

Algumas Generalizações das Memórias Associativas Recorrentes por Correlação

Marcos Eduardo Ribeiro do Valle Mesquita

E-mail: valle@ime.unicamp.br

Resumo

Memórias associativas (AMs) são modelos matemáticos inspirados na capacidade do cérebro humano de armazenar e recordar por associação. Sobretudo, assim como o cérebro, AMs também são capazes de recordar um certo padrão mesmo quando a entrada representa uma versão incompleta ou ruidosa de um item armazenado. A classe das memórias associativas recorrentes por correlação (RCAMs), introduzidas por Chiueh e Goodman no início dos anos 1990, inclui modelos de AM como a famosa rede de Hopfield e a memória associativa exponencial por correlação. Muitas RCAMs apresentam uma grande capacidade de armazenamento e uma excelente tolerância a ruído. Contudo, as RCAMs são projetadas para o armazenamento e a recordação de padrões bipolares. Nesse projeto de pesquisa investigaremos generalizações das RCAMs para padrões com valores reais, complexos e multi-valores. O desempenho dos novos modelos serão avaliados, por exemplo, através de experimentos computacionais com imagens em tons de cinza e coloridas.

Palavras-chave: Inteligência computacional, memórias associativas, redes neurais artificiais, processamento de imagens e sinais, reconstrução e remoção de ruído.

Campinas, 10 de junho de 2013.

Some Generalizations of the Recurrent Correlation Associative Memories

Marcos Eduardo Ribeiro do Valle Mesquita

E-mail: valle@ime.unicamp.br

Abstract

Associative memories are mathematical models inspired by the human brain ability to store and recall information by association. Moreover, such as the brain, AMs are also able to recall a certain stored pattern even when the input represents an incomplete or noisy version of a stored item. The class of recurrent correlation associative memories (RCAMs), introduced by Chiueh and Goodman in the early 1990s, includes AM models such as the famous Hopfield network and the exponential correlation associative memory. Many RCAMs exhibit a high-storage capacity and an excellent noise tolerance. Notwithstanding, RCAMs are designed for the storage and recall of bipolar patterns. In this research project, we shall investigate generalizations of RCAMs for real-valued, complex-valued, and multi-valued patterns. The performance of the novel models will be evaluated by means of computational experiments with gray-scale and color images.

Key-words: Computational intelligence, associative memories, artificial neural networks, image and signal processing, reconstruction and noise removal.

Campinas, June 10, 2013.

1 Introdução Geral

Memórias associativas (AMs, *associative memories*) são modelos matemáticos inspirados na habilidade do cérebro humano de armazenar e recordar informações [8, 15]. Tais como as redes neurais biológicas, uma AM deve ser capaz de recuperar uma informação memorizada mesmo diante da apresentação de um item incompleto ou distorcido. Aplicações de AMs incluem classificação [28, 37], previsão [29, 30, 31, 27] e reconhecimento de padrões [35, 36].

Modelos de AMs têm sido investigados por inúmeros pesquisadores desde a metade do século passado [10]. Com efeito, pesquisas em AMs iniciaram com os trabalhos de Steinbuch sobre as memórias associativas matriciais [26]. Em 1972, Anderson, Kohonen e Nakano introduziram independentemente um modelo de memória associativa linear em que o armazenamento por correlação, também referido como aprendizado de Hebb, é usado para sintetizar a matriz dos pesos sinápticos [2, 14, 21]. A memória associativa linear ótima (OLAM, *optimal linear associative memory*), que representa a melhor memória associativa linear no sentido dos quadrados mínimos, é obtida substituindo o aprendizado de Hebb pelo armazenamento por projeção [16, 15]. Apesar da ótima capacidade absoluta de armazenamento no caso auto-associativo, a OLAM apresenta uma frágil tolerância a ruído pois corresponde a um modelo linear.

Em 1982, Hopfield introduziu um modelo de AM dinâmico não-linear para padrões bipolares [12]. A rede de Hopfield é implementada por uma rede neural recursiva de camada única constituída por neurônios de McCulloch e Pitts [10]. Ela possui muitas características atraentes incluindo: fácil implementação em *hardware*, caracterização em termos de uma função energia e uma variedade de aplicações [8, 9, 11, 18, 25]. Contudo, a rede de Hopfield apresenta uma baixa capacidade absoluta de armazenamento de aproximadamente $0.15n$ itens, em que n representa a dimensão dos padrões [19]. Com intuito de superar essa limitação, muitos pesquisadores desenvolveram modelos dinâmicos aperfeiçoados da rede de Hopfield. Em particular, um simples mas significativo melhoramento na capacidade de armazenamento da rede de Hopfield foi apresentado por Chiueh e Goodman no início dos anos 1990 com as memórias associativas recorrentes por correlação (RCAMs, *recurrent correlation associative memories*) [3, 4].

Em termos gerais, as RCAMs generalizam a rede de Hopfield adicionando uma camada de nós que computam uma medida de correlação entre o padrão de entrada e os itens armazenados. A função de ativação dos neurônios nessa camada caracterizam a RCAM. Por exemplo, a rede de Hopfield é obtida considerando a identidade como função de ativação. Sobretudo, a capacidade de armazenamento de uma RCAM aumenta exponencialmente com o número de padrões para algumas funções de ativação [3, 5]. Além da grande capacidade de armazenamento, as RCAMs apresentam excelentes tolerâncias a ruído [3, 33, 34]. E mais, as RCAMs estão relacionadas com alguns tipos de processos Bayesianos [7] bem como modelos de redes neurais baseadas no conceito de núcleo como o modelo de AM de Garcia e Moreno [23, 6].

Os modelos de AM discutidos nos dois parágrafos anteriores são todos projetados para o armazenamento de padrões bipolares. Porém, muitas aplicações, incluindo a restauração de imagens em tons de cinza e coloridas na presença de ruído, requerem o armazenamento e

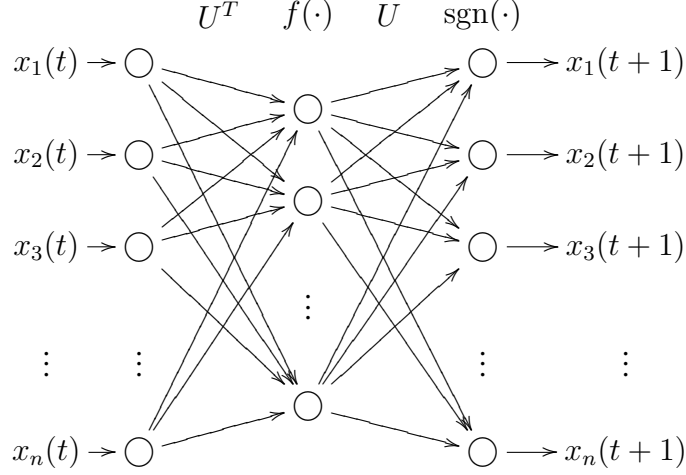


Figura 1: Topologia de uma RCAM bipolar.

recordação de padrões com valores reais, complexos ou multi-valores [22, 38, 20, 32]. Em vista dessa observação, nesse projeto de pesquisa investigaremos generalizações das RCAMs para outros tipos padrões além dos bipolares.

2 Identificação e Caracterização do Problema

2.1 Uma Breve Revisão das RCAMs Biplares

Uma RCAM bipolar é implementada pela rede neural recorrente de duas camadas totalmente conectada apresentada na Figura 1 [9, 3]. A primeira camada calcula um tipo de correlação entre o estado atual da rede e os padrões memorizados, seguida de uma função de ativação f , possivelmente não-linear, que enfatiza o campo local induzido. A segunda camada, composta de neurônios de McCulloch e Pitts, fornece o sinal de uma soma ponderada dos itens memorizados como próximo estado da RCAM.

Formalmente, seja $\mathbb{B} = \{-1, +1\}$ e considere um conjunto de padrões $\{\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \dots, \mathbf{u}^p\}$, em que cada $\mathbf{u}^\xi = [u_1^\xi, u_2^\xi, \dots, u_n^\xi]^T \subseteq \mathbb{B}^n$ é um vetor com n valores em \mathbb{B} . O conjunto $\{\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \dots, \mathbf{u}^p\} \in \mathbb{B}^n$ dos padrões que desejamos armazenar na AM é chamado conjunto das memórias fundamentais. Dado um padrão de entrada $\mathbf{x}(0) = [x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)]^T \in \mathbb{B}^n$, a RCAM define recursivamente a seguinte sequência de vetores bipolares de tamanho n para qualquer inteiro $t \geq 0$:

$$x_j(t+1) = \text{sgn} \left(\sum_{\xi=1}^p w_\xi(t) u_j^\xi \right), \quad \forall j = 0, 1, \dots, n, \quad (1)$$

em que os pesos dinâmicos $w_\xi(t)$ são dados pela seguinte equação para alguma função contínua

e monótona não-decrescente $f : [-n, n] \rightarrow \mathbb{R}$:

$$w_\xi(t) = f\left(\langle \mathbf{x}(t), \mathbf{u}^\xi \rangle\right), \quad \forall \xi = 1, \dots, p. \quad (2)$$

Lembre-se que, tal como a rede de Hopfield, a função sgn é avaliada em (1) da seguinte forma:

$$\text{sgn}(v_j(t)) = \begin{cases} +1, & v_j(t) > 0, \\ x_j(t), & v_j(t) = 0, \\ -1, & v_j(t) < 0, \end{cases} \quad (3)$$

em que $v_j(t) = \sum_{\xi=1}^p w_\xi(t) u_j^\xi$ é o potencial de ativação do j -ésimo neurônio de saída na iteração t . Alternativamente, (1) pode ser escrita como segue usando uma notação matricial:

$$\mathbf{x}(t+1) = \text{sgn}(U \mathbf{w}(t)), \quad \mathbf{w}(t) = f(U^T \mathbf{x}(t)), \quad (4)$$

em que $U = [\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^p] \in \mathbb{B}^{n \times p}$ é a matriz cujas colunas corresponde as memórias fundamentais, U^T representa a transposta de U e ambas sgn e f são avaliadas componente-a-componente. É importante observar que (1) produz uma sequência convergente $\{\mathbf{x}(t)\}_{t=0}^\infty$ [3]. Neste caso, o padrão \mathbf{y} recordado pela RCAM corresponde ao limite de $\{\mathbf{x}(t)\}_{t=0}^\infty$, i.e., $\mathbf{y} = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t)$.

Exemplo 1. A famosa rede de Hopfield, com a pequena diferença de que a diagonal da matriz dos pesos sinápticos não é zerada, é uma RCAM com $f_c(x) = x/n$ em (2). De fato, dado um conjunto de memórias fundamentais $\{\mathbf{u}^\xi : \xi = 1, \dots, p\} \subseteq \mathbb{B}^n$ e um padrão de entrada $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{B}^n$, a rede de Hopfield é descrita pela equação recorrente

$$x_j(t+1) = \text{sgn}\left(\sum_{k=1}^n m_{jk} x_k(t)\right), \quad \forall j = 0, 1, \dots, n, \quad (5)$$

em que a matriz dos pesos sinápticos $M = (m_{jk}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é determinada como segue usando o armazenamento por correlação [12, 8, 9]:

$$m_{jk} = \frac{1}{n} \sum_{\xi=1}^p u_j^\xi u_k^\xi, \quad \forall j, k = 1, \dots, n. \quad (6)$$

Combinando as equações (5) e (6), obtem-se (1) e (2) com $f_c(x) = x/n$.

Exemplo 2. A memória associativa exponencial por correlação (ECAM, exponential correlation associative memory) é obtida quando f é função exponencial, ou seja,

$$f_e(x) = e^{\alpha x/n}, \quad \alpha > 0. \quad (7)$$

De acordo com Chiueh e Goodman, a ECAM é uma das RCAMs mais apropriadas para implementação usando tecnologia VLSI (*very-large-scale-integrated*) [3]. Além disso, a capacidade de armazenamento e a tolerância a ruído deste modelo de AM tem sido extensivamente estudado

na literatura [3, 33, 34]. Em particular, Chiueh e Goodman mostraram que a capacidade de armazenamento da ECAM escala exponencialmente com n , a dimensão dos padrões armazenados [3]. Em outras palavras, a ECAM pode armazenar c^n padrões bipolares de tamanho n , em que a constante $c > 1$ depende do coeficiente α da função exponencial e de um parâmetro adicional ρ relacionado a tolerância esperada a ruído da memória. Sobretudo, a capacidade absoluta de armazenamento desse modelo aproxima o limite máximo de uma AM para padrões bipolares quando α tende para $+\infty$.

Exemplo 3. A classe das RCAMs também inclui a memória associativa de ordem alta por correlação (HOCAM, *high-order correlation associative memory*) e a memória associativa com função-potencial por correlação (PFCAM, *potential-function correlation associative memory*) [3, 4, 5, 24]. Esses modelos são obtidos considerando em (2) as funções $f_h(x) = (1 + x/n)^q$, $q > 1$ é um inteiro, e $f_p(x) = 1/(1 - x/n)^L$, $L \geq 1$, respectivamente. Tal como a ECAM, a capacidade de armazenamento da PFCAM também escala exponencialmente com o tamanho n dos padrões armazenados [5]. A HOCAM apresenta uma capacidade de armazenamento polinomial [24].

As próximas duas subseções ilustram como será desenvolvido esse projeto de pesquisa. Especificamente, a Subseção 2.2 apresenta uma generalização das RCAMs bipolares usando números complexos enquanto que a Subseção 2.3 contém experimentos computacionais preliminares com imagens em tons de cinza.

2.2 Uma Proposta de Generalização das RCAMs

Pesquisas em redes neurais usando números complexos iniciaram nos anos 1970 [1] mas, em nossa opinião, as primeiras contribuições significativas em modelos de AM usando complexos surgiram apenas 20 anos depois. Com efeito, em 1996, Jankowski et al. generalizaram a rede de Hopfield usando números complexos no círculo unitário [13]. Para tanto, a função sinal-complexa foi usada no lugar da função sinal. Porém, tal como a rede de Hopfield, o modelo de Jankowski et al. também apresenta uma limitada capacidade de armazenamento [20, 17]. Alguns melhoramentos do modelo de Jankowski et al. foram apresentados, por exemplo, por Lee [17] e Tanaka e Aihara [32].

Neste projeto de pesquisa propomos, entre outras coisas, as memórias associativas recorrentes por correlação complexas (CVRCAMs, *complex-valued recurrent correlation associative memories*). As CVRCAMs podem ser vistas tanto como uma generalização do modelo de Jankowski et al. como uma extensão das RCAMs usando números complexos.

Uma CVRCAM também é implementada por uma rede neural recorrente de duas camadas totalmente conectadas similar a topologia apresentada na Figura 1. A primeira camada calcula a parte real da correlação entre o estado atual e as memórias fundamentais seguida de uma função f possivelmente não-linear. A segunda camada aplica uma generalização da função sinal numa soma ponderada dos padrões armazenados. Em termos matemáticos, seja $\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ o conjunto dos números complexos no círculo unitário. Suponha que é dado um conjunto de

memórias fundamentais $\{\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^p\} \subseteq \mathbb{S}^n$ e uma função contínua monótona não-decrescente $f : [-n, n] \rightarrow \mathbb{R}$. Dado um padrão de entrada $\mathbf{z}(0) = [z_1(0), \dots, z_n(0)]^T \in \mathbb{S}^n$, uma CVRCAM define recursivamente a seguinte sequência para $t \geq 0$:

$$z_j(t+1) = \sigma \left(\sum_{\xi=1}^p w_\xi(t) u_j^\xi \right), \quad \forall j = 0, 1, \dots, n, \quad (8)$$

em que os pesos $w_1(t), \dots, w_p(t)$ são dados por

$$w_\xi(t) = f \left(\Re \{ \langle \mathbf{u}^\xi, \mathbf{z}(t) \rangle \} \right), \quad \forall \xi = 1, \dots, p. \quad (9)$$

Aqui, $\Re\{z\}$ denota a parte real do número complexo z e a função $\sigma : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{S}$ generaliza a função sinal como segue com $v_j(t) = \sum_{\xi=1}^p w_\xi(t) u_j^\xi$ representando o potencial de ativação do j -ésimo neurônio na iteração t :

$$\sigma(v_j(t)) = \begin{cases} v_j(t)/|v_j(t)|, & v_j(t) \neq 0, \\ z_j(t), & v_j(t) = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Em notação matricial, (8) é escrita como

$$\mathbf{z}(t+1) = \sigma(U\mathbf{w}(t)), \quad \mathbf{w}(t) = f(\Re\{U^*\mathbf{z}(t)\}), \quad (11)$$

em que $U = [\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^p] \in \mathbb{S}^{n \times p}$ é uma matriz complexa cujas colunas são as memórias fundamentais, U^* denota a transposta conjugada de U e as funções f , σ e $\Re\{\cdot\}$ são avaliadas componente-a-componente.

Nesse projeto de pesquisa investigaremos esta e outras generalizações das RCAMs, por exemplo, usando números hiper-complexos. Estudaremos também aspectos teóricos e práticos dos novos modelos. Do ponto de vista teórico, por exemplo, analisaremos a convergência da sequência definida em (11) usando o conceito de “função energia”. Do ponto de vista prático, realizaremos experimentos computacionais. A seguinte subseção apresenta um experimento computacional preliminar com respeito a reconstrução de imagens em tons de cinza usando as CVRCAMs.

2.3 Experimento Computacional com Imagens em Tons de Cinza

Considere as oito imagens em tons de cinza mostradas na Figura 2. Estas imagens possuem dimensão 128×128 e $K = 256$ tons de cinza. Para cada uma dessas imagens, geramos um vetor coluna fazendo uma leitura por linhas da imagem e aplicamos a função $r_K : [0, K) \rightarrow \mathbb{S}$ dada por

$$r_K(x) = e^{2\pi i x/K}, \quad (12)$$

em cada componente para obter vetores $\mathbf{u}^\xi \in \mathbb{S}^{16384}$, $\xi = 1, \dots, 8$, com valores no círculo complexo unitário.



Figura 2: Imagens originais em tons de cinza.

Primeiramente, sintetizamos duas CVRCAMs para armazenar os oito padrões $\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^8$ usando as funções exponencial $f_e(x) = e^{\alpha x/n}$ e potencial $f_p(x) = 1/(1 - x/n)^L$ com os parâmetros $\alpha = 10$ e $L = 5$, respectivamente. Apresentando os padrões originais como entrada obtemos as próprias imagens originais com uma única iteração de (11). Em outras palavras, ambas CVRCAMs foram capazes de armazenar corretamente as oito imagens do conjunto das memórias fundamentais.

Posteriormente, avaliamos a tolerância das duas CVRCAMs com respeito aos ruídos Gaussiano e sal-e-pimenta. As Figuras 3 e 4 apresentam imagens corrompidas seguidas de uma interpretação visual das imagens recordadas pelas duas CVRCAMs. Para efeito de comparação, essas duas figuras também apresentam as imagens recordadas pelas AMs: memória associativa linear ótima (OLAM, *optimal linear associative memory*) de Kohonen e Ruohonen [15, 16], memória associativa com núcleo (KAM, *kernel associative memory*) de Zhang et al. [35] e a memória associativa dinâmica complexa (CVDAM, *complex-valued dynamic associative memory*) de Tanaka e Aihara [32]. Observe que a CVDAM não foi capaz de restaurar a imagem “airplane” corrompida com ruído Gaussiano. A KAM forneceu imagens mais claras que as imagens originais na Figura 2. Além disso, obtivemos uma imagem totalmente preta quando uma imagem corrompida com ruído Gaussiano com variância $\sigma > 0.3$ foi apresentada para a KAM. Em contraste, as CVRCAMs produziram imagens visualmente similares as imagens originais mesmo na presença de ruídos densos. Esses resultados revelam parte do potencial dos novos modelos de AMs que serão investigados nesse projeto de pesquisa.

3 Objetivos, Plano de Trabalho e Cronograma

Nesse projeto de pesquisa estudaremos melhor propriedades teóricas e computacionais das CVRCAMs e também proporemos outras generalizações das RCAMs. Em particular, serão executadas as seguintes atividades:

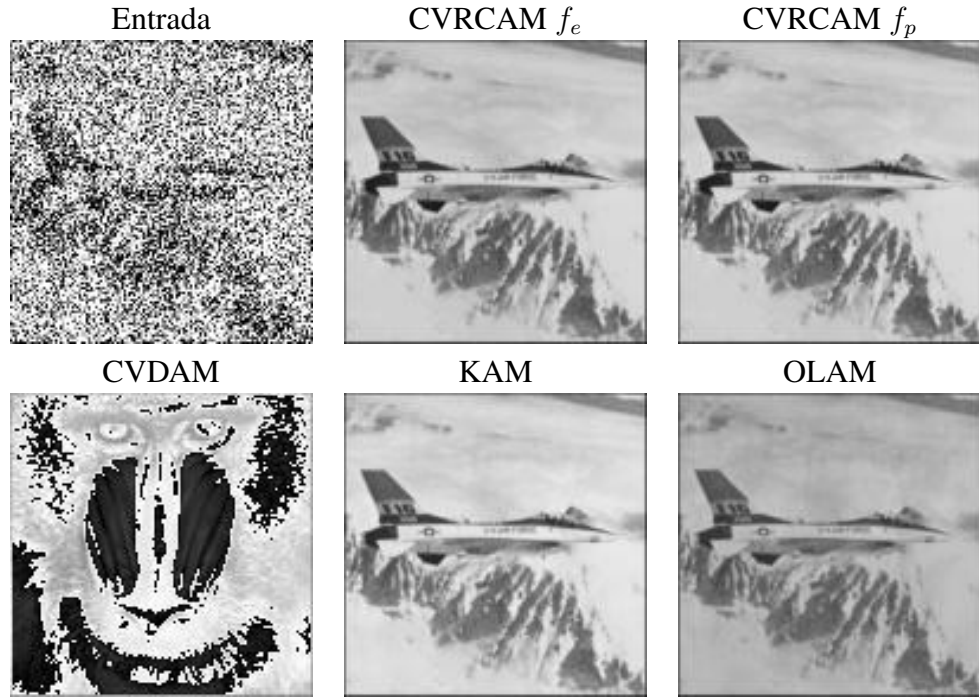


Figura 3: Imagem corrompida com ruído Gaussiano com variância $\sigma = 0.25$ seguida pelas imagens recordadas pelas AMs.

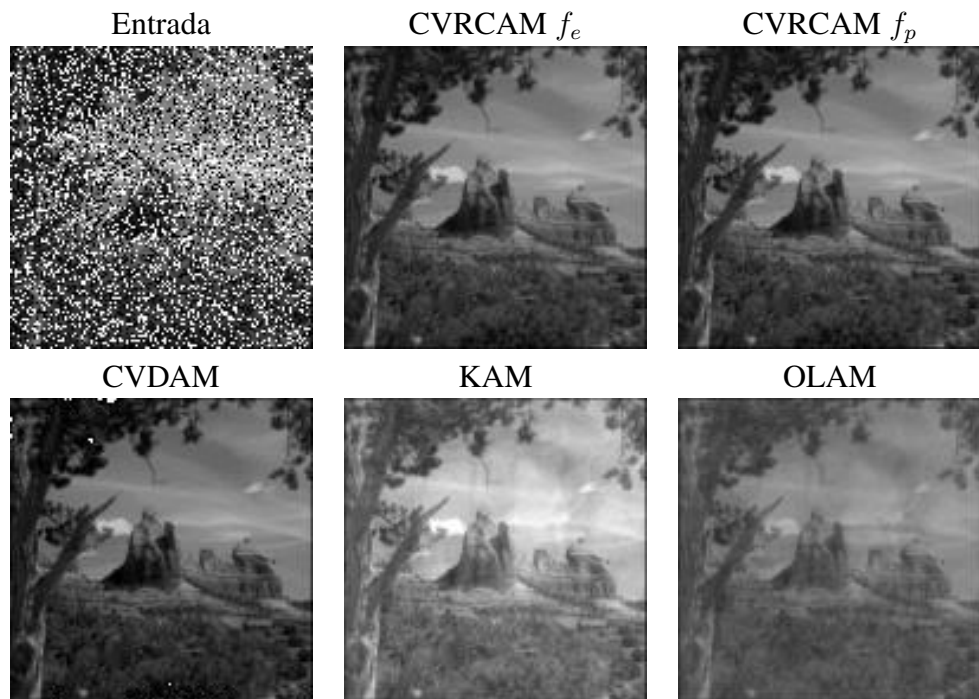


Figura 4: Imagem corrompida com ruído sal-e-pimenta com probabilidade 0.4 e as imagens recordadas correspondentes.

1. *Atividade 1 – Revisão Bibliográfica:*

Existe na literatura muitos trabalhos sobre redes neurais artificiais usando números complexos e hiper-complexos. No primeiro semestre faremos uma extensa revisão bibliográfica atualizada de generalizações de rede neurais artificiais usando números complexos, hyper-complexos, etc. Para efeito de comparação, também faremos uma revisão bibliográfica de modelos de memórias associativas para imagens em tons de cinza e multi-valores tais como imagens coloridas. Esses modelos serão implementados em softwares matemáticos como GNU Octave e MATLAB.

2. *Atividade 2 – Memórias Associativas Recorrentes por Correlação Complexas:*

No segundo semestre investigaremos propriedades teóricas e computacionais das memórias associativas recorrentes por correlação complexas (CVRCAMs) apresentadas brevemente na Subseção 2.2. Em particular, apresentaremos resultados sobre a convergência desses modelos e realizaremos experimentos computacionais para avaliar melhor capacidade de armazenamento e tolerância a ruído desses modelos.

3. *Atividade 3 – Desenvolvimento de outras generalizações das RCAMs:*

No terceiro semestre estudaremos outras generalizações das CVRCAMs. Por exemplo, investigaremos modelos obtidos usando números hiper-complexos. Tal como nas CVRCAMs, resultados teóricos e computacionais com respeito a convergência, capacidade de armazenamento e tolerância a ruído serão investigados. Os modelos desenvolvidos nessa etapa serão aplicados, por exemplo, na reconstrução de imagens coloridas.

As três atividades listadas acima seguirão o seguinte cronograma:

Out/2013 a Mar/2014	Abr/2014 a Set/2014	Out/2014 a Set/2015
Atividade 1	Atividade 2	Atividade 3

Durante todas as atividades, pretende-se divulgar os resultados obtidos em eventos científicos da área bem como envolver alunos de graduação e pós-graduação nessa área de pesquisa. Também serão redigidos artigos científicos que serão submetidos para revistas conceituadas, preferencialmente de circulação internacional.

4 Contribuições e Resultados Esperados

Nesse projeto de pesquisa investigaremos generalizações das memórias associativas recorrentes por correlações usando números complexos e hiper-complexos, dentre outras generalizações. Conforme mencionado no primeiro parágrafo da introdução, modelos de memória associativa foram usados com sucesso em problemas de classificação, previsão e reconhecimento de padrões. Portanto, esse projeto de pesquisa deve contribuir nessas aplicações. Contudo, nos concentraremos principalmente nas aplicações relacionadas à reconstrução de imagens em tons de cinza e coloridas.

É importante ressaltar que os todos resultados desenvolvidos terão forte fundamento matemático. Sobretudo, os resultados desenvolvidos nesse projeto de pesquisa serão submetidos na forma de artigo para um periódico de circulação internacional como *IEEE Transactions on Neural Networks*, *Neural Networks*, *Neurocomputing*, dentre outros similares.

5 Orçamento Solicitado e Justificativa

Para execução do projeto de pesquisa, serão solicitados, além da reserva técnica e dos benefícios complementares, os seguintes itens:

a) Três Computador de 3º Geração	$3 \times 2.857,00 =$	R\$ 8.571,00
• Processador Intel i7 ou similar, HD 1TB, 8GB RAM		R\$ 1.859,00
• Monitor 21.5”		R\$ 479,00
• Nobreak (pelo menos 1200VA)		R\$ 519,00
b) Notebook/Ultrabook		R\$ 2.599,00
(Processador i5, pelo menos 320GB de HD e 4MB RAM)		
c) HD Externo (1TB)		R\$ 349,00
TOTAL		R\$ 11.519,00

Um dos computadores *desktop* será utilizado pelo proponente enquanto que os outros dois ficarão disponíveis para os alunos de graduação e/ou pós-graduação em laboratórios do IMECC, por exemplo, no MiLab (Mathematical Imaging and Computational Intelligence Laboratory). Os experimentos computacionais serão realizados nos dois computadores solicitados. O notebook será utilizado principalmente para redigir trabalhos científicos e durante a participação eventos. O HD externo será utilizado para manter uma cópia de segurança dos arquivos digitais.

Referências

- [1] AIZENBERG, N. N., IVASKIV, Y. L., AND POSPELOV, D. A. A certain generalization of threshold functions. *Doklady Akademii Nauk SSSR* 196 (1971), 1287–1290.
- [2] ANDERSON, J. A simple neural network generating interactive memory. *Mathematical Biosciences* 14 (1972), 197–220.
- [3] CHIUEH, T., AND GOODMAN, R. Recurrent correlation associative memories. *IEEE Trans. on Neural Networks* 2 (Feb. 1991), 275–284.
- [4] CHIUEH, T., AND GOODMAN, R. *Recurrent Correlation Associative Memories and their VLSI Implementation*. In Hassoun [8], 1993, ch. 16, pp. 276–287.

- [5] DEMBO, A., AND ZEITOUNI, O. General potential surfaces and neural networks. *Physical Review A* 37, 6 (1988), 2134–2143.
- [6] GARCÍA, C., AND MORENO, J. A. The hopfield associative memory network: Improving performance with the kernel “trick”. In *Lecture Notes in Artificial Intelligence - Proceedings of IBERAMIA 2004*, vol. 3315 of *Advances in Artificial Intelligence – IBERAMIA 2004*. Springer-Verlag, 2004, pp. 871–880.
- [7] HANCOCK, E. R., AND PELILLO, M. A bayesian interpretation for the exponential correlation associative memory. *Pattern Recognition Letters* 19, 2 (Feb. 1998), 149–159.
- [8] HASSOUN, M. H., Ed. *Associative Neural Memories: Theory and Implementation*. Oxford University Press, Oxford, U.K., 1993.
- [9] HASSOUN, M. H. *Fundamentals of Artificial Neural Networks*. MIT Press, Cambridge, MA, 1995.
- [10] HAYKIN, S. *Neural Networks and Learning Machines*, 3rd edition ed. Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 2009.
- [11] HOPFIELD, J., AND TANK, D. Neural computation of decisions in optimization problems. *Biological Cybernetics* 52 (1985), 141–152.
- [12] HOPFIELD, J. J. Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities. *Proceedings of the National Academy of Sciences* 79 (Apr. 1982), 2554–2558.
- [13] JANKOWSKI, S., LOZOWSKI, A., AND ZURADA, J. Complex-valued multi-state neural associative memory. *IEEE Transactions on Neural Networks* 7 (1996), 1491–1496.
- [14] KOHONEN, T. Correlation matrix memory. *IEEE Transactions on Computers* C-21 (1972), 353–359.
- [15] KOHONEN, T. *Self-organization and associative memory*, 3rd edition ed. Springer-Verlag New York, Inc., New York, NY, USA, 1989.
- [16] KOHONEN, T., AND RUOHONEN, M. Representation of associated data by computers. *IEEE Transactions on Computers* C-22 (1973), 701–702.
- [17] LEE, D.-L. Improvements of complex-valued hopfield associative memory by using generalized projection rules. *IEEE Transactions on Neural Networks* 17, 5 (September 2006), 1341–1347.
- [18] LIU, Q., AND WANG, J. A one-layer recurrent neural network for constrained nonsmooth optimization. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B* 41, 5 (Oct. 2011), 1323–1333.

- [19] MCELIECE, R. J., POSNER, E. C., RODEMICH, E. R., AND VENKATESH, S. The capacity of the Hopfield associative memory. *IEEE Transactions on Information Theory* 1 (1987), 33–45.
- [20] MÜEZZINOĞLU, M., GÜZELİŞ, C., AND ZURADA, J. A new design method for the complex-valued multistate Hopfield associative memory. *IEEE Transactions on Neural Networks* 14, 4 (July 2003), 891–899.
- [21] NAKANO, K. Associatron: A model of associative memory. *IEEE Trans. on Systems, Man, Cybernetics SMC-2* (1972), 380–388.
- [22] OH, C., AND ZAK, S. H. Image recall using a large scale generalized Brain-State-in-a-Box neural network. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science* 15, 1 (Mar. 2005), 99–114.
- [23] PERFETTI, R., AND RICCI, E. Recurrent correlation associative memories: A feature space perspective. *IEEE Transactions on Neural Networks* 19, 2 (Feb. 2008), 333–345.
- [24] PSALTIS, D., AND PARK, C. H. *Nonlinear Discriminant Functions and Associative Memories*, vol. 22D of *Physica*. 1986, pp. 370–375.
- [25] SMITH, K., PALANISWAMI, M., AND KRISHNAMOORTHY, M. Neural techniques for combinatorial optimization with applications. *IEEE Transactions on Neural Networks* 9, 6 (Nov. 1998), 1301–1318.
- [26] STEINBRUCH, K. Die lernmatrix. *Kybernetick 1* (1961), 36–45.
- [27] SUSSNER, P., MIYASAKI, R., AND VALLE, M. E. An introduction to parameterized IFAM models with applications in prediction. In *Proceedings of the 2009 IFSA World Congress and 2009 EUSFLAT Conference* (Lisbon, Portugal, July 2009), pp. 247–252.
- [28] SUSSNER, P., AND VALLE, M. E. Grayscale morphological associative memories. *IEEE Transactions on Neural Networks* 17, 3 (May 2006), 559–570.
- [29] SUSSNER, P., AND VALLE, M. E. Implicative fuzzy associative memories. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 14, 6 (2006), 793–807.
- [30] SUSSNER, P., AND VALLE, M. E. Recall of patterns using morphological and certain fuzzy morphological associative memories. In *Proceedings of the IEEE World Conference on Computational Intelligence 2006* (Vancouver, Canada, 2006), pp. 209–216.
- [31] SUSSNER, P., AND VALLE, M. E. Morphological and certain fuzzy morphological associative memories for classification and prediction. In *Computational Intelligence Based on Lattice Theory*, V. Kambhampati and G. Ritter, Eds. Springer-Verlag, Heidelberg, Germany, 2007, ch. 8, pp. 149–172.

- [32] TANAKA, G., AND AIHARA, K. Complex-valued multistate associative memory with nonlinear multilevel functions for gray-level image reconstruction. *IEEE Transactions on Neural Networks* 20, 9 (Sept. 2009), 1463–1473.
- [33] WILSON, R. C., AND HANCOCK, E. R. Storage capacity of the exponential correlation associative memory. *Neural Processing Letters* 13, 1 (Feb. 2001), 71–80.
- [34] WILSON, R. C., AND HANCOCK, E. R. A study of pattern recovery in recurrent correlation associative memories. *IEEE Transactions on Neural Networks* 14, 3 (May 2003), 506–519.
- [35] ZHANG, B.-L., ZHANG, H., AND GE, S. S. Face recognition by applying wavelet sub-band representation and kernel associative memory. *IEEE Transactions on Neural Networks* 15, 1 (Jan. 2004), 166–177.
- [36] ZHANG, D., AND ZUO, W. Computational intelligence-based biometric technologies. *IEEE Computational Intelligence Magazine* 2, 2 (May 2007), 26–36.
- [37] ZHANG, H., HUANG, W., HUANG, Z., AND ZHANG, B. A kernel autoassociator approach to pattern classification. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part B* 35, 3 (June 2005), 593–606.
- [38] ZURADA, J., CLOETE, I., AND VAN DER POEL, E. Generalized Hopfield networks for associative memories with multi-valued stable states. *Neurocomputing* 13 (1996), 135–149.