به نام خداوند بخشنده مهربان

جبر خطی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

حمیدرضا ربیعی، مریم رمضانی

بهار ۱۴۰۲

ماتریس‌ها | **تمرین سوم** | تاریخ انتشار: ۲۹ فروردین ۱۴۰۲

۱. پرسش‌های خود در مورد این تمرین را در سامانه کوئرا مطرح کنید.

۲. **سیاست ارسال با تاخیر پاسخ:** شما در مجموع در طول نیم‌سال می‌توانید تا سقف ۱۵ روز تمارین خود را با تاخیر ارسال کنید. پس از آن به ازای هر ساعت تاخیر ۰.۵ درصد نمره کسر خواهد شد. مقیاس محاسبه تاخیر ساعت است و تاخیر شما رو به بالا گرد خواهد شد تا به مقیاس ساعت درآید. به عنوان مثال ۲ ساعت و ۱۰ دقیقه تاخیر معادل ۳ ساعت در نظر گرفته خواهد شد. تمارین تئوری و عملی در محاسبه تاخیرها دو تمرین جداگانه در نظر گرفته خواهند شد. یعنی ۲ روز تاخیر بر تمرین تئوری و ۱ روز تاخیر بر تمرین عملی در مجموع برابر ۳ روز در نظر گرفته خواهد شد. در نهایت اگر بیش از ۱۵ روز تاخیر داشته باشید، تاخیر مجاز شما به نحو بهینه‌ای توزیع خواهد شد که کمترین میزان نمره را از دست بدهید.

۳. **سیاست مشارکت دانشجویان در حل تمارین:** دانشجویان می‌توانند در حل تمارین برای رفع ابهام و یا بدست آوردن ایده کلی با یک دیگر مشارکت و هم‌فکری کنند. این کار مورد تایید و تشویق تیم ارائه درس می‌باشد چرا که هم‌فکری و کار گروهی می‌تواند موجب تقویت یادگیری شود. اما بدست آوردن جزئیات راه‌حل و نگارش پاسخ باید تماما منحصرا توسط خود دانشجو انجام شود. بیشینه اندازه مجاز گروهی که در آن می‌توانید برای حل تمرین هم‌فکری کنید برابر ۴ نفر است. رعایت آداب‌نامه‌ی انجام تمرین‌های درسی الزامی است. در صورت مشاهده تخلف مطابق قوانین دانشکده و دانشگاه برخورد خواهد شد.

سوالات تئوری (۱۴۰ نمره)

تاریخ تحویل: ۹ اردیبهشت ۱۴۰۲

پرسش ۱ (۲۰ نمره)

(آ) (۱۰ نمره) فرض کنید $A \in M_n(C)$ است، اگر $AA^T = I$ و $|A| \neq ۱$ باشد، مقدار $|A+I|$ را بیابید.

(ب) (۱۰ نمره) اگر A یک ماتریس باشد که $A^۳ = ۲I$. ثابت کنید که ماتریس $B = A^۲ - ۲A + ۲I$ یک ماتریس وارون پذیر است.

پاسخ

(آ) از آنجایی که $|A+I| = |A+AA^T| = |A||I+A^T| = |A||A+I|$، پس مقدار $|A+I|$ برابر با صفر است.

(ب) $B = A^۲ - ۲A + ۲I = A^۲ - ۲A + A^۳ = A(A^۲ + A - ۲I) = A(A+۲I)(A-I)$

از آنجایی که $I = A^۳ - I = (A-I)(A^۲+A+I)$ در نتیجه $|A-I| \neq ۰$

و همچنین از آنجایی که $A^۳ + ۸I = (A+۲I)(A^۲ - ۲A + ۴I) = ۱۰I$ در نتیجه $|A+۲I| \neq ۰$

پس $|B| = |A||A+۲I||A-I| \neq ۰$ و در نتیجه ماتریس B وارون پذیر است.

پرسش ۲ (۲۰ نمره) پایه های $A = \left\{ \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۲ \\ -۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \\ -۱ \\ ۲ \end{bmatrix} \right\}$ و $B = \left\{ \begin{bmatrix} ۲ \\ ۰ \\ -۱ \\ ۲ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۳ \\ -۳ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \\ ۴ \\ -۲ \end{bmatrix} \right\}$ را برای فضای برداری V و همچنین بردار $x = \begin{bmatrix} ۵ \\ ۲ \\ ۶ \\ -۳ \end{bmatrix}$ را در این فضا در نظر بگیرید.

(آ) (۵ نمره) ماتریس $P_{A \leftarrow B}$ را بیابید.

(ب) (۵ نمره) ماتریس $P_{B \leftarrow A}$ را بیابید.

(ج) (۵ نمره) نشان دهید که ماتریس‌های $P_{A \leftarrow B}$ و $P_{B \leftarrow A}$ وارون یکدیگرند.

(د) (۵ نمره) $[x]_A$ و $[x]_B$ را محاسبه کنید.

پاسخ

(آ) می‌دانیم که ماتریس $P_{A \leftarrow B}$ با عمل کاهش سطری (row reduce) بر روی ماتریس Augmented زیر به دست می‌آید.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۱ & ۱ & ۲ & ۰ & ۳ \\ ۱ & ۰ & -۱ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۲ & -۱ & -۱ & ۳ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۲ & ۲ & -۳ & -۲ \end{array}\right]$$

که به فرم ماتریسی مقابل در می آید:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{array}\right]$$

بنابراین $P_{A \leftarrow B} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۲ \\ ۱ & -۱ & ۰ \end{bmatrix}$

(ب) مشابه قسمت قبل می‌دانیم که ماتریس $P_{B\leftarrow A}$ با عمل کاهش سطری (row reduce) بر روی ماتریس Augmented زیر به دست می‌آید.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 4 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -2 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right]$$ که به فرم ماتریسی مقابل در می‌آید: $$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

بنابراین $$P_{B\leftarrow A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(ج) کافی است نشان دهیم که ضرب دو ماتریس $P_{A\leftarrow B}$ و $P_{B\leftarrow A}$ برابر با ماتریس همانی است:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(د) می‌دانیم که $[x]_A$ با عمل کاهش سطری (row reduce) بر روی ماتریس Augmented زیر به دست می‌آید.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \end{array}\right]$$ که به فرم ماتریسی مقابل در می‌آید: $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$ بنابراین $$[x]_A = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

همچنین می‌دانیم که $[x]_B$ با عمل کاهش سطری (row reduce) بر روی ماتریس Augmented زیر به دست می‌آید.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 4 & 6 \\ 2 & -3 & -2 & -3 \end{array}\right]$$ که به فرم ماتریسی مقابل در می‌آید: $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$ بنابراین $$[x]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

پرسش ۳ (۲۰ نمره) گزاره‌های زیر را اثبات کنید:

(آ) (۱۰ نمره) در صورتی که $W1$ و $W2$ هیچ کدام زیرفضای دیگری نباشد، $dim(W1+W2) > dim(W1\cap W2)+1$

(ب) (۵ نمره) $dim(N(A)) + dim(N(B)) \geq dim(N(BA))$

(ج) (۵ نمره) در صورتی که B, A دو ماتریس $n\times n$ باشند و B از رنک n باشد اثبات کنید:

$$rank(AB) = rank(A)$$
$$rank(BA) = rank(A)$$

پاسخ

(آ) از آنجایی که $W_1 \not\subset W_2$ و $W_2 \not\subset W_1$ خواهیم داشت:

$$\exists x_1 \in W_1 : x_1 \notin W_2$$
$$\exists x_2 \in W_2 : x_2 \notin W_1$$

از آنجایی که صفر هم عضو W_1 است و هم عضو W_2 خواهیم داشت:

$$0 + x_1 \in W_1 + W_2 \rightarrow x_1 \in W_1 + W_2$$
$$0 + x_2 \in W_1 + W_2 \rightarrow x_2 \in W_1 + W_2$$

فرض کنید $B = \{v_1, ..., v_r\}$ پایه‌های $W_1 \cap W_2$ باشند. اثبات می‌کنیم x_1 از این پایه‌ها مستقل است.
برهان خلف: فرض کنید مجموعه‌ی $\{x_1, v_1, ..., v_r\}$ مستقل خطی نباشند. در نتیجه

$$x_1 = c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_rv_r \rightarrow x_1 \in span(\{v_1, ..., v_r\}) \rightarrow x_1 \in W_1 \cap W_2$$

اما می‌دانیم $x_1 \notin W_2$ و به تناقض رسیده‌ایم.
حال اثبات می‌کنیم x_2 از تمامی $\{x_1, v_1, ..., v_n\}$ مستقل است.
برهان خلف: فرض کنید مجموعه‌ی $\{x_2, x_1, v_1, ..., v_r\}$ مستقل خطی نباشند. در نتیجه

$$x_2 = c.x_1 + c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_rv_r \rightarrow x_2 \in span(\{x_1, v_1, ..., v_r\}) \rightarrow x_2 \in W_1$$

اما می‌دانیم $x_2 \notin W_1$ در نتیجه به تناقض رسیده‌ایم.
همه‌ی بردارهای $\{x_1, x_2, v_1, ..., v_n\}$ از یکدیگر مستقل و همگی این بردارها درون $W_1 + W_2$ هستند. در نتیجه $W_1 + W_2$ حداقل $r+2$ پایه خواهد داشت. در نتیجه داریم: $dim(W_1 + W_2) \geq dim(W_1 \cap W_2) + 2 \rightarrow dim(W_1 + W_2) > dim(W_1 \cap W_2) + 1$

(ب) واضح است $N(A) \subset N(BA)$. فرض کنید $\{b_1, b_2, ..., b_n\}$ پایه‌های فضای پوچ A باشند. در نتیجه پایه‌های فضای پوچ BA به صورت $\{b_1, b_2, ..., b_n, b_{n+1}, ..., b_{n+k}\}$ خواهد بود. اثبات می‌کنیم

$$\{Ab_{n+1}, Ab_{n+2}, ..., Ab_{n+k}\}$$

از یکدیگر مستقل هستند.

$$c_1Ab_{n+1} + ... + c_kAb_{n+k} = 0 \rightarrow A(c_1b_{n+1} + ... + c_kb_{n+k}) = 0 \rightarrow c_1b_{n+1} + ... + c_kb_{n+k} \in N(A)$$

اما $\{b_1, b_2, ..., b_r\}$ پایه‌های فضای پوچ A بودند در نتیجه $c_1 b_{n+1} + ... + c_k b_{n+k} = c'_1 b_1 + ... + c'_n b_n$ از آنجایی که $\{b_1, b_2, ..., b_n, b_{n+1}, ..., b_{n+k}\}$ مستقل خطی هستند، $c_1 = c_2 = ... = c_k = 0$.

واضح است

$b_{n+1}, b_{n+2}, ..., b_{n+k} \in N(B)$ در نتیجه $dim(N(B)) \geq k$ و خواهیم داشت $dim(N(B)) + dim(N(A)) \geq n + k \geq dim(N(BA))$

(ج) از بخش ب می‌دانیم $dim(N(A)) + dim(N(B)) \geq dim(N(BA))$ و از طرفی می‌دانیم

$$rank(A) + dim(N(A)) = n$$
$$rank(B) + dim(N(B)) = n$$

در نتیجه

$$n - rank(A) + n - rank(B) \geq n - rank(BA)$$
$$n - rank(A) + n - rank(B) \geq n - rank(AB)$$

در نتیجه

$$n + rank(BA) \geq rank(B) + rank(A)$$
$$n + rank(AB) \geq rank(B) + rank(A)$$

طبق اسلایدها داریم:

$$rank(AB), rank(BA) \leq min(rank(B), rank(A))$$

از آنجایی که ماتریس B فول رنک است و $rank(B) = n$، $min(rank(A), rank(B)) = rank(A)$

$$rank(B) + rank(A) - n \leq rank(AB) \leq min(rank(B), rank(A)) \to rank(A) \leq rank(AB) \leq rank(A) \to rank(AB) = rank(A)$$
$$rank(B) + rank(A) - n \leq rank(BA) \leq min(rank(B), rank(A)) \to rank(A) \leq rank(BA) \leq rank(A) \to rank(BA) = rank(A)$$

پرسش ۴ (۲۰ نمره) اگر ما یک ماتریس خودتوان داشته باشیم($A^2 = A$) و ابعداد آن $n * n$ باشد، نشان دهید:

$$rank(A - I) + rank(A) = n.$$

پاسخ از آنجایی که ماتریس ما خودتوان است داریم

$$A^2 = A \to A(A - I) = 0$$

پس میتوان از این موضوع نتیجه گرفت که:

$$C(A - I) \subseteq N(A).$$

بنابر این نتیجه و قضیه رتبه داریم:

$$rank(A) + rank(A - I) \leq rank(A) + N(A) = n.$$

همچنین داریم:

$$n = rank(I) = rank(A + I - A) \leq rank(A) + rank(A - I) \to n \leq rank(A) + rank(A - I)$$

پس طبق دو عبارت بالا میتوان نتیجه گرفت:

$$rank(A) + rank(A - I) = n.$$

پرسش ۵ (۲۰ نمره) فرض کنید داریم $n \in \mathbf{N}$ و T نگاشتی خطی روی فضای ضرب داخلیn بعدی V میباشد. نشان دهید حکم های زیر دو به دو معادل هستند.

(آ) به ازای هر $x \in V$ داریم $\| T(x) \| = \| x \|$

(ب) به ازای هر $x, y \in V$ داریم $\langle T(x), T(y) \rangle = \langle x, y \rangle$

(ج) به ازای هر پایه متعامد و یکه برای V بعد از عبور از نگاشت T نیز آن یک پایه متعامد و یکه برای Vمیباشد.

پاسخ ابتدا از آ به ب را اثبات میکنیم: به ازای هر $x, y \in V$داریم:

$$||T(x+y)||^2 = \langle T(x+y), T(x+y) \rangle = \langle T(x), T(x) \rangle + 2\langle T(x), T(y) \rangle + \langle T(y), T(y) \rangle = ||T(x)||^2 + 2\langle T(x), T(y) \rangle + ||T(y)||^2$$

و همچنین داریم:

$$||x+y||^۲ = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + ۲\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle = ||x||^۲ + ۲\langle x,y\rangle + ||y||^۲$$

از انجایی که طبق آ ما داریم $||T(x)|| = ||x||, ||T(y)|| = ||y||, ||T(x+y)|| = ||x+y||$ پس ب اثبات میشود و داریم $\langle T(x), T(y)\rangle = \langle x,y\rangle$

حال از ب به ج میرسیم: چون نگاشت T ضرب داخلی را در خود حفظ میکند(از روی تعریف) پس به ازای یک پایه متعامد و یکه مانند $\{v_۱, ..., v_n\}$ حتما بردار های $\{T(v_۱), ..., T(v_n)\}$ نیز متعامد و یکه است و چون n عدد است و هم بعد V است این مجموعه نیز پایه است.

حال از ج به آ میرسیم: به ازای هر $x \in V$ عدد های حقیقی $c_۱, ..., c_n$ وجود دارد به طوری که:

$$x = \sum_{i=۱}^{n} c_i.v_i \rightarrow T(x) = \sum_{i=۱}^{n} c_i.T(v_i)$$

پس در نتیجه داریم:

$$||x||^۲ = \sum_{i=۱}^{n} c_i^۲ = ||T(x)||^۲$$

پرسش ۶ (۲۰ نمره) فرض کنید A، B و X ماتریس‌های مربعی با ابعاد $n*n$ هستند همچنین A، X و $A-AX$ وارون‌پذیر هستند و معادله زیر برقرار است.

$$(A-AX)^{-۱} = X^{-۱}B$$

(آ) توضیح دهید که چرا ماتریس B هم وارون‌پذیر است.

(ب) با حل معادله داده‌شده ماتریس X را برحسب ماتریس‌های A و B بدست آورید. در هر مرحله اگر به وارون یک ماتریس نیاز داشتید حتما استدلال کنید که ماتریس مورد نظر وارون‌پذیر است سپس از وارون آن برای رسیدن به جواب استفاده کنید.

پاسخ

(آ) از معادله داده شده استفاده می‌کنیم:

$$(A-AX)^{-۱} = X^{-۱}B \rightarrow X(A-AX)^{-۱} = XX^{-۱}B = B$$

پس ماتریس B به صورت ضرب دو ماتریس وارون‌پذیر بدست آمد در نتیجه وارون‌پذیر است. این موضوع را به صورت زیر نیز می‌توان نشان داد:

$$B = X(A-AX)^{-۱} \rightarrow B(A-AX)X^{-۱} = X(A-AX)^{-۱}(A-AX)X^{-۱}$$
$$\rightarrow B(A-AX)X^{-۱} = X(A-AX)^{-۱}(X(A-AX)^{-۱})^{-۱} = I \rightarrow (A-AX)X^{-۱} = B^{-۱}$$

(ب) طبق بخش الف می‌دانیم ماتریس B هم وارون پذیر است پس می‌توانیم دو طرف معادله داده‌شده را وارون کنیم.

$$(A-AX)^{-۱} = X^{-۱}B \rightarrow (A-AX) = (X^{-۱}B)^{-۱} = B^{-۱}(X^{-۱})^{-۱} = B^{-۱}X \rightarrow A = B^{-۱}X + AX = (B^{-۱}+A)X$$

می‌دانیم که ماتریس A وارون‌پذیر است پس عبارت $(B^{-۱}+A)X$ هم وارون‌پذیر است از طرفی X هم وارون‌پذیر است در نتیجه $(B^{-۱}+A)$ هم وارون‌پذیر است و برای X داریم:

$$X = (A+B^{-۱})^{-۱}A$$

پرسش ۷ (۲۰ نمره) فرض کنید A یک ماتریس مربعی $n*n$ است. نشان دهید ماتریس A یک ماتریس پادمتقارن است اگر و تنها اگر به ازای هر بردار n بعدی x داشته باشیم $x \perp (Ax)$، که به معنای عمود بودن Ax بر x است.

پاسخ ابتدا فرض می‌کنیم که A پادمتقازن است و نشان می‌دیهم که برای هر بردار x داریم $x \perp (Ax)$

$$\langle Ax, x\rangle = x^T(Ax) = \sum_{i=۱}^{n} x_i(Ax)_i = \sum_{i=۱}^{n} x_i \sum_{j=۱}^{n} A_{ij}x_j = \sum_{i,j=۱}^{n} A_{ij}x_ix_j$$

می‌دانیم A پادمتقارن است پس $A_{ii} = ۰$ و $A_{ij} = -A_{ji}$ و درنتیجه حاصل جمع بالا برابر ۰ خواهد بود و داریم:

$$\langle Ax, x\rangle = ۰ \rightarrow (Ax) \perp x$$

حالا طرف دیگر گزاره را اثبات می‌کنیم. فرض کنید به ازاری هر بردار x داریم $x \perp (Ax)$ پس می‌توان گفت:

$$(AX) \perp x \rightarrow \langle Ax, x\rangle = x^T(Ax) = ۰$$
$$\rightarrow if x = e_i \rightarrow e_i^TAe_i = ۰ \rightarrow A_{ii} = ۰$$
$$\rightarrow if x = e_i + e_j \rightarrow (e_i+e_j)^TA(e_i+e_j) = ۰$$
$$\rightarrow e_i^TAe_i + e_i^TAe_j + e_j^TAe_i + e_j^TAe_j = ۰ \rightarrow e_i^TAe_j = -e_j^TAe_i \rightarrow A_{ij} = -A_{ji}$$

با توجه به دو رابطه بدست آمده نتیجه می‌شود ماتریس A پادمتقارن است. هر دو طرف گزاره ثابت شدند پس در کل گزاره اثبات شد.

پرسش ۸ (۲۰ نمره) فرض کنید U و V دو ماتریس متعامد با ابعاد $n*n$ هستند.

(آ) نشان دهید که ماتریس UV یک ماتریس متعامد است.

(ب) نشان دهید ماتریس زیر یک ماتریس متعامد است.

$$\frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{bmatrix} U & U \\ V & -V \end{bmatrix}$$

پاسخ

(آ) می‌دانیم UV یک ماتریس مربعی است همچنین رابطه‌ی زیر برقرار است.

$$(UV)^T(UV) = V^TU^TUV = V^TIV = V^TV = I$$

پس UV یک ماتریس متعامد است.

(ب) ماتریس داده شده یک ماتریس مربعی است همچنین داریم:

$$\begin{aligned}
(\frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{bmatrix}U & U\\ V & -V\end{bmatrix})^T\frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{bmatrix}U & U\\ V & -V\end{bmatrix} &= \frac{۱}{۲}\begin{bmatrix}U^T & V^T\\ U^T & -V^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U & U\\ V & -V\end{bmatrix}\\
&= \frac{۱}{۲}\begin{bmatrix}U^TU+V^TV & U^TU-V^TV\\ U^TU-V^TV & U^TU+V^TV\end{bmatrix}\\
&= \frac{۱}{۲}\begin{bmatrix}I_n+I_n & I_n-I_n\\ I_n-I_n & I_n+I_n\end{bmatrix}\\
&= \frac{۱}{۲}\begin{bmatrix}۲I_n & ۰\\ ۰ & ۲I_n\end{bmatrix}\\
&= I_{۲}n
\end{aligned}$$

پس ماتریس داده شدده یک ماتریس متعامد است.

سوالات عملی (۳۰ نمره)

تاریخ تحویل: ۱۱ اردیبهشت ۱۴۰۲

پرسش ۱ (۳۰ نمره)

دنیای چند بعدی را تصور کنید که تعدادی سفینه در حال جنگ با هم هستند. دستگاهی در این سفینه وجود دارد که موقعیت سفینه را طی زمان مشخصی به ایستگاه فرماندهی مخابره می‌کند. به جهت اهمیت جلوگیری از ردیابی موقعیت سفینه توسط بقیه سفینه‌ها، این دستگاه قبل از فرستادن موقعیت سفینه، چندین تبدیل خطی روی آن انجام می‌دهد. برای مثال داریم:

موقعیت اصلی سفینه:

$$\begin{bmatrix}۱\\ ۲\\ -۵\end{bmatrix}$$

ماتریس تبدیل خطی دستگاه:

$$\begin{bmatrix}۰ & ۱ & ۲\\ ۱ & ۲ & ۰\\ ۱ & ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

موقعیت مخابره شده توسط دستگاه:

$$\begin{bmatrix}۰ & ۱ & ۲\\ ۱ & ۲ & ۰\\ ۱ & ۰ & ۱\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۱\\ ۲\\ -۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۸\\ ۵\\ -۴\end{bmatrix}$$

ماتریس‌های تبدیل خطی در ایستگاه فرماندهی نیز موجود هستند تا موقعیت شما رمزگشایی شوند. متاسفانه طی یکی از نبردهایتان دستگاه مخابره موقعیت سفینه خراب می‌شود. از آن‌جا که شما آشنایی خوبی با جبرخطی دارید تصمیم می‌گیرید مخابره موقعیت سفینه را با استفاده از دستگاه دیگری که فقط قابلیت ارسال پیام به ایستگاه فرماندهی دارد انجام دهید ولی نیاز است فرایند تغییر مختصات را به صورت دستی انجام دهید. به این منظور اطلاعات مختصات اصلی سفینه و تبدیل‌هایی که دستگاه روی آن‌ها انجام داده را جمع‌آوری می‌کنید. قصد دارید با استفاده از این اطلاعات ماتریس‌های تبدیل خطی را بیابید و سپس مختصات‌های جدید را مخابره کنید. از درس جبر خطی به یاد دارید که اعمال چند تبدیل خطی روی یک نقطه معادل یک تبدیل خطی است که ماتریس تبدیل این تبدیل خطی برابر ضرب ماتریس‌های تبدیل‌های خطی جزئی است. لذا در واقع به دنبال یافتن یک ماتریس تبدیل هستید. اگر ستون‌های ماتریس X مختصات‌های اولیه سفینه و ستون‌های ماتریس Y خروجی مختصات مخابره شده توسط دستگاه باشد مسئله مورد نظر یافتن ماتریس A است که در رابطه $AX = Y$ صدق کند.

ماتریس X در معادله بالا لزوما مربعی نیست لذا نمی‌توان به سادگی A را بدست آورد. در ادامه درس جبر خطی با مفهومی به نام pseudo inverse آشنا می‌شوید که می‌توان با این نوع خاص از معکوس ماتریس چنین معادلاتی را حل کرد. اثبات می‌شود که با داشتن شرایطی ماتریس A با استفاده از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$A = YX^T(XX^T)^{-۱}$$

در صورتیکه معکوس ماتریس XX^T وجود داشته باشد ماتریس A به صورت بالا جواب موردنظر خواهد بود. جالب است بدانید که ممکن است اصلا جوابی به صورت دقیق برای ماتریس A وجود نداشته باشد ولی باز با این حال رابطه بالا بهترین A ای را می‌دهد که اگر در ماتریس X ضرب شود مقادیر ماتریس

حاصل به مقادیر Y نزدیک خواهد بود. کاری که در این تمرین شما باید انجام دهید این است که با داشتن مختصات اولیه سفینه و تبدیل‌های خطی انجام شده روی آن توسط دستگاه ماتریس‌های فوق را تشکیل دهید و با استفاده از رابطه فوق ماتریس A را محاسبه کرده و سپس به ازای مختصات جدیدی که در ورودی داده می‌شود حاصل مختصات نهایی رمز شده را برگردانید.

ورودی

خط اول: تعداد سری مختصات‌های رمزنگاری شده توسط دستگاه (m)

خط دوم: تعداد تبدیل‌های خطی انجام شده توسط دستگاه (n)

خط سوم: تعداد کوئری‌هایی(مختصات‌هایی) که در ادامه می‌خواهیم رمزنگاری کنیم. (p)

در ادامه به ازای هر سری مختصات رمزنگاری شده، ابتدا مختصات اولیه سفینه و سپس به تعداد n خط مختصات‌های تبدیل شده توسط دستگاه می‌آید. سپس به تعداد کوئری‌ها در هر خط مختصات نقاط کوئری می‌آید.

مثال:

```
3
2
3
1 2 3
3 5
8
-10 2 3
-8 5
-3
2 9 1
11 10
21
2 4 9
3 1 3
-2 2 2
```

خروجی

۳ حالت خروجی امکان دارد رخ دهد. ممکن است وارون ماتریس XX^T وجود نداشته باشد و در این صورت کافی است در خروجی تنها یک خط عبارت The results are unknown را چاپ کنید. یکی از مواقعی که این حالت رخ می‌دهد موقعی است که ماتریس X ماتریس tall باشد. حالت دوم حالتی است که وارون ماتریس XX^T وجود دارد ولی به دلیل نویز موجود در دستگاه پس از یافتن ماتریس A طبق رابطه بالا، حاصل AX دقیقا با Y برابر نمی‌شود. توجه داشته باشید همانطور که قبلا اشاره شد ماتریس A به فرمت بالا، جواب بهینه برای دستگاه موردنظر است. در این حالت قبل از چاپ مختصات نقاط تبدیل شده باید عبارت The results are noisy چاپ شود. (راهنمایی: برای تشخیص وجود نویز در دستگاه کافی است پس از یافتن A، شرط زیر را چک کنید.

```
np.sum(np.abs(A@X-Y)) > 0.01
```

در صورتیکه عبارت بالا برقرار باشد یعنی اختلاف بین AX و Y به طور معناداری زیاد است و لذا در دستگاه نویز موجود بوده و ماتریس A پیدا شده دارای نویز می‌باشد.)

در حالت سوم هیچکدام از حالت‌های بالا رخ نمی‌دهد و تنها کافی است مختصات نقاط تبدیل شده کوئری در هر خط با فاصله چاپ شوند.

نکات

۱. توجه داشته باشید شما مجاز به استفاده از هیچ کتابخانه‌ای به جز numpy نیستید. همچنین برای محاسبه وارون ماتریس نیز نمی‌توانید از تابع آماده np.linalg.inv استفاده کنید. به این منظور می‌توانید از روش Guass jordan که در اسلایدهای درس موجود است استفاده کنید.

۲. جواب‌های خود را قبل از پرینت کردن تا ۲ رقم اعشار گرد کنید. همچنین به دلیل اینکه ممکن است طی این اقدام برای مثال عدد ۰/۰۰۰۰۰۰۰۱− به ۰/۰۰− و عدد ۰/۰۰۰۰۰۰۰۱ به ۰/۰۰ تبدیل شود باید برای حالت خاص صفر این دو عدد با هم برابر در نظر گرفته شوند. به منظور سادگی می‌توانید با استفاده از تابع آماده زیر و اعمال آن روی مختصات نقاطی خروجی این فرایند گرد شدن را انجام دهید.

```
def custom_round(x):
    x[np.abs(x) < 0.000001] = 0
    return np.round(x,2)
```

چند نمونه تست‌کیس

ورودی ۱

```
3
2
3
1 2 3
3 5
8 -2
-10 2 3
-8 5
-3 -13
```

```
2 9 1
11 10
21 1
2 4 9
3 1 3
-2 2 2
```

خروجی ۱

```
19.0 -7.0
8.0 0.0
4.0 -4.0
```

در این تست‌کیس حالت سوم اتفاق می‌افتد و ماتریس تبدیل نیز به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$$

ورودی ۲

```
4
2
3
1 2 3
3 5
8 -2
-10 2 3
-8 5
-3 -13
2 9 1
11 10
21 1
2 9 1
11 10
21 1
2 4 9
3 1 3
-2 2 2
```

خروجی ۲

```
The results are noisy
16.8 -5.9
6.98 0.51
3.85 -3.92
```

در این تست‌کیس خروجی نهایی دارای نویز است و ماتریس تبدیل نویزدار به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{bmatrix} ۰/۸۸۱۱۵۴۱۳ & ۲/۰۴۰۹۷۶۸۴ & ۰/۷۶۳۷۴۲۲۳ \\ ۱/۰۵۹۴۲۲۹۳ & -۰/۰۲۰۴۸۸۴۲ & -۰/۸۸۱۸۷۱۱۲ \end{bmatrix}$$

دقت کنید که ماتریس تبدیل فوق به ماتریس تبدیل ورودی یک نزدیک است چرا که در این تست کیس یک دسته مختصات جدید به معادلات اضافه شدند که دارای نویز بودند. همچنین مقادیر خروجی نیز به مقادیر خروجی قسمت قبل نزدیک هستند.

ورودی ۳:

```
3
2
3
1 2 3
3 5
8 -2
1 2 3
-8 5
-3 -13
2 9 1
11 10
21 1
2 4 9
3 1 3
```

```
-2 2 2
```

خروجی ۳:

```
The results are unknown
```

در این حالت واضح است که باید خروجی unknown باشد چرا که نقطه (۱, ۲, ۳) طی تبدیل خطی دستگاه یکبار به (۸, −۲) و یکبار به (−۳, −۱۳) تبدیل می‌شود.

پاسخ

```python
import numpy as np

def round_zero(x):
    x[np.abs(x) < 0.000001] = 0
    return x

def inverse(A):
    A = np.array(A)
    m, n = A.shape
    if m != n:
        raise Exception("The matrix is not square")
    augmented_A = np.c_[A, np.eye(m)]
    j = 0
    for i in range(m - 1):
        pivot = augmented_A[i][j]
        if np.round(pivot, 7) == 0:
            found = False
            for k in range(i + 1, m):
                if np.round(augmented_A[k][j], 7) != 0:
                    augmented_A[k], augmented_A[i] = augmented_A[i], augmented_A[k]
                    found = True
                    break
            if found == False:
                raise Exception("The matrix is singular")
            else:
                pivot = augmented_A[i][j]
        for k in range(i + 1, m):
            target = augmented_A[k][j]
            multiplier = target / pivot
            augmented_A[k] = augmented_A[k] - multiplier * augmented_A[i]
        j += 1

    j = m - 1
    for i in range(m - 1, 0, -1):
        pivot = augmented_A[i][j]
        if np.isclose(pivot, 0):
            raise Exception("The matrix is singular")
        for k in range(i - 1, -1, -1):
            target = augmented_A[k][j]
            multiplier = target / pivot
            augmented_A[k] = augmented_A[k] - multiplier * augmented_A[i]
        j -= 1

    for i in range(m):
        augmented_A[i] /= augmented_A[i][i]

    return augmented_A[:, m:]


# m points
m=int(input())
# n transformations
n=int(input())
# p query points
p=int(input())


X=[]
Y=[]
Queries=[]
```

```
for i in range(m):
  X.append(np.array(list(map(int,input().split()))))
  for _ in range(n-1):
    input()
  Y.append(np.array(list(map(int,input().split()))))
for i in range(p):
    Queries.append(np.array(list(map(int,input().split()))))
X=np.array(X).T
Y=np.array(Y).T
try:
    A=Y@X.T@inverse(X@X.T)
    if np.sum(np.abs(A@X-Y))>0.01:
        print('The results are noisy')
    for i in range(p):
        print(' '.join(list(map(str, np.round(round_zero(A @ Queries[i]),2)))))
except:
    print('The results are unknown')
```