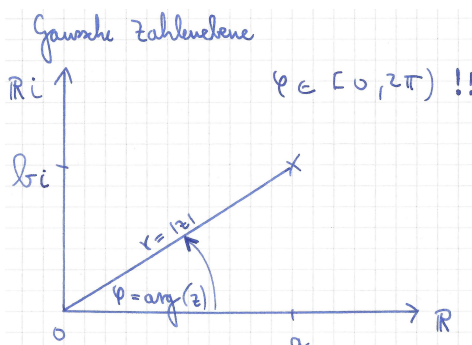


Prüfungsrelevante Verfahren, Sätze und Rechenregeln

1 Lineare Algebra

1.1 Komplexe Zahlen

- $z = a + bi \in \mathbb{C}$ (**arithmetische** Darstellung)
- $(\mathbb{C}; +, \cdot)$ ist Körper der komplexen Zahlen ($+$ hat neutrales Element 0 und inverses Element $-z$; \cdot hat neutrales Element 1 und inverses Element z^{-1} ; beide assoziativ und kommutativ; \cdot distributiv über $+$)
- $\frac{z_2}{z} = \frac{z_2}{z} \cdot \frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{z_2 \cdot \bar{z}}{a^2 + b^2}$, $\operatorname{Re}(z) = a$, $\operatorname{Im}(z) = b$, $\bar{z} = a - bi$, $r[\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)] = re^{i\varphi}$
- $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\sin(\varphi) = \frac{b}{r}$, $\cos(\varphi) = \frac{a}{r}$; zur Bestimmung von φ prüfen wo \sin^{-1} und \cos^{-1} den selben Wert annehmen
- **trigonometrische** und **eulersche** Darstellung erfolgt geometrisch in Polarkoordinaten $(r, \varphi) = (|z|, \arg(z))$



für komplexe Zahlen sind auch einfache Beweise prüfungsrelevant, rechnen mit euler/trig jedoch nicht

1.2 Rechnen mit Matrizen

- Matrizen sind Abbildungen, die einem Paar (i, j) ein Körperelement a_{ij} zuordnen
- Matrix $A = (a_{ij}) = (a_{ij})_{m \times n}$, es gibt i horizontale Zeilen und j vertikale Spalten; Hauptdiagonale von links oben nach rechts unten
- spezielle Matrizen: Einheitsmatrix, Nullmatrix, quadratische Matrix (auch "n-reihig") und Diagonalmatrix (quadratisch und $a_{ij} = 0$ für $i \neq j$)
- Matrixmultiplikation: $(a_{ij})_{m \times n} \cdot (b_{ij})_{n \times p} = (\sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj})_{m \times p}$
- A^T : Zeilen und Spalten vertauschen; $k(ABC) = AB(kC) = A(kB)C$ etc.
- $+$ kommutativ und assoziativ mit neutralem Element Nullmatrix; \cdot assoziativ mit neutralem Element Einheitsmatrix und Nullmatrix absorbiert; \cdot distributiv über $+$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$, $(kA)^T = kA^T$, $(A^T)^T = A$, $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ (Reihenfolge !!)
- A^{-1} ist zu ermitteln durch $(A | E_n) \rightsquigarrow (A \text{ in ZSF} | E'_n) \rightsquigarrow (E_n | A^{-1})$ mit elementaren Zeilenumformungen
A in ZSF hat Nullzeilen $\Leftrightarrow \nexists A^{-1}$; Es gilt auch $A^{-1} = \det(A)^{-1} (-1)^{i+j} \det(A_{ji})$
- $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$; $A \in K^{2 \times 2} \Rightarrow A^{-1} = \det(A)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

1.3 LGS und Gauß-Jordan

- $\text{GF}_2 = \{0, 1\}$, $+$ und \cdot für GF_2 wie in $\mathbb{R} \bmod 2$ ($\Rightarrow -a = a$)
- **homogenes** LGS: alle Unveränderlichen sind 0, Nulltupel ist immer eine Lösung; **inhomogenes** LGS: mindestens eine Unveränderliche ist verschieden von 0, Nulltupel keine Lösung
- Matrixschreibweise für LGS: $A \vec{x} = \vec{b}$, Kurzform: erweiterte Koeffizientenmatrix $(A | b)$
- für LGS in **ZSF** (ZSF ist am besten am Beispiel zu verstehen, siehe Folie 3.7) gilt: $L = \emptyset \Leftrightarrow \exists b$ in einer Nullzeile das verschieden von 0 ist; umgekehrt für $L \neq \emptyset \Rightarrow$ bei LGS mit Parameter ggf. Fallunterscheidung vornehmen!!

- aus **reduzierter ZSF** (siehe Folie 3.9) kann man Lösung direkt ablesen; um (reduzierte) ZSF zu erhalten nutzt man **elementare Zeilenumformungen**: Zeilen vertauschen, Zeile mit $k \in K \setminus \{0\}$ multiplizieren, k -faches einer Zeile zu anderer addieren
- Gauss: LGS in ZSF, Lösbarkeitsentscheidung; Jordan: LGS in reduzierte ZSF
- Nullzeilen dürfen bei Gauß-Jordan weggelassen werden (bei det nicht!), Spalten dürfen vertauscht werden (Variablenamen dranschreiben!)
- notieren der Lösungsmenge z.B. als $L = \{(2, 3t, 1, 5k) \mid t, k \in K\}$ oder als Menge von (hier 3) Vektoren, evtl. auch als Spanraum; so oder so Probe nicht vergessen!
- GF2 LGS mit n Parametern in der Lösungsmenge hat 2^n konkrete Lösungen (\mathbb{C}/\mathbb{R} LGS unendlich viele)

1.4 Vektorräume (VR)

- K -VR = algebraische Struktur $(V; \oplus, \underbrace{(k \mid k \in K)}_{\text{Skalarmultiplikation}})$ (beachte wo ; und wo , steht), muss VR-Axiome erfüllen
- zu Unterscheiden sind 0_V und 0_K , beide eindeutig bestimmt
- $kv = 0_V \Leftrightarrow k = 0_K \vee v = 0_V$, $(-k)v = \ominus kv$, $(-1)v = \ominus v$ (nach V5 ist $\ominus v$ Inverses von v)
- U heißt **Untervektorraum** (UVR) von V wenn:
 1. $0_v \in U$
 2. $a, b \in U \Rightarrow a \oplus b \in U$ für alle $a, b \in U$ (abgeschlossen bzgl. \oplus)
 3. $a \in U, k \in K \Rightarrow ka \in U$ für alle $a \in U, k \in K$ (abgeschlossen bzgl. \odot)
 4. ($U \subseteq V$, immer zuerst prüfen!)
- U_1, U_2 UVR von $V \Rightarrow U_1 \cap U_2$ UVR von V ; jeder UVR von V ist ein K -VR

VR Axiome nachweisen nicht prüfungsrelevant

1.5 Spannräume und Basen

- für den K -VR V mit $T \subseteq V$ ist $\text{Span}_K(T) = \langle T \rangle$ der kleinste UVR der T enthält
- Berechnung: $\text{Span}(\{v_1, \dots, v_n\}) = \{k_1 v_1 \oplus \dots \oplus k_n v_n \mid k_1, \dots, k_n \in K\}$
- $\langle V \rangle = V$, $\langle \emptyset \rangle = \{0_v\}$, für $T \subseteq V$, $V = \text{Span}(T)$ ist T **Erzeugendensystem** von V
- Möglichkeiten zum Prüfen ob $T = \{v_1, \dots, v_n\}$ z.B. Erzeugendensystem des \mathbb{R}^3 ist:
 1. gibt es überhaupt $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ lin. u. Vektoren in T ?
 2. ist LGS $\begin{pmatrix} & a \\ v_1 \dots v_n & b \\ & c \end{pmatrix}$ lösbar?
- für eine **Basis** B von V gilt: B ist lin. u. und $V = \text{Span}(B)$; alternativ kann geprüft werden:
 1. B ist Erzeugendensystem von V , jede echte Teilmenge von B ist kein Erzeugendensystem von V
 2. B ist lin. u., $B \cup \{v\} (v \in V, v \notin B)$ ist lin. a.
 3. für V mit $\dim(V) = n$ genügt es zu Prüfen, ob (B Erzeugendensystem mit $|B| = n$) oder (B lin. u. und $|B| = n$)
- um Basis eines UVR $U = \text{Span}(M)$ zu finden schreibe Vektoren in M als LGS und bestimme damit größtmögliche lin. u. Teilmenge von M
- zwei Basen von V haben immer die gleiche Mächtigkeit $n =: \dim(V)$; Basis vom Nullraum ist \emptyset
- ist $B = (b_1, \dots, b_n)$ angeordnete Basis von V , so lässt sich $v \in V$ als $v = k_1 b_1 \oplus \dots \oplus k_n b_n$ darstellen und $v_B = \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$ heißt **Koordinatenvektor** von v bzgl. B

1.6 Lineare Unabhängigkeit (lin. u. - keine offizielle Abkürzung)

- $\{v_1, \dots, v_n\}$ ist lin. u. wenn gilt: $k_1 v_1 \oplus \dots \oplus k_n v_n = 0_V \Rightarrow k_1 = \dots = k_n = 0_K$
- in einer Menge lin. a. Vektoren kann *mindestens ein* Vektor als LK der anderen dargestellt werden, es können aber i.A. *nicht alle* Vektoren der Menge als LK der jeweils anderen dargestellt werden!
- einige Möglichkeiten um $M = \{v_1, \dots, v_n\}$ auf lin. u. zu prüfen:
 1. einfach LGS aufstellen (anders formuliert gilt also $\text{Ker}[(v_1 \dots v_n)] = \{0_V\} \Rightarrow \text{lin. u.}$)
 2. es liegen in allen Vektoren in immer verschiedenen Komponenten Nullen vor \Rightarrow lin. u.
(z.B. $\{(0, 1, 0, 4)^T, (0, 0, 3, 0)^T, (2, 0, 0, 0)\}$ lin. u.)
 3. $0_V \in M \Rightarrow \text{lin. a.}$
 4. $\dim(V) = n \Rightarrow$ mehr als n Vektoren sind immer lin. a.
 5. $\text{rg}[(v_1 \dots v_n)] = n$ bzw. $\dim(\text{Ker}[(v_1 \dots v_n)]) = 0$ bzw. $\det[(v_1 \dots v_n)] \neq 0 \Rightarrow \text{lin. u.}$
 6. v_1, \dots, v_n sind paarweise orthogonal \Rightarrow lin. u.

einfache Beweise sind prüfungsrelevant

1.7 Eigenschaften von Matrizen und LGS

- **Kern** einer Matrix $\text{Ker}(A)$ ist Lösungsmenge von $(A \mid 0_V)$ (dem zugehörigen homogenen LGS), $\text{Ker}(A)$ ist ein VR
- Lösungsmengen inhomogener LGS sind keine VR; je zwei Lösungen des inhomogenen LGS unterscheiden sich um eine Lösung des homogenen LGS (=Kern der Koeffizientenmatrix)
- für $A = (s_1 \dots s_n)$ ist der **Spaltenraum** $\text{Col}(A) = \text{Span}(\{s_1, \dots, s_n\})$, $\dim(\text{Col}(A))$ heißt Spaltenrang (entspricht maximaler Menge lin. u. Spaltenvektoren von A); ganz analog für **Zeilenraum** $\text{Row}(A)$
- Es gilt $\dim(\text{Col}(A)) = \dim(\text{Row}(A)) =: \text{rg}(A)$ (**Rang** von A); Berechnung: $\text{rg}(A) = \#$ nicht-Nullzeilen in ZSF
- **Dimensionsformel:** $A \in K^{m \times n} \Rightarrow \text{rg}(A) + \dim(\text{Ker}(A)) = n$; Lösbarkeitskriterium: $Ax = b$ lösbar $\Leftrightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(A \mid b)$
- $\#$ freie Parameter in der Lösungsmenge des homogenen LGS $= \dim(\text{Ker}(A)) = n - \text{rg}(A)$

\approx Ende LA 110.1

1.8 Lineare Abbildungen

- sind $(V; \oplus_V, (k \mid k \in K)), (W; \oplus_W, (k \mid k \in K))$ VR über dem selben Körper, so ist $f: V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung wenn für alle $a, b \in V, k \in K$ gilt:
 1. $f(a \oplus_V b) = f(a) \oplus_W f(b)$
 2. $f(ka) = kf(a)$
 3. statt 1. und 2. kann auch $f(a \oplus_V kb) = f(a) \oplus_W kf(b)$
- $f(k_1 v_1 \oplus_V \dots \oplus_V k_n v_n) = k_1 f(v_1) \oplus_W \dots \oplus_W k_n f(v_n)$
- Sei $\{b_1, \dots, b_n\}$ Basis von V . **f injektiv** $\Leftrightarrow \{f(b_1), \dots, f(b_n)\}$ lin. u. $\Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \{0_V\}$
f surjektiv $\Leftrightarrow \text{Span}(\{f(b_1), \dots, f(b_n)\}) = W \Leftrightarrow \text{Im}(f) = W$
- **f bijektiv** $\Leftrightarrow \{f(b_1), \dots, f(b_n)\}$ ist Basis von W
Für Beweise bzgl. dieser 3 Eigenschaften bieten sich oft Gegenbeispiele an!
- $\text{Ker}(f) = \{v \mid v \in V, f(v) = 0_W\}$, $0_V \in \text{Ker}(f)$; $\text{Im}(f) = \{f(v) \mid v \in V\}$, $0_W \in \text{Im}(f)$; beide UVR von V/W
- **Dimensionsformel für lineare Abbildungen:** $\dim(V) = n \Rightarrow \dim \text{Im}(f) + \dim \text{Ker}(f) = n$
- $f(v) = f(k_1 b_1 + \dots + k_n b_n) = k_1 f(b_1) + \dots + k_n f(b_n)$ (f durch Bilder der Basisvektoren eindeutig bestimmt)
- $\{e_1, \dots, e_n\}$ Standardbasis von K^n , $f: K^n \rightarrow K^m \Rightarrow f(v) = \underbrace{(f(e_1) \dots f(e_n))}_{\text{Abbildungsmatrix } A} v$
- allgemeiner gilt für $f: V \rightarrow W$ mit $B = (b_1, \dots, b_n)/C$ angeordnete Basis von V/W : $f(v)_C = A_{BC} \cdot v_B$ mit **darstellender Matrix** $A_{BC} = (f(b_1)_C \dots f(b_n)_C)$; $\Rightarrow f^{-1}: A_{BC}^{-1} \cdot f(v)_C = v_B$
- Aufstellen der darstellender Matrix: Setze $M_B = (b_1 \dots b_n)$, es gilt $M_B f(b_i)_B = f(b_i) \Rightarrow f(b_i)_B = M_B^{-1} f(b_i)$
 $\Rightarrow A_{BB} = M_B^{-1} (f(b_1) \dots f(b_n))$ (für A_{BC} stattdessen $M_C^{-1} [f(b_1) \dots f(b_n)]$)
- für A_{BC} darstellende Matrix gilt $\text{Im}(f) = \text{Col}(A_{BC})$ und damit $\dim(\text{Im}(f)) = \text{rg}(A_{BC})$; $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(A_{BC})$

einfache Beweise sind prüfungsrelevant

1.9 Determinante von $A \in K^{n \times n}$

- **Adjunkte** A_{ij} entsteht aus A durch streichen i -ter Zeile und j -ter Spalte
- Berechnung:

$$1. \text{ Regel von Sarrus für } A \in K^{3 \times 3} : \det(A) = \underbrace{a_{11}a_{22}a_{33}}_{\text{Hauptdiagonale}} + \underbrace{a_{12}a_{23}a_{31}}_{1 \text{ daneben}} + \underbrace{a_{13}a_{21}a_{32}}_{\dots} - \underbrace{a_{31}a_{22}a_{13}}_{\text{Nebendiagonale}} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

(a₁₁a₂₂ - a₁₂a₂₁ für 2 × 2)

$$2. \text{ Entwicklungssatz: } \det(a_{11}) = a_{11}, \quad \det(A) = \sum_{\substack{i=1 \\ \text{bzw. } j}}^n -1^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij}) \quad (\text{Schachbrettregel für Vorzeichen, möglichst nach schwach besetzten Zeilen/Spalten entwickeln})$$

$$3. A \text{ in die Form } \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ bringen (oder Dreieck andersherum)} \Rightarrow \det(A) = a_{11} \cdot \dots \cdot a_{nn}$$

- Umformungsregeln:
 1. $\det(B) = -\det(A)$ wenn B aus A durch Vertauschen zweier Zeilen/Spalten entsteht
 2. $\det(B) = k \cdot \det(A)$ wenn B aus A durch Multiplizieren von Zeile/Spalte mit $k \in K$ entsteht
 3. \det unverändert durch addieren von k -fachem einer Zeile/Spalte zu *anderer* Zeile/Spalte
- A enthält Nullzeile/Nullspalte/zwei paarweise lin. a. Zeilen/Spalten $\Rightarrow \det(A) = 0$
- $\det(A) = \det(A^T)$; $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$ (**Multiplikationssatz**) $\Rightarrow \det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$

1.10 Eigenwerte und Eigenvektoren (EW und EV)

- $k \in K$ ist EW von A wenn gilt $Av = kv$ ($\Rightarrow v$ ist EV zu k , dessen Richtung bei der von A festgelegten linearen Abbildung nicht verändert wird), $v \in K^n \setminus \{0_{K^n}\}$
- Berechnung von k über $\det(A - kE_n) = \chi_A(k) = 0$, mit $\chi_A(k)$ als **charakteristisches Polynom**; Beachte beim Rechnen eventuelle Vielfachheiten der Nullstellen von χ !!; Polynome mit $\deg > 2$ sollten mittels Umformungsregeln für \det vermieden werden, binomische Formeln ausnutzen, quadratische Ergänzung
- da $\chi_A(k) = \det(A - kE_n)$ gilt $\det(A) = \chi_A(0)$
- Berechnung des **Eigenraums zum EW k** (d.h. dem UVR von K^n , der genau die EV zu k und 0_v enthält): $\text{Eig}_k(A) = \text{Ker}(A - kE_n)$
- EV zu paarweise verschiedenen EW sind lin. u. (Beachte: durch Vielfachheiten können mehrere EV zu gleichen EW gehören, diese sind möglicherweise lin. a.)
- $\det(A) = k_1 \cdot \dots \cdot k_n$, $\text{Spur}(A) = k_1 + \dots + k_n$

1.11 Eigenvektorbasen und diagonalisierbare Matrizen

- Hat K^n Basis die aus EV von $A \in K^{n \times n}$ besteht, so sprechen wir von einer Eigenvektorbasis bzgl. A des K^n
- A mit EW k_1, \dots, k_n und zugehörigen EV v_1, \dots, v_n ist diagonalisierbar g.d.w. gilt $\exists S, S^{-1}$ mit $S^{-1} \cdot A \cdot S = D$ und D Diagonalmatrix, es gilt:

$$- S = (v_1 \dots v_n) \text{ und } D = \begin{pmatrix} k_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & k_n \end{pmatrix} \quad (\text{Reihenfolge der EV in } S = \text{Reihenfolge der EW in } D!!)$$

- Äquivalente Aussagen:
 1. A ist diagonalisierbar
 2. A hat n lin. u. EV
 3. \exists Eigenvektorbasis bzgl. A des K^n
- **schnelles Potenzieren:** $A^k = (SDS^{-1})^k = SD^kS^{-1}$

1.12 Skalarprodukt • und Orthogonalität in euklidischen \mathbb{R} -VR

- für $u, v \in \mathbb{R}^n$ gilt $u \bullet v = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n = u^T v$; für reelle Polynome ist $p(x) \bullet q(x) = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx$
- • ist **positiv definit** (≥ 0 für $u \bullet u$, 0 g.d.w. $u = 0_v$), **bilinear** (distributiv über + von links und rechts; homogen von links und rechts), **symmetrisch** (=kommutativ)
- ist V ein \mathbb{R} -VR, so ist $(V; \bullet)$ ein euklidischer \mathbb{R} -VR, in dem gilt **Norm** $\|v\| = \sqrt{v \bullet v}$
- $\cos(\alpha) = \frac{u \bullet v}{\|u\| \cdot \|v\|}$ mit $\alpha \in [0, \pi]$!! $u \bullet v = 0 \Leftrightarrow u \perp v$ v ist **Einheitsvektor** wenn $\|v\| = v \bullet v = 1$
- es gilt S.d.P. und dessen Umkehrung: $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \Leftrightarrow u \perp v$
- für $v \in V, u \in U = \text{Span}\{b_1, \dots, b_n\}$ ist $U^\perp = \{v \mid u \bullet v = 0_{\mathbb{R}} \text{ für alle } u \in U\} = \text{Ker} \begin{pmatrix} b_1^T \\ \vdots \\ b_n^T \end{pmatrix}$ **Orthogonalraum** von U in V
- orthogonale Projektion \hat{v} von v in $U = \text{Span}\{b_1, \dots, b_n\}$: $\hat{v} = \text{proj}_U v = \frac{v \bullet b_1}{b_1 \bullet b_1} b_1 + \dots + \frac{v \bullet b_n}{b_n \bullet b_n} b_n$ (gilt nur für $\{b_1, \dots, b_n\}$ OGB, sonst erst Gram-Schmidt anwenden!!)
- **Satz über die Orthogonalzerlegung:** für $v \in \mathbb{R}$ -VR R, U UVR von R gilt: $v = \hat{v} + w$ mit $\hat{v} \in U$ und $w \in U^\perp$

1.13 Orthogonal- und Orthonormalbasen (OGB/ONB -keine offiziellen Abkürzungen), Gram-Schmidt-Verfahren

- OGB ist Basis mit paarweise orthogonalen Basisvektoren, ONB ist OGB mit normierten Basisvektoren (Berechnung des normierten Vektors: $v' = \frac{v}{\|v\|}$)
- ist $\{b_1, \dots, b_n\}$ OGB von V und $v \in V$ dann gilt $v = \text{proj}_V v$
- Konstruktion einer OGB $\{b_1, \dots, b_n\}$ von UVR U eines \mathbb{R} -VR (geg.: Basis $\{u_1 \dots u_n\}$):
 1. $b_1 := u_1$
 2. $b_{i+1} := u_{i+1} - \text{proj}_{\text{Span}(\{b_1, \dots, b_i\})} u_{i+1}$
- ist u_i fälschlicherweise lin. a. von den bereits behandelten Vektoren, so wird $b_i = 0_{\mathbb{R}^n}$

1.14 Äquivalente Aussagen für $A \in K^{n \times n}$

- Spaltenvektoren von A sind lin. u.
- Zeilenvektoren von A sind lin. u.
- A in ZSF hat keine Nullzeilen
- $\text{rg}(A) = n$
- $\text{Ker}(A) = \{0_{K^n}\}$
- $\dim \text{Ker}(A) = 0$
- $\det(A) \neq 0$
- $\exists A^{-1}$
- $\exists (A^T)^{-1}$
- durch A definierte lineare Abbildung bijektiv

Bezeichnungen die nicht in der Aufgabenstellung gegeben sind müssen ggf. selber gesetzt werden, es kann z.B. für eine Menge von Vektoren nötig sein erst $b_1 := \dots$ etc. zu setzen