Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

BTsync:

Skript Grundlagen der Analysis, Topologie, Geometrie

Mitschrift der Vorlesung „Grundlagen der Analysis, Topologie, Geometrie" von Prof. Dr. Arthur Bartels

Jannes Bantje

28. Mai 2014

Erstellt mit XƎLaTeX

Inhaltsverzeichnis

1 Topologische Räume

1.1 Definition

Ein **metrischer Raum** (X, d) ist eine Menge X mit einer Abbildung $d : X \times X \to [0, \infty)$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\forall x, y \in X : d(x, y) = d(y, x)$

(ii) $\forall x, y \in X : d(x, y) = 0 \iff x = y$

(iii) $\forall x, y, z \in X : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Dreiecksungleichung)

1.2 Definition

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine **Norm** auf V ist eine Abbildung $\|.\| : V \to [0, \infty)$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\forall v \in V, \lambda \in \mathbb{R} : \|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$

(ii) $\forall v, w \in V : \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (Dreiecksungleichung)

(iii) $\forall v \in V : \|v\| = 0 \iff v = 0$

Durch $d(v, w) := \|v - w\|$ erhalten wir eine Metrik auf V.

1.3 Beispiel

Auf $\mathbb{R}^n$ gibt es verschiedene Normen und damit auch verschiedene Metriken: Für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

(i) $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$

(ii) $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$

(iii) $\|x\|_\infty = \max\{|x_i| \,|\, i = 1, \ldots, n\}$

1.4 Beispiele

(i)
$$S^1 := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$$
mit $d(z, z') := \min\{|\theta| \,\big|\, \theta \in \mathbb{R} : z = e^{i\theta} z'\}$

(ii) Ist X ein metrischer Raum und A eine Teilmenge von X, so wird A durch die Einschränkung der Metrik auf A zu einem metrischen Raum. Wir sagen dann A ist ein Unterraum von X.

(iii) Sei X eine beliebige Menge. Durch
$$d(x, y) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x = y \\ 1, & \text{falls } x \neq y \end{cases}$$
wir auf X eine Metrik (die **diskrete Metrik**) definiert.

(iv) Sei p eine Primzahl. Jedes $x \neq 0 \in \mathbb{Q}$ lässt sich eindeutig schreiben als $x = \frac{a}{b} p^n$ mit $n, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ und a, b, p paarweise teilerfremd. Dann heißt
$$|x|_p := p^{-n}$$
der p**-adische Betrag** von x, $(|0|_p := 0)$. Durch $d_p(x, y) := |x - y|_p$ erhält man die p-adische Metrik auf $\mathbb{Q}$.

1.5 Definition

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) zwei metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt eine **Isometrie**, falls gilt:

$$\forall x, x' \in X : d_Y\big(f(x), f(x')\big) = d_X(x, x')$$

f heißt **stetig**, falls für alle $x_0 \in X$ gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : d_X(x, x_0) < \delta \Longrightarrow d_Y\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon$$

1.6 Definition

Eine Teilmenge U eines metrischen Raums X heißt **offen**, falls gilt

$$\forall x \in U \exists \delta > 0 \text{ mit } B_\delta(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < \delta\} \subseteq U$$

1.7 Lemma

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung zwischen metrischen Räumen. Dann sind äquivalent:

(i) f ist stetig

(ii) Urbilder (unter f) offener Mengen in Y sind offen in X. ($\forall U \subseteq Y$ offen ist $f^{-1}(U) \subseteq X$ offen)

Beweis
Analysis II. □

1.8 Definition

Ein **topologischer Raum** $(X, \mathcal{O})$ ist eine Menge X zusammen mit einer Familie $\mathcal{O}$ von Teilmengen von X so dass gilt:

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{O}$

(ii) $U, V \in \mathcal{O} \Longrightarrow U \cap V \in \mathcal{O}$

(iii) Ist I eine Indexmenge und $U_i \in \mathcal{O}$ für $i \in I$, so gilt $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{O}$.

$\mathcal{O}$ heißt dann eine **Topologie** auf X. $U \subseteq X$ heißt **offen**, falls $U \in \mathcal{O}$. $A \subseteq X$ heißt **abgeschlossen**, falls $X \setminus A$ offen ist.

1.9 Beispiele

(i) Jeder metrische Raum wird durch $\mathcal{O} := \{U \subseteq X \mid U \text{ ist offen}\}$ zu einem topologischen Raum.

(ii) Sei X eine beliebige Menge.
  (i) Die **grobe Topologie** ist $\mathcal{O}_{\text{grob}} := \{\emptyset, X\}$
  (ii) Die **diskrete Topologie** ist $\mathcal{O}_{\text{diskret}} := \mathcal{P}(X)$
  (iii) Die **koendliche Topologie** ist $\mathcal{O}_{\text{koendl.}} := \{U \subseteq X \mid X \setminus U \text{ endlich}\} \cup \{\emptyset\}$

1.10 Definition

Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen heißt **stetig**, wenn Urbilder von offener Mengen offen sind.

1.11 Lemma

Seien $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ stetige Abbildungen. Dann ist auch $g \circ f : X \to Z$ stetig.

Beweis
Sei $U \subseteq Z$ offen. Dann ist $g^{-1}(U) \subseteq Y$ offen, da g stetig ist. Da auch f stetig ist, gilt $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}\big(g^{-1}(U)\big) \subseteq X$ offen. □

1.12 Definition

Seien X, Y topologische Räume. Eine bijektive stetige Abbildung $f : X \to Y$ heißt ein **Homöomorphismus**, falls auch ihre Umkehrabbildung $f^{-1} : Y \to X$ stetig ist.

Gibt es einen solchen Homöomorphismus, so heißen X und Y **homöomorph** und wir schreiben $X \cong Y$, andernfalls $X \ncong Y$.

1.13 Beispiel

(i) $(0,1) \cong (0,\infty) \cong (-\infty,0) \cong \mathbb{R}$ (einfach)

(ii) $(0,1) \ncong [0,1) \ncong [0,1] \ncong (0,1)$ (Übung)

(iii) $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m \iff n = m$ (schwer)

1.14 Definition

Sei X ein topologischer Raum. Eine Familie $\mathcal{U}$ von offenen Teilmengen von X heißt eine **Basis der Topologie**, falls für jede Teilmenge $W \subseteq X$ äquivalent sind:

(1) W ist offen

(2) $\forall x \in W : \exists U \in \mathcal{U}$ mit $x \in U \subseteq W \iff W = \bigcup_{\substack{u \in \mathcal{U} \\ u \subseteq W}} u$

Man sagt X erfüllt das **zweite Abzählbarkeitsaxiom**, falls X eine abzählbare Basis der Topologie besitzt.

1.15 Beispiel

Sei X ein metrischer Raum. Dann ist $\{B_\delta(x) \,|\, x \in X, \delta > 0\}$ eine Basis der Topologie von X. Gibt es eine abzählbare dichte Teilmenge $X_0 \subseteq X$, so ist $\big\{B_{1/n}(x) \,\big|\, x \in X_0, n \in \mathbb{N}\big\}$ eine abzählbare Basis der Topologie von X und X erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom.

1.16 Proposition

Sei X eine Menge und $\mathcal{U}$ eine Familie von Teilmengen von X mit $X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$. Dann ist $\mathcal{U}$ genau dann die Basis einer Topologie $\mathcal{O}$ auf X, wenn $\mathcal{U}$ folgende Bedingungen erfüllt:

$$\forall U, V \in \mathcal{U} : \forall x \in U \cap V : \exists W \in \mathcal{U} \text{ mit } x \in W \subseteq U \cap V \tag{$\star$}$$

Beweis
Sei $\mathcal{U}$ die Basis der Topologie $\mathcal{O}$ und $U, V \in \mathcal{U}$. $\Rightarrow U, V$ offen, also ist auch $U \cap V$ offen. Da $\mathcal{U}$ eine Basis der Topologie ist, gibt es zu jedem $x \in U \cap V$ ein $W \in \mathcal{U}$ mit $x \in W \subseteq U \cap V$. Daher gilt $(\star)$

Sei umgekehrt $(\star)$ erfüllt. Definiere $\mathcal{O}$ durch

$$W \in \mathcal{O} :\iff \forall x \in W : \exists U \in \mathcal{U} : x \in U \subseteq W.$$

Dann $\emptyset \in \mathcal{O}$. Wegen $X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ gilt auch $X \in \mathcal{O}$. Weiter ist $\mathcal{O}$ unter Vereinigungen abgeschlossen. Seien $W_1, W_2 \in \mathcal{O}$. Sei $x \in W_1 \cap W_2$. Dann gilt

$$\begin{aligned} x \in W_1, W_1 \text{ offen } &\Rightarrow \exists U_1 \in \mathcal{U} : x \in U_1 \subseteq W_1 \\ x \in W_2, W_2 \text{ offen } &\Rightarrow \exists U_2 \in \mathcal{U} : x \in U_2 \subseteq W_2 \end{aligned}$$

Also $x \in U_1 \cap U_2$. Mit $(\star)$ folgt: $\exists W \in \mathcal{U}$ mit $x \in W \subseteq U_1 \cap U_2 \subseteq W_1 \cap W_2$. □

1.17 Bemerkung

Die Topologie $\mathcal{O}$ in der Proposition 1.16 wird eindeutig durch $\mathcal{U}$ bestimmt.

1.18 Beispiel

- Sei $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller reellen Folgen. Für $\delta > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ sei

  $$U_{n,\delta,\alpha_1,\dots,\alpha_n} := \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \,|\, |x_i - \alpha_i| < \delta \text{ für } i = 1, \dots, n\}$$

  Dann erfüllt $\mathcal{U} := U_{n,\delta,\alpha_1,\dots,\alpha_n}$ die Bedingung $(\star)$ und ist die Basis der **Topologie der punktweisen Konvergenz**.

- Sei $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller stetigen Abbildungen. Zu $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig sei

  $$U_{a,b,\delta,g} := \big\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ stetig} \,\big|\, \forall t \in [a, b] : \big|f(t) - g(t)\big| < \delta \big\}.$$

  Dann erfüllt $\mathcal{U} := \{U_{a,b,\delta,g}\}$ $(\star)$ und ist die Basis der **Topologie der gleichmäßigen Konvergenz** auf kompakten Intervallen.

1.19 Definition

Sei Y eine Teilmenge eines topologischen Raums X.

$$\begin{aligned} \mathring{Y} &:= \{y \in Y \,|\, \exists U \subseteq X \text{ offen mit } y \in U \subseteq Y\} \text{ heißt das } \textbf{Innere} \text{ von } Y \\ \overline{Y} &:= \{x \in X \,|\, \forall U \subseteq X \text{ offen mit } x \in U : U \cap Y \neq \emptyset\} \text{ heißt } \textbf{Abschluss von } Y \\ \partial Y &:= \overline{Y} \setminus \mathring{Y} \text{ heißt der } \textbf{Rand} \text{ von } Y. \end{aligned}$$

1.20 Bemerkung

1) $\mathring{Y} = X \setminus (\overline{X \setminus Y})$, $\overline{Y} = X \setminus (X \setminus Y)^\circ$

2) $\mathring{Y} = \bigcup_{\substack{U \subseteq Y \\ U \text{ offen}}} U$ ist offen

3) $\overline{Y} = \bigcap_{\substack{A \supseteq Y \\ A \text{ abgeschlossen}}} A$ ist abgeschlossen

4) $\partial Y = \overline{Y} \setminus \mathring{Y}$ ist abgeschlossen.

1.21 Definition

Sei X ein topologischer Raum, $x \in X$. $V \subseteq X$ heißt eine **Umgebung** von x, falls es $U \subseteq X$ offen gibt mit $x \in U \subseteq V$. Ist V offen, so heißt V eine **offene Umgebung** von x.

1.22 Definition

Ein topologischer Raum X heißt **hausdorffsch** (oder eine **Hausdorffraum**), falls es zu jedem Paar $x, y \in X, x \neq y$ offene Umgebungen U von x und V von y gibt mit $U \cap V = \emptyset$.
Bsp:

- Metrische Räume sind hausdorffsch.
- Ist $|X| \geq 2$ so ist $(X, \mathcal{O}_{\text{grob}})$ nicht hausdorffsch.

1.23 Definition

Ein Hausdorffraum M, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, heißt eine **topologische Mannigfaltigkeit** der Dimension n (oder eine n-Mannigfaltigkeit), falls er lokal homöomorph zum $\mathbb{R}^n$ ist; d.h. $\forall x \in M \exists$ offene Umgebung U von x mit $U \cong \mathbb{R}^n$.

2 Konstruktion topologischer Räume

2.1 Definition

Sei X ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ eine Teilmenge. Die **Spurtopologie** auf A besteht aus allen Teilmengen von A der Form $A \cap U$ mit $U \subseteq X$ offen. Mit dieser Topologie heißt A ein Unterraum von X.

Achtung: $U \subseteq A$ offen $\not\Rightarrow U \subseteq X$ offen!

2.2 Bemerkung

Sei $i : A \to X$ die Inklusion.

(i) i ist stetig.

(ii) Ist Y ein weiterer topologischer Raum und $f : Y \to A$ eine Abbildung. Dann gilt:

$$f \text{ stetig} \iff i \circ f : Y \to X \text{ ist stetig}$$

2.3 Definition

Seien X, Y topologische Räume. Eine Basis für die **Produkttopologie** auf $X \times Y$ ist

$$\mathcal{U} := \{U \times V \,|\, U \subseteq X \text{ offen }, V \subseteq Y \text{ offen}\}.$$

2.4 Definition

Seien X_i für $i \in I$ topologische Räume. Die Produkttopologie auf ihrem Produkt

$$\prod_{i \in I} X_i = \{(x_i)_{i \in I} \,|\, x_i \in X_i\}$$

hat als Basis alle Mengen der Form $\prod_{i \in I} U_i$ mit

1) $U_i \subseteq X_i$ ist offen

2) Für fast alle i ist $U_i = X_i$.

2.5 Bemerkung

Seien $p_j : \prod_{i \in I} X_i \to X_j$ die Projektionen.

(i) Die p_j sind stetig.

(ii) Ist Y ein weiterer topologischer Raum und $f : Y \to \prod_{i \in I} X_i$ eine Abbildung, so gilt: f ist stetig $\iff \forall j$ ist $f_j := p_j \circ f$ stetig.

2.6 Bemerkung

Die übliche Topologie auf $\mathbb{R}^n = \prod_{i=1}^n \mathbb{R}$ stimmt mit der Produkttopologie überein.

2.7 Beispiel

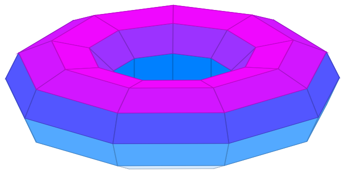


Abbildung 1: Der Torus T^2, Quelle

$T^n := \underbrace{S^1 \times \ldots \times S^1}_{n} = \prod_{i=1}^n S1$ heißt der n-Torus. Der n-Torus ist eine n-Mannigfaltigkeit.

2.8 Definition

Seien X und Y topologische Räume und $(f_t)_{t\in[0,1]}$ eine Familie von stetigen Abbildungen $f_t : X \to Y$. Wir sagen, dass die f_t stetig von t abhängen, falls

$$H : X \times [0,1] \to Y \text{ mit } H(x,t) = f_t(x)$$

stetig bezüglich der Produkttopologie ist. In diesem Fall heißen f_0 und f_1 **homotop** und H eine **Homotopie** zwischen f_0 und f_1.

Beispiel
Je zwei Abbildungen $f, g : X \to \mathbb{R}^n$ sind homotop; eine Homotopie wird gegeben durch $H(x,t) := (1-t)\cdot f(x) + t\cdot g(x)$. Wir werden später sehen, dass $\mathrm{id} : S^1 \to S^1$ nicht homotop zu einer konstanten Abbildung ist.

2.9 Definition

Sei X ein topologischer Raum, M eine Menge und $q : X \to M$ eine surjektive Abbildung. Die offenen Mengen der **Quotiententopologie** auf M (bezüglich q) sind alle $U \subseteq M$ für die $q^{-1}(U) \subseteq X$ offen ist.

Bemerkung

(i) $q : X \to M$ ist stetig.

(ii) Ist Y ein weiterer topologischer Raum und $f : M \to Y$ eine Abbildung, so gilt

$$f \text{ ist stetig} \iff f \circ q \text{ ist stetig}$$

Bemerkung
Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf dem topologischen Raum X. Dann ist die Äquivalenzklassenabbildung $q : X \to X/\sim,\ x \mapsto [x]_\sim$ surjektiv. Insbesondere wird $X/\sim$ durch die Quotiententopologie zu einem topologischen Raum.

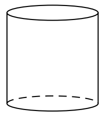
2.10 Beispiele

$X = [0,1] \times [0,1]$: Definiere

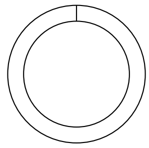
"Zusammenkleben" der Seiten

(i) $(s,t) \sim (s',t') :\Leftrightarrow (s = s'$ und $t = t')$ oder $(s = 0, s' = 1, t = t')$. Dann

$$X/\sim \;\cong$$



$$\cong$$



Möbiusband: Verdrehen und dann Zusammenkleben

(ii) $(s,t) \sim (s',t') :\Leftrightarrow (s = s'$ und $t = t')$ oder $(s = 0, s' = 1$ und $t = 1 - t')$. Dann

$$X/\sim \quad \cong$$

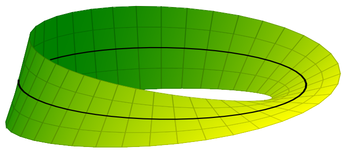


Abbildung 2: Möbius-Band, Quelle

(iii) Sei $\mathbb{R}P^n$ die Menge aller 1-dimensionalen Unterräume des $\mathbb{R}^{n+1}$. Wir erhalten eine surjektive Abbildung

$$q : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}P^n \quad , \quad q(v) := \langle v \rangle >$$

$\mathbb{R}P^n$ mit der Quotiententopologie bezüglich q heißt der **reell projektive Raum** der Dimension n. Er ist eine n-Mannigfaltigkeit.

(iv) Betrachte auf $\mathbb{R}$ die Relation $x \sim y :\Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$. Der Raum der Äquivalenzklassen bezeichnen wir mit $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$. Dann ist $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ mit der Quotiententopologie nicht hausdorffsch, obwohl $\mathbb{R}$ natürlich hausdorffsch ist.
(Übung: Die Quotiententopologie auf $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ ist die grobe Topologie.)

(v) Sei $f : X \to X$ eine stetige Abbildung. Betrachte auf $X \times [0,1]$ die Äquivalenzrelation

$$(x,t) \sim (x',t') :\Leftrightarrow (x = x' \text{ und } t = t') \text{ oder } (t = 0, t' = 1 \text{ und } x' = f(x))$$

Der Quotient $T_f := X \times [0,1]/\sim$ heißt der **Abbildungstorus** von f.

3 Konvergenz

3.1 Definition

Sei X ein topologischer Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Dann sagen wir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $x \in X$, falls gilt: Zu jeder offenen Umgebung V von x, gibt es $N \in \mathbb{N}$, sodass $x_n \in V$ für alle $n \geq N$. Wir schreiben dann $x_n \to x$ oder $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$. x heißt ein Grenzwert von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Bemerkung
Bezüglich der groben Topologie ist jeder Punkt Grenzwert jeder Folge.

Beispiel
Betrachte die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Teilmengen auf dem Raum $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Dann gilt für Folgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von stetigen Abbildungen $f_n \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

$$f_n \to f \iff \forall a < b \text{ konvergiert } f_n|_{[a,b]} \to f_{[a,b]} \text{ gleichmäßig.}$$

3.2 Lemma (Eindeutigkeit von Grenzwerten)

Sei X hausdorffsch. Gilt $x_n \to x$ und $x_n \to y$, so folgt $x = y$.

Beweis
Übung!

3.3 Definition

Eine nichtleere Menge Λ mit einer Relation "$\leq$" heißt **gerichtet**, falls gilt

(i) $\forall \lambda \in \Lambda : \lambda \leq \lambda$

(ii) $\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \Lambda : \lambda_1 \leq \lambda_2 \wedge \lambda_2 \leq \lambda_3 \Rightarrow \lambda_1 \leq \lambda_3$ (transitiv)

(iii) $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda : \exists \mu : \lambda_1 \leq \mu \wedge \lambda_2 \leq \mu$

3.4 Definition

Sei X ein topologischer Raum. Ein **Netz** $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ in X besteht aus einer gerichteten Menge Λ und Elementen $x_\lambda \in X$ für $\lambda \in \Lambda$. Für $x \in X$ sagen wir $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ konvergiert gegen x, falls gilt:

$$\forall \text{ Umgebungen } U \text{ von } x : \exists \lambda_0 \in \Lambda : \forall \lambda \in \Lambda \text{ mit } \lambda \geq \lambda_0 \text{ gilt } x_\lambda \in U$$

Wir schreiben dann $x_\lambda \xrightarrow{\lambda\to\infty} x$ oder $x_\lambda \to x$.

Beispiel
Sei X ein topologischer Raum und $x \in X$. Dann ist $\Lambda := \{U \,|\, U \text{ ist offene Umgebung von } x\}$ gerichtet bezüglich

$$U \leq V :\Leftrightarrow V \subseteq U$$

Ist nun $x_U \in U$ für alle $U \in \Lambda$ so $x_U \to x$.

3.5 Lemma (Eindeutigkeit von Grenzwerten)

Sei X hausdorffsch. Gilt $x_\lambda \to x$ und $x_\lambda \to y$, so folgt $x = y$.

Beweis
Angenommen $x \neq y$. Da X hausdorffsch ist existiert eine Umgebung U von x und V von y mit $U \cap V = \emptyset$.

$$x_\lambda \to x \Rightarrow \exists \lambda_U : x_\lambda \in U : \forall \lambda \geq \lambda_U$$
$$x_\lambda \to y \Rightarrow \exists \lambda_V : x_\lambda \in V : \forall \lambda \geq \lambda_V$$

Sei nun $\mu \in \Lambda$ mit $\mu \geq \lambda_U$, $\mu \geq \lambda_V$. Dann folgt $x_\mu \in U \cap V = \emptyset$ ↯ □

3.6 Definition

Sei $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ein Netz in X. Ein **Teilnetz** von $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ist eine gerichtete Menge Λ' mit einer Abbildung $f : \Lambda' \to \Lambda$, so dass gilt

i) $\lambda_1' \leq \lambda_2' \Rightarrow f(\lambda_1') \leq f(\lambda_2')$ (f erhält $\leq$)

ii) $\forall \lambda \in \Lambda : \exists \lambda' \in \Lambda'$ mit $\lambda \leq f(\lambda')$ (f ist kofinal)

Oft schreiben wir $\left(x_{f(\lambda')}\right)_{\lambda' \in \Lambda'}$ für ein Teilnetz.

Bemerkung
Ein Teilnetz einer Folge ist *nicht* notwendig eine Teilfolge.

4 Kompakte Räume

4.1 Definition

Eine Familie $\mathcal{U}$ von offenen Teilmengen von X heißt eine **offene Überdeckung**, falls

$$\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U = X.$$

$\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ heißt eine **Teilüberdeckung**, falls immer noch $X \subseteq \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V$.

4.2 Definition

Ein topologischer Hausdorffraum X heißt **kompakt**, wenn jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

4.3 Definition

Eine Familie $\mathcal{A}$ von abgeschlossenen Teilmengen von X hat die **endliche Durchschnittseigenschaft**, wenn für jedes $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$ mit $|\mathcal{A}_0| < \infty$ gilt

$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}_0} A \neq \emptyset.$$

4.4 Lemma

Sei X ein Hausdorffraum. Dann ist X genau dann kompakt, wenn gilt: Hat eine Familie $\mathcal{A}$ von abgeschlossenen Teilmengen von X die endliche Durchschnittseigenschaft, so gilt

$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \neq \emptyset$$

Beweis
Ist $\mathcal{U}$ eine Familie von offenen Teilmengen, so ist $\mathcal{A} := \{X \setminus U \,|\, U \in \mathcal{U}\}$ eine Familie von abgeschlossenen Teilmengen. Ist umgekehrt $\mathcal{A}$ eine Familie von abgeschlossenen Teilmengen, so ist

$$\mathcal{U} := \{X \setminus A \,|\, A \in \mathcal{A}\}$$

eine Familie von offenen Teilmengen. Dann gilt:

- $\mathcal{U}$ hat eine endliche Teilüberdeckung $\iff$ $\mathcal{A}$ hat nicht die endliche Durchschnittseigenschaft.
- $\mathcal{U}$ ist eine Überdeckung $\iff$ $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \emptyset$. □

4.5 Satz

Sei X ein Hausdorffraum. Dann sind äquivalent:

1) X ist kompakt.

2) Jedes Netz in X besitzt ein konvergentes Teilnetz.

Beweis
"1) $\Rightarrow$ 2)": Sei $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ein Netz in X. Für $\lambda\in\Lambda$ sei $A_\lambda := \overline{\{x_{\lambda'}\,|\,\lambda'\geq\lambda\}}$.
Behauptung($\star$): $\mathcal{A} := \{A_\lambda\,|\,\lambda\in\Lambda\}$ hat die endliche Durchschnittseigenschaft. Sei $\mathcal{A}_0\subseteq\mathcal{A}$ endlich, also $\mathcal{A}_0 = \{A_\lambda\,|\,\lambda\in\Lambda_0\}$ für ein $\Lambda_0\subseteq\Lambda$ endlich. Da Λ gerichtet ist, gibt es $\lambda\in\Lambda$ mit $\lambda\geq\mu$ für alle $\mu\in\Lambda_0$. Es folgt $x_\lambda\in\{x_{\lambda'}\,|\,\lambda'\geq\mu\}$ für alle $\mu\in\Lambda_0$. Insbesondere folgt aus

$$x_\lambda\in\bigcap_{\mu\in\Lambda_0} A_\mu$$

Da X kompakt ist, folgt aus ($\star$)

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\neq\emptyset.$$

Wähle $x\in\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$. Sei $\mathcal{U}$ die Menge aller offenen Umgebungen von x. Sei

$$\Lambda_{\mathcal{U}} := \{(\lambda,U)\,|\,\lambda\in\Lambda, x_\lambda\in U\in\mathcal{U}\}$$

Durch $(\lambda,U)\leq(\lambda',U') :\Leftrightarrow \lambda\leq\lambda'$ und $U\supseteq U'$ wird $\Lambda_{\mathcal{U}}$ zu einer gerichteten Menge: Sei (λ_1,U_1) und $(\lambda_2,U_2)\in\Lambda_{\mathcal{U}}$. Sei $U := U_1\cap U_2$. Wähle $\lambda\in\Lambda$ mit $\lambda\geq\lambda_1$ und $\lambda\geq\lambda_2$. Da $x\in A_\lambda = \overline{\{x_{\lambda'}\,|\,\lambda'\geq\lambda\}}$ gibt es $\lambda'\geq\lambda$ mit $x_{\lambda'}\in U$. Also $(\lambda',U)\in\Lambda_{\mathcal{U}}$ und (λ_1,U_1), $(\lambda_2,U_2)\leq(\lambda',U)$. Mit $x_{(\lambda,U)} = x_\lambda$ ist $(x_{\lambda,U})_{(\lambda,U)\in\Lambda_{\mathcal{U}}}$ das gesuchte Teilnetz.

"2) $\Rightarrow$ 1)": Sei $\mathcal{A}$ eine Familie von abgeschlossenen Teilmengen mit der endlichen Durchschnittseigenschaft. Sei $\Lambda := \{\mathcal{A}_0\subseteq\mathcal{A}\,|\,\mathcal{A}_0 \text{ ist endlich}\}$. Λ ist gerichtet bezüglich $\mathcal{A}_0\leq\mathcal{A}_1 :\Leftrightarrow \mathcal{A}_0\subseteq\mathcal{A}_1$. Zu $\mathcal{A}_0\in\Lambda$ wähle

$$x_{\mathcal{A}_0}\in\bigcap_{A\in\mathcal{A}_0} A\neq\emptyset$$

Sei nun $(x_{f(\lambda)})_{\lambda\in\Lambda'}$ mit $f:\Lambda'\to\Lambda$ ein konvergentes Teilnetz von $(x_{\mathcal{A}_0})_{\mathcal{A}_0\in\Lambda}$. Sei x der Grenzwert von $(x_{f(\lambda')})_{\lambda'\in\Lambda'}$.

Behauptung: $x\in\bigcap_{A\in\mathcal{A}_0} A$.
Sei $A\in\mathcal{A}_0$ und $U = X\setminus A$. Angenommen $x\in U$. Da U eine offene Umgebung von x ist und $x_{f(\lambda')}\to x$ gilt, gibt es $\lambda_0'\in\Lambda$ mit $x_{f(\lambda')}\in U$ für alle $\lambda'\geq\lambda_0'$. Zu $\{A\}\in\Lambda$ gibt es $\mu\in\Lambda'$ mit $f(\mu)\geq\{A\}$. Da Λ' gerichtet ist, gibt es $\mu'\geq\mu$ und $\mu'\geq\lambda_0'$. Es folgt $A\in f(\mu')$ und damit $x_{f(\mu')}\in A$, aber andererseits $x_{f(\mu')}\in U = X\setminus A$, da $\mu'\geq\lambda_0'$ $\lightning$ $\square$

4.6 Bemerkung

Sei X ein metrischer Raum. Dann sind äquivalent:

1) X ist kompakt.

2) Jede Folge in X besitzt eine konvergente Teilfolge.

4.7 Satz von Tychonov

Sei $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie von kompakten topologischen Räumen. Dann ist auch $X := \prod_{i\in I} X_i$ kompakt.

Beweis
(unter Benutzung der nachfolgenden Punkte)
Ist $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ein Netz in $\prod_i X_i$, so besitzt dieses Netz ein universelles Teilnetz $(x_{f(\mu)})_{\mu\in\Lambda'}$. Für jedes i ist dann $p_i(x_{f(\mu)})_{\mu\in\Lambda'}$ ein universelles Netz in X_i und nach dem Lemma 4.11 konvergent. Daher ist $(x_{f(\mu)})_{\mu\in\Lambda'}$ bezüglich der Produkttopologie konvergent

4.8 Beispiel

Seien $(X_i, d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ kompakte metrische Räume. Dann gibt es eine Metrik d auf $\prod X_i$, so dass die zugehörige Topologie die Produkttopologie ist. (Übung)

Beweis
Sei $p_j : \prod_i X_i \to X_j$ die Projektion auf den j-ten Faktor. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\prod_i X_i$. Wähle induktiv $\mathbb{N} = N_0 \supseteq N_1 \supseteq N_2 \supseteq \dots$ mit

(i) $|N_i| = \infty$

(ii) $(p_i(x_n))_{n\in N_i}$ ist eine konvergente Folge in X_i.

(Dies ist möglich, da X_i kompakt ist.) Wähle nun $n_k \in N_k$ induktiv, so dass $n_k > n_{k-1}$. Dann ist $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Für $i \in \mathbb{N}$ ist $\big(p_i\big(x_{n_k}\big)\big)_{k\in\mathbb{N},k\geq i}$ eine Teilfolge der konvergenten Folge $(p_i(x_n))_{n\in N_i}$ und daher konvergent. Damit konvergiert auch $(p_i(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ für jedes i. Daher konvergiert $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ punktweise, also in der Produkttopologie (Übung). □

4.9 Definition

Sei $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ein Netz in X und $A \subseteq X$. Wir sagen $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ist **immer wieder in** A, falls gilt:

$$\forall\lambda \in \Lambda : \exists\mu \in \Lambda \text{ mit } \mu \geq \lambda \text{ und } x_\mu \in A$$

Wir sagen $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ist **schließlich in** A, falls gilt

$$\exists\lambda \in \Lambda : \forall\mu \in \Lambda \text{ mit } \mu \geq \lambda \text{ gilt } x_\mu \in A$$

Bemerkung
$x_\lambda \to X \iff$ Für jede Umgebung U von x ist x_λ schließlich in U.

4.10 Definition

Ein Netz $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ in X heißt **universell**, falls für jede Teilmenge $A \subseteq X$ gilt: Entweder ist $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ schließlich in A *oder* schließlich in $X \setminus A$.

Bemerkung
- Ist $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ universell und immer wieder in A, dann ist $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ schließlich in A.
- Ist $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ein universelles Netz in X und $f : X \to Y$ eine Abbildung, so ist auch $(f(x_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ ein universelles Netz in Y.

4.11 Lemma

Ist X kompakt und $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ein universelles Netz in X, so konvergiert $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ in X.

Beweis
Sei X kompakt und $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ein universelles Netz in X. Angenommen $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ konvergiert nicht in X. Dann gibt es zu jedem $x \in X$ genau eine offene Umgebung U_x von x, so dass $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ nicht schließlich in U_x ist. Da $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ universell ist, ist $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ schließlich in $X \setminus U_x$. Da $X = \bigcup_{x\in X} U_x$ und X kompakt ist, gibt es $x_1, \dots, x_k \in X$ mit $X = U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_k}$. Für jedes $i \in \{1, \dots, k\}$ sei $\lambda_i \in \Lambda$ mit $x_\mu \in X \setminus U_{x_i}$ für $\mu \geq \lambda_i$. Sei nun $\mu \in \Lambda$ mit $\mu \geq \lambda_i$ für $i = 1, \dots, k$. Es folgt

$$x_\mu \in \bigcap_{i=1}^{k} (X \setminus U_{x_i}) = X \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k} U_{x_i}\right) = X \setminus X = \emptyset \ \lightning$$ □

4.12 Proposition

Jedes Netz besitzt ein universelles Teilnetz.

Beweis
Sei $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ein Netz in X. Sei

$$\mathfrak{M} := \left\{ \mathfrak{B} \subseteq \mathcal{P}(X) \,\middle|\, \begin{array}{ll} (1) & B\in\mathfrak{B} \Rightarrow (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \text{ ist immer wieder in } B \\ (2) & B, B' \in \mathfrak{B} \Rightarrow B\cap B' \in \mathfrak{B} \end{array} \right\}$$

Dann ist $\{X\}\in\mathfrak{M}$, insbesondere $\mathfrak{M}\neq\emptyset$. Ist $\mathfrak{M}_0\subseteq\mathfrak{M}$ mit

$$\mathfrak{B}, \mathfrak{B}' \in \mathfrak{M}_0 \Rightarrow \mathfrak{B} \subseteq (B)' \text{ oder } \mathfrak{B}' \subseteq \mathfrak{B}$$

so gilt $\bigcup_{\mathfrak{B}\in\mathfrak{M}_o}\mathfrak{B}\in\mathfrak{M}$. Nach dem Zornschen Lemma enthält $\mathfrak{M}$ ein maximales Element $\mathfrak{B}$. Da $\mathfrak{B}$ maximal ist, ist $X\in\mathfrak{B}$. Sei

$$\Lambda' := \{(B,\lambda) \,|\, B\in\mathfrak{B}, \lambda\in\Lambda, x_\lambda\in B\}.$$

Durch $(B,\lambda)\le(B',\lambda') :\Leftrightarrow B\supseteq B', \lambda\le\lambda'$ wird Λ' gerichtet.
Behauptung: $(x_\lambda)_{(B,\lambda)\in\Lambda'}$ ist universell.

Hilfssatz
Sei $(x_\lambda)_{(B,\lambda)\in\Lambda'}$ immer wieder in S. Dann gilt $S\in\mathfrak{B}$.
Beweis: Wir zeigen: $\mathfrak{B}^+ := \mathfrak{B}\cup\{S\cap B\,|\,B\in\mathfrak{B}\}\in\mathfrak{M}$. Da $\mathfrak{B}$ maximal ist und $\mathfrak{B}\subseteq\mathfrak{B}^+$ folgt $\mathfrak{B}=\mathfrak{B}^+$ und $S\in\mathfrak{B}^+=\mathfrak{B}$. Offenbar erfüllt $\mathfrak{B}^+$ (2). Es bleibt (1) zu zeigen.
Da $\mathfrak{B}\in\mathfrak{M}$ bleibt zu zeigen: $\forall B\in\mathfrak{B}$ ist $(x_\lambda)_{(\lambda\in\Lambda}$ immer wieder in $B\cap S$. Sei $\lambda\in\Lambda$. Gesucht ist nun $\mu\ge\lambda$ mit $x_\mu\in B\cap S$. Da $B\in\mathfrak{B}\in\mathfrak{M}$ gibt es $\lambda'\in\Lambda$, $\lambda'\ge\lambda$ mit $x_{\lambda'}\in B$. Also $(B,\lambda')\in\Lambda'$. Da $(x_\lambda)_{(B,\lambda)\in\Lambda'}$ immer wieder in S ist, gibt es

$$\Lambda' \ni (A,\mu) \ge (B,\lambda')$$

mit $x_\mu\in S$. Da $(A,\mu)\in\Lambda'$ ist $x_\mu\in A\overset{(\star)}{\subseteq} B$. Sei $S\subseteq X$. Ist $(x_\lambda)_{(B,\lambda)\in\Lambda'}$ weder schließlich in S noch schließlich in $X\setminus S$, so ist $(x_\lambda)_{(B,\lambda)\in\Lambda'}$ immer wieder in S und immer wieder in $X\setminus S$. Mit dem Hilfssatz folgt $S, X\setminus S\in\mathfrak{B}\Rightarrow\emptyset=S\cap(X\setminus S)\in\mathfrak{B}$ ↯ □

4.13 Definition

Sei $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller beschränkten Abbildungen $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$.

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(n)|\,|\,n\in\mathbb{Z}\}$$

ist eine Norm auf $\ell^\infty(\mathbb{Z})$.

4.14 Satz (Mittelbarkeit von $\mathbb{Z}$)

Es gibt eine Abbildung $M:\ell^\infty(\mathbb{Z})\to\mathbb{R}$ mit

a) M ist $\mathbb{R}$-linear

b) M ist positiv: $f\ge 0\Rightarrow M(f)\ge 0$

c) $M(\mathbb{1})=1$ für $\mathbb{1}:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ mit $\mathbb{1}(n)=1$ für alle $n\in\mathbb{Z}$

d) M ist $\mathbb{Z}$-invariant: Für $f \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$ sei $Tf \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$ mit $(Tf)(n) = f(n+1)$, dann gilt $M(f) = M(Tf)$.

Beweis
Sei $\mathfrak{M} := \{M : \ell^\infty(\mathbb{Z}) \to \mathbb{R} \,|\, M \text{ erfüllt a), b), c)}\}$. Sei $M_n \in \mathfrak{M}$ mit $M_n(f) = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^n f(i)$. Dann gilt für $f \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$

$$\begin{aligned} M_n(f) = M_n(Tf) = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^n f(i) - Tf(i) &= \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^n \big(f(i) - f(i+1)\big) \\ &= \frac{1}{n+1}\big(f(0) - f(n+1)\big) \end{aligned}$$

Es folgt $|M_n(f) - M_n(Tf)| \leq \frac{2\cdot\|f\|_\infty}{n+1}$. Wir konstruieren nun eine kompakte Topologie auf $\mathfrak{M}$, dann können wir anschließend ein konvergentes Teilnetz der Folge $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ betrachten. Sei

$$X := \prod_{f\in\ell^\infty(\mathbb{Z})} \left[-\|f\|_\infty, \|f\|_\infty\right]$$

Aus a), b), c) folgt für $f \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$, $M \in \mathfrak{M}$ $M(f) \in \big[-\|f\|_\infty, \|f\|_\infty\big]$. Mittels

$$\mathfrak{M} \ni M \mapsto \big(M(f)\big)_{f\in\ell^\infty(\mathbb{Z})} \in X$$

wird $\mathfrak{M}$ zu einem abgeschlossenen Unterraum von X. $\mathfrak{M}$ ist kompakt bezüglich der Produkttopologie auf X, also bezüglich punktweiser Konvergenz.

Sei nun $\alpha : \Lambda \to \mathbb{N}$, sodass $M_{\alpha(\lambda)} \to M \in \mathfrak{M}$ (existiert da $\mathfrak{M}$ kompakt). Es folgt

$$\forall f \in \ell^\infty(\mathbb{Z}) : M_{\alpha(\lambda)}(f) \to M(f)$$

Wegen $M_{\alpha(\lambda)}(f) - M_{\alpha(\lambda)}(Tf) \xrightarrow{\lambda\to\infty} M(f) - M(Tf)$ und

$$\big|M_{\alpha(\lambda)}(f) - M_{\alpha(\lambda)}(Tf)\big| \leq \frac{2\cdot\|f\|_\infty}{\alpha(\lambda)+1} \to 0$$

folgt $M(f) = M(Tf)$ für alle $f \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$. □

5 Kompaktifizierungen

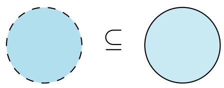
5.1 Definition

Sei X ein topologischer Raum. Ein kompakter Raum $\overline{X}$ heißt eine **Kompaktifizierung** von X, falls er X als offenen, dichten Unterraum enthält. (Oft heißt $\partial X := \overline{X} \setminus X$ der Rand der Kompaktifizierung)

5.2 Beispiele

(i) $(-1,1) \subseteq [-1,1]$

(ii) $\mathring{D}^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 < 1\} \subseteq D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 \leq 1\}$. Für $n = 2$:



$\partial D^n = S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1\}$

(iii) $f : \mathbb{R}^n \to \mathring{D}^n$, $f(x) := \frac{x}{1+\|x\|_2}$ ist ein Homöomorphismus. Daher können wir $\mathbb{R}^n$ zu

$$\overline{\mathbb{R}^n} := \mathbb{R}^n \dot{\cup} (S^{n-1} \times \{\infty\}) \cong D^n$$

kompaktifizieren.

(iv) Definiere auf $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ folgende Topologie

$$\mathcal{O} := \{U \,|\, U \subseteq \mathbb{R}^n \text{ ist offen}\} \cup \{U \cup \{\infty\} \,|\, U \subseteq \mathbb{R}^n \text{ offen und } \exists R > 0 : \mathbb{R}^n \setminus B_R(0) \subseteq U\}$$

Dann ist $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ eine weitere Kompaktifizierung von $\mathbb{R}^n$. Übung: $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\} \cong S^n$

5.3 Definition

Ein Hausdorffraum X heißt **lokalkompakt**, wenn für jedes $x \in X$ und jede offene Umgebung U von x eine kompakte Umgebung K von x existiert mit $K \subseteq U$.

5.4 Beispiel

(i) $\mathbb{R}^n$ ist lokalkompakt: Sei $x \in \mathbb{R}^n$ und $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von x. U offen $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq U$. Es folgt $\overline{B_{\varepsilon/2}}(x) \subseteq B_\varepsilon(x) \subseteq U$. Dann ist $\overline{B}_{\varepsilon/2}(x)$ eine kompakte Umgebung von x, die in U liegt.

(ii) Topologische Mannigfaltigkeiten sind lokalkompakt.

(iii) Offene Teilräume von lokalkompakten Räumen sind lokalkompakt.

5.5 Proposition

Sei K kompakt und $W \subseteq K$ offen. Dann ist W lokalkompakt. Insbesondere sind kompakte Räume auch lokalkompakt.

Beweis
Sei $x \in W$ und U eine offene Umgebung von x in W. K Hausdorff $\Rightarrow \forall y \in K \setminus U$ gibt es offene Umgebungen V_y von y und W_y von x mit $V_y \cap W_y = \emptyset$. Dann ist $\{V_y \,|\, y \in K \setminus U\}$ eine offene Überdeckung von $K \setminus U$. Da mit K auch $K \setminus U$ kompakt ist, gibt es $Y_0 \subseteq K \setminus U$ endlich mit

$$K \setminus U \subseteq \bigcup_{y \in Y_0} V_y$$

Nun ist $L := K \setminus \bigcup_{y \in Y_0} V_y$ kompakt. Da $\bigcap_{y \in Y_0} W_y \cap U$ offen ist und $\left(\bigcap_{y \in Y_0} W_y\right) \cap U \subseteq L$ ist L eine Umgebung von x. $\square$

5.6 Definition

Sei X lokalkompakt. Die **Einpunktkompaktifizierung** (EPK) von X ist $\mathrm{EPK}(X) := X \cup \{\infty\}$ mit der folgenden Topologie:

$$U \subseteq X \cup \{\infty\} \text{ offen } :\Leftrightarrow U \subseteq X \text{ ist offen oder } U = (X \setminus K) \cup \{\infty\} \text{ mit } K \subseteq X \text{ kompakt}$$

5.7 Proposition

$\mathrm{EPK}(X)$ ist kompakt. Ist X nicht kompakt, so ist $\mathrm{EPK}(X)$ eine Kompaktifizierung von X.

Beweis
Sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von $\mathrm{EPK}(X)$. Sei $U_0 \in \mathcal{U}$ mit $\infty \in U_0$. Dann existiert $K \subseteq X$ kompakt mit $U_0 = (X \setminus K) \cup \{\infty\}$. Da K kompakt ist, gibt es $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ mit $K \subseteq U_1 \cup \ldots \cup U_n$. Dann ist $U_0, U_1, \ldots, U_n$ eine endliche Teilüberdeckung von $\mathrm{EPK}(X)$.

Zu zeigen: $\mathrm{EPK}(X)$ ist Hausdorff. Seien $x, y \in \mathrm{EPK}(X), x \neq y$. Gilt $x \neq \infty \neq y$ so gibt es $U, V \subseteq X$ mit $x \in U, y \in V$ und $U \cap V = \emptyset$, da X hausdorffsch ist. Nach Definition sind dann U, V auch offen in $\mathrm{EPK}(X)$. Andernfalls sei o.B.d.A. $x = \infty$. Da X lokalkompakt ist, gibt es eine Umgebung K von y mit $K \subseteq X$ kompakt. Dann sind $U := \mathring{K}$ und $V := (X \setminus K) \cup \{\infty\}$ disjunkte offene Umgebungen von x und y.

Insgesamt gezeigt: $\mathrm{EPK}(X)$ ist kompakt. Sei X nicht kompakt. Ist U eine Umgebung von $\infty \in \mathrm{EPK}(X)$, so gibt es $K \subseteq X$ kompakt mit $U = (X \setminus K) \cup \{\infty\}$. Dann ist $U \cap X = X \setminus K$. Da X nicht kompakt ist, ist $X \neq K$, also $X \setminus K \neq \emptyset$. Daher hat jede Umgebung von $\infty \in \mathrm{EPK}(X)$ einen nicht-trivialen Schnitt mit X. Also ist $X \subseteq \mathrm{EPK}(X)$ dicht. $\square$

5.8 Frage

Sei $f : X \to Y$ stetig, X, Y lokalkompakt. Gibt es dann eine stetige Fortsetzung $\overline{f} : \mathrm{EPK}(X) \to \mathrm{EPK}(Y)$ mit $\overline{f}(\infty) = \infty$?

Beispiel

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) \equiv 0$. Dann ist $\overline{f} : \mathrm{EPK}(\mathbb{R}) \to \mathrm{EPK}(\mathbb{R})$ mit

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x) = 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R} \\ \infty, & \text{falls } x = \infty \end{cases}$$

sicher nicht stetig. Natürlich ist aber $\tilde{f} : \mathrm{EPK}(\mathbb{R}) \to \mathrm{EPK}(\mathbb{R})$ mit $\tilde{f}(x) = 0 \, \forall x \in \mathrm{EPK}(\mathbb{R})$ stetig.

(ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \geq 1 \\ x, & \text{falls } x \in [0,1] \\ 0, & \text{falls } x \leq 0 \end{cases}$$

Dann gibt es keine stetige Fortsetzung $\overline{f} : \mathrm{EPK}(\mathbb{R}) \to \mathrm{EPK}(\mathbb{R})$, denn die Folge $x_n = n$ konvergiert in $\mathrm{EPK}(\mathbb{R})$ gegen ∞. Da $f(x_n) = 1 \; \forall n$ müsste $\overline{f}(\infty) = 1$ sein. Die Folge $y_n = -n$ konvergiert in $\mathrm{EPK}(\mathbb{R})$ auch gegen ∞. Da $f(y_n) = 0 \; \forall n$ müsste $\overline{f}(\infty) = 0$ sein $\lightning$.

5.9 Definition

Seien X und Y lokalkompakt. Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ heißt **eigentlich**, wenn für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq Y$ auch $f^{-1}(K) \subseteq X$ kompakt ist.

5.10 Satz

Seien X, Y lokalkompakt und $f : X \to Y$ stetig. Dann sind äquivalent:

(1) f ist eigentlich

(2) $\overline{f} : \mathrm{EPK}(X) \to \mathrm{EPK}(Y)$ mit

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \in X \\ \infty, & \text{falls } x = \infty \end{cases}$$

ist stetig

Beweis

"(1)⇒(2)": Sei $U \subseteq \mathrm{EPK}(Y)$ offen. Ist $\infty \notin U$, so ist $\bar{f}^{-1}(U) = f^{-1}(U)$ offen, da f stetig ist. Ist $\infty \in U$, so gibt es $K \subseteq Y$ mit $U = (X \setminus K) \cup \{\infty\}$. Da f eigentlich ist, ist auch $L := f^{-1}(K) \subseteq X$ kompakt und $\bar{f}^{-1}(U) = (X \setminus L) \cup \{\infty\}$ ist offen in $\mathrm{EPK}(X)$.

"(2)⇒(1)": Sei $K \subseteq Y$ kompakt. Dann ist $U = (Y \setminus K) \cup \{\infty\} \subseteq Y$ offen. Da $\bar{f}$ stetig ist, ist auch $\bar{f}^{-1}(U) = \big(X \setminus f^{-1}(K)\big) \cup \{\infty\}$ offen. Damit ist $f^{-1}(K) \subseteq X$ kompakt. □

6 Der Approximationssatz von Stone-Weierstraß

6.1 Definition

Sei X ein lokalkompakter Raum. Eine stetige Funktion $f: X \to \mathbb{R}$ **verschwindet** im Unendlichen, falls für jedes $\varepsilon > 0$

$$K_\varepsilon := \{x \in X \mid |f(x)| \geq \varepsilon\}$$

kompakt ist. Die **Algebra** aller solchen Funktionen bezeichnen wir mit $C_0(X)$ und für $f \in C_0(X)$ setzen wir

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)| = \max_{x \in X} |f(x)|$$

$\|.\|_\infty$ ist eine Norm auf $C_0(X)$.

Bemerkung

$f: X \to \mathbb{R}$ liegt in $C_0(X)$ $\iff$ $\overline{f}: \mathrm{EPK}(X) \to \mathbb{R}$ mit $\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \in X \\ 0, & \text{falls } x = \infty \end{cases}$ ist stetig.

6.2 Definition

Sei $\mathcal{B} \subseteq C_0(X)$. Wir sagen, dass $\mathcal{B}$ die Punkte von X **streng trennt**, falls es zu $x, y \in X, x \neq y$ ein $f \in \mathcal{B}$ gibt mit $0 \neq f(x) \neq f(y) \neq 0$.

Bemerkung
Sei $\mathcal{A} \subseteq C_0(X)$ eine Unteralgebra. Gilt

a) $\forall x, y \in X : \exists f \in \mathcal{A} : f(x) \neq f(y)$

b) $\forall x \in X : \exists g \in \mathcal{A} : g(x) \neq 0$

so trennt $\mathcal{A}$ die Punkte von X streng.

Beispiel
Sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Sei $\mathcal{A} := \{x \mapsto p(x) \mid p \in R[t]\} \subseteq C_0([a, b])$. Dann trennt $\mathcal{A}$ die Punkte von $[a, b]$ streng.

6.3 Satz (Stone-Weierstraß)

Sei X ein lokalkompakter Raum und sei $\mathcal{A} \subseteq C_0(X)$ eine Unteralgebra, die die Punkte von X streng trennt. Dann ist $\mathcal{A} \subseteq C_0(X)$ dicht bezüglich $\|.\|_\infty$.

Beweis (mit Lemma 1, 2, 3)
Sei $h \in C_0(X)$ beliebig. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Zu zeigen: $\exists f \in \bar{\mathcal{A}} : \|f - h\|_\infty < \varepsilon$

Schritt 1: Wir konstruieren für $y \in X$ $f_y \in \bar{\mathcal{A}}$ mit

a) $f_y(y) = h(y)$

b) $f_y(z) \geq h(z) - \varepsilon$ für alle $z \in X$

Zu $x \in X$ gibt es nach Lemma 3 (6.9) $g_x \in \mathcal{A}$ mit

$$g_x(y) = h(y) \quad \text{und} \quad g_x(x) = h(x).$$

Sei $U_x := \{z \in X \mid g_x(z) > h(z) - \varepsilon\}$. Da g_x und h stetig sind, ist U_x offen. Da g_x und h in ∞ verschwinden, ist $X \setminus U_x$ kompakt. Wegen $g_x(x) = h(x)$ ist $x \in U_x$. Zu festem $x_1 \in X$ gibt es dann $x_2, \ldots, x_k$ mit $X \setminus U_{x_1} \subseteq \bigcup_{i=2}^k U_{x_i}$. Dann gilt auch

$$X \subseteq \bigcup_{i=2}^{k} U_{x_i}$$

$f_y := \max\{g_{x_1}, \ldots, g_{x_k}\}$ ist die gesuchte Funktion. Wegen Lemma 2 (6.7) bzw. der Bemerkung 6.8 gilt $f_y \in \bar{\mathcal{A}}$.

Schritt 2: Konstruktion von f. Zu $y \in X$ sei $V_y := \{z \in X \mid f_y(z) < h(z) + \varepsilon\}$. Wieder ist V_y offen, $X \setminus V_y$ kompakt und $y \in V_y$. Also gibt es wieder $y_1, \ldots, y_l$ mit $X = \bigcup_{i=1}^l V_{y_i}$. Für $f := \min\{f_{y_1}, \ldots, f_{y_l}\}$ gilt dann

$$h(z) - f(z) = \max_i h(z) - f_{y_i}(z) < \varepsilon$$

da $f_{y_i}(z) \geq h(z) - \varepsilon \overset{\text{a)}}{\Rightarrow} h(z) - f_{y_i}(z) \leq \varepsilon$ für jedes i. Weiter gilt

$$f(z) - h(z) = \min_i f_{y_i}(z) - h(z) < \varepsilon$$

nach Definition der V_{y_i}. Also $\|f - h\|_\infty < \varepsilon$. □

6.4 Satz von Dini

Sei $(f_n : [0,1] \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ eine punktweise monoton wachsende Folge stetiger Funktionen, die punktweise gegen die stetige Funktion f konvergiert. Dann $f_n \to f$ gleichmäßig, d.h. $\|f_n - f\|_\infty \to 0$.

Beweis
Sei $\varepsilon > 0$. Zu jedem $t \in [0,1]$ gibt es n_t mit

$$\forall n \geq n_t : f(t) \geq f_n(t) \geq f_{n_t}(t) \geq f(t) - \varepsilon.$$

Da f und f_{n_t} stetig sind, ist $U_t := \{s \in [0,1] \mid f(s) - f_{n_t}(s) < \varepsilon\}$ offen. Da $[0,1]$ kompakt ist, gibt es $t_0, \ldots, t_k \in [0,1]$ mit

$$[0,1] = U_{t_0} \cup \ldots \cup U_{t_k}$$

Für alle $n \geq \max\{n_{t_0}, \ldots, n_{t_k}\}$ folgt $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$. □

6.5 Lemma 1

Sei $g(t) = \sqrt{t}$ für $t \in [0,1]$. Es gibt eine Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von reellen Polynomen so dass $p_n \to g$ gleichmäßig auf $[0,1]$ und $p_n(0) = 0$.

Beweis
Sei $p_0 \equiv 0$ und für $n > 0$

$$p_{n+1}(t) := p_n(t) - \frac{1}{2} \cdot \left(p_n(t)^2 - t\right)$$

Dann $p_n(0) = 0$. Per Induktion nach n zeigen wir: $0 \leq p_n(t) \leq \sqrt{t}$ für alle $t \in [0,1]$

$n = 0$ ✓

$n \mapsto n+1$

$$\begin{aligned} p_{n+1}(t) - \sqrt{t} = p_n(t) - \sqrt{t} - \frac{1}{2}\Big(p_n(t)^2 - t\Big) &= \Big(p_n(t) - \sqrt{t}\Big) - \frac{1}{2}\Big(p_n(t) - \sqrt{t}\Big)\Big(p_n(t) + \sqrt{t}\Big) \\ &= \underbrace{\Big(p_n(t) - \sqrt{t}\Big)}_{\leq 0} \underbrace{\Big(1 - \frac{1}{2}\underbrace{(p_n(t) + \sqrt{t})}_{\text{IV.: } \leq 2\sqrt{t}}\Big)}_{\geq 0} \end{aligned}$$

Also $p_{n+1}(t) - \sqrt{t} \leq 0$. Es folgt, dass $p_n(t)$ monoton wachsend ist für jedes t. Wegen $p_n(t) \leq \sqrt{t}$ existiert $\lim_{n\to\infty} p_n(t)$ für $t \in [0,1]$. Es folgt

$$0 = \lim_{n\to\infty} p_{n+1}(t) - \lim_{n\to\infty} p_n(t) = \lim_{n\to\infty} \big(p_{n+1}(t) - p_n(t)\big) = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{2}\big(p_n(t)^2 - t\big) = -\frac{1}{2}\left(\left(\lim_{n\to\infty} p_n(t)\right)^2 - t\right)$$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} p_n(t) = \sqrt{t}$. Mit Dini (6.4) folgt $p_n \to g$ gleichmäßig. □

6.6 Bemerkung

Sei $\mathcal{A} \subseteq C_0(X)$ eine Algebra. Ist $p \in \mathbb{R}[t]$ ein Polynom mit $p(0) = 0$ und $f \in \mathcal{A}$, so liegt auch $p \circ f \in \mathcal{A}$: $p = \sum_{i=1}^n a_i t^i$. Denn

$$p\big(f(t)\big) = \sum_{i=1}^n a_i f(t)^i = \left(\sum_{i=1}^n a_i f^i\right)(t) \in \mathcal{A}.$$

6.7 Lemma 2

Sei X lokalkompakt, $\mathcal{A} \subseteq C_0(X)$ eine Unteralgebra. Dann gilt: $f \in A \Rightarrow |f| \in \bar{\mathcal{A}}$
($\bar{\mathcal{A}} :=$ Abschluss von $\mathcal{A}$ bezüglich $\|.\|_\infty$)

Beweis
Sei $f \in \mathcal{A}$. O.B.d.A. sei $f(X) \subseteq [-1,1]$. Dann $f(x)^2 \in [0,1]$ für alle $x \in X$. Seien die p_n die Polynome aus Lemma 1 (6.5). Dann

$$\left|p_n\big(f(x)^2\big) - \sqrt{f(x)^2}\right| = \big|p_n\big(f(x)^2\big) - |f(x)|\big| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

gleichmäßig in $x \in X$. Es folgt $\big\|p_n(f^2) - |f|\big\|_\infty \to 0$. Wegen $f \in \mathcal{A}$ gilt $f^2 \in \mathcal{A}$ und nach 6.6 $p_n(f^2) \in \mathcal{A}$. Also $|f| \in \bar{\mathcal{A}}$. □

6.8 Bemerkung

(i) Für $f, g \in \mathcal{A}$ liegen

$$\max(f,g) = \frac{1}{2}\big(f + g + |f-g|\big) \quad , \quad \min(f,g) = \frac{1}{2}\big(f + g - |f-g|\big) \in \bar{\mathcal{A}}$$

(ii) Wegen $\bar{\mathcal{A}} = \bar{\bar{\mathcal{A}}}$ gilt auch $f, g \in \bar{\mathcal{A}} \Rightarrow \min(f,g), \max(f,g) \in \bar{\mathcal{A}}$.

6.9 Lemma 3

Sei X lokalkompakt, $\mathcal{A} \subseteq C_0(X)$ eine Unteralgebra, die die Punkte von X streng trennt. Zu $x, y \in X$, $x \neq y$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gibt es dann $f \in \mathcal{A}$ mit $f(x) = \alpha$, $f(y) = \beta$.

Beweis
Es gibt $g \in \mathcal{A}$ mit $0 \neq g(x) \neq g(y) \neq 0$. Ansatz: Für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ betrachte $f := \lambda g + \mu g^2$.

$$\begin{matrix} f(x) = \alpha \\ f(y) = \beta \end{matrix} \iff \begin{matrix} g(x)\lambda + g(x)^2\mu = \alpha \\ g(y)\lambda + g(y)^2\mu = \beta \end{matrix}$$

Da

$$\det\begin{pmatrix} g(x) & g(x)^2 \\ g(y) & g(y)^2 \end{pmatrix} = g(x)g(y)^2 - g(y)g(x)^2 = g(x)g(y)(g(y) - g(x)) \neq 0$$

gibt es $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, sodass das Gleichungssystem eine Lösung hat. □

7 Metrisierbarkeit

7.1 Definition

Ein topologischer Raum X heißt **metrisierbar**, wenn es eine Metrik auf X gibt, so dass die zugehörige Topologie die Topologie von X ist.

Bemerkung
Ist X metrisierbar, so gibt es für jedes $x \in X$ eine abzählbare Umgebungsbasis $\mathcal{U}_x$ bei x, also eine abzählbare Menge von offenen Umgebungen von x, sodass jede Umgebung von x eine Menge aus $\mathcal{U}_x$ enthält.

Beispiel

$(X, \mathcal{O}_{\text{dis}})$ ist metrisierbar: $d_{\text{dis}}(x,y) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \neq y \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

7.2 Definition

Ein topologischer Hausdorffraum X heißt **normal**, wenn er die folgende Trennungseigenschaft hat: Sind $A, B \subseteq X$ abgeschlossen mit $A \cap B = \emptyset$, so gibt es $U, V \subseteq X$ offen mit $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ mit $U \cap V = \emptyset$.

Bemerkung
Metrisierbare Räume sind normal. (Übung)

7.3 Satz (Urysohn)

Sei X ein normaler Raum, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt (1.14). Dann ist X metrisierbar.

Beweis (mit Urysohns Lemma, 7.4)
Sei $\mathcal{U}$ eine abzählbare Basis der Topologie von X. Da X normal ist, gibt es zu jedem Paar $U, V \in \mathcal{U}$ mit $\overline{U} \subseteq V$ (also $\overline{U} \cap X \setminus V = \emptyset$) eine stetige Funktion $f_{U,V} : X \to [0,1]$ mit $f_{U,V}(x) = 0$ für $x \in \overline{U}$ und $f_{U,V}(y) = 1$ für $y \notin V$ (7.4). Da $\mathcal{U}$ abzählbar ist, ist das abzählbare Produkt

$$Z := \prod_{\substack{U,V \in \mathcal{U} \\ \overline{U} \subseteq V}} [0,1]$$

metrisierbar (Übung, Blatt 4). Wir definieren $F : X \to Z$ durch

$$F(x) := \Big(f_{U,V}(x)\Big)_{\substack{U,V \in \mathcal{U} \\ \overline{U} \subseteq V}}$$

Da die $f_{U,V}$ stetig sind, ist F bezüglich der Produkttopologie auf Z auch stetig. Es bleibt zu zeigen: $F : X \to F(X) \subseteq Z$ ist ein Homöomorphismus.

Sind $x, y \in X$ mit $x \neq y$, so gibt es $U, V \in \mathcal{U}$ mit $\overline{U} \subseteq V$, $x \in U$, $y \notin V$. Daher gilt $f_{U,V}(x) = 0 \neq 1 = f_{U,V}(y)$. Insbesondere ist F injektiv; durch Einschränkung auf das Bild also bijektiv. Es genügt nun zu zeigen, dass F offene Mengen von X auf offene Mengen in $F(X)$ abbildet. Sei $W \subseteq X$ offen, sei $x \in W$. Wir müssen eine offene Menge $O \subseteq Z$ finden mit $F(x) \in O$ und $F^{-1}(O) \subseteq W$.

<u>Behauptung:</u> $\exists U_0 \in \mathcal{U}$ mit $x \in U_0, \overline{U_0} \subseteq W$.

Sei $O := \prod_{\overline{U} \subseteq V} I_{U,V}$ mit

$$I_{U,V} = \begin{cases} [0,1), & \text{falls } U = U_0, V = W \\ [0,1], & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist $F^{-1}(O) = f_{U_0,W}^{-1}\big([0,1)\big) \subseteq W$ und $F(x) \in O$, da $f_{U_0,W}(x) = 0$.

Beweis der Behauptung
Da X Hausdorff ist, ist $\{x\}$ abgeschlossen. Da auch $X \setminus W$ abgeschlossen ist, gibt es offene mengen U_1 und V_1 mit $U_1 \cap V_1 = \emptyset$, $x \in U_1$ und $X \setminus W \subseteq V_1$. Insbesondere ist $\overline{U_1} \subseteq X \setminus V_1 \subseteq W$. Da $\mathcal{U}$ eine Basis ist, gibt es $U_0 \in \mathcal{U}$ mit $x \in U_0$ und $U_0 \subseteq U_1$. □

7.4 Urysohns Lemma

Sei X normal und $A, B \subseteq X$ abgeschlossen mit $A \cap B = \emptyset$. Dann gibt es eine stetige Funktion $f : X \to [0,1]$ mit $f(a) = 0$ für alle $a \in A$ und $f(b) = 1$ für alle $b \in B$.

Beweis
Sei $U_1 := X \setminus B$. Da X normal ist, gibt es $U_0 \subseteq X$ offen mit $A \subseteq U_0$ und $U_0 \cap B = \emptyset$, also $\overline{U_0} \subseteq U_1$.
($A \subseteq U_0$ und $V_0 \supseteq B$ mit $U_0 \cap V_0 = \emptyset \Rightarrow \overline{U_0} \cap B = \emptyset$ also $\overline{U_0} \subseteq U_1$)
Ebenso finden wir

- $U_{1/2} \subseteq X$ offen mit $\overline{U_0} \subseteq U_{1/2}$ und $\overline{U_{1/2}} \subseteq U_1$,
- $U_{1/4}, U_{3/4} \subseteq X$ offen mit $\overline{U_0} \subseteq U_{1/4}, \overline{U_{1/4}} \subseteq U_{1/2}$ und $\overline{U_{1/2}} \subseteq U_{3/4}$, $\overline{U_{3/4}} \subseteq U_1$, …

Induktiv finden wir für jedes $r = \frac{m}{2^n}$ mit $0 \leq m \leq 2^n$ eine offene Menge $U_r \subseteq X$ so dass gilt: $\overline{U_r} \subseteq U_s$ für $r < s$ mit $A \subseteq U_0$ und $B = X \setminus U_1$. Sei nun $f : X \to [0,1]$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in B \\ \inf\{r \mid x \in U_r\}, & \text{falls } x \notin B \end{cases}$$

Für $\alpha \in [0,1]$ ist $f^{-1}\big([0,\alpha)\big) = \bigcup_{r<\alpha} U_r$ offen und

$$f^{-1}\big((\alpha,1]\big) = \bigcup_{r>\alpha} X \setminus U_r = \bigcup_{r>\alpha} X \setminus \overline{U_r}$$

offen. Damit ergibt sich leicht die Stetigkeit von f. □

8 Zusammenhängende topologische Räume

8.1 Definition

Sei X ein topologischer Raum.

(1) X heißt **zusammenhängend**, falls er nicht als die disjunkte Vereinigung von zwei nicht leeren offenen Mengen geschrieben werden kann.

(2) X heißt **wegzusammenhängend**, falls es zu allen $x, y \in X$ eine stetige Abbildung $\omega : [0,1] \to X$ gibt mit $\omega(0) = x$ und $\omega(1) = y$. ω heißt dann ein **Weg** von x nach y.

(3) X heißt **lokal zusammenhängend**, falls es für jedes $x \in X$ und jede offene Umgebung U von x eine zusammenhängende Umgebung V von x gibt mit $V \subseteq U$.

(4) X heißt **lokal wegzusammenhängend**, falls es für jedes $x \in X$ und jede offene Umgebung U von x eine wegzusammenhängende Umgebung V von x gibt mit $V \subseteq U$.

8.2 Bemerkung

(1) $\mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ ist nicht zusammenhängend und auch nicht wegzusammenhängend (ZWS!).

(2) $[0,1]$ ist zusammenhängend: Angenommen es wäre $[0,1] = U \cup V$ mit U, V offen, $U \cap V = \emptyset$. Dann sind $U = [0,1] \setminus V$ und $V = [0,1] \setminus U$ auch abgeschlossen. O.B.d.A. sei $0 \in U$. Dann liegt $\inf V$ sowohl in $\overline{V}$ als auch in $\overline{U}$. Also $U \cap V = \overline{U} \cap \overline{V} \neq \emptyset$ ↯.

Natürlich ist $[0,1]$ auch wegzusammenhängend: Zu $x, y \in [0,1]$ ist $\omega : [0,1] \to [0,1]$ mit $\omega(t) = (1-t) \cdot x + t \cdot y$ ein stetiger Weg von x nach y.

(3) Ist $f : X \to Y$ stetig und surjektiv und$X$ zusammenhängend, so ist auch Y zusammenhängend: Ist $Y = U \dot\cup V$, so ist auch $X = f^{-1}(U) \dot\cup f^{-1}(V)$ und es gilt $U \neq \emptyset \iff f^{-1}(U) \neq \emptyset$ und $V \neq \emptyset \iff f^{-1}(V) \neq \emptyset$.

(4) Ist X wegzusammenhängend, so ist X auch zusammenhängend: Sei $X = U \cup V$ mit U, V offen und $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$. Sei $x \in U$ und $y \in V$. Da X wegzusammenhängend ist, gibt es einen Weg $\omega : [0,1] \to X$ von x nach y. Dann ist $[0,1] = \omega^{-1}(U) \cup \omega^{-1}(V)$. Es ist $0 \in \omega^{-1}(U)$ und $1 \in \omega^{-1}(V)$. Also $\omega^{-1}(U) \neq \emptyset \neq \omega^{-1}(V)$. Da $[0,1]$ nach (1) zusammenhängend ist, ist $\omega^{-1}(U) \cap \omega^{-1}(V) \neq \emptyset$. Damit ist auch $U \cap V \neq \emptyset$.

(5) Ist $f : X \to Y$ ein Homöomorphismus, so gelten:

$$\begin{aligned} X \text{ wegzusammenhängend} &\iff Y \text{ wegzusammenhängend} \\ X \text{ zusammenhängend} &\iff Y \text{ zusammenhängend} \end{aligned}$$

8.3 Beispiel

(i) Der sogenannte **Polnische Kreis** PK gegeben durch

$$PK = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{lll} & (x \in [-1,1] & \wedge \quad y = 1) \\ \vee & (x \in \{-1,1\} & \wedge \quad y \in [0,1]) \\ \vee & (x \in [-1,0] & \wedge \quad y = 0) \\ \vee & (x = 0 & \wedge \quad y \in [-1/2, 1/2]) \\ \vee & (x \in (0,1] & \wedge \quad y = 1/2 \cdot \sin(\pi/x)) \end{array} \right\}$$

ist wegzusammenhängend, aber nicht lokal wegzusammenhängend.

(ii)

$$\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{ccc} & x = 0 & \wedge \quad y \in [-1/2, 1/2] \\ \vee & x \in (0,1] & \wedge \quad y = 1/2 \cdot \sin(\pi/x) \end{array} \right\}$$

ist zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend.

8.4 Satz (Topologische Invarianz der Dimension)

Es gilt: $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m \iff n = m$

Beweis für $n = 1$
Angenommen es gibt einen Homöomorphismus $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ mit $m \geq 2$. Durch Einschränkung von f erhalten wir dann auch einen Homöomorphismus $\mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^m \setminus \{f(0)\}$. Es ist aber $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ nicht wegzusammenhängend und für $m \geq 2$, $x \in \mathbb{R}^m$ ist $\mathbb{R}^m \setminus \{x\}$ wegzusammenhängend ↯. □

Bemerkung
Eine Variante dieses Arguments kann benutzt werden, um zu zeigen, dass $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m$ genau dann gilt, wenn $n = m$. Dafür benötigt man aber höher dimensionale Varianten des Begriffs wegzusammenhängend.

9 Die Fundamentalgruppe

9.1 Definition

Ein topologischer Raum X heißt **einfach zusammenhängend**, wenn jede stetige Abbildung $f : S^1 \to X$ eine stetige Fortsetzung $F : D^2 \to X$ besitzt.

Bemerkung
Ein topologischer Raum X ist genau dann wegzusammenhängend, wenn jede stetige Abbildung $f : S^0 \to X$ ein stetige Fortsetzung $F : D^1 \to X$ besitzt.

9.2 Bemerkung

(i) $\mathbb{R}^n$ ist einfach zusammenhängend: Sei $f : S^1 \to \mathbb{R}^n$ stetig. Definiere $F : D^2 \to \mathbb{R}^n$ durch:

$$F(t \cdot v) := t \cdot f(v) \qquad \text{für } t \in [0,1], v \in S^1$$

(ii) Ist $X \cong Y$ dann: X einfach zusammenhängend $\Leftrightarrow$ Y einfach zusammenhängend.

(iii) Später: $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist nicht einfach zusammenhängend.

9.3 Definition

Seien $\omega_0, \omega_1 : [0,1] \to X$ Wege in X. Eine Homotopie mit festen Endpunkten (oder relativ $\{0,1\}$) zwischen ω_0 und ω_1 ist eine stetige Abbildung $H : [0,1] \times [0,1] \to X$, so dass gilt:

(i) $H(s,0) = \omega_0(s) \ \ \forall s \in [0,1]$

(ii) $H(s,1) = \omega_1(s) \ \ \forall s \in [0,1]$

(iii) $H(0,t) = \omega_0(0) = \omega_1(0) \ \ \forall t \in [0,1]$

(iv) $H(1,t) = \omega_0(1) = \omega_1(1) \ \ \forall t \in [0,1]$

Durch

$$\omega_0 \sim \omega_1 :\Leftrightarrow \exists \text{ Homotopie relativ } \{0,1\} \text{ zwischen } \omega_0 \text{ und } \omega_1$$

wird eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Wege in X erklärt. Die Äquivalenzklassen heißen **Homotopieklassen**, wir schreiben $[\omega]$ für die Homotopieklasse von ω.

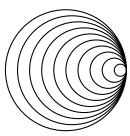
9.4 Definition

Ein Weg $\omega : [0,1] \to X$ heißt eine **Schleife** in X, falls $\omega(0) = \omega(1)$.

9.5 Lemma

X ist genau dann einfach zusammenhängend, wenn jede Schleife in X homotop relativ $\{0,1\}$ zu einer konstanten Schleife ist.

Beweis
Beweis per Zeichnung:



9.6 Notation

Für $x \in X$ bezeichne $c_x : [0,1] \to X$ die konstante Schleife bei x; $c_x(t) = x \ \ \forall t \in [0,1]$.

9.7 Definition

Seien ω und ω' Wege in X mit $\omega(1) = \omega'(0)$. Dann ist der **Kompositionsweg** $\omega * \omega' : [0,1] \to X$ definiert durch

$$\omega * \omega'(t) = \begin{cases} \omega(2t), & \text{falls } t \in [0, 1/2] \\ \omega'(2t-1), & \text{falls } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

9.8 Lemma

a) Seien $\omega, \omega', \omega''$ Wege in X mit $\omega(1) = \omega'(0)$ und $\omega'(1) = \omega''(0)$. Dann gilt

$$\big[(\omega * \omega') * \omega''\big] = \big[\omega * (\omega' * \omega'')\big]$$

b) Seien $\omega_0, \omega_0', \omega_1, \omega_1'$ Wege in X mit $\omega_0(1) = \omega_0'(0)$, $\omega_1(1) = \omega_1'(0)$ und $[\omega_0] = [\omega_1]$ und $[\omega_0'] = [\omega_1']$. Dann gilt

$$[\omega_0 * \omega_0'] = [\omega_1 * \omega_1']$$

c) Sei ω ein Weg in X. Sei $\overline{\omega} : [0,1] \to X$ der umgekehrte Weg, also $\overline{\omega}(t) := \omega(1-t)$. Dann gilt $[\omega * \overline{\omega}] = [c_{\omega(0)}]$, $[\overline{\omega} * \omega] = [c_{\omega(1)}]$.

d) Sei ω ein Weg in X. Dann gilt

$$[\omega * c_{\omega(1)}] = [\omega]$$

Beweis (nur a)

(i) Sei $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ mit . Dann gilt

Zeichnung einfügen

$$\Big(\omega * \big(\omega' * \omega''\big)\Big)(s) = \Big(\big(\omega * \omega'\big) * \omega''\Big)(\varphi(s))$$

Die gesuchte Homotopie mit festen Endpunkten wird durch

$$H(s,t) := \Big(\big(\omega * \omega'\big) * \omega''\Big)\big((1-t)s + t\varphi(s)\big)$$

definiert. □

9.9 Korollar

Sei X ein topologischer Raum und $x_0 \in X$ fest. Dann wird

$$\pi_1(X, x_0) := \{[\omega] \,|\, \omega \text{ ist eine Schleife in } X \text{ mit } \omega(0) = x_0\}$$

durch die Komposition von Wegen zu einer Gruppe mit neutralem Element $e = [c_{x_0}]$.

9.10 Definition

$\pi_1(X, x_0)$ heißt die **Fundamentalgruppe** von X bezüglich des **Basispunktes** x_0.

Bemerkung

X ist genau dann einfach zusammenhängend, wenn $\pi_1(X, x_0)$ für alle $x_0 \in X$ die triviale Gruppe ist.

9.11 Bemerkung

Sei η ein Weg in X von x_1 nach x_0. Dann definiert

$$\pi_1(X,x_0) \ni [\omega] \xmapsto{\operatorname{conj}_\eta} [\eta * \omega * \overline{\eta}] \in \pi_1(X,x_1)$$

einen Isomorphismus zwischen $\pi_1(X,x_0)$ und $\pi_1(X,x_1)$. Wir zeigen nur: conj_η ist ein Gruppenhomomorphismus.

$$\begin{aligned}
\operatorname{conj}_\eta([\omega]*[\omega']) &= \operatorname{conj}_\eta\big([\omega*\omega']\big) = \Big[\big(\eta*(\omega*\omega')\big)*\overline{\eta}\Big] \\
\operatorname{conj}_\eta([\omega])\cdot\operatorname{conj}_\eta([\omega']) &= \big[(\eta*\omega)*\overline{\eta}\big]\cdot\big[(\eta*\omega')*\overline{\eta}\big] = \Big[\big((\eta*\omega)*\overline{\eta}\big)*\big((\eta*\omega')*\overline{\eta}\big)\Big] \\
&\overset{\text{a)}}{=} \left[\Big(\eta*\big(\omega*(\overline{\eta}*\eta)\big)*\omega'\Big)*\overline{\eta}\right] \overset{\text{c)}}{=} \left[\Big(\eta*\big((\omega*c_{\omega(1)})*\omega'\big)\Big)*\overline{\eta}\right] \\
&\overset{\text{d)}}{=} \Big[\big(\eta*(\omega*\omega')\big)*\overline{\eta}\Big]
\end{aligned}$$

Insbesondere hängt der Isomorphismus von $\pi_1(X,x_0)$ für wegzusammenhängende Räume nicht von der Wahl des Basispunktes ab.

10 Die Windungszahl

10.1 Frage

$$\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, x_0) = ? \qquad \pi_1(S^1, x_0) = ?$$

10.2 Proposition

Sei $p : \mathbb{R} \to S^1$ definiert durch $p(t) = e^{2\pi i t}$. Sei $\omega : [0,1] \to S^1$ stetig und $t_0 \in \mathbb{R}$ mit $p(t_0) = \omega(0)$. Dann gibt es eine eindeutige stetige Abbildung. $\hat{\omega} : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $\hat{\omega}(0) = t_0$ und $p \circ \hat{\omega} = \omega$

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r, "t_0"] \arrow[d] & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\
{[0,1]} \arrow[r, "\omega"] \arrow[ur, dashed, "\hat{\omega}"] & S^1
\end{tikzcd}$$

Ist $\eta : [0,1] \to S^1$ mit $[\eta] = [\omega]$ und $\hat{\eta} : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $\hat{\eta}(0) = t_0$, $p \circ \hat{\eta} = \eta$ so gilt $\hat{\eta}(1) = \hat{\omega}(1)$.

Beweis
Homotopiehebungssatz (später) □

10.3 Definition

Sei $\omega : [0,1] \to S^1$ eine Schleife in S^1 mit $\omega(0) = \omega(1) = 1$. Sei $\hat{\omega} : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $p \circ \hat{\omega} = \omega$ und $\hat{\omega}(0) = 0$. Dann heißt $\hat{\omega}(1) \in \mathbb{Z} = p^{-1}(1)$ die **Windungszahl** von ω.

10.4 Satz

Die Windungszahl definiert einen Isomorphismus $d : \pi_1(S^1, 1) \to \mathbb{Z}$, $[\omega] \mapsto \hat{\omega}(1)$.

Beweis
Nach Proposition 10.2 ist d eine wohldefinierte Abbildung.

d **ist surjektiv:** Sei für $n \in \mathbb{Z}$ $\hat{\omega}_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $\hat{\omega}_n(t) = t \cdot n$. Dann ist

$$d([p \circ \hat{\omega}_n]) = \hat{\omega}_n(1) = n$$

d **ist Gruppenhomomorphismus:** Seien $\omega, \eta : [0,1] \to S^1$ Schleifen mit $\omega(0) = \eta(0) = 1$. Sei $\hat{\omega}, \hat{\eta} : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $\hat{\eta}(0) = 0, \hat{\omega}(0) = 0, p \circ \hat{\omega} = \omega, p \circ \hat{\eta} = \eta$. Also $d([\omega]) = \hat{\omega}(1)$ und $d([\eta]) = \hat{\eta}(1)$. Sei $\hat{\eta}_+ : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $\hat{\eta}_+(s) = \hat{\eta}(s) + \hat{\omega}(1)$. Dann ist $\hat{\omega} * \hat{\eta}_+$ definiert, $(\hat{\omega} * \hat{\eta}_+)(0) = 0$, $(\hat{\omega} * \hat{\eta}_+)(1) = \hat{\eta}(1) + \hat{\omega}(1)$. Also

$$d([\omega * \eta]) = (\hat{\omega} * \hat{\eta}_+)(1) = \hat{\eta}(1) + \hat{\omega}(1) = d([\omega]) + d([\eta])$$

d **ist injektiv:** Sei $\omega : [0,1] \to S^1$ eine Schleife mit $d([\omega]) = 0$. Dann gibt es $\hat{\omega} : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $\hat{\omega}(0) = 0 = \hat{\omega}(1)$ und $p \circ \hat{\omega} = \omega$. Nun ist $\hat{H} : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$\hat{H}(s,t) := (1-t) \cdot \hat{\omega}(s)$$

eine Homotopie mit festen Endpunkten zwischen $\hat{\omega}$ und c_0. Dann ist $p \circ H$ eine Homotopie mit festen Endpunkten zwischen ω und c_1. Also $[\omega] = e \in \pi_1(S^1, 1)$. □

10.5 Definition

Eine surjektive stetige Abbildung $p : \hat{X} \to X$ heißt eine **Überlagerung**, falls es zu jedem $x \in X$ eine Umgebung U gibt, so dass sich $p^{-1}(U)$ schreiben lässt als die disjunkte Vereinigung von offenen Mengen $U_i \subseteq \hat{X}$, sodass für jedes i die Einschränkung $p\big|_{U_i} : U_i \to U$ ein Homöomorphismus ist. Eine solche Umgebung U heißt eine **elementare Umgebung**.

10.6 Beispiel

(1) $p : \mathbb{R} \to S^1$, $t \mapsto e^{2\pi it}$ ist eine Überlagerung.

(2) $p_n : S^1 \to S^1$, $z \mapsto z^n$ ist eine Überlagerung.

(3) Sind $p : \hat{X} \to X$, $q : \hat{Y} \to Y$ Überlagerungen, so ist $p \times q : \hat{X} \times \hat{Y} \to X \times Y$ eine Überlagerung. zB: $R^2 \to T^2 = S^1 \times S^1$

(4) $S^2 \to \mathbb{R}P^2 = {}^{S^2}\!/_{x \sim -x}$ ist eine Überlagerung. (Übung!)

10.7 Definition

Sei $p : \hat{X} \to X$ eine Überlagerung und $f : Z \to X$ eine stetige Abbildung. Eine **Hebung** von f (bezüglich p) ist eine stetige Abbildung $\hat{f} : Z \to \hat{X}$ mit $p \circ \hat{f} = f$

$$\begin{tikzcd} \hat{X} \arrow[dr, "p"] & \\ Z \arrow[u, dashed, "\hat{f}"] \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

10.8 Homotopiehebungssatz

Sei $\hat{p} : \hat{X} \to X$ eine Überlagerung, $H : Z \times [0,1] \to X$ eine Homotopie und $\hat{f} : Z \to \hat{X}$ eine Hebung von $f = H(-,0) := H\big|_{Z\times\{0\}}$. Dann gibt es eine *eindeutige* Hebung von H mit $\hat{H}(-,0) = \hat{f}$

$$\begin{tikzcd} Z \times \{0\} \arrow[r, "\hat{f}"] \arrow[d, hook, "i"'] & \hat{X} \arrow[d, "p"] \\ Z \times [0,1] \arrow[r, "H"] \arrow[ur, dashed, "\hat{H}"] & X \end{tikzcd}$$

Beweis
Sei $\mathcal{U}$ eine Überdeckung von X durch elementare Umgebungen. Wir können $\mathcal{U}$ mittels H zurückziehen und erhalten eine offene Überdeckung $H^{-1}(\mathcal{U}) := \left\{H^{-1}(U) \,\middle|\, U \in \mathcal{U}\right\}$ von $Z \times [0,1]$. Sei $z_0 \in Z$. Da $\{z_0\} \times [0,1]$ kompakt ist, gibt es $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ und $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ mit

$$H\big(\{z_0\} \times [t_i, t_{i+1}]\big) \subseteq U_i$$

Da die U_i offen sind gibt es zu jedem i eine offene Umgebung V_i von z_0 mit $H\big(V_i \times [t_i, t_{i+1}]\big) \subseteq U_i$. Sei $V := \bigcap_{i=1}^n V_i$, dann $H\big(V \times [t_i, t_{i+1}]\big) \subseteq U_i$. Da alle U_i elementar sind, finden wir induktiv eindeutige Hebungen $\hat{H}_i^V$ von $H\big|_{V\times[t_i,t_{i+1}]}$ mit

$$\hat{H}_1^V(-,0) = \hat{f}\big|_V \quad \text{und} \quad \hat{H}_i^V(-,t_{i-1}) = \hat{H}_{i-1}^V(-,t_{i-1}).$$

Nun erhalten wir mit $\hat{H}^V(z,t) := \hat{H}_i^V(z,t)$ für $z \in V$, $t \in [t_{i-1}, t_i]$ eine eindeutige Hebung von $H\big|_{V\times[0,1]}$ mit $\hat{H}^V(-,0) = \hat{f}\big|_V$. Dabei bleibt $\hat{H}^V$ eindeutig auch wenn wir V verkleinern. Nun finden wir für jedes $z \in Z$ eine Umgebung V_z und eine eindeutige Hebung $\hat{H}^{V_z}$ von $H\big|_{V_z\times[0,1]}$ mit $\hat{H}^{V_z}(-,0) = \hat{f}\big|_{V_z}$. Wegen der Eindeutigkeit gilt

$$\hat{H}^{V_z}(\xi,0) = \hat{H}^{V_{z'}}(\xi,t)$$

für $\xi \in V_z \cap V_{z'}$. Daher definiert $\hat{H}(z,t) := \hat{H}^{V_z}(z,t)$ die gesuchte eindeutige Hebung. □

11 Induzierte Abbildungen

11.1 Lemma

Sei $f : X \to Y$ stetig mit $f(x_0) = y_0$. Dann definiert $f_*([\omega]) := [f \circ \omega]$ einen Gruppenhomomorphismus $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$.

Beweis
Wir zeigen nur, dass f_* wohldefiniert ist. Seien $\omega, \eta : [0,1] \to X$ Schleifen mit $\omega(0) = x_0 = \eta(0)$ und $[\omega] = [\eta]$. Dann gibt es eine Homotopie $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ mit festen Endpunkten zwischen ω und η. [1] Dann ist $f \circ H$ eine Homotopie mit festen Endpunkten zwischen $f \circ \omega$ und $f \circ \eta$. Also

$$f_*([\omega]) = [f \circ \omega] = [f \circ \eta] = f_*([\eta]) \text{ in } \pi_1(Y, y_0)$$ □

11.2 Definition

f_* heißt die von f **induzierte Abbildung**. Manchmal schreibt man auch $\pi_1(f)$ für f_*, um f_* von anderen induzierten Abbildungen zu unterscheiden.

Bemerkung
(i) $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$

(ii) $(\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{\pi_1(X, x_0)}$

11.3 Definition

Ein topologischer Raum X zusammen mit einem Basispunkt $x_0 \in X$, (X, x_0) heißt ein **punktierter Raum**. Eine **punktierte Abbildung** zwischen punktierten Räumen $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ ist eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ mit $f(x_0) = y_0$. Punktierte Abbildungen $f, g : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ heißen **punktiert homotop**, falls es eine Homotopie $H : X \times [0,1] \to Y$ von f nach g gibt mit $H(x_0, t) = y_0 \ \forall t \in [0,1]$.

11.4 Proposition (Homotopieinvarianz von π_1)

Seien $f, g : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ homotop. Dann gilt

$$f_* = g_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$$

Beweis
Sei H eine Homotopie zwischen f und g. Für $[\omega] \in \pi_1(X, x_0)$ ist $H \circ \omega$ eine Homotopie mit festen Endpunkten zwischen $f \circ \omega$ und $g \circ \omega$. Also

$$f_*([\omega]) = [f \circ \omega] = [g \circ \omega] = g_*([\omega])$$ □

11.5 Definition

$f \simeq g :\Leftrightarrow f$ homotop zu g

Seien X, Y topologische Räume. Dann heißen X und Y **homotopieäquivalent**, falls es stetige Abbildungen $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ gibt, so dass

$$f \circ g \simeq \mathrm{id}_X \text{ und } g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$$

Wir schreiben dann $X \simeq Y$ oder $X \underset{\simeq}{\xrightarrow{f}}$. Entsprechendes benutzen wir auch für punktierte Räume. Falls $X \simeq \{0\}$, so sagen wir: X ist **zusammenziehbar**.

[1] $H(-,0) = \omega$, $H(-,1) = \eta$, $H(t,0) = H(t,1) = x_0$ für alle $t \in [0,1]$

11.6 Beispiel

(1) S^{n-1} ist homotopieäquivalent zu $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$: Benutze $i : S^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ die Inklusion und $p : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to S^{n-1}$, $v \mapsto \frac{v}{\|v\|}$. Dann gilt

$$p \circ i = \mathrm{id}_{S^{n-1}} \quad , \quad i \circ p \simeq \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$$

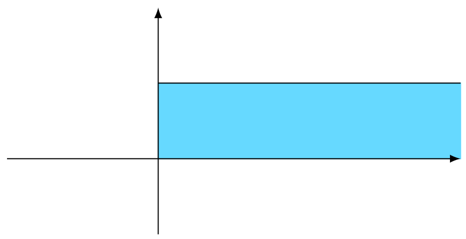
mit der Homotopie $H(v,t) = t + (1-t)\frac{v}{\|v\|}$.

(2) Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe Teilmenge und $x_0 \in K$. Dann ist (K, x_0) zusammenziehbar:

$$i : (\{x_0\}, x_0) \to (K, x_0) \quad \text{die Inklusion}$$
$$p : (K, x_0) \to (\{x_0\}, x_0) \quad \text{die konstante Abbildung}$$

$p \circ i = \mathrm{id}_{(\{x_0\}, x_0)}$ und $i \circ p \simeq \mathrm{id}_{(K, x_0)}$ mit der Homotopie $H(k,t) = t \cdot k + (1-t)x_0$

(3) Auch $X := \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \,|\, x \in (0, \infty), y \in [0,1]\}$ ist kontrahierbar.



Setze $H := \{(x,y) \,|\, x \leq 0\}$. Dann ist $X \simeq H \simeq \{x_0\}$

11.7 Korollar

Ist $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ eine Homotopieäquivalenz, so ist $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ ein Isomorphismus. Insbesondere ist $\pi_1(X, x_0) = \{1\}$, falls (X, x_0) zusammenziehbar ist.

Beweis
Sei $g : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ eine Homotopieinverse zu f, also $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$, $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$. Dann ist $g_* = (f_*)^{-1}$ (und f_* ein Isomorphismus):

$$f_* \circ g_* = (f \circ g)_* = (\mathrm{id}_Y)_* = \mathrm{id}_{\pi_1(Y, y_0)}$$
$$g_* \circ f_* = (g \circ f)_* = (\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{\pi_1(X, x_0)}$$

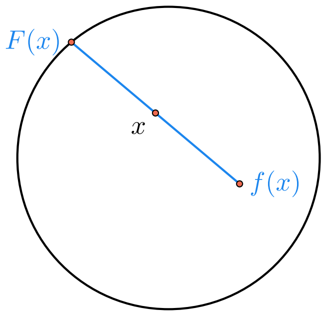
□

11.8 Fixpunktsatz von Brouwer

Jede stetige Abbildung $f : D^n \to D^n$ hat einen Fixpunkt.

Beweis
Für $n = 1$ ist dies eine Folgerung aus dem Zwischenwertsatz.

Angenommen $f : D^n \to D^n$ hat keinen Fixpunkt, also $f(x) \neq x$ für alle $x \in D^n$. Dann gibt es eine stetige Abbildung $F : D^n \to S^{n-1}$ mit $F\big|_{S^{n-1}} = \mathrm{id}_{S^{n-1}}$. Konstruktion von F



(i) $F(x) = t(x - f(x)) + x \ \ , t \geq 0$

(ii) $F(x) \in S^{n-1}$

Sei $x_0 \in S^{n-1}$. Wir haben also

$$\begin{tikzcd} (S^{n-1}, x_0) \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, hook, "i"] & (S^{n-1}, x_0) \\ (D^n, x_0) \arrow[ur, "F"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \pi_1(S^{n-1}, x_0) \arrow[r, "(\mathrm{id})_* = \mathrm{id}"] \arrow[d, "i_*"] & \pi_1(S^{n-1}, x_0) \\ \pi_1(D^n, x_0) \arrow[ur, "F_*"'] & \end{tikzcd}$$

Für $n = 2$ ist das zweite Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "(\mathrm{id})_* = \mathrm{id}"] \arrow[d, "i_*"] & \mathbb{Z} \\ \{e\} \arrow[ur, "F_*"'] & \end{tikzcd}$$

Daher folgt $\mathrm{id} = F_* \circ i_*$ =triviale Abbildung $\lightning$ $\square$

11.9 Proposition

Für $n \in \mathbb{Z}$ sei $f_n : S^1 \to S^1$, $z \mapsto z^n$. Dann ist $(f_n)_* : \pi_1(S^1, 1) \to \pi_1(S^1, 1)$ gegeben durch Multiplikation mit n:

$$(f_n)_*([\omega]) = n \cdot [\omega] \in \pi_1(S^1, 1) = \mathbb{Z}$$

Weiter sind die f_n paarweise nicht homotop zueinander.

Beweis
Sei $p : \mathbb{R} \to S^1, t \mapsto e^{2\pi i t}$. Zu jeder Schleife $\omega : [0,1] \to S^1$ mit $\omega(0) = \omega(1) = 1$ gibt es eine eindeutige Hebung $\hat{\omega} : [0,1] \to \mathbb{R}$ zu einem Weg mit $\hat{\omega}(0) = 0$. Der Isomorphismus $d : \pi_1(S^1, 1) \to \mathbb{Z}$ bildet $[\omega]$ auf $\hat{\omega}(1) \in \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ ab. Sei $\hat{f}_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto nt$. Dann gilt $p \circ \hat{f}_n = f_n \circ p$ und $\hat{f}_n(0) = 0$. Ist $\hat{\omega}$ eine Hebung von ω, so ist $\hat{f}_n \circ \hat{w}$ eine Hebung von $f_n \circ \omega$:

$$(\hat{f}_n \circ \omega)(0) = \hat{f}_n(0) = 0$$
$$p \circ \hat{f}_n \circ \hat{\omega} = f_n \circ p \circ \hat{\omega} = f_n \circ \omega$$

Es folgt

$$d([f_n \circ \omega]) = (\hat{f}_n \circ \hat{\omega})(1) = \hat{f}_n(\hat{\omega}(1)) = \hat{f}_n(d[\omega]) = n \cdot d[\omega]$$

Da d ein Isomorphismus ist, folgt die Behauptung.

Mit der Homotopieinvarianz von induzierten Abbildungen folgt, dass die $f_n : (S^1, 1) \to (S^1, 1)$ als punktierte Abbildungen nicht punktiert homotop sind. Mit dem nächsten Lemma folgt das die f_n paarweise nicht homotop sind. $\square$

11.10 Lemma

Seien $f, g : (X, x_0) \to (S^1, 1)$ stetig. Sei $H : X \times [0,1] \to S^1$ eine (unpunktierte) Homotopie zwischen f und g. Dann ist $\tilde{H} : X \times [0,1] \to S^1$,

$$\tilde{H}(x,t) = \frac{H(x,t)}{H(x_0,t)}$$

ein punktierte Homotopie zwischen f und g.

11.11 Hauptsatz der Algebra

Jedes Polynom $p = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0 \in \mathbb{C}[X]$ von $\operatorname{grad} f = n \geq 1$ hat eine Nullstelle.

Beweis

Angenommen p hat keine Nullstelle. In den Übungen haben wir gezeigt, dass dann $f_n : S^1 \to S^1$ homotop zu einer konstanten Abbildung ist. Aus der Proposition 11.9 folgt dann aber $n = 0$. $\square$

12 Eigentlich diskontinuierliche Wirkungen

12.1 Definition

Sei G eine Gruppe und X ein topologischer Raum.

hier ist noch ein Zeichen falsch

(1) Eine Wirkung $G \curvearrowright X$ von G auf X ist eine Abbildung $G \times X \to X$, $(g, x) \mapsto g \cdot x$ so dass
   - Für $g \in G$ ist $L_g : X \to X$, $x \mapsto g \cdot x$ stetig.
   - Für $g, h \in G$ gilt $g \cdot (h \cdot x) = (g \cdot h) \cdot x$
   - Für das neutrale Element $e \in G$ gilt $e \cdot x = x$ für alle $x \in X$

(2) Eine Wirkung heißt **frei**, falls $g \cdot x = x \Rightarrow g = e$

(3) Eine Wirkung heißt **eigentlich diskontinuierlich** (e.d.k.), falls es zu jedem $x \in X$ eine Umgebung U von x gibt mit $gU \cap U = \emptyset$ für alle $g \in G \setminus \{e\}$.

(4) Durch $x \sim y :\Leftrightarrow \exists g \in G : g \cdot x = y (\Leftrightarrow Gx = Gy)$ wird eine Äquivalenzrelation auf X erklärt. Die Äquivalenzklassen dieser Äquivalenzrelation sind genau die **Bahnen** $Gx = \{g \cdot x \,|\, g \in G\}$ der Wirkung. Die Menge der Äquivalenzklassen bezeichnen wir mit $G\backslash X := {}^{X}/_{\sim}$. Durch die Quotiententopologie bezüglich der Quotientenabbildung $X \to G\backslash X$, $x \mapsto Gx$ wird $G\backslash X$ zu einem topologischen Raum.

12.2 Lemma

Sei $G \curvearrowright X$ eine e.d.k Wirkung. Dann ist $p : X \to G\backslash X$, $x \mapsto Gx$ eine Überlagerung.

Beweis
Offenbar ist p surjektiv und stetig. Sei $\overline{x} := Gx \in G \setminus X$. Sei U eine offene Umgebung von $x \in X$ für die $gU \cap U = \emptyset$ für alle $g \neq e$ ist. Dann ist $p(U)$ eine elementare Umgebung von $\overline{x}$, denn

$$p^{-1}\big(p(U)\big) = \bigcup_{g \in G} gU$$

ist die disjunkte Vereinigung der gU, $g \in G$. □

12.3 Beispiel

(1) $\mathbb{Z}^n \curvearrowright \mathbb{R}^n$ mit $z \cdot x := x + z$ ist eine e.d.k. Wirkung: Ist $\varepsilon < \frac{1}{2}$ so gilt

$$B_\varepsilon(x) \cap B_\varepsilon(x) + z = B_\varepsilon(x) \cap B_\varepsilon(x + z) = \emptyset$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{Z}^n$. Da $\mathbb{Z}\backslash\mathbb{R} \cong S^1$ folgt $\mathbb{Z}^n\backslash\mathbb{R}^n = (\mathbb{Z}\backslash\mathbb{R})^n = (S^1)^n = T^n$. Wir erhalten eine Überlagerung $\mathbb{R}^n \to T^n$.

(2) Sei ${}^{\mathbb{Z}}/_{2} = \{e, \tau\}$. Durch $\tau \cdot v := -v$ erhalten wir eine e.d.k. Wirkung ${}^{\mathbb{Z}}/_{2} \curvearrowright S^n$. Dann gilt

$${}^{\mathbb{Z}}/_{2}\backslash S^n \cong \mathbb{R}P^n$$

Wir erhalten eine Überlagerung $S^n \to \mathbb{R}P^n$.

(3) Zu $m, n \in \mathbb{Z}$ sei $f_{n,m} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f_{n,m}(x, y) = (x + h, (-1)^n y + m)$. Dann ist

$$G := \{f_{n,m} \,|\, n, m \in \mathbb{Z}\}$$

eine Gruppe bezüglich der Verknüpfung von Abbildungen. $f_{n,m} \circ f_{n',m'} = f_{n+n',m+(-1)^n m'}$. Die kanonische Wirkung von G auf $\mathbb{R}^2$ $f_{n,m} \cdot x := f_{n,m}(x)$ ist e.d.k., da

$$f_{n,m}(U_\varepsilon(x)) \cap f_{n',m'}(U_\varepsilon(x)) = \emptyset$$

für $(n,m) \neq (n',m')$ und $\varepsilon < \frac{1}{2}$. Der Quotient $G\backslash\mathbb{R}^1 =: K$ heißt die **Kleinsche Flasche**. Wir erhalten eine Wirkung $\mathbb{R}^2 \to K$.
Übung: $K \cong T_{\substack{S^1 \to S^1 \\ z \mapsto -z}}$

12.4 Satz

Sei X wegzusammenhängend und einfach zusammenhängend. Sei $G \curvearrowright X$ eine e.d.k. Wirkung. Für jedes $\overline{x}_0 \in G\backslash X$ ist dann

$$\pi_1(G\backslash X, \overline{x}_0) \cong G.$$

Beweis
Sei $x_0 \in X$ ein Urbild von $\overline{x}_0$, also $\overline{x}_0 = G{\cdot}x_0$. Zu jeder Schleife $\omega : [0,1] \to G\backslash X$ mit $\omega(0) = \omega(1) = \overline{x}_0$ gibt es eine Hebung $\hat{\omega} : [0,1] \to X$ mit $\hat{\omega}(0) = x_0$. Hier heben wir bezüglich der Überlagerung $p : X \to G\backslash X$, $x \mapsto Gx$, also $p \circ \hat{\omega} = \omega$.

Da $p(\hat{\omega}(1)) = \omega(1) = \overline{x}_0$ folgt $\omega(1) \in p^{-1}(\overline{x}_0) = G \cdot x_0$. Es gibt also $g_\omega \in G$ mit $g_\omega \cdot x_0 = \hat{\omega}(1)$. Wie im Fall der Überlagerung $\mathbb{R} \to S^1$ zeigt man mit Hilfe des Homotopiehebungssatzes, dass $[\omega] \mapsto g_\omega$ ein Gruppenhomomorphismus $\varphi : \pi_1(G\backslash X, \overline{x}_0) \to G$ definiert.

Surjektivität von φ : Sei $g \in G$. Sei $\hat{\omega} : [0,1] \to X$ ein Weg von x_0 nach $g \cdot x_0$ (Solch ein Weg gibt es, da X wegzusammenhängend ist). Dann ist $\hat{\omega}$ die Hebung von $\omega := p \circ \hat{\omega}$ und es folgt $\varphi([\omega]) = g_\omega = g$, da $\hat{\omega}(1) = g \cdot x_0$. Also $g \in \operatorname{Im}\varphi$.

Injektivität von φ : Sei $\omega : [0,1] \to G\backslash X$ eine Schleife und $\omega(0) = \omega(1) = x_0$ für die $\varphi([\omega]) = e$. Sei $\hat{\omega} : [0,1] \to X$ die Hebung von ω mit $\hat{\omega}(0) = x_0$. Da $\varphi([\omega]) = e$ gilt $\hat{\omega}(1) = x_0$, $\hat{\omega}$ ist also eine Schleife in X. Da X einfach zusammenhängend ist, ist $[\hat{\omega}] = e \in \pi_1(X, x_0)$. Es folgt

$$[\omega] = [p \circ \hat{\omega}] = p_*[\hat{\omega}] = p_*(e) = e.$$

□

12.5 Bemerkung

Für $n \geq 1$ ist S^n wegzusammenhängend. (einfache Übung)
Für $n \geq 2$ ist S^n einfach zusammenhängend. (weniger einfache Übung)

Nach Satz 12.4 ist daher $\pi_1(\mathbb{R}P^n, x_0) = \mathbb{Z}/2$ für $n \geq 2$. Es folgt $\mathbb{R}P^n \not\cong S^n$ für $n \geq 2$. (Andererseits ist $\mathbb{R}P^1 \cong S^1$.)

Index

Die Seitenzahlen *sind mit Hyperlinks zu den entsprechenden Seiten versehen, also anklickbar* ☝

Abbildungsverzeichnis