TATA24 Linjär Algebra, Fö 20

Potenser av kvadratiska matriser, system av differensekvationer, system av differentialekvationer

Jan Snellman[1]

[1] Matematiska Institutionen
Linköpings Universitet

Linköping, HT 2022

Detta dokument återfinns på kurshemsidan `http://courses.mai.liu.se/GU/TATA24/`

Översikt av dagens föreläsning:

Översikt av dagens föreläsning:

1. **Potenser av matriser**
   - Beräkning av potenser av matriser
     - Itererad kvadrering
     - Cayley-Hamilton
   - Beräkning av matrispotenser via polynomdivision
     - Potenser av diagonalmatris
     - Potenser av diagonaliserbar matris
2. **Tillämpningar av potenser av matriser**
   - Stigar i graf
   - Trajektorier av vektorer
     - Linjära differensekvationer med konstanta koefficienter
3. **System av linjära differentialekvationer med konstanta koefficienter**

Översikt av dagens föreläsning:

Definition

Låt V vara ett vektorrum och $F : V \to V$ vara en linjär avbildning. Vi för ett positivt heltal n så är $F^n : V \to V$ givet av

$$F^n(\overline{u}) = F(F(\cdots(F(\overline{u}))\cdots)) \qquad n \text{ gånger}$$

Speciellt så är $F^0 = I$.

Sats

Om $\underline{e} = \begin{pmatrix}\overline{e}_1 & \cdots & \overline{e}_n\end{pmatrix}$ *och* $F(\underline{e}X) = \underline{e}AX$ *så är* $F^n(\underline{e}X) = \underline{e}A^nX$.

Exempel

Om F är vridning moturs runt origo med ϕ radianer så är F^n vridning med $n\phi$ radianer. Vi får alltså relationen

$$\begin{pmatrix}\cos(\phi) & -\sin(\phi)\\ \sin(\phi) & \cos(\phi)\end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix}\cos(n\phi) & -\sin(n\phi)\\ \sin(n\phi) & \cos(n\phi)\end{pmatrix}^n$$

För $n = 3$ får vi

$$\begin{pmatrix}\cos(3\phi) & -\sin(3\phi)\\ \sin(3\phi) & \cos(3\phi)\end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix}\cos(\phi)^3 - 3\cos(\phi)\sin(\phi)^2 & -3\cos(\phi)^2\sin(\phi) + \sin(\phi)^3\\ 3\cos(\phi)^2\sin(\phi) - \sin(\phi)^3 & \cos(\phi)^3 - 3\cos(\phi)\sin(\phi)^2\end{pmatrix}$$

Itererad kvadrering

1. Antag A kvadratisk matris
2. Vi vill beräkna A^m
3. Vi kan göra detta som $A^2 = A * A$, $A^3 = A^2 * A$, $A^4 = A^3 * A$ osv.
4. Mer effektivt är $A^4 = (A^2)^2$, $A^8 = (A^4)^2$ osv.
5. Om $m = \sum_{j=0}^{r} c_j 2^j$ med $c_j \in \{0, 1\}$ så är $A^m = \prod_{c_j=1} A^{2^j}$.
6. Exempel: $29 = 16 + 8 + 4 + 1$ så för att beräkna A^{29} beräknar vi A^2, $A^4 = (A^2)^2$, $A^8 = (A^4)^2$, $A^{16} = (A^8)^2$ och slutligen $A^{29} = A^{16} * A^8 * A^4 * A$.

Sats (Cayley-Hamilton)

Låt A vara en kvadratisk matris, och låt $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ vara dess sekularpolynom. Då är $p(A) = 0$.

Exempel

Om $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 11 \end{pmatrix}$ så är sekularpolynomet $\lambda^3 - 17\lambda^2 - 6\lambda + 6$ och det gäller att $B^3 - 17B^2 + 6B + 6I = 0$.

1. A kvadratisk matris, $n \times n$
2. Vi vill beräkna A^N
3. Vi vill evaluera $f(A)$ då $f(x) = x^N$
4. Låt $p(x)$ vara sekularpolynomet
5. Skriv $f(x) = k(x)p(x) + r(x)$, $r(x)$ grad lägre än n
6. $f(A) = k(A)p(A) + r(A) = r(A)$

Exempel

Tag $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 11 \end{pmatrix}$ som förut. Om vi vill beräkna B^{10} så beräknar vi först sekularpolynomet $p(x) = x^3 - 17x^2 - 6x + 6$ och utför polynomdivision med rest för att få att $x^{10} = k(x) * p(x) + 7980629011 * x^2 + 2604139872 * x - 2763645618$ så $B^{10} = 7980629011B^2 + 2604139872 * B - 2763645618I$. Vi behöver alltså bara beräkna B^2 med matrismultiplikation, högre potenser är "gratis".

Sats

Om A är en diagonalmatris med $c_1, \ldots, c_n$ som värden på diagonalen, så är A^k också diagonalmatris, med $c_1^k, \ldots, c_n^k$ som värden på diagonalen.

Bevis.

Induktion över k. □

Exempel

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2^k} \end{pmatrix}^k$$

Sats

Om $A = TDT^{-1}$, med D diagonal, så är $A^k = TD^k T^{-1}$.

Bevis.

$A^k = (TDT^{-1})^k = (TDT^{-1})(TDT^{-1}) \cdots (TDT^{-1}) = TDT^{-1}TDT^{-1} \cdots TDT^{-1} = TDD \cdots DT^{-1} = TD^k T^{-1}$. □

Exempel

Om $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 11 \end{pmatrix}$ så har sekularpolynomet 3 skiljda reella rötter,

$$r_1 \approx -0.7738, \; r_2 \approx 0.4475, \; r_3 \approx 17.33$$

så

$$B^k = T^{-1} \begin{pmatrix} r_1^k & 0 & 0 \\ 0 & r_2^k & 0 \\ 0 & 0 & r_3^k \end{pmatrix} T$$

där

$$T \approx \begin{pmatrix} 1.000 & 1.000 & 1.000 \\ -0.2550 & -5.240 & 2.245 \\ -0.4213 & 3.309 & 3.945 \end{pmatrix}$$

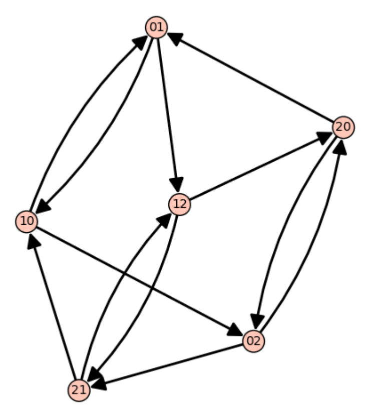
är matrisen med egenvektorerna till B som kolonner.

Sats

Låt G vara en riktad graf på noderna $\{1, 2, \ldots, n\}$, dvs kanterna är enkelriktade. Låt A vara den $n \times n$-matris där $a_{ij} = 1$ om det går en riktad kant från nod i till nod j.
Då är A^k matrisen där elementet i rad i, kolonn j anger hur många riktade stigar av längd k, från nod i till nod j, som det finns i grafen.

Exempel

Låt G vara den riktade grafen



Exempel (forts)

Matrisen A blir

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

och vi har tex att

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Speciellt så finns det för varje nod precis en riktad stig av längd 3 (3 kanter) som börjar och slutar där.

Exempel (forts)

Vi kan i detta fall diagonalisera A som $A = TDT^{-1}$ med

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Så $A^k = TD^kT^{-1}$. Vidare så är *spåret*, dvs summan av diagonalelementen, oberoende av bas, så spåret av A^k är $2^k + 2(-1)^k$. Detta anger antal stigar av längd k som börjar och slutar i samma nod.

1. Låt $F : V \to V$ vara linjär och låt $\overline{v}_0 \in V$. Definiera $\overline{v}_n = F(\overline{v}_{n-1})$ för $n \geq 1$.
2. Då är $\overline{v}_n = F^n(\overline{v}_0)$
3. Följden $(\overline{v}_j)_{j=0}^{\infty}$ kallas för *trajektoriet* för $\overline{v}_0$ under F.
4. Vi är intresserade av om $\overline{v}_n$ "konvergerar" mot något, eller om det går mot oändligheten (i vilken rikting?)
5. Vi är också intresserade av en allmänn formel för $\overline{v}_n$
6. Om $\underline{e} = \begin{pmatrix} \overline{e}_1 & \cdots & \overline{e}_n \end{pmatrix}$ och $F(\underline{e}X) = \underline{e}AX$ så blir problemet så här:
$$X_n = AX_{n-1} = A^n X_0, \qquad X_0 \text{ given}$$
7. Om A är diagonaliserbar så är $A^n = TD^nT^{-1}$ så
$$X_n = AX_{n-1} = A^n X_0 = TD^nT^{-1}X_0$$
8. Det kan ge en explicit formel för X_n.
9. Eftersom D är avbildningsmatris i bas $\underline{f}$ så är
$$F^n(\sum_{j=1}^{m} c_j \overline{f}_j) = \sum_{j=1}^{m} c_j F^n(\overline{f}_j) = \sum_{j=1}^{m} c_j \lambda_j^n \overline{f}_j$$
Skriv $X_0 = \sum_{j=1}^{m} c_j \overline{f}_j$ och detta blir en explicit formel.

Exempel

1. Låt oss lösa systemet av differensekvationer

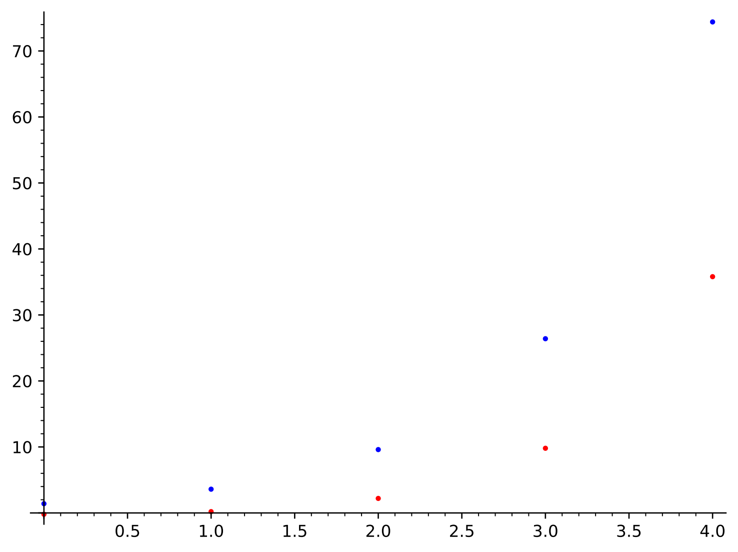
$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{66}{25}x_n + \frac{12}{25}y_n \\ y_{n+1} &= \frac{12}{25}x_n + \frac{59}{25}y_n \end{aligned}$$

   med begynnelsevärdena $(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{7}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$

2. Skriv som $X_{n+1} = AX_n$ med $A = \begin{pmatrix} \frac{66}{25} & \frac{12}{25} \\ \frac{12}{25} & \frac{59}{25} \end{pmatrix}$, $X_0 = \begin{pmatrix} \frac{7}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$
3. A symmetrisk, diagonalisera $A = TDT^t$ med $T = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
4. Byter till egenvektorbas, $\underline{f} = \underline{e}T$, $X = TY$, $Y = T^tX$, $A = TDT^t$, nu blir problemet $Y_{n+1} = DY_n$, $Y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dvs $Y_n = D^nY_0$.

Exempel

5. Vi ser att $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$ så $Y_n = D^n Y_0 = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n \\ 3^n \end{pmatrix}$.
6. Eftersom $X = TY$ har vi att $X_n = TY_n = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n \\ 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \cdot 3^n + \frac{3}{5} \cdot 2^n \\ \frac{3}{5} \cdot 3^n - \frac{4}{5} \cdot 2^n \end{pmatrix}$
7. Vi kan också få fram lösningen så här: vi vet att $X_n = c_1 2^n \bar{f}_1 + c_2 3^n \bar{f}_2$ och att $X_0 = \begin{pmatrix} \frac{7}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$. Så sätt $n = 0$ och vi får $c_1 \bar{f}_1 + c_2 \bar{f}_2 = X_0$ dvs $\begin{pmatrix} \frac{66}{25} c_1 + \frac{12}{25} c_2 \\ \frac{12}{25} c_1 + \frac{59}{25} c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$. Lös detta ekvationssystem för att få fram c_1, c_2.

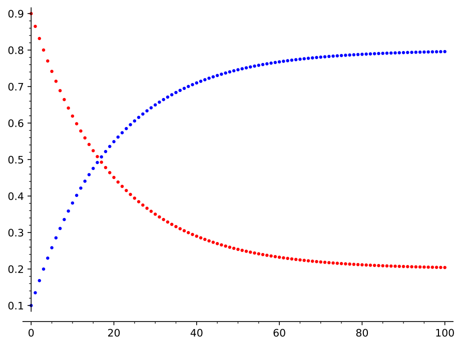

70
60
50
40
30
20
10
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
4.0

Exempel

1. År noll har landet Påhittistan 1 miljon invånare, varav
    1. 10 procent bor i städer
    2. 90 procent bor på landsbygden
2. Varje år flyttar 1 procent av stadsborna ut på landet medan 4 procent av de boende på landsbygden flyttar in till städerna
3. Låt x_n, y_n stå för befolkningen i städer, på landsbygd, räknat i miljoner invånare
4. Sätt $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$
5. Då har vi att $X_n = AX_{n-1}$ med $A = \begin{pmatrix} \frac{99}{100} & \frac{1}{25} \\ \frac{1}{100} & \frac{24}{25} \end{pmatrix}$ och $X_0 = (\frac{1}{10}, \frac{9}{10})$

Exempel (forts)

6. Vi beräknar X_j för $1 \leq j \leq 100$
7. Sista värdet $X_{100} = (0.795855629545766, 0.204144370454234)$
8. Plot av x_1, x_2 -komponenterna av X_j:



Exempel (forts)

9. Går dessa värden mot något gränsvärde? Om inte, går proportionen mellan dem mot något gränsvärde?
10. Vi kan faktiskt diagonalisera A som $A = TDT^{-1}$ med

$$D = \begin{pmatrix} \frac{19}{20} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 0.7071067811865475? & 0.9701425001453319? \\ -0.7071067811865475? & 0.2425356250363330? \end{pmatrix}$$

11. Vi ser att vi har två egenvärden, $\lambda_1 = \frac{19}{20} < 1$ och $\lambda_2 = 1$. De motsvarande egenvektorerna är

$$\bar{f}_1 = (0.7071067811865475?, -0.7071067811865475?)$$

$$\bar{f}_2 = (0.9701425001453319?, 0.2425356250363330?)$$

12. Vi byter bas så att $Y_0 = TX_0$, vi får

$$Y_0 = \begin{pmatrix} -0.9899494936611665? \\ 0.8246211251235321? \end{pmatrix}$$

Exempel (forts)

13. $Y_n = D^n Y_0 = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.989949493661165? \\ 0.824621125123532? \end{pmatrix}$
14. $X_n = TY_n$
15. Explicit formel blir
$$X_n = c_1 \lambda_1^n \bar{f}_1 + c_2 \lambda_2^n \bar{f}_2$$
med
$$c_1 = -0.9899,\ c_2 = 0.8246,\ \lambda_1 = 0.9500,\ \lambda_2 = 1.000,$$
$$\bar{f}_1 = (0.7071, -0.7071)\,,\ \bar{f}_2 = (0.9701, 0.2425)$$
16. För stora n så är
$$D^n = \begin{pmatrix} \left(\frac{19}{20}\right)^n & 0 \\ 0 & 1^n \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
så
$$X_n \approx c_2 \bar{f}_2 \approx (0.8000, 0.2000)$$

1. Givet en linjär differensekvation med konstanta koefficienter, av ordning k,

$$s_n = c_1 s_{n-1} + \cdots + c_k s_{n-k}, \qquad s_0, \ldots, s_{k-1} \text{ givna}$$

2. Inför $x_{j,j}$, $1 \leq j < k$, sätt $x_{j,n} = s_{n+j}$, sätt $X_n = \begin{pmatrix} x_{1,n} \\ \vdots \\ x_{k,n} \end{pmatrix}$

3. Exempelvis om $n = 3$, $s_n = c_1 s_{n-1} + c_2 s_{n-2} + c_3 s_{n-3}$, så sätt $x_{1,n} = s_{n+1}$, $x_{2,n} = s_{n+2}$, $x_{3,n} = s_{n+3}$. Då får vi

$$\begin{aligned} x_{3,n} &= s_{n+3} = c_1 s_{n+2} + c_2 s_{n+1} + c_3 s_n = c_1 x_{3,n-1} + c_2 x_{2,n-1} + c_3 x_{1,n-1} \\ x_{2,n} &= s_{n+2} = x_{3,n-1} \\ x_{1,n} &= s_{n+1} = x_{2,n-1} \end{aligned}$$

vilket blir $X_n = AX_{n-1}$ med $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ c_3 & c_2 & c_1 \end{pmatrix}$ och $X_{-1} = \begin{pmatrix} x_{1,-1} \\ x_{2,-1} \\ x_{3,-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$

Exempel

Studera differensekvationen

$$s_{n+3} = 6s_{n+2} - 11s_{n+1} + 6s_n, \qquad s_0 = 1, s_1 = 0, s_2 = 0$$

Den börjar $s_3 = 6s_2 - 11s_1 + 6s_0 = 6*0 - 11*0 + 6*1 = 6$,
$s_4 = 6s_3 - 11s_2 + 6s_1 = 6*6 - 11*0 + 6*0 = 36$,
$s_5 = 6s_4 - 11s_3 + 6s_2 = 6*36 - 11*6 + 6*0 = 150$.
Vi skriver detta som $X_n = AX_{n-1}$ dvs som

$$\begin{pmatrix} x_{1,n} \\ x_{2,n} \\ x_{3,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,n} \\ x_{2,n} \\ x_{3,n} \end{pmatrix}$$

Begynnelsevektorn är

$$X_{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Matrisen A diagonaliseras som $A = TDT^{-1}$ med

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 9 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Exempel (forts)

Vi beräknar enkelt potenser av D:

$$D^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

och utifrån detta potenser av A:

$$A^n = TD^nT^{-1} = \begin{pmatrix} 3^n - 3\cdot 2^n + 3 & -\frac{3}{2}\cdot 3^n + 4\cdot 2^n - \frac{5}{2} & \frac{1}{2}\cdot 3^n - 2^n + \frac{1}{2} \\ 3\cdot 3^n - 6\cdot 2^n + 3 & -\frac{9}{2}\cdot 3^n + 8\cdot 2^n - \frac{5}{2} & \frac{3}{2}\cdot 3^n - 2\cdot 2^n + \frac{1}{2} \\ 9\cdot 3^n - 12\cdot 2^n + 3 & -\frac{27}{2}\cdot 3^n + 16\cdot 2^n - \frac{5}{2} & \frac{9}{2}\cdot 3^n - 4\cdot 2^n + \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Nu blir

$$\begin{pmatrix} s_{n+1} \\ s_{n+2} \\ s_{n+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1,n} \\ x_{2,n} \\ x_{3,n} \end{pmatrix} = X_n = A^nX_{-1} = \begin{pmatrix} 3^n - 3\cdot 2^n + 3 \\ 3\cdot 3^n - 6\cdot 2^n + 3 \\ 9\cdot 3^n - 12\cdot 2^n + 3 \end{pmatrix}$$

Exempelvis så blir

$$X_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 36 \\ 150 \end{pmatrix}$$

vilket stämmer med vad vi räknade ut tidigare.

System av linjära differentialekvationer med konstanta koefficienter

Vi behöver känna till följande begrepp:

1. Derivata
2. Differentialekvation
3. System av differentialekvationer
4. Lösning till differentialekvation

Vi behöver förstå att derivering kan ses som en linjär funktion från snälla funktioner till snälla funktioner.

Vi behöver följande sats:

Sats

1. $y'(t) = 0$, $y(0) = C$ *har unika lösningen* $y(t) = C$
2. $y'(t) = \lambda t$, $y(0) = C$ *har unika lösningen* $y(t) = Ce^{\lambda t}$.

Då kan vi använda linjär algebra för att lösa vissa typer av system av differentialekvationer

Lösning av diagonaliserbart system

1. Vi har ett system av differentialekvationer på följande form:

$$
\begin{aligned}
x_1(t)' &= a_{11}x_1(t)' + \cdots + a_{1n}x_n(t)' \\
\vdots &= \vdots \\
x_n(t)' &= a_{n1}x_n(t)' + \cdots + a_{nn}x_n(t)'
\end{aligned}
$$

   samt begynnelsevärden vid tiden $t = 0$.
2. Vi skriver detta som $X(t)' = AX(t)$
3. Om vi kan diagonalisera $A = TDT^{-1}$ så byter vi bas så att $X(t) = TY(t)$
4. Då blir systemet $Y'(t) = DY(t)$
5. Detta system är "separerat" och vi kan lösa det med tidigare sats
6. Vi byter tillbaka till X-koordinater när vi är klara
7. Alternativt så är

$$X(t) = \sum_{j=0}^{n} c_j e^{(\lambda_j t)} \bar{\mathrm{f}}_j$$

   där λ_j är egenvärdena och $\bar{\mathrm{f}}_\mathrm{j}$ är motsvarande egenvektorer, och konstanterna c_j bestämms från begynnelsevärdena.

Exempel

Låt oss titta på

$$x_1(t)' = \frac{66}{25}x_1(t) + \frac{12}{25}x_2(t)$$
$$x_2(t)' = \frac{12}{25}x_1(t) + \frac{59}{25}x_2(t)$$

Vi skriver detta som ett system och passar på att ange begynnelsevärdena: $X'(t) = AX(t)$ blir

$$\begin{pmatrix} x_1(t)' \\ x_2(t)' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{66}{25} & \frac{12}{25} \\ \frac{12}{25} & \frac{59}{25} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad X_0 = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Det är samma A som vi sett i ett tidigare exempel, så vi vet att $A = TDT^{-1}$ med

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0.7071067811865475? & 0.9701425001453319? \\ -0.7071067811865475? & 0.2425356250363330? \end{pmatrix}$$

I nya koordinater blir systemet

$$\begin{pmatrix} y_1(t)' \\ y_2(t)' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exempel (forts)

Detta “separerade” system kan lösas separat:

$$y_1(t)' = 2y_1(t),\ y_1(0) = 0 \implies y_1(t) = e^{2t}$$
$$y_2(t)' = 3y_2(t),\ y_2(0) = 0 \implies y_2(t) = e^{3t}$$

Vi byter tillbaka till $X(t) = TY(t)$ och får

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5}\, e^{(3\,t)} + \frac{3}{5}\, e^{(2\,t)} \\ \frac{3}{5}\, e^{(3\,t)} - \frac{4}{5}\, e^{(2\,t)} \end{pmatrix}$$