Matematyka 2
Algebra liniowa

Definicje, twierdzenia, przykłady

Informatyka Stosowana, I rok*

1 Przestrzenie wektorowe

1.1 Definicja. *Przestrzenią wektorową nad ciałem* K nazywamy niepusty zbiór V wraz z dwoma działaniami:

- wewnętrznym $V \times V \to V$ (dodawaniem wektorów) i
- zewnętrznym $K \times V \to V$ (mnożeniem wektora przez skalar)

o następujących własnościach:

1. V z dodawaniem wektorów jest grupą przemienną,
2. dla dowolnych $a, b \in K$ i $v \in V$ zachodzi rozdzielność mnożenia względem dodawania skalarów,
$$(a+b) \cdot v = a \cdot v \ + \ b \cdot v;$$
3. dla dowolnego $a \in K$ oraz $v, w \in V$ zachodzi rozdzielność mnożenia względem dodawania wektorów
$$a \cdot (v+w) = a \cdot v \ + \ a \cdot w;$$
4. dla dowolnych $a, b \in K$ i $v \in V$ zachodzi łączność mnożenia przez skalar,
$$(ab) \cdot v = a \cdot (b \cdot v);$$
5. dla dowolnego $v \in V$ zachodzi
$$1 \cdot v = v.$$

Elementy zbioru V nazywamy *wektorami*, a elementy ciała K, *skalarami*. Element neutralny dodawania wektorów nazywamy *wektorem zerowym* i oznaczamy θ.

*Semestr letni 2021

1.2 Definicja. *Podprzestrzenią* przestrzeni wektorowej V nazywamy niepusty podzbiór $U \subseteq V$ taki, że dla dowolnych $u, u' \in U$ i dowolnego $a \in K$

1. $u + u' \in U$;
2. $au \in U$.

Piszemy wtedy $U < V$.

1.3 Twierdzenie. Zbiór rozwiązań jednorodnego układu równań liniowych z n niewiadomymi jest podprzestrzenią przestrzeni K^n.

1.4 Definicja. Dla dowolnego skończonego układu wektorów $(v_1, \ldots, v_n)$ przestrzeni wektorowej V i dowolnego układu skalarów $(a_1, \ldots, a_n)$, wektor

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$$

nazywamy *kombinacją liniową wektorów* $(v_1, \ldots, v_n)$. Symbolem $\operatorname{lin} A$ oznaczać będziemy zbiór wszystkich (skończonych) kombinacji liniowych wektorów zbioru (niepustego) $A \subseteq V$.

1.5 Twierdzenie. $\operatorname{lin} A < V$.

1.6 Definicja. Podprzestrzeń $\operatorname{lin} A$ nazywamy *podprzestrzenią rozpiętą na zbiorze A*.

1.7 Definicja. Układ wektorów $(v_1, \ldots, v_n)$ przestrzeni wektorowej V nazywamy *liniowo niezależnym* jeśli zachodzi implikacja:

$$\theta = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n \implies a_1 = \cdots = a_n = 0.$$

Układ który nie jest liniowo niezależny nazywamy *liniowo zależnym.*

1.8 Definicja. Układ wektorów $(v_1, \ldots, v_n)$ przestrzeni wektorowej V nazywamy bazą przestrzeni V jeśli:

1. $(v_1, \ldots, v_n)$ jest układem liniowo niezależnym,
2. $V = \operatorname{lin}(v_1, \ldots, v_n)$.

1.9 Twierdzenie. Układ wektorów $(v_1, \ldots, v_n)$ przestrzeni wektorowej V jest bazą jeśli każdy wektor przestrzeni V można jednoznacznie zapisać jako kombinację liniową wektorów układu $(v_1, \ldots, v_n)$.

1.10 Twierdzenie. Każda przestrzeń wektorowa ma bazę.

1.11 Twierdzenie. Dowolne dwie bazy przestrzeni wektorowej V są równoliczne.

1.12 Definicja. Moc dowolnej bazy przestrzeni wektorowej V nazywamy *wymiarem przestrzeni V* i oznaczamy $\dim V$.

1.13 Twierdzenie. Niech $A = (v_1, \ldots, v_n)$ będzie bazą przestrzeni V. Wtedy każdy wektor $v \in V$ da się jednoznacznie przedstawić w postaci

$$v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n.$$

1.14 Definicja. Ciąg $[x_1, ..., x_n]$ występujący w Twierdzeniu 1.13 nazywamy *współrzędnymi wektora v w bazie A.*

1.15 Definicja. Załóżmy, że $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ i $\mathcal{B} = (w_1, \ldots, w_n)$ są dwoma bazami przestrzeni wektorowej V nad K. Macierz $P = [p_{ij}]$ taką, że

$$\begin{aligned} w_1 &= p_{11}v_1 + p_{21}v_2 + \cdots + p_{n1}v_n \\ w_2 &= p_{12}v_1 + p_{22}v_2 + \cdots + p_{n2}v_n \\ &\vdots \\ w_n &= p_{1n}v_1 + p_{2n}v_2 + \cdots + p_{nn}v_n \end{aligned}$$

nazywamy *macierzą przejścia z bazy $\mathcal{A}$ do $\mathcal{B}$.*

1.16 Twierdzenie. Załóżmy, że $A = (v_1, \ldots, v_n)$ i $B = (w_1, \ldots, w_n)$ są bazami przestrzeni wektorowej V nad K. Niech $[x_1, \ldots, x_n]$ będą współrzędnymi wektora v w bazie $\mathcal{A}$ i $[y_1, \ldots, y_n]$ będą współrzędnymi wektora v w bazie $\mathcal{B}$. Wtedy $[x_1, \ldots, x_n]^T = P[y_1, \ldots, y_n]^T$, gdzie P jest macierzą przejścia z bazy $\mathcal{A}$ do $\mathcal{B}$.

1.17 Definicja. Niech U i W będą podprzestrzeniami przestrzeni wektorowej V. Mówimy, że V jest *sumą przestrzeni U i W* , (piszemy $V = U + W$) jeśli każdy wektor $v \in V$ można przedstawić w postaci $v = u + w$ gdzie $u \in U$ i $w \in W$. Jeśli dodatkowo $U \cap W = \{\theta\}$ to mówimy, że V jest *sumą prostą swoich podprzestrzeni* i piszemy $V = U \oplus W$.

1.18 Twierdzenie. Niech U i W będą podprzestrzeniami przestrzeni wektorowej V oraz niech $(u_1, \ldots, u_k)$ będzie bazą U i $(w_1, \ldots, w_l)$ będzie bazą przestrzeni W. Wtedy:

1. $V = U + W \iff V = \mathrm{lin}(u_1, \ldots, u_k, w_1, \ldots, w_l)$,
2. $V = U \oplus W \iff (u_1, \ldots, u_k, w_1, \ldots, w_l)$ jest bazą przestrzeni V.

2 Przekształcenia liniowe

2.1 Definicja. Niech V i W będą przestrzeniami liniowymi nad tym samym ciałem K. Funkcję $f : V \to W$ nazywamy *przekształceniem liniowym* jeśli dla dowolnych $v, w \in V$ oraz $a \in K$:

1. $f(v + w) = f(v) + f(w)$ (addytywność),
2. $f(av) = af(v)$ (jednorodność).

2.2 Definicja. *Jądrem przekształcenia liniowego* $f : V \to W$ nazywamy zbiór $\ker(f) := \{v \in V : f(v) = \theta\}$.

2.3 Twierdzenie. Niech $f : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Wtedy $\ker(f)$ jest podprzestrzenią przestrzeni V i obraz $\mathrm{im}(f)$ przekształcenia f jest podprzestrzenią przestrzeni W.

2.4 Definicja. Załóżmy, że $f : V \to W$ jest przekształceniem liniowym. Niech $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ będzie bazą przestrzeni V i $\mathcal{B} = (w_1, \ldots, w_m)$ bazą W. Macierz $A = [a_{ij}]$ taką, że

$$\begin{aligned} f(v_1) &= a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \cdots + a_{m1}w_m \\ f(v_2) &= a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \cdots + a_{m2}w_m \\ &\vdots \\ f(v_n) &= a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \cdots + a_{mn}w_m \end{aligned}$$

nazywamy *macierzą przekształcenia liniowego w bazach $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$.*

2.5 Twierdzenie. Niech A będzie macierzą przekształcenia liniowego $f : V \to W$ w bazach $\mathcal{A}$ przestrzeni V i $\mathcal{B}$ przestrzeni W. Wtedy macierz B przekształcenia f w bazach $\mathcal{A}'$ przestrzeni V i $\mathcal{B}'$ przestrzeni W można wyliczyć ze wzoru

$$B = Q^{-1}AP,$$

gdzie P jest macierzą przejścia z bazy $\mathcal{A}$ do $\mathcal{A}'$ i Q jest macierzą przejścia z bazy $\mathcal{B}$ do $\mathcal{B}'$.

3 Endomorfizmy i diagonalizacja

3.1 Definicja. Niech V będzie przestrzenią wektorową nad ciałem K.

1. *Endomorfizmem* nazywamy przekształcenie liniowe $f : V \to V$.
2. Skalar $a \in K$ nazywamy *wartością własną endomorfizmu f*, gdy istnieje niezerowy wektor $v \in V$ taki, że $f(v) = av$. Wektor v nazywamy *wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej a.*
3. Niezerowy wektor $v \in V$ nazywamy *wektorem własnym endomorfizmu f*, gdy istnieje skalar $a \in K$ taki, że $f(v) = av$.

3.2 Lemat. Niech f będzie endomorfizmem przestrzeni V i niech $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ będą macierzami endomorfizmu f w dwóch bazach przestrzeni V. Wtedy

$$\det(A - xI) = \det(B - xI).$$

3.3 Definicja. Niech f będzie endomorfizmem przestrzeni V i niech $\mathcal{A}$ będzie macierzą endomorfizmu f w dowolnej bazie przestrzeni V. Wielomian $\det(A - xI)$ nazywamy wielomianem charakterystycznym endomorfizmu f.

3.4 Twierdzenie. Niech f będzie endomorfizmem przestrzeni V i niech A będzie macierzą f w bazie $\mathcal{A}$ przestrzeni V. Wtedy:

1. skalar $a \in K$ jest wartością własną endomorfizmu f wtedy i tylko wtedy, gdy jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego endomorfizmu f;
2. niezerowy wektor $v \in V$ jest wektorem własnym endomorfizmu f o wartości własnej a, wtedy i tylko wtedy, gdy jego współrzędne w bazie $\mathcal{A}$ są rozwiązaniem układu

$$(A - aI)[x_1, \ldots, x_n]^T = \theta.$$

3.5 Twierdzenie. Wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym są liniowo niezależne.

3.6 Definicja. Endomorfizm $f : V \to V$ nazywamy *diagonalizowalnym* jeśli istnieje baza przestrzeni V, w której macierz endomorfizmu f jest diagonalna.

3.7 Twierdzenie. Endomorfizm $f : V \to V$ jest diagonalizowalny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje baza przestrzeni V złożona z wektorów własnych endomorfizmu f.

3.8 Definicja. *Krotnością algebraiczną wartości własnej a endomorfizmu f* nazywamy jej krotność jako pierwiastka wielomianu charakterystycznego f. *Krotnością geometryczną wartości własnej a endomorfizmu f* nazywamy wymiar przestrzeni rozwiązań układu

$$(A - aI)[x_1, \ldots, x_n]^T = \theta.$$

3.9 Twierdzenie. Endomorfizm f przestrzeni V jest diagonalizowalny, gdy krotność geometryczna każdej wartości własnej tego endomorfizmu jest równa jej krotności algebraicznej.

3.10 Twierdzenie. Niech V będzie n-wymiarową przestrzenią wektorową. Jeśli przekształcenie $f : V \to V$ ma n różnych wartości własnych $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, to odpowiadające im wektory własne $v_1, \ldots, v_n$ tworzą bazę przestrzeni V, przy czym w bazie tej f ma macierz diagonalną, w której na przekątnej występują odpowiednie wartości własne $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

tp