Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

Fachbereich 10
Mathematik und
Informatik

Einführung in die Algebra

Aufarbeitung der Übungsaufgaben

Tobias Wedemeier

13. November 2014
gelesen von
Prof. Dr. Kramer

Hierbei handelt es sich um eine Aufarbeitung der Übungsaufgaben von **Prof. Dr. Kramer**, WWU Münster, aus der Vorlesung **Einführung in die Algebra** im Wintersemester 2014/15.

Für Fehler in der Aufarbeitung wird keine Haftung übernommen. Hinweise auf Fehler sind gerne gesehen, hierfür kann man mich in der Uni ansprechen oder alternativ eine e-Mail an:
tobias.wedemeier@gmx.de
Auch ist eine Mitarbeit über Github möglich.

Die Beweise sind größtenteils aus den Musterlösungen oder vom Autor selber und sind verkürzt oder vereinfacht, für die Korrektheit wird keine Haftung übernommen. Sie sind nur zum Verständnis gedacht.

Inhaltsverzeichnis

1 Aussagen aus den Übungen

1.1 Zettel 1

1.1.1 Aufage 1.2

Sei G eine Gruppe. A, B Untergruppen von G.
Z: Wenn $A \cup B$ eine Untergruppe ist, dann gilt: $A \subseteq B$ oder $b \subseteq A$.

Beweis:
Annahme: $A \not\subseteq B$. Also ex. ein $a \in A \backslash B$ und $b \in B$ beliebig. Betrachte $ab \in A \cup B$, da AB Untergruppe. Also ist $ab \in A$ oder $ab \in B$.
Sei $ab \in B$ und $b^{-1} \in B$, da B Untergruppe, folgt, dass $abb^{-1} = a \in B$. $\lightning$ zur Annahme.
Also $ab \in A$ und $a^{-1} \in A$, da A Untergruppe, folgt, dass $a^{-1}ab = b \in A$. Da b beliebig war, folgt $B \subseteq A$. □

1.1.2 Aufgabe 1.4

Gruppe G. A, B Untergruppen.Wir definieren $AB := \{ab \mid a \in A, b \in B\}$.

(i) Die Menge AB ist im allgemeinen keine Untergruppe.

(ii) Wenn weiter gilt $AB = BA$, dann ist AB eine Untergruppe.

Beweise klar! (✓)

1.2 Zettel 2

1.2.1 Aufgabe 2.1

Eine Gruppe G hat **Exponent** k, wenn für jedes Gruppenelement $g \in G$ gilt: $g^k = e$.
ZGruppen mit Exponent 2 sind abelsch.

Beweis:
Aus $g^2 = e$ folgt $g = g^{-1}$ $\forall g \in G$. $a, b \in G$ beliebig

$$ab = (ab)^{-1} \overset{\text{G Gruppe}}{=} b^{-1}a^{-1} = ba$$

□

Anmerkung: Gruppen mit Exponenten 3 sind im allgemeinen nicht abelsch.

1.2.2 Aufgabe 2.3

Menge X und $Sym(X)$. Der **Träger einer Permutation** $\sigma \in Sym(X)$ ist definiert wie folgt: $\operatorname{supp}(\sigma) := \{x \in X \mid \sigma(x) \neq x\}$.

(i) Wenn $\operatorname{supp}(\rho) \cap \operatorname{supp}(\sigma) = \emptyset$ für $\rho, \sigma \in Sym(X)$ gilt, dann folgt $\rho \circ \sigma = \sigma \circ \rho$.

(ii) Wenn $\operatorname{supp}(\rho) \cap \operatorname{supp}(\sigma) = \emptyset$ und $\rho \circ \sigma = \mathrm{id}$ für $\sigma, \rho \in Sym(X)$ gilt, dann folgt $\rho = \sigma = \mathrm{id}$.

Beweis:

(i) Es gilt: $\rho\circ\sigma = \begin{cases} x, & \text{wenn } x \notin \operatorname{supp}(\rho),\ \operatorname{supp}(\sigma) \\ \rho(x), & \text{wenn } x \in \operatorname{supp}(\rho) \\ \sigma(x), & \text{wenn } x \in \operatorname{supp}(\sigma) \end{cases}$ oder $\sigma\circ\rho = \begin{cases} x, & \text{wenn } x \notin \operatorname{supp}(\rho),\ \operatorname{supp}(\sigma) \\ \rho(x), & \text{wenn } x \in \operatorname{supp}(\rho) \\ \sigma(x), & \text{wenn } x \in \operatorname{supp}(\sigma) \end{cases}$

Da $\operatorname{supp}(\rho) \cap \operatorname{supp}(\sigma) = \emptyset$ gilt und somit x nicht von beiden Permutationen verändert wird. Da Permutationen bijektiv nach Definition sind, ist dies wohldefiniert.

(ii) Nach (i) gilt, dass $\rho \circ \sigma = \begin{cases} x, & \text{wenn } x \notin \operatorname{supp}(\rho),\ \operatorname{supp}(\sigma) \\ \rho(x), & \text{wenn } x \in \operatorname{supp}(\rho) \\ \sigma(x), & \text{wenn } x \in \operatorname{supp}(\sigma) \end{cases}$ gilt.

Also muss $\rho(x) = x$ gelten, da $\rho \circ \sigma$ gilt, analog $\sigma(x) = x$. Also folgt $\rho = \sigma = \mathrm{id}$.

1.3 Zettel 3

Abbildungsverzeichnis