

جبر خطی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

حمیدرضا ربیعی، مریم رمضان
بهار ۱۴۰۳



تاریخ انتشار: ۱۴ اردیبهشت ۱۴۰۳

تمرین تئوری چهارم

تبدیل خطی، تغییر پایه، دایمشن و رنک

۱. پرسش‌های خود درمورد این تمرین را در سامانه کوئرا مطرح کنید.

۲. سیاست ارسال با تاخیر: شما در مجموع در طول نیم‌سال می‌توانید از ۱۶ روز تاخیر استفاده کنید. این مقدار برای تمرین تئوری و عملی به صورت جداگانه حساب می‌شود. تاخیرها با مقیاس ساعت محاسبه شده و به بالا گرد می‌شوند.

۳. سیاست مشارکت دانشجویان در حل کردن تمرین: دانشجویان می‌توانند در حل تمرین برای رفع ابهام و یا به دست آوردن ایده‌ی کلی با یکدیگر مشورت و همفکری کنند. این کار مورد تایید و تشویق تیم ارائه‌ی درس می‌باشد؛ چرا که هم‌فکری و کار گروهی می‌تواند موجب تقویت یادگیری شود. اما به دست آوردن جزئیات راه‌حل و نگارش پاسخ باید تماماً توسط خود دانشجو انجام شود. حتماً در انتهای پاسخ‌های ارسالی خود نام افرادی که با آن‌ها همفکری کردید را ذکر کنید.

پرسش ۱ (۲۰ نمره)

الف) ثابت کنید:

$$\text{Nullity}\{ABC\} \leq \text{Nullity}\{A\} + \text{Nullity}\{B\} + \text{Nullity}\{C\}$$

ب) ثابت کنید:

$$\text{Rank}\{ABC\} \leq \min\{\text{Rank}\{A\}, \text{Rank}\{B\}, \text{Rank}\{C\}\}$$

پ) با فرض $ABC = 0$ ثابت کنید:

$$\text{Rank}\{CBA\} \leq \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$$

ت) اگر A یک ماتریس n در n باشد، ثابت کنید عبارات زیر هم‌ارز هستند:

$$N(A) = N(A^*)$$

$$R(A) = R(A^*)$$

$$R(A) \cap N(A) = \{0\}$$

پرسش ۲ (۲۰ نمره)

الف) فرض کنید $\varphi \in \mathcal{L}(V, \mathbb{F})$ و $\varphi \neq 0$. با فرض اینکه $u \in V$ در $\text{Null } \varphi$ نباشد، ثابت کنید

$$V = \text{Null } \varphi \oplus \{au : a \in \mathbb{F}\}.$$

ب) فرض کنید A یک ماتریس m در n با شرط $A \neq 0$ باشد.

ثابت کنید رنک A برابر ۱ است اگر و تنها اگر $(c_1, \dots, c_m) \in F^m$ و $(d_1, \dots, d_n) \in F^n$ به طوری که $A_{j,k} = c_j d_k$ برای هر $j = 1, \dots, m$ و $k = 1, \dots, n$ برقرار باشد.

پرسش ۳ (۲۵ نمره)

الف) ماتریس تبدیل پایه P از پایه $\alpha = \{x^2 + x + 1, x^2 + 1, x - 1\}$ به $\beta = \{2x^2 + 3x + 1, 2x^2 + 2x + 1, -x^2 - 2\}$ را بیابید.

ب) از نتیجه‌ی بخش الف برای محاسبه‌ی ماتریس تبدیل پایه β به α استفاده کنید.

ج) فرض کنید تابع چند جمله‌ای درجه ۲ $p(x)$ دارای مختصات $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ نسبت به پایه β است. این مختصات نسبت به α چقدر است؟

پرسش ۴ (۱۵ نمره) فرض کنید V ابعاد محدودی داشته باشد و باشیم $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(V, W)$. ثابت کنید رنج T_1 با رنج T_2 برابر است اگر و تنها اگر

$$T_1 = T_2 S \text{ وجود داشته باشد به گونه‌ای که } S \in \mathcal{L}(V)$$

پرسش ۵ (۲۰ نمره) فرض کنید

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

آیا ماتریس A با درایه‌های صحیح وجود دارد به گونه‌ای که برابری زیر برقرار باشد؟

$$A^2 = AB + 2I$$