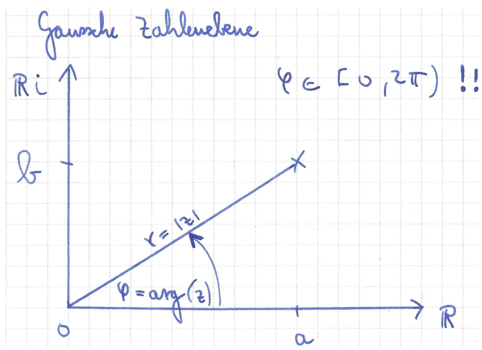
Prüfungsrelevante Verfahren, Sätze und Rechenregeln

1 Lineare Algebra

1.1 Komplexe Zahlen

- $z = a + bi \in \mathbb{C}$ (**arithmetische** Darstellung)
- $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist Körper der komplexen Zahlen ($+$ hat neutrales Element 0 und inverses Element $-z$; $\cdot$ hat neutrales Element 1 und inverses Element z^{-1}; beide assoziativ und kommutativ; $\cdot$ distributiv über $+$)
- $\frac{z_2}{z} = \frac{z_2}{z} \cdot \frac{\overline{z}}{\overline{z}} = \frac{z_2 \cdot \overline{z}}{a^2 + b^2}$, $\mathrm{Re}(z) = a$, $\mathrm{Im}(z) = b$, $\overline{z} = a - bi$, $r[\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)] = re^{i\varphi}$
- $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\sin(\varphi) = \frac{a}{r}$, $\cos(\varphi) = \frac{b}{r}$; ob arccos oder arcsin zur Bestimmung von φ zu verwenden ist wird aus Vorzeichen von $\frac{a}{r}$ bzw. $\frac{b}{r}$ klar
- **trigonometrische** und **eulersche** Darstellung erfolgt geometrisch in Polarkoordinaten $z = (r, \varphi)$



für komplexe Zahlen sind auch einfache Beweise prüfungsrelevant, rechnen mit euler/trig jedoch nicht

1.2 Rechnen mit Matrizen

- Matrizen sind Abbildungen die einem Paar (i, j) ein Körperelement a_{ij} zuordnen
- Matrix $A = (a_{ij}) = (a_{ij})_{m \times n}$, es gibt i horizontale Zeilen und j vertikale Spalten; Hauptdiagonale von links oben nach rechts unten
- spezielle Matrizen: Einheitsmatrix, Nullmatrix, quadratische Matrix (auch "n-reihig") und Diagonalmatrix (quadratisch und $a_{ij} = 0$ für $i \neq j$)
- Matrixmultiplikation: $(a_{ij})_{m \times n} \cdot (b_{ij})_{n \times p} = (\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj})_{m \times p}$
- A^T: Zeilen und Spalten vertauschen
- $+$ kommutativ mit neutralem Element Nullmatrix; $\cdot$ assoziativ mit neutralem Element Einheitsmatrix und Nullmatrix absorbiert; $\cdot$ distributiv über $+$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$, $(kA)^T = kA^T$, $(A^T)^T = A$, $(A \cdot B)^T) = B^T \cdot A^T$ (Reihenfolge !!)
- A^{-1} ist zu ermitteln durch $(A \mid E_n) \rightsquigarrow (A \text{ in ZSF} \mid E_n') \rightsquigarrow (E_n \mid A^{-1})$ mit elementaren Zeilenumformungen
  A in ZSF hat Nullzeilen $\Leftrightarrow \nexists A^{-1}$; Es gilt auch $A^{-1} = \det(A)^{-1}(-1^{i+j} \det(A_{ji}))$
- $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \Rightarrow A^{-1} = \det(A)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

1.3 LGS und Gauß-Jordan

- GF2=$\{0, 1\}$, $+$ und $\cdot$ für GF2 wie in $\mathbb{R}$ mod 2 ($\Rightarrow -a = a$)
- **homogenes** LGS: alle unveränderlichen sind 0, Nulltupel ist immer eine Lösung; **inhomogenes** LGS: mindestens eine unveränderliche ist verscheiden von 0, Nulltupel keine Lösung
- Matrixschreibweise für LGS: $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$, Kurzform: Koeffizientenmatrix $(A \mid b)$
- für LGS in **ZSF** (ZSF ist am besten am Beispiel zu verstehen, siehe Folie 3.7) gilt: $L = \emptyset \Leftrightarrow \exists b$ in einer Nullzeile das verschieden von 0 ist; umgekehrt für $L \neq \emptyset$

- aus **reduzierter ZSF** (siehe Folie 3.9) kann man Lösung direkt ablesen; um (reduzierte) ZSF zu erhalten nutzt man **elementare Zeilenumformungen**: Zeilen vertauschen, Zeile mit $k \in K \setminus \{0\}$ multiplizieren, k-faches einer Zeile zu anderer addieren
- Gauss: LGS in ZSF, Lösbarkeitsentscheidung; Jordan: LGS in reduzierte ZSF
- Nullzeilen dürfen weggelassen werden, Spalten dürfen vertauscht werden (Variablennamen dranschreiben!)
- notieren der Lösungsmenge z.B. als $L = \{(2, 3t, 1, 5k) \mid t, k \in K\}$ oder als Menge von (hier 3) Vektoren, evtl. auch als Spanraum; so oder so Probe nicht vergessen!
- GF2 LGS mit n Parametern in der Lösungsmenge hat 2^n konkrete Lösungen ($\mathbb{C}/\mathbb{R}$ LGS unendlich viele)

1.4 Vektorräume (VR)

- K-VR= algebraische Struktur $(V; \oplus, \underbrace{(k \mid k \in K)}_{\text{Skalarmultiplikation}})$ *(beachte wo ; und wo , steht),* muss VR-Axiome erfüllen
- zu Unterscheiden sind 0_v und 0_k, beide eindeutig bestimmt
- $kv = 0_v \Leftrightarrow k = 0_k \vee v = 0_v, \quad (-k)v = \ominus kv, \quad (-1)v = \ominus v$ (nach V5 ist $\ominus v$ Inverses von v)
- U heißt **Untervektorraum** (UVR) von V wenn:
  1. $0_v \in U$
  2. $a, b \in U \Rightarrow a \oplus b \in U$ für alle $a, b \in U$ (abgeschlossen bzgl. $\oplus$)
  3. $a \in U, k \in K \Rightarrow ka \in U$ für alle $a \in U, k \in K$ (abgeschlossen bzgl. $\odot$)
  4. ($U \subseteq V$, immer zuerst prüfen!)
- U_1, U_2 UVR von $V \Rightarrow U_1 \cap U_2$ UVR von V

VR Axiome nachweisen nicht prüfungsrelevant

1.5 Spanräume und Basen

- für $T \subseteq V$ ist $\mathrm{Span}(T) = \langle T \rangle$ der kleinste UVR der T enthält
- Berechnung: $\mathrm{Span}(\{v_1, \ldots, v_n\}) = \{k_1 v_1 \oplus \ldots \oplus k_n v_n \mid k_1, \ldots, k_n \in K\}$
- $\langle V \rangle = V, \ \langle \emptyset \rangle = \{0_v\}$, für $T \subseteq V, V = \mathrm{Span}(T)$ ist T **Erzeugendensystem** von V
- Möglichkeiten zum Prüfen ob $T = \{v_1, \ldots, v_n\}$ z.B. Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$ ist:
  1. gibt es überhaupt $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ lin. u. Vektoren in T?
  2. ist LGS $\left(\begin{array}{c|c} & a \\ v_1 \ldots v_n & b \\ & c \end{array}\right)$ lösbar?
- für eine **Basis** B von V gilt: B ist lin. u. und $V = \mathrm{Span}(B)$; alternativ kann geprüft werden:
  1. B ist Erzeugendensystem von V, jede echte Teilmenge von B ist kein Erzeugendensystem von V
  2. B ist lin. u., $B \cup \{v\}$ $(v \in V, v \notin B)$ ist lin. a.
  3. für V mit $\dim(V) = n$ genügt es zu Prüfen, ob (B Erzeugendensystem mit $|B| = n$) oder (B lin. u. und $|B| = n$)
- zwei Basen von V haben immer die gleiche Mächtigkeit $n =: \dim(V)$; Basis vom Nullraum ist $\emptyset$
- ist $B = (b_1, \ldots, b_n)$ <u>angeordnete</u> Basis von V, so lässt sich $v \in V$ als $v = k_1 b_1 \oplus \ldots \oplus k_n b_n$ darstellen und $v_B = \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$ heißt **Koordinatenvektor** von v bzgl. B

1.6 Lineare Unabhängigkeit (lin. u. - keine offizielle Abkürzung)

- $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ist lin. u. wenn gilt: $k_1 v_1 \oplus \ldots \oplus k_n v_n = 0_v \Rightarrow k_1 = \ldots = k_n = 0_k$
- in einer Menge lin. a. Vektoren kann *mindestens ein* Vektor als LK der anderen dargestellt werden, es können aber i.A. *nicht alle* Vektoren der Menge als LK der jeweils anderen dargestellt werden!
- einige Möglichkeiten um $M = \{v_1, \ldots, v_n\}$ auf lin. u. zu prüfen:
  1. einfach LGS aufstellen (anders formuliert gilt also $\mathrm{Ker}[(v_1 \ldots v_n)] = \{0_v\} \Rightarrow$ lin .u.)
  2. es liegen in allen Vektoren in immer verschiedenen Komponenten Nullen vor $\Rightarrow$ lin. u. (z.B. $\{(0,1,0,4)^T, (0,0,3,0)^T, (2,0,0,0)\}$ lin. u.)
  3. $0_v \in M \Rightarrow$ *lin. a.*
  4. $\dim(V) = n \Rightarrow$ mehr als n Vektoren sind immer *lin. a.*
  5. $\mathrm{rg}[(v_1 \ldots v_n)] = n$ bzw. $\dim(\mathrm{Ker}[(v_1 \ldots v_n)]) = 0$ bzw. $\det[(v_1 \ldots v_n)] \neq 0 \Rightarrow$ lin. u.
  6. $v_1, \ldots, v_n$ sind paarweise orthogonal $\Rightarrow$ lin. u.

einfache Beweise sind prüfungsrelevant

1.7 Eigenschaften von Matrizen und LGS

- **Kern** einer Matrix $\mathrm{Ker}(A)$ ist Lösungsmenge von $(A \mid \vec{0})$ (dem zugehörigen homogenen LGS), $\mathrm{Ker}(A)$ ist ein VR
- Lösungsmengen inhomogener LGS sind keine VR; je zwei Lösungen des inhomogenen LGS unterscheiden sich um eine Lösung des homogenen LGS (=Kern der Koeffizientematrix)
- für $A = (s_1 \ldots s_n)$ ist der **Spaltenraum** $\mathrm{Col}(A) = \mathrm{Span}(\{s_1, \ldots, s_n\})$, $\dim(\mathrm{Col}(A))$ heißt Spaltenrang (entspricht maximaler Menge lin. u. Spaltenvektoren von A); ganz analog für **Zeilenraum** $\mathrm{Row}(A)$
- Es gilt $\dim(\mathrm{Col}(A))$=$\dim(\mathrm{Row}(A))$ =: $\mathrm{rg}(A)$ (Rang von A); Berechnung: $\mathrm{rg}(A) = \#$ nicht-Nullzeilen in ZSF
- **Dimensionsformel:** $A \in K^{m \times n} \Rightarrow \mathrm{rg}(A) + \dim(\mathrm{Ker}(A)) = n$; Lösbarkeitskriterium: $Ax = b$ lösbar $\Leftrightarrow \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A \mid b)$

$\approx$ *Ende LA 110.1*

1.8 Lineare Abbildungen

- sind $(V; \oplus_V, (k \mid k \in K)), (W; \oplus_W, (k \mid k \in K))$ VR über dem selben Körper, so ist $f : V \to W$ eine lineare Abbildung wenn:
  1. $f(a \oplus_V b) = f(a) \oplus_V f(b)$
  2. $f(ka) = kf(a)$
- Sei $\{b_1, \ldots, b_n\}$ Basis von V. **f injektiv** $\Leftrightarrow \{f(b_1), \ldots, f(b_n)\}$ lin. u. $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \{0_v\}$
- **f surjektiv** $\Leftrightarrow \mathrm{Span}(\{f(b_1), \ldots, f(b_n)\}) = W$
- **f bijektiv** $\Leftrightarrow \{f(b_1), \ldots, f(b_n\}$ ist Basis von W
  Für Beweise bzgl. dieser 3 Eigenschaften bieten sich oft Gegenbeispiele an!
- $\mathrm{Ker}(f) = \{v \mid v \in V, f(v) = 0_W\}$, enthält stets 0_V; $\mathrm{Im}(f) = \{f(v) \mid v \in V\}$, enthält stets 0_W;
  beide bilden UVR von V bzw. W
- **Dimensionsformel für lineare Abbildungen:** $\dim(V) = n \Rightarrow \dim \mathrm{Im}(f) + \dim \mathrm{Ker}(f) = n$
- $f(v) = f(k_1 b_1 + \ldots + k_n b_n) = k_1 f(b_1) + \ldots k_n f(b_n)$ (f durch Bilder der Basisvektoren eindeutig bestimmt)
- $\{e_1, \ldots, e_n\}$ Standardbasis von K^n, $f : K^n \to K^m \Rightarrow f(v) = \underbrace{(f(e_1) \ldots f(e_n))}_{\text{Abbildungsmatrix A}} v$
- allgemeiner gilt für $f : V \to W$ mit $B = (b_1, \ldots, b_n)/C$ angeordnete Basis von V/W: $f(v)_C = A_{BC} \cdot v_B$ mit **darstellender Matrix** $A_{BC} = (f(b_1)_C \ldots f(b_n)_C)$; $\Rightarrow \boldsymbol{f^{-1}}$ **:** $A_{BC}^{-1} \cdot f(v)_C = v_B$

einfache Beweise sind prüfungsrelevant

1.9 Determinante von $A \in K^{n \times n}$

- **Adjunkte** A_{ij} entsteht aus A durch streichen i-ter Zeile und j-ter Spalte
- Berechnung:
  1. **Regel von Sarrus** für $A \in K^{3\times 3}$: $\det(A) = \underbrace{a_{11}a_{22}a_{33}}_{\text{Hauptdiagonale}} + \underbrace{a_{12}a_{23}a_{31}}_{\text{1 daneben}} + \underbrace{a_{13}a_{21}a_{32}}_{\dots}$
     $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ für $2 \times 2)$ $\quad - \underbrace{a_{31}a_{22}a_{13}}_{\text{Nebendiagonale}} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$
  2. **Entwicklungssatz:** $\det(a_{11}) = a_{11}$, $\det(A) = \sum_{\underbrace{i=1}_{\text{bzw. } j}}^{n} -1^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$ (Schachbrettregel für Vorzeichen)
  3. A in die Form $\begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ bringen (oder Dreieck andersherum) $\Rightarrow \det(A) = a_{11} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$
- Umformungsregeln:
  1. $\det(B) = -\det(A)$ wenn B aus A durch Vertauschen Zeile/Spalte entsteht
  2. $\det(B) = k \cdot \det(A)$ wenn B aus A durch Multiplizieren von Zeile/Spalte mit $k \in K$ entsteht
  3. det unverändert durch addieren von Zeile/Spalte zu anderer Zeile/Spalte
- A enthält Nullzeile/Nullspalte/zwei paarweise lin. a. Zeilen/Spalten $\Rightarrow \det(A) = 0$
- $\det(A \cdot B) = \det(\text{A}) \cdot \det(B) \Rightarrow \det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$

1.10 Eigenwerte und Eigenvektoren (EW und EV)

- $k \in K$ ist EW von A wenn gilt $Av = kv$ ($\Rightarrow v$ ist EV zu k, dessen Richtung bei der von A festgelegten linearen Abbildung nicht verändert wird), $v \in K^n \setminus \{0_{K^n}\}$
- Berechnung von k über $\det(A - kE_n) = \chi_A(k) = 0$, mit $\chi_A(k)$ als **charakteristisches Polynom;** Beachte beim Rechnen eventuelle Vielfachheiten der Nullstellen von χ!!; Polynome mit deg>2 sollten mittels Umformungsregeln für det vermieden werden
- Berechnung des **Eigenraums zum EW k** (d.h. dem UVR von K^n, der genau die EV zu k *und* 0_v enthält): $\text{Eig}_k(A) = \text{Ker}(A - kE_n)$
- EV zu paarweise verschiedenen EW sind lin. u. (Beachte: durch Vielfachheiten können mehrere EV zu gleichen EW gehören)

1.11 Eigenvektorbasen und diagonalisierbare Matrizen

- Hat K^n Basis die aus EV von $A \in K^{n\times n}$ besteht, so sprechen wir von einer Eigenvektorbasis bzgl. A des K^n
- A mit EW $k_1, \dots k_n$ und zugehörigen EV $v_1, \dots, v_n$ ist diagonalisierbar wenn gilt $\exists S, S^{-1}$ mit $S^{-1} \cdot A \cdot S = D$ und D Diagonalmatrix. Es gilt:
  - $S = (v_1 \dots v_n)$ und $D = \begin{pmatrix} k_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & k_n \end{pmatrix}$
- Äquivalente Aussagen:
  1. A ist diagonalisierbar
  2. A hat n lin. u. EV
  3. $\exists$ Eigenvektorbasis bzgl A des K^n
- **schnelles Potenzieren:** $A^k = (SDS^{-1})^k = SD^kS^{-1}$

1.12 Skalarprodukt $\bullet$ und Orthogonalität in euklidischen $\mathbb{R}$-VR

- für $u, v \in \mathbb{R}^n$ gilt $u \bullet v = u_1 v_1 + \ldots + u_n v_n = u^T v$; für reelle Polynome ist $p(x) \bullet q(x) = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$
- $\bullet$ ist **positiv definit** (≥ 0 für $u \bullet u$, 0 g.d.w. $u = 0_v$), **bilinear** (distributiv über + von links und rechts; homogen von links und rechts), **symmetrisch**(=kommutativ)
- ist V ein $\mathbb{R}$-VR, so ist $(V; \bullet)$ ein euklidischer $\mathbb{R}$-VR, in dem gilt **Norm** $\|v\| = \sqrt{v \bullet v}$
- $\cos(\alpha) = \dfrac{u \bullet v}{\|u\| \cdot \|v\|}$ mit $\alpha \in [0, 2\pi]$!! $\quad u \bullet v = 0 \Leftrightarrow u \perp v \quad$ v ist **Einheitsvektor** wenn $\|v\| = v \bullet v = 1$
- es gilt S.d.P.: $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \Leftrightarrow u \perp v$
- für $v \in V, u \in U = \text{Span}\{b_1, \ldots, b_n\}$ ist $U^\perp = \{v \mid u \bullet v = 0_\mathbb{R}\} = \text{Ker}\begin{pmatrix} b_1^T \\ \vdots \\ b_n^T \end{pmatrix}$ **Orthogonalraum** von U in V
- orthogonale Projektion $\hat{v}$ von v in $U = \text{Span}\{b_1, \ldots, b_n\} : \hat{v} = \text{proj}_U v = \dfrac{v \bullet b_1}{b_1 \bullet b_1} b_1 + \ldots + \dfrac{v \bullet b_n}{b_n \bullet b_n} b_n$
- **Satz über die Orthogonalzerlegung:** für $v \in \mathbb{R}^n, U$ UVR von $\mathbb{R}^n$ gilt: $v = \hat{v} + w$ mit $\hat{v} \in U$ und $w \in U^\perp$

1.13 Orthogonal- und Orthonormalbasen (OGB/ONB), Gram-Schmidt-Verfahren

- OGB ist Basis mit paarweise orthogonalen Basisvektoren, ONB ist OGB mit normierten Basisvektoren
- ist $\{b_1, \ldots, b_n\}$ OGB von V und $v \in V$ dann gilt $v = \text{proj}_V v$
- Konstuktion einer OGB $\{b_1, \ldots, b_n\}$ von UVR U des $\mathbb{R}^n$ (geg.: Basis $\{u_1 \ldots u_n\}$):
  1. $b_1 := u_1$
  2. $b_{i+1} := u_{i+1} - \text{proj}_{\text{Span}(\{b_1, \ldots, b_i\})} u_{i+1}$

1.14 Äquivalente Aussagen für $A \in K^{n \times n}$

- Spaltenvektoren von A sind lin. u.
- Zeilenvektoren von A sind lin. u.
- A in ZSF hat keine Nullzeilen
- $\text{rg}(A) = n$
- $\text{Ker}(A) = \{0_v\}$
- $\dim \text{Ker}(A) = 0$
- $\det(A) \neq 0$
- $\exists A^{-1}$
- $\exists (A^T)^{-1}$