Durchführung: 27.10.2017
1. Abgabe: 03.11.2017

Praktikumsprotokoll V101

Das Trägheitsmoment

Carolin Harkort[1],
Jacqueline Schlingmann[2]

[1]carolin.harkort@tu-dortmund.de
[2]jacqueline.schlingmann@tu-dortmund.de

1 Zielsetzung

Ziel dieses Versuchs ist die Bestimmung der Trägheitsmomente verschiedener Körper.

2 Theorie

Als Trägheitsmoment wird der Widerstand eines Körpers gegen die Änderung seiner Rotation beschrieben, welches abhängig von der Masse M und dem Radius r ist. Die rotierenden Punktmasse besitzt ein Trägheitsmoment von $I = mr^2$. Durch das Aufsummieren der einzelnen Trägheitsmomente wird das Gesamtträgheitsmoment berechnet.

$$I = \sum_{i=0}^{n} r_i^2 \cdot m_i \tag{1}$$

Entsprechend gilt für eine kontinuierliche Massenverteilung

$$I = \int r^2 \mathrm{dm} \tag{2}$$

Zur Berechnung der Trägheitsmomente bekannter Symmetrien wurden folgenede Formeln verwendet:
Kugel:

$$I_K = \frac{2}{5} mR^2 \tag{3}$$

Zylinder:

$$I_Z = \frac{mR^2}{2} \qquad I_{Zh} = m(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12}) \tag{4}$$

Wichtig zu beachten ist, dass dabei die Rotationsachse durch den Schwerpunkt des Körpers verläuft. Ist dies nicht der Fall beschreibt der *Satz von Steiner* die parallele Verschiebung der Rotationsache, wobei I_s als das Trägheitsmoment bezüglich der Schwerpunktsachse und a als der Abstand der Drehachse zur Schwerpunktsachse definiert ist.

$$I = I_s + m \cdot a^2 \tag{5}$$

2.1 Bestimmung der Trägheitsmomente

Für das Drehmoment gilt

$$\vec{M} = \vec{F} \times \vec{r} \tag{6}$$

In einem schwingungsfähigen System hängen Trägheitsmoment und Schwingungsdauer zusammen. Dieser Zusammenhang wird durch

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}} \tag{7}$$

beschrieben, wobei I für das Trägheitsmoment des Körpers und D für die Winkelrichtgröße steht. Für kleine Winkel lässt sich der Betrag des Drehmoments als

$$M = D \cdot \varphi \tag{8}$$

mit dem Auslenkwenkel φ darstellen.

3 Durchführung

3.1 Bestimmung des Eigenträgheitsmoments

Zu Beginn wird eine Stange, die zuvor gewogen und ausgemessen wurde, auf der Apperatur festgeschraubt. Die Apperatur ist in Abbildung 1 zu sehen. Die Stange wird nun um zehn unterschiedliche Winkel φ ausgelenkt. Zu jedem Winkel wird die wirkende Kraft mit einem Federkraftmesser bestimmt. Im Anschluss werden zwei Gewichte, die als symmetrisch angenommen werden, ausgemessen und gewogen. An der Stange befinden sich diese Gewichte jeweils zum selben Abstand von der Drehachse. Sie werden per Hand um einen bestimmten Winkel φ ausgelenkt und losgelassen. Die Periodendauer T der entstandenen Schwingung wird mittels einer Stopuhr bestimmt. Dies wird für zehn unterschiedliche Abstände von der Drehachse durchgeführt.

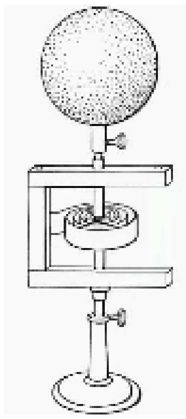

Abbildung 1: Aufbau der Apperatur am Beispiel einer Kugel

3.2 Das Trägheitsmoment zwei unterschiedlicher Körper

Nun wird der Stab durch einen Zylinder ausgetauscht. Auch dieser wurde zuvor gewogen und ausgemessen. Der Körper besitzt eine Makierung, die als Nullpunkt verwendet wird um den Körper um einen gleichbleibenden Winkel φ auszulenken. Es wird wieder die

Periodendauer T mittels einer Stoppuhr bestimmt. Der Vorgang wird fünfmal wiederholt und anschließend mit einer Kugel durchgeführt.

3.3 Trägheitsmoment einer Puppe

Die in 3.2 beschriebene Messung wird für eine Holzpuppe ebenfalls wiederhohlt. Dafür wird die Puppe gewogen und ausgemessen. Für die Ausmessung werden die Arme, der Rumpf, die Beine und der Kopf jeweils als Zylinder genährt. Die Breite jedes Körperteils ist fünf mal zu messen um einen Mittelwert des Radius für den Zylinder zu erhalten. Die Periodendauer T wird für eine stehende Puppe mit ausgestreckten Armen bestimmt. Anschließend für diese Puppe in sitzender Position mit ausgestreckten Armen.

4 Auswertung

4.1 Bestimmung der Winkelrichtgröße D und des Eigenträgheitsmoments I_D

Der Kraftmesser hat zum Mittelpunkt einen Abstand von 20 cm. Mit diesem Radius r wird nun die Winkelrichtgröße D bestimmt. Dafür werden die Formeln 6 und 8 verwendet.

$$D = (5{,}66 \pm 0{,}49) \cdot 10^{-4}\,\mathrm{Nm} \tag{9}$$

Die Daten für diese Berechnung werden aus Tabelle 1 entnommen. Die Werte für φ aus Tabelle 2

Tabelle 1: Schwingungsdauern bei jeweiligen Abständen.

$a\ in\ m$	$a^2\ in\ m^2$	$T\ in\ s$	$T^2\ in\ s^2$
0.03	0.0009	2.06	4.2436
0.06	0.0036	2.29	5.2441
0.09	0.0081	3.21	10.3041
0.12	0.0144	4.16	17.3056
0.15	0.0225	4.81	23.1361
0.18	0.0324	5.41	29.2681
0.21	0.0441	6.38	40.7044
0.24	0.0579	7.16	51.2656
0.27	0.0729	7.52	56.5504
0.29	0.0841	8.49	72.0801

Für die Berechnung des Eigenträgheitsmoments I_D wird nun T^2 gegen a^2 aufgetragen. Dies ist in Abbildung 2 zu sehen.

Die lineare Regression wird mittels Python durchgeführt. Für die Gerade

$$T^2 = m * a^2 + n \tag{10}$$

Tabelle 2: Kraftmessung des Eigenträgheitsmoments

Grad	*Kraft in N*
45	0.22
90	0.29
135	0.40
180	0.50
225	0.60
250	0.62
270	0.63
300	0.74
315	0.74
360	0.78

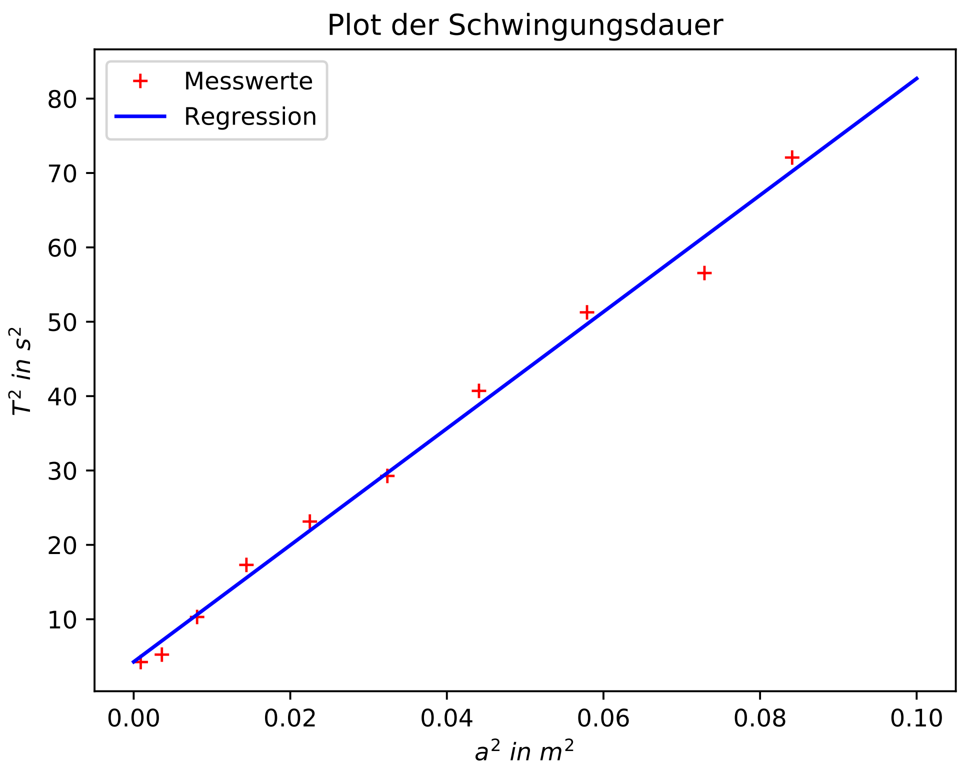

Abbildung 2: Die Quadrate der Schwingungsdauer gegenüber den Abstandsquadraten

ergeben sich die Steigung $m = (784 \pm 26)\frac{s^2}{m^2}$ und der y-Achsenabschnitt $n = (4.3 \pm 1.1)s^2$.

Für die Berechnung des Eigenträgheitsmoments der Drillachse wird Formel4 und die Formel

$$I_{Stange} = \frac{1}{12} \cdot m_{Stange} \cdot H^2_{Stange} \tag{11}$$

für einen langen dünnen Stab verwendet. Mithilfe von

$$I_D = I_{ges} - 2 \cdot I_Z - I_{Stange} \tag{12}$$

$$= \frac{b \cdot D_{dyn}}{4\pi^2} - 2 \cdot I_Z - I_{Stange} \tag{13}$$

$$\tag{14}$$

lässt sich das Eigenträgheitsmoment

$$I_D = (-2.83 \pm 0.19) \cdot 10^{-3}\text{kgm}^2 \tag{15}$$

bestimmen.

Die Fehlerrechnung wurde mit der Formel

$$\Delta f = \sqrt{(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \Delta x)^2 + (\frac{\partial f}{\partial y} \cdot \Delta y)^2} \tag{16}$$

durchgeführt. Dies ist eine allgemeine Formel und wurde angepasst.

4.2 Bestimmung der Trägheitsmomente zwei unterschiedlicher Körper

4.2.1 Trägheitsmoment eines Zylinders

Zu Beginn der Messung werden von dem ausgewählten Zylinder der Radius, die Höhe und die Masse gemessen:

$$r_Z = 0.04\text{m} \tag{17}$$

$$h_Z = 0.14\text{m} \tag{18}$$

$$m_Z = 0.8995\text{kg} \tag{19}$$

Anhand dieser Werte wird das theoretische Trägheitsmoment bestimmt:

$$I_{Zylinder,theo} = \frac{1}{2} m_Z \cdot r_Z^2 = 0.000720 \text{ kgm}^2 \tag{20}$$

Für die Schwingungsdauer ergibt sich dadurch

$$T_{Zylinder} = (1.378 \pm 0.018)\text{s}. \tag{21}$$

und für das Trägheitsmoment des Zylinder

$$I_{Zylinder,exp} = (1,98 \pm 0,03) \cdot 10^{-5}\text{kgm}^2 \tag{22}$$

Die Fehlerrechnung wurde wieder mit Formel 16 durchgeführt.

Tabelle 3: Schwingungsdauer eines Zylinders

$Messung$	$T\ in\ s$
1	1.41
2	1.35
3	1.32
4	1.41
5	1.40

4.2.2 Trägheitsmoment einer Kugel

Zunächst wird die Kugel ausgemessen und gewogen.

$$r_K = 0,695\,\mathrm{m} \tag{23}$$
$$m_K = 0,8125\,\mathrm{Kg} \tag{24}$$

Anhand dieser Werte kann nun das Trägheitsmoment $I_{Kugel,theo}$ bestimmt werden. Dies geschieht mit Formel 3:

$$I_{Kugel,theo} = 0,0015698\ \mathrm{kg\,m^2} \tag{25}$$

Der experimentelle Wert für das Trägheitsmoment ermittelt sich aus Formel 7. Der Wert für die Schwingungsdauer T wird mit Tabelle 4 bestimmt. Der Körper wurde immer um einen Winkel von $\frac{4\pi}{3}$ ausgelenkt.

Tabelle 4: Schwingungsdauer der Kugel

$Messung$	$T\ in\ s$
1	1,63
2	1,55
3	1,55
4	1,53
5	1,58

$$T = (1{,}568 \pm 0{,}017)\,\mathrm{s} \tag{26}$$

Der experimentelle Wert für das Trägheitsmoment lautet somit:

$$I_{Kugel,exp} = (8{,}6566 \pm 0{,}1877) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{Kg\,m^2} \tag{27}$$

4.3 Bestimmung des Trägheitsmoments einer Puppe

Eine Holzpuppe hat ein Gewicht von

$$m = 0,03425\,\mathrm{Kg} \tag{28}$$

und wird als Zylinder genährt. Dafür werden die Körperteile einzeln betrachtet. Hier bei ist die Höhe bzw. die Länge h und der Radius r.

Kopf:

$$h = 0,071\,\mathrm{m} \qquad r = (1,6725 \pm 0,051) \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m} \tag{29}$$

Rumpf:

$$h = 0,122\,\mathrm{m} \qquad r = (2,292 \pm 0,406) \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m} \tag{30}$$

Arm:

$$h = 0,179\,\mathrm{m} \qquad r = (0,871 \pm 0,051) \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m} \tag{31}$$

Bein:

$$h = 0,198\,\mathrm{m} \qquad r = (0,932 \pm 0,145) \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m} \tag{32}$$

Die Höhen und die Radien mit dem Fehler ergeben sich aus den gemessenen Werten, die im Anhang zu finden sind.

Für eine stehende Holzpuppe mit ausgestreckten Armen ergibt sich eine Schwingungsdauer von

$$T = (1,446 \pm 0,051)\,\mathrm{s} \tag{33}$$

und somit das Trägheitsmoment,

$$I_{p1} = (0,363924 \pm 0,000972)\mathrm{Kg\,m}^2 \tag{34}$$

dass nach Formel 3 bestimmt wird. Die Werte für die Schwingungsdauer sind aus Tabelle 5 zu entnehmen.

Tabelle 5: Stellung 1 der Puppe

Messung	*T in s*
1	1.60
2	1.30
3	1.38
4	1.49
5	1.46

Für diese Puppe mit ausgestreckten Armen und angewinkelten Beinen, ergibt sich die Schwingungsdauer

$$T = (2,032 \pm 0,039)\,\mathrm{s} \tag{35}$$

und das Trägheitsmoment

$$I_{p2} = (8,31507 \pm 0,55239) \cdot 10^{-3}\mathrm{Kg\,m}^2 \tag{36}$$

Tabelle 6: Stellung 2 der Puppe

$Messung$	$T\ in\ s$
1	2.12
2	2.00
3	2.12
4	2.00
5	1.92

Die Werte für die Schwingungsdauer wurden aus Tabelle 6 entnommen.

Um das Trägheitsmoment bestimmen zu können, müssen die Massen der einzelnen Körperteile bestimmt werden. Dies geschieht mit der Formel

$$m_{teil} = \frac{V_{teil}}{V_{ges}} \cdot m_{ges} \tag{37}$$

Die dafür benötigten Volumen ergeben sich aus der Formel

$$V_{Zylinder} = \pi \cdot r^2 \cdot h \tag{38}$$

$$V_{Kopf} = (0,6239366 \pm 0,0000038)\,\mathrm{m}^3 \tag{39}$$
$$V_{Rumpf} = (2,0134411 \pm 0,0000713)\,\mathrm{m}^3 \tag{40}$$
$$V_{Arme} = (0,4266180 \pm 0,0000049)\,\mathrm{m}^3 \tag{41}$$
$$V_{Beine} = (0,5403148 \pm 0,0000168)\,\mathrm{m}^3 \tag{42}$$
$$V_{Gesamt} = (4,571233 \pm 0,000119)\,\mathrm{m}^3 \tag{43}$$

Somit Ergeben sich nun die einzelnen Massen:

$$m_{Kopf} = (4,67485 \pm 0,00012) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{Kg} \tag{44}$$
$$m_{Rumpf} = (15,08572 \pm 0,00066) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{Kg} \tag{45}$$
$$m_{Arme} = (3,19644) \pm 0,00009) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{Kg} \tag{46}$$
$$m_{Beine} = (4,04831 \pm 0,00126) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{Kg} \tag{47}$$

Die Massenangaben sind jeweils für beide Arme und Beine angegeben. Auch hier wurden alle Fehler mit Formel 16 bestimmt.

4.4 Diskussion

Die Messscheibe für die Winkelauslenkungen war nicht fest an der Apperatur befestigt. Daher veschob sie sich leicht. Dies führt zu Ungenauigkeiten bei der Auslenkung. Hinzu kommen die Fehler, die beim Ablesen geschehen. Bei der Holzpuppe kam es vorallem zu Messungenauikeiten, da sie bei der Schwingung ihre Position nicht beibehalten konnte.

Eine Messung mit angelegten Armen war nicht möglich, da diese fest in Waagerechter Stellung geklebt waren. Die Ergebnisse für das Trägheitsmoment der Puppe mit ausgestreckten Armen und Beinen kann nicht stimmen. Dies kann an einem Fehler in der Berechnung oder an der Summierung vieler unterschiedlicher Fehler liegen.