Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

Fachbereich 10
Mathematik und
Informatik

Skript Topologie I.

Mitschrift der Vorlesung „Topologie I.“ von Prof. Dr. Arthur Bartels

Jannes Bantje

2. Februar 2015

Aktuelle Version verfügbar bei:

GitHub (inklusive Sourcecode)
https://github.com/JaMeZ-B/latex-wwu

Bittorrent Sync
B6WH2DISQ5QVYIRYIEZSF4ZR2IDVKPN3I

sciebo die Campuscloud
LaTeX-Freigabe

Vorwort — Mitarbeit am Skript

Dieses Dokument ist eine Mitschrift aus der Vorlesung „Topologie I., WiSe 2014/2015“, gelesen von Prof. Dr. Arthur Bartels. Der Inhalt entspricht weitestgehend dem Tafelanschrieb. Für die Korrektheit des Inhalts übernehme ich keinerlei Garantie! Für Bemerkungen und Korrekturen – und seien es nur Rechtschreibfehler – bin ich sehr dankbar. Korrekturen lassen sich prinzipiell auf drei Wegen einreichen:

- Persönliches Ansprechen in der Uni, Mails an `j.bantje@wwu.de` (gerne auch mit annotieren PDFs)
- *Direktes* Mitarbeiten am Skript: Den Quellcode poste ich auf GitHub (siehe oben), also stehen vielfältige Möglichkeiten der Zusammenarbeit zur Verfügung: Zum Beispiel durch Kommentare am Code über die Website und die Kombination Fork + Pull Request. Wer sich verdient macht oder ein Skript zu einer Vorlesung, die ich nicht besuche, beisteuern will, dem gewähre ich gerne auch Schreibzugriff.

  Beachten sollte man dabei, dass dazu ein Account bei `github.com` notwendig ist, der allerdings ohne Angabe von persönlichen Daten angelegt werden kann. Wer bei GitHub (bzw. dem zugrunde liegenden Open-Source-Programm „`git`“) – verständlicherweise – Hilfe beim Einstieg braucht, dem helfe ich gerne weiter. Es gibt aber auch zahlreiche empfehlenswerte Tutorials im Internet.[1]
- *Indirektes* Mitarbeiten: TeX-Dateien per Mail verschicken.

  Dies ist nur dann sinnvoll, wenn man einen ganzen Abschnitt ändern möchte (zB. einen alternativen Beweis geben), da ich die Änderungen dann per Hand einbauen muss! Ich freue mich aber auch über solche Beiträge!

Vorlesungshomepage

`https://wwwmath.uni-muenster.de/reine/u/topos/lehre/WS2014-2015/Topologie1/Topologie1.html`

[1] zB. `https://try.github.io/levels/1/challenges/1`, ist auf Englisch, aber dafür interaktives LearningByDoing

Inhaltsverzeichnis

1 Kategorien, Funktoren und natürliche Transformationen

1.1 Definition

Eine **Kategorie** $\mathcal{C}$ besteht aus:

i) Einer Klasse $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Die Elemente von $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ heißen die **Objekte** von $\mathcal{C}$.

ii) Zu je zwei Objekten A, B aus $\mathcal{C}$ einer Menge $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$. Die Elemente von $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ heißen **Morphismen** von $\mathcal{C}$.

iii) Zu je drei Objekten A, B, C aus $\mathcal{C}$ einer Abbildung:

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C) \times \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, C) \quad , \quad (f, g) \mapsto f \circ g$$

genannt die **Komposition** in $\mathcal{C}$.

Dabei müssen folgende Axiome erfüllt sein:

(i) Die Komposition ist **assoziativ**:
Für Objekte A, B, C, D von $\mathcal{C}$ und $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C, D), g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C), h \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ gilt immer

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

(ii) Die Komposition ist **unital**: Für jedes Objekt A von $\mathcal{C}$ gibt es einen Morphismus $\mathrm{id}_A \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, A)$ so, dass

$$\forall f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, A) : \mathrm{id}_A \circ f = f \qquad \text{und} \qquad \forall f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) : f \circ \mathrm{id}_A = f$$

1.2 Beispiele

(1) Die Kategorie der Mengen $\textsc{Mengen}$: Objekte sind Mengen und Morphismen sind Abbildungen.

(2) Die Kategorie der Gruppen $\textsc{Gruppen}$: Objekte sind Gruppen und Morphismen sind Gruppenhomomorphismen.

(3) Die Kategorie der K-Vektorräume $K\text{-VR}$: Objekte sind K-Vektorräume und die Morphismen sind K-lineare Abbildungen.

(4) Die Kategorie der R-Moduln $R\text{-}\textsc{Mod}$: Objekte sind R-Moduln und Morphismen sind R-lineare Abbildungen.

(5) Die Kategorie der C^∞-Mannigfaltigkeiten $C^\infty\text{-}\textsc{Man}$: Objekte sind C^∞-Mannigfaltigkeiten und Morphismen sind C^∞-Abbildungen.

(6) Die Kategorie der topologischen Räume $\textsc{Top}$: Objekte sind topologische Räume und Morphismen sind stetige Abbildungen.

(7) Die Kategorie der punktierten topologischen Räume $\textsc{Top}_\bullet$: Objekte sind punktiert-topologische Räume und Morphismen sind punktiert-stetige Abbildungen.

(8) Die Kategorie $\mathrm{H}\textsc{Top}$: Objekte sind topologische Räume und Morphismen sind Homotopieklassen von stetigen Abbildungen.

(9) Die Kategorie $\mathrm{H}\textsc{Top}_\bullet$: Objekte sind punktiert-topologische Räume und Morphismen sind Homotopieklassen von punktiert-stetigen Abbildungen.

(10) Sei G eine Gruppe. Wir erhalten eine Kategorie $\mathcal{C}_G$ mit genau einem Objekt $*$ und $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}_G}(*, *) = G$. Die Komposition wird durch die Verknüpfung in der Gruppe festgelegt.

(11) Ist $\mathcal{C}$ eine Kategorie, so ist $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ eine Kategorie, wobei $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}) = \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ und $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(A, B) := \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, A)$. Die Komposition ist gegeben durch $f \circ^{\mathrm{op}} g := g \circ f$.

1.3 Bemerkung

(i) Eine Kategorie heißt **klein**, wenn ihre Objekte eine Menge bilden.

(ii) Statt $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ schreiben wir oft $f\colon A \to B$ oder $A \xrightarrow{f} B$.

1.4 Definition

Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien: Ein **Funktor** $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ordnet jedem Objekt C von $\mathcal{C}$ ein Objekt $F(C)$ von $\mathcal{D}$ und ordnet jedem Morphismus $f : C \to C'$ in $\mathcal{C}$ einen Morphismus $F(f)\colon F(C) \to F(C')$ in $\mathcal{D}$ zu. Dabei muss gelten:

$$F(f \circ g) = F(f) \circ F(g) \quad \text{und} \quad F(\mathrm{id}_C) = \mathrm{id}_{F(C)}$$

1.5 Beispiele

(1) Es gibt offensichtliche „Vergiss"-Funktoren:

$$\begin{aligned} K\text{-VR} &\longrightarrow \textsc{Mengen} \\ R\text{-}\textsc{Mod} &\longrightarrow \textsc{Mengen} \\ \textsc{Top} &\longrightarrow \textsc{Mengen} \\ \textsc{Top}_\bullet &\longrightarrow \textsc{Mengen} \\ \textsc{Top}_\bullet &\longrightarrow \textsc{Top} \end{aligned}$$

(2) Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und C ein Objekt von $\mathcal{C}$. Der durch C **dargestellte Funktor** $F_C : \mathcal{C} \to \textsc{Mengen}$ ist definiert durch

$$\begin{aligned} &F_C(A) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C, A) && \text{für } A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \\ &F_C(f)\colon \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C, A) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C, A'), g \mapsto f \circ g && \text{für } f\colon A \to A' \text{ in } \mathcal{C} \end{aligned}$$

(3) Die Fundamentalgruppe definiert einen Funktor

$$\pi_1 : \mathrm{H}\textsc{Top}_\bullet \longrightarrow \textsc{Gruppen}$$

Bemerkung

- Ist $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor so schreiben wir oft kürzer und ungenauer $f_* := F(f)$.
- Kleine Kategorien und Funktoren bilden die Kategorie $\textsc{Kat}$.

1.6 Definition

Seien $F, G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ zwei Funktoren. Eine **natürliche Transformation** $\tau\colon F \to G$ ordnet jedem $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ einen Morphismus $\tau_C\colon F(C) \to G(C)$ in $\mathcal{D}$ zu, sodass für jedes $f\colon C \to C'$ in $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd} F(C) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\tau_C"] & F(C') \arrow[d, "\tau_{C'}"] \\ G(C) \arrow[r, "G(f)"] & G(C') \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Bemerkung
Natürliche Transformationen lassen sich komponieren. Für $\tau\colon F \to G$, $\eta\colon G \to H$ ist $\eta \circ \tau\colon F \to H$ gegeben durch $F, G, H\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$

$$(\eta \circ \tau)_C := \eta_C \circ \tau_C\colon F(C) \to H(C)$$

Genauer: Für feste kleine Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ bilden die Funktoren $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ mit den natürlichen Transformationen eine Kategorie $\textsc{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$.

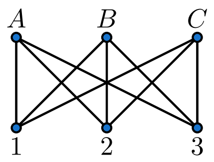
1.7 Ausblick

In der algebraischen Topologie werden topologische Fragen, wie zum Beispiel, wann $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ homöomorph sind, in algebraische Fragen übersetzt. Eine Möglichkeit für eine solche Übersetzung sind Funktoren von einer Kategorie von topologischen Räumen, z.B. $\textsc{Top}, \textsc{Top}_\bullet, \mathrm{H}\textsc{Top}_\bullet$, in eine algebraisch Kategorie, z.B. $\textsc{Gruppen}, K\text{-VR}, \textsc{Abel.Gruppen}, R\text{-}\textsc{Mod}$. Ein Beispiel für einen solchen Funktor ist die Fundamentalgruppe π_1. Ein Nachteil der Fundamentalgruppe ist, dass diese oft schwierig zu berechnen ist. Wir werden in dieser Vorlesung weitere Funktoren und Methoden für ihre Berechnung kennenlernen.

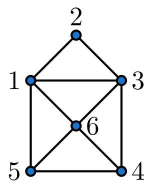
2 Kombinatorische Beschreibungen topologischer Räume

2.1 Beispiel

Graphen sind einerseits topologische Räume und andererseits kombinatorische Objekte:



$$\longleftrightarrow \quad \begin{aligned} V &= \{A, B, C, 1, 2, 3\} \\ E &= \big\{\{A,1\},\{A,2\},\{A,3\},\{B,1\},\{B,2\},\{B,3\},\{C,1\},\{C,2\},\{C,3\}\big\} \end{aligned}$$



$$\longleftrightarrow \quad \begin{aligned} V &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\ E &= \big\{\{1,2\},\{1,3\},\{1,5\},\{1,6\},\{2,3\},\{3,4\},\{3,6\},\{4,5\},\{4,6\},\{5,6\}\big\} \end{aligned}$$

2.2 Definition

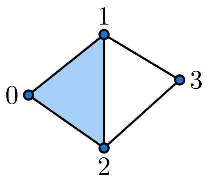
Ein **simplizialer Komplex** $K = (V, \Sigma)$ besteht aus einer Menge V und einer Menge Σ von nichtleeren, endlichen Teilmengen von V, sodass gilt

(i) $\{v\} \in \Sigma$ für alle $v \in V$

(ii) $\sigma \in \Sigma, \emptyset \neq \tau \subseteq \sigma \Longrightarrow \tau \in \Sigma.$ (Abgeschlossen bzgl. Teilmengenbildung)

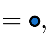
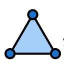
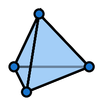
Die Elemente von V heißen die **Ecken** oder **Vertices** von K. Die Elemente von Σ heißen die **Simplizes** von K. Enthält $\sigma \in \Sigma$ genau $n+1$ Elemente, so heißt σ ein $\mathbf{n}$**-Simplex**. Ist $\tau \subseteq \sigma$, wobei σ ein n-Simplex und τ ein $n-1$-Simplex ist, so heißt τ eine **Seite** von σ.
Ist V geordnet, so heißt K geordnet. Ist V endlich, so heißt K endlich.

2.3 Beispiel



$$\begin{aligned} V &= \{0, 1, 2, 3\} \\ \Sigma &= \big\{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{0, 1, 2\}\big\} \end{aligned}$$

Ist σ eine endliche Menge, so heißt $\Delta^\sigma := \big(\sigma, \mathcal{P}(\sigma) \setminus \{\emptyset\}\big)$ der σ-Simplex. Für $\sigma = \{0, \dots, n\}$ schreiben wir $\Delta^n := \Delta^{\{0,\dots,n\}}$. Es ist

$\Delta^0 =$ , $\Delta^1 =$ , $\Delta^2 =$ , $\Delta^3 =$ 

2.4 Definition

Sei $K = (V, \Sigma)$ ein simplizialer Komplex. Ein **Unterkomplex** von K ist ein simplizialer Komplex $K_0 = (V_0, \Sigma_0)$ mit $V_0 \subseteq V$ und $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$.

Beispiel
Sei $K = (V, \Sigma)$ ein endlicher simplizialer Komplex. Dann ist K ein Unterkomplex von Δ^V.

2.5 Definition

Eine **simpliziale Abbildung** $f\colon K_1 = (V_1, \Sigma_1) \to K_2 = (V_2, \Sigma_2)$ zwischen simplizialen Komplexen ist eine Abbildung $f\colon V_1 \to V_2$, sodass $f(\sigma_1) \in \Sigma_2$ für alle $\sigma_1 \in \Sigma_1$. Simpliziale Komplexe zusammen mit simplizialen Abbildungen bilden eine Kategorie $\mathrm{S{\scriptsize IMP}}$.

2.6 Definition

Sei σ eine endliche Menge. Sei $\mathbb{R}^\sigma = \prod_{v\in\sigma} \mathbb{R}$ mit der Produkttopologie. Wir setzen nun

$$|\Delta^\sigma| := \left\{ x = (x_v)_{v\in\sigma} \in \mathbb{R}^\sigma \;\middle|\; \sum_{v\in\sigma} x_v = 1, x_v \in [0,1]\ \forall v \in \sigma \right\}$$

Ist $\tau \subseteq \sigma$, so erhalten wir eine Abbildung $\iota^\sigma_\tau\colon |\Delta^\tau| \to |\Delta^\sigma|$ indem wir $(x_v)_{v\in\tau} \in |\Delta^\tau|$ durch $x_v = 0$ für $v \in \sigma \setminus \tau$ zu $(x_v)_{v\in\sigma}$ auffüllen. Ist $\eta \subseteq \tau \subseteq \sigma$ so gilt offensichtlich $\iota^\sigma_\eta = \iota^\sigma_\tau \circ \iota^\tau_\eta$.
Sei nun $K = (V, \Sigma)$ ein simplizialer Komplex. Die **geometrische Realisierung** $|K|$ von K ist definiert als

$$|K| := \coprod_{\sigma\in\Sigma} \{\sigma\} \times |\Delta^\sigma| \Big/ \sim$$

wobei $\sim$ die durch $(\tau, x) \sim \left(\sigma, \iota^\sigma_\tau(x)\right)$ für $\tau \subseteq \sigma$ erzeugte Äquivalenzrelation ist. Versehen mit der Quotiententopologie ist $|K|$ ein topologischer Raum.

Anschaulich „klebt" $\sim$ die geometrischen Realisierungen aller Einzelteile passend zusammen

Bemerkung

- In Aufgabe 4 von Blatt 1 haben wir gezeigt, dass $|K|$ homöomorph zu einer Unterraum X von $\mathbb{R}^n$ mit $n := \#V$ ist via $\left[(\{\sigma\}, (x_{v_i})_{v_i\in\sigma})\right] \mapsto \sum_{v_i\in\sigma} x_{v_i} \cdot e_i$.

- In Aufgabe 2 von Blatt 2 haben wir gezeigt, dass $|\cdot|$ einen Funktor $\mathrm{S{\scriptsize IMP}} \to \mathrm{T{\scriptsize OP}}$ definiert.

  Dazu definiert man eine Abbildung zunächst auf den zugrunde liegenden Räumen durch[2]

  $$\left(\sigma, \sum\nolimits_{v\in\sigma} x_v \cdot v\right) \longmapsto \left(f(\sigma), \sum\nolimits_{v\in\sigma} x_v \cdot f(v)\right)$$

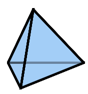
  und wendet diese unter Benutzung der universellen Eigenschaft der Quotiententopologie auf Repräsentanten an.

2.7 Beispiel

- Sei $\partial\Delta^n := \Big(\{0,\dots,n\}, \mathcal{P}(\{0,\dots,n\}) \setminus \{\emptyset, \{0,\dots,n\}\}\Big) =$ „$\Delta^n \setminus \{0,\dots,n\}$". $\partial\Delta^n$ heißt der **Rand des n-Simplizes**. Es gilt

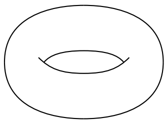
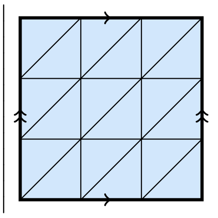
  $$\left|\partial\Delta^1\right| = \bullet\bullet \cong S^0$$

  $\left|\partial\Delta^2\right| =$  $\cong S^1$

  $\left|\partial\Delta^3\right| =$  $\cong S^2$

  Allgemein gilt $|\partial\Delta^n| \cong S^{n-1}$, siehe Aufgabe 1 von Blatt 3.

[2] hier wird eine formale Summe anstatt eines Tupels benutzt; da σ stets eine endliche Menge ist, macht dies aber keinen Unterschied.

- $T^2 = S^1 \times S^1 \cong$  $\cong$ 

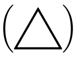
2.8 Definition

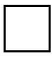
Ein topologischer Raum X heißt ein **Polyeder**, falls er homöomorph zur Realisierung eines simplizialen Komplexes ist.

2.9 Definition

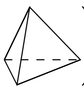
Sei $K = (V, \Sigma)$ ein endlicher simplizialer Komplex. Sei $a_n := \#\{\sigma \in \Sigma \mid \sigma \text{ ist ein } n\text{-Simplex von } K\}$. Dann heißt $\chi(K) := \sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n \cdot a_n$ die **Euler-Charakteristik** von K.

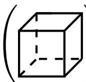
Beispiel

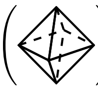
$\chi($  $) = 3 - 3 = 0$

$\chi($  $) = 4 - 4 = 0$

$$\chi([n\text{-Eck}]) = n - n = 0$$

$\chi\Big(\partial\Delta^3 =$  $\Big) = 4 - 6 + 4 = 2$

$\chi($  $) = 8 - 12 + 6 = 2$

$\chi($  $) = 6 - 12 + 8 = 2$

2.10 Satz

Seinen K und K' endliche simpliziale Komplexe. Gilt $|K| \cong |K'|$, so gilt

$$\chi(K) = \chi(K').$$

Bemerkung
Die Euler-Charakteristik ist also eine topologische Invariante von simplizialen Komplexen. Sie hängt nur von der topologischen Struktur von $|K|$ und nicht von der kombinatorischen Struktur von K ab.

3 Simpliziale Homologie

3.1 Definition

Sei S eine Menge.Sei R ein Ring. Der **freie R-Modul mit Basis S**, $R[S]$, besteht aus allen endlichen formalen R-Linearkombinationen

Ring mit Eins

$$\sum_{s\in S} r_s \cdot s \quad , r_s \in R, r_s \neq 0 \text{ für endliche viele } s \in S$$

Die R-Modulstruktur auf $R[S]$ ist definiert durch:

$$r \cdot \left(\sum_{s\in S} r_s \cdot s\right) := \sum_{s\in S} (r \cdot r_s) \cdot s \qquad \left(\sum_{s\in S} r_s \cdot s\right) + \left(\sum_{s\in S} r'_s s\right) := \sum_{s\in S} (r_s + r'_s) \cdot s$$

Bemerkung
Mittels $s = \sum_{s'\in S} \delta_{s,s'} \cdot s'$ fassen wir S als Teilmenge von $R[S]$ auf.

3.2 Lemma

Sei S eine Menge, R ein Ring. Es gilt

1) Ist M ein R-Modul und $i\colon S \to M$ eine Abbildung, so gibt es genau eine R-lineare Abbildung $\varphi\colon R[S] \to M$, die i fortsetzt.

2) Sei $f\colon R[S] \to M$ R-linear und $p\colon N \twoheadrightarrow M$ R-linear und surjektiv. Dann gibt es $\hat{f}\colon R[S] \to N$ mit $p \circ \hat{f} = f$.

   Moduln mit dieser Eigenschaft bezeichnet man als **projektiv**. Freie Moduln sind also projektiv.

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[d, "p"] \\ R[S] \arrow[ur, dashed, "\hat{f}"] \arrow[r, "f"] & M \end{tikzcd}$$

Beweis

1) Eine solche Abbildung ist gegeben durch $\varphi(\sum_{s\in S} r_s \cdot s) = \sum_{s\in S} r_s \cdot i(s)$. Ist φ' eine zweite, so gilt

$$\hat{\varphi}\left(\sum_{s\in S} r_s \cdot s\right) = \sum_{s\in S} r_s \cdot \hat{\varphi}(s) = \sum_{s\in S} r_s \cdot i(s)$$

2) Wähle für jedes $s \in S$ ein Urbild $j(s) \in N$ für $f(s) \in M$ unter $p\colon N \twoheadrightarrow M$. Nun wende 1) auf $j\colon S \to N$ an, um $\hat{f}\colon R[S] \to N$ mit $\hat{f}(s) = j(s)$ zu erhalten. Nun ist $p \circ \hat{f}(s) = f(s)$ für alle $s \in S$. Mit der Eindeutigkeit aus 1) folgt $p \circ \hat{f} = f$. □

3.3 Beispiel

(i) Sei K ein Körper und V, M, N seien K-Vektorräume, $f\colon V \to M, p\colon N \to M$ seien K-linear und p surjektiv. Dann gibt es $\hat{f}\colon V \to N$ mit $p \circ \hat{f} = f$. Wir können Lemma 3.2 benutzen, da V eine Basis B hat, also $V \cong K[B]$.

(ii) Sei $R = \mathbb{Z}$, sei $V = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $M = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, sowie $f = \mathrm{id}\colon V \to M$, $N = \mathbb{Z}$ und $p\colon \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ die Projektion mit $p(n) = n + 2\mathbb{Z}$. Dann gibt es *keine* $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung $\hat{f}\colon \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mit $p \circ \hat{f} = f$. Ist $\hat{f}(1 + 2\mathbb{Z}) = n \in \mathbb{Z}$, so folgt

$$2n = 2 \cdot \hat{f}(1 + 2\mathbb{Z}) = \hat{f}\big(2 \cdot (1 + 2\mathbb{Z})\big) = \hat{f}(0 + 2\mathbb{Z}) = 0$$

also $n = 0$. $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist also kein freier Modul.

3.4 Definition

Sei $K = (V, \Sigma)$ ein simplizialer Komplex. Sei $\Sigma_n := \{\sigma \in \Sigma \,|\, \sigma \text{ ist ein } n\text{-Simplex}\}$. Sei R ein Ring. Der **$\mathbf{n}$-te Kettenmodul** von K über R ist definiert als

$$C_n(K; R) := R[\Sigma_n]$$

Ist $R = \mathbb{Z}$, so schreiben wir auch kurz $C_n(K) := C_n(K; \mathbb{Z})$.

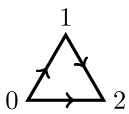
3.5 Definition

Sei $K = (V, \Sigma)$ ein geordneter simplizialer Komplex. Sei $\sigma = \{v_0, \dots, v_n\}$ ein n-Simplex von K. Bezüglich der Ordnung von K sei dabei $v_0 < v_1 < \dots < v_n$. Sei τ ein $(n-1)$-Simplex von K. Definiere

$$\varepsilon_\sigma^\tau := \begin{cases} (-1)^i, & \text{falls } \tau = \{v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n\} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Bemerkung
Es gilt: $\varepsilon_\sigma^\tau \neq 0 \iff \tau$ ist eine Seite von σ.

Beispiel
Für den folgenden geordneten simplizialen Komplex gilt



$$\varepsilon_{\{0,1,2\}}^{\{0,1\}} = 1, \quad \varepsilon_{\{0,1,2\}}^{\{0,2\}} = -1, \quad \varepsilon_{\{0,1,2\}}^{\{1,2\}} = 1$$

3.6 Definition

Sei $K = (V, \Sigma)$ ein geordneter simplizialer Komplex. Die **$\mathbf{n}$-te Randabbildung**

$$\partial_n \colon \underbrace{C_n(K; R)}_{=R[\Sigma_n]} \longrightarrow \underbrace{C_{n-1}(K; R)}_{=R[\Sigma_{n-1}]}$$

ist für ein Basiselement $\sigma \in \Sigma_n$ definiert durch

$$\partial_n(\sigma) = \sum_{\tau \in \Sigma_{n-1}} \varepsilon_\sigma^\tau \cdot \tau$$

3.7 Proposition

$$\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$$

Damit folgt $\operatorname{Im} \partial_n \subseteq \ker \partial_{n-1}$.

Beweis (mit Lemma 3.8)
Sei σ ein n-Simplex von K. Dann gilt

$$\begin{aligned} \partial_{n-1}\big(\partial_n(\sigma)\big) = \partial_{n-1}\left(\sum_{\tau \in \Sigma_{n-1}} \varepsilon_\sigma^\tau \cdot \tau\right) = \sum_{\tau \in \Sigma_{n-1}} \varepsilon_\sigma^\tau \cdot \partial_{n-1}(\tau) &= \sum_{\tau \in \Sigma_{n-1}} \varepsilon_\sigma^\tau \left(\sum_{\eta \in \Sigma_{n-2}} \varepsilon_\tau^\eta \cdot \eta\right) \\ &= \sum_{\eta \in \Sigma_{n-2}} \left(\sum_{\tau \in \Sigma_{n-1}, \eta \subseteq \tau \subseteq \sigma} \varepsilon_\tau^\eta \cdot \varepsilon_\sigma^\tau\right) \eta \\ &\overset{\text{Lemma 3.8}}{=} 0 \end{aligned}$$

□

3.8 Lemma

Sei σ ein n-Simplex. Sei $\eta \subseteq \sigma$ ein $(n-2)$-Simplex. Dann gibt es genau zwei $(n-1)$-Simplizes τ, τ' von K, die eine Seite von σ sind und η als Seite enthalten. Es gilt

$$\varepsilon_\tau^\eta \cdot \varepsilon_\sigma^\tau = -\varepsilon_{\tau'}^\eta \cdot \varepsilon_\sigma^{\tau'}$$

Beweis
Sei $\sigma = \{v_0, \dots, v_n\}$ mit $v_0 < v_1 < \dots < v_n$. Dann ist $\eta = \{v_0, \dots, v_n\} \setminus \{v_i, v_j\}$ mit $i < j$. Dann sind $\tau = \{v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n\}$ und $\tau' = \{v_0, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n\}$ die gesuchten $(n-1)$-Simplizes und es gilt

$$\varepsilon_\sigma^\tau = (-1)^i \ , \ \varepsilon_\sigma^{\tau'} = (-1)^j \ , \ \varepsilon_\tau^\eta = (-1)^{j-1} \ , \ \varepsilon_{\tau'}^\eta = (-1)^i \qquad \square$$

3.9 Notation

Für $\sigma \in \Sigma_n$, $\sigma = \{v_0, \dots, v_n\}$ mit $v_0 < \dots < v_n$ schreiben wir

$$\delta^j \sigma := \{v_0, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n\} \in \Sigma_{n-1}$$

Dann ist $\partial_n(\sigma) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \cdot \delta^j \sigma$.

3.10 Definition

Sei K ein geordneter simplizialer Komplex. Der **$\mathbf{n}$-te Homologiemodul** von K über R ist definiert als

$$H_n(K;R) := \frac{\ker \partial_n \colon C_n(K;R) \to C_{n-1}(K;R)}{\operatorname{Im} \partial_{n+1} \colon C_{n+1}(K;R) \to C_n(K;R)}$$

Für $n = 0$ interpretieren wir ∂_0 als die Nullabbildung. Daher gilt

$$H_0(K;R) = \frac{C_0(K;R)}{\operatorname{Im} \partial_1 \colon C_1(K;R) \to C_0(K;R)}$$

3.11 Beispiele

(1) Sei $K = \bullet$. Dann ist $C_0(K;R) \cong R$ und $C_i(K;R) = 0$ für $i > 0$. Weiter ist $H_0(K;R) = C_0(K;R) \cong R$ und $H_i(K;R) = 0$ für $i > 0$.

(2) Sein nun $K = K_n$ das n-Eck, wobei $n \geqslant 3$. Also

$$\Sigma_0 = \big\{\tau_1 = \{1\}, \tau_2 = \{2\}, \dots, \tau_n = \{n\}\big\}$$
$$\Sigma_1 = \big\{\sigma_1 = \{1,2\}, \dots, \sigma_{n-1} = \{n-1, n\}, \sigma_n = \{1, n\}\big\}$$

Dann gilt

$$C_0(K;R) = R[\Sigma_0] \cong R^n$$
$$C_1(K;R) = R[\Sigma_1] \cong R^n$$
$$C_i(K;R) = 0 \text{ für } i > 1, \text{ insbesondere } H_i(K;R) = 0 \text{ für } i > 1$$

Es ist dann $\partial_2 = \partial_3 = \dots = 0$. Interessant ist $\partial_1 \colon C_1(K;R) \to C_0(K;R)$, denn es gilt

$$\partial_1(\sigma_i) = \begin{cases} \tau_{i+1} - \tau_i, & \text{falls } i = 1, \dots, n-1 \\ \tau_n - \tau_1, & \text{falls } i = n \end{cases}$$

Mit $\sigma'_1 := \sigma_1, \sigma'_2 := \sigma_2, \dots, \sigma'_{n-1} := \sigma_{n-1}$ und $\sigma'_n := -\sigma_n$ gilt dann

$$\partial_1(\sigma'_i) = \tau_{i+1} - \tau_i$$

mit der Konvention $\tau_{n+1} = \tau_1$. Also gilt

$$\partial_1\left(\sum_{i=1}^n r_i\sigma'_i\right) = \sum_{i=1}^n r_i(\tau_{i+1} - \tau_i) = \sum_{i=1}^n (r_{i-1} - r_i)\tau_i$$

Es folgt

$$\ker\partial_1 = \left\{\sum_{i=1}^n r_i\cdot\sigma'_i \,\middle|\, r_1 = r_2 = \ldots = r_n\right\} \subseteq C_1(K;R)$$
$$\operatorname{Im}\partial_1 = \left\{\sum_{i=1}^n s_i\cdot\tau_i \,\middle|\, \sum_{i=1}^n s_i = 0\right\} \subseteq C_0(K;R)$$

Ist $\sum_{i=1}^n s_i = 0$, so folgt für $r_n = 0, r_1 = -s_1, r_2 = -s_1 - s_2, \dots, r_{n-1} = -s_1 - s_2 - \ldots - s_{n-1}$

$$\partial_1\left(\sum_{i=1}^n r_i\sigma'_i\right) = \sum_{i=1}^n s_i\tau_i$$

Es folgt $H_1(K;R) = {}^{\ker\partial_1}/_{\operatorname{Im}\partial_2} = \ker\partial_1 \cong R$ und

$$H_0(K;R) = {}^{\ker\partial_0}/_{\operatorname{Im}\partial_1} = {}^{R[\Sigma_0]}/_{\left\{\sum_{i=1}^n s_i\tau_i \,|\, \sum_{i=1}^n s_i = 0\right\}} \cong R$$

(via $\sum_{i=1}^n s_i\tau_i \longmapsto \sum_{i=1}^n s_i$ und Homomorphiesatz)

3.12 Definition

Sei R ein Ring. Ein $\mathbf{R}$**-Kettenkomplex** (C_*, d_*) ist eine Folge von R-Moduln $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zusammen mit R-linearen Abbildungen $(d_n\colon C_n \to C_{n-1})_{n\geqslant 1}$, so dass $d_n \circ d_{n+1} = 0$. Die d_n heißen die **Randabbildungen** von (C_*, d_*), die C_n die **Kettenmoduln**. Die $\mathbf{n}$**-te Homologie** eines Kettenkomplexes (C_*, d_*) ist definiert als

$$H_n(C_*, d_*) := \frac{\ker d_n\colon C_n \to C_{n-1}}{\operatorname{Im} d_{n+1}\colon C_{n+1} \to C_n}$$

3.13 Bemerkung

(i) Oft werden auch Kettenkomplexe betrachtet, die $\mathbb{Z}$ statt $\mathbb{N}$ verwenden.

(ii) Ein Kettenkomplex (C_*, d_*) heißt endlich erzeugt, wenn alle C_n endlich erzeugte R-Moduln sind und $C_n \neq 0$ nur für endlich viele n ist.

3.14 Definition

Zu einem geordneten simplizialen Komplex K heißt $\big(C_*(K;R), \partial_*\big)$ der **simpliziale Kettenkomplex** von K über R.

Bemerkung
Ist K endlich, so ist $\big(C_*(K;R), \partial_*\big)$ endlich erzeugt.

4 Euler-Charakteristik von Kettenkomplexen

4.1 Wiederholung

Sei A eine abelsche Gruppe. Dann ist

$$TA := \left\{ a \in A \,\middle|\, \exists n \geqslant 1 : n \cdot a = \underbrace{a + \ldots + a}_{n\text{-mal}} = 0 \right\}$$

die **Torsionsgruppe** von A. Ist A endlich erzeugt, so ist auch TA endlich erzeugt und es gibt Primzahlpotenzen $p_1^{n_1}, \ldots, p_k^{n_k}$ mit

$$TA \cong \mathbb{Z}/(p_1^{n_1}) \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}/(p_k^{n_k})$$

abelsche Gruppen sind $\mathbb{Z}$-Moduln

Weiter gibt es dann n mit $A \cong \mathbb{Z}^n \oplus TA$. $\operatorname{Rg} A := n$ ist der **Rang** von A.

4.2 Lemma

Sei A eine endlich erzeugte abelsche Gruppe. Dann gilt $\operatorname{Rg} A = \max\{m \mid \exists C \leqslant A, C \cong \mathbb{Z}^m\}$.

Beweis
Da $A \cong \mathbb{Z}^n \oplus TA$ ist, genügt zu zeigen: Ist $\varphi\colon \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}^n \oplus TA$ ein injektiver Gruppenhomomorphismus, so ist $m \leqslant n$. Schreibe $\varphi = \varphi_0 \oplus \varphi_1$, also $\varphi(a) = \varphi_0(a) + \varphi_1(a)$ mit $\varphi_0\colon \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}^n$, $\varphi_1\colon \mathbb{Z}^m \to TA$.

Behauptung: φ_0 ist injektiv. Zu $v \in \mathbb{Z}^m$ wähle $k \geqslant 1$ mit $k \cdot \varphi_1(v) = 0 \in TA$. Dann ist $\varphi_1(kv) = k\varphi_1(v) = 0$. Ist $v \neq 0$, so ist $k \cdot v \neq 0 \in \mathbb{Z}^m$, also ist $\varphi(kv) \neq 0$ und damit $\varphi_0(kv) \neq 0$. Es folgt $\varphi_0(v) \neq 0$, da sonst $\varphi_0(k \cdot v) = k \cdot \varphi_0(v) = 0$. Damit ist die Behauptung gezeigt.

Gruppenhomomorphismen $\varphi_0\colon \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}^n$ werden durch $n \times m$-Matrizen beschrieben: Es gibt $A = (a_{ij}) \in \mathbb{Z}^{n \times m}$ mit

$$\varphi_0 \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m a_{1j} \cdot z_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m a_{nj} \cdot z_j \end{pmatrix}$$

Ist $m > n$, so hat A, aufgefasst als Matrix über $\mathbb{Q}$, einen Kern. Es gibt also einen Vektor $w = \begin{pmatrix} a_1/b_1 \\ \vdots \\ a_m/b_m \end{pmatrix}$ mit $Aw = 0$, $w \neq 0$. Dann ist $(b_1, \ldots, b_m) \cdot w \in \mathbb{Z}^m$ und

$$\varphi_0\big((b_1, \ldots, b_m) \cdot w\big) = A \cdot \big((b_1, \ldots, b_m) \cdot w\big) = (b_1, \ldots, b_m) \cdot A \cdot w = 0 \;\lightning$$

Dies ist ein Widerspruch zur Injektivität von φ_0. Also gilt $m \leqslant n$. □

4.3 Definition

Seien M_0, M_1, M_2 R-Moduln und $f_0\colon M_0 \to M_1$, $f_1\colon M_1 \to M_2$ R-lineare Abbildungen. Dann heißt

$$M_0 \xhookrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \qquad [*]$$

eine **kurze exakte Sequenz**, wenn gilt:

(i) f_0 ist injektiv, (ii) $\operatorname{Im} f_0 = \ker f_1$, (iii) f_1 ist surjektiv.

Bemerkung
Oft sagt man $M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} M_2$ ist exakt in M_1, wenn $\operatorname{Im} f_0 = \ker f_1$ ist. Dann ist $(\star)$ eine kurze exakte Folge, wenn

$$0 \longrightarrow M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \longrightarrow 0$$

exakt in M_0, M_1 und M_2 ist.

4.4 Beispiele

1)

$$\begin{array}{ccc} M_0 \overset{i}{\hookrightarrow} M_0 \oplus M_1 \overset{p}{\twoheadrightarrow} M_1 \\ v_0 \overset{i}{\longmapsto} (v_0, 0) \quad (v_0, v_1) \overset{p}{\longmapsto} v_1 \end{array}$$

ist eine kurze exakte Folge.

2) $\mathbb{Z} \overset{\cdot n}{\hookrightarrow} \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist eine kurze exakte Folge.

4.5 Bemerkung

Eine **Spaltung** für eine kurze exakte Folge $M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} M_2$ ist eine R-lineare Abbildung $s\colon M_2 \to M_1$ mit $f_1 \circ s = \mathrm{id}_{M_2}$. In diesem Fall erhalten wir einen Isomorphismus $M_0 \oplus M_2 \to M_1$, $(v_0, v_2) \mapsto f_0(v_0) + s(v_2)$.

Injektivität: Sei $(v_0, v_2) \in M_0 \oplus M_2$ mit $f_0(v_0) + s(v_2) = 0$. Dann gilt

$$0 = f_1\big(f_0(v_0) + s(v_2)\big) = v_2 \implies f_0(v_0) = 0 \implies v_0 = 0$$

Surjektivität: Sei $v_1 \in M_1$. Betrachte $v_2 := f_1(v_1)$. Dann ist $v_1 - s(v_2) \in \ker f_1 = \operatorname{Im} f_0$, also gibt es v_0 in M_0 mit $f_0(v_0) = v_1 - s(v_1)$. Damit ist $v_1 = f_0(v_0) + s(v_1)$. □

4.6 Bemerkung

1) Die kurze exakte Sequenz $\mathbb{Z} \overset{\cdot n}{\hookrightarrow} \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ spaltet nicht.

2) Ist $M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} M_2$ eine kurze exakte Folge mit M_2 frei, also $M_2 \cong R[S]$, so spaltet [*]. Insbesondere ist $M_1 \cong M_0 \oplus M_2$. Dazu wenden wir Lemma 3.2 an und erhalten eine R-lineare Abbildung $s\colon M_2 \to M_1$, sodass folgendes Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd} & M_1 \arrow[d, "f_1"] \\ R[S] \arrow[ur, dashed, "s"] \arrow[r, "\mathrm{id}"] & R[S] \end{tikzcd}$$

s ist also die gesuchte Spaltung. Dieses Vorgehen funktioniert bei jedem projektiven Modul.

4.7 Bemerkung

Der Rang für alle endlich erzeugten abelschen Gruppen ist additiv:

$$\mathrm{Rg}(A \oplus B) = \mathrm{Rg}\, A + \mathrm{Rg}\, B,$$

da $A \cong \mathbb{Z}^{\mathrm{Rg}\, A} \oplus TA$, $B \cong \mathbb{Z}^{\mathrm{Rg}\, B} \oplus TB$, also

$$A \oplus B \cong \mathbb{Z}^{\mathrm{Rg}\, A + \mathrm{Rg}\, B} \oplus \underbrace{TA \oplus TB}_{=T(A \oplus B)}$$

4.8 Proposition

Der Rang von endlich erzeugten abelschen Gruppen ist additiv für kurze exakte Folgen: Ist

$$A \overset{i}{\hookrightarrow} B \overset{p}{\twoheadrightarrow} C \qquad [\star]$$

eine kurze exakte Folge von endlich erzeugten abelschen Gruppen, so gilt $\operatorname{Rg} B = \operatorname{Rg} A + \operatorname{Rg} C$.

Beweis
Spaltet [$\star$], so ist $B \cong A \oplus C$ und die Behauptung folgt aus der Bemerkung 4.7.
Wir können annehmen, dass $C = \mathbb{Z}^n \oplus TC$ gilt. Wir erhalten folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, equal] & p^{-1}(\mathbb{Z}^n) \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[d, hook, "i''"] & \mathbb{Z}^n \arrow[d, hook, "i'"] \\
A \arrow[r, hook, "i"] & B \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[d, two heads, "p''"] & C \arrow[d, two heads, "p'"] & {[\star]} \\
& B/p^{-1}(\mathbb{Z}^n) \arrow[r, hook, "p'\circ p"] & TC
\end{tikzcd}$$

Ist $p' \circ p(b) = 0$, so gibt es $v \in \mathbb{Z}^n$ mit $i'(v) = p(b)$. Nun gibt es $v' \in p^{-1}(\mathbb{Z}^n)$ mit $p(v') = v$. Es folgt

$$p\big(i''(v')\big) = p(b)$$

also $i''(v') - b \in \ker p = i(A)$. Da $i(A) \subseteq i''\big(p^{-1}(\mathbb{Z}^n)\big)$, folgt $b \in i''\big(p^{-1}(\mathbb{Z}^n)\big)$. In dem Diagramm sind die Spalten und Zeilen exakt. Da $\mathbb{Z}^n$ frei ist, spaltet $A \overset{i}{\hookrightarrow} p^{-1}(\mathbb{Z}^n) \overset{p}{\twoheadrightarrow} \mathbb{Z}^n$ und es gilt

$$\operatorname{Rg} A + \operatorname{Rg} C = \operatorname{Rg} A + n = \operatorname{Rg}\big(p^{-1}(\mathbb{Z}^n)\big)$$

Es bleibt zu zeigen: $\operatorname{Rg} B = \operatorname{Rg}\big(p^{-1}(\mathbb{Z}^n)\big)$.
Nebenbei: Ist $A' \subseteq B'$, so gilt $\operatorname{Rg} A' \leqslant \operatorname{Rg} B'$, denn

$$\operatorname{Rg} A' = \max\Big\{n' \,\Big|\, \mathbb{Z}^{n'} \cong C' \leqslant A'\Big\} \leqslant \max\Big\{n' \,\Big|\, \mathbb{Z}^{n'} \cong C' \leqslant B'\Big\} = \operatorname{Rg} B'.$$

Betrachte die kurze exakte Folge

$$p^{-1}(\mathbb{Z}^n) \longrightarrow B \longrightarrow B/p^{-1}(\mathbb{Z}^n)$$

Wegen $B/p^{-1}(\mathbb{Z}^n) \cong TC$ gibt es ein k mit $k \cdot \big(b + p^{-1}(\mathbb{Z}^n)\big) = 0$ für alle $b \in B$. Also $k \cdot b \in p^{-1}(\mathbb{Z}^n)$. Es folgt $kB \subseteq p^{-1}(\mathbb{Z}^n)$. Ist $B \cong \mathbb{Z}^{\operatorname{Rg} B} + TB$, so ist $kB \cong (k\mathbb{Z})^{\operatorname{Rg} B} + T(kB)$ und $\operatorname{Rg} kB = n = \operatorname{Rg} B$. Mit der Nebenbemerkung folgt $\operatorname{Rg} p^{-1}(\mathbb{Z}^n) = \operatorname{Rg} B$ aus $kB \subseteq p^{-1}(\mathbb{Z}^n) \subseteq B$. □

Beweis mit Tensorprodukten (Skizze)

- $\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}} \colon \mathbb{Z}\text{-}\mathrm{Mod} \to \mathbb{Q}\text{-VR}$ ist ein Funktor.
- $\operatorname{Rg} A = \dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} A)$
  (a) $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} (X \oplus Y) = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} X \oplus \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} Y$
  (b) $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^n \cong \mathbb{Q}^n$
  (c) $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} T \cong 0$ für T ein Torsionsmodul.
- Ist $A \longrightarrow B \longrightarrow C$ eine kurze exakte Folge, so ist auch $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} A \longrightarrow \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} B \longrightarrow \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} C$ eine kurze exakte Folge.
- Jede kurze exakte Folge $V_0 \longrightarrow V_1 \longrightarrow V_2$ von $\mathbb{Q}$-Vektorräumen spaltet und daher gilt $V_1 \cong V_0 \oplus V_2$ und $\dim_{\mathbb{Q}}(V \oplus W) = \dim_{\mathbb{Q}}(V) + \dim_{\mathbb{Q}}(W)$.

4.9 Definition

Sei (C_*, d_*) ein endlich erzeugter $\mathbb{Z}$-Kettenkomplex.

$$\chi(C_*) := \sum_{i=0}^{\infty} \operatorname{Rg}(C_i) = \sum_{i=0}^{n_0} \operatorname{Rg}(C_i)$$

heißt die **Eulercharakteristik** von (C_*, d_*). Dabei ist n_0 so gewählt, dass $C_n = 0$ für alle $n > n_0$.

4.10 Satz

Sei (C_*, d_*) ein endlich erzeugter $\mathbb{Z}$-Kettenkomplex. Dann gilt

$$\chi(C_*) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \operatorname{Rg} H_i(C_*, d_*).$$

Beweis
Sei $B_{n+1} := \operatorname{Im} d_{n+1} \colon C_{n+1} \to C_n$ und $Z_n := \ker d_n \colon C_n \to C_{n-1}$. Also $H_n(C_*, d_*) = {}^{Z_n}/_{B_{n+1}}$. Als Untermoduln von C_n sind Z_n und B_n endlich erzeugt (LA2). Insbesondere ist auch $H_n(C_*, d_*)$ endlich erzeugt und der Rang somit definiert. Auch B_{n+1} ist Untermodul des endlich erzeugten $\mathbb{Z}$-Moduls C_n und somit endlich erzeugt. Wir erhalten kurze exakte Folgen:

$$B_{n+1} \hookrightarrow Z_n \twoheadrightarrow H_n(C_*, d_*)$$
$$Z_n \hookrightarrow C_n \twoheadrightarrow B_n$$

Nach Proposition 4.8 gilt $\operatorname{Rg} Z_n = \operatorname{Rg} B_{n+1} + \operatorname{Rg} H_n(C_*, d_*)$ und $\operatorname{Rg} C_n = \operatorname{Rg} Z_n + \operatorname{Rg} B_n$. Also gilt

$$\begin{aligned}
\chi(C_*) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \operatorname{Rg} C_i &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \big(\operatorname{Rg} Z_i + \operatorname{Rg} B_i\big) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \Big(\operatorname{Rg} H_i(C_*, d_*) + \operatorname{Rg} B_{i+1} + \operatorname{Rg} B_i\Big) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \operatorname{Rg} H_i(C_*, d_*) + \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \operatorname{Rg} B_{i+1} + \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \operatorname{Rg} B_i \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \operatorname{Rg} H_i(C_*, d_*)
\end{aligned}$$ □

4.11 Korollar

Eine vereinfachte Variante dieser Aussage kam in Aufgabe 2 von Blatt3 vor: Dort haben wir den Homologiemodul über einen Körper betrachtet. Deshalb konnte wir da dann die Dimensionsformeln anwenden, um die beiden Vorraussetzungen für die Rechnung in 4.10 zu erhalten.

Sei K ein endlicher, geordneter simplizialer Kettenkomplex. Dann gilt

$$\chi(K) = \sum_{i=1}^{\dim K} (-1)^i \operatorname{Rg} H_i(K; \mathbb{Z})$$

Beweis
Wende den Satz 4.10 auf den simplizialen Kettenkomplex von K an. Da

$$\operatorname{Rg} C_n(K; \mathbb{Z}) = \operatorname{Rg} \mathbb{Z}[\Sigma_n] = \#\ n\text{-Simplizes in } K$$

ist

$$\chi(K) = \chi\big(C_*(K; \mathbb{Z}), \partial_*\big) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \operatorname{Rg} H_i\big(C_*(K; \mathbb{Z}), \partial_*\big) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \operatorname{Rg} H_i(K; \mathbb{Z})$$ □

5 Singuläre Homologie

5.1 Definition

Sei X ein topologischer Raum. Sei $S_n(X)$ die Menge aller stetigen Abbildungen $\sigma\colon |\Delta^n| \to X$. Elemente von $S_n(X)$ heißen **singuläre Simplizes** in X. Sei R ein Ring. Der **$\mathbf{n}$-te (singuläre) Kettenmodul** von X über R ist

$$C_n(X;R) := R[S_n(X)]$$

5.2 Definition

Für $\sigma \in S_n(X)$ und $j \in \{0,\dots,n\}$ sei $\delta_j\sigma \in S_{n-1}(X)$ die Einschränkung von σ auf die j-te Seite von $|\Delta^n|$, also $\delta_j(\sigma) = \sigma \circ \iota_{n,j}$, wobei $\iota_{n,j}\colon \left|\Delta^{n-1}\right| \to |\Delta^n|$ die Inklusion der j-ten Seite ist:

$$\iota_{n,j}(x_0,\dots,x_{n-1}) = \left(x_0,\dots,x_{j-1},0,x_j,\dots,x_{n-1}\right)$$

5.3 Bemerkung

Es gilt $\iota_{n,j} = |i_{n,j}|$ wobei $i_{n,j}\colon \Delta^{n-1} \to \Delta^n$ gegeben ist durch

vergleiche Blatt 2, Aufgabe 2

$$i_{n,j}(k) = \begin{cases} k, & \text{falls } k < j \\ k+1, & \text{falls } k \geqslant j \end{cases}$$

5.4 Definition

Die **$\mathbf{n}$-te singuläre Randabbildung** $\partial_n\colon C_n(X;R) \to C_{n-1}(X;R)$ ist definiert durch

$$\partial_n(\sigma) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \cdot \delta_j(\sigma).$$

5.5 Proposition

$$\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$$

Beweis (mit Lemma 5.6)

$$\begin{aligned}
\partial_{n-1} \circ \partial_n(\sigma) = \partial_{n-1}\left(\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\delta_j(\sigma)\right) &= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n}(-1)^{j+k}\delta_k\delta_j(\sigma) \\
&= \sum_{0\leqslant k<j\leqslant n}(-1)^{k+j}\delta_k\delta_j(\sigma) + \sum_{0\leqslant j\leqslant k\leqslant n-1}(-1)^{k+j}\delta_k\delta_j(\sigma) \\
&\overset{\text{Lemma 5.6}}{=} \sum_{0\leqslant k<j\leqslant n}(-1)^{k+j}\delta_k\delta_j(\sigma) + \sum_{0\leqslant j\leqslant k\leqslant n-1}(-1)^{k+j}\delta_j\delta_{k+1}(\sigma) \\
&= \sum_{0\leqslant k<j\leqslant n}(-1)^{k+j}\delta_k\delta_j(\sigma) + \sum_{0\leqslant j<k\leqslant n}(-1)^{k-1+j}\delta_j\delta_k(\sigma) \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

5.6 Lemma

Für $0 \leqslant j \leqslant k \leqslant n-1$ und $\sigma \in S_n(X)$ ist $\delta_k\delta_j(\sigma) = \delta_j\delta_{k+1}(\sigma)$.

Beweis
Es ist

$$\begin{aligned}\delta_k\big(\delta_j(\sigma)\big)(x_0,\dots,x_{n-2}) &= \delta_j(\sigma)\big(x_0,\dots,x_{k-1},0,x_k,\dots,x_{n-2}\big)\\ &= \big(x_0,\dots,x_{j-1},0,x_j,\dots,x_{k-1},0,x_k,\dots,x_{n-2}\big)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\delta_j\delta_{k+1}(\sigma)(x_0,\dots,x_{n-2}) &= \delta_{k+1}(\sigma)\big(x_0,\dots,x_{j-1},0,x_j,\dots,x_{n-2}\big)\\ &= \big(x_0,\dots,x_{j-1},0,x_j,\dots,x_{k-1},0,x_k,\dots,x_{n-2}\big)\end{aligned}$$ □

5.7 Definition

Sei X ein topologischer Raum. Die Homologie des **singulären Kettenkomplex** über R, $\big(C_*(X;R),\partial_*\big)$, heißt die **singuläre Homologie von** X mit Koeffizienten in R:

$$H_n(X;R) := H_n\big(C_*(X;R),\partial_*\big)$$

Für $R=\mathbb{Z}$ schreiben wir kürzer $C_*(X) := C_*(X;\mathbb{Z})$ und $H_n(X) := H_n(X;\mathbb{Z})$.

5.8 Definition

- Die Elemente von $C_n(X;R)$ heißen $\mathbf{n}$**-Ketten**.
- Die Elemente von $\operatorname{Im}\partial_{n+1}\subseteq C_n(X;R)$ heißen $\mathbf{n}$**-Ränder**.
- Die Elemente von $\ker\partial_n\subseteq C_n(X;R)$ heißen $\mathbf{n}$**-Zykel**.

Jeder n-Zykel $\sigma\in C_n(X;R)$ bestimmt eine **Homologieklasse** $[\sigma] := \sigma+\operatorname{Im}\partial_{n+1}\in H_n(X;R)$.

5.9 Beispiel

Ist $X=\{x_0\}$ der Ein-Punkt-Raum, so ist

$$H_*\big(\{x_0\};R\big)\cong\begin{cases}R, & \text{falls } *=0\\ 0, & \text{sonst}\end{cases}$$

Beweis
Es gibt für jedes n genau eine Abbildung $\sigma_n : |\Delta^n|\to\{x_0\}$ nämlich die konstant. Diese ist offensichtlich stetig. Also ist $C_n(\{x_0\};R)=R[\sigma_n]$. Für alle j ist $\delta_j\sigma_n=\sigma_{n-1}$. Daher ist

$$\partial_n(\sigma_n)=\begin{cases}0, & \text{falls } n \text{ ungerade}\\ \sigma_{n-1}, & \text{falls } n \text{ gerade}\end{cases}$$

Der singuläre Kettenkomplex von $\{x_0\}$ hat also folgende Gestalt:

$$\begin{tikzcd}
C_0\big(\{x_0\};R\big) \arrow[d, phantom, "\rotatebox{90}{$\cong$}"] & C_1\big(\{x_0\};R\big) \arrow[l, "0"'] \arrow[d, phantom, "\rotatebox{90}{$\cong$}"] & C_2\big(\{x_0\};R\big) \arrow[l, "\cong"'] \arrow[d, phantom, "\rotatebox{90}{$\cong$}"] & C_3\big(\{x_0\};R\big) \arrow[l, "0"'] \arrow[d, phantom, "\rotatebox{90}{$\cong$}"] & \cdots \arrow[l, "\cong"'] \arrow[d, phantom, "\rotatebox{90}{$\cong$}"] \\
R & R \arrow[l, "0"] & R \arrow[l, "\mathrm{id}"] & R \arrow[l, "0"] & R \arrow[l, "\mathrm{id}"]
\end{tikzcd}$$

Es folgt

$$H_n\big(\{x_0\};R\big)\cong\begin{cases}R, & \text{falls } n=0\\ 0, & \text{sonst}\end{cases}$$ □

5.10 Proposition

1) Ist $X \neq \emptyset$, so ist $H_0(X) \neq 0$.
2) Ist X wegzusammenhängend, so gilt $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$.

Tatsächlich gilt auch die Umkehrung, wie in Aufgabe 4 von Blatt 3 gezeigt.

Beweis

1) Sei die sogenannte **Augmentierung** $\epsilon\colon C_0(X) \to \mathbb{Z}$ definiert durch

$$\epsilon\left(\sum_{\sigma \in S_0(X)} r_\sigma \cdot \sigma\right) := \sum_\sigma r_\sigma.$$

Dann ist $\epsilon \circ \partial_1 \colon C_1(X) \to \mathbb{Z}$ trivial, denn für $\sigma \in S_1(X)$ ist $\epsilon \circ \partial_1(\sigma) = \epsilon(\delta_0\sigma - \delta_1\sigma) = 0$. Daher induziert ϵ eine Abbildung $\overline{\epsilon}\colon H_0(X) \to \mathbb{Z}$. Da $X \neq \emptyset$ ist, gibt es einen singulären 0-Simplex $\sigma\colon \left|\Delta^0\right| \to X$. Für σ gilt $\overline{\epsilon}([\sigma]) = 1$ und daher ist $\overline{\epsilon}$ surjektiv und $H_0(X) \neq 0$.

2) Wir zeigen, dass $\overline{\epsilon}\colon H_0(X) \to \mathbb{Z}$ ein Isomorphismus ist, falls X wegzusammenhängend ist. Dazu zeigen wir $\ker\epsilon = \operatorname{Im}\partial_1$. Dazu definieren wir $s\colon C_0(X) \to C_1(X)$ wie folgt: Sei σ_0 ein fest gewählter singulärer 0-Simplex. Zu $\sigma \in S_0(X)$ gibt es, da X wegzusammenhängend ist, $s(\sigma) \in S_1(X)$ mit $\delta_0 s(\sigma) = \sigma$, $\delta_1 s(\sigma) = \sigma_0$. Es gilt nun

$$\partial_1 \circ s(\sigma) = \sigma - \sigma_0 = \left(\mathrm{id}_{C_0(X)} - i \circ \epsilon\right)(\sigma)$$

wobei $i\colon \mathbb{Z} \to C_0(X)$, $n \mapsto n \cdot \sigma_0$. Ist nun $v \in \ker\epsilon$, so folgt

$$\partial_1 \circ s(v) = v - i \circ \underbrace{\epsilon(v)}_{=0} = v$$

also ist $v \in \operatorname{Im}\partial_1$ und es folgt die Behauptung. □

5.11 Bemerkung

Sei $K = (V, \Sigma)$ ein geordneter simplizialer Komplex. Sei $\sigma = \{v_o, \ldots, v_n\} \in \Sigma_n$ ein n-Simplex von K mit $v_0 < v_1 < \ldots < v_n$. Wir ordnen σ den singulären n-Simplex $f_\sigma\colon |\Delta^n| \to |\Delta^\sigma| \subseteq |K|$ zu, wobei

$$f_\sigma\left(\sum_{i=0}^n t_i \cdot e_i\right) = \sum_{i=0}^n t_i \cdot v_i.$$

Nun erhalten wir eine Abbildung

$$C_*(K;R) \to C_*(|K|,R) \quad , \qquad \sum_{\sigma\in\Sigma_n} r_\sigma \cdot \sigma \longmapsto \sum_{\sigma\in\Sigma_n} r_\sigma \cdot f_\sigma.$$

Diese Abbildung induziert(!) eine weitere Abbildung $H_*(K;R) \xrightarrow{\cong} H_*(|K|;R)$ von der wir später zeigen werden, dass sie ein Isomorphismus ist.

6 Funktorialität

6.1 Definition

Seien (C_*, d_*) und (C'_*, d'_*) zwei R-Kettenkomplexe. Eine **$\mathbf{R}$-Kettenabbildung** $f_*\colon (C_*, d_*) \to (C'_*, d'_*)$ ist eine Folge von R-linearen Abbildungen $f_n\colon C_n \to C'_n$, sodass

$$d'_n \circ f_n = f_{n-1} \circ d_n$$

für alle $n \geqslant 1$ gilt. Also kommutiert folgendes Diagramm

$$\begin{tikzcd}
C_0 \arrow[d, "f_0"] & C_1 \arrow[l, "d_1"'] \arrow[d, "f_1"] & C_2 \arrow[l, "d_2"'] \arrow[d, "f_2"] & C_3 \arrow[l, "d_3"'] \arrow[d, "f_3"] & \dots \arrow[l] \\
C'_0 & C'_1 \arrow[l, "d'_1"] & C'_2 \arrow[l, "d'_2"] & C'_3 \arrow[l, "d'_3"] & \dots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

6.2 Bemerkung

Ist $f_*\colon (C_*, d_*) \to (C'_*, d'_*)$ eine Kettenabbildung, so erhalten wir eine induzierte Abbildung auf Homologie $H_n(f_*)\colon H_n(C_*, d_*) \to H_n(C'_*, d'_*)$ durch

$$H_n(f_*)([v]) := [f_n(v)]$$

für $v \in \ker d_n$. Dies ist wohldefiniert, denn:

- $d'_n\big(f_n(v)\big) = f_{n-1}\big(d_n(v)\big) = 0$, also $f_n(v) \in \ker d'_n$ für $v \in \ker d_n$.
- Ist $[v] = [w]$, mit $v, w \in \ker d_n$, so gibt es $x \in C_{n+1}$ mit $d_{n+1}(x) = v - w$. Dann ist
$$d'_{n+1}\big(f_{n+1}(x)\big) = f_n\big(d_{n+1}(x)\big) = f_n(v) - f_n(w)$$
also $[f_n(v)] = [f_n(w)] \in H_n(C'_*, d'_*)$.

6.3 Bemerkung

a) R-Kettenkomplexe mit R-Kettenabbildungen bilden die Kategorie R-$\textsc{Ketten}$.

b) Homologie definiert nun einen Funktor: $H_n\colon R\text{-}\textsc{Ketten} \to R\text{-}\textsc{Mod}$.
Es gilt $H_n(\mathrm{id}_{(C_*,d_*)}) = \mathrm{id}_{H_n(C_*,d_*)}$ und $H_n(f \circ g) = H_n(f) \circ H_n(g)$, da
$$H_n(f \circ g)([v]) = [f_n \circ g_n(v)] = \big[f_n\big(g_n(v)\big)\big] = H_n(f)\big([g_n(v)]\big) = H_n(f)\big(H_n(g)(v)\big)$$

c) Definiert man die Kategorie der **graduierten** R-Moduln als die Kategorie, deren Objekte Folgen $(V_n)_n$ von $\mathbb{R}$-Moduln sind und deren Morphismen Folgen von R-linearen Abbildungen $(f_n)_n$ sind, so kann man die H_n, $n \in \mathbb{N}$ zu einem Funktor
$$H_*\colon R\text{-}\textsc{Ketten} \longrightarrow \textsc{Gr}\text{-}R\text{-}\textsc{Mod} \quad , \qquad (C_*, d_*) \longmapsto \big(H_n(C_*, d_*)\big)_n$$
zusammensetzen.

6.4 Definition

Sei $f : X \to Y$ stetig. Wir definieren $C_n(f; R)\colon C_n(X; R) \to C_n(Y; R)$ durch

$$C_n(f; R)\left(\sum_{\sigma \in S_n(X)} r_\sigma \cdot \sigma\right) := \sum_{\sigma \in S_n(X)} r_\sigma \cdot (f \circ \sigma)$$

Dies ist wohldefiniert, denn für $\sigma \in S_n(X)$ ist $f \circ \sigma \in S_n(Y)$.

6.5 Proposition

Mit dieser Definition von $C_*(f;R)$ wird der singuläre Kettenkomplex über R zu einem Funktor

$$C_*(-;R)\colon \textsc{Top} \to R\text{-}\textsc{Ketten}$$

Beweis

(i) $C_*(f;R)$ ist eine R-Kettenabbildung: Es gilt

$$\begin{aligned} C_{n-1}(f;R)\circ\partial_n(\sigma) = C_{n-1}(f;R)\left(\sum_{l=0}^{n}(-1)^l\cdot\sigma\circ\iota_{n,l}\right) &= \sum_{l=0}^{n}(-1)^l\cdot(f\circ\sigma)\circ\iota_{n,l} \\ &= \partial_n(f\circ\sigma) = \partial\big(C_n(f;R)(\sigma)\big). \end{aligned}$$

(ii) Zu zeigen: $C_*(f\circ g;R) = C_*(f;R)\circ C_*(g;R)$. Es gilt

$$C_n(f\circ g;R)(\sigma) = f\circ(g\circ\sigma) = C_n(f;R)(g\circ\sigma) = C_n(f;R)\big(C_n(g;R)(\sigma)\big).$$

(iii) Zu zeigen: $C_*(\mathrm{id}_X;R) = \mathrm{id}_{C_*(X;R)}$. Es gilt

$$C_n(\mathrm{id}_X;R)(\sigma) = \mathrm{id}_X\circ\sigma = \sigma$$ □

6.6 Korollar

Mit $H_n(f;R) := H_n(C_*(f;R))$ wird $H_n(-;R)$ zu einem Funktor: $H_n(-;R)\colon \textsc{Top}\to R\text{-}\textsc{Mod}$.

Beweis

$H_n(-;R)$ ist die Komposition des Funktors $C_*(-;R)\colon \textsc{Top}\to R\text{-}\textsc{Ketten}$ aus 6.5 mit dem Funktor $H_n\colon R\text{-}\textsc{Ketten}\to R\text{-}\textsc{Mod}$ aus 6.3. □

6.7 Bemerkung

- Oft schreiben wir kurz $f_* = H_n(f;R)$.
- Für $\left[\sum_{\sigma\in S_n(X)} r_\sigma\sigma\right]\in H_n(X;R)$ ist $f_*\left(\left[\sum\limits_{\sigma\in S_n(X)} r_\sigma\sigma\right]\right) = \left[\sum\limits_{\sigma\in S_n(X)} r_\sigma f\circ\sigma\right]\in H_n(Y;R)$

6.8 Definition

Seien X_i, $i\in I$ topologische Räume. Mit

$$X := \coprod_{i\in I} X_i$$

bezeichnen wir die **Summe** (oder auch das **Koprodukt**) der X_i. Als Menge ist X die disjunkte Vereinigung der X_i. $U\subseteq X$ ist offen genau dann, wenn $X_i\cap U\subseteq X_i$ offen ist für jedes $i\in I$. Für jedes i_0 erhalten wir eine stetige Inklusion $j_{i_0}\colon X_{i_0}\to\coprod_i X_i$.

Bemerkung

Für jedes i_0 ist $X_{i_0}\subseteq\coprod_i X_i$ offen und abgeschlossen.

6.9 Definition

Seien V_i, $i \in I$ R-Moduln. Mit

$$V := \bigoplus_{i \in I} V_i$$

bezeichnen wir die **Summe** (oder auch das **Koprodukt**) der V_i. Elemente von V sind I-Folgen $(v_i)_{i \in I}$ mit $v_i \in V_i$ und $v_i = 0$ für alle bis auf endlich viele i. Die R-Modulstruktur ist erklärt durch:

$$(v_i)_{i\in I} + (w_i)_{i\in I} := (v_i + w_i)_{i\in I} \qquad , \qquad r \cdot (v_i)_{i\in I} := (r \cdot v_i)_{i\in I}$$

Für jedes $i_0 \in I$ erhalten wir eine R-lineare Abbildung $j_{i_0} \colon V_{i_0} \to V$ mit

$$(j_{i_0}(v))_i = \begin{cases} v, & \text{falls } i = i_0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Bemerkung
Seien V_i für $i \in I$ R-Moduln. Sei W ein weiterer R-Modul. Dann gibt es zu jeder Folge $f_i \colon V_i \to W$ von R-linearen Abbildungen eine R-lineare Abbildung $\oplus_{i\in I} f_i \colon \bigoplus_{i\in I} V_i \to W$ mit

$$(\oplus_{i\in I} f_i)\big((v_i)_{i\in I}\big) = \sum_{i\in I} f_i(v_i)$$

Ist umgekehrt $f \colon \bigoplus_{i\in I} V_i \to W$ eine R-lineare Abbildung, so ist $f_i := f \circ j_i$ eine Folge von R-linearen Abbildungen mit $f = \bigoplus_{i\in I} f_i$.

6.10 Satz

Sei $X = \coprod_{i\in I} X_i$. Dann induzieren die Inklusionen $j_i \colon X_i \hookrightarrow X$ einen Isomorphismus

$$\bigoplus_{i\in I} H_n(X_i; R) \xrightarrow{\bigoplus_{i\in I}(j_i)_*} H_n(X; R)$$

Beweis
Da die $X_i \subseteq X$ offen und abgeschlossen sind und $|\Delta^n|$ zusammenhängend ist (sogar wegzusammenhängend), gibt es für jedes $\sigma \colon |\Delta^n| \to X$ ein eindeutiges i mit $\operatorname{Im}\sigma \subseteq X_i$. Es gilt also $S_n(X) = \dot{\bigcup} S_n(X_i)$. Daher induzieren die j_i für jedes n einen Isomorphismus

$$\bigoplus_{i\in I} C_n(j_i; R) \colon \bigoplus_{i\in I} C_n(X_i; R) \xrightarrow{\cong} C_n(X; R)$$

Da diese Isomorphismen mit den Randabbildungen vertauschen, erhalten wir einen Isomorphismus von R-Kettenkomplexen

$$\varphi := \bigoplus_{i\in I} C_*(j_i; R) \colon \bigoplus C_*(X_i; R) \xrightarrow{\cong} C_*(X; R)$$

Da $\bigoplus_i H_n\big(C_*(X_i; R)\big) \cong H_n\big(\bigoplus_i C_*(X_i; R)\big)$ induzieren dann auch die $(j_i)_*$ einen Isomorphismus

$$\bigoplus_{i\in I} (j_i)_* \colon \bigoplus_{i\in I} H_n(X_i; R) \xrightarrow{\cong} H_n(X; R) \qquad \square$$

7 Homotopieinvarianz

7.1 Bemerkung

Sei $f\colon X \to Y$ ein Homöomorphismus. Dann ist $f_*\colon H_n(X;R) \longrightarrow H_n(Y;R)$ ein Isomorphismus.

Beweis
Da Homologie ein Funktor ist, gilt

$$\begin{aligned} f_* \circ (f^{-1})_* &= (f \circ f^{-1})_* = (\mathrm{id}_Y)_* = \mathrm{id}_{H_n(Y;R)} \qquad \text{und} \\ (f^{-1})_* \circ f_* &= (f^{-1} \circ f)_* = (\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{H_n(X;R)} \end{aligned}$$

Also ist $(f_*)^{-1} = (f^{-1})_*$. Insbesondere ist f_* ein Isomorphismus. □

7.2 Definition

Eine stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt eine **Homotopieäquivalenz**, falls es eine stetige Abbildung $g\colon Y \to X$ gibt, so dass $g \circ f$ homotop zu id_X ist und $f \circ g$ homotop zu id_Y ist. g heißt dann eine **Homotopieinverse** zu f.

Bemerkung

(i) f ist genau dann eine Homotopieäquivalenz, wenn $[f]$ in $\mathrm{HT{\small OP}}$ invertierbar ist. In $\mathrm{HT{\small OP}}$ ist dann $[f]^{-1} = [g]$.

(ii) Die Homotopieinverse ist eindeutig bis auf Homotopie.

7.3 Satz

Seien $f, g\colon X \to Y$ stetige Abbildungen. Sind f und g homotop, so gilt für die induzierten Abbildungen $H_n(f;R) = H_n(g;R)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis
Siehe 7.8, sowie 7.13 □

7.4 Korollar

Ist $f\colon X \to Y$ eine Homotopieäquivalenz, so ist $f_*\colon H_n(X;R) \to H_n(Y;R)$ ein Isomorphismus.

Beweis
Sei $g\colon Y \to X$ ein Homotopieinverses zu f. Es folgt

$$\begin{aligned} f_* \circ g_* &\overset{\text{Funktor}}{=} (f \circ g)_* \overset{\text{Homotopieinvarianz}}{=} (\mathrm{id}_Y)_* \overset{\text{Funktor}}{=} \mathrm{id}_{H_n(Y;R)} \\ g_* \circ f_* &\overset{\text{Funktor}}{=} (g \circ f)_* \overset{\text{Homotopieinvarianz}}{=} (\mathrm{id}_X)_* \overset{\text{Funktor}}{=} \mathrm{id}_{H_n(X;R)} \end{aligned}$$ □

7.5 Korollar

Ist X **kontrahierbar**, d.h. es gibt eine Homotopie $H\colon X \times [0,1] \to X$ mit $H_0 = \mathrm{id}_X$ und H_1 konstant, so gilt

$$H_n(X;R) \cong \begin{cases} R, & \text{falls } n = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis
Sei $\{x_0\} = \operatorname{Im} H_1$. Dann ist die Inklusion $\{x_0\} \to X$ eine Homotopieäquivalenz. Also gilt nach 7.4

$$H_n(X;R) \cong H_n\big(\{x_0\};R\big) \overset{5.9}{\cong} \begin{cases} R, & \text{falls } n=0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \qquad \square$$

Beispiel

$$H_n(\mathbb{R}^k;R) \cong \begin{cases} R, & \text{falls } n=0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{und} \qquad H_n(D^k;R) \cong \begin{cases} R, & \text{falls } n=0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

7.6 Definition

Seien (C_*, d_*) und (C'_*, d'_*) R-Kettenkomplexe. Seien $f_*, g_* \colon (C_*, d_*) \to (C'_*, d'_*)$ R-Kettenabbildungen. Eine **Kettenhomotopie** von f_* nach g_* ist eine Folge von R-linearen Abbildungen $h_n \colon C_n \to C'_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, sodass für alle n gilt:

$$\begin{tikzcd} C_{n-1} \arrow[dr, "h_{n-1}"'] & C_n \arrow[l, "d_n"'] \arrow[d, shift right, "g_n"'] \arrow[d, shift left, "f_n"] \arrow[dr, "h_n"] & \\ & C'_n & C'_{n+1} \arrow[l, "d'_{n+1}"] \end{tikzcd}$$

Kettenhomotopie definiert eine Äquivalenzrelation wie in Aufgabe 2 von Blatt 5 gezeigt.

$$d'_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ d_n = f_n - g_n$$

In diesem fall heißen f_* und g_* **kettenhomotop**.

7.7 Proposition

Seien $f_*, g_* \colon (C_*, d_*) \to (C'_*, d'_*)$ Kettenabbildungen. Sind f_* und g_* kettenhomotop, so gilt für alle n

$$H_n(f_*) = H_n(g_*)$$

Beweis
Sei $x \in H_n(C_*, d_*)$. Also $x = [v]$ mit $v \in \ker d_n \colon C_n \to C_{n-1}$. Dann gilt, da $v \in \ker d_n$

$$\begin{aligned} H_n(f_*)(x) = H_n(f_*)([v]) = [f_n(v)] &= \Big[g_n(v) + \underbrace{d'_{n+1} \circ h_n(v)}_{\in \operatorname{Im} d'_{n+1}} + \underbrace{h_{n-1} \circ d_n(v)}_{=0}\Big] \\ &= [g_n(v)] = H_n(g_*)([v]) = H_n(g_*)(x) \end{aligned} \qquad \square$$

7.8 Lemma

Die Homotopieinvarianz von $H_n(-;R)$, also Satz 7.3, folgt aus folgenden Spezialfall:

Seien $i_0, i_1 \colon X \hookrightarrow X \times [0,1]$ Inklusionen mit $i_0(x) = (x,0)$, $i_1(x) = (x,1)$. $\implies (i_0)_* = (i_1)_*$ **[#]**

Beweis
Sei $H \colon X \times [0,1] \to Y$ eine Homotopie zwischen $f, g \colon X \to Y$, also $f = H \circ i_0$ und $g = H \circ i_1$. Dann folgt mittels Funktorialität

$$f_* = (H \circ i_0)_* = H_* \circ (i_0)_* = H_* \circ (i_1)_* = (H \circ i_1)_* = g_* \qquad \square$$

7.9 Bemerkung

Zum Beweis von **[#]** werden wir eine explizite Kettenhomotopie h_* zwischen $C_*(i_0;R)$ und $C_*(i_1;R)$ konstruieren. Wir brauchen also $h_n \colon C_n(X;R) \to C_{n+1}(X \times [0,1];R)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\partial_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ \partial_n = C_n(i_0;R) - C_n(i_1;R). \qquad \textbf{[\#\#]}$$

"Ansatz"

Für $\sigma\colon |\Delta^n| \to X$ setze $h_n(\sigma) = \sigma \times \mathrm{id}_{[0,1]}\colon |\Delta^n| \times [0,1] \to X \times [0,1]$. Dann ist "$h_{n-1}(\partial_n \sigma) = \partial_n\sigma \times \mathrm{id}_{[0,1]}$" und

$$\partial_{n+1}(h_n\sigma) = \partial_{n+1}(\sigma \times \mathrm{id}_{[0,1]}) = (\sigma \times \mathrm{id})\Big|_{\partial(|\Delta^n| \times [0,1])} = \partial_n\sigma \times \mathrm{id}_{[0,1]} + i_0\sigma + i_1\sigma$$

da $\partial(|\Delta^n| \times [0,1]) = \partial|\Delta^n| \times [0,1] \,\dot\cup|, |\Delta^n| \times \{0,1\}$.

Um daraus Sinn zu machen, zerlegen wir $|\Delta^n| \times [0,1]$ in eine Vereinigung von $(n+1)$-Simplizes. $\Delta^n \times [0,1]$ hat die folgende Form für $n \in \{0,1,2\}$:

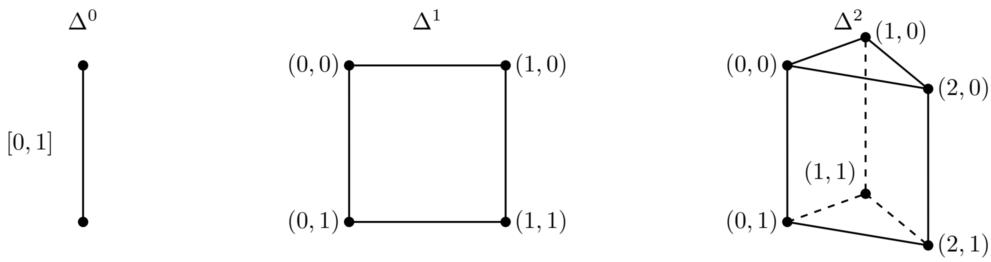


Abbildung 1: $\Delta^n \times [0,1]$ für $n = 0,1,2$

Die Zerlegung in 3-Simplizes ist für $\Delta^2 \times [0,1]$ gegeben durch

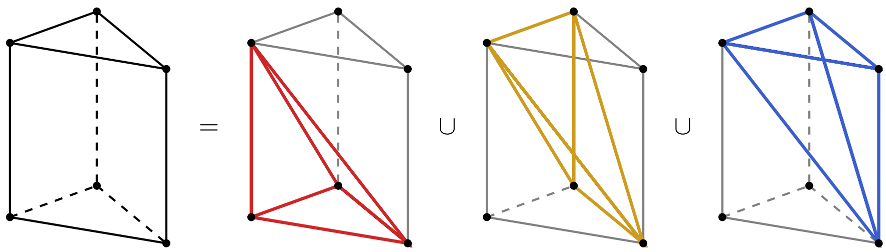


Abbildung 2: Zerlegung von $\Delta^2 \times [0,1]$ in 3-Simplizes

Dieses Vorgehen verallgemeinern wir jetzt für beliebiges $n \in \mathbb{N}$:

7.10 Definition

Für $j = 0, \dots, n$ seien $k_{n,j}\colon |\Delta^{n+1}| \to |\Delta^n| \times [0,1]$ und $\iota_{n,j}\colon \left|\Delta^{n-1}\right| \to |\Delta^n|$ die eindeutigen affin linearen Abbildungn, für die gilt:

$e_1, \dots, e_n$ sind wieder die Einheitsvektoren von $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} k_{n,j}(e_0) &= (e_0, 0) & \iota_{n,j}(e_0) &= e_0 \\ k_{n,j}(e_1) &= (e_1, 0) \quad \dots & \iota_{n,j}(e_1) &= e_1 \quad \dots \\ k_{n,j}(e_j) &= (e_j, 0) & \iota_{n,j}(e_{j-1}) &= e_{j-1} \\ k_{n,j}(e_{j+1}) &= (e_j, 1) \quad \dots & \iota_{n,j}(e_j) &= e_{j+1} \quad \dots \\ k_{n,j}(e_{n+1}) &= (e_n, 1) & \iota_{n,j}(e_{n-1}) &= e_n \end{aligned}$$

7.11 Lemma

Es gelten folgende fünf Gleichungen für die Abbildungen $k_{n,j}$ und $\iota_{n,j}$:

(i) Für $0 \leqslant l < j \leqslant n$ gilt $k_{n,j} \circ \iota_{n+1,l} = \left(\iota_{n,l} \times \mathrm{id}_{[0,1]}\right) \circ k_{n-1,j-1}$

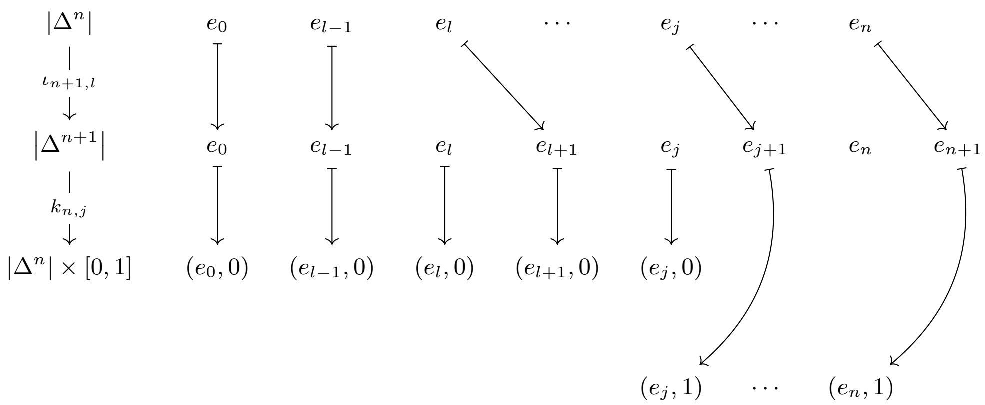
(ii) Für $1 \leqslant j+1 < l \leqslant n+1$ gilt $k_{n,j} \circ \iota_{n+1,l} = \left(\iota_{n,l-1} \times \mathrm{id}_{[0,1]}\right) \circ k_{n-1,j}$

(iii) Für $1 \leqslant j+1 = l \leqslant n$ gilt $k_{n,j} \circ \iota_{n+1,l} = k_{n,j+1} \circ \iota_{n+1,l}$

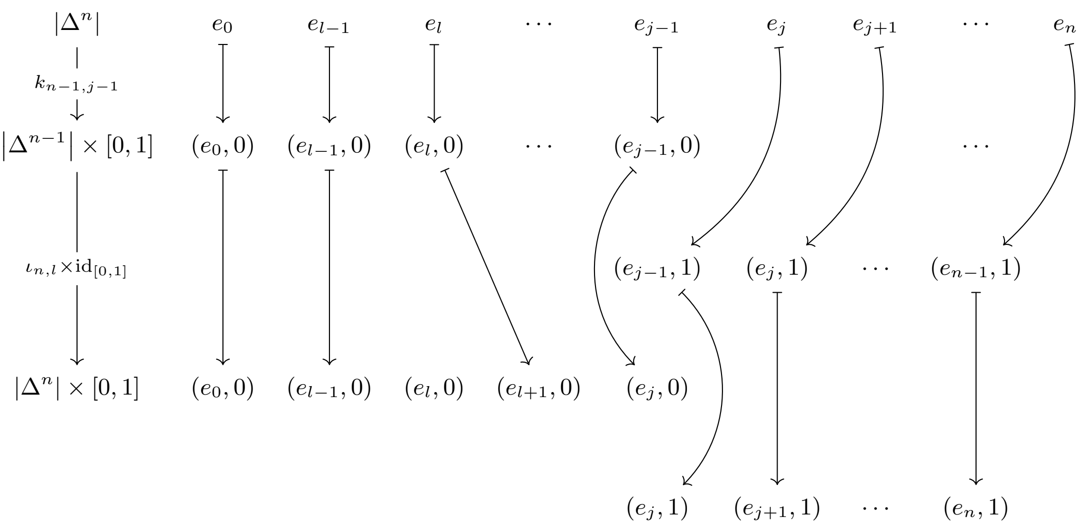
(iv) Für $l = 0, j = 0$ ist $k_{n,j} \circ \iota_{n+1,l} = i_1 : \Delta^n \to \Delta^n \times [0,1]$

(v) Für $l = n, j = n+1$ ist $k_{n,j} \circ \iota_{n+1,l} = i_0 : \Delta^n \to \Delta^n \times [0,1]$

Beweis
Wir zeigen hier nur exemplarisch die erste Gleichung: Die linke Seite der Gleichung entspricht



und die rechte Seite entspricht



Also folgt insgesamt die Gleichheit. Die anderen Gleichungen folgen genauso. $\square$

7.12 Beweis von [##]

Sei $h_n\colon C_n(X;R) \to C_{n+1}(X \times [0,1]; R)$ definiert durch

$$h_n(\sigma) := \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \cdot (\sigma \times \mathrm{id}) \circ k_{n,j}$$

h_* ist die gesuchte Kettenhomotopie, da für $n \in \mathbb{N}$ unter Anwendung der Gleichungen aus 7.12 gilt:

$$\begin{aligned}
\partial_{n+1}\big(h_n(\sigma)\big) &= \partial_{n+1}\left(\sum_{j=0}^{n}(-1)^j \cdot (\sigma \times \mathrm{id}) \circ k_{n,j}\right) \\
&= \sum_{l=0}^{n+1}\sum_{j=0}^{n}(-1)^{j+l} \cdot (\sigma \times \mathrm{id}) \circ k_{n,j} \circ \iota_{n+1,l} \qquad \text{(nach Definition 5.2)} \\
&= \sum_{0\leqslant l<j\leqslant n}(-1)^{j+l}\big((\sigma \circ \iota_{n,l}) \times \mathrm{id}\big) \circ k_{n-1,j-1} + \sum_{1\leqslant j+1<l\leqslant n+1}(-1)^{j+l}\big((\sigma \circ \iota_{n,l-1}) \times \mathrm{id}\big) \circ k_{n-1,j} \\
&\quad + \sum_{1\leqslant j+1=l\leqslant n}(-1)^{j+l}(\sigma \times \mathrm{id}) \circ k_{n,j+1} \circ \iota_{n+1,l} + \sum_{1\leqslant j=l\leqslant n}(-1)^{j+l}(\sigma \times \mathrm{id}) \circ k_{n,j} \circ \iota_{n+1,l} \\
&\quad + \sum_{0=l=j}(-1)^{j+l}(\sigma \times \mathrm{id}) \circ i_1 + \sum_{n+1=j+1=l}(-1)^{j+l}(\sigma \times \mathrm{id}) \circ i_0 \\
&= \sum_{0\leqslant l\leqslant j\leqslant n-1}(-1)^{j+l+1}\big((\sigma \circ \iota_{n,l}) \times \mathrm{id}\big) \circ k_{n-1,j} + \sum_{1\leqslant j+1\leqslant l\leqslant n}(-1)^{j+l+1}\big((\sigma \circ \iota_{n,l}) \times \mathrm{id}\big) \circ k_{n-1,j} \\
&\quad \underbrace{+ \sum_{1\leqslant j=l\leqslant n}(-1)^{j+l-1}(\sigma \times \mathrm{id}) \circ k_{n,j} \circ \iota_{n+1,l} + \sum_{1\leqslant j=l\leqslant n}(-1)^{j+l}(\sigma \times \mathrm{id}) \circ k_{n,j} \circ \iota_{n+1,l}}_{=0} \\
&\quad + \sum_{0=l=j}(-1)^{j+l}(\sigma \times \mathrm{id}) \circ i_1 + \sum_{n+1=j+1=l}(-1)^{j+l}(\sigma \times \mathrm{id}) \circ i_0 \\
&= -\sum_{\substack{0\leqslant l\leqslant n\\ 0\leqslant j\leqslant n-1}}(-1)^{j+l}\big((\sigma \circ \iota_{n,l}) \times \mathrm{id}\big) \circ k_{n-1,j} + (\sigma \times \mathrm{id}) \circ i_1 - (\sigma \times \mathrm{id}) \circ i_0 \\
&= -\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\sum_{l=0}^{n}(-1)^l\big((\sigma \circ \iota_{n,l}) \times \mathrm{id}\big) \circ k_{n-1,j} + \underbrace{(\sigma \times \mathrm{id}) \circ i_1}_{=i_1\circ\sigma} - \underbrace{(\sigma \times \mathrm{id}) \circ i_0}_{=i_0\circ\sigma} \\
&= -h_{n-1}(\partial_n\sigma) + C_n(i_1;R)(\sigma) - C_n(i_0;R)(\sigma) \qquad \square
\end{aligned}$$

7.13 Bemerkung

Ist $H\colon X \times [0,1] \to Y$ eine Homotopie zwischen f und g, so erhalten wir eine Kettenhomotopie k zwischen $C_*(f;R)$ und $C_*(g;R)$ durch

$$k_n(\sigma) := C_{n+1}(H;R) \circ h_n = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j H \circ (\sigma \times \mathrm{id}) \circ k_{n,j}$$

8 Homologie von Paaren

8.1 Definition

Sei A ein Teilraum von X, dann heißt (X, A) ein **Paar von topologischen Räumen**. Eine Abbildung von Paaren $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ ist eine stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ mit $f(A) \subseteq B$. Manchmal schreiben wir $(f, f|_A)\colon (X, A) \to (Y, B)$.
Die Kategorie von Paaren von topologischen Räumen bezeichnen wir mit Top^2.

8.2 Definition

Sei (X, A) ein Paar. Dann definieren wir den **singulären Kettenkomplex** von (X, A) über R durch

$$C_n(X, A; R) := {}^{C_n(X;R)}/_{C_n(A;R)}$$
$$\partial_n\big(\sigma + C_n(A; R)\big) := \partial_n\sigma + C_{n-1}(A; R)$$

Dies ist wohldefiniert, da $\partial_n\big(C_n(A; R)\big) \subseteq C_{n-1}(A; R)$. Weiter heißt

$$H_n(X, A; R) := H_n\big(C_*(X, A; R), \partial_*\big)$$

der **n-te singuläre Homologiemodul** von (X, A) mit Koeffizienten in R.

8.3 Bemerkung

Homologie von Paaren ist auch wieder homotopieinvariant, wie in Aufgabe 1 von Blatt 7 gezeigt.

Der singuläre Kettenkomplex von Paaren definiert einen Funktor $\mathrm{Top}^2 \to R\text{-}\mathrm{Ketten}$. Durch Komposition mit Homologie (als Funktor $R\text{-}\mathrm{Ketten} \to R\text{-}\mathrm{Mod}$) erhalten wir einen Funktor

$$H_n(-, -; R)\colon \mathrm{Top}^2 \longrightarrow R\text{-}\mathrm{Mod}$$

8.4 Bemerkung

Via $X \mapsto (X, \emptyset)$ können wir jeden Raum auch als Paar auffassen. Es gilt $H_n(X, \emptyset; R) = H_n(X; R)$.

8.5 Frage

Können wir $H_n(X, A; R)$ durch $H_n(X; R)$ und $H_n(A; R)$ ausdrücken?

Ansatz 1:

$$H_n(X, A; R) \cong {}^{H_n(X;R)}/_{H_n(A;R)}$$

⚠ Problem: $H_n(A; R)$ ist kein Untermodul von $H_n(X; R)$.

Ansatz 2: Ist $H_n(X; R) \to H_n(X, A; R)$ surjektiv?

Sei $x \in H_n(X, A; R)$. Dann gibt es $\sigma + C_n(A; R) \in C_n(X, A; R)$ mit $\partial_n\big(\sigma + C_n(A; R)\big) = 0$ und $x = [\sigma]$. Es ist $\sigma \in C_n(X; R)$, aber wir wissen nur $\partial_n\sigma \in C_{n-1}(A; R)$, nicht $\partial_n(\sigma) = 0$. 😐

8.6 Beispiel

In $C_n\big(|\Delta^n|, |\partial\Delta^n|; R\big)$ gilt für $\sigma := \mathrm{id}\colon |\Delta^n| \to |\Delta^n|$, dass $\partial_n([\sigma]) = 0$ ist, da $\partial_n\sigma \in C_{n-1}(|\partial\Delta^n|; R)$.
Wir werden später sehen, dass $[\sigma]$ den Homologiemodul

$$H_n\big(|\Delta^n|, |\partial\Delta^n|; R\big) \cong R$$

erzeugt.

8.7 Definition

Eine Folge von R-linearen Abbildungen zwischen R-Moduln M_i

$$\cdots \longrightarrow M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_{n-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_0$$

heißt **lange exakte Folge**, wenn sie exakt an jeder Stelle M_i ist, d.h. für alle i gilt $\operatorname{Im} f_i = \ker f_{i-1}$.

8.8 Satz

Es gibt eine natürliche Transformation ∂_n von $(X, A) \mapsto H_n(X, A; R)$ nach $(X, A) \mapsto H_{n-1}(A; R)$, sodass für jedes Paar (X, A)

$$\begin{aligned} \cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(A; R) \xrightarrow{i_*} H_n(X; R) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A; R) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A; R) \longrightarrow \cdots \\ \cdots \xrightarrow{\partial_1} H_0(A; R) \longrightarrow H_0(X; R) \longrightarrow H_0(X, A; R) \longrightarrow 0 \end{aligned} \qquad [*]$$

eine lange exakte Folge ist. Dabei sind $i\colon A \hookrightarrow X$ und $j\colon (X, \emptyset) \hookrightarrow (X, A)$ die Inklusionen. Das bedeutet:

Für jedes Paar (X, A) haben wir eine R-lineare Abbildung $\partial_n\colon H_n(X, A; R) \to H_{n-1}(A; R)$, sodass für jede Abbildung $(f, f|_A)\colon (X, A) \to (Y, B)$ von Paaren folgendes Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd} H_n(X, A; R) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "(f, f|_A)_*"] & H_{n-1}(A; R) \arrow[d, "(f|_A)_*"] \\ H_n(Y, B; R) \arrow[r, "\partial_n"] & H_{n-1}(B; R) \end{tikzcd}$$

Beweis
siehe 8.13.

8.9 Korollar

(1) Ist die Inklusion $i\colon A \to X$ eine Homotopieäquivalenz, so ist $H_n(X, A; R) = 0$ für alle n.

(2) Sei A kontraktibel. Dann gilt für alle $n \geqslant 1$. $H_n(X; R) \cong H_n(X, A; R)$

Beweis

(1) Betrachte den folgenden Ausschnitt aus der langen exakten Folge:

$$H_n(A; R) \xrightarrow{i_*} H_n(X; R) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A; R) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A; R) \xrightarrow{i_*} H_n(X; R)$$

Nach 7.4 ist $i_*\colon H_n(A; R) \to H_n(X; R)$ ein Isomorphismus. Wegen der Exaktheit gilt $\ker j_* = \operatorname{Im} i_* = H_n(X; R)$, also folgt $j_* = 0$. Da $\operatorname{Im} \partial_n = \ker i_* = 0$, folgt $\partial_n = 0$. Nun ist

$$H_n(X, A; R) = \ker \partial_n = \operatorname{Im} j_* = 0$$

(2) Folgt leicht aus 7.5 und der Exaktheit der Paarsequenz [*]. Für $n = 1$ brauchen wir außerdem, dass ∂_1 für A wegzusammenhängend trivial ist. Dies folgt aus Aufgabe 1a) von Blatt 6, denn dort wurde gezeigt, dass $i_*\colon H_0(A) \to H_0(X)$ injektiv ist. $\square$

8.10 Definition

Seien

$$(C_*, d_*) \xrightarrow{i_*} (C'_*, d'_*) \xrightarrow{p_*} (C''_*, d''_*) \qquad [\#]$$

R-Kettenabbildungen. Ist für jedes n die Folge $C_n \xrightarrow{i_n} C'_n \xrightarrow{p_n} C''_n$ kurz exakt, so heißt [#] eine **kurze exakte Folge von Kettenkomplexen**.

8.11 Beispiel

Für jedes Paar (X, A) ist

$$(C_*(A; R), \partial_*) \xrightarrow{i_*} (C_*(X; R), \partial_*) \xrightarrow{j_*} (C_*(X, A; R), \partial_*)$$

eine kurze exakte Folge von R-Kettenkomplexen.

8.12 Schlangenlemma

Sei

$$(C_*, d_*) \xrightarrow{i_*} (C'_*, d'_*) \xrightarrow{p_*} (C''_*, d''_*)$$

eine kurze exakte Folge von R-Kettenkomplexen.

a) Für jedes n gibt es eine eindeutige wohldefinierte R-lineare Abbildung $\partial_n \colon H_n(C''_*, d''_*) \to H_{n-1}(C_*, d_*)$ mit: Für $v' \in C'_n$ mit $d''_n \circ p_n(v') = 0$ ist

$$\partial_n\Big(\underbrace{[p_n(v')]}_{\in H_n(C''_*, d''_*)}\Big) = [v] \in H_{n-1}(C_*, d_*)$$

wobei $v \in C_{n-1}$ bestimmt ist durch $i_{n-1}(v) = d'_n(v')$.

b)

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\partial_{n+1}"] & H_n(C_*, d_*) \arrow[r, "i_*"] & H_n(C'_*, d'_*) \arrow[r, "p_*"] & H_n(C''_*, d''_*) \arrow[dll, "\partial_n"] \\
& H_{n-1}(C_*, d_*) \arrow[r, "i_*"] & H_{n-1}(C'_*, d'_*) \arrow[r, "p_*"] & \cdots \arrow[dll, "\partial_1"] \\
& H_0(C_*, d_*) \arrow[r, "i_*"] & H_0(C'_*, d'_*) \arrow[r, "p_*"] & H_0(C''_*, d''_*) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

ist eine lange exakte Folge.

Beweis

$$\begin{tikzcd}
C_{n+1} \arrow[r, "i_{n+1}"] \arrow[d, "d_{n+1}"] & C'_{n+1} \arrow[r, "p_{n+1}"] \arrow[d, "d'_{n+1}"] & C''_{n+1} \arrow[d, "d''_{n+1}"] \\
C_n \arrow[r, "i_n"] \arrow[d, "d_n"] & C'_n \arrow[r, "p_n"] \arrow[d, "d'_n"] & C''_n \arrow[d, "d''_n"] \\
C_{n-1} \arrow[r, "i_{n-1}"] \arrow[d, "d_{n-1}"] & C'_{n-1} \arrow[r, "p_{n-1}"] \arrow[d, "d'_{n-1}"] & C''_{n-1} \arrow[d, "d''_{n-1}"] \\
C_{n-2} \arrow[r, "i_{n-2}"] & C'_{n-2} \arrow[r, "p_{n-2}"] & C''_{n-2}
\end{tikzcd}$$

a) Sei $x'' \in H_n(C''_*, d''_*)$, also $x'' = [v'']$ mit $v'' \in \ker d''_n$. Da p_n surjektiv ist, existiert $v' \in C'_n$ mit $p_n(v') = v''$. Es gilt

$$p_{n-1} \circ d'_n(v') = d''_n \circ p_n(v') = d''_n(v'') = 0$$

Also ist $d'_n(v') \in \ker p_{n-1}$. Weiter gilt $\ker p_{n-1} = \operatorname{Im} i_{n-1}$, also existiert ein$v \in C_{n-1}$ mit $i_{n-1}(v) = d'_n(v')$. Dann gilt

$$i_{n-2}\big(d_{n-1}(v)\big) = d'_{n-1}\big(i_{n-1}(v)\big) = d'_{n-1}\big(d'_n(v')\big) = 0$$

Da i_{n-2} injektiv ist, folgt somit $d_{n-1}(v) = 0$. Also setzen wir $\partial_n(x'') := [v] \in H_{n-1}(C_*, d_*)$.

Es bleibt zu zeigen, dass $[v] \in H_{n-1}(C_*, d_*)$ unabhängig von der Wahl von v'' und v' ist. Seien $w'' \in \ker d''_n$, $w' \in C'_n$ und $w \in C_{n-1}$ mit $x'' = [w'']$, $p_n(w') = w''$ und $i_{n-1}(w) = d'_n(w')$. Es ist $[v''] = [w'']$, also existiert ein $a'' \in C''_{n+1}$ mit $d''_{n+1}(a'') = v'' - w''$. p_{n+1} ist surjektiv, also existiert $a' \in C'_{n+1}$ mit $p_{n+1}(a') = a''$. Es gilt

$$p_n\big(v' - w' - d'_{n+1}(a')\big) = v'' - w'' - \underbrace{d''_{n+1}\big(p_{n+1}(a')\big)}_{=v''-w''} = 0$$

Mit $\ker p_n = \operatorname{Im} i_n$ folgt die Existenz von $a \in C_n$ mit $i_n(a) = v' - w' - d_{n+1}(a')$. Es gilt nun

$$\begin{aligned} i_{n-1}\big(d_n(a) - (v - w)\big) &= i_{n-1}\big(d_n(a)\big) - i_{n-1}(v - w) \\ &= d'_n\big(i_n(a)\big) - \big(d'_n(v') - d'_n(w')\big) \\ &= d'_n\big(-d'_{n+1}(a') + v' - w'\big) - d'_n(v' - w') \\ &= -d'_n d'_{n+1}(a') + d'_n(v' - w') - d'_n(v' - w') = 0 \end{aligned}$$

Da i_{n-1} injektiv ist, folgt $d_n(a) - (v - w) = 0$, also $d_n(a) = (v - w)$. Es folgt $[v] = [w]$.

b) Exaktheit der langen Folge:

$\boxed{\operatorname{Im}(i_n)_* = \ker(p_n)_*}$: „$\subseteq$" folgt aus $(p_n)_* \circ (i_n)_* = (p_n \circ i_n)_* = (0)_* = 0$.

Für „$\supseteq$" betrachte $x' \in \ker(p_n)_*$, wobei $x' = [v']$ mit $v' \in C'_n$ und $d'_n(v') = 0$. Da nun $[p_n(v')] = (p_n)_*[x'] = 0$ ist, gibt es $a'' \in C''_n$ mit $d''_{n+1}(a'') = p_n(v')$. Da p_{n+1} surjektiv ist, existiert $a' \in C'_{n+1}$ mit $p_{n+1}(a') = a''$. Dann gilt

$$p_n\big(v' - d'_{n+1}(a')\big) = p_n(v') - p_n \circ d'_{n+1}(a') = p_n(v') - \underbrace{d''_{n+1}\Big(\underbrace{p_{n+1}(a')}_{=a''}\Big)}_{=p_n(v')} = 0$$

Da $\ker p_n = \operatorname{Im} i_n$, gibt es $a \in C_n$ mit $i_n(a) = v' - d'_{n+1}(a')$. Nun ist

$$i_{n-1}\big(d_n(a)\big) = d'_n\big(i_n(a)\big) = d'_n\big(v' - d'_{n+1}(a')\big) = d'_n(v') = 0$$

Da i_{n-1} injektiv ist, folgt $d_n(a) = 0$. Insbesondere $[a] \in H_n(C_*, d_*)$. Nun ist

$$(i_n)_*[a] = [i_n(a)] = \big[v' - d'_{n+1}(a')\big] = [v'] = x'$$

Also ist $x' \in \operatorname{Im}(i_n)_*$.

$\boxed{\operatorname{Im}(p_n)_* = \ker \partial_n}$: Für „$\subseteq$" betrachte $x'' \in \operatorname{Im}(p_n)_*$. Dann gibt es $v' \in C'_n$ mit $d'_n(v') = 0$ und $x'' = [p_n(v')]$. Es ist $d'_n(v') \in \ker p_{n-1} = \operatorname{Im} i_{n-1}$, also existiert ein $v \in C_{n-1}$ mit $i_{n-1}(v) = d'_n(v')$. Es gilt nun $\partial_n(x'') = [v]$. Wegen der Injektivität von i_{n-1} ist $v = 0$, also $\partial_n(x'') = [0]$.

Sei nun umgekehrt $x'' \in \ker \partial_n$. Wir finden wieder $v' \in C'_n$ und $v \in C_{n-1}$ mit $x'' = [p_n(v')]$, $i_{n-1}(v) = d'_n(v')$ und $0 = \partial_n(x'') = [v]$. Daher gibt es $a \in C_n$ mit $d_n(a) = v$. Es folgt

$$d'_n\big(v' - i_n(a)\big) = i_{n-1}(v) - i_{n-1}\big(d_n(a)\big) = 0$$

Es gilt nun $(p_n)_*\big[v' - i_n(a)\big] = \big[p_n(v') - p_n(i_n(a))\big] = [p_n(v')] = x''$.

$\boxed{\operatorname{Im}\partial_n = \ker(i_{n-1})_*}$ **:** Für „$\subseteq$“ sei $x \in \operatorname{Im}\partial_n$. Dann gibt es wieder $v' \in C'_n$ und $v \in C_{n-1}$ mit $d''_n(p_n(v')) = 0$, $d'_n(v') = i_{n-1}(v)$ und $x = [v]$. Dann gilt

$$(i_{n-1})_*(x) = (i_{n-1})_*[v] = [i_{n-1}(v)] = [d'_n(v')] = 0$$

Sei nun umgekehrt $x \in \ker(i_{n-1})_*$ und $v \in C_{n-1}$ mit $d_{n-1}(v) = 0$ und $x = [v]$. Da nun $(i_{n-1})_*(x) = [i_{n-1}(v)]$ und $x \in \ker(i_{n-1})_*$ ist, gibt es $v' \in C'_n$ mit $d'_n(v') = i_{n-1}(v)$. Es gilt nun

$$d''_n(p_n(v')) = p_{n-1}(d'_n(v')) = p_{n-1}(i_{n-1}(v)) = 0$$

Daraus folgt $\partial_n[p_n(v')] = x$. □

8.13 Beweis von Satz 8.8

Für jedes Paar (X, A) ist die Folge der singulären Kettenkomplexe

$$\left(C_*(A; R), \partial_*^A\right) \xrightarrow{C_*(i;R)} \left(C_*(X; R), \partial_*^X\right) \xrightarrow{C_*(j;R)} \left(C_*(X, A; R), \partial_*^{(X,A)}\right)$$

kurz exakt. Das Schlangenlemma 8.12 produziert $\partial_n \colon H_n(X, A; R) \to H_{n-1}(A; R)$ und die lange exakte Sequenz [*****]. Es bleibt zu zeigen, dass die Randabbildungen aus dem Schlangenlemma wie behauptet eine natürliche Transformation definieren: Sei $(f, f|_A) \colon (X, A) \to (Y, B)$ eine Abbildung von Paaren. Zu zeigen ist, dass

$$\begin{array}{ccc}
H_n(X, A; R) & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(A; R) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle (f, f|_A)_*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle (f|_A)_*} \\
H_n(Y, B; R) & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(B; R)
\end{array}$$

kommutiert. Sei $x'' \in H_n(X, A; R)$. Sei $v' \in C_n(X; R)$ mit $\partial_n^X(v') \in C_n(A; R)$ und $[v' + C_n(A; R)] = x''$. Dann ist $\partial_n(x'') = \left[\partial_n^X(v')\right] \in H_{n-1}(A; R)$. Dann ist

$$(f, f|_A)_*(x'') = (f, f|_A)_*\left[v' + C_n(A; R)\right] = \left[f_*(v') + C_n(B; R)\right] \in H_n(Y, B; R)$$

Es ist $\partial_n^Y\left(f_*(v')\right) = (f|_A)_*\Big(\underbrace{\partial_n^X(v')}_{\in C_n(A;R)}\Big) \in C_n(B; R)$. Also

$$\partial_n^Y\left((f, f|_A)_*(x'')\right) = \left[\partial_n^Y\left(f_*(v')\right)\right] = \left[f_* \circ \partial_n^X(v')\right] = f_* \circ \partial_n(x'')$$ □

8.14 Bemerkung

Für eine Abbildung $(f, f|_A) \colon (X, A) \to (Y, B)$ erhalten wir ein kommutierendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} & H_n(A; R) & \xrightarrow{i_*^A} & H_n(X; R) & \xrightarrow{j_*^X} & H_n(X, A; R) & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(A; R) & \longrightarrow \cdots \\
& \Big\downarrow{\scriptstyle (f|_A)_*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f_*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle (f, f|_A)_*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle (f|_A)_*} & \\
\cdots \longrightarrow & H_n(B; R) & \xrightarrow{i_*^B} & H_n(Y; R) & \xrightarrow{j_*^Y} & H_n(Y, B; R) & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(B; R) & \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

8.15 Fünfer-Lemma

Seien die Zeilen in folgendem kommutativen Diagramm von R-Moduln exakt.

$$\begin{tikzcd} A_4 \arrow[r, "\alpha_4"] \arrow[d, "f_4"', "\cong"] & A_3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "f_3"', "\cong"] & A_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "f_2"'] & A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "f_1"', "\cong"] & A_0 \arrow[d, "f_0"', "\cong"] \\ B_4 \arrow[r, "\beta_4"] & B_3 \arrow[r, "\beta_3"] & B_2 \arrow[r, "\beta_2"] & B_1 \arrow[r, "\beta_1"] & B_0 \end{tikzcd}$$

Sind f_4, f_3, f_1 und f_0 Isomorphismen, so ist auch f_2 ein Isomorphismus.

Beweis
Injektivität: Sei $a_2 \in A_2$ mit $f_2(a_2) = 0$. Wir erhalten

$$f_1\big(\alpha_2(a_2)\big) = \beta_2\big(f_2(a_2)\big) = \beta_2(0) = 0.$$

Da f_1 ein Isomorphismus ist, folgt $\alpha_2(a_2) = 0$. Damit ist $a_2 \in \ker \alpha_2 = \operatorname{Im} \alpha_3$, also existiert $a_3 \in A_3$ mit $\alpha_3(a_3) = a_2$. Es gilt

$$\beta_3\big(f_3(a_3)\big) = f_2\big(\alpha_3(a_3)\big) = f_2(a_2) = 0$$

Also ist $f_3(a_3) \in \ker \beta_3 = \operatorname{Im} \beta_4$. Da f_4 Isomorphismus ist, gibt es $a_4 \in A_4$ mit $\beta_4\big(f_4(a_4)\big) = f_3(a_3)$. Nun gilt

$$f_3\big(\alpha_4(a_4) - a_3\big) = f_3\big(\alpha_4(a_4)\big) - f_3(a_3) = \beta_4\big(f_4(a_4)\big) - f_3(a_3) = f_3(a_3) - f_3(a_3) = 0$$

Da f_3 ein Isomorphismus ist, folgt nun $\alpha_4(a_4) = a_3$. Nun ist

$$a_2 = \alpha_3(\alpha_3) = \alpha_3\big(\alpha_4(a_4)\big) = \underbrace{\alpha_3 \circ \alpha_4}_{=0}(a_4) = 0$$

Surjektivität: Sei $b_2 \in B_2$. Fall 1: $\beta_2(b_2) = 0$. Da $\operatorname{Im} \beta_3 = \ker \beta_2$ und f_3 Isomorphismus, existiert $a_3 \in A_3$ mit $\beta_3\big(f_3(a_3)\big) = b_2$. Also ist $b_2 = \beta_3\big(f_3(a_3)\big) = f_2\big(\alpha_3(a_3)\big) \in \operatorname{Im} f_2$.

Ist b_2 beliebig, so genügt es zu zeigen: Es existiert ein $a_2 \in A_2$ mit $\beta_2\big(b_2 - f_2(a_2)\big) = 0$. f_1 ist ein Isomorphismus, also existiert ein $a_1 \in A_1$ mit $f_1(a_1) = \beta_2(b_2)$. Dann folgt

$$f_0\big(\alpha_1(a_1)\big) = \beta_1\big(f_1(a_1)\big) = \beta_1\big(\beta_2(b_2)\big) = \underbrace{\beta_1 \circ \beta_2}_{=0}(b_2) = 0$$

Da f_0 ein Isomorphismus ist, folgt $\alpha_1(a_1) = 0$. Da $\ker \alpha_1 = \operatorname{Im} \alpha_2$, folgt $\alpha_2(a_2) = a_1$. Es gilt nun

$$\begin{aligned} \beta_2\big(b_2 - f_2(a_2)\big) = \beta_2(b_2) - \beta_2\big(f_2(a_2)\big) &= \beta_2(b_2) - f_1\big(\alpha_2(a_2)\big) \\ &= \beta_2(b_2) - f_1(a_1) = \beta_2(b_2) - \beta_2(b_2) = 0 \end{aligned}$$ □

8.16 Lemma („2 von 3“)

Sei $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ eine Abbildung von Paaren. Seien von den drei Abbildungen

(i) $(f|_A)_*\colon H_n(A; R) \to H_n(B; R)$

(ii) $f_*\colon H_n(X; R) \to H_n(Y; R)$

(iii) $(f, f|_A)_*\colon H_n(X, A; R) \to H_n(Y, B; R)$

zwei für jeweils alle n Isomorphismen. Dann ist auch die dritte für alle n ein Isomorphismus.

Beweis
Da die Randabbildung in der Paarfolge eine natürliche Transformation ist, erhalten wir ein kommutatives Leiterdiagramm:

"R" aus Platzgründen weggelassen

$$\begin{tikzcd}
H_{n+1}(A) \arrow[r] \arrow[d, "(f|_A)_*"] & H_{n+1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & H_{n+1}(X,A) \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, "(f,f|_A)_*"] & H_n(A) \arrow[r] \arrow[d, "(f|_A)_*"] & H_n(X) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & H_n(X,A) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "(f,f|_A)_*"] & H_{n-1}(A) \arrow[d, "(f|_A)_*"] \\
H_{n+1}(B) \arrow[r] & H_{n+1}(Y) \arrow[r] & H_{n+1}(Y,B) \arrow[r, "\partial_{n+1}"] & H_n(B) \arrow[r] & H_n(Y) \arrow[r] & H_n(Y,B) \arrow[r, "\partial_n"] & H_{n-1}(B)
\end{tikzcd}$$

Da die Zeilen lang exakt sind, folgt die Behauptung aus dem Fünfer-Lemma. □

9 Ausschneidung und die Mayer-Vietoris Folge

9.1 Satz

Sei (X, A) ein Paar und $L \subseteq A$, sodass der Abschluss $\overline{L}$ von im Inneren $\mathring{A}$ von A liegt. Dann induziert die Inklusion $(X \setminus L, A \setminus L) \xrightarrow{j} (X, A)$ einen Isomorphismus $j_*\colon H_n(X \setminus L, A \setminus L; R) \to H_n(X, A; R)$.

Beweis
Siehe Kapitel 13.

9.2 Satz (Mayer-Vietoris-Folge)

Seien $A, B \subseteq X$ offen und $X = A \cup B$. Seien $i_A\colon A \hookrightarrow X$, $i_B\colon B \hookrightarrow X$, $j_A\colon A \cap B \hookrightarrow A$ und $j_B\colon A \cap B \hookrightarrow B$ die Inklusionen. Dann gibt es eine Randabbildung $\partial_n = \partial_n^{X=A\cup B}\colon H_n(X; R) \to H_{n-1}(A \cap B; R)$, sodass

Für simpliziale Homologie gibt es auch eine Mayer-Vietoris-Folge, siehe Aufgabe 4 von Blatt 6

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(A \cap B) \xrightarrow{\binom{(j_A)_*}{(j_B)_*}} \begin{matrix} H_n(A) \\ \bigoplus \\ H_n(B) \end{matrix} \xrightarrow{(i_A)_* - (i_B)_*} H_n(X) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A \cap B) \longrightarrow \cdots$$

"R" aus Platzgründen weggelassen

eine lange exakte Folge ist. Die Randabbildung ist dabei eine natürlicher Transformation: Seien $A', B' \subseteq X'$ offen mit $X' = A' \cup B'$ und sei $f\colon X \to X'$ mit $f(A) \subseteq A'$ und $f(B) \subseteq B'$. Dann kommutiert

$$\begin{tikzcd} H_n(X;R) \arrow[r, "\partial_n^{X=A\cup B}"] \arrow[d, "f_*"] & H_{n-1}(A \cap B; R) \arrow[d, "(f|_{A\cap B})_*"] \\ H_n(X';R) \arrow[r, "\partial_n^{X'=A'\cup B'}"] & H_n(A' \cap B'; R) \end{tikzcd}$$

Beweis
Sei $L := X \setminus B$. Dann ist L abgeschlossen und $L \subseteq A = \mathring{A}$. Wir erhalten daher einen Ausschneideisomorphismus

$$H_n(B, A \cap B; R) = H_n(X \setminus L, A \setminus L; R) \xrightarrow{\cong} H_n(X, A; R)$$

Betrachte nun das folgende kommutative Leiterdiagramm, das zwei Paarfolgen vergleicht:

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & H_{n+1}(B, A\cap B) \arrow[r, "\partial_{n+1}^{B,A\cap B}"] \arrow[d, "\cong"', "(i_B,j_A)_*"] & H_n(A\cap B) \arrow[r, "(j_B)_*"] \arrow[d, "(j_A)_*"] & H_n(B) \arrow[r, "(l_B)_*"] \arrow[d, "(i_B)_*"] & H_n(B, A\cap B) \arrow[r, "\partial_n^{B,A\cap B}"] \arrow[d, "\cong"', "(i_B,j_A)_*"] & H_{n-1}(A\cap B) \arrow[r] \arrow[d, "(j_A)_*"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & H_{n+1}(X, A) \arrow[r, "\partial_{n+1}^{X,A}"] & H_n(A) \arrow[r, "(i_A)_*"] & H_n(X) \arrow[r, "(l_X)_*"] & H_n(X, A) \arrow[r, "\partial_n^{X,A}"] & H_{n-1}(A) \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

"R" aus Platzgründen weggelassen

dabei sind $l_B\colon (B, \emptyset) \to (B, A \cap B)$ und $l_X\colon (X, \emptyset) \to (X, A)$ die Inklusionen von Paaren. Definiere nun $\partial_n\colon H_n(X; R) \to H_{n-1}(A \cap B; R)$ durch

$$\partial_n := \partial_n^{B,A\cap B} \circ (i_B, j_A)_*^{-1} \circ (l_X)_*$$

Die Natürlichkeit von $\partial_n^{B,A\cap B}$ impliziert die Natürlichkeit von ∂_n (siehe auch 8.8). Wir müssen noch die Exaktheit zeigen:

- Zu zeigen: $\operatorname{Im}\binom{(j_A)_*}{(j_B)_*} = \ker\big((i_A)_* - (i_B)_*\big)$:

"$\supseteq$": Sei $(a,b) \in \ker((i_A)_* - (i_B)_*)$. Also $(i_A)_*(a) = (i_B)_*(b)$. Es ist

$$(i_B, j_A)_*\big((l_B)_*(b)\big) = (l_X)_* \circ (i_B)_*(b) = \underbrace{(l_X)_* \circ (i_A)_*}_{=0}(a) = 0$$

$(i_B, j_A)_*$ ist ein Isomorphismus, also $(l_B)_*(b) = 0$. Es gilt $\ker(l_B)_* = \mathrm{Im}(j_B)_*$, also folgt $\exists x \in H_n(A \cap B; R) : (j_B)_*(x) = b$. Dann gilt

$$(i_A)_*\big(a - (j_A)_*(x)\big) = (i_A)_*(a) - (i_B)_*\big((j_B)_*(x)\big) = (i_A)_*(a) - (i_B)_*(b) = 0$$

Mit $\ker(i_A)_* = \mathrm{Im}\,\partial_{n+1}^{X,A}$ und $(i_B, j_A)_*$ ist Isomorphismus, folgt $\exists y \in H_{n+1}(B, A\cap B; R)$ mit

$$\partial_{n+1}^{X,A} \circ (i_B, j_A)_*(y) = a - (j_A)_*(x)$$

Es folgt für $z := x + \partial_{n+1}^{B,A\cap B}(y)$ nun $(j_B)_*(z) = (j_B)_*(x) = b$ und

$$\begin{aligned}(j_A)_*(z) = (j_A)_*(x) + (j_A)_*\big(\partial_{n+1}^{B,A\cap B}(y)\big) &= (j_A)_*(x) + \partial_{n+1}^{X,A} \circ (i_B, j_A)_*(y) \\ &= (j_A)_*(x) + a - (j_A)_*(x) = a\end{aligned}$$

"$\subseteq$": Sei $x \in H_n(A \cap B; R)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\big((i_A)_* - (i_B)_*\big)\begin{pmatrix}(j_A)_* \\ (j_B)_*\end{pmatrix}(x) &= (i_A)_* \circ (j_A)_*(x) - (i_B)_* \circ (j_B)_*(x) \\ &= (i_A)_* \circ (j_A)_*(x) - (i_A)_* \circ (j_A)_*(x) = 0\end{aligned}$$

da $i_A \circ j_A = i_B \circ j_B$.

- Wir zeigen nun $\mathrm{Im}\big((i_A)_* - (i_B)_*\big) = \ker \partial_n$:

"$\supseteq$": Sei $v \in \ker \partial_n$, also $\partial_n^{B,A\cap B} \circ (i_B, j_A)_*^{-1} \circ (l_X)_*(v) = 0$. Da $\ker \partial_n^{B,A\cap B} = \mathrm{Im}(l_B)_*$, gibt es ein $b \in H_n(B; R)$ mit

$$(l_B)_*(b) = (i_B, j_A)_*^{-1} \circ (l_X)_*(v) \iff (i_B, j_A)_* \circ (l_B)_*(b) = (l_X)_*(v)$$

Nun ist

$$(l_X)_*\big(v - (i_B)_*b\big) = (l_X)_*(v) - (l_X)_* \circ (i_B)_*(b) = (l_X)_*(v) - (i_B, j_A)_* \circ (l_B)_*(b) = 0$$

Da $\ker(l_X)_* = \mathrm{Im}(i_A)_*$ ist, gibt es ein $a \in H_n(A; R)$ mit $(i_A)_*(a) = v - (i_B)_*(b)$ und somit ist $\big((i_A)_* - (i_B)_*\big)(a, -b) = v$.

"$\subseteq$": Sei $\binom{a}{b} \in \begin{matrix} H_n(A) \\ \bigoplus \\ H_n(B)\end{matrix}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\partial_n\big((i_A)_* - (i_B)_*\big)\binom{a}{b} &= \partial_n^{B,A\cap B} \circ (i_B, j_A)_*^{-1} \circ (l_X)_*\big((i_A)_*(a) - (i_B)_*(b)\big) \\ &= \quad \partial_n^{B,A\cap B} \circ (i_B, j_A)_*^{-1} \circ \underbrace{(l_X)_* \circ (i_A)_*}_{=0}(a) \\ &\quad - \underbrace{\partial_n^{B,A\cap B} \circ (l_B)_*}_{=0}(b) = 0\end{aligned}$$

- Noch zu zeigen: $\mathrm{Im}\,\partial_n = \ker\left(\begin{smallmatrix}(j_A)_* \\ (j_B)_*\end{smallmatrix}\right)$.

"$\supseteq$": Sei $x \in \ker\big((j_A)_* \oplus (j_B)_*\big)$, also $(j_A)_*(x) = 0 = (j_B)_*(x)$. Da $\mathrm{Im}\,\partial_n^{B,A\cap B} = \ker(j_B)_*$ ist, gibt es $v \in H_n(B, A\cap B; R)$ mit $\partial_n^{B,A\cap B}(v) = x$. Nun ist

$$\partial_n^{X,A} \circ (i_B, J_A)_*(v) = (j_A)_*\big(\partial_n^{B,A\cap B}(v)\big) = (j_A)_*(x) = 0$$

Da $\ker \partial_n^{X,A} = \mathrm{Im}(l_X)_*$, finden wir $w \in H_n(X; R)$ mit $(l_X)_*(w) = (i_B, j_A)_*(v)$. Also folgt

$$\partial_n(w) = \partial_n^{B,A\cap B} \circ (i_B, j_A)_*^{-1} \circ (l_X)_*(w) = \partial_n^{B,A\cap B} \circ (i_B, j_A)_*^{-1} \circ (i_B, j_A)_*(v) = \partial_n^{B,A\cap B}(v) = x$$

"$\subseteq$": Für $v \in H_n(X;R)$ ist

$$
\begin{aligned}
&\big((j_A)_* \oplus (j_B)_*\big) \circ \partial_n(v) \\
=& \Big((j_A)_* \circ \partial_n^{B,A\cap B} \circ (i_B, j_A)_*^{-1} \circ (l_X)_*(v), \underbrace{(j_B)_* \circ \partial_n^{B,A\cap B}}_{=0} \circ (i_B, j_A)_*^{-1} \circ (l_X)_*(v)\Big) \\
=& \Big(\underbrace{\partial_n^{X,A} \circ (l_X)_*}_{=0}(v), 0\Big) = (0,0)
\end{aligned}
$$

9.3 Bemerkung

Für die Mayer-Vietoris-Folge müssen A und B nicht notwendig offen sein. Es genügt, dass die Inklusion $(B, A\cap B) \hookrightarrow (X,A)$ einen Isomorphismus $H_*(B, A\cap B; R) \to H_*(X,A;R)$ induziert.

9.4 Satz

Für die Homologie der n-Sphäre S^n gilt

$$
H_k(S^n;R) \cong \begin{cases} R\oplus R, & \text{falls } k=n=0 \\ R, & \text{falls } k=0, n\neq 0 \\ R, & \text{falls } k=n\neq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \qquad \textbf{[\#]}
$$

9.5 Definition

Sei X ein nichtleerer topologischer Raum. Sei $p\colon X \to \{\mathrm{pt}\}$ die Projektion auf den Ein-Punkt-Raum. Die **reduzierte singuläre Homologie** von X ist definiert durch

$$
\tilde{H}_k(X;R) := \ker\Big(p_*\colon H_k(X;R) \to H_k(\{\mathrm{pt}\};R)\Big)
$$

Bemerkung

- Es gilt $\tilde{H}_k(X;R) = H_k(X;R)$ für $k>0$, da $H_k(\{\mathrm{pt}\};R)=0$ ist für $k>0$ (siehe 5.9) und somit p_* die Nullabbildung ist.

  Weiter gilt $H_0(X;R) = R\oplus \tilde{H}_0(X;R)$, da $H_0(\{\mathrm{pt}\};R)=R$ frei ist.

- Es ist nicht schwer die Eigenschaften von singulärer Homologie auf die reduzierte singuläre Homologie zu übertragen. Insbesondere ist $\tilde{H}_*$ homotopieinvariant und es gibt eine Mayer-Vietoris-Folge.

- Es ist $\tilde{H}_k(\{\mathrm{pt}\})=0$ und für jeden kontrahierbaren Raum X ist somit $\tilde{H}_n(X;R)=0$ für alle n.

9.6 Bemerkung

In reduzierter singulärer Homologie wird [#] zu

$$
\tilde{H}_k(S^n;R) \cong \begin{cases} R, & \text{falls } k=n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \qquad \textbf{[\#\#]}
$$

9.7 Beweis von [##]

Wir berechnen die reduzierte Homologie der Sphäre per Induktion nach n:

Induktionsanfang: $n = 0$**:** Es gilt

$$H_k(S^0; R) \overset{\overset{\varphi}{\longleftarrow}}{\cong} H_k\big(\{\mathrm{pt}\}; R\big) \oplus H_k\big(\{\mathrm{pt}\}; R\big) = \begin{cases} R \oplus R, & \text{falls } k = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Seien $i_- \colon \{\mathrm{pt}\} \hookrightarrow S^0$ und $i_+ \colon \{\mathrm{pt}\} \hookrightarrow S^0$ die Inklusionen mit $\operatorname{Im} i_\pm = \{\pm 1\}$. Der Isomorphismus φ ist gegeben durch $\varphi = (i_-)_* + (i_+)_*$. Für $(a, b) \in H_k(\{-1\}; R) \oplus H_k(\{+1\}; R)$ gilt dann

$$p_*\big(i_-(a) + i_+(b)\big) = (p \circ i_-)_*(a) + (p \circ i_+)(b) = \mathrm{id}_*(a) + \mathrm{id}_*(b) = a + b$$

Also ist $\ker p_* = \big\{(a, -a) \,\big|\, a \in H_k\big(\{\mathrm{pt}\}; R\big)\big\}$ und damit folgt

$$\tilde{H}_k(S^0; R) = \begin{cases} 0, & \text{falls } k \neq 0 \\ R, & \text{falls } k = 0 \end{cases}$$

Induktionsschritt: $n - 1 \mapsto n$**:** Sei $D_+^n = S^n \setminus \{(1, 0, \dots, 0)\}$ und $D_-^n = S^n \setminus \{-1, 0, \dots, 0\}$. Dann sind D_+^n und D_-^n offene Teilmengen von S^n mit $S^n = D_+^n \cup D_-^n$. Weiter gilt $D_+^n \simeq \{\mathrm{pt}\}$ und $D_-^n \simeq \{\mathrm{pt}\}$. Für den Schnitt der beiden Mengen erhalten wir

$$D_+^n \cap D_-^n = \Big\{x = (x_0, \dots, x_n) \in S^n \,\Big|\, x_0 \notin \{\pm 1\}\Big\} \simeq S^{n-1} = \Big\{x = (0, x_1, \dots, x_n) \in S^n\Big\}.$$

Betrachte nun die Mayer-Vietoris-Folge zu $S^n = D_+^n \cup D_-^n$:

"R" aus Platzgründen weggelassen

$$\begin{tikzcd} \underbrace{\tilde{H}_k(D_+^n)}_{=0} \oplus \underbrace{\tilde{H}_k(D_-^n)}_{=0} \arrow[r] & \tilde{H}_k(S^n) \arrow[r, "\partial_k", "\cong"'] & \tilde{H}_{k-1}\big(D_+^n \cap D_-^n\big) \arrow[r] & \underbrace{\tilde{H}_{k-1}(D_+^n)}_{=0} \oplus \underbrace{\tilde{H}_{k-1}(D_-^n)}_{=0} \\ & & \tilde{H}_{k-1}(S^{n-1}) \arrow[u, "\cong"] & \end{tikzcd}$$

Es folgt $\tilde{H}_k(S^n; R) \cong \tilde{H}_{k-1}(S^{n-1}; R) \overset{\text{I.A.}}{=} \begin{cases} R, & \text{falls } k = n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ □

10 Anwendungen

10.1 Satz (Invarianz der Dimension)

Sind $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ homöomorph, so gilt $n = m$.

Beweis
Sei $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ein Homöomorphismus. Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Dann erhalten wir auch einen Homöomorphismus $k := h|_{\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}}\colon \mathbb{R}^n \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}^m \setminus \{h(x_0)\}$. Nun ist $\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}$ homotopieäquivalent zu S^{n-1} und $\mathbb{R}^m \setminus \{h(x_0)\}$ ist homotopieäquivalent zu S^{m-1}. Da k ein Homöomorphismus ist, ist k_* ein Isomorphismus. Wir erhalten

$$H_*(S^{n-1}) \cong H_*\big(\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}\big) \cong H_*\big(\mathbb{R}^m \setminus \{h(x_0)\}\big) \cong H_*(S^{m-1})$$

Es ist aber $H_*(S^{n-1}) \cong H_*(S^{m-1})$ genau dann, wenn $n = m$. □

10.2 Fixpunktsatz von Brouwer

Jede stetige Abbildung $f\colon D^n \to D^n$ besitzt einen Fixpunkt.

Beweis
Durch Widerspruch: Angenommen es gibt $f\colon D^n \to D^n$ ohne Fixpunkt. Aus dem letzten Semester wissen wir, dass es dann eine stetige Abbildung $F\colon D^n \to S^{n-1}$ gibt mit $F|_{S^{n-1}} = \mathrm{id}_{S^{n-1}}$. In Homologie erhalten wir folgendes kommutatives Diagramm

Œ: $n \geqslant 2$, $n = 1$ haben wir bereits im letzen Semester bewiesen

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \cong H_{n-1}(S^{n-1}) \arrow[rr, "(\mathrm{id}_{S^{n-1}})_* = \mathrm{id}"] \arrow[dr, "i_*"'] & & H_{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbb{Z} \\
& H_{n-1}(D^n) = 0 \arrow[ur, "(F)_*"'] &
\end{tikzcd}$$

wobei $i\colon S^{n-1} \hookrightarrow D^n$ die Inklusion ist. Da $F \circ i = \mathrm{id}_{S^{n-1}}$ ist, gilt $F_* \circ i_* = \mathrm{id}_{H_{n-1}(S^{n-1})}$. ↯ □

Der Abbildungsgrad

10.3 Definition

Sei $f\colon S^n \to S^n$ eine stetige Abbildung. Da $\tilde{H}_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ ist, gibt es eine ganze Zahl $d(f)$, so dass $f_*(x) = d(f) \cdot x$ für alle $x \in \tilde{H}_n(S^n)$. Diese Zahl heißt der **Abbildungsgrad** von f.

reduzierte Homologie!

10.4 Proposition

Für den Abbildungsgrad d gilt

a) $d(\mathrm{id}_{S^n}) = 1$.

b) Sind f und g homotop, so gilt $d(f) = d(g)$.

c) $d(f \circ g) = d(f) \cdot d(g)$.

Beweis

a) Es ist $(\mathrm{id}_{S^n})_*(x) = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}(x) = x$.

b) Sind f und g homotop, so gilt $f_* = g_*$ und damit folgt $d(f) = d(g)$.

c) Für alle $x \in \tilde{H}_n(S^n)$ gilt: $d(f \circ g) \cdot x = (f \circ g)_*(x) = f_* \circ g_*(x) = d(f) \cdot d(g) \cdot x$. Da $\tilde{H}_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ folgt $d(f \circ g) = d(f) \cdot d(g)$. □

10.5 Beispiel

Sei $i \in \{0,\dots,n\}$ und $R_i\colon S^n \to S^n$ die Spiegelung an der x_i-Achse, also

$$R_i(x_0,\dots,x_n) = (x_0,\dots,-x_i,\dots,x_n)$$

Dann ist $d(R_i) = -1$.

Beweis
Sei $f\colon S^n \to S^n$ der Homöomorphismus, der die 0-te und die i-te Koordinate vertauscht, also gilt $f(x_0,\dots,x_n) = (x_i,\dots,x_0,\dots,x_m)$. Dann ist $R_i = f\circ R_0 \circ f$. Da f ein Homöomorphismus ist, ist f_* ein Isomorphismus und daher ist $d(f)$ invertierbar, also $d(f)\in\{\pm 1\}$. Mit $d(R_i) = d(f)\cdot d(R_0)\cdot d(f)$ folgt $d(R_0) = d(R_i)$. Es genügt also R_0 zu betrachten. Wir zeigen $d(R_0) = -1$ durch Induktion nach n.

Induktionsanfang: Sei $i_-\colon\{\mathrm{pt}\}\to S^0$ die Abbildung mit $\operatorname{Im} i_- = \{-1\}$ und $i_+\colon\{\mathrm{pt}\}\to S^0$ die Abbildung mit $\operatorname{Im} i_+ = \{+1\}$. Dann ist

Unter $H_0(S_0)\cong \mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}$ induziert R_0 $(x,y)\mapsto(y,x)$

$$H_0(S^0) = \Big\{(i_-)_*(a) + (i_+)_*(b)\,\Big|\, a,b\in H_0(\{\mathrm{pt}\})\Big\} \qquad \text{und}$$
$$\tilde{H}_0(S^0) = \Big\{(i_-)_*(a) - (i_+)_*(a)\,\Big|\, a\in H_0(\{\mathrm{pt}\})\Big\}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}(R_0)_*\Big((i_-)_*(a) - (i_+)_*(a)\Big) = (R_0)_*(i_-)_*(a) - (R_0)_*(i_+)_*(a) &= (R_0\circ i_-)_*(a) - (R_0\circ i_+)_*(a)\\ &= (i_+)_*(a) - (i_-)_*(a)\\ &= -\big((i_-)_*(a) - (i_+)_*(a)\big)\end{aligned}$$

Also folgt $d(R_0) = -1$, da wir den Abbildungsgrad für reduzierte Homologie definiert hatten.

Induktionsschritt: Wir definieren zwei offene Teilmengen von S^n wie folgt

$$\begin{aligned}D_+^n &= \{(x_0,\dots,x_n)\in S^n \mid x_n \neq -1\}\\ D_-^n &= \{(x_0,\dots,x_m)\in S^n \mid x_n \neq +1\}\end{aligned}$$

Wir wissen schon aus 9.7, dass die Randabbildung aus der dazugehörigen Mayer-Vietoris-Folge $\tilde{H}_n(S^n)\xrightarrow{\partial_n}\tilde{H}_{n-1}(D_+^n\cap D_-^n)$ ein Isomorphismus ist. Da die Randabbildung natürlich ist, erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\tilde{H}_n(S^n) \arrow[r, "\partial_n", "\cong"'] \arrow[d, "(R_0)_*"] & \tilde{H}_{n-1}(D_-^n\cap D_+^n) \arrow[d, "\left(R_0|_{D_-^n\cap D_+^n}\right)_*"] & \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) \arrow[l, "\cong"', "i_*"] \arrow[d, "\left(R_0|_{S^{n-1}}\right)_*"] \\
\tilde{H}_n(S^n) \arrow[r, "\partial_n", "\cong"'] & \tilde{H}_{n-1}(D_-^n\cap D_+^n) & \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) \arrow[l, "\cong"', "i_*"]
\end{tikzcd}$$

dabei ist $i\colon S^{n-1}\to D_-^n\cap D_+^n$ die Homotopieäquivalenz $i(x_0,\dots,x_{n-1}) = (x_0,\dots,x_{n-1},0)$. Nach Induktionsannahme ist $\big(R_0\big|_{S^{n-1}}\big)_*(y) = -y$ für alle $y\in\tilde{H}_{n-1}(S^{n-1})$. Für $x\in\tilde{H}_n(S^n)$ folgt dann

$$\begin{aligned}(R_0)_*(x) &= (\partial_n)^{-1}\circ(i_*)\circ\big(R_0\big|_{S^{n-1}}\big)_*\big((i_*^{-1}\circ\partial_n)(x)\big)\\ &= (\partial_n)^{-1}\circ(i_*)\big(-i_*^{-1}(\partial_n(x))\big)\\ &= -\partial_n^{-1}\circ(i_*)\circ(i_*)^{-1}\circ\partial_n(x) = -x\end{aligned}$$

Also gilt für den Abbildungsgrad der Spiegelung $d(R_0) = -1$. □

10.6 Beispiel

Der Grad der Punktspiegelung $R\colon S^n \to S^n$, $x \mapsto -x$ ist $d(R) = (-1)^{n+1}$.

Beweis
$d(R) = d(R_0 \circ R_1 \circ \ldots \circ R_n) = d(R_0) \cdot \ldots \cdot d(R_n) = (-1)^{n+1}$. □

10.7 Erinnerung

Sei M eine C^∞-Mannigfaltigkeit. Ein **Vektorfeld** auf M ist eine stetige Abbildung $v\colon M \to \mathrm{T}M$ mit $v(x) \in \mathrm{T}_x M$ für alle $x \in M$. Für $M = S^n$ entspricht ein Vektorfeld genau einer stetigen Abbildung $v\colon S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ mit $\langle v(x) \,|\, x\rangle = 0$ für alle $x \in S^n$.

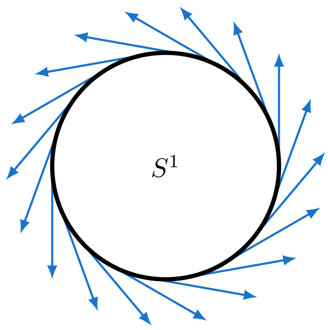


Abbildung 3: Ein nirgends verschwindendes Vektorfeld auf S^1

10.8 Satz

Es gibt genau dann ein Vektorfeld ohne Nullstellen auf S^n, wenn n ungerade ist.

Beweis
Ist n ungerade, so ist $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{C}^k$ mit $k = \frac{n+1}{2}$. Punkte in S^n sind dann genau k-Tupel $z = (z_1, \ldots, z_k)$ mit $|z_1|^2 + \ldots + |z_k|^2 = 1$. Ein Vektorfeld entspricht dann einer stetigen Abbildung $v\colon S^n \to \mathbb{C}^k$, so dass für das kanonische komplexe Skalarprodukt $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle_{\mathbb{C}}$ auf $\mathbb{C}^k$ gilt

$$\langle z \,|\, v(z)\rangle_{\mathbb{C}} \in i\mathbb{R}$$

einfach nachzurechnen

Definiere nun $v\colon S^n \to \mathbb{C}^k$ durch $v(z) := iz$. Dann $iz \neq 0$ für alle $z \in S^n$ und $\langle z \,|\, iz\rangle = -i\|z\|_2 \in i\mathbb{R}$.
Sei umgekehrt $v\colon S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ ein Vektorfeld ohne Nullstellen. Zu zeigen: $d(R) = 1$, denn dann folgt die Behauptung, da $d(R) = (-1)^{n+1}$. Zeige dazu: R ist homotop zu id. Seien $H, K\colon S^n \times [0,1] \to S^n$ definiert durch

$$H(x,t) := \frac{tx + (1-t)v(x)}{\|tx + (1-t)v(x)\|} \qquad \text{bzw.} \qquad K(x,t) := \frac{-tx + (1-t)v(x)}{\|-tx + (1-t)v(x)\|}$$

Da $\langle v(x) \,|\, x\rangle = 0$ und $v(x) \neq 0$ folgt für alle $x \in S^n$, folgt

für orthogonale Vektoren gilt der Satz von Pythagoras

$$\|tx + (1-t)v(x)\|^2 = \|tx\|^2 + \|(1-t)v(x)\|^2 \neq 0$$
$$\|-tx + (1-t)v(x)\|^2 = \|-tx\|^2 + \|(1-t)v(x)\|^2 \neq 0$$

Also sind H und K wohldefiniert. H ist Homotopie zwischen id und $x \mapsto \frac{v(x)}{\|v(x)\|}$ und K ist Homotopie zwischen $-\mathrm{id} = R$ und $x \mapsto \frac{v(x)}{\|v(x)\|}$. □

10.9 Satz (Jordanscher Kurvensatz)

Sei $f\colon S^1 \to \mathbb{R}^2$ eine stetige, injektive Abbildung. Dann hat $\mathbb{R}^2 \setminus f(S^1)$ genau zwei Wegzusammenhangskomponenten. Eine davon ist beschränkt, die andere nicht.

Beweis (mit 10.10)
Wir können f auch als injektive Abbildung $f\colon S^1 \to \mathbb{R}^2 \subseteq S^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ auffassen. Nun ist $\tilde{H}_0\big(S^2 \setminus f(S^1)\big) = \mathbb{Z}$ nach Satz 10.10 b). Also $H_0\big(S^2 \setminus f(S^1)\big) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Daher besteht $S^2 \setminus f(S^1)$ aus zwei Wegzusammenhangskomponenten U_1 und U_2. Sei ohne Einschränkungen $\infty \in U_2$. Dann ist $U_2 \setminus \{\infty\}$ immer noch wegzusammenhängend: Seien $x, y \in U_2$, dann gibt es eine Umgebung V von $\infty \in S^2$ mit $V \setminus \{\infty\} \cong D^2 \setminus \{0\}$, $x, y \notin V$ und $f(S^1) \cap V = \emptyset$. Also sind U_1 und $U_2 \setminus \{\infty\}$ die Wegzusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^2 \setminus f(S^1)$. U_1 ist beschränkt und U_2 ist unbeschränkt. □

10.10 Satz

a) Sei $f\colon D^k \to S^n$ eine stetige, injektive Abbildung mit $0 \leqslant k < n$. Dann gilt $\tilde{H}_i\big(S^n \setminus f(D^k)\big) = 0$ für alle i.

b) Sei $f\colon S^k \to S^n$ eine stetige, injektive Abbildung mit $0 \leqslant k < n$. Dann gilt

$$\tilde{H}_i\big(S^n \setminus f(S^k)\big) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{falls } i = n-k-1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

10.11 Proposition

Seien $U_1 \subseteq U_2 \subseteq \ldots \subseteq X$ offen mit $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$. Seien $i_{a,b}\colon U_a \hookrightarrow U_b$ für $a < b$ und $i_a\colon U_a \hookrightarrow X$ die Inklusionen.

(1) Für jedes $x \in H_k(X;R)$ gibt es $a > 0$ und $x_a \in H_k(U_a;R)$ mit $(i_a)_*(x_a) = x$.

(2) Ist $x_a \in H_k(U_a;R)$ mit $(i_a)_*(x_a) = 0$, so gibt es $b > a$ mit $(i_{a,b})_*(x_a) = 0$.

Bemerkung
Diese Proposition gilt genauso für reduzierte Homologie.

Beweis
Sei $\sigma\colon |\Delta^n| \to X$ ein singulärer Simplex in X. Dann ist $\big\{\sigma^{-1}(U_a)\big\}_{a \in \mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung von $|\Delta^n|$. Da $|\Delta^n|$ kompakt ist, gibt es a mit $|\Delta^n| \subseteq \sigma^{-1}(U_a)$, also $\sigma(|\Delta^n|) \subseteq U_a$. Da Elemente von $C_n(X;R)$ endliche R-Linearkombinationen von singulären Simplizes sind, folgt

$$C_n(X;R) = \bigcup_a C_n(U_a;R).$$

Damit ergeben sich direkt (1) und (2). □

10.12 Beweis von Satz 10.10

a) Durch Induktion nach k. Für $k = 0$ ist $S^n \setminus f(D^0)$ homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ und die Behauptung folgt.
Induktionsschritt $k \mapsto k+1$: Da D^{k+1} und $[0,1]^{k+1}$ homöomorph sind, können wir D^{k+1} durch $[0,1]^{k+1}$ ersetzen. Sei $x \in \tilde{H}_i\big(S^n \setminus f\big([0,1]^{k+1}\big)\big)$. Es ist

$$S^n \setminus f\big(\{1/2\} \times [0,1]^k\big) = \underbrace{S^n \setminus f\big([0,1/2] \times [0,1]^k\big)}_{=:A} \cup \underbrace{S^n \setminus f\big([1/2,1] \times [0,1]^k\big)}_{=:B} = A \cup B$$

eine Vereinigung von offenen Mengen. Weiter ist

$$A \cap B = \big(S^n \setminus f\big([0,1/2] \times [0,1]^k\big)\big) \cap \big(S^n \setminus f\big([1/2,1] \times [0,1]^k\big)\big) = S^n \setminus f\big([0,1]^{k+1}\big)$$

Die zugehörige Mayer-Vietoris-Folge liefert nun einen Isomorphismus:

$$\underbrace{\tilde{H}_{i+1}(A \cup B)}_{=0 \text{ nach I.A.}} \longrightarrow \tilde{H}_i(A \cap B) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_i(A) \oplus \tilde{H}_i(B) \longrightarrow \underbrace{\tilde{H}_i(A \cup B)}_{=0 \text{ nach I.A.}}$$

Angenommen $x \neq 0$. Dann ist das Bild von x in $\tilde{H}_i(A)$ ungleich Null oder in $\tilde{H}_i(B)$ ungleich Null. Indem wir dieses Argument iterieren, erhalten wir eine Folge von Intervallen

$$[0,1] \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots \quad \text{sodass } \bigcap_a I_a = \{t\}$$

und das Bild von $x \in \tilde{H}_i\big(S^n \setminus f\big([0,1]^{k+1}\big)\big)$ unter der von der Inklusion $\iota_{0,a}\colon S^n \setminus f\big([0,1]^{k+1}\big) \to S^n \setminus f\big(I_a \times [0,1]^k\big)$ induzierten Abbildung $(\iota_{0,a})_*$ ungleich Null ist. Nun ist aber

$$\bigcup_a \Big(S^n \setminus f\big(I_a \times [0,1]^k\big)\Big) = S^n \setminus f\big(\{t\} \times [0,1]^k\big)$$

und wieder nach Induktionsannahme ist $\tilde{H}_i\big(S^n \setminus f\big(\{t\} \times [0,1]^k\big)\big) = 0$. Für die von der Inklusion $\iota_a\colon S^n \setminus f\big(I_a \times [0,1]^k\big) \to S^n \setminus f\big(\{t\} \times [0,1]^k\big)$ induzierte Abbildung gilt also $(\iota_a)_*(x) = 0$. Nach Proposition 10.11(2) muss x dann aber schon für ein i in $\tilde{H}_i\big(S^n \setminus f\big(I_a \times [0,1]^k\big)\big)$ trivial sein. $\lightning$

b) Durch Induktion nach k. Für $k = 0$ ist $S^n \setminus f(S^0) \cong \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Da $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \simeq S^{n-1}$ folgt für $k = 0$ die Behauptung.

Induktionsschritt $k-1 \mapsto k$: Wir setzen

$$\begin{aligned} D_+^k &:= \big\{(x_0, \dots, x_k) \in S^k \,\big|\, x_k \geqslant 0\big\} \\ D_-^k &:= \big\{(x_0, \dots, x_k) \in S^k \,\big|\, x_k \leqslant 0\big\} \end{aligned}$$

Dann ist $D_+^k \cap D_-^k = \big\{(x_0, \dots, x_k) \in S^k \,\big|\, x_k = 0\big\} \cong S^{k-1}$. Wieder ist

$$S^n \setminus f\big(D_+^k \cap D_-^k\big) = \big(S^n \setminus f(D_+^k)\big) \cup \big(S^n \setminus f(D_-^k)\big)$$

eine offene Vereinigung mit $\big(S^n \setminus f(D_+^k)\big) \cap \big(S^n \setminus f(D_-^k)\big) = S^n \setminus f(S^k)$. Es ist $D_\pm^k \cong D^k$, also ist wegen a) ist die Randabbildung in der zugehörigen Mayer-Vietoris-Folge

$$\tilde{H}_i\big(S^n \setminus f\big(D_+^k \cap D_-^k\big)\big) \xrightarrow[\cong]{\partial_i} \tilde{H}_{i-1}\big(S^n \setminus f(S^k)\big)$$

ein Isomorphismus. Die Behauptung folgt dann per Induktion. $\square$

11 CW-Komplexe

11.1 Definition

Ein kommutatives Diagramm von topologischen Räumen der Form

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & X \arrow[d, "\overline{g}"] \\ Y \arrow[r, "\overline{f}"] & Z \end{tikzcd} \qquad [\#]$$

heißt ein **Pushout**, falls es folgende universelle Eigenschaft hat:

$\forall \hat{f}\colon X \to \hat{Z}, \hat{g}\colon Y \to \hat{Z}$ mit $\hat{f} \circ f = \hat{g} \circ g$ gilt:

$\exists! \varphi\colon Z \to \hat{Z}$ mit $\hat{f} = \varphi \circ \overline{g}, \hat{g} = \varphi \circ \overline{f}$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & X \arrow[d, "\overline{g}"] \arrow[ddr, bend left, "\hat{f}"] & \\ Y \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[drr, bend right, "\hat{g}"'] & Z \arrow[dr, "\varphi"] & \\ & & \hat{Z} \end{tikzcd}$$

Wir sagen dann auch: [#] ist der Pushout von $Y \xleftarrow{g} A \xrightarrow{f} X$.

11.2 Bemerkung

Jedes Diagramm $Y \xleftarrow{g} A \xrightarrow{f} X$ lässt sich zu einem Pushout vervollständigen: Betrachte dazu den Raum $X \cup_A Y := {}^{X \amalg Y}/_{f(a) \sim g(a) \forall a \in A}$ mit der Quotiententopologie. Sind $\overline{f}\colon Y \to X \cup_A Y$ und $\overline{g}\colon X \to X \cup_A Y$ die von den Inklusionen $X \hookrightarrow X \coprod Y$ und $Y \hookrightarrow X \coprod Y$ induzierten Abbildungen, so ist

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "\overline{g}"] \\ Y \arrow[r, "\overline{f}"] & X \cup_A Y \end{tikzcd}$$

ein Pushout. Existenz und Eindeutigkeit aus der universellen Eigenschaft können benutzt werden um zu zeigen, dass der Pushout eindeutig bis auf kanonischen Homöomorphismus ist.

11.3 Definition

$X^{(i)}$ bezeichnet man auch als i-Gerüst oder i-Skelett

Ein **CW-Komplex**[3] ist ein topologischer Raum X zusammen mit einer Filtrierung[4] durch Unterräume von X:

$$\emptyset = X^{(-1)} \subseteq X^{(0)} \subseteq X^{(1)} \subseteq X^{(2)} \subseteq \ldots \subseteq X^{(n)} \subseteq X^{(n+1)} \subseteq \ldots \subseteq X$$

sodass die folgenden zwei Eigenschaften erfüllt sind:

[3] Zitat von `Wikipedia` zum Namen: *The C stands for "closure-finite", and the W for "weak topology".* C für *"cell"* scheint mir allerdings auch sinnvoll.

[4] siehe auch `https://de.wikipedia.org/wiki/Filter_(Mathematik)`

(i) **Zellstruktur**: Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt einen Pushout von topologischen Räumen

$$\begin{tikzcd} \coprod_{i \in I^{(n)}} S^{n-1} \arrow[r, "\coprod_{i \in I^{(n)}} q_i^{(n)}"] \arrow[d, hook, "\coprod_{i \in I^{(n)}} j_i"'] & X^{(n-1)} \arrow[d, hook, "k^{(n)}"] \\ \coprod_{i \in I^{(n)}} D^n \arrow[r, "\coprod_{i \in I^{(n)}} Q_i^{(n)}"] & X^{(n)} \end{tikzcd}$$

wobei $j_i \colon S^{n-1} \hookrightarrow D^n$ und $k_n \colon X^{(n-1)} \hookrightarrow X^{(n)}$ die Inklusionen sind.

(ii) **Schwache Topologie**: Es ist $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^{(n)}$ und $U \subseteq X$ ist genau dann offen, wenn $U \cap X^{(n)} \subseteq X^{(n)}$ für alle n offen ist.

Eine Abbildung $f \colon X \to Y$ zwischen CW-Komplexen heißt **zellulär**, falls $f(X^{(n)}) \subseteq Y^{(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

11.4 Bemerkung

(i) Die Abbildungen $q_i^{(n)}$ und $Q_i^{(n)}$ sind *nicht* Teil der Struktur eines CW-Komplex. Nur die Existenz von $q_i^{(n)}$ und $Q_i^{(n)}$ wird gefordert — sie ist nicht notwendig eindeutig. Hat man $q_i^{(n)}$ und $Q_i^{(n)}$ *gewählt*, so heißt $q_i^{(n)}$ die **anklebende Abbildung** der i-ten n-Zelle und $Q_i^{(n)}$ die **charakteristische Abbildung** der i-ten n-Zelle.

(ii) Sei $\mathring{D}^n = D^n \setminus S^{n-1}$ das Innere von D^n. Die Abbildungen $Q_i^{(n)}$ schränken sich zu einem Homöomorphismus $\coprod_{i \in I^{(n)}} \mathring{D}^n \to X^{(n)} \setminus X^{(n-1)}$ ein.[5] Insbesondere lässt ich $I^{(n)}$ mit der Menge der Wegzusammenhangskomponenten von $X^{(n)} \setminus X^{(n-1)}$ identifizieren. Die Wegzusammenhangskomponenten heißen die **offenen Zellen** von X. Damit ist jeder CW-Komplex die disjunkte Vereinigung seiner offenen Zellen.

⚠ Achtung: Jede offene n-Zelle ist offen in $X^{(n)}$, aber nicht notwendig in X.

(iii) Der Abschluss einer offenen Zelle $Q_i^{(n)}(\mathring{D}^n)$ ist $Q_i^{(n)}(D^n)$ und insbesondere kompakt. Die $Q_i^{(n)}(D^n)$ heißen die **abgeschlossenen Zellen** und sind als Abschluss von offenen Zellen unabhängig von der Wahl der $Q_i^{(n)}$.

⚠ Achtung: Abgeschlossene Zellen sind Bilder von D^n unter stetigen Abbildungen, aber nicht notwendig homöomorph zu D^n.

(iv) Ein CW-Komplex X heißt **endlich**, wenn er nur aus endlich vielen Zellen besteht, also wenn $I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I^{(n)}$ endlich ist. Insbesondere gibt es dann ein n mit $X = X^{(n)}$.

Die Dimension von X ist die maximale Dimension von Zellen von X, also $\dim X := N$, falls $X^{(N)} = X$, $X^{(N-1)} \subsetneq X$. Gibt es kein solches N so setzen wir $\dim X := \infty$.

11.5 Beispiele

(i) S^n mit

$$(S^n)^{(k)} = \begin{cases} \emptyset, & \text{falls } k = -1 \\ \{(1, 0, \dots, 0)\}, & \text{falls } k = 0, \dots n-1 \\ S^n, & \text{falls } k \geqslant n \end{cases}$$

[5] Dass dies ein Homöomorphismus ist, folgt aus der Pushout-Eigenschaft und dem letzen Teil der Bemerkung 11.2, denn es gilt demnach $X^{(n)} \cong X^{(n-1)} \cup_{\coprod S^{n-1}} \coprod D^n$.

ist ein CW-Komplex via $S^n \cong {}^{D^n}/_{S^{n-1}}$

$$\begin{tikzcd} S^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, hook] & (S^n)^{(n-1)} \arrow[r, equal] \arrow[d, hook] & \{(1,0,\dots,0)\} \\ D^n \arrow[r] & S^n \end{tikzcd}$$

(ii) S^n mit $(S^n)^{(k)} = \{(x_0,\dots,x_k,0,\dots,0) \in S^n\}$ ist ebenfalls eine CW-Struktur auf S^n.

(iii) Sei $K = (V,\Sigma)$ ein simplizialer Komplex. Es ist $|\Delta^n| \cong D^n$ und $|\partial\Delta^n| \cong S^{n-1}$. Sei $\Sigma^{(n)} := \Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup \ldots \cup \Sigma_n$. Dann wird $|K|$ durch $|K|^{(n)} := \left|\left(V,\Sigma^{(n)}\right)\right|$ für $n \geqslant 0$ zu einem CW-Komplex. Ist $f\colon K \to L$ eine simpliziale Abbildung, so ist $|f|\colon |K| \to |L|$ eine zelluläre Abbildung.

(iv) Der n-dimensionale reelle projektive Raum $\mathbb{R}P^n$ kann definiert werden durch

$$\mathbb{R}P^n := {}^{\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}}/_{x\sim\lambda x} = {}^{S^n}/_{x\sim -x}$$

Punkte in $\mathbb{R}P^n$ sind Äquivalenzklassen von $(n+1)$-Tupeln reeller Zahlen und werden als die sogenannten homogenen Koordinaten $[x_0 : \ldots : x_n]$ geschrieben. Es ist

$$\mathbb{R}P^n = \left\{[x_0 : \ldots : x_n] \,\middle|\, (x_0,\dots,x_n) \in S^n\right\} = \left\{[x_0 : \ldots : x_n] \,\middle|\, (x_0,\dots,x_n) \in S^n, x_n \geqslant 0\right\}$$

Wir erhalten einen Homöomorphismus $f^{(n)}\colon {}^{D^n}/_{x\sim -x, x\in S^{n-1}} \to \mathbb{R}P^n$ mit

$$f^{(n)}(x_1,\dots,x_n) = \left[x_1 : \ldots : x_n : \sqrt{1-\textstyle\sum_{i=1}^n x_i^2}\right]$$

Ist $Q^{(n)}\colon D^n \to \mathbb{R}P^n$ die Komposition von $f^{(n)}$ mit der Projektion $D^n \twoheadrightarrow {}^{D^n}/_{x\sim -x, x\in S^{n-1}}$ und $q^{(n)}\colon S^{n-1} \twoheadrightarrow \mathbb{R}P^{n-1}$ die Projektion, so erhalten wir einen Pushout

$$\begin{tikzcd} S^{n-1} \arrow[r, "q^{(n)}"] \arrow[d, hook] & \mathbb{R}P^{n-1} \arrow[d, hook] \\ D^n \arrow[r, "Q^{(n)}"] & \mathbb{R}P^n \end{tikzcd}$$

Induktiv erhalten wir einen CW-Struktur auf $\mathbb{R}P^n$ mit genau einer k-Zelle für $k = 0,\dots,n$ und

$$(\mathbb{R}P^n)^{(k)} \cong \mathbb{R}P^k$$

(v) Der n-dimensionale komplexe projektive Raum $\mathbb{C}P^n$ kann definiert werden durch

$$\mathbb{C}P^n := {}^{\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}}/_{z\sim\lambda z} = {}^{S^{2n+1}}/_{z\sim\lambda z, \lambda\in S^1\subseteq\mathbb{C}}$$

Punkte in $\mathbb{C}P^n$ sind Äquivalenzklassen von $(n+1)$-Tupeln komplexer Zahlen und werden als homogenen Koordinaten $[z_0 : \ldots : z_n]$ geschrieben. Es ist wieder

$$\mathbb{C}P^n = \left\{[z_0 : \ldots : z_n] \,\middle|\, (z_0,\dots,z_n) \in S^{2n+1}\right\} = \left\{[z_0 : \ldots : z_n] \,\middle|\, (z_0,\dots,z_n) \in S^{2n+1}, |z_n| \geqslant 0\right\}$$

Wir erhalten wieder einen Homöomorphismus $f^{(n)}\colon {}^{D^{2n+1}}/_{z\sim\lambda z, z\in S^{2n-1}, \lambda\in S^1} \to \mathbb{C}P^n$ durch

$$f^{(n)}(z_1,\dots,z_n) = \left[z_1 : \ldots : z_n : \sqrt{1-\textstyle\sum_{i=1}^n |z_i|^2}\right]$$

Ist $Q^{(2n)}\colon D^{2n} \to \mathbb{C}P^n$ die Komposition von $f^{(n)}$ mit der Projektion $D^{2n} \twoheadrightarrow D^{2n}/_{z\sim\lambda z, z\in S^{2n}}$ und $q^{(n)}\colon S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^{n-1}$ die Projektion, so erhalten wir auch wieder einen Pushout

$$\begin{array}{ccc} S^{2n-1} & \xrightarrow{q^{(n)}} & \mathbb{C}P^{n-1} \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ D^{2n} & \xrightarrow{Q^{(n)}} & \mathbb{C}P^n \end{array}$$

Induktiv erhalten wir einen CW-Struktur auf $\mathbb{C}P^n$ mit genau einer k-Zelle für $k = 0, 2, \ldots, 2n$ und

$$(\mathbb{C}P^n)^{(k)} \cong \mathbb{C}P^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}$$

11.6 Lemma

Sei X ein CW-Komplex und $K \subseteq X$. Dann ist K genau dann kompakt, wenn K abgeschlossen ist und K nur endlich viele offene Zellen von X schneidet.

Beweis
Zunächst: Ist $S \subseteq X$ ein Unterraum der jede offene Zelle höchstens in einem Punkt schneidet, so ist S diskret. Für $S_0 \subseteq S$ ist $S_0 \cap (X^{(n)} \setminus X^{(n-1)})$ abgeschlossen in $X^{(n)}$, da S_0 jede offene n-Zelle von X höchstens in einem Punkt schneidet. Daher ist $S_0 \cap X^{(n)} \subseteq X^{(n)}$ abgeschlossen für alle n. Damit ist also jede Teilmenge $S_0 \subseteq S$ abgeschlossen in X und S somit diskret.

Sei nun $K \subseteq X$ kompakt. Dann ist K sicher abgeschlossen. Sei $S \subseteq K$ ein Teilraum, der aus jeder offenen Zelle von X, die K schneidet, genau einen Punkt enthält. Wegen der Vorüberlegung ist S diskret. Da $S \subseteq K$ abgeschlossen und K kompakt ist, ist S auch kompakt. Damit ist S endlich und K schneidet nur endlich viele offene Zellen.

Ist nun umgekehrt K abgeschlossen und schneidet nur endlich viele offene Zellen, so ist K enthalten in einer endlichen Vereinigung von abgeschlossen Zellen von X. Da diese abgeschlossen Zellen kompakt sind, ist auch diese Vereinigung kompakt, K ist also ein abgeschlossener Teilraum eines kompakten Teilraums und damit selbst kompakt. □

11.7 Korollar

Ein CW-Komplex ist genau dann kompakt, wenn er endlich ist.

12 Zelluläre Homologie

12.1 Definition

Sei X ein CW-Komplex. Dann heißt

$$C_n^{\text{cell}}(X;R) := H_n(X^{(n)},X^{(n-1)};R)$$

der **$\mathbf{n}$-te zelluläre Kettenmodul** von X mit Koeffizienten in R. Die **$\mathbf{n}$-te Randabbildung** $\partial_n^{\text{cell}}\colon C_n^{\text{cell}}(X;R) \to C_{n-1}^{\text{cell}}(X;R)$ wird durch die Komposition

$$\begin{tikzcd}
H_n(X^{(n)},X^{(n-1)};R) \arrow[r, "\partial_n^{(X^{(n)},X^{(n-1)})}"] & H_{n-1}(X^{(n-1)};R) \arrow[d, "(j^{(n-1)})_*"] \\
& H_{n-1}(X^{(n-1)},X^{(n-2)};R)
\end{tikzcd}$$

definiert. Dabei ist $\partial_n^{(X^{(n)},X^{(n-1)})}$ die Randabbildung aus der Paarfolge für $(X^{(n)},X^{(n-1)})$ und $j^{(n-1)}$ die Inklusion $(X^{(n-1)},\emptyset) \hookrightarrow (X^{(n-1)},X^{(n-2)})$.

12.2 Lemma

$$\partial_{n-1}^{\text{cell}} \circ \partial_n^{\text{cell}} = 0$$

Beweis
Wir schreiben die Paarsequenz für $(X^{(n)},X^{(n-1)})$ dreimal übereinander und erhalten:

”R” aus Platzgründen weggelassen

$$\begin{tikzcd}
H_n(X^{(n)},X^{(n-1)}) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[drr, bend right, "\partial_n^{\text{cell}}"'] & H_{n-1}(X^{(n-1)}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots & & \\
& H_{n-1}(X^{n-1}) \arrow[r, "j_*^{(n-1)}"] & H_{n-1}(X^{(n-1)},X^{(n-2)}) \arrow[r, "\partial_{n-1}"] \arrow[drr, bend right, "\partial_{n-1}^{\text{cell}}"'] & H_{n-2}(X^{(n-2)}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \\
& & & H_{n-2}(X^{(n-2)}) \arrow[r, "j_*^{(n-2)}"] & H_{n-2}(X^{(n-2)},X^{(n-3)})
\end{tikzcd}$$

Also $\partial_{n-1}^{\text{cell}} \circ \partial_n^{\text{cell}} = 0$, da wegen der Exaktheit der Paarfolge schon $\partial_{n-1} \circ j_*^{(n-1)} = 0$ ist. $\square$

12.3 Definition

$(C_*^{\text{cell}}(X;R),\partial_*^{\text{cell}})$ heißt der **zelluläre Kettenkomplex** von X über R. Seine Homologie $H_*^{\text{cell}}(X;R)$ heißt die **zelluläre Homologie** von X.

12.4 Bemerkung

Der zelluläre Kettenkomplex und die zelluläre Homologie sind Funktoren auf der Kategorie der CW-Komplexe und zellulären Abbildungen.

12.5 Lemma

Sei X ein CW-Komplex. Wähle $q_i^{(n)}$ und $Q_i^{(n)}$ für die Zellstruktur auf X. Dann gilt

a) Die Abbildung

$$\left(\coprod_{i\in I^{(n)}} Q_i^{(n)}, \coprod_{i\in I^{(n)}} q_i^{(n)}\right) : \left(\coprod_i D^n, \coprod_i S^{n-1}; R\right) \longrightarrow (X^{(n)}, X^{(n-1)}; R)$$

induziert einen Isomorphismus in Homologie.

b) Es gilt

$$H_k\left(\coprod_i D^n, \coprod_i S^{n-1}; R\right) = \begin{cases} R[I^{(n)}], & \text{falls } k = n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis

a) Sei $D_0^n := D^n \setminus \{0\}$, $\frac{1}{2}D^n := \left\{ \frac{x}{2} \,\middle|\, x \in D^n \right\}$ und $\frac{1}{2}D_0^n := \frac{1}{2}D^n \setminus \{0\}$. Wir definieren

$$X_{++}^{(n-1)} := X^{(n)} \setminus \bigcup_{i\in I^{(n)}} Q_i^{(n)}(\{0\}) \quad \text{und} \quad X_{+}^{(n-1)} := X^{(n)} \setminus \bigcup_{i\in I^{(n)}} Q_i^{(n)}\left(\frac{1}{2}D^n\right)$$

Dann sind $X^{(n-1)} \hookrightarrow X_+^{(n-1)} \hookrightarrow X_{++}^{(n-1)}$ Homotopieäquivalenzen, da $\coprod_{i\in I^{(n)}} Q_i^{(n)}$ ein Homöomorphismus auf den offenen n-Zellen ist. Betrachte:

$$\begin{tikzcd}
(\coprod D^n, \coprod S^{n-1}) \arrow[r, "(1)"] \arrow[d, "(\coprod Q_i^{(n)}, \coprod q_i^{(n)})"] & (\coprod D^n, \coprod D_0^n) \arrow[d] & (\coprod \frac{1}{2}D^n, \coprod \frac{1}{2}D_0^n) \arrow[l, "(2)"'] \arrow[d, "(3)"] \\
(X^{(n)}, X^{(n-1)}) \arrow[r, "(5)"] & (X^{(n)}, X_{++}^{(n-1)}) & (X^{(n)} \setminus X_+^{(n-1)}, X_{++}^{(n-1)} \setminus X_+^{(n-1)}) \arrow[l, "(4)"']
\end{tikzcd}$$

(1), (2) und (5) sind Homotopieäquivalenzen und induzieren Isomorphismen in Homologie. (3) ist ein Homöomorphismus und induziert einen Isomorphismus in Homologie. (4) erfüllt die Vorraussetzungen für den Ausschneideisomorphismus und induziert daher auch einen Isomorphismus in Homologie. Damit folgt a).

b) Da die Randabbildung aus der Paarsequenz in diesem Fall ein Isomorphismus ist, gilt

$$\begin{aligned}
H_k\left(\coprod_i D^n, \coprod_i S^{n-1}; R\right) \xleftarrow{\cong} \bigoplus_i H_k(D^n, S^{n-1}; R) &\xrightarrow{\cong} \bigoplus_i \tilde{H}_{k-1}(S^{n-1}; R) \\
&\cong \bigoplus_i \begin{cases} R, & \text{falls } k = n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\
&\cong \begin{cases} R[I^{(n)}], & \text{falls } k = n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}$$

□

12.6 Bemerkung

Wir haben soeben gezeigt, dass die folgenden Isomorphismen existieren:

$$\begin{tikzcd}
C_n^{\text{cell}}(X; R) \arrow[r, "\partial_n^{\text{cell}}"] \arrow[d, equal] & C_{n-1}^{\text{cell}}(X; R) \arrow[d, equal] \\
H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}; R) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H_{n-1}(X^{(n-1)}, X^{(n-2)}; R) \arrow[d, "\cong"] \\
R[I^{(n)}] \arrow[r] & R[I^{(n-1)}]
\end{tikzcd}$$

Die Randabbildung ∂_n^{cell} wird unter diesen Isomorphismen zu einer $I^{(n-1)} \times I^{(n)}$-Matrix. Für $j \in I^{(n-1)}$ und $k \in I^{(n)}$ ist der (j,k)-Eintrag dieser Matrix genau der Abbildungsgrad einer Selbstabbildung der $(n-1)$-Sphäre:

Die $(Q_i^{(n-1)}, q_i^{(n-1)})$ induzieren einen Homöomorphismus $\coprod_i D^{n-1}/\coprod_i S^{n-2} \cong X^{(n)}/X^{(n-1)}$. Durch Komposition mit der Projektion auf die j-te Zelle erhalten wir die folgenden Abbildung

$$\textstyle\coprod_i D^{n-1}/\coprod_i S^{n-2} \xrightarrow{p_j^{(n-1)}} D^{n-1}/S^{n-2} \cong S^{n-1}.$$

Der (j,k)-te Eintrag ist nun der Abbildungsgrad von

$$S^{n-1} \xrightarrow{q_k^{(n-2)}} X^{(n-1)} \longrightarrow X^{(n-1)}/X^{(n-2)} \xrightarrow{\cong} \textstyle\coprod_i D^{n-1}/\coprod_i S^{n-2} \xrightarrow{p_j^{(n-1)}} S^{n-1}$$

12.7 Definition

Eine natürliche Transformation τ zwischen Funktoren $F, G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ heißt ein **natürlicher Isomorphismus**, wenn $\tau_C\colon F(C) \to G(C)$ für alle Objekte C von $\mathcal{C}$ ein Isomorphismus in $\mathcal{D}$ ist.

12.8 Satz

Für CW-Komplexe gibt es einen natürlichen Isomorphismus $\tau_X\colon H_*^{\text{cell}}(X;R) \xrightarrow{\cong} H_*(X;R)$.

Beweis (mit Lemma 12.9)
Betrachte folgendes Diagramm; die diagonalen Folgen sind Ausschnitte aus den Paarsequenzen:

"R" aus Platzgründen weggelassen

$$\begin{tikzcd}
 & & & \underset{=0}{H_n(X^{(n+1)},X^{(n)})} & \\
0 \overset{\text{12.9 a)}}{=} H_n(X^{(n-1)}) \arrow[dr] & & H_n(X^{(n+1)}) \arrow[ur] \arrow[r, "\cong", "\text{12.9 b)}"'] & H_n(X) & \\
 & H_n(X^{(n)}) \arrow[ur] \arrow[dr, hook, "j_*^{(n)}"] & & & \\
H_{n+1}(X^{(n+1)},X^{(n)}) \arrow[ur, "\partial_{n+1}^{X^{(n+1)},X^{(n)}}"] \arrow[rr, "\partial_{n+1}^{\text{cell}}"] & & H_n(X^{(n)},X^{(n-1)}) \arrow[rr, "\partial_n^{\text{cell}}"] \arrow[dr, "\partial_n^{X^{(n)},X^{(n-1)}}"] & & H_{n-1}(X^{(n-1)},X^{(n-2)}) \\
 & & & H_{n-1}(X^{(n-1)}) \arrow[ur, hook, "j_*^{(n-1)}"'] & \\
 & & \underset{=0}{H_{n-1}(X^{(n-2)})} \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Es folgt, dass $j_*^{(n)}$ wegen Exaktheit einen Isomorphismus $H_n(X^{(n)};R) \xrightarrow{\cong} \ker \partial_n^{\text{cell}}$ induziert. Da $j_*^{(n)}$ injektiv ist, induziert $j_*^{(n)}$ außerdem einen Isomorphismus $\operatorname{Im} \partial_{n+1}^{X^{(n+1)},X^{(n)}} \xrightarrow{\cong} \operatorname{Im} \partial_{n+1}^{\text{cell}}$. Insgesamt erhalten wir natürliche Isomorphismen

$$H_n(X;R) \cong H_n(X^{(n+1)};R) \cong H_n(X^{(n)};R)/\operatorname{Im} \partial_{n+1}^{X^{(n+1)},X^{(n)}} \cong \ker \partial_n^{\text{cell}}/\operatorname{Im} \partial_{n+1}^{\text{cell}} \cong H_n^{\text{cell}}(X;R) \qquad \square$$

12.9 Lemma

Sei X ein CW-Komplex.

a) Für $k > n$ ist $H_k(X^{(n)}; R) = 0$.

b) Für $k < n$ induziert die Inklusion $l_n \colon X^{(n)} \hookrightarrow X$ einen Isomorphismus $(l_n)_* \colon H_k(X^{(n)}; R) \to H_k(X; R)$.

Beweis

a) Ist $k > n$, so erhalten wir aus der Paarfolge einen Isomorphismus

$$\underbrace{H_{k+1}(X^{(n)}, X^{(n-1)}; R)}_{\overset{12.5}{=} 0} \longrightarrow H_k(X^{(n-1)}; R) \overset{\cong}{\longrightarrow} H_k(X^{(n)}; R) \longrightarrow \underbrace{H_k(X^{(n)}, X^{(n-1)}; R)}_{\overset{12.5}{=} 0}$$

Da $H_k(X^{(0)}; R) = 0$ für $k > 0$, folgt a) nun durch endliche Induktion für $n = 0, 1, \ldots, k-1$.

b) Ist $n > k$, so erhalten wir aus der Paarfolge

$$\underbrace{H_{k+1}(X^{(n+1)}, X^{(n)}; R)}_{\overset{12.5}{=} 0} \longrightarrow H_k(X^{(n)}; R) \overset{\cong}{\longrightarrow} H_k(X^{(n+1)}; R) \longrightarrow \underbrace{H_k(X^{(n+1)}, X^{(n)}; R)}_{\overset{12.5}{=} 0}$$

Für $m \geqslant n > k$ induziert die Inklusion $X^{(n)} \hookrightarrow X^{(m)}$ daher einen Isomorphismus $H_k(X^{(n)}; R) \to H_k(X^{(m)}; R)$. Ist $\dim X$ endlich, so folgt die Behauptung.

Für den allgemeinen Fall beobachten wir zunächst, dass es zu jeder stetigen Abbildung $\sigma \colon |\Delta^j| \to X$ ein n gibt mit $\operatorname{Im} \sigma \subseteq X^{(n)}$, da $\operatorname{Im} \sigma \subseteq X$ kompakt ist und daher nur endlich viele offene Zellen von X trifft (siehe 11.5). Also gilt $C_*(X; R) = \bigcup_n C_*(X^{(n)}; R)$. Damit folgt

(1) $\forall x \in H_k(X; R)$ existiert ein n, sodass x im Bild von $H_k(X^{(n)}; R) \to H_k(X; R)$.

(2) $\forall x \in H_k(X^{(n)}; R)$ mit trivialem Bild von x in $H_k(X; R)$, gibt es ein $m \geqslant n$, sodass das Bild von x in $H_k(X^{(m)}; R)$ trivial ist.

Da für $m \geqslant n > k$ die Abbildung $H_k(X^{(n)}; R) \to H_k(X^{(m)}; R)$ ein Isomorphismus ist, ergibt sich damit die Behauptung. $\square$

12.10 Korollar

Die Eulercharakteristik eines endlichen simplizialen Komplexes ist eine topologische Invariante.

Beweis

Sei a_n die Anzahl der n-Simplizes von K. Dann gibt es eine CW-Struktur auf $|K|$, die für jedes n genau a_n Zellen hat.

$$\chi(K) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i a_i \overset{12.5}{=} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \operatorname{Rg} C_i^{\mathrm{cell}}\big(|K|\big) \overset{4.10}{=} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \operatorname{Rg} H_i^{\mathrm{cell}}\big(|K|\big) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \operatorname{Rg} H_i\big(|K|\big)$$

Man beachte, dass 4.10 für beliebige $\mathbb{Z}$-Kettenkomplexe und deren Homologie gilt

Da die $H_i\big(|K|\big)$ eine topologische Invariante sind, ist auch $\chi(K)$ eine topologische Invariante. $\square$

12.11 Bemerkung

Ist X ein CW-Komplex mit endlich vielen n- und $n+1$-Zellen, so ist $H_n(X)$ ein endlich erzeugter $\mathbb{Z}$-Modul. Man definiert dann die **n-te Bettizahl** von X als $b_n := \operatorname{Rg} H_n(X)$. Ist X ein endlicher CW-Komplex, so definiert man die Euler-Charakteristik von X als

$$\chi(X) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n.$$

Ist a_n die Anzahl der n-Zellen von X, so gilt $\chi(X) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$.

12.12 Beispiel

Es gilt

$$H_k(\mathbb{C}P^n; R) \cong \begin{cases} R, & \text{falls } k = 0, 2, 4, \dots, 2n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis
Aus Beispiel 11.5 (v) wissen wir, dass es auf $\mathbb{C}P^n$ eine CW-Struktur gibt mit genau einer Zelle in der Dimension $0, 2, 4, \dots, 2n$ (und keine weiteren Zellen). Der zelluläre Kettenkomplex hat daher folgende Form:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc} 0 & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & \cdots & & 2n-1 & & 2n & & 2n+1 & & \cdots \\ R & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & R & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & R & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & R & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & \cdots \end{array}$$

Alle Randabbildungen sind trivial und die Homologie von $\mathbb{C}P^n$ stimmt mit den zellulären Kettenkomplexen überein. □

RevChap12

12.13 Beispiel

Es gilt

$$H_k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{falls } k = 0 \text{ oder } (k = n \text{ und } k \text{ ungerade}) \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & \text{falls } 0 < k < n \text{ und } k \text{ ungerade} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis
Aus Beispiel 11.5 (iv) wissen wir, dass es eine CW-Struktur auf $\mathbb{R}P^n$ gibt, die für $k = 0, \dots, n$ genau eine k-Zelle und keine weiteren Zellen besitzt. Der zelluläre Kettenkomplex von $\mathbb{R}P^n$ (über $\mathbb{Z}$) hat also die Form:

$$\mathbb{Z} \xleftarrow{\partial_1^{\text{cell}}} \mathbb{Z} \xleftarrow{\partial_2^{\text{cell}}} \mathbb{Z} \longleftarrow \cdots \longleftarrow \mathbb{Z} \xleftarrow{\partial_n^{\text{cell}}} \mathbb{Z} \longleftarrow 0$$

Wir müssen die Randabbildung verstehen. In der CW-Struktur können wir $(\mathbb{R}P^n)^{(k)}$ mit $\mathbb{R}P^k$ identifizieren. Die anklebende Abbildung $q^{(k+1)}\colon S^k \to \mathbb{R}P^k$ der $(k+1)$-Zelle ist die Projektion $(x_0, \dots, x_k) \mapsto [x_0 : \dots : x_k]$. Die charakteristische Abbildung $Q^{(k+1)}\colon D^{k+1} \to \mathbb{R}P^{k+1}$ der $(k+1)$-Zelle ist gegeben durch

$$(x_0, \dots, x_k) \mapsto \left[x_0 : \dots : x_k : \sqrt{1 - \|(x_1, \dots, x_k)\|^2}\right]$$

Betrachte folgendes kommutatives Diagramm:

Das linke untere Quadrat kommutiert, da die Randabbildung aus der Paarfolge eine natürliche Transformation ist. Das rechte, da die zugrunde liegenden Abbildungen kommutieren.

$$\begin{tikzcd} C_{k+1}^{\text{cell}}(\mathbb{R}P^n) \arrow[rr, "\partial_{k+1}^{\text{cell}}"] \arrow[d, equal] & & C_k^{\text{cell}}(\mathbb{R}P^n) \arrow[d, equal] \\ H_{k+1}\left(\mathbb{R}P^{k+1}, \mathbb{R}P^k\right) \arrow[r, "\partial^{\mathbb{R}P^{k+1}, \mathbb{R}P^k}"] & H_k(\mathbb{R}P^k) \arrow[r] & H_k\left(\mathbb{R}P^k, \mathbb{R}P^{k-1}\right) \\ H_{k+1}(D^{k+1}, S^k) \arrow[u, "\left(Q^{(k+1)}, q^{(k+1)}\right)_*", "\cong"'] \arrow[r, "\partial^{D^{k+1}, S^k}", "\cong"'] & \tilde{H}_k(S^k) \arrow[u, "\left(q^{(k+1)}\right)_*"] \arrow[r, "j_*"] & H_k(S^k, S^{k-1}) \arrow[u, "\left(q^{(k+1)}, q^{(k)}\right)_*"'] \end{tikzcd}$$

Das Bild von $\partial^{\mathrm{cell}}_{k+1}$ stimmt also mit dem Bild der Komposition

$$H_k(S^k) \xrightarrow{\quad j_* \quad} H_k(S^k, S^{k-1}) \xrightarrow{\left(q^{(k+1)}, q^{(k)}\right)_*} H_k\left(\mathbb{R}P^k, \mathbb{R}P^{k-1}\right)$$

überein. Sei $i_\pm\colon D^k \to S^k$ definiert durch $i_\pm(x) = \left(\pm x, \pm\sqrt{1 - \|x\|^2}\right)$. Sei $l\colon S^{k-1} \hookrightarrow i_-(D^k)$ die Inklusion und $R\colon S^k \to S^k$ die Punktspiegelung $x \mapsto -x$. Es ist $i_+ = R \circ i_-$. Betrachte

faktorisieren über 0

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \tilde{H}_k(S^k) & & \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle j_*} & & \\
\begin{array}{c} y_+ \in H_k(D^k, S^{k-1}) \\ \bigoplus \\ y_- \in H_k(D^k, S^{k-1}) \end{array} & \xrightarrow[\cong]{\begin{array}{c}(i_+, i_+|_{S^{k-1}})_* \\ + \\ (i_-, i_-|_{S^{k-1}})_*\end{array}} & H_k(S^k, S^{k-1}) & \xrightarrow[\cong]{\begin{pmatrix}\left(\mathrm{id}_{S^k}, l\right)_* \\ \left(R, R|_{S^{k-1}}\right)_*\end{pmatrix}} & \begin{array}{c} H_k\left(S^k, i_-(D^k)\right) \ni x_+ \\ \bigoplus \\ H_k\left(S^k, i_-(D^k)\right) \ni x_- \end{array} \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle \left(q^{(k+1)}, q^{(k)}\right)_*} & & \\
 & & H_k\left(\mathbb{R}P^k, \mathbb{R}P^{k-1}\right) & &
\end{array} \qquad [\#]$$

In der Übungen haben wir gesehen, dass die horizontalen Abbildungen Isomorphismen sind. Sei $x \in \tilde{H}_k(S^k)$ ein Erzeuger. Seien (x_+, x_-) und (y_+, y_-) die Elemente, die $j_*(x)$ unter den horizontalen Isomorphismen in [#] entsprechen. Mit Hilfe der Paarfolge zu $(S^k, i_-(D^k))$ sehen wir, dass die Inklusion $j_-\colon (S^k, \emptyset) \hookrightarrow (S^k, i_-(D^k))$ einen Isomorphismus $(j_-)_*\colon \tilde{H}_k(S^k) \to \tilde{H}_k(S^k, i_-(D^k))$ induziert. Es ist nun $(\mathrm{id}_{S^k}, l) \circ j = j_-$ und $(R, R|_{S^{k-1}}) \circ j = j_- \circ R$. Damit ist x_+ ein Erzeuger von $H_k(S^k, i_+(D^k))$. Weiter entspricht R_* der Multiplikation mit $(-1)^{k+1}$ nach 10.6. Damit folgt

eventuell in Anhang?

$$x_- = \left(R, R|_{S^{k+1}}\right)_* \circ j_*(x) = (\mathrm{id}_{S^k}, l) \circ j_* \circ R_*(x) = (\mathrm{id}_{S^k}, l)_* \circ j_*\left((-1)^{k+1} x\right) = (-1)^{k+1} \cdot x_+$$

Die Komposition der horizontalen Isomorphismen in [#] ist gegeben durch
Da bin ich anderer Meinung, bzw. sehe ich nicht ein warum . . .

Problem beheben/Details hinzufügen

$$\begin{pmatrix} (i_+, l \circ i_+|_{S^{k-1}})_* & 0 \\ 0 & (R, R|_{S^{k-1}})_* \circ (i_-, i_-|_{S^{k-1}})_* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (i_+, l \circ i_+|_{S^{k-1}})_* & \\ & (i_+, l \circ i_+|_{S^{k-1}})_* \end{pmatrix}$$

Es folgt, dass y_+ ein Erzeuger von $H_k(D^k, S^{k-1})$ ist und $y_- = (-1)^{k+1} y_+$ ist. In [#] wird y_+ auf $(q^{(k+1)}, q^{(k)})_* \circ (i_+, i_+|_{S^{k-1}})_*(y_+) = (Q^{(k)}, q^{(k)})_*(y_+)$ abgebildet. Insbesondere wird y_+ auf einen Erzeuger $z_k \in H_k(\mathbb{R}P^k, \mathbb{R}P^{k-1})$ abgebildet, da diese Abbildung nach 12.5 ein Isomorphismus ist. Es folgt

Für die Gleichung unten brauchen wir doch $\left(i_-, i_-|_{S^{k-1}}\right)_*(y_-) = (-1)^{k+1}\left(i_+, i_+|_{S^{k-1}}\right.$??

$$\begin{aligned}
\left(q^{(k+1)}, q^{(k)}\right)_*\left(j_*(x)\right) &= \left(q^{(k+1)}, q^{(k)}\right)_*\left(\left(i_+, i_+|_{S^{k-1}}\right)_*(y_+) + \left(i_-, i_-|_{S^{k-1}}\right)_*(y_-)\right) \\
&= \left(Q^{(k)}, q^{(k)}\right)_*\left(y_+ + (-1)^{k+1} y_+\right) \\
&= \begin{cases} 2 z_k, & \text{falls } k \text{ ungerade} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\operatorname{Im} \partial^{\mathrm{cell}}_{k+1} = \begin{cases} 2 \cdot C^{\mathrm{cell}}_k(X), & \text{falls } k \text{ ungerade} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Der zelluläre Kettenkomplex ist daher isomorph zu:

$$\mathbb{Z} \xleftarrow{\;0\;} \mathbb{Z} \xleftarrow{\;2\;} \mathbb{Z} \xleftarrow{\;0\;} \mathbb{Z} \longleftarrow \cdots \longleftarrow \overset{n}{\mathbb{Z}} \longleftarrow 0 \longleftarrow 0$$

Womit die Behauptung folgt. $\square$

Beispiel
Für $R = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist

$$H_k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & \text{falls } k = 0, \dots, n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$ □

12.14 Satz

Sei K ein geordneter simplizialer Komplex. Für $\sigma = \{v_0, \dots, v_n\} \in \Sigma_n$ mit $v_0 < v_1 < \dots < v_n$ sei $f_\sigma \colon |\Delta^n| \to |K|$ gegeben durch $f_\sigma(\sum_{i=0}^n t_i e_i) = \sum_{i=0}^n t_i v_i$. Wir erhalten

$$[f_\sigma] \in H_n\Big(|K|^{(n)}, |K|^{(n-1)}; R\Big) = C_n^{\text{cell}}(|K|; R).$$

Diese Zuordnung definiert einen Isomorphismus zwischen dem simplizialen Kettenkomplex von K und dem zellulären Kettenkomplex von $|K|$

$$\tau \colon C_*(K; R) \longrightarrow C_*^{\text{cell}}(|K|, R)$$

Insbesondere ist $H_*(K; R) \cong H_*(|K|; R)$ eine topologische Invariante von K.

Beweis
Betrachte

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_n} R & \xrightarrow{\cong} & \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_n} H_n(|\Delta^\sigma|, |\partial\Delta^\sigma|; R) \\ {\scriptstyle\cong}\big\downarrow & & {\scriptstyle\cong}\big\downarrow \\ C_n(K; R) & \xrightarrow{\tau} & H_n\Big(|K|^{(n)}, |K|^{(n-1)}; R\Big) \end{array}$$

Nun ist auch τ ein Isomorphismus, da $[f_\sigma]$ ein Erzeuger von $H_n(|\Delta^\sigma|, |\partial\Delta^\sigma|; R)$ ist, siehe Blatt 8. Es bleibt zu zeigen, dass $\sigma \mapsto [f_\sigma]$ mit den Randabbildungen vertauscht. Dies ergibt sich sofort aus $f_{\partial_j \sigma} = \partial_j f_\sigma$. □

13 Kleine Simplizes

13.1 Satz

Sei (X, A) ein Paar von topologische Räumen. Sei $L \subseteq A$ mit $\overline{L} \subseteq \mathring{A}$. Dann induziert die Inklusion $(X \setminus L, A \setminus L) \hookrightarrow (X, A)$ den Ausschneidungs-Isomorphismus $H_*(X \setminus L, A \setminus L; R) \xrightarrow{\cong} H_*(X, A; R)$. RevChap13
Es ist

$$H_*(X, A; R) = H_*({}^{C_*(X;R)}/{}_{C_*(A;R)}, \partial_*) \text{ und } H_*(X \setminus L, A \setminus L, R) = H_*({}^{C_*(X \setminus L;R)}/{}_{C_*(A \setminus L;R)}, \partial_*)$$

Missing figure

Skizze der Ausschneidung mit kleinen Simplizes

13.2 Definition

Sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X. Ein singulärer Simplex $\sigma\colon |\Delta^n| \to X$ heißt $\mathcal{U}$-**klein**, falls es ein $U \in \mathcal{U}$ gibt mit $\operatorname{Im} \sigma \subseteq U$. Die $\mathcal{U}$-kleinen Simplizes erzeugen den Unterkettenkomplex $\left(C_*^{\mathcal{U}}, \partial_*\right)$ des simplizialen Kettenkomplexes $C_*(X; R)$.

13.3 Satz über kleine Simplizes

Die Inklusion $C_*^{\mathcal{U}}(X; R) \to C_*(X; R)$ induziert einen Isomorphismus in Homologie.

13.4 Bemerkung

Der Satz über kleine Simplizes lässt sich auf Paare von topologischen Räumen verallgemeinern. Für eine Überdeckung $\mathcal{U}$ von X setzen wir

$$C_*^{\mathcal{U}}(X, A; R) := {}^{C_*^{\mathcal{U}}(X;R)}/{}_{C_*(A;R) \cap C_*^{\mathcal{U}}(X;R)}$$

Dann induziert die Inklusion $C_*^{\mathcal{U}}(X, A; R) \to C_*(X, A; R)$ einen Isomorphismus in Homologie. Beweis mit Paarfolge und 5er-Lemma.

13.5 Beweis des Ausschneidungssatzes (13.1)

Seien $\mathcal{U} := \left\{\mathring{A}, X \setminus \overline{L}\right\}$ und $\mathcal{U}_L := \left\{\mathring{A} \setminus L, X \setminus \overline{L}\right\}$. Dann gilt nach dem Satz über kleine Simplizes

$$\begin{tikzcd}
C_*^{\mathcal{U}_L}(X \setminus L, A \setminus L; R) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, hook, "\cong_{H_*}"'] & C_*^{\mathcal{U}}(X, A; R) \arrow[d, hook, "\cong_{H_*}"] \\
C_*(X \setminus L, A \setminus L; R) \arrow[r, "(\star)"] & C_*(X, A; R)
\end{tikzcd}$$

Daher induziert auch die Inklusion $(\star)$ einen Isomorphismus in H_*. $\square$

13.6 Idee zum Beweis des Satzes über kleine Simplizes

Zerteilung Simplex mit Bild in X

13.7 Definition

$s_n := \left(\frac{1}{n+1}, \ldots, \frac{1}{n+1}\right) \in |\Delta^n|$ heißt der **Schwerpunkt** von $|\Delta^n|$. Ist $\sigma\colon |\Delta^p| \to |\Delta^n|$ ein singulärer
„Abkegeln“ p-Simplex, so definieren wir $(K_{\Delta^n})(\sigma)\colon \left|\Delta^{p+1}\right| \to |\Delta^n|$ durch

$$(K_{\Delta^n})(\sigma)(t_0, \ldots, t_{p+1}) = t_0 \cdot s_n + (1-t_0) \cdot \sigma\left(\frac{(t_1, \ldots, t_{p+1})}{1-t_0}\right)$$

Wir erhalten eine Abbildung $\left(K_{\Delta^n}\right)_p\colon C_p(|\Delta^n|; R) \to C_{p+1}(|\Delta^n|; R)$.

13.8 Lemma

Sei $p_n\colon |\Delta^n| \to |\Delta^n|$ die konstante Abbildung mit $\operatorname{Im} p_n = \{s_n\}$. Dann ist $\left(K_{\Delta^n}\right)_*$ eine Kettenhomotopie zwischen id und $(p_n)_*$.

Beweis
Sei σ ein singulärer p-Simplex in $|\Delta^n|$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\partial_{p+1} \circ \left(K_{\Delta^n}\right)_p(\sigma) = \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j \left(K_{\Delta^n}\right)_p(\sigma) \circ \iota_{p+1,j} &= \sigma + \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^j (K_{\Delta^n})_p(\sigma) \circ \iota_{p+1,j} \\
&= \sigma + \begin{cases} \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^j (K_{\Delta^n})_{p-1}(\sigma \circ \iota_{p+1}, j), & p \geqslant 1 \\ -c_{\{s_n\}}\colon \left|\Delta^0\right| \to \{s_n\}, & p = 0 \end{cases} \\
&= \sigma - \begin{cases} (K_{\Delta^n})_{p-1}(\partial_p \circ \sigma), & \text{falls } p \geqslant 1 \\ c_{\{s_0\}}, & \text{falls } p = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

□

13.9 Definition

Wir definieren induktiv natürliche Transformationen $B_n\colon C_n(-; R) \to C_n(-; R)$ und $H_n\colon C_n(-; R) \to C_{n+1}(-; R)$ wie folgt: Für $n = 0$ setzen wir $(B_0)_X = \mathrm{id}$. Sei B_k nun schon für $k = 0, \ldots, n-1$ definiert. Betrachte zunächst $\mathrm{id}_{|\Delta^n|} \in C_n(|\Delta^n|; R)$. Setze

$$(B_n)_{|\Delta^n|}\left(\mathrm{id}_{|\Delta^n|}\right) := (K_{\Delta^n})_{n-1} \circ (B_{n-1})_{|\Delta^n|} \circ \partial_n\left(\mathrm{id}_{|\Delta^n|}\right)$$

Ist $\sigma\colon |\Delta^n| \to X$ ein beliebiger singulärer n-Simplex in X, so ist $\sigma = \sigma_*\left(\mathrm{id}_{|\Delta^n|}\right)$, also setzen wir [6]

$$(B_n)_X(\sigma) := \sigma_*\left((B_n)_{|\Delta^n|}\left(\mathrm{id}_{|\Delta^n|}\right)\right)$$

[6] $(B_n)_X(\sigma) = (B_n)_X\left(\sigma_*(\mathrm{id}_{|\Delta^n|})\right) = \sigma_*\left((B_n)_{|\Delta^n|(\mathrm{id}_{|\Delta^n|})}\right)$ muss wegen Natürlichkeit gelten

Für $n = 0$ und $\sigma\colon \left|\Delta^0\right| \to X$ setzen wir $(H_0)_X(\sigma)$ als den konstanten 1-Simplex τ mit $\operatorname{Im}\tau = \operatorname{Im}\sigma$. Ist H_{n-1} schon definiert, so setzen wir für einen singulären n-Simplex $\sigma\colon |\Delta^n| \to X$

$$(H_n)_X(\sigma) := \sigma_*\big((K_{\Delta^n})_n\big(\mathrm{id}_{|\Delta^n|} - (H_{n-1})_{|\Delta^n|} \circ \partial_n\big(\mathrm{id}_{|\Delta^n|}\big)\big)\big)$$

13.10 Lemma 1

Für jeden topologischen Raum X ist $(B_*)_X$ eine Kettenabbildung und $(H_*)_X$ eine Kettenhomotopie zwischen $(B_*)_X$ und der Identität.

13.11 Lemma 2

Sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X. Sei $\alpha \in C_n(X;R)$. Dann gibt es $k_0 \geqslant 0$ so, dass $(B_n)^k_X(\alpha) \in C^{\mathcal{U}}_n(X;R)$ für alle $k \geqslant k_0$.

Beweis (mit Lemma 3, 13.16)
Es genügt $\alpha = \sigma\colon |\Delta^n| \to X$ zu betrachten. Sei $\sigma^*\mathcal{U} = \big\{\sigma^{-1}(U) \,\big|\, U \in \mathcal{U}\big\}$. Dann gilt

$$\sigma^*\Big(C^{\sigma^*\mathcal{U}}_*(|\Delta^n|;R)\Big) \subseteq C^{\mathcal{U}}_*(X;R).$$

Da $(B_n)^k_X(\sigma) = \sigma_*\Big((B_n)_{|\Delta^n|^k}(\mathrm{id}_{|\Delta^n|})\Big)$ genügt es zu zeigen: $(B_n)^k_{|\Delta^n|}(\mathrm{id}_{|\Delta^n|}) \in C^{\sigma^*\mathcal{U}}_*(|\Delta^n|;R)$. Sei $\varepsilon > 0$ eine Lebesguezahl[7] für $\sigma^*\mathcal{U}$, das heißt $\forall x \in |\Delta^n| : \exists V \in \sigma^*\mathcal{U} : B_\varepsilon(x) \subseteq V$. Ist $k > 0$ mit $\left(\frac{n}{n+1}\right)^k \operatorname{diam}(\mathrm{id}_{|\Delta^n|}) < \varepsilon$, so ist $\big((B_n)_{|\Delta^n|}\big)^k(\mathrm{id}_{|\Delta^n|}) \in C^{\sigma^*\mathcal{U}}_*(|\Delta^n|;R)$ nach Lemma 3 (iii). $\square$

13.12 Beweis des Satzes über kleine Simplizes (13.3)

Sei $x \in H_n(X;R)$. Wähle $\alpha \in C_n(X;R)$ mit $[\alpha] = X$. Nach Lemma 2 gibt es ein k mit $(B_n)^k_X(\alpha) \in C^{\mathcal{U}}_n(X;R)$. Mit Lemma 1 folgt $x = [\alpha] = \big[(B_n)^k_X(\alpha)\big]$. Daher ist die von $C^{\mathcal{U}}_* \to C_*(X;R)$ induzierte Abbildung in H_* surjektiv.

Sei nun $x \in \ker H_n\big(C^{\mathcal{U}}_*(X;R) \to C_*(X;R)\big)$. Sei $\alpha \in C^{\mathcal{U}}_n(X;R)$ mit $x = [\alpha]$. Da x im Kern liegt, gibt es $\beta \in C_{n+1}(X;R)$ mit $\partial_n(\beta) = \alpha$. Nach Lemma 2 gibt es k mit $(B_n)^k_X(\beta) \in C^{\mathcal{U}}_n(X;R)$. Mit Lemma 1 folgt

$$x = [\alpha] = \big[(B_n)^k_X(\alpha)\big] = \big[(B_n)^k_X(\partial_n\beta)\big] = \big[\partial_n\big((B_{n+1})^k_X(\beta)\big)\big]$$

Also ist $x = 0$ in $H_*\big(C^{\mathcal{U}}_*(X;R)\big)$. $\square$

13.13 Bemerkung

Seien (C_*, ∂_*) und (C'_*, ∂'_*) Kettenkomplexe. $s_n\colon C_n \to C'_{n+1}$ eine Abbildung, die den Grad um 1 erhöht. Dann ist $s_{n-1} \circ \partial_n + \partial'_{n+1} \circ s_n$ eine Kettenabbildung:

$$\big(s_{n-1} \circ \partial + \partial'_{n+1} \circ s_n\big) \circ \partial_{n+1} = \partial'_{n+1} \circ \big(s_n \circ \partial_{n+1} + \partial'_{n+2} \circ s_{n+1}\big)$$

Insbesondere ist $s \circ \partial + \partial' \circ s = f - g$ mit f eine Kettenabbildung. Dann ist auch g eine Kettenabbildung.

13.14 Definition

Seien $v_0, \dots, v_p \in |\Delta^n|$. Dann bezeichnen wir mit $[v_0, \dots, v_p]$ den singulären p-Simplex mit $\sum_{i=0}^p t_i e_i \to \sum_{i=1}^p t_i v_i$. Singuläre Simplizes dieser Form heißen **affin**.

[7] siehe `https://de.wikipedia.org/wiki/Lebesguezahl`

13.15 Definition

Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^{n+1}$. Für einen singulären Simplex $\sigma\colon |\Delta^p| \to |\Delta^n|$ definieren wir den **Durchmesser** durch

$$\operatorname{diam}(\sigma) := \max\{\|\sigma(x) - \sigma(y)\| \mid x, y \in |\Delta^p|\}$$

13.16 Lemma 3

Sei $[v_0, \ldots, v_p]$ ein affiner singulärer p-Simplex in $|\Delta^n|$. Dann gilt:

(i) $\operatorname{diam}([v_0, \ldots, v_p]) = \max\{\|v_i - v_j\| \mid 0 \leqslant i, j \leqslant p\}$

(ii) Es ist

$$(B_p)_{|\Delta^n|}\big([v_0, \ldots, v_p]\big) = \sum_{\sigma \in \sum_{\{v_0, \ldots, v_p\}}} \operatorname{sgn}(\sigma) \underbrace{\left[\frac{\sum_{i=0}^{p} \sigma(v_i)}{p+1}, \frac{\sum_{i=0}^{p-1} \sigma(v_i)}{p}, \ldots, \sigma(v_0)\right]}_{=:\tau_\sigma}$$

(iii) Für $\sigma \in \sum_{\{v_0, \ldots, v_p\}}$ ist $\operatorname{diam} \tau_\sigma \leqslant \frac{n}{n+1} \operatorname{diam}[v_0, \ldots, v_p]$.

Beweis

(i) Seien $v, v' \in \operatorname{Im}[v_0, \ldots, v_p]$. Dann ist $v = \sum_{i=0}^{p} t_i v_i$, $v' = \sum_{i=0}^{p} t_i' v_i$ mit $t_i, t_i' \geqslant 0$, $\sum_{i=0}^{p} t_i = 1 = \sum_{i=0}^{p} t_i'$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|v - v'\| &= \left\|\sum_{i=0}^{p} t_i v_i - v'\right\| = \left\|\sum_{i=0}^{p} t_i v_i - \sum_{i=0}^{p} t_i v'\right\| = \left\|\sum_{i=0}^{p} t_i (v_i - v')\right\| \leqslant \sum_{i=0}^{p} \|v_i - v'\| \\ &\leqslant \left(\sum_{i=0}^{p} t_i\right) \max_i \|v_i - v'\| = \max_i \|v_i - v\| \leqslant \max_{i,j} \|v_i - v_j\|. \end{aligned}$$

(ii) Per Induktion nach p.

$p = 0$: Klar.

$p - 1 \mapsto p$: Es genügt $n = p$, $v_0 = e_0, \ldots, v_n = e_n$ zu betrachten. Es gilt

$$\begin{aligned} \big(B_{|\Delta^p|}\big)_p([v_0, \ldots, v_p]) &= (K_{\Delta^p}) \circ (B_{|\Delta^p|})_{p-1} \circ \partial_p [e_0, \ldots, e_p] \\ &= \sum_{i=0}^{p} (-1)^i (K_{\Delta^p}) \circ (B_{|\Delta^p|})_{p-1} \circ [e_0, \ldots, e_{i-1}, e_{i+1}, \ldots, e_p] \\ &= \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \sum_{\sigma \in \Sigma_{\{e_0, \ldots, e_{i-1}, e_{i+1}, \ldots e_p\}}} \operatorname{sgn}(\sigma) (K_{\Delta^p}) \Big(\Big[\tfrac{\sigma(e_0) + \ldots \sigma(e_{i-1}) + \sigma(e_{i+1}) + \ldots + \sigma(e_p)}{p} \Big] \Big) \\ &= \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \sum_{\sigma \in \Sigma_{\{e_0, \ldots, e_{i-1}, e_{i+1}, \ldots e_p\}}} \operatorname{sgn}(\sigma) \Big[\tfrac{e_0 + \ldots + e_p}{p+1}, \tfrac{\sigma(e_0) + \ldots \sigma(e_{i-1}) + \sigma(e_{i+1}) + \ldots + \sigma(e_p)}{p}, \ldots \Big] \\ &= \ldots = \sum_{\sigma \in \Sigma_{\{e_0, \ldots, e_n\}}} \operatorname{sgn}(\sigma) \Big[\tfrac{\sum_{i=0}^{p} \sigma(e_i)}{p}, \ldots, \ldots \Big] \end{aligned}$$

(iii) Es genügt $\sigma = \mathrm{id}$ zu betrachten. Es ist

$$\begin{aligned}
\operatorname{diam}\left[\frac{v_0+\ldots+v_p}{p+1}, \frac{v_0+\ldots v_{p-1}}{p}, \ldots, v_0\right] &\overset{\text{(i)}}{=} \max_{i<j}\left\|\frac{v_0+\ldots+v_i}{i+1} - \frac{v_0+\ldots+v_j}{j+1}\right\| \\
&= \max_{i<j}\left\|\frac{v_0+\ldots+v_i}{i+1} - \frac{v_0+\ldots+v_j}{j+1} - \frac{v_{i+1}+\ldots+v_j}{j+1}\right\| \\
&= \max_{i<j}\left\|\frac{(j+1)-(i+1)}{(i+1)(j+1)}(v_0+\ldots+v_i) - \frac{1}{j+1}(v_{i+1}+\ldots+v_j)\right\| \\
&= \max_{i<j}\frac{j-1}{j+1}\left\|\underbrace{\frac{v_0+\ldots+v_i}{i+1}}_{\in\mathrm{Im}[v_0,\ldots,v_n]} - \underbrace{\frac{v_{i+1}+\ldots+v_j}{j-1}}_{\in\mathrm{Im}[v_0,\ldots,v_n]}\right\| \\
&\leqslant \max_{i<j}\frac{j-1}{j+1}\operatorname{diam}[v_0, ld, v_n] \\
&\leqslant \max_{j}\frac{j}{j+1}\operatorname{diam}[v_0,\ldots,v_n] \leqslant \frac{n}{n+1}\operatorname{diam}[v_0,\ldots,v_n]
\end{aligned}$$

14 Axiome für Homologie

14.1 Bezeichnung

RevChap14

Mit $V\colon \textsc{Top}^2 \to \textsc{Top}^2$ bezeichnen wir den Funktor $V(X,A) = (A,\emptyset) = A$.

14.2 Definition

Eine **Homologietheorie** mit Werten in R-Moduln ist ein Funktor

$$E_*\colon \mathrm{H}\textsc{Top}^2 \longrightarrow \textsc{Gr}\text{-}R\text{-}\textsc{Mod}$$

zusammen mit einer natürlichen Transformation $\partial_{*+1}\colon E_{*+1} \to E_* \circ V$,[8] sodass folgende Axiome gelten:

(i) **Paarfolge**: Sei (X,A) ein Paar von topologischen Räumen. Seien $X = (X,\emptyset) \xrightarrow{j} (X,A)$ und $A = (A,\emptyset) \xrightarrow{i} X = (X,\emptyset)$ die Inklusionen. Dann ist

$$\cdots \longrightarrow E_{n+1}(X,A) \xrightarrow{\partial_{n+1}} E_n(A) \xrightarrow{E_n(i)} E_n(X) \xrightarrow{E_n(j)} E_n(X,A) \xrightarrow{\partial_{n-1}} E_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots$$

eine lange exakte Folge.

(ii) **Ausschneidung**: Sei (X,A) ein Paar von topologischen Räumen und $L \subseteq A$ mit $\overline{L} \subseteq \mathring{A}$. Dann induziert die Inklusion $i\colon (X \setminus L, A \setminus L) \to (X,A)$ einen Isomorphismus

$$E_*(i)\colon E_*(X \setminus L, A \setminus L) \xrightarrow{\cong} E_*(X,A)$$

14.3 Bemerkung

Homologietheorien sind homotopieinvariant. Oft wird dies als eigenes Axiom formuliert.

14.4 Bemerkung

Für jede Homologietheorie gibt es eine Mayer-Vietoris-Folge. Dies ist eine formale Konsequenz aus der Paarfolge und dem Ausschneidungsisomorphismus. Eine einfache Folgerung aus der Mayer-Vietoris-Folge ist, dass jede Homologietheorie mit *endlichen* disjunkten Vereinigungen verträglich ist: Ist $X = X_1 \amalg \cdots \amalg X_n$ und $j_i\colon X_i \to X$ die Inklusion, dann ist

$$E_*(X_1) \oplus \cdots \oplus E_*(X_n) \xrightarrow{E_*(j_1)\oplus\cdots\oplus E_*(j_n)} E_*)X$$

ein Isomorphismus.

14.5 Definition

Zwei weitere Axiome die Homologietheorien mit Werten in R-Moduln erfüllen können sind:

Dimensionsaxiom: Für den Einpunktraum $\{x_0\}$ ist $E_0(\{x_0\}) \cong R$ und $E_n(\{x_0\}) = 0$ für $n \neq 0$.

Disjunkte Vereinigung: Sei $X = \coprod_{i\in I} X_i$ und $j_i\colon X_i \to X$ die Inklusion. Dann ist

$$\bigoplus_{i\in I} E_*(j_i)\colon \bigoplus_{i\in I} E_*(X_i) \longrightarrow E_*(X)$$

ein Isomorphismus.

[8] Genauer: Sei $S\colon \textsc{Gr}\text{-}R\text{-}\textsc{Mod} \to \textsc{Gr}\text{-}R\text{-}\textsc{Mod}$ der Funktor $(SM)_n = M_{n+1}$. Dann ist ∂_* eine natürliche Transformation $S\circ E_* \to E_* \circ V$, also für (X,A) $(S(E_*(X,A)))_n \to (E_*(V(X,A)))$, $E_{n+1}(X,A) \xrightarrow{\partial_*} E_n(A)$.

14.6 Bemerkung

In Kapitel 6 haben wir $\textsc{Gr}\text{-}R\text{-}\textsc{Mod}$ als die Kategorie der $\mathbb{N}$-graduierten R-Moduln definiert. Für viele Homologietheorien muss man diese Kategorie etwas vergrößern und $\mathbb{Z}$-graduierte R-Moduln zulassen. Objekte sind dann Folgen $(M_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ über $\mathbb{Z}$ von R-Moduln M_n.

14.7 Bemerkung

- Für jede Homologietheorie E_* gilt: $E_*(S^n) \cong E_*(\{\mathrm{pt}\}) \oplus E_{*-n}(\{\mathrm{pt}\})$
- Die Konstruktion des zellulären Kettenkomplexes in singulärer Homologie benutzte nur die Axiome aus 14.2. Für die Identifikation der zellulären Homologie mit der singulären Homologie waren zusätzlich die Axiome aus 14.5 notwendig. Ohne das Axiom über disjunkte Vereinigungen kann man nur endliche CW-Komplexe behandeln. Ohne das Dimensionsaxiom erhält man an der Stelle der zellulären Kettenkomplex eine sogenannte **Spektralfolge**, die Atiyah-Hirzebruch Spektralfolge.

14.8 Definition

Seien (E_*, ∂_*^E) und (F_*, ∂_*^F) Homologietheorien. Ein **Morphismus von Homologietheorien** ist eine natürliche Transformation $\tau_*\colon E_* \to F_*$, sodass $\tau_* \circ \partial_{*+1}^E = \partial_*^F \circ \tau_{*+1}$. Also kommutiert für alle (X, A) das folgende Diagramm

$$\begin{tikzcd}
E_{n+1}(X,A) \arrow[r, "\partial_{n+1}^E"] \arrow[d, "\tau_{n+1,(X,A)}"] & E_n(A) \arrow[d, "\tau_{n,A}"] \\
F_{n+1}(X,A) \arrow[r, "\partial_{n+1}^F"] & F_n(A)
\end{tikzcd}$$

14.9 Satz

Sei $\tau_*\colon (E_*, \partial_*^E) \to (F_*, \partial_*^F)$ ein Morphismus von Homologietheorien. Ist

$$(\tau_*)_{\{\mathrm{pt}\}}\colon E_*(\{\mathrm{pt}\}) \to F_*(\{\mathrm{pt}\})$$

ein Isomorphismus, dann ist $(\tau_*)_X$ für jeden endlichen CW-Komplex ein Isomorphismus. Sind E_* und F_* mit beliebigen disjunkten Vereinigungen verträglich, so ist $(\tau_*)_X$ für alle CW-Komplexe ein Isomorphismus.

Beweis

Schritt 1: Sei X ein 0-dimensionaler endlicher CW-Komplex,also eine endliche Menge mit der diskreten Topologie. Für $x \in X$ sei $i_x\colon \{x\} \to X$ die Inklusion. Wir erhalten folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
E_*(X) \arrow[r, "(\tau_*)_X"] & F_*(X) \\
\bigoplus\limits_{x\in X} E_*(\{x\}) \arrow[u, "\cong"] \arrow[r, "\bigoplus_{x\in X}(\tau_*)_{\{x\}}", "\cong"'] & \bigoplus\limits_{x\in X} F_*(\{x\}) \arrow[u, "\cong"]
\end{tikzcd}$$

Das Diagramm kommutiert, da τ_* eine natürliche Transformation ist.

Schritt 2: Angenommen $(\tau_*)_X$ ist ein Isomorphismus für jeden endlichen CW-Komplex von Dimension echt kleiner als n. Sei X ein n-dimensionaler endlicher CW-Komplex:

$$\begin{tikzcd} \coprod_{i\in I} S^{n-1} \arrow[r, "\coprod q_i^{(n)}"] \arrow[d] & X^{(n-1)} \arrow[d] \\ \coprod_{i\in I} D^n \arrow[r, "\coprod Q_i^{(n)}"] & X \end{tikzcd}$$

Sei $X_+^{(n-1)} := X^{(n-1)} \cup \coprod_{i\in I} Q_i^{(n)}(D^n \setminus \{0\})$ und $Z := \coprod_{i\in I} Q_i^{(n)}(\mathring{D}^n)$. Dann sind $X_+^{(n-1)}$, Z und $Z \cap X_+^{(n-1)}$ homotopieäquivalent zu endlichen CW-Komplexen mit Dimension echt kleiner n. Insbesondere sind $(\tau_*)_{X_+^{(n-1)}}$, $(\tau_*)_Z$ und $(\tau_*)_{X_+^{(n-1)}\cap Z}$ Isomorphismen. Da $X_+^{(n-1)} \subseteq X$ und $\mathbb{Z} \subseteq X$ offen sind, erhalten wir in E_* und F_* zugehörigen Mayer-Vietoris-Folgen:

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & E_*(X_+^{(n-1)} \cap Z) \arrow[r] \arrow[d, "(\tau_*)_{X_+^{(n-1)}\cap Z}", "\cong"'] & E_*(X_+^{(n-1)}) \oplus E_*(\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "(\tau_*)_{X_+^{(n-1)}} \oplus (\tau_*)_Z", "\cong"'] & E_*(X) \arrow[r, "\partial_*^{\mathrm{MV},E}"] \arrow[d, "(\tau_*)_X"] & E_{*-1}(X_+^{(n-1)} \cap Z) \arrow[r] \arrow[d, "(\tau_{*-1})_{X_+^{(n-1)}\cap Z}", "\cong"'] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & F_*(X_+^{(n-1)} \cap Z) \arrow[r] & F_*(X_+^{(n-1)}) \oplus F_*(\mathbb{Z}) \arrow[r] & F_*(X) \arrow[r, "\partial_*^{\mathrm{MV},F}"] & F_{*-1}(X_+^{(n-1)} \cap Z) \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Da τ_* eine natürliche Transformation ist, kommutierten die beiden linken Vierecke. Da τ_* mit der Randabbildung der Paarfolgen von E_* und F_* kommutiert, kommutiert auch τ_* mit den Randabbildungen der Mayer-Vietoris-Folgen in E_* und F_*. Also kommutiert auch das das dritte Viereck. Mit dem 5er-Lemma (8.15) folgt, dass $(\tau_*)_X$ auch ein Isomorphismus ist.

Erfüllen E_* und F_* auch das Dimensionsaxiom, so zeigen die Argumente aus Schritt 1 und 2, dass $(\tau_*)_X$ ein Isomorphismus ist für jeden endlich dimensionalen CW-Komplex.

Aus Vorlesungsnotizen übernehmen

Schritt 3: Sei X ein CW-Komplex. Sei

$$X^+ := \{(x,t) \mid x \in X^{(n)}, t \in \}$$

15 Zusammenhang zwischen $\pi_1(X, x_0)$ und $H_1(X, \mathbb{Z})$

Zur Vorbereitung müssen wir kurz wiederholen, was eine Abelisierung ist: RevChap15

15.1 Definition

Sei G eine Gruppe. Dann heißt die Untergruppe von G, die erzeugt wird von Elementen der Form $[g, h] := ghg^{-1}h^{-1}$, **Kommutatorgruppe** von G. Wir schreiben hierfür auch $[G, G] \subset G$.

15.2 Lemma

$[G, G] \subset G$ ist ein Normalteiler von G.

Beweis
Seien $g_0, \dots, g_n, h \in G$. Dann ist

$$h[g_0, g_1] \cdot \dots \cdot [g_{n-1}, g_n] \cdot h^{-1} = [hg_0h^{-1}, hg_1h^{-1}] \cdot \dots \cdot [hg_{n-1}h^{-1}, hg_nh^{-1}]$$ $\square$

15.3 Definition

Der Quotient $G^{\text{ab}} := {}^{G}/_{[G,G]}$ heißt **Abelisierung** (manchmal auch Abelianisierung) von G.

15.4 Bemerkung

- $\textsc{Gruppen} \xrightarrow{\text{ab}} \textsc{Abel.Gruppen}, \qquad G \longmapsto G^{\text{ab}}$ definiert einen Funktor.
- Dieser Funktor hat die folgende universelle Eigenschaft: Zu jeder abelschen Gruppe A und einem Homomorphismus $\varphi\colon G \to A$ existiert ein eindeutiger Gruppenhomomorphismus $\varphi^{\text{ab}}\colon G^{\text{ab}} \to A$ sodass folgendes Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, two heads] & A \\ G^{\text{ab}} \arrow[ur, "\varphi^{\text{ab}}"'] & \end{tikzcd}$$

15.5 Schleifen und 1-Zykel

Sei X ein topologischer Raum. Da $|\Delta^1| \cong [0, 1]$, liefert jeder Pfad $\omega\colon [0, 1] \to X$ einen 1-Simplex in $C_1(X; \mathbb{Z})$.

15.6 Lemma 1

Seien $\omega, \omega'\colon [0, 1] \to X$ Pfade in X mit $\omega(1) = \omega'(0)$, dann ist $\omega * \omega' - \omega - \omega' \in C_1(X; \mathbb{Z})$ der Rand eines 2-Simplex.

Beweis
Zur Erinnerung: $|\Delta^2| = \left\{(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \sum_{i=0}^{3} x_i = 1, x_j \geqslant 0 \forall j \in \{0, 1, 2\}\right\}$. Betrachte: $\sigma\colon |\Delta^2| \to X$ definiert durch

$$(x_0, x_1, x_2) \mapsto (\omega * \omega')\left(\frac{1}{2}(1 - x_0 - x_2)\right) = \omega * \omega'\left(\frac{1}{2}(2x_0 + x_1)\right)$$

Es gilt

$$
\begin{aligned}
(\delta_0\sigma)(s) &= \sigma(0,s,1-s) = \omega * \omega'\left(\frac{1}{2}s\right) = \omega(s)\\
(\delta_1\sigma)(s) &= \sigma(s,0,1-s) = \omega * \omega * (s)\\
(\delta_2\sigma)(s) &= \sigma(s,1-s,0) = (\omega * \omega')\left(\frac{1}{2}(1+s)\right) = \omega'(s)
\end{aligned}
$$

Dann folgt $\partial\sigma = \delta_0\sigma - \delta_1\sigma + \delta_2\sigma = \omega - \omega * \omega' + \omega'$. Bild: $\square$

Missing figure

Simplex kollabieren und so weiter

15.7 Lemma 2

a) Sei $\omega\colon [0,1] \to X$ ein Pfad, sei $\omega^{-1}(s) = \omega(1-s)$. Dann ist $\omega + \omega^{-1}$ Rand einer 2-Kette, also von einem Element von $C_2(X;\mathbb{Z})$

b) Der konstante Pfad ist Rand einer 2-Kette.

Beweis

a) Sei $\sigma\colon \left|\Delta^2\right| \to X$ gegeben durch $\sigma(x_0,x_1,x_2) = \omega(x_1)$. Dann ist

$$\partial\sigma = \omega - \underbrace{\mathrm{const}_{\omega(0)}}_{=\partial\tau} + \omega^{-1}$$

Also ist nach b) $\omega + \omega^{-1} = \partial(\sigma - \tau)$.

b) Der Rand des konstanten 2-Simplex ist der konstante Pfad. $\square$

15.8 Lemma 3

Sind $\omega, \omega'\colon [0,1] \to X$ Pfade in X mit $\omega(0) = \omega'(0)$ und $\omega(1) = \omega'(1)$, dann gilt: Ist ω homotop zu ω' relativ Endpunkte, dann ist $\omega - \omega'$ Rand einer 2-Kette.

Beweis

Sei $H\colon [0,1] \times [0,1] \to X$ eine Homotopie zwischen ω und ω' mit $H(0,s) = \omega(s)$, $H(1,s) = \omega'(s)$, $H(t,0) = \mathrm{const}_{\omega(0)}$ und $H(t,1) = \mathrm{const}_{\omega(1)}$.

Quadrat nach X, linke Seite kollabieren, Simplex nach X

Wähle Homöomorphismus durch

$$\kappa\colon {}^{[0,1]\times[0,1]}/_{[0,1]\times\{0\}} \to \left|\Delta^2\right|, \qquad [t,s] \longmapsto \big(st, s(1-t), (1-s)\big)$$

Betrachte $\sigma := H \circ \kappa^{-1}\colon \left|\Delta^2\right| \to X$. Die Ränder sind $\delta_0\sigma = \omega$ und $\delta_1\sigma = \omega'$ und $\delta_2\sigma = \mathrm{const}_{\omega(1)}$. Also folgt, dass $\omega - \omega'$ der Rand einer 2-Kette ist.

15.9 Die Hurewicz-Abbildung

Falls $\omega\colon [0,1] \to X$ eine Schleife ist, dann ist $\partial\omega = \omega(1) - \omega(0) = 0$. Also repräsentiert ω ein Element $[\![\omega]\!] \in H_1(X)$. Nach Lemma 3 erhalten wir eine Abbildung $\theta\colon \pi_1(X, x_0) \to H_1(X)$. Nach Lemma 1 bildet diese Abbildung die Verknüpfung von Schleifen auf Summen von 1-Ketten ab.

$$[\![\omega * \omega']\!] = [\![\omega]\!] + [\![\omega']\!] \quad , \quad [\![\omega^{-1}]\!] = -[\![\omega]\!]$$

Zusammen mit Lemma 2 erhalten wir einen Gruppenhomomorphismus. Aus der universellen Eigenschaft der Abelisierung erhalten wir

$$\theta^{\mathrm{ab}}\colon \pi_1(X, x_0)^{\mathrm{ab}} \longrightarrow H_1(X; \mathbb{Z})$$

15.10 Theorem (Hurewicz)

Für wegzusammenhängende Räume ist θ^{ab} ein Isomorphismus.

Beweis
Sei X wegzusammenhängend. Wähle für jedes $x \in X$ einen Pfad λ_x von x_0 nach x. Wähle $\lambda_{x_0} = \mathrm{const}_{x_0}$. Betrachte

$$\overline{\rho}\colon C_1(X; \mathbb{Z}) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)^{\mathrm{ab}} \quad , \qquad \omega \longmapsto \left[\lambda_{\omega(0)} * \omega * \lambda_{\omega(1)}^{-1}\right]$$

Somit (nach Lemma 4) induziert $\overline{\rho}$ einen Homomorphismus: $\rho\colon H_1(X; \mathbb{Z}) \to \pi_1(X, x_0)^{\mathrm{ab}}$. Es gilt:

$$(\rho \circ \theta)[\omega] = \left[\lambda_{\omega(0)} * \omega * \lambda_{\omega(0)}^{-1}\right] = [\omega]$$

Wir haben $\lambda\colon C_0(X; \mathbb{Z}) \to C_1(X; \mathbb{Z})$, $\sum_i n_i x_i \mapsto \sum_i n_i \lambda_{x_i}$. Mit Lemma 5 folgt, dass θ^{ab} ein Isomorphismus ist für wegzusammenhängende Räume X. $\square$

15.11 Lemma 4

$\overline{\rho}$ bildet die Ränder von 2-Simplizes auf $1 \in \pi_1(X, x_0)^{\mathrm{ab}}$ ab.

Beweis
Sei $\sigma \in C_2(X;\mathbb{Z})$ ein 2-Simplex. Es gilt

$$\begin{aligned}\overline{\rho}(\partial\sigma) = \overline{\rho}(\partial_0\sigma - \partial_1\sigma + \partial_2\sigma) = \overline{\rho}(\omega_0)\cdot\overline{\rho}(\omega_1)^{-1}\cdot\overline{\rho}(\omega_2)&\\ = \left[\lambda_{\omega_0(0)} * \omega_0 * \lambda_{\omega_0(1)}^{-1} * \underbrace{\left(\lambda_{\omega_1(0)} * \omega_1 * \lambda_{\omega_1(1)}\right)^{-1}}_{=\lambda_{\omega_0(1)}*\omega_1^{-1}*\lambda_{\omega_1(0)}^{-1}} * \lambda_{\omega_2(0)*\omega_2*\lambda_{\omega_2(1)}}\right]&\\ = \left[\lambda_{\omega_0(0)} * \underbrace{\omega_0 * \omega_1^{-1} * \omega_2}_{=:\gamma} * \lambda_{\omega_2(1)=\omega_0(0)}^{-1}\right]&\end{aligned}$$

Der Pfad γ ist die Schleife, die einmal auf dem Rand es 2-Simplex herumläuft. Also $\gamma\colon [0,1] \to \left|\partial\Delta^2\right| \hookrightarrow \left|\delta^2\right| \to X$. Aber $\left|\partial\Delta^2\right| \hookrightarrow \left|\Delta^2\right|$ ist homotop zur konstanten Abbildung auf $\omega_0(0)$ mit einer Homotopie, die den Punkt $\omega_0(0)$ fixiert.

$$= \left[\lambda_{\omega_0(0)} * \lambda_{\omega_0(0)}^{-1}\right] = 1$$

Missing figure

Pfade am Bild eines Simplex und Verbindungen zu x_0

15.12 Lemma 5

Sei $\omega\colon \Delta^1 \to X$ ein 1-Simplex, dann gilt $\theta \circ \overline{\rho}(\omega) = [\![\omega - \lambda_{\partial\omega}]\!]$

Beweis
Es gilt

$$(\theta\circ\overline{\rho})(\omega) = \theta\left(\left[\lambda_{\omega(0)} * \omega * \lambda_{\omega(0)}^{-1}\right]\right) = [\![\lambda_{\omega(0)} * \omega * \lambda_{\omega(1)}^{-1}]\!] = [\![\omega]\!] \underbrace{-[\![\lambda_{\omega(1)}]\!] + [\![\lambda_{\omega(0)}]\!]}_{\lambda_{\omega(1)-\omega(0)}=\lambda_{\partial\omega}}$$

15.13 Corollar

$(\theta\circ\rho)([\![c]\!]) = [\![c]\!]$. $[\![c]\!] \in H_1(X;\mathbb{Z})$

Der Satz von Hurewicz

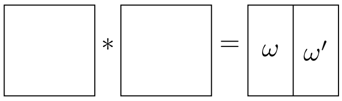
15.14 Definition

Sei X ein topologischer Raum mit Basispunkt $x_0 \in X$, sei $I = [0,1]$. Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Die **$\mathbf{n}$-te absolute Homotopiegruppe** $\pi_n(X, x_0)$ ist die Menge der Äquivalenzklassen von stetigen Abbildungen $\omega\colon I^n \to$

X mit $\omega(\partial I^n) = x_0$. Die Äquivalenzrelation ist Homotopie relativ zu ∂I^n, d.h. $H\colon I^n \times [0,1] \to X$ erfüllt $H_t(\partial I^n) = x_0$ für alle $t \in [0,1]$. Die Gruppenverknüpfung in $\pi_n(X, x_0)$ ist gegeben durch

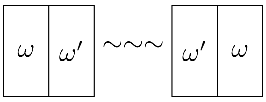
$$(\omega * \omega')(s_1, \dots, s_n) = \begin{cases} \omega(2s_1, s_2, \dots, s_n), & \text{falls } 0 \leqslant s_1 \leqslant \frac{1}{2} \\ \omega'(2s_1 - 1, s_2, \dots, s_n), & \text{falls } \frac{1}{2} \leqslant s_1 \leqslant 1 \end{cases}$$

Bild für $n = 2$:



15.15 Eigenschaften von $\pi_n(X, x_0)$

- „$*$“ ist assoziativ, hat die konstante Abbildung auf x_0 als neutrales Element und $\omega^{-1}(s_1, \dots, s_n) = \omega(1 - s_1, s_2, \dots, s_n)$ als inverses Element.
- „$*$“ ist abelsch für $n \geqslant 2$ (Eckmann-Hilton Argument) Zeichnung fertig machen



- $\pi_n\colon \text{Top} \to \text{Abel.Gruppen}$ ist ein Funktor, d.h. $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ induziert $\pi_n(f)\colon \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, y_0)$.
- Da $I^n/\partial I^n \cong S^n$, ergibt sich $\pi_n(X, x_0)$ auch aus den punktierten Homotopieklassen von Abbildungen $(S^n, *) \to (X, x_0)$.
- Falls x_0 und x_0' in der gleichen Wegzusammenhangskomponente von X liegen, dann induziert ein Weg von x_0 nach x_0' einen Isomorphismus $\pi_n(X, x_0) \cong \pi_n(X, x_0)$

15.16 Definition

Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Ein topologischer Raum X heißt **n-zusammenhängend**, falls $\pi_0(X) = \{*\}$ und $\pi_k(X, x_0)$ trivial ist für alle $k \leqslant n$ und einen Basispunkt $x_0 \in X$.

15.17 Bemerkung

Da ein n-zusammenhängender Raum X für $n \geqslant 0$ mindestens wegzusammenhängend ist, gilt $\pi_k(X, x_0) \cong \pi_k(X, x_0')$. Somit ist die Definition unabhängig von der Wahl des Basispunktes.

15.18 Beispiel

0-zusammenhängend entspricht wegzusammenhängend und 1-zusammenhängend entspricht wegsammenhängend und einfach zusammenhängend.

15.19 Definition: Relative Homotopiegruppen

Sei X ein topologischer Raum, $A \subset X$ ein Unterraum und $x_0 \in A$ ein Basispunkt von A und X. Wir identifizieren $I^{n-1} \subset I^n$ mit der Seitenfläche von I^n, für die $s_n = 0$ gilt. Außerdem setzen wir $J^{n-1} = \partial I^n \setminus I^{n-1}$. Die **relative Homotopiegruppe** $\pi_n(X, A, x_0)$ besteht aus den Homotopieklassen von stetigen Abbildungen $\omega\colon I^n \to X$ mit $\omega(I^{n-1}) \subset A$, $\omega(J^{n-1}) = x_0$. Die Homotopien müssen ebenfalls $H_t(I^{n-1}) \subset A$ und $H_t(J^{n-1}) = x_0$ für alle $t \in [0,1]$ erfüllen.

Missing figure

Bild zu relativen Homotopiegruppen

Alternativ: $\pi_n(X, A, x_0)$ sind Homotopieklassen von Abbildungen $(D^n, S^{n-1}, *) \to (X, A, x_0)$

15.20 Bemerkung

- Homotopiegruppen bilden *keine* verallgemeinerte Homologietheorie.
- Es gibt eine lange exakte Sequenz von Homotopiegruppen:

$$\cdots \longrightarrow \pi_n(A, x_0) \longrightarrow \pi_n(X, x_0) \longrightarrow \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, x_0) \longrightarrow \cdots$$

15.21 Die Hurewicz-Abbildung

Sei $\vartheta\colon |\Delta^n| \xrightarrow{\cong} D^n$ ein Homöomorphismus. Dies liefert eine Homologieklasse $[\![\vartheta]\!] \in H_n(D^n, S^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$. Diese Klasse ist ein Generator der Gruppe $H_n(D^n, Sn-1)$. Sei $[\omega] \in \pi_n(X, A, x_0)$ repräsentiert durch $\omega\colon (D^n, S^{n-1}, *) \to (X, A, x_0)$. Setze

$$\theta_n\colon \pi_n(X, A, x_0) \longrightarrow H_n(X, A) \quad , \quad [\omega] \longmapsto \omega_*[\![\vartheta]\!]$$

für $n \geqslant 2$. Dies ist wohldefiniert, denn falls ω homotop zu ω' (bezüglich (A, x_0)), dann ist $\omega_* = \omega'_*$

15.22 Lemma

θ_n ist ein Gruppenhomomorphismus.

15.23 Theorem (Hurwicz)

Seien (X, A) mit $A \subset X$ beide wegzusammenhängend. Sei $\pi_1(A, x_0) = 1$ und seien $\pi_k(X, A, x_0) = 0$ für $k \leqslant n-1$, $n \geqslant 2$. Dann ist

$$\theta_n\colon \pi_n(X, A, x_0) \longrightarrow H_n(X, A)$$

ein Isomorphismus.

15.24 Korollar

Ist X ein $(n-1)$-zusammenhängender Raum für ein $n \geqslant 2$, dann ist

$$\theta_n\colon \pi_n(X, x_0) = (X, x_0, x_0) \longrightarrow H_n(X, x_0) \cong H_n(X)$$

ein Isomorphismus.

15.25 Satz

Sei $n \geqslant 1$. Dann ist $\pi_n(S^n, *) \cong \mathbb{Z}$ und $\pi_k(S^n, *) = 0$ für $k < n$.

Beweis
Für $n = 1$ gilt $\pi_0(S^n, *) = \{*\}$ und $\pi_1(S^1, *) \cong \mathbb{Z}$. Für $n > 1$ wissen wir aus dem letzten Semester $\pi_1(S^n, *) = 1$ und S^n wegzusammenhängend, also ist S^n 1-zusammenhängend.

Angenommen $\pi_i(S^n, *) = 0$ für $i = 0, \dots, k$, $0 \leqslant k < n$. Dann ist S^n k-zusammenhängend und wir erhalten

$$\pi_{k+1}(S^n, *) \xrightarrow{\cong} H_{k+1}(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{falls } k+1 = n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Falls $k + 1 < n$, so ist auch $\pi_{k+1}(S^n, *) = 0$, sonst sind wir fertig. $\square$

16 Die Fundamentalklasse

16.1 Beispiel

Wir betrachten zu einigen uns gut bekannten Mannigfaltigkeiten die Homologiegruppen in der Dimension der Mannigfaltigkeit:

- $H_n(\mathbb{R}^n) = 0$
- $H_n(S^n) = \mathbb{Z}$
- $H_2(T^2) = \mathbb{Z}$
- $H_{2n}(\mathbb{C}P^n) = \mathbb{Z}$
- $H_{2n}(S^n \times \mathbb{R}^n) = 0$
- $H_n(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}$, falls n ungerade, 0 sonst.

RevChap16

16.2 Bemerkung

Sei M ein n-Mannigfaltigkeit und $x \in M$. Dann gilt (wegen Ausschneidung und der Paarfolge)

$$H_n\big(M, M \setminus \{x\}; R\big) \cong H_n\big(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}; R\big) \cong H_{n-1}\big(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}; R\big) \cong H_{n-1}(S^{n-1}; R) \cong R$$

16.3 Definition

Sei M eine n-Mannigfaltigkeit und $x \in M$. Eine (homologische) **Orientierung** (über R) im Punkt x ist ein Erzeuger μ_x von $H_n(M, M \setminus \{x\}, R)$.

Bemerkung
Über $R = \mathbb{Z}$ gibt es in jedem Punkt genau zwei Orientierungen, da $\mathbb{Z}$ genau zwei Erzeuger hat. Über $R = \mathbb{F}_2$ gibt es in jedem Punkt eine eindeutige Orientierung, da $\mathbb{F}_2$ genau einen Erzeuger hat.

16.4 Notation

Seien $A \subseteq B \subseteq X$ Unterräume. Sei $i\colon (X, X \setminus B) \hookrightarrow (X, X \setminus A)$ die Inklusion. Ist $v \in H_n(X, X \setminus B; R)$, so nennen wir

$$v\big|_A := i_*(v)$$

die Einschränkung von v auf A. Für $A = \{x\}$ schreiben wir $v|_x := v|_{\{x\}}$.

16.5 Definition

Sei M eine n-Mannigfaltigkeit. Eine (homologische) **Orientierung** von M über R ist eine Zuordnung $M \ni x \mapsto \mu_x \in H_n(M, M \setminus \{x\}; R)$, die für jeden Punkt $x \in M$ eine Orientierung über R im Punkt x auswählt, sodass folgende Bedingung erfüllt ist: Für alle $x \in M$ gibt es eine Umgebung U von $x \in M$ und $\mu_U \in H_n(M, M \setminus U; R)$ mit $\mu_y = \mu_U|_y$ für alle $y \in U$.

Gibt es eine solche Orientierung, so heißt M **orientierbar**. Eine Mannigfaltigkeit zusammen mit einer Orientierung heißt eine **orientierte Mannigfaltigkeit**.

16.6 Beispiel

Für $M = \mathbb{R}^n$ betrachte $U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$. Dann ist wegen Homotopieinvarianz

$$H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}; R) \cong H_n\big(\overline{U}, \overline{U} \setminus U; R\big) \cong H_n\big(D^n, S^{n-1}; R\big) = R$$

mit $\overline{U} = D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leqslant 1\}$ und $\overline{U} \setminus U = S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$. Für jedes $y \in U$ ist $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus U) \to (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{y\})$ eine Homotopieinvarianz. Ist $\mu_U \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}; R)$ ein Erzeuger, so ist also $\mu_y = \mu_U|_y$ eine Orientierung von $\mathbb{R}^n$ in y für alle $y \in U$.

16.7 Beispiel

Sei $\mu_{S^n} \in \tilde{H}_n(S^n; R)$ ein Erzeuger. Für $x \in S^n$ ist $\tilde{H}_*(S^n \setminus \{x\}; R) = 0$ und daher die Einschränkungsabbildung $\tilde{H}_n(S^n; R) \to \tilde{H}_*(S^n \setminus \{x\}; R) = 0$ ein Isomorphismus und $\mu_{S^n}|_x$ ist ein Erzeuger von $\tilde{H}_n(S^n, S^n \setminus \{x\}; R)$. Daher ist $(\mu_{S^n}|_x)_{x \in S^n}$ eine Orientierung von M über R.

16.8 Bezeichnung

Eine **geschlossene Mannigfaltigkeit** ist eine kompakte Mannigfaltigkeit (ohne Rand).

16.9 Satz

Sei M eine geschlossene n-Mannigfaltigkeit. Dann ist M genau dann R-orientierbar, wenn es $\mu \in H_n(M; R)$ gibt, sodass $\mu|_x \in H_n(M, M \setminus \{x\}; R)$ für jedes x eine Orientierung von M in x ist. Ist M zusammenhängend, so ist μ ein Erzeuger von $H_n(M; R)$ und $H_n(M; R) \cong R$.

Beweis (mit 16.14)
$H_n(M; R)$ und $\Gamma(M, \mathcal{H})$ sind beide mit $\coprod$ verträglich. Daher können wir auch annehmen, dass M zusammenhängend ist. Da M kompakt ist, können wir in dem Lemma 16.14 $A = M$ setzen und wir erhalten für jede Orientierung $s \in \Gamma(M, \mathcal{H})$ eine Klasse $\mu \in H_n(M; R)$ mit $\mu|_x$. Nach der Überlagerungstheorie aus dem letzten Semester ist jeder Schnitt von $\mathcal{H}$ schon durch seinen Wert an einem Punkt festgelegt. Insbesondere ist $\mathrm{ev}_x \colon \Gamma(M, \mathcal{H}) \to H_n(M, M \setminus \{x\}; R) \cong R$ injektiv. Ist M R-orientierbar, so ist ev_x ein Isomorphismus. □

16.10 Definition

Sei M eine geschlossene n-Mannigfaltigkeit. Sei $\mathcal{H} = \mathcal{H}_R$ die disjunkte Vereinigung aller $H_n(M, M \setminus \{x\}; R)$ mit $x \in M$. Wir definieren eine Topologie auf $\mathcal{H}$ durch:

$$\begin{aligned} V \subseteq H \text{ offen } :\Leftrightarrow\ & \forall v \in V \text{ mit } v \in H_n(M, M \setminus \{x\}; R) \text{ gibt es eine Umgebung } U \text{ von } x \text{ in } M \\ & \text{und } v_U \in H_n(M, M \setminus U, R) \text{ mit } v_U\big|_x = v \text{ und } v_U\big|_y \in V \text{ für alle } y \in U. \end{aligned}$$

Wir definieren $\pi \colon \mathcal{H} \to M$ durch $\pi(v) = x$ für $v \in H_n(M, M \setminus \{x\}; R)$. Es gilt $\pi^{-1}(\{x\}) = H_n(M, M \setminus \{x\}; R)$. Mit $\Gamma(M, \mathcal{H})$ bezeichnen wir die Menge aller stetigen Schnitte $s \colon M \to \mathcal{H}$ für π, das heißt

$$\Gamma(M, \mathcal{H}) = \{s \colon M \to \mathcal{H} \text{ stetig} \mid \pi \circ s = \mathrm{id}_M\}$$

16.11 Bemerkung

1) Für jedes $x \in M$ erbt $H_n(M, M \setminus \{x\}; R) \subseteq \mathcal{H}$ die diskrete Topologie.

2) $\pi \colon \mathcal{H} \to M$ ist eine Überlagerung.

3) $\Gamma(M, \mathcal{H})$ ist ein R-Modul. Sind $s, s' \in \Gamma(M, \mathcal{H})$ und $r \in R$, so können wir $s + s'$ und $r \cdot s$ punktweise erklären:

$$\begin{aligned} (s + s')(x) &:= s(x) + s'(x) \in H_n(M, M \setminus \{x\}; R) \\ (r \cdot s)(x) &:= r \cdot s(x) \in H_n(M, M \setminus \{x\}; R) \end{aligned}$$

4) R-Orientierungen von M entsprechen genau den Schnitten $s \in \Gamma(M, \mathcal{H})$ für die $s(x) \in H_n(M, m \setminus \{x\}; R)$ für alle $x \in M$ ein Erzeuger ist.

5) Eine Folgerung aus der Eindeutigkeit im Hebungssatz aus der Überlagerungstheorie ist folgende Aussage:

   Sei M zusammenhängend. Dann ist für jedes $x \in M$ die Auswertungsabbildung $\mathrm{ev}_x\colon \Gamma(M, \mathcal{H}) \to H_n(M, M \setminus \{x\}; R)$, $\mathrm{ev}_x(s) = s(x)$ injektiv.

6) Sei $v \in H_n(M; R)$. Dann erhalten wir durch $(s_v)(x) := v|_x$ einen Schnitt $s_v \in \Gamma(M, \mathcal{H})$. Wir erhalten einen R-Modul-Homomorphismus $H_n(M; R) \to \Gamma(M, \mathcal{H})$, $v \mapsto s_v$.

7) Es gibt immer den Nullschnitt in $\Gamma(M, \mathcal{H})$, $x \mapsto 0 \in H_n(M, M \setminus \{x\}; R)$.

8) Ist M zusammenhängend, so ist $\Gamma(M, \mathcal{H}) \neq 0$ genau dann, wenn M R-orientierbar ist.

16.12 Bemerkung

Für M zusammenhängend gilt: M ist R-orientierbar $\iff$ $H_n(M; R) \cong R$.

16.13 Beispiel

Für $R = \mathbb{F}_2$ ist $\pi\colon \mathcal{H} \to M$ eine 2-fache Überlagerung. Da $\mathcal{H}$ immer den Nullschnitt zulässt, ist $\mathcal{H}$ dann trivial. Insbesondere ist jede n-Mannigfaltigkeit $\mathbb{F}_2$-orientierbar.

16.14 Lemma

Sei M eine n-Mannigfaltigkeit und $A \subseteq M$ kompakt. Dann gilt

a) Zu jedem $s \in \Gamma(M, \mathcal{H})$ gibt es ein eindeutiges $v_A \in H_n(M, M \setminus A; R)$ mit $v_A|_x = s(x)$ für alle $x \in A$.

b) Für $i > n$ ist $H_i(M, M \setminus A; R) = 0$.

Beweisskizze

Schritt 1: Mit der MV-Folge (siehe 16.15) folgt: Sind die Aussagen a) und b) für A_1, A_2 und $A_1 \cap A_2$ richtig, so auch für $A_1 \cup A_2$.

Schritt 2: Das Lemma ist richtig, wenn A eine abgeschlossene konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist. Dazu benutze wir den Isomorphismus $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus A; R) \longrightarrow H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\}; R)$ (für jedes $x \in A$). Mit Schritt 1 folgt die Aussage für $M = \mathbb{R}^n$ und A endliche Vereinigung von abgeschlossen konvexen Teilmengen.

Schritt 3: Das Lemma gilt für $M = \mathbb{R}^n$ und A beliebig.

Für den allgemeinen Fall schreibt an $A = A_1 \cup \ldots \cup A_n$, sodass jedes A_i in einer Kartenumgebung von M enthalten ist. Mit Schritt 1 und 3 folgt dann die Aussage für A. $\square$

16.15 Bemerkung

1) Zu Unterräumen $A \subseteq X$ gibt es eine kurze exakte Folge von Kettenkomplexen $C_*(B, A; R) \hookrightarrow C_*(X, A; R) \twoheadrightarrow C_*(X, B; R)$. Damit erhalten wir eine lange exakte Sequenz:

$$\cdots \longrightarrow H_{n+1}(X, B; R) \xrightarrow{\partial} H_n(B, A; R) \longrightarrow H_n(X, A; R) \longrightarrow H_n(X, B; R) \longrightarrow \cdots$$

2) Zu abgeschlossenen Unterräumen $A, B \subseteq X$ ist $A \setminus B \subseteq X \setminus A \cap B$ abgeschlossen und $X \setminus B \subseteq X \setminus A \cap B$ offen. Da $A \setminus B \subseteq X \setminus B$ und

$$(X \setminus A \cap B) \setminus (A \setminus B) = X \setminus A$$
$$(X \setminus B) \setminus (A \setminus B)) X \setminus (A \cup B)$$

erhalten wir einen Ausschneideisomorphismus $H_*(X \setminus A, X \setminus (A \cup B)) \cong H_*(X \setminus A \cap B, X \setminus B; R)$. Zusammen mit der Paarfolge aus 1) erhalten wir eine Mayer-Vietoris-Folge:

$$\cdots \longrightarrow H_{n+1}(X, X \setminus A \cap B) \xrightarrow{\partial} H_n(X, X \setminus A \cup B) \longrightarrow \bigoplus_{H_n(X,X\setminus B)}^{H_n(X,X\setminus A)} \longrightarrow H_n(X, X \setminus A \cap B) \longrightarrow \cdots$$

"R" aus Platzgründen weggelassen

Index

Die Seitenzahlen *sind mit Hyperlinks zu den entsprechenden Seiten versehen, also anklickbar* ☝

Abbildungsverzeichnis

Todo's und andere Baustellen