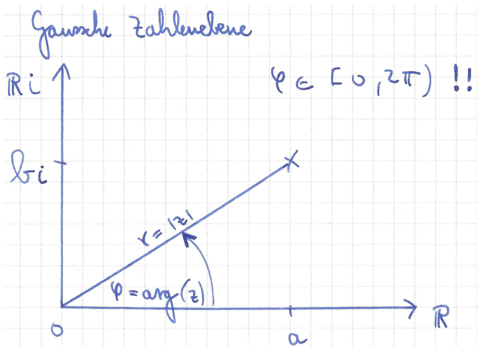
# *Prüfungsrelevante* Verfahren, Sätze und Rechenregeln

# 1 Lineare Algebra

## 1.1 Komplexe Zahlen

- $z = a + bi \in \mathbb{C}$ (**arithmetische** Darstellung)
- $(\mathbb{C}; +, \cdot)$ ist Körper der komplexen Zahlen ($+$ hat neutrales Element 0 und inverses Element $-z$; $\cdot$ hat neutrales Element 1 und inverses Element $z^{-1}$; beide assoziativ und kommutativ; $\cdot$ distributiv über $+$)
- $\frac{z_2}{z} = \frac{z_2}{z} \cdot \frac{\overline{z}}{\overline{z}} = \frac{z_2 \cdot \overline{z}}{a^2 + b^2}$, $\mathrm{Re}(z) = a$, $\mathrm{Im}(z) = b$, $\overline{z} = a - bi$, $r[\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)] = re^{i\varphi}$
- $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\sin(\varphi) = \frac{b}{r}$, $\cos(\varphi) = \frac{a}{r}$; zur Bestimmung von $\varphi$ prüfen wo $\sin^{-1}$ und $\cos^{-1}$ den selben Wert annehmen
- **trigonometrische** und **eulersche** Darstellung erfolgt geometrisch in Polarkoordinaten $(r, \varphi) = (|z|, \arg(z))$




*für komplexe Zahlen sind auch einfache Beweise prüfungsrelevant, rechnen mit euler/trig jedoch nicht*

## 1.2 Rechnen mit Matrizen

- Matrizen sind Abbildungen, die einem Paar $(i, j)$ ein Körperelement $a_{ij}$ zuordnen
- Matrix $A = (a_{ij}) = (a_{ij})_{m \times n}$, es gibt $i$ horizontale Zeilen und $j$ vertikale Spalten; Hauptdiagonale von links oben nach rechts unten
- spezielle Matrizen: Einheitsmatrix, Nullmatrix, quadratische Matrix (auch "n-reihig") und Diagonalmatrix (quadratisch und $a_{ij} = 0$ für $i \neq j$)
- Matrixmultiplikation: $(a_{ij})_{m \times n} \cdot (b_{ij})_{n \times p} = (\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj})_{m \times p}$
- $A^T$: Zeilen und Spalten vertauschen; $k(ABC) = AB(kC) = A(kB)C$ etc.
- $+$ kommutativ und assoziativ mit neutralem Element Nullmatrix; $\cdot$ assoziativ mit neutralem Element Einheitsmatrix und Nullmatrix absorbiert; $\cdot$ distributiv über $+$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$, $(kA)^T = kA^T$, $(A^T)^T = A$, $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ (Reihenfolge !!)
- $A^{-1}$ ist zu ermitteln durch $(A \mid E_n) \rightsquigarrow (A \text{ in ZSF} \mid E'_n) \rightsquigarrow (E_n \mid A^{-1})$ mit elementaren Zeilenumformungen
A in ZSF hat Nullzeilen $\Leftrightarrow \nexists A^{-1}$; Es gilt auch $A^{-1} = \det(A)^{-1}(-1^{i+j} \det(A_{ji}))$
- $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$; $A \in K^{2 \times 2} \Rightarrow A^{-1} = \det(A)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

## 1.3 LGS und Gauß-Jordan

- GF2=$\{0, 1\}$, $+$ und $\cdot$ für GF2 wie in $\mathbb{R}$ mod 2 ($\Rightarrow -a = a$)
- **homogenes** LGS: alle Unveränderlichen sind 0, Nulltupel ist immer eine Lösung; **inhomogenes** LGS: mindestens eine Unveränderliche ist verscheiden von 0, Nulltupel keine Lösung
- Matrixschreibweise für LGS: $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$, Kurzform: erweiterte Koeffizientenmatrix $(A \mid b)$
- für LGS in **ZSF** (ZSF ist am besten am Beispiel zu verstehen, siehe Folie 3.7) gilt: $L = \emptyset \Leftrightarrow \exists b$ in einer Nullzeile das verschieden von 0 ist; umgekehrt für $L \neq \emptyset \Rightarrow$ bei LGS mit Parameter ggf. Fallunterscheidung vornehmen!!

- aus **reduzierter ZSF** (siehe Folie 3.9) kann man Lösung direkt ablesen; um (reduzierte) ZSF zu erhalten nutzt man **elementare Zeilenumformungen**: Zeilen vertauschen, Zeile mit $k \in K \setminus \{0\}$ multiplizieren, $k$-faches einer Zeile zu anderer addieren
- Gauss: LGS in ZSF, Lösbarkeitsentscheidung; Jordan: LGS in reduzierte ZSF
- Nullzeilen dürfen bei Gauß-Jordan weggelassen werden (bei det nicht!), Spalten dürfen vertauscht werden (Variablennamen dranschreiben!)
- notieren der Lösungsmenge z.B. als $L = \{(2, 3t, 1, 5k) \mid t, k \in K\}$ oder als Menge von (hier 3) Vektoren, evtl. auch als Spanraum; so oder so Probe nicht vergessen!
- GF2 LGS mit $n$ Parametern in der Lösungsmenge hat $2^n$ konkrete Lösungen ($\mathbb{C}/\mathbb{R}$ LGS unendlich viele)

## 1.4 Vektorräume (VR)

- $K$-VR = algebraische Struktur $(V; \oplus, \underbrace{(k \mid k \in K)}_{\text{Skalarmultiplikation}})$ (beachte wo ; und wo , steht), muss VR-Axiome erfüllen
- zu Unterscheiden sind $0_V$ und $0_K$, beide eindeutig bestimmt
- $kv = 0_V \Leftrightarrow k = 0_K \lor v = 0_V$, $\quad (-k)v = \ominus kv$, $\quad (-1)v = \ominus v \qquad$ (nach V5 ist $\ominus v$ Inverses von $v$)
- $U$ heißt **Untervektorraum** (UVR) von $V$ wenn:
  1. $0_v \in U$
  2. $a, b \in U \Rightarrow a \oplus b \in U$ für alle $a, b \in U$ (abgeschlossen bzgl. $\oplus$)
  3. $a \in U, k \in K \Rightarrow ka \in U$ für alle $a \in U, k \in K$ (abgeschlossen bzgl. $\odot$)
  4. ($U \subseteq V$, immer zuerst prüfen!)
- $U_1, U_2$ UVR von $V \Rightarrow U_1 \cap U_2$ UVR von $V$; jeder UVR von $V$ ist ein $K$-VR

*VR Axiome nachweisen nicht prüfungsrelevant*

## 1.5 Spannräume und Basen

- für den $K$-VR $V$ mit $T \subseteq V$ ist $\text{Span}_K(T) = \langle T \rangle$ der kleinste UVR der $T$ enthält
- Berechnung: $\text{Span}(\{v_1, \dots, v_n\}) = \{k_1 v_1 \oplus \ldots \oplus k_n v_n \mid k_1, \dots, k_n \in K\}$
- $\langle V \rangle = V$, $\langle \emptyset \rangle = \{0_v\}$, für $T \subseteq V, V = \text{Span}(T)$ ist $T$ **Erzeugendensystem** von $V$
- Möglichkeiten zum Prüfen ob $T = \{v_1, \dots, v_n\}$ z.B. Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$ ist:
  1. gibt es überhaupt $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ lin. u. Vektoren in $T$?
  2. ist LGS $\left(\begin{array}{c|c} & a \\ v_1 \ldots v_n & b \\ & c \end{array}\right)$ lösbar?
- für eine **Basis** $B$ von $V$ gilt: $B$ ist lin. u. und $V = \text{Span}(B)$; alternativ kann geprüft werden:
  1. $B$ ist Erzeugendensystem von $V$, jede echte Teilmenge von $B$ ist kein Erzeugendensystem von $V$
  2. $B$ ist lin. u., $B \cup \{v\}$ $(v \in V, v \notin B)$ ist lin. a.
  3. für $V$ mit $\dim(V) = n$ genügt es zu Prüfen, ob ($B$ Erzeugendensystem mit $|B| = n$) oder ($B$ lin. u. und $|B| = n$)
- um Basis eines UVR $U = \text{Span}(M)$ zu finden schreibe Vektoren in $M$ als LGS und bestimme damit größtmögliche lin. u. Teilmenge von $M$
- zwei Basen von $V$ haben immer die gleiche Mächtigkeit $n =: \dim(V)$; Basis vom Nullraum ist $\emptyset$
- ist $B = (b_1, \dots, b_n)$ <u>angeordnete</u> Basis von $V$, so lässt sich $v \in V$ als $v = k_1 b_1 \oplus \ldots \oplus k_n b_n$ darstellen und $v_B = \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$ heißt **Koordinatenvektor** von $v$ bzgl. $B$

## 1.6 Lineare Unabhängigkeit (lin. u. - keine offizielle Abkürzung)

- $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ist lin. u. wenn gilt: $k_1 v_1 \oplus \ldots \oplus k_n v_n = 0_V \Rightarrow k_1 = \ldots = k_n = 0_K$
- in einer Menge lin. a. Vektoren kann *mindestens ein* Vektor als LK der anderen dargestellt werden, es können aber i.A. *nicht alle* Vektoren der Menge als LK der jeweils anderen dargestellt werden!
- einige Möglichkeiten um $M = \{v_1, \ldots, v_n\}$ auf lin. u. zu prüfen:
  1. einfach LGS aufstellen (anders formuliert gilt also $\mathrm{Ker}[(v_1 \ldots v_n)] = \{0_V\} \Rightarrow$ lin .u.)
  2. es liegen in allen Vektoren in immer verschiedenen Komponenten Nullen vor $\Rightarrow$ lin. u. (z.B. $\{(0,1,0,4)^T, (0,0,3,0)^T, (2,0,0,0)\}$ lin. u.)
  3. $0_V \in M \Rightarrow$ *lin. a.*
  4. $\dim(V) = n \Rightarrow$ mehr als $n$ Vektoren sind immer *lin. a.*
  5. $\mathrm{rg}[(v_1 \ldots v_n)] = n$ bzw. $\dim(\mathrm{Ker}[(v_1 \ldots v_n)]) = 0$ bzw. $\det[(v_1 \ldots v_n)] \neq 0 \Rightarrow$ lin. u.
  6. $v_1, \ldots, v_n$ sind paarweise orthogonal $\Rightarrow$ lin. u.

*einfache Beweise sind prüfungsrelevant*

## 1.7 Eigenschaften von Matrizen und LGS

- **Kern** einer Matrix $\mathrm{Ker}(A)$ ist Lösungsmenge von $(A \mid 0_V)$ (dem zugehörigen homogenen LGS), $\mathrm{Ker}(A)$ ist ein VR
- Lösungsmengen inhomogener LGS sind keine VR; je zwei Lösungen des inhomogenen LGS unterscheiden sich um eine Lösung des homogenen LGS (=Kern der Koeffizientematrix)
- für $A = (s_1 \ldots s_n)$ ist der **Spaltenraum** $\mathrm{Col}(A) = \mathrm{Span}(\{s_1, \ldots, s_n\})$, $\dim(\mathrm{Col}(A))$ heißt Spaltenrang (entspricht maximaler Menge lin. u. Spaltenvektoren von $A$); ganz analog für **Zeilenraum** $\mathrm{Row}(A)$
- Es gilt $\dim(\mathrm{Col}(A))$=$\dim(\mathrm{Row}(A)) =: \mathrm{rg}(A)$ (**Rang** von $A$); Berechnung: $\mathrm{rg}(A) = \#$ nicht-Nullzeilen in ZSF
- **Dimensionsformel:** $A \in K^{m \times n} \Rightarrow \mathrm{rg}(A) + \dim(\mathrm{Ker}(A)) = n$; Lösbarkeitskriterium: $Ax = b$ lösbar $\Leftrightarrow \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A \mid b)$
- \# freie Parameter in der Lösungsmenge des homogenen LGS $= \dim(\mathrm{Ker}(A)) = n - \mathrm{rg}(A)$

$\approx$ *Ende LA 110.1*

## 1.8 Lineare Abbildungen

- sind $(V; \oplus_V, (k \mid k \in K)), (W; \oplus_W, (k \mid k \in K))$ VR über dem selben Körper, so ist $f : V \to W$ eine lineare Abbildung wenn für alle $a, b \in V, k \in K$ gilt:
  1. $f(a \oplus_V b) = f(a) \oplus_W f(b)$
  2. $f(ka) = kf(a)$
  3. statt 1. und 2. kann auch $f(a \oplus_V kb) = f(a) \oplus_W kf(b)$
- $f(k_1 v_1 \oplus_V \ldots \oplus_V k_n v_n) = k_1 f(v_1) \oplus_W \ldots \oplus_W k_n f(v_n)$
- Sei $\{b_1, \ldots, b_n\}$ Basis von $V$. **f injektiv** $\Leftrightarrow \{f(b_1), \ldots, f(b_n)\}$ lin. u. $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \{0_V\}$
  **f surjektiv** $\Leftrightarrow \mathrm{Span}(\{f(b_1), \ldots, f(b_n)\}) = W \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) = K$
- **f bijektiv** $\Leftrightarrow \{f(b_1), \ldots, f(b_n\}$ ist Basis von $W$
  Für Beweise bzgl. dieser 3 Eigenschaften bieten sich oft Gegenbeispiele an!
- $\mathrm{Ker}(f) = \{v \mid v \in V, f(v) = 0_W\}, 0_V \in \mathrm{Ker}(f)$; $\mathrm{Im}(f) = \{f(v) \mid v \in V\}$, $0_W \in \mathrm{Im}(f)$; beide UVR von $V/W$
- **Dimensionsformel für lineare Abbildungen:** $\dim(V) = n \Rightarrow \dim \mathrm{Im}(f) + \dim \mathrm{Ker}(f) = n$
- $f(v) = f(k_1 b_1 + \ldots + k_n b_n) = k_1 f(b_1) + \ldots k_n f(b_n)$ ($f$ durch Bilder der Basisvektoren eindeutig bestimmt)
- $\{e_1, \ldots, e_n\}$ Standardbasis von $K^n$, $f : K^n \to K^m \Rightarrow f(v) = \underbrace{(f(e_1) \ldots f(e_n))}_{\text{Abbildungsmatrix A}} v$
- allgemeiner gilt für $f : V \to W$ mit $B = (b_1, \ldots, b_n)/C$ angeordnete Basis von $V/W$: $f(v)_C = A_{BC} \cdot v_B$ mit **darstellender Matrix** $A_{BC} = (f(b_1)_C \ldots f(b_n)_C)$; $\Rightarrow \boldsymbol{f^{-1}}$ **:** $A_{BC}^{-1} \cdot f(v)_C = v_B$
- Aufstellen der darstellender Matrix: Setze $M_B = (b_1 \ldots b_n)$, es gilt $M_B f(b_i)_B = f(b_i) \Rightarrow f(b_i)_B = M_B^{-1} f(b_i)$
  $\Rightarrow A_{BB} = M_B^{-1}(f(b_1) \ldots f(b_n))$ (für $A_{BC}$ stattdessen $M_C^{-1}[f(b_1) \ldots f(b_n)]$)
- für $A_{BC}$ darstellende Matrix gilt $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Col}(A_{BC})$ und damit $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \mathrm{rg}(A_{BC})$; $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(A_{BC})$

*einfache Beweise sind prüfungsrelevant*

## 1.9 Determinante von $A \in K^{n\times n}$

- **Adjunkte** $A_{ij}$ entsteht aus $A$ durch streichen $i$-ter Zeile und $j$-ter Spalte
- Berechnung:
  1. **Regel von Sarrus** für $A \in K^{3\times 3}$ : $\det(A) = \underbrace{a_{11}a_{22}a_{33}}_{\text{Hauptdiagonale}} + \underbrace{a_{12}a_{23}a_{31}}_{\text{1 daneben}} + \underbrace{a_{13}a_{21}a_{32}}_{\dots}$
     ($a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ für $2 \times 2$) $\quad - \underbrace{a_{31}a_{22}a_{13}}_{\text{Nebendiagonale}} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$
  2. **Entwicklungssatz:** $\det(a_{11}) = a_{11}, \;\; \det(A) = \sum_{\underbrace{i=1}_{\text{bzw. } j}}^{n} -1^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$ (Schachbrettregel für Vorzeichen, möglichst nach schwach besetzten Zeilen/Spalten entwickeln)
  3. $A$ in die Form $\begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ bringen (oder Dreieck andersherum) $\Rightarrow \det(A) = a_{11} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$
- Umformungsregeln:
  1. $\det(B) = -\det(A)$ wenn $B$ aus $A$ durch Vertauschen zweier Zeilen/Spalten entsteht
  2. $\det(B) = k \cdot \det(A)$ wenn $B$ aus $A$ durch Multiplizieren von Zeile/Spalte mit $k \in K$ entsteht
  3. det unverändert durch addieren von $k$-fachem einer Zeile/Spalte zu *anderer* Zeile/Spalte
- $A$ enthält Nullzeile/Nullspalte/zwei paarweise lin. a. Zeilen/Spalten $\Rightarrow \det(A) = 0$
- $\det(A) = \det(A^T)$; $\det(A \cdot B) = \det(\mathrm{A}) \cdot \det(B)$ (**Multiplikationssatz**) $\Rightarrow \det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$

## 1.10 Eigenwerte und Eigenvektoren (EW und EV)

- $k \in K$ ist EW von $A$ wenn gilt $Av = kv$ ($\Rightarrow v$ ist EV zu $k$, dessen Richtung bei der von $A$ festgelegten linearen Abbildung nicht verändert wird), $v \in K^n \setminus \{0_{K^n}\}$
- Berechnung von $k$ über $\det(A - kE_n) = \chi_A(k) = 0$, mit $\chi_A(k)$ als **charakteristisches Polynom;** Beachte beim Rechnen eventuelle Vielfachheiten der Nullstellen von $\chi$!!; Polynome mit deg> 2 sollten mittels Umformungsregeln für det vermieden werden, binomische Formeln ausnutzen, quadratische Ergänzung
- da $\chi_A(k) = \det(A - kE_n)$ gilt $\det(A) = \chi_A(0)$
- Berechnung des **Eigenraums zum EW *k*** ( d.h. dem UVR von $K^n$, der genau die EV zu k *und* $0_v$ enthält): $\mathrm{Eig}_k(A) = \mathrm{Ker}(A - kE_n)$
- für einfache EW gilt stets $\dim \mathrm{Eig}_k(A) = 1$, durch Vielfachheiten können aber manchmal mehrere lin. u. EV zum gleichen EW gehören. EV zu paarweise verschiedenen EW sind immer lin. u.
- $\det(A) = k_1 \cdot \ldots \cdot k_n$, $\mathrm{Spur}(A) = k_1 + \ldots + k_n$

## 1.11 Eigenvektorbasen und diagonalisierbare Matrizen

- Hat $K^n$ Basis die aus EV von $A \in K^{n\times n}$ besteht, so sprechen wir von einer Eigenvektorbasis bzgl. $A$ des $K^n$
- $A$ mit EW $k_1, \ldots k_n$ und zugehörigen EV $v_1, \ldots, v_n$ ist diagonalisierbar g.d.w. gilt $\exists S, S^{-1}$ mit $S^{-1} \cdot A \cdot S = D$ und D Diagonalmatrix, es gilt:
  - $S = (v_1 \ldots v_n)$ und $D = \begin{pmatrix} k_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & k_n \end{pmatrix}$ (Reihenfolge der EV in $S$ = Reihenfolge der EW in $D$!!)
- Äquivalente Aussagen:
  1. A ist diagonalisierbar
  2. $A$ hat $n$ lin. u. EV
  3. $\exists$ Eigenvektorbasis bzgl $A$ des $K^n$
- **schnelles Potenzieren:** $A^k = (SDS^{-1})^k = SD^kS^{-1}$

## 1.12 Skalarprodukt • und Orthogonalität in euklidischen ℝ-VR

- für $u, v \in \mathbb{R}^n$ gilt $u \bullet v = u_1 v_1 + \ldots + u_n v_n = u^T v$; für reelle Polynome ist $p(x) \bullet q(x) = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$
- • ist **positiv definit** ($\geq 0$ für $u \bullet u$, 0 g.d.w. $u = 0_v$), **bilinear** (distributiv über + von links und rechts; homogen von links und rechts), **symmetrisch**( =kommutativ)
- ist $V$ ein ℝ-VR, so ist $(V; \bullet)$ ein euklidischer ℝ-VR, in dem gilt **Norm** $\|v\| = \sqrt{v \bullet v}$
- $\cos(\alpha) = \dfrac{u \bullet v}{\|u\| \cdot \|v\|}$ mit $\alpha \in [0, \pi]$!! $u \bullet v = 0 \Leftrightarrow u \perp v$ $v$ ist **Einheitsvektor** wenn $\|v\| = v \bullet v = 1$
- es gilt S.d.P. und dessen Umkehrung: $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \Leftrightarrow u \perp v$
- für $v \in V, u \in U = \text{Span}\{b_1, \ldots, b_n\}$ ist $U^\perp = \{v \mid u \bullet v = 0_\mathbb{R}$ für alle $u \in U\} = \text{Ker} \begin{pmatrix} b_1^T \\ \vdots \\ b_n^T \end{pmatrix}$ **Orthogonalraum** von $U$ in $V$
- orthogonale Projektion $\hat{v}$ von $v$ in $U = \text{Span}\{b_1, \ldots, b_n\} : \hat{v} = \text{proj}_U v = \dfrac{v \bullet b_1}{b_1 \bullet b_1} b_1 + \ldots + \dfrac{v \bullet b_n}{b_n \bullet b_n} b_n$
  (gilt nur für $\{b_1, \ldots, b_n\}$ OGB, sonst erst Gram-Schmidt anwenden!!)
- **Satz über die Orthogonalzerlegung:** für $v \in$ ℝ-VR $R$,$U$ UVR von $R$ gilt: $v = \hat{v} + w$ mit $\hat{v} \in U$ und $w \in U^\perp$

## 1.13 Orthogonal- und Orthonormalbasen (OGB/ONB -keine offiziellen Abkürzungen), Gram-Schmidt-Verfahren

- OGB ist Basis mit paarweise orthogonalen Basisvektoren, ONB ist OGB mit normierten Basisvektoren (Berechnung des normierten Vektors: $v' = \dfrac{v}{\|v\|}$)
- ist $\{b_1, \ldots, b_n\}$ OGB von $V$ und $v \in V$ dann gilt $v = \text{proj}_V v$
- Konstuktion einer OGB $\{b_1, \ldots, b_n\}$ von UVR $U$ eines ℝ-VR (geg.: Basis $\{u_1 \ldots u_n\}$):
  1. $b_1 := u_1$
  2. $b_{i+1} := u_{i+1} - \text{proj}_{\text{Span}(\{b_1, \ldots, b_i\})} u_{i+1}$
- ist $u_i$ fälschlicherweise lin. a. von den bereits behandelten Vektoren, so wird $b_i = 0_{\mathbb{R}^n}$

## 1.14 Äquivalente Aussagen für $A \in K^{n \times n}$

- Spaltenvektoren von $A$ sind lin. u.
- Zeilenvektoren von $A$ sind lin. u.
- $A$ in ZSF hat keine Nullzeilen
- $\text{rg}(A) = n$
- $\text{Ker}(A) = \{0_{K^n}\}$
- $\dim \text{Ker}(A) = 0$
- $\det(A) \neq 0$
- $\exists A^{-1}$
- $\exists (A^T)^{-1}$
- durch $A$ definierte lineare Abbildung bijektiv

*Bezeichnungen die nicht in der Aufgabenstellung gegeben sind müssen ggf. selber gesetzt werden, es kann z.B. für eine Menge von Vektoren nötig sein erst $b_1 := \ldots$ etc. zu setzen*