

V354

Gedämpfte und erzwungene Schwingungen

Luisa Speicher
luisa.speicher@tu-dortmund.de

Miriam Schwarze
miriam.schwarze@tu-dortmund.de

Durchführung: 13.01.2017, Abgabe: 20.01.2017

TU Dortmund – Fakultät Physik

1 Zielsetzung

Ziel des Versuches **Gedämpfte und erzwungene Schwingungen** ist es, das Verhalten eines RLC-Schwingkreises sowohl mit, als auch ohne angelegter Spannung zu untersuchen.

2 Theorie

2.1 Gedämpfte Schwingung

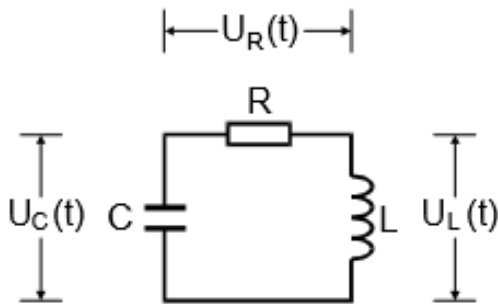


Abbildung 1: Schaltbild eines gedämpften RLC-Schwingkreises [1].

Ein RLC-Schwingkreis besteht, wie Abbildung 1 zu entnehmen, aus einem Kondensator, einem Widerstand, sowie einer Spule, die in Reihe geschaltet werden. Die Energie, welche sich in diesem System befindet, pendelt zwischen Kondensator und Spule. Ein Teil der Energie wird durch den Widerstand in Wärme umgewandelt, wodurch die Energie mit der Zeit abnimmt. Das System führt also eine gedämpfte Schwingung aus, welche durch die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC} I = 0 \quad (1)$$

beschrieben wird. Sie lässt sich durch den Ansatz

$$I(t) = Ae^{i\omega_+ t} + Be^{i\omega_- t} \quad (2)$$

lösen, mit der Schwingungsfrequenz

$$\omega_{\pm} = i \frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}. \quad (3)$$

Im Folgenden werden die Abkürzungen

$$2\pi\mu = \frac{R}{2L}, \quad (4)$$

$$2\pi\nu = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \quad (5)$$

genutzt. Abhängig von den Gerätedaten (Widerstand R , Induktivität L der Spule und Kapazität C des Kondensators) werden verschiedene Dämpfungsverhalten unterschieden:

$$\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2} \quad (6)$$

In diesem Fall ist ν reel und es liegt eine gedämpfte Schwingung vor, welche durch

$$I(t) = Ae^{-2\pi\mu t} \cos(2\pi\nu t + \eta) \quad (7)$$

beschrieben wird. Wie exemplarisch in Abbildung 2a zu erkennen, geht die Amplitude I mit der Zeit exponentiell gegen 0. Ihre Abklingdauer ist definiert als

$$T_{\text{ex}} = \frac{1}{2\pi\mu} = \frac{2L}{R}, \quad (8)$$

während sich die Schwingungsdauer näherungsweise durch die Thomsonsche Schwingungsformel

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC} \quad (9)$$

beschreiben lässt.

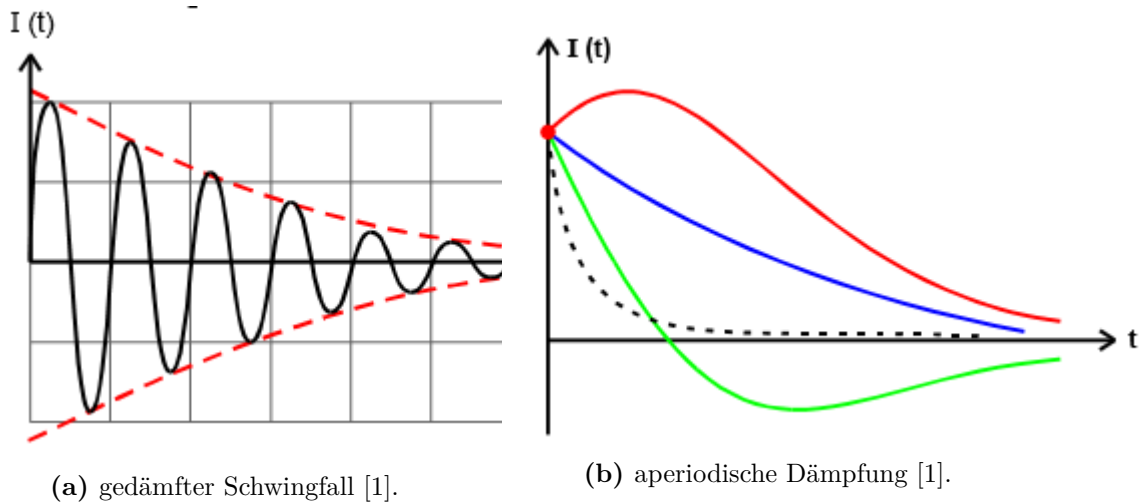


Abbildung 2: exemplarische Darstellung der Stromverläufe.

•

$$\frac{1}{LC} < \frac{R^2}{4L^2} \quad (10)$$

In diesem Fall ist ν imaginär, sodass kein oszillierender Teil in (2) vorliegt. Die Amplitude I zeigt zunächst ein Überspringen oder nähert sich direkt exponentiell der 0 an, wie Abbildung 2b erkennen lässt.

•

$$\frac{1}{LC} = \frac{R^2}{4L^2} \quad (11)$$

Hier ist $\nu = 0$. Dieses äußert sich in einem schnellen exponentiellen Abfall, wie ihn die gestrichelte Linie in Abbildung 2b darstellt.

2.2 erzwungene Schwingung

Die Schaltung wird, wie in Abbildung 3 zu sehen, um eine Spannungsquelle erweitert, welche die Wechselspannung

$$U(t) = U_0 e^{i\omega t} \quad (12)$$

liefert. Die so entstehende erzwungene Schwingung wird durch

$$LC \frac{d^2 U_c}{dt^2} + RC \frac{dU_c}{dt} + U_c = U_0 e^{i\omega t} \quad (13)$$

beschrieben. Das Lösen der DGL liefert die Kondensatorspannung

$$U_c(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}}. \quad (14)$$

U_c bleibt hierbei um

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{-\omega RC}{1 - LC\omega^2}\right) \quad (15)$$

hinter der Generatorspannung U_0 zurück. Bei

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad (16)$$

hat φ den Wert $\frac{\pi}{2}$.

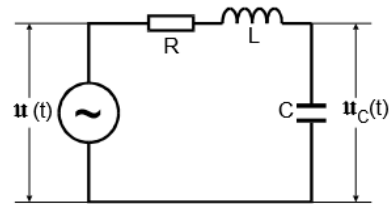


Abbildung 3: Schaltbild eines Schwingkreises mit erzwungenen Schwingungen [1].

Schwingt das System in derselben Frequenz wie die angelegte Spannung, tritt der sogenannte Resonanzfall ein. Dieser tritt bei

$$\omega_{\text{res}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}} \quad (17)$$

auf. Nun befindet sich ein Maximum an Energie im System und die Kondensatorspannung erreicht ihren höchsten Wert, welcher größer als U_0 sein kann.

Auch für die erzwungene Schwingung lässt sich je nach Gerätedaten eine starke oder schwache Dämpfung unterscheiden.

- Ist $\frac{R^2}{2L^2} \gg \frac{1}{LC}$ erhält man einen monotonen Abfall von U_c gegen Null.
- Ist hingegen $\frac{R^2}{2L^2} \ll \frac{1}{LC}$ spricht man von einer schwachen Dämpfung. Die Erregerspannung U_0 wird um den Faktor q übertroffen, welcher Güte oder Resonanzüberhöhung genannt wird. Er ist gegeben durch den Ausdruck

$$q = \frac{1}{\omega_0 RC} = \frac{\omega_0}{\omega_+ - \omega_-}. \quad (18)$$

ω_+ und ω_- charakterisieren die Schärfe der Resonanz und sind hiermit ein Maß für die Dämpfung. Sie liegen bei $\frac{1}{\sqrt{2}}$ der Resonanzkondensatorspannung. Zwischen ihnen besteht der Zusammenhang

$$\omega_+ - \omega_- \approx \frac{R}{L}. \quad (19)$$

3 Durchführung

3.1 Zeitabhängigkeit der Amplitude eines gedämpften Schwingkreises

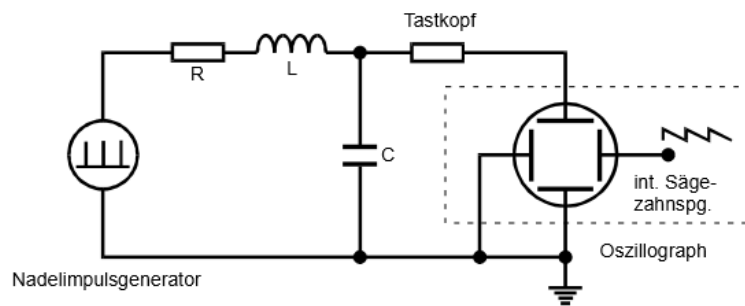


Abbildung 4: Schaltung zur Bestimmung der Zeitabhängigkeit der Amplitude [1].

Der Schwingkreis wird, wie Abbildung 4 zu entnehmen, aufgebaut. Hierbei ist der kleinere der fest eingebauten Widerstände zu wählen. Über den Nadelimpulsgenerator wird

ein Impuls in den Schwingkreis gegeben. Auf dem Oszillographen lässt sich nun das Bild einer gedämpften Schwingung erkennen. Mit Hilfe der Cursorfunktion werden die Schwingungsmaxima vermessen.

3.2 Dämpfungswiderstand des aperiodischen Grenzfalles

Der Widerstand aus Schaltung 4 wird durch einen regelbaren Widerstand ersetzt, dessen Maximum sich bei $5\text{k}\Omega$ befindet. Diese Einstellung wird nun auch zunächst gewählt, sodass ein Relaxationsverhalten auf dem Oszillographen sichtbar wird. Anschließend wird der Widerstand soweit minimiert, bis ein Überspringen zu erkennen ist. Im Übergang liegt der gesuchte Dämpfungswiderstand R_{ap} .

3.3 Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung einer erzwungenen Schwingung

Als Widerstand wird nun der größere der fest eingebauten Widerstände gewählt. Am Generator ist eine Sinusspannung einzustellen und an den Schwingkreis zu legen. Die angelegte Frequenz lässt sich ebenfalls am Generator ablesen und sollte im kHz-Bereich liegen. Sie wird nun Schritt für Schritt erhöht und am Oszillographen jeweils die zugehörige Spannungsamplitude bestimmt. Desweiteren wird ein Wert für die Erregerspannung U_0 ermittelt, indem der Generator direkt an den Oszillographen angeschlossen wird.

3.4 Frequenzabhängigkeit der Phase einer erzwungenen Schwingung

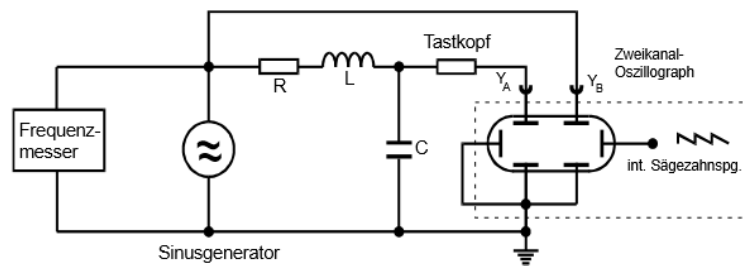


Abbildung 5: Schaltung zur Bestimmung der Frequenzabhängigkeit der Phase [1].

Für die letzte Messreihe werden sowohl die Erregerspannung als auch die Kondensatorspannung, wie in der oben stehenden Abbildung zu sehen, an den Oszillographen gelegt. Dort sind nun zwei verschobene, sinusförmige Spannungsverläufe zu erkennen. Mit variierender Frequenz wird nun jeweils ihr Abstand, zum Beispiel im Maximum, ermittelt.

4 Auswertung

Die gegebene Werte lauten

$$L = (3.53 \pm 0.03) \text{ mH},$$

$$C = (5.015 \pm 0.015) \text{ nF},$$

$$R_1 = (30.3 \pm 0.1) \Omega,$$

$$R_2 = (271.6 \pm 0.3) \Omega.$$

4.1 Gedämpfte Schwingung

Die gemessenen Spannungsamplituden und die zugehörigen Zeiten sind Tabelle 1 zu entnehmen. Im nachfolgenden Plot (6) werden sie als $\ln(A)$ gegen t aufgetragen.

Tabelle 1: Zeitabhängigkeit der Amplitude.

$t/\mu\text{s}$	U_0 / V
0	3.56
14	3.00
27	2.60
41	2.16
54	1.88
68	1.60
81	1.40
95	1.16
108	1.00
122	0.84
136	0.76
149	0.64
163	0.56
179	0.44
190	0.44
203	0.32
217	0.32
232	0.24

Lineare Regression mittels Python ergibt für die Geradengleichung $y = ax + b$ die Parameter

$$a = -11373.88 \pm 139.08,$$

$$b = 1.25 \pm 0.02.$$

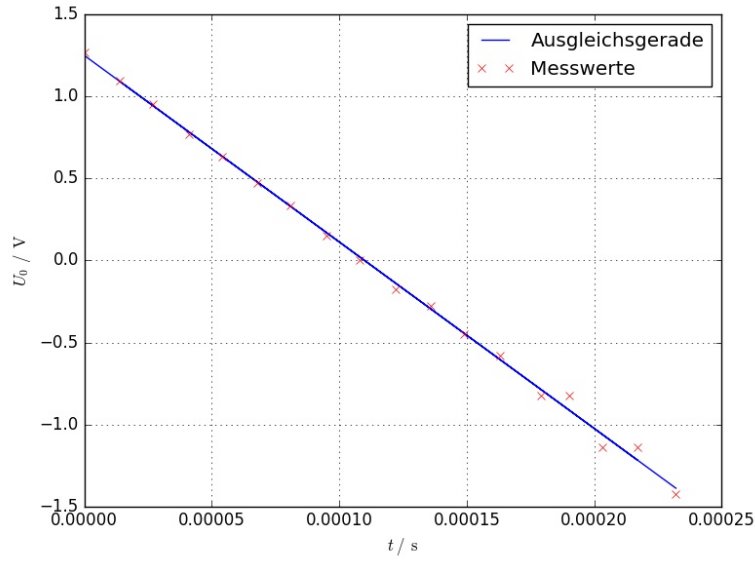


Abbildung 6: Logarithmierte Spannung in Abhängigkeit von der Zeit.

Der Zusammenhang (2) für die Einhüllenden lässt sich umformen zu

$$\ln A = -2\pi\mu t + \ln(A_0). \quad (20)$$

Daraus ergibt sich für die Parameter

$$a = -2\pi\mu, \quad (21)$$

$$b = \ln(A_0). \quad (22)$$

Als Werte für μ und A_0 ergeben sich dadurch

$$\mu = (1810.21 \pm 21.71) \frac{\Omega}{\text{H}},$$

$$A_0 = (3.49 \pm 1.02) \text{A}.$$

Nach (8) und (4) werden für R_{eff} und T_{ex} die Werte

$$R_{\text{eff}} = (80.29 \pm 1.18) \Omega,$$

$$T_{\text{ex}} = (0.88 \pm 0.23) \mu\text{s}$$

berechnet.

Der gemessene Wert für den Widerstand R_{ap} , bei dem der aperiodische Grenzfall eintritt, beträgt 1900Ω .

Mittels (11) lässt sich der theoretische Wert $R_{\text{ap,theo}} = (1677,96 \pm 7.55) \Omega$ ermitteln.

4.2 Frequenzabhängigkeit der Amplitude

Zur Bestimmung der Resonanzüberhöhung q und der Breite der Resonanzkurve $\nu_+ - \nu_-$ werden die Daten aus Tabelle 2 verwendet. Der Quotient $\frac{U_C}{U}$ wird hierzu gegen ν aufgetragen. Die Erregerspannung beträgt 6.0 V. Der Bereich um das Maximum wird zusätzlich dargestellt.

Tabelle 2: Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung.

ν /k Ω	U_C /V
15	7.4
20	8.2
25	10.0
30	12.8
31	13.6
32	14.2
33	14.8
34	15.4
35	15.6
36	15.6
37	15.2
38	14.6
39	14.0
40	13.2
45	9.0
50	6.4

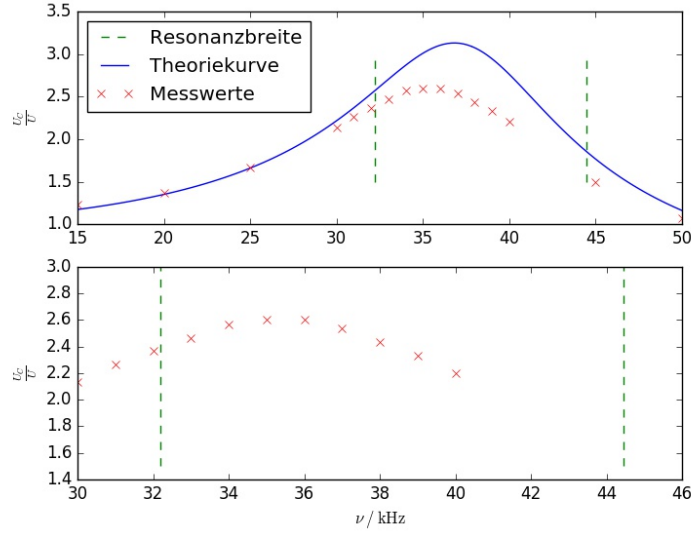


Abbildung 7: Kondensatorsspannung in Abhängigkeit von der Frequenz.

Die experimentelle Güte q_{exp} wird aus dem Maximum des Graphens bestimmt und ein theoretischer Wert nach (18) berechnet. Es ergeben sich die Werte

$$q_{\text{exp}} = 2.6,$$

$$q_{\text{theo}} = 3.09 \pm 0.01.$$

Die Breite der Resonanzkurve wird abgelesen, während der Theoriewert nach Formel (19) berechnet wird.

$$(\nu_+ - \nu_-)_{\text{exp}} = 10 \text{ kHz},$$

$$(\nu_+ - \nu_-)_{\text{theo}} = (12.1 \pm 0.1) \text{ kHz}.$$

4.3 Frequenzabhängigkeit der Phase

Im letzten Teil der Auswertung soll die Frequenzabhängigkeit der Phase bestimmt werden. Hierzu werden die Daten aus Tabelle 4 verwendet. Die Phase φ wird mittels

$$\varphi = 2\pi\nu\Delta t \tag{23}$$

errechnet und gegen die Frequenz ν aufgetragen.

Tabelle 3: Frequenzabhängigkeit der Phase.

$\nu/k\Omega$	Δt /s
15	1.80
20	1.96
25	2.56
30	3.52
31	3.80
32	3.90
33	4.50
34	5.20
35	5.76
36	6.20
37	6.80
38	7.30
39	7.80
40	8.12
45	8.80
50	8.64

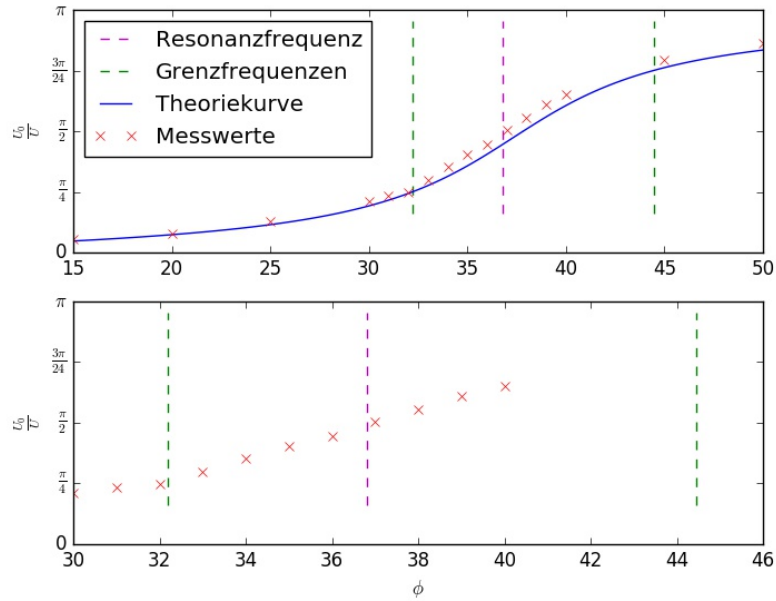


Abbildung 8: Frequenzhängigkeit der Phase.

Aus diesen Daten wird die Resonanzfrequenz ν_{res} bestimmt. Außerdem werden die Frequenzen ν_1 und ν_2 ermittelt, bei denen die Phase $\frac{\pi}{4}$ beziehungsweise $\frac{3\pi}{4}$ beträgt. Die

theoretischen Werte für ν_{res} errechnen sich nach (17), während ν_1 und ν_2 über

$$\nu_{1,2} = \nu_{\text{res,exp}} \mp \frac{1}{2}(\nu_+ - \nu_-)_{\text{theo}} \quad (24)$$

bestimmt werden. Die Werte für die Frequenzen lauten:

$$\begin{aligned} \nu_{\text{res,exp}} &= 36 \text{ kHz}, \\ \nu_{\text{res,theo}} &= 36.8 \text{ kHz}, \\ \nu_{1,\text{exp}} &= 30.0 \text{ kHz}, \\ \nu_{1,\text{theo}} &= 32.2 \text{ kHz}, \\ \nu_{2,\text{exp}} &= 42.1 \text{ kHz}, \\ \nu_{2,\text{theo}} &= 44.4 \text{ kHz}. \end{aligned}$$

5 Diskussion

Der gemessene Effektivwiderstand zeigt eine sehr hohe Abweichung von dem eingebauten Widerstand $R_{\text{eingebaut}} = 30.3 \Omega$. Auch der Widerstand bei Eintritt des aperiodischen Grenzfalles weicht sehr stark vom Theoriewert ab. Dieses ist durch den Innenwiderstand des Generators zu erklären, der bei der Berechnung der Theoriewerte nicht beachtet wurde. Die weiteren Werte und ihre Abweichungen sind Tabelle 4 zu entnehmen.

Tabelle 4: Vergleich der Ergebnisse.

Messung	Experimenteller Wert	Theoriewert	Abweichung
Güte	2.6	3.09	15.8 %
Breite	10.0 kHz	12.1 kHz	17.3 %
ν_{res}	36.0 kHz	36.8 kHz	2.2 %
ν_1	30.0 kHz	32.2 kHz	6.8 %
ν_2	42.1 kHz	44.4 kHz	5.2 %

Die Abweichungen lassen sich mit den weiterhin nicht beachteten Innenwiderständen des Generators, sowie des Kondensator und der Spule erklären. Weiterhin war es über die Cursorfunktion des Oszillographen nicht möglich, genaue Werte abzulesen. Da aber die Abweichungen der Frequenzen sehr gering sind, ist davon auszugehen, dass in dieser Messung aussagekräftige Werte erzielt wurden.

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Gedämpfte und erzwungene Schwingungen*. 13. Jan. 2017. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/MEDPHYS/BACHELOR/AP/SKRIPT/V354.pdf>.