به نام خداوند بخشنده مهربان

جبر خطی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

حمیدرضا ربیعی، مریم رمضانی
پاییز ۱۴۰۲

قضایای اسلاید Rank

قضیه ۱

اگر دو ماتریس A و B معادل سطری باشند، فضای سطری یکسانی دارند. اگر B به فرم اشلن باشد، ردیف های ناصفر B یک پایه برای فضای سطری A و همچنین B است.

فرض می کنیم A از ضرب ماتریس B در ماتریس عملیات سطری R حاصل می شود، پس:

$$[a_i^T] = [r_i^T]B = \Sigma_{j=1}^{m} r_{ij}[b_j^T] = r_{i1}[b_i^T]$$

پس هر سطری از A ترکیب خطی از سطر های B است. حال که فضای سطری A نیز ترکیب خطی از سطر هایش هست، پس فضای سطری ماتریس‌های A و B یکسان است.

$B = RREF(A)$

برای نشان دادن اینکه سطر های ناصفر B پایه هستند باید اثبات کنیم که فضای سطری B را $span$ می کنند و مستقل خطی هستند. فضای سطری B حاصل از ترکیب خطی سطر های آن است . چون سطر های تمام صفر نمی توانند تغییری در جواب ها ایجاد کنند پس سطر های ناصفر فضای سطری را $span$ می کنند. برای استقلال نیز معادله ی $Bx = 0$ را تشکیل می دهیم. می دانیم هر سطر حداقل یک درایه دارد که باقی ندارند پس تنها راهی که معادله برقرار باشد به ازای حالتی هست که $x = 0$

قضیه ۲

ستون های پیوت A یک پایه برای $Col(A)$ است.

برای نشان دادن اینکه ستون های پیوت A پایه هستند باید اثبات کنیم که $Col(A)$ را $span$ می کنند و مستقل خطی هستند. فضای ستونی A حاصل از ترکیب خطی ستون های آن است . چون ستون های تمام صفر نمی توانند تغییری در جواب ها ایجاد کنند پس ستون های ناصفر فضای ستونی را $span$ می کنند. برای استقلال نیز معادله ی $Ax = 0$ را تشکیل می دهیم. می دانیم هر ستون پیوت حداقل یک درایه دارد که باقی ندارند پس تنها راهی که معادله برقرار باشد به ازای حالتی هست که $x = 0$

مثال ۱

برای ماتریس A موارد زیر را پیدا کنید

- Row Basis
- Column Basis
- dim(Row(A))
- dim(Col(A))
- dim(Null(A))

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -5 & 8 & 0 & -17 \\ 1 & 3 & -5 & 1 & 5 \\ 3 & 11 & -19 & 7 & 1 \\ 1 & 7 & -13 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -۲ & -۵ & ۸ & ۰ & -۱۷ \\ ۱ & ۳ & -۵ & ۱ & ۵ \\ ۳ & ۱۱ & -۱۹ & ۷ & ۱ \\ ۱ & ۷ & -۱۳ & ۵ & -۳ \end{bmatrix} \longrightarrow^{RREF} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & -۲ & ۰ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & -۵ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} -۲ & ۱ & ۳ & ۱ \\ -۵ & ۳ & ۱۱ & ۷ \\ ۸ & -۵ & -۱۹ & -۱۳ \\ ۰ & ۱ & ۷ & ۵ \\ -۱۷ & ۵ & ۱ & -۳ \end{bmatrix} \longrightarrow^{RREF} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۷ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$row \quad basis = pivetCol(A^T) = pivetCol(rref(A^T)) = \begin{bmatrix} -۲ & -۵ & ۸ & ۰ & -۱۷ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۱ & ۳ & -۵ & ۱ & ۵ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۳ & ۱۱ & -۱۹ & ۷ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$column \quad basis = pirvetCol(A) = pivetCol(rref(A)) = \begin{bmatrix} -۲ \\ ۱ \\ ۳ \\ ۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -۵ \\ ۳ \\ ۱۱ \\ ۷ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۷ \\ ۵ \end{bmatrix}$$

$$dim(Row(A)) = number \quad of \quad row \quad basis = ۳$$

$$dim(Col(A)) = number \quad of \quad column \quad basis = ۳$$

$$dim(Null(A)) = number \quad of \quad non-pivet \quad columns = ۲$$

مثال ۲

اگر ستون های A مستقل خطی باشند:

$$nullity(A) = ? colrank(A) = ?$$

اگر ستون های ماتریس A مستقل خطی باشند پس ماتریس A_{m*n} ماتریسی بلند است و ستونی غیر پیوت ندارد، پس

$$\text{nullity(A)} = \text{number of pivot columns} = \text{m} - \text{n}$$
$$\text{colrank(A)} = \text{number of independent columns} = \text{n}$$

مثال ۳

$$nullity(A) =?colrank(A) =?A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, Ax = \begin{bmatrix} x_2 + x_3 + 2x_4 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} -2x_3 - x_4 \\ -x_3 - 2x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$nullity(A) = 2, colRank(A) = 2$$

مثال ۴

بعد فضا های $NullSpace$ و $ColumnSpace$ را بیابید

$$\begin{bmatrix} -۳ & ۶ & -۱ & ۱ & -۷ \\ ۱ & -۲ & ۲ & ۳ & -۱ \\ ۲ & -۴ & ۵ & ۸ & -۴ \end{bmatrix}$$

(row reduce the Augmented Matrix [A 0] to echelon form)

$$[A \quad ۰] = \begin{bmatrix} -۳ & ۶ & -۱ & ۱ & -۷ & ۰ \\ ۱ & -۲ & ۲ & ۳ & -۱ & ۰ \\ ۲ & -۴ & ۵ & ۸ & -۴ & ۰ \end{bmatrix} \longrightarrow^{RREF} = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ & ۰ & -۱ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۲ & -۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \longrightarrow x_۱ = ۲x_۲ + x_۴ - ۳x_۵, x_۳ = -۲x_۴ + ۲x_۵$$

$$number \quad of \quad basic \quad variables = colRank(A) = ۲$$

$$number \quad of \quad free \quad variables = nullity(A) = ۳$$

قضیه ۳

$$\text{Nullity}(A) + \text{ColRank}(A) = n$$

$$\text{Dim}(Null(A)) + \text{Dim}(Range(A)) = n$$

$$\text{number of pivot columns} + \text{number of non-pivot columns} = \text{number of columns}$$

فرض می کنیم که $Nullity(A), k$ عضو دارد، از آنجایی که یک زیرفضا است پس می توانیم پایه های $\{v_۱, \dots, v_k\}$ را برای آن در نظر بگیریم، می توانیم این وکتور ها را با اضافه کردن بردار های $\{v_{k+۱}, \dots, v_n\}$ به یک پایه برای فضای R^n به دست آورد. حال تبدیل A را روی اعضای این فضا در نظر بگیرید، می دانیم با اعمال این تبدیل بر روی پایه ها به پایه ای برای فضای $Col(A)$ می رسیم که تعداد اعضایش برابر با $Dim(Range(A)) = ColRank(A)$ است.

$$\{v_۱, \dots, v_n\} \longrightarrow^A \{۰, \dots, v_{k+۱}, \dots, v_n\}$$

پس

$$ColRank(A) = n - k$$

$$Nullity(A) + ColRank(A) = k + (n - k) = n$$

قضیه ۴

اگر A یک ماتریس $m*n$ با رنک r باشد، پس:
$n-r$ جواب پایه به سیستم $Ax=0$ با استفاده از الگوریتم گاوسی، پایه هایی از $null(A)$ هستند، پس $dim(Null(A))=n-r$

اگر A یک ماتریس $m*n$ با رنک r باشد، پس تعداد جواب‌های پایه به سیستم $Ax=0$ برابر خواهد بود با $n-r$. این جواب‌های پایه با استفاده از الگوریتم گاوسی به دست می‌آیند و پایه‌های فضای $null(A)$ هستند. پس داریم:

$$dim(Null(A))=n-r$$

که در آن، $dim(Null(A))$ بیانگر بُعد فضای خنثی یا $null(A)$ است.

مثال ۵

$$Nullspace(A) =? A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, Ax = \begin{bmatrix} x_2 + x_3 + 2x_4 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} -2x_3 - x_4 \\ -x_3 - 2x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$nullity(A) = 2, colRank(A) = 2$ Nullspace(A)={$\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$}

قضیه ۵

(رنک یک ماتریس برابر است با رنک ترانهاده اش)
فرض کنید ماتریس A یک ماتریس $m*n$ است، پس $Colrank(A) = colrank(A^T)$

رنک ستونی ماتریس A برابر با تعداد پایه های $Colspace$ است، اگر $Colspace(A) = k$ باشد پس k برابر با تعداد سطر های مستقل در ماتریس ترانهاده اش است حال ماتریس A بعد از $rref, k$ ستون پیوت تشکیل می شود که این موضوع باعث می شود که تعداد پایه های $Colspace(A^T)$ برابر با k شود

قضیه ۶

$ColRank(A) = RowRank(A)$

در کل این برابر با رنک ماتریس است. ((rank(A))

فرض کنید A یک ماتریس $m * n$ باشد. می‌خواهیم نشان دهیم که رنک ستونی ماتریس A (که با $rank(A)$ نشان داده می‌شود) برابر است با رنک سطری ماتریس A (که با $rank(A^T)$ نشان داده می‌شود).

۱. فرض کنید $C_۱, C_۲, ..., C_r$ پایه‌ای برای فضای ستونی ماتریس A باشند. پس هر ستون از A می‌تواند به صورت ترکیب خطی از این پایه‌ها نوشته شود.

۲. حالا اگر سطری از A^T را در نظر بگیریم، در واقع یک ستون از A است که به صورت ترکیب خطی از $C_۱, C_۲, ..., C_r$ بدست می‌آید. پس هر سطر از A^T نیز می‌تواند به صورت ترکیب خطی از سطرهای $C_۱^T, C_۲^T, ..., C_r^T$ نوشته شود.

۳. بنابراین، $C_۱^T, C_۲^T, ..., C_r^T$ پایه‌ای برای فضای سطری ماتریس A^T هستند. پس $rank(A^T) = r$.

۴. از آنجا که $r = rank(A)$ بود، پس $rank(A) = rank(A^T)$.

بنابراین، رنک سطری یک ماتریس برابر است با رنک ستونی آن.