Durchführung: 27.10.2017
1. Abgabe: 03.11.2017
1. Korrektur: 17.11.2017
2. Korrektur : 01.12.2017

Praktikumsprotokoll V101

Das Trägheitsmoment

Carolin Harkort[1],
Jacqueline Schlingmann[2]

[1]carolin.harkort@tu-dortmund.de
[2]jacqueline.schlingmann@tu-dortmund.de

1 Zielsetzung

Ziel dieses Versuchs ist die Bestimmung der Trägheitsmomente verschiedener Körper.

2 Theorie

Als Trägheitsmoment wird der Widerstand eines Körpers gegen die Änderung seiner Rotation beschrieben, welches abhängig von der Masse M und dem Radius r ist. Die rotierenden Punktmasse besitzt ein Trägheitsmoment von $I = mr^2$. Durch das Aufsummieren der einzelnen Trägheitsmomente wird das Gesamtträgheitsmoment berechnet.

$$I = \sum_{i=0}^{n} r_i^2 \cdot m_i \tag{1}$$

Entsprechend gilt für eine kontinuierliche Massenverteilung

$$I = \int r^2 \mathrm{dm} \tag{2}$$

Zur Berechnung der Trägheitsmomente bekannter Symmetrien wurden folgenede Formeln verwendet:

Kugel:

$$I_K = \frac{2}{5} mR^2 \tag{3}$$

Zylinder:

$$I_Z = \frac{mR^2}{2} \qquad I_{Zh} = m\left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12}\right) \tag{4}$$

Die erste Formel beschreibt ein Zylinder mit der Rotationsachse durch den langen Teil des Zylinders. Die Zweite Formel gilt für einen horizontal liegenden Zylinder mit der Rotationsachse durch den kurzen Teil, der Breite d, in der Mitte des Zylinders. Wichtig zu beachten ist, dass dabei die Rotationsachse durch den Schwerpunkt des Körpers verläuft. Ist dies nicht der Fall beschreibt der *Satz von Steiner* das Trägheitsmoment bei einer von dem Schwerpunkt verschiedenen Rotationsachse. I_s ist das Trägheitsmoment bezüglich der Schwerpunktsachse und a der Abstand der Drehachse zur Schwerpunktsachse:

$$I = I_s + m \cdot a^2 \tag{5}$$

2.1 Bestimmung der Trägheitsmomente

Für das Drehmoment gilt:

$$\vec{M} = \vec{F} \times \vec{r} \tag{6}$$

In einem schwingungsfähigen System hängen Trägheitsmoment und Schwingungsdauer zusammen. Dieser Zusammenhang wird durch

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}} \tag{7}$$

beschrieben, wobei I für das Trägheitsmoment des Körpers und D für die Winkelrichtgröße steht. Für kleine Winkel lässt sich der Betrag des Drehmoments als

$$M = D \cdot \varphi \tag{8}$$

mit dem Auslenkwenkel φ darstellen.

3 Durchführung/Aufbau

3.1 Bestimmung des Eigenträgheitsmoments und der Winkelrichtgröße

Zu Beginn wird eine massenlose Stange, die zuvor gewogen und ausgemessen wurde, auf der Apperatur festgeschraubt. Die Apperatur ist in Abbildung 1 zu sehen. Die Stange wird nun um zehn unterschiedliche Winkel φ ausgelenkt. Zu jedem Winkel wird die wirkende Kraft mit einem Federkraftmesser bestimmt.
Im Anschluss werden zwei Gewichte, die als symmetrisch angenommen werden, ausgemessen und gewogen. An der Stange befinden sich diese Gewichte jeweils zum selben Abstand von der Drehachse. Sie werden per Hand um einen bestimmten Winkel φ ausgelenkt und losgelassen. Die Periodendauer T der entstandenen Schwingung wird mittels einer Stopuhr bestimmt. Dies wird für zehn unterschiedliche Abstände von der Drehachse durchgeführt.

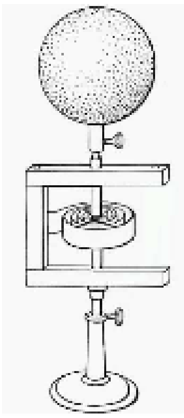

Abbildung 1: Aufbau der Apperatur am Beispiel einer Kugel

3.2 Das Trägheitsmoment zwei unterschiedlicher Körper

Nun wird der Stab durch einen Zylinder ausgetauscht. Auch dieser wird zuvor gewogen und ausgemessen. Der Körper besitzt eine Makierung, die als Nullpunkt verwendet wird um den Körper um einen gleichbleibenden Winkel φ auszulenken. Es wird wieder die Periodendauer T mittels einer Stoppuhr bestimmt. Der Vorgang wird fünfmal wiederholt und anschließend mit einer Kugel durchgeführt.

3.3 Trägheitsmoment einer Puppe

Die in 3.2 beschriebene Messung wird für eine Holzpuppe ebenfalls wiederhohlt. Dafür wird die Puppe gewogen und ausgemessen. Für die Ausmessung werden die Arme, der Rumpf, die Beine und der Kopf jeweils als Zylinder genährt. Die Breite jedes Körperteils ist fünf mal zu messen um einen Mittelwert des Radius für den Zylinder zu erhalten. Die Periodendauer T wird für eine stehende Puppe mit ausgestreckten Armen bestimmt. Anschließend für diese Puppe in sitzender Position mit ausgestreckten Armen.

4 Auswertung

4.1 Bestimmung der Winkelrichtgröße D und des Eigenträgheitsmoments I_D

Der Kraftmesser hat zum Mittelpunkt einen Abstand von 20 cm. Mit diesem Radius r wird nun die Winkelrichtgröße D bestimmt. Durch die Formel:

$$D = \frac{F \cdot r}{\varphi} \tag{9}$$

ergibt sich:

$$D = (0,032 \pm 0,007)\,\mathrm{Nm}.$$

Die Daten für diese Berechnung werden aus Tabelle 2 entnommen. Die Werte für φ aus Tabelle 1

Tabelle 1: Kraftmessung des Eigenträgheitsmoments

$F[N]$	$\varphi[°]$	$\varphi[rad]$	$D[Nm]$
0.22	45	$\frac{\pi}{4}$	0,056
0.29	90	$\frac{1}{2} \cdot \pi$	0,037
0.40	135	$\frac{3}{4} \cdot \pi$	0,034
0.50	180	π	0,032
0.60	225	$\frac{5}{4} \cdot \pi$	0,031
0.62	250	$\frac{25}{18} \cdot \pi$	0,028
0.63	270	$\frac{3}{2} \cdot \pi$	0,027
0.74	300	$\frac{5}{3} \cdot \pi$	0,028
0.74	315	$\frac{7}{4} \cdot \pi$	0,027
0.78	360	$2 \cdot \pi$	0,025

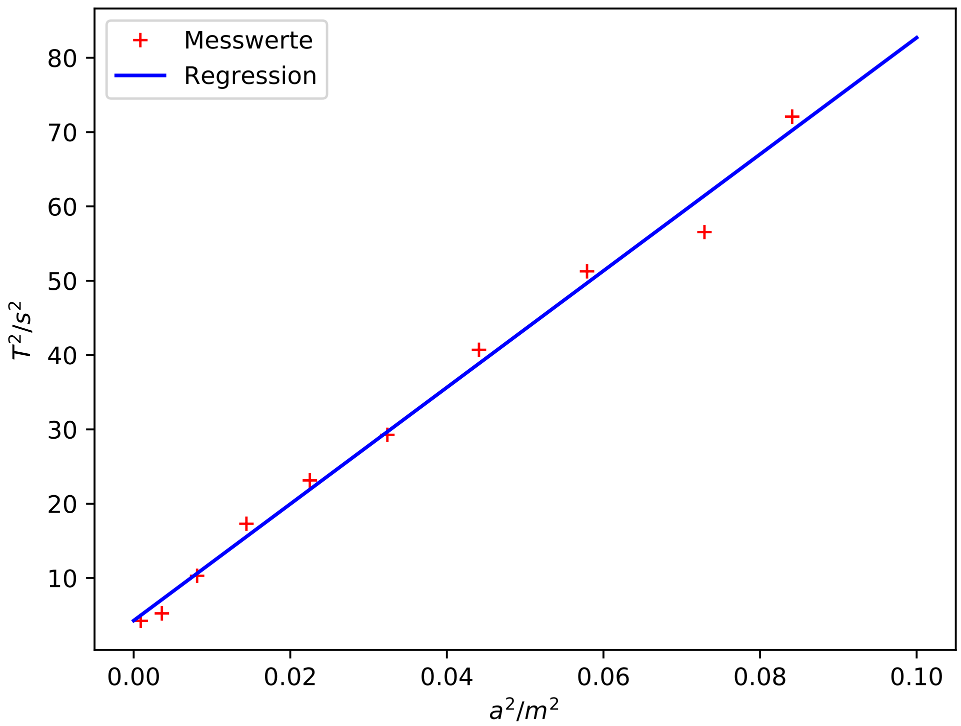

Abbildung 2: Die Quadrate der Schwingungsdauer gegenüber den Abstandsquadraten

Die lineare Regression wird mittels Python durchgeführt. Für die Gerade

$$T^2 = m \cdot a^2 + n \tag{10}$$

ergibt sich die Steigung $m = (784 \pm 26)\frac{s^2}{m^2}$ und der y-Achsenabschnitt $n = (4.3 \pm 1.1)s^2$.

$$m = \frac{8\pi^2 m_{zyl}}{D}$$

$$n = \frac{4\pi^2}{D} \cdot (I_D + I_{zyl,s}) \tag{11}$$

Tabelle 2: Schwingungsdauern bei jeweiligen Abständen.

a/m	a^2/m^2	T/s	T^2/s^2
0.03	0.0009	2.06	4.2436
0.06	0.0036	2.29	5.2441
0.09	0.0081	3.21	10.3041
0.12	0.0144	4.16	17.3056
0.15	0.0225	4.81	23.1361
0.18	0.0324	5.41	29.2681
0.21	0.0441	6.38	40.7044
0.24	0.0579	7.16	51.2656
0.27	0.0729	7.52	56.5504
0.29	0.0841	8.49	72.0801

Mit Formel (11) folgt nun die Formel:

$$I_D = \frac{D}{4\pi^2} \cdot n - I_{Zyl} \tag{12}$$

Die Formel für I_{Zyl} ist in Formel (4) zu finden. Es ergibt sich:

$$I_{Zyl} = 1,14738 \cdot 10^{-5} \mathrm{kg\,m}^2$$

Dieses Trägheitsmoment ist nicht fehlerbehaftet, da der gemessene Radius r, die Masse m und die länge h nicht fehlerbehaftet sind. Somit ergibt sich nun das Eigenträgheitsmoment:

$$I_D = (0,0035 \pm 0,0012)\mathrm{kgm}^2.$$

Der Fehler wurde mit Formel

$$\Delta I_D = \sqrt{\left(\frac{D}{4\pi^2} \cdot \Delta n\right)^2 + \left(\frac{n}{4\pi^2} \cdot \Delta D\right)^2} \tag{13}$$

bestimmt.

4.2 Bestimmung der Trägheitsmomente zwei unterschiedlicher Körper

4.2.1 Trägheitsmoment eines Zylinders

Zu Beginn der Messung werden von dem ausgewählten Zylinder der Radius r, die Höhe h und die Masse m gemessen:

$$\begin{aligned} r_Z &= 0.04\,\mathrm{m} \\ h_Z &= 0.14\,\mathrm{m} \\ m_Z &= 0.8995\,\mathrm{kg} \end{aligned}$$

Anhand dieser Werte wird das theoretische Trägheitsmoment bestimmt:

$$I_{Zylinder,theo} = \frac{1}{2} m_Z \cdot r_Z^2 = 0.000720\ \mathrm{kgm}^2$$

Tabelle 3: Schwingungsdauer eines Zylinders

T/s
1.41
1.35
1.32
1.41
1.40

Für die Schwingungsdauer ergibt sich durch Mitteln, der in Tabelle (3) aufgelisteten Werte

$$\bar{T}_{Zylinder} = (1.378 \pm 0.018)\text{s}.$$

und für das Trägheitsmoment des Zylinder durch Formel

$$I = \frac{T^2 \cdot D}{4\pi^2} - I_D \tag{14}$$

$$I_{Zylinder,exp} = (-0,0020 \pm 0,0012) \cdot 10^{-5}\text{kgm}^2$$

Die Fehlerrechnung wurde mit Formel

$$\Delta I = \sqrt{\left(\frac{T^2}{4\pi^2} \cdot \Delta D\right)^2 + \left(\frac{DT}{2\pi^2} \cdot \Delta T\right)^2 + \Delta I_D^2} \tag{15}$$

durchgeführt.

4.2.2 Trägheitsmoment einer Kugel

Zunächst wird die Kugel ausgemessen und gewogen. Dardurch ergibt sich Die Masse m und der Radius r :

$$r_K = 0,695\,\text{m}$$
$$m_K = 0,8125\,\text{kg}$$

Anhand dieser Werte kann nun das Trägheitsmoment $I_{Kugel,theo}$ bestimmt werden. Dies geschieht mit Formel (3):

$$I_{Kugel,theo} = 0,0015698\ \text{kg}\,\text{m}^2$$

Der experimentelle Wert für das Trägheitsmoment ermittelt sich aus Formel (15). Der Wert für die Schwingungsdauer T wird mit Tabelle (4) bestimmt. Der Körper wird immer um einen Winkel von $\frac{4\pi}{3}$ ausgelenkt.

Tabelle 4: Schwingungsdauer der Kugel

T/s
1,63
1,55
1,55
1,53
1,58

Für den Mittelwert ergibt sich:

$$\bar{T} = (1{,}568 \pm 0{,}017)\,\text{s}.$$

Der experimentelle Wert für das Trägheitsmoment lautet somit:

$$I_{Kugel,exp} = (-0,0015 \pm 0,0013) \cdot 10^{-3}\,\text{kg}\,\text{m}^2$$

Der Fehler werden ebenfalls mit Formel (16) bestimmt.

4.3 Bestimmung des Trägheitsmoments einer Puppe

4.4 theoretische Bestimmung

Eine Holzpuppe hat ein Gewicht von

$$m = 0,03425\,\mathrm{kg}$$

und wird als Zylinder genährt. Dafür werden die Körperteile einzeln betrachtet. Hier bei ist die Höhe bzw. die Länge h und der Radius r.

Kopf:

$$h = 0,071\,\mathrm{m} \qquad r = (1,6725 \pm 0,051) \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}$$

Rumpf:

$$h = 0,122\,\mathrm{m} \qquad r = (2,292 \pm 0,406) \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}$$

Arm:

$$h = 0,179\,\mathrm{m} \qquad r = (0,871 \pm 0,051) \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}$$

Bein:

$$h = 0,198\,\mathrm{m} \qquad r = (0,932 \pm 0,145) \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}$$

Die Höhen und die Radien mit dem Fehler ergeben sich aus den gemessenen Werten. Die Radien sind in Tabelle (5) zu finden.

Tabelle 5: Radien der Einzelnen Körperteile

r_{Kopf}/cm	r_{Arm}/cm	r_{Rumf}/cm	r_{Bein}/cm
1,40	0,90	2,75	1,25
1,65	0,96	2,25	0,73
1,84	0,73	1,77	1,10
1,80	0,90	2,40	0,65

Um das Trägheitsmoment theoretisch bestimmen zu können, müssen die Massen der einzelnen Körperteile bestimmt werden. Dies geschieht mit der Formel

$$m_{teil} = \frac{V_{teil}}{V_{ges}} \cdot m_{ges}$$

Die dafür benötigten Volumen ergeben sich aus der Formel

$$V_{Zylinder} = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$V_{Kopf} = (0,6239366 \pm 0,0000038)\,\mathrm{m}^3$$
$$V_{Rumpf} = (2,0134411 \pm 0,0000713)\,\mathrm{m}^3$$
$$V_{Arme} = (0,4266180 \pm 0,0000049)\,\mathrm{m}^3$$
$$V_{Beine} = (0,5403148 \pm 0,0000168)\,\mathrm{m}^3$$
$$V_{Gesamt} = (4,571233 \pm 0,000119)\,\mathrm{m}^3$$

Die Fehler wird mit der Formel

$$\Delta V_{Zyl.} = (2 \cdot \pi \cdot r \cdot h \cdot \Delta r)$$

berechnet. Somit ergeben sich nun die einzelnen Massen:

$$m_{Kopf} = (4,67485 \pm 0,00012) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}$$
$$m_{Rumpf} = (15,08572 \pm 0,00066) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}$$
$$m_{Arme} = (3,19644) \pm 0,00009) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}$$
$$m_{Beine} = (4,04831 \pm 0,00126) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}$$

Die Massenangaben sind jeweils für beide Arme und Beine angegeben. Die Fehler werden mit Formel

$$\Delta m_{teil} = \sqrt{\left(\frac{m_{ges.}}{V_{ges.}} \cdot \Delta V_{teil}\right)^2 + \left(-\frac{V_{teil} \cdot m_{ges.}}{V_{ges.}^2} \cdot \Delta V_{ges}\right)^2}$$

bestimmt. Das Theoretische Trägheitsmoment ergibt sich aus der Formel:

$$\sum I_i = I_{Rumpf} + I_{Kopf} + 2 \cdot I_{Arm} + 2 \cdot I_{Bein} \tag{16}$$

Es ist zu Beachten, dass bei Position 1 für die Arme und bei Position 2 für die Arme und Beine der Satz von Steiner Anzuwenden ist. Die Formel hierfür lautet:

$$I_{Arm/Bein} = m\left(\frac{r^2}{4} + \frac{\left(r_{rumpf} + 1/2 \cdot l_{Arm/Bein}\right)}{12}\right) \tag{17}$$

Die einzelnen Trägheitsmomente,

$$I_{Kopf} = (0,002477 \pm 0,000009)\,\mathrm{kg\,m}^2$$
$$I_{Rumf} = (0,00781 \pm 0,00009)\,\mathrm{kg\,m}^2$$
$$I_{Arm} = (3,69 \pm 0,12) \cdot 10^{-5}\,\mathrm{kg\,m}^2$$
$$I_{Bein,pos.1} = (1,8 \pm 0,5) \cdot 10^{-7}\,\mathrm{kg\,m}^2$$
$$I_{Bein,pos.2} = (5.06 \pm 0,20) \cdot 10^{-5}\,\mathrm{kg\,m}^2$$

summieren sich zu den Trägheitsmomenten der beiden Positionen. Sie lauten:

$$I_{p1,theo} = (0,01032408 \pm 0,0001025)\,\mathrm{kg\,m}^2$$

$$I_{p2,theo} = (0,0103745 \pm 0,0001022)\,\mathrm{kg\,m}^2$$

4.5 experimentelle Bestimmung

Für eine stehende Holzpuppe mit ausgestreckten Armen ergibt sich mit den Werten aus Tabelle (6) eine Schwingungsdauer von

$$\bar{T} = (1,446 \pm 0,051)\,\mathrm{s}$$

und somit das Trägheitsmoment,

$$I_{p1,exp} = (0,066 \pm 0,002)\mathrm{kg\,m}^2$$

das nach Formel (15) bestimmt wird. Der Fehler wird mit Formel(16) bestimmt.

Tabelle 6: Stellung 1 der Puppe

T/s
1.60
1.30
1.38
1.49
1.46

Für diese Puppe mit ausgestreckten Armen und angewinkelten Beinen, ergibt sich die Schwingungsdauer

$$\bar{T} = (2,032 \pm 0,039)\,\mathrm{s}$$

und das Trägheitsmoment

$$I_{p2,exp} = (0,067 \pm 0,003)\mathrm{Kg\,m}^2,$$

das mit Formel (15) berechnet wurde. Die Werte für die Schwingungsdauer wurden Tabelle 7 entnommen.

Tabelle 7: Stellung 2 der Puppe

$T\ in\ s$
2.12
2.00
2.12
2.00
1.92

4.6 Diskussion

Die Messscheibe für die Winkelauslenkungen war nicht fest an der Apparatur befestigt. Daher verschob sie sich leicht. Dies führt zu Ungenauigkeiten bei der Auslenkung. Hinzu kommen die Fehler, die beim Ablesen geschehen. Bei der Holzpuppe kam es vorallem zu Messungenauigkeiten, da sie bei der Schwingung ihre Position nicht beibehalten konnte. Eine Messung mit angelegten Armen war nicht möglich, da diese fest in waagerechter Stellung geklebt waren. Die Ergebnisse für das Trägheitsmoment der Puppe mit ausgestreckten Armen und Beinen stimmen nicht überein. Dies kann an den oben genannten Fehlern liegen.