

Durchführung: 08.12.2017  
Abgabe: 15.12.2017

## PRAKTIKUMSPROTOKOLL V302

# ELEKTRISCHE BRÜCKENSCHALTUNGEN

Carolin Harkort<sup>1</sup>,  
Jacqueline Schlingmann<sup>2</sup>

---

<sup>1</sup>carolin.harkort@tu-dortmund.de

<sup>2</sup>jacqueline.schlingmann@tu-dortmund.de

## 1 Zielsetzung

Ziel dieses Versuchs ist die Bestimmung unbekannter Widerstände, Induktivitäten und Kapazitäten. Dies geschieht mit Hilfe von elektrischen Brückenschaltungen.

## 2 Theorie

Eine allgemeine Brückenschaltung ist in Abbildung (1) zu sehen.

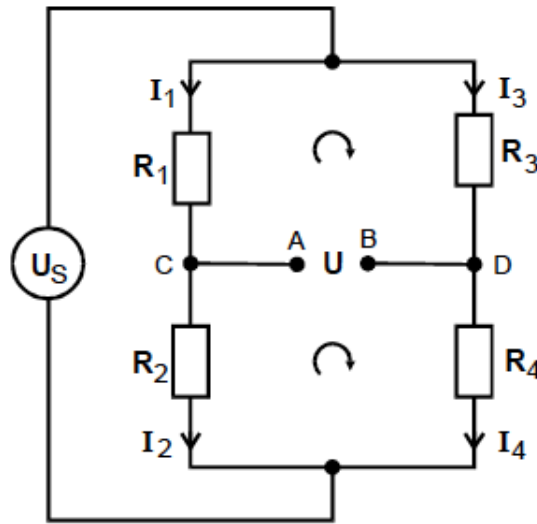


Abbildung 1: Prinzipielle Brückenschaltung[1]

Mit solch einer Brückenschaltung wird eine Potentialdifferenz untersucht. Zwischen den Punkten A und B tritt eine Brückenspannung auf. Zur Berechnung dieser Spannung werden die beiden Kirchhoffschen Gesetze verwendet

$$\sum_k I_k = 0 \quad (1)$$

$$\sum_k U_k = 0 \quad (2)$$

Diese sagen aus, dass die in einem Knoten hineinlaufenden Ströme, gleich der hinauslaufenden Ströme sein müssen. Außerdem muss in einer Masche die Summe aller Spannungen gleich Null sein. Aus den Kirchhoffschen Regeln und der Formel für die Speisespannung,

$$U_s = I_1(R_1 + R_2) \quad (3)$$

ergibt sich nun ein Zusammenhang für die Brückenspannung in Abhängigkeit von den Schaltungsparametern.

$$U = \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{(R_3 + R_4)(R_1 + R_2)} \cdot U_s \quad (4)$$

Die Brückenschaltung gilt als abgeglichen, wenn

$$R_1 R_4 = R_2 R_3 \quad (5)$$

gilt.

## 2.1 Wheatstone'sche Brückenschaltung

Die Wheatstone'sche Brückenschaltung dient zur Bestimmung eines unbekannten Widerstandes  $R_x$ . Der Aufbau einer solchen Brückenschaltung ist in Abbildung (2) zu sehen. Da die Schaltung nur von Widerständen abhängt, kann sie sowohl im Wechselstrom als

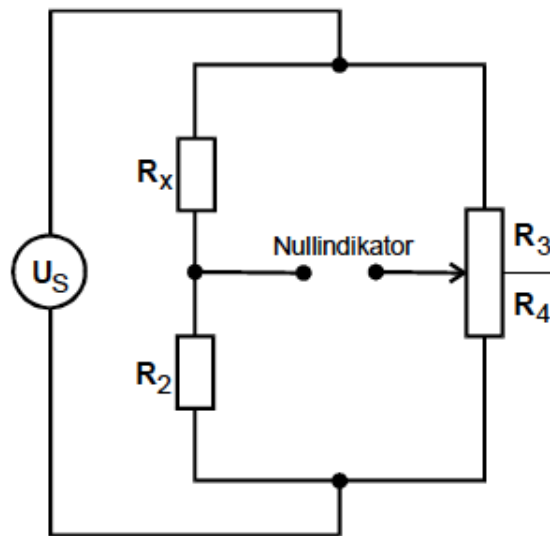


Abbildung 2: Wheatstone Brückenschaltung[1]

auch im Gleichstrom betrieben werden. Es ist nur wichtig den Nullindikator passend zu wählen. Der unbekannte Widerstand kann wegen (5) durch

$$R_x = \frac{R_2 R_3}{R_4}. \quad (6)$$

bestimmt werden.

## 2.2 Kapazitätsmessbrücke

Zur Bestimmung eines unbekannten Kondensators, eignet sich ein Aufbau wie er in Abbildung (3) zu sehen ist. Ein realer Kondensator wandelt hindurchfließende elektrische

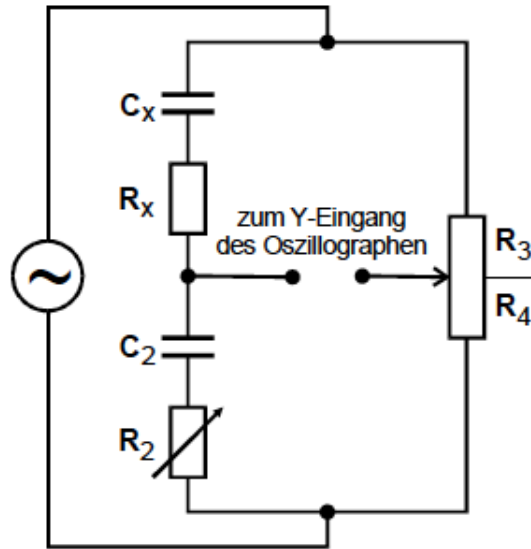


Abbildung 3: Kapazitätsmessbrücke[1]

Energie zum Teil in Wärme um. Der komplexe Widerstand eines solchen Kondensators lautet somit:

$$Z = R - \frac{i}{\omega C}$$

Hinter dem unbekannten Kondensator ist ein unbekannter Widerstand geschaltet, der eine Phasenverschiebung verursachen würde, weshalb zueinander unabhängige veränderliche Widerstände eingebaut werden müssen. Die Formeln für den unbekannten Widerstand und Kondensator lauten:

$$R_x = \frac{R_2 R_3}{R_4} \quad (7)$$

$$C_x = \frac{C_2 R_4}{R_3} \quad (8)$$

### 2.3 Induktivitätsmessbrücke

Im der folgenden Abbildung (4) ist eine Schaltung gezeigt, mit der eine unbekannte Spule bestimmt werden kann. Eine reale Induktivität wandelt einen Teil der magnetischen Feldenergie in Wärme um. Hier lautet der komplexe Widerstand:

$$Z = R + i\omega L$$

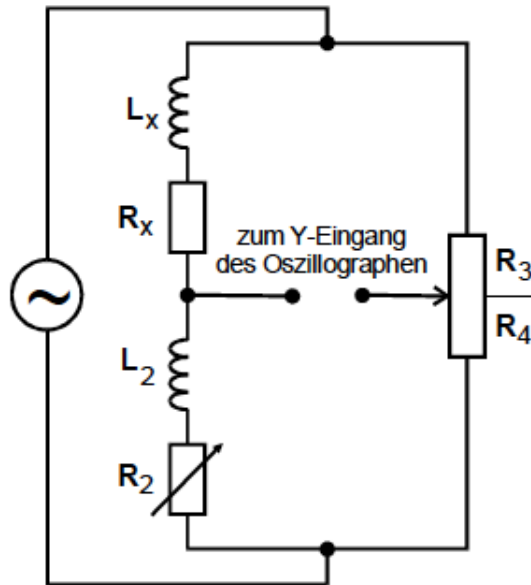


Abbildung 4: Induktivitätsmessbrücke[1]

Somit ergeben sich nun die Formeln

$$R_x = \frac{R_2 R_3}{R_4} \quad (9)$$

$$L_x = \frac{L_2 R_3}{R_4} \quad (10)$$

für den Unbekannten Widerstand und die Spule.

## 2.4 Maxwell-Brücke

Mit der Maxwellbrücke ist es ebenfalls möglich eine unbekannte Induktivität zu bestimmen. Sie hat den Vorteil, dass auf eine bekannte Induktivität verzichtet werden kann. Dafür wird eine Kapazität eingebaut, die einen deutlich geringeren Wirkwiderstand hat. Für die unbekannte Induktivität gilt:

$$Z_x = R_x + i\omega L_x \cdot \frac{1}{Z_4}$$

Für den Kondensator gilt

$$\frac{1}{Z_4} = \frac{1}{R_4} + i\omega \cdot C_4.$$

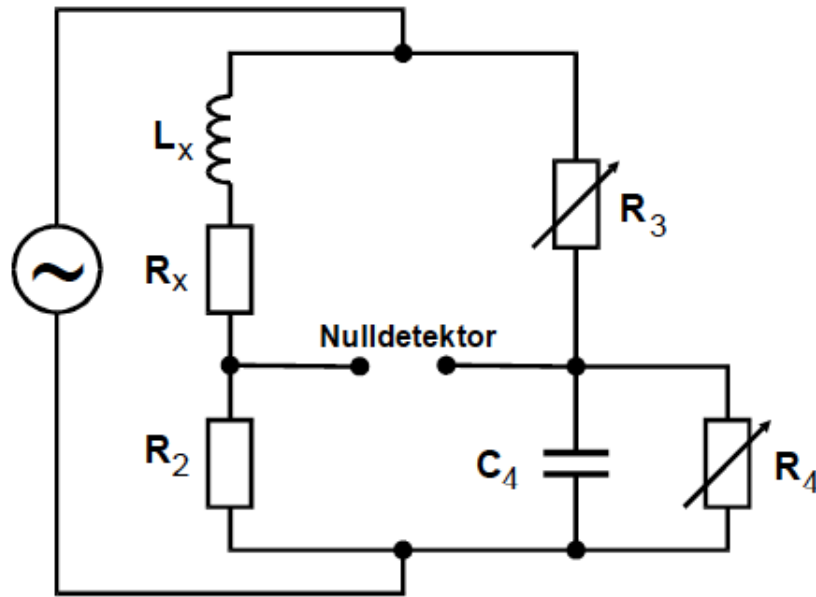


Abbildung 5: Induktivitätsmessbrücke[1]

Mit dieser Überlegung ergeben sich die Formeln:

$$R_x = \frac{R_2 R_3}{R_4} \quad (11)$$

$$L_x = R_2 R_3 C_4 \quad (12)$$

## 2.5 Wien-Robinson-Brücke

In dieser Brücke sind keine Unbekannten Bauteile. Sie ist im Gegensatz zu den anderen Brücken Frequenzabhängig. Eine beispielhafte Abbildung ist in (6) zu sehen.

Es wird das Verhältnis der Brückenspannung zur Speisespannung betrachtet:

$$\left| \frac{U_{Br}}{U_s} \right|^2 = \frac{1}{9} \cdot \frac{(\Omega - 1)^2}{(1 - \Omega)^2 + 9\Omega^2} \quad (13)$$

Dabei ist

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$$

und

$$\omega = \frac{1}{RC} \quad (14)$$

Bei dem Verhältnis in (14) verschwindet die Brückenspannung und die Brücke ist ausgeglichen. Die Wien-Robinson-Brücke dient als frequenzfilter.

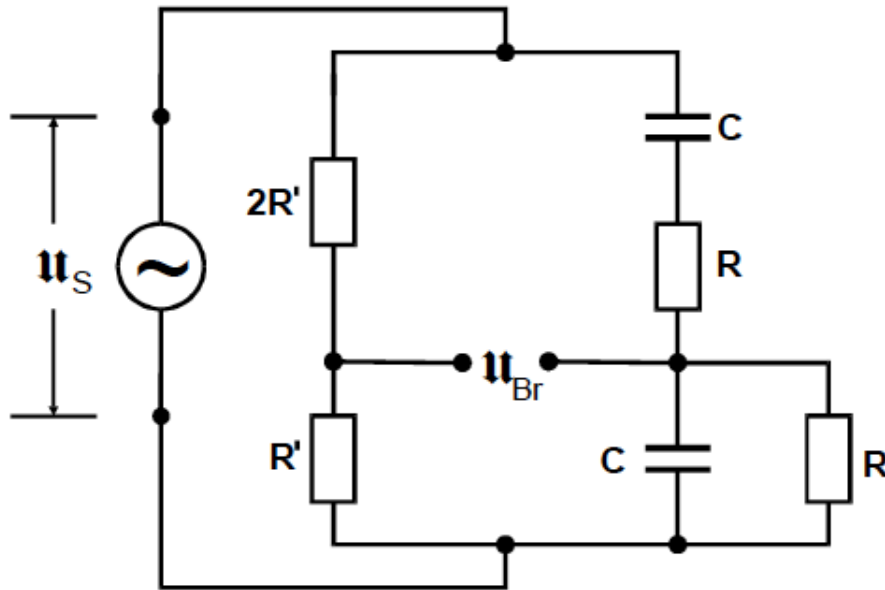


Abbildung 6: Wien-Robinson-Brücke[1]

### 3 Durchführung

Zunächst wird die Speisespannung abgelesen, indem der Frequenzregler mit dem Oszillographen verbunden wird.

#### 3.1 Wheatonesche Brückenschaltung

Die Wheatstonesche Brücke wird wie in Abbildung (2) gezeigt aufgebaut und mit dem Oszillographen verbunden. Es werden zwei unterschiedliche unbekannte Widerstände gewählt, die bestimmt werden sollen. Dies geschieht für drei unterschiedliche Werte für  $R_2$ ,  $R_3$  und  $R_4$  werden bestimmt, indem das Potentiometer auf einen Widerstand gestellt wird, sodass die Schwingung auf dem Oszillographen minimal ist.

#### 3.2 Kapazitätsmessbrücke

Für die Kapazitätsmessbrücke wird der Widerstand aus dem ersten Teil mit einem Kondensator erweitert und ein regelbarer Widerstand geschaltet, sodass die Schaltung aus Abbildug (3) entsteht. Der Messvorgang aus dem ersten Teil wird wiederholt. Hier werden allerdings auch die bekannten Kondensatoren dreimal ausgetauscht. Nach der Messung werden die Widerstände entfernt, sodass nur eine unbekannte Kapazität bestimmt werden muss. Daraufhin wird die Messung wiederholt.

### 3.3 Induktivitätsmessbrücke

Der Aufbau aus Abbildung (4) wird geschaltet. Der unbekannte Widerstand und die Spule werden bestimmt, indem mit dem regelbarem Widerstand und dem Potentiometer ein minimum gefunden wird. Die Messung wird nur für eine unbekannte Spule durchgeführt.

### 3.4 Maxwell-Brücke

Die Maxwell-Brücke wird wie in Abbildung (5) geschaltet. Der unbekannte Wert der Spule aus dem vorherigen Messungsteil wird wieder verwendet um ihn zu bestimmen. Dies geschieht für drei unterschiedliche Widerstände und Kapazitäten.

### 3.5 Wien-Robinson-Brücke

Nun wird die Schaltung aus Abbildung (6) aufgebaut. Die Frequenz wird hier erstmalig verändert. Bei 0,2 kHz anfangend wird sie hochgedreht um ein Minium herauszufinden. Dafür wird die Frequenz gegen die Spannung aufgetragen.

## 4 Auswertung

Die Mittelwerte und Fehler der errechneten Größen in den folgenden Abschnitten lassen sich mit folgenden Formeln bestimmen und werden an die jeweiligen Toleranzen angepasst:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_n \quad (15)$$

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\sum (x_n - \bar{x})^2}{n - 1}} \quad (16)$$

### 4.1 Wheatstonesche Brückenschaltung

Mit den gemessenen Werte aus Tabelle 1 und den Formeln

$$R_x = R_2 \frac{R_3}{R_4} \quad (17)$$

und

$$\Delta R_x = \sqrt{\left(\frac{R_3}{R_4} \cdot 0.002 R_2\right)^2 + \left(R_2 \cdot 0.005 \frac{R_3}{R_4}\right)^2} \quad (18)$$



Tabelle 1: Gemessene Werte bei der Wheatstoneschen Brücke

		Messung 1	Messung 2	Messung 3
Wert 10	$R_2$ in $\Omega$	500	664	1000
	$R_3$ in $\Omega$	321	261	198
	$R_4$ in $\Omega$	679	739	802
	$R_x$ in $\Omega$	236.38	234.51	246.88
	$\Delta R_x$ in $\Omega$	$\pm 1.27$	$\pm 1.26$	$\pm 1.33$
Wert 13	$R_2$ in $\Omega$	500	664	1000
	$R_3$ in $\Omega$	388	322.5	238.5
	$R_4$ in $\Omega$	612	677.5	761.5
	$R_x$ in $\Omega$	316.99	316.07	311.97
	$\Delta R_x$ in $\Omega$	$\pm 1.71$	$\pm 1.70$	$\pm 1.69$

lassen sich nun die gesuchten Widerstände berechnen. Dabei ergeben sich folgende Werte für die Widerstände "Wert 10" und "Wert 13":

$$\begin{aligned}\bar{R}_{\text{Wert10}} &= (239,26 \pm 7,25) \Omega \\ \bar{R}_{\text{Wert13}} &= (315,01 \pm 3,25) \Omega.\end{aligned}$$

## 4.2 Kapazitätsmessbrücke

Tabelle 2: Gemessene Werte für die Kapazitätsmessbrücke ohne Widerstände

		Messung 1	Messung 2	Messung 3
Wert 1	$C_2$ in nF	399	450	597
	$R_3$ in $\Omega$	375.5	403	474
	$R_4$ in $\Omega$	624.5	597	526
	$C_x$ in nF	663.58	666.63	662.49
	$\Delta C_x$ in nF	$\pm 1.29$	$\pm 1.64$	$\pm 2.89$

Mit den Werten aus Tabelle 2 für die Kapazitätsmessbrücke ohne zwischengeschaltete Widerstände und den Formeln

$$C_x = C_2 \frac{R_4}{R_3} \quad (19)$$

und

$$\Delta C_x = \sqrt{\left(\frac{R_3}{R_4} \cdot 0.002 C_2\right)^2 + \left(C_2 \cdot 0.005 \frac{R_3}{R_4}\right)^2} \quad (20)$$

ergibt sich für die gesuchte Kapazität der folgende Wert:

$$\bar{C}_{\text{Wert1}} = (664,23 \pm 1,11) \text{ nF}.$$

Tabelle 3: Gemessene Werte für die Kapazitätsmessbrücke mit Widerständen

		Messung 1	Messung 2	Messung 3
Wert 8	$C_2$ in nF	399	450	597
	$R_3$ in $\Omega$	407	403	474
	$R_4$ in $\Omega$	593	597	526
	$R_x$ in $\Omega$	578.72	575.02	581.26
	$\Delta R_x$ in $\Omega$	$\pm 3.12$	$\pm 3.10$	$\pm 3.13$
	$C_x$ in nF	293.71	296.27	292.72
	$\Delta C_x$ in nF	$\pm 2.92$	$\pm 3.68$	$\pm 6.56$

Mit den Werten aus Tabelle 3 für die Kapazitätsmessbrücke mit Widerständen und den Formeln 17 und 19 lassen sich ebenfalls die gesuchten Werte der RC-Glieder bestimmen:

$$\begin{aligned}\bar{R}_{\text{Wert1}} &= (578,33 \pm 1,81) \Omega \\ \bar{C}_{\text{Wert1}} &= (294,23 \pm 1,06) \text{ nF}.\end{aligned}$$

### 4.3 Induktionsmessbrücke

Tabelle 4: Gemessene Werte für die Induktivitätsmessbrücke

Wert 18	$L_2$ in mH	14.6
	$R_2$ in $\Omega$	873
	$R_3$ in $\Omega$	308
	$R_4$ in $\Omega$	692

Mit der Formel

$$L_x = L_2 \frac{R_3}{R_4} \quad (21)$$

und den Werten aus Tabelle 4 ergeben sich für die gesuchten RL-Glieder folgende Werte:

$$\begin{aligned}R_x &= 388,56 \Omega \\ L_x &= 6,50 \text{ mH}\end{aligned}$$

Tabelle 5: Gemessene Werte für ein RC-Glied mit der Maxwell-Brücke

		Messung 1	Messung 2	Messung 3
Wert 18	$R_1$ in mH	307.80	350.31	345.45
	$R_2$ in $\Omega$	500	664	1000
	$R_3$ in $\Omega$	221	153	133
	$R_4$ in $\Omega$	359	290	385
	$C_4$ in nF	597	750	450
	$L_x$ in mH	66	76	60

#### 4.4 Maxwell-Brücke

Die gleichen RC-Glieder wie bei der Induktivitätsmessbrücke wurden nochmal mithilfe der Maxwell-Brücke gemessen. Mit den Werte aus Tabelle 5 sowie den Formeln

$$L_x = R_2 R_3 C_4$$

und

$$\Delta L_x = \sqrt{(0.002 R_2 \cdot R_3 R_4)^2 + (0.03 R_3 \cdot R_2 R_4)^2 + (0.03 R_4 \cdot R_2 R_3)^2}$$

ergeben sich für die beiden RL-Glieder somit folgende Werte

$$R_x = (334,52 \pm 13,43) \Omega$$

$$L_x = (67,33 \pm 4,67) \text{ mH}.$$

#### 4.5 Wien-Robinson-Brücke

Als Frequenz, bei der die Brückenspannung verschwinden sollte, ergibt sich folgender Wert:

$$\nu_0 = \frac{1}{RC 2\pi} = 360 \text{ Hz}$$

Die eingespeiste Spannung beträgt  $U_0 = 2,08 \text{ V}$ . In der Messreihe wurde die Frequenzabhängigkeit der Brückenspannung untersucht. Dazu wird in dem Graphen 7 das Verhältnis der Brückenspannung gegen  $\Omega = \frac{\nu}{\nu_0}$  aufgetragen.

#### 4.6 Klirrfaktor

Der Klirrfaktor lässt sich durch

$$k := \frac{\sqrt{U_2^2 + U_3^2 + \dots}}{U_1} \quad (22)$$

Tabelle 6: Frequenzabhängigkeit der Brückenspannung bei Wien-Robinson-Brücke

$\nu$ / Hz	$U_B$ / mV
20.0	260.00
25.0	164.00
30.0	84.00
34.0	29.60
34.5	23.20
35.0	17.60
35.5	11.80
36.0	4.08
36.5	4.16
37.0	10.20
40.0	44.80
45.0	96.00
50.0	140.00
55.0	180.00
60.0	220.00
65.0	252.00
70.0	280.00
80.0	332.00
90.0	372.00
100.0	416.00
110.0	440.00
120.0	472.00
130.0	488.00
140.0	504.00
155.0	520.00
160.0	528.00
170.0	536.00
180.0	552.00
190.0	552.00
200.0	560.00

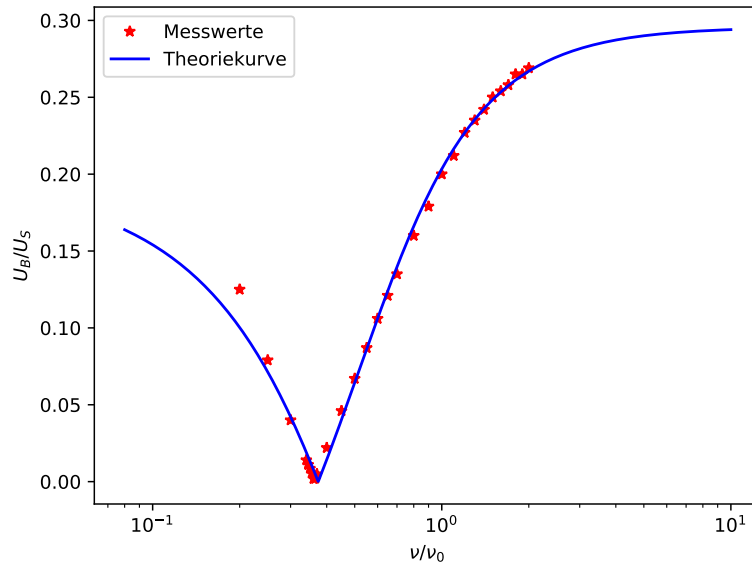


Abbildung 7: Gemessene Werte bei der Wien-Robinson-Brücke

berechnen. Hierbei wird ausschließlich die zweite Oberwelle betrachtet. Die Werte für  $U_2$  und  $U_1$  werden zur Berechnung noch bestimmt, wobei  $U_1$  die 2.08 V von  $U_B$  bei  $\nu_0$  sind. Mit 13 und  $\Omega = 2$  folgt dann:

$$U_2 = \frac{U_B}{\sqrt{\frac{(2^2-1)^2}{9[(1-2^2)^2+9 \cdot 2^2]}}} = 0.0147 \text{ V}.$$

Der Klirrfaktor ergibt sich dann aus dem Quotienten von  $U_2$  und  $U_1$ :

$$k = \frac{U_2}{U_1} = 7.067 \cdot 10^{-3}.$$

## 5 Diskussion

Bei der Untersuchung verschiedener Brückenschaltungen war besonders das Finden des Minimums fehleranfällig. Hierbei spielte sowohl der regelbare Widerstand, als auch das Oszilloskop eine entscheidende Rolle. Mithilfe des regelbaren Widerstands war das Minimum zum Teil gar nicht auffindbar, da dieser schon bis zum Anschlag aufgedreht war. Außerdem konnte wegen Schwankungen auf dem Oszilloskop das Minimum nicht genau eingestellt werden.

Zusammen führte dies zu einer großen Minimumsspannweite und könnte Abweichungen erklären.

Die gemessenen Kapazitäten haben größere Fehler als die Ohmschen Widerstände. Diese Messung zeigte bereits während der Durchführung des Versuchs eine größere Empfindlichkeit gegenüber Stößen. Bei der Induktivitätsmessung zeigen sich größere Unterschiede zwischen den beiden Messmethoden. Besonders die verwendete Spule zeigten dabei eine große Abweichung. Die Induktivität ist bei der Wien-Robinson-Brücke viel größer. Durch das dreimalige Bestimmen der Induktivität mithilfe der Wien-Robinson-Brücke und des relativ geringen Fehlers scheint diese Messung zuverlässiger zu sein.

Des Weiteren lassen sich Abweichungen im Graphen der Messwerte der Wien-Robinson-Brücke im Vergleich mit der Theoriekurve feststellen. Für die Anpassung an die Messwerte mussten dabei die Parameter der Theoriefunktion verringert werden. Eine mögliche Ursache dafür könnte sein, dass etwaige Verluste der Bauteile bei niedrigen und hohen Frequenzen und Spannungsschwankungen auftreten.

## Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuchsanleitung zu Versuch 302*. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/MEDPHYS/BACHELOR/AP/SKRIPT/V302.pdf> (besucht am 14.12.2017).