Ciała, pierścienie

1. Sprawdzić, czy podane zbiory ze zwykłym dodawaniem i mnożeniem są pierścieniem przemiennym.
   (a) $\mathbb{R}$
   (b) $\mathbb{Z}$
   (c) $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\}$
   (d) $\mathbb{Z}[\sqrt{5}] = \{a + b\sqrt{5} : a, b \in \mathbb{Z}\}$
   (e) $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}] = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} : a, b, c \in \mathbb{Z}\}$

2. Które z następujących zbiorów są ciałami względem zwykłych działań arytmetycznych:
   (a) $\mathbb{Z}$
   (b) $\{a + b\sqrt{2} \in \mathbb{R} : a, b \in \mathbb{Q}\}$
   (c) $\{a + b\sqrt[3]{2} \in \mathbb{R} : a, b \in \mathbb{Q}\}$
   (d) $\{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \in \mathbb{R} : a, b, c \in \mathbb{Q}\}$
   (e) $\{0, 1\}$

3. Niech K będzie ciałem. Sprawdzić, czy zbiór $K \times K$ wraz działaniami:

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d), \quad (a, b) \odot (c, d) = (ac, bd)$$

   jest ciałem.

4. Sprawdzić, czy zbiór $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ wraz z działaniami

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d), \quad (a, b) \odot (c, d) = (ac + 2bd, ad + bc)$$

   jest ciałem.

5. Sprawdzić, czy zbiór $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ wraz z działaniami

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d), \quad (a, b) \odot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

   jest ciałem.

6. W zbiorze liczb rzeczywistych określamy działania: $a \oplus b = a + b + 1, a \odot b = a + b + ab$. Sprawdzić, czy zbiór $\mathbb{R}$ z tak określonymi działaniami tworzy ciało.