МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ВОЛГОГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра теории вероятностей и оптимального управления

В.Г. Шарапов

РУКОВОДСТВО ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО КУРСУ «ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ»

Методическое пособие

Волгоград 2004

Рецензент:
канд. физ.-мат. наук, доц., и.о. зав. каф. МАиТФ *А.А. Клячин*

Печатается по решению учебно-методической комиссии
математического факультета университета
(протокол № 3 от 04.06 2004 г.)

Печатается с готового оригинал-макета
в авторской редакции

Шарапов В.Г.

Руководство по решению задач по курсу «Вариационное исчисление и методы оптимизации»: Методическое пособие. — Волгоград: Издательство Волгоградского государственного университета, 2004. — 52 с.

.

государственного университета, 2004

Введение

Методическое пособие предназначено для обучения студентов решению задач по курсу "Вариационное исчисление и методы оптимизации" (ВИМО).

Решение задач по ВИМО не простое дело, требующее не только знаний предмета, но и определённой интуиции и смекалки. Чтобы выработать в себе эти качества необходимо наработать опыт решения таких задач, т.е., попросту, решать их. Решение этих задач обычно требует больших затрат времени, но с каждой решённой задачей приходит удовлетворение и уверенность в себе.

Задачи усложняются постепенно, самые сложные – это задачи оптимального управления, они помещены в конце методического пособия.

Рекомендуется сначала изучить правила решения, а затем пытаться решать самостоятельно, при необходимости заглядывая в пособие.

Каждая задача (P) по ВИМО начинается с формализации типа:

$$f(x) \to extr \ \ (P),$$

и определения области $D(P)$ допустимых решений $x \in D(P)$ задачи (P). После этого обычно используются необходимые условия экстремума, по ним определяются экстремали $\hat{x}$, среди которых только и могут быть решения задачи. Затем по определению экстремумов (обычно даны определения локального минимума, остальные определяются по аналогии) устанавливаются, какими экстремумами являются $\hat{x}$ или не являются вовсе. Достаточные условия привлекаются только в простейших случаях. В большинстве же случаев их привлечение очень сложно. Часто используется следствие из теоремы Вейерштрасса о достижении экстремума на компактном множестве:

Если функция f непрерывна на R^n и $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = \infty$ ($\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = -\infty$), то f достигает абсолютный минимум (максимум) на любом замкнутом подмножестве R^n.

Автор выражает благодарность А.Клячину за ценные замечания.

При подготовке пособия использовалась литература:

1. Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М., Сборник задач по оптимизации, Учебное пособие, М., Наука, 1979
2. Галеев Э.М., Тихомиров В.М., Краткий курс теории экстремальных задач, Издательство МГУ, 1989
3. Галеев Э.М., Тихомиров В.М., Оптимизация: теория, примеры,

задачи, М., Эдиториал УРСС, 2000

1. Конечномерные гладкие задачи без ограничений

Постановка задачи. Пусть $f\colon R^n \to R$ – функция n действительных переменных, обладающая некоторой гладкостью (дифференцируемостью). $f \in D^k(\hat{x})$ означает, что функция f k раз дифференцируема в точке $\hat{x}$.

Гладкой конечномерной задачей называется задача $f(x) \to extr$.

Точка $\hat{x} \in R^n$ называется точкой локального минимума (максимума) функции f, если

$$|x - \hat{x}| < \varepsilon \Rightarrow f(x) \geq f(\hat{x}) \quad (f(x) \leq f(\hat{x})).$$

Здесь $|\cdot|$ – обозначение нормы в конечномерном пространстве. При этом пишем $\hat{x} \in loc\,\min f \quad (\hat{x} \in loc\,\max f)$.

Необходимые условия экстремума первого порядка.

Если $\hat{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in loc\,extr\, f$ и $f \in D(\hat{x})$, то

$$f'(\hat{x}) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x_1} = \ldots = \frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x_n} = 0.$$

Необходимые условия экстремума второго порядка.

Если $f \in D^2(\hat{x})$, $\hat{x} \in loc\,\min(\max) f$, то $f'(\hat{x}) = 0$, $\langle f''(\hat{x})h, h\rangle \geq 0 \quad (\langle f''(\hat{x})h, h\rangle \leq 0) \quad \forall h \in R^n$.

Достаточные условия экстремума второго порядка.

$f'(\hat{x}) = 0$. $\langle f''(\hat{x})h, h\rangle > 0 \quad (\langle f''(\hat{x})h, h\rangle < 0) \quad \forall h \in R^n,\ h \neq 0.$

Последовательными главными минорами матрицы $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ называются определители

$$A_{1,\ldots,k} = \det\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} \end{pmatrix}.$$

Главными минорами $A_{i_1 \ldots i_n}$ матрицы A называются определители

$$A_{i_1 \ldots i_k} = \det\begin{pmatrix} a_{i_1 i_1} & \ldots & a_{i_1 i_k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i_k i_1} & \ldots & a_{i_k i_k} \end{pmatrix},\ i_1 < i_2 < \ldots < i_k.$$

Второй производной функции нескольких переменных является симметричная матрица вторых частных производных

$$A = f''(\hat{x}) = \left(\frac{\partial^2 f(\hat{x})}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1}^{n} = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}.$$

Матрица A называется *неотрицательно определенной* ($A \geq 0$), если

$$\langle Ah, h \rangle \geq 0 \ \forall h \in R^n \Leftrightarrow \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j \geq 0 \quad \forall h = (h_1, \dots, h_n) \in R^n$$

.

Матрица A называется *положительно определенной* ($A > 0$), если $\langle Ah, h \rangle > 0 \ \forall h \in R^n, h \neq 0$.

Аналогично определяются *отрицательно определенная* матрица и *неположительно определенная* матрица, для которых соответственно $A < 0, A \leq 0$.

Критерий Сильвестра.

Теорема. Пусть A – симметричная матрица. Тогда

1. $A > 0 \Leftrightarrow A_{1\dots k} > 0,\ k = 1, \dots, n.$
2. $A < 0 \Leftrightarrow (-1)^k \cdot A_{1\dots k} > 0,\ k = 1, \dots, n$
3. $A \geq 0 \Leftrightarrow A_{i_1 \dots i_k} \geq 0, 1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n,\ k = 1, \dots, n$
4. $A \leq 0 \Leftrightarrow (-1)^k A_{i_1 \dots i_k} \geq 0, \quad 1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n,\ k = 1, \dots, n.$

Правило решения.

1. Выписать необходимые условия экстремума первого порядка

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} = 0$$

Решения этой системы называются стационарными точками и обозначаются $\hat{x}$.

2. Проверить выполнение условий экстремума второго порядка. Для этого найти матрицу вторых производных

$$A = f''(\hat{x}) = \left(\frac{\partial^2 f(\hat{x})}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1}^{n} = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}.$$

Найти $A_{i\ldots k}$. Если все $A_{i\ldots k} > 0$, то $\hat{x} \in loc \min f$; если все $(-1)^k A_{i\ldots k} > 0$, то $\hat{x} \in loc \max f$.

Если предыдущие условия не выполняются, то надо проверить, будет ли $A_{i_1\ldots i_k} \geq 0$; $1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_k \leq n, \quad k = 1,\ldots,n$ (тогда $A \geq 0$) и $(-1)^k A_{i_1\ldots i_k} \geq 0$, $1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_k \leq n, k = 1,\ldots,n$ (тогда $A \leq 0$). Если не выполняются оба условия $A \leq 0$ и $A \geq 0$, то экстремума нет. Если выполняется одно из условий $A \leq 0$ или $A \geq 0$, то проверка на экстремум производится по определению экстремума.

Пример 1.

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2 + \frac{50}{x_1} + \frac{20}{x_2} \to extr .$$

Необходимые условия экстремума первого порядка:

$$\begin{cases} f_{x_1} = x_2 - \dfrac{50}{x_1^2} = 0 \\ f_{x_2} = x_1 - \dfrac{20}{x_2^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 x_2 = 50 \\ x_1 x_2^2 = 20 \end{cases} \Rightarrow \frac{50}{x_1} = \frac{20}{x_2} \Rightarrow x_1 = \frac{5}{2} x_2 .$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{5}{2} x_2 \\ x_1 x_2^2 = 20 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 5, x_2 = 2.$$

Стационарная точка $\hat{x} = (5, 2)$.

Вторые частные производные $f_{x_1x_1} = \dfrac{100}{x_1^3}$, $f_{x_1x_2} = f_{x_2x_1} = 1$,

$$f_{x_2x_2} = \frac{40}{x_2^3} .$$

Матрица вторых частных производных в точке $\hat{x}$ $A = \begin{pmatrix} 4/5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Последовательные главные миноры:

$$A_1 = 4/5 > 0, \quad A_{12} = \begin{vmatrix} 4/5 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 3 > 0 \Rightarrow \hat{x} \in loc \min f .$$

Минимальное и максимальное значения функции $f(x_1, x_2)$:

$S_{\min} = -\infty,\ S_{\max} = +\infty.$

(Для последовательностей $\{(-1/n, -1/n)\}$ и $\{(1/4, 1/n)\}$ соответственно).

Пример 2.

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_2x_3 - x_1 \to extr$$

Необходимые условия экстремума первого порядка:

$$\begin{cases} f_{x_1} = 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 1 = 0 \\ f_{x_2} = 2x_2 + x_1 + 3x_3 = 0 \\ f_{x_3} = 4x_3 + 2x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}.$$

Решив эту систему, находим стационарную точку $\hat{x} = (1/2, -1, 1/2)$.

Вторые частные производные $f_{x_1x_1} = 2,\ f_{x_1x_2} = f_{x_2x_1} = 1,$

$f_{x_1x_3} = f_{x_3x_1} = 2,\ f_{x_2x_2} = 2,\ f_{x_2x_3} = f_{x_3x_2} = 3,\ f_{x_3x_3} = 4.$

Матрица вторых частных производных в точке $\hat{x}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Последовательные главные миноры: $A_1 = 2,\ A_{12} = 3,\ A_{123} = -2.$ Так как условия $A \geq 0$ и $A \leq 0$ не выполняются, то $\hat{x} \notin loc\,extr\,f$.

Минимальное и максимальное значения функции $f(x_1, x_2, x_3)$:

$S_{\min} = -\infty,\ S_{\max} = +\infty.$ (Соответствующие последовательности легко построить).

2. Конечномерные гладкие задачи с ограничениями типа равенств

Постановка задачи. Пусть f_i: $R^n \to R,\ i = \overline{0, m}$ – функции, обладающие определенной гладкостью.

Гладкой конечномерной задачей с ограничениями типа равенств называется задача:

$$f_0(x) \to extr,\ f_i(x) = 0,\ i = \overline{1, m}. \qquad (P)$$

Необходимые условия экстремума первого порядка.

Пусть $\hat{x} \in loc\, extr\, P$, функции $f_i, i = \overline{0,m}$, непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки $\hat{x}$.

Тогда $\exists \lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in R^{m+1}, \lambda \neq 0$, такие что для функции Лагранжа $\Lambda(x) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(x)$ выполняется условие стационарности:

$$\Lambda_x(\hat{x}) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \Lambda(\hat{x})}{\partial x_j} = 0,\ j = \overline{1,n}.$$

Точки, удовлетворяющие условию стационарности, называются стационарными.

Необходимые условия экстремума второго порядка.

Пусть $\hat{x} \in loc \min P$, $f_i \in D^2(\hat{x}), i = \overline{0,m}$, размерность оболочки $\{f_1'(\hat{x}), \ldots, f_m'(\hat{x})\}$ равна m. Тогда $\exists \lambda = (1, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in R^{m+1}$ $(\lambda_0 = 1)$, такие что для функции Лагранжа $\Lambda(x) = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x)$ выполняется условие стационарности $\Lambda_x(\hat{x}) = 0$ и условие неотрицательной определённости матрицы вторых производных: $\langle \Lambda''(\hat{x})h, h \rangle \geq 0\ \ \forall h : \langle f_i'(\hat{x}), h \rangle = 0,\ i = \overline{1,m}$.

Достаточные условия экстремума второго порядка.

Пусть $f_i \in D^2(\hat{x}), i = \overline{0,m}, \dim \operatorname{lim}\{f_1'(\hat{x}), \ldots, f_m'(\hat{x})\} = m,$ $\exists \lambda = (1, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in R^{m+1}$ такие, что для функции Лагранжа $\Lambda(x) = f_0(x) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_i f_i(x)$ задачи (P) выполняется условие стационарности: $\Lambda'(\hat{x}) = 0 \Leftrightarrow f_1'(\hat{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i'(\hat{x}) = 0$ и условие положительной определённости матрицы вторых производных: $\langle \Lambda''(\hat{x})h, h \rangle > 0\ \ \forall h \neq 0$ такого, что $\langle f_i'(\hat{x}), h \rangle = 0,\ i = \overline{1,m}$. Тогда $\hat{x} \in loc \min P$.

Условие максимума аналогично, если

$$\Lambda(x) = -f_0(x) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_i f_i(x).$$

Правило решения. Для решения задачи (P) нужно:

1. Составить функцию Лагранжа $\Lambda(x) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(x)$.

2. Написать необходимое условие экстремума первого порядка – условие стационарности:

$$\Lambda'_x(\hat{x}) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f'_i(\hat{x}) = 0 \qquad (1)$$

3. Решение системы (1) даёт стационарные точки. При этом сначала рассматривается случай $\lambda_0 = 0$, а затем $\lambda_0 = 1$ или любое другое положительное число. Обычно этого достаточно, чтобы установить, являются ли стационарные точки точками локального или абсолютного максимума или минимума по их определению. Можно воспользоваться достаточными условиями экстремума второго порядка. При этом для максимума удобно брать $\lambda_0 = -1$ или любое другое отрицательное число.

Пример 1. $f(x, y, z) = xyz \to extr$; $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x + y + z = 0$.

Функция Лагранжа

$$\Lambda(x) = \lambda_0 xyz + \lambda_1(x^2 + y^2 + z^2 - 1) + \lambda_2(x + y + z).$$

Условия стационарности:

$$\Lambda_x = 0 \Leftrightarrow \lambda_0 yz + 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0,$$
$$\Lambda_y = 0 \Leftrightarrow \lambda_0 xz + 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0,$$
$$\Lambda_z = 0 \Leftrightarrow \lambda_0 xy + 2\lambda_1 z + \lambda_2 = 0.$$

Пусть $\lambda_0 = 0$. Тогда $2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0$, $2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0$, $2\lambda_1 z + \lambda_2 = 0$.

Если эти три равенства сложить и принять во внимание, что $x + y + z = 0$, получаем $\lambda_2 = 0$, а значит, и $\lambda_1 = 0$. Отсюда $\lambda_0 \neq 0$.

Принимаем $\lambda_0 = 1$. Получаем:

$$yz + 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0$$
$$xz + 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0$$
$$xy + 2\lambda_1 z + \lambda_2 = 0$$

Вычитая из первого равенства второе, получаем

$(y-x)z+2\lambda_1(x-y)=0$ или $(y-x)(z-2\lambda_1)=0$.

Аналогично имеем два других уравнения $(x-z)(y-2\lambda_1)=0$ и $(y-z)(x-2\lambda_1)=0$. Из этих уравнений и ограничительных условий видим, что две переменные равны некоторому числу p, а третья равна $-2p$ (из $x+y+z=0$). Тогда из $x^2+y^2+z^2=1$ имеем $p^2+p^2+4p^2=1 \Rightarrow p=\pm 1/\sqrt{6}$.

Итак, $\hat{x}=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $\left(-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $\left(\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

Для первых трёх $xyz=-1/3\sqrt{6}$, для следующих трёх $xyz=1/3\sqrt{6}$. Так как $f(x,y,z)=xyz$ непрерывна и определена на окружности, то по следствию из теоремы Вейерштрасса первые три значения дают $abs\min f$, а вторые – $abs\max f$. $S_{\min}=-1/3\sqrt{6}$, $S_{\max}=1/3\sqrt{6}$.

Пример 2. $f(x_1,x_2)=e^{x_1x_2}\to extr,\quad x_1+x_2=1$.

Функция Лагранжа $\Lambda(x)=\lambda_0 e^{x_1x_2}+\lambda_1(x_1+x_2-1)=0$.

Условия стационарности: $\Lambda_{x_1}=0 \Leftrightarrow \lambda_0 x_2 e^{x_1x_2}+\lambda_1=0$,

$$\Lambda_{x_2}=0 \Leftrightarrow \lambda_0 x_1 e^{x_1x_2}+\lambda_1=0,$$

$$\lambda_0=0 \Rightarrow \lambda_1=0 \Rightarrow \lambda_0\neq 0.$$

Пусть $\lambda_0=1$. Тогда $x_2e^{x_1x_2}+\lambda_1=0$, $x_1e^{x_1x_2}+\lambda_1=0$.

Отсюда $x_1=x_2$, а из $x_1+x_2=1$, $x_1=x_2=1/2$.

Стационарная точка $\hat{x}=(1/2,1/2)$, $f(\hat{x})=e^{1/4}$. Так как при $|x_1|\to\infty$ в силу $x_1+x_2=1$ x_1 и x_2 должны быть разных знаков и

$|x_2|$ тоже стремится к ∞, поэтому $e^{x_1 x_2} \to \infty$. В силу следствия из теоремы Вейерштрасса $\hat{x} \in abs\max$, $S_{\max} = e^{1/4}$, $S_{\min} = 0$.

3. Конечномерные гладкие задачи с ограничениями типа равенств и неравенств.

Постановка задачи. Пусть $f_i : R^n \to R, \quad i = \overline{0,m}$, – функции,
обладающие определенной гладкостью. Гладкой конечномерной задачей с ограничениями типа равенств и неравенств называется задача:

$$f_0(x) \to extr,\ f_i(x) \le 0, \quad i = \overline{1,m'}, \quad f_i(x) = 0, \quad i = \overline{1, m'+1, n} \qquad (P)$$

Правило решения. Для решения задачи (P) нужно:

1. Составить функцию Лагранжа $\Lambda(x) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(x)$.

2. Написать необходимые условия экстремума первого порядка:

а) условие стационарности: $\Lambda'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\partial \Lambda(\hat{x})}{\partial x_j} = 0, \ j = \overline{1,n}$;

б) условие дополняющей нежёсткости: $\lambda_i f_i(\hat{x}) = 0, \quad i = \overline{1,m'}$;

в) условие неотрицательности: $\lambda_i \ge 0, \quad i = \overline{1,m'}$.

3. Найти *критические* точки $\hat{x}$, удовлетворяющие условиям а) – в). При этом рассматриваются случаи $\lambda_0 = 0, \lambda_0 = 1$, (или любое положительное число), $\lambda_0 = -1$ (или любое отрицательное число).

В случае а) $\hat{x}$ может быть точкой как минимума так и максимума, в случае б) $\hat{x}$ может быть точкой минимума, в случае в) $\hat{x}$ может быть точкой максимума.

При нахождении критических точек в условиях дополняющей нежёсткости $\lambda_i f_i(\hat{x}) = 0,$ надо рассматривать случаи $\lambda_i = 0$ и $\lambda_i \ne 0$.

4. Исследовать на локальный и абсолютный экстремум критические точки непосредственной проверкой и, если нет абсолютных экстремумов, найти $S_{\min}$ и $S_{\max}$ и указать последовательность допустимых точек, на которых абсолютные экстремумы достигаются.

Пример 1. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3 \to extr,\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \le 1$.

Функция Лагранжа $\Lambda(x) = \lambda_0 x_1x_2x_3 + \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1)$.

Необходимые условия экстремума:

а) условия стационарности: $\begin{cases} \lambda_0 x_2x_3 + 2\lambda_1 x_1 = 0 \\ \lambda_0 x_2x_3 + 2\lambda_1 x_2 = 0 \\ \lambda_0 x_1x_2 + 2\lambda_1 x_3 = 0 \end{cases}$;

б) условие дополняющей нежёсткости: $\lambda_1(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1) = 0$;

в) условие неотрицательности: $\lambda_1 \ge 0$.

$$\lambda_0 = 0 \Rightarrow \lambda_1 > 0 \overset{a)}{\Rightarrow} x_1 = x_2 = x_3 = 0.$$

Если $\lambda_1 > 0 \overset{б)}{\Rightarrow} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$. Противоречие.

Пусть $\lambda_0 = 1$.

Тогда $\begin{cases} x_2x_3 + 2\lambda_1 x_1 = 0 \\ x_1x_3 + 2\lambda_1 x_2 = 0 \\ x_1x_2 + 2\lambda_1 x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1x_2x_3 + 2\lambda_1 x_1^2 = 0 \\ x_1x_2x_3 + 2\lambda_1 x_2^2 = 0 \\ x_1x_2x_3 + 2\lambda_1 x_3^2 = 0 \end{matrix}$. (1)

Пусть $\lambda_1 = 0$. Тогда $\begin{cases} x_2x_3 = 0 \\ x_1x_3 = 0 \\ x_1x_2 = 0 \end{cases}$.

Это выполняется только при двух переменных, равных 0. Т.е. в этом случае $\hat{x} = (t,0,0), (0,t,0), (0,0,t)$, где $|t| \le 1$.

$\hat{x} \notin loc\,extr\, f$, так как, например, для $(0, t, 0)$ имеем $f(x + h_1) > 0$ при $t > 0$, $h = (\varepsilon, 0, \varepsilon)$ и $f(x + h_2) < 0$ при $h_2 = (\varepsilon, 0, -\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$.

Пусть $\lambda_1 > 0$. Тогда из (1) $x_1^2 = x_2^2 = x_3^2$. Отсюда и из $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ следует $x_i^2 = 1/3$, $i = 1, 2, 3$, т.е. $x_i = \pm 1/\sqrt{3}$.

Возможные значения $x_1x_2x_3$ есть $\frac{1}{3\sqrt{3}}$ и $-\frac{1}{3\sqrt{3}}$.

Из следствия теоремы Вейерштрасса

$$\hat{x} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \in abs\max f\ ;$$

$$\hat{x} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \in abs\min f\ .$$

$$S_{\max} = \frac{1}{3\sqrt{3}}, \quad S_{\min} = -\frac{1}{3\sqrt{3}}\ .$$

Пример 2. $f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^4 \to extr$; $\sum_{i=1}^{n} x_1^2 \le 1$.

Функция Лагранжа

$$\Lambda(x) = \lambda_0(x_1^4 + \ldots + x_n^4) + \lambda_1(x_1^2 + \ldots + x_n^2 - 1)\ .$$

Необходимые условия экстремума:

а) условие стационарности: $\Lambda_{x_i} = 0 \Leftrightarrow 4\lambda_0 x_i^3 + 2\lambda_1 x_i = 0$, $i = \overline{1,n}$;

б) условие дополняющей нежёсткости: $\lambda_1(x_1^2 + \ldots + x_n^2 - 1) = 0$;

в) условие неотрицательности: $\lambda_i \ge 0$.

$\lambda_0 = 0 \overset{a)}{\Rightarrow} \lambda_1 x_i = 0 \ \ \forall x_i : x_1^2 + \ldots + x_n^2 \le 1$. Отсюда $\lambda_1 = 0$, но λ_0 и λ_1 не могут быть равны 0 одновременно.

Пусть $\lambda_0 = 1/2$. Тогда $\begin{cases} x_1^3 + \lambda_1 x_1 = 0 \\ \ldots \\ x_n^3 + \lambda_1 x_n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1(x_1^2 + \lambda_1) = 0 \\ \ldots \\ x_n(x_n^2 + \lambda_1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_i = 0$, $i = \overline{1,n}$ (так как $\lambda_1 \ge 0$) $\hat{x} = (0,\ldots,0) \in abs\min f$. $S_{\min} = 0$.

Пусть $\lambda_0 = -\frac{1}{2}$. Тогда $\begin{cases} x_1^3 - \lambda_1 x_1 = 0 \\ \dots \\ x_n^3 - \lambda_1 x_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1(x_1^2 - \lambda_1) = 0 \\ \dots \\ x_n(x_n^2 - \lambda_1) = 0 \end{cases}$.

Если $\lambda_1 > 0$ и все $x_i \neq 0$, то все $x_i^2 = 1/n$, $x_i = \pm 1/\sqrt{n}$, чему соответствуют 2^n точек $\hat{x} \in abs \max f$ с координатами $\left(\pm 1/\sqrt{n}, \dots, \pm 1/\sqrt{n}\right)$, $S_{\max} = n \cdot 1/n^2 = 1/n$.

Если m координат $x_i \neq 0$, а $n - m$, равны 0, то имеется $C_n^m \cdot 2^m$ критических точек, у которых m координат, равных $\pm 1/\sqrt{m}$ и $n - m$ равны 0. Пусть для определённости $x_1^2 = \dots = x_m^2 = 1/m$, а $x_{m+1}^2 = \dots = x_n^2 = 0$.

Если x_1 изменить так, чтобы $x_1^2 = 1/m - \varepsilon$, а x_n изменить так, чтобы $x_n^2 = \varepsilon$, то

$x_1^4 + x_n^4 + (1/m - \varepsilon)^2 + \varepsilon^2 = 1/m^2 - 2\varepsilon/n + 2\varepsilon^2 < 1/m^2$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$.

Отсюда видно, что все $C_n^m \cdot 2^m$ критических точек $\hat{x} \in loc \max f$.

Пример 3. $f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \to extr$; $\sum_{i=1}^{n} x_1^4 \leq 1$.

Функция Лагранжа

$\Lambda(x) = \lambda_0(x_1^2 + \dots + x_n^2) + \lambda_1(x_1^4 + \dots + x_n^4 - 1)$.

Необходимые условия экстремума:

а) условие стационарности: $\Lambda_{x_i} = 0 \Leftrightarrow 2\lambda_0 x_i + 4\lambda_1 x_i^3 = 0$, $i = \overline{1, n}$;

б) условие дополняющей нежёсткости: $\lambda_1(x_1^2 + \dots + x_n^2 - 1) = 0$;

в) условие неотрицательности: $\lambda_1 \geq 0$.

Если $\lambda_0 = 0$, то как в предыдущем примере $\lambda_1 = 0$ и опять получаем $\lambda_0 \neq 0$.

Пусть $\lambda_0 = 2$. Тогда $\begin{cases} x_i + \lambda_1 x_1^3 = 0 \\ \dots \\ x_n + \lambda_1 x_1^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_i = 0$

$\hat{x} = (0,\dots,0) \in abs\min f$.

Пусть $\lambda_0 = -2$. Тогда $\begin{cases} x_1(1-\lambda_1 x_1^2) = 0 \\ \dots \\ x_n(1-\lambda_1 x_n^2) = 0 \end{cases}$.

Если $\lambda_1 > 0$, то $x_1^4 + \dots + x_n^4 = 1$. Если все $x_i \neq 0$, то $x_i^4 = 1/n$, $x_i = \pm 1/\sqrt[4]{n}$, $x_i^2 = 1/\sqrt{n}$

По следствию из теоремы Вейерштрасса $\hat{x} = \left(\pm 1/\sqrt[4]{n},\dots,\pm 1/\sqrt[4]{n}\right) \in abs\max f$. $S_{\max} = n/\sqrt{n} = \sqrt{n}$.

Если m координат $x_i \neq 0$, а $n-m$, равны 0, то имеется $C_n^m \cdot 2^m$ критических точек, у которых m координат, равных $\pm 1/\sqrt[4]{m}$ и $n-m$ равно 0. Пусть для определенности $x_1^4 = \dots = x_m^4 = 1/m$, а $x_{m+1}^4 = \dots = x_n^4 = 0$.

Если изменить x_1 так, чтобы $x_1^4 = 1/m - \varepsilon$, а x_n изменить так, чтобы $x_n^4 = \varepsilon$, то

$x_1^2 + x_n^2 = \sqrt{1/m - \varepsilon} + \sqrt{\varepsilon} = \sqrt{1/m}(\sqrt{1-m\varepsilon} + \sqrt{m\varepsilon}) =$
$= 1/\sqrt{m}\,(1 - m\varepsilon/2 + \sqrt{m\varepsilon} + o(\varepsilon)) > 1/\sqrt{m}$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$, а при $x_1^4 = -1/m$, $x_n = 0$, $x_1^2 + x_n^2 < 1/\sqrt{m}$. Поэтому $C_n^m \cdot 2^m$ критических точек $\hat{x} \notin loc\min f$.

4. Линейное программирование

Стандартная задача линейного программирования:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$$

при условиях:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases} \qquad (1)$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0. \qquad (2)$$

Двойственная ей задача линейного программирования:

$$w = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \to \min$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \le c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \le c_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \le c_n \end{cases},$$

$$y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, \ldots, y_m \ge 0.$$

Каждое неравенство в (1) и (2) определяет полупространство. Множество точек, удовлетворяющих (1) и (2), есть пересечение полупространств и, следовательно, есть выпуклый многогранник. Он называется областью допустимых решений. Множество точек, в которых $z = a$ есть гиперплоскость

$$c_1x_1 + \ldots + c_nx_n = a.$$

Отсюда следует, что экстремальные значения целевая функция z принимает в вершинах этого многогранника.

Стандартная и двойственная ей задачи решаются одновременно симплекс-методом, который состоит в следующем:

1) Ограничения в стандартной задаче заменяются равенствами введением дополнительных переменных $s_1, \ldots, s_m$ в каждом из m неравенств:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + s_1 = b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n + s_2 = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n + s_m = b_m \end{cases} \qquad (3)$$

2) Составляем симплекс-таблицу

x_1	x_2	$\ldots$	x_n	s_1	s_2	$\ldots$	s_m	
a_{11}	a_{12}	$\ldots$	a_{1n}	1	0	$\ldots$	0	b_1
a_{21}	a_{22}	$\ldots$	a_{2n}	0	1	$\ldots$	0	b_2
.	.	.	.	.	.		.	.
.	.	.	.	.	.		.	.
.	.	.	.	.	.		.	.
a_{m1}	a_{m2}	$\ldots$	a_{mn}	0	0	$\ldots$	1	b_m
c_1	c_2	$\ldots$	c_n	0	0	$\ldots$	0	z

В системе уравнений (3) можно считать $s_i,\ i=\overline{1,m}$ базисными переменными, а $x_1,\ \ldots,\ x_n$ – свободными.

Будем считать сначала, что все $b_i \geq 0,\ i=\overline{1,m}$. Тогда при свободных переменных, равных нулю,

$$s_i = b_i,\ z = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n + 0{\cdot}s_1 + \ldots + 0{\cdot}s_m = 0.$$

Числа, стоящие в последней строчке таблицы (кроме z), называются индикаторами. Если все они не положительны, $c_1 \leq 0$, то $z = 0$ есть максимальное значение, т.е. решение задачи.

Если имеются положительные индикаторы, то выбирается какой-нибудь столбец с положительным индикатором, скажем, k-й и в этом столбце выбирается центральный элемент, скажем, a_{jk}, такой что $a_{jk} \geq 0$ и отношение b_j/a_{jk} было бы минимальным для всех b_i/a_{ik} с положительными a_{ik}. Отмечаем в таблице $\underline{\underline{a_{jk}}}$.

3) Делим всю k-ю строку на a_{jk}, чтобы вместо $\underline{\underline{a_{jk}}}$ получить $\underline{\underline{1}}$.

4) Из каждой из остальных (кроме j-ой), скажем, i-ой строки, надо вычесть j-ю, умноженную на a_{ik} (чтобы все элементы k-го столбца, кроме a_{jk}, стали нулями, в том числе и индикатор). При этом z заменится на $z - b_j/c_k$. $z - b_j/c_k = 0$, откуда $z = b_j/c_k > 0$.

Если после этого остались положительные индикаторы, то опять выбираем столбец с положительным индикатором, центральный элемент и т.д., как описано выше, превращаем центральный элемент в 1, а остальные элементы столбца в 0. Таким образом действуем до тех пор, пока не будет положительных индикаторов. Как только положительные индикаторы исчезнут, то задача решена.

Если в заключительной таблице стоит $z - p$, то $z_{max} = p$, причём значения x_i находятся следующим образом: если x_i – базисный элемент, т.е. в заключительной таблице в i-м столбце одна единица в каждой строке, а остальные нули, а последним в k-й строке стоит b_i', то $x_i = b_i'$, а если i-й столбец имеет другой вид, то $x_i = 0$.

Решение двойственной задачи $w_{min} = p$ $(= z)$, а y_i равны индикатору в столбце s_i в заключительной таблице, с обратным знаком (т.е. с "+").

Рассмотрим теперь случай с присутствием отрицательных b_i в (1). Этапы решения 1) и 2) те же.

3) Выбираем строку с отрицательным b_i (если их несколько, то любую из них). Выбираем в этой строке любой отрицательный элемент (если такого не найдётся, то в силу неотрицательности x_i задача не имеет решения).

Опять центральный элемент превращаем в единицу, а остальные элементы этого столбца превращаем в нуль. Так действуем, пока отрицательных b_i не окажется. После этого мы получаем случай с положительными b_i, решение которого описано выше.

Пример 1. $z = x_1 + 2x_2 \to \max$

$$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 2$$
$$-x_1 + 4x_3 \le 2$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$$

Двойственная задача. $w = 2y_1 + 2y_2 \to \min$

$$2y_1 - y_2 \ge 1$$
$$3y_1 \ge 2$$
$$2y_1 + 4y_2 \ge 0$$
$$y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0.$$

Симплекс-таблицы

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	b
$\boxed{2}$	3	2	1	0	2
-1	0	4	0	1	1
1	2	0	0	0	z

→

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	b
$\boxed{1}$	3/2	1	1/2	0	1
-1	0	4	0	1	2
1	2	0	0	0	z

→

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	b
1	$\boxed{3/2}$	1	1/2	0	1
0	3/2	5	1/2	1	3
0	1/2	-1	-1/2	0	z-1

→

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	b
2/3	$\boxed{1}$	2/3	1/3	0	2/3
0	3/2	5	1/2	1	3
0	1/2	-1	-1/2	0	z-1

→

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	b
	2/3	1	2/3	1/3	0	2/3
→	-1	0	1	0	1	2
	-1/3	0	-4/3	-2/3	0	z- 4/3

Ответ: $z_{\max} = w_{\min} = 4/3$; $x_1 = 0, x_2 = 2/3$; $y_1 = 2/3$, $y_2 = 0$.

Пример 2. $z = 5x_1 + x_2 \to \max$

$$4x_1 + 3x_2 \le 12$$
$$-2x_1 + 3x_2 \ge 6$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Стандартный вид задачи: $z = 5x_1 + x_2 \to \max$

$$4x_1 + 3x_2 \le 12$$
$$2x_1 - 3x_3 \le -6$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Двойственная задача: $w = 12y_1 - 6y_2$

$$4y_1 + 2y_2 \ge 5$$
$$3y_1 - 3y_2 \ge 1$$
$$y_1 \ge 0, y_2 \ge 0.$$

Симплекс-таблицы

x_1	x_2	s_1	s_2	b
4	3	1	0	12
2	$\boxed{-3}$	0	1	-6
5	1	0	0	z

→

x_1	x_2	s_1	s_2	b
4	3	1	0	12
-2/3	1	0	-1/3	2
5	1	0	0	z

→

x_1	x_2	s_1	s_2	b
$\boxed{6}$	0	1	1	6
-2/3	1	0	-1/3	2
17/3	0	0	1/3	z-2

→

x_1	x_2	s_1	s_2	b
$\boxed{1}$	0	1/6	1/6	1
-2/3	1	0	-1/3	2
12/3	0	0	1/3	z-2

→

x_1	x_2	s_1	s_2	b
1	0	1/6	1/6	1
0	1	1/9	-2/9	8/3
0	0	-17/18	-11/18	z- 23/3

Ответ: $z_{\max}$= 23/3 при x_1= 1, x_2 = 8/3 и $w_{\min}$= 23/3 при y_1= 17/18, y_2 = 11/18.

5. Производная Фреше

Определение. Отображение f: $X \to Y$, X и Y – нормированные пространства, называется *дифференцируемым по Фреше в точке* $\hat{x}$, пишется $f \in D(\hat{x})$, если существует линейный непрерывный оператор $f'(\hat{x}) : X \to Y$ и отображение $r : X \to Y$, для которых

$$f(\hat{x} + h) = f(\hat{x}) + f'(\hat{x})[h] + r(h), \qquad (1)$$

где $\|r(h)\|_Y = o\left(\|h\|_X\right)$ при $\|h\|_X \to 0$. Оператор $f'(\hat{x})$ называется *производной Фреше*. Равенство (1) кратко можно записать так:

$$f(\hat{x} + h) - f(\hat{x}) = f'(\hat{x})[h] + o(h).$$

При нахождении производной Фреше часто используется *теорема о суперпозиции*, которая нам потребуется в следующем виде:

Теорема. Пусть X, Y, Z – нормированные пространства, $\varphi: X \to Y$, $\psi: Y \to Z$, $\varphi(\hat{x}) = \hat{y}$, $f = \psi \circ \varphi : X \to Z$ – суперпозиция отображений φ и ψ. Тогда, если $\varphi \in D(\hat{x})$, $\psi \in D(\hat{y})$, то $f \in D(\hat{x})$ и $f'(\hat{x}) = \psi'(\hat{y}) \circ \varphi'(\hat{x}) \Leftrightarrow f'(\hat{x})[h] = \psi'(\hat{y})\left[\varphi'(\hat{x})[h]\right]$.

Пример 1. f: $H \to R$, $f(x) = \langle x, x \rangle$, H – гильбертово пространство.

$f(x + h) - f(x) = \langle x + h, x + h \rangle - \langle x, x \rangle = 2\langle x, h \rangle + \langle h, h \rangle =$

$= 2\langle x, h \rangle + o(h)$.

Так как $2\langle x, h \rangle$ линейно, то $f'(\hat{x})[h] = 2\langle \hat{x}, h \rangle$.

Пример 2. f: $H \to R$, $f(x) = \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

$f(x) = (\psi \circ \varphi)(x)$, где $\varphi(\hat{x}) = \langle \hat{x}, \hat{x} \rangle = \hat{y}$, $\psi(\hat{y}) = \sqrt{\hat{y}}$

$\varphi'(\hat{x}) = 2\langle \hat{x}, h \rangle$ (Пример 1),

$\psi'(\hat{y}) = 1/2\sqrt{\hat{y}} = 1/2\|\hat{x}\| \Rightarrow f'(\hat{x})[h] = \langle \hat{x}, h \rangle / \|\hat{x}\|$, $\hat{x} \neq 0$.

Пример 3. f: $H \to H$, $f(x) = x\|x\|$

$f(x + h) - f(x) = (x + h)\,\|x + h\| - x\|x\| = (x + h)\,(\|x + h\| - \|x\|) + ((x + h) - x)\,\|x\|$.

Применяя результат примера 2, получаем

$$f'(\hat{x}) = \hat{x}\,\frac{\langle \hat{x}, h\rangle}{\|\hat{x}\|} + \|\hat{x}\|\cdot h\,.$$

Пример 4. $f: R^2 \to R^2$, $f(x_1, x_2) = (x_1x_2, x_1^2 + x_2^2)$, $\hat{x} = (1, 2)$,

$$f(\hat{x}+h) - f(\hat{x}) = ((x_1 + h_1)(x_2 + h_2)\,)(\,(x_1 + h_1)^2 + (x_2 + h_2)^2\,) -$$

$$-(x_1x_2,\, x_1^2 + x_2^2) = ((x_1 + h_1)(x_2 + h_2) - x_1x_2\,,$$

$$(x_1 + h_1)^2 + (x_2 + h_2)^2 - (\,x_1^2 + x_2^2)) =$$

$$= (x_1h_2 + x_2h_1 + o(h),\, 2x_1h_1 + 2x_2h_2 + o(h)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(\hat{x})[1,2] = (2h_1 + h_2,\, 2h_1 + 4h_2)\,.$$

$2^{\underline{й}}$ способ. $f(x_1x_2) = (f_1(x_1, x_2),\, f_2(x_1, x_2))$,

$$f'(x_1, x_2)[h] = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\hat{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\hat{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\hat{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\hat{x}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}_2 & \hat{x}_1 \\ 2\hat{x}_1 & 2\hat{x}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2h_1 + h_2 \\ 2h_1 + 4h_2 \end{pmatrix}.$$

Пример 5. $f: C[0,1] \to R$, $f(x(\cdot)) = \int\limits_0^1 x^3(t)dt$.

$$f(x+h) - f(x) = \int\limits_0^1 (x(t) + h(t))^3\,dt - \int\limits_0^1 x^3(t)dt =$$

$$= \int\limits_0^1 3x^2(t)\,h(t)\,dt + o(h(t)) \Rightarrow\; f'(\hat{x})[h] = 3\int\limits_0^1 \hat{x}^2(t)\,h(t)\,dt\,.$$

Пример 6. $f: C[0,1] \to R$, $f(x(\cdot)) = (\int\limits_0^1 x(t)dt)^3$.

$$f(x) = (\psi \circ \varphi)(x(t)),\; f'(\hat{x}) = \psi(\hat{y})[\varphi(\hat{x})[h]] \Rightarrow$$

$\Rightarrow f'(\hat{x}(\cdot)) = 3(\int_0^1 \hat{x}(t)dt)^2 \int_0^1 h(t)\,dt$, так как $\int_0^1 (x(t)+h(t)\,dt -$

$- \int_0^1 x(t)\,dt = \int_0^1 h(t)\,dt$.

Пример 7. $f : C[0,1] \to R$ $f(x(\cdot)) = x(0)\,x(1)$.

$f(x+h) - f(x) = (x(0)+h(0)) \cdot (x(1)+h(1)) - x(0)\,x(1) =$

$= x(1)\,h(0) + x(0)\,h(1) + o(h)$.

$f'(\hat{x})[h] = \hat{x}(1)\,h(0) + \hat{x}(0)\,h(1)$.

6. Простейшая задача вариационного исчисления

Постановка задачи. Простейшей задачей вариационного исчисления называется экстремальная задача в $C^1[t_0, t_1]$ (в пространстве действительных непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[t_0, t_1]$):

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))\,dt \to extr;\ x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1$$

(P)

Функции, принадлежащие $C^1[t_0, t_1]$ и удовлетворяющие условиям на концах, называются допустимыми, $x \in D(P)$.

Определение. $\hat{x} \in D(P)$ доставляет локальный минимум в задаче (P), $\hat{x} \in loc \min P$, если $\exists \varepsilon > 0 : \forall\, x \in D(P)$, таких что $\|x - \hat{x}\|_1 < \varepsilon$ выполняется $J(x(\cdot)) \ge J(\hat{x}(\cdot))$. Здесь $\|\cdot\|_1$ – норма в $C^1[t_0, t_1]$, то есть $\|x(t)\|_1 = \ = \max\limits_{t \in [t_0, t_1]} \{|x(t)|, |x'(t)|\}$. Аналогично определяется локальный максимум.

Необходимые условия экстремума. Пусть $\hat{x} \in loc\, extr\, P$, функции $L, L_x, L_{\dot{x}}$ – непрерывны как функции трёх переменных, $\hat{L}_{\dot{x}} \in C^1[t_0, t_1]$ ($\hat{L}_{\dot{x}}$ означает, что функция берётся в точке $\hat{x}(t)$). Тогда

$\hat{x}$ удовлетворяет уравнению Эйлера $-\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}}(t)+\hat{L}_x(t)=0$,

$\forall t\in[t_0,t_1]$.

Функции, удовлетворяющие уравнению Эйлера, называются экстремалями.

Если $L=L(t,x_1,\ldots,x_n,\dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_n)$ – функция $2n+1$ переменных, причём $x_i(t)\in C^1[t_0,t_1],\ i=\overline{1,n}$, то необходимые условия экстремума в простейшей векторной задаче состоят из системы уравнений Эйлера:

$$-\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}_i}(t)+\hat{L}_{x_i}(t)=0,\quad i=\overline{1,n}.$$

Правило решения. Пишем уравнение Эйлера (или систему уравнений). Находим общее решение с произвольными константами, которые находим из конечных условий. Проверяем из определения, доставляют ли экстремали решение задачи P или нет. При этом полезно помнить, что функции $\hat{x}+h$ и $\hat{x}$ имеют на концах одинаковые значения, что возможно лишь, если функция h на концах имеет значения 0.

Подпространство функций, принимающих в концах отрезка $[t_0,\ t_1]$ значение 0, обозначается $C_0^1[t_0,t_1]$. Таким образом, в простейшей задаче всегда $h\in C_0^1[t_0,t_1]$.

Пример 1. $J(x)=\int\limits_0^1(x-\dot{x}^2)\,dt\to extr$, $x(0)=x(1)=0$.

Уравнение Эйлера $-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}}+L_x=0$.

$L_{\dot{x}}=-2\dot{x},\quad L_x=1\Rightarrow 2\ddot{x}+1=0\Rightarrow\ddot{x}=-1/2\Rightarrow$

$\Rightarrow\dot{x}=-\frac{1}{2}t+C_1\Rightarrow x=-t^2/4+C_1t+C_2$.

$x(0)=0\Rightarrow C_2=0,\ x(1)=0\Rightarrow$

$\Rightarrow C_1=1/4\Rightarrow\hat{x}=-t^2/4+1/4\,t=t/4\,(1-t)$.

$h\in C^1[t_0,\ t_1]$.

$$\Delta J=J(\hat{x}+h)-J(\hat{x})=\int\limits_0^1(\hat{x}+h)-(\dot{\hat{x}}+\dot{h})^2\,dt-\int\limits_0^1(\hat{x}-\dot{\hat{x}})^2\,dt=$$

$$= \int_0^1 h\,dt - 2\int_0^1 \dot{\hat{x}}\dot{h}\,dt - \int_0^1 \dot{h}^2 dt \le \int_0^1 h\,dt - 2\int_0^1 \dot{\hat{x}}\dot{h}\,dt.$$

$$\int_0^1 \dot{\hat{x}}\dot{h}\,dt > \int_0^1 \dot{\hat{x}}\,dh = \dot{\hat{x}}h\,|_0^1 - \int_0^1 h\ddot{\hat{x}}\,dt = 1/2\int_0^1 h\,dt.$$

Последнее равенство следует из того, что $h(0) = h(1) = 0$ и $\ddot{\hat{x}} = (t/4\,(1-t))'' = -1/2$.

Поэтому $\Delta J \le \int_0^1 h\,dt - \int_0^1 h\,dt = 0 \Rightarrow \hat{x} \in abs\max$.

Пример 2. $J(x) = \int_0^{3/2} (\dot{x}^3 + 2x)dt \to extr$, $x(0) = 0,\ x(3/2) = 1.$

Уравнение Эйлера $-\dfrac{d}{dt}(3\dot{x}^2) + 2 = 0 \Rightarrow \dfrac{d}{dt}(3\dot{x}^2) = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3\dot{x}^2 = 2t + C \Rightarrow \dot{x}^2 = 2/3\cdot t + C \Rightarrow \dot{x} = \pm(2/3\cdot t + C)^{1/2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x(t) = \pm(2/3\cdot t + C)^{3/2} + C_1$, $x(0) = 0 \Rightarrow \pm C^{3/2} + C_1 = 0$,

$x(3/2) = 1 \Rightarrow \pm(1 + C)^{3/2} + C_1 = 1$.

Из системы двух последних уравнений следует, что $C = C_1 = 0$. Отсюда экстремаль $\hat{x} = (2/3\cdot t)^{3/2}$ (С минусом не удовлетворяет условию $\hat{x}(3/2) = 1$).

$$\Delta J = J(\hat{x} + h) - J(\hat{x}) = \int_0^{3/2} (3\dot{\hat{x}}^2\dot{h} + 3\dot{\hat{x}}\dot{h}^2 + \dot{h}^3 + 2h)\,dt,$$

$h \in C_0^1[0, 3/2]$.

$$3\int_0^{3/2} \dot{\hat{x}}^2\dot{h}\,dt = 3\int_0^{3/2} \dot{\hat{x}}^2\,dh = 3\dot{x}^2 h\,|_0^{3/2} - 3\int_0^{3/2} h\cdot 2\dot{\hat{x}}\,\ddot{\hat{x}}\,dt =$$

$$= -6\int_0^{3/2} h\cdot\sqrt{2/3\cdot t}\cdot\frac{1}{3\sqrt{2/3\cdot t}}\,dt = -2\int_0^{3/2} h\,dt.$$

Поэтому $\Delta J = \int\limits_0^{3/2} (3\dot{\hat{x}}\dot{h}^2 + \dot{h}^3)\, dt = \int\limits_0^{3/2} (3\sqrt{2/3 \cdot t}\, \dot{h}^2 + \dot{h}^3)\, dt \ge 0$

при малых $\dot{h}$. Поэтому $\hat{x} \in loc\min$.

Легко построить последовательность функций со сколь угодно большими и малыми значениями $J(x_n(\cdot))$, откуда следует, что

$$S_{\min} = -\infty, \quad S_{\max} = \infty .$$

7. Задача Больца

Постановка задачи. Задачей Больца называется экстремальная задача без ограничений в пространстве $C^1[t_0, t_1]$:

$$B(x(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t)\, dt + l(x(t_0), x(t_1)) \to extr \qquad (P)$$

Функционал B называется *функционалом Больца*, функция l – терминантом. Допустимые функции – все функции из $C^1[t_0, t_1]$.

Определение. $\hat{x} \in loc\min P(loc\max P)$, если
$\exists \varepsilon > 0 : \|x(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_1 \le \varepsilon$ влечёт $B(x(\cdot)) \ge B(\hat{x}(\cdot))$
$(B(x(\cdot)) \le B(\hat{x}(\cdot)).)$.

Правило решения. 1. Выписать необходимые условия экстремума:

а) уравнение Эйлера $-\dfrac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}}(t) + \hat{L}_x(t) = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1]$;

б) условие трансверсальности $\hat{L}_{\dot{x}}(t_0) = \hat{l}_{x(t_0)}$, $\hat{L}_{\dot{x}}(t_1) = -\hat{l}_{x(t_1)}$.

2. Найти общее решение уравнения Эйлера, константы которых находятся из условий трансверсальности. Получим допустимые экстремали.

3. Проверить все допустимые экстремали: будут они решениями или нет.

Пример 1. $B(x(\cdot)) = \int\limits_0^1 (\dot{x}^2 + x^2)\, dt - 2x(1)\, sh1 \to extr$.

Необходимые условия экстремума:

а) уравнение Эйлера

$$-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}} + L_x = 0 \Rightarrow -\frac{d}{dt}2\dot{x} + 2x = 0 \Rightarrow \ddot{x} - x = 0 ;$$

общее решение $x = C_1 cht + C_2 sht$;

б) условия трансверсальности $L_{\dot{x}}(0) = l_{x(0)}, L_{\dot{x}}(1) = -l_{x(1)} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dot{x}(0) = 0, 2\dot{x}(1) = 2sh1 \Rightarrow \dot{x}(0) = 0, \dot{x}(1) = sh1.$

$\dot{x} = C_1 sht + C_2 cht \Rightarrow \dot{x}(0) = C_2 \Rightarrow C_2 = 0.$

$\dot{x}(1) = C_1 sh1 = sh1 \Rightarrow C_1 = 1 \Rightarrow \hat{x} = sht$ – экстремаль.

$$\Delta B = B(\hat{x} + h) - B(\hat{x}) = \int_0^1 (2\dot{\hat{x}}\dot{h} + \dot{h}^2 + 2\hat{x}h + h^2)dt - 2h(1)sh1.$$

$$2\int_0^1 \dot{\hat{x}}\dot{h}dt = 2\int_0^1 \dot{\hat{x}}dh = 2\dot{\hat{x}}h\,|_0^1 - 2\int_0^1 \ddot{\hat{x}}hdt = 2sh1 \cdot h(1) - 2\int_0^1 \hat{x}hdt.$$

Здесь пользуемся тем, что $\dot{\hat{x}}(0) = sh0 = 0$ и $\ddot{\hat{x}} = \hat{x}$.

Подставляем в ΔB:

$$\Delta B = 2sh1 \cdot h(1) + \int_0^1 (2\hat{x}h + \dot{h}^2 + 2\hat{x}h + h^2)dt - 2sh1 \cdot h(1) =$$

$= \int_0^1 (\dot{h}^2 + h^2)dt \geq 0 \Rightarrow \hat{x} \in abs\min$. Легко видеть, что $S_{\max} = \infty$.

Пример 2.

$$B(x(\cdot)) = \int_0^{\pi/2} (\dot{x}^2 - x^2)dt + x^2(0) - x^2(\pi/2) + 4x(\pi/2) \to extr,$$

а) уравнение Эйлера $-\frac{d}{dt}(2\dot{x}) - 2x = 0 \Rightarrow \ddot{x} + x = 0$;

общее решение $x = C_1 \sin x + C_2 \cos x$, $\dot{x} = C_1 \cos x - C_2 \sin x$;

б) условия трансверсальности

$L_{\dot{x}}(0) = l_{x(0)}, L_{\dot{x}}(\pi/2) = -l_{x(\pi/2)} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dot{x}(0) = x(0), 2\dot{x}(\pi/2) = 2x(\pi/2) - 4 \Rightarrow C_1 = C_2,$

$-C_2 = C_1 - 2 \Rightarrow C_1 = C_2 = 1 \Rightarrow \hat{x} = \sin t + \cos t$ – экстремаль.

$$\Delta B = \int_0^{\pi/2} (2\dot{x}\dot{h} + \dot{h}^2 - 2xh - h^2)dt + 2x(0)h(0) + h^2(0) -$$

$$- 2x(\pi/2)h(\pi/2) - h^2(\pi/2) + 4h(\pi/2).$$

$$\int_0^{\pi/2} 2\dot{\hat{x}}\dot{h}dt = \int_0^{\pi/2} 2\dot{\hat{x}}\,dh = 2\dot{\hat{x}}h\,\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{2} 2\ddot{\hat{x}}h = 2(\cos t - \sin t)h\,\Big|_0^{\pi/2} -$$

$$-2\int_0^{2} \ddot{\hat{x}}h\,dt = -2h(\pi/2) - 2h(0) + 2\int_0^{\pi/2} \hat{x}h\,dt \quad (\text{т.к. } \ddot{\hat{x}} + \hat{x} = 0).$$

$$\Delta B = -2h(\pi/2) - 2h(0) + 2\int_0^{\pi/2} \hat{x}h\,dt + \int_0^{\pi/2} \dot{h}^2 dt - 2\int_0^{\pi/2} \hat{x}h\,dt -$$

$$-\int_0^{\pi/2} h^2 dt + 2h(0) + h^2(0) - 2h(\pi/2) - h^2(\pi/2) + 4h(\pi/2) =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \dot{h}^2 dt - \int_0^{\pi/2} h^2 dt + h^2(0) - h^2(\pi/2).$$

Если $h \equiv \varepsilon$, то $\Delta B = -\pi/2\cdot\varepsilon^2 < 0$, если $h = \begin{cases} \varepsilon(1-t), & 0 \le t \le 1 \\ 0 & 1 \le t \le \pi/2 \end{cases}$, то $\Delta B = \varepsilon^2 - \varepsilon^2/2 + \varepsilon^2 - 0 > 0$. Таким образом, $\hat{x} \notin loc\,extr$.

8. Задача с подвижными концами.

Постановка задачи. Задачей с подвижными концами называется экстремальная задача в $C^1(\Delta)$:

$$I(\xi) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x, \dot{x})dt + \psi_0(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) \to extr \qquad (P)$$

$$\psi_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) = 0, \quad i = \overline{1, m}, \qquad (1)$$

где $\xi = (x(\cdot), t_0, t_1)$, Δ – конечный отрезок, $t_0, t_1 \in \Delta,\ t_0 < t_1$.

Частные случаи задачи, когда один конец или оба конца закреплены.

Элемент ξ – называется допустимым, если $x \in C^1(\Delta)$, и выполняются условия (1).

Определение. $\hat{\xi} = (\hat{x}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1) \in loc\min P$, если $\exists\varepsilon > 0$

$$\|x(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_1 < \varepsilon,\ \ |t_0 - \hat{t}_0| < \varepsilon,\ \ |t_1 - \hat{t}_1| < \varepsilon.$$

Функция Лагранжа

$$\Lambda = \int_{t_0}^{t_1} \lambda_0 f(t, x, \hat{x})dt + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \psi_i (t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)),$$

$$\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) \neq 0 .$$

Правило решения. а) Пишется условие стационарности по x – уравнение Эйлера для интегранта : $L = \lambda_0 f(t, x, \dot{x})$:

$$-\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}}(t) + \hat{L}_x(t) = 0 \quad \forall t \in \Delta \Leftrightarrow$$

$$-\frac{d}{dt}\lambda_0 \hat{f}_{0\,\dot{x}}(t) + \lambda_0 \hat{f}_{0\,x}(t) = 0 ;$$

б) условие трансверсальности по x для терминанта

$$l = \sum_{i-1}^{m} \lambda_i \psi_i (t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) :$$

$$\hat{L}_{\dot{x}}(\hat{t}_0) = \hat{l}_{x(t_0)} \Leftrightarrow \lambda_0 \hat{f}_{\dot{x}}(\hat{t}_0) = \hat{l}_{x(t_0)} ,$$

$$\hat{L}_{\dot{x}}(\hat{t}_1) = -\hat{l}_{x(t_1)} \Leftrightarrow \lambda_0 \hat{f}_{\dot{x}}(\hat{t}_1) = -\hat{l}_{x(t_1)} ;$$

в) условие стационарности по подвижным концам (только для подвижных концов):

$$\hat{\Lambda}_{t_0}(\hat{t}_0) = 0 \Leftrightarrow -\lambda_0 \hat{f}(\hat{t}_0) + \hat{l}_{t_0} + \hat{l}_{x(t_0)} \dot{\hat{x}}(\hat{t}_0) = 0 ,$$

$$\hat{\Lambda}_{t_1}(\hat{t}_1) = 0 \Leftrightarrow \lambda_0 \hat{f}(\hat{t}_1) + \hat{l}_{t_1} + \hat{l}_{x(t_1)} \dot{\hat{x}}(\hat{t}_1) = 0 .$$

Используя эти необходимые условия экстремума, находим допустимые экстремали $\hat{x}$ и проверяем из определения экстремумов, являются ли они экстремумами (и какими) или нет.

Пример 1. $I(x) = \int_0^T \dot{x}^3 dt \to extr, \quad x(0) = 0, \; T + x(T) = 1 .$

Функция Лагранжа $\Lambda = \int_0^T \lambda_0 \dot{x}^3 dt + \lambda_1 x(0) + \lambda_2 (T + x(T) - 1) .$

Необходимые условия экстремума:

а) уравнение Эйлера для интегранта : $L = \lambda_0 \dot{x}^3$

$$-\frac{d}{dt} L_{\dot{x}} + L_x = 0 \Rightarrow -6\lambda_0 \dot{x} \cdot \ddot{x} = 0 \Rightarrow \ddot{x} = 0 \Rightarrow x = Ct + C_1,$$

$x(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \Rightarrow x = Ct$;

б) условия трансверсальности $L_{\dot{x}}(0) = l_{x(0)}, l_{\dot{x}}(T) = -l_{x(T)}$,

$\lambda_0 3\dot{x}^2(0) = \lambda_1, \quad \lambda_0 3\dot{x}^2(T) = -\lambda_2(1 - \dot{x}(T))$;

в) стационарность по T

$\Lambda_T(T) = 0 \Leftrightarrow \lambda_0 \dot{x}^3(T) + \lambda_2 + \lambda_2 \dot{x}(T) = 0$.

Если $\lambda_0 = 0$, то из б) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_0 \neq 0$.

Пусть $\lambda_0 = 1$. Из $x(0) = 0 \quad C = 0 \Rightarrow \hat{x} = 0$.

Из $T + x(T) = 1 \Rightarrow T = 1$. Если $h_{1,2} = \pm\varepsilon t$, то $I(\hat{x} + h_1) > 0$,

$I(\hat{x} + h_2) < 0 \Rightarrow \hat{x} \notin loc\ extr$.

9. Изопереметрическая задача.

Постановка задачи. Изопереметрической задачей называется следующая экстремальная задача в $C^1[t_0, t_1]$:

$$I_0(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt \to extr \qquad (P)$$

$$I_i(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f_i(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt = \alpha_i \quad i = \overline{1, m} \qquad (1)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1, \quad \alpha_i \in R, \quad i = \overline{1, m}.$$

Определение. $\hat{x} \in loc \min P$, если $\exists\ \varepsilon > 0$, такое что $x \in D(P)$,

$$\|x(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_1 < \varepsilon \Rightarrow I_0(x(\cdot)) \geq I_0(\hat{x}(\cdot)).$$

Правило решения. Пишем лагранжиан $L = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(t, x, \dot{x})$.

Необходимые условия экстремума:

а) Уравнение Эйлера $-\dfrac{d}{dt}L_{\dot{x}} + L_x = 0$.

б) Находим общее решение уравнения Эйлера при $\lambda_0 = 0$ и $\lambda_0 = 1$ (или другой ненулевой константе). Из условий на концах и из изопериметрических условий (1) находятся константы и получается экстремаль $\hat{x}$.

в) Проверяем все экстремали по определению экстремумов: будут ли они экстремумами, и какими, или нет.

Пример 1. $I(x) = \int\limits_0^1 \dot{x}^2 dt \to extr$, $\int\limits_0^1 tx\, dt = 0$,

$x(0) = x - 4, \quad x(1) = 4$.

Лагранжиан: $L = \lambda_0 \dot{x}^2 + \lambda_1 tx$.

Уравнение Эйлера: $-2\lambda_0 \ddot{x} + \lambda_1 t = 0$.

$\lambda_0 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_0 \neq 0$.

Пусть $\lambda_0 = 1/2$. Тогда $\ddot{x} = \lambda_1 t \Rightarrow x = C_1 t^3 + C_2 t + C_3$.

$x(0) = -4 \Rightarrow C_3 = -4$, $\quad x(1) = 4 \Rightarrow C_1 + C_2 = 8$.

$\int\limits_0^1 t(C_1 t^3 + C_2 t - 4)\, dt = 0 \Rightarrow C_1/5 + C_2/3 - 2 = 0$.

Это вместе с $C_1 + C_2 = 8$ дает $C_1 = 5, C_2 = 3$.

Итак, $\hat{x} = 5t^3 + 3t - 4$.

$\Delta I = I(\hat{x} + h) - I(\hat{x}) = \int\limits_0^1 \dot{h}^2 dt + 2\int\limits_0^1 \dot{\hat{x}}\dot{h}\, dt \geq 2\int\limits_0^1 \dot{\hat{x}}\dot{h}\, dt =$

$= 2\int\limits_0^1 \dot{\hat{x}}\, dh = 2\dot{\hat{x}}h \,|_0^1 - 2\int\limits_0^1 \ddot{\hat{x}}h\, dt = -2\int\limits_0^1 15th\, dt = -30\int\limits_0^1 th dt = 0$.

Здесь $2\dot{\hat{x}}h \,|_0^1 = 0$, так как $h(0) = h(1) = 0$

$(x(0) = -4, (x + h)(0) =$

$= -4 \Rightarrow h(0) = 0)$ и $\int\limits_0^1 th\, dt = 0$, так как

$$\int_0^1 tx\,dt = \int_0^1 t(x+h)dt = 0 \Rightarrow\ \Rightarrow \int_0^1 th\,dt = 0$$. Итак $\hat{x} \in abs\min$.

Пример 2. $I(x) = \int_0^1 \dot{x}^2 dt \to extr$, $\int_0^1 x\,dt = 1$, $\int_0^1 tx\,dt = 0$,

$x(0) = x(1) = 0$.

Лагранжиан: $L = \lambda_0 \dot{x}^2 + \lambda_1 x + \lambda_2 tx$

Уравнение Эйлера: $-2\lambda_0 \ddot{x} + \lambda_1 + \lambda_2 t = 0$.

$$\lambda_0 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_0 \neq 0.$$

Пусть $\lambda_0 = 1/2$. Тогда

$$\ddot{x} = \lambda_1 + \lambda_2 t \Rightarrow x = C_1 t^3 + C_2 t^2 + C_3 t + C_4.$$

$$x(0) = 0 \Rightarrow C_4 = 0. \quad x(1) = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 + C_3 = 0. \qquad (1)$$

$$\int_0^1 x\,dt = 1 \Rightarrow C_1/4 + C_2/3 + C_3/2 = 1, \qquad (2)$$

$$\int_0^1 tx\,dt = 0 \Rightarrow C_1/5 + C_2/4 + C_3/3 = 0, \qquad (3)$$

(1), (2), (3) $\Rightarrow C_1 = 60,\ C_2 = -96,\ C_3 = 36$.

$\hat{x} = 60t^3 - 96t^2 + 36t$.

$h \in C_0^1[0, 1]$, $\int_0^1 h\,dt = 0$, $\int_0^1 th\,dt = 0$.

$$\Delta I = \int_0^1 \dot{h}^2\,dt + 2\int_0^1 \dot{\hat{x}}\dot{h}\,dt \geq 2\int_0^1 \dot{\hat{x}}\dot{h}\,dt = 2\int_0^1 \dot{\hat{x}}\,dh = 2\dot{\hat{x}}h\,|_0^1 - \int_0^1 \ddot{\hat{x}}h\,dt =$$

$$= -\int_0^1 \ddot{\hat{x}}h\,dt = -\int_0^1 (360t - 192)h\,dt = -360\int_0^1 th\,dt + 192\int_0^1 h\,dt = 0.$$

$\hat{x} \in abs\min$.

10. Задача со старшими производными

Постановка задачи. Задачей со старшими производными называется следующая экстремальная задача в $C^n[t_0,t_1]$:

$$I(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t} L(t, x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t), \ldots, x^{(n)}(t))dt \to extr \qquad (P)$$

$$x^{(k)}(t_j) = x_{kj}, \quad k = \overline{0, n-1}, \quad j = 0,1.$$

Функция $n + 2$ переменных L называется интегрантом.

Норма в пространстве $C^n[t_0,t_1]$:

$$\|x(t)\|_n := \max\left\{\max_{t_0 \le t \le t_1} |x(t)|, \max_{t_0 \le t \le T_1} |\dot{x}(t)|, \ldots, \max_{t_0 \le t \le t_1} |x^{(n)}(t)|\right\}.$$

Определение. $\hat{x} \in loc \min P$, если $\exists \varepsilon > 0$:

$$\|x(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_n < \varepsilon \Rightarrow I(x(\cdot)) \ge I(\hat{x}(\cdot)).$$

Правило решения. 1. Пишем необходимые условия экстремума – уравнение Эйлера-Пуассона: $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{d^k}{dt^k} L_{x^{(k)}}(t) = 0$.

2. Находим общее решение этого уравнения и с помощью начальных условий находим все константы и устанавливаем экстремали $\hat{x}$.

3. С помощью непосредственной проверки находим, что функции $\hat{x}$ доставляют экстремумы или нет.

Пример 1. $I(x) = \int_0^1 (48x - \ddot{x}^2)\, dt \to extr$, $x(0) = \dot{x}(0) = 0$,

$x(1) = 1, \dot{x}(1) = 4$.

$L = 48x - \ddot{x}^2$, $L_{\ddot{x}} = -2\ddot{x}^2$, $L_x = 48$, $L_{\dot{x}} = 0$.

Уравнение Эйлера-Пуассона: $48 - 2x^{(4)} = 0 \Rightarrow x^{(4)} = 24 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = t^4 + C_1t^3 + C_2t^2 + C_3t + C_4$.

$x(0) = 0 \Rightarrow C_4 = 0$, $\dot{x}(0) = 0 \Rightarrow C_3 = 0$.

$x(1) = 1 \Rightarrow C_1 + C_2 = 0$, $\dot{x}(1) = 4 \Rightarrow 3C_1 + 2C_2 = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow C_1 = C_2 = 0 \Rightarrow \hat{x} = t^4$.

$$\Delta I = I(\hat{x}+h) - I(\hat{x}) = 48\int_0^1 h\,dt - \int_0^1 \ddot{h}^2 dt - 2\int_0^1 \ddot{\hat{x}}\ddot{h}\,dt .$$

$$-2\int_0^1 \ddot{\hat{x}}\ddot{h}\,dt = -2\int_0^1 \ddot{\hat{x}}\,d\dot{h} = -2\ddot{\hat{x}}\dot{h}\,|_0^1 + 2\int_0^1 \hat{x}^{(3)}\dot{h}\,dt = 2\int_0^1 \hat{x}^{(3)}\dot{h}\,dt =$$

$$= 2\int_0^1 \hat{x}^{(3)}\,dh = 2\hat{x}^{(3)}h\,|_0^1 - 2\int_0^1 \hat{x}^{(n)}h\,dt = -2\int_0^1 24h\,dt .$$

$$\Delta I = 48\int_0^1 h\,dt - \int_0^1 \ddot{h}^2 dt - 48\int_0^1 h\,dt = -\int_0^1 \ddot{h}^2 dt \le 0 \Rightarrow \hat{x} \in abs\max .$$

Легко проверить, что $S_{\min} = -\infty$.

Пример 2. $I(x) = \int_0^1 (\ddot{x}^2 - 24tx)\,dt \to extr$,

$x(0) = \dot{x}(0) = 0, \quad x(1) = 1/5, \quad \dot{x}(1) = 1$.

Лагранжиан: $\dfrac{d^2}{dt^2}L_{\ddot{x}} - \dfrac{d}{dt}L_{\dot{x}} + L_x = 0$.

$2x^{(4)} - 24t = 0 \Rightarrow x^{(4)} = 12t \Rightarrow x = t^5/10 + C_1t^3 + C_2t^2 + C_3t + C_4$.

$x(0) = \dot{x}(0) = 0 \Rightarrow C_3 = C_4 = 0$.

$x(1) = 1/5 \Rightarrow C_1 + C_2 = 1/10$, $\dot{x}(1) = 1 \Rightarrow 3C_1 + 2C_2 = 1/2 \Rightarrow$

$\Rightarrow C_1 = 3/10, \quad C_2 = -1/5 \Rightarrow \hat{x} = 1/10 \cdot (t^5 + 3t^3 - 2t^2)$.

$$\Delta I = \int_0^1 (2\ddot{\hat{x}}\ddot{h} + \ddot{h}^2 - 24th)\,dt \le \int_0^1 (24\ddot{\hat{x}}\ddot{h} - 24th)\,dt = 0 \Rightarrow \hat{x}\ abs\min$$

11. Задача Лагранжа.

Постановка задачи. Задачей Лагранжа называется следующая экстремальная задача.

$B_0(\xi) \to \min;\ B_i(\xi) \le 0, i = \overline{1,m'}$, $B_1(\xi) = 0, i = \overline{m'+1,m}$

(P)

$\dot{x}_\alpha(t) - \varphi(t, x(t)) = 0 \quad \forall t \in \Delta$, (1)

$\xi = (x(\cdot), t_0, t_1)$, $x(\cdot) \in C^1(\Delta, R^n)$, $t_0, t_1 \in \Delta$, Δ – отрезок.

$$B_i(\xi)=\int_{t_0}^{t_1} f_i(t,x(t),\dot x(t))dt+l_i(t_0,x(t_0),t_1,x(t_1)),\quad i=\overline{0,m}\,.$$

Условие (1) может быть распространено лишь на некоторые координаты, пусть для определённости, на первые k координат.

Обозначим $x=(x_\alpha,x_\beta)$, $x_\alpha=(x_1,\dots,x_k)$, $x_\beta=(x_{k+1},\dots,x_n)$.

Поставив $\varphi(t,x)$ вместо $\dot x_\alpha$ в $f_i(t,x,\dot x)$, можно считать, что $f_i=f_i(t,x,\dot x_\beta)$.

Определение. $\hat\xi=(\hat x(\cdot),\hat t_0,\hat t_1,)\in loc\min P$, если $\exists\varepsilon>0$: $\xi\in D(P),\|x(\cdot)-\hat x(\cdot)\|_1<\varepsilon$,

$|t_0-\hat t_0|<\varepsilon,|t_1-\hat t_1|<\varepsilon\Rightarrow B_0(\xi)\ge B_0(\hat\xi)$.

Правило решения. 1. Привести задачу к виду (P).

2. Написать функцию Лагранжа с множителями Лагранжа $(\lambda,p)\in R^{m+1}\times C^1(\Delta,R^k),\ \lambda\ne 0$:

$$\Lambda(x(\cdot),t_0,t_1)=\int_{t_0}^{t_1}(f(t,x,\dot x_\beta)+p(t)(\dot x_\alpha-\varphi(t,x)))\,dt+$$

$$+l(t_0,x(t_0),t_1,x(t_1)),\text{ где } f(t,x,\dot x_\beta)=\sum_{i=0}^m\lambda_i f_i(t,x,\dot x_\beta),$$

$l=\sum_{i=0}^m\lambda_i l_i(t_0,x(t_0),t_1,x(t_1))$ – терминант.

3. Выписать необходимые условия экстремума:

а) стационарности по $x(\cdot)$ – уравнение Эйлера для лагранжиана $L(t,x,\dot x)=f(t,x,\dot x_\beta)+p(\dot x_\alpha-\varphi(t,x))$:

$$-\frac{d}{dt}\hat L_{\dot x}(t)+\hat L_x=0$$

$$\forall t\in\Delta\Leftrightarrow\begin{cases}-\dot p(t)-p(t)\hat\varphi_{x_\alpha}(t)+\hat f_{x_\alpha}(t)=0\\-\dfrac{d}{dt}\hat f_{\dot x_\beta}(t)-p(t)\hat\varphi_{x_\beta}(t)+\hat f_{x_\beta}(t)=0\end{cases};$$

б) трансверсальности по x

$$\hat{L}_{\dot{x}}(\hat{t}_0) = \hat{l}_{x(t_0)} \Leftrightarrow \begin{cases} p(\hat{t}_0) = \hat{l}_{x_\alpha}(t_0) \\ \hat{f}_{\dot{x}_\beta}(\hat{t}_0) = \hat{l}_{x_\beta}(t_0) \end{cases};$$

$$\hat{L}_{\dot{x}}(\hat{t}_1) = -\hat{l}_{x(t_1)} \Leftrightarrow \begin{cases} p(\hat{t}_1) = -\hat{l}_{x_\alpha}(t_1) \\ \hat{f}_{\dot{x}_\beta}(\hat{t}_1) = -\hat{l}_{x_\beta}(t_1) \end{cases};$$

в) стационарности по подвижным концам (только для подвижных концов)

$$\hat{\Lambda}_{t_0} = 0 \Leftrightarrow -\hat{f}(\hat{t}_0) + \hat{l}_{t_0} + \hat{l}_{x(t_0)}\dot{\hat{x}}(\hat{t}_0) = 0,$$

$$\hat{\Lambda}_{t_1} = 0 \Leftrightarrow \hat{f}(\hat{t}_1) + \hat{l}_{t_1} + \hat{l}_{x(t_1)}\dot{\hat{x}}(\hat{t}_1) = 0;$$

г) дополняющей нежёсткости $\lambda_i B_i(\hat{\xi}) = 0, \quad i = \overline{1, m'}$;

д) неотрицательности $\lambda_i \geq 0, \quad i = \overline{0, m'}$.

4. Находятся экстремали $\hat{x}$, удовлетворяющие условиям а) – д).

5. Непосредственной проверкой устанавливается, являются ли $\hat{x}$ экстремумами или нет.

Пример 1. $B(x) = \int_0^1 (\ddot{x}^2 - 48x)dt \to extr, \quad x(0) = x(1) = 0$.

Приведём задачу к виду (P). Для этого положим $x_1 = x, x_2 = \dot{x}$.

Получаем $B(x) = \int_0^1 (\dot{x}_2^2 - 48x_1)dt \to \min$,

$\dot{x}_1 = x_1, x_1(0) = x_1(1) = 0$.

Функция Лагранжа

$$\Lambda = \int_0^1 (\lambda_0(\dot{x}_2 - 48x_1) + p(t)(\dot{x}_1 - x_2))dt + \lambda_1 x(0) + \lambda_2 x(1).$$

Необходимые условия экстремума:

а) система уравнений Эйлера для лагранжиана

$L = \lambda_0(\dot{x}_2^2 - 48x_1) + p(t)(\dot{x}_1 - x_2)$,

$$-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}_1}+L_{x_1}=0\Leftrightarrow-\dot{p}-\lambda_0 48=0,$$

$$-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}_2}+L_{x_2}=0\Leftrightarrow-2\lambda_0\ddot{x}_2-p=0;$$

б) условия трансверсальности по x для терминанта

$l=\lambda_1 x_1(0)+\lambda_2(x_1(1))$:

$L_{\dot{x}_1}(0)=l_{x_1(0)},\ L_{x_1}=-l_{x_1(1)}\Leftrightarrow p(0)=\lambda_1,\ p(1)=-\lambda_2,$

$L_{\dot{x}_2}(0)=l_{x_2(0)},\ L_{\dot{x}_2}(1)=-l_{x_2(1)}\Leftrightarrow 2\lambda_0\dot{x}_2(0)=0,\ 2\lambda_0\dot{x}_2(1)=0.$

в)неотрицательности $\lambda_0\geq 0$.

$$\lambda_0=0\overset{a)}{\Rightarrow}p=0\overset{б)}{\Rightarrow}\lambda_1=\lambda_2=0\Rightarrow\lambda_0\neq 0.$$

Пусть $\lambda_0=1/2$. Тогда из а) $\dot{p}=-24\Rightarrow p=-24t+C_1$,

$$\ddot{x}_2=-p\Rightarrow\ddot{x}=-p\Rightarrow\ddot{x}=24t+C\Rightarrow\ddot{x}=12t^2+C_1t+C_2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\dot{x}=4t^3+C_1t^2+C_2t+C_3\Rightarrow x=t^4+C_1t^3+C_2t^2+C_3t+C_4,$$

$x(0)=0\Rightarrow C_4=0$. $x(1)=0\Rightarrow 1+C_1+C_2+C_3 0$ (1)

Из б) $\dot{x}_2(0)=\ddot{x}(0)=0$. $\ddot{x}(t)=12t^2+6C_1(t)+2C_2$

$\ddot{x}(0)=0\Rightarrow C_2=0$,

$\dot{x}_2(1)=\ddot{x}(t)=0\Rightarrow 12+6C_1=0\Rightarrow C_1=-2$.

Из (1) $C_3=1\Rightarrow\hat{x}=t^4-2t^3+t$,

$$\Delta B=B(\hat{x}+h)-B(\hat{x})=\int_0^1\ddot{h}^2dt+2\int_0^1\ddot{\hat{x}}\ddot{h}dt-\int_0^1 48h\,dt.$$

$2\int_0^1\ddot{\hat{x}}\ddot{h}dt=2\int_0^1\ddot{\hat{x}}d\dot{h}=2\ddot{\hat{x}}\dot{h}\,\Big|_0^1-2\int_0^1\dddot{x}\dot{h}dt=-2\int_0^1\dddot{\hat{x}}dh$, так как

$\ddot{\hat{x}}(0)=\ddot{\hat{x}}(1)=0$. Далее $-2\int_0^1\dddot{\hat{x}}dh=-\dddot{\hat{x}}h\,\Big|_0^1+2\int_0^1\hat{x}^{(4)}hdt=2\int_0^1\hat{x}^{(4)}hdt$, так как $h(0) = h(1) = 0$. $\hat{x}^{(4)} = 24 \Rightarrow 2\int_0^1 \ddot{\hat{x}}\ddot{h}dt = \int_0^1 48hdt$. Поэтому

$$\Delta B = \int_0^1 \ddot{h}^2 dt + \int_0^1 48hdt - \int_0^1 48hdt = \int_0^1 \ddot{h}^2 dt > 0 \Rightarrow \hat{x} \in abs\min,$$

$$S_{\min} = \int_0^1 (\ddot{\hat{x}}^2 - 48\hat{x})dt = -24/5, \quad S_{\max} = \infty.$$

12. Задачи оптимального управления.

Постановка задачи. Задачей оптимального управления (в понтрягинской форме) называется следующая задача:

$$B_0(\xi) \to \min, \quad B_i(\xi) \le 0, \quad i = \overline{1, m'}, \qquad (P)$$

$$B_i(\xi) = 0, \quad i = \overline{m'+1, m},$$

$$\dot{x}(t) - \varphi(t, x(t), u(t)) = 0 \quad \forall t \in T, \qquad (1)$$

$$u(t) \in U \quad \forall t \in \Delta, \qquad (2)$$

где

$\xi = (x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1)$, $x \in PC^1(\Delta, R^n)$, $u \in PC(\Delta, R^r)$, $t_0, t_1 \in \Delta$,

Δ – конечный отрезок, $U \subset R^r$, $T \subset \Delta$ – множество точек непрерывности функций $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_r(t))$, называемых *управлением*.

$$B_i(\xi) = \int_{t_0}^{t_1} f_i(t, x(t), u(t))dt + l_1(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)), \quad i = \overline{0, m}.$$

Здесь $PC(\Delta, R^n)$ – пространство кусочно-непрерывных вектор-функций на Δ, а $PC^1(\Delta, R^r)$ – пространство непрерывных функций на Δ с кусочно-непрерывной производной.

Ограничение (1) называется *дифференциальным ограничением*, ограничение (2) называется ограничением включения.

Один или оба конца могут рассматриваться подвижными.

Элемент ξ, удовлетворяющий указанным условиям, называется *допустимым управляемым процессом* (ДУП).

Определение. ДУП $\hat{\xi} = (\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1)$ называется *оптимальным*, если

$$\exists \varepsilon > 0 : \|x(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\| < \varepsilon, \left|t_0 - \hat{t}_0\right| < \varepsilon, \left|t_1 - \hat{t}_1\right| < \varepsilon \Rightarrow B_0(\xi) \geq B_0(\hat{\xi}).$$

Правило решения. 1. Для множителей Лагранжа

$$(\lambda, p) \in R^{m+1} \times PC^1(\Delta, R^n), \quad \lambda \neq 0$$

пишется функция Лагранжа:

$$\Lambda(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} (f(t,x,u) + p(t)(\dot{x} - \varphi(t,x,u)))dt +$$
$$+ l(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)),$$

где $f(t,x,u) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(t,x,u)$, $l = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i l_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1))$.

2. Выписываем необходимые условия экстремума:

а) стационарности по x – уравнений Эйлера для лагранжиана

$$L(t,x,\dot{x},u) = f(t,x,u) + p(\dot{x} - \varphi(t,x,u)):$$

$$-\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}}(t) + \hat{L}_x(t) = 0 \quad \forall t \in T \Leftrightarrow -\dot{p}(t) + \hat{f}_x(t) - p(t)\hat{\varphi}_x(t) = 0;$$

б) трансверсальности по x

$$\hat{L}_{\dot{x}}(\hat{t}_0) = \hat{l}_{x(t_0)} \Leftrightarrow p(\hat{t}_0) = \hat{l}_{x(t_0)},$$

$$\hat{L}_{\dot{x}}(\hat{t}_1) = -\hat{l}_{x(t_1)} \Leftrightarrow p(\hat{t}_1) = -l_{x(t_1)};$$

в) оптимальности по u:

$$\min_{u \in U} L(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), u(t)) = L(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), \hat{u}(t)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \min_{u \in U}\{f(t, \hat{x}(t), u) - p(t)\varphi(t, \hat{x}(t), u)\} = \hat{f}(t) - p(t)\hat{\varphi}(t) \quad \forall t \in T;$$

г) стационарности по подвижным концам (только для подвижных концов): $\hat{\Lambda}_{t_0} = 0 \Leftrightarrow -\hat{f}(\hat{t}_0) + \hat{l}_{t_0} + \hat{l}_{x(t_0)}\dot{\hat{x}}(\hat{t}_0) = 0$,

$$\hat{\Lambda}_{t_1} = 0 \Leftrightarrow \hat{f}(\hat{t}_1) + \hat{l}_{t_1} + \hat{l}_{x(t_1)}\dot{\hat{x}}(\hat{t}_1) = 0;$$

д) дополняющей нежёсткости: $\lambda_i B_i(\hat{\xi}) = 0, \quad i = \overline{0, m'}$;

е) неотрицательности: $\lambda_i \geq 0, \quad i = \overline{0, m'}$.

3. Найти ДУП, для которых выполняются необходимые условия экстремума. При этом удобно рассмотреть отдельно случаи $\lambda_0 = 0$ и $\lambda_0 \neq 0$. В последнем случае можно положить $\lambda_0 = 1$ (или другой положительной константе).

4. Отыскать решение среди найденных ДУП или показать, что решений нет.

Пример 1. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin t dt \to extr, \quad |\dot{x}| \le 1, \quad x(\pm\pi) = 0$.

Приводим задачу к виду (P):

$$B(x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} x \sin t \, dt \to extr, \quad \dot{x} = u, \quad u \in [-1,1], \quad x(\pm\pi) = 0.$$

Функция Лагранжа

$$\Lambda = \int\limits_{-\pi}^{\pi} (\lambda_0 x \sin t + p(\dot{x} - u))\, dt + \lambda_1 x(-\pi) + \lambda_2 x(\pi).$$

Необходимые условия:

а) уравнение Эйлера для лагранжиана $L = \lambda_0 x \sin t + p(\dot{x} - u)$,

$-\dot{p} + \lambda_0 \sin t = 0$;

б) условие трансверсальности $L_{\dot{x}} = (-1)^j l_{x(t_j)}, \quad j = 0,1, \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p(-\pi) = \lambda_1, \ p(\pi) = -\lambda_2$;

в) $\min\limits_{|u| \le 1} \{-pu\} = -p\hat{u}$;

г) $\lambda_0 \ge 0$ для $\min$, $\lambda_0 \le 0$ для $\max$.

$\lambda_0 = 0 \overset{a)}{\Rightarrow} p = const \neq 0$ (если 0, то $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$) $\overset{в)}{\Rightarrow} \hat{u} = \pm 1 = \dot{x}$ – противоречие с $x(\pm\pi) = 0 \Rightarrow \lambda_0 \neq 0$.

Пусть $\lambda_0 = 1 \overset{a)}{\Rightarrow} \dot{p} = \sin t \Rightarrow p = -\cos t + C$.

Из в) следует, что $\hat{u} = \operatorname{sgn} p$, т.е. $\dot{x} = \pm 1$.

Из центральной симметричности условий задачи следует, что решение $\hat{x}$ должно быть центрально симметричным. Это возможно только при $\hat{x}$ симметричной относительно оси y_1. Следовательно, $p = -\cos t$ и поэтому

$$\dot{x} = \hat{u} = \begin{cases} 1, & -\pi \le t < -\pi/2,\, \pi/2 \le t < \pi \\ -1 & -\pi/2 \le t < \pi/2 \end{cases}.$$

Из $x(\pm\pi) = 0$ следует

$$\hat{x} = \begin{cases} t + \pi, & -\pi \le t \le \pi/2 \\ -t, & |t| \le \pi/2 \\ t - \pi, & \pi/2 \le t \le \pi \end{cases},$$

$$\Delta B = \int_{-\rho}^{\pi} h \sin t\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} h\dot{p}\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} h\, dp = hp\,|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \dot{h}p\, dt = -\int_{-\pi}^{\pi} \dot{h}p\, dt \ge 0.$$

Так как $\left|\dot{\hat{x}} + \dot{h}\right| \le 1,\quad \begin{matrix} p \ge 0 \Rightarrow \dot{\hat{x}} = 1 \Rightarrow \dot{h} \le 0 \\ p \le 0 \Rightarrow \dot{\hat{x}} = -1 \Rightarrow \dot{h} \ge 0 \end{matrix}.$

Отсюда $\hat{x} \in abs \min$.

Для решения задачи на $\max$ полагаем $\lambda_0 = -1$. Получаем практически предыдущую задачу с решением $-\hat{x}$, где $\hat{x}$ – решение на минимум.

Итак, $-\hat{x} \in abs \max$.

Пример 2. $\int_0^2 x\, dt \to extr,\quad |\ddot{x}| \le 2,\quad x(0) = \dot{x}(0) = \dot{x}(2) = 0$.

Положим $x_1 = x,\, x_2 = \dot{x},\, \ddot{x} = u$ и приведём задачу к виду (P):

$$B(x) = \int_0^2 x_1 dt \to \min,\quad \dot{x}_1 = x_2,\quad \dot{x}_2 = u,\quad u \in [-2, 2],$$

$$x_1(0) = x_2(0) = x_2(2) = 0.$$

Функция Лагранжа

$$\Lambda = \int_0^2 (\lambda_0 x_1 + p_1(t)(\dot{x}_1 - x_2) + p_2(t)(\dot{x}_2 - u)dt +$$

$$+ \lambda_1 x_1(0) + \lambda_2 x_2(0) + \lambda_3 x_2(2).$$

Необходимые условия:

а) уравнения Эйлера

$$-\dot{p}_1 + \lambda_0 = 0 \Rightarrow \quad p_1(t) = \lambda_0 t + C_1$$

$$-\dot{p}_2 - p_1 = 0 \Rightarrow \quad p_2(t) = -\lambda_0 \cdot t^2/2 + C_1 t + C_2$$

б) трансверсальности

$$p_1(0)=\lambda_1,\quad p_1(2)=0$$
$$p_2(0)=\lambda_2,\quad p_2(2)=-\lambda_3\ ;$$

в) оптимальности по u

$$\min_{|u|\le 2} - p_2(t)u = -p_2(t)\hat{u}(t) \Rightarrow \hat{u} = \begin{cases} \operatorname{sgn} p_2(t), & p_2(t)\ne 0 \\ \textit{любое число из } [-2,2] \end{cases}$$

г) $\lambda_0 \ge 0$.

$\lambda_0 = 0 \overset{а)}{\Rightarrow} p_1 = C_1 \overset{б)}{\Rightarrow} p_1 = 0 \overset{а)}{\Rightarrow} p_2 = C_2 \ne 0 \overset{в)}{\Rightarrow} \hat{u} = -2$ или $2 \Rightarrow \ddot{x} = -2$ или $2 \Rightarrow x^2 = t^2 + A_1 t + A_2$ или $x = -t^2 + B_1 t + B_2$.

Для этих x не выполняется $x(0) = \dot{x}(0) = \dot{x}(2) = 0 \Rightarrow \lambda_0 \ne 0$. Пусть

$\lambda_0 = 1 \overset{а)}{\Rightarrow} p_1(t) =$

$= t + C \overset{б)}{\Rightarrow} p_1(t) = t - 2 \overset{а)}{\Rightarrow} p_2(t) = -(t-2)^2/2 + C$ – парабола ветвями вниз с осью симметрии $x = 2$. Если она не меняет знак, то как показано выше, получается x, не удовлетворяющий конечным условиям. Поэтому парабола меняет знак с "−" на "+" на $[0, 2]$.

Следовательно,

$$\hat{u} = \ddot{\hat{x}} = \begin{cases} -2, & 0 < t < \tau \\ 2, & \tau < t < 2 \end{cases} \Rightarrow \dot{\hat{x}} = \begin{cases} -2t + C_1, & 0 < t < \tau \\ 2t + C_2, & \tau < t < 2 \end{cases}.$$

$$\dot{x}(0) = \dot{x}(2) = 0 \Rightarrow \dot{\hat{x}} = \begin{cases} -2t, & 0 < t < \tau \\ 2t - 4, & \tau < t < 2 \end{cases}.$$

Из непрерывности $\hat{x}$ в точке τ:

$$-2\tau = 2\tau - 4 \Rightarrow \tau = 1 \Rightarrow \hat{x} = \begin{cases} -t^2 + C_1, & 0 \le t \le 1 \\ t^2 - 4t + C_2, & 1 \le t \le 2 \end{cases},$$

$$x(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0.$$

Из непрерывности $\hat{x}$ в точке $\tau = 1$ $C_2 = 2$.

Имеем $\hat{x} = \begin{cases} -t^2, & 0 \le t \le 1 \\ t^2 - 4t + 2, & 1 \le t \le 2 \end{cases}.$

$$\Delta B = \int_0^2 (\hat{x} + h)dt - \int_0^2 \hat{x}dt = \int_0^2 hdt = -\int_0^2 \ddot{p}_2 g dt = -\int_0^2 h\, d\dot{p}_2 =$$

$$= -h\dot{p}_2 \,|_0^2 + \int_0^2 \dot{h}\, dp_2 = \int_0^2 \dot{h}\, dp_2 = \dot{h}p_2 \,|_0^2 - \int_0^2 \ddot{h}p_2\, dt = -\int_0^2 \ddot{h}p_2\, dt \geq 0 .$$

(Здесь используются: $h(0) = \dot{p}_2(2) = \dot{h}(0) = \dot{h}(2) = 0$).

$$\left\| \ddot{\hat{x}} + \ddot{h} \right\| \leq 2, \quad \begin{matrix} p_2 \leq 0 \Rightarrow \ddot{\hat{x}} = -1 \Rightarrow \ddot{h} \geq 0 \\ p_2 \geq 0 \Rightarrow \ddot{\hat{x}} = 1 \Rightarrow \ddot{h} \leq 0 \end{matrix} .$$

Отсюда $\hat{x} \in abs \min$.

Вследствие симметричности условий задачи при $\lambda_0 = -1$ получаем $-\hat{x} \in abs \max$.

13. Задачи

1. $x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2 \to extr$.
2. $2x_1^4 - x_2^4 - x_1^2 - 2x_2^2 \to extr$.
3. $5x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 - 16x_1 - 12x_2 \to extr$.
4. $5x^2 + 4xy + y^2 \to extr, \quad x + y = 1$.
5. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to extr, \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$.
6. $x^2 + y^2 \to extr, \quad 3x + 4y = 1$.
7. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \to extr, \quad x_1 + x_2 + x_3 = 1, \quad x_1 + x_2 - x_3 = 1/2$.
8. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \to extr, \quad x_1 + x_2 + x_3 \leq 12, \quad x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,3}$.
9. $x_1x_2 - 2x_2 \to extr,\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 \leq 10,\ x_2 \geq 0,\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$.
10. $e^{x_1 - x_2} - x_1 - x_2 \to extr, \quad x_1 + x_2 \leq 1, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$.
11. $z = x_1 + x_2 \to \max, \quad x_1 + 2x_2 \leq 1, \quad 3x_1 + x_2 \leq 2,$ $x_i \geq 0, \quad i = 1,2$.
12. $z = x_1 + 3x_2 + 5x_3 \to \max, \quad 2x_1 + x_2 + x_3 \geq 1, \quad x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 1,$ $x_1 + 2x_2 - 3x_3 \geq 2, \quad x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 3}$.

В задачах 13 - 15 найти производную Фреше.

13. $f : C[0,1] \to R, \quad f(x(\cdot)) = \sin(x(1))$.

14. $f : C[0,1] \to R, \quad f(x(\cdot)) = \sin x(0) \cos x(1)$.

15. $f : C[0,1] \to R, \quad f(x(\cdot)) = \left(\int_0^1 x^2(t)\, dt \right)^3$.

16. $\int_0^{T_0} (\dot{x}^2 - x)\, dt \to extr, \quad x(0) = 0, \quad x(T_0) = \xi$.

17. $\int_0^1 (\dot{x}^2 + tx)\, dt \to extr, \quad x(0) = x(1) = 0$.

18. $\int_0^e t\dot{x}^2 dt \to extr, \quad x(1) = 0, \quad x(e) = 1$.

19. $\int_0^1 (1+t)\, \dot{x}^2 dt \to extr, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1$.

20. $\int_0^1 x^2 \dot{x}^2 dt \to extr, \quad x(0) = 1, \quad x(1) = \sqrt{2}$.

21. $\int_0^{\pi/2} (\dot{x}^2 - x^2 - 2x)\, dt - 2x^2(0) - x^2(\pi/2) \to extr$.

22. $\int_0^1 \dot{x}^2 dt + 4x^2(0) - 5x^2(1) \to extr$.

23. $\int_0^1 (\dot{x}^2 - x)\, dt - \dfrac{x^2(1)}{2} \to extr$.

24. $\int_0^1 (\dot{x}_1 \dot{x}_2 + x_1 x_2)\, dt + x_1(0) x_2(1) + x_1(1) x_2(0) \to extr$.

25. $\int_1^2 t^2 \dot{x}^2 dt - 2x(1) + x \to extr$.

26. $\int_0^T \dot{x}^2 dt \to extr, \quad x(0)=0, \quad T + x(T) + 1 = 0$.

27. $\int_0^T (\dot{x}^2 + x)\, dt \to extr, \quad x(0) = 1$.

28. $\int_0^1 \dot{x}^2 dt - 2x^2(1) \to extr, \quad x(0) = 0$.

29. $\int_0^1 (\dot{x}^2 + x)\, dt \to extr, \quad x(1) = 0$.

30. $\int_0^\pi \dot{x}^2 dt \to extr, \quad \int_0^\pi x \cos t\; dt = \frac{\pi}{2}, \quad x(0) = 1, \quad x(\pi) = -1$.

31. $\int_0^\pi \dot{x}^2 dt \to extr, \quad \int_0^\pi x \sin t\; dt = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(\pi) = 1$.

32. $\int_0^1 (\dot{x}^2 + x^2)\, dt \to extr, \quad \int_0^1 x e^t dt = \frac{e^2+1}{4}, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = e$.

33. $\int_1^2 t^2 \dot{x}^2 dt \to extr, \quad \int_1^2 tx\, dt = \frac{7}{3}, \quad x(1) = 1, \quad x(2) = 2$.

34. $\int_0^1 \dot{x}^2 dt \to extr, \quad \int_0^1 x^2 dt = 1, \quad x(0) = x(1) = 0$.

35. $\int_0^1 \ddot{x}^2 dt \to extr, \quad x(0) = \dot{x}(0) = \dot{x}(1) = 0, \quad x(1) = 1$.

36. $\int_0^\pi (\ddot{x}^2 - x^2)\, dt \to extr, x(0) = 0, \dot{x}(0) = 1, x(\pi) = sh\pi, \dot{x}(\pi) = ch\pi$

.

37. $\int_0^\pi (\ddot{x}^2 - x^2) dt \to extr, x(0) = \dot{x}(0) = 0, x(\pi) = sh\pi, \dot{x}(\pi) = ch\pi + 1$

38. $\int_0^1 (\ddot{x}^2 + 4x^2)dt \to extr, x(0) = -1, \dot{x}(0) = 0, \dot{x}(\pi) = sh\pi, x(\pi) = ch\pi$

39. $\int_0^1 (\ddot{x}^2 + \dot{x}^2)dt \to extr, \quad x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0, x(1) = ch1, \dot{x}(1) = sh1$

40. $\int_0^T \dot{x}^2 dt \to extr, \quad \int_0^T x\, dt = 1, \quad x(0) = 3$.

41. $\int_0^T \dot{x}^2 dt \to extr, \quad \int_0^T x\, dt = 1/3, \quad x(T) = 1$.

42. $\int_0^\pi \dot{x}^2 dt \to extr, \quad \int_0^\pi x \sin t = 1, \quad x(0) = 0$.

43. $\int_0^1 \ddot{x}^2 dt \to extr, \quad x(0) = \dot{x}(1) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1$.

44. $\int_1^e t^2 \ddot{x}^2 dt \to extr, \quad x(1) = -1, \quad x(e) = \dot{x}(1) = e$.

45. $\int_0^{7\pi/4} x \sin t\, dt \to extr, \quad |\dot{x}| \le 1, \quad x(0) = 0$.

46. $\int_0^4 (\dot{x}^2 + x)\, dt \to extr, \quad |\dot{x}| \le 1, \quad x(4) = 0$.

47. $\int_0^2 x\, dt \to extr, \quad |\ddot{x}| \le 2, \quad x(0) + x(2) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$.

48. $\int_0^4 x\, dt \to extr, \quad |\ddot{x}| \le 2, \quad x(0) + x(4) = 0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}(4) = 0$.

49. $\int_0^2 |\ddot{x}|\, dt \to \min, \quad \ddot{x} \ge -2, \quad x(0) = 0, \quad x(2) = -1, \quad x(2) = -2$.

50. $\int_0^2 |\ddot{x}|\, dt \to \min, \quad \ddot{x} \le 2, \quad x(0) = 0, \quad x(2) = 1, \quad \dot{x}(2) = 2$.

14. Ответы

1. $(1, 1) \in loc\ \min$, $(0, 0) \notin loc\ extr$, $S_{min} = -\infty$, $S_{max} = \infty$.
2. $(\pm 1/2, \pm 1) \in abs\ \min$, $S_{min} = -9/8$, $(0, 0) \in loc\ \max$, $(\pm 1/2, 0), (0, \pm 1) \notin loc\ extr$, $S_{max} = \infty$.
3. $(-4, 14) \in abs\ \min$, $S_{min} = -52$, $S_{max} = \infty$.
4. $(-1/2, 3/2) \in abs\ \min$, $S_{max} = \infty$.
5. $(1/\sqrt{14}, 2/\sqrt{14}, 3/\sqrt{14}) \in abs\ \min$, $S_{\min} = -1071/2$, $S_{\max} = 2$.
6. $(3/25, 4/25) \in abs\ \min$, $S_{min} = 1/25$, $S_{max} = \infty$.
7. $(3/8, 3/8, 1/4) \in abs\ \min$, $S_{min} = 11/32$, $S_{max} = \infty$.
8. $(0, 0, 0) \in abs\ \min$, $S_{min} = 0$, $(12, 0, 0), (0, 12, 0), (0, 0, 12) \in$ $\in abs\ \max$, $S_{max} = 144$; $(4, 4, 4), (0, 6, 6), (6, 0, 6), (6, 6, 0)$ – критические точки в задаче на максимум.
9. $(2/7, 174/35, -24/5) \in loc\ \min$, $S_{\min} = -\infty$, $(1, 0, 3) \in loc\ \max$, $S_{\max} = +\infty$, $(-1, 6, -3) \notin loc\ extr$.
10. $(0,1) \in abs\ \min$, $S_{\min} = e^{-1}$, $(0,1) \in abs\ \max$, $S_{\max} = e - 1$, $(0,0) \notin loc\ extr$.
11. $z_{max} = 13$ в точках $(0, 0, 13), (2, 0, 11), (x_1, 0, 13 - x_1)$ при $x_1 \in [0, 2]$.
12. $z_{max} = 7/3$ в точке $(4/3, 1/3, 0)$.
13. $f'(\hat{x}(\cdot))[h(\cdot)] = \cos \hat{x}(1)\, h(1)$
14. $f'(\hat{x}(\cdot))[h(\cdot)] = \cos \hat{x}(0)\, h(0) \cos \hat{x}(1) - \sin \hat{x}(0) \sin \hat{x}(1)\, h(1)$.
15. $f'(\hat{x}(\cdot))[h(\cdot)] = 6 \left(\int_0^1 \hat{x}^2(t)\, dt \right)^2 \cdot \int_0^1 \hat{x}(t)\, h(t)\, dt$.
16. $-t^2/4 + (\xi/T_0 + T_0/4)t \in abs\ \min$, $S_{\max} = +\infty$.
17. $(t^3 - t)/12 \in abs\ \min$, $S_{\max} = +\infty$.
18. $\ln t \in abs\ \min$, $S_{\max} = +\infty$.
19. $(\ln(t+1))/\ln 2 \in abs\ \min$, $S_{\max} = +\infty$.
20. $\sqrt{t+1} \in abs\ \min$, $S_{\max} = +\infty$.
21. $\cos t - 1 \notin loc\ extr$, $S_{\min} = -\infty (x_n(t) \equiv n$, $S_{\max} = +\infty$.

22. $\hat{x} \equiv 0$ – единственная экстремаль,

$\hat{x} \notin loc\,extr, S_{\min} = -\infty \ (x_n \equiv n), \ S_{\max} = +\infty$.

23. $-(t^2+3)/4 \notin loc\,extr, S_{\min} = -\infty \ (x_n(t) \equiv n), S_{\max} = +\infty$.

24. $(0,0) \notin loc\,extr, S_{\min} = -\infty \ (x_n(t) = n,-n)), \ S_{\max} = +\infty \ (x_n(t) =$
$= (n,n))$.

25. $1/t + 1/2 \in abs\,\min, S_{\max} = +\infty$.

26. $(\hat{x} = -2t, \hat{T} = 1) \in abs\,\min, S_{\min} = 4, S_{\max} = +\infty$.

27. $(\hat{x} = (t^2/4) - t + 1, \hat{T} = 2) \notin loc\,extr, \ S_{\min} = -\infty (x_n(t) = 1 - t,$
$T_n = n), S_{\max} = +\infty$.

28. $0 \notin loc\,extr, S_{\min} = -\infty \ (x_n(t) = nt), S_{\max} = +\infty$.

29. $(t^2-1)/4 \in abs\,\min, S_{\max} = +\infty$.

30. $\cos t \in abs\,\min, S_{\min} = \pi/2, S_{\max} = +\infty$.

31. $(t - 2\sin t)/\pi \in abs\,\min, S_{\max} = +\infty$.

32. $te^t \in abs\,\min, S_{\max} = +\infty$.

33. $t \in abs\,\min, S_{\min} = 7/3, S_{\max} = +\infty$.

34. $\pm\sqrt{2}\sin k\pi t, k \in \mathrm{N}, \pm\sqrt{2}\sin \pi t \in abs\,\min, S_{\min} = \pi^2, S_{\max} = +\infty$.

35. $-2t^3 + 3t^2 \in abs\,\min, S_{\min} = 132, S_{\max} = +\infty$.

36. $sh\,t \in abs\,\min, \ S_{\max} = +\infty$.

37. $sh\,t - \sin t \in abs\,\min, \ S_{\max} = +\infty$.

38. $-ch\,t\cos t \in abs\,\min, \ S_{\max} = +\infty$.

39. $ch\,t \in abs\,\min, \ S_{\max} = +\infty$.

40. $-\sqrt{1-t^2} \in abs\,\min, S_{\min} = -\pi/4, \sqrt{1-t^2} \in abs\,\max, S_{\max} = \pi/4$.

41. $(\hat{x} = 1, \hat{T} = 1/3) \in abs\,\min, S_{\min} = 0, (\hat{x} = t^2, \hat{T} = 1) \notin loc\,extr,$
$S_{\max} = +\infty$.

42. $2/3\pi\,(t + \sin t) \in abs\,\min, S_{\max} = +\infty$.

43. $-(t^2/2) + t \in abs\,\min, S_{\min} = 1, \ S_{\max} = +\infty$.

44. $(t+e)\ln t - t \in abs\,\min, \ S_{\max} = +\infty$.

45. $x = \begin{cases} -t, & 0 \le t \le \pi/4, \\ t - \pi/2, & \pi/4 \le t \le 7\pi/4, \end{cases} \in abs\min, \quad -\hat{x} \in abs\max.$

46. $x = \begin{cases} (t^2/4) - 3, & 0 \le t \le 2, \\ t - 4, & 2 \le t \le 4, \end{cases} \in abs\min, \quad 4 - t \in abs\max.$

47. $x = t^2 - 2 \in abs\min,\ S_{\min} = -4/3,\ -\hat{x} \in abs\max,\ S_{\max} = 4/3.$

48. $x = \begin{cases} -t^2, & 0 \le t \le 1, \\ (t-2)^2 - 2, & 1 \le t \le 3, \\ -(t-4)^2, & 3 \le t \le 4, \end{cases} \in abs\min,\ -\hat{x} \in abs\max.$

49. $x = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le 1, \\ -(t-1)^2, & 1 \le t \le 2, \end{cases} \in abs\min,\ S_{\min} = 1.$

50. $x = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le 1, \\ (t-1)^2, & 1 \le t \le 2, \end{cases} \in abs\min,\ S_{\min} = 1.$

СОДЕРЖАНИЕ

Для заметок

Для заметок

Шарапов Виктор Георгиевич

РУКОВОДСТВО ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО КУРСУ

«ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ
И МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ»

Методическое пособие

Подписано в печать 14.06 2004 г. Формат 60×84/16.
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Усл. печ. л. 3,02.
Уч.-изд. л. 3,25. Тираж 50 экз. Заказ .

Издательство Волгоградского государственного университета.
400062, Волгоград, ул. 2-я Продольная, 30.