Przykładowe zadania na kolokwium nr 2

1. Sprawdzić, czy zbiór liczb wymiernych dodatnich $\mathbb{Q}^+$ wraz z działaniem $a \odot b = 2ab$ tworzy grupę abelową.

2. Udowodnić, że zbiór $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) := \{a + b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ ze zwykłymi działaniami dodawania i mnożenia w $\mathbb{R}$ jest ciałem.

3. Rozwiązać równanie $x^2 + x + 3 = 0$ w ciele $\mathbb{Z}_5$.

4. Udowodnić, że podzbiór $\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\} \subseteq \mathbb{Z}_3^3$ jest podprzestrzenią przestrzeni wektorowej $\mathbb{Z}_3^3$ nad ciałem $\mathbb{Z}_3$.

5. Sprawdzić, czy układ wektorów
$$\mathcal{B} = (\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix})$$
jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

6. Dla jakiej wartości parametru $a \in \mathbb{Z}_3$ układ wektorów $(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix})$ jest bazą przestrzeni $\mathbb{Z}_3^3$?

7. Dane jest przekształcenie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ określone następująco:
$$f(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 3x + 4y \\ 5x + 2y \end{bmatrix}.$$
Sprawdzić, że jest to przekształcenie liniowe. Wyznaczyć macierz endomorfizmu w bazach kanonicznych, jego wartości własnie i odpowiadające im podprzestrzenie wektorów własnych.