Profesor: Pablo Barceló
Auxiliares: Tomás Martínez, Ignacio Riego

Tarea 2: Combinatoria y probabilidades

En esta tarea se debe entregar los desarrollos de las preguntas en formato PDF, escrito en computador, en donde se encuentren todas las demostraciones pedidas, explicaciones breves de los códigos utilizados y los códigos como anexo. No en formato informe. Además los códigos pedidos deben ir por separado en archivos de texto y pueden estar en los lenguajes C++, Matlab o Python. Se recomienda agregar comentarios que puedan facilitar la corrección de los códigos.

P1 Consideremos dos funciones recursivas:

$$f(0) = 1$$

$$g(0) = 2$$

$$f(n) = (5f(n-1) + 2g(n-1))mod(100)$$
$$g(n) = (3f(n-1) + g(n-1))mod(100)$$

Queremos calcular $\sum_{i=0}^{k}(f(i) + g(i))$. El problema es que si k es muy grande el tiempo de proceso puede ser demasiado largo. Vamos a encontrar una forma eficiente de hacerlo.

a) Use un argumento de palomar para demostrar que $\exists n_0, n_1\ f(n_0) = f_{n_1} \ \wedge g(n_0) = g(n_1)$. Use esto para concluir que las funciones son periódicas a partir de algun n.

b) Usando la parte a) encuentre un algoritmo para calcular $\sum_{i=0}^{k}(f(i)+g(i))$ para un k cualquiera. Comente sobre la complejidad de este algoritmo.

c) Escriba un programa que reciba un k y calcule $\sum_{i=0}^{k}(f(i) + g(i))$. Como el valor puede ser muy grande entréguelo módulo $10^9 + 7$.

d) Demuestre que independiente de cual sea el módulo que se le aplique a las funciones, estas siempre van a ser periódicas a partir de algún punto. Es decir que el 100 se puede reemplazar por otro valor que no tiene que ser el mismo para ambas como aparece más abajo.

e) Generalize su solución, de tal forma que reciba además de k los parámetros a, b, c, d, m, l y que resuelva el problema para:

$$f(n) = (af(n-1) + bg(n-1))mod(m)$$
$$g(n) = (cf(n-1) + d(n-1))mod(l)$$

P2 Imagine un juego en línea en el que dos contrincantes juegan uno contra otro y donde siempre hay un solo ganador. Los jugadores compiten para obtener puntos, todos parten con 0 puntos y el sistema es el siguiente: con cada victoria obtienen un punto y con cada derrota pierden un punto, pueden llegar a tener puntaje negativo. Al llegar a n puntos los jugadores reciben un premio, pero solo pueden ganar este premio una vez.

Si dos jugadores a y b se enfrentan, y llamamos h_a y h_b a sus habilidades, la probabilidad de que cada uno gane es:

$$Pr(a) = \frac{h_a}{h_a + h_b} \ \wedge \ Pr(b) = \frac{h_b}{h_a + h_b}$$

Las habilidades de los jugadores están representadas por enteros $0 \leq h_a \leq 50$.

Un nuevo jugador llamado X desea integrarse al juego, él tiene la información de las habilidades de todos los otros jugadores, ayúdelo a calcular la probabilidad de que gane el premio considerando que solo puede jugar una cierta cantidad de veces. Considere que una vez que gana el premio deja de jugar independiente de cuanto se demoró en obtenerlo.

La habilidad de X es h_X. Sabemos que hay J otros jugadores. Podemos separarlos en k grupos según su habilidad. G_i es la cantidad de jugadores del grupo i, los cuales tendrán habilidad h_i. Cada jugador está en un sólo grupo, por lo tanto $\sum_{i=1}^{k} G_i = J$. Además se cumple que todos los grupos tienen distinta habilidad y estas habilidades toman valores entre 0 y 50.

a) Encuentre una fórmula para calcular la probabilidad de que en una partida con un jugador aleatorio X salga ganador. Todos los jugadores tienen la misma probabilidad de salir elegidos.

   Como ejemplo imagine que $h_X = 10$ y hay otros 2 jugadores ($J = 2$) separados en 2 grupos y que $G_1 = 1, h_1 = 0$, $G_2 = 1, h_2 = 40$. Esto quiere decir que hay un jugador de habilidad 0 y uno de habilidad 40. En este caso la probabilidad de que A gane es $0,6$.

b) Escriba una función que reciba h_X, J y la información sobre los jugadores que hay disponibles (los G_i) y calcule la probabilidad de que al enfrentarse con un jugador al azar gane X.

   El input se entregará en dos líneas, en la primera se entregarán los enteros h_X , J y k. Luego se entregarán k líneas, en la línea i se encontrarán G_i y h_i separados por espacios.
   Ejemplo:
   10 2 2
   1 0
   1 40
   Resultado:
   0.6

c) Ahora calcularemos la probabilidad de que X gane el premio. Considere que X va a jugar m partidas y que cada vez que juega con alguien ese jugador sigue disponible, incluso pueden volver a enfrentarse (en otras palabras, es un juego con reposición). Describa un algoritmo que permita determinar la probabilidad de que X gane el premio, asumiendo que cada vez que juega, el adversario es elegido al azar de manera equiprobable entre los demás jugadores. Luego muestre su correctitud. Puede utilizar la fórmula de la parte a). Este algoritmo debe ejecutarse en tiempo polinomial sobre m, argumente por qué su algoritmo efectivamente cumple con esa condición.

d) Escriba un programa que calcule la probabilidad de que X gane el premio. Este debe recibir toda la información relevante en el mismo formato que la pregunta anterior, agregando una primera línea con n y m. El programa debe entregar el resultado como un número con a lo menos 3 dígitos de precisión después de la coma.

   Se entrega en la primera línea los enteros n y m y en la segunda h_X, J y k separados por espacios. Luego en las siguientes k líneas se entregarán los enteros G_i y h_i.
   Ejemplo:
   2 4
   10 5 3
   2 0
   2 10
   1 20
   Resultado:
   0,641