

## جبر خطی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

حمیدرضا ربیعی، مریم رمضانی  
پاییز ۱۴۰۲



استقلال خطی، پایه، بعد و فضای برداری

### تمرین دوم

تاریخ انتشار: ۶ آبان ۱۴۰۲

۱. پرسش‌های خود درمورد این تمرین را در سامانه کوثر مطرح کنید.

۲. سیاست ارسال با تاخیر: شما در مجموع در طول نیم‌سال می‌توانید از ۱۶ روز تاخیر استفاده کنید. این مقدار برای تمرین تئوری و عملی به صورت جداگانه حساب می‌شود. تاخیرها با مقیاس ساعت محاسبه شده و به بالا گرد می‌شوند.

۳. سیاست مشارکت دانشجویان در حل کردن تمرین: دانشجویان می‌توانند در حل تمرین برای رفع ابهام و یا به دست آوردن ایده‌ی کلی با یکدیگر مشورت و همفکری کنند. این کار مورد تایید و تشویق تیم ارائه‌ی درس می‌باشد؛ چرا که هم‌فکری و کار گروهی می‌تواند موجب تقویت یادگیری شود. اما به دست آوردن جزئیات راه‌حل و نگارش پاسخ باید تماماً توسط خود دانشجو انجام شود. حتماً در انتهای پاسخ‌های ارسالی خود نام افرادی که با آن‌ها همفکری کردید را ذکر کنید.

### سوالات تئوری (۱۰۰ + ۲۰ نمره)

تاریخ تحویل: ۱۹ آبان ۱۴۰۲

پرسش ۱ (۱۰ نمره) فرض کنید بردارهای  $v_1, v_2, v_3, v_4$  در فضای  $V$  مستقل خطی هستند. ثابت کنید بردارهای زیر نیز مستقل خطی هستند:

$$v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, v_4$$

پاسخ فرض کنید مقادیر  $x, y, z, w$  در فیلد وجود دارند، به‌طوری‌که:

$$x(v_1 - v_2) + y(v_2 - v_3) + z(v_3 - v_4) + wv_4 = 0$$

آن‌گاه:

$$xv_1 + (y - x)v_2 + (z - y)v_3 + (w - z)v_4 = 0$$

از آنجایی که  $v_1, v_2, v_3, v_4$  در  $V$  مستقل خطی هستند، نتیجه می‌شود:

$$x = 0, y - x = 0, z - y = 0, w - z = 0$$

که یعنی  $x = y = z = w = 0$  که استقلال خطی بردارهای خواسته‌شده‌ی سوال را نتیجه می‌دهد و حکم اثبات می‌شود.

پرسش ۲ (۲۰ نمره) فرض کنید  $V$  یک فضای برداری متناهی بر روی اعداد حقیقی باشد. همچنین به‌ازای  $m \geq 2$ ، مجموعه‌ی بردارهای  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  در فضای  $V$  قرار دارند، به‌طوری‌که  $\alpha_m \neq 0$ . ثابت کنید بردارهای

$$\beta_1 = \alpha_1 + k_1\alpha_m, \beta_2 = \alpha_2 + k_2\alpha_m, \dots, \beta_{m-1} = \alpha_{m-1} + k_{m-1}\alpha_m$$

به‌ازای تمام مقادیر  $k_1, k_2, \dots, k_{m-1}$  مستقل خطی هستند، اگر و فقط اگر بردارهای  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  مستقل خطی باشند.

پاسخ فرض کنید برای هر  $k_1, \dots, k_{m-1}$ ، بردارهای  $\beta_1, \dots, \beta_{m-1}$  مستقل خطی باشند. اگر  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  وابسته‌ی خطی باشند، آن‌گاه می‌توان  $\alpha_m$  را به شکل ترکیب خطی‌ای از  $\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}$  نشان داد. پس  $c_1, \dots, c_{m-1}$  وجود دارند که:

$$\alpha_m = c_1\alpha_1 + \dots + c_{m-1}\alpha_{m-1}$$

چون  $\alpha_m \neq 0$ ، پس همه‌ی  $c_1, \dots, c_{m-1}$  نمی‌توانند همزمان صفر باشند. بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنید  $c_1 \neq 0$ . بنابراین اگر قرار دهیم:

$$k_1 = -\frac{1}{c_1}, \quad k_2 = \dots = k_{m-1} = 0$$

نتیجه می‌دهد که  $\beta_1, \dots, \beta_{m-1}$  وابسته‌ی خطی هستند. زیرا  $\beta_1 = \alpha_1 - \frac{1}{c_1}\alpha_m$  یک ترکیب خطی از  $\alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}$  و بنابراین یک ترکیب خطی از  $\beta_2, \dots, \beta_{m-1}$  است که با فرض در تناقض است. بنابراین  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  باید مستقل خطی باشند.

از سوی دیگر فرض کنید  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  مستقل خطی باشند. می‌خواهیم ثابت کنیم  $\beta_1, \dots, \beta_{m-1}$  مستقل خطی هستند. فرض کنید  $l_1, \dots, l_{m-1}$  وجود داشته باشند، به‌طوری‌که:

$$l_1\beta_1 + \dots + l_{m-1}\beta_{m-1} = 0$$

با قرار دادن  $\beta_i = \alpha_i + k_i\alpha_m \forall i \in \{1, 2, \dots, m-1\}$  داریم:

$$l_1\alpha_1 + \dots + l_{m-1}\alpha_{m-1} + (l_1k_1 + \dots + l_{m-1}k_{m-1})\alpha_m = 0$$

چون  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  مستقل خطی هستند، نتیجه می‌شود:

$$l_1 = \dots = l_{m-1} = 0, \quad l_1 k_1 + \dots + l_{m-1} k_{m-1} = 0$$

پس  $\beta_1, \dots, \beta_{m-1}$  مستقل خطی هستند.

بنابراین حکم کلی اثبات می‌شود.

**پرسش ۳** (۱۰ نمره) فضای برداری زیر را در نظر بگیرید و خواص گفته شده را برای آن اثبات کنید:

$$\text{Set: } C = \{(x_1, x_2) | x_1, x_2 \in \mathbb{C}\}$$

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1 + 1, x_2 + y_2 + 1)$$

$$\alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1 + \alpha - 1, \alpha x_2 + \alpha - 1) \quad \text{ضرب اسکالر:}$$

(آ) (۲ نمره)

$$\text{Zero vector is: } \mathbf{0} = (-1, -1) !$$

(ب) (۸ نمره)

$$\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v \quad (\text{دقت کنید } u, v \text{ بردار } \alpha \text{ عدد اسکالر هستند}).$$

**پاسخ**

(آ) (۲ نمره)

فرض کنید vector zero برابر با بردار  $(c_1, c_2)$  باشد، آنگاه برای هر بردار دلخواه  $(x_1, x_2)$  خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} (c_1, c_2) + (x_1, x_2) &= (x_1, x_2) \\ (c_1 + x_1 + 1, c_2 + x_2 + 1) &= (x_1, x_2) \\ c_1 + 1 &= 0, \quad /; /; /; \quad c_2 + 1 = 0 \\ c_1 &= -1, \quad /; /; /; \quad c_2 = -1 \\ (c_1, c_2) &= (-1, -1) \end{aligned}$$

پس vector zero برابر با  $(-1, -1)$  خواهد بود.

(ب) (۸ نمره)

$$\begin{aligned} \alpha(u+v) &= \alpha((u_1, u_2) + (v_1, v_2)) = \alpha(u_1 + v_1 + 1, u_2 + v_2 + 1) = (\alpha(u_1 + v_1 + 1) + \alpha - 1, \alpha(u_2 + v_2 + 1) + \alpha - 1) = \\ &= ((\alpha u_1 + \alpha - 1) + (\alpha v_1 + \alpha - 1) + 1, (\alpha u_2 + \alpha - 1) + (\alpha v_2 + \alpha - 1) + 1) = (\alpha u_1 + \alpha - 1, \alpha u_2 + \alpha - 1) + (\alpha v_1 + \alpha - 1, \alpha v_2 + \alpha - 1) = \\ &= \alpha(u_1, u_2) + \alpha(v_1, v_2) = \alpha u + \alpha v \end{aligned}$$

**پرسش ۴** (۲۰ نمره) فرض کنید  $u, v, w$  سه بردار یکه در فضای ضرب داخلی حقیقی  $V$  باشند.

(آ) (۱۵ نمره) ثابت کنید:

$$2\langle u, v \rangle \langle u, w \rangle \langle v, w \rangle \geq \langle u, v \rangle^2 + \langle u, w \rangle^2 + \langle v, w \rangle^2 - 1$$

**راهنمایی:** اولین مرحله از روش Gram-Schmidt را روی بردارهای  $v$  و  $w$  نسبت به بردار  $u$  پیاده کنید. سپس از نامساوی کوشی-شوارتز روی جفت بردارهای به‌دست آمده استفاده کنید.

(ب) (۵ نمره) ثابت کنید در نامساوی قسمت قبل، حالت تساوی رخ می‌دهد، اگر و فقط اگر بردارهای  $u, v, w$  وابسته خطی باشند.

**پاسخ**

(آ) نامساوی کوشی-شوارتز را روی بردارهای  $u$  و  $v - \langle u, v \rangle u$  اعمال می‌کنیم:

$$\langle v - \langle u, v \rangle u, w - \langle u, w \rangle u \rangle^2 \leq \|v - \langle u, v \rangle u\|^2 \|w - \langle u, w \rangle u\|^2$$

ضرب داخلی سمت چپ نامساوی را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} \langle v - \langle u, v \rangle u, w - \langle u, w \rangle u \rangle &= \langle v, w \rangle - \langle u, v \rangle \langle u, w \rangle - \langle u, w \rangle \langle v, u \rangle + \langle u, v \rangle \langle u, w \rangle \\ &= \langle v, w \rangle - \langle u, v \rangle \langle u, w \rangle \end{aligned}$$

همچنین می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \|v - \langle u, v \rangle u\|^2 &= \langle v - \langle u, v \rangle u, v - \langle u, v \rangle u \rangle = \langle v, v \rangle - \langle u, v \rangle \langle u, v \rangle \\ &= 1 - \langle u, v \rangle^2 \end{aligned}$$

به‌طور مشابه:

$$\|w - \langle u, w \rangle u\|^2 = 1 - \langle u, w \rangle^2$$

بنابراین در کل از نامساوی کوشی-شوارتز خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} (\langle v, w \rangle - \langle u, v \rangle \langle u, w \rangle)^2 &\leq (1 - \langle u, v \rangle^2)(1 - \langle u, w \rangle^2) \\ \Rightarrow \langle v, w \rangle^2 - 2\langle v, w \rangle \langle u, v \rangle \langle u, w \rangle + \langle u, v \rangle^2 \langle u, w \rangle^2 &\leq 1 - \langle u, v \rangle^2 - \langle u, w \rangle^2 + \langle u, v \rangle^2 \langle u, w \rangle^2 \end{aligned}$$

که نتیجه می‌دهد:

$$2\langle u, w \rangle \langle u, w \rangle \langle v, w \rangle \geq \langle u, v \rangle^2 + \langle u, w \rangle^2 + \langle v, w \rangle^2 - 1$$

و حکم سوال اثبات می‌شود.

(ب) حالت تساوی نامساوی کوشی-شوارتز رخ می‌دهد، اگر و فقط اگر دو بردار وابسته‌ی خطی باشند. پس بدون کم شدن از کلیت مسئله می‌توان گفت:

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} : v - \langle u, v \rangle u = \alpha(w - \langle u, w \rangle u)$$

بنابراین حالت تساوی رخ می‌دهد، اگر و فقط اگر:

$$v = (\langle u, v \rangle - \alpha \langle u, w \rangle)u + \alpha w$$

که وابستگی خطی را اثبات می‌کند.

**پرسش ۵** (۲۰ نمره) فرض کنید  $U_1, U_2, \dots, U_m$  زیرفضاهایی با بعد متناهی از  $V$  باشند، به‌طوری که  $U_1 + \dots + U_m$  **Direct Sum** باشد. اثبات کنید بعد  $U_1 \oplus \dots \oplus U_m$  متناهی است و:

$$\dim(U_1 \oplus \dots \oplus U_m) = \dim U_1 + \dots + \dim U_m$$

**پاسخ** از آن‌جا که  $U_1 + \dots + U_m$  **Direct Sum** است، پس داریم  $U_1 + \dots + U_m = U_1 \oplus \dots \oplus U_m$ ؛ بنابراین برای اثبات متناهی بودن بعد  $U_1 \oplus \dots \oplus U_m$ ، کافی است نشان دهیم بعد  $U_1 + \dots + U_m$  متناهی است. چون می‌دانیم بعد هر کدام از  $U_i$  ها متناهی هستند، فرض کنید  $W_i$  مجموعه‌ی متناهی‌ای باشد که یک پایه برای  $U_i$  است. براساس تعریف **Direct Sum**  $W_1 \cup \dots \cup W_m$  حتماً  $U_1 + \dots + U_m$  را اسپن خواهد کرد. حالا چون می‌دانیم  $\dim(U_1 + \dots + U_m) \leq \dim U_1 + \dots + \dim U_m$ ، پس حتماً بعد  $U_1 + \dots + U_m$  و در نتیجه بعد  $U_1 \oplus \dots \oplus U_m$  متناهی است. حالا با استفاده از استقرا روی  $m$  نشان می‌دهیم  $\dim(U_1 \oplus \dots \oplus U_m) = \dim U_1 + \dots + \dim U_m$ .

• برای حالت پایه فرض کنید  $m = 2$ . چون  $U_1 + U_2$  **Direct Sum** است، می‌دانیم  $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ . پس داریم:

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2) = \dim U_1 + \dim U_2$$

• حالا فرض کنید تساوی برای حالت  $m - 1$  برقرار است و می‌خواهیم آن را برای  $m$  نشان دهیم. چون  $U_1 + \dots + U_m$  **Direct Sum** است، پس تنها راه نوشتن  $\{0\}$  به صورت  $u_1 + \dots + u_m$  که هر  $u_i \in U_i$ ، این است که  $u_i = \{0\}$ . بنابراین تنها راه نوشتن  $\{0\}$  به صورت  $u_1 + \dots + u_{m-1}$  که هر  $u_i \in U_i$ ، این است که  $u_i = \{0\}$ . بنابراین از آن‌جا که  $u_1 + \dots + u_{m-1}$  هم **Direct Sum** است، براساس فرض استقرا می‌توانیم نتیجه بگیریم:

$$\dim(U_1 \oplus \dots \oplus U_{m-1}) = \dim U_1 + \dots + \dim U_{m-1}$$

از سوی دیگر فرض کنید  $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_{m-1} + U_m$ ، پس  $U_1 \oplus \dots \oplus U_m = V + U_m$ . حالا فرض کنید  $\{0\} = x + y$  به طوری که  $x \in V$  و  $y \in U_m$ ، خواهیم داشت  $x = -y$ . پس  $x_i \in U_i$ ،  $x_1 + \dots + x_{m-1} \in V$  و  $x_i = y = \{0\}$  خواهیم داشت. پس  $\dim(U_1 \oplus \dots \oplus U_m) = \dim(V + U_m) = \dim V + \dim U_m = \dim U_1 + \dots + \dim U_{m-1} + \dim U_m = \dim U_1 + \dots + \dim U_m$ .

**پرسش ۶** (۲۰ نمره) فرض کنید  $U, W$  زیرفضاهایی از فضای برداری  $V$  با ابعاد متناهی باشد.

(آ) (۱۰ نمره) نشان دهید:

$$\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U + W).$$

(ب) (۱۰ نمره) قرار دهید:  $n = \dim V$ . اکنون نشان دهید اگر  $k < n$ ، آن‌گاه همواره یک اشتراک از  $k$  زیرفضای با بعد  $n - 1$  وجود دارد که دارای بعد حداقل  $n - k$  است.

**پاسخ**

(آ) فرض کنید  $\{x_1, \dots, x_k\}$  پایه‌ای برای  $W \cap U$  باشد. به‌طور جداگانه آن را به پایه‌های  $\{x_1, \dots, x_k, u_1, \dots, u_l\}$  از  $U$  و  $\{x_1, \dots, x_k, w_1, \dots, w_m\}$  از  $W$  گسترش می‌دهیم. سپس خواهیم داشت

$$\dim U \cap W = k, \dim U = k + l, \dim W = k + m$$

حال کافیت ثابت کنیم:  $\dim(U + W) = k + l + m$ . برای این کار، نشان می‌دهیم که تمامی بردارهای زیر با یکدیگر پایه‌ای برای  $U + W$  تشکیل می‌دهند.

$$\{x_1, \dots, x_k, u_1, \dots, u_l, w_1, \dots, w_m\}$$

فرض کنید  $Y \in U + W$  برقرار باشد. سپس  $Y$  را می‌توان به‌صورت  $u + w$  نوشت، به‌این شکل که  $u \in U$  و  $w \in W$ . از آنجایی که  $u$  را می‌توان به‌صورت ترکیب خطی‌ای از  $\{x_1, \dots, x_k, u_1, \dots, u_l\}$  و  $w$  را به‌صورت ترکیب خطی‌ای از  $\{x_1, \dots, x_k, w_1, \dots, w_m\}$  نوشت، می‌توان نتیجه گرفت که  $\{x_1, \dots, x_k, u_1, \dots, u_l, w_1, \dots, w_m\}$  فضای  $U + W$  را **span** می‌کند.

فرض کنید متغیرهای  $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_l, \gamma_1, \dots, \gamma_m$  را داریم به‌گونه‌ای که

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_l u_l + \gamma_1 w_1 + \dots + \gamma_m w_m = \{0\}.$$

در نظر داشته باشید که  $w := \gamma_1 w_1 + \dots + \gamma_m w_m = -(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_l u_l) \in U$  همچنین مشخص است که  $w \in W$  در نتیجه  $w \in U \cap W$  پس اسکالرهایی  $\mu_1, \dots, \mu_k$  وجود دارند به گونه ای که

$$w = \mu_1 x_1 + \dots + \mu_k x_k.$$

و در نتیجه

$$\gamma_1 w_1 + \dots + \gamma_m w_m - \mu_1 x_1 - \dots - \mu_k x_k = 0.$$

از آنجا که  $\{w_1, \dots, w_m, x_1, \dots, x_k\}$  به صورت خطی مستقل می باشد،  $\gamma_1, \dots, \gamma_m, \mu_1, \dots, \mu_k$  همگی صفر می باشند. همچنین می توان نتیجه گرفت که  $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_l$  نیز همگی صفر می باشند. پس

$$\{x_1, \dots, x_k, u_1, \dots, u_l, w_1, \dots, w_m\}$$

مجموعه ای مستقل خطی است و در نتیجه پایه ای برای  $U + W$  ایجاد می کند.

(ب) با استفاده از استقرا اثبات را انجام می دهیم.

اگر  $k = 1$  باشد، پاسخ بدیهی است. فرض کنید موضوع برای عددی مانند  $k \geq 1$  برقرار است. سپس فرض کنید  $V_1, \dots, V_k, V_{k+1}$  زیرفضاهایی از  $V$  با  $n - 1$  بعد باشند. سپس داریم:

$$\begin{aligned} \dim \left( \bigcap_{i=1}^{k+1} V_i \right) &= \dim \left( V_{k+1} \cap \left( \bigcap_{i=1}^k V_i \right) \right) \\ &= \dim V_{k+1} + \dim \left( \bigcap_{i=1}^k V_i \right) - \dim \left( V_{k+1} + \bigcap_{i=1}^k V_i \right) \end{aligned}$$

در نظر داشته باشید  $\dim(V_{k+1} + \bigcap_{i=1}^k V_i)$  دارای حداکثر  $n$  بعد،  $V_{k+1}$  دارای  $n - 1$  بعد و طبق فرض استقرا،  $\bigcap_{i=1}^k V_i$  دارای حداقل  $n - k$  بعد می باشند. در نتیجه

$$\begin{aligned} \dim \left( \bigcap_{i=1}^{k+1} V_i \right) &\geq n - 1 + n - k - n \\ &= n - (k + 1). \end{aligned}$$

که اثبات را به پایان می رساند.

**پرسش ۷** (۲۰ نمره) فرض کنید  $e_1, \dots, e_n$  پایه های یک متعامد فضای  $V$  بوده و  $v_1, \dots, v_n$  بردارهایی در  $V$  هستند، به طوری که به ازای هر  $j$ :

$$\|e_j - v_j\| < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

ثابت کنید  $v_1, \dots, v_n$  برای  $V$  پایه هستند.

**پاسخ** چون  $e_1, \dots, e_n$  یک پایه ی یک متعامد فضای  $V$  هستند، پس:  $\dim V = n$ .

اکنون برای این که اثبات کنیم  $v_1, \dots, v_n$  یک پایه ی فضای  $V$  است، کافیت ثابت کنیم  $v_1, \dots, v_n$  مستقل خطی هستند. که این را با برهان خلف نشان می دهیم.

فرض کنید  $v_1, \dots, v_n$  وابسته ی خطی باشند. بنابراین وجود دارد  $a_1, \dots, a_n$  که برای بعضی  $\{1, \dots, n\}$ ،  $k \in \{1, \dots, n\}$  و  $a_k \neq 0$  و همچنین داشته باشیم:

$$\sum_{i=1}^n a_i v_i = 0$$

اکنون داریم:

$$\left\| \sum_{i=1}^n a_i (e_i - v_i) \right\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^n a_i e_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n |a_i|^2 \quad (1)$$

از طرف دیگر:

$$\begin{aligned}
 \left\| \sum_{i=1}^n a_i(e_i - v_i) \right\|^2 &= \left\langle \sum_{i=1}^n a_i(e_i - v_i), \sum_{j=1}^n a_j(e_j - v_j) \right\rangle \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left\langle a_i(e_i - v_i), a_j(e_j - v_j) \right\rangle \\
 &\leq \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left\langle a_i(e_i - v_i), a_j(e_j - v_j) \right\rangle \right| \\
 &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left| \left\langle a_i(e_i - v_i), a_j(e_j - v_j) \right\rangle \right| \\
 &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \|a_i(e_i - v_i)\| \|a_j(e_j - v_j)\| \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_i| |a_j| \|e_i - v_i\| \|e_j - v_j\| \\
 &\text{by assumption and } a_k \neq 0 < \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{n} |a_i| |a_j| = \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n |a_i| \right)^2 \\
 &\leq \sum_{i=1}^n |a_i|^2 \\
 &\stackrel{(1)}{\longrightarrow} \sum_{i=1}^n |a_i|^2 < \sum_{i=1}^n |a_i|^2
 \end{aligned}$$

که با این تناقض، درستی حکم اثبات می‌شود.

تاریخ تحویل: ۱۹ آبان ۱۴۰۲

سوالات عملی (۱۰۰ نمره)

پرسش ۱ (۵۰ نمره) در این پرسش شما باید برنامه‌ای بنویسید که با دریافت ورودی، مشخص کند که مجموعه بردارهای داده شده نسبت به هم مستقل هستند یا وابسته. در صورتی هم که نسبت به هم مستقلند نوع آن را (خطی یا افاین) مشخص کنید. توجه کنید که باید توابع مرتبط با این سوال توسط شما پیاده سازی شوند و استفاده از توابع آماده ممنوع است.

ورودی: در خط اول ورودی،  $n$  تعداد بردارهای ورودی و  $m$  بعد بردارها داده می‌شود. در  $n$  خط بعدی نیز بردارهایی  $m$  بعدی به شما داده می‌شود. خروجی: خروجی شما یکی از سه حالت زیر خواهد بود:

1	DEPENDENT
1	AFFINELY INDEPENDENT
1	LINEARLY INDEPENDENT

اگر بردارهای داده شده مستقل خطی بودند لازم به ذکر استقلال افاین آن‌ها نیست.  
ورودی نمونه ۱

1	4	2
2	5	7
3	4	1
4	5	8
5	6	3

خروجی نمونه ۱

1	DEPENDENT
---	-----------

ورودی نمونه ۲

1	3	2
2	1	0
3	0	1
4	1	1

1 AFFINELY INDEPENDENT

ورودی نمونه ۳

1 2 2  
2 5 1  
3 3 5

خروجی نمونه ۳

1 LINEARLY INDEPENDENT

پاسخ حدس گلدباخ

(آ) (۱۰ نمره) اثبات کنید که هر عدد فرد بزرگ تر از ۵ را می توان به صورت جمع سه عدد اول نوشت.

(ب) (۱۰ نمره) اثبات کنید که هر عدد زوج بزرگ تر یا مساوی ۴ را می توان به صورت جمع دو عدد اول نوشت.

پرسش ۲ (۵۰ نمره) در این پرسش لازم است برنامه ای بنویسید تا با گرفتن ورودی، الگوریتم گرام-اشمیت را پیاده سازی و نتیجه را در خروجی بدهد. لازم به ذکر است استفاده از توابع آماده برای این سوال مجاز نیست و لازم است تمامی توابع را خودتان پیاده سازی کنید.

ورودی: در خط اول ورودی، ابتدا تعداد بردارها ( $n$ ) و بعد از آن بعد این بردارها ( $m$ ) داده می شود. در  $n$  خط بعد هم بردارهایی با بعد  $m$  به شما داده می شود. تضمین می شود که بردارهای داده شده مستقل خطی هستند.

خروجی: در خروجی، بردارهای پایه ی عمود بر هم را چاپ کنید. (basis orthonormal vectors) نمایش سه رقم اعشار کافی است. ترتیب بردارها هم بدین صورت است که هر برداری که عنصر اول آن بزرگ تر بود باید اول چاپ شود (در صورت برابری عناصر اول هم عناصر بعد بردارها را با هم مقایسه کنید و به همین ترتیب چاپ کنید).

ورودی نمونه ۱

1 3 3  
2 0 3 4  
3 1 0 1  
4 1 1 3

خروجی نمونه ۱

1 0.857 -0.412 0.309  
2 0.000 0.600 0.800  
3 -0.514 -0.686 0.514

پاسخ