Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Fachbereich 10 Mathematik und Informatik

Finanzmathematik

Mitschrift der Tafelnotizen

Tobias Wedemeier

21. November 2014

gelesen von

PD Dr. Paulsen

Hierbei handelt es sich um eine Mitschrift der Tafelnotizenvon **PD Dr. Paulsen**, WWU Münster, aus der Vorlesung **Finanzmathematik** im Wintersemester 2014/15. Dies ist kein Skript der Vorlesung und keine eigene Arbeit des Autors.

Für Fehler in der Mitschrift wird keine Haftung übernommen. Hinweise auf Fehler sind gerne gesehen, hierfür kann man mich in der Uni ansprechen oder alternativ eine e-Mail an: *tobias.wedemeier@gmx.de*
Auch ist eine Mitarbeit über Github möglich.

Wenn Teile aus der Vorlesung selber fehlen, können diese gerne an meine e-Mail versandt werden. Ich werde diese dann einarbeiten.

Inhaltsverzeichnis

Prolog

Ziel

- Bewertung von Finanzderivaten, dies entspricht der Bewertung von Finanzmarktrisiken
- aktuarielle Bewertung von Risiken, biometrische Risiken (Rente,...) $\leftrightarrow$ Personenversicherungen, sonstige Risiken (Unfall, ...) $\leftrightarrow$ Schadenversicherungen

Schlagwörter

- Black-Scholes Formel
- äqivalentes Martnigalmaß
- Hedging, Replizieren durch Handel
- Arbitage
- Äquivalenzprinzip
- Risikoausgleich im Kollektier

Hilfsmittel

Theorie der stochastischen Prozesse

- mathem. Modellierung von zeitlich abhängigen Zufallsphänomenen
- notwendig zur Beschreibung von Finanzmärkten

Themen

- diskrete und kontinuierliche Martnigaltheorie
- diskrete und kontinuierliche Markov-Prozesse
- Wiener-Prozess, Brownsche Bewegung
- geometrische Brownsche Bewegung als Modell für Aktienkurse

1 Informelle Einführung

(i) Zweiteilung von Finanzgütern in:
  (1) Basisfinanzgüter
  (2) derivative Finanzgüter

(ii) zu (1) gehören:
- Aktien
- festverzinsliche Wertpapiere, Bonds
- Rohstoffe, Agrarprodukte

diese werden gehandelt auf:
- Aktienmärkte
- Rentenmärkte
- Warenmärkte

Diese werden als Kassamärkte bezeichnet.

(iii) zu (2) gehören:
- Optionen auf Aktien
- Swaps (Zinsderivate)
- futures und forwards

1.1 Option

Unterscheidung in Kauf- und Verkaufoptionen

- Eine Kaufoption (**Call**) gibt das Recht ein Basisfinanzgut (**Underlying**), zu einem im Voraus bestimmten fixen Preis, dem Ausübungspreis (**strike**, Basis), während (**amerikanische Option**) oder nur am Ende der Laufzeit der Option (**europäische Option**) zu kaufen.
- Eine Verkaufoption (**Put**) gibt das Recht ein Basisfinanzgut (Underlying), zu einem im Voraus bestimmten fixen Preis, dem Ausübungspreis (strike, Basis), während (amerikanische Option) oder nur am Ende der Laufzeit der Option (europäische Option) zu verkaufen.

Dies sind **unbestimmte Termingeschäfte** , da keinerlei Verpflichtung zum Kauf bzw. Verkauf besteht.

1.2 long, short

In der Regel nimmt der Käufer eines Finanzgutes eine **long-Position** ein, der Verkäufer eine **short-Position**. Der Verkäufer wird auch als writer (Zeichner) bezeichnet, da er die Option 'zeichnet'. Man kann zu jeder Zeit eine long oder short Position eingehen, insbesondere auch wenn man die Aktie gar nicht besitzt. Dies wird auch als **Leerverkauf** (short selling) bezeichnet, hierbei leiht man sich die Aktie von der Bank um sie zu verkaufen.

1.3 Payoff und Profit Diagramme

- Positionen in Finanzgütern bergen Chancen und Risiken.
- **Payoff**: Wert der Position wird gegen den Preis des Underlyings aufgetragen
- **Profit**: analog zum Payoff, unter Berücksichtigung von Kosten (Anfangswert der Postion)
- Beispiele: Option mit Laufzeit $T \in \mathbb{N}$, Underlying mit Preis S_T in T

  (a) long call: strike K
  Payoff: $(S_T - K)^+$
  $S_T \leq K$ keine Ausübung, $S_T > K$ Ausübung der Option (Ablauf: leihe Geld, kaufe Aktie, verkaufe Aktie, zahle Geld zurück)

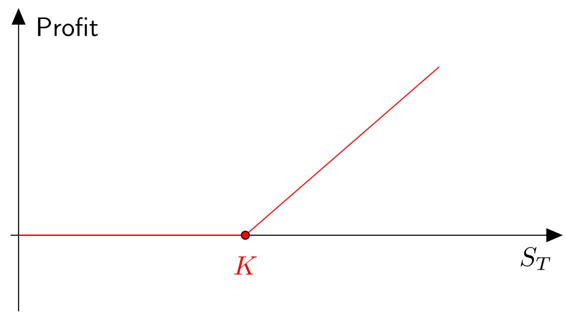


Abbildung 1: Payoff long call

Kosten: Anfangspreis des Calls $c > 0$. Profit: $(S_T - K)^+ - c$

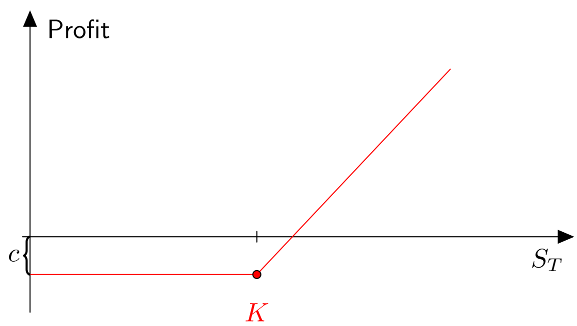


Abbildung 2: Profit long call

(b) long put: strike K
Payoff: $(K - S_T)^+$
$S_T > K$ keine Ausübung, $S_T \leq K$ Ausübung der Option (Ablauf: leihe Aktie, verkaufe Aktie, kaufe Aktie, gebe Aktie zurück)

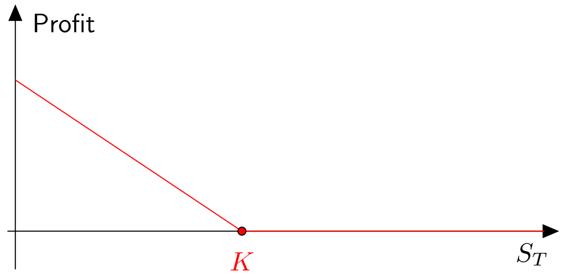


Abbildung 3: Payoff long put

Kosten: Anfangspreis de Option $p > 0$. Profit: $(K - S_T)^+ - p$

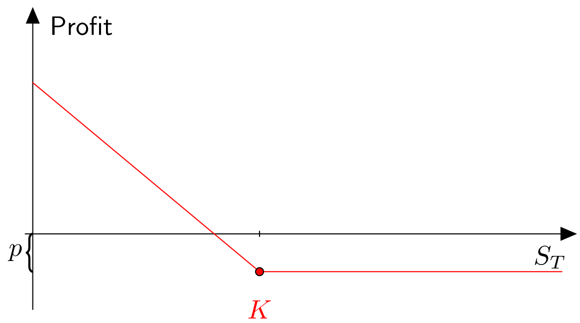


Abbildung 4: Profit long put

(c) short call:
Payoff: $-(S_T - K)^+$, Profit: $c - (S_T - K)^+$

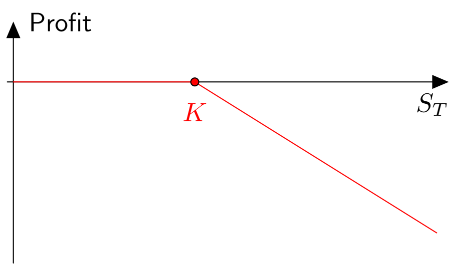


Abbildung 5: Payoff short call

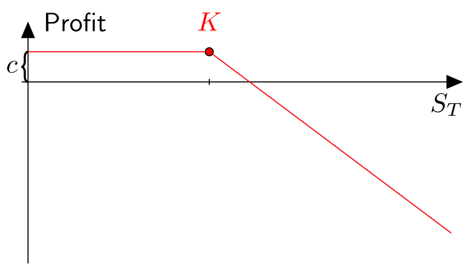


Abbildung 6: Profit short call

(d) short put:
Payoff: $-(K - S_T)^+$, Profit: $p - (K - S_T)^+$

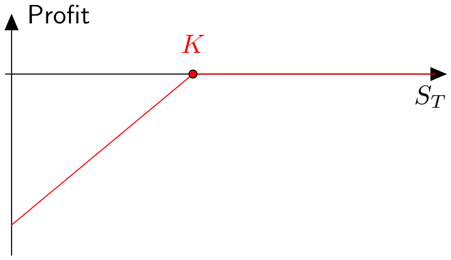


Abbildung 7: Payoff short put

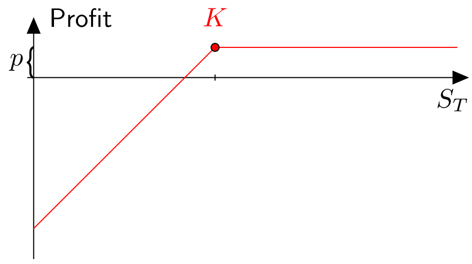


Abbildung 8: Profit short put

1.4 Strategien

Durch Kombination von einfachen Positionen bildet man **Strategien**.

Bsp

- Absicherung einer Aktie:
  - Aktie zum heutigen Kurs kaufen mit strike K
  - zur Absicherung gegen Kursverlust in T wird eine Putoption zum strike K gekauft
- Gesamtposition:

	long Aktie	long put	Gesamt
Kosten	K	p	$K + p$
Payoff	S_T	$(K - S_T)^+$	$S_T + (K - S_T)^+ = \max\{K, S_T\}$

- Profit:

$$S_T + (K - S_T)^+ - (K + p) = (S_T - K) + (K - S_T)^+ - p = -p\mathbb{1}_{\{S_T \leq K\}} + (S_T - (K + p))\mathbb{1}_{\{S_T > K\}}$$

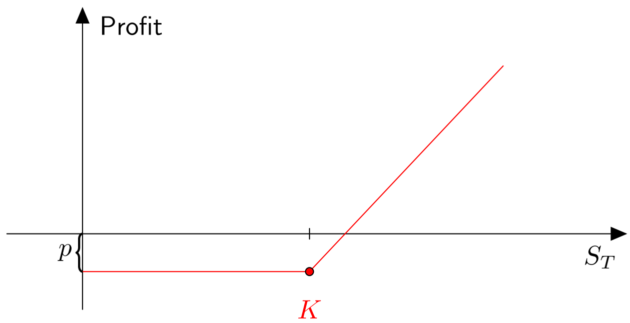


Abbildung 9: Bsp. Profit Diagramm

long straddle

- Idee: Spekulation auf eine starke Kursänderung

	long call	long put	Gesamt
Kosten	c	p	$c+p$
Payoff	$(S_T-K)^+$	$(K-S_T)^+$	$\|S_T-K\|$

Profit: $|S_T-K|-(c+p)$

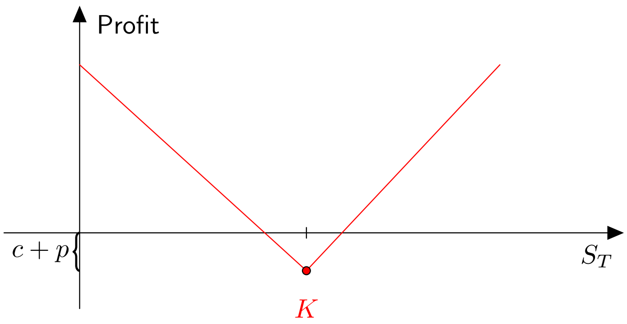


Abbildung 10: long straddle

Bullish Vertical Spread

Idee: Risikoarme Spekulation auf ein Anziehen des Kurses

Je kleiner der strike, desto teuerer ist der call.

	long call mit strike K_1	short call mit strike $K_2>K_1$	Gesamt
Kosten	c_1	$-c_2$	$c_1-c_2>0$
Payoff	$(S_T-K_1)^+$	$-(S_T-K_2)^+$	$(S_T-K_1)\mathbb{1}_{\{K_1<S_T<K_2\}}+(K_2-K_1)\mathbb{1}_{\{S_T>K_2\}}$

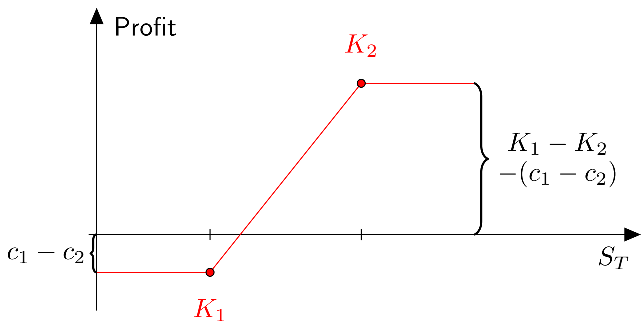


Abbildung 11: Bullish Vertical Spread

Butterfly Spread

Idee: Risikoarme Spekulation auf eine Seitwärtsbewegung des Kurses

strike: $K_1<K_2<K_3$

	long call strike K_1	long call strike K_3	$2\times$ short call strike K_2	
Kosten	c_1	c_3	$-2c_2$	$c_1+c_3-2c_2$

Payoff: $(S_T-K_1)\mathbb{1}_{\{K_1<S_T<K_2\}}+(2K_2-K_1-S_T)\mathbb{1}_{\{K_2<S_T<K_3\}}+2K_2-(K_1+K_3)\mathbb{1}_{\{S_T>K_3\}}$

Fall $K_2 = \frac{1}{2}(K_1 + K_3) \Rightarrow c_1 + c_3 - 2c_2 > 0$

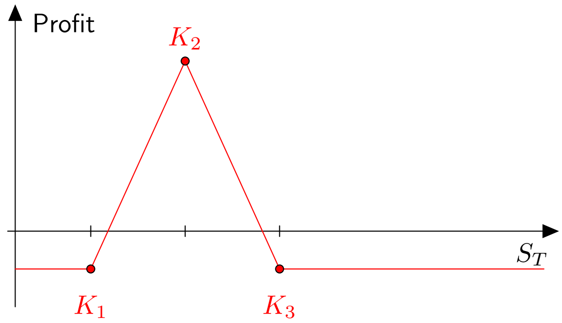


Abbildung 12: long Butterfly Spread

Für weitere Strategien klicken Sie hier.

1.5 Arbitrage

- Ein **Arbitrage** ist eine Möglichkeit durch Handel mit Finanzgütern einen risikolosen Profit zu erzielen.
- **Bsp**

	New York	Frankfurt
Aktie	130 \$	100 €
Wechselkurs	1,27 \$ $\widehat{=}$ 1 €	

- Arbitragemöglichkeit:
  leihe 100 € $\rightsquigarrow$ kaufe Aktie in Frankfurt $\rightsquigarrow$ verkaufe Aktie in New York $\rightsquigarrow$ tausche 127 \$ in 100 € $\rightsquigarrow$ 100 € zurück zahlen $\rightsquigarrow$ risikolosen Profit von 3 \$
- Grundannahme:
  Im Handel mit Finanzgütern gibt es keine Arbitragen. Dies ist das sogenannte **No-Arbitrage Prinzip**.
- Aus dem No-Arbitrage Prinzip kann das **Replikationsprinzip** gefolgert werden.

1.6 Replikationsprinzip

Haben zwei verschiedene Kombinationen K, L von ausschüttungsfreien Finanzgütern zu einem zukünftigen Zeitpunkt $T \in \mathbb{R}$ immer den gleichen Wert, so haben sie auch zum gegenwärtigen Zeitpunkt den gleichen Wert.
Die Kombination K repliziert den Payoff der Kombination L, und umgekehrt.
Argumentation:
K,L habe den Anfangswert $V_0, W_0 \in \mathbb{R}$ und den zufälligen Wert $V_T, W_T \in \mathbb{R}$ in T.
Es gelte: $V_T = W_T$:
Beh.: $V_0 = W_0$

$\mathbb{A}$
1.Fall: $V_0 > W_0$.
Dann kann durch short selling von K ein Arbitrage erzielt werden:

- short selling in K

- gehe long in L

$\Rightarrow$ am Anfang Gewinn $V_0 - W_0 > 0$

- handeln entsprechend L bis T

in T:

- verkaufe L, erhalte $W_T = V_T$
- kaufe K für V_T und gebe die Position K zurück

Am Ende: Glattstellen der Positionen $W_T - V_T = 0$ ↯

2.Fall: $W_0 > V_0$. Analog. □

1.7 Nullkouponanleihe

festverzinsliches Wertpapier:

- Fälligkeit T (Maturity)
- Zahlung von 1 Euro
- keine Kouponzahlung während der Laufzeit

$B(t, T)$ bezeichne den Preis dieser Anleihe zum Zeitpunkt $t < T$. $0 < B(t, T) < 1$ ist der Regelfall.

1.8 Put-Call Parität

Seien c, p die Anfangspreise einer Call- bzw. Putoption mit Laufzeit T und strike K.
Sei S_0 und S_T die Preise des Underlyings heute und in T.
Dann gilt:

$$S_0 + p = c + K \cdot B(0, T)$$

Argumentation:
Betrachte folgende Kombinationen:
I: long Aktie, long put
II: long call, $K\cdot$ long in eine Nullkouponanleihe mit Fälligkeit in T

Wert zum Zeitpunkt T:
I: $S_T + (K - S_T)^+ = \max\{S_T, K\}$
II: $(S_T - K)^+ + K = \max\{S_T, K\}$

Replikationsprinzip liefert:

$$S_0 + p = c + K \cdot B(0, T)$$

□

1.9 forward

Ein **forward** ist ein unbedingtes Termingeschäft mit Ausübungszeitpunkt T (Maturity),für ein Underlying mit Preisen S_0 heute und S_T in T.Zwei Parteien A und B mit festem Terminpreis F_T zum Vertragsabschluss. In T: A zahlt an B den Terminpreis F_T, B liefert das Underlying
A hat die long-Position im forward, B die short-Position.Zusammenhang zwischen Termin- und Spotpreis des Underlyings.

zum Beispiel bei Agrargütern

S_0 - gegenwärtiger Preis, **Spotpreis**
F_T - Terminpreis zum Termin T
Dann gilt:

$$F_T \cdot B(0,T) = S_0$$

Argumentation:
Betrachte folgende Kombinationen:
I: long im forward zum Zeitpunkt T, $F\times$ long in einer Nullkouponanleihe mit Fälligkeit T
II: long im Underlying
Wert zum Zeitpunkt T: I: $\underbrace{S_T - F_T}_{forward} + \underbrace{F_T}_{Nullkouponanleihe} = S_T$
II: S_T
Replikationsprinzip liefert:

$$F_T \cdot B(0,T) = S_0$$

1.10 Digitale Position

Recht auf Auszahlung eines festen Geldbetrags (etwa 1 €) bei Eintreten eines auslösenden Ereignisses (**bedingtes Termingeschäft**).
z.B.

digitaler call	digtialer put
$\mathbb{1}_{\{S_T \geq K\}}$	$\mathbb{1}_{\{S_T \leq K\}}$

1.11 Eigenschaften des Call-Preises

Sei $C(S_0,T,K)$ der Preis eines Calls auf ein Underlying mit Laufzeit T, strike K und Anfangspreis S_0. Dann gilt:

(i) $C(S_0,T,K) \geq \max\{0, S_0 - K\cdot B(0,T)\}$ **innerer Wert** des Calls

(ii) $C(S_0,T,K) \leq S_0$ **obere Grenze** des Calls

(iii) $K_1 \leq K_2 \Rightarrow C(S_0,T,K_1) \geq C(S_0,T,K_2)$

(iv) $B(0,T)(K_2-K_1) \geq C(S_0,T,K_1) - C(S_0,T,K_2)\ \forall K_1 < K_2$

(v) $C(S_0,T,K_2) \leq \frac{K_3-K_2}{K_3-K_1}\cdot C(S_0,T,K_1) + \frac{K_2-K_1}{K_3-K_1}\cdot C(S_0,T,K_3)\ \forall K_1 < K_2 < K_3$ **Konvexität in K**

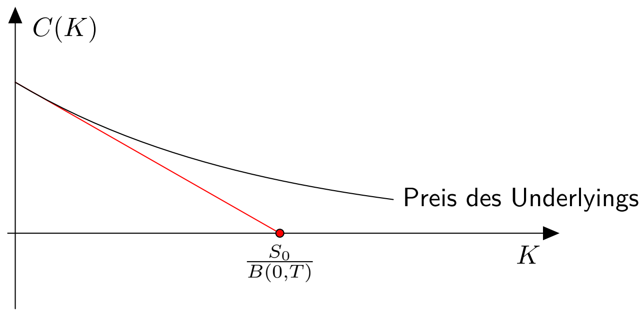


Abbildung 13: Konvexität in K

Argumentation:

(i) Falls $C(S_0, T, K) < 0$ gehe long im Call und halte bis T. Risikolosen Gewinn von $|C(S_0, T, K)| > 0$ am Anfang. $\lightning_{No-Arbitrage}$
Genauso sieht man ein, dass $P(S_0; T, K) \geq 0$
Put-Call Parität liefert:

$$\begin{aligned} C(S_0, T, K) &= S_0 + P(S_0, T, K) - K \cdot B(0, T) \\ &\geq S_0 - K \cdot B(0, T) \end{aligned}$$

(ii) Falls $C(S_0, T, K) > S_0$.
long Aktie, short im call
am Anfang: Gewinn von $C(S_0, T, K) - S_0 > 0$, benutze die Aktie um die Verpflichtung des Calls zu erfüllen: $S_T - (S_T - K)^+ \geq 0$ $\lightning_{No-Arbitrage}$

(iii) Sei $K_1 \leq K_2$:
Falls $C(K_1) < C(K_2)$ gehe short in K_2 und long in K_1.
am Anfang: $C(K_2) - C(K_1) > 0$
am Ende: $(S_T - K_1)^+ - (S_T - K_2)^+ = (S_T - K_1)\mathbb{1}_{\{K_1 \leq S_T \leq K_2\}} - (K_2 - K_1)\mathbb{1}_{\{S_T > K_2\}} > 0$ $\lightning_{No-Arbitrage}$

(iv) Sei $K_1 < K_2$.
Falls $C(K_1) - C(K_2) > (K_2 - K_1) \cdot B(0, T)$ gehe short in K_1, long in K_2, long $(K_2 - K_1)\times$ Nullkouponanleihe
am Anfang: $C(K_1) - C(K_2) - (K_2 - K_1) \cdot B(0, T) > 0$
am Ende: $(S_T - K_2)^+ - (S_T - K_1)^+ + K_2 - K_1 \geq 0$ $\lightning_{No-Arbitrage}$

(v) $K_1 < K_2 < K_3$; $K_2 = \lambda K_1 + (1 - \lambda)K_3$ mit $\lambda = \frac{K_3 - K_2}{K_3 - K_1}$
Falls $C(K_2) > \lambda C(K_1) + (1 - \lambda)C(K_3)$, gehe short in K_2, $\lambda\times$ long in K_1, $(1 - \lambda)\times$ long in K_3.
am Anfang: $C(K_2) - \lambda C(K_1) - (1 - \lambda)C(K_3) > 0$
am Ende:

$$\begin{aligned} \lambda(S_T - K_1)^+ + (1 - \lambda)(S_T - K_3)^+ - (S_T - K_2)^+ = {} & \lambda(S_T - K_1)\mathbb{1}_{\{K_1 < S_T < K_2\}} \\ & + [\lambda(S_T - K_1) - (S_T - K_2)]\, \mathbb{1}_{\{K_2 < S_T < K_3\}} \\ & + \underbrace{[K_2 - (\lambda K_1 + (1 - \lambda)K_3)]\, \mathbb{1}_{\{S_T > K_3\}}}_{=0} \end{aligned}$$

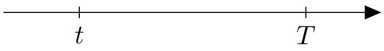
da

$$\begin{aligned} \lambda(S_T - K_1) + (K_2 - S_T) &= K_2 - \lambda K_1 - (1 - \lambda)S_T \\ &= \lambda K_1 + (1 - \lambda)K_3 - \lambda K_1 - (1 - \lambda)S_T \\ &= (1 - \lambda)(K_3 - S_T) \geq 0 \\ & \lightning_{No-Arbitrage} \end{aligned}$$

1.12 Zinsmethoden

Frage: Wie kann man Kapitalrenditen durch annualisierte **Zinssätze** beschreiben?
Antwort: Man vereinbart eine **Zinsmethoden** und eine **Zählkonvention** (Anzahl der Tage eines Jahres).
Genauer: Kapital N wird zum Zeitpunkt t in eine Nullkouponanleihe mit Fälligkeit in T angelegt.

Zählkonvention für uns nicht wichtig



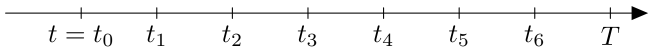
in t: erhalte für N:
$\frac{N}{B(t,T)}$ T-Bonds $\{$Nullkouponanleihe mit Fälligkeit in T

in T: die Position hat einen Wert von $\frac{N}{B(t,T)}$

<u>Gewinn:</u> $\frac{N}{B(t,T)} - N = N\left(\frac{1}{B(t,T)} - 1\right)$
$R(t,T) = \frac{1}{B(t,T)} - 1$ kann als Kapitalrendite interpretiert werden, die ein Investment zwischen t und T hervorbringt:
<u>Ziel:</u> Beschreibung durch einen jährlichen Zinssatz:

(a) **<u>lineare Zinsmethode:</u>**
lineare Verteilung der jährlichen Zinsen auf die Laufzeit $R(t,T) = \underbrace{(T-t)}_{Laufzeit} \cdot r_{lin}$, r_{lin} ist der jährliche Zinssatz bei linearer Zinsmethode.
<u>Bsp.</u>
Anlage Zeitraum ein Monat
- Rendite von $0.5\% = 50\ bp$ (ein Basispunkt $\hat{=}$ 0,01%)
- $r_{lin} = 0.5\% \cdot 12 = 6\%$

(b) **<u>periodische Zinsmethode:</u>**



setzte $t_i = t + i \cdot \frac{T-t}{m}, i = 0, \ldots, m$
Ein jährlicher Zins r wird linear verteilt auf die Periodenlänge. Das Kapital wird unter Berücksichtigung von Zinseszinsen verzinst.
<u>Verzinsung:</u>
$$K_m(r,t,T) := \left(1 + r \cdot \frac{T-t}{m}\right)^m = 1 + R(t,T)$$

(c) **<u>stetige Zinsmethode:</u>**

(i) <u>Konstante</u> Zinsrate r
erhält man als Grenzübergang für $m \to \infty$
$\lim\limits_{m\to\infty} K_m(r,t,T) = e^{r(T-t)} = 1 + R(t,T)$

(ii) <u>nicht konstante</u> Zinsrate
$r : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ liefert eine Kapitalentwicklung der Form:
$$K(r,t,T) = e^{\int\limits_t^T r(s)\mathrm{d}s}$$
zwischen t und T.

Veranschaulichung:
$r : [0, \inf) \to \mathbb{R}, \quad t_i = t + i \cdot \frac{T-t}{m}, i = 0, \dots, m$
1 €in t_0 ergibt bei Zinsrechnung:

$$K_m(r,t,T) = (1 + r(t_0)\Delta t) cdot (1 + r(t_1 \Delta t) \cdot \dots \cdot (1 + r(t_m)\Delta t)$$

$$log\ K_m(r,t,T) = \sum_{i=1}^{m} log(1 + r(t_{i-1})\Delta t)$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{m} r(t_{i-1})\Delta t}_{\int_t^T r(s)\mathrm{d}s} + \underbrace{\mathcal{O}(\Delta t)}_{\xrightarrow{\Delta t \to 0} 0}$$

1.13 Festzinsanleihe

- festverzinsliches Wertpapier
- Nominal N
- Fälligkeit T
- Zinstermine $t_1 < t_2 < \dots < t_m \le T$
- Koupons $K_1, K_2, \dots, K_m$

In der Regel werden Koupons als Zins auf das Nominal gezahlt, d.h. $K_i = N \cdot R$, R Zinssatz.

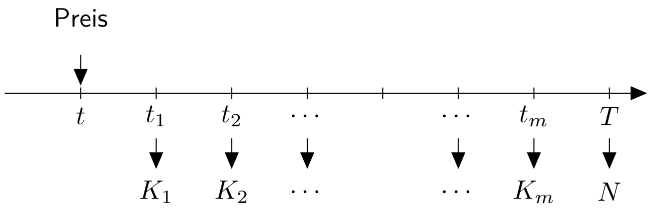


Abbildung 14: Ablauf Festzinsanleihe

Bewertung zu Zeitpunkt $t < t_1$:
Mit Hilfe einer Modifikation des Replikationsprinzips:
I: long in die festzinsanleihe
II: long in $K_i \times$ T_i-Bonds, $i = 1, \dots, m$, long in N T-Bonds

Beide Strategien erzeugen den gleichen Zahlungsstrom an Auschüttungen:

$$K_1 \text{ in } t_1, K_2 \text{ in } t_2, \dots K_m \text{ in } t_m$$

und haben den gleichen Endwert N in T.
Replikationsprinzip liefert, dass die Preise in $t < t_1$ übereinstimmen müssen, d.h.

Preis der Festzinsanleihe in $t < t_1$ ist

$$\sum_{i=1}^{m} K_i \cdot B(t, t_i) + N \cdot B(t, T)$$

1.14 Variabelverzinsliche Anleihe

Floater FRN (Floating Rate Note)

- Nominal N
- Fälligkeit T
- Startpunkt t_0
- Zinszahlungstermine $t_0 < t_1 < \cdots < t_m = T$
- **nachschüssige Kouponzahlungen** $K_1, K_2, \ldots, K_m$ entsprechend dem für die Periode geltendem Marktzins

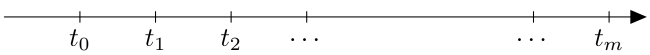
  $$F(t_{i-1}, t_{i-1}, t_i) = \frac{1}{t - t_{i-1}} \cdot \left(\frac{1}{B(t_{i-1}, t)} - 1 \right)$$

  also

  $$\begin{aligned} K_i &= N \cdot F(t_{i-1}, t_{i-1}, t_i)(t_i - t_{i-1}) \\ &= N \left(\frac{1}{B(t_{i-1}, t_i)} - 1 \right), \quad i = 1, \ldots, m \end{aligned}$$

- Bewertung in t_0 durch folgende replizierende Handelsstrategie:
  Rollierende Anlage des Nominals bis zum jeweiligen nächsten Zinstermin.

Genauer:



- in t_0: Kaufe $\frac{N}{B(t_0,t_1)}$ t_1-Bonds und halte bis t_1
- in Tt_1:
  - Reinvestition von N in die 2.-Zinsperiode durch Kauf von $\frac{N}{B(t_1.t_2)}$ t_2-Bonds
  - Ausschüttung der Zinszahlung von $\frac{N}{B(t_0,t_1)} - N = N \cdot F(t_0, t_0, t_1)(t_1 - t_0) = K_1$
- ...
- ...
- in t_m:
  - Rückzahlung von N
  - Ausschüttung der letzten Zinszahlung $\frac{N}{B(t_{m-1},t_m)} - N = K_m$

Das Halten der variabel verzinslichen Anleihe und das Durchführen der rollierenden Handelsstrategie liefern den gleichen Zahlungsstrom an Zinszahlungen und haben zur Fälligkeit das Nominal als Endwert. Für die Handelsstrategie wird in t_0 ein Kapital von N benötigt. Desgalb ist der Preis der variabel verzinslichen Anleihe in t_0 durch N gegeben.
In $t < t_0$ ist der Preis $N \cdot B(t, t_0)$, denn durch Kauf von N t_0-Bonds in t kann die rollierende Handelsstrategie von t beginnend durchgeführt werden.

1.15 Swaps

Ein **Zinsswap** liefert die Möglichkeit das **Zinsänderungsrisiko** einer Festzinsanleihe zu vermeiden:

- Tauschgeschäft
- beim Zinsswap werden feste gegen variable Zinsen getauscht
- **Tenorstruktur** $t_0 < t_1 < \cdots < t_m$
- jährlichen Festzinssatz
- Nominal N, das nur zur Berechnung der Zinsen dient
- Unterscheidung in **Payer- und Reciever-Swaps** ausgehend von der Festzinsseite

Am Ende einer jeden Periode werden die festen Zinsen $N \cdot R(t_i - t_{i-1})$ gegen die variablen $N \cdot F(t_{i-1}, t_{i-1}, t_i)(t_i - t_{i-1})$ getauscht.
Dies führt zum Zahlungsstrom

$$N(t_i - t_{i-1})\left(F(t_{i-1}, t_{i-1}, t_i) - R\right), \; 1 \le i \le m$$

beim Payer-Swap und

$$N(t_i - t_{i-1})(R - F(t_{i-1}, t_{i-1}, t_i))$$

beim Reciever-Swap.
Ein Payer-Swap kann repliziert werden durch eine long-Position in der FRN, short in die Festzinsanleihe zum Nominal N und Zinszahlungsterminen passend zur Tenorstruktur.
Deshalb gilt für den Preis Payerswap(t) in $t \le t_0$:

$$\begin{aligned}\text{Payerswap}(t) &= \underbrace{N \cdot B(t, t_0)}_{\text{FRN in } t} - \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{m} N \cdot R(t_{i-1} - t_i) \cdot B(t, t_i) + N \cdot B(t, t_m)\right)}_{\text{Festzinspreis}} \\ &= N\left(B(t, t_0) - B(t, t_m) - \sum_{i=1}^{m} R \cdot B(t_{i-1}, t_i)\right)\end{aligned}$$

Der "faire"Festzinspreis R liegt dann in t vor, wenn Payer-Swap(t)=0, also wenn

$$R = \frac{B(t, t_0) - B(t, t_m)}{\sum\limits_{i=1}^{m} B(t, t_i)(t_i - t_{i-1})}$$

R ist dann die sogenannte **Swaprate** in t.

2 Aktuarielle Bewertung von Zahlungsströmungen

Ziel: Bewertung von Zahlungsverpflichtungen, die durch biometrische Risiken verursacht werden. Biometrische Risiken sind zum Beispiel Todesfall, Invalidität,...

2.1 Zahlungsströme und deren Bewertung

- zeitdiskrete periodische Sichtweise, Zeit wird in Jahren gemessen

Definition

- Ein Zahlungsstrom Z ist eine Folge $(Z(n))_{n\in\mathbb{N}}$ von nicht negativen reellen Zahlen, $Z(n) \mathrel{\hat{=}}$ Auszahlung zum Zeitpunkt n
- Frage: Was ist der Kapitalwert, der durch den Zahlungsstrom der verursachten Zahlungsverpflichtungen entsteht?
- Antwort: Summe der **abdiskontierten** Zahlungen
- Genauer: Für jedes $n \in N$ gibt $B(k,n)$, den Preis des n-Bonds zum Zeitpunkt k, den Wert einer in n fälligen Zahlungsverpflichtung von 1€ an.
- Deshalb definieren wir:

  $$V_0(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} Z(n) \cdot B(0,n)$$

  Summe aller auf den Anfang abdiskontierten Zahlungsverpflichtungen, Kapitalwert von heute.
  Und

  $$V_m(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} Z(m+k) \cdot B(m,m+k)$$

  Summe aller nach m fälligen auf den Zeitpunkt m abdiskontierten Zahlungsverpflichtungen.
- $V_m(Z)$ ist das Kapital, das zum Zeitpunkt m benötigt wird, um die zukünftigen Zahlungsverpflichtungen erfüllen zu können.
- Praxis: Periodische Rendite r, periodische **Diskontfaktor**

  $$v = \frac{1}{1+r} \Rightarrow B(m,n) = v^{n-m} \quad \forall 0 \le m \le n$$

2.2 Personenversicherung und deren Bewertung

Ziel:
Mathematische Beschreibung und Analyse einer Personenversicherung
Definition:
Eine Personenversicherung ist ein Quadertupel $\Gamma = (t,s,b,T)$ mit Zahlungsströmen $(t(n))_{n\in\mathbb{N}_0},\ (s(n))_{n\in\mathbb{N}_0},\ (b(n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(0,\infty)$-wertiger Zufallsvariabel T.
Interpretation:

- T ist eine zufällige Ausfallzeit (etwa Restlebensdauer)
- **Todesfallspektrum** $(t(n))_{n\in\mathbb{N}_0}$

  $$t(n) \ge 0 \mathrel{\hat{=}} \text{ Auszahlung in } n \text{ bei Ausfall in der } n\text{-ten Periode}$$

- **Erlebensspektrum** $(s(n))_{n\in\mathbb{N}_0}$

  $$s(n) \ge 0 \mathrel{\hat{=}} \text{ Auszahlung in } n\text{, wenn } n \text{ erreicht wird}$$

- **Beitragsspektrum** $(b(n))_{n\in\mathbb{N}_0}$

$$b(n) \geq 0 \mathrel{\hat{=}} \text{ Premienzahlung in } n\text{, wenn } n \text{ erreicht wird}$$

Aus Sicht des Versicherungsunternehmens erzeugt eine Personenverischerung die folgenden zufälligen Zahlungsströme:

Ausgabenstrom:
$A(n) = s(n)\mathbb{1}_{\{T>n\}} + t(n)\mathbb{1}_{\{n-1<T\leq n\}}$
$\forall n \in \mathbb{N}_0, \quad A(0) = s(0)$
Bewertung aus heutiger Sicht durch

Einnahmestrom:
$I(n) = b(n)\mathbb{1}_{\{T>n\}} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$

$$V_0(A) = s(0) + \sum_{n=1}^{\infty} s(n)\mathbb{1}_{\{T>n\}}B(0,n) + \sum_{n=1}^{\infty} t(n)\mathbb{1}_{\{n-1<T\leq n\}}B(0,n)$$
$$V_0(I) = \sum_{n=0}^{\infty} b(n)\mathbb{1}_{\{T>n\}}B(0,n)$$

$V_0(A) \mathrel{\hat{=}}$ heutiger Kapitalwert des zufälligen Zahlungsstroms
$\mathbb{E}V_0(A) \mathrel{\hat{=}}$ mittlerer Kapitalwert der zukünftigen Zahlungsverpflichtung
$\mathbb{E}V_0(I) \mathrel{\hat{=}}$ mittlerer Kapitalwert der Einnahmen
Definition:
$\mathbb{E}V_0(A)$ heißt **Barwert** der durch die Versicherung induzierten Zahlungsverpflichtungen. $\mathbb{E}V_0(I)$ heißt **Barwert** der durch die Versicherung induzierten Einnahmen.
Eine Personenversicherung heißt **ausgewogen** oder **fair**, wenn $\mathbb{E}V_0(A) = \mathbb{E}V_0(I)$ gilt und beide endlich sind.
Ist $\mathbb{E}V_0(A) < \infty$ oder? $\mathbb{E}V_0(I) < \infty$, so ist $\mathbb{E}V_0(A) - \mathbb{E}V_0(I)$ der Barwert der Versicherung.
Dies ist als Ausgangspreis zu interpretieren, den ein Versicherungsunternehmen verlangt.
Äquivalenzprinzip:
Man wähle (t, s, b) so, dass die Versicherung fair ist.

2.3 Klassische Beispiele

- versichert wird eine Person
- biometrisches Risiko ist das Todesfallrisiko
- Ausfallzeit ist deshalb die Restlebensdauer der Person

(a) **Todesfallversicherung:**

- Todesfallsumme M
- Laufzeit n
- konstante periodische Prämienzahlung

$$t(k) = M \quad \forall k = 1, \ldots, n \qquad t(k) = 0 \text{ sonst}$$
$$s(k) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$$
$$b(k) = p \quad \forall k = 0, \ldots, n-1 \qquad b(k) = 0 \text{ sonst}$$

- Induzierte Zahlungsströme:

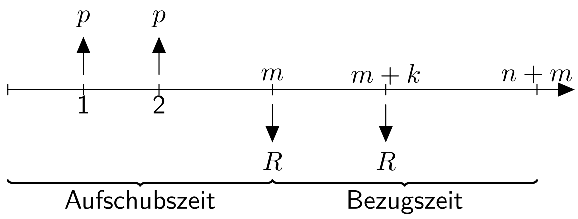
$$\begin{aligned}
A(k) &= M \cdot \mathbb{1}_{\{k-1<T\leq k\}},\ k=1,\dots,n \quad A(k)=0 \text{ sonst}\\
I(k) &= p \cdot \mathbb{1}_{\{T>k\}},\ k=0,\dots,n-1 \quad I(k)=0 \text{ sonst}\\
V_0(A) &= \sum_{k=1}^{n} M \cdot B(0,k)\mathbb{1}_{\{k-1<T\leq k\}}\\
V_0(I) &= \sum_{k=0}^{n-1} p \cdot B(0,k)\mathbb{1}_{\{T>k\}}\\
\text{Also } \mathbb{E}V_0(A) &= \sum_{k=1}^{n} M \cdot B(0,k)\mathbb{P}(k-1<T\leq k)\\
\mathbb{E}V_0(I) &= p \cdot \sum_{k=0}^{n-1} B(0,k)\mathbb{P}(T>k)
\end{aligned}$$

- Praxis:
  - Restlebenszeit wird durch das Alter bestimmt T_x Restlebenszeit eines x-Jährigen
  - Stationaritätsannahme $\mathbb{P}(T_x > t+s \mid T_x > s) = \mathbb{P}(T_{x+s} > t)$
  - $q_x = \mathbb{P}(T_x \leq 1)$ 1-jährige Sterbew'keit eines x-Jährigen
  - $p_x = 1 - q_x = \mathbb{P}(T_x > 1)$ 1-jährige Überlebensw'keit eines x-Jährigen
  - ${}_kp_x := \mathbb{P}(T_x > k) = \mathbb{P}(T_x > 1)\mathbb{P}(T_x > k \mid T_x > 1) \overset{\text{Stationarität}}{=} p_x\mathbb{P}(t_{x+1} > k-1)$
    $= \dots = p_x p_{x+1} \cdots p_{x+k-1}$
  - ${}_kq_x = 1 -_k p_x = \mathbb{P}(T_x \leq k)$
  - Bezeichnung für $M=1$, Eintrittsalter x
    ${}_{|n}A_x = \sum_{k=1}^{n} v^k \mathbb{P}(k-1 < T_x \leq k)$
    für $p=1$:
    $\ddot{a}_{x:n\rceil} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k \mathbb{P}(T_x > k)$
    Die Todesfallversicherung ist fair, wenn $M \cdot {}_{|n}A_x = p \cdot \ddot{a}_{x:n\rceil}$
    $n \to +\infty$ entspricht Todesfallversicherung ohne zeitliche Beschränkung
  - Bezeichnung

$$\begin{aligned}
A_x &= \sum_{k=1}^{\infty} v^k \mathbb{P}(k-1 < T_x \leq k)\\
\ddot{a}_x &= \sum_{k=0}^{\infty} v^k \mathbb{P}(T_x > k)
\end{aligned}$$

(b) **aufgeschobene Rentenversicherung**

- Eintrittsalter x
- Aufschubszeit m Jahre
- Bezugszeit n Jahre
- Rentenhöhe R
- Beitragshöhe p



Modellierung:

- $T = T_x$ Restlebenszeit eines x-Jährigen
- $t(k) = 0 \ \forall k \in \mathbb{N}_0$
- $s(k) = 0 \ k = 0, \dots, m-1, \quad s(m+k) = R \ k = 0, \dots, n-1$
- $b(k) = p \ k = 0, \dots, m-1, \quad b(k) = 0$ sonst

Induzierte Zahlungsströme:

- Ausgaben: $A(m+k) = R \cdot \mathbb{1}_{\{T>m+k\}} \ k = 0, \dots, n-1, \quad A(k) = 0$ sonst
- Einnahmen: $I(k) = p \cdot \mathbb{1}_{\{T>k\}} \ k = 0, \dots, m-1 \quad I(k) = 0$ sonst
- Barwert der Ausgaben: $\mathbb{E}V_0(A) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} R \cdot v^{m+k} \mathbb{P}(T_> m+k)$
- Barwert der Einnahmen: $\mathbb{E}V_0(I) = p \underbrace{\sum_{k=0}^{m-1} v^k \mathbb{P}(T > k)}_{\ddot{a}_{x:m\rceil}} = p \cdot \ddot{a}_{x:m\rceil}$
- Bezeichnung für $R = 1$: ${}_{m|n}\ddot{a}_x := \sum\limits_{k=0}^{n-1} v^{m+k} \mathbb{P}(T > m+k)$
- Die Versicherung ist fair, wenn $R \cdot {}_{m|n}\ddot{a}_x = p \cdot \ddot{a}_{x:m\rceil}$
- Für $n = \infty$, lebenslange Rente: ${}_{m|}\ddot{a}_x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} v^{k+m} \mathbb{P}(T > m+k)$

(c) **Erlebensfallversicherung**

- Eintrittsalter x
- Laufzeit n Jahre
- **Erlebensfallsumme** M, Auszahlung bei Überleben von n Jahren
- konst. Prämie p, während der Laufzeit

Modellierung:

- $T = T_x$ Restlebenszeit
- $t(k) = 0 \ \forall k \in \mathbb{N}_0$
- $s(k) = \begin{cases} M, & k = n \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$
- $b(k) = \begin{cases} p, & k = 0, \dots, n-1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

Induzierte Zahlungsströme:

- Ausgaben: $A(m) = M \cdot \mathbb{1}_{\{T>m\}}$, $A(k) = 0$ sonst
- Einnahmen: $I(k) = p \cdot \mathbb{1}_{\{T>k\}}, \quad k = 1, \ldots, n-1$

Bewertung:

$$\mathbb{E}V_0(A) = M \underbrace{v^n \mathbb{P}(T > n)}_{= {}_mE_x} = M \cdot {}_nE_x$$

$$\mathbb{E}V_0(I) = p \cdot \ddot{a}_{x:n\rceil}$$

- Versicherung ist fair, wenn $M\ {}_nE_x = p\ddot{a}_{x:m\rceil}$

(d) **gemischte Versicherung** (Kapitalgebundene Lenbensvers.)

- Kombination aus Todesfall- und Erlebensversicherung
- Eintrittsalter x
- Laufzeit n
- Versicherungssumme M, fällig bei Tod während der Laufzeit oder bei Überleben der Laufzeit
- konst. Prämie p, während der Laufzeit

Modellierung:

- $T = T_x$ Restlebenszeit
- $t(k) = M, \quad k = 1, \ldots, n$, $t(k) = 0$ sonst
- $s(n) = M, \quad s(k) = 0$ sonst
- $b(k) = p, \quad k = 0, \ldots, n-1$, $b(k) = 0$ sonst

Induzierte Zahlungsströme:

$$\begin{aligned} A(k) &= M \cdot \mathbb{1}_{\{k-1<T\leq k\}}, && k = 1, \ldots, n-1 \\ A(n) &= M \cdot (\mathbb{1}_{\{n-1<T\leq n\}} + \mathbb{1}_{\{T>n\}}), && A(k) = 0 \text{ sonst} \\ I(k) &= p \cdot \mathbb{1}_{\{T>k\}}, && k = 0, \ldots, n-1 \end{aligned}$$

Bewertung:

$$\mathbb{E}V_0(A) = M({}_{|n}A_x + {}_nE_x) \qquad \mathbb{E}V_0(I) = p\ddot{a}_{x:n\rceil}$$

Versicherung ist fair, wenn $M({}_{|n}A_x + {}_nE_x) = p\ddot{a}_{x:n\rceil}$

2.4 Deckungskapital

Betrachtet wird nur der Fall einer **deterministischen Zinsentwicklung**,z.B. $B(k,n) \in (0,1)$ det. $\forall n \in \mathbb{N},\ k < n$

Beobachtung:

Anfangs sind die Prämieneinnahmen pro Jahr höher, als die zu erwartenden Ausgaben pro Jahr. Dies führt zum Aufbau einer **Prämienreserve**. Gegen Ende sind die zu erwartenden Leistungen pro Jahr höher, als die Prämien pro Jahr und werden durch die aufgebaute Prämienreserve finanziert.

Der **Deckungskapitalverlauf** spiegelt den Auf- und Abbau der Prämienreserve wieder.

Definition:

Gegeben sei eine allgemeine Prämienversicherung $\Gamma = (t, s, b, T)$. Sei $(A(n))_{n\in\mathbb{N}}$ und $(I(n))_{n\in\mathbb{N}}$ der Zahlungsstrom der Ausgaben und Einnahmen. Das nach m Jahren gebildete Deckungskapital $\mathcal{D}(m)$ ist definiert, als die Differenz der Barwerte, der dann zukünftigen Ausgaben und Einnahmen, wobei die Diskontierung auf das Ende des n-ten Jahres vorgegeben wird.

Anfang und Ende bezieht sich auf die Versicherung, bzw. viele Versicherungen zum selben Zeitpunkt

In mathematischen Formeln:

$$\mathcal{D}(m) = \mathbb{E}(V_m(A) \mid \underbrace{T > m}_{\text{die nach } m \text{ noch leben}}) - \mathbb{E}(V_m(I) \mid T > m) \quad \forall m \in \mathbb{N}_0$$

Dies ist die Definition des sogenannten **prospektiven Deckungskapitals** (vorausschauende Methode). Für $m = 0$ ist $\mathcal{D}(0)$ der Barwert der Versicherung. $\mathcal{D}(0) = 0$ liegt bei einer fairen Versicherung vor.

Bemerkung:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(V_m(A) \mid T > m) &= \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{\infty} A(m+k)\underbrace{B(m,m+k)}_{=v^k} \mid (T>m)\right)\\ &= \sum_{k=1}^{\infty} t(k+m)B(m,m+k)\mathbb{P}(m+k-1 < T < m+k \mid T > m)\\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} s(k+m)B(m,m+k)\mathbb{P}(T > m+k \mid T > m)\end{aligned}$$

Da $A(m+k) = t(k+m)\cdot \mathbb{1}_{\{m+k-1<T\leq m+k\}} + s(k+m)\cdot \mathbb{1}_{\{T>m+k\}}$

Analog:

$$\mathbb{E}(V_m(I) \mid T > m) = \sum_{k=0}^{\infty} b(m+k)B(m,m+k)\mathbb{P}(T > m+k \mid T > m)$$

2.5 Beispiele Deckungskapital

periodischen konst. Diskontfaktor v

(a) Todesfallverischerung:

- Eintrittsalter x
- VS $M = 1$
- Laufzeit n Jahre

$$A(k) = \mathbb{1}_{\{k-1<T_x\leq k\}}, \quad k = 1,\dots,n$$

$$I(k) = p\cdot \mathbb{1}_{\{T_x>k\}}, \quad k = 0,\dots,n-1 \text{ mit } p = \frac{{}_{\lceil n}A_x}{\ddot{a}_{x:n\rceil}}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_x(m) &= \sum_{k=1}^{n-m} v^k\mathbb{P}(m+k-1 < T_x \leq m+k \mid T_x > m) - p\sum_{k=0}^{n-m-1} v^k\mathbb{P}(T_x > m+k \mid T_x > m)\\ &= \sum_{k=1}^{n-m} v^k\mathbb{P}(k-1 < T_{x+m} \leq k) - p\sum_{k=0}^{n-m-1} v^k\mathbb{P}(T_{x+m} > k)\\ &= {}_{\lceil n-m}A_{x+m} - p\cdot \ddot{a}_{x+m:n-m\rceil}\end{aligned}$$

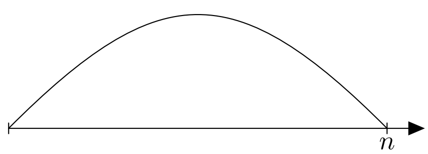


Abbildung 15: Deckungskapital: Todesfall,begrenzt

(b) Todesfallversicherung, unbegrenzte Laufzeit

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_x(m) &= \sum_{k=1}^{\infty} v^k\mathbb{P}(m+k-1 < T_x \leq m+k \mid T_x > m) - p\sum_{k=0}^{\infty} v^k\mathbb{P}(T_x > m+k \mid T_x > m)\\ &= \sum_{k=1}^{\infty} v^k\mathbb{P}(k-1 < T_{x+m} \leq k) - p\sum_{k=0}^{\infty} v^k\mathbb{P}(T_{x+m} > k)\\ &= A_{x+m} - p\cdot \ddot{a}_{x+m} \qquad m = 0,1,2,3,\dots \qquad p \text{ erfüllt } A_x = p\ddot{a}_x\end{aligned}$$

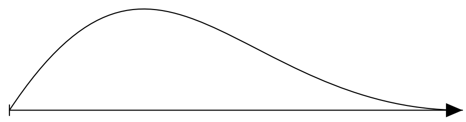


Abbildung 16: Deckungskapital: Todesfall, unbegrenzt

(c) Erlebensfallversicherung:
- Eintrittsalter x
- Laufzeit n
- Versicherungssumme 1

$A(k) = \mathbb{1}_{\{T_x > k\}}$ für $k = n$
$A(k) = 0$ sonst
$I(k) = p\mathbb{1}_{\{T_x > k\}} \quad k = 0, \ldots, n-1$

Deckungskapitalverlauf:

$$\mathcal{D}_x(m) = v^{n-m}\mathbb{P}(T_x > n \mid T_x > n+m) - p\sum_{k=0}^{n-m-1} v^k \mathbb{P}(T_x > m+k \mid T_x > m)$$

$$\text{Stationarität } \Rightarrow = v^{n-m}\mathbb{P}(T_{x+m} > n-m) - p\sum_{k=0}^{n-m-1} v^k \mathbb{P}(T_{x+m} > k)$$

$$= {}_{n-m}E_{x+m} - p\ddot{a}_{x+m:n-m\rceil}$$

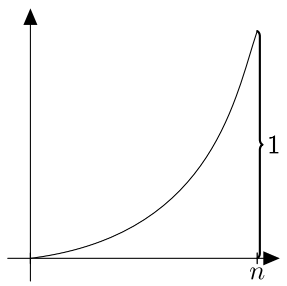


Abbildung 17: Deckungskapital: Erlebensfall

(d) gemischte Versicherung:

- Todesfall + Erlebensfall
- Deckungskapitalverlauf als Summe der Deckungskapitalien der einzelnen Versicherungen
- in Formeln: ·Laufzeit n ·Eintrittsalter x

$$\mathcal{D}_x(m) = A_{x+m:n-m\rceil} - p\ddot{a}_{x+m:n-m\rceil} \text{ mit } A_{x+m:n-m\rceil} = p\ddot{a}_{x+m:n-m\rceil}$$

Wobei $A_{x:n\rceil} = {}_{\lfloor n}A_x + {}_nE_x$ Barwert der gemischten Versicherung

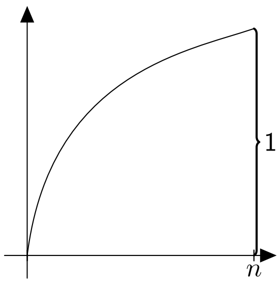


Abbildung 18: Deckungskapital: gemischte Versicherung

(e) Aufgeschobene Rentenversicherung:

- Eintrittsalter x
- Aufschubszeit n
- Rentenbezugszeit bis zum Tod
- Rentenhöhe 1

Versicherung ist fair, wenn $p\ddot{a}_{x:n\rceil} = {}_{|n}\ddot{a}_x$
Deckungskapitalverlauf:

- Ausgaben:

$$A(n+k) = \mathbb{1}_{\{T_x > m+k\}}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

- Einnahmen:

$$I(k) = p\mathbb{1}_{\{T_x > k\}}, \quad k = 0, \ldots, n-1$$

$$\begin{aligned} m = 0, \ldots, n-1 : \mathcal{D}_x(m) &= \sum_{k=0}^{\infty} v^{n-m+k} \mathbb{P}(T_{x+m} > n-m+k) - p \sum_{k=0}^{n-m-1} v^k \mathbb{P}(T_{x+m} > k) \\ &= {}_{|n-m}\ddot{a}_{x+m} - p\ddot{a}_{x+m:n-m\rceil} \\ m = n : \quad \mathcal{D}_x(n) &= \ddot{a}_{x+n} \\ m > n : \quad \mathcal{D}_x(m) &= \ddot{a}_{x+m} \end{aligned}$$

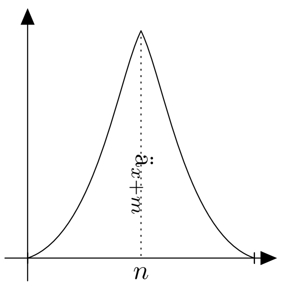


Abbildung 19: Deckungskapital: Rentenversicherung

Weitere Beispiele für Personenversicherungen bei denen die Ausfallzeiten nicht durch die Restlebenszeit einer einzelnen Person gegeben ist:

2.6 Personengemeinschaften, verbundene Leben

- n Personen mit Restlebensdauer $T_1, \ldots, T_n$
- Aus diesen wird eine Ausfallzeit der Gemeinschaft definiert durch $\Gamma = f(T_1, \ldots, T_n)$ für eine geeignete Funktion f
- Bsp: $n = 2$ $T = \min\{T_1, T_2\} = T_1 \wedge T_2$ oder $T = \max\{T_1, T_2\} = T_1 \vee T_2$

- Bem: Bei unabhängigen $T_1, \ldots, T_2$ kann die Verteilung von $\max\{T_1, \ldots, T_n\}$ bzw. $\min\{T_1, \ldots, T_n\}$ ausgerechnet werden, denn

$$\mathbb{P}(\max\{T_1, \ldots, T_n\} \leq t) = \mathbb{P}(T_1 \leq t, \ldots, T_n \leq t) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(T_i \leq t)$$
$$\mathbb{P}(\min\{T_1, \ldots, T_n\} > t) = \mathbb{P}(T_1 > t, \ldots, T_n > t) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(T_i > t)$$

- Beispiel: Todesfallversicherung eines Ehepaares
  - Eintrittsalter erste Person x, zweite Person y
  - Laufzeit n Jahre
  - Versicherungssumme M wird fällig, wenn eine der beiden Personen stirbt (1. Tod)
  - konst. Prämie solange wie beiden leben

- Modell:
Setze $T_{xy} = T_x \cap T_y$.
$t(m) = M, \quad m = 1, \ldots, n; \qquad b(m) = p, \quad m = 0, \ldots, n-1; \qquad s(m) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$
Dann beschreibt $\Gamma = (t, s, b, T_{xy})$ diese Versicherung.
Bestimmung von p:

$$A(k) = m\mathbb{1}_{\{k-1 < T_{xy} < k\}}, \quad k = 1, \ldots, n$$
$$I(K) = p\mathbb{1}_{\{T_{xy} < k\}}, \quad k = 0, \ldots, n-1$$

Fair, wenn

$$p \sum_{k=0}^{n-1} v^k \mathbb{P}(T_{xy} > k) = M \sum_{k=1}^{n} v^k \mathbb{P}(k-1 < T_{xy} \leq k)$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_{xy} > k) &= \mathbb{P}(T_{xy} > k \mid T_{xy} > k-1)\mathbb{P}(T_{xy} > k-1) \\ &= \mathbb{P}(T_{x+k-1,y+k-1} > 1)\mathbb{P}(T_{xy} > k-1) \\ &= \mathbb{P}^{(1)}_{x+k-1}\mathbb{P}^{(2)}_{y+k-1}\mathbb{P}(T_{xy} > k-1) = \mathbb{P}^{(1)}_{x+k-1}\mathbb{P}^{(2)}_{y+k-1} \cdot \cdots \cdot \mathbb{P}^{(1)}_{x}\mathbb{P}^{(2)}_{y}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(k-1 < T_{xy} \leq k) &= \mathbb{P}(T_{xy} \leq k \mid T_{xy} > k-1)\mathbb{P}(T_{xy} > k-1) \\ &= \mathbb{P}(T_{x+k-1,y+k-1} \leq 1)\mathbb{P}(T_{xy} > k-1) \\ &= (1 - \mathbb{P}^{(1)}_{x+k-1}\mathbb{P}^{(2)}_{y+k-1}\mathbb{P}(T_{xy} > k-1))\end{aligned}$$

2.7 Konkurrierende Ausscheideursachen

- Ausfallzeit T
- mehrere konkurrierende Ausscheideursachen. Welche Ursache zum Ausscheiden führt ist zufällig und wird durch eine $\{1, \ldots, m\}$-wertige Zufallsvariable J beschrieben.
- Leistung bei Ausfall hängt von der Ausscheideursache ab
- Modellierung erfolgt dadurch, dass die Todesfallleistung ersetzt bzw. modifiziert wird durch Ausfallleistungen.

- Definition: Sei T eine $(0,\infty)$-wertige ZV und J eine $\{1,\dots,m\}$-wertige ZV. Seien $(t_j)_{j=1,\dots,m},\ s,\ b$ Zahlungsströme.
- Dann heißt $\Gamma = ((t_j)_{j=1,\dots,m}, s, b, T, J)$ Personenversicherung unter m konkurrierenden Risiken
- Interpretation: Anfangszustand

$$
\begin{aligned}
T &\mathrel{\widehat{=}} \text{Verweilzeit im Anfangszustand}\\
J &\mathrel{\widehat{=}} \text{zufällige Wahl einer Ausscheideursache}\\
t_j(n) &\mathrel{\widehat{=}} \text{Leistung bei Ausfall in der } n\text{-ten Periode, wegen Ursache } j\\
s(n) &\mathrel{\widehat{=}} \text{Leistung bei einer Verweildauer größer als } n\\
b(n) &\mathrel{\widehat{=}} \text{Beitrag bei Ausfall nach n}
\end{aligned}
$$

- Zahlungsströme:

$$
\begin{aligned}
A(n) &= \sum_{j=1}^{m} t_j(n)\mathbb{1}_{\{n-1<T\le n,\ J=j\}} + s(n)\mathbb{1}_{\{T>n\}}\\
I(n) &= b(n)\mathbb{1}_{\{T>n\}}
\end{aligned}
$$

- Bewertung:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}V(A) &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{m} t_j(n)v^n\mathbb{P}(n-1<T\le n,\ J=j)\\
&\quad+\sum_{n=0}^{\infty} s(n)v^n\mathbb{P}(T>n)\\
\mathbb{E}V(A) &= \sum_{n=0}^{\infty} b(n)v^n\mathbb{P}(T>n)
\end{aligned}
$$

  Für eine praktische Berechnung muss die Stationaritätsannahme geeignet modifiziert werden.

- Definition: $((T_x)_{x\in\mathbb{N}_0}, J)$ ist stationär, falls gilt

$$\mathbb{P}(T_x\le n+k,\ J=j \mid T_x>n) = \mathbb{P}(T_{x+n}\le k,\ J=j) \quad \forall n\in\mathbb{N}_0,\ k\in\mathbb{N},\ j\in\{1,\dots,m\}$$

Definition
$((T_x)_{x\in\mathbb{N}_0}, J)$ ist stationär, falls gilt

$$\mathbb{P}(T_X\le n+k, J=j \mid T_x>n) = \mathbb{P}(T_{x+n}\le k, J=j) \quad \forall n\in\mathbb{N}_0,\ k\in\mathbb{N},\ j\in\{1,\dots,m\}$$

Lemma
Ist $((T_x)_{x\in\mathbb{N}_0}, J)$ stationär, so ist auch $(T_x)_{x\in\mathbb{N}_0}$ stationär. Es gilt also

$$\mathbb{P}(T_x\le n+k \mid T_x>n) = \mathbb{P}(T_{x+n}\le k)$$

Beweis:

$$\mathbb{P}(T_x\le n+k \mid T_x>n) = \sum_{j=1}^{m}\mathbb{P}(T_x\le n+k, J=j \mid T_x>n) = \sum_{j=1}^{m}\mathbb{P}(T_{x+n}\le k, J=j) = \mathbb{P}(T_{x+n}\le k)$$

Setze $q_{x,j} = \mathbb{P}(T_x\le 1, J=j)$ als W'keit eines x-Jährigen im nächsten Jahr wegen Ursache j auszuscheiden.

$q_x = \mathbb{P}(T_x \leq 1) = \sum\limits_{j=1}^{m} q_{x,j}$.
$p_x = 1 - q_x$ einjährige Verweildauer eines x-Jährigen.
Wegen der Stationaritätsannahme gilt dann:

$$\mathbb{P}(T_x > n) = \mathbb{P}(T_x > n \mid T_x > n-1) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(T_x > 1) = p_{x+n-1} \cdot \dots \cdot p_x$$

bzw.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(n-1 < T_x \leq n, J = j) &= \mathbb{P}(n-1 < T_x \leq n, J = j \mid T_x > n-1)\mathbb{P}(T_x > n-1) \\ &= \mathbb{P}(T_{x+n-1} \leq 1, J = j)\mathbb{P}(T_x > n-1) \\ &= q_{x+n-1,j}\mathbb{P}(T_x > n-1)\end{aligned}$$

Für eine Berechnung der Barwerte genügt es also die $q_{x,j}$ zu spezifizieren.

Bsp: Invaliditätsrente:

- Eintrittsalter x
- Grundzustand aktiv (a)
- n Restlaufzeit zur gesetzlichen Rente
- mögliche Ausscheideursachen
  - Invalidität
  - Tod

Bei Invalidität wird eine lebenslange Rente der Höhe R gezahlt.
Modell:

$$\begin{gathered} T_x \mathrel{\hat{=}} \text{Verweilzeit im Zustand a} \\ \mathbb{P}(T_x > k) \mathrel{\hat{=}} \text{als aktiver } k \text{ Jahre zu überleben} \\ J = 1 \mathrel{\hat{=}} \text{Invalidität} \\ J = 2 \mathrel{\hat{=}} \text{Tod} \\ t_1(k) = R \cdot \ddot{a}_{x+k} \mathrel{\hat{=}} \text{Leistung bei Invalidisierung im } k\text{-ten Jahr, Barwert des Rentenanspruchs,} \\ k = 1, \dots, n \\ t_2(k) = 0 \ \forall k \in \mathbb{N}_0,\ s(k) = 0,\ \forall k \in \mathbb{N}_0,\ b(k) = p,\ k = 0, \dots, n-1 \end{gathered}$$

Bewertung:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}V(A) &= R \sum_{k=1}^{n} \ddot{a}_{x+k} v^k \mathbb{P}(k-1 < T_x \leq k, J = j) \\ &= R \sum_{k=1}^{n} \ddot{a}_{x+k} v^k q_{x+k-1} \mathbb{P}(T_x > k-1) \\ \mathbb{E}V(I) &= p \sum_{k=0}^{n-1} v^k \mathbb{P}(T_x > k)\end{aligned}$$

$i(y) := q_{y,1}$ einjährige Invalidisierungsw'keit eines y-Jährigen
$q_y^a := q_{y,2}$ einjährige Sterbew'keit eines aktiven
$q_y = q_y^a + i(y)$ W'keit eines aktiven y-Jährigen im nächsten Jahr auszuscheiden.
$p_y = 1 - q_y$

3 Exkurs stochastische Prozesse

3.1 Definitionen

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein W'Raum. Sei $T \subseteq \mathbb{R}$ eine Zeitparametermenge. Sei $(E, \mathcal{E})$ ein messbarer Raum als Zustandsraum. Eine Familie $(X_t)_{t\in T}$ von E-wertigen ZV'en heißt **stochastischer Prozess**.

man glaubt es nicht ein W'Raum ;)

Eine Familie $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ von Unter-σ-Algebren von $\mathcal{F}$ heißt **Filtration**,wenn

$$\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \ \forall s \leq t, \ s, t \in T$$

$(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ gibt ein Informationsverlauf wieder. $\mathcal{F}_t \mathrel{\hat{=}}$ Informatio, die bis zum Zeitpunkt t verfügbar ist.
$(X_t)_{t\in T}$ heißt **adaptiert** bzgl. der Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$, falls gilt X_t ist messbar bzgl. $\mathcal{F}_t$ $\forall t \in T$. In der Regel: $T \subseteq \mathbb{N}_0$ oder $T \subseteq [0, \infty)$, $E = \mathbb{R}^d, \ \mathcal{E} = \mathcal{L}({\mathbb{R}^{0}}^{d})$

Beispiel:
Die Preisentwicklung von d Finanzgütern kann man durch einen stochastischen Prozess $(X_t)_{t\in T}$ mit Werten in $\mathbb{R}^d$ beschreiben.

3.2 Das N-Perioden CRR-Modell

(Anmerkung: CRR steht für Coxe-Ross-Rubinstein)
$\Omega = \{0,1\}^N, \ \mathcal{F} = \mathbb{P}(\Omega), \ 0 < d < u$
$Y_n : \Omega \to \mathbb{R}, \ \omega \mapsto u^{\omega_n} d^{1-\omega_n} = \begin{cases} u, & \text{falls } \omega_n = 1 \\ d, & \text{falls } \omega_n = 0 \end{cases}$
$S_n = Y_1 Y_2 \cdot \dots \cdot Y_n$ Preis nach n-Perioden, $(S_n)_{n=0,\dots,N}$ Verlauf einer Aktie über N Perioden.
Zusätzlich zur Aktie betrachtet man ein **Geldmarktkonto** mit konst. periodischer Verzinsung r.
$\begin{pmatrix} (1+r)^n \\ S_n \end{pmatrix}_{n=0,\dots,N}$ beschreibt im **CRR-Modell** den Verlauf der Preise dieser beiden Basisfinanzgüter.

Anmerkung zur Abbildung 20: bei sehr kleinen Zeitsprüngen ist es möglich anzunehmen, dass das Finanzgut nur einen kleinen Sprung nach oben oder unten machen kann (zetliche Darstellung der Black-Scholes Formel).

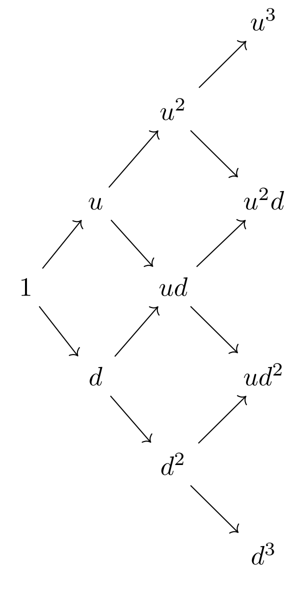


Abbildung 20: CRR-Modell

3.3 Random-Walk

Sei$(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von iid ZV'en. Sei Y_0 unabhängig von $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Durch $S_n = Y_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k, \ n \in \mathbb{N}$ wird ein sogenannter **Random-Walk** definiert.
Durch $S_n = Y_0 \cdot \prod\limits_{k=0}^{n} Y_k, \ n \in \mathbb{N}$ wird ein **geometrischer Random-Walk** definiert. Die Aktie im CRR-Modell ist ein geom. Random-Walk.

3.4 Bedingter Erwartungswert

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein W'Raum. G Unter-σ-Algebra von $\mathcal{F}$. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ sei messbar bzgl. $\mathcal{F}$ und es existiert $\mathbb{E}X$.

Dann heißt $Z:\Omega\to\mathbb{R}$ eine Version des **bedingten Erwartungswertes** von X bzgl. G, wenn gilt:

(i) Z ist messbar bzgl. G

(ii) $\int\limits_A Z\mathrm{d}\mathbb{P}=\int\limits_A X\mathrm{d}\mathbb{P}\quad\forall A\in G$

Schreibweise $Z=\mathbb{E}(X\mid G)$; ist $G=\sigma(Y)$ für eine ZV Y,so schreibt man $\mathbb{E}(X\mid G)=\mathbb{E}(X\mid Y)$

3.5 Existenz & Eindeutigkeit

Gegeben seien die Bezeichnungen von 3.4. Dann existiert der bedingte Erwartungswert von X bzgl. G und ist $\mathbb{P}$-f.s. eindeutig bestimmt, d.h. erfüllen Z_1,Z_2 die Bedingungen (i),(ii) aus 3.4, so gilt $Z_1=Z_2,\ \mathbb{P}-$f.s.

Beweis:
Existenz: 1.Fall: $X\geq 0$
$\mu(A)=\int\limits_A X\mathrm{d}\mathbb{P},\ A\in G$ definiert ein σ-endliches Maß auf (Ω,G)mit $\mu\ll\mathbb{P}$.
Satz von Radon-Nikodym liefert ein G-messbares Z mit $\mu(A)=\int\limits_A Z\mathrm{d}\mathbb{P}$. Also $Z=\mathbb{E}(X\mid G)\ \forall A\in G$
2.Fall: $X=X^+-X^-$
$\mathbb{E}(X^+\mid G),\ \mathbb{E}(X^-\mid G)$ existiert nach Fall 1.

$$\begin{aligned}\int\limits_A X\mathrm{d}\mathbb{P}&=\int\limits_A X^+\mathrm{d}\mathbb{P}-\int\limits_A x^-\mathrm{d}\mathbb{P}\\&=\int\limits_A \mathbb{E}(x^+\mid G)\mathrm{d}\mathbb{P}-\int\limits_A\mathbb{E}(X^-\mid G)\mathrm{d}\mathbb{P}\\&=\int\limits_A \mathbb{E}(X^+\mid G)-\mathbb{E}(X^-\mid G)\mathrm{d}\mathbb{P}\quad A\in G\end{aligned}$$

Also ist $\mathbb{E}(X^+\mid G)-\mathbb{E}(X^-\mid G)$ der bedingte Erwartungswert von X bzgl. G.
Eideutigkeit: Z_1,Z_2 bedingte EW. Sei $A=\{Z_1-Z_2>\frac{1}{n}\}$, ist G messbar.

$$\begin{aligned}&\int\limits_A Z_1-Z_2\mathrm{d}\mathbb{P}\overset{Z_1,Z_2\text{ EW}}{=}\int\limits_A X\mathrm{d}\mathbb{P}-\int\limits_A X\mathrm{d}\mathbb{P}=0\\&\Rightarrow\mathbb{P}(Z_1-Z_2>\frac{1}{n})=0\ \forall n\in\mathbb{N}\\&\Rightarrow\mathbb{P}(Z_1-Z_2>0)=0\\&\text{Genauso folgt }\mathbb{P}(Z_2-Z_1>0)=0\end{aligned}$$

□

Beispiel
$X_1,\dots,X_n$ iid ZV'en, sei $S_n:=\sum\limits_{i=1}^n X_i$.
Frage: Was ist $\mathbb{E}(X_1\mid S_n)$?
Vermutung: $\mathbb{E}(X_1\mid S_n)=\mathbb{E}(X_2\mid S_n)=\cdots=\mathbb{E}(X_n\mid S_n)$
Dann gilt:

$$n\mathbb{E}(X_1\mid S_n)=\sum_{i=1}^n\mathbb{E}(X_i\mid S_n)=\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i\mid S_n\right)=\mathbb{E}(S_n\mid S_n)=S_n$$

$\Rightarrow \mathbb{E}(X_1 \mid S_n) = \frac{1}{n} S_n$
Wieso ist $\mathbb{E}(X_1 \mid S_n) = \mathbb{E}(X_k \mid S_n)$?

Z: $\int\limits_{\{S_n \in B\}} X_1 \mathrm{d}\mathbb{P} = \int\limits_{\{S_n \in B\}} X_k \mathrm{d}\mathbb{P} \quad \forall B \in \mathcal{L}$

Da die $X_1, \ldots, X_n$ stochastisch unabhängig sind, ist die Verteilung durch $\mathbb{P}^{(X_{\pi(1)}, \ldots, X_{\pi(n)}}$ gegeben. Daher folgt

$$\int\limits_{\left\{x \in \mathbb{R}^n \;\mid\; \sum_{i=1}^n x_i \in B\right\}} X_1 \mathbb{P}^{(X_{\pi(1)}, \ldots, X_{\pi(n)}} \mathrm{d}(x_1, \ldots, x_n)$$

Betrachte Permutation π mit $\pi(1) = k$, dann folgt

$$= \int\limits_{\{S_n \in B\}} X_k \mathrm{d}\mathbb{P}$$

3.6 Faktorisierter bedingter Erwartungswert

Sei $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{L})$ eine Zufallsvariable, $Y : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (E, \mathcal{E})$ messbar.
Sei $G = \sigma(Y)$. Dann gilt:
Eine Zufallsvariable $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ ist G-messbar genau dann, wenn es eine $\mathcal{E}$-messbare Abbildung $h : E \to \mathbb{R}$ gibt mit $Z = h \circ Y$

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "Y"] \arrow[dr, "\mathbb{E}(X\ Y\ Y)"'] & (E, \mathcal{E}) \arrow[d, "h"] \\ & (\mathbb{R}, \mathcal{L}) \end{tikzcd} \qquad h(y) = \mathbb{E}(X \mid Y = y)$$

Abbildung 21: fakt. bed. Erwartungswert

Falls Z eine Version der bedingten Erwartung von X gegeben Y ist, so gibt es also ein $h : E \to \mathbb{R}$ mit $Z = h \circ Y$.
Schreibweise $h(y) = \mathbb{E}(X \mid Y = y)$, h heißt Version der **faktorisierten** bedingten Erwartung von Xgegeben Y.
Sind h_1, h_2 Versionen der bedingten Erwartung von X gegeben Y, so gilt

$$h_1(y) = h_2(y) \text{ für } \mathbb{P}^y - \text{f.a. } y \in E$$

$y \mapsto \mathbb{E}(X \mid Y = y)$ ist eindeutig festgelegt für $\mathbb{P}^y$-f.a. y durch

$$\mathbb{E}\mathbb{1}_{\{Y \in B\}} = \int\limits_{\{Y \in B\}} \mathbb{E}(X \mid Y) \mathrm{d}\mathbb{P}$$

$$\int\limits_{\{Y \in B\}} hY \mathrm{d}\mathbb{P} = \int\limits_B h(y) \mathbb{P}^y(\mathrm{d}y) \quad \forall B \in \mathcal{L}$$

Ausrechnen des bedingten Erwartungswertes erfolgt häufig durch Spezifikation der bedingten Verteilung.

3.7 Stochastischer Kern

Seien $(\Omega, \mathcal{F}), (E, \mathcal{E})$ messbare Räume. Ein **stochastischer Kern** ist eine Abbildung $K : \mathbb{E} \times K \to [0, 1]$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $K(y, .)$ ist ein W-Maß für alle $y \in E$

(ii) $K(., A)$ ist messbar für alle $A \in \mathcal{F}$

3.8 bedingte W'keit und bedingte Verteilungen

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein W'Raum, $\mathcal{G}$ Unter-σ-Algebra von $\mathcal{F}$. Für jedes $\Gamma \in \mathcal{F}$ heißt $\mathbb{E}(\mathbb{1}_\Gamma \mid \mathcal{G})$ **bedingte Wahrscheinlichkeit** von Γ gegeben $\mathcal{G}$
Schreibweise:

$$\mathbb{P}(\Gamma \mid \mathcal{G}) := \mathbb{E}(\mathbb{1}_\Gamma \mid \mathcal{G})$$

Seien $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (E_1, \mathcal{E}_1)$, $Y : (\Omega, \mathcal{F}) \to (E_2, \mathcal{E}_2)$ messbare Abbildungen.
Die **bedingte Verteilung** von X gegeben Y ist ein stochastischer Kern $K : E_2 \times \mathcal{E}_1 \to [0,1]$ derart, dass $y \mapsto K(y, A)$ eine Version der faktorisierten bedingten Erwartung von $\mathbb{P}(X \in A \mid Y)$ ist für alle $A \in \mathcal{E}_1$.
Schreibweise:

$$K(y, A) = \mathbb{P}(X \in A \mid Y = y)$$

Durch Erweiterungsschluss kann man zeigen

$$\mathbb{E}(f(X) \mid Y = y) = \int f(x) K(Y, \mathrm{d}x)$$

für jedes messbare $f : E_1 \to (\Omega, \mathcal{L})$.

3.9 Beispiel: diskrete Zufallsvariablen

Sei $(E_1, \mathcal{E}_1)$ messbar, E_2 abzählbar

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_2 &= \mathcal{P}(E_2) \\ X &: (\Omega, \mathcal{F}) \to (E_2, \mathcal{E}_2) \text{ messbar} \\ Y &: (\Omega, \mathcal{F}) \to (E_2, \mathcal{E}_2) \text{ messbar} \end{aligned}$$

Die bedingte Verteilung von X gegeben $Y = y$ ist definiert durch

$$\mathbb{P}(X \in A \mid Y = y) = \frac{\mathbb{P}(X \in A, Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)} \quad \forall y \in E_2 \text{ mit } \mathbb{P}(Y = y) > 0$$

Definiere den stochastischen Kern $K : E_2 \times \mathcal{E}_1 \to [0,1]$

$$K(y, A) = \begin{cases} \frac{\mathbb{P}(X \in A, Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)} & \forall A \in \mathcal{E}_1, y \in E_2 \text{ mit } \mathbb{P}(Y = y) > 0 \\ \text{irgendwie} & \text{d.h. wähle W'Maß auf } (E_1, \mathcal{E}_1) \\ & \text{und setze } K(y, A) = \mu(A)\ \forall A \in \mathcal{E}_1 \end{cases}$$

Dann ist K die bedingte Verteilung von X gegeben Y.

3.10 Lebesgue-Dichten

Sei (X, Y) ein zweidimensionaler Zufallsvektor mit **Lebesgue-Dichte** $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) &= \int\limits_{A\times B} h(x,y)\lambda^2(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) \\ &= \int\limits_A \int\limits_B h(x,y)\lambda(\mathrm{d}y)\lambda(\mathrm{d}x) \quad \forall B \in \mathcal{L}\end{aligned}$$

Setze $f(y) = \int\limits_{\mathbb{R}} h(x,y)\mathrm{d}x$.

Dann ist f messbar wegen Fubini und die Lebesgue-Dichte von Y, denn:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y \in B) = \mathbb{P}(Y \in B, X \in \mathbb{R}) &= \int\limits_{\mathbb{R}\times B} h(x,y)\mathrm{d}(x,y) \\ &= \int\limits_B \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}} h(x,y)\mathrm{d}x}_{f(y)}\,\mathrm{d}y \quad \forall B \in \mathcal{L}\end{aligned}$$

Definiere den stochastischen Kern $K : \mathbb{R} \times \mathcal{L} \to [0,1]$ durch $\begin{cases} \int\limits_A \frac{h(x,y)}{f(y)}\lambda(\mathrm{d}x) & \text{falls } f(y) > 0 \\ \text{irgendwie} & \end{cases}$

$$\frac{\mathbb{P}(X \in A, Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)} \overset{X \text{ diskret}}{=} \frac{\sum_{x\in A} \mathbb{P}(X = x, Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)}$$

Dann ist K eine bedingte Verteilung von Y,denn

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) &= \int\limits_{A\times B} h(x,y)\lambda^2(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) \\ &= \int\limits_B \int\limits_A h(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int\limits_{B\cap\{f>0\}} \int\limits_A \frac{h(x,y)}{f(y)}\mathrm{d}x \cdot f(y)\mathrm{d}y \\ &= \int\limits_{B\cap\{f>0\}} K(y,A)f(y)\mathrm{d}y \\ &= \int\limits_B K(y,A)\mathbb{P}^y(\mathrm{d}y)\end{aligned}$$

Also gilt: $\omega \mapsto K(Y(\omega), A)$ ist eine Version von $\mathbb{P}(X \in A, Y)$

$\Rightarrow y \mapsto K(y, A)$ ist eine Versionvon $\mathbb{P}(X \in A \mid Y = y)$

3.11 Eigenschaften

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ W'Raum, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ Unter-σ-Algebra. Seien X, X_1, X_2 integrierbare ZV'en. Dann gilt:

(i) $\mathbb{E}(\alpha X_1 + \beta X_2 \mid \mathcal{G}) = \alpha \mathbb{E}(X_1 \mid \mathcal{G}) + \beta \mathbb{E}(X_2 \mid \mathcal{G})$ für alle α, β

(ii) $X_1 \leq X_2 \Rightarrow \mathbb{E}(X_1 \mid \mathcal{G}) \leq \mathbb{E}(X_2 \mid \mathcal{G})$

(iii) Sei Z eine $\mathcal{G}$-messbare ZV, so dass $\mathbb{E}ZX$ existiert. Dann gilt

$$\mathbb{E}(ZX \mid \mathcal{G}) = Z\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$$

(iv) Sind G_1, G_2 Unter-σ-Algebren mit $G_1 \subseteq G_2$, so folgt

$$\mathbb{E}(X \mid G_1) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid G_2) \mid G_1) \quad \text{'\underline{\textbf{Tower Property}}'}$$

(v) Sind X und $\mathcal{G}$ stoch. unabhängig, so gilt

$$\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}X$$

(vi) Sind Z_1, Z_2 stoch. unabh. ZV'en mit Werten in $(E_1, \mathcal{E}_1), (E_2, \mathcal{E}_2)$ und ist $h : E_1 \times E_2 \to (\mathbb{R}, \mathcal{L})$ messbar mit ex. $\mathbb{E}h(Z_1, Z_2)$, so gilt

$$\mathbb{E}(h(Z_1, Z_2) \mid Z_2 = z_2) = \mathbb{E}h(Z_1, z_2)$$

für $\mathbb{P}^{Z_2}$-f.a. $z_2 \in E_2$

(vii) $\mathbb{E}\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}X$

Beweis:
(i),(ii) einfach (✓).
(iii): 1.Fall: $Z \geq 0, \; X \geq 0$
Ist $Z = \mathbb{1}_G$ mit $G \in \mathcal{G}$, so gilt für alle $A \in G$

$$\begin{aligned}\int\limits_A ZX \mathrm{d}\mathbb{P} &= \int\limits_A \mathbb{1}_G X \mathrm{d}\mathbb{P} = \int\limits_{A\cap G} X \mathrm{d}\mathbb{P} \\ &= \int\limits_{A\cap G} \mathbb{E}(X \mid G)\mathrm{d}\mathbb{P} = \int\limits_A Z\mathbb{E}(X \mid G)\mathrm{d}\mathbb{P} \\ &\Rightarrow \mathbb{E}(ZX \mid G) = Z\mathbb{E}(X \mid G)\end{aligned}$$

Ist $Z = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{G_i}, \; G_i \in \mathcal{G}, \; \alpha_i \geq 0$ so gilt wegen (i)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(ZX \mid G) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{G_i} X \mid \mathcal{G}\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{E}(\mathbb{1}_{G_i} X \mid \mathcal{G}) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{G_i} \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) = Z\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})\end{aligned}$$

Ist $Z \geq 0$, so ex. eine Folge von Treppenfunktionen $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $0 \leq Z_1 \leq Z_2 \leq \ldots \uparrow Z \Rightarrow Z_n X \uparrow ZX$
Für jedes $A \in G$ folgt mit monotoner Konvergenz

$$\int\limits_A ZX \mathrm{d}\mathbb{P} = \mathbb{E}ZX\mathbb{1}_A = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}Z_n X \mathbb{1}_A = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\mathbb{E}(Z_n X \mid \mathcal{G})\mathbb{1}_A$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(ZX \mid \mathcal{G}) = Z\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}Z_n \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})\mathbb{1}_A = \mathbb{E}Z\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})\mathbb{1}_A$$

Es ex. $\mathbb{E}ZX$.
$ZX = U - V$ mit $U = Z^+X^+ + Z^-X^- \geq 0,\ V = Z^+X^- + Z^-X^+ \geq 0$

$$(Z^+ - Z^-)(X^+ - X^-) = Z^+X^+ + Z^-X^- - (Z^-X^+ + X^-Z^+)$$

Also

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(ZX \mid \mathcal{G}) &= \mathbb{E}(U \mid \mathcal{G}) - \mathbb{E}(V \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}(Z^+X^+ \mid \mathcal{G}) + \mathbb{E}(Z^-X^- \mid \mathcal{G}) - \big(\mathbb{E}(Z^-X^+ \mid \mathcal{G}) + \mathbb{E}(Z^+X^- \mid \mathcal{G})\big)\\ &= Z^+\mathbb{E}(X^+ \mid \mathcal{G}) - Z^-\mathbb{E}(X^+ \mid \mathcal{G}) - \big(Z^+\mathbb{E}(X^- \mid \mathcal{G}) - Z^-\mathbb{E}(X^- \mid \mathcal{G})\big)\\ &= Z(\mathbb{E}(X^+ \mid \mathcal{G}) - \mathbb{E}(X^- \mid \mathcal{G})) = Z\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})\end{aligned}$$

(iv): Sei $A \in G_1$.

$$\int_A \mathbb{E}(X \mid G_2)\mathrm{d}\mathbb{P} \overset{A\in G_2}{=} \int_A X\mathrm{d}\mathbb{P} \overset{A\in G_1}{=} \int_A \mathbb{E}(X \mid G_1)\mathrm{d}\mathbb{P}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid G_2) \mid G_1) = \mathbb{E}(X \mid G_1)$$

(vi): ZZ $\mathbb{E}(h(Z_1, Z_2) \mid Z_2 = z_2) = \mathbb{E}h(Z_1, z_2)$
Für $B \in \mathcal{E}_2$ gilt:

$$\begin{aligned}\int_{\{Z_2\in B\}} h(Z_1, Z_2)\mathrm{d}\mathbb{P} &= \mathbb{E}h(Z_1, Z_2)\mathbb{1}_{\{Z_2\in B, \mathbb{Z}_1\in E_1\}}\\ &= \int_B\int_{E_1} h(z_1, z_2)\mathbb{P}^{Z_1}(\mathrm{d}z_1)\mathbb{P}^{Z_2}(\mathrm{d}z_2)\end{aligned}$$

da $\int\limits_{E_1} h(z_1, z_2)\mathbb{P}^{Z_1}(\mathrm{d}z_1) = \mathbb{E}h(Z_1, z_2)$ für $\mathbb{P}^{Z_2}$-f.a. z_2, ist

$$\mathbb{E}(h(Z_1, Z_2) \mid Z_2 = z_2) = \mathbb{E}h(Z_1, z_2) \text{ für } \mathbb{P}^{Z_2} - \text{f.a. } z_2$$

3.12 Bestapproximation

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, X Zv mit $\mathbb{E}X^2 < \infty$ $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ Unter-σ-Algebra,

$$L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = \{Y : \Omega \to \mathbb{R} \mid Y \text{ ist } \mathcal{F} - \text{messbar und } \mathbb{E}Y^2 < \infty\}$$

$$L_2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P}) = \{Y : \Omega \to \mathbb{R} \mid Y \text{ ist } \mathcal{G} - \text{messbar und } \mathbb{E}Y^2 < \infty\}$$

$$L_2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P}) \subseteq L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$$

Für $X \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ist $\hat{X} := \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$ die **Orthogonalprojektion** auf $L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, d.h. $\hat{X} \in L_2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$

$$\left\|X - \hat{X}\right\|_2^2 = \inf \|X - Z\|_2^2,\ Z \in L_2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$$

Durch $\langle Y \mid Z\rangle := \mathbb{E}YZ$ wird ein Skalarprodukt auf $L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ definiert.
$\|Y\|_2^2 = \langle Y \mid Y\rangle$ für alle $Y \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. $L_2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ ist ein abgeschlossener Teilraum.

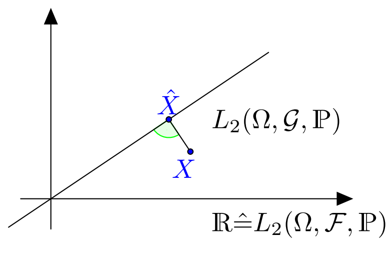


Abbildung 22: Orthogonalprojektion auf dem $L_2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$

Beweis:
Es gilt $X = \hat{X} + X - \hat{X}$. Z.Z. $X - \hat{X} \perp Z$ für alle $Z \in L_2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$
Eigenschaften des bedingten Erwartungswertes implizieren:

$$\begin{aligned}\langle \mathbb{1}_A \,|\, X\rangle &= \int \mathbb{1}_A X \mathrm{d}\mathbb{P} = \int \mathbb{1}_A \hat{X} \mathrm{d}\mathbb{P} = \left\langle \mathbb{1}_A \,\middle|\, \hat{X} \right\rangle \ \forall A \in \mathcal{G} \\ &\Rightarrow \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} \,\middle|\, X \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} \,\middle|\, \hat{X} \right\rangle \ \forall A_i \in \mathcal{G},\ \alpha_i \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow \langle Z \,|\, X\rangle = \left\langle Z \,\middle|\, \hat{X} \right\rangle \ \forall Z \in L_2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})\end{aligned}$$

da $\langle . \,|\, X\rangle$ bzw. $\left\langle . \,\middle|\, \hat{X} \right\rangle$ stetig sind. $\Rightarrow X - \hat{X} \perp L_2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$
Mit Pythagoras folgt

$$\|X - Z\|_2^2 = \left\|X - \hat{X} + \hat{X} - Z\right\|_2^2 = \left\|X - \hat{X}\right\|_2^2 + \left\|\hat{X} - Z\right\|_2^2 \geq \left\|X - \hat{X}_2^2\right\|$$

3.13 Martingale

Sei T eine Zeitparametermenge. $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ eine Filtration und $(M_t)_{t\in T}$ ein **adaptiv-stochastischer Prozess**.
$M = (M_t)_{t\in T}$ heißt **Martingal**, falls gilt:

(i) $\mathbb{E}\,|M_t| < \infty \ \forall t \in T$

(ii) $\mathbb{E}(M_t \mid \mathcal{F}_s) = M_s \ \forall s, t \in T,\ s \leq t$

$\mathbb{E}(M_t \mid \mathcal{F}_s)$ Schätzung der zukünftigen Zahlung eines Spielers

M heißt **Submartingal**, falls gilt:

(i) $\mathbb{E}\,|M_t| < \infty \ \forall t \in T$

(ii) $\mathbb{E}(M_t \mid \mathcal{F}_s) \geq M_s \ \forall s, t \in T,\ s \leq t$

ist günstig weiter zu spielen

M heißt **Supermartingal**, falls gilt:

(i) $\mathbb{E}\,|M_t| < \infty \ \forall t \in T$

(ii) $\mathbb{E}(M_t \mid \mathcal{F}_s) \leq M_s \ \forall s, t \in T,\ s \leq t$

jetzt sollte man gehen

3.14 Beispiele Martingale

(i) Random-Walk:
$S_n = S_0 + \sum_{i=1}^n X_i$, S_0 unabhängig von $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ und iid, $\mathbb{E}\,|X_i| < \infty$, $\mathbb{E}\,|S_0| < \infty$ und $\mathcal{F}_n = \sigma(S_0, S_1, S_2, \ldots, S_n) = \sigma(S_0, X_1, \ldots, X_n)$.
Dann gilt:

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}(S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(S_n + X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(S_n \mid \mathcal{F}_n) + \mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) \\ &\overset{S_n\ \mathcal{F}_n\text{-messbar}}{=} S_n + \mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) \overset{X_{n+1}\ \text{unabh. von}\ \mathcal{F}_n}{=} S_n + \mathbb{E}X_{n+1} \\ &\begin{cases} > & & & > \\ = & S_n & \Leftrightarrow\ \mathbb{E}X_{n+1} & = & 0 \\ < & & & < \end{cases}\end{aligned}$$

(ii) geometrischer Random-Walk:
$S_n = S_0 \cdot \prod_{i=1}^{n} X_i,\ (X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ iid, $\mathbb{E}\,|X_i| < \infty$, $\mathcal{F}_n = \sigma(S_0, X_1, \ldots, X_n)$
Dann gilt:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}(S_n \cdot X_{n+1} \mid S_0, \ldots, S_n)\\ &\overset{S_n\ \mathcal{F}_n\text{-messbar}}{=} S_n \cdot \mathbb{E}(X_{n+1} \mid S_0, \ldots, S_n) = S_n \cdot \mathbb{E}X_{n+1}\end{aligned}$$

(S_n) ist ein Martingal genau dann, wenn $\mathbb{E}X_i = 1\ \forall i \in \mathbb{N}$, für Submartingal bzw. Supermartingal verschiedene Fälle betrachten.

3.15 Stopzeit

Sei $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ eine Filtration, $\tau : \Omega \to T \cup \{+\infty\}$ heißt **Stopzeit**, falls

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

Stopzeiten kann man als Verkaufsstrategie interpretieren. Die Entscheidung über t hinaus fortzufahren. $\{t \in T\}$ darf nur von der bis t verfügbaren Informationen abhängen.
Beispiel: $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reellwertiger stoch. Prozess $\mathcal{F}_n = \sigma(S_0, \ldots, S_n)\ \forall n \in \mathbb{N}$. $\tau = \inf\{n \in \mathbb{N}_0 \mid S_n > a\}$ ist eine Stopzeit, denn $\{\tau > n\} = \{S_0 \leq a, \ldots, S_n \leq a\} \subseteq \mathcal{F}_n$.

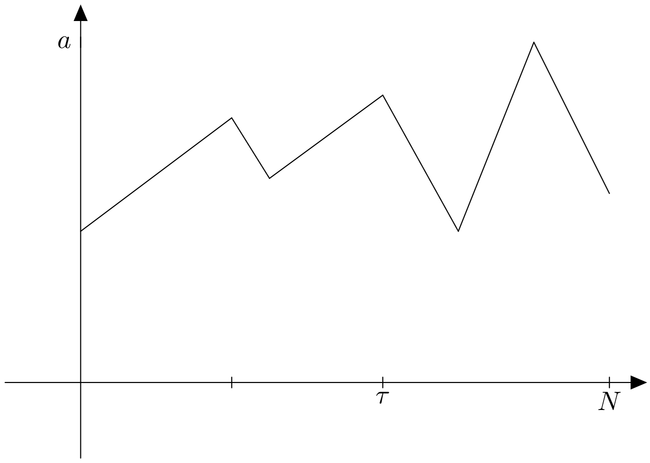


Abbildung 23: Stopzeiten

$\tau = \inf\{0 \leq k \leq N \mid S_k = \max\{S_0, \ldots, S_n\}\}$ ist keine Stopzeit, da zur Stopentscheidung in die Zukunft geschaut werden muss.

3.16 Martingal als faires Glücksspiel

Sei $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Filtration und $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ adaptierter stoch. Prozess mit $\mathbb{E}\,|M_n| < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
$M_n \hat{=}$ Auszahlung, die ein Spieler erhält, wenn er das Spiel zum Zeitpunkt n beendet.
Stopzeiten $\hat{=}$ Strategien, die ein Spieler verwirklichen kann.
τ ist eine beschränkte Stopzeit, falls es ein $N \in \mathbb{N}$ ex. mit $\tau \leq N$.
Beschränkte Stopzeiten $\hat{=}$ real umsetzbare Strategien.

Satz:
Es gilt: $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist ein Martingal genau dann, wenn

$$\mathbb{E}M_\tau = \mathbb{E}M_0 \text{ für jede beschränkte Stopzeit } \tau$$

d.h. durch Spielen des Glücksspiels kann sich ein Spieler im Mittel weder verbessern noch verschlechtern (faires Glücksspiel).

Beweis:
"$\Rightarrow$": Sei τ Stopzeit mit $\tau \leq N$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}M_\tau &= \mathbb{E}\sum_{n=0}^N M_\tau \mathbb{1}_{\{\tau=n\}} = \mathbb{E}\sum_{n=0}^N M_n \mathbb{1}_{\{\tau=n\}} \\
&= \sum_{n=0}^N \mathbb{E}M_n \mathbb{1}_{\{\tau=n\}} = \sum_{n=0}^N \mathbb{E}\mathbb{E}(M_N \mid \mathcal{F}_n)\mathbb{1}_{\{\tau=n\}} \\
&= \sum_{n=0}^N \mathbb{E}\mathbb{E}(M_N \mathbb{1}_{\{\tau=n\}} \mid \mathcal{F}_n) = \sum_{n=0}^N \mathbb{E}M_N \mathbb{1}_{\{\tau=n\}} \\
&= \mathbb{E}\sum_{n=0}^N M_N \mathbb{1}_{\{\tau=n\}} = \mathbb{E}M_N = \mathbb{E}M_0
\end{aligned}$$

Also: $\mathbb{E}M_\tau = \mathbb{E}M_0$.

"$\Leftarrow$": Sei $m < n$. Z.z. $\mathbb{E}(M_m \mid \mathcal{F}) = M_n$, d.h. $\int_A M_m \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A M_n \mathrm{d}\mathbb{P}$ für alle $A \in \mathcal{F}_n$.
Zu $A \in \mathcal{F}_n$ definiere Stopzeit:

$$\tau_A(\omega) = \begin{cases} m, & \omega \in A \\ n, & \omega \in A^c \end{cases}$$

$\tau_A = m\mathbb{1}_A + n\mathbb{1}_{A^c}$
τ ist eine beschränkte Stopzeit. Es gilt also:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}M_0 = \mathbb{E}M_{\tau_A} &= \mathbb{E}M_m\mathbb{1}_A + \mathbb{E}M_n\mathbb{1}_{A^c} \\
&= \mathbb{E}M_m\mathbb{1}_A + \mathbb{E}M_N - \mathbb{E}M_n\mathbb{1}_A
\end{aligned}$$

Weiter gilt mit $\tau = n$

$$\mathbb{E}M_0 = \mathbb{E}M_\tau = \mathbb{E}M_n$$

Einsetzen liefert

$$\mathbb{E}M_m\mathbb{1}_A = \mathbb{E}M_n\mathbb{1}_A$$

3.17 Optional Sampling

Frage: Wann gilt $\mathbb{E}M_\tau = \mathbb{E}M_0$, wenn M ein Martingal ist. Für beschränkte Stopzeiten klar. Für unbeschränkte Stopzeiten braucht man Voraussetzungen.
Beispiel: Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$
$S_n = \sum_{i=1}^n X_i,\ (X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ iid, $\mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(X_i = -1)$ $\tau = \inf\{n \in \mathbb{N}_0 \mid S_n = 1\}$
Es gilt: $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$ $\mathbb{P}$-f.s. $S_\tau = 1 \Rightarrow \mathbb{E}S_\tau = 1 \neq \mathbb{E}S_0 = 0$.
Antwort liefert das **Optional-Sampling Theorem**.

Satz:
Sei $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Martingal bzgl. einer Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Sei τ eine Stopzeit mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$

(ii) $\mathbb{E}\,|M_\tau| < \infty$

(iii) $\mathbb{E}\left|M_n\right| \mathbb{1}_{\{\tau>n\}} \overset{n\to\infty}{\to} 0$

Dann gilt:

$$\mathbb{E}M_\tau = \mathbb{E}M_0$$

<u>**Beweis:**</u>
Approximiere τ durch beschränkte Stopzeiten $\tau \vee m$. Es gilt $\mathbb{E}M_{\tau\vee m} = \mathbb{E}M_0$. Also

$$\begin{aligned} \left|\mathbb{E}M\tau - \mathbb{E}m_0\right| &= \left|\mathbb{E}M\tau - \mathbb{E}M_{\tau\vee m}\right| = \left|\mathbb{E}M\tau - \mathbb{E}M_\tau \mathbb{1}_{\{\tau\leq n\}} - \mathbb{E}M_n \mathbb{1}_{\{\tau>n\}}\right| \\ &= \left|\mathbb{E}M_\tau \mathbb{1}_{\{\tau\geq n} - \mathbb{E}M_n \mathbb{1}_{\{\tau>n\}}\right| \\ &\leq \mathbb{E}\left|M_\tau\right| \mathbb{1}_{\{\tau\geq n\}} + \mathbb{E}\left|M_n\right| \mathbb{1}_{\{\tau>n\}} \to 0 \end{aligned}$$

Wegen (ii),(iii) und einer Anwendung des Satzes von der majorisierten Konvergenz.

3.18 Anwendung

Berechnung von Ruinwahrscheinlichkeiten. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iid mit $\mathbb{P}(X_n = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X_n = -1)$ $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ für alle $n \in \mathbb{N}$
Anfangskapital von k Euro. $S_n^{(k)} = k + S_n = k + \sum_{i=0}^n X_i$ Vermögen nach n-Spielen bei Anfangskapital k.
Wir spielen solange, bis wir ein Vermögen von $l > k$ Euro erreichen oder ruiniert sind

$$\tau = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid S_n^k = 0 \text{ oder } S_n^k = l\} = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid S_n = 0 - k \text{ oder } S_n = l - k\}$$

ist die Strategie.

$$\{S_\tau = -k\} = \{S_\tau^{(k)} = 0\} \text{ ist Ruin}$$
$$\{S_\tau = l-k\} = \{S_\tau^{(k)} = l\} \text{ ist Gewinn}$$

Man kann zeigen:

$$\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1,\ \mathbb{E}\tau < \infty$$

1. $p = \frac{1}{2}$ der faire Fall:
   Dann ist $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Martingal.

   $$\mathbb{E}\left|S_\tau\right| \leq \max\{k, k-l\} < \infty$$

   $$\mathbb{E}\left|S_n\right| \mathbb{1}_{\{\tau>n\}} \leq \max\{k, l-k\}\mathbb{P}(\tau > n) \to 0$$

   Optional-Sampling liefert

   $$0 = \mathbb{E}S_\tau = -k\mathbb{P}(S_\tau = -k) + (l-k)\mathbb{P}(S_\tau = l-k)$$

   Zusammen mit $\mathbb{P}(S_\tau = -k) + \mathbb{P}(S_\tau = l-k) = 1$ folgt

   $$\mathbb{P}(S_\tau = -k) = \frac{l-k}{l} \text{ Ruinw'keit}$$

   $$\mathbb{P}(S_\tau = l-k) = \frac{k}{l} \text{ Gewinnw'keit}$$

2. $p \neq \frac{1}{2}$ der unfaire Fall:
   $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, $\tau = \inf\{n \in \mathbb{N}_0 \mid S_n = -k \text{ oder } S_n = l-k\}$
   Betrachte den geometrischen Random-Walk

   $$M_n = a^{S_n} = \prod_{i=1}^n a^{X_i} \text{ mit } a > 0$$

$(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist ein Martingal $\Leftrightarrow \mathbb{E}a^{X_1} = 1 \Leftrightarrow ap + \frac{1}{a}(1-p) = 1 \Leftrightarrow a = 1$ oder $a = \frac{1-p}{p}$
Für $p \neq \frac{1}{2}$ ist $a \neq 1$
Weiter gilt:

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\,|M_\tau| \leq \max\{a^{-k}, a^{l-k}\} < \infty\\ &\mathbb{E}\,|M_n|\mathbb{1}_{\{\tau>n\}} \leq \max\{a^{-k}, a^{l-k}\}\mathbb{P}(\tau > n) \overset{n\to\infty}{\to} 0\end{aligned}$$

Optional Sampling liefert:

$$1 = \mathbb{E}M_\tau 0a^{-k}\mathbb{P}(S_\tau = -k) + a^{l-k}\mathbb{P}(S_\tau = l-k)$$

Zusammen mit $\mathbb{P}(S_\tau = -k) + \mathbb{P}(S_\tau = l-k) = 1$ folgt

$$P(S_\tau = -k) = \frac{a^k - a^l}{1-a^l} \text{ und } \mathbb{P}(S_\tau = l) = \frac{1-a^k}{1-a^l}$$

Es folgt der Nachweis von $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$.
Betrachte dazu für $b \in \mathbb{Z}$, $\tau_b = \inf\{n \in \mathbb{N}_0 \mid S_n = b\}$
Dann gilt:

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(\tau_b\infty) = \mathbb{P}(\tau_1\infty)\mathbb{P}(\tau_{b-1} < \infty) = \mathbb{P}(\tau_1 < \infty)^b\\ &\mathbb{P}(\tau_{-a} < \infty) = \mathbb{P}(\tau_{-1} < \infty)^a \text{ für alle } a, b \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

Weiter ist

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\tau_1 < \infty) &= \mathbb{P}(\tau_1 < \infty, X_1 = 1) + \mathbb{P}(\tau_1 < \infty, X_1 = -1)\\ &= \mathbb{P}(X_1 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = -1)P(\tau_2 < \infty)\\ &= p + (1-p)\mathbb{P}(\tau_1 < \infty)^2\end{aligned}$$

Also ist $\mathbb{P}(\tau_1 < \infty)$ Lösung von

$$(1-p)x^2 - x + p = 0$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(\tau_1 < +\infty) = 1 \text{ oder } \mathbb{P}(\tau_1 < +\infty) = \frac{p}{1-p}$$

Der Fall $p \geq \frac{1}{2}$:
$p \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{p}{1-p} \geq 1 \Rightarrow \mathbb{P}(\tau_1 < +\infty) = 1$

Der Fall $p < \frac{1}{2}$:
Dann ist $\frac{p}{1-p} < 1$

$$\begin{aligned}\text{SLLN } &\Rightarrow \frac{S_n}{n} \overset{n\to\infty}{\to} \mathbb{E}X_1 = 2p-1 < 0\\ &\Rightarrow S_n \to -\infty \ \mathbb{P}-f.s.\\ &\Rightarrow \mathbb{P}(\sup_{n\in\mathbb{N}} S_n = +\infty) = 0\end{aligned}$$

Wäre $\mathbb{P}(\tau_1 < \infty) = 1$, so wäre $\mathbb{P}(\tau_b < \infty) = 1 \ \forall b \in \mathbb{N}$ und damit

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\sup_{n\in\mathbb{N}} S_n = +\infty) &= \lim_{b\to\infty} \mathbb{P}(\sup_{n\in\mathbb{N}} S_n \geq +\infty)\\ &= \lim_{b\to\infty} \mathbb{P}(\tau_b < \infty) = 1 \lightning\end{aligned}$$

Widerspruch, also gilt $\mathbb{P}(\tau_1 < \infty) = \frac{p}{1-p}$ falls $p < \frac{1}{2}$
$(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist Martingal $\Leftrightarrow \ \mathbb{E}a^{X_1} = 1 \Leftrightarrow ap + \frac{1}{a}(1-p) = 1 \Leftrightarrow a = 1$ oder $a = \frac{1-p}{p}$
Analog kann man schließen $\mathbb{P}(\tau_{-1} < \infty) = \begin{cases} 1, & \text{falls } p \leq \frac{1}{2}\\ \frac{1-p}{p}, & \text{falls } p > \frac{1}{2}\end{cases}$
Insgesamt folgt für $a < 0 < b, \ a, b \in \mathbb{R}$, und $\tau_{ab} = \inf\{n \in \mathbb{N}_0 \mid S_n = a \text{ oder } S_n = b\}$

$$\mathbb{P}(\tau_{ab} < \infty) = \mathbb{P}(\tau_a < \infty \text{ oder } \tau_b < \infty) = 1$$

Berechnung von $\mathbb{E}\tau_{ab}$:

(1) unfairer Fall:
$S_n - n\mathbb{E}X_1 = S_n - (2p-1),\ n \in N_0$ ist ein **zentrierter Random-Walk** und deshalb ein Martingal. Optional Sampling liefert:

$$\mathbb{E}(S_{\tau_{\wedge n}} - (\tau_{\wedge n})(2p-1)) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{E}(\tau_{\wedge n})(2p-1) = \mathbb{E}S_{\tau_{\wedge n}}$$

$\mathbb{E}\tau_{\wedge n} \uparrow \mathbb{E}\tau$ monotone Konvergenz
$\mathbb{E}S_{\tau_{\wedge n}} \overset{n\to\mathbb{N}_0}{\to} \mathbb{E}S_\tau$ majorisierte Konvergenz, da $|S_{\tau_{\wedge n}}| \leq \max\{|a|, b\}$
Es gilt $\mathbb{E}S_{\tau_{\wedge n}} = a\mathbb{P}(S_\tau = a) + b\mathbb{P}(S_\tau = b) = (2p-1)\mathbb{E}\tau$
Also folgt:

$$\mathbb{E}\tau_{ab} = \frac{1}{2p-1} \cdot \left(a\frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{|a|} - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{|a|+b}}{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{|a|+b}} + b\frac{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{|a|}}{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{|a|+b}} \right)$$

(2) fairer Fall: $p = \frac{1}{2}$
$(S_n^2 - n\mathbb{E}X_1^2)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist ein Martingal, denn

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}((S_n + X_{n+1})^2 \mid \mathcal{F}_n) \\
&= \mathbb{E}(S_n^2 \mid \mathcal{F}_n) + 2\mathbb{E}(X_{n+1}S_n \mid \mathcal{F}_n) + \mathbb{E}(X_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n) \\
&= S_n^2 + 2S_n\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) + \mathbb{E}X_{n+1}^2 \\
&= S_n^2 + 2S_n + \underbrace{\mathbb{E}X_{n+1}}_{=0} + \mathbb{E}X_{n+1}^2 \\
&= S_n^2 + \mathbb{E}X_{n+1}
\end{aligned}$$

Hieraus folgt die Martingaleigenschaft. Optioal Smapling liefert:

$$\mathbb{E}(S_{\tau_{\wedge n}}^2 - (\tau_{\wedge n})\mathbb{E}X_1^2 = 0 \Leftrightarrow \mathbb{E}S_{\tau_{\wedge n}}^2 = \underbrace{X_1^2}_{=1} \cdot \mathbb{E}(\tau_{\wedge n})$$

$\mathbb{E}\tau_{\wedge n} \uparrow \mathbb{E}\tau$ mon. Konv. und $\mathbb{E}S_{\tau_{\wedge n}}^2 \to \mathbb{E}S_\tau^2$ maj. Konv.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \mathbb{E}\tau &= \mathbb{E}S_\tau^2 = a^2\mathbb{P}(S_\tau = a) + b\mathbb{P}(S_\tau = b) \\
&= a^2 \cdot \frac{b}{|a|+b} + b^2 \cdot \frac{|a|}{|a|+b} = \frac{|a|\, b(|a|+b)}{|a|+b} \\
&= |a|\, b
\end{aligned}$$

3.19 Vorhersehbare Prozesse

man kennt den Wert für X_n schon vor Beginn der Periode

Sei $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Filtration. Ein stochastischer Prozess $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **vorhersehbar**, wenn gilt

$$X_n \text{ ist } \mathcal{F}_{n-1} - \text{messbar } \forall n \in \mathbb{N}$$

3.20 Doob-Meyer Zerlegung

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein, zu einer Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, adaptierter Prozess, mit

$$\mathbb{E}\,|X_n| < \infty \;\forall n \in \mathbb{N}_0$$

Dann existiert genau eine Zerlegung der Form

$$X_n = Y + M_n + \Lambda_n \quad \mathbb{P}-\text{f.s. } \forall n \in \mathbb{N}_0$$

mit Y ist $\mathcal{F}_o$-messbare Startvariable, $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist ein Martingal, mit $M_0 = 0$ und $(\Lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist vorhersehbar, $\Lambda_0 = 0$.
Eindeutigkeit bedeutet, wenn es eine weiter Zerlegung $X = Y' + M_n' + \Lambda_n'$ gibt,so folgt:

$$Y = Y', M_n = M_n',\ \Lambda_n = \Lambda_n' \text{ } \mathbb{P}\text{-f.s.},\ \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Beweis:
Existenz:
Setze $M_0 = 0,\ \Lambda_0 = 0$ und $M_1 = X_1 - \mathbb{E}(X_1 \mid \mathcal{F}_0),\ \Lambda_1 = \mathbb{E}(X_1 \mid \mathcal{F}_0) - X_0$.
Definiere rekursiv:

$$\begin{aligned} M_{n+1} &= M_n + X_{n+1} - \mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) \\ \Lambda_{n+1} &= \Lambda_n + \mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) - X_n \end{aligned}$$

Dann gilt $(\Lambda_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist vorhersehbar, $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist ein Martingal, denn

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}(M_n + X_{n+1} - \mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) \mid \mathcal{F}_n) \\ &= M_n + \mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) - \mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = M_n \end{aligned}$$

Behauptung:

$$X_n = X_0 + M_n + \Lambda_n,\ \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Induktion nach n:
$n = 0$ klar(✓)
$n \to n+1$:

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= X_{n+1} - X_n + X_n \\ &\overset{\text{IV}}{=} X_{n+1} - X_n + X_0 + M_n * \Lambda_n \\ &= X_0 + M_n * X_{n+1} - \mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) + \Lambda_n + \mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) - X_1 \\ &= X_0 + M_{n+1} + \Lambda_{n+1} \end{aligned}$$

Eindeutigkeit folgt aus der Tatsache, dass ein vorhersehbares Martingal konstant sein muss, d.h. sei $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Martingal und vorhersehbar, dann folgt

$$\exists Y \in \mathbb{R}:\ Y\mathcal{F}_0\text{-messbar}:\ Z_n = Y \text{ } \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Beweis:

$$Z_{n+1} = \mathbb{E}(Z_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = Z_n = \cdots = Z_1 = Y \text{ } \mathcal{F}_0\text{-messbar}$$

□

$$\begin{aligned} &\text{Sei } Y + M_n + \Lambda_n = Y' + M_n' + \Lambda_n' \\ &\Rightarrow Y = Y',\ \text{da } M_0 = M_0' = 0,\ \Lambda_0 = \Lambda_0' = 0 \\ &\Rightarrow M_n + \Lambda_n = M_n' + \Lambda_n' \\ &\Rightarrow M_n + M - n' = \Lambda_n' - \Lambda_n \end{aligned}$$

Also ist $(M_n - M_n')_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein vorhersehbares Martingal. Also folgt $M_n - M_n' = Z\ \forall n \in \mathbb{N}_0$ für ein $\mathcal{F}_0$-messbares Z.

$$Z = \mathbb{E}(M_n - M - n' \mid \mathcal{F}_0) = M_0 - M_0' = 0 \Rightarrow Z \equiv 0$$

□

Index

Die Seitenzahlen *sind mit Hyperlinks zu den entsprechenden Seiten versehen, also anklickbar!*

Abbildungsverzeichnis