Przykładowe zadania
z Matematyki 2
dla studentów I roku Informatyki Stosowanej
(część 2: algebra – grupy, pierścienie, ciała, przestrzenie liniowe)

dr Anna Glenszczyk

1 maja 2020

Zadania

1. Sprawdzić, czy zbiór $\mathbb{Q} \setminus \{1\}$ z działaniem $\circ$ określonym dla dowolnych dwóch liczb a, b z tego zbioru $a \circ b = ab - a - b + 2$ jest grupą przemienną (abelową).

2. Sprawdzić, czy zbiór $\mathbb{Z}$ ze zwykłym dodawaniem i mnożeniem jest pierścieniem przemiennym.

3. Sprawdzić, czy zbiór $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ ze zwykłym dodawaniem i mnożeniem w $\mathbb{R}$ jest ciałem.

4. Korzystając z algorytmu Euklidesa obliczyć $\mathrm{NWD}(172, 32)$.

5. Wskazać zbiór rozwiązań równania diofantycznego $11x + 31y = 6$.

6. Rozwiązać równanie $x^2 + x + 3 = 0$ w ciele $\mathbb{Z}_5$.

7. Sprawdzić, czy zbiór

$$U = \{[x, y, z, t] : x + y - z = 0 \text{ oraz } 2x + y = 0 \text{ gdzie } x, y, z, t \in \mathbb{R}^4\}$$

   jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{R}^4$.

8. Sprawdzić, czy wektor $\mathbf{w} = [1, 1, 2]$ jest kombinacją liniową wektorów $[1, 0, 2], [1, 1, 1], [1, 2, 0]$.

9. Sprawdzić, czy układ wektorów $(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix})$ jest liniowo niezależny w przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

10. Sprawdzić, czy układ wektorów

$$\mathcal{B} = (\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\-2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\3\end{bmatrix})$$

jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

11. Wyznaczyć współrzędne wektora $\begin{bmatrix}-2\\0\\3\end{bmatrix}$ w bazie

$$\mathcal{B} = (\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\-2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\3\end{bmatrix})$$

przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

12. Sprawdzić, czy odwzorowanie $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dane wzorem

$$f(\begin{bmatrix}x\\y\\z\\t\end{bmatrix}) = \begin{bmatrix}x - y + 2t\\2x + 3y + z - t\\3x\end{bmatrix}$$

jest przekształceniem liniowym. Podać macierz przekształcenia f w bazach kanonicznych. Podać macierz przekształcenia f w bazach

$$\mathcal{A} = (\begin{bmatrix}0\\4\\5\\7\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\-3\\14\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\4\\3\\21\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\-3\\2\\-14\end{bmatrix}) \text{ oraz } \mathcal{B} = (\begin{bmatrix}0\\5\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\3\\-2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\11\\5\end{bmatrix}).$$

13. Wyznaczyć wartości własne i odpowiadające im podprzestrzenie wektorów własnych dla endomorfizmu $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ danego wzorem

$$f(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}) = \begin{bmatrix}x - 3y\\x + 5y\end{bmatrix}.$$

14. Wyznaczyć macierz przejścia z bazy

$$\mathcal{A} = (\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix})$$

do bazy

$$\mathcal{B} = (\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}).$$

Rozwiązania zadań – algorytmy

Zadanie (1)

Należy sprawdzić, czy dla działania $\circ$ i zbioru liczb wymiernych bez 1 spełnione są warunki (i) – (iv) podane w omówieniau zadania (2) poniżej.

Zadania (2), (3)

Należy sprawdzić, że w danym zbiorze G z zadania spełnione są warunki występujące w defnicji pierścienia przemiennego, czyli zbiór z dodawaniem jest grupą abelową:

(i) $\forall x, y, z \in G(x + (y + z) = (z + y) + z)$ (łączność)

(ii) $\exists \mathbf{0} \in G \forall x \in G(\mathbf{0} + x = x + \mathbf{0} = x)$ (element neutralny dodawania),

(iii) $\forall x \in G \exists y \in G(x + y = y + x = \mathbf{0})$ (elementy przeciwne)

(iv) $\forall x, y \in G(x + y = y + x)$ (przemienność)

oraz dla mnożenia są spełnione warunki

(v) $\forall x, y, z \in G(x \cdot (y \cdot z) = (z \cdot y) \cdot z)$ (łączność)

(vi) $\forall x, y, z \in G(x \cdot (y + z) = xy + xz)$ (rozdzielność mnożenia względem dodawania)

(vii) $\forall x, y \in G(x \cdot y = y \cdot x)$ (przemienność)

Jeżeli w zadaniu jest wymagane, aby pierścień miał jedynkę, dodatkowo sprawdza się warunek

(viii) $\exists \mathbf{1} \in G \forall x \in G(\mathbf{1} \cdot x = x \cdot \mathbf{1} = x)$ (element neutralny mnożenia).

Jeżeli w zadaniu ma być sprawdzone, że zbiór jest ciałem, to oprócz wszystkich powyższych warunków sprawdza się, czy dla mnożenia istnieją elementy przeciwne, czyli dodatkowo sprawdza się warunek

(ix) $\forall x \in G \exists y \in G(y \cdot x = x \cdot y = \mathbf{1})$ (elementy odwrotne).

Zadanie (4)

Zastosowanie algorytmu podanego w osobnym plik (dla informatyka – nic trudnego!).

Zadanie (5)

Rozważmy ogólną postać równania $aX + bY = c$. Ponieważ największy wspólny dzielnik współczynników przy niewiadomych dzieli liczbę po prawej stronie równości, czyli $\mathrm{NWD}(a, b)|c$, to znaczy, że równanie ma rozwiązanie. Najpierw rozwiązuje się równanie diofantyczne, $aX+bY = \mathrm{NWD}(a, b)$, a następnie mnoży obustronnie tak, aby otrzymać po prawej stronie pierwotną liczbę.

Rozwiązanie równania diofantycznego $aX + bY = \mathrm{NWD}(a, b)$ sprowadza się do wykonania algorytmu Euklidesa na liczbach a i b, a następnie przedstawieniu ostatniej niezerowej reszty (czyli $\mathrm{NWD}(a, b)$) przy pomocy a i b, co daje rozwiązanie szczegółowe (x_0, y_0). Pozostałe rozwiązania uzyskuje się podstawiając rozwiązanie (x_0, y_0) do wzorów

$$X = x_0 + \frac{b}{\mathrm{NWD}(a, b)}k$$

$$Y = y_0 - \frac{a}{\mathrm{NWD}(a, b)}k,$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Zadanie (6)

Równanie liniowe, równanie kwadratowe bądź układ równań w ciele skończonym rozwiązuje się tak, jak zwykle, z zastrzeżeniem, że używa się jedynie elementów z ciała, ewentualne ułamki przedstawia się przy pomocy elementów odwrotnych, oraz nie zawsze istnieje pierwiastek z każdej liczby w danym ciele.

Zadanie (7)

Aby zbiór U był podprzestrzenią przestrzeni V nad ciałem K, muszą być spełnione dwa warunki:

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in U (\mathbf{u} + \mathbf{v} \in U)$$

$$\forall \mathbf{u} \forall a \in K (a\mathbf{u} \in U)$$

to znaczy podzbiór U musi być domknięty na sumę wektorów oraz mnożenie wektora przez skalar.

Zadanie (8)

Wektor $\mathbf{w}$ jest kombinacją liniową wektorów $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ jeżeli istnieją takie skalary $a_1, a_2, \ldots, a_n$, że

$$\mathbf{w} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n.$$

Sprawdzenie tego, sprowadza się do rozwiązania układu n równań z n niewiadomymi $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Jeżeli istnieje jakiekolwiek rozwiązanie tego układu, to wektor $\mathbf{w}$ jest kombinacją liniową wektorów $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ oraz skalary $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są współrzędnymi wektora $\mathbf{w}$ w układzie $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ (co zazwyczaj jest interesujące w przypadku, gdy wektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ tworzą bazę przestrzeni).

Zadanie (9)

Układ wektorów $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ jest liniowo niezależny wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek

$$\forall a_1, \ldots, a_n (a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n = \Theta \Rightarrow a_1 = \ldots = a_n = 0)$$

To znaczy to, że (odpowiadający kombinacji liniowej) układ równań jednorodnych ma rozwiązanie oznacza, że wszystkie niewiadome są równe 0.

Zadanie (10)

Układ wektorów jest bazą przestrzeni K^n, jeżeli jest liniowo niezależny i rozpina przestrzeń K^n (spłaszczając zagadnienie: ilość wektorów w bazie jest taka, jak wymiar przestrzeni, czyli n – proszę to traktować jako podpowiedź, a nie jako definicję, ta jest podana w materiałach teoretycznych).

Zatem żeby sprawdzić, czy układ wektorów jest bazą wystarczy sprawdzić, czy są one liniowo niezależne (por. zadanie 9). Jednak w tym przypadku można również posłużyć się działaniami elementarnymi na układzie wektorów. Należy do nich

- pomnożenie wektora przez skalar,
- dodanie jednego wektora przemnożonego przez skalar do drugiego wektora,
- zamiana miejscami wektorów w układzie.

Jeżeli posługując się tymi operacjami na układzie wektorów uda się go sprowadzić do bazy kanonicznej, to znaczy, że wyjściowy układ wektorów jest bazą.

Baza kanoniczna, to układ wektorów jednostkowych, czyli np. dla przestrzeni $\mathbb{R}^2$ baza kanoniczna to

$$(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix})$$

dla przestrzeni $\mathbb{R}^3$ baza kanoniczna to

$$(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix})$$

i tak dalej. Zwyczajowo wektory w bazie kanonicznej oznacza się literami e lub ϵ, na przykład oznaczając bazę kanoniczną przestrzeni $\mathbb{R}^5$ jako układ $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_5)$.

Zadanie (11)

Współrzędne wektora w bazie tworzą skalary kombinacji liniowej wektorów w bazie dla których rozwiązaniem jest rozważany wektor. Czyli rozwiązuje się układ równań niejednorodnych, w którym kolumną wyrazów wolnych jest rozważany wektor.

Zadanie (12)

Odwzorowanie $f : K^n \to K^m$ nazwiemy przekształceniem liniowym, jeżeli jest addytywne i jednorodne, to znaczy spełnione są dwa warunki:

- $\forall \mathbf{w}, \mathbf{v} \in K^n (f(\mathbf{w} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{w}) + f(\mathbf{v}))$
- $\forall \mathbf{w} \in K^n \forall a \in K (f(a\mathbf{w}) = af(\mathbf{w}))$

Macierz odwzorowania w bazach $\mathcal{A} = (e_1, \dots, e_n)$ i $\mathcal{B} = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_m)$ wyznacza się:

1. obliczając wartość odwzorowania f na wszystkich wektorach z bazy $\mathcal{A}$, czyli

$$f(e_1) = \begin{bmatrix}b_{11}\\\vdots\\b_{1m}\end{bmatrix}, \dots, f(e_n) = \begin{bmatrix}b_{n1}\\\vdots\\b_{nm}\end{bmatrix}$$

2. znajdując współrzędne każdej z powyższych wartości w bazie $\mathcal{B}$:

$$\begin{bmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{1m} \end{bmatrix} = a_{11}\epsilon_1 + \ldots + a_{m1}\epsilon_m$$

$$\ldots$$

$$\begin{bmatrix} b_{n1} \\ \vdots \\ b_{nm} \end{bmatrix} = a_{1n}\epsilon_1 + \ldots + a_{mn}\epsilon_m$$

3. macierz przekształcenia tworzą powyższe współrzędne:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Jeżeli szukana jest macierz przekształcenia liniowego w bazach kanonicznych, to można ją od razu odczytać z postaci przekształcenia: pierwszą kolumnę tworzą współczynniki przy pierwszej współrzędnej przekształcanego wektora, drugą – współczynniki przy drugiej współrzędnej i tak dalej.

Zadanie (13)

Jeżeli macierz M jest macierzą endomorfizmu $f : K^n \to K^n$ w bazie kanonicznej, to wektory własne są rozwiązaniem równania

$$\det(M - \lambda I) = 0$$

gdzie I jest macierzą jednostkową $n \times n$ wymiarową. Podprzestrzeń wektorów własnych odpowiadających danej wartości własnej λ_k wyznacza się jako zbiór rozwiązań równania

$$(M - \lambda_k I) \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Zadanie (14)

Załóżmy, że $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ i $B = (w_1, \ldots, w_n)$ są dwoma bazami przestrzeni wektorowej V nad K. Macierzą przejścia z bazy $\mathcal{A}$ do bazy $\mathcal{B}$ jest macierz współczynników p_{ij} układu równań:

$$\begin{aligned}
w_1 &= p_{11}v_1 + p_{21}v_2 + \dots + p_{n1}v_n \\
w_2 &= p_{12}v_1 + p_{22}v_2 + \dots + p_{n2}v_n \\
&\vdots \\
w_n &= p_{1n}v_1 + p_{2n}v_2 + \dots + p_{nn}v_n
\end{aligned}$$

Czyli dla każdego wektora w_i z bazy $\mathcal{B}$ znajduje się jego współrzędne w bazie $\mathcal{A}$ i tworzą one kolejne kolumny macierzy przejścia.

Rozwiązania zadań – przykłady

Zadanie 1)

Ad (i) Weźmy trzy dowolne liczby $a, b, c \in \mathbb{Q} \setminus \{1\}$. Wówczas

$$L = a \circ (b \circ c) = a \circ (bc - b - c + 2) = a(bc - b - c + 2) - a - (bc - b - c + 2) + 2 =$$

$$= abc - ab - ac - bc + a + b + c$$

$$P = (a \circ b) \circ c = (ab - a - b + 2) \circ c) = (ab - a - b + 2)c - (ab - a - b + 2) - c + 2 =$$

$$= abc - ac - bc - ab + a + b + c$$

Korzystając z tego, że zbiór $\mathbb{Q}$ ze zwyczajnie rozumianym dodawaniem i mnożeniem jest ciałem (czyli możemy na dodawaniu i mnożeniu robić to, co zwykle) dostajemy równość prawej i lewej strony, zatem działanie $\circ$ jest łączne.

Ad (ii) Szukamy elementu neutralnego dla $\circ$, czyli takiej liczby e, że dla dowolnego $a \in \mathbb{Q} \setminus \{1\}$ zachodzi $a \circ e = e \circ a = a$. Zatem szukamy elementu e spełniającego $e \circ a = a$ oraz $a \circ e = a$. A zatem

$$e \circ a = a \Leftrightarrow ae - a - e + 2 = a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e(a - 1) = 2a - 2 \Leftrightarrow e = \frac{2(a - 1)}{a - 1}$$

A zatem elementem nautralnym działania $\circ$ jest $e = 2$. Faktycznie, dla dowolnego $a \in \mathbb{Q} \setminus \{1\}$:

$$2 \circ a = 2a - 2 - a + 2 = a$$

oraz

$$a \circ 2 = a \cdot 2 - a - 2 + 2 = a$$

Ad (iii) Weźmy dowolną liczbę $a \in \mathbb{Q} \setminus \{1\}$, dobieramy do niej taką liczbę (o ile się da) $b \in \mathbb{Q} \setminus \{1\}$, że $a \circ b = 2$ oraz $b \circ a = 2$. Z którejkolwiek z tych równości można wyliczyć postać szukanego elementu odwrotnego:

$$ab - a - b + 2 = 2 \Leftrightarrow b(a - 1) = a \Leftrightarrow b = \frac{a}{a - 1}$$

o którym teraz należy sprawdzić, czy spełnia oba warunki:

$$a \circ \frac{a}{a - 1} = a\frac{a}{a - 1} - a - \frac{a}{a - 1} + 2 = \frac{a^2 - a(a - 1) - a}{a - 1} + 2 = 2$$

$$\frac{a}{a - 1} \circ a = \frac{a}{a - 1}a - \frac{a}{a - 1} - a + 2 = \frac{a^2 - a - a(a - 1)}{a - 1} + 2 = 2$$

A zatem dla dowolnego elementu $a \in \mathbb{Q} \setminus \{1\}$ postać elementu do niego odwrotnego (względem działania $\circ$) to $\frac{a}{a-1}$.

Ad (iv) Weźmy dwie dowolne liczby $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \{1\}$.

$$a \circ b = ab - a - b + 2 = ba - b - a + 2 = b \circ a$$

a zatem działanie $\circ$ jest przemienne.

Czyli ten zbiór z działaniem $\circ$ tworzy grupę przemienną.

Zadanie 2)

Ad (i) Weźmy trzy dowolne liczby $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Oczywiście $a + (b + c) = (a + b) + c$ bo kolejność dodawania trzech liczb całkowitych jest dowolna.

Ad (ii) Elementem neutralnym dodawania w dowolnym zbiorze liczbowym jest liczba 0. Faktycznie, dla dowolnej liczby $a \in \mathbb{Z}$ mamy $a + 0 = 0 + a = a$.

Ad (iii) Weźmy dowolną liczbę $a \in \mathbb{Z}$, szukamy takiej liczby $b \in \mathbb{Z}$, że $a + b = 0 = b + a$. Oczywiści taka liczba istnieje, dla ustalonego a jest to $b = -a \in \mathbb{Z}$.

Ad (iv) Weźmy dwie dowolne liczby $a, b \in \mathbb{Z}$. Oczywiście wynik $a + b$ jest taki sam jak wynik działania $b + a$, czyli dodawanie jest przemienne (w każdym zbiorze liczbowym).

Ad (v) Weźmy trzy dowolne liczby $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Oczywiście $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ bo kolejność mnożenia trzech liczb całkowitych jest dowolna.

Ad (vi) Weźmy trzy dowolne liczby $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Oczywiście $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ bo mnożenie jest rozdzielne względem dodawania (w dowolnym zbiorze liczbowym).

Ad (vii) Weźmy dwie dowolne liczby $a, b \in \mathbb{Z}$. Oczywiście wynik $a \cdot b$ jest taki sam jak wynik działania $b \cdot a$, czyli mnożenie jest przemienne (w każdym zbiorze liczbowym).

A zatem jest to pierścień przemienny.

Ad (viii) W tym pierścieniu istnieje element neutralny dla mnożenia, bo oczywiście $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$, dla dowolnej liczby $a \in \mathbb{Z}$.

Czyli jest to pierścień przeminny z jedynką.

Ad (ix) Liczby całkowite ze zwyczajnym dodawaniem i mnożeniem nie są ciałem, ponieważ nie każda liczba całkowita posiada element odwrotny, na przykład dla $a = 3$ liczba b taka, że $a \cdot b = 1$ to $\frac{1}{3}$, która nie należy do zbioru $\mathbb{Z}$ (wystarczy wskazać jeden element ze zbioru, dla którego nie istnieje element odwrotny, aby udowodnić, że pierścień nie jest ciałem).

Zadanie 3)

Zbiór, który badamy to podzbiór zbioru liczb rzeczywistych, w którym każda liczba ma postać $x + y\sqrt{3}$ dla pewnych $x, y \in \mathbb{Q}$.

Dla wszystkich przypadków do sprawdzenia ustalmy, że trzy dowolne liczby $a, b, c \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ mają postać $a = a_1 + a_2\sqrt{3}, b = b_1 + b_2\sqrt{3}, c = c_1 + c_2\sqrt{3}$.

Ad (i) Weźmy trzy dowolne liczby $a, b, c \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

$$L = a + (b + c) = a_1 + a_2\sqrt{3} + (b_1 + b_2\sqrt{3} + c_1 + c_2\sqrt{3}) =$$

$$(a_1 + a_2\sqrt{3} + b_1 + b_2\sqrt{3}) + c_1 + c_2\sqrt{3} = (a + b) + c = P$$

a zatem działanie dodawania w tym zbiorze jest łączne.

Ad (ii) Szukamy elementu neutralnego dodawania w zbiorze $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$, czyli $e = e_1 + e_2\sqrt{3}$ takiego, że $a + e = a$ oraz $e + a = a$. Widać od razu, że tym elementem jest $e = 0$.

Ad (iii) Weźmy dowolną liczbę $a \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$, szukamy (dla tego a) takiej liczby $b \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$, że $a + b = 0 = b + a$. Elementem przeciwnym do $a_1 + a_2\sqrt{3}$ jest oczywiście liczba $-a_1 - a_2\sqrt{3}$.

Ad (iv) Weźmy dwie dowolne liczby $a, b \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$. Oczywiście

$$L = a + b = a_1 + a_2\sqrt{3} + b_1 + b_2\sqrt{3} = b_1 + b_2\sqrt{3} + a_1 + a_2\sqrt{3} = b + a$$

czyli dodawanie jest przemienne w tym zbiorze.

Ad (v) Weźmy trzy dowolne liczby $a, b, c \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

$$L = a \cdot (b \cdot c) = (a_1 + a_2\sqrt{3}) \cdot ((b_1 + b_2\sqrt{3}) \cdot (c_1 + c_2\sqrt{3})) =$$

$$= (a_1 + a_2\sqrt{3}) \cdot (b_1c_1 + b_2c_1\sqrt{3} + b_1c_2\sqrt{3} + 3b_2c_2) =$$

$$= a_1b_1c_1 + a_1b_2c_1\sqrt{3} + a_1b_1c_2\sqrt{3} + 3a_1b_2c_2 + a_2b_1c_1\sqrt{3} + 3a_2b_2c_1 + 3a_2b_1c_2 + 3a_2b_2c_2\sqrt{3} =$$

$$= a_1b_1c_1 + 3a_1b_2c_2 + 3a_2b_2c_1 + 3a_2b_1c_2 + (a_1b_2c_1 + a_1b_1c_2 + a_2b_1c_1 + 3a_2b_2c_2)\sqrt{3}$$

$$P = (a \cdot b) \cdot c = ((a_1 + a_2\sqrt{3}) \cdot (b_1 + b_2\sqrt{3})) \cdot (c_1 + c_2\sqrt{3}) =$$

$$= (a_1b_1 + a_2b_1\sqrt{3} + a_1b_2\sqrt{3} + 3a_2b_2) \cdot (c_1 + c_2\sqrt{3}) =$$

$$= a_1b_1c_1 + a_2b_1c_1\sqrt{3} + a_1b_2c_1\sqrt{3} + 3a_2b_2c_1 + a_1b_1c_2\sqrt{3} + 3a_2b_1c_2 + 3a_1b_2c_2 + 3a_2b_2c_2\sqrt{3} =$$

$$= a_1b_1c_1 + 3a_2b_2c_1 + 3a_2b_1c_2 + 3a_1b_2c_2 + (a_2b_1c_1 + a_1b_2c_1 + a_1b_1c_2 + 3a_2b_2c_2)\sqrt{3}$$

z dokładnością do przemienności mnożenia i dodawania $L = P$, a zatem mnożenie w tym zbiorze jest przemienne.

Ad (vi) Weźmy trzy dowolne liczby $a, b, c \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$. Oczywiście

$$L = a \cdot (b + c) = (a_1 + a_2\sqrt{3}) \cdot (b_1 + b_2\sqrt{3} + c_1 + c_2\sqrt{3}) =$$

$$= a_1b_1 + a_1b_2\sqrt{3} + a_1c_1 + a_1c_2\sqrt{3} + b_1a_2\sqrt{3} + 3a_2b_2 + c_1a_2\sqrt{3} + 3a_2c_2 =$$

$$= a_1b_1 + a_1c_1 + 3a_2b_2 + 3a_2c_2 + (a_1b_2 + a_1c_2 + b_1a_2 + c_1a_2)\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} P = ab + ac = (a_1 + a_2\sqrt{3}) \cdot (b_1 + b_2\sqrt{3}) + (a_1 + a_2\sqrt{3}) \cdot (c_1 + c_2\sqrt{3}) = \\ = a_1b_1 + a_2b_1\sqrt{3} + a_1b_2\sqrt{3} + 3a_2b_2 + a_1c_1 + a_2c_1\sqrt{3} + a_1c_2\sqrt{3} + 3a_2c_2 = \\ = a_1b_1 + 3a_2b_2 + a_1c_1 + 3a_2c_2 + (a_2b_1 + a_1b_2 + a_2c_1 + a_1c_2)\sqrt{3} \end{aligned}$$

czyli z dokładnością do przemienności mnożenia i dodawania $L = P$, a zatem mnożenie jest rozdzielne względem dodawania.

Ad (vii) Weźmy dwie dowolne liczby $a, b \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

$$L = a \cdot b = (a_1 + a_2\sqrt{3}) \cdot (b_1 + b_2\sqrt{3}) =$$

$$= a_1b_1 + a_2b_1\sqrt{3} + a_1b_2\sqrt{3} + 3a_2b_2$$

$$P = b \cdot a = (b_1 + b_2\sqrt{3}) \cdot (a_1 + a_2\sqrt{3}) =$$

$$= b_1a_1 + b_2a_1\sqrt{3} + b_1a_2\sqrt{3} + 3b_2a_2$$

Oczywiście $L = P$, czyli mnożenie jest przemienne.

A zatem jest to pierścień przemienny.

Ad (viii) W tym pierścieniu istnieje element neutralny dla mnożenia, bo oczywiście $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$, dla dowolnej liczby $a \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

Czyli jest to pierścień przemienny z jedynką.

Ad (ix) Dla dowolnej liczby $a \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ szukamy $b \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ takiego, że $a \cdot b = 1$ (wystarczy jeden taki warunek, bo wiadomo już, że mnożenie jest przemienny).

$$(a_1 + a_2\sqrt{3}) \cdot (b_1 + b_2\sqrt{3}) = 1 \Leftrightarrow$$

$$a_1b_1 + 3a_2b_2 + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{3} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_1b_1 + 3a_2b_2 = 1 \text{ oraz } a_1b_2 + a_2b_1 = 0$$

i dalej można uzależnić b_1 oraz b_2 od a_1 i a_2; lub prościej, o ile $a \neq 0$ to liczba odwrotna do a musi być postaci:

$$b_1 + b_2\sqrt{3} = \frac{1}{a_1 + a_2\sqrt{3}}$$

.

A zatem jest to ciało.

To wszystko powyżej można było udowodnić prościej: wystarczy sprawdzić, że zbiór $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ jest podpierścieniem pierścienia liczb rzeczywistych (jest podzbiorem $\mathbb{R}$ oraz dla dowolnych $a, b \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ mamy $a - b \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ oraz $a \cdot b \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$) oraz spełniony jest warunek (ix). A zatem jest pierścieniem z działaniami z ciała $\mathbb{R}$.

Zadanie (4)

$$\begin{array}{rcrcr} 172 & = & 32 \cdot 5 & + & 12 \\ 32 & = & 12 \cdot 2 & + & 8 \\ 12 & = & 8 \cdot 1 & + & 4 \\ 8 & = & 4 \cdot 2 & + & 0 \end{array}$$

Ostatnia niezerowa reszta jest wynikiem działania algorytmu, czyli

$$\mathrm{NWD}(172, 32) = 4.$$

Zadanie (5)
Rozwiązanie równania $11X + 31Y = 6$ rozpoczyna się sprawdzenia czy $\mathrm{NWD}(31, 11)$ dzieli 6, czyli od znalezienia $\mathrm{NWD}(31, 11)$ algorytmem Euklidesa.

$$\begin{array}{rcrcr} 31 & = & 11 \cdot 2 & + & 9 \\ 11 & = & 9 \cdot 1 & + & 2 \\ 9 & = & 2 \cdot 4 & + & 1 \\ 2 & = & 1 \cdot 2 & + & 0 \end{array}$$

Oczywiście 1 dzieli 6, a zatem istnieje rozwiązanie tego równania. Korzystając z trzech pierwszych linii powyższego przeliczenia algorytmu, przedstawia się liczbę 1 jako sumę 11 oraz 31 przemnożonych przez współczynnniki:

$$1 = 9 - 4 \cdot 2 = 9 - 4 \cdot (11 - 9) = 9 - 4 \cdot 11 + 4 \cdot 9 = 9 \cdot 5 - 4 \cdot 11 =$$

$$= (31 - 11 \cdot 2) \cdot 5 - 4 \cdot 11 = 31 \cdot 5 - 11 \cdot 10 - 4 \cdot 11 = 31 \cdot 5 + 11 \cdot (-14)$$

czyli ostatecznie

$$11 \cdot (-14) + 31 \cdot 5 = 1 / \cdot 6$$

$$11 \cdot (-84) + 31 \cdot 30 = 6$$

A zatem jednym z rozwiązań równania z zadania są liczby $x_0 = -84$ oraz $y_0 = 30$.

Pozostałe rozwiązania uzyskuje się podstawiając do wzorów poniżej za k dowolną liczbę całkowitą:

$$X = -84 + 31k$$

$$Y = 30 - 11k$$

Zadanie (6)

Szukając rozwiązań równania $x^2 + x + 3 = 0$ w ciele $\mathbb{Z}_5$ zaczynamy (jak zwykle) od obliczenia wyróżnika trójmianu kwadratowego:

$$\Delta = 1 - 4 \cdot 3 = 1 - 12 = -11 \equiv 4 mod 5$$

Szukając liczby $\sqrt{\Delta}$ poszukujemy takiego a w ciele $\mathbb{Z}_5$, że $a^2 = 4$. Oczywistą odpowiedzią jest $a = 2$, ale również $3^2 \equiv 4 mod 5$. A zatem $\sqrt{\Delta} = 2$ lub $\sqrt{\Delta} = 3$.

Ze wzoru na pierwiastki trójmianu kwadratowego:

$$x_1 = \frac{-\sqrt{4} - 1}{2} = \frac{-2 - 1}{2} = \frac{-3}{2}$$

i w tym momencie można albo policzyć liczbę odwrotną do 2 w ciele, albo skorzystać z tego, że $-3 \equiv 2 mod 5$, czyli

$$x_1 = \frac{2}{2} = 1$$

Drugim pierwiastkiem jest:

$$x_2 = \frac{\sqrt{4} - 1}{2} = \frac{2 - 1}{2} = \frac{1}{2}$$

liczbą odwrotną do 2 w $\mathbb{Z}_5$ jest takie b, że $2 \cdot b \equiv 1 mod 5$, czyli $2^{-1} \equiv 3 mod 5$, więc

$$x_2 = \frac{1}{2} \equiv 1 \cdot 3 \equiv 3 mod 5$$

Drugą wartością $\sqrt{\Delta}$ było 3, ale wówczas

$$x_1 = \frac{-3 - 1}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \equiv 3 mod 5$$

oraz

$$x_2 = \frac{3 - 1}{2} \equiv 1 mod 5$$

(miejsca zerowe wychodzą dualne do tych dla pierwszego pierwiasta z Δ).

Zadanie (7)

W zbiorze

$$U = \{[x, y, z, t] : x + y - z = 0 \text{ oraz } 2x + y = 0 \text{ gdzie } x, y, z, t \in \mathbb{R}^4\}$$

mamy wektory, których współrzędne spełniają dwa podane równości. Inaczej dowolny wektor ze zbioru U można zapisać jako $[x, -2x, -x, t]$.

Sprawdźmy, że zbiór U jest domknięty na dodawanie wektorów. Weźmy dwa wektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$, niech $\mathbf{u} = [p, -2p, -p, q]$ oraz $\mathbf{v} = [r, -2r, -r, s]$. Wówczas

$$\mathbf{u}+\mathbf{v} = [p+r, -2p-2r, -p-r, q+s] = [p+r, -2(p+r), -(p+r), (q+s)] \in U.$$

Sprawdźmy, że zbiór U jest domknięty na mnożenie przez skalar, to znaczy weźmy wektor $\mathbf{u} = [p, -2p, -p, q]$ oraz skalar $a \in \mathbb{R}$. Wówczas

$$a\mathbf{u} = [ap, -2ap, -ap, aq] \in U.$$

A zatem $U < \mathbb{R}^4$ (czyli U jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{R}^4$).

Zadanie (8)

Aby sprawdzić, czy wektor $\mathbf{w} = [1, 1, 2]$ jest kombinacją liniową wektorów $[1, 0, 2], [1, 1, 1], [1, 2, 0]$ szukamy rozwiązania równania

$$a_1[1, 0, 2] + a_2[1, 1, 1] + a_3[1, 2, 0] = [1, 1, 2]$$

czyli rozwiązania układu równań

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 1 \\ a_2 + 2a_3 = 1 \\ 2a_1 + a_2 = 2 \end{cases}$$

Ten układ równań prowadzi do sprzeczności, bo

$$\begin{cases} a_1 = 1 - a_2 - a_3 \\ a_2 = 1 - 2a_3 \\ 2 - 2a_2 - 2a_3 + a_2 = 2 \end{cases}$$

co prowadzi do równości $-1 = 0$. A zatem wektor $\mathbf{w}$ nie jest kombinacją liniową podanych wektorów.

Zadanie (9)

Z układu wektorów w zadaniu tworzymy kombinację liniową i przyrównujemy ją do wektora zerowego:

$$a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Powstaje układ równań:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_1 + a_2 = 0 \end{cases}$$

z którego wynika, że $a_1 = a_2 = 0$. A zatem układ wektorów z zadania jest liniowo niezależny.

Zadanie (10)

Pierwszy sposób. Sprawdzamy, czy jeżeli kombinacja liniowa wektorów

$$(\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\-2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\3\end{bmatrix})$$

wynosi Θ, to skalary są zerowe.

Niech

$$a_1\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix} + a_2\begin{bmatrix}0\\1\\-2\end{bmatrix} + a_3\begin{bmatrix}0\\0\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

czyli otrzymujemy układ równań jednorodnych:

$$\begin{cases} a_1 & & & & & = & 0 \\ -a_1 & + & a_2 & & & = & 0 \\ a_1 & - & 2a_2 & + & 3a_3 & = & 0 \end{cases}$$

z czego wynika, że $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. A zatem układ $\mathcal{B}$ jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}^3$ (bo mamy trzy liniowo niezależne wektory).

Drugi sposób. Na układzie $\mathcal{B}$ stosujemy operacje elementarne i staramy się sprowadzić go do bazy kanonicznej.

$$(\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\-2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\3\end{bmatrix}) \xrightarrow{v_3=v_3\cdot\frac{1}{3}} (\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\-2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}) \xrightarrow{v_2=v_2+2v_3}$$

$$(\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}) \xrightarrow{v_1=v_1+v_2} (\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}) \xrightarrow{v_1=v_1-v_3} (\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix})$$

A zatem układ $\mathcal{B}$ jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Zadanie (11)

Szukamy rozwiązania równania

$$a_1\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix} + a_2\begin{bmatrix}0\\1\\-2\end{bmatrix} + a_3\begin{bmatrix}0\\0\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\0\\3\end{bmatrix}$$

czyli rozwiązania układu równań

$$\begin{cases} a_1 & & & = & -2 \\ -a_1 & + & a_2 & & = & 0 \\ a_1 & - & 2a_2 & + & 3a_3 & = & 3 \end{cases}$$

rozwiązaniem jest $a_1 = -2, a_2 = -2, a_3 = \frac{1}{3}$ i te liczby są współrzędnymi wektora w bazie.

Zadanie (12)

Odwzorowanie $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dane wzorem

$$f(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x - y + 2t \\ 2x + 3y + z - t \\ 3x \end{bmatrix}$$

jest przekształceniem liniowym, bo dla dowolnych dwóch wektorów $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix}$ oraz $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}$ oraz dowolnego skalaru $a \in \mathbb{R}$ odwzorowanie f jest

<u>addytywne:</u>

$$L = f(\mathbf{w}+\mathbf{v}) = f(\begin{bmatrix} w_1 + v_1 \\ w_2 + v_2 \\ w_3 + v_3 \\ w_4 + v_4 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} (w_1 + v_1) - (w_2 + v_2) + 2(w_4 + v_4) \\ 2(w_1 + v_1) + 3(w_2 + v_2) + (w_3 + v_3) - (w_4 + v_4) \\ 3(w_1 + v_1) \end{bmatrix}$$

$$P = f(\mathbf{w}) + f(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} w_1 - w_2 + 2w_4 \\ 2w_1 + 3w_2 + w_3 - w_4 \\ 3w_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 - v_2 + 2v_4 \\ 2v_1 + 3v_2 + v_3 - v_4 \\ 3v_1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} w_1 - w_2 + 2w_4 + v_1 - v_2 + 2v_4 \\ 2w_1 + 3w_2 + w_3 - w_4 + 2v_1 + 3v_2 + v_3 - v_4 \\ 3w_1 + 3v_1 \end{bmatrix} = L$$

<u>jednorodne:</u>

$$L = f(a\mathbf{w}) = f(\begin{bmatrix} aw_1 \\ aw_2 \\ aw_3 \\ aw_4 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} aw_1 - aw_2 + 2aw_4 \\ 2aw_1 + 3aw_2 + aw_3 - aw_4 \\ 3aw_1 \end{bmatrix}$$

$$P = af(\mathbf{w}) = a\begin{bmatrix} w_1 - w_2 + 2w_4 \\ 2w_1 + 3w_2 + w_3 - w_4 \\ 3w_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(w_1 - w_2 + 2w_4) \\ a(2w_1 + 3w_2 + w_3 - w_4) \\ a(3w_1) \end{bmatrix} = L$$

Macierz przekształcenia f w bazach kanonicznych łatwo odczytać ze współczynników stojących przy poszczególnych współrzędnych przekształcanego wektora:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Szukając macierzy przekształcenia f w bazach

$$\mathcal{A} = (\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 14 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 21 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \\ -14 \end{bmatrix}) \text{ oraz } \mathcal{B} = (\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 11 \\ 5 \end{bmatrix})$$

obliczamy najpierw wartości wektorów bazy $\mathcal{A}$:

$$f(\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}, f(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 14 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 29 \\ -15 \\ 3 \end{bmatrix}, f(\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 21 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 39 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}, f(\begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \\ -14 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} -27 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Dla każdego z tych czterech wektorów znajdujemy współrzędne w bazie $\mathcal{B}$.

Pierwszy wektor:

$$\begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} = a_{11}\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + a_{21}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} + a_{31}\begin{bmatrix} 1 \\ 11 \\ 5 \end{bmatrix}$$

a zatem współrzędne wynoszą (o ile się za bardzo nie pomyliłam):

$$a_{11} = -\frac{60}{7}, a_{21} = \frac{50}{7}, a_{31} = \frac{20}{7}$$

Drugi wektor:

$$\begin{bmatrix} 29 \\ -15 \\ 3 \end{bmatrix} = a_{12}\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + a_{22}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} + a_{32}\begin{bmatrix} 1 \\ 11 \\ 5 \end{bmatrix}$$

a zatem współrzędne wynoszą (o ile się za bardzo nie pomyliłam):

$$a_{12} = -\frac{1202}{35}, a_{22} = \frac{142}{7}, a_{32} = \frac{61}{7}$$

Trzeci wektor:

$$\begin{bmatrix} 39 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix} = a_{13} \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + a_{23} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} + a_{33} \begin{bmatrix} 1 \\ 11 \\ 5 \end{bmatrix}$$

a zatem współrzędne wynoszą (o ile się za bardzo nie pomyliłam):

$$a_{13} = -\frac{299}{7}, a_{23} = \frac{192}{7}, a_{33} = \frac{81}{7}$$

Czwarty wektor:

$$\begin{bmatrix} -27 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix} = a_{14} \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + a_{24} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} + a_{34} \begin{bmatrix} 1 \\ 11 \\ 5 \end{bmatrix}$$

a zatem współrzędne wynoszą (o ile się za bardzo nie pomyliłam):

$$a_{14} = \frac{1068}{35}, a_{24} = -\frac{129}{7}, a_{34} = -\frac{60}{7}$$

A zatem macierz przekształcenia f w bazach $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ jest (z dokładnością do możliwych pomyłek przy liczeniu) postaci

$$\begin{bmatrix} -\frac{60}{7} & -\frac{1202}{35} & -\frac{299}{7} & \frac{1068}{35} \\ \frac{50}{7} & \frac{142}{7} & \frac{192}{7} & -\frac{129}{7} \\ \frac{20}{7} & \frac{61}{7} & \frac{81}{7} & -\frac{60}{7} \end{bmatrix}$$

Zadanie (13)

Macierz endomorfizmu f danego w zadaniu

$$f(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x - 3y \\ x + 5y \end{bmatrix}$$

jest postaci:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Wyznacznik macierzy $M - \lambda I$:

$$\det(M - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & -3 \\ 1 & 5 - \lambda \end{bmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)\cdot(5-\lambda) - (-3) =$$
$$= 5 - 6\lambda + \lambda^2 + 3 = (\lambda-2)(\lambda-4)$$

A zatem pierwiastkami równania kwadratowego $(\lambda-2)(\lambda-4) = 0$ są wartości $\lambda_1 = 2$ oraz $\lambda_2 = 4$ i to one są wartościami własnymi.

Podprzestrzeń wektorów własnych dla wartości własnej $\lambda_1 = 2$ tworzy przestrzeń rozwiązań równania

$$(M - \lambda_1 I)\cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

czyli

$$\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

czyli przestrzeń

$$V_1 = \{\begin{bmatrix} -3w_2 \\ w_2 \end{bmatrix} : w_2 \in \mathbb{R}\} = lin(\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix})$$

Podprzestrzeń wektorów własnych dla wartości własnej $\lambda_2 = 4$ tworzy przestrzeń rozwiązań równania

$$(M - \lambda_2 I)\cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

czyli

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

czyli przestrzeń

$$V_2 = \{\begin{bmatrix} -w_2 \\ w_2 \end{bmatrix} : w_2 \in \mathbb{R}\} = lin(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix})$$

Zadanie (13)

Aby wyznaczyć macierz przejścia z bazy

$$\mathcal{A} = (\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix})$$

do bazy

$$\mathcal{B} = (\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix})$$

szukamy współrzędnych wektorów z bazy $\mathcal{B}$ w bazie $\mathcal{A}$.

Pierwszy wektor:

$$a_{11}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+a_{12}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}+a_{13}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

czyli $a_{11}=1, a_{12}=-1, a_{13}=1$.

Drugi wektor:

$$a_{21}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+a_{22}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}+a_{23}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

czyli $a_{21}=0, a_{22}=1, a_{23}=-1$.

Trzeci wektor:

$$a_{31}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+a_{32}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}+a_{33}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

czyli $a_{31}=0, a_{32}=0, a_{33}=1$.

Zatem macierz przejścia jest postaci:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\-1 & 1 & 0\\1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

Literatura

[BA] M. Ben-Ari, *Logika matematyczna w informatyce.* PWN, 2005.

[GZ] W. Guzicki, P. Zakrzewski, *Wykłady ze wstępu do matematyki*, PWN 2007.

[ZGZ] W. Guzicki, P. Zakrzewski, *Zbiór zadań ze wstępu do matematyki*, PWN 2007.

[ŁM] I.A. Ławrow, Ł.L. Maksimowa, *Zadania z teorii mnogości, logiki matematycznej i teorii algorytmów.* PWN, 2004.

[MO] W. Marek, J. Onyszkiewicz, *Elementy logiki i teorii mnogości w zadaniach.* PWN, Warszawa 1977.