1 Theorie

Sich wiederholende Vorgänge, welche nach einer Periodendauer T oder einer Distanz D erneut ihren Anfängswert annehmen, werden als periodische Vorgänge bezeichnet. Sie lassen sich durch

$$f(t+T) = f(t) \tag{1}$$

beziehungsweise

$$f(x+D) = f(x) \tag{2}$$

beschreiben. Die häufigsten periodischen Funktionen sind die Sinus- und Cosinusfunktionen. Diese sind 2π periodische und im Wertebereich von -1 und 1 definiert. Mit ihrer Amplitude a oder b und der Periodendauer T können sie als

$$f(t) = a\cos(n\frac{2\pi}{T}t) \tag{3}$$

beziehungsweise

$$f(t) = b\sin(n\frac{2\pi}{T}t) \tag{4}$$

dargestellt werden. Fast alle anderen stetige, periodischen Vorgänge der Natur können durch sie beschrieben werden. Für diese gilt das Fouriersche Theorem

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n cos(n\frac{2\pi}{T}t) + b_n sin(n\frac{2\pi}{T}t)), \tag{5}$$

wenn sie stetig sind, die Reihe also gleichmäßig konvergiert. Die Koeffizienten a_n und b_n beschreiben die Amplituden der Oberschwingungen und können durch

$$a_n = \frac{T}{2}\int_0^T f(t)\cos(n\frac{2\pi}{T}t)dt \tag{6}$$

und

$$b_n = \frac{T}{2}\int_0^T f(t)\sin(n\frac{2\pi}{T}t)dt \tag{7}$$

berechnet werden. In der Fourier-Entwicklung treten lediglich Vielfache der Grundvfrequenz $v = \frac{1}{T}$ auf, welche auch als harmonische Oberschwingungen bezeichnet werden. 0, $\frac{\pi}{2}$, π und 2π können dabei nur als Phasen vorkommen.

Zur Bestimmung von a_n und b_n wird eine Fourier-Analyse durchgeführt. Je nach Funktion können die Koeffizienten wegfallen. Für gerade Funktionen gilt $a_n = 0$ und für ungerade $b_n = 0$.

Auch nicht stetige Funktionen lassen sich durch eine Fourierreihe nähern. Allerdings tritt dann an der Unstetigkeitsstelle t_0 eine endliche Abweichung der Reihe von der Funktion auf. Dies wird als Gibbsches Phänomen bezeichnet.

Mit Hilfe einer Fourier-Transformation kann das gesamte Frequenzspektrum einer zeitabhänigigen Funktion bestimmt werden:

$$g(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{ivt} dt. \tag{8}$$

Die Funktion $g(v)$ stellt dabei das Frequenzspektrum der Funktion f dar, welche selbst für nicht-periodische Funktionen gilt.

2 Durchführung

2.1 Vorbereitung

Zur Vorbereitung auf den Versuch werden die Fourier-Koeffizienten einer Rechteck-, Dreieck- und Sägezahnspannung bestimmt. Zur Vereinfachung wurden die Funktionen als gerade beziehunsweise ungerade angenommen.

2.1.1 Rechteckspannung

Für die Bestimmung der Rechteckspannung wird eine ungerade Funktion definiert, aus der sich die Koeffizenten:

$$a_0 = 0, \text{ da } f(t) \text{ ungerade}$$
$$a_n = 0, \text{ da } f(t) \text{ ungerade}$$
$$b_n = \begin{cases} \frac{1}{n\pi}, \text{ für } n \text{ ungerade} \\ 0, \text{ für } n \text{ gerade} \end{cases}$$

berechnen lassen.

2.1.2 Dreieckspannung

Die Fourrierkoeffizienten einer geraden Funktion berechnen sich zu:

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{(n\pi)^2}, \text{ für } n \text{ ungerade} \\ \\ 0, \text{ für } n \text{ gerade} \\ \end{cases}$$

$$b_n = 0, \text{ da } f(t) \text{ gerade}$$

2.1.3 Sägezahnspannung

Zur Berechnung einer Sägezahnspannung wird wie bei der Rechteckspannung eine ungerade Funktion verwendet. Daraus folgt für die Amplituden der Oberschwingung:

$$a_0 = 0, \text{ da } f(t) \text{ ungerade}$$
$$a_n = 0, \text{ da } f(t) \text{ ungerade}$$
$$b_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n\pi}.$$

2.2 Fourieranalyse

Der Versuchsaufbau der Fourieraalyse besteht aus einem Funktionsgenerator, der als Signalquelle dient und einem Digitalszilloskop, welches die Fourieranalyse durchführt. Die Abtastrate am Oszilloskop muss größer als das Doppelte der maximalen Oberschwingungsfrequenz eingestellt werden, sodass gilt

$$v_a > 2v_{\text{max}}. \tag{9}$$

Vom Funktionsgenerator werden jeweils Rechteck-, Dreieck- und Sägezahnspannugen erzeugt. Anhand dessen können die Frequenzen und die Amplituden der Peaks mittels der Cursorfunktion abgelesen werden.

2.3 Fouriersynthese

Zur Fouriersynthese wird anschließend ein Oberwellengenerator verwendet. Zuerst werden die Phasenverhältnisse zwischen Grund- und Oberschwingung eingestellt. Dafür wird das Oszilloskop auf den X-Y-Betrieb umgestellt. Auf dem X-Eingang wird die Grundschwingung eingespeist und auf dem Y-Eingang eine ganzzahlige Oberwelle.

Auf dem Oszilloskop sind sogenannte Lissajousfiguren erkennbar, welche bei Überlagerung zweier harmonischer, rechtwinklig zueinander stehenden Schwingungen entstehen. Die Phasendifferenz zwischen Grund- und Oberschwingung soll auf $\Delta\varphi = 0$ eingestellt werden.

Durch das schrittweise Aufsummieren der einzelnen Oberwellen ist die Summenschwingung am Oszilloskop zu sehen.

3 Auswertung

3.1 Fourier-Amplituden

Die Fourier-Amplituden wurden alle bei einer Frequenz von $50\,kHz$ gemessen für die Rechteckspannung werden die Amplituden mit der Formel

$$a_k = \frac{A \cdot 4}{k\pi} \tag{10}$$

bestimmt.Dabei werden nur ungerade $k \in \mathbb{N}$ betrachtet. Für alle ungeraden k gilt, $a_k = 0$. A ist eine Konstante. $a_k - c_k$ sind fortlaufend gewählte Bezeichnungen für die Koeffizienten.

Tabelle 1: Rechteckspannung

a_k	$U_{gemessen}/V$	$U_{berechnet(A=1,64)}/V$	$Differenz/\%$
a_1	2,090	2,088	0,096
a_3	0,720	0,696	3,333
a_5	0,400	0,418	4,500
a_7	0,312	0,298	4,487
a_9	0,200	0,232	16,00

Für die Sägezahnspannung ergeben sich die Amplituden mit der Formel:

$$b_k = \frac{2}{k}\,. \tag{11}$$

Hier werden gerade und ungerade $k \in \mathbb{N}$ betrachtet. Die Amplituden der Dreieckspannung

Tabelle 2: Sägezahnspannung

b_k	$U_{gemessen}[V]$	$U_{berechnet}[V]$	$Differenz[\%]$
b_1	2,100	2,000	4,762
b_2	0,968	1,000	3,306
b_3	0,736	0,667	9,375
b_4	0,552	0,500	9,420
b_5	0,392	0,400	2,041
b_6	0,336	0,300	10,714
b_7	0,312	0,286	8,333
b_8	0,264	0,250	5,303
b_9	0,208	0,200	3,846

ergeben sich durch

$$c_k = \frac{C \cdot 4}{\pi k^2}\,. \tag{12}$$

Es werden wieder nur ungerade $k \in \mathbb{N}$ betrachtet. C ist eine frei wählbare Variable.

Tabelle 3: Dreieckspannung

c_k	$U_{gemessen}[V]$	$U_{berechnet(C=2,1)}[V]$	$Differenz[\%]$	$U_{berechnet(C=1)}[V]$
c_1	2,660	2,674	0,526	1,273
c_3	0,312	0,297	4,808	0,141
c_5	0,096	0,107	11,458	0,051
c_7	0,052	0,055	5,769	0,026
c_9	0,026	0,033	26,923	0,016

3.2 Fourier Synthese

In den folgenden Abbidungen (1), (2) und (3) sind die synthetisierten Funktionen der Rechteck- ,Sägezahn- und Dreiecksschwinung zu sehen. Die Anfangsspannung beträgt 613 V.
Mit

$$a_k = \frac{613}{k} \; , k \in \mathbb{N} \tag{13}$$

werden die Spannungen für die einzelnen Einstellungen bestimmt. Dies geschieht mit den selben k, wie bei der Amplitudenbestimmung.

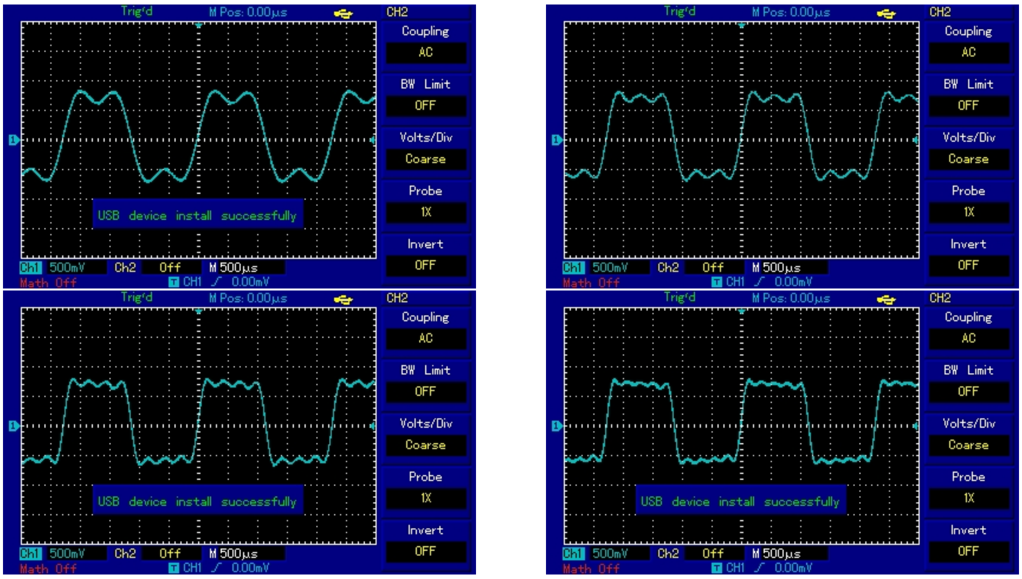

Abbildung 1: Rechteckspannung

Für die Spannungen der Sägzahnschwingung, wird ebenfalls Formel (13) verwendet.

Es sind zum Teil Unebenheiten in der Rechteck- und Sägezahnspannung zu sehen. Dies lässt sich mit dem Gibbschen Phänomen erklären.

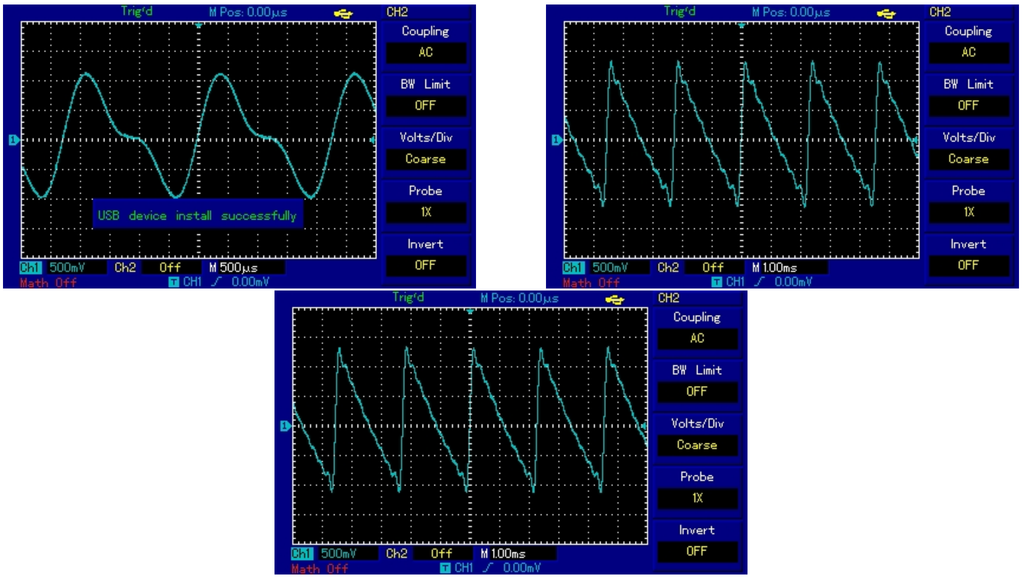

Abbildung 2: Sägezahnspannung

Für die Dreieckspannung wird die Formel

$$c_n = \frac{613}{k^2} \, , k \in \mathbb{N} \tag{14}$$

verwendet.

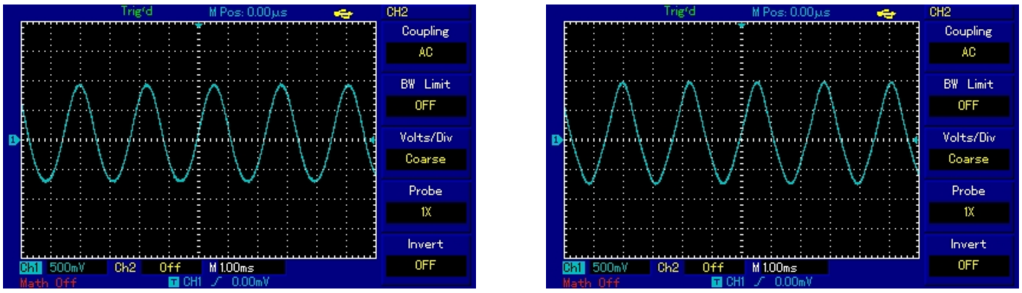

Abbildung 3: Dreieckspannung

4 Disskusion

Die Messung der Ampituden ist durch den Messvorgang am Oszillosgraphen fehlerbehaftet. Bei dem zweiten Teil der Messungen konnten für die Dreieckssannung nur Bilder für die ersten beiden Spannungen gemacht werden, da die Spannungen sehr schnell sehr klein wurden und es nicht möglich war diese einzustellen. Zusammenfassend kann gesagt werden, dass die Messungen die Theorie sehr gut wiederspiegelt.