Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

Fachbereich 10
Mathematik und
Informatik

Skript Operatoralgebren

Mitschrift der Vorlesung „Operatoralgebren“ von Prof. Dr. Wilhelm Winter

Jannes Bantje

8. Januar 2016

Aktuelle Version verfügbar bei

GitHub

https://github.com/JaMeZ-B/latex-wwu

GitHub ist eine Internetplattform, auf der viele OpenSource-Projekte gehostet werden. Diese Plattform nutzen wir zur Zusammenarbeit, also findet man hier neben den PDFs auch die TeX-Dateien. Außerdem ist über diese Plattform auch direktes Mitarbeiten möglich, siehe nächste Seite.

sciebo die Campuscloud

https://uni-muenster.sciebo.de/public.php?service=files&t=965ae79080a473eb5b6d927d7d8b0462

Sciebo ist ein Dropbox-Ersatz der Hochschulen in NRW, der von der Uni Münster in leitender Position auf Basis der OpenSource-Software Owncloud aufgebaut wurde. Wenn man auf den Link klickt, kann man die Freigabe zum eigenen Speicher hinzufügen und hat dann immer automatisch die aktuellste Version.

Bittorrent Sync

B6WH2DISQ5QVYIRYIEZSF4ZR2IDVKPN3I

BTSync ist ein peer-to-peer Dateisynchronisations-Tool. Dabei werden die Dateien nur auf den Computern der Teilnehmer an einer Freigabe gespeichert. Ein RasPi ist permanent online, sodass stets die aktuellste Version verfügbar ist. `Clients` gibt es für jedes Betriebssystem. Zugang ist über das obige „Secret“ bzw. den QR-Code möglich.

Vorlesungshomepage

https://wwwmath.uni-muenster.de/u/wilhelm.winter/wwinter/operatoralgebren.html

Hier ist ein Link zur offiziellen Vorlesungshomepage.

Vorwort — Mitarbeit am Skript

Dieses Dokument ist eine Mitschrift aus der Vorlesung „Operatoralgebren, WiSe 2015“, gelesen von Prof. Dr. Wilhelm Winter. Der Inhalt entspricht weitestgehend dem Tafelanschrieb. Für die Korrektheit des Inhalts übernehme ich keinerlei Garantie! Für Bemerkungen und Korrekturen – und seien es nur Rechtschreibfehler – bin ich sehr dankbar. Korrekturen lassen sich prinzipiell auf drei Wegen einreichen:

- Persönliches Ansprechen in der Uni, Mails an `j.bantje@wwu.de` (gerne auch mit annotieren PDFs) oder Kommentare auf `https://github.com/JaMeZ-B/latex-wwu`.
- *Direktes* Mitarbeiten am Skript: Den Quellcode poste ich auf GitHub (siehe oben), also stehen vielfältige Möglichkeiten der Zusammenarbeit zur Verfügung: Zum Beispiel durch Kommentare am Code über die Website und die Kombination Fork + Pull Request. Wer sich verdient macht oder ein Skript zu einer Vorlesung, die ich nicht besuche, beisteuern will, dem gewähre ich gerne auch Schreibzugriff.

  Beachten sollte man dabei, dass dazu ein Account bei `github.com` notwendig ist, der allerdings ohne Angabe von persönlichen Daten angelegt werden kann. Wer bei GitHub (bzw. dem zugrunde liegenden Open-Source-Programm „`git`“) – verständlicherweise – Hilfe beim Einstieg braucht, dem helfe ich gerne weiter. Es gibt aber auch zahlreiche empfehlenswerte Tutorials im Internet.[1]
- *Indirektes* Mitarbeiten: TeX-Dateien per Mail verschicken.

  Dies ist nur dann sinnvoll, wenn man einen ganzen Abschnitt ändern möchte (zB. einen alternativen Beweis geben), da ich die Änderungen dann per Hand einbauen muss! Ich freue mich aber auch über solche Beiträge!

Anmerkung

Innerhalb dieser Mitschrift wird man öfter den Ausdruck „Warum?“ finden. Dies sind vom Dozenten bewusst weggelassene Details, die zu verstärktem Mitdenken beim Lesen animieren sollen. Oftmals sind dies schon aus vorherigen Semestern bekannte Sachverhalte. Nur an wenigen Stellen habe ich die fehlenden Details hinzugefügt.

[1] zB. `https://try.github.io/levels/1/challenges/1`, ist auf Englisch, aber dafür interaktives LearningByDoing

Inhaltsverzeichnis

1 Spektraltheorie in Banachalgebren

1.1 Definition. Eine ***Banachalgebra*** ist eine vollständige normierte Algebra. Für die Multiplikation gilt also $\|ab\| \leqslant \|a\| \cdot \|b\|$ Wir betrachten in dieser Vorlesung fast ausschließlich Algebren über $\mathbb{C}$. Eine Banachalgebra heißt ***unital***, falls sie ein Einselement $\mathbb{1}$ mit $\|\mathbb{1}\| = 1$ enthält.

1.2 Definition. Für eine unitale $\mathbb{C}$-Algebra A setzen wir

$$\begin{aligned} \mathrm{Inv}(A) &:= \{a \in A \text{ invertierbar}\} \\ \sigma(a) := \sigma_A(a) &:= \left\{\lambda \in \mathbb{C} \,\middle|\, \lambda \cdot \mathbb{1} - a \notin \mathrm{Inv}(A)\right\} \end{aligned}$$

das Vorzeichen der Differenz spielt für die Definition der Menge keine Rolle

$\sigma(a)$ heißt ***Spektrum*** von a.

1.3 Bemerkung. Sei A wie oben und $a, b \in A$. Dann gilt

$$\mathbb{1} - ab \in \mathrm{Inv}(A) \iff \mathbb{1} - ba \in \mathrm{Inv}(A)$$

Beweis: Durch simples Nachrechnen verifiziert man, dass $(\mathbb{1} - ba)^{-1} = \mathbb{1} + b(\mathbb{1} - ab)^{-1}a$ gilt. □

1.4 Satz. Sei A eine unitale $\mathbb{C}$-Algebra und $a \in A$ mit $\sigma(a) \neq \emptyset$. Sei weiter $p \in \mathbb{C}[Z]$ ein Polynom. Dann gilt

$$\sigma\big(p(a)\big) = p\big(\sigma(a)\big)$$

Beweis: Die Aussage ist trivial, falls p konstant ist. Sei also p nicht konstant. Zu $\mu \in \mathbb{C}$ existieren $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ mit $\lambda_0 \neq 0$ und $p(z) - \mu = \lambda_0 \cdot (z - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (z - \lambda_n)$, also

$$p(a) - \mu = \lambda_0 \cdot (a - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (a - \lambda_n)$$

Damit gilt: $p(a) - \mu$ ist genau dann invertierbar, wenn $a - \lambda_1, \dots, a - \lambda_n$ invertierbar sind. Also

$$\begin{aligned} \mu \in \sigma\big(p(a)\big) &\iff \lambda_i \in \sigma(a) \text{ ist für ein } i \in \{1, \dots, n\} \\ &\iff p(\lambda) - \mu = 0 \text{ für ein } \lambda \in \sigma(a) \\ &\iff p(\lambda) = \mu \text{ für ein } \lambda \in \sigma(a) \end{aligned}$$

Somit folgt dann $\sigma(p(a)) = p(\sigma(a))$. □

1.5 Satz. Sei A eine unitale Banachalgebra und $a \in A$. Falls $\|a\| < 1$, so ist $\mathbb{1} - a$ invertierbar und

$$(\mathbb{1} - a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \qquad \text{(\textbf{\textit{Neumannsche Reihe}})}$$

Beweis: Die Folge der Partialsummen $\left(\sum_{n=0}^{k} a^n\right)_{k \in \mathbb{N}} \subset A$ ist eine Cauchyfolge (warum?), sodass wegen Vollständigkeit die unendliche Summe existiert. Es gilt dann

$$(\mathbb{1} - a)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a^n\right) \xleftarrow{k \to \infty} (\mathbb{1} - a)\left(\sum_{n=0}^{k} a^n\right) = \mathbb{1} - a^{k+1} \xrightarrow{k \to \infty} \mathbb{1}$$

Die Summe ist also ein Rechtsinverses. Genauso folgt, dass sie auch ein Linksinverses ist. □

1.6 Korollar. Für jede unitale Banachalgebra A ist $\mathrm{Inv}(A) \subset A$ offen.

Beweis: Falls $a \in \mathrm{Inv}(A)$ und $\|b - a\| < \|a^{-1}\|^{-1}$, so gilt $\|ba^{-1} - \mathbb{1}\| \leqslant \|b - a\| \cdot \|a^{-1}\| < 1$. Also ist auch $-\big(\mathbb{1} - \big(ba^{-1} - \mathbb{1}\big)\big) = ba^{-1}$ invertierbar nach Satz 1.5 und damit auch $b \in \mathrm{Inv}(A)$, denn b ist ein Linksinverses für $a^{-1}(ba^{-1})^{-1} \in \mathrm{Inv}(A)$. □

1.7 Definition. Sei A eine unitale Banachalgebra. Für $a \in A$ definieren wir den ***Spektralradius*** durch

$$r(a) := \sup_{\lambda \in \sigma(a)} |\lambda|$$

1.8 Proposition. Sei $a \in A$ wie oben. Dann ist das Spektrum $\sigma(a)$ kompakt und $r(a) \leqslant \|a\|$.

Beweis: Angenommen $|\lambda| > \|a\|$, dann gilt $\|\lambda^{-1} a\| < 1$, also ist $\mathbb{1} - \lambda^{-1} a$ invertierbar nach Satz 1.5 und damit auch $\lambda - a \iff \lambda \notin \sigma(a)$. Insgesamt folgt, dass $r(a) \leqslant \|a\|$ ist. Es ist $\mathbb{C} \setminus \sigma(a) \subset \mathbb{C}$ offen, da $\mathrm{Inv}(A) \subset A$ offen ist. Damit muss $\sigma(a)$ nach Heine-Borel kompakt sein. □

1.9 Satz. Sei A eine unitale Banachalgebra. Für jedes $a \in A$ ist $\sigma(a)$ nichtleer.

Beweis: Falls $|\lambda| > \|a\|$, so existiert $\big(\mathbb{1} - \lambda^{-1} a\big)^{-1}$ und $(\lambda - a)^{-1}$ mit der gleichen Begründung wie eben. Es gilt dann

$$(\lambda - a)^{-1} = \lambda^{-1}\big(1 - \lambda^{-1} a\big)^{-1} \overset{1.5}{=} \lambda^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} a^n\right)$$

und weiter

$$\|(\lambda - a)^{-1}\| \leqslant \left|\lambda^{-1}\right| \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \big(\left|\lambda^{-1}\right| \cdot \|a\|\big)^n \xrightarrow{|\lambda| \to \infty} 0 \qquad [*]$$

da man die Summe als geometrische Reihe mit 2 abschätzen kann, falls $|\lambda| > 2 \cdot \|a\|$ ist. Sei nun $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \sigma(a)$ und $|\lambda - \lambda_0| < \|(a - \lambda_0)^{-1}\|^{-1}$. Dann gilt

$$\|(\lambda - \lambda_0)(a - \lambda_0)^{-1}\| \leqslant |\lambda - \lambda_0| \cdot \|(a - \lambda_0)^{-1}\| < 1$$

Also ist wieder nach Satz 1.5 $\big(\mathbb{1} - (\lambda - \lambda_0)(a - \lambda_0)^{-1}\big)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n (a - \lambda_0)^n$ und

$$\begin{aligned} -\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n (a - \lambda_0)^{-(n+1)} &= (a - \lambda_0)^{-1}\big((\lambda - \lambda_0)(a - \lambda_0)^{-1} - \mathbb{1}\big)^{-1} \\ &= \Big((\lambda - \lambda_0)\underbrace{(a - \lambda_0)^{-1}(a - \lambda_0)}_{=\mathbb{1}} - (a - \lambda_0)\Big)^{-1} = (\lambda - a)^{-1} \end{aligned}$$

Für ein stetiges Funktional $\varphi \in A^*$ erhalten wir

$$\varphi\big((\lambda - a)^{-1}\big) = \sum_{n=0}^{\infty} -\varphi\Big((a - \lambda_0)^{-(n+1)}\Big) \cdot (\lambda - \lambda_0)^n$$

falls $|\lambda - \lambda_0| < \|(a - \lambda_0)^{-1}\|^{-1}$. Daher ist $\lambda \mapsto \varphi\big((\lambda - a)^{-1}\big)$ ***holomorph*** auf $\mathbb{C} \setminus \sigma(a)$. Falls $\sigma(a) = \emptyset$, so ist $\lambda \mapsto \varphi\big((\lambda - a)^{-1}\big)$ ***ganz***, d.h. holomorph auf ganz $\mathbb{C}$. Wegen $[*]$ und dem Satz von Liouville[1] ist dann $\varphi\big((\lambda - a)^{-1}\big) = 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$. Aber $\varphi \in A^*$ war beliebig, und wegen Hahn-Banach gilt $(\lambda - a)^{-1} = 0$. Dies ist ein Widerspruch. □

[1] siehe `https://de.wikipedia.org/wiki/Satz_von_Liouville_%28Funktionentheorie%29`

1.10 Satz. Sei A eine unitale Banachalgebra. Für $a \in A$ gilt dann

$$r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$$

Beweis: Sei $\varphi \in A^*$ ein stetiges Funktional. Wir haben im Beweis von Satz 1.9 gesehen, dass die Zuordnung $\lambda \mapsto \varphi\big((\lambda - a)^{-1}\big)$ analytisch ist für $\lambda \notin \sigma(a)$. Insbesondere gilt dies für $|\lambda| > r(a)$. Dann ist auch $\lambda \mapsto \varphi\big((\lambda^{-1} - a)^{-1}\big)$ analytisch für $0 < |\lambda| < 1/r(a)$, ebenso $\lambda \mapsto \varphi\big((\mathbb{1} - \lambda a)^{-1}\big)$. Die Singularität bei 0 ist hebbar, also definiert $f(\lambda) := \varphi\big((\mathbb{1} - \lambda a)^{-1}\big)$ eine analytische Funktion für $|\lambda| < 1/r(a)$. Dann existiert eine Folge $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ mit $f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cdot \lambda^n$ für $|\lambda| < 1/r(a)$. Die Konvergenz ist absolut und gleichmäßig, also gilt insbesondere $|\alpha_n \cdot \lambda^n| \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Falls andererseits $|\lambda| < 1/\|a\| \leqslant 1/r(a)$ ist, so gilt

$$f(\lambda) = \varphi\big((\mathbb{1} - \lambda \cdot a)^{-1}\big) \overset{1.5}{=} \varphi\left(\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda \cdot a)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi\big((\lambda \cdot a)^n\big) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(a^n) \cdot \lambda^n$$

also $\alpha_n = \varphi(a^n)$ für $n \in \mathbb{N}$. Es gilt $\varphi(a^n) \cdot \lambda^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Aber $\varphi \in A^*$ war beliebig, also ist für jedes $\varphi \in A^*$ die Folge $(\varphi(\lambda^n a^n))_{\mathbb{N}} = (\varphi(a^n) \cdot \lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt für $|\lambda| < 1/r(a)$.

Nach dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit ist dann $(\lambda^n a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt für jedes λ mit $|\lambda| < 1/r(a)$. Damit existiert für $0 < |\lambda| < 1/r(a)$ ein $M \geqslant 0$ mit $\|\lambda^n a^n\| \leqslant M$, $n \in \mathbb{N}$, also

$$\|a^n\|^{1/n} \leqslant \frac{M^{1/n}}{|\lambda|} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{|\lambda|}$$

Es folgt $\limsup_n \|a^n\|^{1/n} \leqslant r(a)$. Falls $\lambda \in \sigma(a)$, so gilt nach Satz 1.4 $\lambda^n \in \sigma(a^n)$ und wegen Proposition 1.8 $|\lambda^n| \leqslant \|a^n\|$, also $|\lambda| \leqslant \|a^n\|^{1/n}$ und es folgt insgesamt

$$r(a) \leqslant \inf_n \|a^n\|^{1/n} \leqslant \liminf_n \|a^n\|^{1/n} \leqslant \limsup_n \|a^n\|^{1/n} \leqslant r(a)$$

und damit $\lim_n \|a^n\|^{1/n} = r(a)$, woraus die Behauptung folgt. □

1.11 Proposition. Sei A eine abelsche unitale Banachalgebra. Falls A einfach ist, so ist $A \cong \mathbb{C}$.

einfach = besitzt keine nichttrivialen Ideale

Beweis: Sei $a \in A$, $\alpha \in \sigma(a)$. Dann ist $J := \overline{(a - \alpha \cdot \mathbb{1}) \cdot A} \lhd A$ ein abgeschlossenes Ideal. Für jedes $b \in A$ ist $(a - \alpha)b$ nicht invertierbar. Damit folgt dann $\|(a - \alpha)b - \mathbb{1}\| \geqslant 1$ für jedes $b \in A$ nach Satz 1.5. Damit ist auch $\operatorname{dist}((a - \alpha \cdot \mathbb{1}) \cdot A, \mathbb{1}) \geqslant 1$, also $\mathbb{1} \notin J$ und damit $J \neq A$. Da A einfach ist, folgt $J = \{0\}$, also muss $a - \alpha \cdot \mathbb{1} = 0$ und weiter $a \in \mathbb{C} \cdot \mathbb{1}$ gelten. Damit ist $A = \mathbb{C} \cdot \mathbb{1} \cong \mathbb{C}$. □

1.12 Definition. Sei A eine abelsche unitale Banachalgebra. Eine lineare, multiplikative, nicht verschwindende Abbildung $\chi\colon A \to \mathbb{C}$ heißt ***Charakter*** auf A. Es gilt dann $\chi(\mathbb{1}) = 1$. Wir setzen $\Omega(A) := \big\{\chi \,\big|\, \chi \text{ Charakter auf } A\big\}$ (***Charakterspektrum*** oder einfach nur ***Spektrum*** von A).

1.13 Satz. Sei A eine abelsche unitale Banachalgebra. Dann gilt

(i) Jeder Charakter auf A ist stetig mit Norm 1.

(ii) $\chi \mapsto \ker\chi$ definiert eine Bijektion $\Omega(A) \to J_{\max} := \big\{J \,\big|\, J \subsetneq A \text{ ist maximales Ideal}\big\}$

Beweis:

(i) Sei $a \in A$ mit $\|a\| < 1$ und $\chi(a) = 1$. Setze $b = \sum_{n=1}^{\infty} a^n$, dann ist $\mathbb{1} + b = \sum_{n=0}^{\infty} a^n = (\mathbb{1} - a)^{-1}$. Also ist $\mathbb{1} = (\mathbb{1} + b)(\mathbb{1} - a) = \mathbb{1} + b - a - ab$ und damit $ab + a = b$. Es folgt $\chi(a)\chi(b) + \chi(a) = \chi(b)$. Dies ist ein Widerspruch. Also muss $\|\chi\| \leqslant 1$ sein. Mit $\chi(\mathbb{1}) = 1$ folgt $\|\chi\| = 1$.

(ii) Für jedes $\chi \in \Omega(A)$ ist $\ker\chi \lhd A$ ein Ideal. Weiter ist der Kern abgeschlossen in A, da χ stetig ist. Wir zeigen, dass $\ker\chi$ maximal ist. Es ist $\ker\chi \neq A$, denn es gilt $\chi \neq 0$. Falls $c \in A \setminus \ker\chi$, so gilt $\chi(c)^{-1} \cdot c - \mathbb{1} \in \ker\chi$. Also ist $\ker\chi + \mathbb{C} \cdot c = \ker\chi + \mathbb{C} \cdot \mathbb{1} = A$, da für $a \in A$ gilt $a - \chi(a) \cdot \mathbb{1} \in \ker\chi$ und damit $a = (a - \chi(a) \cdot \mathbb{1}) + \chi(a) \cdot \mathbb{1} \in \ker\chi + \mathbb{C} \cdot \mathbb{1}$. Damit ist der Kern von χ maximal.

Zur Injektivität: Es seien $\chi_1, \chi_2 \in \Omega(A)$ Charaktere mit $\ker\chi_1 = \ker\chi_2$. Dann gilt für $a \in A$

$$\chi_1(a) - \chi_2(a) = \chi_1\Big(\underbrace{a - \chi_2(a) \cdot \mathbb{1}}_{\in \ker\chi_2 = \ker\chi_1}\Big) = 0$$

Also ist $\chi_1 = \chi_2$. Für die Surjektivität betrachten wir ein maximales, nichttriviales Ideal $J \subsetneq A$. Dann ist $\operatorname{dist}(J, \mathbb{1}) = 1$, denn für den offenen Ball mit Radius 1 um $\mathbb{1}$ gilt $\mathring{B}_A(\mathbb{1}, 1) \subset \operatorname{Inv}(A)$ nach Satz 1.5. Dann ist $\mathbb{1} \notin \overline{J} \lhd A$. Da J maximal ist, folgt $J = \overline{J}$ und damit ist A/J eine einfache, abelsche, unitale Banachalgebra und mit Proposition 1.11 folgt $A/J \cong \mathbb{C}$. Also ist $\chi\colon A \to A/J \cong \mathbb{C}$ ein Charakter mit $\ker\chi = J$. □

1.14 Satz. Sei A eine abelsche unitale Banachalgebra. Für $a \in A$ gilt $\sigma(a) = \{\chi(a) \mid \chi \in \Omega(A)\}$.

Beweis: Für $\lambda \in \sigma(a)$ ist $J := (a - \lambda)A \lhd A$ ein echtes Ideal, da $(a - \lambda)$ nicht invertierbar ist. Nach dem Lemma von Zorn ist J in einem maximalen echten Ideal enthalten, also ist $J \subset \ker\chi$ für ein $\chi \in \Omega(A)$ nach Satz 1.13. Dann ist $\chi(a - \lambda) = 0$ für einen Charakter χ und somit auch $\chi(a) = \lambda$. Es gilt also $\sigma(a) \subseteq \{\chi(a) \mid \chi \in \Omega(A)\}$. Für $\chi \in \Omega(A)$ gilt $a - \chi(a) \cdot \mathbb{1} \in \ker\chi$. Damit kann $a - \chi(a) \cdot \mathbb{1}$ nicht invertierbar sein. Also ist $\chi(a) \in \sigma(a)$ und es folgt die zweite Inklusion. □

1.15 Satz. Sei A eine abelsche unitale Banachalgebra. Dann ist $\Omega(A)$ ein kompakter Hausdorffraum bezüglich der w^*-Topologie.

Beweis: Es ist $\Omega(A) \subset B^1(A^*)$, wobei die Einheitskugel kompakt und Hausdorffsch ist bezüglich der w^*-Topologie nach Banach-Alaoglu und da der Raum lokalkonvex ist. Sei $\chi_\gamma \xrightarrow{w^*} \chi$ ein Netz. χ_γ ist multiplikativ für jedes γ und $\chi_\gamma(\mathbb{1}) = 1$. Damit gelten diese Eigenschaften auch für χ. □

1.16 Definition. Sei A eine abelsche unitale Banachalgebra. $\Omega(A)$ mit der w^*-Topologie heißt ***Spektrum*** von A. Für $a \in A$ definieren wir die ***Gelfandtransformation*** $\widehat{a}\colon \Omega(A) \to \mathbb{C}$ durch $\widehat{a}(\chi) = \chi(a)$.

1.17 Satz. Sei A eine abelsche unitale Banachalgebra. Dann ist $\widehat{\ }\colon A \to C(\Omega(A))$, $a \mapsto \widehat{a}$ ein normvermindernder Homomorphismus und $r(a) = \|\widehat{a}\|_\infty$ für $a \in A$. Weiter gilt $\sigma(a) = \widehat{a}(\Omega(A))$.

Beweis: $\widehat{a}\colon \Omega(A) \to \mathbb{C}$ ist stetig nach Definition der w^*-Topologie, denn die w^*-Topologie ist per Definition die gröbste Topologie auf A^*, sodass die Einsetzungshomomorphismen stetig sind. Wir haben weiter

$$\sigma(a) \overset{1.14}{=} \{\chi(a) \mid \chi \in \Omega(A)\} = \{\widehat{a}(\chi) \mid \chi \in \Omega(A)\} = \widehat{a}(\Omega(A))$$

Also gilt außerdem

$$\|a\| \overset{1.8}{\leqslant} r(a) = \sup_{\lambda \in \sigma(a)} |\lambda| \overset{1.14}{=} \sup_{\chi \in \Omega(A)} |\widehat{a}(\chi)| = \|\widehat{a}\|_\infty$$ □

2 C^*-Algebren und Funktionalkalkül

2.1 Definition. Eine Banachalgebra heißt ***involutiv***, falls eine antilineare Abbildung $^*\colon A \to A$ existiert, für die folgenden Identitäten gelten:

$$a^{**} = a \qquad (ab)^* = b^* a^* \qquad \|a^*\| = \|a\|$$

2.2 Definition. Eine C^****-Algebra*** ist eine involutive Banachalgebra mit $\|a^* a\| = \|a\|^2$ für $a \in A$.

2.3 Definition. Sei A ein C^*-Algebra. $a \in A$ heißt

$$\begin{cases} \textit{selbstadjungiert} & \text{falls } a = a^* \\ \textit{normal} & \text{falls } aa^* = a^* a \\ \textit{unitär} & \text{falls } aa^* = a^* a = \mathbb{1} \\ \textit{Projektion} & \text{falls } a = a^* = a^2 \\ \textit{Isometrie} & \text{falls } a^* a = \mathbb{1} \end{cases}$$

Wo die Existenz eines Einselements nötig ist, fordern wir zusätzlich, dass A unital ist.

2.4 Definition. Es seien A, B zwei C^*-Algebren. Eine Abbildung $\pi\colon A \to B$ heißt ****-Homomorphismus***, falls π linear, multiplikativ und *-erhaltend ist. π heißt ****-Einbettung***, falls π zusätzlich isometrisch ist.

2.5 Bemerkung. Falls A eine (involutive) Banachalgebra ist, so ist $A \oplus \mathbb{C}$ mit offensichtlichen Vektorraumoperationen, der naheliegenden Multiplikation $(a, \lambda) \cdot (b, \mu) = (ab + \mu a + \lambda b, \lambda\mu)$ sowie $(a, \lambda)^* = (a^*, \overline{\lambda})$ im involutiven Fall und Norm definiert wir durch $\|(a, \lambda)\| := \|a\|_A + |\lambda|$ eine unitale (involutive) Banachalgebra mit $\mathbb{1} = (0, 1)$. $A \oplus \mathbb{C}$ ist jedoch keine C^*-Algebra, auch wenn A eine C^*-Algebra ist.

2.6 Satz. Sei A eine C^*-Algebra. Dann existiert eine unitale C^*-Algebra $A^\sim$ mit einer isometrischen *-Einbettung $\iota\colon A \hookrightarrow A^\sim$, sodass $\iota(A) \lhd A^\sim$ ein Ideal ist mit

$$A^\sim/\iota(A) \cong \begin{cases} 0, & \text{falls } A \text{ unital} \\ \mathbb{C}, & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis: Für $a \in A$ definieren wir $\iota(a) \in \mathcal{B}(A)$, wobei $\mathcal{B}(A)$ die beschränkten Operatoren auf A aufgefasst als Banachraum sind, durch $\iota(a)(b) = ab$. Definiere $A^\sim := \iota(A) + \mathbb{C} \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(A)} \subset \mathcal{B}(A)$. Dann ist $A^\sim$ eine unitale Algebra mit Involution

$$\left(\iota(a) + \lambda \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(A)}\right)^* := \iota(a^*) + \overline{\lambda} \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(A)}$$

Dass $\iota(A) \lhd A^\sim$ ein Ideal ist, ist klar. $A^\sim$ ist normiert mittels der Operatornorm. Für $0 \neq a \in A$ gilt

$$\begin{aligned} \|a\|_A = \frac{1}{\|a\|_A} \|aa^*\|_A = \left\| a \left(\frac{1}{\|a^*\|} \cdot a^* \right) \right\|_A &\leqslant \left\| \iota(a) \left(\frac{1}{\|a^*\|} \cdot a^* \right) \right\|_A \\ &\leqslant \sup_{\|b\|_A \leqslant 1} \left\| \iota(a)(b) \right\|_A = \left\| \iota(a) \right\|_{\mathcal{B}(A)} \\ &= \sup_{\|b\|_A \leqslant 1} \|ab\|_A \\ &\leqslant \|a\|_A \end{aligned}$$

Also ist ι isometrisch. Es folgt, dass $\iota(A) \subset \mathcal{B}(A)$ abgeschlossen ist, da A vollständig ist. Weiter folgt, dass auch $A^\sim = \iota(A) + \mathbb{C} \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(A)}$ vollständig ist bezüglich $\|\cdot\|_{\mathcal{B}(A)}$. Wir zeigen nun, dass $\|\cdot\|_{\mathcal{B}(A)}$ eine C^*-Norm ist auf $A^\sim$:

$$\begin{aligned}
\left\|\iota(a) + \lambda \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(A)}\right\|_{\mathcal{B}(A)}^2 &= \sup_{b \in A, \|b\| \leqslant 1} \|ab + \lambda b\|_A^2 \\
&= \sup_{b \in A, \|b\| \leqslant 1} \left\|(ab + \lambda b)^*(ab + \lambda b)\right\|_A \\
&= \sup_{b \in A, \|b\| \leqslant 1} \left\|b^*a^*ab + \lambda b^*a^*b + \overline{\lambda} b^*ab + |\lambda|^2 b^*b\right\|_A \\
&\leqslant \sup_{b \in A, \|b\| \leqslant 1} \left\|a^*ab + \lambda a^*b + \overline{\lambda}ab + |\lambda|^2 b\right\|_A && [*] \\
&= \left\|\iota\big(a^*a + \lambda a^* + \overline{\lambda} a\big) + |\lambda|^2 \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(A)}\right\|_{\mathcal{B}(A)} \\
&= \left\|\big(\iota(a) + \lambda \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(A)}\big)^*\big(\iota(a) + \lambda \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(A)}\big)\right\|_{\mathcal{B}(A)} \\
&\leqslant \left\|\big(\iota(a) + \lambda \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(A)}\big)^*\right\|_{\mathcal{B}(A)} \left\|\iota(a) + \lambda \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(A)}\right\|_{\mathcal{B}(A)} && [**]
\end{aligned}$$

Es folgt, dass

$$\left\|\iota(a) + \lambda \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(A)}\right\|_{\mathcal{B}(A)} \leqslant \left\|\big(\iota(a) + \lambda \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(A)}\big)^*\right\|_{\mathcal{B}(A)} \leqslant \left\|\iota(a) + \lambda \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(A)}\right\|_{\mathcal{B}(A)}$$

Damit folgt, dass $[*]$ und $[**]$ Gleichungen sind und $\|\cdot\|_{\mathcal{B}(A)}$ eine C^*-Norm auf $A^\sim$ ist. Falls A unital ist, gilt $\iota(\mathbb{1}_A) = \mathbb{1}_{\mathcal{B}(A)}$ und somit $\iota(A) = A^\sim$. Ist A nicht unital, so ist $A^\sim \cong \iota(A) \oplus \mathbb{C}$ als Vektorräume und es muss $A^\sim/\iota(A) \cong \mathbb{C}$ gelten. □

2.7 Bemerkung. Man definiert oft auch eine unitale C^*-Algebra

$$A^+ := \begin{cases} A^\sim, & \text{falls } A \text{ nicht unital} \\ A \oplus \mathbb{C}, & \text{falls } A \text{ unital} \end{cases}$$

mit $\|(a, \lambda)\| := \max\{\|a\|_A, |\lambda|\}$. Dann ist in jedem Fall $A^+ \cong A \oplus \mathbb{C}$ als Vektorraum. A^+ lässt sich
Blatt3 Aufgabe 2
charakterisieren durch die universelle Eigenschaft:

$$\begin{tikzcd} & B \\ A \arrow[ur] \arrow[r, hook] & A^+ \arrow[u, dashed, "\exists!"'] \end{tikzcd}$$

wobei B eine unitale C^*-Algebra ist und $A \to B$ ein *-Homomorphismus ist. Eine ähnliche Beschreibung für $A^\sim$ ist möglich, aber etwas „subtiler“.

2.8 Definition. Sei A eine nichtunitale C^*-Algebra. Für $a \in A$ setzen wir

$$\sigma(a) := \sigma_{A^\sim}\big(\iota(a)\big) \quad \text{und} \quad r(a) := r_{A^\sim}\big(\iota(a)\big)$$

Für A unital sind maximale Ideale automatisch abgeschlossen

Wieder schreiben wir $\Omega(A) := \{\chi \colon A \to \mathbb{C} \text{ Charaktere}\}$ und

$$J_{\max}(A) = \{J \mid J \lhd A \text{ echtes maximales abgeschlossenes Ideal}\}$$

2.9 Satz. Sei A eine nichtunitale abelsche C^*-Algebra. Dann ist $\Omega(A)$ ein lokalkompakter Hausdorffraum bezüglich der w^*-Topologie. Für $a \in A$ gilt $\sigma(a) = \{\chi(a) \mid \chi \in \Omega(A)\} \cup \{0\}$.

Beweis: Für $\chi \in \Omega(A)$ sei $\chi^{\sim}\colon A^{\sim} \to \mathbb{C}$ die eindeutig bestimmte, lineare, unitale Fortsetzung. Es gilt $\chi^{\sim} \in \Omega(A^{\sim})$ und

$$\Omega(A^{\sim}) = \left\{\chi^{\sim} \mid \chi \in \Omega(A)\right\} \cup \left\{\chi_\infty\right\}$$

wo $\chi_\infty\colon A^{\sim} \to {}^{A^{\sim}}/_{\iota(A)} \cong \mathbb{C}$. $\Omega(A^{\sim})$ ist ein kompakter Hausdorffraum nach Satz 1.15, also muss der linke Teil der Vereinigung ein lokalkompakter Hausdorffraum sein. Man überprüft, dass $\chi \mapsto \chi^{\sim}$ ein Homöomorphismus $\Omega(A) \to \Omega(A^{\sim}) \setminus \{\chi_\infty\}$ bezüglich der w^*-Topologie ist. Es gilt *Blatt 2 Aufgabe 2*

$$\sigma(a) := \sigma_{A^{\sim}}\left(\iota(a)\right) \overset{1.17}{=} \left\{\chi(\iota(a)) \mid \chi \in \Omega(A^{\sim})\right\} = \underbrace{\left\{\chi^{\sim}(\iota(a)) \mid \chi \in \Omega(A)\right\}}_{=\left\{\chi(a) \mid \chi\in\Omega(A)\right\}} \cup \underbrace{\left\{\chi_\infty(\iota(a))\right\}}_{=\{0\}} \qquad \square$$

2.10 Proposition. Sei A eine C^*-Algebra. Dann gilt

(i) Für eine Projektion $0 \neq p \in A$ gilt $\|p\| = 1$.

(ii) Ist $\mathbb{1} \in A$ und $u \in A$ unitär, dann ist $\|u\| = 1$ und $\sigma(u) \subset \mathbb{T}$.

(iii) Für $a \in A_{sa}$ ist $r(a) = \|a\|$ und $\sigma(a) \subset \mathbb{R}$.

(iv) Für $a \in A$ beliebig gilt $\|a\| = \|a^*a\|^{1/2} = r(a^*a)^{1/2}$.

Beweis:

(i) Es gilt $\|p\| = \|p^*p\| = \|p\|^2$ und somit muss $\|p\| = 1$ gelten.

(ii) Es gilt $\|u\|^2 = \|u^*u\| = \|\mathbb{1}\| = 1$, also $\|u\| = 1 = \|u^*\|$. Wenn $\lambda \in \sigma(u)$, dann gilt $\lambda \neq 0$ und es gilt $\lambda^{-1} \in \sigma(u^*)$. Da die Spektralradien von u und u^* kleiner gleich 1 sind, muss $|\lambda|, |\lambda^{-1}| \leqslant 1$ gelten, also $|\lambda| = 1$ und damit $\lambda \in \mathbb{T}$.

(iii) Es gilt $\left\|a^2\right\| = \|a^*a\| = \|a\|^2$. Eine Induktion liefert $\left\|a^{2^n}\right\| = \|a\|^{2^n}$, also nach Satz 1.10

$$r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \left\|a^{2^n}\right\|^{1/2^n} = \|a\|$$

Weiter existiert[2] $e^{ia} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(ia)^n \in A^{\sim}$ und ist unitär mit $(e^{ia})^* = e^{(ia)^*} = e^{-ia} = (e^{ia})^{-1}$, also ist $\sigma(e^{ia}) \subset \mathbb{T}$ nach (ii). Falls $\lambda \in \sigma(a)$, dann setze $b := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} i^n (a-\lambda)^{n-1}$. Dann gilt

$$(a-\lambda)be^{i\lambda} = \left(e^{i(a-\lambda)} - \mathbb{1}\right)e^{i\lambda} = e^{ia} - e^{i\lambda}$$

Also ist $e^{i\lambda} \in \sigma(e^{ia}) \subset \mathbb{T}$ und somit $\lambda \in \mathbb{R}$.

(iv) Folgt direkt aus (iii). $\square$

2.11 Korollar. Es seien A und B zwei C^*-Algebren und $\pi\colon A \to B$ ein *-Homomorphismus. Dann ist π kontraktiv. Die Aussage bleibt richtig, falls A nur eine involutive Banachalgebra ist.

Beweis: Wir dürfen π als unital annehmen (betrachte sonst $\pi^+\colon A^+ \to B^{\sim}$). Für $d \in A$ gilt $\sigma_B\left(\pi(d)\right) \subset \sigma_A(d)$, also $r_B\left(\pi(d)\right) \leqslant r_A(d)$. Für $a \in A$ gilt nach Proposition 2.10 (iii)

$$\|\pi(a)\|^2 = \|\pi(a)^*\pi(a)\| = \|\pi(a^*a)\| = r_B\left(\pi(a^*a)\right) \leqslant r_A(a^*a) = \|a\|^2 \qquad \square$$

2.12 Korollar. Auf einer *-Algebra gibt es höchstens eine C^*-Norm.

[2] $(ia)^0 = \mathbb{1}_{A^{\sim}}$ falls A nicht unital

Beweis: Sei A eine *-Algebra mit C^*-Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$. Wir bezeichnen die C^*-Algebren entsprechend mit A_1 und A_2. Es seien $\pi_1\colon A_1 \to A_2$ und $\pi_2\colon A_2 \to A_1$ die Identitäten. Dann gilt

$$\|a\|_1 = \|\pi_2(a)\|_1 \leqslant \|a\|_2 = \|\pi_1(a)\|_2 \leqslant \|a\|_1 \qquad \square$$

2.13 Korollar. Sei A eine C^*-Algebra und χ ein Charakter auf A. Dann gilt $\chi(a^*) = \overline{\chi(a)}$ für $a \in A$, das heißt χ ist ein *-Homomorphismus.

Beweis: Sei $a \in A$, dann ist $a = \frac{1}{2}(a + a^*) + i \cdot \frac{1}{2i}(a - a^*) =: b + i \cdot c$ und b, c sind selbstadjungiert. Es gilt

$$\chi(b) \overset{2.9}{\in} \sigma(b) \overset{2.10(iii)}{\subset} \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \chi(c) \in \sigma(c) \subset \mathbb{R}$$

Damit folgt $\chi(a^*) = \chi(b - i \cdot c) = \chi(b) - i \cdot \chi(c) = \overline{\chi(b) + i \cdot \chi(c)} = \overline{\chi(a)}$. $\square$

Aus dem bisher gezeigten können wir nun eine Version von Satz 1.13 für nicht notwendigerweise unitale C^*-Algebren ableiten:

2.14 Korollar. Sei A eine abelsche C^*-Algebra. Dann gilt

(i) Jeder Charakter $\chi\colon A \to \mathbb{C}$ ist stetig mit Norm $\leqslant 1$.

(ii) Die Abbildung $\chi \mapsto \ker\chi$ definiert eine Bijektion

$$\Omega(A) \to J_{\max} = \left\{ J \;\middle|\; J \subsetneq A \text{ maximales, abgeschlossenes Ideal} \right\}$$

Beweis:

(i) folgt aus Korollar 2.11 und Korollar 2.13 oder auch aus Satz 1.13 und Satz 2.6.

(ii) Wir zeigen nur die Surjektivität: Sie $J \subsetneq A$ ein abgeschlossenes, maximales Ideal. Dann ist $J \subsetneq A^\sim$ ein abgeschlossenes Ideal und es gilt

$$J \subset A \cap \bigcap_{\substack{I \lhd A^\sim \max \\ J \subset I}} I \overset{1.13}{=} A \cap \bigcap_{\substack{\chi \in \Omega(A^\sim) \\ J \subset \ker\chi}} \ker\chi \overset{2.9}{=} A \cap \ker\chi_\infty \cap \bigcap_{\substack{\chi \in \Omega(A) \\ J \subset \ker\chi^\sim}} \ker\chi^\sim$$

Damit ist J enthalten im Schnitt über alle Kerne der $\chi \in \Omega(A)$, wobei $J \subset \ker\chi$. Damit ist $J \subset \ker\chi$ für ein $\chi \in \Omega(A)$ und da $\ker\chi \lhd A$ abgeschlossen und maximal ist, folgt $J = \ker\chi$. $\square$

2.15 Beispiel. Wir haben nun schon einiges über C^*-Algebren gelernt, es dabei aber total versäumt konkrete Beispiele anzugeben. Dies holen wir nun nach:

(i) Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Dann ist $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ eine C^*-Algebra mit Operatornorm und Adjunktion: Für $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ gilt $\|T\| = \sup\left\{ |\langle \eta\,, T\xi \rangle| \;\middle|\; \|\xi\|, \|\eta\| \leqslant 1 \right\}$ also

$$\begin{aligned} \|T^*T\| = \sup\left\{ |\langle \eta\,, T^*T\xi \rangle| \;\middle|\; \|\xi\|, \|\eta\| \leqslant 1 \right\} &\geqslant \sup\left\{ |\langle T\eta\,, T\eta \rangle| \;\middle|\; \|\eta\| \leqslant 1 \right\} \\ &= \left(\sup\left\{ \|T\eta\| \;\middle|\; \|\eta\| \leqslant 1 \right\} \right)^2 = \|T\|^2 \geqslant \|T^*T\| \end{aligned}$$

(ii) Insbesondere ist $M_n := M_n(\mathbb{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$ eine C^*-Algebra für $n \in \mathbb{N}$.

(iii) Jede abgeschlossene *-Unteralgebra von $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist eine C^*-Algebra, zum Beispiel $\mathcal{K}(\mathcal{H})$.

(iv) Sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum. Dann ist $C_0(X)$ eine C^*-Algebra mit punktweisen Operationen, Involution $f^* = \overline{f}$ und der Supremumsnorm. Tatsächlich ist jede abelsche C^*-Algebra von dieser Form:

2.16 Satz (Gelfand). Sei $A \neq 0$ eine abelsche C^*-Algebra. Dann ist die Gelfandtransformation $\widehat{\ }\colon A \to C_0(\Omega(A))$ ein isometrischer *-Isomorphismus.

$C_0(\Omega(A)) = C(\Omega(A))$, falls A unital nach Satz 1.15

Beweis: Betrachte das folgende Diagramm

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, mapsto] \arrow[d, phantom, "\rotatebox{90}{$\in$}"] & (\chi \mapsto \chi(a)) \arrow[d, phantom, "\rotatebox{90}{$\in$}"] \\
A \arrow[r, "\widehat{\ }"] \arrow[d, hook, "\iota"] & \big\{f \in C\big(\Omega(A) \cup \{\chi_\infty\}\big) \,\big|\, f(\chi_\infty) = 0\big\} \cong C_0(\Omega(A)) \arrow[d, hook] \\
A^\sim \arrow[r, "\widehat{\ }"] & C(\Omega(A^\sim)) = C\big(\big\{\chi^\sim \,\big|\, \chi \in \Omega(A)\big\} \cup \{\chi_\infty\}\big) \overset{2.9}{\cong} C\big(\Omega(A) \cup \{\chi_\infty\}\big)
\end{tikzcd}$$

Die Gelfandtransformation ist ein *-Homomorphismus nach Korollar 2.13 und Satz 1.17. Weiter gilt

$$\|a\|^2 = \|a^*a\| \overset{2.10}{=} r(a^*a) \overset{1.17}{=} \big\|\widehat{a^*a}\big\|_\infty = \Big\|\widehat{a^*}\,\widehat{a}\Big\|_\infty = \big\|\overline{\widehat{a}}\,\widehat{a}\big\|_\infty = \big\||\widehat{a}|^2\big\|_\infty = \|\widehat{a}\|_\infty^2$$

Damit ist $a \mapsto \widehat{a}$ isometrisch. Damit folgt, dass $C := \{\widehat{a} \mid a \in A\} \subset C_0(\Omega(A))$ abgeschlossen ist. Außerdem ist C eine *-Unteralgebra, also insbesondere invariant unter komplexer Konjugation. Weiter trennt C die Punkte von $\Omega(A)$ und zu jedem $\chi \in \Omega(A)$ existiert ein $a \in A$ mit $\widehat{a}(\chi) = \chi(a) \neq 0$, das heißt $\mathrm{ev}_\chi(C) \neq \{0\}$ für alle $\chi \in \Omega(A)$. Mit Stone-Weierstraß folgt, dass $C \subset C_0(\Omega(A))$ dicht ist. Da C abgeschlossen ist, folgt also $C = C_0(\Omega(A))$. □

2.17 Bemerkung. Sei X ein kompakter Hausdorffraum und $f \in C(X)$, dann ist $\sigma_{C(X)}(f) = f(X)$.

Beweis: Die Abbildung $\delta\colon X \to \Omega(C(X))$ definiert durch $x \mapsto (f \mapsto f(x))$ ist ein Homöomorphismus wegen $C(X) \cong C\big(\Omega(C(X))\big)$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\sigma_{C(X)}(f) \overset{1.17}{=} \widehat{f}\big(\Omega(C(X))\big) = \Big\{\widehat{f}(\chi) \,\Big|\, \chi \in \Omega\big(C(X)\big)\Big\} &= \big\{\chi(f) \,\big|\, \chi \in \Omega\big(C(X)\big)\big\} \\
&= \big\{\delta(x)(f) \,\big|\, x \in X\big\} = f(X)
\end{aligned}$$
□

2.18 Definition. Sei $S \subset A$ Teilmenge einer C^*-Algebra A. Dann bezeichnet $C^*(S) \subset A$ die kleinste C^*-Unteralgebra von A, die S enthält; also

$$C^*(S) := \bigcap_{\substack{B \subset A \text{ Unteralg.} \\ \text{mit } S \subset B}} B$$

2.19 Satz (Funktionalkalkül). Sei A eine C^*-Algebra und $a \in A$ normal. Dann existiert ein eindeutig bestimmter *-Isomorphismus

$$C^*(a) \cong C_0\big(\sigma(a) \setminus \{0\}\big) \qquad \text{mit} \qquad a \longmapsto \mathrm{id}_{\sigma(a)\setminus\{0\}}$$

Falls A unital ist, so existiert ein eindeutig bestimmter unitaler *-Isomorphismus

$$C^*(a, \mathbb{1}) \cong C\big(\sigma(a)\big) \qquad \text{mit} \qquad a \longmapsto \mathrm{id}_{\sigma(a)}$$

Für $f \in C_0(\sigma(a) \setminus \{0\})$ bzw. $f \in C(\sigma(a))$ bezeichnen wir mit $f(a) \in A$ das Urbild von f unter diesem Isomorphismus. Es gilt $f(a) \in C^*(a, \mathbb{1}_{A^\sim}) \subset A^\sim$, falls $f(0) \neq 0$. Weiter gilt

$$\sigma\big(f(a)\big) = f\big(\sigma(a)\big)$$

Für $g \in C\big(f(\sigma(a))\big)$ gilt dann $g\big(f(a)\big) = (g \circ f)(a)$.

Beweis: Sei zunächst A unital. Da $a \in A$ normal ist, ist $C^*(a, \mathbb{1}) = \overline{\mathrm{Alg}(a, a^*, \mathbb{1})} \subset A$ abelsch. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \alpha\colon \Omega\big(C^*(a,\mathbb{1})\big) &\longrightarrow \widehat{a}\big(\Omega(C^*(a,\mathbb{1}))\big) \overset{1.17}{=} \sigma_{C^*(A,\mathbb{1})}(a) \subset \mathbb{C} \\ \chi &\longmapsto \widehat{a}(\chi) = \chi(a) \end{aligned}$$

ist ein Homöomorphismus: Die Stetigkeit ist klar, denn $\Omega(C^*(a,\mathbb{1}))$ trägt die w^*-Topologie. Die Surjektivität ist trivial. Zur Injektivität: Falls $\chi_1(a) = \widehat{a}(\chi_1) = \widehat{a}(\chi_2) = \chi_2(a)$ ist, so ist $\chi_1|_{\mathrm{Alg}(a,a^*,\mathbb{1})} = \chi_2|_{\mathrm{Alg}(a,a^*,\mathbb{1})}$ und mit der Stetigkeit von χ_1 und χ_2 folgt, dass $\chi_1 = \chi_2$ sein muss. Die Inverse ist stetig, da $\Omega(C^*(a,\mathbb{1}))$ kompakt ist.

Wir erhalten nach Satz 2.16 $C^*(a,\mathbb{1}) \cong C\big(\Omega(C^*(a,\mathbb{1}))\big)$ mittels $a \mapsto \widehat{a}$ und $C\big(\Omega(C^*(a,\mathbb{1}))\big) \cong C\big(\sigma_{C^*(a,\mathbb{1})}(a)\big)$ mittels $\widehat{a} \mapsto \widehat{a} \circ \alpha^{-1}$. Für $\alpha(\chi) = t \in \sigma_{C^*(a,\mathbb{1})}(a)$ haben wir

$$\big(\widehat{a} \circ \alpha^{-1}\big)(t) = \big(\widehat{a} \circ \alpha^{-1}\big)\big(\alpha(\chi)\big) = \widehat{a}(\chi) = \alpha(\chi) = t$$

Also ist $\widehat{a} \circ \alpha^{-1} = \mathrm{id}_{\sigma_{C^*(a,\mathbb{1})}(a)}$. Wir nenen die Komposition der beiden Isomorphismen β und zeigen, dass β tatsächlich die in der Behauptung geforderten Eigenschaften hat: Für $f \in C\big(\sigma_{C^*(a,\mathbb{1})}(a)\big)$ gilt

$$\sigma_{C^*(a,\mathbb{1})}\big(f(a)\big) = \sigma_{C^*(a,\mathbb{1})}\big(\beta^{-1}(f)\big) = \sigma_{\beta(C^*(a,\mathbb{1}))}(f) = \sigma_{C\left(\sigma_{C^*(a,\mathbb{1})}(a)\right)}(f) \overset{2.17}{=} f\big(\sigma_{C^*(a,\mathbb{1})}(a)\big)$$

Falls A nicht unital ist, so haben wir

$$\begin{array}{ccccc}
C^*(a,\mathbb{1}_{A^\sim}) & \xrightarrow{\overset{2.16}{\cong}} & C\big(\Omega(C^*(a,\mathbb{1}_{A^\sim}))\big) & \xrightarrow{\overset{\text{s.o.}}{\cong}} & C\big(\sigma_{C^*(a,\mathbb{1})}(a)\big) \\
\cup & & \cup & & \cup \\
C^*(a) & \xrightarrow{\overset{2.16}{\cong}} & \begin{matrix} C_0\big(\Omega(C^*(a))\big) \overset{2.9}{=} \\ C_0\big(\Omega(C^*(a,\mathbb{1}_{A^\sim}))\setminus\{\chi_\infty\}\big) \end{matrix} & \xrightarrow{\cong} & \begin{matrix} C_0\big(\sigma_{C^*(a,\mathbb{1}_{A^\sim})}(a)\setminus\{0\}\big) = \\ \big\{f \in C\big(\sigma_{C^*(a,\mathbb{1}_{A^\sim})}(a)\big) \bigm| f(0) = 0\big\} \end{matrix} \\
\rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
a & \longmapsto & \widehat{a} & \longmapsto & \mathrm{id}_{\sigma_{C^*(a,\mathbb{1}_{A^\sim})}(a)}
\end{array}$$

Der Funktionalkalkül β^{-1} ist ein *-Homomorphismus, daher gilt für *-Polynome g, dass

$$g\big(f(a)\big) = g\big(\beta^{-1}(f)\big) = \beta^{-1}(g \circ f) = (g \circ f)(a)$$

Für eine beliebige Funktion $g \in C\big(\sigma_{C^*(a,\mathbb{1})}(a)\big)$ approximieren wir g gleichmäßig auf $\sigma_{C^*(a,\mathbb{1})}(a)$ durch *-Polynome und benutzen die Stetigkeit von β^{-1}.

Es bleibt zu zeigen, dass $\sigma_{C^*(a,\mathbb{1})}(a) = \sigma_A(a)$ ist (der unitale Fall genügt). Offensichtlich gilt $\mathrm{Inv}(C^*(a,\mathbb{1}_A)) \subseteq \mathrm{Inv}(A)$ und somit $\sigma_A(a) \subseteq \sigma_{C^*(a,\mathbb{1}_A)}(a)$. Um zu zeigen, dass auch die andere Inklusion gilt, sei $b \in C^*(a,\mathbb{1}_A)$ mit $\|b\| \leqslant 1$ und $b \in \mathrm{Inv}(A)$. Dann ist b normal, denn b und b^* sind in $C^*(a,\mathbb{1}_A)$ und diese Algebra ist abelsch. $C^*(b, b^{-1})$ ist auch abelsch, da $(b^{-1})^* = (b^*)^{-1}$ und

$$b(b^*)^{-1} = b(b^*)^{-1}b^{-1}b = b(bb^*)^{-1}b = b(b^*b)^{-1}b = bb^{-1}(b^*)^{-1}b = (b^*)^{-1}b$$

Weiter ist $\|b^*b\| \leqslant 1$ nach der C^*-Gleichung und $\mathbb{1} - b^*b$ ist selbstadjungiert. Ferner gilt $0 < \chi(b^*b) \leqslant 1$ für alle Charaktere $\chi \in \Omega\big(C^*(b, b^{-1})\big)$. Damit ist

$$\sigma_{C^*(b,b^{-1})}(\mathbb{1} - b^*b) \overset{1.17}{=} \big\{\chi(\mathbb{1} - b^*b) \bigm| \chi \in \Omega\big(C^*(b, b^{-1})\big)\big\} \subseteq [0, 1)$$

Da das Spektrum $\sigma_{C^*(b,b^{-1})}(\mathbb{1} - b^*b)$ kompakt ist, folgt $1 > r(\mathbb{1} - b^*b) = \|\mathbb{1} - b^*b\|$. Damit existiert die Neumannsche Reihe

$$(b^*b)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\mathbb{1} - b^*b)^n \in C^*(b, \mathbb{1})$$

und es folgt $b^{-1} = (b^*b)^{-1}b^* \in C^*(b, \mathbb{1}) \subseteq C^*(a, \mathbb{1})$. Wenn $b \in C^*(a, \mathbb{1})$ invertierbar in A ist, so ist also tatsächlich auch $b^{-1} \in C^*(a, \mathbb{1})$, womit die andere Inklusion $\sigma_{C^*(a,\mathbb{1})}(a) \subseteq \sigma_A(a)$ folgt. Ebenso folgt $\sigma_{C^*(a,\mathbb{1})}\big(f(a)\big) = \sigma_A\big(f(a)\big)$ für $f \in C\big(\sigma(a)\big)$. □

2.20 Korollar. Es seien $A \subseteq B$ C^*-Algebren und $a \in A$. Dann gilt

$$\sigma_A(a) \cup \{0\} = \sigma_B(a) \cup \{0\}$$

(i) Wenn A und B unital sind und $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$ ist, dann gilt $\sigma_A(a) = \sigma_B(a)$.

(ii) Wenn A nicht unital ist und B unital ist, so ist $0 \in \sigma_A(a) = \sigma_B(a)$.

(iii) Wenn beide unital sind, die Einselemente aber nicht übereinstimmen, so gilt $\sigma_A(a) \cup \{0\} = \sigma_B(a)$.

Beweis:

(i) Es gilt wieder $\mathrm{Inv}(A) \subset \mathrm{Inv}(B)$, also $\sigma_B(a) \subset \sigma_A(a)$. Für $b \in A \cap \mathrm{Inv}(B)$ normal gilt dann $b \in \mathrm{Inv}(A)$ wie im Beweis von Satz 2.19. Damit folgt

$$\sigma_A(a) \subset \sigma_B(a) \Longrightarrow \sigma_A(a) = \sigma_B(a)$$

Falls b nicht normal ist, betrachten wir $b^*b \in \mathrm{Inv}(B)$. Dann gilt

$$(b^*b)^{-1}b^* = b^{-1} \in A$$

(ii) Betrachte $A^\sim \cong C^*(a, \mathbb{1}_B) \subset B$ (algebraisch klar, als C^*-Algebren nach Korollar 2.11). Dann gilt

$$\overline{\sigma}_A(a) := \sigma_{A^\sim}(a) \overset{\text{(i)}}{=} \sigma_B(a)$$

(iii) Wenn $\mathbb{1}_A \neq \mathbb{1}_B$, so gilt für $a \in \mathrm{Inv}(B)$ auch $a^{-1} \in A$. Dann folgt aber $\mathbb{1}_B = a^{-1}a \in A$ (Beweis 2.19). Dies ist ein Widerspruch, also muss $0 \in \sigma_B(a)$ gelten. Wenn $\lambda \neq 0$, dann gilt $\lambda \cdot \mathbb{1}_A - a \in \mathrm{Inv}(A)$ genau dann, wenn $\lambda \cdot \mathbb{1}_B - a \in \mathrm{Inv}(B)$. Dies sieht man wie folgt:

$$(\lambda \cdot \mathbb{1}_B - a)^{-1} = (\lambda \cdot \mathbb{1}_A - a)^{-1} + \lambda^{-1}(\mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A)$$

Damit ist $\sigma_A(a) \setminus \{0\} = \sigma_B(a) \setminus \{0\}$. □

3 Positivität

3.1 Definition. Sei A eine C^*-Algebra. Ein Element $a \in A$ heißt ***positiv*** ($a \geqslant 0$), wenn $a = a^*$ und $\sigma(a) \subseteq [0, \infty)$ ist. Mit A_+ bezeichnen wir die Menge der positiven Elemente. Wenn $b, c \in A_{sa}$ sind, dann definieren wir

$$b \leqslant c \quad :\Longleftrightarrow \quad c - b \geqslant 0$$

3.2 Bemerkung.

(i) Für $a \in A \subseteq B$ gilt $a \geqslant 0$ in A genau dann, wenn $a \geqslant 0$ in B gilt (nach Korollar 2.20).

(ii) Für $a \in A = C_0(X)$ ist $a \geqslant 0$ genau dann, wenn $a(x) \geqslant 0$ für alle $x \in X$ gilt (nach 2.17).

3.3 Proposition. Sei A eine C^*-Algebra und $a \in A_+$. Dann gibt es ein eindeutiges $b \in A_+$, sodass $b^2 = a$. Wir schreiben $a^{1/2}$ für dieses Element b.

Beweis: Ein solches $b \in C^*(a) \subseteq A$ existiert nach dem Funktionalkalkül, da $C^*(a) \cong C_0(\sigma(a) \setminus \{0\})$ via $a \mapsto \mathrm{id}_{\sigma(a)} \geqslant 0$. Sei $c \in A_+$ ein weiteres Element mit $c^2 = a$. Dann gilt $ca = c^3 = ac$ und damit ist $C^*(a, c)$ abelsch. Sei $\Omega := \Omega(C^*(a, c))$ das Charakterspektrum und $\Phi\colon C^*(a, c) \to C_0(\Omega)$ die Gelfandtransformation. Dann sind $\Phi(b)$ und $\Phi(c)$ Quadratwurzeln von $\Phi(a)$. Anders ausgedrückt gilt für alle $\omega \in \Omega$

$$\Phi(b)(\omega)^2 = \Phi(a)(\omega) = \Phi(c)(\omega)^2$$

Damit folgt $\Phi(b)(\omega) = \Phi(c)(\omega)$ für alle ω und somit $\Phi(b) = \Phi(c)$, also $b = c$. $\square$

3.4 Proposition. Sei a eine unitale C^*-Algebra, $a \in A_{sa}$, $t \in \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$. Dann gilt

(i) Aus $\|a - t\| \leqslant t$ folgt $a \geqslant 0$

(ii) Aus $a \geqslant 0$ und $\|a\| \leqslant t$ folgt $\|a - t\| \leqslant t$

Beweis: Wir können annehmen, dass $A = C^*(a, \mathbb{1}) = C(\sigma(a))$ gilt. (Warum?)

(i) Es gilt $\sup_{x \in \sigma(a)} |x - t| = \|a - t\| \leqslant t$, woraus $|x - t| \leqslant t$ für alle $x \in \sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$ folgt. Damit folgt $x \geqslant 0$ für alle $x \in \sigma(a)$, also $a \geqslant 0$.

(ii) Aus $\|a\| \leqslant t$ und $a \geqslant 0$ folgt $0 \leqslant x \leqslant t$ für alle $x \in \sigma(a)$. Subtrahieren mit t liefert $-t \leqslant x - t \leqslant 0$ für alle x, also $|x - t| \leqslant t$. Damit folgt wieder $\|a - t\| \leqslant t$. $\square$

3.5 Korollar. Sei A eine C^*-Algebra. Dann ist A_+ ein Kegel, d.h. für $a, b \in A_+$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+$ gilt

$$\lambda \cdot a + \mu \cdot b \in A_+$$

Beweis: Wir dürfen annehmen, dass A unital ist. Dass $\lambda a \geqslant 0$ und $\mu b \geqslant 0$ gilt, ist klar. Wir müssen also nur zeigen, dass aus $a, b \in A_+$ $a + b \in A_+$ folgt. Es gilt

$$\big\|a - \|a\| \cdot \mathbb{1}_A\big\| \leqslant \|a\| \quad \text{und} \quad \big\|b - \|b\| \cdot \mathbb{1}_A\big\| \leqslant \|b\|$$

nach voriger Proposition 3.4(ii). Damit folgt weiter aus der Dreiecksungleichung

$$\big\|a + b - (\|a\| + \|b\|)\big\| \leqslant \big\|a - \|a\|\big\| + \big\|b - \|b\|\big\| \leqslant \|a\| + \|b\|$$

Also ist $a + b \geqslant 0$ nach Proposition 3.4(i). $\square$

3.6 Satz. Sei A eine C^*-Algebra und $a \in A$. Dann gilt $a^* a \geqslant 0$.

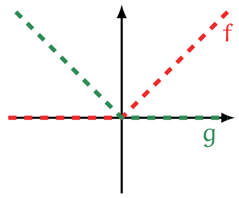


Abbildung 1: Zerlegen der Identität in zwei Funktionen f und g, sodass $\mathrm{id} = f - g$

Beweis: Definiere Funktionen $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wie in Abbildung 1 und $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $h(t) = t^{1/3}$. Es gilt $a^*a \in A_{sa}$, $a^*a = f(a^*a) - g(a^*a)$ und $f(a^*a) \cdot g(a^*a) = 0$. Für $c = a\,g(a^*a)$ ergibt sich

$$-c^*c = -g(a^*a)a^*ag(a^*a) = -g(a^*a)\big(f(a^*a) - g(a^*a)\big)g(a^*a) = g(a^*a)^3 \in A_+$$

Nach Bemerkung 1.3 gilt $\sigma(-cc^*) \setminus \{0\} = \sigma(-c^*c) \setminus \{0\}$, also $-cc^* \in A_+$. Schreibe nun $c = d + ie$ mit $d, e \in A_{sa}$. Dann gilt

$$c^*c + cc^* = 2d^2 + 2e^2$$

Also ist $c^*c = 2d^2 + 2e^2 - cc^* \geqslant 0$. Damit ist $\sigma(c^*c) \subseteq \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_- = \{0\}$. Also ist $\|c\|^2 = \|c^*c\| = r(c^*c) = 0$. Insgesamt ist $g(a^*a)^3 = 0$, also $g(a^*a) = h\big(g(a^*a)^3\big) = 0$ und $a^*a = f(a^*a) \geqslant 0$. $\square$

3.7 Satz. Sei A eine C^*-Algebra. Dann gilt

(i) $A_+ = \{a^*a \mid a \in A\}$

(ii) $A = \operatorname{span} A_+$

(iii) A_+ ist ein abgeschlossener Kegel in A

(iv) $\leqslant$ ist eine partielle Ordnung auf A_{sa}

(v) Für $a, b \in A_{sa}$ und $c \in A$ mit $a \leqslant b$ gilt $cac^* \leqslant cbc^*$

(vi) Für $0 \leqslant a \leqslant b$ gilt $\|a\| \leqslant \|b\|$

(vii) Wenn A unital ist und $a \in A$ positiv und invertierbar, dann folgt aus $a \leqslant b$ stets, dass auch b invertierbar ist und $0 \leqslant b^{-1} \leqslant a^{-1}$ gilt

Beweis:

(i) Folgt aus Satz 3.6 und Proposition 3.3.

(ii) Wenn $a \in A$ ist, dann können wir $a = b + ic$ mit $b, c \in A_{sa}$ schreiben. Definiere $b_+ := f(b)$, $b_- := g(b)$, $c_+ := f(c)$, $c_- := g(c)$. Diese liegen alle in A_+. Dann gilt $b = b_+ - b_-$, $c = c_+ - c_-$ und $a = b_+ - b_- + i(c_+ - c_-) \in \operatorname{span} A_+$.

(iii) Die Kegeleigenschaft ist klar nach Korollar 3.5. Zur Abgeschlossenheit: Sei $a \in \overline{A_+}$. Dann gilt $a = a^*$, da A_{sa} abgeschlossen ist. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es $b \in A_+$ mit $\|b - a\| < \varepsilon$. Dann gilt

$$\|(a + \varepsilon - b) - \varepsilon\| \leqslant \varepsilon$$

und somit $a + \varepsilon - b \geqslant 0$ nach Proposition 3.4. Dann ist $a + \varepsilon = a + \varepsilon - b + b \geqslant 0$ nach Korollar 3.5 und es folgt $\sigma(a + \varepsilon) \subseteq [0, \infty)$. Damit ist $\sigma(a) \subseteq [\varepsilon, \infty)$. Lassen wir ε gegen 0 gehen, so folgt $\sigma(a) \subseteq [0, \infty)$. Insgesamt folgt $a \geqslant 0$ und damit $\overline{A_+} = A_+$.

(iv) Reflexivität: Es gilt offensichtlich $a \leqslant a$.

Antisymmetrie: Aus $a \leqslant b$ und $b \leqslant a$ folgt $\sigma(b-a) \subset \mathbb{R}_+$ sowie $\sigma(a-b) \subset \mathbb{R}_+$ und damit folgt $\sigma(a-b) = \sigma(b-a) = \{0\}$. Da $a-b$ selbstadjungiert ist, folgt aus Proposition 2.10 $a-b=0$.

Transitivität: Gilt $a \leqslant b$ und $b \leqslant c$, so ist $c - a = c - b + b - a \overset{3.5}{\geqslant} 0 \Longrightarrow c \geqslant a$.

(v) Es gilt $c^*bc - c^*ac = c^*(b-a)c = c^*(b-a)^{1/2}(b-a)^{1/2}c = d^*d \geqslant 0$ mit $d := (b-a)^{1/2}c$.

(vi) Sei $0 \leqslant a \leqslant b$. Wir haben $\|b\| \cdot \mathbb{1}_{A^\sim} \geqslant b$ nach Gelfand für $C^*(b, \mathbb{1}_{A^\sim})$. Damit ist $a \leqslant \|b\| \cdot \mathbb{1}_{A^\sim}$. Gelfand für $C^*(a, \mathbb{1}_{A^\sim})$ liefert $\|b\| \cdot \mathbb{1}_{A^\sim} \geqslant \|a\| \cdot \mathbb{1}_{A^\sim}$. Damit muss dann bereits $\|b\| \geqslant \|a\|$ sein.

vlt noch TEXen

(vii) *Übungsaufgabe 1 b) von Blatt 5!* □

3.8 Satz. Sei A eine C^*-Algebra. Für $0 \leqslant a \leqslant b \in A$ gilt $a^{1/2} \leqslant b^{1/2}$.

Beweis: Es seien eine reelle Zahl $t > 0$ und $c, d \in A^\sim_{sa}$ gegeben mit

$$\left(t \cdot \mathbb{1} + b^{1/2} + a^{1/2}\right)\left(t \cdot \mathbb{1} + b^{1/2} - a^{1/2}\right) = c + id$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{2} \cdot \left(\left(t \cdot \mathbb{1} + b^{1/2} + a^{1/2}\right)\left(t \cdot \mathbb{1} + b^{1/2} - a^{1/2}\right) + \left(t \cdot \mathbb{1} + b^{1/2} - a^{1/2}\right)\left(t \cdot \mathbb{1} + b^{1/2} + a^{1/2}\right)\right) \\ &= t^2 \cdot \mathbb{1} + 2t \cdot \underbrace{b^{1/2}}_{\geqslant 0} + \underbrace{b-a}_{\geqslant 0} \geqslant t^2 \cdot \mathbb{1} \end{aligned}$$

Da $t \neq 0$ ist, folgt $c \in \mathrm{Inv}(A^\sim) \cap A_+$ nach Satz 3.7(vii). Da $c^{-1/2}dc^{-1/2}$ positiv ist, ist das Spektrum von $\mathbb{1} + i \cdot c^{-1/2}dc^{-1/2}$ in $1 + i \cdot \mathbb{R}$ enthalten. Weiter gilt

$$\mathbb{1} + i \cdot c^{1/2}dc^{1/2} = c^{-1/2}(c + i \cdot d)c^{-1/2} \in \mathrm{Inv}(A^\sim)$$

Also ist $c + i \cdot d$ invertierbar und damit $\left(t \cdot \mathbb{1} + b^{1/2} - a^{1/2}\right)$ linksinvertierbar. Dieses Element ist aber selbstadjungiert und muss damit dann auch rechtsinvertierbar, also invertierbar sein. Damit folgt nun $-t \notin \sigma\left(b^{1/2} - a^{1/2}\right)$ und somit ist $\sigma\left(b^{1/2} - a^{1/2}\right) \subset \mathbb{R}_+$ und $b^{1/2} \geqslant a^{1/2}$. □

3.9 Beispiel. Im Allgemeinen folgt aus $0 \leqslant a \leqslant b$ *nicht* $a^2 \leqslant b^2$. Betrachte dafür die C^*-Algebra $A = M_2$ und die beiden Projektionen

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dann gilt $p \leqslant p + q$, aber $p^2 = p \nleqslant (p+q)^2 = p + q + pq + qp$, denn

$$q + pq + qp = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Matrix hat einen negativen Eigenwert, da die Determinante -1 ist.

3.10 Bemerkung. Falls für alle $a, b \in A$ mit $0 \leqslant a \leqslant b$ schon $a^2 \leqslant b^2$ gilt, so ist A bereits abelsch.

3.11 Lemma. Sei A eine C^*-Algebra. Dann ist $\Lambda := \{a \in A_+ \mid \|a\| < 1\}$ gerichtet bezüglich „$\leqslant$“.

Beweis: Für $a, b \in \Lambda$ setze $a' := a(\mathbb{1}_{A^\sim} - a)^{-1}$ und $b' := b(\mathbb{1}_{A^\sim} - b)^{-1}$. Durch Betrachtung der von-Neumann-Reihe sieht man sofort, dass a' und b' positiv sind. Dann gilt

$$c := (a' + b')(\mathbb{1}_{A^\sim} + a' + b')^{-1} \in \Lambda$$

nach Gelfand. Es ist nun

$$\begin{aligned} a = a(\mathbb{1} - a)^{-1}\big((\mathbb{1} - a)^{-1}\big)^{-1} &\overset{1.3}{=} a(\mathbb{1} - a)^{-1}\big(\mathbb{1} + a(\mathbb{1} - a)^{-1}\big)^{-1} = a'(\mathbb{1} + a')^{-1} \\ &= \big((\mathbb{1} + a') - \mathbb{1}\big)(\mathbb{1} + a')^{-1} = \mathbb{1} - (\mathbb{1} + a')^{-1} \end{aligned}$$

Da $0 \leqslant \mathbb{1} + a' \leqslant \mathbb{1} + a' + b'$ jeweils invertierbar sind, ist $(\mathbb{1} + a' + b')^{-1} \leqslant (\mathbb{1} + a')^{-1}$ nach Satz 3.7

$$\begin{aligned} &\leqslant \mathbb{1} - (\mathbb{1} + a' + b')^{-1} \overset{1.3}{=} \mathbb{1} - \big(\mathbb{1} + (a' + b')(\mathbb{1} + a' + b')^{-1}\big) \\ &= (a' + b')(\mathbb{1} + a' + b')^{-1} \end{aligned}$$

Damit ist $a \leqslant c$. Die Relation $b \leqslant c$ folgt ebenso. □

3.12 Definition. Eine ***approximative Eins*** in einer C^*-Algebra A ist (aufsteigendes) Netz $(e_\lambda)_\Lambda \subset A_+^1$ mit $a = \lim_\lambda a e_\lambda$ beziehungsweise $a = \lim_\lambda e_\lambda a$ für jedes $a \in A$.

3.13 Satz. Jede C^*-Algebra A besitzt eine approximative Eins.

Beweis: Sei $\Lambda := \{a \in A_+ \mid \|a\| < 1\}$ wie in Lemma 3.11 und setze $e_\lambda := \lambda$ für $\lambda \in \Lambda$. Dann ist $(e_\lambda)_\Lambda \subset A_+^1$ ein aufsteigendes Netz (aufsteigend bezüglich „$\leqslant$", gerichtet nach Lemma 3.11). Sei nun $a \in \Lambda$ und $1 \geqslant \varepsilon > 0$. Sei $\Omega := \sigma(a)\backslash\{0\} \subset (0, 1]$ und $\Phi\colon C^*(a) \to C_0(\Omega)$ der Gelfandisomorphismus. Betrachte $f := \Phi(a) = \mathrm{id}_\Omega$ und die kompakte Menge $K := \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \geqslant \varepsilon\} \subset \Omega$. Nach Urysohn existiert ein $g\colon \Omega \to [0, 1]$ stetig mit kompaktem Träger und $g(\omega) = 1$ für $\omega \in K$. Wähle $\delta > 0$ mit $\delta < 1$ und $1 - \delta < \varepsilon$. Dann gilt

$$\|f - \delta \cdot gf\|_\infty = \|(\mathbb{1} - \delta \cdot g)f\|_\infty \leqslant \varepsilon$$

ich meine man sollte δ so wählen, dass hier ${}^{\varepsilon}/_{\|a\|}$ steht, sonst kommt das später nicht wirklich hin

Mit $\bar{\lambda} := \Phi^{-1}(\delta \cdot g) \in \Lambda$ ergibt sich $\big\|a - \bar{\lambda}a\big\|_A \leqslant \varepsilon$. Falls nun $\lambda \in \Lambda$ ist mit $\lambda \geqslant \bar{\lambda}$, so gilt $0 \leqslant a(\mathbb{1} - e_\lambda)a \leqslant a(\mathbb{1} - e_{\bar{\lambda}})a$ nach Satz 3.7(v), da $0 \leqslant \mathbb{1} - e_\lambda \leqslant \mathbb{1} - e_{\bar{\lambda}}$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \|a - e_\lambda a\|^2 = \Big\|(\mathbb{1} - e_\lambda)^{1/2}(\mathbb{1} - e_\lambda)^{1/2}a\Big\|^2 \leqslant \Big\|(\mathbb{1} - e_\lambda)^{1/2}a\Big\|^2 &= \Big\|a^*(\mathbb{1} - e_\lambda)^{1/2}(\mathbb{1} - e_\lambda)^{1/2}a\Big\| \\ &\leqslant \|a^*(\mathbb{1} - e_{\bar{\lambda}})a\| \leqslant \varepsilon \end{aligned}$$

Damit folgt $a = \lim_\lambda e_\lambda a$ für $a \in \Lambda$. Da $A = \operatorname{span} \Lambda$ gilt, sind wir fertig. □

3.14 Proposition. Sei A eine separable C^*-Algebra – das heißt A besitzt eine abzählbare dichte Teilmenge – dann besitzt A eine abzählbare idempotente approximative Eins $(e_n)_\mathbb{N}$, das heißt es gilt $e_n e_{n+1} = e_n$.

Beweis: *Übung! (Blatt 5 Aufgaben 3 und 4)* □

4 Ideale, Quotienten und Limiten

4.1 Proposition. Sei L ein abgeschlossenes Linksideal in der C^*-Algebra A. Dann existiert ein aufsteigendes Netz $(e_\lambda)_\Lambda \subset L \cap A^1_+$ mit $a = \lim_\lambda ae_\lambda$ für $a \in L$ und $L \cap L^* \subset A$ ist eine C^*-Unteralgebra.

Beweis: Sei $B := L \cap L^*$, dann ist $B \subset A$ eine C^*-Unteralgebra:

- $L^* \subset A$ abgeschlossen, da * isometrisch ist. Damit ist auch $L \cap L^*$ abgeschlossen in A
- $L \cap L^* \subset$ ist ein Untervektorraum.
- $L^* \subset A$ ist ein Rechtsideal: $l^*a = (a^*l)^* \in L^*$. Damit ist $L \cap L^*$ bereits eine Unteralgebra:
$$a, b \in L \cap L^* \Rightarrow \underbrace{a}_{\in L^*}\underbrace{b}_{\in L} \in L \cap L^*$$
- $L \cap L^* = (L \cap L^*)^*$ ist klar.

Mit Satz Satz 3.13 folgt, dass B eine approximative Eins $(e_\lambda)_\Lambda$ besitzt. Für $a \in L$ ist $a^*a \in B$ und damit
$$\lim_\lambda \|a - ae_\lambda\| = \lim_\lambda \big\|(\mathbb{1} - e_\lambda)a^*a(\mathbb{1} - e_\lambda)\big\|^{1/2} = 0$$ □

4.2 Satz. Sei A eine C^*-Algebra und $J \lhd A$ ein (abgeschlossenes, zweiseitiges) Ideal. Dann ist $J \subset A$ eine C^*-Unteralgebra. Falls $(e_\lambda)_\Lambda \subset J$ eine approximative Eins ist, so gilt für $a \in A$
$$\|a + J\|_{A/J} = \lim_\lambda \|a - ae_\lambda\| = \lim_\lambda \|a - e_\lambda a\|$$
wobei $\|a + J\|_{A/J} = \inf_{b \in J} \|a + b\|$ die Quotientennorm bezeichnet.

Beweis: Nach Proposition 4.1 existiert $(u_\gamma)_\Gamma \subset J \cap A^1_+$ mit $a = \lim_\gamma au_\gamma$ für $a \in J$. Dann gilt
$$a^* = \lim_\gamma (au_\gamma)^* = \lim_\gamma u_\gamma a^* \in J$$
für $a \in J$, also ist $J = J^*$. Mit Proposition 4.1 folgt dann wiederum, dass $J = J \cap J^*$ eine C^*-Unteralgebra von A ist. Sei nun $(e_\lambda)_\Lambda \subset J$ eine beliebige approximative Eins für J. Gegeben $a \in A$ und $\varepsilon > 0$, so wähle $b \in J$ mit $\|a + b\| \leqslant \|a + J\|_{A/J} + \frac{\varepsilon}{2}$. Wähle dann $\lambda_0 \in \Lambda$ mit $\|b - \varepsilon_\lambda b\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $\lambda \geqslant \lambda_0$. Für $\lambda \geqslant \lambda_0$ gilt dann
$$\begin{aligned}\|a + J\|_{A/J} \leqslant \|a - e_\lambda a\| &\leqslant \big\|(\mathbb{1} - e_\lambda)(a + b)\big\| + \big\|(\mathbb{1} - e_\lambda)b\big\| \leqslant \|a + b\| + \|(\mathbb{1} - e_\lambda)b\| \\ &\leqslant \|a + J\|_{A/J} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$
Damit folgt $\|a - e_\lambda a\| \xrightarrow{\lambda} \|a + J\|_{A/J}$. $\|a - ae_\lambda\| \xrightarrow{\lambda} \|a + J\|_{A/J}$ folgt ebenso. □

4.3 Bemerkung. Für Ideale $J \lhd A$ und $I \lhd J$ gilt $I \lhd A$.

Beweis: Es sei $a \in A$ und $b \in I_+$. Dann gilt $ab = \underbrace{ab^{1/2}}_{\in J} b^{1/2} \in I$. □

4.4 Satz. Sei A eine C^*-Algebra und $J \lhd A$ ein Ideal. Dann ist A/J eine C^*-Algebra (mit induzierten Operationen und der Quotientennorm).

Beweis: Fixiere eine approximative Eins $(e_\lambda)_\Lambda$ für J. Sei $a \in A$ und $b \in J$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\|a+J\|^2_{A/J} &\overset{4.2}{=} \lim_\lambda \|a - ae_\lambda\|^2 = \lim_\lambda \|(\mathbb{1}-e_\lambda)a^*a(\mathbb{1}-e_\lambda)\| \\ &\leqslant \sup_\lambda \big\|(\mathbb{1}-e_\lambda)(a^*a+b)(\mathbb{1}-e_\lambda)\big\| + \underbrace{\lim_\lambda \big\|(\mathbb{1}-e_\lambda)b(\mathbb{1}-e_\lambda)\big\|}_{=0} \\ &\leqslant \|a^*a+b\|\end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\|a+J\|^2_{A/J} \leqslant \inf_{b\in J} \|a^*a+b\| = \|a^*a+J\|_{A/J} \leqslant \|a^*+J\|_{A/J} \cdot \|a+J\|_{A/J} = \|a+J\|^2_{A/J}$$

Damit ist $\|(a^*+J)(a+J)\|_{A/J} = \|a+J\|^2_{A/J}$ und somit ist die C^*-Gleichung erfüllt. Dass A/J ein Banachraum ist, haben wir bereits in Funktionalanalysis, Proposition 2.16 gesehen. □

4.5 Proposition. Es seien A, B C^*-Algebren, $\pi\colon A \to B$ ein injektiver *-Homomorphismus. Dann ist π bereits isometrisch.

Beweis: Zu zeigen: $\|\pi(a^*a)\| = \|\pi(a)\|^2 = \|a\|^2 = \|a^*a\|$ für $a \in A$. Wir dürfen also annehmen, dass $A = C^*(a^*a)$ und $B = \overline{\pi(A)}$ abelsch sind. Weiter können wir π durch $\tilde{\pi}\colon \tilde{A} \to \tilde{B}$ ersetzen, falls A nicht unital ist. Wir dürfen also auch A und B als unital annehmen. π induziert eine stetige Abbildung $\pi^*\colon \Omega(B) \to \Omega(A)$ durch $\chi \mapsto \chi \circ \pi$, also ist $\pi^*(\Omega(B)) \subset \Omega(A)$ kompakt nach Satz 1.15 und insbesondere auch abgeschlossen. Falls π^* nicht surjektiv wäre, so gäbe es ein $0 \neq f \in C(\Omega(A))_+ \cong A_+$ mit $f|_{\pi^*(\Omega(B))} = 0$. Dann gilt

a^*a normal $\Rightarrow$ $C^*(a^*a)$ abelsch

Gelfand-Isomorphismus in der Notation unterdrückt

$$0 = f\big(\pi^*(\chi)\big) = \chi \circ \pi(f)$$

für alle Charaktere $\chi \in \Omega(B)$. Also ist $\pi(f) = 0$, woraus mit der Injektivität wieder $f = 0$ folgt. Dies ist ein Widerspruch und somit ist π^* surjektiv. Für $a \in A$ gilt dann

$$\|a\|_A \overset{\text{Gelfand-}}{\underset{\text{Isom.}}{=}} \sup_{\rho\in\Omega(A)} |\rho(a)| = \sup_{\chi\in\Omega(B)} \big|\chi\circ\pi(a)\big| = \|\pi(a)\|_B$$ □

4.6 Satz. Seien A, B C^*-Algebren, $\pi\colon A \to B$ ein *-Homomorphismus. Dann ist $\pi(A) \subset B$ eine C^*-Unteralgebra.

Beweis: Betrachte die C^*-Algebra $A/\ker\pi$ (siehe 4.4) und den wohldefinierten *-Homomorphismus

$$\begin{aligned}\dot{\pi}\colon A/\ker\pi_n &\longrightarrow B \\ a + \ker\pi &\longmapsto \pi(a)\end{aligned}$$

$\dot{\pi}$ ist injektiv, also isometrisch nach Proposition 4.5. Damit ist $\pi(A)$ vollständig und $\pi(A) \subset B$ abgeschlossen. Also ist $\pi(A)$ eine C^*-Unteralgebra von B. □

4.7 Proposition. Sei A eine C^*-Algebra, $B \subset A$ eine C^*-Unteralgebra und $J \lhd A$ ein Ideal. Dann ist $B + J \subset A$ eine C^*-Unteralgebra.

Beweis: *Übung! (Blatt 7, Aufgabe 1)* □

4.8 Definition. Eine C^*-Unteralgebra $B \subset A$ heißt ***hereditär***, $B \subset_{\text{her}} A$, falls gilt

$$a \in A_+, b \in B_+, \quad a \leqslant b \Longrightarrow a \in B$$

4.9 Satz. Für eine C^*-Algebra A definiert

$$\begin{aligned} \left\{L \subset A \,\middle|\, L \text{ ist abg.Linksideal}\right\} &\longrightarrow \left\{B \subset_{\text{her}} A\right\} \\ L &\longmapsto L \cap L^* \\ \{a \in A \mid a^*a \in B\} &\longleftarrow B \end{aligned}$$

eine natürliche Bijektion.

Beweis: Sei $B \subset_{\text{her}} A$. Dann ist $L_B := \{a \in A \mid a^*a \in B\} \subset A$ ein abgeschlossenes Linksideal: Wenn $a, b \in L_B$, dann gilt

$$(a^* + b^*)(a+b) \leqslant (a^* + b^*)(a+b) + (a-b)^*(a-b) = 2a^*a + 2b^*b \in B$$

also $(a^* + b^*)(a+b) \in B$, da B hereditär ist, und somit $a + b \in L_B$. Für $a \in A$ und $b \in L_B$ gilt

$$(ab)^*ab = b^*a^*ab \leqslant b^*(\|a^*a\| \cdot \mathbb{1}_{A^\sim})b = \|a^*a\| b^*b \in B$$

Da B hereditär ist, folgt $(ab)^*ab \in B$ und somit $ab \in L_B$. Also ist L_B wirklich ein Linksideal und $L_B \subset A$ ist abgeschlossen, da L_B das Urbild von B unter $a \mapsto a^*a$ ist.

Mit Proposition 4.1 folgt, dass $L_B \cap L_B^* \subset A$ eine C^*-Algebra ist. Es gilt

$$0 \leqslant b \in L_B \cap L_B^* \Longrightarrow 0 \leqslant b^{1/2} \in L_B \cap L_B^*$$

Also ist $b \in B$ und somit $L_B \cap L_B^* \subset B$. Weiter ist klar, dass $B \subset L_B \cap L_B^*$ ist, also insgesamt $B = L_B \cap L_B^*$ gilt. Die Verknüpfung $B \mapsto L_B \mapsto L_B \cap L_B^*$ entspricht also der Identität.

Für die zweite Verknüpfung verifizieren wir zunächst, dass $L \cap L^*$ eine hereditäre C^*-Unteralgebra ist: Nach Proposition 4.1 müssen wir dafür nur noch zeigen, dass $L \cap L^*$ hereditär ist. Sei dazu $a \in A_+$ und $0 \leqslant a \leqslant b$ für ein $b \in L \cap L^*$. Sei $(e_\lambda)_\Lambda$ ein Netz wie in Proposition 4.1. Es gilt $0 \leqslant (\mathbb{1} - e_\lambda)a(\mathbb{1} - e_\lambda) \leqslant (\mathbb{1} - e_\lambda)b(\mathbb{1} - e_\lambda)$ für alle $\lambda \in \Lambda$. Damit erhalten wir

$$\left\|a^{1/2}(\mathbb{1} - e_\lambda)\right\|^2 = \left\|(\mathbb{1} - e_\lambda)a(\mathbb{1} - e_\lambda)\right\| \leqslant \left\|(\mathbb{1} - e_\lambda)b(\mathbb{1} - e_\lambda)\right\| \leqslant \left\|b(\mathbb{1} - e_\lambda)\right\|$$

Damit ist $a^{1/2} = \lim_\lambda a^{1/2}e_\lambda$ und damit $a^{1/2} \in L$, da L ein Linksideal ist. Dann ist aber auch $a \in L$. Es bleibt nun $L = L_{L \cap L^*}$ zu zeigen. $L \subseteq L_{L \cap L^*}$ folgt sofort, da L ein Linksideal und L^* ein Rechtsideal ist. Sei nun $a \in L_{L \cap L^*}$ positiv, also $a \in A$ mit $a^*a \in L \cap L^*$. Dann gilt $a^2 = a^*a \in L \cap L^*$ und somit $a \in L \cap L^* \subset L$, da $L \cap L^*$ eine C^*-Algebra ist. Wir haben nun $(L_{L \cap L^*})_+ \subseteq L_+$ und es folgt $L_{L \cap L^*} \subseteq L$. Also entspricht auch $L \mapsto L \cap L \mapsto L_{L \cap L^*}$ der Identität. □

4.10 Satz. Sei $B \subset A$ eine C^*-Unteralgebra. Dann gilt:

$$B \subset_{\text{her}} A \iff bac \in B \text{ für alle } b, c \in B, a \in A$$

Beweis: Für die erste Implikation sei $B = L \cap L^*$ für ein abgeschlossenes Linksideal L nach Satz 4.9. Für $b, c \in B$ und $a \in A$ gilt $bac \in L$ und

$$(bac)^* = c^*a^*b^* \in L$$

Also ist $bac \in L \cap L^* = B$ wie gewünscht. Für die zweite Implikation seien $a \in A_+$, $b \in B_+$ mit $0 \leqslant a \leqslant b$. Sei weiter $(e_\lambda)_\Lambda \subset B$ eine approximative Eins für B. Dann gilt $e_\lambda a e_\lambda \in B$ für $\lambda \in \Lambda$ nach Vorraussetzung. Wir haben nun wie im vorigen Beweis

$$0 \leqslant (\mathbb{1} - e_\lambda)a(\mathbb{1} - e_\lambda) \leqslant (\mathbb{1} - e_\lambda)b(\mathbb{1} - e_\lambda) \xrightarrow{\lambda} 0$$

Wie eben gilt auch $a^{1/2}(\mathbb{1} - e_\lambda) \xrightarrow{\lambda} 0$ und es folgt $B \ni e_\lambda a e_\lambda \to a \in B$. Also ist B hereditär. □

4.11 Korollar. Sei $J \lhd A$ ein Ideal, dann gilt $J \subset_{\text{her}} A$. $\square$

4.12 Korollar. Sei A eine C^*-Algebra, $a \in A_+$ ein positives Element. Dann gilt $\overline{aAa} \subset_{\text{her}} A$. Falls A separabel ist und $B \subset_{\text{her}} A$, so gilt $B = \overline{hAh}$ für ein $h \in A_+$.

Beweis: *Übung! (Blatt5, Aufgaben 3 und 4 zusammen mit Blatt 7, Aufgabe 3)* $\square$ Revision 4

4.13 Satz. Sei $(A_n, \varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein ***induktives System von C^*-Algebren***, das heißt die A_n sind C^*-Algebren und die $\varphi_n \colon A_n \to A_{n+1}$ sind *-Homomorphismen. Dann existiert eine (bis auf Isomorphie) eindeutig bestimmte C^*-Algebra $\varinjlim(A_n, \varphi_n)$ mit folgender universeller Eigenschaft:

- Es existieren *-Homomorphismen $\varphi_{n,\infty} \colon A_n \to \varinjlim(A_n, \varphi_n)$ mit $\varphi_{n,\infty} = \varphi_{n+1,\infty} \circ \varphi_n$.
- Falls $\psi_n \colon A_n \to B$ für $n \in \mathbb{N}$ *-Homomorphismen sind mit $\psi_n = \psi_{n+1} \circ \varphi_n$, so existiert ein eindeutig bestimmter *-Homomorphismus $\psi \colon \varinjlim(A_n, \varphi_n) \to B$ mit $\psi_n = \psi \circ \varphi_{n,\infty}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Kürzer:

$$\begin{tikzcd}
 & & & & \varinjlim(A_n,\varphi_n) \arrow[dd, dashed, bend left, "\exists!\psi"] \\
A_0 \arrow[r] & \dots \arrow[r] & A_n \arrow[r] \arrow[urr, "\varphi_{n,\infty}"] \arrow[drr, "\psi_n"'] & A_{n+1} \arrow[r] \arrow[ur, "\varphi_{n+1,\infty}"] \arrow[dr, "\psi_{n+1}"'] & \dots \\
 & & & & B
\end{tikzcd} \qquad [*]$$

Beweis: Die Menge

$$\prod_{\mathbb{N}} A_n := \left\{(a_n)_{\mathbb{N}} \;\middle|\; a_n \in A_n, \sup_n \|a_n\| < \infty\right\}$$

ist eine C^*-Algebra mit komponentenweisen Operationen und Supremumsnorm: Sie ist Banachalgebra nach Blatt 1, Aufgabe 1 c) und $\|\cdot\|_\infty$ ist offensichtlich eine C^*-Norm. Es ist nun

$$\bigoplus_{\mathbb{N}} A_n := \{(a_n)_{\mathbb{N}} \mid a_n \in A_n, \lim_{n\to\infty} \|a_n\| = 0\} \lhd \prod_{\mathbb{N}} A_n$$ *warum?*

Sei $q \colon \prod_{\mathbb{N}} A_n \to {}^{\prod_{\mathbb{N}} A_n}/_{\bigoplus_{\mathbb{N}} A_n}$ die Quotientenabbildung. Sei

$$C := \{(a_n)_{\mathbb{N}} \mid (a_n)_{\mathbb{N}} \in \prod_{\mathbb{N}} A_n, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ mit } a_{n+1} = \varphi_n(a_n), n \geqslant n_0\}$$

$C \subset \prod_{\mathbb{N}} A_n$ ist eine *-Unteralgebra und $\overline{C} \subset \prod_{\mathbb{N}} A_n$ ist C^*-Unteralgebra. Wir definieren

$$\varinjlim(A_n, \varphi_n) := q(\overline{C}) \subset {}^{\prod_{\mathbb{N}} A_n}\!\big/_{\bigoplus_{\mathbb{N}} A_n}$$

Wir definieren *-Homomorphismen $\varphi_n' \colon A_n \to C$ durch $\varphi_n'(a) := \big(0, \dots, 0, a, \varphi_n(a), \varphi_{n+1}(\varphi(a))\big)$ und $\varphi_{n,\infty} := q \circ \varphi_n' \colon A_n \to \varinjlim(A_n, \varphi_n)$. Gegeben B und $\psi_n \colon A_n \to B$, so ist ψ auf $q(C)$ eindeutig bestimmt durch $[*]$, das heißt $\psi_n = \psi \circ \varphi_{n,\infty} \colon A_n \to B$. Aber $q(C) \subset q(\overline{C}) = \varinjlim(A_n, \varphi_n)$ und ψ ist normvermindernd, setzt sich also eindeutig auf $q(\overline{C})$ fest. Eindeutigkeit von $\varinjlim(A_n, \varphi_n)$ ist klar. $\square$

4.14 Beispiel. Beispiele für den gerichteten Limes

(i) Betrachte

$$M_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow M_n \xrightarrow{\varphi_n} M_{n+1} \longrightarrow \dots \longrightarrow \varinjlim(M_n, \varphi_n) \cong \mathcal{K}\big(\ell^2(\mathbb{N})\big)$$

wobei die φ_n eine Matrix rechts unten mit Nullen auffüllt. Es gilt

$$\overline{\bigcup_{\mathbb{N}} \mathcal{B}\big(\mathrm{span}\{\eta_0, \dots, \eta_n\}\big)} \subset \mathcal{B}\big(\ell^2(\mathbb{N})\big)$$

(ii) Betrachte

$$M_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow M_{2^n} \xrightarrow{\varphi_n} M_{2^{n+1}} \longrightarrow \dots \longrightarrow \varinjlim(M_{2^n}, \varphi_n) =: M_{2^\infty}$$

wobei die verbindenden Abbildungen die Matrizen zweimal auf der Diagonalen platzieren. Erzeuger/Vernichter Fermionen, CAR-Algebra.

5 Zustände, die GNS-Konstruktion

5.1 Definition. Sei A eine C^*-Algebra. Eine Abbildung $\varphi\colon A \to \mathbb{C}$ heißt ***positives Funktional***, falls φ linear ist und $\varphi(A_+) \subset \mathbb{R}_+$ gilt. φ heißt ***Zustand***, falls außerdem $\|\varphi\| = 1$ gilt. Wir schreiben $S(A) := \{\text{Zustände auf } A\}$.

Revision 5

5.2 Proposition. Sei $\varphi\colon A \to \mathbb{C}$ ein positives Funktional. Dann ist

$$\begin{aligned} A \times A &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (a,b) &\longmapsto \varphi(a^*b) \end{aligned}$$

eine positive Sesquilinearform. Insbesondere gilt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|\varphi(a^*b)| \leqslant \varphi(a^*a)^{1/2}\varphi(b^*b)^{1/2}$$

Beweis: Klar. □

5.3 Satz. Sei φ ein positives Funktional auf A. Dann gilt

(i) φ ist beschränkt,

(ii) $\varphi(a^*) = \overline{\varphi(a)}$ für $a \in A$ und

(iii) $|\varphi(a)|^2 \leqslant \|\varphi\|\varphi(a^*a)$ für $a \in A$

Beweis:

(i) Falls φ unbeschränkt ist, so existiert $(a_n)_{\mathbb{N}} \subset A^1_+$ mit $\varphi(a_n) > 2^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Setze $h := \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \cdot a_n \subset A_+$. Dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\varphi(h) \geqslant \varphi\left(\sum_{n=0}^{k} \frac{1}{2^n} \cdot a_n\right) > k+1,$$

was ein Widerspruch ist.

(ii) Es sei $a = b - c + i \cdot d - e \cdot e$ mit $b, c, d, e \in A_+$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \varphi(a^*) = \varphi(b - c - i \cdot d + i \cdot e) &= \varphi(b) - \varphi(c) - i \cdot \varphi(d) + i \cdot \varphi(e) \\ &= \overline{\varphi(b) - \varphi(c) + i \cdot \varphi(d) - i \cdot \varphi(e)} = \overline{\varphi(a)} \end{aligned}$$

(iii) Sei $(e_\lambda)_\Lambda$ eine approximative Eins. Dann gilt

$$|\varphi(a)|^2 = \lim_\lambda |\varphi(e_\lambda \cdot a)|^2 \overset{\text{C.S.}}{\leqslant} \lim_\lambda \varphi(e_\lambda^2)\varphi(a^*a) \leqslant \|\varphi\|\varphi(a^*a)$$ □

5.4 Satz. Sei A eine C^*-Algebra und $\varphi \in A^*$ ein (beschränktes) Funktional. Dann sind äquivalent:

(i) φ ist positiv.

(ii) $\|\varphi\| = \lim_\lambda \varphi(e_\lambda)$ für jede approximative Eins $(e_\lambda)_\Lambda$ in A.

(iii) $\|\varphi\| = \lim_\lambda \varphi(e_\lambda)$ für *eine* approximative Eins $(e_\lambda)_\Lambda$ in A.

Falls A unital ist, so ist φ genau dann positiv, wenn $\varphi(1) = \|\varphi\|$ ist.

Beweis: Für die Implikation (i)⇒(ii) sei φ positiv und $(e_\lambda)_\Lambda$ eine approximative Eins. Dann ist $(\varphi(e_\lambda))_\Lambda \subset [0, \|\varphi\|]$ ein aufsteigendes Netz, also existiert der Limes und es gilt $\lim_\lambda \varphi(e_\lambda) \leqslant \|\varphi\|$. Sei $a \in A^1$. Dann gilt

$$|\varphi(a)|^2 \xleftarrow{\lambda} |\varphi(e_\lambda a)|^2 \leqslant \varphi(e_\lambda^2)\varphi(a^*a) \leqslant \varphi(e_\lambda)\varphi(a^*a) \leqslant \lim_\lambda \varphi(e_\lambda) \cdot \|\varphi\|$$

Damit folgt $\|\varphi\|^2 \leqslant \lim_\lambda \varphi(e_\lambda) \cdot \|\varphi\| \leqslant \|\varphi\|^2$, also $\|\varphi\| = \lim_\lambda \varphi(e_\lambda)$.

Die Implikation (ii)⇒(iii) ist trivial. Für (iii)⇒(i) sei $(e_\lambda)_\Lambda$ die approximative Eins mit $\|\varphi\| = \lim_\lambda \varphi(e_\lambda)$. Behauptung: $\varphi(A_{sa}) \subset \mathbb{R}$. Sei $a \in A^1_{sa}$ mit $\varphi(a) = \alpha + i \cdot \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Wir dürfen $\beta \leqslant 0$ annehmen. Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\|(a - i \cdot n \cdot e_\lambda)\|^2 \overset{C^*}{=} \ldots \leqslant 1 + n^2 + n \cdot \|e_\lambda a - a e_\lambda\|$$

Also ist

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 - 2n\|\varphi\|\beta + n^2\|\varphi\|^2 = \ldots = |\varphi(a) - i \cdot n \cdot \|\varphi\|| &\xleftarrow{\lambda} |\varphi(a - i \cdot n \cdot e_\lambda)|^2 \\ &\leqslant \|\varphi\|^2\big(1 + n^2 + n \cdot e_\lambda a - a e_\lambda\big) \\ &\xrightarrow{\lambda} \leqslant \|\varphi\|^2(1 + n^2) \end{aligned}$$

Damit folgt $\|\varphi\| \neq 0$ oder $\beta = 0$. Insgesamt also $\beta = 0$ und damit $\varphi(A_{sa}) \subset \mathbb{R}$. Sei $a \in A^1_+$. Dann gilt $e_\lambda - a \in A_{sa}$ und $\|e_\lambda - a\| \leqslant 1$ (denn $-\mathbb{1}_{A^\sim} \leqslant e_\lambda - a \leqslant \mathbb{1}_{A^\sim}$). Also ist $\varphi(e_\lambda - a) \leqslant |\varphi(e_\lambda - a)| \leqslant \|\varphi\| \cdot \|e_\lambda - a\| \leqslant \|\varphi\|$. Dan gilt aber

$$\|\varphi\| - \varphi(a) = \lim_\lambda \varphi(e_\lambda) - \varphi(a) = \lim_\lambda \varphi(e_\lambda - a) \leqslant \|\varphi\|$$

Also ist $\varphi(a) \geqslant 0$ und wir sind fertig. □

5.5 Satz. Sei A eine C^*-Algebra und $0 \neq a \in A$ normal. Dann existiert ein Zustand φ auf A mit $\|a\| = |\varphi(a)|$.

Beweis: Die C^*-Algebra $B := C^*(a, \mathbb{1}) \subset A^\sim$ ist abelsch, da a normal ist. Insbesondere existiert ein Charakter φ_2 auf B mit $|\varphi_2(a)| = \|a\|$. Nach Hahn-Banach können wir φ_2 stetig und linear zu φ_1 auf $A^\sim$ fortsetzen mit $\|\varphi_1\| = \|\varphi_2\|$. Weiter gilt $\varphi(\mathbb{1}) = \varphi_2(\mathbb{1}) = 1$ und damit ist φ_1 ein stetiges lineares Funktional auf $A^\sim$ mit

$$\|\varphi_1\| = \|\varphi_2\| \overset{5.4}{=} \varphi_2(\mathbb{1}) = \varphi_1(\mathbb{1})$$

Mit Satz 5.4 folgt dann auch, dass φ_1 positiv ist. $\varphi := \varphi_1|_A$ ist also positiv mit $\|a\| = |\varphi(a)|$ wie gewünscht. Weiter ist $\|\varphi\| \leqslant \|\varphi_1\| \leqslant 1$ und außerdem $\|a\| = |\varphi(a)| \leqslant \|\varphi\| \cdot \|a\| \Rightarrow \|\varphi\| \geqslant 1$. Also ist φ auch ein Zustand. □

5.6 Proposition. Sei φ ein positives stetiges Funktional auf A.

(i) Für alle $a \in A$ gilt $\varphi(a^*a) = 0 \iff \varphi(ba) = 0$ für alle $b \in A$.

(ii) Für alle $a, b \in A$ gilt: $\varphi(b^*a^*ab) \leqslant \|a^*a\|\varphi(b^*b)$.

Beweis:

(i) Die nicht triviale Implikation folgt mit Cauchy-Schwarz.

(ii) Benutze $b^*a^*ab \leqslant b^*(\|a^*a\| \cdot \mathbb{1}_{A^\sim})b = \|a^*a\| \cdot b^*b$. □

5.7 Satz. Sei $B \subset A$ eine C^*-Unteralgebra und φ ein positives Funktional auf B. Dann besitzt φ eine positive Fortsetzung $\overline{\varphi}$ auf A mit $\|\overline{\varphi}\| = \|\varphi\|$.

Beweis: Definiere $\varphi^+ \colon B^+ \to \mathbb{C}$ durch $\varphi^+((b,\mu)) := \varphi(b) + \mu \cdot \|\varphi\|$. Für $(b,\mu) \in B^+$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\left|\varphi^+((b,\mu))\right| = |\varphi(b) + \mu\cdot\|\varphi\|| = \left|\lim_\lambda \varphi(be_\lambda) + \mu \cdot \lim_\lambda \varphi(e_\lambda)\right| &= \left|\lim_\lambda \varphi((b + \mu\cdot \mathbb{1}_{B^+})e_\lambda)\right| \\ &\leqslant \|\varphi\| \cdot \|b + \mu \cdot \mathbb{1}_{B^+}\|_{B^+} \\ &= \|\varphi\| \cdot \|(b,\mu)\|\end{aligned}$$

wobei $(e_\lambda)_\Lambda$ eine approximative Eins für B ist. Damit ist $\|\varphi^+\| \leqslant \|\varphi\| \leqslant \|\varphi^+\|$ und es folgt $\|\varphi^+\| = \|\varphi\| = \varphi^+(\mathbb{1}_{B^+})$. Mit Satz 5.4 folgt, dass φ^+ positiv ist.

Die Einbettung $\iota \colon B \hookrightarrow A \hookrightarrow A^\sim$ setzt sich zu einem unitalen *-Homomorphismus $\iota^+ \colon B^+ \to A^\sim$ fort mittels

$$\left(\iota^+(b,\mu)\right) := \iota(b) + \mu \cdot \mathbb{1}_{A^\sim}$$

Definiere nun $\hat{\varphi} \colon \iota^+(B^+) \to \mathbb{C}$ durch $\hat{\varphi}(\iota^+(b,\mu)) := \varphi^+(b,\mu)$. Dies ist wohldefiniert, denn nur der Fall $B \ni \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_A \in A$ ist zu überprüfen. Dann ist $\hat{\varphi}$ positiv, denn φ^+ ist positiv und $(\iota^+(B^+))_+ = \iota^+(B^+_+)$ (Übung). Nach Hahn-Banach existiert eine stetige lineare Fortsetzung $\hat{\hat{\varphi}} \colon A^\sim \to \mathbb{C}$ von $\hat{\varphi}$ mit $\|\hat{\hat{\varphi}}\| = \|\hat{\varphi}\| = \hat{\varphi}(\mathbb{1}_{A^\sim}) = \hat{\hat{\varphi}}(\mathbb{1}_{A^\sim})$ und es folgt wieder mit Satz 5.4, dass $\hat{\hat{\varphi}}$ positiv ist. Dann ist wieder $\overline{\varphi} := \hat{\hat{\varphi}}|_A$ die gesuchte positive Fortsetzung. □

5.8 Satz. Sei $B \subset_{\text{her}} A$ eine hereditäre C^*-Unteralgebra und φ ein positives Funktional auf B. Dann besitzt φ eine eindeutige positive lineare Fortsetzung $\overline{\varphi}$ auf A mit $\|\overline{\varphi}\| = \|\varphi\|$. Falls $(e_\lambda)_\Lambda \subset B$ eine approximative Eins für B ist, so gilt $\overline{\varphi}(a) = \lim_\lambda \varphi(e_\lambda a e_\lambda)$ für $a \in A$.

Beweis: Eine Fortsetzung $\overline{\varphi}$ existiert nach Satz 5.7. Sei nun $\psi \colon A \to \mathbb{C}$ irgendeine positive lineare Fortsetzung von φ mit $\|\psi\| = \|\varphi\|$. Sei $\psi^\sim \colon A^\sim \to \mathbb{C}$ eine (die) positive lineare Fortsetzung von ψ mit $\|\psi\| = \|\psi^\sim\|$ nach Satz 5.7. Wir haben $\lim_\lambda \varphi(e_\lambda) = \|\varphi\| = \|\psi^\sim\| = \psi^\sim(\mathbb{1}_{A^\sim})$, also ist

$$\lim_\lambda \psi^\sim(\mathbb{1}_{A^\sim} - e_\lambda) = 0$$

Für $a \in A$ ergibt sich

$$\begin{aligned}|\psi(a) - \varphi(e_\lambda a e_\lambda)| &\leqslant |\psi^\sim(a) - \psi^\sim(e_\lambda a)| + |\psi^\sim(e_\lambda a - e_\lambda a e_\lambda)| \\ &\overset{\text{CS}}{\leqslant} \psi^\sim\left((\mathbb{1} - e_\lambda)^2\right)^{1/2} \cdot \psi^\sim(a^* a)^{1/2} + \psi^\sim(a^* e_\lambda^2 a)^{1/2} \cdot \psi^\sim\left((\mathbb{1} - e_\lambda)^2\right)^{1/2} \\ &\leqslant \underbrace{\psi^\sim(1 - e_\lambda)^{1/2}}_{\to 0} \cdot \psi^\sim(a^* a)^{1/2} + \psi^\sim(a^* e_\lambda^2 a) \cdot \underbrace{\psi^\sim(\mathbb{1} - e_\lambda)^{1/2}}_{\to 0}\end{aligned}$$

Damit folgt $\psi(a) = \lim_\lambda \varphi(e_\lambda a e_\lambda)$. □

5.9 Beispiel.

(i) Folgende Abbildung ist ein Zustand aber kein Charakter:

$$\begin{aligned} C([0,1]) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ f &\longmapsto \int f \, d\lambda \end{aligned}$$

(ii) Die normalisierte Spurabbildung

$$\begin{aligned} M_n &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto \operatorname{tr} x \end{aligned}$$

bezeichnet man als ***Spurzustand*** ($\tau \colon A \to \mathbb{C}$ Zustand mit $\tau(a^* a) = \tau(a a^*)$, $a \in A$)

(iii) Sei $A_0 \longrightarrow A_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow A = \varinjlim A_i$ ein unitales induktives System von C*-Algebren. Falls jedes A_i einen Spurzustand besitzt, so auch A

$$A \hookrightarrow \prod_{\mathbb{N}} A_i \big/ \bigoplus_{\mathbb{N}} (A_i)$$

Für $a = [(a_i)_{\mathbb{N}}]$ definieren wir $\tau(a) := \lim_\omega \tau_i(a_i)$, wobei $\omega \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ ein freier Ultrafilter. Dann ist τ wohldefiniert, unital, positiv, linear und erfüllt die Spurbedingung.

Alternativ:

$$(a_i)_{\mathbb{N}} \longmapsto (\tau_i(a_i))_{\mathbb{N}}$$

$$\begin{tikzcd} & \prod_{\mathbb{N}} A_i \arrow[r] \arrow[d] & \ell^\infty(\mathbb{N}) \arrow[d] & \\ A \arrow[r, hook] & \prod_{\mathbb{N}} A_i \big/ \bigoplus_{\mathbb{N}} (A_i) \arrow[r] & \ell^\infty(\mathbb{N}) \big/ c_0(\mathbb{N}) \arrow[r, "\chi"] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

Rechts unten ist eine C*-Algebra; wähle einen Charakter χ. Also stehen die freien Ultrafilter in 1zu1-Zusammenhang zu $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$.

5.10 Definition. Sei A eine C*-Algebra. Eine ***Darstellung*** von A ist ein Paar $(\mathcal{H}, \pi)$, wobei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum ist und π ein *-Homomorphismus $A \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

- $(\mathcal{H}, \pi)$ heißt ***treu***, falls π injektiv ist.
- $(\mathcal{H}, \pi, \xi)$ heißt ***zyklisch***, falls $(\mathcal{H}, \pi)$ eine Darstellung ist und $\xi \in \mathcal{H}$ ein Vektor mit $\overline{\pi(a)\xi} = \mathcal{H}$.
- $(\mathcal{H}, \pi)$ heißt ***algebraisch irreduzibel***, falls gilt: Für einen beliebigen Untervektorraum $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$ mit $\pi(A)\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}_0$ ist $\mathcal{H}_0 = \{0\}$ oder $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}$.
- $(\mathcal{H}, \pi)$ heißt ***(topologisch) irreduzibel***, falls gilt: Für einen abgeschlossenen Untervektorraum $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$ mit $\pi(A)\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}_0$ ist $\mathcal{H}_0 = \{0\}$ oder $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}$.
- $(\mathcal{H}, \pi)$ heißt ***nicht degeneriert***, falls $\overline{\pi(A)\mathcal{H}} = \mathcal{H}$. Äquivalent: $\pi(A)\xi = \{0\} \Rightarrow \xi = 0$.

5.11 Satz (GNS-Konstruktion). Sei A eine C*-Algebra und $\varphi\colon A \to \mathbb{C}$ ein positives Funktional. Setze

$$N_\varphi := \{a \in A \mid \varphi(a^*a) = 0\} \overset{5.6(i)}{=} \{a \in A \mid \varphi(ba) = 0 \text{ für alle } b \in A\}$$

Dann ist $N_\varphi \subset A$ ein abgeschlossenes Linksideal. Definiere eine Abbildung

$$\begin{aligned} A/N_\varphi \times A/N_\varphi &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (a + N_\varphi, b + N_\varphi) &\longmapsto \langle a + N_\varphi\,,\, b + N_\varphi \rangle := \varphi(a^*b) \end{aligned}$$

$\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ ist dann ein wohldefiniertes Skalarprodukt auf A/N_φ:

Wohldefiniertheit: Sei $a + N_\varphi = c + N_\varphi$ und $b + N_\varphi = d + N_\varphi$. Dann gilt $a - c \in N_\varphi$ und $b - d \in N_\varphi$. Damit folgt dann

$$\begin{aligned} |\varphi(a^*b) - \varphi(c^*d)| \leqslant |\varphi(a^*b) - \varphi(c^*b)| + |\varphi(c^*b) - \varphi(c^*d)| &= \left|\varphi\big((a^* - c^*)b\big)\right| + \left|\varphi\big(c^*(b - d)\big)\right| \\ &= \left|\overline{\varphi\big(b^*(a - c)\big)}\right| + \left|\varphi\big(c^*(b - d)\big)\right| = 0 \end{aligned}$$

sesquilinear: klar.

antisymmetrisch: Es ist $\varphi(a^*b) = \overline{\varphi(b^*a)}$.

positiv definit: Es gilt

$$\langle a + N_\varphi \,,\, a + N_\varphi \rangle = 0 \iff \varphi(a^*a) = 0 \iff a \in N_\varphi \iff a + N_\varphi = N_\varphi = 0 \in {}^{A}\!/\!_{N_\varphi}$$

Insgesamt ist $^{A}/_{N_\varphi}$ also ein Prä-Hilbertraum mit $\langle \cdot\,,\, \cdot \rangle$. Sei $\mathcal{H}_\varphi := \overline{{}^{A}/_{N_\varphi}}^{\langle \cdot\,,\,\cdot \rangle}$ die Hilbertraumvervollständigung. Definiere $\dot\pi\colon A \to \mathcal{B}(^{A}/_{N_\varphi})$ durch $\dot\pi(a)(b + N_\varphi) := ab + N_\varphi$ für $a, b \in A$. Dann ist $\dot\pi$ ein wohldefinierter kontraktiver Homomorphismus von Algebren: Da N_φ ein Linksideal ist, ist $\dot\pi(a)$ linear auf $^{A}/_{N_\varphi}$. Weiter ist $\dot\pi$ linear und multiplikativ: $A \to \mathcal{L}(^{A}/_{N_\varphi})$

$$\begin{aligned}\|\dot\pi(a)(b + N_\varphi)\|^2_{A/N_\varphi} = \langle ab + N_\varphi \,,\, ab + N_\varphi \rangle = \varphi(b^*a^*ab) &\leqslant \|a\|_A^2 \cdot \varphi(b^*b)\\ &= \|a\|_A^2 \cdot \|b + N_\varphi\|^2_{A/N_\varphi}\end{aligned}$$

Damit gilt $\|\dot\pi(a)(b + N_\varphi)\|_{A/N_\varphi} \leqslant \|a\|_A \cdot \|b + N_\varphi\|_{A/N_\varphi}$, also $\|\dot\pi(a)\|_{\mathcal{B}(A/N_\varphi)} \leqslant \|a\|_A$. Insgesamt ist $\dot\pi\colon A \to \mathcal{B}(^{A}/_{N_\varphi})$ also ein kontraktiver Homomorphismus. Für jedes $a \in A$ ist $\|\dot\pi(a)\|$ beschränkt durch $\|a\|$, daher besitzt $\dot\pi(a)$ eine eindeutig bestimmte Fortsetzung $\pi_\varphi(a) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\varphi)$ mit $\|\pi_\varphi(a)\| = \|\dot\pi(a)\| \leqslant \|a\|$. $\pi_\varphi\colon A \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_\varphi)$ ist ein kontraktiver *-Homomorphismus (Übung).

$(\mathcal{H}_\varphi, \pi_\varphi)$ ist die ***GNS-Darstellung*** von φ. $(\mathcal{H}_\varphi, \pi_\varphi, \xi_\varphi)$ ist zyklisch mit $\xi_\varphi = \lim_\lambda e_\lambda + N_\varphi$, wobei $(e_\lambda)_\lambda$ eine approximative Eins von A ist (Übung).

5.12 Satz. Jede C^*-Algebra A besitzt eine treue Darstellung. Falls A separabel ist, so existiert eine treue Darstellung auf einem separablen Hilbertraum.

Beweis: Wir definieren die universelle Darstellung $(\mathcal{H}_u, \pi_u)$ durch

$$\mathcal{H}_u := \bigoplus_{\varphi \in S(A)} \mathcal{H}_\varphi = \left\{ (\eta_\varphi)_{\varphi \in S(A)} \;\middle|\; \eta_\varphi \in \mathcal{H}_\varphi,\ \sum_{\varphi \in S(A)} \langle \eta_\varphi \,,\, \eta_\varphi \rangle < \infty \right\}$$

und $\pi_u\colon A \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_u)$ mit $\pi_u(a)((\eta_\varphi)_\varphi) := (\pi_\varphi(a)\eta_\varphi)_\varphi$ für $a \in A$. Sei $0 \neq a \in A^1$. Dann existiert nach Satz 5.5 ein $\overline{\varphi} \in S(A)$ mit $\overline{\varphi}(a^*a) = \|a\|^2$. Es gilt

$$\begin{aligned}\|a\|^2 = \overline{\varphi}(a^*a) &= \overline{\varphi}\Big((a^*a)^{1/2}(a^*a)^{1/2}\Big)\\
&= \Big\langle (a^*a)^{1/2} + N_{\overline{\varphi}} \,,\, (a^*a)^{1/2} + N_{\overline{\varphi}} \Big\rangle_{\mathcal{H}_{\overline{\varphi}}}\\
&= \Big\langle \pi_{\overline{\varphi}}\Big((a^*a)^{1/4}\Big)\Big((a^*a)^{1/4} + N_{\overline{\varphi}}\Big) \,,\, \pi_{\overline{\varphi}}\Big((a^*a)^{1/4}\Big)\Big((a^*a)^{1/4} + N_{\overline{\varphi}}\Big) \Big\rangle_{\mathcal{H}_{\overline{\varphi}}}\\
&= \Big\| \pi_{\overline{\varphi}}\Big((a^*a)^{1/4}\Big)\Big((a^*a)^{1/4} + N_{\overline{\varphi}}\Big) \Big\|^2_{\mathcal{H}_{\overline{\varphi}}}\\
&\leqslant \Big\| \pi_{\overline{\varphi}}\Big((a^*a)^{1/4}\Big) \Big\|^2_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_{\overline{\varphi}})}\\
&= \Big\| \pi_{\overline{\varphi}}\Big((a^*a)^{2/4}\Big) \Big\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_{\overline{\varphi}})} = \Big\| \pi_{\overline{\varphi}}(a^*a)^{1/2} \Big\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_{\overline{\varphi}})}\\
&= \|\pi_{\overline{\varphi}}(a)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_{\overline{\varphi}})} \leqslant \|\pi_u(a)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_{\overline{\varphi}})}\end{aligned}$$

Damit ist π_u injektiv, also treu. Falls A separabel ist, so wählen wir eine abzählbare dichte Teilmenge $\{a_0, a_1, \ldots\} \subset A^1$ und Zustände $\varphi_0, \varphi_1, \ldots \in S(A)$ mit $\varphi_i(a_i^*a_i) = \|a_i^*a_i\| = \|a_i\|^2$. Für $a \in A^1$

existiert dann ein $i \in \mathbb{N}$ mit $\varphi_i(a^*a) \geqslant 1/2\|a\|^2$. Dann ist

$$\|\pi_{\varphi_i}(a)\| \geqslant \left\|\pi_{\varphi_i}(a) \lim_\lambda (e_\lambda + N_{\varphi_i})\right\|_{\mathcal{H}_{\varphi_i}} = \varphi_i(a^*a)^{1/2} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\|a\|$$

Wir definieren $\mathcal{H}_{\text{sep}} := \bigoplus_{\mathbb{N}} \mathcal{H}_{\varphi_i}$ und $\pi_{\text{sep}} \colon A \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\text{sep}})$ durch

$$\pi_{\text{sep}}(a)\big((\eta_i)_{i\in\mathbb{N}}\big) := \big(\pi_{\varphi_i}(a)(\eta_i)\big)_{i\in\mathbb{N}}$$

Mit obiger Ungleichung folgt $\|\pi_{\text{sep}}(a)\| \geqslant 1/\sqrt{2}\|a\|$ und damit ist π_{sep} treu. □

5.13 Korollar. Sei A eine C^*-Algebra und $n \geqslant 1$ eine natürliche Zahl. Dann ist $M_n(A)$ eine C^*-Algebra mit Operationen

$$(a_{ij}) \cdot (b_{ij}) = \left(\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}\right)_{ij} \qquad \text{und} \qquad (a_{ij})^*_{ij} = (a^*_{ji})_{ij}$$

Wegen Korollar 2.12 ist die C^*-Norm auf $M_n(A)$ eindeutig.

Beweis: Sei $(\mathcal{H}_u, \pi_u)$ die universelle Darstellung von A. Definiere

$$\pi_u^{(n)} \colon M_n(A) \longrightarrow M_n\big(\mathcal{B}(\mathcal{H}_u)\big) \longrightarrow \mathcal{B}\big(\mathcal{H}_u^{\oplus n}\big)$$

durch $(a_{ij})_{ij} \longmapsto \big(\pi_u(a_{ij})\big)_{ij} \longmapsto \pi_u^{(n)}\big((a_{ij})_{ij}\big)$, wobei

$$\pi_u^n\big((a_{ij})_{ij}\big)\begin{pmatrix} j_1 \\ \vdots \\ j_n \end{pmatrix} = \left(\sum_j \pi_u(a_{ij})j_i\right)$$

Damit ist $\pi_u^{(n)}$ ein *-Homomorphismus: $\pi_u^{(n)}$ ist injektiv, da π_u injektiv ist (genauer?). Nun definiert

$$\|(a_{ij})_{ij}\|_{M_n(A)} := \left\|\pi_u^{(n)}\big((a_{ij})_{ij}\big)\right\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_u^{\oplus n})}$$

eine *-Algebra Norm, welche die C^*-Bedingung erfüllt. Weiter gilt für $i, j = 1, \dots n$

$$\begin{aligned}\|a_{ij}\|_A = \|\pi_u(a_{ij})\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_u)} \leqslant \left\|\pi_u^{(n)}\big((a_{kl})_{kl}\big)\right\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_u^{\oplus n})} = \|(a_{kl})_{kl}\|_{M_n(A)} &\leqslant \sum_{k,l} \|\pi_u(a_{kl})\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_u)} \\ &= \sum_{k,l} \|a_{kl}\|_A\end{aligned}$$

Mit der Vollständigkeit von A folgt, dass $M_n(A)$ vollständig ist bezüglich $\|\cdot\|_{M_n(A)}$. □

5.14 Korollar. Sie A eine C^*-Algebra und $a \in A$. Dann gilt

(i) $a \in A_{\text{sa}}$ genau dann, wenn $\varphi(a) \in \mathbb{R}$ für jeden Zustand $\varphi \in S(A)$.

(ii) $a \in A_+$ genau dann, wenn $\varphi(a) \geqslant 0$ ist für jeden Zustand $\varphi \in S(A)$.

Beweis:

(i) Die erste Implikation folgt mit Satz 5.3 (ii). Für die umgekehrte Implikation betrachte $i(a - a^*) \in A_{\text{sa}}$. Dann gilt für $\varphi \in S(A)$

$$\varphi(i \cdot (a - a^*)) = i(\varphi(a) - \varphi(a^*)) = i \cdot \Big(\varphi(a) - \overline{\varphi(a)}\Big) = 0$$

Mit Satz 5.5 folgt $i \cdot (a - a^*) = 0$ und damit $a = a*$.

(ii) Hier ist die erste Implikation trivial. Für die umgekehrte Implikation sei $(\mathcal{H}_u, \pi_u)$ die universelle Darstellung von A. Für $\xi \in \mathcal{H}_u$ ist $\varphi_\xi \colon A \to \mathbb{C}$, $b \mapsto \langle \xi, \pi_u(b)\xi \rangle$ ein positives Funktional, also $\langle \xi, \pi_u(a)\xi \rangle = \varphi_\xi(a) \geqslant 0$ für $\xi \in \mathcal{H}_u$. Sei $\lambda < 0$ und $\xi \in \mathcal{H}_u$. Dann gilt

$$\left\| (\pi_u(a) - \lambda)\xi \right\|^2_{\mathcal{H}_u} = \left\langle (\pi_u(a) - \lambda)\xi, (\pi_u(a) - \lambda)\xi \right\rangle = \|\pi_u(a)\xi\|^2 + |\lambda|^2 \|\xi\| - 2\lambda \cdot \langle \xi, \pi_u(a)\xi \rangle$$
$$\geqslant |\lambda|^2 \cdot \|\xi\|$$

Damit folgt $\ker(\pi_u(a) - \lambda) = \{0\}$ und $(\pi_u(a) - \lambda)(\mathcal{H}_u) \subset \mathcal{H}_u$ ist abgeschlossen. Also ist

$$\operatorname{im}(\pi_u(a) - \lambda) = \left(\ker(\pi_u(a) - \lambda)^*\right)^\perp = \left(\ker(\pi_u(a) - \lambda)\right)^\perp = \mathcal{H}_u$$

und folglich ist $\pi_u(a) - \lambda$ surjektiv und somit auch invertierbar, λ also kein Element des Spektrums von $\pi_u(a)$. Da π_u isometrisch ist, ist λ auch kein Element von $\sigma(a)$, also $a \geqslant 0$. $\square$

5.15 Beispiel. Sei $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N})$ mit der Standard-Orthonormalbasis $(\eta_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Definiere den unilateralen Shift $v \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ durch $v(\eta_i) := \eta_{i+1}$. Dann ist $v^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ gegeben durch

$$v^*(\eta_i) = \begin{cases} \eta_{i-1} & \text{falls } i \geqslant 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Es gilt $v^*v = \mathbb{1}_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} (= \mathrm{id})$ und $\mathbb{1} - vv^* = p_{\eta_0} = e_{00} \in \mathcal{K} = \mathcal{K}\big(\ell^2(\mathbb{N})\big)$. Sei $\mathcal{T} := C^*(v) \subset \mathcal{B}\big(\ell^2(\mathbb{N})\big)$ die ***Toeplitz-Algebra*** und $J := \langle \mathbb{1} - vv^* \rangle \lhd \mathcal{T}$ das von $\mathbb{1} - vv^*$ in $\mathcal{T}$ erzeugte (abgeschlossene zweiseitige) Ideal. Dann gilt $J = \mathcal{K}$: Offensichtlich ist $J \subset \mathcal{K}$, denn $\mathbb{1} - vv^* \in J$. Für $e_{ij} \in \mathcal{K}$ gilt $e_{ij} = v^i(\mathbb{1} -$ $e_{ij}(\eta_k) = \delta_{jk}\eta_i$
$vv^*)(v^*)^j \in J$ (Überprüfen auf Basiselementen). Damit ist

$$\mathcal{K} = \overline{\operatorname{span}\{e_{ij}\}} \subset J$$

Für die Quotientenabbildung $\pi \colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}/J$ gilt $\mathcal{T}/J = C^*\big(\pi(v)\big)$ und $\pi(\mathbb{1} - vv^*) = 0$, also ist

$$\pi(v)^*\pi(v) = \mathbb{1}_{\mathcal{T}/J} = \pi(v)\pi(v^*)$$

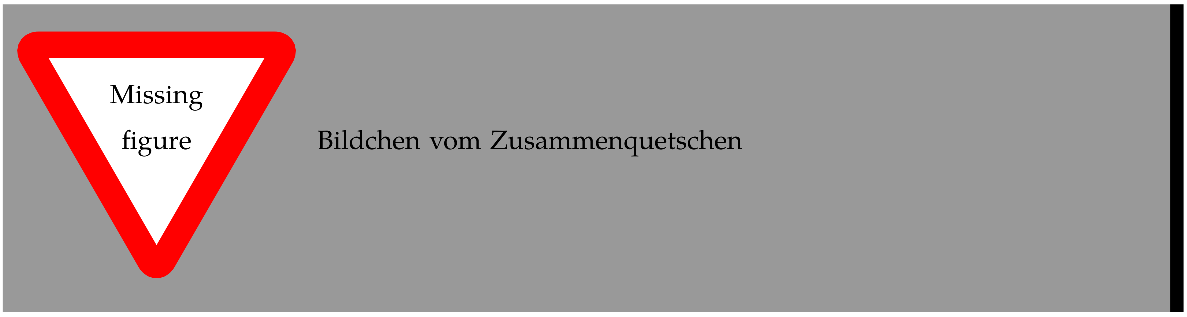
und damit ist $\pi(v) \in \mathcal{T}/J$ unitär. Man zeigt $\sigma\big(\pi(v)\big) = \mathbb{T}$ und man erhält $\mathcal{T}/J \cong C(\mathbb{T})$. Wir haben eine kurze exakte Sequenz von C^*-Algebren

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{T} \longrightarrow C(\mathbb{T}) \longrightarrow 0$$

Für jede unitale C^*-Algebra A mit einer Isometrie w ($w^*w = \mathbb{1}$) existiert ein *-Homomorphismus $\varphi \colon \mathcal{T} \to A$ mit $\varphi(v) = w$ (Satz von Coburn).

5.16 Beispiel. Sei $\mathcal{H} = L^2([0,1])$. Definiere $v_1, v_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ durch $c_2 = 2$??

$$v_1(f)(t) := \begin{cases} c_2 \cdot f(2t) & \text{falls } t \in [0, 1/2] \\ 0 & \text{falls } t \in (1/2, 1] \end{cases} \quad \text{und} \quad v_2(f)(t) := \begin{cases} c_2 \cdot f(2t-1) & \text{falls } t \in [1/2, 1] \\ 0 & \text{falls } t \in [0, 1/2) \end{cases}$$



Es ist $v_1^*v_2 = \mathbb{1}$ und $v_1v_1^* + v_2v_2^* = \mathbb{1}$. $O_2 := C^*(v_1, v_2) \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist eine ***Cuntz-Algebra***. Ähnlich lassen sich O_n und O_∞ definieren. O_2 besitzt keinen Spurzustand und ist einfach (d.h. es gibt keine nichttrivialen abgeschlossenen zweiseitigen Ideale).

Sei A eine unitale C^*-Algebra mit $s_1, s_2 \in A$ und $s_1^* s_1 = s_2^* s_2 = \mathbb{1} = s_1 s_1^* + s_2 s_2^*$. Dann existiert ein *-Homomorphismus $\pi\colon O_2 \to A$ mit $\pi(v_i) = s_i$ für $i = 1, 2$.

6 von-Neumann-Algebren und der Bikommutantensatz

6.1 Erinnerung. Die ***starke Operatortopologie*** $\mathcal{T}_{\text{s.o.}}$ auf $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist die lokalkonvexe Topologie, welche von den Halbnormen $p_\xi \colon \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \|x\xi\|_{\mathcal{H}}$ für $\xi \in \mathcal{H}$ erzeugt wird. Das heißt $\mathcal{T}_{\text{s.o.}}$ ist die gröbste Topologie, sodass Addition, skalare Multiplikation und alle Halbnormen p_ξ stetig sind. „Typische“ offene Mengen sind der Form Revision 6

$$U_{x,\xi,\varepsilon} := \{y \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mid \|(x-y)\xi\| < \varepsilon\}$$

wobei $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\xi \in \mathcal{H}$ und $\varepsilon > 0$. Die $U_{x,\xi,\varepsilon}$ bilden eine Subbasis für $\mathcal{T}_{\text{s.o.}}$. Für ein Netz $(x_\lambda)_\Lambda \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ und $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ gilt

$$\begin{aligned} x_\lambda \xrightarrow{\text{s.o.}} x \iff & \|(x_\lambda - x)\xi\|_{\mathcal{H}} \longrightarrow 0 \text{ für jedes } \xi \in \mathcal{H} \\ \iff & x_\lambda\xi \longrightarrow x\xi \text{ für jedes } \xi \in \mathcal{H} \end{aligned}$$

$\mathcal{T}_{\text{s.o.}}$ ist schwächer als $\mathcal{T}_{\|\cdot\|}$, d.h. $(\mathcal{B}(\mathcal{H}), \mathcal{T}_{\|\cdot\|}) \xrightarrow{\text{id}} (\mathcal{B}(\mathcal{H}), \mathcal{T}_{\text{s.o.}})$ ist stetig. Äquivalent dazu: Wenn $A \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ s.o.-abgeschlossen ist, so ist A auch $\|\cdot\|$-abgeschlossen. Alternativ: Wenn $x_\lambda \to x$ in der Normtopologie, dann auch in der starken Operatortopologie.

Die Norm $\|\cdot\|$, die Multiplikation und Involution sind nicht stetig bezüglich der starken Operatortopologie: Sei dazu $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N})$ mit Standardorthonormalbasis $(\eta_k)_{\mathbb{N}}$ und Matrixeinheiten e_{ij}. Dann gilt $e_{0,n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{s.o.}} 0$ aber $1 = \|e_{0,n}\| \not\to 0$ und $e_{0,n}^* = e_{n,0} \stackrel{\text{s.o.}}{\not\to} 0$. Dass die Multiplikation nicht stetig ist, ist etwas subtiler (Übung). $e_{ij}\eta_k = \delta_{jk} \cdot \eta_i$

6.2 Satz. Sei $(x_\lambda)_\Lambda \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})_{\text{sa}}$ ein monotones und beschränktes Netz. Dann existiert ein $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit $x_\lambda \xrightarrow{\text{s.o.}} x$. Falls $(x_\lambda)_\Lambda$ ein aufsteigendes Netz von orthogonalen Projektionen ist, so ist x die (orthogonale) Projektion auf $\overline{\bigcup_\Lambda x_\lambda\mathcal{H}}$. Falls $(x_\lambda)_\Lambda$ ein absteigendes Netz aus Projektionen ist, so ist x die Projektion auf $\bigcap_\Lambda \overline{x_\lambda\mathcal{H}}$.

Beweis: Vergleiche Funktionalanalysis Satz 7.32. Idee: $\langle x_\lambda\xi, \cdot\rangle \in \mathcal{H}^* \cong \mathcal{H}$ ist schwach konvergent gegen ein $\eta := x\xi$ (Polarisierung, Monotonie). $x_\lambda \xrightarrow{\text{wo}} x$ ($\langle \eta, x_\lambda\xi\rangle \to \langle \eta, x\xi\rangle$, $\xi, \eta \in \mathcal{H}$). Mit Beschränktheit folgt $x_\lambda \xrightarrow{\text{s.o.}} x$.

Es seien nun die x_λ Projektionen und $x_\lambda \xrightarrow{\text{s.o.}} x$. Dann folgt $x^2 = x$ mittels

$$\langle \eta, x\xi\rangle = \lim\langle \eta, s_\lambda\xi\rangle = \lim\langle x_\lambda\eta, x_\lambda\xi\rangle = \langle x\eta, x\xi\rangle = \langle \eta, x^*x\xi\rangle$$

Also ist $x = x^*x = x^2$. Rest Übung! □

6.3 Bemerkung. In Funktionalanalysis hatten wir $0 \leqslant x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ definiert als $\langle \xi, x\xi\rangle \geqslant 0$ für alle $\xi \in \mathcal{H}$. Dies ist äquivalent zu $0 \leqslant x$ in unserem Sinne: Aus $x = y^*y$ folgt

$$\langle \xi, x\xi\rangle = \langle \xi, y^*y\xi\rangle = \langle y\xi, y\xi\rangle \geqslant 0$$

für $\xi \in \mathcal{H}$. Die Gegenrichtung zeigt man wie im Beweis von Korollar 5.14.

6.4 Definition. Eine ***von-Neumann-Algebra*** auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$ ist eine in der starken Operatortopologie abgeschlossene *-Unteralgebra von $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

6.5 Definition & Proposition. Sei B eine Algebra und $S \subset B$ eine Teilmenge.

$$S' := \{b \in B \mid bs = sb, s \in S\}$$

heißt ***Kommutante*** von S in B. $S'' := (S')'$ heißt ***Bikommutante***. S', S'' sind Unteralgebren. Falls B eine *-Algebra und $S = S^*$ ist, so sind S' und S'' auch *-Unteralgebren. Falls $A \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ eine *-Unteralgebra ist, so ist $A' \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ eine von-Neumann-Algebra.

Beweis: Wir zeigen nun, dass A' abgeschlossen ist in der starken Operatortopologie. Sei dazu $(x_\lambda) \subset A'$ mit $x_\lambda \xrightarrow{\text{s.o.}} x$, $a \in A$ sowie $\xi, \eta \in \mathcal{H}$. Dann gilt

$$\langle \eta\,,\, ax\xi \rangle = \langle \eta\,,\, a \lim x_\lambda \xi \rangle = \lim \langle \eta\,,\, a x_\lambda \xi \rangle = \lim \langle \eta\,,\, x_\lambda a \xi \rangle = \langle \eta\,,\, xa\xi \rangle$$

Also ist $ax = xa$. □

6.6 Lemma. Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $\mathbb{1}_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \in A \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ eine unitale *-Unteralgebra. Dann ist A s.o.-dicht in A''.

Beweis: Sei $x \in A''$. Zu zeigen: Jede s.o.-offene Umgebung U von x mit $x \in U = \bigcap_{i=1}^n U_{x,\xi_i,\varepsilon}$ für $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathcal{H}$ besitzt nichtleeren Schnitt mit A. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \pi^{(n)} \colon \mathcal{B}(\mathcal{H}) &\longrightarrow M_n(\mathcal{B}(\mathcal{H})) \cong \mathcal{B}(\mathcal{H}^{\oplus n}) \\ y &\longmapsto \begin{pmatrix} y & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ist ein *-Homomorphismus und $\pi^{(n)}(A) \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}^{\oplus n})$ ist *-Unteralgebra von $\mathcal{B}(\mathcal{H}^{\oplus n})$ mit $\mathbb{1}_{\mathcal{B}(\mathcal{H}^{\oplus n})} \in \pi^{(n)}(A)$. Es gilt $\pi^{(n)}(x) \in \pi^{(n)}(A)''$: Für $y \in \pi^{(n)}(A)'$ und $a \in A$ gilt

$$\pi^{(n)}(a)\, e_{ii}\, y\, e_{jj} = e_i i\, \pi^{(n)}(a)\, y\, e_{jj} = e_{ii}\, y\, \pi^{(n)}(a)\, e_{jj} = \underbrace{e_{ii}\, y\, e_{jj}}_{= y_{ij} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})} \pi^{(n)}(a)$$

Dann ist $y_{ij}\, a = a\, y_{ij}$ für $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ und es folgt $y_{ij} \in A'$, also $y_{ij}\, x = x\, y_{ij}$ für $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Damit folgt weiter $\pi^{(n)}(x)\, y = y\, \pi^{(n)}(x)$. Sei

$$\underline{\xi} := \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \in \mathcal{H}^{\oplus n} \qquad \text{und} \qquad K := \overline{\pi^{(n)}(A)\underline{\xi}} \subset \mathcal{H}^{\oplus n}$$

Dann ist K ein abgeschlossener Unterraum und $\pi^{(n)}(A)$-invariant. Da $\pi^{(n)}(A) = \pi^{(n)}(A)^*$ ist, ist K reduzierend für jedes $\pi^{(n)}(a)$, $a \in A$, das heißt $\pi^{(n)}(a)K \subset K$, $\pi^{(n)}(a)^*K \subset K$ bzw. $\pi^{(n)}(a)K \subset K$, $\pi^{(n)}(a)(K^\perp) \subset K^\perp$, bzw. $p_K \pi^{(n)}(a) = \pi^{(n)}(a) p_K$ für $a \in A$, wobei $p_K \colon H^{\oplus n} \to K$ die orthogonale Projektion ist. Damit ist $p_K \in \pi^{(n)}(A)'$ und somit auch $\pi^{(n)}(x) p_K = p_K \pi^{(n)}(x)$. Insgesamt gilt

$$\pi^{(n)}(a)\underline{\xi} = p_K \pi^{(n)}(x)\underline{\xi} \in K$$

Also existiert eine Folge $(a_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset A$, so dass $\pi^{(n)}(x)\underline{\xi} = \lim_{m\to\infty} \pi^{(n)}(a_m)\underline{\xi}$. Dieser Ausdruck hat folgende Gestalt

$$\begin{pmatrix} x\xi_1 \\ \vdots \\ x\xi_n \end{pmatrix} = \lim_{m\to\infty} \begin{pmatrix} a_m \xi_1 \\ \vdots \\ a_m \xi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_m & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

Also gilt $a_m \xi_j \xrightarrow{m\to\infty} x\xi_j$ für $j = 1, \ldots, n$ und damit

$$\|a_m \xi_j - x\xi_j\| \xrightarrow{m\to\infty} 0 \Longrightarrow \|a_m \xi_j - x\xi_j\| < \varepsilon$$

für m groß genug. Damit ist $a_m \in U_{x,\xi_j,\varepsilon}$ für M groß genug und $j = 1, \ldots, n$. □

6.7 Korollar (von Neumanns Bikommutantensatz). Sei $\mathbb{1}_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}A \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ eine unitale *-Unteralgebra. Dann ist A eine von-Neumann-Algebra genau dann, wenn $A = A''$ ist.

Beweis: Für die erste Implikation ist $A = \overline{A}^{\text{s.o.}}$, also $A = A''$ nach Lemma 6.6 Für die Rückrichtung beachte, dass A'' eine s.o.-abgeschlossene *-Unteralgebra ist nach Proposition 6.5. □

6.8 Proposition. Jede von-Neumann-Algebra $\{0\} \neq A \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ besitzt ein Einselement.

Beweis: Sei $(e_\lambda)_\Lambda \subset A$ eine approximative Eins für A. Dann gilt $e_\lambda \xrightarrow{\text{s.o.}} e$ für ein $e \in A_{sa}$ nach Satz 6.2. Für $\xi \in \mathcal{H}$ und $a \in A$ gilt

$$(ea)(\xi) = e(a\xi) = \big(\text{s.o.-}\lim_\lambda e_\lambda\big)(a\xi) = \big(\text{s.o.-}\lim_\lambda(e_\lambda a)\big)(\xi) = (\|\cdot\|\text{-}\lim_\lambda(e_\lambda a))(\xi) = a(\xi)$$

Damit ist $e_a = a$ und damit auch $ea^* = a^*$, also $ae = a$. □

6.9 Proposition. Sei $A \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ eine von-Neumann-Algebra mit Einselement e. Dann ist A aufgefasst als Unteralgebra A_e von $\mathcal{B}(e\mathcal{H})$ eine unitale von-Neumann-Algebra ($\mathbb{1}_{A_e} = \mathbb{1}_{\mathcal{B}(e\mathcal{H})}$) und es gilt $A_e = (A_e)''$.

Beweis: Es gilt $e = e^2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_{sa}$, das heißt e ist eine orthogonale Projektion. Weiter ist $e\mathcal{H} \subset \mathcal{H}$ abgeschlossen, denn $e\xi_\lambda \to \xi \in \mathcal{H}$ impliziert

$$\big(\mathbb{1}_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} - e\big)\xi = \big(\mathbb{1}_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} - e\big)\left(\lim_\lambda e\xi_\lambda\right) = \lim_\lambda\big((\mathbb{1}_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} - e)e\xi_\lambda\big) = 0$$

Damit folgt, dass $e\mathcal{H} \subset \mathcal{H}$ ein Unterhilbertraum ist. Wir haben

κ ist *-linear und kontraktiv, aber nicht multiplikativ

$$\mathcal{B}(e\mathcal{H}) \overset{\iota}{\hookrightarrow} \mathcal{B}(\mathcal{H}) \xrightarrow{\kappa} \mathcal{B}(e\mathcal{H})$$
$$x \longmapsto e \cdot x\big|_{e\mathcal{H}}$$

Dabei gilt $\kappa \circ \iota = \mathrm{id}_{\mathcal{B}(e\mathcal{H})}$ und $\kappa|_A \colon A \to \kappa(A) =: A_e$ ist ein *-Isomorphismus. Wir müssen noch zeigen, dass $A_e \subset \mathcal{B}(e\mathcal{H})$ s.o.-abgeschlossen ist: Sei dazu $(x_\lambda)_\Lambda \subset A_e$ ein Netz mit $x_\lambda \xrightarrow{\text{s.o.}} x \in \mathcal{B}(e\mathcal{H})$. Für $\xi \in \mathcal{H}$ gilt dann

$$\iota(x_\lambda)(\xi) = \iota(x_\lambda)\big(e\xi + (\mathbb{1} - e)\xi\big) = \iota(x_\lambda)(e\xi) \longrightarrow \iota(x)(e\xi) = \iota(x)\big(e\xi + (\mathbb{1} - e)\xi\big) = \iota(x)(\xi)$$

Also gilt $\iota(x_\lambda) \xrightarrow{\text{s.o.}} \iota(x)$ und damit $\iota(x) \in A$, da $(\iota(x_\lambda)) \subset A$. Damit folgt weiter $x = \kappa \circ \iota(x) \in A_e$ und $\mathbb{1}_{\mathcal{B}(e\mathcal{H})} = \kappa(e) \in A_e$. Mit Korollar 6.7 folgt $A_e = (A_e)''$. □

6.10 Definition & Proposition. Sei $A \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ eine von-Neumann-Algebra und $x \in A$. Wir definieren die ***Bildprojektion*** $[x]$ als orthogonale Projektion auf $\overline{\operatorname{im} x} = \overline{x\mathcal{H}} \subset \mathcal{H}$. Es gilt

$$[x] = [xx^*] \subset A$$

Beweis: Da $[x^*\xi] = 0 \Rightarrow xx^*\xi = 0 \Rightarrow \langle \xi, xx^*\xi \rangle = 0 \Rightarrow x^*\xi = 0$ gilt, folgt

$$\overline{\operatorname{im} x} = (\ker x^*)^\perp = (\ker(xx^*))^\perp = \overline{\operatorname{im} xx^*}$$

Damit ist $[x] = [xx^*]$. Die Folge $\big((1/n \cdot \mathbb{1} + xx^*)^{-1} xx^*\big)_{n \in \mathbb{N}} \subset A_+^1$ ist monoton aufsteigend und beschränkt nach Funktionalkalkül, konvergiert also nach Satz 6.2 stark gegen ein $e \in A_{sa}$. Für $\xi \in \mathcal{H}$ gilt

$$\begin{aligned} exx^*\xi = \lim_n (1/n \cdot \mathbb{1} + xx^*)^{-1} xx^* xx^* \xi &= \lim_n (1/n \cdot \mathbb{1} + xx^*)^{-1} xx^* (1/n \cdot \mathbb{1} + xx^*)\xi \\ &= \lim_n xx^*\xi = xx^*\xi \end{aligned}$$

Also ist $exx^* = xx^*$ und damit auch $xx^*e = (exx^*)^* = (xx^*)^* = xx^*$. Weiter ist dann $e[xx^*] = [xx^*] = [xx^*]e$. Andererseits gilt für $\xi \in \mathcal{H}$

$$e\xi = \lim_n (1/n \cdot \mathbb{1} + xx^*)^{-1} xx^* \xi \in \overline{\operatorname{im} xx^*} = [xx^*]\mathcal{H}$$

Damit ist $[xx^*]e\xi = e\xi$, also $[xx^*]e = e = e$ und weiter $[xx^*] = e$. Insgesamt ist $[xx^*] = e \in A$. □

6.11 Satz (Polarzerlegung). Sei $A \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ eine von-Neumann-Algebra und $x \in A$. Dann existiert genau eine partielle Isometrie $u \in A$ mit $u^*u = [|x|]$ und $x = u \cdot |x|$, wobei $|x| = x^*x^{1/2}$.

Beweis: Setze $u_n := x(1/n \cdot \mathbb{1} + |x|)^{-1} \subset A^1$.[3] Nach Proposition 6.10 ist $[|x|] = [x^*x] = [x^*]$ und $[x^*]x^* = x^*$, also folgt $x = x[x^*] = x[|x|]$. Wegen $|x| = [|x|]|x| = |x|[|x|]$ erhalten wir $u_n[|x|] = u_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Weiter gilt $u_n|x| \xrightarrow{n\to\infty} x$ in Norm, denn

$$\| x - u_n|x| \| \leqslant \underbrace{\left\| x - u_n(1/n \cdot \mathbb{1} + |x|) \right\|}_{=0} + \underbrace{\left\| u_n(1/n \cdot \mathbb{1} + |x|) - u_n|x| \right\|}_{=\|u_n \cdot 1/n|x|\| \xrightarrow{n\to\infty} 0}$$

Wegen $x^*x = |x|^2$ haben wir für $n, m \in \mathbb{N}$

$$(u_n^* - u_m^*)(u_n - u_m) = \Big((1/n \cdot \mathbb{1} + |x|)^{-1} - (1/n \cdot \mathbb{1} + |x|)^{-1} \Big)^2 |x|^2$$

Für $\xi \in |x|^2\mathcal{H}$ sehen wir genau wie in Proposition 6.10, dass

$$(u_n^* - u_m^*)(u_n - u_m)\xi \xrightarrow{n,m\to\infty} 0$$

Wegen der Beschränktheit der $(u_n^* - u_m^*)(u_n - u_m)$ gilt dies auch für $\xi \in \overline{|x|^2\mathcal{H}} = \overline{|x|\mathcal{H}}$. Für $\xi \in \overline{|x|\mathcal{H}}^\perp$ gilt $(u_n^* - u_m^*)(u_n - u_m)\xi = 0$, also insgesamt

$$(u_n^* - u_m^*)(u_n - u_m)\xi \xrightarrow{n,m\to\infty} 0$$

für beliebiges $\xi \in \mathcal{H}$. Es folgt $\|(u_n - u_m)\xi\| \xrightarrow{n,m\to\infty} 0$ für $\xi \in \mathcal{H}$ und damit ist $(u_n\xi)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{H}$, also konvergent. $(u_n)_\mathbb{N}$ ist s.o.-konvergent, das heißt es existiert ein $u \in A$ mit $u = \text{s.o.-}\lim_n u_n$. Wegen

$$u\xi = \lim_n u_n\xi = \lim_n u_n[|x|]\xi = (\text{s.o.-}\lim u_n)[|x|]\xi = u[|x|]\xi$$

für $\xi \in \mathcal{H}$ gilt $u = u[|x|]$. Außerdem habe wir für $\xi \in \mathcal{H}$

$$(u|x| - x)\xi = \lim_n (u_n|x| - x)\xi = 0$$

Also ist $u|x| = x$. Für $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ gilt

$$\langle |x|\eta\,,\, |x|\,\xi \rangle = \langle \eta\,,\, x^*x\xi \rangle = \langle \eta\,,\, |x|\, u^*u\, |x|\, \xi \rangle = \langle \eta\,,\, |x|\, [|x|]\, u^*u\, |x|\, [|x|]\, \xi \rangle = \langle |x|\,\eta\,,\, [|x|]\, u^*u\, [|x|]\, |x|\, \xi \rangle$$

Mit Stetigkeit folgt $\langle [|x|]\eta\,,\, [|x|]\xi \rangle = \langle \eta\,,\, [|x|]u^*u[|x|] \rangle$ für alle $\eta, \xi \in \mathcal{H}$. Damit folgt $[|x|] = [|x|]u^*u[|x|]$. Wegen $u = u[|x|]$ gilt weiter $[|x|] = u^*u$, insbesondere ist u eine partielle Isometrie. Falls $v \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ die Gleichungen $x = v|x|$ und $v^*v = [|x|]$ erfüllt, so gilt wegen $v|x| = x = u|x|$ auch

$$v = v\,[|x|] = u\,[|x|] = u$$

wobei man die Gleichung wieder zunächst auf $\overline{|x|\mathcal{H}}$ nachrechnet. □

[3] Benutze für die Normabschätzung $u_n^*u_n \leqslant 1$

6.12 Proposition. Sei $A \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ eine von-Neumann-Algebra und $x \in A$ normal. Für jede offene Menge $U \subset \sigma(x)$ existiert eine eindeutig bestimmte Projektion $e \in A \cap \{x\}'$ mit

$$e = \text{s.o.-}\lim e_\lambda(x)$$

wobei $(e_\lambda)_\Lambda$ (irgend)eine aufsteigende approximative Eins für $C_0(U)$ ist. Wir schreiben auch $\chi_U(x)$ für e. Es gilt $ef(x) = f(x)e = f(x)$ für alle $f \in C_0(U)$. Für eine weitere offene Menge $V \subset \sigma(x)$ gilt

$$\chi_U(x) \cdot \chi_V(x) = \chi_{U\cap V}(x) \qquad \text{sowie} \qquad \chi_U(x) + \chi_V(x) - \chi_{U\cap V}(x) = \chi_{U\cup V}(x)$$

Für $W \subset \sigma(x)$ abgeschlossen schreiben wir auch $\chi_W(x) := \mathbb{1}_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} - \chi_{\sigma(x)\setminus W}(x)$.

Beweis: Für eine beliebige aufsteigende approximative Eins $(e_\lambda)_\Lambda \subset C_0(U)$ existiert der starke Limes $e := \text{s.o.-}\lim e_\lambda(x)$ nach Satz 6.2. Wir im Beweis von Proposition 6.8 zeigt man, dass für $f \in C_0(U)$ und alle $\xi \in \mathcal{H}$ gilt

$$ef(x)\xi = f(x)\xi \implies ef(x) = f(x), f(x)e = f(x)$$

Sei $(h_\gamma)_\Gamma$ eine weitere aufsteigende approximative Eins für $C_0(U)$ und $h := \text{s.o.-}\lim h_\gamma(x)$. Dann gilt

$$eh\xi = \lim_\lambda\left(e_\lambda(x)\left(\lim_\gamma h_\gamma(x)\xi\right)\right) = \lim_\lambda\left(\lim_\gamma e_\lambda h_\gamma(x)(\xi)\right) = \lim_\lambda\left(e_\lambda(x)(\xi)\right) = e\xi$$

Es folgt $eh = e = he$ und genauso $he = h = eh$, also $h = e$ und damit die Eindeutigkeit. Rest ähnlich. □

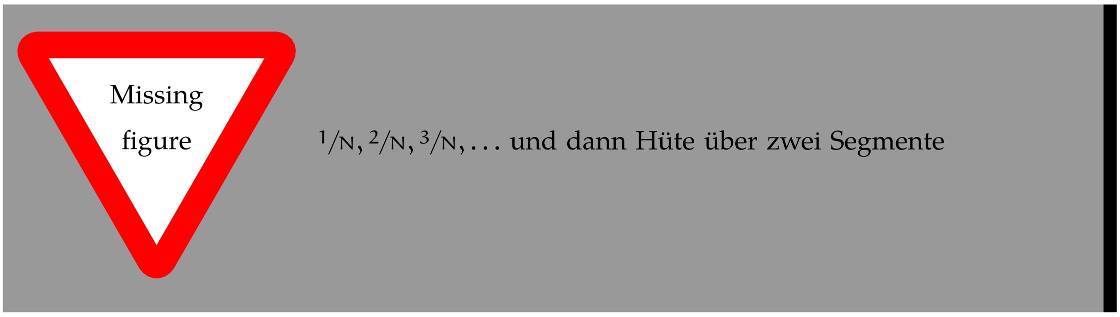
6.13 Korollar. Sei $A \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ eine von-Neumann-Algebra.

(i) A hat reellen Rang 0, das heißt $A_{sa} = \overline{\{\xi a \in A_{sa} \mid \sigma(a) \text{ ist endlich}\}}$.

(ii) Für die unitäre Gruppe gilt $\mathcal{U}(A) = \overline{\left\{e^{i\pi h} \mid h \in A^1_{sa}\right\}}$.

Beweis:

(i) Sei $a \in A_{sa}$. Ohne Einschränkungen sei $\sigma(a) \subset [0,1]$ (Warum?). Für $N \in \mathbb{N}$ definieren wir eine Zerlegung der Eins von $[0,1]$ wie folgt:



Es gilt

$$a = \mathrm{id}_{[0,1]}(a) = \sum_{i=1}^N {}^1\!/\!_N f_i(a) = \sum_{i=1}^N {}^1\!/\!_N \sum_{j=i}^N f_j(a) \geqslant \underbrace{\sum_{i=1}^N {}^1\!/\!_N \cdot \chi_{({}^1\!/\!_N,1]}(a)}_{\text{hat endliches Spektrum}} \geqslant \sum_{i=1}^N {}^1\!/\!_N \cdot \sum_{j=i+1}^N f_j(a)$$

$$\geqslant \mathrm{id}_{[0,1]}(a) - {}^1\!/\!_N \cdot \mathbb{1}$$

(ii) Die Abbildung $(-1,1] \to \mathbb{T}$, $t \mapsto e^{i\pi t}$ ist bijektiv und stetig; die Umkehrfunktion f ist steig auf $\mathbb{T} \setminus \{-1\}$. Sei nun $u \in A$ unitär. Falls $-1 \notin \sigma(u) \subset \mathbb{T}$, so ist $h = f(u) \in A^1_{sa}$ und $u = e^{i\pi h}$.

Falls -1 im Spektrum von u enthalten ist, so betrachten wir eine offene Umgebung $V \subset \mathbb{T}$ von -1. Dann ist $p := \chi_{V\cap\sigma(u)}(u)$ eine Projektion in $A \cap \{u\}'$ nach Proposition 6.12. Für diese ist dann $u(\mathbb{1}-p) \in B := (\mathbb{1}-p)A(\mathbb{1}-p)$ unitär. Es gilt $-1 \notin \sigma_B(u(1-p))$, denn für $f \in C_0(V)$ gilt $f(u(\mathbb{1}-p)) = f(u)(\mathbb{1}-p) = 0$ und damit folgt $\sigma_B(u(\mathbb{1}-p)) \subset \mathbb{T} \setminus V$. Wir im ersten Teil gilt dann

f mit Polynomen approximieren

$$u(\mathbb{1}-p) = e^{i\pi h_0} \in B$$

für ein $h_0 B^1_{sa}$. Ähnlich wie in (i) sieht man, dass $\|u(\mathbb{1}-p) + (-1)p - u\| \leqslant \operatorname{diam} V$. Weiter gilt, da h_0 und p orthogonal zueinander sind

$$u(\mathbb{1}-p) + ((-1)p) = e^{i\pi(h_0+p)}$$ □

6.14 Bemerkung.

a) Aus (i) folgt insbesondere, dass $A = \overline{\operatorname{span}\{p \in A \text{Projektion}\}}$.

b) Die Gleichung in (i) gilt entsprechend auch für normale Elemente.

c) Mit dem Borel-Funktionalkalkül, Satz 6.15, folgt, dass die Gleichung in (ii) auch ohne Normabschluss gilt.

6.15 Satz (Borel Funktionalkalkül). Sei $A \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ eine von-Neumann-Algebra und $a \in A$ normal. Dann existiert ein *-Homomorphismus

beschränkte Borel-Funktionen bilden C^*-Algebra mit $\|\cdot\|_\infty$; $W^*(x)$ erzeugte von-Neumann-Algebra

$$\begin{aligned} \mathbb{B}_b(\sigma(x)) &\longrightarrow W^*(x) \subset A \\ f &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

welcher den Gelfandhomomorphismus $C(\sigma(x)) \to C^*(x)$ fortsetzt. Für eine aufsteigende beschränkte Folge $(f_n)_{\mathbb{N}} \subset \mathbb{B}_b(\sigma(x))_{sa}$ mit punktweisem Limes $f = \lim_n f_n$ gilt

$$f(x) = \text{s.o.-}\lim f_n(x)$$

Beweis (Skizze): Für $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ können wir mit Hilfe von $\mu_{\xi,\eta}(U) := \langle \xi, \chi_U(x)(\eta)\rangle$ für U offen bzw. abgeschlossen ein Integral auf Treppenfunktionen definieren. Hieraus erhält man ein Integral $\Phi_{\xi,\eta}$ auf $\mathbb{B}_b(\sigma(x))$:

- entweder mit L^1-Approximation wie in Analysis III.
- oder als Regelintegral zunächst für stetige Funktionen, also $C(\sigma(x))$, dann für $\mathbb{B}_b(\sigma(x))$ mit dem Rieszschen Darstellungssatz.

Damit hat man nun $\Phi_{\xi,\eta}\colon \mathbb{B}_b(\sigma(x)) \to \mathbb{C}$ linear und stetig. Für $f \in \mathbb{B}_b(\sigma(x))$ und $\eta \in \mathcal{H}$ definiert $\xi \mapsto \Phi_{\xi,\eta}(f) \in \mathbb{C}$ ein konjugiert lineare stetiges Funktional $\varphi_{f,\eta}$ auf $\mathcal{H}$. Mittels $\langle \xi, \cdot\rangle$ lässt sich dann schließen, dass man $\varphi_{f,\eta}$ als Element von $\mathcal{H}$ auffassen kann, d.h. $\varphi_{f,\eta}(\xi) = \langle \xi, \varphi_{f,\eta}\rangle$. Die Abbildung $\eta \mapsto \varphi_{f,\eta}$ ist linear und stetig, definiert also einen Operator $f(x) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Auf Vektoren in $\mathcal{H}$ rechnet man nach, dass $f \mapsto f(x)$ ein isometrischer *-Homomorphismus $\mathbb{B}_b(\sigma(x)) \to \mathcal{B}\mathcal{H}$ ist und $f(x) \in A'' = \overline{A}^{\text{s.o.}}$ (Bikommutantensatz). Weiter gilt $\mathrm{id}_{\sigma(x)} \mapsto x$ und daher setzt das Borel-Funktionalkalkül den Gelfandhomomorphismus fort. □

6.16 Erinnerung. Die ***schwache Operatortopologie*** $\mathcal{T}_{\text{w.o.}}$ auf $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist die lokalkonvexe Topologie, welche von

$$p_{\eta,\xi}(x) := |\langle \eta, x\xi\rangle|$$

für $\eta, \xi \in \mathcal{H}$ erzeugt wird. Die Mengen $U_{x,\eta,\xi,\varepsilon} := \{y \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mid |\langle \eta\,,\,(x-y)\xi\rangle| < \varepsilon\}$ bilden eine Subbasis von $\mathcal{T}_{\text{w.o.}}$. Die Abbildungen

$$(\mathcal{B}(\mathcal{H}), \mathcal{T}_{\|\cdot\|}) \xrightarrow{\text{id}} (\mathcal{B}(\mathcal{H}), \mathcal{T}_{\text{s.o.}}) \xrightarrow{\text{id}} (\mathcal{B}(\mathcal{H}), \mathcal{T}_{\text{w.o.}})$$

sind stetig, denn $\|(x-y)\xi\| \leqslant \|x-y\| \cdot \|\xi\|$ und $|\langle \eta\,,\,(x-y)\xi\rangle| \leqslant \|\eta\| - \|(x-y)\xi\|$. Die Involution ist w.o.-stetig:

$$\begin{aligned} x_\lambda \xrightarrow{\text{w.o.}} x &\iff |\langle \eta\,,\,(x_\lambda - x)\xi\rangle| \to 0 \text{ für } \eta, \xi \in \mathcal{H} \\ &\iff |\langle (x_\lambda - x)^*\eta\,,\,\xi\rangle| \to 0 \text{ für } \eta, \xi \in \mathcal{H} \\ &\iff |\langle \xi\,,\,x_\lambda^* - x^*\eta\rangle| \to 0 \text{ für } \eta, \xi \in \mathcal{H} \\ &\iff x_\lambda^* \xrightarrow{\text{w.o.}} x^* \end{aligned}$$

Multiplikation ist nicht w.o.-stetig: Sei S der Shift. Dann gilt $S^n, S^{*n} \xrightarrow{\text{w.o.}} 0$ aber $S^{*n}S^n = \mathbb{1}$.

6.17 Satz. $\mathcal{B}(\mathcal{H})^1$ ist w.o.-kompakt.

Beweis (Skizze): Nehme $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N})$ an und setze $X = \overline{\operatorname{span}\{e_{ij} \mid i, i = 1, 2, \ldots\}}^{\|\cdot\|_1}$. $x \mapsto \operatorname{Tr}(|x|)$ ist auf $\operatorname{span}(e_{ij})$ definiert und ist Norm. X ist ein abgeschlossenes Ideal in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. $x \mapsto (y \mapsto \operatorname{Tr}(xy))$ liefert eine Abbildung $\mathcal{B}(\mathcal{H}) \to X^*$ (tatsächlich ein Isomorphismus). Sei $\mathcal{T}_{w^*}$ die zurückgezogene Topologie auf $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Man überprüft: $x_\lambda \xrightarrow{w^*} x \Rightarrow x_\lambda \xrightarrow{\text{w.o.}} x$ und damit ist

$$\text{id}\colon (\mathcal{B}(\mathcal{H}), \mathcal{T}_{w^*}) \longrightarrow (\mathcal{B}(\mathcal{H}), \mathcal{T}_{\text{w.o.}})$$

stetig. Aber $\mathcal{B}(\mathcal{H})^1$ ist w^* kompakt nach Banach-Alaoglu. Damit ist $\mathcal{B}(\mathcal{H})^1$ w.o.-kompakt und die Abbildung ist ein Homöomorphismus. □

6.18 Satz. Sei $\mathbb{1}_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \in A \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ eine *-Algebra. Dann gilt

(i) $\overline{A}^{\text{w.o.}} = A''$

(ii) A ist eine von-Neumann-Algebra genau dann, wenn $A = \overline{A}^{\text{w.o.}}$.

Beweis: Zur ersten Aussage: Es gilt $A'' \overset{6.6}{=} \overline{A}^{\text{s.o.}} \subset \overline{A}^{\text{w.o.}}$. Sei nun $(x_\lambda)_\Lambda \subset A$ ein Netz mit $x_\lambda \xrightarrow{\text{w.o.}} x$. Falls $y \in A'$, so gilt für $\eta, \xi \in \mathcal{H}$

$$\langle \eta\,,\,(xy)\xi\rangle = \lim_\lambda \langle \eta\,,\,x_\lambda y\xi\rangle = \lim_\lambda \langle \eta\,,\,yx_\lambda\xi\rangle = \lim_\lambda \langle y^*\eta\,,\,x_\lambda\xi\rangle = \langle y^*\eta\,,\,x\xi\rangle = \langle \eta\,,\,(yx)\xi\rangle$$

Es folgt $xy = yx$ und somit ist $x \in A''$, also $\overline{A}^{\text{w.o.}} \subseteq A''$.
Die zweite Aussage folgt aus (i) und dem Bikommutantensatz. □

6.19 Lemma. Für ein lineare Funktional φ auf $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ gilt: Wenn φ w.o.-steig ist, dann ist φ auch s.o.-stetig und auch stetig in der Normtopologie.

Beweis: Man nehme sich einfach ein passendes Netz. Die Umgekehrung der zweiten Implikation gilt im Allgemeinen nicht. Wie wir jetzt sehen werden ist die erste aber tatsächlich eine Äquivalenz. □

Nummerierung checken

6.20 Satz. Für ein lineares Funktional φ auf $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ sind äquivalent:

(i) φ ist w.o.-stetig.

(ii) φ ist s.o.-stetig.

(iii) $\varphi(\cdot) = \sum_{i=1}^n \langle \eta_i\,,\, \cdot\xi_i \rangle$ für $\eta_1, \xi_1, \dots, \eta_n, \xi_n \in \mathcal{H}$.

Beweis: Die Implikation (i)⇒(ii) haben wir bereits gesehen. (iii)⇒(i) ist auch klar und wir müssen nur (ii) ⇒(iii) zeigen: Sei φ s.o.-stetig. Die Menge $S_\varphi := \{x \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \,|\, |\varphi(x)| < 1\} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist dann s.o.-offen. Dann existieren $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathcal{H}$ und ein $\alpha > 0$, sodass

$$U_{0,\xi_i,\alpha} = \left\{ y \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \,\middle|\, \|(y-0)\xi_i\| < \alpha \right\} \subset S_\varphi$$

Das heißt für $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ gilt: Falls $\|x\xi_i\| < \alpha$ für $i = 1, \dots, n$, so ist $|\varphi(x)| < 1$. Nach Skalierung der ξ_i gilt für $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$: $\|x\xi_i\| < 1 \Rightarrow |\varphi(x)| < 1$. Es folgt

$$|\varphi(x)| \leqslant \max_i \|x\xi_i\| \leqslant \left(\sum_{i=1}^n \|x\xi_i\|^2 \right)^{1/2}$$

Setze nun

$$\mathcal{H}_0 := \left\{ \begin{pmatrix} x\xi_1 \\ \vdots \\ x\xi_n \end{pmatrix} \,\middle|\, x \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \right\} \subset \mathcal{H}^{\oplus n}$$

Dann ist $\psi \colon \mathcal{H}_0 \to \mathbb{C}$, $\left(\begin{smallmatrix} x\xi_1 \\ \vdots \\ x\xi_n \end{smallmatrix}\right) \mapsto \varphi(x)$ wohldefiniert, stetig und linear. ψ setzt sich also fort zu $\overline{\psi} \colon \overline{\mathcal{H}_0} \to \mathbb{C}$. Mit Riesz folg die Existenz von $\eta \in \overline{\mathcal{H}_0}$ mit $\overline{\psi}(.) = \langle \eta\,,\, . \rangle$, also

$$\varphi(x) = \overline{\psi} \begin{pmatrix} x\xi_1 \\ \vdots \\ x\xi_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \langle \eta\,,\, x\xi_i \rangle \qquad \square$$

Nummerierung fixen

6.21 Proposition. Sei $C \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ konvex. Dann ist C s.o.-abgeschlossen genau dann, wenn C w.o.-abgeschlossen ist.

Beweis (Idee)**:** Wenn C w.o.-abgeschlossen ist, dann ist C auch s.o.-abgeschlossen, da die schwache Topologie in der starken enthalten ist. Für die andere Implikation sei $x \in \overline{C}^{\text{w.o.}}$. Zu zeigen ist nun, dass $x \in \overline{C}^{\text{s.o.}}$ ist. Es existiert ein Netz $(x_\lambda)_\Lambda \subset C$ mit $x_\lambda \xrightarrow{\text{w.o.}} x$. Für jedes w.o.-stetige Funktional φ auf $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ gilt $\varphi(x_\lambda) \to \varphi(x)$. Mit Satz 6.20 folgt, dass für jedes s.o.-stetige Funktional φ auf $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ auch $\varphi(x_\lambda) \to \varphi(x)$ gilt. Falls $x \notin \overline{C}^{\text{s.o.}}$, so folgt mit dem Lemma von Zorn (bzw. mit Hahn-Banach für lokalkonvexe Räume), dass $\overline{\varphi} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^*$ s.o.-stetig existiert mit $\operatorname{dist}(\overline{\varphi}(x), \overline{\varphi}(C)) > 0$. Dies ist ein Widerspruch. $\square$

6.22 Proposition. Die Involution ist s.o.-stetig auf $\{x \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \,|\, x \text{ normal}\}$.

Beweis: Für $x, y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ normal und $\xi \in \mathcal{H}$ gilt

$$\begin{aligned} \|(x^* - y^*)\xi\|^2 &= \|x\xi\|^2 - \|y\xi\|^2 + 2\langle \xi\,,\, yy^*\xi \rangle - \langle \xi\,,\, xy^*\xi \rangle - \langle \xi\,,\, yx^*\xi \rangle \\ &= \|x\xi\|^2 - \|y\xi\|^2 + \langle \xi\,,\, (y-x)y^*\xi \rangle + \underbrace{\langle \xi\,,\, y(y^*-x^*)\xi \rangle}_{=\langle (y-x)y^*\xi\,,\, \xi \rangle} \\ &\leqslant \|x\xi\|^2 - \|y\xi\|^2 + 2 \cdot \|(y-x)y^*\xi\| \cdot \|\xi\| \end{aligned}$$

Falls nun $x_\lambda \xrightarrow{\text{s.o.}} y$ in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, so gilt

$$\|(x_\lambda^* - y^*)\xi\| \leqslant \underbrace{\|x_\lambda\xi\|^2 - \|y\xi\|^2}_{\to 0} + \underbrace{\|(y - x_\lambda)y^*\xi\| \cdot \|\xi\|}_{\to 0} \qquad \square$$

6.23 Definition. Eine stetige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt ***stark stetig***, falls für jeden Hilbertraum $\mathcal{H}$ und jedes Netz $(x_\lambda)_\Lambda \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})_{sa}$ mit $x_\lambda \xrightarrow{\text{s.o.}} x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_{sa}$ gilt $f(x_\lambda) \xrightarrow{\text{s.o.}} f(x)$.

6.24 Proposition. Jedes $h \in C_b(\mathbb{R})$ ist stark stetig.

Beweis: Sei $S := \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid f \text{ stark stetig}\}$ und $S_b := S \cap C_b(\mathbb{R})$. Dann sind S und S_b Vektorräume. Wegen $\|ab\xi - a_0b_0\xi\| \leqslant \|a\| \cdot \|(b - b_0)\xi\| + \|(a - a_0)b_0\xi\|$ haben wir für $f \in S_b$, $g \in S$ und $x_\lambda \xrightarrow{\text{s.o.}} x$ in $\mathcal{B}(\mathcal{H})_{sa}$

$$\|f(x_\lambda)g(x_\lambda)\xi - f(x)g(x)\xi\| \leqslant \|f\|_\infty \cdot \big\|\big(g(x_\lambda) - g(x)\big)\xi\big\| + \big\|\big(f(x_\lambda) - f(x)\big)g(x)\xi\big\| \longrightarrow 0$$

Damit ist $f \cdot g \in S$, das heißt $S_b \cdot S \subset S$ und $S_b \cdot S_b \subset S_b$. Weiter gilt: S_b ist selbstadjungiert, also $S_b^* = S_b$ (nach Proposition 6.22, denn $f(x)$ für x selbstadjungiert ist normal und $f(x) \mapsto f(x)^*$ ist s.o.-stetig) und S_b ist $\|\cdot\|_\infty$-abgeschlossen. Insbesondere ist $S_b \subset C_b(\mathbb{R})$ eine C^*-Unteralgebra. Ebenso $S_b \cap C_0(\mathbb{R}) =: S_0 \subset C_0(\mathbb{R})$. Die Funktionen $t \mapsto f(t) := \frac{1}{1+t^2}$ und $t \mapsto g(t) := \frac{t}{1+t^2}$ sind in $C_0(\mathbb{R})$ mit $\|f\|_\infty, \|g\|_\infty \leqslant 1$. Behauptung: f und g sind in S_0 enthalten.

Für $x, y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_{sa}$ gilt $g(x) - g(y) = \ldots = (1 + x^2)^{-1}(x - y + x(y - x)y)(1 + y^2)^{-1}$. Für $\xi \in \mathcal{H}$ gilt dann weiter

$$\big\|\big(g(x) - g(y)\big)\xi\big\| \leqslant 1 \cdot \big\|(x - y)(1 + y^2)^{-1}\xi\big\| + 1 \cdot \big\|(y - x)y(1 + y^2)^{-1}\xi\big\|$$

Damit ist $g \in S_0$. Weiter ist $(t \mapsto t) \in S$, also $(t \mapsto t \cdot g(t)) \in S$ und $(t \mapsto 1 - t \cdot g(t)) = f \in S_0$. Damit ist die Behauptung gezeigt.

Nach Stone-Weierstraß ist $^*\operatorname{Alg}(f, g) \subset C_0(\mathbb{R})$ dicht, denn diese Algebra trennt Punkte von $\mathbb{R}$ und enthält eine strikt positive Funktion. Damit folgt $S_0 = C_0(\mathbb{R})$. Für $h \in C_b(\mathbb{R})$ gilt $hf, hg \in S_0 \subset S_b$ und dann ist auch $(t \mapsto t \cdot h(t) \cdot g(t)) \in S$ und

$$\big(t \longmapsto h(t) \cdot f(t) + t \cdot h(t) \cdot g(t) = h(t)\big) \in S_b \qquad \square$$

6.25 Satz (Kaplansky's Dichtesatz). Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $A \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ eine C^*-Algebra und $B = \overline{A}^{\text{s.o.}} = \overline{A}^{\text{w.o.}}$ die von A in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ erzeugte von-Neumann-Algebra. Dann gilt

- **(i)** $\overline{A_{sa}}^{\text{s.o.}} = \overline{A_{sa}}^{\text{w.o.}} = B_{sa}$
- **(ii)** $\overline{A_{sa}^1}^{\text{s.o.}} = \overline{A_{sa}^1}^{\text{w.o.}} = B_{sa}^1$
- **(iii)** $\overline{A_+^1}^{\text{s.o.}} = \overline{A_+^1}^{\text{w.o.}} = B_+^1$
- **(iv)** $\overline{A^1}^{\text{s.o.}} = \overline{A^1}^{\text{w.o.}} = B^1$
- **(v)** $\overline{\mathcal{U}(A)}^{\text{s.o.}} = \mathcal{U}(B)$ falls $\mathbb{1}_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \in A$

Beweis: Die starken und schwachen Abschlüsse stimmen überein nach Proposition 6.21.

- **(i)** Falls $a \in B_{sa}$, so existiert $(a_\lambda)_\Lambda \subset A$ mit $a_\lambda \xrightarrow{\text{w.o.}} a$. Dann gilt aber auch $a_\lambda^* \xrightarrow{\text{w.o.}} a^* = a$ (nach Erinnerung 6.1) und damit

$$A_{sa} \ni \frac{1}{2}(a_\lambda + a_\lambda^*) \xrightarrow{\text{w.o.}} a$$

  Also ist $B_{sa} \subset \overline{A_{sa}}^{\text{w.o.}} \subset B_{sa}$ *auf Vektoren überprüfen*

□

Index

Die *Seitenzahlen* sind mit Hyperlinks versehen und somit anklickbar

Abbildungsverzeichnis

To-do's und andere Baustellen