TATA24 Linjär Algebra, Fö 6

Allmänna vektorrum

Jan Snellman[1]

[1] Matematiska Institutionen
Linköpings Universitet

Linköping, HT 2022

Detta dokument återfinns på kurshemsidan `http://courses.mai.liu.se/GU/TATA24/`

Jan Snellman

TEKNISKA HÖGSKOLAN
LINKÖPINGS UNIVERSITET

Översikt av dagens föreläsning:

Översikt av dagens föreläsning:

Översikt av dagens föreläsning:

Definition 5.2.1. En icke-tom mängd $\mathbb{V}$ säges vara ett *vektorrum över de reella talen* om följande gäller:

I. Det finns i $\mathbb{V}$ en operation kallad *addition*, betecknad $+$ sådan att

$$\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{V} \Longrightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbb{V}.$$

För $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{V}$ har denna addition egenskaperna

ADD 1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ *(Kommutativa lagen)*

ADD 2. $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$ *(Associativ lag)*

ADD 3. I $\mathbb{V}$ finns ett nollelement, $\mathbf{0}$ så att $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$ *(Neutralt element)*

ADD 4. Till varje $\mathbf{u} \in \mathbb{V}$ finns ett element $-\mathbf{u}$ så att $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ *(Additiv invers)*

II. Det finns i $\mathbb{V}$ en operation kallad *multiplikation med tal*, betecknad $\cdot$ sådan att

$$\lambda \in \mathbb{R},\ \mathbf{u} \in \mathbb{V} \Longrightarrow \lambda \cdot \mathbf{u} \in \mathbb{V}.$$

För $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ och $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{V}$ har denna multiplikation egenskaperna

MULT 1. $1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$ *(Neutralt tal)*

MULT 2. $\lambda \cdot (\mu \cdot \mathbf{u}) = (\lambda\mu) \cdot \mathbf{u}$ *(Associativ lag)*

MULT 3. $(\lambda + \mu) \cdot \mathbf{u} = \lambda \cdot \mathbf{u} + \mu \cdot \mathbf{u}$ *(Distributiv lag)*

MULT 4. $\lambda \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda \cdot \mathbf{u} + \lambda \cdot \mathbf{v}$ *(Distributiv lag)*

Sats

1. $\overline{0}$ *är unik*
2. $-\overline{u}$ *är unik*
3. $0\overline{u} = \overline{0}$
4. $-\overline{u} = (-1)\overline{u}$

Bevis.

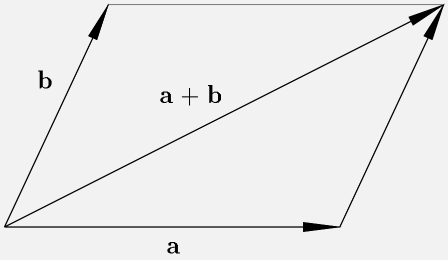
1. Om $\overline{0'} + \overline{v} = \overline{v}$ för alla $\overline{v}$ så kan vi speciellt ta $\overline{v} = \overline{0}$ och får $\overline{0} + \overline{0} = \overline{0'}$ men också $\overline{0} + \overline{0} = \overline{0}$, varför $\overline{0'} = \overline{0}$.
2. Om $\overline{u} + \overline{v} = \overline{0}$ så $\overline{u} + (-\overline{u}) + \overline{v} = \overline{v}$, men det gäller också att $\overline{u} + \overline{v} + (-\overline{u}) = -\overline{u}$.
3. $\overline{u} = (1+0)\overline{u} = 1\overline{u} + 0\overline{u} = \overline{u} + 0\overline{u}$. Alltså är $0\overline{u}$ en nollvektor; enligt (1) är den då lika med den unika nollvektorn $\overline{0}$.
4. $(-1)\overline{u} + \overline{u} = (-1)\overline{u} + 1\overline{u} = (-1+1)\overline{u} = 0\overline{u} = \overline{0}$, så $(-1)\overline{u} = -\overline{u}$ enligt (2).

$\square$

(b) Låt $\mathbb{G}^2$ vara mängden av alla vektorer i planet och $\mathbb{G}^3$ mängden av alla vektorer i rummet. Adderar vi två vektorer eller multiplicerar en vektor med ett reellt tal, får vi en ny vektor av samma typ, d v s

$$\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{G}^2 \Longrightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbb{G}^2, \qquad \lambda \in \mathbb{R},\ \mathbf{u} \in \mathbb{G}^2 \Longrightarrow \lambda\mathbf{u} \in \mathbb{G}^2,$$
$$\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{G}^3 \Longrightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbb{G}^3, \qquad \lambda \in \mathbb{R},\ \mathbf{u} \in \mathbb{G}^3 \Longrightarrow \lambda\mathbf{u} \in \mathbb{G}^3.$$

Att vektoraddition och multiplikation av vektor med reellt tal uppfyller räknelagarna i definitionen är, som tidigare nämnts, innehållet i sats 2.2.5. Därmed är både $\mathbb{G}^2$ och $\mathbb{G}^3$ vektorrum.



Exempel

Låt n vara ett positive heltal. Vi betecknar med $\mathbb{R}^n$ mängden av alla (reella) kolonnmatriser av längd n. Dessa bildar ett vektorrum under komponentvis addition och skalning.
För $n = 5$ har vi till exempel

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1/2 \\ 3 \\ 0.73 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 9/2 \\ 4 \\ 1.73 \end{bmatrix}$$

$$100 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1/2 \\ 3 \\ 0.73 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ -100 \\ 50 \\ 300 \\ 73 \end{bmatrix}$$

Anmärkning

Vi inför konventionen "runda paranteser transponerar" så den sista vektorn kan istället skrivas $(100, -100, 50, 300, 73)$.

(c) Låt $\mathbb{M}_{rk}$ vara mängden av alla $r \times k$-matriser med reella element. Adderar vi två $r \times k$-matrisereller multiplicerar en $r \times k$-matris med ett reellt tal får vi en $r \times k$-matris, d v s

$$A, B \in \mathbb{M}_{rk} \Longrightarrow A + B \in \mathbb{M}_{rk}, \qquad \lambda \in \mathbb{R},\ A \in \mathbb{M}_{rk} \Longrightarrow \lambda A \in \mathbb{M}_{rk}.$$

Precis som för $\mathbb{G}^2$ och $\mathbb{G}^3$ följer det av en tidigare sats, sats 3.2.9, att matrisaddition och multiplikation av matris med reellt tal uppfyller räknelagarna i definitionen. Därmed är $\mathbb{M}_{rk}$ ett vektorrum.

Om $r = 3$, $k = 4$ så har vi till exempel att

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Exempel

Låt V vara vektorrummet av 64×64-matriser. Genom att tolka element a_{ij} som ett gråskalevärde för en bildpunkt så kan matriser tolkas som rastrerade gråskalebilder:

Exempel

Om A är en $r \times k$-matris, och $s \geq r$, $t \geq k$, så kan A ses som en $s \times t$-matris genom att fylla ut med nollor. På detta sätt kan (reella) matriser av olika format adderas, och mängden av alla matriser blir ett vektorrum, om vi identifierar matriser som skiljer sig enbart på inbäddningsnollor.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 4 \\ 8 & 10 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Notera att sådana matriser även kan multipliceras med varandra (men det tillhör inte vektorrumsstrukturen).

Exempel

Vi kan generalisera föregående till "oändliga matriser" med ändligt många nollskilja element i varje rad och kolonn (men vi tillåter oändligt mågna nollskilja element totalt, till skillnad från fåregående fall). Det blir ett vektorrum under komponentvis addition och skalning, och man kan forfarande multiplicera dem:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

Exempel

Vi kan studera "oändliga matriser" utan någon inskränkning, som tex

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

Dessa kan adderas och skalas, och bildar ett vektorrum. Det går inte att multiplicera dem, men vad gör det?

Exempel

Låt V vara mängden av alla reella följder $\overline{c} = (c_1, c_2, c_3, \dots)$ sådana att bara ändligt många $c_i \neq 0$. Summan av två sådana följder har återigen bara ändligt många nollskilja element; V är ett vektorrum.
Till exempel så

$$(2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, 0, 0 \dots) + (-2, 5, 1, 1, 1, 0, 0, 0 \dots) = (0, 8, 5, 6, 7, 7, 8, 9, 0, 0, \dots)$$

Exempel

Låt W vara mängden av alla reella följder $\overline{c} = (c_1, c_2, c_3, \dots)$, utan något villkor. Det är fortfarande ett vektorrum!

Jan Snellman

TEKNISKA HÖGSKOLAN
LINKÖPINGS UNIVERSITET

Exempel

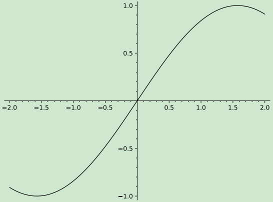
Låt $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ stå för mängden av alla funktioner

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

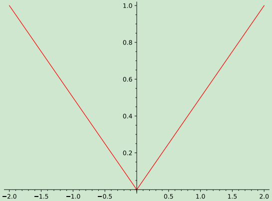
med

1. Addition given av $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
2. Skalning given av $(cf)(x) = cf(x)$
3. Nollvektorn av funktionen som är konstant lika med noll.

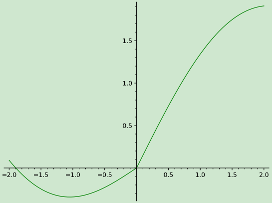
Då har vi ett vektorrum.



$+$



$=$



Exempel

Låt P stå för alla polynom i en variabel, dvs uttryck

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_i \in \mathbb{R}.$$

Vi kan addera och skala dessa, och det finns ett "nollpolynom":

$$\begin{aligned} (3x^2 - 17x + 11) + 54x^4 - 2x + 1 &= 54x^4 + 3x^2 - 19x + 12 \\ 10(3x^2 - 17x + 11) &= 30x^2 - 170x + 110 \\ (3x^2 - 17x + 11) + 0 &= 3x^2 - 17x + 11 \end{aligned}$$

Definition

Låt V vara ett vektorrum, med addition $+$, skalning $\cdot$, och nollvektor $\overline{0}$. En icke-tom delmängd $U \subseteq V$ är ett *underrum* (eller *delrum*) om U blir ett vektorrum med det ärvda operationerna $+$, $\cdot$. Vi skriver $U \leq V$.

Sats

U är ett underrum omm det är slutet under addition och skalning, dvs

1. $\overline{a}, \overline{b} \in U \implies \overline{a} + \overline{b} \in U$
2. $\overline{a} \in U, c \in \mathbb{R} \implies c\overline{a} \in U,$
3. $\overline{0} \in U.$

Det sista villkoret följer av det andra.

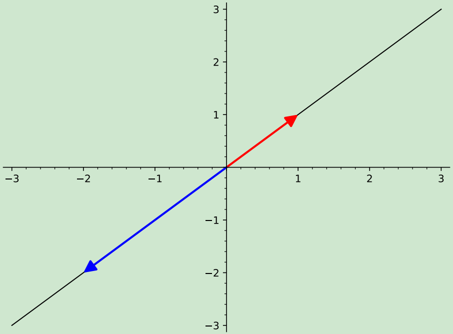
Bevis.

Ett underrum är ett vektorrum och per definition slutet under addition och skalning, samt innehåller en unik nollvektor.
Omvänt, en sådan delmäng är ett vektorrum eftersom de ärvda operationerna uppfyller räknereglerna för ett vektorrum.
Om U är slutet under skalning, tag något $\overline{u} \in U$. Då $0\overline{u} = \overline{0} \in U$. □

Exempel

Underrummen till G^2, vektorer i planet är

1. Hela G^2,
2. $\{\overline{0}\}$
3. Linjer genom origo, dvs ortsvektorerna hörande till en sådan linje, dvs $\{c\overline{u}\}$ $c \in \mathbb{R}$ om $\overline{u}$ är riktningsvektor till sagda linje (av punkter).



Exempel

Bildar de $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ vars komponenter summerar till noll ett delrum?

1. Om (x, y, z) ligger i delmängden så är $x + y + z = 0$. För $c(x, y, z) = (cx, cy, cz)$ så gäller att $cx + cy + cz = c(x + y + z) = c * 0 = 0$, så (cx, cy, cz) ligger i delmängden.
2. Om (x, y, z) ligger i delmängden och (u, v, w) ligger i delmängden så är $(x, y, z) + (u, v, w) = (x + u, y + v, z + w)$ och $(x + u) + (y + v) + (z + w) = x + y + z + u + v + w = 0 + 0 = 0$, så $(x, y, z) + (u, v, w)$ ligger i delmängden.

Delmängden är sluten under skalning och addition, så den är ett delrum.

Exempel

Bildar de $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ vars komponenter summerar till ett ett delrum?

1. Om (x, y, z) ligger i delmängden så är $x + y + z = 1$. För $c(x, y, z) = (cx, cy, cz)$ så gäller att $cx + cy + cz = c(x + y + z) = c * 1 = c$, vilket inte är 1 om $c \neq 1$.
2. Om (x, y, z) ligger i delmängden och (u, v, w) ligger i delmängden så är $(x, y, z) + (u, v, w) = (x + u, y + v, z + w)$ och $(x + u) + (y + v) + (z + w) = x + y + z + u + v + w = 1 + 1 = 2$, så $(x, y, z) + (u, v, w)$ ligger inte delmängden.

Delmängden är varken sluten under skalning eller under addition, så den är inte ett delrum.

Exempel

Låt $U \subset \mathbb{R}^3$ bestå av de (x, y, z) så att första komponenten x är ett heltal. Är U ett delrum?

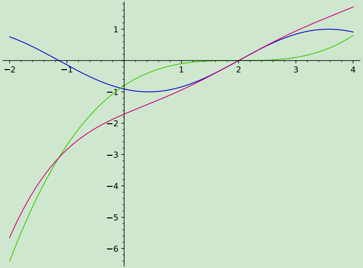
1. $(0, 0, 0)$ duger
2. Om $(x, y, z) \in U$ och $(u, v, w) \in U$ så x, u heltal så $x + u$ heltal, så $(x, y, z) + (u, v, w) \in U$.
3. Men $\frac{1}{2}(1, 1, 1) \notin U$ trots att $(1, 1, 1) \in U$.

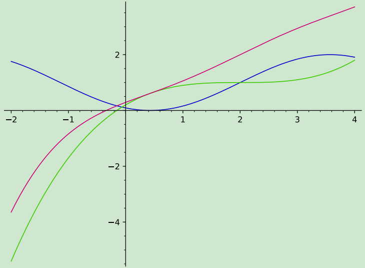
Exempel

Om $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ och $U = \{ f \in V \,|\, f(2) = 0 \}$ så är U ett underrum, ty

1. Om $f(2) = 0$, $g(2) = 0$ så är $(f + g)(2) = f(2) + g(2) + 0 + 0 = 0$
2. Om $f(2) = 0$, $c \in \mathbb{R}$ så är $(cf)(2) = cf(2) = c0 = 0$.

Däremot så är $\{ f \in V \,|\, f(2) = 1 \}$ inte ett delrum.





Exempel

Vi betecknar med P_n mängden av polynom av grad $\leq n$. Detta är ett underrum till P. Däremot så är inte mängden av polynom av grad $= n$ ett underrum, ty det är inte slutet under addition. Vi illustrerar i P_2:

$$(2x^2 + 3x - 7) + (-2x^2 + 3x + 10) = 0x^2 + 6x + 3$$

Vi använder konventionen att graden för nollpolynomet är $-\infty$, så det är med i varje P_n.

Exempel

Låt $V = \mathrm{M}_{33}$. Då bildar de övertriangulära matriserna däri ett delrum:

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix} \middle| a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R} \right\} \leq V.$$

Sats

Låt A vara en $m \times n$-matris. Lösningsmängden till det homogena ekvationssystemet

$$AX = 0$$

är ett underrum till R^n.

Bevis.

Kalla lösningsmängden V. Då $X \in V \iff AX = 0$.

1. $A0 = 0$, så $0 \in V$
2. Om $AX = 0$ så $A(cX) = c(AX) = c0 = 0$.
3. Om $AX_1 = 0$, $AX_2 = 0$, så är $A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2 = 0 + 0 = 0$ så $X_1 + X_2 \in V$.

$\square$

Definition

Låt V vara ett vektorrum, $U \leq V$ ett delrum, och $\overline{\mathrm{v}} \in V$ en vektor. Då kallas

$$U + \overline{\mathrm{v}} = \{ \overline{\mathrm{u}} + \overline{\mathrm{v}} | \overline{\mathrm{u}} \in U \}$$

för ett *translat* av U, eller för ett *affint delrum*

Sats

Låt A vara en $m \times n$-matris. Kalla lösningsmängden till det homogena ekvationssystemet

$$AX = 0$$

för U och lösningsmängden till

$$AX = B$$

för H. Låt $X_p \in H$ vara någon partikulärlösning till $AX = B$.

1. *$U \leq V$ är ett delrum,*
2. *$H = X_p + U$ är ett translat av U, alltså ett affint delrum.*

Exempel

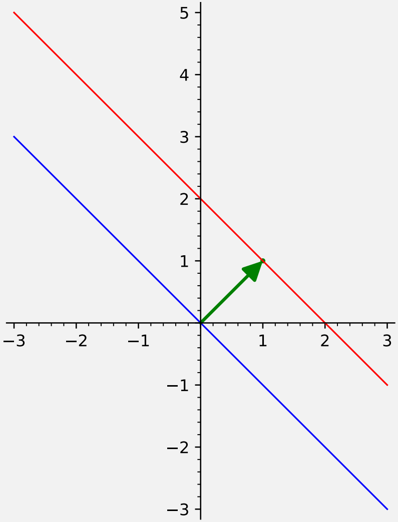
Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$, så matrisekvationen $AX = B$ är likvärdigt med ekvationssystemet $x + y = 2$. En partikulärlösning är $x = y = 1$.
Det homogena systemet blir $x + y = 0$, vilket har lösningsmängd

$$\left\{ t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$$

Detta är ett delrum till $\mathbb{R}^2$.
Det inhomogena systemet har lösningsmängd

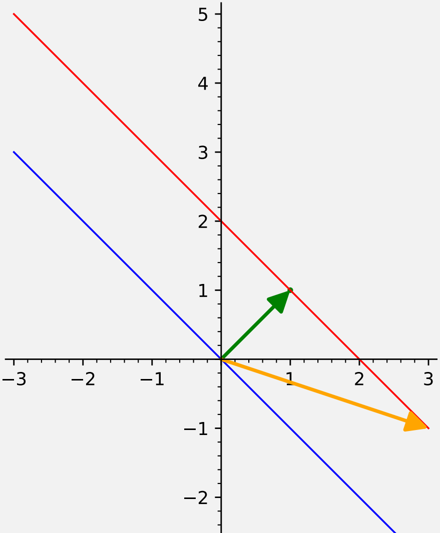
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\{ t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1-t \\ 1+t \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$$

Detta är translateringen av föregående delrum, så ett affint delrum.



Sats

Låt V vara ett vektorrum. Låt $H \subset V$. Om $H = \overline{\mathrm{v}} + U$ med $U \leq V$ delrum så gäller följande: tag vilket $\overline{\mathrm{h}} \in H$ som helst, och tag $\overline{\mathrm{w}} \in V$. Då $\overline{\mathrm{w}} \in H \iff \overline{\mathrm{w}} - \overline{\mathrm{h}} \in U$.
Så $H = \overline{\mathrm{h}} + U$.



Sats

Låt V vara ett vektorrum. Låt U_1, U_2 vara två delrum till V. Då är snittet (skärningen)

$$U \cap V = \{ \overline{\mathrm{w}} \in V | \overline{\mathrm{w}} \in U_1 \textit{ och } \overline{\mathrm{w}} \in U_2 \}$$

ett delrum till V.

Bevis.

1. $\overline{0} \in U$ och $\overline{0} \in U$, så $\overline{0} \in U \cap V$
2. Om $\overline{\mathrm{u}} \in U \cap V$ och $c \in \mathbb{R}$ så $c\overline{\mathrm{u}} \in U$, eftersom U delrum, och $c\overline{\mathrm{u}} \in V$, eftersom V delrum, så $c\overline{\mathrm{u}} \in U \cap V$.
3. Om $\overline{\mathrm{u}}, \overline{\mathrm{v}} \in U \cap V$ så $\overline{\mathrm{u}} + \overline{\mathrm{v}} \in U$ eftersom U delrum, och $\overline{\mathrm{u}} + \overline{\mathrm{v}} \in V$ eftersom V delrum, så $\overline{\mathrm{u}} + \overline{\mathrm{v}} \in U \cap V$.

$\square$

Exempel

Låt $U = \{ (x, y, z) | x + y + z = 0 \}$ och låt $V = \{ (x, y, z) | x + 2y + 2z = 0 \}$. Beräkna $U \cap V$.
Att ligga i $U \cap V$ är att uppfylla båda ekvationerna samtidigt, så vi löser systemet

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ x + 2y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

och får $z = t \in \mathbb{R}$, $y = -t$, $x = 0$.

Exempel

Bestäm skärningen av delrummen

$$U = \{\, s(1,1,1) + t(1,2,3) \,|\, s,t \in \mathbb{R} \,\}$$
$$V = \{\, (x,y,z) \,|\, x + 2y + 3z = 0 \,\}$$

Vi hittar en definierande ekvation för $(x,y,z) \in U$ genom att notera att systemet $s(1,1,1) + t(1,2,3) = (x,y,z)$ har matrisform

$$\begin{bmatrix} s & t & \\ 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & y \\ 1 & 3 & z \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & -x+y \\ 0 & 2 & -x+z \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & -x+y \\ 0 & 0 & x-2y+z \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2x-y \\ 0 & 1 & -x+y \\ 0 & 0 & x-2y+z \end{bmatrix}$$

dvs det är lösbart omm $x - 2y + z = 0$, vilket alltså är den definierande ekvationen. Vi kan nu snitta U och V genom att lösa ekvationssystemet

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

som har lösningsmängd

$$(x,y,z) = t(-2,-1/2,1), \quad t \in \mathbb{R}$$