Logika klasyczna z kwantyfikatorami

1. Pokazać, że poniższe formuły są tautologiami logiki kwantyfikatorów zdań

   (a) $\neg\forall x(A(x)) \leftrightarrow \exists x(\neg A(x))$

   (b) $\neg\exists x(A(x)) \leftrightarrow \forall x(\neg A(x))$

   (c) $\exists x\forall y(A(x,y)) \rightarrow \forall y\exists x(A(x,y))$

   (d) $\exists x(A(x) \vee B(x)) \leftrightarrow \exists x(A(x)) \vee \exists x(B(x))$

   (e) $\forall x(A(x) \wedge B(x)) \leftrightarrow \forall x(A(x)) \wedge \forall x(B(x))$

   (f) $\exists x(A(x) \wedge B(x)) \rightarrow \exists x(A(x)) \wedge \exists x(B(x))$

   (g) $\forall x(A(x)) \vee \forall x(B(x)) \rightarrow \forall x(A(x) \vee B(x))$

2. Sprawdzić, czy dana formuła jest tautologią logiki kwantyfikatorów

   (a) $\exists x(A(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow (\exists x A(x) \rightarrow \exists x B(x))$

   (b) $\forall y\exists x A(x,y) \rightarrow \exists x\forall y A(x,y)$

   (c) $\forall x(A(x) \vee B(x)) \rightarrow \forall x A(x) \vee \forall x B(x)$

   (d) $\exists x A(x) \wedge \exists x B(x) \rightarrow \exists x(A(x) \wedge B(x))$

3. Zanegować formuły:

   (a) $\exists x A(x) \rightarrow \forall y(A(y) \wedge B(x,y))$

   (b) $\forall x((A(x) \wedge \exists y B(y)) \vee \exists z R(x,y,z))$

   (c) $\forall x P(x) \wedge \exists y \neg(Q(x,y) \rightarrow R(x))$

   (d) $\forall x P(x) \rightarrow \exists y(Q(x,y) \wedge \neg R(x))$

   (e) $\forall y\exists x(A(x,y) \wedge (B(x) \wedge \neg C(y)))$

   (f) $\exists y\forall x(A(x,y) \rightarrow (B(x) \vee C(y)))$.

Zadania dodatkowe

4. Zapisać w koniunkcyjnej postaci normalnej formuły:

   (a) $p \rightarrow q$

   (b) $p \wedge q \rightarrow p \vee q$

   (c) $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$

   (d) $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$

   (e) $(p \rightarrow q) \vee (\neg r \wedge (r \rightarrow \neg p))$

   (f) $\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

5. Zapisać poniższe zdania i funkcje zdaniowe w języku logiki kwantyfikatorów z użyciem symboli $+, -, *, :, =, \neq, <, >, \leqslant, \geqslant$ oraz podnoszenia do potęgi.

   (a) Jeżeli liczby rzeczywiste x i y są różne, to x jest mniejsze od y lub y jest mniejsze od x.
   (b) Nie każda liczba naturalna jest podzielna przez 3.
   (c) Kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest liczbą dodatnią.
   (d) Jeżeli kwadrat liczby x nie jest liczbą dodatnią, to x jest zerem.
   (e) Nie istnieje największa liczba rzeczywista.
   (f) Istnieje największa niedodatnia liczba całkowita.
   (g) Jeżeli x jest liczbą naturalną, to każda jej wielokrotność jest liczbą parzystą.
   (h) Żadna liczba całkowita dodatnia nie jest najmniejszą liczbą całkowitą.

6. W poniższych formułach wskazać zmienne wolne i zmienne związane (MO 3.73-3.85)

   (a) $\forall x A(x,y,z)$

   (b) $\forall x\forall y A(x,y,z)$

   (c) $\exists x A(x,y,z)$

   (d) $\exists x\forall y A(x,y,z) \rightarrow B(x,y,z)$

   (e) $\forall x\forall y A(x,y,z) \wedge \exists z B(x,y,z)$

   (f) $\forall x A(x,y,z) \rightarrow \exists x(\exists y B(x,y,z) \wedge \forall z C(x,y,z))$