessanter Spezialfall $m = 1$:

$$f(x+v) = f(x) + D_v f(x) + \frac{1}{2} D_v D_v f(x + \xi v)$$
$$= f(x) + Df(x) \cdot v + \frac{1}{2} \langle Hf(x+\xi v)v \,,\, v\rangle$$

Dies ist die Taylorformel für $m = 1$

II.4. Extremwertprobleme

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen , $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar

II.4.1. Satz

Falls f bei $x \in U$ ein lokales Minimum oder Maximum hat, so gilt $Df(x) = 0$.
Lokales Minimum bei x bedeutet:

$$\exists \text{ Umgebung } x \in V \subseteq U \text{, so dass} \forall\, y \in V : f(y) \geq f(x)$$

(lokales Maximum analog mit $f(y) \leq f(x)$)

Beweis:
Betrachte Funktion $g_v(t) = f(x+tv)$ (x lokales Mininum/Maximum, $v \in \mathbb{R}^n$).
g_v ist definiert auf einer offenen Umgebung $I \subseteq \mathbb{R}$ von 0. g_v ist differenzierbar (Kettenregel).
g_v hat lokales Minimum oder Maximum bei 0

$$g_v(0) = 0 \text{ (Analysis I)}$$

aber $g_v(0) = D_v f(x) = Df(x) \cdot v$

$$\Rightarrow Df(x) = 0$$

□

II.4.2. Definition

$f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $x \in U$. x heißt **kritischer Punkt** von f genau dann, wenn

$$Df(x) = 0$$

Sei f von nun an 2-mal stetig differenzierbar. Sei $x \in U$ kritischer Punkt von f.
Wähle $r > 0$ mit

$$\underbrace{B_r(x)}_{\text{sternförmig}} \subseteq U$$

Dann gilt für alle $v \in U$ mit $\|v\| < r$

$$f(x+v) = f(x) + \frac{1}{2}\langle Hf(x+\xi v)v\,,\,v\rangle \text{ mit } \xi \in [0,1])$$

Bespiele für $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:
1. $f_0(x,y) = x^2 + y^2$
2. $f_1(x,y) = x^2 - y^2$
3. $f_2(x,y) = -x^2 - y^2$

Alle drei haben den kritischen Punkt $(0,0)$ und es gilt

$$Hf_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad Hf_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad Hf_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

f_0 hat lokales Maximum in 0.
Graph von f_0 ist Parabolloid. Niveaulinien sind Kreise. f_2 analog und $f_2 = -f_0$.
f_1 hat kein lokales Minimum/Maximum

Exkurs über symmetrische Matrizen:
II.4.3. Definition

$A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$ heißt **Eigenwert** von A genau dann, wenn

$$\exists\, x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0 \text{ und } Ax = \lambda x$$

Die **Eigenvektoren** zum Eigenwert λ sind die $x \in \mathbb{R}^n$ mit $Ax = \lambda x$

$$\mathrm{Eig}(A,\lambda) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = \lambda x\}$$

Das **Charakteristische Polynom** ist definiert durch

$$\chi_A(t) = \det(A - t \cdot I_n)$$

und ist ein Polynom vom Grad n.
Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms. Das heißt es gibt höchstens n verschiedene Eigenwerte.

II.4.4. Spektralsatz für symmetrische Matrizen

Sei $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ symmetrisch. Dann gibt es eine Orthogonalbasis von $\mathbb{R}^n$, welche nur aus Eigenvektoren von A besteht.
Mit anderen Worten:
Es gibt $\lambda_1 \leq \ldots \lambda_n \in \mathbb{R}$ und $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\langle v_i \, , \, v_j \rangle = \delta_{ij}, \qquad Av_i = \lambda_i v_i$$

Bemerkung:
$B = (v_1, \ldots, v_n)$ Basis

$$M_B^B(A) = \begin{pmatrix} \lambda & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Für den Beweis siehe Lineare Algebra

II.4.5. Satz

Sei $A \in S(n)$, $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$ seien Eigenwerte von A.
Dann gilt

1. $\forall \, x \in \mathbb{R}^n : \lambda_1 \|x\|^2 \leq \langle Ax \, , \, x \rangle \leq \lambda_n \|x\|^2$
2. $\{\langle Ax \, , \, x \rangle \mid \|x\| = 1\} = [\lambda_1, \lambda_n]$

Beweis:

1. $(v_1, \ldots, v_n)$ Orthogonalbasis aus Eigenvektoren mit $Av_i = \lambda_i v_i$. $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x = \sum_{i=1}^n x_i v_i$.
   Dann gilt

$$\begin{aligned} \langle Ax \, , \, x \rangle &= \sum_{i,j=1}^n \langle A x_i v_i \, , \, x_j v_j \rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^n x_i x_j \langle Av_i \, , \, v_j \rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^n x_i x_j \lambda_i \langle v_i \, , \, v_j \rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^n \lambda_i x_i^2 \leq \lambda_n \sum_{i=1}^n x_i^2 = \lambda_n \|x\|^2 \\ &\geq \lambda_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \lambda_1 \|x\|^2 \end{aligned}$$

2. Betrachte

$$f(t) = (A(\cos(t) v_n + \sin(t) v_1), (\cos(t) v_1 + \sin(t) v_n))$$

   Dann ist f stetig und $\|\cos(t) v_n + \sin(t) v_1\| = 1$

$$f(0) = \langle Av_1 \, , \, v_n \rangle = \lambda_n \langle v_n \, , \, v_n \rangle = \lambda_n$$

$$f(\frac{\pi}{2}) = \langle Av_1 \, , \, v_1 \rangle = \lambda_1$$

   Mit Zwischenwertsatz gilt

$$[\lambda_1, \lambda_n] \subseteq f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$$

□

II.4.6. Satz

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen , $x \in U$, $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Sei x ein kritischer Punkt von f.

1. Falls alle Eigenwerte von $Hf(x)$ positiv sind, so hat f ein lokales Minimum bei x (positiv definit)
2. Falls $Hf(x)$ negativ definit, so hat f ein lokales Maximum bei x
3. Falls f einen positiven Eigenwert hat, so hat f bei x kein lokales Maximum
4. Falls f einen negativen Eigenwert hat, so hat f bei x kein lokales Minimum
5. In allen anderen Fällen kann durch Betrachtung von $Hf(x)$ keine Entscheidung getroffen werden.

Beweis:
$1) \Rightarrow 2$, $3 \Rightarrow 4$ gehe zu $-f$ über

3) Sei $\|v\| = 1$, $Hf(x)v = \lambda v$, $\lambda > 0$, $t \in [-1, 1]$.
$\Rightarrow \exists \xi \in [0, 1]$ mit

$$\begin{aligned} f(x+tv) &= f(x) + \frac{1}{2}\langle Hf(x+t\xi)tv\,,\, tv\rangle \\ &= f(x) + \underbrace{\frac{t^2}{2}\langle Hf(x)v\,,\, v\rangle}_{=\frac{t^2}{2}\lambda} + \frac{t^2}{2}\underbrace{\langle (Hf(x+\xi t) - tf(x))v\,,\, v\rangle}_{\text{klein, falls } |t| \text{ klein}} \\ &> f(x) \text{ für kleine } t \end{aligned}$$

1) selbe Idee:
Taylorentwicklung, $v \in \mathbb{R}^n$, so dass $x + tv \in U\ \forall t \in [-1, 1]$.
Dann existiert ein $\theta \in [0, 1]$ mit

$$\begin{aligned} f(x+v) &= f(x) + \underbrace{Df(x)v}_{=0} + \frac{1}{2}\langle Hf(x+\theta v)\,,\, v\rangle \\ &= f(x) + \frac{1}{2}\langle Hf(x)v\,,\, v\rangle + \frac{1}{2}\langle (Hf(x+\theta v) - Hf(x))v\,,\, v\rangle \end{aligned}$$

Seien $0 < \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$ die Eigenwerte von $Hf(x)$

$$\overset{II.4.5}{\Rightarrow} \langle Hf(x)v\,,\, v\rangle \geq \lambda_1 \cdot \|v\|^2$$

Da $f \in C^2$ ist, ist $x \mapsto Hf(x)$ stetig und damit folgt

$$\exists\, \delta > 0, \text{ so dass } \|Hf(x+\theta v) - Hf(x)\| < \frac{\lambda_1}{2} \text{ für } \|v\| < \delta \text{ und } \|\theta\| \leq 1$$

$\Rightarrow$ für $\|v\| < \delta$ gilt also:

$$\begin{aligned} f(x+v) &= f(x) + \frac{1}{2}\langle Hf(x)v\,,\, v\rangle + \frac{1}{2}\langle Hf(x+\theta v)\,,\, v\rangle \\ &\geq f(x) + \frac{1}{2}\lambda_1\|v\|^2 - \frac{1}{2}\underbrace{\|Hf(x+\theta v) - Hf(x)\|}_{\leq\frac{\lambda_1}{2}}\|v\|^2 \\ &\geq f(x) + \frac{1}{4}\lambda_1\|v\|^2 \\ &> f(x) \\ &\Rightarrow f(x+v) > f(x), \text{ falls } \|v\| < \delta \text{ und } v \neq 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow f$ hat lokales Minimum. $\square$

II.4.7. Definition

Definiere

$$S(n) := \left\{A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R}) \,\middle|\, A^T = A\right\}$$

- $A \in S(n)$ heißt **positiv definit**, falls für alle $v \in \mathbb{R}^n$,$v \neq 0$ gilt:

$$\langle Av\,,\,v\rangle > 0$$

- $A \in S(n)$ heißt **negativ definit**, falls für alle $v \in \mathbb{R}^n$,$v \neq 0$ gilt:

$$\langle Av\,,\,v\rangle < 0$$

Bemerkung:
Es gilt

- A positiv definit $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte sind positiv
- A negativ definit $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte sind negativ

Denn: Sind $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$ die Eigenwerte von A, so gilt:

$$\lambda_1\|v\|^2 \leq \langle Av\,,\,v\rangle \leq \lambda_n\|v\|^2$$

und falls $Av_1\lambda_1 v_1$ und $Av_n = \lambda_n v_n$, gilt $\|v_1\| = \|v_n\| = 1$

III. Der Umkehrsatz und seine geometrischen Konsequenzen

III.1. Umkehrbare differenzierbare Abbildungen

Analysis I: Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$. Dann folgt, dass $f(I) \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall ist.
Ist $f : I \to f(I)$ bijektiv, so ist die Umkehrfunktion $g : f(I) \to I$ stetig differenzierbar, und es gilt $g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$

III.1.1. Definition

$U \subseteq \mathbb{R}^n$,$V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen. Ein Diffeomorphismus $f : U \to V$ ist eine C^1-Abbildung, für die gilt, dass $f : U \to V$ bijektiv ist und die Umkehrabbilung $g : V \to U$ auch eine C^1-Abbildung ist.

III.1.2. Lemma

$U \subseteq \mathbb{R}^n$,$V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen. $f : U \to V$ Diffeomorphismus mit Umkehrabbildung $g : V \to U$.
Dann gilt:

1. $m = n$
2. $\forall\, x \in U$ ist $Df(x) \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ invertierbar
3. $Dg(f(x)) = (D(f(x)))^{-1} \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$

Beweis:
Es gilt

$$\begin{aligned} \forall\, x \in U:\ g(f(x)) = x \qquad &\Rightarrow \qquad g \circ f = \mathrm{id}_U \\ \forall\, y \in V:\ f(g(y)) = y \qquad &\Rightarrow \qquad f \circ g = \mathrm{id}_V \end{aligned}$$

Dann folgt aus der Kettenregel

$$\begin{aligned} Dg(f(x))Df(x) &= D\,\mathrm{id}(x) = 1_n \\ \text{und } Df(g(y))Dg(y) &= D\,\mathrm{id}(y) = 1_m \end{aligned}$$

Setze nun $y := f(x)$ ($\Leftrightarrow g(y) = x$)

$$\Rightarrow Df(x)Dg(f(x)) = 1_m \quad \overset{\text{LA.I}}{\Rightarrow} \quad m = n$$

Außerdem ist dann $Df(x)$ invertierbar und $(Df(x))^{-1} = Dg(f(x))$ □

III.1.3. Lemma

Definiere

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R}) \mid A \text{ invertierbar}\}$$

Dann gilt

1. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \subseteq \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ ist offen
2. Die Funktion

   $$\begin{aligned} F : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) &\to \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R}) \\ A &\to A^{-1} \end{aligned}$$

   ist beliebig oft stetig differenzierbar

Beweis:

1. B3A5
2. B6A4

III.1.4. Satz

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar.
Es gelte

1. $Df(x)$ ist invertierbar für alle $x \in U$
2. $f(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ ist offen
3. $f : U \to f(U)$ bijektiv
4. Die Umkehrfunktion $g : f(U) \to U$ ist stetig

Dann ist g stetig differenzierbar (also ist f Differomorphismus)

Beweis:
$x \in U$,$y = f(x)$. Sei $A : \ -x + U \to \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ stetig bei 0 und $f(x+h) = f(x) + A(h)h$ für alle h (Dies existert, da f differenzierbar bei x).
Sei k mit $y + k \in f(U)$. Setze $h := -x + g(y+k)$ ($\Leftrightarrow x + h = g(y+k)$) und $h \neq g(y+k) - g(y)$.
Da $A(0) = Df(x)$ invertierbar und $h \mapsto A(h)$ stetig bei 0 ist und $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \subseteq \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ offen, ist $A(h)$ invertierbar für kleine h.
Setze nun $B(h) := (A(h))^{-1}$. Dann ist B stetig bei 0 (,weil $A \mapsto A^{-1}$ stetig ist)

$$\begin{aligned}
\Rightarrow g(y+k) &= g(y) + h \\
&= g(y) + \underbrace{B(h)A(h)}_{1_n}h \\
&= g(y) + B(h)(\underbrace{f(x+h) - f(x)}_{=k}) \\
&= g(y) + B(h)k \\
&= g(y) + \underbrace{B(\underbrace{-x + g(y+k)}_{\overset{k\to 0}{\longrightarrow} -x+g(y)})}_{\substack{B(0) \\ (B \text{ stetig bei } 0)}}k
\end{aligned}$$

□

Bemerkung:

1. Wir werden zeigen, dass $1\&2 \Rightarrow 3\&4$
2. Man kann zeigen, dass in der Situation von (1.4) gilt:
   Ist f sogar eine C^k-Abbildung. $(k \geq 2)$, dann ist auch g eine C^k-Abbildung. (ohne Beweis)

III.1.5. Beispiel

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^x \begin{pmatrix} \cos(y) \\ \sin(y) \end{pmatrix}$$

Dies entspricht der komplexen Exponentialfunktion

$$x, y \in \mathbb{R} \qquad e^{x+iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$$

f ist differenzierbar mit

$$Df\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^x \begin{pmatrix} \cos(y) & -\sin(y) \\ \sin(y) & \cos(y) \end{pmatrix}$$

$$\det Df\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{2x} \neq 0$$

$$f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

$$\left\| f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|_2 = e^x, \qquad f\begin{pmatrix} x \\ y + 2\pi \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

f ist nicht injektiv Sei

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| 0 < y < 2\pi \right\}$$

$$f : U \to f(U) \text{ ist bijektiv}$$

$$f(U) = \mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \middle| x > 0 \right\}$$

f ist nicht injektiv, aber es gilt jeder Punkt in $\mathbb{R}^2$ hat offene Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^2$

$$f : V \to f(V) \text{ ist bijektiv}$$

III.1.6. Der Umkehrsatz

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen , $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine C^1-Abbildung.
Annahme: Für alle $x \in U$ ist $Df(x) \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ invertierbar.
Dann gilt:

(i) Für alle $V \subseteq U$ offen ist $f(V) \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.

(ii) Zu jedem $x \in U$ existiert eine offene Umgebung $V \subseteq U$ von x, so dass

$$f\Big|_V : V \to f(V)$$

bijektiv ist, und die Umkehrabbildung $g : f(V) \to V$ ist stetig differenzierbar.

III.1.7. Definition

Eine Abbildung f, welche die Voraussetzungen von III.1.6 erfüllt, heißt **lokaler Diffeomorphismus**

III.1.8. Korollar

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen , $f : U \to \mathbb{R}$ in C^1, $Df(x)$ invertierbar für alle $x \in U$, f injektiv. Dann gilt:
$f(U)$ ist offen in $\mathbb{R}^n$ und f ist ein Diffeomorphismus.
(Verschärfung von III.1.4)

Beweis:
$f(U)$ ist offen (folgt aus III.1.6)
Nach III.1.6 bleibt zu zeigen, dass die Umkehrabbildung $g : f(U) \to U$ stetig ist. Zunächst eine Bemerkung:

Allgemeine Bemerkung:
X metrischer Raum, $U \subseteq X$ offen, $V \subseteq U$. Dann gilt:

$$V \text{ ist offen in } X \;\Leftrightarrow\; V \text{ ist offen in } U$$

zu Zeigen: g stetig $g : f(U) \to U$. Sei $V \subseteq U$ offen. $g^{-1}(V) = f(V)$, weil $g = f^{-1}$

$$\begin{aligned}
&\overset{\text{(Bem)}}{\Rightarrow} V \subseteq \mathbb{R}^n \text{ offen in } \mathbb{R}^n \\
&\overset{III.1.6}{\Rightarrow} f(V) \text{ offen in } \mathbb{R}^n \\
&\overset{\text{(Bem)}}{\Rightarrow} f(V) = g^{-1}(V) \text{ offen in } f(U)
\end{aligned}$$

Damit folgt, dass das Urbild jeder offenen Teilmenge in U unter g ist offen in $f(U)$ und damit ist $g : f(U) \to U$ stetig □

III.2. Beweis des Umkehrsatzes

Vorbereitungen:
III.2.1. Schrankensatz

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und **Konvex**,(d.h $x, y \in U$,$t \in [0, 1]$, dann ist $(1 - t)x + ty \in U$).
Sei $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine C^1-Abbildung, und es gebe $L \geq 0$, so dass gilt:

$$\|Df(x)\| \leq L \qquad \text{für alle } x \in U$$

$\Rightarrow$ f ist L-Lipschitzstetig, d.h $\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|$, $\forall\, x, y \in U$

Beweis:
Seien $x, y \in U$. Nach dem Hauptsatz der Differentialrechnung und Integralrechnung gilt dann

$$f(y) = f(x) + \int_0^1 Df(\underbrace{x + t(y - x)}_{=(1-t)x+ty\in U})(y - x)\,\mathrm{d}t$$

Dann folgt

$$\begin{aligned}
\|f(y) - f(x)\| &= \left\| \int_0^1 Df(x + t(y - x))(y - x)\,\mathrm{d}t \right\| \\
&\leq \int_0^1 \|Df(x + t(y - x))(y - x)\|\,\mathrm{d}dt \\
&\leq \int_0^1 \underbrace{\|Df(x + t(y - x))\|}_{\leq L} \|y - x\|\,\mathrm{d}t \\
&\leq L\|y - x\|
\end{aligned}$$

□

III.2.2. Banach'scher Fixpunktsatz

Sei $X \neq \emptyset$ ein vollständiger metrischer Raum und $f : X \to X$ eine Abbildung. Sei f q-Lipschitzstetig mit $q < 1$ (,d.h $d(f(x), f(y)) \leq qd(x, y)$, $q < 1$).
Dann besitzt f genau einen **Fixpunkt** $x \in X$, dh $f(x) = x$

Beweis:
Eindeutigkeit: Seien $x, y \in X$ mit $f(x) = x$ und $f(y) = y$. Dann gilt

$$d(x,y) = d(f(x), f(y)) \leq q d(x,y)$$

Also gilt

$$\underbrace{(1-q)}_{>0}\underbrace{d(x,y)}_{\geq 0} \leq 0$$

Dann muss aber $d(x,y) = 0$ gelten und damit $x = y$, weil $d(.,.)$ eine Metrik ist.
Existenz: Setze $f^n : X \to X$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ und

$$f^0 := \mathrm{id}\,,\ f^1 := f\,,\ f^n := f \circ f^{n-1}$$

Sei $x_0 \in X$ beliebig, $x_n := f^n(x)$.
Behauptung: $(x_n)_n$ konvergiert gegen ein x_∞ mit $f(x_\infty) = x_\infty$.
Wir zeigen, dass $(x_n)_n$ eine Cauchyfolge ist:

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(f(x_{n-1}) - f(x_n)) \\ &\leq q d(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq \ldots \leq q^n d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

Dann folgt mit der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+m}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots + d(x_{n-1+m}, x_{n+m}) \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} d(x_{n+k}, x_{n+k+1}) \\ &\leq \sum_{k=0}^{m-1} q^k d(x_n, x_{n+1}) \\ &\leq \sum_{k=0}^{m-1} q^k q^n d(x_0, x_1) \\ &\leq q^n d(x_0, x_1) \sum_{k=0}^{\infty} q^k \\ &= q^n d(x_0, x_1) \frac{1}{1-q} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

Damit ist $(x_n)_n$ eine Cauchy-Folge. Weil X vollständig ist, konvergiert dann $x_n \to x_\infty \in X$.
Nun gilt:

$$\begin{aligned} d(x_\infty, f(x_\infty)) &= d(\lim_{n\to\infty} x_n, f(\lim_{n\to\infty} x_n)) \\ &\overset{f \text{ stetig}}{=} d(\lim_{n\to\infty} x_n, \lim_{n\to\infty} f(x_n)) \\ &\overset{d \text{ stetig}}{=} \lim_{n\to\infty} \underbrace{d(x_n, f(x_n))}_{\leq q^n d(x_0, x_1)} = 0 \end{aligned}$$

Darauf folgt dann insgesamt $f(x_\infty) = x_\infty$ $\square$

III.2.3. Lemma

Wenn $T \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ mit $\|T\| \leq 1$ Dann ist $1 - T$ ist invertierbar.

Beweis:
Wir zeigen: $\forall\, y \in \mathbb{R}^n \exists!\, x \in \mathbb{R}^n$, so dass $(1-T)x = y \Leftrightarrow x = y + Tx$