Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

Fachbereich 10
Mathematik und
Informatik

# Höhere Algebra II

## gelesen von Prof. Dr. Lutz Hille

Mitschrift von Phil Steinhorst

Wintersemester 2014/2015

Stand: 4. November 2014

## Vorwort

Der vorliegende Text ist eine Mitschrift zur Vorlesung Höhere Algebra II, gelesen von Prof. Dr. Lutz Hille an der WWU Münster im Wintersemester 2014/2015. Der Inhalt entspricht weitestgehend dem Tafelanschrieb während der Vorlesung. Für die Korrektheit des Inhalts wird keinerlei Garantie übernommen. Bemerkungen, Korrekturen und Ergänzungen kann man folgenderweise loswerden:

- persönlich durch Überreichen von Notizen oder per E-Mail
- durch Abändern der entsprechenden TeX-Dateien und Versand per E-Mail an mich
- direktes Mitarbeiten via GitHub. Dieses Skript befindet sich im `latex-wwu`-Repository von Jannes Bantje:

https://github.com/JaMeZ-B/latex-wwu

### Themenübersicht

Hier kommt eine Themenübersicht hin – oder vielleicht auch nicht.

### Literatur

- T. A. Springer: Linear Algebraic Groups
- H. Kraft: Geometrische Methoden in der Invariantentheorie (Aspekte der Mathematik)
- W. Crawley-Boevey: Lectures on representations of quivers

### Vorlesungswebsite

Folgt noch.

Phil Steinhorst
p.st@wwu.de

# Inhaltsverzeichnis

# 0 Einführung

## 0.1 Einführung und erste Beispiele

13.10. 1. Wir betrachten die algebraische Gruppe $\mathrm{GL}_n = \mathrm{GL}_n(k)$; meist ist $k = \mathbb{C}$ oder allgemeiner $k = \overline{k}$ algebraisch abgeschlossen und $\mathrm{char}(k) = 0$. $\mathrm{GL}_n = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \subseteq M_n(\mathbb{C})$ ist (bzgl. der üblichen Topologie) eine offene Teilmenge. Später betrachten wir die viel gröbere **Zariski-Topologie**.
Sei $m = n^2$ und $\mathbb{A}^m \subseteq \mathbb{C}^m$ ein $m$-dimensionaler affiner Vektorraum. Wir können $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ auch folgendermaßen charakterisieren:

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) = M_n(\mathbb{C}) \setminus V(\det = 0),$$

wobei $V(f = 0) = \{x \in \mathbb{A}^m : f(x) = 0\}$ die Nullstellenmenge oder **Verschwindungsmenge** der polynomialen Funktion $f \colon \mathbb{A}^m \to \mathbb{C}$, $f \in k[x_1, \ldots, x_m]$ bezeichnet.

2. **Beispiel:** Sei $\mathbb{A}^m = M_n(\mathbb{C})$. $G := \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ist eine Gruppe. Können wir die Gruppenverknüpfung, die Inversenbildung und das neutrale Element als polynomiale Funktion auffassen?

$$\begin{aligned} \mu\colon G \times G &\longrightarrow G \\ (g,h) &\longmapsto gh \end{aligned} \qquad \begin{aligned} i\colon G &\longrightarrow G \\ g &\longmapsto g^{-1} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} e\colon \{x\} &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto e = \mathbb{1}_n \end{aligned}$$

$e$ ist offensichtlich polynomial und $\mu$ auch (vgl. Matrixmultiplikation). Jedoch ist $i$ nicht polynomial, da nach Cramerscher Regel gilt:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \mathrm{adj}(A)$$

Daher müssen wir auch Quotienten polynomialer Abbildungen mit Nenner ungleich 0 zulassen.

### Idee

Eine lineare algebraische Gruppe ist abgeschlossen in $\mathrm{GL}_n$ und die Gruppenabbildungen sind Quotienten polynomialer Abbildungen, sodass folgende Eigenschaften erfüllt sind (d.h. die folgenden Diagramme sind kommutativ):

**Assoziativität:** $\mu \circ (\mu, \mathrm{id}) = \mu \circ (\mathrm{id}, \mu)$

$$\begin{tikzcd} G \times G \times G \arrow[r, "(\mu,\mathrm{id})"] \arrow[d, "(\mathrm{id},\mu)"] & G \times G \arrow[d, "\mu"] \\ G \times G \arrow[r, "\mu"] & G \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (g,h,l) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (gh,l) \arrow[dr, mapsto] & \\ (g,hl) \arrow[r, mapsto] & g(hl) & \overset{!}{=} (gh)l \end{tikzcd}$$

**Inverse:** $e \circ p = \mu \circ (\mathrm{id}, i) \circ \Delta$ bzw. $e \circ p = \mu \circ (i, \mathrm{id}) \circ \Delta$

$$\begin{tikzcd} & G \times G \arrow[d, "(\mathrm{id},i)"] \\ G \arrow[ur, "\Delta"] \arrow[r] \arrow[d, "p"] & G \times G \arrow[d, "\mu"] \\ \{x\} \arrow[r, "e"] & G \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & (g,g) \arrow[d, mapsto] \\ g \arrow[ur, mapsto] \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (g,g^{-1}) \arrow[d, mapsto] \\ e \arrow[r, mapsto] & e \overset{!}{=} g \cdot g^{-1} \end{tikzcd}$$

**Neutrales Element:** $\mu \circ (e, \mathrm{id}) = \mathrm{id} = \mu \circ (\mathrm{id}, e)$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "(e,\mathrm{id})"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}"'] & G \times G \arrow[r, "\mu"] & G \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} g \arrow[r, mapsto] \arrow[rr, bend right, mapsto] & (e,g) \arrow[r, mapsto] & eg \overset{!}{=} g \end{tikzcd}$$

**Definition 0.1 (polynomiale und rationale Funktion)**

- $f\colon \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$ heißt **polynomial** bzw. **Morphismus affiner Varietäten**, falls

  $$\big(f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_m(x_1,\dots,x_n)\big) = f(x_1,\dots,x_n)$$

  mit $f_j \in k[x_1,\dots,x_n]$ für alle $j \in \{1,\dots,n\}$.

- Sei $U \subseteq \mathbb{A}^n$ offen (im klassischen Sinne oder bzgl. Zariski-Topologie). $f\colon U \to \mathbb{A}^m$ heißt **polynomial**, falls $f = \frac{h}{g}$ mit $h, g \in k[x_1,\dots,x_n]$ und $g(x) \neq 0$ für alle $x \in U$. $\lceil f_j = \frac{h_j}{g_j}$ komponentenweise$\rfloor$

- $f$ wie oben heißt **rational**, fall $f = \frac{h}{g}$ wie oben mit $g \not\equiv 0$ auf $U$. $f$ ist im Allgemeinen keine Abbildung, sondern nur auf $U \setminus V(g=0)$ definiert.

**Beispiel 0.2 (Beispiele für polynomiale und rationale Funktionen)**

- $\mathrm{GL}_n \to \mathrm{GL}_n$ mit $g \mapsto g^{-1}$ ist polynomial, $M_n \to M_n$ mit „$g \mapsto g^{-1}$“ ist rational.

- $\det\colon \mathrm{GL}_n \to \mathbb{C}$ und $\det\colon M_n \to \mathbb{C}$ ist polynomial.

- $\det^{-1}\colon M_n \to \mathbb{C}$ ist rational und $\det^{-1}\colon \mathrm{GL}_n \to \mathbb{C}$ ?

- $\mathbb{A}^1 = \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$ mit $z \mapsto e^{2\pi i z}$ ist nicht polynomial.

**Definition 0.3 (Zariski-Topologie)**

Seien $g_1,\dots,g_m \in k[x_1,\dots,x_n]$ und $I = \langle g_1,\dots,g_m\rangle$ das von $g_1,\dots,g_m$ erzeugte Ideal in $k[x_1,\dots,x_n]$. 16.10.
$M \subseteq \mathbb{A}^n$ heißt abgeschlossen bzgl. der **Zariski-Topologie**, falls gilt:

$$M = V(I) = \{x \in \mathbb{A}^n : g_i(x) = 0 \text{ für } 1 \leq i \leq m\}$$

**Beispiel**

- Es ist $V(0) = \mathbb{A}^n$ und $V(1) = \emptyset$.

- $GL_n(\mathbb{C})$ ist offen in $M_n(\mathbb{C})$.

- $GL_n(\mathbb{C})$ lässt sich jedoch auch ”abschließen” vermöge:

  $$\begin{aligned} \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) &\hookrightarrow M_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C} \\ A &\mapsto \left(A, \frac{1}{\det(A)}\right) \end{aligned}$$

**Ab jetzt immer, wenn nichts anderes gesagt, offen und abgeschlossen bezüglich Zariski-Topologie!**

**Definition 0.4 (Lie-Algebra und Lie-Klammer)**

Sei $V$ ein (endlichdimensionaler) $k$-Vektorraum. Eine Abbildung

$$\begin{aligned} [\cdot,\cdot]\colon V \times V &\longrightarrow V \\ (v,w) &\longmapsto [v,w] \end{aligned}$$

heißt **Lie-Klammer**, falls sie folgende Eigenschaften erfüllt:

1) bilinear

2) schiefsymmetrisch, d.h. $[v,w] = -[w,v]$

3) **Jacobi-Identität**: $[[u,v],w]+[[v,w],u]+[[w,u],v]=0$

Das Paar $(V,[\cdot,\cdot])$ heißt **Lie-Algebra**.

**Beispiele**

- Der $k$-Vektorraum $V$ mit der trivialen Lie-Klammer $[v,w]:=0$ heißt abelsche Lie-Algebra.
- Die allgemeine lineare Lie-Algebra $\mathfrak{gl}_n(k):=M_n(k)$ mit der Lie-Klammer $[A,B]:=AB-BA$.
- Die spezielle lineare Lie-Algebra $\mathfrak{sl}_n(k):=\mathrm{SL}_n(k)$ als Lie-Unter-Algebra von $\mathfrak{gl}_n(k)$, zum Beispiel für $n=2$ und $k=\mathbb{C}$:

$$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}):=\{A\in M_2(\mathbb{C}):\mathrm{tr}(A)=0\}=\left\langle h=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},e=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},f=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right\rangle$$

Es ist $[h,e]=2e,[h,f]=-2f$ und $[e,f]=h$, also besitzt die Abbildung $[h,\cdot]\colon V\to V$ die Eigenwerte $2$ und $-2$.

**Definition 0.5 (lineare algebraische Gruppe)**
Sei $G\leq\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ eine abgeschlossene Untergruppe, dann heißt $G$ **lineare algebraische Gruppe**.

**Ab jetzt: "algebraische Gruppe" = "lineare algebraische Gruppe" = "affine algebraische Gruppe"**

Zu einer algebraischen Gruppe $G$ definieren wir die zugehörige Lie-Algebra durch

$$\mathrm{Lie}(G):=\mathfrak{g}:=T_eG,$$

wobei $T_eG$ den Tangentialraum in $e\in G$ bezeichnet.

$$T_eV(f_1,\dots,f_n)=\left\{x\in\mathbb{A}^n:\frac{d}{dt}f_i(e+tx)\Big|_{t=0}=0\right\}\text{ über }k=\mathbb{C}$$

**Beispiele**

- Betrachte $f=x_1^2-x_2$ in $\mathbb{A}^2$, dann ist

$$\begin{aligned}T_{(0,0)}V(f)&=\left\{x\in\mathbb{A}^2:\frac{d}{dt}f((0,0)+t(x_1,x_2))\big|_{t=0}=0\right\}=\left\{x\in\mathbb{A}^2:\frac{d}{dt}(tx_1)^2-tx_2\big|_{t=0}=0\right\}\\&=\left\{x\in\mathbb{A}^2:2tx_1-x_2\big|_{t=0}=0\right\}=\{x\in\mathbb{A}^2:x_2=0\}\\T_{(1,1)}V(f)&=\{x\in\mathbb{A}^2:2x_1-x_2=0\}\end{aligned}$$

- $T_E\,\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})=\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})=\left\{A\in M_n(\mathbb{C}):\frac{d}{dt}\det(E+tA)-1\big|_{t=0}=0\right\}=\{A\in M_n(\mathbb{C}):\mathrm{tr}(A)=0\}$, denn:

$$\det(E+tA)=\det\underbrace{\begin{pmatrix}1+ta_{11}&&ta_{ij}\\&\ddots&\\ta_{ij}&&1+ta_{nn}\end{pmatrix}}_{=:(c_ij)_{ij}}=\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)\prod_{i=1}^n c_{i,\sigma(i)}=1+t\cdot\mathrm{tr}(A)+t^2\ldots+t^n$$

$$\Rightarrow\frac{d}{dt}\det(E+tA)\big|_{t=0}=\mathrm{tr}(A)$$

- Die Untergruppe

$$B := \{b \in \mathrm{GL}_n : b_{ij} = 0 \text{ für } i > j\} = \left\{(b_{ij}) \in M_n(\mathbb{C}) : b_{ii} \in \mathbb{C}^\times, b_{ij} = 0 \text{ für } i > j\right\} \subseteq \mathrm{GL}_n = G$$

heißt **Borel-Untergruppe**. Die zugehörige Lie-Algebra ist gegeben durch:

$$\mathrm{Lie}(B) = \mathfrak{b} = \{(b_{ij}) : b_{ij} = 0 \text{ für } i > j\} \supseteq B \text{ offen}$$

$G/B$ ist eine algebraische Varietät und nicht affin.

$$U := \{(b_{ij}) \in M_n(\mathbb{C}) : b_{ii} = 1, b_{ij} = 0 \text{ für } i > j\} \subseteq B$$

heißt **unipotente Gruppe**.

- Der $n$-dimensionale (algebraische) Torus $\mathbb{T} := (\mathbb{C}^\times)^n$ mit $T_e\mathbb{T} = \mathbb{A}^n$ kann als Untergruppe aufgefasst werden:

$$\mathbb{T}_n = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} : \lambda_i \in \mathbb{C}^\times \right\} =: H =: T \subseteq B \subseteq \mathrm{GL}_n$$

$\mathrm{Lie}\,\mathbb{T} = \mathfrak{h}$ und $B/H = U$.

## 0.2 Aktionen algebraischer Gruppen

**Definition 0.6 (Darstellung einer linearen algebraischen Gruppe)**

Sei $G$ eine lineare algebraische Gruppe und $X = V(f_1, \ldots, f_r)$ abgeschlossene Teilmenge in $^n$. Eine **Darstellung** von $G$ auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum $W$ ist ein polynomialer Gruppenhomomorphismus $G \to \mathrm{GL}(W)$. $G$ operiert dann auf $W$ vermöge 20.10.

$$\begin{aligned} G \times W &\longrightarrow W \\ (g, w) &\longmapsto f(g)w \end{aligned}$$

Eine Aktion von $G$ auf $x$ ist eine polynomiale Abbildung $G \times X \to X$, sodass $(gh)x = g(hx)$ und $ex = x$ für alle $g, h \in G, x \in X$.

**Beispiel 0.7**

1) $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) = \mathrm{GL}(\mathbb{C}^n) = \mathrm{GL}(W)$ mit Standardaktion auf $W = \mathbb{C}^n$.
   Orbiten: $\{0\}, W \setminus \{0\}$
   Stabilisatoren: $\mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_n}(\{0\}) = \mathrm{GL}_n$ und

$$\mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_n}(e_1) = \left\{ \left( \begin{array}{c|c} 1 & * \\ \hline 0 & \mathrm{GL}_{n-1} \end{array} \right) \right\} = P(1, n-1) \qquad \text{(parabolische Untergruppe)}$$

2)

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{GL}_n \longrightarrow \mathbb{C}^\times & & \text{Polynomialer Gruppenhomomorphismus gegeben durch } \det^m \text{ mit } m \in \mathbb{Z} \\ \cup\!\mid & & \\ B \longrightarrow \mathbb{C}^\times & & B \twoheadrightarrow H \to \mathbb{C}^\times, A \mapsto \lambda_1^{a_1} \cdots \lambda_n^{a_n}, a_i \in \mathbb{Z} \qquad (B/H = U) \\ \cup\!\mid & & \\ H \longrightarrow \mathbb{C}^\times & & \text{z.B. } (t_1, \ldots, t_n) \mapsto t_1^{a_1} \cdots t_n^{a_n}, a_i \in \mathbb{Z} \\ \cup\!\mid & & \\ \mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times & & t \mapsto t^m, m \in \mathbb{Z} \end{array}$$

**Charaktere** von $G$: $X^*(G) = \{\chi : G \to \mathbb{C}^\times : \chi \text{ ist Homomorphismus linearer algebraischer Gruppen}\}$.

3) Sei $G = \mathrm{GL}_n, \mathrm{SO}_n, \mathrm{Sp}, \ldots$ mit $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$.
$G$ operiert auf $\mathfrak{g}$ ($G \curvearrowright \mathfrak{g}$) durch Konjugation.


Ab hier kommen viele schöne Beispiele, Diagramme, Köcher, Wirkungen, Matrizen, . . . . Da aber ein Großteil der Begrifflichkeiten nicht definiert wurde und es an Struktur mangelt, füge ich das hier nicht hinzu. Jedenfalls nicht jetzt.


**HIER FEHLT ALLES!**

Insbesondere fehlt hier etwas.

# 1 Affine algebraische Gruppen

## 1.1 Affine algebraische Varietät

**Definition 1.1 (Affine algebraische Menge)**
Sei $k = \overline{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper, $\mathbb{A}_k^n := \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in k\}$ sowie $I = (f_1, \ldots, f_r) \subseteq$ 27.10.
$k[x_1, \ldots, x_n]$ ein Ideal. Wir bezeichnen

$$V(I) = \{x \in \mathbb{A}_k^n : f(x) = 0 \text{ für } f \in I\}$$

als **affine algebraische Menge**.

**Beispiel 1.2**

a) Sei $f = \sum_{i=1}^n a_i x_i + c$ eine allgemeine lineare Gleichung, o.E. $a_1 \neq 0$. Dann ist $V(f)$ eine Hyperebene isomorph zu $\mathbb{A}_k^{n-1}$.
Im Fall $f = 0$ ist $V(0) = \mathbb{A}^n$ und im Fall $f = c \neq 0$ ist $V(c) = \emptyset$.

b) Wir betrachten Quadriken. Sei $f$ quadratisch von der Gestalt

$$f = \underbrace{\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} x_i x_j}_{=:q \neq 0} + \underbrace{\sum_{x=1}^{n} b_i x_i}_{=:l} + c$$

Idee: $f$ auf einfachere Gestalt bringen, z.B. mit $q$ in Diagonalform:

$$f = \sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{i=1}^n b_i x_i + c$$

mit $a_i \in \{0, 1\}$ nach Skalierung. Koordinaten vertauschen:

$$f = \sum_{i=1}^m x_i^2 + \sum_{i=1}^n b_i x_i + c, \quad 1 \leq m \leq n$$

Quadratische Ergänzung:

$$f = \sum_{i=1}^m x_i^2 + \sum_{i=m+1}^n b_i x_i + c$$

Nun Beispiel a) anwenden:

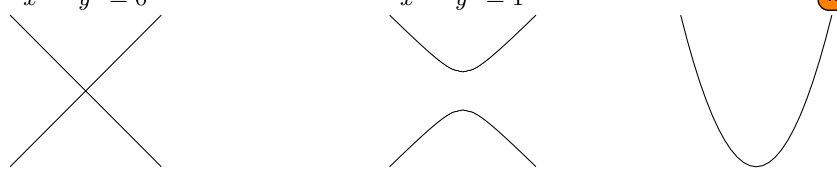
$$f = \sum_{i=1}^n x_i^2 + c, c \in \{0, 1\} \qquad\qquad f = \sum_{i=1}^m x_i^2 + x_n, m < n$$

$n = 2$:

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $x^2 + y^2 = 0$ | $x^2 + y^2 = 1$ | $x^2 = y$ |
| andere Varianten: | $x^2 - y^2 = 0$ | $x^2 - y^2 = 1$ | |

Das Wort "Skizze" sollte etwas höher stehen.

Skizze:



zwei sich schneidende Geraden — Kreis (reell) bzw. Hyperbel (komplex) — Parabel

$n = 3$:

$x^2 + y^2 - z^2 = 0 \quad x^2 + y^2 - z^2 = 1 \quad x^2 + y^2 = z$

Hier fehlen drei Grafiken.

Sei $f = x^2 + y^2 + z^2$ und $g = x^2 + y^2 + z$.

$$\begin{aligned} f(\vec{x_0} + t\vec{x}) &= (x_0 + tx)^2 + (y_0 + ty)^2 + (z_0 + tz)^2 \\ &= 2t(x_0 x + y_0 y + z_0 z) + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + \text{ quad. Term} \\ g(\vec{x_0} + t\vec{x}) &= 2t(x_0 x + y_0 y) + tz + x_0^2 + y_0^2 + \text{ quad. Term} \end{aligned}$$

$$T_{(x_0,y_0,z_0)}Q = \{(x,y,z) : \langle (x_0,y_0,z_0),(x,y,z)\rangle = 0\} \qquad T_{(x_0,y_0,z_0)}Q = \{(x,y,z) : z = -2(x_0x + y_0y)\}$$

$$\dim T_{x_0}Q = \begin{cases} 2 & (x_0,y_0,z_0) \neq 0 \\ 3 & (x_0,y_0,z_0) \neq 0 \end{cases} \qquad \dim T_{x_0}Q = 2$$

## 1.2 Affine algebraische Varietät (ja, der Abschnitt hieß auch so!)

Bezeichnungen ändern sich aus irgendeinem nicht ersichtlichen Grund!

$Z(I) := V(I)$
$a \subseteq S := k[x_1, \ldots, x_n] \ni f_1, \ldots, f_r, \quad I = (f_1, \ldots, f_r)$
$T \subseteq S$ beliebige Teilmenge
$Z(T) = \{p \in \mathbb{A}^n : f(p) = 0$ für alle $f \in T\}$ Nullstellenmenge

**Definition 1.3**
Eine Teilmenge $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ heißt genau dann **algebraisch**, falls $Y = Z(T)$ für eine Teilmenge $T \subseteq S$.

**Satz 1.4**
1) $Z(T_1) \cup Z(T_2) = Z(T_1 \cdot T_2)$,
2) $Z\left(\bigcup_{i\in I} T_i\right) = \bigcap_{i\in I} Z(T_i)$,

d.h. die abgeschlossenen Teilmengen bilden eine Topologie.

**Beispiel 1.5**
- In $\mathbb{A}^1$ sind die abgeschlossenen Teilmengen genau die endlichen Mengen und $\mathbb{A}^1$.
- In $\mathbb{A}^2$ sind die abgeschlossenen Teilmengen genau die endlichen Mengen, $\mathbb{A}^2$ sowie endliche Vereinigungen $V(f_1) \cup \ldots \cup V(f_r)$ (ohne Beweis)
- Die von den abgeschlossenen Mengen erzeugte Topologie ist nicht $T_2$: $p \in \mathbb{A}^1$, $U \ni p$ offen, $Q \in \mathbb{A}^1 \setminus U$, $V \supset Q$ offen $\Rightarrow U \cap V \neq \emptyset$.

**Definition 1.6 (Irreduzibler topologischer Raum)**
Ein topologischer Raum $Y \neq \emptyset$ heißt **irreduzibel**, falls gilt:

$$Y = Y_1 \cup Y_2 \text{ mit } Y_1, Y_2 \text{ abgeschlossen} \quad \Rightarrow \quad Y_1 \subseteq Y_2 \text{ oder } Y_2 \subseteq Y_1$$

**Beispiel 1.7**
- $\mathbb{A}^1$ ist irreduzibel (später: $\mathbb{A}^n$ ist irreduzibel)
- Folgende Quadriken sind irreduzibel: $f = X_1^2 + \ldots + X_{n-1}^2 + X_n$ für $n \geq 1$, $f = X_1^2 + \ldots + x_n^2 + 1$ für $n \geq 2$, $f = \sum_{i=1}^{n\geq 3} x_i^2$
- $V(x(x-1)) = \{(0),(1)\}$ ist nicht irreduzibel.
- $x_1^2 + 1$, $x_1^2 + x_2^2 = 0$ sind nicht irreduzibel
- $Y \subseteq X$ irreduzibel (mit induzierter Topologie) $\Rightarrow \overline{Y}$ irreduzibel.

**Definition 1.8 (affine algebraische Varietät)**
Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal. $Z(\mathfrak{a})$ heißt **affine algebraische Varietät**, falls $Z(\mathfrak{a})$ irreduzibel ist.

## 1.3 Ideale

Sei $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ Teilmenge und $I(Y) = \{f \in S = k[x_1, \dots, x_n] : f(x) = 0$ für alle $y \in Y\}$ das Verschwindungsideal von $Y$. Sei $T \subseteq S$ und $Z(T)$ die Nullstellenmenge von $T$. 30.10.

**Satz 1.9**

a) $T_1 \subseteq T_2 \Rightarrow Z(T_1) \supseteq Z(T_2)$

b) $Y_1 \subseteq Y_2 \subseteq \mathbb{A}^n \Rightarrow I(Y_1) \supseteq I(Y_2)$

c) $Y_1, Y_2 \subseteq \mathbb{A}^n \Rightarrow I(Y_1 \cup Y_2) = I(Y_1) \cap I(Y_2)$

d) $\mathfrak{a} \subseteq S$ Ideal $\Rightarrow I(Z(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}} := \{f \in S : f^m \in \mathfrak{a}$ für ein $m\}$ (**Radikal** von $\mathfrak{a}$)

e) $Y \subseteq \mathbb{A}^n, Z(I(Y)) = \overline{Y}$ Abschluss von $Y$ in Zariski-Topologie.

**Beweis**
Nur d) mit Hilberts Nullstellensatz:
$f$ verschwindet auf $Y \Leftrightarrow f^m$ verschwindet auf $Y$. $f \in I(Z(\mathfrak{a})) \xRightarrow{\text{Hilbert}} f^m \in \mathfrak{a}$. □

**Satz 1.10**

$$\begin{array}{ccc} \{\text{abgeschlossene Teilmengen in } \mathbb{A}^n\} & \overset{1:1}{\longleftrightarrow} & \{\text{radikale in } \mathfrak{a} \text{ in } S, \mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}}\} \\ \cup\!\mid & & \cup\!\mid \\ \{\text{irreduzible Teilmengen}\} & \overset{1:1}{\longleftrightarrow} & \{\text{Primideale in } S\} \end{array}$$

$p$ PI $\Rightarrow \sqrt{p} = p$

**Bemerkung**
$p$ ist genau dann ein Primideal, wenn gilt:

$$fg \in p \Rightarrow f \in p \text{ oder } g \in p$$

Damit gilt: $f^n \in p \Rightarrow f \in p$ oder $f^{n-1} \in p \Rightarrow \dots \Rightarrow f \in p$
$(X^2) \subseteq k[X] \to \sqrt{(X^2)} = (X)$.

**Bemerkung**
Ist $f \in S$ irreduzibel, dann heißt $Z(f)$ **Hyperfläche** in $\mathbb{A}^n$.

**Beispiel**
$Q \subseteq \mathbb{A}^n$ Quadrik ist eine Hyperfläche.
maximale Ideale: $(x_1 - \lambda_1, \dots, x_n - \lambda_n) = \mathfrak{m} = \mathfrak{m}_{\underline{\lambda}}$ mit $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{A}^n$
$Z(\mathfrak{m}) = \{\underline{\lambda}\}$ Einpunktmenge ist als minimale abgeschlossene nicht-lineare Teilmenge irreduzibel.
$k = \mathbb{R} \neq \overline{k}, Z(X^2 + Y^2 + 1) = \emptyset \Rightarrow$ Theorem ist falsch, da $X^2 + Y^2 + 1$ irreduzibel.
Trick: $f_1, \dots, f_r \in k[\underline{x}]$, $V(f_1, \dots, f_r) = \{(x_1, \dots, x_n) : \mathbb{A}^n_{\overline{k}} : f_i(\underline{x}) = 0$ für alle $i\}$
Sei $Y = Z(\mathfrak{a})$ eine algebraische Teilmenge in $\mathbb{A}^n$, dann definieren wir den **Koordinatenring** von $Y$:

$$A(Y) := k[Y] = S/\sqrt{\mathfrak{a}}$$

Ist $Y$ irreduzibel oder eine algebraische Varietät, dann ist $A(Y)$ ein Integritätsbereich. Setze $K(Y) := \mathrm{Quot}(A(Y))$.

Sei $\overline{f} \in A(Y)$, dann können wir $\overline{f}$ als Funktion $Y \to k$ auffassen, denn:
Sei $f \in S, f\colon \mathbb{A}^n \to k, f\big|_Y\colon Y \to k$. Wir wollen $f\big|_Y \in A(Y)$.
Sei $f' \in S$ mit $f - f' \in \mathfrak{a}$, d.h. $\overline{f} = \overline{f'}$ in $A(Y) = S/\mathfrak{a}$ ($\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}}$, da irreduzibel)
$\Rightarrow f\big|_Y = f'\big|_Y$, d.h. $\overline{f} = \overline{f'}\colon Y \to k$ Funktion, d.h. Elemente von $A(Y)$ sind Funktionen auf $Y$ mit Werten in $k$.

**Definition 1.11 (Lokalisierung)**
Sei $A = A(Y)$ endlich erzeugter Integritätsring über $k = \overline{k}$, z.B. $A = k[x_1, \dots, x_n]/I$ mit $I$ Primideal.

1) $A_{(0)} = \mathrm{Quot}(A), \mathrm{Quot}(A(Y)) =: K(Y)$
2) $A_p = \left\{\frac{f}{g} \in \mathrm{Quot}(A) : g \notin p\right\}$ **Lokalisierung** nach einem Primideal
   $A_p$ und $\mathrm{Quot}(A)$ sind im Allgemeinen nicht endlich erzeugte Ringe

$A_f \neq A_{(f)}$ !

3) $A_f = \left\{\frac{g}{f^n} : g \in A, n \geq 0\right\}, f \in A$ **Lokalisierung** nach einem Element

**Definition 1.12 (Lokaler Ring)**
Ein Ring $A$ heißt **lokal**, falls $A$ ein eindeutiges maximales Ideal besitzt.

**Beispiele**
- Sei $K$ ein Körper, dann ist $\{0\}$ das einzige echte Ideal und maximal.
- $pA_p = (p) \subseteq A_p$ ist maximales Ideal
- $k[x]_{(x-1)} = \left\{\frac{f}{g} : g \notin (x-\lambda)\right\} = \left\{\frac{f}{g} : g(\lambda) \neq 0\right\}$
  $(x-\lambda) = (x-\lambda)k[x]_{(x-\lambda)} = \left\{\frac{f}{g} : f(\lambda) = 0, g(\lambda) \neq 0\right\} \subseteq k[x]_{(x-\lambda)}$ Hauptideal
  Einheiten in $k[x]_{(x-\lambda)} = \left\{\frac{f}{g} : f(\lambda) \neq 0, g(\lambda) \neq 0\right\} = k[x]_{(x-\lambda)} \setminus (x-\lambda)$
- $\mathbb{Z}_3 = \left\{\frac{a}{3^i} : a \in \mathbb{Z}, i \in \mathbb{Z}_0\right\}$
  $\mathbb{Z}_3^\times = \{\pm 3^i : i \in \mathbb{Z}\}$
- $k[x]_{x-\lambda} = \left\{\frac{g}{(x-\lambda)^i} : g \in k[x]\right\}$
  $k[x]_{x-\lambda}^\times = \{a(x-\lambda)^i : i \in \mathbb{Z}, a \in k^\times\}$

**Definition 1.13 (noetherscher topologischer Raum)**
Ein topologischer Raum $X$ heißt **noethersch**, falls jede absteigende Kette abgeschlossener Teilmengen $Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq Y_3 \supseteq \dots$ stationär wird, d.h. es gibt ein $r \in \mathbb{N}$, sodass $Y_r = Y_i$ für alle $i > r$.

**Beispiel**
$\mathbb{A}^n$ ist ein noetherscher topologischer Raum, weil $S$ ein noetherscher Ring ist. Sei $Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq\supseteq \dots$ eine Kette von algebraisch abgeschlossenen Teilmengen, dann ist $I(Y_1) \subseteq I(Y_2) \subseteq \dots$ aufsteigende Kette von Idealen in $S = k[\underline{x}]$ und wird stationär, d.h. $I(Y_r) = I(Y_i)$ für $i \geq r \Rightarrow Y_r = Z(I(Y_i)) = Y_i = Z(I(Y_i))$ für alle $i \geq r$.

**Definition 1.14 (Dimension (topologischer Raum, algebraische Varietät))**
Ein topologischer Raum $X$ hat die Dimension

$$\dim(X) = \sup\{r \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : \text{ es ex. Kette } Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq \dots \subsetneq Z_r \text{ von irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen } Z_i\}$$

Die Dimension einer algebraischen Varietät $X$ entspricht der Dimension von $X$ als topologischer Raum bzgl. der Zariski-Topologie.

**Satz 1.15**
In einem noetherschen topologischen Raum $X$ ist jede abgeschlossene Teilmenge $Y$ eine endliche Vereinigung $Y = Y_1 \cup \ldots \cup Y_r$ von irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen $Y_i$. Fordern wir zusätzlich $Y_i \nsubseteq Y_j$ für $i \neq j$, dann ist die Zerlegung eindeutig bis auf Umordnung.

**Beweis**
Existenz: Sei $\mathcal{S} := \{Y \subseteq X \text{ abgeschlossen } : Y \text{ besitzt keine solche Zerlegung}\}$.
$X$ noetherscher topologischer Raum $\Rightarrow$ $\mathcal{S}$ hat minimales Element oder ist leer. Sei $Y \in \mathcal{S}$ minimal, dann ist $Y$ nicht irreduzibel, also $Y = Y' \cup Y''$ mit $Y' \not\supseteq Y'' \not\supseteq Y'$ algebraische Teilmengen. Wegen Minimalität ist $Y', Y'' \notin \mathcal{S}$.
$\Rightarrow Y' = Y_1' \cup \ldots \cup Y_r', Y'' = Y_1'' \cup \ldots \cup Y_s'' \Rightarrow Y = Y_1' \cup \ldots \cup Y_r' \cup Y_1'' \cup \ldots \cup Y_r''$

Eindeutigkeit: Sei $Y = Y_1' \cup \ldots \cup Y_s' = Y_1 \cup \ldots \cup Y_r$ zwei Zerlegungen. Dann ist $Y_1' \subseteq Y = \bigcup_{i=1}^r Y_i$
$\Rightarrow Y_1' = \bigcup_{i=1}^r (Y_1' \cap Y_i)$ irreduzibel $\Rightarrow Y_1' \subseteq Y_i$, o.B.d.A. $i = 1$. $Y_1 \subseteq Y = \bigcup_{j=1}^s Y_j' \Rightarrow \ldots \Rightarrow Y_1 \subseteq Y_j' \Rightarrow j = 1$.
$z = \overline{(Y \setminus Y_1)} = Y_2 \cup \ldots \cup Y_r = Y_2' \cup \ldots \cup Y_s' \stackrel{\text{Ind.}}{\Longrightarrow} r = s, Y_i = Y_i'$ □

## Index

## Liste der Sätze und Definitionen