

## جبر خطی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

حمیدرضا ربیعی، مریم رمضان  
بهار ۱۴۰۳



تاریخ انتشار: ۱۴ اردیبهشت ۱۴۰۳

### تمرین تئوری چهارم

تبدیل خطی، تغییر پایه، دایمشن و رنک

۱. پرسش‌های خود درمورد این تمرین را در سامانه کوئرا مطرح کنید.

۲. سیاست ارسال با تاخیر: شما در مجموع در طول نیم‌سال می‌توانید از ۱۶ روز تاخیر استفاده کنید. این مقدار برای تمرین تئوری و عملی به صورت جداگانه حساب می‌شود. تاخیرها با مقیاس ساعت محاسبه شده و به بالا گرد می‌شوند.

۳. سیاست مشارکت دانشجویان در حل کردن تمرین: دانشجویان می‌توانند در حل تمرین برای رفع ابهام و یا به دست آوردن ایده‌ی کلی با یکدیگر مشورت و همفکری کنند. این کار مورد تایید و تشویق تیم ارائه‌ی درس می‌باشد؛ چرا که هم‌فکری و کار گروهی می‌تواند موجب تقویت یادگیری شود. اما به دست آوردن جزئیات راه‌حل و نگارش پاسخ باید تماماً توسط خود دانشجو انجام شود. حتماً در انتهای پاسخ‌های ارسالی خود نام افرادی که با آن‌ها همفکری کردید را ذکر کنید.

پرسش ۱ (۲۰ نمره)

الف) ثابت کنید:

$$\text{Nullity}\{ABC\} \leq \text{Nullity}\{A\} + \text{Nullity}\{B\} + \text{Nullity}\{C\}$$

ب) ثابت کنید:

$$\text{Rank}\{ABC\} \leq \min\{\text{Rank}\{A\}, \text{Rank}\{B\}, \text{Rank}\{C\}\}$$

پ) با فرض  $ABC = 0$  ثابت کنید:

$$\text{Rank}\{CBA\} \leq \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$$

ت) اگر  $A$  یک ماتریس  $n$  در  $n$  باشد، ثابت کنید عبارات زیر هم‌ارز هستند:

$$N(A) = N(A^*)$$

$$R(A) = R(A^*)$$

$$R(A) \cap N(A) = \{0\}$$

پرسش ۲ (۲۰ نمره)

الف) فرض کنید  $\varphi \in (V, F)$  و  $\varphi \neq 0$ . با فرض اینکه  $u \in V$  در  $\text{Null}\varphi$  نباشد، ثابت کنید

$$V = \text{Null}\varphi \oplus \{au : a \in F\}.$$

ب) فرض کنید  $A$  یک ماتریس  $m$  در  $n$  با شرط  $A \neq 0$  باشد.

ثابت کنید رنک  $A$  برابر ۱ است اگر و تنها اگر  $(c_1, \dots, c_m) \in F^m$  و  $(d_1, \dots, d_n) \in F^n$  به طوری که  $A_{j,k} = c_j d_k$  برای هر  $j = 1, \dots, m$  و  $k = 1, \dots, n$  برقرار باشد.

پرسش ۳ (۲۵ نمره)

الف) ماتریس تبدیل پایه  $P$  از پایه  $\alpha = \{x^2 + x + 1, x^2 + 1, x - 1\}$  به  $\beta = \{2x^2 + 3x + 1, 2x^2 + 2x + 1, -x^2 - 2\}$  را بیابید.

ب) از نتیجه‌ی بخش الف برای محاسبه‌ی ماتریس تبدیل پایه  $\beta$  به  $\alpha$  استفاده کنید.

ج) فرض کنید تابع چند جمله‌ای درجه ۲  $p(x)$  دارای مختصات  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  نسبت به پایه  $\beta$  است. این مختصات نسبت به  $\alpha$  چقدر است؟

پرسش ۴ (۱۵ نمره) فرض کنید  $V$  ابعاد محدودی داشته باشد و باشیم  $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(V, W)$ . ثابت کنید رنج  $T_1$  با رنج  $T_2$  برابر است اگر و تنها اگر

$$T_1 = T_2 S \text{ وجود داشته باشد به گونه‌ای که } S \in \mathcal{L}(V)$$

پرسش ۵ (۲۰ نمره) فرض کنید

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

آیا ماتریس  $A$  وجود دارد به گونه‌ای که برابری زیر برقرار باشد؟

$$A^2 = AB + 2I$$