Фейзуллин К.

Оглавление

1) Метод детерминированного эквивалента для решения вероятностных задач оптимизации.

Ю. С. Кан, А. И. Кибзун Задачи Стохастического Программированияс Вероятностными Критериями – стр. 207

Метод детерминированного эквивалента исторически является первым инструментом решения вероятностных оптимизационных задач.

Одним из наиболее эффективных методов решения вероятностных задач является получение для них детерминированных эквивалентов, не зависящих от случайных величин и позволяющих свести исходную задачу стохастического программирования к эквивалентной ей, но детерминированной. Иначе говоря, детерминированные эквиваленты удобны тем, что для решения детерминированных задач, эквивалентных исходным стохастическим, можно использовать стандартные методы математического программирования [84]. Первые детермииро-

Рассмотрим три классические задачи стохастического программирования:

задача максимизации функции вероятности

$$P_\varphi(u) \to \max_{u \in U}; \tag{4.1}$$

задача минимизации функции квантили

$$\varphi_\alpha(u) \to \min_{u \in U}; \tag{4.2}$$

задача с вероятностным ограничением

$$\Phi_0(u) \to \min_{u \in U}, \tag{4.3}$$

$$P_\varphi(u) \geqslant \alpha,$$

где $\Phi_0(u)$ — детерминированная функция.

В данных постановках не уточняется, существует оптимальная стратегия или нет. В последнем случае под решением задачи понимается оптимизирующая последовательность стратегий.

1.1. Случай билинейной функции потерь и сферически симметричного распределения. Вначале рассмотрим случай, когда функция потерь имеет билинейную структуру:

$$\Phi(u, X) = r[u^T(AX + c)], \tag{4.4}$$

где A — некоторая $(m \times n)$-матрица, c — фиксированный вектор размерности m, $r(\cdot) : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ — строго возрастающая непрерывная слева функция, определенная на всей числовой оси. Пусть распределение случайного вектора X сферически симметрично, т.е. его плотность можно представить в виде

$$p_X(x) \overset{\Delta}{=} f(\|x\|^2) = f(x^T x), \tag{4.5}$$

где функция $f(t)$ определена для $t \in [0, \infty)$, неотрицательна и интегрируема по Лебегу.

В следующем утверждении используется обозначение $r^{-1}(\varphi)$, под которым понимается единственный обобщенный корень уравнения $r(s) = \varphi$ относительно s в смысле определения 2.2 § 2 гл. 2. В дальнейшем функцию $r^{-1}(\varphi)$ будем называть обобщенной обратной.

Определение 2.2. *Обобщенным корнем* уравнения $f(x) = 0$ называется точка x_0, удовлетворяющая для любого $\varepsilon > 0$ условию

$$f(x_0 - \varepsilon) \leqslant 0 \leqslant f(x_0 + \varepsilon). \tag{2.15}$$

Обобщенный корень называется *единственным*, если оба неравенства в (2.15) строгие.

Теорема 4.1. *Пусть функция потерь имеет вид* (4.4), *где* $\|A^T u\| > 0$, *а распределение вектора* X *имеет вид* (4.5).

Тогда

(а) *функция вероятности*

$$P_\varphi(u) = F_1\left(\frac{r^{-1}(\varphi) - u^T c}{\|A^T u\|}\right), \tag{4.6}$$

где $F_1(\cdot)$ — *функция распределения первой компоненты вектора* X;

(б) *ограничение* $P_\varphi(u) \geqslant \alpha$ *эквивалентно неравенству*

$$r^{-1}(\varphi) - u^T c \geqslant \|A^T u\| x_{1_\alpha}, \tag{4.7}$$

где x_{1_α} — *квантиль первой компоненты вектора* X *уровня* α;

(в) *функция квантили имеет вид*

$$\varphi_\alpha(u) = r\left(\|A^T u\| x_{1_\alpha} + u^T c\right). \tag{4.8}$$

На основании теоремы 4.1 сформулируем детерминированные эквиваленты исследуемых задач стохастического программирования. Задача (4.1) преобразуется к виду

$$P_\varphi(u) = F_1\left(\frac{r^{-1}(\varphi) - u^T c}{\|A^T u\|}\right) \to \max_{u \in U}. \tag{4.22}$$

Для получения детерминированного эквивалента рассмотрим следующее утверждение.

Лемма 4.1. *Пусть функция* $f(t) : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ *строго возрастает по* t *и определена для всех* $t \in \mathbb{R}^1$, *функция* $g(u) : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^1$ *произвольная. Тогда задача*

$$f(g(u)) \to \max_{u \in U} \tag{4.23}$$

по поиску оптимальной стратегии эквивалентна задаче

$$g(u) \to \max_{u \in U}. \tag{4.24}$$

Если функция распределения $F_1(\cdot)$ строго возрастающая, т.е. не имеет площадок, то в силу леммы 4.1 задача (4.22) будет эквивалента следующей:

$$G(u) \triangleq \frac{r^{-1}(\varphi) - u^T c}{\|A^T u\|} \to \max_{u \in U}. \tag{4.25}$$

Если все компоненты вектора X не имеют строго возрастающих функций распределения, то задачи (4.22) и (4.25) не будут эквивалентны в общем случае, но оптимальная стратегия u_0 в задаче (4.25) будет также оптимальной и в задаче (4.22).

Согласно теореме 4.1 задача (4.2) примет вид

$$\varphi_\alpha(u) = r\left(\|A^T u\| x_{1_\alpha} + u^T \mathrm{c}\right) \to \min_{u \in U}. \tag{4.26}$$

Так как функция $r(t)$ по предположению строго возрастает по t и определена для всех $t \in \mathbb{R}^1$, то по лемме 4.1 задача (4.26) эквивалентна следующей:

$$H(u) \triangleq \|A^T u\| x_{1_\alpha} + u^T c \to \min_{u \in U}. \tag{4.27}$$

Задача с вероятностным ограничением (4.3) примет вид

$$\Phi_0(u) \to \max_{u \in U}, \tag{4.28}$$

$$r^{-1}(\varphi) - u^T c \geqslant \|A^T u\| x_{1_\alpha}.$$

1.2. Случай функции потерь, возрастающей по стратегии. Рассмотрим случай, когда функция потерь имеет следующий вид:

$$\Phi(u, x) = r(s(u), X), \tag{4.31}$$

где $s(\cdot) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^1$, а $r(s, x) : \mathbb{R}^1 \mathrm{x} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ — строго возрастающая, непрерывная слева по $s \in \mathbb{R}^1$ для любых $x \in \mathbb{R}^n$.

Теорема 4.2. *Пусть функция потерь имеет вид* (4.31). *Тогда*

(а) *функция вероятности*

$$P_\varphi(u) = \mathbf{P}\{-r_s^{-1}(\varphi, X) \leqslant -s(u)\}, \tag{4.32}$$

где $r_s^{-1}(\cdot)$ *— обобщенная обратная функция к* $r(\cdot)$ *по переменной* s;

(б) *ограничение* $P_\varphi(u) \geqslant \alpha$ *будет эквивалентно следующему:*

$$\overline{r}_\alpha(\varphi) \leqslant -s(u), \tag{4.33}$$

где $\overline{r}_\alpha(\varphi) \triangleq \min\{\psi : \mathbf{P}\{-r_s^{-1}(\varphi, X) \leqslant \psi)\} \geqslant \alpha\}$;

(в) *функция квантили*

$$\varphi_\alpha(u) = \min\{\varphi : \overline{r}_\alpha(\varphi) \leqslant -s(u)\}. \tag{4.34}$$

На основании теоремы 4.2 сформулируем детерминированные эквиваленты для задач (4.1), (4.2) и (4.3). Постановка (4.1) примет вид

$$P_\varphi(u) = \mathbf{P}\{-r_s^{-1}(\varphi, X) \leqslant -s(u)\} \to \max_{u \in U}. \tag{4.39}$$

Если функция $\overline{P}_\psi(\varphi) \triangleq \mathbf{P}\{-r_s^{-1}(\varphi, X) \leqslant \psi\}$ строго возрастает по ψ, то согласно лемме 4.1 задача (4.39) будет эквивалентна задаче (4.40):

$$s(u) \to \min_{u \in U}. \tag{4.40}$$

В противном случае каждое решение задачи (4.40) будет и решением задачи (4.39).

Несложно заметить, что поиск решения задачи (4.39) полностью зависит от свойств функции $s(u)$.

Постановка (4.2) с целевой функцией (4.31) примет вид

$$\varphi_\alpha(u) = \min\{\varphi : \overline{r}_\alpha(\varphi) \leqslant -s(u)\} \to \min_{u \in U}. \tag{4.41}$$

Если функция $\overline{\varphi}_\alpha(\psi) \triangleq \min\{\varphi : \overline{r}_\alpha(\varphi) \leqslant \psi\}$ строго возрастает по ψ, то согласно лемме 4.1 эта задача будет эквивалентна (4.40). В противном случае каждое решение задачи (4.40) будет являться и решением задачи (4.41).

Задача с вероятностным ограничением (4.3) в силу п. **(б)** теоремы 4.2 примет вид

$$\Phi_0(u) \to \max_{u \in U}, \tag{4.42}$$

$$\overline{r}_\alpha(\varphi) \leqslant -s(u).$$

Теорема 4.3. *Пусть выполнены условия теоремы 4.2, U выпукло, а функция $s(u)$ квазивыпукла по $u \in U$. Тогда функция вероятности $P_\varphi(u)$ квазивогнута на U, а $\varphi_\alpha(u)$ квазивыпукла на U.*

Пример 4.1. Пусть $r(s, x) = s\varphi_1(x) + \varphi_2(x)$, где $\varphi_1(x) > 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^n, s \in \mathbb{R}^1$. Легко проверить, что выполнены все условия теоремы 4.2. При этом обратная функция в (4.32) будет равна

$$r_s^{-1}(\varphi, x) = \frac{\varphi - \varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}.$$

1.3. Случай функции потерь, возрастающей относительно случайного вектора. Рассмотрим случай, когда функция потерь имеет следующий вид:

$$\Phi(u, x) = r(u, t(X)), \tag{4.46}$$

где $t(\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ — некоторая измеримая функция, $r(u,t) : \mathbb{R}^m \times \times \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ строго возрастающая и непрерывная слева по $t \in \mathbb{R}^1$ для любых $u \in \mathbb{R}^m$.

Теорема 4.4. *Пусть функция потерь имеет вид* (4.46). *Тогда*

(а) *функция вероятности*

$$P_\varphi(u) = \mathbf{P}\left\{t(X) \leqslant r_t^{-1}(u, \varphi)\right\}, \tag{4.47}$$

где $r_t^{-1}(\cdot)$ — *обратная функция к* $r(\cdot)$ *по переменной* t;

(б) *ограничение* $P_\varphi(u) \geqslant \alpha$ *будет эквивалентно неравенству*

$$r(u, t_\alpha) \leqslant \varphi, \tag{4.48}$$

где $t_\alpha \triangleq \min\{s : \mathbf{P}\{t(X) \leqslant s\} \geqslant \alpha\}$;

(в) *функция квантили*

$$\varphi_\alpha(u) = r(u, t_\alpha). \tag{4.49}$$

На основании теоремы 4.4 сформулируем детерминированные эквиваленты задач (4.1), (4.2) и (4.3). Постановка (4.1) примет вид

$$P_\varphi(u) = \mathbf{P}\left\{t(X) \leqslant r_t^{-1}(u, \varphi)\right\} \to \max_{u \in U}. \tag{4.54}$$

В силу того что

$$\mathbf{P}\left\{t(X) \leqslant r_t^{-1}(u, \varphi)\right\} = F_T(r_t^{-1}(u, \varphi)),$$

где $F_T(\cdot)$ — функция распределения случайной величины $T \triangleq t(X)$, получим из (4.54) задачу

$$F_T(r_t^{-1}(u, \varphi)) \to \max_{u \in U}. \tag{4.55}$$

Согласно лемме 4.1, если $F_T(t)$ строго возрастает по t, то задача (4.55) будет эквивалентна по стратегиям задаче

$$r_t^{-1}(u, \varphi) \to \max_{u \in U}. \tag{4.56}$$

В частности, согласно [135], если существует плотность у случайного вектора X, носитель A которой есть односвязное множество, а функция $t(x)$ непрерывна на A, то $F_T(t)$ строго возрастает по t. Если $F_T(\cdot)$ не будет строго возрастающей, то каждое решение задачи (4.56) будет решением задачи (4.55).

Постановка (4.2) с целевой функцией (4.46) примет вид

$$\varphi_\alpha(u) = r(u, t_\alpha) \to \min_{u \in U}. \tag{4.57}$$

Очевидно, что данная задача уже является детерминированным эквивалентом.

Задача с вероятностным ограничением (4.3) в силу п. **(б)** теоремы 4.4 примет вид

$$\Phi_0(u) \to \max_{u \in U}, \tag{4.58}$$

$$r(u, t_\alpha) \leqslant \varphi.$$

Пример 4.2. Пусть $r(u.t) = s_1(u) + s_2(u)t$, где $s_2(u) \geqslant 0$ для всех $u \in U$. Такая функция удовлетворяет всем условиям теоремы 4.4. Обратная функция в этом случае имеет вид

$$r_t^{-1}(u, \varphi) = \frac{\varphi - s_1(u)}{s_2(u)}.$$

1.4. Случай квадратичной функции потерь и сферически симметричного распределения. Рассмотрим случай, когда функция потерь имеет квадратичную структуру, т.е.

$$\Phi(u, X) \stackrel{\Delta}{=} r(u^T A X_1 \cdot X_2^T B^T u), \tag{4.60}$$

где случайные векторы X_1 и X_2 независимы, A и B — $(m \times n)$-матрицы, $r(\cdot) : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ — строго возрастающая непрерывная слева функция, а распределения случайных векторов сферически симметричны, т.е. их плотности можно представить в виде

$$p_1(x_1) = f_1(\|x_1\|^2),\ p_2(x_2) = f_2(\|x_2\|^2). \tag{4.61}$$

Здесь функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ неотрицательные интегрируемые по Лебегу при $t \in [0, \infty)$.

Теорема 4.5. *Пусть функция потерь имеет вид* (4.60), *а функции распределения векторов* X_1 *и* X_2 *имеют вид* (4.61) *и, кроме того,* $\|A^T u\| \|B^T u\| > 0$. *Тогда каждое решение задачи нелинейного программирования*

$$\|A^T u\| \|B^T u\| \to \min_{u \in U} \tag{4.62}$$

будет являться и решением задач (4.1), (4.2).

1.5. Случай аддитивной функции потерь. Рассмотрим случай, когда функция потерь имеет следующий вид:

$$\Phi(u, x) = r(|t(x) + s(u)|), \tag{4.66}$$

где $r(\cdot) : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ — строго возрастающая непрерывная слева функция, определенная на положительной полуоси, $t(\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ — измеримая функция, а $s(\cdot) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^1$ — некоторая функция.

Лемма 4.3. *Пусть функция функция имеет вид* (4.66). *Тогда функция вероятности будет равна*

$$P_\varphi(u) = F_T\left(r^{-1}(\varphi) - s(u)\right) - F_T\left(-r^{-1}(\varphi) - s(u)\right), \tag{4.67}$$

где $F_T(\cdot)$ *— функция распределения случайной величины* $T \triangleq t(X)$.

Теорема 4.6. *Пусть выполнено условие леммы 4.3 и плотность распределения случайной величины* $T = t(X)$ *симметрична и унимодальна относительно точки* m_T. *Тогда каждое решение задачи*

$$|m_T + s(u)| \to \min_{u \in U} \tag{4.69}$$

будет являться и решением задач (4.1), (4.2).

1.6. Случай сепарабельной функции потерь и логарифмически вогнутой меры. Рассмотрим случай, когда функция потерь имеет следующую структуру:

$$\Phi(u, x) = \max_{i=\overline{1,n}}\{r_i(s_i(u) + x_i)\}, \tag{4.70}$$

где $r_i(\cdot) : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, $i = \overline{1,n}$, — строго возрастающие, непрерывные слева функции, $s_i(\cdot) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^1$, $i = \overline{1,n}$, — некоторые функции.

Теорема 4.7. *Пусть функция потерь имеет вид* (4.70), *функции* $s_i(\cdot)$, $i = \overline{1,n}$, *выпуклы на* U, *плотность случайного вектора* X *логарифмически вогнута и его компоненты* X_i *независимы. Тогда функция вероятности будет равна*

$$P_\varphi(u) = \prod_{i=1}^{n} F_i\left(r_i^{-1}(\varphi) - s_i(u)\right), \tag{4.71}$$

где $F_i(\cdot)$ *— функции распределения случайных величин* X_i, $i = \overline{1,n}$, *и она будет логарифмически вогнута, а функция квантили* $\varphi_\alpha(u)$ *квазивыпукла.*

На основании теоремы 4.7 сформулируем детерминированные эквиваленты для задач (4.1) и (4.3). Согласно (4.71) имеем

$$P_\varphi(u) = \prod_{i=1}^{n} F_i\left(r_i^{-1}(\varphi) - s_i(u)\right) \to \max_{u \in U}. \tag{4.73}$$

Прологарифмируем выражение в (4.73). Учитывая строгое возрастание функции $\ln(\cdot)$, получим

$$\ln(P_\varphi(u)) = \sum_{i=1}^{n} \ln\left\{F_i\left(r_i^{-1}(\varphi) - s_i(u)\right)\right\} \to \max_{u\in U}. \qquad (4.74)$$

Задача с вероятностным ограничением (4.3) примет вид

$$\Phi_0(u) \to \min_{u\in U}, \qquad (4.75)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \ln\left\{F_i\left(r_i^{-1}(\varphi) - s_i(u)\right)\right\} \geqslant \ln(\alpha).$$

По теореме 4.7 функция вероятности $P_\varphi(u)$ логарифмически вогнута на U. Но если $P_\varphi(u) > 0$ для всех $u \in U$, то согласно [30] $\ln(P_\varphi(u))$ будет вогнутой функцией на U. Поэтому полученный детерминированный эквивалент (4.74) является задачей выпуклого программирования.

Ограничение в (4.75) будет также выпуклым, а следовательно, задача (4.3), записанная в виде (4.75), будет задачей выпуклого программирования, если функция $\Phi_0(u)$ выпукла на U.

2) Задачи линейного программирования: симплекс-метод.

Метод перебора угловых точек области допустимого решения

4. Линейное программирование

Стандартная задача линейного программирования:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$$

при условиях:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases} \qquad (1)$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ \ldots,\ x_n \ge 0. \qquad (2)$$

Двойственная ей задача линейного программирования:

$$w = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \to \min$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \le c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \le c_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \le c_n \end{cases},$$

$$y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ \ldots,\ y_m \ge 0.$$

Каждое неравенство в (1) и (2) определяет полупространство. Множество точек, удовлетворяющих (1) и (2), есть пересечение полупространств и, следовательно, есть выпуклый многогранник. Он называется областью допустимых решений. Множество точек, в которых $z = a$ есть гиперплоскость

$$c_1x_1 + \ldots + c_nx_n = a.$$

Отсюда следует, что экстремальные значения целевая функция z принимает в вершинах этого многогранника.

Стандартная и двойственная ей задачи решаются одновременно симплекс-методом, который состоит в следующем:

1) Ограничения в стандартной задаче заменяются равенствами введением дополнительных переменных $s_1, \ldots, s_m$ в каждом из m неравенств:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + s_1 = b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n + s_2 = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n + s_m = b_m \end{cases} \qquad (3)$$

2) Составляем симплекс-таблицу

x_1	x_2	$\ldots$	x_n	s_1	s_2	$\ldots$	s_m	
a_{11}	a_{12}	$\ldots$	a_{1n}	1	0	$\ldots$	0	b_1
a_{21}	a_{22}	$\ldots$	a_{2n}	0	1	$\ldots$	0	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
a_{m1}	a_{m2}	$\ldots$	a_{mn}	0	0	$\ldots$	1	b_m
c_1	c_2	$\ldots$	c_n	0	0	$\ldots$	0	z

В системе уравнений (3) можно считать $s_i, i=\overline{1,m}$ базисными переменными, а $x_1, \ldots, x_n$ – свободными.

Будем считать сначала, что все $b_i \geq 0, i=\overline{1,m}$. Тогда при свободных переменных, равных нулю,

$$s_i = b_i, \; z = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n + 0 \cdot s_1 + \ldots + 0 \cdot s_m = 0.$$

Числа, стоящие в последней строчке таблицы (кроме z), называются индикаторами. Если все они не положительны, $c_1 \leq 0$, то $z=0$ есть максимальное значение, т.е. решение задачи.

Если имеются положительные индикаторы, то выбирается какой-нибудь столбец с положительным индикатором, скажем, k-й и в этом столбце выбирается центральный элемент, скажем, a_{jk}, такой что $a_{jk} \geq 0$ и отношение b_j / a_{jk} было бы минимальным для всех b_i / a_{ik} с положительными a_{ik}. Отмечаем в таблице $\underline{\underline{a_{jk}}}$.

3) Делим всю k-ю строку на a_{jk}, чтобы вместо $\underline{\underline{a_{jk}}}$ получить $\underline{\underline{1}}$.

4) Из каждой из остальных (кроме j-ой), скажем, i-ой строки, надо вычесть j-ю, умноженную на a_{ik} (чтобы все элементы k-го столбца, кроме a_{jk}, стали нулями, в том числе и индикатор). При этом z заменится на $z - b_j/c_k$. $z - b_j/c_k = 0$, откуда $z = b_j/c_k > 0$.

Если после этого остались положительные индикаторы, то опять выбираем столбец с положительным индикатором, центральный элемент и т.д., как описано выше, превращаем центральный элемент в 1, а остальные элементы столбца в 0. Таким образом действуем до тех пор, пока не будет положительных индикаторов. Как только положительные индикаторы исчезнут, то задача решена.

Если в заключительной таблице стоит $z - p$, то $z_{\max} = p$, причём значения x_i находятся следующим образом: если x_i – базисный элемент, т.е. в заключительной таблице в i-м столбце одна единица в каждой строке, а остальные нули, а последним в k-й строке стоит b_i', то $x_i = b_i'$, а если i-й столбец имеет другой вид, то $x_i = 0$.

Решение двойственной задачи $w_{\min} = p \; (= z)$, а y_i равны индикатору в столбце s_i в заключительной таблице, с обратным знаком (т.е. с "+").

Рассмотрим теперь случай с присутствием отрицательных b_i в (1). Этапы решения 1) и 2) те же.

3) Выбираем строку с отрицательным b_i (если их несколько, то любую из них). Выбираем в этой строке любой отрицательный элемент (если такого не найдётся, то в силу неотрицательности x_i задача не имеет решения).

Опять центральный элемент превращаем в единицу, а остальные элементы этого столбца превращаем в нуль. Так действуем, пока отрицательных b_i не окажется. После этого мы получаем случай с положительными b_i, решение которого описано выше.

3) Классификация задач по степени сложности. Линейные, полиномиальные, экспоненциальные алгоритмы.

Сложность задачи – это асимптотическая временная сложность наилучшего алгоритма, известного для ее решения.

Основной вопрос теории сложности: насколько успешно или с какой стоимостью может быть решена заданная проблема Q? Мы не имеем в виду никакого конкретного алгоритма решения Q. Наша цель – рассмотреть все возможные алгоритмы решения Q и попытаться сформулировать утверждение о вычислительной сложности, внутренне присущей Q. В то время как всякий алгоритм A для Q дает верхнюю оценку величины сложности Q, нас интересует нижняя оценка. Знание нижней оценки представляет интерес математически и, кроме того, руководит нами в поиске хороших алгоритмов, указывая, какие попытки заведомо будут безуспешны.

Быстрыми являются линейные алгоритмы, которые обладают сложностью порядка $O(n)$, где n – размерность входных данных. К линейным алгоритмам относится школьный алгоритм нахождения суммы десятичных чисел, состоящих из n_1 и n_2 цифр. Сложность этого алгоритма – $O(n_1 + n_2)$. Есть алгоритмы, которые быстрее линейных, например, алгоритм двоичного поиска в линейном упорядоченном массиве имеет сложность $O(\log n)$, n – длина массива.

Другие хорошо известные алгоритмы – деление, извлечение квадратного корня, решение систем линейных уравнений и др. – попадают в более общий класс полиномиальных алгоритмов.

Полиномиальным алгоритмом (или алгоритмом полиномиальной временной сложности, или алгоритмом принадлежащим классу **P**) называется алгоритм, у которого временная сложность равна $O(n^k)$, где k – положительное целое число. Алгоритмы, для временной сложности которых не существует такой оценки, называются *экспоненциальными* и такие задачи считаются *труднорешаемыми*.

Класс E: задачи, экспоненциальные по природе

К экспоненциальным задачам относятся задачи, в которых требуется построить множество всех подмножеств данного множества, все полные подграфы некоторого графа или же все поддеревья некоторого графа.

Существует масса примеров задач с экспоненциальной сложностью. Например, чтобы вычислить $2^{(2^k)}$ для заданного натурального k, нам только для записи конечного ответа потребуется около 2^n шагов (где n – число цифр в двоичной записи k), не говоря даже о самом вычислении.