TATA24 Linjär Algebra, Fö 16

Isometriska och symmetriska linjära avbildningar

Jan Snellman[1]

[1] Matematiska Institutionen
Linköpings Universitet

TEKNISKA HÖGSKOLAN
LINKÖPINGS UNIVERSITET

Linköping, HT 2022

Detta dokument återfinns på kurshemsidan `http://courses.mai.liu.se/GU/TATA24/`

Jan Snellman

TEKNISKA HÖGSKOLAN
LINKÖPINGS UNIVERSITET

Översikt av dagens föreläsning:

1. **Linjära isometrier**
   - Avståndsbevarande, normbevarande, inreprodukt-bevarande
   - ON-matriser
   - Determinant av isometri
   - Isometrier i planet
   - Isometrier i rummet
2. **Symmetriska linjära avbildningar**
   - Symmetrisk avbildningsmatris
   - Symmetrisk och antisymmetrisk del

Översikt av dagens föreläsning:

1. **Linjära isometrier**
   - Avståndsbevarande, normbevarande, inreprodukt-bevarande
   - ON-matriser
   - Determinant av isometri
   - Isometrier i planet
   - Isometrier i rummet
2. **Symmetriska linjära avbildningar**
   - Symmetrisk avbildningsmatris
   - Symmetrisk och antisymmetrisk del

Definition

Låt E vara ett euklidiskt rum med inre produkt $(\cdot|\cdot)$. Vi definierar, som tidigare, *normen* av $\overline{\mathrm{u}} \in \mathrm{E}$ som $\|\overline{\mathrm{u}}\| = \sqrt{(\overline{\mathrm{u}}|\overline{\mathrm{u}})}$. Vi definierar *avståndet* mellan $\overline{\mathrm{u}}$ och $\overline{\mathrm{v}}$ som $d(\overline{\mathrm{u}}, \overline{\mathrm{v}}) = \|\overline{\mathrm{u}} - \overline{\mathrm{v}}\|$.
Låt $F : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ vara linjär.

1. F bevarar inreprodukt om $(\overline{\mathrm{u}}|\overline{\mathrm{v}}) = (F(\overline{\mathrm{u}})|F(\overline{\mathrm{v}}))$ för alla $\overline{\mathrm{u}}, \overline{\mathrm{v}} \in \mathrm{E}$.
2. F är avståndsbevarande om $d(\overline{\mathrm{u}}, \overline{\mathrm{v}}) = d(F(\overline{\mathrm{u}}), F(\overline{\mathrm{v}}))$ för alla $\overline{\mathrm{u}}, \overline{\mathrm{v}} \in \mathrm{E}$.
3. F är normbevarande om $\|\overline{\mathrm{u}}\| = \|F(\overline{\mathrm{u}})\|$ för alla $\overline{\mathrm{u}} \in \mathrm{E}$.

Sats

Följande är likvärdiga:

1. *F bevarar inre produkt.*
2. *F är avståndsbevarande.*
3. *F är normbevarande.*

Bevis.

(3) medför (2):

$$d(F(\overline{u}), F(\overline{v})) = \|F(\overline{u}) - F(\overline{v})\| = \|F(\overline{u} - \overline{v})\| = \|\overline{u} - \overline{v}\| = d(\overline{u}, \overline{v}).$$

(2) medför (3):

$$\|\overline{u}\| = d(\overline{u}, \overline{0}) = d(F(\overline{u}), F(\overline{0})) = d(F(\overline{u}), \overline{0}) = \|F(\overline{u})\|$$

(1) medför (3):

$$\|\overline{u}\|^2 = (\overline{u}|\overline{u}) = (F(\overline{u})|F(\overline{u})) = \|F(\overline{u})\|^2$$

(3) medför (1)

$$\begin{aligned} 2\,(\overline{u}|\overline{v}) = \|\overline{u} + \overline{v}\|^2 - \|\overline{u}\|^2 - \|\overline{v}\|^2 = \|F(\overline{u} + \overline{v})\|^2 - \|F(\overline{u})\|^2 - \|F(\overline{v})\|^2 = \\ \|F(\overline{u}) + F(\overline{v})\|^2 - \|F(\overline{u})\|^2 - \|F(\overline{v})\|^2 = 2\,(F(\overline{u})|F(\overline{v})) \end{aligned}$$

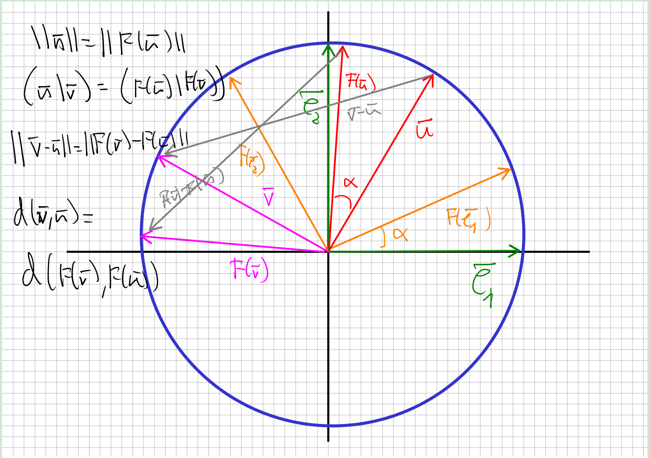
□

Definition

En linjär avbildning som uppfyller de tre ekvivalenta villkoren att bevara inre produkt, avstånd, norm, kallas för en (linjär) *isometri*.

Exempel

En vridning i planet är en isometri.



Sats

Låt E *vara ett euklidiskt rum av ändlig dimension* n*, och låt* $\underline{\mathrm{e}} = \begin{pmatrix} \bar{\mathrm{e}}_1 & \cdots & \bar{\mathrm{e}}_n \end{pmatrix}$ *vara en (ordnad) ON-bas för* E*. Antag att*

$$F : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$$

är linjär och har avbilningsmatris A *m.a.p.* $\underline{\mathrm{e}}$*.*
Då är F *en isometri omm* A *är en ortonormal matris, dvs om kolonnerna i* A *bildar en ON-bas, alternativt och ekvivalent om* $A^t A = I$*.*

Bevis.

Eftersom en isometri bevarar inre produkt så är $\begin{pmatrix} F(\bar{\mathrm{e}}_1) & \cdots & F(\bar{\mathrm{e}}_n) \end{pmatrix}$ en ON-bas i E, så motsvarande koefficientmatriser bildar en ON-bas för $\mathbb{R}^n$. Men dessa koefficientmatriser är precis kolonnerna i avbildningsmatrisen.
Omvänt, om A är en ortonormal matris, så uppfyller F att

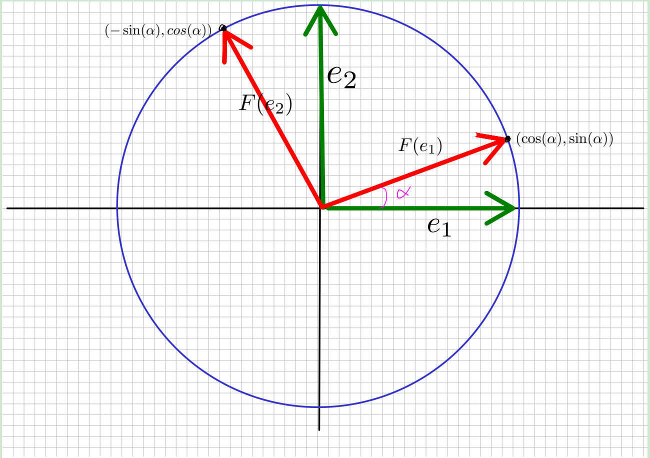
$$\|F(\underline{\mathrm{e}}X)\|^2 = \|\underline{\mathrm{e}}AX\|^2 = (AX)^t(AX) = X^tA^tAX = X^tIX = X^tX = \|\underline{\mathrm{e}}X\|^2 .$$

$\square$

Exempel (Vridning)

Vridning med α radianer moturs har avbildningsmatris

$$A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u} & | & \bar{u}^{\perp} \end{bmatrix}, \quad a^2 + b^2 = 1, \bar{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{bmatrix}, \bar{u}^{\perp} = \begin{bmatrix} -b \\ a \end{bmatrix}$$

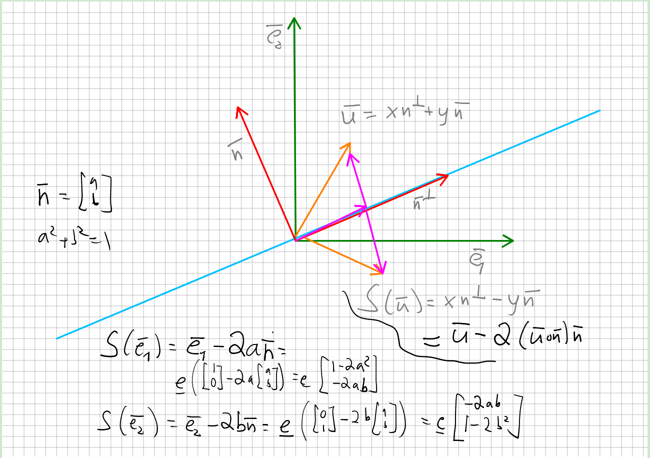


Exempel (Spegling)

Spegling i linjen genom origo, med normerad normalvektor $\overline{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ har avbildningsmatris

$\begin{pmatrix} 1-2a^2 & -2ab \\ -2ab & 1-2b^2 \end{pmatrix}$ som har determinant

$(1-2a^2)(1-2b^2) - 4a^2b^2 = 1 - 2b^2 - 2a^2 = 1 - 2 = -1.$



Exempel

Hadamardmatrisen H_m definieras rekursivt av $H_0 = (1)$ och

$$H_m = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} H_{m-1} & H_{m-1} \\ H_{m-1} & -H_{m-1} \end{pmatrix}$$

så

$$H_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \; H_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

osv. Vi har att H_m är en ortonormalmatris, ty

$$\begin{aligned} H_m^t H_m &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} H_{m-1} & H_{m-1} \\ H_{m-1} & -H_{m-1} \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} H_{m-1} & H_{m-1} \\ H_{m-1} & -H_{m-1} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} H_{m-1}^t & H_{m-1}^t \\ H_{m-1}^t & -H_{m-1}^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{m-1} & H_{m-1} \\ H_{m-1} & -H_{m-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exempel (forts)

Tag vektorn $\overline{\mathrm{u}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$. Den har längd $\sqrt{10}$, och dess Hadamardtransform är

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

som också har längd $\sqrt{10}$.

Sats

Låt F vara en isometri på ett ändligt dimensionellt euklidiskt rum, och låt avbildningsmatrisen m.a.p. någon ordnad ON-bas vara M. Då är $\det(M) = 1$ eller $\det(M) = -1$.

Bevis.

Eftersom $M^t M = I$ så är

$$1 = \det(I) = \det(M^t M) = \det(M^t)\det(M) = \det(M)\det(M) = \det(M)^2$$

□

Definition

Om $\det(M) = +1$ så säger vi att F är ordningsbevarande, annars att den är ordningsreverserande. Detta beror inte på val av ON-bas.

Sats

En isometri i planet är antingen en vridning (om avbildningsmatrisen har determinant 1) eller en spegling (om avbildningsmatrisen ha determinant -1).

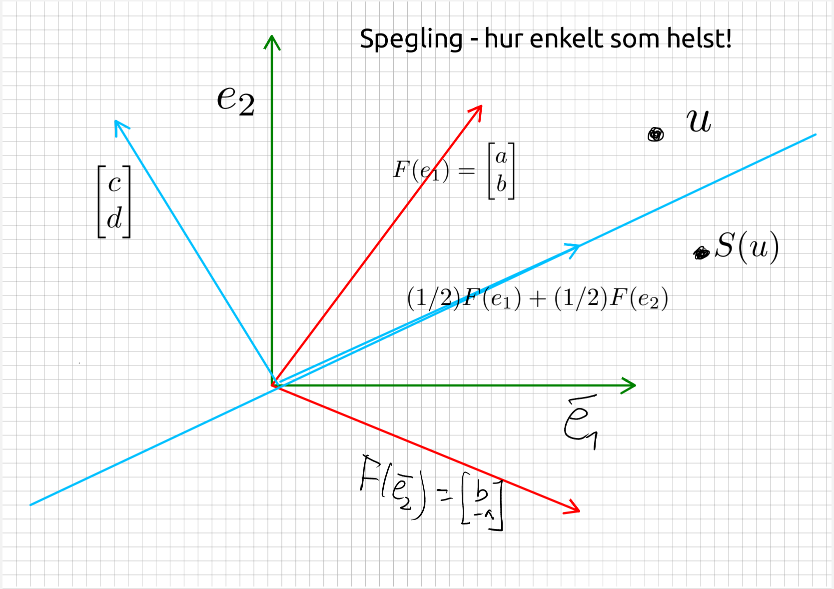
Bevis.

Låt $\underline{e}$ vara en ordnad ON-bas för planet. En isometri tar en ON-bas till en ON-bas, så $\left(F(\bar{e}_1) \quad F(\bar{e}_2)\right)$ är en ON-bas. Låt $F(\bar{e}_1) = \underline{e}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ med $a^2 + b^2 = 1$. Då är antingen

1. $F(\bar{e}_2) = \underline{e}\begin{bmatrix} -b \\ a \end{bmatrix}$ och avbildningsmatrisen är $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ dvs ortogonal med determinant 1, och vi kan välja θ så att $a = \cos(\theta)$, $b = \sin(\theta)$ och skriva avbildningsmatrisen som $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$
2. $F(\bar{e}_2) = \underline{e}\begin{bmatrix} b \\ -a \end{bmatrix}$ och avbildningsmatrisen är $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ dvs ortogonal med determinant -1. Sätt $a = 1 - 2c^2, b = -2cd$ så blir detta $\begin{pmatrix} 1-2c^2 & -2cd \\ -2cd & 2c^2-1 \end{pmatrix}$ vilket är matris för spegling om $2c^2 - 1 = 1 - 2d^2$ dvs om $2c^2 + 2d^2 = 2$, dvs $\underline{e}\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ är en vektor av längd 1 som är normalvektor till den linje genom origo vi speglar i.

□

Spegling - hur enkelt som helst!



Exempel

Vad för slags avbildning har avbildningsmatris

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}?$$

1. Kolonnerna är ortogonala, har längd $\sqrt{5}$
2. $N = \frac{1}{\sqrt{5}} M = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ är alltså ON
3. $\det(N) = 1$
4. Så vriding med α radianer, där $\cos(\alpha) = \frac{-1}{\sqrt{5}}$, $\sin(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Andra kvadranten, så $\alpha = \arccos(\frac{-1}{\sqrt{5}})$.
5. $M = \sqrt{5}N = (\sqrt{5}I)N$ dvs matrisen för vridningen, följt av likformig skalning med en faktor $\sqrt{5}$.

Exempel

Vad för slags avbildning har avbildningsmatris

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}?$$

1. Kolonnerna är ortogonala, har längd $\sqrt{5}$
2. $N = \frac{1}{\sqrt{5}} M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ är alltså ON
3. $\det(N) = -1$
4. Så spegling i linjen genom origo med riktningsvektor
$$\frac{1}{2}F(\bar{e}_1) + \frac{1}{2}F(\bar{e}_2) = \frac{1}{2\sqrt{5}}\underline{e}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2\sqrt{5}}\underline{e}\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$
5. $M = \sqrt{5}N = (\sqrt{5}I)N$ dvs matrisen för speglingen, följt av likformig skalning med en faktor $\sqrt{5}$.

Sats

Låt F vara en linjär isometri i rummet, och låt M vara dess avbildningsmatris m.a.p. den ordnade ON-basen $\underline{e}$.

1. *Om $\det(M) = 1$ så finns en unik linje genom origo ℓ så att $F(\overline{v}) = \overline{v}$ omm $\overline{v} \in \ell$. Avbildningen F är vridning runt axeln ℓ.*
2. *Om $\det(M) = -1$ så finns en unik linje genom origo ℓ så att $F(\overline{v}) = -\overline{v}$ omm $\overline{v} \in \ell$. Låt Π vara planet genom origo med ℓ som normallinje. Då gäller att $F(\Pi) = \Pi$, så vi kan studera restriktionen av F till Π, vilket i detta plan blir en vridning.*
    1. *Om denna vridning är trivial, dvs vi vrider med noll radianer, allt i planet ligger fixt, så är F en ren spegling i Π.*
    2. *Om vridningen i planet är vridning med θ radianer moturs (sett från "ovansidan" av planet med avsende på den valda normalvektorn) så är F en "vridspegling", dvs en sammansättning av en vridning runt ℓ följt av en spegling i Π.*

Bevis av klassifikation av isometrier i rummet

Antag att $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ är isometrisk. Låt $A_{\underline{\mathbf{e}}}$ vara F:s avbildningsmatris i standardbasen. Precis som i det 2-dimensionella fallet är $A_{\underline{\mathbf{e}}}$ ortonormal och $\det A_{\underline{\mathbf{e}}} = 1$ eller -1. Vi börjar med fallet $\det A_{\underline{\mathbf{e}}} = -1$ och vi skall visa att det då finns vektorer $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ sådana att $F(\mathbf{u}) = -\mathbf{u}$. För ett sådant $\mathbf{u} = \underline{\mathbf{e}}\,X$ gäller

$$F(\mathbf{u}) = \underline{\mathbf{e}}\,A_{\underline{\mathbf{e}}}X = -\underline{\mathbf{e}}\,X \iff A_{\underline{\mathbf{e}}}X + X = (A_{\underline{\mathbf{e}}} + I)X = 0,$$

d v s vi skall visa att detta homogena kvadratiska system har en icke-trivial lösning. Sats 4.7.1 ger att detta är ekvivalent med att $\det(A_{\underline{\mathbf{e}}} + I) = 0$. Då $A_{\underline{\mathbf{e}}}$ är ortonormal gäller att

$$A_{\underline{\mathbf{e}}}{}^t(A_{\underline{\mathbf{e}}} + I) = A_{\underline{\mathbf{e}}}{}^t A_{\underline{\mathbf{e}}} + A_{\underline{\mathbf{e}}}{}^t = I + A_{\underline{\mathbf{e}}}{}^t = A_{\underline{\mathbf{e}}}{}^t + I = (A_{\underline{\mathbf{e}}} + I)^t.$$

Beräkning av determinanten för ytterleden ovan ger

$$\left.\begin{aligned} \det\left(A_{\underline{\mathbf{e}}}{}^t(A_{\underline{\mathbf{e}}} + I)\right) &= \det A_{\underline{\mathbf{e}}}{}^t \cdot \det(A_{\underline{\mathbf{e}}} + I) = -\det(A_{\underline{\mathbf{e}}} + I) \\ &= \det\left((A_{\underline{\mathbf{e}}} + I)^t\right) = \det(A_{\underline{\mathbf{e}}} + I) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \det(A_{\underline{\mathbf{e}}} + I) = 0.$$

Följaktligen finns $\mathbf{u}$ så att $F(\mathbf{u}) = -\mathbf{u}$. Sätt $\mathbf{f}_1 = \hat{\mathbf{u}}$ och fyll ut till en höger ON-bas för $\mathbb{R}^3$.

Eftersom $\mathbf{f}_1 \perp \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$, skalärprodukter bevaras enligt sats 7.7.2 och då koordinater i ON-bas är skalärprodukter så följer det att $F(\mathbf{f}_2)$ och $F(\mathbf{f}_3)$ har $\mathbf{f}_1$-komponent $=0$. Vi skall nu skriva upp F:s avbildningsmatris i basen $\underline{\mathbf{f}}$. Då $\underline{\mathbf{f}}$ är en ON-bas är också $A_{\underline{\mathbf{f}}}$ ortonormal och dess kolonner därmed ett ON-system. Vi har hittills visat att

$$F(\mathbf{f}_1) = -\mathbf{f}_1 = \underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F(\mathbf{f}_2) = \underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix} \perp F(\mathbf{f}_3) = \underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} 0 \\ \pm b \\ \mp a \end{pmatrix} \Longrightarrow A_{\underline{\mathbf{f}}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & a & \pm b \\ 0 & b & \mp a \end{pmatrix}.$$

Eftersom F är isometrisk är också $F(\mathbf{f}_2)$ och $F(\mathbf{f}_3)$ enhetsvektorer. Därmed är $a^2 + b^2 = 1$. Då finns θ så att $a = \cos\theta$ och $b = \sin\theta$. För att kunna avgöra tecknen i sista kolonnen beräknar vi determinanten som ju skall vara -1. Vi får

$$\det A_{\underline{\mathbf{f}}} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \pm\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \mp\cos\theta \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \cos\theta & \pm\sin\theta \\ \sin\theta & \mp\cos\theta \end{vmatrix} = -(\mp(\cos^2\theta + \sin^2\theta)) = -1 \Longrightarrow$$

Bevis av klassifikation av isometrier i rummet

$$\Longrightarrow A_{\underline{\mathbf{f}}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{B_{\underline{\mathbf{f}}}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{C_{\underline{\mathbf{f}}}}.$$

Låt G och H vara de linjära avbildningar som har $B_{\underline{\mathbf{f}}}$ resp $C_{\underline{\mathbf{f}}}$ som avbildningsmatriser i basen $\underline{\mathbf{f}}$. Enligt exempel 7.3.7 är H en vridning. Vi skall visa att G är en spegling i $\mathbf{f}_1$:s normalplan. Vi avläser i matrisen att

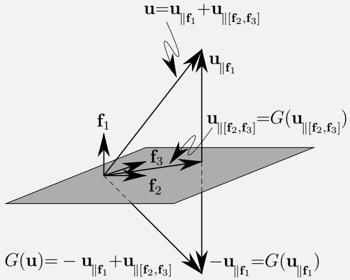
$$G(\mathbf{f}_1) = -\mathbf{f}_1, \quad G(\mathbf{f}_2) = \mathbf{f}_2 \quad \text{och} \quad G(\mathbf{f}_3) = \mathbf{f}_3.$$

Av detta följer det att om $\mathbf{u} \parallel \mathbf{f}_1$ så är $G(\mathbf{u}) = -\mathbf{u}$ och om $\mathbf{u} \in [\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3]$ så är $G(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$. Delar vi upp $\mathbf{u}$ i komponenter $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\|\mathbf{f}_1} + \mathbf{u}_{\|[\mathbf{f}_2,\mathbf{f}_3]}$ kan vi illustrera verkan av G enligt figur 7.6. Insättning i G ger

$$\begin{aligned} G(\mathbf{u}) &= G\left(\mathbf{u}_{\|\mathbf{f}_1} + \mathbf{u}_{\|[\mathbf{f}_2,\mathbf{f}_3]}\right) = G\left(\mathbf{u}_{\|\mathbf{f}_1}\right) + G\left(\mathbf{u}_{\|[\mathbf{f}_2,\mathbf{f}_3]}\right) = -\mathbf{u}_{\|\mathbf{f}_1} + \mathbf{u}_{\|[\mathbf{f}_2,\mathbf{f}_3]} = \\ &= \left(-\mathbf{u}_{\|\mathbf{f}_1} + \mathbf{u}_{\|[\mathbf{f}_2,\mathbf{f}_3]}\right) + \mathbf{u}_{\|\mathbf{f}_1} - \mathbf{u}_{\|\mathbf{f}_1} = \left(\mathbf{u}_{\|\mathbf{f}_1} + \mathbf{u}_{\|[\mathbf{f}_2,\mathbf{f}_3]}\right) - 2\mathbf{u}_{\|\mathbf{f}_1} = \\ &= \mathbf{u} - 2\mathbf{u}_{\|\mathbf{f}_1}, \end{aligned}$$

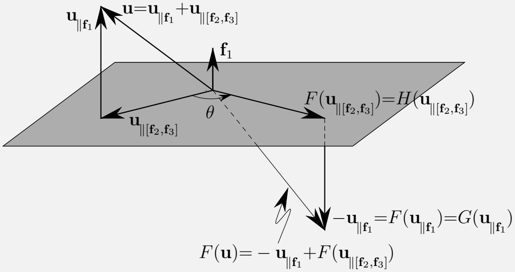
d v s G är en spegling i planet med $\mathbf{f}_1$ som normal (se exempel 7.2.4).

Bevis av klassifikation av isometrier i rummet



Figur 7.6: Spegling i normalplanet till $\mathbf{f}_1$.

Den sammansatta avbildningen $F = G \circ H$ kan illustreras med nedanstående figur.



Bevis av klassifikation av isometrier i rummet

Antag att $\det A_{\underline{\mathbf{e}}} = 1$. Då gäller att $\det(-A_{\underline{\mathbf{e}}}) = (-1)^3 \det A_{\underline{\mathbf{e}}} = -1$, d v s $-A_{\underline{\mathbf{e}}}$ är matris för en vridspegling. Byte till höger ON-bas $\underline{\mathbf{f}}$ med $\mathbf{f}_1$ parallell med vridningsaxeln ger då enligt ovan att

$$
\begin{aligned}
-A_{\underline{\mathbf{f}}} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \iff \\
\iff A_{\underline{\mathbf{f}}} &= -\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta+\pi) & -\sin(\theta+\pi) \\ 0 & \sin(\theta+\pi) & \cos(\theta+\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

vilket enligt tidigare resonemang är matrisen för en vridning vinkeln α moturs kring $\mathbf{f}_1$.

Exempel

Vad är det för avbildning som (map någon ON-bas) har avbildningsmatris

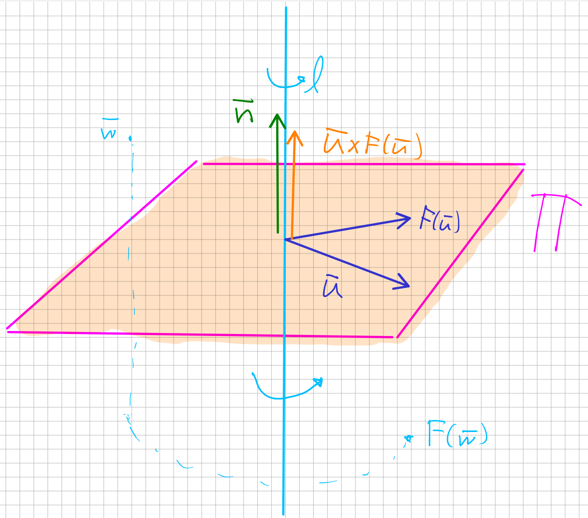
$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}?$$

1. $M^t M = I$, så isometri
2. $\det(M) = -1$ så vridspegling eller spegling
3. $MX = -X$ kan skrivas $(M+I)X = 0$, nollrumm till $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ är $\mathrm{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$
4. Så linjen ℓ är $\mathrm{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$ och planet Π är $x - 2y = 0$.

Exempel (forts)

5. Ta vektor av längd ett i planet, tex $\overline{\mathrm{u}} = \underline{\mathrm{e}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
6. $F(\overline{\mathrm{u}}) = \underline{\mathrm{e}} M \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{\mathrm{e}} \begin{bmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} = \overline{\mathrm{v}}$ har också längd ett, så vi mäter vinkeln mellan $\overline{\mathrm{u}}$ och $\overline{\mathrm{v}}$ genom $\cos(\alpha) = \overline{\mathrm{u}} \cdot \overline{\mathrm{v}} = 2/3$
7. Så avbildningen är en vridning med $\arccos(2/3)$ runt ℓ, följt av en spegling i Π.
8. $$\overline{\mathrm{u}} \times F(\overline{\mathrm{u}}) = \underline{\mathrm{e}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \underline{\mathrm{e}} \begin{bmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} = \underline{\mathrm{e}} \begin{bmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

   så vridningen sker *moturs* sett från spetsen av $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$


ℓ
$\bar{n}$
$\bar{u} \times F(\bar{u})$
$\bar{w}$
$F(\bar{u})$
Π
$\bar{u}$
$F(\bar{w})$

Definition

Låt E vara ett euklidiskt rum, och $F : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ vara en linjär avbildning som uppfyller att

$$(F(\overline{\mathrm{u}})|\overline{\mathrm{v}}) = (\overline{\mathrm{u}}|F(\overline{\mathrm{v}})) \qquad \text{för alla } \overline{\mathrm{u}}, \overline{\mathrm{v}} \in \mathrm{E}.$$

Då sägs F vara en *symmetrisk* avbildning.

Exempel

Ortogonala projektioner är symmetriska: låt $\underline{\mathrm{e}} = \begin{pmatrix}\overline{\mathrm{e}}_1 & \cdots & \overline{\mathrm{e}}_n\end{pmatrix}$ vara en ON-bas för E och låt U vara delrummet spännt av de m första basvektorerna. Låt P vara ortogonal projektion på U, då är

$$\left(P(\sum_{j=1}^{n} c_j\overline{\mathrm{e}}_j) \middle| \sum_{k=1}^{n} d_k\overline{\mathrm{e}}_k\right) = \left(\sum_{j=1}^{m} c_j\overline{\mathrm{e}}_j \middle| \sum_{k=1}^{n} d_k\overline{\mathrm{e}}_k\right) = \sum_{j=1}^{m} c_j d_j =$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n} c_j\overline{\mathrm{e}}_j \middle| \sum_{k=1}^{m} d_k\overline{\mathrm{e}}_k\right) = \left(\sum_{j=1}^{n} c_j\overline{\mathrm{e}}_j \middle| P(\sum_{k=1}^{n} d_k\overline{\mathrm{e}}_k)\right)$$

Sats

Låt E vara ett euklidiskt rum, och $F : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ vara en linjär avbildning med avbildningsmatris A m.a.p. ON-basen $\underline{\mathrm{e}}$. Då är F symmetrisk omm $A = A^t$.

Bevis.

Om $A^t = A$ så är

$$(F(\overline{\mathrm{u}})|\overline{\mathrm{v}}) = (\underline{\mathrm{e}}AX|\underline{\mathrm{e}}Y) = (AX)^t Y = X^t A^t Y = X^t AY = (\underline{\mathrm{e}}X|\underline{\mathrm{e}}AY) = (\overline{\mathrm{u}}|F(\overline{\mathrm{v}}))$$

Omvänt, om $(F(\overline{\mathrm{u}})|\overline{\mathrm{v}}) = (\overline{\mathrm{u}}|F(\overline{\mathrm{v}}))$ gäller för alla $\overline{\mathrm{u}}, \overline{\mathrm{v}}$ så gäller också $X^t A^t Y = X^t AY$ för alla X, Y; genom att välja X, Y som olika basvektorer till $\mathbb{R}^n$ fås att $A^t = A$. $\square$

Exempel

Vridning 180 grader runt origo har matris

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

och avbildningen är alltså symmetrisk.
En godtycklig vridning har matris

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

med transponat

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

De är lika omm $\sin(\alpha) = 0$, dvs om $\alpha \in \{\, n\pi \mid n \in \mathbb{Z} \,\}$.

Exempel

Speglingen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

är symmetrisk.

Sats

Varje spegling är symmetrisk.

Bevis.

Spegling i delrummet U definieras som

$$S(\overline{u}) = \overline{u} - 2P(\overline{u}),$$

där P är ortogonalprojektion på $U^\perp$. Då blir

$$(S(\overline{u})|\overline{v}) = (\overline{u} - 2P(\overline{u})|\overline{v}) = (\overline{u}|\overline{v}) - 2\,(P(\overline{u})|\overline{v}) = (\overline{u}|\overline{v}) - 2\,(\overline{u}|P(\overline{v})) = (\overline{u}|\overline{v} - 2P(\overline{v}) = (\overline{u}|S(\overline{v}))$$

eftersom P är symmetrisk. $\square$

Definition

En kvadratisk matris A är *antisymmetrisk* om $A^t = -A$, dvs $A = (a_{ij})$ är antisymmetrisk omm $a_{ij} = -a_{ji}$ för alla i, j.

Exempel

Matrisen

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Sats

Bara nollmatrisen är både symmetrisk och antisymmetrisk.

Bevis.

$a_{ij} = a_{ji} = -a_{ji}$. $\square$

Sats

Varje kvadratisk matris M kan unikt skrivas

$$M = S + A$$

med S symmetrisk, A antisymmetrisk.

Bevis.

Existens: sätt $S = (M + M^T)/2$, $A = (M - M^t)/2$.
Unikhet: om

$$M = S_1 + A_1 = S_2 + A_2$$

så har vi att

$$S_1 - S_2 = A_2 - A_1$$

vilket är både symmetriskt och antisymmetriskt, alltså nollmatrisen. □

Jan Snellman

TEKNISKA HÖGSKOLAN
LINKÖPINGS UNIVERSITET

Exempel

Vi delar upp matrisen

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}\right) +$$

$$\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 4 & 6 & 9 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$