

V402-Dispersionsmessung am Glasprisma

Alina Landmann, alina.landmann@tu-dortmund.de
Jannine Salewski, jannine.salewski@tu-dortmund.de

Durchführung: 03.07.2018

Abgabe: 10.07.2018

TU Dortmund - Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung	1
2 Theorie	1
2.1 Dispersionsgleichung	2
3 Durchführung	3
3.1 Aufbau	3
4 Auswertung	5
4.1 Bestimmung des brechenden Winkels.	5
4.2 Bestimmung des Brechungswinkels und der Brechungsindizes n	5
4.3 Ermittlung der Dispersionsgleichung	6
4.4 Berechnung der Abbe'schen Zahl	7
4.5 Auflösungsvermögen	8
4.6 Bestimmung der nächstgelegenen Absorptionsstelle	8
5 Diskussion	9

1 Zielsetzung

In diesem Experiment soll eine Dispersionskurve erfasst werden mittels eines Prismas.

2 Theorie

Tritt eine Lichtwelle auf eine Grenzschicht, beispielsweise zwischen zwei Medien, dann kommt es zur Wechselwirkung zwischen der Lichtwelle und den Elektronen und den Ionenrümpfen des Materials. Dabei wird die Lichtgeschwindigkeit der Lichtwelle und dessen Ausbreitungsrichtung verändert. Dieses Phänomen wird als **Brechung** bezeichnet. Mit Hilfe des **Huygensches Prinzip**, welches besagt, dass jeder Punkt einer bestehenden Welle als Ausgangspunkt einer kugelförmigen Elementarwelle angesehen werden kann und die einhüllende Welle die Wellenfront beschreibt, kann eine Relation für den **Brechungsindex** n hergeleitet werden:

$$n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

α und β sind in Abbildung 1 dargestellt. Der Brechungsindex n beschreibt außerdem die

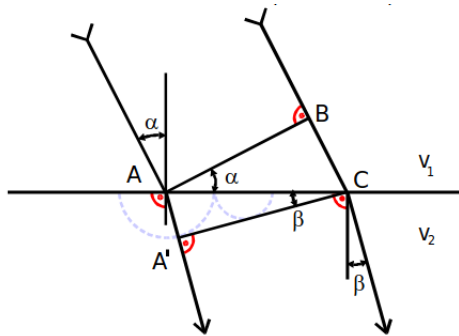


Abbildung 1: Darstellung einer gebrochenen Welle an einer Grenzschicht. [Dor]

Relation der Lichtgeschwindigkeiten

$$n = \frac{v_1}{v_2}$$

dies lässt darauf schließen, dass der Brechungsindex frequenzabhängig sein muss. Die frequenzabhängigkeit des Brechungsindexes wird als **Dispersion** bezeichnet. Wenn der Brechungsindex n mit wachsendem λ kleiner wird, wird dies als normale Dispersion bezeichnet. Wenn aber der Brechungsindex bei wachsendem λ größer wird, wird von einer anormalen Dispersion gesprochen.

2.1 Dispersionsgleichung

Wenn eine Lichtwelle auf eine Grenzschicht trifft, wechselwirkt das elektrische Feld mit den Elektronen und den Ionenrümpfen. Hierbei entstehen mehrere Kräfte: eine auslenkende, periodische Kraft (durch das elektrische Feld der eintretenden Welle), eine rücktreibende Kraft (proportional zur Auslenkung), eine Reibungskraft (hervorgerufen durch das Medium). Aus diesen Kräften lässt sich die folgende Differentialgleichung aufstellen:

$$\frac{d^2 \vec{P}_h}{dt^2} + \frac{f_h}{m_h} \frac{d\vec{P}_h}{dt} + \frac{a_h}{m_h} \vec{P}_h = \frac{N_h q_h^2}{m_h} \vec{E}_0 e^{i\omega t}$$

wobei \vec{P}_h die Polarisation, m_h die Teilchenmasse, f_h die Reibungskonstante, a_h die Federkonstante, q_h die Ladung, N_h die Ladungsträgerdichte, E_0 die Amplitude des elektrischen Feldes der einfallenden Lichtwelle beschreibt und der Index h für das jeweilige Teilchen steht. Für diese Differentialgleichung ist die Lösung bekannt,

$$\vec{P} = \sum_h \frac{1}{\omega_h^2 - \omega^2 + i \frac{f_h}{m_h} \omega} \frac{N_h q_h^2}{m_h} \vec{E}_0 e^{i\omega t} \quad \text{mit} \quad \frac{a_h}{m_h} = \omega^2.$$

Da die Polarisation in einem Medium der dielektrischen Verschiebung entspricht

$$\vec{P} = (\epsilon - 1) \epsilon_0 \vec{E}$$

und die Relation $\tilde{n}^2 = \epsilon$ gilt, kann die Lösung der Differentialgleichung nach dem Brechungsindex n umgeformt werden. Außerdem muss noch betrachtet werden, dass \tilde{n} einer komplexen Zahl entspricht, wobei für diesen Versuch nur der Realteil von \tilde{n} von Bedeutung ist. Der Imaginärteil die Absorptionskonstante beinhaltet. Der reelle Anteil $\text{Re}(\tilde{n}) = n$ entspricht dem gesuchten Brechungsindex. Da die Differentialgleichung nur eine Näherung für das Problem beschreibt, müssen zunächst Annahmen für die Gültigkeit dieser gemacht werden. Eine dieser Annahmen ist, dass die Gleichung nicht in der Nähe der Absorptionsfrequenzen durchgeführt wird, also das $\lambda \ll \lambda_1$ oder $\lambda \gg \lambda_1$ gilt, diese wird in dem Experiment damit erfüllt, dass wir im Bereich des sichtbaren Lichtes liegen und dort keine Absorptionsfrequenzen des verwendeten Materials liegen. Mit dieser Bedingung, kann $n^2 k \approx 0$ angenommen werden. Daraus folgt für den Brechungsindex:

$$n^2(\lambda) = 1 + \frac{N_1 q_1^2}{4\pi^2 c^2 \epsilon_0 m_1} \frac{\lambda_1^2}{1 - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)^2} \quad (1)$$

Mittels dieser Formel kann jetzt eine Fallunterscheidung durchgeführt werden:

- $\lambda \ll \lambda_1$: Liegt die Resonanzstelle also über der Messstelle, kann die Gleichung (1) mittels einer Taylorentwicklung vereinfacht werden. Die dabei entstehende Kurve ist in Abbildung 2 b) abgebildet.

$$n^2(\lambda) = 1 + \frac{N_1 q_1^2 \lambda_1^2}{4\pi^2 c^2 \epsilon_0 m_1} \left(1 + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)^4 + \dots \right)$$

mit den Koeffizienten $A_i > 0$:

$$n^2(\lambda) = A_0 + \frac{A_2}{\lambda^2} + \frac{A_4}{\lambda^4} + \dots \quad (2)$$

- $\lambda \gg \lambda_1$: Liegt die Resonanzstelle unter der Messstelle, kann die Gleichung (1) erneut mittels einer Taylorentwicklung vereinfacht werden. Die dabei entstehende Kurve ist in Abbildung 2 a) abgebildet.

$$n^2(\lambda) = 1 - \frac{N_1 q_1^1}{4\pi c^2 \epsilon_0 m_1} \left(\lambda^2 + \frac{\lambda^4}{\lambda_1^2} + \frac{\lambda^6}{\lambda_1^4} + \dots \right)$$

und mit den Koeffizienten $A'_i > 0$:

$$n^2(\lambda) = 1 - A'_2 \lambda^2 - A'_4 \lambda^4 - \dots$$

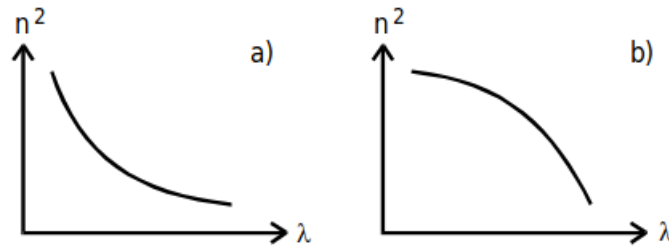


Abbildung 2: Dispersionskurven für a) $\lambda \gg \lambda_1$ und b) $\lambda \ll \lambda_1$. [Dor]

3 Durchführung

Der Versuch setzt sich aus zwei Teilen zusammen, zunächst wird der Winkel des Prismas gemessen, an dem die Strahlen gebrochen werden. Im zweiten Teil des Versuchs soll die Dispersionskurve gemessen werden.

3.1 Aufbau

Das Kernstück des Versuches ist ein Prismenspektralapparat, dieser ist in Abbildung 3 schematisch dargestellt. Durch ein Quecksilberlampe wird das zu untersuchende Licht erzeugt. Dieses wird durch eine Blende und ein Kollimatorrohr gebündelt, sodass dieses parallel verläuft. Daraufhin wird das Licht durch ein bewegliches Prisma geschickt, wobei der Winkel des Prismas an einer Skala abgelesen werden kann. Wurde das Licht durch das Prisma nun in seine Spektralfarben zerlegt, verläuft es jetzt durch ein schwenkbarer Fernrohr. Hier lassen sich die Spektralfarben mit Hilfe eines Fadenkreuzes beobachten.

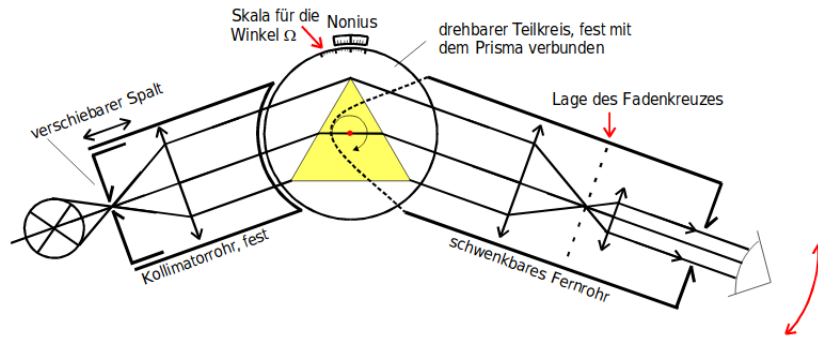


Abbildung 3: Schematischer Aufbau eines Prismenspektralapparats. [Dor]

Im ersten Versuchteil soll der Winkel des Prismas gemessen werden. Hierzu wird das Prisma auf dem beweglichen Teller so ausgerichtet, dass die zu messende Ecke in Richtung der Lampe zeigt. Jetzt wird mit Hilfe des schwenkbaren Fernrohrs die reflektierten weißen Linien gesucht und deren Winkelabstand gemessen. Nun wird das Prisma auf dem Teller leicht verschoben und erneut gemessen. Diese Messung wird insgesamt 5 mal durchgeführt.

Im zweiten und letzten Versuchteil soll nun eine Dispersionskurve dargestellt werden. Die schematische Darstellung der Messung ist in Abbildung 4 dargestellt, der kleinste Winkel des abgebildeten Prismas ist hierbei der Winkel, der zuvor im ersten Versuchteil vermessen wurde. Zunächst wird das Prisma so aufgestellt, dass die vermessene Ecke nach rechts zeigt. Jetzt wird so lange an dem Teller und an dem Fernrohr gedreht, bis die weiße Linie deckungsgleich mit der zu vermessenden Spektrallinie liegt. Der Winkel Ω_l , bei dem dies der Fall ist, wird notiert. Dies wird für alle Spektrallinien durchgeführt. Auf der anderen Seite wird dies für alle Spektrallinien wiederholt und der Winkel Ω_r gemessen. Hierbei muss die vermessene Ecke des Prismas nach links außen zeigen. Die Ausrichtung der Nulllinie spielt keine Rolle, da nur die Winkeldifferenzen von Bedeutung sind.

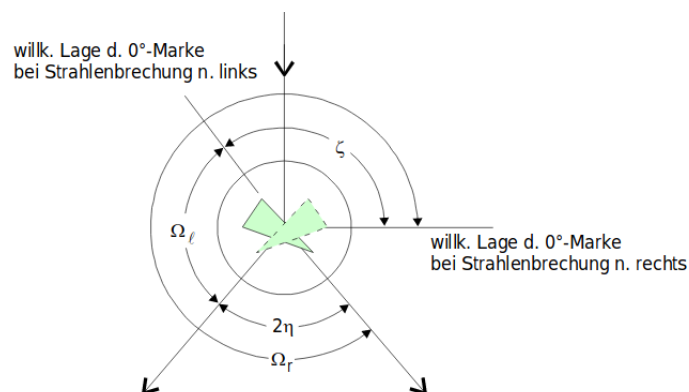


Abbildung 4: Schematische Darstellung der zweiten Messung. [Dor]

4 Auswertung

4.1 Bestimmung des brechenden Winkels.

Im ersten Teil des Versuchs wird der brechende Winkel φ bestimmt. Dies geschieht, indem die beiden reflektierten Strahlen φ_l und φ_r gemessen werden. Die Messergebnisse sind zusammen mit den nach Formel 1 berechneten Werten für den brechenden Winkel in Tabelle 1 zu sehen. Die Mittelung der sieben Messwerte, sowie der zugehörige Fehler für die Mittelung werden mit Hilfe folgender Formeln berechnet:

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^7 \varphi_n$$

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\sum (\varphi_n - \bar{\varphi})^2}{n-1}}$$

Tabelle 1: Messwerte und Ergebnisse zur Ermittlung von φ

Messung	$\varphi_{symupl} / ^\circ$	$\varphi_{symupr} / ^\circ$	$\varphi / ^\circ$
1	69,6	189,6	60,00
2	71,1	191,2	60,05
3	68,9	189,0	60,05
4	63,0	183,0	60,00
5	63,5	183,6	60,05
6	61,0	180,9	60,05
7	62,6	182,6	60,00

Für *varphi* ergibt sich ein Wert von $(60,03 \pm 0,01)^\circ$.

4.2 Bestimmung des Brechungswinkels und der Brechungsindizes n

Im darauffolgenden Teil des Versuchs wird der Winkel η , sowie die Brechungsindizes für die verschiedenen Wellenlängen berechnet. Die hierfür benötigten Werte sind in Tabelle 2 zu sehen. Die Brechungsindizes n werden mit Hilfe folgender Formel berechnet:

$$n = \frac{\sin(\frac{\eta+\varphi}{2})}{\sin(\frac{\varphi}{2})}$$

Der zugehörige Fehler berechnet sich mit

$$\Delta n = \left| \left(\frac{0,5 \cos(\frac{\eta+\varphi}{2})}{\sin(\frac{\varphi}{2})} - \frac{0,5 \cos(\frac{\varphi}{2}) \sin(\frac{\eta+\varphi}{2})}{\sin^2(\frac{\varphi}{2})} \right) \Delta \varphi \right|.$$

Tabelle 2: Messwerte zur Bestimmung von η und n

Wellenlänge	$\Omega_l / ^\circ$	$\Omega_r / ^\circ$	η	n
643,84	192,0	70,0	58,0	1.71383 ± 0.00017
576,96	191,7	70,5	58,8	1.72097 ± 0.00017
546,07	191,3	70,7	59,4	1.72627 ± 0.00017
508,58	190,9	71,2	60,3	1.73414 ± 0.00017
479,99	190,5	71,7	61,2	1.74189 ± 0.00017
467,81	190,3	71,8	61,5	1.74446 ± 0.00017
435,83	189,8	72,4	62,6	1.75375 ± 0.00017

4.3 Ermittlung der Dispersionsgleichung

Im folgenden wird untersucht, welche Theoriekurve zur Ermittlung der Dispersionsgleichung genauer den genommenen Messwerten entspricht. In Abbildung 5 sind die quadrierten Brechungsindizes n^2 gegen ihre Wellenlängen aufgetragen. In derselben Abbildung sind die beiden Theoriekurven zu sehen. Es deutet sich an, dass Theoriekurve 1 die Messwerte genauer trifft als Theoriekurve 2. Die mit Hilfe der Theoriekurven ermittelten ersten beiden Koeffizienten für die Dispersionsgleichungen 1) und 2) sind in Tabelle 4 zu sehen.

Tabelle 3: Koeffizienten der Dispersionsgleichung.

Dispersionskurve	Steigung	
1	A_0	$2,812 \pm 0,005$
	A_2	$(5,05 \pm 0,13) \cdot 10^4$
2	A'_0	$3,165 \pm 0,014$
	A'_2	$(5,8 \pm 0,5) \cdot 10^{-7}$

Mit Hilfe der ermittelten Koeffizienten lassen sich nun die Abweichungsquadrate berechnen:

$$s_n^2 = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^7 \left(n^2(\lambda_i) - A_0 - \frac{A_2}{\lambda_i^2} \right)^2$$

$$s_{n'}^2 = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^7 \left(n'^2(\lambda_i) - A'_0 + A'_2 \lambda_i^2 \right)^2$$

Es wird der Gleichung die Gültigkeit zugesprochen, die ein kleineres s^2 besitzt. Die Abweichung für s_n beträgt $(6,2 \pm 2,5) \cdot 10^{-6}$, wohingegen die Abweichung für $s_{n'}$ $(190 \pm 70) \cdot 10^{-6}$ beträgt. Dies lässt darauf schließen, dass die Theoriekurve 1 den Messwerten exakter entspricht. Somit ergibt sich für den Brechungsindex des verwendeten Glasprismas in

Abhängigkeit von der Wellenlänge folgende Gleichung:

$$n(\lambda) = \sqrt{A_0 + \frac{A_2}{\lambda^2}}$$

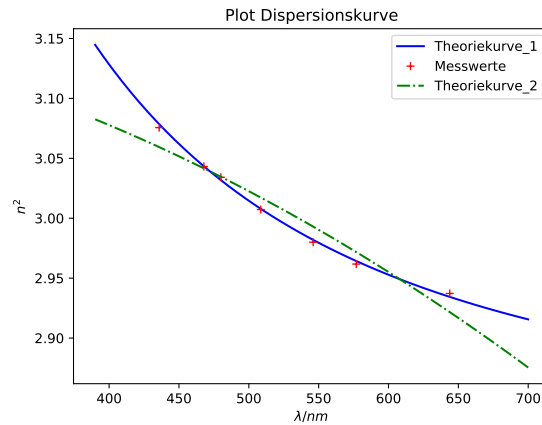


Abbildung 5: Vergleich der Theoriekurven mit den Messergebnissen.

4.4 Berechnung der Abbe'schen Zahl

Mit Hilfe dieser Gleichung lässt sich die Abbesche Zahl einfach über folgende Formel berechnen:

$$\nu = \frac{n_D - 1}{n_F - n_C}$$

Hierbei sind die Wellenlängen für die Fraunhoferschen Linien wie folgt angegeben:

$$\lambda_D = 589 \text{ nm}$$

$$\lambda_F = 486 \text{ nm}$$

$$\lambda_C = 656 \text{ nm}$$

Folglich ergibt sich eine Abbe'sche Zahl von $25,8 \pm 0,6$. Der Fehler für die Abbe'sche Zahl entsteht dadurch, dass in der Berechnung der Brechungsindizes fehlerbehaftete Größen vorkommen, weshalb diese ebenfalls wieder fehlerbehaftet sind. Die Fehler für die Brechungsindizes werden mittels Gauß'scher Fehlerfortpflanzung berechnet. Folglich ergeben sich folgende Werte für die Brechungsindizes:

$$n_D = (1,7198 \pm 0,0018) \text{ nm}$$

$$n_F = (1,7395 \pm 0,0021) \text{ nm}$$

$$n_C = (1,7115 \pm 0,0017) \text{ nm}$$

4.5 Auflösungsvermögen

Das Auflösungsvermögen beschreibt den minimalen Wellenlängenunterschied $\Delta\lambda$, der zwischen zwei Spektrallinien liegen darf, damit sie vom Gerät gerade noch getrennt werden können. Es ist definiert als:

$$A := \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$$

Woraus dann die Formel zur Berechnung des Auflösungsvermögens folgt:

$$\begin{aligned} A &= b \frac{dn}{d\lambda} \\ &= -b \frac{A_2}{\sqrt{A_0 + \frac{A_2}{\lambda^2} \lambda^3}} \end{aligned}$$

Da auch hier wieder fehlerbehaftete Größen zur Berechnung verwendet werden, muss die Gauß'sche Fehlerfortpflanzung beachtet werden und es wird der Fehler von A mittels folgender Formel berechnet:

$$\Delta A = \sqrt{\left[\left(-\frac{bA_2}{\lambda^3} \cdot 0,5 \left(A_0 + \frac{A_2}{\lambda^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \right) \Delta A_0 \right]^2 + \left[\frac{b}{\lambda^3} \left(A_0 + \frac{A_2}{\lambda^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{-A_2}{2\lambda^2} \left(A_0 + \frac{A_2}{\lambda^2} \right)^{-1} + 1 \right) \right]^2}$$

Für die drei zuvor verwendeten Fraunhofer'schen Linien ergeben sich, die in Tabelle 4 zu sehenden Ergebnisse für das Auflösungsvermögen.

Tabelle 4: Auflösungsvermögen für die Fraunhoferschen Linien.

Fraunhofersche Linie	λ / nm	Auflösungsvermögen
λ_C	656	3140 ± 80
λ_D	589	4310 ± 110
λ_F	486	7590 ± 190

4.6 Bestimmung der nächstgelegenen Absorptionsstelle

Um die nächstgelegene Absorptionsstelle zu ermitteln, wird ein Koeffizientenvergleich der beiden Gleichungen 1 und ?? durchgeführt:

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{A_2}{A_0 - 1}}.$$

Der zugehörige Fehler berechnet sich mittels folgender Formel:

$$\Delta\lambda = \sqrt{\left(\frac{1}{2} \left(\frac{A_2}{A_0 - 1}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{A_0 - 1} \Delta A_2\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \left(\frac{A_2}{A_0 - 1}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{-A_2}{(A_0 - 1)^2} \Delta A_0\right)^2}.$$

Somit ergibt sich für die nächstgelegene Absorptionsstelle eine Wellenlänge von $(166,9 \pm 2,2)$ nm. Diese Wellenlänge liegt im stark ultravioletten Bereich [Wik].

5 Diskussion

Die Bestimmung des brechenden Winkels $\varphi = (60,03 \pm 0,01)^\circ$ weist eine sehr geringe Abweichung von 0,05 % auf, was im Rahmen der Messungenauigkeit liegt. Bei der Ermittlung des Winkels η konnten leicht Fehler geschehen. So war es recht schwer zu erkennen, wann die reflektierte Linie über den zu vergleichenden Spektrallinien lag, weil sich diese durch das Vertsellen des Goniometers leicht verschieben ließen. Das Verhalten der normalen Dispersion ist jedoch deutlich zu erkennen. Bei abnehmenden Wellenlängen steigen die Brechungsindizes an. Der Brechungsindex n des Materials SF14 beträgt 1,756 bei einer Wellenlänge von 632,8 nm [fil]. Der berechnete Wert beträgt 1,714, was einer prozentualen Abweichung von 2,40 % entspricht. Dies spricht dafür, dass keine systematischen Fehler bei der Durchführung gemacht wurden. Der Literaturwert für die Abbe'sche Zahl beträgt 26,50, von dem der experimentell ermittelte Wert von 25,8 um 2,64 % abweicht. Es ist davon auszugehen, dass die berechnete Dispersionskurve, als auch die ermittelten Parameter der Realität sehr nahe kommen.

Literatur

- [Dor] TU Dortmund. *Versuchsanleitung zu Versuch Nr. V402 Dispersionsmessung am Glasprisma*. URL: <http://129.217.224.2/HOME/PAGE/MEDPHYS/BACHELOR/AP/SKRIPT/V402.pdf> (besucht am 08.07.2018).
- [edm] edmundoptics.de. *Optisches Glas*. URL: <https://www.edmundoptics.de/resources/application-notes/optics/optical-glass/> (besucht am 08.07.2018).
- [fil] filmetrics.de. *Brechungsindexdatenbank*. URL: <https://www.filmetrics.de/refractive-index-database> (besucht am 08.07.2018).
- [Wik] Wikipedia. *Elektromagnetisches Spektrum*. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Elektromagnetisches_Spektrum (besucht am 08.07.2018).