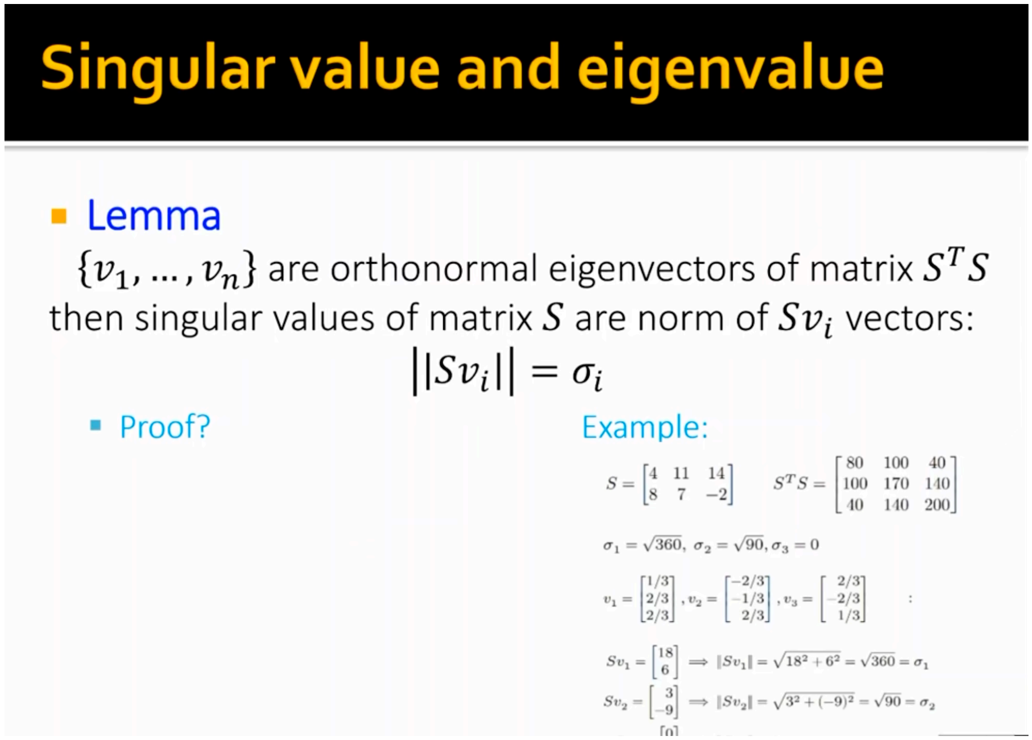
SVD-Video



می‌دانیم گرام ماتریس مربعی، متقارن و positive semi definite است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که eigenvalue هایش حقیقی و نامنفی اند و eigenvector هایش متعامد اند. نرم نوشته شده نرم دو است. داریم که

$$\|Sv_i\| = \sigma_i$$

که S ماتریسی $m \times n$ و v_i برداری $n \times ۱$ و σ_i نیز $m \times ۱$ است.

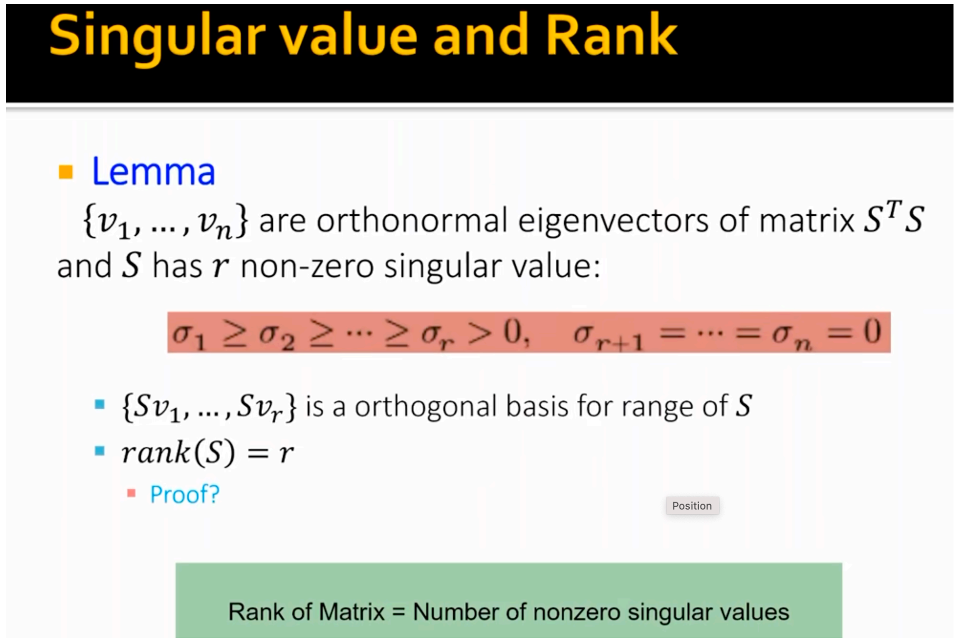
$$\|Sv_i\|^۲ = (Sv_i)^T Sv_i = v_i^T S^T Sv_i$$

S^TS همان گرام ماتریس S است و آن را Y می نامیم. پس داریم که $Yv_i = \lambda_i v_i$.

$$v_i^T S^T Sv_i = v_i^T Y v_i = v_i^T \lambda_i v_i = \lambda_i \|v_i\|^۲ =_\star \lambda_i$$

که تساوی ستاره از یکه متعامد بودن بردارها نتیجه شده است. پس چون مقدار ویژه ها حقیقی نامنفی اند.

$$\|Sv_i\| = \sqrt{\lambda_i} = \sigma_i$$



بردارهای $v_1, \dots, v_n$ برای $i \neq j$ بر هم عمودند که این خاصیت از orthonormal بودن ناشی شده است. همچنین:

$$i \neq j \;\; v_i \perp v_j \iff \langle v_i, v_j \rangle = 0 \iff v_j^T v_i = 0$$

برای اثبات حکم باید موارد زیر را ثابت کنیم.

- $i \neq j \implies Sv_i \perp Sv_j$

$$\langle Sv_i, Sv_j \rangle = (Sv_i)^T (Sv_j) = v_i^T (S^T S v_j) = v_i^T \lambda_j v_j = 0$$

تساوی صفر ناشی از تعامد اشاره شده در معادله قبلی است. همچنین $S^T S v_j = \lambda_j v_j$ به دلیل شرط مقدار ویژه ها برای ماتریس گرام (که مربعی است) می باشد. پس چون طبق بالا دوبه دو orthogonal اند درنتیجه مستقل خطی نیز هستند.

- بردار ها کل فضای رنج تبدیل خطی S را اسپن می‌کنند.

$$Sv_i = z_i$$

ابعاد S برابر $m \times n$ و v_i برابر $n \times 1$ است. درنتیجه z_i به صورت $m \times 1$ می باشد که فضای $\mathbb{R}^m$ است. حال بردار y از R^m داشته باشیم که در رنج S است پس

$$y \in \text{range}(S) \implies \exists x \in \mathbb{R}^n \; s.t \; y = Sx$$

x یک بردار n تایی است و فضای $\mathbb{R}^n$ دارای پایه های یکه متعامد $v_1, \dots, v_n$ است. بنابراین

$$x = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i$$

$$y = Sx \implies y = \sum_{i=1}^{n} c_i S x_i = \sum_{i=1}^{r} c_i S x_i + \sum_{i=r+1}^{n} c_i S x_i$$

r تا singular value ناصفر داریم و طبق اثبات قبل $\|Sv_i\| = \sigma_i$ بنابراین

$$\forall r < i \leqslant n : \|Sv_i\| = 0 \implies Sv_i = 0$$

پس در معادله یکی قبل تر جملات $r + 1$ و به بعد برابر صفر اند پس

$$y = \sum_{i=1}^{r} c_i S x_i$$

بنابراین $Sv_1, \ldots, Sv_n$ یک orthogonal basis است. حال برای محاسبه رنک باید ثابت کنیم بعد فضای S برابر r است که این موضوع طبق اینکه تعداد پایه های مستقل خطی مان r تا است برقرار است.

به دنبال بردار های یکه متعامد هستم پس Sv_i ها را بر نرمشان تقسیم می‌کنیم.

$$u_i = \frac{Sv_i}{\|Sv_i\|} = \frac{1}{\sigma_i} Sv_i$$

پس داریم که

$$SV = \sigma U$$

$$AV = \lambda V$$

دو فرم مقداری شبیه هم اند. اما در بالایی دسته بردار ها هرچند هم راستا اند ولی فرق می کند و همچنین S برخلاف A مربعی نیست. برای برقراری اندازه طرف چپ را اکستند می کنیم:

$$[Sv_1, Sv_2, \ldots, Sv_r, 0, 0, \ldots, 0]_{m \times n} = [\sigma_1 u_1, \ldots, \sigma_r u_r, 0, \ldots, 0]_{m \times n}$$

حال برای تبدیل $u_1, \ldots, u_r$ به $u_1, \ldots, u_m$ که پایه های یکه متعامد کل فضای $\mathbb{R}^m$ باشد همانطور که از قبل میدانیم از گرام اشمیت استفاده می‌کنیم.

$$S[v_1, \ldots, v_n] = [u_1, \ldots, u_m] \begin{bmatrix} \sigma_1 & \ldots & \ldots & \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ \ldots & \ldots & \sigma_r & \\ & 0 & & 0 \end{bmatrix}$$

ماتریس V,U مربعی و orthonormal اند. ماتریس سمت راست که آن را Σ می نامیم ، شبه قطری است به این معنی که قسمت بالا چپ آن قطری و مابقی آن صفر است و مربعی نیز نمی باشد.

$$SV = U\Sigma$$

حال V می دانیم orthonormal است پس وارون پذیر است و وارون آن هم ترنسپوز آن است.

$$S = U\Sigma V^{-1} = U\Sigma V^{T}$$

که در این رابطه که فرم SVD می باشد، U،V مربعی orthonormal اند و Σ شبه قطری است که روی قطر اصلی آن مقادیر تکین قرار دارند.

SVD Proof

- If $m \neq n$ then A^*A, AA^* have different sizes, but they still have essentially the same eigenvalues—whichever one is larger just has some extra 0 eigenvalues.
- The same is actually true of AB and BA for any A and B.

$A^*A = VDV^*$

- Proof SVD:

A^*A مربعی است و طبق spectral decomposition داریم که

$$A^*A = VDV^*$$

که V ماتریس unitary و D قطری با مقادیر ویژه بر روی قطر (که حقیقی نامنفی اند) می‌باشد.
تعریف می کنیم ماتریس Σ را به صورتی که $\Sigma_{ij} = 0 =$ برای $i \neq j$ و $\Sigma_{ii} = \sqrt{D_{ii}}$. داریم که

$$A^*A = V\Sigma^*\Sigma V^* = (\Sigma V^*)^*(\Sigma V^*) = Y^*Y \qquad (۱-۱)$$

طبق unitary freedom of psd decomposition داریم که چون گزاره دوم این لم اولی را نتیجه می دهد، ماتریس unitary به نام U وجود دارد که:

$$A = U(\Sigma V^*)$$

که همان فرم SVD است.