V105 Das magnetische Moment

Alina Landmann, alina.landmann@tu-dortmund.de
Jannine Salewski, jannine.salewski@tu-dortmund.de

Durchführung: 10.11.2017
Abgabe: 17.11.2017

TU Dortmund - Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung

In diesem Versuch wird das magnetische Moment durch drei verschiedene Methoden gemessen und bestimmt.

2 Theorie

Im Unterschied zum elektrischen Feld, besitzt das magnetische Feld keine Quellen. Es gibt nur magnetische Dipole, keine Monopole. Dipole erzeugen geschlossene Feldlinien. Dipole können makroskopisch durch einen Permanentmagneten oder durch eine stromdurchflossene Leiterschleife erzeugt werden. Die Leiterschleife besitzt dabei das magnetische Moment μ, was mit folgender Formel berechnet werden kann:

$$\mu = I \cdot \vec{A}$$

Hierbei ist I der Strom, der durch die Leiterschleife fließt und A die Querschnittsfläche der Leiterschleife. Im folgenden wird das magnetische Moment eines Permanentmagneten, der sich im Innern einer Billardkugel befindet, experimentell mittels dreier verschiedener Methoden ermittelt. Zur Erzeugung eines homogenen Magnetfeldes wird im Experiment ein $Helmholtz-Spulenpaar$ verwendet. Hierbei sind zwei gleich große, gleich geformte, gleichsinnig vom Strom I durchflossene Spulen so angeordnet, dass der Abstand zwischen den beiden Spulen annähernd ihrem Radius entspricht. Das somit vom Spulenpaar erzeugte Magnetfeld ist auf der Symmetrieachse der beiden Spulen homogen und kann mittels des $Biot-Savart-Gesetzes$ berechnet werden:

$$\vec{B}(x) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\mathrm{d}\vec{s} \times \vec{r}}{r^3} \tag{1}$$

Ist der Abstand zwischen den beiden Spulen nicht identisch mit dem Radius der beiden Spulen, so gibt es zur Berechnung des Magnetfeldes folgende Formel, die für weitere Berechnungen verwendet wurde, da sich im Experiment der Radius der Spulen geringfügig von deren Abstand unterschied:

$$\vec{B}(x) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Hierbei beschreibt R den Spulenradius und der Abstand der beiden Spulen voneinander beträgt $2x$. Das gesamte Feld im Zentrum des Spulenpaares erfolgt durch Superposition der Einzelfelder.

$$B(0) = B_1(x) + B_1(-x) = \frac{\mu_0 I R^2}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Hier wurde der Einfachheit halber das Zentrum des Spulenpaares in den Ursprung des Koordinatensystems gelegt.

3 Durchführung

Es gilt nun das magnetische Moment μ_{Dipol} einer Billardkugel, in der sich ein kleiner Permanentmagnet befindet auf drei verschiedene Arten zu ermitteln:

1. Unter Ausnutzung der Gravitation

2. Unter Ausnutzung der Schwingungsdauer T

3. Unter Ausnutzung der Präzessionsbewegung

Zur Durchführung des Versuchs wird ein Helmholtz-Spulenpaar mit oben angegeben Werten für R_{Spule}, N und d verwendet. Im Zentrum des Spulenpaares (beide kreisförmigen Spulen sind so angeordnet, dass sich das B-Feld senkrecht im Raum befindet) ist ein kleiner Messingzylinder befestigt, welcher eine kugelförmige Aussparung besitzt, sodass er die Billardkugel ideal aufnehmen kann. Mittels eines Luftkissens kann sich die Billardkugel reibungsfrei auf dem Zylinder bewegen. Das magnetische Moment der Billardkugel ist in Richtung eines kleinen Stiels gerichtet, welcher sich an der Kugel befindet. An der Oberseite des Spulenpaares befindet sich ein Stroboskop, welches im Verlauf des Versuchs zur Bestimmung der Frequenz der Drehbewegung genutzt werden wird. Der Strom und folglich auch das durch die Spulen erzeugte Magnetfeld, das Stroboskop und das Luftkissen können extern eingeschaltet werden. Veränderbar ist hier die Stromstärke, die Frequenz, mit der das Stroboskop aufblitzt und die Feldlinienrichtung, wobei diese im Experiment nicht verändert wird. Sie ist kontinuierlich auf "up" eingestellt, was besagt, dass die Feldlinien von unten nach oben ausgerichtet sind.
Für alle weiteren Berechnungen sind die Werte, als auch die Abmessungen für die Spulen und deren Abstand zueinander, die in der Versuchsvorbereitung gegeben sind, weiterverwendet. Zu Beginn des versuches, sind diese noch auf Richtigkeit zu überprüfen.

3.1 Bestimmung des magnetischen Moments der Billardkugel unter Ausnutzung der Schwerkraft

Bei dieser statischen Methode wird die Tatsache verwendet, dass eine Masse m, die der Schwerkraft $\vec{F} = m \cdot \vec{g}$ unterliegt, ein Drehmoment

$$\vec{D_g} = m \cdot (\vec{r} \times \vec{g}) \tag{2}$$

auf die Kugel ausübt. Das Gewicht, welches dieses Drehmoment ausüben soll, ist im Versuch verschiebbar auf einem Aluminiumstab, der als masselos anzusehen ist, befestigt. Dieser Stab wiederum steckt im Stiel der Billardkugel. Dem durch die Schwerkraft verursachten Drehmoment, wirkt das durch das B-Feld verursachte Drehmoment

$$\vec{D_B} = \mu_{\text{Dipol}} \times \vec{B} \tag{3}$$

entgegen. Bei genau einer Magnetfeldstärke sind $\vec{D_g}$ und $\vec{D_B}$ gleich und die Kugel führt keine Pendelbewegung mehr aus. Ist dies der Fall, so wird die eingestellte Stromstärke I zur Berechnung des entstandenen B-Feldes, sowie der Abstand r, vom Mittelpunkt des Gewichts bis zur Billardkugel, notiert. Dieser Vorgang wird neun mal wiederholt, um statistische Fehler klein zu halten.

3.2 Bestimmung des magnetischen Momentes mit Hilfe der Schwingungsdauer T des Magneten

Wird die Kugel im eingeschalteten B-Feld in Schwingung versetzt, so verhält sie sich wie ein harmonische Oszillator, dessen Bewegung wie folgt beschrieben werden kann:

$$-|\vec{\mu}_{\text{Dipol}} \times \vec{\mathrm{B}}| = J_{\mathrm{K}} \cdot \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

Die Lösung der Differentialgleichung ergibt eine Gleichung für die Schwingungsdauer T:

$$\mathrm{T}^2 = \frac{4\pi^2 \mathrm{J_K}}{\mu_{\text{Dipol}}} \frac{1}{\mathrm{B}}$$

Mithilfe der vorher berechneten Größen für das Trägheitsmoment der Kugel J_k und das B-Feld lässt sich nun das magnetische Moment der Kugel berechnen. Im Experiment werden pro eingestellter Stromstärke zehn Periodendauern gemessen. Dies wird für neun verschiedene Stromstärken durchgeführt.

3.3 Bestimmung des magnetischen Moments über die Präzessionsbewegung der sich drehenden Billardkugel

Wird die Billardkugel mit ihrem Stiel senkrecht nach oben zeigend in eine Rotationsbewegung versetzt und stößt sie danach mit einem kleinen Stoß gegen den Stiel an, sodass sie aus der senkrechten Position ausgelenkt wird, so führt die Achse der Kugel, durch den Stiel gehend, im eingeschalteten B-Feld eine Präzessionsbewegung aus. Dabei beschreibt die Achse der Kugel einen Kegelmantel um die Drehimpulsachse,senkrecht im Raum stehend. Durch die Rotation der Kugel bleibt deren Auslenkung stabil. Die Differentialgleichung für die Präzessionsbewegung sieht wie folgt aus:

$$\mu_{\mathrm{Dipol}} \times \vec{\mathrm{B}} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}_{\mathrm{K}}}{\mathrm{d}t}$$

Die Formel für die Präzessionsfrequenz Ω_{p} ist eine Lösung der Differentialgleichung und lautet:

$$\Omega_{\mathrm{p}} = \frac{\mu_{\mathrm{Dipol}}\mathrm{B}}{|\mathrm{L_K}|}$$

$\mathrm{L_K}$ beschreibt den Drehimpuls der ausgelenkten Kugel und kann mit Hilfe des Trägheitsmomentes der Kugel und deren Kreisfrequenz berechnet werden: $\mathrm{L_K} = \mathrm{J_K}\omega\ . = 2\ .$ Somit kann μ_{Dipol} über die Formel

$$\frac{1}{\mathrm{T_p}} = \frac{\mu_{\mathrm{Dipol}}}{2\pi\mathrm{L_K}}\mathrm{B}$$

bestimmt werden.
Um eine konstante Rotationsfrequenz ν zu erreichen, wird das Stroboskop eingeschaltet. Nachdem die Kugel bei senkrecht stehendem Stiel in eine Rotationsbewegung versetzt wird, betrachte man den auf dem Stiel eingezeichneten kleinen Punkt. Erscheint der Punkt stationär, so hat die Billardkugel eine konstante Rotationsfrequenz und kann durch einen kleinen Stoß aus der senkrechten Achse ausgelenkt werden. Ist dies geschehen, so wird schnellstmöglich das B-Feld eingeschaltet und die Zeit $\mathrm{T_p}$ für einen Umlauf des Stiels gemessen werden. Um statistische Fehler zu minimieren, wird die Messung drei Mal pro Magnetfeldstärke und für insgesamt neun unterschiedliche Magnetfelder durchgeführt.

4 Auswertung

4.1 Messung des magnetischen Momentes durch die Gravitation

Die gemessenen Stromstärke und der Radius sind in Tabelle 1 aufgelistet.

Tabelle 1: Messwerte der Gravitationsmethode.

I / A	r / cm
1.7	5.100
2.0	6.080
2.3	6.585
2.5	8.055
2.6	7.720
2.9	8.875
3.2	9.650
3.5	10.360
3.8	11.480

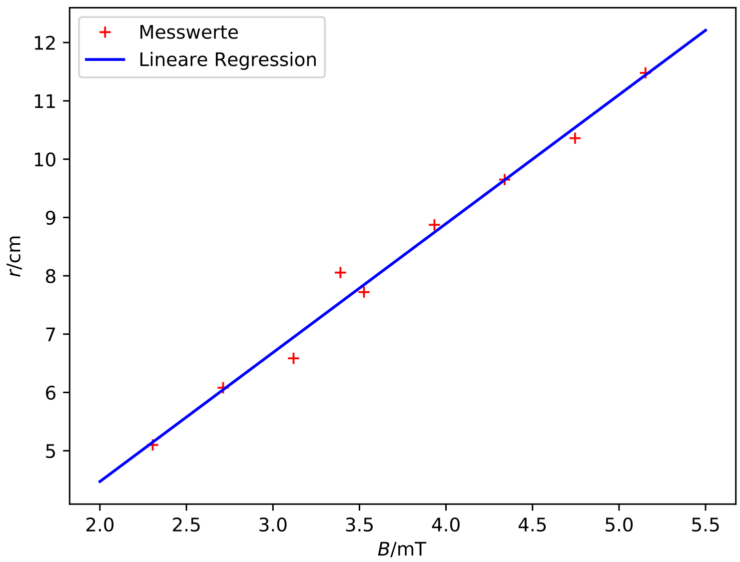

Abbildung 1: Messwerte und lineare Regression der Gravitationsmethode.

Durch das Biot-Savart-Gesetz (1) und die gemessenen Stromstärken, lässt sich das Magnetfeld im Mittelpunkt der Helmholzspule berechnen. In Abbildung 1 wird das Magnetische Feld B gegen den Radius r aufgetragen und eine lineare Regression durchgeführt.

Die lineare Regression setzt sich aus Folgenden Werten für die Steigung m_1 und für den y-Achsenabschnitt n_1 zusammen:

$$\begin{aligned} m_1 &= (2.21 \pm 0.10)\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{mT}} \\ n_1 &= (0.0 \pm 0.4)\,\mathrm{cm} \end{aligned}$$

Durch Gleichsetzen der Drehmomente durch die Gravitation (2) und durch das Magnetfeld (3), ergibt sich die Steigung m_1 der linearen Regression, aus welcher sich das magnetische Moment berechnen lässt.

$$m_1 = \frac{\mu_{\mathrm{Dipol1}}}{m_{\mathrm{Dipol}} \cdot g}$$

wobei

$$\begin{aligned} m_{\mathrm{Dipol}} &= 1.4\,\mathrm{g} \\ g &= 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \end{aligned}$$

iat. Nach Umformen der Gleichung ergibt sich das magnetische Moment des Dipols

$$\mu_{\mathrm{Dipol1}} = m_1 \cdot m_{\mathrm{Dipol}} \cdot g$$

Durch Einsetzen der Werte folgt

$$\mu_{\mathrm{Dipol1}} = (30.35 \pm 1.37) \cdot 10^{-2}\,\mathrm{A\,m\,s}$$

Der Fehler wird mit der Gaußschen Fehlerfortpflanzung berechnet.

$$\Delta\mu_{\mathrm{Dipol1}} = m \cdot g \cdot \Delta m_1$$

4.2 Messung des magnetischen Momentes über die Schwingungsdauer eines Magnetes

Die gemessenen Werte der Methode sind in Tabelle 2 aufgelistet.

Tabelle 2: Messwerte der Methode durch die Schwingungsdauer

I / A	$10T$ / 1/s	T / 1/s
0.6	25.34	2.534
0.8	21.87	2.187
1.0	17.90	1.790
1.6	14.47	1.447
1.9	13.25	1.325
2.2	12.23	1.223
2.4	11.94	1.194
2.6	11.34	1.134
2.9	10.69	1.069
3.5	9.53	0.953

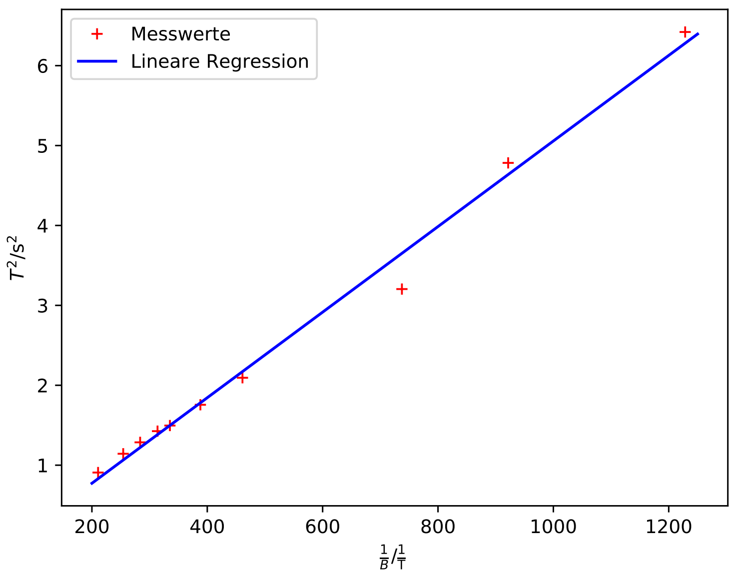

Abbildung 2: Messwerte und lineare Regression: Methode über die Schwingungsdauer.

In Abbildung 2 wurde T^2 gegen $1/B$ aufgetragen. Durch eine lineare Regression kann dessen Steigung m_2 und dessen y-Achsenabschnitt n_2 ermittelt werden.

$$m_2 = (5.35 \pm 0.18) \cdot 10^{-3}\,\frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{T}}$$
$$n_2 = (-0.30 \pm 0.11) \cdot 10^{3}\,\mathrm{s}^2$$

Analog zur vorherigen Methode kann das Dipolmoment über die Steigung der linearen Regression bestimmt werden.

$$m_2 = \frac{4\pi^2 J_k}{\mu_{\text{Dipol2}}}$$

Wobei J_k das Trägheitsmoment der Kugel ist, welches folgenden Wert besitzt:

$$J_k = 3.75 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{kg\,m^2}.$$

Durch Umformungen und Einsetzen ergibt sich

$$\mu_{\text{Dipol2}} = \frac{4\pi^2 J_k}{m_2}$$

$$\mu_{\text{Dipol2}} = (27.67 \pm 0.93) \cdot 10^{-2}\,\mathrm{A\,m^2}$$

4.3 Bestimmung des magnetischen Momentes über die Präzession eines Magneten

Tabelle 3: Messwerte der Methode über die Präzession

I / A	$\overline{T}$ / s
0.5	28.50 ± 3.31
1.0	16.31 ± 1.84
1.5	10.90 ± 0.30
1.8	10.57 ± 0.34
2.0	10.24 ± 0.41
2.5	6.48 ± 1.19
3.0	5.56 ± 0.28
3.5	5.63 ± 0.15
3.9	5.26 ± 0.47

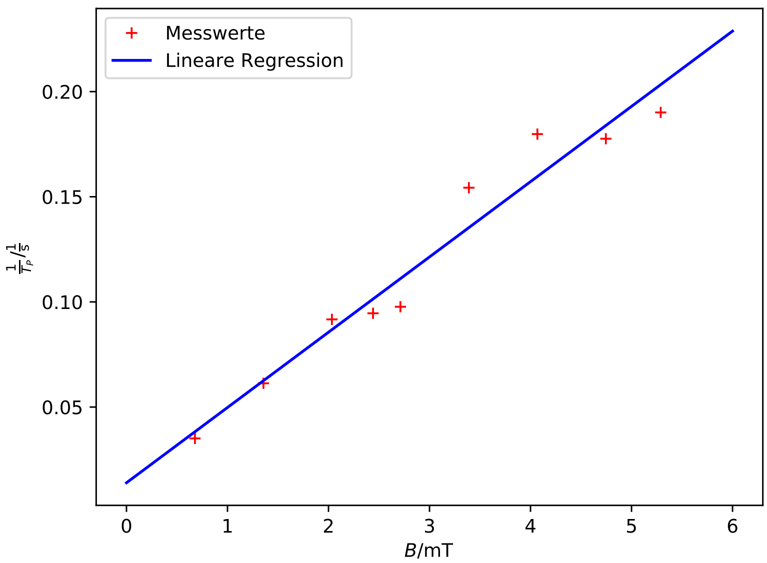

Abbildung 3: Messwerte und lineare Regression der Methode über Präzession

Analog wie bei den anderen beiden Methoden, wird hierbei das magnetische Moment über die Steigung der linearen Regression berechnet. Aus

$$m_3 = \frac{\mu_{\text{Dipol3}}}{2\pi L_k} = \frac{\mu_{\text{Dipol3}}}{2\pi^2 J_k f}$$

folgt direkt

$$\mu_{\text{Dipol3}} = \frac{4\pi 1 J_k}{m_3}.$$

Durch Einsetzen der Steigung m_3 durch die lineare Regression, ergibt sich das magnetische Moment des Dipols

$$\mu_{\text{Dipol3}} = (28.62 \pm 2.48) \cdot 10^{-2}\,\mathrm{A\,m^2}$$

5 Diskussion

Die drei errechneten magnetischen Momente im Vergleich:

Tabelle 4: Vergleich der magnetischen Momente

Methode	μ_{Dipol} / $\mathrm{A\,m^2}$
1	$(30.35 \pm 1.37) \cdot 10^{-2}$
2	$(27.67 \pm 0.93) \cdot 10^{-2}$
3	$(28.62 \pm 2.48) \cdot 10^{-2}$

Zu erkennen ist, dass es kleine Abweichungen bei den berechneten Werten gibt. Diese sind auf die Ungenauigkeit der Messungen zurückzuführen. Zum Beispiel bei der ersten Methode ist nicht eindeutig zu erkennen, wann sich der Stab in der Kugel nicht mehr in der vertikalen Richtung bewegt, sondern nurnoch in der horizontalen.

Bei der zweiten Messreihe, also durch die Messung der Periodendauer, gib es auch Fehlerquellen. Eine davon ist dass 10 Periodendauern gemessen werden sollte, sobald man das Magnetfeld angestellt hat. Die Schwingung konnte man somit durch einen ungedämpften harmonischen Oszillator annähern, aber in der Realität ist immer eine kleine Dämpfung vorhanden. Diese konnte zwar durch das Luftkissen reduziert, aber nicht vollständig entfernt werden.

Bei der dritten und letzen Methode kommen Fehler durch das Stroboskop hinzu, da es sehr schwierig ist, die Kugel in der Frequenz des Stroboskopes rotieren zu lassen. Eine weitere Fehlerquelle ist wiederum die Zeit, denn auch diese Bewegung ist gedämpft und somit bei längerer Dauer ungenau. Dies wurde damit einigermaßen behoben, indem die Präzessionsbewegung direkt gestartet wurde, als die Rotationsfrequenz erreicht wurde.

Dennoch ist zu sehen, dass die Werte verhältnismäßig nah beieinander liegen.

Literatur

[Dor17] TU Dortmund. *V105 Das magnetische Moment*. 16. Nov. 2017. URL: http://129.217.224.2/HOMEPAGE/MEDPHYS/BACHELOR/AP/SKRIPT/MagneticToMP.pdf.