TATA24 Linjär Algebra, Fö 4

Linjens och planets ekvation

Jan Snellman[1]

[1] Matematiska Institutionen
Linköpings Universitet

TEKNISKA HÖGSKOLAN
LINKÖPINGS UNIVERSITET

Linköping, HT 2022

Detta dokument återfinns på kurshemsidan `http://courses.mai.liu.se/GU/TATA24/`

Jan Snellman

TEKNISKA HÖGSKOLAN
LINKÖPINGS UNIVERSITET

Översikt av dagens föreläsning:

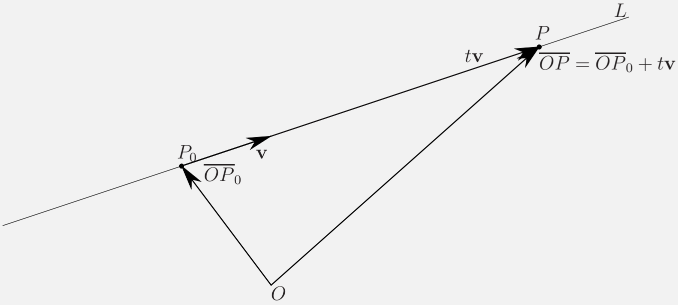
Översikt av dagens föreläsning:

1. **Linjens ekvation**
   - Ligger given punkt på linjen?
   - Skär två linjer varandra?
   - Avstånd linje-punkt
2. **Planets ekvation**
   - Parameterform
   - Normalform
   - Skärning plan-linje
   - Ligger given punkt i planet?
   - Avstånd punkt-plan
   - Avstånd linje-linje
   - Skärning av två plan
3. **Linjer i planet**
   - Linjens ekvation på normalform
   - Normallinje
   - Spegling

Översikt av dagens föreläsning:

1. **Linjens ekvation**
   - Ligger given punkt på linjen?
   - Skär två linjer varandra?
   - Avstånd linje-punkt
2. **Planets ekvation**
   - Parameterform
   - Normalform
   - Skärning plan-linje
   - Ligger given punkt i planet?
   - Avstånd punkt-plan
   - Avstånd linje-linje
   - Skärning av två plan
3. **Linjer i planet**
   - Linjens ekvation på normalform
   - Normallinje
   - Spegling

1. Låt $\underline{e} = [\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}]$ vara en höger-ON-bas i rummet.
2. Låt O beteckna punkten origo.
3. Låt P_0 vara en punkt i rummet.
4. Låt $\overline{v} \neq \overline{0}$ vara en vektor, och låt L vara den unika linje som går genom P_0 och som har $\overline{v}$ som *riktningsvektor*.
5. Det är samma sak som att $\overline{v} = \overline{P_0P_1}$ där P_1 är någon annan punkt på L.
6. Om P är en godtycklig punkt på L så är $\overline{P_0P}$ parallell med $\overline{v}$, så $\overline{P_0P} = t\overline{v}$ för något (unikt) $t \in \mathbb{R}$.
7. Alltså är $\overline{OP} = \overline{OP_0} + \overline{P_0P} = \overline{OP_0} + t\overline{v}$.



Figur 2.31: Linjens parameterform.

8.

Exempel

Vad är ekvationen (på parameterform) för linjen L som går genom punkterna $A = (1, 1, 1)$ och $B = (2, 3, 4)$?
Det följer från föregående (varför?) att en godtycklig punkt $P = P(t)$ på L har ekvationen

$$\overline{OP} = \overline{OA} + t\overline{AB} = \overline{OA} + t(\overline{OB} - \overline{OA}) = (1-t)\overline{OA} + t\overline{OB} =_{\underline{e}} \begin{pmatrix} (1-t)+2t \\ (1-t)+3t \\ (1-t)+4t \end{pmatrix} =_{\underline{e}} \begin{pmatrix} 1+t \\ 1+2t \\ 1+3t \end{pmatrix}$$

Sätter vi $t = 1/3$ så får vi koordinaterna $(4/3, 5/3, 2)$ för den punkt C så att $\overline{CB} = 2\overline{AC}$.

Exempel

Ligger $(1,2,3)$ på linjen $x = 3 - t, y = 2 + 2t, z = t$?
Ekvationssystemet

$$\begin{aligned} 3 - t &= 1 \\ 2 + 2t &= 2 \\ t &= 3 \end{aligned}$$

saknar lösning, så punkten ligger inte på linjen.

Exempel

Låt $A = (1,1,1)$, $B = (2,3,4)$, $C = (1,-1,-1)$ och $D = (-2,-2,1)$. Låt linjen L_1 gå genom A och B och linjen L_2 genom C och D. Skär L_1 och L_2 varandra, d.v.s. har de någon gemensam punkt?

Ansätt $\overline{OP} = \underline{e}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Då ligger P på L_1 och L_2 samtidigt om ekvationerna

$$\overline{OP} = \overline{OA} + s\overline{AB}$$
$$\overline{OP} = \overline{OC} + t\overline{CD}$$

båda är lösbara, dvs om systemet nedan är lösbart:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 + s \\ x_2 &= 1 + 2s \\ x_3 &= 1 + 3s \\ x_1 &= 1 - 3t \\ x_2 &= -1 - t \\ x_3 &= -1 + 2t \end{aligned}$$

Exempel (forts)

Vi skall alltså lösa, för s, t

$$\begin{aligned} 1 + s &= 1 - 3t \\ 1 + 2s &= -1 - t \\ 1 + 3s &= -1 - 2t \end{aligned}$$

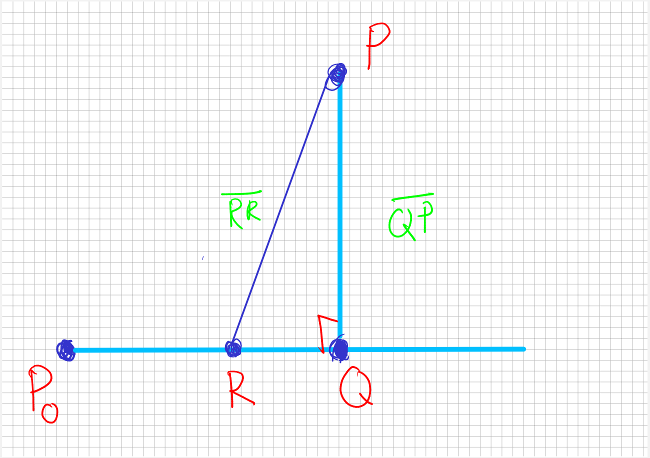
vilket är ekvivalent med

$$\begin{aligned} s &= -3t \\ 1 - 6t &= -1 - t \\ 1 - 9t &= -1 - 2t \end{aligned}$$

eller

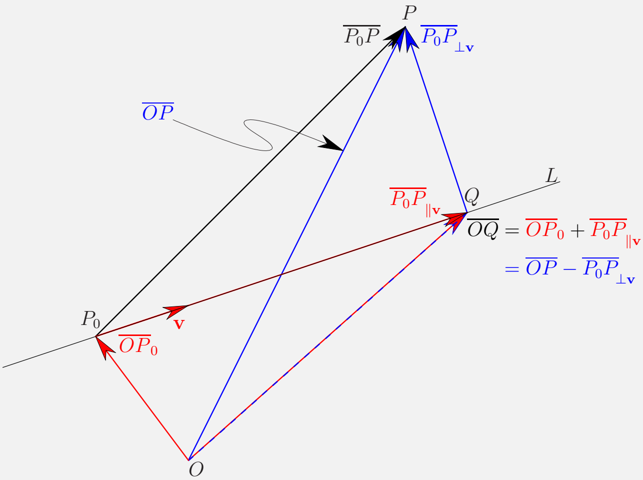
$$\begin{aligned} s &= -3t \\ 2 &= 5t \\ 2 &= 7t \end{aligned}$$

vilket saknar lösning. Linjerna skär alltså inte varandra.

- Låt linjen L gå genom P_0 och ha riktningsvektor $\overline{\mathrm{v}}$.
- Låt punkten P ligga i rummet, förmodligen inte på L.
- Vi vill hitta den punkt Q på linjen så att $\overline{P_0 Q} \perp \overline{QP}$, den är nämligen den punkt på linjen som är närmast P.
- 

(Skall stå $\overline{RP}$)

- Vi har att $\overline{P_0 Q} = t\overline{v}$ och $\overline{OQ} = \overline{OP_0} + \overline{P_0 Q}$
- Villkoret $\overline{QP} \cdot \overline{v} = 0$ bestämmer t och därmed ortsvektorn $\overline{OQ}$ samt avståndet $\left\|\overline{QP}\right\|$.
- Allt sker i planet som innehåller L och P, men om vi vill kan vi rita in origo



Figur 2.33: Avstånd från punkt till linje.

-

Exempel

Vilken punkt på linjen $x = y = z = 1 + t$ närmast punkten $P = (5, 6, 7)$?

Vi har $P_0 = (1, 1, 1)$ och $\overline{v} = \underline{e}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Sätt $\overline{P_0Q} = t\overline{v}$, då blir $\overline{OQ} = \underline{e}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + t\underline{e}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Vilkoret på t är

$$0 = \overline{QP}\cdot\overline{v} = (\overline{OP}-\overline{OQ})\cdot\overline{v} = \underline{e}\left(\begin{pmatrix}5\\6\\7\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}t\\t\\t\end{pmatrix}\right)\cdot\underline{e}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = (4-t)+(5-t)+(6-7) = 15-3t$$

så $t = 5$ och

$$\overline{OQ} = \underline{e}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + 5\underline{e}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \underline{e}\begin{pmatrix}6\\6\\6\end{pmatrix}.$$

Vidare är

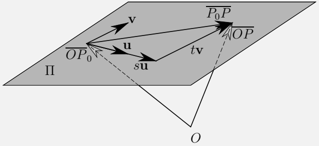
$$\overline{QP} = \overline{OP} - \overline{OQ} = \underline{e}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Den vektorn är ortogonal mot $\overline{v}$, som sig bör, och har längd $\sqrt{2}$, vilket alltså är avståndet från P till närmsta punkten på L.

Jan Snellman

TEKNISKA HÖGSKOLAN
LINKÖPINGS UNIVERSITET

- Låt $\overline{u}, \overline{v}$ vara vektorer i rummet
- Mängden $S = \{ s\overline{u} + t\overline{v} | s, t \in \mathbb{R} \}$ av alla linjärkombinationer kan ses som ett plan genom origo (om alla vektorer utgår från origo)
- Låt P_o vara en punkt i rummet
- Mängden $T = \left\{ \overline{OP_0} + \overline{w} \middle| \overline{w} \in S \right\}$ kan ses som mängden av alla punkter som kan nås från P_0 genom att flytta sig med en vektor från S, eller som translateringen av det föregående planet så att det går genom P_0 istf origo
- En godtycklig punkt P i detta senare plan har alltså ortsvektor $\overline{OP} = \overline{OP_o} + s\overline{u} + t\overline{v}$
- Detta är planets ekvation på *parameterform*.

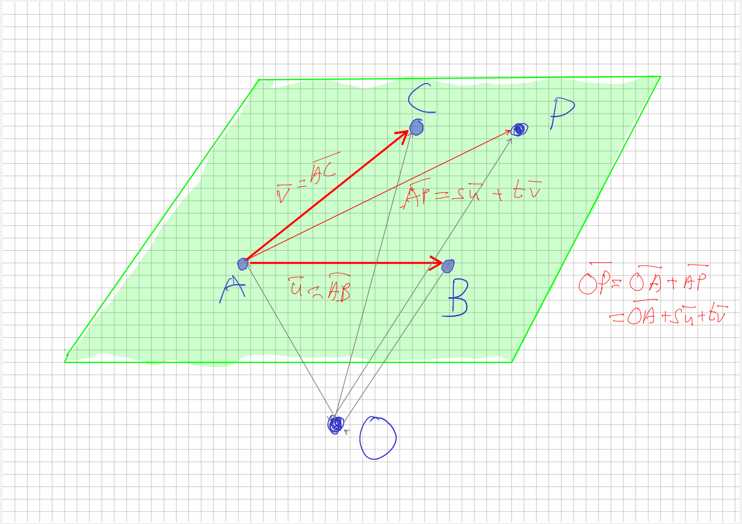


Figur 2.36: Planets parameterform

Jan Snellman

TEKNISKA HÖGSKOLAN
LINKÖPINGS UNIVERSITET

Tre punkter bestämmer ett plan



Exempel

Bestäm ekvationen för planet genom $A = (1,0,0)$, $B = (0,1,0)$ och $C = (0,0,1)$.
Sätt

$$\bar{u} = \overline{AB} = \underline{e} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \bar{v} = \overline{AC} = \underline{e} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

och ansätt för en godtycklig punkt i planet

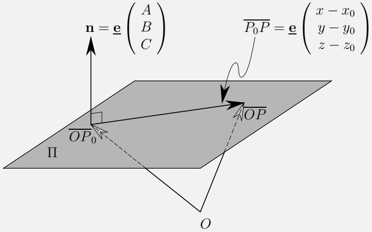
$$\overline{OP} = \underline{e} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \overline{OA} + s\bar{u} + t\bar{v} = \underline{e} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

så

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - s - t \\ x_2 &= s \\ x_3 &= t \end{aligned}$$

Vi får en punkt i planet för varje val av (s,t), olika val ger olika punkter; tex så $s = t = 1$ ger $(x_1, x_2, x_3) = (-1, 1, 1)$

- Låt T vara ett plan
- Låt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ vara en fix punkt i detta plan
- Låt $P = (x, y, z)$ vara en godtycklig, rörlig punkt i planet
- Låt $\overline{n} = \underline{e}\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ vara *normalvektor* till planet; det är en vektor (bestämd upp till skalning) ortogonal mot alla riktningar längst planet
- Vektorn $\overline{P_0P}$ är en sådan vektor, så vi har att $\overline{n} \cdot \overline{P_0P} = 0$
- M.a.o så $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ eller $Ax + By + Cz = D$
- Detta är planets ekvation på *normalform*
- $\underline{e}\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ ger alltså normalriktningen, och $D = Ax_0 + By_0 + Cz_0$ är noll precis om planet går genom origo



Figur 2.37: Planets normalform

Exempel

Bestäm ekvationen för planet genom $A = (1,0,0)$, $B = (0,1,0)$ och $C = (0,0,1)$.

OBS: A, B, C är nu punkter i rummet, inte koordinater för normalvektorn!

Vi har redan räknat ut kantvektorerna

$$\overline{\mathrm{u}} = \overline{AB} = \underline{\mathrm{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overline{\mathrm{v}} = \overline{AC} = \underline{\mathrm{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

och får normalvektorn som kryssprodukten mellan dem — den är ju ortogonal mot båda!

$$\overline{\mathrm{n}} = \overline{\mathrm{u}} \times \overline{\mathrm{v}} = \underline{\mathrm{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \underline{\mathrm{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\mathrm{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Så ekvationen på normalform blir

$$x + y + z = D$$

för något D. Vi bestämmer D genom att sätta in koordinaterna för A, vilket ger $x = 1$, $y = z = 0$, så $1 + 0 + 0 = D$. Planets ekvation på normalform är alltså

$$x + y + z = 1$$

Exempel

Ange planets ekvation på parameterform för planet

$$\{(x, y, z) | 2x + 3y + 5z = 30\}.$$

Vi löser ekvationssystemet genom att sätta $y = 10s$, $z = 6t$, och $x = 15 - 15s - 15t$.

Exempel

Beskriv planet

$$L = \{(x, y, z) | 2x + 3y = 30\}.$$

Normalvektorn är $\underline{e}\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}$ vilken är ortogonal mot $\overline{e_3}$, så planet

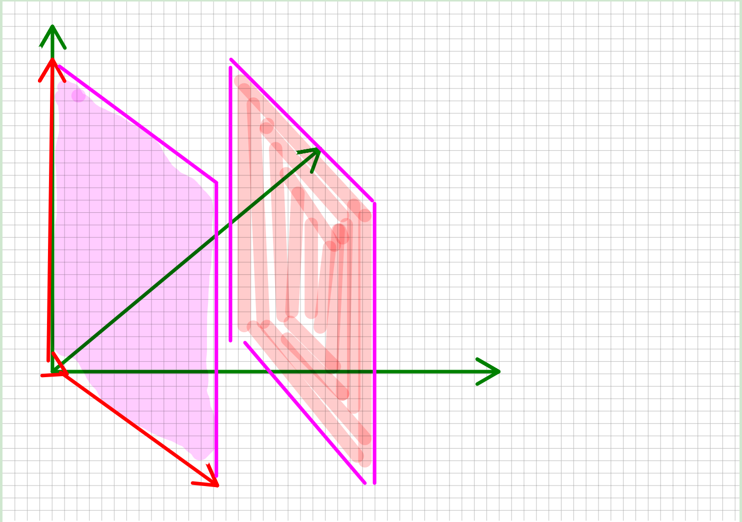
$$2x + 3y = 0$$

innehåller z-axeln, och spänns av denna samt tex $\underline{e}\begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix}$. Vårt plan L är detta plan translaterat en bit.

Jan Snellman

TEKNISKA HÖGSKOLAN
LINKÖPINGS UNIVERSITET

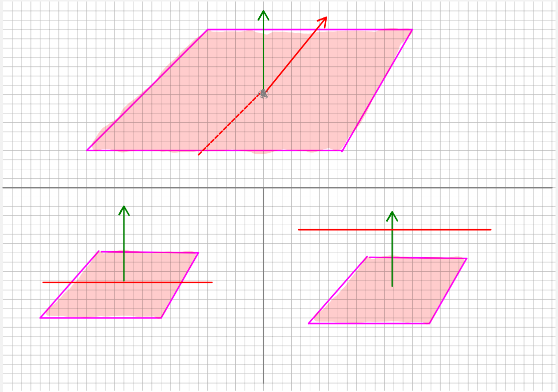
Exempel (forts)



Sats

Låt linjen L ha riktningsvektor $\overline{\mathrm{v}}$, och planet T ha normalvektor $\overline{\mathrm{n}}$.

- *Om $\overline{\mathrm{v}} \cdot \overline{\mathrm{n}} \neq 0$ så är L inte parallell med T, och skär T i en unik punkt.*
- *Om $\overline{\mathrm{v}} \cdot \overline{\mathrm{n}} = 0$ så är L parallell med T. Då är antingen $L \subset T$ eller $L \cap T = \emptyset$.*



Exempel

Hitta eventuell skärningspunkt mellan linjen

$$x = 1 + t,\ y = 1 - t,\ z = 5$$

och planet

$$x - y - z = 2$$

Insättning ger en ekvation för t:

$$(1 + t) - (1 - t) - 5 = 2 \quad \Longrightarrow \quad 2t = 7 \quad \Longrightarrow \quad t = 7/2$$

Vi sätter in detta t-värde i linjens ekvation och får koordinaterna för skärningspunkten:

$$x = 1 + 7/2,\ y = 1 - 7/2,\ z = 5.$$

Exempel

Ligger $R = (5, 6, 7)$ i planet

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 1 - s - t \\
x_2 &= s \\
x_3 &= t
\end{aligned}
$$

Vi får ekvationssystemet

$$
\begin{aligned}
1 - s - t &= 5 \\
s &= 6 \\
t &= 7
\end{aligned}
$$

vilket saknar lösning, så punkten ligger inte i planet.
Samma plan kan ges med normalformsekvationen

$$x + y + z = 1$$

och då ser vi att

$$5 + 6 + 7 \neq 1$$

så punkten ligger fortfarande inte i planet.

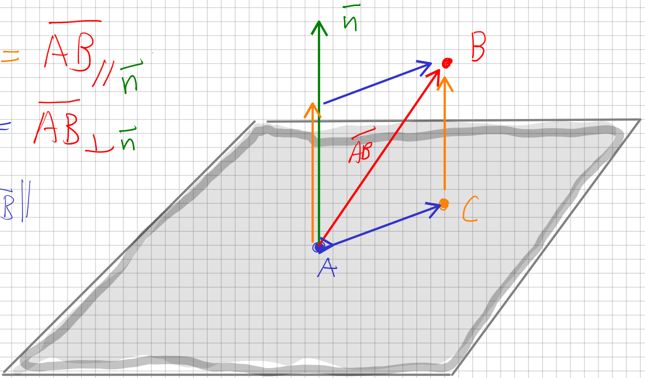
TEKNISKA HÖGSKOLAN
LINKÖPINGS UNIVERSITET

Avstånd punkt till plan, via ortogonal projektion

$$\overline{CB} = \overline{AB}_{/\!/\bar{n}}$$

$$\overline{AC} = \overline{AB}_{\perp\bar{n}}$$

$$d = \|\overline{CB}\|$$



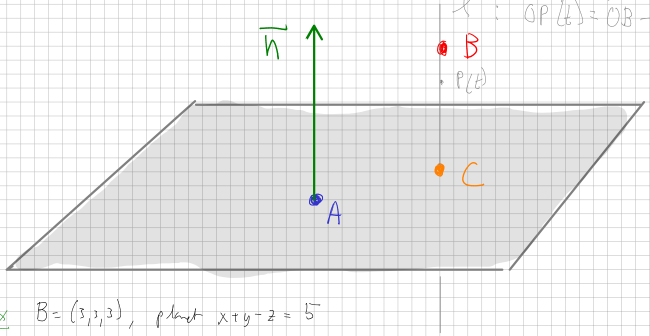
Ex $B = (3,3,3)$, planet $x+y-z=5$, $\bar{n} = \underline{e}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$, $A = \begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix}$

$\overline{AB} = \underline{e}\begin{bmatrix}-2\\3\\3\end{bmatrix}$, $\overline{AB}_{/\!/\bar{n}} = \dfrac{\overline{AB}\circ\bar{n}}{\bar{n}\circ\bar{n}}\bar{n} = \dfrac{-2}{3}\underline{e}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \underline{e}\begin{bmatrix}-2/3\\-2/3\\2/3\end{bmatrix}$

$\overline{AB}_{\perp\bar{n}} = \overline{AB} - \overline{AB}_{/\!/\bar{n}} = \underline{e}\begin{bmatrix}-4/3\\11/3\\7/3\end{bmatrix} = \overline{AC}$, $\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AC} = \underline{e}\begin{bmatrix}5\\0\\0\end{bmatrix} + \underline{e}\begin{bmatrix}-4/3\\11/3\\7/3\end{bmatrix} = \underline{e}\begin{bmatrix}11/3\\11/3\\7/3\end{bmatrix}$

Avstånd punkt till plan, via skärning med linje

$\ell : \overline{OP(t)} = \overline{OB} - t\overline{n}$



Ex $B=(3,3,3)$, planet $x+y-z=5$

$$\ell:\ \underline{e}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \underline{e}\begin{bmatrix}3\\3\\3\end{bmatrix} - t\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix} \implies \left.\begin{array}{l} x = 3-t \\ y = 3-t \\ z = 3+t \end{array}\right\}$$

Men skärningspunkten $\ell \cap$ plan uppfyller $x+y-z=5$

$$\text{Sätt in: } \overbrace{(3-t)}^{x} + \overbrace{(3-t)}^{y} - \overbrace{(3+t)}^{z} = 5 \implies 3-3t=5 \implies t=-\frac{2}{3}$$

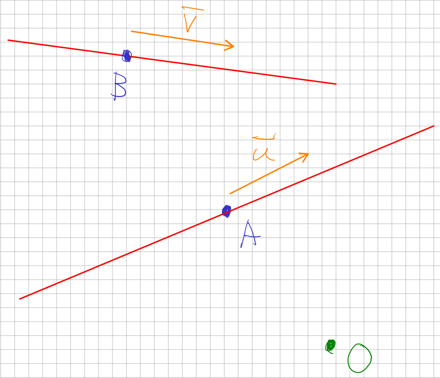
Sätt in i linjens ekv:

$$x = 3+2/3 = 11/3$$
$$y = 3+2/3 = 11/3$$
$$z = 3-2/3 = 7/3$$

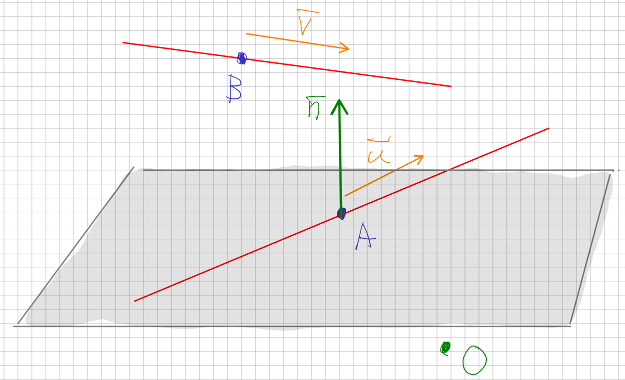
$$\text{Avstånd} = |t|\cdot\|\overline{n}\| = \frac{2}{3}\cdot\sqrt{3}$$

Givet två linjer i rummet, vad är kortaste avståndet mellan dem, och hur hittar vi de två punkterna på respektive linjer som är närmast?

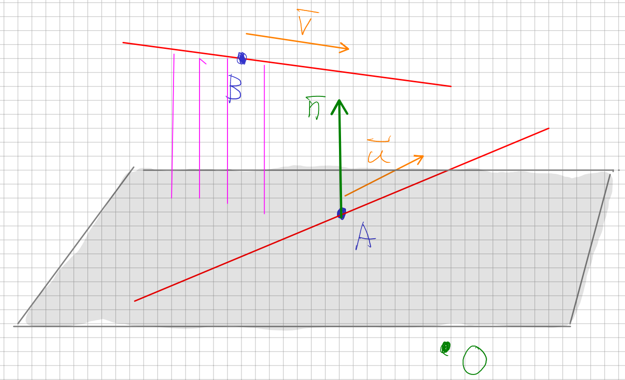
Avstånd linje-linje



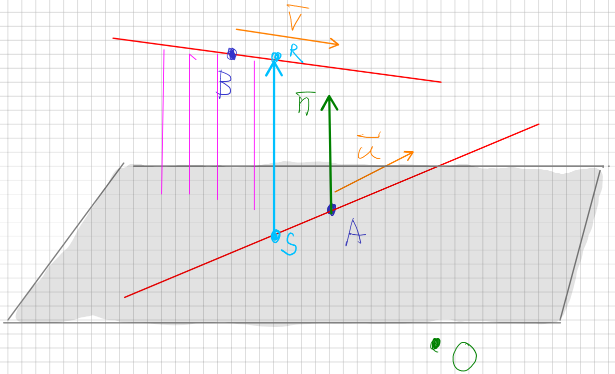
Avstånd linje-linje



Avstånd linje-linje



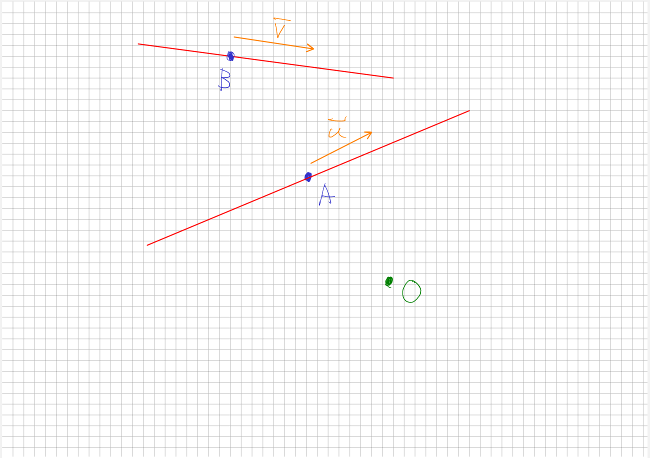
Avstånd linje-linje



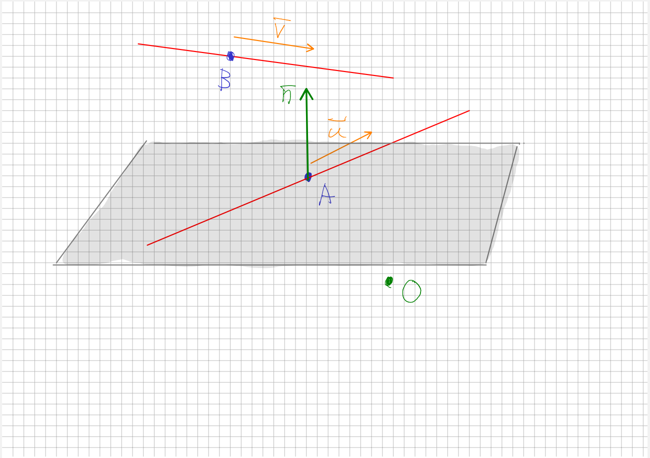
Jan Snellman

TEKNISKA HÖGSKOLAN
LINKÖPINGS UNIVERSITET

1. Vi har två linjer i rummet, givna på parameterform, riktningsvektorer $\overline{u}$ och $\overline{u}$, punkter A, B.



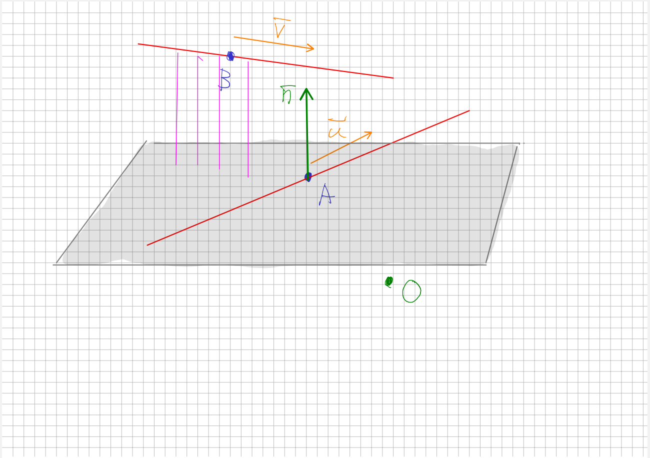
2. Vi bildar planet T innehållande A med riktningsvektor $\overline{n} = \overline{u} \times \overline{v}$. Detta plan innehåller den ena linjen!



Jan Snellman

TEKNISKA HÖGSKOLAN
LINKÖPINGS UNIVERSITET

3. Alla punkter på den andra linjen "svävar" på samma höjd över planet T. Det ger avståndet d mellan linjerna som avståndet mellan andra linjen och planet T.

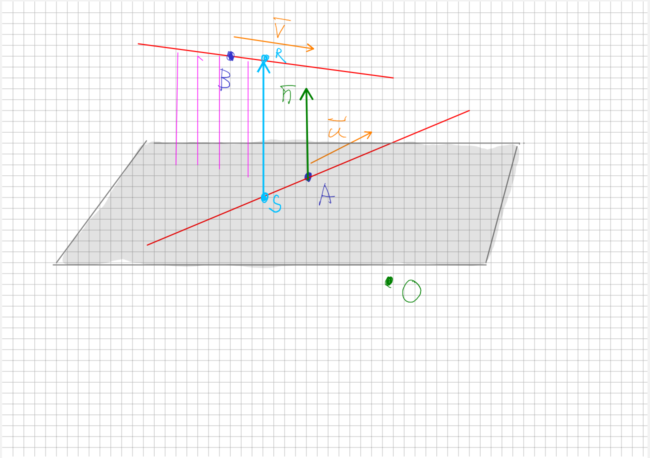


Jan Snellman

TEKNISKA HÖGSKOLAN
LINKÖPINGS UNIVERSITET

4. Vi har en rörlig punkt R och en rörlig punkt S på vardera linjen, beroende av parametrar (säg s, t). Vi får en varierande vektor $\overline{RS}$ som vid minimalt avstånd är ortogonal mot $\overline{\mathrm{u}}$ och $\overline{\mathrm{v}}$, vilket ger två ekvationer för s, t:

$$\overline{RS} \cdot \overline{\mathrm{u}} = \overline{RS} \cdot \overline{\mathrm{v}} = 0$$



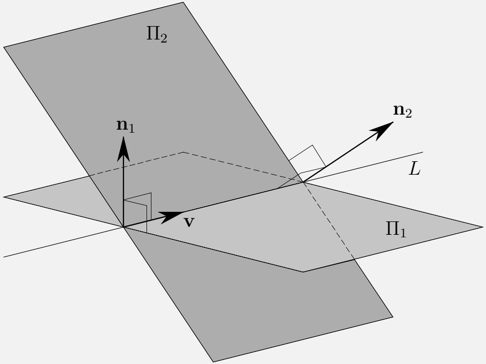
Jan Snellman

TEKNISKA HÖGSKOLAN
LINKÖPINGS UNIVERSITET

Sats

Låt T_1, T_2 vara plan med normalvektorer $\overline{\mathrm{n}_1}$, $\overline{\mathrm{n}_2}$

1. *Om $\overline{\mathrm{n}_1}$ och $\overline{\mathrm{n}_2}$ inte är parallella så skär T_1 och T_2 varandra i en linje med riktningsvektor $\overline{\mathrm{u}}$ ortogonal mot både $\overline{\mathrm{n}_1}$ och$\overline{\mathrm{n}_2}$.*
2. *Om $\overline{\mathrm{n}_1}$ och $\overline{\mathrm{n}_2}$ är parallella så är planen parallella, och sammanfaller eller är disjunkta.*



Figur 2.38: Skärningslinje mellan plan.

Exempel

Vi beräknar skärningen mellan $x + y + 2z = 3$ och $2x + 4y = 10$.

$$\begin{cases} x+y+2z=3 \\ 2x+4y=0 \end{cases} \implies \begin{cases} x+y+2z=3 \\ 2y-4z=0 \end{cases} \implies \begin{cases} x+y+2z=3 \\ y-2z=0 \end{cases} \implies$$

$$\begin{cases} x+4z=3 \\ y-2z=0 \end{cases} \implies \begin{cases} x=3-4t \\ y=2t \\ z=t \end{cases}$$

Det är linjen genom $(3,0,0)$ med riktningsvektor $\overline{\mathrm{u}} = \underline{\mathrm{e}}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

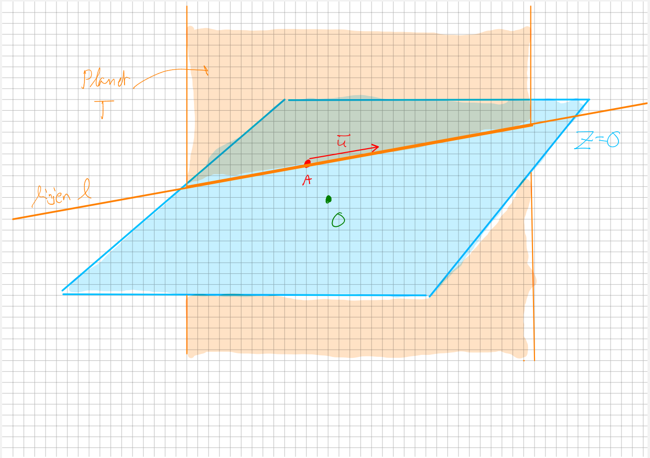
Vi kontrollerar att

$$\underline{\mathrm{e}}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \underline{\mathrm{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 = \underline{\mathrm{e}}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \underline{\mathrm{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Vi antar att allt utspelar sig i planet $z = 0$.
- En linje ℓ i detta plan ger upphov till ett plan

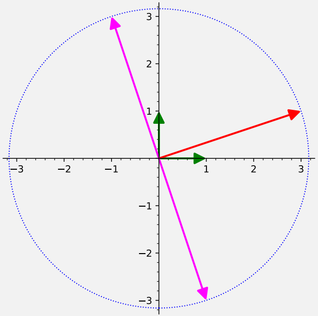
$$T = \{\,(x, y, z) \,|\, (x, y, 0) \in \ell\,\}$$

- Vi har att $\ell = T \cap \{z = 0\}$



-

- Vad får planet T för normalvektor $\overline{\mathrm{n}}$? Vi har att
  - $\overline{\mathrm{n}} \cdot \overline{\mathrm{e}_3} = 0$, ty T ortogonalt mot $\{z = 0\}$
  - $\overline{\mathrm{n}} \cdot \overline{\mathrm{u}} = 0$, ty T ortogonalt mot ℓ
- Så om $\overline{\mathrm{u}} = \underline{\mathrm{e}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$ så kan vi ta $\overline{\mathrm{n}} = \underline{\mathrm{e}} \begin{pmatrix} -b \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$ om vi kommer ihåg figuren från lektion 3:



- Nu kan vi glömma z-koordinaten.

Exempel (Från läroboken)

Exempel 2.8.5. Bestäm ekvationen för linjen L genom punkterna $(5,3)$ och $(-2,7)$ på parameter-, riktningskoefficient- och normalform. Ange också en normalvektor till L.
Lösning: Sätt $P=(5,3)$ och $Q=(-2,7)$. Vi börjar med parameterformen.

$$\overline{PQ}=\overline{OQ}-\overline{OP}=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-2\\7\end{pmatrix}-\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-7\\4\end{pmatrix}\implies L\colon\ \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}+t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-7\\4\end{pmatrix}.$$

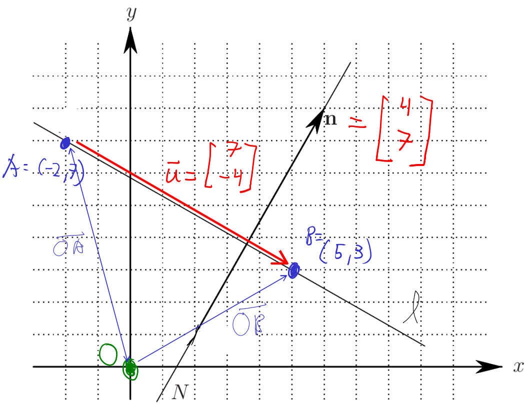
För att komma till riktningskoefficient- och normalform från parameterformen löser vi ut t-värdet ur x respektive y.

$$\begin{cases}x=5-7t\\y=3+4t\end{cases}\iff t=\frac{5-x}{7}=\frac{y-3}{4}\iff 20-4x=7y-21\iff$$

$$\iff\underbrace{4x+7y=41}_{\text{normalform}}\iff\underbrace{y=-\frac{4}{7}x+\frac{41}{7}}_{\text{riktningskoefficientform}}.$$

Ur normalformen ovan ser vi att $\mathbf{n}=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix}$ är en normalvektor till L. Detta kan man se redan ur parameterformen. Det enda kravet på $\mathbf{n}$ är ju att $\mathbf{n}\perp\mathbf{v}=L$:s riktningsvektor, d v s $\mathbf{n}\bullet\mathbf{v}=0$. ♦

Exempel (forts)



Figur 2.35: Linjen L i exempel 2.8.5 och dess normal.

Definition

Om

$$\ell_1 = \left\{ P \middle| \overline{OP} = \overline{OA} + t\overline{\mathrm{u}}, \quad t \in \mathbb{R} \right\}$$

är en linje i planet med känd punkt A och riktningsvektor $\overline{\mathrm{u}} = \underline{\mathrm{e}} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ så finns en unik linje ℓ_2 genom A som är ortogonal mot ℓ_1, nämligen

$$\ell_2 = \left\{ Q \middle| \overline{OQ} = \overline{OA} + s\overline{\mathrm{u}}^{\perp}, \quad s \in \mathbb{R} \right\}$$

med $\overline{\mathrm{u}}^{\perp} = \underline{\mathrm{e}} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$
Linjerna har följande ekvationer på normalform:

$$\ell_1 : -bx + ay = \overline{\mathrm{u}}^{\perp} \cdot \overline{OA}$$
$$\ell_2 : ax + by = \overline{\mathrm{u}} \cdot \overline{OA}$$

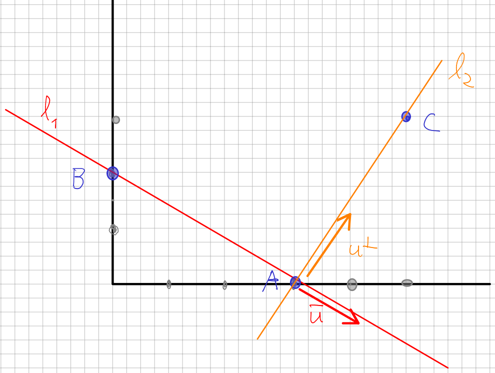
d.v.s riktningsvektorn till ℓ_1 blir normalvektor till normallinjen, och vice versa.

Jan Snellman

TEKNISKA HÖGSKOLAN
LINKÖPINGS UNIVERSITET

Exempel (Normallinje)

Linje samt normallinje, på parameterform och normalform



$A = (3,0)$ $\quad B = (0,2)$

$\bar{u} = \underline{e}\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix} = \overline{BA}$

$\bar{u}^\perp = \underline{e}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} = \overline{AC}$

$l_1: \underline{e}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \underline{e}\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix} + t\,\underline{e}\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}$

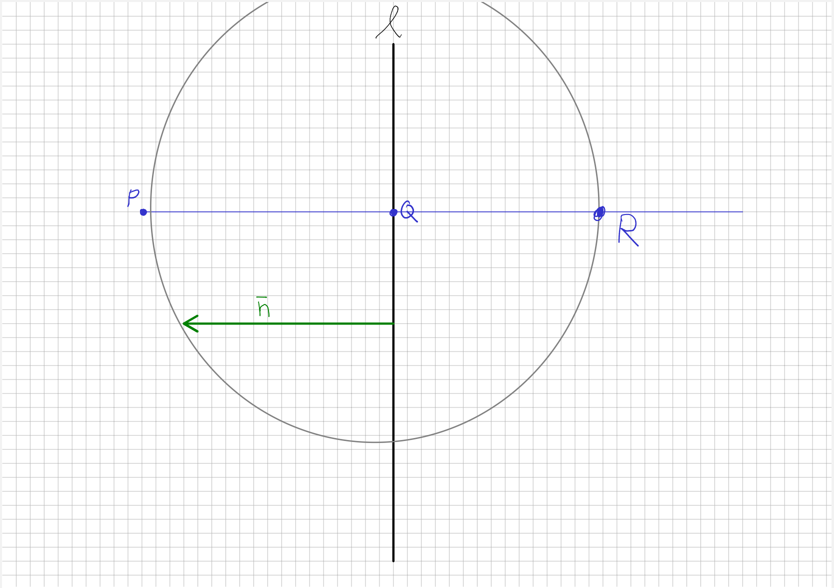
$l_1: 2x + 3y = 2\cdot 3 + 3\cdot 0 = 6$

$l_2: \underline{e}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \underline{e}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \underline{e}\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix} + s\,\underline{e}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$

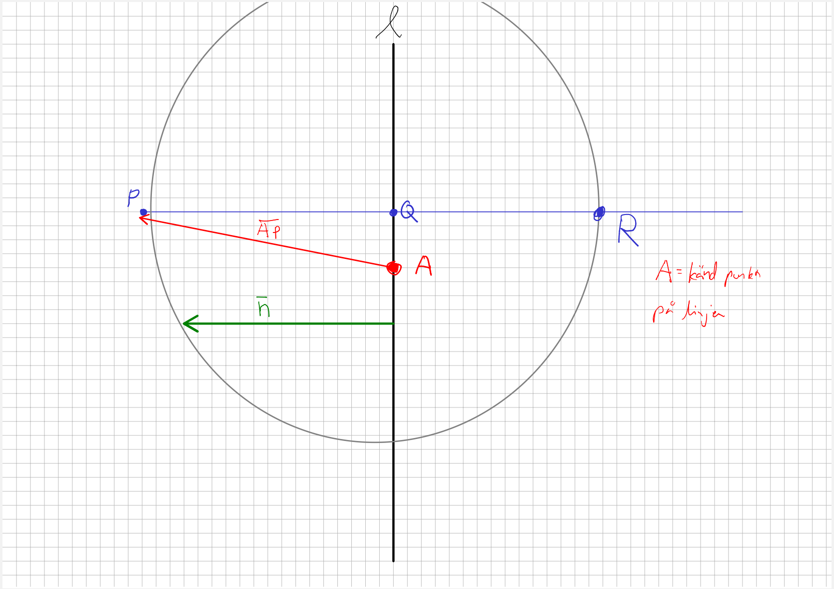
$l_2: 3x - 2y = 3\cdot 3 - 2\cdot 0 = 9$

Spegelpunkten till en punkt A i en linje ℓ är den punkt man hamnar i om man rör sig först till projektionspunkten, och sedan fortsätter lika långt och i samma riktning!

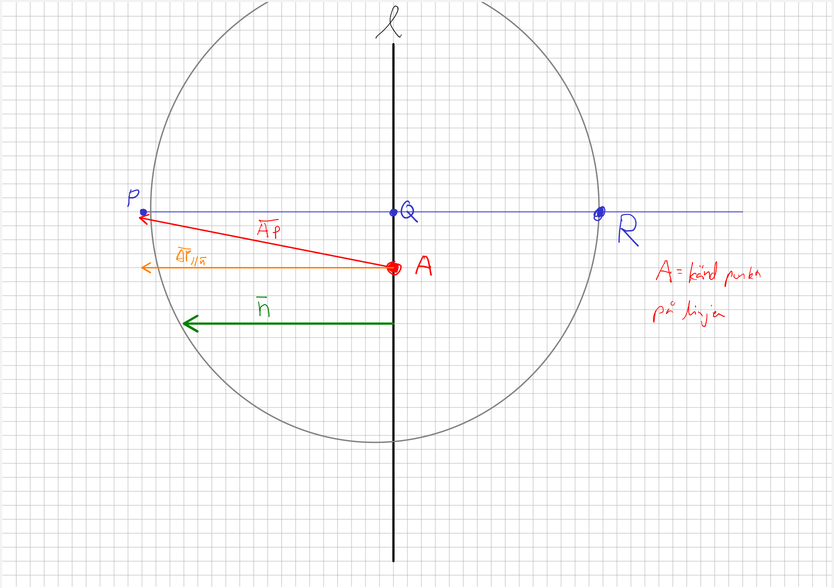
Spegling i linje (eller plan)



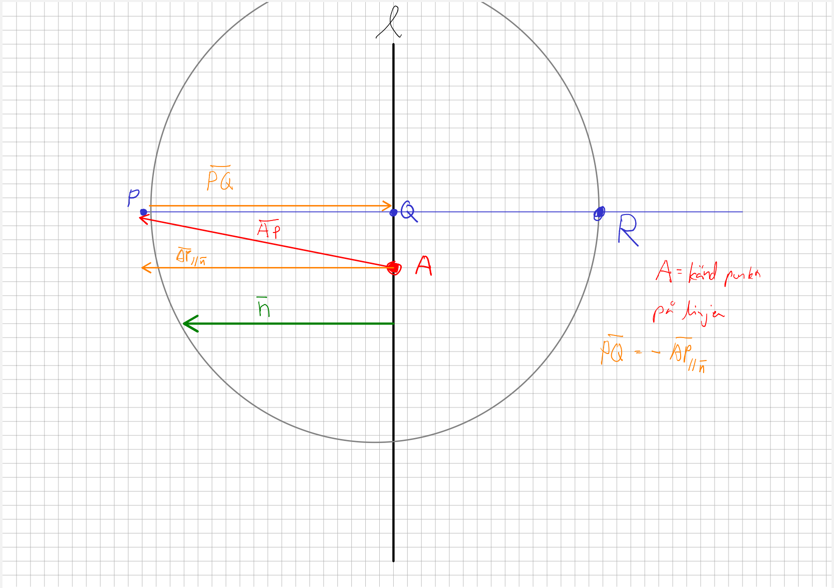
Spegling i linje (eller plan)



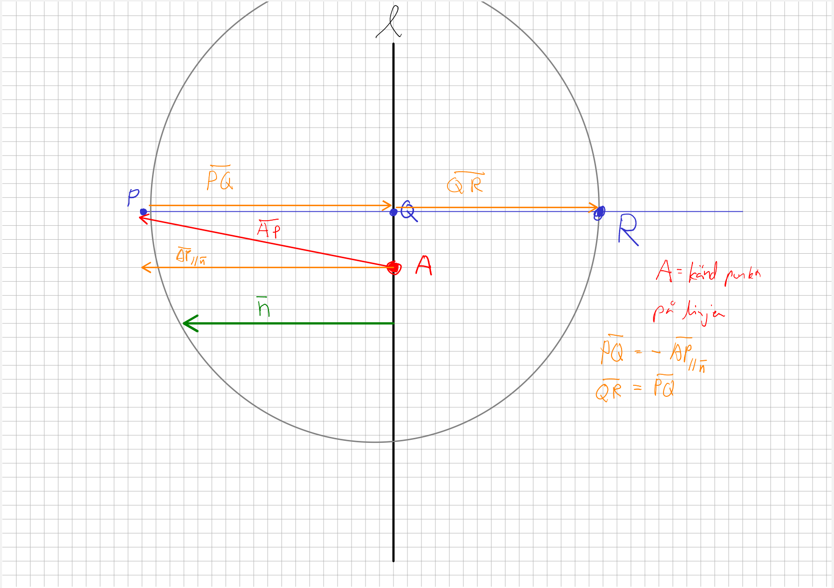
Spegling i linje (eller plan)



Spegling i linje (eller plan)



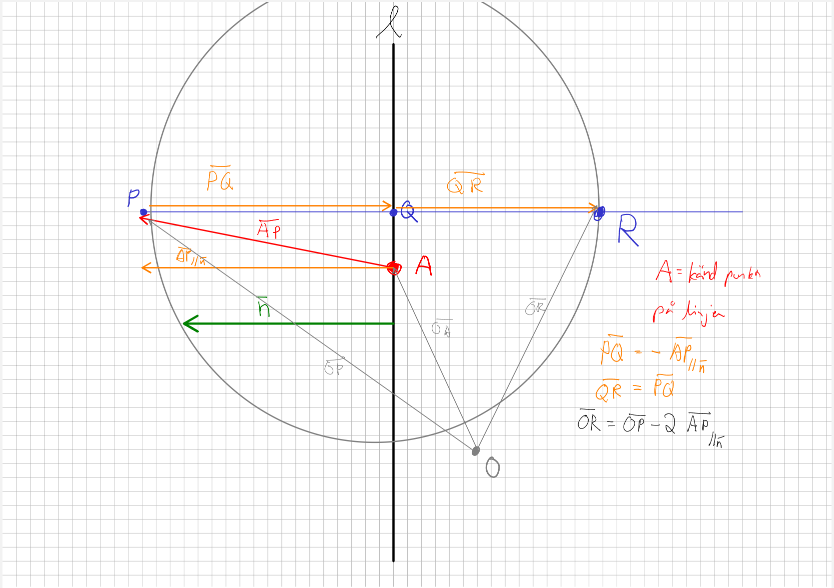
Spegling i linje (eller plan)



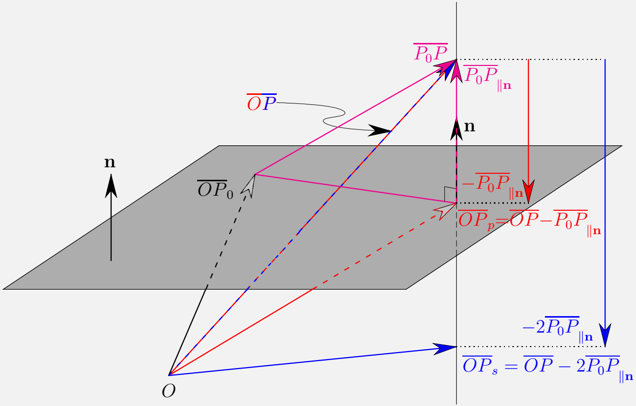
Jan Snellman

TEKNISKA HÖGSKOLAN
LINKÖPINGS UNIVERSITET

Spegling i linje (eller plan)



Spegling i läroboken



Figur 2.39: Ortogonalprojektion och spegling i plan.