

# Skript Differentialformen und Mannigfaltigkeiten

Mitschrift der Vorlesung „Differentialformen und Mannigfaltigkeiten“ von Prof. Dr. Kai Zehmisch

Jannes Bantje

26. Mai 2014

Erstellt mit X<sub>Y</sub>LaTeX

## Inhaltsverzeichnis

<b>1 Mannigfaltigkeiten</b>	<b>1</b>
1.1 Sphären	1
1.1.1 Definition: Differenzierbarkeit auf $S^n$	1
1.2 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten	1
1.2.1 Definition: $n$ -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit	1
1.2.2 Definition: Atlas und Kartenwechsel	2
1.2.3 Definition: Differenzierbarer Atlas	2
1.2.4 Definition: Kompatibilität von Karten	3
1.2.5 Definition: Maximaler Atlas, differenzierbare Struktur, differenzierbare Mannigfaltigkeit	3
1.3 Beispiel: Der reell projektive Raum	3
1.4 Differenzierbare Funktionen	5
1.4.1 Definition: Differenzierbarkeit auf einer Mannigfaltigkeit	5
1.4.2 Definition: Diffeomorphismus	6
1.5 Der Tangentialraum	6
1.5.1 Definition: Tangentialraum (geometrisch)	7
1.5.2 Definition: Tangentialraum (algebraisch)	7
1.5.3 Definition: Differential (algebraisch)	7
1.5.4 Satz 1: Die partiellen Ableitungen bilden eine Basis des $T_0\mathbb{R}^m$	8
1.5.5 Lemma 2 (Morse)	8
1.5.6 Definition: Differential (geometrisch)	8
1.5.7 Satz 3: In lokalen Koordinaten ist das Differential durch die Jacobi-Matrix gegeben	9
1.5.8 Definition (des Physikers ...)	9
1.5.9 Äquivalenz der geometrischen und der algebraischen Definition	9

<b>2 Vektorfelder</b>	<b>11</b>
2.1 Vektorfelder und Lie-Klammer	11
2.1.1 Definition: Vektorfeld	11
2.1.2 Lemma 4: Differenzierbarkeit eines Vektorfeldes	11
2.1.3 Bemerkung: Modul der differenzierbaren Vektorfelder auf einer Mannigfaltigkeit	11
2.1.4 Definition: Lie-Klammer	11
2.1.5 Lemma 5: Die Lie-Klammer ist ein Vektorfeld	12
2.1.6 Beispiel: Lie-Klammer im $\mathbb{R}^2$	12
2.2 Integralkurven	12
2.3 Satz von Picard-Lindelöf	13
2.3.1 Satz 6: (Picard-Lindelöf)	13
2.3.2 Bemerkung (Quantisierung)	14
2.3.3 Bemerkung (höhere Regularität)	15
2.4 Flüsse und die Lie-Ableitung	16
2.4.1 Definition: lokaler Fluss	16
2.4.2 Satz 7: Verkettung von lokalen Flüssen	16
2.4.3 Definition: Lie-Ableitung	16
2.4.4 Satz 8: Identitäten der Lie-Ableitung	16
2.4.5 Notation für Diffeomorphismen	17
2.4.6 Beispiel zu 2.4.5: Vektorfeld aus einem Diffeomorphismus und einem Vektorfeld	17
2.4.7 Lemma 9	18
2.4.8 Satz 10	18
2.5 Dynamische Systeme	19
2.5.1 Definition: Dynamisches System	19
2.5.2 Beispiele für dynamische Systeme	19
2.5.3 Einparameterfamilie von Diffeomorphismen	20
2.5.4 Nach $M$ parametrisierte Kurvenscharen	20
2.5.5 Bemerkung: Zerlegung von $M$ in ihre Bahnen	20
2.5.6 Notation: Derivation definiert durch eine Kurve	20
2.5.7 Satz 11	21
2.5.8 Definition: lokaler Fluss	21
2.5.9 Beispiel	22
2.5.10 Satz 12	23
<b>3 Teilung der Eins</b>	<b>24</b>
3.1 Parakompaktheit	24
3.1.1 Satz 13	24
3.1.2 Definition	25
3.1.3 Lemma 13b	25
3.1.4 Satz 14	26
3.2 Riemannsche Metriken	26
3.2.1 Definition	26
3.2.2 Satz 15	27
3.3 Sternförmige Gebiete	27
3.3.1 Definition	27
3.3.2 Beispiel	27
3.4 Satz 16	27
<b>Index</b>	<b>A</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>B</b>

# 1 Mannigfaltigkeiten

## 1.1 Sphären

Die  $n$ -Sphäre ist gegeben durch

$$S^n := \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

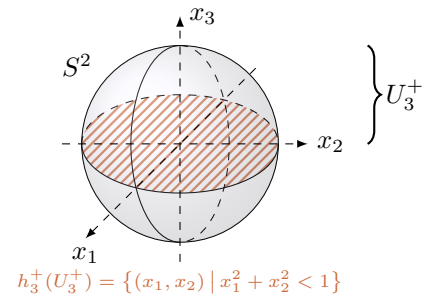
Für  $i = 1, \dots, n+1$  betrachten wir die (bzgl. der Relativtopologie) offenen Teilmengen

$$U_i^\pm = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n \mid \pm x_i > 0\}$$

und lokale Karten ( $\hat{x}_i$  heißt, dass diese Koordinate entfällt)

$$h_i^\pm : U_i^\pm \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1})$$

Die  $h_i^\pm$  sind Homöomorphismen auf ihrem Bild mit Inversen (etwa  $x_i > 0$ )



$$(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1}) \text{ mit } \sum_{k \neq i} x_k^2 < 1 \xrightarrow{(h_i^\pm)^{-1}} \left( x_1, \dots, \sqrt{1 - \sum_{k \neq i} x_k^2}, \dots, x_{n+1} \right) \in S^n$$

Wir wollen differenzierbare Funktionen auf  $S^n$  erklären. Dazu betrachte ( $x_j > 0, i < j$ ) die Komposition  $h_j^+ \circ (h_i^+)^{-1}$ . Diese bildet  $(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1})$  nach  $\left( x_1, \dots, \sqrt{1 - \sum_{k \neq i} x_k^2}, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_{n+1} \right)$  ab und ist auf  $h_i^+(U_i^+ \cap U_j^+)$  (beliebig oft) differenzierbar. Daher sagen wir:

### 1.1.1 Definition: Differenzierbarkeit auf $S^n$

Eine Funktion  $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}$  ist **differenzierbar**, falls alle Abbildungen

$$f \circ (h_i^\pm)^{-1} : h_i^\pm(U_i^\pm) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\} \rightarrow \mathbb{R}$$

(beliebig oft) differenzierbar sind. Diese Definition ist korrekt, da

$$f \circ (h_j^\pm)^{-1} = f \circ (h_i^\pm)^{-1} \circ \underbrace{h_i^\pm \circ (h_j^\pm)^{-1}}_{\in C^\infty}$$

## 1.2 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

### 1.2.1 Definition: $n$ -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit

Eine  **$n$ -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit**  $M$  ist ein Hausdorff-Raum, mit abzählbarer Basis der Topologie, der lokal homöomorph zum  $\mathbb{R}^n$  ist.

**lokal homöomorph:**  $\forall p \in M \exists$  offene Umgebung  $U \subset M$  um  $p$  und einen Homöomorphismus  $h : U \rightarrow U' \subset \mathbb{R}^n$  auf eine offene Teilmenge  $U'$  des  $\mathbb{R}^n$ .

**Hausdorffsch:** Zu je zwei Punkten  $p, q \in M$  mit  $p \neq q$  gibt es offene Umgebungen  $U, V$  von  $p$  bzw.  $q$ , die  $U \cap V = \emptyset$ . Beispiel: Jeder metrische Raum ist Hausdorffsch:  $U := \{x \in M \mid d(x, p) < \frac{1}{3}d(p, q)\}$ , analog  $V$

**Basis einer Topologie:** Ist ein System  $\mathcal{B}$  offener Mengen des topologischen Raumes  $M$ , sodass sich jede offene Menge in  $M$  als Vereinigung von Mengen aus dem System  $\mathcal{B}$  schreiben lässt.

Beispiel: Basis des  $\mathbb{R}^n$ : offene Bälle  $B_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| < r\}$ ,  $a \in \mathbb{R}^n, r \in (0, \infty)$ . Eine abzählbare Basis des  $\mathbb{R}^n$ :

$$\mathcal{B} := \{B_r(a) \mid a \in \mathbb{Q}^n, r \in (0, \infty) \text{ rational}\}$$

### Beispiel (topologische Mannigfaltigkeit)

- offene Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$
- Untermannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^{n+k}$

(näheres in der ersten Übung)

### Bemerkung

Die Hausdorff-Eigenschaft folgt *nicht* aus der lokalen Homöomorphie zum  $\mathbb{R}^n$ ! Betrachte dazu Topologie auf  $M = R \cup \{p\}$ .  $U$  ist offen in  $M$ , falls

- $U \subset \mathbb{R}$  offen
- $U = V \setminus \{0\} \cup \{p\}$  mit  $V \subset \mathbb{R}$  offen und  $0 \in V$
- oder Vereinigung solcher Mengen

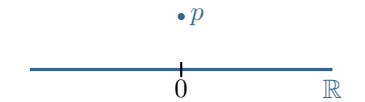


Abbildung 1: Beispiel einer nicht-Hausdorffmenge

### 1.2.2 Definition: Atlas und Kartenwechsel

$h$  heißt Karte,  $U$  das zugehörige Kartengebiet. Eine Menge von Karten  $\{h_\alpha : U_\alpha \rightarrow U'_\alpha \subset \mathbb{R}^n \mid \alpha \in A\}$  heißt **Atlas** von  $M$ , falls  $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$ .

Ein **Kartenwechsel** ist ein Homöomorphismus

$$h_{\beta\alpha} := h_\beta \circ h_\alpha^{-1} : h_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow h_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

### 1.2.3 Definition: Differenzierbarer Atlas

Ein Atlas einer topologischen Mannigfaltigkeit heißt **differenzierbar**, falls alle Kartenwechsel (beliebig oft) differenzierbar sind.

### Beispiele

- $U \subset \mathbb{R}^n$  offen, Atlas  $\{\text{id} : U \rightarrow U\}$ . Zum Beispiel  $GL(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \subset Mat_{n \times n}(\mathbb{R})$ .

**Bemerkung:** Die Hausdorff-Eigenschaft folgt zum Beispiel daraus, dass  $U$  ein metrischer Raum ist. Eine topologische Mannigfaltigkeit mit einem abzählbaren Atlas hat eine abzählbare Basis der Topologie.

- $S^n$  mit Atlas  $\{h_i^\pm : U_i^\pm \rightarrow \mathbb{R}^n \mid i = 1, \dots, n+1\}$
- $S^n$  mit Atlas  $\{h^\pm : S^n \setminus \{(0, \dots, 0, \pm 1)\} \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n\}$  (**stereografische Projektion**, siehe Blatt 1).

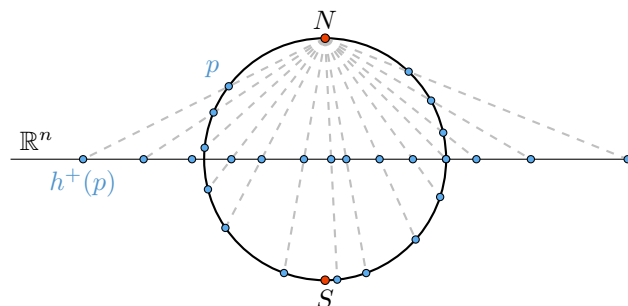


Abbildung 2: Stereografische Projektion

### 1.2.4 Definition: Kompatibilität von Karten

Zwei Karten  $(U_\alpha, h_\alpha)$  und  $(U_\beta, h_\beta)$  einer topologischen Mannigfaltigkeit heißen **kompatibel**, falls der Kartenwechsel  $h_{\beta\alpha} = h_\beta \circ h_\alpha^{-1}$  ein Diffeomorphismus ist, d.h.  $h_{\beta\alpha}$  ist differenzierbar und  $h_{\alpha\beta}$  ebenfalls.

Die  $n$ -Sphäre hat zwei Atlanten  $\{h_i^\pm\}$  und  $\{h^\pm\}$ . Die beiden sind jeweils miteinander kompatibel, siehe Blatt 1. Wir wollen daher die beiden Atlanten  $\{h_i^\pm\}$  und  $\{h^\pm\}$  als ein und dieselbe differenzierbare Mannigfaltigkeit auffassen.

### 1.2.5 Definition: Maximaler Atlas, differenzierbare Struktur, differenzierbare Mannigfaltigkeit

Ein differenzierbarer Atlas  $\mathcal{A}$  heißt **maximal**, falls jede Karte von  $M$ , die mit allen Karten von  $\mathcal{A}$  kompatibel ist, selbst bereits zu  $\mathcal{A}$  gehört. Eine **differenzierbare Struktur** auf einer topologischen Mannigfaltigkeit ist ein maximaler differenzierbarer Atlas. Eine **differenzierbare Mannigfaltigkeit** ist eine topologische Mannigfaltigkeit mit einer differenzierbaren Struktur.

#### Bemerkung

Jeder differenzierbare Atlas ist in einem eindeutig bestimmten maximalen Atlas enthalten, den man durch Hinzunahme aller kompatiblen Karten erhält. Zur Angabe einer differenzierbaren Struktur genügt es daher, einen differenzierbaren Atlas zu beschreiben (siehe Blatt 2).

## 1.3 Beispiel: Der reell projektive Raum

Der reell projektive Raum ist definiert durch:

$$\begin{aligned}\mathbb{R}P^n &:= \frac{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}{x \sim y \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : y = \lambda x} \\ &= \text{Menge aller Ursprungsgeraden im } \mathbb{R}^{n+1} \\ &= S^n / x \sim -x\end{aligned}$$

Für  $n = 1$

Jede Ursprungsgerade außer  $\{x_2 = 0\}$  entspricht genau einem Punkt auf der affinen Gerade  $\{x_2 = 1\}$ ;  $\infty := \{x_2 = 0\}$ .  $\mathbb{R}P^1 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ .

Für  $n = 2$ : Jede Ursprungsgerade im  $\mathbb{R}^3$ , die nicht in der  $x_1$ - $x_2$ -Ebene liegt, entspricht genau ein Punkt

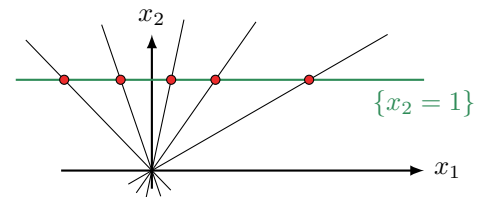


Abb. 3: Der eindimensionale projektive Raum  $\mathbb{R}P^1$

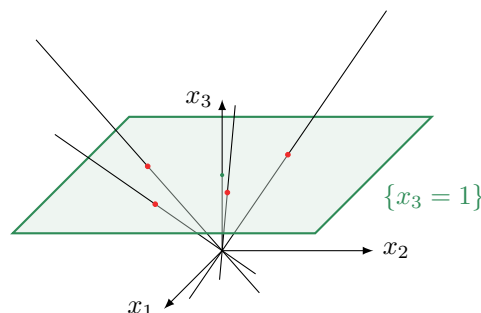


Abbildung 4: Der 2-dimensionale projektive Raum  $\mathbb{R}P^2$  (projektive Ebene)

in der affinen Ebene  $\{x_3 = 1\}$ . Die Ursprungsgeraden in der  $x_1$ - $x_2$ -Ebene bilden einen  $\mathbb{R}P^1$

$$\mathbb{R}P^2 = \mathbb{R}^2 \cup \mathbb{R}P^1$$

## Quotientenabbildung

$$\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}P^n, \quad x \mapsto [x] \text{ (Ursprungsgerade durch } x \text{)}$$

- (i)
- Topologie auf  $\mathbb{R}P^n$  (Quotiententopologie)  $U \subset \mathbb{R}P^n$  sei offen  $:\Leftrightarrow \pi^{-1}(U) \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  offen ist ( $\Rightarrow \pi$  stetig)
  - Hausdorff-Eigenschaft: Seien  $[x] \neq [y]$  im  $\mathbb{R}P^n$ . Dann gibt es disjunkte offene Mengen  $X, Y$  im  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ , die aus Ursprungsgeraden bestehen (ohne 0) und die die Ursprungsgeraden durch  $x$  und  $y$  (mit 0 entfernt) erhalten:

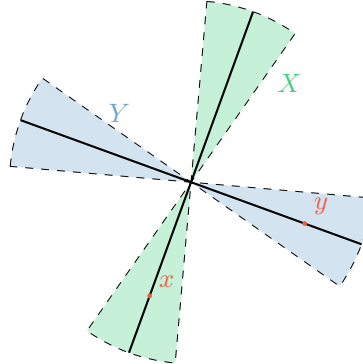


Abbildung 5: Zeichnung zur Hausdorff-Eigenschaft von  $\mathbb{R}P^n$

$\Rightarrow \pi^{-1}(\pi(X)) = X, \pi^{-1}(\pi(Y)) = Y$  sind offen. Also sind  $\pi(X), \pi(Y)$  offene disjunkte Umgebungen von  $[x]$  bzw.  $[y]$ .

- abzählbare Basis der Topologie:

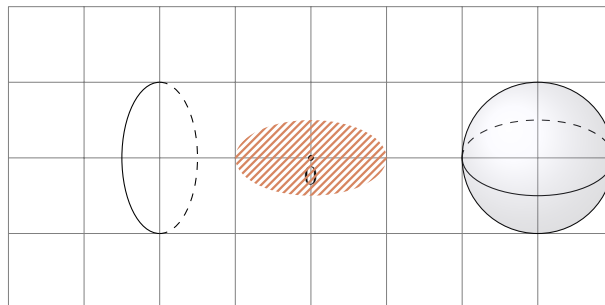


Abbildung 6: Basis der Topologie von  $\mathbb{R}P^n$  (unfertig)

$$\mathcal{B} = \{ \pi(X_{a,r}) \mid a \in \mathbb{Q}^n, r \in (0, \infty) \cap \mathbb{Q} \}$$

- (ii) Differenzierbare Struktur auf  $\mathbb{R}P^n$ :  $[x_0 : x_1 : \dots : x_n] \in \mathbb{R}P^n$  sei die Ursprungsgerade durch  $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ . Dies sind die sogenannten **homogenen Koordinaten**.

$$[x_0 : \dots : x_n] = [\lambda x_0 : \dots : \lambda x_n] \quad \text{mit } \lambda \neq 0$$

Setze  $U_i := \{[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{R}P^n \mid x_i \neq 0\}$  für  $i = 0, 1, \dots, n$ . Dann ist

$$\pi^{-1}(U_i) = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \mid x_i \neq 0\} \text{ offen.}$$

$\Rightarrow U_i$  ist offen. Betrachte nun folgende Karte

$$h_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad [x_0 : \dots : x_n] \mapsto \left( \frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{\widehat{x_i}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right)$$

Folgendes ist erfüllt:

- Die Definition hängt nicht von der Wahl des Repräsentanten ab.
- $h_i$  ist bijektiv mit Inverser  $h_i^{-1}(y_1, \dots, y_n) = [y_1 : \dots : y_i : 1 : y_{i+1} : \dots : y_n]$
- $h_i^{-1}$  ist stetig:

Einfügen nach  $i$ -ter Stelle!

$$h_i^{-1} : (y_1, \dots, y_n) \xrightarrow{\text{stetig}} (y_1, \dots, 1, \dots, y_n) \xrightarrow{\pi} [y_1 : \dots : 1 : \dots : y_n]$$

- $h_i$  ist stetig

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \supset \pi^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\tilde{h}_i} & \mathbb{R}^n \\ \downarrow \pi & & \downarrow \text{id} \\ \mathbb{R}P^n \supset U_i & \xrightarrow{h_i} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

Es gilt  $\tilde{h}_i(x_0, \dots, x_n) = \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_i}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right)$ . Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen. Also  $\pi^{-1}(h_i^{-1}(U)) = \tilde{h}_i^{-1}(U)$  ist offen, da  $\tilde{h}_i$  stetig ist.  $\Rightarrow$  Nach der Quotiententopologie ist  $h_i^{-1}(U)$  offen.

- $\{(U_i, h_i)\}_{i=0, \dots, n}$  ist ein differenzierbarer Atlas ( $\Rightarrow$  abzählbare Basis der Topologie)
  - $\diamond \bigcup_{i=0, \dots, n} U_i = \mathbb{R}P^n$
  - $\diamond$

$$\begin{aligned} h_j \circ h_i^{-1}(y_1, \dots, y_n) &= h_j([y_1 : \dots : \underset{0}{1} : \dots : y_n]) \\ &= \begin{cases} \left(\frac{y_1}{y_j}, \dots, \frac{1}{y_j}, \dots, \frac{\widehat{y_j}}{y_j}, \dots, \frac{y_n}{y_j}\right), & \text{falls } i < j \\ \left(\frac{y_1}{y_{j+1}}, \dots, \frac{\widehat{y_{j+1}}}{y_{j+1}}, \dots, \frac{1}{y_{j+1}}, \dots, \frac{y_n}{y_{j+1}}\right), & \text{falls } i > j \end{cases} \end{aligned}$$

ist  $C^\infty$  auf

$$h_i(U_i \cap U_j) = \begin{cases} \{y \in \mathbb{R}^n \mid y_j \neq 0\}, & \text{falls } i < j \\ \{y \in \mathbb{R}^n \mid y_{j+1} \neq 0\}, & \text{falls } i > j \end{cases}$$

## 1.4 Differenzierbare Funktionen

### 1.4.1 Definition

Eine stetige Abbildung  $f : M \rightarrow N$  zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten heißt **differenzierbar** in  $p \in M$ , falls für zwei Karten

$$h : U \xrightarrow{\ni p} U' \quad \text{und} \quad k : V \xrightarrow{\ni f(p)} V'$$

die Abbildung  $k \circ f \circ h^{-1}$  in  $h(p) \in U'$  (beliebig oft) differenzierbar ist.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \downarrow h & & \downarrow k \\ \mathbb{R}^m & \xrightarrow{k \circ f \circ h^{-1}} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

- Die Stetigkeit von  $f$  wird vorausgesetzt, um sicherzustellen, dass  $f^{-1}(V)$  und damit auch  $h(f^{-1}(V) \cap U)$  eine offene Menge ist.
- Wie in 1.1 erklärt, ist die Definition eines differenzierbaren Atlases gerade so gewählt, dass die obige Definition unabhängig von der Wahl der lokalen Karten ist.

Wir setzen:

$$C^\infty(M, N) := \{(\text{in jedem Punkt}) \text{ differenzierbare Abbildungen } M \rightarrow N\}$$

$$C^\infty(M) := C^\infty(M, \mathbb{R}),$$

wobei  $(\mathbb{R}, \text{id})$  eine differenzierbare Struktur auf  $\mathbb{R}$  definiert. Mit  $V = \mathbb{R}$  muss man in diesem Spezialfall die Stetigkeit von  $f$  *nicht* voraussetzen, da  $f^{-1}(\mathbb{R}) = M$  offen ist. Differenzierbare Funktionen sind stetig.

#### 1.4.2 Definition

Ein **Diffeomorphismus** ist ein differenzierbarer Homöomorphismus mit differenzierbarer Inverser.

##### Beispiel

Sei  $M$  der topologische Raum  $\mathbb{R}$ . Homöomorphismen:  $h_1 = \text{id}$ ,  $h_2(x) = x^3$ .  $h_1$  und  $h_2$  definieren differenzierbare Strukturen auf  $\mathbb{R}$ . Wegen

$$h_1 \circ h_2^{-1} : x \mapsto \sqrt[3]{x}$$

(nicht in 0 differenzierbar!) sind diese differenzierbare Strukturen *nicht* gleich. Sie sind aber diffeomorph:

$$\begin{array}{ccc} (M, \mathcal{A}_1) & \xrightarrow{x \mapsto \sqrt[3]{x}} & (M, \mathcal{A}_2) \\ \downarrow h_1 & & \downarrow h_2 \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{\text{id} = h_2 \circ f \circ h_1^{-1}} & \mathbb{R} \end{array}$$

Es ist sinnvoll differenzierbare Mannigfaltigkeiten bis auf Diffeomorphie zu klassifizieren. Auf  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \neq 4$  gibt es bis auf Diffeomorphie genau eine differenzierbare Struktur. Auf  $\mathbb{R}^4$  gibt es überabzählbar viele. Auf  $S^n$  mit  $n \leq 6$  genau eine. Auf  $S^7$  genau 28.

*mind = blown*

### 1.5 Der Tangentialraum

Sei  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  differenzierbar. Das **Differential** von  $f$  ist in  $p \in \mathbb{R}^m$  eine lineare Abbildung  $T_p \mathbb{R}^m \rightarrow T_{f(p)} \mathbb{R}^n$  gegeben durch die Jacobi-Matrix

$$J_f(p) = \left( \frac{\partial f^i}{\partial x^j} \right)_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m}}$$

mit  $f = (f^1, \dots, f^n)$ . Der **Geschwindigkeitsvektor** in  $p$  einer Kurve durch  $p$  wird auf den Geschwindigkeitsvektor der Bildkurve in  $f(p)$  abgebildet.

$T_p \mathbb{R}^m$  heißt der **Tangentialraum** und ist der Raum aller solchen Geschwindigkeitsvektoren, der hier kanonisch zu  $\mathbb{R}^m$  isomorph ist.

**Ziel:** Differential von  $f : M \xrightarrow{\text{diffb.}} N$  zu erklären.

**Idee:** • Tangentialebene  $T_p M$  einer Fläche  $M \subset \mathbb{R}^3$

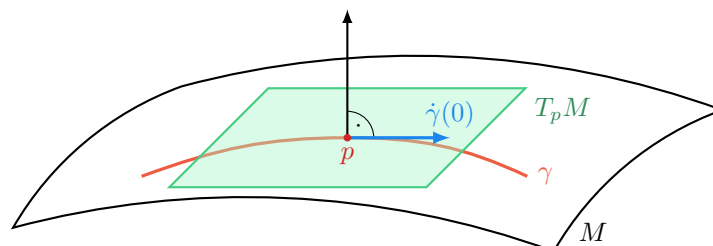


Abbildung 7: Tangentialebene im  $\mathbb{R}^3$



= Raum aller Geschwindigkeitsvektoren  $\dot{\gamma}(0)$  von Kurven  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  mit  $\gamma(0) = p$ .

- Für  $v, w \in T_0\mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^m$  gilt  $v = w$  genau dann, wenn für die Richtungsableitungen aller  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$  gilt

$$D_v f(0) = D_w f(0)$$

### 1.5.1 Definition (des Geometers)

Ein **Tangententialvektor** im Punkt  $p \in M$  ist eine Äquivalenzklasse  $[\gamma]$  von differenzierbaren Wegen  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  mit  $\gamma(0) = p$  und  $\varepsilon = \varepsilon(p) > 0$  unter der Äquivalenzrelation

Testfunktionen  
bezeichnen wir  
meist mit  $\varphi$

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 :\Leftrightarrow \quad \forall \varphi \in C^\infty(M) : \quad \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_1)(0) = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_2)(0)$$

$X_\gamma(\varphi) := \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma)(0)$  ist Richtungsableitung von  $\varphi$  in Richtung des Tangentialvektors  $[\gamma]$ . Es gilt

**Linearität:** Für  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi, \psi \in C^\infty(M)$  ist

$$X_\gamma(\lambda \cdot \varphi + \mu \cdot \psi) = \lambda \cdot X_\gamma(\varphi) + \mu \cdot X_\gamma(\psi)$$

**Leibnizsche Produktregel:**  $\forall \varphi, \psi \in C^\infty(M)$  gilt

$\gamma(0) = p$

$$X_\gamma(\varphi \cdot \psi) = X_\gamma(\varphi) \cdot \psi(p) + \varphi(p) \cdot X_\gamma(\psi)$$

Beispiele:

- $X(1) = X(1 \cdot 1) = X(1) \cdot 1 + 1 \cdot X(1) \Rightarrow X(1) = 0$
- $X(c) = cX(1) = 0$  für alle  $c \in \mathbb{R}$  aufgefasst als konstante Funktionen.

### 1.5.2 Definition (des Algebraikers)

Eine Abbildung  $X : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ , die linear ist und der Leibnizschen Produktregel genügt (siehe oben), heißt **Derivation** (in  $p \in M$ ). Der **Tangententialraum**  $T_p M$  der differenzierbaren Mannigfaltigkeit  $M$  in  $p \in M$  ist der Vektorraum der Derivationen in  $p$ . Vektorraumstruktur auf  $T_p M$

$$(a_1 X_{\gamma_1} + a_2 X_{\gamma_2})(\varphi) := a_1 X_{\gamma_1}(\varphi) + a_2 X_{\gamma_2}(\varphi)$$

### 1.5.3 Definition (des Algebraikers)

Das **Differential**  $T_p f$  einer differenzierbaren Abbildung  $f : M \rightarrow N$  in  $p$  ist die lineare Abbildung  $T_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  definiert durch

$$(T_p f)(X)(\varphi) = X(\varphi \circ f)$$

für  $\varphi \in C^\infty(N)$ .

#### Behauptung

$T_p M$  ist ein  $m$ -dimensionaler Vektorraum. Dazu genügt es  $T_0 \mathbb{R}^m$  zu betrachten, vgl. Blatt 3.

hängt von Karte ab

### 1.5.4 Satz 1

Die Derivationen  $\frac{\partial}{\partial x^i} : C^\infty(\mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}$  für  $i = 1, \dots, m$

$$\varphi \mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}(0)$$

bilden eine Basis des  $T_0\mathbb{R}^m$ .

#### Beweis

- $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}$  sind linear unabhängig: Falls  $\sum_{i=1}^m a^i \frac{\partial}{\partial x^i} = 0$ , dann

$$0 = \left( \sum_{i=1}^m a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) (x^k) = a^k, \quad k = 1, \dots, m$$

- Sei  $X \in T_0\mathbb{R}^m$ . Setze  $a^i := X(x^i)$ . Behauptung:  $X = \sum_{i=1}^m a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ .  
Schreibe  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$  als  $\varphi = \varphi(0) + \sum_{k=1}^m x^k \varphi_k$  nach Lemma 2 (1.5.5).

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left( X - \sum_i a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) (\varphi) &= \sum_{k=1}^m \left( X - \sum_i a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) (x^k) \cdot \varphi_k(0) \\ &= \sum_k \left( a^k - \sum_i a^i \delta_i^k \right) \varphi_k(0) = 0 \end{aligned}$$

Da  $\varphi$  beliebig war, folgt  $X = \sum_i a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ . □

### 1.5.5 Lemma 2 (Morse)

$U \subseteq \mathbb{R}^m$  konvex,  $0 \in U$ .  $f \in C^\infty(U)$ . Dann gibt es  $f_1, \dots, f_m \in C^\infty(U)$ , sodass

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^m x^i f_i(x).$$

#### Beweis

$$\begin{aligned} f(x) - f(0) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} (f(tx^1, \dots, tx^m)) dt && \text{(MWS)} \\ &= \sum_{i=1}^m x^i \underbrace{\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i} (tx^1, \dots, tx^m) dt}_{=: f_i(x)} && \square \end{aligned}$$

### 1.5.6 Definition (des Geometers)

Das **Differential**  $T_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  einer differenzierbaren Abbildung  $f : M \rightarrow N$  in  $p \in M$  ist definiert durch

$$T_p f([\gamma]) = [f \circ \gamma]$$

Dies ist wohldefiniert, da

$$\frac{d}{dt} (\varphi \circ f \circ \gamma_1)(0) = \frac{d}{dt} (\varphi \circ f \circ \gamma_2)(0)$$

und Definition von "[.]".

### 1.5.7 Satz 3

In lokalen Koordinaten ist das Differential einer differenzierbaren Abbildung  $f : M \rightarrow N$  durch die Jacobi-Matrix gegeben.

#### Beweis

Mit  $q = f(p)$  und lokalen Karten erhalten wir

$$\begin{array}{ccc} (M, p) & \xrightarrow{f} & (N, q) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathbb{R}^m, 0) & \xrightarrow{f'} & (\mathbb{R}^n, 0) \end{array}$$

Schreibe für die induzierte Abbildung  $f'$  wieder  $f$ .

$$(y^1, \dots, y^n) = (f^1(x^1, \dots, x^m), \dots, f^n(x^1, \dots, x^m))$$

Dann gilt für alle  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ :

$$T_0 f \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right) (\varphi) = \frac{\partial}{\partial x^i} (\varphi \circ f)(0) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial y^j}(0) \cdot \frac{\partial f^j}{\partial x^i}(0)$$

Also

$$T_0 f \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \sum_{j=1}^n \underbrace{\frac{\partial f^j}{\partial x^i}(0)}_{=J_f(0)} \frac{\partial}{\partial y^j} \quad \square$$

### 1.5.8 Definition (des Physikers ...)

Ein **Tangententialvektor** im Punkt  $p \in M$  ist eine Zuordnung, die jeder Karte  $h : (M, p) \rightarrow (\mathbb{R}^m, 0)$  um  $p$  einen Vektor  $v \in \mathbb{R}^m$  so zuordnet, dass der Karte  $k : (M, p) \rightarrow (\mathbb{R}^m, 0)$  der Vektor

Linearisierung  
Kartenwechsel

$$J_{k \circ h^{-1}}(0)(v)$$

zugeordnet wird.

### 1.5.9 Äquivalenz der geometrischen und der algebraischen Definition

$$T_p^{\text{geom}} M \rightarrow T_p^{\text{alg}} M, \quad [\gamma] \mapsto X_\gamma$$

Wegen  $X_\gamma(\varphi) = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma)(0)$  und der Definition von  $[\gamma]$  ist diese Abbildung wohldefiniert und injektiv. Die Abbildung ist auch surjektiv: In lokalen Koordinaten sei  $\gamma(t) = (a^1 t, \dots, a^m t)$ . Dann gilt

$$X_\gamma = \sum_{i=1}^m a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Mit dieser Bijektion übertragen wir die Vektorraumstruktur von  $T_p^{\text{alg}} M$  auf  $T_p^{\text{geom}} M$ . Auch die Definitionen der Differentiale sind miteinander verträglich.

$$\begin{array}{ccc}
 [\gamma] & \xrightarrow{\quad} & [f \circ \gamma] \\
 \downarrow \epsilon & & \downarrow \epsilon \\
 T_p^{\text{geom}} M & \xrightarrow{T_p^{\text{geom}} f} & T_{f(p)}^{\text{geom}} N \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 T_p^{\text{alg}} M & \xrightarrow{T_p^{\text{alg}} f} & T_{f(p)}^{\text{alg}} N \\
 \downarrow \epsilon & & \downarrow \epsilon \\
 X_\gamma & \xrightarrow{\quad} & X_{f \circ \gamma}
 \end{array}$$

Zu zeigen:  $T_p^{\text{alg}} f(X_\gamma) = X_{f \circ \gamma}$ . Es gilt

$$X_{f \circ \gamma}(\varphi) = \frac{\partial}{\partial t}(\varphi \circ f \circ \gamma)(0) = X_\gamma(\varphi \circ f) = T_p^{\text{alg}} f(X_\gamma)(\varphi)$$

□

## 2 Vektorfelder

### 2.1 Vektorfelder und Lie-Klammer

#### 2.1.1 Definition

Ein (differenzierbares) **Vektorfeld**  $X$  auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit  $M$  ist eine Abbildung, die jedem Punkt  $p \in M$  einen Tangentialvektor  $X_p \in T_p M$  so zuordnet, dass in lokalen Koordinaten  $(U, (x^1, \dots, x^m))$  gilt

$$X|_U = \sum_{i=1}^m a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

*Wir unterdrücken  
das  $p$  oft in der  
Notation!*

mit  $a^i \in C^\infty(U) \forall i = 1, \dots, n$ .

#### 2.1.2 Lemma 4

Die Differenzierbarkeit eines Vektorfeldes  $X$  ist äquivalent zu der Aussage:

$$X(\varphi) \in C^\infty(M) \quad \forall \varphi \in C^\infty(M), \text{ wobei } X(\varphi)(p) := X_p(\varphi)$$

#### Beweis

" $\Rightarrow$ ": Für  $a^i \in C^\infty(U)$  gelte lokal:  $X|_U = \sum_{i=1}^m a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ . Damit folgt

$$X(\varphi)|_U = \sum_{i=1}^m a^i \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \in C^\infty(U)$$

$$\Rightarrow X(\varphi) \in C^\infty(M)$$

" $\Leftarrow$ ": Sei  $X(\varphi) \in C^\infty(M)$  für alle  $\varphi \in C^\infty(M)$ . Schreibe lokal  $X|_U = \sum_{i=1}^m a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ . Sei  $p$  solch ein Punkt. Sei  $\varphi \in C^\infty(M)$  eine Testfunktion mit  $\varphi \equiv x^k$  in einer Umgebung  $V$  von  $p$  in  $U$ .

$$a^k|_V = X(\varphi)|_V \in C^\infty(V)$$

$$\Rightarrow a^i \in C^\infty(U).$$

□

#### 2.1.3 Bemerkung

Die differenzierbaren Vektorfelder auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit  $M$  bilden einen Modul über  $C^\infty(M)$

$$(X + Y)_p = X_p + Y_p \quad (fX)_p = f(p) \cdot X_p \quad f \in C^\infty(M)$$

#### 2.1.4 Definition

Die **Lie-Klammer** zweier Vektorfelder  $X, Y$  auf  $M$  ist das Vektorfeld, das durch

$$[X, Y]_p \varphi := X_p(Y\varphi) - Y_p(X\varphi)$$

definiert ist, wobei  $\varphi \in C^\infty(M)$ .

### 2.1.5 Lemma 5

Die Lie-Klammer  $[X, Y]$  ist ein Vektorfeld.

**Beweis**

- $[X, Y]\varphi$  ist  $\mathbb{R}$ -linear in  $\varphi$
- $[X, Y]\varphi \in C^\infty(M)$
- Leibnizregel:

$$\begin{aligned}
 [X, Y]_p(\varphi\psi) &= X_p(Y(\varphi\psi)) - Y_p(X(\varphi\psi)) && \text{(Leibniz)} \\
 &= X_p(Y\varphi \cdot \psi + \varphi \cdot Y\psi) - Y_p(X\varphi \cdot \psi + \varphi \cdot X\psi) && \text{(linear+Leibniz)} \\
 &= X_p(Y\varphi) \cdot \psi(p) + \underbrace{(Y\varphi)(p) \cdot X_p\psi}_{\text{Leibniz}} + \underbrace{X_p\varphi \cdot (Y\psi)(p)}_{\text{Leibniz}} + \varphi(p)X_p(Y\psi) \\
 &\quad - Y_p(X\varphi) \cdot \psi(p) - \underbrace{(X\varphi)(p) \cdot Y_p\psi}_{\text{Leibniz}} - \underbrace{Y_p\varphi \cdot (X\psi)(p)}_{\text{Leibniz}} - \varphi(p) \cdot Y_p(X\psi) \\
 &= [X, Y]_p\varphi \cdot \psi(p) + \varphi(p) \cdot [X, Y]_p\psi
 \end{aligned}$$

□

Achtung:  $\varphi \mapsto X_p(Y\varphi)$  definiert im Allgemeinen *kein* Vektorfeld, da die Leibniz-Regel verletzt ist.

### 2.1.6 Beispiel

Sei  $M = \mathbb{R}^2$ . Dann ist  $\left[x \frac{\partial}{\partial y}, xy \frac{\partial}{\partial x}\right] = x^2 \frac{\partial}{\partial x} - xy \frac{\partial}{\partial y}$

## 2.2 Integralkurven

Betrachte  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  eine differenzierbare Kurve. Für den dadurch in  $\gamma(t)$  definierten Tangentialvektor  $[\dot{\gamma}]_{\gamma(t)} \in T_{\gamma(t)}M$  schreiben wir einfach  $\dot{\gamma}(t)$ . Ein Vektorfeld  $X$  auf  $M$  definiert eine Differentialgleichung erster Ordnung durch

$$\dot{\gamma} = X(\gamma),$$

$\varepsilon = \varepsilon(p)$  d.h. für jeden Punkt  $p \in M$  erhält man

$$\gamma_p : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \dot{\gamma}_p(t) = X_{\gamma_p(t)}, & t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \\ \gamma_p(0) = p \end{cases}$$

Die Kurve  $\gamma_p$  heißt **Integralkurve** von  $X$  durch  $p$ . In lokalen Koordinaten:

$$\begin{aligned}
 X &= X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \\
 \gamma(t) &= (\gamma^1(t), \dots, \gamma^m(t)) \\
 \dot{\gamma}^i(t) &= X^i(\gamma(t)) \quad , i = 1, \dots, m
 \end{aligned}$$

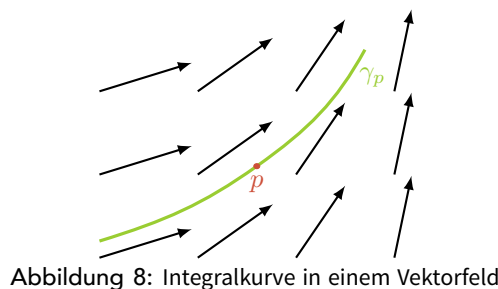


Abbildung 8: Integralkurve in einem Vektorfeld

## 2.3 Satz von Picard-Lindelöf

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen - Phasenraum.

Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein nichtleeres offenes Intervall - Zeitintervall.

$X : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  sei ein stetiges, zeitabhängiges Vektorfeld auf  $U$ . Für eine Anfangszeit  $t_0 \in I$  und einen Anfangspunkt  $x_0 \in U$  suchen wir eine  $C^1$ -Lösung  $u : I_1 \rightarrow U$  der Differentialgleichung

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = X(t, u(t)) \\ u(t_0) = x_0 \end{cases}$$

für alle  $t \in I_1$ , wobei  $I_1 := I \cap (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$  für ein geeignetes  $\varepsilon > 0$ . Ändert man den Anfangspunkt  $x$  in  $U_1 = U \cap B_r(x_0)$ , so soll die gefundene  $C^1$ -Lösung  $u = u_x$ ,  $u_x(t_0) = x$ , stetig von  $x \in U_1$  abhängen. Also:

$$u \in C^0(I_1 \times U_1, U) \quad u(t, x) = u_x(t)$$

### 2.3.1 Satz 6

Wenn  $X$  der folgenden **Lipschitz-Bedingung** genügt

$$\exists L > 0 : \forall x_1, x_2 \in U : \forall t \in I : |X(t, x_1) - X(t, x_2)| \leq L \cdot |x_1 - x_2|$$

Dann gibt es  $\varepsilon > 0, r > 0$  und eine eindeutig bestimmte Lösung  $u = u_x : I_1 \rightarrow U$  von  $\dot{u}(t) = X(t, u(t))$ ,  $u(t_0) = x$  für jedes  $x \in B_r(x_0)$ . Die Abbildung  $u : I_1 \times U_1 \rightarrow U$  ist stetig.

#### Bemerkung

$X$  ist also lokal eindeutig lösbar und die Lösung hängt stetig von den Anfangspunkten ab.

#### Beweis

Betrachte folgenden Operator

$$(Tu)(t, x) = x + \int_{t_0}^t X(s, u(s, x)) \, ds$$

Ist  $u$  ein Fixpunkt des Operators  $T$ , d.h.  $Tu = u$ , so ist  $u$  stetig differenzierbar und es gilt:  $\frac{d}{dt}U(t, x) = X(t, u(t, x))$  und  $u(t_0, x) = x$ . Durch Ersetzen von  $U$  und  $I$  durch eventuell kleinere Umgebungen von  $x_0$  und  $t_0$  können wir annehmen:

$$\exists K > 0 : |X| < K \text{ auf } I \times U$$

Wähle  $R > 0$ , so dass  $B_{2R}(x_0) \subset U$ . Sei  $r \leq R$ . Damit eine  $C^1$ -Kurve  $u : I_1 \rightarrow U$  mit Anfangspunkt  $x \in B_r(x_0)$  und Geschwindigkeit  $|\dot{u}| \leq K$  immer im  $B_{2R}(u(x_0))$  bleibt, wählen wir  $\varepsilon < \frac{R}{K}$ . Denn dann gilt nach dem Mittelwertsatz:

$$|u(t) - u(t_0)| \leq K \cdot |t - t_0| < K \cdot \varepsilon < R$$

D.h.  $|u(t) - x_0| < R + |u(t_0) - x_0| \leq 2R$ .

Ziel: lokal eindeutige Lösbarkeit von  $\dot{u}(t) = X(t, u(t))$ ,  $u(t_0) = x \in B_r(x_0)$ .

Sei  $A$  der Raum aller stetigen Funktionen  $u : I_1 \times B_r(x_0) \rightarrow B_{2R}(x_0)$  mit  $u(t_0, x) = x \, \forall x \in B_r(x_0)$  versehen mit der Metrik

$$d(u, v) = \|u - v\| := \sup_{(t, x) \in I_1 \times B_r(x_0)} |u(t, x) - v(t, x)|$$

$A$  ist vollständig. Behauptung: Es gilt  $T(A) \subset A$ . Da

$$|(Tu)(t, x) - x| = \left| \int_{t_0}^t X(s, u(s, x)) \, ds \right| \leq |t - t_0| \cdot \sup_{I \times U} |X| < \varepsilon \cdot K < R$$

*Geschwindigkeit in beliebigen Punkten in  $I \times U$  beschränkt*

*$\varepsilon$  für verkürztes Zeitintervall  $I_1$*

*Abhängig  $x$  unterdrückt*

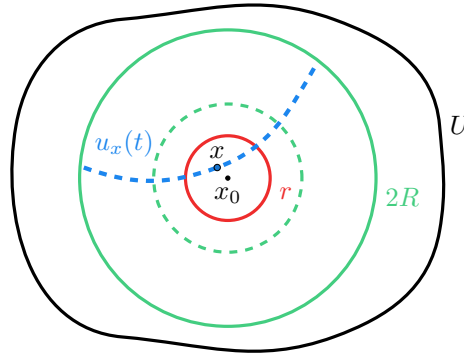


Abbildung 9: Beachte:  $u_x(t)$  ist für  $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$  gezeichnet

gilt  $(Tu)(t, x) \in B_{2R}(x_0)$  für alle  $x \in B_r(x_0)$ .  $T$  ist kontrahierend, da für alle  $u, v \in A$  gilt

$$\begin{aligned} |(Tu)(t, x) - (Tv)(t, x)| &= \left| \int_{t_0}^t X(s, u(s, x)) \, ds - \int_{t_0}^t X(s, v(s, x)) \, ds \right| \\ &\leq |t - t_0| \cdot L \cdot \sup_{I_1 \times B_r(x_0)} |u - v| \end{aligned}$$

d.h.  $\|Tu - Tv\| \leq \varepsilon \cdot L \cdot \|u - v\|$ . Wir wählen<sup>1</sup>  $\varepsilon < \frac{1}{L}$ , sodass  $T$  kontrahierend ist. Nach dem Banachschen Fixpunktsatz hat  $Tu = u$  genau eine Lösung. Damit haben wir gezeigt, dass  $X$  lokal eine Lösung hat. Diese hängt stetig vom Anfangspunkt ab.

Um zu zeigen, dass diese Lösung eindeutig ist, wiederhole man den Beweis mit Abbildungen  $u$ , die in  $t$  aber *nicht* notwendig in  $x$  stetig sind (vgl. Definition von  $A$ ).  $\square$

### 2.3.2 Bemerkung (Quantisierung)

Sei  $X : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \times B_{2R}(x_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig und erfülle eine Lipschitz-Bedingung bezüglich  $x$  mit  $L > 0$ . Sei weiter  $|X| < K$ ,  $\varepsilon < \frac{R}{K}$  und  $r < R$ . Dann ist  $X$  für alle Anfangspunkte in  $B_r(x_0)$  lokal eindeutig lösbar. Die Bedingung  $\varepsilon < \frac{1}{L}$  ist dazu *nicht* notwendig.

In der Tat: Sei  $u^0(t, x) := x$  und definiere iterativ  $u^{\nu+1} := Tu^\nu \, \forall \nu \in \mathbb{N}$ . Es gilt die Kontraktionsabschätzung

$$\|u^{\nu+1} - u^\nu\| \leq \frac{K \cdot L^\nu \cdot \varepsilon^{\nu+1}}{(\nu+1)!},$$

wie eine Induktion zeigt. Ein Vergleich mit der Exponentialreihe zeigt, dass die Folge  $u^\nu$  gleichmäßig gegen ein  $u$  konvergiert. (Teleskopsumme:  $u^0 - u^1 + u^1 - u^2 + u^2 \pm \dots - u^\nu$ ) Der Reihenrest kann durch

$$\|u^\nu - u\| < \frac{K}{L} \cdot \frac{(L \cdot \varepsilon)^{\nu+1}}{(\nu+1)!} \cdot e^{L \cdot \varepsilon}$$

abgeschätzt werden. Also ist wegen

$$Tu = \lim_{\nu \rightarrow \infty} Tu^\nu = \lim_{\nu \rightarrow \infty} u^\nu = u$$

( $T$  ist (Lipschitz)-stetig)  $u$  ein Fixpunkt. (vgl. Blatt 5).

Randbemerkung:

$$\|u\|' := \sup_{(t,x)} \left( e^{-2 \cdot L \cdot |t-t_0|} \cdot |u(t, x)| \right) \rightsquigarrow \varepsilon L \leftrightarrow \frac{1}{2}$$

<sup>1</sup>wir haben schon  $\varepsilon < \frac{R}{K}$ , also  $\varepsilon < \min \left\{ \frac{R}{K}, \frac{1}{L} \right\}$



### 2.3.3 Bemerkung (höhere Regularität)

Sei  $X : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  beliebig oft differenzierbar,  $u : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \times B_r(x_0) \rightarrow U$  die lokale Lösung bestimmt durch  $(t_0, x_0)$ . Auf  $B_{2R}(x_0)$  ist  $X$  zusammen mit allen Ableitungen beschränkt (uniform in  $t$ ). Wir wollen zeigen, dass  $u$  eine  $C^\infty$ -Abbildung ist. Wegen

$$\frac{d}{dt}u(t, x) = X(t, u(t, x))$$

ist  $t \mapsto u(t, x)$  beliebig oft differenzierbar für alle  $x$ . Ist  $u$  auch bezüglich  $x$  beliebig oft differenzierbar, so

$$\frac{d}{dt}D_x u(t, x) = D_2 X(t, u(t, x)) \cdot D_x u(t, x) \quad D_x u(t_0, x) = \text{id}$$

mit anderen Worten:  $D_x u(t, x)$  löst die lineare Gleichung:

$$\frac{d}{dt}v(t, x) = D_2 X(t, u(t, x)) \cdot v(t, x) \quad v(t_0, x) = \text{id}_{n \times n}$$

für Matrix-wertige Abbildungen  $v$ . Um die Differenzierbarkeit von  $u$  nach  $x$  zu sehen, gehen wir wie folgt vor: Sei  $h \in \mathbb{R}^n$  mit  $|h|$  klein ( $|h| \searrow 0$ ). Setze

$$\Delta u(t, h) := u(t, x + h) - u(t, x) \quad , \quad Y_{t,h} := \int_0^1 D_2 X(t, u(t, x) + s \Delta u(t, h)) \, ds$$

(Der Parameter  $x$  ist in der Notation unterdrückt. Die Ortsvariable ist  $h$ . Beachte:  $Y(t, 0) = D_2 X(t, u(t, x))$ )

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{d}{dt} \Delta u(t, h) &= X(t, u(t, x + h)) - X(t, u(t, x)) = \int_0^1 \frac{d}{ds} X(t, u(t, x) + s \Delta u(t, h)) \, ds \\ &= Y(t, h) \cdot \Delta u(t, h) \end{aligned}$$

$\Delta u(t_0, h) = h$ . Das lineare Problem für unbekannte Matrizen ( $n \times n$ )

$$\dot{V}(t, h) = Y(t, h) \cdot V(t, h) \quad , \quad V(t_0, h) = \text{id}_{n \times n}$$

hat lokal genau eine Lösung  $V$ , die stetig in  $x$  (Parameter) und  $h$  (Ortsvariable, hier als Parameter) ist. Das lineare Problem für unbekannte Vektoren

vgl. Satz 6 & Blatt 5

$$\dot{v}(t, h) = Y(t, h) \cdot v(t, h) \quad , \quad v(t_0, h) = h$$

wird dann von  $v(t, h) = V(t, h) \cdot h$  gelöst. Die Eindeutigkeit liefert

$$\Delta u(t, h) = V(t, h) \cdot h$$

Damit ist  $x \mapsto u(t, x)$  von der Klasse  $C^1$  für alle  $x$  und es gilt:  $D_x u(t, x) = V(t, 0)$  (löst das linearisierte Problem)

Um zu zeigen, dass  $u$  von der Klasse  $C^2$  ist, betrachten wir nun direkt das System

$$\dot{u}(t, x) = X(t, u(t, x)), \quad \dot{v}(t, x) = D_2 X(t, u(t, x)) \cdot v(t, x), \quad u(t_0, x) = x, \quad v(t_0, x) = \text{id}_{n \times n}$$

(Beachte: Rechte Seite ist nur  $C^1$ !)

Mit dem eben gezeigten ( $C^1$  reicht!) ist die Lösung  $(u, D_x u)$  von der Klasse  $C^1$ , also  $u$  selbst  $C^2$ . Durch Wiederholen dieser Argumentation erhält man  $u \in C^3$  usw., also  $u \in C^\infty$ .  $\square$

## 2.4 Flüsse und die Lie-Ableitung

Sei  $X$  ein differenzierbares Vektorfeld auf  $M$ . Aus dem Satz von Picard-Lindelöf folgt, dass für jedes  $p \in M$  eine offene Umgebung  $U$  von  $p$  und ein  $\varepsilon > 0$  so existiert, dass für alle  $q \in U$  die Integralkurve  $\gamma_q(t)$  von  $X$  auf  $(-\varepsilon, \varepsilon)$  eindeutig bestimmt ist. Die Abbildung  $(q, t) \mapsto \gamma_q(t)$  ist differenzierbar.

### 2.4.1 Definition

Die Abbildung  $(q, t) \mapsto \gamma_q(t) =: \Phi_t(q)$  heißt **lokaler Fluss** von  $X$ .

### 2.4.2 Satz 7

$$\Phi_t \circ \Phi_s(q) = \Phi_{t+s}(q)$$

#### Beweis

$t \mapsto \gamma_q(t+s)$  und  $t \mapsto \gamma_{\Phi_s(q)}(t)$  sind Integralkurven von  $X$  mit identischem Anfangspunkt (also  $t = 0$ ):

$$\gamma_q(s) = \Phi_s(q).$$

Die Eindeutigkeitsaussage im Satz von Picard-Lindelöf (2.3) impliziert:

$$\gamma_q(t+s) = \gamma_{\Phi_s(q)}(t),$$

d.h.  $\Phi_{t+s}(q) = \Phi_t \circ \Phi_s(q)$ . □

Wegen  $\Phi_t \circ \Phi_{-t} = \Phi_0 = \text{id} = \Phi_{-t} \circ \Phi_t$  ist  $\Phi_t : M \rightarrow M$  (falls global definiert) ein Diffeomorphismus mit Inverser  $(\Phi_t)^{-1} = \Phi_{-t}$ .

### 2.4.3 Definition

Sei  $X$  ein Vektorfeld auf  $M$ ,  $\Phi_t$  ein lokaler Fluss zu  $X$ . Für Funktionen  $f \in C^\infty(M)$  setze

$$\mathcal{L}_X f := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f \circ \Phi_t - f) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ \Phi_t)$$

$\mathcal{L}_X$  heißt die **Lie-Ableitung**. Für Vektorfelder  $Y$  auf  $M$  gilt

$$(\mathcal{L}_X Y)_p := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (T\Phi_{-t}(Y_{\Phi_t(p)}) - Y_p) = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} (T\Phi_{-t}(Y_{\Phi_t(p)}))$$

### 2.4.4 Satz 8

a)  $\mathcal{L}_X f = X(f)$

b)  $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$

#### Beweis

zu a): Da  $t \mapsto \Phi_t(p) = \gamma_p(t)$  Integralkurve von  $X$  ist, also  $\dot{\Phi}_t = X_{\Phi_t}$ , gilt nach Definition

$$\mathcal{L}_X f = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} (f \circ \Phi_t) = X(f).$$

zu b): In lokalen Koordinaten:  $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ ,  $Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ . Dann gilt

$$\mathcal{L}_X \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} T\Phi_{-t} \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \frac{\partial \Phi_{-t}^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} = - \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

( $\Phi_{-t}$  ist der Fluss zu  $-X$ ) In Analogie zur Produktregel für die gewöhnliche Ableitung für reellwertige Funktionen zeigt man:

$$L_X(fY) = (L_X f)Y + f \cdot L_X Y$$

Daraus folgt

$$\mathcal{L}_X \left( Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \mathcal{L}_X Y^j \cdot \frac{\partial}{\partial x^j} + Y^j \cdot \mathcal{L}_X \frac{\partial}{\partial x^j} = X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} = [X, Y]$$

vgl. Blatt 4

□

## 2.4.5 Notation für Diffeomorphismen

Sei  $f : M \xrightarrow{\cong} N$  ein Diffeomorphismus und  $X$  ein Vektorfeld auf  $M$ . Dann erhält man ein neues Vektorfeld  $N$  in  $q \in N$  durch

$$(f_* X)_q := T_{f^{-1}(q)} f(X_{f^{-1}(q)})$$

Damit können wir

$$\mathcal{L}_X Y = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\Phi_{-t})_* Y$$

schreiben

## 2.4.6 Beispiel

$M = N = \mathbb{R}^2$ .  $f(x, y) = (x, x^2 + y) \Rightarrow f^{-1}(x, y) = (x, -x^2 + y)$ . Dann  $X_{x,y} = y \frac{\partial}{\partial x} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}$ .

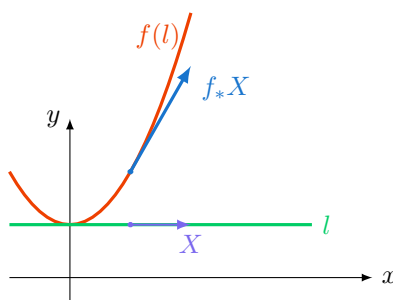


Abbildung 10: Zeichnung zu Beispiel 2.4.6 mit  $l(t) = 1$

Es gilt  $T_{(x,y)}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2x & 1 \end{pmatrix}$ . Damit folgt

$$\begin{aligned} (f_* X)_{(x,y)} &= T_{(x,-x^2+y)} f(X_{(x,-x^2+y)}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2x & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -x^2 + y \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= (-x^2 + y) \begin{pmatrix} 1 \\ 2x \end{pmatrix} = (-x^2 + y) \left( \frac{\partial}{\partial x} + 2x \frac{\partial}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

### 2.4.7 Lemma 9

Ist  $f : M \xrightarrow{\cong} N$  ein Diffeomorphismus und  $\Phi_t$  der (lokale) Fluss eines Vektorfeldes  $X$  auf  $M$ , so ist  $f \circ \Phi_t \circ f^{-1}$  der Fluss von  $f_*X$  auf  $N$ .

#### Beweis

Es gilt

$$\frac{d}{dt}(\Phi_t \circ f^{-1}(q)) = X_{f^{-1}(q)}$$

Damit folgt

$$\frac{\partial}{\partial t}(f \circ \Phi_t \circ f^{-1}(q)) = T_{f^{-1}(q)}f(X_{f^{-1}(q)}) = (f_*X)_q \quad \square$$

Insbesondere für  $M = N$  gilt

$$f_*X = X \iff \forall t : \Phi_t \circ f = f \circ \Phi_t$$

### 2.4.8 Satz 10

Seien  $X, Y$  Vektorfelder auf  $M$  mit Fluss  $\Phi_t$  bzw.  $\Psi_s$ . Dann gilt:

$$[X, Y] = 0 \iff \Phi_t \circ \Psi_s = \Psi_s \circ \Phi_t$$

#### Beweis

" $\Leftarrow$ ": Gelte  $\Phi_t \circ \Psi_s = \Psi_s \circ \Phi_t$ . Dann gilt auch

$$\frac{d}{ds}\Phi_t \circ \Psi_s(p) = \frac{d}{ds}\Psi_s \circ \Phi_t(p)$$

d.h.  $T_p\Phi_t(Y_p) = Y_{\Phi_t(p)} \forall p, t$  und  $(\Phi_{-t})_*Y = Y$ . Dann erhalten wir

$$[X, Y] = L_X Y = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} (\Phi_{-t})Y = 0$$

" $\Rightarrow$ ": Gelte  $[X, Y] = 0$ . Nach Lemma 9 (2.4.7) ist zu zeigen, dass  $(\Phi_t)_*Y = Y \forall t$ . Dann gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=t_0} (\Phi_{-t})_*Y = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} (\Phi_{-t_0-t})_*Y = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} (\Phi_{-t_0})_*(\Phi_{-t})_*Y = (\Phi_{-t_0})_* \underbrace{L_X Y}_{=[X,Y]=0} = 0 \quad \square$$

## 2.5 Dynamische Systeme

### 2.5.1 Definition

Eine differenzierbare Abbildung  $\Phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  heißt **dynamisches System** oder ein **globaler Fluss** auf der differenzierbaren Mannigfaltigkeit  $M$ , wenn für alle  $s, t \in \mathbb{R}$  und  $p \in M$  gilt:

- $\Phi(0, p) = p$
- $\Phi(s + t, p) = \Phi(s, \Phi(t, p))$

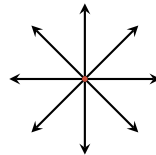
### 2.5.2 Beispiel

Betrachte  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .  $\dot{x} = Ax$  hat den Fluss  $\Phi(t, x) = e^{A \cdot t} \cdot x$ , wobei

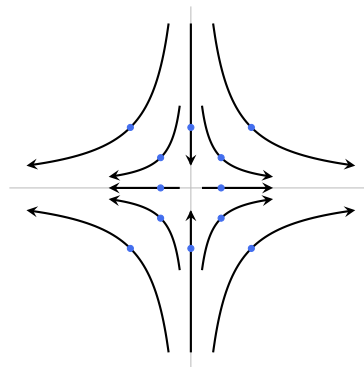
Matrixexponential,  
 $M = \mathbb{R}^n$

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$$

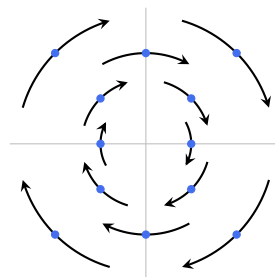
Für  $A = \text{id}$  entspricht dies einer Skalierung:



Für  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ , Startpunkte  $\hat{=}$  • und  $t \in [-1, 1]$



Für  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ , Startpunkte  $\hat{=}$  • und  $t \in [-1/2, 1/2]$

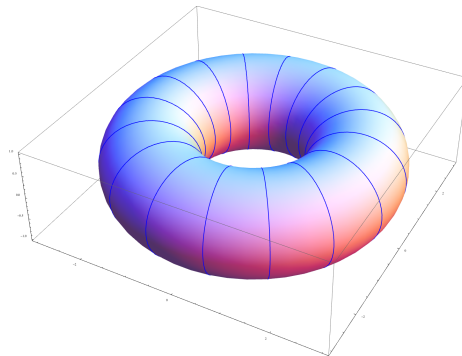


Betrachte  $S^1 \times S^1 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$  (2-Torus) mit dem Fluss

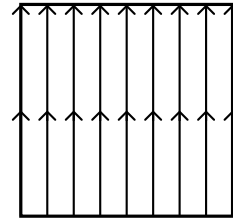
$$\Phi(t, (z_1, z_2)) = (e^{it} z_1, e^{ait} z_2), \quad a \in \mathbb{R}$$

Wie ich das mit  
einem Torus  
hinbekomme, muss  
ich nochmal gucken  
...

$a = 0$



Torus



$a = \sqrt{11}$

Torus + Fundamentalgebiet zum zweiten

Betrachte nun  $S^2 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R}$  2-Sphäre

### 2.5.3 Einparameterfamilie von Diffeomorphismen

Betrachte die Abbildung  $\Phi_t : M \rightarrow M, p \mapsto \Phi(t, p)$  mit

- $\Phi_0 = \text{id}_M$
- $\Phi_s \circ \Phi_t = \Phi_{s+t}$

Daraus folgt  $(\Phi_t)^{-1} = \Phi_{-t}$ . Eine differenzierbare Abbildung  $\Phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  ist ein dynamisches System, falls

$$(\mathbb{R}, +) \rightarrow (\{\text{Diffeomorphismen auf } M\}, \circ), t \mapsto \Phi(t, \cdot)$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

### 2.5.4 Nach $M$ parametrisierte Kurvenscharen

$$\gamma_p : \mathbb{R} \rightarrow M, t \mapsto \Phi(t, p)$$

$\gamma_p$  heißt **Flusslinie, Integralkurve, Lösungskurve**.  $\gamma(\mathbb{R})$  heißt **Orbit** oder **Bahn** durch  $p$ .

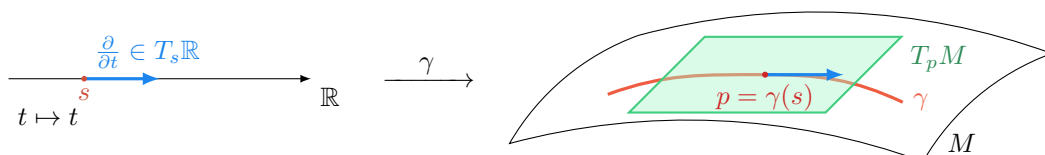
### 2.5.5 Bemerkung

Ein dynamisches System zerlegt eine Mannigfaltigkeit disjunkt in ihre Bahnen:

$$q \sim p :\Leftrightarrow q = \gamma_p(t) \text{ für ein } t$$

Die Bahnen entsprechen genau den Äquivalenzklassen.

### 2.5.6 Notation



$\dot{\gamma}(s)$  steht für die Derivation, die durch  $\dot{\gamma}(s)(\varphi) = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma)(s)$ ,  $\varphi \in C^\infty(M)$  gegeben ist. Es gilt  $\dot{\gamma}(s) = T_s \gamma(\frac{\partial}{\partial t})$ . (mehr auf Blatt 6)

**2.5.7 Satz 11**

Eine Flusslinie eines dynamischen Systems  $\gamma = \gamma_p : \mathbb{R} \rightarrow M$  ist

- entweder **konstant**, d.h.  $\gamma(t) = p \ \forall t$  oder **regulär**, d.h.  $\dot{\gamma}(t) \neq 0 \ \forall t$
- entweder injektiv oder **periodisch**, d.h.  $\exists \pi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  mit  $\gamma(t) = \gamma(t + \pi) \ \forall t$

**Beweis**

( $\gamma = \gamma_p$ ) Es gilt

$$\gamma(s+t) = \Phi_{s+t}(p) = \Phi_s(\Phi_t(p)) = \Phi_s(\gamma(t))$$

Also

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(s) &= T_0 \gamma(s + \cdot) \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) = T_0 (\Phi_s \circ \gamma) \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) = T_{\gamma(0)} \Phi \circ T_0 \gamma \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \\ &= T_{\gamma(0)} \Phi_s (\dot{\gamma}(0)) \end{aligned}$$

Da  $\Phi_s$  ein Diffeomorphismus ist, gilt entweder  $\dot{\gamma}(t) = 0 \ \forall t$  oder  $\dot{\gamma}(t) \neq 0 \ \forall t$ . Ist  $\gamma$  nicht injektiv, so gibt es  $r < s$  mit  $\gamma(r) = \gamma(s)$ , d.h.  $\Phi_r(p) = \Phi_s(p)$ , also

$$\gamma(t) = \Phi_t(p) = \Phi_{t+s-r}(p) = \gamma(t + (s-r)) \quad \forall t \quad \square$$

Sei  $U \subseteq M$  offen. Die Flusslinien brauchen *nicht* ganz in  $U$  zu verlaufen! Da  $\Phi^{-1}(U)$  offen in  $\mathbb{R} \times M$  ist, verlaufen die Flusslinien  $\gamma_p, p \in U$  wenigstens für ein kleines Intervall  $(a_p, b_p)$  um  $0 \in \mathbb{R}$ .

**2.5.8 Definition**

Ein **lokaler Fluss** auf  $M$  ist eine differenzierbare Abbildung  $\Phi : D \rightarrow M$ , definiert auf einer  $\{0\} \times M$  enthaltener offenen Teilmenge von  $D \subset \mathbb{R} \times M$ , sodass für jeden Punkt  $p \in M$  die Menge  $D \cap (\mathbb{R} \times \{p\})$  ein Intervall ist. Weiter gelte  $\Phi(0, p) = p$  und  $\Phi(s+t, p) = \Phi(s, \Phi(t, p))$  für alle  $s, t, p$ , für die beide Seiten erklärt sind.

Auf  $\{t\} \times M$  ist  $\Phi_t$  kein Diffeomorphismus auf  $M$ , da  $\Phi_t$  nicht überall erklärt ist.

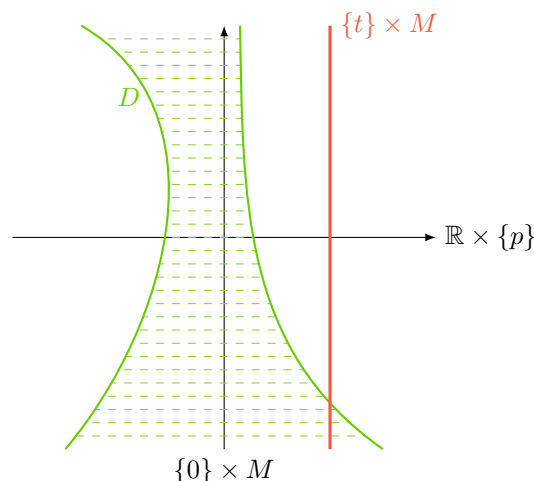


Abbildung 11: Veranschaulichung zu lokalen Flüssen

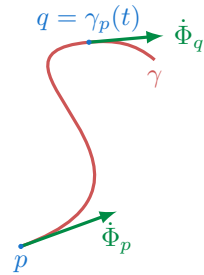
**Bemerkung**

- Gilt  $D = \mathbb{R} \times M$ , so ist  $\Phi$  ein globaler Fluss.

- Das Vektorfeld  $\dot{\Phi}$  gegeben durch  $p \mapsto X_{\gamma(p)} \equiv \dot{\gamma}(0)$  ist das **Geschwindigkeitsfeld** des Flusses  $\Phi$ . Da

$$q = \gamma_p(t) \Rightarrow \gamma_q(s) = \gamma_p(s+t) \Rightarrow \dot{\gamma}_q(0) = \dot{\gamma}_p(t)$$

gilt  $\dot{\gamma}_p(t) = \dot{\gamma}_q(0) = \dot{\Phi}_{\gamma_q(0)}$  für alle  $t \in (a_p, b_p)$ . (Und nicht nur für  $t = 0$  wie in der Definition angegeben.)



- Der Fluss eines Vektorfeldes ist ein (lokaler) Fluss. Zwei Flusslinien  $\gamma_p^1 : I_1 \rightarrow M$  und  $\gamma_p^2 : I_2 \rightarrow M$ , die durch  $\gamma_p^1(0) = p = \gamma_p^2(0)$  verlaufen, stimmen auf  $I_1 \cap I_2$  überein. Dies gilt, da aus Stetigkeitsgründen die Menge aller  $t$ , auf der beide Lösungen übereinstimmen, abgeschlossen ist. Nach dem Satz von Picard-Lindelöf ist sie auch offen. Auf der Vereinigung aller Definitionsbereiche aller Lösungskurven  $\gamma_p$  ist die eindeutig bestimmte **maximale** Lösungskurve gegeben. Wir wollen mit  $D$  stets den maximalen Definitionsbereich eines Flusses angeben, d.h. es gelte stets  $D \cap (\mathbb{R} \times \{p\})$  ist das maximale Definitionsintervall der maximalen Lösungskurve.

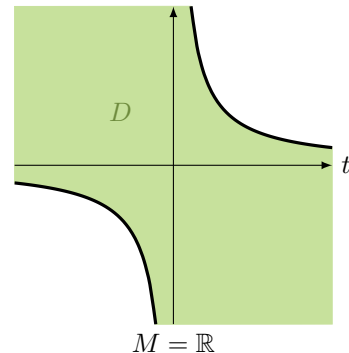
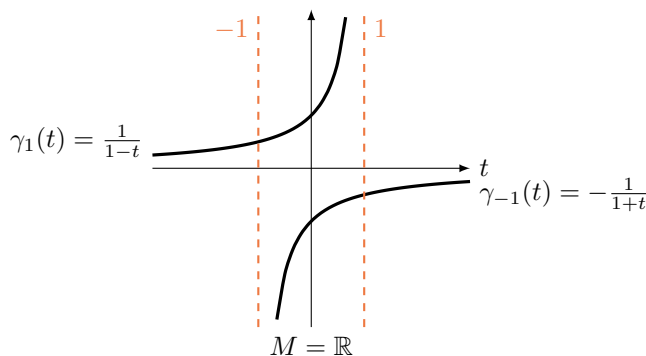
fehlende Grafik:  
Zusammensetzen  
von Flusslinien

### 2.5.9 Beispiel

Betrachte die Mannigfaltigkeit  $\mathbb{R}$  mit dem Vektorfeld  $x^2 \frac{\partial}{\partial x}$ . Dann ist  $\Phi(t, x) = \frac{x}{1-tx}$  ein lokaler Fluss. Es gilt

$$\begin{cases} \Phi(0, x) = x \\ \dot{\Phi}(t, x) = -\frac{(-x)x}{(1-tx)^2} = \left(\frac{x}{1-tx}\right)^2 \frac{\partial}{\partial x} = (\Phi(t, x))^2 \frac{\partial}{\partial x} \end{cases}$$

$$\gamma_1(t) = \Phi(t, 1) = \frac{1}{1-t}$$



Definitionsbereich:  $1 - tx = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{t}$

#### Bemerkung

Enthält  $D$  eine Teilmenge der Form  $(-\varepsilon, \varepsilon) \times M$ , dann auch eine Teilmenge der Form  $(-2\varepsilon, 2\varepsilon) \times M$ .  $\Phi$  kann auf  $(-2\varepsilon, 2\varepsilon) \times M$  durch

$$\Phi(t, p) := \Phi\left(\frac{t}{2}, \Phi\left(\frac{t}{2}, p\right)\right)$$

ausgedehnt werden. Da  $D$  maximal ist, enthält  $D$  also  $\mathbb{R} \times M$ , d.h.  $\Phi$  ist global (vollständig). Dies ist beispielsweise der Fall, wenn der Träger  $\{X \neq 0\}$  des  $\Phi$  erzeugenden Vektorfeldes  $X$  kompakt ist. (Beispiel:  $M$  kompakt)

Analog sieht man, dass jedes auf  $\mathbb{R}^n$  definierte und beschränkte Vektorfeld global integrierbar ist. (Blatt 7)



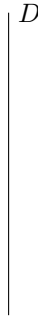
**2.5.10 Satz 12**

Jedes Vektorfeld ist Geschwindigkeitsfeld genau eines maximalen Flusses.

**Beweis**

Sei  $X$  ein Vektorfeld auf  $M$ ,  $\Phi$  der zugehörige Fluss (lokal). Sei  $p \in M$  und  $(a_p, b_p)$  maximales Definitionsintervall der Lösungskurve  $\gamma_p$ . Dann ist  $D = \bigcup_{p \in M} (a_p, b_p) \times \{p\}$ . Es reicht zu zeigen:  $D$  ist offen und  $\Phi : D \rightarrow M$  ist differenzierbar.

Sei  $I_p \subset [0, \infty)$  ein Intervall bestehend aus allen  $t > 0$ , sodass  $D$  eine Umgebung von  $[0, t] \times \{p\}$  enthält, auf der  $\Phi$  differenzierbar ist.



$\Rightarrow I_p$  ist offen.

$I_p$  ist **nicht leer**: Für jeden Punkt  $p \in M$  gibt es  $\varepsilon > 0$  und eine Umgebung  $U$  von  $p$ , sodass

$$\Phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \rightarrow M$$

differenzierbar ist. Wegen der Eindeutigkeit enthält  $D$  eine Umgebung von  $\{0\} \times M$  auf der  $\Phi$  differenzierbar ist  $\Rightarrow I_p \neq \emptyset$ .

$I_p$  ist **abgeschlossen**: Sei  $t_0$  Häufungspunkt von  $I_p$  in  $[0, b_p)$ . Sei  $q := \gamma_p(t_0)$ . Nach Definition von  $I_p$  gibt es eine Umgebung  $V$  von  $p$ ,  $\varepsilon > 0$  mit  $t_0 - 2\varepsilon > 0$ , sodass  $D$  eine Umgebung von  $[0, t_0 - \varepsilon] \times U$  enthält, auf der  $\Phi$  erklärt und differenzierbar ist. Dabei ist  $U$  eine Umgebung von  $q$ , sodass (für ein eventuell kleineres  $\varepsilon > 0$ )  $\Phi$  auf  $(t_0 - 2\varepsilon, t_0 + 2\varepsilon) \times U$  definiert und differenzierbar ist.



Setze:  $W := \Phi_{-(t_0 - \varepsilon)}(\Phi_{-\varepsilon}(U))$ . Also ist  $\Phi$  in einer Umgebung von  $[0, t_0 + \varepsilon] \times W \supset [0, t_0] \times \{p\}$  erklärt und differenzierbar, wenn die Abbildung

$$(t_0 - 2\varepsilon, t_0 + 2\varepsilon) \times W \rightarrow M \quad (t, r) \mapsto \Phi(t - t_0, \Phi(t_0, r))$$

setzt aufgrund der Eindeutigkeit die auf  $[0, t_0 - \varepsilon] \times W$  durch  $\Phi$  gegebene Lösungskurven richtig fort. Damit folgt  $t_0 \in I_p$  und somit ist  $I_p$  abgeschlossen. Argumentiert man für  $(a_p, 0]$  analog, so folgt  $I_p = (a_p, b_p)$ .  $\square$

## 3 Teilung der Eins

### Ziel

Konstruktion globaler Objekte aus lokalen Daten.

### 3.1 Parakompaktheit

Wir setzen für  $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$C(r) := \text{offener Würfel der Kantenlänge } 2r = \{x \in \mathbb{R}^m \mid |x_1|, \dots, |x_m| < r\}$$

#### 3.1.1 Satz 13

Sei  $\mathcal{U} = \{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$  eine offene Überdeckung einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit  $M$ . Dann gibt es einen Atlas

$$\mathcal{A} = \left\{ h_j : V_j \xrightarrow{\cong} C(3) \mid j \in \mathbb{N} \right\}$$

von  $M$ , sodass

- $\{V_j\}$  ist **lokal endliche Verkleinerung** von  $\{U_\alpha\}$ , d.h. jeder Punkt von  $M$  hat eine Umgebung, die nur endlich viele der  $V_j$  nicht trivial schneidet, und für jedes  $j$  existiert ein  $\alpha(j)$  mit  $V_j \subset U_{\alpha(j)}$ .
- $M = \bigcup_j h_j^{-1}(C(1))$

Die Existenz einer lokal endlichen Verfeinerung zu jeder gegebenen offenen Überdeckung bezeichnet man als **Parakompaktheit** des Raumes  $M$ .  $\mathcal{A}$  heißt einer der Überdeckung  $\mathcal{U}$  **untergeordneter guter Atlas**.

#### Beweis

$M$  ist **lokalkompakt**<sup>2</sup>, da  $M$  lokal homöomorph zu  $\mathbb{R}^n$  ist. Weiter hat  $M$  eine abzählbare Basis der Topologie<sup>3</sup>. Daraus folgt: Es gibt eine offene Überdeckung  $B_1, B_2, \dots, B_l, \dots$   $l \in \mathbb{N}$  von  $M$  mit  $\overline{B_l}$  kompakt für alle  $l \in \mathbb{N}$ .

Sei  $A_1 := \overline{B_1}$ . Seien  $A_1, \dots, A_i$  induktiv konstruiert. Sei  $k \in \mathbb{N}$  die kleinste Zahl mit

$$A_i \subset B_1 \cup \dots \cup B_k, \quad k = k(i)$$

Setze  $A_{i+1} := \overline{B_1 \cup \dots \cup B_k}$ .

(Dieser Prozess endet genau dann nach endlich vielen Schritten, wenn  $M$  kompakt ist.)

Nach Konstruktion gilt nun

- $A_i \subset \text{Int}(A_{i+1})$
- $A_i$  ist kompakt.
- $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

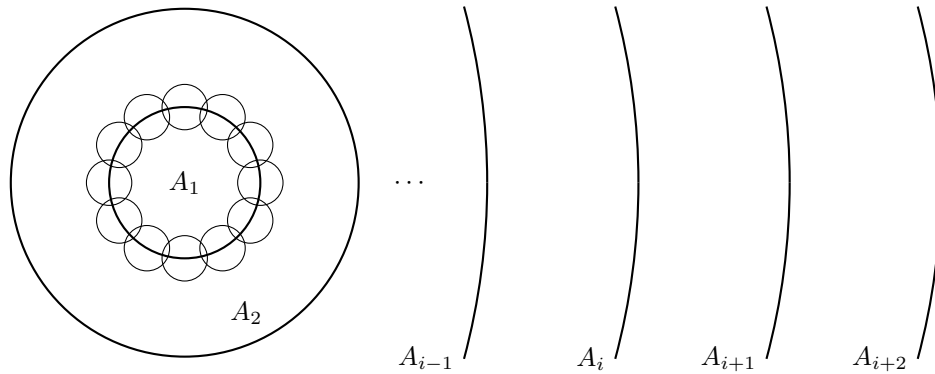
d.h.  $\{A_i\}$  ist eine **kompakte Ausschöpfung** von  $M$ .

<sup>2</sup>d.h. jeder Punkt hat eine kompakte Umgebung

<sup>3</sup>Siehe auch 1.2.1

Dazu kommt noch  
eine  
Übungsaufgabe

Int für „interior“

Abbildung 12: Konstruktion in Satz 13 (3.1.1) **Noch nicht komplett!**

$\text{Int}(A_{i+1}) \setminus A_{i-1}$  ist offene Überdeckung der kompakten Menge  $A_{i+1} \setminus \text{Int}(A_i)$ . Also gibt es endlich viele Karten  $h_j : V_j \xrightarrow{\cong} C(3)$ ,  $j = j(i)$ , sodass

- $V_i \subset \text{Int}_{A_{i+2}} \setminus A_{i-1}$
- die  $h_j^{-1}(C(1))$  überdecken  $A_{i+1} \setminus \text{Int}(A_i)$
- $V_j \subset U_\alpha$  für ein geeignetes  $\alpha$ .

Man erhält also abzählbar viele Mengen  $V_j$ . Jede kompakte Umgebung eines Punktes ist für hinreichend großes  $i$  in einem  $A_i$  enthalten. Daher schneiden nur endlich viele der  $V_j$  diese Umgebung.  $\square$

### 3.1.2 Definition

Eine  $\mathcal{U}$  **untergeordnete Teilung der Eins** ist eine Familie  $\{\varphi_i : M \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R} \mid i \in I\}$  differenzierbarer Funktionen mit:

- Das Mengensystem der **Träger**  $\{\text{supp } \varphi_i \mid i \in I\}$  ist lokal endlich, wobei  $\text{supp } \varphi := \overline{\{p \in M \mid \varphi(p) \neq 0\}}$ .
- $\forall i : \exists \alpha : \text{supp } \varphi_i \subset U_\alpha$
- $\varphi_i \geq 0$  und  $\sum_{i \in I} \varphi_i(p) = 1 \quad \forall p \in M$ . Die Summe ist endlich, da  $\{\text{supp } \varphi_i\}$  lokal endlich ist.

### 3.1.3 Lemma 13b

Es gibt eine offene Überdeckung  $B_1, B_2, \dots, B_l, \dots$   $l \in \mathbb{N}$  von  $M$  mit  $\overline{B_l}$  kompakt für alle  $l$ .

#### Beweis

Für jeden Punkt  $p \in M$  wählen wir eine Karte  $(h_p, U_p)$  mit  $p \in U_p$ . Für  $\varepsilon_p > 0$  so klein gewählt, dass  $\overline{B_{\varepsilon_p}(0)} \subset h_p(U_p)$  setzen wir

$$\Omega_p := h_p^{-1}(B_{\varepsilon_p}(0)).$$

$\{\Omega_p\}_{p \in M}$  ist eine offene Überdeckung von  $M$ , so dass  $\overline{\Omega_p}$  kompakt in  $M$  ist. Da  $M$  eine abzählbare Basis der Topologie hat, gibt es eine offene Überdeckung  $\{B_l\}_{l \in \mathbb{N}}$  mit:

- $\forall l \in \mathbb{N} : \exists p = p(l) : B_l \subset \Omega_p$ . Damit ist insbesondere  $\overline{B_l}$  kompakt.
- $\Omega_p = \bigcup_{B_l \subset \Omega_p} B_l$ . Damit ist  $B_l$  a posteriori eine Überdeckung.  $\square$

### 3.1.4 Satz 14

Zu jeder offenen Überdeckung  $\mathcal{U}$  von  $M$  gibt es eine abzählbare untergeordnete Teilung der Eins.

#### Beweis

Es gibt eine differenzierbare Funktion  $\psi$  auf  $\mathbb{R}^m$ , sodass

- $\psi \geq 0, \psi \leq 1$ ,
- $\psi = 1$  auf  $\overline{C(1)}$ ,
- $\psi = 0$  auf  $\mathbb{R}^m \setminus C(2)$

Betrachte:

$$f(t) := \begin{cases} e^{\frac{1}{t}}, & \text{falls } t > 0 \\ 0, & \text{falls } t \leq 0 \end{cases}$$

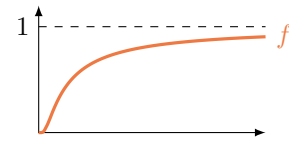


Abbildung 13: Funktion  $f$  aus 3.1.3

$$g(t) := \frac{f(t)}{f(t) + f(1-t)}$$

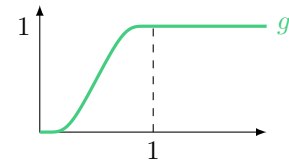


Abbildung 14: Funktion  $g$  aus 3.1.3

$$h(t) := g(t+2)g(2-t)$$

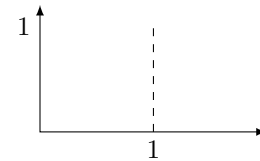


Abbildung 15: Funktion  $h$  aus 3.1.3

Für den mehrdimensionalen Fall setze:  $\psi(x) := h(|x_1|)h(|x_2|) \cdots h(|x_m|)$ . Sei

$$\left\{ h_j : V_j \xrightarrow{\cong} C(3) \mid j \in \mathbb{N} \right\}$$

ein  $\mathcal{U}$  untergeordneter guter Atlas (Satz 13).

*Zeichnung*

Setze  $\psi_j := \begin{cases} \psi \circ h_j, & \text{auf } V_j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ . Dann gilt

$$\varphi_j := \frac{\psi_j}{\sum_k \psi_k}$$

□

## 3.2 Riemannsche Metriken

### 3.2.1 Definition

Eine **Riemannsche Metrik** auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit  $M$  ist eine Zuordnung eines Skalarproduktes  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  auf  $T_p M$  zu jedem Punkt  $p \in M$ , das differenzierbar von  $p$  abhängt. D.h. in jeder

lokalen Karte sind die **metrischen Koeffizienten**

$$g_{ij}(p) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i} \mid \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle_p$$

differenzierbare Funktionen in  $p$  sind.

### 3.2.2 Satz 15

Jede differenzierbare Mannigfaltigkeit besitzt eine Riemannsche Metrik.

#### Beweis

Sei  $\{(U_\alpha, h_\alpha)\}$  ein Atlas von  $M$  und  $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  eine untergeordnete Teilung der Eins. Das Standardskalarprodukt des  $\mathbb{R}^m$  induziert eine Riemannsche Metrik  $\langle \cdot | \cdot \rangle_\alpha$  auf allen Kartengebieten  $U_\alpha$ . Für jedes  $j \in \mathbb{N}$  wähle ein  $\alpha(j)$  mit  $\text{supp } \varphi_j \subset U_{\alpha(j)}$ . Dann ist

$$\langle \cdot | \cdot \rangle_p := \sum_j \varphi_j(p) \langle \cdot | \cdot \rangle_{\alpha(j)}$$

eine Riemannsche Metrik auf  $M$ , da Symmetrie und positive Definitheit konvexe Eigenschaften sind.  $\square$

## 3.3 Sternförmige Gebiete

### 3.3.1 Definition

Eine Teilmenge  $M$  des  $\mathbb{R}^n$  heißt **sternförmig** (mit Zentrum 0), falls mit jedem Punkt  $x \in M$  auch die Strecke  $\{t \cdot x \mid t \in [0, 1]\}$  in  $M$  enthalten ist.

### 3.3.2 Beispiel

$$\varphi : B_1(0) \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n,$$

$$x \mapsto \begin{cases} \tan\left(\frac{\pi}{2} \cdot |x|\right) \cdot \frac{x}{|x|}, & \text{falls } x \neq 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

$\tan\left(\frac{\pi}{2} \cdot |x|\right) \cdot \frac{1}{|x|}$  ist Potenzreihe mit geraden Potenzen in  $|x|$ . Die Umkehrfunktion ist

$$\frac{2}{\pi} \arctan(|y|) \frac{y}{|y|} \longleftrightarrow y$$

Es gilt

$$\mathbb{R}^n \cong B_1^{n_1}(0) \times \dots \times B_1^{n_k}(0) \quad , \quad \sum_i n_i = n$$

## 3.4 Satz 16

Jede offene sternförmige Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  ist diffeomorph zu  $\mathbb{R}^n$ .

#### Beweis

$M$  offen, sternförmig, Zentrum 0. Ziel: Konstruiere einen Diffeomorphismus  $\mathbb{R}^n \rightarrow M$ , der die Strahlen  $\{t \cdot x \mid t \in [0, \infty)\}$  auf ihren Durchschnitt mit  $M$  abbildet. Diese Strahlen sind die Orbits des Vektorfeldes  $X(x) = x$  auf  $\mathbb{R}^n$ .

Idee: Finde eine positive Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , sodass das Vektorfeld  $Y = f \cdot X$  auf  $M$  einen globalen Fluss definiert. Wir bilden dann die Orbits von  $X$  auf die von  $Y$  ab.

### Umparametrisierung

Sei  $\gamma$  eine Integralkurve von  $X$ , also  $\dot{\gamma} = X(\gamma)$ .  $s : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  ist so zu bestimmen, dass gilt


$$(\gamma \circ s)'(t) = \dot{\gamma}(s(t))\dot{s}(t) \stackrel{!}{=} X_{(\gamma \circ s)(t)} \cdot f((\gamma \circ s)(t)) = Y_{(\gamma \circ s)(t)}$$

also  $\gamma \circ s$  Lösung von  $Y = fX$  ist. Nach dem Satz von Picard-Lindelöf existiert solch eine Lösung von  $\dot{s}(t) = f((\gamma \circ s)(t))$  zumindest lokal. Es werden dieselben Orbits mit Geschwindigkeit  $|fX|$  statt  $|X|$  in gleicher Richtung durchlaufen.

Genauer: OE:  $M \supset K := \overline{B_1(0)}$ . Wir suchen  $g : M \rightarrow \mathbb{R}$  positiv und **eigentlich**, d.h. für jedes  $j \in \mathbb{N}$  ist  $g^{-1}([0, j])$  kompakt. Sei  $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  eine Teilung der Eins auf  $M$  mit kompaktem Träger,  $\text{supp } \varphi_j$ . Setze

$$g := \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot \varphi_j$$

## Index

Die Seitenzahlen sind mit Hyperlinks zu den entsprechenden Seiten versehen, also anklickbar 

Atlas, 2

Bahn, 20

Basis einer Topologie:, 1

Derivation, 7

Diffeomorphismus, 6

Differential, 6–8

differenzierbar, 1, 2

differenzierbare Mannigfaltigkeit, 3

differenzierbare Struktur, 3

Differenzierbarkeit auf Mannigfaltigkeiten, 5

dynamisches System, 19

eigentlich, 28

Flusslinie, 20

Geschwindigkeitsfeld, 22

Geschwindigkeitsvektor, 6

globaler Fluss, 19

Hausdorffsch:, 1

homogenen Koordinaten, 4

Integralkurve, 12, 20

Kartenwechsel, 2

kompakte Ausschöpfung, 24

kompatibel, 3

konstant, 21

Lie-Ableitung, 16

Lie-Klammer, 11

Lipschitz-Bedingung, 13

lokal endliche Verkleinerung, 24

lokal homöomorph:, 1

lokaler Fluss, 16, 21

lokalkompakt, 24

Lösungskurve, 20

maximal, 3

maximale, 22

metrischen Koeffizienten, 27

$n$ -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit,

1

Orbit, 20

Parakompaktheit, 24

periodisch, 21

regulär, 21

Riemannsche Metrik, 26

stereographische Projektion, 2

sternförmig, 27

Tangentialraum, 6, 7

Tangentialvektor, 7, 9

Träger, 25

untergeordnete Teilung der Eins, 25

untergeordneter guter Atlas, 24

Vektorfeld, 11

## Abbildungsverzeichnis

1	Beispiel einer nicht-Hausdorffmenge	2
2	Stereografische Projektion	2
3	Der eindimensionale projektive Raum $\mathbb{R}P^1$	3
4	Der 2-dimensionale projektive Raum $\mathbb{R}P^2$ (projektive Ebene)	3
5	Zeichnung zur Hausdorffeigenschaft von $\mathbb{R}P^n$	4
6	Basis der Topologie von $\mathbb{R}P^n$ (unfertig)	4
7	Tangentialebene im $\mathbb{R}^3$	6
8	Integralkurve in einem Vektorfeld	12
9	Zeichnung zum Beweis von Picard-Lindelöf	14
10	Zeichnung zu Beispiel 2.4.6 mit $l(t) = 1$	17
11	Veranschaulichung zu lokalen Flüssen	21
12	Konstruktion in Satz 13 (3.1.1) <b>Noch nicht komplett!</b>	25
13	Funktion $f$ aus 3.1.3	26
14	Funktion $g$ aus 3.1.3	26
15	Funktion $h$ aus 3.1.3	26