

Pierścienie reszt, ciała skończone

1. Napisać tabelki działań $+$ oraz \cdot będących działaniami dodawania i mnożenia modulo dla $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_7$.
2. Ułożyć tabelkę funkcji $x \rightarrow x^2$ w $\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_7, \mathbb{Z}_{11}, \mathbb{Z}_{13}$.
3. Ułożyć tabelkę funkcji $x \rightarrow x^{-1}$ w $\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_7, \mathbb{Z}_{11}, \mathbb{Z}_{13}$.
4. Sprawdzić czy istnieją – i wyznaczyć, jeżeli istnieją – pierwiastki kwadratowe z liczby -1 w ciele \mathbb{Z}_p dla $p = 2, 3, 5, 7, 11, 13$.
5. Rozwiązać równania w odpowiednich ciałach:
 - (a) $5x^2 + 5x + 1 = 0$ w \mathbb{Z}_{11}
 - (b) $2x^2 + 2x + 2 = 0$ w \mathbb{Z}_{13}
 - (c) $x^2 + x + 3 = 0$ w \mathbb{Z}_5
 - (d) $2x^3 + 3x^2 + 1x - 4 = 0$ w \mathbb{Z}_7
6. Wykonać działania $(6^2 \cdot 3 + 5 \cdot 4 - 1) \cdot (5 \cdot 12 - 7)^{-1}$ w \mathbb{Z}_{11} i \mathbb{Z}_{23} .
7. Rozwiązać układy równań
 - (a)
$$\begin{cases} 3x + y &= 2 \\ 2x + 3y &= 1 \end{cases} \text{ w } \mathbb{Z}_5 \text{ i } \mathbb{Z}_7$$
 - (b)
$$\begin{cases} 3x + 2y &= 2 \\ 1x + 3y &= 4 \end{cases} \text{ w } \mathbb{Z}_5 \text{ i } \mathbb{Z}_{11}$$
 - (c)
$$\begin{cases} 3x + 5y &= 2 \\ 4x + 9y &= 4 \end{cases} \text{ w } \mathbb{Z}_{13} \text{ i } \mathbb{Z}_7$$
 - (d)
$$\begin{cases} 5x + 4y &= 1 \\ 4x + 3y &= 2 \end{cases} \text{ w } \mathbb{Z}_{11} \text{ i } \mathbb{Z}_5$$