



جبر خطی

حمیدرضا ربیعی، مریم رمضانی
بهار ۱۴۰۱

تمرین سوم: نرم، ضرب داخلی، تعامد و تبدیل‌های خطی

پرسش‌های تئوری (۱۴۰ نمره)

مهلت ارسال: ۱۴۰۱/۹/۱۹ ساعت ۲۳:۵۹:۵۹، با تاخیر: ۱۴۰۱/۹/۲۴ ساعت ۲۳:۵۹:۵۹

پرسش ۱ (۱۵ نمره) ماتریس مربعی A را در نظر بگیرید که $A^T A = A^2$.

(آ) (۵ نمره) ثابت کنید $\text{tr}((A - A^T)^T(A - A^T)) = 0$
(ب) (۱۰ نمره) نشان دهید که A یک ماتریس متقارن است.

پرسش ۲ (۳۰ نمره) مجموعه $F = \{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ یک مجموعه نامتناهی از توابع تعریف شده بر روی بازه $[0, \pi]$ است. فرض کنید که ضرب داخلی برای توابع را به صورت زیر تعریف کنیم.

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_0^{\pi} f(x)g(x)dx$$

(آ) (۱۰ نمره) با استفاده از فرآیند گرام-اشمیت، یک پایه متعامد یکه برای مجموعه توابع F بیابید.
(ب) (۱۰ نمره) تابع $f(x) = ax$ را به صورت ترکیب خطی از پایه حاصل آمده در بخش آ بنویسید.
(ج) (۱۰ نمره) تابع $f(x) = e^{tx}$ را به صورت ترکیب خطی از پایه حاصل آمده در بخش آ بنویسید.
پرسش ۳ (۲۰ نمره) مقدار حقیقی ناصفر λ و ماتریس A به صورت زیر مفروض‌اند.

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}$$

(آ) (۱۰ نمره) مقدار A^k را به ازای k های طبیعی محاسبه کنید. استدلال دقیق ریاضی مد نظر است.
(ب) (۱۰ نمره) ماتریس

$$B_n = \sum_{i=1}^n \frac{A^i}{i!}$$

مفروض است. ماتریس $B_{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n$ را محاسبه کنید. توجه بفرمایید که طبق تعریف $A^* = I$ می‌باشد.
پرسش ۴ (۱۵ نمره) پوشش محدب مجموعه $\{[0, 2]^T\} \cup \{[x, 0]^T \mid 0 \leq x < 1\}$ را با رسم شکل توصیف نمایید.

پرسش ۵ (۱۵ نمره) فرض کنید که a و b دو نقطه متمایز در فضای R^n باشد. نشان دهید مرز دو ناحیه‌ای که فاصله نقاط درون آنها از یکی از دو نقطه مرجع a و b کمتر از دیگری است، یک صفحه است.

پرسش ۶ (۱۵ نمره) تبدیل خطی حقیقی دلخواه T مفروض است. نشان دهید که $T(u).T(v) = u.v$ است اگر و تنها اگر ماتریس استاندارد تبدیل T یکه متعامد باشد.

پرسش ۷ (۱۵ نمره) معادله زیر را به ازای مقدار معلوم A که یک ماتریس $n \times n$ است حل کنید.

$$AX - XA = I_n$$

پرسش ۸ (۱۵ نمره) اثبات کنید که برای تبدیل دلخواه T به ازای بردار حقیقی دلخواه x ، $T(x) \perp x$ است اگر و تنها اگر ماتریس استاندارد تبدیل T پادمتقارن باشد. ماتریس دلخواه A زمانی پادمتقارن است که $A^T = -A$.

مهلت ارسال: ۱۴۰۱/۹/۲۱ ساعت ۲۳:۵۹:۵۹، با تاخیر: ۱۴۰۱/۹/۲۶ ساعت ۲۳:۵۹:۵۹

پرسش‌های عملی (۳۰ نمره)

پرسش ۱ (۱۵ نمره) در سیاره‌ی مریخ یک سیستم ساده‌ی پیش‌بینی آب و هوا قرار است داشته باشیم. در این سیستم قرار است شما برنامه‌ای بنویسید تا با داده‌ای که در اختیار دارید آب و هوای یک‌سری نقاط را تخمین بزنید. شرایط آب و هوا یک عدد صحیح بین ۱ تا ۱۰ می‌باشد که نشان دهنده‌ی نوع آب و هوای آن مختصات است. در این سیاره مختصات هر نقطه، یک ۴ تایی است و کلاً در فضای ۴ بعدی کار می‌کنیم. دقت کنید مختصات می‌تواند یک شامل درایه‌های اعشاری باشد. در ابتدا آب و هوای یک سری نقاط در اختیار شما قرار می‌گیرد. حال یک سری نقاط به شما داده می‌شود تا آب و هوای آن‌ها را تخمین بزنید. آب و هوای هر نقطه‌ی نامشخص را باید مد (بیشترین تکرار) آب‌وهوا در a همسایه‌ی نزدیک آن نقطه، پیش‌بینی کنید. دقت کنید که در این سیاره نزدیکی را بر اساس نرم $L1$ می‌سنجیم. همچنین در شرایط برابری مد، آب‌وهوا را عدد کمتر تخمین می‌زنیم. در خط اول سه ورودی a, b, c را دریافت می‌کنید که b برابر تعداد نقاطی هستند که آب‌وهوای آن‌ها را می‌دانیم. c هم تعداد نقاطی هستند که شما قرار است آب‌وهوای آن‌ها را پیش‌بینی کنید. در b خط بعدی در هر خط ۵ عدد ظاهر می‌شود که ۴ عدد اول مختصات آن نقطه و عدد ۵ام شرایط آب‌وهوایی آن (عدد بین ۱ تا ۱۰) می‌باشد. در c خط بعدی هم مختصات نقاطی که باید آب‌وهوای آن‌ها را پیش‌بینی کنید، داده می‌شود که در هر خط یک ۴ تایی مختصات داده می‌شود.

در خروجی در تنها خط باید پیش‌بینی خود از شرایط آب‌وهوایی نقاط داده شده را به ترتیب چاپ کنید. برای بهبود زمان کدتان اکثر کارها را به کمک کتابخانه NumPy باید انجام دهید.

فایل سه ورودی خروجی نمونه در سایت درس قرار گرفته است.

نمونه ورودی

```
1 2 2
1 1 1 1 3
5 5 5 5 2
2 2 2 10
4 4 4 4
```

نمونه خروجی

```
3 2
```

پرسش ۲ (۱۵ نمره) یکی از کارهای مرسوم در حوزه پردازش زبان‌های طبیعی محاسبه فاصله کلمات و جملات از روی نمایش برداری آنها است. فاصله این نمایش‌های برداری می‌تواند معیار خوبی برای سنجش میزان نزدیکی محتوا، احساس و مواردی از این دست باشد. در این سوال نمایش برداری n جمله به شما داده می‌شود. این نمایش‌های برداری در فضای R^m هستند. در خروجی شما باید اندیس دو بردار از همه به هم نزدیک‌تر و دو بردار از همه به هم دورتر را خروجی دهید.

ورودی

در خط اول یک عدد n به عنوان ورودی داده می‌شود. در n خط بعدی بردارهایی در فضای R^m که به وسیله فاصله جدا شده‌اند ورودی داده می‌شود. دقت کنید که m طول هر یک از بردارها است و ارتباطی به n ندارد. همچنین توجه داشته باشید که درایه‌های هر یک از بردارها ممکن است یک عدد اعشاری و یا منفی باشد.

خروجی

در خط اول خروجی باید اندیس دو برداری را که از همه به هم نزدیک‌تر هستند و در خط دوم اندیس دو برداری را که از همه به هم دورتر هستند نمایش دهید. در هر خط ابتدا اندیس کوچک‌تر را چاپ کنید. در حالت برابر جفتی را انتخاب کنید که اندیس کوچک‌تر کوچک‌تری دارد. به عنوان مثال بین $[2,3]$ و $[1,4]$ باید $[1,4]$ را انتخاب کنید. همچنین بین حالت $[1,2]$ و $[1,3]$ نیز باید $[1,2]$ را انتخاب کنید. توجه کنید که اندیس‌گذاری از یک شروع می‌شود.

توجه کنید که تنها از کتابخانه‌ی Numpy برای این سوال می‌توانید استفاده کنید. برای حل این سوال برای سرعت بیشتر از هیچ حلقه‌ی for ای بعد از دریافت ورودی‌ها مجاز نیستید استفاده کنید و به کمک کارهای برداری کتابخانه‌ی Numpy باید سوال را حل کنید.

فایل سه ورودی و خروجی نمونه در سایت درس قرار گرفته است.

نمونه ورودی

```
4
1 1 1 1
0 0 1 0
2 2 2 2
3 0 0 1
```

نمونه خروجی

```
1 3
2 4
```