

# **V105 Das Magnetische Moment**

Alina Landmann, [alina.landmann@tu-dortmund.de](mailto:alina.landmann@tu-dortmund.de)  
Jannine Salewski, [jannine.salewski@tu-dortmund.de](mailto:jannine.salewski@tu-dortmund.de)

2. November 2017

TU Dortmund - Fakultät Physik

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Zielsetzung</b>	<b>1</b>
<b>2 Theorie</b>	<b>1</b>
<b>3 Durchführung</b>	<b>2</b>
3.1 Bestimmung des magnetischen Moments der Billardkugel unter Ausnutzung der Schwerkraft . . . . .	3
3.2 Bestimmung des magnetischen Momentes mit Hilfe der Schwingungsdauer $T$ des Magneten . . . . .	3
3.3 Bestimmung des magnetischen Moments über die Präzessionsbewegung der sich drehenden Billardkugel . . . . .	4
<b>4 Auswertung</b>	<b>5</b>
4.1 Messung des magnetischen Momentes durch die Gravitation . . . . .	5
4.2 Messung des magnetischen Momentes über die Schwingungsdauer eines Magnetes . . . . .	7
4.3 Bestimmung des magnetischen Momentes über die Präzession eines Magneten . . . . .	9
<b>5 Diskussion</b>	<b>10</b>

# 1 Zielsetzung

Messung des magnetischen Momentes durch drei verschiedene Methoden.

## 2 Theorie

Im Unterschied zum elektrischen Feld, besitzt das magnetische Feld keine Quellen. Es gibt nur magnetische Dipole, keine Monopole. Dipole erzeugen geschlossene Feldlinien. Dipole können makroskopisch durch einen Permanentmagneten oder durch eine stromdurchflossene Leiterschleife erzeugt werden. Die Leiterschleife besitzt dabei das magnetische Moment  $\mu$ , was mit folgender Formel berechnet werden kann:

$$\mu = I \cdot \vec{A} \quad (1)$$

Hierbei ist  $I$  der Strom, der durch die Leiterschleife fließt und  $A$  die Querschnittsfläche der Leiterschleife. Im folgenden wird das magnetische Moment eines Permanentmagneten, der sich im Innern einer Billardkugel befindet, experimentell mittels dreier verschiedener Methoden ermittelt. Zur Erzeugung eines homogenen Magnetfeldes wird im Experiment ein *Helmholtz – Spulenpaar* verwendet. Hierbei sind zwei gleich große, gleich geformte, gleichsinnig vom Strom  $I$  durchflossene Spulen so angeordnet, dass der Abstand zwischen den beiden Spulen annähernd ihrem Radius entspricht. Das somit vom Spulenpaar erzeugte Magnetfeld ist auf der Symmetrieachse der beiden Spulen homogen und kann mittels des *Biot – Savart – Gesetzes* berechnet werden:

$$\vec{B}(x) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3} \quad (2)$$

Ist der Abstand zwischen den beiden Spulen nicht identisch mit dem Radius der beiden Spulen, so gibt es zur Berechnung des Magnetfeldes folgende Formel, die für weitere Berechnungen verwendet wurde, da sich im Experiment der Radius der Spulen geringfügig von deren Abstand unterschied:

$$\vec{B}(x) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (3)$$

Hierbei beschreibt  $R$  den Spulenradius und der Abstand der beiden Spulen voneinander beträgt  $2x$ . Das gesamte Feld im Zentrum des Spulenpaares erfolgt durch Superposition der Einzelfelder.

$$B(0) = B_1(x) + B_1(-x) = \frac{\mu_0 I R^2}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (4)$$

Hier wurde der Einfachheit halber das Zentrum des Spulenpaares in den Ursprung des Koordinatensystems gelegt.

### 3 Durchführung

Zur Vorbereitung auf den Versuch wurde die magnetische Flussdichte  $B$  im Zentrum des Helmholtz-Spulenpaares berechnet. Die gegebenen Werte zur Berechnung betragen für den Radius der Spulen  $R_{\text{Spule}} = 0.109 \text{ m}$ , für den Abstand  $d$  der beiden Spulen voneinander:  $0.138 \text{ m}$  für den Strom, der durch die Spulen floss:  $I = 1 \text{ A}$  und die Windungszahl der beiden Spulen sollen  $N = 195$  sein. Zur Berechnung von  $B$  wurde Gleichung (4) verwendet.

Das Ergebnis lautet:  $B \approx 1.355 \cdot 10^{-3} \text{ T}$ .

Außerdem wurde das Trägheitsmoment  $J_K$  einer Kugel mit den Maßen  $r_K = 2.5 \text{ cm}$ ,  $m_K = 150 \text{ g}$  berechnet werden. Dieses beträgt  $375 \text{ g/cm}^2$ .

Es gilt nun, wie bereits erwähnt das magnetische Moment  $\mu_{\text{Dipol}}$  einer Billardkugel, in der sich ein kleiner Permanentmagnet befindet auf drei verschiedene Arten zu ermitteln:

1. Unter Ausnutzung der Gravitation
2. Unter Ausnutzung der Schwingungsdauer  $T$
3. Unter Ausnutzung der Präzessionsbewegung

Zur Durchführung des Versuchs wurde ein Helmholtz-Spulenpaar mit oben angegebenen Werten für  $R_{\text{Spule}}$ ,  $N$  und  $d$  verwendet. Im Zentrum des Spulenpaares (beide kreisförmigen Spulen sind so angeordnet, dass sich das  $B$ -Feld senkrecht im Raum befindet) ist ein kleiner Messingzylinder befestigt, welcher eine kugelförmige Aussparung besitzt, sodass er die Billardkugel ideal aufnehmen kann. Mittels eines Luftkissens kann sich die Billardkugel reibungsfrei auf dem Zylinder bewegen. Das magnetische Moment der Billardkugel ist in Richtung eines kleinen Stiels gerichtet, welcher sich an der Kugel befindet. An der Oberseite des Spulenpaares befindet sich ein Stroboskop, welches im Verlauf des Versuchs zur Bestimmung der Frequenz der Drehbewegung genutzt werden wird. Der Strom und folglich auch das durch die Spulen erzeugte Magnetfeld, das Stroboskop und das Luftkissen können extern eingeschaltet werden. Veränderbar ist hier die Stromstärke, die Frequenz, mit der das Stroboskop aufblitzt und die Feldlinienrichtung, wobei diese im Experiment nicht verändert wurde. Sie war kontinuierlich auf "up" eingestellt, was besagt, dass die Feldlinien von unten nach oben ausgerichtet waren.

Für alle weiteren Berechnungen wurden die Werte, als auch die Abmessungen für die Spulen und deren Abstand zueinander, die in der Versuchsvorbereitung gegeben waren, weiterverwendet. Sie wurden zu Beginn des Versuchs jedoch auf ihre Richtigkeit überprüft.

### 3.1 Bestimmung des magnetischen Moments der Billardkugel unter Ausnutzung der Schwerkraft

Bei dieser statischen Methode wird die Tatsache verwendet, dass eine Masse  $m$ , die der Schwerkraft  $\vec{F} = m \cdot \vec{g}$  unterliegt, ein Drehmoment

$$\vec{D}_g = m \cdot (\vec{r} \times \vec{g}) \quad (5)$$

auf die Kugel ausübt. Das Gewicht, welches dieses Drehmoment ausüben soll, ist im Versuch verschiebbar auf einem Aluminiumstab, der als masselos anzusehen ist, befestigt. Dieser Stab wiederum steckt im Stiel der Billardkugel. Dem durch die Schwerkraft verursachten Drehmoment, wirkt das durch das B-Feld verursachte Drehmoment

$$\vec{D}_B = \mu_{\text{Dipol}} \times \vec{B} \quad (6)$$

entgegen. Bei genau einer Magnetfeldstärke sind  $D_g$  und  $D_B$  gleich und die Kugel führt keine Pendelbewegung mehr aus. Ist dies der Fall, so wird die eingestellte Stromstärke  $I$  zur Berechnung des entstandenen B-Feldes, sowie der Abstand  $r$ , vom Mittelpunkt des Gewichts bis zur Billardkugel, notiert. Dieser Vorgang wird neun mal wiederholt, um statistische Fehler klein zu halten. Zum Schluss wird  $r$  gegen  $B$  aufgetragen und mittels einer linearen Regression das magnetische Moment  $\mu_{\text{Dipol}}$  berechnet.

### 3.2 Bestimmung des magnetischen Momentes mit Hilfe der Schwingungsdauer $T$ des Magneten

Versetzt man die Billardkugel im eingeschalteten B-Feld in Schwingung, so verhält sie sich wie ein harmonische Oszillator, dessen Bewegung wie folgt beschrieben werden kann:

$$-|\vec{\mu}_{\text{Dipol}} \times \vec{B}| = J_K \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (7)$$

Die Lösung der Differentialgleichung ergibt eine Gleichung für die Schwingungsdauer  $T$ :

$$T^2 = \frac{4\pi^2 J_K}{\mu_{\text{Dipol}}} \frac{1}{B} \quad (8)$$

Mithilfe der vorher berechneten Größen für das Trägheitsmoment der Kugel  $J_K$  und das B-Feld lässt sich nun das magnetische Moment der Kugel berechnen. Im Experiment werden pro eingestellter Stromstärke zehn Periodendauern gemessen. Dies wird für neun verschiedene Stromstärken durchgeführt. Anschließend wird  $T^2$  gegen  $\frac{1}{B}$  aufgetragen und mittels linearer Regression das magnetische Moment des Dipols  $\mu_{\text{Dipol}}$  berechnet.

### 3.3 Bestimmung des magnetischen Moments über die Präzessionsbewegung der sich drehenden Billardkugel

Versetzt man die Billardkugel mit ihrem Stiel senkrecht nach oben zeigend in eine Rotationsbewegung und stößt sie danach mit einem kleinen Stoß gegen den Stiel an, sodass sie aus der senkrechten Position ausgelenkt wird, so führt die Achse der Kugel (durch den Stiel gehend) im eingeschalteten B-Feld eine Präzessionsbewegung aus. Dabei beschreibt die Achse der Kugel einen Kegelmantel um die Drehimpulsachse (senkrecht im Raum stehend). Durch die Rotation der Kugel bleibt deren Auslenkung stabil. Die Differentialgleichung für die Präzessionsbewegung sieht wie folgt aus:

$$\mu_{\text{Dipol}} \times \vec{B} = \frac{d\vec{L}_K}{dt} \quad (9)$$

Die Formel für die Präzessionsfrequenz  $\Omega_p$  ist eine Lösung der Differentialgleichung und lautet:

$$\Omega_p = \frac{\mu_{\text{Dipol}} B}{|L_K|} \quad (10)$$

$L_K$  beschreibt den Drehimpuls der ausgelenkten Kugel und kann mit Hilfe des Trägheitsmomentes der Kugel und deren Kreisfrequenz berechnet werden:  $L_K = J_K \omega = 2$ . Somit kann  $\mu_{\text{Dipol}}$  über die Formel

$$\frac{1}{T_p} = \frac{\mu_{\text{Dipol}} B}{2\pi L_K} \quad (11)$$

Um eine konstante Rotationsfrequenz  $\nu$  zu erreichen, wird das Stroboskop eingeschaltet. Nachdem die Kugel bei senkrecht stehendem Stiel in eine Rotationsbewegung versetzt wurde, betrachte man den auf dem Stiel eingezeichneten kleinen Punkt in den regelmäßig aufleuchtenden Stroboskopblitzen. Erscheint der Punkt stationär, so hat die Billardkugel eine konstante Rotationsfrequenz und kann durch einen kleinen Stoß aus der senkrechten Achse ausgelenkt werden. Ist dies geschehen, so wird schnellstmöglich das B-Feld eingeschaltet und die Zeit  $T_p$  für einen Umlauf des Stiels gemessen werden. Um statistische Fehler zu minimieren, wird die Messung drei Mal pro Magnetfeldstärke und für insgesamt neun unterschiedliche Magnetfelder durchgeführt. Zur Auswertung wird  $\frac{1}{T_p}$  gegen die Magnetfeldstärke aufgetragen, um mittels linearer Regression  $\mu_{\text{Dipol}}$  zu ermitteln.

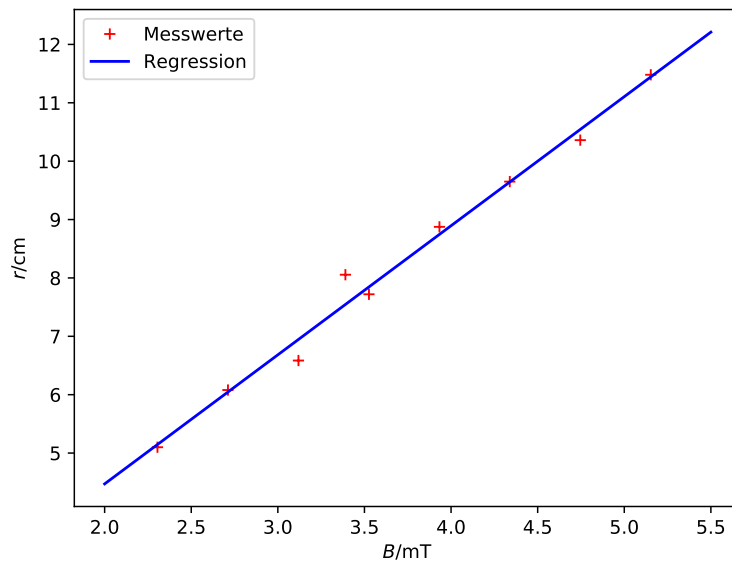
## 4 Auswertung

### 4.1 Messung des magnetischen Momentes durch die Gravitation

Die gemessenen Stromstärke und der Radius sind in Tabelle 1 aufgelistet.

**Tabelle 1:** Messwerte der Gravitationsmethode.

$I / \text{A}$	$r / \text{cm}$
1.7	5.100
2.0	6.080
2.3	6.585
2.5	8.055
2.6	7.720
2.9	8.875
3.2	9.650
3.5	10.360
3.8	11.480



**Abbildung 1:** Messwerte und lineare Regression der Gravitationsmethode.

Durch das Biot-Savart-Gesetz (2) und die gemessenen Stromstärken, lässt sich das Magnetfeld im Mittelpunkt der Helmholtzspule berechnen. In Abbildung 1 wurde das Magnetische Feld  $B$  gegen den Radius  $r$  aufgetragen und eine lineare Regression durchgeführt.

Die lineare Regression gibt folgende Werte für die Steigung  $m_1$  und für den y-Achsenabschnitt  $n_1$  aus:

$$m_1 = (2.21 \pm 0.10) \frac{\text{cm}}{\text{mT}}$$

$$n_1 = (0.0 \pm 0.4) \text{ cm}$$

Durch Gleichsetzen der Drehmomente durch die Gravitation (5) und durch das Magnetfeld (6), ergibt sich die Steigung  $m$  der linearen Regression, aus welcher sich das magnetische Moment berechnen lässt.

$$m_1 = \frac{\mu_{\text{Dipol1}}}{m_{\text{Dipol}} \cdot g} \quad (12)$$

wobei

$$m_{\text{Dipol}} = 1.4 \text{ g}$$

$$g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Nach Umformen der Gleichung ergibt sich das magnetische Moment des Dipols

$$\mu_{\text{Dipol1}} = m_1 \cdot m_{\text{Dipol}} \cdot g \quad (13)$$

Durch Einsetzen der Werte folgt

$$\mu_{\text{Dipol1}} = (30.35 \pm 1.37) \cdot 10^{-2} \text{ A m s} \quad (14)$$

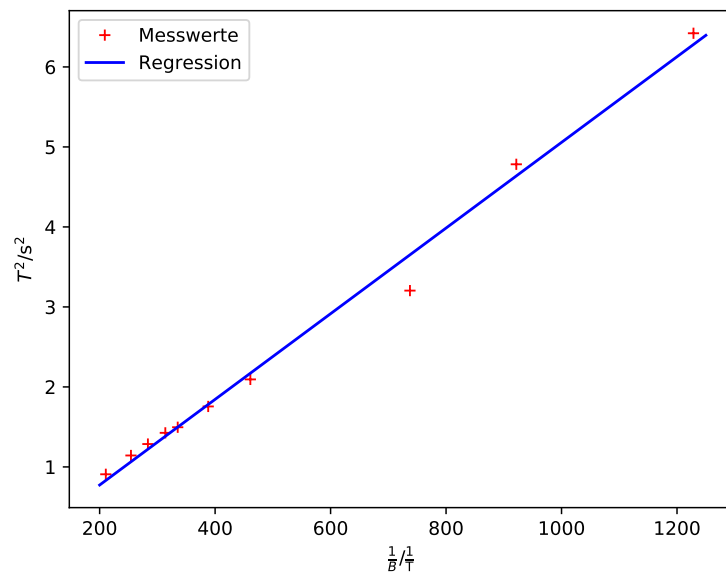


## 4.2 Messung des magnetischen Momentes über die Schwingungsdauer eines Magnetes

Die gemessenen Werte der Methode sind in Tabelle 2 aufgelistet.

**Tabelle 2:** Messwerte der Methode durch die Schwingungsdauer

$I / \text{A}$	$10T / 1/\text{s}$	$T / 1/\text{s}$
0.6	25.34	2.534
0.8	21.87	2.187
1.0	17.90	1.790
1.6	14.47	1.447
1.9	13.25	1.325
2.2	12.23	1.223
2.4	11.94	1.194
2.6	11.34	1.134
2.9	10.69	1.069
3.5	9.53	0.953



**Abbildung 2:** Messwerte und lineare Regression: Methode über die Schwingungsdauer.

In Abbildung 2 wurde  $T^2$  gegen  $1/B$  aufgetragen. Durch eine lineare Regression konnte dessen Steigung  $m_2$  und dessen y-Achsenabschnitt  $n_2$  ermittelt werden.

$$m_2 = (5.35 \pm 0.18) \cdot 10^{-3} \text{ T s}^2$$

$$n_2 = (-0.30 \pm 0.11) \cdot 10^3 \text{ s}^2$$

Analog zur vorherigen Methode kann das Dipolmoment über die Steigung der linearen Regression bestimmt werden.

$$m_2 = \frac{4\pi^2 J_k}{\mu_{\text{Dipol2}}} \quad (15)$$

Wobei  $J_k$  das Trägheitsmoment der Kugel ist.

$$J_k = 3.75 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2$$

Durch Umformungen und Einsetzen ergibt sich

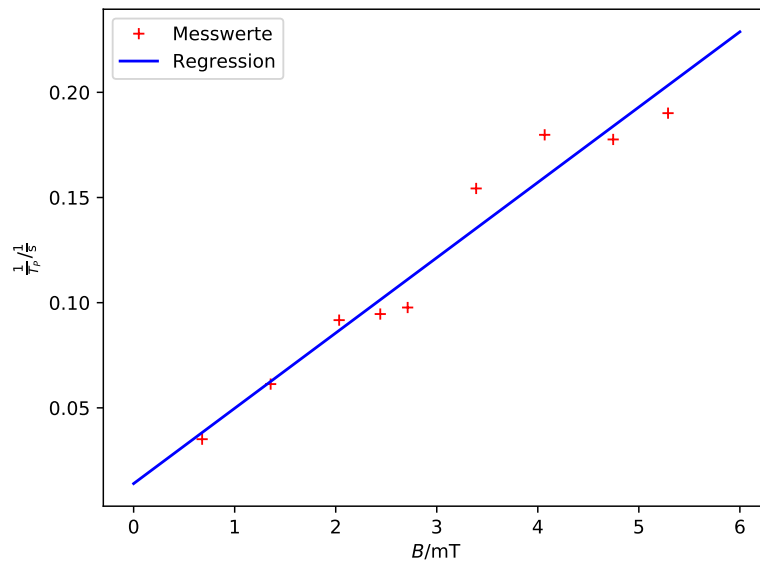
$$\mu_{\text{Dipol2}} = \frac{4\pi^2 J_k}{m_2} \quad (16)$$

$$\mu_{\text{Dipol2}} = (27.67 \pm 0.93) \cdot 10^{-2} \text{ A m s}$$

### 4.3 Bestimmung des magnetischen Momentes über die Präzession eines Magneten

**Tabelle 3:** Messwerte der Methode über die Präzession

$I / \text{A}$	$\bar{T} / \text{s}$
0.5	28.50
1.0	16.31
1.5	10.90
1.8	10.57
2.0	10.24
2.5	6.48
3.0	5.56
3.5	5.63
3.9	5.26



**Abbildung 3:** Messwerte und lineare Regression der Methode über Präzession

Analog wie bei den anderen beiden Methoden, wird hierbei das magnetische Moment über die Steigung der linearen Regression berechnet.

$$m_3 = \frac{\mu_{\text{Dipol3}}}{2\pi L_k} = \frac{\mu_{\text{Dipol3}}}{2\pi^2 J_k f} \quad (17)$$

daraus folgt direkt

$$\mu_{\text{Dipol3}} = \frac{4\pi 1 J_k}{m_3} \quad (18)$$

Durch Einsetzen der Steigung  $m_3$  durch die lineare Regression und der bekannten Werte, ergibt sich das magnetische Moment des Dipols

$$\mu_{\text{Dipol3}} = (28.62 \pm 2.48) \cdot 10^{-2} \text{ A m s} \quad (19)$$

## 5 Diskussion

Die drei errechneten magnetischen Momente im Vergleich:

**Tabelle 4:** Vergleich der magnetischen Momente

Methode	$\mu_{\text{Dipol}} / \text{ A m s}$
1	$(30.35 \pm 1.37) \cdot 10^{-2}$
2	$(27.67 \pm 0.93) \cdot 10^{-2}$
3	$(28.62 \pm 2.48) \cdot 10^{-2}$

Zu erkennen ist, dass es kleine Abweichungen bei den berechneten Werten gibt. Diese sind auf die Ungenauigkeit der Messungen zurückzuführen. Zum Beispiel bei der Methode durch die Gravitation war oft nicht eindeutig zu erkennen, wann sich der Stab in der Kugel eingependelt hat, da dieser fast nie ruhig stand, sondern immer nur annähernd ruhig.

Bei der zweiten Messreihe, also durch die Messung der Periodendauer, gab es auch Fehlerquellen. Eine davon war, dass man 10 Periodendauern messen sollte, sobald man das Magnetfeld angestellt hat. Die Schwingung konnte man somit durch einen ungedämpften harmonischen Oszillator annähern, aber in der Realität ist immer eine kleine Dämpfung vorhanden. Diese konnte zwar durch das Luftkissen reduziert, aber nicht vollständig entfernt werden.

Bei der dritten und letzten Methode haben sich Fehler durch das Stroboskop eingeschlichen, da es sehr schwierig war, die Kugel in der Frequenz des Stroboskopes rotieren zu lassen. Eine weitere Fehlerquelle ist wiederum die Zeit, denn auch diese Bewegung ist gedämpft und somit bei längerer Dauer ungenau. Dies wurde damit einigermaßen behoben, indem die Präzessionsbewegung direkt gestartet wurde, als die Rotationsfrequenz erreicht wurde.

Dennoch ist zu sehen, dass die Werte verhältnismäßig nah beieinander liegen.