

جبر خطی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

حمیدرضا ربیعی، مریم رمضان
پاییز ۱۴۰۲



قضایای اسلاید اول

قضیه ۱

تابعی به فرم زیر خطی می باشد.

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{a} = [x_1 \quad \dots \quad x_n] \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

باید نشان دهیم که ضرب داخلی خطی می باشد.

$$f(\alpha x + \beta y) = [\alpha x_1 + \beta y_1 \quad \dots \quad \alpha x_n + \beta y_n] \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (\alpha x_i + \beta y_i) a_i &= \alpha \sum_{i=1}^n x_i a_i + \beta \sum_{i=1}^n y_i a_i = \alpha \mathbf{x}^T \mathbf{a} + \beta \mathbf{y}^T \mathbf{a} \\ &= \alpha f(\mathbf{x}) + \beta f(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

پس این تابع خطی می باشد.

اگر یک تابع خطی باشد می‌توان آن را به صورت یک ضرب داخلی با یک بردار ثابت نشان داد.

$$f \text{ linear} \implies f(x) = \mathbf{a}^T \mathbf{x}$$

با توجه به اینکه تابع خطی می‌باشد مینویسیم

$$\mathbf{x} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$$

$$\implies f(\mathbf{x}) = f(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n) = x_1 f(e_1) + \cdots + x_n f(e_n)$$

$$\implies f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(e_1) \\ \vdots \\ f(e_n) \end{bmatrix}$$

حال تعریف می‌کنیم

$$\begin{bmatrix} f(e_1) \\ \vdots \\ f(e_n) \end{bmatrix} = \mathbf{a}$$

$$\implies f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^T \mathbf{x}$$

در نمایش یک تابع خطی به فرم $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^T \mathbf{x}$ ، \mathbf{a} یکتا می‌باشد.

فرض کنید اینطور نباشد. یعنی داشته باشیم

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^T \mathbf{x}, \quad f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}^T \mathbf{x}$$

آنگاه به ازای هر x داریم.

$$(\mathbf{a} - \mathbf{b})^T \mathbf{x} = 0$$

حال قرار می‌دهیم $x = e_1, \dots, e_n$ آنگاه داریم

$$\forall_i a_i = b_i$$

$$\implies \mathbf{a} = \mathbf{b}$$

نشان دهید که هرکدام یک تابع خطی است یا خیر.
 (آ) تابع میانگین.
 (ب) تابع ماکسیمم.

(آ) این تابع خطی است. قرار می‌دهیم

$$\mathbf{a} = \left[\frac{1}{n} \quad \dots \quad \frac{1}{n} \right]$$

آنگاه تابع میانگین برابر است با

$$\text{AVG}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{a}$$

(ب) این تابع خطی نمی‌باشد قرار می‌دهیم.

$$x_1 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\implies \text{MAX}(x_1) = 5, \quad \text{MAX}(x_2) = 7$$

$$\text{MAX}(3x_1 + 2x_2) = 15 \neq 3\text{MAX}(x_1) + 2\text{MAX}(x_2)$$

تابع $g : V^* \times V \rightarrow \mathbb{F}$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$g(f, \mathbf{v}) = f(\mathbf{v}), \quad f \in V^*, \quad \mathbf{v} \in V$$

که V^* فضای تمام توابع linear می‌باشد.

چون f خود خطی است، واضح است که تابع نسبت به ورودی دوم خطی می‌باشد.

$$g(f, \alpha v_1 + \beta v_2) = f(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha f(v_1) + \beta f(v_2) = \alpha g(f, v_1) + \beta g(f, v_2)$$

حال نسبت به ورودی اول بررسی می‌کنیم

$$f_1(x) = \mathbf{a}^T x, \quad f_2(x) = \mathbf{b}^T x$$

$$g(\alpha f_1 + \beta f_2, v) = (\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b})^T v = \alpha \mathbf{a}^T v + \beta \mathbf{b}^T v = \alpha f_1(v) + \beta f_2(v) = \alpha g(f_1, v) + \beta g(f_2, v)$$

پس g bilinear است.

آیا مثال‌های زیر bilinear هستند یا خیر.
(آ)

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 - 2x_1 y_2 - 2x_2 y_1 + 5x_2 y_2$$

(ب)

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + x_2 y_1 + 3x_2 y_2$$

(آ)

$$\begin{aligned} \langle \alpha x + \beta y, z \rangle &= (\alpha x_1 + \beta y_1)z_1 - 2(\alpha x_1 + \beta y_1)z_2 - 2(\alpha x_2 + \beta y_2)z_1 + 5(\alpha x_2 + \beta y_2)z_2 \\ &= \alpha(x_1 z_1 - 2x_1 z_2 - 2x_2 z_1 + 5x_2 z_2) + \beta(y_1 z_1 - 2y_1 z_2 - 2y_2 z_1 + 5y_2 z_2) = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle \end{aligned}$$

حال چون برای این تابع خاص داریم

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$$

خطی بودن نسبت به ورودی دوم راحت‌تر اثبات می‌شود

$$\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \langle \alpha y + \beta z, x \rangle = \alpha \langle y, x \rangle + \beta \langle z, x \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, z \rangle$$

(ب)

$$\begin{aligned} \langle \alpha x + \beta y, z \rangle &= (\alpha x_1 + \beta y_1)z_1 + 2(\alpha x_1 + \beta y_1)z_2 + (\alpha x_2 + \beta y_2)z_1 + 3(\alpha x_2 + \beta y_2)z_2 \\ &= \alpha(x_1 z_1 + 2x_1 z_2 + x_2 z_1 + 3x_2 z_2) + \beta(y_1 z_1 + 2y_1 z_2 + y_2 z_1 + 3y_2 z_2) = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle \\ \langle x, \alpha y + \beta z \rangle &= x_1(\alpha y_1 + \beta z_1) + 2x_1(\alpha y_2 + \beta z_2) + x_2(\alpha y_1 + \beta z_1) + 3x_2(\alpha y_2 + \beta z_2) \\ &= \alpha(x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + x_2 y_1 + 3x_2 y_2) + \beta(x_1 z_1 + 2x_1 z_2 + x_2 z_1 + 3x_2 z_2) = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, z \rangle \end{aligned}$$

ضرب داخلی دو ماتریس زیر را حساب کنید.

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

داریم

$$\text{Tr}(U^T V) = [(1)(1) + (1)(1)] + [(-1)(2) + (1)(1)] = \bullet$$

نشان دهید که تابع زیر یک تابع ضرب داخلی می باشد.

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n u_i \bar{v}_i, \quad u, v \in \mathbb{C}^n$$

۳ خاصیت را برای این تابع چک می کنیم.

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n u_i \bar{v}_i = \left(\sum_{i=1}^n \bar{u}_i v_i \right)^* = (\langle v, u \rangle)^*$$

$$\langle v + cu, w \rangle = \sum_{i=1}^n (v_i + cu_i) \bar{w}_i = \sum_{i=1}^n v_i \bar{w}_i + c \sum_{i=1}^n u_i \bar{w}_i = \langle v, w \rangle + c \langle u, w \rangle$$

$$\langle v, v \rangle = \sum_{i=1}^n v_i \bar{v}_i = \sum_{i=1}^n |v_i|^2 \geq 0$$

همینطور واضح است که در صورت تساوی همه مقادیر صفر می باشند.

ثابت کنید که تابع زیر بر روی دو تابع پیوسته بر روی بازه $[a, b]$ یک تابع ضرب داخلی می‌باشد.

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

۳ خاصیت را برای این تابع بررسی می‌کنیم.

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b g(x)f(x)dx = \langle g, f \rangle$$

که چون مقدار این انتگرال حقیقی می‌باشد داریم $\langle g, f \rangle = (\langle f, g \rangle)^*$.

$$\langle f + cg, h \rangle = \int_a^b (f(x) + cg(x))h(x)dx = \int_a^b f(x)h(x)dx + c \int_a^b g(x)h(x)dx = \langle f, h \rangle + c \langle g, h \rangle$$

$$\langle f, f \rangle = \int_a^b f^2(x) dx$$

با توجه به اینکه تابع f^2 همواره مثبت می‌باشد پس این مقدار همواره مثبت است و اگر صفر باشد به این معنی است که تابع همواره صفر است.

با توجه به تابع ضرب داخلی سوال قبل، ضرب داخلی دو تابع زیر را پیدا کنید.

$$p(x) = 3 - x + 2x^2, \quad q(x) = 4x + x^2, \quad [a, b] = [0, 1]$$

داریم

$$\begin{aligned} \langle p, q \rangle &= \int_0^1 (3 - x + 2x^2)(4x + x^2) dx = \int_0^1 (12x - x^2 + 8x^3 + 2x^4) \\ &= \left(6x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{4}x^4 + \frac{2}{5}x^5 \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{469}{60} \end{aligned}$$