به نام خداوند بخشنده مهربان

جبر خطی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

حمیدرضا ربیعی، مریم رمضانی

پاییز ۱۴۰۲

قضایای اسلاید Inner Product

قضیه ۱

تابعی به فرم زیر خطی می‌باشد.

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{a} = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

باید نشان دهیم که ضرب داخلی خطی می‌باشد.

$$f(\alpha x + \beta y) = \begin{bmatrix} \alpha x_1 + \beta y_n & \dots & \alpha x_n + \beta y_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i + \beta y_i) a_i &= \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i a_i + \beta \sum_{i=1}^{n} y_i a_i = \alpha \mathbf{x}^T \mathbf{a} + \beta \mathbf{y}^T \mathbf{a} \\ &= \alpha f(\mathbf{x}) + \beta f(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

پس این تابع خطی می‌باشد.

قضیه ۲

اگر یک تابع خطی باشد می‌توان آن را به صورت یک ضرب داخلی با یک بردار ثابت نشان داد.

$$f \text{ linear} \implies f(x) = \mathbf{a}^T\mathbf{x}$$

با توجه به اینکه تابع خطی می‌باشد مینویسیم

$$\mathbf{x} = x_۱e_۱ + x_۲e_۲ + \cdots + x_ne_n$$
$$\implies f(\mathbf{x}) = f(x_۱e_۱ + x_۲e_۲ + \cdots + x_ne_n) = x_۱f(e_۱) + \cdots + x_nf(e_n)$$
$$\implies f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_۱ & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(e_۱) \\ \vdots \\ f(e_n) \end{bmatrix}$$

حال تعریف می‌کنیم

$$\begin{bmatrix} f(e_۱) \\ \vdots \\ f(e_n) \end{bmatrix} = \mathbf{a}$$
$$\implies f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^T\mathbf{x}$$

قضیه ۳

در نمایش یک تابع خطی به فرم $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^T\mathbf{x}$ ، $\mathbf{a}$ یکتا می‌باشد.

فرض کنید اینطور نباشد. یعنی داشته باشیم

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^T\mathbf{x}\ ,\ f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}^T\mathbf{x}$$

انگاه به ازای هر x داریم.

$$(\mathbf{a} - \mathbf{b})^T\mathbf{x} = ۰$$

حال قرار می‌دهیم $x = e_۱, \ldots, e_n$ آنگاه داریم

$$\forall_i\ a_i = b_i$$
$$\implies a = b$$

مثال ۱

نشان دهید که هرکدام یک تابع خطی است یا خیر.

(آ) تابع میانگین.

(ب) تابع ماکسیمم.

(آ) این تابع خطی است. قرار می‌دهیم

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{n} & \dots & \frac{۱}{n} \end{bmatrix}$$

آنگاه تابع میانگین برابر است با

$$\mathrm{AVG}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{a}$$

(ب) این تابع خطی نمی‌باشد قرار میدهیم.

$$x_۱ = \begin{bmatrix} ۵ & ۰ \end{bmatrix} \ , \ x_۲ = \begin{bmatrix} ۰ & ۷ \end{bmatrix}$$
$$\implies \ \mathrm{MAX}(x_۱) = ۵ \ , \ \mathrm{MAX}(x_۲) = ۷$$
$$\mathrm{MAX}(۳x_۱ + ۲x_۲) = ۱۵ \neq ۳\mathrm{MAX}(x_۱) + ۲\mathrm{MAX}(x_۲)$$

مثال ۲

تابع $g : V^* \times V \to \mathbb{F}$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$g(f, \mathbf{v}) = f(\mathbf{v})\ ,\ f \in V^*\ ,\ \mathbf{v} \in V$$

که V^* فضای تمام توابع linear می‌باشد.

چون f خود خطی است، واضح است که تابع نسبت به ورودی دوم خطی می‌باشد.

$$g(f, \alpha v_۱ + \beta v_۲) = f(\alpha v_۱ + \beta v_۲) = \alpha f(v_۱) + \beta f(v_۲) = \alpha g(f, v_۱) + \beta g(f, v_۲)$$

حال نسبت به ورودی اول بررسی می‌کنیم

$$f_۱(x) = \mathbf{a}^T x, f_۲(x) = \mathbf{b}^T x$$

$$g(\alpha f_۱ + \beta f_۲, v) = (\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b})^T v = \alpha \mathbf{a}^T v + \beta \mathbf{b}^T v = \alpha f_۱(v) + \beta f_۲(v) = \alpha g(f_۱, v) + \beta g(f_۲, v)$$

پس g bilinear است.

مثال ۳

آیا مثال‌های زیر bilinear هستند یا خیر.

(آ)

$$< x,y >= x_۱y_۱ - ۲x_۱y_۲ - ۲x_۲y_۱ + ۵x_۲y_۲$$

(ب)

$$< x,y >= x_۱y_۱ + ۲x_۱y_۲ + x_۲y_۱ + ۳x_۲y_۲$$

(آ)

$$< \alpha x + \beta y, z >= (\alpha x_۱ + \beta y_۱)z_۱ - ۲(\alpha x_۱ + \beta y_۱)z_۲ - ۲(\alpha x_۲ + \beta y_۲)z_۱ + ۵(\alpha x_۲ + \beta y_۲)z_۲$$
$$= \alpha(x_۱z_۱ - ۲x_۱z_۲ - ۲x_۲z_۱ + ۵x_۲z_۲) + \beta(y_۱z_۱ - ۲y_۱z_۲ - ۲y_۲z_۱ + ۵y_۲z_۲) = \alpha < x,z > +\beta < y,z >$$

حال چون برای این تابع خاص داریم

$$< x,y >=< y,x >$$

خطی بودن نسبت به ورودی دوم راحت‌تر اثبات می‌شود

$$< x, \alpha y + \beta z >=< \alpha y + \beta z, x >= \alpha < y,x > +\beta < z,x >= \alpha < x,y > +\beta < x,z >$$

(ب)

$$< \alpha x + \beta y, z >= (\alpha x_۱ + \beta y_۱)z_۱ + ۲(\alpha x_۱ + \beta y_۱)z_۲ + (\alpha x_۲ + \beta y_۲)z_۱ + ۳(\alpha x_۲ + \beta y_۲)z_۲$$
$$= \alpha(x_۱z_۱ + ۲x_۱z_۲ + x_۲z_۱ + ۳x_۲z_۲) + \beta(y_۱z_۱ + ۲y_۱z_۲ + y_۲z_۱ + ۳y_۲z_۲) = \alpha < x,z > +\beta < y,z >$$
$$< x, \alpha y + \beta z >= x_۱(\alpha y_۱ + \beta z_۱) + ۲x_۱(\alpha y_۲ + \beta z_۲) + x_۲(\alpha y_۱ + \beta z_۱) + ۳x_۲(\alpha y_۲ + \beta z_۲)$$
$$\alpha(x_۱y_۱ + ۲x_۱y_۲ + x_۲y_۱ + ۳x_۲y_۲) + \beta(x_۱z_۱ + ۲x_۱z_۲ + x_۲z_۱ + ۳x_۲z_۲) = \alpha < x,y > +\beta < x,z >$$

مثال ۴

ضرب داخلی دو ماتریس زیر را حساب کنید.

$$U = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} \ , \ V = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

داریم

$$\mathrm{Tr}(U^T V) = [(۱)(۱) + (۱)(۱)] + [(-۱)(۲) + (۰)(۱)] = ۰$$

مثال ۵

نشان دهید که تابع زیر یک تابع ضرب داخلی می‌باشد.

$$< u,v >= \sum_{i=1}^{n} u_i \bar{v_i} \ , \ u,v \in \mathbb{C}^n$$

۳ خاصیت را برای این تابع چک می‌کنیم.

$$< u,v >= \sum_{i=1}^{n} u_i \bar{v_i} = (\sum_{i=1}^{n} \bar{u}_i v_i)^* = (< v,u >)^*$$

$$< v+cu,w >= \sum_{i=1}^{n} (v_i + cu_i)\bar{w}_i = \sum_{i=1}^{n} v_i \bar{w}_i + c\sum_{i=1}^{n} u_i \bar{w}_i =< v,w > +c < u,w >$$

$$< v,v >= \sum_{i=1}^{n} v_i \bar{v_i} = \sum_{i=1}^{n} |v_i|^2 \geq 0$$

همینطور واضح است که در صورت تساوی همه مقادیر صفر می باشند.

مثال ۶

ثابت کنید که تابع زیر بر روی دو تابع پیوسته بر روی بازه $[a,b]$ یک تابع ضرب داخلی می‌باشد.

$$< f, g >= \int_a^b f(x)g(x)dx$$

۳ خاصیت را برای این تابع بررسی می‌کنیم.

$$< f, g >= \int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b g(x)f(x)dx =< g, f >$$

که چون مقدار این انتگرال حقیقی می‌باشد داریم $< g, f >= (< g, f >)^* =< g, f >$.

$$< f + cg, h >= \int_a^b (f(x) + cg(c))h(x)dx = \int_a^b f(x)h(x)dx + c\int_a^b g(x)h(x)dx =< f, h > +c < g, h >$$

$$< f, f >= \int_a^b f^{۲}(x)\ dx$$

با توجه به اینکه تابع $f^{۲}$ همواره مثبت می‌باشد پس این مقدار همواره مثبت است و اگر صفر باشد به این معنی است که تابع همواره صفر است.

مثال ۷

با توجه به تابع ضرب داخلی سوال قبل، ضرب داخلی دو تابع زیر را پیدا کنید.

$$p(x) = ۳ - x + ۲x^۲\ ,\ q(x) = ۴x + x^۲\ ,\ [a,b] = [۰,۱]$$

داریم

$$
\begin{aligned}
< p,q >&= \int_۰^۱ (۳ - x + ۲x^۲)(۴x + x^۲)\ dx = \int_۰^۱ (۱۲x - x^۲ + ۷x^۳ + ۲x^۴) \\
&= (۶x^۲ - \frac{۱}{۳}x^۳ + \frac{۷}{۴}x^۴ + \frac{۲}{۵}x^۵)\Big|_۰^۱ \\
&= \frac{۴۶۹}{۶۰}
\end{aligned}
$$