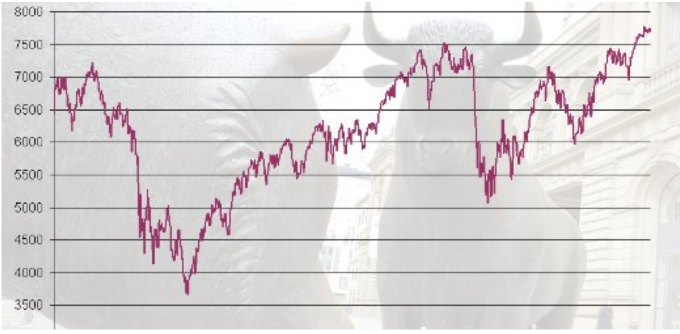
Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Fachbereich 10 Mathematik und Informatik

# Finanzmathematik




Tobias Wedemeier

23. Oktober 2014
gelesen von
PD Dr. Paulsen

Hierbei handelt es sich um eine Mitschrift der Vorlesung von **PD Dr. Paulsen**, WWU Münster, aus der Vorlesung **Finanzmathematik** im Wintersemester 2014/15. Dies ist kein Skript der Vorlesung und keine eigene Arbeit des Autors.

Für Fehler in der Mitschrift wird keine Haftung übernommen. Hinweise auf Fehler sind gerne gesehen, hierfür kann man mich in der Uni ansprechen oder alternativ eine e-Mail an: *tobias.wedemeier@gmx.de*
Auch ist eine Mitarbeit über Github möglich.

Wenn Teile aus der Vorlesung selber fehlen, können diese gerne an meine e-Mail versandt werden. Ich werde diese dann einarbeiten.

# Inhaltsverzeichnis

# Prolog

## Ziel

- Bewertung von Finanzderivaten, dies entspricht der Bewertung von Finanzmarktrisiken
- aktuarielle Bewertung von Risiken, biometrische Risiken ( Rente,. . . ) $\leftrightarrow$ Personenversicherungen, sonstige Risiken ( Unfall, . . . ) $\leftrightarrow$ Schadenversicherungen

## Schlagwörter

- Black-Scholes Formel
- äqivalentes Martnigalmaß
- Hedging, Replizieren durch Handel
- Arbitage
- Äquivalenzprinzip
- Risikoausgleich im Kollektier

## Hilfsmittel

Theorie der stochastischen Prozesse

- mathem. Modellierung von zeitlich abhängigen Zufallsphänomenen
- notwendig zur Beschreibung von Finanzmärkten

## Themen

- diskrete und kontinuierliche Martnigaltheorie
- diskrete und kontinuierliche Markov-Prozesse
- Wiener-Prozess, Brownsche Bewegung
- geometrische Brownsche Bewegung als Modell für Aktienkurse

# 1 Informelle Einführung

(i) Zweiteilung von Finanzgütern in:
 (1) Basisfinanzgüter
 (2) derivative Finanzgüter

(ii) zu (1) gehören:
- Aktien
- festverzinsliche Wertpapiere, Bonds
- Rohstoffe, Agrarprodukte

diese werden gehandelt auf:
- Aktienmärkte
- Rentenmärkte
- Warenmärkte

Diese werden als Kassamärkte bezeichnet.

(iii) zu (2) gehören:
- Optionen auf Aktien
- Swaps (Zinsderivate)
- futures und forwards

## 1.1 Option

Unterscheidung in Kauf- und Verkaufoptionen

- Eine Kaufoption (**Call**) gibt das Recht ein Basisfinanzgut (**Underlying**), zu einem im Voraus bestimmten fixen Preis, dem Ausübungspreis (**strike**, Basis), während (**amerikanische Option**) oder nur am Ende der Laufzeit der Option (**europäische Option**) zu kaufen.
- Eine Verkaufoption (**Put**) gibt das Recht ein Basisfinanzgut (Underlying), zu einem im Voraus bestimmten fixen Preis, dem Ausübungspreis (strike, Basis), während (amerikanische Option) oder nur am Ende der Laufzeit der Option (europäische Option) zu verkaufen.

Dies sind **unbestimmte Termingeschäfte** , da keinerlei Verpflichtung zum Kauf bzw. Verkauf besteht.

## 1.2 long, short

In der Regel nimmt der Käufer eines Finanzgutes eine **long-Position** ein, der Verkäufer eine **short-Position**. Der Verkäufer wird auch als writer (Zeichner) bezeichnet, da er die Option 'zeichnet'. Man kann zu jeder Zeit eine long oder short Position eingehen, insbesondere auch wenn man die Aktie gar nicht besitzt. Dies wird auch als **Leerverkauf** (short selling) bezeichnet, hierbei leiht man sich die Aktie von der Bank um sie zu verkaufen.

## 1.3 Payoff und Profit Diagramme

- Positionen in Finanzgütern bergen Chancen und Risiken.
- **Payoff**: Wert der Position wird gegen den Preis des Underlyings aufgetragen
- **Profit**: analog zum Payoff, unter Berücksichtigung von Kosten (Anfangswert der Postion)
- Beispiele: Option mit Laufzeit $T \in \mathbb{N}$, Underlying mit Preis $S_T$ in $T$

  (a) long call: strike $K$
  Payoff: $(S_T - K)^+$
  $S_T \leq K$ keine Ausübung, $S_T > K$ Ausübung der Option (Ablauf: leihe Geld, kaufe Aktie, verkaufe Aktie, zahle Geld zurück)

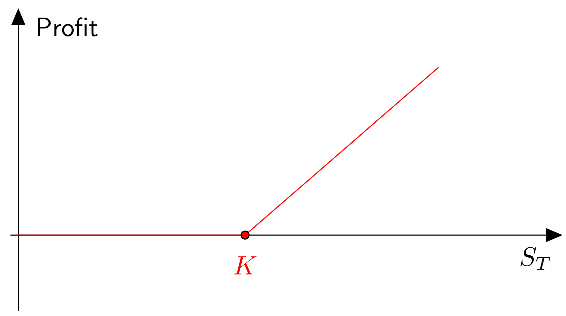



Abbildung 1: Payoff long call

Kosten: Anfangspreis des Calls $c > 0$. Profit: $(S_T - K)^+ - c$

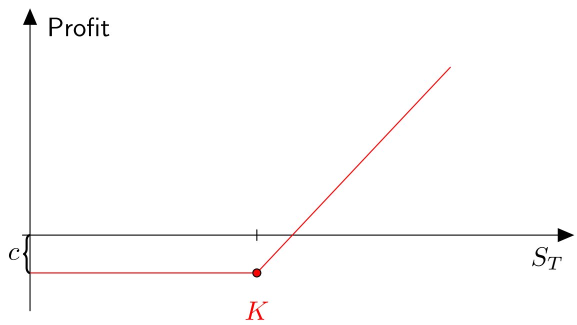



Abbildung 2: Profit long call

(b) long put: strike $K$
Payoff: $(K - S_T)^+$
$S_T > K$ keine Ausübung, $S_T \leq K$ Ausübung der Option (Ablauf: leihe Aktie, verkaufe Aktie, kaufe Aktie, gebe Aktie zurück)

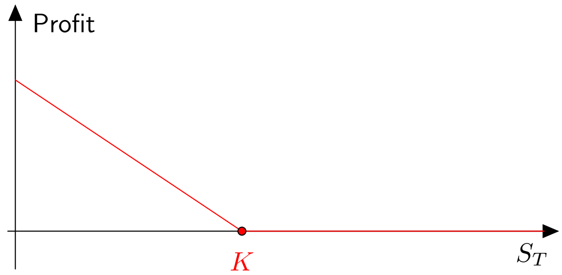



Abbildung 3: Payoff long put

Kosten: Anfangspreis de Option $p > 0$. Profit: $(K - S_T)^+ - p$

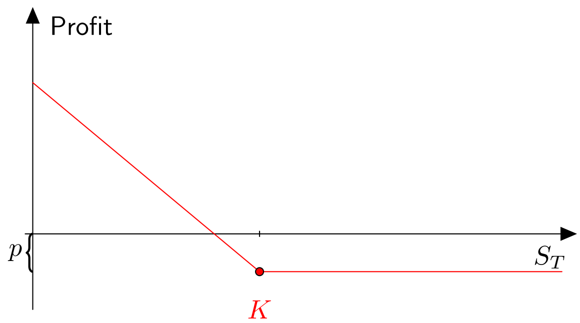



Abbildung 4: Profit long put

(c) short call:
Payoff: $-(S_T - K)^+$, Profit: $c - (S_T - K)^+$

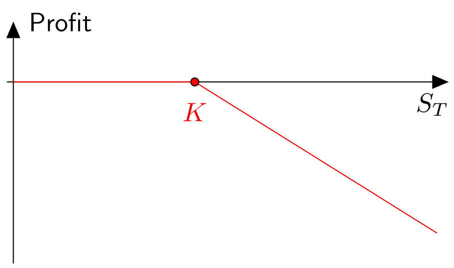



Abbildung 5: Payoff short call

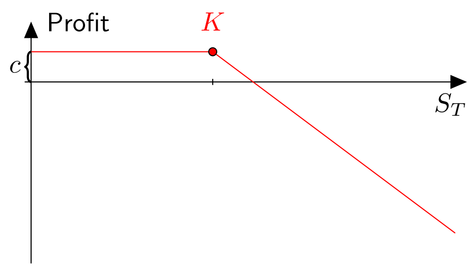



Abbildung 6: Profit short call

(d) short put:
Payoff: $-(K - S_T)^+$, Profit: $p - (K - S_T)^+$

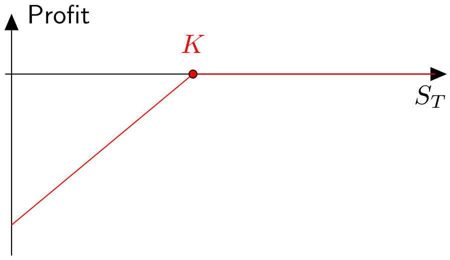



Abbildung 7: Payoff short put

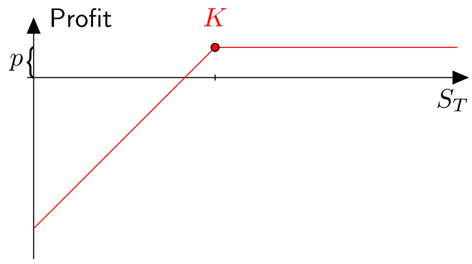



Abbildung 8: Profit short put

## 1.4 Strategien

Durch Kombination von einfachen Positionen bildet man **Strategien**.

**Bsp**

- Absicherung einer Aktie:
  - Aktie zum heutigen Kurs kaufen mit strike $K$
  - zur Absicherung gegen Kursverlust in $T$ wird eine Putoption zum strike $K$ gekauft
- Gesamtposition:

| | long Aktie | long put | Gesamt |
|---|---|---|---|
| Kosten | $K$ | $p$ | $K + p$ |
| Payoff | $S_T$ | $(K - S_T)^+$ | $S_T + (K - S_T)^+ = max\{K, S_T\}$ |

- Profit:

$$S_T + (K - S_T)^+ - (K + p) = (S_T - K) + (K - S_T)^+ - p = -p_{\{S_T \leq K\}} + (S_T - (K + p))_{\{S_T > K\}}$$

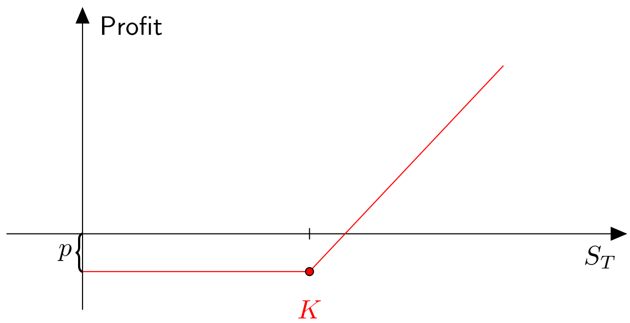



Abbildung 9: Bsp. Profit Diagramm

**long straddle**

- Idee: Spekulation auf eine starke Kursänderung

| | long call | long put | Gesamt |
|---|---|---|---|
| Kosten | $c$ | $p$ | $c+p$ |
| Payoff | $(S_T-K)^+$ | $(K-S_T)^+$ | $\|S_T-K\|$ |

Profit: $|S_T - K| - (c+p)$

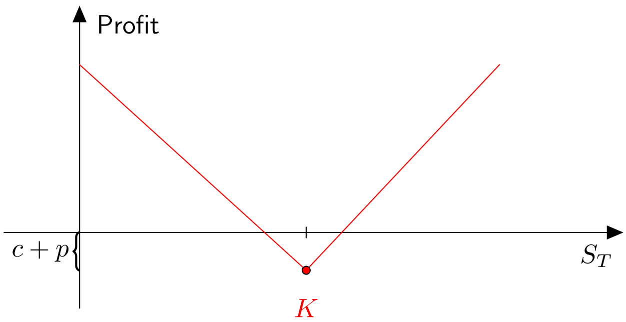



Abbildung 10: long straddle

**Bullish Vertical Spread**

Idee: Risikoarme Spekulation auf ein Anziehen des Kurses

Je kleiner der strike, desto teuerer ist der call.

| | long call mit strike $K_1$ | short call mit strike $K_2 > K_1$ | Gesamt |
|---|---|---|---|
| Kosten | $c_1$ | $-c_2$ | $c_1 - c_2 > 0$ |
| Payoff | $(S_T-K_1)^+$ | $-(S_T-K_2)^+$ | $(S_T-K_1)_{\{K_1<S_T<K_2\}} + (K_2-K_1)_{\{S_T>K_2\}}$ |

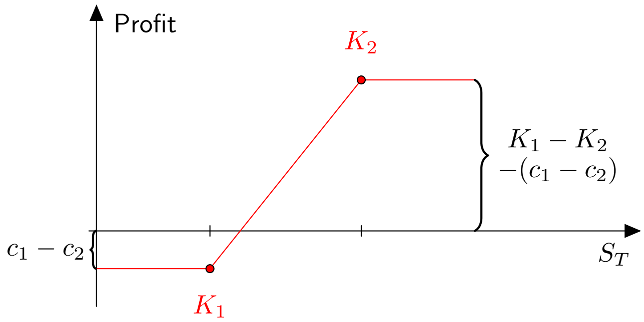



Abbildung 11: Bullish Vertical Spread

**Butterfly Spread**

Idee: Risikoarme Spekulation auf eine Seitwärtsbewegung des Kurses

strike: $K_1 < K_2 < K_3$

| | long call strike $K_1$ | long call strike $K_3$ | $2\times$ short call strike $K_2$ | |
|---|---|---|---|---|
| Kosten | $c_1$ | $c_3$ | $-2c_2$ | $c_1+c_3-2c_2$ |

Payoff: $(S_T-K_1)_{\{K_1<S_T<K_2\}} + (2K_2-K_1-S_T)_{\{K_2<S_T<K_3\}} + 2K_2 - (K_1+K_3)_{\{S_T>K_3\}}$

Fall $K_2 = \frac{1}{2}(K_1 + K_3) \Rightarrow c_1 + c_3 - 2c_2 > 0$

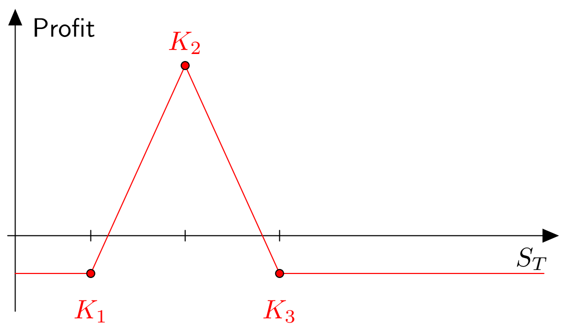



Abbildung 12: long Butterfly Spread

Für weitere Strategien klicken Sie hier.

## 1.5 Arbitrage

- Ein **Arbitrage** ist eine Möglichkeit durch Handel mit Finanzgütern einen risikolosen Profit zu erzielen.
- **Bsp**

| | New York | Frankfurt |
|---|---|---|
| Aktie | 130 $ | 100 € |
| Wechselkurs | 1,27 $ ≙ 1 € | |

- Arbitragemöglichkeit:
  leihe 100 € ⇝ kaufe Aktie in Frankfurt ⇝ verkaufe Aktie in New York
  ⇝ tausche 127 $ in 100 € ⇝ 100 € zurück zahlen ⇝ risikolosen Profit von 3 $
- Grundannahme:
  Im Handel mit Finanzgütern gibt es keine Arbitragen. Dies ist das sogenannte **No-Arbitrage Prinzip**.
- Aus dem No-Arbitrage Prinzip kann das **Replikationsprinzip** gefolgert werden.

## 1.6 Replikationsprinzip

Haben zwei verschiedene Kombinationen $K, L$ von ausschüttungsfreien Finanzgütern zu einem zukünftigen Zeitpunkt $T \in \mathbb{R}$ immer den gleichen Wert, so haben sie auch zum gegenwärtigen Zeitpunkt den gleichen Wert.
Die Kombination $K$ repliziert den Payoff der Kombination $L$, und umgekehrt.
**Argumentation:**
$K$,$L$ habe den Anfangswert $V_0, W_0 \in \mathbb{R}$ und den zufälligen Wert $V_T, W_T \in \mathbb{R}$ in $T$.
Es gelte: $V_T = W_T$:
Beh.: $V_0 = W_0$

$\underline{\mathbb{A}}$
1.Fall: $V_0 > W_0$.
Dann kann durch short selling von $K$ ein Arbitrage erzielt werden:

- short selling in $K$

- gehe long in $L$

$\Rightarrow$ am Anfang Gewinn $V_0 - W_0 > 0$

- handeln entsprechend $L$ bis $T$

in $T$:

- verkaufe $L$, erhalte $W_T = V_T$
- kaufe $K$ für $V_T$ und gebe die Position $K$ zurück

Am Ende: Glattstellen der Positionen $W_T - V_T = 0$ ↯

2.Fall: $W_0 > V_0$. Analog. $\square$

## 1.7 Nullkouponanleihe

festverzinsliches Wertpapier:

- Fälligkeit $T$ (Maturity)
- Zahlung von 1 Euro
- keine Kouponzahlung während der Laufzeit

$B(t,T)$ bezeichne den Preis dieser Anleihe zum Zeitpunkt $t < T$. $0 < B(t,T) < 1$ ist der Regelfall.

## 1.8 Put-Call Parität

Seien $c, p$ die Anfangspreise einer Call- bzw. Putoption mit Laufzeit $T$ und strike $K$.
Sei $S_0$ und $S_T$ die Preise des Underlyings heute und in $T$.
Dann gilt:

$$S_0 + p = c + K \cdot B(0,T)$$

**Argumentation:**
Betrachte folgende Kombinationen:
I: long Aktie, long put
II: long call, $K\cdot$ long in eine Nullkouponanleihe mit Fälligkeit in $T$

Wert zum Zeitpunkt $T$:
I: $S_T + (K - S_T)^+ = max\{S_T, K\}$
II: $(S_T - K)^+ + K = max\{S_T, K\}$

Replikationsprinzip liefert:

$$S_0 + p = c + K \cdot B(0,T)$$

$\square$

## 1.9 forward

- unbedingtes Termingeschäft
- Termin $T$ Ausübungszeitpunkt, Maturity
- Underlying mit Preisen $S_0$ heute und $S_T$ in $T$

- Zwei Parteien A und B
- Terminpreis $F_T$ festgelegt zum Vertragabschluss

in $T$

- A zahlt an B den Terminpreis $F_T$
- B liefert das Underlying

zum Beispiel bei Agrargütern

A hat die long-Position im forward, B die short-Position.Zusammenhang zwischen Termin- und Spotpreis des Underlyings.
$S_0$ - gegenwärtiger Preis, **Spotpreis**
$F_T$ - Terminpreis zum Termin $T$
Dann gilt:

$$F_T \cdot B(0,T) = S_0$$

**Argumentation:**
Betrachte folgende Kombinationen:
I: long im forward zum Zeitpunkt $T$, $F\times$ long in einer Nullkouponanleihe mit Fälligkeit $T$
II: long im Underlying
Wert zum Zeitpunkt $T$: I: $\underbrace{S_T - F_T}_{forward} + \underbrace{F_T}_{Nullkouponanleihe} = S_T$
II: $S_T$
Replikationsprinzip liefert:

$$F_T \cdot B(0,T) = S_0$$

## 1.10 Digitale Position

Recht auf Auszahlung eines festen Geldbetrags (etwa 1 €) bei Eintreten eines auslösenden Ereignisses (**bedingtes Termingeschäft**).
z.B.

| digitaler call | digtialer put |
|---|---|
| $1_{\{S_T \geq K\}}$ | $1_{\{S_T \leq K\}}$ |

## 1.11 Eigenschaften des Call-Preises

Sei $C(S_0, T, K)$ der Preis eines Calls auf ein Underlying mit Laufzeit $T$, strike $K$ und Anfangspreis $S_0$. Dann gilt:

(i) $C(S_0,T,K) \geq max\{0, S_0 - K \cdot B(0,T)\}$ **innerer Wert** des Calls

(ii) $C(S_0,T,K) \leq S_0$ **obere Grenze** des Calls

(iii) $K_1 \leq K_2 \Rightarrow C(S_0,T,K_1) \geq C(S_0,T,K_2)$

(iv) $B(0,T)(K_2 - K_1) \geq C(S_0,T,K_1) - C(S_0,T,K_2)\ \forall K_1 < K_2$

(v) $C(S_0,T,K_2) \leq \frac{K_3-K_2}{K_3-K_1} \cdot C(S_0,T,K_1) + \frac{K_2-K_1}{K_3-K_1} \cdot C(S_0,T,K_3)\ \forall K_1 < K_2 < K_3$ **Konvexität in K**

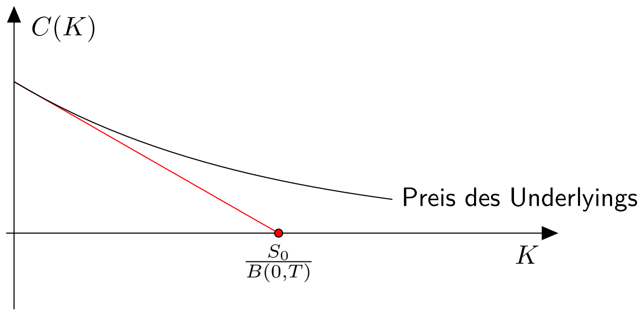



Abbildung 13: Konvexität in K

**Argumentation:**

(i) Falls $C(S_0, T, K) < 0$ gehe long im Call und halte bis $T$. Risikolosen Gewinn von $|C(S_0, T, K)| > 0$ am Anfang. $\lightning_{No-Arbitrage}$
Genauso sieht man ein, dass $P(S_0; T, K) \geq 0$
Put-Call Parität liefert:

$$\begin{aligned} C(S_0, T, K) &= S_0 + P(S_0, T, K) - K \cdot B(0, T) \\ &\geq S_0 - K \cdot B(0, T) \end{aligned}$$

(ii) Falls $C(S_0, T, K) > S_0$.
long Aktie, short im call
am Anfang: Gewinn von $C(S_0, T, K) - S_0 > 0$, benutze die Aktie um die Verpflichtung des Calls zu erfüllen: $S_T - (S_T - K)^+ \geq 0$ $\lightning_{No-Arbitrage}$

(iii) Sei $K_1 \leq K_2$:
Falls $C(K_1) < C(K_2)$ gehe short in $K_2$ und long in $K_1$.
am Anfang: $C(K_2) - C(K_1) > 0$
am Ende: $(S_T - K_1)^+ - (S_T - K_2)^+ = (S_T - K_1)_{\{K_1 \leq S_T \leq K_2\}} - (K_2 - K_1)_{\{S_T > K_2\}} > 0$ $\lightning_{No-Arbitrage}$

(iv) Sei $K_1 < K_2$.
Falls $C(K_1) - C(K_2) > (K_2 - K_1) \cdot B(0, T)$ gehe short in $K_1$, long in $K_2$, long $(K_2 - K_1) \times$ Nullkouponanleihe
am Anfang: $C(K_1) - C(K_2) - (K_2 - K_1) \cdot B(0, T) > 0$
am Ende: $(S_T - K_2)^+ - (S_T - K_1)^+ + K_2 - K_1 \geq 0$ $\lightning_{No-Arbitrage}$

(v) $K_1 < K_2 < K_3$; $K_2 = \lambda K_1 + (1 - \lambda) K_3$ mit $\lambda = \frac{K_3 - K_2}{K_3 - K_1}$
Falls $C(K_2) > \lambda C(K_1) + (1 - \lambda) C(K_3)$, gehe short in $K_2$, $\lambda \times$ long in $K_1$, $(1 - \lambda) \times$ long in $K_3$.
am Anfang: $C(K_2) - \lambda C(K_1) - (1 - \lambda) C(K_3) > 0$
am Ende:

$$\begin{aligned} \lambda(S_T - K_1)^+ + (1 - \lambda)(S_T - K_3)^+ - (S_T - K_2)^+ &= \lambda(S_T - K_1)_{\{K_1 < S_T < K_2\}} \\ &+ [\lambda(S_T - K_1) - (S_T - K_2)]_{\{K_2 < S_T < K_3\}} \\ &+ \underbrace{[K_2 - (\lambda K_1 + (1 - \lambda) K_3)]_{\{S_T > K_3\}}}_{=0} \end{aligned}$$

da

$$\begin{aligned} \lambda(S_T - K_1) + (K_2 - S_T) &= K_2 - \lambda K_1 - (1 - \lambda) S_T \\ &= \lambda K_1 + (1 - \lambda) K_3 - \lambda K_1 - (1 - \lambda) S_T \\ &= (1 - \lambda)(K_3 - S_T) \geq 0 \end{aligned}$$

$\lightning_{No-Arbitrage}$

## 1.12 Zinsmethoden

Frage: Wie kann man Kapitalrenditen durch annualisierte **Zinssätze** beschreiben?
Antwort: Man vereinbart eine **Zinsmethoden** und eine **Zählkonvention** (Anzahl der Tage eines Jahres).
Genauer: Kapital $N$ wird zum Zeitpunkt $t$ in eine Nullkouponanleihe mit Fälligkeit in $T$ angelegt.

Zählkonvention für uns nicht wichtig

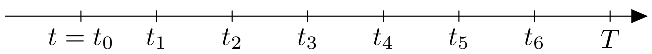

in $t$: erhalte für $N$:
$\frac{N}{B(t,T)}$ $T$-Bonds {Nullkouponanleihe mit Fälligkeit in $T$

in $T$: die Position hat einen Wert von $\frac{N}{B(t,T)}$

Gewinn: $\frac{N}{B(t,T)} - N = N\left(\frac{1}{B(t,T)} - 1\right)$
$R(t,T) = \frac{1}{B(t,T)} - 1$ kann als Kapitalrendite interpretiert werden, die ein Investment zwischen $t$ und $T$ hervorbringt:
Ziel: Beschreibung durch einen jährlichen Zinssatz:

(a) **lineare Zinsmethode:**
lineare Verteilung der jährlichen Zinsen auf die Laufzeit $R(t,T) = \underbrace{(T-t)}_{Laufzeit} \cdot r_{lin}$, $r_{lin}$ ist der jährliche Zinssatz bei linearer Zinsmethode.
**Bsp.**
Anlage Zeitraum ein Monat
- Rendite von $0.5\% = 50\ bp$ (ein Basispunkt $\hat{=}$ 0,01%)
- $r_{lin} = 0.5\% \cdot 12 = 6\%$

(b) **periodische Zinsmethode:**




setzte $t_i = t + i \cdot \frac{T-t}{m}, i = 0, \ldots, m$

Ein jährlicher Zins $r$ wird linear verteilt auf die Periodenlänge. Das Kapital wird unter Berücksichtigung von Zinseszinsen verzinst.
Verzinsung:

$$K_m(r,t,T) := \left(1 + r \cdot \frac{T-t}{m}\right)^m = 1 + R(t,T)$$

(c) **stetige Zinsmethode:**

(i) Konstante Zinsrate $r$
erhält man als Grenzübergang für $m \to \infty$
$\lim\limits_{m\to\infty} K_m(r,t,T) = e^{r(T-t)} = 1 + R(t,T)$

(ii) nicht konstante Zinsrate
$r : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ liefert eine Kapitalentwicklung der Form:

$$K(r,t,T) = e^{\int_t^T r(s)\mathrm{d}s}$$

zwischen $t$ und $T$.

# Abbildungsverzeichnis