

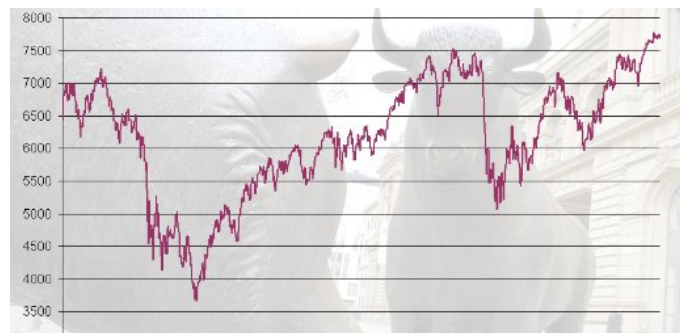


WESTFÄLISCHE
WILHELMS-UNIVERSITÄT
MÜNSTER



FACHBEREICH 10
MATHEMATIK UND
INFORMATIK

Finanzmathematik



Tobias Wedemeier

23. Oktober 2014

gelesen von

PD Dr. Paulsen

Hierbei handelt es sich um eine Mitschrift der Vorlesung von **PD Dr. Paulsen**, WWU Münster, aus der Vorlesung **Finanzmathematik** im Wintersemester 2014/15. Dies ist kein Skript der Vorlesung und keine eigene Arbeit des Autors.

Für Fehler in der Mitschrift wird keine Haftung übernommen. Hinweise auf Fehler sind gerne gesehen, hierfür kann man mich in der Uni ansprechen oder alternativ eine e-Mail an: *tobias.wedemeier@gmx.de*
Auch ist eine Mitarbeit über Github möglich.

Wenn Teile aus der Vorlesung selber fehlen, können diese gerne an meine e-Mail versandt werden. Ich werde diese dann einarbeiten.

Inhaltsverzeichnis

Prolog	1
Ziel	1
Schlagwörter	1
Hilfsmittel	1
Themen	1
1 Informelle Einführung	2
1.1 Option	2
1.2 long, short	2
1.3 Payoff und Profit Diagramme	3
1.4 Strategien	5
1.5 Arbitrage	7
1.6 Replikationsprinzip	7
1.7 Nullkuponanleihe	8
1.8 Put-Call Parität	8
1.9 forward	8
1.10 Digitale Position	9
1.11 Eigenschaften des Call-Preises	9
1.12 Zinsmethoden	11
Abbildungsverzeichnis	A

Prolog

Ziel

- Bewertung von Finanzderivaten, dies entspricht der Bewertung von Finanzmarktrisiken
- aktuarielle Bewertung von Risiken, biometrische Risiken (Rente, . . .) \leftrightarrow Personenversicherungen, sonstige Risiken (Unfall, . . .) \leftrightarrow Schadenversicherungen

Schlagwörter

- Black-Scholes Formel
- äquivalentes Martingalmaß
- Hedging, Replizieren durch Handel
- Arbitrage
- Äquivalenzprinzip
- Risikoausgleich im Kollektiv

Hilfsmittel

Theorie der stochastischen Prozesse

- mathem. Modellierung von zeitlich abhängigen Zufallsphänomenen
- notwendig zur Beschreibung von Finanzmärkten

Themen

- diskrete und kontinuierliche Martingaltheorie
- diskrete und kontinuierliche Markov-Prozesse
- Wiener-Prozess, Brownsche Bewegung
- geometrische Brownsche Bewegung als Modell für Aktienkurse

1 Informelle Einführung

(i) Zweiteilung von Finanzgütern in:

- (1) Basisfinanzgüter
- (2) derivative Finanzgüter

(ii) zu (1) gehören:

- Aktien
- festverzinsliche Wertpapiere, Bonds
- Rohstoffe, Agrarprodukte

diese werden gehandelt auf:

- Aktienmärkte
- Rentenmärkte
- Warenmärkte

Diese werden als Kassamärkte bezeichnet.

(iii) zu (2) gehören:

- Optionen auf Aktien
- Swaps (Zinsderivate)
- futures und forwards

1.1 Option

Unterscheidung in Kauf- und Verkaufsoptionen

- Eine Kaufoption (**Call**) gibt das Recht ein Basisfinanzgut (**Underlying**), zu einem im Voraus bestimmten fixen Preis, dem Ausübungspreis (**strike**, Basis), während (**amerikanische Option**) oder nur am Ende der Laufzeit der Option (**europäische Option**) zu kaufen.
- Eine Verkaufsoption (**Put**) gibt das Recht ein Basisfinanzgut (Underlying), zu einem im Voraus bestimmten fixen Preis, dem Ausübungspreis (strike, Basis), während (amerikanische Option) oder nur am Ende der Laufzeit der Option (europäische Option) zu verkaufen.

Dies sind **unbestimmte Termingeschäfte**, da keinerlei Verpflichtung zum Kauf bzw. Verkauf besteht.

1.2 long, short

In der Regel nimmt der Käufer eines Finanzgutes eine **long-Position** ein, der Verkäufer eine **short-Position**. Der Verkäufer wird auch als writer (Zeichner) bezeichnet, da er die Option 'zeichnet'. Man kann zu jeder Zeit eine long oder short Position eingehen, insbesondere auch wenn man die Aktie gar nicht besitzt. Dies wird auch als **Leerverkauf** (short selling) bezeichnet, hierbei leiht man sich die Aktie von der Bank um sie zu verkaufen.

1.3 Payoff und Profit Diagramme

- Positionen in Finanzgütern bergen Chancen und Risiken.
- Payoff**: Wert der Position wird gegen den Preis des Underlyings aufgetragen
- Profit**: analog zum Payoff, unter Berücksichtigung von Kosten (Anfangswert der Position)
- Beispiele: Option mit Laufzeit $T \in \mathbb{N}$, Underlying mit Preis S_T in T
 - (a) long call: strike K
Payoff: $(S_T - K)^+$
 $S_T \leq K$ keine Ausübung, $S_T > K$ Ausübung der Option (Ablauf: leihe Geld, kaufe Aktie, verkaufe Aktie, zahle Geld zurück)



Abbildung 1: Payoff long call

Kosten: Anfangspreis des Calls $c > 0$. Profit: $(S_T - K)^+ - c$

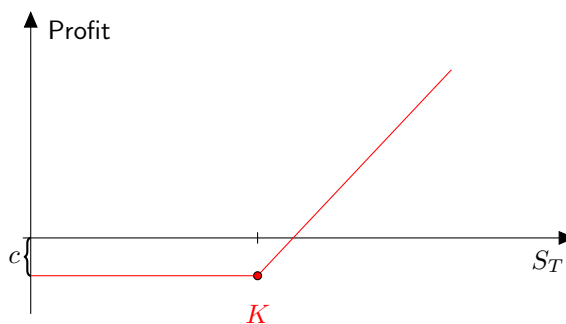


Abbildung 2: Profit long call

(b) long put: strike K

Payoff: $(K - S_T)^+$

$S_T > K$ keine Ausübung, $S_T \leq K$ Ausübung der Option (Ablauf: leihe Aktie, verkaufe Aktie, kaufe Aktie, gebe Aktie zurück)

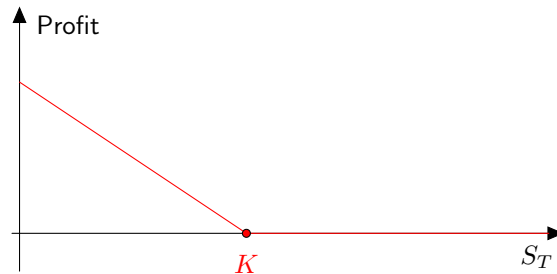


Abbildung 3: Payoff long put

Kosten: Anfangspreis der Option $p > 0$. Profit: $(K - S_T)^+ - p$

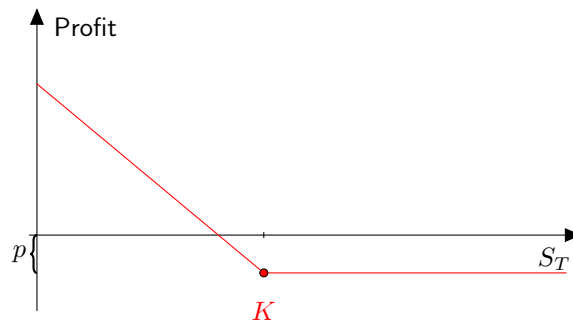


Abbildung 4: Profit long put

(c) short call:

Payoff: $-(S_T - K)^+$, Profit: $c - (S_T - K)^+$



Abbildung 5: Payoff short call

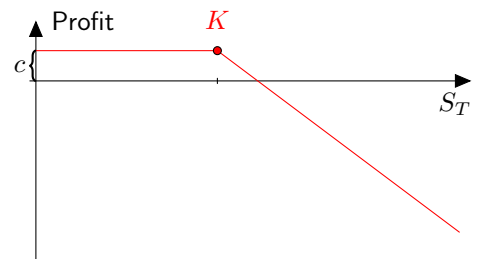


Abbildung 6: Profit short call

(d) short put:

Payoff: $-(K - S_T)^+$, Profit: $p - (K - S_T)^+$

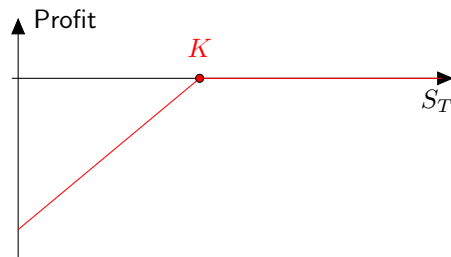


Abbildung 7: Payoff short put

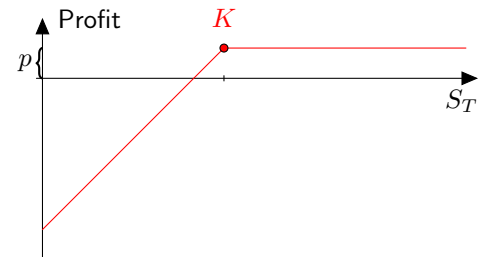


Abbildung 8: Profit short put

1.4 Strategien

Durch Kombination von einfachen Positionen bildet man **Strategien**.

Bsp

- Absicherung einer Aktie:
 - Aktie zum heutigen Kurs kaufen mit strike K
 - zur Absicherung gegen Kursverlust in T wird eine Putoption zum strike K gekauft

■ Gesamtposition:

	long Aktie	long put	Gesamt
Kosten	K	p	$K + p$
Payoff	S_T	$(K - S_T)^+$	$S_T + (K - S_T)^+ = \max\{K, S_T\}$

■ Profit:

$$S_T + (K - S_T)^+ - (K + p) = (S_T - K) + (K - S_T)^+ - p = -p_{\{S_T \leq K\}} + (S_T - (K + p))_{\{S_T > K\}}$$

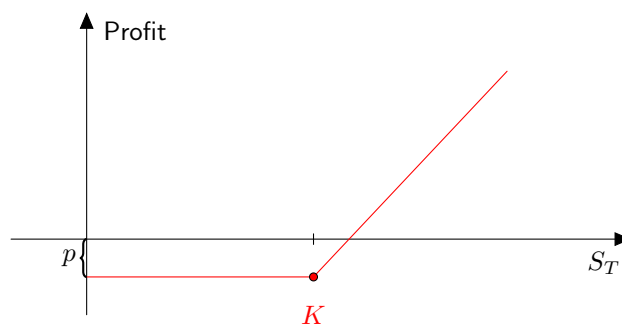


Abbildung 9: Bsp. Profit Diagramm

long straddle

- Idee: Spekulation auf eine starke Kursänderung

	long call	long put	Gesamt
Kosten	c	p	$c + p$
Payoff	$(S_T - K)^+$	$(K - S_T)^+$	$ S_T - K $

Profit: $|S_T - K| - (c + p)$



Abbildung 10: long straddle

Bullish Vertical Spread

Idee: Risikoarme Spekulation auf ein Anziehen des Kurses

	long call mit strike K_1	short call mit strike $K_2 > K_1$	Gesamt
Kosten	c_1	$-c_2$	$c_1 - c_2 > 0$
Payoff	$(S_T - K_1)^+$	$-(S_T - K_2)^+$	$(S_T - K_1)\{K_1 < S_T < K_2\} + (K_2 - K_1)\{S_T > K_2\}$

Je kleiner der
strike, desto
mehr ist der
call.



Abbildung 11: Bullish Vertical Spread

Butterfly Spread

Idee: Risikoarme Spekulation auf eine Seitwärtsbewegung des Kurses

strike: $K_1 < K_2 < K_3$

	long call strike K_1	long call strike K_3	$2 \times$ short call strike K_2	
Kosten	c_1	c_3	$-2c_2$	$c_1 + c_3 - 2c_2$
Payoff:	$(S_T - K_1)\{K_1 < S_T < K_2\} + (2K_2 - K_1 - S_T)\{K_2 < S_T < K_3\} + 2K_2 - (K_1 + K_3)\{S_T > K_3\}$			

Fall $K_2 = \frac{1}{2}(K_1 + K_3) \Rightarrow c_1 + c_3 - 2c_2 > 0$



Abbildung 12: long Butterfly Spread

Für weitere Strategien klicken Sie [hier](#).

1.5 Arbitrage

- Ein **Arbitrage** ist eine Möglichkeit durch Handel mit Finanzgütern einen risikolosen Profit zu erzielen.

- Bsp**

	New York	Frankfurt
Aktie	130 \$	100 €
Wechselkurs	1,27 \$ $\hat{=}$ 1 €	

- Arbitragemöglichkeit:
leihe 100 € \rightsquigarrow kaufe Aktie in Frankfurt \rightsquigarrow verkaufe Aktie in New York
 \rightsquigarrow tausche 127 \$ in 100 € \rightsquigarrow 100 € zurück zahlen \rightsquigarrow risikolosen Profit von 3 \$
- Grundannahme:
Im Handel mit Finanzgütern gibt es keine Arbitragen. Dies ist das sogenannte **No-Arbitrage Prinzip**.
- Aus dem No-Arbitrage Prinzip kann das **Replikationsprinzip** gefolgert werden.

1.6 Replikationsprinzip

Haben zwei verschiedene Kombinationen K, L von ausschüttungsfreien Finanzgütern zu einem zukünftigen Zeitpunkt $T \in \mathbb{R}$ immer den gleichen Wert, so haben sie auch zum gegenwärtigen Zeitpunkt den gleichen Wert.

Die Kombination K repliziert den Payoff der Kombination L , und umgekehrt.

Argumentation:

K, L habe den Anfangswert $V_0, W_0 \in \mathbb{R}$ und den zufälligen Wert $V_T, W_T \in \mathbb{R}$ in T .

Es gelte: $V_T = W_T$:

Beh.: $V_0 = W_0$

A

1.Fall: $V_0 > W_0$.

Dann kann durch short selling von K ein Arbitrage erzielt werden:

- short selling in K

- gehe long in L

\Rightarrow am Anfang Gewinn $V_0 - W_0 > 0$

- handeln entsprechend L bis T

in T :

- verkaufe L , erhalte $W_T = V_T$
- kaufe K für V_T und gebe die Position K zurück

Am Ende: Glattstellen der Positionen $W_T - V_T = 0 \nless$

2.Fall: $W_0 > V_0$. Analog.

□

1.7 Nullkuponanleihe

festverzinsliches Wertpapier:

- Fälligkeit T (Maturity)
- Zahlung von 1 Euro
- keine Kuponzahlung während der Laufzeit

$B(t, T)$ bezeichne den Preis dieser Anleihe zum Zeitpunkt $t < T$. $0 < B(t, T) < 1$ ist der Regelfall.

1.8 Put-Call Parität

Seien c, p die Anfangspreise einer Call- bzw. Putoption mit Laufzeit T und strike K .

Sei S_0 und S_T die Preise des Underlyings heute und in T .

Dann gilt:

$$S_0 + p = c + K \cdot B(0, T)$$

Argumentation:

Betrachte folgende Kombinationen:

I: long Aktie, long put

II: long call, $K \cdot$ long in eine Nullkuponanleihe mit Fälligkeit in T

Wert zum Zeitpunkt T :

I: $S_T + (K - S_T)^+ = \max\{S_T, K\}$

II: $(S_T - K)^+ + K = \max\{S_T, K\}$

Replikationsprinzip liefert:

$$S_0 + p = c + K \cdot B(0, T)$$

□

1.9 forward

- unbedingtes Termingeschäft
- Termin T Ausübungszeitpunkt, Maturity
- Underlying mit Preisen S_0 heute und S_T in T

- Zwei Parteien A und B
- Terminpreis F_T festgelegt zum Vertragsabschluss

in T

- A zahlt an B den Terminpreis F_T
- B liefert das Underlying
Agrargütern

A hat die long-Position im forward, B die short-Position. Zusammenhang zwischen Termin- und Spotpreis des Underlyings.

S_0 - gegenwärtiger Preis, **Spotpreis**

F_T - Terminpreis zum Termin T

Dann gilt:

$$F_T \cdot B(0, T) = S_0$$

Argumentation:

Betrachte folgende Kombinationen:

I: long im forward zum Zeitpunkt T , $F \times$ long in einer Nullkuponanleihe mit Fälligkeit T

II: long im Underlying

Wert zum Zeitpunkt T : I: $\underbrace{S_T - F_T}_{\text{forward}} + \underbrace{F_T}_{\text{Nullkuponanleihe}} = S_T$

II: S_T

Replikationsprinzip liefert:

$$F_T \cdot B(0, T) = S_0$$

1.10 Digitale Position

Recht auf Auszahlung eines festen Geldbetrags (etwa 1 €) bei Eintreten eines auslösenden Ereignisses (**bedingtes Termingeschäft**).

z.B.

digitaler call digitaler put
 $1_{\{S_T \geq K\}}$ $1_{\{S_T \leq K\}}$

1.11 Eigenschaften des Call-Preises

Sei $C(S_0, T, K)$ der Preis eines Calls auf ein Underlying mit Laufzeit T , strike K und Anfangspreis S_0 . Dann gilt:

- (i) $C(S_0, T, K) \geq \max\{0, S_0 - K \cdot B(0, T)\}$ **innerer Wert** des Calls
- (ii) $C(S_0, T, K) \leq S_0$ **obere Grenze** des Calls
- (iii) $K_1 \leq K_2 \Rightarrow C(S_0, T, K_1) \geq C(S_0, T, K_2)$
- (iv) $B(0, T)(K_2 - K_1) \geq C(S_0, T, K_1) - C(S_0, T, K_2) \quad \forall K_1 < K_2$
- (v) $C(S_0, T, K_2) \leq \frac{K_3 - K_2}{K_3 - K_1} \cdot C(S_0, T, K_1) + \frac{K_2 - K_1}{K_3 - K_1} \cdot C(S_0, T, K_3) \quad \forall K_1 < K_2 < K_3$ **Konvexität in K**

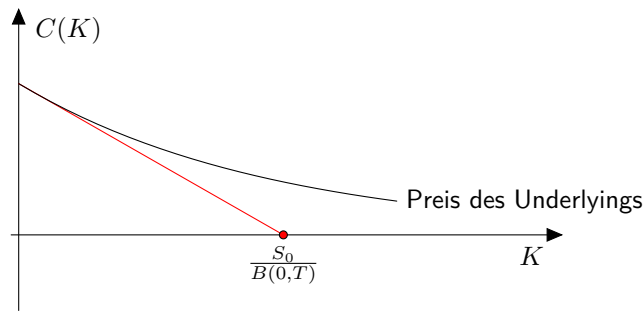


Abbildung 13: Konvexität in K

Argumentation:

- (i) Falls $C(S_0, T, K) < 0$ gehe long im Call und halte bis T . Risikolosen Gewinn von $|C(S_0, T, K)| > 0$ am Anfang. \nexists No-Arbitrage
Genauso sieht man ein, dass $P(S_0; T, K) \geq 0$
Put-Call Parität liefert:

$$\begin{aligned} C(S_0, T, K) &= S_0 + P(S_0, T, K) - K \cdot B(0, T) \\ &\geq S_0 - K \cdot B(0, T) \end{aligned}$$

- (ii) Falls $C(S_0, T, K) > S_0$.
long Aktie, short im call
am Anfang: Gewinn von $C(S_0, T, K) - S_0 > 0$, benutze die Aktie um die Verpflichtung des Calls zu erfüllen: $S_T - (S_T - K)^+ \geq 0 \nexists$ No-Arbitrage
- (iii) Sei $K_1 \leq K_2$:
Falls $C(K_1) < C(K_2)$ gehe short in K_2 und long in K_1 .
am Anfang: $C(K_2) - C(K_1) > 0$
am Ende: $(S_T - K_1)^+ - (S_T - K_2)^+ = (S_T - K_1)_{\{K_1 \leq S_T \leq K_2\}} - (K_2 - K_1)_{\{S_T > K_2\}} > 0 \nexists$ No-Arbitrage
- (iv) Sei $K_1 < K_2$.
Falls $C(K_1) - C(K_2) > (K_2 - K_1) \cdot B(0, T)$ gehe short in K_1 , long in K_2 , long $(K_2 - K_1) \times$ Nullkuponanleihe
am Anfang: $C(K_1) - C(K_2) - (K_2 - K_1) \cdot B(0, T) > 0$
am Ende: $(S_T - K_2)^+ - (S_T - K_1)^+ + K_2 - K_1 \geq 0 \nexists$ No-Arbitrage
- (v) $K_1 < K_2 < K_3$; $K_2 = \lambda K_1 + (1 - \lambda) K_3$ mit $\lambda = \frac{K_3 - K_2}{K_3 - K_1}$
Falls $C(K_2) > \lambda C(K_1) + (1 - \lambda) C(K_3)$, gehe short in K_2 , $\lambda \times$ long in K_1 , $(1 - \lambda) \times$ long in K_3 .
am Anfang: $C(K_2) - \lambda C(K_1) - (1 - \lambda) C(K_3) > 0$
am Ende:

$$\begin{aligned} \lambda(S_T - K_1)^+ + (1 - \lambda)(S_T - K_3)^+ - (S_T - K_2)^+ &= \lambda(S_T - K_1)_{\{K_1 < S_T < K_2\}} \\ &\quad + [\lambda(S_T - K_1) - (S_T - K_2)]_{\{K_2 < S_T < K_3\}} \\ &\quad + \underbrace{[K_2 - (\lambda K_1 + (1 - \lambda) K_3)]_{\{S_T > K_3\}}}_{=0} \end{aligned}$$

da

$$\begin{aligned} \lambda(S_T - K_1) + (K_2 - S_T) &= K_2 - \lambda K_1 - (1 - \lambda) S_T \\ &= \lambda K_1 + (1 - \lambda) K_3 - \lambda K_1 - (1 - \lambda) S_T \\ &= (1 - \lambda)(K_3 - S_T) \geq 0 \\ &\nexists \text{ No-Arbitrage} \end{aligned}$$

1.12 Zinsmethoden

Frage: Wie kann man Kapitalrenditen durch annualisierte **Zinssätze** beschreiben?

Antwort: Man vereinbart eine **Zinsmethoden** und eine **Zählkonvention** (Anzahl der Tage eines Jahres).

Genauer: Kapital N wird zum Zeitpunkt t in eine Nullkuponanleihe mit Fälligkeit in T angelegt.



in t : erhalte für N :

$\frac{N}{B(t,T)}$ T -Bonds {Nullkuponanleihe mit Fälligkeit in T }

in T : die Position hat einen Wert von $\frac{N}{B(t,T)}$

Gewinn: $\frac{N}{B(t,T)} - N = N \left(\frac{1}{B(t,T)} - 1 \right)$

$R(t,T) = \frac{1}{B(t,T)} - 1$ kann als Kapitalrendite interpretiert werden, die ein Investment zwischen t und T hervorbringt:

Ziel: Beschreibung durch einen jährlichen Zinssatz:

(a) **lineare Zinsmethode:**

lineare Verteilung der jährlichen Zinsen auf die Laufzeit $R(t,T) = \underbrace{(T-t)}_{\text{Laufzeit}} \cdot r_{lin}$, r_{lin} ist der jährliche

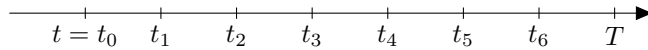
Zinssatz bei linearer Zinsmethode.

Bsp.

Anlage Zeitraum ein Monat

- Rendite von $0.5\% = 50 \text{ bp}$ (ein Basispunkt $\hat{=}$ $0,01\%$)
- $r_{lin} = 0.5\% \cdot 12 = 6\%$

(b) **periodische Zinsmethode:**



setzte $t_i = t + i \cdot \frac{T-t}{m}$, $i = 0, \dots, m$

Ein jährlicher Zins r wird linear verteilt auf die Periodenlänge. Das Kapital wird unter Berücksichtigung von Zinseszinsen verzinst.

Verzinsung:

$$K_m(r, t, T) := \left(1 + r \cdot \frac{T-t}{m} \right)^m = 1 + R(t, T)$$

(c) **stetige Zinsmethode:**

(i) Konstante Zinsrate r

erhält man als Grenzübergang für $m \rightarrow \infty$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} K_m(r, t, T) = e^{r(T-t)} = 1 + R(t, T)$$

(ii) nicht konstante Zinsrate

$r : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ liefert eine Kapitalentwicklung der Form:

$$K(r, t, T) = e^{\int_t^T r(s) ds}$$

zwischen t und T .

Index

Die Seitenzahlen sind mit Hyperlinks zu den entsprechenden Seiten versehen, also anklickbar!

amerikanische Option, 2

Arbitrage, 7

No-, 7

Basispunkt, 11

Call, 2

Digitale Position, 9

europäische Option, 2

innerer Wert, 9

Konvexität in K , 9

Leerverkauf, 2

obere Grenze, 9

Payoff, 3

Position

long, 2

short, 2

Profit, 3

Put, 2

Replikationsprinzip, 7

Spotpreis, 9

Strategien, 5

Bullish Vertical Spread, 6

Butterfly Spread, 6

long straddle, 6

strike, 2

Termingeschäft

bedingtes, 9

unbestimmtes, 2

Underlying, 2

Zählkonvention, 11

Zinsmethode

stetige, 11

konstant, 11

nicht konstant, 11

Zinsmethoden, 11

lineare, 11

periodische, 11

Zinssatz, 11

Abbildungsverzeichnis

1	Payoff long call	3
2	Profit long call	3
3	Payoff long put	4
4	Profit long put	4
5	Payoff short call	4
6	Profit short call	4
7	Payoff short put	5
8	Profit short put	5
9	Bsp. Profit Diagramm	5
10	long straddle	6
11	Bullish Vertical Spread	6
12	long Butterfly Spread	7
13	Konvexität in K	10