Matematyka 2
Elementy logiki i teorii mnogości

Informatyka Stosowana, I rok*

Tomasz Połacik

Wersja robocza * 2019

Spis treści

*Semestr letni 2018/19

1 Pierwsze zajęcia

Logika kwatyfikatorów

1.1. Niech dane będą zbiory indeksów I, J, K (dopuszczamy możliwość, że wszystkie te zbiory są puste). Język $\mathcal{L}$ logiki kwantyfikatorów wyznaczony jest przez następujące symbole:

- stałe: $c_i, i \in I$
- symbole funkcyjne: $f_j, j \in J$
- symbole relacyjne: $P_k, k \in K$.

Ponadto zakładamy, że dla każdego języka dane są

- zmienne indywiduowe: $x, x_0, x_1 \ldots, y, y_0, y_1 \ldots, z, z_0, z_1 \ldots$
- spójniki zdaniowe: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
- kwantyfikatory: $\forall, \exists$
- symbol identyczności: $=$
- nawiasy, jako symbole pomocnicze.

1.2 Definicja (Term)**.** *Termami* są wyrażeniami języka kwantyfikatorów określone w następujący sposób: (a) zmienne indywiduowe i stałe są termami; (b) jeżeli $t_1, \ldots, t_n$ są termami a f jest n-argumentowym symbolem funkcyjnym, to wyrażenie $f(t_1, \ldots, t_n)$ jest termem. Wyłącznie wyrażenia opisane w podany sposób są termami.

1.3 Definicja (Formuła)**.** Wyrażenia postaci $P(t_1, \ldots, t_n)$, gdzie t_i są termami a P symbolem relacyjnym nazywamy *formułami atomowymi. Formuły* języka logiki kwantyfikatorów tworzymy z formuł atomowych przez aplikację spójników zdaniowych i kwantyfikatorów: dokładniej, jeżeli A i B są formułami, to również formułami są $\neg A, (A \rightarrow B), (A \wedge B), (A \vee B), (A \leftrightarrow B)$ i, dla dowolnej zmiennej indywiduowej x, $\forall x A, \exists x A$.

1.4 Definicja (Zasięg kwantyfikatora, zmienna wolna)**.** Jeżeli formuła A jest postaci $\forall x B$ lub $\exists x B$, to mówimy, że formuła B *leży w zasięgu kwantyfikatora* $\forall$ i $\exists$ odpowiednio; mówimy wówczas, że kwantyfikator $\exists$ *wiąże* zmienną x a $\forall$ wiąże zmienną y w formule B. Przykład:

$$\forall x \underbrace{\exists y \underbrace{(R(x,y))}_{\text{zasięg } \exists y}}_{\text{zasięg } \forall x} \rightarrow P(x).$$

Mówimy, że zmienna x ma wystąpienie *wolne* w formule A, gdy wystąpienie to nie jest związane przez żaden kwantyfikator. Przykład:

$$\forall x \exists y (R(\underbrace{x}_{\text{związana}}, \underbrace{y}_{\text{związana}})) \rightarrow P(\underbrace{x}_{\text{wolna}}).$$

Wersja robocza * 2019

1.5 Definicja (Zdanie)**.** Formułę nazywamy *zdaniem*, gdy nie ma w niej wolnych wystąpień zmiennych.

1.6 Definicja (Podstawienie)**.** W dowolnej formule $A(x)$ można podstawiać termy za zmienną x. Poprawne podstawienie musi jednak spełniać kilka warunków:

1. Zmienna x musi występować wolno w A.
2. Podstawienie musi być jednoczesne, za wszystkie wolne wystąpienia.
3. Jeżeli term podstawiany zawiera zmienną x, to po podstawieniu x nie może ulec związaniu przez żaden kwantyfikator.

1.7 Definicja (Interpretacja)**.** Ustalmy język $\mathcal{L}$. Niech M będzie dowolnym niepustym zbiorem. Odwzorowanie $\mathcal{J}$, które

- każdemu symbolowi relacyjnemu P języka $\mathcal{L}$ przyporządkowuje relację $P^{\mathcal{I}}$ (zachowując arność),
- każdemu symbolowi funkcyjnemu f języka $\mathcal{L}$ przyporządkowuje funkcję $f^{\mathcal{I}}$ określoną na M o wartościach w M (zachowując arność) oraz
- każdej stałej c języka $\mathcal{L}$ przyporządkowuje element $c^{\mathcal{I}}$ zbioru M,

nazywamy *interpretacją* rozważanego języka w M.

Układ $\langle M, \mathcal{I}\rangle$ nazywamy *modelem* dla języka $\mathcal{L}$ a zbiór M nazywamy *uniwersum* tego modelu. W przypadku, gdy $I = \{1, \ldots, k\}$, $J = \{1, \ldots, m\}$ i $K = \{1, \ldots, n\}$, zamiast $\langle M, \mathcal{I}\rangle$ piszemy czasem

$$\langle M, P_1^{\mathcal{I}}, \ldots, P_k^{\mathcal{I}}, \ldots, f_1^{\mathcal{I}}, \ldots, f_m^{\mathcal{I}}, \ldots, c_1^{\mathcal{I}}, \ldots, c_n^{\mathcal{I}}\rangle$$

1.8 Uwaga. Niech A będzie zdaniem języka $\mathcal{L}$, a $\langle M, \mathcal{I}\rangle$ modelem dla $\mathcal{L}$. Fakt, że zdanie A jest prawdziwe w $\langle M, \mathcal{I}\rangle$ zapisujemy jako $\langle M, \mathcal{I}\rangle \models A$.

1.9 Przykład. Rozważmy język zawierający symbol relacyjny P i zdanie

$$A = \forall x \forall y (P(x, y) \to \exists z (P(x, z) \land P(z, y))).$$

1. Rozważmy zbiór $\mathbb{Q}$ oraz interpretację $\mathcal{I}$ w $\mathbb{Q}$ taką, że $P^{\mathcal{I}} = <$. Mamy wówczas
$$\langle \mathcal{Q}, <\rangle \models A.$$
2. Rozważmy teraz zbiór $\mathbb{N}^+$ dodatnich liczb naturalnych (bez zera) oraz interpretację $\mathcal{J}$ w $\mathcal{N}^+$ taką, że $P^{\mathcal{J}} = <$. Mamy wówczas
$$\langle \mathcal{N}^+, <\rangle \not\models A.$$
3. Rozważmy ponadto interpretację $\mathcal{K}$ w $\mathcal{N}$ taką, że $P^{\mathcal{K}} = |$, gdzie $|$ jest relacją podzielności w $\mathbb{N}^+$. Mamy wówczas
$$\langle \mathcal{N}^+, |\rangle \models A.$$

1.10 Definicja. Mówimy, że formuła A języka $\mathcal{L}$ jest *ogólnie prawdziwa*, lub że jest *tautologią* logiki kwantyfikatorów, gdy A jest prawdziwa w każdym modelu języka $\mathcal{L}$.

Wersja robocza* 2019

Tableaux (tabele semantyczne)

1.11. Reguły tworzenia tabel semantycznych

Reguły dla negacji

$\checkmark \neg A$	
	A

	$\neg A \checkmark$
A	

Reguły dla alternatywy

$\checkmark A \vee B$	
A | B	

	$A \vee B \checkmark$
	A
	B

Reguły dla koniunkcji

$\checkmark A \wedge B$	
A	
B	

	$A \wedge B \checkmark$
	A | B

Reguły dla implikacji

$\checkmark A \rightarrow B$	
	A | B

	$A \rightarrow B \checkmark$
A	
	B

Wersja robocza * 2019

Reguły dla kwantyfikatora ogólnego

$^{*}\forall x A(x)$	$\forall x A(x)^{\checkmark}$
$A(x/c)$	$A(x/d)$
gdzie c jest *dowolną* stałą	gdzie d jest *nową* stałą, nie występującą na tej gałęzi

---

Reguły dla kwantyfikatora szczegółowego

$^{\checkmark}\exists x A(x)$	$\exists x A(x)^{*}$
$A(x/d)$	$A(x/c)$
gdzie d jest *nową* stałą nie występującą na tej gałęzi	gdzie c jest *dowolną* stałą

Przykładowo, pierwszą regułę dla implikacji odczytać można w następujący sposób:

> *Jeżeli na pewnej gałęzi tabeli po jej lewej stronie znajduje się formuła $A \to B$, to tabela kontynuowana jest przez dodanie dwóch nowych gałęzi tak, że po prawej stronie jednej z nich wpisana zostaje formuła A, a po lewej stronie drugiej gałęzi wpisana jest formuła B.*

Innymi słowy oznacza to, że jeżeli formuła $A \to B$ jest prawdziwa, to formuła A jest fałszywa *lub* formuła B jest prawdziwa. Druga reguła dla implikacji wyraża fakt, że jeżeli formuła $A \to B$ jest fałszywa, to formuła A jest prawdziwa *oraz* formuła B jest fałszywa.

Metoda tableaux

Przyjmujemy zasadę że kiedy formuła pojawia się *po prawej stronie tabeli* to uważamy ją za fałszywą, a formuły pojawiające się po *lewej stronie tabeli* uważamy za prawdziwe.

Zastosowanie metody tableaux w badaniu, czy dana formuła A jest (ogólnie) prawdziwa polega na rozumowaniu nie wprost: zakładamy że dana formuła jest fałszywa i dążymy do otrzymania sprzeczności. W tym wypadku, sprzeczność oznacza wystąpienie tej samej formuły na jednej gałęzi zarówno po lewej jak i po prawej stronie (zgodnie z naszą interpretacją formuła ta jest wtedy jednocześnie

Wersja robocza * 2019

prawdziwa i fałszywa, co jest niemożliwe). Założenie, że formułę A uważamy za fałszywą oznacza, że powinna pojawić się *po prawej stronie* tabeli w jej korzeniu.

Dokładniej, procedura badania prawdziwości danej formuły A przebiega według następujących kroków:

- Budowanie tabeli rozpoczynamy od korzenia, w którym umieszczamy formułę A po *prawej stronie* tabeli.
- Posługując się regułami przechodzimy stopniowo do rozważania podformuł danej formuły rozbudowując tabelę.
- Formuły oznaczone symbolem $\checkmark$ rozważamy tylko jeden raz. Formuły oznaczone symbolem $*$ mogą być rozważane dowolnie wiele razy (potencjalnie, nieskończenie wiele razy) i można do nich wracać na dowolnym etapie tworzenia tabeli.
- Regułę odpowiednią dla danej formuły stosujemy na *wszystkich* gałęziach, do których formuła ta należy.
- Dążymy do uzyskania takiej sytuacji, by pewna formuła (będąca podformułą badanej formuły A) wystąpiła na jednej gałęzi po prawej i po lewej stronie tabeli. Gdy tak się stanie, gałąź tę nazywamy *zamkniętą*. Tabela jest *zamknięta*, gdy wszystkie jej gałęzie są zamknięte.
- Każda gałąź, która jest zamknięta lub taka, na której wszystkie formuły oprócz formuł atomowych zostały oznaczone symbolem $^{\checkmark}$ nazywana jest *zakończoną*. Tabelę nazywamy *zakończoną*, gdy wszystkie jej gałęzie są zakończone. Tabelę nazywamy *zamkniętą*, gdy wszystkie jej gałęzie są zamknięte i *zakończoną*, gdy wszystkie jej gałęzie są zakończone.
- Jeżeli tabela dla danej formuły jest zamknięta, to rozważana formuła jest ogólnie prawdziwa (jest tautologią). W przypadku, gdy tabela jest zakończona ale nie jest zamknięta, czyli gdy przynajmniej jedna z gałęzi nie jest zamknięta, stwierdzamy, że rozważana formuła nie jest ogólnie prawdziwa (nie jest tautologią). W tym przypadku tabela sugeruje nam model falsyfikujący tę formułę. Model taki nazywamy *kontrmodelem* tej formuły.
- Dla formuł logiki zdań zawsze, a dla formuł logiki kwantyfikatorów w niektórych przypadkach, tabela semantyczna będzie skończona. Na ogół jednak tabele dla formuł logiki kwantyfikatorów będą generować potencjalnie nieskończone tabele. Generalnie, logika kwantyfikatorów jest *nierozstrzygalna*, czyli nie istnieje ogólna procedura rozstrzygająca, czy dowolna formuła logiki kwantyfikatorów jest ogólnie prawdziwa czy nie.

Dobre rady

1. Formułę oznaczoną symbolem '$\checkmark$' rozpatrujemy tylko raz.
2. Formułę oznaczoną symbolem '$*$' możemy rozpatrywać wielokrotnie, stosując każdą ze stałych, która pojawia się w tabeli.
3. Najpierw stosujemy reguły nie rozgałęziające tabeli.

Wersja robocza * 2019

4. Najpierw stosujemy reguły wprowadzające *nowe* stałe, potem reguły pozwalające używać *dowolnych* stałych, w szczególności tych, które występują w tabeli.

5. Gałęzie tabeli zamykamy najwcześniej jak to możliwe.

1.12 Twierdzenie. Niech A, B, C i D będą formułami dowolnego języka $\mathcal{L}$. Załóżmy, że zmienna x nie jest zmienną wolną formuły C i niech $A(x)$ i $B(x)$ oraz $D(x, y)$ będą dowolnymi formułami. Wówczas formuły następującej postaci są tautologiami logiki kwantyfikatorów:

1. $\neg\exists x A(x) \leftrightarrow \forall x \neg A(x)$,
2. $\neg\forall x A(x) \leftrightarrow \exists x \neg A(x)$,
3. $(\exists x A(x) \vee \exists x B(x)) \leftrightarrow \exists x(A(x) \vee B(x))$,
4. $\exists x(A(x) \wedge B(x)) \to (\exists x A(x) \wedge \exists x B(x))$,
5. $(\forall x A(x) \wedge \forall x B(x)) \leftrightarrow \forall x(A(x) \wedge B(x))$,
6. $(\forall x A(x) \vee \forall x B(x)) \to \forall x(A(x) \vee B(x))$,
7. $(\forall x A(x) \to C) \leftrightarrow \exists x(A(x) \to C)$,
8. $(\exists x A(x) \to C) \leftrightarrow \forall x(A(x) \to C)$,
9. $(C \to \forall x A(x)) \leftrightarrow \forall x(C \to A(x))$,
10. $(C \to \exists x A(x)) \leftrightarrow \exists x(C \to A(x))$,
11. $\exists x \forall y D(x, y) \to \forall y \exists x D(x, y)$.

Ponadto, implikacje odwrotne do 4, 6 i 11 nie są ogólnie prawdziwe.

2 Drugie zajęcia

Równoliczność

2.1. Przypomnienie. Funkcja różnowartościowa, na, bijekcja, złożenie funkcji, funkcja odwrotna.

2.2 Definicja (Równoliczność)**.** Mówimy, że zbiory A i B są *równoliczne* (lub że *mają tę samą moc*), gdy istnieje bijekcja ze zbioru A na zbiór B. Piszemy wówczas $A \sim B$ lub $|A| = |B|$.

2.3 Twierdzenie ([2], Twierdzenie 5.1)**.** Dla dowolnych zbiorów A i B:

1. $A \sim A$,
2. $A \sim B \to B \sim A$,
3. $A \sim B \wedge B \sim C \to A \sim C$.

Dowód. 1. Funkcja identycznościowa jest bijekcją. 2. Funkcja odwrotna do bijekcji jest bijekcją. 3. Złożenie bijekcji jest bijekcją. $\dashv$

Wersja robocza * 2019

2.4 Przykład ([2, Wykład 5, Przykłady])**.**

1. $A \sim \emptyset \iff A = \emptyset$.
2. $\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
3. $\mathbb{N} \sim 2\mathbb{N}$, $\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \setminus 2\mathbb{N}$.
4. $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$.
$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{dla } n \in 2\mathbb{N}, \\ -\frac{n+1}{2}, & \text{dla } n \in \mathbb{N} \setminus 2\mathbb{N}, \end{cases}$$
5. $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$.
$$f(m,n) = \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + m.$$
Dowód, że f jest bijekcją, [2, Tw. 7.27, str. 129–130].
6. Dla dowolnych $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ takich, że $a < b$ i $c < d$, mamy $[a, b] \sim [c, d]$.
$$f(x) = \frac{(d-c)x + bc - ad}{b-a}.$$
7. $(-1, 1) \sim \mathbb{R}$.
$$f(x) = \frac{x}{1-|x|}.$$
8. $(0, 1] \sim (0, 1)$.
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & \text{dla } x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \\ x, & \text{else.} \end{cases}$$
9. $[-1, 1] \sim (-1, 1)$
$$[-1, 0] \sim (-1, 0] \quad \& \quad (0, 1] \sim (0, 1)$$
Skąd $[-1, 1] \sim (-1, 1)$.
10. $[0, 1] \sim \mathbb{R}$.
$$[0, 1] \sim [-1, 1] \sim (-1, 1) \sim (0, 1) \sim \mathbb{R}.$$

Ćwiczenia

[3, Wykład 5] Wybór zadań spośród 5.1—5.6.

3 Trzecie zajęcia

$|\mathbb{N}|$ vs $|\mathbb{R}|$

3.1 Lemat ([2, Lemat 6.2])**.** $[0, 1] \not\sim \mathbb{N}$.

Idea dowodu. Niech dana będzie dowolna funkcja $f : \mathbb{N} \to [0, 1]$. Pokażemy, że f nie może być „na”. *Krok 0.* Dzielimy odcinek $[0, 1]$ na trzy części:

(a) $[0, \frac{1}{3}]$,

Wersja robocza * 2019

(b) $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$,

(c) $[\frac{2}{3}, 1]$

i wybieramy przedział

(a) gdy $f(0) > \frac{1}{3}$,

(b) gdy $f(0) < \frac{1}{3}$,

(c) gdy $f(0) = \frac{1}{3}$.

Procedurę tę powtarzamy biorąc w roli przedziału $[0, 1]$ wybrany przez nas przedział. Iterując tę procedurę otrzymujemy zstępującą rodzinę przedziałów domkniętych. Rodzina taka ma przekrój P będący zbiorem niepustym. Można udowodnić, że P jest jednopunktowy. Zauważmy, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$, wartość $f(n)$ nie należy do P. A więc P nie jest zawarty w $\mathrm{rng}(f)$, czyli f nie jest na $[0, 1]$. ⊣

3.2 Twierdzenie ([2, Twierdzenie 6.3])**.** $\mathbb{R} \not\precsim \mathbb{N}$.

Dowód. Jeżeli istniałaby funkcja f z $\mathbb{N}$ na $\mathbb{R}$, to funkcja

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{gdy } f(x) \in [0, 1] \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

byłaby funkcją z $\mathbb{N}$ na $[0, 1]$, co przeczy Lematowi 3.1. ⊣

Metoda przekątniowa

3.3 Twierdzenie ([2, Przykład 6.4])**.** $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \not\precsim \mathbb{N}$.

Dowód. Metoda przekątniowa. ⊣

Analogicznie dowodzimy, że

3.4 Twierdzenie ([2, Przykład 6.5])**.** $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \not\precsim \mathbb{N}$.

Dowód. Metoda przekątniowa. ⊣

Twierdzenie Cantora

3.5. Twierdzenie Cantora. [2, Twierdzenie 6.6] $A \not\sim \mathcal{P}(A)$, dla dowolnego zbioru A.

Dowód. Niech f będzie dowolną iniekcją

$$f : A \xrightarrow{\text{1-1}} \mathcal{P}(A).$$

Pokażemy, że f nie może być suriekcją. Definiujemy:

$$Z := \{x \in A : x \notin f(x)\} \in \mathcal{P}(A).$$

Wówczas, dla dowolnego $x \in A$ mamy

$$x \in Z \iff x \notin f(x)$$

Wersja robocza 2019

czyli
$$x \in [Z \setminus f(x)] \ \cup \ [f(x) \setminus Z].$$
Zatem, dla każdego $x \in A$,
$$Z \neq f(x).$$
$\dashv$

3.6 Wniosek ([2, Wniosek 6.8])**.** $A \not\sim \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$.

Dowód. Przypuśćmy, że $A \sim \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$. Rozważmy zbiór $B \subseteq \mathcal{P}(A)$:
$$B = \{\{a\} : a \in A\}.$$
Mamy
$$B \sim A$$
wtedy
$$\mathcal{P}(A) \supseteq B \sim A \sim \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)).$$
Oznaczałoby to, że zbiór $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ jest równoliczny z (pewnym podzbiorem zbioru) $\mathcal{P}(A)$. Sprzeczność z Twierdzeniem Cantora. $\dashv$

Twierdzenie Cantora-Bersteina

3.7 Definicja (Porównywanie mocy)**.** Mówimy, że *moc zbioru A jest niewiększa od mocy zbioru B* i piszemy $|A| \leqslant |B|$, gdy istnieje zbiór $C \subseteq B$ taki, że $A \sim C$. Ponadto, $|A| < |B|$ wtedy i tylko wtedy, gdy $|A| \leqslant |B|$ oraz $|A| \neq |B|$.

3.8. Powtórzenie. Obraz i przeciwobraz.

3.9 Twierdzenie ([2, Twierdzenie 6.10, Twierdzenie 6.11])**.** Dla dowolnych zbiorów A i B,

(i) $|A| \leqslant |B| \iff$ istnieje injekcja $f : A \to B$.

Ponadto, gdy zbiory A i B są niepuste,

(ii) $|A| \leqslant |B| \iff$ istnieje surjekcja $g : B \to A$.

Dowód. (i) Z definicji. (ii) $\Rightarrow$ Załóżmy, że $|A| \leqslant |B|$. Wtedy z (i) istnieje $f : A \xrightarrow{\text{1-1}} B$. Dla ustalonego $a \in A$ definiujemy
$$g(x) = \begin{cases} f^{-1}(x), & \text{gdy } x \in \operatorname{rng}(f); \\ a, & \text{gdy } x \notin \operatorname{rng}(f). \end{cases}$$
Wówczas $g : B \xrightarrow{\text{na}} A$. $\Leftarrow$ Niech $g : B \xrightarrow{\text{na}} A$, wtedy $g^{-1}[\{a\}] \neq \emptyset$ dla wszystkich $a \in A$. Stosujemy AC do $\{g^{-1}[\{a\}] : a \in A\}$ otrzymując selektor S. Oczywiście, $S \subseteq B$ oraz $g \restriction S : S \xrightarrow{\text{na},1-1} A$. Zatem $|A| \leqslant |B|$. $\dashv$

3.10 Uwaga. Jeżeli $A \subseteq B$, to $|A| \leqslant |B|$, ponieważ $\mathrm{id}_A : A \xrightarrow{\text{1-1}} \operatorname{rng}(A) \subseteq B$.

3.11 Twierdzenie ([2, Twierdzenie 6.12])**.** Dla dowlonych zbiorów A, B, C:

1. $|A| \leqslant |A|$,

Wersja robocza * 2019

2. $|A| \leqslant |B| \wedge |B| \leqslant |C| \to |A| \leqslant |C|$,
3. $|A| = |B| \to |A| \leqslant |B| \wedge |B| \leqslant |A|$.

Dowód. Korzystamy z faktów mówiących, że: identyczność jest injekcją, złożenie injekcji jest injekcja i każda bijekcja jest injekcją. $\dashv$

3.12. Twierdzenie Cantora-Bernsteina. Dla dowolnych zbiorów A i B:

$$\text{jeżeli } |A| \leqslant |B| \text{ oraz } |B| \leqslant |A| \text{ to } |A| = |B|.$$

Bez dowodu. $\dashv$

3.13 Przykład ([2, Przykład 16])**.** Wiadomo z Przykładu 2.4[1], że $(a, b) \sim (c, d)$ dla dowolnych $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ takich, że $a < b$ oraz $c < d$ oraz, że $(-1, 1) \sim \mathbb{R}$. Stosując Twierdzenie Cantora-Bernsteina, pokazujemy, że dla dowolnego zbioru A takiego, że

$$(0, 1) \subseteq A \text{ oraz } A \subseteq (0, 2),$$

mamy $|A| = |\mathbb{R}|$.

3.14 Przykład (Hotel Hilberta, [2, Przykład 18])**.** $\mathbb{N} \cup \{-1\} \sim \mathbb{N}$.

3.15 Przykład (Hotel Hilberta, [2, Przykład 19])**.** $(0, 1) \cup \{-1\} \sim (0, 1)$.

3.16 Przykład ([2, Przykład 25])**.** Dla każdego zbioru A,

$$|A| < |\mathcal{P}(A)|.$$

Dowód. Z Twierdzenie Cantora, $A \not\sim \mathcal{P}(A)$. Ponadto $|A| \leqslant |\mathcal{P}(A)|$, bo $f : A \xrightarrow{1\text{-}1} \mathcal{P}(A)$, dla funkcji f takiej, że $f(x) = \{x\}$. $\dashv$

Ćwiczenia

[3, Wykład 6]. Wybór zadań spośród 6.1—6.7.

4 Czwarte zajęcia

Zbiory co najwyżej przeliczalne

4.1 Definicja (Zbiory skończone, co najwyżej przeliczalne i przeliczalne)**.** Zbiór A nazywamy

1. *skończonym*, gdy $A = \emptyset$ lub istnieje liczba $0 < n \in \mathbb{N}$ taka, że $A \sim \{1, \dots, n\}$;
2. *przeliczalnym*, gdy $A \sim \mathbb{N}$;
3. *co najwyżej przeliczalnym*, gdy A jest zbiorem skończonym lub przeliczalnym;
4. *nieskończonym*, gdy A nie jest zbiorem skończonym;

[1] [2, Przykład 5.17, Przykład 5.20]

Wersja robocza x 2019

5. *nieprzeliczalnym*, gdy A nie jest zbiorem co najwyżej przeliczalnym.

4.2 Twierdzenie ([2, Twierdzenie 7.16, Dowód 3])**.** Każdy nieskończony podzbiór zbioru $\mathbb{N}$ jest zbiorem przeliczalnym.

Dowód. Niech $X \subseteq \mathbb{N}$ będzie zbiorem nieskończonym (w szczególności X jest niepusty). Zasada Indukcji pociąga następującą Zasadę Minimum

Każdy niepusty podzbiór zbioru $\mathbb{N}$ *ma element najmniejszy.*[2]

Definiujemy $g : \mathbb{N} \to X$

$$\begin{aligned} g(0) &= \min X \\ g(n) &= \min(X \setminus \{g(0), \ldots, g(n-1)\}), \quad \text{dla } n > 0. \end{aligned}$$

Funkcja g jest iniekcją — wprost z definicji. Żeby wykazać, że g jest suriekcją wystarczy pokazać, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$

$$n \in X \to \exists k (k \leqslant n \wedge g(k) = n).$$

Indukcja względem n. *Baza* jest oczywista, bo 0 jest najmniejszym elementem, więc $0 = g(0)$. *Krok indukcyjny.* Założenie dla $m \leqslant n$. *Przypadek 1*: $m + 1 \notin X$ jest pusto spełniony. *Przypadek 2*: $m \in X$. *Podprzypadek 2a*: $n + 1 \in \{g(0), \ldots, g(n)\}$ jest oczywisty. *Podprzypadek 2b*: $n + 1 \notin \{g(0), \ldots, g(n)\}$. Wtedy $n + 1 = \min((X \setminus \{g(0), \ldots, g(n)\})$, zatem $n + 1 = g(n + 1)$. ⊣

4.3 Twierdzenie ([2, Twierdzenie 7.21, Dowód 1])**.** Niech $X \neq \emptyset$. Zbiór X jest zbiorem co najwyżej przeliczalnym wtedy i tylko wtedy, gdy elementy zbioru X można ustawić w ciąg.

Dowód. Zbiór X jest co najwyżej przeliczalny wtedy i tylko wtedy, gdy $|X| \leqslant |\mathbb{N}|$. Oraz $|X| \leqslant |\mathbb{N}|$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $f : \mathbb{N} \xrightarrow{\text{na}} X$. ⊣

4.4 Twierdzenie ([2, Twierdzenie 7.23])**.** Suma dwóch zbiorów przeliczalnych jest zbiorem przeliczalnym.

Dowód. Jeżeli $A = \emptyset$ lub $B = \emptyset$, to twierdzenie jest oczywiste. Załóżmy, że A i B są niepuste oraz co najwyżej przeliczalne, wtedy elementy zbiorów A i B można ustawić w ciągi

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad (y_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Wówczas elementy zbioru $A \cup B$ tworzą ciąg

$$x_0, y_0, x_1, y_1, \ldots$$

Zatem $X \cup Y$ jest zbiorem co najwyżej przeliczalnym. ⊣

4.5 Wniosek ([2, Wniosek 7.25])**.** Suma skończenie wielu zbiorów co najwyżej przeliczalnych jest zbiorem co najwyżej przeliczalnym.

4.6 Wniosek ([2, Wniosek 7.26])**.** $\mathbb{Z}$ jest zbiorem przeliczalnym.

Dowód. $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\}$. ⊣

[2] Ćwiczenie.

Wersja robocza * 2019

4.7 Twierdzenie ([2, Twierdzenie 7.27, Twierdzenie 7.28])**.** Produkt kartezjański dwóch zbiorów przeliczalnych jest zbiorem przeliczalnym.

Dowód. Niech $p : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \xrightarrow{\text{na},1-1} \mathbb{N}$ będzie dowolną funkcją pary, np.

$$p(m,n) \quad = \quad \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + m,$$

lub

$$p(m,n) \quad = \quad 2^m(2n+1) - 1.$$

Niech X i Y będą zbiorami przeliczalnymi oraz niech

$$g : \mathbb{N} \xrightarrow{\text{na},1-1} X \text{ oraz } h : \mathbb{N} \xrightarrow{\text{na},1-1} Y.$$

Wówczas funkcja $f : X \times Y \to \mathbb{N}$ określona jako

$$f(x,y) = p(g(x), h(y)) \quad \text{dla } x \in X, y \in Y$$

jest bijekcją. $\dashv$

4.8 Wniosek. $\mathbb{Q}$ jest zbiorem przeliczalnym.

Dowód. Z faktu, że $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$ i Twierdzenia Cantora-Bernsteina. $\dashv$

4.9 Wniosek. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ jest zbiorem nieprzeliczalnym.

Dowód. W przeciwnym przypadku zbiór $\mathbb{R}$ byłby przeliczalny, gdyż $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$. Sprzeczność z Twierdzeniem 3.2. $\dashv$

4.10 Twierdzenie ([2, Twierdzenie 7.32])**.** Suma przeliczalnej rodziny zbiorów przeliczalnych jest zbiorem przeliczalnym.

Dowód. Niech $\mathcal{R} = \{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ i załóżmy, że $X_n \neq \emptyset$ dla $n \in \mathbb{N}$, oraz niech $f_n : \mathbb{N} \xrightarrow{\text{na}} X_n$. Definiujemy:

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \xrightarrow{\text{na}} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n, \qquad f(n,k) = f_n(k).$$

Pokazujemy, że f jest surjekcją. $\dashv$

4.11 Twierdzenie ([2, Twierdzenie 7.33])**.** Zbiór X^* wszystkich skończonych ciągów o wartościach w niepustym co najwyżej przeliczalnym zbiorze X jest zbiorem przeliczalnym.

Dowód. Dla $n \in \mathbb{N}$ niech $X^{[n]}$ oznacza zbiór wszystkich ciągów o długości n o elementach z X. Indukcyjnie dowodzimy, że

$$X^{[n]} \text{ jest zbiorem cnp.}$$

Baza. Dla $n = 0$: $X^{[0]} = X^{\emptyset} = \emptyset$. Dla $n = 1$: $X^{[1]} \sim X$.
Krok indukcyjny. Zauważyć, że

$$X^{[n+1]} \sim X^{[n]} \times X.$$

Oczywiście,

$$X^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^{[n]},$$

więc X^* jest przeliczalną sumą zbiorów co najwyżej przeliczalnych. $\dashv$

Wersja robocza * 2019

4.12 Wniosek ([2, Wniosek 7.35])**.** Zbiór wszystkich skończonych podzbiorów zbioru przeliczalnego jest przeliczalny.

Dowód. Funkcja $f : X^* \xrightarrow{\text{na}} \mathcal{P}_{\text{fin}}(X)$ taka, że

$$f((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

jest suriekcją. Ponadto $\mathcal{P}_{\text{fin}}(X)$ jest nieskończony bo zawiera rodzinę $\{\{x\} : x \in X\}$. $\dashv$

4.13 Wniosek. Zbiór wszystkich wielomianów o współczynnikach z $\mathbb{Z}$ jest przeliczalny. Zbiór liczb algebraicznych jest przeliczalny. Zbiór liczb przestępnych jest nieprzeliczalny.

Zbiory mocy kontinuum

4.14 Twierdzenie ([2, Twierdzenia 8.16])**.** $|\mathbb{R}| = |\{0,1\}^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.

Bez dowodu. $\dashv$

4.15 Definicja (Zbiory mocy kontinuum)**.** Dowolny zbiór równoliczny z $\mathbb{R}$ nazywamy *zbiorem mocy kontinuum.*

4.16 Twierdzenie. Zbiory *wszystkich skończonych* ciągów oraz wszystkich skończonych podzbiorów zbioru przeliczalnego są przeliczalne. Zbiory *wszystkich* ciągów oraz wszystkich podzbiorów zbioru przeliczalnego są zbiorami mocy kontinuum.

Bez dowodu. $\dashv$

4.17 Twierdzenie. Zbiory liczb naturalnych, całkowitych i wymiernych są przeliczalne. Zbiory liczb rzeczywistych i niewymiernych są mocy kontinuum.

Ćwiczenia

[3, Wykład 7]. Wybór zadań spośród 7.1—7.9.

5 Piąte zajęcia

Częściowe porządki

5.1 Definicja (Częściowy porządek, liniowy porządek, łańcuch)**.** Relację $\preceq$ na zbiorze A nazywamy *relacją częściowego porządku*, gdy

1. $\preceq$ jest zwrotna: $\forall x \in X\ x \preceq x$,
2. $\preceq$ jest słabo-symetryczna: $\forall x, y \in A\ (x \preceq y \wedge y \preceq x \to x = y)$,
3. $\preceq$ jest przechodnia: $\forall x, y, z \in X\ (x \preceq y \wedge y \preceq z \to x \preceq z)$.

Jeżeli $\preceq$ jest częściowym porządkiem na A, to parę $\langle A, \preceq\rangle$ nazywamy *zbiorem częściowo uporządkowanym.* Relację częściowego porządku $\preceq$ nazywamy *relacją liniowego porządku*, gdy dodatkowo

4. $\preceq$ jest spójna: $\forall x, y \in A\ (x \preceq y \vee y \preceq x)$.

Wersja robocza * 2019

Niech A będzie zbiorem częściowo uporządkowanym przez relację $\preceq$. Podzbiór B zbioru A taki, że $\preceq\restriction B$ jest relacją liniowego porządku nazywamy *łańcuchem*.

5.2 Przykład. Przykłady zbiorów częściowo uporządkowanych:

1. $\langle X, \subseteq\rangle$, dla dowolnego zbioru X,
2. $\langle \mathbb{R}, \leqslant\rangle$,
3. $\langle \mathbb{R}, \geqslant\rangle$,
4. $\langle \mathbb{N}\setminus\{0\}, |\rangle$,
5. $\langle \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \preceq\rangle$, gdzie $f \preceq g \iff \forall n \,.\, f(n) \leqslant g(n)$,
6. $\langle X, \preceq\rangle$, gdzie X jest dowolnym zbiorem funkcji oraz $f \preceq g$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f = g \restriction \mathrm{dom}(f)$,
7. *Porządek prefiksowy.* Ustalmy dowolny niepusty zbiór A. Zbiór ten będziemy nazywać *alfabetem*. Niech A^* będzie zbiorem wszystkich skończonych ciągów elementów ze zbioru A. Zbiór A^* nazywać będziemy zbiorem *słów nad alfabetem* A. Do zbioru A^* należy *słowo puste*, czyli słowo o długości 0, które będziemy oznaczać przez ϵ. Na zbiorze słów definiujemy binarną operację *konkatenacji* oznaczaną symbolem $*$: dla dowolnych $a, b \in A^*$, takich że $a = a_1, \ldots, a_m$ oraz $b = b_1, \ldots, b_n$, definiujemy
$$a * b = c,$$
gdzie
$$c_i = \begin{cases} a_i & \text{dla } 1 \leqslant i \leqslant m \\ b_j & \text{dla } i = m + j. \end{cases}$$
Na zbiorze słów A^* definiujemy relację $\preceq$ *porządku prefiksowego* w następujący sposób:
$$a \preceq b \iff \exists c \,.\, (b = a * c).$$
Wówczas $\preceq$ jest relacją częściowego porządku na A^*.
8. *Porządek leksykograficzny.* Ustalmy zbiór częściowo uporządkowany $(A, \leqslant)$. Rozważmy zbiór słów A^* oraz relację $\preceq$ zwaną *porządkiem leksykograficznym nad* $(A \leqslant)$) zdefiniowaną następująco: dla $a, b \in A^*$,
$$a \preceq b \;\leftrightarrow\; a \leqslant b \;\vee\; \exists i\,(a_i < b_i \wedge \forall j < i\,(a_j < b_j)).$$
Porządek leksykograficzny $\preceq$ nad $(A, \leqslant)$ jest częściowym porządkiem. Ponadto, gdy $(A, \leqslant)$ jest zbiorem liniowo uporządkowanym, to $(A^*, \preceq)$ jest również zbiorem liniowo uporządkowanym.

5.3 Przykład. Przykłady łańcuchów w zbiorach częściowo uporządkowanych z Przykładu 5.2.

Diagramy Hassego

5.4 Przykład. Diagramy Hassego dla zbiorów częściowo uporządkowanych z Przykładu 5.2 oraz [2, Przykład 10.8].

Wersja robocza * 2019

Elementy wyróżnione

5.5 Definicja (Elementy minimalny, maksymalny, największy, najmniejszy, kresy)**.** Niech X będzie zbiorem częściowo uporządkowanym przez relację $\preceq$. Ponadto, niech $a \in X$ oraz $A \subseteq X$. Mówimy, że element a jest

1. *minimalnym* w A, gdy $a \in A$ oraz $x \preceq a \to x = a$ dla każdego $x \in A$;
2. *maksymalnym* w A, gdy $a \in A$ oraz $a \preceq x \to x = a$ dla każdego $x \in A$;
3. *najmniejszym* w A, gdy $a \in A$ oraz $a \preceq x$ dla każdego $x \in A$;
4. *największym* w A, gdy $a \in A$ oraz $x \preceq a$ dla każdego $x \in A$;
5. *ograniczeniem dolnym* zbioru A, gdy $a \preceq x$ dla każdego $x \in A$;
6. *ograniczeniem górnym* zbioru A, gdy $x \preceq a$ dla każdego $x \in A$;
7. *kresem dolnym* (*infimum*) zbioru A, gdy a jest największym ograniczeniem dolnym zbioru A, co zapisujemy $a = \inf A$;
8. *kresem górnym* (*supremum*) zbioru A, gdy a jest najmniejszym ograniczeniem górnym zbioru A, co zapisujemy $a = \sup A$.

5.6 Przykład. Przykłady elementów wyróżnionych na podstawie Przykładu 5.2 i Przykładu 5.2 oraz [2, Przykład 10.8].

5.7 Twierdzenie ([2, Twierdzenie 10.7])**.** Niech X będzie zbiorem częściowo uporządkowanym przez relację $\preceq$ oraz niech $A \subseteq X$. Wtedy

1. W A istnieje co najwyżej jeden element największy i co najwyżej jeden element najmniejszy.
2. Zbiór A ma co najwyżej jeden kres górny i co najwyżej jeden kres dolny.
3. Jeżeli $a \in A$ jest elementem największym w A, to a jest
   (i) jedynym elementem maksymalnym w A,
   (ii) kresem górnym zbioru A.
4. Jeżeli $a \in A$ jest elementem najmniejszym w A, to a jest
   (i) jedynym elementem minimalnym w A,
   (ii) kresem dolnym zbioru A.

Dowód. 1. Słaba antysymetria.
2. Definicja kresów.
3. Maksymalność oczywista. Element a jest ograniczeniem górnym zbioru A. Niech $x \in X$ będzie ograniczeniem górnym zbioru A, wtedy w szczególności $a \preceq x$; zatem a jest najmniejszym ograniczeniem górnym zbioru A.
4. j.w. $\dashv$

5.8 Twierdzenie. Niech X będzie zbiorem częściowo uporządkowanym przez relację $\preceq$ oraz niech $A \subseteq X$ będzie łańcuchem. Wtedy

1. W A istnieje co najwyżej jeden element minimalny i jest on jednocześnie elementem najmniejszym w A.

Wersja robocza * 2019

2. W A istnieje co najwyżej jeden element maksymalny i jest on jednocześnie elementem największym w A.

Dowód. Łatwo. $\dashv$

5.9 Twierdzenie. Niech X będzie zbiorem częściowo uporządkowanym przez relację $\preceq$ oraz niech $\emptyset \neq A \subseteq X$ będzie zbiorem skończonym. Wtedy

1. W A istnieje element maksymalny i element minimalny.

2. Jeżeli w A istnieje dokładnie jeden element maksymalny, to jest on jednocześnie elementem największym w A.

3. Jeżeli w A istnieje dokładnie jeden element minimalny, to jest on jednocześnie elementem najmniejszym w A.

Dowód. 1. Indukcja względem $|A|$.

2. Niech a będzie jedynym elementem maksymalnym w A i przypuśćmy, że a *nie jest* największym w A. Wówczas istnieje $b \in A$ taki, że $a \neq b$ oraz $b \not\preceq a$. Niech

$$B = \{x \in A : b \preceq x\}.$$

Ponieważ $B \subseteq A$, to zbiór B jest skończony, a zatem na mocy pierwszego punktu twierdzenia, w B istnieje element maksymalny c.

Pokażemy, że c jest również elementem maksymalnym w A. Przypuśćmy dla dowodu nie wprost, że $c \prec x$ dla pewnego $x \in A$. Ponieważ $c \in B$, mamy wtedy $b \preceq c \prec x$, skąd $x \in B$. Ponieważ $c \prec x$, element c nie jest maksymalny w B, wbrew założeniu.

Z drugiej strony, $a \notin B$, bo w przeciwnym razie mielibyśmy $b \preceq a$ — sprzeczność z założeniem, że $b \not\preceq a$. Zatem $a \neq c$. Sprzeczność z założeniem, że a jest jedynym elementem maksymalnym w A. $\dashv$

Lemat Kuratowskiego-Zorna

5.10. W skończonych zbiorach częściowo uporządkowanych zawsze istnieję elementy maksymalne i minimalne. Na ogół nieskończony zbiór częściowo uporządkowany nie musi zawierać elementów maksymalnych ani minimalnych. Warunek dostateczny na istnienie elementów maksymalnych podany jest w następującym twierdzenie zwanym Lematem Kuratowskiego-Zorna. Twierdzenie to jest bardzo często stosowane w celu dowodzenie istnienia elementów o z góry określonych własnościach.

5.11. Lemat Kuratowskiego-Zorna. Niech X będzie zbiorem częściowo uporządkowanym przez relację $\preceq$. Wówczas, jeżeli każdy łańcuch ma ograniczenie górne w X, to w X istnieje element maksymalny.

Ćwiczenia

[3, Wykład 10]. Wybór zadań spośród 10.1—10.4, 10.7, 10.8.

Wersja robocza * 2019

6 Szóste zajęcia

Izomorfizmy zbiorów częściowo uporządkowanych

6.1 Definicja. Niech $(X, \leqslant_X)$ i $(Y, \leqslant_Y)$ będą zbiorami częściowo uporządkowanymi. Funkcję $f : X \to Y$ nazywamy *izomorfizmem* zbiorów częściowo uporządkowanych $(X, \leqslant_X)$ i $(Y, \leqslant_Y)$, gdy

1. f jest bijekcją,
2. f zachowuje porządek, czyli

$$\forall a, b \in X\ (a \leqslant_X b \leftrightarrow f(a) \leqslant_Y f(b))$$

6.2 Przykład. Przykłady z [2, Przykład 10.16, Przykład 10.17].

Drzewa

6.3 Definicja. Niech A będzie zbiorem niepustym i niech $\leqslant$ będzie prefiksowym porządkiem na A^*. *Drzewem nad* A nazywamy dowolny niepusty podzbiór T zbioru A^* spełniający warunek

$$u \in T \wedge v \leqslant u \ \to\ v \in T,$$

dla dowolnych $u, v \in T$.

6.4. Jeżeli nie prowadzi to do niejednoznaczności symbol konkatenacji $*$ będziemy pomijać, dla słowa u i elementu a pisząc ua zamiast $u * a$.

6.5. Ponieważ słowo puste ϵ jest elementem najmniejszym w $(A^*, \leqslant)$, z Definicji 6.3 wynika bezpośrednio, że ϵ należy do każdego drzewa. Element ten nazywamy *korzeniem* drzewa. Dowolny element drzewa nazywamy *wierzchołkiem*. Jeśli w drzewie T nad A, dla pewnych $u \in T$ oraz $a \in A$ mamy $ua \in T$, to wierzchołek ua nazywamy *a-następnikiem* wierzchołka u. Wierzchołki nie mające następników nazywamy *liśćmi* drzewa. *Rzędem wierzchołka* u nazywamy moc zbioru wszystkich następników tego wierzchołka. *Gałęzią* drzewa T nazywamy dowolny maksymalny łańcuch w T.

6.6 Przykład. Przykłady drzew:

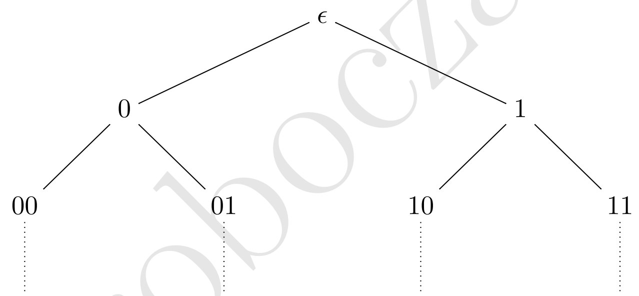
1. $\{\epsilon\}$
2. Niech $A = \{a\}$ oraz niech

$$a^n = \underbrace{a * \cdots * a}_{n\text{-razy}}.$$

Wersja robocza * 2019

Wówczas $\{a^n : n \in \mathbb{N}\}$ jest drzewem. Poniżej przedstawiamy jego diagram.

3. Niech A będzie dowolnym alfabetem. Wówczas A^* nazywamy *pełnym drzewem nad* A. W szczególności, $\{0,1\}^*$ nazywamy *pełnym drzewem binarnym.*



4. Niech $k > 0$. Dowolne drzewo T zawarte w zbiorze $\{0,1,\ldots,k-1\}$ nazywamy *drzewem k-argumentowym*, gdy każdy wierzchołek drzewa T niebędący liściem ma rząd równy k. Przykład drzewa 2-argumentowego:

$$T_1 = \{0^n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0^n 1 : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0^{2n+1}10 : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0^{2n+1}11 : n \in \mathbb{N}\}.$$

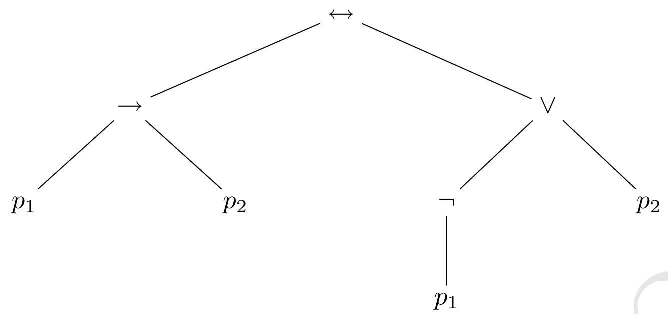
6.7. *Drzewem etykietowanym* nazywamy dowolne drzewo, w którym każdemu wierzchołkowi przyporządkowana jest dokładnie jeden element z ustalonego zbioru Σ, zwany *etykietą*.

6.8 Przykład. Przykłady drzew etykietowanych:

1. Niech $\Sigma = \{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\} \cup \{p_i : i \in \mathbb{N}\}$. *Drzewem struktury formuły*

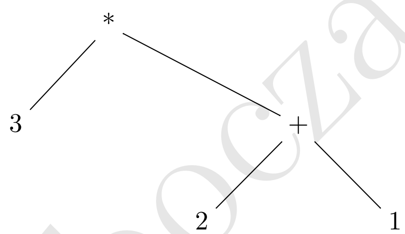
Wersja robocza * 2019

$(p_1 \to p_2) \leftrightarrow (\neg p_1 \vee p_2)$ jest struktura postaci



Na diagramie przedstawiono etykiety przyporządkowane do odpowiednich wierzchołków drzewa.

2. *Drzewo wyrażeń arytmetycznych.* Wyrażenie arytmetyczne $3 * (2 + 1)$ jest reprezentowane przez następujące drzewo:



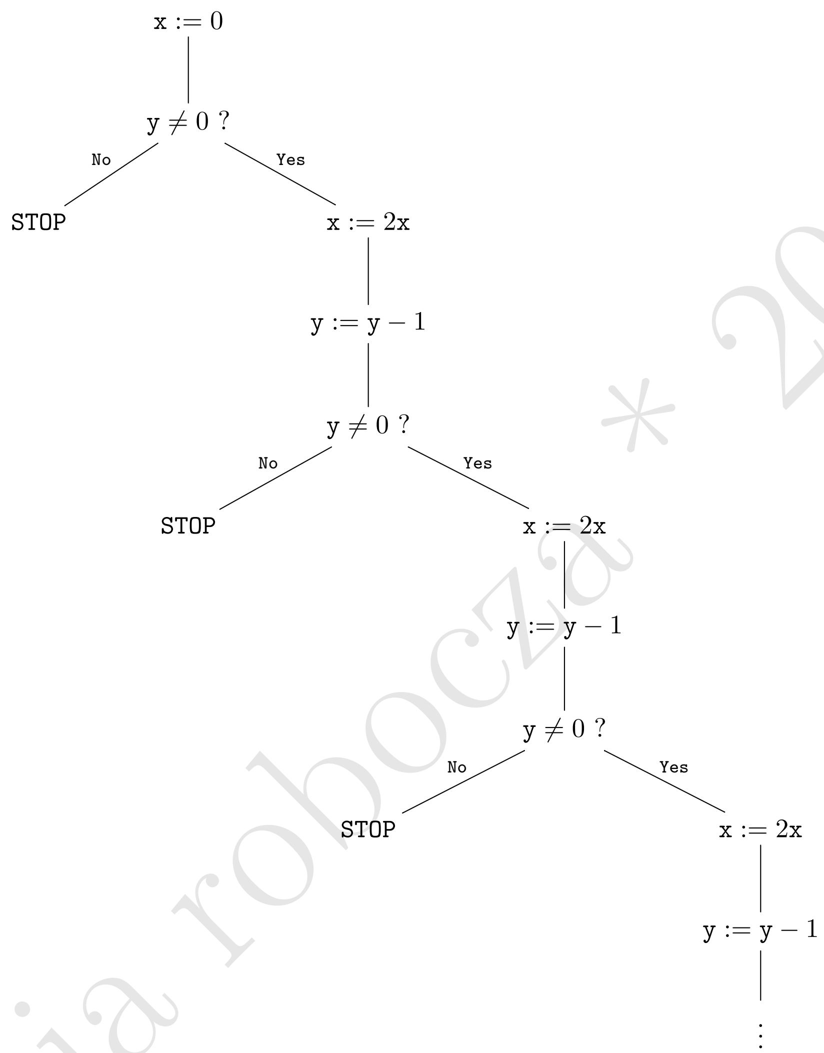
3. Rozważmy następujący program:

```
x:= 1;
 while y ≠ 0 do
       x:= 2x ; y:=y−1 end
```

Program ten możemy reprezentować za pomocą nieskończonego drzewa

Wersja robocza * 2019

etykietowanego zwanego jego *drzewem formalnych obliczeń*.



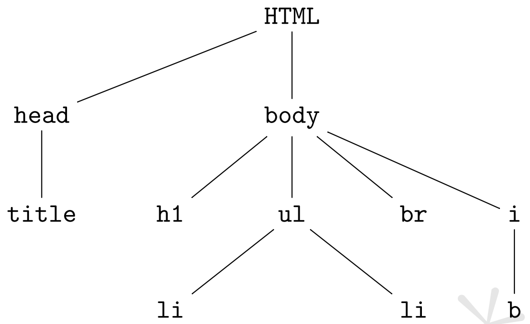
4. Rozważmy następujący dokument HTML:

```
<HTML>
   <HEAD>
     <TITLE>Matematyka 2</TITLE>
   </HEAD>
  <BODY>
   <H1>Relacje częściowego porządku</H1>
   <UL>
     <LI>Drzewa</LI>
     <LI>Kraty</LI>
   </UL>
   <BR>
   <I>Data ostatniej aktualizacji:
   <B>18 lutego 2015</B></I>
```

Wersja robocza * 2019

```
</BODY>
</HTML>
```

Kod w HTML ma strukturę drzewa:



6.9 Twierdzenie (Lemat Königa)**.** Niech $T \subseteq A^*$ będzie drzewem nieskończonym, w którym każdy wierzchołek jest skończonego rzędu. Wówczas T zawiera ścieżkę nieskończoną.

Dowód. Nieskończoną gałąź $x_0, x_1, x_2, \ldots$ drzewa T definiujemy indukcyjnie:

(i) Jako x_0 przyjmujemy korzeń drzewa T. Ponieważ drzewo T jest nieskończone, wierzchołek x_0 ma nieskończenie wiele następników.

(ii) Załóżmy, że wierzchołki $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ wybrane zostały w ten sposób, że x_{i+1} jest bezpośrednim następnikiem x_i oraz tak, że x_{i+1} ma nieskończenie wiele następników. Z założenia, wierzchołek x_{n-1} jest skończonego rzędu, czyli ma tylko skończenie wiele *bezpośrednich* następników. Zatem, ponieważ x_{n-1} ma nieskończenie wiele następników, co najmniej jeden z bezpośrednich następników wierzchołka x_{n-1} ma nieskończenie wiele następników.

Ponieważ krok(ii) jest wykonalny dla każdego x_n, dla $n \in \mathbb{N}$, otrzymujemy nieskończoną gałąź $x_0, x_1, \ldots$ drzewa T. $\dashv$

Ćwiczenia

[3, Wykład 10], 10.10, 10.15 (a), (b), (c).

6.10 Ćwiczenie. Niech T będzie drzewem skończonym. W tym przypadku mówimy, ze T jest *pełnym drzewem binarnym* gdy każdy jego wierzchołek poza liśćmi jest stopnia 2. Pokazać, że każde skończone pełne drzewo binarne ma nieparzystą liczbę wierzchołków.

7 Siódme zajęcia

Kraty i algebry Boole'a

Kraty

7.1 Definicja. Zbiór częściowo uporządkowany $(A \leqslant)$ nazywamy *kratą*, gdy każdy dwuelementowy podzbiór zbioru A ma kresy. Kres dolny elementów x i

Wersja robocza * 2019

y oznaczać będziemy przez $x \cap y$, a kres górny przez $x \cup y$. Największy element kraty (o ile istnieje) oznaczać będziemy przez 1, a element najmniejszy (o ile istnieje) przez 0. Kratę nazywamy *zupełną* gdy każdy podzbiór zbioru A ma kresy.

Kratę $(A \leqslant)$ nazywamy *dystrybutywną*, gdy dla dowolnych $x, y, z \in A$ zachodzą równości:

$$((x \cup y) \cap z) = (x \cap z) \cup (y \cap z),$$
$$((x \cap y) \cup z) = (x \cup z) \cap (y \cup z).$$

7.2 Przykład. Przykłady krat.

1. Dla dowolnego niepustego zbioru A zbiór częściowo uporządkowany $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ jest kratą zupełną. Krata ta jest dystrybutywna.
2. $(\mathbb{N}, \leqslant)$ jest kratą. Nie jest to krata zupełna, ale każdy niepusty podzbiór ma kres dolny. Krata ta jest dystrybutywna.
3. $(\mathbb{N}, |)$ jest kratą. Nie jest to krata zupełna. Krata ta jest dystrybutywna.
4. Każdy zbiór liniowo uporządkowany jest kratą dystrybutywną.

7.3 Twierdzenie. W dowolnej kracie zachodzą równości:

$$x \cup y = y \cup x, \qquad x \cap y = y \cap x \tag{1}$$
$$x \cup (y \cup z) = (x \cup y) \cup z, \qquad x \cap (y \cap z) = (x \cap y) \cap z \tag{2}$$
$$(x \cap y) \cup y = y, \qquad x \cap (x \cup y) = y. \tag{3}$$

7.4 Twierdzenie (Knaster-Tarski)**.** Niech $(K, \leqslant)$ będzie kratą zupełną oraz niech $f : K \to K$ będzie funkcją monotoniczną, czyli spełniającą warunek

$$\forall x, y \in K \ (x \leqslant y \to f(x) \leqslant f(y)).$$

Wtedy f ma najmniejszy punkt stały, to znaczy istnieje element $a \in K$ taki, że $f(a) = a$ oraz dla każdego $x \in K$, jeżeli $f(x) = x$, to $a \leqslant x$.

Dowód. Rozważmy zbiór $X = \{x \in K : f(x) \leqslant x\}$. Oczywiście $1 \in X$, zatem $X \neq \emptyset$. Niech

$$a := \inf(X).$$

Niech x będzie dowolnym elementem zbioru X. Wówczas $a \leqslant x$, skąd otrzymujemy $f(a) \leqslant f(x)$, gdyż f jest funkcją monotoniczną. Ponieważ $x \in X$, mamy również $f(x) \leqslant x$, skąd dostajemy

$$\forall x \in X \, . \, f(a) \leqslant x.$$

Zatem $f(a)$ jest ograniczeniem dolnym zbioru X, w szczególności,

$$f(a) \leqslant a. \tag{$*$}$$

Stąd, na mocy monotoniczności funkcji f,

$$f(f(a)) \leqslant f(a),$$

Wersja robocza * 2019

czyli $f(a) \in X$. Zatem
$$a \leqslant f(a). \tag{$**$}$$
Z $(*)$ oraz $(**)$ dostajemy $f(a) = a$, czyli a jest punktem stałym funkcji f.

Pokażemy, że a jest najmniejszym punktem stałym. Załóżmy, że b jest dowolnym punktem stałym funkcji f. Wtedy, w szczególności, $f(b) \leqslant b$ czyli $b \in X$. Ponieważ $a = \inf(X)$, otrzymujemy $a \leqslant b$. $\dashv$

7.5 Przykład. Niech A będzie dowolnym alfabetem zawierającym 0 i 1. Definiujemy funkcję $f : \mathcal{P}(A^*) \to \mathcal{P}(A^*)$ w następujący sposób: dla dowolnego zbioru $X \subseteq A^*$,
$$f(X) = \{\epsilon\} \cup \{0w : w \in X\} \cup \{1w : w \in X\}.$$
Wówczas f jest funkcją monotoniczną i zbiór $\{0,1\}^*$ jest najmniejszym punktem stałym funkcji f.

Algebry Boole'a

7.6 Definicja. Kratę dystrybutywną $(A \leqslant)$ nazywamy *algebrą Boole'a*, gdy ma element największy 1 i element najmniejszy 0 oraz dla każdego elementu $x \in A$ istnieje element $-x \in A$, zwany *dopełnieniem* elementu x, taki że
$$x \cap -x = 0 \quad \text{oraz} \quad x \cup -x = 1.$$
Algebrę Boole'a nazywamy *zupełną*, gdy jest kratą zupełną.

7.7 Przykład. Przykłady algebr Boole'a.

1. $(\{0,1\}, \leqslant)$, gdzie $0 \leqslant 1$, jest algebrą Boole'a.
2. Dla dowolnego zbioru X, $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ jest zupełną algebrą Boole'a.
3. Skończone algebry Boole'a dwu-, cztero- i ośmioelementowe: diagramy Hassego.

7.8 Twierdzenie. Każda skończona algebra Boole'a jest izomorficzna z algebrą $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ dla pewnego skończonego zbioru X. W szczególności, każda skończona algebra Boole'a ma 2^n elementów, dla pewnego $n \in \mathbb{N}$.

Ćwiczenia

[4]: 56, 57, 58.

8 Ósme zajęcia

8.1 Definicja (Relacja)**.** *Relacją* (*binarną*) nazywamy dowolny podzbiór produktu kartezjańskiego dwóch zbiorów. *Dziedziną lewostronną* relacji R nazywamy zbiór $D_l(\mathsf{R}) = \{x : \langle x, y\rangle \in \mathsf{R} \text{ dla pewnego } y\}$, a *dziedziną prawostronną* relacji R nazywamy zbiór $D_r(\mathsf{R}) = \{y : \langle x, y\rangle \in \mathsf{R} \text{ dla pewnego } x\}$. Zbiór $D_l(\mathsf{R}) \cup D_r(\mathsf{R})$ nazywamy *polem* relacji R.

Wersja robocza * 2019

8.2 Definicja (Złożenie relacji, relacja odwrotna)**.** *Złożeniem relacji* R i S nazywamy relację

$$\mathsf{S} \circ \mathsf{R} = \{\langle x, z\rangle : \text{dla pewnego } y, \langle x, y\rangle \in \mathsf{R} \text{ oraz } \langle y, z\rangle \in \mathsf{S}\}.$$

Relacją odwrotną do R nazywamy relację

$$\mathsf{R}^{-1} = \{\langle y, x\rangle : \langle x, y\rangle \in \mathsf{R}\}.$$

8.3 Twierdzenie. Dla dowolnych relacji R i S mamy

$$(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}.$$

Dowód. Mamy

$$\begin{aligned}
\langle a, b\rangle \in (S \circ R)^{-1} &\iff \langle b, a\rangle \in (S \circ R)\\
&\iff \exists c \,.\, \langle b, c\rangle \in R \wedge \langle c, a\rangle \in S\\
&\iff \exists c \,.\, \langle c, b\rangle \in R^{-1} \wedge \langle a, c\rangle \in S^{-1}\\
&\iff \langle a, b\rangle \in R^{-1} \circ S^{-1}.
\end{aligned}$$

A zatem $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$. ⊣

8.4 Definicja (Relacja równoważności)**.** Relację $\mathsf{R} \subseteq X \times X$ nazywamy *relacją równoważności*, gdy

1. R jest zwrotna: $\forall x \in X \; x\mathsf{R}x$,
2. R jest symetryczna: $\forall x, y \in X \; (x\mathsf{R}y \to y\mathsf{R}x)$,
3. R jest przechodnia: $\forall x, y, z \in X \; (x\mathsf{R}y \wedge y\mathsf{R}z \to x\mathsf{R}z)$.

8.5 Przykład. Następujące relacje są relacjami równoważności:

1. $A = \mathcal{P}(\{1, \ldots, n\})$ oraz $X \,\mathsf{R}_A\, Y \iff X \sim Y$.
2. $B = \mathbb{Z}$ oraz $k \,\mathsf{R}_B\, l \iff k \equiv l \pmod 3$.
3. $C = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ oraz
$$\langle m_1, n_1\rangle \,\mathsf{R}_C\, \langle m_2, n_2\rangle \iff m_1 + n_2 = m_2 + n_2.$$
4. $D = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ oraz
$$\langle k, l\rangle \,\mathsf{R}_D\, \langle p, q\rangle \iff kq = lp.$$

8.6 Definicja (Klasa abstrakcji, zbiór ilorazowy)**.** Niech R będzie relacją równoważności w zbiorze $X \neq \emptyset$. *Klasą abstrakcji* elementu $a \in X$ względem relacji R nazywamy zbiór

$$[a]_{\mathsf{R}} = \{x \in A : x\mathsf{R}a\}.$$

Zbiorem ilorazowym zbioru A względem relacji R nazywamy zbiór

$$A/\mathsf{R} = \{[x]_{\mathsf{R}} : x \in A\}.$$

8.7 Przykład. Zbiory ilorazowe:

Wersja robocza* 2019

1. $A/\mathsf{R}_A =$.
2. $B/\mathsf{R}_B =$.
3. $C/\mathsf{R}_C =$.
4. $D/\mathsf{R}_D =$.

8.8 Definicja (Podział zbioru)**.** Rodzinę $\mathcal{P}$ podzbiorów zbioru A nazywamy *podziałem* zbioru A gdy

1. $X \neq \emptyset$, dla każdego $X \in \mathcal{P}$;
2. $X \neq Y \to X \cap Y = \emptyset$, dla dowolnych $X, Y \in \mathcal{P}$;
3. $\bigcup \mathcal{P} = A$.

8.9 Przykład. Podziały:

1. $A/\mathsf{R}_A =$.
2. $B/\mathsf{R}_B =$.
3. $C/\mathsf{R}_C =$.
4. $D/\mathsf{R}_D =$.

8.10 Lemat. Niech R będzie relacją równoważności na zbiorze A. Wówczas, dla dowolnych $a, b \in A$ mamy $a\mathsf{R}b \iff [a]_\mathsf{R} = [b]_\mathsf{R}$.

Dowód. Łatwo. ⊣

8.11 Twierdzenie (Zasada abstrakcji)**.** Niech A będzie dowolnym niepustym zbiorem. Wówczas

1. Jeżeli R jest relacją równoważności na A, to A/R jest podziałem zbioru A.
2. Jeżeli rodzina $\mathcal{P}$ jest podziałem zbioru A, to relacja R zdefiniowana jako

$$x\mathsf{R}y \iff x, y \in Z, \text{ dla pewnego } Z \in \mathcal{P}$$

   jest relacją równoważności na A.
3. Funkcja F określona na zbiorze wszystkich relacji równoważności R na A taka, że

$$F(\mathsf{R}) = A/\mathsf{R}$$

   przekształca ten zbiór wzajemnie jednoznacznie na zbiór wszystkich podziałów zbioru A.

Dowód. [2, Twierdzenie 9.6].
1. Mamy: $[a]_\mathsf{R} \neq \emptyset$ (przechodniość R); dla $a \neq b$, $[a]_\mathsf{R}$ i $[b]_\mathsf{R}$ są rozłączne (przechodniość R); $\bigcup_{a \in A}[a]_\mathsf{R} = A$ (zwrotność R).
2. Łatwo.
3. Opuszczam. ⊣

Wersja robocza * 2019

9 Kolokwium

Literatura

[1] M. Ben-Ari, *Logika matematyczna w informatyce*, WNT 2005.

[2] W. Guzicki, P. Zakrzewski. *Wykłady ze wstępu do matematyki.* PWN 2005.

[3] W. Guzicki, P. Zakrzewski. *Wstęp do matematyki. Zbiór zadań.* PWN 2005.

[4] I. Ławrow, L. Maksimowa. *Zadania z teorii mnogości, logiki matematycznej i teorii algorytmów.* PWN 2004.

[5] W. Marek, J. Onyszkiewicz, *Elementy logiki i teorii mnogości w zadaniach*, PWN 2004.

[6] H. Rasiowa, *Wstęp do matematyki współczesnej*, PWN 2004.

tp. 16 lutego 2019

Wersja robocza * 2019