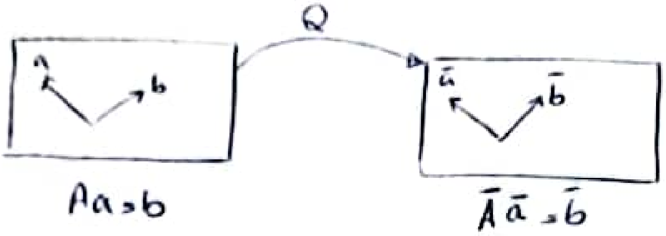
Eigenvectors & Eigenvalues

→ Review



$a = Q\bar{a} \qquad b = Q\bar{b}$

$Aa = b \rightarrow A(Q\bar{a}) = Q\bar{b}$

$\bar{A}\bar{a} = \bar{b}$

سمت راست عبارت‌ها شبیه هم بشه.

$\xrightarrow{Q^{-1}} Q^{-1}AQ\bar{a} = \bar{b}$

$\boxed{\bar{A} = Q^{-1}AQ}$

Q وارون‌پذیر است.

Similar Matrices

اثبات. اگر دو ماتریس همانند باشند، حتماً دترمینان این دو ماتریس با هم برابر است.

$$A = Q^{-1}BQ \longrightarrow |A| = |Q^{-1}BQ| = \underbrace{|Q^{-1}|}_{\frac{1}{Q}}\,|B|\,|Q| = |B|$$

Question. آیا معکوس دو ماتریسی که همانند هستند با هم برابر است؟

$$A^{-1} = Q^{-1}B^{-1}Q$$

باید حتماً هر دو ماتریس وارون‌پذیر باشند.

Think

- Why trace is a similarity invariant?

$$A = Q^{-1}CQ \longrightarrow tr(A) = tr(Q^{-1}CQ) = tr(QQ^{-1}C) = tr(C\underbrace{QQ^{-1}}_{I}) = tr(C)$$

Definition of Eigenvectors & Eigenvalues

Question. رابطه $Ax = \lambda x$ چه موقع جواب بدیهی داره؟

جواب بدیهی $x = 0$ رو همیشه داره. اما گفتیم بردار ویژه نمی‌تونه بردار صفر باشه.

برای پیدا کردن A، به جواب بدیهی کاری نداریم چون جواب بدیهی باعث میشه با تعریف بردار ویژه هم خلاف داشته باشیم

Example. Show that 7 is an eigenvalue of matrix A, and find the corresponding eigenvectors?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \qquad Ax = \lambda x \rightarrow Ax - \lambda x = 0 \rightarrow \boxed{(A - \lambda I)\, x = 0}$$

$$\text{Null space } (A - \lambda I)$$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \right) x = 0 \longrightarrow \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ \end{array} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

متغیر آزاد x_2

$$-x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow \boxed{x_1 = x_2}, \quad x_2 \neq 0$$

Eigenspace

Question. آیا ماتریس $n \times n$ حداکثر n مقدار ویژه می‌تواند داشته باشد؟ in

فرض $n = 2$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad \Delta(\lambda) = |A - \lambda I| \rightarrow (a-\lambda)(d-\lambda) - bc =$$

$$ad - a\lambda - d\lambda + \lambda^2 - bc =$$

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc)$$

← معادله درجه 2. درنتیجه این معادله حداکثر 2 جواب می‌تواند داشته باشد.

Example 1 The characteristic polynomial of 6×6 matrix is $\lambda^6 - 4\lambda^5 - 12\lambda^4$. Find the eigenvalues and their multiplicities.

$$\lambda^4 (\lambda^2 - 4\lambda - 12) = 0 \quad \lambda^4 (\lambda - 6)(\lambda + 2)$$

به ازای هر مقدار ویژه می‌توانیم یک بردار ویژه مستقل بدست بیاریم که به ازای ریشه صفر 4 تا بردار ویژه بدست می‌آید (3 تا مقدار ویژه متمایز داریم)

Example 2.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 2$$

مقادیر ویژه می‌تونه اعداد مختلط هم باشه؟
← در جلسات آینده اشاره میشه.

Matrix Spectrum

قضیه. برای یک ماتریس مثلثی، درایه‌های روی قطر اصلی مرتبه همون مقادیر ویژه

$$A - I\lambda = \begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ 0 & a_{22}-\lambda & a_{23} & \cdots \\ 0 & 0 & a_{33}-\lambda & \cdots \\ \vdots & & & \ddots \end{bmatrix}$$

$(A-\lambda I)x = 0 \quad , \quad x \neq 0$

$A - \lambda I = 0 \rightarrow$ پس باید حداقل یک متغیر آزاد داشته باشیم

$$\left.\begin{array}{l} a_{11} = \lambda \\ a_{22} = \lambda \\ \vdots \\ a_{nn} = \lambda \end{array}\right\} \rightarrow$$ مجموعه همه مقادیر ویژه همون قطر اصلی ماتریس توضیح داده شده است.

Prob $\{\, 0 \in \sigma(A) \iff |A| = 0$

یک ماتریس وارون‌پذیر است $\iff$ اگر و فقط اگر صفر جزو مقادیر ویژه‌اش نباشد

$|A - \underset{0}{\lambda} I| = 0 \longrightarrow |A| = 0$

Similar Matrices

اثبات. اگر دو ماتریس همانند باشند آنگاه معادله مشخصه‌شون با هم برابر است.

فرض. $B = Q^{-1}AQ \longrightarrow \Delta_B(\lambda) = |B - \lambda I| = |Q^{-1}AQ - \lambda I| \leftarrow Q^{-1}Q$

$= |Q^{-1}AQ - \lambda Q^{-1}Q| = |Q^{-1}AQ - Q^{-1}\lambda Q|$

$= |Q^{-1}|\,|A - \lambda I|\,|Q| = |A - \lambda I| = \Delta_A(\lambda)$

$\Rightarrow \sigma(A) = \sigma(B)$

اثبات. اگر دو ماتریس معادله مشخصه یکسان داشته باشند آنگاه آن دو ماتریس ~~مشابه~~ همانند هستند.

اثبات با مثال نقض.

$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\times}$ این دو ماتریس همانند نیستند.

مقادیر ویژه: 2,2

Eigenvectores Linear Independence

اثبات قضیه

$\boxed{\text{فرض خلف}} \Rightarrow v_1 \ldots v_p$ وابسته خطی هستند $\longrightarrow \left| v_{r+1} = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i \right| \quad \exists\, \alpha_i \neq 0$

$\xrightarrow{A \times \text{طرفین}} \boxed{Av_{r+1}} = \alpha_1 Av_1 + \cdots + \alpha_r Av_r = \alpha_1 \lambda v_1 + \cdots + \alpha_r \lambda v_r$

$\xrightarrow{\lambda} \boxed{\lambda_{r+1} v_{r+1}} = \alpha_1 \lambda_{r+1} v_1 + \cdots + \alpha_r \lambda_{r+1} v_r$

$\rightarrow 0 = \alpha_1(\lambda_{r+1} - \lambda_1)v_1 + \cdots + \alpha_r(\lambda_{r+1} - \lambda_r)v_r$

$$\Phi = \alpha_1(\lambda_{r+1} - \lambda_1)v_1 + \cdots + \alpha_r(\lambda_{r+1} - \lambda_r)v_r$$

$$\underset{\neq 0}{\alpha_i}\boxed{(\lambda_{r+1} - \lambda_i)}v_i \longrightarrow \lambda_i = \lambda_{r+1}$$