Treball Final de Grau en Física

Entrelazamiento cuántico y teoría de juegos

Miquel Cerdà Ramon

Director: Andreas Winter

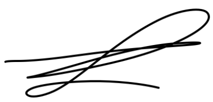
Juny 2021

DECLARACIÓ D'AUTORIA DEL TREBALL DE GRAU

Jo, Miquel Cerdà Ramon, amb Document Nacional de Identitat 41622178K, i estudiant del Grau en Física de la Universitat Autònoma de Barcelona, en relació amb la memòria del treball de final de Grau presentada per a la seva defensa i avaluació durant la convocatòria de Juliol del curs 2020-2021, declaro que

- El document presentat es original i ha estat realitzat per la meva persona.
- El treball s'ha dut a terme principalment amb l'objectiu d'avaluar l'assignatura de treball de grau en física en la UAB, i no s'ha presentat prèviament per ser qualificat en l'avaluació de cap altre assignatura ni en aquesta ni en cap altre universitat.
- En el cas de continguts de treballs publicat per terceres persones, l‘autoria està clarament atribuïda, citant les fonts degudament.
- En els casos en que el meu treball s'ha realitzat en col·laboració amb altres investigador i/o estudiants, es declara amb exactitud quines contribucions es deriven del treball de tercers i quines es deriven de la meva contribució.
- A l'excepció del punts esmentat anteriorment, el treball presentat es de la meva autoria.

Signat:



DECLARACIÓ D'EXTENSIÓ DEL TREBALL DE GRAU

Jo, Miquel Cerdà Ramon, amb Document Nacional de Identitat 41622178K, i estudiant del Grau en Física de la Universitat Autònoma de Barcelona, en relació amb la memòria del treball de final de Grau presentada per a la seva defensa i avaluació durant la convocatòria de Juliol del curs 2020-2021, declaro que:

- El nombre total de paraules incloses en les seccions des de la introducció a les conclusions es de 9184 paraules.
- El nombre total de figures es de 1.

En total el document, comptabilitza:

$$9184 \text{ paraules} + 1 \text{ figura} \times \frac{200 \text{ paraules}}{\text{figura}} = 9384 \text{ paraules}$$

Que compleix amb la normativa al ser inferior a 10000.

Signat:

Resumen

El objetivo de este trabajo es estudiar como podemos conseguir ventajas dentro de la teoría de juegos intruduciendo la mecánica cuántica. Hablaremos de los elementos de la teoría de juegos. Vamos a presentar lo que es la no localidad de Bell y el entrelazamiento cuántico mediante el cual vamos a hablar de las estrategias cuánticas que podemos aplicar dentro de la teoría de juegos. Por último vamos a explicar un método de construcción de juegos con ventaja cuántica.

Índice

1. Introducción

En este trabajo, haremos una breve explicación de los conceptos del entrelazamiento cuántico, de la no localidad de Bell y de la teoría de juegos para poder juntar estos conceptos y estudiar las estrategias cuánticas y sus beneficios dentro de los juegos de información incompleta.

En 1935 Albert Einstein, Boris Podolsky y Nathan Rosen publicaron un artículo llamado "Can Quantum Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?"[1]. En este artículo lo que pretenden es demostrar que la teoría cuántica era incompleta. Resumidamente, plantean el siguiente problema. Alice and Bob comparten un estado entrelazado que para poner un ejemplo diremos que es $\frac{|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle-|\downarrow\rangle|\uparrow\rangle}{\sqrt{2}}$. Donde $\uparrow$ corresponde al espín de la partícula hacia arriba y $\downarrow$ hacia abajo. Como dice la mecánica cuántica, si ahora Alice hace una medida para averiguar hacia donde apunta su espín, al observar el resultado, inmediatamente sabrá hacia donde apunta el espín de la partícula de Bob. La acción de medir que hace Alice, influencia instantáneamente a la partícula de Bob y al parecer esta influencia viajaría más rápida que la luz. Einstein estaba en desacuerdo con este fenómeno, al que llamaba "acción espeluznante a distancia". Einstein afirmaba que tenía que haber unas variables ocultas que explicasen este fenómeno y que hiciesen cuadrar esto con el realismo local, el cual él defendía.

Este artículo dividió el mundo de la física en dos bandos, a favor o en contra del realismo local. La teoría del realismo local, se basa en dos hipótesis. La primera es que todos los objetos tienen un estado definido. En contra de los defensores de la teoría cuántica que defienden que pueden estar en estados indefinidos. Y segundo, que los efectos de las acciones locales, como la de medir, no pueden viajar más rápido que la luz.

En 1964, John Bell publicó el influyente artículo llamado "On the Einstein Podolsky Rosen Paradox" [2]. Bell mostró en este artículo que existían experimentos que nos permitirían distinguir entre la mecánica cuántica y cualquier otra teoría que siguiera el realismo local. Estos experimentos se basavan en que el realismo local lleva a unos requisitos para ciertos fenómenos que no cumplían la mecánica cuántica. El problema era que no existía la tecnología para poder llevar a cabo estos experimentos. La intención era terminar con la discusión, o bien la teoría cuántica era incompleta o bien el realismo local era erróneo.

Experimentalmente, ya se ha confirmado la violación de las desigualdades de Bell. Por lo tanto, el concepto del realismo local se ha demostrado como erróneo. La no localidad presente dentro de la física cuántica se convierte en una herramienta muy poderosa. Ahora mismo es uno de los campos donde se destina mayor tiempo de investigación (dentro del campo de la física).

Las desigualdades de Bell también se pueden discutir dentro de la teoría de juegos [3]. La teoría de juegos tiene una gran importancia dentro de la economía, sociología, biología, etc. Los juegos que plantea se pueden usar como modelos de situaciones que observamos en la vida real, por lo tanto, sus análisis tienen una gran importancia. En juegos como el CHSH o el GHZ, podemos comprobar que al aplicar estrategias con la ayuda de la mecánica cuántica, se puede violar la desigualdad de Bell propia del juego y por lo tanto también se puede llegar a equilibrios más interesantes.

Vamos a estructurar el trabajo de la siguiente manera. Primero de todo vamos a introducir las herramientas matemáticas y los conceptos de la mecánica cuántica necesarios para poder desarrollar los otros puntos del trabajo. En la sección 3, vamos a hablar del entrelazamiento y de la no localidad. En esta sección introduciremos varios juegos que se pueden usar como pruebas de Bell. En la sección 4 vamos a introducir los juegos de información incompleta y vamos a hablar de las diferentes correlaciones y clases de equilibrios. Por último, en la sección 5 vamos a explicar qué son los juegos competitivos y como podemos modificar juegos colaborativos para convertirlos en juegos competitivos en los que haya una ventaja cuántica.

2. Preliminares matemáticos y postulados de mecánica cuántica

Más adelante veremos juegos donde aplicamos una correlación cuántica que comporta un equilibrio cuántico. Por eso tenemos que introducir las herramientas que usaremos en estos casos. Nos hemos basado en el libro [4], y en los apuntes [6].

2.1. Preliminares matemáticos

Aquí vamos a introducir los objetos matemáticos que más usaremos dentro de este trabajo. No vamos a profundizar mucho en cada uno de ellos, solo cubriendo las partes necesarias para desarrollar la teoría de juegos que es la parte central del trabajo. Trabajaremos dentro de un espacio vectorial complejo, más concretamente en el espacio de Hilbert. El espacio de Hilbert esta dotado de un producto escalar lineal en la segunda componente y antilineal en la primera. Los elementos de este espacio vectorial son los vectores columna.

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} \tag{1}$$

Donde usaremos la notación de Dirac, en la cual el vector columna se denomina ket ($|\psi\rangle$). Como es un espacio complejo, $\psi_j \in \mathbb{C}$. $|\psi\rangle$ posee todas las características para que $\mathbb{C}^n$ sea un espacio vectorial. Normalmente nos encontraremos en el espacio $\mathbb{C}^2$ que tiene la base canónica:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

2.1.1. Producto escalar

En $\mathbb{C}^n$ se define el producto escalar entre dos vectores $|\psi\rangle$ y $|\phi\rangle$ como:

$$(|\psi\rangle, |\phi\rangle) = (\psi_1^*, \psi_2^*, \cdots, \psi_n^*) \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} \psi_j^* \phi_j \tag{3}$$

En mecánica cuántica la notación más habitual cuando hablamos de producto escalar entre dos vectores es $\langle\psi|\phi\rangle$. Podemos comprobar que $\langle\psi|\phi\rangle = \langle\phi|\psi\rangle^*$

2.1.2. Operadores lineales

Usaremos operadores lineales A, en el que A es una función que va de $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$. Si $\{|v_j\rangle\}$ es una base:

$$A|v_j\rangle = \sum_{k=1}^{n} A_{kj} |v_k\rangle \tag{4}$$

Por lo tanto, si $|\phi\rangle = \sum_i \lambda_i |v_i\rangle$:

$$A|\phi\rangle = \sum_i \lambda_i A |v_i\rangle = \sum_i \lambda_i \sum_{k=1}^{n} A_{ki} |v_k\rangle \tag{5}$$

2.1.3. Producto tensorial

El espacio vectorial $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$, es el espacio vectorial resultante del producto tensorial entre los espacios $\mathbb{C}^n$ y $\mathbb{C}^m$. Los elementos de $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$, son combinaciones lineales de $|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle$, donde $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^n$ y $|\phi\rangle \in \mathbb{C}^m$. Si $\{|v_i\rangle\}$ es base de $\mathbb{C}^n$ y $\{|u_i\rangle\}$ es base de $\mathbb{C}^m$, la base del espacio $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$ será:

$$\{|v_i\rangle \otimes |u_j\rangle; \quad i = 1, ..., n; \quad j = 1, ..., m\} \tag{6}$$

Aprovachamos para decir que cambiaremos de notación más adelante. Para simplificar, abreviamos de $|\phi\rangle \otimes |\psi\rangle$ a $|\phi\rangle |\psi\rangle$.

2.2. Postulados mecánica cuántica

2.2.1. Postulado 1

Para cada sistema físico hay un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ asociado, llamado espacio de estados. El sistema esta totalmente descrito por un operador positivo y de traza igual a 1 ($\text{Tr}\rho = 1$). Si el sistema esta preparado con probabilidad P_i en el estado ρ_i, entonces:

$$\rho = \sum_i P_i \rho_i \tag{7}$$

Se denomina estado puro, al estado que se puede escribir de la forma $\rho = |\psi\rangle \langle\psi|$. Los estados mixtos, se pueden diagonalizar y definir de la forma $\rho = \sum_i P_i |\psi_i\rangle \langle\psi_i|$, donde $\sum_i P_i = 1$. Por lo tanto podemos escribir los estados mixtos de la forma (7).

2.2.2. Postulado 2

Las medidas cuánticas se caracterizan por un conjunto $\{M_j\}$ de matrices semidefinidas positivas, que cumplen $\sum_j M_j = \mathbb{I}$. El subíndice j se refiere a los posibles resultados de la medida.

La probabilidad de observar un resultado viene determinada por la llamada *regla de Born*:

$$P(j|\rho) = \text{Tr}\rho M_j \tag{8}$$

Es importante notar que si tenemos un estado mixto, al hacer una medida y observar el resultado de ella, el estado mixto colapsará a un estado puro.

2.2.3. Postulado 3

La evolución temporal de un sistema cuántico aislado es unitaria. Si el estado en el tiempo t es ρ y en el tiempo t' es ρ', existe una unitaria U, que dependa de $t' - t$, tal que:

$$\rho' = U\rho U^\dagger \tag{9}$$

2.2.4. Postulado 4

El espacio de estados de un sistema compuesto es el producto tensorial de los espacios estado de cada subsistema. Si el subsistema i está preparado en el estado ρ_i, el sistema total estará en el estado:

$$\rho = \rho_1 \otimes \rho_2 \otimes \cdots \otimes \rho_n \tag{10}$$

Podemos ampliar la *regla de Born* para sistemas compuestos. El espacio de Hilbert del sistema compuesto será $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_n$. La probabilidad conjunta de que el jugador i observe el resultado j será:

$$P(j_1, ..., j_n|\rho) = \text{Tr}\rho(M^1_{j_1} \otimes \cdots \otimes M^n_{j_n}) \tag{11}$$

Si nos dan el estado de un sistema compuesto, uno siempre puede determinar el estado de sus subsistemas. Por simplicidad supongamos un sistema bipartito, ρ_{AB}. El estado del subsistema que pertenece a Alice será:

$$\rho_A = \text{Tr}_B(\rho_{AB}) \tag{12}$$

Donde Tr_B es la traza parcial sobre el subsistema de Bob.

Vamos a ver otro punto en el caso de un sistema bipartido. Consideremos un sistema en un estado mixto ρ. Este estado se puede ver como el estado parcial de un sistema compuesto y el sistema compuesto puede ser puro. Si $\rho = \sum_i P_i |\psi_i\rangle \langle\psi_i|$, $\rho = \text{Tr}_B(|\boldsymbol{\psi}\rangle \langle\boldsymbol{\psi}|)$ con

$$|\boldsymbol{\psi}\rangle = \sum_i \sqrt{P_i}\, |\psi_i\rangle \otimes |\beta_i\rangle$$

Donde $\{|\beta_i\rangle\}$ es una base ortonormal del espacio de Hilbert que le corresponde a Bob.

3. Entrelazamiento y no-localidad

3.1. Entrelazamiento

El concepto de entrelazamiento cuántico ha jugado un papel muy especial dentro del desarrollo de la física cuántica. Durante muchos años fue uno de los principales temas de discusión ya que las consecuencias de esta correlación cuántica, para muchos físicos, no eran aceptables. En este apartado, nos hemos informado con los artículos que tratan la no localidad de Bell [3] y [12], en los que se hablan de esta discusión. También hemos consultado [4] y [6]. Para más profundidad sobre el tema recomiendo consultar [5].

En 1935, Einstein, con la colaboración de Podolsky y Rosen, publicó el artículo conocido como EPR [1], donde se plantea la paradoja EPR. Con esta paradoja, Einstein pretendía dar un golpe a la teoría cuántica, de la que él mismo había sido partícipe en el desarrollo. Con esta paradoja acusaba a la teoría cuántica de estar incompleta. Einstein explicaba que si dos personas compartían un estado que estaba entrelazado, así como dice la teoría cuántica, una medida local en una de las partes del estado, afectaría instantáneamente a la otra parte. Einstein se basó en este fenómeno para afirmar que el entrelazamiento violaba el concepto de realismo local, del cual él era defensor, y que por lo tanto la teoría cuántica era incompleta.

En 1964 John Bell, planteó lo que se llaman las desigualdades de Bell [2]. El realismo local aplicado a ciertos fenómenos, llevaba a estas desigualdades, y por lo tanto, si experimentalmente, el entrelazamiento cuántico violaba estas desigualdades, se demostraría que el realismo local y el argumento de Einstein eran erróneos. Tuvieron que pasar muchos años para poder llevar a cabo los experimentos, pero finalmente, se demostró que el entrelazamiento cuántico violaba estas desigualdades y por lo tanto se descartó el realismo local.

El entrelazamiento cuántico, es un fenómeno, sin equivalente clásico, en el cual los estados cuánticos de dos o más objetos se deben describir mediante un estado único que involucra a todos los objetos del sistema. O sea que, un conjunto de partículas entrelazadas no puede definirse como partículas individuales con estados definidos. Por ejemplo el estado $|\psi\rangle = \frac{|0\rangle|1\rangle - |1\rangle|0\rangle}{\sqrt{2}}$ no se puede escribir de la forma $|\psi\rangle = |\phi\rangle|\varphi\rangle$.

Demostración

Sea $|\phi\rangle = \phi_0|0\rangle + \phi_1|1\rangle$ y $|\varphi\rangle = \varphi_0|0\rangle + \varphi_1|1\rangle$, por lo tanto,

$$|\phi\rangle|\varphi\rangle = \phi_0\varphi_0|0\rangle|0\rangle + \phi_0\varphi_1|0\rangle|1\rangle + \phi_1\varphi_0|1\rangle|0\rangle + \phi_1\varphi_1|1\rangle|1\rangle \tag{13}$$

Queremos que este estado coincida con $|\psi\rangle = \frac{|0\rangle|1\rangle - |1\rangle|0\rangle}{\sqrt{2}}$

$$\phi_0\varphi_0 = 0, \quad \phi_0\varphi_1 = 1/\sqrt{2}, \quad \phi_1\varphi_0 = -1/\sqrt{2}, \quad \phi_1\varphi_1 = 0$$

Vemos claramente que este sistema de ecuaciones no tiene solución. Por lo tanto queda demostrado que el estado $|\psi\rangle = \frac{|0\rangle|1\rangle - |1\rangle|0\rangle}{\sqrt{2}}$ no se puede escribir de la forma $|\psi\rangle = |\phi\rangle|\varphi\rangle$ y podemos asegurar que es un estado entrelazado.

Un estado puro de un sistema compuesto $\bigotimes_{n=1}^{N}\mathcal{H}_n$ se le llama entrelazado si no se le puede escribir como un producto:

$$|\boldsymbol{\psi}\rangle \neq \bigotimes_{n=1}^{N}|\psi_n\rangle \tag{14}$$

A un estado mixto de un sistema compuesto se le llama entrelazado si no existe descomposición convexa sobre los estados producto:

$$\rho \neq \sum_m P_m\left(\bigotimes_{n=1}^{N}\rho_{n,m}\right) \tag{15}$$

El entrelazamiento cuántico es la clave en tecnologías que están en desarrollo como la computación cuántica, la criptografía cuántica, en la comunicación, etc., y por lo tanto es un área de investigación muy activa.

3.2. No localidad

En este apartado nos basamos en la introducción del libro [3] para explicar el concepto y la historia de la no localidad de Bell. Para más profundidad sobre el tema se puede consultar el artículo [12] o el mismo libro [3].

Una de las afirmaciones más famosas de la ciencia es la que ha acompañado a la cuántica desde el principio: *Hay indeterminación en la natura.* Los inicios de la teoría cuántica, no dejó a ningún físico de la época indiferente. Había mucha discusión sobre la teoría. Einstein era uno de los mayores detractores de la teoría cuántica. Pensaba que una teoría sin determinismo y basado en leyes estadísticas solo podía ser un apaño temporal.

Aún actualmente, si te preguntan por evidencias de la indeterminación, muchos responderán con el principio de indeterminación de Heisenberg. Este principio solo actúa dentro del campo de la cuántica, no de la natura en general. En 1964 John Bell demostró que hay indeterminación en la natura mediante la observación del fenómeno llamado no localidad de Bell.

Para demostrar la no localidad de Bell, se tuvieron que hacer experimentos expresamente diseñados para esta tarea. El trabajo de Alain Aspect y colaboradores en 1982 fue la primera prueba que evidencia la no localidad de Bell.

Veamos cuales son los tres roles más importantes de la no localidad de Bell. El primero es el de evidenciar el indeterminismo. El segundo es que la no localidad de Bell se usa en la creación de dispositivos cuánticos ya que provee los certificados más convincentes. Estos dispositivos están destinados a las áreas de la criptografía y la computación cuánticas. Este campo esta en continuo desarrollo y es una de las áreas en las que más se trabaja y investiga últimamente. Por último, es la contribución de la no localidad de Bell con nuevas ideas para nuevas teorías físicas.

Las pruebas de no localidad de Bell suelen ser experimentos en laboratorios. Para que sea más fácil la comprensión del fenómeno de la no localidad se suelen poner ejemplos de juegos del estilo de concursos de televisión. Este tipo de ejemplos, más familiares, ayudan a comprender mejor el concepto de la no localidad de Bell.

En estos juegos, los jugadores, llamados de manera alfabética, Alice, Bob, Charlie, etc., están en el mismo equipo. En cada ronda del juego se les hace una pregunta (input) a cada jugador y cada uno de ellos tiene que dar una respuesta (output). Los jugadores conocen las reglas y la lista de las posibles preguntas por avanzado. Antes de empezar, los jugadores pueden decidir que estrategia van a seguir para dar las respuestas en cada ronda. Los jugadores pueden usar distintos recursos para obtener sus respuestas y para coordinarlas con sus compañeros. Por ejemplo, si los jugadores se pueden comunicar entre ellos durante la ronda mediante por ejemplo un teléfono, podrían ponerse de acuerdo entre ellos y ganar fácilmente el juego. El recurso del teléfono por lo tanto sería un recurso muy potente y se le denomina un recurso de comunicación (signalling). Los recursos de no comunicación (no-signalling) son más interesantes. Un ejemplo de recurso de no comunicación sería por ejemplo que cada jugador tuviese una lista de respuestas para cada pregunta. Como vemos si por ejemplo Alice, hiciese algo a su lista, los otros jugadores no lo notarían. Al no poder enviar ningún mensaje a los otros jugadores manipulando su lista, lo convierte en un recurso de no comunicación. Vamos a plantear tres tipos de juegos y estrategias que pueden seguir los jugadores en cada uno de ellos:

(i) El primero es un juego con la regla de que los jugadores tienen que dar la misma respuesta si les hacen la misma pregunta. Este juego se gana fácilmente poniéndose de acuerdo previamente en dar siempre la misma respuesta.

(ii) El segundo, los jugadores tienen que dar la misma respuesta solo si reciben la misma pregunta. Si reciben respuestas diferentes, tienen que responder de manera diferente. Este juego se gana acordando previamente una lista de respuestas a cada pregunta.

(iii) El tercer juego por ejemplo puede ser que tienen que dar respuestas diferentes si les hacen la pregunta numero uno, pero la misma respuesta si les hacen otra pregunta que no sea la uno. Este juego no se puede ganar usando una estrategia predeterminada.

Nos referimos a *localidad de Bell* a los procesos mediante los cuales el jugador i genera su respuesta sin que el input del jugador j tenga importancia en este proceso, con $i \neq j$. Si llamamos a λ la estrategia que siguen, la probabilidad de que el jugador i dé una respuesta (output) "a" a la pregunta x es $P_\lambda(a|x)$. Para dos jugadores seria de la siguiente forma.

$$P(a,b|x,y) = \int d\lambda Q(\lambda) P_\lambda(a|x) P_\lambda(b|y) \tag{16}$$

Donde $Q(\lambda)$ es la distribución de probabilidad que define la estrategia. Las estadísticas serán *locales* si se pueden escribir de la manera anterior. Serán *no locales* si no se pueden escribir de la manera anterior. Una *prueba de Bell* es un juego el cual la estrategia sigue estadísticas no locales.

Podríamos pensar que los recursos no locales son los dispositivos de comunicación. La cuántica nos obliga a extender esta definición. Veamos el siguiente ejemplo. Si dos jugadores comparten un sistema físico que cuánticamente describimos como ρ_{AB}. Suponemos que la estrategia que da los outputs a los jugadores es hacer medidas locales al estado compartido. Suponiendo que Π_a^x es el operador positivo correspondiente a un input x y un output a para Alice, equivalentemente para Bob. Tendremos las siguientes estadísticas:

$$P(a,b|x,y) = Tr(\Pi_a^x \otimes \Pi_b^y \rho_{AB}) \tag{17}$$

En general estas estadísticas no las podemos escribir de la forma (16). Por eso concluimos en que algunos estados cuánticos compartidos son recursos no locales.

3.3. Pruebas de Bell

3.3.1. Clauser-Horne-Shimony-Holt (CHSH)

El juego CHSH consiste en lo siguiente: Tenemos dos jugadores. La pregunta que se les hace a los jugadores puede ser 0 o 1, $x, y \in \{0,1\}$ y las respuestas que pueden dar $a, b \in \{0,1\}$. La distribución de las preguntas es uniforme y por lo tanto con probabilidad $\frac{1}{4}$ cada pareja de preguntas. Cuando los jugadores dan sus respuestas, si estas cumplen las condiciones, se les da una paga a los jugadores y diremos que han ganado. Las condiciones para ganar y las pagas las vamos a ver en las siguientes tablas:

	0	1
0	1,1	0,0
1	0,0	1,1

Tabla 1: Pagas en el caso de que $xy = 0$

	0	1
0	0,0	1,1
1	1,1	0,0

Tabla 2: Pagas en el caso de que $xy = 1$

Como vemos en las tablas, los jugadores ganan dando la misma respuesta cuando las preguntas son $(x,y) = (0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, y dando respuestas diferentes cuando $(x,y) = (1,1)$.

Para comprobar que este juego es una prueba de Bell, debemos ver cual es la probabilidad que tienen los jugadores de ganar el juego con un recurso local. Recurso local es el que se usa en una estrategia local que comportará las estadísticas locales que hemos visto anteriormente.

En este caso un recurso local puede ser pactar una respuesta antes de que empiece el juego. Tanto si los dos jugadores pactan responder con la respuesta 0 o con la 1, se obtiene la máxima probabilidad de ganar el juego con recursos locales. La probabilidad máxima que tienen de ganar pactando la misma respuesta es igual a $\frac{3}{4}$.

$$P_{r.l.}(\text{ganar}) \leq \frac{3}{4} \tag{18}$$

Donde $P_{r.l.}(\text{ganar})$ es la probabilidad de ganar usando un recurso local.

Por lo tanto, si vemos que ganan con una probabilidad mayor a 3/4 podremos asegurar que están usando recursos no locales. El juego se puede ganar con probabilidad 1 cuando los dos jugadores usan recursos no locales. Con recursos no locales se puede llegar a ganar con probabilidad 1 con lo que se llaman PR-*box* que existen en las matemáticas pero que no existen en la natura. Con el entrelazamiento cuántico, también se puede superar este límite haciendo medidas a un estado entrelazado compartido entre los jugadores. El estado entrelazado en cuestión es:

$$|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle) \tag{19}$$

Con este estado, Alice tiene que hacer las medidas de X y Z para las preguntas 0 y 1, respectivamente. Bob tiene que hacer las medidas de $\frac{X+Z}{\sqrt{2}}$ y $\frac{X-Z}{\sqrt{2}}$ para las preguntas 0 y 1 respectivamente. Donde X corresponde a la matriz de Pauli σ_x y Z a la σ_z. Siguiendo esta estrategia, se puede demostrar que consiguen ganar el juego con probabilidad $cos^2(\frac{\pi}{8}) \sim 0,85$.

3.3.2. Greenberger-Horne-Zeilinger

Una prueba de no localidad hecha por Greenberger, Horne y Zeilinger en 1989. Consideramos el juego de tres jugadores. Este juego lo vamos a discutir detenidamente más adelante. Los tres jugadores pueden recibir dos tipos de preguntas, $x, y, z \in \{0, 1\}$. Las preguntas pueden ser las siguientes, $(x, y, z) = (1, 1, 1)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0$ y $(0, 0, 1)$, distribuidas uniformemente, es decir, con probabilidad $\frac{1}{4}$ cada una. Las respuestas pueden ser, $a, b, c \in \{0, 1\}$. Las respuestas que tienen que dar para ganar son, $A = 0$ módulo 2, para la pregunta (1,1,1) y $A = 1$ módulo 2 para las preguntas (1,0,0), (0,1,0) y (0,0,1), donde $A = a + b + c$. Supongamos que siempre que ganan, cada jugador recibe un beneficio igual a 1. Si no ganan, el beneficio es 0.

Al igual que en el caso del juego CHSH, vamos a encontrar cual es la probabilidad máxima de ganar con una estrategia local. Al igual que antes, pueden pactar una respuesta o incluso pueden pactar un orden de respuesta. Podrían pactar por ejemplo dar las respuestas (1,1,1), (1,0,0), (0,1,0) y (0,0,1) de manera cíclica. Tanto con esta estrategia, como fijando una de esas 4 posibles respuestas, ganarán el juego con probabilidad 3/4. Esta probabilidad equivale a la máxima que se puede llegar con una estrategia local.

Como ya hemos dicho, si vemos que ganan el juego con probabilidad mayor a 3/4, podremos afirmar que están utilizando un recurso no local.

Utilizando una estrategia cuántica, se puede ganar el juego GHZ con probabilidad 1. La estrategia cuántica consiste en que los jugadores comparten un estado entrelazado. Con este estado, dependiendo de la estrategia a seguir, van a hacer una serie de medidas. En el caso del juego GHZ el estado entrelazado es:

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle|1\rangle) \tag{20}$$

La estrategia a seguir es la siguiente:

- Si has recibido el type 0, haces la medida de $Y = \sigma_y$
- Si has recibido el type 1, haces la medida de $X = \sigma_x$

Después de hacer estas medidas, los jugadores tendrán el resultado de uno de los dos valores propios del operador en cuestión (+1 o -1). Con este valor propio, haciendo el cálculo de:

$$(-1)^{a_i} = r_i \tag{21}$$

Podremos descubrir que acción debemos tomar. Donde r es el resultado de la medida. Veamos como sería el transcurso de una ronda:

Como sabemos que los inputs están distribuidos uniformemente, supongamos que ha salido la pregunta (1,1,1). Los jugadores ya saben que estrategia seguir, todos harán la medida del operador X. Sabemos que inmediatamente después de hacer la medida, el estado cambia. Veamos los posibles estados en los que puede resultar. A priori son los siguientes, $|+x\rangle\,|+x\rangle\,|+x\rangle$, $|+x\rangle\,|+x\rangle\,|-x\rangle$, $|+x\rangle\,|-x\rangle\,|+x\rangle$, $|-x\rangle\,|+x\rangle\,|+x\rangle$, $|+x\rangle\,|-x\rangle\,|-x\rangle$, $|-x\rangle\,|+x\rangle\,|-x\rangle$, $|-x\rangle\,|-x\rangle\,|+x\rangle$ y $|-x\rangle\,|-x\rangle\,|-x\rangle$.

Para calcular la probabilidad que tienen de salir cada estado haremos el cálculo:

$$P(|r_1\rangle\,|r_2\rangle\,|r_3\rangle) = |\,\langle r_1|\,\langle r_2|\,\langle r_3|GHZ\rangle\,|^2 \tag{22}$$

Si hacemos los cálculos veremos que hay dos grupos:

- Con probabilidad 0, los estados: $|-x\rangle\,|-x\rangle\,|-x\rangle$, $|+x\rangle\,|+x\rangle\,|-x\rangle$, $|+x\rangle\,|-x\rangle\,|+x\rangle$ y $|-x\rangle\,|+x\rangle\,|+x\rangle$.
- Con probabilidad $\frac{1}{4}$, los estados: $|+x\rangle\,|+x\rangle\,|+x\rangle$, $|+x\rangle\,|-x\rangle\,|-x\rangle$, $|-x\rangle\,|+x\rangle\,|-x\rangle$ y $|-x\rangle\,|-x\rangle\,|+x\rangle$.

Supongamos que ha salido el estado $|+x\rangle\,|-x\rangle\,|-x\rangle$. Ahora los jugadores tienen que hacer el cálculo para saber que acción (respuesta) tienen que tomar. Alice hace el siguiente cálculo:

$$(-1)^{a_i} = +1 \tag{23}$$

Vemos que Alice tiene que tomar la acción $a_1 = 0$.

Bob y Charlie tienen que hacer el mismo cálculo:

$$(-1)^{a_i} = -1 \tag{24}$$

Vemos como Bob y Charlie tienen que hacer las acciones $a_2 = a_3 = 1$.

La combinación final es $(a_1, a_2, a_3) = (0, 1, 1)$, vemos que este grupo de acciones si que gana la partida. Si hacemos los respectivos cálculos de cada estado resultante de la medida, veremos que todas las acciones (a_1, a_2, a_3) calculadas, nos garantizaran ganar el juego. De manera similar llegaremos a la misma conclusión con los otros inputs (preguntas). Por lo tanto, vemos que la estrategia cuántica gana el juego con probabilidad 1.

3.3.3. Mermin-Peres, juego del cuadrado mágico

Existen dos jugadores que al principio del juego se les separa y no tienen forma de comunicarse entre ellos. El juego consiste en rellenar una matriz 3x3 con los valores 1 y -1. Alice rellena las filas y Bob las columnas. Alice tiene que conseguir que los tres números de cada fila tengan un producto negativo y Bob tiene que conseguir que los tres números de sus columnas tengan un producto negativo. Cada ronda se les asigna una fila y columna aleatoria. Por lo tanto, ganan si el numero que comparten es el mismo.

Si por ejemplo a Alice le asignan la fila 1 y a Bob la columna 2, ganarán si coinciden en el numero n_{12}.

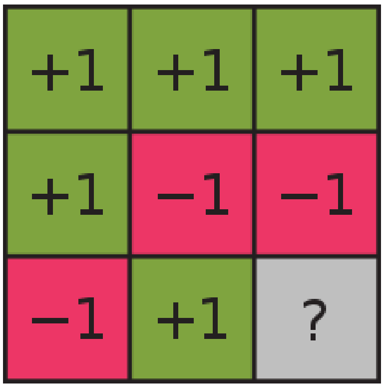


Figura 1: Ejemplo de como puede quedar la matriz.

Una estrategia sería que los jugadores tuviesen una matriz pactada antes de empezar el juego. Esto les daría una posibilidad de ganar el juego 8 de cada 9 vecee ya que hay una de las casillas que es imposible que coincidan los dos jugadores si quieren satisfacer sus dos condiciones individuales de victoria.

Los dos jugadores podrían ganar con probabilidad 1 si pudiesen comunicarse después de saber qué columna y fila se les ha asignado. Hay otra forma de poder ganar este juego con probabilidad 1 y sin comunicarse, usando lo que se conoce como pseudo telepatía cuántica. Lo hacen compartiendo dos pares de partículas con estados entrelazados. Al saber qué fila o columna se les ha asignado, usan esa información para seleccionar la medida que tienen que hacer a sus partículas.

$I \otimes S_z$	$S_z \otimes I$	$S_z \otimes S_z$
$S_x \otimes I$	$I \otimes S_x$	$S_x \otimes S_x$
$-S_x \otimes S_z$	$-S_z \otimes S_x$	$S_y \otimes S_y$

Tabla 3: Medidas que tienen que hacer a sus partículas para cada casilla.

El estado que comparten es el siguienete:

$$|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_a \otimes |+\rangle_b + |-\rangle_a \otimes |-\rangle_b) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_c \otimes |+\rangle_d + |-\rangle_c \otimes |-\rangle_d) \tag{25}$$

Donde $|+\rangle$ y $|-\rangle$ corresponden a los vectores propios de la matriz de Pauli σ_x de valores +1 y -1 respectivamente.

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \quad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \tag{26}$$

4. Juegos de información incompleta

En este apartado, vamos a explicar las correlaciones y equilibrios que podemos encontrar dentro de la teoría de juegos basándonos en el artículo [7]. No vamos a explicar todas las características de estos equilibrios y correlaciones, por lo tanto, para más información, recomiendo consultar el artículo [7].

En este trabajo queremos estudiar el entrelazamiento cuántico, y como, gracias a este, hay juegos en los que cuando se aplica una estrategia cuántica se obtiene una ventaja respecto a las estrategias clásicas. Nos vamos a centrar en los juegos con información incompleta. Para ello, vamos a repasar la teoría de juegos, desde su origen, hasta la explicación de diferentes tipos de juegos.

Un punto clave fue la definición del equilibrio de Nash. Nash demostró que en cualquier juego de información incompleta, existe un equilibrio. A partir de aquí se investigó muchísimo más el tema y se estudiaron las características y propiedades de estos equilibrios. Motivados por todo esto, uno de los puntos clave era el de como motivar o ayudar a los jugadores a llegar a un equilibrio que les beneficiase. Esto en la teoría de juegos se le denomina consejo. Para seguir vamos a explicar como funciona un juego de información incompleta. En un juego de información incompleta o también llamados juegos bayesianos, a cada jugador se le da lo que llamamos un type. Este type puede ser cualquier cosa. Puede ser por ejemplo características personales de cada jugador (intuitivo, decidido, rico, pobre, etc.) o también podría ser intereses secretos de cada jugador, por ejemplo, interés en invertir en según que tipo de empresas. En un juego así una solución puede ser un equilibrio de comunicación. En un equilibrio de comunicación, los jugadores comunican su type a un mediador de confianza el cual mediante una correlación les aconseja tomar una acción. El equilibrio de comunicación no siempre es la mejor opción ya que no siempre los jugadores están dispuestos a desvelar su type a un mediador, ya que como hemos dicho, la información del type a menudo es sensible.

Un juego de información incompleta se puede definir con los siguientes objetos:

- Un conjunto finito de jugadores al que llamamos N, donde $N = [n]$;
- Un conjunto finito de perfiles de jugador al que llamamos *type* $T := T_1 \times \cdots \times T_n$;
- Un conjunto finito de acciones $A := A_1 \times \cdots \times A_n$;
- Una distribución de probabilidad de los types $P(t)$.
- Para cada jugador, una función recompensa $v_i : T \times A \to \mathbb{R}$

Como ya hemos dicho, el juego consiste en lo siguiente:
Los types se reparten según la distribución de probabilidad P. Cada jugador aprende su type y lleva a cabo la estrategia g_i, donde $g_i(a_i|t_i)$ es una distribución de probabilidad de a_i sobre los types t_i. Esta estrategia g_i le aconsejará qué acción debe tomar. Una estrategia pura es un mapa que lleva de T_i a A_i, esto significa que el jugador decide una acción basándose solo en la información de su tipo. Una estrategia mixta, es una distribución de probabilidad sobre estrategias puras, por lo tanto, la función $g_i : T_i \to A_i$ se convierte en una variable aleatoria. Para hacer esta distribución de manera explicita, introducimos las variables aleatorias independientes y locales λ_i, con probabilidad $\Lambda_i(\lambda_i)$.

Una vez tomada una acción, el jugador obtiene su paga de acuerdo con su función recompensa v_i. Esta función recompensa normalmente también depende de los otros jugadores, tanto de sus acciones como de sus types. El beneficio promedio del jugador i es:

$$\langle v_i \rangle = \mathbb{E}_{\mathbf{t},\mathbf{g}} v_i(\mathbf{t}, g_1(t_1), ..., g_n(t_n)) = \sum_{\mathbf{t},\mathbf{a}} P(\mathbf{t}) v_i(\mathbf{t}, \mathbf{a}) \prod_{i=1}^{n} g_i(a_i|t_i) \tag{27}$$

Donde $\mathbf{t} = (t_1, ..., t_n)$, igual para $\mathbf{g}$ y $\mathbf{a}$. Una solución del juego es un conjunto de estrategias $\mathbf{g} = (g_1, ..., g_n)$. Podemos decir que los jugadores miran por su propio interés, ya que si fijamos todas las estrategias menos la del jugador i, este elegirá la estrategia que maximice su beneficio promedio. La solución será un equilibrio

(equilibrio de Nash) si ningún jugador tiene incentivo de cambiar de estrategia. Matemáticamente se puede explicar de la siguiente manera para cualquier i, t_i, y a_i:

$$\sum_{\boldsymbol{t}_{-i},\boldsymbol{\lambda}} P(\mathbf{t})\Lambda(\boldsymbol{\lambda})v_i(\mathbf{t},\mathbf{g}_{-i}(\mathbf{t}_{-i},\boldsymbol{\lambda}_{-i})g_i(t_i,\lambda_i)) \geq \sum_{\boldsymbol{t}_{-i},\boldsymbol{\lambda}} P(\mathbf{t})\Lambda(\boldsymbol{\lambda})v_i(\mathbf{t},\mathbf{g}_{-i}(\mathbf{t}_{-i},\boldsymbol{\lambda}_{-i})a_i) \tag{28}$$

Esta desigualdad, se resumen en que, si la estrategia es un equilibrio, cualquier acción a_i solo puede igualar el beneficio esperado del jugador i si coincide con la acción que le recomienda la estrategia g_i. Por último, el beneficio social esperado es la suma de los beneficios esperados de cada jugador. $SW(\mathbf{g}) = \sum_i \langle v_i \rangle$.

4.1. Correlaciones

Para definir los diferentes tipos de equilibrios, tenemos que definir previamente las correlaciones. Como hemos visto en el apartado anterior, para tener un beneficio esperado bien definido necesitamos tener definida la probabilidad condicional de la acción **a** respecto al type **t**.

Para este proposito, a la correlación la definiremos como una distribución de probabilidad condicional conjunta:

$$Q(s_1,...,s_n|r_1,...r_n) \geq 0 \ \forall s_i \in S_i, \ r_j \in R_j. \tag{29}$$

Donde r_i son entradas (inputs) y s_i son las salidas (outputs). Obviamente tiene que respetar la siguiente condición:

$$\sum_{\mathbf{s}} Q(\mathbf{s}|\mathbf{r}) = 1 \ \forall \mathbf{r} \in \mathbf{R} \tag{30}$$

4.1.1. No comunicanión

También conocidas en inglés como belief invariant (creencia invariable). Q es belief invariant si la distribución de las salidas s_i dadas las entradas r_i, no da ninguna información adicional de r_j. Este no sería el caso de una correlación donde por ejemplo s_i sea igual a r_j. Formalmente se expresa de la siguiente manera. Para un conjunto $I \subset N$, $J = N \setminus I$, $R_I = \times_{i\in I} R_i$, $S_I = \times_{i\in I} S_i$:

$$\sum_{\mathbf{s}_J \in S_J} Q(\mathbf{s}_I,\mathbf{s}_J|\mathbf{r}_I,\mathbf{r}_J) = \sum_{\mathbf{s}_J \in S_J} Q(\mathbf{s}_I,\mathbf{s}_J|\mathbf{r}_I,\mathbf{r'}_J) \ \forall s_I \in S_I, r_I \in R_I, r_J, r'_J \in R_J \tag{31}$$

Mas adelante vamos a ver ejemplos de correlaciones belief invariant.

4.1.2. Locales

Q es local, si un jugador i observando su parte de una variable aleatoria (independiente de $\mathbf{r}$) $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1,...,\gamma_n)$, con distribución $P(\boldsymbol{\gamma})$, puede simular la correlación localmente haciendo solo operaciones que dependan de r_i y γ_i. Formalmente:

$$Q(\mathbf{s}|\mathbf{r}) = \sum_{\boldsymbol{\gamma}} V(\boldsymbol{\gamma})L_1(s_1|r_1\gamma_1)\cdots L_n(s_n|r_n\gamma_n) \tag{32}$$

Cualquier correlación local es también belief invariant, ya que la condición de la ecuación (24) se cumple.

4.1.3. Cuánticas

En el caso de las estrategias cuánticas, las estrategias consisten en un conjunto de medidas locales que tenemos que hacer con un estado entrelazado. Las medidas locales son $M^{t_i} = (M^{t_i}_{a_i} : a_i \in A_i)$, para el juagor i con type t_i, y el estado, ρ. Ahora la correlación $Q(\boldsymbol{a},\boldsymbol{t})$ la podemos escribir de la siguiente manera.

$$Q(\boldsymbol{a},\boldsymbol{t}) = Tr\rho(M^{t_1}_{a_1} \otimes \cdots \otimes M^{t_n}_{a_n}) \tag{33}$$

Por útimo quiero comentar que todas las correlaciones locales pueden ser correlaciones cuánticas pero no todas las correlaciones cuánticas pueden ser correlaciones belief invariant.

$$\text{Locales(G)} \subset \text{Cuanticas(G)} \subset \text{ B.I.(G)} \tag{34}$$

4.2. Clases de equilibrios

Para terminar vamos a hablar de las diferentes clases de equilibrios. Vamos a hablar de las características, de sus ventajas e inconvenientes. Al final de esta sección vamos a ver un ejemplo donde veremos las repercusiones de algunos de estos equilibrios.

Estudiaremos los equilibrios con comunicación y con acceso a un dispositivo de correlación que funciona con los inputs que les de cada jugador a través de un canal privado de cada jugador con el dispositivo. Los inputs que les de cada jugador, depende obviamente del type que obtienen al empezar la partida. Por lo tanto, el jugador i, a través de una función f_i puede obtener el input que le da al dispositivo. $f_i : T_i \to R_i$. Después de entregar cada jugador su input r_i, el dispositivo les de el output s_i, con el cada jugador obtendrá la acción que el dispositivo les recomienda hacer a través de una función $g_i : T_i \times S_i \to A_i$.

Para una estrategia mixta, el beneficio esperado del jugador i es:

$$\langle v_i \rangle = \sum_{\boldsymbol{t},\boldsymbol{s},\boldsymbol{\lambda}} P(\mathbf{t})\Lambda(\boldsymbol{\lambda})Q(\mathbf{s}|f_1(t_1,\lambda_1),...,f_n(t_n,\lambda_n))v_i(\mathbf{t},g_1(t_1,s_1,\lambda_1),...,g_n(t_n,s_n,\lambda_n)) \tag{35}$$

4.2.1. Equilibrio de comunicación

Es el equilibrio más general. Aquí la correlación Q no tiene ninguna restricción. Para definir bien el equilibrio tenemos que definir, la correlación Q del dispositivo de correlación y la estrategia que siguen los jugadores, es decir, las funciones $\{f_i\}$ y $\{g_i\}$.

Si tenemos $\mathbf{x} = (x_1,...,x_n)$, $\mathbf{x}_{-i} = (x_1,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_n)$. Con esto, definimos que $(\mathbf{f},\mathbf{g},Q)$ es un equilibrio del juego G, si para cada jugador i y para todas las funciones $\phi : T_i \to R_i$ y $\chi : S_i \to A_i$,

$$\begin{aligned}\sum_{\boldsymbol{t}_{-i},\boldsymbol{s},\boldsymbol{\lambda}} & P(\mathbf{t}_{-i}|t_i)\Lambda(\boldsymbol{\lambda})Q(\mathbf{s}|f_i(t_i,\lambda_i)\mathbf{f}_{-i}(\mathbf{t}_{-i},\boldsymbol{\lambda}_{-i}))v_i(\mathbf{t},g_i(t_i,s_i,\lambda_i)\mathbf{g}_{-i}(\mathbf{t}_{-i},\mathbf{s}_{-i},\boldsymbol{\lambda}_{-i})) \\ & \geq \sum_{\boldsymbol{t}_{-i},\boldsymbol{s},\boldsymbol{\lambda}} P(\mathbf{t}_{-i}|t_i)\Lambda(\boldsymbol{\lambda})Q(\mathbf{s}|\phi_i(t_i,\lambda_i)\mathbf{f}_{-i}(\mathbf{t}_{-i},\boldsymbol{\lambda}_{-i}))v_i(\mathbf{t},\chi(t_i,s_i,\lambda_i)\mathbf{g}_{-i}(\mathbf{t}_{-i},\mathbf{s}_{-i},\boldsymbol{\lambda}_{-i}))\end{aligned}$$

Aqui podemos ver el concepto principal del equilibrio de Nash, donde los jugadores no tienen ningún incentivo para cambiar de estrategia.

4.2.2. Equilibrio belief invariant

Obtenemos un equilibrio belief invariant si la correlación que usamos es belief invariant, tal y como esta definida en el apartado de correlaciones (4.1.1).

4.2.3. Equilibrio correlado

El conjunto $(\mathbf{f},\mathbf{g},Q)$ es un equilibrio correlado si la distribución de los outputs de Q es independiente de los inputs. $Q(\mathbf{s}|\mathbf{r}) = Q(\mathbf{s})$.

El conunto $(\mathbf{g},Q)$ es un equilibrio correlado si y solo si para cualquier i, t_i, s_i y a_i:

$$\sum_{\mathbf{t}_{-i},\mathbf{s}_{-i}} P(\mathbf{t}_{-i}|t_i)Q(\mathbf{s})v_i(\mathbf{t},\mathbf{g}(\mathbf{t},\mathbf{s})) \geq \sum_{\mathbf{t}_{-i},\mathbf{s}_{-i}} P(\mathbf{t}_{-i}|t_i)Q(\mathbf{s})v_i(\mathbf{t},a_i\mathbf{g}_{-i}(\mathbf{t}_{-i},\mathbf{s}_{-i})) \tag{36}$$

4.2.4. Equilibrio cuántico

Como sabemos, la solución de un juego es el conjunto $(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g},Q)$. En el caso del equilibrio cuántico, la solución consiste en un conjunto de medidas locales, $M^{t_i} = (M^{t_i}_{a_i} : a_i \in A_i)$, y el estado ρ. Será un equilibrio cuántico si la correlación que usamos es cuántica, definida como (26).

Podemos definir las pagas de los jugadores como:

$$\langle v_i \rangle = \sum_{\boldsymbol{t}_{-i}, \boldsymbol{a}} P(\boldsymbol{t}_{-i}|t_i)) Tr\rho(M_{a_1}^{t_1} \otimes \cdots \otimes M_{a_n}^{t_n}) v_i(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{a}) \tag{37}$$

Usando las correlaciones cuánticas, el mediador no necesita conocer el type de los jugadores. El mediador solo tiene que enviar a los jugadores la parte que les corresponde del estado ρ y los consejos de hacer las medidas $\{M^{t_i} : t_i \in T_i\}$. Por lo tanto la solución cuántica será $(M^{\boldsymbol{t}}, \rho)$. La solución cuántica $(M^{\boldsymbol{t}}, \rho)$ es un equilibrio si y solo si:

$$\begin{aligned} \langle v_i \rangle &= \sum_{\boldsymbol{t}_{-i}, \boldsymbol{a}} P(\boldsymbol{t}_{-i}|t_i)) Tr\rho(M_{a_1}^{t_1} \otimes \cdots \otimes M_{a_n}^{t_n}) v_i(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{a}) \\ &\geq \sum_{\boldsymbol{t}_{-i}, \boldsymbol{a}} P(\boldsymbol{t}_{-i}|t_i)) Tr\rho(M_{a_1}^{t_1} \otimes \cdots \otimes M_{a_{i-1}}^{t_{i-1}} \otimes N_{a_i}^{t_i} \otimes M_{a_{i+1}}^{t_{i+1}} \otimes \cdots \otimes M_{a_n}^{t_n}) v_i(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{a}) \end{aligned} \tag{38}$$

para cualquier juagdor i, t_i y $N^{t_i} = (N_{a_i}^{t_i} : a_i \in A_i)$.

4.3. Ejemplo CHSH

Vamos a ver el caso del juego CHSH y ver las equilibrios belief invariat, correlado y cuántico, con sus respectivos social welfares (beneficios sociales). Como ya hemos visto en el apartado (3.3.1), el juego CHSH consiste en lo siguiente: Tenemos dos jugadores. El type de los jugadores puede ser 0 o 1, y las acciones que pueden tomar a_i también pueden ser o 0 o 1. La distribución de los types es uniforme y por lo tanto con probabilidad $\frac{1}{4}$ cada uno. Este juego es un juego colaborativo en el sentido de que las pagas son iguales para los dos jugadores. Las pagas se reparten de acuerdo a las tablas 1 y 2 del apartado (3.3.1). Si colaboran los dos ganan lo mismo, pero si no lo hacen, los dos pierden.

Consideramos primero el equilibrio belief invariant. Con la siguiente correlación, $Q(00|t_1t_2 = 0) = Q(11|t_1t_2 = 0) = \frac{1}{2}$, $Q(01|t_1t_2 = 1) = Q(10|t_1t_2 = 1) = \frac{1}{2}$. Los dos jugadores comunican su type al mediador (dispositivo de correlación) y este les recomienda tomar la acción 00 o 11 de manera aleatoria en el caso de que $t_1t_2 = 0$. Igual para el caso $t_1t_2 = 1$ que recomienda las acciones 10 i 01 de manera aleatoria, donde 10 significa que el primer jugador debe tomar la acción 1 y el segundo la acción 0. Vemos que cada jugador tiene la probabilidad de hacer la acción $a_i \in A_i$ con probabilidad $\frac{1}{2}$ sin que el type del otro jugador influya. Por eso, no se puede ganar información extra después de la recomendación del mediador. También vemos que la probabilidad de ganar el juego es 1, o sea que siempre obtienen su paga, y como la paga siempre es 1, cada jugador obtiene un beneficio esperado $v_i = 1$ y por ende, un beneficio social esperado (social welfare) $SW = 1$.

El equilibrio correlado es aquel en el que se usa una correlación donde los outputs son independientes de los inputs. El equilibrio belief invariant que acabamos de ver no sería correlado ya que no cumple con esta norma. Ya que cuando el dispositivo recomienda por ejemplo la acción 00 o 11 es porque el producto de los types es igual a 0, por tanto si que existe una relación entre inputs y outputs. Un equilibrio correlado para el juego GHSH sería usando la correlación $Q(00) = Q(11) = \frac{1}{2}$. Vemos como las acciones que recomienda el dispositivo son independientes de los inputs. Este equilibrio gana el juego con una probabilidad de $\frac{3}{4}$ que corresponde a la probabilidad de que $t_1t_2 = 0$. Vemos que a los jugadores tampoco les interesa no hacer caso a la recomendación ya que es imposible tener un beneficio mayor. Con esta correlación el beneficio social esperado será $SW = \frac{3}{4}$.

Como hemos visto en el apartado (3.3.1), existe un equilibrio cuántico que gana el juego con probabilidad $cos^2(\frac{\pi}{8})$. A este equilibrio le corresponde un beneficio social esperado igual a $SW = cos^2(\frac{\pi}{8}) \sim 0,85$. Vemos como el SW de este equilibrio es menor que el del equilibrio belief invariant, pero un punto a favor de esta estrategia es que no hemos tenido la necesidad de revelar nuestro type al mediador.

5. Juegos competitivos

Este apartado esta construido en base a lo aprendido en los artículos [7], [8], [9], [10] y [11].

Los juegos competitivos también conocidos como juegos no colaborativo o juegos con conflicto de intereses, pueden ser variaciones de juegos colaborativos. La diferencia entre los juegos competitivos y los colaborativos es que los jugadores tienen preferencia a la hora de escoger que jugada hacer.

En un juego competitivo puede haber varios equilibrios de Nash. Son equilibrios de Nash ya que igualmente si el jugador recibe un consejo para tomar una acción menos apetitosa, en el sentido de beneficios, el jugador no puede aumentar sus beneficios al no seguir la estrategia (consejo).

Veamos el caso del juego CHSH. Anteriormente hemos visto este juego colaborativo, ahora lo modificamos para ver como cambiarían las estrategias y los beneficios si existe un conflicto de intereses.

	0	1
0	1,$\frac{1}{2}$	0,0
1	0,0	$\frac{1}{2}$,1

Tabla 4: Pagas en el caso de que $t_1t_2 = 0$

	0	1
0	0,0	1,$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{2}$,1	0,0

Tabla 5: Pagas en el caso de que $t_1t_2 = 1$

Vemos como en el caso de que $t_1t_2 = 0$, Alice prefiere hacer la acción 0 y Bob prefiere la 1. Tenemos un conflicto parecido en el caso $t_1t_2 = 1$, en este caso los dos prefieren la acción 0.

Si no hay comunicación, las estrategias puras (0,0) y (1,1) llevan a unos beneficios desiguales. En el caso (0,0), Alice tendría un beneficio promedio igual a $\frac{3}{4}$, en cambio, Bob tendría un beneficio promedio igual a $\frac{3}{8}$. Pasa lo mismo en el caso de la estrategia pura (1,1), lo que esta vez a favor de Bob.

Introduciendo la comunicación en el juego, utilizando la correlación $Q(00) = Q(11) = \frac{1}{2}$, se puede llegar a un equilibrio justo para los dos. En este caso los dos jugadores tendrían unos beneficios esperados equivalentes a $\frac{9}{16} \sim 0,56$. El beneficio social esperado de esta última estrategia es igual que el de las estrategias con beneficios desiguales, la diferencia es que en esta los dos jugadores tendrían las mismas ganancias.

Por último, analicemos el caso de un equilibrio belief invariant. Es en el que se usa la siguiente correlación.

$$Si\ t_1t_2 = 0, \qquad Q(00) = Q(11) = \frac{1}{2}$$

$$Si\ t_1t_2 = 1, \qquad Q(01) = Q(10) = \frac{1}{2}$$

Los dos jugadores tendrían un beneficio esperado de $\frac{3}{4}$ y por lo tanto, un beneficio social esperado $SW = \frac{3}{4}$.

5.1. Modificación de GHZ

Vamos a ver el caso del juego GHZ para n=3.El juego colaborativo ya lo hemos estudiado en el apartado (3.3.2). Vamos a estudiar el equilibrio belief invariant antes de pasar al juego con conflicto de intereses.

Con comunicación, hay equilibrios belief invariant que ganan el juego con probabilidad 1. Veamos la siguiente correlación:

$$Q(111|\tau = 0) = Q(100|\tau = 0) = Q(010|\tau = 0) = Q(001|\tau = 0) = \frac{1}{4} \tag{39}$$
$$Q(000|\tau = 1) = Q(110|\tau = 1) = Q(101|\tau = 1) = Q(011|\tau = 1) = \frac{1}{4}$$

Con esta correlación los jugadores a cambio de revelar su type a un mediador (dispositivo de correlación) consigue ganar siempre, lo que conlleva un beneficio social esperado, $SW = 1$, que es lo máximo que se puede conseguir. Vemos que ganamos el juego con la misma probabilidad que en el equilibrio cuántico explicado en (3.3.2). La diferencia es que en la estrategia belief invariant hemos revelado nuestro type a un mediador.

Ahora vamos a modificar el juego para que sea competitivo. Lo hacemos mediante cambiar las pagas. Definimos el concepto de pass como lo que en el juego colaborativo era ganar. Ahora las pagas de los jugadores no son 1 independientemente de la acción que hayas tomado, sino que ahora la paga de cada jugador depende de la acción tomada. Si el jugador i hace la acción 1 y generan un pass, gana $v(1)$. Si generan un pass y ha tomado la acción 0, gana $v(0)$. Definimos la función paga f_i:

$$f_i(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{a}) = \begin{cases} 0 & \text{si } V(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{a}) = 0, \\ v(a_i) & \text{si } V(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{a}) = 1. \end{cases} \tag{40}$$

Donde la función $V(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{a})$ representa el crear un pass o no.

Suponemos que $v(1) > v(0)$. Esto crea una tensión entre los jugadores, ya que todos prefieren hacer la acción $a_i = 1$, pero esto les puede llevar a no generar un pass en algunas ocasiones. Ahora la mejor estrategia local sería $Q(1, 1, 1) = 1$ ya que le corresponde un beneficio social esperado $SW = \frac{3}{4}v(1)$.

Tanto el equilibrio clásico belief invariant como el equilibrio cuántico belief invariant, resultan en un beneficio social medio de $SW = \frac{v(1)+v(0)}{2}$. Ya sabemos la diferencia entre uno y otro, el clásico tiene que revelar su type y el cuántico no. Vamos a comprobar que la estrategia belief invariant con la correlación $Q(\mathbf{s}|\boldsymbol{t})$ que gana el juego pseudo telepático original (colaborativo), también es un equilibrio belief invariant para el juego modificado (competitivo).

El juego GHZ es un juego especial, ya que se gana de forma cuántica con probabilidad 1. Estos juegos que ganan con probabilidad 1 se les llama pseudo-telepáticos. Aparte de esto, para cada input $\boldsymbol{t}$ y para cada jugador i, dada una lista de respuestas de los otros jugadores $\boldsymbol{a}_{-i}$, solo hay una respuesta del jugador i que genere un pass, es decir, $V(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{a}) = 1$. Esto convierte el juego en lo que se llama juego pseudo-telepático único.

Para calcular el beneficio esperado de un jugador, solo nos hace falta saber con que probabilidad va a tomar cada acción. Esto lo podemos calcular únicamente conociendo la distribución de los inputs y la estrategia que sigue. Conociendo $P(\boldsymbol{t})$ y $Q(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{t})$ podemos calcular $\mathbb{E}a_i$. Sabiendo esto, podemos calcular el beneficio esperado del jugador i: $\mathbb{E}f_i(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{a}) =: F_i$.

$$\mathbb{E}f_i(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{a}) = \mathbb{E}a_i v(a_i) \tag{41}$$

Vamos a comprobar el siguiente teorema:

Teorema Si $Q(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{t})$ es una estrategia belief invariant para ganar el juego pseudo telepático único, será una equilibrio belief invariant para el juego modificado. Es más, si $Q(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{t})$ es una estrategia cuántica, será un equilibrio cuántico para el juego modificado.

Demostración Tenemos que comprobar que si todos los jugadores menos el jugador i siguen la estrategia, el jugador i no puede aumentar sus beneficios siguiendo otra estrategia. Es decir, no puede obtener mejor beneficio que $F_i = \mathbb{E}_{A_i} v(A_i)$.

Todos los jugadores siguen la estrategia original menos el jugador i. Esto hace que tengamos una estrategia $Q'(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{t})$ con la misma marginal que la estrategia original.

$$Q'(\boldsymbol{a}_{-i}|\boldsymbol{t}_{-i}) = Q(\boldsymbol{a}_{-i}|\boldsymbol{t}_{-i}) \tag{42}$$

Con las variables aleatorias $\boldsymbol{T}$ y $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A}_{-i}A_i'$, distribuidas aleatoriamente respecto a PQ', podemos construir un $\widehat{A}_i$ con el que $V(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{A}_{-i}\widehat{A}_i) = 1$ con probabilidad 1. Nótese que si la estrategia fuese la original, $Q(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{t})$, nos encontraríamos con que $\widehat{A}_i = A_i$ con probabilidad 1, debido a la unicidad y a la pseudo telepatía del juego. Ahora hacemos estas dos observaciones. La primera, para cualquier type t_n, $\widehat{A}_i$ tiene la misma distribución que A_i, por lo tanto, $F_i = \mathbb{E}_{\widehat{A}_i} v(\widehat{A}_i)$. Segundo, los jugadores van a generar un pass solo cuando $A_i' = \widehat{A}_i$. En este caso el beneficio del jugador i es $f_i(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{A}') = v(A_i') = v(\widehat{A}_i)$, de no ser así, seria 0. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}f_i(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{A}') &= \mathbb{E}_{A_i'\widehat{A}_i}\{A_i' = \widehat{A}_i\}v(A_i') \\ &= \mathbb{E}_{\widehat{A}_i A_i'}\{\widehat{A}_i = A_i'\}v(\widehat{A}_i) \\ &\leq \mathbb{E}_{\widehat{A}_i} v(\widehat{A}_i) \\ &= F_i \end{aligned} \tag{43}$$

Donde $\{\Pi\}$ es la siguiente función:

$$\{\Pi\} = \begin{cases} 1 & \text{si } \Pi \text{ es cierto} \\ 0 & \text{si } \Pi \text{ es mentira} \end{cases} \tag{44}$$

De esta manera, queda demostrado que $Q(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{t})$ es también una estrategia cuántica para el juego modificado.

5.2. Juegos con ventaja cuántica

Para comprobar que hay una ventaja cuántica, veremos como hay parametros para $v(a)$ tal que el beneficio social esperado para el equilibrio belief invariant (cuántico) es más grande que el mayor beneficio social esperado de cualquier equilibrio correlado clásico.

Describimos el beneficio social como $\sigma = \frac{1}{n}(f_1 + f_2 + ... + f_n)$. También definimos $\overline{v} = max_a v(a)$.
Teorema

$$\max_{\text{CC equil.}} \mathbb{E}\sigma(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{A}) \leq \max_{\text{estr. local}} \mathbb{E}\sigma(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{A}) \leq \omega_c \overline{v}$$

Donde ω_c es la máxima probabilidad de ganar el juego usando estrategias locales.

Demostración La demostración es clara. Cualquier equilibrio correlado clásico es una estrategia local, por lo tanto, la primera desigualdad esta clara. Para la segunda, nos tenemos que dar cuenta de que σ puede tomar valores dentro del intervalo $[0, \overline{v}]$, pero cualquier estrategia local le hace tomar el valor de 0 con una probabilidad igual a $1 - \omega_c$.

Con el teorema 1 y 2 implican que para cualquier juego pseudo telepático, existe un juego competitivo derivado del original que tiene un equilibrio cuántico con un beneficio social esperado inalcanzable para estrategias locales y en particular, inalcanzable para cualquier equilibrio correlado clásico, si las pagas $(v(a))$ son suficientemente cercanas.

Para cualquier juego, podemos definir el beneficio esperado del jugador i, que sigue una estrategia cuántica $Q(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{t})$, de la siguiente forma:

$$\mathbb{E}f_i(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{A}) = \mathbb{E}v(A_i) = \sum_{a_i} P_i(a_i)v(a_i) \tag{45}$$

El beneficio social esperado es:

$$SW = \sum_{a} \tilde{P}(a)v(a) \tag{46}$$

Donde $\tilde{P}(a) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} P_i(a)$.

Para el equilibrio correlado clásico, sabemos que tiene un limite superior igual a $\omega_c\overline{v}$.

Es fácil darse cuenta de que si $v(a)$ cumple la condición

$$v(a) > \omega_c \overline{v} \tag{47}$$

el equilibrio cuántico siempre nos llevara a un beneficio social esperado mayor que el que le corresponde al equilibrio correlado clásico. Esta condición es valida para cualquier tipo de juego, pero no quiere decir que no haya unos valores de $v(a)$, menores que $\omega_c \overline{v}$, para los cuales también se cumpla la condición

$$SW_{cuántico} > SW_{correlado}. \tag{48}$$

5.2.1. GHZ modificado

Volvamos al juego GHZ. En este caso el beneficio social esperado siguiendo la estrategia cuántica, que hemos descrito arriba, es:

$$SW_{cuántico} = \frac{v(1) + v(0)}{2} \tag{49}$$

El beneficio social esperado para equilibrios correlados clásicos ya sabemos que tiene que ser menor a $\omega_c \overline{v}$. En el caso de GHZ $v(1) > v(0)$, por lo tanto:

$$SW_{correlado} \leq \omega_c \overline{v} = \omega_c v(1) \tag{50}$$

En GHZ el valor de ω_c es igual a $\frac{3}{4}$. Por lo tanto $SW_{correlado} \leq \frac{3}{4} v(1)$.

Según la condición que hemos definido en el apartado anterior, si $v(0)$ es mayor que $\frac{3}{4}v(1)$, encontraremos que $SW_{cuántico} > SW_{correlado}$. En este caso, el SW cuántico y correlado es $\frac{7}{8}v(1)$ y $\frac{6}{8}v(1)$ respectivamente. Vemos como sí se cumple la condición $SW_{cuántico} > SW_{correlado}$.

Como hemos dicho, cada juego nos da la opción de intentar encontrar un mayor rango de valores para $v(a)$ que haga cumplir la condición (48). En este caso, si buscamos el límite $SW_{cuántico} = SW_{correlado}$:

$$\frac{v(1) + v(0)}{2} = \omega_c v(1) \tag{51}$$

A esto sigue que $v(0) = (2\omega_c - 1)v(1)$. Si hacemos los cálculos con el valor $\omega_c = \frac{3}{4}$, encontraremos que $v(0) = \frac{v(1)}{2}$.

Concluimos con que en el caso del juego GHZ, siempre que el valor de $v(0)$ sea mayor a $\frac{v(1)}{2}$, para la estrategia cuántica, tendremos un beneficio social esperado superior al clásico.

6. Conclusiones

En este trabajo, hemos estudiado el concepto de entrelazamiento cuántico y lo importante que fue junto a las desigualdades de Bell para acabar, definitivamente, con la división que había en favor o en contra de la mecánica cuántica desde la publicación del artículo.

Hemos visto los diferentes tipos de equilibrios que podemos conseguir. Hemos comprobado que hay situaciones donde el equilibrio belief invariant puede superar al equilibrio correlado en cuanto a beneficio social se refiere. El equilibrio belief invariant es interesante ya que no permite que los jugadores averigüen información sobre los demás jugadores. Esto es muy útil en la aplicación de los juegos en sectores como la economía ya que a menudo la información detrás de lo que llamamos los types de los jugadores, es información sensible y no se quiere revelar a los otros jugadores.

Con la introducción de los equilibrios cuánticos, vemos que podemos ganar juego con probabilidad 1 en lo que se llaman juegos pseudo telepáticos. La importancia de estos equilibrios es que puedes ganar el juego con probabilidad 1, pero a diferencia de los equilibrios belief invariant, no tienes que revelar tu type a nadie.

Hemos descrito un método con el cual podemos crear juegos con conflicto de intereses con ventaja cuántica. Mas concretamente siempre que $v(a) > \omega_c \overline{v}$, podremos construir un juego donde el beneficio social esperado correspondiente al equilibrio cuántico es mayor que el correspondiente al equilibrio correlado clásico.

Anteriormente, ya se habian dado ejemplos de juegos con ventaja cuántica en juegos competitivos, lo que eran mucho más complejos de analizar. El ejemplo que hemos presentado, es nuevo, pero inspirados en el artículo [8].

Referencias

[1] A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen. Can quantum-mechanical description of phisical reality be considered complete? Phys.Rev.,47,77-780.

[2] J. S. Bell. On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox. Physics, 1(3):195-200, 1964.

[3] V. Scarani. *Bell Nonlocality*, Oxford University Press, 2019.

[4] J. J. Sakurai, J. Napolitano. *Modern Quantum Mechanics*, Cambridge University Press, 2017.

[5] M. B. Plenio, S. Virmani. An introduction to entanglement measures. Quantum Information Computation. Vol. 7, No. 1, 2007.

[6] E. Bagan. *Notes d'Informació i Computació Quàntiques.* Versió preliminar 2.0. UAB/IFAE, 2007.

[7] V. Auletta, D. Ferraioli, A. Rai, G. Scarpa, A. Winter. Belief-Invariant and Quantum Equilibria in Games of Incomplete Information. arXiv:1605.07896

[8] B. Groisman, M. M. Gettrick, M. Mhalla, M. Pawlowski. How Quantum Information can improve Social Welfare. https://doi.org/10.14760/OWP-2020-13

[9] A. Pappa, N. Kumar, T. Lawson, M. Santha, S. Zhang, E. Diamanti, I. Kerenidis. Nonlocality and conflicting interest games. Phys. Rev. Lett. Vol.114, Iss. 2, 020401. 2015. https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.114.020401

[10] K. Bolonek-Lasoń. Three-player conflicting interest games and nonlocality. Quantum Inf Process 16, 186 (2017). https://doi.org/10.1007/s11128-017-1635-6

[11] S. Zhang. Quantum Strategic Game Theory. Proceedings of the 3rd Innovations in Theoretical Computer Science Conference. Pag. 39-59. 2012. https://doi.org/10.1145/2090236.2090241

[12] N. Brunner, D. Cavalcanti, S. Pironio, V. Scarani, S. Wehner. Bell nonlocality. Rev. Mod. Phys. Vol. 86, Iss. 2. 2014. 10.1103/RevModPhys.86.419