TATA24 Linjär Algebra, Fö 13-14

Linjära avbildningar

Jan Snellman[1]

[1] Matematiska Institutionen
Linköpings Universitet

TEKNISKA HÖGSKOLAN
LINKÖPINGS UNIVERSITET

Linköping, HT 2022

Detta dokument återfinns på kurshemsidan `http://courses.mai.liu.se/GU/TATA24/`

Översikt av dagens föreläsning:

Översikt av dagens föreläsning:

Översikt av dagens föreläsning:

Översikt av dagens föreläsning:

Översikt av dagens föreläsning:

Ett vektorrum består av en mängd V, vars element kallas vektorer, samt

1. En utvald nollvektor $\overline{0}$
2. En skalningsfunktion, dvs en funktion

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times V &\to V \\ (c, \overline{\mathrm{v}}) &\mapsto c\overline{\mathrm{v}} \in V \end{aligned}$$

3. En addition

$$\begin{aligned} V \times V &\to V \\ (\overline{\mathrm{u}}, \overline{\mathrm{v}}) &\mapsto \overline{\mathrm{u}} + \overline{\mathrm{v}} \in V \end{aligned}$$

En *linjär avbildning* mellan två vektorrum är en avbildning (synonym för funktion) som bevarar nollvektorn, skalning, samt addition.

Definition

Låt $(U, \bar{0}_U, \cdot_U, +_U)$ och $(V, \bar{0}_V, \cdot_V, +_V)$ vara två vektorrum.
En funktion $F : U \to V$ är en *linjär avbildning* om

1. $F(\overline{0_{\mathrm{U}}}) = \bar{0}_V$.
2. $F(c\bar{\mathrm{u}}) = cF(\bar{\mathrm{u}})$ för alla $c \in \mathbb{R}$, $\bar{\mathrm{u}} \in U$. Notera att skalningen i VL sker i U, men i HL sker skalningen i V, med dess skalningsfunktion.
3. $F(\bar{\mathrm{u}}_1 +_U \bar{\mathrm{u}}_2) = F(\bar{\mathrm{u}}_1) +_V F(\bar{\mathrm{u}}_2)$.

Anmärkning

- Vi kommer hädanefter att låta $+$ stå för relevant vektoraddition, beroende på sammanhang.
- Egenskap (2) kallas för *homogenitet*
- Egenskap (3) kallas för *additivitet*

Sats

Låt U, V vara vektorrum, och $F : U \to V$ vara en funktion. Följande är likvärdiga:

1. *F bevarar skalning och addition,*
2. *F är linjär (dvs bevarar nollvektor, skalning, och addition),*
3. *F bevarar godtyckliga linjärkombinationer, dvs*

$$F\left(\sum_{j=1}^{m} c_j \bar{u}_j\right) = \sum_{j=1}^{m} c_j F(\bar{u}_j)$$

för alla $c_j \in \mathbb{R}$, $\bar{u}_j \in U$.

Bevis.

$(1) \implies (2)$:

$$F(\bar{0}) = F(0\bar{0}) = 0F(\bar{0}) = \bar{0}.$$

$(2) \implies (3)$: Induktion över m.

$(3) \implies (1)$: $F(c\bar{u}) = cF(\bar{u})$ följer genom att tillämpa (3) på linjärkombinationen $c\bar{u}$.

Additiviteten följer genom att tillämpa (3) på linjärkombinationen $1\bar{u}_1 + 1\bar{u}_2$. $\square$

Exempel

Funktionen

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$F(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x + y}$$

är homogen, ty

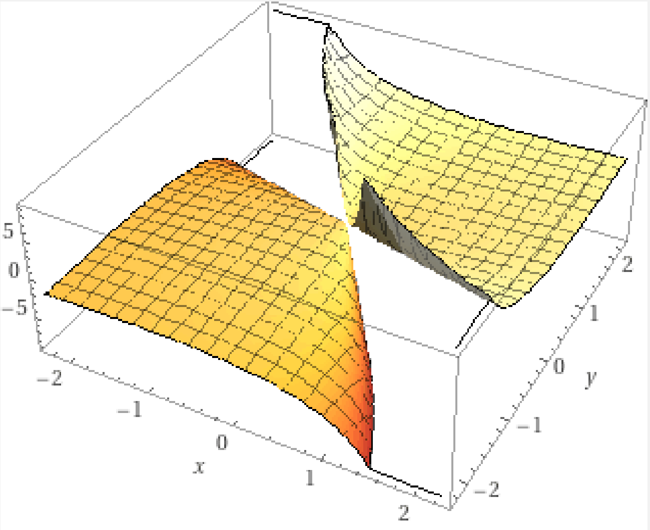
$$F(c(x, y)) = F(cx, cy) = \frac{(cx)^2 + (cy)^2}{cx + cy} = \frac{c^2x^2 + c^2y^2}{cx + cy} = c\frac{x^2 + y^2}{x + y} = cF(x, y)$$

men inte additiv; tex så är

$$F((1, 2)) + F((2, 1)) = \frac{1^2 + 2^2}{1 + 2} + \frac{2^2 + 1^2}{2 + 1} = 2\frac{5}{3}$$

men

$$F((1, 2) + (2, 1)) = F((3, 3)) = \frac{3^2 + 3^2}{3 + 3} = \frac{18}{6} = 3$$


5
0
−5
−2
−1
0
1
2
x
−2
−1
0
1
2
y

Exempel

Funktionen

$$F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$F(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 \\ y^2 + z^2 \\ x^2 + z^2 \end{bmatrix}$$

är varken additiv eller homogen, men den bevarar i alla fall nollvektorn!
Inte en linjär avbildning.

Exempel

Funktionen

$$F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$F(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x + y \\ y + z \\ x + z + 37 \end{bmatrix}$$

är varken additiv eller homogen, inte heller bevarar den nollvektorn.
Inte en linjär avbildning.

Exempel

Funktionen

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$F(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x+y \\ y+z \\ x+z \end{bmatrix}$$

är additiv, homogen, och den bevarar nollvektorn.
Den är en linjär avbildning!

Exempel

Avbildningen

$$A \mapsto \begin{bmatrix} A & \overline{0} \\ \overline{0} & A \end{bmatrix}$$

är en linjär avbildning från vektorrummet av $n \times n$-matriser till vektorrummet av $2n \times 2n$-matriser.

Exempel

Funktionen

$$F : \mathcal{P} \to \mathbb{R}^4$$
$$F(p(x)) = (p(2), p(5), p(6), p(8))$$

är en linjär avbildning från vektorrumet av polynom (i en variabel) till $\mathbb{R}^4$.

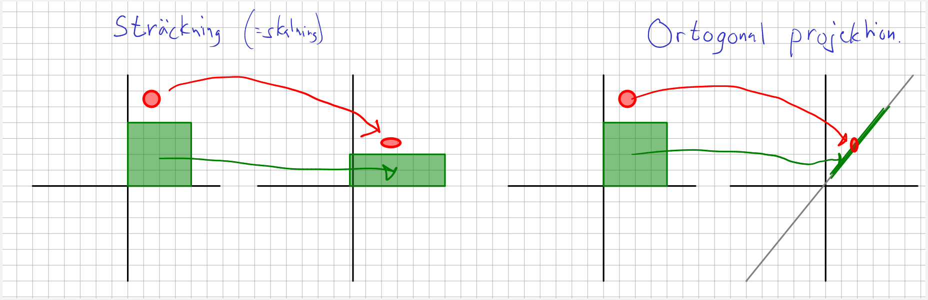
Exempel

$$F : \mathcal{P} \to \mathbb{R}^\infty$$
$$F(p(x)) = (p(0), p(1), p(2), p(3), \dots)$$

är en linjär avbildning från vektorrumet av polynom till vektorrummet av reella följder indexerade av de naturliga talen.

TEKNISKA HÖGSKOLAN
LINKÖPINGS UNIVERSITET

Sträckning och projektion är linjära



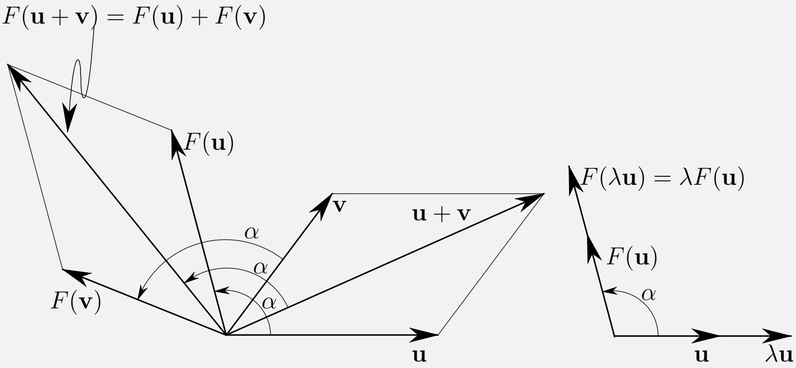
Exempel 7.2.4. De geometriska standardoperationerna sträckning, projektion, vridning och spegling är alla linjära avbildningar.

(i) Sträckning: $F(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Villkoren i definition 7.2.1 är samma som MULT 2 och MULT 4 i sats 2.2.5, sid 14.

(ii) Projektion: att $F(\mathbf{v}) = \dfrac{(\mathbf{v}|\mathbf{u})}{|\mathbf{u}|^2}\mathbf{u}$ är linjär följer ur definition av vektorrum, MULT 3 och MULT 2, då skalärprodukt med fix vektor är en linjär avbildning.

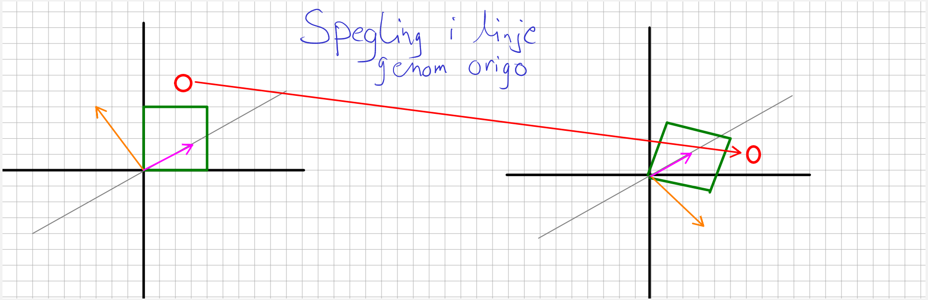
Vridning runt origo är linjär

(iii) Vridning: att en vridning i planet är en linjär avbildning motiveras av figur 7.1 nedan.



Figur 7.1: Vridning i planet är en linjär avbildning.

Spegling i en linje genom origo är linjär



(iv) Spegling: låt $S\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara spegling i ett plan med normal $\mathbf{n}$ och som går genom origo. Låt $P\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara ortogonalprojektion på $\mathbf{n}$, d v s $P(\mathbf{u}) = \mathbf{u}_{\|\mathbf{n}} = \dfrac{\mathbf{u} \bullet \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n}$. Då är

$$S(\mathbf{u}) = \mathbf{u} - 2P(\mathbf{u}) = I(\mathbf{u}) - 2P(\mathbf{u}).$$

Eftersom I och P är linjära så är $S = I - 2P$ linjär eftersom den är en linjärkombination av linjära avbildningar. Se också exempel 3.2.16, sid 64. ♦

Sats

Låt V vara ett vektorrum av dimension ett, och låt $\overline{\mathrm{v}} \in V$, $\overline{\mathrm{v}} \neq 0$. Låt U vara ett vektorrum, och låt $F : V \to U$ vara en linjär avbildning.
Då är F bestämd av dess värde på $\overline{\mathrm{v}}$.

Bevis.

Sätt $\overline{\mathrm{u}} = F(\overline{\mathrm{v}})$. Tag $\overline{\mathrm{w}} \in V$. Då är $\overline{\mathrm{w}} = c\overline{\mathrm{v}}$ för ett unikt $c \in R$. Vi får

$$F(\overline{\mathrm{w}}) = F(c\overline{\mathrm{v}}) = vF(\overline{\mathrm{v}}) = c\overline{\mathrm{u}}.$$

$\square$

Sats

Låt V vara ett vektorrum av dimension $n < \infty$, och låt $\underline{v} = [\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_n]$ vara en bas för V. Låt U vara ett vektorrum, och låt $F : V \to U$ vara en linjär avbildning.
Då är F bestämd av dess värde på baselementen $\overline{v}_j$.

Bevis.

Sätt $F(\overline{v}_j) = \overline{u}_j$ för $1 \leq j \leq n$. Tag $\overline{w} \in V$. Då är

$$\overline{w} = \sum_{j=1}^{n} c_j \overline{v}_j$$

för unika $c_j \in R$.
Sätt

$$\overline{u}_j = F(\overline{v}_j), \qquad 1 \leq j \leq n$$

Vi får

$$F(\overline{w}) = F\left(\sum_{j=1}^{n} c_j \overline{v}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} c_j F(\overline{v}_j) = \sum_{j=1}^{n} c_j \overline{u}_j$$

$\square$

Sats

Låt V vara ett ändligtdimensionellt vektorrum med bas $\underline{\mathrm{v}} = [\overline{\mathrm{v}}_1, \ldots, \overline{\mathrm{v}}_n]$, och låt U vara ett ändligtdimensionellt vektorrum med bas $\underline{\mathrm{u}} = [\overline{\mathrm{u}}_1, \ldots, \overline{\mathrm{u}}_m]$. Låt $F : V \to U$ vara en linjär avbildning. Låt, för varje $\overline{\mathrm{v}_\mathrm{j}}$,

$$F(\overline{\mathrm{v}}_j) =: \overline{\mathrm{h}}_j = \sum_{\ell=1}^{m} d_{\ell,j}\overline{\mathrm{u}}_\ell$$

Då gäller för ett allmänt

$$V \ni \overline{\mathrm{w}} = \sum_{k=1}^{n} c_k\overline{\mathrm{v}}_k$$

att

$$F(\overline{\mathrm{w}}) = F\left(\sum_{k=1}^{n} c_k\overline{\mathrm{v}}_k\right) = \sum_{k=1}^{n} c_k F(\overline{\mathrm{v}}_k) = \sum_{k=1}^{n} c_k\overline{\mathrm{h}}_k = \sum_{k=1}^{n} c_k \sum_{\ell=1}^{m} d_{\ell,k}\overline{\mathrm{u}}_\ell = \sum_{\ell=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n} d_{\ell,k}c_k\right)\overline{\mathrm{u}}_\ell$$

På matrisform blir detta

$$F(\underline{\mathrm{v}}C) = \underline{\mathrm{u}}DC$$

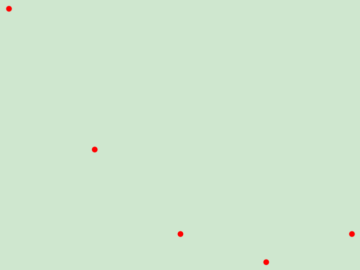
där C är koordinatvektorn för $\overline{\mathrm{w}}$ m.a.p. $\underline{\mathrm{v}}$, och C är matrisen vars j:e kolonn är koordinatvektorn för $F(\overline{\mathrm{v}}_j)$ m.a.p. basen $\underline{\mathrm{u}}$.

Exempel

Låt V vara vektorrummet av polynom av grad högst 2, och låt $U = \mathbb{R}^5$. Vi studerar den linjära avbildningen

$$F : V \to U$$
$$F(p(x)) = (p(-2), p(-1), p(0), p(1), p(2))$$

Som ett exempel, om $p(x) = (x-1)^2$ så är $F(p(x)) = (9, 4, 1, 0, 1)$



$(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 \quad \mapsto$

Exempel (forts)

Vi vill nu hitta avbildningsmatrisen för F m.a.p. baserna

$$\underline{v} = [1, x, x^2]$$

$$\underline{u} = \left[\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right]$$

Vi beräknar bilderna under F av basvektorerna i $\underline{v}$, och uttrycker resultatet i bas $\underline{u}$.

$$F(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{u} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Exempel (forts)

$$F(x) = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \underline{u} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$F(x^2) = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \underline{u} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Så avbildningsmatrisen blir

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Exempel (forts)

Enligt satsen så är då

$$F(a+bx+cx^2) = F\left([1,x,x^2]\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}\right)$$

$$= [\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix}] \begin{bmatrix}1 & -2 & 4\\1 & -1 & 1\\1 & 0 & 0\\1 & 1 & 1\\1 & 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1 & -2 & 4\\1 & -1 & 1\\1 & 0 & 0\\1 & 1 & 1\\1 & 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}a-2b+4c\\a-b+c\\a\\a+b+c\\a+2b+4c\end{bmatrix}$$

Vi kan se att det stämmer för $x=2$; om $p(x) = a+bx+cx^2$ så är $p(2) = a+2b+4c$.

Exempel

Låt A vara en $m \times n$-matris. Då är

$$X \mapsto AX$$

en linjär avbildning från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$, vars avbildningsmatris är... A.

Vi använder de naturliga baserna för $\mathbb{R}^m$ och $\mathbb{R}^n$, dvs j-e basvektorn är kolonnvektorn med etta i position j och nollor för övrigt.

Vår tidigare sats säger att A_j, kolonn j i A, är bilden av den j-e basvektorn, dvs

$$A_j = A \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ett konkret exempel:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vi antar att vi har en ON-bas $\underline{e} = [\bar{e}_1, \bar{e}_2]$ för planet E^2 och plockar fram avbildningsmatriserna för de linjära avbildningar $F : \mathrm{E}^2 \to \mathrm{E}^2$ som vi tittat på tidigare.
(Om man har en linjär avbildning $F : U \to V$ och $U = V$ så är det nästan alltid så att man använder samma bas för U och V, vi gör så nu).
Vi vill alltså hitta A, en 2×2-matris, så att

$$F\left(\underline{e}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \underline{e}A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Vi kan antingen

1. Hitta en formel för $F\left(\underline{e}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right)$ och skriva den på matrisform, eller
2. Räkna ut $F(\bar{e}_1)$ och $F(\bar{e}_2)$, och stoppa in (koordinatvektorerna för) dessa i kolonn ett och kolonn 2 i A.

Jan Snellman

TEKNISKA HÖGSKOLAN
LINKÖPINGS UNIVERSITET

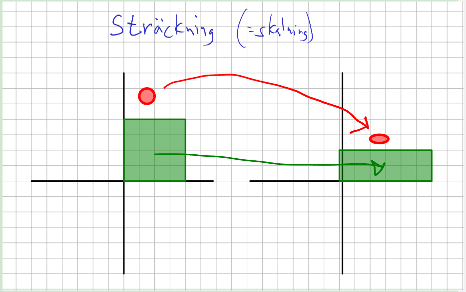
Exempel (Sträckning)

Sträckning med faktor c i x-led och faktor d i y-led gör att

$$\underline{e}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \mapsto \underline{e}\begin{bmatrix}cx\\dy\end{bmatrix}$$

Vi inser att

$$\begin{bmatrix}cx\\dy\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}c & 0\\0 & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$



Exempel (Projektion)

Låt F vara projektion på linjen genom origo med riktningsvektor $\bar{v} = \underline{e}\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ av längd ett. Då är

$$F(\bar{e}_1) = (\bar{e}_1|\bar{v})\,\bar{v} = c\underline{e}\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \underline{e}\begin{bmatrix} c^2 \\ cd \end{bmatrix}$$

$$F(\bar{e}_2) = (\bar{e}_2|\bar{v})\,\bar{v} = d\underline{e}\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \underline{e}\begin{bmatrix} cd \\ d^2 \end{bmatrix}$$

så avbildningsmatrisen blir

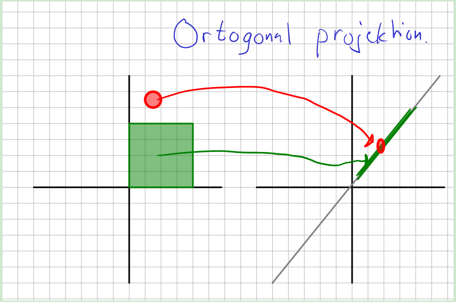
$$\begin{bmatrix} c^2 & cd \\ cd & d^2 \end{bmatrix}$$

I det konkreta exemplet till höger så är

$$\bar{v} = \underline{e}\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

så

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$



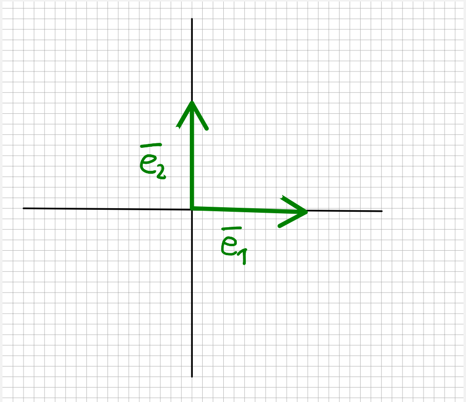
Exempel (Projektion)

Vi noterar två specialfall:
projektion på x-axeln har matris

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

medan projektion på y-axeln har matris

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Exempel (Identitetsavbildningen)

Givet ett vektorrum V vilket som helst så har vi *identitetsavbildningen* $I = I_V$ definierad av

$$I : V \to V$$
$$I(\overline{\mathrm{v}}) = \overline{\mathrm{v}}$$

Om V är ändligtdimensionell, med bas $\underline{\mathrm{e}} = [\overline{\mathrm{e}}_1, \dots, \overline{\mathrm{e}}_n]$ så

$$I(\overline{\mathrm{e}}_j) = \overline{\mathrm{e}}_j = \underline{\mathrm{e}} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

vilket blir den j-e kolonnen i avbildningsmatrisen, som alltså blir identitetsmatrisen.

Exempel (forts)

Vi påminner om att identitetsmatrisen (av storlek $n \times n$) är matrisen med ettor på diagonalen och nollor annars. Den kallas också för I, vilket inte får leda till förvirring.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Identitetsavbildningen

$$I : \mathrm{E}^2 \to \mathrm{E}^2$$

har alltså avbildningsmatris

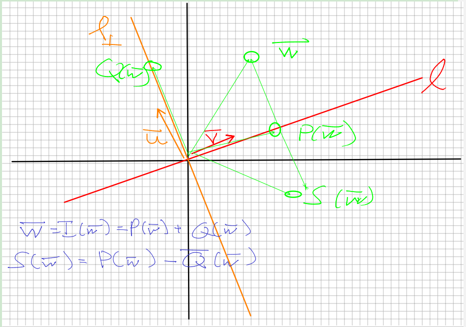
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

i varje bas.

Exempel (Spegling i en linje)

Låt linjen ℓ gå genom origo och ha riktningsvektor $\overline{\mathrm{v}} = \underline{\mathrm{e}} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ av längd ett. Då har den en normallinje som går genom origo som har riktningsvektor $\overline{\mathrm{u}} = \underline{\mathrm{e}} \begin{bmatrix} -d \\ c \end{bmatrix}$ också av längd ett. Vi har visat att P, ortogonalprojektion på linjen, har avbildningsmatris

$$\begin{bmatrix} c^2 & cd \\ cd & d^2 \end{bmatrix}$$



Exempel (Spegling i en linje, forts)

På samma sätt har Q, ortogonalprojektion på normallinjen matris

$$\begin{bmatrix} d^2 & -cd \\ -cd & c^2 \end{bmatrix}$$

Vi kontrollerar att $P + Q = I$. Eftersom spegling S (i linjen) uppfyller

$$S = P - Q = P - (I - P) = 2P - I$$

så blir

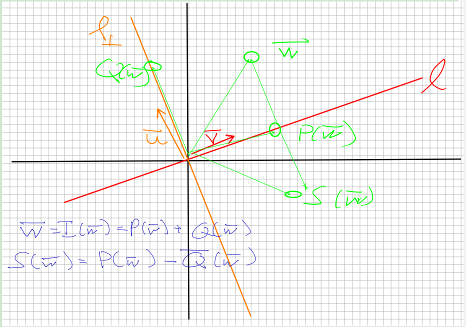
$$S = 2\begin{bmatrix} c^2 & cd \\ cd & d^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2c^2 - 1 & 2cd \\ 2cd & 2d^2 - 1 \end{bmatrix}$$

I vårt konkreta exempel med $c = d = 1/\sqrt{2}$ så får vi

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

vilket säger att

$$\bar{e}_1 \mapsto \bar{e}_2, \qquad \bar{e}_2 \mapsto \bar{e}_1$$



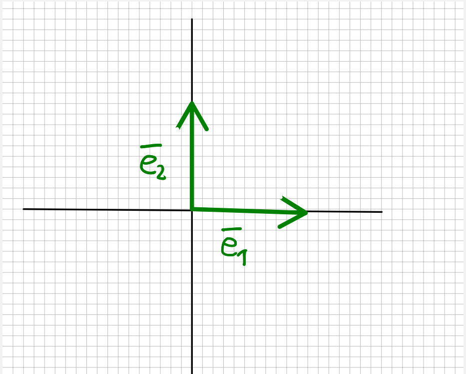
Exempel (Spegling)

Vi noterar två specialfall:
spegling i x-axeln har matris

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

medan projektion på y-axeln har matris

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Exempel (Skjuvning)

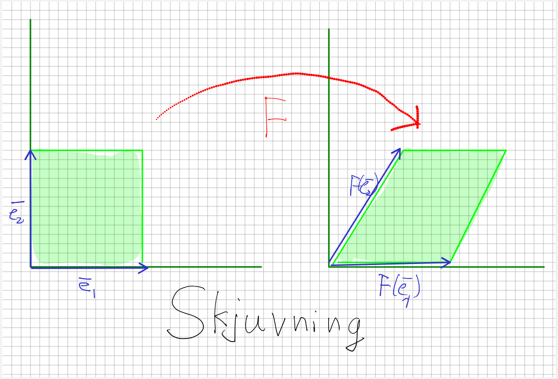
Låt $c > 0$ och låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Den linjära avbildningen

$$\mathrm{E}^2 \ni \underline{\mathrm{e}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \underline{\mathrm{e}} \begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \underline{\mathrm{e}} \begin{bmatrix} x + cy \\ y \end{bmatrix}$$

kallas för *skjuvning*.



Exempel (Vridning)

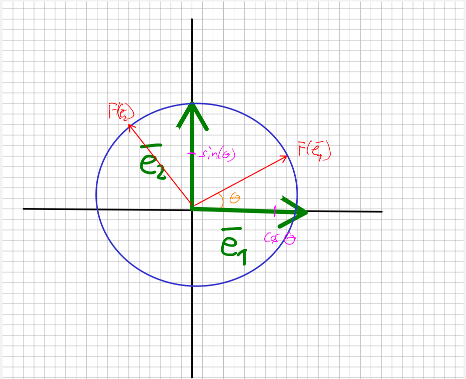
Låt $\omega \in \mathbb{R}$ och låt

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\omega) & -\sin(\omega) \\ \sin(\omega) & \cos(\omega) \end{bmatrix}$$

Den linjära avbildningen

$$\mathrm{E}^2 \ni \underline{\mathrm{e}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \underline{\mathrm{e}} \begin{bmatrix} \cos(\omega) & -\sin(\omega) \\ \sin(\omega) & \cos(\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \underline{\mathrm{e}} \begin{bmatrix} \cos(\omega)x + \sin(\omega)y \\ -\sin(\omega)x + \cos(\omega)y \end{bmatrix}$$

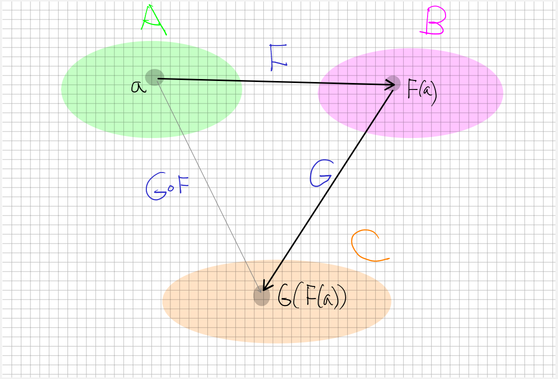
kallas för *vridning* (eller rotation) runt origo.



Definition

Låt $F : A \to B$ och $G : B \to C$ vara funktioner. Vi definierar den sammansatta avbildningen $G \circ F$ genom

$$G \circ F : A \to B$$
$$(G \circ F)(a) = G(F(a))$$



Sats

Låt A, B, C vara vektorrum och låt $F : A \longrightarrow B$ och $G : B \longrightarrow C$ vara linjära avbildningar. Då är $G \circ F$ linjär.

Bevis.

1. $(G \circ F)(\overline{0}) = G(F(\overline{0})) = G(\overline{0}) = \overline{0}$.
2. $(G \circ F)(c\overline{u}) = G(cF(\overline{u})) = cG(F(\overline{u})) = c(G \circ F)(\overline{u})$.
3. $(G \circ F)(\overline{u} + \overline{v}) = G(F(\overline{u}) + F(\overline{v})) = G(F(\overline{u})) + G(F(\overline{v})) = G \circ F)(\overline{u}) + G \circ F)(\overline{v})$

$\square$

Sats

Låt

1. A, B, C *vara ändligt-dimensionella vektorrum*
2. $F : A \longrightarrow B$ *och* $G : B \longrightarrow C$ *vara linjära avbildningar*
3. $\underline{a}$, $\underline{b}$, *och* $\underline{c}$ *vara (ordnade) baser för* A, B, *och* C.
4. M *vara avbildningsmatrisen för* F *m.a.p* $\underline{a}$ *och* $\underline{b}$
5. N *vara avbildningsmatrisen för* G *m.a.p* $\underline{b}$ *och* $\underline{c}$

Då är $G \circ F$ *linjär, med avbildningsmatris* NM *m.a.p* $\underline{a}$ *och* $\underline{c}$

Bevis.

$$
\begin{aligned}
(G \circ F)(\underline{a}X) &= G(F(\underline{a}X)) \\
&= F(\underline{b}MX) \\
&= \underline{c}N\,(MX) \\
&= \underline{c}(NM)X
\end{aligned}
$$

$\square$

Exempel

Låt $A = C$ stå får polynom av grad högst 2, och B för polynom av grad högst 3. Låt $F : A \to B$ vara multiplikation med variabeln x, och $G : B \to C$ vara (formell) derivering m.a.p x. Vi använder de naturliga baserna, potenser av x. Då har vi

$$
\begin{aligned}
F(1) &= x & G(1) &= 0 & G(F(1)) &= G(x) = 1 \\
F(x) &= x^2 & G(x) &= 1 & G(F(x)) &= G(x^2) = 2x \\
F(x^2) &= x^3 & G(x^2) &= 2x & G(F(x^2)) &= G(x^3) = 3x^2 \\
& & G(x^3) &= 3x^2 & &
\end{aligned}
$$

Avbildningsmatriserna är

$$
M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad NM = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}
$$

Observera att $F \circ G$ och MN inte är definierade.

Exempel

Låt $A = B = C$ vara polynom av grad högst 2. Låt $G : A \to A$ vara derivering m.a.p variablen x. Låt $F : A \to A$ vara “kapmultiplikation” med x, dvs multiplicera med x men nolla x^3 och högre potenser. Då har F avbildningsmatris

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

medan G får matris

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi har att

$$NM = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad MN = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Dessa är avbildningsmatriser till $G \circ F$ och $F \circ G$, som båda är definierade, men som är olika.

Definition

Låt $F : A \to B$ vara en funktion.

1. Om $G : B \to A$ uppfyller $G \circ F = I_A$ dvs $G(F(a)) = a$ för alla $a \in A$ så sägs G vara en ensidig (vänster) invers till F.
2. Om $G : B \to A$ uppfyller $F \circ G = I_B$ dvs $F(G(b)) = b$ för alla $b \in B$ så sägs G vara en ensidig (höger) invers till F.
3. Om $G : B \to A$ uppfyller båda ovanstående kraven så sägs G vara en (dubbelsidig) invers till F.

Sats

Om G är en tvåsidig invers till F så är F, G bijektiva.

Bevis.

Räcker visa för F.

1. Om $F(\bar{a}_1) = F(\bar{a}_2)$ så $\bar{a}_1 = G(F(\bar{a}_1)) = G(F(\bar{a}_2)) = \bar{a}_2$.
2. Tag $\bar{b} \in B$. Vill hitta något $\bar{a} \in A$ så att $F(\bar{a} = \bar{b}$. Men $\bar{a} = G(\bar{b})$ duger, ty $F(G(\bar{b})) = I(\bar{b}) = \bar{b}$

$\square$

Exempel

Kom ihåg vårt flummiga exempel med oändliga matriser:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

har $BA = I$ men

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Vi kan göra detta stringent genom att låta $V = \mathbb{R}^\infty$ vara vektorrummet av oändliga följder, indexerade av heltalen. Matriserna A, B svarar mot linjära avbildningar $V \to V$ med

$$\begin{aligned} F((a_0, a_1, a_2, \ldots)) &= (0, a_0, a_1, a_2, \ldots) \\ G((a_0, a_1, a_2, \ldots)) &= (a_1, a_2, \ldots) \\ G(F(a_0, a_1, a_2, \ldots)) &= (a_0, a_1, a_2, \ldots) \\ F(g(a_0, a_1, a_2, \ldots)) &= (0, a_1, a_2, \ldots) \end{aligned}$$

så $G \circ F = I$ men $F \circ G \neq I$.

Sats

Låt U, V vara vektorrum och låt $F : U \to V$ vara linjär. Om $G : V \to U$ är en funktion som är en tvåsidig invers till F, dvs om $F \circ G = I_V$ och $G \circ F = I_U$, så är G linjär.

Bevis.

1. $G(\overline{0}) = G(F(\overline{0})) = I(\overline{0}) = \overline{0}$.
2. Tag $\overline{v} \in V$, $c \in \mathbb{R}$. Då $F(G(c\overline{v})) = I(c\overline{v}) = c\overline{v}$, och $F(cG(\overline{v})) = cF(G(\overline{v})) = cI(\overline{v}) = c\overline{v}$. Eftersom F bijektiv så är
$$G(c\overline{v}) = cG(\overline{v})$$
3. $G(\overline{v}_1 + \overline{v}_2) = G(\overline{v}_1) + G(\overline{v}_2)$: lämnas som övning.

$\square$

Sats

Låt

1. U, V *vara ändligtdimensionella vektorrum, med baser* $\underline{e}$ *och* $\underline{f}$ *respektive.*
2. $F : U \to V$ *vara linjär.*
3. $G : V \to U$ *vara linjär till* G.
4. A *vara avbildningsmatrisen till* F *m.a.p baserna* $\underline{e}$, $\underline{f}$.
5. B *vara avbildningsmatrisen till* G *m.a.p baserna* $\underline{e}$, $\underline{f}$.

Då är följande likvärdiga:

1. G *är tvåsidig invers till* F
2. $AB = I$
3. $BA = I$
4. $AB = I$ *och* $BA = I$
5. $B = A^{-1}$

I alla dessa fall gäller att $\det A \neq 0$, $\det B \neq 0$.

Bevisskiss.

$$U \ni \underline{e}X \mapsto \quad \underline{f}AX \mapsto \quad \underline{e}BAX \in U$$
$$V \ni \underline{f}Y \mapsto \quad \underline{e}BY \mapsto \quad \underline{f}ABY \in V$$

Linjära avbildningar från planet till sig självt

Ett vanligt förekommande specialfall är att $U = V$ och att $\underline{e} = \underline{f}$. Vi tittar på fallet att $U = V = \mathrm{E}^2$. Avbildningsmatrisen är då en 2×2-matris. Inversen till en sådan ges av

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}^{-1}$$

Vi har även att

$$M^2 = MM = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{bmatrix}$$

Exempel (Sträckning)

Sträckning med faktor c i x-led och faktor d i y-led har avbildningsmatris

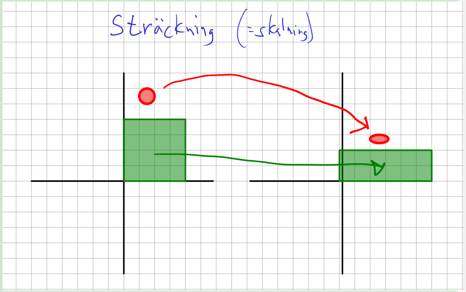
$$\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$$

Inversen existerar och är

$$\begin{bmatrix} 1/c & 0 \\ 0 & 1/d \end{bmatrix}$$

Upprepad sträckning får matris

$$\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} c^k & 0 \\ 0 & d^k \end{bmatrix}$$



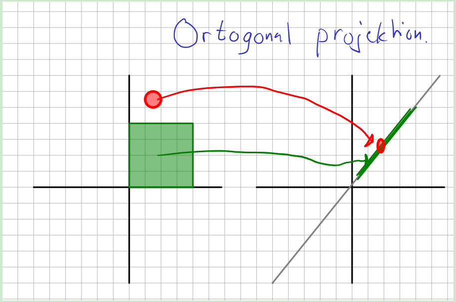
Exempel (Projektion)

Låt F vara projektion på linjen genom origo med riktningsvektor $\overline{\mathrm{v}} = \underline{\mathrm{e}} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ av längd ett. Då är avbildningsmatrisen för F given av

$$M = \begin{bmatrix} c^2 & cd \\ cd & d^2 \end{bmatrix}$$

Matrisen är inte inverterbar. Vidare så är $M = M^2 = M^3 = \ldots$ så att projicera flera gånger är samma sak som att projicera en enda gång.
I det konkreta exemplet till höger så är

$$M = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$



Exempel (Spegling i en linje)

Låt linjen ℓ gå genom origo och ha riktningsvektor $\overline{\mathrm{v}} = \underline{\mathrm{e}}\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ av längd ett. Spegling i linjen ℓ har matris

$$S = \begin{bmatrix} 2c^2 - 1 & 2cd \\ 2cd & 2d^2 - 1 \end{bmatrix}$$

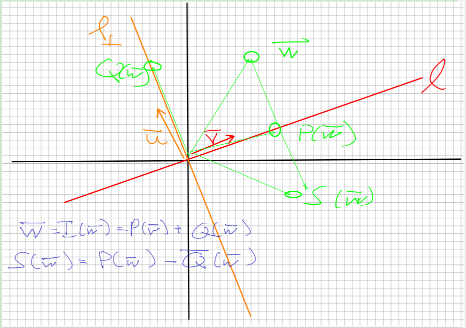
Vi har att $S^2 = I$, så spegling är sin egen invers. Om man speglar ett jämnt antal gånger blir det identiteten, udda antal blir S.
Spegling i x-axeln resp y-axeln:

$$Sx = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad Sy = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Spegling i x-axeln följt av spegling i y-axeln:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Vad är detta för avbildning?



Exempel (Vridning)

Låt F vara vridning 45 grader ($\pi/4$ radianer) moturs runt origo. Avbildningsmatrisen är

$$M = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

och inversen är

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

vilket är vridning 45 grader medurs. Vidare är

$$M^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M^3 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$M^4 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Den sistnämnda är vår sammansatta spegling från föregående exempel!