Grupy, grupy abelowe

1. Sprawdzić, czy podane zbiory z działaniami są grupami (abelowymi).
   (a) $(\mathbb{R}, \circ)$, gdzie $x \circ y = x + y + 1$,
   (b) $(\mathbb{R}, \star)$, gdzie $x \star y = xy - x - y + 2$,
   (c) $(\mathbb{R} \setminus \{-1\}, \circ)$, gdzie $x \circ y = x + y + xy$,
   (d) $(\mathbb{R}, \star)$, gdzie $x \star y = \frac{x+y}{2}$,
   (e) $(\mathbb{Q}, \circ)$, gdzie $x \circ y = 2xy$,
   (f) $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \oplus)$, gdzie $\langle a, b \rangle \oplus \langle c, d \rangle = \langle a + c, b + d \rangle$.
2. Rozstrzygnąć (uzasadniając odpowiedź), czy podane zbiory z działaniami są grupami:
   (a) $(\mathbb{N}, +)$,
   (b) $(\mathbb{Z}, +)$,
   (c) $(\mathbb{R}, +)$,
   (d) $(\mathbb{Z}, \cdot)$,
   (e) $(\mathbb{Q}, \cdot)$,
   (f) $(\mathbb{R}^+, \cdot)$,
   (g) $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}), +)$,

   gdzie $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$.
3. W zbiorze $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definiujemy działania $\circledast$ oraz $\circledcirc$ wzorami

$$\langle a, b \rangle \circledast \langle c, d \rangle = \langle a + c, b + d \rangle,$$

$$\langle a, b \rangle \circledast \langle c, d \rangle = \langle ac, bd \rangle.$$

   Zbadać własności tych działań. Czy $\circledcirc$ jest rozdzielne względem $\circledast$? Które elementy mają elementy odwrotne względem działania $\circledcirc$?
4. Podać resztę z dzielenia liczby a przez b, jeżeli
   (a) $a = 321, b = 35$,
   (b) $a = -321, b = 35$,
   (c) $a = 321, b = -35$,
   (d) $a = -321, b = -35$.
5. Korzystając z Algorytmu Euklidesa obliczyć:
   (a) $NWD(72, 32)$,
   (b) $NWD(321, 35)$,
   (c) $NWD(172, 32)$,
   (d) $NWD(3712, 231)$,
   (e) $NWD(120175, 60775)$