



Skript Grundlagen der Analysis, Topologie, Geometrie

Mitschrift der Vorlesung „Grundlagen der Analysis, Topologie, Geometrie“
von Prof. Dr. Arthur Bartels

Jannes Bantje

26. Mai 2014

Erstellt mit \LaTeX

Inhaltsverzeichnis

1	Topologische Räume	1
1.1	Definition: Metrischer Raum	1
1.2	Definition: Norm auf einem \mathbb{R} -Vektorraum	1
1.3	Beispiel: Normen auf \mathbb{R}^n	1
1.4	Beispiele für Metriken	1
1.5	Definition: Isometrie und Stetigkeit	2
1.6	Definition: offene Teilmenge	2
1.7	Lemma: Charakterisierung von Stetigkeit über offene Mengen	2
1.8	Definition: Topologischer Raum	2
1.9	Beispiele für Topologien	2
1.10	Definition: Stetigkeit in topologischen Räumen	2
1.11	Lemma: Kompositionen stetiger Abbildungen sind stetig	3
1.12	Definition: Homöomorphismus	3
1.13	Beispiele für homöomorphe Mengen	3
1.14	Definition: Basis der Topologie	3
1.15	Beispiel: Basis der Topologie in einem metrischen Raum	3
1.16	Proposition: Bedingung, dass eine Familie von Teilmengen eine Topologie ist	3
1.17	Bemerkung: Eindeutigkeit von Proposition 1.16	4
1.18	Beispiel: Topologie der punktweisen bzw. gleichmäßigen Konvergenz	4
1.19	Definition: Inneres, Abschluss und Rand	4
1.20	Bemerkung: Gleichungen für Inneres, Abschluss und Rand	4
1.21	Definition: Umgebung	4
1.22	Definition: Hausdorffraum	5
1.23	Definition: topologische Mannigfaltigkeit	5

2	Konstruktion topologischer Räume	6
2.1	Definition: Spurtopologie	6
2.2	Bemerkung: Stetigkeit durch Verknüpfung mit Inklusion	6
2.3	Definition: Produkttopologie	6
2.4	Definition: Produkttopologie mit unendlichen vielen Faktoren	6
2.5	Bemerkung zur Stetigkeit der Projektionen und Stetigkeit im Produktraum	6
2.6	Bemerkung zur üblichen Topologie auf \mathbb{R}^n	6
2.7	Beispiel: Torus	7
2.8	Definition: Homotopie und homotop	7
2.9	Definition: Quotiententopologie	7
2.10	Beispiele zur Quotiententopologie	7
3	Konvergenz	9
3.1	Definition: Konvergenz in topologischen Räumen	9
3.2	Lemma (Eindeutigkeit von Grenzwerten)	9
3.3	Definition: Gerichtete Menge	9
3.4	Definition: Netz und Konvergenz bezüglich eines Netzes	9
3.5	Lemma (Eindeutigkeit von Grenzwerten)	10
3.6	Definition: Teilnetz	10
4	Kompakte Räume	11
4.1	Definition: Offene Überdeckung und Teilüberdeckung	11
4.2	Definition: Kompaktheit	11
4.3	Definition: Endliche Durchschnittseigenschaft	11
4.4	Lemma: Äquivalenz zur Kompaktheit eines Hausdorffraumes	11
4.5	Satz: Charakterisierung von Kompaktheit durch konvergente Teilnetze	11
4.6	Bemerkung zu Kompaktheit in metrischen Räumen	12
4.7	Satz von Tychonov	12
4.8	Beispiel: Metrik auf dem Produkt metrischer Räume, die Produkttopologie induziert	13
4.9	Definition: Netze immer wieder und schließlich in A	13
4.10	Definition: Universelles Netz	13
4.11	Lemma: Universelle Netze konvergieren in kompakten Räumen	13
4.12	Proposition: Jedes Netz besitzt universelles Teilnetz	14
4.13	Definition: Vektorraum der beschränkten Abbildungen	14
4.14	Satz (Mittelbarkeit von \mathbb{Z})	14
5	Kompaktifizierungen	16
5.1	Definition: Kompaktifizierung	16
5.2	Beispiele für Kompaktifizierungen	16
5.3	Definition: lokalkompakt	16
5.4	Beispiele für lokalkompakte Hausdorffräume	16
5.5	Proposition: Offene Teilmengen kompakter Räume sind lokalkompakt	16
5.6	Definition: Einpunktkompaktifizierung (EPK)	17
5.7	Proposition über Eigenschaften der Einpunktkompaktifizierung	17
5.8	Frage nach Fortsetzungen stetiger Funktionen in der Einpunktkompaktifizierung	17
5.9	Definition: Eigentliche stetige Abbildung	18
5.10	Satz: Charakterisierung von eigentlichen stetigen Abbildungen	18
6	Der Approximationssatz von Stone-Weierstraß	19
6.1	Definition: Verschwinden stetiger Funktionen im Unendlichen	19
6.2	Definition: $\mathcal{B} \subseteq C_0(X)$ trennt $x, y \in X$ streng	19
6.3	Satz (Stone-Weierstraß)	19

6.4	Satz von Dini	20
6.5	Lemma 1: Folge reeller Polynome, die gleichmäßig gegen Wurfelfunktion konvergiert	20
6.6	Bemerkung: Komposition mit Polynomen ist auch der Algebra	21
6.7	Lemma 2: Betrag von $f \in \mathcal{A}$ liegt in $\bar{\mathcal{A}}$	21
6.8	Bemerkung: \max, \min von Funktionen aus \mathcal{A} liegen in $\bar{\mathcal{A}}$	21
6.9	Lemma 3: Existenz von $f \in \mathcal{A}$ mit $f(x) = \alpha, f(y) = \beta$, wenn \mathcal{A} streng trennt	21
7	Metrisierbarkeit	22
7.1	Definition: Metrisierbar	22
7.2	Definition: Normaler Hausdorffraum	22
7.3	Satz (Urysohn)	22
7.4	Urysohns Lemma	23
8	Zusammenhängende topologische Räume	24
8.1	Definition: Zusammenhängender, wegzusammenhängender topologischer Raum	24
8.2	Bemerkungen zu zusammenhängenden und wegzusammenhängenden Räumen	24
8.3	Beispiele zu (weg-)zusammenhängenden Räumen	24
8.4	Satz (Topologische Invarianz der Dimension)	25
9	Die Fundamentalgruppe	26
9.1	Definition: Einfach zusammenhängender topologischer Raum	26
9.2	Bemerkungen zu einfach zusammenhängenden Räumen	26
9.3	Definition: Homotopie zwischen Wegen	26
9.4	Definition: Schleife	26
9.5	Lemma	26
9.6	Notation	27
9.7	Definition: Kompositionsweg	27
9.8	Lemma	27
9.9	Korollar	27
9.10	Definition: Fundamentalgruppe	27
9.11	Bemerkung: Isomorphie zwischen Fundamentalgruppen	28
10	Die Windungszahl	29
10.1	Frage	29
10.2	Proposition	29
10.3	Definition: Windungszahl	29
10.4	Satz: Die Windungszahl definiert einen Isomorphismus $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$	29
10.5	Definition: Überlagerung und elementare Umgebung	30
10.6	Beispiele für Überlagerungen	30
10.7	Definition: Hebung	30
10.8	Homotopiehebungssatz	30
11	Induzierte Abbildungen	32
11.1	Lemma	32
11.2	Definition: Induzierte Abbildung	32
11.3	Definition: Punktierte Raum, punktierte Abbildung und punktiert homotop	32
11.4	Proposition (Homotopieinvarianz von π_1)	32
11.5	Definition	32
11.6	Beispiel	33
11.7	Korollar	33
11.8	Fixpunktsatz von Brouwer	33
11.9	Proposition: Induzierte Abbildung von $f : S^1 \rightarrow S^1, z \mapsto z^n$	34

11.10 Lemma: Konstruktion einer punktierten Homotopie aus einer nicht punktierten	35
11.11 Hauptsatz der Algebra	35
12 Eigentlich diskontinuierliche Wirkungen	36
12.1 Definition	36
12.2 Lemma	36
12.3 Beispiel	36
Index	A
Abbildungsverzeichnis	B

1 Topologische Räume

1.1 Definition

Ein **metrischer Raum** (X, d) ist eine Menge X mit einer Abbildung $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ mit folgenden Eigenschaften:

- (i) $\forall x, y \in X : d(x, y) = d(y, x)$
- (ii) $\forall x, y \in X : d(x, y) = 0 \iff x = y$
- (iii) $\forall x, y, z \in X : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Dreiecksungleichung)

1.2 Definition

Sei V ein \mathbb{R} -Vektorraum. Eine **Norm** auf V ist eine Abbildung $\|\cdot\| : V \rightarrow [0, \infty)$ mit folgenden Eigenschaften:

- (i) $\forall v \in V, \lambda \in \mathbb{R} : \|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$
- (ii) $\forall v, w \in V : \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (Dreiecksungleichung)
- (iii) $\forall v \in V : \|v\| = 0 \iff v = 0$

Durch $d(v, w) := \|v - w\|$ erhalten wir eine Metrik auf V .

1.3 Beispiel

Auf \mathbb{R}^n gibt es verschiedene Normen und damit auch verschiedene Metriken: Für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

- (i) $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$
- (ii) $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$
- (iii) $\|x\|_\infty = \max\{|x_i| \mid i = 1, \dots, n\}$

1.4 Beispiele

(i)

$$S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

$$\text{mit } d(z, z') := \min\{|\theta| \mid \theta \in \mathbb{R} : z = e^{i\theta} z'\}$$

(ii) Ist X ein metrischer Raum und A eine Teilmenge von X , so wird A durch die Einschränkung der Metrik auf A zu einem metrischen Raum. Wir sagen dann A ist ein Unterraum von X .

(iii) Sei X eine beliebige Menge. Durch

$$d(x, y) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x = y \\ 1, & \text{falls } x \neq y \end{cases}$$

wir auf X eine Metrik (die **diskrete Metrik**) definiert.

(iv) Sei p eine Primzahl. Jedes $x \neq 0 \in \mathbb{Q}$ lässt sich eindeutig schreiben als $x = \frac{a}{b} p^n$ mit $n, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ und a, b, p paarweise teilerfremd. Dann heißt

$$|x|_p := p^{-n}$$

der **p -adische Betrag** von x , ($|0|_p := 0$). Durch $d_p(x, y) := |x - y|_p$ erhält man die p -adische Metrik auf \mathbb{Q} .

1.5 Definition

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) zwei metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt eine **Isometrie**, falls gilt:

$$\forall x, x' \in X : d_Y(f(x), f(x')) = d_X(x, x')$$

f heißt **stetig**, falls für alle $x_0 \in X$ gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : d_X(x, x_0) < \delta \implies d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

1.6 Definition

Eine Teilmenge U eines metrischen Raums X heißt **offen**, falls gilt

$$\forall x \in U \exists \delta > 0 \text{ mit } B_\delta(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < \delta\} \subseteq U$$

1.7 Lemma

Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung zwischen metrischen Räumen. Dann sind äquivalent:

- (i) f ist stetig
- (ii) Urbilder (unter f) offener Mengen in Y sind offen in X . ($\forall U \subseteq Y$ offen ist $f^{-1}(U) \subseteq X$ offen)

Beweis

Analysis II. □

1.8 Definition

Ein **topologischer Raum** (X, \mathcal{O}) ist eine Menge X zusammen mit einer Familie \mathcal{O} von Teilmengen von X so dass gilt:

- (i) $\emptyset, X \in \mathcal{O}$
- (ii) $U, V \in \mathcal{O} \implies U \cap V \in \mathcal{O}$
- (iii) Ist I eine Indexmenge und $U_i \in \mathcal{O}$ für $i \in I$, so gilt $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{O}$.

\mathcal{O} heißt dann eine **Topologie** auf X . $U \subseteq X$ heißt **offen**, falls $U \in \mathcal{O}$. $A \subseteq X$ heißt **abgeschlossen**, falls $X \setminus A$ offen ist.

1.9 Beispiele

- (i) Jeder metrische Raum wird durch $\mathcal{O} := \{U \subseteq X \mid U \text{ ist offen}\}$ zu einem topologischen Raum.
- (ii) Sei X eine beliebige Menge.
 - (i) Die **grobe Topologie** ist $\mathcal{O}_{\text{grob}} := \{\emptyset, X\}$
 - (ii) Die **diskrete Topologie** ist $\mathcal{O}_{\text{diskret}} := \mathcal{P}(X)$
 - (iii) Die **koendliche Topologie** ist $\mathcal{O}_{\text{koendl.}} := \{U \subseteq X \mid X \setminus U \text{ endlich}\} \cup \{\emptyset\}$

1.10 Definition

Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen heißt **stetig**, wenn Urbilder von offener Mengen offen sind.

1.11 Lemma

Seien $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ stetige Abbildungen. Dann ist auch $g \circ f : X \rightarrow Z$ stetig.

Beweis

Sei $U \subseteq Z$ offen. Dann ist $g^{-1}(U) \subseteq Y$ offen, da g stetig ist. Da auch f stetig ist, gilt $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U)) \subseteq X$ offen. \square

1.12 Definition

Seien X, Y topologische Räume. Eine bijektive stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt ein **Homöomorphismus**, falls auch ihre Umkehrabbildung $f^{-1} : Y \rightarrow X$ stetig ist.

Gibt es einen solchen Homöomorphismus, so heißen X und Y **homöomorph** und wir schreiben $X \cong Y$, andernfalls $X \not\cong Y$.

1.13 Beispiel

(i) $(0, 1) \cong (0, \infty) \cong (-\infty, 0) \cong \mathbb{R}$ (einfach)

(ii) $(0, 1) \not\cong [0, 1] \not\cong [0, 1] \not\cong (0, 1)$ (Übung)

(iii) $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m \iff n = m$ (schwer)

1.14 Definition

Sei X ein topologischer Raum. Eine Familie \mathcal{U} von offenen Teilmengen von X heißt eine **Basis der Topologie**, falls für jede Teilmenge $W \subseteq X$ äquivalent sind:

(1) W ist offen

(2) $\forall x \in W : \exists U \in \mathcal{U} \text{ mit } x \in U \subseteq W \iff W = \bigcup_{\substack{u \in \mathcal{U} \\ u \subseteq W}} u$

Man sagt X erfüllt das **zweite Abzählbarkeitsaxiom**, falls X eine abzählbare Basis der Topologie besitzt.

1.15 Beispiel

Sei X ein metrischer Raum. Dann ist $\{B_\delta(x) \mid x \in X, \delta > 0\}$ eine Basis der Topologie von X . Gibt es eine abzählbare dichte Teilmenge $X_0 \subseteq X$, so ist $\{B_{1/n}(x) \mid x \in X_0, n \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare Basis der Topologie von X und X erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom.

1.16 Proposition

Sei X eine Menge und \mathcal{U} eine Familie von Teilmengen von X mit $X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$. Dann ist \mathcal{U} genau dann die Basis einer Topologie \mathcal{O} auf X , wenn \mathcal{U} folgende Bedingungen erfüllt:

$$\forall U, V \in \mathcal{U} : \forall x \in U \cap V : \exists W \in \mathcal{U} \text{ mit } x \in W \subseteq U \cap V \quad (\star)$$

Beweis

Sei \mathcal{U} die Basis der Topologie \mathcal{O} und $U, V \in \mathcal{U}$. $\Rightarrow U, V$ offen, also ist auch $U \cap V$ offen. Da \mathcal{U} eine Basis der Topologie ist, gibt es zu jedem $x \in U \cap V$ ein $W \in \mathcal{U}$ mit $x \in W \subseteq U \cap V$. Daher gilt (\star)

Sei umgekehrt (\star) erfüllt. Definiere \mathcal{O} durch

$$W \in \mathcal{O} :\iff \forall x \in W : \exists U \in \mathcal{U} : x \in U \subseteq W.$$

Dann $\emptyset \in \mathcal{O}$. Wegen $X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ gilt auch $X \in \mathcal{O}$. Weiter ist \mathcal{O} unter Vereinigungen abgeschlossen. Seien $W_1, W_2 \in \mathcal{O}$. Sei $x \in W_1 \cap W_2$. Dann gilt

$$\begin{aligned} x \in W_1, W_1 \text{ offen} &\Rightarrow \exists U_1 \in \mathcal{U} : x \in U_1 \subseteq W_1 \\ x \in W_2, W_2 \text{ offen} &\Rightarrow \exists U_2 \in \mathcal{U} : x \in U_2 \subseteq W_2 \end{aligned}$$

Also $x \in U_1 \cap U_2$. Mit (\star) folgt: $\exists W \in \mathcal{U}$ mit $x \in W \subseteq U_1 \cap U_2 \subseteq W_1 \cap W_2$. \square

1.17 Bemerkung

Die Topologie \mathcal{O} in der Proposition 1.16 wird eindeutig durch \mathcal{U} bestimmt.

1.18 Beispiel

- Sei $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ der \mathbb{R} -Vektorraum aller reellen Folgen. Für $\delta > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ sei

$$U_{n,\delta,\alpha_1,\dots,\alpha_n} := \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \mid |x_i - \alpha_i| < \delta \text{ für } i = 1, \dots, n\}$$

Dann erfüllt $\mathcal{U} := U_{n,\delta,\alpha_1,\dots,\alpha_n}$ die Bedingung (\star) und ist die Basis der **Topologie der punktweisen Konvergenz**.

- Sei $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der \mathbb{R} -Vektorraum aller stetigen Abbildungen. Zu $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig sei

$$U_{a,b,\delta,g} := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig} \mid \forall t \in [a, b] : |f(t) - g(t)| < \delta\}.$$

Dann erfüllt $\mathcal{U} := \{U_{a,b,\delta,g}\} (\star)$ und ist die Basis der **Topologie der gleichmäßigen Konvergenz** auf kompakten Intervallen.

1.19 Definition

Sei Y eine Teilmenge eines topologischen Raums X .

$\mathring{Y} := \{y \in Y \mid \exists U \subseteq X \text{ offen mit } y \in U \subseteq Y\}$ heißt das **Innere** von Y

$\overline{Y} := \{x \in X \mid \forall U \subseteq X \text{ offen mit } x \in U : U \cap Y \neq \emptyset\}$ heißt **Abschluss** von Y

$\partial Y := \overline{Y} \setminus \mathring{Y}$ heißt der **Rand** von Y .

1.20 Bemerkung

- $\mathring{Y} = X \setminus (\overline{X \setminus Y})$, $\overline{Y} = X \setminus (X \setminus Y)^\circ$
- $\mathring{Y} = \bigcup_{\substack{U \subseteq Y \\ U \text{ offen}}} U$ ist offen
- $\overline{Y} = \bigcap_{\substack{A \supseteq Y \\ A \text{ abgeschlossen}}} A$ ist abgeschlossen
- $\partial Y = \overline{Y} \setminus \mathring{Y}$ ist abgeschlossen.

1.21 Definition

Sei X ein topologischer Raum, $x \in X$. $V \subseteq X$ heißt eine **Umgebung** von x , falls es $U \subseteq X$ offen gibt mit $x \in U \subseteq V$. Ist V offen, so heißt V eine **offene Umgebung** von x .

1.22 Definition

Ein topologischer Raum X heißt **hausdorffsch** (oder eine **Hausdorffraum**), falls es zu jedem Paar $x, y \in X, x \neq y$ offene Umgebungen U von x und V von y gibt mit $U \cap V = \emptyset$.

Bsp:

- Metrische Räume sind hausdorffsch.
- Ist $|X| \geq 2$ so ist $(X, \mathcal{O}_{\text{grob}})$ nicht hausdorffsch.

1.23 Definition

Ein Hausdorffraum M , der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, heißt eine **topologische Mannigfaltigkeit** der Dimension n (oder eine n -Mannigfaltigkeit), falls er lokal homöomorph zum \mathbb{R}^n ist; d.h. $\forall x \in M \exists$ offene Umgebung U von x mit $U \cong \mathbb{R}^n$.

2 Konstruktion topologischer Räume

2.1 Definition

Sei X ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ eine Teilmenge. Die **Spurtopologie** auf A besteht aus allen Teilmengen von A der Form $A \cap U$ mit $U \subseteq X$ offen. Mit dieser Topologie heißt A ein Unterraum von X .

Achtung: $U \subseteq A$ offen $\not\Rightarrow U \subseteq X$ offen!

2.2 Bemerkung

Sei $i : A \rightarrow X$ die Inklusion.

(i) i ist stetig.

(ii) Ist Y ein weiterer topologischer Raum und $f : Y \rightarrow A$ eine Abbildung. Dann gilt:

$$f \text{ stetig} \iff i \circ f : Y \rightarrow X \text{ ist stetig}$$

2.3 Definition

Seien X, Y topologische Räume. Eine Basis für die **Produkttopologie** auf $X \times Y$ ist

$$\mathcal{U} := \{U \times V \mid U \subseteq X \text{ offen}, V \subseteq Y \text{ offen}\}.$$

2.4 Definition

Seien X_i für $i \in I$ topologische Räume. Die Produkttopologie auf ihrem Produkt

$$\prod_{i \in I} X_i = \{(x_i)_{i \in I} \mid x_i \in X_i\}$$

hat als Basis alle Mengen der Form $\prod_{i \in I} U_i$ mit

1) $U_i \subseteq X_i$ ist offen

2) Für fast alle i ist $U_i = X_i$.

2.5 Bemerkung

Seien $p_j : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_j$ die Projektionen.

(i) Die p_j sind stetig.

(ii) Ist Y ein weiterer topologischer Raum und $f : Y \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$ eine Abbildung, so gilt:
 f ist stetig $\iff \forall j$ ist $f_j := p_j \circ f$ stetig.

2.6 Bemerkung

Die übliche Topologie auf $\mathbb{R}^n = \prod_{i=1}^n \mathbb{R}$ stimmt mit der Produkttopologie überein.

2.7 Beispiel

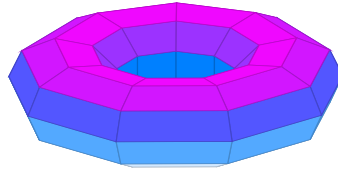


Abbildung 1: Der Torus T^2 , Quelle [\[1\]](#)

$T^n := \underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_n = \prod_{i=1}^n S^1$ heißt der n -Torus. Der n -Torus ist eine n -Mannigfaltigkeit.

2.8 Definition

Seien X und Y topologische Räume und $(f_t)_{t \in [0,1]}$ eine Familie von stetigen Abbildungen $f_t : X \rightarrow Y$. Wir sagen, dass die f_t stetig von t abhängen, falls

$$H : X \times [0, 1] \rightarrow Y \text{ mit } H(x, t) = f_t(x)$$

stetig bezüglich der Produkttopologie ist. In diesem Fall heißen f_0 und f_1 **homotop** und H eine **Homotopie** zwischen f_0 und f_1 .

Beispiel

Je zwei Abbildungen $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ sind homotop; eine Homotopie wird gegeben durch $H(x, t) := (1-t) \cdot f(x) + t \cdot g(x)$. Wir werden später sehen, dass $\text{id} : S^1 \rightarrow S^1$ nicht homotop zu einer konstanten Abbildung ist.

2.9 Definition

Sei X ein topologischer Raum, M eine Menge und $q : X \rightarrow M$ eine surjektive Abbildung. Die offenen Mengen der **Quotiententopologie** auf M (bezüglich q) sind alle $U \subseteq M$ für die $q^{-1}(U) \subseteq X$ offen ist.

Bemerkung

- (i) $q : X \rightarrow M$ ist stetig.
- (ii) Ist Y ein weiterer topologischer Raum und $f : M \rightarrow Y$ eine Abbildung, so gilt

$$f \text{ ist stetig} \iff f \circ q \text{ ist stetig}$$

Bemerkung

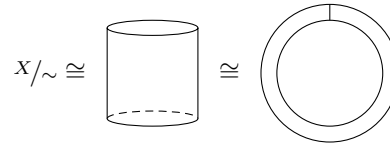
Sei \sim eine Äquivalenzrelation auf dem topologischen Raum X . Dann ist die Äquivalenzklassenabbildung $q : X \rightarrow X/\sim, x \mapsto [x]_\sim$ surjektiv. Insbesondere wird X/\sim durch die Quotiententopologie zu einem topologischen Raum.

2.10 Beispiele

$X = [0, 1] \times [0, 1]$: Definiere

"Zusammenkleben"
der Seiten

- (i) $(s, t) \sim (s', t') : \Leftrightarrow (s = s' \text{ und } t = t') \text{ oder } (s = 0, s' = 1, t = t')$. Dann



Möbiusband:
Verdrehen und
dann
Zusammenkleben

- (ii) $(s, t) \sim (s', t') : \Leftrightarrow (s = s' \text{ und } t = t') \text{ oder } (s = 0, s' = 1 \text{ und } t = 1 - t')$. Dann

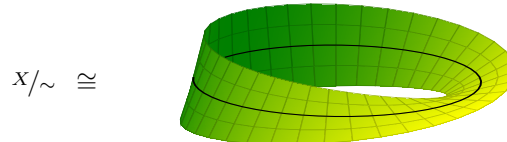


Abbildung 2: Möbius-Band, Quelle

- (iii) Sei $\mathbb{R}P^n$ die Menge aller 1-dimensionalen Unterräume des \mathbb{R}^{n+1} . Wir erhalten eine surjektive Abbildung

$$q : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}P^n, \quad q(v) := \langle v \rangle$$

$\mathbb{R}P^n$ mit der Quotiententopologie bezüglich q heißt der **reell projektive Raum** der Dimension n . Er ist eine n -Mannigfaltigkeit.

- (iv) Betrachte auf \mathbb{R} die Relation $x \sim y : \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$. Der Raum der Äquivalenzklassen bezeichnen wir mit \mathbb{R}/\mathbb{Q} . Dann ist \mathbb{R}/\mathbb{Q} mit der Quotiententopologie nicht hausdorffsch, obwohl \mathbb{R} natürlich hausdorffsch ist.

(Übung: Die Quotiententopologie auf \mathbb{R}/\mathbb{Q} ist die grobe Topologie.)

- (v) Sei $f : X \rightarrow X$ eine stetige Abbildung. Betrachte auf $X \times [0, 1]$ die Äquivalenzrelation

$$(x, t) \sim (x', t') : \Leftrightarrow (x = x' \text{ und } t = t') \text{ oder } (t = 0, t' = 1 \text{ und } x' = f(x))$$

Der Quotient $T_f := X \times [0, 1] / \sim$ heißt der **Abbildungstorus** von f .

3 Konvergenz

3.1 Definition

Sei X ein topologischer Raum und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X . Dann sagen wir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen $x \in X$, falls gilt: Zu jeder offenen Umgebung V von x , gibt es $N \in \mathbb{N}$, sodass $x_n \in V$ für alle $n \geq N$. Wir schreiben dann $x_n \rightarrow x$ oder $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$. x heißt ein Grenzwert von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Bemerkung

Bezüglich der groben Topologie ist jeder Punkt Grenzwert jeder Folge.

Beispiel

Betrachte die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Teilmengen auf dem Raum $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Dann gilt für Folgen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von stetigen Abbildungen $f_n \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$f_n \rightarrow f \iff \forall a < b \text{ konvergiert } f_n|_{[a,b]} \rightarrow f|_{[a,b]} \text{ gleichmäßig.}$$

3.2 Lemma (Eindeutigkeit von Grenzwerten)

Sei X hausdorffsch. Gilt $x_n \rightarrow x$ und $x_n \rightarrow y$, so folgt $x = y$.

Beweis

Übung!

3.3 Definition

Eine nichtleere Menge Λ mit einer Relation " \leq " heißt **gerichtet**, falls gilt

$$(i) \quad \forall \lambda \in \Lambda : \lambda \leq \lambda$$

$$(ii) \quad \forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \Lambda : \lambda_1 \leq \lambda_2 \wedge \lambda_2 \leq \lambda_3 \Rightarrow \lambda_1 \leq \lambda_3 \quad (\text{transitiv})$$

$$(iii) \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda : \exists \mu : \lambda_1 \leq \mu \wedge \lambda_2 \leq \mu$$

3.4 Definition

Sei X ein topologischer Raum. Ein **Netz** $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ in X besteht aus einer gerichteten Menge Λ und Elementen $x_\lambda \in X$ für $\lambda \in \Lambda$. Für $x \in X$ sagen wir $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ konvergiert gegen x , falls gilt:

$$\forall \text{ Umgebungen } U \text{ von } x : \exists \lambda_0 \in \Lambda : \forall \lambda \in \Lambda \text{ mit } \lambda \geq \lambda_0 \text{ gilt } x_\lambda \in U$$

Wir schreiben dann $x_\lambda \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} x$ oder $x_\lambda \rightarrow x$.

Beispiel

Sei X ein topologischer Raum und $x \in X$. Dann ist $\Lambda := \{U \mid U \text{ ist offene Umgebung von } x\}$ gerichtet bezüglich

$$U \leq V :\Leftrightarrow V \subseteq U$$

Ist nun $x_U \in U$ für alle $U \in \Lambda$ so $x_U \rightarrow x$.

3.5 Lemma (Eindeutigkeit von Grenzwerten)

Sei X hausdorffsch. Gilt $x_\lambda \rightarrow x$ und $x_\lambda \rightarrow y$, so folgt $x = y$.

Beweis

Angenommen $x \neq y$. Da X hausdorffsch ist existiert eine Umgebung U von x und V von y mit $U \cap V = \emptyset$.

$$x_\lambda \rightarrow x \Rightarrow \exists \lambda_U : x_\lambda \in U : \forall \lambda \geq \lambda_U$$

$$x_\lambda \rightarrow y \Rightarrow \exists \lambda_V : x_\lambda \in V : \forall \lambda \geq \lambda_V$$

Sei nun $\mu \in \Lambda$ mit $\mu \geq \lambda_U, \mu \geq \lambda_V$. Dann folgt $x_\mu \in U \cap V = \emptyset$ □

3.6 Definition

Sei $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ein Netz in X . Ein **Teilnetz** von $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ist eine gerichtete Menge Λ' mit einer Abbildung $f : \Lambda' \rightarrow \Lambda$, so dass gilt

$$\text{i) } \lambda'_1 \leq \lambda'_2 \Rightarrow f(\lambda'_1) \leq f(\lambda'_2) \quad (f \text{ erhält } \leq)$$

$$\text{ii) } \forall \lambda \in \Lambda : \exists \lambda' \in \Lambda' \text{ mit } \lambda \leq f(\lambda') \quad (f \text{ ist kofinal})$$

Oft schreiben wir $(x_{f(\lambda')})_{\lambda' \in \Lambda'}$ für ein Teilnetz.

Bemerkung

Ein Teilnetz einer Folge ist *nicht* notwendig eine Teilfolge.

4 Kompakte Räume

4.1 Definition

Eine Familie \mathcal{U} von offenen Teilmengen von X heißt eine **offene Überdeckung**, falls

$$\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U = X.$$

$\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ heißt eine **Teilüberdeckung**, falls immer noch $X \subseteq \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V$.

4.2 Definition

Ein topologischer Hausdorffraum X heißt **kompakt**, wenn jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

4.3 Definition

Eine Familie \mathcal{A} von abgeschlossenen Teilmengen von X hat die **endliche Durchschnittseigenschaft**, wenn für jedes $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$ mit $|\mathcal{A}_0| < \infty$ gilt

$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}_0} A \neq \emptyset.$$

4.4 Lemma

Sei X ein Hausdorffraum. Dann ist X genau dann kompakt, wenn gilt: Hat eine Familie \mathcal{A} von abgeschlossenen Teilmengen von X die endliche Durchschnittseigenschaft, so gilt

$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \neq \emptyset$$

Beweis

Ist \mathcal{U} eine Familie von offenen Teilmengen, so ist $\mathcal{A} := \{X \setminus U \mid U \in \mathcal{U}\}$ eine Familie von abgeschlossenen Teilmengen. Ist umgekehrt \mathcal{A} eine Familie von abgeschlossenen Teilmengen, so ist

$$\mathcal{U} := \{X \setminus A \mid A \in \mathcal{A}\}$$

eine Familie von offenen Teilmengen. Dann gilt:

- \mathcal{U} hat eine endliche Teilüberdeckung $\iff \mathcal{A}$ hat nicht die endliche Durchschnittseigenschaft.
- \mathcal{U} ist eine Überdeckung $\iff \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \emptyset$. □

4.5 Satz

Sei X ein Hausdorffraum. Dann sind äquivalent:

- 1) X ist kompakt.
- 2) Jedes Netz in X besitzt ein konvergentes Teilnetz.

Beweis

"1) \Rightarrow 2)": Sei $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ein Netz in X . Für $\lambda \in \Lambda$ sei $A_\lambda := \overline{\{x_{\lambda'} \mid \lambda' \geq \lambda\}}$.

Behauptung(*): $\mathcal{A} := \{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ hat die endliche Durchschnittseigenschaft. Sei $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$ endlich, also $\mathcal{A}_0 = \{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda_0\}$ für ein $\Lambda_0 \subseteq \Lambda$ endlich. Da Λ gerichtet ist, gibt es $\lambda \in \Lambda$ mit $\lambda \geq \mu$ für alle $\mu \in \Lambda_0$. Es folgt $x_\lambda \in \{x_{\lambda'} \mid \lambda' \geq \mu\}$ für alle $\mu \in \Lambda_0$. Insbesondere folgt aus

$$x_\lambda \in \bigcap_{\mu \in \Lambda_0} A_\mu$$

Da X kompakt ist, folgt aus (*)

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \neq \emptyset.$$

Wähle $x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$. Sei \mathcal{U} die Menge aller offenen Umgebungen von x . Sei

$$\Lambda_{\mathcal{U}} := \{(\lambda, U) \mid \lambda \in \Lambda, x_\lambda \in U \in \mathcal{U}\}$$

Durch $(\lambda, U) \leq (\lambda', U') \Leftrightarrow \lambda \leq \lambda' \text{ und } U \supseteq U'$ wird $\Lambda_{\mathcal{U}}$ zu einer gerichteten Menge: Sei (λ_1, U_1) und $(\lambda_2, U_2) \in \Lambda_{\mathcal{U}}$. Sei $U := U_1 \cap U_2$. Wähle $\lambda \in \Lambda$ mit $\lambda \geq \lambda_1$ und $\lambda \geq \lambda_2$. Da $x \in A_\lambda = \overline{\{x_{\lambda'} \mid \lambda' \geq \lambda\}}$ gibt es $\lambda' \geq \lambda$ mit $x_{\lambda'} \in U$. Also $(\lambda', U) \in \Lambda_{\mathcal{U}}$ und $(\lambda_1, U_1), (\lambda_2, U_2) \leq (\lambda', U)$. Mit $x_{(\lambda, U)} = x_\lambda$ ist $(x_\lambda, U)_{(\lambda, U) \in \Lambda_{\mathcal{U}}}$ das gesuchte Teilnetz.

"2) \Rightarrow 1)": Sei \mathcal{A} eine Familie von abgeschlossenen Teilmengen mit der endlichen Durchschnittseigenschaft. Sei $\Lambda := \{\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A} \mid \mathcal{A}_0 \text{ ist endlich}\}$. Λ ist gerichtet bezüglich $\mathcal{A}_0 \leq \mathcal{A}_1 \Leftrightarrow \mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}_1$. Zu $\mathcal{A}_0 \in \Lambda$ wähle

$$x_{\mathcal{A}_0} \in \bigcap_{A \in \mathcal{A}_0} A \neq \emptyset$$

Sei nun $(x_{f(\lambda)})_{\lambda \in \Lambda'}$ mit $f: \Lambda' \rightarrow \Lambda$ ein konvergentes Teilnetz von $(x_{\mathcal{A}_0})_{\mathcal{A}_0 \in \Lambda}$. Sei x der Grenzwert von $(x_{f(\lambda')})_{\lambda' \in \Lambda'}$.

Behauptung: $x \in \bigcap_{A \in \mathcal{A}_0} A$.

Sei $A \in \mathcal{A}_0$ und $U = X \setminus A$. Angenommen $x \in U$. Da U eine offene Umgebung von x ist und $x_{f(\lambda')} \rightarrow x$ gilt, gibt es $\lambda'_0 \in \Lambda'$ mit $x_{f(\lambda')} \in U$ für alle $\lambda' \geq \lambda'_0$. Zu $\{A\} \in \Lambda$ gibt es $\mu \in \Lambda'$ mit $f(\mu) \geq \{A\}$. Da Λ' gerichtet ist, gibt es $\mu' \geq \mu$ und $\mu' \geq \lambda'_0$. Es folgt $A \in f(\mu')$ und damit $x_{f(\mu')} \in A$, aber andererseits $x_{f(\mu')} \in U = X \setminus A$, da $\mu' \geq \lambda'_0$. \nexists \square

4.6 Bemerkung

Sei X ein metrischer Raum. Dann sind äquivalent:

- 1) X ist kompakt.
- 2) Jede Folge in X besitzt eine konvergente Teilfolge.

4.7 Satz von Tychonov

Sei $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie von kompakten topologischen Räumen. Dann ist auch $X := \prod_{i \in I} X_i$ kompakt.

Beweis

(unter Benutzung der nachfolgenden Punkte)

Ist $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ein Netz in $\prod_i X_i$, so besitzt dieses Netz ein universelles Teilnetz $(x_{f(\mu)})_{\mu \in \Lambda'}$. Für jedes i ist dann $p_i(x_{f(\mu)})_{\mu \in \Lambda'}$ ein universelles Netz in X_i und nach dem Lemma 4.11 konvergent. Daher ist $(x_{f(\mu)})_{\mu \in \Lambda'}$ bezüglich der Produkttopologie konvergent

4.8 Beispiel

Seien $(X_i, d_i)_{i \in \mathbb{N}}$ kompakte metrische Räume. Dann gibt es eine Metrik d auf $\prod X_i$, so dass die zugehörige Topologie die Produkttopologie ist. (Übung)

Beweis

Sei $p_j : \prod_i X_i \rightarrow X_j$ die Projektion auf den j -ten Faktor. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\prod_i X_i$. Wähle induktiv $\mathbb{N} = N_0 \supseteq N_1 \supseteq N_2 \supseteq \dots$ mit

- (i) $|N_i| = \infty$
- (ii) $(p_i(x_n))_{n \in N_i}$ ist eine konvergente Folge in X_i .

(Dies ist möglich, da X_i kompakt ist.) Wähle nun $n_k \in N_k$ induktiv, so dass $n_k > n_{k-1}$. Dann ist $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Für $i \in \mathbb{N}$ ist $(p_i(x_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}, k \geq i}$ eine Teilfolge der konvergenten Folge $(p_i(x_n))_{n \in N_i}$ und daher konvergent. Damit konvergiert auch $(p_i(x_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$ für jedes i . Daher konvergiert $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ punktweise, also in der Produkttopologie (Übung). \square

4.9 Definition

Sei $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ein Netz in X und $A \subseteq X$. Wir sagen $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ist **immer wieder in A** , falls gilt:

$$\forall \lambda \in \Lambda : \exists \mu \in \Lambda \text{ mit } \mu \geq \lambda \text{ und } x_\mu \in A$$

Wir sagen $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ist **schließlich in A** , falls gilt

$$\exists \lambda \in \Lambda : \forall \mu \in \Lambda \text{ mit } \mu \geq \lambda \text{ gilt } x_\mu \in A$$

Bemerkung

$x_\lambda \rightarrow X \iff$ Für jede Umgebung U von x ist x_λ schließlich in U .

4.10 Definition

Ein Netz $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ in X heißt **universell**, falls für jede Teilmenge $A \subseteq X$ gilt: Entweder ist $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ schließlich in A oder schließlich in $X \setminus A$.

Bemerkung

- Ist $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ universell und immer wieder in A , dann ist $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ schließlich in A .
- Ist $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ein universelles Netz in X und $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung, so ist auch $(f(x_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ ein universelles Netz in Y .

4.11 Lemma

Ist X kompakt und $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ein universelles Netz in X , so konvergiert $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ in X .

Beweis

Sei X kompakt und $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ein universelles Netz in X . Angenommen $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ konvergiert nicht in X . Dann gibt es zu jedem $x \in X$ genau eine offene Umgebung U_x von x , so dass $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ nicht schließlich in U_x ist. Da $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ universell ist, ist $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ schließlich in $X \setminus U_x$. Da $X = \bigcup_{x \in X} U_x$ und X kompakt ist, gibt es $x_1, \dots, x_k \in X$ mit $X = U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_k}$. Für jedes $i \in \{1, \dots, k\}$ sei $\lambda_i \in \Lambda$ mit $x_{\lambda_i} \in X \setminus U_{x_i}$ für $\mu \geq \lambda_i$. Sei nun $\mu \in \Lambda$ mit $\mu \geq \lambda_i$ für $i = 1, \dots, k$. Es folgt

$$x_\mu \in \bigcap_{i=1}^k (X \setminus U_{x_i}) = X \setminus \left(\bigcup_{i=1}^k U_{x_i} \right) = X \setminus X = \emptyset \quad \not\subset \quad \square$$

4.12 Proposition

Jedes Netz besitzt ein universelles Teilnetz.

Beweis

Sei $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ein Netz in X . Sei

$$\mathfrak{M} := \left\{ \mathfrak{B} \subseteq \mathcal{P}(X) \mid \begin{array}{l} (1) \quad B \in \mathfrak{B} \Rightarrow (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \text{ ist immer wieder in } B \\ (2) \quad B, B' \in \mathfrak{B} \Rightarrow B \cap B' \in \mathfrak{B} \end{array} \right\}$$

Dann ist $\{X\} \in \mathfrak{M}$, insbesondere $\mathfrak{M} \neq \emptyset$. Ist $\mathfrak{M}_0 \subseteq \mathfrak{M}$ mit

$$\mathfrak{B}, \mathfrak{B}' \in \mathfrak{M}_0 \Rightarrow \mathfrak{B} \subseteq (B')' \text{ oder } \mathfrak{B}' \subseteq \mathfrak{B}$$

so gilt $\bigcup_{\mathfrak{B} \in \mathfrak{M}_0} \mathfrak{B} \in \mathfrak{M}$. Nach dem Zornschen Lemma enthält \mathfrak{M} ein maximales Element \mathfrak{B} . Da \mathfrak{B} maximal ist, ist $X \in \mathfrak{B}$. Sei

$$\Lambda' := \{(B, \lambda) \mid B \in \mathfrak{B}, \lambda \in \Lambda, x_\lambda \in B\}.$$

Durch $(B, \lambda) \leq (B', \lambda') :\Leftrightarrow B \supseteq B', \lambda \leq \lambda'$ wird Λ' gerichtet.

Behauptung: $(x_\lambda)_{(B, \lambda) \in \Lambda'}$ ist universell.

Hilfssatz

Sei $(x_\lambda)_{(B, \lambda) \in \Lambda'}$ immer wieder in S . Dann gilt $S \in \mathfrak{B}$.

Beweis: Wir zeigen: $\mathfrak{B}^+ := \mathfrak{B} \cup \{S \cap B \mid B \in \mathfrak{B}\} \in \mathfrak{M}$. Da \mathfrak{B} maximal ist und $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{B}^+$ folgt $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}^+$ und $S \in \mathfrak{B}^+ = \mathfrak{B}$. Offenbar erfüllt \mathfrak{B}^+ (2). Es bleibt (1) zu zeigen.

Da $\mathfrak{B} \in \mathfrak{M}$ bleibt zu zeigen: $\forall B \in \mathfrak{B}$ ist $(x_\lambda)_{(\lambda \in \Lambda)}$ immer wieder in $B \cap S$. Sei $\lambda \in \Lambda$. Gesucht ist nun $\mu \geq \lambda$ mit $x_\mu \in B \cap S$. Da $B \in \mathfrak{B} \in \mathfrak{M}$ gibt es $\lambda' \in \Lambda, \lambda' \geq \lambda$ mit $x_{\lambda'} \in B$. Also $(B, \lambda') \in \Lambda'$. Da $(x_\lambda)_{(B, \lambda) \in \Lambda'}$ immer wieder in S ist, gibt es

$$\Lambda' \ni (A, \mu) \geq (B, \lambda')$$

mit $x_\mu \in S$. Da $(A, \mu) \in \Lambda'$ ist $x_\mu \in A \stackrel{(*)}{\subseteq} B$. Sei $S \subseteq X$. Ist $(x_\lambda)_{(B, \lambda) \in \Lambda'}$ weder schließlich in S noch schließlich in $X \setminus S$, so ist $(x_\lambda)_{(B, \lambda) \in \Lambda'}$ immer wieder in S und immer wieder in $X \setminus S$. Mit dem Hilfssatz folgt $S, X \setminus S \in \mathfrak{B} \Rightarrow \emptyset = S \cap (X \setminus S) \in \mathfrak{B} \nmid$ \square

4.13 Definition

Sei $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ der \mathbb{R} -Vektorraum aller beschränkten Abbildungen $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(n)| \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

ist eine Norm auf $\ell^\infty(\mathbb{Z})$.

4.14 Satz (Mittelbarkeit von \mathbb{Z})

Es gibt eine Abbildung $M : \ell^\infty(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

- a) M ist \mathbb{R} -linear
- b) M ist positiv: $f \geq 0 \Rightarrow M(f) \geq 0$
- c) $M(\mathbb{1}) = 1$ für $\mathbb{1} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\mathbb{1}(n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{Z}$

d) M ist \mathbb{Z} -invariant: Für $f \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$ sei $Tf \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$ mit $(Tf)(n) = f(n+1)$, dann gilt $M(f) = M(Tf)$.

Beweis

Sei $\mathfrak{M} := \{M : \ell^\infty(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R} \mid M \text{ erfüllt a), b), c)}\}$. Sei $M_n \in \mathfrak{M}$ mit $M_n(f) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n f(i)$. Dann gilt für $f \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$

$$\begin{aligned} M_n(f) &= M_n(Tf) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n f(i) - Tf(i) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n (f(i) - f(i+1)) \\ &= \frac{1}{n+1} (f(0) - f(n+1)) \end{aligned}$$

Es folgt $|M_n(f) - M_n(Tf)| \leq \frac{2 \cdot \|f\|_\infty}{n+1}$. Wir konstruieren nun eine kompakte Topologie auf \mathfrak{M} , dann können wir anschließend ein konvergentes Teilnetz der Folge $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ betrachten. Sei

$$X := \prod_{f \in \ell^\infty(\mathbb{Z})} [-\|f\|_\infty, \|f\|_\infty]$$

Aus a), b), c) folgt für $f \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$, $M \in \mathfrak{M}$ $M(f) \in [-\|f\|_\infty, \|f\|_\infty]$. Mittels

$$\mathfrak{M} \ni M \mapsto (M(f))_{f \in \ell^\infty(\mathbb{Z})} \in X$$

wird \mathfrak{M} zu einem abgeschlossenen Unterraum von X . \mathfrak{M} ist kompakt bezüglich der Produkttopologie auf X , also bezüglich punktweiser Konvergenz.

Sei nun $\alpha : \Lambda \rightarrow \mathbb{N}$, sodass $M_{\alpha(\lambda)} \rightarrow M \in \mathfrak{M}$ (existiert da \mathfrak{M} kompakt). Es folgt

$$\forall f \in \ell^\infty(\mathbb{Z}) : M_{\alpha(\lambda)}(f) \rightarrow M(f)$$

Wegen $M_{\alpha(\lambda)}(f) - M_{\alpha(\lambda)}(Tf) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} M(f) - M(Tf)$ und

$$|M_{\alpha(\lambda)}(f) - M_{\alpha(\lambda)}(Tf)| \leq \frac{2 \cdot \|f\|_\infty}{\alpha(\lambda) + 1} \rightarrow 0$$

folgt $M(f) = M(Tf)$ für alle $f \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$. □

5 Kompaktifizierungen

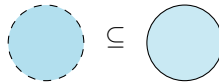
5.1 Definition

Sei X ein topologischer Raum. Ein kompakter Raum \bar{X} heißt eine **Kompaktifizierung** von X , falls er X als offenen, dichten Unterraum enthält. (Oft heißt $\partial X := \bar{X} \setminus X$ der Rand der Kompaktifizierung)

5.2 Beispiele

(i) $(-1, 1) \subseteq [-1, 1]$

(ii) $\mathring{D}^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 < 1\} \subseteq D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 \leq 1\}$. Für $n = 2$:



$$\partial D^n = S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1\}$$

(iii) $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathring{D}^n$, $f(x) := \frac{x}{1+\|x\|_2}$ ist ein Homöomorphismus. Daher können wir \mathbb{R}^n zu

$$\overline{\mathbb{R}^n} := \mathbb{R}^n \cup (S^{n-1} \times \{\infty\}) \cong D^n$$

kompaktifizieren.

(iv) Definiere auf $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ folgende Topologie

$$\mathcal{O} := \{U \mid U \subseteq \mathbb{R}^n \text{ ist offen}\} \cup \{U \cup \{\infty\} \mid U \subseteq \mathbb{R}^n \text{ offen und } \exists R > 0 : \mathbb{R}^n \setminus B_R(0) \subseteq U\}$$

Dann ist $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ eine weitere Kompaktifizierung von \mathbb{R}^n . Übung: $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\} \cong S^n$

5.3 Definition

Ein Hausdorffraum X heißt **lokalkompakt**, wenn für jedes $x \in X$ und jede offene Umgebung U von x eine kompakte Umgebung K von x existiert mit $K \subseteq U$.

5.4 Beispiel

(i) \mathbb{R}^n ist lokalkompakt: Sei $x \in \mathbb{R}^n$ und $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von x . U offen $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq U$. Es folgt $\overline{B_{\varepsilon/2}(x)} \subseteq B_\varepsilon(x) \subseteq U$. Dann ist $\overline{B_{\varepsilon/2}(x)}$ eine kompakte Umgebung von x , die in U liegt.

(ii) Topologische Mannigfaltigkeiten sind lokalkompakt.

(iii) Offene Teilräume von lokalkompakten Räumen sind lokalkompakt.

5.5 Proposition

Sei K kompakt und $W \subseteq K$ offen. Dann ist W lokalkompakt. Insbesondere sind kompakte Räume auch lokalkompakt.

Beweis

Sei $x \in W$ und U eine offene Umgebung von x in W . K Hausdorff $\Rightarrow \forall y \in K \setminus U$ gibt es offene Umgebungen V_y von y und W_y von x mit $V_y \cap W_y = \emptyset$. Dann ist $\{V_y \mid y \in K \setminus U\}$ eine offene Überdeckung von $K \setminus U$. Da mit K auch $K \setminus U$ kompakt ist, gibt es $Y_0 \subseteq K \setminus U$ endlich mit

$$K \setminus U \subseteq \bigcup_{y \in Y_0} V_y$$

Nun ist $L := K \setminus \bigcup_{y \in Y_0} V_y$ kompakt. Da $\bigcap_{y \in Y_0} W_y \cap U$ offen ist und $(\bigcap_{y \in Y_0} W_y) \cap U \subseteq L$ ist L eine Umgebung von x . \square

5.6 Definition

Sei X lokalkompakt. Die **Einpunktkompaktifizierung** (EPK) von X ist $\text{EPK}(X) := X \cup \{\infty\}$ mit der folgenden Topologie:

$$U \subseteq X \cup \{\infty\} \text{ offen} : \Leftrightarrow U \subseteq X \text{ ist offen oder } U = (X \setminus K) \cup \{\infty\} \text{ mit } K \subseteq X \text{ kompakt}$$

5.7 Proposition

$\text{EPK}(X)$ ist kompakt. Ist X nicht kompakt, so ist $\text{EPK}(X)$ eine Kompaktifizierung von X .

Beweis

Sei \mathcal{U} eine offene Überdeckung von $\text{EPK}(X)$. Sei $U_0 \in \mathcal{U}$ mit $\infty \in U_0$. Dann existiert $K \subseteq X$ kompakt mit $U_0 = (X \setminus K) \cup \{\infty\}$. Da K kompakt ist, gibt es $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$ mit $K \subseteq U_1 \cup \dots \cup U_n$. Dann ist U_0, U_1, \dots, U_n eine endliche Teilüberdeckung von $\text{EPK}(X)$.

Zu zeigen: $\text{EPK}(X)$ ist Hausdorff. Seien $x, y \in \text{EPK}(X)$, $x \neq y$. Gilt $x \neq \infty \neq y$ so gibt es $U, V \subseteq X$ mit $x \in U$, $y \in V$ und $U \cap V = \emptyset$, da X hausdorffsch ist. Nach Definition sind dann U, V auch offen in $\text{EPK}(X)$. Andernfalls sei o.B.d.A. $x = \infty$. Da X lokalkompakt ist, gibt es eine Umgebung K von y mit $K \subseteq X$ kompakt. Dann sind $U := K$ und $V := (X \setminus K) \cup \{\infty\}$ disjunkte offene Umgebungen von x und y .

Insgesamt gezeigt: $\text{EPK}(X)$ ist kompakt. Sei X nicht kompakt. Ist U eine Umgebung von $\infty \in \text{EPK}(X)$, so gibt es $K \subseteq X$ kompakt mit $U = (X \setminus K) \cup \{\infty\}$. Dann ist $U \cap X = X \setminus K$. Da X nicht kompakt ist, ist $X \neq K$, also $X \setminus K \neq \emptyset$. Daher hat jede Umgebung von $\infty \in \text{EPK}(X)$ einen nicht-trivialen Schnitt mit X . Also ist $X \subseteq \text{EPK}(X)$ dicht. \square

5.8 Frage

Sei $f : X \rightarrow Y$ stetig, X, Y lokalkompakt. Gibt es dann eine stetige Fortsetzung $\bar{f} : \text{EPK}(X) \rightarrow \text{EPK}(Y)$ mit $\bar{f}(\infty) = \infty$?

Beispiel

(i) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) \equiv 0$. Dann ist $\bar{f} : \text{EPK}(\mathbb{R}) \rightarrow \text{EPK}(\mathbb{R})$ mit

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) = 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R} \\ \infty, & \text{falls } x = \infty \end{cases}$$

sicher nicht stetig. Natürlich ist aber $\tilde{f} : \text{EPK}(\mathbb{R}) \rightarrow \text{EPK}(\mathbb{R})$ mit $\tilde{f}(x) = 0 \forall x \in \text{EPK}(\mathbb{R})$ stetig.

(ii) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \geq 1 \\ x, & \text{falls } x \in [0, 1] \\ 0, & \text{falls } x \leq 0 \end{cases}$$

Dann gibt es keine stetige Fortsetzung $\bar{f} : \text{EPK}(\mathbb{R}) \rightarrow \text{EPK}(\mathbb{R})$, denn die Folge $x_n = n$ konvergiert in $\text{EPK}(\mathbb{R})$ gegen ∞ . Da $f(x_n) = 1 \forall n$ müsste $\bar{f}(\infty) = 1$ sein. Die Folge $y_n = -n$ konvergiert in $\text{EPK}(\mathbb{R})$ auch gegen ∞ . Da $f(y_n) = 0 \forall n$ müsste $\bar{f}(\infty) = 0$ sein \nmid .

5.9 Definition

Seien X und Y lokalkompakt. Eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt **eigentlich**, wenn für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq Y$ auch $f^{-1}(K) \subseteq X$ kompakt ist.

5.10 Satz

Seien X, Y lokalkompakt und $f : X \rightarrow Y$ stetig. Dann sind äquivalent:

- (1) f ist eigentlich
- (2) $\bar{f} : \text{EPK}(X) \rightarrow \text{EPK}(Y)$ mit

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \in X \\ \infty, & \text{falls } x = \infty \end{cases}$$

ist stetig

Beweis

"(1) \Rightarrow (2)": Sei $U \subseteq \text{EPK}(Y)$ offen. Ist $\infty \notin U$, so ist $\bar{f}^{-1}(U) = f^{-1}(U)$ offen, da f stetig ist. Ist $\infty \in U$, so gibt es $K \subseteq Y$ mit $U = (X \setminus K) \cup \{\infty\}$. Da f eigentlich ist, ist auch $L := f^{-1}(K) \subseteq X$ kompakt und $\bar{f}^{-1}(U) = (X \setminus L) \cup \{\infty\}$ ist offen in $\text{EPK}(X)$.

"(2) \Rightarrow (1)": Sei $K \subseteq Y$ kompakt. Dann ist $U = (Y \setminus K) \cup \{\infty\} \subseteq Y$ offen. Da \bar{f} stetig ist, ist auch $\bar{f}^{-1}(U) = (X \setminus f^{-1}(K)) \cup \{\infty\}$ offen. Damit ist $f^{-1}(K) \subseteq X$ kompakt. \square

6 Der Approximationssatz von Stone-Weierstraß

6.1 Definition

Sei X ein lokalkompakter Raum. Eine stetige Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ **verschwindet** im Unendlichen, falls für jedes $\varepsilon > 0$

$$K_\varepsilon := \{x \in X \mid |f(x)| \geq \varepsilon\}$$

kompakt ist. Die **Algebra** aller solchen Funktionen bezeichnen wir mit $C_0(X)$ und für $f \in C_0(X)$ setzen wir

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)| = \max_{x \in X} |f(x)|$$

$\|\cdot\|_\infty$ ist eine Norm auf $C_0(X)$.

Bemerkung

$f : X \rightarrow \mathbb{R}$ liegt in $C_0(X) \iff \bar{f} : \text{EPK}(X) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \in X \\ 0, & \text{falls } x = \infty \end{cases}$ ist stetig.

6.2 Definition

Sei $\mathcal{B} \subseteq C_0(X)$. Wir sagen, dass \mathcal{B} die Punkte von X **streng trennt**, falls es zu $x, y \in X, x \neq y$ ein $f \in \mathcal{B}$ gibt mit $0 \neq f(x) \neq f(y) \neq 0$.

Bemerkung

Sei $\mathcal{A} \subseteq C_0(X)$ eine Unteralgebra. Gilt

- a) $\forall x, y \in X : \exists f \in \mathcal{A} : f(x) \neq f(y)$
- b) $\forall x \in X : \exists g \in \mathcal{A} : g(x) \neq 0$

so trennt \mathcal{A} die Punkte von X streng.

Beispiel

Sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Sei $\mathcal{A} := \{x \mapsto p(x) \mid p \in R[t]\} \subseteq C_0([a, b])$. Dann trennt \mathcal{A} die Punkte von $[a, b]$ streng.

6.3 Satz (Stone-Weierstraß)

Sei X ein lokalkompakter Raum und sei $\mathcal{A} \subseteq C_0(X)$ eine Unteralgebra, die die Punkte von X streng trennt. Dann ist $\mathcal{A} \subseteq C_0(X)$ dicht bezüglich $\|\cdot\|_\infty$.

Beweis (mit Lemma 1, 2, 3)

Sei $h \in C_0(X)$ beliebig. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Zu zeigen: $\exists f \in \bar{\mathcal{A}} : \|f - h\|_\infty < \varepsilon$

Schritt 1: Wir konstruieren für $y \in X$ $f_y \in \bar{\mathcal{A}}$ mit

- a) $f_y(y) = h(y)$
- b) $f_y(z) \geq h(z) - \varepsilon$ für alle $z \in X$

Zu $x \in X$ gibt es nach Lemma 3 (6.9) $g_x \in \mathcal{A}$ mit

$$g_x(y) = h(y) \quad \text{und} \quad g_x(x) = h(x).$$

Sei $U_x := \{z \in X \mid g_x(z) > h(z) - \varepsilon\}$. Da g_x und h stetig sind, ist U_x offen. Da g_x und h in ∞ verschwinden, ist $X \setminus U_x$ kompakt. Wegen $g_x(x) = h(x)$ ist $x \in U_x$. Zu festem $x_1 \in X$ gibt es

dann x_2, \dots, x_k mit $X \setminus U_{x_1} \subseteq \bigcup_{i=2}^k U_{x_i}$. Dann gilt auch

$$X \subseteq \bigcup_{i=2}^k U_{x_i}$$

$f_y := \max\{g_{x_1}, \dots, g_{x_k}\}$ ist die gesuchte Funktion. Wegen Lemma 2 (6.7) bzw. der Bemerkung 6.8 gilt $f_y \in \mathcal{A}$.

Schritt 2: Konstruktion von f . Zu $y \in X$ sei $V_y := \{z \in X \mid f_y(z) < h(z) + \varepsilon\}$. Wieder ist V_y offen, $X \setminus V_y$ kompakt und $y \in V_y$. Also gibt es wieder y_1, \dots, y_l mit $X = \bigcup_{i=1}^l V_{y_i}$. Für $f := \min\{f_{y_1}, \dots, f_{y_l}\}$ gilt dann

$$h(z) - f(z) = \max_i h(z) - f_{y_i}(z) < \varepsilon$$

da $f_{y_i}(z) \geq h(z) - \varepsilon \stackrel{a)}{\Rightarrow} h(z) - f_{y_i}(z) \leq \varepsilon$ für jedes i . Weiter gilt

$$f(z) - h(z) = \min_i f_{y_i}(z) - h(z) < \varepsilon$$

nach Definition der V_{y_i} . Also $\|f - h\|_\infty < \varepsilon$. □

6.4 Satz von Dini

Sei $(f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}}$ eine punktweise monoton wachsende Folge stetiger Funktionen, die punktweise gegen die stetige Funktion f konvergiert. Dann $f_n \rightarrow f$ gleichmäßig, d.h. $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$.

Beweis

Sei $\varepsilon > 0$. Zu jedem $t \in [0, 1]$ gibt es n_t mit

$$\forall n \geq n_t : f(t) \geq f_n(t) \geq f_{n_t}(t) \geq f(t) - \varepsilon.$$

Da f und f_{n_t} stetig sind, ist $U_t := \{s \in [0, 1] \mid f(s) - f_{n_t}(s) < \varepsilon\}$ offen. Da $[0, 1]$ kompakt ist, gibt es $t_0, \dots, t_k \in [0, 1]$ mit

$$[0, 1] = U_{t_0} \cup \dots \cup U_{t_k}$$

Für alle $n \geq \max\{n_{t_0}, \dots, n_{t_k}\}$ folgt $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$. □

6.5 Lemma 1

Sei $g(t) = \sqrt{t}$ für $t \in [0, 1]$. Es gibt eine Folge $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von reellen Polynomen so dass $p_n \rightarrow g$ gleichmäßig auf $[0, 1]$ und $p_n(0) = 0$.

Beweis

Sei $p_0 \equiv 0$ und für $n > 0$

$$p_{n+1}(t) := p_n(t) - \frac{1}{2} \cdot (p_n(t)^2 - t)$$

Dann $p_n(0) = 0$. Per Induktion nach n zeigen wir: $0 \leq p_n(t) \leq \sqrt{t}$ für alle $t \in [0, 1]$

$n = 0$ ✓

$n \mapsto n + 1$

$$\begin{aligned} p_{n+1}(t) - \sqrt{t} &= p_n(t) - \sqrt{t} - \frac{1}{2}(p_n(t)^2 - t) = (p_n(t) - \sqrt{t}) - \frac{1}{2}(p_n(t) - \sqrt{t})(p_n(t) + \sqrt{t}) \\ &= \underbrace{(p_n(t) - \sqrt{t})}_{\leq 0} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2}(p_n(t) + \sqrt{t})\right)}_{\substack{\text{IV.: } \leq 2\sqrt{t} \\ \geq 0}} \end{aligned}$$

Also $p_{n+1}(t) - \sqrt{t} \leq 0$. Es folgt, dass $p_n(t)$ monoton wachsend ist für jedes t . Wegen $p_n(t) \leq \sqrt{t}$ existiert $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(t)$ für $t \in [0, 1]$. Es folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} p_{n+1}(t) - \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} (p_{n+1}(t) - p_n(t)) = \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{2}(p_n(t)^2 - t) \\ &= -\frac{1}{2} \left(\left(\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(t) \right)^2 - t \right) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(t) = \sqrt{t}$. Mit Dini (6.4) folgt $p_n \rightarrow g$ gleichmäßig. \square

6.6 Bemerkung

Sei $\mathcal{A} \subseteq C_0(X)$ eine Algebra. Ist $p \in \mathbb{R}[t]$ ein Polynom mit $p(0) = 0$ und $f \in \mathcal{A}$, so liegt auch $p \circ f \in \mathcal{A}$: $p = \sum_{i=1}^n a_i t^i$. Denn

$$p(f(t)) = \sum_{i=1}^n a_i f(t)^i = \left(\sum_{i=1}^n a_i f^i \right)(t) \in \mathcal{A}.$$

6.7 Lemma 2

Sei X lokalkompakt, $\mathcal{A} \subseteq C_0(X)$ eine Unter algebra. Dann gilt: $f \in \mathcal{A} \Rightarrow |f| \in \bar{\mathcal{A}}$ ($\bar{\mathcal{A}}$:= Abschluss von \mathcal{A} bezüglich $\|\cdot\|_\infty$)

Beweis

Sei $f \in \mathcal{A}$. O.B.d.A. sei $f(X) \subseteq [-1, 1]$. Dann $f(x)^2 \in [0, 1]$ für alle $x \in X$. Seien die p_n die Polynome aus Lemma 1 (6.5). Dann

$$\left| p_n(f(x)^2) - \sqrt{f(x)^2} \right| = |p_n(f(x)^2) - |f(x)|| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

gleichmäßig in $x \in X$. Es folgt $\|p_n(f^2) - |f|\|_\infty \rightarrow 0$. Wegen $f \in \mathcal{A}$ gilt $f^2 \in \mathcal{A}$ und nach 6.6 $p_n(f^2) \in \mathcal{A}$. Also $|f| \in \bar{\mathcal{A}}$. \square

6.8 Bemerkung

(i) Für $f, g \in \mathcal{A}$ liegen

$$\max(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|) \quad , \quad \min(f, g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|) \in \bar{\mathcal{A}}$$

(ii) Wegen $\bar{\mathcal{A}} = \bar{\bar{\mathcal{A}}}$ gilt auch $f, g \in \bar{\mathcal{A}} \Rightarrow \min(f, g), \max(f, g) \in \bar{\mathcal{A}}$.

6.9 Lemma 3

Sei X lokalkompakt, $\mathcal{A} \subseteq C_0(X)$ eine Unter algebra, die die Punkte von X streng trennt. Zu $x, y \in X$, $x \neq y$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gibt es dann $f \in \mathcal{A}$ mit $f(x) = \alpha$, $f(y) = \beta$.

Beweis

Es gibt $g \in \mathcal{A}$ mit $0 \neq g(x) \neq g(y) \neq 0$. Ansatz: Für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ betrachte $f := \lambda g + \mu g^2$.

$$\begin{aligned} f(x) = \alpha &\iff g(x)\lambda + g(x)^2\mu = \alpha \\ f(y) = \beta &\iff g(y)\lambda + g(y)^2\mu = \beta \end{aligned}$$

Da

$$\det \begin{pmatrix} g(x) & g(x)^2 \\ g(y) & g(y)^2 \end{pmatrix} = g(x)g(y)^2 - g(y)g(x)^2 = g(x)g(y)(g(y) - g(x)) \neq 0$$

gibt es $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, sodass das Gleichungssystem eine Lösung hat. \square

7 Metrisierbarkeit

7.1 Definition

Ein topologischer Raum X heißt **metrisierbar**, wenn es eine Metrik auf X gibt, so dass die zugehörige Topologie die Topologie von X ist.

Bemerkung

Ist X metrisierbar, so gibt es für jedes $x \in X$ eine abzählbare Umgebungsbasis \mathcal{U}_x bei x , also eine abzählbare Menge von offenen Umgebungen von x , sodass jede Umgebung von x eine Menge aus \mathcal{U}_x enthält.

Beispiel

$(X, \mathcal{O}_{\text{dis}})$ ist metrisierbar: $d_{\text{dis}}(x, y) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \neq y \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

7.2 Definition

Ein topologischer Hausdorffraum X heißt **normal**, wenn er die folgende Trennungseigenschaft hat: Sind $A, B \subseteq X$ abgeschlossen mit $A \cap B = \emptyset$, so gibt es $U, V \subseteq X$ offen mit $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ mit $U \cap V = \emptyset$.

Bemerkung

Metrisierbare Räume sind normal.

(Übung)

7.3 Satz (Urysohn)

Sei X ein normaler Raum, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt (1.14). Dann ist X metrisierbar.

Beweis (mit Urysohns Lemma, 7.4)

Sei \mathcal{U} eine abzählbare Basis der Topologie von X . Da X normal ist, gibt es zu jedem Paar $U, V \in \mathcal{U}$ mit $\bar{U} \subseteq V$ (also $\bar{U} \cap X \setminus V = \emptyset$) eine stetige Funktion $f_{U,V} : X \rightarrow [0, 1]$ mit $f_{U,V}(x) = 0$ für $x \in \bar{U}$ und $f_{U,V}(y) = 1$ für $y \notin V$ (7.4). Da \mathcal{U} abzählbar ist, ist das abzählbare Produkt

$$Z := \prod_{\substack{U, V \in \mathcal{U} \\ \bar{U} \subseteq V}} [0, 1]$$

metrisierbar (Übung, Blatt 4). Wir definieren $F : X \rightarrow Z$ durch

$$F(x) := \left(f_{U,V}(x) \right)_{\substack{U, V \in \mathcal{U} \\ \bar{U} \subseteq V}}$$

Da die $f_{U,V}$ stetig sind, ist F bezüglich der Produkttopologie auf Z auch stetig. Es bleibt zu zeigen: $F : X \rightarrow F(X) \subseteq Z$ ist ein Homöomorphismus.

Sind $x, y \in X$ mit $x \neq y$, so gibt es $U, V \in \mathcal{U}$ mit $\bar{U} \subseteq V$, $x \in U$, $y \notin V$. Daher gilt $f_{U,V}(x) = 0 \neq 1 = f_{U,V}(y)$. Insbesondere ist F injektiv; durch Einschränkung auf das Bild also bijektiv. Es genügt nun zu zeigen, dass F offene Mengen von X auf offene Mengen in $F(X)$ abbildet. Sei $W \subseteq X$ offen, sei $x \in W$. Wir müssen eine offene Menge $O \subseteq Z$ finden mit $F(x) \in O$ und $F^{-1}(O) \subseteq W$.

Behauptung: $\exists U_0 \in \mathcal{U}$ mit $x \in U_0, \bar{U}_0 \subseteq W$.

Sei $O := \prod_{\bar{U} \subseteq V} I_{U,V}$ mit

$$I_{U,V} = \begin{cases} [0, 1), & \text{falls } U = U_0, V = W \\ [0, 1], & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist $F^{-1}(O) = f_{U_0, W}^{-1}([0, 1)) \subseteq W$ und $F(x) \in O$, da $f_{U_0, W}(x) = 0$.

Beweis der Behauptung

Da X Hausdorff ist, ist $\{x\}$ abgeschlossen. Da auch $X \setminus W$ abgeschlossen ist, gibt es offene Mengen U_1 und V_1 mit $U_1 \cap V_1 = \emptyset$, $x \in U_1$ und $X \setminus W \subseteq V_1$. Insbesondere ist $\overline{U_1} \subseteq X \setminus V_1 \subseteq W$. Da \mathcal{U} eine Basis ist, gibt es $U_0 \in \mathcal{U}$ mit $x \in U_0$ und $U_0 \subseteq U_1$. \square

7.4 Urysohns Lemma

Sei X normal und $A, B \subseteq X$ abgeschlossen mit $A \cap B = \emptyset$. Dann gibt es eine stetige Funktion $f : X \rightarrow [0, 1]$ mit $f(a) = 0$ für alle $a \in A$ und $f(b) = 1$ für alle $b \in B$.

Beweis

Sei $U_1 := X \setminus B$. Da X normal ist, gibt es $U_0 \subseteq X$ offen mit $A \subseteq U_0$ und $U_0 \cap B = \emptyset$, also $\overline{U_0} \subseteq U_1$. ($A \subseteq U_0$ und $V_0 \supseteq B$ mit $U_0 \cap V_0 = \emptyset \Rightarrow \overline{U_0} \cap B = \emptyset$ also $\overline{U_0} \subseteq U_1$)

Ebenso finden wir

- $U_{1/2} \subseteq X$ offen mit $\overline{U_0} \subseteq U_{1/2}$ und $\overline{U_{1/2}} \subseteq U_1$,
- $U_{1/4}, U_{3/4} \subseteq X$ offen mit $\overline{U_0} \subseteq U_{1/4}$, $\overline{U_{1/4}} \subseteq U_{1/2}$ und $\overline{U_{1/2}} \subseteq U_{3/4}$, $\overline{U_{3/4}} \subseteq U_1, \dots$

Induktiv finden wir für jedes $r = \frac{m}{2^n}$ mit $0 \leq m \leq 2^n$ eine offene Menge $U_r \subseteq X$ so dass gilt: $\overline{U_r} \subseteq U_s$ für $r < s$ mit $A \subseteq U_0$ und $B = X \setminus U_1$. Sei nun $f : X \rightarrow [0, 1]$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in B \\ \inf\{r \mid x \in U_r\}, & \text{falls } x \notin B \end{cases}$$

Für $\alpha \in [0, 1]$ ist $f^{-1}([0, \alpha)) = \bigcup_{r < \alpha} U_r$ offen und

$$f^{-1}((\alpha, 1]) = \bigcup_{r > \alpha} X \setminus U_r = \bigcup_{r > \alpha} X \setminus \overline{U_r}$$

offen. Damit ergibt sich leicht die Stetigkeit von f . \square

8 Zusammenhängende topologische Räume

8.1 Definition

Sei X ein topologischer Raum.

- (1) X heißt **zusammenhängend**, falls er nicht als die disjunkte Vereinigung von zwei nicht leeren offenen Mengen geschrieben werden kann.
- (2) X heißt **wegzusammenhängend**, falls es zu allen $x, y \in X$ eine stetige Abbildung $\omega : [0, 1] \rightarrow X$ gibt mit $\omega(0) = x$ und $\omega(1) = y$. ω heißt dann ein **Weg** von x nach y .
- (3) X heißt **lokal zusammenhängend**, falls es für jedes $x \in X$ und jede offene Umgebung U von x eine zusammenhängende Umgebung V von x gibt mit $V \subseteq U$.
- (4) X heißt **lokal wegzusammenhängend**, falls es für jedes $x \in X$ und jede offene Umgebung U von x eine wegzusammenhängende Umgebung V von x gibt mit $V \subseteq U$.

8.2 Bemerkung

- (1) $\mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ ist nicht zusammenhängend und auch nicht wegzusammenhängend (ZWS!).
- (2) $[0, 1]$ ist zusammenhängend: Angenommen es wäre $[0, 1] = U \cup V$ mit U, V offen, $U \cap V = \emptyset$. Dann sind $U = [0, 1] \setminus V$ und $V = [0, 1] \setminus U$ auch abgeschlossen. O.B.d.A. sei $0 \in U$. Dann liegt $\inf V$ sowohl in \overline{U} als auch in \overline{V} . Also $U \cap V = \overline{U} \cap \overline{V} \neq \emptyset \nmid$.
Natürlich ist $[0, 1]$ auch wegzusammenhängend: Zu $x, y \in [0, 1]$ ist $\omega : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ mit $\omega(t) = (1-t) \cdot x + t \cdot y$ ein stetiger Weg von x nach y .
- (3) Ist $f : X \rightarrow Y$ stetig und surjektiv und X zusammenhängend, so ist auch Y zusammenhängend: Ist $Y = U \dot{\cup} V$, so ist auch $X = f^{-1}(U) \dot{\cup} f^{-1}(V)$ und es gilt $U \neq \emptyset \iff f^{-1}(U) \neq \emptyset$ und $V \neq \emptyset \iff f^{-1}(V) \neq \emptyset$.
- (4) Ist X wegzusammenhängend, so ist X auch zusammenhängend: Sei $X = U \cup V$ mit U, V offen und $U \neq \emptyset, V \neq \emptyset$. Sei $x \in U$ und $y \in V$. Da X wegzusammenhängend ist, gibt es einen Weg $\omega : [0, 1] \rightarrow X$ von x nach y . Dann ist $[0, 1] = \omega^{-1}(U) \cup \omega^{-1}(V)$. Es ist $0 \in \omega^{-1}(U)$ und $1 \in \omega^{-1}(V)$. Also $\omega^{-1}(U) \neq \emptyset \neq \omega^{-1}(V)$. Da $[0, 1]$ nach (1) zusammenhängend ist, ist $\omega^{-1}(U) \cap \omega^{-1}(V) \neq \emptyset$. Damit ist auch $U \cap V \neq \emptyset$.
- (5) Ist $f : X \rightarrow Y$ ein Homöomorphismus, so gelten:

$$X \text{ wegzusammenhängend} \iff Y \text{ wegzusammenhängend}$$

$$X \text{ zusammenhängend} \iff Y \text{ zusammenhängend}$$

8.3 Beispiel

- (i) Der sogenannte **Polnische Kreis** PK gegeben durch

$$PK = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \left| \begin{array}{ll} (x \in [-1, 1] \wedge y = 1) \\ \vee (x \in \{-1, 1\} \wedge y \in [0, 1]) \\ \vee (x \in [-1, 0] \wedge y = 0) \\ \vee (x = 0 \wedge y \in [-1/2, 1/2]) \\ \vee (x \in (0, 1] \wedge y = 1/2 \cdot \sin(\pi/x)) \end{array} \right. \right\}$$

ist wegzusammenhängend, aber nicht lokal wegzusammenhängend.

(ii)

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{ll} x = 0 & \wedge \quad y \in [-1/2, 1/2] \\ \vee \quad x \in (0, 1] & \wedge \quad y = 1/2 \cdot \sin(\pi/x) \end{array} \right\}$$

ist zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend.

8.4 Satz (Topologische Invarianz der Dimension)

Es gilt: $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m \iff n = m$

Beweis für $n = 1$

Angenommen es gibt einen Homöomorphismus $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $m \geq 2$. Durch Einschränkung von f erhalten wir dann auch einen Homöomorphismus $\mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{f(0)\}$. Es ist aber $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ nicht wegzusammenhängend und für $m \geq 2$, $x \in \mathbb{R}^m$ ist $\mathbb{R}^m \setminus \{x\}$ wegzusammenhängend \nmid . \square

Bemerkung

Eine Variante dieses Arguments kann benutzt werden, um zu zeigen, dass $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m$ genau dann gilt, wenn $n = m$. Dafür benötigt man aber höher dimensionale Varianten des Begriffs wegzusammenhängend.

9 Die Fundamentalgruppe

9.1 Definition

Ein topologischer Raum X heißt **einfach zusammenhängend**, wenn jede stetige Abbildung $f : S^1 \rightarrow X$ eine stetige Fortsetzung $F : D^2 \rightarrow X$ besitzt.

Bemerkung

Ein topologischer Raum X ist genau dann wegzusammenhängend, wenn jede stetige Abbildung $f : S^0 \rightarrow X$ eine stetige Fortsetzung $F : D^1 \rightarrow X$ besitzt.

9.2 Bemerkung

(i) \mathbb{R}^n ist einfach zusammenhängend: Sei $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig. Definiere $F : D^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch:

$$F(t \cdot v) := t \cdot f(v) \quad \text{für } t \in [0, 1], v \in S^1$$

(ii) Ist $X \cong Y$ dann: X einfach zusammenhängend $\Leftrightarrow Y$ einfach zusammenhängend.

(iii) Später: $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist nicht einfach zusammenhängend.

9.3 Definition

Seien $\omega_0, \omega_1 : [0, 1] \rightarrow X$ Wege in X . Eine Homotopie mit festen Endpunkten (oder relativ $\{0, 1\}$) zwischen ω_0 und ω_1 ist eine stetige Abbildung $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$, so dass gilt:

$$(i) \quad H(s, 0) = \omega_0(s) \quad \forall s \in [0, 1]$$

$$(ii) \quad H(s, 1) = \omega_1(s) \quad \forall s \in [0, 1]$$

$$(iii) \quad H(0, t) = \omega_0(0) = \omega_1(0) \quad \forall t \in [0, 1]$$

$$(iv) \quad H(1, t) = \omega_0(1) = \omega_1(1) \quad \forall t \in [0, 1]$$

Durch

$$\omega_0 \sim \omega_1 :\Leftrightarrow \exists \text{ Homotopie relativ } \{0, 1\} \text{ zwischen } \omega_0 \text{ und } \omega_1$$

wird eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Wege in X erklärt. Die Äquivalenzklassen heißen **Homotopieklassen**, wir schreiben $[\omega]$ für die Homotopieklasse von ω .

9.4 Definition

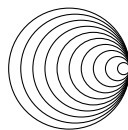
Ein Weg $\omega : [0, 1] \rightarrow X$ heißt eine **Schleife** in X , falls $\omega(0) = \omega(1)$.

9.5 Lemma

X ist genau dann einfach zusammenhängend, wenn jede Schleife in X homotop relativ $\{0, 1\}$ zu einer konstanten Schleife ist.

Beweis

Beweis per Zeichnung:



9.6 Notation

Für $x \in X$ bezeichne $c_x : [0, 1] \rightarrow X$ die konstante Schleife bei x ; $c_x(t) = x \quad \forall t \in [0, 1]$.

9.7 Definition

Seien ω und ω' Wege in X mit $\omega(1) = \omega'(0)$. Dann ist der **Kompositionsweg** $\omega * \omega' : [0, 1] \rightarrow X$ definiert durch

$$\omega * \omega'(t) = \begin{cases} \omega(2t), & \text{falls } t \in [0, 1/2] \\ \omega'(2t - 1), & \text{falls } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

9.8 Lemma

a) Seien $\omega, \omega', \omega''$ Wege in X mit $\omega(1) = \omega'(0)$ und $\omega'(1) = \omega''(0)$. Dann gilt

$$[(\omega * \omega') * \omega''] = [\omega * (\omega' * \omega'')]$$

b) Seien $\omega_0, \omega'_0, \omega_1, \omega'_1$ Wege in X mit $\omega_0(1) = \omega'_0(0)$, $\omega_1(1) = \omega'_1(0)$ und $[\omega_0] = [\omega_1]$ und $[\omega'_0] = [\omega'_1]$. Dann gilt

$$[\omega_0 * \omega'_0] = [\omega_1 * \omega'_1]$$

c) Sei ω ein Weg in X . Sei $\bar{\omega} : [0, 1] \rightarrow X$ der umgekehrte Weg, also $\bar{\omega}(t) := \omega(1 - t)$. Dann gilt $[\omega * \bar{\omega}] = [c_{\omega(0)}]$, $[\bar{\omega} * \omega] = [c_{\omega(1)}]$.

d) Sei ω ein Weg in X . Dann gilt

$$[\omega * c_{\omega(1)}] = [\omega]$$

Beweis (nur a)

(i) Sei $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ mit . Dann gilt

Zeichnung einfügen

$$(\omega * (\omega' * \omega''))(s) = ((\omega * \omega') * \omega'')(\varphi(s))$$

Die gesuchte Homotopie mit festen Endpunkten wird durch

$$H(s, t) := ((\omega * \omega') * \omega'')((1 - t)s + t\varphi(s))$$

definiert.

□

9.9 Korollar

Sei X ein topologischer Raum und $x_0 \in X$ fest. Dann wird

$$\pi_1(X, x_0) := \{[\omega] \mid \omega \text{ ist eine Schleife in } X \text{ mit } \omega(0) = x_0\}$$

durch die Komposition von Wegen zu einer Gruppe mit neutralem Element $e = [c_{x_0}]$.

9.10 Definition

$\pi_1(X, x_0)$ heißt die **Fundamentalgruppe** von X bezüglich des **Basispunktes** x_0 .

Bemerkung

X ist genau dann einfach zusammenhängend, wenn $\pi_1(X, x_0)$ für alle $x_0 \in X$ die triviale Gruppe ist.

9.11 Bemerkung

Sei η ein Weg in X von x_1 nach x_0 . Dann definiert

$$\pi_1(X, x_0) \ni [\omega] \xrightarrow{\text{conj}_\eta} [\eta * \omega * \bar{\eta}] \in \pi_1(X, x_1)$$

einen Isomorphismus zwischen $\pi_1(X, x_0)$ und $\pi_1(X, x_1)$. Wir zeigen nur: conj_η ist ein Gruppenhomomorphismus.

$$\begin{aligned} \text{conj}_\eta([\omega] * [\omega']) &= \text{conj}_\eta([\omega * \omega']) = [(\eta * (\omega * \omega')) * \bar{\eta}] \\ \text{conj}_\eta([\omega]) \cdot \text{conj}_\eta([\omega']) &= [(\eta * \omega) * \bar{\eta}] \cdot [(\eta * \omega') * \bar{\eta}] = [((\eta * \omega) * \bar{\eta}) * ((\eta * \omega') * \bar{\eta})] \\ &\stackrel{\text{a)}}{=} \left[\left(\eta * (\omega * (\bar{\eta} * \eta)) * \omega' \right) * \bar{\eta} \right] \stackrel{\text{c)}}{=} \left[\left(\eta * ((\omega * c_{\omega(1)}) * \omega') \right) * \bar{\eta} \right] \\ &\stackrel{\text{d)}}{=} [(\eta * (\omega * \omega')) * \bar{\eta}] \end{aligned}$$

Insbesondere hängt der Isomorphismus von $\pi_1(X, x_0)$ für wegzusammenhängende Räume nicht von der Wahl des Basispunktes ab.

10 Die Windungszahl

10.1 Frage

$$\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, x_0) = ? \quad \pi_1(S^1, x_0) = ?$$

10.2 Proposition

Sei $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ definiert durch $p(t) = e^{2\pi i t}$. Sei $\omega : [0, 1] \rightarrow S^1$ stetig und $t_0 \in \mathbb{R}$ mit $p(t_0) = \omega(0)$. Dann gibt es eine eindeutige stetige Abbildung $\hat{\omega} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\hat{\omega}(0) = t_0$ und $p \circ \hat{\omega} = \omega$.

$$\begin{array}{ccc} \{0\} & \xrightarrow{t_0} & \mathbb{R} \\ \downarrow & \searrow \hat{\omega} & \downarrow p \\ [0, 1] & \xrightarrow{\omega} & S^1 \end{array}$$

Ist $\eta : [0, 1] \rightarrow S^1$ mit $[\eta] = [\omega]$ und $\hat{\eta} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\hat{\eta}(0) = t_0$, $p \circ \hat{\eta} = \eta$ so gilt $\hat{\eta}(1) = \hat{\omega}(1)$.

Beweis

Homotopiehebungssatz (später)

□

10.3 Definition

Sei $\omega : [0, 1] \rightarrow S^1$ eine Schleife in S^1 mit $\omega(0) = \omega(1) = 1$. Sei $\hat{\omega} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $p \circ \hat{\omega} = \omega$ und $\hat{\omega}(0) = 0$. Dann heißt $\hat{\omega}(1) \in \mathbb{Z} = p^{-1}(1)$ die **Windungszahl** von ω .

10.4 Satz

Die Windungszahl definiert einen Isomorphismus $d : \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \mathbb{Z}$, $[\omega] \mapsto \hat{\omega}(1)$.

Beweis

Nach Proposition 10.2 ist d eine wohldefinierte Abbildung.

d ist surjektiv: Sei für $n \in \mathbb{Z}$ $\hat{\omega}_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\hat{\omega}_n(t) = t \cdot n$. Dann ist

$$d([p \circ \hat{\omega}_n]) = \hat{\omega}_n(1) = n$$

d ist Gruppenhomomorphismus: Seien $\omega, \eta : [0, 1] \rightarrow S^1$ Schleifen mit $\omega(0) = \eta(0) = 1$. Sei $\hat{\omega}, \hat{\eta} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\hat{\omega}(0) = 0, \hat{\eta}(0) = 0, p \circ \hat{\omega} = \omega, p \circ \hat{\eta} = \eta$. Also $d([\omega]) = \hat{\omega}(1)$ und $d([\eta]) = \hat{\eta}(1)$. Sei $\hat{\eta}_+ : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\hat{\eta}_+(s) = \hat{\eta}(s) + \hat{\omega}(1)$. Dann ist $\hat{\omega} * \hat{\eta}_+$ definiert, $(\hat{\omega} * \hat{\eta}_+)(0) = 0$, $(\hat{\omega} * \hat{\eta}_+)(1) = \hat{\eta}(1) + \hat{\omega}(1)$. Also

$$d([\omega * \eta]) = (\hat{\omega} * \hat{\eta}_+)(1) = \hat{\eta}(1) + \hat{\omega}(1) = d([\omega]) + d([\eta])$$

d ist injektiv: Sei $\omega : [0, 1] \rightarrow S^1$ eine Schleife mit $d([\omega]) = 0$. Dann gibt es $\hat{\omega} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\hat{\omega}(0) = 0 = \hat{\omega}(1)$ und $p \circ \hat{\omega} = \omega$. Nun ist $\hat{H} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\hat{H}(s, t) := (1 - t) \cdot \hat{\omega}(s)$$

eine Homotopie mit festen Endpunkten zwischen $\hat{\omega}$ und c_0 . Dann ist $p \circ \hat{H}$ eine Homotopie mit festen Endpunkten zwischen ω und c_1 . Also $[\omega] = e \in \pi_1(S^1, 1)$. □

10.5 Definition

Eine surjektive stetige Abbildung $p : \hat{X} \rightarrow X$ heißt eine **Überlagerung**, falls es zu jedem $x \in X$ eine Umgebung U gibt, so dass sich $p^{-1}(U)$ schreiben lässt als die disjunkte Vereinigung von offenen Mengen $U_i \subseteq \hat{X}$, sodass für jedes i die Einschränkung $p|_{U_i} : U_i \rightarrow U$ ein Homöomorphismus ist. Eine solche Umgebung U heißt eine **elementare Umgebung**.

10.6 Beispiel

- (1) $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1, t \mapsto e^{2\pi i t}$ ist eine Überlagerung.
- (2) $p_n : S^1 \rightarrow S^1, z \mapsto z^n$ ist eine Überlagerung.
- (3) Sind $p : \hat{X} \rightarrow X, q : \hat{Y} \rightarrow Y$ Überlagerungen, so ist $p \times q : \hat{X} \times \hat{Y} \rightarrow X \times Y$ eine Überlagerung.
zB: $\mathbb{R}^2 \rightarrow T^2 = S^1 \times S^1$
- (4) $S^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2 = S^2 / x \sim -x$ ist eine Überlagerung. (Übung!)

10.7 Definition

Sei $p : \hat{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung und $f : Z \rightarrow X$ eine stetige Abbildung. Eine **Hebung** von f (bezüglich p) ist eine stetige Abbildung $\hat{f} : Z \rightarrow \hat{X}$ mit $p \circ \hat{f} = f$

$$\begin{array}{ccc} \hat{X} & & \\ \hat{f} \uparrow & \searrow p & \\ Z & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

10.8 Homotopiehebungssatz

Sei $\hat{p} : \hat{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung, $H : Z \times [0, 1] \rightarrow X$ eine Homotopie und $\hat{f} : Z \rightarrow \hat{X}$ eine Hebung von $f = H(-, 0) := H|_{Z \times \{0\}}$. Dann gibt es eine *eindeutige* Hebung von H mit $\hat{H}(-, 0) = \hat{f}$

$$\begin{array}{ccc} Z \times \{0\} & \xrightarrow{\hat{f}} & \hat{X} \\ \downarrow i & \nearrow \hat{H} & \downarrow p \\ Z \times [0, 1] & \xrightarrow{H} & X \end{array}$$

Beweis

Sei \mathcal{U} eine Überdeckung von X durch elementare Umgebungen. Wir können \mathcal{U} mittels H zurückziehen und erhalten eine offene Überdeckung $H^{-1}(\mathcal{U}) := \{H^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{U}\}$ von $Z \times [0, 1]$. Sei $z_0 \in Z$. Da $\{z_0\} \times [0, 1]$ kompakt ist, gibt es $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ und $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$ mit

$$H(\{z_0\} \times [t_i, t_{i+1}]) \subseteq U_i$$

Da die U_i offen sind gibt es zu jedem i eine offene Umgebung V_i von z_0 mit $H(V_i \times [t_i, t_{i+1}]) \subseteq U_i$. Sei $V := \bigcap_{i=1}^n V_i$, dann $H(V \times [t_i, t_{i+1}]) \subseteq U_i$. Da alle U_i elementar sind, finden wir induktiv eindeutige Hebungen \hat{H}_i^V von $H|_{V \times [t_i, t_{i+1}]}$ mit

$$\hat{H}_1^V(-, 0) = \hat{f}|_V \quad \text{und} \quad \hat{H}_i^V(-, t_{i-1}) = \hat{H}_{i-1}^V(-, t_{i-1}).$$

Nun erhalten wir mit $\hat{H}^V(z, t) := \hat{H}_i^V(z, t)$ für $z \in V$, $t \in [t_{i-1}, t_i]$ eine eindeutige Hebung von $H|_{V \times [0,1]}$ mit $\hat{H}^V(-, 0) = \hat{f}|_V$. Dabei bleibt \hat{H}^V eindeutig auch wenn wir V verkleinern. Nun finden wir für jedes $z \in Z$ eine Umgebung V_z und eine eindeutige Hebung \hat{H}^{V_z} von $H|_{V_z \times [0,1]}$ mit $\hat{H}^{V_z}(-, 0) = \hat{f}|_{V_z}$. Wegen der Eindeutigkeit gilt

$$\hat{H}^{V_z}(\xi, 0) = \hat{H}^{V_{z'}}(\xi, t)$$

für $\xi \in V_z \cap V_{z'}$. Daher definiert $\hat{H}(z, t) := \hat{H}^{V_z}(z, t)$ die gesuchte eindeutige Hebung. \square

11 Induzierte Abbildungen

11.1 Lemma

Sei $f : X \rightarrow Y$ stetig mit $f(x_0) = y_0$. Dann definiert $f_*([\omega]) := [f \circ \omega]$ einen Gruppenhomomorphismus $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$.

Beweis

Wir zeigen nur, dass f_* wohldefiniert ist. Seien $\omega, \eta : [0, 1] \rightarrow X$ Schleifen mit $\omega(0) = x_0 = \eta(0)$ und $[\omega] = [\eta]$. Dann gibt es eine Homotopie $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ mit festen Endpunkten zwischen ω und η .¹ Dann ist $f \circ H$ eine Homotopie mit festen Endpunkten zwischen $f \circ \omega$ und $f \circ \eta$. Also

$$f_*([\omega]) = [f \circ \omega] = [f \circ \eta] = f_*([\eta]) \text{ in } \pi_1(Y, y_0) \quad \square$$

11.2 Definition

f_* heißt die von f **induzierte Abbildung**. Manchmal schreibt man auch $\pi_1(f)$ für f_* , um f_* von anderen induzierten Abbildungen zu unterscheiden.

Bemerkung

- (i) $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$
- (ii) $(\text{id}_X)_* = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)}$

11.3 Definition

Ein topologischer Raum X zusammen mit einem Basispunkt $x_0 \in X$, (X, x_0) heißt ein **punktierter Raum**. Eine **punktierte Abbildung** zwischen punktierten Räumen $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ ist eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ mit $f(x_0) = y_0$. Punktierte Abbildungen $f, g : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ heißen **punktiert homotop**, falls es eine Homotopie $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ von f nach g gibt mit $H(x_0, t) = y_0 \quad \forall t \in [0, 1]$.

11.4 Proposition (Homotopieinvarianz von π_1)

Seien $f, g : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ homotop. Dann gilt

$$f_* = g_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

Beweis

Sei H eine Homotopie zwischen f und g . Für $[\omega] \in \pi_1(X, x_0)$ ist $H \circ \omega$ eine Homotopie mit festen Endpunkten zwischen $f \circ \omega$ und $g \circ \omega$. Also

$$f_*([\omega]) = [f \circ \omega] = [g \circ \omega] = g_*([\omega]) \quad \square$$

11.5 Definition

Seien X, Y topologische Räume. Dann heißen X und Y **homotopieäquivalent**, falls es stetige Abbildungen $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow X$ gibt, so dass

$$f \circ g \simeq \text{id}_Y \text{ und } g \circ f \simeq \text{id}_X$$

Wir schreiben dann $X \simeq Y$ oder $X \xrightarrow{f} Y$. Entsprechendes benutzen wir auch für punktierte Räume. Falls $X \simeq \{0\}$, so sagen wir: X ist **zusammenziehbar**.

¹ $H(-, 0) = \omega, H(-, 1) = \eta, H(t, 0) = H(t, 1) = x_0$ für alle $t \in [0, 1]$

$f \simeq g : \Leftrightarrow f$
homotop zu g

11.6 Beispiel

- (1) S^{n-1} ist homotopieäquivalent zu $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$: Benutze $i : S^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ die Inklusion und $p : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow S^{n-1}, v \mapsto \frac{v}{\|v\|}$. Dann gilt

$$p \circ i = \text{id}_{S^{n-1}} \quad , \quad i \circ p \simeq \text{id}_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$$

mit der Homotopie $H(v, t) = t + (1-t)\frac{v}{\|v\|}$.

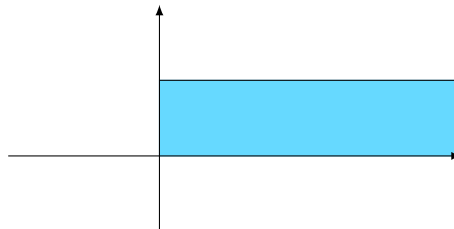
- (2) Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe Teilmenge und $x_0 \in K$. Dann ist (K, x_0) zusammenziehbar:

$i : (\{x_0\}, x_0) \rightarrow (K, x_0)$ die Inklusion

$p : (K, x_0) \rightarrow (\{x_0\}, x_0)$ die konstante Abbildung

$p \circ i = \text{id}_{(\{x_0\}, x_0)}$ und $i \circ p \simeq \text{id}_{(K, x_0)}$ mit der Homotopie $H(k, t) = t \cdot k + (1-t)x_0$

- (3) Auch $X := \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \mid x \in (0, \infty), y \in [0, 1]\}$ ist kontrahierbar.



Setze $H := \{(x, y) \mid x \leq 0\}$. Dann ist $X \simeq H \simeq \{x_0\}$

11.7 Korollar

Ist $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ eine Homotopieäquivalenz, so ist $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ ein Isomorphismus. Insbesondere ist $\pi_1(X, x_0) = \{1\}$, falls (X, x_0) zusammenziehbar ist.

Beweis

Sei $g : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ eine Homotopieinverse zu f , also $g \circ f \simeq \text{id}_X$, $f \circ g \simeq \text{id}_Y$. Dann ist $g_* = (f_*)^{-1}$ (und f_* ein Isomorphismus):

$$f_* \circ g_* = (f \circ g)_* = (\text{id}_Y)_* = \text{id}_{\pi_1(Y, y_0)}$$

$$g_* \circ f_* = (g \circ f)_* = (\text{id}_X)_* = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)}$$

□

11.8 Fixpunktsatz von Brouwer

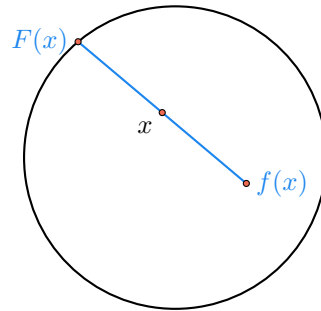
Jede stetige Abbildung $f : D^n \rightarrow D^n$ hat einen Fixpunkt.

Beweis

Für $n = 1$ ist dies eine Folgerung aus dem Zwischenwertsatz.

Angenommen $f : D^n \rightarrow D^n$ hat keinen Fixpunkt, also $f(x) \neq x$ für alle $x \in D^n$. Dann gibt es eine

stetige Abbildung $F : D^n \rightarrow S^{n-1}$ mit $F|_{S^{n-1}} = \text{id}_{S^{n-1}}$. Konstruktion von F



$$(i) \quad F(x) = t(x - f(x)) + x, \quad t \geq 0$$

$$(ii) \quad F(x) \in S^{n-1}$$

Sei $x_0 \in S^{n-1}$. Wir haben also

$$\begin{array}{ccc} (S^{n-1}, x_0) & \xrightarrow{\text{id}} & (S^{n-1}, x_0) \\ \downarrow i & \nearrow F & \\ (D^n, x_0) & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \pi_1(S^{n-1}, x_0) & \xrightarrow{(\text{id})_* = \text{id}} & \pi_1(S^{n-1}, x_0) \\ \downarrow i_* & \nearrow F_* & \\ \pi_1(D^n, x_0) & & \end{array}$$

Für $n = 2$ ist das zweite Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{(\text{id})_* = \text{id}} & \mathbb{Z} \\ \downarrow i_* & \nearrow F_* & \\ \{e\} & & \end{array}$$

Daher folgt $\text{id} = F_* \circ i_* = \text{triviale Abbildung}$ \nexists

□

11.9 Proposition

Für $n \in \mathbb{Z}$ sei $f_n : S^1 \rightarrow S^1, z \mapsto z^n$. Dann ist $(f_n)_* : \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \pi_1(S^1, 1)$ gegeben durch Multiplikation mit n :

$$(f_n)_*([\omega]) = n \cdot [\omega] \in \pi_1(S^1, 1) = \mathbb{Z}$$

Weiter sind die f_n paarweise nicht homotop zueinander.

Beweis

Sei $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1, t \mapsto e^{2\pi i t}$. Zu jeder Schleife $\omega : [0, 1] \rightarrow S^1$ mit $\omega(0) = \omega(1) = 1$ gibt es eine eindeutige Hebung $\hat{\omega} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ zu einem Weg mit $\hat{\omega}(0) = 0$. Der Isomorphismus $d : \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \mathbb{Z}$ bildet $[\omega]$ auf $\hat{\omega}(1) \in \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ ab. Sei $\hat{f}_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto nt$. Dann gilt $p \circ \hat{f}_n = f_n \circ p$ und $\hat{f}_n(0) = 0$. Ist $\hat{\omega}$ eine Hebung von ω , so ist $\hat{f}_n \circ \hat{\omega}$ eine Hebung von $f_n \circ \omega$:

$$\begin{aligned} (\hat{f}_n \circ \hat{\omega})(0) &= \hat{f}_n(0) = 0 \\ p \circ \hat{f}_n \circ \hat{\omega} &= f_n \circ p \circ \hat{\omega} = f_n \circ \omega \end{aligned}$$

Es folgt

$$d([f_n \circ \omega]) = (\hat{f}_n \circ \hat{\omega})(1) = \hat{f}_n(\hat{\omega}(1)) = \hat{f}_n(d[\omega]) = n \cdot d[\omega]$$

Da d ein Isomorphismus ist, folgt die Behauptung.

Mit der Homotopieinvarianz von induzierten Abbildungen folgt, dass die $f_n : (S^1, 1) \rightarrow (S^1, 1)$ als punktierte Abbildungen nicht punktiert homotop sind. Mit dem nächsten Lemma folgt das die f_n paarweise nicht homotop sind. \square

11.10 Lemma

Seien $f, g : (X, x_0) \rightarrow (S^1, 1)$ stetig. Sei $H : X \times [0, 1] \rightarrow S^1$ eine (unpunktierte) Homotopie zwischen f und g . Dann ist $\tilde{H} : X \times [0, 1] \rightarrow S^1$,

$$\tilde{H}(x, t) = \frac{H(x, t)}{H(x_0, t)}$$

ein punktierte Homotopie zwischen f und g .

11.11 Hauptsatz der Algebra

Jedes Polynom $p = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0 \in \mathbb{C}[X]$ von $\text{grad } p = n \geq 1$ hat eine Nullstelle.

Beweis

Angenommen p hat keine Nullstelle. In den Übungen haben wir gezeigt, dass dann $f_n : S^1 \rightarrow S^1$ homotop zu einer konstanten Abbildung ist. Aus der Proposition 11.9 folgt dann aber $n = 0$. \square

12 Eigentlich diskontinuierliche Wirkungen

12.1 Definition

Sei G eine Gruppe und X ein topologischer Raum.

- (1) Eine Wirkung $G \curvearrowright X$ von G auf X ist eine Abbildung $G \times X \rightarrow X$, $(g, x) \mapsto g \cdot x$ so dass
 - Für $g \in G$ ist $L_g : X \rightarrow X$, $x \mapsto g \cdot x$ stetig.
 - Für $g, h \in G$ gilt $g \cdot (h \cdot x) = (g \cdot h) \cdot x$
 - Für das neutrale Element $e \in G$ gilt $e \cdot x = x$ für alle $x \in X$
- (2) Eine Wirkung heißt **frei**, falls $g \cdot x = x \Rightarrow g = e$
- (3) Eine Wirkung heißt **eigentlich diskontinuierlich** (e.d.k.), falls es zu jedem $x \in X$ eine Umgebung U von x gibt mit $gU \cap U = \emptyset$ für alle $g \in G \setminus \{e\}$.
- (4) Durch $x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G : g \cdot x = y (\Leftrightarrow Gx = Gy)$ wird eine Äquivalenzrelation auf X erklärt. Die Äquivalenzklassen dieser Äquivalenzrelation sind genau die **Bahnen** $Gx = \{g \cdot x \mid g \in G\}$ der Wirkung. Die Menge der Äquivalenzklassen bezeichnen wir mit $G \backslash X := X / \sim$. Durch die Quotiententopologie bezüglich der Quotientenabbildung $X \rightarrow G \backslash X$, $x \mapsto Gx$ wird $G \backslash X$ zu einem topologischen Raum.

12.2 Lemma

Sei $G \curvearrowright X$ eine e.d.k. Wirkung. Dann ist $p : X \rightarrow G \backslash X$, $x \mapsto Gx$ eine Überlagerung.

Beweis

Offenbar ist p surjektiv und stetig. Sei $\bar{x} := Gx \in G \backslash X$. Sei U eine offene Umgebung von $x \in X$ für die $gU \cap U = \emptyset$ für alle $g \neq e$ ist. Dann ist $p(U)$ eine elementare Umgebung von \bar{x} , denn

$$p^{-1}(p(U)) = \bigcup_{g \in G} gU$$

ist die disjunkte Vereinigung der gU , $g \in G$. □

12.3 Beispiel

- (1) $\mathbb{Z}^n \curvearrowright \mathbb{R}^n$ mit $z \cdot x := x + z$ ist eine e.d.k. Wirkung: Ist $\varepsilon < \frac{1}{2}$ so gilt

$$B_\varepsilon(x) \cap B_\varepsilon(x) + z = B_\varepsilon(x) \cap B_\varepsilon(x + z) = \emptyset$$


für alle $x \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{Z}^n$. Da $\mathbb{Z} \backslash \mathbb{R} \cong S^1$ folgt $\mathbb{Z}^n \backslash \mathbb{R}^n = (\mathbb{Z} \backslash \mathbb{R})^n = (S^1)^n = T^n$. Wir erhalten eine Überlagerung $\mathbb{R}^n \rightarrow T^n$.

- (2) Sei $\mathbb{Z}/2 = \{e, \tau\}$. Durch $\tau \cdot v := -v$ erhalten wir eine e.d.k. Wirkung $\mathbb{Z}/2 \curvearrowright S^n$. Dann gilt

$$\mathbb{Z}/2 \backslash S^n \cong \mathbb{R}P^n$$

Wir erhalten eine Überlagerung $S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$.

Index

Die Seitenzahlen sind mit Hyperlinks zu den entsprechenden Seiten versehen, also anklickbar 

Abbildungstorus, 8
abgeschlossen, 2
Abschluss von Y , 4
Algebra, 19

Basis der Topologie, 3
Basispunkt, 27

diskrete Metrik, 1

eigentliche Abbildung, 18
Einpunktkompaktifizierung, 17
elementare Umgebung, 30
endliche Durchschnittseigenschaft, 11

Fundamentalgruppe, 27

gerichtete Menge, 9

Hausdorffraum, 5
normal, 22

hausdorffsch, 5

Hebung, 30

homotop, 7
punktiert, 32

Homotopie, 7

Homotopieklassen, 26

homotopieäquivalent, 32

homöomorph, 3

Homöomorphismus, 3

immer wieder in, 13

induzierte Abbildung, 32

Innere, 4

Isometrie, 2

kompakt, 11

Kompaktifizierung, 16

Kompositionsweg, 27

lokal kompakt, 16

metrischer Raum, 1

metrisierbar, 22

Netz, 9

universell, 13

Norm, 1

offen, 2

offene Umgebung, 4

offene Überdeckung, 11

p -adischer Betrag, 1

Polnischer Kreis, 24

Produkttopologie, 6

punktierte Abbildung, 32

Quotiententopologie, 7

Rand, 4

reell projektive Raum, 8

Schleife, 26

schließlich in, 13

Spurtopologie, 6

stetig, 2

Teilnetz, 10

Teilüberdeckung, 11

Topologie, 2

diskrete, 2

grobe, 2

koendliche, 2

Topologie der gleichmäßigen Konvergenz, 4

Topologie der punktweisen Konvergenz, 4

topologische Mannigfaltigkeit, 5

topologischer Raum, 2

lokal wegzusammenhängend, 24

lokal zusammenhängend, 24

einfach zusammenhängend, 26

punktiert, 32

wegzusammenhängend, 24

zusammenhängend, 24

Umgebung, 4

verschwindende Funktion, 19

Weg, 24


Windungszahl, 29

zusammenziehbar, 32

zweites Abzählbarkeitsaxiom, 3

Überlagerung, 30

Abbildungsverzeichnis

- | | |
|--|---|
| 1 Der Torus T^2 , Quelle   | 7 |
| 2 Möbius-Band, Quelle   | 8 |