Logika z kwantyfikatorami
Tableaux

Zadanie 1.

Niech formuła w zadaniu będzie oznaczona F

(a) Ponieważ w formule F występuje równoważność, przedstawimy formułę F za pomocą $\wedge$ oraz $\rightarrow$.

$$F_1 := \neg\forall x.\, A(x) \rightarrow \exists x. \neg A(x)$$

$$F_2 := \exists x.\neg A(x) \rightarrow \neg\forall x.\, A(x)$$

Pokażemy, że F_1 i F_2 są tautologiami, a zatem $(F_1 \wedge F_2) \longleftrightarrow F$.

F_1:

		$\neg\forall x.\, A(x) \rightarrow \exists x.\neg A(x)$ ✓	$(\rightarrow P)$
		$\exists x.\neg A(x)$	$(\exists P)$
$(\neg L)$	✓ $\neg\forall x.\, A(x)$	$\forall x.\, A(x)$ ✓	$(\forall P)$
		$A(x/k)$	
		$\neg A(x/k)$	możemy użyć stałą k! $(\neg P)$
	$A(x/k)$		

× (gałąź zamknięta)

Udowodniliśmy, że F_1 jest tautologią.

F_2

		$\exists x.\neg A(x) \rightarrow \neg\forall x.\, A(x)$ ✓	$(\rightarrow P)$
		$\neg\forall x.\, A(x)$ ✓	$(\neg P)$
$(\exists L)_k$	✓ $\exists x.\neg A(x)$		
$(\neg L)$	✓ $\neg A(x/k)$	$A(x/k)$	
	$\forall x.\, A(x)$		
$(\forall L)_k$	$A(x/k)$		

× (gałąź zamknięta).

Zatem F jest tautologią.

(b) zadanie podobne do (a), więc omijam.

(c) Rozważmy formułę

$$G := \exists x \forall y . A(x,y) \to \forall y \exists x . A(x,y)$$

UWAGA! Wystąpienia ~~xx~~ zmiennych są nieprzemienne, czyli

$$A(x,y) \neq A(y,x) \; !$$

	$\exists x \forall y . A(x,y) \to \forall y \exists x . A(x,y)$ ✓ $(\to P)$
	$\forall y \exists x . A(x,y)$ ✓ $(\forall P)$
✓ $\exists x \forall y . A(x,y)$	$\exists x . A(x, y/k)$ ∞_ℓ nowa stała! $(\exists P)$
$(\exists L)^m$	
$(\forall L)^\infty$ $\forall y . A(x/m, y)$	
$A(x/m, y/k)$	
	$A(x/\ell, y/k)$
	$\exists x . A(x, y/k)$ ∞_m
	$A(x/m, y/k)$

symbol ∞ przypomina nam, że tę regułę możemy używać dowolnie.

dowolna stała

jeszcze raz rozważmy $\exists x . A(x,y)$

X

Formuła G jest tautologią.

UWAGA.

Musieliśmy powtórzyć regułę i skorzystać z możliwości „zamienić" stałą z „ℓ" na „m"

(C') Dodatkowo rozpatrzymy formułę G', która jest odwrotna względem formuły G.

$\forall y \exists x . A(x,y) \rightarrow \exists x \forall y . A(x,y)$ ✓ $(\rightarrow P)$

$(\forall L)$ dowolna stała ∞ $\forall y \exists x . A(x,y)$	$\exists x \forall y . A(x,y)^{\infty}$ $(\exists P)$ dowolna stała!
$\exists x . A(x, y/n)$	$\forall y . A(x/m, y)$ ✓ $(\forall P)$ nowa stała!
nowa stała ✓ $(\exists P)$ $A(x/k, y/n)$	$A(x/m, y/n)$
	$\exists x \forall y . A(x,y)^{\infty}$ $(\exists P)$
⋮	$\forall y . A(x/k, y)$ ✓ $(\forall P)$
Proszę zobaczyć co będzie się działo!	$A(x/k, y/l)$ nowa stała

Chcemy zamienić stałą m na k żeby dostać spełnialność

mamy

Powtarzamy od początku

Musimy zastosować NOWĄ stałą!

Wniosek?

Zadanie 3.

Zanegować dane formuły tak, żeby negacja była bezpośrednio względem formuł A, B....

Warto wiedzieć, że:

1 $\neg(\neg A) \leftrightarrow A$

2 $\neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

3 $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$

4 $\neg(A \rightarrow B) \leftrightarrow (A \wedge \neg B)$

5 $\neg(\exists x. A) \leftrightarrow (\forall x. \neg A)$

6 $\neg(\forall x. A) \leftrightarrow (\exists x. \neg A)$

(a) $\neg(\exists x. A(x) \overset{4}{\rightarrow} \forall y (A(y) \wedge B(x,y)))$

$\leftrightarrow \exists x. A(x) \wedge \neg \forall y (A(y) \wedge B(x,y))$

$\leftrightarrow \exists x. A(x) \wedge \exists y (\neg A(y) \vee \neg B(x,y))$

(d) $\neg(\forall x P(x) \rightarrow \exists y (Q(x,y) \wedge \neg R(x)))$

$\leftrightarrow \forall x P(x) \wedge \neg(\exists y. (Q(x,y) \wedge \neg R(x)))$

$\leftrightarrow \forall x P(x) \wedge \forall y (\neg Q(x,y) \vee R(x))$