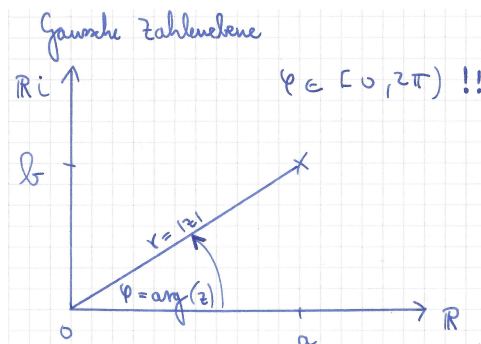


# Prüfungsrelevante Verfahren, Sätze und Rechenregeln

## 1 Lineare Algebra

### 1.1 Komplexe Zahlen

- $z = a + bi \in \mathbb{C}$  (**arithmetische** Darstellung)
- $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  ist Körper der komplexen Zahlen ( $+$  hat neutrales Element 0 und inverses Element  $-z$ ;  $\cdot$  hat neutrales Element 1 und inverses Element  $z^{-1}$ ; beide assoziativ und kommutativ;  $\cdot$  distributiv über  $+$ )
- $\frac{z_2}{z} = \frac{z_2}{z} \cdot \frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{z_2 \cdot \bar{z}}{a^2 + b^2}$ ,  $\operatorname{Re}(z) = a$ ,  $\operatorname{Im}(z) = b$ ,  $\bar{z} = a - bi$ ,  $r[\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)] = re^{i\varphi}$
- $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ ,  $\sin(\varphi) = \frac{a}{r}$ ,  $\cos(\varphi) = \frac{b}{r}$ ; ob arccos oder arcsin zur Bestimmung von  $\varphi$  zu verwenden ist wird aus Vorzeichen von  $\frac{a}{r}$  bzw.  $\frac{b}{r}$  klar
- **trigonometrische** und **eulersche** Darstellung erfolgt geometrisch in Polarkoordinaten  $z = (r, \varphi)$



für komplexe Zahlen sind auch einfache Beweise prüfungsrelevant, rechnen mit euler/trig jedoch nicht

### 1.2 Rechnen mit Matrizen

- Matrizen sind Abbildungen die einem Paar  $(i, j)$  ein Körperelement  $a_{ij}$  zuordnen
- Matrix  $A = (a_{ij}) = (a_{ij})_{m \times n}$ , es gibt  $i$  horizontale Zeilen und  $j$  vertikale Spalten; Hauptdiagonale von links oben nach rechts unten
- spezielle Matrizen: Einheitsmatrix, Nullmatrix, quadratische Matrix (auch "n-reihig") und Diagonalmatrix (quadratisch und  $a_{ij} = 0$  für  $i \neq j$ )
- Matrixmultiplikation:  $(a_{ij})_{m \times n} \cdot (b_{ij})_{n \times p} = (\sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj})_{m \times p}$
- $A^T$ : Zeilen und Spalten vertauschen
- $+$  kommutativ mit neutralem Element Nullmatrix;  $\cdot$  assoziativ mit neutralem Element Einheitsmatrix und Nullmatrix absorbiert;  $\cdot$  distributiv über  $+$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$ ,  $(kA)^T = kA^T$ ,  $(A^T)^T = A$ ,  $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$  (Reihenfolge !!)
- $A^{-1}$  ist zu ermitteln durch  $(A | E_n) \rightsquigarrow (A \text{ in ZSF} | E'_n) \rightsquigarrow (E_n | A^{-1})$  mit elementaren Zeilenumformungen  
A in ZSF hat Nullzeilen  $\Leftrightarrow \nexists A^{-1}$ ; Es gilt auch  $A^{-1} = \det(A)^{-1}(-1^{i+j} \det(A_{ji}))$
- $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \Rightarrow A^{-1} = \det(A)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

### 1.3 LGS und Gauß-Jordan

- $\text{GF}_2 = \{0, 1\}$ ,  $+$  und  $\cdot$  für  $\text{GF}_2$  wie in  $\mathbb{R} \bmod 2$  ( $\Rightarrow -a = a$ )
- **homogenes** LGS: alle unveränderlichen sind 0, Nulltupel ist immer eine Lösung; **inhomogenes** LGS: mindestens eine unveränderliche ist verschieden von 0, Nulltupel keine Lösung
- Matrixschreibweise für LGS:  $A \vec{x} = \vec{b}$ , Kurzform: Koeffizientenmatrix  $(A | b)$
- für LGS in **ZSF** (ZSF ist am besten am Beispiel zu verstehen, siehe Folie 3.7) gilt:  $L = \emptyset \Leftrightarrow \exists b$  in einer Nullzeile das verschieden von 0 ist; umgekehrt für  $L \neq \emptyset$

- aus **reduzierter ZSF** (siehe Folie 3.9) kann man Lösung direkt ablesen; um (reduzierte) ZSF zu erhalten nutzt man **elementare Zeilenumformungen**: Zeilen vertauschen, Zeile mit  $k \in K \setminus \{0\}$  multiplizieren, k-faches einer Zeile zu anderer addieren
- Gauss: LGS in ZSF, Lösbarkeitsentscheidung; Jordan: LGS in reduzierte ZSF
- Nullzeilen dürfen weggelassen werden, Spalten dürfen vertauscht werden (Variablennamen dranschreiben!)
- notieren der Lösungsmenge z.B. als  $L = \{(2, 3t, 1, 5k) \mid t, k \in K\}$  oder als Menge von (hier 3) Vektoren, evtl. auch als Spanraum; so oder so Probe nicht vergessen!
- GF2 LGS mit n Parametern in der Lösungsmenge hat  $2^n$  konkrete Lösungen ( $\mathbb{C}/\mathbb{R}$  LGS unendlich viele)

## 1.4 Vektorräume (VR)

- K-VR= algebraische Struktur  $(V; \oplus, \underbrace{(k \mid k \in K)}_{\text{Skalarmultiplikation}})$  (beachte wo ; und wo , steht), muss VR-Axiome erfüllen
- zu Unterscheiden sind  $0_v$  und  $0_k$ , beide eindeutig bestimmt
- $kv = 0_v \Leftrightarrow k = 0_k \vee v = 0_v$ ,  $(-k)v = \ominus kv$ ,  $(-1)v = \ominus v$  (nach V5 ist  $\ominus v$  Inverses von v)
- $U$  heißt **Untervektorraum** (UVR) von  $V$  wenn:
  1.  $0_v \in U$
  2.  $a, b \in U \Rightarrow a \oplus b \in U$  für alle  $a, b \in U$  (abgeschlossen bzgl.  $\oplus$ )
  3.  $a \in U, k \in K \Rightarrow ka \in U$  für alle  $a \in U, k \in K$  (abgeschlossen bzgl.  $\odot$ )
  4. ( $U \subseteq V$ , immer zuerst prüfen!)
- $U_1, U_2$  UVR von  $V \Rightarrow U_1 \cap U_2$  UVR von  $V$

VR Axiome nachweisen nicht prüfungsrelevant

## 1.5 Spanräume und Basen

- für  $T \subseteq V$  ist  $\text{Span}(T) = \langle T \rangle$  der kleinste UVR der  $T$  enthält
- Berechnung:  $\text{Span}(\{v_1, \dots, v_n\}) = \{k_1 v_1 \oplus \dots \oplus k_n v_n \mid k_1, \dots, k_n \in K\}$
- $\langle V \rangle = V$ ,  $\langle \emptyset \rangle = \{0_v\}$ , für  $T \subseteq V, V = \text{Span}(T)$  ist  $T$  **Erzeugendensystem** von  $V$
- Möglichkeiten zum Prüfen ob  $T = \{v_1, \dots, v_n\}$  z.B. Erzeugendensystem des  $\mathbb{R}^3$  ist:
  1. gibt es überhaupt  $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$  lin. u. Vektoren in  $T$ ?
  2. ist LGS  $\begin{pmatrix} a \\ v_1 \dots v_n \mid b \\ c \end{pmatrix}$  lösbar?
- für eine **Basis**  $B$  von  $V$  gilt:  $B$  ist lin. u. und  $V = \text{Span}(B)$ ; alternativ kann geprüft werden:
  1.  $B$  ist Erzeugendensystem von  $V$ , jede echte Teilmenge von  $B$  ist kein Erzeugendensystem von  $V$
  2.  $B$  ist lin. u.,  $B \cup \{v\} (v \in V, v \notin B)$  ist lin. a.
  3. für  $V$  mit  $\dim(V) = n$  genügt es zu Prüfen, ob ( $B$  Erzeugendensystem mit  $|B| = n$ ) oder ( $B$  lin. u. und  $|B| = n$ )
- zwei Basen von  $V$  haben immer die gleiche Mächtigkeit  $n =: \dim(V)$ ; Basis vom Nullraum ist  $\emptyset$
- ist  $B = (b_1, \dots, b_n)$  angeordnete Basis von  $V$ , so lässt sich  $v \in V$  als  $v = k_1 b_1 \oplus \dots \oplus k_n b_n$  darstellen und  $v_B = \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$  heißt **Koordinatenvektor** von  $v$  bzgl.  $B$

## 1.6 Lineare Unabhängigkeit (lin. u. - keine offizielle Abkürzung)

- $\{v_1, \dots, v_n\}$  ist lin. u. wenn gilt:  $k_1 v_1 \oplus \dots \oplus k_n v_n = 0_v \Rightarrow k_1 = \dots = k_n = 0_k$
- in einer Menge lin. a. Vektoren kann *mindestens ein* Vektor als LK der anderen dargestellt werden, es können aber i.A. *nicht alle* Vektoren der Menge als LK der jeweils anderen dargestellt werden!
- einige Möglichkeiten um  $M = \{v_1, \dots, v_n\}$  auf lin. u. zu prüfen:
  1. einfach LGS aufstellen (anders formuliert gilt also  $\text{Ker}[(v_1 \dots v_n)] = \{0_v\} \Rightarrow \text{lin. u.}$ )
  2. es liegen in allen Vektoren in immer verschiedenen Komponenten Nullen vor  $\Rightarrow \text{lin. u.}$   
(z.B.  $\{(0, 1, 0, 4)^T, (0, 0, 3, 0)^T, (2, 0, 0, 0)^T\}$  lin. u.)
  3.  $0_v \in M \Rightarrow \text{lin. a.}$
  4.  $\dim(V) = n \Rightarrow$  mehr als  $n$  Vektoren sind immer *lin. a.*
  5.  $\text{rg}[(v_1 \dots v_n)] = n$  bzw.  $\dim(\text{Ker}[(v_1 \dots v_n)]) = 0$  bzw.  $\det[(v_1 \dots v_n)] \neq 0 \Rightarrow \text{lin. u.}$
  6.  $v_1, \dots, v_n$  sind paarweise orthogonal  $\Rightarrow \text{lin. u.}$

*einfache Beweise sind prüfungsrelevant*

## 1.7 Eigenschaften von Matrizen und LGS

- **Kern** einer Matrix  $\text{Ker}(A)$  ist Lösungsmenge von  $(A \mid \vec{0})$  (dem zugehörigen homogenen LGS),  $\text{Ker}(A)$  ist ein VR
- Lösungsmengen inhomogener LGS sind keine VR; je zwei Lösungen des inhomogenen LGS unterscheiden sich um eine Lösung des homogenen LGS (=Kern der Koeffizientenmatrix)
- für  $A = (s_1 \dots s_n)$  ist der **Spaltenraum**  $\text{Col}(A) = \text{Span}(\{s_1, \dots, s_n\})$ ,  $\dim(\text{Col}(A))$  heißt Spaltenrang (entspricht maximaler Menge lin. u. Spaltenvektoren von A); ganz analog für **Zeilenraum**  $\text{Row}(A)$
- Es gilt  $\dim(\text{Col}(A)) = \dim(\text{Row}(A)) =: \text{rg}(A)$  (Rang von A); Berechnung:  $\text{rg}(A) = \#$  nicht-Nullzeilen in ZSF
- **Dimensionsformel:**  $A \in K^{m \times n} \Rightarrow \text{rg}(A) + \dim(\text{Ker}(A)) = n$ ; Lösbarkeitskriterium:  $Ax = b$  lösbar  $\Leftrightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(A \mid b)$

$\approx$  Ende LA 110.1

## 1.8 Lineare Abbildungen

- sind  $(V; \oplus_V, (k \mid k \in K))$ ,  $(W; \oplus_W, (k \mid k \in K))$  VR über dem selben Körper, so ist  $f : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung wenn:
  1.  $f(a \oplus_V b) = f(a) \oplus_W f(b)$
  2.  $f(ka) = k f(a)$
- Sei  $\{b_1, \dots, b_n\}$  Basis von  $V$ . **f injektiv**  $\Leftrightarrow \{f(b_1), \dots, f(b_n)\}$  lin. u.  $\Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \{0_v\}$
- **f surjektiv**  $\Leftrightarrow \text{Span}(\{f(b_1), \dots, f(b_n)\}) = W$
- **f bijektiv**  $\Leftrightarrow \{f(b_1), \dots, f(b_n)\}$  ist Basis von  $W$   
Für Beweise bzgl. dieser 3 Eigenschaften bieten sich oft Gegenbeispiele an!
- $\text{Ker}(f) = \{v \mid v \in V, f(v) = 0_W\}$ , enthält stets  $0_V$ ;  $\text{Im}(f) = \{f(v) \mid v \in V\}$ , enthält stets  $0_W$ ; beide bilden UVR von  $V$  bzw.  $W$
- **Dimensionsformel für lineare Abbildungen:**  $\dim(V) = n \Rightarrow \dim \text{Im}(f) + \dim \text{Ker}(f) = n$
- $f(v) = f(k_1 b_1 + \dots + k_n b_n) = k_1 f(b_1) + \dots + k_n f(b_n)$  (f durch Bilder der Basisvektoren eindeutig bestimmt)
- $\{e_1, \dots, e_n\}$  Standardbasis von  $K^n$ ,  $f : K^n \rightarrow K^m \Rightarrow f(v) = \underbrace{(f(e_1) \dots f(e_n))}_\text{Abbildungsmatrix A} v$
- allgemeiner gilt für  $f : V \rightarrow W$  mit  $B = (b_1, \dots, b_n)/C$  angeordnete Basis von  $V/W$ :  $f(v)_C = A_{BC} \cdot v_B$  mit **darstellender Matrix**  $A_{BC} = (f(b_1)_C \dots f(b_n)_C)$ ;  $\Rightarrow f^{-1} : A_{BC}^{-1} \cdot f(v)_C = v_B$
- für  $f_1 : V_1 \rightarrow V_2, f_2 : V_2 \rightarrow V_3$  gilt  $f_2 \circ f_1$  hat darstellende Matrix  $A_{B_2 B_3} \cdot A_{B_1 B_2}$

*einfache Beweise sind prüfungsrelevant*

## 1.9 Determinanten

- $\det(A)$  entspricht Faktor um den sich Flächeninhalt zwischen 2 Vektoren bei  $f : x \mapsto Ax$  ändert ( $A_P = ab \cdot \sin \alpha$ )
- **Adjunkte**  $A_{ij}$  entsteht aus  $A$  durch streichen  $i$ -ter Zeile und  $j$ -ter Spalte entsteht
- Berechnung:

$$1. \text{ Regel von Sarrus für } A \in K^{3 \times 3} : \det(A) = \underbrace{a_{11}a_{22}a_{33}}_{\text{Hauptdiagonale}} + \underbrace{a_{12}a_{23}a_{31}}_{1 \text{ daneben}} + \underbrace{a_{13}a_{21}a_{32}}_{\dots} - \underbrace{a_{31}a_{22}a_{13}}_{\text{Nebendiagonale}} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

( $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$  für  $2 \times 2$ )

$$2. \text{ Entwicklungssatz: } \det(a_{11}) = a_{11}, \quad \det(A) = \sum_{\substack{i=1 \\ \text{bzw. } j}}^n -1^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij}) \quad (\text{Schachbrettregel für Vorzeichen})$$

- $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) \Rightarrow \det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$

## 1.10 Eigenwerte und Eigenvektoren

•

## 1.11 Äquivalente Aussagen für $A \in K^{n \times n}$

- Spaltenvektoren von  $A$  sind lin. u.
- Zeilenvektoren von  $A$  sind lin. u.
- $A$  in ZSF hat keine Nullzeilen
- $\text{rg}(A) = n$
- $\text{Ker}(A) = \{0_v\}$
- $\dim \text{Ker}(A) = 0$
- $\det(A) \neq 0$
- $\exists A^{-1}$
- $\exists (A^T)^{-1}$