

Faraday-Effekt an Halbleitern

1. Einleitung

Magneto-optische Untersuchungen an Halbleitern werden heutzutage angewandt, um Informationen über deren Bandstrukturdaten zu erhalten. Eine wichtige Messmethode ist in diesem Zusammenhang die sogenannte **Faraday-Rotation** - benannt nach Michael Faraday^{*)}, der diese Erscheinung 1845 erstmalig an Glas beobachtete. Man versteht hierunter die Drehung der Polarisationssebene eines Lichtstrahls, welcher durch Materie hindurchgeht, die unter dem Einfluss eines longitudinalen Magnetfeldes steht. Der Faraday-Effekt bietet unter bestimmten Voraussetzungen die Möglichkeit, die effektive Masse von Elektronen in Halbleitern zu ermitteln. Das soll das Ziel des hier beschriebenen Experimentes sein.

2. Der Begriff der „effektiven Masse“

Obwohl die Kristalle im allgemeinen eine komplizierte Bandstruktur besitzen, kann man trotzdem viele physikalische Effekte mit einer einfachen Approximation der Energiebänder beschreiben; denn oft genügt es, bei der Berechnung von Halbleiterdaten nur die Form des Leitungsbandes in der Nähe der unteren Bandkante zu kennen (siehe Abb.1)

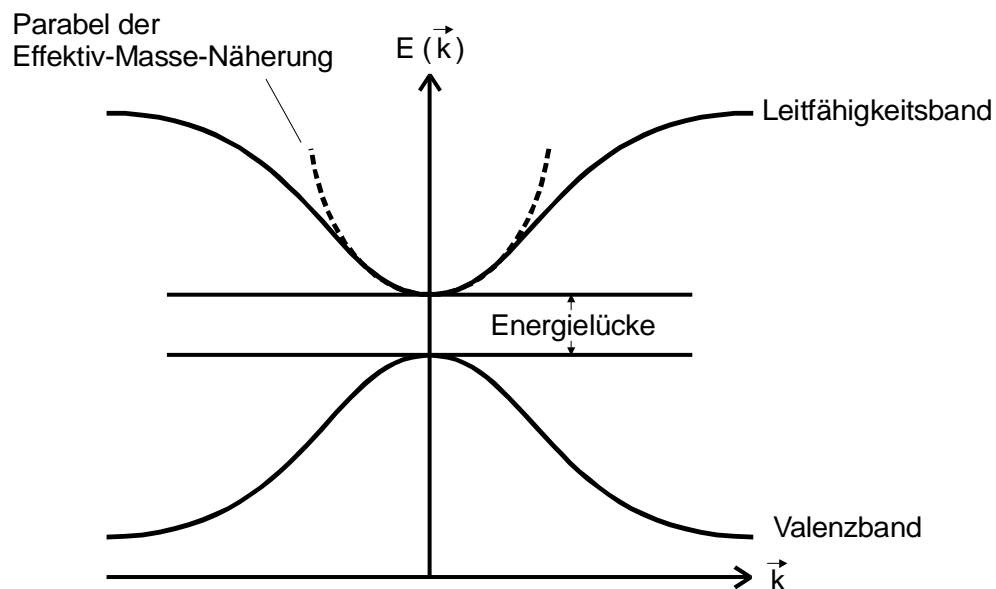


Abb.1: Vereinfachte Darstellung der Bandstruktur eines Festkörpers

Dort lässt sich die Funktion $\varepsilon = \varepsilon(\vec{k})$ (ε = Elektronenenergie, \vec{k} = Wellenzahlvektor des Elektrons), welche die Form der Bandkante beschreibt, in eine Taylorreihe entwickeln. Es werde zunächst angenommen, das Minimum des Leitungsbandes liege bei $k = 0$; dann gilt bei der Wahl eines geeigneten Koordinatensystems

^{*)} Michael Faraday, britischer Physiker und Chemiker, 1791 - 1867

$$(1) \quad \varepsilon(\vec{k}) = \varepsilon(0) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial k_i^2} \right)_{k=0} k_i^2 + \dots^{+)}$$

Man erkennt an (1) durch Vergleich mit der Beziehung

$$\varepsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2m},$$

dass die Größen

$$m_i^* := \frac{\hbar^2}{\left\{ \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial k_i^2} \right\}_{k=0}}$$

die Dimension einer Masse haben. Man definiert daher diese Größen als **effektive Massen** eines Kristallelektrons. Gleichung (1) lässt sich damit schreiben als

$$(2) \quad \varepsilon(\vec{k}) = \varepsilon(0) + \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m_1^*} + \frac{\hbar^2 k_y^2}{2m_2^*} + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m_3^*}.$$

Gemäß (2) werden dann die Flächen konstanter Energie im \vec{k} -Raum durch Ellipsoide dargestellt. In manchen Fällen ist die Symmetrie des Kristalles so hoch, dass die m_i^* alle gleich sind. Man erhält dann kugelförmige Energieflächen, und (2) vereinfacht sich zu

$$(3) \quad \varepsilon(\vec{k}) = \varepsilon(0) + \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*}.$$

Die Energiewerte aus (3) stellen bekanntlich die Lösungen der Schrödinger-Gleichung für freie Elektronen dar; denn es ist

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0} \Delta e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_0} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}.$$

Hier zeigt sich der große Vorteil des Konzeptes der „effektiven Masse“; denn man kann Elektronen in einem Band mit kugelförmigen Energieflächen genauso behandeln wie freie Teilchen, wenn man nur in den Bewegungsgleichungen ihre Ruhemasse m_0 durch die effektive Masse m^* ersetzt. Der Einfluss des periodischen Kristallpotentials

$$V(\vec{r} + \vec{g}) = V(\vec{r})$$

(\vec{g} = Gittervektor)

wird allein durch die Einführung der effektiven Masse berücksichtigt. Man kann daher den Hamilton-Operator für ein Kristallelektron

^{+) Die 1. Ableitung verschwindet bei $k=0$, da dort $\varepsilon(\vec{k})$ ein Minimum hat.}

$$\frac{\hbar^2}{2m_0} \Delta + V(\vec{r})$$

ersetzen durch

$$\frac{\hbar^2}{2m^*} \Delta \quad .$$

Es gilt also die Quantenmechanik freier Teilchen. Weiterhin ergibt sich, dass in der Effektiv-Masse-Näherung beim Anlegen äußerer elektrischer oder magnetischer Felder (wenn sie nicht zu groß werden) das Newtonsche Grundgesetz in der Form

$$m^* \vec{b} = \vec{F}$$

angewandt werden kann. Insbesondere lässt sich die Faraday-Rotation unter der Annahme kugelförmiger Energieflächen und parabolischer Energiebänder (siehe Gl. (3) und Abb.1) nach den Gesetzen der klassischen Mechanik berechnen, was in den folgenden Kapiteln ausgeführt werden soll.

3. Zirkulare Doppelbrechung

Unter zirkularer Doppelbrechung versteht man die Fähigkeit eines Kristalles, die Polarisationssebene eines linear polarisierten Lichtstrahles bei der Transmission zu drehen (siehe Abb.2).

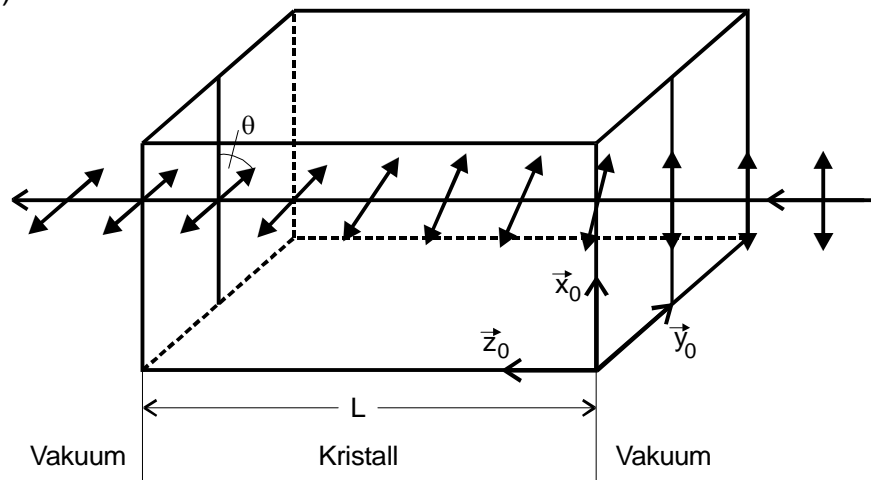


Abb.2: Drehung der Polarisationssebene einer Lichtwelle beim Durchgang durch einen Kristall

Man kann diesen Effekt erklären, wenn man annimmt, dass die Phasengeschwindigkeiten für links- und rechtszirkular polarisiertes Licht in dem Kristallmedium verschieden sind.

Zur Berechnung des Drehwinkels θ , um den die Polarisationssebene einer linear polarisierten Welle $E(z)$ gedreht wird, nachdem sie einen Kristall der Länge L durchlaufen hat, zerlegt man sie gemäß

$$(4) \quad E(z) = \frac{1}{2} (E_R(z) + E_L(z))$$

in eine rechts- und linkszirkular polarisierte Welle. Beide mögen sich in \vec{z} -Richtung ausbreiten und die Wellenzahlen $k_R \neq k_L$ haben; dann gilt

$$(5) \quad E_R(z) = (E_0 \vec{x}_0 - iE_0 \vec{y}_0) e^{ik_R z}$$

und

$$(6) \quad E_L(z) = (E_0 \vec{x}_0 + iE_0 \vec{y}_0) e^{ik_L z} .$$

Aus (4), (5) und (6) folgt, dass die Polarisation der Welle beim Eintritt in den Kristall ($z = 0$) parallel zur \vec{x} -Richtung liegt:

$$E(0) = E_0 \vec{x}_0 .$$

Um die Lage der Polarisationsebene nach dem Durchtritt der Welle durch den Kristall ($z = L$) zu errechnen, zerlegt man (4) in geeigneter Weise. Es ist

$$(7) \quad \begin{aligned} E(L) &= \frac{1}{2} E_0 \left\{ \left(e^{ik_R L} + e^{ik_L L} \right) \vec{x}_0 + \left(i e^{ik_L L} - i e^{ik_R L} \right) \vec{y}_0 \right\} \\ &= \frac{1}{2} E_0 \vec{x}_0 \left\{ e^{i(k_R + k_L) \frac{L}{2}} e^{i(k_R - k_L) \frac{L}{2}} + e^{i(k_R + k_L) \frac{L}{2}} e^{i(-k_R + k_L) \frac{L}{2}} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} E_0 \vec{y}_0 i \left\{ e^{i(-k_R + k_L) \frac{L}{2}} e^{i(k_R + k_L) \frac{L}{2}} - e^{i(k_R - k_L) \frac{L}{2}} e^{i(k_R + k_L) \frac{L}{2}} \right\} . \end{aligned}$$

Mit den Abkürzungen

$$\psi := \frac{L}{2} (k_R + k_L)$$

und

$$(8) \quad \theta := \frac{L}{2} (k_R - k_L)$$

lässt sich (7) etwas übersichtlicher darstellen:

$$E(L) = \frac{1}{2} E_0 \vec{x}_0 \left\{ e^{i\psi} e^{i\theta} + e^{i\psi} e^{-i\theta} \right\} + \frac{1}{2} E_0 \vec{y}_0 i \left\{ e^{i\psi} e^{-i\theta} - e^{i\psi} e^{i\theta} \right\} .$$

Mit Hilfe der Eulerschen Formeln bekommt man daraus

$$E(L) = E_0 e^{i\psi} (\cos \theta \vec{x}_0 + \sin \theta \vec{y}_0) .$$

Man erhält damit an der Stelle $z = L$ eine linear polarisierte Welle, deren Schwingungsrichtung um den Winkel θ aus der ursprünglichen Lage (\vec{x}_0) herausgedreht wurde, wobei θ durch (8) gegeben ist. Da die Phasengeschwindigkeit einer Welle allgemein gleich ω/k ist, kann man θ auch durch die Phasengeschwindigkeit v_{Ph_R} und v_{Ph_L} ausdrücken. Es folgt dann aus (8)

$$(9) \quad \theta = \frac{L \omega}{2} \left\{ \frac{1}{v_{Ph_R}} - \frac{1}{v_{Ph_L}} \right\} .$$

Schließlich lässt sich θ auch noch durch die Brechungsindizes n_R und n_L darstellen, wenn man berücksichtigt, dass

$$n = \frac{c}{v_{Ph}} \quad (c = \text{Vakuumllichtgeschwindigkeit})$$

ist:

$$(10) \quad \theta = \frac{L \omega}{2c} (n_R - n_L) \quad .$$

Die zirkulare Doppelbrechung eines Kristalles entsteht durch elektrische Dipolmomente, die einmal durch die auf den Gitterplätzen sitzenden Atome und zum anderen durch die Bandlelektronen in Wechselwirkung mit den Atomrümpfen erzeugt werden können. Dabei kann es sich nur um induzierte Dipole handeln; denn permanente Dipole vermögen wegen ihrer großen Relaxationszeit dem Wechselfeld einer Lichtquelle ($\nu \approx 10^{15}$ Hz) nicht zu folgen. Die Gesamtheit der Dipole pro Volumeneinheit erzeugt eine makroskopische Polarisation \vec{P} des Kristalles, die bei nicht zu großem E-Feld proportional zu \vec{E} ist:

$$(11) \quad \vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E} \quad .$$

(ϵ_0 = Influenzkonstante)

Man nennt die Größe χ **dielektrische Suszeptibilität**. In isotroper Materie (wie z.B. Gläser ohne äußeres Magnetfeld) ist χ eine skalare Größe. In anisotropen Kristallen muss χ jedoch als Tensor definiert werden, sodass (11) die Form

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \epsilon_0 \begin{pmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} & \chi_{xz} \\ \chi_{yx} & \chi_{yy} & \chi_{yz} \\ \chi_{zx} & \chi_{zy} & \chi_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

annimmt. In vielen Fällen ist der (χ)-Tensor symmetrisch, sodass eine Hauptachsentransformation möglich ist und (χ) sich in der Form

$$(\chi) = \begin{pmatrix} \chi_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \chi_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{zz} \end{pmatrix}$$

darstellen lässt.

Im folgenden soll nun gezeigt werden, dass Materie doppelbrechend wird, sobald im (χ)-Tensor nicht-diagonale und konjugiert komplexe Koeffizienten auftreten. Im einfachsten Fall hat (χ) dann die Gestalt

$$(12) \quad (\chi) = \begin{pmatrix} \chi_{xx} & i\chi_{xy} & 0 \\ -i\chi_{xy} & \chi_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{zz} \end{pmatrix} \quad .$$

Zum Nachweis der Doppelbrechung geht man von der Wellengleichung des Lichtes aus. Sie hat im Vakuum die Gestalt:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t)) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad .$$

Beim Übergang der Welle in Materie ist \vec{E} durch die dielektrische Verschiebung

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

zu ersetzen. Es folgt dann aus (11)

$$(13) \quad \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\frac{1}{c^2} (1 + \chi) \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} .$$

In (13) ist vorausgesetzt, dass die Materie nur eine geringe elektrische Leitfähigkeit besitzt. Es kann daher die Stromdichte j gegen dP/dt vernachlässigt werden. Ferromagnetische Effekte sollen ebenfalls nicht auftreten.

Setzt man nun in Gleichung (13) die Gleichung einer ebenen Welle

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

ein, so bekommt man die Beziehung

$$(14) \quad \vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) = -\frac{\omega^2}{c^2} \vec{E} - \frac{\omega^2}{c^2} \chi \cdot \vec{E} .$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit werde im folgenden angenommen, dass

$$(15) \quad \vec{k} = k \vec{z}_0$$

ist. Daraus folgt mit $\vec{E} = E_x \vec{x}_0 + E_y \vec{y}_0 + E_z \vec{z}_0$

$$(15a) \quad \vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) = -k^2 E_x \vec{x}_0 - k^2 E_y \vec{y}_0 .$$

Der Ansatz (12) liefert für das skalare Produkt aus (χ) und \vec{E}

$$(15b) \quad \chi \cdot \vec{E} = \begin{pmatrix} \chi_{xx} & i\chi_{xy} & 0 \\ -i\chi_{xy} & \chi_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} =$$

$$(\chi_{xx} E_x + i\chi_{xy} E_y) \vec{x}_0 + (\chi_{xx} E_y - i\chi_{xy} E_x) \vec{y}_0 + \chi_{zz} E_z \vec{z}_0 .$$

Die Beziehungen (15a) und (15b) setzt man nun in die Wellengleichung (14) ein und erhält nach Zerlegung in die Komponenten

Damit wird aus (14)

$$(16) \text{ für die } \vec{x}_0\text{-Komponente} \quad \left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \chi_{xx} \right) E_x = -i \frac{\omega^2}{c^2} \chi_{xy} E_y ,$$

$$(17) \text{ für die } \vec{y}_0\text{-Komponente} \quad i \frac{\omega^2}{c^2} \chi_{xy} E_x = \left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \chi_{xx} \right) E_y ,$$

$$(18) \text{ für die } \vec{z}_0\text{-Komponente} \quad \frac{\omega^2}{c^2} E_z = -\frac{\omega^2}{c^2} \chi_{zz} E_z .$$

Aus (18) ergibt sich, da $\omega \neq 0$ und $\chi_{zz} \neq 0$ sind, dass $E_z = 0$ sein muss; womit gezeigt ist, dass eine transversale Wellenausbreitung vorliegt. Soll nun für E_x und E_y eine nicht-triviale Lösung existieren, so muss die Koeffizientendeterminante des Gleichungssystems (16), (17) verschwinden. Das heißt, es muss gelten

$$\left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}(1 + \chi_{xx})\right)^2 - \left(i\frac{\omega^2}{c^2}\chi_{xy}\right)\left(-i\frac{\omega^2}{c^2}\chi_{xy}\right) = 0 \quad .$$

Daraus folgt, dass für die Wellenzahl k nur die beiden Werte

$$(19) \quad k_{\pm} = \frac{\omega}{c} \sqrt{(1 + \chi_{xx}) \pm \chi_{xy}}$$

möglich sind. Ebenso existieren gemäß der Beziehung $v = \omega/k$ auch nur zwei Phasengeschwindigkeiten nämlich

$$v_{PhR} = \frac{c}{\sqrt{1 + \chi_{xx} + \chi_{xy}}} \quad \text{und} \quad v_{PhL} = \frac{c}{\sqrt{1 + \chi_{xx} - \chi_{xy}}} \quad ,$$

die entweder größer oder kleiner als die Phasengeschwindigkeit

$$(19a) \quad v_{Ph} = \frac{c}{\sqrt{1 + \chi_{xx}}}$$

bei $\chi_{xy} = 0$ sind. Geht man nun mit (19) in die Gleichungen (16) oder (17) zurück, so ergibt sich für die Feldstärkekomponenten der durchlaufenden Welle

$$E_x = +iE_y \quad \text{für } k_+ \quad \text{und} \quad E_x = -iE_y \quad \text{für } k_- \quad .$$

Das bedeutet, wie aus (5) und (6) hervorgeht, dass eine linkszirkular und eine rechtszirkular polarisierte Welle mit **unterschiedlichen** Phasengeschwindigkeiten auftreten und somit die Polarisationsrichtung der aus dem Vakuum einfallenden Welle gedreht wird. Der Drehwinkel θ lässt sich gemäß (8) aus den unterschiedlichen Wellenzahlen (19) errechnen. Es ist

$$(20) \quad \theta = \frac{L}{2}(k_+ - k_-) = \frac{L\omega}{2c} \left\{ \sqrt{(1 + \chi_{xx}) + \chi_{xy}} - \sqrt{(1 + \chi_{xx}) - \chi_{xy}} \right\} \quad .$$

Da die Größe χ_{xy} im allgemeinen klein gegen $1 + \chi_{xx}$ ist, kann man die Wurzelausdrücke in (20) in eine Reihe entwickeln und mit guter Näherung nach dem linearen Glied abbrechen. Man bekommt dann

$$\theta \approx \frac{L\omega}{2c} \left\{ \sqrt{1 + \chi_{xx}} \right\}^{-1} \chi_{xy} \quad .$$

Hierin kann man noch den Ausdruck $\sqrt{1 + \chi_{xx}}$ durch die Phasengeschwindigkeit bei $\chi_{xy} = 0$ (siehe (19a)) oder auch durch den Brechungsindex ausdrücken. Man erhält schließlich

$$(21) \quad \theta \approx \frac{L\omega}{2c^2} v_{Ph} \chi_{xy} = \frac{L\omega}{2cn} \chi_{xy} \quad .$$

4. Berechnung des Rotationswinkels θ der Polarisationssebene beim Faraday-Effekt

In diesem Kapitel wird gezeigt, dass optisch inaktive Materie (das heißt $\chi_{ik} = 0$ für $i \neq k$) beim Anlegen eines äußeren Magnetfeldes grundsätzlich die Polarisationssebene des parallel zur Feldrichtung einfallenden Lichtes dreht. Wie schon zuvor erwähnt, bezeichnet man diese Erscheinung als Faraday-Effekt. Sie beruht auf dem Einfluss des Magnetfeldes \vec{B} auf die Elektronen der Materie. Für ein gebundenes Elektron der Masse m und der Ladung e_0 kann man die Bewegungsgleichung

$$(22) \quad m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + K \vec{r} = -e_0 \vec{E}(t) - e_0 \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{B}$$

formulieren. Hierin bedeuten \vec{r} die Auslenkung des Elektrons aus der Gleichgewichtslage, K eine Konstante, die seine Bindung an die Umgebung beschreibt und \vec{E} die Feldstärke der einfallenden Lichtwelle. (Dämpfungseffekte, die man durch einen Ausdruck $\gamma \frac{d\vec{r}}{dt}$ berücksichtigen könnte, werden vernachlässigt, da sie auf den Faraday-Effekt nur geringen Einfluss haben. Ebenso kann der Einfluss des Magnetfeldes der elektromagnetischen Lichtwelle hier vernachlässigt werden.) Die Zeitabhängigkeit der Feldstärke des einfallenden Lichtes und damit auch des Ortsvektors \vec{r} sei wie zuvor durch

$$E(t) \sim e^{-i\omega t}$$

gegeben. Damit wird aus (22)

$$(23) \quad -m\omega^2 \vec{r} + K \vec{r} = -e_0 \vec{E} + ie_0 \omega \vec{r} \times \vec{B}.$$

Es wurde bereits erwähnt, dass wegen des hohen ω nur eine Verschiebungspolarisation zu beobachten ist. Damit ist \vec{P} proportional zu \vec{r} , und es gilt, wenn N die Zahl der Elektronen pro Volumeneinheit ist

$$(24) \quad \vec{P} = -Ne_0 \vec{r}.$$

Mit Hilfe von (24) kann man nun \vec{r} in (23) eliminieren. Es ergibt sich

$$(25) \quad -m\omega^2 \vec{P} + K \vec{P} = +e_0^2 N \vec{E} + ie_0 \omega \vec{P} \times \vec{B}.$$

Unter der Annahme, dass das äußere Magnetfeld in z-Richtung anliegt, lautet (25) in Komponenten zerlegt

$$(26) \quad (-m\omega^2 + K)P_x = Ne_0^2 E_x + ie_0 \omega P_y B$$

$$(27) \quad (-m\omega^2 + K)P_y = Ne_0^2 E_y - ie_0 \omega P_x B$$

$$(28) \quad (-m\omega^2 + K)P_z = Ne_0^2 E_z.$$

Da die Polarisation P durch den Einfall der Lichtwelle mit der Feldstärke E entsteht, soll wiederum die Beziehung (11) zwischen beiden Größen gelten, wobei die Frage der von null verschiedenen Komponenten des Suszeptibilitätstensors zunächst noch offen ist. Man erkennt aber bald, dass (χ) auch nicht-diagonale Komponenten enthalten muss,

wenn eine nicht-triviale Lösung des Gleichungssystems (26) bis (28) existieren soll. Außerdem sollen die χ_{ik} -Werte unabhängig von den Feldstärkekomponenten E_x und E_y sein ($E_z = 0$). Das geht nur, wenn die χ_{ik} ($i \neq k$) imaginär sind. Es wird daher für (χ_{mag}) der Ansatz

$$(\chi_{\text{mag}}) = \begin{pmatrix} \chi_{xx} & i\chi_{xy} & 0 \\ i\chi_{yx} & \chi_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{zz} \end{pmatrix}$$

gemacht. Man erhält damit aus (26) und (11)

$$(-m\omega^2 + K)(\epsilon_0 \chi_{xx} E_x + i\epsilon_0 \chi_{xy} E_y) = Ne_0^2 E_x + ie_0 \epsilon_0 \omega B (i\chi_{yx} E_x + \chi_{xx} E_y)$$

oder nach Trennung in Real- und Imaginärteil

$$(29) \quad \begin{aligned} (-m\omega^2 + K)\epsilon_0 \chi_{xx} &= Ne_0^2 - e_0 \epsilon_0 \omega B \chi_{yx} \\ \text{und} \\ (-m\omega^2 + K)\epsilon_0 \chi_{xy} &= e_0 \epsilon_0 \omega B \chi_{xx} \end{aligned}$$

Aus (27) folgt entsprechend

$$(30) \quad (-m\omega^2 + K)\epsilon_0 \chi_{xx} = Ne_0^2 + e_0 \epsilon_0 \omega B \chi_{xy}$$

und

$$(31) \quad (-m\omega^2 + K)\epsilon_0 \chi_{yx} = -e_0 \epsilon_0 \omega B \chi_{xx}$$

An (29) und (30) erkennt man, dass

$$(32) \quad \chi_{xy} = -\chi_{yx}$$

ist. Damit sind die beiden Nichtdiagonalelemente konjugiert komplex. Das bedeutet nach dem in Kapitel 3 Gesagten, dass die anfangs optisch isotrope Materie im Magnetfeld doppelbrechend geworden ist. Die Anwesenheit eines Magnetfeldes erniedrigt somit die Symmetrie eines Kristalles.

Zur Berechnung des Drehwinkels θ benötigt man gemäß (21) die Tensorkomponente χ_{xy} . Hierfür ergibt sich aus (30), (31) sowie (32)

$$\chi_{xy} = \frac{Ne_0^3 \omega B}{\epsilon_0 \left((-m\omega^2 + K)^2 - (e_0 \omega B)^2 \right)}$$

und schließlich für θ

$$(33) \quad \theta = \frac{e_0^3}{2\epsilon_0 c} \frac{\omega^2}{(-m\omega^2 + K)^2 - (e_0 \omega B)^2} \frac{NBL}{n}$$

Man erkennt an (33), dass θ proportional zur Flussdichte B , zur Probenlänge L und zur Zahl der Ladungsträger N pro Volumeneinheit ist. Die Frequenzabhängigkeit ist komplizierter. Sie soll im folgenden diskutiert werden. Dazu formt man (33) um in

$$(34) \quad \theta = \frac{e_0^3}{2\varepsilon_0 c} \frac{1}{m^2} \frac{\omega^2}{\left\{ -\omega^2 + \frac{K}{m} \right\}^2 - \left\{ \frac{e_0}{m} B \omega \right\}^2} \frac{NBL}{n} .$$

Die Größe $\sqrt{K/m}$ hat hierin die Bedeutung einer Resonanzfrequenz ω_0 der gebundenen Ladungsträger, da diese wegen der Existenz der „rücktreibenden Kraft“ $K\vec{r}$ (siehe (22)) zu erzwungenen Schwingungen fähig sind. Auch der Ausdruck Be_0/m stellt eine Frequenz dar. Man nennt sie die **Zyklotron-Frequenz** ω_C . Sie gibt die Umlauffrequenz von Ladungsträgern der Masse m und der Ladung e_0 an, mit der diese eine Kreisbahn um die Feldachse \vec{B} infolge der Lorentz-Kraft beschreiben würden, wenn keine weiteren Einflüsse auf sie einwirken würden. Mit $B \approx 1$ T erhält man für Elektronen Zyklotron-Frequenzen von der Größenordnung 10^{11} Hz. Die Resonanzfrequenz ω_0 und die Messfrequenzen liegen bei Halbleitern normalerweise im nahem Infrarot ($\omega = 10^{14}$ - 10^{15} Hz). Damit ist zumeist

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2 \right)^2 \gg \omega^2 \omega_C^2 ,$$

falls man mit der Messfrequenz nicht zu dicht an ω_0 herangeht. Unter diesen Voraussetzung vereinfacht sich (34) zu

$$(35) \quad \theta \approx \frac{e_0^3}{2\varepsilon_0 c} \frac{1}{m^2} \frac{\omega^2}{\left(\omega_0^2 - \omega^2 \right)^2} \frac{NBL}{n} .$$

Liegt man mit der Messfrequenz weit unterhalb ω_0 , gilt für θ schließlich die Näherung

$$\theta \approx \frac{e_0^3}{2\varepsilon_0 c} \frac{1}{m^2} \frac{\omega^2}{\omega_0^4} \frac{NBL}{n}$$

oder, wenn man statt der Kreisfrequenz die Wellenlänge λ des einfallenden Lichtes einführt

$$(36) \quad \theta(\lambda) \approx \frac{2\pi^2 e_0^3 c}{\varepsilon_0} \frac{1}{m^2} \frac{1}{\lambda^2 \omega_0^4} \frac{NBL}{n} .$$

Man kann mit Hilfe von (35) auch noch den Fall quasifreier Ladungsträger diskutieren. Man lässt zu diesem Zwecke in (35) $\omega_0 \rightarrow 0$ gehen. Dann bekommt man aus (35)

$$(37) \quad \theta_{\text{frei}} \approx \frac{e_0^3}{2\varepsilon_0 c} \frac{1}{m^2} \frac{1}{\omega^2} \frac{NBL}{n} = \frac{e_0^3}{8\pi^2 \varepsilon_0 c^3} \frac{1}{m^2} \lambda^2 \frac{NBL}{n} .$$

Nach dem im Kapitel 2 Gesagten bleibt (37) unter bestimmten Voraussetzungen auch für die Kristallelektronen gültig, wenn man m durch m^* ersetzt. Damit ist man in der Lage, aus dem Drehwinkel θ der Faraday-Rotation die effektive Masse von Kristallelektronen zu bestimmen.

5. Aufgabe

Man bestimme die effektive Masse der Leitungselektronen in Galliumarsenid mittels Faraday-Rotation.

6. Beschreibung der im Experiment benutzten Apparatur

Da die hier verwendeten Halbleiterproben nur im Infrarot halbwegs durchlässig sind, muss für das Experiment ein Infrarot-Messplatz eingerichtet werden. Er ist in Abb.3 schematisch dargestellt.

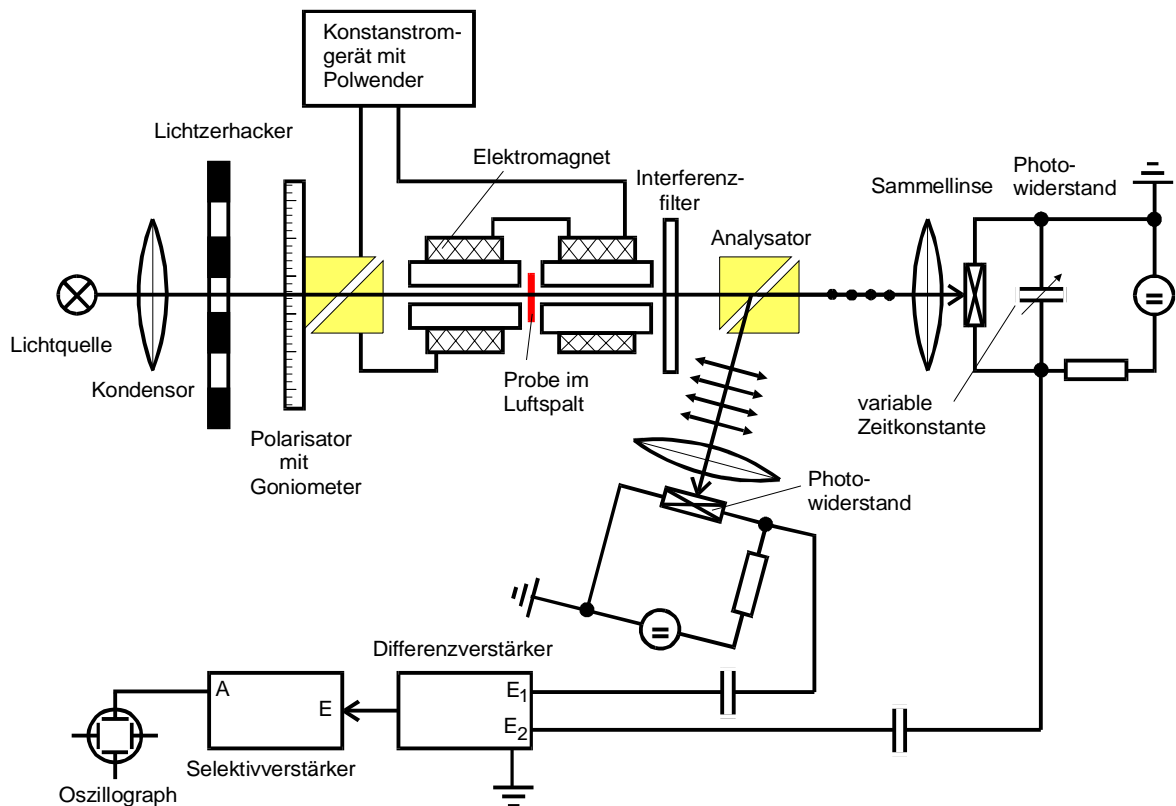


Abb.3: Schematische Darstellung der Messapparatur

Als Lichtquelle dient eine Halogen-Lampe (12V; 50W), deren Emissionsspektrum überwiegend im nahen Infrarot liegt. Die emittierte Strahlung wird mit Hilfe von Interferenzfiltern monochromatisiert (Näheres dazu siehe Kap.10a). Das für die Messung notwendige linear-polarisierte Licht erzeugt man mit Hilfe eines sogenannten Glan-Thompson-Prismas aus Kalkspat (siehe Kap.10b), das vom sichtbaren Spektralbereich bis etwa $2,8\ \mu\text{m}$ transparent ist. Die scheibenförmige Probe befindet sich in der Symmetrieebene eines großen Elektromagneten, dessen Polschuhe in Längsrichtung durchbohrt sind. Damit die Probe überhaupt ein Magnetfeld spürt, muss ein Luftspalt in das Ferromagnetikum hineingeschnitten werden. Es ist leicht einzusehen, dass der Homogenitätsbereich des auf diese Weise erzeugten Magnetfeldes nicht sehr groß sein kann. Aus diesem Grunde kann leider nur eine scheibenförmige Probe verwendet werden. Um ein zeitlich konstantes Magnetfeld zu erhalten, wird die Wicklung des Magneten von einem Konstantstromgerät gespeist. Da man den Drehwinkel θ verdoppeln kann, wenn man das Feld umpolt, besitzt das Konstantstromgerät eine Polwendevorrichtung, die so konstruiert ist, dass beim Umpolen des Feldes keine gefährlichen Induktionsspannungen entstehen können.

Zur Messung der Lichtintensität werden Photowiderstände aus PbS verwendet, deren spektrale Empfindlichkeit vom Sichtbaren bis ins nahe Infrarot reicht. Ihr Innenwiderstand ist über mehrere Zehnerpotenzen proportional zur Lichtintensität. Wie in Abb.3

dargestellt, schickt man mittels einer Konstantspannungsquelle über einen Vorwiderstand einen Gleichstrom durch sie hindurch und misst den entstehenden Spannungsabfall. Da die Photowiderstände wegen ihres hohen Innenwiderstandes (ca. 1 M Ω bei Dunkelheit) auch merkliche Rauschspannungen produzieren, ist es aus Gründen, die im folgenden erläutert werden, zweckmäßig, mit einer Wechsellichtmethode zu arbeiten. Daher befindet sich im Strahlengang eine rotierende Sektorscheibe, die das Gleichlicht in Impulse zerhackt. Die am Photowiderstand abfallende Wechselspannung wird über einen Kondensator ausgekoppelt und schließlich mit einem Oszillographen nachgewiesen. Hinter dem Magneten befindet sich gemäß Abb.3 ein zweites Glan-Thompson-Prisma. Es wird benötigt, um die Drehung θ der Polarisationssebene des Lichtes nach dem Durchgang durch die Probe zu messen. Um eine hohe Winkelauflösung zu erreichen, arbeitet man hier mit einem Zweistrahlverfahren, das der bekannten Methode der gekreuzten Polarisatoren weit überlegen ist. Wie in Abb.3 angedeutet ist, treten aus dem zweiten Glan-Thompson-Prisma 2 Strahlenbündel aus, die senkrecht zueinander polarisiert sind. Die Intensitäten beider Strahlen werden mit Photowiderständen gemessen und die Signalspannungen auf die beiden Eingänge eines Differenzverstärkers gegeben. Dessen Ausgangsspannung, die proportional zur Differenz der Eingangsspannungen ist, verschwindet genau dann, wenn beide nach Betrag und Phase übereinstimmen. An den Ausgang des Differenzverstärkers wird über einen Selektivverstärker, der auf die Zerhackerfrequenz abgestimmt ist, ein Oszillograph angeschlossen. Dieser hat hier die Funktion eines Nulldetektors. Das heißt, man kann mit Hilfe dieses Gerätes mit hoher Auflösung feststellen, ob die von den beiden Photowiderständen kommenden Signalspannungen gleich sind oder nicht.

Zur Messung von θ geht man nun so vor, dass man bei maximalem (z.B. negativen) Feld die Lichtintensität in den beiden Strahlen auf den gleichen Wert einregelt, sodass am Ausgang des Differenzverstärkers die Spannung null anliegt. Das lässt sich immer erreichen, wenn man abwechselnd das erste Glan-Thompson-Prisma um seine Längsachse dreht und die Zeitkonstante der beiden Photowiderstände aneinander anpasst. Zu diesem Zwecke ist an einem Photowiderstand ein Drehkondensator angebracht. Die zugehörige Winkelstellung θ_1 wird an einem Goniometer abgelesen, das fest mit dem ersten Prisma verbunden ist. Danach polt man das Feld um, gleicht wiederum auf die Signalspannung null ab und liest den Drehwinkel θ_2 am Goniometer ab. Da man das Feld um insgesamt $2B$ geändert hat, ist

$$\theta = \frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2) \quad .$$

7. Justierung der Apparatur

Man entferne vorübergehend die Probe und das Interferenzfilter aus dem Strahlengang, um die Apparatur mit sichtbarem Licht justieren zu können.

Man überzeuge sich als erstes von der einwandfreien Arbeitsweise der Polarisationsvorrichtung. Hierzu demontiere man die Photowiderstandsgehäuse samt Abbildungsoptik und schaue in das Austrittsfenster für den durchgehenden Strahl des Analysatorprismas. Dort muss bei geeigneter Stellung des Polarisationsprismas die Lichtintensität

verschwinden. Falls eine merkliche Lichtintensität übrigbleibt, versuche man diese durch vorsichtiges Drehen des Analysatorprismas um seine **vertikale** Achse zu eliminieren.

Im nächsten Schritt ist zu prüfen, ob die Lichtquelle mit Hilfe der 100mm-Linsen auf die lichtempfindlichen Flächen der Photowiderstände abgebildet wird. Zur Kontrolle entferne man vorübergehend die Deckel von den Lichtschutzhauben zwischen Sammellinse und Photowiderstand.

Jetzt kann der Lichtzerhacker in Bewegung gesetzt werden. Man wähle am Steuergerät eine Wechsellichtfrequenz von einigen Hundert Hertz und regle die Mittenfrequenz des Selektivverstärkers auf den eingestellten Wert ein. Zur Kontrolle schließe man den Oszillographen an den Ausgang „Resonance“ an, schalte am Differenzverstärker einen Eingang auf „Ground“, (damit ein kräftiges Signal entsteht) und justiere mit Hilfe der drei Frequenzstellknöpfe am Selektivverstärker diesen auf maximales Ausgangssignal ein. Aufgabe dieses Gerätes in der Messanordnung ist es, Störspannungen, die das Signal eventuell verhüllen können, weitgehend zu unterdrücken. Das geht um so wirksamer, je schmaler seine Durchlasskurve ist. Ein Maß für ihre Breite ist der sogenannte Gütefaktor Q . Er sollte bei der Messung auf seinen Maximalwert eingestellt werden. Die Störspannungen entstehen im wesentlichen durch das Rauschen der Photowiderstände und des Differenzverstärkers. Rauschspannungen, deren Frequenz ungefähr gleich der Messfrequenz ist, werden jedoch vom Selektivverstärker nur wenig unterdrückt. Aus diesem Grunde wird am Ausgang des Gerätes immer ein kleine Reststörspannung zu sehen sein.^{*)}

Nach dem Abgleich des Selektivverstärkers sollte die Apparatur auf maximale Helligkeit justiert werden. Durch geschickte Platzierung der Lichtquelle und der Kondensorlinse relativ zur Öffnung des Lichtzerhackers kann man die durch die Apparatur hindurchtretende Lichtintensität noch ein wenig steigern. Das ist insbesondere notwendig bei Messungen mit einer Wellenlänge von rund $2,5\ \mu\text{m}$.

Zum Abschluss des Justiervorganges überprüfe man mit eingesetzter Probe und Interferenzfilter, ob am Ausgang des Selektivverstärkers tatsächlich das Signal null (abgesehen von geringen Rauschspannungsresten) erreicht werden kann. Hierzu sind alternierend die Stellung des Polarisationsprismas und die Zeitkonstante des einen Photowiderstandes zu variieren.

8. Messprogramm

- a) Man messe die Kraftflussdichte $B(z)$ in Richtung des einfallenden Lichtes in der Nähe des Luftspaltes bei maximalem Feldstrom mit einer Hallsonde.
- b) Man messe die Faraday-Rotation an n-dotiertem GaAs für verschiedene Wellenlängen im nahen Infrarot.

^{*)} Sollte die Restspannung für eine genaue Messung zu groß sein, muss zu wirksameren Methoden der Störspannungsunterdrückung gegriffen werden. Hier bietet sich z.B. der sogenannte Lock-in-Verstärker an.

- c) Man führe die dieselbe Messung an hochreinem GaAs aus, um die Faraday-Rotation gebundener Ladungsträger zu erhalten.

9. Auswertung

- a) Man trage $B(z)$ gegen z auf und ermittle die maximale Kraftflussdichte des Feldes. Diese ist gleich dem Feld am Ort der Probe.
- b) Man stelle die Messergebnisse zu 8b und 8c graphisch dar.
- c) Man bilde die Differenz der Faraday-Rotation zwischen dotierter und reiner Probe, um so den Faraday-Effekt der Leitungselektronen in GaAs zu erhalten. Sodann trage man den Drehwinkel gegen λ^2 auf und bestimme mittels einer Ausgleichsrechnung den Proportionalitätsfaktor zwischen beiden Größen und daraus schließlich m^* .

Anhang:

10. Beschreibung einzelner bei der Messung benutzter Instrumente

a) Interferenzfilter

Interferenzfilter werden benutzt, um aus einer Strahlung mit kontinuierlichem Spektrum einen engen Wellenlängenbereich herauszufiltern. Die Selektionswirkung entsteht durch

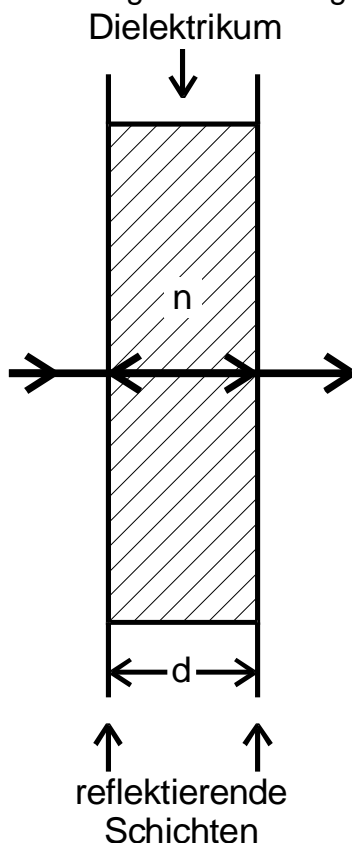


Abb.4 Querschnitt durch ein Interferenzfilter

eine Vielstrahl-Interferenz. Im Prinzip ist ein Interferenzfilter sehr einfach aufgebaut. Man verwendet eine dünne Schicht eines transparenten Dielektrikums mit dem Brechungsindex n und der Dicke d , welches von zwei semitransparenten Schichten umgeben ist (siehe Abb.4). Da diese einen Reflexionskoeffizienten $R > 0$ besitzen, wird das eindringende Licht an den inneren Oberflächen mehrmals reflektiert. Die so entstehenden Teilwellen interferieren alle miteinander. Konstruktive Interferenz entsteht für Licht mit den Wellenlängen λ_j , welche der Interferenzbedingung

$$(38) \quad j\lambda_j = 2nd + \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2}^{+)} \quad (j = 2, 3, \dots)$$

genügen. Für Licht anderer Wellenlängen als (38) gibt es, falls eine beliebig hohe Zahl von Reflexionen möglich ist, jeweils zwei Teilwellen, die sich gegenseitig auslöschen. Wenn man einen Monochromator für die Wellenlänge λ_k bauen will, muss man ein Interferenzfilter für die Wellenlänge λ_k (38) zusammen mit einem Satz von Farbfilttern kombinieren, die sämtliche Wellenlängen λ_j ($j \neq k$) absorbieren. Das ist realisierbar, da λ_k einen endlichen Abstand von λ_{k-1} und λ_{k+1} besitzt. Da R zwangsläufig < 1 ist, sind jedoch nur endlich viele

Reflexionen möglich. Das hat zur Konsequenz, dass dicht neben λ_k liegende Wellenlängen nicht mehr vollständig ausgelöscht werden. Die Durchlasskurve eines realen Filters hat somit eine endliche Breite, welche stark von R abhängt. Durch phasenge-

^{+) falls die Reflexion an der Grenzfläche mit einem Phasensprung π erfolgt}

rechte Superposition aller reflektierenden Teilwellen kann man die Durchlasskurve $T(\lambda)$ eines Interferenzfilters berechnen. Als Ergebnis erhält man die sogenannte **Airysche Funktion**. Sie lautet (bei vernachlässigbarer Absorption)

$$T(\lambda) \equiv \frac{1}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2 \frac{2\pi d n}{\lambda}},$$

wobei $R = r r^*$ (r = Reflexionskoeffizient an der Schichtgrenze $E_r = r E_0$) ist. Der Verlauf der Kurve ist in Abb.5 für verschiedene R wiedergegeben.

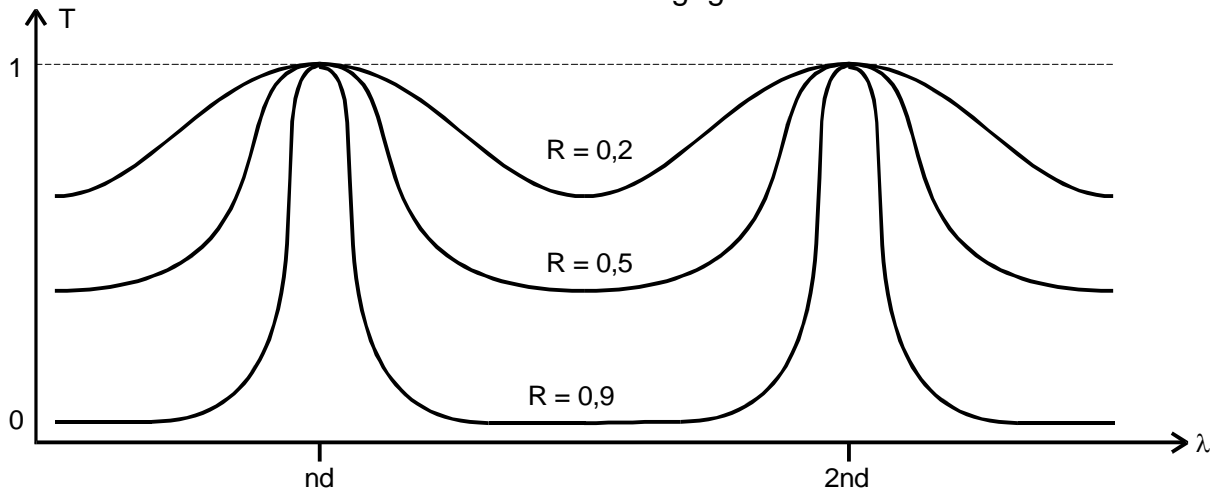


Abb.5: Verlauf der Transmissionskurve eines Interferenzfilters in Abhängigkeit vom Reflexionskoeffizienten R (ohne Absorption)

b) Glan-Thompson-Prisma als Polarisator

Polarisatoren der oben genannten Art bestehen aus sogenannten **doppelbrechenden** Kristallen. Das sind solche, bei denen die Diagonalelemente des Suszeptibilitäts-Tensors nicht alle gleich sind, wo (χ) also die Gestalt

$$\begin{pmatrix} \chi_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \chi_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{zz} \end{pmatrix}$$

hat. Das ist bei allen nicht-kubischen Kristallen der Fall, also auch bei dem im Experiment verwendeten Kalkspat. Um die Ausbreitung des Lichtes in einem doppelbrechenden Medium zu untersuchen, ist die Wellengleichung (13) in Kap.3 zu lösen. Das Problem soll hier nicht in voller Allgemeinheit diskutiert werden, da der Rechenaufwand zu groß ist. Um das Auftreten der Doppelbrechung und die daraus resultierende Polarisierung zu zeigen, genügt es anzunehmen, dass eine ebene Welle in \vec{z} -Richtung einfällt. Die Komponentendarstellung von (13) kann aus den Gleichungen (16), (17) und (18) entnommen werden, wobei $\chi_{xy} = 0$ gesetzt wird. Man erhält dann

$$(39) \quad k^2 E_x = \frac{\omega^2}{c^2} (1 + \chi_{xx}) E_x,$$

$$(40) \quad k^2 E_y = \frac{\omega^2}{c^2} (1 + \chi_{yy}) E_y,$$

$$(41) \quad 0 = \frac{\omega^2}{c^2} (1 + \chi_{zz}) E_z \quad .$$

Aus (41) folgt wiederum das bereits bekannte Ergebnis $E_z = 0$. Nimmt man nun $E_x \neq 0$ an, so folgt aus (39) für den Betrag des Wellenzahlvektors

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{(1 + \chi_{xx})}$$

und für die Phasengeschwindigkeit

$$v_{Ph_1} = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{(1 + \chi_{xx})}} \quad .$$

Eine solche Welle kann keine y-Komponente der Feldstärke besitzen; denn diese würde gemäß (40) eine Phasengeschwindigkeit

$$v_{Ph_2} = \frac{c}{\sqrt{(1 + \chi_{yy})}} \neq v_{Ph_1} \quad .$$

wegen $\chi_{yy} \neq \chi_{xx}$ besitzen. Daher ist die sich mit der Geschwindigkeit v_{Ph_1} im Kristall ausbreitende Welle **linear polarisiert**. Die Schwingungsebene liegt in der xz-Ebene. Entsprechend kann man schließen, dass eine Welle, die eine y-Komponente der Feldstärke besitzt, nicht auch noch eine x-Komponente haben kann und daher ebenfalls linear polarisiert ist. Ihre Phasengeschwindigkeit ist v_{Ph_2} . Man erkennt, dass eine in \vec{z} -Richtung einfallende Welle in 2 Teilstrahlen aufspaltet, die senkrecht zueinander polarisiert sind und sich mit **unterschiedlicher** Phasengeschwindigkeit ausbreiten. Da zu jeder Phasengeschwindigkeit gemäß der Beziehung

$$n = \frac{c}{v_{Ph}}$$

ein Brechungsindex gehört, findet somit die Bezeichnung „Doppelbrechung“ ihre Erklärung. Bei der Lösung des Problems in voller Allgemeinheit stellt man fest, dass die Phasengeschwindigkeit des anderen - des „außerordentlichen“ - eine Richtungsabhängigkeit aufweist. Im ersten Fall liegen die Endpunkte des \vec{k} -Vektors im \vec{k} -Raum auf einer Kugel und im zweiten auf einem Ellipsoid um den Ursprung. Kugel und Ellipsoid können sich zwei Punkten berühren. Die Verbindungslinie dieser beiden Punkte nennt man die **optische Achse** des Kristalls. Für Licht, das in dieser Richtung durch den Kristall läuft, tritt die Erscheinung der Doppelbrechung nicht auf, da beide k-Werte gleich sind.

Um nun die beiden senkrecht zueinander schwingenden Strahlen räumlich voneinander zu trennen, zerschneidet man einen doppelbrechenden Kristall in der in Abb.6 gezeigten Weise.

Zwischen den beiden Hälften befindet sich eine Luftschicht. Es werde nun angenommen, dass der Brechungsindex n_{a0} des außerordentlichen Strahles kleiner als der des ordentlichen n_o ist, wie es beim Calcit der Fall ist. Nun wählt man den Einfallswinkel α

so, dass der ordentliche Strahl an der Grenzfläche Kristall - Luft totalreflektiert wird, der außerordentliche jedoch nicht. Das ist möglich, wenn die Ungleichung

$$\frac{1}{n_o} < \sin \alpha < \frac{1}{n_{ao}}$$

erfüllt ist. In diesem Falle enthält der durchgehende (außerordentliche) Strahl - wie gewünscht - nur noch eine Polarisationsrichtung.

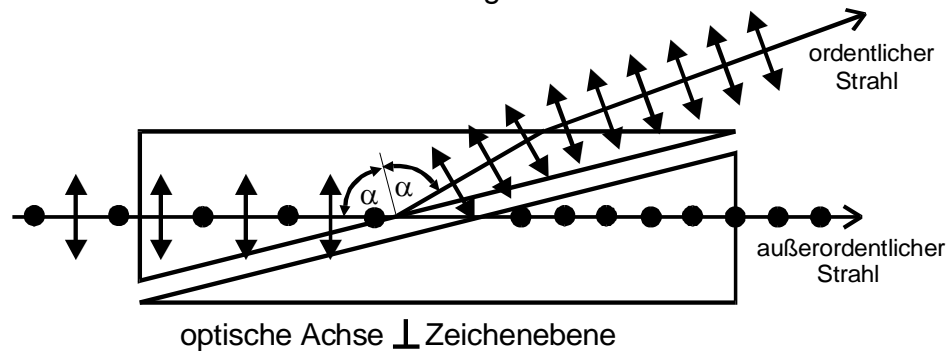


Abb.6: Schematischer Aufbau eines Glan-Thompson-Prismas

11. Literatur

S.D. Smith, Magneto-Optics in Crystals, in Handbuch der Physik, Bd XXV/2a (Licht und Materie Ia)

M. Balkanski, E. Amzallag, Band Parameters Determination from Faraday Rotation Measurements, phys. stat. sol. **30**, 407, (1968)

Manuel Cardona, Electron Effective Masses of InAs and GaAs as a Function of Temperature and Doping, Phys. Rev. **121**, 752 (1961)