

Relacje porządku

1. Rozważmy relację $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ zdefiniowaną dla dowolnych liczb $a, b \in \mathbb{R}$ następująco:

$$aRb \Leftrightarrow \exists k \in [0, \infty)(a + k = b)$$

Pokazać, że relacja R jest liniowym porządkiem na zbiorze \mathbb{R} .

2. Rozważmy relację $R \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$ zdefiniowaną dla dowolnych zbiorów $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ następująco:

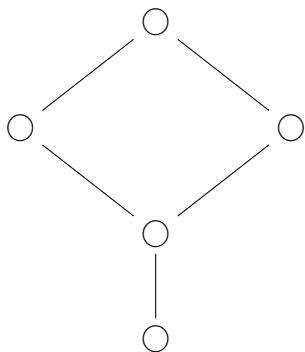
$$ARB \Leftrightarrow (A \subseteq B)$$

Pokazać, że jest to relacja częściowego porządku.

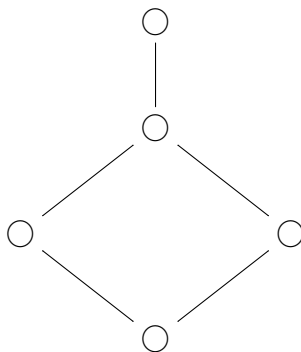
Podać przykład zbiorów A i B pokazujący, że nie jest to porządek liniowy.

3. Narysować diagram Hassego dla zbioru $X = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 12, 20\}$ z relacją podzielności. Jakie są elementy minimalne, maksymalne, największy, najmniejszy?
4. Narysować diagram Hassego dla zbioru $X = \{2, 4, 6, 12, 20, 36\}$ z relacją podzielności. Jakie są elementy minimalne, maksymalne, największy, najmniejszy?
5. Narysować diagram Hassego dla zbioru $X = \{2, 3, 5, 8, 10, 40, 240\}$ z relacją podzielności. Jakie są elementy minimalne, maksymalne, największy, najmniejszy?
6. Narysować diagram Hassego dla zbioru $X = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 10, 14, 28, 36\}$ z relacją podzielności. Jakie są elementy minimalne, maksymalne, największy, najmniejszy?
7. Narysować diagram Hassego dla zbioru $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 12, 28, 36\}$ z relacją podzielności. Jakie są elementy minimalne, maksymalne, największy, najmniejszy?
8. Narysować diagram Hassego dla zbioru $X = \{2, 3, 4, 6, 9, 12, 21, 24, 28, 36\}$ z relacją podzielności. Jakie są elementy minimalne, maksymalne, największy, najmniejszy?
9. Narysować diagram Hassego dla zbioru $X = \{2, 4, 6, 9, 12, 21, 24, 48, 63\}$ z relacją podzielności. Jakie są elementy minimalne, maksymalne, największy, najmniejszy?
10. Dla rodziny $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}\}$ z relacją zawierania $ARB \Leftrightarrow A \subseteq B$ narysować diagram Hassego. Wyznaczyć elementy wyróżnione.
11. Dla rodziny $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{3\}, \{2\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$ z relacją zawierania $ARB \Leftrightarrow A \subseteq B$ narysować diagram Hassego. Wyznaczyć elementy wyróżnione.
12. Dla rodziny zbiorów $\mathcal{A} = \{\{1\}, \{2\}, \{7\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{4, 6\}, \{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$ uporządkowanej relacją \subseteq narysować diagram Hassego. Wyznaczyć elementy wyróżnione.
13. Dla rodziny zbiorów $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 7\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 4\}, \{4, 6\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{4, 5, 6\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$ uporządkowanej relacją \subseteq narysować diagram Hassego. Wyznaczyć elementy wyróżnione.
14. Dla rodziny $\mathcal{A} = \{\{1\}, \{2\}, \{11\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{5, 6\}, \{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$ z relacją zawierania $ARB \Leftrightarrow A \subseteq B$ narysować diagram Hassego. Wyznaczyć elementy wyróżnione.
15. Dla rodziny zbiorów $\mathcal{A} = \{\{1\}, \{2\}, \{4\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{6, 7\}, \{2, 3, 4\}, \{5, 6, 7\}, \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}\}$ z relacją zawierania $ARB \Leftrightarrow A \subseteq B$ narysować diagram Hassego. Wyznaczyć elementy wyróżnione.

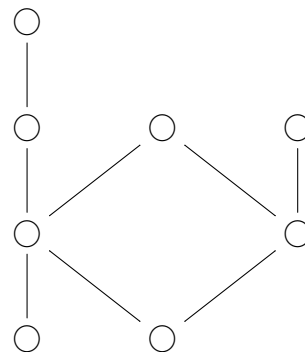
16. Wskazać zbiór $X \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0\}$, częściowo uporządkowany przez relację podzielności zgodnie z każdym z diagramów 1 – 6 uzupełniając diagram. Wskaż elementy wyróżnione.
17. Wskazać rodzinę $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$, częściowo uporządkowany przez relację zawierania zgodnie z każdym z diagramem 1 – 6 uzupełniając diagram. Wskaż elementy wyróżnione.



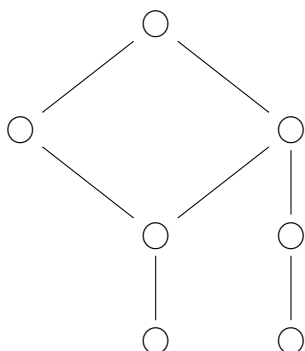
Diag.1



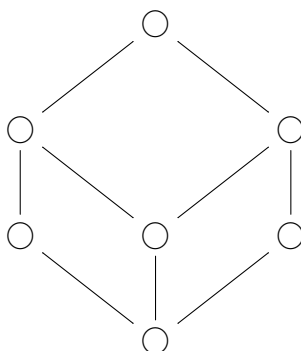
Diag.2



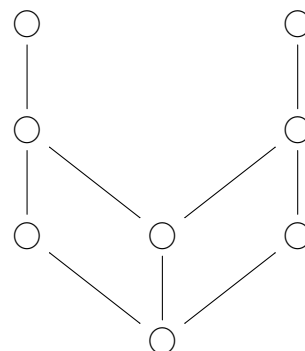
Diag.3



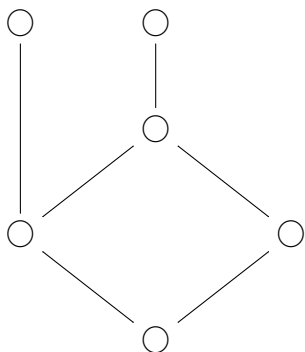
Diag.4



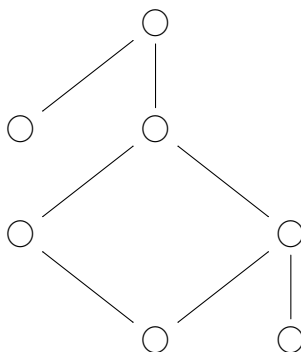
Diag.5



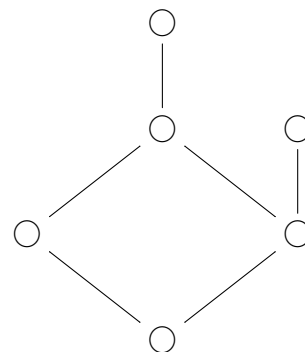
Diag.6



Diag.7



Diag.8



Diag.9

18. W zadaniach 2 – 15 znajdź zbiory częściowo uporządkowane izomorficzne z którymś z powyższych diagramów. Wskaż izomorfizm.

Zadania dodatkowe

19. Sprawdzić, czy zbiór (\mathbb{R}^2, R) jest liniowo uporządkowany, gdzie

$$\langle x, y \rangle R \langle u, v \rangle \Leftrightarrow (x < u) \vee (x = u \wedge y \leq v).$$

20. Sprawdzić, czy relacja $R \subset (\mathbb{N} \times \mathbb{N})^2$ dana wzorem

$$\langle x, y \rangle R \langle z, t \rangle \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} (xk = y) \wedge y \leq t$$

jest relacją częściowego porządku. Jeśli tak, wyznaczyć elementy wyróżnione (najmniejszy, największy, minimalne, maksymalne) w zbiorze

$$A = \{\langle 4, 96 \rangle, \langle 3, 48 \rangle, \langle 11, 21 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 44, 444 \rangle, \langle 12, 50 \rangle, \langle 15, 225 \rangle, \langle 120, 226 \rangle, \langle 687, 3 \rangle\}.$$