



WESTFÄLISCHE
WILHELMS-UNIVERSITÄT
MÜNSTER



FACHBEREICH 10
MATHEMATIK UND
INFORMATIK

Höhere Algebra II

gelesen von Prof. Dr. Lutz Hille

Mitschrift von Phil Steinhorst

Wintersemester 2014/2015

Vorwort

Der vorliegende Text ist eine Mitschrift zur Vorlesung Höhere Algebra II, gelesen von Prof. Dr. Lutz Hille an der WWU Münster im Wintersemester 2014/2015. Der Inhalt entspricht weitestgehend dem Tafelanschrieb während der Vorlesung. Für die Korrektheit des Inhalts wird keinerlei Garantie übernommen. Bemerkungen, Korrekturen und Ergänzungen kann man folgenderweise loswerden:

- persönlich durch Überreichen von Notizen oder per E-Mail
- durch Abändern der entsprechenden TeX-Dateien und Versand per E-Mail an mich
- direktes Mitarbeiten via GitHub. Dieses Skript befindet sich im `latex-wwu`-Repository von Jannes Bantje:

<https://github.com/JaMeZ-B/latex-wwu>

Themenübersicht

Hier kommt eine Themenübersicht hin – oder vielleicht auch nicht.

Literatur

- T. A. Springer: Linear Algebraic Groups
- H. Kraft: Geometrische Methoden in der Invariantentheorie (Aspekte der Mathematik)
- W. Crawley-Boevey: Lectures on representations of quivers

Vorlesungswebsite

Folgt noch.

Phil Steinhorst
p.st@wwu.de

Inhaltsverzeichnis

0 Einführung	4
0.1 Einführung und erste Beispiele	4
0.2 Aktionen algebraischer Gruppen	7
Index	8

0 Einführung

0.1 Einführung und erste Beispiele

13.10.

1. Wir betrachten die algebraische Gruppe $GL_n = GL_n(k)$; meist ist $k = \mathbb{C}$ oder allgemeiner $k = \bar{k}$ algebraisch abgeschlossen und $\text{char}(k) = 0$. $GL_n = GL_n(\mathbb{C}) \subseteq M_n(\mathbb{C})$ ist (bzgl. der üblichen Topologie) eine offene Teilmenge. Später betrachten wir die viel größere **Zariski-Topologie**.
Sei $m = n^2$ und $\mathbb{A}^m \subseteq \mathbb{C}^m$ ein m -dimensionaler affiner Vektorraum. Wir können $GL_n(\mathbb{C})$ auch folgendermaßen charakterisieren:

$$GL_n(\mathbb{C}) = M_n(\mathbb{C}) \setminus V(\det = 0),$$

wobei $V(f = 0) = \{x \in \mathbb{A}^m : f(x) = 0\}$ die Nullstellenmenge oder **Verschwindungsmenge** der polynomialen Funktion $f: \mathbb{A}^m \rightarrow \mathbb{C}$, $f \in k[x_1, \dots, x_m]$ bezeichnet.

2. **Beispiel:** Sei $\mathbb{A}^m = M_n(\mathbb{C})$. $G := GL_n(\mathbb{C})$ ist eine Gruppe. Können wir die Gruppenverknüpfung, die Inversenbildung und das neutrale Element als polynomiale Funktion auffassen?

$$\begin{array}{lll} \mu: G \times G \longrightarrow G & i: G \longrightarrow G & e: \{x\} \longrightarrow G \\ (g, h) \longmapsto gh & g \longmapsto g^{-1} & x \longmapsto e = \mathbb{1}_n \end{array}$$

e ist offensichtlich polynomial und μ auch (vgl. Matrixmultiplikation). Jedoch ist i nicht polynomial, da nach Cramerscher Regel gilt:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A)$$

Daher müssen wir auch Quotienten polynomialer Abbildungen mit Nenner ungleich 0 zulassen.

Idee

Eine lineare algebraische Gruppe ist abgeschlossen in GL_n und die Gruppenabbildungen sind Quotienten polynomialer Abbildungen, sodass folgende Eigenschaften erfüllt sind (d.h. die folgenden Diagramme sind kommutativ):

Assoziativität: $\mu \circ (\mu, \text{id}) = \mu \circ (\text{id}, \mu)$

$$\begin{array}{ccc} G \times G \times G & \xrightarrow{(\mu, \text{id})} & G \times G \\ \downarrow (\text{id}, \mu) & & \downarrow \mu \\ G \times G & \xrightarrow{\mu} & G \end{array} \quad \begin{array}{ccc} (g, h, l) & \longmapsto & (gh, l) \\ \downarrow & & \searrow \\ (g, hl) & \longmapsto & g(hl) \stackrel{!}{=} (gh)l \end{array}$$

Inverse: $e \circ p = \mu \circ (\text{id}, i) \circ \Delta$ bzw. $e \circ p = \mu \circ (i, \text{id}) \circ \Delta$

$$\begin{array}{ccc} & & G \times G \\ & \nearrow \Delta & \downarrow (\text{id}, i) \\ G & \longrightarrow & G \times G \\ \downarrow p & & \downarrow \mu \\ \{x\} & \xrightarrow{e} & G \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & & (g, g) \\ & \nearrow & \downarrow \\ g & \longrightarrow & (g, g^{-1}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ e & \longrightarrow & e \stackrel{!}{=} g \cdot g^{-1} \end{array}$$

Neutrales Element: $\mu \circ (e, \text{id}) = \text{id} = \mu \circ (\text{id}, e)$

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{(e, \text{id})} & G \times G \xrightarrow{\mu} G \\ & \searrow \text{id} & \uparrow \\ & & G \end{array} \quad \begin{array}{ccc} g & \longrightarrow & (e, g) \longrightarrow eg \stackrel{!}{=} g \\ & \searrow & \uparrow \\ & & G \end{array}$$

Definition 0.1 (polynomiale und rationale Funktion)

- $f: \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^m$ heißt **polynomial** bzw. **Morphismus affiner Varietäten**, falls

$$(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)) = f(x_1, \dots, x_n)$$

mit $f_j \in k[x_1, \dots, x_n]$ für alle $j \in \{1, \dots, m\}$.

- Sei $U \subseteq \mathbb{A}^n$ offen (im klassischen Sinne oder bzgl. Zariski-Topologie). $f: U \rightarrow \mathbb{A}^m$ heißt **polynomial**, falls $f = \frac{h}{g}$ mit $h, g \in k[x_1, \dots, x_n]$ und $g(x) \neq 0$ für alle $x \in U$. [$f_j = \frac{h_j}{g_j}$ komponentenweise]
- f wie oben heißt **rational**, falls $f = \frac{h}{g}$ wie oben mit $g \not\equiv 0$ auf U . f ist im Allgemeinen keine Abbildung, sondern nur auf $U \setminus V(g=0)$ definiert.

Beispiel 0.2 (Beispiele für polynomiale und rationale Funktionen)

- $GL_n \rightarrow GL_n$ mit $g \mapsto g^{-1}$ ist polynomial, $M_n \rightarrow M_n$ mit „ $g \mapsto g^{-1}$ “ ist rational.
- $\det: GL_n \rightarrow \mathbb{C}$ und $\det: M_n \rightarrow \mathbb{C}$ ist polynomial.
- $\det^{-1}: M_n \rightarrow \mathbb{C}$ ist rational und $\det^{-1}: GL_n \rightarrow \mathbb{C}$?
- $\mathbb{A}^1 = \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ mit $z \mapsto e^{2\pi iz}$ ist nicht polynomial.

Definition 0.3 (Zariski-Topologie)

Seien $g_1, \dots, g_m \in k[x_1, \dots, x_n]$ und $I = \langle g_1, \dots, g_m \rangle$ das von g_1, \dots, g_m erzeugte Ideal in $k[x_1, \dots, x_n]$. 16.10.
 $M \subseteq \mathbb{A}^n$ heißt abgeschlossen bzgl. der **Zariski-Topologie**, falls gilt:

$$M = V(I) = \{x \in \mathbb{A}^n : g_i(x) = 0 \text{ für } 1 \leq i \leq m\}$$

Beispiel

- Es ist $V(0) = \mathbb{A}^n$ und $V(1) = \emptyset$.
- $GL_n(\mathbb{C})$ ist offen in $M_n(\mathbb{C})$.
- $GL_n(\mathbb{C})$ lässt sich jedoch auch "abschließen" vermöge:

$$GL_n(\mathbb{C}) \hookrightarrow M_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}$$

$$A \mapsto \left(A, \frac{1}{\det(A)} \right)$$

Ab jetzt immer, wenn nichts anderes gesagt, offen und abgeschlossen bezüglich Zariski-Topologie!

Definition 0.4 (Lie-Algebra und Lie-Klammer)

Sei V ein (endlichdimensionaler) k -Vektorraum. Eine Abbildung

$$[\cdot, \cdot]: V \times V \longrightarrow V$$

$$(v, w) \longmapsto [v, w]$$

heißt **Lie-Klammer**, falls sie folgende Eigenschaften erfüllt:

- 1) bilinear
- 2) schiefssymmetrisch, d.h. $[v, w] = -[w, v]$

3) **Jacobi-Identität:** $[[u, v], w] + [[v, w], u] + [[w, u], v] = 0$

Das Paar $(V, [\cdot, \cdot])$ heißt **Lie-Algebra**.

Beispiele

- Der k -Vektorraum V mit der trivialen Lie-Klammer $[v, w] := 0$ heißt abelsche Lie-Algebra.
- Die allgemeine lineare Lie-Algebra $\mathfrak{gl}_n(k) := M_n(k)$ mit der Lie-Klammer $[A, B] := AB - BA$.
- Die spezielle lineare Lie-Algebra $\mathfrak{sl}_n(k) := \text{SL}_n(k)$ als Lie-Unter-Algebra von $\mathfrak{gl}_n(k)$, zum Beispiel für $n = 2$ und $k = \mathbb{C}$:

$$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) := \{A \in M_2(\mathbb{C}) : \text{tr}(A) = 0\} = \left\langle h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Es ist $[h, e] = 2e$, $[h, f] = -2f$ und $[e, f] = h$, also besitzt die Abbildung $[h, \cdot]: V \rightarrow V$ die Eigenwerte 2 und -2 .

Definition 0.5 (lineare algebraische Gruppe)

Sei $G \leq \text{GL}_n(\mathbb{C})$ eine abgeschlossene Untergruppe, dann heißt G **lineare algebraische Gruppe**.

Ab jetzt: "algebraische Gruppe" = "lineare algebraische Gruppe" = "affine algebraische Gruppe"

Zu einer algebraischen Gruppe G definieren wir die zugehörige Lie-Algebra durch

$$\text{Lie}(G) := \mathfrak{g} := T_e G,$$

wobei $T_e G$ den Tangentialraum in $e \in G$ bezeichnet.

$$T_e V(f_1, \dots, f_n) = \left\{ x \in \mathbb{A}^n : \frac{d}{dt} f_i(e + tx) \Big|_{t=0} = 0 \right\} \text{ über } k = \mathbb{C}$$

Beispiele

- Betrachte $f = x_1^2 - x_2$ in \mathbb{A}^2 , dann ist

$$\begin{aligned} T_{(0,0)} V(f) &= \left\{ x \in \mathbb{A}^2 : \frac{d}{dt} f((0,0) + t(x_1, x_2)) \Big|_{t=0} = 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{A}^2 : \frac{d}{dt} (tx_1)^2 - tx_2 \Big|_{t=0} = 0 \right\} \\ &= \{ x \in \mathbb{A}^2 : 2tx_1 - x_2 \Big|_{t=0} = 0 \} = \{ x \in \mathbb{A}^2 : x_2 = 0 \} \\ T_{(1,1)} V(f) &= \{ x \in \mathbb{A}^2 : 2x_1 - x_2 = 0 \} \end{aligned}$$

- $T_E \text{SL}_n(\mathbb{C}) = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) = \{ A \in M_n(\mathbb{C}) : \frac{d}{dt} \det(E + tA) - 1 \Big|_{t=0} = 0 \} = \{ A \in M_n(\mathbb{C}) : \text{tr}(A) = 0 \}$, denn:

$$\begin{aligned} \det(E + tA) &= \det \underbrace{\begin{pmatrix} 1 + ta_{11} & & ta_{1j} \\ & \ddots & \\ ta_{ij} & & 1 + ta_{nn} \end{pmatrix}}_{=: (c_{ij})_{ij}} = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n c_{i, \sigma(i)} = 1 + t \cdot \text{tr}(A) + t^2 \dots + t^n \\ &\Rightarrow \frac{d}{dt} \det(E + tA) \Big|_{t=0} = \text{tr}(A) \end{aligned}$$

- Die Untergruppe

$$B := \{b \in \mathrm{GL}_n : b_{ij} = 0 \text{ für } i > j\} = \{(b_{ij}) \in M_n(\mathbb{C}) : b_{ii} \in \mathbb{C}^\times, b_{ij} = 0 \text{ für } i > j\} \subseteq \mathrm{GL}_n = G$$

heißt **Borel-Untergruppe**. Die zugehörige Lie-Algebra ist gegeben durch:

$$\mathrm{Lie}(B) = \mathfrak{b} = \{(b_{ij}) : b_{ij} = 0 \text{ für } i > j\} \supseteq B \text{ offen}$$

G/B ist eine algebraische Varietät und nicht affin.

$$U := \{(b_{ij}) \in M_n(\mathbb{C}) : b_{ii} = 1, b_{ij} = 0 \text{ für } i > j\} \subseteq B$$

heißt **unipotente Gruppe**.

0.2 Aktionen algebraischer Gruppen

Definition 0.6 (Darstellung einer linearen algebraischen Gruppe)

Sei G eine lineare algebraische Gruppe und $X = V(f_1, \dots, f_r)$ abgeschlossene Teilmenge in n . Eine **Darstellung** von G auf einem \mathbb{C} -Vektorraum W ist ein polynomialer Gruppenhomomorphismus $G \rightarrow \mathrm{GL}(W)$. G operiert dann auf W vermöge

20.10.

$$\begin{aligned} G \times W &\longrightarrow W \\ (g, w) &\longmapsto f(g)w \end{aligned}$$

Eine Aktion von G auf x ist eine polynomiale Abbildung $G \times X \rightarrow X$, sodass $(gh)x = g(hx)$ und $ex = x$ für alle $g, h \in G, x \in X$.

Beispiel 0.7

- 1) $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) = \mathrm{GL}(\mathbb{C}^n) = \mathrm{GL}(W)$ mit Standardaktion auf $W = \mathbb{C}^n$.

Orbiten: $\{0\}, W \setminus \{0\}$

Stabilisatoren: $\mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_n}(\{0\}) = \mathrm{GL}_n$ und

$$\mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_n}(e_1) = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 1 & * \\ \hline 0 & \mathrm{GL}_{n-1} \end{array} \right) \right\} = P(1, n-1) \quad (\text{parabolische Untergruppe})$$

2)

$\mathrm{GL}_n \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ Polynomialer Gruppenhomomorphismus gegeben durch \det^m mit $m \in \mathbb{Z}$

$$B \longrightarrow \mathbb{C}^\times \quad B \twoheadrightarrow H \rightarrow \mathbb{C}^\times, A \mapsto \lambda_1^{a_1} \cdots \lambda_n^{a_n}, a_i \in \mathbb{Z} (B/H = U)$$

$$H \longrightarrow \mathbb{C}^\times \quad \text{z.B. } (t_1, \dots, t_n) \mapsto t_1^{a_1} \cdots t_n^{a_n}, a_i \in \mathbb{Z}$$

$$\mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times \quad t \mapsto t^m, m \in \mathbb{Z}$$

Index

Borel-Untergruppe, 7

Darstellung, 7

Jacobi-Identität, 6

Lie-Algebra, 6

Lie-Klammer, 5

lineare algebraische Gruppe, 6

Morphismus

 affiner Varietäten, 5

polynomiale Funktion, 5

rationale Funktion, 5

unipotente Gruppe, 7

Verschwindungsmenge, 4

Zariski-Topologie, 4, 5

Liste der Sätze und Definitionen

Definition 0.1	polynomiale und rationale Funktion	5
Definition 0.3	Zariski-Topologie	5
Definition 0.4	Lie-Algebra und Lie-Klammer	5
Definition 0.5	lineare algebraische Gruppe	6
Definition 0.6	Darstellung einer linearen algebraischen Gruppe	7