

Durchführung: 26.06.2018
Abgabe: 03.07.2018

PRAKTIKUMSPROTOKOLL V402

DISPERSIONSMESSUNG AM GLASPRISMA

Carolin Harkort¹,
Jacqueline Schlingmann²

¹carolin.harkort@tu-dortmund.de

²jacqueline.schlingmann@tu-dortmund.de

1 Zielsetzung

Ziel dieses Versuchs ist die Untersuchung von Dispersion am Glasprisma. Dazu zählt die Bestimmung der Dispersionskurve.

2 Theorie

tritt eine Lichtwelle in Materie ein kommt es zu Wechselwirkungen zwischen der Welle und den Elektronen. Da die Ausbreitungsgeschwindigkeit v in Licht geringer ist als die Geschwindigkeit c im Vakuum kommt es beim übertreten in eine andere Schicht zu einer Richtungsänderung. Diese wird als Brechung bezeichnet. Der Brechungsindex n kann beschrieben werden durch

$$n := \frac{c}{v} = \frac{v_1}{v_2} \quad (1)$$

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Licht in Materie ist eine frequenzabhängige Größe. Somit ist der Brechungsindex eine Funktion der Frequenz oder der Wellenlänge .

$$n = f(\lambda)$$

Diese Funktion ist die sogenannte Dispersionskurve. Mit ihr ist es möglich die chromatische Aberration zu kompensieren.

Tritt ein Lichtstrahl im Winkel α auf eine Grenzfläche zwischen zwei unterschiedlichen Materialien, ändert dieser seine Richtung und breitet sich mit dem Winkel β aus. Der Zusammenhang zwischen Winkel und Geschwindigkeit ergibt sich durch das Huygenssche Prinzip. Dieses besagt, dass jeder Punkt einer Welle ein Ausgangspunkt einer neuen Elementarwelle ist.

Aus diesem kann das Snelliussche Brechungsgesetz hergeleitet werden. Es beschreibt die Richtungsänderung eines Lichtstrahls durch

$$n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2} \quad (2)$$

Mit Hilfe der maxwellschen Theorie der elektromagnetischen Wellen, kann die Dispersionsgleichung hergeleitet werden. Um die Dispersion vom sichtbaren Spektralbereich in Gläsern zu beschreiben, eignen sich zwei Formel

$$n^2(\lambda) = A_0 + \frac{A_2}{\lambda^2} + \frac{A_4}{\lambda^4} + \dots \quad (3)$$

$$n^2(\lambda) = 1 - A'_2\lambda^2 - A'_4\lambda^4 - \dots \quad (4)$$

Die durch (3) und (4) beschriebenen Kurven sind in Abbildung 1 zu sehen.

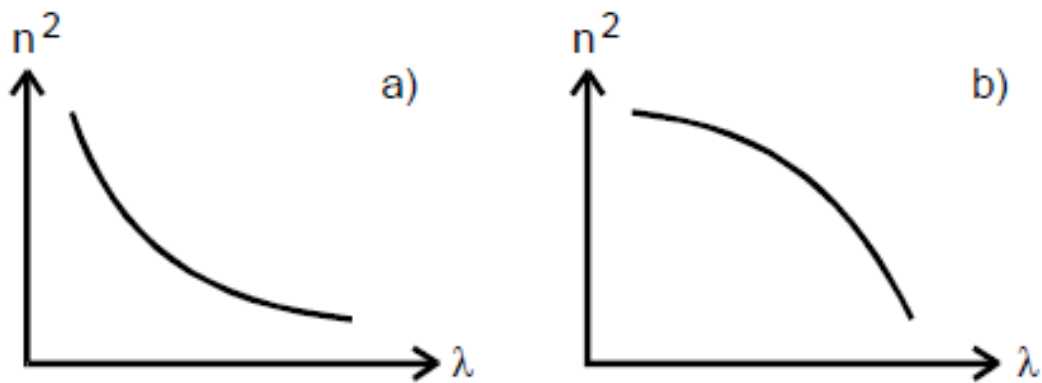


Abbildung 1: Gestalt der Dispersionskurve a) nach (3) und b) nach (4)
[3]

Dabei gilt für (3) für alle λ

$$\frac{d^2 n^2(\lambda)}{d\lambda^2} > 0$$

und für (4)

$$\frac{d^2 n^2(\lambda)}{d\lambda^2} < 0$$

Die Abnahme des Brechungsindex mit zunehmender Wellenlänge wird dabei als normale Dispersion bezeichnet. Anormale Dispersion ist die Bezeichnung für die Zunahme des Brechungsindex bei zunehmender Wellenlänge.

3 Durchführung

Zunächst wird die Quecksilber-CD-Lampe eingeschaltet. Das Glasprisma wird wie in Abbildung 2 zu sehen auf die Apparatur gesetzt. Die Lampe wird so eingestellt, dass die einzelnen Spektrallinien scharf zu erkennen sind.

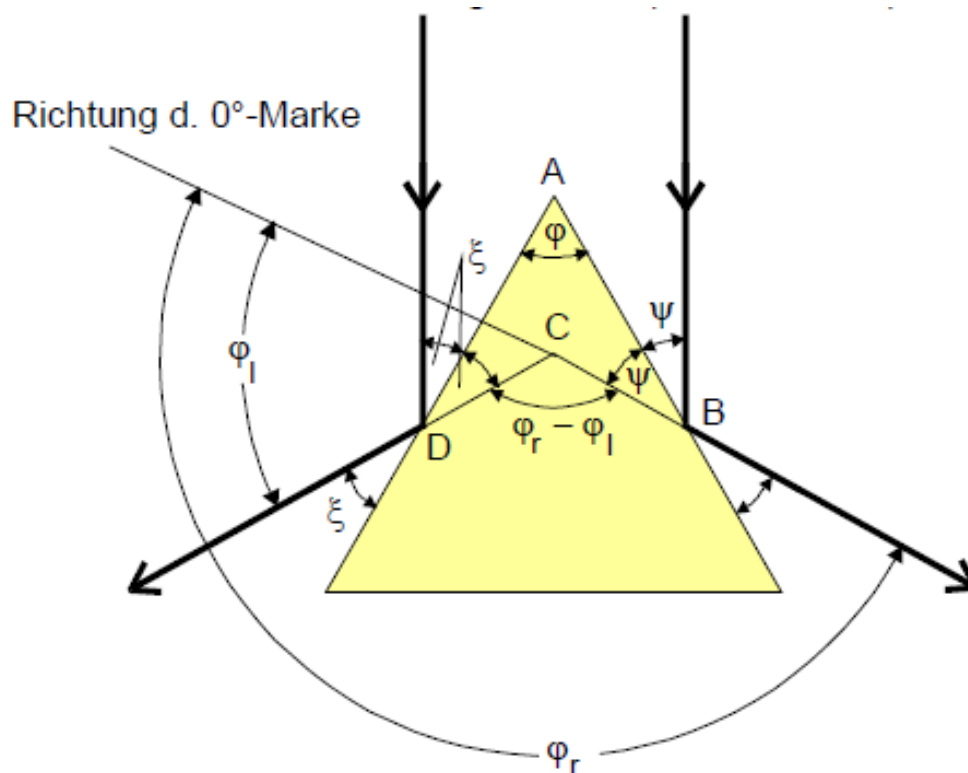


Abbildung 2: Bestimmung des Winkels φ zwischen den brechenden Oberflächen
[3]

Es ist eine weiße Linie zu erkennen. Diese wird auf das Fadenkreuz gelegt. Die Messung wird sieben mal durchgeführt. Der Winkel kann mit

$$\varphi = \frac{1}{2}(\varphi_r - \varphi_l) \quad (5)$$

berechnet werden.

Im nächsten Teil des Versuchs wird das Prisma wie in Abbildung 3 aufgestellt. Die weiße Linie wird auf die einzelnen Spektrallinien gelegt und der Winkel wird gemessen. Danach wird das Prisma wie in Abbildung 4 gedreht und die Messung wiederholt.

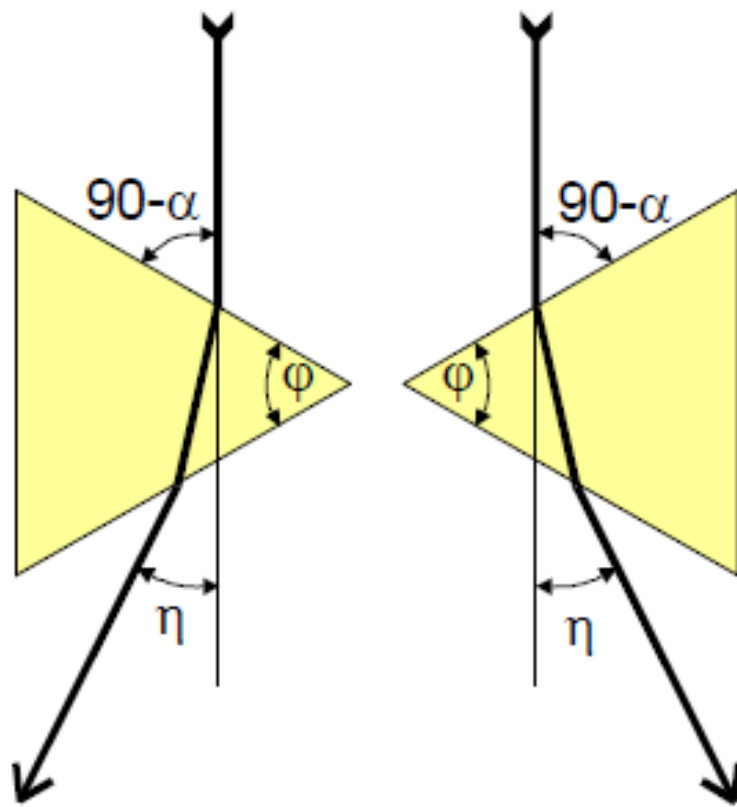


Abbildung 3: Bestimmung des Brechungswinkels η
[3]

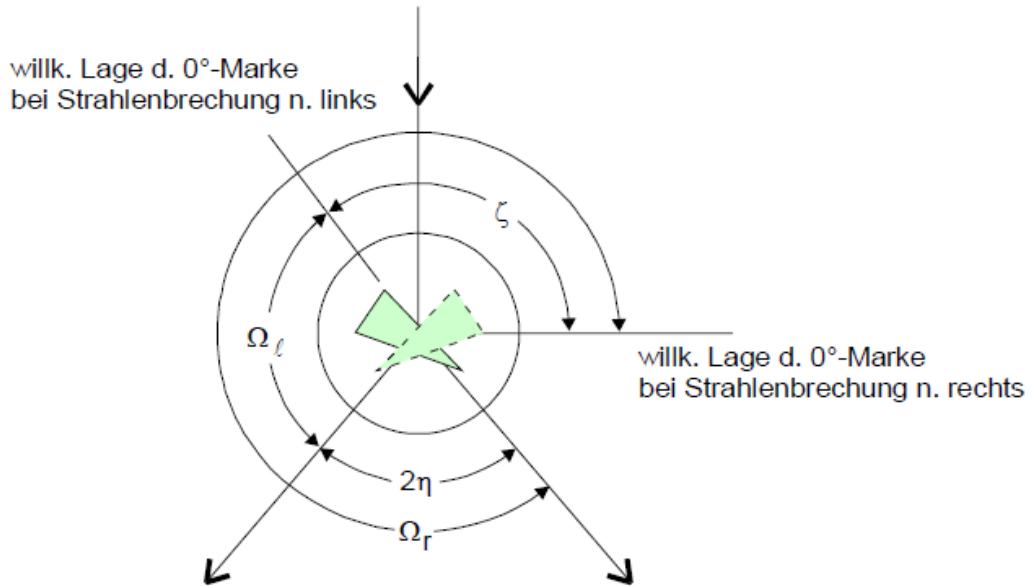


Abbildung 4: Darstellung der Messgrößen Ω_l und Ω_r
[3]

η kann mit Formel

$$\eta = 180 - (\Omega_r - \Omega_l) \quad (6)$$

bestimmt werden.

4 Auswertung

4.1 Bestimmung des Winkels φ

Zur Bestimmung des brechenden Winkels φ werden die Winkel φ_{links} und φ_{rechts} der beiden reflektierten Strahlen aufgenommen. In Tabelle 1 sind die Messwerte φ_{links} und φ_{rechts} aufgetragen. Der daraus resultierende Winkel φ wird mit Formel 5 berechnet. Für den Winkel φ ergibt sich aus

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{n} \sum \varphi_n$$

und

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\sum (\varphi_n - \bar{\varphi})^2}{n - 1}}.$$

der Wert $\varphi = (60,10 \pm 0,03)^\circ$.

Tabelle 1: Messwerte für φ

Messung	$\varphi_{\text{links}} / ^\circ$	$\varphi_{\text{rechts}} / ^\circ$	$\varphi / ^\circ$
1	96,6	216,7	60,05
2	101,4	221,6	60,10
3	99,0	219,0	60,00
4	107,1	227,3	60,10
5	106,7	227,0	60,15
6	100,8	221,0	60,10
7	101,0	221,4	60,20

4.2 Bestimmung des Winkels η und der Brechungsindices n

Die gemessenen Winkel ω_{rechts} und ω_{links} sind in Abhängigkeit der Wellenlänge in Tabelle 2 dargestellt.

Tabelle 2: Messwerte zur Bestimmung von η und n

Wellenlänge	$\omega_{\text{rechts}} / ^\circ$	$\omega_{\text{links}} / ^\circ$	η	n
643,84	333,3	91,0	62,3	$1,750 \pm 0,046$
576,96	333,5	90,7	62,8	$1,754 \pm 0,046$
546,07	334,3	90,1	64,2	$1,766 \pm 0,046$
508,58	335,0	89,6	65,4	$1,775 \pm 0,046$
479,99	335,3	88,8	66,5	$1,784 \pm 0,047$
467,81	335,5	88,3	67,2	$1,789 \pm 0,047$
435,83	336,3	88,1	68,3	$1,798 \pm 0,047$
404,66	337,3	87,2	70,1	$1,811 \pm 0,047$

Mit den Messwerten aus Tabelle 1 und 2 können die Brechungsindices für die einzelnen Wellenlänge durch

$$n = \frac{\sin \frac{n+\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}}$$

bestimmt werden. Die Fehler der Brechungsindices ergeben sich mit der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung

$$\Delta n = \sqrt{\left(\frac{dn}{d\varphi} \Delta \varphi\right)^2} = \left| \left(\frac{0,5 \cos\left(\frac{n+\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} - \frac{0,5 \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\frac{n+\varphi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \right) \Delta \varphi \right|.$$

4.3 Bestimmung der Dispersionsgleichung

Um zu entscheiden welche der beiden Dispersionsgleichungen besser zu dem Dispersionsverhalten der aufgenommenen Messwerte passt, werden die Messwerte und die beiden

Theoriekurven in Abbildung 5 aufgetragen und miteinander verglichen. Dafür werden die Wellenlängen in Abhängigkeit des Quadrats des Brechungsindex dargestellt.

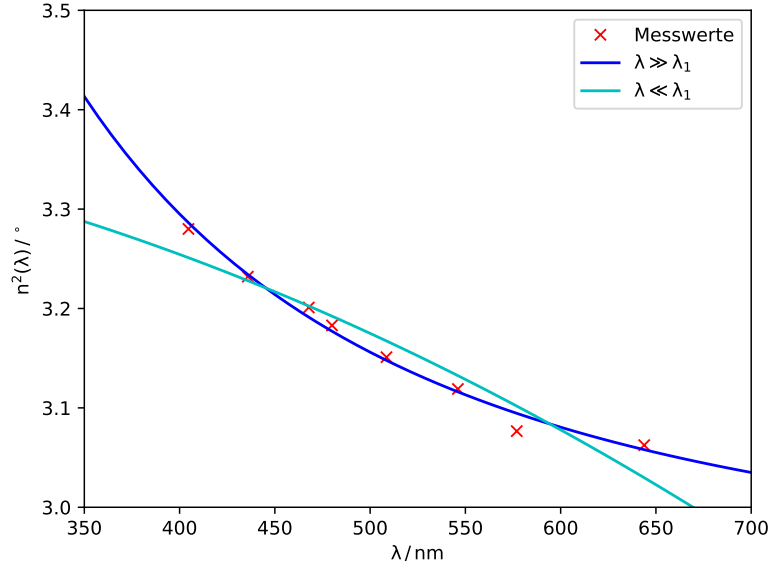


Abbildung 5: Vergleich der theoretischen Dispersionskurven mit den Messwerten

Die daraus folgenden Parameter sind aus Tabelle 3 zu entnehmen.

Tabelle 3: Dispersionsgleichung

Dispersionskurve	Steigung
1	A_0 $2,909 \pm 0,013$
	A_2 $(6,18 \pm 0,29) \cdot 10^4$
2	A'_0 $3,396 \pm 0,029$
	A'_2 $(8,8 \pm 0,1) \cdot 10^{-7}$

Damit lassen sich die Abweichungsquadrate durch

$$s_n^2 = \frac{1}{z-2} \sum_{i=1}^z \left[n^2(\lambda_i) - A_0 - \frac{A_2}{\lambda_i} \right]^2$$

für den Fall $\lambda \gg \lambda_i$ berechnen. Die Berechnung für den zweiten Fall $\lambda \ll \lambda_i$ erfolgt durch

$$s_{n'}^2 = \frac{1}{z-2} \sum_{i=1}^z \left[n^2(\lambda_i) - A'_0 + A'_2 \lambda_i \right]^2.$$

Hierbei steht z für die Anzahl der Messwertpaare, die in diesem Teil des Versuchs sieben beträgt. Für die Abweichungsquadrate folgt dann

$$s_n^2 = 1,044 \cdot 10^{-4}$$

$$s_{n'}^2 = 6,258 \cdot 10^{-4}.$$

Dadurch, dass das Abweichungsquadrat für $\lambda \gg \lambda_i$ kleiner ist und auch in Abbildung 5 die Theoriekurve zu den Messwerten passt, kann der Brechungsindex durch die Parameter

$$n(\lambda) = \sqrt{A_0 + \frac{A_2}{\lambda^2}} = \sqrt{2,909 + \frac{6,18 \cdot 10^4}{\lambda^2}}$$

ausgedrückt werden.

In Abbildung 6 ist die resultierende Dispersionskurve zusammen mit den Messwerten dargestellt.

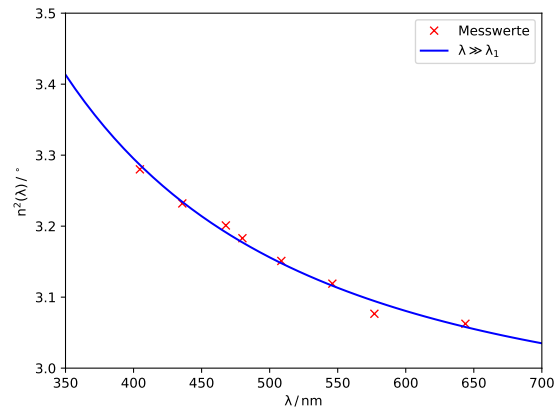


Abbildung 6: Dispersionskurve

4.4 Bestimmung der Abbeschen Zahl

Die Brechungsindices für die Fraunhoferschen Linsen werden zuerst mit Formel 4.3 bestimmt. Die Fehler der Brechungsindices ergeben sich durch

$$\Delta n = \sqrt{\left(0,5\left(A_0 + \frac{A_2}{\lambda^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\Delta A_0\right)^2 + \left(0,5\left(A_0 + \frac{A_2}{\lambda^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{2A_2}{\lambda^3}\right)\Delta A_2\right)^2}$$

Die sich ergebenden Werte sind in Tabelle 4 dargestellt.

Tabelle 4: Brechungsindices für die Fraunhofersche Linsen

Linie	Wellenlänge λ / nm	Brechungsindex n
λ_C	656	$1,7472 \pm 0,0641$
λ_D	589	$1,7570 \pm 0,0841$
λ_F	486	$1,7806 \pm 0,1364$

Für die Bestimmung der Abbeschen Zahl und damit das Maß der Farbzerstreuung des Glasprismas die Formel

$$\nu = \frac{n_{D-1}}{n_F - n_C}$$

verwendet. Die Abbesche Zahl beträgt dann

$$\nu = 22,67.$$

4.5 Auflösungsvermögen

Das Auflösungsvermögen beschreibt den minimalen Unterschied $\Delta\lambda$ zweier benachbarter Spektrallinien, um einzeln aufgelöst zu werden. Es ist definiert als

$$A = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}.$$

Daraus folgt für das Auflösungsvermögen

$$A = b \frac{d}{d\lambda} n(\lambda)$$

mit der Basislänge $b = 3 \text{ cm}$ ergibt sich dann

$$A = -b \frac{A_1}{\sqrt{A_0 + \frac{A_1}{\lambda^2}} \lambda^3}.$$

Der dazugehörige Fehler berechnet sich durch

$$\Delta A = \sqrt{\left[\left(-\frac{bA_1}{\lambda^3} \cdot 0,5\left(A_0 + \frac{A_2}{\lambda^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\right)\Delta A_0\right]^2 + \left[\frac{b}{\lambda^3}\left(A_0 + \frac{A_2}{\lambda^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{-A_2}{2\lambda^2}\left(A_0 + \frac{A_2}{\lambda^2}\right)^{-1} + 1\right)\right]^2}.$$

In Tabelle 5 ist das Auflösungsvermögen in Abhängigkeit der Wellenlängen der Fraunhoferschen Linsen zu sehen.

Tabelle 5: Auflösungsvermögen für die Fraunhoferschen Linsen

Fraunhofersche Linie	Wellenlänge λ / nm	Auflösungsvermögen
λ_C	656	$3758,92 \pm 26,50$
λ_D	589	$5163,99 \pm 29,02$
λ_F	486	$9070,41 \pm 33,78$

4.6 Bestimmung der nächst gelegenen Absorptionsstelle

Die Absorptionsstelle wird durch einen Koeffizientenvergleich der beiden Formeln ?? und ?? bestimmt

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{A_2}{A_0 - 1}}.$$

Der daraus resultierende Fehler ergibt sich durch

$$\Delta\lambda = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{A_2}{A_0 - 1}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{A_0 - 1} \Delta A_2\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\left(\frac{A_2}{A_0 - 1}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{-A_2}{(A_0 - 1)^2} \Delta A_0\right)^2}.$$

Die nächst gelegene Absorptionsstelle ist bei einer Wellenlänge von

$$\lambda = (179,925 \pm 4,27) \text{ nm}$$

und somit im Ultravioletten Bereich zu finden.

5 Diskussion

Der bestimmte Winkel $\varphi = (60,10 \pm 0,03)^\circ$ stimmt mit dem erwarteten Wert von 60° überein. Dies wird auch durch den kleinen Fehler deutlich. Im Gegensatz zur Bestimmung des Winkels φ war die Messung der Winkels η fehleranfälliger. Bei der Überlagerung des reflektierten Strahls und der jeweiligen Spektrallinien kommt es durch das Justieren des Goniometers zu größeren Verschiebungen des Strahls. Trotzdem zeigt sich das Verhalten der normalen Dispersion. Die Brechungsindizes steigen wie erwartet bei abnehmenden Wellenlängen an. Der Literaturwert für den Brechungsindex des Materials SF14 liegt bei einer Wellenlänge von 632,8 nm bei $n = 1,756$ [2]. Mit einem berechneten Brechungsindex von $n = 1,755$ beträgt die prozentuale Abweichung nur 0,06%. Dies lässt sich darauf zurückführen, dass die berechnete Dispersionkurve und die ihre Parameter ziemlich genau sind. Bei der Berechnung der Abbeschen Zahl mit einem Literaturwert von $\nu = 26,5$ [1] kommt es allerdings zu einer größeren Abweichung von 14,49%.

Literatur

- [1] *Abbesche Zahl*. URL: <https://www.edmundoptics.de/resources/application-notes/optics/optical-glass/> (besucht am 02.07.2018).
- [2] *Brechungsindex*. URL: <https://www.filmetrics.de/refractive-index-database/Schott+N-SF14> (besucht am 02.07.2018).
- [3] TU Dortmund. *Versuchsanleitung zu Versuch 408*. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/MEDPHYS/BACHELOR/AP/SKRIPT/UltraschallScan.pdf> (besucht am 02.07.2018).