Przestrzenie liniowe c.d.

1. Wyznaczyć wszystkie wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, dla których wektor β jest kombinacją liniową wektorów $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^3$, gdzie:

   (a) $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ a \end{bmatrix},$

   (b) $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ a \end{bmatrix},$

   (c) $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ a \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix},$

   (d) $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} a \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix},$

2. Sprawdzić, czy α i β są kombinacjami liniowymi układu $\mathcal{A}$ wektorów przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^4$, jeżeli

   (a) $\mathcal{A} = (\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}), \alpha = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix},$

   (b) $\mathcal{A} = (\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}), \alpha = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}.$

3. Sprawdzić, czy układ $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ wektorów przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^3$ jest liniowo niezależny, jeżeli:

   (a) $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix},$

   (b) $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 9 \end{bmatrix},$

   (c) $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix},$

   (d) $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$

4. Pokazać, że wektory $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{Q}^n$ i znaleźć współrzędne wektora β w tej bazie, jeżeli:

   (a) $n = 3, \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 14 \end{bmatrix},$

(b) $n=3, \alpha_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix},$

(c) $n=4, \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 7 \\ 14 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$

5. Wyznaczyć bazę i wymiar podprzestrzeni $lin(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ przestrzeni wektorowej $\mathbb{Q}^4$ gdy:

(a) $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix},$

(b) $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 8 \\ -3 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ 26 \\ -9 \\ -12 \end{bmatrix}, \alpha_5 = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},$

(c) $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 15 \\ 17 \end{bmatrix}, \alpha_5 = \begin{bmatrix} 7 \\ -6 \\ -7 \\ 0 \end{bmatrix}.$

6. Które podanych niżej przekształceń $f : K^n \to K^m$ są przekształceniami liniowymi:

(a) $n=m=3, f(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x+z \\ 2x+z \\ 3x-y+z \end{bmatrix},$

(b) $n=m=3, f(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x \\ y+1 \\ z+2 \end{bmatrix},$

(c) $n=m=3, f(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 2x+y \\ x+z \\ z \end{bmatrix},$

(d) $n=m=3, f(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x-y+z \\ z \\ y \end{bmatrix},$

(e) $n=4, m=3, f(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x-y+2t \\ 2x+3y+5z-t \\ x+z-t \end{bmatrix},$

(f) $n=4, m=3, f(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x-y+2t \\ 2x-3y+5z-t \\ x-z-t \end{bmatrix},$

(g) $n=m=4, f(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x+3y-2t \\ x+y+z \\ 2y+t \\ y+z \end{bmatrix},$

(h) $n = m = 4, f(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x + 3y - 2t \\ x + y + z \\ 2y - 3t \\ 2x + 4y + z - 2t \end{bmatrix}$.

W przypadku endomorfizmów wyznaczyć ich macierze w bazie kanonicznej.

7. W przestrzeni K^3 wybrano bazy

$$\mathcal{A}_3 = (\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}) \text{ oraz } \mathcal{B}_3 = (\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix})$$

natomiast w przestrzeni K^4 wybrano bazy

$$\mathcal{A}_4 = (\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}) \text{ oraz } \mathcal{B}_4 = (\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}).$$

Znaleźć macierz przekształcenia liniowego $f : K^n \to K^m$ w bazach $\mathcal{A}_n$ oraz $\mathcal{B}_m$ ($\mathcal{A}_n$ oraz $\mathcal{A}_m$, $\mathcal{B}_n$ oraz $\mathcal{B}_m$, $\mathcal{B}_n$ oraz $\mathcal{A}_m$), jeżeli:

(a) $n = m = 3, f(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x + z \\ 2x + z \\ 3x - y + z \end{bmatrix}$,

(b) $n = m = 3, f(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x - y + z \\ y \\ z \end{bmatrix}$,

(c) $n = 4, m = 3, f(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x - y + 2t \\ 2x + 3y + 5z - t \\ x + z - t \end{bmatrix}$,

(d) $n = 3, m = 4, f(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x + 3y - 2z \\ x + y + z \\ 2y \\ y + z \end{bmatrix}$,

(e) $n = 3, m = 4, f(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x + 3y - 2z \\ x + y + z \\ 2y - 3z \\ 2x + 4y + z \end{bmatrix}$.

8. Dla podanych macierzy endomorfizmów $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (w odpowiednim rozmiarze n przestrzeni) w bazie kanonicznej obliczyć wartości własne i wyznaczyć odpowiadające im przestrzenie wektorów własnych.

(a) $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$,

(b) $A \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$,

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$,

(d) $A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$,

(e) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

(f) $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$.