Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

Fachbereich 10
Mathematik und
Informatik

Skript Topologie I.

Mitschrift der Vorlesung „Topologie I.“ von Prof. Dr. Arthur Bartels

Jannes Bantje

24. Februar 2016

$$H_*$$

Aktuelle Version verfügbar bei

GitHub

`https://github.com/JaMeZ-B/latex-wwu`

GitHub ist eine Internetplattform, auf der viele OpenSource-Projekte gehostet werden. Diese Plattform nutzen wir zur Zusammenarbeit, also findet man hier neben den PDFs auch die TEX-Dateien. Außerdem ist über diese Plattform auch direktes Mitarbeiten möglich, siehe nächste Seite.

sciebo die Campuscloud

`https://uni-muenster.sciebo.de/public.php?service=files&t=965ae79080a473eb5b6d927d7d8b0462`

Sciebo ist ein Dropbox-Ersatz der Hochschulen in NRW, der von der Uni Münster in leitender Position auf Basis der OpenSource-Software Owncloud aufgebaut wurde. Wenn man auf den Link klickt, kann man die Freigabe zum eigenen Speicher hinzufügen und hat dann immer automatisch die aktuellste Version.

Bittorrent Sync

`B6WH2DISQ5QVYIRYIEZSF4ZR2IDVKPN3I`

BTSync ist ein peer-to-peer Dateisynchronisations-Tool. Dabei werden die Dateien nur auf den Computern der Teilnehmer an einer Freigabe gespeichert. Ein RasPi ist permanent online, sodass stets die aktuellste Version verfügbar ist. `Clients` gibt es für jedes Betriebssystem. Zugang ist über das obige „Secret“ bzw. den QR-Code möglich.

Vorlesungshomepage

`https://wwwmath.uni-muenster.de/reine/u/topos/lehre/WS2014-2015/Topologie1/Topologie1.html`

Hier ist ein Link zur offiziellen Vorlesungshomepage.

Vorwort — Mitarbeit am Skript

Dieses Dokument ist eine Mitschrift aus der Vorlesung „Topologie I., WiSe 2014/2015“, gelesen von Prof. Dr. Arthur Bartels. Der Inhalt entspricht weitestgehend dem Tafelanschrieb. Für die Korrektheit des Inhalts übernehme ich keinerlei Garantie! Für Bemerkungen und Korrekturen – und seien es nur Rechtschreibfehler – bin ich sehr dankbar. Korrekturen lassen sich prinzipiell auf drei Wegen einreichen:

- Persönliches Ansprechen in der Uni, Mails an `j.bantje@wwu.de` (gerne auch mit annotieren PDFs) oder Kommentare auf `https://github.com/JaMeZ-B/latex-wwu`.
- *Direktes* Mitarbeiten am Skript: Den Quellcode poste ich auf GitHub (siehe oben), also stehen vielfältige Möglichkeiten der Zusammenarbeit zur Verfügung: Zum Beispiel durch Kommentare am Code über die Website und die Kombination Fork + Pull Request. Wer sich verdient macht oder ein Skript zu einer Vorlesung, die ich nicht besuche, beisteuern will, dem gewähre ich gerne auch Schreibzugriff.

  Beachten sollte man dabei, dass dazu ein Account bei `github.com` notwendig ist, der allerdings ohne Angabe von persönlichen Daten angelegt werden kann. Wer bei GitHub (bzw. dem zugrunde liegenden Open-Source-Programm „`git`“) – verständlicherweise – Hilfe beim Einstieg braucht, dem helfe ich gerne weiter. Es gibt aber auch zahlreiche empfehlenswerte Tutorials im Internet.[1]
- *Indirektes* Mitarbeiten: TeX-Dateien per Mail verschicken.

  Dies ist nur dann sinnvoll, wenn man einen ganzen Abschnitt ändern möchte (zB. einen alternativen Beweis geben), da ich die Änderungen dann per Hand einbauen muss! Ich freue mich aber auch über solche Beiträge!

Inhalt der Vorlesung

In der Vorlesung werden wir uns mit algebraischer Topologie beschäftigen. In der algebraischen Topologie werden topologische Fragen, wie zum Beispiel wann $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ homöomorph sind, in algebraische Fragen übersetzt. Ein wichtiges Hilfsmittel für solche Übersetzungen sind Homologiegruppen. Wir werden in der Vorlesung diese Homologiegruppen definieren und Hilfsmittel entwickeln, um Homologiegruppen zu berechnen. Es ergeben sich dann schöne topologische Anwendungen, wie zum Beispiel die topologische Invarianz der Dimension.

Literatur

- Bredon, G.E.: *Topology and Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, Springer Verlag 1993
- Hatcher, A.: *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002
- Lück, W.: *Algebraische Topologie - Homologie und Mannigfaltigkeiten*, Vieweg, 2005
- tom Dieck, T.: *Topologie*, 2. Auflage, de Gruyter 2000
- Waldhausen, F.: *Skript zur Einführung in die Topologie*, *Skript zur Topologie*

[1] zB. `https://try.github.io/levels/1/challenges/1`, ist auf Englisch, aber dafür interaktives LearningByDoing

Inhaltsverzeichnis

1 Kategorien, Funktoren und natürliche Transformationen

1.1 Definition. Eine ***Kategorie*** $\mathcal{C}$ besteht aus:

i) Einer Klasse $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$. Die Elemente von $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ heißen die ***Objekte*** von $\mathcal{C}$.

ii) Zu je zwei Objekten A, B aus $\mathcal{C}$ einer Menge $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$. Die Elemente von $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ heißen ***Morphismen*** von $\mathcal{C}$.

iii) Zu je drei Objekten $A, B, C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ aus einer Abbildung:

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C) \times \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, C) \quad , \quad (f, g) \mapsto f \circ g$$

genannt die ***Komposition*** in $\mathcal{C}$.

Dabei müssen folgende Axiome erfüllt sein:

(i) Die Komposition ist ***assoziativ***: Für Objekte A, B, C, D von $\mathcal{C}$ und $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C, D)$, $g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C)$ und $h \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ gilt immer

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

(ii) Die Komposition ist ***unital***: Für jedes Objekt A von $\mathcal{C}$ gibt es einen Morphismus $\mathrm{id}_A \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, A)$ so, dass

$$\forall f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, A) : \mathrm{id}_A \circ f = f \qquad \text{und} \qquad \forall f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) : f \circ \mathrm{id}_A = f$$

1.2 Beispiel.

(1) Die Kategorie der Mengen $\textsc{Set}$: Objekte sind Mengen und Morphismen sind Abbildungen.

(2) Die Kategorie der Gruppen $\textsc{Gruppen}$: Objekte sind Gruppen und Morphismen sind Gruppenhomomorphismen.

(3) Die Kategorie der K-Vektorräume K-VR: Objekte sind K-Vektorräume und die Morphismen sind K-lineare Abbildungen.

(4) Die Kategorie der R-Moduln R-$\textsc{Mod}$: Objekte sind R-Moduln und Morphismen sind R-lineare Abbildungen.

(5) Die Kategorie der C^∞-Mannigfaltigkeiten C^∞-$\textsc{Man}$: Objekte sind C^∞-Mannigfaltigkeiten und Morphismen sind C^∞-Abbildungen.

(6) Die Kategorie der topologischen Räume $\textsc{Top}$: Objekte sind topologische Räume und Morphismen sind stetige Abbildungen.

(7) Die Kategorie der punktierten topologischen Räume $\textsc{Top}_\bullet$: Objekte sind punktiert-topologische Räume und Morphismen sind punktiert-stetige Abbildungen.

(8) Die Kategorie $\mathrm{H}\textsc{Top}$: Objekte sind topologische Räume und Morphismen sind Homotopieklassen von stetigen Abbildungen.

(9) Die Kategorie $\mathrm{H}\textsc{Top}_\bullet$: Objekte sind punktiert-topologische Räume und Morphismen sind Homotopieklassen von punktiert-stetigen Abbildungen.

(10) Sei G eine Gruppe. Wir erhalten eine Kategorie $\mathcal{C}_G$ mit genau einem Objekt $*$ und Morphismen $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}_G}(*, *) = G$. Die Komposition wird durch die Verknüpfung in der Gruppe festgelegt.

(11) Ist $\mathcal{C}$ eine Kategorie, so ist $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ eine Kategorie, wobei $\mathrm{Obj}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}) = \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ und $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(A, B) := \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, A)$. Die Komposition ist gegeben durch $f \circ^{\mathrm{op}} g := g \circ f$.

1.3 Bemerkung.

(i) Eine Kategorie heißt ***klein***, wenn ihre Objekte eine Menge bilden.

(ii) Statt $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ schreiben wir oft $f\colon A \to B$ oder $A \xrightarrow{f} B$.

1.4 Definition. Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien: Ein ***Funktor*** $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ordnet jedem Objekt C von $\mathcal{C}$ ein Objekt $F(C)$ von $\mathcal{D}$ und ordnet jedem Morphismus $f : C \to C'$ in $\mathcal{C}$ einen Morphismus $F(f)\colon F(C) \to F(C')$ in $\mathcal{D}$ zu. Dabei muss gelten:

$$F(f \circ g) = F(f) \circ F(g) \quad \text{und} \quad F(\mathrm{id}_C) = \mathrm{id}_{F(C)}$$

1.5 Beispiel.

(1) Es gibt offensichtliche „Vergiss"-Funktoren:

$$\text{K-VR} \longrightarrow \textsc{Set} \qquad \text{R-}\textsc{Mod} \longrightarrow \textsc{Set} \qquad \textsc{Top} \longrightarrow \textsc{Set}$$
$$\textsc{Top}_\bullet \longrightarrow \textsc{Set} \qquad \textsc{Top}_\bullet \longrightarrow \textsc{Top}$$

(2) Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und C ein Objekt von $\mathcal{C}$. Der durch C ***dargestellte Funktor*** $F_C\colon \mathcal{C} \to \textsc{Set}$ ist definiert durch

$$\begin{aligned} &F_C(A) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C, A) && \text{für } A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}) \\ &F_C(f)\colon\ \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C, A) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C, A'), g \mapsto f \circ g && \text{für } f\colon A \to A' \text{ in } \mathrm{Mor}(A, A') \end{aligned}$$

(3) Die Fundamentalgruppe definiert einen Funktor

$$\pi_1 : \mathrm{H}\textsc{Top}_\bullet \longrightarrow \textsc{Gruppen}$$

Ist $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor so schreiben wir oft kürzer und ungenauer $f_* := F(f)$. Kleine Kategorien und Funktoren bilden die Kategorie $\textsc{Kat}$.

1.6 Definition. Seien $F, G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ zwei Funktoren. Eine ***natürliche Transformation*** $\tau\colon F \to G$ ordnet jedem $C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ einen Morphismus $\tau_C\colon F(C) \to G(C)$ in $\mathcal{D}$ zu, sodass für jedes $f\colon C \to C'$ in $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd} F(C) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\tau_C"] & F(C') \arrow[d, "\tau_{C'}"] \\ G(C) \arrow[r, "G(f)"] & G(C') \end{tikzcd}$$

kommutiert.

$F, G, H\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$

Natürliche Transformationen lassen sich komponieren. Für $\tau\colon F \to G$, $\eta\colon G \to H$ ist $\eta \circ \tau\colon F \to H$ gegeben durch

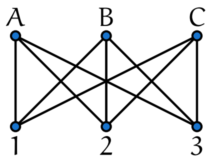
$$(\eta \circ \tau)_C := \eta_C \circ \tau_C\colon F(C) \to H(C)$$

Genauer: Für feste kleine Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ bilden die Funktoren $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ mit den natürlichen Transformationen eine Kategorie $\textsc{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$.

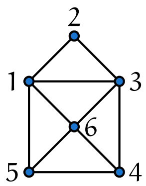
In der algebraischen Topologie werden topologische Fragen, wie zum Beispiel, wann $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ homöomorph sind, in algebraische Fragen übersetzt. Eine Möglichkeit für eine solche Übersetzung sind Funktoren von einer Kategorie von topologischen Räumen, z.B. $\textsc{Top}, \textsc{Top}_\bullet, \mathrm{H}\textsc{Top}_\bullet$, in eine algebraisch Kategorie, z.B. $\textsc{Gruppen}$, K-VR, $\textsc{Abel.Gruppen}$, R-$\textsc{Mod}$. Ein Beispiel für einen solchen Funktor ist die Fundamentalgruppe π_1. Ein Nachteil der Fundamentalgruppe ist, dass diese oft schwierig zu berechnen ist. Wir werden in dieser Vorlesung weitere Funktoren und Methoden für ihre Berechnung kennenlernen.

2 Kombinatorische Beschreibungen topologischer Räume

2.1 Beispiel. *Graphen* sind einerseits topologische Räume und andererseits kombinatorische Objekte:



$$\longleftrightarrow \quad \begin{aligned} V &= \{A, B, C, 1, 2, 3\} \\ E &= \{\{A,1\},\{A,2\},\{A,3\},\{B,1\},\{B,2\},\{B,3\},\{C,1\},\{C,2\},\{C,3\}\} \end{aligned}$$



$$\longleftrightarrow \quad \begin{aligned} V &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\ E &= \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,5\},\{1,6\},\{2,3\},\{3,4\},\{3,6\},\{4,5\},\{4,6\},\{5,6\}\} \end{aligned}$$

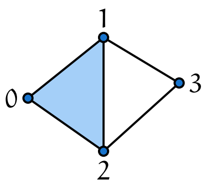
2.2 Definition. Ein ***simplizialer Komplex*** $K = (V, \Sigma)$ besteht aus einer Menge V und einer Menge Σ von nichtleeren, endlichen Teilmengen von V, sodass gilt

(i) $\{v\} \in \Sigma$ für alle $v \in V$

(ii) $\sigma \in \Sigma, \emptyset \neq \tau \subseteq \sigma \Longrightarrow \tau \in \Sigma.$ (Abgeschlossen bzgl. Teilmengenbildung)

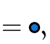
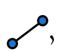
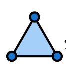
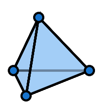
Die Elemente von V heißen die ***Ecken*** oder ***Vertices*** von K. Die Elemente von Σ heißen die ***Simplizes*** von K. Enthält $\sigma \in \Sigma$ genau $n+1$ Elemente, so heißt σ ein ***n-Simplex***. Ist $\tau \subseteq \sigma$, wobei σ ein n-Simplex und τ ein $n-1$-Simplex ist, so heißt τ eine ***Seite*** von σ. Ist V geordnet, so heißt K geordnet. Ist V endlich, so heißt K endlich.

2.3 Beispiel.



$$\begin{aligned} V &= \{0, 1, 2, 3\} \\ \Sigma &= \{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{0, 1, 2\}\} \end{aligned}$$

Ist σ eine endliche Menge, so heißt $\Delta^\sigma := \big(\sigma, \mathcal{P}(\sigma) \setminus \{\emptyset\}\big)$ der σ-Simplex. Für $\sigma = \{0, \ldots, n\}$ schreiben wir $\Delta^n := \Delta^{\{0,\ldots,n\}}$. Es ist

$\Delta^0 =$ , $\Delta^1 =$ , $\Delta^2 =$ , $\Delta^3 =$ 

2.4 Definition. Sei $K = (V, \Sigma)$ ein simplizialer Komplex. Ein ***Unterkomplex*** von K ist ein simplizialer Komplex $K_0 = (V_0, \Sigma_0)$ mit $V_0 \subseteq V$ und $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$.
Sei $K = (V, \Sigma)$ ein endlicher simplizialer Komplex. Dann ist K ein Unterkomplex von Δ^V.

2.5 Definition. Eine ***simpliziale Abbildung*** $f\colon K_1 = (V_1, \Sigma_1) \to K_2 = (V_2, \Sigma_2)$ zwischen simplizialen Komplexen ist eine Abbildung $f\colon V_1 \to V_2$, sodass $f(\sigma_1) \in \Sigma_2$ für alle $\sigma_1 \in \Sigma_1$. Simpliziale Komplexe zusammen mit simplizialen Abbildungen bilden eine Kategorie Simp.

2.6 Definition. Sei σ eine endliche Menge. Sei $\mathbb{R}^\sigma = \prod_{v\in\sigma}\mathbb{R}$ mit der Produkttopologie. Wir setzen nun

$$|\Delta^\sigma| := \left\{ x = (x_v)_{v\in\sigma} \in \mathbb{R}^\sigma \;\middle|\; \sum_{v\in\sigma} x_v = 1, x_v \in [0,1]\ \forall v \in \sigma \right\}$$

Ist $\tau \subseteq \sigma$, so erhalten wir eine Abbildung $\iota_\tau^\sigma\colon |\Delta^\tau| \to |\Delta^\sigma|$ indem wir $(x_v)_{v\in\tau} \in |\Delta^\tau|$ durch $x_v = 0$ für $v \in \sigma\setminus\tau$ zu $(x_v)_{v\in\sigma}$ auffüllen. Ist $\eta \subseteq \tau \subseteq \sigma$ so gilt offensichtlich $\iota_\eta^\sigma = \iota_\tau^\sigma \circ \iota_\eta^\tau$. Sei nun $K = (V, \Sigma)$ ein simplizialer Komplex. Die ***geometrische Realisierung*** $|K|$ von K ist definiert als

$$|K| := \left. \coprod_{\sigma\in\Sigma} \{\sigma\} \times |\Delta^\sigma| \middle/ \sim \right.$$

Anschaulich „klebt“ $\sim$ die geometrischen Realisierungen aller Einzelteile passend zusammen

wobei $\sim$ die durch $(\tau, x) \sim \left(\sigma, \iota_\tau^\sigma(x)\right)$ für $\tau \subseteq \sigma$ erzeugte Äquivalenzrelation ist. Versehen mit der Quotiententopologie ist $|K|$ ein topologischer Raum.

- In Aufgabe 4 von Blatt 1 haben wir gezeigt, dass $|K|$ homöomorph zu einem Unterraum X von $\mathbb{R}^n$ mit $n := \#V$ ist via $\left[(\{\sigma\}, (x_{v_i})_{v_i\in\sigma})\right] \mapsto \sum_{v_i\in\sigma} x_{v_i} \cdot e_i$.
- In Aufgabe 2 von Blatt 2 haben wir gezeigt, dass $|\cdot|$ einen Funktor Simp $\to$ Top definiert. Dazu definiert man eine Abbildung zunächst auf den zugrunde liegenden Räumen durch

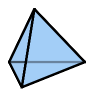
$$\left(\sigma, \sum\nolimits_{v\in\sigma} x_v \cdot v\right) \longmapsto \left(f(\sigma), \sum\nolimits_{v\in\sigma} x_v \cdot f(v)\right)$$

  und wendet diese unter Benutzung der universellen Eigenschaft der Quotiententopologie auf Repräsentanten an.[1]

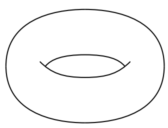
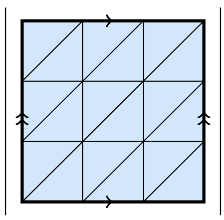
2.7 Beispiel.

- Sei $\partial\Delta^n := \left(\{0,\dots,n\}, \mathcal{P}(\{0,\dots,n\}) \setminus \{\emptyset, \{0,\dots,n\}\}\right) =$ „$\Delta^n \setminus \{0,\dots,n\}$“. $\partial\Delta^n$ heißt der ***Rand des n-Simplizes***. Es gilt

$$\left|\partial\Delta^1\right| = \bullet\bullet \cong S^0$$
$$\left|\partial\Delta^2\right| =$$

$$\cong S^1$$
$$\left|\partial\Delta^3\right| =$$

$$\cong S^2$$

  Allgemein gilt $|\partial\Delta^n| \cong S^{n-1}$, siehe Aufgabe 1 von Blatt 3.

- $T^2 = S^1 \times S^1 \cong$  $\cong$ 

2.8 Definition. Ein topologischer Raum X heißt ein ***Polyeder***, falls er homöomorph zur geometrischen Realisierung eines simplizialen Komplexes ist.

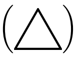
[1] hier wird eine formale Summe anstatt eines Tupels benutzt; da σ stets eine endliche Menge ist, macht dies aber keinen Unterschied.

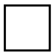
2.9 Definition. Sei $K = (V, \Sigma)$ ein endlicher simplizialer Komplex. Sei

$$a_n := \#\{\sigma \in \Sigma \mid \sigma \text{ ist ein } n\text{-Simplex von } K\}$$

Dann heißt $\chi(K) := \sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n \cdot a_n$ die ***Euler-Charakteristik*** von K.

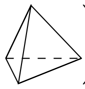
Die Eulercharakteristik lässt sich einfach durch Abzählen bestimmen:

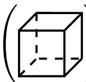
$\chi\Big($  $\Big) = 3 - 3 = 0$

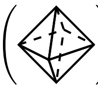
$\chi\Big($  $\Big) = 4 - 4 = 0$

$$\chi([n\text{-Eck}]) = n - n = 0$$

Selbstverständlich funktioniert dies auch bei dreidimensionalen Komplexen:

$\chi\Big(\partial\Delta^3 =$  $\Big) = 4 - 6 + 4 = 2$

$\chi\Big($  $\Big) = 8 - 12 + 6 = 2$

$\chi\Big($  $\Big) = 6 - 12 + 8 = 2$

2.10 Satz. Seinen K und K' endliche simpliziale Komplexe. Gilt $|K| \cong |K'|$, so gilt

$$\chi(K) = \chi(K').$$

Beweis: *Siehe 12.9.* □

Die Euler-Charakteristik ist also eine topologische Invariante von simplizialen Komplexen. Sie hängt nur von der topologischen Struktur von $|K|$ und nicht von der kombinatorischen Struktur von K ab.

3 Simpliziale Homologie

Ring mit Eins

3.1 Definition. Sei S eine Menge. Sei R ein Ring. Der ***freie R-Modul mit Basis S***, $R[S]$, besteht aus allen endlichen formalen R-Linearkombinationen

$$\sum_{s\in S} r_s \cdot s \quad , r_s \in R \text{ und } r_s \neq 0 \text{ für endliche viele } s \in S$$

Die R-Modulstruktur auf $R[S]$ ist definiert durch:

$$r \cdot \left(\sum_{s\in S} r_s \cdot s\right) := \sum_{s\in S} (r \cdot r_s) \cdot s \qquad \left(\sum_{s\in S} r_s \cdot s\right) + \left(\sum_{s\in S} r'_s s\right) := \sum_{s\in S} (r_s + r'_s) \cdot s$$

Mittels $s = \sum_{s'\in S} \delta_{s,s'} \cdot s'$ fassen wir S als Teilmenge von $R[S]$ auf.

Die freien Moduln sind durch die folgende universelle Eigenschaft charakterisiert:

3.2 Lemma. Sei S eine Menge, R ein Ring. Es gilt

1) Ist M ein R-Modul und $i\colon S \to M$ eine Abbildung, so gibt es genau eine R-lineare Abbildung $\varphi\colon R[S] \to M$, die i fortsetzt.

2) Sei $f\colon R[S] \to M$ R-linear und $p\colon N \twoheadrightarrow M$ R-linear und surjektiv. Dann gibt es $\hat{f}\colon R[S] \to N$ mit $p \circ \hat{f} = f$.

Moduln mit dieser Eigenschaft bezeichnet man als ***projektiv***. Freie Moduln sind also projektiv.

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[d, two heads, "p"] \\ R[S] \arrow[ur, dashed, "\hat{f}"] \arrow[r, "f"] & M \end{tikzcd}$$

Beweis:

1) Eine solche Abbildung ist gegeben durch $\varphi\left(\sum_{s\in S} r_s \cdot s\right) = \sum_{s\in S} r_s \cdot i(s)$. Ist φ' eine zweite, so gilt

$$\hat{\varphi}\left(\sum_{s\in S} r_s \cdot s\right) = \sum_{s\in S} r_s \cdot \hat{\varphi}(s) = \sum_{s\in S} r_s \cdot i(s)$$

2) Wähle für jedes $s \in S$ ein Urbild $j(s) \in N$ für $f(s) \in M$ unter $p\colon N \twoheadrightarrow M$. Nun wende 1) auf $j\colon S \to N$ an, um $\hat{f}\colon R[S] \to N$ mit $\hat{f}(s) = j(s)$ zu erhalten. Nun ist $p \circ \hat{f}(s) = f(s)$ für alle $s \in S$. Mit der Eindeutigkeit aus 1) folgt $p \circ \hat{f} = f$. □

3.3 Beispiel. Viele uns bereits bekannte Strukturen sind freie Moduln:

(i) Sei K ein Körper und V, M, N seien K-Vektorräume, $f\colon V \to M$, $p\colon N \to M$ seien K-linear und p surjektiv. Dann gibt es $\hat{f}\colon V \to N$ mit $p \circ \hat{f} = f$. Wir können Lemma 3.2 benutzen, da V eine Basis B hat, also $V \cong K[B]$.

(ii) Sei $R = \mathbb{Z}$, sei $V = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $M = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, sowie $f = \mathrm{id}\colon V \to M$, $N = \mathbb{Z}$ und $p\colon \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ die Projektion mit $p(n) = n + 2\mathbb{Z}$. Dann gibt es *keine* $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung $\hat{f}\colon \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mit $p \circ \hat{f} = f$, denn falls $\hat{f}(1 + 2\mathbb{Z}) = n \in \mathbb{Z}$ ist, so folgt

$$2n = 2 \cdot \hat{f}(1 + 2\mathbb{Z}) = \hat{f}\big(2 \cdot (1 + 2\mathbb{Z})\big) = \hat{f}(0 + 2\mathbb{Z}) = 0$$

also $n = 0$ und somit $p \circ \hat{f} = 0$. $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist also kein freier Modul.

3.4 Definition. Sei $K = (V, \Sigma)$ ein simplizialer Komplex. Sei $\Sigma_n := \{\sigma \in \Sigma \mid \sigma \text{ ist ein } n\text{-Simplex}\}$. Sei R ein Ring. Der ***n-te Kettenmodul*** von K über R ist definiert als

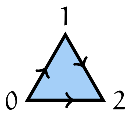
$$C_n(K; R) := R[\Sigma_n]$$

Ist $R = \mathbb{Z}$, so schreiben wir auch kurz $C_n(K) := C_n(K; \mathbb{Z})$.

3.5 Definition. Sei $K = (V, \Sigma)$ ein geordneter simplizialer Komplex. Sei $\sigma = \{v_0, \ldots, v_n\}$ ein n-Simplex von K. Bezüglich der Ordnung von K sei dabei $v_0 < v_1 < \ldots < v_n$. Sei τ ein $(n-1)$-Simplex von K. Definiere

$$\varepsilon_\sigma^\tau := \begin{cases} (-1)^i, & \text{falls } \tau = \{v_0, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n\} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Es gilt offensichtlich $\varepsilon_\sigma^\tau \neq 0$ genau dann, wenn τ eine Seite von σ ist. Für den folgenden geordneten simplizialen Komplex gilt



$$\varepsilon_{\{0,1,2\}}^{\{0,1\}} = 1, \quad \varepsilon_{\{0,1,2\}}^{\{0,2\}} = -1, \quad \varepsilon_{\{0,1,2\}}^{\{1,2\}} = 1$$

3.6 Definition. Sei $K = (V, \Sigma)$ ein geordneter simplizialer Komplex. Die ***n-te Randabbildung***

$$\partial_n \colon \underbrace{C_n(K; R)}_{=R[\Sigma_n]} \longrightarrow \underbrace{C_{n-1}(K; R)}_{=R[\Sigma_{n-1}]}$$

ist für ein Basiselement $\sigma \in \Sigma_n$ definiert durch

$$\partial_n(\sigma) = \sum_{\tau \in \Sigma_{n-1}} \varepsilon_\sigma^\tau \cdot \tau$$

3.7 Proposition. Es gilt

$$\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$$

Damit folgt im $\partial_n \subseteq \ker \partial_{n-1}$.

Beweis: Sei σ ein n-Simplex von K. Dann gilt

$$\begin{aligned} \partial_{n-1}(\partial_n(\sigma)) = \partial_{n-1}\left(\sum_{\tau \in \Sigma_{n-1}} \varepsilon_\sigma^\tau \cdot \tau\right) = \sum_{\tau \in \Sigma_{n-1}} \varepsilon_\sigma^\tau \cdot \partial_{n-1}(\tau) &= \sum_{\tau \in \Sigma_{n-1}} \varepsilon_\sigma^\tau \left(\sum_{\eta \in \Sigma_{n-2}} \varepsilon_\tau^\eta \cdot \eta\right) \\ &= \sum_{\eta \in \Sigma_{n-2}} \left(\sum_{\tau \in \Sigma_{n-1}, \eta \subseteq \tau \subseteq \sigma} \varepsilon_\tau^\eta \cdot \varepsilon_\sigma^\tau\right) \eta \\ &\overset{\text{Lemma 3.8}}{=} 0 \end{aligned}$$

□

3.8 Lemma. Sei σ ein n-Simplex. Sei $\eta \subseteq \sigma$ ein $(n-2)$-Simplex. Dann gibt es genau zwei $(n-1)$-Simplizes τ, τ' von K, die eine Seite von σ sind und η als Seite enthalten. Es gilt

$$\varepsilon_\tau^\eta \cdot \varepsilon_\sigma^\tau = -\varepsilon_{\tau'}^\eta \cdot \varepsilon_\sigma^{\tau'}$$

Beweis: Sei $\sigma = \{v_0, \ldots, v_n\}$ mit $v_0 < v_1 < \ldots < v_n$. Dann ist $\eta = \{v_0, \ldots, v_n\} \setminus \{v_i, v_j\}$ mit $i < j$. Dann sind $\tau = \{v_0, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n\}$ und $\tau' = \{v_0, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_n\}$ die gesuchten $(n-1)$-Simplizes und es gilt

$$\varepsilon_\sigma^\tau = (-1)^i \quad , \quad \varepsilon_\sigma^{\tau'} = (-1)^j \quad , \quad \varepsilon_\tau^\eta = (-1)^{j-1} \quad , \quad \varepsilon_{\tau'}^\eta = (-1)^i$$

□

Wir vereinbaren die folgende Notation: Für $\sigma \in \Sigma_n$, $\sigma = \{v_0, \ldots, v_n\}$ mit $v_0 < \ldots < v_n$ schreiben wir

$$\delta^j \sigma := \{v_0, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_n\} \in \Sigma_{n-1}$$

Dann ist $\partial_n(\sigma) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \cdot \delta^j \sigma$.

In Aufgabe 3 von Blatt 3 haben wir gezeigt, dass die Homologiemoduln für verschiedene Ordnungen auf der gleichen Menge isomorph sind.

3.9 Definition. Sei K ein geordneter simplizialer Komplex. Der ***n-te Homologiemodul*** von K über R ist definiert als

$$H_n(K; R) := \frac{\ker \partial_n : C_n(K; R) \to C_{n-1}(K; R)}{\operatorname{im} \partial_{n+1} : C_{n+1}(K; R) \to C_n(K; R)}$$

Für $n = 0$ interpretieren wir ∂_0 als die Nullabbildung. Daher gilt

$$H_0(K; R) = \frac{C_0(K; R)}{\operatorname{im} \partial_1 : C_1(K; R) \to C_0(K; R)}$$

3.10 Beispiel. Für ausreichend „einfache“ Komplexe können wir die Homologie direkt ausrechnen:

(1) Sei $K = \bullet$. Dann ist $C_0(K; R) \cong R$ und $C_i(K; R) = 0$ für $i > 0$. Weiter ist $H_0(K; R) = C_0(K; R) \cong R$ und $H_i(K; R) = 0$ für $i > 0$.

(2) Sein nun $K = K_n$ das n-Eck, wobei $n \geqslant 3$. Also

$$\begin{aligned} \Sigma_0 &= \big\{\tau_1 = \{1\}, \tau_2 = \{2\}, \ldots, \tau_n = \{n\}\big\} \\ \Sigma_1 &= \big\{\sigma_1 = \{1,2\}, \ldots, \sigma_{n-1} = \{n-1, n\}, \sigma_n = \{1, n\}\big\} \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} &C_0(K; R) = R[\Sigma_0] \cong R^n \\ &C_1(K; R) = R[\Sigma_1] \cong R^n \\ &C_i(K; R) = 0 \text{ für } i > 1, \text{ insbesondere } H_i(K; R) = 0 \text{ für } i > 1 \end{aligned}$$

Es ist dann $\partial_2 = \partial_3 = \ldots = 0$. Interessant ist $\partial_1 : C_1(K; R) \to C_0(K; R)$, denn es gilt

$$\partial_1(\sigma_i) = \begin{cases} \tau_{i+1} - \tau_i, & \text{falls } i = 1, \ldots, n-1 \\ \tau_n - \tau_1, & \text{falls } i = n \end{cases}$$

Mit $\sigma_1' := \sigma_1, \sigma_2' := \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}' := \sigma_{n-1}$ und $\sigma_n' := -\sigma_n$ gilt dann

$$\partial_1(\sigma_i') = \tau_{i+1} - \tau_i$$

mit der Konvention $\tau_{n+1} = \tau_1$. Also gilt

$$\partial_1\left(\sum_{i=1}^n r_i \sigma_i'\right) = \sum_{i=1}^n r_i(\tau_{i+1} - \tau_i) = \sum_{i=1}^n (r_{i-1} - r_i)\tau_i$$

Es folgt

$$\ker \partial_1 = \left\{ \sum_{i=1}^{n} r_i \cdot \sigma_i' \,\middle|\, r_1 = r_2 = \ldots = r_n \right\} \subseteq C_1(K;R)$$
$$\operatorname{im} \partial_1 = \left\{ \sum_{i=1}^{n} s_i \cdot \tau_i \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} s_i = 0 \right\} \subseteq C_0(K;R)$$

Ist $\sum_{i=1}^n s_i = 0$, so folgt für $r_n = 0, r_1 = -s_1, r_2 = -s_1 - s_2, \ldots, r_{n-1} = -s_1 - s_2 - \ldots - s_{n-1}$

$$\partial_1\left(\sum_{i=1}^{n} r_i \sigma_i'\right) = \sum_{i=1}^{n} s_i \tau_i$$

Es folgt $H_1(K;R) = {}^{\ker \partial_1}/_{\operatorname{im} \partial_2} = \ker \partial_1 \cong R$ und

$$H_0(K;R) = {}^{\ker \partial_0}/_{\operatorname{im} \partial_1} = {}^{R[\Sigma_0]}/_{\{\sum_{i=1}^n s_i\tau_i \mid \sum_{i=1}^n s_i = 0\}} \cong R$$

(via $\sum_{i=1}^n s_i\tau_i \longmapsto \sum_{i=1}^n s_i$ und Homomorphiesatz)

3.11 Definition. Sei R ein Ring. Ein ***R-Kettenkomplex*** (C_*, d_*) ist eine Folge von R-Moduln $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zusammen mit R-linearen Abbildungen $(d_n\colon C_n \to C_{n-1})_{n\geqslant 1}$, so dass $d_n \circ d_{n+1} = 0$. Die d_n heißen die ***Randabbildungen*** von (C_*, d_*), die C_n die ***Kettenmoduln***. Die ***n-te Homologie*** eines Kettenkomplexes (C_*, d_*) ist definiert als

$$H_n(C_*, d_*) := \frac{\ker d_n\colon C_n \to C_{n-1}}{\operatorname{im} d_{n+1}\colon C_{n+1} \to C_n}$$

3.12 Bemerkung.

(i) Oft werden auch Kettenkomplexe betrachtet, die $\mathbb{Z}$ statt $\mathbb{N}$ verwenden.

(ii) Ein Kettenkomplex (C_*, d_*) heißt endlich erzeugt, wenn alle C_n endlich erzeugte R-Moduln sind und $C_n \neq 0$ nur für endlich viele n ist.

3.13 Definition. Zu einem geordneten simplizialen Komplex K heißt $\big(C_*(K;R), \partial_*\big)$ der ***simpliziale Kettenkomplex*** von K über R.

Ist K endlich, so ist $\big(C_*(K;R), \partial_*\big)$ endlich erzeugt.

4 Euler-Charakteristik von Kettenkomplexen

4.1 Erinnerung. Sei A eine abelsche Gruppe. Dann ist

$$TA := \left\{ a \in A \;\middle|\; \exists n \geqslant 1 : n \cdot a = \underbrace{a + \ldots + a}_{n\text{-mal}} = 0 \right\}$$

abelsche Gruppen sind $\mathbb{Z}$-Moduln

die ***Torsionsgruppe*** von A. Ist A endlich erzeugt, so ist auch TA endlich erzeugt und es gibt Primzahlpotenzen $p_1^{n_1}, \ldots, p_k^{n_k}$ mit

$$TA \cong \mathbb{Z}/(p_1^{n_1}) \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}/(p_k^{n_k})$$

Weiter gibt es dann n mit $A \cong \mathbb{Z}^n \oplus TA$. $\operatorname{Rg} A := n$ ist der ***Rang*** von A.

4.2 Lemma. Sei A eine endlich erzeugte abelsche Gruppe. Dann gilt

$$\operatorname{Rg} A = \max\left\{ m \;\middle|\; \exists C \leqslant A, C \cong \mathbb{Z}^m \right\}.$$

Beweis: Da $A \cong \mathbb{Z}^n \oplus TA$ ist, genügt zu zeigen: Ist $\varphi\colon \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}^n \oplus TA$ ein injektiver Gruppenhomomorphismus, so ist $m \leqslant n$. Schreibe $\varphi = \varphi_0 \oplus \varphi_1$, also $\varphi(a) = \varphi_0(a) + \varphi_1(a)$ mit $\varphi_0\colon \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}^n$, $\varphi_1\colon \mathbb{Z}^m \to TA$.

Behauptung: φ_0 ist injektiv. Zu $v \in \mathbb{Z}^m$ wähle $k \geqslant 1$ mit $k \cdot \varphi_1(v) = 0 \in TA$. Dann ist $\varphi_1(kv) = k\varphi_1(v) = 0$. Ist $v \neq 0$, so ist $k \cdot v \neq 0 \in \mathbb{Z}^m$, also ist $\varphi(kv) \neq 0$ und damit $\varphi_0(kv) \neq 0$. Es folgt $\varphi_0(v) \neq 0$, da sonst $\varphi_0(k \cdot v) = k \cdot \varphi_0(v) = 0$. Damit ist die Behauptung gezeigt.

Gruppenhomomorphismen $\varphi_0\colon \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}^n$ werden durch $n \times m$-Matrizen beschrieben: Es gibt $A = (a_{ij}) \in \mathbb{Z}^{n \times m}$ mit

$$\varphi_0 \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m a_{1j} \cdot z_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m a_{nj} \cdot z_j \end{pmatrix}$$

Ist $m > n$, so hat A, aufgefasst als Matrix über $\mathbb{Q}$, einen Kern. Es gibt also einen Vektor $w = \begin{pmatrix} a_1/b_1 \\ \vdots \\ a_m/b_m \end{pmatrix}$ mit $Aw = 0$, $w \neq 0$. Dann ist $(b_1, \ldots, b_m) \cdot w \in \mathbb{Z}^m$ und

$$\varphi_0\big((b_1, \ldots, b_m) \cdot w\big) = A \cdot \big((b_1, \ldots, b_m) \cdot w\big) = (b_1, \ldots, b_m) \cdot A \cdot w = 0$$

Dies ist ein Widerspruch zur Injektivität von φ_0. Also gilt $m \leqslant n$. □

4.3 Definition. Seien M_0, M_1, M_2 R-Moduln und $f_0\colon M_0 \to M_1$, $f_1\colon M_1 \to M_2$ R-lineare Abbildungen. Dann heißt

$$M_0 \overset{f_0}{\hookrightarrow} M_1 \overset{f_1}{\twoheadrightarrow} M_2 \qquad [*]$$

eine ***kurze exakte Sequenz***, wenn gilt:

(i) f_0 ist injektiv, **(ii)** $\operatorname{im} f_0 = \ker f_1$, **(iii)** f_1 ist surjektiv.

Oft sagt man $M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} M_2$ ist exakt in M_1, wenn $\operatorname{im} f_0 = \ker f_1$ ist. Dann ist [*] eine kurze exakte Folge, wenn

$$0 \longrightarrow M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \longrightarrow 0$$

exakt in M_0, M_1 und M_2 ist.

4.4 Beispiel. Es gibt zahlreiche Beispiele für kurze exakte Sequenzen:

1)
$$\begin{aligned} M_0 &\xhookrightarrow{i} M_0 \oplus M_1 \xrightarrow{p} M_1 \\ v_0 &\xmapsto{i} (v_0, 0) \quad (v_0, v_1) \xmapsto{p} v_1 \end{aligned}$$

ist eine kurze exakte Folge.

2) $\mathbb{Z} \xhookrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist eine kurze exakte Folge.

4.5 Bemerkung. Eine ***Spaltung*** für eine kurze exakte Folge $M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} M_2$ ist eine R-lineare Abbildung $s\colon M_2 \to M_1$ mit $f_1 \circ s = \mathrm{id}_{M_2}$. In diesem Fall erhalten wir einen Isomorphismus $M_0 \oplus M_2 \to M_1$, $(v_0, v_2) \mapsto f_0(v_0) + s(v_2)$.

Injektivität: Sei $(v_0, v_2) \in M_0 \oplus M_2$ mit $f_0(v_0) + s(v_2) = 0$. Dann gilt

$$0 = f_1\big(f_0(v_0) + s(v_2)\big) = v_2 \implies f_0(v_0) = 0 \implies v_0 = 0$$

Surjektivität: Sei $v_1 \in M_1$. Betrachte $v_2 := f_1(v_1)$. Dann ist $v_1 - s(v_2) \in \ker f_1 = \operatorname{im} f_0$, also gibt es v_0 in M_0 mit $f_0(v_0) = v_1 - s(v_1)$. Damit ist $v_1 = f_0(v_0) + s(v_1)$.

4.6 Bemerkung. **1)** Die kurze exakte Sequenz $\mathbb{Z} \xhookrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ spaltet nicht.

2) Ist $M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} M_2$ eine kurze exakte Folge mit M_2 frei, also $M_2 \cong R[S]$, so spaltet die Folge. Insbesondere ist $M_1 \cong M_0 \oplus M_2$. Dazu wenden wir Lemma 3.2 an und erhalten eine R-lineare Abbildung $s\colon M_2 \to M_1$, sodass folgendes Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd} & M_1 \arrow[d, two heads, "f_1"] \\ R[S] \arrow[ur, dashed, "s"] \arrow[r, "\mathrm{id}"] & R[S] \end{tikzcd}$$

s ist also die gesuchte Spaltung. Dieses Vorgehen funktioniert bei jedem projektiven Modul.

4.7 Bemerkung. Der Rang für alle endlich erzeugten abelschen Gruppen ist additiv:

$$\operatorname{Rg}(A \oplus B) = \operatorname{Rg} A + \operatorname{Rg} B,$$

da $A \cong \mathbb{Z}^{\operatorname{Rg} A} \oplus TA$, $B \cong \mathbb{Z}^{\operatorname{Rg} B} \oplus TB$, also

$$A \oplus B \cong \mathbb{Z}^{\operatorname{Rg} A + \operatorname{Rg} B} \oplus \underbrace{TA \oplus TB}_{= T(A \oplus B)}$$

4.8 Proposition. Der Rang von endlich erzeugten abelschen Gruppen ist additiv für kurze exakte Folgen: Ist

$$A \xhookrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \qquad [\star]$$

eine kurze exakte Folge von endlich erzeugten abelschen Gruppen, so gilt $\operatorname{Rg} B = \operatorname{Rg} A + \operatorname{Rg} C$.

Beweis: Spaltet [$\star$], so ist $B \cong A \oplus C$ und die Behauptung folgt aus der Bemerkung 4.7. Wir können annehmen, dass $C = \mathbb{Z}^n \oplus TC$ gilt. Wir erhalten folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, equal] & p^{-1}(\mathbb{Z}^n) \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[d, hook, "i''"] & \mathbb{Z}^n \arrow[d, hook, "i'"] \\
A \arrow[r, hook, "i"] & B \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[d, two heads, "p''"] & C \arrow[d, two heads, "p'"] \\
& B/p^{-1}(\mathbb{Z}^n) \arrow[r, hook, two heads, "p' \circ p"] & TC
\end{tikzcd} \qquad [\star]$$

Ist $p' \circ p(b) = 0$, so gibt es $v \in \mathbb{Z}^n$ mit $i'(v) = p(b)$. Nun gibt es $v' \in p^{-1}(\mathbb{Z}^n)$ mit $p(v') = v$. Es folgt

$$p\big(i''(v')\big) = p(b)$$

also $i''(v') - b \in \ker p = i(A)$. Da $i(A) \subseteq i''\big(p^{-1}(\mathbb{Z}^n)\big)$, folgt $b \in i''\big(p^{-1}(\mathbb{Z}^n)\big)$. In dem Diagramm sind die Spalten und Zeilen exakt. Da $\mathbb{Z}^n$ frei ist, spaltet $A \xhookrightarrow{i} p^{-1}(\mathbb{Z}^n) \xrightarrow{p} \mathbb{Z}^n$ und es gilt

$$\operatorname{Rg} A + \operatorname{Rg} C = \operatorname{Rg} A + n = \operatorname{Rg}\big(p^{-1}(\mathbb{Z}^n)\big)$$

Es bleibt zu zeigen: $\operatorname{Rg} B = \operatorname{Rg}\big(p^{-1}(\mathbb{Z}^n)\big)$.

Nebenbei: Ist $A' \subseteq B'$, so gilt $\operatorname{Rg} A' \leqslant \operatorname{Rg} B'$, denn

$$\operatorname{Rg} A' = \max\Big\{n' \;\Big|\; \mathbb{Z}^{n'} \cong C' \leqslant A'\Big\} \leqslant \max\Big\{n' \;\Big|\; \mathbb{Z}^{n'} \cong C' \leqslant B'\Big\} = \operatorname{Rg} B'.$$

Betrachte die kurze exakte Folge

$$p^{-1}(\mathbb{Z}^n) \longrightarrow B \longrightarrow B/p^{-1}(\mathbb{Z}^n)$$

Wegen $B/p^{-1}(\mathbb{Z}^n) \cong TC$ gibt es ein k mit $k \cdot \big(b + p^{-1}(\mathbb{Z}^n)\big) = 0$ für alle $b \in B$. Also $k \cdot b \in p^{-1}(\mathbb{Z}^n)$. Es folgt $kB \subseteq p^{-1}(\mathbb{Z}^n)$. Ist $B \cong \mathbb{Z}^{\operatorname{Rg} B} + TB$, so ist $kB \cong (k\mathbb{Z})^{\operatorname{Rg} B} + T(kB)$ und $\operatorname{Rg} kB = n = \operatorname{Rg} B$. Mit der Nebenbemerkung folgt $\operatorname{Rg} p^{-1}(\mathbb{Z}^n) = \operatorname{Rg} B$ aus $kB \subseteq p^{-1}(\mathbb{Z}^n) \subseteq B$. $\square$

Man kann die Proposition auch mittels Tensorprodukten beweisen. Dazu geht man wie folgt vor:

- $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \colon \mathbb{Z}$-Mod $\to \mathbb{Q}$-VR ist ein Funktor.
- $\operatorname{Rg} A = \dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} A)$
  - **(a)** $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} (X \oplus Y) = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} X \oplus \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} Y$
  - **(b)** $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^n \cong \mathbb{Q}^n$
  - **(c)** $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} T \cong 0$ für T ein Torsionsmodul.
- Ist $A \longrightarrow B \longrightarrow C$ eine kurze exakte Folge, so ist auch $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} A \longrightarrow \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} B \longrightarrow \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} C$ eine kurze exakte Folge.
- Jede kurze exakte Folge $V_0 \longrightarrow V_1 \longrightarrow V_2$ von $\mathbb{Q}$-Vektorräumen spaltet und daher gilt $V_1 \cong V_0 \oplus V_2$ und $\dim_{\mathbb{Q}}(V \oplus W) = \dim_{\mathbb{Q}}(V) + \dim_{\mathbb{Q}}(W)$.

4.9 Definition. Sei (C_*, d_*) ein endlich erzeugter $\mathbb{Z}$-Kettenkomplex.

$$\chi(C_*) := \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{Rg}(C_i) = \sum_{i=0}^{n_0} \mathrm{Rg}(C_i)$$

heißt die ***Eulercharakteristik*** von (C_*, d_*). Dabei ist n_0 so gewählt, dass $C_n = 0$ für alle $n > n_0$.

4.10 Satz. Sei (C_*, d_*) ein endlich erzeugter $\mathbb{Z}$-Kettenkomplex. Dann gilt

$$\chi(C_*) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \,\mathrm{Rg}\, H_i(C_*, d_*).$$

Beweis: Sei $B_{n+1} := \operatorname{im} d_{n+1} \colon C_{n+1} \to C_n$ und $Z_n := \ker d_n \colon C_n \to C_{n-1}$. Also $H_n(C_*, d_*) = {}^{Z_n}/_{B_{n+1}}$. Als Untermoduln von C_n sind Z_n und B_n endlich erzeugt (LA2). Insbesondere ist auch $H_n(C_*, d_*)$ endlich erzeugt und der Rang somit definiert. Auch B_{n+1} ist Untermodul des endlich erzeugten $\mathbb{Z}$-Moduls C_n und somit endlich erzeugt. Wir erhalten kurze exakte Folgen:

$$B_{n+1} \hookrightarrow Z_n \twoheadrightarrow H_n(C_*, d_*)$$
$$Z_n \hookrightarrow C_n \twoheadrightarrow B_n$$

Nach Proposition 4.8 gilt $\mathrm{Rg}\, Z_n = \mathrm{Rg}\, B_{n+1} + \mathrm{Rg}\, H_n(C_*, d_*)$ und $\mathrm{Rg}\, C_n = \mathrm{Rg}\, Z_n + \mathrm{Rg}\, B_n$. Also gilt

$$\begin{aligned}
\chi(C_*) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \,\mathrm{Rg}\, C_i &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \big(\mathrm{Rg}\, Z_i + \mathrm{Rg}\, B_i\big) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \Big(\mathrm{Rg}\, H_i(C_*, d_*) + \mathrm{Rg}\, B_{i+1} + \mathrm{Rg}\, B_i\Big) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \,\mathrm{Rg}\, H_i(C_*, d_*) + \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \,\mathrm{Rg}\, B_{i+1} + \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \,\mathrm{Rg}\, B_i \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \,\mathrm{Rg}\, H_i(C_*, d_*)
\end{aligned}$$

□

4.11 Korollar. Sei K ein endlicher, geordneter simplizialer Kettenkomplex. Dann gilt

$$\chi(K) = \sum_{i=1}^{\dim K} (-1)^i \,\mathrm{Rg}\, H_i(K; \mathbb{Z})$$

Eine vereinfachte Variante dieser Aussage kam in Aufgabe 2 von Blatt3 vor: Dort haben wirden Homologiemodul über einen Körper betrachtet. Deshalb konnte wir da dann die Dimensionsformeln anwenden, um die beiden Voraussetzungen für die Rechnung in 4.10 zu erhalten.

Beweis: Wende den Satz 4.10 auf den simplizialen Kettenkomplex von K an. Da

$$\mathrm{Rg}\, C_n(K; \mathbb{Z}) = \mathrm{Rg}\, \mathbb{Z}[\Sigma_n] = \#\ n\text{-Simplizes in } K$$

ist

$$\chi(K) = \chi\big(C_*(K; \mathbb{Z}), \partial_*\big) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \,\mathrm{Rg}\, H_i\big(C_*(K; \mathbb{Z}), \partial_*\big) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \,\mathrm{Rg}\, H_i(K; \mathbb{Z})$$

□

5 Singuläre Homologie

5.1 Definition. Sei X ein topologischer Raum. Sei $S_n(X)$ die Menge aller stetigen Abbildungen $\sigma\colon |\Delta^n| \to X$. Elemente von $S_n(X)$ heißen ***singuläre Simplizes*** in X. Sei R ein Ring. Der ***n-te (singuläre) Kettenmodul*** von X über R ist

$$C_n(X;R) := R\big[S_n(X)\big]$$

5.2 Definition. Für $\sigma \in S_n(X)$ und $j \in \{0,\dots,n\}$ sei $\delta_j\sigma \in S_{n-1}(X)$ die Einschränkung von σ auf die j-te Seite von $|\Delta^n|$, also $\delta_j(\sigma) = \sigma \circ \iota_{n,j}$, wobei $\iota_{n,j}\colon |\Delta^{n-1}| \to |\Delta^n|$ die Inklusion der j-ten Seite ist:

$$\iota_{n,j}(x_0,\dots,x_{n-1}) = \big(x_0,\dots,x_{j-1},0,x_j,\dots,x_{n-1}\big)$$

vergleiche Blatt 2, Aufgabe 2

5.3 Bemerkung. Es gilt $\iota_{n,j} = |i_{n,j}|$ wobei $i_{n,j}\colon \Delta^{n-1} \to \Delta^n$ gegeben ist durch

$$i_{n,j}(k) = \begin{cases} k, & \text{falls } k < j \\ k+1, & \text{falls } k \geqslant j \end{cases}$$

5.4 Definition. Die ***n-te singuläre Randabbildung*** $\partial_n\colon C_n(X;R) \to C_{n-1}(X;R)$ ist definiert durch

$$\partial_n(\sigma) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \cdot \delta_j(\sigma).$$

5.5 Proposition. Es gilt

$$\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$$

Beweis: Wir rechnen die Behauptung einfach für $\sigma\colon |\Delta^n| \to X$ nach:

$$\begin{aligned}
\partial_{n-1} \circ \partial_n(\sigma) = \partial_{n-1}\left(\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\delta_j(\sigma)\right) &= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n}(-1)^{j+k}\delta_k\delta_j(\sigma) \\
&= \sum_{0\leqslant k<j\leqslant n}(-1)^{k+j}\delta_k\delta_j(\sigma) + \sum_{0\leqslant j\leqslant k\leqslant n-1}(-1)^{k+j}\delta_k\delta_j(\sigma) \\
&\overset{5.6}{=} \sum_{0\leqslant k<j\leqslant n}(-1)^{k+j}\delta_k\delta_j(\sigma) + \sum_{0\leqslant j\leqslant k\leqslant n-1}(-1)^{k+j}\delta_j\delta_{k+1}(\sigma) \\
&= \sum_{0\leqslant k<j\leqslant n}(-1)^{k+j}\delta_k\delta_j(\sigma) + \sum_{0\leqslant j<k\leqslant n}(-1)^{k-1+j}\delta_j\delta_k(\sigma) \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

5.6 Lemma. Für $0 \leqslant j \leqslant k \leqslant n-1$ und $\sigma \in S_n(X)$ ist $\delta_k\delta_j(\sigma) = \delta_j\delta_{k+1}(\sigma)$.

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned}
\delta_k\big(\delta_j(\sigma)\big)(x_0,\dots,x_{n-2}) &= \delta_j(\sigma)\big(x_0,\dots,x_{k-1},0,x_k,\dots,x_{n-2}\big) \\
&= \big(x_0,\dots,x_{j-1},0,x_j,\dots,x_{k-1},0,x_k,\dots,x_{n-2}\big)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\delta_j\delta_{k+1}(\sigma)(x_0,\dots,x_{n-2}) &= \delta_{k+1}(\sigma)\big(x_0,\dots,x_{j-1},0,x_j,\dots,x_{n-2}\big) \\
&= \big(x_0,\dots,x_{j-1},0,x_j,\dots,x_{k-1},0,x_k,\dots,x_{n-2}\big)
\end{aligned}$$

□

5.7 Definition. Sei X ein topologischer Raum. Die Homologie des ***singulären Kettenkomplex*** über R, $\big(C_*(X;R), \partial_*\big)$, heißt die ***singuläre Homologie von*** X mit Koeffizienten in R:

$$H_n(X;R) := H_n\big(C_*(X;R), \partial_*\big)$$

Für $R = \mathbb{Z}$ schreiben wir kürzer $C_*(X) := C_*(X;\mathbb{Z})$ und $H_n(X) := H_n(X;\mathbb{Z})$.

- Die Elemente von $C_n(X;R)$ heißen ***n-Ketten***.
- Die Elemente von $\operatorname{im}\partial_{n+1} \subseteq C_n(X;R)$ heißen ***n-Ränder***.
- Die Elemente von $\ker\partial_n \subseteq C_n(X;R)$ heißen ***n-Zykel***.

Jeder n-Zykel $\sigma \in C_n(X;R)$ bestimmt eine ***Homologieklasse*** $[\sigma] := \sigma + \operatorname{im}\partial_{n+1} \in H_n(X;R)$.

5.8 Beispiel. Ist $X = \{x_0\}$ der Ein-Punkt-Raum, so ist

$$H_*\big(\{x_0\};R\big) \cong \begin{cases} R, & \text{falls } * = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis: Es gibt für jedes n genau eine Abbildung $\sigma_n\colon |\Delta^n| \to \{x_0\}$ nämlich die konstante. Diese ist offensichtlich stetig. Also ist$C_n(\{x_0\};R) = R[\sigma_n]$. Für alle j ist $\delta_j\sigma_n = \sigma_{n-1}$. Daher ist

$$\partial_n(\sigma_n) = \begin{cases} 0, & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \sigma_{n-1}, & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

Der singuläre Kettenkomplex von $\{x_0\}$ hat also folgende Gestalt:

$$\begin{tikzcd}
C_0(\{x_0\};R) \arrow[d, phantom, "\cong"] & C_1(\{x_0\};R) \arrow[l, "0"'] \arrow[d, phantom, "\cong"] & C_2(\{x_0\};R) \arrow[l, "\cong"'] \arrow[d, phantom, "\cong"] & C_3(\{x_0\};R) \arrow[l, "0"'] \arrow[d, phantom, "\cong"] & \cdots \arrow[l, "\cong"'] \arrow[d, phantom, "\cong"] \\
R & R \arrow[l, "0"] & R \arrow[l, "\mathrm{id}"] & R \arrow[l, "0"] & R \arrow[l, "\mathrm{id}"]
\end{tikzcd}$$

Es folgt

$$H_n\big(\{x_0\};R\big) \cong \begin{cases} R, & \text{falls } n = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$ □

5.9 Proposition.

1) Ist $X \neq \emptyset$, so ist $H_0(X) \neq 0$.
2) Ist X wegzusammenhängend, so gilt $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$.[a]

[a] Tatsächlich gilt auch die Umkehrung, wie in Aufgabe 4 von Blatt 3 gezeigt.

Eine analoge Aussage für simpliziale Komplexe haben wir in Aufgabe 3 von Blatt 2 bewiesen

Beweis: 1) Sei die sogenannte ***Augmentierung*** $\epsilon\colon C_0(X) \to \mathbb{Z}$ definiert durch

$$\epsilon\left(\sum_{\sigma\in S_0(X)} r_\sigma \cdot \sigma\right) := \sum_\sigma r_\sigma.$$

Dann ist $\epsilon\circ\partial_1\colon C_1(X) \to \mathbb{Z}$ trivial, denn für $\sigma \in S_1(X)$ ist $\epsilon\circ\partial_1(\sigma) = \epsilon(\delta_0\sigma - \delta_1\sigma) = 0$. Daher induziert ϵ eine Abbildung $\overline{\epsilon}\colon H_0(X) \to \mathbb{Z}$. Da $X \neq \emptyset$ ist, gibt es einen singulären 0-Simplex $\sigma\colon |\Delta^0| \to X$. Für σ gilt $\overline{\epsilon}([\sigma]) = 1$ und daher ist $\overline{\epsilon}$ surjektiv und $H_0(X) \neq 0$.

2) Wir zeigen, dass $\overline{\epsilon}\colon H_0(X) \to \mathbb{Z}$ ein Isomorphismus ist, falls X wegzusammenhängend ist. Dazu zeigen wir $\ker \epsilon = \operatorname{im} \partial_1$. Dazu definieren wir $s\colon C_0(X) \to C_1(X)$ wie folgt: Sei σ_0 ein fest gewählter singulärer 0-Simplex. Zu $\sigma \in S_0(X)$ gibt es, da X wegzusammenhängend ist, $s(\sigma) \in S_1(X)$ mit $\delta_0 s(\sigma) = \sigma$, $\delta_1 s(\sigma) = \sigma_0$. Es gilt nun

$$\partial_1 \circ s(\sigma) = \sigma - \sigma_0 = \big(\mathrm{id}_{C_0(X)} - i \circ \epsilon\big)(\sigma)$$

wobei $i\colon \mathbb{Z} \to C_0(X)$, $n \mapsto n \cdot \sigma_0$. Ist nun $\nu \in \ker \epsilon$, so folgt

$$\partial_1 \circ s(\nu) = \nu - i \circ \underbrace{\epsilon(\nu)}_{=0} = \nu$$

also ist $\nu \in \operatorname{im} \partial_1$ und es folgt die Behauptung. □

5.10 Bemerkung. Sei $K = (V, \Sigma)$ ein geordneter simplizialer Komplex. Sei $\sigma = \{v_0, \dots, v_n\} \in \Sigma_n$ ein n-Simplex von K mit $v_0 < v_1 < \ldots < v_n$. Wir ordnen σ den singulären n-Simplex $f_\sigma\colon |\Delta^n| \to |\Delta^\sigma| \subseteq |K|$ zu, wobei

$$f_\sigma\left(\sum_{i=0}^{n} t_i \cdot e_i\right) = \sum_{i=0}^{n} t_i \cdot v_i.$$

Nun erhalten wir eine Abbildung

$$C_*(K;R) \to C_*(|K|, R) \quad , \qquad \sum_{\sigma\in\Sigma_n} r_\sigma \cdot \sigma \longmapsto \sum_{\sigma\in\Sigma_n} r_\sigma \cdot f_\sigma.$$

Diese Abbildung induziert(!) eine weitere Abbildung $H_*(K;R) \xrightarrow{\cong} H_*(|K|;R)$ von der wir später zeigen werden, dass sie ein Isomorphismus ist.

6 Funktorialität

6.1 Definition. Seien (C_*, d_*) und (C'_*, d'_*) zwei R-Kettenkomplexe. Dann ist eine ***R-Kettenabbildung*** $f_*\colon (C_*, d_*) \to (C'_*, d'_*)$ eine Folge von R-linearen Abbildungen $f_n\colon C_n \to C'_n$, sodass

$$d'_n \circ f_n = f_{n-1} \circ d_n$$

für alle $n \geqslant 1$ gilt. Also kommutiert folgendes Diagramm

$$\begin{tikzcd}
C_0 \arrow[d, "f_0"] & C_1 \arrow[l, "d_1"'] \arrow[d, "f_1"] & C_2 \arrow[l, "d_2"'] \arrow[d, "f_2"] & C_3 \arrow[l, "d_3"'] \arrow[d, "f_3"] & \ldots \arrow[l] \\
C'_0 & C'_1 \arrow[l, "d'_1"] & C'_2 \arrow[l, "d'_2"] & C'_3 \arrow[l, "d'_3"] & \ldots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

6.2 Bemerkung. Ist $f_*\colon (C_*, d_*) \to (C'_*, d'_*)$ eine Kettenabbildung, so erhalten wir eine induzierte Abbildung auf Homologie $H_n(f_*)\colon H_n(C_*, d_*) \to H_n(C'_*, d'_*)$ durch

$$H_n(f_*)([v]) := [f_n(v)]$$

für $v \in \ker d_n$. Dies ist wohldefiniert, denn:

- $d'_n\big(f_n(v)\big) = f_{n-1}\big(d_n(v)\big) = 0$, also $f_n(v) \in \ker d'_n$ für $v \in \ker d_n$.
- Ist $[v] = [w]$, mit $v, w \in \ker d_n$, so gibt es $x \in C_{n+1}$ mit $d_{n+1}(x) = v - w$. Dann ist

  $$d'_{n+1}\big(f_{n+1}(x)\big) = f_n\big(d_{n+1}(x)\big) = f_n(v) - f_n(w)$$

  also $[f_n(v)] = [f_n(w)] \in H_n(C'_*, d'_*)$.

6.3 Bemerkung.

a) R-Kettenkomplexe mit R-Kettenabbildungen bilden die Kategorie R-Ketten.

b) Homologie definiert nun einen Funktor: $H_n\colon$ R-Ketten $\to$ R-Mod.
Es gilt $H_n(\mathrm{id}_{(C_*,d_*)}) = \mathrm{id}_{H_n(C_*,d_*)}$ und $H_n(f \circ g) = H_n(f) \circ H_n(g)$, da

$$H_n(f \circ g)([v]) = [f_n \circ g_n(v)] = \big[f_n\big(g_n(v)\big)\big] = H_n(f)\big([g_n(v)]\big) = H_n(f)\big(H_n(g)(v)\big)$$

c) Definiert man die Kategorie der ***graduierten*** R-Moduln als die Kategorie, deren Objekte Folgen $(V_n)_n$ von $\mathbb{R}$-Moduln sind und deren Morphismen Folgen von R-linearen Abbildungen $(f_n)_n$ sind, so kann man die H_n, $n \in \mathbb{N}$ zu einem Funktor

$$H_*\colon \text{R-Ketten} \longrightarrow \text{Gr-R-Mod} \quad , \qquad (C_*, d_*) \longmapsto \big(H_n(C_*, d_*)\big)_n$$

zusammensetzen.

6.4 Definition. Sei $f\colon X \to Y$ stetig. Wir definieren $C_n(f; R)\colon C_n(X; R) \to C_n(Y; R)$ durch

$$C_n(f;R)\left(\sum_{\sigma \in S_n(X)} r_\sigma \cdot \sigma\right) := \sum_{\sigma \in S_n(X)} r_\sigma \cdot (f \circ \sigma)$$

Dies ist wohldefiniert, denn für $\sigma \in S_n(X)$ ist $f \circ \sigma \in S_n(Y)$.

6.5 Proposition. Mit dieser Definition von $C_*(f;R)$ wird der singuläre Kettenkomplex über R zu einem Funktor

$$C_*(-;R)\colon \mathrm{Top} \to R\text{-}\mathrm{Ketten}$$

Beweis:

(i) $C_*(f;R)$ ist eine R-Kettenabbildung: Es gilt

$$C_{n-1}(f;R)\circ \partial_n(\sigma) = C_{n-1}(f;R)\left(\sum_{l=0}^{n}(-1)^l\cdot\sigma\circ\iota_{n,l}\right) = \sum_{l=0}^{n}(-1)^l\cdot(f\circ\sigma)\circ\iota_{n,l}$$
$$= \partial_n(f\circ\sigma) = \partial\big(C_n(f;R)(\sigma)\big).$$

(ii) Zu zeigen: $C_*(f\circ g;R) = C_*(f;R)\circ C_*(g;R)$. Es gilt

$$C_n(f\circ g;R)(\sigma) = f\circ(g\circ\sigma) = C_n(f;R)(g\circ\sigma) = C_n(f;R)\big(C_n(g;R)(\sigma)\big).$$

(iii) Zu zeigen: $C_*(\mathrm{id}_X;R) = \mathrm{id}_{C_*(X;R)}$. Es gilt

$$C_n(\mathrm{id}_X;R)(\sigma) = \mathrm{id}_X\circ\sigma = \sigma$$ □

6.6 Korollar. Mit $H_n(f;R) := H_n(C_*(f;R))$ wird $H_n(-;R)$ zu einem Funktor: $H_n(-;R)\colon \mathrm{Top}\to R\text{-}\mathrm{Mod}$.

Beweis: $H_n(-;R)$ ist die Komposition des Funktors $C_*(-;R)\colon \mathrm{Top}\to R\text{-}\mathrm{Ketten}$ aus Proposition 6.5 mit dem Funktor $H_n\colon R\text{-}\mathrm{Ketten}\to R\text{-}\mathrm{Mod}$ aus Bemerkung 6.3. □

6.7 Bemerkung. Oft schreiben wir kurz $f_* = H_n(f;R)$. Für $\left[\sum_{\sigma\in S_n(X)} r_\sigma\sigma\right]\in H_n(X;R)$ ist

$$f_*\left(\left[\sum_{\sigma\in S_n(X)} r_\sigma\sigma\right]\right) = \left[\sum_{\sigma\in S_n(X)} r_\sigma f\circ\sigma\right]\in H_n(Y;R)$$

6.8 Definition. Seien X_i, $i\in I$ topologische Räume. Mit

$$X := \coprod_{i\in I} X_i$$

bezeichnen wir die ***Summe*** (oder auch das ***Koprodukt***) der X_i. Als Menge ist X die disjunkte Vereinigung der X_i. $U\subseteq X$ ist offen genau dann, wenn $X_i\cap U\subseteq X_i$ offen ist für jedes $i\in I$. Für jedes i_0 erhalten wir eine stetige Inklusion $j_{i_0}\colon X_{i_0}\to\coprod_i X_i$. Für jedes i_0 ist $X_{i_0}\subseteq\coprod_i X_i$ offen und abgeschlossen.

6.9 Definition. Seien V_i, $i\in I$ R-Moduln. Mit

$$V := \bigoplus_{i\in I} V_i$$

bezeichnen wir die ***Summe*** (auch das ***Koprodukt***) der V_i. Elemente von V sind I-Folgen $(v_i)_{i\in I}$ mit $v_i\in V_i$ und $v_i = 0$ füralle bis auf endlich viele i. Die R-Modulstruktur ist erklärt durch: $(v_i)_{i\in I} + (w_i)_{i\in I} := (v_i + w_i)_{i\in I}$ und $r\cdot(v_i)_{i\in I} := (r\cdot v_i)_{i\in I}$ Für jedes $i_0\in I$ erhalten wir eine R-lineare Abbildung $j_{i_0}\colon V_{i_0}\to V$ mit

$$(j_{i_0}(v))_i = \begin{cases} v, & \text{falls } i = i_0\\ 0, & \text{sonst}\end{cases}$$

Seien V_i für $i \in I$ R-Moduln. Sei W ein weiterer R-Modul. Dann gibt es zu jeder Folge $f_i \colon V_i \to W$ von R-linearen Abbildungen eine R-lineare Abbildung $\oplus_{i\in I} f_i \colon \bigoplus_{i\in I} V_i \to W$ mit

$$(\oplus_{i\in I} f_i)\big((v_i)_{i\in I}\big) = \sum_{i\in I} f_i(v_i)$$

Ist umgekehrt $f \colon \bigoplus_{i\in I} V_i \to W$ eine R-lineare Abbildung, so ist $f_i := f \circ j_i$ eine Folge von R-linearen Abbildungen mit $f = \bigoplus_{i\in I} f_i$.

6.10 Satz. Sei $X = \coprod_{i\in I} X_i$. Dann induzieren die Inklusionen $j_i \colon X_i \hookrightarrow X$ einen Isomorphismus

$$\bigoplus_{i\in I} H_n(X_i;R) \xrightarrow{\oplus_{i\in I}(j_i)_*} H_n(X;R)$$

Beweis: Da die $X_i \subseteq X$ offen und abgeschlossen sind und $|\Delta^n|$ zusammenhängend ist (sogar wegzusammenhängend), gibt es für jedes $\sigma \colon |\Delta^n| \to X$ ein eindeutiges i mit $\operatorname{im}\sigma \subseteq X_i$. Es gilt also $S_n(X) = \dot{\bigcup} S_n(X_i)$. Daher induzieren die j_i für jedes n einen Isomorphismus

$$\bigoplus_{i\in I} C_n(j_i;R) \colon \bigoplus_{i\in I} C_n(X_i;R) \xrightarrow{\cong} C_n(X;R)$$

Da diese Isomorphismen mit den Randabbildungen vertauschen, erhalten wir einen Isomorphismus von R-Kettenkomplexen

$$\varphi := \bigoplus_{i\in I} C_*(j_i;R) \colon \bigoplus C_*(X_i;R) \xrightarrow{\cong} C_*(X;R)$$

Da $\bigoplus_i H_n\big(C_*(X_i;R)\big) \cong H_n\big(\bigoplus_i C_*(X_i;R)\big)$ induzieren dann auch die $(j_i)_*$ einen Isomorphismus

$$\bigoplus_{i\in I} (j_i)_* \colon \bigoplus_{i\in I} H_n(X_i;R) \xrightarrow{\cong} H_n(X;R)$$ □

7 Homotopieinvarianz

7.1 Bemerkung. Sei $f\colon X \to Y$ ein Homöomorphismus. Dann ist $f_*\colon H_n(X;R) \longrightarrow H_n(Y;R)$ ein Isomorphismus.

Beweis: Da Homologie ein Funktor ist, gilt

$$f_* \circ (f^{-1})_* = (f \circ f^{-1})_* = (\mathrm{id}_Y)_* = \mathrm{id}_{H_n(Y;R)} \qquad \text{und}$$
$$(f^{-1})_* \circ f_* = (f^{-1} \circ f)_* = (\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{H_n(X;R)}$$

Also ist $(f_*)^{-1} = (f^{-1})_*$. Insbesondere ist f_* ein Isomorphismus. □

7.2 Definition. Eine stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt eine ***Homotopieäquivalenz***, falls es eine stetige Abbildung $g\colon Y \to X$ gibt, so dass $g \circ f$ homotop zu id_X ist und $f \circ g$ homotop zu id_Y ist. g heißt dann eine ***Homotopieinverse*** zu f.

(i) f ist genau dann eine Homotopieäquivalenz, wenn $[f]$ in HTop invertierbar ist. In HTop ist dann $[f]^{-1} = [g]$.

(ii) Die Homotopieinverse ist eindeutig bis auf Homotopie.

7.3 Satz. Seien $f, g\colon X \to Y$ stetige Abbildungen. Sind f und g homotop, so gilt für die induzierten Abbildungen $H_n(f;R) = H_n(g;R)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis: *Siehe Lemma 7.8, sowie Bemerkung 7.9.* □

7.4 Korollar. Ist $f\colon X \to Y$ eine Homotopieäquivalenz, so ist $f_*\colon H_n(X;R) \to H_n(Y;R)$ ein Isomorphismus.

Beweis: Sei $g\colon Y \to X$ ein Homotopieinverses zu f. Es folgt

$$f_* \circ g_* \overset{\text{Funktor}}{=} (f \circ g)_* \overset{\text{Homotopieinvarianz}}{=} (\mathrm{id}_Y)_* \overset{\text{Funktor}}{=} \mathrm{id}_{H_n(Y;R)}$$
$$g_* \circ f_* \overset{\text{Funktor}}{=} (g \circ f)_* \overset{\text{Homotopieinvarianz}}{=} (\mathrm{id}_X)_* \overset{\text{Funktor}}{=} \mathrm{id}_{H_n(X;R)}$$
□

7.5 Korollar. Ist X ***kontrahierbar***, d.h. es gibt eine Homotopie $H\colon X \times [0,1] \to X$ mit $H_0 = \mathrm{id}_X$ und H_1 konstant, so gilt

$$H_n(X;R) \cong \begin{cases} R, & \text{falls } n = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis: Sei $\{x_0\} = \operatorname{im} H_1$. Dann ist die Inklusion $\{x_0\} \to X$ eine Homotopieäquivalenz. Also gilt nach Korollar 7.4

$$H_n(X;R) \cong H_n\big(\{x_0\};R\big) \overset{5.8}{=} \begin{cases} R, & \text{falls } n = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$
□

Es gilt beispielsweise

$$H_n(\mathbb{R}^k;R) \cong \begin{cases} R, & \text{falls } n = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{und} \qquad H_n(D^k;R) \cong \begin{cases} R, & \text{falls } n = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

7.6 Definition. Seien (C_*, d_*) und (C'_*, d'_*) R-Kettenkomplexe. Seien $f_*, g_*\colon (C_*, d_*) \to (C'_*, d'_*)$ R-Kettenabbildungen. Eine ***Kettenhomotopie*** von f_* nach g_* ist eine Folge von R-linearen Abbildungen $h_n\colon C_n \to C'_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, sodass für alle n gilt:

$$d'_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ d_n = f_n - g_n$$

In diesem fall heißen f_* und g_* ***kettenhomotop***.

Kettenhomotopie definiert eine Äquivalenzrelation wie in Aufgabe 2 von Blatt 5 gezeigt.

$$\begin{tikzcd}
C_{n-1} \arrow[dr, "h_{n-1}"'] & C_n \arrow[l, "d_n"'] \arrow[d, shift right, "g_n"'] \arrow[d, shift left, "f_n"] \arrow[dr, "h_n"] & \\
 & C'_n & C'_{n+1} \arrow[l, "d'_{n+1}"]
\end{tikzcd}$$

Abbildung 1: Diagramm zu Definition 7.6 (Kettenhomotopie)

7.7 Proposition. Seien $f_*, g_*\colon (C_*, d_*) \to (C'_*, d'_*)$ Kettenabbildungen. Sind f_* und g_* kettenhomotop, so gilt für alle n

$$H_n(f_*) = H_n(g_*)$$

Beweis: Sei $x \in H_n(C_*, d_*)$. Also $x = [v]$ mit $v \in \ker d_n\colon C_n \to C_{n-1}$. Dann gilt, da $v \in \ker d_n$

$$\begin{aligned} H_n(f_*)(x) = H_n(f_*)([v]) = [f_n(v)] &= \Big[g_n(v) + \underbrace{d'_{n+1} \circ h_n(v)}_{\in \operatorname{im} d'_{n+1}} + \underbrace{h_{n-1} \circ d_n(v)}_{=0}\Big] \\ &= [g_n(v)] = H_n(g_*)([v]) = H_n(g_*)(x) \end{aligned}$$ □

7.8 Lemma. Die Homotopieinvarianz von $H_n(-;R)$, also Satz 7.3, folgt aus folgenden Spezialfall:

$$\text{Für } i_0, i_1\colon X \hookrightarrow X \times [0,1] \text{ gilt } i_0(x) = (x, 0),\ i_1(x) = (x, 1) \implies (i_0)_* = (i_1)_* \qquad [\#]$$

Beweis: Sei $H\colon X \times [0,1] \to Y$ eine Homotopie zwischen $f, g\colon X \to Y$, also $f = H \circ i_0$ und $g = H \circ i_1$. Dann folgt mittels Funktorialität

$$f_* = (H \circ i_0)_* = H_* \circ (i_0)_* = H_* \circ (i_1)_* = (H \circ i_1)_* = g_*$$ □

7.9 Bemerkung. Zum Beweis von [#] werden wir eine explizite Kettenhomotopie h_* zwischen $C_*(i_0; R)$ und $C_*(i_1; R)$ konstruieren. Wir brauchen also $h_n\colon C_n(X; R) \to C_{n+1}(X \times [0,1]; R)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\partial_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ \partial_n = C_n(i_0; R) - C_n(i_1; R). \qquad [\#\#]$$

Wir besprechen zunächst eine möglichen – aber formal nicht korrekten – Ansatz: Für $\sigma\colon |\Delta^n| \to X$ setze $h_n(\sigma) = \sigma \times \mathrm{id}_{[0,1]}\colon |\Delta^n| \times [0,1] \to X \times [0,1]$. Dann ist „$h_{n-1}(\partial_n \sigma) = \partial_n \sigma \times \mathrm{id}_{[0,1]}$“ und

$$\partial_{n+1}(h_n \sigma) = \partial_{n+1}(\sigma \times \mathrm{id}_{[0,1]}) = (\sigma \times \mathrm{id})\Big|_{\partial(|\Delta^n| \times [0,1])} = \partial_n \sigma \times \mathrm{id}_{[0,1]} + i_0 \sigma + i_1 \sigma$$

da $\partial(|\Delta^n| \times [0,1]) = \partial|\Delta^n| \times [0,1] \,\dot\cup\, |\Delta^n| \times \{0,1\}$.

Um daraus Sinn zu machen, zerlegen wir $|\Delta^n| \times [0,1]$ in eine Vereinigung von $(n+1)$-Simplizes. $\Delta^n \times [0,1]$ hat die folgende Form für $n \in \{0,1,2\}$:

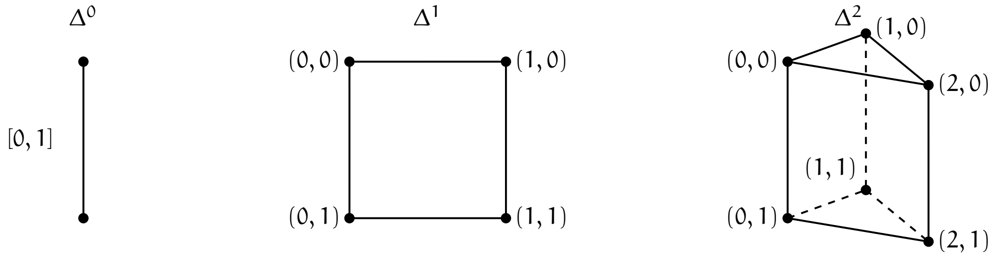


Abbildung 2: $\Delta^n \times [0,1]$ für $n = 0,1,2$

Die Zerlegung in 3-Simplizes ist für $\Delta^2 \times [0,1]$ gegeben durch

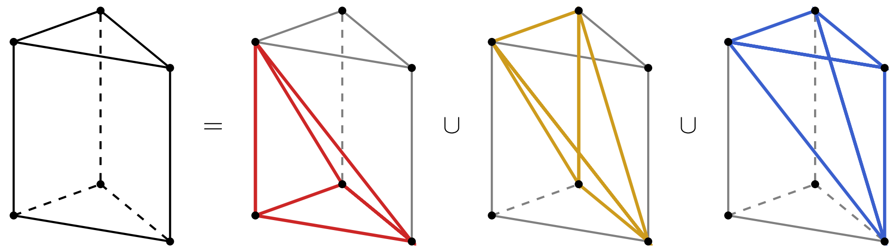


Abbildung 3: Zerlegung von $\Delta^2 \times [0,1]$ in 3-Simplizes

Dieses Vorgehen verallgemeinern wir jetzt für beliebiges $n \in \mathbb{N}$:

$e_1, \ldots, e_n$ sind wieder die Einheitsvektoren von $\mathbb{R}^n$

7.10 Definition. Für $j = 0, \ldots, n$ seien $k_{n,j} \colon |\Delta^{n+1}| \to |\Delta^n| \times [0,1]$ und $\iota_{n,j} \colon \left|\Delta^{n-1}\right| \to |\Delta^n|$ die eindeutigen affin linearen Abbildungen, für die gilt:

$$\begin{aligned} k_{n,j}(e_0) &= (e_0, 0) & \iota_{n,j}(e_0) &= e_0 \\ k_{n,j}(e_1) &= (e_1, 0) \ \ldots & \iota_{n,j}(e_1) &= e_1 \ \ldots \\ k_{n,j}(e_j) &= (e_j, 0) & \iota_{n,j}(e_{j-1}) &= e_{j-1} \\ k_{n,j}(e_{j+1}) &= (e_j, 1) \ \ldots & \iota_{n,j}(e_j) &= e_{j+1} \ \ldots \\ k_{n,j}(e_{n+1}) &= (e_n, 1) & \iota_{n,j}(e_{n-1}) &= e_n \end{aligned}$$

7.11 Lemma. Es gelten folgende fünf Gleichungen für die Abbildungen $k_{n,j}$ und $\iota_{n,j}$:

(i) Für $0 \leqslant l < j \leqslant n$ gilt $k_{n,j} \circ \iota_{n+1,l} = \left(\iota_{n,l} \times \mathrm{id}_{[0,1]}\right) \circ k_{n-1,j-1}$

(ii) Für $1 \leqslant j+1 < l \leqslant n+1$ gilt $k_{n,j} \circ \iota_{n+1,l} = \left(\iota_{n,l-1} \times \mathrm{id}_{[0,1]}\right) \circ k_{n-1,j}$

(iii) Für $1 \leqslant j+1 = l \leqslant n$ gilt $k_{n,j} \circ \iota_{n+1,l} = k_{n,j+1} \circ \iota_{n+1,l}$

(iv) Für $l = 0, j = 0$ ist $k_{n,j} \circ \iota_{n+1,l} = i_1 : \Delta^n \to \Delta^n \times [0,1]$

(v) Für $l = n, j = n+1$ ist $k_{n,j} \circ \iota_{n+1,l} = i_0 : \Delta^n \to \Delta^n \times [0,1]$

Beweis: Wir zeigen hier nur exemplarisch die erste Gleichung: Die linke Seite der Gleichung entspricht

$$\begin{tikzcd}
{|\Delta^n|} \arrow[d, mapsto, "\iota_{n+1,l}"] & e_0 \arrow[d, mapsto] & e_{l-1} \arrow[d, mapsto] & e_l \arrow[dr, mapsto] & \cdots & e_j \arrow[dr, mapsto] & \cdots & e_n \arrow[dr, mapsto] & \\
{\left|\Delta^{n+1}\right|} \arrow[d, mapsto, "k_{n,j}"] & e_0 \arrow[d, mapsto] & e_{l-1} \arrow[d, mapsto] & e_l \arrow[d, mapsto] & e_{l+1} \arrow[d, mapsto] & e_j \arrow[d, mapsto] & e_{j+1} \arrow[ddl, mapsto, bend left] & e_n & e_{n+1} \arrow[ddl, mapsto, bend left] \\
{|\Delta^n| \times [0,1]} & (e_0, 0) & (e_{l-1}, 0) & (e_l, 0) & (e_{l+1}, 0) & (e_j, 0) & & & \\
& & & & & (e_j, 1) & \cdots & (e_n, 1) &
\end{tikzcd}$$

und die rechte Seite entspricht

$$\begin{tikzcd}
{|\Delta^n|} \arrow[d, mapsto, "k_{n-1,j-1}"] & e_0 \arrow[d, mapsto] & e_{l-1} \arrow[d, mapsto] & e_l \arrow[d, mapsto] & \cdots & e_{j-1} \arrow[d, mapsto] & e_j \arrow[ddl, mapsto, bend left] & e_{j+1} \arrow[ddl, mapsto, bend left] & \cdots & e_n \arrow[ddl, mapsto, bend left] \\
{\left|\Delta^{n-1}\right| \times [0,1]} \arrow[ddd, mapsto, "\iota_{n,l} \times \mathrm{id}_{[0,1]}"] & (e_0, 0) \arrow[ddd, mapsto] & (e_{l-1}, 0) \arrow[ddd, mapsto] & (e_l, 0) \arrow[dddr, mapsto] & \cdots & (e_{j-1}, 0) \arrow[ddd, mapsto, bend right] & & & \cdots & \\
& & & & & (e_{j-1}, 1) \arrow[dd, mapsto, bend left] & (e_j, 1) \arrow[dd, mapsto] & \cdots & (e_{n-1}, 1) \arrow[dd, mapsto] & \\
{|\Delta^n| \times [0,1]} & (e_0, 0) & (e_{l-1}, 0) & (e_l, 0) & (e_{l+1}, 0) & (e_j, 0) & & & & \\
& & & & & (e_j, 1) & (e_{j+1}, 1) & \cdots & (e_n, 1) &
\end{tikzcd}$$

Also folgt insgesamt die Gleichheit. Die anderen Gleichungen folgen genauso. □

Damit können wir nun die im vorigen schon vereinfachte zentrale Aussage dieses Abschnitt beweisen:

Beweis (von [##]): Sei $h_n \colon C_n(X; R) \to C_{n+1}(X \times [0,1]; R)$ definiert durch

$$h_n(\sigma) := \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \cdot (\sigma \times \mathrm{id}) \circ k_{n,j}$$

h_* ist nun die gesuchte Kettenhomotopie, da für jedes $n \in \mathbb{N}$ unter Anwendung der Gleichungen aus Lemma 7.11 gilt:

$$\begin{aligned}
\partial_{n+1}\big(h_n(\sigma)\big) &= \partial_{n+1}\left(\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\cdot(\sigma\times\mathrm{id})\circ k_{n,j}\right)\\
&= \sum_{l=0}^{n+1}\sum_{j=0}^{n}(-1)^{j+l}\cdot(\sigma\times\mathrm{id})\circ k_{n,j}\circ\iota_{n+1,l} \qquad\text{(nach Definition 5.2)}\\
&= \sum_{0\leqslant l<j\leqslant n}(-1)^{j+l}\big((\sigma\circ\iota_{n,l})\times\mathrm{id}\big)\circ k_{n-1,j-1}+\sum_{1\leqslant j+1<l\leqslant n+1}(-1)^{j+l}\big((\sigma\circ\iota_{n,l-1})\times\mathrm{id}\big)\circ k_{n-1,j}\\
&\quad+\sum_{1\leqslant j+1=l\leqslant n}(-1)^{j+l}(\sigma\times\mathrm{id})\circ k_{n,j+1}\circ\iota_{n+1,l}+\sum_{1\leqslant j=l\leqslant n}(-1)^{j+l}(\sigma\times\mathrm{id})\circ k_{n,j}\circ\iota_{n+1,l}\\
&\quad+\sum_{0=l=j}(-1)^{j+l}(\sigma\times\mathrm{id})\circ i_1+\sum_{n+1=j+1=l}(-1)^{j+l}(\sigma\times\mathrm{id})\circ i_0\\
&= \sum_{0\leqslant l\leqslant j\leqslant n-1}(-1)^{j+l+1}\big((\sigma\circ\iota_{n,l})\times\mathrm{id}\big)\circ k_{n-1,j}+\sum_{1\leqslant j+1\leqslant l\leqslant n}(-1)^{j+l+1}\big((\sigma\circ\iota_{n,l})\times\mathrm{id}\big)\circ k_{n-1,j}\\
&\quad+\underbrace{\sum_{1\leqslant j=l\leqslant n}(-1)^{j+l-1}(\sigma\times\mathrm{id})\circ k_{n,j}\circ\iota_{n+1,l}+\sum_{1\leqslant j=l\leqslant n}(-1)^{j+l}(\sigma\times\mathrm{id})\circ k_{n,j}\circ\iota_{n+1,l}}_{=0}\\
&\quad+\sum_{0=l=j}(-1)^{j+l}(\sigma\times\mathrm{id})\circ i_1+\sum_{n+1=j+1=l}(-1)^{j+l}(\sigma\times\mathrm{id})\circ i_0\\
&= -\sum_{\substack{0\leqslant l\leqslant n\\0\leqslant j\leqslant n-1}}(-1)^{j+l}\big((\sigma\circ\iota_{n,l})\times\mathrm{id}\big)\circ k_{n-1,j}+(\sigma\times\mathrm{id})\circ i_1-(\sigma\times\mathrm{id})\circ i_0\\
&= -\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\sum_{l=0}^{n}(-1)^l\big((\sigma\circ\iota_{n,l})\times\mathrm{id}\big)\circ k_{n-1,j}+\underbrace{(\sigma\times\mathrm{id})\circ i_1}_{=i_1\circ\sigma}-\underbrace{(\sigma\times\mathrm{id})\circ i_0}_{=i_0\circ\sigma}\\
&= -h_{n-1}(\partial_n\sigma)+C_n(i_1;R)(\sigma)-C_n(i_0;R)(\sigma) \qquad\square
\end{aligned}$$

7.12 Bemerkung. Ist $H\colon X\times[0,1]\to Y$ eine Homotopie zwischen f und g, so erhalten wir eine Kettenhomotopie k zwischen $C_*(f;R)$ und $C_*(g;R)$ durch

$$k_n(\sigma):=C_{n+1}(H;R)\circ h_n=\sum_{j=0}^{n}(-1)^j H\circ(\sigma\times\mathrm{id})\circ k_{n,j}$$

8 Homologie von Paaren

8.1 Definition. Sei A ein Teilraum von X, dann heißt (X, A) ein ***Paar von topologischen Räumen***. Eine Abbildung von Paaren $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ ist eine stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ mit $f(A) \subseteq B$. Manchmal schreiben wir $(f, f|_A)\colon (X, A) \to (Y, B)$. Die Kategorie von Paaren von topologischen Räumen bezeichnen wir mit TOP^2.

8.2 Definition. Sei (X, A) ein Paar. Dann definieren wir den ***singulären Kettenkomplex*** von (X, A) über R durch

$$C_n(X, A; R) := {}^{C_n(X;R)}/_{C_n(A;R)}$$
$$\partial_n\big(\sigma + C_n(A; R)\big) := \partial_n\sigma + C_{n-1}(A; R)$$

Dies ist wohldefiniert, da $\partial_n\big(C_n(A; R)\big) \subseteq C_{n-1}(A; R)$. Weiter heißt

$$H_n(X, A; R) := H_n\big(C_*(X, A; R), \partial_*\big)$$

der ***n-te singuläre Homologiemodul*** von (X, A) mit Koeffizienten in R.

8.3 Bemerkung. Der singuläre Kettenkomplex von Paaren definiert offensichtlich einen Funktor $\mathrm{TOP}^2 \to R\text{-}\mathrm{KETTEN}$. Durch Komposition mit Homologie (als Funktor $R\text{-}\mathrm{KETTEN} \to R\text{-}\mathrm{MOD}$) erhalten wir einen Funktor

Homologie von Paaren ist auch wieder homotopieinvariant, wie in Aufgabe 1 von Blatt 7 gezeigt.

$$H_n(-, -; R)\colon \mathrm{TOP}^2 \longrightarrow R\text{-}\mathrm{MOD}$$

Via $X \mapsto (X, \emptyset)$ können wir jeden Raum auch als Paar auffassen. Somit sind Paare eine Verallgemeinerung von Räumen, passend dazu gilt auch $H_n(X, \emptyset; R) = H_n(X; R)$.

Es stellt sich nun die folgende Frage: Können wir $H_n(X, A; R)$ durch $H_n(X; R)$ und $H_n(A; R)$ ausdrücken?

Ansatz 1:

$$H_n(X, A; R) \cong {}^{H_n(X;R)}/_{H_n(A;R)}$$

⚠ Problem: $H_n(A; R)$ ist kein Untermodul von $H_n(X; R)$.

Ansatz 2: Ist $H_n(X; R) \to H_n(X, A; R)$ surjektiv?

Sei $x \in H_n(X, A; R)$. Dann gibt es $\sigma + C_n(A; R) \in C_n(X, A; R)$ mit $\partial_n\big(\sigma + C_n(A; R)\big) = 0$ und $x = [\sigma]$. Es ist $\sigma \in C_n(X; R)$, aber wir wissen nur $\partial_n\sigma \in C_{n-1}(A; R)$, nicht $\partial_n(\sigma) = 0$. 😐

8.4 Beispiel. In $C_n\big(|\Delta^n|, |\partial\Delta^n|; R\big)$ gilt für $\sigma := \mathrm{id}\colon |\Delta^n| \to |\Delta^n|$, dass $\partial_n([\sigma]) = 0$ ist, da $\partial_n\sigma \in C_{n-1}(|\partial\Delta^n|; R)$. Wir werden später sehen, dass $[\sigma]$ den Homologiemodul

$$H_n\big(|\Delta^n|, |\partial\Delta^n|; R\big) \cong R$$

erzeugt.

8.5 Definition. Eine Folge von R-linearen Abbildungen zwischen R-Moduln M_i

$$\cdots \longrightarrow M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_{n-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_0$$

heißt ***lange exakte Folge***, wenn sie exakt an jeder Stelle M_i ist, d.h. für alle i gilt $\operatorname{im} f_i = \ker f_{i-1}$.

8.6 Satz. Es gibt eine natürliche Transformation ∂_n von $(X, A) \mapsto H_n(X, A; R)$ nach $(X, A) \mapsto H_{n-1}(A; R)$, sodass für jedes Paar (X, A)

$$\begin{array}{l} \cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(A;R) \xrightarrow{i_*} H_n(X;R) \xrightarrow{j_*} H_n(X,A;R) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A;R) \longrightarrow \cdots \\ \cdots \xrightarrow{\partial_1} H_0(A;R) \longrightarrow H_0(X;R) \longrightarrow H_0(X,A;R) \longrightarrow 0 \end{array} \qquad [*]$$

eine lange exakte Folge ist. Dabei sind $i\colon A \hookrightarrow X$ und $j\colon (X, \emptyset) \hookrightarrow (X, A)$ die Inklusionen. Das bedeutet:

Für jedes Paar (X, A) haben wir eine R-lineare Abbildung $\partial_n\colon H_n(X, A; R) \to H_{n-1}(A; R)$, sodass für jede Abbildung $(f, f|_A)\colon (X, A) \to (Y, B)$ von Paaren folgendes Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd} H_n(X,A;R) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "(f,f|_A)_*"] & H_{n-1}(A;R) \arrow[d, "(f|_A)_*"] \\ H_n(Y,B;R) \arrow[r, "\partial_n"] & H_{n-1}(B;R) \end{tikzcd}$$

Beweis: *siehe Seite 29.* □

8.7 Korollar.

(1) Ist die Inklusion $i\colon A \to X$ eine Homotopieäquivalenz, so ist $H_n(X, A; R) = 0$ für alle n.

(2) Sei A kontraktibel. Dann gilt für alle $n \geqslant 1$. $H_n(X; R) \cong H_n(X, A; R)$

Beweis: **(1)** Betrachte den folgenden Ausschnitt aus der langen exakten Folge:

$$H_n(A;R) \xrightarrow{i_*} H_n(X;R) \xrightarrow{j_*} H_n(X,A;R) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A;R) \xrightarrow{i_*} H_n(X;R)$$

Nach Korollar 7.4 ist $i_*\colon H_n(A; R) \to H_n(X; R)$ ein Isomorphismus. Wegen der Exaktheit gilt $\ker j_* = \operatorname{im} i_* = H_n(X; R)$, also folgt $j_* = 0$. Da $\operatorname{im} \partial_n = \ker i_* = 0$, folgt $\partial_n = 0$. Nun ist

$$H_n(X, A; R) = \ker \partial_n = \operatorname{im} j_* = 0$$

(2) Folgt leicht aus Korollar 7.5 und der Exaktheit der Paarsequenz [*]. Für $n = 1$ brauchen wir außerdem, dass ∂_1 für A wegzusammenhängend trivial ist. Dies folgt aus Aufgabe 1a) von Blatt 6, denn dort wurde gezeigt, dass $i_*\colon H_0(A) \to H_0(X)$ injektiv ist. □

8.8 Definition. Seien

$$(C_*, d_*) \xrightarrow{i_*} (C'_*, d'_*) \xrightarrow{p_*} (C''_*, d''_*) \qquad [\#]$$

R-Kettenabbildungen. Ist für jedes n die Folge $C_n \xrightarrow{i_n} C'_n \xrightarrow{p_n} C''_n$ kurz exakt, so heißt [#] eine ***kurze exakte Folge von Kettenkomplexen***.

8.9 Beispiel. Für jedes Paar (X, A) ist

$$(C_*(A;R), \partial_*) \xrightarrow{i_*} (C_*(X;R), \partial_*) \xrightarrow{j_*} (C_*(X,A;R), \partial_*)$$

eine kurze exakte Folge von R-Kettenkomplexen.

8.10 Satz (Schlangenlemma). Sei

$$(C_*, d_*) \xrightarrow{i_*} (C'_*, d'_*) \xrightarrow{p_*} (C''_*, d''_*)$$

eine kurze exakte Folge von R-Kettenkomplexen.

a) Für jedes n gibt es eine eindeutige wohldefinierte R-lineare Abbildung $\partial_n \colon H_n(C''_*, d''_*) \to H_{n-1}(C_*, d_*)$ mit: Für $v' \in C'_n$ mit $d''_n \circ p_n(v') = 0$ ist

$$\partial_n\Big(\underbrace{[p_n(v')]}_{\in H_n(C''_*, d''_*)}\Big) = [v] \in H_{n-1}(C_*, d_*)$$

wobei $v \in C_{n-1}$ bestimmt ist durch $i_{n-1}(v) = d'_n(v')$.

b)

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\partial_{n+1}"] & H_n(C_*, d_*) \arrow[r, "i_*"] & H_n(C'_*, d'_*) \arrow[r, "p_*"] & H_n(C''_*, d''_*) \arrow[dll, rounded corners, "\partial_n"] \\
& H_{n-1}(C_*, d_*) \arrow[r, "i_*"] & H_{n-1}(C'_*, d'_*) \arrow[r, "p_*"] & \cdots \arrow[dll, rounded corners, "\partial_1"] \\
& H_0(C_*, d_*) \arrow[r, "i_*"] & H_0(C'_*, d'_*) \arrow[r, "p_*"] & H_0(C''_*, d''_*) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

ist eine lange exakte Folge.

Beweis:

$$\begin{tikzcd}
C_{n+1} \arrow[r, "i_{n+1}"] \arrow[d, "d_{n+1}"] & C'_{n+1} \arrow[r, "p_{n+1}"] \arrow[d, "d'_{n+1}"] & C''_{n+1} \arrow[d, "d''_{n+1}"] \\
C_n \arrow[r, "i_n"] \arrow[d, "d_n"] & C'_n \arrow[r, "p_n"] \arrow[d, "d'_n"] & C''_n \arrow[d, "d''_n"] \\
C_{n-1} \arrow[r, "i_{n-1}"] \arrow[d, "d_{n-1}"] & C'_{n-1} \arrow[r, "p_{n-1}"] \arrow[d, "d'_{n-1}"] & C''_{n-1} \arrow[d, "d''_{n-1}"] \\
C_{n-2} \arrow[r, "i_{n-2}"] & C'_{n-2} \arrow[r, "p_{n-2}"] & C''_{n-2}
\end{tikzcd}$$

a) Sei $x'' \in H_n(C''_*, d''_*)$, also $x'' = [v'']$ mit $v'' \in \ker d''_n$. Da p_n surjektiv ist, existiert $v' \in C'_n$ mit $p_n(v') = v''$. Es gilt

$$p_{n-1} \circ d'_n(v') = d''_n \circ p_n(v') = d''_n(v'') = 0$$

Also ist $d'_n(v') \in \ker p_{n-1}$. Weiter gilt $\ker p_{n-1} = \operatorname{im} i_{n-1}$, also existiert ein $v \in C_{n-1}$ mit $i_{n-1}(v) = d'_n(v')$. Dann gilt

$$i_{n-2}\big(d_{n-1}(v)\big) = d'_{n-1}\big(i_{n-1}(v)\big) = d'_{n-1}\big(d'_n(v')\big) = 0$$

Da i_{n-2} injektiv ist, folgt somit $d_{n-1}(v) = 0$. Also setzen wir $\partial_n(x'') := [v] \in H_{n-1}(C_*, d_*)$.

Es bleibt zu zeigen, dass $[v] \in H_{n-1}(C_*, d_*)$ unabhängig von der Wahl von v'' und v' ist. Seien $w'' \in \ker d''_n$, $w' \in C'_n$ und $w \in C_{n-1}$ mit $x'' = [w'']$, $p_n(w') = w''$ und $i_{n-1}(w) = d'_n(w')$. Es ist $[v''] = [w'']$, also existiert ein $a'' \in C''_{n+1}$ mit $d''_{n+1}(a'') = v'' - w''$. p_{n+1} ist surjektiv, also existiert $a' \in C'_{n+1}$ mit $p_{n+1}(a') = a''$. Es gilt

$$p_n\big(v' - w' - d'_{n+1}(a')\big) = v'' - w'' - \underbrace{d''_{n+1}\big(p_{n+1}(a')\big)}_{=v''-w''} = 0$$

Mit $\ker p_n = \operatorname{im} i_n$ folgt die Existenz von $a \in C_n$ mit $i_n(a) = v' - w' - d_{n+1}(a')$. Es gilt nun

$$\begin{aligned} i_{n-1}\big(d_n(a) - (v - w)\big) &= i_{n-1}\big(d_n(a)\big) - i_{n-1}(v - w) \\ &= d'_n\big(i_n(a)\big) - \big(d'_n(v') - d'_n(w')\big) \\ &= d'_n\big(-d'_{n+1}(a') + v' - w'\big) - d'_n(v' - w') \\ &= -d'_n d'_{n+1}(a') + d'_n(v' - w') - d'_n(v' - w') = 0 \end{aligned}$$

Da i_{n-1} injektiv ist, folgt $d_n(a) - (v - w) = 0$, also $d_n(a) = (v - w)$. Es folgt $[v] = [w]$.

b) Exaktheit der langen Folge:

$\boxed{\operatorname{im}(i_n)_* = \ker(p_n)_*}$ **:** „$\subseteq$“ folgt aus $(p_n)_* \circ (i_n)_* = (p_n \circ i_n)_* = (0)_* = 0$.

Für „$\supseteq$“ betrachte $x' \in \ker(p_n)_*$, wobei $x' = [v']$ mit $v' \in C'_n$ und $d'_n(v') = 0$. Da nun $[p_n(v')] = (p_n)_*[x'] = 0$ ist, gibt es $a'' \in C''_n$ mit $d''_{n+1}(a'') = p_n(v')$. Da p_{n+1} surjektiv ist, existiert $a' \in C'_{n+1}$ mit $p_{n+1}(a') = a''$. Dann gilt

$$p_n\big(v' - d'_{n+1}(a')\big) = p_n(v') - p_n \circ d'_{n+1}(a') = p_n(v') - \underbrace{d''_{n+1}\Big(\underbrace{p_{n+1}(a')}_{=a''}\Big)}_{=p_n(v')} = 0$$

Da $\ker p_n = \operatorname{im} i_n$, gibt es $a \in C_n$ mit $i_n(a) = v' - d'_{n+1}(a')$. Nun ist

$$i_{n-1}\big(d_n(a)\big) = d'_n\big(i_n(a)\big) = d'_n\big(v' - d'_{n+1}(a')\big) = d'_n(v') = 0$$

Da i_{n-1} injektiv ist, folgt $d_n(a) = 0$. Insbesondere $[a] \in H_n(C_*, d_*)$. Nun ist

$$(i_n)_*[a] = [i_n(a)] = \big[v' - d'_{n+1}(a')\big] = [v'] = x'$$

Also ist $x' \in \operatorname{im}(i_n)_*$.

$\boxed{\operatorname{im}(p_n)_* = \ker \partial_n}$ **:** Für „$\subseteq$“ betrachte $x'' \in \operatorname{im}(p_n)_*$. Dann gibt es $v' \in C'_n$ mit $d'_n(v') = 0$ und $x'' = [p_n(v')]$. Es ist $d'_n(v') \in \ker p_{n-1} = \operatorname{im} i_{n-1}$, also existiert ein $v \in C_{n-1}$ mit $i_{n-1}(v) = d'_n(v')$. Es gilt nun $\partial_n(x'') = [v]$. Wegen der Injektivität von i_{n-1} ist $v = 0$, also $\partial_n(x'') = [0]$.

Sei nun umgekehrt $x'' \in \ker \partial_n$. Wir finden wieder $v' \in C'_n$ und $v \in C_{n-1}$ mit $x'' = [p_n(v')]$, $i_{n-1}(v) = d'_n(v')$ und $0 = \partial_n(x'') = [v]$. Daher gibt es $a \in C_n$ mit $d_n(a) = v$. Es folgt

$$d'_n\big(v' - i_n(a)\big) = i_{n-1}(v) - i_{n-1}\big(d_n(a)\big) = 0$$

Es gilt nun $(p_n)_*\big[v' - i_n(a)\big] = \big[p_n(v') - p_n(i_n(a))\big] = [p_n(v')] = x''$.

$\boxed{\operatorname{im} \partial_n = \ker(i_{n-1})_*}$ **:** Für „$\subseteq$“ sei $x \in \operatorname{im} \partial_n$. Dann gibt es wieder $v' \in C'_n$ und $v \in C_{n-1}$ mit $d''_n(p_n(v')) = 0$, $d'_n(v') = i_{n-1}(v)$ und $x = [v]$. Dann gilt

$$(i_{n-1})_*(x) = (i_{n-1})_*[v] = [i_{n-1}(v)] = [d'_n(v')] = 0$$

Sei nun umgekehrt $x \in \ker(i_{n-1})_*$ und $v \in C_{n-1}$ mit $d_{n-1}(v) = 0$ und $x = [v]$. Da nun $(i_{n-1})_*(x) = [i_{n-1}(v)]$ und $x \in \ker(i_{n-1})_*$ ist, gibt es $v' \in C'_n$ mit $d'_n(v') = i_{n-1}(v)$. Es gilt nun

$$d''_n(p_n(v')) = p_{n-1}(d'_n(v')) = p_{n-1}(i_{n-1}(v)) = 0$$

Daraus folgt $\partial_n[p_n(v')] = x$. $\square$

Beweis (von Satz 8.6)**:** Für jedes Paar (X, A) ist die Folge der singulären Kettenkomplexe

$$\left(C_*(A;R), \partial_*^A\right) \xrightarrow{C_*(i;R)} \left(C_*(X;R), \partial_*^X\right) \xrightarrow{C_*(j;R)} \left(C_*(X,A;R), \partial_*^{(X,A)}\right)$$

kurz exakt. Das Schlangenlemma 8.10 produziert $\partial_n \colon H_n(X,A;R) \to H_{n-1}(A;R)$ und die lange exakte Sequenz [*]. Es bleibt zu zeigen, dass die Randabbildungen aus dem Schlangenlemma wie behauptet eine natürliche Transformation definieren: Sei $(f, f|_A) \colon (X, A) \to (Y, B)$ eine Abbildung von Paaren. Zu zeigen ist, dass

$$\begin{array}{ccc} H_n(X,A;R) & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(A;R) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle (f,f|_A)_*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle (f|_A)_*} \\ H_n(Y,B;R) & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(B;R) \end{array}$$

kommutiert. Sei $x'' \in H_n(X,A;R)$. Sei $\nu' \in C_n(X;R)$ mit $\partial_n^X(\nu') \in C_n(A;R)$ und $[\nu' + C_n(A;R)] = x''$. Dann ist $\partial_n(x'') = \left[\partial_n^X(\nu')\right] \in H_{n-1}(A;R)$. Dann ist

$$(f, f|_A)_*(x'') = (f, f|_A)_*\left[\nu' + C_n(A;R)\right] = \left[f_*(\nu') + C_n(B;R)\right] \in H_n(Y,B;R)$$

Es ist $\partial_n^Y\left(f_*(\nu')\right) = (f|_A)_*\Big(\underbrace{\partial_n^X(\nu')}_{\in C_n(A;R)}\Big) \in C_n(B;R)$. Also

$$\partial_n^Y\left((f, f|_A)_*(x'')\right) = \left[\partial_n^Y\left(f_*(\nu')\right)\right] = \left[f_* \circ \partial_n^X(\nu')\right] = f_* \circ \partial_n(x'') \quad \square$$

8.11 Bemerkung. Für eine Abbildung $(f, f|_A) \colon (X, A) \to (Y, B)$ erhalten wir ein kommutierendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & H_n(A;R) & \xrightarrow{i_*^A} & H_n(X;R) & \xrightarrow{j_*^X} & H_n(X,A;R) & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(A;R) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \Big\downarrow{\scriptstyle (f|_A)_*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f_*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle (f,f|_A)_*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle (f|_A)_*} & & \\ \cdots & \longrightarrow & H_n(B;R) & \xrightarrow{i_*^B} & H_n(Y;R) & \xrightarrow{j_*^Y} & H_n(Y,B;R) & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(B;R) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

8.12 Lemma (Fünfer-Lemma)**.** Seien die Zeilen in folgendem kommutativen Diagramm von R-Moduln exakt.

$$\begin{array}{ccccccccc} A_4 & \xrightarrow{\alpha_4} & A_3 & \xrightarrow{\alpha_3} & A_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & A_0 \\ {\scriptstyle f_4}\Big\downarrow{\scriptstyle \cong} & & {\scriptstyle f_3}\Big\downarrow{\scriptstyle \cong} & & {\scriptstyle f_2}\Big\downarrow & & {\scriptstyle f_1}\Big\downarrow{\scriptstyle \cong} & & {\scriptstyle f_0}\Big\downarrow{\scriptstyle \cong} \\ B_4 & \xrightarrow{\beta_4} & B_3 & \xrightarrow{\beta_3} & B_2 & \xrightarrow{\beta_2} & B_1 & \xrightarrow{\beta_1} & B_0 \end{array}$$

Sind f_4, f_3, f_1 und f_0 Isomorphismen, so ist auch f_2 ein Isomorphismus.

Beweis: **Injektivität:** Sei $a_2 \in A_2$ mit $f_2(a_2) = 0$. Wir erhalten

$$f_1\left(\alpha_2(a_2)\right) = \beta_2\left(f_2(a_2)\right) = \beta_2(0) = 0.$$

Da f_1 ein Isomorphismus ist, folgt $\alpha_2(a_2) = 0$. Damit ist $a_2 \in \ker \alpha_2 = \operatorname{im} \alpha_3$, also existiert $a_3 \in A_3$ mit $\alpha_3(a_3) = a_2$. Es gilt

$$\beta_3\left(f_3(a_3)\right) = f_2\left(\alpha_3(a_3)\right) = f_2(a_2) = 0$$

Also ist $f_3(a_3) \in \ker \beta_3 = \operatorname{im} \beta_4$. Da f_4 Isomorphismus ist, gibt es $a_4 \in A_4$ mit $\beta_4\big(f_4(a_4)\big) = f_3(a_3)$. Nun gilt

$$f_3\big(\alpha_4(a_4) - a_3\big) = f_3\big(\alpha_4(a_4)\big) - f_3(a_3) = \beta_4\big(f_4(a_4)\big) - f_3(a_3) = f_3(a_3) - f_3(a_3) = 0$$

Da f_3 ein Isomorphismus ist, folgt nun $\alpha_4(a_4) = a_3$. Nun ist

$$a_2 = \alpha_3(\alpha_3) = \alpha_3\big(\alpha_4(a_4)\big) = \underbrace{\alpha_3 \circ \alpha_4}_{=0}(a_4) = 0$$

Surjektivität: Sei $b_2 \in B_2$. Fall 1: $\beta_2(b_2) = 0$. Da $\operatorname{im} \beta_3 = \ker \beta_2$ und f_3 Isomorphismus, existiert $a_3 \in A_3$ mit $\beta_3\big(f_3(a_3)\big) = b_2$. Also ist $b_2 = \beta_3\big(f_3(a_3)\big) = f_2\big(\alpha_3(a_3)\big) \in \operatorname{im} f_2$.

Ist b_2 beliebig, so genügt es zu zeigen: Es existiert ein $a_2 \in A_2$ mit $\beta_2\big(b_2 - f_2(a_2)\big) = 0$. f_1 ist ein Isomorphismus, also existiert ein $a_1 \in A_1$ mit $f_1(a_1) = \beta_2(b_2)$. Dann folgt

$$f_0\big(\alpha_1(a_1)\big) = \beta_1\big(f_1(a_1)\big) = \beta_1\big(\beta_2(b_2)\big) = \underbrace{\beta_1 \circ \beta_2}_{=0}(b_2) = 0$$

Da f_0 ein Isomorphismus ist, folgt $\alpha_1(a_1) = 0$. Da $\ker \alpha_1 = \operatorname{im} \alpha_2$, folgt $\alpha_2(a_2) = a_1$. Es gilt nun

$$\begin{aligned}\beta_2\big(b_2 - f_2(a_2)\big) = \beta_2(b_2) - \beta_2\big(f_2(a_2)\big) &= \beta_2(b_2) - f_1\big(\alpha_2(a_2)\big)\\ &= \beta_2(b_2) - f_1(a_1) = \beta_2(b_2) - \beta_2(b_2) = 0\end{aligned}$$ □

8.13 Lemma („2 von 3"). Sei $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ eine Abbildung von Paaren. Seien von den drei Abbildungen

(i) $(f|_A)_*\colon H_n(A; R) \to H_n(B; R)$

(ii) $f_*\colon H_n(X; R) \to H_n(Y; R)$

(iii) $(f, f|_A)_*\colon H_n(X, A; R) \to H_n(Y, B; R)$

zwei für jeweils alle n Isomorphismen. Dann ist auch die dritte für alle n ein Isomorphismus.

Beweis: Da die Randabbildung in der Paarfolge eine natürliche Transformation ist, erhalten wir ein kommutatives Leiterdiagramm:

„R" aus Platzgründen weggelassen

$$\begin{tikzcd}
H_{n+1}(A) \arrow[r] \arrow[d, "(f|_A)_*"] & H_{n+1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & H_{n+1}(X,A) \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, "(f,f|_A)_*"] & H_n(A) \arrow[r] \arrow[d, "(f|_A)_*"] & H_n(X) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & H_n(X,A) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "(f,f|_A)_*"] & H_{n-1}(A) \arrow[d, "(f|_A)_*"] \\
H_{n+1}(B) \arrow[r] & H_{n+1}(Y) \arrow[r] & H_{n+1}(Y,B) \arrow[r, "\partial_{n+1}"] & H_n(B) \arrow[r] & H_n(Y) \arrow[r] & H_n(Y,B) \arrow[r, "\partial_n"] & H_{n-1}(B)
\end{tikzcd}$$

Da die Zeilen lang exakt sind, folgt die Behauptung aus dem Fünfer-Lemma. □

9 Ausschneidung und die Mayer-Vietoris Folge

9.1 Satz (Ausschneidungsisomorphismus). Sei (X, A) ein Paar und $L \subseteq A$, sodass der Abschluss $\overline{L}$ von im Inneren $\mathring{A}$ von A liegt. Dann induziert die Inklusion $(X \setminus L, A \setminus L) \xrightarrow{j} (X, A)$ einen Isomorphismus $j_*\colon H_n(X \setminus L, A \setminus L; R) \to H_n(X, A; R)$.

Beweis: □ auskommentieren

9.2 Satz (Mayer-Vietoris-Folge). Seien $A, B \subseteq X$ offen und $X = A \cup B$. Seien $i_A\colon A \hookrightarrow X$, $i_B\colon B \hookrightarrow X$, $j_A\colon A \cap B \hookrightarrow A$ und $j_B\colon A \cap B \hookrightarrow B$ die Inklusionen. Dann gibt es eine Randabbildung $\partial_n = \partial_n^{X=A\cup B}\colon H_n(X; R) \to H_{n-1}(A \cap B; R)$, sodass

Für simpliziale Homologie gibt es auch eine Mayer-Vietoris-Folge, siehe Aufgabe 4 von Blatt 6

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(A\cap B) \xrightarrow{\begin{pmatrix}(j_A)_*\\(j_B)_*\end{pmatrix}} \begin{matrix}H_n(A)\\ \bigoplus \\ H_n(B)\end{matrix} \xrightarrow{(i_A)_*-(i_B)_*} H_n(X) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A\cap B) \longrightarrow \cdots$$

„R“ aus Platzgründen weggelassen

eine lange exakte Folge ist. Die Randabbildung ist dabei eine natürlicher Transformation: Seien $A', B' \subseteq X'$ offen mit $X' = A' \cup B'$ und sei $f\colon X \to X'$ mit $f(A) \subseteq A'$ und $f(B) \subseteq B'$. Dann kommutiert

$$\begin{tikzcd}
H_n(X;R) \arrow[r, "\partial_n^{X=A\cup B}"] \arrow[d, "f_*"] & H_{n-1}(A\cap B;R) \arrow[d, "(f|_{A\cap B})_*"] \\
H_n(X';R) \arrow[r, "\partial_n^{X'=A'\cup B'}"] & H_n(A'\cap B';R)
\end{tikzcd}$$

Beweis: Sei $L := X \setminus B$. Dann ist L abgeschlossen und $L \subseteq A = \mathring{A}$. Wir erhalten daher einen Ausschneideisomorphismus

$$H_n(B, A\cap B; R) = H_n(X \setminus L, A \setminus L; R) \xrightarrow{\cong} H_n(X, A; R)$$

Betrachte nun das folgende kommutative Leiterdiagramm, das zwei Paarfolgen vergleicht:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_{n+1}(B, A\cap B) \arrow[r, "\partial_{n+1}^{B,A\cap B}"] \arrow[d, "\cong"', "(i_B, j_A)_*"] & H_n(A\cap B) \arrow[r, "(j_B)_*"] \arrow[d, "(j_A)_*"] & H_n(B) \arrow[r, "(l_B)_*"] \arrow[d, "(i_B)_*"] & H_n(B, A\cap B) \arrow[r, "\partial_n^{B,A\cap B}"] \arrow[d, "\cong"', "(i_B, j_A)_*"] & H_{n-1}(A\cap B) \arrow[r] \arrow[d, "(j_A)_*"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_{n+1}(X, A) \arrow[r, "\partial_{n+1}^{X,A}"] & H_n(A) \arrow[r, "(i_A)_*"] & H_n(X) \arrow[r, "(l_X)_*"] & H_n(X, A) \arrow[r, "\partial_n^{X,A}"] & H_{n-1}(A) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

„R“ aus Platzgründen weggelassen

dabei sind $l_B\colon (B, \emptyset) \to (B, A\cap B)$ und $l_X\colon (X, \emptyset) \to (X, A)$ die Inklusionen von Paaren. Definiere nun $\partial_n\colon H_n(X; R) \to H_{n-1}(A\cap B; R)$ durch

$$\partial_n := \partial_n^{B,A\cap B} \circ (i_B, j_A)_*^{-1} \circ (l_X)_*$$

Die Natürlichkeit von $\partial_n^{B,A\cap B}$ impliziert die Natürlichkeit von ∂_n (siehe auch Satz 8.6). Wir müssen noch die Exaktheit zeigen:

- Zu zeigen: $\operatorname{im}\begin{pmatrix}(j_A)_*\\(j_B)_*\end{pmatrix} = \ker((i_A)_* - (i_B)_*)$:

  „$\supseteq$“: Sei $(a, b) \in \ker((i_A)_* - (i_B)_*)$. Also $(i_A)_*(a) = (i_B)_*(b)$. Es ist

$$(i_B, j_A)_*\big((l_B)_*(b)\big) = (l_X)_* \circ (i_B)_*(b) = \underbrace{(l_X)_* \circ (i_A)_*}_{=0}(a) = 0$$

$(i_B, j_A)_*$ ist ein Isomorphismus, also $(l_B)_*(b) = 0$. Es gilt $\ker(l_B)_* = \operatorname{im}(j_B)_*$, also folgt $\exists x \in H_n(A \cap B; R) : (j_B)_*(x) = b$. Dann gilt

$$(i_A)_*\big(a - (j_A)_*(x)\big) = (i_A)_*(a) - (i_B)_*\big((j_B)_*(x)\big) = (i_A)_*(a) - (i_B)_*(b) = 0$$

Mit $\ker(i_A)_* = \operatorname{im}\partial_{n+1}^{X,A}$ und $(i_B, j_A)_*$ ist Isomorphismus, folgt $\exists y \in H_{n+1}(B, A \cap B; R)$ mit

$$\partial_{n+1}^{X,A} \circ (i_B, j_A)_*(y) = a - (j_A)_*(x)$$

Es folgt für $z := x + \partial_{n+1}^{B,A\cap B}(y)$ nun $(j_B)_*(z) = (j_B)_*(x) = b$ und

$$\begin{aligned}(j_A)_*(z) = (j_A)_*(x) + (j_A)_*\big(\partial_{n+1}^{B,A\cap B}(y)\big) &= (j_A)_*(x) + \partial_{n+1}^{X,A} \circ (i_B, j_A)_*(y) \\ &= (j_A)_*(x) + a - (j_A)_*(x) = a\end{aligned}$$

„$\subseteq$“: Sei $x \in H_n(A \cap B; R)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\big((i_A)_* - (i_B)_*\big)\begin{pmatrix}(j_A)_* \\ (j_B)_*\end{pmatrix}(x) &= (i_A)_* \circ (j_A)_*(x) - (i_B)_* \circ (j_B)_*(x) \\ &= (i_A)_* \circ (j_A)_*(x) - (i_A)_* \circ (j_A)_*(x) = 0\end{aligned}$$

da $i_A \circ j_A = i_B \circ j_B$.

- Wir zeigen nun $\operatorname{im}\big((i_A)_* - (i_B)_*\big) = \ker \partial_n$:

„$\supseteq$“: Sei $v \in \ker \partial_n$, also $\partial_n^{B,A\cap B} \circ (i_B, j_A)_*^{-1} \circ (l_X)_*(v) = 0$. Da $\ker \partial_n^{B,A\cap B} = \operatorname{im}(l_B)_*$, gibt es ein $b \in H_n(B; R)$ mit

$$(l_B)_*(b) = (i_B, j_A)_*^{-1} \circ (l_X)_*(v) \iff (i_B, j_A)_* \circ (l_B)_*(b) = (l_X)_*(v)$$

Nun ist

$$(l_X)_*\big(v - (i_B)_* b\big) = (l_X)_*(v) - (l_X)_* \circ (i_B)_*(b) = (l_X)_*(v) - (i_B, j_A)_* \circ (l_B)_*(b) = 0$$

Da $\ker(l_X)_* = \operatorname{im}(i_A)_*$ ist, gibt es ein $a \in H_n(A; R)$ mit $(i_A)_*(a) = v - (i_B)_*(b)$ und somit ist $\big((i_A)_* - (i_B)_*\big)(a, -b) = v$.

„$\subseteq$“: Sei $\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right) \in \begin{smallmatrix} H_n(A) \\ \bigoplus \\ H_n(B) \end{smallmatrix}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\partial_n\big((i_A)_* - (i_B)_*\big)\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right) &= \partial_n^{B,A\cap B} \circ (i_B, j_A)_*^{-1} \circ (l_X)_*\big((i_A)_*(a) - (i_B)_*(b)\big) \\ &= \partial_n^{B,A\cap B} \circ (i_B, j_A)_*^{-1} \circ \underbrace{(l_X)_* \circ (i_A)_*}_{=0}(a) \\ &\quad - \underbrace{\partial_n^{B,A\cap B} \circ (l_B)_*}_{=0}(b) = 0\end{aligned}$$

- Noch zu zeigen: $\operatorname{im}\partial_n = \ker\left(\begin{smallmatrix} (j_A)_* \\ (j_B)_* \end{smallmatrix}\right)$.

„$\supseteq$“: Sei $x \in \ker\big((j_A)_* \oplus (j_B)_*\big)$, also $(j_A)_*(x) = 0 = (j_B)_*(x)$. Da $\operatorname{im}\partial_n^{B,A\cap B} = \ker(j_B)_*$ ist, gibt es $v \in H_n(B, A \cap B; R)$ mit $\partial_n^{B,A\cap B}(v) = x$. Nun ist

$$\partial_n^{X,A} \circ (i_B, J_A)_*(v) = (j_A)_*\big(\partial_n^{B,A\cap B}(v)\big) = (j_A)_*(x) = 0$$

Da $\ker \partial_n^{X,A} = \operatorname{im}(l_X)_*$, finden wir $w \in H_n(X; R)$ mit $(l_X)_*(w) = (i_B, j_A)_*(v)$. Also folgt

$$\partial_n(w) = \partial_n^{B,A\cap B} \circ (i_B, j_A)_*^{-1} \circ (l_X)_*(w) = \partial_n^{B,A\cap B} \circ (i_B, j_A)_*^{-1} \circ (i_B, j_A)_*(v) = \partial_n^{B,A\cap B}(v) = x$$

„⊆“: Für $v \in H_n(X;R)$ ist

$$
\begin{aligned}
&\big((j_A)_* \oplus (j_B)_*\big) \circ \partial_n(v)\\
&= \Big((j_A)_* \circ \partial_n^{B,A\cap B} \circ (i_B, j_A)_*^{-1} \circ (l_X)_*(v), \underbrace{(j_B)_* \circ \partial_n^{B,A\cap B}}_{=0} \circ (i_B, j_A)_*^{-1} \circ (l_X)_*(v)\Big)\\
&= \Big(\underbrace{\partial_n^{X,A} \circ (l_X)_*(v)}_{=0}, 0\Big) = (0,0)
\end{aligned}
$$

□

9.3 Bemerkung. Für die Mayer-Vietoris-Folge müssen A und B nicht notwendig offen sein. Es genügt, dass die Inklusion $(B, A\cap B) \hookrightarrow (X, A)$ einen Isomorphismus $H_*(B, A\cap B; R) \to H_*(X, A; R)$ induziert.

9.4 Satz. Für die Homologie der n-Sphäre S^n gilt

$$
H_k(S^n;R) \cong \begin{cases} R\oplus R, & \text{falls } k=n=0\\ R, & \text{falls } k=0, n\neq 0\\ R, & \text{falls } k=n\neq 0\\ 0, & \text{sonst}\end{cases} \qquad [\#]
$$

9.5 Definition. Sei X ein nichtleerer topologischer Raum. Sei $p\colon X \to \{pt\}$ die Projektion auf den Ein-Punkt-Raum. Die ***reduzierte singuläre Homologie*** von X ist definiert durch

$$
\tilde{H}_k(X;R) := \ker\big(p_*\colon H_k(X;R) \to H_k(\{pt\};R)\big)
$$

Einige einfachen Eigenschaften der reduzierten Homologie sind:

- Es gilt $\tilde{H}_k(X;R) = H_k(X;R)$ für $k>0$, da $H_k(\{pt\};R) = 0$ ist für $k>0$ (siehe 5.8) und somit p_* die Nullabbildung ist.

  Weiter gilt $H_0(X;R) = R \oplus \tilde{H}_0(X;R)$, da $H_0(\{pt\};R) = R$ frei ist.
- Es ist nicht schwer die Eigenschaften von singulärer Homologie auf die reduzierte singuläre Homologie zu übertragen. Insbesondere ist $\tilde{H}_*$ homotopieinvariant und es gibt eine Mayer-Vietoris-Folge.
- Es ist $\tilde{H}_k(\{pt\}) = 0$ und für jeden kontrahierbaren Raum X ist somit $\tilde{H}_n(X;R) = 0$ für alle n.

9.6 Bemerkung. In reduzierter singulärer Homologie wird [#] zu

$$
\tilde{H}_k(S^n;R) \cong \begin{cases} R, & \text{falls } k=n\\ 0, & \text{sonst}\end{cases} \qquad [\#\#]
$$

Beweis (von Satz 9.4): Wir berechnen die reduzierte Homologie von S^n per Induktion nach n:

Induktionsanfang: $n=0$: Es gilt

$$
H_k(S^0;R) \overset{\overset{\varphi}{\leftarrow}}{\cong} H_k\big(\{pt\};R\big) \oplus H_k\big(\{pt\};R\big) = \begin{cases} R\oplus R, & \text{falls } k=0\\ 0, & \text{sonst}\end{cases}
$$

Seien $i_-\colon \{pt\} \hookrightarrow S^0$ und $i_+\colon \{pt\} \hookrightarrow S^0$ die Inklusionen mit $\operatorname{im} i_\pm = \{\pm 1\}$. Der Isomorphismus φ ist gegeben durch $\varphi = (i_-)_* + (i_+)_*$. Für $(a,b) \in H_k(\{-1\};R) \oplus H_k(\{+1\};R)$ gilt dann

$$
p_*\big(i_-(a) + i_+(b)\big) = (p\circ i_-)_*(a) + (p\circ i_+)(b) = \mathrm{id}_*(a) + \mathrm{id}_*(b) = a+b
$$

Also ist $\ker p_* = \{a \in H_k(\{pt\}; R)\}$ und damit folgt

$$\tilde{H}_k(S^0; R) = \begin{cases} 0, & \text{falls } k \neq 0 \\ R, & \text{falls } k = 0 \end{cases}$$

Induktionsschritt: $n-1 \mapsto n$**:** Sei $D_+^n = S^n \setminus \{(1,0,\dots,0)\}$ und $D_-^n = S^n \setminus \{-1,0,\dots,0\}$. Dann sind D_+^n und D_-^n offene Teilmengen von S^n mit $S^n = D_+^n \cup D_-^n$. Weiter gilt $D_+^n \simeq \{pt\}$ und $D_-^n \simeq \{pt\}$. Für den Schnitt der beiden Mengen erhalten wir

$$D_+^n \cap D_-^n = \left\{x = (x_0,\dots,x_n) \in S^n \;\middle|\; x_0 \notin \{\pm 1\}\right\} \simeq S^{n-1} = \{x = (0, x_1, \dots, x_n) \in S^n\}.$$

Betrachte nun die Mayer-Vietoris-Folge zu $S^n = D_+^n \cup D_-^n$:

„R“ aus Platzgründen weggelassen

$$\begin{tikzcd} \underbrace{\tilde{H}_k(D_+^n)}_{=0} \oplus \underbrace{\tilde{H}_k(D_-^n)}_{=0} \arrow[r] & \tilde{H}_k(S^n) \arrow[r, "\partial_k", "\cong"'] & \tilde{H}_{k-1}(D_+^n \cap D_-^n) \arrow[r] & \underbrace{\tilde{H}_{k-1}(D_+^n)}_{=0} \oplus \underbrace{\tilde{H}_{k-1}(D_-^n)}_{=0} \\ & & \tilde{H}_{k-1}(S^{n-1}) \arrow[u, "\cong"] & \end{tikzcd}$$

Es folgt $\tilde{H}_k(S^n; R) \cong \tilde{H}_{k-1}(S^{n-1}; R) \overset{\text{I.A.}}{=} \begin{cases} R, & \text{falls } k = n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ $\square$

10 Anwendungen

10.1 Satz (Invarianz der Dimension). Sind $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ homöomorph, so gilt $n = m$.

Beweis: Sei $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ein Homöomorphismus. Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Dann erhalten wir auch einen Homöomorphismus $k := h|_{\mathbb{R}^n\setminus\{x_0\}}\colon \mathbb{R}^n\setminus\{x_0\} \to \mathbb{R}^m\setminus\{h(x_0)\}$. Nun ist $\mathbb{R}^n\setminus\{x_0\}$ homotopieäquivalent zu S^{n-1} und $\mathbb{R}^m \setminus \{h(x_0)\}$ ist homotopieäquivalent zu S^{m-1}. Da k ein Homöomorphismus ist, ist k_* ein Isomorphismus. Wir erhalten

$$H_*(S^{n-1}) \cong H_*\big(\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}\big) \cong H_*\big(\mathbb{R}^m \setminus \{h(x_0)\}\big) \cong H_*(S^{m-1})$$

Es ist aber $H_*(S^{n-1}) \cong H_*(S^{m-1})$ genau dann, wenn $n = m$. □

10.2 Satz (Fixpunktsatz von Brouwer). Jede stetige Abbildung $f\colon D^n \to D^n$ besitzt einen Fixpunkt.

Beweis: Durch Widerspruch: Angenommen es gibt $f\colon D^n \to D^n$ ohne Fixpunkt. Aus dem letzten Semester wissen wir, dass es dann eine stetige Abbildung $F\colon D^n \to S^{n-1}$ gibt mit $F|_{S^{n-1}} = \mathrm{id}_{S^{n-1}}$. In Homologie erhalten wir folgendes kommutatives Diagramm

Œ: $n \geqslant 2$, $n = 1$ haben wir bereits im letzen Semester bewiesen

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \cong H_{n-1}(S^{n-1}) \arrow[rr, "(\mathrm{id}_{S^{n-1}})_*=\mathrm{id}"] \arrow[dr, "i_*"'] & & H_{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbb{Z} \\
& H_{n-1}(D^n) = 0 \arrow[ur, "(F)_*"'] &
\end{tikzcd}$$

wobei $i\colon S^{n-1} \hookrightarrow D^n$ die Inklusion ist. Da $F \circ i = \mathrm{id}_{S^{n-1}}$ ist, gilt $F_* \circ i_* = \mathrm{id}_{H_{n-1}(S^{n-1})}$. □

10.3 Definition (Abbildungsgrad). Sei $f\colon S^n \to S^n$ eine stetige Abbildung. Da $\tilde{H}_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ ist, gibt es eine ganze Zahl $d(f)$, so dass $f_*(x) = d(f) \cdot x$ für alle $x \in \tilde{H}_n(S^n)$. Diese Zahl heißt der ***Abbildungsgrad*** von f.

reduzierte Homologie!

10.4 Proposition. Für den Abbildungsgrad d gilt

a) $d(\mathrm{id}_{S^n}) = 1$.

b) Sind f und g homotop, so gilt $d(f) = d(g)$.

c) $d(f \circ g) = d(f) \cdot d(g)$.

Beweis:

a) Es ist $(\mathrm{id}_{S^n})_*(x) = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}(x) = x$.

b) Sind f und g homotop, so gilt $f_* = g_*$ und damit folgt $d(f) = d(g)$.

c) Für alle $x \in \tilde{H}_n(S^n)$ gilt: $d(f \circ g) \cdot x = (f \circ g)_*(x) = f_* \circ g_*(x) = d(f) \cdot d(g) \cdot x$. Da $\tilde{H}_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ folgt $d(f \circ g) = d(f) \cdot d(g)$. □

10.5 Beispiel. Sei $i \in \{0, \dots, n\}$ und $R_i\colon S^n \to S^n$ die Spiegelung an der x_i-Achse, also

$$R_i(x_0, \dots, x_n) = (x_0, \dots, -x_i, \dots, x_n)$$

Dann ist $d(R_i) = -1$.

Beweis: Sei $f\colon S^n \to S^n$ der Homöomorphismus, der die 0-te und die i-te Koordinate vertauscht, also gilt $f(x_0,\dots,x_n) = (x_i,\dots,x_0,\dots,x_m)$. Dann ist $R_i = f \circ R_0 \circ f$. Da f ein Homöomorphismus ist, ist f_* ein Isomorphismus und daher ist $d(f)$ invertierbar, also $d(f) \in \{\pm 1\}$. Mit $d(R_i) = d(f) \cdot d(R_0) \cdot d(f)$ folgt $d(R_0) = d(R_i)$. Es genügt also R_0 zu betrachten. Wir zeigen $d(R_0) = -1$ durch Induktion nach n.

Unter $H_0(S_0) \cong \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}$ induziert R_0 $(x,y) \mapsto (y,x)$

Induktionsanfang: Sei $i_-\colon \{pt\} \to S^0$ die Abbildung mit $\operatorname{im} i_- = \{-1\}$ und $i_+\colon \{pt\} \to S^0$ die Abbildung mit $\operatorname{im} i_+ = \{+1\}$. Dann ist

$$\begin{aligned} H_0(S^0) &= \{a, b \in H_0(\{pt\})\} \qquad \text{und} \\ \tilde{H}_0(S^0) &= \{a \in H_0(\{pt\})\} \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} (R_0)_*\Big((i_-)_*(a) - (i_+)_*(a)\Big) = (R_0)_*(i_-)_*(a) - (R_0)_*(i_+)_*(a) &= (R_0 \circ i_-)_*(a) - (R_0 \circ i_+)_*(a) \\ &= (i_+)_*(a) - (i_-)_*(a) \\ &= -\big((i_-)_*(a) - (i_+)_*(a)\big) \end{aligned}$$

Also folgt $d(R_0) = -1$, da wir den Abbildungsgrad für reduzierte Homologie definiert hatten.

Induktionsschritt: Wir definieren zwei offene Teilmengen von S^n wie folgt

$$\begin{aligned} D_+^n &= \{(x_0,\dots,x_n) \in S^n \mid x_n \neq -1\} \\ D_-^n &= \{(x_0,\dots,x_m) \in S^n \mid x_n \neq +1\} \end{aligned}$$

Wir wissen schon aus dem Beweis von Satz 9.4, dass die Randabbildung aus der dazugehörigen Mayer-Vietoris-Folge $\tilde{H}_n(S^n) \xrightarrow{\partial_n} \tilde{H}_{n-1}(D_+^n \cap D_-^n)$ ein Isomorphismus ist. Da die Randabbildung natürlich ist, erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} \tilde{H}_n(S^n) \arrow[r, "\partial_n", "\cong"'] \arrow[d, "(R_0)_*"] & \tilde{H}_{n-1}(D_-^n \cap D_+^n) \arrow[d, "\left(R_0|_{D_-^n \cap D_+^n}\right)_*"] & \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) \arrow[l, "\cong"', "i_*"] \arrow[d, "\left(R_0|_{S^{n-1}}\right)_*"] \\ \tilde{H}_n(S^n) \arrow[r, "\partial_n", "\cong"'] & \tilde{H}_{n-1}(D_-^n \cap D_+^n) & \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) \arrow[l, "\cong"', "i_*"] \end{tikzcd}$$

dabei ist $i\colon S^{n-1} \to D_-^n \cap D_+^n$ die Homotopieäquivalenz $i(x_0,\dots,x_{n-1}) = (x_0,\dots,x_{n-1},0)$. Nach Induktionsannahme ist $\left(R_0|_{S^{n-1}}\right)_*(y) = -y$ für alle $y \in \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1})$. Für $x \in \tilde{H}_n(S^n)$ folgt dann

$$\begin{aligned} (R_0)_*(x) &= (\partial_n)^{-1} \circ (i_*) \circ \left(R_0|_{S^{n-1}}\right)_*\big((i_*^{-1} \circ \partial_n)(x)\big) \\ &= (\partial_n)^{-1} \circ (i_*)\big(-i_*^{-1}(\partial_n(x))\big) \\ &= -\partial_n^{-1} \circ (i_*) \circ (i_*)^{-1} \circ \partial_n(x) = -x \end{aligned}$$

Also gilt für den Abbildungsgrad der Spiegelung $d(R_0) = -1$. □

10.6 Beispiel. Der Grad der Punktspiegelung $R\colon S^n \to S^n$, $x \mapsto -x$ ist $d(R) = (-1)^{n+1}$.

Beweis: Nach Beispiel 10.5 ist $d(R) = d(R_0 \circ R_1 \circ \dots \circ R_n) = d(R_0) \cdot \ldots \cdot d(R_n) = (-1)^{n+1}$. □

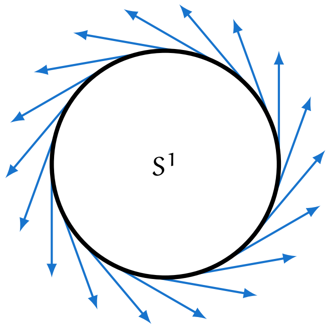


Abbildung 4: Ein nirgends verschwindendes Vektorfeld auf S^1

10.7 Erinnerung. Sei M eine C^∞-Mannigfaltigkeit. Ein ***Vektorfeld*** auf M ist eine stetige Abbildung $\nu\colon M \to TM$ mit $\nu(x) \in T_xM$ für alle $x \in M$. Für $M = S^n$ entspricht ein Vektorfeld genau einer stetigen Abbildung $\nu\colon S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ mit $\langle \nu(x) \,|\, x\rangle = 0$ für alle $x \in S^n$.

10.8 Satz. Es gibt genau dann ein Vektorfeld ohne Nullstellen auf S^n, wenn n ungerade ist.

Beweis: Ist n ungerade, so ist $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{C}^k$ mit $k = \frac{n+1}{2}$. Punkte in S^n sind dann genau k-Tupel $z = (z_1, \ldots, z_k)$ mit $|z_1|^2 + \ldots + |z_k|^2 = 1$. Ein Vektorfeld entspricht dann einer stetigen Abbildung $\nu\colon S^n \to \mathbb{C}^k$, so dass für das kanonische komplexe Skalarprodukt $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle_\mathbb{C}$ auf $\mathbb{C}^k$ gilt

$$\langle z \,|\, \nu(z)\rangle_\mathbb{C} \in i\mathbb{R}$$

einfach nachzurechnen

Definiere nun $\nu\colon S^n \to \mathbb{C}^k$ durch $\nu(z) := i \cdot z$. Dann ist $iz \neq 0$ für alle $z \in S^n$ und $\langle z \,|\, iz\rangle = -i \cdot \|z\| \in i\mathbb{R}$. Sei umgekehrt $\nu\colon S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ ein Vektorfeld ohne Nullstellen. Zu zeigen: $d(R) = 1$, denn dann folgt die Behauptung, da $d(R) = (-1)^{n+1}$. Zeige dazu: R ist homotop zu id. Seien $H, K\colon S^n \times [0,1] \to S^n$ definiert durch

$$H(x,t) := \frac{tx + (1-t)\nu(x)}{\|tx + (1-t)\nu(x)\|} \qquad \text{bzw.} \qquad K(x,t) := \frac{-tx + (1-t)\nu(x)}{\|-tx + (1-t)\nu(x)\|}$$

Da $\langle \nu(x) \,|\, x\rangle = 0$ und $\nu(x) \neq 0$ folgt für alle $x \in S^n$

für orthogonale Vektoren gilt der Satz von Pythagoras

$$\|tx + (1-t)\nu(x)\|^2 = \|tx\|^2 + \|(1-t)\nu(x)\|^2 \neq 0$$
$$\|-tx + (1-t)\nu(x)\|^2 = \|-tx\|^2 + \|(1-t)\nu(x)\|^2 \neq 0$$

Also sind H und K wohldefiniert. H ist Homotopie zwischen id und $x \mapsto \frac{\nu(x)}{\|\nu(x)\|}$ und K ist Homotopie zwischen $-\mathrm{id} = R$ und $x \mapsto \frac{\nu(x)}{\|\nu(x)\|}$. □

10.9 Satz (Jordanscher Kurvensatz). Sei $f\colon S^1 \to \mathbb{R}^2$ eine stetige, injektive Abbildung. Dann hat $\mathbb{R}^2 \setminus f(S^1)$ genau zwei Wegzusammenhangskomponenten. Eine davon ist beschränkt, die andere nicht.

Beweis (mit 10.10)**:** Wir können f auch als injektive Abbildung $f\colon S^1 \to \mathbb{R}^2 \subseteq S^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ auffassen. Nun ist $\tilde{H}_0\big(S^2 \setminus f(S^1)\big) = \mathbb{Z}$ nach Satz 10.10 b). Also $H_0\big(S^2 \setminus f(S^1)\big) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Daher besteht $S^2 \setminus f(S^1)$ aus zwei Wegzusammenhangskomponenten U_1 und U_2. Sei ohne Einschränkungen $\infty \in U_2$. Dann ist $U_2 \setminus \{\infty\}$ immer noch wegzusammenhängend: Seien $x, y \in U_2$, dann gibt es eine Umgebung V von $\infty \in S^2$ mit $V \setminus \{\infty\} \cong D^2 \setminus \{0\}$, $x, y \notin V$ und $f(S^1) \cap V = \emptyset$. Also sind U_1 und $U_2 \setminus \{\infty\}$ die Wegzusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^2 \setminus f(S^1)$. U_1 ist beschränkt und U_2 ist unbeschränkt. □

10.10 Satz.

a) Sei $f\colon D^k \to S^n$ eine stetige, injektive Abbildung mit $0 \leqslant k < n$. Dann gilt $\tilde{H}_i\big(S^n \setminus f(D^k)\big) = 0$ für alle i.

b) Sei $f\colon S^k \to S^n$ eine stetige, injektive Abbildung mit $0 \leqslant k < n$. Dann gilt

$$\tilde{H}_i\big(S^n \setminus f(S^k)\big) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{falls } i = n-k-1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Diese Proposition gilt genauso für reduzierte Homologie

10.11 Proposition. Seien $U_1 \subseteq U_2 \subseteq \ldots \subseteq X$ offen mit $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$. Seien $i_{a,b}\colon U_a \hookrightarrow U_b$ für $a < b$ und $i_a\colon U_a \hookrightarrow X$ die entsprechenden Inklusionen. Dann gilt

(1) Für jedes $x \in H_k(X;R)$ gibt es $a > 0$ und $x_a \in H_k(U_a;R)$ mit $(i_a)_*(x_a) = x$.

(2) Ist $x_a \in H_k(U_a;R)$ mit $(i_a)_*(x_a) = 0$, so gibt es $b > a$ mit $(i_{a,b})_*(x_a) = 0$.

Beweis: Sei $\sigma\colon |\Delta^n| \to X$ ein singulärer Simplex in X. Dann ist $\{\sigma^{-1}(U_a)\}_{a\in\mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung von $|\Delta^n|$. Da $|\Delta^n|$ kompakt ist, gibt es a mit $|\Delta^n| \subseteq \sigma^{-1}(U_a)$, also $\sigma(|\Delta^n|) \subseteq U_a$. Da Elemente von $C_n(X;R)$ endliche R-Linearkombinationen von singulären Simplizes sind, folgt

$$C_n(X;R) = \bigcup_a C_n(U_a;R).$$

Damit ergeben sich direkt (1) und (2). □

Beweis (von Satz 10.10)**:**

a) Durch Induktion nach k. Für $k = 0$ ist $S^n \setminus f(D^0)$ homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ und die Behauptung folgt.

Induktionsschritt $k \mapsto k+1$: Da D^{k+1} und $[0,1]^{k+1}$ homöomorph sind, können wir D^{k+1} durch $[0,1]^{k+1}$ ersetzen. Sei $x \in \tilde{H}_i\big(S^n \setminus f([0,1]^{k+1})\big)$. Es ist

$$S^n \setminus f\big(\{1/2\} \times [0,1]^k\big) = \underbrace{S^n \setminus f\big([0,1/2] \times [0,1]^k\big)}_{=:A} \cup \underbrace{S^n \setminus f\big([1/2,1] \times [0,1]^k\big)}_{=:B} = A \cup B$$

eine Vereinigung von offenen Mengen. Weiter ist

$$A \cap B = \big(S^n \setminus f([0,1/2] \times [0,1]^k)\big) \cap \big(S^n \setminus f([1/2,1] \times [0,1]^k)\big) = S^n \setminus f\big([0,1]^{k+1}\big)$$

Die zugehörige Mayer-Vietoris-Folge liefert nun einen Isomorphismus:

$$\underbrace{\tilde{H}_{i+1}(A \cup B)}_{=0 \text{ nach I.A.}} \longrightarrow \tilde{H}_i(A \cap B) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_i(A) \oplus \tilde{H}_i(B) \longrightarrow \underbrace{\tilde{H}_i(A \cup B)}_{=0 \text{ nach I.A.}}$$

Angenommen $x \neq 0$. Dann ist das Bild von x in $\tilde{H}_i(A)$ ungleich Null oder in $\tilde{H}_i(B)$ ungleich Null. Indem wir dieses Argument iterieren, erhalten wir eine Folge von Intervallen

$$[0,1] \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots \quad \text{sodass } \bigcap_a I_a = \{t\}$$

und das Bild von $x \in \tilde{H}_i\big(S^n \setminus f([0,1]^{k+1})\big)$ unter der von der Inklusion $\iota_{0,a}\colon S^n \setminus f\big([0,1]^{k+1}\big) \to S^n \setminus f\big(I_a \times [0,1]^k\big)$ induzierten Abbildung $(\iota_{0,a})_*$ ungleich Null ist. Nun ist aber

$$\bigcup_a \Big(S^n \setminus f\big(I_a \times [0,1]^k\big)\Big) = S^n \setminus f\big(\{t\} \times [0,1]^k\big)$$

und wieder nach Induktionsannahme ist $\tilde{H}_i\big(S^n \setminus f\big(\{t\} \times [0,1]^k\big)\big) = 0$. Für die von der Inklusion $\iota_a\colon S^n \setminus f\big(I_a \times [0,1]^k\big) \to S^n \setminus f\big(\{t\} \times [0,1]^k\big)$ induzierte Abbildung gilt also $(\iota_a)_*(x) = 0$. Nach Proposition 10.11 (2) muss x dann aber schon für ein i in der reduzierten Homologie $\tilde{H}_i\big(S^n \setminus f\big(I_a \times [0,1]^k\big)\big)$ trivial sein. Widerspruch!

b) Durch Induktion nach k. Für $k = 0$ ist $S^n \setminus f(S^0) \cong \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Da $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \simeq S^{n-1}$ folgt für $k = 0$ die Behauptung.

Induktionsschritt $k - 1 \mapsto k$: Wir setzen

$$D^k_+ := \big\{(x_0, \ldots, x_k) \in S^k \,\big|\, x_k \geqslant 0\big\}$$
$$D^k_- := \big\{(x_0, \ldots, x_k) \in S^k \,\big|\, x_k \leqslant 0\big\}$$

Dann ist $D^k_+ \cap D^k_- = \big\{(x_0, \ldots, x_k) \in S^k \,\big|\, x_k = 0\big\} \cong S^{k-1}$. Wieder ist

$$S^n \setminus f\big(D^k_+ \cap D^k_-\big) = \big(S^n \setminus f(D^k_+)\big) \cup \big(S^n \setminus f(D^k_-)\big)$$

eine offene Vereinigung mit $\big(S^n \setminus f(D^k_+)\big) \cap \big(S^n \setminus f(D^k_-)\big) = S^n \setminus f(S^k)$. Es ist $D^k_\pm \cong D^k$, also ist wegen a) ist die Randabbildung in der zugehörigen Mayer-Vietoris-Folge

$$\tilde{H}_i\big(S^n \setminus f\big(D^k_+ \cap D^k_-\big)\big) \xrightarrow[\cong]{\partial_i} \tilde{H}_{i-1}\big(S^n \setminus f(S^k)\big)$$

ein Isomorphismus. Die Behauptung folgt dann per Induktion. □

11 CW-Komplexe

11.1 Definition. Ein kommutatives Diagramm von topologischen Räumen der Form

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & X \arrow[d, "\bar{g}"] \\ Y \arrow[r, "\bar{f}"] & Z \end{tikzcd} \qquad [\#]$$

heißt ein ***Pushout***, falls es folgende universelle Eigenschaft hat:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & X \arrow[d, "\bar{g}"] \arrow[ddr, bend left, "\hat{f}"] & \\ Y \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[drr, bend right, "\hat{g}"'] & Z \arrow[dr, "\varphi"] & \\ & & \hat{Z} \end{tikzcd}$$

$\forall \hat{f}\colon X \to \hat{Z}$, $\hat{g}\colon Y \to \hat{Z}$ mit $\hat{f} \circ f = \hat{g} \circ g$ gilt:

$\exists! \varphi\colon Z \to \hat{Z}$ mit $\hat{f} = \varphi \circ \bar{g}$, $\hat{g} = \varphi \circ \bar{f}$.

Wir sagen dann auch: [#] ist der Pushout von $Y \xleftarrow{g} A \xrightarrow{f} X$.

11.2 Bemerkung. Jedes Diagramm $Y \xleftarrow{g} A \xrightarrow{f} X$ lässt sich zu einem Pushout vervollständigen: Betrachte dazu den Raum $X \cup_A Y := {}^{X \coprod Y}/_{f(a) \sim g(a) \forall a \in A}$ mit der Quotiententopologie. Sind $\bar{f}\colon Y \to X \cup_A Y$ und $\bar{g}\colon X \to X \cup_A Y$ die von den Inklusionen $X \hookrightarrow X \coprod Y$ und $Y \hookrightarrow X \coprod Y$ induzierten Abbildungen, so ist

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "\bar{g}"] \\ Y \arrow[r, "\bar{f}"] & X \cup_A Y \end{tikzcd}$$

ein Pushout. Existenz und Eindeutigkeit aus der universellen Eigenschaft können benutzt werden um zu zeigen, dass der Pushout eindeutig bis auf kanonischen Homöomorphismus ist.

$X^{(i)}$ bezeichnet man auch als i-Gerüst oder i-Skelett

11.3 Definition. Ein ***CW-Komplex*** ist ein topologischer Raum X zusammen mit einer Filtrierung durch Unterräume von X:

$$\emptyset = X^{(-1)} \subseteq X^{(0)} \subseteq X^{(1)} \subseteq X^{(2)} \subseteq \ldots \subseteq X^{(n)} \subseteq X^{(n+1)} \subseteq \ldots \subseteq X$$

sodass die folgenden zwei Eigenschaften erfüllt sind:

(i) ***Zellstruktur***: Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt einen Pushout von topologischen Räumen

Koprodukte indiziert über $i \in I^{(n)}$

$$\begin{tikzcd} \coprod S^{n-1} \arrow[r, "\coprod q_i^{(n)}"] \arrow[d, hook, "\coprod j_i"'] & X^{(n-1)} \arrow[d, hook, "k^{(n)}"] \\ \coprod D^n \arrow[r, "\coprod Q_i^{(n)}"] & X^{(n)} \end{tikzcd}$$

wobei $j_i\colon S^{n-1} \hookrightarrow D^n$ und $k_n\colon X^{(n-1)} \hookrightarrow X^{(n)}$ die Inklusionen sind.

(ii) ***Schwache Topologie***: Es ist $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^{(n)}$ und $U \subseteq X$ ist genau dann offen, wenn $U \cap X^{(n)} \subseteq X^{(n)}$ für alle n offen ist.

Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen CW-Komplexen heißt ***zellulär***, falls $f(X^{(n)}) \subseteq Y^{(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Zitat von Wikipedia zum Namen: *The C stands for „closure-finite", and the W for „weak topology"*. C für *„cell"* scheint mir allerdings auch sinnvoll.

11.4 Bemerkung. **(i)** Die Abbildungen $q_i^{(n)}$ und $Q_i^{(n)}$ sind *nicht* Teil der Struktur eines CW-Komplex. Nur die Existenz von $q_i^{(n)}$ und $Q_i^{(n)}$ wird gefordert – sie ist nicht notwendig eindeutig. Hat man $q_i^{(n)}$ und $Q_i^{(n)}$ *gewählt*, so heißt $q_i^{(n)}$ die ***anklebende Abbildung*** der i-ten n-Zelle und $Q_i^{(n)}$ die ***charakteristische Abbildung*** der i-ten n-Zelle.

(ii) Sei $\mathring{D}^n = D^n \setminus S^{n-1}$ das Innere von D^n. Die Abbildungen $Q_i^{(n)}$ schränken sich zu einem Homöomorphismus $\coprod_{i\in I^{(n)}} \mathring{D}^n \to X^{(n)} \setminus X^{(n-1)}$ ein.[2] Insbesondere lässt sich $I^{(n)}$ mit der Menge der Wegzusammenhangskomponenten von $X^{(n)} \setminus X^{(n-1)}$ identifizieren. Die Wegzusammenhangskomponenten heißen die ***offenen Zellen*** von X. Damit ist jeder CW-Komplex die disjunkte Vereinigung seiner offenen Zellen.

⚠ Achtung: Jede offene n-Zelle ist offen in $X^{(n)}$, aber nicht notwendig in X.

(iii) Der Abschluss einer offenen Zelle $Q_i^{(n)}(\mathring{D}^n)$ ist $Q_i^{(n)}(D^n)$ und insbesondere kompakt. Die $Q_i^{(n)}(D^n)$ heißen die ***abgeschlossenen Zellen*** und sind als Abschluss von offenen Zellen unabhängig von der Wahl der $Q_i^{(n)}$.

⚠ Achtung: Abgeschlossene Zellen sind Bilder von D^n unter stetigen Abbildungen, aber nicht notwendig homöomorph zu D^n.

(iv) Ein CW-Komplex X heißt ***endlich***, wenn er nur aus endlich vielen Zellen besteht, also wenn $I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I^{(n)}$ endlich ist. Insbesondere gibt es dann ein n mit $X = X^{(n)}$.

Die Dimension von X ist die maximale Dimension von Zellen von X, also $\dim X := N$, falls $X^{(N)} = X$, $X^{(N-1)} \subsetneq X$. Gibt es kein solches N so setzen wir $\dim X := \infty$.

11.5 Beispiel. Viele uns bereits bekannte Räume haben eine CW-Komplex-Stuktur:

(i) S^n mit

$$(S^n)^{(k)} = \begin{cases} \emptyset, & \text{falls } k = -1 \\ \{(1,0,\dots,0)\}, & \text{falls } k = 0,\dots n-1 \\ S^n, & \text{falls } k \geqslant n \end{cases}$$

ist ein CW-Komplex via $S^n \cong D^n/S^{n-1}$

$$\begin{tikzcd} S^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, hook] & (S^n)^{(n-1)} \arrow[r, equal] \arrow[d, hook] & \{(1,0,\dots,0)\} \\ D^n \arrow[r] & S^n & \end{tikzcd}$$

(ii) S^n mit $(S^n)^{(k)} = \{(x_0,\dots,x_k,0,\dots,0) \in S^n\}$ ist ebenfalls eine CW-Struktur auf S^n.

(iii) Sei $K = (V,\Sigma)$ ein simplizialer Komplex. Es ist $|\Delta^n| \cong D^n$ und $|\partial\Delta^n| \cong S^{n-1}$. Sei $\Sigma^{(n)} := \Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup \ldots \cup \Sigma_n$. Dann wird $|K|$ durch $|K|^{(n)} := \left|(V,\Sigma^{(n)})\right|$ für $n \geqslant 0$ zu einem CW-Komplex. Ist $f\colon K \to L$ eine simpliziale Abbildung, so ist $|f|\colon |K| \to |L|$ eine zelluläre Abbildung.

[2] Dass dies ein Homöomorphismus ist, folgt aus der Pushout-Eigenschaft und dem letzen Teil der Bemerkung 11.2, denn es gilt demnach $X^{(n)} \cong X^{(n-1)} \cup_{\coprod S^{n-1}} \coprod D^n$.

(iv) Der n-dimensionale reelle projektive Raum $\mathbb{RP}^n$ kann definiert werden durch

$$\mathbb{RP}^n := {}^{\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}}/_{x\sim\lambda x} = {}^{S^n}/_{x\sim -x}$$

Punkte in $\mathbb{RP}^n$ sind Äquivalenzklassen von $(n+1)$-Tupeln reeller Zahlen und werden als die sogenannten homogenen Koordinaten $[x_0:\ldots:x_n]$ geschrieben. Es ist

$$\mathbb{RP}^n = \left\{[x_0:\ldots:x_n] \,\middle|\, (x_0,\ldots,x_n)\in S^n\right\} = \left\{[x_0:\ldots:x_n] \,\middle|\, (x_0,\ldots,x_n)\in S^n, x_n \geqslant 0\right\}$$

Wir erhalten einen Homöomorphismus $f^{(n)}\colon {}^{D^n}/_{x\sim -x, x\in S^{n-1}} \to \mathbb{RP}^n$ mit

$$f^{(n)}(x_1,\ldots,x_n) = \left[x_1:\ldots:x_n:\sqrt{1-\sum_{i=1}^n x_i^2}\right]$$

Ist $Q^{(n)}\colon D^n \to \mathbb{RP}^n$ die Komposition von $f^{(n)}$ mit der Projektion $D^n \twoheadrightarrow {}^{D^n}/_{x\sim -x, x\in S^{n-1}}$ und $q^{(n)}\colon S^{n-1} \twoheadrightarrow \mathbb{RP}^{n-1}$ die Projektion, so erhalten wir einen Pushout

$$\begin{tikzcd}
S^{n-1} \arrow[r, "q^{(n)}"] \arrow[d, hook] & \mathbb{RP}^{n-1} \arrow[d, hook] \\
D^n \arrow[r, "Q^{(n)}"] & \mathbb{RP}^n
\end{tikzcd}$$

Induktiv erhalten wir einen CW-Struktur auf $\mathbb{RP}^n$ mit genau einer k-Zelle für $k = 0,\ldots,n$ und

$$(\mathbb{RP}^n)^{(k)} \cong \mathbb{RP}^k$$

(v) Der n-dimensionale komplexe projektive Raum $\mathbb{CP}^n$ kann definiert werden durch

$$\mathbb{CP}^n := {}^{\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}}/_{z\sim\lambda z} = {}^{S^{2n+1}}/_{z\sim\lambda z, \lambda\in S^1\subseteq\mathbb{C}}$$

Punkte in $\mathbb{CP}^n$ sind Äquivalenzklassen von $(n+1)$-Tupeln komplexer Zahlen und werden als homogenen Koordinaten $[z_0:\ldots:z_n]$ geschrieben. Es ist wieder

$$\mathbb{CP}^n = \left\{[z_0:\ldots:z_n] \,\middle|\, (z_0,\ldots,z_n)\in S^{2n+1}\right\} = \left\{[z_0:\ldots:z_n] \,\middle|\, (z_0,\ldots,z_n)\in S^{2n+1}, |z_n| \geqslant 0\right\}$$

Wir erhalten wieder einen Homöomorphismus $f^{(n)}\colon {}^{D^{2n+1}}/_{z\sim\lambda z, z\in S^{2n-1}, \lambda\in S^1} \to \mathbb{CP}^n$ durch

$$f^{(n)}(z_1,\ldots,z_n) = \left[z_1:\ldots:z_n:\sqrt{1-\sum_{i=1}^n |z_i|^2}\right]$$

Ist $Q^{(2n)}\colon D^{2n} \to \mathbb{CP}^n$ die Komposition von $f^{(n)}$ mit der Projektion $D^{2n} \twoheadrightarrow {}^{D^{2n}}/_{z\sim\lambda z, z\in S^{2n}}$ und $q^{(n)}\colon S^{2n+1} \to \mathbb{CP}^{n-1}$ die Projektion, so erhalten wir auch wieder einen Pushout

$$\begin{tikzcd}
S^{2n-1} \arrow[r, "q^{(n)}"] \arrow[d, hook] & \mathbb{CP}^{n-1} \arrow[d, hook] \\
D^{2n} \arrow[r, "Q^{(n)}"] & \mathbb{CP}^n
\end{tikzcd}$$

Induktiv erhalten wir einen CW-Struktur auf $\mathbb{CP}^n$ mit genau einer k-Zelle für $k = 0, 2, \ldots, 2n$ und

$$(\mathbb{CP}^n)^{(k)} \cong \mathbb{CP}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}$$

11.6 Lemma. Sei X ein CW-Komplex und $K \subseteq X$. Dann ist K genau dann kompakt, wenn K abgeschlossen ist und K nur endlich viele offene Zellen von X schneidet.

Beweis: Zunächst: Ist $S \subseteq X$ ein Unterraum der jede offene Zelle höchstens in einem Punkt schneidet, so ist S diskret. Für $S_0 \subseteq S$ ist $S_0 \cap (X^{(n)} \setminus X^{(n-1)})$ abgeschlossen in $X^{(n)}$, da S_0 jede offene n-Zelle von X höchstens in einem Punkt schneidet. Daher ist $S_0 \cap X^{(n)} \subseteq X^{(n)}$ abgeschlossen für alle n. Damit ist also jede Teilmenge $S_0 \subseteq S$ abgeschlossen in X und S somit diskret.

Sei nun $K \subseteq X$ kompakt. Dann ist K sicher abgeschlossen. Sei $S \subseteq K$ ein Teilraum, der aus jeder offenen Zelle von X, die K schneidet, genau einen Punkt enthält. Wegen der Vorüberlegung ist S diskret. Da $S \subseteq K$ abgeschlossen und K kompakt ist, ist S auch kompakt. Damit ist S endlich und K schneidet nur endlich viele offene Zellen.

Ist nun umgekehrt K abgeschlossen und schneidet nur endlich viele offene Zellen, so ist K enthalten in einer endlichen Vereinigung von abgeschlossen Zellen von X. Da diese abgeschlossen Zellen kompakt sind, ist auch diese Vereinigung kompakt, K ist also ein abgeschlossener Teilraum eines kompakten Teilraums und damit selbst kompakt. □

11.7 Korollar. Ein CW-Komplex ist genau dann kompakt, wenn er endlich ist. □

12 Zelluläre Homologie

12.1 Definition. Sei X ein CW-Komplex. Dann heißt

$$C_n^{\text{cell}}(X;R) := H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}; R)$$

der ***n-te zelluläre Kettenmodul*** von X mit Koeffizienten in R. Wir definieren die ***n-te Randabbildung*** $\partial_n^{\text{cell}}\colon C_n^{\text{cell}}(X;R) \to C_{n-1}^{\text{cell}}(X;R)$ durch die Komposition

$$\begin{tikzcd}
H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}; R) \arrow[r, "\partial_n^{(X^{(n)}, X^{(n-1)})}"] & H_{n-1}(X^{(n-1)}; R) \arrow[d, "(j^{(n-1)})_*"] \\
& H_{n-1}(X^{(n-1)}, X^{(n-2)}; R)
\end{tikzcd}$$

Dabei ist $\partial_n^{(X^{(n)}, X^{(n-1)})}$ die Randabbildung aus der Paarfolge für $(X^{(n)}, X^{(n-1)})$ und $j^{(n-1)}$ die Inklusion $(X^{(n-1)}, \emptyset) \hookrightarrow (X^{(n-1)}, X^{(n-2)})$.

12.2 Lemma. Es gilt

$$\partial_{n-1}^{\text{cell}} \circ \partial_n^{\text{cell}} = 0$$

Beweis: Wir schreiben die Paarsequenz für $(X^{(n)}, X^{(n-1)})$ dreimal übereinander und erhalten:

„R“ aus Platzgründen weggelassen

$$\begin{tikzcd}
H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[drr, bend right, "\partial_n^{\text{cell}}"'] & H_{n-1}(X^{(n-1)}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots & & \\
& H_{n-1}(X^{(n-1)}) \arrow[r, "j_*^{(n-1)}"] & H_{n-1}(X^{(n-1)}, X^{(n-2)}) \arrow[r, "\partial_{n-1}"] \arrow[drr, bend right, "\partial_{n-1}^{\text{cell}}"'] & H_{n-2}(X^{(n-2)}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \\
& & & H_{n-2}(X^{(n-2)}) \arrow[r, "j_*^{(n-2)}"] & H_{n-2}(X^{(n-2)}, X^{(n-3)})
\end{tikzcd}$$

Also $\partial_{n-1}^{\text{cell}} \circ \partial_n^{\text{cell}} = 0$, da wegen der Exaktheit der Paarfolge schon $\partial_{n-1} \circ j_*^{(n-1)} = 0$ ist. □

12.3 Definition. $(C_*^{\text{cell}}(X;R), \partial_*^{\text{cell}})$ heißt der ***zelluläre Kettenkomplex*** von X über R. Seine Homologie $H_*^{\text{cell}}(X;R)$ heißt die ***zelluläre Homologie*** von X.

Der zelluläre Kettenkomplex und die zelluläre Homologie sind Funktoren auf der Kategorie der CW-Komplexe und zellulären Abbildungen.

12.4 Lemma. Sei X ein CW-Komplex. Wähle $q_i^{(n)}$ und $Q_i^{(n)}$ für die Zellstruktur auf X. Dann gilt

a) Die Abbildung

$$\left(\coprod_{i \in I^{(n)}} Q_i^{(n)}, \coprod_{i \in I^{(n)}} q_i^{(n)} \right) : \left(\coprod_i D^n, \coprod_i S^{n-1}; R \right) \longrightarrow (X^{(n)}, X^{(n-1)}; R)$$

induziert einen Isomorphismus in Homologie.

b) Es gilt

$$H_k\left(\coprod_{i \in I^{(n)}} D^n, \coprod_{i \in I^{(n)}} S^{n-1}; R \right) = \begin{cases} R[I^{(n)}], & \text{falls } k = n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis:

a) Sei $D_0^n := D^n \setminus \{0\}$, $\frac{1}{2}D^n := \{x \in D^n\}$ und $\frac{1}{2}D_0^n := \frac{1}{2}D^n \setminus \{0\}$. Wir definieren

$$X_{++}^{(n-1)} := X^{(n)} \setminus \bigcup_{i \in I^{(n)}} Q_i^{(n)}(\{0\}) \quad \text{und} \quad X_{+}^{(n-1)} := X^{(n)} \setminus \bigcup_{i \in I^{(n)}} Q_i^{(n)}\left(\frac{1}{2}D^n\right)$$

Dann sind $X^{(n-1)} \hookrightarrow X_+^{(n-1)} \hookrightarrow X_{++}^{(n-1)}$ Homotopieäquivalenzen, da $\coprod_{i\in I^{(n)}} Q_i^{(n)}$ ein Homöomorphismus auf den offenen n-Zellen ist. Betrachte:

$$\begin{tikzcd}
(\coprod D^n, \coprod S^{n-1}) \arrow[r, "(1)"] \arrow[d, "(\coprod Q_i^{(n)}, \coprod q_i^{(n)})"] & (\coprod D^n, \coprod D_0^n) \arrow[d] & (\coprod \frac{1}{2}D^n, \coprod \frac{1}{2}D_0^n) \arrow[l, "(2)"'] \arrow[d, "(3)"] \\
(X^{(n)}, X^{(n-1)}) \arrow[r, "(5)"] & (X^{(n)}, X_{++}^{(n-1)}) & (X^{(n)} \setminus X_+^{(n-1)}, X_{++}^{(n-1)} \setminus X_+^{(n-1)}) \arrow[l, "(4)"']
\end{tikzcd}$$

$(1), (2)$ und (5) sind Homotopieäquivalenzen und induzieren Isomorphismen in Homologie. (3) ist ein Homöomorphismus und induziert einen Isomorphismus in Homologie. (4) erfüllt die Vorraussetzungen für den Ausschneideisomorphismus und induziert daher auch einen Isomorphismus in Homologie. Damit folgt a).

b) Da die Randabbildung aus der Paarsequenz in diesem Fall ein Isomorphismus ist, gilt

$$\begin{aligned}
H_k\left(\coprod_i D^n, \coprod_i S^{n-1}; R\right) &\xleftarrow{\cong} \bigoplus_i H_k(D^n, S^{n-1}; R) \xrightarrow{\cong} \bigoplus_i \tilde{H}_{k-1}(S^{n-1}; R) \\
&\cong \bigoplus_i \begin{cases} R, & \text{falls } k = n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\
&\cong \begin{cases} R[I^{(n)}], & \text{falls } k = n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}$$ □

12.5 Bemerkung. Wir haben soeben gezeigt, dass die folgenden Isomorphismen existieren:

$$\begin{tikzcd}
C_n^{cell}(X;R) \arrow[r, "\partial_n^{cell}"] \arrow[d, equal] & C_{n-1}^{cell}(X;R) \arrow[d, equal] \\
H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}; R) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H_{n-1}(X^{(n-1)}, X^{(n-2)}; R) \arrow[d, "\cong"] \\
R[I^{(n)}] \arrow[r] & R[I^{(n-1)}]
\end{tikzcd}$$

Die Randabbildung ∂_n^{cell} wird unter diesen Isomorphismen zu einer $I^{(n-1)} \times I^{(n)}$-Matrix. Für $j \in I^{(n-1)}$ und $k \in I^{(n)}$ ist der (j,k)-Eintrag dieser Matrix genau der Abbildungsgrad einer Selbstabbildung der $(n-1)$-Sphäre:

Die $(Q_i^{(n-1)}, q_i^{(n-1)})$ induzieren einen Homöomorphismus $\coprod_i D^{n-1}/\coprod_i S^{n-2} \cong X^{(n)}/X^{(n-1)}$. Durch Komposition mit der Projektion auf die j-te Zelle erhalten wir die folgenden Abbildung

$$\coprod_i D^{n-1}/\coprod_i S^{n-2} \xrightarrow{p_j^{(n-1)}} D^{n-1}/S^{n-2} \cong S^{n-1}.$$

Der (j,k)-te Eintrag ist nun der Abbildungsgrad von

$$S^{n-1} \xrightarrow{q_k^{(n-2)}} X^{(n-1)} \longrightarrow X^{(n-1)}/X^{(n-2)} \xrightarrow{\cong} \coprod_i D^{n-1}/\coprod_i S^{n-2} \xrightarrow{p_j^{(n-1)}} S^{n-1}$$

12.6 Definition. Eine natürliche Transformation τ zwischen Funktoren $F, G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ heißt ein ***natürlicher Isomorphismus***, wenn $\tau_C\colon F(C) \to G(C)$ für alle Objekte C von $\mathcal{C}$ ein Isomorphismus in $\mathcal{D}$ ist.

12.7 Satz. Für CW-Komplexe gibt es einen natürlichen Isomorphismus $\tau_X\colon H_*^{\text{cell}}(X;R) \xrightarrow{\cong} H_*(X;R)$.

Beweis (mit Lemma 12.8)**:** Betrachte folgendes Diagramm; die diagonalen Folgen sind Ausschnitte aus den Paarsequenzen:

„R“ aus Platzgründen weggelassen

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & & \underbrace{H_n(X^{(n+1)},X^{(n)})}_{=0} & \\
 0 \overset{12.8\,a)}{=} H_n(X^{(n-1)}) \arrow[dr] & & & H_n(X^{(n+1)}) \arrow[ur] \arrow[r, "\cong", "12.8\,b)"'] & H_n(X) & \\
 & & H_n(X^{(n)}) \arrow[ur, two heads] \arrow[dr, hook, "j_*^{(n)}"] & & & \\
 H_{n+1}(X^{(n+1)},X^{(n)}) \arrow[urr, "\partial_{n+1}^{X^{(n+1)},X^{(n)}}"] \arrow[rrr, "\partial_{n+1}^{\text{cell}}"] & & & H_n(X^{(n)},X^{(n-1)}) \arrow[rr, "\partial_n^{\text{cell}}"] \arrow[dr, "\partial_n^{X^{(n)},X^{(n-1)}}"] & & H_{n-1}(X^{(n-1)},X^{(n-2)}) \\
 & & & & H_{n-1}(X^{(n-1)}) \arrow[ur, hook, "j_*^{(n-1)}"'] & \\
 & & & \underbrace{H_{n-1}(X^{(n-2)})}_{=0} \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Es folgt, dass $j_*^{(n)}$ wegen Exaktheit einen Isomorphismus $H_n(X^{(n)};R) \xrightarrow{\cong} \ker \partial_n^{\text{cell}}$ induziert. Da $j_*^{(n)}$ injektiv ist, induziert $j_*^{(n)}$ außerdem einen Isomorphismus $\operatorname{im} \partial_{n+1}^{X^{(n+1)},X^{(n)}} \xrightarrow{\cong} \operatorname{im} \partial_{n+1}^{\text{cell}}$. Insgesamt erhalten wir natürliche Isomorphismen

$$H_n(X;R) \cong H_n(X^{(n+1)};R) \cong {}^{H_n(X^{(n)};R)}\!/\!_{\operatorname{im} \partial_{n+1}^{X^{(n+1)},X^{(n)}}} \cong {}^{\ker \partial_n^{\text{cell}}}\!/\!_{\operatorname{im} \partial_{n+1}^{\text{cell}}} \cong H_n^{\text{cell}}(X;R) \qquad \square$$

12.8 Lemma. Sei X ein CW-Komplex.

a) Für $k > n$ ist $H_k(X^{(n)};R) = 0$.

b) Für $k < n$ induziert die Inklusion $\iota_n\colon X^{(n)} \hookrightarrow X$ einen Isomorphismus $(\iota_n)_*\colon H_k(X^{(n)};R) \to H_k(X;R)$.

Beweis:

a) Ist $k > n$, so erhalten wir aus der Paarfolge einen Isomorphismus

$$\underbrace{H_{k+1}(X^{(n)},X^{(n-1)};R)}_{\overset{12.4}{=}0} \longrightarrow H_k(X^{(n-1)};R) \xrightarrow{\cong} H_k(X^{(n)};R) \longrightarrow \underbrace{H_k(X^{(n)},X^{(n-1)};R)}_{\overset{12.4}{=}0}$$

Da $H_k(X^{(0)};R) = 0$ für $k > 0$, folgt a) nun durch endliche Induktion für $n = 0, 1, \dots, k-1$.

b) Ist $n > k$, so erhalten wir aus der Paarfolge

$$\underbrace{H_{k+1}(X^{(n+1)}, X^{(n)}; R)}_{\overset{12.4}{=} 0} \longrightarrow H_k(X^{(n)}; R) \xrightarrow{\cong} H_k(X^{(n+1)}; R) \longrightarrow \underbrace{H_k(X^{(n+1)}, X^{(n)}; R)}_{\overset{12.4}{=} 0}$$

Für $m \geqslant n > k$ induziert die Inklusion $X^{(n)} \hookrightarrow X^{(m)}$ daher einen Isomorphismus in Homologie $H_k(X^{(n)}; R) \to H_k(X^{(m)}; R)$. Ist $\dim X$ endlich, so folgt die Behauptung.

Im allgemeinen Fall beobachten wir zunächst, dass es zu jeder stetigen Abbildung $\sigma\colon |\Delta^j| \to X$ ein n gibt mit $\operatorname{im}\sigma \subseteq X^{(n)}$, da $\operatorname{im}\sigma \subseteq X$ kompakt ist und daher nur endlich viele offene Zellen von X trifft (siehe Lemma 11.6). Also gilt $C_*(X; R) = \bigcup_n C_*(X^{(n)}; R)$. Damit folgt

(1) $\forall x \in H_k(X; R)$ existiert ein n, sodass x im Bild von $H_k(X^{(n)}; R) \to H_k(X; R)$.

(2) $\forall x \in H_k(X^{(n)}; R)$ mit trivialem Bild von x in $H_k(X; R)$, gibt es ein $m \geqslant n$, sodass das Bild von x in $H_k(X^{(m)}; R)$ trivial ist.

Da für $m \geqslant n > k$ die Abbildung $H_k(X^{(n)}; R) \to H_k(X^{(m)}; R)$ ein Isomorphismus ist, ergibt sich damit die Behauptung. □

12.9 Korollar. Die Eulercharakteristik eines endlichen simplizialen Komplexes ist eine topologische Invariante.

Beweis: Sei a_n die Anzahl der n-Simplizes von K. Dann gibt es eine CW-Struktur auf $|K|$, die für jedes n genau a_n Zellen hat.

Man beachte, dass 4.10 für beliebige $\mathbb{Z}$-Kettenkomplexe und deren Homologie gilt

$$\chi(K) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i a_i \overset{12.4}{=} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \operatorname{Rg} C_i^{\text{cell}}\big(|K|\big) \overset{4.10}{=} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \operatorname{Rg} H_i^{\text{cell}}\big(|K|\big) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \operatorname{Rg} H_i\big(|K|\big)$$

Da die $H_i\big(|K|\big)$ eine topologische Invariante sind, ist auch $\chi(K)$ eine topologische Invariante. □

12.10 Bemerkung. Ist X ein CW-Komplex mit endlich vielen n- und $n+1$-Zellen, so ist $H_n(X)$ ein endlich erzeugter $\mathbb{Z}$-Modul. Man definiert dann die ***n-te Bettizahl*** von X als $b_n := \operatorname{Rg} H_n(X)$. Ist X ein endlicher CW-Komplex, so definiert man die Euler-Charakteristik von X als

$$\chi(X) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n.$$

Ist a_n die Anzahl der n-Zellen von X, so gilt $\chi(X) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$.

12.11 Beispiel. Es gilt

$$H_k(\mathbb{C}P^n; R) \cong \begin{cases} R, & \text{falls } k = 0, 2, 4, \dots, 2n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis: Aus Beispiel 11.5 (v) wissen wir, dass es auf $\mathbb{C}P^n$ eine CW-Struktur gibt mit genau einer Zelle in der Dimension $0, 2, 4, \dots, 2n$ (und keine weiteren Zellen). Der zelluläre Kettenkomplex hat daher folgende Form:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc} 0 & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & \cdots & & 2n-1 & & 2n & & 2n+1 & & \cdots \\ R & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & R & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & R & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & R & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & \cdots \end{array}$$

Alle Randabbildungen sind trivial und die Homologie von $\mathbb{C}P^n$ stimmt mit den zellulären Kettenkomplexen überein. □

12.12 Beispiel. Es gilt

$$H_k(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{falls } k=0 \text{ oder } (k=n \text{ und } k \text{ ungerade}) \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & \text{falls } 0<k<n \text{ und } k \text{ ungerade} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis: Aus Beispiel 11.5 (iv) wissen wir, dass es eine CW-Struktur auf $\mathbb{R}P^n$ gibt, die für $k = 0,\dots,n$ genau eine k-Zelle und keine weiteren Zellen besitzt. Der zelluläre Kettenkomplex von $\mathbb{R}P^n$ (über $\mathbb{Z}$) hat also die Form:

$$\mathbb{Z} \xleftarrow{\partial_1^{\text{cell}}} \mathbb{Z} \xleftarrow{\partial_2^{\text{cell}}} \mathbb{Z} \longleftarrow \cdots \longleftarrow \mathbb{Z} \xleftarrow{\partial_n^{\text{cell}}} \mathbb{Z} \longleftarrow 0$$

Wir müssen die Randabbildung verstehen. In der CW-Struktur können wir $(\mathbb{R}P^n)^{(k)}$ mit $\mathbb{R}P^k$ identifizieren. Die anklebende Abbildung $q^{(k+1)}\colon S^k \to \mathbb{R}P^k$ der $(k+1)$-Zelle ist die Projektion $(x_0,\dots,x_k) \mapsto [x_0:\ldots:x_k]$. Die charakteristische Abbildung $Q^{(k+1)}\colon D^{k+1} \to \mathbb{R}P^{k+1}$ der $(k+1)$-Zelle ist gegeben durch

$$(x_0,\dots,x_k) \mapsto \left[x_0:\ldots:x_k:\sqrt{1-\|(x_1,\dots,x_k)\|^2}\right]$$

Das linke untere Quadrat kommutiert, da die Randabbildung aus der Paarfolge eine natürliche Transformation ist. Das rechte, da die zugrunde liegenden Abbildungen kommutieren.

Betrachte folgendes kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
C^{\text{cell}}_{k+1}(\mathbb{R}P^n) \arrow[rr, "\partial^{\text{cell}}_{k+1}"] \arrow[d, equal] & & C^{\text{cell}}_k(\mathbb{R}P^n) \arrow[d, equal] \\
H_{k+1}\big(\mathbb{R}P^{k+1},\mathbb{R}P^k\big) \arrow[r, "\partial^{\mathbb{R}P^{k+1},\mathbb{R}P^k}"] & H_k(\mathbb{R}P^k) \arrow[r] & H_k\big(\mathbb{R}P^k,\mathbb{R}P^{k-1}\big) \\
H_{k+1}(D^{k+1},S^k) \arrow[u, "\big(Q^{(k+1)},q^{(k+1)}\big)_*", "\cong"'] \arrow[r, "\partial^{D^{k+1},S^k}", "\cong"'] & \tilde{H}_k(S^k) \arrow[u, "\big(q^{(k+1)}\big)_*"] \arrow[r, "j_*"] & H_k(S^k,S^{k-1}) \arrow[u, "\big(q^{(k+1)},q^{(k)}\big)_*"']
\end{tikzcd}$$

Das Bild von $\partial^{\text{cell}}_{k+1}$ stimmt also mit dem Bild der Komposition

$$H_k(S^k) \xrightarrow{j_*} H_k(S^k,S^{k-1}) \xrightarrow{\big(q^{(k+1)},q^{(k)}\big)_*} H_k\big(\mathbb{R}P^k,\mathbb{R}P^{k-1}\big)$$

faktorisieren über 0

überein. Sei $i_\pm\colon D^k \to S^k$ definiert durch $i_\pm(x) = \big(\pm x, \pm\sqrt{1-\|x\|^2}\big)$. Sei $l\colon S^{k-1} \hookrightarrow i_-(D^k)$ die Inklusion und $R\colon S^k \to S^k$ die Punktspiegelung $x \mapsto -x$. Es ist $i_+ = R \circ i_-$. Betrachte

$$\begin{tikzcd}
 & \tilde{H}_k(S^k) \arrow[d, "j_*"] & \\
\begin{matrix} y_+ \in H_k(D^k,S^{k-1}) \\ \bigoplus \\ y_- \in H_k(D^k,S^{k-1}) \end{matrix} \arrow[r, "\begin{matrix}(i_+,i_+|_{S^{k-1}})_* \\ \oplus \\ (i_-,i_-|_{S^{k-1}})_*\end{matrix}", "\cong"'] & H_k(S^k,S^{k-1}) \arrow[r, "\begin{pmatrix}(\mathrm{id}_{S^k},l)_* \\ (R,R|_{S^{k-1}})_*\end{pmatrix}", "\cong"'] \arrow[d, "\big(q^{(k+1)},q^{(k)}\big)_*"] & \begin{matrix} H_k\big(S^k,i_-(D^k)\big) \ni x_+ \\ \bigoplus \\ H_k\big(S^k,i_-(D^k)\big) \ni x_- \end{matrix} \\
 & H_k\big(\mathbb{R}P^k,\mathbb{R}P^{k-1}\big) &
\end{tikzcd} \qquad [\#]$$

In der Übungen haben wir gesehen, dass die horizontalen Abbildungen Isomorphismen sind. Sei $x \in \tilde{H}_k(S^k)$ ein Erzeuger. Seien (x_+, x_-) und (y_+, y_-) die Elemente, die $j_*(x)$ unter den horizontalen Isomorphismen in [#] entsprechen. Mit Hilfe der Paarfolge zu $(S^k, i_-(D^k))$ sehen wir, dass die Inklusion $j_-\colon (S^k, \emptyset) \hookrightarrow (S^k, i_-(D^k))$ einen Isomorphismus $(j_-)_*\colon \tilde{H}_k(S^k) \to \tilde{H}_k(S^k, i_-(D^k))$ induziert. Es ist nun $(\mathrm{id}_{S^k}, l) \circ j = j_-$ und $(R, R|_{S^{k-1}}) \circ j = j_- \circ R$. Damit ist x_+ ein Erzeuger von $H_k(S^k, i_+(D^k))$. Weiter entspricht R_* der Multiplikation mit $(-1)^{k+1}$ nach Beispiel 10.6. Damit folgt

$$x_- = \left(R, R\big|_{S^{k+1}}\right)_* \circ j_*(x) = (\mathrm{id}_{S^k}, l) \circ j_* \circ R_*(x) = (\mathrm{id}_{S^k}, l)_* \circ j_*\left((-1)^{k+1}x\right) = (-1)^{k+1} \cdot x_+$$

Ich sehe noch immer nicht ganz ein, warum dies so ist. Über genauere Ausführungen wäre ich sehr dankbar

Die Komposition der horizontalen Isomorphismen in [#] ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} (i_+, l \circ i_+|_{S^{k-1}})_* & 0 \\ 0 & (R, R|_{S^{k-1}})_* \circ (i_-, i_-|_{S^{k-1}})_* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (i_+, l \circ i_+|_{S^{k-1}})_* & \\ & (i_+, l \circ i_+|_{S^{k-1}})_* \end{pmatrix}$$

Es folgt, dass y_+ ein Erzeuger von $H_k(D^k, S^{k-1})$ ist und $y_- = (-1)^{k+1} y_+$ ist. In [#] wird y_+ auf $(q^{(k+1)}, q^{(k)})_* \circ (i_+, i_+|_{S^{k-1}})_*(y_+) = (Q^{(k)}, q^{(k)})_*(y_+)$ abgebildet. Insbesondere wird y_+ auf einen Erzeuger $z_k \in H_k(\mathbb{R}P^k, \mathbb{R}P^{k-1})$ abgebildet, da diese Abbildung nach 12.4 ein Isomorphismus ist. Es folgt

$$\begin{aligned} (q^{(k+1)}, q^{(k)})_*\left(j_*(x)\right) &= (q^{(k+1)}, q^{(k)})_*\left(\left(i_+, i_+\big|_{S^{k-1}}\right)_*(y_+) + \left(i_-, i_-\big|_{S^{k-1}}\right)_*(y_-)\right) \\ &= (Q^{(k)}, q^{(k)})_*\left(y_+ + (-1)^{k+1} y_+\right) \\ &= \begin{cases} 2z_k, & \text{falls } k \text{ ungerade} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Es folgt

$$\operatorname{im} \partial_{k+1}^{\mathrm{cell}} = \begin{cases} 2 \cdot C_k^{\mathrm{cell}}(X), & \text{falls } k \text{ ungerade} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Der zelluläre Kettenkomplex ist daher isomorph zu:

$$\mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \xleftarrow{2} \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \longleftarrow \cdots \longleftarrow \overset{n}{\mathbb{Z}} \longleftarrow 0 \longleftarrow 0$$

Womit die Behauptung folgt. □

Für $R = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist

$$H_k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & \text{falls } k = 0, \dots, n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

12.13 Satz. Sei K ein geordneter simplizialer Komplex. Für $\sigma = \{v_0, \dots, v_n\} \in \Sigma_n$ mit $v_0 < v_1 < \dots < v_n$ sei $f_\sigma\colon |\Delta^n| \to |K|$ gegeben durch $f_\sigma(\sum_{i=0}^n t_i e_i) = \sum_{i=0}^n t_i v_i$. Wir erhalten

$$[f_\sigma] \in H_n\left(|K|^{(n)}, |K|^{(n-1)}; R\right) = C_n^{\mathrm{cell}}(|K|; R).$$

Diese Zuordnung definiert einen Isomorphismus zwischen dem simplizialen Kettenkomplex von K und dem zellulären Kettenkomplex von $|K|$

$$\tau\colon C_*(K; R) \longrightarrow C_*^{\mathrm{cell}}(|K|, R)$$

Insbesondere ist $H_*(K; R) \cong H_*(|K|; R)$ eine topologische Invariante von K.

Beweis: Betrachte

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_{\sigma\in\Sigma_n} R \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\cong"'] & \bigoplus_{\sigma\in\Sigma_n} H_n(|\Delta^\sigma|, |\partial\Delta^\sigma|; R) \arrow[d, "\cong"'] \\ C_n(K;R) \arrow[r, "\tau"] & H_n\left(|K|^{(n)}, |K|^{(n-1)}; R\right) \end{tikzcd}$$

Nun ist auch τ ein Isomorphismus, da $[f_\sigma]$ ein Erzeuger von $H_n(|\Delta^\sigma|, |\partial\Delta^\sigma|; R)$ ist, siehe Blatt 8. Es bleibt zu zeigen, dass $\sigma \mapsto [f_\sigma]$ mit den Randabbildungen vertauscht. Dies ergibt sich sofort aus $f_{\partial_j \sigma} = \partial_j f_\sigma$. □

Index

Die *Seitenzahlen* sind mit Hyperlinks versehen und somit anklickbar

Abbildungsverzeichnis

To-do's und andere Baustellen