Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Fachbereich 10
Mathematik und Informatik

Skript Höhere Algebra II.

Mitschrift der Vorlesung „Höhere Algebra II.“ von Prof. Dr. Lutz Hille

Jannes Bantje

13. Oktober 2014

Aktuelle Version verfügbar bei:

GitHub (inklusive Sourcecode)
https://github.com/JaMeZ-B/latex-wwu

Bittorrent Sync
B6WH2DISQ5QVYIRYIEZSF4ZR2IDVKPN3I

Vorwort — Mitarbeit am Skript

Dieses Dokument ist eine Mitschrift aus der Vorlesung „Höhere Algebra II., WiSe 2014/2015“, gelesen von Prof. Dr. Lutz Hille. Der Inhalt entspricht weitestgehend dem Tafelanschrieb. Für die Korrektheit des Inhalts übernehme ich keinerlei Garantie! Für Bemerkungen und Korrekturen – und seien es nur Rechtschreibfehler – bin ich sehr dankbar. Korrekturen lassen sich prinzipiell auf drei Wegen einreichen:

- Persönliches Ansprechen in der Uni, Mails an `j.bantje@wwu.de` (gerne auch mit annotieren PDFs)
- *Direktes* Mitarbeiten am Skript: Den Quellcode poste ich auf GitHub (siehe oben), also stehen vielfältige Möglichkeiten der Zusammenarbeit zur Verfügung: Zum Beispiel durch Kommentare am Code über die Website und die Kombination Fork + Pull Request. Wer sich verdient macht oder ein Skript zu einer Vorlesung, die ich nicht besuche, beisteuern will, dem gewähre ich gerne auch Schreibzugriff.

  Beachten sollte man dabei, dass dazu ein Account bei `github.com` notwendig ist, der allerdings ohne Angabe von persönlichen Daten angelegt werden kann. Wer bei GitHub (bzw. dem zugrunde liegenden Open-Source-Programm „`git`“) – verständlicherweise – Hilfe beim Einstieg braucht, dem helfe ich gerne weiter. Es gibt aber auch zahlreiche empfehlenswerte Tutorials im Internet.[1]
- *Indirektes* Mitarbeiten: TeX-Dateien per Mail verschicken.

  Dies ist nur dann sinnvoll, wenn man einen ganzen Abschnitt ändern möchte (zB. einen alternativen Beweis geben), da ich die Änderungen dann per Hand einbauen muss!

Vorlesungshomepage

`kommthoffentlichnoch:D`

[1] zB. `https://try.github.io/levels/1/challenges/1`, ist auf Englisch, aber dafür interaktives LearningByDoing

Inhaltsverzeichnis

0 Einführung

1. $\mathrm{GL}_n = \mathrm{GL}_n(k)$. Meistens $k = \mathbb{C}$ als algebraische Gruppe (wir benötigen algebraische Abgeschlossenheit und oft auch Charakteristik 0), also $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) = \mathrm{GL}_n$.

   $M_n(\mathbb{C}) = \{A \mid n \times n\text{-Matrizen über } \mathbb{C}\} \supseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ offen in der üblichen Topologie.

   Neue Topologie: Zariski-Topologie (viel gröber)

   $$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) = M_n(\mathbb{C}) \setminus V(\det = 0)$$

   wobei $V(f = 0) = \{x \in \mathbb{A}^m \mid f(x) = 0\}$ Nullstellenmenge. $f : \mathbb{A}^m \to \mathbb{C}$ Funktion. $f \in k[x_1, \ldots, x_m]$.

   $$\mathbb{A}^m(\mathbb{C}) = \mathbb{A}^m = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{C}\} = \mathbb{C}^n$$

2. Beispiel: $\mathbb{A}^{n \cdot n} = M_n = \mathbb{A}^m$

   $G := \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ist eine Gruppe:

   $$\mu : G \times G \to G \quad i : G \to G \quad e : \{\mathrm{pt}\} \to G \qquad \text{(mit maps)}$$

   Matrixmultiplikation (polynomiale Abbildung) Ist die Inversion auch polynomial? Nein, wir müssen auch Quotienten polynomialer Abbildungen mit Nenner $\neq 0$ zulassen.

Idee:
Lineare algebraische Gruppe: abgeschlossen in GL_n, Gruppenabbildungen sind Quotienten polynomialer Abbildungen mit folgenden Bedingungen:

- Assoziativgesetz

$$\begin{tikzcd} G \times G \times G \arrow[r, "(\mu,\mathrm{id})"] \arrow[d, "(\mathrm{id},\mu)"] & G \times G \arrow[d, "\mu"] \\ G \times G \arrow[r, "\mu"] & G \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (g,h,l) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (g \cdot h, l) \arrow[d, mapsto] \\ (g, h \cdot l) \arrow[r, mapsto] & g \cdot (h \cdot l) \overset{!}{=} (g \cdot h) \cdot l \end{tikzcd}$$

- Inverse ($\Delta : G \to G \times G, g \mapsto (g,g)$ Diagonalabbildung)

$$\begin{tikzcd} & G \times G \arrow[d, "(\mathrm{id},i)"] \\ G \arrow[ur, "\Delta"] \arrow[r] \arrow[d, "p"] & G \times G \arrow[d, "\mu"] \\ \{\mathrm{pt}\} \arrow[r, "e"] & G \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} g \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (g, g^{-1}) \arrow[d, mapsto] \\ e \arrow[r, mapsto] & e \overset{!}{=} g \cdot g^{-1} \end{tikzcd}$$

- Einselement $G \times \{\mathrm{pt}\} = G$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "(e,\mathrm{id})"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}"'] & G \times G \arrow[r, "\mu"] & G \end{tikzcd}$$

0.1 Definition

$f : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$ heißt **polynomial** (Morphismus affiner Varieteten), falls

$$(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)) = f(x_1, \dots, x_n)$$

Einträge f_j im Polynomring $k[x_1, \dots, x_n]$ hat (d.h. $f_j \in k[x_1, \dots, x_n] \ \forall j = 1, \dots, n$).

offen klassisch oder mit Zariski-Topologie

$f : U \overset{\text{offen}}{\subseteq} \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$ heißt **polynomial**, falls $f = \frac{h}{g}$ Quotient zweier Polynome $h, g \in k[x_1, \dots, x_n]$ ist, mit $f_j = \frac{h_j}{g_j}$ komponentenweise!

f wie oben heißt **rational**, falls $f = \frac{h}{g}$ wie oben mit $g \not\equiv 0$ auf U. f ist im Allgemeinen keine Abbildung! f ist nur definiert auf $U \setminus V(g = 0)$.

0.2 Beispiele

- $\mathrm{GL}_n \to \mathrm{GL}_n, g \mapsto g^{-1}$ polynomial, $M_n \to M_n$, „”$g \mapsto g^{-1}$”“ ist rational.
- $\det : \mathrm{GL}_n \to \mathbb{C}$ polynomial, $\det : M_n \to \mathbb{C}$ polynomial
- $\det^{-1} : \mathrm{GL}_n \to \mathbb{C}$ polynomial ? , $\det^{-1} : M_n | to \mathbb{C}$ rational
- $\mathbb{A}^1 = C \to \mathbb{C}^* \subseteq C = \mathbb{A}^1$, $z \mapsto e^{2\pi i z}$ nicht polynomial

Abbildungsverzeichnis

Todo’s und andere Baustellen