به نام خدا

در اینجا به دنبال یافتن تصویر برداری بر بردار دیگر هستیم . همچنین می دانیم تصویر بردار b بر بردار a در امتداد بردار a می باشد. همچنین اگر تصویر برابر با p باشد آنگاه e= a – p بر p عمود است. که e مقدار خطا را نمایش می دهد. یعنی

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^T(\mathbf{b} - x\mathbf{a}) &= 0 \\ x\mathbf{a}^T\mathbf{a} &= \mathbf{a}^T\mathbf{b} \\ x &= \frac{\mathbf{a}^T\mathbf{b}}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}, \end{aligned}$$

حال به دنبال یافتن ماتریس دوران هستیم به دنبال یافتن x به گونه ای هستیم که p = Pb

$$\mathbf{p} = \mathbf{x}\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}\mathbf{a}^T\mathbf{a}}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}},$$

$$P = \frac{\mathbf{a}\mathbf{a}^T}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}.$$

به دنبال اثبات این هستیم که $P^n = P$ که این حکم به ازای [برقرار] n = 2 است همچنین اگر حکم به ازای n برقرار باشد آنگاه به ازای به ازای n + 1 نیز برقرار خواهد بود زیرا می توان طرفین تساوی را در P ضرب کرد

. در این بخش به دتبال یافتن بهترین تخمین least squere error می باشیم . در حالت دو بعدی (که قابل تعمیم به ابعاد بالاتر است) بردار $p = x_1 a + x_2 a$ می باشد به صورتی که e = b – p و $x_2 \perp e$, $x_1 \perp e$ یعنی به عبارت دیگر $A^T(b - Ax) = 0$ همچنین $(b - Ax)$ عضو null space می باشد بر column space A عمود می باشد. پس داریم.

$$A^T(\mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$$

$$A^T A\hat{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b}.$$

از آنجا که یک $A^T A$ماتریس وارون پذیر(اگر تمام ستون های A مستقل خطی باشند.) می باشد می توان نوشت

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathbf{x}} &= (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b} \\
\mathbf{p} = A\hat{\mathbf{x}} &= A(A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b} \\
P &= A(A^T A)^{-1} A^T.
\end{aligned}
$$

همچنین ماتریس فوق خاصیت $P^T = P$ را دارا می باشد. همچنین خط حاصل تصویر حاصل بهترین تقریب از جنس least squere می باشد