

## جبر خطی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

حمیدرضا ربیعی، مریم رمضان  
بهار ۱۴۰۳



استقلال خطی، بعد و مرتبه، فضای ضرب داخلی

### تمرین تئوری دوم

تاریخ انتشار: ۶ فروردین ۱۴۰۲

۱. پرسش‌های خود درمورد این تمرین را در سامانه کوئرا مطرح کنید.

۲. سیاست ارسال با تاخیر: شما در مجموع در طول نیم‌سال می‌توانید از ۱۶ روز تاخیر استفاده کنید. این مقدار برای تمرین تئوری و عملی به صورت جداگانه حساب می‌شود. تاخیرها با مقیاس ساعت محاسبه شده و به بالا گرد می‌شوند.

۳. سیاست مشارکت دانشجویان در حل کردن تمرین: دانشجویان می‌توانند در حل تمرین برای رفع ابهام و یا به دست آوردن ایده‌ی کلی با یکدیگر مشورت و همفکری کنند. این کار مورد تایید و تشویق تیم ارائه‌ی درس می‌باشد؛ چرا که هم‌فکری و کار گروهی می‌تواند موجب تقویت یادگیری شود. اما به دست آوردن جزئیات راه‌حل و نگارش پاسخ باید تماماً توسط خود دانشجو انجام شود. حتماً در انتهای پاسخ‌های ارسالی خود نام افرادی که با آن‌ها همفکری کردید را ذکر کنید.

پرسش ۱ (۲۵ نمره) درستی یا نادرستی عبارات زیر را بررسی کنید. اگر فکر می‌کنید گزاره‌ای درست است، آن را اثبات کنید و در غیر این صورت برای آن مثال نقض بیاورید.

(آ) فرض کنید بردارهای  $u_1, u_2, \dots, u_n$  مستقل خطی‌اند.  $n$  جایگشت متمایز از اعداد ۱ تا  $n$  را در نظر می‌گیریم و آن‌ها را  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$  می‌نامیم. ماتریس‌های  $A$  و  $B$  را به صورت زیر در نظر گرفته و ماتریس  $C$  را به صورت  $C = AB$  تعریف می‌کنیم.

$$A = \begin{bmatrix} - & \sigma_1^T & - \\ - & \sigma_2^T & - \\ & \vdots & \\ - & \sigma_n^T & - \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} - & u_1^T & - \\ - & u_2^T & - \\ & \vdots & \\ - & u_n^T & - \end{bmatrix}$$

سطرهای ماتریس  $C$  مستقل خطی هستند.

(ب) فرض کنید  $W = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n\}$  یک فضای برداری روی  $F$  باشد.  $w_1, w_2, \dots, w_{n+1}$  بردارهایی متمایز در  $W$  هستند که  $W$  را اسپن می‌کنند. اگر  $w_1 + w_2 + \dots + w_{n+1} = \vec{0}$ ، آن‌گاه بردارهای  $w_1, w_2, \dots, w_n$  مستقل خطی هستند.

پرسش ۲ (۲۵ نمره) فرض کنید  $V = P_n(\mathbb{R})$  فضای برداری چندجمله‌ای‌های دارای ضرایب حقیقی با حداکثر درجه  $n$  باشد. اگر  $q(x)$  یک چندجمله‌ای عضو  $V$  با درجه  $n$  باشد، اثبات کنید مجموعه  $S = \{q(x), q'(x), q''(x), \dots, q^{(n)}(x)\}$  یک پایه برای  $V$  است.

پرسش ۳ (۳۰ نمره) ماتریس  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  یک ماتریس متقارن است اگر داشته باشیم:

$$\forall 1 \leq i < j \leq n; A_{ij} = A_{ji}$$

زیر فضایی از  $M_{n \times n}(\mathbb{R})$  که شامل تمامی ماتریس‌های متقارن می‌باشد را با  $M_{n \times n}^{sym}(\mathbb{R})$  نشان می‌دهیم. یک پایه برای  $M_{n \times n}^{sym}(\mathbb{R})$  بیابید و بعد آن را مشخص کنید.

پرسش ۴ (۲۰ نمره) اثبات یا نقض کنید:

- (الف) تابعی که به عنوان ورودی  $((x_1, x_2), (y_1, y_2))$  را می‌گیرد و خروجی آن  $|x_1 y_1| + |x_2 y_2|$  است یک ضرب داخلی در  $\mathbb{R}^2$  است.
- (ب) تابعی که به عنوان ورودی  $((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3))$  را می‌گیرد و خروجی آن  $x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$  است یک ضرب داخلی در  $\mathbb{R}^3$  است.
- (ج) تابعی که به عنوان ورودی  $((x_1, x_2), (y_1, y_2))$  را می‌گیرد و خروجی آن  $x_1 y_1 + x_2 y_2$  است یک ضرب داخلی در  $\mathbb{R}^2$  است.
- (د) برای  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$  تعریف می‌کنیم  $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^T A)$  ثابت کنید که این تعریف یک تابع ضرب داخلی است.