Przestrzenie liniowe

1. W przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^2$ obliczyć

   (a) $[1,2]+[1,4]$,
   (b) $[1,3]+[3,1]$,
   (c) $[1,2]+[5,3]$,
   (d) $[3,14]-[3,16]$,
   (e) $4[1,3]$,
   (f) $3[5,3]$,
   (g) $3[5,4]+4[1,2]$,
   (h) $3[3,6]-2[2,4]$,
   (i) $2[2,3]-5[4,4]+2[10,-12]$,
   (j) $3[5,3]-2[3,-2]$,
   (k) $3[5,14]-2[12,2]$,
   (l) $2[13,2]-12[2,1]$.

2. W przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^3$ obliczyć

   (a) $[1,5,2]+[11,4,4]$,
   (b) $[1,2,3]+[3,1,3]$,
   (c) $[1,2,3]+[3,5,3]$,
   (d) $[3,-2,5]-[23,2,13]$,
   (e) $4[1,3,4]$,
   (f) $3[2,13,3]$,
   (g) $3[5,1,1]+4[4,-1,2]$,
   (h) $[2,2,1]-2[2,-4,4]$,
   (i) $3[2,2,2]-2[4,1,4]+2[1,0,-12]$,
   (j) $2[5,0,3]+2[3,-2,0]$,
   (k) $3[0,1,4]+3[1,2,2]$,
   (l) $2[1,3,2]-12[0,5,3]$.

3. W przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^2$ rozwiązać równanie:

   (a) $\mathbf{x}+[5,4]=[3,1]$,
   (b) $[2,6]-\mathbf{x}=[1,0]$,
   (c) $5\mathbf{x}=[5,2]$,
   (d) $4\mathbf{x}=[6,1]$,
   (i) $\mathbf{x}-[3,2]=[1,1]$,
   (j) $\mathbf{x}+[1,0]=[10,-2]$,
   (k) $2\mathbf{x}+[1,1]=[2,3]$,
   (l) $\mathbf{x}-[7,12]=[0,2]$.

4. W przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^3$ rozwiązać równanie:

   (a) $\mathbf{x}+[7,2,0]=[8,7,5]$,
   (b) $[9,6,3]-\mathbf{x}=[5,1,7]$,
   (c) $3\mathbf{x}=[9,-12,0]$,
   (d) $4\mathbf{x}+[1,1,6]=[5,13,6]$,
   (i) $\mathbf{x}-[2,1,3]=[5,2,5]$,
   (j) $[4,6,1]-2\mathbf{x}=[3,1,2]$,
   (k) $4\mathbf{x}=[12,-3,1]$,
   (l) $5\mathbf{x}+[1,2,2]=[5,20,30]$,

5. Niech $K$ będzie ciałem. Zbadać, które z następujących podzbiorów przestrzeni $K^4$ są podprzestrzeniami wektorowymi:

   (a) $U=\{[t,t+1,0,1]:t\in K\}$,
   (b) $U=\{[t,u,t+u,t-u]:t,u\in K\}$,
   (c) $U=\{[tu,u,t,0]:t,u\in K\}$,
   (d) $U=\{t[1,0,1,0]+u[0,-1,0,1]:t,u\in K\}$,
   (e) $U=\{[x,y,z,t]:x+y-z=0\}$,
   (f) $U=\{[x,y,z,t]:x+y-z=0 \text{ oraz } 2x+y=0\}$.

6. Zbadać, które z następujących podzbiorów przestrzeni $\mathbb{Z}_2^3$ są podprzestrzeniami liniowymi:

   (a) $U=\{[0,0],[1,2],[2,1]\}$,
   (b) $U=\{[0,0],[1,1],[2,2]\}$,
   (c) $U=\{[0,0],[1,2],[2,2]\}$.

7. W przestrzeni $\mathbb{R}^n$ wyznacz kombinację liniową wektorów $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ o współczynnikach odpowiednio $a_1, a_2, a_3$, gdzie:

   (a) $n = 2, \mathbf{v}_1 = [1, 0], \mathbf{v}_2 = [-2, 3], \mathbf{v}_3 = [1, 2], a_1 = -1, a_2 = 2, a_3 = 1$,

   (b) $n = 3, \mathbf{v}_1 = [1, 0, 2], \mathbf{v}_2 = [2, 1, 1], \mathbf{v}_3 = [1, 2, 0], a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 1$.

8. Sprawdzić, czy wektor $\mathbf{w}$ jest kombinacją liniową wektorów$\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ przestrzeni $\mathbb{R}^n$,jeżeli:

   (a) $n = 2, \mathbf{v}_1 = [1, 0], \mathbf{v}_2 = [2, 1], \mathbf{w} = [-1, -1]$,

   (b) $n = 3, \mathbf{v}_1 = [1, 0, 2], \mathbf{v}_2 = [1, 1, 1], \mathbf{v}_3 = [1, 2, 0], \mathbf{w} = [1, 1, 2]$.