

## V27: Der Zeeman-Effekt

Felix Geyer

[felix.geyer@tu-dortmund.de](mailto:felix.geyer@tu-dortmund.de)

Rune Dominik

[rune.dominik@tu-dortmund.de](mailto:rune.dominik@tu-dortmund.de)

Durchführung: 27. November 2017

Abgabe: 04. Dezember 2017

# 1 Theorie

Der Zeeman-Effekt tritt auf, wenn Atome einem externen Magnetfeld unterworfen werden. Dadurch wird die Entartung der Energieniveaus in der Quantenzahl  $m$  aufgehoben, sodass die diese Energieniveaus aufspalten.

Zur Berechnung der Wechselwirkung der Drehimpulse und der magnetischen Momente untereinander, müssen die Drehimpulse eines Hüllenelektrons betrachtet werden, also der Bahndrehimpuls  $\vec{l}$  und der Spin  $\vec{s}$ . Das magnetische Moment des Drehimpulses ist definiert nach

$$\vec{\mu}_l = -\mu_B \frac{\vec{l}}{\hbar} = -\mu_B \sqrt{l(l+1)} \vec{l}_e \quad (1)$$

mit dem magnetischen Moment

$$\mu_B = -\frac{1}{2} e_0 \frac{\hbar}{m_0},$$

dem Einheitsvektor  $\vec{l}_e$  in  $\vec{l}$  Richtung und mit Elementarladung und Ruhemasse des Elektrons. Aus dem Spin-Gerlach-Experiment folgt das Analogon für den Spin

$$\vec{\mu}_s = -g_s \frac{\mu_B}{\hbar} \vec{s} = -g_s \mu_B \sqrt{s(s+1)} \vec{s}_e \quad (2)$$

mit dem LANDÉ-FAKTOR des Elektrons  $g_s$ , welcher ungefähr den Wert 2 besitzt. Wie aus (1) und (2) ersichtlich, ist damit  $\vec{\mu}_s$  entweder doppelt so groß wie  $\vec{\mu}_l$ . Dies wird als **magnetomechanische Anomalie des Elektrons** bezeichnet. Nun werden, wie bereits erwähnt, die Wechselwirkungen der Drehimpulse und magnetischen Momente untereinander und miteinander behandelt. Da diese aber im Allgemeinen sehr unübersichtlich sind, werden zwei Grenzfälle betrachtet:

- **Niedrige Kernladungszahl:** Die Wechselwirkung zwischen den Bahndrehimpulsen ist so dominant, dass sich durch Addition ein Gesamtdrehimpuls  $\vec{L}$  der Hülle aus diesen bildet. Die Bahndrehimpulse von abgeschlossenen Schalen sind dabei stets 0 und fließen somit nicht in den Gesamtdrehimpuls ein.  $\vec{L}$  ist dabei quantisiert, und zwar gibt es nur Gesamtdrehimpulse, deren Quantenzahl ganzzahlig ist. Die Terme zu den Quantenzahlen 0, 1, 2 und 3 heißen S-, P-, D- und F-Terme. Der Gesamtdrehimpuls hat ebenfalls ein zugehöriges magnetisches Moment, welches sich aus (1) zu

$$|\vec{\mu}_L| = \mu_B \sqrt{L(L+1)} \quad (3)$$

ergibt. Auch für den Spin gibt es einen Gesamtspin, analog zum Bahndrehimpuls, mit dem Unterschied, dass für die Quantisierung  $\frac{N}{2}, \frac{N}{2}-1, \dots, \frac{1}{2}, 0$  (Mit  $N$  als Gesamtzahl der Elektronen in unabgeschlossenen Schalen) gilt. Analog zu (3) gilt für das magnetische Moment des Gesamtspins

$$|\vec{\mu}_s| = g_s \mu_B \sqrt{S(S+1)}. \quad (4)$$

Unter der Voraussetzung, dass das angelegte externe Magnetfeld kleiner als ungefähr 10 T, koppeln Gesamtspin  $\vec{S}$  und Gesamtdrehimpuls  $\vec{L}$  zum Gesamtdrehimpuls  $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$  der Elektronenhülle. Dies nennt sich **LS-Kopplung**. Für den Versuch wird diese Kopplungsart angenommen. Die Quantenzahl des Gesamtdrehimpulses ist entweder halb- oder ganzzahlig, abhängig von S.

- **Hohe Kernladungszahl:** In diesem Fall ist die Wechselwirkung zwischen Spin und Bahndrehimpuls eines Elektrons dominant gegenüber der Wechselwirkung der Größen untereinander. Somit existiert kein Gesamtdrehimpuls und Gesamtspin, lediglich der Gesamtdrehimpuls

$$\vec{J} = \sum_i \vec{l}_i + \vec{s}_i$$

der Hülle existiert noch.

Nun wird die Aufspaltung der Energieniveaus näher betrachtet. Als erstes wird das magnetische Moment zum Gesamtdrehimpuls  $\vec{J}$

$$\vec{\mu} = \vec{\mu}_L + \vec{\mu}_S \quad (5)$$

definiert. Die senkrechte Komponente des magnetischen Moments (relativ zu  $\vec{J}$ ) verschwindet dabei. Für den Betrag des magnetischen Moments ergibt sich

$$|\vec{\mu}_J| = \mu_B g_J \sqrt{J(J+1)}. \quad (6)$$

Dabei gilt

$$g_J = \frac{3J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)} \quad (7)$$

für den sogenannten **Landé-Faktor**. Weiterhin ist zu beachten, dass sich nach Anlegen eines externen Magnetfeldes nur solche Winkel zwischen  $\vec{m}_u$  und  $\vec{B}$  ein, bei denen

$$\mu_{J_z} = -m g_J \mu_B$$

für die z-Komponente des magnetischen Moments gilt. Dabei ist  $m$  die bereits oben erwähnte **Orientierungsquantenzahl**, die von  $-J, -J+1, \dots, J$  definiert ist. Nun lässt sich über  $E_{\text{mag}} = -\vec{\mu}_J \cdot \vec{B}$  die Energie berechnen, die das magnetische Moment im Magnetfeld erhält. Mit (7) folgt

$$E_{\text{mag}} = m g_J \mu_B. \quad (8)$$

Mit (8) ist nun ein Ausdruck für die Aufspaltung der Energieniveaus in äquidistante Niveaus gegeben. Da dies nicht nur auf den Grundzustand, sondern auch auf alle angeregten Zustände zutrifft, wird es neue Übergänge zwischen den Energieniveaus geben, welche sich in der Aufspaltung der Spektrallinien äußert.

Zur Bestimmung der Auswahlregeln für Übergänge zwischen den neu entstandenen Energieniveaus wird die zeitabhängige Schrödingergleichung gelöst. Als Lösung für die Wellenfunktion wird eine Linearkombination aus zwei Lösungen für die an dem Übergang beteiligten Energieniveaus genutzt, die da lautet

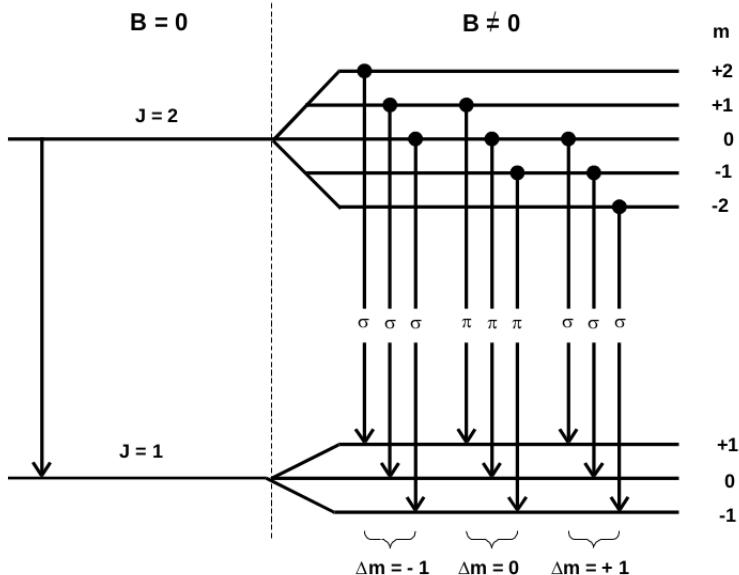
$$\Psi_{\text{ges}}(\vec{r}, t) = C_\alpha \Psi_\alpha(\vec{r}) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_\alpha t\right) + C_\beta \Psi_\beta(\vec{r}) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_\beta t\right)$$

mit  $C_{\alpha,\beta}$  als Koeffizienten, die man aus der Normierbarkeit erhält und  $E_{\alpha,\beta}$  als Energieniveaus, zwischen denen der Übergang stattfindet. Im folgenden werden über die Intensität der emittierten Strahlung mittels Poyting-Vektor die Auswahlregeln

$$\Delta m = 0, -1 \text{ und } +1 \quad (9)$$

mit  $\Delta m = |m_\alpha - m_\beta|$ , also der Differenz der Orientierungsquantenzahlen der beiden Niveaus. Bei  $\Delta m = 0$  ist die emittierte Strahlung linear zu  $\vec{B}$  polarisiert. Bei  $\Delta m = \pm 1$  eine in der Drehrichtung unterschiedliche zirkulare Polarisation zu erkennen.

Da in der zeitabhängigen Schrödingergleichung der Spin nicht berücksichtigt wird, sind die bisherigen Ergebnisse nur für den Fall  $S = 0$  gültig. Dies nennt man den **Normalen Zeeman-Effekt**. In diesem Fall gilt nach (7) für alle  $J$ :  $g_J = 1$ . Folglich sind die Aufspaltungen unabhängig von den Quantenzahlen. Ein Beispiel für eine solche Aufspaltung

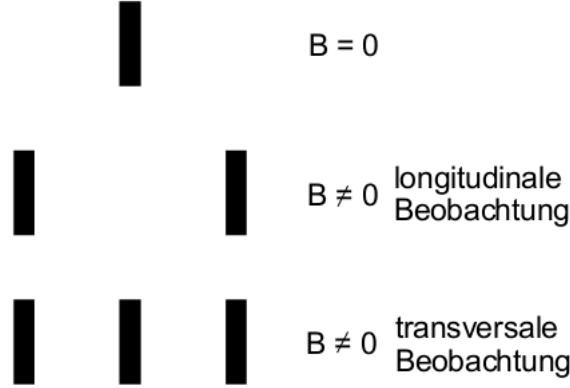


**Abbildung 1:** Aufspaltung der Energieniveaus und zugehörige Polarisation für den normalen Zeeman-Effekt. [Dor17]

ist in Abbildung 1 zu sehen. Dabei ist zu sehen, dass die Energieniveaus äquidistant sind. Dies folgt aus (8), da  $g_J = 1$  gilt. Es ergibt sich

$$E_{\text{mag}} = m \mu_B B. \quad (10)$$

Die Aufspaltungslinien lassen sich den Auswahlregeln zuordnen, was auch in Abbildung 1 dargestellt ist. Allerdings sind je nach Beobachtungsrichtung wegen der unterschiedlichen Polarisation nicht alle Linien zu sehen. Die  $\pi$ -Linie (zu  $\Delta m = 0$ ) ist nur sichtbar, wenn die Beobachtungsrichtung senkrecht zur Feldrichtung, also transversal, ist. Außerdem ist sie gegenüber der feldfreien Linie nicht verschoben, im Gegensatz zu den Linien mit  $\Delta m = \pm 1$ , da sich die Energie um  $\mu_B B$  im Vergleich zum feldfreien Fall unterscheidet. Weil sie zirkular polarisiert sind, erscheinen sie bei transversaler Beobachtung als linear polarisiert. So eine Aufspaltung ist in Abbildung 2 zu sehen. Der andere Fall, also  $S \neq 0$ ,



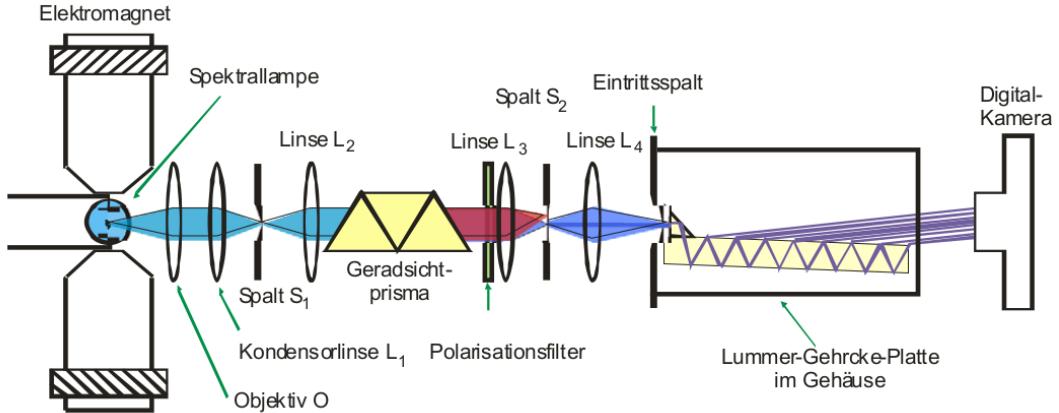
**Abbildung 2:** Aufspaltung einer Spektrallinie nach Beobachtungsrichtung beim normalen Zeeman-Effekt.

wird **Anormaler Zeeman-Effekt** genannt. Die Auswahlregeln (9) sind auch in diesem Fall noch gültig, dies lässt sich über die spinabhängige Schrödinger-Gleichung zeigen. Die Auspaltung wird vielfältiger, da  $g$  nicht mehr für alle  $J$  1 ist, sondern von  $L, S$  und  $J$  abhängt.

## 2 Durchführung

### 2.1 Versuchsaufbau

Der Aufbau des Versuchs ist in Abbildung 3 zu sehen. Das Licht stammt von einer Cd-Lampe, deren rote und blaue Linie aufgespalten werden. Dies wird realisiert, indem die Lampe in einen starken Elektromagnet gestellt wird. Dann wird transversal zum Magnetfeld durch Linsen, Spalte und ein Geradsichtprisma das Licht nach Wellenlängen aufgespalten. Nun kann durch einen Spalt und einen Polarisationsfilter die gewünschte Linie mit der gewünschten Polarisation ausgewählt und auf eine Lummer-Gehrke-Platte abgebildet werden. Das entstehende Interferenzmuster wird über eine Digitalkamera aufgenommen. Bei monochromatischem Licht erzeugt die Lummer-Gehrke-Platte Gangunterschiede von  $\lambda$ , also genau der eingestrahlten Wellenlänge. Durch Einschalten des Magnetfeldes tritt eine Verschiebung der Wellenlänge um  $\Delta\lambda$  auf, welche wiederum



**Abbildung 3:** Der Versuchsaufbau im Schema.

die interferierten Strahlen um  $\Delta s$  verschiebt. Dabei ist allerdings zu beachten, dass das Dispersionsgebiet

$$\Delta\lambda_D = \frac{\lambda^2}{2d} \cdot \sqrt{\frac{1}{n^2 - 1}} \quad (11)$$

nicht überschritten wird, da sonst eine Überlagerung der Wellenlängen auftreten (mit  $d$  als Dicke der Platte und  $n$  als Ordnung des Maximums). Für das Auflösungsvermögen  $A$  der Lummer-Gehrke-Platte gilt

$$A = \frac{L}{\lambda} (n^2 - 1) \quad (12)$$

mit  $L$  als Länge der Platte und  $n$  als Brechungsindex.

## 2.2 Versuchsdurchführung

Zuerst wurde der Elektromagnet geeicht, indem das B-Feld über ein Gaussmeter in Abhängigkeit vom Feldstrom gemessen wird in einem Intervall von  $0 \leq I \leq 20$  A. Dann wird der bereits beschriebene Aufbau so justiert, dass die gesuchten Wellenlängen ( $\lambda = 480$  nm und  $\lambda = 643.8$  nm) mit der durch den Polarisationsfilter eingestellten Polarisation auf die Lummer-Gehrke-Platte fallen. Dann werden mittels Digitalkamera Bilder von Interferenzbildern bei verschiedenen Polarisationen und Magnetfeldstärken aufgenommen, um daraus die Wellenlängenverschiebung zu bestimmen.

## 3 Auswertung

### 3.1 Fehlerrechnung

Die Fehlerrechnung wird in PYTHON<sup>1</sup> durchgeführt. Mittelwerte werden durch die Funktion MEAN aus dem Paket NUMPY<sup>2</sup>, die zugehörigen Standardabweichungen durch die Funktion STATS.SEM aus dem Paket SCIPY<sup>3</sup> berechnet. Fehlerfortpflanzung wird durch die Bibliothek UNCERTAINTIES.UNUMPY<sup>4</sup> automatisiert.

### 3.2 Eichung des B-Feldes

Die Messwerte sowie eine grafische Darstellung mit Fit sind in Abbildung 4 zu finden. Der Fit wurde nach least-squares durch die Funktion POLYFIT aus dem PYTHON Paket NUMPY mit einem Polynom 3. Grades erstellt.

Die Fitparameter mit Fehlern lauten:

$$\begin{aligned} a_3 &= (-0.072 \pm 0.009) \frac{\text{mT}}{\text{A}^3} \\ a_2 &= (1.350 \pm 0.269) \frac{\text{mT}}{\text{A}^2} \\ a_1 &= (52.760 \pm 2.284) \frac{\text{mT}}{\text{A}} \\ a_0 &= (14.007 \pm 5.145) \text{ mT}. \end{aligned} \tag{13}$$

Mit den Werten in (13) folgt also als genäherte Feldstromstärke - Magnetfeld - Beziehung:

$$B(I) = a_3 \cdot I^3 + a_2 \cdot I^2 + a_1 \cdot I + a_0 \tag{14}$$

### 3.3 Zur Berechnung der $\Delta(m \cdot g)$ -Werte

Die bekannte Formel

$$E(\lambda) = \frac{hc}{\lambda}$$

zur Berechnung der Energie einer elektromagnetischen Welle aus deren Wellenlänge  $\lambda$  sowie dem PLANCKschen Wirkungsquantum  $h$  und der Vakuumlichtgeschwindigkeit  $c$  ist offensichtlich nicht linear in  $\lambda$ . Da für diese Auswertung jedoch ein Wert  $\Delta E(\Delta\lambda)$  notwendig ist um nach:

$$\Delta E = \underbrace{\{m_1 g_1 - m_2 g_2\}}_{\Delta(m \cdot g)} \mu_B B \tag{15}$$

---

<sup>1</sup>Version: 3.6.3

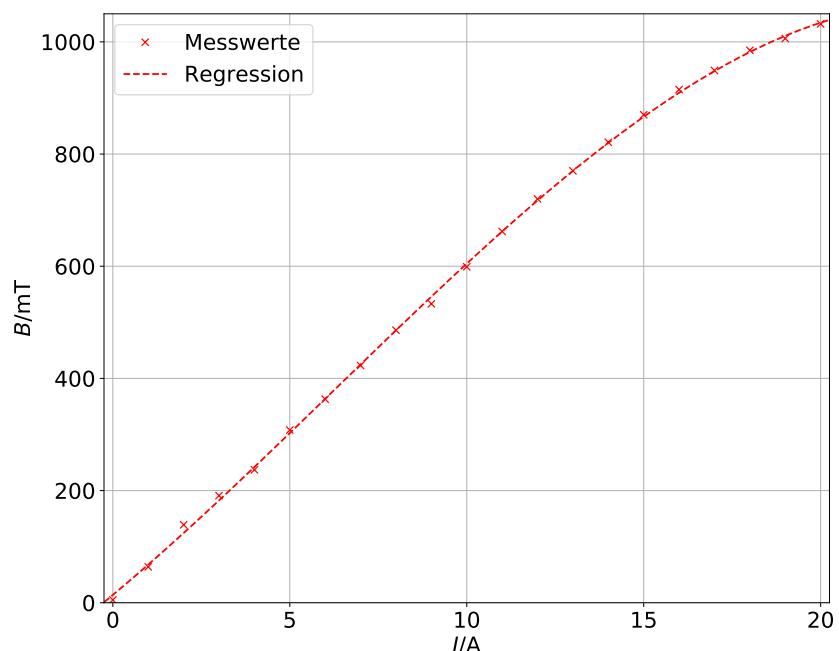
<sup>2</sup>Version: 3.6.3

<sup>3</sup>Version: 1.0.0

<sup>4</sup>Version: 3.0.1

$I/A$	$B/mT$
0	5
1	64
2	139
3	191
4	237
5	308
6	363
7	423
8	486
9	533
10	599
11	662
12	720
13	770
14	821
15	870
16	915
17	949
18	985
19	1006
20	1032

(a) Messwerte.



(b) Grafische Darstellung mit Regression.

**Abbildung 4:** Magnetfeldeichung.

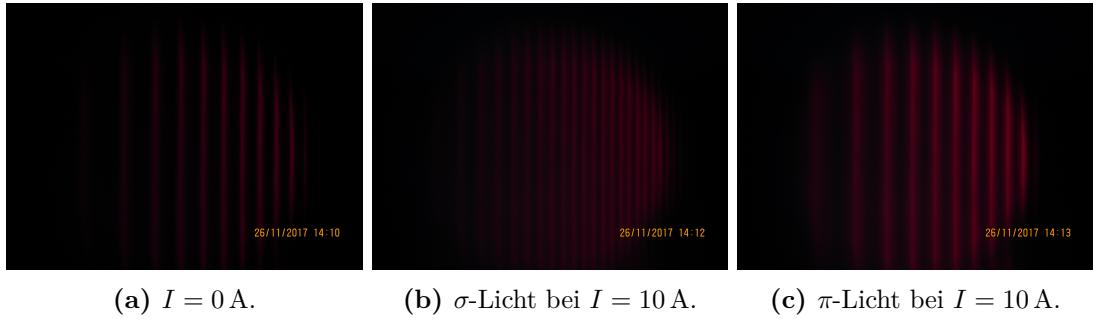
aus einer Magnetfeldstärke  $B$  und dem BOHRschen Magenton einen Wert  $\Delta(m \cdot g)$  zu berechnen, muss die Ableitung  $\frac{\partial}{\partial \lambda} E$  bestimmt werden da ein Gleichsetzen der beiden Ausdrücke für  $E$  aufgrund der erwähnten nicht-linearity verboten ist. Aus der Ableitung folgt:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} E = -\frac{hc}{\lambda^2} \Leftrightarrow \Delta E = -\frac{hc}{\lambda^2} \Delta \lambda. \quad (16)$$

Dieser Ausdruck ist nun Abhängig von der konstanten unverschobenen Wellenlänge  $\lambda$  und linear in der Wellenlängenverschiebung  $\Delta \lambda$ . Ein Gleichsetzen der Ausdrücke (15) und (16) ist daher erlaubt und liefert:

$$|\Delta(m \cdot g)| = \frac{hc}{\lambda^2 \mu_B B} \Delta \lambda. \quad (17)$$

## 4 Auswertung der roten Linie



**Abbildung 5:** Aufspaltung der roten Spektrallinie.

Die Aufgenommenen Bilder sind in Abbildung 5 zu finden. Erwartet wurde eine Aufspaltung ein zwei  $\sigma$ - und eine  $\pi$ -Linie, wobei letztere von der Position mit der nicht-aufgespaltenen Spektrallinie übereinstimmen muss. Diese Aufspaltung wird wie erwartet beobachtet. Die Abstände zwischen den Linien wurden mit einem Bildbearbeitungsprogram (Gimp) am PC in pixeln gemessen und sind, zusammen mit den Wellenlängenänderungen

$$\delta \lambda = \frac{1}{2} \frac{\Delta s}{\delta s} \Delta \lambda_D \quad (18)$$

in Tabelle 1 zu finden. Der Wert  $\Delta \lambda_D$  beträgt dabei nach (12) für die roten Spektrallinie ( $\lambda = 644 \text{ nm}$ )  $48.91 \text{ pm}$ . Im Mittel erhält man eine Wellenlängenabweichung  $\delta \lambda$  von  $(11.85 \pm 0.22) \text{ pm}$ . Zusammen mit einer Wellenlänge  $\lambda = 644 \text{ nm}$  und einer nach (13) aus der Feldstromstärke  $I = 10 \text{ A}$  bestimmten Magnetfeldstärke  $B = (0.6 \pm 0.4) \text{ T}$  ergibt sich ein Wert von:

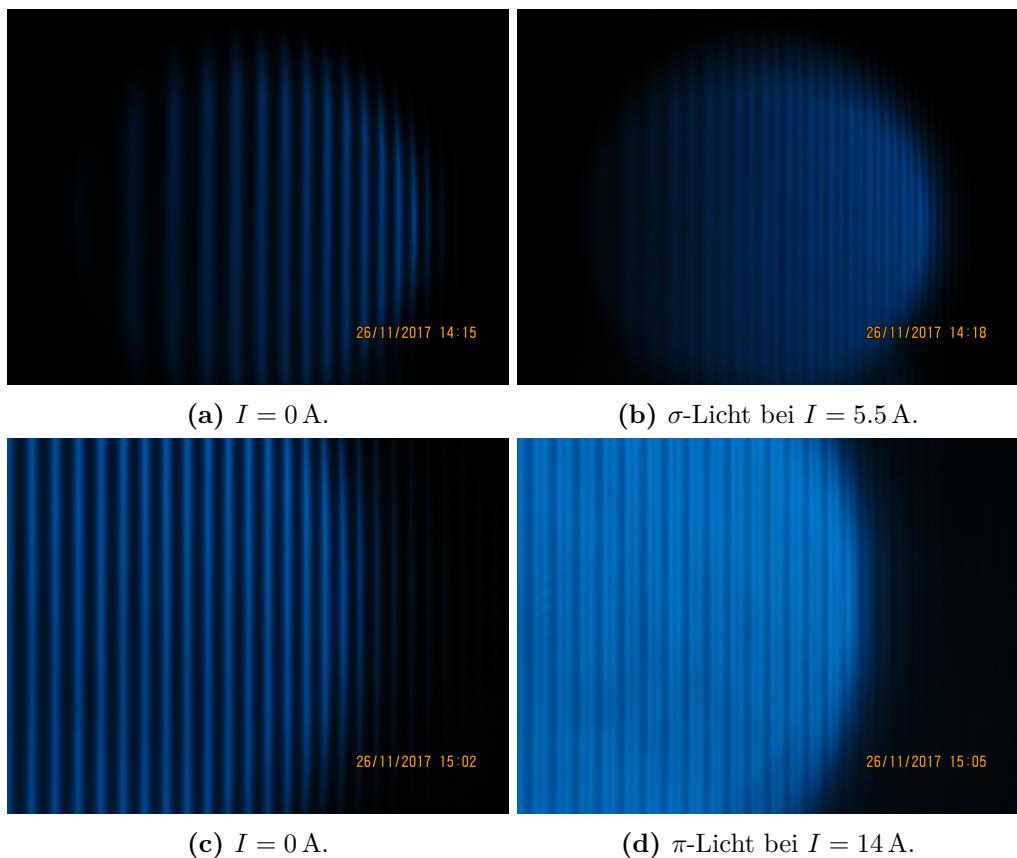
$$|\Delta(m \cdot g)|_{\sigma} = 1.01 \pm 0.06.$$

Da bei  $\pi$ -Licht keine Aufspaltung beobachtet wird, wird der Wert hier zu 0 angenommen.

**Tabelle 1:** Aus den Grafiken gewonnene Werte für die rote Spektrallinie.

$\Delta s / \text{px}$	$\delta s / \text{px}$	$\delta\lambda / \text{pm}$
456	196	10.51
344	172	12.23
288	148	12.57
256	124	11.85
244	108	10.82
212	100	11.54
200	100	12.23
180	92	12.50
170	84	12.08
152	76	12.23

## 5 Auswertung der blauen Linie



**Abbildung 6:** Aufspaltung der blauen Spektrallinie.

Die Aufgenommenen Bilder sind in Abbildung 6 zu finden. Erwartet wurde eine Aufspaltung in zwei mal zwei  $\sigma$ - und zwei  $\pi$ -Linien, wobei die ersteren aufgrund des geringen Abstandes als zwei Linien erscheinen. Diese Aufspaltung wird wie erwartet beobachtet. Wieder wurden die Abstände in Gimp gemessen und finden sich zusammen mit den Wellenlängenänderungen in Tabelle 2. Der Wert  $\Delta\lambda_D$  beträgt dabei nach (12) für die blaue Spektrallinie ( $\lambda = 480 \text{ nm}$ ) 26.95 pm. Im Mittel erhält man eine Wellenlängenab-

**Tabelle 2:** Aus den Grafiken gewonnene Werte für die blaue Spektrallinie.

$\sigma$ -Aufspaltung			$\pi$ -Aufspaltung		
$\Delta s/\text{px}$	$\delta s/\text{px}$	$\delta\lambda/\text{pm}$	$\Delta s/\text{px}$	$\delta s/\text{px}$	$\delta\lambda/\text{pm}$
328	156	6.41	180	72	5.39
272	148	7.33	181	68	5.06
228	120	7.09	180	74	5.54
200	100	6.74	175	72	5.54
188	85	6.09	175	69	5.31
180	88	6.59	170	67	5.31
160	68	5.73	168	60	4.81
156	65	5.61	160	61	5.14
144	56	5.24	155	56	4.87
128	43	4.53	155	60	5.22
125	52	5.61	148	56	5.10
112	44	5.29	150	52	4.67
			151	48	4.28
			147	50	4.58
			144	48	4.49
			128	40	4.21

weichung

$$\delta\lambda_\sigma = (6.02 \pm 0.24) \text{ pm}$$

$$\delta\lambda_\pi = (4.97 \pm 0.11) \text{ pm}.$$

Bei einer Feldstromstärke  $I_\sigma = 5.5 \text{ A}$  ( $B = (0.333 \pm 0.016) \text{ T}$ ) bzw.  $I_\pi = 14 \text{ A}$  ( $B = (0.82 \pm 0.07) \text{ T}$ ) ergibt sich ein Wert von:

$$|\Delta(m \cdot g)|_\sigma = 1.68 \pm 0.10$$

$$|\Delta(m \cdot g)|_\pi = 0.56 \pm 0.05.$$

## 6 Diskussion

Ein Vergleich zwischen Theorie- und Messwerten für  $|\Delta(m \cdot g)|$  findet sich in Tabelle 3. Die Theoriewerte sind dabei aus (15) gewonnen. Für die rote Spektrallinie befinden

**Tabelle 3:** Theorie- und aus der Messung berechnete Werte für die beobachteten Aufspaltungen.

Aufspaltung	Theorie	Messung
$\sigma$ -Rot	1	$1.01 \pm 0.06$
$\pi$ -Rot	0	0
$\sigma$ -Blau	1.75	$1.68 \pm 0.10$
$\pi$ -Blau	0.5	$0.56 \pm 0.05$

sich die Theoriewerte im Bereich der Messungenauigkeit, für die  $\sigma$ -Aufspaltung der blaue Spektrallinie ebenso. Lediglich bei der  $\pi$ -Aufspaltung der blauen Linie ist dies nicht der Fall, der Theoriewert befinden sich jedoch in einem  $2\sigma$ -Intervall um den Messwert.

Als eindeutige, systematische Fehlerquelle ist hier die Art der Bestimmung der Messwerte zu nennen. Diese wurden durch das manuelle Setzen von Markern in einem Bildbearbeitungsprogramm gewonnen. Da die Linien nicht perfekt scharf abgebildet werden können, bieten sich hier viele Möglichkeiten für Abweichungen. Diese Fehlerquelle ließe sich minimieren, indem die Messwerte automatisch aus den Bildern errechnet werden. Hierzu könnte das Auslesen des Grauwertes des Bildes in Abhängigkeit von der Position auf der x-Achse verwendet werden. Als weitere systematische Fehlerquelle muss die Magnetfeldeichung in Betracht gezogen werden. Durch die Eichung an sich wird ein Ablesefehler durch die Hall-Sonde minimiert, die gewonnenen Wertepaare weisen jedoch für sich große Fehler auf. Insbesondere muss das Ampermeter zur Messung der Feldstromstärke bestenfalls als grob bezeichnet werden. Ein digitales Messgerät würde dabei bessere Ergebnisse liefern. Messungen mit einer Hall-Sonde bergen immer ein hohes Fehlerpotential, da nur die Magnetfeldkomponente senkrecht auf die Sonde vermessen wird. Die Sonde kann daher nicht immer perfekt im Magnetfeld ausgerichtet werden.

Zusammenfassend sind die Ergebnisse jedoch als außerordentlich gut zu bewerten. Insbesondere durch das hohe Auflösungsvermögen der LUMMER-GEHRKE-Platte von 209 128.6 für die rote und 285 458.1 für die blaue Linie können gute Ergebnisse gewonnen werden. Generell entsprechen die Ergebnisse den Erwartungen und konnten den ZEEMAN-Effekt gut nachvollziehbar machen.

## **Literatur**

[Dor17] TU Dortmund. V27: Der Zeeman-Effekt. 1. Dez. 2017. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/FP/SKRIPT/V27.pdf>.