

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DORTMUND

PHYSIKALISCHES PRAKTIKUM

V354 - Gedämpfte und erzwungene Schwingungen

Felix Landmeyer, felix.landmeyer@tu-dortmund.de

Lars Röhrig, lars.roehrig@tu-dortmund.de

DURCHFÜHRUNG AM 9. DEZEMBER 2016

ABGABE AM 16. DEZEMBER 2016

KORREKTURABGABE AM 13. JANUAR 2017

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Theorie	3
3	Aufbau und Durchführung	5
3.1	Abklingdauer T_{ex} und Dämpfungsstand R_{eff}	5
3.2	Durchführung der Bestimmung von R_{ap}	6
3.3	Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung	6
3.4	Frequenzabhängigkeit der Phase	6
4	Auswertung	6
4.1	Effektivwiderstand R_{eff} und Abklingdauer T_{ex}	6
4.2	aperiodischer Grenzfall	8
4.3	Güte q und Resonanzkurve	8
4.4	Frequenzabhängigkeit der Phase	9
5	Diskussion	11

1 Einleitung

Im Versuch wird die Funktionsweise eines gedämpften Schwingkreises untersucht. Dabei wird im Einzelnen auf die Amplitude und den effektive Dämpfungswiderstand eingegangen. Außerdem wird der Widerstand untersucht, bei welchem sich der aperiodische Grenzfall einstellt und im Letzten Teil wird die Frequenzabhängigkeit von Spannung und Phasendifferenz eines von außen angeregten Schwingkreises genauer kennengelernt.

2 Theorie

Ein Schwingkreis ist ein System, in welchem ein Kondensator mit der Kapazität C und eine Spule mit der Induktivität L leitend miteinander verbunden sind. Eine einmalige Energie, die dem Schwingkreis hinzugefügt wurde, ist im Idealfall aufgrund der Energieerhaltung im System "gefangen". Die Energie pendelt zwischen den Bauteilen. Baut der Kondensator sein elektrisches Feld ab, fließt ein Strom, welcher ein magnetisches Feld in der Spule erzeugt. Durch Abbau dieses magnetischen Feldes induziert die Spule einen Strom in entgegengesetzter Richtung (Lenz'sche Regel).

Wird zusätzlich ein Ohmscher Widerstand R in das System eingefügt, so wandelt dieser dauerhaft elektrische Energie in Wärme um. Es folgt eine permanente Abnahme von Strom und Spannung im Schaltkreis. Es wird von *gedämpfter Schwingung* gesprochen.

Ein schematischer Aufbau eines RCL - Schwingkreises ist in Abbildung 1 dargestellt.

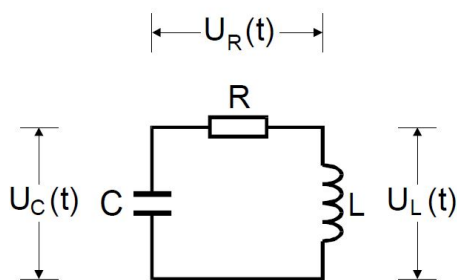


Abbildung 1: Ersatzschaltbild eines gedämpften Schwingkreises [1].

Die Spannungen U_C , U_R und U_L addieren sich nach der Kirchhoffschen Maschenregel zu

$$U_C(t) + U_R(t) + U_L(t) = 0 \quad (1)$$

Mit

$$U_C(t) = \frac{Q(t)}{C}, \quad I = \frac{dQ}{dt},$$

$$U_R(t) = R \cdot I \quad \text{und}$$

$$U_L(t) = L \cdot \frac{dI}{dt}$$

folgt eine homogene Differentialgleichung

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC} I = 0. \quad (2)$$

Zur Lösung der Differentialgleichung (2) wird der Ansatz

$$I(t) = e^{-2\pi\mu t} (A_1 e^{2i\pi\nu t} + A_2 e^{-2i\pi\nu t}) \quad (3)$$

mit den Substitutionen

$$\begin{aligned} \nu &:= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}, \\ \mu &:= \frac{R}{4\pi L} \end{aligned} \quad (4)$$

verwendet. Im Folgenden wird zwischen zwei Fällen differenziert:

$$\mathbf{1. \text{ Fall : } \frac{1}{LC} < \frac{R^2}{4L^2} \rightarrow \nu \text{ imaginär.}} \quad (5)$$

Es folgt

$$I(t) \propto e^{-\left(\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}\right)t}. \quad (6)$$

Die Stromamplitude fällt exponentiell ab und hat je nach gewählten Anfangsbedingungen einen oder keinen Extremwert.

$$\mathbf{2. Fall : } \frac{1}{LC} = \frac{R^2}{4L^2} \rightarrow \nu = 0. \quad (7)$$

Dieser Fall wird als aperiodischer Grenzfall bezeichnet und ist dadurch charakterisiert, dass die Stromamplitude am schnellsten abfällt und keine weitere Schwingung durchführt.

$$\mathbf{3. Fall : } \frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2} \rightarrow \nu \text{ reell}, \quad (8)$$

so lässt sich Gleichung (3) mit der Eulerschen Formel umformen zu:

$$I(t) = A_0 e^{-2\pi\mu t} \cos(2\pi\nu t\eta). \quad (9)$$

Zusätzlich ergibt sich für die Abklingdauer T_{ex} :

$$T_{\text{ex}} = \frac{1}{2\pi\mu} \quad (10)$$

Im nächsten Versuchsteil wird der RCL -Schwingkreis zusätzlich von außen durch eine sinusförmige Wechselspannung angeregt.

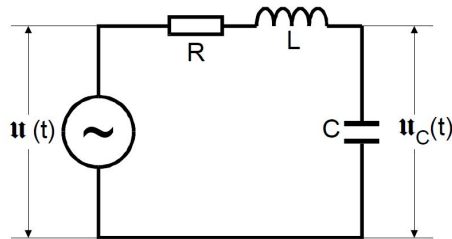


Abbildung 2: Ersatzschaltbild eines gedämpften Schwingkreises mit äußerer Anregung [1, S. 289].

Die anfängliche Differentialgleichung (2) nimmt nun folgende Form an:

$$LC \frac{d^2 \ddot{U}}{dt^2} + RC \frac{dU}{dt} + U = U_0 e^{i\omega t} \quad (11)$$

Es wird untersucht, wie die Amplitude A der Kondensatorspannung und ihr Phasenunterschied gegenüber der Erregerspannung $U(t)$ von der Frequenz abhängen:

$$U_C(\omega, t) = A(\omega) e^{i\omega t}. \quad (12)$$

Für die Spannung U in Abhängigkeit von der Zeit ergibt sich nach Umstellen

$$U(t) = \frac{U_0 (1 - LC\omega^2 - i\omega RC)}{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2} \quad (13)$$

Für die Phasendifferenz $\varphi(\omega)$ werden Imaginär- und Realteil dividiert:

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{\text{Im}(U)}{\text{Re}(U)}\right) = \arctan\left(\frac{-\omega RC}{1 - \omega^2 LC}\right). \quad (14)$$

Für die Frequenzen bei $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$ und $\varphi_2 = \frac{3\pi}{4}$ ergibt sich die Beziehung

$$\varphi_{1,2} = \pm \frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}}. \quad (15)$$

und für die Frequenzen dort

$$\omega_{1,2} = \pm \frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}}. \quad (16)$$

Zusätzlich ist Betrag der Lösungsfunktion mit Gleichung (12) gleich dem Betrag von A . Es folgt aus dem Betrag von A :

$$U_C(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}}. \quad (17)$$

Es ist ersichtlich, dass bei niedrigen Frequenzen ω die Kondensatorsspannung gegen U_0 und bei hohen Frequenzen gegen Null strebt.

Die Resonanzfrequenz ω_{res} beschreibt genau die Frequenz, bei der U_C größere Werte als U_0 annehmen kann. Allgemein wird dieses Phänomen als Resonanz bezeichnet. Die Resonanzfrequenz berechnet sich mit

$$\omega_{\text{res}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}. \quad (18)$$

Wird der Fall $\frac{R^2}{2L^2} \ll \frac{1}{LC}$ betrachtet, dann nähert sich ω_{res} der Frequenz der ungedämpften Schwingung ω_0 an. Dabei liegt die Kondensatorspannung um den Faktor $q = \frac{1}{\omega_0 RC}$ über U_0 , bezeichnet wird q als Güte des Schwingkreises.

Eine weitere wichtige Größe ist das Maß für die Schärfe der Resonanz, beschrieben durch die Breite der in Gleichung (17) beschriebenen Resonanzkurve. Berücksichtigt man

$$\frac{R^2}{L^2} \ll \omega_0^2,$$

so folgt für die Breite der Resonanzkurve:

$$\omega_+ - \omega_- \approx \frac{R}{L}. \quad (19)$$

3 Aufbau und Durchführung

3.1 Abklingdauer T_{ex} und Dämpfungsstand R_{eff}

Um die Abklingdauer T_{ex} und den effektiven Dämpfungswiderstand R_{eff} der Schwingungsamplitude des RLC-Schwingkreises aus Abbildug 3 zu berechnen, wird der kleinere der beiden festen Widerstände R_1 verwendet. An dem Impulsgenerator wird eine Rechteckspannung erzeugt und mit dem Oszilloskop der Bereich der gedämpften Schwingung angezeigt. Die Amplitude der Schwingung sollte bis auf den Faktor 8 abgeklungen sein, bevor ein neuer Impuls erzeugt wird. Anhand der Einhüllenden der Schwingung kann dann T_{ex} nach Gleichung (10) und R_{eff} nach (4) bestimmt werden.

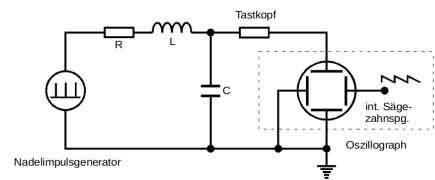


Abbildung 3: Versuchsaufbau [1].

3.2 Durchführung der Bestimmung von R_{ap}

Der Widerstand R_{ap} , bei dem die Schwingung das Verhalten eines aperiodischen Grenzfall besitzt, wird mit dem gleichen Aufbau wie in Abbildung 3 bestimmt. Hier wird jedoch der feste Widerstand R_1 gegen einen variablen Widerstand $R_{5\text{k}\Omega}$ von 0 – 5 k Ω ausgetauscht. Der Widerstand wird zuerst auf sein Maximum gestellt, sodass sich ein Kriechfall des Schwingkreises einstellt. Er wird nun so lange verringert, bis sich der aperiodische Grenzfall einstellt. Dieser wird erreicht, wenn kein Überspringen zu beobachten ist. Dazu wird sich langsam mit dem Widerstand dem Wert angenähert, an dem gerade kein Überspringen der Frequenz zu sehen ist.

3.3 Frequenzabhängigkeit der Kondensatorsspannung

Da auch die Ausgangsspannung des Tastkopfes von der Frequenz abhängt, muss die Spannung U über den Tastkopf gemessen werden. Bei dieser Messung wird der größere der festen Widerstände R_2 verwendet. Die Sinusspannung wird am Generator variiert. Zunächst wird der Spannungsbereich grob eingestellt, um die Resonanzfrequenz zu finden. Der Bereich um die Resonanzfrequenz wird in 1000 Hz-Schritten vermessen.

3.4 Frequenzabhängigkeit der Phase

Über das Zweikanal-Oszilloskop wird sowohl die Schwingung des LRC-Schwingkreises als auch die Erregerschwingung angezeigt. Ein Aufbau der benötigten Schaltung ist in Abbildung 4 gezeigt. Es wird die Phasendifferenz der Schwingungen in Abhängigkeit der Frequenz gemessen. Im Oszilloskop werden beide Spannungsverläufe parallel angezeigt. Die vorherigen Werte werden erneut eingestellt und der Abstand der Maxima bzw. Minima vermessen.

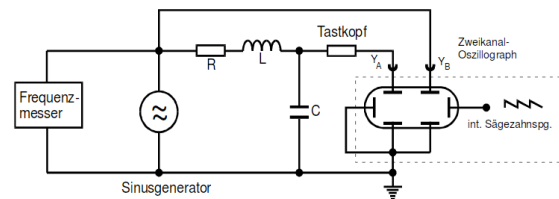


Abbildung 4: Versuchsaufbau [1].

4 Auswertung

Zur Auswertung werden folgende Daten verwendet:

$$L = (10.11 \pm 0.03) \text{ mH}$$

$$C = (2.098 \pm 0.006) \text{ nF}$$

$$R_1 = (48.1 \pm 0.1) \Omega$$

$$R_2 = (509.5 \pm 0.5) \Omega$$

4.1 Effektivwiderstand R_{eff} und Abklingdauer T_{ex}

Zur weiteren Auswertung werden die in Tabelle 1 aufgeführten Werte für die Spannungsamplitude U_C und die zugehörige Zeit t verwendet.

Durch die gedämpfte Schwingung ergibt sich eine Einhüllende, die sich mit $U(t) \propto I(t)$ zu

$$A = A_0 e^{-2\pi\mu t} \quad (20)$$

U_C / V	$t / \mu\text{s}$	U_C / V	$t / \mu\text{s}$	U_C / V	$t / \mu\text{s}$
19.4	8	7.8	88	3.4	168
17.6	16	7.0	96	3.0	176
16.0	24	6.6	104	2.8	184
14.4	32	6.2	112	2.6	192
13.6	40	5.4	120	2.4	200
12.0	48	5.2	128	2.2	208
11.2	56	4.8	136	2.2	216
10.4	64	4.4	144	2.0	224
9.4	72	4.0	152	1.8	232
8.6	80	3.6	160		

Tabelle 1: Messdaten zur Auswertung der Abklingdauer und des Dämpfungswiderstandes.

ergibt. Wird eine lineare Ausgleichsrechnung durchgeführt, ergeben sich als Ergebnisse:

$$A_0 = (20.85 \pm 0.11) \text{ V}$$

$$\mu = (1746.13 \pm 12.60) \text{ 1}/\mu\text{s}$$

Eingesetzt errechnen sich der Effektivwiderstand R_{eff} (4) und T_{ex} (10):

$$R_{\text{eff}} = (221.84 \pm 1.64) \Omega$$

$$T_{\text{ex}} = (911 \pm 7) \text{ ms}$$

Der effektive Widerstand weicht somit um 173.38Ω vom eingebauten Widerstand R_1 ab.

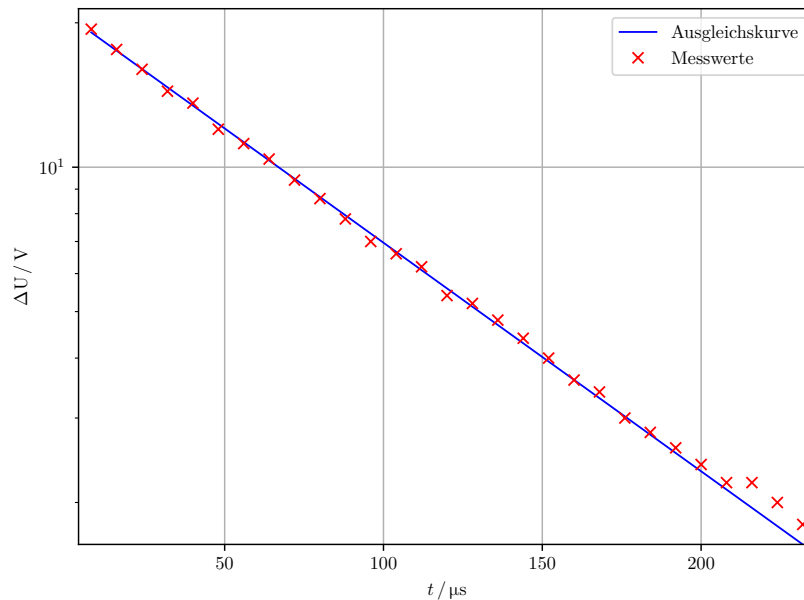


Abbildung 5: Einhüllende der Schwingung in einem halblogarithmischen Plot.

4.2 aperiodischer Grenzfall

Zur Berechnung des Widerstandes im Fall des aperiodischen Grenzfalls wird die Gleichung (7) nach R umgestellt. Für den theoretischen Wert von R_{theo} folgt damit

$$R_{\text{theo}} = (4.39 \pm 0.53) \text{ k}\Omega \quad (21)$$

Anhand der Messung ergibt sich für den Widerstandswert des aperiodischen Grenzfalls

$$R = 3.35 \text{ k}\Omega. \quad (22)$$

Es ergibt sich somit eine relative Abweichung vom theoretischen Wert von 23 %.

4.3 Güte q und Resonanzkurve

Zur Berechnung der Güte q sowie der Breite der Resonanzkurve $\nu_+ - \nu_-$ werden die Daten in Tabelle 2 aufgeführt. Die für den Quotienten benötigte Generatorspannung beträgt $U = 6.8 \text{ V}$. Abbildung 6 zeigt die Daten in einem halblogarithmischen Plot.

ν / kHz	$\frac{U_C}{U}$	U_C / V	ν / kHz	$\frac{U_C}{U}$	U_C / V
15	1.09	7.40	34	3.06	20.8
20	1.29	8.80	35	2.91	19.8
25	1.71	11.6	36	2.68	18.2
30	2.56	17.4	37	2.38	16.2
31	2.79	19.0	38	2.12	14.4
32	3.00	20.4	39	1.88	12.8
33	3.09	21.0	40	1.68	11.4

Tabelle 2: Messwerte zur Berechnung der Güte und Breite der Resonanzkurve

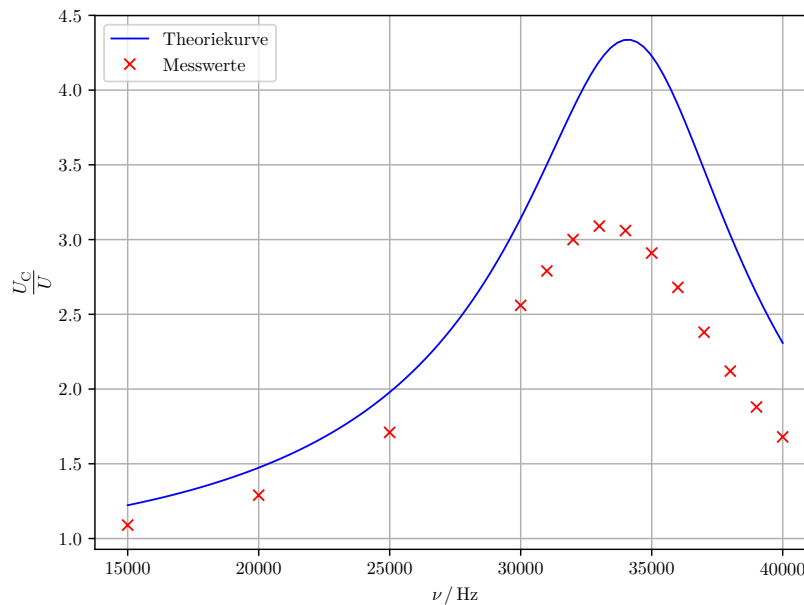


Abbildung 6: Verhältnis von Kondensator- und Generatorspannung gegen die Frequenz.

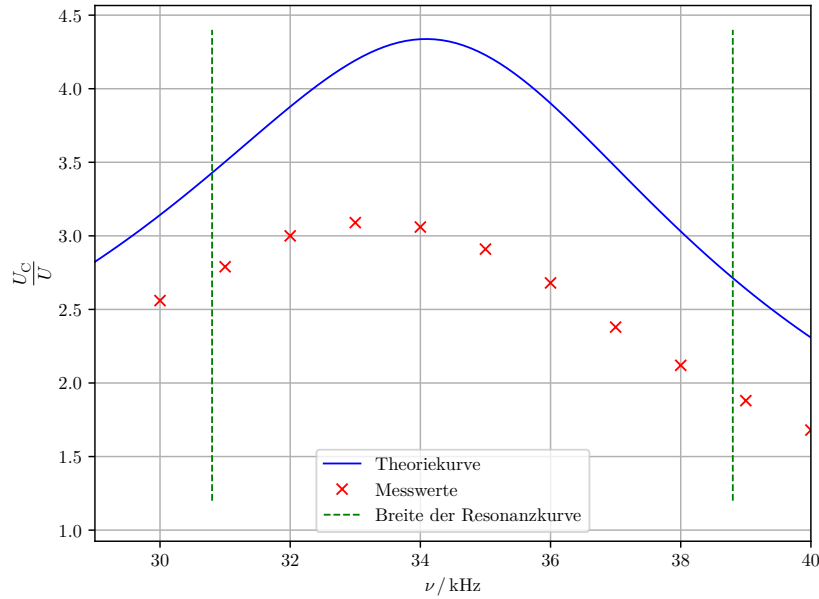


Abbildung 7: Kondensatorsspannung in Abhängigkeit der Frequenz, lineare Darstellung.

Zur Bestimmung der Güte q wird der Maximalwert aus Abbildung 6 abgelesen:

$$q_{\text{ex}} = 3.09$$

Der theoretische Wert errechnet sich mit $q_{\text{th}} = \frac{\omega_{\text{res}}}{\omega_2 - \omega_1}$ zu:

$$q_{\text{th}} = 4.25,$$

mit einer relativen Abweichung von

$$\frac{q_{\text{ex}} - q_{\text{th}}}{q_{\text{th}}} = 27.3 \%$$

Zur Bestimmung der Breite der Resonanzkurve wird das Maximum des Frequenzbereiches linear dargestellt.

Nach Formel (19) berechnet sich die Breite zu

$$\omega_+ - \omega_- = (4.8 \pm 0.02) \cdot 10^3 \text{ Hz} \quad (23)$$

4.4 Frequenzabhängigkeit der Phase

Zur Auswertung der Frequenzabhängigkeit der Phase wird die Phase φ gegen die Frequenz ν halblogarithmisch abgebildet. Alle zur Messung verwendeten Werte sind in Tabelle 3 zu finden. Zur besseren Darstellung wird der Bereich um die Resonanzfrequenz in Abbildung 9 linear dargestellt.

Die Resonanzfrequenz sowie die obere und untere Grenzfrequenz werden mit Gleichung (18) und (16) berechnet

$$\begin{aligned} \text{Resonanzfrequenz : } \omega_{\text{res}} &= 34.088 \text{ kHz} \\ \text{untere Grenzfrequenz : } \omega_1 &= 30.779 \text{ kHz} \\ \text{obere Grenzfrequenz : } \omega_2 &= 38.799 \text{ kHz.} \end{aligned}$$

ν / kHz	$\Delta t / \mu\text{s}$	φ / rad		ν / kHz	$\Delta t / \mu\text{s}$	φ / rad
15	1.2	0.11		38	9.8	2.34
20	2.4	0.30		39	10.0	2.45
25	2.8	0.44		40	10.4	2.61
30	4.8	0.90		41	10.2	2.63
31	5.6	1.09		42	10.2	2.69
32	6.2	1.25		43	10.0	2.70
33	6.8	1.41		44	9.8	2.71
34	7.6	1.62		45	9.6	2.71
35	8.4	1.85		50	9.2	2.89
36	9.2	2.08		55	8.8	3.04
37	9.6	2.23				

Tabelle 3: Messwerte zur Bestimmung der Frequenzabhängigkeit der Phase.

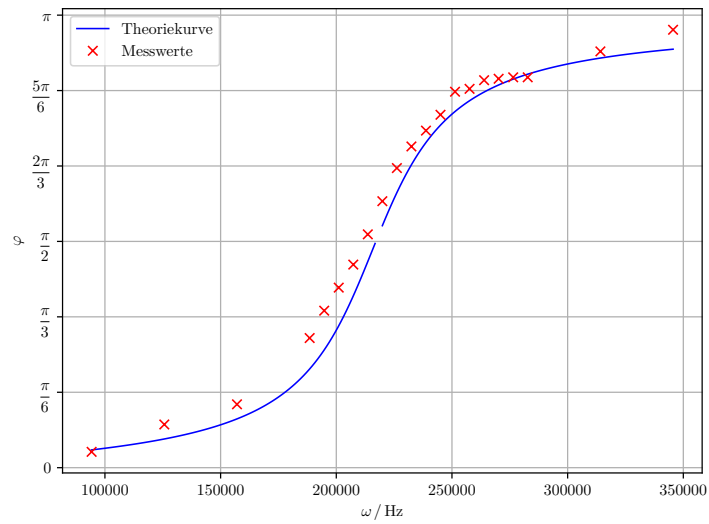


Abbildung 8: Halblogarithmische Darstellung der Phase und der Frequenz.

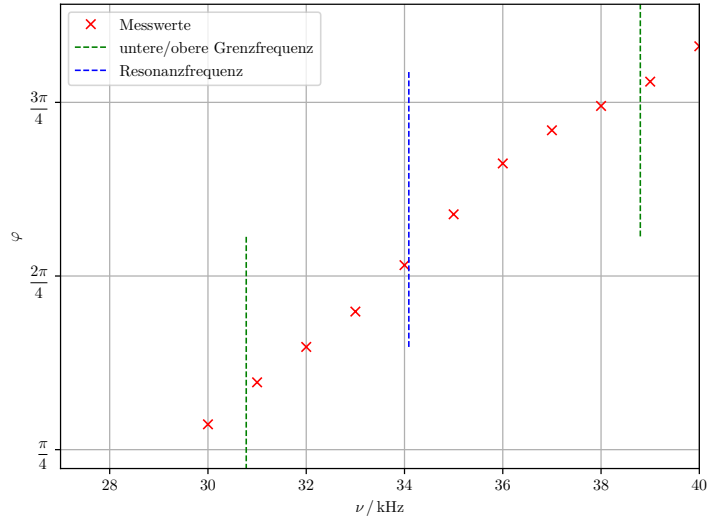


Abbildung 9: Lineare Darstellung um die Resonanzfrequenz.

5 Diskussion

Der erste Versuchsteil zur Messung der Abklingdauer und des Dämpfungswiderstandes liefert gute Ergebnisse im Rahmen der Messungenauigkeit. Die Einhüllende ist klar erkennbar und hat einen logischen Verlauf.

Die extrem hohe Abweichung von R_{eff} vom eingebauten Widerstand R_1 von 173.38Ω ist zum Einen durch den Generatorinnenwiderstand von 50Ω zu erklären. Die restliche Abweichung ist zu hoch, um sie durch sonstige Widerstände zu erklären.

Die Abweichung von R_{ap} ist durch zusätzliche Widerstände im Versuchsaufbau und vor allem durch Ablesefehler bedingt. Da der zu beobachtende Bereich sehr klein gewesen ist, war es nicht ohne weiteres möglich, ein eventuelles Unterschwingen durch den Nullpunkt, oder ein stärkeres Relaxationsverhalten der Spannungscurve zu unterscheiden.

Die Berechnung der Güte weist eine sehr große Abweichung zum Theoriewert auf, diese ist jedoch nicht auf unbeachtete, weitere Innenwiderstände zurückzuführen. Hier liegt wahrscheinlich ein systematischer Fehler vor. An den Grenzen zu $\nu \rightarrow \infty$ und $\nu \rightarrow 0$ liefert der Graph den erwarteten Verlauf.

Zur Auswertung der Frequenzabhängigkeit der Phase ist anzumerken, dass der Verlauf der Phase wie angenommen im Bereich $\varphi = \frac{\pi}{4}$ bis $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ seine Resonanzfrequenz besitzt.

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuchsanleitung zu Versuch 354- Gedämpfte und erzwungene Schwingungen*. 12. Dez. 2016. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/MEDPHYS/BACHELOR/AP/SKRIPT/V354.pdf>.