Teoria mocy

Definicja 1. Mówimy, że zbiory A i B są *równoliczne* albo że *mają taką samą moc* jeżeli istnieje bijekcja $f\colon A \to B$. Piszemy wówczas $|A| = |B|$ lub $A \sim B$.

Definicja 2. Mówimy, że *moc zbioru A jest niewiększa od mocy zbioru B* i piszemy wówczas $|A| \leqslant |B|$, gdy istnieje zbiór $C \subseteq B$ taki, że $A \sim B$.

Twierdzenie 3. *Następujące warunki są równoważne:*

- $|A| \leqslant |B|$,
- *istnieje injekcja* $f\colon A \to B$,
- *istnieje surjekcja* $g\colon B \to A$.

Twierdzenie 4 (Cantora-Bernsteina)**.** *Dla dowolnych zbiorów A, B:*

$$|A| \leqslant |B| \textit{ oraz } |B| \leqslant |A| \textit{ to wówczas } |A| = |B|.$$

Zadania

1. Pokazać z definicji, że następujące zbiory A i B są równoliczne:

   (a) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

   (b) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{N} \setminus \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

   (c) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{N} \setminus \{10\}$.

   (d) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{N} \setminus \{10, 11, 12, 13, 14\}$.

   (e) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{N} \setminus \{1, 2, 3, 7, 8, 9, 10\}$.

   (f) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{N} \setminus \{n \in \mathbb{N} \colon 10 \leqslant n \leqslant 100\}$.

   (g) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{N} \cup \{\frac{1}{2}\}$.

   (h) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{N} \cup \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\}$.

   (i) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{N} \cup \{-1, -2, -3\}$.

   (j) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{N} \cup \{-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{12}, -12\}$.

   (k) $A = \mathbb{N}$, $B = \{2k \colon k \in \mathbb{N}\}$.

   (l) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{Z}$.

2. Korzystając z Twierdzenia Cantora-Bernsteina oraz z równoliczności między podstawowymi zbiorami ($\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ oraz $\mathbb{R}, (0, 1)$) pokazać, że zbiory z zadania 1 z podpunktów 1g, 1i, 1e, 1f są równoliczne.

3. Podać moce poszczególnych zbiorów ($n \in \mathbb{N}$ dla zbioru skończonego, $\aleph_0$ dla przeliczalnego lub $\mathfrak{c}$ dla zbioru równolicznego z $\mathbb{R}$) wraz z uzasadnieniem.

   (a) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$,

   (b) $(0, 1)$,

   (c) $[-\pi, \pi]$,

   (d) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

   (e) $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$

   (f) $\{7k - 3 \colon k \in \mathbb{N}\}$

   (g) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

   (h) $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$

   (i) $\mathbb{N} \cup \mathbb{Q}$

   (j) $\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4, 5\})$

   (k) $\mathcal{P}(\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N})$

   (l) $\mathbb{N}^{\{0,1,2\}}$

   (m) $\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$

   (n) $\mathbb{N} \cup \{-7k - 3 \colon k \in \mathbb{N}\}$

   (o) $(\infty, 0)$

   (p) $\mathbb{N} \times \mathbb{Q}$

   (q) $\mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

   (r) $\{0, 1, 3\}^{\mathbb{Z}}$