



Ф. П. Васильев

# МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

## ЧАСТЬ II

Оптимизация в функциональных пространствах.  
Регуляризация. Аппроксимация

Издание новое,  
переработанное и дополненное

Допущено Учебно-методическим объединением по классическому  
университетскому образованию в качестве учебника для студентов  
высших учебных заведений, обучающихся по специальности ВПО 010501  
«Прикладная математика и информатика»

Москва  
Издательство МЦНМО  
2011

УДК 519.6(075.8)

ББК 22.19

В19

**Васильев Ф. П.**

В19 Методы оптимизации: В 2-х кн. — Новое изд., перераб. и доп. — М.: МЦНМО, 2011.

ISBN 978-5-94057-706-5

Кн. 2. — 433 с. — ISBN 978-5-94057-708-9

В книге изложены численные методы решения задач оптимизации. Приводятся теоретическое обоснование и краткие характеристики этих методов. Рассматриваются задачи минимизации функций в конечномерных и бесконечномерных пространствах, а также задачи оптимального управления процессами, описываемыми системами обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных.

Для студентов вузов по специальности «Прикладная математика» и специалистов в области задач оптимизации.

Предыдущее издание книги вышло в 2002 г. в издательстве «Факториал».

ББК 22.19

ISBN 978-5-94057-708-9



ISBN 978-5-94057-706-5

ISBN 978-5-94057-708-9 (кн. 2)

© Васильев Ф. П., 2011

© МЦНМО, 2011

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к новому изданию	7
Предисловие	8

### ЧАСТЬ I КОНЕЧНОМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ. ПРИНЦИП МАКСИМУМА. ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

<b>Глава 1. Методы минимизации функций одной переменной</b>	<b>12</b>
§ 1. Постановка задачи . . . . .	12
§ 2. Классический метод . . . . .	17
§ 3. Метод деления отрезка пополам . . . . .	19
§ 4. Метод золотого сечения. Симметричные методы . . . . .	21
§ 5. Об оптимальных методах . . . . .	24
§ 6. Метод ломаных . . . . .	29
§ 7. Методы покрытий . . . . .	33
§ 8. Выпуклые функции одной переменной . . . . .	37
§ 9. Метод касательных . . . . .	44
§ 10. Метод Стронгина . . . . .	48
<b>Глава 2. Классическая теория экстремума функций многих переменных</b>	<b>56</b>
§ 1. Постановка задачи. Теорема Вейерштрасса . . . . .	56
§ 2. Классический метод решения задач на безусловный экстремум	67
§ 3. Задачи на условный экстремум. Необходимые условия первого порядка . . . . .	73
§ 4. Необходимые условия экстремума второго порядка . . . . .	82
§ 5. Достаточные условия экстремума . . . . .	99
§ 6. Вспомогательные предложения . . . . .	103
<b>Глава 3. Элементы линейного программирования</b>	<b>112</b>
§ 1. Постановка задачи . . . . .	112
§ 2. Геометрическая интерпретация. Угловые точки . . . . .	119
§ 3. Симплекс-метод. Антициклон . . . . .	124
§ 4. Поиск начальной угловой точки . . . . .	153
§ 5. Условие разрешимости задач линейного программирования. Теоремы двойственности . . . . .	158

<b>Глава 4. Элементы выпуклого анализа</b>	<b>171</b>
§ 1. Выпуклые множества . . . . .	171
§ 2. Выпуклые функции . . . . .	184
§ 3. Сильно выпуклые функции . . . . .	206
§ 4. Проекция точки на множество . . . . .	213
§ 5. Отделимость выпуклых множеств . . . . .	219
§ 6. Субградиент. Субдифференциал . . . . .	230
§ 7. Равномерно выпуклые функции . . . . .	240
§ 8. Обоснование правила множителей Лагранжа . . . . .	244
§ 9. Теорема Куна–Таккера. Двойственная задача . . . . .	252
<b>Глава 5. Методы минимизации функций многих переменных</b>	<b>276</b>
§ 1. Градиентный метод . . . . .	276
§ 2. Метод проекции градиента . . . . .	293
§ 3. Метод проекции субградиента . . . . .	303
§ 4. Метод условного градиента . . . . .	307
§ 5. Метод возможных направлений . . . . .	314
§ 6. Проксимальный метод . . . . .	324
§ 7. Метод линеаризации . . . . .	331
§ 8. Квадратичное программирование . . . . .	335
§ 9. Метод сопряженных направлений . . . . .	340
§ 10. Метод Ньютона . . . . .	348
§ 11. Непрерывные методы с переменной метрикой . . . . .	356
§ 12. Метод покоординатного спуска . . . . .	359
§ 13. Метод покрытия в многомерных задачах . . . . .	364
§ 14. Метод модифицированных функций Лагранжа . . . . .	367
§ 15. Экстраградиентный метод . . . . .	373
§ 16. Метод штрафных функций . . . . .	378
§ 17. Доказательство необходимых условий экстремума первого и второго порядков с помощью штрафных функций . . . . .	397
§ 18. Метод барьерных функций . . . . .	407
§ 19. Метод нагруженных функций . . . . .	416
§ 20. О методе случайного поиска . . . . .	428
§ 21. Общие замечания . . . . .	432
<b>Глава 6. Принцип максимума Понтрягина</b>	<b>437</b>
§ 1. Постановка задачи оптимального управления . . . . .	437
§ 2. Формулировка принципа максимума. Примеры . . . . .	450
§ 3. Доказательство принципа максимума . . . . .	472
§ 4. Принцип максимума для задач оптимального управления с фа- зовыми ограничениями . . . . .	499
§ 5. Связь между принципом максимума и классическим вариаци- онным исчислением . . . . .	532

<b>Глава 7. Динамическое программирование</b>	<b>536</b>
§ 1. Схема Беллмана. Проблема синтеза для дискретных систем . . .	536
§ 2. Схема Моисеева . . . . .	549
§ 3. Проблема синтеза для систем с непрерывным временем . . . . .	555
§ 4. Достаточные условия оптимальности . . . . .	563
<b>Список литературы</b>	<b>570</b>
<b>Дополнительный список литературы</b>	<b>604</b>
<b>Предметный указатель</b>	<b>611</b>
<b>Обозначения</b>	<b>615</b>

## ЧАСТЬ II

### ОПТИМИЗАЦИЯ В ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ. РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ. АППРОКСИМАЦИЯ

<b>Глава 8. Методы минимизации в функциональных пространствах</b>	<b>631</b>
§ 1. Предварительные сведения. Обозначения . . . . .	632
§ 2. Теорема Вейерштрасса в функциональных пространствах . . .	639
§ 3. Дифференцирование. Условия оптимальности . . . . .	661
§ 4. Методы минимизации . . . . .	694
§ 5. Градиент в задаче оптимального управления со свободным правым концом . . . . .	711
§ 6. Градиент в задаче оптимального управления с дискретным временем . . . . .	726
§ 7. Оптимальное управление процессом нагрева стержня . . . . .	733
§ 8. Оптимальное управление колебательными процессами . . . . .	746
§ 9. Оптимальное управление процессами, описываемыми уравнением Гурса–Дарбу . . . . .	757
§ 10. Взаимодвойственные задачи управления и наблюдения . . . . .	762
§ 11. Метод моментов . . . . .	772
<b>Глава 9. Методы решения неустойчивых задач оптимизации</b>	<b>786</b>
§ 1. Постановка задачи. Устойчивые и неустойчивые задачи минимизации . . . . .	786
§ 2. Методы регуляризации для решения неустойчивых задач первого типа . . . . .	795
§ 3. Стабилизатор. Леммы о регуляризации . . . . .	803
§ 4. Метод стабилизации . . . . .	812
§ 5. Метод невязки . . . . .	830
§ 6. Метод квазирешений . . . . .	834
§ 7. Методы регуляризации с расширением множества . . . . .	838
§ 8. Регуляризованный метод проекции градиента . . . . .	846
§ 9. Регуляризованный метод условного градиента . . . . .	855
§ 10. Регуляризованный экстраградиентный метод . . . . .	863
§ 11. Регуляризованный проксимальный метод . . . . .	874
§ 12. Регуляризованный метод Ньютона . . . . .	880



§ 13. Регуляризованный непрерывный метод проекции градиента . .	891
§ 14. Метод динамической регуляризации . . . . .	899
<b>Глава 10. Аппроксимация экстремальных задач</b>	<b>907</b>
§ 1. Разностная аппроксимация квадратичной задачи оптимального управления . . . . .	907
§ 2. Общие условия аппроксимации . . . . .	917
§ 3. Разностная аппроксимация для квадратичной задачи с фазовыми ограничениями . . . . .	926
§ 4. Регуляризация аппроксимаций экстремальных задач . . . . .	933
§ 5. Разностная аппроксимация квадратичной задачи с переменной областью управления . . . . .	943
§ 6. Аппроксимация задачи быстрогодействия . . . . .	952
§ 7. Разностная аппроксимация задачи об оптимальном нагреве стержня . . . . .	960
§ 8. Об аппроксимации максиминных задач . . . . .	983
<b>Рекомендации по использованию книги</b>	<b>996</b>
<b>Список литературы</b>	<b>1006</b>
<b>Дополнительный список литературы</b>	<b>1040</b>
<b>Предметный указатель</b>	<b>1047</b>
<b>Обозначения</b>	<b>1052</b>

## Г Л А В А 8

# МЕТОДЫ МИНИМИЗАЦИИ В ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В части I книги мы занимались задачами минимизации функций конечного числа переменных и задачами оптимального управления процессами, описываемыми системами обыкновенных дифференциальных уравнений. Наряду с этими задачами большой интерес для практики представляют задачи оптимального управления процессами, описываемыми уравнениями с частными производными, интегро-дифференциальными уравнениями, задачи наилучшего приближения функций и др. Оказывается, все перечисленные задачи можно трактовать как экстремальные задачи в подходящим образом выбранных функциональных пространствах, и для исследования этих задач использовать аппарат и методы функционального анализа. Такая трактовка позволяет выявить общие закономерности, присущие широкому классу экстремальных задач, создавать и исследовать общие методы решения таких задач. Эти проблемы, а также вопросы аппроксимации и регуляризации экстремальных задач в функциональных пространствах составляют основное содержание части II книги.

В гл. 8 мы кратко остановимся на элементах теории экстремальных задач в гильбертовых и банаховых пространствах, на методах их решения, рассмотрим некоторые классы задач оптимального управления процессами, описываемыми обыкновенными дифференциальными уравнениями и уравнениями с частными производными. Определение многих понятий, характеризующих задачи оптимизации (локальный и глобальный минимум, верхняя и нижняя грань функции, минимизирующая последовательность и т. п.), многих понятий выпуклого анализа (выпуклое множество, выпуклая функция, проекция точки, субградиент и т. п.) получаются из определений, приведенных в гл. 1, 2, 4, нужно лишь в них под точкой теперь понимать элементы рассматриваемых банаховых и гильбертовых пространств, а вместо  $|u|$ ,  $\langle u, v \rangle$  понимать соответственно норму, скалярное произведение в этих пространствах. Поэтому мы здесь, как правило, не будем заново воспроизводить определения таких понятий и ограничимся ссылками на часть I книги. Многие теоремы, справедливые в конечномерных пространствах, без изменений остаются справедливыми и в бесконечномерных функциональных пространствах, и в таких случаях на соответствующее утверждение мы будем ссылаться в его прежней формулировке, указывая в контексте, о каком пространстве теперь идет речь.

Следует предупредить неопытного читателя, что имеется немало утверждений, справедливых лишь в конечномерных пространствах, и их обобщение на бесконечномерные пространства требует определенной аккуратности и осторожности. В таких случаях мы будем приводить точные формулировки соответствующих утверждений, иллюстрировать их примерами и контрпримерами.

Напомним, что в гл. 6, 7 мы уже рассматривали задачи оптимального управления, в которых управление принадлежит бесконечномерному функциональному пространству, но значения фазовой траектории в каждый фиксированный момент времени являются точкой конечномерного пространства. В задачах оптимального управления процессами, описываемыми уравнениями с частными производными, значения траекторий будут элементами бесконечномерных функциональных пространств. Для сохранения связи с гл. 6, 7 мы далее в основном будем придерживаться обозначений из этих глав: целевую функцию (функционал) будем обозначать через  $J(u)$ , множество, на котором ищется экстремум этой функции — через  $U$ , элементы множества  $U$  — через  $u$ , фазовые траектории — через  $x$ , пространственную переменную — через  $s$ , а время, как обычно, будем обозначать через  $t$ .



Для понимания содержания излагаемого ниже материала достаточно знания начальных глав функционального анализа и элементов теории функций действительных переменных [258; 350; 357; 371; 393; 444; 705; 768]. Впрочем, заметим, что рассмотрение конкретных классов задач оптимального управления в гл. 8–10 в основном ведется в терминах, связанных с этими задачами, и для понимания не требует знания элементов функционального анализа.

## § 1. Предварительные сведения. Обозначения

Здесь мы не будем приводить определения линейных, метрических, нормированных, банаховых и гильбертовых пространств — эти определения, а также основные свойства этих пространств читатель может найти в [393]. Ограничимся рассмотрением лишь вещественных банаховых и гильбертовых пространств, не оговаривая этого в дальнейшем. Элементы этих пространств часто будем называть точкой или вектором. Норму элемента в банаховом пространстве  $B$  будем обозначать через  $\|u\|_B$ , скалярное произведение двух элементов  $u, v$  из гильбертова пространства  $H$  — через  $\langle u, v \rangle_H$ . Напоминаем, что всякое гильбертово пространство  $H$  является банаховым пространством с нормой  $\|u\|_H = (\langle u, u \rangle_H)^{1/2}$ . Во всяком банаховом пространстве  $B$  можно ввести метрику, взяв в качестве расстояния  $\rho(u, v)$  между точками  $u, v \in B$  величину  $\rho(u, v) = \|u - v\|_B$ . В тех случаях, когда ясно, о каком банаховом или гильбертовом пространстве идет речь, знаки  $B$  и  $H$  в обозначениях  $\|u\|_B$ ,  $\langle u, v \rangle_H$  будем опускать и писать просто  $\|u\|$ ,  $\langle u, v \rangle$ . Всюду ниже такие понятия, как ограниченность, сходимость, замкнутость, полунепрерывность сверху или снизу, компактность, будут пониматься в сильном смысле, т. е. в смысле нормы или метрики рассматриваемых банаховых пространств. Если эти понятия будут употребляться в слабом смысле, то будем говорить о слабой сходимости, слабой замкнутости, слабой полунепрерывности сверху или снизу, слабой компактности. Определение некоторых из этих понятий мы приведем и кратко поясним ниже по мере необходимости.

Кратко остановимся на понятии отображения. Пусть  $X$  и  $Y$  — два произвольных множества. Говорят, что на  $X$  определено *отображение*, если каждому элементу  $x \in X$  поставлен в соответствие некоторый однозначно определяемый элемент  $y \in Y$ . Для обозначения отображения  $F$  из  $X$  в  $Y$  часто пользуются записью  $y = F(x)$  или  $y = Fx$  или  $F: X \rightarrow Y$ . В зависимости от того, какова природа множеств  $X$  и  $Y$ , вместо общего термина «отображение» в соответствии с установившимися традициями часто употребляются термины «функция», «функционал», «оператор» и т. д. В частности, если  $Y$  представляет собой множество на числовой оси  $E^1$ , то отображение  $F: X \rightarrow E^1$  часто называют *функцией*. В классическом вариационном исчислении, когда в роли  $X$  выступают различные функциональные пространства, вместо термина «функция» часто употребляют термин «функционал». Мы ниже будем отождествлять термины «функция» и «функционал» — это позволит нам без изменения формулировок пользоваться многими определениями и теоремами из части I и в тех случаях, когда  $X$  представляет собой множество из метрического или банахова пространства.

Через  $B^*$  будем обозначать пространство, сопряженное к банахову пространству  $B$ . Напоминаем, что  $B^*$  состоит из линейных ограниченных функций (функционалов), определенных на  $B$ . Значение линейной функции  $c \in B^*$  в точке  $u \in B$  будем обозначать через  $\langle c, u \rangle_B$  или  $\langle c, u \rangle$ . По определению, линейная ограниченная функция  $c$  такова, что

$$\langle c, \alpha u + \beta v \rangle = \alpha \langle c, u \rangle + \beta \langle c, v \rangle, \quad |\langle c, u \rangle| \leq M \|u\|$$

при всех  $u, v \in B$  и всех вещественных числах  $\alpha, \beta$ ;  $M$  — неотрицательная постоянная, зависящая от функции  $c$ , но не зависящая от  $u \in B$ . Сопряженное пространство  $B^*$  само является банаховым с нормой  $\|c\|_{B^*} = \sup \langle c, u \rangle_B$ , где верхняя грань берется по единичному шару  $\|u\|_B \leq 1$ . Отсюда следует, что  $|\langle c, u \rangle_B| \leq \|c\|_{B^*} \|u\|_B$  при всех  $u \in B, c \in B^*$ .

Если  $H$  — гильбертово пространство, то для всякой линейной ограниченной функции на  $H$  найдется элемент  $c \in H$  такой, что значение этой функции в любой точке  $u \in H$  можно представить в виде скалярного произведения  $\langle c, u \rangle_H$  [393]. Поэтому пространство  $H^*$ , сопряженное к гильбертову пространству  $H$ , можно отождествить с самим  $H$ , причем такое отождествление будет изометричным, т. е.  $\|c\|_{H^*} = \sup_{\|u\|_H \leq 1} \langle c, u \rangle_H = \|c\|_H$ . Последнее равенство вытекает из *неравенства Коши–Буняковского*

$$|\langle u, v \rangle_H| \leq \|u\|_H \|v\|_H, \quad u, v \in H.$$

*Гиперплоскостью* в банаховом пространстве  $B$  называют множество

$$\Gamma = \{u: \langle c, u \rangle = \gamma\},$$

где  $c \neq 0$  — фиксированный элемент из  $B^*$ , называемый *нормальным вектором гиперплоскости*, а  $\gamma$  — некоторое вещественное число.

Если  $X$  и  $Y$  — два банаховых пространства, то прямое произведение  $B = X \times Y$  также является банаховым пространством с нормой  $\|u\|_B = \|x\|_X + \|y\|_Y$  элемента  $u = (x, y) \in B$ , и сопряженное к  $B$  пространство  $B^*$  представимо в виде  $B^* = X^* \times Y^*$ .

В банаховых пространствах наряду с понятием сходимости по норме, или, как еще говорят, сильной сходимости, важную роль играет понятие слабой сходимости. Напомним

**О п р е д е л е н и е 1.** Говорят, что последовательность  $\{u_k\}$  из банахова пространства  $B$  *сходится к точке  $u \in B$  слабо в  $B$* , если

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle c, u_k \rangle = \langle c, u \rangle \quad \text{при всех } c \in B^*.$$

Если последовательность  $\{u_k\}$  сходится к точке  $u$  сильно в  $B$ , т. е.  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - u\| = 0$ , то  $\{u_k\}$  сходится к той же точке также и слабо в  $B$ , так как

$$|\langle c, u_k \rangle - \langle c, u \rangle| = |\langle c, u_k - u \rangle| \leq \|c\|_B \|u_k - u\| \rightarrow 0$$

при  $k \rightarrow \infty$ . Обратное неверно: из слабой сходимости последовательности, вообще говоря, не следует ее сильная сходимость.

**Пример 1.** Пусть  $H$  — гильбертово пространство, пусть  $\{e_k\}$  — некоторая бесконечная ортонормированная система в  $H$ , т. е.  $\langle e_i, e_k \rangle = 0$  при  $i \neq k$  и  $\langle e_k, e_k \rangle = 1$ , где  $i, k = 1, 2, \dots$ . Возьмем произвольный элемент  $c \in H^* = H$ . Тогда числа  $c_k = \langle c, e_k \rangle$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , представляют собой коэффициенты Фурье элемента  $c$  по системе  $\{e_k\}$ . Согласно неравенству Бесселя [393, с. 151]  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leq \|c\|^2$ , т. е. ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$  сходится. Тогда  $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle c, e_k \rangle = 0 = \langle c, 0 \rangle$  при всех  $c \in H$ . Это значит, что последовательность  $\{e_k\}$  слабо в  $H$  сходится к нулю. Однако  $\|e_k - e_m\|^2 = 2$  при любых  $k \neq m$ , поэтому последовательность  $\{e_k\}$  не является фундаментальной в  $H$  и не может сильно сходиться в  $H$ .

В частности, пусть  $H = L_2[a, b]$  — пространство Лебега функций  $u = u(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ , с нормой

$$\|u\|_{L_2} = \left( \int_a^b |u(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

и со скалярным произведением  $\langle u, v \rangle_{L_2} = \int_a^b u(t)v(t) dt$ . Тогда ортонормированные системы

$$\left\{ e_k = \sqrt{\frac{2}{b-a}} \sin \frac{\pi k(t-a)}{b-a} \right\}, \quad \left\{ e_k = \sqrt{\frac{2}{b-a}} \cos \frac{\pi k(t-a)}{b-a} \right\}$$

слабо в  $L_2[a, b]$  сходятся к нулю, т. е.  $\int_a^b c(t)e_k(t) dt \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$  для любой функции  $c(t) \in L_2[a, b]$ .

Так как сопряженное пространство  $B^*$  само является банаховым, то в свою очередь можно рассматривать второе сопряженное пространство  $(B^*)^* = B^{**}$ , состоящее из линейных ограниченных функций на  $B^*$ . Каждому элементу  $u \in B$  можно поставить в соответствие линейную ограниченную функцию  $\langle c, u \rangle$  переменной  $c \in B^*$ , т. е. некоторый элемент из  $B^{**}$ . Оказывается, это соответствие таково, что норма  $\|u\|_B$  совпадает с нормой порожденной им функции  $\langle c, u \rangle$ ,  $c \in B^*$ . Поэтому, отождествляя элемент из  $B$  с порожденной им функцией из  $B^{**}$ , получаем изометричное вложение пространства  $B$  в пространство  $B^{**}$ . В общем случае указанное вложение  $B \subset B^{**}$  является строгим, т. е. возможно, что  $B \neq B^{**}$ . В тех случаях, когда это вложение таково, что  $B = B^{**}$ , банахово пространство  $B$  называется *рефлексивным*. Всякое гильбертово пространство  $H$  рефлексивно, так как  $H = H^* = H^{**}$  [393; 705].

Отображение  $A: X \rightarrow Y$ , где  $X, Y$  — банаховы пространства, называют *линейным оператором*, если  $A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$  для всех  $x, y \in X$  и всех вещественных чисел  $\alpha, \beta$ . Линейный оператор  $A: X \rightarrow Y$  называется *ограниченным*, если существует постоянная  $M \geq 0$  такая, что  $\|Ax\|_Y \leq M\|x\|_X$  для всех  $x \in X$ . Если для каждого линейного ограниченного оператора  $A$  определить норму  $\|A\| = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_Y$ , то линейное пространство таких операторов превращается в банахово пространство, которое принято обозначать через  $\mathcal{L}(X \rightarrow Y)$ . Для каждого оператора  $A \in \mathcal{L}(X \rightarrow Y)$  равенство

$$\langle c, Ax \rangle = \langle A^* c, x \rangle, \quad x \in X, \quad c \in Y^*,$$

однозначно определяет оператор  $A^* \in (Y^* \rightarrow X^*)$ , называемый *сопряженным* к оператору  $A$ . Можно показать, что  $\|A^*\| = \|A\|$  [393; 705].

Если  $X = Y = H$  — гильбертово пространство, то  $H = H^* = H^{**}$  и при каждом  $A \in \mathcal{L}(H \rightarrow H)$  сопряженный оператор  $A^*$ , определяемый равенством  $\langle Au, v \rangle_H = \langle u, A^*v \rangle_H$ , также действует из  $H$  в  $H$ . Поэтому здесь возможно равенство  $A = A^*$  — такой оператор  $A$  называют *самосопряженным*.

Приведем определения и обозначения некоторых конкретных банаховых и гильбертовых пространств, которые нам понадобятся в дальнейшем.

В конечномерном линейном вещественном пространстве  $\mathbb{R}^n$  точек  $u = (u^1, \dots, u^n)$  наряду с евклидовой нормой  $|u| = \left( \sum_{i=1}^n |u^i|^2 \right)^{1/2}$  могут быть введены различные другие нормы. Например, полагая  $|u|_p = \left( \sum_{i=1}^n |u^i|^p \right)^{1/p}$  при  $1 \leq p < \infty$  или  $|u|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |u^i|$ , получим различные банаховы пространства  $\mathbb{R}_p^n$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ . Пространства  $\mathbb{R}_p^n$  и  $\mathbb{R}_q^n$ , где  $p^{-1} + q^{-1} = 1$  при  $1 < p < \infty$ ,  $q = 1$  при  $p = \infty$  и  $q = \infty$  при  $p = 1$ , являются взаимно сопряженными. В частности,  $(\mathbb{R}_2^n)^* = \mathbb{R}_2^n = E^n$ . Заметим, что все нормы в  $\mathbb{R}^n$  эквивалентны, т. е. если  $\|u\|_I$  и  $\|u\|_{II}$  — какие-либо две нормы в  $\mathbb{R}^n$ , то найдутся числа  $c_1, c_2 > 0$  такие, что  $c_1 \|u\|_I \leq \|u\|_{II} \leq c_2 \|u\|_I$  при всех  $u \in \mathbb{R}^n$ . Заметим также, что в любом конечномерном банаховом пространстве понятия сильной и слабой сходимости равносильны.

Через  $l_p$ ,  $1 \leq p < \infty$ , будем обозначать банахово пространство последовательностей  $u = (u^1, \dots, u^k, \dots)$  с конечной нормой  $\|u\|_{l_p} = \left( \sum_{i=1}^\infty |u^i|^p \right)^{1/p}$ . В случае  $p = \infty$  под  $l_\infty$  понимают банахово пространство последовательностей  $u = (u^1, \dots, u^k, \dots)$  с конечной нормой  $\|u\|_{l_\infty} = \sup_k |u^k|$ . Можно показать, что  $\lim_{p \rightarrow \infty} \|u\|_{l_p} = \|u\|_{l_\infty}$  для всех  $u \in l_\infty$ . Сопряженным для  $l_p$ ,  $1 \leq p < \infty$ , пространством является пространство  $l_q$ , где  $p, q$  связаны равенством  $p^{-1} + q^{-1} = 1$  при  $1 < p < \infty$  и  $q = +\infty$  при  $p = 1$ . Описание сопряженного к  $l_\infty$  пространства см. в [258; 371]. Пространство  $l_p$  при  $1 < p < \infty$  рефлексивно. Пространство  $l_2$  является гильбертовым со скалярным произведением  $\langle u, v \rangle_{l_2} = \sum_{i=1}^\infty u^i v^i$  и с нормой  $\|u\|_{l_2} = (\langle u, u \rangle)^{1/2}$ .

Пусть  $G$  — некоторое фиксированное измеримое по Лебегу множество из евклидова пространства  $E^n$ . Через  $L_p^r(G)$ , где  $1 \leq p < \infty$ ,  $r$  — целое положительное число, будем обозначать банахово пространство измеримых вектор-функций  $u = u(t) = (u^1(t), \dots, u^r(t))$ ,  $t \in G$ , с конечной нормой

$$\|u\|_p = \left( \int_G |u(t)|_{E^r}^p dt \right)^{1/p}.$$

Если  $p = \infty$ , то через  $L_\infty^r(G)$  будем обозначать банахово пространство ограниченных измеримых вектор-функций  $u = u(t) = (u^1(t), \dots, u^r(t))$  с нормой

$$\|u\|_{L_\infty} = \operatorname{ess\,sup}_{t \in G} |u(t)|_{E^r} = \inf_v \sup_{t \in G} |v(t)|_{E^r},$$

где  $v = v(t)$  пробегает множество всех измеримых вектор-функций, совпадающих с  $u(t)$  почти всюду на  $G$ . Можно показать, что  $\lim_{p \rightarrow \infty} \|u\|_{L_p} = \|u\|_{L_\infty}$  для всех  $u \in L_\infty(G)$ . Если  $r = 1$ , то вместо  $L_p^r(G)$  будем писать просто  $L_p(G)$ ,  $1 \leq p \leq +\infty$ . Если  $p = 2$ , то пространство  $L_2^r(G)$  является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$\langle u, v \rangle_{L_2} = \int_G \langle u(t), v(t) \rangle_{E^r} dt = \int_G \left( \sum_{i=1}^r u^i(t) v^i(t) \right) dt;$$

тогда  $\|u\|_{L_2}^2 = \langle u, u \rangle_{L_2}$ . Пространство  $L_p^r(G)$  при  $1 < p < \infty$  является рефлексивным, а при  $p = 1$  и  $p = \infty$  оно нерефлексивно. Сопряженным для  $L_p^r(G)$ ,  $1 < p < \infty$ , является пространство  $L_q^r(G)$ , где  $1 < q < \infty$ ,  $p^{-1} + q^{-1} = 1$ , для  $L_1^r(G)$  сопряженным является пространство  $L_\infty^r(G)$ ; описание сопряженного пространства для  $L_\infty(G)$  см. в [258; 371].

Через  $C(G)$  будем обозначать банахово пространство непрерывных на замкнутом множестве  $G$  функций с нормой  $\|u\|_C = \max_{t \in G} |u(t)|$ ; это пространство нерефлексивно; описание сопряженного к нему пространства см. в [258; 371].

Пусть множество  $G$  из  $E^n$  имеет непустую внутренность. Через  $C^\infty(G)$  будем обозначать множество функций, бесконечно дифференцируемых на множестве  $G$ . Говорят, что функция  $f(s) = f(s_1, \dots, s_n) \in L_1(G)$  имеет *обобщенную производную*  $\partial f(s)/\partial s_i = f_{s_i}(s)$  по переменной  $s_i$  в  $G$ , если  $f_{s_i}(s) \in L_1(G)$  и  $\int_G \varphi(s) f_{s_i}(s) ds = - \int_G \varphi_{s_i}(s) f(s) ds$  для любой функции  $\varphi(s) \in C^\infty(G)$ , обрывающейся в нуль в некоторой приграничной полосе множества  $G$ ; здесь  $\varphi_{s_i}(s)$  — частная производная  $\varphi(s)$  по переменной  $s_i$  [441; 492; 648].

Через  $H^1(G)$  (или  $W_2^1(G)$ ) принято обозначать гильбертово пространство функций  $f(s) \in L_2(G)$ , обладающих обобщенными производными  $f_{s_i}(s) \in L_2(G)$  по всем переменным  $s_1, \dots, s_n$ , причем скалярное произведение в этом пространстве определяется так:

$$\langle f, g \rangle_{H^1} = \int_G \left( f(s)g(s) + \sum_{i=1}^n f_{s_i}(s)g_{s_i}(s) \right) ds,$$

а норма имеет вид  $\|f\|_{H^1} = (\langle f, f \rangle_{H^1})^{1/2}$ .

Через  $H^m(G)$  (или  $W_2^m(G)$ ) обозначают гильбертово пространство функций  $f(s) \in L_2(G)$ , обладающих всеми обобщенными частными производными до порядка  $m$  включительно, принадлежащими  $L_2(G)$ ; скалярное произведение в  $H^m(G)$  определяется равенством

$$\langle f, g \rangle_{H^m} = \int_G \sum_{0 \leq m_1 + \dots + m_n \leq m} \frac{\partial^{m_1 + \dots + m_n} f(s)}{\partial s_1^{m_1} \dots \partial s_n^{m_n}} \frac{\partial^{m_1 + \dots + m_n} g(s)}{\partial s_1^{m_1} \dots \partial s_n^{m_n}} ds,$$

а норма имеет вид  $\|f\|_{H^m} = (\langle f, f \rangle_{H^m})^{1/2}$  [492; 648; 649].

Ниже нам понадобятся пространства  $H_r^m(G)$ ,  $m \geq 1$ , представляющие собой обобщение пространств  $H^m(G)$  на случай  $r$ -мерных вектор-функций. Приведем соответствующие определения для случая, когда  $G = [a, b] = \{t \in E^1: a \leq t \leq b\}$ ,  $a < b$ . Через  $H_r^m[a, b]$  обозначим гильбертово пространство вектор-функций  $u = u(t) = (u^1(t), \dots, u^r(t)) \in L_2^r[a, b]$ , обладающих обобщенными производными  $\frac{d^i u(t)}{dt^i} = \left(\frac{d^i u^1(t)}{dt^i}, \dots, \frac{d^i u^r(t)}{dt^i}\right)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , принадлежащими  $L_2^r[a, b]$ ; скалярное произведение в этом пространстве определяется равенством

$$\langle u, v \rangle_{H_r^m} = \int_a^b \left( \langle u(t), v(t) \rangle_{E^r} + \sum_{i=1}^m \left\langle \frac{d^i u(t)}{dt^i}, \frac{d^i v(t)}{dt^i} \right\rangle_{E^r} \right) dt,$$

норма равна

$$\|u\|_{H_r^m} = (\langle u, u \rangle_{H_r^m})^{1/2} = \left( \int_a^b \left( |u(t)|_{E^r}^2 + \sum_{i=1}^m \left| \frac{d^i u(t)}{dt^i} \right|_{E^r}^2 \right) dt \right)^{1/2}.$$

Удобно считать, что  $H_r^0[a, b] = L_2^r[a, b]$ . Можно показать [95; 535; 649], что если  $u(t) \in H_r^m[a, b]$ ,  $m \geq 1$ , то  $u(t)$ ,  $\frac{du(t)}{dt}$ ,  $\dots$ ,  $\frac{d^{m-1}u(t)}{dt^{m-1}}$  представляют собой абсолютно непрерывные вектор-функции на отрезке  $[a, b]$ .

При  $r = 1$  пространство  $H_r^m[a, b]$ , как и выше, будем обозначать просто  $H^m[a, b]$ . Подпространство функций из  $H^m[a, b]$  со свойством  $\frac{d^i u(a)}{dt^i} = 0$ ,  $\frac{d^i u(b)}{dt^i} = 0$ ,  $i = 1, \dots, m-1$ , будем обозначать через  $H_0^m[a, b]$ . Подпространство  $H_0^m[a, b]$  замкнуто в  $H^m[a, b]$  и поэтому само является гильбертовым пространством. В  $H_0^m[a, b]$  наряду со скалярным произведением и нормой, индуцированными из  $H^m[a, b]$ , можно ввести скалярное произведение  $\langle u, v \rangle_{H_0^m} = \int_a^b \frac{d^m u(t)}{dt^m} \frac{d^m v(t)}{dt^m} dt$  и норму  $\|u\|_{H_0^m} = \left( \int_a^b \left( \frac{d^m u(t)}{dt^m} \right)^2 dt \right)^{1/2}$ , эквивалентную норме  $\|u\|_{H^m}$ , т. е.  $c_1 \|u\|_{H^m} \leq \|u\|_{H_0^m} \leq \|u\|_{H^m}$ ,  $c_1 = \text{const} > 0$ .

Пополнение  $L_2[a, b]$  в норме  $\sup_{\varphi \in H_0^1[a, b]} \frac{\langle f, \varphi \rangle_{L_2[a, b]}}{\|\varphi\|_{H_0^1}}$  обозначают через  $H^{-1}[a, b]$ .

Можно показать [458; 557], что получающееся гильбертово пространство  $H^{-1}[a, b]$  изометрично пространству  $(H_0^1[a, b])^*$ , поэтому можно считать, что  $H^{-1}[a, b] = (H_0^1[a, b])^*$ . Пространство  $H^{-1}[a, b]$  состоит из обобщенных функций (распределений), являющихся производными функций из  $L_2[a, b]$  в смысле обобщенных функций (например, известная  $\delta$ -функция Дирака, являющаяся производной функции скачка Хевисайда, принадлежит  $H^{-1}[a, b]$ ).

Пусть  $Q = G \times \{0 \leq t \leq T\}$ ,  $G \subseteq E^n$ ,  $T$  — заданное положительное число. Через  $H^{m,q}(Q)$  будем обозначать пространство функций  $f(s, t) \in L_2(Q)$ , обладающих обобщенными частными производными  $\frac{\partial^{i_1+\dots+i_n} f(s, t)}{\partial s_1^{i_1} \dots \partial s_n^{i_n}} \in L_2(Q)$ ;  $0 \leq i_1 + \dots + i_n \leq m$ ,  $\frac{\partial^i f(s, t)}{\partial t^i} \in L_2(Q)$ ,  $i = 1, \dots, q$ ; это пространство является



гильбертовым со скалярным произведением

$$\langle f, g \rangle_{H^{m,q}} = \int_0^T \langle f(\cdot, t), g(\cdot, t) \rangle_{H^m} dt + \iint_Q \sum_{i=1}^q \frac{\partial^i f(s, t)}{\partial t^i} \frac{\partial^i g(s, t)}{\partial t^i} ds dt$$

и нормой  $\|f\|_{H^{m,q}} = (\langle f, g \rangle_{H^{m,q}})^{1/2}$ .

При постановках краевых задач для уравнений с частными производными и связанных с ними задач оптимального управления важное значение имеет понятие следа функции, обобщающее понятие значения функции для классов разрывных функций. Мы здесь ограничимся следующим определением (более общие определения см. в [95; 492]).

**О п р е д е л е н и е 2.** Пусть  $Q = \{(s, t) : 0 \leq s \leq l, 0 \leq t \leq T\}$  и пусть функция  $z = z(s, t) \in L_1(Q)$ . Функция  $g(s) \in L_1[0, l]$  называется *следом* функции  $z(s, t)$  при  $t = \tau$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  найдется число  $\delta > 0$  такое, что для почти всех  $t \in [0, T]$ , для которых  $|t - \tau| < \delta$ , имеет место неравенство

$$\int_0^l |z(s, t) - g(s)| ds < \varepsilon.$$

Если след функции  $z(s, t)$  при  $t = \tau$  существует, то его будем обозначать через  $z(s, \tau)$ ,  $0 \leq s \leq l$ , или  $z(\cdot, \tau)$ . Аналогично определяется след  $z(s, \cdot) = z(s, t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ , при каждом фиксированном  $s \in [0, l]$ . Можно показать, что если след функции существует, то он определяется единственным образом.

Если функция  $z(s, t)$  непрерывна на  $Q$ , то след  $z(\cdot, t)$  этой функции при каждом  $t \in [0, T]$  совпадает со значением этой функции, представляющим собой функцию  $z(s, t)$  переменной  $s \in [0, l]$  при фиксированном  $t$ .

Пусть  $z = z(s, t) \in L_1(Q)$ . Напоминаем, что под элементом из  $L_1(Q)$  понимается не одна функция, а класс эквивалентных функций, т. е. функций, отличающихся друг от друга на множестве нулевой меры. Поскольку двумерная мера множества  $U_\tau = \{(s, t) : 0 \leq s \leq l, t = \tau\}$  равна нулю, то эквивалентные функции на этом множестве могут принимать произвольные значения или даже могут быть не определены. Поэтому говорить о значениях функции  $z(s, t) \in L_1(Q)$  при фиксированном  $t$  или  $s$  не имеет смысла, а введенное выше понятие следа функции естественным образом обобщает понятие значения функции для функций из  $L_1(Q)$ .

Однако в общем случае нельзя ожидать, что функция из  $L_1(Q)$  будет иметь след при всех значениях  $t \in [0, T]$  или  $s \in [0, l]$ .

**П р и м е р 2.** Пусть  $z(s, t) = 0$  при  $0 \leq s \leq l$ ,  $T/(2k) < t \leq T/(2k - 1)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ,  $z(s, t) = 1$  при  $0 \leq s \leq l$ ;  $T/(2k + 1) < t \leq T/(2k)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Эта функция принадлежит  $L_1(Q)$ , но при  $t = 0$  не имеет следа.

Для того чтобы функция  $z = z(s, t) \in L_1(Q)$  имела след при всех  $t \in [0, T]$ , на нее нужно наложить дополнительные ограничения. Например, функция  $z(s, t) \in L_1(Q)$ , обладающая обобщенной производной  $z_t(s, t) \in L_1(Q)$ , имеет след при каждом  $t \in [0, T]$ , и ее можно изменить на множестве двумерной меры нуль так, что она при всех  $t \in [0, T]$  будет иметь значения, совпадающие

со следом почти всюду на отрезке  $0 \leq s \leq l$ . Замечательно то, что в этом случае справедлива формула, обобщающая формулу Ньютона–Лейбница:

$$\int_a^b z_t(s, t) dt = z(s, b) - z(s, a),$$

где  $z(s, b)$ ,  $z(s, a)$ ,  $0 \leq s \leq l$ , — следы функции  $z(s, t)$  при  $t = b$  и  $t = a$  соответственно;  $a, b$  — любые числа из отрезка  $0 \leq t \leq T$ , причем в формуле равенство имеет место для почти всех  $s \in [0, l]$ . Если дополнительно известно, что  $z(s, t)$ ,  $z_t(s, t) \in L_p(Q)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , то следы такой функции принадлежат  $L_p[0, l]$  и непрерывны по  $t$  в метрике  $L_p[0, l]$ , т. е.

$$\lim_{t \rightarrow \tau} \int_0^l |z(s, t) - z(s, \tau)|^p ds = 0$$

при всех  $\tau \in [0, T]$ . В частности, если  $z(s, t) \in H^1(Q)$ , то такая функция имеет следы  $z(\cdot, t) \in L_2[0, l]$  при всех  $t \in [0, T]$  и  $z(s, \cdot) \in L_2[0, T]$  при всех  $s \in [0, l]$ , причем указанные следы непрерывно зависят в метрике  $L_2[0, l]$  и  $L_2[0, T]$  соответственно [492; 648; 649].

Если для функции  $z(s, t) \in L_2(Q)$  существует последовательность  $\{z_k(s, t)\} \in C^\infty(Q)$  такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \operatorname{ess\,sup}_{t \in [0, T]} \int_0^l |z_k(s, t) - z(s, t)|^2 ds = 0,$$

то  $z(s, t)$  также имеет след  $z(\cdot, t) \in L_2[0, l]$  при каждом  $t \in [0, T]$ , причем существует эквивалентная функция, значения которой совпадают со следом  $z(\cdot, t)$  при всех  $t \in [0, T]$  [95; 492].

Остальные обозначения, определения и факты из функционального анализа будем приводить ниже по мере надобности.

## § 2. Теорема Вейерштрасса в функциональных пространствах

1. Пусть  $U$  — некоторое множество, а  $J(u)$  — функция, определенная на этом множестве и принимающая на нем конечные вещественные значения. Для обозначения задачи минимизации [максимизации] функции  $J(u)$  на множестве  $U$ , как и выше, будем пользоваться следующей краткой символической записью:

$$J(u) \rightarrow \inf, \quad u \in U \quad [J(u) \rightarrow \sup, \quad u \in U]. \quad (1)$$

Воспроизведем определения некоторых понятий, которые в гл. 1, 2 были введены для задачи (1), когда множество  $U$  принадлежит конечномерному пространству  $E^n$ . Функция  $J(u)$  называется *ограниченной снизу [сверху]* на множестве  $U$ , если существует число  $A$  такое, что  $J(u) \geq A$  [ $J(u) \leq A$ ] для всех  $u \in U$ . Функция  $J(u)$  *не ограничена снизу [сверху]* на  $U$ , если существует последовательность  $\{u_k\} \in U$ , для которой  $\lim_{k \rightarrow \infty} J(u_k) = -\infty$  [ $\lim_{k \rightarrow \infty} J(u_k) = +\infty$ ].

Пусть функция  $J(u)$  ограничена снизу [сверху] на  $U$ . Тогда существует число  $a$ , называемое *нижней* [*верхней*] *гранью* функции  $J(u)$  на множестве  $U$  и обладающее свойствами: 1)  $J(u) \geq a$  [ $J(u) \leq a$ ] при всех  $u \in U$ ; 2) для любого  $\varepsilon > 0$  найдется точка  $u_\varepsilon \in U$ , для которой  $J(u_\varepsilon) < a + \varepsilon$  [ $J(u_\varepsilon) > a - \varepsilon$ ]. Если  $J(u)$  не ограничена снизу [сверху], то в качестве нижней [верхней] грани  $J(u)$  на  $U$ , по определению, принимают  $a = -\infty$  [ $a = +\infty$ ]. Нижнюю [верхнюю] грань  $J(u)$  на  $U$  будем обозначать

$$\inf_U J(u) = J_* \quad \left[ \sup_U J(u) = J^* \right].$$

Если  $J_* > -\infty$  [ $J^* < \infty$ ], то можно ввести множества

$$U_* = \{u \in U : J(u) = J_*\} \quad [U^* = \{u \in U : J(u) = J^*\}].$$

Если  $U_* \neq \emptyset$  [ $U^* \neq \emptyset$ ], то говорят, что нижняя [верхняя] грань в задаче (1) достигается, а точки  $u_* \in U_*$  [ $u^* \in U^*$ ] называются *точками глобального минимума* [*максимума*] функции  $J(u)$  на  $U$ .

Последовательность  $\{u_k\} \in U$  называют *минимизирующей* [*максимизирующей*] для функции  $J(u)$  на множестве  $U$ , если

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J(u_k) = J_* \quad \left[ \lim_{k \rightarrow \infty} J(u_k) = J^* \right].$$

Поскольку задача максимизации  $J(u) \rightarrow \sup, u \in U$  равносильна задаче минимизации  $(-J(u)) \rightarrow \inf, u \in U$ , в дальнейшем мы будем рассматривать в основном задачи минимизации.

Как и в гл. 2, теоремами Вейерштрасса будем называть теоремы, содержащие утверждение о достижении нижней грани некоторой функции на каком-либо множестве.

**2.** Сначала приведем теорему Вейерштрасса, обобщающую теорему 2.1.1 на случай метрических пространств. Для ее формулировки нам понадобятся понятия компактного множества и полунепрерывности снизу функции в метрическом пространстве. Напоминаем [371; 393; 705], что множество  $M$  называется *метрическим пространством*, если каждой паре элементов  $u, v \in M$  соответствует вещественное число  $\rho(u, v)$ , называемое расстоянием между элементами  $u$  и  $v$ , которое удовлетворяет условиям (аксиомам): 1)  $\rho(u, v) \geq 0 \forall u, v \in M$ , причем  $\rho(u, v) = 0$  тогда и только тогда, когда  $u = v$ ; 2)  $\rho(u, v) = \rho(v, u) \forall u, v \in M$ ; 3)  $\rho(u, v) \leq \rho(u, w) + \rho(w, v) \forall u, v, w \in M$ . Такая функция  $\rho: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  называется *метрикой*.

Каждое банахово (и гильбертово) пространство  $B$  является линейным метрическим пространством с метрикой  $\rho(u, v) = \|u - v\|_B$ . Однако не каждое метрическое пространство  $M$  линейно. Множество  $O(u, \varepsilon) = \{v \in M : \rho(v, u) < \varepsilon\}$  называется  $\varepsilon$ -*окрестностью точки*  $u$ . Точка  $u \in M$  называется *предельной точкой* множества  $U \subseteq M$ , если любая окрестность точки  $u$  содержит хотя бы одну точку из  $U$ , отличную от  $u$ . Говорят, что последовательность точек  $\{u_k\}$ ,  $u_k \in M$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , *сходится* к точке  $u$ ,

если  $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(u_k, u) = 0$ . Точка  $u$  является предельной точкой множества  $U$  тогда и только тогда, когда существует последовательность  $\{u_k\} \in U$ ,  $u_k \neq u$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , сходящаяся к  $u$ . Множество  $U$  называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки. Множество  $U$  замкнуто тогда и только тогда, если любая точка  $u$ , к которой сходится хотя бы одна последовательность  $\{u_k\} \in U$ , принадлежит самому множеству  $U$ . Множество  $U$  называется *ограниченным*, если существует шар  $S(u_0, R) = \{u \in M : \rho(u, u_0) \leq R\}$  радиуса  $R$  с центром в точке  $u_0 \in M$ , такой, что  $U \subseteq S(u_0, R)$ .

**О п р е д е л е н и е 1.** Множество  $U$  из метрического пространства  $M$  называется *относительно компактным* в метрике этого пространства, если из любой последовательности  $\{u_k\} \in U$  можно выбрать хотя бы одну подпоследовательность  $\{u_{k_m}\}$ , которая сходится к некоторой точке  $v \in M$ . Если при этом любая такая точка  $v$  принадлежит самому множеству  $U$ , то такое множество  $U$  называется *компактным* в  $M$ .

Компактное множество замкнуто, а относительно компактное множество необязательно замкнуто. Если множество  $U$  относительно компактно, то его замыкание  $\bar{U}$ , которое получается присоединением к  $U$  всех его предельных точек, компактно.

**О п р е д е л е н и е 2.** Функцию  $J(u)$ , определенную на множестве  $U$  из метрического пространства  $M$ , называют *полу непрерывной снизу [сверху]* в точке  $u \in U$ , если для любой последовательности  $\{u_k\} \in U$ , сходящейся к точке  $u$ , имеет место неравенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J(u_k) \geq J(u) \quad \left[ \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} J(u_k) \leq J(u) \right]. \quad (2)$$

Функция  $J(u)$  называется *полу непрерывной снизу [сверху]* на множестве  $U$ , если она полу непрерывна снизу [сверху] в каждой точке  $u \in U$ . Функция  $J(u)$  называется *непрерывной в точке  $u \in U$  [на множестве  $U$ ]*, если она полу непрерывна снизу и сверху в точке  $u$  [на множестве  $U$ ].

**О п р е д е л е н и е 3.** Говорят, что последовательность  $\{u_k\} \in M$  сходится к множеству  $U \subseteq M$ , если  $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(u_k, U) = 0$ , где  $\rho(u, U) = \inf_{v \in U} \rho(u, v)$  — расстояние от точки  $u$  до множества  $U$ .

Заметим, что определения 1, 2, 3 обобщают соответствующие определения 2.1.1, 2.1.3, 1.1.5 на случай метрических пространств. Нетрудно убедиться, что леммы 2.1.1, 2.1.2 сохраняют силу и в метрических пространствах. Справедлива

**Т е о р е м а 1.** Пусть  $U$  — компактное множество из метрического пространства  $M$ , функция  $J(u)$  определена и полу непрерывна снизу на  $U$ . Тогда  $J_* = \inf_U J(u) > -\infty$ , множество  $U_* = \{u \in U : J(u) = J_*\}$  непусто, компактно и любая минимизирующая последовательность  $\{u_k\}$  сходится к множеству  $U_*$ .

Эта теорема доказывается так же, как и аналогичная теорема 2.1.1.

Для применения теоремы 1 к конкретным задачам минимизации полезно иметь критерии компактности и относительной компактности в наиболее

часто встречающихся в приложениях функциональных пространствах. Например, в пространствах  $C(G)$ ,  $L_p(G)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , где  $G$  — ограниченное замкнутое множество из  $E^n$ , критерий компактности может быть сформулирован следующим образом.

**Теорема 2.** *Замкнутое множество  $U$  в пространствах  $C(G)$ ,  $L_p(G)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , компактно тогда и только тогда, когда*

1) *множество  $U$  равномерно ограничено, т. е.  $\sup_{u \in U} \|u\| < \infty$ ;*

2) *множество  $U$  равномерно непрерывно, т. е. для любого  $\varepsilon > 0$  найдется число  $\delta > 0$  такое, что  $\sup_{u \in U} \|u(t + \Delta t) - u(t)\| < \varepsilon$  для всех  $t, t + \Delta t \in G$ ,  $|\Delta t| < \delta$ ; здесь  $\|u\|$  означает норму пространства  $C(G)$  или  $L_p(G)$ ,  $1 \leq p < \infty$ .*

Если в сформулированной теореме откажемся от требования замкнутости множества  $U$ , то получим критерий относительной компактности в указанных пространствах; доказательство этого утверждения в  $C(G)$  см., например, [371; 393; 705] (теорема Арцела), в  $L_p(G)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , см. в [371; 492; 648]. Критерии относительной компактности и компактности в различных других функциональных пространствах читатель может найти в [95; 258; 393; 535; 648; 649; 772]; некоторые такие критерии будут обсуждаться ниже в § 2.2.

В евклидовом пространстве  $E^n$  множество компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено. Доказательство этого факта существенно опирается на известную теорему Больцано–Вейерштрасса, согласно которой из любой ограниченной последовательности  $\{u_k\} \in E^n$  можно выбрать хотя бы одну сходящуюся подпоследовательность. Однако такая теорема в метрических пространствах, вообще говоря, неверна. По этой причине, оказывается, в метрических пространствах замкнутости и ограниченности множества, вообще говоря, недостаточно для его компактности.

**Пример 1.** Пусть  $H$  — гильбертово пространство,  $S_1 = \{u \in H: \|u\| \leq 1\}$  — единичный шар в  $H$ , пусть  $\{e_k\}$  — некоторая бесконечная ортонормированная система в  $H$ . Из последовательности  $\{e_k\} \in S_1$  невозможно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к какой-нибудь точке в метрике  $H$ . В самом деле, если бы такая последовательность  $\{e_{k_m}\}$  существовала, то она была бы фундаментальной в  $H$  [393; 705]. Однако  $\|e_k - e_m\|^2 = 2 \quad \forall m \neq k$ , и последовательность  $\{e_k\}$  не может иметь ни одной фундаментальной подпоследовательности. Это означает, что шар в любом бесконечномерном гильбертовом пространстве  $H$  не может быть компактным в метрике  $H$ .

**Пример 2.** Пусть  $U = \{u = u(t) \in L_2[0, 1]: |u(t)| \leq 1 \text{ почти всюду на } [0, 1]\}$ . Это множество не является компактным в метрике  $L_2[0, 1]$ . В самом деле, возьмем последовательность  $u_k = \sin \pi k t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . В примере 1.1 было замечено, что  $\{u_k\} \rightarrow 0$  слабо в  $L_2[0, 1]$ . Однако

$$\|u_k - u_m\|_{L_2}^2 = \int_0^1 |\sin \pi k t - \sin \pi m t|^2 dt = 1 \quad \forall k \neq m,$$

поэтому из  $\{u_k\}$  нельзя выбрать подпоследовательность, которая по норме  $L_2[0, 1]$  сходилась бы к нулю. Значит,  $U$  некомпактно в метрике  $L_2[0, 1]$ .

**Пример 3.** Множество  $U = \{u = u(t) \in C[0, 1]: |u(t)| \leq 1, 0 \leq t \leq 1\}$  — шар в  $C[0, 1]$  — некомпактно в метрике  $C[0, 1]$ . Это может быть доказано с помощью тех же рассуждений, которые проводились в предыдущем примере, с учетом того, что из сходимости в метрике  $C[0, 1]$  следует сходимость в метрике  $L_2[0, 1]$ .

**3.** Заметим, что множества, подобные рассмотренным в примерах 1–3, часто встречаются в прикладных задачах оптимального управления. Отсутствие свойства компактности этих множеств не позволяет применять теорему 1 для доказательства существования оптимального управления в таких задачах. Поэтому желательно иметь такие теоремы Вейерштрасса в банаховых и гильбертовых пространствах, которые не требуют компактности множества в метрике этих пространств. Для формулировки таких теорем введем несколько понятий, связанных с понятием слабой сходимости в банаховом пространстве.

**Определение 4.** Множество  $U$  из банахова пространства  $B$  называется *относительно слабо компактным*, если из любой последовательности  $\{u_k\} \in U$  можно выбрать хотя бы одну подпоследовательность  $\{u_{k_m}\}$ , которая слабо в  $B$  сходится к некоторой точке  $v \in U$ . Если при этом такая точка  $v$  принадлежит самому множеству  $U$ , то такое множество называется *слабо компактным*.

**Определение 5.** Функцию  $J(u)$ , определенную на некотором множестве  $U$  из банахова пространства  $B$ , называют *слабо полунепрерывной снизу* [сверху] в точке  $u \in U$ , если для любой последовательности  $\{u_k\} \in U$ , которая слабо в  $B$  сходится к точке  $u$ , имеет место неравенство (2). Функция  $J(u)$  называется *слабо полунепрерывной снизу* [сверху] *на множестве  $U$* , если она слабо полунепрерывной снизу [сверху] в каждой точке  $u \in U$ . Функция  $J(u)$  называется *слабо непрерывной в точке  $u \in U$*  [на множестве  $U$ ], если она слабо полунепрерывна снизу и сверху в точке  $u$  [на множестве  $U$ ].

**Пример 4.** Функция  $J(u) = \langle c, u \rangle$ ,  $u \in B$ , где  $c$  — фиксированный элемент из сопряженного пространства  $B^*$ , слабо непрерывна на  $B$ , что вытекает непосредственно из определения слабой сходимости.

**Пример 5.** Функция  $J(u) = \|u\|_H^2$  слабо полунепрерывна снизу во всех точках гильбертова пространства  $H$ . В самом деле, пусть  $\{u_k\}$  — произвольная последовательность из  $H$ , слабо сходящаяся к точке  $u$ . Тогда

$$\begin{aligned} J(u_k) &= \|u_k\|^2 = \|(u_k - u) + u\|^2 = \\ &= \|u_k - u\|^2 + 2\langle u, u_k - u \rangle + \|u\|^2 \geq 2\langle u, u_k - u \rangle + \|u\|^2, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} \langle u, u_k - u \rangle = 0$  по определению слабой сходимости, получаем:  $\liminf_{k \rightarrow \infty} \|u_k\|^2 \geq \|u\|^2$ . Это означает, что функция  $J(u) = \|u\|_H^2$  слабо полунепрерывна снизу на  $H$ . Отметим, что последнее неравенство может быть строгим. А именно, возьмем  $v_k = u + e_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , где  $\{e_k\}$  — какая-либо бесконечная ортонормированная система из  $H$ . Так как  $\{e_k\} \rightarrow 0$  слабо в  $H$  (пример 1.1), то  $\{v_k\} \rightarrow u$  слабо в  $H$ . Кроме того,

$$\|v_k\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u, e_k \rangle + \|e_k\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u, e_k \rangle + 1, \quad k = 1, 2, \dots,$$



так что  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|v_k\|^2 = \|u\|^2 + 1 > \|u\|^2 \quad \forall u \in H$ . Это означает, что функция  $J(u) = \|u\|_H^2$  не является слабо полунепрерывной сверху и, тем более, слабо непрерывной ни в одной точке пространства  $H$ .

**Пример 6.** Функция  $J(u) = -\|u\|_H^2$  слабо полунепрерывна сверху на  $H$ , но она не будет слабо полунепрерывной снизу и, тем более, слабо непрерывной ни в одной точке  $H$ .

Из примеров 5, 6 следует, что функция может быть сильно (в метрике  $H$ ) непрерывной, но она необязательно слабо полунепрерывна снизу или сверху и, тем более, слабо непрерывна. Более того, нетрудно понять, что всякая слабо полунепрерывная снизу [сверху] функция сильно полунепрерывна снизу [сверху], слабо непрерывная функция — сильно непрерывна.

В самом деле, поскольку из сильной сходимости последовательности вытекает ее слабая сходимость, то множество  $O_1(u)$  слабо сходящихся к точке  $u$  последовательностей гораздо богаче множества  $O_2(u)$  последовательностей, сильно сходящихся к этой же точке. Поэтому неудивительно, что то из неравенств (2), которое выполняется на более богатом множестве  $O_1(u)$ , тем более будет выполняться на его подмножестве  $O_2(u)$ , что как раз и означает, что из слабой полунепрерывности снизу [сверху] функции следует ее сильная полунепрерывность снизу [сверху], а из слабой непрерывности — ее сильная непрерывность.

Далее, сформулируем один важный критерий относительно слабой компактности множеств в рефлексивных банаховых пространствах.

**Теорема 3.** *Множество  $U$  из рефлексивного банахова пространства  $B$  относительно слабо компактно тогда и только тогда, когда оно ограничено (в метрике  $B$ ).*

Эта теорема представляет собой обобщение конечномерной теоремы Больцано–Вейерштрасса. Ее доказательство см. в [705, с. 210].

**Пример 7.** В бесконечномерном гильбертовом пространстве  $H$  рассмотрим единичный шар  $S_1 = \{u \in U: \|u\| \leq 1\}$ . Выше мы выяснили (пример 1), что шар не является компактным в метрике  $H$ . Покажем, что шар  $S_1$  слабо компактен. Возьмем произвольную последовательность  $\{u_k\} \in S_1$ . Так как  $\|u_k\| \leq 1, k = 1, 2, \dots$ , то согласно теореме 3 из  $\{u_k\}$  можно выбрать подпоследовательность  $\{u_{k_m}\}$ , которая слабо сходится к некоторой точке  $v \in H$ . Отсюда с учетом слабой полунепрерывности снизу функции  $g(u) = \|u\|^2$  (пример 5) имеем:  $g(v) = \|v\|^2 \leq \varliminf_{m \rightarrow \infty} \|u_{k_m}\|^2 \leq \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \|u_{k_m}\|^2 \leq 1$ . Это означает, что  $v \in S_1$ . Слабая компактность единичного шара в  $H$  установлена.

Из теоремы 3 следует, что открытый шар  $\{u \in H: \|u\| < 1\}$  и сфера  $\{u \in H: \|u\| = 1\}$  относительно слабо компактны, но не являются слабо компактными.

Другие примеры слабо компактных множеств и слабо полунепрерывных снизу функций будут приведены ниже. Сейчас сформулируем и докажем другой, так называемый слабый вариант теоремы Вейерштрасса.

**Теорема 4.** *Пусть  $U$  — слабо компактное множество из банахова пространства  $B$ , функция  $J(u)$  определена и слабо полунепрерывна снизу*

на  $U$ . Тогда  $J_* = \inf_U J(u) > -\infty$ , множество  $U_* = \{u \in U: J(u) = J_*\}$  непусто, слабо компактно.

**Доказательство.** Возьмем произвольную минимизирующую последовательность  $\{u_k\}: u_k \in U, k = 1, 2, \dots, \lim_{k \rightarrow \infty} J(u_k) = J_*$ . Так как  $U$  — слабо компактное множество, то  $\{u_k\}$  имеет хотя бы одну подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторой точке из  $U$ . Пусть  $u_* \in U$  — одна из таких точек и пусть подпоследовательность  $\{u_{k_m}\}$  слабо сходится к  $u_*$ . Пользуясь определением нижней грани и слабой полунепрерывностью снизу функции  $J(u)$ , имеем

$$J_* \leq J(u_*) \leq \varliminf_{m \rightarrow \infty} J(u_{k_m}) = \lim_{k \rightarrow \infty} J(u_k) = J_*,$$

т. е.  $J(u_*) = J_*$ . Отсюда следует, что  $J_* > -\infty$ ,  $u_* \in U_*$ , т. е.  $U_* \neq \emptyset$ . Покажем, что множество  $U_*$  слабо компактно. Возьмем произвольную последовательность  $\{v_k\} \in U_*$ . Так как  $\{v_k\} \in U$  — слабо компактное множество, то существует подпоследовательность  $\{v_{k_m}\}$ , слабо сходящаяся к некоторой точке  $v_* \in U$ . Но  $J(v_k) = J_*, k = 1, 2, \dots$ , поэтому  $\lim_{k \rightarrow \infty} J(v_k) = J_*$ , т. е.  $\{v_k\}$  — минимизирующая последовательность. Из вышесказанного следует, что  $v_* \in U_*$ . Это значит, что множество  $U_*$  слабо компактно. Теорема 4 доказана.  $\square$

4. Для удобства пользования теоремой 4 желательно иметь набор сравнительно легко проверяемых достаточных условий слабой компактности множеств и слабой полунепрерывности снизу функций в банаховых пространствах. Приведем несколько таких условий. Для их формулировки нам понадобятся понятия выпуклого множества, выпуклой функции, которые в банаховых пространствах определяются дословно также, как в соответствующих определениях 4.1.1, 4.2.1. Кроме того, ниже нам понадобится следующая важная

**Теорема 5 (Мазур).** Если последовательность  $\{u_k\}$  из банахова пространства  $B$  сходится к точке  $u$  слабо в  $B$ , то существует последовательность  $\{v_k\}$  выпуклых комбинаций точек  $\{u_k\}$ , т. е.

$$v_k = \sum_{i=1}^k \alpha_{ki} u_i, \quad \sum_{i=1}^k \alpha_{ki} = 1, \quad \alpha_{ki} \geq 0, \quad i = 1, \dots, k,$$

такая, что  $\{v_k\}$  сходится сильно в  $B$  к той же точке  $u$ .

Доказательство этой теоремы см., например, в [357, с. 173].

**Следствие.** Пусть  $U$  — выпуклое множество из банахова пространства  $B$ , замкнутое в норме  $B$ . Тогда  $U$  — слабо замкнуто, т. е. если  $U$  — слабая предельная точка какой-либо последовательности  $\{u_k\} \in U$ , то  $v \in U$ .

**Доказательство.** Пусть последовательность  $\{u_k\} \in U$  и слабо в  $B$  сходится к точке  $v$ . По теореме 5 тогда найдется последовательность  $\{v_k\}$ , где  $v_k$  — выпуклая комбинация точек  $u_1, \dots, u_k$ , которая сильно сходится к той же точке  $v$ . Однако  $\{v_k\} \in U$  в силу выпуклости  $U$ . Кроме того,  $U$  — замкнуто в норме  $B$ . Следовательно,  $v \in U$ .  $\square$

**Теорема 6.** Всякое выпуклое замкнутое ограниченное множество  $U$  из рефлексивного банахова пространства  $B$  слабо компактно.

**Доказательство.** Пусть  $\{u_k\}$  — произвольная последовательность из  $U$ . Так как по условию множество  $U$  ограничено (в метрике  $B$ ), то последовательность  $\{u_k\}$  ограничена и по теореме 3 найдется подпоследовательность  $\{u_{k_m}\}$ , которая слабо сходится к некоторой точке  $v \in B$ . В силу следствия теоремы 5 точка  $v \in U$ .  $\square$

Приведем пример, показывающий, что в теоремах 3, 6 требование рефлексивности пространства существенно.

**Пример 8.** Рассмотрим множество  $S_1 = \{u = u(t) \in L_1[-1, 1]: \|u\|_{L_1} = \int_{-1}^1 |u(t)| dt \leq 1\}$  — единичный шар в банаховом пространстве  $L_1[-1, 1]$ . Сопряженное к  $L_1[-1, 1]$  пространство совпадает (изометрично) с пространством  $L_\infty[-1, 1]$  и значение произвольного линейного непрерывного функционала  $c = c(t) \in L_\infty[-1, 1]$  на элементе  $u = u(t) \in L_1[-1, 1]$  равно  $\langle c, u \rangle = \int_{-1}^1 c(t)u(t) dt$ . Возьмем последовательность

$$u_k = u_k(t) = \begin{cases} k & \text{при } |t| \leq \frac{1}{2k}, \\ 0 & \text{при } \frac{1}{2k} < |t| \leq 1, \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots$$

Очевидно,  $\|u_k\|_{L_1} = 1$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , так что  $\{u_k\} \in S_1$ . Допустим, что из последовательности  $\{u_k(t)\}$  можно выделить подпоследовательность  $\{u_{k_m}(t)\}$ , сходящуюся к некоторой функции  $v = v(t)$  слабо в  $L_1[-1, 1]$ , т. е.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 c(t)u_{k_m}(t) dt = \int_{-1}^1 c(t)v(t) dt \quad \forall c = c(t) \in L_\infty[-1, 1].$$

В частности, для  $c = c(t) \equiv 1$  отсюда имеем:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 1 \cdot u_{k_m}(t) dt = 1 = \int_{-1}^1 v(t) dt.$$

Это значит, что  $|v(t)| > 0$  на множестве  $E \subseteq [-1, 1]$ , имеющем меру  $\text{mes } E > 0$ . Далее, воспользуемся неравенством Чебышева:

$$\text{mes}\{t: |t| \leq 1, |v(t)| \geq A\} \leq \frac{1}{A} \int_{-1}^1 |v(t)| dt,$$

справедливым при всех  $A > 0$ . Это неравенство вытекает из оценки:

$$\int_{-1}^1 |v(t)| dt = \int_{\{|v(t)| \geq A\}} |v(t)| dt + \int_{\{|v(t)| < A\}} |v(t)| dt \geq A \text{mes}\{t: |t| \leq 1, |v(t)| \geq A\}.$$

Возьмем число  $A$  столь большим, чтобы  $\text{mes}\{t: |t| \leq 1, |v(t)| \geq A\} < \frac{1}{4} \text{mes } E$ . Кроме того, выберем число  $\delta > 0$  столь малым, чтобы  $2\delta < \frac{1}{4} \text{mes } E$ . Введем множество  $E_1 = E \setminus (\{t: |t| \leq \delta\} \cup \{t: |t| \leq 1, |v(t)| \geq A\})$ . Нетрудно видеть, что  $\text{mes } E_1 > \frac{1}{2} \text{mes } E > 0$  и  $|v(t)| > 0 \quad \forall t \in E_1$ . Определим функцию  $c_0(t)$  следующим образом:  $c_0(t) = v(t) \quad \forall t \in E_1$ ,  $c_0(t) = 0 \quad \forall t \notin E_1$ . Так

как  $|c_0(t)| \leq A \quad \forall t \in [-1, 1]$  и измерима, то  $c_0(t) \in L_\infty[-1, 1]$ . Кроме того,  $\int_{-1}^1 c_0(t)v(t) dt = \int_{E_1} v^2(t) dt > 0$ , поэтому  $\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 c_0(t)u_{k_m}(t) dt = \int_{-1}^1 c_0(t)v(t) dt > 0$ . С другой стороны,  $c_0(t)u_{k_m}(t) \equiv 0 \quad \forall t \in [-1, 1]$  для всех номеров  $k_m$ , для которых  $\frac{1}{2k_m} < \delta$ , поэтому  $\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 c_0(t)u_{k_m}(t) dt = 0$ . Противоречие. Это означает, что из последовательности  $\{u_k\} \in S_1$  невозможно выбрать подпоследовательность  $\{u_{k_m}\}$ , слабо сходящуюся к какой-либо точке из  $L_1[-1, 1]$ . Следовательно, единичный шар в  $L_1[-1, 1]$  не является относительно слабо компактным и, тем более, слабо компактным. Остается заметить, что  $S_1$  — выпуклое замкнутое ограниченное множество из  $B = L_1[-1, 1]$ , однако условие рефлексивности пространства  $B$ , требуемое в теоремах 3, 6, здесь не выполнено.

Приведем два примера слабо компактных множеств в пространстве  $L_2^r(G)$ , где  $G$  — ограниченное замкнутое множество из  $E^n$ .

**Пример 9.** Пусть  $V$  — выпуклое замкнутое множество из  $E^r$ , пусть  $U = \{u = u(t) \in L_2^r(G) : u(t) \in V \text{ почти всюду на } G\}$ . Нетрудно видеть, что  $U$  — выпуклое множество. Убедимся, что  $U$  замкнуто в метрике  $L_2^r(G)$ . Возьмем произвольную последовательность  $\{u_k(t)\} \in U$ , сходящуюся в метрике  $L_2^r(G)$  к некоторой функции  $u(t) \in L_2^r(G)$ . Тогда найдется [393, с. 388] подпоследовательность  $\{u_{k_m}(t)\}$ , сходящаяся к той же функции  $u(t)$  почти всюду на  $G$ . Поскольку  $V$  — замкнутое множество и  $u_{k_m}(t) \in V$  почти всюду на  $G$ , то при  $m \rightarrow \infty$  отсюда получим  $u(t) \in V$  почти всюду на  $G$ . Замкнутость множества  $U$  доказана. Если множество  $V$  еще и ограничено, то  $U$  — ограничено в метрике  $L_2^r(G)$ . По теореме 6 тогда множество  $U$  слабо компактно в  $L_2^r(G)$ .

**Пример 10.** Пусть  $U = \{u = u(t) = (u^1(t), \dots, u^r(t)) \in L_2^r(G) : \alpha_i(t) \leq u^i(t) \leq \beta_i(t) \text{ почти всюду на } G, i = 1, \dots, r\}$ , где  $\alpha_i(t) \leq \beta_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, r$ , — заданные функции из  $L_2(G)$ . Покажем, что  $U$  замкнуто в метрике  $L_2^r(G)$ . Пусть последовательность  $\{u_k(t)\} \in U$  сходится к  $u = u(t)$  по норме  $L_2^r(G)$ . Тогда найдется [393, с. 388] подпоследовательность  $\{u_{k_m}(t)\}$ , сходящаяся к той же функции  $u(t)$  почти всюду на  $G$ . Но  $\alpha_i(t) \leq u_{k_m}^i(t) \leq \beta_i(t)$  почти всюду на  $G$ ,  $i = 1, \dots, r$ ,  $m = 1, 2, \dots$ . Отсюда при  $m \rightarrow \infty$  получим  $\alpha_i(t) \leq u^i(t) \leq \beta_i(t)$  почти всюду на  $G$  для всех  $i = 1, \dots, r$ . Следовательно,  $u(t) \in U$ , т. е.  $U$  замкнуто в метрике  $L_2^r(G)$ . Нетрудно видеть, что  $U$  выпукло и ограничено в метрике  $L_2^r(G)$ . Согласно теореме 6 множество  $U$  слабо компактно. В метрике  $L_2^r(G)$  это множество, как видно из примера 2, при  $\alpha_i(t) \neq \beta_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, r$ , не является компактным.

Приведем один критерий слабой полунепрерывности снизу функции.

**Теорема 7.** Пусть  $U$  — выпуклое множество из банахова пространства  $B$ . Выпуклая на  $U$  функция  $J(u)$  слабо полунепрерывна снизу на  $U$  тогда и только тогда, когда  $J(u)$  сильно (в метрике  $B$ ) полунепрерывна снизу на  $U$ .

**Доказательство.** **Необходимость.** Пусть  $J(u)$  слабо полунепрерывна снизу на  $U$ . Возьмем произвольные точку  $u \in U$  и последователь-

ность  $\{u_k\} \in U$ , сходящуюся к точке  $u$  в метрике  $B$ . Тогда  $\{u_k\}$  сходится к  $u$  слабо в  $B$ , и  $\varliminf_{k \rightarrow \infty} J(u_k) \geq J(u)$ . Полунепрерывность снизу на  $U$  функции  $J(u)$  в метрике  $B$  доказана. Заметим, что выпуклость  $U$  и  $J(u)$  здесь не использовалась.

**Достаточность.** Пусть  $J(u)$  полунепрерывна снизу на  $U$ . Возьмем произвольную последовательность  $\{u_k\} \in U$ , слабо в  $B$  сходящуюся к точке  $u \in U$ . Выбирая при необходимости подпоследовательность, можем считать, что  $\varliminf_{k \rightarrow \infty} J(u_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} J(u_k)$ . Из теоремы 5 следует, что точка  $u$  принадлежит замыканию выпуклой оболочки точек  $\{u_k, u_{k+1}, \dots\}$ , где  $k$  — любое фиксированное натуральное число. Это значит, что для каждого номера  $k = 1, 2, \dots$  найдутся целое число  $m \geq k$  и вещественные числа  $\alpha_{kmi} \geq 0$ ,  $i = k, k+1, \dots, m$ ,  $\sum_{i=k}^m \alpha_{kmi} = 1$ , такие, что последовательность  $v_k = \sum_{i=k}^m \alpha_{kmi} u_i$  будет сходиться к точке  $u$  в метрике  $B$ , т. е.  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|v_k - u\| = 0$ . Тогда в силу полунепрерывности снизу  $J(u)$  в точке  $u$  имеем  $\varliminf_{k \rightarrow \infty} J(v_k) \geq J(u)$ . Из выпуклости  $J(u)$  следует (неравенство Йенсена (4.2.2)):

$$J(v_k) = J\left(\sum_{i=k}^m \alpha_{kmi} u_i\right) \leq \sum_{i=k}^m \alpha_{kmi} J(u_i) \leq \sup_{i \geq k} J(u_i), \quad k = 1, 2, \dots,$$

однако  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{i \geq k} J(u_i) = \lim_{k \rightarrow \infty} J(u_k)$ , поэтому, переходя к пределу в предыдущем неравенстве, получим

$$J(u) \leq \varliminf_{k \rightarrow \infty} J(v_k) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{i \geq k} J(u_i) = \lim_{k \rightarrow \infty} J(u_k) = \varliminf_{k \rightarrow \infty} J(u_k).$$

Слабая полунепрерывность снизу на  $U$  функции  $J(u)$  доказана.  $\square$

**Пример 11.** Пусть  $J(u) = \|u\|$  — норма в банаховом пространстве  $B$ . Так как  $\|\alpha u + (1 - \alpha)v\| \leq \alpha\|u\| + (1 - \alpha)\|v\|$  при всех  $u, v \in B$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$ , то  $J(u)$  выпукла на  $B$ . Далее, из неравенства  $\|u_k\| - \|u\| \leq \|u - u_k\|$  следует, что  $J(u) = \|u\|$  непрерывна в метрике  $B$  во всех точках  $u \in B$ . Согласно теореме 7 тогда  $J(u) = \|u\|$  слабо полунепрерывна снизу на  $B$ . Из примера 5 следует, что норма в  $B$  не будет слабо непрерывной функцией.

Из теорем 4, 6, 7 следует

**Теорема 8.** Пусть  $U$  — выпуклое замкнутое ограниченное множество из рефлексивного банахова пространства  $B$ , функция  $J(u)$  выпукла и полунепрерывна снизу на  $U$ . Тогда  $J_* > -\infty$ , множество  $U_*$  непусто, выпукло, замкнуто, ограничено.

Приведем несколько примеров задач минимизации, показывающих, что условия теорем 4, 8 не могут быть существенно ослаблены.

**Пример 12.** Рассмотрим задачу минимизации функции

$$J(u) = \int_0^1 (x^2(t) - u^2(t)) dt$$

при условиях  $\dot{x}(t) = u(t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ;  $x(0) = 0$ ,  $u = u(t) \in U = \{u(t) \in L_2[0, 1] : |u(t)| \leq 1 \text{ почти всюду на } [0, 1]\}$ . Как было показано в примере 7.4.2, в этой задаче функция  $J(u)$  не достигает на  $U$  своей нижней грани  $J_* = -1$ . Заметим, что здесь множество слабо компактно (см. примеры 2, 10). Функция  $J(u)$  непрерывна на  $U$  в метрике  $L_2[0, 1]$ , но она не является слабо полунепрерывной снизу. В самом деле, возьмем последовательность  $u_k = \sin \pi k t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , слабо сходящуюся к нулю. Нетрудно проверить, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} J(u_k) = -1/2 < J(0) = 0$ , т. е. слабой полунепрерывности снизу нет.

**Пример 13.** Рассмотрим задачу минимизации функции

$$J(u) = \int_0^1 \operatorname{sign}\left(\frac{1}{2} - t\right) u(t) dt$$

при  $u = u(t) \in U = \{u(t) \in C[0, 1] : |u(t)| \leq 1, 0 \leq t \leq 1\}$ . Здесь  $U$  — единичный шар в  $C[0, 1]$ . Нетрудно видеть, что  $J(u) > -1$  при всех  $u \in U$ , но  $\lim_{k \rightarrow \infty} J(u_k) = -1$ , где  $u_k = u_k(t) = k\left(t - \frac{1}{2}\right)$  при  $\left|t - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{k}$ ,  $u_k(t) = \operatorname{sign}\left(t - \frac{1}{2}\right)$  при  $\left|t - \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{k}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Следовательно,  $J_* = -1$ , но нижняя грань  $J(u)$  на  $U$  не достигается. Заметим, что здесь  $J(u)$  выпукла и непрерывна в метрике  $C[0, 1]$  и согласно теореме 7 она слабо полунепрерывна снизу на  $C[0, 1]$  (точнее говоря, она даже линейна и слабо непрерывна на  $C[0, 1]$ ). Кроме того, множество  $U$  выпукло, замкнуто и ограничено в  $C[0, 1]$ . Однако пространство  $C[0, 1]$  не является рефлексивным и множество  $U$  не будет слабо компактным. Любопытно, что на более широком множестве кусочно непрерывных функций, удовлетворяющих условию  $|u(t)| \leq 1$ , или на единичном шаре из  $L_\infty[0, 1]$  рассматриваемая функция достигает своей нижней грани при  $u_* = \operatorname{sign}\left(t - \frac{1}{2}\right)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .

**5.** Теоремы 4 и 8 отличаются от теоремы 1 тем, что требования к множеству  $U$  в теоремах 4, 8 ослаблены по сравнению с теоремой 1, но зато на минимизируемую функцию накладываются более жесткие ограничения. Действуя в этом же направлении, в частности, отказываясь от требования ограниченности множества  $U$ , можно получить другие теоремы Вейерштрасса. Приведем несколько таких теорем.

**Теорема 9.** Пусть  $U$  — выпуклое замкнутое множество из рефлексивного банахова пространства  $B$ , функция  $J(u)$  выпукла, полунепрерывна снизу на  $U$  и для некоторой фиксированной точки  $v \in U$  множество Лебега  $M(v) = \{u \in U : J(u) \leq J(v)\}$  ограничено. Тогда  $J_* > -\infty$ , множество  $U_* = \{u \in U : J(u) = J_*\}$  непусто, выпукло, замкнуто, ограничено.

**Доказательство** этой теоремы проводится так же, как и доказательство аналогичной теоремы 2.1.2. А именно, сначала устанавливаем, что нижняя грань  $J(u)$  на  $U$  может достигаться лишь в точках множества  $M(v)$ . Затем доказываем, что множество  $M(v)$  выпукло и замкнуто в метрике  $B$ . Кроме того,  $M(v)$  ограничено по условию. Применяя теорему 8 к задаче:  $J(u) \rightarrow \inf, u \in M(v)$ , получаем все утверждения теоремы 9.  $\square$



Достаточным для ограниченности множества  $M(v)$  является условие  $\lim_{k \rightarrow \infty} J(u_k) = +\infty$ , которое должно выполняться для любой последовательности  $\{u_k\} \in U$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k\| = +\infty$  (ср. с теоремой 2.1.3). К функциям, удовлетворяющим последнему условию, относятся сильно выпуклые и равномерно выпуклые функции. Определения 4.3.1, 4.7.1 этих функций сохраняются и в банаховом пространстве  $B$ , надо лишь в них заменить  $|u - v|$  на норму  $\|u - v\|_B$ .

Примером сильно выпуклой функции в гильбертовом пространстве  $H$  является функция  $J(u) = \|u\|_H^2$ , что следует из тождества (4.3.2), которое справедливо в любом гильбертовом пространстве. Функция  $J(u) = \|u\|_H^\gamma$  строго равномерно выпукла на  $H$  при всех  $\gamma \geq 2$  с модулем выпуклости  $\delta(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\gamma-2} t^\gamma$ . В пространствах  $L_p^r(G)$  и  $l_p$  функция  $J(u) = \|u\|^\gamma$  строго равномерно выпукла на всем пространстве при всех  $\gamma \geq p \geq 2$  с модулем выпуклости  $\delta(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\gamma-1} t^\gamma$ , а при  $1 < p < 2$  эта функция строго равномерно выпукла при всех  $\gamma > 1$  на любом выпуклом ограниченном множестве из  $L_p^r(G)$  или  $l_p$  [191].

Следует сказать, что не во всяком банаховом пространстве существуют сильно выпуклые функции. Более того, известно, что (с некоторыми оговорками) в банаховом пространстве  $B$ , в котором существует сильно выпуклая функция на  $B$ , можно ввести скалярное произведение и превратить его в гильбертово пространство с нормой, эквивалентной норме  $B$ .

Не обсуждая возникающие здесь тонкие вопросы, мы ограничимся рассмотрением сильно выпуклых функций лишь на выпуклых множествах из гильбертовых пространств. Отметим, что сумма любой выпуклой функции и сильно [равномерно] выпуклой функции является сильно [равномерно] выпуклой, так что классы сильно [равномерно] выпуклых функций в упомянутых пространствах достаточно богаты.

Приведем формулировки теорем Вейерштрасса для сильно выпуклых и равномерно выпуклых функций, аналогичных теоремам 4.3.1, 4.7.1.

**Теорема 10.** Пусть  $U$  — выпуклое замкнутое множество из гильбертова пространства  $H$ , а функция  $J(u)$  сильно выпукла и полунепрерывна снизу на  $U$ . Тогда:

- 1) множество Лебега  $M(v) = \{u \in U : J(u) \leq J(v)\}$  выпукло, замкнуто и ограничено при всех  $v \in U$ ;
- 2)  $J_* > -\infty$ ,  $U_* \neq \emptyset$ , причем  $U_*$  состоит из единственной точки  $u_*$ ;
- 3) любая минимизирующая последовательность  $\{u_k\}$  сходится к точке  $u_*$  по норме  $H$ , причем

$$\frac{1}{2} \varkappa \|u_k - u_*\|^2 \leq J(u_k) - J(u_*), \quad k = 1, 2, \dots$$

**Теорема 11.** Пусть  $U$  — выпуклое замкнутое множество из рефлексивного банахова пространства  $B$ , функция  $J(u)$  равномерно выпукла и полунепрерывна снизу на  $U$ . Тогда:

1) множество Лебега  $M(v) = \{u \in U: J(u) \leq J(v)\}$  выпукло, замкнуто и ограничено при всех  $v \in U$ ;

2)  $J_* > -\infty$ ,  $U_* \neq \emptyset$ , причем  $U_*$  выпукло, замкнуто и ограничено;

3) если, кроме того, функция  $J(u)$  строго равномерно выпукла на  $U$ , то  $U_*$  состоит из единственной точки  $u_*$  и всякая минимизирующая последовательность  $\{u_k\}$  сходится к точке  $u_*$  по норме  $B$ , причем

$$\delta(\|u_k - u_*\|) \leq J(u_k) - J(u_*), \quad k = 1, 2, \dots$$

Доказательство теорем 10, 11 полностью аналогично доказательству теорем 4.3.1, 4.7.1 соответственно. При рассмотрении возникающей по ходу доказательства задачи:  $J(u) \rightarrow \inf, u \in M(v)$  вместо теоремы 2.1.2 здесь нужно сослаться на теорему 9.

Теоремы 1, 4, 8–11 широко используются в различных приложениях: при доказательстве существования решения в задачах оптимального управления, при доказательстве существования элемента наилучшего приближения в теории приближения функций и т. д. Некоторые из таких приложений будут рассмотрены ниже.

Более тонкие теоремы существования, учитывающие специфику конкретных классов задач оптимизации, можно найти в [132; 211; 393; 399; 465; 645; 687; 722; 843; 875; 876] и др.

**6.** Отдельно остановимся на одном важном классе задач минимизации:

$$J(u) = \|Au - b\|_F^2 \rightarrow \inf, \quad u \in U, \quad (3)$$

где  $A$  — линейный непрерывный оператор, действующий из гильбертова пространства  $H$  в гильбертово пространство  $F$ , т. е.  $A \in \mathcal{L}(H \rightarrow F)$ ,  $b$  — заданный элемент из  $F$ ,  $U$  — заданное множество из  $H$ . Функцию  $J(u) = \|Au - b\|_F^2$  называют *квадратичной*. Задача (3) возникает во многих приложениях, ей посвящена обширная литература (см., например, [459; 496], библиографию к ним). В частности, если  $A$  — матрица размера  $m \times n$ ,  $U = H = E^n$ , к задаче (3) приводит *метод наименьших квадратов* решения системы линейных алгебраических уравнений  $Au = b$ . Ниже мы увидим, что многие задачи оптимального управления линейными системами могут быть записаны в виде задачи (3).

Покажем, что функция  $J(u) = \|Au - b\|_F^2$  слабо полунепрерывна снизу на  $H$ . Этот факт нетрудно установить с помощью теоремы 7, однако мы здесь приведем для него прямое доказательство.

Возьмем произвольную точку  $u \in H$  и произвольную последовательность  $\{u_k\}$ , слабо в  $H$  сходящуюся к этой точке. Покажем, что тогда последовательность  $\{Au_k\}$  слабо в  $F$  сходится к точке  $Au$ . С этой целью воспользуемся равенством  $\langle Au_k, c \rangle_F = \langle u_k, A^*c \rangle$ , справедливым для всех  $c \in F$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , где  $A^* \in \mathcal{L}(F \rightarrow H)$  — сопряженный к  $A$  оператор. Перейдем в этом равенстве к пределу при  $k \rightarrow \infty$ . Учитывая, что  $\{u_k\} \rightarrow u$  слабо в  $H$ , получим

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle Au_k, c \rangle_F = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle A^*c, u_k \rangle_H = \langle A^*c, u \rangle_H = \langle c, Au \rangle_F \quad \forall c \in F.$$

Это означает, что  $\{Au_k\} \rightarrow Au$  слабо в  $F$ . Тогда  $\{Au_k - b\} \rightarrow Au - b$  слабо в  $F$ . Пользуясь тем, что функция  $\|f\|_F^2$  слабо полунепрерывна снизу (см. пример 5), имеем:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J(u_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|Au_k - b\|_F^2 \geq \|Au - b\|_F^2 = J(u).$$

Слабая полунепрерывность снизу функции  $J(u)$  на  $H$  установлена. Отсюда и из теоремы 4 вытекает

**Теорема 12.** Пусть  $U$  — слабо компактное множество из  $H$ . Тогда задача (3) имеет хотя бы одно решение, т. е.

$$J_* \geq 0, \quad U_* = \{u \in U: J(u) = J_*\} \neq \emptyset.$$

Задачу (3) и теорему 12 проиллюстрируем на примерах задач оптимального управления.

**Пример 14.** Рассмотрим задачу:

$$J(u) = |x(T; u) - b|_{E^n}^2 \rightarrow \inf, \quad u \in U, \quad (4)$$

где  $x = x(t) = x(t; u) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$ ,  $t_0 \leq t \leq T$ , — решение системы

$$\dot{x}(t) = D(t)x(t) + B(t)u(t), \quad t_0 \leq t \leq T; \quad x(t_0) = 0, \quad (5)$$

$t$  — время,  $u = u(t) = (u^1(t), \dots, u^r(t))$ ,  $t_0 \leq t \leq T$ , моменты  $t_0, T$  заданы,  $U$  — заданное множество из  $L_2^r[t_0, T]$ ,  $D(t) = \{d_{ij}(t)\}$  — матрица размера  $n \times n$ ,  $B(t) = \{b_{ij}(t)\}$  — матрица размера  $n \times r$ ,  $d_{ij}(t) \in L_\infty[t_0, T]$ ,  $b_{ij}(t) \in L_\infty[t_0, T]$  (например,  $d_{ij}(t), b_{ij}(t)$  — кусочно непрерывные функции на  $[t_0, T]$ ),  $b$  — заданный вектор из  $E^n$ . Согласно теореме 6.1.2 задача Коши (5) при каждом фиксированном  $u = u(t) \in L_2^r[t_0, T]$  имеет, притом единственное, решение  $x(t; u)$ ,  $t_0 \leq t \leq T$  (см. определение 6.1.1). Поэтому функция (4) определена при всех  $u \in L_2^r[t_0, T]$ .

Задача (4), (5) имеет простой геометрический смысл: среди всех управлений  $u \in U$  ищется такое, для которого правый конец  $x(T; u)$  траектории был бы как можно ближе к заданной точке  $b$ . Функцию  $J(u)$  из (4) часто называют *терминальной*.

Покажем, что задачу (4), (5) можно представить в виде задачи (3). С этой целью введем оператор

$$Au = x(T; u), \quad (6)$$

который каждому управлению  $u = u(t) \in L_2^r[t_0, T]$  ставит в соответствие правый конец  $x(T; u) \in E^n$  траектории  $x(t; u)$ . Из единственности решения задачи Коши (5) следует, что

$$\begin{aligned} x(t; \alpha u + \beta v) &= \alpha x(t; u) + \beta x(t; v) \\ \forall t \in [t_0, T], \quad \forall u, v \in L_2^r[t_0, T], \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (7)$$

Это означает, что оператор  $A$ , определенный согласно (6), линейный. Убедимся, что этот оператор, действующий из гильбертова пространства  $H = L_2^r[t_0, T]$

в гильбертово пространство  $F = E^n$ , является ограниченным и, следовательно, непрерывным [393; 705]. В самом деле, из (5) имеем

$$|x(t; u)| = \left| \int_{t_0}^t D(\tau)x(\tau; u) + B(\tau)u(\tau) d\tau \right| \leqslant \\ \leqslant D_{\max} \int_{t_0}^t |x(\tau; u)| d\tau + B_{\max} \int_{t_0}^T |u(\tau)| d\tau, \quad t_0 \leqslant t \leqslant T,$$

где  $D_{\max} = \|D(t)\|_{L_\infty}$ ,  $B_{\max} = \|B(t)\|_{L_\infty}$ . Отсюда, пользуясь леммой 6.3.1 при  $\varphi(t) = |x(t; u)|$ ,  $a = D_{\max}$ ,  $b = B_{\max} \int_{t_0}^T |u(\tau)| d\tau$  и неравенством Коши–Буняковского, получаем оценку

$$|x(t; u)|_{E^n} \leqslant e^{D_{\max}(T-t_0)} B_{\max} \int_{t_0}^T |u(t)| dt \leqslant C_0 \left( \int_{t_0}^T |u(t)|^2 dt \right)^{1/2} \quad \forall t \in [t_0, T] \quad (8)$$

при всех  $u \in L_2^r[t_0, T]$ ; здесь  $C_0 = e^{D_{\max}(T-t_0)} B_{\max} \sqrt{T-t_0}$ . Отсюда при  $t = T$  с учетом (6) имеем

$$|x(T; u)| = \|Au\|_{E^n} \leqslant C_0 \|u\|_{L_2^r[t_0, T]}. \quad (9)$$

Оценка (9) означает, что  $A$  — непрерывный оператор, действующий из  $H = L_2^r[t_0, T]$  в  $F = E^n$ . Таким образом, функция (4) при условиях (5) представлена в виде  $J(u) = \|Au - f\|_F^2$ , и задача (4), (5) сведена к задаче (3). Отсюда и из теоремы 12 следует, что если множество  $U$  слабо компактно в  $L_2^r[t_0, T]$  (см. примеры 9, 10 при  $G = [t_0, T]$ ), то задача (4), (5) имеет хотя бы одно решение.

**Пример 15.** Рассмотрим задачу

$$J_1(u) = |x_1(T; u) - b_1|_{E^n}^2 \rightarrow \inf, \quad u \in U, \quad (10)$$

где  $x_1 = x_1(t; u)$  — решение задачи Коши

$$\dot{x}_1(t) = D(t)x_1(t) + B(t)u(t) + f(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant T; \quad x_1(t_0) = x_0, \quad (11)$$

$f(t) = (f^1(t), \dots, f^n(t)) \in L_2^n[t_0, T]$ ,  $x_0, b \in E^n$ ; остальные обозначения и предположения те же, что и в примере 14. Очевидно, при  $f(t) \equiv 0$ ,  $x_0 = 0$  задача (10), (11) превращается в задачу (4), (5). Нетрудно видеть, что решение задачи Коши (11) можно записать в виде

$$x_1(t; u) = x(t; u) + x_0(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant T, \quad (12)$$

где  $x(t; u)$  — решение задачи (5), а  $x_0(t)$  — решение задачи

$$\dot{x}_0(t) = D(t)x_0(t) + f(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant T, \quad x(t_0) = x_0, \quad (13)$$

получающейся из (11) при  $u(t) \equiv 0$ . Из (6), (12) следует, что  $x_1(T, u) = Au + x_0(T)$ , и функцию (10) можем представить в виде

$$J_1(u) = |x(T; u) - b|_{E^n}^2 = \|Au - b\|_{E^n}^2,$$

где  $b = b_1 - x_0(T)$ ,  $x(t; u)$  — решение задачи (5). Таким образом, задача (10), (11) сведена к задаче (4), (5). Если в (10) множество  $U$  слабо компактно в  $L_2^r[t_0, T]$ , то из теоремы 12 следует существование решения задачи (10), (11).

**Пример 16.** Задача:

$$J(u) = \int_{t_0}^T |x(t; u) - b(t)|_{E^n}^2 dt \rightarrow \inf, \quad u \in U, \quad (14)$$

где  $x(t; u)$  — решение задачи Коши (5),  $b = b(t) \in L_2^n[t_0, T]$ ,  $U$  — заданное множество из  $L_2^r[t_0, T]$ ; остальные обозначения взяты из задачи (4), (5). Функцию (14), в отличие от (4), часто называют *интегральной*. Покажем, что задачу (14), (5) также можно представить в виде задачи (3). Введем оператор

$$Au = x(t; u), \quad t_0 \leq t \leq T, \quad (15)$$

который каждому управлению  $u = u(t) \in L_2^r[t_0, T]$  ставит в соответствие траекторию  $x(t; u)$  задачи (5). Поскольку  $x(t; u)$  непрерывна на  $[t_0, T]$ , то  $x(t; u) \in L_2^n[t_0, T]$ , и мы можем считать, что оператор (15) действует из гильбертова пространства  $H = L_2^r[t_0, T]$  в гильбертово пространство  $F = L_2^n[t_0, T]$ . Из равенства (7) следует, что этот оператор линейный. Кроме того, из неравенства (8) имеем

$$\|Au\|_F = \left( \int_{t_0}^T |x(t; u)|^2 dt \right)^{1/2} \leq C_1 \|u\|_{L_2^r[t_0, T]}, \quad C_1 = (T - t_0)C_0. \quad (16)$$

Оценка (16) означает, что  $A \in \mathcal{L}(H \rightarrow F)$ , где  $H = L_2^r[t_0, T]$ ,  $F = L_2^n[t_0, T]$ . Таким образом, задача (14), (5) сведена к задаче (3). Если множество  $U$  слабо компактно в  $L_2^r[t_0, T]$ , то из теоремы 12 следует разрешимость задачи (14), (5).

**Пример 17.** Задача:

$$J_1(u) = \int_{t_0}^T |x_1(t; u) - b_1(t)|_{E^n}^2 dt \rightarrow \inf, \quad u \in U, \quad (17)$$

где  $x_1 = x_1(t; u)$  — решение задачи Коши (11),  $b(t) \in L_2^n[t_0, T]$ ; остальные обозначения и предположения те же, что и в примерах 14, 15. Пользуясь представлением решения  $x_1(t; u)$  в виде (12) и оператором  $A$ , определенным согласно (15), функцию (17) можно представить в виде

$$J_1(u) = \int_{t_0}^T |x(t; u) - b(t)|_{E^n}^2 dt = \|Au - b\|_F^2,$$

где  $b = b(t) = b_1(t) - x_0(t)$ ,  $x(t; u)$  — решение задачи (5),  $x_0(t)$  — решение задачи (13). Таким образом, задача (17), (11) также свелась к задаче (3). Если множество  $U$  слабо компактно в  $L_2^r[t_0, T]$ , то разрешимость задачи (17), (11) вытекает из теоремы 12.

Если в задаче (3) оператор  $A$  обладает некоторыми дополнительными свойствами, то в теореме 12 требование на множество  $U$  может быть ослаблено.

**Теорема 13.** Пусть  $U$  — выпуклое замкнутое множество из гильбертова пространства  $H$ , множество  $AU$  значений оператора  $A$  на множестве  $U$  замкнуто в  $H$ . Тогда задача (3) имеет хотя бы одно решение, т. е.  $J_* \geq 0$ ,  $U_* \neq \emptyset$ .

В отличие от теоремы 12 здесь ограниченность множества  $U$  не предполагается, поэтому  $U$  необязательно слабо компактно (см. теорему 3).

**Доказательство.** Так как множество  $U$  выпукло, то  $AU$  также выпукло. В самом деле, пусть  $f_1, f_2 \in AU$ . Нам надо показать, что тогда отрезок  $[f_1, f_2] = \{f_\alpha \in F: f_\alpha = \alpha f_1 + (1 - \alpha)f_2, 0 \leq \alpha \leq 1\} \in AU$ . Так как  $f_1, f_2 \in AU$ , то существуют  $u_1, u_2 \in U$  такие, что  $Au_1 = f_1$ ,  $Au_2 = f_2$ . Поскольку  $U$  выпукло, то  $u_\alpha = \alpha u_1 + (1 - \alpha)u_2 \in U \quad \forall \alpha \in [0, 1]$ . В силу линейности оператора  $A$  тогда  $f_\alpha = \alpha Au_1 + (1 - \alpha)Au_2 = A(\alpha u_1 + (1 - \alpha)u_2) = Au_\alpha$ , т. е.  $f_\alpha \in AU \quad \forall \alpha \in [0, 1]$ . Таким образом,  $AU$  — выпуклое замкнутое множество из гильбертова пространства  $F$ . Тогда существует  $b_A = \mathcal{P}_{AU}(b)$  — проекция точки  $b$  на множество  $AU$  (см. определение 4.4.1). Этот факт вытекает из сильной выпуклости функции  $g(f) = \|f - b\|_F^2$ ,  $f \in AU$  и теоремы 10. Так как  $b_A \in AU$ , то  $b_A = Av$  при некотором  $v \in U$ . Кроме того, функция  $g(f)$  дифференцируема и ее производная  $g'(f) = 2(f - b)$  (подробнее см. § 3). Отсюда и из теорем 4.2.3, 4.4.1, которые остаются справедливыми в гильбертовых пространствах, вытекает, что  $\langle b_A - b, Au - b_A \rangle \geq 0 \quad \forall u \in U$ . Тогда

$$\begin{aligned} J(u) &= \|Au - b\|^2 = \|(Au - b_A) + (b_A - b)\|^2 = \\ &= \|Au - b_A\|^2 + 2\langle b_A - b, Au - b_A \rangle + \|b_A - b\|^2 \geq \\ &\geq \|b_A - b\|^2 = \|Av - b\|^2 = J(v) \quad \forall u \in AU. \end{aligned} \quad (18)$$

Это значит, что  $J_* = \inf_U J(u) = J(v)$  и, следовательно,  $v \in U_* = \{u \in U: J(u) = J_*\}$ . Более того, из (18) следует, что  $U_* = \{u \in U: Au = Av = b_A\}$ . Теорема 13 доказана.  $\square$

Для иллюстрации теоремы 13 рассмотрим задачу (4), (5) при  $U = L_2^r[t_0, T]$ . Тогда множество  $AU$  в силу линейности оператора  $A$  является подпространством в  $F = E^n$ . Как известно [192], в  $E^n$  всякое подпространство замкнуто. Таким образом, в задаче (4), (5) при  $U = L_2^r[t_0, T]$  множество  $AU$  замкнуто. Отсюда и из теоремы 13 следует, что функция (4) при условиях (5),  $U = L_2^r[t_0, T]$  достигает своей нижней грани хотя бы на одном управлении. Аналогично доказывается разрешимость задачи (10), (11) при  $U = L_2^r[t_0, T]$ .

Отметим, что задачи (14), (5) и (17), (11) при  $U = L_2^r[t_0, T]$ , вообще говоря, не имеют решения. Покажем это на примере.



**Пример 18.** Рассмотрим задачу

$$J(u) = \int_0^1 |x(t; u) - 1|^2 dt \rightarrow \inf, \quad u = u(t) \in U = L_2[0, 1], \\ \dot{x}(t) = u(t), \quad 0 \leq t \leq 1; \quad x(0) = 0.$$

Очевидно, если  $u = u(t) \equiv 0$ , то  $J(0) > 0$ , если  $u = u(t) \neq 0$ , то также  $J(u) > 0$ . Рассмотрим последовательность

$$u_k = u_k(t) = \begin{cases} k, & t \in \left[0, \frac{1}{k}\right], \\ 0, & t \in \left(\frac{1}{k}, 1\right]. \end{cases}$$

Ей соответствуют траектории

$$x_k(t) = x(t; u_k) = \begin{cases} kt, & t \in \left[0, \frac{1}{k}\right], \\ 1, & t \in \left(\frac{1}{k}, 1\right]. \end{cases}$$

Следовательно,  $J(u_k) = \int_0^{1/k} (kt - 1)^2 dt = \frac{1}{k} \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Таким образом, последовательность  $\{u_k\}$  в этой задаче является минимизирующей,  $J_* = 0$ , однако нижняя грань не достигается. Остается заметить, что здесь множество  $AU$  не замкнуто в  $F = L_2[0, 1]$ : траектории  $x_k(t) \rightarrow 1$  в норме  $L_2[0, 1]$ , но  $x(t) \equiv 1$  не является решением задачи  $\dot{x}(t) = u(t)$ ,  $x(0) = 0$  ни при каком управлении  $u(t) \in L_2[0, 1]$ .

**7.** В различных руководствах по функциональному анализу [258; 348; 371; 393; 772] читатель обнаружит и другие, отличные от приведенных выше, варианты теоремы Вейерштрасса, основанные на других определениях понятий компактности и полунепрерывности функций. Для того, чтобы облегчить читателю ориентацию в этих вопросах, совершим небольшой экскурс в топологические пространства. Сначала напомним некоторые определения [371; 393; 772].

**Определение 6.** Пусть  $X$  — некоторое множество. Говорят, что на  $X$  задана *топология*, если в  $X$  выделена система  $\tau$  его подмножеств, удовлетворяющая следующим трем условиям (аксиомам): 1)  $\emptyset, X \in \tau$ ; 2) объединение любого числа множеств из  $\tau$  является множеством из  $\tau$ ; 3) пересечение конечного числа множеств из  $\tau$  является множеством из  $\tau$ . Все множества  $G \in \tau$  называются *открытыми*, а их дополнения  $F = X \setminus G$  — *замкнутыми*. Множество  $X$  с заданной на нем топологией  $\tau$  называют *топологическим пространством* и обозначают через  $(X, \tau)$ .

Заметим, что всякое метрическое пространство  $M$  превращается в топологическое пространство, если открытым считать всякое множество  $G \subseteq M$ , которое вместе с каждой своей точкой  $u \in G$  содержит и некоторую  $\varepsilon$ -окрестность этой точки.

**Определение 7.** Пусть  $(X, \tau)$  — топологическое пространство. *Окрестностью точки  $u \in X$*  называется всякое множество  $V \subset X$ , содержащее некоторое множество  $G \subset \tau$ , которое в свою очередь содержит точку  $u$ . *Окрестностью множества  $U \subset X$*  называется всякое множество  $V \subset X$ , содержащее множество  $G \subset \tau$ , которое в свою очередь содержит  $U$ . Точка  $u \in X$  называется *точкой прикосновения* множества  $U \subset X$ , если каждая окрестность точки  $u$  содержит хотя бы одну точку из  $U$ . Совокупность всех точек прикосновения множества  $U$  называется *замыканием множества  $U$*  и обозначается через  $\bar{U}_X$  или просто  $\bar{U}$ . Пусть  $U \subset W \subset X$ . Совокупность всех точек прикосновения множества  $U$ , взятых из множества  $W$ , называется *замыканием  $U$  в множестве  $W$*  и обозначается через  $\bar{U}_W$ .

Можно показать, что  $U = \overline{U}_X$  тогда и только тогда, когда  $U$  — замкнутое множество [393].

**О п р е д е л е н и е 8.** Пусть  $(X, \tau)$  — топологическое пространство,  $U$  — множество из  $X$ . Точка  $u \in X$  называется *предельной точкой* множества  $U$ , если каждая окрестность точки  $u$  содержит хотя бы одну точку из  $U$ , отличную от точки  $u$ .

**О п р е д е л е н и е 9.** Пусть  $(X, \tau)$  — топологическое пространство. Говорят, что последовательность  $\{u_k\} \in X$  *сходится к точке  $u \in X$  в топологии  $\tau$*  или, короче,  $\{u_k\}$   $\tau$ -сходится к точке  $u$ , если для любой окрестности  $G$  точки  $u$  найдется номер  $N = N(G)$  такой, что  $u_k \in G$  при всех  $k \geq N$ ; точку  $u$  называют  $\tau$ -пределом последовательности  $\{u_k\}$ . Последовательность  $\{u_k\}$   $\tau$ -сходится к множеству  $U$ , если для любой окрестности  $G$  множества  $U$  найдется номер  $N$  такой, что  $u_k \in G$  для всех  $k \geq N$ .

Топологическое пространство  $(X, \tau)$  называется *отделимым* (или *хаусдорфовым*), если для любых двух различных точек  $u_1$  и  $u_2 \in X$  найдутся окрестность  $G_1$  точки  $u_1$  и окрестность  $G_2$  точки  $u_2$  такие, что  $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ . В отделимых топологических пространствах всякая сходящаяся последовательность имеет единственный предел.

Банахово пространство  $B$  превращается в топологическое пространство, если в нем открытые множества ввести как объединение любого числа открытых шаров  $O(u, \varepsilon) = \{v \in B : \|v - u\| < \varepsilon\}$ , где  $u$  — произвольная точка из  $B$ ,  $\varepsilon$  — произвольное положительное число. Введенная таким образом топология называется *сильной топологией* банахова пространства  $B$ . Сходимость последовательности  $\{u_k\}$  к точке  $u$  в сильной топологии  $B$  эквивалентна сходимости этой последовательности к той же точке по норме (в метрике)  $B$ .

В банаховых пространствах могут быть введены и другие топологии. Для нас наибольший интерес представляет так называемая *слабая топология*. Открытыми множествами в слабой топологии банахова пространства  $B$  называются множества, представимые в виде объединения любого числа множеств вида

$$G(u, c_1, \dots, c_m, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m) = \{v \in B : |\langle c_i, v \rangle - \langle c_i, u \rangle| \leq \varepsilon_i, i = 1, \dots, m\}, \quad (19)$$

где  $u$  — произвольная точка из  $B$ ,  $m$  — произвольное натуральное число,  $c_1, \dots, c_m$  — произвольные элементы из сопряженного пространства  $B^*$ ,  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$  — произвольные положительные числа. Заметим, что сходимость последовательности  $\{u_k\}$  в слабой топологии  $B$  равносильна слабой сходимости  $\{u_k\}$  в смысле определения 1.1.

Следует заметить, что в общем случае топологические пространства могут иметь весьма замысловатую структуру, в них многие «привычные» представления могут нарушаться. Так, например, мы «привыкли» к тому, что в метрическом пространстве  $M$  точка  $u$  является предельной точкой множества  $U \subset M$  тогда и только тогда, когда существует последовательность  $\{u_k\} \in U$ ,  $u_k \neq u$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , которая сходится к точке  $u$  в метрике  $M$ . Однако в топологических пространствах это, вообще говоря, не так: предельная точка множества может не быть  $\tau$ -пределом какой-либо последовательности, принадлежащей этому множеству. Рассмотрим

**П р и м е р 19.** В пространстве  $l_2$  в качестве топологии возьмем слабую топологию. В этом пространстве возьмем множество  $U$ , состоящее из точек  $u_k = \sqrt{k}e_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , где  $e_k = (0, \dots, 1, 0, \dots)$  с единицей на  $k$ -м месте. Покажем, что точка  $u = 0 \in l_2$  является предельной точкой множества  $U$  в слабой топологии  $l_2$  (см. определение 8). Будем рассуждать от противного: пусть  $u = 0$  не является предельной точкой. Это означает, что существует окрестность  $G_0$  точки  $u = 0$ , которая не содержит ни одной точки множества  $U$ . Согласно (19) тогда найдется натуральное число  $m$ , числа  $\varepsilon_1 > 0, \dots, \varepsilon_m > 0$ , элементы  $c_1, \dots, c_m \in l_2$ , такие, что  $u_k \notin G_0 = G(u = 0, c_1, \dots, c_m, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$  при всех  $k = 1, 2, \dots$ , т. е.

$$|\langle c, u_k \rangle| = \left| \sum_{j=1}^{\infty} c_k^j u_k^j \right| = c_i^k \sqrt{k} \geq \varepsilon_0 = \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m\} > 0.$$

Тогда  $|c_i^k| \geq \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{k}}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ,  $i = 1, \dots, m$ , т. е.  $\|c_i\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_i^k{}^2 \geq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon_0}{\sqrt{k}}\right)^2 = +\infty$ . Однако это противоречит условию  $c_i \in l_2$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Следовательно,  $u = 0$  — предельная точка множества  $U$ . Остается заметить, что никакая подпоследовательность  $\{u_{k_m}\} \in U$  не может сходиться слабо в  $l_2$  к точке  $u = 0$ , так как  $\{u_{k_m}\}$  не ограничена в метрике  $l_2$ .

Отметим, что для множества  $V = U \cup \{0\}$  точка  $u = 0$  также является предельной и единственной последовательностью  $\{v_k\} \in V$ , которая слабо в  $l_2$  сходится к точке  $u = 0$ , и является стационарной последовательностью  $v_k = 0$ ,  $k = 1, 2, \dots$

Приведем несколько вариантов теоремы Вейерштрасса в топологических пространствах. Начнем с формулировки различных определений понятия компактности, общепринятых в топологии [258; 371; 393; 772].

**Определение 10.** Множество  $U$  из топологического пространства  $(X, \tau)$  называется *относительно секвенциально компактным*, если из любой последовательности  $\{u_k\} \in U$  можно выбрать хотя бы одну подпоследовательность,  $\tau$ -сходящуюся к некоторой точке  $v \in X$ . Если при этом любая такая точка  $v$  принадлежит самому множеству  $U$ , то такое множество называется *секвенциально компактным*.

**Определение 11.** Множество  $U$  из топологического пространства  $(X, \tau)$  называется *относительно счетно-компактным*, если каждое его бесконечное подмножество имеет хотя бы одну предельную точку  $v \in X$ . Если любая такая точка  $v$  принадлежит самому множеству  $U$ , то такое множество называется *счетно-компактным*.

**Определение 12.** Система множеств  $\{G_\alpha\}$  из топологического пространства  $(X, \tau)$  называется *покрытием* множества  $U$  из  $X$ , если  $U \in \bigcup_\alpha G_\alpha$ . Покрытие  $\{G_\alpha\}$  называется *открытым*, если все  $G_\alpha$  — открытые множества. Если некоторое подсемейство  $\{G_{\alpha\beta}\}$  покрытия  $\{G_\alpha\}$  само образует покрытие  $U$ , то  $\{G_{\alpha\beta}\}$  называется *подпокрытием* покрытия  $\{G_\alpha\}$ . Множество  $U$  из  $X$  называется *компактным*, если из любого открытого покрытия  $\{G_\alpha\}$  множества  $U$  можно выбрать конечное подпокрытие  $\{G_{\alpha_1}, G_{\alpha_2}, \dots, G_{\alpha_n}\}$ . Множество  $U$  называется *относительно компактным*, если его замыкание  $\bar{U}_X$  компактно.

В метрических пространствах (в частности, в  $E^n$  и в банаховых пространствах с их сильной топологией) все три понятия компактности равносильны [371, с. 43]. Замечательно и то, что в слабой топологии банаховых пространств эти три понятия компактности также равносильны (теорема Эберлейна—Шмульяна [371, с. 288–292]). В других топологических пространствах эти понятия, вообще говоря, не будут равносильными, и можно лишь сказать, что в общем случае из компактности (определение 12) и секвенциальной компактности (определение 10) следует счетная компактность [371; 393].

**Определение 13.** Функция  $J(u)$  называется *секвенциально полунепрерывной снизу* в точке  $u \in U$ , если для любой последовательности  $\{u_k\} \in U$ ,  $\tau$ -сходящейся к точке  $u$ , справедливо неравенство  $\liminf_{k \rightarrow \infty} J(u_k) \geq J(u)$ . Функция  $J(u)$  называется *секвенциально полунепрерывной снизу на множестве  $U$* , если она секвенциально полунепрерывна снизу в каждой точке  $u \in U$ .

**Теорема 14.** Пусть множество  $U$  из топологического пространства  $(X, \tau)$  секвенциально компактно, а функция  $J(u)$  определена на множестве  $U$ , принимает конечные значения и секвенциально полунепрерывна снизу на  $U$ . Тогда  $J_* = \inf_U J(u) > -\infty$ , множество  $U_* = \{u \in U: J(u) = J_*\}$  непусто, секвенциально компактно, и любая минимизирующая последовательность  $\tau$ -сходится к  $U_*$ .

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 4.

**Определение 14.** Функция  $J(u)$  называется *полунепрерывной снизу* в точке  $u \in U$ , если для любого числа  $\varepsilon > 0$  найдется окрестность  $G_\varepsilon \subset \tau$  точки  $u$  такая, что  $J(v) > J(u) - \varepsilon$  для всех  $v \in G_\varepsilon \cup U$ . Функция  $J(u)$  называется *полунепрерывной снизу на множестве  $U$* , если она полунепрерывна снизу в каждой точке  $u \in U$ .

Можно доказать, что если  $U$  — замкнутое множество, то функция  $J(u)$  полунепрерывна снизу на  $U$  тогда и только тогда, когда множество  $M(c) = \{u \in U: J(u) \leq c\}$  замкнуто при каждом  $c$  (ср. с леммой 2.1.1).

**Теорема 15.** Пусть множество  $U$  из топологического пространства  $(X, \tau)$  компактно (определение 12), а функция  $J(u)$  определена на множестве  $U$ , принимает конечные значения и полунепрерывна снизу на  $U$  (определение 14). Тогда  $J_* = \inf_U J(u) > -\infty$ , множество  $U_* = \{u \in U: J(u) = J_*\}$  непусто, компактно.

**Доказательство.** На множестве  $U$  введем топологию, индуцированную топологией  $\tau$  пространства  $(X, \tau)$ . А именно, открытыми множествами в  $U$  назовем все множества вида  $G \cap U$ , где  $G \subset \tau$ . Нетрудно проверить, что все аксиомы топологического про-

пространства здесь выполняются. Получившееся топологическое пространство обозначим через  $(U, \tau)$ . Множества  $M(c) = \{u \in U : J(u) \leq c\}$ , замкнутые в  $(X, \tau)$ , будут замкнутыми и в  $(U, \tau)$ , так что функция  $J(u)$  полунепрерывна снизу на  $U$  и в топологии пространства  $(U, \tau)$ . Далее заметим, что произвольное открытое покрытие  $\{G_\xi\}$  множества  $U$  в пространстве  $(X, \tau)$  порождает открытое покрытие  $\{G_\xi \cap U\}$  множества  $U$  в пространстве  $(U, \tau)$ . Поскольку множество  $U$  компактно в  $(X, \tau)$ , то из  $\{G_\xi\}$  можно выбрать конечное подпокрытие  $G_{\xi_1}, \dots, G_{\xi_m}$ . Тогда множества  $G_{\xi_1} \cap U, \dots, G_{\xi_m} \cap U$  образуют конечное покрытие множества  $U$  в пространстве  $(U, \tau)$ . Это означает, что множество  $U$  компактно и в  $(U, \tau)$ .

Покажем, что  $J_* > -\infty$ . Зафиксируем какую-либо числовую последовательность  $\{a_k\} \rightarrow -\infty$ . Так как множества  $A_k = \{u \in U : J(u) \leq a_k\}$  замкнуты в силу полунепрерывности снизу функции  $J(u)$ , то множества  $B_k = U \setminus A_k = \{u \in U : J(u) > a_k\}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , открыты в  $(U, \tau)$ . Кроме того, произвольная точка  $v \in U$  будет принадлежать множеству  $B_k$  для всех номеров  $k$ , для которых  $J(v) > a_k$ . Следовательно, система  $\{B_k\}$  образует открытое покрытие множества  $U$ . В силу компактности  $U$  тогда существует конечное подпокрытие  $B_{k_1}, \dots, B_{k_m}$  множества  $U$ . Тогда  $J(u) \geq \min_{1 \leq i \leq m} a_{k_i} > -\infty \quad \forall u \in U$ . Следовательно,  $J_* \geq \min_{1 \leq i \leq m} a_{k_i} > -\infty$ .

Допустим, что функция  $J(u)$  не достигает своей нижней грани  $J_*$  на множестве  $U$ , т. е.  $J(u) > J_* \quad \forall u \in U$ . Зафиксируем какую-либо положительную последовательность  $\{\varepsilon_k\} \rightarrow 0$ . Как и выше, устанавливаем, что множества  $C_k = \{u \in U : J(u) > J_* + \varepsilon_k\}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , образуют открытое покрытие множества  $U$ . В силу компактности  $U$  тогда найдется конечное подпокрытие  $C_{k_1}, \dots, C_{k_p}$  множества  $U$ . Поэтому  $J(u) \geq J_* + \min_{1 \leq i \leq p} \varepsilon_{k_i} = J_* + \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $\forall u \in U$ , что противоречит определению нижней грани  $J_*$ . Полученное противоречие показывает, что  $U_* \neq \emptyset$ . Теорема 15 доказана.  $\square$

Читатель, конечно, заметил, что выше при формулировке и доказательстве теорем Вейерштрасса 1, 4, 8–13 этого параграфа мы пользовались понятиями секвенциальной компактности множества и секвенциальной полунепрерывности снизу функции в соответствующих топологических пространствах. Это обстоятельство может быть оправдано двумя причинами: во-первых, проверку секвенциальной компактности множества и секвенциальной полунепрерывности снизу функции во многих прикладных задачах можно осуществить гораздо проще, чем других понятий компактности и полунепрерывности снизу, и, во-вторых, для задач оптимизации, рассматриваемых в метрических и банаховых пространствах с их сильной и слабой топологией, в которых, как было замечено, все три понятия компактности равносильны, принятый выше в п. 2–6 подход не приводит к потере общности.

## Упражнения

**У п р а ж н е н и е 1.** Пусть последовательность  $u_k = u_k(t) \in L_2^r[t_0, T]$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , слабо сходится в  $L_2^r[t_0, T]$  к функции  $u = u(t)$ . Докажите, что тогда последовательность решений  $\{x_1(t; u_k)\}$  задачи (11) равномерно на  $[t_0, T]$  сходится к решению  $x_1(t; u)$  этой задачи. **У к а з а н и е:** учитывая, что последовательность  $\{u_k\}$  ограничена в норме  $L_2^r[t_0, T]$ , докажите, что соответствующая последовательность  $\{x_1(t; u_k)\}$  равномерно ограничена на  $[t_0, T]$  и удовлетворяет условию Гёльдера:  $|x_1(t + \Delta t; u_k) - x_1(t; u_k)| \leq L|\Delta t|^{1/2}$ , где постоянная  $L$  не зависит от  $k, t, \Delta t$ , затем воспользуйтесь теоремой Арцела [393; 705] и единственностью решения задачи (11).

**У п р а ж н е н и е 2.** Пользуясь результатом упражнения 1, докажите, что в задачах оптимального управления из примеров 14–17 целевые функции слабо непрерывны в  $L_2^r[t_0, T]$ . **У к а з а н и е:** установить, что если последовательность  $\{u_k\} \in L_2^r[t_0, T]$  сходится слабо в  $L_2^r[t_0, T]$  к функции  $u = u(t)$ , то последовательности  $\{x(t; u_k)\}$ ,  $\{x_1(t; u_k)\}$  траекторий задач (5), (11) соответственно сходятся к  $x(t; u)$ ,  $x_1(t; u)$  равномерно на  $[t_0, T]$ .

**У п р а ж н е н и е 3.** Пусть  $J(u) = \int_0^1 x^3(t) dt$ , где  $\dot{x} = u(t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ;  $x(0) = 0$ ;  $u(t) \in L_2[0, 1]$ . Докажите, что функция  $J(u)$  слабо непрерывна в  $L_2[0, 1]$ , но не является выпуклой (ср. с теоремой 7).

У п р а ж н е н и е 4. Доказать, что в задачах оптимального управления из примеров 14–17 целевые функции достигают своей верхней грани на каждом выпуклом замкнутом ограниченном множестве из  $L_2^r[t_0, T]$ .

У п р а ж н е н и е 5. Выяснить, каким дополнительным условиям должны удовлетворять функции  $b(t), b_1(t) \in L_2^r[t_0, T]$ , чтобы задачи (14), (5) и (17), (11) были разрешимы на множестве  $U = L_2^r[t_0, T]$ .

У п р а ж н е н и е 6. Пусть  $J(u) = \int_0^1 f(u(t)) dt$ . 1) Доказать, что если  $f(u)$  непрерывна на  $E^1$ , то функция  $J(u)$  непрерывна на  $C[0, 1]$  в метрике этого пространства.

2) Доказать, что если  $|f(u+s) - f(u)| \leq C(|u||s| + |s|^2)$  при всех  $u, s \in E^1, C = \text{const} \geq 0$ , то функция  $J(u)$  непрерывна на  $L_2[0, 1]$  в метрике  $L_2[0, 1]$ .

3) Если  $f(u)$  полунепрерывна снизу на  $E^1$ , то будет ли  $J(u)$  полунепрерывной снизу в метрике  $C[0, 1]$  или  $L_2[0, 1]$ ?

4) Доказать, что если  $f(u)$  выпукла [сильно выпукла] на  $E^1$ , то  $J(u)$  выпукла [сильно выпукла] на  $L_2[0, 1]$ .

5) Доказать, что если  $f(u)$  выпукла и удовлетворяет условию п. 2), то  $J(u)$  достигает своей нижней грани на любом выпуклом замкнутом ограниченном множестве  $U$  из  $L_2[0, 1]$ .

У п р а ж н е н и е 7. Доказать, что в рефлексивном банаховом пространстве  $B$  шар  $\{u \in B: \|u - u_0\| \leq R\}$  слабо компактен. У к а з а н и е: воспользуйтесь теоремой 3 и слабой полунепрерывностью нормы (пример 11).

У п р а ж н е н и е 8. Доказать, что в рефлексивном банаховом пространстве  $B$  справедливо равенство  $\|c\|_{B^*} = \max_{\|u\| \leq 1} \langle c, u \rangle$  при всех  $c \in B^*$ .

У п р а ж н е н и е 9. Доказать, что функция  $J(u) = \|u - \bar{u}\|$  на любом выпуклом замкнутом множестве  $U$  рефлексивного банахова пространства достигает своей нижней грани (иначе говоря, существует элемент наилучшего приближения из  $U$  для заданного элемента  $\bar{u} \in B$ ).

У п р а ж н е н и е 10. Пусть оператор  $A \in \mathcal{L}(B \rightarrow F)$ , где  $B, F$  — банаховы пространства,  $B$  — рефлексивно, элемент  $b \in F$  задан,  $U$  — выпуклое замкнутое ограниченное множество из  $B$ . Доказать, что функция  $J(u) = \|Au - b\|_F^2$  на множестве  $U$  достигает своей нижней грани (ср. с теоремой 12).

У п р а ж н е н и е 11. В пространстве  $L_p^r(G)$ ,  $1 < p < \infty$ , рассмотрим два множества:  $U_1 = \{u = u(t) = (u^1(t), \dots, u^r(t)) \in L_p^r(G): \alpha_i(t) \leq u^i(t) \leq \beta_i(t) \text{ для почти всех } t \in G, i = 1, \dots, r\}$ ,  $U_2 = \left\{u = u(t) \in L_p^r(G): \int_G |u(t) - \bar{u}(t)|^p dt \leq R^p\right\}$ , где функции  $\bar{u} = \bar{u}(t) \in L_p^r(G)$ ,  $\alpha_i(t), \beta_i(t) \in L_p(G)$ ,  $i = 1, \dots, r$ , и число  $R > 0$  заданы. Доказать, что эти множества слабо компактны в  $L_p^r(G)$ ,  $1 < p < \infty$ , но не компактны в метрике этого пространства. Будут ли эти множества слабо компактными в  $L_1^r(G)$  или  $L_\infty^r(G)$ ? (См. примеры 7, 9, 10.)

У п р а ж н е н и е 12. Доказать, что функция  $J(u) = \int_0^1 u^4(t) dt$  не является непрерывной в метрике  $L_2[0, 1]$ . Будет ли она полунепрерывной снизу в метрике  $L_2[0, 1]$ ?

У п р а ж н е н и е 13. Доказать, что функция  $J(u) = \int_0^1 |\dot{u}(t)|^2 dt$ , определенная на  $H^1[0, 1]$ , разрывна в метрике  $C[0, 1]$ . Будет ли она полунепрерывной снизу в этой метрике?

У п р а ж н е н и е 14. Пусть  $P$  — линейное нормированное пространство всех алгебраических многочленов на отрезке  $[0, 1]$  с нормой  $\|u(t)\| = \max_{0 \leq t \leq 1} |u(t)|$ . Положим  $J(u) = \sum_{i=0}^n |\alpha_i|$  для  $u = u(t) = \sum_{i=0}^n \alpha_i t^i \in P$ . Доказать, что  $J(u)$  выпукла на  $P$ , но не является непрерывной на  $P$ . У к а з а н и е: рассмотреть последовательность  $u_k = u_k(t) = t^k - t^{k+1}$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . Будет ли  $J(u)$  полунепрерывной снизу на  $P$ ?

У п р а ж н е н и е 15. Пусть  $J(u)$  — выпуклая функция на открытом выпуклом множестве  $U$  банахова пространства  $B$ . Доказать, что следующие четыре утверждения эквивалентны: 1)  $J(u)$  полунепрерывна сверху в точке  $v \in U$  в метрике  $B$ ; 2)  $J(u)$  непрерывна в точке  $v$  в метрике  $B$ ; 3)  $J(u)$  ограничена в некоторой окрестности точки  $v$ ; 4)  $J(u)$  ограничена сверху в некоторой окрестности точки  $v$  [233].

У п р а ж н е н и е 16. Докажите, что функция  $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} kx_k^2$ ,  $x = (x_1, \dots, x_k, \dots) \in l_2$ , является собственной выпуклой функцией, причем она не ограничена в любой относительной окрестности любой точки из  $\text{dom } f$  и поэтому разрывна в каждой точке  $x \in \text{dom } f$  [930].

У п р а ж н е н и е 17. Докажите, что функция  $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{2k}$ ,  $x = (x_1, \dots, x_k, \dots) \in l_2$ , определена и конечна во всех точках  $l_2$ , выпукла и непрерывна на  $l_2$ , ограничена на шаре  $S = \{x \in l_2: \|x\|_{l_2} \leq R\}$  при  $R \leq 1$ , неограничена сверху при  $R > 1$ . У к а з а н и е: рассмотрите последовательность  $\{f(x_n)\}$ ,  $x_n = Re_n$ ,  $e_n = (0, \dots, 0, \overset{n}{1}, 0, \dots)$ ,  $n = 1, 2, \dots$

У п р а ж н е н и е 18. Докажите, что единичный шар  $\{u: \|u\| \leq 1\}$  в  $L_p[0, 1]$ ,  $1 \leq p < \infty$ , не имеет угловых (крайних) точек, а в  $C[0, 1]$  имеет только две угловые точки [930].

У п р а ж н е н и е 19. Показать, что функция  $J(u) = \int_0^1 u^2(t) dt$  непрерывна на  $C[0, 1]$  в метрике  $C[0, 1]$ . Установить, что на множестве  $U = \{u = u(t) \in C[0, 1]: u(0) = 0, u(1) = 1\}$  эта функция не достигает своей нижней грани  $J_* = 0$ . Ограничена ли эта функция на  $U$  сверху?

У п р а ж н е н и е 20. Пусть  $J(u) = \int_0^1 u(t) dt - u\left(\frac{1}{2}\right)$ ,  $u = u(t) \in C[0, 1]$ . Доказать, что: 1) эта функция линейна и непрерывна на  $C[0, 1]$  в метрике этого пространства; 2) на единичном шаре  $U = \{u = u(t) \in C[0, 1]: |u(t)| \leq 1, 0 \leq t \leq 1\}$  эта функция ограничена сверху и снизу, но не достигает на  $U$  ни нижней грани  $J_* = -2$ , ни верхней грани  $J^* = 2$ .

### § 3. Дифференцирование. Условия оптимальности

При исследовании экстремальных задач в банаховых пространствах, как и в случае  $n$ -мерного пространства  $E^n$ , важную роль играет понятие производной (градиента) функции.

1. Сначала приведем определение более общего понятия производной отображения.

О п р е д е л е н и е 1. Пусть  $X$  и  $Y$  — два нормированных пространства и  $F$  — отображение, действующее из  $X$  в  $Y$  и определенное в окрестности  $O(u, \gamma) = \{v \in X: \|v - u\|_X < \gamma\}$  точки  $u$ . Говорят, что отображение  $F$  дифференцируемо в точке  $u$ , если существует линейный непрерывный оператор  $F'(u) \in \mathcal{L}(X \rightarrow Y)$  такой, что

$$F(u + h) - F(u) = F'(u)h + \alpha(u, h) \quad \forall h, \quad \|h\|_X < \gamma, \quad (1)$$

где  $\lim_{\|h\|_X \rightarrow 0} \frac{\|\alpha(u, h)\|_Y}{\|h\|_X} = 0$ . Оператор  $F'(u)$  называется *производной (производной Фреше)* отображения  $F$  в точке  $u$ .

Если производная существует, то она определяется однозначно. В самом деле, если  $F'_1(u)$  и  $F'_2(u)$  — производные отображения  $F$  в точке  $u$ , то из (1) имеем

$$F'_1(u)h - F'_2(u)h = (F'_1(u) - F'_2(u))h = \alpha_1(u, h) - \alpha_2(u, h)$$

при всех  $h$ ,  $\|h\| < \gamma$ . Возьмем произвольный элемент  $e \in X$ ,  $e \neq 0$ , и в предыдущем равенстве положим  $h = te$ ,  $0 < t < t_0 = \gamma/\|e\|$ . Получим  $t(F'_1(u) - F'_2(u))e = \alpha(t)$  или  $(F'_1(u) - F'_2(u))e = \frac{\alpha(t)}{t}$ . Отсюда, учитывая, что  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha(t)}{t} = 0$ , имеем  $F'_1(u)e = F'_2(u)e \quad \forall e \in X$ . Это означает, что  $F_1(u) = F_2(u)$ .

Из (1) следует, что дифференцируемое в точке  $u$  отображение непрерывно в этой точке. Перечислим некоторые простейшие свойства производной:

1) если  $F(u) = y_0 \quad \forall u \in X$ , где  $y_0$  — фиксированная точка из  $Y$ , то  $F'(u) \equiv 0 \quad \forall u \in X$ ;

2) если  $F(u) = Au$ , где  $A \in \mathcal{L}(X \rightarrow Y)$ , то  $F'(u) = A \quad \forall u \in X$ ;

3) если отображения  $F$  и  $G$ , действующие из  $X$  в  $Y$ , дифференцируемы в точке  $u$ , то отображение  $\alpha F + \beta G$ , где  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , также дифференцируемо в точке  $u$ , причем

$$(\alpha F + \beta G)'(u) = \alpha F'(u) + \beta G'(u).$$

Приведем обобщение известной из классического анализа формулы производной сложной функции [393]. Пусть  $X, Y, Z$  — три нормированных пространства,  $O(u, \gamma_1)$  — окрестность точки  $u \in X$ , отображение  $F$  отображает окрестность  $O(u, \gamma_1)$  в  $Y$ ,  $y = F(u)$ ,  $O(y, \gamma_2)$  — окрестность точки  $y \in Y$ , и отображение  $G$  отображает окрестность  $O(y, \gamma_2)$  в  $Z$ . Тогда если отображение  $F$  дифференцируемо в точке  $u$ , а  $G$  — дифференцируемо в точке  $y$ , то отображение  $GF$ , которое определено в окрестности  $O(u, \gamma_1)$ , дифференцируемо в точке  $u$ , причем

$$(GF)'(u) = G'(y)F'(u). \quad (2)$$

Производная  $F'(u)$  отображения  $F$  согласно определению 1 является отображением, действующим из нормированного пространства  $X$  в нормированное пространство  $Y_1 = \mathcal{L}(X \rightarrow Y)$ , и, в свою очередь, можно поставить вопрос о его дифференцируемости.

**О п р е д е л е н и е 2.** Пусть отображение  $F$ , действующее из  $X$  в  $Y$ , дифференцируемо в каждой точке некоторой окрестности  $O(u, \gamma) = \{v \in X : \|v - u\|_X < \gamma\}$  точки  $u$ . Говорят, что отображение *дважды дифференцируемо в точке  $u$* , если  $F'(u)$  дифференцируемо в этой точке (определение 1), т. е. существует линейный непрерывный оператор  $F''(u) \in \mathcal{L}(X \rightarrow Y_1) = \mathcal{L}(X \rightarrow \mathcal{L}(X \rightarrow Y))$  такой, что

$$F'(u + g) - F'(u) = F''(u)g + \alpha_1(u, g) \quad \forall g \in X, \quad (3)$$

$$\|g\|_X < \gamma, \quad \lim_{\|g\|_X \rightarrow 0} \frac{\|\alpha_1(u, g)\|_{Y_1}}{\|g\|_X} = 0.$$

Оператор  $F''(u)$  называют *второй производной* отображения  $F$  в точке  $u$ .

Можно показать, что  $F''(u)$  — симметричный оператор, т. е.  $(F''(u)g)h = (F''(u)h)g$  [327; 768].

Аналогично определяются производные третьего и более высокого порядков [327; 393; 705; 768]. В настоящей книге мы ограничимся рассмотрением лишь первой и второй производных.

Пусть отображение  $F$  определено и дифференцируемо в шаре  $O(u, \gamma) = \{v \in X : \|v - u\| < \gamma\}$ , вторая производная  $F''(u)$  существует в самой точке  $u$ . Тогда справедлива формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано [327, ч. II]:

$$F(u + h) - F(u) = F'(u)h + \frac{1}{2}(F''(u)h)h + o(\|h\|^2) \quad \forall h \in X, \quad \|h\|_X < \gamma. \quad (4)$$



2. Переформулируем определения 1, 2 на случай, когда  $X = B$  — банахово пространство,  $Y = E^1$  — числовая ось, т. е. отображение  $F$  представляет из себя функцию (функционал), принимающую вещественные значения. Тогда  $\mathcal{L}(X \rightarrow Y) = \mathcal{L}(B \rightarrow E^1) = B^*$  — пространство линейных непрерывных функционалов, определенных на  $B$ . Напоминаем, что через  $\langle c, u \rangle$  мы обозначаем значения линейного функционала  $c \in B^*$  на элементе  $u \in B$ . В рассматриваемом случае определения 1, 2 переписутся в следующей форме.

О п р е д е л е н и е 3. Пусть  $B$  — банахово пространство, пусть функция  $J(u)$  определена в некоторой  $\gamma$ -окрестности  $O(u, \gamma) = \{v \in B: \|v - u\| < \gamma\}$  точки  $u$ . Говорят, что функция  $J(u)$  дифференцируема в точке  $u$ , если существует элемент  $J'(u) \in B^*$  такой, что приращение функции  $J(u)$  можно представить в виде

$$\Delta J(u) = J(u+h) - J(u) = \langle J'(u), h \rangle + \alpha(u, h), \quad \forall h \in B, \quad (5)$$

$$\|h\| < \gamma, \quad \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\alpha(u, h)}{\|h\|} = 0.$$

Элемент  $J'(u)$  называется *первой производной* (*производной Фреше*) или *градиентом* функции  $J(u)$  в точке  $u$ .

В том случае, когда  $B = H$  — гильбертово пространство, тогда  $H^* = H$  и первая производная  $J'(u)$  принадлежит  $H$ , и величина  $\langle J'(u), h \rangle$  превращается в скалярное произведение в  $H$ .

О п р е д е л е н и е 4. Пусть  $B$  — банахово пространство, функция  $J(u)$  дифференцируема в каждой точке некоторой  $\gamma$ -окрестности  $O(u, \gamma) = \{v \in B: \|v - u\| < \gamma\}$  точки  $u$ . Говорят, что функция  $J(u)$  *дважды дифференцируема* в точке  $u$ , если существует линейный непрерывный оператор  $J''(u) \in \mathcal{L}(B \rightarrow B^*)$  такой, что

$$J'(u+h) - J'(u) = J''(u)h + \alpha_1(u, h) \quad \forall h \in B, \quad (6)$$

$$\|h\| < \gamma, \quad \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\alpha_1(u, h)}{\|h\|} = 0.$$

Оператор  $J''(u)$  называют *второй производной* функции  $J(u)$  в точке  $u$ .

Если  $B = H$  — гильбертово пространство, то  $J''(u) \in \mathcal{L}(H \rightarrow H)$ .

Если функция  $J(u)$  дифференцируема в некоторой окрестности  $O(u, \gamma)$  точки  $u$ , а вторая производная  $J''(u)$  существует в самой точке  $u$ , то из формулы (4) имеем:

$$J(u+h) - J(u) = \langle J'(u), h \rangle + \frac{1}{2} \langle J''(u)h, h \rangle + o(\|h\|^2), \quad \|h\| < \gamma \quad (7)$$

(ср. с формулой (2.2.5)).

О п р е д е л е н и е 5. Функция  $J(u)$  называется *непрерывно дифференцируемой* [*дважды непрерывно дифференцируемой*] на множестве  $U$  из банахова пространства  $B$ , если она дифференцируема [*дважды дифференцируема*] во всех точках  $u \in U$  и  $\|J'(u+h) - J'(u)\|_{B^*} \rightarrow 0$  [ $\|J''(u+h) - J''(u)\|_{\mathcal{L}(B \rightarrow B^*)} \rightarrow 0$ ] при  $\|h\| \rightarrow 0$ . Множество всех функций, непрерывно дифференцируемых на  $U$ , будем обозначать через  $C^1(U)$ , дважды непрерывно дифференцируемых на  $U$  — через  $C^2(U)$ .

**З а м е ч а н и е 1.** В определении 3 предполагается, что если функция  $J(u)$  дифференцируема в точке  $u$ , то она определена в некоторой окрестности этой точки. Поэтому, говоря о принадлежности функции  $J(u)$  множеству  $C^1(U)$ , обычно подразумевают существование некоторого открытого множества  $W$  из  $B$ , которое содержит  $U$  и на котором определена эта функция. Аналогично, если  $J(u) \in C^2(U)$ , то считается, что  $J'(u)$  определена на открытом множестве  $W$ , содержащем  $U$ .

**З а м е ч а н и е 2.** Формулы (4), (7) иногда используются для определения второй производной. Однако при этом надо сознавать, что определение второй производной из формул (4), (7), вообще говоря, отличается от определений 2, 4. Рассмотрим

**П р и м е р 1.** Пусть  $J(u) = u^3 \sin \frac{1}{u}$  при  $u \neq 0$ ,  $J(0) = 0$ . При любом  $h \neq 0$  имеем

$$J(0+h) - J(0) = J(h) = h^3 \sin \frac{1}{h} = 0 \cdot h + \frac{1}{2} 0 \cdot h^2 + o(|h|^2),$$

так что здесь формула (7) справедлива. Отсюда может показаться, что функция  $J(u)$  имеет производную  $J''(0)$ , причем  $J''(0) = 0$ . Однако нетрудно убедиться, что у этой функции вторая производная в точке  $u = 0$  не существует.

Следуя [768, с. 161], приведем достаточные условия, когда оба подхода к определению производной  $F''(u)$  совпадают. Пусть при всех  $u, u+h \in O(u_0, \gamma) = \{v \in X : |v - u_0| < \gamma\}$  выполняется соотношение

$$F(u+h) - F(u) = a_1(u)h + (a_2(u)h)h + R_2(u, h),$$

где операторы  $a_1(u) \in \mathcal{L}(X \rightarrow Y)$ ,  $a_2(u) \in \mathcal{L}(X \rightarrow \mathcal{L}(X \rightarrow Y))$  ограничены и непрерывны в  $O(u_0, \gamma)$ ,  $a_2(u)$  — симметричный оператор, остаточный член  $R_2(u, h)$  обладает следующим свойством: для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta > 0$ , что  $\|R_2(u, h)\| \leq \varepsilon \|h\|^2 \quad \forall u, u+h \in O(u_0, \gamma)$ . Тогда отображение  $F$  дважды дифференцируемо в  $O(u_0, \gamma)$  (в смысле определения 2) и  $F'(u) = a_1(u)$ ,  $F''(u) = 2a_2(u)$  (обратная теорема Тейлора [768]).

**3.** Если  $J(u) \in C^1(U)$  или  $C^2(U)$ , точка  $u+th \in U$  при всех  $t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , то функция  $f(t) = J(u+th)$  переменной  $t$  принадлежит  $C^1[0, 1]$  или  $C^2[0, 1]$  соответственно, причем, как следует из определений 1–4 и формулы (2):

$$\begin{aligned} f'(t) &= \langle J'(u+th), h \rangle, \quad f''(t) = \langle J''(u+th)h, h \rangle, \quad 0 \leq t \leq 1, \\ \frac{d}{dt} \langle f'(x+th), z \rangle &= \langle f''(x+th)h, z \rangle, \quad z \in B. \end{aligned} \quad (8)$$

Справедливы формулы конечных приращений

$$\begin{aligned} J(u+h) - J(u) &= \int_0^1 \langle J'(u+th), h \rangle dt = \langle J'(u + \theta_1 h), h \rangle = \\ &= \langle J'(u), h \rangle + \frac{1}{2} \langle J''(u + \theta_2 h)h, h \rangle, \quad 0 < \theta_1, \theta_2 < 1, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \langle J'(u+h) - J'(u), h \rangle &= \\ &= \langle J''(u + \theta_3 h)h, h \rangle = \int_0^1 \langle J''(u+th)h, h \rangle dt, \quad 0 < \theta_3 < 1, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \langle J'(u+h) - J'(u), z \rangle &= \\ &= \langle J''(u + \theta_4 h)h, z \rangle = \int_0^1 \langle J''(u + th)h, z \rangle dt, \quad 0 < \theta_4 < 1, \end{aligned} \quad (11)$$

которые следуют из (8) так же, как и аналогичные формулы (2.6.2)–(2.6.5). В частности, если  $U$  — выпуклое множество из банахова пространства, то формулы (9)–(11) справедливы для всех  $u, u+h \in U$ . Опираясь на формулу (9), нетрудно убедиться, что лемма 2.6.1 остается верной и в банаховых пространствах, нужно лишь в определении 2.6.1 класса функций  $C^{1,1}(U)$  условие Липшица (2.6.6) понимать в смысле неравенства:  $\|J'(u) - J'(v)\|_{B^*} \leq L\|u - v\|_B \quad \forall u, v \in U$ . Свойства выпуклых и сильно выпуклых функций, описанные в теоремах 4.2.1, 4.2.2, 4.2.4, 4.3.3, и их доказательства остаются справедливыми и в банаховых пространствах. Критерии выпуклости и сильной выпуклости функции, составляющие содержание теорем 4.2.5, 4.3.4, в банаховых пространствах следует переформулировать несколько иначе.

**Теорема 1.** Пусть  $U$  — выпуклое множество из банахова пространства  $B$  [гильбертова пространства  $H$ ], функция  $J(u) \in C^2(U)$  и, кроме того,

$$\langle J''(u)h, h \rangle \geq 0 \quad \forall h \in B, \quad \forall u \in U \quad (12)$$

$$[\langle J''(u)h, h \rangle \geq \mu \|h\|_H^2 \quad \forall h \in B, \quad \forall u \in U, \quad \mu = \text{const} > 0]. \quad (13)$$

Тогда функция  $J(u)$  выпукла [сильно выпукла] на  $U$ .

Если  $\text{int } U \neq \emptyset$ , то верно и обратное: из выпуклости [сильной выпуклости] функции  $J(u) \in C^2(U)$  на выпуклом множестве  $U$  необходимо следует условие (12) [условие (13)].

**4.** Как и в конечномерных экстремальных задачах, с помощью первых и вторых производных могут быть сформулированы необходимые и достаточные условия экстремума функций на множествах из банаховых пространств.

**Теорема 2.** Пусть  $U$  — выпуклое множество из банахова пространства  $B$ , функция  $J(u)$  определена на  $U$  и в точке  $u_* \in U$  имеет производную  $J'(u_*)$ . Если  $u_*$  — точка локального минимума  $J(u)$  на  $U$ , то необходимо выполняется неравенство:

$$\langle J'(u_*), u - u_* \rangle \geq 0 \quad \forall u \in U. \quad (14)$$

Если при этом  $u_* \in \text{int } U$ , то условие (14) выполняется тогда и только тогда, когда

$$J'(u_*) = 0. \quad (15)$$

**Доказательство.** По определению локального минимума существует число  $\alpha > 0$  такое, что

$$J'(u_*) \leq J(u) \quad \forall u \in O(u_*, \alpha) \cap U, \quad O(u_*, \alpha) = \{v \in B: \|v - u_*\|_B < \alpha\}. \quad (16)$$

Возьмем произвольную точку  $u \in U$ . Поскольку множество  $U$  выпукло, то найдется число  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(u)$ , для которого

$$u_\varepsilon = u_* + \varepsilon(u - u_*) \in O(u_*, \alpha) \cap U \quad \forall \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_0 \leq 1$$

(при  $u \neq u_*$  достаточно взять  $\varepsilon_0 = \min \left\{ 1; \frac{\alpha}{\|u - u_*\|} \right\}$ ). Тогда из (16) при  $u = u_\varepsilon$  имеем

$$0 \leq J(u_\varepsilon) - J(u_*) = \varepsilon \langle J'(u_*), u - u_* \rangle + o(\varepsilon), \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_0.$$

Отсюда, разделив эти неравенства на  $\varepsilon$  и устремив  $\varepsilon \rightarrow +0$ , приходим к неравенству (14).

Далее, из (15), очевидно, следует (14). Убедимся, что если  $u_* \in \text{int } U$ , то верно и обратное: из (14) вытекает (15). Возьмем произвольный элемент  $h \in B$ . По определению внутренней точки множества  $U$  найдется число  $\delta_0 = \delta_0(h)$  такое, что  $u = u_* + \delta h \in U \quad \forall \delta, |\delta| < \delta_0$ . Из (14) тогда следует, что

$$\langle J'(u_*), \delta h \rangle = \delta \langle J'(u_*), h \rangle \geq 0 \quad \forall \delta, \quad |\delta| < \delta_0.$$

Это возможно только в том случае, когда  $\langle J'(u_*), h \rangle = 0$ . В силу произвольности элемента  $h \in B$  отсюда заключаем, что  $J'(u_*) = 0$  по определению нулевого функционала.  $\square$

**Теорема 3.** Пусть  $U$  — выпуклое множество из банахова пространства  $B$ , функция  $J(u)$  определена и выпукла на  $U$ ,  $J_* = \inf J(u) > -\infty$ ,  $U_* = \{u \in U: J(u) = J_*\} \neq \emptyset$ , и в точке  $u_* \in U$  существует производная  $J'(u_*)$ . Тогда включение  $u_* \in U_*$  имеет место тогда и только тогда, когда выполняется вариационное неравенство (14). В частности, если  $J'(u_*) = 0$ , то  $u_* \in U_*$  (ср. с теоремой 4.2.3).

**Доказательство.** Необходимость вытекает из теоремы 2, достаточность — из теоремы 4.2.2.  $\square$

Условия экстремума, использующие вторую производную функции  $J(u)$ , см. ниже в упражнениях 10, 11.

### 5. Проиллюстрируем вышесказанное на примерах.

**Пример 2.** Пусть  $H$  — гильбертово пространство. Тогда функция  $J(u) = \|u\|_H^2 = \langle u, u \rangle_H$  дважды дифференцируема во всех точках  $u \in H$ . В самом деле,

$$J(u+h) - J(u) = \|u+h\|_H^2 - \|u\|_H^2 = \langle 2u, h \rangle_H + \langle h, h \rangle_H \quad \forall u, h \in H.$$

Отсюда следует, что  $J'(u) = 2u$ . Из формулы (6) тогда имеем  $J''(u) = 2I$ , где  $I$  — единичный (тождественный) оператор на  $H$ . Таким образом,  $J(u) = \|u\|_H^2 \in C^2(H)$ .

**Пример 3.** Функция  $J(u) = \|u\|_H = \sqrt{\langle u, u \rangle_H}$  дважды дифференцируема во всех точках  $u$  гильбертова пространства, кроме точки  $u = 0$ . В самом деле

$$\begin{aligned} J(u+h) - J(u) &= \sqrt{\langle u+h, u+h \rangle} - \sqrt{\langle u, u \rangle} = \\ &= \frac{\langle u+h, u+h \rangle - \langle u, u \rangle}{\sqrt{\langle u+h, u+h \rangle} + \sqrt{\langle u, u \rangle}} = \left\langle \frac{u}{\|u\|}, h \right\rangle + \alpha(u, h), \quad \forall u \neq 0, \end{aligned}$$

где

$$\alpha(u, h) = \frac{\|h\|^2}{\|u+h\| + \|u\|} + \langle u, h \rangle \left( \frac{\|u\| - \|u+h\|}{\|u\|(\|u+h\| + \|u\|)} \right).$$

Отсюда видно, что  $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\alpha(u, h)}{\|h\|} = 0$ , так что первая производная  $J'(u) = \frac{u}{\|u\|}$ ,  $u \neq 0$ . Эту же формулу нетрудно получить по правилу (2) дифференцирования сложной функции. Аналогично имеем

$$J'(u+h) - J'(u) = \frac{h}{\|u\|} - \frac{u\langle u, h \rangle}{\|u\|^3} + \alpha_1(u, h), \quad \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\alpha_1(u, h)}{\|h\|} = 0, \quad \forall u \neq 0.$$

Это означает, что функция  $J(u) = \|u\|$  дважды дифференцируема на  $H$  при  $u \neq 0$ , причем оператор второй производной  $J''(u) \in \mathcal{L}(H \rightarrow H)$  действует на элемент  $h$  по правилу:

$$J''(u)h = \frac{h}{\|u\|} - \frac{u\langle u, h \rangle}{\|u\|^3}.$$

**Пример 4.** Пусть  $J(u) = \int_a^b f(u(t)) dt$ , где  $f(u)$  — функция одной переменной  $u \in E^1$ ,  $u = u(t) \in C[a, b] = B$ . Покажем, что если  $f(u) \in C^2(E^1)$ , то  $J(u) \in C^2(B)$ . Как известно [371, 393], сопряженное к  $B = C[a, b]$  пространство  $B^* = (C[a, b])^*$  состоит из функций с ограниченным изменением, т. е. для каждого элемента  $g \in B^*$  существует функция  $g = g(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ , имеющая на  $[a, b]$  ограниченное изменение, такая, что  $\langle g, u \rangle_{B^*} = \int_a^b u(t) dg$ , где интеграл понимается в смысле Римана–Стилтьеса (некоторые определения см. в § 6.4). В частности, если функция  $g(t)$  непрерывна и имеет кусочно непрерывную производную  $g'(t)$ , то  $\langle g, u \rangle_{B^*} = \int_a^b u(t)g'(t) dt$ . Поскольку  $f(u) \in C^2(E^1)$ , то

$$J(u+h) - J(u) = \int_a^b \left[ f'(u(t))h(t) + \frac{1}{2}f''(u(t))h^2(t) \right] dt + \alpha_2(u, h), \quad (17)$$

где

$$\alpha_2(u, h) = \int_a^b [f''(u(t) + \theta(t)h(t)) - f''(u(t))]h^2(t) dt, \quad 0 < \theta(t) < 1.$$

Так как  $f''(u)$  непрерывна, то при  $\|h\|_C \rightarrow 0$  имеем  $f''(u(t) + \theta(t)h(t)) - f''(u(t)) \rightarrow 0$  равномерно по  $t \in [a, b]$ , так что

$$\lim_{\|h\|_C \rightarrow 0} \frac{\alpha_2(u, h)}{\|h\|_C^2} = 0.$$

Отсюда и из (17) следует, что функция  $J(u)$  непрерывно дифференцируема во всех точках  $u \in B = C[a, b]$ , причем  $\langle J'(u), h \rangle_{B^*} = \int_a^b h(t) dg$ , где  $g = g(t) = \int_a^t f'(u(\tau)) d\tau = J'(u) \in C^1[a, b]$ . Кроме того, из (17) вытекает (см. замечание 2) существование второй производной  $J''(u)$ , причем

$$\langle J''(u)h, h \rangle_{B^*} = \int_a^b (f''(u(t))h(t))h(t) dt = \int_a^b h(t) d\left( \int_a^t f''(u(\tau))h(\tau) d\tau \right).$$

Это означает, что оператор второй производной  $J''(u)$  действует на элемент  $h = h(t)$  по правилу:  $J''(u)h = \int_a^t f''(u(\tau))h(\tau) d\tau \in C^1[a, b]$ . Таким образом, если  $f(u) \in C^1(E^1)$ , то  $J(u) \in C^1(B)$ , а если  $f(u) \in C^2(E^1)$ , то  $J(u) \in C^2(B)$ .

**Пример 5.** Рассмотрим функцию

$$J(u) = \frac{1}{2} \langle Au, u \rangle - \langle b, u \rangle, \quad u \in H, \quad (18)$$

где  $H$  — гильбертово пространство,  $A \in \mathcal{L}(H \rightarrow H)$ ,  $b \in H$ . Приращение этой функции представимо в виде

$$\begin{aligned} J(u+h) - J(u) &= \frac{1}{2} (\langle Au, h \rangle + \langle u, Ah \rangle) - \langle b, h \rangle + \frac{1}{2} \langle Ah, h \rangle = \\ &= \left\langle \frac{1}{2} (A + A^*)u - b, h \right\rangle + \frac{1}{2} \langle Ah, h \rangle, \end{aligned}$$

где  $A^*$  — оператор, сопряженный к оператору  $A$ . Отсюда следует, что  $J(u) \in C^2(H)$  и

$$J'(u) = \frac{1}{2} (A + A^*)u - b, \quad J''(u) = \frac{1}{2} (A + A^*).$$

В частности, если  $A$  — самосопряженный оператор, т. е.  $A^* = A$ , то  $J'(u) = Au - b$ ,  $J''(u) = A$ . Если, кроме того,  $A$  — неотрицательно определенный, т. е.  $\langle Ah, h \rangle \geq 0 \quad \forall h \in H$ , то  $J(u)$  выпукла на  $H$  (теорема 1). Если при этом множество  $U_*$  точек минимума функции (18) на выпуклом множестве  $U$  непусто, то точка  $u_* \in U_*$  тогда и только тогда, когда  $\langle Au_* - b, u - u_* \rangle \geq 0 \quad \forall u \in U$  (условие (14)). Если самосопряженный оператор  $A$  является положительно определенным, т. е.  $\langle Ah, h \rangle \geq \mu \|h\|_H^2 \quad \forall h \in H$ ,  $\mu = \text{const} > 0$ , то функция (18) сильно выпукла на  $H$  (теорема 1) и на любом выпуклом замкнутом множестве  $U$  из  $H$  достигает своей нижней грани в единственной точке  $u_*$  (теорема 2.10), причем если  $U = H$ , то  $Au_* = b$ . Последнее равенство лежит в основе метода Рунта [496], сводящего задачу определения решения операторного уравнения  $Au = b$  к поиску точки минимума функции (18) на  $H$  (см. пример 4.2.4).

**Пример 6.** Рассмотрим квадратичную функцию

$$J(u) = \|Au - b\|_F^2, \quad u \in H, \quad (19)$$

где  $A \in \mathcal{L}(H \rightarrow F)$ ,  $H$  и  $F$  — гильбертовы пространства,  $b \in F$  (см. задачу (2.3)). Приращение функции (19) представимо в виде

$$\begin{aligned} J(u+h) - J(u) &= 2 \langle Au - b, Ah \rangle_F + \|Ah\|_F^2 = \\ &= \langle 2A^*(Au - b), h \rangle_H + \langle A^*Ah, h \rangle_H, \end{aligned} \quad (20)$$

где  $A^* \in \mathcal{L}(F \rightarrow H)$  — оператор, сопряженный к оператору  $A$ . Из формулы (20) следует, что  $J(u) \in C^2(H)$ , причем

$$J'(u) = 2A^*(Au - b), \quad J''(u) = 2A^*A \quad (21)$$

(ср. с формулами из примера 4.2.5). Так как

$$\langle J''(u)h, h \rangle = \langle 2A^*Ah, h \rangle_H = 2\|Ah\|_F^2 \geq 0 \quad \forall h \in H,$$

то функция (19) выпукла на  $H$  (теорема 1). Если  $\|Ah\|_F^2 \geq \mu\|h\|_H^2 \quad \forall h \in H$ ,  $\mu = \text{const} > 0$ , то функция (19) сильно выпукла на  $H$  (теорема 1). Если множество  $U_*$  точек минимума функции (19) на выпуклом множестве  $U$  непусто (теоремы 2.12, 2.13), то точка  $u_*$  лежит в  $U_*$  тогда и только тогда, когда

$$\langle A^*(Au_* - b), u - u_* \rangle_H \geq 0 \quad \forall u \in U. \quad (22)$$

Если  $U = H$ , то условие (22) эквивалентно равенству  $A^*(Au_* - b) = 0$  (теорема 3).

**Пример 7.** Рассмотрим функцию

$$J(u) = |x(T; u) - b|_{E^n}^2, \quad (23)$$

где  $x = x(t) = x(t; u)$  — решение системы

$$\dot{x}(t) = D(t)x(t) + B(t)u(t), \quad t_0 \leq t \leq T; \quad x(t_0) = 0, \quad (24)$$

управление  $u = u(t) \in L_2^r[t_0, T]$ ; остальные обозначения см. в примере 2.14. В этом примере было показано, что оператор  $A$ , определенный формулой (2.6)

$$Au = x(T; u), \quad (25)$$

является линейным непрерывным оператором, действующим из гильбертова пространства  $H = L_2^r[t_0, T]$  в гильбертово пространство  $F = E^n$ , и функция (23) с помощью этого оператора может быть представлена в виде (19). Поэтому, пользуясь результатами примера 6, можем сказать, что функция (23) выпукла и дважды непрерывно дифференцируема на  $H = L_2^r[t_0, T]$ , причем ее производные имеют вид (21). Покажем, что оператор  $A^*$ , входящий в (21) и сопряженный к оператору (25), каждому элементу  $c \in F = E^n$  ставит в соответствие элемент  $A^*c \in H = L_2^r[t_0, T]$  по следующему правилу:

$$A^*c = B^\top(t)\psi(t; c), \quad t_0 \leq t \leq T, \quad (26)$$

где  $\psi = \psi(t) = \psi(t; c) = (\psi^1(t), \dots, \psi^n(t))$  — решение задачи Коши

$$\dot{\psi}(t) = -D^\top(t)\psi(t), \quad t_0 \leq t \leq T; \quad \psi(T) = c. \quad (27)$$

В силу теоремы 6.1.2 задача (27) имеет, притом единственное, решение при каждом  $c \in E^n$ , так что оператор (26) определен всюду на  $E^n$ . Очевидно, этот оператор линейный, действует из  $E^n$  в  $L_2^r[t_0, T]$ . Кроме того, с учетом (24)–(27) имеем:

$$\langle Au, c \rangle_{E^n} = \langle x(T; u), \psi(T; c) \rangle = \int_{t_0}^T \frac{d}{dt} \langle x(t; u), \psi(t; c) \rangle dt + \langle x(t_0; u), \psi(t_0; c) \rangle =$$



$$\begin{aligned}
&= \int_{t_0}^T (\langle \dot{x}(t; u), \psi(t; c) \rangle + \langle x(t; u), \dot{\psi}(t; c) \rangle) dt = \\
&= \int_{t_0}^T (\langle D(t)x(t; u) + B(t)u(t), \psi(t; c) \rangle + \langle x(t; u), -D^\top(t)\psi(t; c) \rangle) dt = \\
&= \int_{t_0}^T \langle u(t), B^\top(t)\psi(t; c) \rangle dt = \langle u, A^*c \rangle_{L_2^r} \quad \forall u \in H, \quad c \in F.
\end{aligned}$$

Это означает, что оператор  $A^*$ , определенный формулой (26), действительно является сопряженным к оператору (25).

Из (21), (25), (26) получаем следующее выражение для формулы градиента функции (23):

$$J'(u) = 2B^\top(t)\psi(t; Au - b), \quad t_0 \leq t \leq T, \quad (28)$$

где  $\psi(t; Au - b)$  — решение задачи Коши (27) при  $c = Au - b = x(T; u) - b$ , т. е.

$$\dot{\psi}(t) = -D^\top(t)\psi(t), \quad t_0 \leq t \leq T; \quad \psi(T) = x(T; u) - b. \quad (29)$$

Таким образом, для вычисления градиента функции (23) в некоторой точке  $u = u(t) \in L_2^r[t_0, T]$  сначала нужно решить задачу Коши (24) и определить  $x(t; u)$ , затем подставить полученное значение  $x(T; u)$  в (29) и, решая задачу Коши (29), определить  $\psi(t; Au - b)$  и, наконец, по формуле (28) найти градиент  $J'(u)$ .

Пользуясь теоремой 3, теперь мы можем сформулировать следующий критерий оптимальности для задачи минимизации функции (23) на выпуклом множестве  $U \subseteq L_2^r[t_0, T]$ : для того, чтобы в точке  $u = u_* \in U$  функция (23) достигала своей нижней грани на  $U$ , необходимо и достаточно, чтобы

$$\langle J'(u_*), u - u_* \rangle = \int_{t_0}^T \langle B^\top(t)\psi(t; x(T; u_*) - b), u(t) - u_*(t) \rangle_{E^r} dt \geq 0 \quad (30)$$

$\forall u \in U.$

Условие (30) тогда перепишем в виде

$$\begin{aligned}
\min_{u(t) \in U} \int_{t_0}^T \langle B^\top(t)\psi(t; x(T; u_*) - b), u(t) \rangle dt = \\
= \int_{t_0}^T \langle B^\top(t)\psi(t; x(T; u_*) - b), u_*(t) \rangle dt. \quad (31)
\end{aligned}$$

Если ввести функцию Гамильтона–Понтрягина

$$H(x, u, t, \psi) = \langle \psi, D(t)x + B(t)u \rangle,$$

то условие (31) можно записать в так называемой *форме интегрального принципа минимума*:

$$\min_{u(t) \in U} \int_{t_0}^T H(x(t; u_*), u(t), t, \psi(t; x(T; u_*) - b)) dt = \\ = \int_{t_0}^T H(x(t; u_*), u_*(t), t, \psi(t; x(T; u_*) - b)) dt.$$

Если множество  $U$  имеет вид

$$U = \{u = u(t) \in L_2^r[t_0, T]: u(t) \in V \text{ почти всюду на } [t_0, T]\}, \quad (32)$$

где  $V$  — выпуклое множество из  $E^r$ , то из (31) можно получить

$$\min_{v \in V} \langle B^\top(t) \psi(t; x(T, u_*) - b), v \rangle = \langle B^\top(t) \psi(t; x(T, u_*) - b), u_*(t) \rangle$$

для почти всех  $t \in [t_0, T]$ . Взяв здесь вместо  $\psi(t; x(T, u_*) - b)$  функцию  $(-\psi(t; x(T, u_*) - b))$ , придем к принципу максимума Понтрягина для задачи минимизации функции (23) на множестве (32). Заметим, что в гл. 6 принцип максимума был доказан для более общей задачи оптимального управления без предположения выпуклости множества  $V$ . С другой стороны, условие (31) справедливо для всех выпуклых множеств  $U$  из  $L_2^r[t_0, T]$ , необязательно имеющих вид (32), и дает не только необходимое, но и достаточное условие оптимальности.

Вторая производная функции (23) согласно формуле (21) равна  $J''(u) = 2AA^*$ , где операторы  $A, A^*$  имеют вид (25), (26). Формулу для  $J''(u)$  можно записать в несколько иной форме, если воспользоваться известной формулой Коши

$$x(t; u) = \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau, \quad t_0 \leq t \leq T, \quad (33)$$

для решения задачи (24), где  $\Phi(t, \tau)$  — матрица порядка  $n \times n$ , определяемая условиями

$$\frac{d\Phi(t, \tau)}{dt} = D(t)\Phi(t, \tau), \quad t_0 \leq t, \tau \leq T; \quad \Phi(\tau, \tau) = I, \quad (34)$$

$I$  — единичная матрица порядка  $n \times n$ . Из (25), (33) следует, что значение оператора  $A$  на элементе  $h = h(t) \in L_2^r[t_0, T]$  равно

$$Ah = x(T; h) = \int_{t_0}^T \Phi(t, \tau) B(\tau) h(\tau) d\tau. \quad (35)$$

Далее, с помощью той же матрицы  $\Phi(t, \tau)$  можно получить следующее представление для решения задачи (27)

$$\psi(t; c) = \Phi^\top(T, t)c, \quad t_0 \leq t \leq T, \quad (36)$$

где  $\Phi^\top(t, \tau)$  — транспонированная матрица  $\Phi(t, \tau)$  (см. упражнение 3). Из (26), (36) следует

$$A^*c = B^\top(t)\Phi^\top(T, t)c, \quad t_0 \leq t \leq T. \quad (37)$$

С помощью представлений (35), (37) значение оператора  $J''(u) = 2A^*A$  на элементе  $h = h(t)$  может быть выражено формулой

$$\begin{aligned} J''(u)h &= 2A^*Ah = 2B^\top(t)\Phi^\top(T, t) \int_{t_0}^T \Phi(T, \tau)B(\tau)h(\tau) d\tau = \\ &= \int_{t_0}^T 2B^\top(t)\Phi^\top(T, t)\Phi(T, \tau)B(\tau)h(\tau) d\tau, \quad t_0 \leq t \leq T. \end{aligned} \quad (38)$$

Как видим, оператор  $J''(u)$  является оператором Фредгольма с симметричным ядром  $K(t, \tau) = 2B^\top(t)\Phi^\top(T, t)\Phi(T, \tau)B(\tau)$ ,  $t_0 \leq t, \tau \leq T$ . Мы здесь не будем подробно останавливаться на свойствах матрицы  $\Phi(t, \tau)$  (см. упражнение 3) и выводе формул (33), (36). Заметим лишь, что эти формулы весьма полезны при теоретическом исследовании задач оптимального управления, связанных с системой (24), но при численном решении таких задач они применяются крайне редко из-за трудностей в определении явного выражения матрицы  $\Phi(t, \tau)$  из (34). Для получения приближенного решения задач Коши (24), (27), (34) могут быть использованы разностные методы [74; 89; 634].

**Пример 8.** Рассмотрим функцию

$$J_1(u) = |x_1(T; u) - b_1|_{E^n}^2, \quad (39)$$

где  $x_1 = x_1(t; u)$  — решение задачи Коши

$$\dot{x}_1(t) = D(t)x_1(t) + B(t)u(t) + f(t), \quad t_0 \leq t \leq T, \quad x(t_0) = x_0, \quad (40)$$

$u = u(t) \in L_2^r[t_0, T]$ ,  $f(t) \in L_2^n[t_0, T]$ . Как и в примере 2.15, воспользуемся представлением решения  $x_1(t; u)$  задачи (40) в виде суммы

$$x_1(t; u) = x(t; u) + x_0(t), \quad t_0 \leq t \leq T, \quad (41)$$

где  $x(t; u)$  — решение задачи (24),  $x_0(t)$  — решение задачи (2.13):  $\dot{x}_0(t) = D(t)x_0(t) + f(t)$ ,  $x(t_0) = x_0$ , и функцию (39) запишем в виде:  $J_1(u) = |x(T, u) - b|^2 = |Au - b|^2$ , где  $b = b_1 - x_0(T)$ , оператор  $A$  определен согласно (25). Отсюда и из формулы (28) имеем

$$\begin{aligned} J_1(u) &= 2B^\top(t)\psi(t; Au - b) = 2B^\top(t)\psi(t; Au + x_0(T) - b_1) = \\ &= 2B^\top(t)\psi(t; x_1(T; u) - b_1), \end{aligned}$$

где  $\psi(t; x_1(T; u) - b_1)$  — решение задачи Коши (27) при  $c = x_1(T; u) - b_1$ , и, кроме того, справедливо равенство  $J_1'' = J''(u) = 2A^*A$ . Нетрудно видеть, что формулы (35)–(38) сохраняют силу и для функции (39).

Пример 9. Рассмотрим функцию

$$J(u) = \int_{t_0}^T |x(t; u) - b(t)|_{E^n}^2 dt, \quad (42)$$

где  $x = x(t; u)$  — решение задачи Коши (24),  $b(t) \in L_2^n[t_0, T]$ ,  $u = u(t) \in L_2^r[t_0, T]$ . В примере 2.16 было показано, что оператор  $A$ , определенный формулой (2.15):

$$Au = x(t; u), \quad t_0 \leq t \leq T, \quad (43)$$

является линейным непрерывным оператором, действующим из гильбертова пространства  $H = L_2^r[t_0, T]$  в гильбертово пространство  $F = L_2^n[t_0, T]$ , и функция (42) с помощью этого оператора представляется в виде (19). Отсюда и из примера 6 следует, что  $J(u) \in C^2(H)$ , причем ее производные имеют вид (21). Покажем, что оператор  $A^*$ , входящий в (21) и сопряженный к оператору (43), каждому элементу  $c = c(t) \in F = L_2^n[t_0, T]$  ставит в соответствие элемент  $A^*c \in H = L_2^r[t_0, T]$  по следующему правилу:

$$A^*c = B^\top(t)\psi(t; c), \quad t_0 \leq t \leq T, \quad (44)$$

где  $\psi = \psi(t) = \psi(t; c)$  — решение задачи Коши

$$\dot{\psi}(t) = -D^\top(t)\psi(t) - c(t), \quad t_0 \leq t \leq T; \quad \psi(T) = 0. \quad (45)$$

В силу теоремы 6.1.2 задача (45) имеет, притом единственное, решение при каждом  $c \in F$ , так что оператор (44) определен всюду на  $F$ . Очевидно, что этот оператор линейный, действует из  $F = L_2^n[t_0, T]$  в  $H = L_2^r[t_0, T]$ . Кроме того, с учетом (24), (43)–(45) имеем:

$$\begin{aligned} \langle Au, c \rangle_H &= \int_{t_0}^T \langle x(t; u), c(t) \rangle dt = \int_{t_0}^T \langle x(t; u), -\dot{\psi}(t; c) - D^\top(t)\psi(t; c) \rangle dt = \\ &= -\langle x(t; u), \psi(t; c) \rangle \Big|_{t_0}^T + \int_{t_0}^T \langle \dot{x}(t; u), \psi(t; c) \rangle dt - \int_{t_0}^T \langle D(t)x(t; u), \psi(t; c) \rangle dt = \\ &= \int_{t_0}^T \langle \dot{x}(t; u) - D(t)x(t; u), \psi(t; c) \rangle dt = \int_{t_0}^T \langle B(t)u(t), \psi(t; c) \rangle dt = \\ &= \int_{t_0}^T \langle u(t), B^\top(t)\psi(t; c) \rangle dt = \langle u, A^*c \rangle_F \quad \forall u \in H, \quad c \in F. \end{aligned}$$

Это означает, что оператор  $A^*$ , определенный формулой (44), действительно является сопряженным к оператору (43).

Из (21), (43), (44) получаем следующее выражение для формулы градиента функции (42)

$$J'(u) = 2B^\top(t)\psi(t; Au - b), \quad t_0 \leq t \leq T, \quad (46)$$

внешне схожее с (28),  $\psi(t; Au - b)$  — решение задачи Коши (45) при  $c = Au - b = x(t; u) - b(t)$ , т. е.

$$\dot{\psi}(t) = -D^\top(t)\psi(t) - x(t; u) + b(t), \quad t_0 \leq t \leq T; \quad \psi(T) = 0. \quad (47)$$

Таким образом, для вычисления градиента функции (42) сначала нужно последовательно решить задачи Коши (24) и (47), а затем воспользоваться формулой (46).

Критерий оптимальности (теорема 3) для задачи минимизации функции (42) на выпуклом множестве  $U \subseteq H$  запишется в том же виде (30) или (31), но в качестве  $\psi(t)$  в этих формулах здесь нужно взять решение задачи Коши (47) при  $u = u_*$ . В случае, когда множество  $U$  задается условиями (32), как и в примере 7, нетрудно установить связь между полученным условием оптимальности (31) и принципом максимума Понтрягина.

Вторая производная функции (42) согласно (21) имеет вид  $J''(u) = 2A^*A$ , где операторы  $A^*$ ,  $A$  определены равенствами (43), (44). Приведем формулу для значения  $J''(u)h$  оператора  $J''(u)$  на элементе  $h \in H = L_2^r[t_0, T]$ , аналогичную (38). Из (33), (43) имеем:

$$Ah = \int_{t_0}^t \Phi(t, \xi) B(\xi) h(\xi) d\xi, \quad t_0 \leq t \leq T. \quad (48)$$

Решение задачи Коши (45) может быть записано в виде

$$\psi(t; c) = \int_t^T \Phi^\top(\tau, t) c(\tau) d\tau, \quad t_0 \leq t \leq T \quad (49)$$

(см. упражнение 3). Из (44), (49) следует

$$A^*c = \int_t^T B^\top(t) \Phi^\top(\tau, t) c(\tau) d\tau, \quad t_0 \leq t \leq T. \quad (50)$$

Тогда значение  $J''(u)h$  оператора  $J''(u)$  на элементе  $h \in H = L_2^r[t_0, T]$  выражается формулой

$$J''(u)h = 2A^*Ah = 2 \int_t^T B^\top(t) \Phi^\top(\tau, t) \left( \int_{t_0}^\tau \Phi(\tau, \xi) B(\xi) h(\xi) d\xi \right) d\tau, \quad (51)$$

$$t_0 \leq t \leq T.$$

Квадратичная форма  $\langle J''(u)h, h \rangle = 2\langle Ah, Ah \rangle$  равна

$$\langle J''(u)h, h \rangle = \int_{t_0}^T \left\langle 2 \int_t^T B^\top(t) \Phi^\top(\tau, t) \left( \int_{t_0}^\tau \Phi(\tau, \xi) B(\xi) h(\xi) d\xi \right) d\tau, h(t) \right\rangle_{E^r} dt =$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \int_{t_0}^T \int_t^T \left\langle B^\top(t) \Phi^\top(\tau, t) \left( \int_{t_0}^\tau \Phi(\tau, \xi) B(\xi) h(\xi) d\xi \right), h(t) \right\rangle d\tau dt = \\
&= 2 \int_{t_0}^T \int_{t_0}^\tau \left\langle B^\top(t) \Phi^\top(\tau, t) \int_{t_0}^\tau \Phi(\tau, \xi) B(\xi) h(\xi) d\xi, h(t) \right\rangle dt d\tau = \\
&= 2 \int_{t_0}^T \left( \int_{t_0}^\tau \int_{t_0}^\tau \langle B^\top(t) \Phi^\top(\tau, t) \Phi(\tau, \xi) B(\xi) h(\xi), h(t) \rangle d\xi dt \right) d\tau. \quad (52)
\end{aligned}$$

Пример 10. Рассмотрим функцию

$$J_1(u) = \int_{t_0}^T |x_1(t; u) - b_1(t)|_{E^n}^2 dt, \quad (53)$$

где  $x_1(t; u)$  — решение задачи Коши (40),  $u = u(t) \in L_2^2[t_0, T]$ . Пользуясь формулой (41), функцию (53) можем записать в виде (19):

$$J_1(u) = \int_{t_0}^T |x(t; u) - b(t)|_{E^n}^2 dt = \|Au - b\|_{L_2^2}^2,$$

где  $b = b(t) = b_1(t) - x_0(t)$ , оператор  $A$  определен согласно (43). Отсюда, пользуясь результатами примера 9, из формулы (46) имеем  $J'(u) = 2B^\top(t)\psi(t; Au - b)$ , где  $\psi(t; Au - b)$  — решение задачи Коши (45) при  $c = c(t) = Au - b(t) = Au + x_0(t) - b_1(t) = x_1(t; u) - b_1(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq T$ . Вторая производная функции (53) совпадает со второй производной функции (42); формулы (48)–(52) здесь также сохраняют силу.

Пример 11. Пусть

$$J(u) = \int_c^d \left( \int_a^b K(t, \tau) u(\tau) d\tau - b(t) \right)^2 dt, \quad (54)$$

где  $K(t, \tau) \in L_2(Q)$ ,  $Q = \{(t, \tau) : a \leq \tau \leq b, c \leq t \leq d\}$ ,  $b = b(t) \in L_2[c, d]$ . Введем оператор Фредгольма [393; 705]:

$$Au = \int_a^b K(t, \tau) u(\tau) d\tau, \quad c \leq t \leq d, \quad (55)$$

действующий из  $H = L_2[a, b]$  в  $F = L_2[c, d]$ , линейный, непрерывный. Тогда функцию (54) можем записать в виде (19) и воспользоваться результатами примера 6. Сопряженный к  $A$  оператор  $A^*$  имеет вид

$$A^*c = \int_c^d K(t, \tau) c(t) dt, \quad a \leq \tau \leq b. \quad (56)$$

Этот оператор действует из  $F$  в  $H$ , он линейный, непрерывный. Далее, пользуясь теоремой Фубини, имеем

$$\begin{aligned}\langle Au, c \rangle_F &= \int_c^d \left( \int_a^b K(t, \tau) u(\tau) d\tau \right) c(t) dt = \iint_Q K(t, \tau) u(\tau) c(t) d\tau dt = \\ &= \int_a^b \left( \int_c^d K(t, \tau) c(t) dt \right) u(\tau) d\tau = \langle A^* c, u \rangle_H \quad \forall u \in H, \quad \forall c \in F.\end{aligned}$$

Это означает, что оператор (56) является сопряженным к оператору (55). Из (21), (55), (56) получим следующую формулу для градиента функции (54):

$$J'(u) = 2A^*(Au - b) = 2 \int_c^d K(t, \tau) \left( \int_a^b K(t, \xi) u(\xi) d\xi - b(t) \right) dt, \quad a \leq \tau \leq b.$$

Вторая производная  $J''(u) = 2A^*A$  на каждый элемент  $h \in H$  действует по правилу:

$$J''(u)h = 2 \int_c^d K(t, \tau) \left( \int_a^b K(t, \xi) h(\xi) d\xi \right) dt, \quad a \leq \tau \leq b.$$

Из теоремы 3 следует, что функция (54) достигает своей нижней грани на множестве  $U = L_2[a, b]$  в точке  $u = u_*(t)$  тогда и только тогда, когда  $u_*(t)$  является решением интегрального уравнения Фредгольма первого рода

$$\int_a^b \left( \int_c^d K(t, \tau) K(t, \xi) dt \right) u(\xi) d\xi = \int_c^d K(t, \tau) b(t) dt, \quad a \leq \tau \leq b.$$

**6.** В бесконечномерных функциональных пространствах для задач минимизации справедливы (с соответствующими уточнениями) условия оптимальности, аналогичные условиям, изложенным в § 2.3–2.5, 4.8, 4.9, 5.17 для конечномерных задач. Напомним, что при выводе необходимых условий оптимальности выше мы пользовались теорией неявных функций (§ 2.3, 4.8), теоремами отделимости выпуклых множеств (§ 4.8, 4.9), методом штрафных функций (§ 5.17). Изложим еще один метод получения таких условий, называемый *вариационным принципом*. В теории оптимизации вариационным принципом принято называть теоремы, в которых утверждается, что исходную задачу минимизации, в которой нижняя грань, возможно, не достигается, но известна точка  $u_2$  такая, что значение минимизируемой функции в ней близко к нижней грани на  $\varepsilon > 0$ , можно заменить новой, возмущенной задачей минимизации, которая уже будет иметь решение, близкое к  $u_\varepsilon$  и в то же время обладающее, вообще говоря, дополнительными «хорошими» свойствами. Исторически первым был *вариационный принцип* Экланда [961]. Сформулируем его.

**Т е о р е м а 4.** Пусть  $M$  — полное метрическое пространство с метрикой  $\rho = \rho(u, v)$ , функция  $J(u)$  собственная и полунепрерывная снизу,  $J_* = \inf_{u \in M} J(u) > -\infty$ , пусть  $\varepsilon > 0$  и в некоторой точке  $v_\varepsilon \in M$  выполняется неравенство

$$J(v_\varepsilon) \leq J_* + \varepsilon.$$

Тогда для любого числа  $\alpha > 0$  найдется точка  $u_\varepsilon \in M$  такая, что

$$\rho(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \leq \alpha, \quad J(u_\varepsilon) \leq J(v_\varepsilon),$$

$$g(u) = J(u) + \frac{\varepsilon}{\alpha} \rho(u, u_\varepsilon) > J(u_\varepsilon) \quad \forall u \in M, \quad u \neq u_\varepsilon.$$



Доказательство этой теоремы, см., например, в [843; 930]. Вслед за работой [961] последовали обобщения вариационного принципа, удобные для различных приложений в анализе, геометрии, теории оптимизации и др. (см., например, в [843; 894; 930]). Здесь мы ограничимся формулировкой и доказательством одного из вариантов так называемого гладкого вариационного принципа.

**Теорема 5.** Пусть  $M$  — полное метрическое пространство с метрикой  $\rho = \rho(u, v)$ , функция  $J(u)$  определена, конечна и полунепрерывна снизу на  $M$ ,  $J(u) \geq 0 \quad \forall u \in M$ , пусть  $\varepsilon > 0$  и в некоторой точке  $w \in M$  выполняется неравенство

$$J(w) \leq \varepsilon. \quad (57)$$

Тогда существуют точка  $u_* \in M$  и последовательности чисел  $\gamma_k \in \mathbb{R}$  и точек  $u_k \in M$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , обладающие свойствами

$$\gamma_k \geq 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \leq 3, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \rho(u_k, u_*) = 0, \quad (58)$$

$$\rho^2(u_k, w) \leq \sqrt{\varepsilon}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (59)$$

$$J(u_k) \leq J(w), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (60)$$

функция

$$g(u) = J(u) + \sqrt{\varepsilon} \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \rho^2(u, u_k) \quad (61)$$

достигает своей нижней грани на  $M$  в точке  $u_* \in M$ , т. е.

$$g_* = \inf_{u \in M} g(u) = g(u_*). \quad (62)$$

Эта теорема представляет собой упрощенную модификацию одного из утверждений работы [894]; ее формулировку и доказательство автору сообщил Д. Ю. Карамзин.

**Доказательство.** Искомые последовательности  $\{\gamma_k\}$ ,  $\{u_k\}$  будем строить по индукции. Начальный шаг индукции будет несколько нестандартным, поэтому на нем остановимся подробнее. Положим  $u_0 = w$  и введем множество

$$\Gamma_0 = \{\gamma \in \mathbb{R} : \gamma \geq 0, J(u) + 2\sqrt{\varepsilon}\gamma\rho^2(u, u_0) \geq \varepsilon\gamma^2 \quad \forall u \in M\}. \quad (63)$$

По условию  $J(u) \geq 0 \quad \forall u \in M$ , поэтому  $\gamma = 0 \in \Gamma_0$  и

$$\tilde{\gamma}_0 = \sup_{\gamma \in \Gamma_0} \gamma \geq 0. \quad (64)$$

Из (63) следует

$$J(u) + 2\sqrt{\varepsilon}\gamma\rho^2(u, u_0) \geq \varepsilon\gamma^2 \quad \forall u \in M \quad \forall \gamma \in \Gamma_0. \quad (65)$$

Полагая в (65)  $u = u_0$ , с учетом (57) имеем

$$\varepsilon \geq J(u_0) \geq \varepsilon\gamma^2 \quad \forall \gamma \in \Gamma_0, \quad \text{или} \quad \gamma^2 \leq 1 \quad \forall \gamma \in \Gamma_0. \quad (66)$$

Перейдем в (65), (66) к верхней грани по  $\gamma \in \Gamma_0$ . Получаем

$$\varepsilon\tilde{\gamma}_0 \leq J(u_0) \leq \varepsilon, \quad 0 \leq \tilde{\gamma}_0 \leq 1, \quad (67)$$

$$J(u) + 2\sqrt{\varepsilon}\tilde{\gamma}_0\rho^2(u, u_0) \geq \varepsilon\tilde{\gamma}_0^2 \quad \forall u \in M. \quad (68)$$

Из (68) следует, что либо  $J(u_0) = \varepsilon\tilde{\gamma}_0^2$ , либо  $J(u_0) > \varepsilon\tilde{\gamma}_0^2$ . Если

$$J(u_0) = \varepsilon\tilde{\gamma}_0^2, \quad (69)$$

то положим

$$\gamma_0 = 2\tilde{\gamma}_0, \quad u_0 = w, \quad \gamma_k = 0, \quad u_k = w = u_* \quad \forall k \geq 1, \quad (70)$$

$$g(u) = J(u) + \sqrt{\varepsilon}\gamma_0\rho^2(u, u_0) \quad \forall u \in M.$$

При этом условия (58)–(60), очевидно, выполняются. Из (68)–(70) имеем

$$g(u_0) = \inf_{u \in M} g(u) = \varepsilon\tilde{\gamma}_0^2,$$

откуда следует (62). Таким образом, в случае (69) теорема доказана.

Пусть теперь

$$J(u_0) > \varepsilon \tilde{\gamma}_0^2, \quad (71)$$

что в силу (67) возможно только при  $J(u_0) > 0$ ,  $0 \leq \tilde{\gamma}_0 < 1$ . Убедимся, что тогда

$$\tilde{\gamma}_0 > 0. \quad (72)$$

Так как функция  $J(u)$  полунепрерывна снизу, то найдется такое достаточно малое число  $\delta > 0$ , что

$$J(u) \geq \varepsilon \delta^2 \quad \forall u \in M, \quad \rho^2(u, u_0) \leq \frac{\delta \sqrt{\varepsilon}}{2} \quad (73)$$

(см. ниже упражнение 28). Покажем, что такое число  $\delta \in \Gamma_0$ . В самом деле, если  $\rho^2(u, u_0) \leq \frac{\delta \sqrt{\varepsilon}}{2}$ , то в силу (73)  $J(u) + 2\sqrt{\varepsilon} \delta \rho^2(u, u_0) \geq J(u) \geq \varepsilon \delta^2$ . Если же  $\rho^2(u, u_0) > \frac{\delta \sqrt{\varepsilon}}{2}$ , то  $J(u) + 2\sqrt{\varepsilon} \delta \rho^2(u, u_0) > 0 + 2\sqrt{\varepsilon} \delta \cdot \frac{\delta \sqrt{\varepsilon}}{2} = \varepsilon \delta^2$ . Это означает, что неравенство (65) выполнено при  $\gamma = \delta > 0$ . Отсюда и из (64) следует, что  $\tilde{\gamma}_0 \geq \delta > 0$ . Неравенство (72) доказано. Далее, введем функцию

$$J_1(u) = J(u) + 2\sqrt{\varepsilon} \tilde{\gamma}_0 \rho^2(u, u_0) - \varepsilon \tilde{\gamma}_0^2, \quad u \in M. \quad (74)$$

В силу (68)  $J_1(u) \geq 0 \quad \forall u \in M$ , поэтому  $\inf_{u \in M} J_1(u) \geq 0$ . Покажем, что

$$\inf_{u \in M} J_1(u) = 0. \quad (75)$$

Допустим, что это не так, т. е. существует такое число  $\alpha > 0$ , что  $J_1(u) \geq \alpha > 0 \quad \forall u \in M$ . Возьмем какое-либо число  $\beta > 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} J_1(u) &= J(u) + 2\sqrt{\varepsilon}(\tilde{\gamma}_0 + \beta - \beta)\rho^2(u, u_0) - \varepsilon(\tilde{\gamma}_0 + \beta - \beta)^2 = \\ &= J(u) + 2\sqrt{\varepsilon}(\tilde{\gamma}_0 + \beta)\rho^2(u, u_0) - 2\sqrt{\varepsilon}\beta\rho^2(u, u_0) - \\ &\quad - \varepsilon(\tilde{\gamma}_0 + \beta)^2 + 2\varepsilon(\tilde{\gamma}_0 + \beta)\beta - \varepsilon\beta^2 \geq \alpha > 0 \quad \forall u \in M, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} J(u) + 2\sqrt{\varepsilon}(\tilde{\gamma}_0 + \beta)\rho^2(u, u_0) - \varepsilon(\tilde{\gamma}_0 + \beta)^2 &\geq \\ &\geq \alpha + 2\sqrt{\varepsilon}\beta\rho^2(u, u_0) - \varepsilon(\tilde{\gamma}_0 + \beta)^2 \geq \alpha + 2\sqrt{\varepsilon}\beta\rho^2(u, u_0) - \varepsilon\beta(2\tilde{\gamma}_0 + \beta) \geq \\ &\geq \varepsilon\left(\frac{\alpha}{\varepsilon} - \beta(2\tilde{\gamma}_0 + \beta)\right) > 0 \quad \forall u \in M, \end{aligned}$$

если  $0 < \beta < \beta_1 = \sqrt{\frac{\alpha}{\varepsilon} + \tilde{\gamma}_0^2} - \tilde{\gamma}_0$ . Это значит, что  $\gamma = \tilde{\gamma}_0 + \beta \in \Gamma_0$ . А тогда согласно (64)  $\tilde{\gamma}_0 > \tilde{\gamma}_0 + \beta$ , что противоречит выбору  $\beta > 0$ . Равенство (75) доказано.

Введем множество

$$S_0 = \left\{ u \in M : \rho^2(u, u_0) \leq \frac{9}{16} \sqrt{\varepsilon} \tilde{\gamma}_0 \right\}. \quad (76)$$

Заметим, что если  $u \notin S_0$ , т. е.  $\rho^2(u, u_0) > \frac{9}{16} \sqrt{\varepsilon} \tilde{\gamma}_0$ , то в силу (72), (74)

$$J_1(u) > 0 + \sqrt{\varepsilon} \cdot 2\tilde{\gamma}_0 \cdot \frac{9}{16} \sqrt{\varepsilon} \tilde{\gamma}_0 - \varepsilon \tilde{\gamma}_0^2 = \frac{1}{8} \varepsilon \tilde{\gamma}_0^2 > 0.$$

Отсюда и из (75) следует, что

$$\inf_{u \in S_0} J_1(u) = \inf_{u \in M} J_1(u) = 0. \quad (77)$$

По определению нижней грани тогда найдется точка  $u_1 \in S_0$  такая, что

$$\rho^2(u_1, u_0) \leq \frac{9}{16} \sqrt{\varepsilon} \tilde{\gamma}_0, \quad 0 \leq J_1(u_1) \leq \frac{\varepsilon \tilde{\gamma}_0^2}{2^{2N}}, \quad (78)$$

где  $N$  — достаточно большое натуральное число. Имея в виду неравенства (71), (72), будем считать, что  $N$  столь велико, что

$$J(u_0) = J(u) > \varepsilon \tilde{\gamma}_0^2 + \varepsilon \tilde{\gamma}_0^2 \left( \frac{1}{2^{2N}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{Nk}} \right) = \varepsilon \tilde{\gamma}_0^2 \left( 1 + \frac{1}{2^{2N}} + \frac{1}{2^N - 1} \right). \quad (79)$$

Начальный шаг индукции описан: мы нашли число  $\gamma_0 = 2\tilde{\gamma}_0$ , точки  $u_0 = w$ ,  $u_1 \in M$  со свойствами (72), (78), (79).

Наметим схему первого стандартного шага индукции. Введем множество

$$\Gamma_1 = \left\{ \gamma \in \mathbb{R}: \gamma \geq 0, J_1(u) + \sqrt{\varepsilon}\gamma\rho^2(u, u_1) \geq \frac{\varepsilon\gamma^2}{2N} \quad \forall u \in M \right\} \quad (80)$$

и определим число

$$\gamma_1 = \sup_{\gamma \in \Gamma_1} \gamma \geq 0. \quad (81)$$

Полагая в (80)  $u = u_1$ , с учетом (78) по аналогии с (67) получим

$$\frac{\varepsilon\gamma_1^2}{2N} \leq J_1(u_1) \leq \frac{\varepsilon\tilde{\gamma}_0^2}{2^{2N}}, \quad 0 \leq \gamma_1 \leq \frac{\tilde{\gamma}_0}{2^{N/2}} \leq \tilde{\gamma}_0 \leq 1. \quad (82)$$

Далее, как в (69), рассмотрим случай

$$J_1(u_1) = \frac{\varepsilon\gamma_1^2}{2^N}. \quad (83)$$

Тогда в качестве искоемых  $\{\gamma_k\}$ ,  $\{u_k\}$ ,  $u_*$ ,  $g(u)$  можем взять уже известные нам  $\gamma_0 = 2\tilde{\gamma}_0 > 0$  из (64), (72),  $u_0 = w$  из (57),  $\gamma_1$  — из (81), (82),  $u_1$  — из (82),  $\gamma_k = 0$ ,  $u_k = u_1 = u_* \quad \forall k \geq 2$ , и принять

$$g(u) = J(u) + \sqrt{\varepsilon}\gamma_0\rho^2(u, u_0) + \sqrt{\varepsilon}\gamma_1\rho^2(u, u_1) = J_1(u) + \varepsilon\gamma_1\rho^2(u, u_1) + \varepsilon\tilde{\gamma}_0^2, \quad u \in M. \quad (84)$$

Как видим, утверждение (58) здесь справедливо. Утверждения (59), (60) вытекают из (67), (74), (78), (79) и неравенств

$$\rho(u_1, w) \leq \rho(u_1, u_0) + \rho(u_0, w) = \rho(u_1, u_0) \leq \left( \frac{9}{16} \sqrt{\varepsilon}\tilde{\gamma}_0 \right)^{1/2} < \sqrt[4]{\varepsilon},$$

$$J(u_1) = J_1(u_1) - \sqrt{\varepsilon} \cdot 2\tilde{\gamma}_0\rho^2(u_1, u_0) + \varepsilon\tilde{\gamma}_0^2 \leq \frac{\varepsilon\tilde{\gamma}_0^2}{2^{2N}} + \varepsilon\tilde{\gamma}_0^2 < J(w).$$

Далее, из включения  $\gamma_1 \in \Gamma_1$  следует неравенство

$$\tilde{g}_1(u) = J_1(u) + \sqrt{\varepsilon}\gamma_1\rho^2(u, u_1) \geq \frac{\varepsilon\gamma_1^2}{2^N} \quad \forall u \in M,$$

которое при  $u = u_1$  в силу (83) превращается в равенство. Это значит, что функция  $\tilde{g}_1(u)$  достигает своей нижней грани на  $M$  при  $u = u_1$ . Поскольку функция  $g(u)$  (84) отличается от  $\tilde{g}_1(u)$  на константу, то  $g(u)$  достигает нижней грани на  $M$  в той же точке  $u = u_1 = u_*$ , что доказывает утверждение (61), (62). Таким образом, в случае (83) теорема 5 доказана.

В соответствии с (82) еще возможен случай

$$J_1(u_1) > \frac{\varepsilon\gamma_1^2}{2^N}. \quad (85)$$

Тогда заведомо  $J_1(u_1) > 0$ . Кроме того, функция  $J_1(u)$  (74) полунепрерывна снизу на  $M$  как сумма непрерывной и полунепрерывной снизу функции. Поэтому найдется число  $\delta > 0$  такое, что

$$J_1(u) \geq \frac{\varepsilon\delta^2}{2^N} \quad \forall u \in M, \quad \rho^2(u, u_1) \leq \frac{\sqrt{\varepsilon}\delta}{2^N}. \quad (86)$$

Соотношения (86) аналогичны (73) и из них, рассуждая как при выводе (72), убеждаемся, что  $\delta \in \Gamma_1$ , и неравенство (81) уточняем так:

$$\gamma_1 \geq \delta > 0.$$

Далее, по аналогии с (74) вводим функцию

$$\begin{aligned} J_2(u) &= J_1(u) + \sqrt{\varepsilon}\gamma_1\rho^2(u, u_1) - \frac{\varepsilon\gamma_1^2}{2^N} = \\ &= J(u) + 2\sqrt{\varepsilon}\tilde{\gamma}_0\rho^2(u, u_0) + \sqrt{\varepsilon}\gamma_1\rho^2(u, u_1) - \left( \varepsilon\tilde{\gamma}_0^2 + \frac{\varepsilon\gamma_1^2}{2^N} \right), \end{aligned} \quad (87)$$

и, как и выше, доказываем соотношения

$$J_2(u) \geq 0 \quad \forall u \in M, \quad \inf_{u \in M} J_2(u) = 0 = \inf_{u \in S_1} J_2(u),$$

$$S_1 = \left\{ u \in M : \rho^2(u, u_1) \leq \frac{\varepsilon \gamma_1}{2^{N-1}} \right\},$$

аналогичные (75)–(77), находим точку  $u_2 \in M$ , удовлетворяющую подобным (78) условиям:

$$\rho^2(u_2, u_1) \leq \frac{\varepsilon \gamma_1}{2^{N-1}}, \quad 0 \leq J_2(u_2) \leq \frac{\varepsilon \tilde{\gamma}_0^2}{2^{4N}} \quad \text{и т. д.}$$

Индуктивное предположение: пусть при некотором  $k \geq 2$  известны числа

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= 2\tilde{\gamma}_0, \quad \gamma_1, \dots, \gamma_{k-1}, \quad 0 < \tilde{\gamma}_0 < 1, \\ 0 < \gamma_i &\leq \frac{\tilde{\gamma}_0}{2^{N_{i/2}}} \leq \tilde{\gamma}_0 < 1, \quad i = 1, \dots, k-1, \end{aligned} \quad (88)$$

точки

$$u_0 = w, \quad u_1, \dots, u_k, \quad (89)$$

неотрицательные и полунепрерывные снизу на  $M$  функции

$$\begin{aligned} J_0(u) &= J(u), \quad J_i(u) = J_{i-1}(u) + \sqrt{\varepsilon} \gamma_{i-1} \rho^2(u, u_{i-1}) - \frac{\varepsilon \gamma_{i-1}^2}{2^{N(i-1)}} = \\ &= J(u) + \sqrt{\varepsilon} \sum_{j=0}^{i-1} \gamma_j \rho^2(u, u_j) - \varepsilon \left( \tilde{\gamma}_0^2 + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\gamma_j^2}{2^{Nj}} \right), \quad i = 2, \dots, k, \end{aligned} \quad (90)$$

такие, что

$$\rho^2(u_1, u_0) \leq \frac{9}{16} \sqrt{\varepsilon} \tilde{\gamma}_0, \quad \rho^2(u_i, u_{i-1}) \leq \sqrt{\varepsilon} \gamma_{i-1} \frac{1}{2^{N(i-1)-1}}, \quad i = 2, \dots, k, \quad (91)$$

$$0 \leq J(u_0) \leq \varepsilon, \quad 0 \leq J_i(u_i) \leq \frac{\varepsilon \tilde{\gamma}_0^2}{2^{2N_i}}, \quad i = 1, \dots, k. \quad (92)$$

Опишем общий  $(k+1)$ -й шаг индукции. Введем множество

$$\Gamma_k = \left\{ \gamma \in \mathbb{R} : \gamma \geq 0, \quad J_k(u) + \sqrt{\varepsilon} \gamma \rho^2(u, u_k) \geq \frac{\varepsilon \gamma^2}{2^{Nk}} \quad \forall u \in M \right\}. \quad (93)$$

Это означает, что если  $\gamma \in \Gamma_k$ , то

$$J_k(u) + \sqrt{\varepsilon} \gamma \rho^2(u, u_k) \geq \frac{\varepsilon \gamma^2}{2^{Nk}} \quad \forall u \in M. \quad (94)$$

По предположению индукции  $J_k(u) \geq 0 \quad \forall u \in M$ , значит,  $\gamma = 0 \in \Gamma_k$  и

$$\gamma_k = \sup_{\gamma \in \Gamma_k} \gamma \geq 0. \quad (95)$$

В (94) положим  $u = u_k$ . С учетом (92) получим

$$\frac{\varepsilon \gamma^2}{2^{Nk}} \leq J_k(u_k) \leq \frac{\varepsilon \tilde{\gamma}_0^2}{2^{2Nk}} \quad \forall \gamma \in \Gamma_k.$$

Переходя к нижней грани по  $\gamma \in \Gamma_k$ , отсюда и из (94) получим

$$\frac{\varepsilon \gamma_k^2}{2^{Nk}} \leq J_k(u_k) \leq \frac{\varepsilon \tilde{\gamma}_0^2}{2^{2Nk}}, \quad 0 \leq \gamma_k \leq \frac{\tilde{\gamma}_0}{2^{Nk/2}}, \quad (96)$$

$$J_k(u) + \sqrt{\varepsilon} \gamma_k \rho^2(u, u_k) \geq \frac{\varepsilon \gamma_k^2}{2^{Nk}} \quad \forall u \in M. \quad (97)$$

Далее, как в (69), (83), рассмотрим случай

$$J_k(u_k) = \frac{\varepsilon \gamma_k^2}{2^{Nk}}. \quad (98)$$

Тогда в качестве искоемых  $\{\gamma_k\}$ ,  $\{u_k\}$ ,  $u_*$ ,  $g(u)$  можем взять уже известные  $\gamma_0, \dots, \gamma_{k-1}$  из (88),  $\gamma_k$  — из (95),  $u_0, \dots, u_k$  из (89) и далее принять

$$\gamma_i = 0, \quad u_* = u_k, \quad u_i = u_* \quad \forall i > k, \quad (99)$$

$$g(u) = J(u) + \sqrt{\varepsilon} \sum_{j=1}^k \gamma_j \rho^2(u, u_j), \quad u \in M. \quad (100)$$

Утверждение (58) здесь, очевидно, справедливо. Из (88), (91) имеем

$$\begin{aligned} \rho(u_j, w) = \rho(u_j, u_0) &= \sum_{i=1}^j \rho(u_i, u_{i-1}) \leq \left( \frac{9}{16} \sqrt{\varepsilon} \tilde{\gamma}_0 \right)^{1/2} + \sum_{i=2}^j \left( \sqrt{\varepsilon} \gamma_{i-1} \frac{1}{2^{N(i-1)-1}} \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \sqrt[4]{\varepsilon} \left( \frac{3}{4} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{2^{(N(i-1)-1)/2}} \right) \leq \sqrt[4]{\varepsilon}, \quad j = 0, \dots, k \end{aligned} \quad (101)$$

(здесь достаточно иметь  $N \geq 7$ ). Отсюда и из (99) вытекает утверждение (59). Из (79), (88), (90), (92) следует утверждение (60):

$$\begin{aligned} J(u_i) = J_i(u_i) - \sqrt{\varepsilon} \sum_{j=0}^{i-1} \gamma_j \rho^2(u, u_j) + \varepsilon \left( \tilde{\gamma}_0^2 + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\gamma_j^2}{2^{Nj}} \right) \leq \\ \leq \frac{\varepsilon \tilde{\gamma}_0^2}{2^{2Ni}} + \varepsilon \tilde{\gamma}_0^2 \left( 1 + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{2^{Nj}} \right) \leq \varepsilon \tilde{\gamma}_0^2 + \varepsilon \tilde{\gamma}_0^2 \left( \frac{1}{2^{2Ni}} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{Nj}} \right) \leq J(w). \end{aligned} \quad (102)$$

Наконец, из (97), (98) заключаем, что функция

$$\tilde{g}_k(u) = J_k(u) + \sqrt{\varepsilon} \gamma_k \rho^2(u, u_k), \quad u \in M,$$

достигает нижней грани на  $M$  в точке  $u = u_k$ . Однако, как следует из (90), (100), функция  $g(u)$  отличается от функции  $\tilde{g}_k(u)$  на константу

$$a_{k-1} = \varepsilon \left( \tilde{\gamma}_0^2 + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\gamma_j^2}{2^{Nj}} \right)$$

и, следовательно, достигнет нижней грани на  $M$  в той же точке  $u_k = u_*$ . Теорема 5 в случае (98) доказана.

По аналогии с (71), (85) рассмотрим случай

$$J_k(u_k) > \frac{\varepsilon \gamma_k^2}{2^{Nk}}. \quad (103)$$

Тогда заведомо  $J_k(u_k) > 0$ . Отсюда и из полунепрерывности снизу функции  $J_k(u)$  вытекает существование такого числа  $\delta > 0$ , что

$$J_k(u) \geq \frac{\varepsilon \delta^2}{2^{Nk}} \quad \forall u \in M, \quad \rho^2(u, u_k) \leq \frac{\delta \sqrt{\varepsilon}}{2^{Nk}} \quad (104)$$

(см. ниже упражнение 28). Соотношения (104) аналогичны (73), (86) и из них, рассуждая как выше, получаем включение  $\delta \in \Gamma_k$  и уточняем второе неравенство (96) так:

$$0 < \delta \leq \gamma_k \leq \frac{\tilde{\gamma}_0}{2^{Nk/2}}.$$

Далее аналогично (74), (87), (90) вводим функцию

$$\begin{aligned} J_{k+1}(u) = J_k(u) + \sqrt{\varepsilon} \gamma_k \rho^2(u, u_k) - \frac{\varepsilon \gamma_k^2}{2^{Nk}} = \\ = J(u) + \sqrt{\varepsilon} \sum_{j=0}^k \gamma_j \rho^2(u, u_j) - \varepsilon \left( \tilde{\gamma}_0^2 + \sum_{j=1}^k \frac{\gamma_j^2}{2^{Nj}} \right), \quad u \in M. \end{aligned} \quad (105)$$

Из (94) следует, что  $J_{k+1}(u) \geq 0 \quad \forall u \in M$ , поэтому  $\inf_{u \in M} J_{k+1}(u) \geq 0$ . Рассуждая так же, как при доказательстве (75), (77), убеждаемся, что

$$\inf_{u \in M} J_{k+1}(u) = 0 = \inf_{u \in S_k} J_{k+1}(u), \quad S_k = \left\{ u \in M : \rho^2(u, u_k) \leq \frac{\sqrt{\varepsilon} \gamma_k}{2^{Nk-1}} \right\}.$$

Отсюда следует существование такой точки  $u_{k+1} \in M$ , что

$$\rho^2(u_{k+1}, u_k) \leq \frac{\sqrt{\varepsilon} \gamma_k}{2^{Nk-1}}, \quad 0 \leq J_{k+1}(u_{k+1}) \leq \frac{\varepsilon \tilde{\gamma}_0^2}{2^{N(k+1)}}.$$

Таким образом, число  $\gamma_k$  и точка  $u_{k+1}$  со свойствами, требуемыми индукцией, определены, общий шаг индукции описан. Из этого описания видно, что если на каком-то  $k$ -м шаге впервые выполняется равенство (98) (или (69) при  $k=0$ ), то процесс построения последовательностей  $\{\gamma_k\}$ ,  $\{u_k\}$  и точки  $u_*$  упрощается, и явными формулами (99), (100), дополняющими (88), (89), индуктивный процесс заканчивается доказательством теоремы.

Остается рассмотреть случай, когда при каждом  $k$  справедливо (103) ((71) при  $k=0$ ) и индуктивный процесс продолжается бесконечно. Тогда, как следует из (88), (91), последовательность  $\{u_k\}$  оказывается фундаментальной:

$$\rho(u_k, u_p) \leq \sum_{i=k}^{p-1} \rho(u_{i+1}, u_i) \leq \sum_{i=k}^{p-1} \left( \sqrt{\varepsilon} \gamma_i \frac{1}{2^{Ni-1}} \right)^{1/2} \leq \sqrt[4]{\varepsilon} \sum_{i=k}^{\infty} \frac{1}{2^{(Ni-1)/2}} \rightarrow 0$$

при  $k > p$ ,  $p \rightarrow +\infty$ . Так как  $M$  — полное метрическое пространство, то существует точка  $u_* \in M$  такая, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(u_k, u_*) = 0$ . Первые два неравенства (58) вытекают из оценок (88).

Утверждение (59) является следствием (88), (91) и доказывается так же, как (101). Опираясь на (79), (88), (90), (92), аналогично (102) получаем утверждение (60).

Осталось проверить справедливость утверждения (62) для функции (61). Возьмем произвольный шар  $S_R = \{u \in M : \rho(u, w) \leq R\}$ , где  $R > R_0 = \sup_{k \geq 0} \rho(u_k, w)$ . Тогда  $u_k \in S_R$ ,  $k=0, 1, \dots$ ,  $u_* \in S_R$ . В силу свойства (58) ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \rho^2(u, u_k)$  сходится равномерно на  $S_R$  при  $\forall R > R_0$  и определяет непрерывную функцию на  $M$ , поэтому функция  $g(u)$  (61) определена и полунепрерывна снизу на  $M$ . Кроме того, из (105) следует, что последовательность функций  $\{J_k(u)\}$  при  $k \rightarrow \infty$  сходится равномерно на любом шаре  $S_R$  к функции  $g(u) - a_\infty$ , где

$$a_\infty = \varepsilon \left( \tilde{\gamma}_0^2 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\gamma_j^2}{2^{Nj}} \right).$$

Так как  $J(u) \geq 0 \quad \forall u \in M$  при всех  $k=0, 1, \dots$ , то  $g(u) - a_\infty \geq 0 \quad \forall u \in M$ . Равномерная на  $S_R$  сходимост  $\{J_k(u)\}$  означает, что для любого числа  $\xi > 0$  найдется номер  $M_0 = M_0(\xi, R)$  такой, что

$$|J_k(u) - (g(u) - a_\infty)| < \xi \quad \forall u \in S_R, \quad \forall k \geq M_0.$$

В частности, это верно при  $u = u_k \in S_R$ , т. е.  $|J_k(u_k) - (g(u_k) - a_\infty)| < \xi \quad \forall k \geq M_0$ . Поэтому с учетом (96) имеем

$$0 \leq g(u_k) - a_\infty \leq |(g(u_k) - a_\infty) - J_k(u_k)| + |J_k(u_k)| \leq \xi + \frac{\varepsilon \tilde{\gamma}_0^2}{2^{2Nk}} < 2\xi \quad \forall k \geq M_1 \geq M_0,$$

т. е.  $\lim_{k \rightarrow \infty} (g(u_k) - a_\infty) = 0$ . Но функция  $g(u) - a_\infty$  полунепрерывна снизу на  $M$ , а  $\rho(u_k, u_*) \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ , поэтому  $0 \leq g(u_*) - a_\infty \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} (g(u_k) - a_\infty) = 0$ , т. е.  $g(u_*) - a_\infty = 0$ . Отсюда и из того, что  $g(u) - a_\infty \geq 0 \quad \forall u \in M$ , следует, что функция  $g(u)$  на  $M$  достигает нижней грани в точке  $u = u_*$ , причем  $\inf_{u \in M} g(u) = a_\infty$ . Теорема 5 доказана.  $\square$

**З а м е ч а н и е 3.** Если  $M = H$  — гильбертово пространство,  $\rho(u, v) = \|u - v\|_H$ , то функция  $f(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \|u - u_k\|^2$  непрерывно дифференцируема на  $H$ , причем ее производная равна

$$f'(u) = \sum_{k=0}^{\infty} 2\gamma_k (u - u_k), \quad (106)$$

что вытекает из равномерной сходимости ряда (106) на шаре  $S_R$  при всех  $R > 0$  [327, II].

Если при сделанных предположениях еще и функция  $J(u)$  дифференцируема на  $H$ , то дифференцируема и возмущенная функция  $g(u)$  из (61). Имея в виду указанное обстоятельство, теорему 5 в литературе часто называют гладким вариационным принципом [843; 894].

Отметим, что функция  $g(u)$  в теореме 4 не является гладкой функцией, даже если  $M = H$  — гильбертово пространство,  $J(u)$  дифференцируема на  $H$ , поскольку функция  $\rho(u, u_\varepsilon) = \|u - u_\varepsilon\|_H$  не дифференцируема в точке  $u = u_\varepsilon$  (см. пример 3) (она лишь субдифференцируема в этой точке).

7. Проиллюстрируем, как можно использовать теорему 5 для вывода необходимых условий оптимальности в задаче

$$J(u) \rightarrow \inf, \quad (107)$$

$$u \in U = \{u \in U_0 : g_i(u) \leq 0, i = 1, \dots, m; g_i(u) = 0, i = m + 1, \dots, s\},$$

где  $U_0$  — заданное множество из гильбертова пространства  $H$ , функции  $J(u)$ ,  $g_i(u)$  определены и конечны на  $U_0$ . Через  $\mathcal{L}(u, \bar{\lambda})$  будем обозначать функцию Лагранжа этой задачи:

$$\mathcal{L}(u, \bar{\lambda}) = \lambda_0 J(u) + \sum_{i=1}^s \lambda_i g_i(u), \quad (108)$$

$$u \in U_0, \quad \bar{\lambda} = (\lambda_0, \dots, \lambda_s), \quad \lambda_0 \geq 0, \dots, \lambda_m \geq 0.$$

**Теорема 6.** Пусть  $U_0$  — выпуклое замкнутое множество из  $H$ ,  $u_*$  — точка локального минимума в задаче (107), пусть функции  $J(u)$ ,  $g_i(u)$ ,  $i = 1, \dots, s$ , непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности  $O(u_*, \mu) \cap U_0$  ( $O(u_*, \mu) = \{u \in H : \|u - u_*\|_H \leq \mu\}$ ) точки  $u_*$ . Тогда существуют числа  $\bar{\lambda}^* = (\lambda_0^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_s^*)$  такие, что

$$\bar{\lambda}^* \neq 0, \quad \lambda_0^* \geq 0, \dots, \lambda_m^* \geq 0, \quad (109)$$

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}(u_*, \bar{\lambda}^*)}{\partial u}, u - u_* \right\rangle \geq 0 \quad \forall u \in U_0, \quad (110)$$

$$\lambda_i^* g_i(u_*) = 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (111)$$

**Доказательство.** Сделав при необходимости замены  $\tilde{u} = u - u_*$ ,  $\tilde{U}_0 = U_0 - u_*$ ,  $\tilde{J}(u) = J(u) - J(u_*)$ ,  $\tilde{g}_i(u) = g_i(u) - g_i(u_*)$ , можем считать  $u_* = 0$ ,  $J_* = \inf_{u \in U} J(u) = J(u_*) = 0$ . Пусть число  $\mu$  столь мало, что  $J(u_*) = 0 \leq J(u) \quad \forall u \in W_0 = O(u_*, \mu) \cap U_0$ ,  $0 < \mu \leq 1$ . Введем вспомогательную функцию

$$\Phi(u, \varepsilon) = J^+(u, \varepsilon) + \sum_{j=1}^s Q(g_j^+(u), J^+(u, \varepsilon)), \quad u \in W_0, \quad (112)$$

где

$$0 < \varepsilon < \mu^2 \leq 1, \quad J^+(u, \varepsilon) = \max\{J(u) + \varepsilon; 0\},$$

$$g_j^+(u) = \begin{cases} \max\{g_j(u); 0\}, & j = 1, \dots, m; \\ |g_j(u)|, & j = m + 1, \dots, s; \end{cases} \quad Q(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 > 0; \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что функция  $\Phi(u, \varepsilon)$  полунепрерывна снизу, неотрицательна на  $W_0$  и

$$\Phi(0, \varepsilon) = \varepsilon. \quad (113)$$

Считая, что  $M = W_0$  — метрическое пространство с метрикой  $\rho(u, v) = \|u - v\|_H$ , применим теорему 5, в которой роль функции  $J(u)$  играет функция  $\Phi(u, \varepsilon)$ , роль точки  $w$  — точка  $u_* = 0$ . Согласно этой теореме найдутся числа  $\gamma_k = \gamma_k(\varepsilon)$ , точки  $u_k = u_k(\varepsilon)$ ,  $k = 0, 1, \dots$ ,  $u_0(\varepsilon) = u_* = 0$ ,  $u_\varepsilon = u(\varepsilon) \in W_0$  такие, что

$$\gamma_k(\varepsilon) \geq 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k(\varepsilon) \leq 3, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k(\varepsilon) - u_\varepsilon\|_H = 0, \quad (114)$$

$$\|u_k(\varepsilon) - 0\| \leq \sqrt{\varepsilon}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (115)$$

$$\Phi(u_k(\varepsilon), \varepsilon) \leq \Phi(0, \varepsilon) = \varepsilon, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (116)$$



функция

$$g(u, \varepsilon) = \Phi(u, \varepsilon) + \sqrt{\varepsilon} \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k(\varepsilon) \|u - u_k(\varepsilon)\|_H^2, \quad u \in W_0, \quad (117)$$

достигает своей нижней грани на  $W_0$  в точке  $u_\varepsilon$  при каждом  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < \mu^2 \leq 1$ . Из (114)–(116) с учетом полунепрерывности функции  $\Phi(u, \varepsilon)$  при  $k \rightarrow \infty$  получаем

$$\|u_\varepsilon\| \leq \sqrt{\varepsilon}, \quad \Phi(u_\varepsilon, \varepsilon) \leq \varepsilon \quad \forall \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < \mu^2 \leq 1. \quad (118)$$

Покажем, что функции  $\Phi(u, \varepsilon)$ ,  $g(u, \varepsilon)$  дифференцируемы в точке  $u = u_\varepsilon$ . Сначала убедимся, что  $J^+(u_\varepsilon, \varepsilon) = J(u_\varepsilon) + \varepsilon > 0$ . Пусть это не так, т. е.  $J(u_\varepsilon) \leq -\varepsilon < 0$ . Так как  $J(u) \geq 0 = J_*$   $\forall u \in U$ , то неравенство  $J(u_\varepsilon) < 0$  возможно только при  $u_\varepsilon \notin U$ . Но  $u_\varepsilon \in W_0 \subset U_0$ , значит, это может случиться только тогда, когда при каком-то  $j = j_0$  окажется  $g_{j_0}^+(u_\varepsilon) > 0$  (если  $1 \leq j_0 \leq m$ , то  $g_{j_0}(u_\varepsilon) > 0$ , если  $m + 1 \leq j_0 \leq s$ , то  $|g_j(u_\varepsilon)| > 0$ ). Поэтому имеем

$$Q(g_{j_0}^+(u_\varepsilon), J^+(u_\varepsilon, \varepsilon)) = \frac{(g_{j_0}^+(u_\varepsilon))^2}{(g_{j_0}^+(u_\varepsilon))^2 + 0^2} = 1.$$

Из (112) тогда вытекает:  $\Phi(u_\varepsilon, \varepsilon) \geq 1$ , что противоречит (118). Итак

$$J^+(u_\varepsilon, \varepsilon) = J(u_\varepsilon) + \varepsilon > 0, \quad \left. \frac{\partial J^+(u, \varepsilon)}{\partial u} \right|_{u=u_\varepsilon} = J'(u_\varepsilon). \quad (119)$$

Функция  $Q(g_j^+(u), J^+(u, \varepsilon))$  также дифференцируема в точке  $u = u_\varepsilon$ , что вытекает из дифференцируемости  $Q(x, y)$  при  $x^2 + y^2 > 0$ , дифференцируемости  $(g_j^+(u))^2$ ,  $J^+(u, \varepsilon)$  в точке  $u_\varepsilon$  и из  $(g_j^+(u_\varepsilon))^2 + (J^+(u_\varepsilon, \varepsilon))^2 \geq (J^+(u_\varepsilon, u_\varepsilon))^2 > 0$ , причем

$$\left. \frac{\partial Q(g_j^+(u), J^+(u, \varepsilon))}{\partial u} \right|_{u=u_\varepsilon} = \frac{2g_j^+(u_\varepsilon)(J(u_\varepsilon) + \varepsilon)^2 g_j'(u_\varepsilon) - 2(g_j^+(u_\varepsilon))^2 (J(u_\varepsilon) + \varepsilon) J'(u_\varepsilon)}{((g_j^+(u_\varepsilon))^2 + (J(u_\varepsilon) + \varepsilon)^2)^2}. \quad (120)$$

Учитывая замечание 3, заключаем, что все слагаемые функций (112), (117) дифференцируемы в точке  $u = u_\varepsilon$ , и из (106), (119), (120) имеем

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial g(u, \varepsilon)}{\partial u} \right|_{u=u_\varepsilon} &= g'(u_\varepsilon, \varepsilon) = J'(u_\varepsilon) + \sum_{j=1}^s \frac{2g_j^+(u_\varepsilon)(J(u_\varepsilon) + \varepsilon)^2}{((g_j^+(u_\varepsilon))^2 + (J(u_\varepsilon) + \varepsilon)^2)^2} g_j'(u_\varepsilon) - \\ &- \sum_{j=1}^s \frac{2(g_j^+(u_\varepsilon))^2 (J(u_\varepsilon) + \varepsilon)}{((g_j^+(u_\varepsilon))^2 + (J(u_\varepsilon) + \varepsilon)^2)^2} J'(u_\varepsilon) + \sqrt{\varepsilon} \sum_{k=0}^{\infty} 2\gamma_k(\varepsilon)(u_\varepsilon - u_k(\varepsilon)). \end{aligned} \quad (121)$$

Так как в точке  $u_\varepsilon$  функция  $g(u, \varepsilon)$  достигает своей нижней грани на  $W_0$ , то согласно теореме 3

$$\langle g'(u_\varepsilon, \varepsilon), u - u_\varepsilon \rangle \geq 0 \quad \forall u \in W_0. \quad (122)$$

Покажем, что при достаточно малых  $\varepsilon > 0$  неравенство (122) справедливо при каждом  $u \in U_0$ . Возьмем произвольную точку  $u \in U_0$  и положим  $v_\varepsilon = u_\varepsilon + \alpha_\varepsilon(u - u_\varepsilon)$ ,  $0 \leq \alpha_\varepsilon \leq 1$ . Так как  $U_0$  — выпуклое множество, то  $v_\varepsilon \in U_0$ . Далее,  $\|v_\varepsilon\| \leq \|v_\varepsilon - u_\varepsilon\| + \|u_\varepsilon\| = \alpha_\varepsilon \|u - u_\varepsilon\| + \|u_\varepsilon\|$ . С учетом (115) и ограниченности  $\|u - u_\varepsilon\| \leq \sqrt{\varepsilon} \leq \frac{1}{2}\mu$ ,  $\alpha_\varepsilon \|u - u_\varepsilon\| \leq \frac{1}{2}\mu$ , если  $\varepsilon > 0$ ,  $\alpha_\varepsilon > 0$  достаточно малы. Поэтому  $\|v_\varepsilon\| \leq \mu$ , т. е.  $\sqrt{\varepsilon} \in W_0$ . Полагая в (122)  $u = v_\varepsilon$ , получим  $\langle g'(u_\varepsilon, \varepsilon), \alpha_\varepsilon(u - u_\varepsilon) \rangle \geq 0$ , или

$$\langle g'(u_\varepsilon, \varepsilon), u - u_\varepsilon \rangle \geq 0 \quad \forall u \in U_0, \quad \forall \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_0(u). \quad (123)$$

Введем величины

$$\begin{aligned} \lambda_{\varepsilon 0} &= \left[ 1 + \left( \frac{2g_j^+(u_\varepsilon)(J(u_\varepsilon) + \varepsilon)^2}{(g_j^+(u_\varepsilon))^2 + (J(u_\varepsilon) + \varepsilon)^2} \right)^2 \right]^{-1/2}, \\ \lambda_{\varepsilon j} &= \lambda_{\varepsilon 0} \frac{2g_j^+(u_\varepsilon)(J(u_\varepsilon) + \varepsilon)^2}{(g_j^+(u_\varepsilon))^2 + (J(u_\varepsilon) + \varepsilon)^2}, \quad j = 1, \dots, s. \end{aligned} \quad (124)$$

Умножим (123) на  $\lambda_{\varepsilon 0} > 0$  и с учетом формул (121), (124) полученное неравенство запишем в виде

$$\left\langle \lambda_{\varepsilon 0} J'(u_{\varepsilon}) + \sum_{j=1}^s \lambda_{\varepsilon j} g'_j(u_{\varepsilon}) - \sum_{j=1}^s \lambda_{\varepsilon j} \frac{g_j^+(u_{\varepsilon})}{J(u_{\varepsilon}) + \varepsilon} J'(u_{\varepsilon}) + 2\sqrt{\varepsilon} \lambda_{\varepsilon 0} \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k(\varepsilon)(u_{\varepsilon} - u_k(\varepsilon)), u - u_{\varepsilon} \right\rangle \geq 0 \quad \forall u \in U_0, \quad \forall \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_0(u). \quad (125)$$

В (125) устремим  $\varepsilon \rightarrow +0$ . Заметим, что согласно (124)  $\sum_{j=0}^s \lambda_{\varepsilon j}^2 = 1$ . В силу теоремы Больцано–Вейерштрасса, выбирая при необходимости подпоследовательность из семейств  $\{\lambda_{\varepsilon j}, \varepsilon > 0\}$ ,  $j = 0, \dots, s$ , можем считать, что  $\lambda_{\varepsilon j}$  при  $\varepsilon \rightarrow +0$  сходится к некоторому  $\lambda_j^*$  при каждом  $j = 0, \dots, s$ ,  $\sum_{j=0}^s (\lambda_j^*)^2 = 1$ . Кроме того, как видно из (124),  $\lambda_{\varepsilon j} \geq 0$ ,  $j = 0, \dots, m$ , поэтому  $\lambda_0^* \geq 0, \dots, \lambda_m^* \geq 0$ . Таким образом, полученный набор  $\lambda^* = (\lambda_0^*, \dots, \lambda_s^*)$  удовлетворяет условиям (109). Покажем, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{g_j^+(u_{\varepsilon})}{J(u_{\varepsilon}) + \varepsilon} = 0. \quad (126)$$

Из (112), (118), (119) имеем

$$Q(g_j^+(u_{\varepsilon}), J^+(u_{\varepsilon}, \varepsilon)) = \Phi(u_{\varepsilon}, \varepsilon) - (J(u_{\varepsilon}) + \varepsilon) \rightarrow 0$$

при  $\varepsilon \rightarrow +0$ . Отсюда и из равенства

$$\left( \frac{g_j^+(u_{\varepsilon})}{J(u_{\varepsilon}) + \varepsilon} \right)^2 = \frac{Q(g_j^+(u_{\varepsilon}), J^+(u_{\varepsilon}, \varepsilon))}{1 - Q(g_j^+(u_{\varepsilon}), J^+(u_{\varepsilon}, \varepsilon))}$$

вытекает (126). Из (114) и равномерной сходимости ряда  $\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k(\varepsilon)(u - u_k(\varepsilon))$  (см. (106)) следует, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k(\varepsilon)(u - u_k(\varepsilon)) = 0. \quad (127)$$

Переходя в (125) к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , с учетом (114), (115), (126), (127) и непрерывности  $J'(u)$ ,  $g'_j(u)$  получим

$$\left\langle \lambda_0^* J'(u_*) + \sum_{j=1}^s \lambda_j^* g'_j(u_*), u - u_* \right\rangle \geq 0 \quad \forall u \in U_0.$$

Неравенство (110) доказано. Осталось проверить выполнение равенств (111). Если при некотором  $j$ ,  $1 \leq j \leq m$ , оказалось  $g_j(u_*) = 0$ , то (111) очевидно. Если же  $g_j(u_*) < 0$ , то в силу непрерывности  $g_j(u)$  в точке  $u_* = 0$  имеем  $g_j(u_{\varepsilon}) < 0$  и потому  $g_j^+(u_{\varepsilon}) = 0$  для всех достаточно малых  $\varepsilon > 0$ . Тогда  $\lambda_{\varepsilon j} = 0$  в силу (124) и, следовательно,  $\lambda_{\varepsilon j} g_j(u_{\varepsilon}) = 0$ . Отсюда при  $\varepsilon \rightarrow +0$  получим (111) и в случае  $g_j(u_*) < 0$ . Все утверждения теоремы 6 доказаны.  $\square$

Заметим, что схема доказательства теоремы 6 такая же, как и в доказательстве теоремы 5.17.1. Различие лишь в том, что в доказательстве теоремы 5.17.1 вместо вариационного принципа мы пользовались теоремой 5.12.2 о сходимости метода штрафных функций. Теорему 6 тоже можно было бы доказывать с помощью штрафных функций, однако при этом пришлось бы накладывать на функции  $J(u)$ ,  $g_i(u)$  более жесткое требование, чем полунепрерывность снизу в норме  $H$ . Дело в том, что аналог теоремы 5.12.2 о штрафах в бесконечномерных гильбертовых пространствах удастся доказать лишь при условии слабой полунепрерывности снизу функций  $J(u)$ ,  $g_i(u)$  (см. ниже теорему 4.7). Использование гладкого вариационного принципа позволило обобщить теорему 5.17.1 на случай гильбертовых пространств при весьма скромных требованиях на задачу (107).

8. Кратко остановимся на задаче минимизации, в которой ограничения типа равенств задаются операторным уравнением:

$$J(u) \rightarrow \inf, \quad u \in U = \{u \in X: g_i(u) \leq 0, i = 1, \dots, m, F(u) = 0\}, \quad (128)$$

где  $F$  — отображение (оператор), действующее из нормированного пространства  $X$  в нормированное пространство  $Y$ , функции  $J(u)$ ,  $g_1(u), \dots, g_m(u)$  определены и конечны на  $X$ .

В задаче (107) отображение  $F$  задавалось равенством

$$F(u) = \begin{pmatrix} g_{m+1}(u) \\ \vdots \\ g_s(u) \end{pmatrix}, \quad F: X \rightarrow Y, \quad X = H, \quad Y = E^{s-m}.$$

В общем случае операторные ограничения  $F(u) = 0$  часто используются, например, в задачах оптимального управления для учета начально-краевых задач для дифференциальных уравнений. В частности, задача Коши (24) может быть записана в виде  $F(u) = 0$ , где отображение

$$F(u) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) - D(t)x(t) - B(t)u(t) \\ x(t_0) \end{pmatrix}, \quad X = L_2^r[t_0, T], \quad Y = H_n^1[t_0, T] \times E^n.$$

Приведем формулировки двух теорем, в одной из которых дается необходимое условие локального минимума в задаче (128), в другой — достаточное условие. Функция Лагранжа задачи (128) имеет вид:

$$\mathcal{L}(u, \bar{\lambda}) = \lambda_0 J(u) + \lambda_1 g_1(u) + \dots + \lambda_m g_m(u) + \langle c, F(u) \rangle,$$

где  $u \in X$ ,  $\bar{\lambda} = (\lambda_0, \dots, \lambda_m, c) \in E^m \times Y^*$ ,  $Y^*$  — сопряженное к  $Y$  пространство,  $\langle c, y \rangle$  — значение линейного функционала  $c \in Y^*$  на элементе  $y \in Y$ .

**Теорема 7** (см. [358]). Пусть в задаче (128)  $X, Y$  — банаховы пространства,  $u_* \in U$  — точка локального минимума, функции  $J(u)$ ,  $g_1(u), \dots, g_m(u)$  и отображение  $F$  непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки  $u_*$ , причем производная  $F'(u)$  отображения  $F$  непрерывна в точке  $u_*$  и образ  $\text{Im } F'(u_*)$  пространства  $X$  при отображении  $u \rightarrow F'(u_*)u$  замкнут. Тогда необходимо существует набор  $\bar{\lambda}^* = (\lambda_0^*, \dots, \lambda_m^*, c^*)$  такой, что

$$\lambda_0^* \geq 0, \dots, \lambda_m^* \geq 0, \quad c^* \in Y^*, \quad \bar{\lambda}^* \neq 0, \quad (129)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(u_*, \bar{\lambda}^*)}{\partial u} = \lambda_0^* J'(u_*) + \lambda_1^* g'_1(u_*) + \dots + \lambda_m^* g'_m(u_*) + (F'(u_*))^* c^* = 0, \quad (130)$$

$$\lambda_i^* g_i(u_*) = 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (131)$$

Если, кроме того,  $\text{Im } F'(u_*) = Y$  и существует такая точка  $\bar{u} \in X$ , что  $F'(u_*)\bar{u} = 0$ ,  $\langle g'_i(u_*), \bar{u} \rangle < 0$  для всех тех  $i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , для которых  $g_i(u_*) = 0$ , то  $\lambda_0^* > 0$  (следовательно, можно принять  $\lambda_0^* = 1$ ).

**Теорема 8** (см. [834]). Пусть в задаче (128)  $X, Y$  — нормированные пространства, в точке  $u_* \in U$  множество  $\Lambda(u_*)$  всех  $\bar{\lambda}^*$ , удовлетворяющих условиям (129)–(131), непусто и существуют такие числа  $\gamma > 0$ ,  $\mu > 0$ , что

$$\sup_{\bar{\lambda} \in \Lambda(u_*)} \left\langle \frac{\partial^2 \mathcal{L}(u_*, \bar{\lambda})}{\partial u^2} h, h \right\rangle + \gamma \|F^*(u_*)h\|_Y^2 \geq \mu \|h\|_X^2 \quad \forall h \in K(u_*), \quad (132)$$

где  $K(u_*) = \{h \in X: \langle J'(u_*), h \rangle \leq 0, \langle g'_i(u_*), h \rangle \leq 0 \quad \forall i \in I(u_*) = \{i: 1 \leq i \leq m, g_i(u_*) = 0\}\}$ . Тогда  $u_*$  — точка локального минимума в задаче (128), т. е. существует окрестность  $O(u_*, \varepsilon) = \{u \in X: \|u - u_*\|_X < \varepsilon\}$  точки  $u_*$  такая, что  $J(u_*) \leq J(u) \quad \forall u \in O(u_*, \varepsilon)$ .

В [834] дана более общая формулировка теоремы 8. Важно заметить, что в этой теореме пространства  $X, Y$  необязательно банаховы и множество  $\text{Im } F'(u_*)$  необязательно замкнуто, что существенно расширяет область ее применений. Известно (см., например, [14; 358]), что если  $X, Y$  — банаховы пространства,  $\Lambda(u_*) \neq \emptyset$ ,

$$\text{Im } F'(u_*) = \overline{\text{Im } F'(u_*)} \quad (133)$$

и существует такое число  $\nu > 0$ , что

$$\sup_{\bar{\lambda} \in \Lambda(u_*)} \left\langle \frac{\partial^2 \mathcal{L}(u_*, \bar{\lambda})}{\partial u^2} h, h \right\rangle \geq \nu \|h\|_X^2 \quad \forall h \in K(u_*) \cap \ker F'(u_*), \quad (134)$$

где  $\ker F'(u_*) = \{h \in X : F'(u_*)h = 0\}$  — ядро оператора  $F'(u_*)$ , то  $u_*$  — точка локального минимума в задаче (128). Можно показать [834], что если  $X, Y$  — банаховы пространства, выполнено условие (133), то условия (132) и (134) равносильны. В то же время условие (132) может выполняться и тогда, когда  $X, Y$  — нормированные пространства и условие (133) нарушено.

Другие утверждения, обобщающие правило множителей Лагранжа, теоремы Куна–Таккера на экстремальные задачи в банаховых пространствах, можно найти в [6; 7; 14; 44; 211; 225; 233; 265; 278; 346–348; 366; 393; 434; 435; 465; 486; 604; 605; 638; 672; 673; 690; 699; 748; 780; 821; 831; 833; 834; 860; 868; 894; 963]. Условия оптимальности второго порядка, обобщающие теоремы из § 2.4, 2.5 на бесконечномерные пространства, а также условия более высокого порядка были исследованы в [44].

Напомним, что при доказательстве теорем из § 4.8, 4.9 были существенно использованы теоремы отделимости из § 4.5. Аналогичные теоремы отделимости играют важную роль при исследовании условий оптимальности и во многих других вопросах выпуклого анализа в банаховых пространствах.

Приведем одну из таких теорем [393; 705].

**Теорема 9.** Пусть  $M, N$  — выпуклые множества из банахова пространства  $B$ , причем  $\text{int } M$  — множество внутренних точек множества  $M$  — непусто и  $\text{int } M \cap N = \emptyset$ . Тогда существует гиперплоскость  $\langle c, u \rangle = \gamma$ , разделяющая эти два множества, а также их замыкания  $\bar{M}$  и  $\bar{N}$ , т. е.  $\langle c, u \rangle \geq \gamma \geq \langle c, v \rangle \quad \forall u \in \bar{M}, \forall v \in \bar{N}$ . При этом если  $\bar{M}, \bar{N}$  имеют общую граничную точку  $y$ , то  $\gamma = \langle c, y \rangle$ .

В теореме 9 в отличие от аналогичной конечномерной теореме 4.5.2 требуется условие  $\text{int } M \neq \emptyset$ . Приведем примеры, показывающие существенность этого условия для справедливости теоремы 9.

**Пример 12.** Пусть  $U = \{u = (u^1, \dots, u^n, \dots) \in l_2 : |u^n| \leq \frac{1}{n}, n = 1, 2, \dots\}$  — «гильбертов кирпич». Покажем, что это множество не имеет внутренних точек. Возьмем произвольную точку  $u = (u^1, \dots, u^n, \dots) \in U$ . Положим  $e = (e^1, \dots, e^n, \dots)$ , где  $e^n = \frac{\text{sign } u^n}{n^\alpha}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ;  $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ . Так как  $\|e\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |e^n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2\alpha} < \infty$ , то  $e \in l_2$ . Возьмем точку  $u + \varepsilon e$ , где  $\varepsilon > 0$ . Для каждого  $\varepsilon > 0$  найдется номер  $N = N(\varepsilon)$  такой, что  $|u^n + \varepsilon e^n| = |u^n| + \varepsilon n^{-\alpha} \geq \varepsilon n^{-\alpha} > n^{-1}$  при всех  $n > N$ . Это значит, что  $u + \varepsilon e \notin U$  при всех  $\varepsilon > 0$ . Таким образом,  $\text{int } U = \emptyset$ , т. е.  $U$  состоит лишь из граничных точек.

Далее, множество  $U$  выпукло. В самом деле, если  $|u^n| \leq n^{-1}$ ,  $|v^n| \leq n^{-1}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , то  $|\alpha u^n + (1 - \alpha)v^n| \leq n^{-1}$  при всех  $n = 1, 2, \dots$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Отсюда следует, что если  $u, v \in U$ , то  $\alpha u + (1 - \alpha)v \in U$  при всех  $\alpha$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Выпуклость  $U$  доказана.

Множество  $U$  замкнуто: если  $u_k \in U$ ,  $\|u_k - u\|_{l_2} \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ , то из  $|u_k^n - u^n| \leq \|u_k - u\|_{l_2}$  следует, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k^n = u^n \quad \forall n = 1, 2, \dots$ . Тогда из  $|u_k^n| \leq \frac{1}{n}$  при  $k \rightarrow \infty$  получим  $|u^n| \leq \frac{1}{n} \quad \forall n = 1, 2, \dots$ , т. е.  $u \in U$ . Множество  $U$  ограничено, так как

$$\|u\|_{l_2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (u^n)^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \forall u \in U.$$

Геометрические представления о выпуклых множествах «подсказывают» нам гипотезу о том, что через любую граничную точку выпуклого множества, по-видимому, можно провести опорную гиперплоскость. В евклидовом пространстве  $E^n$  эта гипотеза подтвердилась (теорема 4.5.1).

Посмотрим, справедлива ли эта гипотеза для «гильбертова кирпича». Возьмем любую точку  $v = (v^1, \dots, v^n, \dots) \in U$  такую, что  $|v^n| < n^{-1}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  (например,  $v = 0$ ). Предположим, что через эту точку можно провести опорную гиперплоскость к множеству  $U$ , т. е. существуют вектор  $c = (c^1, \dots, c^n, \dots) \neq 0$ ,  $c \in l_2$ , и число  $\gamma$  такие, что  $\langle c, u \rangle \geq \gamma$  при всех  $u \in U$  и  $\langle c, v \rangle = \gamma$ . Так как  $c \neq 0$ , то  $c^n \neq 0$  для некоторого  $n \geq 1$ . Возьмем вектор

$e = (0, \dots, 0, e_n = -\frac{\text{sign } c^n}{n} - v^n, 0, \dots) \in l_2$ . Так как  $|v^n + e^n| = n^{-1}$ , то  $v + e \in U$ , и поэтому должно выполняться неравенство  $\langle c, v + e \rangle \geq \gamma$ . Однако  $\langle c, v + e \rangle = \gamma + \langle c, e \rangle = \gamma + c^n e^n = \gamma - |c^n| n^{-1} - c^n v^n \leq \gamma - |c^n| n^{-1} + |c^n| \cdot |v^n| = \gamma - |c^n| (n^{-1} - |v^n|) < \gamma$ . Противоречие. Следовательно, множество  $U$  и ее граничная точка  $v$ ,  $|v^n| < \frac{1}{n} \quad \forall n = 1, 2, \dots$ , неотделимы. Это значит, что не через всякую граничную точку рассматриваемого множества  $U$  можно провести опорную гиперплоскость.

Заметим, что множество  $U$  не принадлежит никакой гиперплоскости  $\langle c, u \rangle = \gamma$ , каковы бы ни были  $c \in l_2$ ,  $c \neq 0$  и  $\gamma \in \mathbb{R}$ . Если бы такая гиперплоскость существовала, то из  $0 \in U$  мы бы имели  $\gamma = 0$ , а для любой гиперплоскости  $\langle c, u \rangle = 0$ , как было показано выше, найдутся элементы  $e \in U$ , для которых  $\langle c, e \rangle \neq 0$ . Между тем, в конечномерных евклидовых пространствах выпуклое множество, не имеющее внутренних точек, обязательно принадлежит какой-либо гиперплоскости (§ 4.1).

Рассмотренный пример показывает, что условие  $\text{int } M \neq \emptyset$  в теореме 9 существенно. Любопытно заметить, что через любую точку  $w = (w^1, \dots, w^n, \dots)$ , имеющую хотя бы одну координату  $w^n$ ,  $|w^n| = n^{-1}$ , можно провести опорную гиперплоскость к «гильбертову кирпичу». Достаточно взять  $c = (0, \dots, 0, c_n = -\text{sign } w^n, 0, \dots)$ ,  $\gamma = -n^{-1}$ , и получим  $\langle c, w \rangle = \gamma$ ,  $\langle c, u \rangle = -u^n \text{sign } w^{-n} \geq -|u^n| \geq \gamma$  для всех  $u \in U$ . Поскольку множество  $U$  выпукло, замкнуто, ограничено, то оно слабо компактно в  $l_2$  (теорема 2.6), функция  $J(u) = \langle c, u \rangle$  слабо непрерывна, следовательно, найдется точка  $u_* \in U$  такая, что  $\langle c, u_* \rangle = \inf_{u \in U} \langle c, u \rangle \leq \langle c, u \rangle \quad \forall u \in U$  (теоремы 2.4, 2.8). Это значит, что гиперплоскость  $\langle c, u \rangle = \langle c, u_* \rangle$  — опорная к множеству  $U$  в точке  $u_*$ . Отсюда следует, что хотя бы одна координата  $u_*^n$  точки  $u_*$  удовлетворяет равенству  $|u_*^n| = \frac{1}{n}$ , и функция  $\langle c, u \rangle$  ни при каких  $c \in l_2$ ,  $c \neq 0$ , не может достигать нижней грани на  $U$  в точках  $v = (v^1, \dots, v^n, \dots)$  с координатами  $|v^n| < \frac{1}{n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  (см. упражнения 19, 20 ниже).

**Пример 13.** Пусть  $U = \{u = u(t) \in L_2[0, 1] : |u(t)| \leq 1 \text{ почти всюду на } [0, 1]\}$ . Покажем, что множество  $U$  не имеет внутренних точек в  $L_2[0, 1]$ . Возьмем любую функцию  $u = u(t) \in U$ . Положим  $e_k(t) = k^{1/4}$  при  $0 \leq t \leq \frac{1}{k}$ ,  $e_k(t) = 0$  при  $\frac{1}{k} < t \leq 1$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Ясно, что  $u(t) + e_k(t) = u_k(t) \notin U$  при всех  $k > 16$ , так как  $|u_k(t)| \geq |e_k(t)| - |u(t)| > 2 - 1 = 1$  при почти всех  $t$ ,  $0 \leq t \leq \frac{1}{k}$ ,  $k > 16$ . В то же время  $\|u_k(t) - u(t)\|_{L_2} = \|e_k(t)\|_{L_2} = k^{-1/2} \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Это значит, что множество  $U$  не имеет внутренних точек. Очевидно, множество  $U$  выпукло. Покажем, что не через всякую точку из  $U$  можно провести опорную к  $U$  гиперплоскость. Возьмем, например,  $v = v(t) \equiv 0$ . Допустим, что существует такое  $c = c(t) \in L_2[0, 1]$ ,  $c(t) \neq 0$ , что  $\langle c, u \rangle_{L_2} = \int_0^1 c(t)u(t) dt \geq \langle c, v \rangle = 0$  для всех  $u \in U$ . Возьмем  $u_0 = u_0(t) = -\text{sign } c(t)$ . Ясно, что  $u_0 \in U$ , поэтому должно быть  $\langle c, u_0 \rangle \geq 0$ . Однако  $\langle c, u_0 \rangle = -\int_0^1 |c(t)| dt < 0$ . Противоречие. Следовательно, множество  $U$  и точка  $v = 0$  не могут быть отделены гиперплоскостью (см. упражнение 16).

Приведем формулировку еще одной теоремы об отделимости выпуклого множества и точки [705].

**Теорема 10.** Пусть  $M$  — выпуклое замкнутое множество из банахова пространства  $B$ , точка  $y$  не принадлежит  $M$ . Тогда множество  $M$  и точка  $y$  сильно отделимы.

**9.** Как видим, многие важные понятия теории экстремальных задач (градиент, выпуклое множество, выпуклая функция, отделяющая гиперплоскость и т. д.) представляют собой естественное обобщение соответствующих понятий, введенных для конечномерных евклидовых пространств  $E^n$ . Поэтому неудивительно, что многие утверждения, сформулированные и доказанные в гл. 2, 4 для пространства  $E^n$ , остаются верными и в любых гильбертовых или банаховых пространствах. Однако, как показывают теорема 9 и примеры 12, 13, такая аналогия имеет место далеко не всегда: имеется немало утверждений, справедливых в  $E^n$ , но не имеющих аналога в общих банаховых и гильбертовых пространствах. Это значит, что теоремами, приведенными в гл. 2, 4, можно пользоваться при исследовании экстремальных задач в конкретных банаховых или гильбертовых пространствах лишь после тщательной проверки того, что они верны и в рассматриваемом пространстве.

Еще раз возвращаясь к примерам 12, 13, заметим, что в банаховых и гильбертовых пространствах отделимость выпуклых множеств может быть гарантирована при более жестких ограничениях, чем в конечномерном пространстве  $E^n$ . Это обстоятельство приводит к тому, что ряд важных результатов теории экстремальных задач, опирающихся на конечномерные теоремы отделимости, не имеют аналога в банаховых и гильбертовых пространствах. В частности, как свидетельствует следующий пример, в задачах оптимального управления, в которых фазовое пространство является гильбертовым пространством, принцип максимума, сформулированный в гл. 6 для задач с фазовым пространством  $E^n$ , в общем случае не имеет аналога.

**Пример 14.** Пусть управляемый процесс описывается системой уравнений [290]

$$\dot{x}^i(t) = u^i(t), \quad t > 0; \quad x^i(0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (135)$$

где  $u^i(t)$  — ограниченные измеримые на каждом конечном отрезке  $0 \leq t \leq T$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , функции, принимающие свои значения из множества

$$V = \left\{ u = (u^1, \dots, u^k, \dots) \in l_2 : |u^k| \leq \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2}, \quad k = 1, 2, \dots \right\}.$$

Под решением системы (135), соответствующим допустимому управлению  $u = u(t) = (u^1(t), \dots, u^n(t), \dots)$ ,  $t > 0$ , будем понимать функцию  $x(t, u) = (x^1(t), \dots, x^n(t), \dots)$ ,  $t > 0$ , где  $x^i(t) = x^i(t, u^i) = \int_0^t u^i(\tau) d\tau$ ,  $t > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , такую, что  $x(t, u) \in l_2$  при всех  $t > 0$ . Таким образом, фазовым пространством системы (135) является бесконечномерное гильбертово пространство  $l_2$ .

Рассмотрим задачу быстрогодействия: найти управление  $u = u(t) \in V$ ,  $t > 0$ , такое, чтобы соответствующее ему решение  $x(t, u)$  системы (135) удовлетворяло условию

$$x(T; u) = x_1 = \left( 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \right)$$

при минимальном  $T$ .

Пользуясь принципом максимума из гл. 6, нетрудно показать, что при каждом фиксированном  $n \geq 1$  минимальное время перехода из точки  $x^n(0) = 0$  в точку  $x^n(T) = \frac{1}{n}$  при движении по траектории дифференциального уравнения  $\dot{x}^n(t) = u^n(t)$ ,  $t > 0$ ,  $x^n(0) = 0$ , с ограничениями  $|u^n(t)| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$ ,  $t \geq 0$ , равно  $t_{n*} = \frac{n}{n+1}$  и реализуется на управлении  $u_{n*}(t) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$ ,  $t \geq 0$ . Отсюда следует, что оптимальное время  $t_*$  в исходной задаче не может быть меньше  $t_{n*}$ , т. е.  $t_* \geq t_{n*}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Отсюда при  $n \rightarrow \infty$  получим  $t_* \geq 1$ . С другой стороны, для управления  $u_* = u_*(t) = (1, 1/2, \dots, 1/n, \dots)$  имеем  $x(1, u_*) = x_1$ . Это значит, что  $t_* = 1$  — оптимальное время, а  $u = u_*$  — оптимальное управление,  $x_*(t) = t u_*$  — оптимальная траектория в исходной задаче быстрогодействия.

Убедимся в том, что принцип максимума в этой задаче не выполняется. Для этого по аналогии с задачами оптимального управления из гл. 6 напомним функцию Гамильтона–Понтрягина

$$H(x, u, \psi, a_0) = a_0 + \langle \psi, u \rangle_{l_2}, \quad \psi = (\psi_1, \dots, \psi_n, \dots),$$

и сопряженную систему

$$\dot{\psi}_i(t) = -H_{x^i}(x_*(t), u_*(t), \psi, a_0) \equiv 0, \quad t \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots$$

Отсюда имеем  $\psi_i(t) \equiv c_i = \text{const}$ ,  $\psi(t) = (c_1, c_2, \dots, c_n, \dots) \in l_2$ . Если  $c_n \neq 0$  для некоторого  $n \geq 1$ , то из условия  $\max_{u \in V} H(x_*(t), u, \psi(t), a_0)$  однозначно определится  $u^n(t) = \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right) \text{sign } c_n$ ,  $t \geq 0$ , что не совпадает с  $u_*^n(t) = \frac{1}{n}$ . Это значит, что принцип максимума в рассматриваемой задаче может иметь место только в вырожденном случае  $c^n = 0$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , т. е.  $\psi(t) \equiv 0$  и  $H(x_*(t), u_*(t), \psi(t), a_0) = a_0 = \text{const}$ . Согласно условию трансверсальности (6.2.43) тогда  $H(x_*(t_*), u_*(t_*), \psi(t_*), a_0) = 0$ , так что  $a_0 = 0$ . В результате получаем  $(a_0, \psi(t)) \equiv 0$ , что противоречит принципу максимума (см. теорему 6.2.2).

Рассмотренный пример показывает, что для задач оптимального управления в банаховых пространствах принцип максимума в общем случае не имеет места. Тем не менее существуют классы задач оптимального управления, для которых принцип максимума остается

верным и в том случае, когда фазовое пространство не является конечномерным [287–290; 641]. С другой стороны, можно указать и такие классы задач оптимального управления с конечномерным фазовым пространством, в которых принцип максимума не имеет места: такие задачи с дискретным временем см. ниже в § 6, с непрерывным временем — в [137].

**10.** В заключение отметим, что отображение, дифференцируемое в смысле определения 3, в литературе часто называют *сильно дифференцируемым* или *дифференцируемым по Фреше* [393]. Существуют и другие определения дифференцируемости отображений, отличные от сильной дифференцируемости [822]. Приведем одно из них.

**О п р е д е л е н и е 6.** Пусть  $F$  — отображение, действующее из нормированного пространства  $X$  в нормированное пространство  $Y$ , пусть  $F$  определено в окрестности  $O(u, \gamma) = \{v \in X: \|v - u\| < \gamma\}$  точки  $u$ . Говорят, что отображение  $F$  в точке  $u$  обладает *первой вариацией*, если для всех  $h \in X$  существует предел

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(u + th) - F(u)}{t} = \delta F(u; h), \quad (136)$$

где сходимость понимается как сходимость по норме пространства  $Y$ .

Если первая вариация представима в виде

$$\delta F(u; h) = F'_\Gamma(u)h \quad \forall h \in X, \quad (137)$$

где  $F'_\Gamma(u)$  — линейный непрерывный оператор, т. е.  $F'_\Gamma(u) \in \mathcal{L}(X \rightarrow Y)$ , то оператор  $F'_\Gamma(u)$  называется *производной Гато* (*слабой производной*) отображения  $F$  в точке  $u$ , а отображение  $F$  — *дифференцируемым по Гато* в этой точке.

Если  $X = B$  — банахово пространство,  $Y = E^1$  — числовая ось, то  $F$  — функция и ее производная Гато  $F'_\Gamma(u) \in B^*$ , первая вариация равна  $\delta F(u; h) = \langle F'_\Gamma(u), h \rangle$ .

Заметим, что из существования первой вариации не следует существование производной Гато, о чем свидетельствует

**П р и м е р 15.** Пусть  $J(u) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$  при  $x^2 + y^2 > 0$ ,  $J(0) = 0$ ,  $u = (x, y) \in E^2$ . Это функция непрерывна на  $E^2$  и  $J(tu) = tJ(u) \quad \forall u \in E^2, \quad \forall t \in \mathbb{R}$ . Здесь

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{J(0 + th) - J(0)}{t} = J(h) = \delta J(0; h).$$

Нетрудно видеть, что первая вариация зависит от  $h$  нелинейно и, следовательно, у этой функции производная Гато в точке  $u = 0$  не существует.

Из дифференцируемости по Фреше следует дифференцируемость по Гато, а также совпадение производных Фреше и Гато. Обратное утверждение неверно.

**П р и м е р 16.** Пусть  $u = (x, y) \in E^2$ ,  $J(u) = 1$ , если  $y = x^2$ ,  $J(u) \equiv 0$ , если  $y \neq x^2$ . В точке  $u = 0$  эта функция имеет производную Гато  $J'_\Gamma(0) = 0$ , но по Фреше она недифференцируема и, более того, разрывна в этой точке.

Такое различие между производными Фреше и Гато связано с тем, что в случае дифференцируемости по Фреше сходимость в (136) является равномерной по всем  $h$ ,  $\|h\|_X \leq 1$ , а в случае дифференцируемости по Гато такая равномерность необязательна.

Из (136) следует, что если функция  $J(u)$  в точке  $u$  имеет производную Фреше или Гато, то она дифференцируема в этой точке по любому направлению  $e$ ,  $\|e\| = 1$ , причем  $\frac{dJ(u)}{de} = \langle J'(u), e \rangle = \langle J'_\Gamma(u), e \rangle$  (ср. с формулой (4.2.14)). Из существования производной по направлениям не следует дифференцируемость по Гато.

**П р и м е р 17.** Функция  $J(u) = \|u\|_B$  в точке  $u = 0$  имеет производную по любому направлению, причем  $\frac{dJ(0)}{de} = \|e\|_B = 1$  (см. (4.2.13)). Однако отношение

$$\frac{J(th) - J(0)}{t} = \frac{|t|}{t} \|h\|_B$$

при  $t \rightarrow 0$  не имеет предела, так что  $J(u)$  недифференцируема по Гато в точке  $u = 0$ .

Понятия производной Гато, производную по направлению часто используется при исследовании экстремальных задач (см., например, теорему 4.2.12) ([14; 393; 605; 638] и др.).



## Упражнения

У п р а ж н е н и е 1. Результаты примера 6 вывести из примера 5. У к а з а н и е: представить функцию (19) в виде  $J(u) = \langle A^*Au, u \rangle - 2\langle A^*b, u \rangle + \|b\|^2$ ,  $u \in H$ .

У п р а ж н е н и е 2. Пусть  $B$  — банахово пространство,  $F$  — гильбертово пространство, оператор  $A \in \mathcal{L}(H \rightarrow F)$ ,  $b \in F$ . Доказать, что функция  $J(u) = \|Au - b\|_F^2$  выпукла и дважды непрерывно дифференцируема на  $B$ , производные  $J'(u)$ ,  $J''(u)$  представимы в виде (21), где  $A^* \in \mathcal{L}(F \rightarrow B^*)$  — сопряженный к  $A$  оператор.

У п р а ж н е н и е 3. Доказать, что решение задачи Коши

$$\dot{x}(t) = D(t)x(t) + f(t), \quad t_0 \leq t \leq T; \quad x(t_0) = x_0$$

представимо в виде

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)f(\tau) d\tau, \quad t_0 \leq t \leq T;$$

решение задачи Коши

$$\dot{\psi}(t) = -D^\top(t)\psi(t) + g(t), \quad t_0 \leq t \leq T, \quad \psi(T) = \psi_1$$

представимо в виде

$$\psi(t) = \Phi^\top(T, t)\psi_1 + \int_T^t \Phi^\top(\tau, t)g(\tau) d\tau, \quad t_0 \leq t \leq T,$$

где матрица  $\Phi(t, \tau)$  — решение задачи (34),  $\Phi^\top(t, \tau)$  — транспонированная матрица. У к а з а н и е: предварительно установить следующие свойства матрицы  $\Phi(t, \tau)$ :

$$\begin{aligned} \Phi(t, \tau) &= \Phi(t, \xi)\Phi(\xi, \tau) \quad \forall t, \tau, \xi \in [t_0, T]; \quad [\Phi(t, \tau)]^{-1} = \Phi(\tau, t) \quad \forall t, \tau \in [t_0, T]; \\ \frac{\partial \Phi(t, \tau)}{\partial \tau} &= -\Phi(t, \tau)D(\tau) \quad \forall t, \tau \in [t_0, T]. \end{aligned}$$

У п р а ж н е н и е 4. Доказать, что функция  $J(x_0) = |x(T; x_0) - b|^2$ , где  $x(t; x_0)$  — решение задачи

$$\dot{x}(t) = D(t)x(t), \quad t_0 \leq t \leq T; \quad x(t_0) = x_0, \quad (138)$$

$D(t)$  — матрица размера  $n \times n$  с элементами  $d_{ij}(t) \in L_\infty[t_0, T]$ , дважды непрерывно дифференцируема на  $E^n$ ; вывести формулы для  $J'(u)$ ,  $J''(u)$ . У к а з а н и е: ввести оператор  $Ax_0 = x(T; x_0) \in \mathcal{L}(E^n \rightarrow E^n)$  и воспользоваться результатами примера 6; показать, что сопряженный к  $A$  оператор  $A^*$  действует на элемент  $c \in E^n$  по правилу:  $A^*c = \psi(t_0; c)$ , где  $\psi(t; c)$  — решение задачи:  $\dot{\psi}(t) = -D^\top(t)\psi(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq T$ ;  $\psi(T) = c$ ; воспользоваться упражнением 3 и доказать формулы:

$$J'(u) = 2\Phi^\top(T, t_0)[\Phi(T, t_0)x_0 - b], \quad J''(u) = 2\Phi^\top(T, t_0)\Phi(T, t_0).$$

У п р а ж н е н и е 5. Доказать, что функция  $J(x_0) = \int_{t_0}^T |x(t; x_0) - b(t)|^2 dt$ , где  $x(t; x_0)$  — решение задачи (138), дважды непрерывно дифференцируема на  $H = E^n$ ; вывести формулы для  $J'(u)$ ,  $J''(u)$ . У к а з а н и е: ввести оператор  $Ax_0 = x(t; x_0) \in \mathcal{L}(H \rightarrow F)$ ,  $F = L_2^n[t_0, T]$  и воспользоваться результатами примера 6; показать, что сопряженный к  $A$  оператор  $A^*$  действует на элемент  $c = c(t) \in F$  по правилу:  $A^*c = \psi(t_0; c)$ , где  $\psi(t; c)$  — решение задачи:  $\dot{\psi}(t) = -D^\top(t)\psi(t) - c(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq T$ ;  $\psi(T) = 0$ ; воспользоваться упражнением 3 и доказать формулы:

$$J'(u) = 2 \int_{t_0}^T \Phi^\top(\tau, t_0)[\Phi(\tau, t_0)x_0 - b(\tau)] d\tau, \quad J''(u) = 2 \int_{t_0}^T \Phi^\top(\tau, t_0)\Phi(\tau, t_0) d\tau.$$

У п р а ж н е н и е 6. Доказать, что функция  $J(u, x_0) = |x(T; u, x_0) - b|^2$ , где  $x(t; u, x_0)$  — решение задачи

$$\dot{x}(t) = D(t)x(t) + B(t)u(t), \quad t_0 \leq t \leq T; \quad x(t_0) = x_0, \quad (139)$$

дважды непрерывно дифференцируема по совокупности переменных  $z = (u, x_0) \in H = L_2^n[t_0, T] \times E^n$ . У к а з а н и е: ввести оператор  $Az = x(T; u, x_0) \in \mathcal{L}(H \rightarrow E^n)$ , воспользоваться результатами примера 7, упражнения 4.



У п р а ж н е н и е 7. Доказать, что функция  $J(u, x_0) = \int_{t_0}^T |x(t; u, x_0) - b(t)|^2 dt$ , где  $x(t; u, x_0)$  — решение задачи (139), дважды непрерывно дифференцируема по совокупности переменных  $z = (u, x_0) \in H = L_2^r[t_0, T] \times E^n$ . У к а з а н и е: ввести оператор  $Az = x(t; u, x_0) \in \mathcal{L}(H \rightarrow F)$ ,  $F = L_2^n[t_0, T]$ , воспользоваться результатами примера 9, упражнения 5.

У п р а ж н е н и е 8. Пользуясь теоремой 3, написать условия минимума выпуклой функции  $J(u)$  из упражнений 4–7 на выпуклом множестве  $U \subseteq H$ .

У п р а ж н е н и е 9. Написать необходимое условие минимума функции из примера 4 для случая  $U = C[a, b]$ .

У п р а ж н е н и е 10. Пусть  $U$  — множество из банахова пространства  $B$ ,  $\text{int } U \neq \emptyset$ , функция  $J(u)$  дифференцируема в некоторой  $\varepsilon$ -окрестности точки  $u_* \in \text{int } U$ , существует вторая производная в самой точке  $u_*$ . Докажите, что если  $u_*$  — точка локального минимума (максимума)  $J(u)$  на множестве  $U$ , то необходимо выполняются условия:

$$J'(u_*) = 0, \quad \langle J''(u_*)h, h \rangle \geq 0 \quad [\langle J''(u_*)h, h \rangle \leq 0] \quad \forall h \in B \quad (140)$$

(ср. с теоремой 2.2.1, с. 69).

У п р а ж н е н и е 11. Пусть множество  $U$ , функция  $J(u)$  и точка  $u_*$  удовлетворяют условиям упражнения 10. Докажите, что

1) если

$$J'(u_*) = 0, \quad \langle J''(u_*)h, h \rangle \geq \mu \|h\|^2 \quad \forall h \in B, \quad \mu = \text{const} > 0, \quad (141)$$

то  $u_*$  — точка локального минимума функции  $J(u)$  на  $U$ ;

2) второе из условий (141), вообще говоря, нельзя заменить на условие

$$\langle J''(u_*)h, h \rangle > 0 \quad \forall h \in B, \quad h \neq 0. \quad (142)$$

У к а з а н и е: рассмотрите функцию

$$J(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{(u^n)^2}{n^3} - (u^n)^4 \right), \quad u \in l_2,$$

покажите, что в точке  $u_* = 0$  выполнены условия

$$J'(u_*) = 0, \quad \langle J''(u_*)h, h \rangle = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(h^n)^2}{n^3} > 0 \quad \forall h \neq 0,$$

но в точке  $u_m = (0, \dots, 0, u^m = \frac{\varepsilon}{m}, 0, \dots)$  значение  $J(u_m) < J(0) = 0$  при всех  $\varepsilon > 0$ ,  $m > \varepsilon^{-2}$  [393, с. 505];

3) если  $B = E^n$ , то условие (142) равносильно второму из условий (141) с  $\mu = \inf_{\|h\|_{E^n}=1} \langle J''(u_*)h, h \rangle > 0$ .

4) переформулируйте результаты п. 1)–3) на случай задачи максимизации.

У п р а ж н е н и е 12. Доказать, что функция  $J(u) = \|u\|_B$  дифференцируема в  $B = L_p[0, 1]$ ,  $1 < p < \infty$ , всюду, кроме  $u = 0$ , и найти  $J'(u)$ . Будет ли  $J(u)$  дифференцируема (по Фреше или по Гато) в  $B = L_1[0, 1]$ ? в  $L_\infty[0, 1]$ ? в  $C[0, 1]$ ?

У п р а ж н е н и е 13. Доказать дифференцируемость отображения  $F: L_2[a, b] \rightarrow L_2[c, d]$ , которое определяется равенством

$$F(u) = \int_a^b K(t, \tau) u(\tau) d\tau, \quad c \leq t \leq d,$$

где  $K(t, \tau) \in L_2(Q)$ ,  $Q = \{(t, \tau) \in E^2: c \leq t \leq d, a \leq \tau \leq b\}$ .

У п р а ж н е н и е 14. Найти производную отображения (43), действующего из  $L_2^r[t_0, T]$  в  $H_n^1[t_0, T]$ .

У п р а ж н е н и е 15. Пусть функции  $J_1(u), \dots, J_m(u)$  переменных  $u = (u^1, \dots, u^n)$  непрерывно дифференцируемы на  $E^n$ . Доказать, что тогда отображение

$$F(u) = \begin{pmatrix} f_1(u) \\ \vdots \\ f_m(u) \end{pmatrix},$$

действующее из  $X = E^n$  в  $Y = E^m$ , непрерывно дифференцируемо на  $E^n$  и его производная  $F'(u)$  представляет собой линейный оператор с матрицей

$$F'(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(u)}{\partial u^1}, & \dots, & \frac{\partial f_1(u)}{\partial u^n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m(u)}{\partial u^1}, & \dots, & \frac{\partial f_m(u)}{\partial u^n} \end{pmatrix}, \quad u \in E^n$$

(матрица Якоби). Доказать, что если  $f_i(u) \in C^2(E^n)$ , то  $F(u) \in C^2(E^n)$ .

**У п р а ж н е н и е 16.** Показать, что множество  $U$  из примера 13 не имеет опорной гиперплоскости во всех точках  $v = v(t) \in U$ , для которых  $|v(t)| < 1$  почти всюду на  $[0, 1]$ . Доказать, что если  $v = v(t) \in U$  и  $|v(t)| \equiv 1$  на множестве  $A$  положительной меры, то через такую точку  $v$  можно провести опорную к  $U$  гиперплоскость с нормальным вектором  $c = c(t) \in L_2[0, 1]$ , где  $c(t) = -\operatorname{sign} v(t)$  при  $t \in A$  и  $c(t) = 0$  при  $t \in [0, 1] \setminus A$ .

**У п р а ж н е н и е 17.** Пусть в пространстве  $B = C[0, 1]$  даны два множества  $M = \{u = u(t) \in L_2[0, 1]: |u(t)| \leq 1, 0 \leq t \leq 1\}$  и  $N = \left\{u = u(t) \in L_2[0, 1]: \int_0^1 \operatorname{sign}\left(\frac{1}{2} - t\right) u(t) dt = 1\right\}$ . Доказать, что  $M$  и  $N$  выпуклы, замкнуты, не имеют общих точек, но не могут быть сильно отделимы (ср. с теоремой 4.5.3).

**У п р а ж н е н и е 18.** Пусть  $U = \left\{u = (u^1, \dots, u^n, \dots) \in l_2: |u^n| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}, n = 1, 2, \dots\right\}$ . Доказать, что в точке  $v = (1, 1/2, \dots, 1/n, \dots) \in U$  нельзя провести опорную к  $U$  гиперплоскость (см. пример 14). Имеет ли  $U$  внутренние точки в  $l_2$ ? Выяснить, к каким точкам из  $U$  можно провести опорную к  $U$  гиперплоскость.

**У п р а ж н е н и е 19.** Доказать, что «гильбертов кирпич» (см. пример 12) компактен в метрике  $l_2$  (определение 2.1). **У к а з а н и е:** в  $U$  построить конечную  $\varepsilon$ -сеть [393].

**У п р а ж н е н и е 20.** Пусть  $U$  — «гильбертов кирпич» (пример 12). Доказать, что:

1) если  $c = (c^1, \dots, c^n, \dots) \neq 0$  — нормальный вектор опорной гиперплоскости к  $U$  в точке  $v = (v^1, \dots, v^n, \dots) \in U$ , то необходимо  $c^n = 0$  для всех  $n$ , для которых  $|v^n| < \frac{1}{n}$ ;

2) если  $v = \left(0, \dots, 0, v^n = \frac{1}{n}, 0, \dots\right)$ , то в этой точке существует единственная опорная к  $U$  гиперплоскость с нормальным вектором  $c$ ,  $|c| = 1$ ;

3) если  $v = (v^1, \dots, v^n, \dots) \in U$ ,  $v^{n_k} = \frac{1}{n_k}$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ ,  $1 \leq N \leq +\infty$ ,  $|v^n| < \frac{1}{n}$ ,  $n \neq n_k$ , то опорными к  $U$  в точке  $v$  будут гиперплоскости  $\langle c, u \rangle = \langle c, v \rangle$  с нормальными векторами  $c = \sum_{k=1}^N a_{n_k} (-e_{n_k})$ , где  $e_{n_k} = (0, \dots, 0, e_{n_k}^{n_k} = 1, 0, \dots)$ ,  $a_{n_k} \geq 0$ ,  $0 < \sum_{k=1}^N a_{n_k}^2 < \infty$ .

**У п р а ж н е н и е 21.** Пусть  $U$  — открытое выпуклое множество из банахова пространства  $B$ , функция  $J(u)$  конечна, полунепрерывна снизу (в метрике  $B$ ) и выпукла на  $U$ . Доказать, что  $J(u)$  имеет субградиент во все точках  $u \in U$  и слабо полунепрерывна снизу на  $U$  [233].

**У п р а ж н е н и е 22.** Доказать, что теорема 3 остается справедливой, если функция  $J(u)$  имеет производную по Гато на множестве  $U$ .

**У п р а ж н е н и е 23.** Доказать, что если производная Гато функции  $J(u)$  существует в некоторой окрестности точки  $u_0$  и непрерывна в этой окрестности, то в точке  $u_0$  существует производная Фреше и она совпадает с производной Гато [393].

**У п р а ж н е н и е 24.** Пусть  $J(x) = \int_a^b f(t, x(t), \dot{x}(t)) dt$ , где  $f(t, x, y)$  — дважды непрерывно дифференцируемая функция по совокупности своих аргументов,  $x(t) \in C^1[a, b]$ . Доказать, что функция  $J(x)$  дифференцируема в пространстве  $C^1[a, b]$ , и написать условие минимума этой функции [393, с. 502].

**У п р а ж н е н и е 25.** Доказать, что в пространстве  $l_1$  функция  $y = |x|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} |x^i|$  недифференцируема ни в одной точке (ни по Фреше, ни по Гато).

**У п р а ж н е н и е 26.** Пусть отображение  $F: X \rightarrow Y$ , где  $X, Y$  — нормированные пространства, дифференцируемо на  $X$ . Показать, что  $\|F(x+h) - F(x)\| \leq \sup_{0 \leq \theta \leq 1} \|F'(x + \theta h)\| \times \|h\|$  ([237, ч. II], [393]). Убедиться, что это неравенство, вообще говоря, не может быть

заменено равенством  $F(x+h) - F(x) = F'(x+\theta h)h$  при каком-либо  $\theta$ ,  $0 \leq \theta \leq 1$  (ср. с формулой (9) при  $Y = E^1$ ), рассмотрев пример:  $F(t) = \begin{pmatrix} \cos 2\pi t \\ \sin 2\pi t \end{pmatrix}: E^1 \rightarrow E^2$  на отрезке  $0 \leq t \leq 1$ .

У п р а ж н е н и е 27. Исследуйте дифференциальные свойства (существование производной по Фреше, по Гато, по направлениям, частных производных, первой вариации, непрерывность) функций: 1)  $J(u) = |xy|$ ; 2)  $J(u) = \sqrt{|xy|}$ ;

$$3) J(u) = |xy|^p, p > 0; \quad 4) J(u) = \begin{cases} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, & u = (x, y) \neq 0, \\ 0, & u = 0; \end{cases} \quad 5) J(u) = \begin{cases} \frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, & u \neq 0, \\ 0, & u = 0; \end{cases}$$

$$6) J(u) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2+y^2}, & u \neq 0, \\ 0, & u = 0; \end{cases} \quad 7) J(u) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}, & u \neq 0, \\ 0, & u = 0 \end{cases} \quad (\text{см. пример 4.2.7}).$$

У п р а ж н е н и е 28. Пусть  $M$  — метрическое пространство, функция  $J(u)$  полунепрерывна снизу в точке  $w \in M$ ,  $J(w) > 0$ . Пусть  $\omega(\delta)$  — произвольная положительная функция переменной  $\delta$ ,  $0 < \delta \leq \delta_0$ ,  $\lim_{\delta \rightarrow +0} \omega(\delta) = 0$ . Рассуждая от противного, докажите, что тогда существует число  $\delta$ ,  $0 < \delta \leq \delta_0$ , такое, что  $J(u) \geq \omega(\delta) \quad \forall u \in M$ ,  $\rho(u, w) < \delta$ .

У п р а ж н е н и е 29 (см. [843]). Пусть  $B$  — рефлексивное банахово пространство,  $U$  — слабо замкнутое множество из  $B$ , функция  $J(u)$  слабо полунепрерывна снизу на  $U$ ,  $J_* = \inf_{u \in U} J(u) > -\infty$ . Пусть в некоторой точке  $w \in U$  справедливо неравенство  $J(w) \leq J_* + \varepsilon$ , где  $\varepsilon > 0$  — фиксированное число. Докажите, что тогда для любого числа  $\alpha > 0$  найдется точка  $u_\varepsilon \in U$  такая, что  $\|u_\varepsilon - w\| \leq \sqrt{2\alpha}$ ,  $J(u_\varepsilon) \leq J_* + \varepsilon$ , функция  $g(u) = J(u) + \frac{\varepsilon}{\alpha} \|u - w\|_B^2$  достигает нижней грани на  $U$  в точке  $u = u_\varepsilon$ . У к а з а н и е: в качестве  $u_\varepsilon$  возьмите решение задачи:  $g(u) \rightarrow \inf, u \in W = \{u \in U: \|u - w\| \leq \sqrt{2\alpha}\}$ .

У п р а ж н е н и е 30 (см. [843]). Пусть в упражнении 29  $B = H$  — гильбертово пространство, функция  $J(u)$  и множество  $U$  удовлетворяют условиям этого упражнения и, кроме того, функция  $J(u)$  дважды дифференцируема на  $U$ . Пусть числовые последовательности  $\{\alpha_k\}$ ,  $\{\varepsilon_k\}$  таковы, что

$$\alpha_k > 0, \quad \varepsilon_k > 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_k}{\alpha_k} = 0.$$

Пусть  $\{w_k\}$  — какая-либо минимизирующая последовательность в задаче:  $J(u) \rightarrow \inf, u \in U$ , для которой  $J(w_k) \leq J_* + \varepsilon_k$ ,  $k = 0, 1, \dots$ . Докажите, что тогда у этой задачи существует более «хорошая» минимизирующая последовательность  $\{u_k\}$ , удовлетворяющая дополнительным условиям:

$$J(u_k) \leq J_* + \varepsilon_k, \quad \|u_k - w_k\| \leq \sqrt{2\alpha_k}, \\ \|J'(u_k)\| \leq 2\sqrt{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_k}{\alpha_k}}, \quad \langle J''(u_k)h, h \rangle \geq -\frac{2\varepsilon_k}{\alpha_k} \|h\|^2 \quad \forall h \in H.$$

У к а з а н и е: при каждом  $k = 0, 1, \dots$  точку  $u_k$  определите, пользуясь упражнением 29 при  $w = w_k$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_k$ ,  $\alpha = \alpha_k$ , и примените теорему 2 к функции  $g_k(u) = J(u) + \frac{\varepsilon_k}{\alpha_k} \|u - w_k\|^2$  в точке  $u_k$ .

У п р а ж н е н и е 31. Пользуясь теоремой 6, исследуйте задачу минимизации:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} (x_n)^2 \rightarrow \inf, \quad x \in S = \{x \in l_2: \|x - a\|^2 \leq 1\},$$

где  $a$  — заданный элемент из  $l_2$ . Аналогично рассмотрите задачу максимизации:  $f(x) \rightarrow \sup, x \in S$ .

## § 4. Методы минимизации

Здесь мы будем предполагать, что читатель знаком с большинством из рассмотренных в части I методов минимизации. Заметим, что из этих методов лишь некоторые являются сугубо конечномерными, т. е. приспособленными для решения задач минимизации лишь в конечномерных пространствах —

это симплекс-метод, метод покоординатного спуска и некоторые другие методы. Большинство же описанных в гл. 5 методов минимизации вполне могут быть применены для минимизации функций на множествах из бесконечномерных банаховых и гильбертовых пространств — это градиентный метод, методы проекции градиента, условного градиента, возможных направлений, сопряженных градиентов, штрафных функций, Ньютона и др. Идеи и описание упомянутых методов минимизации в бесконечномерных пространствах по форме ничем не отличаются от их описания в конечномерном случае. Поэтому здесь мы ограничимся лишь кратким описанием некоторых из этих методов, отсылая читателя за подробностями к гл. 5. Далее, формулировки и доказательства теорем сходимости для большинства упомянутых методов в бесконечномерном случае могут быть получены путем небольшой корректировки соответствующих конечномерных теорем и их доказательства из гл. 5. Для того чтобы показать, как это делается, мы ниже приведем несколько таких теорем. Некоторые из излагаемых методов будем иллюстрировать на примере следующей задачи минимизации квадратичной функции

$$J(u) = \|Au - b\|_F^2 \rightarrow \inf, \quad u \in U, \quad (1)$$

где  $A \in \mathcal{L}(H \rightarrow F)$ ,  $H, F$  — гильбертовы пространства,  $b \in F$ ,  $U$  — выпуклое замкнутое множество из  $H$  (задача (2.3)). Напоминаем формулы производных этой функции (пример 3.6):

$$J'(u) = 2A^*(Au - b), \quad J''(u) = 2A^*A. \quad (2)$$

Для иллюстрации методов также будем использовать задачу оптимального управления:

$$J(u) = |x(T, u) - b|^2 \rightarrow \inf; \quad (3)$$

$$\dot{x}(t) = D(t)x(t) + B(t)u(t) + f(t), \quad t_0 \leq t \leq T; \quad x(t_0) = x_0; \quad (4)$$

$$u = u(t) \in U \subseteq L_2^r[t_0, T] \quad (5)$$

(обозначения см. в примерах 2.14, 2.15). Градиент функции (3) имеет вид

$$J'(u) = 2B^\top(t)\psi(t; u), \quad t_0 \leq t \leq T, \quad (6)$$

где  $\psi(t; u)$  — решение задачи Коши

$$\dot{\psi}(t) = -D^\top(t)\psi(t), \quad t_0 \leq t \leq T; \quad \psi(T) = x(T; u) - b \quad (7)$$

(см. примеры 3.7, 3.8). Примеры других задач оптимального управления см. ниже в § 5–11.

**1. Градиентный метод** может применяться для поиска приближенного решения задачи

$$J(u) \rightarrow \inf; \quad u \in H,$$

где  $H$  — гильбертово пространство,  $J(u) \in C^1(H)$ . Этот метод заключается в построении последовательности  $\{u_k\}$  по правилу

$$u_{k+1} = u_k - \alpha_k J'(u_k), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (8)$$

где  $u_0$  — некоторая заданная начальная точка,  $\alpha_k$  — положительная величина. Если  $J'(u_k) \neq 0$ , то  $\alpha_k$  можно выбрать так, чтобы  $J(u_{k+1}) < J(u_k)$ . В самом деле, из равенства (3.5) имеем

$$J(u_{k+1}) - J(u_k) = \alpha_k \left( -\|J'(u_k)\|^2 + \frac{o(\alpha_k)}{\alpha_k} \right) < 0$$

при всех достаточно малых  $\alpha_k > 0$ . Если  $J'(u_k) = 0$ , то процесс (8) прекращается и при необходимости проводится дополнительное исследование поведения функции в окрестности точки  $u_k$  для выяснения того, будет ли  $u_k$  принадлежать  $U_*$  или нет. В частности, если  $J(u)$  — выпуклая функция на  $H$ , то согласно теореме 3.3  $u_k \in U_*$ . Различные способы выбора величины  $\alpha_k$  в методе (8) описаны в § 5.1. Упомянем два из них: первый —  $\alpha_k$  выбирается из условия

$$f_k(\alpha_k) = \inf_{\alpha \geq 0} f_k(\alpha), \quad f_k(\alpha) = J(u_k - \alpha J'(u_k)) \quad (9)$$

(этот вариант градиентного метода называют методом скорейшего спуска), второй — когда  $J(u) \in C^{1,1}(H)$  (см. определение 2.6.1) и известна постоянная  $L > 0$  из неравенства

$$\|J'(u) - J'(v)\| \leq L\|u - v\|, \quad u, v \in H, \quad (10)$$

величину  $\alpha_k$  в (8) можно взять из условий

$$0 < \varepsilon_0 \leq \alpha_k \leq \frac{2}{(L + 2\varepsilon)}, \quad (11)$$

где  $\varepsilon, \varepsilon_0$  — положительные числа, являющиеся параметрами метода.

На практике итерации (8) продолжают до тех пор, пока не выполнится какой-либо критерий окончания счета, описанный, например, в § 5.1.

Посмотрим, как выглядит метод (8), (9) на примере задачи (1) при  $U = H$ . С учетом формулы (2) для градиента процесс (8) можем записать в виде

$$u_{k+1} = u_k - \alpha_k(2A^*(Au_k - b)), \quad k = 1, 2, \dots \quad (12)$$

Нетрудно убедиться, что функция  $f_k(\alpha)$  здесь является квадратным трехчленом. В самом деле, для любых  $u, h \in H$  имеем:

$$\begin{aligned} g(\alpha) &= J(u + \alpha h) = \|A(u + \alpha h) - b\|^2 = \|\alpha Ah + (Au - b)\|^2 = \\ &= \alpha^2 \|Ah\|^2 + 2\alpha \langle Ah, Au - b \rangle + \|Au - b\|^2 = \\ &= \alpha^2 \|Ah\|^2 + 2\alpha \langle h, J'(u) \rangle + J(u) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (13)$$

Из формулы (13) при  $u = u_k$ ,  $h = -J'(u_k) = -2A^*(Au_k - b)$  следует, что

$$f_k(\alpha) = \alpha^2 \|2A^*(Au_k - b)\|^2 - \alpha \|2A^*(Au_k - b)\|^2 + J(u_k), \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (14)$$

Отсюда видно, что при  $AA^*(Au_k - b) \neq 0$  условие (9) однозначно определяет величину

$$\alpha_k = \frac{\|A^*(Au_k - b)\|^2}{\|AA^*(Au_k - b)\|^2} > 0. \quad (15)$$

Если  $AA^*(Au_k - b) = 0$ , то процесс (12) останавливается, так как тогда  $\|A^*(Au_k - b)\|^2 = \langle AA^*(Au_k - b), Au_k - b \rangle = 0$ ,  $f_k(\alpha) \equiv J(u_k)$ ,  $J'(u_k) = 0$  и  $u_k \in U_*$  (теорема 3.3). Таким образом, для задачи (1) метод скорейшего спуска (8), (9) порождает процесс (12), (15).

Явные формулы для метода (8), (9) можно выписать и в случае задачи (3)–(5) с  $U = L_2^r[t_0, T]$ . Их нетрудно получить, если эту задачу сначала свести к задаче (1) (см. пример 2.15) и далее воспользоваться формулами (12), (15). Получим процесс

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) - \alpha_k \cdot 2B^\top(t)\psi(t, u_k), \quad t_0 \leq t \leq T, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (16)$$

где  $\psi(t, u_k)$  — решение задачи (7) при  $u = u_k$ ,

$$\begin{aligned} \alpha_k &= -\frac{\langle x(T, u_k) - b, x(T, u_k - J'(u_k)) - x(T, u_k) \rangle}{|x(T, u_k - J'(u_k)) - x(T, u_k)|^2} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\int_{t_0}^T |B^\top(t)\psi(t, u_k)|^2 dt}{|x(T, u_k - J'(u_k)) - x(T, u_k)|^2} > 0 \end{aligned} \quad (17)$$

(подробнее вывод формул (16), (17) см. в [151]).

Приведем теорему сходимости метода скорейшего спуска, представляющую собой обобщение теорем 5.1.1–5.1.3 на случай гильбертовых пространств.

**Теорема 1.** Пусть функция  $J(u)$  определена на гильбертовом пространстве  $H$ ,  $J(u) \in C^{1,1}(H)$ ,  $J_* = \inf_H J(u) > -\infty$ . Пусть  $\{u_k\}$  — последовательность, полученная методом (8), (9) при некотором начальном приближении  $u_0 \in H$ . Тогда последовательность  $\{J(u_k)\}$  монотонно убывает и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|J'(u_k)\| = 0.$$

Если, кроме того, функция  $J(u)$  выпукла на  $H$ , и множество  $M(u_0) = \{u \in U: J(u) \leq J(u_0)\}$  ограничено, то последовательность  $\{u_k\}$  минимизирует эту функцию на  $H$ , причем справедлива оценка скорости сходимости

$$0 \leq J(u_k) - J_* \leq \frac{c_1}{k}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad c_1 = \text{const} \geq 0.$$

Если функция  $J(u)$  еще и сильно выпукла на  $H$ , то  $\{u_k\}$  сходится к единственной точке минимума  $u_*$  по норме  $H$ , причем

$$\begin{aligned} 0 \leq J(u_k) - J_* &\leq (J(u_0) - J_*) q^k, \\ \|u_k - u_*\|^2 &\leq \frac{2}{\mu} (J(u_0) - J_*) q^k, \quad k = 0, 1, \dots, \end{aligned}$$

где  $q = 1 - \mu/L$ ,  $0 \leq q < 1$ ,  $\mu > 0$  — постоянная из теоремы 2.2.

Эта теорема доказывается так же, как аналогичные теоремы 5.1.1–5.1.3.

Покажем, что градиенты функций (1), (3) удовлетворяют условию (10) и, следовательно, для их минимизации можно использовать метод (8) с выбором шага  $\alpha_k$  по правилу (11). Для функции (1) условие (10) является простым

следствием формулы (2):

$$\|J'(u) - J'(v)\| = \|2A^*A(u - v)\| \leq 2\|A^*A\|\|u - v\| \quad \forall u, v \in H, \quad (18)$$

так что здесь  $L = 2\|A^*A\|$ . Из (18) с учетом связи задач (1) и (3)–(5) (см. примеры 2.15, 3.8) можем сказать, что градиент функции (9) также удовлетворяет условию (10). Приведем оценку сверху постоянной  $L$  в этом случае. Приращение  $\Delta x(t) = x(t; u) - x(t; v)$ ,  $t_0 \leq t \leq T$ , согласно (4) является решением задачи Коши

$$\Delta \dot{x}(t) = D(t)\Delta x(t) + B(t)(u(t) - v(t)), \quad t_0 \leq t \leq T; \quad \Delta x(t_0) = 0.$$

Отсюда, пользуясь оценкой (2.9), имеем

$$\begin{aligned} |x(t; u) - x(t; v)| &\leq c_0\|u - v\|_{L_2^r} \quad \forall t \in [t_0, T]; \\ c_0 &= \sqrt{T - t_0} B_{\max} e^{D_{\max}(T - t_0)}. \end{aligned} \quad (19)$$

В силу (7) функция  $\Delta \psi(t) = \psi(t; u) - \psi(t; v)$ ,  $t_0 \leq t \leq T$ , является решением задачи Коши

$$\Delta \dot{\psi}(t) = -D^\top(t)\Delta \psi(t), \quad t_0 \leq t \leq T; \quad \Delta \psi(T) = x(T; u) - x(T; v),$$

откуда, рассуждая так же, как при выводе оценки (2.9), получаем:

$$|\psi(t; u) - \psi(t; v)| \leq e^{A_{\max}(T - t_0)} |x(T; u) - x(T; v)| \quad \forall t \in [t_0, T]. \quad (20)$$

Подставим оценку (19) при  $t = T$  в (20). Будем иметь

$$|\psi(t; u) - \psi(t; v)| \leq e^{A_{\max}(T - t_0)} c_0\|u - v\|_{L_2^r} \quad \forall t \in [t_0, T]. \quad (21)$$

Из формулы (6) и оценки (21) следует, что

$$\begin{aligned} \|J'(u) - J'(v)\|_{L_2^r} &= \left( \int_{t_0}^T |2B^\top(t)\Delta \psi(t)|^2 dt \right)^{1/2} \leq L\|u - v\|_{L_2^r}, \\ L &= 2(T - t_0) B_{\max}^2 e^{2A_{\max}(T - t_0)}. \end{aligned} \quad (22)$$

Таким образом, установлено, что функции (1), (3) принадлежат классу  $C^{1,1}(H)$  и в (12), (16) величину  $\alpha_k$  можно взять из (11) (например,  $\alpha_k = \frac{1}{L}$ ). Конечно, приведенная в (22) оценка для  $L$  может оказаться довольно грубой и шаг  $\alpha_k$  из (11) тогда будет слишком маленьким, метод (16) будет сходиться медленно.

Теорема, аналогичная теореме 5.2.4, при  $U = H$ ,  $\delta_k = 0$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , остается справедливой и для метода (8), (11).

Отметим, что градиентный метод выше мы изложили применительно к гильбертовым пространствам. В банаховом пространстве  $B$  градиентный метод в форме (9) писать нельзя, так как слагаемые в правой части (9) принадлежат разным пространствам ( $u_k \in B$ ,  $-\alpha_k J'(u_k) \in B^*$ ) и их сумма не имеет смысла. Не вдаваясь в детали, укажем, что в банаховом пространстве аналогом (9) является процесс  $u_{k+1} = u_k - \alpha_k p_k$ , где направление  $p_k \in B$  определяется из условия  $\min_{\|h\| \leq 1} \langle J'(u_k), h \rangle = \langle J'(u_k), p_k \rangle$ .

**2. Метод проекции градиента** может применяться для поиска приближенного решения задачи

$$J(u) \rightarrow \inf; \quad u \in U, \quad (23)$$

где  $U$  — выпуклое замкнутое множество из гильбертова пространства  $H$ ,  $J(u) \in C^1(U)$ . Для описания этого метода нам понадобится понятие проекции точки на множество.

Определение 4.4.1 проекции  $\mathcal{P}_U(u)$  точки  $u \in H$  на множество  $U$ , а также свойства проекции и условия оптимальности для задачи (23), выраженные в теоремах 4.4.1, 4.4.2, 4.4.4, сохраняют силу и в гильбертовом пространстве.

Метод проекции градиента для решения задачи (23) заключается в построении последовательности  $\{u_k\}$  по правилу

$$u_{k+1} = \mathcal{P}_U(u_k - \alpha_k J'(u_k)), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (24)$$

где  $\alpha_k$  — положительная величина. Если при некотором  $k$  оказалось, что  $u_{k+1} = u_k$ , то процесс (24) прекращают. В этом случае точка  $u_k$  удовлетворяет необходимому условию оптимальности, а если  $J(u)$  — выпуклая функция, то  $u_k \in U_*$  (теорема 4.4.4).

Различные способы выбора величины  $\alpha_k$  в методе (24) описаны в § 5.2. Заметим, что метод (24) при  $U = H$  переходит в градиентный метод.

Методом (24) удобно пользоваться лишь в тех случаях, когда имеется явная формула для проекции точки на множество. Укажем несколько примеров множеств, когда нетрудно получить такую формулу. Проекция точки  $u \in H$  на шар

$$U = S(\bar{u}, R) = \{u \in H: \|u - \bar{u}\| \leq R\}$$

представима в виде

$$\mathcal{P}_U(u) = \begin{cases} \bar{u} + R(u - \bar{u})/\|u - \bar{u}\| & \text{при } \|u - \bar{u}\| > R, \\ u & \text{при } \|u - \bar{u}\| \leq R; \end{cases} \quad (25)$$

проекция на гиперплоскость

$$\Gamma = \{u \in H: \langle c, u \rangle = \gamma\}$$

выражается формулой

$$\mathcal{P}_U(u) = u + (\gamma - \langle c, u \rangle) \frac{c}{\|c\|^2};$$

если

$$U = \{u \in H: Au = b\},$$

где  $A \in \mathcal{L}(H \rightarrow H)$ ,  $b \in H$ , оператор  $AA^*$  имеет обратный, то проекция точки  $u \in H$  может быть записана в виде

$$\mathcal{P}_U(u) = u - A^*(AA^*)^{-1}(Au - b).$$

Приведенные формулы для проекций доказываются так же, как это делалось в примерах 4.4.1–4.4.3.



Метод (24) для задачи (1) запишется в виде

$$u_{k+1} = \mathcal{P}_U(u_k - \alpha_k(2A^*(Au_k - b))), \quad k = 0, 1, \dots$$

Посмотрим, как выглядит метод проекции градиента для задачи (3)–(5), когда множество  $U$  имеет вид

$$U = \{u = u(t) = (u^1(t), \dots, u^r(t)) \in L_2^r[t_0, T]:$$

$$\alpha_i(t) \leq u^i(t) \leq \beta_i(t) \text{ почти всюду на } [t_0, T], \quad i = 1, \dots, r\}; \quad (26)$$

здесь  $\alpha_i(t), \beta_i(t)$  — заданные функции из  $L_2[t_0, T]$ . Проекция любой точки  $u = u(t) = (u^1(t), \dots, u^r(t)) \in L_2^r[t_0, T]$  на это множество представляет собой вектор-функцию  $\mathcal{P}_U(u) = (w^1(t), \dots, w^r(t))$ ,  $t_0 \leq t \leq T$ , где

$$w^i(t) = \begin{cases} \alpha_i(t) & \text{при } u^i(t) < \alpha_i(t), \\ u^i(t) & \text{при } \alpha_i(t) \leq u^i(t) \leq \beta_i(t), \\ \beta_i(t) & \text{при } \beta_i(t) < u^i(t), \quad i = 1, \dots, r \end{cases}$$

(ср. с примером 4.4.5). Поэтому  $(k+1)$ -е приближение  $u_{k+1}(t) = (u_{k+1}^1(t), \dots, u_{k+1}^r(t))$ ,  $t_0 \leq t \leq T$ , метода проекции градиента для задачи (3)–(5), (26) будет получаться по правилу

$$u_{k+1}^i(t) = \begin{cases} \alpha_i(t) & \text{при } u_k^i(t) - \alpha_k(2B^T(t)\psi(t; u_k))_i < \alpha_i(t), \\ u_k^i(t) - \alpha_k(2B^T(t)\psi(t; u_k))_i & \text{при } \alpha_i(t) \leq u_k^i(t) - \alpha_k(2B^T(t)\psi(t; u_k))_i \leq \beta_i(t), \\ \beta_i(t) & \text{при } u_k^i(t) - \alpha_k(2B^T(t)\psi(t; u_k))_i > \beta_i(t), \end{cases} \quad (27)$$

$i = 1, \dots, r$ ; здесь  $\psi(t; u)$  — решение задачи (7),  $(B^T(t)\psi(t; u_k))_i$  —  $i$ -я координата вектора  $B^T(t)\psi(t; u_k)$ . Согласно (22) градиент функции (3) удовлетворяет условию Липшица с постоянной  $L = 2(T - t_0)B_{\max}^2 e^{2A_{\max}(T - t_0)}$ . Поэтому при выборе  $\alpha_k$  в (27) можно воспользоваться условием (11).

Если в задаче (3)–(5) множество  $U$  является шаром из  $L_2^r[t_0, T]$ , т. е.

$$U = \left\{ u = u(t) \in L_2^r[t_0, T]: \int_{t_0}^T |u(t) - \bar{u}(t)|^2 dt \leq R^2 \right\}, \quad (28)$$

где  $u = \bar{u}(t)$  — заданная функция из  $L_2^r[t_0, T]$ ,  $R$  — заданное положительное число, то в силу формулы (25) метод проекции градиента приведет к последовательности, которая строится по правилу

$$u_{k+1}(t) = \begin{cases} \bar{u}(t) + R \frac{u_k(t) - \alpha_k 2B^T(t)\psi(t; u_k) - \bar{u}(t)}{\left( \int_{t_0}^T |u_k(t) - \alpha_k B^T(t)\psi(t; u_k) - \bar{u}(t)|^2 dt \right)^{1/2}} & \text{при } \int_{t_0}^T |u_k(t) - \alpha_k 2B^T(t)\psi(t; u_k) - \bar{u}(t)|^2 dt > R^2, \\ u_k(t) - \alpha_k 2B^T(t)\psi(t; u_k) & \text{при } \int_{t_0}^T |u_k(t) - \alpha_k 2B^T(t)\psi(t; u_k) - \bar{u}(t)|^2 dt \leq R^2. \end{cases} \quad (29)$$

Приведем теорему сходимости метода (24), (11), обобщающую теоремы 5.2.1, 5.2.2 на случай гильбертовых пространств.

**Теорема 2.** Пусть функция  $J(u)$  определена на выпуклом замкнутом множестве  $U$  гильбертова пространства  $H$ ,  $J(u) \in C^{1,1}(U)$ ,  $J_* = \inf_U J(u) > -\infty$ . Пусть  $\{u_k\}$  — последовательность, полученная методом (24), (11) при произвольном начальном приближении  $u_0 \in U$ . Тогда последовательность  $\{J(u_k)\}$  монотонно убывает и  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - u_{k+1}\| = 0$ . Если, кроме того, функция  $J(u)$  выпукла на  $H$  и множество  $M(u_0) = \{u \in U : J(u) \leq J(u_0)\}$  ограничено, то последовательность  $\{u_k\}$  минимизирует эту функцию на  $U$ , причем справедлива оценка

$$0 \leq J(u_k) - J_* \leq \frac{c_1}{k}, \quad k = 1, 2, \dots; \quad c_1 = \text{const} \geq 0.$$

Если функция  $J(u)$  еще и сильно выпукла на  $U$ , то  $\{u_k\}$  сходится к единственной точке минимума  $u_*$  по норме  $H$ , причем

$$\|u_k - u_*\|^2 \leq \frac{c_2}{k}, \quad k = 1, 2, \dots; \quad c_1 = \text{const} \geq 0.$$

Для сильно выпуклых функций можно предложить другой вариант метода проекции градиента, имеющий более высокую скорость сходимости.

**Теорема 3.** Пусть  $U$  — выпуклое замкнутое множество из  $H$ , функция  $J(u)$  принадлежит  $C^{1,1}(U)$  и сильно выпукла на  $U$ , и пусть  $0 < \alpha < 2\mu L^{-2}$ , где постоянные  $\mu, L, \mu \leq L$ , взяты из (10) и теоремы 4.3.3. Тогда последовательность  $\{u_k\}$ , получаемая из (24) при  $\alpha_k = \alpha$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , сходится к точке минимума  $u_*$  по норме  $H$ , причем справедлива оценка

$$\|u_k - u_*\| \leq \|u_0 - u_*\| (q(\alpha))^k, \quad k = 0, 1, \dots,$$

где  $q(\alpha) = (1 - 2\mu\alpha + \alpha^2 L^2)^{1/2}$ ,  $0 < q(\alpha) < 1$ .

Теоремы 2, 3 доказываются так же, как аналогичные теоремы 5.2.1–5.2.3.

**3. Метод условного градиента** может применяться для поиска приближенного решения задачи

$$J(u) \rightarrow \inf; \quad u \in U,$$

где  $U$  — выпуклое замкнутое ограниченное множество из гильбертова пространства  $H$ ,  $J(u) \in C^1(U)$ . Этот метод заключается в построении последовательности по следующему правилу: по известному  $k$ -му приближению находят вспомогательное приближение  $\bar{u}_k \in U$  из условия

$$\langle J'(u_k), \bar{u}_k - u_k \rangle = \inf_U \langle J'(u_k), u - u_k \rangle,$$

или, что равносильно, из условия

$$\bar{u}_k \in U, \quad \langle J'(u_k), \bar{u}_k \rangle = \inf_U \langle J'(u_k), u \rangle, \quad (30)$$

и затем полагают

$$u_{k+1} = u_k + \alpha_k (\bar{u}_k - u_k), \quad 0 \leq \alpha_k \leq 1. \quad (31)$$

Заметим, что линейная функция  $\langle J'(u_k), u \rangle$  слабо непрерывна на  $U$ , а множество  $U$  согласно теореме 2.6 слабо компактно. Отсюда и из теоремы 2.4 следует, что нижняя грань в условии (30) достигается хотя бы на одном элементе  $\bar{u}_k \in U$ .

Если при некотором  $k$  оказалось, что  $\bar{u}_k = u_k$ , то процесс (30), (31) прекращают. В этом случае в силу условия (30) имеем  $\inf_U \langle J'(u_k), u - u_k \rangle = \langle J'(u_k), u_k - u_k \rangle = 0$ , т. е.  $\langle J'(u_k), u - u_k \rangle \geq 0$  при всех  $u \in U$ . Согласно теореме 3.3 это означает, что точка  $u_k$  удовлетворяет необходимому условию оптимальности, а если при этом  $J(u)$  — выпуклая функция, то  $u_k \in U_*$ .

Различные способы выбора величины  $\alpha_k$  в (31) описаны в § 5.4. Например,  $\alpha_k$  может выбираться из условия

$$f_k(\alpha_k) = \inf_{0 \leq \alpha \leq 1} f_k(\alpha) = f_{k*}, \quad f_k(\alpha) = J(u_k + \alpha(\bar{u}_k - u_k)). \quad (32)$$

Посмотрим, как выглядит метод условного градиента для задачи (3)–(5), когда множество  $U$  имеет вид (26) или (28). Согласно (30) для определения  $\bar{u}_k = \bar{u}_k(t)$  нужно на множестве  $U$  минимизировать линейную функцию

$$\int_{t_0}^T \langle B^T(t)\psi(t; u_k), u(t) \rangle_{E^r} dt = \int_{t_0}^T \sum_{i=1}^r (B^T(t)\psi(t; u_k))_i u^i(t) dt.$$

Отсюда видно, что в случае множества (26) будем иметь

$$\bar{u}_k(t) = (\bar{u}_k^1(t), \dots, \bar{u}_k^r(t)), \quad t_0 \leq t \leq T,$$

где

$$\bar{u}_k^i(t) = \begin{cases} \alpha_i(t) & \text{при } (B^T(t)\psi(t; u_k))_i \geq 0, \\ \beta_i(t) & \text{при } (B^T(t)\psi(t; u_k))_i < 0, \end{cases}$$

а если  $U$  — шар (28), то с помощью неравенства Коши–Буняковского получим

$$\bar{u}_k(t) = \bar{u}(t) - R \frac{B^T(t)\psi(t; u_k)}{\left( \int_{t_0}^T |B^T(t)\psi(t; u_k)|_{E^r}^2 dt \right)^{1/2}}.$$

Параметр  $\alpha_k$ , определяемый условиями (32) в рассматриваемой задаче, может быть выписан явно. Пользуясь тождеством (27) при  $u = \bar{u}_k$ ,  $v = u_k$ ,  $\beta = 1 - \alpha$  и формулой (6), нетрудно показать, что [151]:

$$\begin{aligned} f_k(\alpha) &= J(u_k) + 2\alpha \langle x(T, u_k) - b, x(T, \bar{u}_k) - x(T, u_k) \rangle + \alpha^2 |x(T, \bar{u}_k) - x(T, u_k)|^2 = \\ &= J(u_k) + 2\alpha \int_{t_0}^T \langle B^T(t)\psi(t; u_k), \bar{u}_k(t) - u_k(t) \rangle_{E^r} dt + \\ &\quad + \alpha^2 |x(T, \bar{u}_k) - x(T, u_k)|^2, \quad -\infty < \alpha < +\infty. \end{aligned} \quad (33)$$

Если  $x(T, \bar{u}_k) - x(T, u_k) = 0$ , то  $f_k(\alpha) \equiv J(u_k) = \text{const}$  при всех  $\alpha$ . Следовательно,  $f'_k(\alpha) = \langle J'(u_k + \alpha(\bar{u}_k - u_k)), \bar{u}_k - u_k \rangle = 0$  при всех  $\alpha$ . Отсюда с учетом

условия (30) получаем  $f'_k(0) = 0 = \langle J'(u_k), \bar{u}_k - u_k \rangle \leq \langle J'(u_k), u - u_k \rangle$  для любого  $u \in U$ . Согласно теореме 3.3 тогда  $u_* = u_k = u_k(t)$  — оптимальное управление в задаче (3)–(5).

Рассмотрим случай  $x(T, \bar{u}_k) \neq x(T, u_k)$ . Тогда функция (33) представляет собой квадратный трехчлен и достигает своей нижней грани на числовой оси при

$$\alpha = \alpha_k^* = -\frac{\int_{t_0}^T \langle B^T(t)\psi(t; u_k), \bar{u}_k(t) - u_k(t) \rangle_{E^r} dt}{|x(T, \bar{u}_k) - x(T, u_k)|_{E^n}^2} = -\frac{\langle x(T, u_k) - b, x(T, \bar{u}_k) - x(T, u_k) \rangle_{E^n}}{|x(T, \bar{u}_k) - x(T, u_k)|_{E^n}^2}. \quad (34)$$

Так как в силу условия (30)

$$2 \int_{t_0}^T \langle B^T(t)\psi(t, u_k), \bar{u}_k(t) - u_k(t) \rangle_{E^r} dt = \langle J'(u_k), \bar{u}_k - u_k \rangle \leq \langle J'(u_k), u_k - u_k \rangle = 0,$$

то ясно, что  $\alpha_k^* \geq 0$ . Возможен случай  $\alpha_k^* = 0$ . Согласно условию (30) и формуле (34) это значит, что

$$0 = \langle J'(u_k), \bar{u}_k(t) - u_k(t) \rangle \leq \langle J'(u_k), u - u_k \rangle$$

при всех  $u \in U$ . В силу теоремы 3.3 тогда  $u_* = u_k = u_k(t)$  — оптимальное управление в задаче (3)–(5).

Если  $\alpha_k^* < 0$ , то квадратный трехчлен достигает своей нижней грани на отрезке  $0 \leq \alpha \leq 1$  при

$$\alpha_k = \min\{1; \alpha_k^*\}. \quad (35)$$

Это и есть искомое явное выражение для  $\alpha_k$ , удовлетворяющее условию (32). Для получения  $(k+1)$ -го приближения остается положить

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \alpha_k(\bar{u}_k(t) - u_k(t)), \quad t_0 \leq t \leq T.$$

Сходимость метода условного градиента для задачи (3)–(5) вытекает из следующей теоремы.

**Теорема 4.** Пусть  $U$  — выпуклое замкнутое ограниченное множество из гильбертова пространства  $H$ , функция  $J(u)$  принадлежит  $C^{1,1}(U)$ . Тогда для последовательности  $\{u_k\}$ , определяемой методом (30)–(32) при любом выборе начального приближения  $u_0 \in U$ , справедливо равенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle J'(u_k), \bar{u}_k - u_k \rangle = 0. \quad (36)$$

Если, кроме того, функция  $J(u)$  выпукла на  $U$ , то последовательность  $\{u_k\}$  минимизирует эту функцию на  $U$ , причем справедлива оценка

$$0 \leq J(u_k) - J_* \leq \frac{c_1}{k}, \quad k = 1, 2, \dots; \quad c_1 = \text{const} \geq 0. \quad (37)$$

Если  $J(u)$  еще и сильно выпукла на  $U$ , то  $\{u_k\}$  сходится к единственной точке минимума  $u_*$  по норме  $H$ , причем

$$\|u_k - u_*\|^2 \leq \frac{c_2}{k}, \quad k = 1, 2, \dots; \quad c_2 = \text{const} \geq 0.$$

**Доказательство.** Прежде всего заметим, что из ограниченности множества  $U$ , условия  $J(u) \in C^{1,1}(U)$  и леммы 2.6.1 следует, что

$$\begin{aligned} |J(u)| &\leq |J(u_0)| + \|J'(u_0)\| \|u - u_0\| + \frac{L\|u - u_0\|^2}{2} \leq \\ &\leq |J(u_0)| + \|J'(u_0)\|d + \frac{Ld^2}{2} < \infty \end{aligned}$$

при всех  $u \in U$ ; здесь  $d = \sup_{u,v \in U} \|u - v\|$  — диаметр множества  $U$ . Это значит, что функция  $J(u)$  ограничена на  $U$ . Следовательно,  $J_* > -\infty$ . Обозначим  $J_k(u) = \langle J'(u_k), u - u_k \rangle$ . Из (30) следует, что

$$J_k(\bar{u}_k) \leq J_k(u_k) = 0, \quad k = 0, 1, \dots$$

Далее, справедливо неравенство

$$J(u_k) - J(u_{k+1}) \geq \alpha |J_k(\bar{u}_k)| - \alpha^2 \frac{Ld^2}{2} \quad (38)$$

при всех  $\alpha$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , которое доказывается так же, как аналогичное неравенство (5.4.18). Отсюда

$$0 \leq |J_k(\bar{u}_k)| \leq \alpha \frac{Ld^2}{2} + \frac{(J(u_k) - J(u_{k+1}))}{\alpha}, \quad (39)$$

$k = 0, 1, \dots$ ;  $0 < \alpha \leq 1$ . Так как  $J(u_k)$  не возрастает и  $J(u_k) \geq J_* > -\infty$ , то  $\{J(u_k)\}$  сходится и  $J(u_k) - J(u_{k+1}) \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Поэтому, переходя в неравенстве (39) к пределу при  $k \rightarrow \infty$ , будем иметь

$$0 \leq \varliminf_{k \rightarrow \infty} |J_k(\bar{u}_k)| \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |J_k(\bar{u}_k)| \leq \frac{\alpha Ld^2}{2}$$

при всех  $\alpha$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ . Отсюда при  $\alpha \rightarrow +0$  получим равенство (36).

Пусть теперь  $J(u)$  выпукла на  $U$ . Согласно теореме 2.8 тогда  $U_* \neq \emptyset$ . Возьмем произвольную точку  $u_* \in U_*$ . Из теоремы 4.2.2 и условия (30) имеем

$$\begin{aligned} 0 \leq a_k = J(u_k) - J(u_*) &\leq \langle J'(u_k), u_k - u_* \rangle = \\ &= -J_k(u_*) \leq -J_k(\bar{u}_k) = |J_k(\bar{u}_k)|, \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (40)$$

Отсюда и из равенства (36) следует, что  $\{u_k\}$  — минимизирующая последовательность.

Докажем оценку (37). Так как  $J_k(\bar{u}_k) \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ , то найдется номер  $k_0$  такой, что  $0 \leq \gamma_k = |J_k(\bar{u}_k)|/(Ld^2) \leq 1$  при всех  $k \geq k_0$ . Тогда максимальное значение функции  $\alpha |J_k(\bar{u}_k)| - \alpha^2 d^2 L/2$  переменной  $\alpha$  при  $-\infty < \alpha < +\infty$ , которое достигается при  $\alpha = \gamma_k$ , будет совпадать с максимальным значением

этой функции на отрезке  $0 \leq \alpha \leq 1$  при всех  $k \geq k_0$ . Поэтому, полагая в оценке (38)  $\alpha = \gamma_k$ , получим

$$a_k - a_{k+1} = J(u_k) - J(u_{k+1}) \geq \frac{|J_k(\bar{u}_k)|^2}{2Ld^2}, \quad k \geq k_0.$$

Отсюда и из неравенств (40) следует

$$a_k - a_{k+1} \geq \frac{a_k^2}{2Ld^2}, \quad k \geq k_0.$$

Остается применить лемму 2.6.4 и убедиться в справедливости оценки (37). Последнее утверждение теоремы для сильно выпуклых функций следует из оценки (37) и неравенства (4.3.3).  $\square$

Заметим, что описание метода условного градиента и теорема 4 сохраняют силу и в том случае, когда  $U$  — выпуклое замкнутое ограниченное множество из рефлексивного банахова пространства.

**4. Метод возможных направлений** может применяться для поиска приближенного решения задачи

$$J(u) \rightarrow \inf; \quad u \in U = \{u \in B: g_i(u) \leq 0, i = 1, \dots, m\}, \quad (41)$$

где  $B$  — банахово пространство,  $J(u), g_1(u), \dots, g_m(u) \in C^1(B)$ . Для описания этого метода нам понадобятся понятия возможного направления и возможного направления убывания функции, введенные определениями 4.2.3 и 5.5.1.

Метод возможных направлений заключается в следующем. Пусть  $u_0 \in U$ ,  $\varepsilon_0 > 0$  — некоторое начальное приближение. Допустим, что  $k$ -е приближение  $(u_k, \varepsilon_k)$ ,  $u_k \in U$ ,  $\varepsilon_k > 0$  при каком-то  $k \geq 0$  уже известно. Определим множество номеров

$$I_k = \{i: 1 \leq i \leq m, -\varepsilon_k \leq g_i(u_k) \leq 0\}$$

и в пространстве переменных  $z = (e, \sigma) \in B \times E^1$  рассмотрим вспомогательную задачу

$$\begin{aligned} & \sigma \rightarrow \inf; \\ & z = (e, \sigma) \in W_k = \{(e, \sigma): \langle J'(u_k), e \rangle \leq \sigma, \langle g'_i(u_k), e \rangle \leq \sigma, i \in I_k; \|e\| \leq 1\}. \end{aligned} \quad (42)$$

Множество  $W_k$  выпукло, замкнуто и ограничено, поэтому если  $B$  является рефлексивным банаховым пространством, то согласно теореме 2.8 задача (42) имеет решение. Пусть  $(e_k, \sigma_k)$  — решение задачи (42), т. е.  $(e_k, \sigma_k) \in W_k$  и  $\sigma_k = \inf_{W_k} \sigma$ . Так как  $z = (0, 0) \in W_k$ , то ясно, что  $\sigma_k \leq 0$ . Имеются две возможности:

1)  $\sigma_k \leq -\varepsilon_k$ . Тогда направление  $e_k \neq 0$  является возможным направлением убывания функции  $J(u)$  в точке  $u_k$  на множестве  $U$ . Полагаем

$$u_{k+1} = u_k + \alpha_k e_k, \quad 0 < \alpha_k \leq \beta_k; \quad \varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k, \quad (43)$$

где

$$\beta_k = \sup\{\alpha: u_k + t e_k \in U, 0 \leq t \leq \alpha\} > 0.$$

2)  $-\varepsilon_k < \sigma_k \leq 0$ . Тогда полагаем

$$u_{k+1} = u_k, \quad \varepsilon_{k+1} = \theta \varepsilon_k, \quad 0 < \theta < 1,$$

где  $\theta$  — параметр метода, и снова переходим к рассмотрению задачи (42) с заменой множества  $I_k$  на множество  $I_{k+1} = \{i: 1 \leq i \leq m, -\varepsilon_{k+1} \leq g_i(u_k) \leq 0\}$ .

Различные способы выбора величины  $\alpha_k$  в (43) описаны в § 5.5.

Заметим, что задача (42) далеко не всегда просто решается. Поэтому методом возможных направлений пользуются для решения лишь таких задач (41), в которых решение вспомогательных задач (42) может быть легко найдено.

Предлагаем читателю самостоятельно исследовать сходимость этого метода и рассмотреть, в частности, возможность обобщения теоремы 5.5.2 на случай банаховых пространств.

**5. Проксимальный метод** применяют для решения задач минимизации

$$J(u) \rightarrow \inf, \quad u \in U, \quad (44)$$

где  $U$  — выпуклое замкнутое множество из гильбертова пространства  $H$ , функция  $J(u)$  выпукла и полунепрерывна снизу на  $U$ . Этот метод заключается в построении последовательности  $\{u_k\}$  по следующему правилу. Начальная точка  $u_0 \in H$  предполагается заданной. Если уже известна точка  $u_k$ ,  $k \geq 0$ , то следующее приближение  $u_{k+1}$  определяется как решение задачи:

$$\varphi(z, u_k) = \frac{1}{2} \|z - u_k\|^2 + \alpha J(z) \rightarrow \inf, \quad z \in U,$$

где  $\alpha > 0$  — параметр метода. Так как функция  $\varphi(z, u_k)$  переменной  $z$  полунепрерывна снизу и сильно выпукла на  $U$ , множество  $U$  выпукло и замкнуто, то условия

$$u_{k+1} \in U, \quad \inf_{z \in U} \varphi(z, u_k) = \varphi(u_{k+1}, u_k) \quad (45)$$

однозначно определяют точку  $u_{k+1}$  (теорема 2.10).

Для дифференцируемых функций  $J(u)$  описанный метод превращается в метод проекции градиента в неявной форме:

$$u_{k+1} = \mathcal{P}_U(u_k - \alpha J'(u_{k+1})), \quad k = 0, 1, \dots$$

(см. метод (5.6.14)).

В задаче (1) на каждом шаге проксимального метода нужно решить задачу минимизации:

$$\varphi(z, u_k) = \frac{1}{2} \|z - u_k\|^2 + \alpha \|Az - b\|^2 \rightarrow \inf, \quad z \in U.$$

Если  $U = H$ , то эта задача равносильна решению линейного операторного уравнения

$$\varphi_z(z, u_k) = z - u_k + 2\alpha A^*(Az - b) = 0,$$

или

$$(2\alpha A^*A + I)z = 2\alpha A^*b + u_k.$$

Предлагаем читателю самостоятельно расписать проксимальный метод для задачи (3)–(5). Аналогично теореме 5.6.5 доказывается

**Теорема 5.** Пусть  $U$  — выпуклое замкнутое множество из гильбертова пространства  $H$ , функция  $J(u)$  полунепрерывна снизу и сильно выпукла на  $U$  с постоянной сильной выпуклостью  $\varkappa$ . Пусть последовательность  $\{u_k\}$  определена методом (45) с произвольным  $u_0 \in H$ . Тогда  $\{u_k\}$  сильно в  $H$  сходится к точке  $u_*$  — решению задачи (44), причем

$$\|u_k - u_*\|^2 \leq \|u_0 - u_*\|^2 q^k, \quad k = 0, 1, \dots, \quad q = \frac{1}{1 + 2\alpha\varkappa}.$$

**6. Метод сопряженных направлений** применяют для поиска решения задачи

$$J(u) \rightarrow \inf; \quad u \in H,$$

где  $H$  — гильбертово пространство,  $J(u) \in C^1(H)$ . Этот метод заключается в построении последовательности  $\{u_k\}$  по правилу

$$u_{k+1} = u_k - \alpha_k p_k, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (46)$$

где

$$p_0 = J'(u_0), \quad p_k = J'(u_k) - \beta_k p_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (47)$$

величина  $\beta_k$  определяется по одной из формул

$$\beta_k = \langle J'(u_k), J'(u_{k-1}) - J'(u_k) \rangle \|J'(u_{k-1})\|^{-2},$$

или

$$\beta_k = -\|J'(u_k)\|^2 \|J'(u_{k-1})\|^{-2},$$

а  $\alpha_k$  в (46) находят из условия

$$f_k(\alpha_k) = \inf_{\alpha \geq 0} f_k(\alpha), \quad f_k(\alpha) = J(u_k - \alpha p_k), \quad \alpha \geq 0. \quad (48)$$

Как показывает практика, погрешности, неизбежно появляющиеся при определении  $\alpha_k$  из условия (48), могут привести к тому, что векторы  $\{p_k\}$  из (47) перестают указывать направление убывания функции и сходимость метода может нарушиться. Чтобы бороться с этим явлением, метод сопряженных градиентов время от времени обновляют, полагая в (47)  $\beta_k = 0$ .

В отличие от конечномерных пространств (см. § 5.6), в гильбертовых пространствах нельзя ожидать, что точку минимума сильно выпуклой квадратичной функции

$$J(u) = \frac{1}{2} \langle Au, u \rangle - \langle b, u \rangle, \quad u \in H, \quad A \in \mathcal{L}(H \rightarrow H), \quad b \in H,$$

удастся найти за конечное число шагов метода сопряженных градиентов.

Предлагаем читателю самостоятельно сформулировать и доказать аналог теоремы 5.6.1 для гильбертовых пространств и рассмотреть возможность применения метода сопряженных градиентов к задачам (1), (3)–(5).

**7. Метод Ньютона** может быть использован для поиска решения задачи

$$J(u) \rightarrow \inf; \quad u \in U,$$

где  $U$  — выпуклое замкнутое множество из банахова пространства  $B$ ,  $J(u) \in C^2(U)$ . Этот метод заключается в построении последовательности



$\{u_k\}$  по следующему правилу: по известному  $k$ -му приближению  $u_k \in U$  находят вспомогательное приближение  $\bar{u}_k \in U$  из условия

$$J_k(\bar{u}_k) = \inf_U J_k(u), \quad (49)$$

где

$$J_k(u) = \langle J'(u_k), u - u_k \rangle + \frac{1}{2} \langle J''(u_k)(u - u_k), u - u_k \rangle, \quad u \in U,$$

и затем полагают

$$u_{k+1} = u_k + \alpha_k(\bar{u}_k - u_k), \quad 0 \leq \alpha_k \leq 1. \quad (50)$$

В частности, если  $U = B$ , то в точке минимума функции  $J_k(u)$  ее производная  $J'_k(u)$  обращается в нуль, т. е.

$$J'_k(\bar{u}_k) = J'(u_k) + J''(u_k)(\bar{u}_k - u_k) = 0.$$

Если оператор  $J''(u_k)$  имеет обратный оператор  $(J''(u_k))^{-1}$ , то отсюда имеем

$$\bar{u}_k = u_k - (J''(u_k))^{-1} J'(u_k).$$

Подставляя это выражение для  $\bar{u}_k$  в (50), получим

$$u_{k+1} = u_k - \alpha_k (J''(u_k))^{-1} J'(u_k), \quad k = 0, 1, \dots$$

Таким образом, при  $U = B$  метод (49), (50) представляет собой широко известный метод Ньютона для решения операторных уравнений (в данном случае уравнения  $J'(u) = 0$ ).

Различные способы выбора величины  $\alpha_k$  в (50) описаны в § 5.10.

Предлагаем читателю самостоятельно сформулировать и доказать аналоги теорем 5.10.1–5.10.3 о сходимости метода Ньютона для задач минимизации в банаховых пространствах.

**8. Метод штрафных функций** может быть использован для поиска решения задачи

$$J(u) \rightarrow \inf; \quad u \in U, \quad (51)$$

$$U = \{u \in U_0: g_i(u) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m; \quad g_i(u) = 0, \quad i = m+1, \dots, s\}, \quad (52)$$

где  $U_0$  — заданное множество из банахова пространства  $B$ , функции  $J(u)$ ,  $g_1(u), \dots, g_s(u)$  определены на  $U_0$ .

Определение 5.16.1 штрафной функции без изменений сохраняется и в банаховых пространствах. Примером штрафной функции множества (52) на множестве  $U_0$  является функция

$$P_k(u) = A_k P(u), \quad u \in U_0, \quad (53)$$

где

$$P(u) = \sum_{i=1}^m (\max\{g_i(u); 0\})^p + \sum_{i=m+1}^s |g_i(u)|^p, \quad u \in U_0, \quad (54)$$

числа  $A_k$ , называемые *штрафными коэффициентами*, таковы, что

$$A_k > 0, \quad k = 1, 2, \dots; \quad \lim_{k \rightarrow \infty} A_k = +\infty, \quad p \geq 1;$$

другие примеры штрафных функций см. в § 5.16.

Метод штрафных функций для задачи (51), (52) заключается в том, что вводят функции

$$\Phi_k(u) = J(u) + P_k(u), \quad u \in U_0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (55)$$

и определяют последовательность  $\{u_k\}$  условиями

$$u_k \in U_0, \quad \Phi_k(u_k) \leq \Phi_{k*} + \varepsilon_k, \quad (56)$$

где  $P_k(u)$  — штрафная функция множества  $U$  (например, функция (53), (54)),  $\Phi_{k*} = \inf_{U_0} \Phi_k(u)$ ,  $\varepsilon_k > 0$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = 0$ . Если существует точка  $u_k \in U_0$ , для которой  $\Phi_k(u_k) = \Phi_{k*}$ , то в (56) допускается возможность  $\varepsilon_k = 0$ . Заметим, что точка  $u_k$ , удовлетворяющая условию (56), вообще говоря, не принадлежит множеству  $U$ . При описании метода штрафной функции (55), (56) подразумевается, что  $\Phi_{k*} > -\infty$  при всех  $k = 1, 2, \dots$ .

Приведем две теоремы о сходимости метода штрафных функций.

**Теорема 6.** Пусть функции  $J(u), g_i(u)$ ,  $i = 1, \dots, s$ , определены на множестве  $U_0$ , а последовательность  $\{u_k\}$  определена из условий (53)–(56). Тогда

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} J(u_k) \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \Phi_k(u_k) = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \Phi_{k*} \leq J_*. \quad (57)$$

Если, кроме того,  $J_{**} = \inf_{U_0} J(u) > -\infty$ , то

$$P_k(u) = O(A_k^{-1}), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (58)$$

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} g_i(u_k) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m; \quad \lim_{k \rightarrow \infty} g_i(u_k) = 0, \quad i = m+1, \dots, s. \quad (59)$$

Доказательство этой теоремы проводится дословно так же, как и теоремы 5.16.1. В § 5.16 приведен пример, показывающий, что в (57) неравенства могут быть строгими.

**Теорема 7.** Пусть  $U_0$  — выпуклое замкнутое множество из рефлексивного банахова пространства  $B$ , функции  $J(u), g_1(u), \dots, g_m(u), |g_{m+1}(u)|, \dots, |g_s(u)|$  слабо полунепрерывны снизу на  $U_0$  (например, эти функции выпуклы и полунепрерывны снизу в метрике  $B$ ),  $J_{**} = \inf_{U_0} J(u) > -\infty$ ; множество

$$U(\delta) = \{u \in U_0: g_i(u) \leq \delta, \quad i = 1, \dots, m; \quad |g_i(u)| \leq \delta, \quad i = m+1, \dots, s\}$$

выпукло и ограничено при некотором  $\delta > 0$ . Тогда последовательность  $\{u_k\}$ , определенная условиями (53)–(56), такова, что любая точка  $v_*$ , являющаяся слабым пределом какой-либо ее подпоследовательности, принадлежит  $U_*$  и  $\lim_{k \rightarrow \infty} J(u_k) = J_*$ .

**Доказательство.** При сделанных предположениях для  $\{u_k\}$  соотношения (57)–(59) сохраняют силу. Из (59) следует, что  $u_k \in U(\delta)$  при всех  $k \geq k_0$ . Однако согласно теореме 2.6 множество  $U(\delta)$  слабо компактно. Тогда существует хотя бы одна точка  $v_* \in U(\delta)$ , к которой слабо сходится некоторая подпоследовательность  $\{u_{k_r}\}$ . В силу слабой полунепрерывности снизу указанных в теореме функций и соотношений (59) имеем

$$g_i(v_*) \leq \varliminf_{r \rightarrow \infty} g_i(u_{k_r}) \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} g_i(u_k) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m;$$

$$|g_i(v_*)| \leq \varliminf_{r \rightarrow \infty} |g_i(u_{k_r})| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} |g_i(u_k)| = 0, \quad i = m + 1, \dots, s.$$

Это значит, что  $v_* \in U$ . Тогда с учетом (57) получаем

$$J_* \leq J(v_*) \leq \varliminf_{r \rightarrow \infty} J(u_{k_r}) \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} J(u_k) \leq J_*,$$

так что

$$J(v_*) = \lim_{r \rightarrow \infty} J(u_{k_r}) = J_*, \quad \text{или} \quad v_* \in U_*.$$

Таким образом, показано, что любая точка  $v_*$ , являющаяся слабым пределом какой-либо подпоследовательности  $\{u_{k_r}\}$ , принадлежит  $U_*$  и  $\lim_{r \rightarrow \infty} J(u_{k_r}) = J_*$ .

Отсюда следуют утверждения теоремы 7.  $\square$

Доказанная теорема является аналогом теоремы 5.16.2. Читателю предлагаем самостоятельно исследовать возможность обобщения других теорем из § 5.16 на случай банаховых пространств.

Для иллюстрации метода штрафных функций рассмотрим задачу (3)–(5) при дополнительных фазовых ограничениях вида

$$a_i \leq x^i(t, u) \leq b_i, \quad t_0 \leq t \leq T, \quad i = 1, \dots, m; \quad m \leq n, \quad (60)$$

или

$$x^i(T, u) = x_I^i, \quad i = 1, \dots, s; \quad s < n, \quad (61)$$

где  $a_i, b_i, x_I^i$  — заданные числа. Для учета ограничений (60) можно взять штрафную функцию

$$P_k(u) = A_k \sum_{i=1}^m \int_{t_0}^T [(\max\{x^i(t, u) - b_i; 0\})^2 + (\max\{a_i - x^i(t, u); 0\})^2] dt,$$

где  $A_k > 0$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = +\infty$ ; ограничения (61) можно учесть с помощью штрафной функции

$$P_k(u) = A_k \sum_{i=1}^s (x^i(T, u) - x_I^i)^2, \quad k = 1, 2, \dots$$

Тогда задача (3)–(5), (60) или (61) сведется к решению последовательности задач минимизации функции

$$\Phi_k(u) = |x(T, u) - b|^2 + P_k(u), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (62)$$

при условиях (2), (3). Вопрос о том, как определить градиент функции (62) при условиях (4), (5) и как минимизировать функцию (62), будет обсужден в следующем параграфе.

Предлагаем читателю самостоятельно исследовать возможность обобщения других методов гл. 5 на случай задач минимизации на множествах из гильбертовых или банаховых пространств, исследовать сходимость этих методов [65; 103; 112; 151; 638; 801].

### Упражнения

**У п р а ж н е н и е 1.** Пусть  $U = \{u(t) = (u^1(t), \dots, u^r(t)) \in L_2^r[t_0, T] : u^i(t) \geq 0 \text{ почти всюду на отрезке } t_0 \leq t \leq T, i = 1, \dots, r\}$ . Найти проекцию любой точки из  $L_2^r[t_0, T]$  на множество  $U$ . Описать метод проекции градиента для задачи (3)–(5) с этим множеством.

**У п р а ж н е н и е 2.** Описать метод сопряженных градиентов для задачи (3)–(5) при  $U = L_2^r[t_0, T]$ .

**У п р а ж н е н и е 3.** Описать градиентный метод, методы проекции градиента, условного градиента, сопряженных направлений для задач минимизации функций

$$J(u) = |x(T, u) - b|^2 + \alpha \int_{t_0}^T |u(t)|^2 dt, \quad \alpha = \text{const} > 0,$$

$$J(u) = \int_{t_0}^T |x(t, u) - b(t)|^2 dt, \quad b(t) \in L_2^n[t_0, T],$$

$$J(u) = \int_{t_0}^T |x(t, u) - b(t)|^2 dt + \alpha \int_{t_0}^T |u(t)|^2 dt, \quad \alpha = \text{const} > 0$$

при условиях (4), (5). Исследовать сходимость методов.

**У п р а ж н е н и е 4.** Описать метод возможных направлений для задачи (41) в предположении, что  $U = H$  — гильбертово пространство, взяв во вспомогательной задаче (42) поиска возможного направления убывания условие нормировки  $\|e\| = 1$ .

**У п р а ж н е н и е 5.** Описать градиентный метод, методы проекции градиента, условного градиента, сопряженных направлений для задач минимизации функций из примера 3.5. Рассмотреть случаи, когда  $U = H$ , или  $U$  — шар или гиперплоскость в  $H$ .

**У п р а ж н е н и е 6.** Сформулировать и доказать теоремы сходимости методов барьерных, нагруженных функций из § 5.18–5.19 для множества (52) из гильбертова пространства.

## § 5. Градиент в задаче оптимального управления со свободным правым концом

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления: минимизировать функцию

$$J(u) = \int_{t_0}^T f^0(x(t), u(t), t) dt + \Phi(x(T)) \quad (1)$$

при условиях

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad t_0 \leq t \leq T; \quad x(t_0) = x_0, \quad (2)$$

$$u = u(t) \in U \subseteq L_2^r[t_0, T], \quad (3)$$

где  $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ ,  $u = (u^1, \dots, u^r)$ , функции  $f^0(x, u, t)$ ,  $f(x, u, t) = (f^1(x, u, t), \dots, f^n(x, u, t))$ ,  $\Phi(x)$  переменных  $(x, u, t) \in E^n \times E^r \times [t_0, T]$

считаются известными,  $U$  — заданное множество из  $L_2^r[t_0, T]$ , моменты времени  $t_0, T$  и начальная точка  $x_0$  заданы.

Определение решения (или траектории)  $x = x(t) = x(t, u)$ ,  $t_0 \leq t \leq T$ , задачи Коши (2), соответствующего управлению  $u = u(t) \in L_2^r[t_0, T]$ , а также условия его существования обсуждались в гл. 6 (см. теорему 6.1.1); там же был доказан принцип максимума для задачи (1)–(3) (см. теорему 6.2.1, а также равенства (6.2.25), (6.2.26), § 6.3).

1. Ниже будут сформулированы достаточные условия дифференцируемости функции (1) на  $L_2^r[t_0, T]$  и получена формула для ее градиента. Примем обозначения

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} f_{x^1}^1, & \dots, & f_{x^n}^1 \\ f_{x^1}^n, & \dots, & f_{x^n}^n \end{pmatrix} = (f_x^1, \dots, f_x^n)^T, \\ f_u &= \frac{\partial f}{\partial u} = \begin{pmatrix} f_{u^1}^1, & \dots, & f_{u^r}^1 \\ f_{u^1}^n, & \dots, & f_{u^r}^n \end{pmatrix} = (f_u^1, \dots, f_u^n)^T, \\ f_x^i &= \begin{pmatrix} f_{x^1}^i \\ \vdots \\ f_{x^n}^i \end{pmatrix}, \quad f_u^i = \begin{pmatrix} f_{u^1}^i \\ \vdots \\ f_{u^r}^i \end{pmatrix}, \quad i = 0, \dots, n; \quad \Phi_x = \begin{pmatrix} \Phi_{x^1} \\ \vdots \\ \Phi_{x^n} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Здесь  $f_{x^j}^i = \frac{\partial f^i}{\partial x^j}$  — частная производная функции  $f^i$  по переменной  $x^j$ ,  $T$  — знак транспонирования матрицы. Напомним, что *нормой матрицы*  $A = \{a_{ij}, i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m\}$  порядка  $n \times m$  называется число  $\|A\| = \sup |Az|_{E^n}$ , где верхняя грань берется по единичному шару  $|z|_{E^m} \leq 1$ . Справедливо неравенство  $|Az|_{E^n} \leq \|A\| |z|_{E^m}$  при всех  $z \in E^m$ . Введем знаковую нам по гл. 6 функцию Гамильтона–Понтрягина

$$H(x, u, t, \psi) = -f^0(x, u, t) + \langle f(x, u, t), \psi \rangle, \quad (\psi)^T = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n). \quad (4)$$

Обозначим

$$H_x = \begin{pmatrix} H_{x^1} \\ \vdots \\ H_{x^n} \end{pmatrix}, \quad H_u = \begin{pmatrix} H_{u^1} \\ \vdots \\ H_{u^r} \end{pmatrix}.$$

**Теорема 1.** Пусть функции  $f^0, f, \Phi$  непрерывны по совокупности своих аргументов вместе со своими частными производными по переменным  $x, u$  при  $(x, u, t) \in E^n \times E^r \times [t_0, T]$  и, кроме того, выполнены следующие условия:

$$|f(x + \Delta x, u + h, t) - f(x, u, t)| \leq L(|\Delta x| + |h|), \quad (5)$$

$$\|f_x(x + \Delta x, u + h, t) - f_x(x, u, t)\| \leq L(|\Delta x| + |h|), \quad (6)$$

$$|f_x^0(x + \Delta x, u + h, t) - f_x^0(x, u, t)| \leq L(|\Delta x| + |h|), \quad (7)$$

$$\|f_u(x + \Delta x, u + h, t) - f_u(x, u, t)\| \leq L(|\Delta x| + |h|), \quad (8)$$

$$|f_u^0(x + \Delta x, u + h, t) - f_u^0(x, u, t)| \leq L(|\Delta x| + |h|), \quad (9)$$

$$|\Phi_x(x + \Delta x) - \Phi_x(x)| \leq L|\Delta x| \quad (10)$$

при всех  $(x + \Delta x, u + h, t)$ ,  $(x, u, t) \in E^n \times E^r \times [t_0, T]$ , где  $L = \text{const} \geq 0$ .

Тогда функция (1) при условиях (2) непрерывна и дифференцируема по  $u = u(t)$  в норме  $L_2^r[t_0, T]$  всюду на  $L_2^r[t_0, T]$ , причем ее градиент  $J'(u) = J'(u, t) \in L_2^r[t_0, T]$  в точке  $u = u(t)$  представим в виде

$$\begin{aligned} J'(u) &= -H_u(x, u, t, \psi)|_{x=x(t, u), u=u(t), \psi=\psi(t, u)} = \\ &= f_u^0(x(t, u), u(t), t) - (f_u(x(t, u), u(t), t))^T \psi(t, u), \quad t_0 \leq t \leq T, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $x(t) = x(t, u)$ ,  $t_0 \leq t \leq T$ , — решение задачи (2), соответствующее управлению  $u = u(t)$ , а  $\psi(t) = \psi(t, u)$ ,  $t_0 \leq t \leq T$ , является решением сопряженной системы

$$\begin{aligned} \dot{\psi}(t) &= -H_x(x, u, t, \psi(t))|_{x=x(t, u), u=u(t)} = \\ &= f_x^0(x(t, u), u(t), t) - (f_x(x(t, u), u(t), t))^T \psi(t), \quad t_0 \leq t \leq T, \end{aligned} \quad (12)$$

при начальных условиях

$$\psi(T) = -\Phi_x(x)|_{x=x(T, u)}. \quad (13)$$

**Доказательство.** Пусть  $u = u(t)$ ,  $u + h = u(t) + h(t) \in L_2^r[t_0, T]$ , а  $x(t, u), x(t, u + h)$ ,  $t_0 \leq t \leq T$ , — соответствующие этим управлениям решения задачи (2). Из условия теоремы имеем

$$\begin{aligned} |f(x, u, t)| &\leq |f(x, u, t) - f(0, 0, t)| + |f(0, 0, t)| \leq \\ &\leq L(|x| + |u|) + \sup_{t_0 \leq t \leq T} |f(0, 0, t)|, \quad (x, u, t) \in E^n \times E^r \times [t_0, T]. \end{aligned} \quad (14)$$

Из (14) и из теоремы 6.1.1 и замечания 2 к ней следует существование и единственность решения задачи (2) при всех  $u = u(t) \in L_2^r[t_0, T]$ . Приращение  $\Delta x(t) = x(t, u + h) - x(t, u)$ ,  $t_0 \leq t \leq T$ , удовлетворяет условиям:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{x}(t) &= f(x(t) + \Delta x(t), u(t) + h(t), t) - f(x(t), u(t), t), \\ t_0 \leq t \leq T, \quad \Delta x(t_0) &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Из (15) и из теоремы 6.3.1 следует оценка

$$|\Delta x(t)| \leq C_1 \int_{t_0}^T |h(t)| dt \leq C_1(T - t_0)^{1/2} \|h\|_{L_2}, \quad t_0 \leq t \leq T; \quad (16)$$

здесь и ниже через  $C_1, C_2, \dots$  будем обозначать константы, не зависящие от выбора  $u = u(t) \in L_2^r[t_0, T]$ .

Покажем, что приращение функции (1) представимо в виде:

$$\Delta J(u) = J(u + h) - J(u) = - \int_{t_0}^T H_u(x(t), u(t), t, \psi(t)) dt + R, \quad (17)$$

где  $R = R_1 + R_2 + R_3$ ,

$$\begin{aligned} R_1 &= \langle \Phi_x(x(T) + \theta_1 \Delta x(T)) - \Phi_x(x(T)), \Delta x(T) \rangle, \quad 0 < \theta_1 < 1, \\ R_2 &= - \int_{t_0}^T \langle H_x(x + \theta_2 \Delta x, u + \theta_2 h, t, \psi) - H_x(x, u, t, \psi), \Delta x \rangle dt, \\ R_3 &= - \int_{t_0}^T \langle H_u(x + \theta_2 \Delta x, u + \theta_2 h, t, \psi) - H_u(x, u, t, \psi), h(t) \rangle dt, \quad 0 < \theta_2 < 1. \end{aligned}$$

Так как  $\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \langle \Phi_x(x + \theta_1 \Delta x), \Delta x \rangle$ ,  $0 \leq \theta_1 < 1$ , то

$$\begin{aligned} \Delta J(u) &= \int_{t_0}^T [f^0(x(t) + \Delta x(t), u(t) + h(t), t) - f^0(x(t), u(t), t)] dt + \\ &\quad + \langle \Phi_x(x(T)), \Delta x(T) \rangle + R_1, \quad (18) \end{aligned}$$

Преобразуем второе слагаемое правой части (18). С учетом соотношений (12), (13), (15) имеем

$$\begin{aligned} \langle \Phi_x(x(T)), \Delta x(T) \rangle &= - \langle \psi(T), \Delta x(T) \rangle = - \int_{t_0}^T \frac{d}{dt} \langle \psi(t), \Delta x(t) \rangle dt - \\ &\quad - \langle \psi(t_0), \Delta x(t_0) \rangle = - \int_{t_0}^T [\langle \dot{\psi}(t), \Delta x(t) \rangle + \langle \psi(t), \Delta \dot{x}(t) \rangle] dt = \\ &= - \int_{t_0}^T \langle \dot{\psi}(t), f(x(t) + \Delta x(t), u(t) + h(t), t) - f(x(t), u(t), t) \rangle dt + \\ &\quad + \int_{t_0}^T \langle H_x(x(t), u(t), t, \psi(t)), \Delta x(t) \rangle dt. \quad (18') \end{aligned}$$

Подставим полученное выражение в (18), откуда с помощью функции (4) будем иметь

$$\begin{aligned} \Delta J(u) &= - \int_{t_0}^T [H(x(t) + \Delta x(t), u(t) + h(t), t, \psi(t)) - \\ &\quad - H(x(t), u(t), t, \psi(t))] dt + \int_{t_0}^T \langle H_x(x(t), u(t), t, \psi(t)), \Delta x(t) \rangle dt + R_1. \end{aligned}$$

Отсюда, пользуясь формулой конечных приращений

$$\begin{aligned} H(x + \Delta x, u + h, t, \psi) - H(x, u, t, \psi) &= \langle H_x(x + \theta_2 \Delta x, u + \theta_2 h, t, \psi), \Delta x \rangle + \\ &\quad + \langle H_u(x + \theta_2 \Delta x, u + \theta_2 h, t, \psi), h \rangle, \quad 0 < \theta_2 < 1, \end{aligned}$$

приходим к требуемому представлению (17) приращения функции (1). Так как  $H_x(x, u, t, \psi) = -f_x^0(x, u, t) + (f_x(x, u, t))^T \psi$ ,  $H_u(x, u, t, \psi) = -f_u^0(x, u, t) + (f_u(x, u, t))^T \psi$ , то с учетом условий (6)–(10) и оценки (16) для величин  $R_1, R_2, R_3$  из (17) имеем

$$\begin{aligned} |R_1| &\leq L|\Delta x(T)|^2 \leq C_2 \|h\|_{L_2^r}^2, \\ |R_2| &\leq \left(1 + \sup_{t_0 \leq t \leq T} |\psi(t, u)|\right) L \int_{t_0}^T (|\Delta x(t)|^2 + |\Delta x(t)||h(t)|) dt \leq C_3 \|h\|_{L_2^r}^2, \\ |R_3| &\leq \left(1 + \sup_{t_0 \leq t \leq T} |\psi(t, u)|\right) L \int_{t_0}^T (|\Delta x(t)||h(t)| + |h(t)|^2) dt \leq C_4 \|h\|_{L_2}^2. \end{aligned}$$

Суммируя оценки для  $R_1, R_2, R_3$ , получим

$$|R| \leq C_5 \int_{t_0}^T |h(t)|^2 dt = C_5 \|h\|_{L_2}^2. \quad (19)$$

Из формулы (17) и оценки (19) следует дифференцируемость функции (1) и формула (11) для градиента. Теорема 1 доказана.  $\square$

Таким образом, для вычисления градиента функции (1) при условиях (2) нужно последовательно решить две задачи Коши: сначала из задачи (2) нужно определить  $x(t, u)$ , затем из (12), (13) —  $\psi(t, u)$  и, наконец, по формуле (11) найти искомый градиент. При решении упомянутых задач Коши (2) и (12), (13) можно использовать различные приближенные методы [74; 89; 482; 630; 634].

Заметим, что дифференцируемость функции (1) в теореме 1 доказана при довольно жестких ограничениях на исходные данные задачи (1)–(3). На самом деле, формулу (17) с остаточным членом  $R, R/\|h\|_{L_2} \rightarrow 0$  при  $\|h\|_{L_2} \rightarrow 0$ , можно получить при несколько меньших требованиях. Например, вместо условия (10) можно требовать  $\Phi(x) \in C^1(E^n)$ , а вместо условий (6)–(9) для производных  $f_x^i, f_u^i, i = 0, \dots, n$ , можно ограничиться условиями типа

$$|f_x^i(x + \Delta x, u + h, t) - f_x^i(x, u, t)| \leq L|h|^\gamma + o(|\Delta x|),$$

где  $0 < \gamma \leq 1$ ,  $o(\alpha)/\alpha \rightarrow 0$  при  $\alpha \rightarrow 0$ .

Заметим, что формулу градиента функции (1) иногда записывают в несколько ином виде: вместо функции (4) берут

$$H(x, u, t, \psi) = f^0(x, u, t) + \langle f(x, u, t), \psi \rangle, \quad (20)$$

сопряженную задачу (12), (13) заменяют на задачу

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(x, u, t, \psi(t))|_{x=x(t, u), u=u(t)}, \quad t_0 \leq t \leq T, \quad (21)$$

$$\psi(T) = \Phi_x(x)|_{x=x(T, u)}, \quad (22)$$



и тогда вместо формулы (11) будем иметь

$$J'(u) = H_u(x, u, t, \psi)|_{x=x(t,u), u=u(t), \psi=\psi(t,u)}, \quad t_0 \leq t \leq T. \quad (23)$$

Нетрудно видеть, что функции  $H$  и  $\psi(t, u)$  и, следовательно, производная  $H_u$  из (4), (11)–(13) и (20)–(23) отличаются друг от друга лишь знаком.

Пользуясь формулами (20)–(23), найдем градиент в задаче (4.3)–(4.5), являющейся частным случаем задачи (1)–(3) при  $f^0 = 0$ ,  $f(x, u, t) = D(t)x + B(t)u + f(t)$ ,  $\varphi(x) = |x - b|^2$ . Тогда  $H(x, u, t, \psi) = \langle \psi, D(t)x + B(t)u + f(t) \rangle = \langle D^T(t)\psi, x \rangle + \langle B^T(t)\psi, u \rangle + \langle \psi, f(t) \rangle$ ; сопряженная задача имеет вид

$$\dot{\psi} = -H_x = -D^T(t)\psi(t), \quad t_0 \leq t \leq T; \quad \psi(T) = 2(x(T, u) - b),$$

градиент равен  $J'(u) = B^T(t)\psi(t, u)$ ,  $t_0 \leq t \leq T$  (ср. с формулами (4.6), (4.7)).

Для иллюстрации теоремы 1 приведем пример задачи оптимального управления для нелинейной системы.

**Пример 1.** Рассмотрим задачу об оптимальном успокоении математического маятника (см. примеры 6.1.1 и 6.2.7):

$$J(u) = (x^1(T))^2 + (x^2(T))^2 = |x(T)|^2 \rightarrow \inf; \quad (24)$$

$$\dot{x}^1(t) = x^2(t), \quad \dot{x}^2(t) = -\sin x^1(t) - \beta x^2(t) + u(t), \quad 0 \leq t \leq T; \quad (25)$$

$$x(0) = (x^1(0), x^2(0)) = x_0 = (x_0^1, x_0^2); \quad (26)$$

$$u = u(t) \in U \subseteq L_2^r[t_0, T]; \quad (27)$$

здесь момент  $T > 0$ , постоянная  $\beta$ , начальная точка  $x_0$  считаются известными. Задача (24)–(27) является частным случаем задачи (1)–(3), когда  $f^0 = 0$ ,  $\Phi(x) = \Phi(x^1, x^2) = (x^1)^2 + (x^2)^2$ ,  $f^1(x, u, t) = x^2$ ,  $f^2(x, u, t) = -\sin x^1 - \beta x^2 + u$ ,  $t_0 = 0$ ,  $n = 2$ ,  $r = 1$ . Все условия теоремы 1 для задачи (24)–(27) выполнены. Для вычисления градиента функции (24) составим функцию Гамильтона–Понтрягина

$$H(x, u, \psi) = \psi_1 x^2 + \psi_2 (-\sin x^1 - \beta x^2 + u).$$

Поскольку  $H_{x^1} = -\psi_2 \cos x^1$ ,  $H_{x^2} = \psi_1 - \beta \psi_2$ ,  $\Phi_{x^1} = 2x^1$ ,  $\Phi_{x^2} = 2x^2$ , то сопряженная задача (21), (22) запишется в виде

$$\dot{\psi}_1 = \psi_2 \cos x^1(t, u), \quad \dot{\psi}_2 = -\psi_1 + \beta \psi_2, \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$\psi_1(T) = 2x^1(T, u), \quad \psi_2(T) = 2x^2(T, u).$$

Так как  $H_u = \psi_2$ , то согласно формуле (23) градиент равен

$$J'(u) = \psi_2(t, u), \quad 0 \leq t \leq T.$$

**2.** Имея формулу градиента, нетрудно расписать градиентный метод, методы проекции градиента, условного градиента — это делается так же, как было сделано в § 4 для задачи (4.3)–(4.5). Заметим, что в задаче (1)–(3) в общем случае, конечно, нельзя ожидать, что функция  $f(\alpha) = J(u + \alpha h)$  переменной

$\alpha$  будет квадратным трехчленом, значит, параметр  $\alpha_k$  из условий типа (4.9), (4.32) будет определяться не так просто, как в задаче (4.3)–(4.5).

Во многих теоремах о сходимости методов минимизации требуется, чтобы минимизируемая функция принадлежала классу  $C^{1,1}(U)$ . Приведем достаточные условия принадлежности  $C^{1,1}(U)$  для функции (1) при условиях (2).

**Теорема 2.** Пусть выполнены все условия теоремы 1 и  $U = \{u = u(t) \in L_2^r[t_0, T]: u(t) \in V(t) \text{ почти всюду на } [t_0, T]\}$ , где  $V(t)$  — заданные множества из  $E^r$ , причем

$$\sup_{t_0 \leq t \leq T} \sup_{u \in V(t)} |u| \leq R < \infty.$$

Тогда

$$\|J'(u) - J'(v)\|_{L_2} \leq L_1 \|u - v\|_{L_2}, \quad L_1 = \text{const} \geq 0, \quad (28)$$

при любых  $u, v \in U$ .

**Доказательство.** Возьмем произвольные  $u = u(t)$ ,  $v = v(t) \in U$ . Из оценки (16) для  $\Delta x(t) = x(t, u) - x(t, v)$ ,  $t_0 \leq t \leq T$ , следует

$$\|\Delta x(t)\|_C = \max_{t_0 \leq t \leq T} |\Delta x(t)| \leq C_6 \|u - v\|_{L_2}. \quad (29)$$

Далее, с учетом неравенства (14) имеем

$$\begin{aligned} |x(t, u)| &= \left| x_0 + \int_{t_0}^t f(x(\tau, u), u(\tau), \tau) d\tau \right| \leq L \int_{t_0}^t |x(\tau, u)| d\tau + L \int_{t_0}^t |u(\tau)| d\tau + \\ &+ |x_0| + \sup_{t_0 \leq t \leq T} |f(0, 0, t)|(T - t_0) \leq L \int_{t_0}^t |x(\tau, u)| d\tau + L(T - t_0)R + C_7. \end{aligned}$$

Отсюда с помощью леммы 6.3.1 получим

$$\sup_{u \in U} \|x(t, u)\|_C \leq e^{L(T-t_0)} (C_7 + L(T - t_0)R) = C_8. \quad (30)$$

Оценим  $|\psi(t, u)|$ . С этой целью заметим, что  $(x(t, u), u(t), t) \in G = \{(x, u, t) \in E^n \times E^r \times [t_0, T]: |x| \leq C_8, |u| \leq R, t_0 \leq t \leq T\}$  при всех  $u \in U$ . Так как функции  $\Phi_x, f_x^0, f_x, f_u$  непрерывны по совокупности аргументов на замкнутом ограниченном множестве  $G$ , то

$$\max_G \max \{|\Phi_x|, |f_x^0|, \|f_x\|, \|f_u\|\} = C_9 < \infty. \quad (31)$$

Отсюда и из (12), (13) имеем

$$\begin{aligned} |\psi(t, u)| &= \left| \Phi_x(x(T, u)) + \int_t^T [f_x^0(x(\tau, u), u(\tau), \tau) - f_x(x(\tau, u), u(\tau), \tau)]^T \psi(\tau, u) d\tau \right| \leq \\ &\leq C_9 + C_9(T - t_0) + C_9 \int_t^T |\psi(\tau, u)| d\tau, \quad t_0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

Тогда из леммы 6.3.1 следует

$$\sup_{u \in U} \|\psi(t, u)\|_C \leq C_9(1 + T - t_0)e^{C_9(T-t_0)} = C_{10}. \quad (32)$$

Далее, оценим  $\Delta\psi(t) = \psi(t, u) - \psi(t, v)$ ,  $t_0 \leq t \leq T$ . Из (12), (13), оценок (29)–(32) и условий (6), (7), (10) имеем

$$\begin{aligned} |\Delta\psi(t)| &\leq |\Phi_x(x(T, u)) - \Phi_x(x(T, v))| + \\ &+ \int_t^T |f_x^0(x(\tau, u), u(\tau), \tau) - f_x^0(x(\tau, v), v(\tau), \tau)| d\tau + \\ &+ \int_t^T (|\psi(\tau, u) - \psi(\tau, v)| \|f_x(x(\tau, u), u(\tau), \tau)\| + \\ &+ |\psi(\tau, v)| \|f_x(x(\tau, u), u(\tau), \tau) - f_x(x(\tau, v), v(\tau), \tau)\|) d\tau \leq \\ &\leq L|\Delta x(T)| + L \int_{t_0}^T (|\Delta x(t)| + |u(t) - v(t)|) dt + \\ &+ C_9 \int_t^T |\psi(\tau, u) - \psi(\tau, v)| d\tau + C_{10}L \int_{t_0}^T (|\Delta x(t)| + |u(t) - v(t)|) dt \leq \\ &\leq C_9 \int_t^T |\psi(\tau, u) - \psi(\tau, v)| d\tau + C_{11}\|u - v\|_{L_2}, \quad t_0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

Отсюда и из леммы 6.3.1 следует

$$\|\psi(t, u) - \psi(t, v)\|_C \leq C_{11}e^{C_9(T-t_0)}\|u - v\|_{L_2} = C_{12}\|u - v\|_{L_2}. \quad (33)$$

Наконец, из формулы (11), оценок (29)–(33) и условий (8), (9) получим требуемое неравенство (28):

$$\begin{aligned} \|J'(u) - J'(v)\|_{L_2} &= \\ &= \left( \int_{t_0}^T |H_u(x(t, u), u(t), t, \psi(t, u)) - H_u(x(t, v), v(t), t, \psi(t, v))|^2 dt \right)^{1/2} \leq \\ &\leq L(1 + \|\psi(t, u)\|_C) \left( \int_{t_0}^T (|\Delta x(t)| + |u(t) - v(t)|)^2 dt \right)^{1/2} + \\ &+ C_9 \left( \int_{t_0}^T |\Delta\psi(t)|^2 dt \right)^{1/2} \leq L_1\|u - v\|_{L_2}, \quad u, v \in U. \end{aligned}$$

Теорема 2 доказана.  $\square$

**3.** Отдельно остановимся на одном частном случае задачи (1)–(3), когда система (2) линейна по  $x, u$ , т. е.

$$\dot{x}(t) = D(t)x(t) + B(t)u(t) + f(t), \quad t_0 \leq t \leq T, \quad x(t_0) = x_0, \quad (34)$$

где  $D(t), B(t), f(t)$  — заданные матрицы порядка  $n \times n$ ,  $n \times r$ ,  $n \times 1$  соответственно. Для задачи (1)–(3), (34) принадлежность классу  $C^{1,1}(U)$  может быть установлена при меньших требованиях, чем в теореме 2, и, кроме того, удастся сформулировать условия, гарантирующие выпуклость и сильную выпуклость функции (1).

**Теорема 3.** Пусть функции  $f^0(x, u, t)$ ,  $\Phi(x)$  удовлетворяют условиям теоремы 1 и матрицы  $D(t), B(t), f(t)$  кусочно непрерывны на отрезке  $[t_0, T]$ . Тогда функция (1) при условиях (34) принадлежит классу  $C^{1,1}$  на всем пространстве  $L_2^r[t_0, T]$ , причем ее градиент  $J'(u)$  в точке  $u = u(t) \in L_2^r[t_0, T]$  вычисляется по формуле

$$J'(u) = f_u^0(x(t, u), u(t), t) - B^T(t)\psi(t, u), \quad t_0 \leq t \leq T, \quad (35)$$

где  $x(t, u)$  — решение задачи (34),  $\psi(t, u)$  — решение задачи

$$\begin{aligned} \dot{\psi}(t) &= f_x^0(x(t, u), u(t), t) - D^T(t)\psi(t), \quad t_0 \leq t \leq T; \\ \psi(T) &= -\Phi_x(x(T, u)). \end{aligned} \quad (36)$$

**Доказательство.** Заметим, что здесь все условия (5)–(10) заведомо выполнены. Кроме того, для задачи (34) справедливы теорема 6.1.2, оценка (6.3.9) (см. также оценку (4.19)). Поэтому, рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 1, приходим к соотношениям (35), (36). Для  $\Delta\psi(t) = \psi(t, u) - \psi(t, v)$  с учетом условий (7), (10), (36) будем иметь

$$|\Delta\psi(t)| \leq D_{\max} \int_t^T |\Delta\psi(\tau)| d\tau + L|\Delta x(T)| + L \int_{t_0}^T (|\Delta x(t)| + |u(t) - v(t)|) dt.$$

Отсюда и из леммы 6.3.1 следует оценка (33). Наконец, из формулы (35) и условия (9) с учетом оценок (16), (33) получим

$$\begin{aligned} \|J'(u) - J'(v)\|_{L_2} &\leq \left( \int_{t_0}^T |f_u^0(x(t, u), u(t), t) - f_u^0(x(t, v), v(t), t)|^2 dt \right)^{1/2} + \\ &\quad + B_{\max} \left( \int_{t_0}^T |\psi(t, u) - \psi(t, v)|^2 dt \right)^{1/2} \leq L_1 \|u - v\|_{L_2}. \quad \square \end{aligned}$$

Укажем достаточные условия выпуклости и сильной выпуклости функции (1) при условиях (34), кратко обсудим условия оптимальности в задаче (1)–(3), (34).

**Теорема 4.** Пусть матрицы  $A(t), B(t), f(t)$  кусочно непрерывны на отрезке  $[t_0, T]$ , функция  $\Phi(x)$  выпукла на  $E^n$ , а  $f^0(x, u, t)$  выпукла по совокупности переменных  $(x, u)$ , т. е.

$$f^0(\alpha x + (1 - \alpha)y, \alpha u + (1 - \alpha)v, t) \leq \alpha f^0(x, u, t) + (1 - \alpha)f^0(y, v, t) \quad (37)$$

при всех  $(x, u, t), (y, v, t) \in E^n \times E^r \times [t_0, T]$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$ , и, кроме того, пусть  $f^0(x(t), u(t), t) \in L_1[t_0, T]$  при каждой непрерывной функции  $x(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq T$ ,  $u(t) \in L_2^r[t_0, T]$ . Тогда функция (1) при условиях (34) будет определена и выпукла на  $L_2^r[t_0, T]$ .

Если при этом функции  $f^0(x, u, t)$ ,  $\Phi(x)$  удовлетворяют условиям теоремы 1, то функция (1) при условиях (34) достигает своей нижней грани на всяком выпуклом замкнутом ограниченном множестве  $U \subset L_2^r[t_0, T]$ , причем для оптимальности управления  $u_* = u_*(t) \in U$  необходимо и достаточно выполнения неравенства

$$\int_{t_0}^T \langle f_u^0(x(t, u_*), u_*(t), t) - B^T(t)\psi(t, u_*), u(t) - u_*(t) \rangle dt \geq 0 \quad (38)$$

при всех  $u(t) \in U$ . Если  $u_*$  — внутренняя точка множества  $U$ , то условие (38) равносильно условию

$$f_u^0(x(t, u_*), u_*(t), t) - B^T(t)\psi(t, u_*) = 0, \quad t_0 \leq t \leq T. \quad (39)$$

Если же вместо (37) справедливо неравенство

$$f^0(\alpha x + (1 - \alpha)y, \alpha u + (1 - \alpha)v, t) \leq \alpha f^0(x, u, t) + (1 - \alpha)f^0(y, v, t) - \alpha(1 - \alpha)\frac{\varkappa}{2}|u - v|^2, \quad \varkappa = \text{const} > 0, \quad (40)$$

при всех  $\alpha$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$ ,  $(x, u, t), (y, v, t) \in E^n \times E^r \times [t_0, T]$ , то функция (1) при условиях (34) является сильно выпуклой на  $L_2^r[t_0, T]$  и будет достигать своей нижней грани на любом выпуклом замкнутом множестве  $U \subseteq L_2^r[t_0, T]$ , причем оптимальное управление единственно.

**Доказательство.** Нетрудно видеть, что решения задачи (34) обладают свойством

$$x(t, \alpha u + (1 - \alpha)v) = \alpha x(t, u) + (1 - \alpha)x(t, v), \quad \forall t \in [t_0, T],$$

при всех  $u, v \in L_2^r[t_0, T]$  и  $\alpha \in \mathbb{R}$  (ср. с (2.7)). Тогда выпуклость [сильная выпуклость] функции (1) при условиях (34) является простым следствием выпуклости  $\Phi(x)$  и условия (37) [условия (40)]. Остальные утверждения теоремы вытекают из теорем 2.8, 2.10, 3.3.  $\square$

**Пример 2.** Пусть требуется минимизировать функцию

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^T (x^2(t) + u^2(t)) dt$$

при условиях  $\dot{x}(t) = -ax(t) + u(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ ;  $x(0) = x_0$ ;  $u = u(t) \in L_2[0, T] = U$ , где  $a, x_0, T > 0$  — заданные числа.

Эта задача является частным случаем задачи (1)–(3), (34) при  $f^0 = (x^2 + u^2)/2$ ,  $\Phi(x) \equiv 0$ ,  $f = -ax + u$ ,  $n = r = 1$  и к ней применимы теоремы 1–4. Поскольку здесь функция  $f^0(x, u)$  удовлетворяет условию (40) при  $\varkappa = 1/2$ , то функция  $J(u)$  сильно выпукла на  $L_2[0, T]$  и достигает на  $L_2[0, T]$  своей нижней грани в единственной точке  $u_* = u_*(t) \in L_2[0, T]$ . Поскольку

$$H(x, u, \psi) = -\frac{x^2 + u^2}{2} + \psi(-ax + u),$$

то сопряженная задача (36) (или (12), (13)) здесь имеет вид

$$\dot{\psi}(t) = a\psi(t) + x(t, u), \quad 0 \leq t \leq T; \quad \psi(T) = 0,$$

а градиент согласно формуле (35) (или (11)) равен

$$J'(u) = u(t) - \psi(t, u), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Условие (39) для оптимального управления тогда приведет к равенству

$$u_*(t) = \psi(t, u_*), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Этот же результат был получен в примере 6.2.3 с помощью принципа максимума. В силу теоремы 4 последнее равенство является не только необходимым, но и достаточным для оптимальности управления  $u_* = u_*(t)$ .

Заметим, что, пользуясь условием (37) выпуклости функции  $f^0(x, u, t)$ , формулой (11) и теоремой 4.2.2, неравенство (38) можно переписать в эквивалентном виде

$$\int_{t_0}^T [H(x(t, u_*), u_*(t), t, \psi(t, u_*)) - H(x(t, u_*), u(t), t, \psi(t, u_*))] dt \geq 0, \quad (41)$$

$$u(t) \in U,$$

где

$$H(x, u, t, \psi) = -f^0(x, u, t) + \langle \psi, A(t) + B(t)u + f(t) \rangle.$$

Предлагаем читателю установить связь между принципом максимума и условием оптимальности (41) — это может быть сделано так же, как в примере 3.7 (формулы (3.30)–(3.32)).

**4.** Рассмотренная выше задача (1)–(3) является частным случаем задачи оптимального управления, когда правый конец траектории свободен. Более общие задачи оптимального управления, когда, например, правый конец траектории закреплен или подвижен, или имеются какие-либо другие ограничения на фазовые координаты и управление, могут быть сведены к задаче вида (1)–(3) с помощью штрафных функций (см. § 4, п. 8).

Например, если задача (1)–(3) рассматривается при дополнительном условии  $x(T) = x_I$  (правый конец закреплен), то в качестве штрафной функции для этого условия можно взять

$$P_k(u) = A_k |x(T, u) - x_I|^2, \quad k = 1, 2, \dots,$$

и рассмотреть задачу минимизации функции

$$\Phi_k(u) = \int_{t_0}^T f^0(x(t, u), u(t), t) dt + \Phi(x(T, u)) + A_k |x(T, u) - x_I|^2$$

при условиях (1)–(3); здесь и ниже  $\{A_k\}$  — некоторая заданная положительная последовательность, стремящаяся к бесконечности. Нетрудно видеть, что если функции  $f^0$ ,  $f$ ,  $\Phi$  удовлетворяют условиям теоремы 1, функция  $\Phi_k(u)$  дифференцируема и ее градиент определяется той же формулой (11), нужно лишь условие (13) для  $\psi(T, u)$  заменить на

$$\psi(T, u) = -\Phi_x(x(T, u)) - 2A_k(x(T, u) - x_I).$$

Если задача (1)–(3) рассматривается при дополнительных фазовых ограничениях вида

$$a_i \leq x^i(t, u) \leq b_i, \quad t_0 \leq t \leq T, \quad i = 1, \dots, m, \quad m \leq n, \quad (42)$$

где  $a_i, b_i$  — заданные постоянные, то штрафом может служить функция

$$P_k(u) = A_k \sum_{i=1}^m \int_{t_0}^T [(\max\{x^i(t, u) - b_i; 0\})^2 + (\max\{a_i - x^i(t, u); 0\})^2] dt.$$

Тогда задача (1)–(3), (42) сведется к решению последовательности задач минимизации функции

$$\Phi_k(u) = J(u) + P_k(u) = \int_{t_0}^T F_k^0(x(t, u), u(t), t) dt + \Phi(x(T, u)), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (43)$$

при условиях (2), (3), где

$$F_k^0(x, u, t) = f^0(x, u, t) + A_k \sum_{i=1}^m [(\max\{x^i - b_i; 0\})^2 + (\max\{a_i - x^i; 0\})^2].$$

При каждом  $k = 1, 2, \dots$  задача (43), (2), (3) имеет тот же вид, что и задача (1)–(3). Заметим, что

$$F_{ku}^0 = f_u^0, \quad F_{kx^i}^0(x, u, t) = f_{x^i}^0(x, u, t) + 2A_k \max\{x^i - b_i; 0\} - 2A_k \max\{a_i - x^i; 0\}, \\ i = 1, \dots, m; \quad F_{kx^i}^0 = f_{x^i}^0, \quad i = m + 1, \dots, n.$$

Отсюда ясно, что если функции  $f^0$ ,  $f$ ,  $\Phi$  удовлетворяют условиям теоремы 1, то и для задачи (43), (2), (3) также будут выполнены условия теоремы 1, и формула градиента для функции (43) будет определяться теми же формулами (4), (11)–(13), нужно лишь в них  $f^0$  заменить на  $F_k^0$ .

Если задача (1)–(3) рассматривается при дополнительном условии

$$g(u) = \int_{t_0}^T G(x(t, u), u(t), t) dt + \Phi_1(x(T, u)) \leq 0,$$

то штрафной функцией для этого неравенства можно взять

$$P_k(u) = A_k(\max\{g(u); 0\})^2.$$

Возможно использование и других штрафных функций, аналогичных приведенным в § 5.16. Комментарии к методу штрафных функций, сделанные в § 5.16, сохраняют силу и для задач оптимального управления.

Отметим, что метод штрафных функций в гл. 6 был использован для доказательства принципа максимума.

**5.** Рассмотрим задачу (1)–(3) при условии, когда множество  $U$  состоит из кусочно непрерывных на отрезке  $[t_0, T]$  управлений  $u = u(t) = (u^1(t), \dots, u^r(t))$  (т. е.  $u(t) \in L_\infty^r[t_0, T]$ ), удовлетворяющих условию

$$u(t) \in V, \quad t \in [t_0, T], \quad (44)$$

где  $V$  — заданное множество из  $E^r$ . Задача (1)–(3), (44) является частным случаем задачи (6.2.1)–(6.2.4), для которой выше был сформулирован и доказан принцип максимума Понтрягина.

Покажем, что, пользуясь формулой приращений (18'), можно значительно упростить (по сравнению с § 6.3) доказательство принципа максимума для задачи (1)–(3), (44).

**Теорема 5.** Пусть функции  $f^0(x, u, t)$ ,  $f(x, u, t)$ ,  $\Phi(x)$  и их частные производные по переменным  $x$  непрерывны по совокупности аргументов  $(x, u, t) \in E^n \times V \times [t_0, T]$ , удовлетворяют условию Липшица (5)–(7), (10). Пусть  $u = u(t)$  — оптимальное управление,  $x = x(t; u)$  — оптимальная траектория задачи (1)–(3), (44). Тогда для всех  $t \in [t_0, T]$ , являющихся точками непрерывности управления  $u(t)$ , функция  $H(x(t; u), v, t, \psi(t; u))$  переменной  $v = (v^1, \dots, v^r)$  достигает своей верхней грани на множестве  $V$  при  $v = u(t)$ , т. е.

$$\max_{v \in V} H(x(t; u), v, t, \psi(t; u)) = H(x(t; u), u(t), t, \psi(t; u)), \quad (45)$$

где функция  $H(x, v, t, \psi)$  определена согласно (4),  $\psi = \psi(t; u)$  — решение задачи (12), (13).

**Доказательство.** Воспользуемся формулой конечных приращений

$$\begin{aligned} H(x + \Delta x, u + h, t, \psi) - H(x, u, t, \psi) &= \\ &= H(x + \Delta x, u + h, t, \psi) - H(x, u + h, t, \psi) + H(x, u + h, t, \psi) - H(x, u, t, \psi) = \\ &= \langle H_x(x + \theta_3 \Delta x, u + h, t, \psi), \Delta x \rangle + H(x, u + h, t, \psi) - H(x, u, t, \psi), \quad 0 < \theta_3 < 1. \end{aligned}$$

Отсюда и из формулы (18'), написанной для оптимальных  $u = u(t)$ ,  $x = x(t; u)$ ,  $\psi = \psi(t; u)$  и  $\Delta x(t) = x(t; u + h) - x(t; u)$ , где  $h = h(t)$  — произвольная кусочно непрерывная функция, для которой  $u(t) + h(t) \in V$ ,  $t \in [t_0, T]$ , имеем

$$0 \leq \Delta J(u) = - \int_{t_0}^T (H(x, u + h, t, \psi) - H(x, u, t, \psi)) dt + R, \quad (46)$$



где

$$\begin{aligned} R &= R_1 + R_2, \quad R_1 = \langle \Phi_x(x + \theta_1 \Delta x) - \Phi_x(x), \Delta x \rangle|_{t=T}, \\ R_2 &= - \int_{t_0}^T \langle H_x(x + \theta_3 \Delta x, u + h, t, \psi) - H_x(x, u, t, \psi), \Delta x \rangle dt. \end{aligned} \quad (47)$$

В формулах (46), (47) для краткости аргументы функций  $x$ ,  $\Delta x$ ,  $u$ ,  $h$ ,  $\psi$  опущены. В силу (16) для приращения траектории справедлива оценка

$$|\Delta x(t)| \leq C_1 \int_{t_0}^T |h(t)| dt \quad \forall t \in [t_0, T].$$

Отсюда и из (47) с учетом условий (6), (7), (10) имеем

$$\begin{aligned} |R_1| &\leq L |\Delta x(T)|^2 \leq LC_1 \left( \int_{t_0}^T |h(t)| dt \right)^2, \\ |R_2| &\leq \left( 1 + \max_{t \in [t_0, T]} |\psi(t; u)| \right) L \int_{t_0}^T (|\Delta x(t)|^2 + |\Delta x(t)| |h(t)|) dt \leq C_{13} \left( \int_{t_0}^T |h(t)| dt \right)^2. \end{aligned}$$

Таким образом, в формуле (46) слагаемое  $R$  оценивается так:

$$|R| \leq C_{14} \left( \int_{t_0}^T |h(t)| dt \right)^2. \quad (48)$$

Пусть  $t$  — точка непрерывности оптимального управления  $u(t)$ , число  $\varepsilon > 0$  столь мало, что  $[t, t + \varepsilon] \in [t_0, T]$  и  $u(t)$  непрерывно на  $[t, t + \varepsilon]$ ; пусть  $v$  — произвольная точка из  $V$ . Положим

$$h(\tau) = \begin{cases} v - u(\tau) & \text{при } \tau \in [t, t + \varepsilon], \\ 0 & \text{при } \tau \notin [t, t + \varepsilon]. \end{cases} \quad (49)$$

Тогда управление  $u(t) + h(t)$  кусочно непрерывно и  $u(t) + h(\tau) \in V$ . Отсюда и из (46)–(49) имеем

$$0 \leq - \int_t^{t+\varepsilon} [H(x(\tau; u), v, \tau, \psi(\tau; u)) - H(x(\tau; u), u(\tau), \tau, \psi(\tau; u))] d\tau + R, \quad (50)$$

$$|R| \leq C_{14} \left( \int_t^{t+\varepsilon} |v - u(\tau)| d\tau \right)^2 \leq C_{14} \varepsilon \int_t^{t+\varepsilon} |v - u(\tau)|^2 d\tau. \quad (51)$$

Учитывая, что в (50) подынтегральная функция  $H(x(\tau; u), v, \tau, \psi(\tau; u)) - H(x(\tau; u), u(\tau), \tau, \psi(\tau; u)) = g(\tau)$  непрерывна на отрезке  $[t, t + \varepsilon]$ , с помощью теоремы о среднем [327; 353; 534] из (50), (51) получим

$$0 \leq -\varepsilon g(t + \theta_4 \varepsilon) + C_{14} \varepsilon \int_t^{t+\varepsilon} |v - u(\tau)|^2 d\tau, \quad 0 < \theta_4 < 1.$$

Разделим это неравенство на  $\varepsilon > 0$  и устремим  $\varepsilon \rightarrow +0$ . Получим  $0 \leq -g(t)$ , или  $g(t) \leq 0$ , что равносильно (45).  $\square$

### Упражнения

У п р а ж н е н и е 1. Рассмотреть задачу минимизации функции

$$J(u) = \int_0^T u^2(t) dt$$

при условиях (25)–(27) и с закрепленным правым концом траектории:  $x(T) = x_I$ ; моменты  $T$  и точка  $x_I$  заданы. Применить метод штрафных функций для учета условия на правом конце; найти градиент штрафной функции.

У п р а ж н е н и е 2. Доказать, что при выполнении условий теоремы 1 функция (1) при условиях (2) дифференцируема по переменной  $x_0 \in E^n$  и по совокупности переменных  $(x_0, u) \in E^n \times L_2^r[t_0, T]$ ; найти градиент.

У п р а ж н е н и е 3. Рассмотреть функцию

$$J(w) = \int_{t_0}^T f^0(x(t, w), w, t) dt + \Phi(x(T, w))$$

при условиях  $\dot{x}(t) = f(x(t), w, t)$ ,  $t_0 \leq t \leq T$ ;  $x(t_0) = x_0$ ,  $w = (w^1, \dots, w^r)$  — управляющие параметры, не зависящие от времени. Показать, что если функции  $f^0, f, \Phi$  непрерывны и имеют непрерывные частные производные по  $x, w$  и  $|f(x + \Delta x, w, t) - f(x, w, t)| \leq L|\Delta x|$  при всех  $(x + \Delta x, w, t), (x, w, t) \in E^n \times E^r \times [t_0, T]$ , то функция  $J(w)$  дифференцируема и ее градиент будет равен

$$J'(w) = \int_{t_0}^T H_w(x(t, w), w, t, \psi(t, w)) dt,$$

где  $H(x, w, t, \psi) = f^0(x, w, t) + \langle f(x, w, t), \psi \rangle$ ,  $\psi(t, w)$  — решение задачи

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(x(t, w), w, t, \psi(t, w)), \quad t_0 \leq t \leq T; \quad \psi(T) = \Phi_x(x(T, w)).$$

У к а з а н и е: воспользоваться техникой доказательства теоремы 1.

У п р а ж н е н и е 4. Пусть выполнены все условия теорем 3, 4 (кроме, быть может, условия (40)) и пусть  $U = \{u = u(t) \in L_2^r[t_0, T] : u(t) \in V \text{ почти всюду на } [t_0, T]\}$ , где  $V$  — выпуклое множество из  $E^r$ . Доказать, что тогда принцип максимума является необходимым и достаточным условием оптимальности в задаче (1)–(3), (34). У к а з а н и е: доказать выпуклость функции  $H(x, u, t, \psi)$  по  $u$  и воспользоваться неравенством (38).

У п р а ж н е н и е 5. Пусть  $J(u) = \int_0^1 (u^2(t) - au^2(t)) dt$ , где  $\dot{x}(t) = u(t) \in L_2[0, 1]$ ,  $x(0) = 0$ ,  $a$  — постоянная. При каких значениях параметра  $a$  функция  $J(u)$  будет выпуклой или сильно выпуклой на  $L_2[0, T]$ ? Показать, что  $J(u) \in C^{1,1}(L_2)$ , и найти градиент.

У п р а ж н е н и е 6. Пусть функции  $f^0(x, u, t), f(x, u, t), \Phi(x)$  непрерывны по  $(x, u, t) \in E^n \times E^r \times [t_0, T]$ , выполняется условие (5) и  $|f^0(x, u + h, t) - f^0(x, u, t)| \leq L(|h|^2 + |u||h|)$ ,  $L = \text{const} \geq 0$ , при всех  $(x, u + h, t), (x, u, t) \in E^n \times E^r \times [t_0, T]$ . Доказать, что тогда функция (1) при условиях (2) непрерывна на  $L_2^r[t_0, T]$  в метрике этого пространства.

У п р а ж н е н и е 7. Пусть функции  $f^0(x, u, t), \Phi(x)$  непрерывны по  $(x, u, t) \in E^n \times E^r \times [t_0, T]$ ,  $f^0(x, u, t)$  выпукла по переменной  $u \in E^r$  при каждом фиксированном  $(x, t) \in E^n \times [t_0, T]$ . Доказать, что тогда функция (1) при условиях (34) достигает своей нижней грани на любом выпуклом замкнутом ограниченном множестве  $U \in L_2^r[t_0, T]$ . У к а з а н и е: установить, что  $J(u)$  слабо полунепрерывна снизу на  $L_2^r[t_0, T]$ .

У п р а ж н е н и е 8. Пусть выполнены все условия теоремы 4 (кроме, быть может, условия (40)),  $U$  — выпуклое замкнутое ограниченное множество из  $L_2^r[t_0, T]$ , функция  $g(x, t)$  непрерывна по  $(x, t) \in E^n \times [t_0, T]$  и выпукла по  $x \in E^n$  при каждом фиксированном  $t \in [t_0, T]$ . Пусть существует хотя бы одна траектория  $x(t, u_0)$  задачи (34),  $u_0 \in U$ , такая, что  $g(x(t, u_0), t) \leq 0$  при всех  $t \in [t_0, T]$ . Доказать, что тогда функция (1) при условиях (34) и ограничении  $g(x(t, u), t) \leq 0$ ,  $t_0 \leq t \leq T$ , достигает на  $U$  своей нижней грани.

У п р а ж н е н и е 9. Пусть  $f^0(x, u, t) = a(x, t) + \langle b(x, t), u \rangle$ ,  $f(x, u, t) = A(x, t) + B(x, t)u$  и пусть матрицы  $A(x, t)$ ,  $B(x, t)$ ,  $b(x, t)$  — порядков  $n \times 1$ ,  $n \times r$ ,  $n \times 1$  соответственно и функции  $a(x, t)$ ,  $\Phi(x)$  непрерывны по  $(x, t) \in E^n \times [t_0, T]$ ,  $\|A(x, t)\| \leq C_0|x| + C_1$ ,  $\|B(x, t)\| \leq C_2$ , где  $C_0, C_1, C_2$  — неотрицательные постоянные. Пусть  $U$  — выпуклое замкнутое ограниченное множество из  $L_2^r[t_0, T]$  и существует управление  $u_0 \in U$  такое, что соответствующее решение  $x(t, u_0)$  задачи (2) удовлетворяет условию  $x(T, u_0) = x_I$ . Показать, что тогда функция (1) при условиях (2) и дополнительном условии  $x(T, u) = x_I$  достигает своей нижней грани на  $U$ . У к а з а н и е: установить, что если  $\{u_k\}$  — минимизирующая последовательность, слабо сходящаяся к точке  $u_*$ , то  $J(u_k) \rightarrow J(u_*)$ .

## § 6. Градиент в задаче оптимального управления с дискретным временем

1. Рассмотрим следующую задачу: минимизировать функцию

$$I([u_i]) = \sum_{i=0}^{N-1} F_i^0(x_i, u_i) + \Phi(x_N) \quad (1)$$

при условиях

$$x_{i+1} = F_i(x_i, u_i), \quad i = 0, \dots, N-1; \quad x_0 = a, \quad (2)$$

$$[u_i] = (u_0, \dots, u_{N-1}); \quad u_i \in V_i, \quad i = 0, \dots, N-1, \quad (3)$$

где  $x_i = (x_i^1, \dots, x_i^n)$ ,  $u_i = (u_i^1, \dots, u_i^r)$ , функции  $F_i = (F_i^1, \dots, F_i^n)$ ,  $F_i^0$ ,  $\Phi$  предполагаются известными,  $V_i$  — заданное множество из  $E^r$ , натуральное число  $N \geq 1$  и начальная точка  $a$  заданы.

Задача (1)–(3) уже изучалась нами выше: в § 7.1 с помощью динамического программирования исследовалась проблема синтеза для этой задачи. В настоящем параграфе сформулируем достаточные условия дифференцируемости, выпуклости функции (1) при условиях (2), (3), а также выведем необходимые условия оптимальности. Будем пользоваться следующими обозначениями:

$$F_{ix} = \begin{pmatrix} F_{ix^1}^1 & \dots & F_{ix^n}^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ F_{ix^1}^n & \dots & F_{ix^n}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{ix}^1 \\ \vdots \\ F_{ix}^n \end{pmatrix}, \quad F_{iu} = \begin{pmatrix} F_{iu^1}^1 & \dots & F_{iu^r}^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ F_{iu^1}^n & \dots & F_{iu^r}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{iu}^1 \\ \vdots \\ F_{iu}^n \end{pmatrix},$$

$$(F_{ix}^0)^T = (F_{ix^1}^0, \dots, F_{ix^n}^0), \quad (F_{iu}^0)^T = (F_{iu^1}^0, \dots, F_{iu^r}^0), \quad (\Phi_x)^T = (\Phi_{x^1}, \dots, \Phi_{x^n}).$$

Через  $L_2^r[0, N]$  обозначим гильбертово пространство вектор-функций дискретной переменной  $[u_i] = (u_0, u_1, \dots, u_{N-1})$  со скалярным произведением

$$\langle [u_i], [v_i] \rangle_{L_2} = \sum_{i=0}^{N-1} \langle u_i, v_i \rangle_{E^r} \quad \text{и с нормой}$$

$$\| [u_i] \| = \left( \sum_{i=0}^{N-1} |u_i|_{E^r}^2 \right)^{1/2}.$$

Пусть  $U$  — множество всех дискретных управлений  $[u_i] = (u_0, \dots, u_{N-1})$ , удовлетворяющих условию (3); очевидно,  $U \subseteq L_2^r[0, N]$ .

Заметим, что (1) представляет собой функцию  $Nr$  переменных  $u_0, u_1, \dots, u_{N-1}$ . Если функции  $F_i(x, u)$  непрерывны, а  $F_i^0$ ,  $\Phi$  полунепрерывны снизу по совокупности переменных  $(x, u) \in E^n \times V_i$ , множества  $V_i$  замкнуты и ограничены в  $E^r$ ,  $i = 0, \dots, N-1$ , то функция  $I([u_i])$  полунепрерывна снизу

и существование оптимального управления  $[u_{i*}]$ , на котором функция (1) достигает своей нижней грани при условиях (2), (3), следует из теоремы 2.1.1. Для приближенного решения задачи (1)–(3) могут быть использованы методы гл. 5. Из-за большого числа переменных задачу (1)–(3), по-видимому, удобнее рассматривать в пространстве  $L_2^r[0, N]$ , считая функцию (1) зависящей от  $N$  векторных переменных  $u_0, u_1, \dots, u_{N-1}$ .

Выведем формулу градиента функции (1) при условиях (2), (3) в пространстве  $L_2^r[0, N]$ .

**Теорема 1.** Пусть функции  $F_i^0, F_i, \Phi$  непрерывны по совокупности своих аргументов вместе со своими частными производными по переменным  $x$ , и при  $x \in E^n$ ,  $u \in V_i$ ,  $i = 0, \dots, N-1$ . Кроме того, пусть

$$|F_i(x + \Delta x, u + h) - F_i(x, u)|_{E^n} \leq L(|\Delta x|_{E^n} + |h|_{E^r}) \quad (4)$$

при всех  $x, x + \Delta x$  и всех  $u, u + h \in V_i$ ,  $i = 0, \dots, N-1$ . Тогда функция (1) при условиях (2), (3) непрерывна и дифференцируема в норме  $L_2^r[0, N]$ , причем ее градиент  $I'([u_i])$  в точке  $[u_i] \in U$  представим в виде

$$I'([u_i]) = \{H_{iu}(x_i, \psi_i, u_i), i = 0, \dots, N-1\} \in L_2^r[0, N], \quad (5)$$

где

$$H_i(x, \psi, u) = F_i^0(x, u) + \langle \psi, F_i(x, u) \rangle, \quad H_{iu} = (H_{iu^1}, \dots, H_{iu^r}), \quad (6)$$

$[x_i] = (x_0, \dots, x_N)$  — дискретная траектория задачи (2), соответствующая выбранному управлению  $[u_i] \in U$ , а вектор-функция  $[\psi_i] = (\psi_{-1}, \psi_0, \dots, \psi_{N-1})$  определяется из условий

$$\psi_{i-1} = H_{ix}(x_i, \psi_i, u_i), \quad i = 0, \dots, N-1, \quad \psi_{N-1} = \Phi_x(x_N). \quad (7)$$

**Доказательство.** Пусть  $[u_i], [u_i] + [h_i] \in U$  и пусть  $[x_i]$  и  $[x_i] + [\Delta x_i]$  — соответствующие этим управлениям дискретные траектории задачи (2), а  $I([u_i])$  и  $I([u_i] + [h_i]) = I([u_i]) + \Delta I$  — соответствующие значения функции (1). Из (2) следует, что приращение  $[\Delta x_i]$  удовлетворяет условиям

$$\Delta x_{i+1} = F_i(x_i + \Delta x_i, u_i + h_i) - F_i(x_i, u_i), \quad i = 0, \dots, N-1, \quad \Delta x_0 = 0. \quad (8)$$

Так как  $\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \langle \Phi_x(x + \theta \Delta x), \Delta x \rangle$ ,  $0 \leq \theta \leq 1$ , то из (1) получим

$$\Delta I = \sum_{i=0}^{N-1} [F_i^0(x_i + \Delta x_i, u_i + h_i) - F_i^0(x_i, u_i)] + \langle \Phi_x(x_N), \Delta x_N \rangle + R_1, \quad (9)$$

где

$$R_1 = \langle \Phi_x(x_N + \theta \Delta x_N) - \Phi_x(x_N), \Delta x_N \rangle. \quad (10)$$

С учетом соотношений (7), (8) имеем

$$\begin{aligned} \langle \Phi_x(x_N), \Delta x_N \rangle &= \langle \psi_{N-1}, \Delta x_N \rangle = \sum_{i=0}^{N-1} [\langle \psi_i, \Delta x_{i+1} \rangle - \langle \psi_{i-1}, \Delta x_i \rangle] = \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} \langle \psi, F_i(x_i + \Delta x_i, u_i + h_i) - F_i(x_i, u_i) \rangle - \sum_{i=0}^{N-1} \langle H_{ix}(x_i, \psi_i, u_i), \Delta x_i \rangle. \end{aligned}$$

Подставляя полученное выражение в (9) и используя функцию  $H_i(x, \psi, u)$ , получим следующее представление для приращения функции:

$$\Delta I = \sum_{i=0}^{N-1} [H_i(x_i + \Delta x_i, \psi_i, u_i + h_i) - H_i(x_i, \psi_i, u_i) - \langle H_{ix}(x_i, \psi_i, u_i), \Delta x_i \rangle] + R_1.$$

Из формулы конечных приращений следует

$$\begin{aligned} H_i(x_i + \Delta x_i, \psi_i, u_i + h_i) &= \\ &= H_i(x_i, \psi_i, u_i) + \langle H_{ix}(x_i + \theta_i \Delta x_i, \psi_i, u_i + \theta_i h_i), \Delta x_i \rangle + \\ &+ \langle H_u(x_i + \theta \Delta x_i, \psi_i, u_i + \theta h_i), h_i \rangle, \quad 0 \leq \theta_i \leq 1, \quad i = 0, \dots, N-1. \end{aligned}$$

Подставим это равенство в предыдущее представление для  $\Delta I$ ; будем иметь

$$\Delta I = \sum_{i=0}^{N-1} \langle H_{iu}(x_i, \psi_i, u_i), h_i \rangle + R, \quad R = R_1 + R_2 + R_3, \quad (11)$$

$$R_2 = \sum_{i=0}^{N-1} \langle H_{ix}(x_i + \theta_i \Delta x_i, \psi_i, u_i + \theta_i h_i) - H_{ix}(x_i, \psi_i, u_i), \Delta x_i \rangle, \quad (12)$$

$$R_3 = \sum_{i=0}^{N-1} \langle H_{iu}(x_i + \theta_i \Delta x_i, \psi_i, u_i + \theta_i h_i) - H_{iu}(x_i, \psi_i, u_i), h_i \rangle. \quad (13)$$

Для оценки остаточного члена  $R$  формулы (11) нам понадобится одна лемма, представляющая собой дискретный аналог леммы 6.3.1.

**Л е м м а 1.** *Если некоторые величины  $\varphi_i$ ,  $i = 0, \dots, N$ , удовлетворяют неравенствам*

$$0 \leq \varphi_0 \leq a, \quad 0 \leq \varphi_{i+1} \leq a + b \sum_{m=0}^i \varphi_m, \quad i = 0, \dots, N-1, \quad b \geq 0, \quad (14)$$

*то справедлива оценка*

$$0 \leq \varphi_i \leq a(1+b)^i, \quad i = 0, \dots, N, \quad (15)$$

*если же*

$$0 \leq \varphi_{i-1} \leq a + b \sum_{m=i}^{N-1} \varphi_m, \quad i = 0, \dots, N-1; \quad 0 \leq \varphi_{N-1} \leq a, \quad (16)$$

*то верна оценка*

$$0 \leq \varphi_i \leq a(1+b)^{N-i-1}, \quad i = 0, \dots, N-1. \quad (17)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о** можно провести по индукции. При  $k = 0$  по условию  $0 \leq \varphi_0 \leq a$ . Если неравенство  $0 \leq \varphi_m \leq a(1+b)^m$  верно при всех  $m = 0, \dots, i$ , то из (14) следует  $0 \leq \varphi_{i+1} \leq a + b \sum_{m=0}^i a(1+b)^m = a(1+b)^{i+1}$ . Аналогично можно убедиться, что из (16) вытекает оценка (17).  $\square$

Продолжим доказательство теоремы 1. Из соотношений (8) для  $[\Delta x_i]$  с учетом условия (4) имеем

$$|\Delta x_{i+1}| = \left| \sum_{m=0}^i (\Delta x_{m+1} - \Delta x_m) \right| \leq \left| \sum_{m=0}^i (\Delta F_m(x_m, u_m) - \Delta x_m) \right| \leq \\ \leq (1 + L) \sum_{m=0}^i |\Delta x_m| + L \sum_{m=0}^{N-1} |h_m|.$$

Полагая в неравенствах (14), (15)

$$a = L \sum_{i=0}^{N-1} |h_i|, \quad b = (1 + L), \quad \varphi_i = |\Delta x_i|,$$

получим оценку

$$|\Delta x_i| \leq C_1 \sum_{i=0}^{N-1} |h_i|, \quad C_1 = L(2 + L)^N, \quad i = 0, \dots, N. \quad (18)$$

Из условий теоремы следует непрерывность функций  $\Phi_x, H_{ix}, H_{iu}$  по совокупности своих аргументов. Тогда с учетом оценки (18) из выражений (10), (12), (13) заключаем, что остаточный член  $R$  в формуле (11) имеет порядок  $o(\| [h_i] \|)$ .

Таким образом, в формуле (11) приращения функции первое слагаемое является линейной ограниченной функцией на  $L_2^r[0, N]$  относительно  $[h_i]$ , а второе слагаемое имеет порядок  $o(\| [h_i] \|)$ . Это значит, что функция (1) при условиях (2), (3) дифференцируема и ее градиент имеет вид (5).  $\square$

**2.** Зная формулу градиента, нетрудно расписать методы минимизации применительно к задаче (1)–(3). Например, метод проекции градиента здесь приводит к построению последовательности  $[u_i]_k = (u_{0k}, \dots, u_{N-1,k})$  по формулам

$$u_{i,k+1} = P_{V_i}(u_{i,k} - \alpha_k H_{iu}(x_{ik}, \psi_{ik}, u_{ik})), \quad i = 0, \dots, N-1, \quad k = 0, 1, \dots,$$

где  $\alpha_k > 0$  выбирается как в § 5.2;  $[x_i]_k = (x_{0k}, \dots, x_{Nk})$ ,  $[\psi_i]_k = (\psi_{-1,k}, \dots, \psi_{N-1,k})$  — решения задач (2) и (7) соответственно при  $[u_i] = [u_i]_k$ .

Приведем достаточные условия для того, чтобы градиент функции (1) при ограничениях (2), (3) удовлетворял условию Липшица.

**Теорема 2.** Пусть выполнены все условия теоремы 1 и пусть функции  $\Phi_x, F_{ix}, F_{ix}^0, F_{iu}, F_{iu}^0$  удовлетворяют условию Липшица по совокупности  $(x, u) \in E^n \times V_i$  с константой  $L > 0$ ,  $i = 0, \dots, N-1$ . Пусть, кроме того,

$$|F_i(x, u)| \leq A_1 + A_2|x|; \quad A_1, A_2 = \text{const} \geq 0, \quad (19)$$

при всех  $x \in E^n$ ,  $u \in V_i$ , и множества  $V_i$  из (3) замкнуты и ограничены в  $E^r$ ,  $i = 0, \dots, N-1$ . Тогда градиент функции (1) при ограничениях (2), (3) удовлетворяет условию Липшица.

Доказательство этой теоремы полностью аналогично доказательству теоремы 5.2; предлагаем читателю провести его самостоятельно.

**3.** Используя полученную формулу градиента, выведем необходимые условия оптимальности для задачи (1)–(3).

**Теорема 3.** Пусть выполнены все условия теоремы 1. Пусть  $[u_{i*}]$  — оптимальное управление,  $[x_{i*}]$  — соответствующая ему траектория системы (2), т. е.  $I([u_{i*}]) = \inf I([u_i])$ , где нижняя грань берется по всем  $[u_i]$  из условий (2), (3). Пусть  $[\psi_{i*}]$  — решение задачи (7), соответствующее управлению  $[u_{i*}]$ . Тогда необходимо выполняются неравенства

$$\langle H_{iu}(x_{i*}, \psi_{i*}, u_{i*}), u_i - u_{i*} \rangle \geq 0, \quad i = 0, \dots, N-1, \quad (20)$$

при всех  $u_i \in V_i$ , для которых направление  $e = u_i - u_{i*}$  является возможным для множества  $V_i$  в точке  $u_{i*}$ , причем если  $u_{i*}$  — внутренняя точка множества  $V_i$ , то

$$H_{iu}(x_{i*}, \psi_{i*}, u_{i*}) = 0; \quad (21)$$

функции  $H_i(x, \psi, u)$  определяются равенствами (6).

**Доказательство.** Положим в формуле (11)  $x_i = x_{i*}$ ,  $\psi_i = \psi_{i*}$ ,  $u_i = u_{i*}$ ; получим

$$\Delta I = \sum_{m=0}^{N-1} \langle H_{mu}(x_{m*}, \psi_{m*}, u_{m*}), h_m \rangle + o(\|h_i\|). \quad (22)$$

Пусть  $u_i$  — произвольная точка из  $V_i$ , для которой  $u_{i*} + \alpha(u_i - u_{i*}) \in V_i$  при всех  $\alpha$ ,  $0 < \alpha \leq \alpha_0$ . Возьмем в (22)  $[h_m] = (0, \dots, 0, h_i = \alpha(u_i - u_{i*}), 0, \dots, 0)$ . Очевидно, при таком выборе  $[h_m]$  управление  $[u_{i*}] + [h_i] \in U$ , и в силу оптимальности  $[u_{i*}]$  из (22) тогда получим

$$0 \leq \Delta I = \langle H_{iu}(x_{i*}, \psi_{i*}, u_{i*}), \alpha(u_i - u_{i*}) \rangle + o(\alpha\|h_i\|), \quad 0 < \alpha \leq \alpha_0.$$

Поделив обе части этого неравенства на  $\alpha > 0$  и перейдя к пределу при  $\alpha \rightarrow +0$ , сразу приходим к неравенству (20). Если  $u_{i*}$  — внутренняя точка  $V_i$ , то в (20) можно положить  $u_i = u_{i*} - \varepsilon H_{iu}(x_{i*}, \psi_{i*}, u_{i*}) \in V_i$  при некотором  $\varepsilon > 0$ , что сразу приведет к равенству (21). Если  $V_i$  — выпуклое множество, то условие (20), очевидно, выполнено для любого  $u_i \in V_i$ . Если  $V_i$  выпуклы при всех  $i = 0, 1, \dots, N-1$ , то неравенства (20) в силу формулы (5) равносильны одному неравенству  $\langle I'([u_{i*}]), [u_i] - [u_{i*}] \rangle_{L_2^*} \geq 0$  при всех  $[u_i] \in U$ , что совпадает с условием оптимальности из теоремы 3.3.  $\square$

Таким образом, согласно теореме 3 оптимальным может быть лишь управление  $[u_{i*}] \in U$ , удовлетворяющее условиям (20). Однако как связано управление  $[u_{i*}]$  с экстремальными точками функции  $H_i(x_{i*}, \psi_{i*}, u)$  на множестве  $V_i$ , условия (20) на это не дают ответа. В частности, возникает естественный вопрос: нельзя ли по аналогии с системами с непрерывным временем утверждать, что оптимальное управление  $[u_{i*}]$  удовлетворяет принципу минимума

$$H_i(x_{i*}, \psi_{i*}, u_{i*}) = \min_{u \in V_i} H_i(x_{i*}, \psi_{i*}, u), \quad i = 0, \dots, N-1 \quad (23)$$

(чтобы здесь, как и в гл. 6, можно было говорить о принципе максимума, нужно изменить знаки функций  $H_i, \psi_i$ ). Ведь необходимое условие оптимальности тем ценнее, чем меньше управлений, подозрительных на оптимальность,

оно выделяет. В этом смысле условие (23) явно имело бы преимущество перед условиями (20), так как неравенства (20) могут выполняться не только в тех точках, где имеет место (23), но и в других точках, в которых, например,  $H_{iu}(x_{i*}, \psi_{i*}, u_{i*}) = 0$ . К сожалению, оказывается, в управляемых системах с дискретным временем принцип минимума, вообще говоря, не имеет места: на оптимальном управлении функция  $H_i(x_{i*}, \psi_{i*}, u)$  может и не достигать своего абсолютного минимума по  $u \in V_i$ .

**Пример 1.** Пусть фазовое состояние системы описывается двумя координатами  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 0, 1, 2$ , причем

$$x_{i+1} = x_i + 2u_i, \quad y_{i+1} = -x_i^2 + y_i + u_i^2, \quad i = 0, 1; \quad x_0 = 3; \quad y_0 = 0.$$

Пусть требуется минимизировать функцию  $I(u_0, u_1) = -y_2 \equiv \Phi(x_2, y_2)$  при условии  $[u_i] = (u_0, u_1) \in U = \{(u_0, u_1) : |u_i| \leq 5, i = 0, 1\}$ . Нетрудно вычислить явное выражение  $I(u_0, u_1) = 3(u_0 + 2)^2 - u_1^2 + 6$ . Отсюда следует, что оптимальное управление  $(u_{0*}, u_{1*})$  имеет вид:  $u_{0*} = -2$ ,  $u_{1*} = 5$  (возможность  $u_{1*} = -5$  предоставляем читателю рассмотреть самостоятельно). Оптимальная траектория тогда такая:  $x_{0*} = 3$ ,  $x_{1*} = -1$ ,  $x_{2*} = 9$ ;  $y_{0*} = 0$ ,  $y_{1*} = -5$ ,  $y_{2*} = 19$ ; минимальное значение функционала равно  $I_* = -19$ .

Составим функцию

$$H_i(x_i, y_i, \psi_{1i}, \psi_{2i}) = \psi_{1i}(x_i + 2u_i) + \psi_{2i}(-x_i^2 + y_i + u_i^2).$$

Система (7) здесь имеет вид

$$\begin{aligned} \psi_{1,i-1} &= \psi_{1i} - 2\psi_{2i}x_i, & \psi_{2,i-1} &= \psi_{2i}, & i &= 1, 0, \\ \psi_{11} &= \Phi_{x_2} = 0, & \psi_{21} &= \Phi_{y_2} = -1. \end{aligned}$$

Подставив сюда оптимальные  $(x_{i*}, y_{i*})$ , получим  $\psi_{11*} = 0$ ,  $\psi_{10*} = -2$ ,  $\psi_{21*} = -1$ ,  $\psi_{20*} = -1$ . Тогда  $H_0(x_{0*}, y_{0*}, \psi_{10*}, \psi_{20*}, u) = -(u + 2)^2 + 7$ . Как видим, на оптимальном управлении  $u = u_{0*} = -2$  функция  $H_0(x_{0*}, y_{0*}, \psi_{10*}, \psi_{20*}, u)$  достигает своего абсолютного максимума, в то время как ее минимальное значение при  $|u| \leq 5$  достигается в точке  $u = 5$ . Поэтому для управляемых систем с дискретным временем принцип минимума, вообще говоря, не имеет места.

**4.** Рассмотрим задачу оптимального управления линейными дискретными системами: минимизировать функцию (1) при условиях (2), (3), если

$$F_i(x_i, u_i) = D_i x_i + B_i u_i + f_i, \quad i = 0, \dots, N-1, \quad (24)$$

где  $D_i, B_i, f_i$  — заданные матрицы порядков  $n \times n$ ,  $n \times r$  и  $n \times 1$  соответственно.

**Теорема 4.** Пусть функции  $F_i^0, \Phi$  удовлетворяют условиям теоремы 1. Тогда функция (1) при условиях (2), (3), (24) дифференцируема в  $L_2^r[0, N]$  и ее градиент  $I'([u_i])$  в точке  $[u_i]$  вычисляется по формуле

$$I'([u_i]) = \{F_{iu}^0(x_i, u_i) + B_i^T \psi_i, \quad i = 0, \dots, N-1\}, \quad (25)$$



где  $[x_i] = (x_0, \dots, x_N)$  — решение задачи (2), соответствующее выбранному управлению  $[u_i]$ , а  $[\psi_i] = (\psi_{-1}, \dots, \psi_{N-1})$  определяется из условий

$$\psi_{i-1} = D_i^T \psi_i - F_{ix}^0(x_i, u_i), \quad i = 0, \dots, N-1, \quad \psi_{N-1} = \Phi_x(x_N), \quad (26)$$

матрицы  $D_i^T, B_i^T$  получены транспонированием матриц  $D_i, B_i$ . Если, кроме того,  $\Phi_x, F_{ix}^0, F_{iu}^0$  удовлетворяют условию Липшица по совокупности  $(x, u) \in E^n \times E^r$ , то градиент  $I'([u_i])$  удовлетворяет условию Липшица на всем пространстве  $L_2^r[0, N]$ .

Формулы (25), (26) вытекают из теоремы 1; условие Липшица для градиента доказывается аналогично тому, как это делалось в теореме 5.3.

Укажем достаточные условия выпуклости и сильной выпуклости функции (1) при условиях (2), (3), (24).

**Теорема 5.** Пусть выполнены условия (24), функция  $\Phi(x)$  выпукла по  $x$  на  $E^n$ , а  $F_i^0(x, u)$  выпукла по совокупности переменных  $(x, u)$ , т. е.

$$F_i^0(\alpha x + (1 - \alpha)y, \alpha u + (1 - \alpha)v) \leq \alpha F_i^0(x, u) + (1 - \alpha)F_i^0(y, v) \quad (27)$$

при любых  $x, y \in E^n$ ;  $u, v \in E^r$ ,  $\alpha \in [0, 1]$  и  $i = 0, \dots, N-1$ . Тогда функция (1) выпукла на  $L_2^r[0, N]$ . Если при этом функции  $\Phi, F_i^0$  удовлетворяют условиям теоремы 1, множества  $V_i, i = 0, \dots, N-1$ , выпуклы, то для оптимальности управления  $[u_{i*}]$  необходимо и достаточно, чтобы

$$\langle F_{iu}^0(x_{i*}, u_{i*}) + B_i^T \psi_{i*}, u_i - u_{i*} \rangle \geq 0, \quad u_i \in V_i, \quad i = 0, \dots, N-1. \quad (28)$$

**Доказательство.** Решение задачи (2), (24), очевидно, обладает свойством  $x_i(\alpha[u_i] + (1 - \alpha)[v_i]) = \alpha x_i([u_i]) + (1 - \alpha)x_i([v_i])$ ,  $i = 0, \dots, N$ , при любых  $\alpha$  и любых  $[u_i], [v_i] \in L_2^r[0, N]$ . Тогда выпуклость функции (1) на  $L_2^r[0, N]$  является простым следствием выпуклости  $\Phi(x)$  и условия (27). Условие оптимальности (28) вытекает из теоремы 3.3 и формулы (25).  $\square$

С помощью теоремы 2.10 аналогично доказывается

**Теорема 6.** Пусть выполнены условия (24), функция  $\Phi(x)$  выпукла по  $x \in E^n$  и, кроме того,

$$F_i^0(\alpha x + (1 - \alpha)y, \alpha u + (1 - \alpha)v) \leq \alpha F_i^0(x, u) + (1 - \alpha)F_i^0(y, v) - \alpha(1 - \alpha)\frac{\varkappa}{2}|u - v|^2, \quad \varkappa = \text{const} > 0,$$

при любых  $x, y \in E^n$ ;  $u, v \in E^r$ ,  $\alpha \in [0, 1]$  и  $i = 0, \dots, N-1$ . Тогда функция (1) сильно выпукла на  $L_2^r[0, N]$  и задача (1)–(3), (24) имеет, и притом единственное, решение на любом замкнутом выпуклом множестве  $U \subseteq L_2^r[0, N]$ .

## Упражнения

**Упражнение 1.** Доказать, что

$$I([u_i]) \equiv \alpha \sum_{i=0}^{N-1} |u_i|^2 + \beta \sum_{i=0}^{N-1} |x_i|^2 + \gamma x_N^2, \quad \alpha, \beta, \gamma = \text{const},$$

при условиях (2), (24) дважды дифференцируема в  $L_2^r[0, N]$ . Доказать, что если при этом  $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ , то  $I([u_i])$  выпукла, а если  $\alpha > 0, \beta, \gamma \geq 0$ , то сильно выпукла на  $L_2^r[0, N]$ .

У п р а ж н е н и е 2. Пусть выполнены все условия теоремы 5. Доказать, что тогда условие (23) является необходимым и достаточным условием оптимальности в задаче (1)–(3), (24).

## § 7. Оптимальное управление процессом нагрева стержня

Рассмотренные выше (см. гл. 6, 7, § 2–5) задачи оптимального управления относились к управляемым системам, описываемым обыкновенными дифференциальными уравнениями. В приложениях также возникает большое количество задач оптимального управления процессами, описываемыми дифференциальными (или интегро-дифференциальными) уравнениями с частными производными. Таким задачам посвящена обширная литература, для многих классов таких задач исследованы вопросы существования и единственности оптимального управления, получены условия оптимальности, разработаны методы их решения (см., например, [11; 35; 51; 67–69; 86; 104; 107; 118; 119; 122–124; 134–136; 138–140; 144; 187; 195–197; 227; 228; 285; 287; 289; 290; 360; 366; 391; 395; 402; 407; 408; 419; 420; 424; 425; 456; 459; 460; 463; 467–469; 475; 478; 479; 483–487; 489; 504; 512; 514; 515; 524; 540; 544; 547; 551–560; 573–577; 609; 630; 640–642; 654; 664–669; 682; 701; 706; 707; 730; 761; 778–780; 784; 790; 801; 802; 805; 818; 829; 846; 932; 946–948; 958; 959; 968] и др.). Ниже будут рассмотрены некоторые из таких задач.

В этом параграфе мы займемся задачами оптимального управления процессами, описываемыми параболическими уравнениями. Такие задачи возникают при изучении управляемых процессов теплопроводности, диффузии, фильтрации и т. п. [107; 122–124; 228; 287; 289; 467; 504; 779].

1. Рассмотрим задачу, которая в теплофизических терминах может быть сформулирована следующим образом. Имеется однородный стержень  $0 \leq s \leq l$ , левый конец  $s = 0$  которого теплоизолирован, на правом конце  $s = l$  происходит теплообмен с внешней средой и, кроме того, в стержне имеются источники (или стоки) тепла. Через  $x = x(s, t)$  обозначим температуру стержня в точке  $s$  в момент  $t$ . Пусть  $x(s, 0) = \varphi(s)$ ,  $0 \leq s \leq l$ , — распределение температуры в стержне в начальный момент времени  $t = 0$ . Требуется, управляя температурой внешней среды и плотностью источников тепла в стержне, к заданному моменту  $T > 0$  распределение температуры в стержне сделать как можно ближе к заданному распределению  $b(s)$ ,  $0 \leq s \leq l$ .

Математическая формулировка этой задачи: требуется минимизировать функцию

$$J(u) = \int_0^l |x(s, T; u) - b(s)|^2 ds \quad (1)$$

при условии, что  $x = x(s, t) = x(s, t; u)$  является решением краевой задачи:

$$x_t = a^2 x_{ss} + q(s, t), \quad (s, t) \in Q = \{0 < s < l, 0 < t \leq T\} \quad (2)$$

$$x_s|_{s=0} = 0, \quad 0 < t \leq T; \quad (3)$$

$$x_s|_{s=l} = \nu[p(t) - x(l, t)], \quad 0 < t \leq T, \quad (4)$$

$$x|_{t=0} = \varphi(s), \quad 0 \leq s \leq l, \quad (5)$$

где  $a^2, l, \nu, T$  — заданные положительные величины,  $p(t)$  — температура внешней среды,  $q(s, t)$  — плотность источников тепла;  $\varphi(s)$ ,  $b(s)$  — заданные

функции из  $L_2[0, l]$ . Предполагается, что  $u = (p(t), q(s, t))$  — управление — принадлежит множеству

$$U = \left\{ u = (p(t), q(s, t)) \in L_2[0, T] \times L_2(Q) : \right. \\ \left. p_{\min} \leq p(t) \leq p_{\max} \text{ почти всюду на } [0, T], \iint_Q q^2(s, t) ds dt \leq R^2 \right\}, \quad (6)$$

где  $p_{\min} < p_{\max}$ ,  $R > 0$  — заданные числа.

Гильбертово пространство пар  $u = (p(t), q(s, t))$ ,  $p(t) \in L_2[0, T]$ ,  $q(s, t) \in L_2(Q)$ , со скалярным произведением

$$\langle u_1, u_2 \rangle = \int_0^T p_1(t)p_2(t) dt + \iint_Q q_1(s, t)q_2(s, t) ds dt$$

и с нормой  $\|u\|_H = (\|p\|_{L_2}^2 + \|q\|_{L_2}^2)^{1/2}$  будем обозначать  $H = L_2[0, T] \times L_2(Q)$ .

Так как управление  $u = (p(t), q(s, t)) \in U \subset H$  может иметь разрывы, то краевая задача (2)–(5), вообще говоря, не имеет классического решения [698]. Поэтому понятие решения этой краевой задачи требует уточнения.

**О п р е д е л е н и е 1.** *Обобщенным решением* краевой задачи (2)–(5), соответствующим управлению  $u = (p(t), q(s, t)) \in H$ , будем называть функцию  $x = x(s, t) = x(s, t; u) \in H^{1,0}(Q)$  (см. обозначение в § 1), имеющую следы  $x(s, \cdot) \in L_2[0, T]$  при всех  $s \in [0, l]$  непрерывные в метрике  $L_2[0, l]$ , следы  $x(\cdot, t) \in L_2[0, l]$  при всех  $t \in [0, T]$  непрерывные в метрике  $L_2[0, T]$ , и удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_0^l x(s, T)\psi(s, T) ds - \int_0^l \varphi(s)\psi(s, 0) ds - \iint_Q (x\psi_t - a^2 x_s \psi_s) ds dt - \\ - \iint_Q q\psi ds dt - a^2 \nu \int_0^T (p(t) - x(l, t))\psi(l, t) dt = 0$$

при всех  $\psi = \psi(s, t) \in H^1(Q)$  и, кроме того, след  $x(\cdot, t)$  при  $t = 0$  совпадает с функцией  $\varphi(s)$  почти всюду на  $[0, l]$ .

Можно доказать, что при каждом  $u \in H$  краевая задача (2)–(5) имеет, и притом единственное, решение — по этим вопросам отсылаем читателя к книгам [441; 492]. Таким образом, функция (1) при условии (2)–(5) определена всюду на  $H$ .

Покажем, что задачу (1)–(6) можно свести к задаче (2.3) минимизации квадратичной функции. С этой целью решение краевой задачи (2)–(5) представим в виде суммы

$$x(s, t; u) = y(s, t; u) + x_0(s, t), \quad (s, t) \in Q, \quad (7)$$

где  $y = y(s, t) = y(s, t; u)$  — решение задачи

$$y_t = a^2 y_{ss} + q(s, t), \quad (s, t) \in Q, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} y_s|_{s=0} &= 0, & y_s|_{s=l} &= \nu(p(t) - y(l, t)), & 0 < t \leq T, \\ y|_{t=0} &= 0, & 0 &\leq s \leq l, \end{aligned} \quad (9)$$

получающейся из задачи (2)–(5) при  $\varphi \equiv 0$ ;  $x_0(s, t)$  — решение задачи, получающейся из (2)–(5) при  $p(t) \equiv 0$ ,  $q(s, t) \equiv 0$ . Введем оператор

$$Au = y(s, T; u), \quad s \in [0, l], \quad (10)$$

который действует из пространства  $H = L_2[0, T] \times L_2(Q)$  в пространство  $F = L_2[0, l]$ . Из единственности решения задачи (8), (9) следует, что

$$y(s, t; \alpha u + \beta v) = \alpha y(s, t; u) + \beta y(s, t; v), \quad (s, t) \in Q, \quad (11)$$

при всех  $u, v \in H$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Это означает, что оператор  $A$ , определенный согласно (10), линейный. Убедимся, что этот оператор ограниченный. Для этого умножим уравнение (8) на  $y = y(s, t; u)$  и проинтегрируем по прямоугольнику  $Q$ . Преобразуем полученный интеграл с учетом условий (9):

$$\begin{aligned} 0 &= \iint_Q (y_t - a^2 y_{ss} - q) y \, ds \, dt = \int_0^l \int_0^T \left( \frac{1}{2} (y^2)_t - a^2 y y_{ss} - q y \right) ds \, dt = \\ &= \int_0^l \frac{1}{2} y^2(s, t) \Big|_{t=0}^{t=T} ds - \int_0^T a^2 y y_s \Big|_{s=0}^{s=l} dt + \iint_Q a^2 y_s^2 \, ds \, dt - \iint_Q q y \, ds \, dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l y^2(s, T) \, ds + a^2 \nu \int_0^T y^2(l, t) \, dt - a^2 \nu \int_0^T p(t) y(l, t) \, dt + \\ &\quad + a^2 \iint_Q y_s^2 \, ds \, dt - \iint_Q q y \, ds \, dt. \end{aligned} \quad (12)$$

Далее воспользуемся элементарными неравенствами

$$(a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2, \quad |ab| \leq \frac{1}{2} \varepsilon a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2,$$

справедливыми для любых  $a, b, \varepsilon > 0$ . Отсюда и из (12) имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^l y^2(s, T) \, ds + a^2 \nu \int_0^T y^2(l, t) \, dt + a^2 \iint_Q y_s^2 \, ds \, dt &= \\ &= a^2 \nu \int_0^T p(t) y(l, t) \, dt + \iint_Q q y \, ds \, dt \leq a^2 \nu \left( \frac{\varepsilon_1}{2} \int_0^T p^2(t) \, dt + \frac{1}{2\varepsilon_1} \int_0^T y^2(l, t) \, dt \right) + \\ &\quad + \varepsilon_2 \iint_Q y^2(s, t) \, ds \, dt + \frac{1}{2\varepsilon_2} \iint_Q q^2(s, t) \, ds \, dt \end{aligned} \quad (13)$$

для любых  $\varepsilon_1 > 0$ ,  $\varepsilon_2 > 0$ . Кроме того, поскольку

$$\begin{aligned} y^2(s, t) &= \left( \int_s^l y_s(\xi, t) d\xi - y(l, t) \right)^2 \leq 2 \left( \int_s^l y_s(\xi, t) d\xi \right)^2 + 2y^2(l, t) \leq \\ &\leq 2l \int_0^l y_s^2(\xi, t) d\xi + 2y^2(l, t), \quad (s, t) \in Q, \end{aligned}$$

то

$$\iint_Q y^2(s, t) ds dt \leq 2l^2 \iint_Q y_s^2(s, t) ds dt + 2l \int_0^T y^2(l, t) dt. \quad (14)$$

В правую часть неравенства (13) подставим оценку (14). После приведения подобных членов получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^l y^2(s, T) ds + \left( a^2 \nu - \frac{1}{2} a^2 \nu \varepsilon_1 - \varepsilon_2 l^2 \right) \int_0^T y^2(l, t) dt + \\ + (a^2 - \varepsilon_2 l^2) \iint_Q y_s^2(s, t) ds dt \leq \frac{a^2 \nu}{2\varepsilon_1} \int_0^T p^2(t) dt + \frac{1}{2\varepsilon_1} \iint_Q q^2(s, t) ds dt, \\ \forall \varepsilon_1 > 0, \quad \forall \varepsilon_2 > 0. \quad (15) \end{aligned}$$

Возьмем числа  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  столь малыми, чтобы

$$a^2 \nu - \frac{1}{2} a^2 \nu \varepsilon_1 - l^2 \varepsilon_2 > 0, \quad a^2 - l^2 \varepsilon_2 > 0,$$

например,  $\varepsilon_2 = a^2 \varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_1 = \min \left\{ \frac{1}{2l^2}; \frac{\nu}{\nu + 2l^2} \right\}$ . Тогда из (15) получим оценку

$$\|Au\|_F^2 = \int_0^l y^2(s, T; u) ds \leq C_0^2 (\|p\|_{L_2[0, T]}^2 + \|q\|_{L_2(Q)}^2) = C_0^2 \|u\|^2, \quad (16)$$

где  $C_0^2 = \max \left\{ \frac{a^2 \nu}{\varepsilon_1}; \frac{1}{a^2 \varepsilon_1} \right\}$ . Это означает, что оператор (10) ограниченный. Следовательно,  $A \in \mathcal{L}(H \rightarrow F)$ , причем  $\|A\| \leq C_0$ . С учетом (7), (10) имеем  $x(s, T; u) = Au + x_0(s, T)$ ,  $s \in [0, l]$ . Поэтому функцию (1) можем представить в виде

$$J(u) = \int_0^l |y(s, T; u) + x_0(s, T) - b(s)|^2 ds = \|Au - b_1\|_F^2,$$

где  $b_1 = b_1(s) = b(s) - x_0(s, T) \in L_2[0, l]$ . Таким образом, задача (1)–(6) сведена к задаче (2.3). Отсюда и из теоремы 2.12 с учетом слабой компактности множества (6) (теорема 2.6) заключаем, что задача (1)–(6) имеет хотя бы одно решение.

Из примера 3.6 также следует, что функция (1) дважды непрерывно дифференцируема на  $H$  и ее производные равны

$$J'(u) = 2A^*(Au - b_1), \quad J''(u) = 2A^*A. \quad (17)$$

Тогда

$$\|J'(u) - J'(v)\| \leq 2\|A\|^2\|u - v\| \leq 2C_0^2\|u - v\| \quad \forall u, v \in H, \quad (18)$$

где постоянная  $C_0$  взята из (16) и учтено, что  $\|A\| = \|A^*\| \leq C_1$ . Это значит, что  $J(u) \in C^{1,1}(H)$  (определение 2.6.1).

Посмотрим, как в рассматриваемой задаче действует оператор  $A^*$ , сопряженный к оператору (10). Покажем, что оператор  $A^*$  каждому элементу  $c = c(s) \in F = L_2[0, l]$  ставит в соответствие элемент  $A^*c \in H = L_2[0, T] \times L_2(Q)$  по следующему правилу

$$A^*c = (a^2\nu\psi(l, t; c); \psi(s, t; c)), \quad (19)$$

где  $\psi = \psi(s, t) = \psi(s, t; c)$  — обобщенное решение краевой задачи

$$\begin{aligned} \psi_t &= -a^2\psi_{ss}, \quad (s, t) \in Q, \\ \psi_s|_{s=0} &= 0, \quad \psi_s|_{s=l} = -\nu\psi(l, t), \quad 0 < t < T, \quad \psi|_{t=T} = c(s), \quad 0 \leq s \leq l. \end{aligned} \quad (20)$$

В самом деле, из (2)–(5), (10), (20) имеем

$$\begin{aligned} \langle Au, c \rangle_F &= \int_0^l y(s, T; u)c(s) ds = \int_0^l y(s, T; u)\psi(s, T; c) ds = \\ &= \int_0^l \left( \int_0^T \frac{\partial}{\partial t} (y(t, s)\psi(t, s)) dt + y\psi|_{t=0} \right) ds = \\ &= \iint_Q (y_t\psi + y\psi_t) ds dt = \iint_Q [a^2y_{ss}\psi + q\psi + y(-a^2\psi_{ss})] ds dt = \\ &= a^2 \int_0^T (y_s\psi - y\psi_s)|_{s=0}^{s=l} dt - a^2 \iint_Q (y_s\psi_s - y_s\psi_s) ds dt + \iint_Q q\psi ds dt = \\ &= a^2\nu \int_0^T p(t)\psi|_{s=l} ds + \iint_Q q\psi ds dt = \langle u, A^*c \rangle_H. \end{aligned} \quad (21)$$

Формула (19) установлена. Из (10), (17), (19) следует, что градиент функции (1) равен

$$J'(u) = 2(a^2\nu\psi(l, t); \psi(s, t)), \quad (22)$$

где  $\psi(s, t)$  — решение задачи (20), (21) при  $c = Au - b_1 = y(s, T; u) - b_1(s) = y(s, T; u) + x_0(s, T) - b(s) = x(s, T; u) - b(s)$ . Теперь, учитывая выпуклость функции (1), можем сказать: для того чтобы управление  $u_* = (p_*(t), q_*(s, t))$

принадлежало множеству  $U_* = \{u \in U: J(u) = J_* = \inf_U J(u) \geq 0\}$  решений задачи (1)–(6), необходимо и достаточно, чтобы

$$\langle J'(u_*), u - u_* \rangle_H = \int_0^T a^2 \nu \psi(l, t) (p(t) - p_*(t)) dt + \\ + \iint_Q \psi(s, t) (q(s, t) - q_*(s, t)) ds dt \geq 0 \quad (23)$$

при всех  $u = (p(t), q(s, t)) \in U$ . Вариационное неравенство (23) вытекает из формулы (22) и теоремы 3.3.

**З а м е ч а н и е 1.** Приведенные выше доказательства оценки (16), равенства (21) нельзя признать вполне строгими, так как существование некоторых встретившихся в выкладках интегралов, законность операций интегрирования по частям не всегда вытекают из определения решения рассматриваемых краевых задач и остались необоснованными. Для строгого доказательства нужно было бы сначала сгладить функции  $u(t)$ ,  $\varphi(s)$ ,  $q(s, t)$ ,  $b(s)$ , провести указанные преобразования для классических решений соответствующих сглаженных краевых задач, а затем перейти к пределу по параметру сглаживания и прийти к требуемым соотношениям для обобщенных решений краевых задач. Полная реализация намеченной здесь схемы строгого доказательства соотношений (16), (21) довольно громоздка для изложения, поэтому мы здесь вынуждены ограничиться приведенными выше рассуждениями, а читателя отсылаем за подробностями к руководствам и монографиям по уравнениям с частными производными [441; 492].

**2.** Для численного решения задачи (1)–(6) могут быть использованы методы проекции градиента и условного градиента (см. § 4).

Метод проекции градиента в задаче (1)–(6) сведется к построению последовательности  $\{u_k = (p_k(t), q_k(s, t))\}$  по правилу

$$p_{k+1}(t) = \begin{cases} p_k(t) - 2\alpha_k a^2 \nu \psi(l, t; u_k) & \text{при } p_{\min} \leq p_k(t) - 2\alpha_k a^2 \nu \psi(l, t; u_k) \leq p_{\max}, \\ p_{\min} & \text{при } p_k(t) - 2\alpha_k a^2 \nu \psi(l, t; u_k) < p_{\min}, \\ p_{\max} & \text{при } p_k(t) - 2\alpha_k a^2 \nu \psi(l, t; u_k) > p_{\max}, \end{cases} \quad (24)$$

$$q_{k+1}(s, t) = \begin{cases} q_k(s, t) - 2\alpha_k \psi(s, t; u_k) & \text{при } \iint_Q |q_k(s, t) - 2\alpha_k \psi(s, t; u_k)|^2 ds dt \leq R^2, \\ \frac{R(q_k(s, t) - 2\alpha_k \psi(s, t; u_k))}{\left(\iint_Q |q_k(s, t) - 2\alpha_k \psi(s, t; u_k)|^2 ds dt\right)^{1/2}} & \text{при } \iint_Q |q_k(s, t) - 2\alpha_k \psi(s, t; u_k)|^2 dt ds > R^2, \end{cases} \quad (25)$$

где через  $\psi(s, t; u_k)$  мы переобозначили решение задачи (20) при  $c = c_k(s) = x(s, T; u_k) - b(s)$  (ср. с формулами (4.27) и (4.29)); выбор параметра  $\alpha_k$  мож-

но проводить с помощью одного из описанных в § 4.2 приемов. В частности, оценка (18) указывает на возможность выбора  $\alpha_k$  из условий (5.2.4):

$$0 < \varepsilon_0 \leq \alpha_k \leq \frac{2}{(L + 2\varepsilon)}, \quad \varepsilon > 0, \quad L = 2C_0^2. \quad (26)$$

Метод условного градиента в задаче (1)–(6) сведется к построению последовательности  $\{u_k = (p_k(t), q_k(s, t))\}$  по правилу

$$\begin{aligned} p_{k+1}(t) &= p_k(t) + \alpha_k(\bar{p}_k(t) - p_k(t)), \quad 0 \leq t \leq T, \\ q_{k+1}(s, t) &= q_k(s, t) + \alpha_k(\bar{q}_k(s, t) - q_k(s, t)), \quad (s, t) \in Q, \end{aligned} \quad (27)$$

где

$$\bar{p}_k(t) = \begin{cases} p_{\min} & \text{при } \psi(l, t; u_k) \geq 0, \\ p_{\max} & \text{при } \psi(l, t; u_k) < 0, \end{cases} \quad (28)$$

$$\bar{q}_k(s, t) = \frac{R\psi(s, t; u_k)}{\left(\iint_Q |\psi(s, t; u_k)|^2 ds dt\right)^{1/2}}, \quad (29)$$

а параметр  $\alpha_k$ ,  $0 \leq \alpha_k \leq 1$ , может быть выбран одним из указанных в § 5.4 приемов. Вспомогательное приближение  $\bar{u}_k = (\bar{p}_k(t), \bar{q}_k(s, t)) \in U$  здесь определено из условия минимума линейной функции

$$\langle J'(u_k), u \rangle_H = \int_0^T 2a^2 \nu \psi(l, t; u_k) p(t) dt + \iint_Q 2\psi(s, t; u_k) q(s, t) ds dt$$

при ограничениях (6).

Заметим, что из равенства (11) при  $u = \bar{u}_k$ ,  $v = u_k$ ,  $\beta = 1 - \alpha$  и формулы (22) следует, что функция

$$\begin{aligned} f_k(\alpha) &= J(u_k + \alpha(\bar{u}_k - u_k)) = J(u_k) + 2\alpha \int_0^l (x(s, T; u_k) - b(s)) \times \\ &\quad \times (x(s, T; \bar{u}_k) - x(s, T; u_k)) ds + \alpha^2 \int_0^l |x(s, T; \bar{u}_k) - x(s, T; u_k)|^2 ds = \\ &= J(u_k) + \alpha \langle J'(u_k), \bar{u}_k - u_k \rangle_H + \alpha^2 \int_0^l |x(s, T; \bar{u}_k) - x(s, T; u_k)|^2 ds \end{aligned}$$

при  $x(s, T; \bar{u}_k) \neq x(s, T; u_k)$  является квадратным трехчленом относительно переменной  $\alpha$ . Поэтому, рассуждая так же, как при выводе формулы (4.35), из условий

$$f_k(\alpha_k) = \min_{0 \leq \alpha \leq 1} f_k(\alpha), \quad 0 \leq \alpha_k \leq 1, \quad (30)$$

мы получим, что

$$\alpha_k = \min\{1; \alpha_k^*\}, \quad (31)$$



где

$$\begin{aligned} \alpha_k^* &= - \frac{\int_0^l (x(s, T; u_k) - b(s)) (x(s, T; \bar{u}_k) - x(s, T; u_k)) ds}{\int_0^l |x(s, T; \bar{u}_k) - x(s, T; u_k)|^2 ds} = \\ &= - \frac{\int_0^T a^2 \nu \psi(l, t; u_k) (\bar{p}_k(t) - p_k(t)) dt}{\int_0^l |x(s, T; \bar{u}_k) - x(s, T; u_k)|^2 ds} + \frac{\iint_Q \psi(s, t; u_k) (\bar{q}_k(s, t) - q_k(s, t)) ds dt}{\int_0^l |x(s, T; \bar{u}_k) - x(s, T; u_k)|^2 ds} \geq 0. \end{aligned}$$

В случае, когда  $x(s, T; \bar{u}_k) = x(s, T; u_k)$ ,  $0 \leq s \leq l$ , или  $\alpha_k^* = 0$ , то  $u_k = u_*$  — оптимальное управление задачи (1)–(6).

Согласно теоремам 4.2 и 4.4 последовательность  $\{u_k\}$ , построенная методом (24)–(26) или методом (27)–(31), является минимизирующей для задачи (1)–(6).

На практике приходится пользоваться разностными аналогами этих методов: встречающиеся в (24)–(26) и (27)–(31) интегралы вычисляются с помощью формул численного интегрирования (например, формулы прямоугольников или трапеций), а при решении краевых задач (2)–(5) и (20) можно пользоваться, например, неявной разностной схемой в сочетании с прогонкой [74; 89; 362; 480; 481; 615; 630–635, 698; 362] (см. также ниже § 10.7).

**3.** Перейдем к рассмотрению более сложной задачи минимизации функции (1), когда наряду с условиями (2)–(6) требуется, чтобы температура стержня не превышала некоторой заданной величины  $\bar{x}$ , т. е.

$$x(s, t; u) \leq \bar{x}, \quad (s, t) \in Q. \quad (32)$$

Такие задачи возникают при исследовании таких тепловых процессов, когда перегрев материала выше определенной критической температуры  $\bar{x}$  не допустим.

Для решения задачи (1)–(6), (32) воспользуемся методом штрафных функций. Для учета ограничения (32) возьмем штрафную функцию

$$P_k(u) = A_k \iint_Q |\max\{x(s, t; u) - \bar{x}; 0\}|^2 ds dt,$$

где  $\{A_k\}$  — заданная положительная последовательность,  $\{A_k\} \rightarrow \infty$  и при каждом  $k = 1, 2, \dots$  будем рассматривать задачу минимизации функции

$$\Phi_k(u) = \int_0^l |x(s, T; u_k) - b(s)|^2 ds + P_k(u) \quad (33)$$

при условиях (2)–(6). Функция (33) дифференцируема на  $H$  и ее градиент имеет вид

$$\Phi'_k(u) = 2(a^2 \nu \psi_k(l, t; u); \psi_k(s, t; u)) \in H, \quad (34)$$

где  $\psi_k(s, t; u)$  — решение уравнения

$$\psi_t = -a^2 \psi_{ss} - 2A_k \max\{x(s, t; u) - \bar{x}; 0\}, \quad (s, t) \in Q, \quad (35)$$

при краевых и начальных условиях из (20),  $c(s) = x(s, T; u) - b(s)$ .

В самом деле, приращение  $\Delta\Phi_k(u) = \Phi_k(u + h) - \Phi_k(u)$  здесь представимо в виде

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_k(u) = & \int_0^l 2(x(s, T; u) - b(s)) \Delta x(s, T) ds + \\ & + \iint_Q 2A_k \max\{x(s, t; u) - \bar{x}; 0\} \Delta x(s, t) ds dt + R_k, \end{aligned} \quad (36)$$

где  $\Delta x(s, t) = x(s, t; u + h) - x(s, t; u)$  — решение краевой задачи (8), (9), в которой  $u = (p, q)$  заменено на  $h = (\Delta p, \Delta q)$ . Рассуждая так же, как при выводе оценки (16), из (13), (14) нетрудно получить оценку

$$\iint_Q |\Delta x(s, t)|^2 ds dt + \int_0^l |\Delta x(s, T)|^2 ds \leq \tilde{C}_0 \|h\|_H^2.$$

Поэтому остаточный член  $R_k$  в (36) оценивается так:

$$\begin{aligned} |R_k| \leq & \int_0^l |\Delta x(s, T)|^2 ds + 2A_k \iint_Q |\Delta x(s, t)|^2 ds dt \leq C_k \|h\|_H^2, \\ C_k = & \tilde{C}_0(1 + 2A_k). \end{aligned} \quad (37)$$

Справедливо равенство

$$\begin{aligned} \int_0^l 2(x(s, T; u) - b(s)) \Delta x(s, T) ds = & \int_0^T a^2 \nu \psi_k(l, t; u) \Delta p(t) dt + \\ & + \iint_Q \psi_k(s, t; u) \Delta q(s, t) ds dt - \iint_Q 2A_k \max\{x(s, t; u) - \bar{x}; 0\} \Delta x(s, t) ds dt, \end{aligned}$$

которое вытекает из цепочки равенств, аналогичных (21). С учетом этого равенства из (36), (37) получим

$$\Delta\Phi_k(u) = \int_0^T a^2 \nu \psi_k(l, t; u) \Delta p(t) dt + \iint_Q \psi_k(s, t; u) \Delta q(s, t) ds dt + R_k, \quad (38)$$

при этом  $|R_k| \leq C_k \|h\|_H^2$ ,  $C_k = \text{const} \geq 0$ . Из (38) вытекает дифференцируемость функции (33), и получается формула (34).

Как видим, формула (34) вполне аналогична формуле (22), и поэтому нет ничего удивительного в том, что методы проекции градиента и условного градиента для задачи (33), (2)–(6) реализуются по тем же формулам (24), (25) и (27)–(29) с заменой  $\psi$  на  $\psi_k$ .

4. В рассмотренных задачах при выводе формулы градиента важную роль играли вспомогательные краевые задачи вида (20), которые принято называть *сопряженными краевыми задачами*, соответствующими исходной задаче оптимального управления. Возникает вопрос: откуда берется сопряженная краевая задача, по каким правилам она составляется?

Здесь мы приведем некоторые эвристические соображения (ср. с 6.2, п. 6), помогающие в составлении сопряженной краевой задачи, установим связь между решением сопряженной краевой задачи и множителем Лагранжа задачи оптимального управления [112]. Все построения проведем на примере задачи (1)–(6), считая, что

$$u = (p, q) \in U = H = L_2[0, T] \times L_2(Q).$$

Следуя уже известной нам процедуре исследования задач на условный экстремум (см. § 2.3, 4.8, 4.9, 6.2 и § 2), составим функцию Лагранжа задачи (1)–(6):

$$L(x, p, q, \psi) = \int_0^l |x(s, T) - b(s)|^2 ds + \iint_Q \psi(s, t)(-x_t(s, t) + a^2 x_{ss}(s, t) + q(s, t)) ds dt, \quad (39)$$

где  $\psi(s, t)$  — множитель Лагранжа, соответствующий ограничению (2). Будем предполагать, что функции  $x(s, t)$ ,  $\psi(s, t)$  являются достаточно гладкими на  $\bar{Q} = \{(s, t): 0 \leq s \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ . Поскольку уравнение (2) уже учтено в (39), то от функции  $x(s, t)$  будем требовать лишь удовлетворения граничным и начальным условиям (3)–(5); дополнительные условия на функцию  $\psi(s, t)$  будут наложены ниже.

Дадим приращения (вариации) переменным  $x, p, q$ , т. е. рассмотрим функции  $x(s, t) + \delta x(s, t)$ ,  $p(t) + \delta p(t)$ ,  $q(s, t) + \delta q(s, t)$ ,  $(s, t) \in \bar{Q}$ , такие, что

$$\delta x_s|_{s=0} = 0, \quad \delta x_s|_{s=l} = \nu(\delta p(t) - \delta x(l, t)), \quad \delta x|_{t=0} = 0. \quad (40)$$

Вариация функции Лагранжа (39), представляющая собой главную линейную часть приращения этой функции, имеет вид

$$\delta L = \int_0^l 2(x(s, T) - b(s))\delta x(s, T) ds + \iint_Q \psi(-\delta x_t + a^2 \delta x_{ss} + \delta q) ds dt.$$

Учитывая условия (40), преобразуем двойной интеграл с помощью интегрирования по частям. Получим

$$\begin{aligned} \delta L = & \int_0^l [2(x(s, T) - b(s)) - \psi(s, T)]\delta x(s, T) ds + \iint_Q (\psi_t + a^2 \psi_{ss})\delta x ds dt + \iint_Q \psi \delta q ds dt + \\ & + a^2 \int_0^T (\nu \psi(l, t) + \psi_s(l, t))\delta x(l, t) dt + a^2 \nu \int_0^T \psi(l, t)\delta p(t) dt + \int_0^T \psi_s(0, t)\delta x(0, t) dt. \end{aligned}$$

Считая, что в оптимальной точке выполняется условие стационарности  $\delta L = 0$ , и пользуясь достаточно большим произволом в выборе  $\delta x(s, t)$ , приравняем нулю коэффициенты при вариациях  $\delta x(s, T)$ ,  $\delta x(s, t)$ ,  $\delta x(l, t)$ ,  $\delta x(0, t)$  и придем к условиям для множителя Лагранжа  $\psi(s, t)$ , полностью совпадающим с сопряженной краевой задачей (20); приравняв нулю коэффициенты при  $\delta p(t)$  и  $\delta q(s, t)$ , получим условия  $\psi(l, t) = 0$ ,  $\psi(s, t) = 0$ , которые согласно формуле (22) означают равенство  $J'(u) = 0$  — условие оптимальности в задаче (1)–(6) при  $u \in U = H$ .

5. Изложенный на примере задачи (1)–(6) подход к получению сопряженной краевой задачи, формулы градиента, необходимого условия экстремума может быть использован для исследования широкого класса задач оптимального управления процессами, описываемыми как обыкновенными дифференциальными уравнениями (см. § 6.2, п. 6), так и уравнениями с частными производными. Этот подход кратко можно сформулировать в виде следующих правил:

1) сначала нужно записать задачу минимизации в виде

$$J(u) \rightarrow \inf, \quad L_i(x, u, \xi) = 0, \quad \xi \in G_i, \quad i = 1, \dots, m; \quad l_i(x, u) = 0, \quad i = 1, \dots, p, \quad (41)$$

где  $G_i$  — заданная область из евклидова пространства  $E^{n_i}$ ,  $x = x(\xi) = (x^1(\xi), \dots, x^{n_i}(\xi))$  — фазовые переменные,  $u = (u^1(\xi), \dots, u^r(\xi))$  — управления,  $L_i$  — дифференциальный оператор,  $l_i$  — операторы граничных и начальных условий, и составить функцию Лагранжа

$$L(x, u, \psi) = J(u) + \sum_{i=1}^m \int_{G_i} \psi_i(\xi) L_i(x(\xi), u(\xi), \xi) d\xi; \quad (42)$$

2) затем нужно найти вариацию функции Лагранжа по фазовым переменным и управлениям с соблюдением граничных и начальных условий  $l_i(x, u) = 0$ ,  $i = 1, \dots, p$ , и с помощью интегрирования по частям (или с помощью формулы Гаусса—Остроградского для сложных многомерных областей) с учетом граничных и начальных условий преобразовать полученную вариацию так, чтобы выражения под знаками интегралов по областям  $G_i$  не содержали частных производных вариаций фазовых переменных;

3) пользуясь условием стационарности функции Лагранжа и произволом в выборе вариаций фазовых переменных, приравнять нулю коэффициенты при соответствующих вариациях; совокупность полученных при этом равенств представляет собой условия на множители Лагранжа и образует искомую сопряженную краевую задачу;

4) наконец, в формуле приращения целевого функционала с помощью полученной сопряженной краевой задачи выделить главную линейную часть относительно приращений управления, получить формулу градиента и написать необходимое условие оптимальности, например, в форме вариационного неравенства.

Заметим, что граничные и начальные условия  $l_i(x, u) = 0$  из (41) также можно было учесть в функции Лагранжа (42) с помощью соответствующих множителей Лагранжа. Кроме того, имея в виду возможные аномальности, слагаемое  $J(u)$  в (42) можно было заменить на  $\lambda_0 J(u)$ ,  $\lambda_0 \geq 0$ . Аналогичные построения проводятся, когда в задаче (41) присутствуют ограничения типа неравенств, которые, конечно, будут сопровождаться условиями дополняющей нежесткости (дополнительности).

Подчеркнем, что приведенные в этом пункте рассуждения не могут считаться строгими и являются лишь полезными наводящими соображениями при получении сопряженной краевой задачи, выводе формулы градиента, необходимых условий оптимальности. Для полной строгости надо еще выполнить большую и трудную работу и определить, что понимается под решением исходной и сопряженной краевых задач, исследовать вопросы существования и единственности решений этих задач в подходящим образом выбранных функциональных пространствах, дать строгий вывод формулы градиента, оформить в виде теорем соответствующие необходимые условия экстремума и т. п.

Изложенный здесь подход к изучению задач оптимизации в литературе часто называют *принципом Лагранжа*, имея в виду, что этот подход по существу основан на предложенной Лагранжем идее освобождения от связей (ограничений) путем их учета в функции Лагранжа с помощью множителей Лагранжа.

Принцип Лагранжа прекрасно изложен и развит в [14; 832] применительно к задачам оптимального управления. В [832, с. 24] отмечается, что «фактически все известные на сегодняшний день необходимые условия экстремума соответствуют принципу Лагранжа».

**6.** Выше были подробно рассмотрены задачи оптимального управления для простейшего уравнения теплопроводности с одной пространственной переменной. Из этих рассмотрений видно, что хотя окончательные расчетные формулы, реализующие методы проекции градиента и условного градиента для ограничений вида (6), достаточно просты и удобны для подсчетов на компьютере, вывод этих формул связан с довольно громоздкими оценками, и строгое исследование таких задач является весьма тонким и хлопотным делом. Еще более трудным и громоздким становится исследование задач оптимального управления системами, описываемыми более общими параболическими уравнениями при более сложных функционалах, граничных условиях, ограничениях на управления и на решения. Здесь мы ограничимся лишь приведением формул градиента для следующей задачи.

Пусть  $\Omega$  — заданная область в евклидовом пространстве  $E^n$  переменных  $s = (s_1, \dots, s_n)$  с кусочно гладкой границей  $\Gamma$ ; пусть  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  — кусочно гладкие части границы  $\Gamma$ , не имеющие общих точек, причем  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$  (в частности, одно из этих множеств  $\Gamma_1$  или  $\Gamma_2$  может быть пустым). Пусть  $t_0, T$  — заданные моменты времени. Обозначим  $Q = \{(s, t) : s \in \Omega, t_0 \leq t \leq T\}$ . Пусть в  $Q$  имеется конечное число кусочно гладких поверхностей, разбивающих  $Q$  на конечное число подобластей  $Q_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$  (случай  $p = 1$ ,  $Q_1 = Q$  не исключается). Поверхность, которая служит границей для подобластей  $Q_l$  и  $Q_k$ , обозначим через  $\Gamma_{kl}$ . Будем считать, что физические характеристики рассматриваемой области  $Q$  (плотность, теплопроводность, удельная теплоемкость и т. п.) непрерывны внутри каждой подобласти  $Q_i$  и могут терпеть разрывы типа скачка лишь на поверхностях  $\Gamma_{kl}$ .

Рассмотрим задачу минимизации функции (функционала):

$$J(u) = \int_{t_0}^T \int_{\Omega} \Phi_0(s, t, x(s, t; u), u_0(s, t)) ds dt + \int_{t_0}^T \int_{\Gamma_1} \Phi_1\left(s, t, \frac{\partial x(s, t; u)}{\partial N}, u_1(s, t)\right) d\Gamma_1 dt + \\ + \int_{t_0}^T \int_{\Gamma_2} \Phi_2(s, t, x(s, t; u), u_2(s, t)) d\Gamma_2 dt + \int_{\Omega} \Phi_3(s, x(s, T; u), u_3(s)) ds \quad (43)$$

при условиях

$$x_t = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(s, t) x_{s_i s_j} + \sum_{i=1}^n b_i(s, t) x_{s_i} + c(s, t) x - \varphi_0(s, t, u_0(s, t)), \quad (s, t) \in Q; \quad (44)$$

$$[x(s, t)]_{\Gamma_{kl}} = 0, \quad \left[ \frac{\partial x(s, t)}{\partial N} \right]_{\Gamma_{kl}} = 0, \quad (s, t) \in \Gamma_{kl}; \quad (45)$$

$$x(s, t)|_{s \in \Gamma_1} = \varphi_1(s, t, u_1(s, t))|_{s \in \Gamma_1}, \quad t_0 \leq t \leq T; \quad (46)$$

$$\left( \frac{\partial x(s, t)}{\partial N} + \gamma(s, t) x(s, t) \right) \Big|_{s \in \Gamma_2} = \varphi_2(s, t, u_2(s, t))|_{s \in \Gamma_2}, \quad t_0 < t \leq T; \quad (47)$$

$$x(s, t)|_{t=t_0} = \varphi_3(s, u_3(s)), \quad s \in \Omega, \quad (48)$$

где

$$\frac{\partial x(s, t)}{\partial N} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(s, t) \cos(\widehat{n, s_i}) \frac{\partial x(s, t)}{\partial s_j}$$

— производная функции  $x$  по ко нормали к границе подобласти  $Q_k$  в точке  $(s, t)$ ;  $n = n(s, t)$  — внешняя для  $Q_k$  нормаль в той же точке  $(s, t)$  с направляющими косинусами  $\cos(\widehat{n, s_i})$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $[z(s, t)]_{\Gamma_{kl}}$  — разность предельных значений функции  $z(\xi, \tau)$  при стремлении точки  $(\xi, \tau)$  к  $(s, t) \in \Gamma_{kl}$  изнутри подобласти  $Q_k$  и  $Q_l$  соответственно;  $a_{ij}(s, t)$ ,  $b_i(s, t)$ ,  $\varphi_i(s, t, u)$ ,  $c(s, t)$ ,  $\gamma(s, t)$ ,  $\Phi_i(s, t, z, u)$  — заданные функции своих аргументов,

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(s, t) \xi_i \xi_j \geq \alpha \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \quad a_{ij} \equiv a_{ji},$$

при всех  $(s, t) \in Q$ ,  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ ;  $\alpha = \text{const} > 0$ ;  $a_{ij}(s, t)$ ,  $b_i(s, t)$  непрерывны внутри подобластей  $Q_i$  и могут терпеть разрывы типа скачка лишь на поверхностях  $\Gamma_{kl}$ ; функции  $u = (u_0(s, t), u_1(s, t), u_2(s, t), u_3(s))$  являются управлениями, подлежащими определению из условия минимума функции (43). Будем считать, что  $u_0(s, t) \in L_2(Q)$ ,  $u_i(s, t) \in L_2(\Gamma_i)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $u_3(s) \in L_2(\Omega)$  и  $u_0, \dots, u_3$  удовлетворяют ограничениям типа (6).

Нетрудно видеть, что рассмотренные выше задачи оптимального управления для уравнения теплопроводности (2) являются простым частным случаем задачи (43)–(48). Заметим, что некоторые из управлений  $u_j$ ,  $j = 0, 1, 2, 3$ , могут отсутствовать в задаче (43)–(48), — в этом случае функции  $\Phi_i$ ,  $\varphi_i$  не зависят от  $u_j$ .

Управление  $u = (u_0(s, t), u_1(s, t), u_2(s, t), u_3(s))$  в задаче (43)–(48) удобно считать элементом гильбертова пространства  $H = L_2(Q) \times L_2(\Gamma_1) \times L_2(\Gamma_2) \times L_2(\Omega)$ , в котором скалярное произведение двух любых элементов  $u_i = (u_{0i}(s, t), u_{1i}(s, t), u_{2i}(s, t), u_{3i}(s))$ ,  $i = 1, 2$ ,

определяются посредством формулы

$$\begin{aligned} \langle u_1, u_2 \rangle_H = & \iint_Q u_{01}(s, t) u_{02}(s, t) ds dt + \int_{t_0}^T \int_{\Gamma_1} u_{11}(s, t) u_{12}(s, t) d\Gamma_1 dt + \\ & + \int_{t_0}^T \int_{\Gamma_2} u_{21}(s, t) u_{22}(s, t) ds dt + \int_{\Omega} u_{31}(s) u_{32}(s) ds, \end{aligned}$$

а норма — формулой  $\|u\|_H = (\langle u, u \rangle_H)^{1/2}$ . При некоторых требованиях к функциям  $a_{ij}, b_i, c, \gamma, \varphi_i, \Phi_i$  и к области  $Q$  можно доказать, что при каждом  $u \in H$  обобщенное решение  $x(s, t, u)$  краевой задачи (44)–(48) существует и единственно [492; 698], а функция (43) при условиях (44)–(48) дифференцируема в  $H$  и ее градиент имеет вид

$$\begin{aligned} J'(u) = & \left\{ -\psi(s, t, u) \varphi_{0u} + \Phi_{0u}; - \left[ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{ij} \psi)_{sj} \cos(\widehat{n, s_i}) + \sum_{i=1}^n b_i \cos(\widehat{n, s_i}) \Phi_{1z} \right] \varphi_{1u} + \right. \\ & \left. + \Phi_{1u}|_{s \in \Gamma_1}; (\psi \varphi_{2u} + \Phi_{2u})|_{s \in \Gamma_2}; \psi(s, t_0, u) \varphi_{3u} + \Phi_{3u} \right\} \in H, \end{aligned}$$

где частные производные  $\varphi_{iu}$  вычислены для аргументов  $(s, t, u_i(s, t))$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ , а  $\Phi_{iu}$  и  $\Phi_{1z}$  — для тех же аргументов, с которыми функция  $\Phi_i$  входит в (43),  $i = 0, 1, 2, 3$ ;  $\psi = \psi(s, t, u)$  — решение сопряженной краевой задачи

$$\begin{aligned} \psi_t = & - \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} \psi)_{s_j} s_i + \sum_{i=1}^n (b_i \psi)_{s_i} - c\psi - \frac{\partial \Phi_0(s, t, x(s, t, u), u_0(s, t))}{\partial z}, \quad (s, t) \in Q; \quad [\psi]_{\Gamma_{kl}} = 0; \\ & - \left[ \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} \psi)_{s_j} \cos(\widehat{n, s_i}) - \sum_{i=1}^n b_i \cos(\widehat{n, s_i}) \psi + \psi \cos(\widehat{n, t}) \right]_{\Gamma_{kl}} = 0, \quad (s, t) \in \Gamma_{kl}; \\ \psi(s, t)|_{s \in \Gamma_1} = & - \frac{\partial \Phi_1(s, t, \frac{\partial x(s, t, u)}{\partial z}, u_1(s, t))}{\partial z} \Big|_{s \in \Gamma_1}, \quad t_0 < t < T; \\ \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} \psi)_{s_j} \cos(\widehat{n, s_i}) + \gamma(s, t) \psi - \sum_{i=1}^n b_i \cos(\widehat{n, s_i}) \psi \Big|_{s \in \Gamma_2} = & \\ = \frac{\partial \Phi_2(s, t, x(s, t, u), u_2(s, t))}{\partial z} \Big|_{s \in \Gamma_2}, \quad t_0 < t < T; \\ \psi(s, T) = & \frac{\partial \Phi_3(s, T, x(s, T, u), u_3(s, T))}{\partial z}, \quad s \in \Omega. \end{aligned}$$

Имея формулу градиента и опираясь на общую схему методов проекции градиента и условного градиента из § 4, п. 2, 3, нетрудно расписать формулы, реализующие эти методы применительно к задаче (43)–(48).

Предлагаем читателю самостоятельно исследовать задачу (43)–(48), а также рассматриваемые в § 8–9 задачи оптимального управления, пользуясь принципом Лагранжа.

## Упражнения

**У п р а ж н е н и е 1.** Рассмотреть задачу (1)–(6), заменив условие  $p_{\min} \leq p(t) \leq p_{\max}$  на условие  $p(t) \in L_2[0, T]$ ,  $\int_0^T |p(t) - \bar{p}(t)|^2 dt \leq R_0^2$ , где  $\bar{p}(t) \in L_2[0, T]$  и число  $R_0 > 0$  заданы. Описать методы проекции градиента и условного градиента.

**У п р а ж н е н и е 2.** Найти градиенты функции (1) при условиях (2)–(5) по каждой из переменных  $\varphi = \varphi(x) \in L_2[0, l]$ ,  $p(t) \in L_2[0, T]$ ,  $q(s, t) \in L_2(Q)$  и по совокупности переменных  $u = (\varphi(x), p(t), q(s, t)) \in H = L_2[0, l] \times L_2[0, T] \times L_2(Q)$ . Описать методы проекции градиента и условного градиента, считая, что  $p(t), q(s, t)$  удовлетворяют условиям (6) и, кроме того  $\varphi_{\min} \leq \varphi(s) \leq \varphi_{\max}$  почти всюду на  $[0, l]$ .

У п р а ж н е н и е 3. Рассмотреть функцию

$$J(u) = \beta_0 \int_0^l |x(s, T, u) - b(s)|^2 ds + \beta_1 \int_0^T |p(t)|^2 dt + \beta_2 \iint_Q |q(s, t)|^2 ds dt$$

при условиях (2)–(5), считая  $\beta_i = \text{const} > 0$ ,  $i = 0, 1, 2$ ;  $b(s) \in L_2[0, l]$ . Доказать, что эта функция сильно выпукла на  $H$ ; найти ее градиент; описать градиентный метод при  $U = H$  и методы проекции градиента и условного градиента при ограничениях (6).

У п р а ж н е н и е 4. Рассмотреть функцию

$$J(p) = \int_0^l |x(s, T, u) - b(s)|^2 ds + \beta \int_0^T |p(t)|^2 dt, \quad \beta = \text{const} > 0,$$

при условиях (2)–(6), считая функцию  $q(s, t) \in L_2(Q)$  заданной. Доказать, что тогда управление  $p_* = p_*(t)$  минимизирует  $J(p)$  тогда и только тогда, когда  $H(p_*(t), \psi(l, t, p_*)) = \min H(p, \psi(l, t, p_*))$ ,  $0 \leq t \leq T$ , где минимум берется по отрезку  $p_{\min} \leq p(t) \leq p_{\max}$ ,  $H(p, \psi) = a^2 \nu p \psi + \beta p^2$ ,  $\psi(s, t, p)$  — решение задачи (20). У к а з а н и е: заметить, что  $H(p, \psi)$  выпукла по  $p$ ,  $J'(p) = H_p(p(t), \psi(l, t, p))$ , и воспользоваться теоремой 3.3.

У п р а ж н е н и е 5. Рассмотреть задачу (1)–(6) при ограничениях  $\underline{x} \leq x(s, t, u) \leq \bar{x}$ , где  $\underline{x}, \bar{x}$  — заданные величины; учесть эти ограничения с помощью штрафной функции.

У п р а ж н е н и е 6. Требуется минимизировать функцию  $J(p) = \int_0^T p^2(t) dt$  при условиях (2)–(6), считая функцию  $q(s, t) \in L_2(Q)$  заданной, и дополнительным условием  $x(s, T, p) = y(s)$ ,  $0 \leq s \leq l$ ,  $y(s) \in L_2[0, l]$ . Указать штрафную функцию  $P_k(p)$  для дополнительного условия; найти градиент функции  $\Phi_k(p) = J(p) + P_k(p)$ ; описать методы проекции градиента и условного градиента.

## § 8. Оптимальное управление колебательными процессами

Задачи оптимального управления колебательными процессами имеют многочисленные приложения: к ним, например, приводят задачи об успокоении качки судна или стрелы подъемного крана, о работе вибротранспортеров, об организации виброзащиты, амортизации и т. п. [122–124; 354; 355; 395; 557; 596; 599; 641; 698; 706; 802; 812; 829]. Здесь мы рассмотрим несколько задач оптимального управления процессами, описываемыми уравнением колебания струны и уравнением поперечных колебаний стержня.

1. Пусть имеется однородная упругая гибкая струна, один конец которой свободен, на другой ее конец действует внешняя сила, и, кроме того, к каждой точке струны также приложена внешняя сила. Требуется, управляя указанными внешними силами, к заданному моменту времени привести струну в состояние, характеризуемое смещением и скоростью точек струны, как можно меньше отличающееся от некоторого заданного состояния (например, состояния покоя, когда смещение и скорость равны нулю).

Математическая формулировка этой задачи: минимизировать функцию

$$J(u) = \int_0^l (|x(s, T; u) - y_0(s)|^2 + |x_t(s, T; u) - y_1(s)|^2) ds \quad (1)$$

при условиях

$$x_{tt} = a^2 x_{ss} + q(s, t), \quad (s, t) \in Q = \{0 < s < l, 0 < t < T\}, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} x_s|_{s=0} &= p(t), \quad x_s|_{s=l} = 0, \quad 0 < t < T; \\ x|_{t=0} &= \varphi_0(s), \quad x_t|_{t=0} = \varphi_1(s), \quad 0 < s < l, \end{aligned} \quad (3)$$

$$u = (p(t), q(s, t)) \in U \subseteq H = L_2[0, T] \times L_2(Q), \quad (4)$$

где  $a^2 > 0$ ,  $l > 0$ ,  $T > 0$ ,  $\varphi_i(s)$ ,  $y_i(s)$ ,  $i = 0, 1$ ,  $0 \leq s \leq l$  — заданные функции, причем  $\varphi_0(s) \in H^1[0, l]$ ,  $\varphi_1(s), y_0(s), y_1(s) \in L_2[0, l]$ ,  $U$  — заданное множество из  $H$ . В частности, если  $y_0(s) = y_1(s) = 0$ , то здесь можно говорить о задаче наилучшего успокоения струны.

**О п р е д е л е н и е 1.** Под обобщенным решением краевой задачи (2), (3), соответствующим управлению  $u = (p(t), q(s, t)) \in H$ , будем понимать функцию  $x = x(s, t) = x(s, t; u) \in H^1(Q)$ , след которой при  $t = 0$  совпадает с  $\varphi_0(s)$  и которая удовлетворяет интегральному тождеству

$$\iint_Q (a^2 x_s \psi_s - x_t \psi_t - \psi q) ds dt + a^2 \int_0^T \psi(0, t) p(t) dt - \int_0^l \psi(s, 0) \varphi_1(s) ds = 0$$

для всех функций  $\psi = \psi(s, t) \in H^1(Q)$ , след которых при  $t = T$  равен нулю (см. обозначения в § 1).

Можно показать, что краевая задача (2), (3) при каждом  $u \in H$  имеет, и притом единственное, обобщенное решение [492; 472]. Это решение может быть представлено с помощью формулы Даламбера в виде [698]:

$$\begin{aligned} x(s, t; u) &= \frac{[\Phi_0(s+at) + \Phi_0(s-at)]}{2} + \frac{1}{2a} \int_{s-at}^{s+at} \Phi_1(\xi) d\xi + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{s-a(t-\tau)}^{s+a(t-\tau)} F_0(\xi, \tau) d\xi d\tau + \\ &+ a \sum_{m=1}^{\infty} P_1\left(t - \frac{2ml-s}{a}\right) + a \sum_{m=0}^{\infty} P_1\left(t - \frac{2ml+s}{a}\right), \quad (5) \end{aligned}$$

где  $\Phi_0(s)$ ,  $\Phi_1(s)$ ,  $F_0(s, t)$  — четные относительно  $s = 0$ ,  $2l$ -периодические по  $s$  продолжения функций  $\varphi_0(s)$ ,  $\varphi_1(s)$ ,  $q(s, t)$  соответственно, а  $P_1(t) = - \int_0^t p(\xi) d\xi$  при  $t > 0$ ,  $P_1(t) = 0$  при  $t \leq 0$ . Формулы для обобщенных производных  $x_s$ ,  $x_t$  могут быть получены из (5) формальным дифференцированием по  $s$  и  $t$  соответственно. Из формулы (5) следует, что

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t \leq T} \int_0^l [x^2(s, t; u) + x_t^2(s, t; u)] ds &\leq \\ &\leq C_0 \left( \int_0^T p^2(t) dt + \iint_Q q^2(s, t) ds dt + \int_0^l (\varphi_0^2(s) + \varphi_1^2(s)) ds \right), \quad (6) \end{aligned}$$

где  $C_0$  — постоянная, не зависящая от  $(p, q, \varphi_0, \varphi_1)$  [441; 492].

Считая, что в (2), (3)  $\varphi_0(s) = 0$ ,  $\varphi_1(s) = 0$ , введем оператор

$$Au = (x(s, T; u), x_t(s, T; u)), \quad 0 \leq s \leq l, \quad (7)$$



действующий из гильбертова пространства  $H = L_2[0, T] \times L_2(Q)$  в гильбертово пространство  $F = L_2[0, l] \times L_2[0, l]$ . Легко убедиться, что  $A$  — линейный оператор. Из оценки (6) следует ограниченность этого оператора, так что  $A \in \mathcal{L}(H \rightarrow F)$ . Это значит, что задачу (1)–(4) при  $\varphi_0 = \varphi_1 = 0$  можно записать в виде задачи (2.3):

$$J(u) = \|Au - b\|_F^2 \rightarrow \inf, \quad u \in U, \quad (8)$$

где  $b = (y_0(s), y_1(s)) \in F$ . В общем случае, когда  $(\varphi_0(s), \varphi_1(s)) \neq 0$ , решение задачи (2), (3) можно представить в виде

$$x(s, t; u) = x_1(s, t; u) + x_0(s, t), \quad (s, t) \in Q, \quad (9)$$

где  $x_1(s, t; u)$  — решение задачи (2), (3) при  $\varphi_0 = \varphi_1 = 0$ , а  $x_0(s, t)$  — решение той же задачи при  $p(t) \equiv 0$ ,  $q(s, t) \equiv 0$ . Следовательно, и в общем случае задачу (1)–(4) можно записать в виде задачи (8), где с учетом (9) надо принять

$$Au = (x_1(s, T; u), x_{1t}(s, T; u)), \quad b = (y_0(s) - x_0(s, T), y_1(s) - x_{0t}(s, T)).$$

Если  $U$  — выпуклое замкнутое ограниченное множество из  $H$ , то, как следует из теоремы 2.12, задача (1)–(4) имеет хотя бы одно решение. Пользуясь представлением этой задачи в форме (8) и результатами примера 3.6, убедимся, что функция (1) дважды непрерывно дифференцируема, и получим формулы для ее производных. С этой целью покажем, что оператор  $A^*$ , сопряженный к оператору (7), на каждый элемент  $c = (c_0(s), c_1(s)) \in F$  действует по правилу

$$A^*c = (a^2\psi(0, t; c); \psi(s, t; u)) \in H, \quad (10)$$

где  $\psi = \psi(s, t; c)$  — решение краевой задачи

$$\psi_{tt} = a^2\psi_{ss}, \quad (s, t) \in Q, \quad (11)$$

$$\psi_s|_{s=0} = 0, \quad \psi_s|_{s=l} = 0, \quad 0 < t < T; \quad (12)$$

$$\psi|_{t=T} = c_1(s), \quad \psi_t|_{t=T} = -c_0(s), \quad 0 \leq s \leq l.$$

Краевая задача (11), (12) заменой  $\tau = T - t$  формально может быть сведена к задаче вида (2), (3), однако функции  $c_0(s), c_1(s)$  в (12) менее гладкие, чем  $\varphi_0(s), \varphi_1(s)$  в (2), (3), поэтому здесь можно ожидать существование лишь более слабого решения, чем в задаче (2), (3).

**О п р е д е л е н и е 2.** Под обобщенным решением краевой задачи (11), (12) будем понимать функцию  $\psi = \psi(s, t) = \psi(s, t; c) \in L_2(Q)$ , имеющую следы  $\psi(s, \cdot) \in L_2[0, T]$ ,  $\psi(\cdot, t) \in L_2[0, l]$  при всех  $s \in [0, l]$ ,  $t \in [0, T]$  и удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\iint_Q (\Phi_{tt} - a^2\Phi_{ss})\psi \, ds \, dt = - \int_0^l (c_0(s)\Phi(s, T) - c_1(s)\Phi_t(s, T)) \, ds,$$

справедливому при всех  $\Phi = \Phi(s, t) \in H^2(Q)$  со следом  $\Phi|_{t=0} = \Phi_t|_{t=0} = \Phi_s|_{s=0} = \Phi_s|_{s=l} = 0$ .

Решение задачи (11), (12) также может быть представлено с помощью формулы Даламбера вида (5), откуда, кстати, и следует его существование.

Из (2), (3) при  $\varphi = 0$  и (11), (12) имеем

$$\begin{aligned}
 \langle Au, c \rangle_F &= \int_0^l (x(s, T; u) c_0(s) + x_t(s, T; u) c_1(s)) ds = \\
 &= \int_0^l (-x \psi_t + x_t \psi)|_{t=T} ds = \int_0^l \left( \int_0^T \frac{\partial}{\partial t} (-\psi_t x + \psi x_t) dt \right) ds = \\
 &= \iint_Q (-\psi_{tt} x + \psi x_{tt}) ds dt = \iint_Q [a^2 (-\psi_{ss} x + \psi x_{ss}) + \psi q] ds dt = \\
 &= \iint_Q \left[ a^2 \frac{\partial}{\partial s} (-\psi_s x + \psi x_s) + \psi q \right] ds dt = \int_0^T a^2 (-\psi_s x + \psi x_s)|_{s=0}^l dt + \\
 &\quad + \iint_Q \psi q ds dt = \int_0^T a^2 \psi(0, t) p(t) dt + \iint_Q \psi q ds dt = \langle u, A^* c \rangle_H.
 \end{aligned}$$

С учетом замечания 7.1 можем считать, что формула (10) доказана.

Из формул  $J'(u) = 2A^*(Au - f)$ ,  $J'' = 2A^*A$  и из (7)–(12) следует, что функция (1) дважды непрерывно дифференцируема и ее градиент равен

$$J'(u) = (a^2 \psi(0, t; c), \psi(s, t; u)), \quad (13)$$

где  $\psi = \psi(s, t; c)$  — решение задачи (11), (12) при  $c = (c_0(s), c_1(s))$ ,  $c_0(s) = 2(x(s, T; u) - y_0(s))$ ,  $c_1(s) = 2(x_t(s, T; u) - y_1(s))$ ,  $0 \leq s \leq l$ .

Так как функция (1) выпукла на  $H$ , то согласно теореме 3.3 эта функция на выпуклом множестве  $U \subseteq H$  будет достигать своей нижней грани в точке  $u_* = (p_*(t), q_*(s, t)) \in U$  тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned}
 \langle J'(u_*), u - u_* \rangle_H &= \int_0^T a^2 \psi(0, t, u_*) (p(t) - p_*(t)) dt + \\
 &\quad + \iint_Q \psi(s, t, u_*) (q(s, t) - q_*(s, t)) ds dt \geq 0
 \end{aligned}$$

при всех  $u = (p(t), q(s, t)) \in U$ .

Для решения задачи (1)–(4) могут быть использованы описанные выше методы минимизации. Кратко остановимся на методах проекции градиента и условного градиента, предполагая, что множество  $U$  состоит из управлений  $u = (p(t), q(s, t)) \in H$ , удовлетворяющих условиям

$$\int_0^T p^2(t) dt \leq R_0^2, \quad \iint_Q q^2(s, t) ds dt \leq R_1^2, \quad (14)$$

где  $R_0, R_1$  — заданные положительные числа.

Метод проекции градиента для задачи (1)–(4), (14) с учетом формулы (13) сведется к построению последовательности  $\{u_k = (p_k(t), q_k(s, t))\}$  по правилам

$$p_{k+1}(t) = \begin{cases} p_k(t) - \alpha_k a^2 \psi(0, t, u_k) \\ \text{при } \int_{t_0}^T |p_k(t) - \alpha_k a^2 \psi(0, t, u_k)|^2 dt \leq R_0^2, \\ \frac{R_0(p_k(t) - \alpha_k a^2 \psi(0, t, u_k))}{\left(\int_0^T |p_k(t) - \alpha_k a^2 \psi(0, t, u_k)|^2 dt\right)^{1/2}} \\ \text{при } \int_{t_0}^T |p_k(t) - \alpha_k a^2 \psi(0, t, u_k)|^2 dt > R_0^2, \end{cases} \quad (15)$$

$$q_{k+1}(s, t) = \begin{cases} q_k(s, t) - \alpha_k \psi(s, t, u_k) \\ \text{при } \iint_Q |q_k(s, t) - \alpha_k \psi(s, t, u_k)|^2 ds dt \leq R_1^2, \\ \frac{R_1(q_k(s, t) - \alpha_k \psi(s, t, u_k))}{\left(\iint_Q |q_k(s, t) - \alpha_k \psi(s, t, u_k)|^2 ds dt\right)^{1/2}} \\ \text{при } \iint_Q |q_k(s, t) - \alpha_k \psi(s, t, u_k)|^2 ds dt > R_1^2, \end{cases}$$

где параметр  $\alpha_k > 0$  выбирается одним из способов, описанных в § 5.2.

Одна итерация метода условного градиента для задачи (1)–(4), (14) будет выглядеть так:

$$\begin{cases} p_{k+1}(t) = p_k(t) + \alpha_k (\bar{p}_k(t) - p_k(t)), \\ q_{k+1}(s, t) = q_k(s, t) + \alpha_k (\bar{q}_k(s, t) - q_k(s, t)), \end{cases} \quad (16)$$

где

$$\bar{p}_k(t) = -\frac{R_0 \psi(0, t, u_k)}{\left(\int_0^T |\psi(0, t, u_k)|^2 dt\right)^{1/2}}, \quad \bar{q}_k(s, t) = -\frac{R_1 \psi(s, t, u_k)}{\left(\iint_Q |\psi(s, t, u_k)|^2 ds dt\right)^{1/2}}, \quad (17)$$

а величина  $\alpha_k$ ,  $0 \leq \alpha_k \leq 1$ , может быть выбрана одним из указанных в § 5.4 способов. Функция  $f_k(\alpha) = J(u_k + \alpha(\bar{u}_k - u_k))$  переменной  $\alpha$  представляет собой квадратный трехчлен, поэтому, рассуждая так же, как при выводе формулы (4.35), из условия  $f_k(\alpha_k) = \min_{0 \leq \alpha \leq 1} f_k(\alpha)$  можно определить  $\alpha_k = \min\{1, \alpha_k^*\}$ , где

$$\alpha_k^* = \frac{1}{2} \left[ \int_0^T a^2 \psi(0, t, u_k) (p_k(t) - \bar{p}_k(t)) dt + \iint_Q \psi(s, t, u_k) (q_k(s, t) - \bar{q}_k(s, t)) ds dt \right] \times \\ \times \left[ \int_0^l (2|x(s, T, u_k) - x(s, T, \bar{u}_k)|^2 + 2|x_t(s, T, u_k) - x_t(s, T, \bar{u}_k)|^2) ds \right]^{-1}, \quad (18)$$

причем если выражения в первой и во второй квадратной скобке обращаются в нуль, то  $u_k = (p_k(t), q_k(s, t))$  — оптимальное управление в рассматриваемой задаче (1)–(4), (14).

2. Рассмотрим задачу

$$J(u) = \int_0^l (|x(s, T; u) - y_0(s)|^2 + |x_t(s, T; u) - y_1(s)|^2) ds \rightarrow \inf, \quad (19)$$

где  $x = x(s, t; u)$  — решение краевой задачи

$$\begin{aligned} x_{tt} &= x_{ss} + r(s)u(t), \quad (s, t) \in Q = (0, l) \times (0, T), \\ x|_{s=0} &= 0, \quad x|_{s=l} = 0, \quad 0 < t < T; \quad x|_{t=0} = 0, \quad x_t|_{t=0} = 0, \quad 0 < s < l, \end{aligned} \quad (20)$$

управление

$$u = u(t) \in U \subseteq H = L_2[0, T]; \quad (21)$$

функции  $y_0(s) \in H_0^1[0, l]$ ,  $y_1(s) \in L_2[0, l]$ ,  $r(s) \in L_2[0, l]$  — заданы.

О п р е д е л е н и е 3. Обобщенным решением краевой задачи (20), соответствующим управлению  $u = u(t) \in L_2[0, T]$ , будем называть функцию  $x = x(s, t; u) \in H^1(Q)$ , имеющую следы  $x(\cdot, t) \in H_0^1[0, l]$ ,  $x_t(\cdot, t) \in L_2[0, l]$  при всех  $t \in [0, T]$ ,  $x(s, \cdot), x_s(s, \cdot) \in L_2[0, T]$  при всех  $s \in [0, l]$  и удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\iint_Q (x_s \psi_s - x_t \psi_t - r(s)u(t)\psi) ds dt + \int_0^l \psi(s, T)x_t(s, T) ds = 0$$

при всех  $\psi = \psi(s, t) \in H^1(Q)$ , причем след  $x|_{t=0} = 0$ ,  $0 \leq s \leq l$ .

Можно показать [441; 492], что задача (20) при каждом  $u = u(t) \in L_2[0, T]$  имеет, притом единственное, решение  $x = x(s, t; u)$  и справедлива оценка:

$$\max_{0 \leq t \leq T} \int_0^l (x^2(s, t; u) + x_s^2(s, t; u) + x_t^2(s, t; u)) ds \leq c_0 \int_0^T u^2(t) dt, \quad (22)$$

$$c_0 = \text{const} > 0.$$

Решение задачи (20) можно записать в виде формулы Даламбера, аналогичной формуле (5) [698]. Приведем представление решения в виде ряда Фурье:

$$x(s, t; u) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r_k e_k(s)}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^t u(\xi) \sin \sqrt{\lambda_k}(t - \xi) d\xi, \quad (23)$$

где  $e_k(s) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \sqrt{\lambda_k} s$  — собственная функция оператора  $-\frac{d^2 \varphi}{ds^2}$ ,  $\varphi(0) = 0$ ,

$\varphi(l) = 0$ , соответствующая собственному числу  $\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2$ ,  $r_k = \int_0^l r(s) e_k(s) ds$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Более тонкий анализ показывает [458; 557], что решение задачи (20) имеет производную  $y_{tt}$ , представляющую собой производную функции  $y_t$

в смысле обобщенной функции (распределения) и имеющую следы из  $H^{-1}[0, l]$  почти для всех  $t \in [0, l]$ .

Задачу (19)–(21) можно записать в форме (8), где оператор  $A$  внешне определяется той же формулой (7), но теперь  $A$  действует из  $H = L_2[0, T]$  в  $F = L_2[0, l] \times L_2[0, l]$ ,  $f = (y_0(s), y_1(s)) \in F$ . Как и в случае операторов (7), (10), можно показать, что здесь сопряженный оператор  $A^*$  имеет вид

$$A^*c = \int_0^l r(s)\psi(s, t; c) ds, \quad (24)$$

где  $\psi = \psi(s, t; c)$  — решение краевой задачи

$$\begin{aligned} \psi_{tt} &= \psi_{ss}, & (s, t) \in Q; \\ \psi|_{s=0} &= 0, & \psi|_{s=l} = 0, & 0 < t < T; \\ \psi|_{t=T} &= c_1(s), & \psi|_{t=0} = -c_0(s), & 0 \leq s \leq l, & c = (c_0(s), c_1(s)) \in F. \end{aligned} \quad (25)$$

Обобщенное решение задачи (25) понимается в том же смысле, как в определении 2, и его также можно записать в виде формулы Даламбера [698]. Функция (19) принадлежит классу  $C^2(H)$ , и ее градиент равен

$$J'(u) = A^*c = \int_0^l r(s)\psi(s, t; c) ds,$$

где  $\psi(s, t; c)$  — решение задачи (25) при  $c_0(s) = 2(x(s, T; u) - y_0(s))$ ,  $c_1(s) = 2(x_t(s, T; u) - y_1(s))$ . Если  $U$  — выпуклое замкнутое ограниченное множество, то задача (19)–(21) имеет хотя бы одно решение (теоремы 2.6 и 2.12). Критерий оптимальности на выпуклом множестве  $U$  в этой задаче (теорема 3.3) запишется в форме

$$\langle J'(u_*), u - u_* \rangle_H = \iint_Q r(s)\psi(s, t; c_*)(u(t) - u_*(t)) ds dt \geq 0 \quad \forall u \in U,$$

где  $c_* = (2(x(s, T; u_*) - y_0(s)), 2(x_t(s, T; u_*) - y_1(s)))$ . Предлагаем читателю, действуя по аналогии с задачей (1)–(4), дать описание методов проекции градиента и условного градиента для задачи (19)–(21), когда

$$U = \left\{ u \in L_2[0, T] : \int_0^T u^2(t) dt \leq R^2 \right\}.$$

**3.** Пусть дан однородный упругий стержень, один конец которого жестко закреплен, другой конец свободен. Требуется, управляя внешней поперечной нагрузкой, привести стержень к заданному моменту времени как можно ближе к заданному состоянию. Эту задачу математически можно сформулировать в виде следующей задачи минимизации:

$$J(u) = \int_0^l (|x(s, T, u) - y_0(s)|^2 + |x_t(s, T, u) - y_1(s)|^2) ds \rightarrow \inf, \quad (26)$$

$$x_{tt} + a^2 x_{ssss} = u(s, t), \quad (s, t) \in Q = \{0 < s < l, 0 < t \leq T\}, \quad (27)$$

$$x|_{s=0} = x_s|_{s=0} = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad (28)$$

$$x_{ss}|_{s=l} = x_{sss}|_{s=l} = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad (29)$$

$$x|_{t=0} = \varphi_0(s), \quad x_t|_{t=0} = \varphi_1(s), \quad 0 \leq s \leq l, \quad (30)$$

$$u = u(s, t) \in U = \left\{ u(s, t) \in L_2(Q) : \iint_Q u^2(s, t) ds dt \leq R^2 \right\}, \quad (31)$$

где  $a^2, l, T, R$  — заданные положительные числа;  $\varphi_i(s), y_i(s)$ ,  $i = 1, 2$ , — заданные функции;  $\varphi_0(s) \in H^2[0, l]$ ,  $\varphi_0(0) = \varphi'_0(0) = 0$ ;  $\varphi_1(s), y_0(s), y_1(s) \in L_2[0, l]$ .

**О п р е д е л е н и е 4.** Обобщенным решением краевой задачи (20)–(23), соответствующим управлению  $u = u(s, t) \in L_2(Q)$ , будем называть функцию  $x(s, t) = x(s, t, u) \in H^{2,1}(Q)$ , имеющую следы  $x(\cdot, t), x_t(\cdot, t) \in L_2(0, l]$  при всех  $t \in [0, T]$ ,  $x(s, \cdot), x_s(s, \cdot) \in L_2[0, l]$  при всех  $s \in [0, l]$  и удовлетворяющую условиям (28), (30) в смысле равенства соответствующих следов и интегральному тождеству

$$\iint_Q (-x_t \psi_t + a^2 x_{ss} \psi_{ss} - u \psi) ds dt - \int_0^l \varphi_1(s) \psi(s, 0) ds - \int_0^l x_t(s, T) \psi(s, T) ds = 0$$

при всех  $\psi = \psi(s, t) \in H^{2,1}(Q)$ ,  $\psi|_{s=0} = \psi_s|_{s=0} = 0$ ,  $0 \leq s \leq T$ . Можно показать [458], что при каждом  $u = u(s, t)$  решение задачи (27)–(30) существует и единственно.

Убедимся, что функция (26) дифференцируема на  $L_2(Q)$ . Проиллюстрируем, как можно получить формулу градиента, пользуясь лишь определением 3.3 градиента, явно не прибегая к задаче (8). Возьмем произвольные  $u, u + h \in L_2(Q)$  и соответствующие им решения  $x(s, t, u)$ ,  $x(s, t, u + h)$  краевой задачи (27)–(30).

Обозначим  $\Delta x(s, t) = x(s, t, u + h) - x(s, t, u)$ . Из (27)–(30) следует, что  $\Delta x(s, t)$  является решением краевой задачи

$$\Delta x_{tt} + a^2 \Delta x_{ssss} = h(s, t), \quad (s, t) \in Q, \quad (32)$$

$$\Delta x|_{s=0} = \Delta x_s|_{s=0} = 0, \quad \Delta x_{ss}|_{s=l} = \Delta x_{sss}|_{s=l} = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad (33)$$

$$\Delta x|_{t=0} = \Delta x_t|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq s \leq l. \quad (34)$$

Тогда приращение функции (26) запишется в виде

$$\begin{aligned} \Delta J(u) = J(u + h) - J(u) = & \int_0^l [2(x(s, T, u) - y_0(s)) \Delta x(s, T) + \\ & + 2(x_t(s, T, u) - y_1(s)) \Delta x_t(s, T)] ds + R, \end{aligned} \quad (35)$$

где

$$R = \int_0^l (|\Delta x(s, T)|^2 + |\Delta x_t(s, T)|^2) ds.$$

Справедлива оценка

$$|R| \leq C_1 \|h\|_{L_2}^2 = C_1 \iint_Q |h(s, t)|^2 ds dt, \quad C_1 = \text{const} \geq 0. \quad (36)$$

Наметим схему доказательства этой оценки. Умножим уравнение (32) на  $\Delta x_t(s, t)$ , проинтегрируем по прямоугольнику  $Q_t = \{(s, \tau) : 0 \leq s \leq l, 0 \leq \tau \leq t\}$  и получившееся равенство преобразуем с учетом условий (33), (34); будем иметь

$$\begin{aligned} \iint_{Q_t} h \Delta x_t ds d\tau &= \iint_{Q_t} (\Delta x_{tt} + a^2 \Delta x_{ssss}) \Delta x_t ds d\tau = \frac{1}{2} \int_0^l (\Delta x_t)^2|_{\tau=0} ds + \\ &+ \int_0^t a^2 \Delta x_{sss} \Delta x_t|_{s=0} d\tau - \iint_{Q_t} a^2 \Delta x_{sss} \Delta x_{ts} ds dt = \frac{1}{2} \int_0^l |\Delta x_t(s, t)|^2 ds - \\ &- \int_0^t a^2 \Delta x_{ss} \Delta x_{ts}|_{s=0} dt + \iint_{Q_t} a^2 \Delta x_{ss} \Delta x_{sst} ds dt = \frac{1}{2} \int_0^l |\Delta x_t(s, t)|^2 ds + \\ &+ \frac{a^2}{2} \int_0^l (\Delta x_{ss})^2|_{\tau=0} ds = \frac{1}{2} \int_0^l |\Delta x_t(s, t)|^2 ds + \frac{a^2}{2} \int_0^l |\Delta x_{ss}(s, t)|^2 ds \end{aligned}$$

при всех  $t$ ,  $0 < t \leq T$ . Отсюда с помощью неравенства  $|ab| \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$  получим

$$\int_0^l |\Delta x_t(s, t)|^2 ds \leq \int_0^t \left( \int_0^l |\Delta x_t(s, \tau)|^2 ds \right) d\tau + \int_0^T \int_0^l h^2(s, \tau) ds d\tau, \quad 0 < t \leq T.$$

Тогда из леммы 6.3.1 при  $\varphi(t) = \int_0^l |\Delta x_t(s, t)|^2 ds$ ,  $b = \iint_Q h^2(s, t) ds dt$ ,  $a = 1$  следует, что

$$\int_0^l |\Delta x_t(s, t)|^2 ds \leq e^T \iint_Q h^2(s, t) ds dt, \quad 0 < t \leq T. \quad (37)$$

В частности, при  $t = T$  имеем

$$\int_0^l |\Delta x_t(s, T)|^2 ds \leq e^T \iint_Q h^2(s, t) ds dt. \quad (38)$$

Далее, из равенства

$$\Delta x(s, T) = \Delta x(s, 0) + \int_0^T \Delta x_t(s, t) dt$$

с учетом первого условия (34) и оценки (37) получим

$$\begin{aligned} \int_0^l |\Delta x(s, T)|^2 ds &= \int_0^l \left( \int_0^T \Delta x_t(s, t) dt \right)^2 ds \leq \\ &\leq T \int_0^T \left( \int_0^l |\Delta x_t(s, t)|^2 ds \right) dt \leq T^2 e^T \iint_Q h^2(s, t) ds dt. \end{aligned}$$

Сложив эту оценку с (38), придем к оценке (36).

Для преобразования правой части формулы приращения (35) введем сопряженную краевую задачу

$$\begin{aligned} \psi_{tt} + a^2 \psi_{ssss} &= 0, \quad (s, t) \in Q, \\ \psi|_{s=0} = \psi_s|_{s=0} &= 0, \quad \psi_{ss}|_{s=l} = \psi_{sss}|_{s=l} = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \\ \psi|_{t=T} = c_1(s) &= 2(x_t(s, T) - y_1(s)), \quad \psi_t|_{t=T} = -c_0(s) = -2(x(s, T) - y_0(s)), \\ 0 &\leq s \leq l. \end{aligned} \quad (39)$$

Под решением задачи (39) здесь понимается функция  $\psi(s, t, u) = \psi(s, t) \in L_2(Q)$ , удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\begin{aligned} \iint_Q (\Phi_{tt} + a^2 \Phi_{ssss}) \psi ds dt &= 2 \int_0^l (x(s, T) - y_0(s)) \Phi(s, T) ds + \\ &+ 2 \int_0^l (x_t(s, T) - y_1(s)) \Phi_t(s, T) ds \end{aligned}$$

для всех функций  $\Phi = \Phi(s, t) \in H^{4,2}(Q)$ , обладающих обобщенными производными  $\Phi_{xt}, \Phi_{xxt} \in L_2(Q)$  и таких, что  $\Phi|_{s=0} = \Phi_s|_{s=0} = \Phi_{ss}|_{s=l} = \Phi_{sss}|_{s=l} = 0$  при  $0 \leq t \leq T$  и  $\Phi|_{t=0} = \Phi_t|_{t=0} = 0$  при  $0 \leq s \leq l$ .

С помощью решения  $\psi(s, t, u)$  краевой задачи (39) приращение функции (26) можно представить в виде

$$\Delta J(u) = \iint_Q \psi(s, t, u) h(s, t) ds dt + R. \quad (40)$$

В самом деле, из (35) с учетом условий (32)–(34), (39) имеем

$$\begin{aligned} \Delta J(u) &= \int_0^l (-\psi_t(s, T) \Delta x(s, T) + \psi(s, T) \Delta x_t(s, T)) ds + R = \\ &= \int_0^l \int_0^T \frac{\partial}{\partial t} (-\psi_t \Delta x + \psi \Delta x_t) dt ds + R = \iint_Q (-\psi_{tt} \Delta x + \psi \Delta x_{tt}) dt ds + R = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \iint_Q a^2(\psi_{ssss}\Delta x - \psi\Delta x_{ssss}) ds dt + \iint_Q \psi h ds dt + R = \\
&= a^2 \int_0^T (\psi_{ssss}\Delta x - \psi_{ss}\Delta x_s + \psi_s\Delta x_{ss} - \psi\Delta x_{sss})|_{s=0}^{s=l} dt + \\
&\quad + \iint_Q \psi h ds dt + R = \iint_Q \psi(s, t, u)h(s, t) ds dt + R.
\end{aligned}$$

Формула (40) получена. Из (40) и оценки (36) следует, что функция (26) дифференцируема на  $L_2(Q)$ , и ее градиент равен

$$J'(u) = \psi(s, t, u), \quad (s, t) \in Q. \quad (41)$$

Конечно, как и в задаче (1)–(4), приведенный выше вывод формулы (40) и оценки (36) нельзя признать строгим; относительно строгого доказательства формулы (41) см. замечание 7.1. Можно показать, что функция (26) выпукла на  $L_2(Q)$  и принадлежит  $C^{1,1}(L_2)$ . Отсюда и из теоремы 2.8 следует, что задача (26)–(31) имеет хотя бы одно решение. Согласно теореме 3.3 для оптимальности управления  $u_* = u_*(s, t) \in U$  необходимо и достаточно, чтобы

$$\iint_Q \psi(s, t, u_*)(u(s, t) - u_*(s, t)) ds dt \geq 0$$

при всех  $u = u(s, t) \in U$ .

Предлагаем читателю самостоятельно написать итерации методов проекции градиента и условного градиента для задачи (26)–(31) и для  $(k+1)$ -го приближения получить формулы, аналогичные формулам (15)–(18).

### Упражнения

У п р а ж н е н и е 1. Показать, что функция

$$J_1(u) = J(u) + \beta \int_0^T p^2(t) dt + \beta \iint_Q q^2(s, t) ds dt, \quad \beta = \text{const} > 0,$$

где  $J(u)$  взята из (1), при условиях (2), (3) сильно выпукла на  $H = L_2[0, l] \times L_2(Q)$ . Описать метод скорейшего спуска для задачи минимизации  $J_1(u)$  на всем пространстве  $H$ .

У п р а ж н е н и е 2. Показать, что функция

$$J_1(u) = J(u) + \beta \iint_Q u^2(s, t) ds dt, \quad \beta > 0,$$

где  $J(u)$  определяется формулой (26), при условиях (27)–(30) сильно выпукла на  $L_2(Q)$ . Описать метод скорейшего спуска для минимизации  $J_1(u)$  на  $L_2(Q)$ .

У п р а ж н е н и е 3. Найти градиент функций (1) и (26) по начальным условиям  $(\varphi_0, \varphi_1)$ .

У п р а ж н е н и е 4. Пусть в задачах (1)–(4), (19)–(21), (26)–(31) имеются дополнительные ограничения  $|x(s, t, u)| \leq \gamma_0$ ,  $|x_t(s, t, u)| \leq \gamma_2$ ,  $(s, t) \in Q$ . Учесть эти ограничения с помощью штрафных функций, вывести формулу градиента для штрафной функции; описать метод штрафных функций в сочетании с методом проекции градиента или условного градиента.

У п р а ж н е н и е 5. Пусть требуется минимизировать функцию  $J(u) = \int_0^T p^2(t) dt + \iint_Q q^2(s, t) ds dt$  при условиях (2)–(4), (14) или функцию  $J(u) = \iint_Q u^2(s, t) ds dt$  при условиях (27)–(31) и дополнительных ограничениях  $x(s, T, u) = 0$ ,  $x_t(s, T, u) = 0$ ,  $0 \leq s \leq l$ , где  $T > 0$  — заданное время; учесть дополнительные ограничения с помощью штрафных функций; найти градиент штрафной функции.

У п р а ж н е н и е 6. Получите формулу (41), пользуясь результатами примера 3.6. У к а з а н и е: запишите задачу (26)–(31) в форме (8), где  $A$  — оператор (7), действующий из пространства  $H = L_2(Q)$  в пространство  $F = L_2[0, l] \times L_2[0, l]$  при  $(\varphi_0, \varphi_1) = 0$ , покажите, что сопряженный к  $A$  оператор  $A^*$  действует из  $F$  в  $H$  по правилу:  $A^*c = \psi(s, t; c)$ , где  $c = (c_0, c_1)$ ,  $\psi = \psi(s, t; c)$  — решение краевой задачи (39); в случае  $(\varphi_0, \varphi_1) \neq 0$  воспользуйтесь аналогичным (9) представлением решения задачи (27)–(30).

### §9. Оптимальное управление процессами, описываемыми уравнением Гурса–Дарбу

При исследовании процессов сорбции, сушки и др. возникает следующая задача оптимального управления [51; 104; 135; 136; 268; 540; 575; 664; 698; 918]: минимизировать функцию

$$J(u) = \iint_Q f^0(x(s, t), x_s(s, t), x_t(s, t), u(s, t), s, t) ds dt + \Phi(x(l, T)) \quad (1)$$

при условиях

$$x_{st}(s, t) = f(x(s, t), x_s(s, t), x_t(s, t), u(s, t), s, t), \quad (s, t) \in Q, \quad (2)$$

$$x(0, t) = \alpha(t), \quad 0 \leq t \leq T; \quad x(s, 0) = \beta(s), \quad 0 \leq s \leq l, \quad (3)$$

$$u = u(s, t) \in U \subseteq L_2^r(Q), \quad (4)$$

где  $x = (x^1, \dots, x^n)$ ,  $f = (f^1, \dots, f^n)$ ,  $u = (u^1, \dots, u^r)$ ,  $\alpha = (\alpha^1, \dots, \alpha^n)$ ,  $\beta = (\beta^1, \dots, \beta^n)$ ,  $Q = \{(s, t) : 0 \leq s \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ ;  $l, T$  — заданные положительные числа,  $f^i(x, p, q, u, s, t)$ ,  $i = 0, \dots, n$ ,  $\Phi(x)$ ,  $\alpha^i(t)$ ,  $\beta^i(s)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , — заданные функции,  $U$  — заданное множество.

Эту задачу будем рассматривать при выполнении следующих условий:

1) функции  $f^i(x, p, q, u, s, t)$ ,  $i = 0, \dots, n$ , и их частные производные  $f_x^i, f_p^i, f_q^i, f_u^i$  непрерывны по совокупности аргументов  $(x, p, q, u, s, t) \in E^n \times E^n \times E^n \times E^n \times [0, l] \times [0, T]$  и удовлетворяют условию Липшица по  $(x, p, q, u)$ ;

2) функция  $\Phi(x)$  обладает непрерывными частными производными  $\Phi_x(x)$  при всех  $x \in E^n$ ;

3)  $\alpha(t) \in H_n^1[0, T]$ ,  $\beta(s) \in H_n^1[0, l]$ ;  $\alpha(0) = \beta(0)$ .

Под решением задачи (2), (3), соответствующим управлению  $u = u(s, t) \in L_2^r(Q)$ , будем понимать вектор-функцию  $x(s, t) = x(s, t, u) \in L_2^n(Q)$ , имеющую обобщенные производные  $x_s(s, t), x_t(s, t), x_{st}(s, t) \in L_2^n(Q)$  и удовлетворяющую уравнению (2) почти всюду в  $Q$ , а условиям (3) — в смысле равенства соответствующих следов  $x(0, \cdot), x(\cdot, 0)$ .

При сделанных выше предположениях задача (2), (3) при любом  $u = u(s, t) \in L_2^r(Q)$  имеет, и притом единственное, решение. Важно заметить,

что любая вектор-функция  $x(s, t) \in L_2^n(Q)$ , обладающая обобщенными производными  $x_s(s, t), x_t(s, t), x_{st}(s, t) \in L_2^n(Q)$ , непрерывна в замкнутом прямоугольнике  $Q$  (точнее,  $x(s, t)$  эквивалентна непрерывной на  $Q$  функции). Это значит, что решение  $x(s, t, u)$  задачи (2), (3) можем считать непрерывной функцией  $Q$ , и тогда имеет смысл говорить о значении  $x(l, T, u)$ , о величине  $\Phi(x(l, T, u))$ . Таким образом, при сделанных выше предположениях функция (1) определена при всех  $u = u(s, t) \in L_2^r(Q)$ .

Можно показать, что непрерывная на  $Q$  вектор-функция  $x(s, t)$  является решением краевой задачи (2), (3) тогда и только тогда, когда она удовлетворяет интегральному уравнению

$$x(s, t) = \alpha(t) + \beta(s) - \alpha(0) + \int_0^s \int_0^t f(x(\xi, \tau), x_s(\xi, \tau), x_t(\xi, \tau), u(\xi, \tau), \xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (5)$$

Опираясь на это интегральное уравнение, существование и единственность решения задачи (2), (3) могут быть доказаны с помощью рассуждений, аналогичных рассуждениям из доказательства теоремы 6.1.1.

Покажем, что при некоторых сделанных дополнительных предположениях функция (1) дифференцируема на  $L_2^r(Q)$ . Возьмем произвольные  $u, u + h \in L_2^r(Q)$  и соответствующие им решения  $x(s, t, u), x(s, t, u + h)$  задачи (2), (3). Тогда обозначим

$$\begin{aligned} \Delta x(s, t) &= x(s, t, u + h) - x(s, t, u), \\ \Delta f^i &= f^i(x(s, t, u + h), x_s(s, t, u + h), x_t(s, t, u + h), u(s, t) + h(s, t), s, t) - \\ &\quad - f^i(x(s, t), x_s(s, t), x_t(s, t), u(s, t), s, t), \quad i = 0, \dots, n. \end{aligned}$$

Из условий (2), (3) следует, что

$$\Delta x_{st} = \Delta f, \quad (s, t) \in Q, \quad (6)$$

$$\Delta x(0, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad \Delta x(s, 0) = 0, \quad 0 \leq s \leq l. \quad (7)$$

Можно доказать, что верна следующая оценка:

$$\begin{aligned} \max_Q |\Delta x(s, t)| + \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \int_0^l |\Delta x_s(s, t)|^2 ds + \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \int_0^T |\Delta x_t(s, t)|^2 dt \leq \\ \leq C_0 \iint_Q h^2(s, t) ds dt, \quad C_0 = \operatorname{const} > 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Приращение функции (1) равно

$$\Delta J(u) = J(u + h) - J(u) = \iint_Q \Delta f^0 ds dt + \Delta \Phi, \quad (9)$$

где

$$\Delta \Phi = \Phi(x(l, T, u + h)) - \Phi(x(l, T, u)).$$

Умножим уравнение (6) на некоторую функцию  $\psi = \psi(s, t) \in L_2^n(Q)$  и проинтегрируем полученное равенство по прямоугольнику  $Q$ . Будем иметь

$$0 = \iint_Q (\langle \psi, -\Delta x_{st} \rangle + \langle \psi, \Delta f \rangle) ds dt.$$

Сложим это равенство почленно с (9) и получим

$$\Delta J(u) = \iint_Q (\Delta f^0 + \langle \Delta f, \psi \rangle - \langle \psi, \Delta x_{st} \rangle) ds dt + \Delta \Phi.$$

Если ввести функцию Гамильтона–Понтрягина

$$H(x, p, q, u, s, t, \psi) = f^0(x, p, q, u, s, t) + \langle f(x, p, q, u, s, t), \psi \rangle, \quad (10)$$

то приращение  $\Delta J(u)$  можно переписать в виде

$$\Delta J(u) = \iint_Q (\Delta H - \langle \psi, \Delta x_{st} \rangle) ds dt + \Delta \Phi, \quad (11)$$

где величина  $\Delta H = \Delta H(s, t) = H(x + \Delta x, x_s + \Delta x_s, x_t + \Delta x_t, u + h, s, t, \psi) - H(x, x_s, x_t, u, s, t, \psi)$ ; аргументы  $(s, t)$  функций  $x, \Delta x$  и их производных,  $u, h, \psi$  для краткости здесь опущены.

Учитывая ограничения, наложенные выше на функции  $f^i$ ,  $i = 0, \dots, n$ ,  $\Phi(x)$ ,  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$ , с помощью формулы конечных приращений Лагранжа и оценки (8) из (11) имеем

$$\begin{aligned} \Delta J(u) = \iint_Q (\langle H_x, \Delta x \rangle + \langle H_p, \Delta x_s \rangle + \langle H_q, \Delta x_t \rangle + \langle H_u, h \rangle - \langle \psi, \Delta x_{st} \rangle) ds dt + \\ + \langle \Phi_x(x(l, T)), \Delta x(l, T) \rangle + R, \end{aligned} \quad (12)$$

где остаточный член  $R$  удовлетворяет условию

$$|R| \|h\|_{L_2}^{-1} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \|h\|_{L_2} \rightarrow 0; \quad (13)$$

частные производные  $H_x, H_p, H_q, H_u$  в (12) вычислены в точке  $(x(s, t), x_s(s, t), x_t(s, t), u(s, t), s, t, \psi(s, t))$ .

Преобразуем первые три слагаемых в (12) интегрированием по частям с учетом условий (7). С помощью теоремы Фубини [393; 492] получим

$$\begin{aligned} \iint_Q \langle H_x, \Delta x \rangle ds dt &= - \int_0^T \left( \int_0^l \left\langle \frac{d}{ds} \int_s^l H_x(\xi, t) d\xi, \Delta x(s, t) \right\rangle ds \right) dt = \\ &= \iint_Q \left\langle \int_s^l H_x(\xi, t) d\xi, \Delta x_s(s, t) \right\rangle ds dt = \iint_Q \left\langle \int_t^T \int_s^l H_x(\xi, t) d\xi d\tau, \Delta x_{st}(s, t) \right\rangle ds dt; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iint_Q \langle H_p, \Delta x_s \rangle ds dt &= \iint_Q \left\langle \int_t^T H_p(s, \tau) d\tau, \Delta x_{st}(s, t) \right\rangle ds dt, \\ \iint_Q \langle H_q, \Delta x_t \rangle ds dt &= \iint_Q \left\langle \int_s^l H_q(\xi, t) d\xi, \Delta x_{st}(s, t) \right\rangle ds dt.\end{aligned}$$

Кроме того, в силу условий (7) имеем

$$\Delta x(l, T) = \int_0^l \Delta x_s(\xi, T) d\xi = \int_0^l \int_0^T \Delta x_{st}(\xi, \tau) d\xi d\tau = \iint_Q \Delta x_{st} ds dt,$$

поэтому

$$\langle \Phi_x(x(l, T)), \Delta x(l, T) \rangle = \iint_Q \langle \Phi_x(x(l, T)), \Delta x_{st}(s, t) \rangle ds dt.$$

Подставим полученные равенства в формулу (12). Будем иметь

$$\begin{aligned}\Delta J(u) &= \iint_Q \left\langle -\psi(s, t) + \Phi_x(x(l, T)) + \int_t^T H_p(s, \tau) d\tau + \int_s^l H_q(\xi, t) d\xi + \right. \\ &\quad \left. + \int_t^T \int_s^l H_x(\xi, \tau) d\xi d\tau, \Delta x_{st}(s, t) \right\rangle ds dt + \iint_Q \langle H_u(s, t), h(s, t) \rangle ds dt + R. \quad (14)\end{aligned}$$

До сих пор  $\psi = \psi(s, t)$  была произвольной функцией из  $L_2^n(Q)$ . Теперь выберем эту функцию так, чтобы

$$\begin{aligned}\psi(s, t) &= \Phi_x(x(l, T)) + \int_t^T H_p(s, \tau) d\tau + \int_s^l H_q(\xi, t) d\xi + \int_t^T \int_s^l H_x(\xi, \tau) d\xi d\tau, \\ &\quad (s, t) \in Q.\end{aligned} \quad (15)$$

Так как в (15)  $H_p(s, t), H_q(s, t), H_x(s, t)$  представляют собой частные производные  $H_p, H_q, H_x$  функции (10), вычисленные в точке  $(x(s, t), x_s(s, t), x_t(s, t), u(s, t), s, t, \psi(s, t))$ , причем  $H(x, p, q, u, s, t, \psi)$  линейно зависит от переменной  $\psi$ , то (15) является линейным интегральным уравнением относительно  $\psi(s, t)$ . Уравнение (15) аналогично уравнению (5), и существование и единственность его решения  $\psi(s, t) = \psi(s, t, u)$  при сделанных выше предположениях доказывается аналогично тому, как доказывалась теорема 6.1.1.

С учетом условия (15) из (14) имеем

$$\Delta J(u) = \iint_Q \langle H_u(s, t), h(s, t) \rangle ds dt + R. \quad (16)$$

Отсюда и из условия (13) следует, что функция (1) дифференцируема и ее градиент равен

$$J'(u) = H_u(s, t) = H_u(x(s, t, u), x_s(s, t, u), x_t(s, t, u), u(s, t), s, t, \psi(s, t, u)). \quad (17)$$

Подчеркнем, что при выводе формулы (16) исходные функции  $f^0$ ,  $f$  предполагались такими, что  $H_u(s, t) \in L_2^r(Q)$ .

Предлагаем читателю самостоятельно выписать, пользуясь формулой (17), необходимые условия оптимальности в задаче (1)–(4) для выпуклого множества  $U$ , сформулировать условия существования оптимального решения, условия выпуклости и сильной выпуклости функции (1), дать описание градиентного метода, методов проекции градиента и условного градиента.

### Упражнения

У п р а ж н е н и е 1. Получить формулу градиента в задаче (1)–(3), считая, что  $u(s, t) \equiv u(s) \in L_2^r[0, l]$ , или  $u(s, t) \equiv u(t) \in L_2^r[0, T]$ , или  $u(s, t) \equiv \omega \in E^r$ .

У п р а ж н е н и е 2. Применить метод штрафных функций к задаче (1)–(4) при ограничениях  $|x(s, t)| \leq 1$ , или  $|x^i(s, t)| \leq 1$ ,  $i = 1, \dots, n$ , или  $\iint_Q |x(s, t)|^2 ds dt \leq 1$ . Найти градиент штрафной функции.

У п р а ж н е н и е 3. Сформулировать и доказать принцип максимума для задачи (1)–(4), считая, что  $U = \{u(s, t) \in L_2^r(Q) : u(s, t) \in V \text{ почти всюду на } Q\}$ , где  $V$  — заданное множество из  $E^r$  [51].

У п р а ж н е н и е 4. Рассмотреть задачу [104; 119; 134; 135; 478]:

$$J(u) = \iint_Q F^0(z(s, t; u), u(s, t), s, t) ds dt \rightarrow \inf, \quad u \in U, \quad (18)$$

где  $z = z(s, t; u) = (z^1, \dots, z^n)$  — решение задачи

$$z_s^i = F^i(z, u, s, t), \quad i = 1, \dots, m; \quad z_t^i = F^i(z, u, s, t), \quad i = m + 1, \dots, n; \quad (s, t) \in Q = (0, l) \times (0, T) \quad (19)$$

$$z^i(0, t) = \mu^i(t), \quad i = 1, \dots, m; \quad z^i(s, 0) = \nu^i(s), \quad i = m + 1, \dots, n, \quad (20)$$

управление  $u = u(s, t) = (u^1, \dots, u^r) \in L_2^r(Q)$ ,  $U$  — заданное множество из  $L_2^r(Q)$ ;  $F^i(z, u, s, t)$ ,  $i = 0, \dots, n$ ,  $\mu^i(t)$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $\nu^i(s)$ ,  $i = m + 1, \dots, n$  — достаточно гладкие функции своих аргументов. Доказать, что функция (18) дифференцируема в  $L_2^r(Q)$ , найти формулу ее градиента; дать описание методов проекции градиента, условного градиента. У к а з а н и е: показать, что задача (18)–(20) в пространстве переменных  $x = (x^1, \dots, x^n)$ ,  $x^i(s, t) = \int_0^t z^i(s, \tau) d\tau$ ,  $i = 1, \dots, m$ ;  $x^i(s, t) = \int_0^s z^i(\xi, t) d\xi$ ,  $i = m + 1, \dots, n$ , запишется в виде задачи (1)–(4), где

$$f^i = F^i(x_t^1, \dots, x_t^m, x_s^{m+1}, \dots, x_s^n), \quad i = 0, \dots, n;$$

$$\alpha^i(t) = \int_0^t \mu^i(\tau) d\tau, \quad i = 1, \dots, m, \quad \alpha^i(t) = 0, \quad i = m + 1, \dots, n,$$

$$\beta^i(s) = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad \beta^i(s) = \int_0^s \nu^i(\xi) d\xi, \quad i = m + 1, \dots, n;$$

воспользоваться формулами (15), (17) и в них вернуться к исходным переменным  $z$ .

У п р а ж н е н и е 5. Сформулировать и доказать принцип максимума для задачи (18)–(20) в случае множества  $U$  из упражнения 3 [134].

### § 10. Взаимодвойственные задачи управления и наблюдения

1. Под *задачей управления* в этом параграфе будем понимать задачу определения такого допустимого управления, которое переводит динамическую систему из некоторого начального состояния в заданное состояние к заданному моменту времени. Многие задачи управления можно записать в виде операторного уравнения

$$Au = f, \quad (1)$$

где  $A$  — линейный непрерывный оператор, действующий из гильбертова пространства  $H$  в гильбертово пространство  $F$ , т. е.  $A \in \mathcal{L}(H \rightarrow F)$ , элемент  $f \in F$ . Описание оператора  $A$  содержит информацию о начально-краевой задаче, характеризующей динамическую систему, элемент  $f$  связан с начальным или конечным состоянием системы. Поясним сказанное на примерах.

**Пример 1.** Пусть динамическая система описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = D(t)x + B(t)u(t), \quad 0 \leq t \leq T; \quad x(0) = 0, \quad (2)$$

где  $D(t), B(t)$  — кусочно непрерывные матрицы размера  $n \times n$ ,  $n \times r$  соответственно,  $u = u(t) = (u^1(t), \dots, u^r(t)) \in L_2^r[0, T]$  — управление,  $x = x(t) = x(t; u) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$  — траектория системы (2), соответствующая управлению  $u = u(t)$ . Момент  $T > 0$  задан. *Задача управления:* требуется найти управление  $u = u(t) \in L_2^r[0, T]$  такое, что

$$x(T; u) = f, \quad (3)$$

где  $f$  — заданная точка из  $E^n$ . Введем оператор  $A$  следующим образом

$$Au = x(T; u). \quad (4)$$

Выше было показано (см. пример 2.14), что такой оператор  $A$  принадлежит  $\mathcal{L}(H \rightarrow F)$ , где  $H = L_2^r[0, T]$ ,  $F = E^n$ . Из (3), (4) следует, что задача управления (2), (3) может быть записана в виде уравнения (1).

Для более общей, чем (2), системы

$$\dot{y} = D(t)y + B(t)u(t) + f(t), \quad t_0 \leq t \leq T, \quad f(t) \in L_2^n[t_0, T], \quad (5)$$

задача определения управления  $u = u(t)$ , переводящего эту систему из начального состояния  $y(t_0) = y_0$  в заданное конечное состояние  $y(T) = y_1$ , легко может быть сведена к задаче (2), (3). Прежде всего, начальный момент  $t_0$  можем считать равным нулю, так как в противном случае сделаем замену  $\tau = t - t_0$ . Далее, любое решение  $y = y(t; u)$  уравнения (5) представимо в виде (пример 2.15)

$$y(t; u) = x(t; u) + y_0(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

где  $x(t; u)$  — решение системы (2),  $y_0 = y_0(t)$  — решение системы (5) при  $u(t) \equiv 0$ . Отсюда следует, что задача перевода системы (5) из точки  $y_0$  в точку  $y_1$  равносильна уравнению (1) с оператором (4) и  $f = y_1 - y_0(T)$ .

Пример 2. Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{aligned} x_t &= x_{ss}, \quad (s, t) \in Q = (0, l) \times (0, T), \\ x_s|_{s=0} &= 0, \quad (x_s + x)|_{s=l} = u(t), \quad 0 < t < T; \quad x|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq s \leq l, \end{aligned} \quad (6)$$

описывающую температуру стержня (см. задачу (7.2)–(7.5) при  $q \equiv 0$ ,  $\varphi \equiv 0$ ). Ищется управление  $u = u(t) \in L_2[0, T]$  такое, чтобы в заданный момент  $T$  температура стержня имела заданное распределение  $f(s) \in L_2[0, l]$ , т. е.

$$x(s, T; u) = f(s), \quad 0 \leq s \leq l. \quad (7)$$

Введем оператор

$$Au = x(s, T; u), \quad 0 \leq s \leq l. \quad (8)$$

Как было отмечено в § 7, такой оператор  $A$  принадлежит  $\mathcal{L}(H \rightarrow F)$ , где  $H = L_2[0, l]$ ,  $F = L_2[0, l]$ . Отсюда следует, что искомое управление является решением уравнения (1), где оператор  $A$  определен согласно (8), а элемент  $f = f(s)$  взят из (7).

Пример 3. Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{aligned} x_{tt} &= x_{ss}, \quad (s, t) \in Q = (0, l) \times (0, T), \\ x_s|_{s=0} &= u(t), \quad x_s|_{s=l} = 0, \quad 0 < t < T; \quad x|_{t=0} = 0, \quad x_t|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq s \leq l, \end{aligned} \quad (9)$$

описывающую колебания струны (см. задачу (8.2), (8.3) при  $q = 0$ ,  $\varphi_0 = 0$ ,  $\varphi_1 = 0$ ). Будем искать управление  $u = u(t) \in L_2[0, T]$  такое, чтобы в момент  $T > 0$  состояние (смещение и скорость) струны совпало с заданным

$$x(s, T; u) = y_0(s), \quad x_t(s, T; u) = y_1(s), \quad 0 \leq s \leq l, \quad (10)$$

где  $y_0(s), y_1(s) \in L_2[0, l]$  — фиксированные функции. Введем оператор

$$Au = (x(s, T; u), x_t(s, T; u)), \quad (11)$$

который действует из  $H = L_2[0, T]$  в  $F = L_2[0, l] \times L_2[0, l]$ . В § 8 было отмечено, что такой оператор  $A$  принадлежит  $\mathcal{L}(H \rightarrow F)$ . Отсюда видно, что искомое управление является решением операторного уравнения (1), где  $A$  взят из (11), а  $f = (y_0(s), y_1(s)) \in F$  — из (10).

Пример 4. Основываясь на краевой задаче (8.20):

$$\begin{aligned} x_{tt} &= x_{ss} + r(s)u(t), \quad (s, t) \in Q = (0, l) \times (0, T), \\ x|_{s=0} &= x|_{s=l} = 0, \quad 0 < t < T, \quad x|_{t=0} = x_t|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq s \leq l, \end{aligned} \quad (12)$$

сформулируем еще одну задачу управления колебанием струны. Будем искать управление  $u = u(t) \in L_2[0, T]$  такое, чтобы состояние струны в заданный момент  $T$  удовлетворяло условиям (10). Нетрудно видеть, что если ввести оператор  $A$  по той же формуле (11), задачу управления (12), (10) также можно записать в виде уравнения (1).



**2.** Предположим, что некоторая задача управления линейной динамической системой уже записана в виде операторного уравнения (1). Отождествляя задачу управления с уравнением (1), далее будем говорить о задаче управления системой  $A$ . Сформулируем такие важные понятия теории управления, как поточечная управляемость, полная управляемость в терминах уравнения (1).

**О п р е д е л е н и е 1.** Систему  $A$  будем называть *поточечно управляемой* или, иначе,  *$f$ -управляемой*, если уравнение (1) с фиксированной правой частью  $f \in F$  имеет хотя бы одно решение. Скажем, что система  $A$  *вполне управляема*, если уравнение (1) имеет решение при всех  $f \in F$ .

Таким образом, если мы пожелаем узнать, будет ли та или иная линейная динамическая система поточечно или вполне управляемой, а также найти соответствующее управление, то можем обратиться к хорошо развитой теории линейных операторных уравнений, методам их решения [130; 334; 393; 416 и др.]

Приведем без доказательства несколько теорем из этой теории, которые могут быть полезны при исследовании конкретных задач управления. При формулировке этих теорем будем пользоваться обозначениями:  $R(A)$ ,  $R(A^*)$  — область значений оператора  $A \in \mathcal{L}(H \rightarrow F)$  и сопряженного оператора  $A^* \in \mathcal{L}(F \rightarrow H)$ , где  $H, F$  — гильбертовы пространства,  $\overline{R(A)}$ ,  $\overline{R(A^*)}$  — замыкание  $R(A)$ ,  $R(A^*)$  в норме  $F$  и  $H$  соответственно,  $N(A)$ ,  $N(A^*)$  — нули (ядра) операторов  $A$ ,  $A^*$  соответственно,  $U_*(f)$  — множество решений уравнения (1) при фиксированном  $f \in F$ ,  $u_*$  — нормальное решение уравнения (1), определяемое условием:  $\|u_*\|_H = \inf_{u \in U_*(f)} \|u\|_H$ .

**Теорема 1.** Если  $U_*(f) \neq \emptyset$ , то  $U_*(f) = v_* + N(A)$ , где  $v_*$  — произвольный фиксированный элемент из  $U_*(f)$ . Если  $U_*(f) \neq \emptyset$ , то существует, притом единственное, нормальное решение уравнения (1). Для того чтобы элемент  $u_* \in U_*(f)$  был нормальным решением уравнения (1), необходимо и достаточно, чтобы  $u_* \in \overline{R(A^*)}$ .

**Теорема 2.** Если уравнение

$$\Lambda c = f, \quad \Lambda = AA^* \quad (13)$$

разрешимо, то система  $A$   $f$ -управляема, причем  $u_* = A^*c$  — нормальное решение уравнения (1), где  $c$  — произвольное решение уравнения (13). Если  $R(A^*) = \overline{R(A^*)}$ , то верно и обратное: из  $f$ -управляемости системы  $A$  вытекает разрешимость уравнения (13).

**Теорема 3.** Эквивалентны следующие утверждения:

- 1) система  $A$  вполне управляема, т. е.  $U_*(f) \neq \emptyset \quad \forall f \in F$ ;
- 2)  $R(A) = F$ ;
- 3)  $N(A^*) = \{0\}$ ,  $R(A^*) = \overline{R(A^*)}$ ;
- 4) имеет место оценка:  $\|A^*c\|_H \geq \mu \|c\|_F \quad \forall c \in F$ ,  $\mu = \text{const} > 0$ , так что оператор  $A^*$  обратим и  $(A^*)^{-1} \in \mathcal{L}(R(A^*) \rightarrow F)$ ;
- 5) справедлива оценка  $\langle \Lambda c, c \rangle_F \geq \mu \|c\|_F^2 \quad \forall c \in F$ ;
- 6) уравнение (13) имеет, притом единственное, решение при всех  $f \in F$ .

Доказательства теорем 1–4 читатель может найти в [334; 416]. Мы здесь лишь отметим, что их доказательство существенно опирается на разложение гильбертова пространства на прямую сумму взаимно ортогональных подпространств: нулей линейного непрерывного оператора и замыкание области изменения сопряженного оператора [334; 393; 705], т. е.

$$H = N(A) \oplus \overline{R(A^*)}, \quad F = N(A^*) \oplus \overline{R(A)}.$$

**3.** Проиллюстрируем применение теорем 1–3 на примере задачи управления (2), (3), в частности, докажем известные теоремы Н. Н. Красовского, Р. Е. Калмана [411]. Прежде всего заметим, что в задаче (2), (3) множество значений оператора (4) является подпространством конечномерного пространства  $E^n$  и, следовательно, замкнуто, т. е.  $R(A) = \overline{R(A)}$ . Тогда, как известно, замкнута и область значений оператора  $A^*$ , т. е.  $R(A^*) = \overline{R(A^*)}$ . Отсюда и из теоремы 2 следует, что система (2) поточно управляема тогда и только тогда, когда уравнение (13) имеет решение. В рассматриваемой задаче управления (2), (3) оператор  $\Lambda = AA^* \in \mathcal{L}(E^n \rightarrow E^n)$ , и система (13) представляет собой систему  $n$  линейных алгебраических уравнений с  $n$  неизвестными  $c = (c^1, \dots, c^n)$ . Выпишем матрицу  $\Lambda$  этой системы в явном виде, пользуясь представлениями (пример 3.7):

$$Au = \int_0^T \Phi(T, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau, \quad A^*c = B^T(t) \Phi^T(T, t) c, \quad (14)$$

где  $\Phi(t, \tau)$  — решение системы (3.34)

$$\frac{d\Phi(t, \tau)}{dt} = D(t)\Phi(t, \tau), \quad 0 \leq t \leq T; \quad \Phi(\tau, \tau) = I.$$

Отсюда следует, что  $AA^*c = \int_0^T \Phi(T, \tau) B(\tau) B^T(\tau) \Phi^T(T, \tau) c d\tau$ , так что

$$\Lambda = AA^* = \int_0^T \Phi(T, \tau) B(\tau) (\Phi(T, \tau) B(\tau))^T d\tau. \quad (15)$$

Таким образом, для того чтобы узнать, является ли система (2)  $f$ -управляемой, достаточно выяснить разрешимость системы линейных алгебраических уравнений (13) с квадратной матрицей (15). Если  $c = c_*$  — какое-либо решение системы (13), то

$$u = u_*(t) = A^*c_* = B^T(t) \Phi^T(T, t) c_*, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (16)$$

— нормальное решение задачи управления (2), (3). Если система (13), (15) не имеет решения, то система (2) не является  $f$ -управляемой.

Далее, пользуясь теоремой 3, получим следующий критерий полной управляемости системы (2).

**Теорема 4.** Для того, чтобы система (2) была вполне управляемой, необходимо и достаточно выполнения одного из следующих трех условий:

- 1) ранг матрицы (15) равен  $n$ ;
- 2) равенство

$$A^*c = B^T(t)\Phi^T(T, t)c = 0 \quad (17)$$

справедливо почти всюду на  $[0, T]$  тогда и только тогда, когда  $c = 0$ ;

- 3) матрица (15) положительно определена, т. е.  $\langle \Lambda c, c \rangle > 0 \quad \forall c \in E^n, c \neq 0$ .

**Доказательство.** Система (1), (4) и, следовательно, система (13), (15) имеет решение при всех  $f \in E^n$  тогда и только тогда, когда  $\det \Lambda \neq 0$  [192; 353], т. е.  $\text{rang } \Lambda = n$ . Далее, в силу представления (14) для оператора  $A^*$  условие  $N(A^*) = \{c \in F: A^*c = 0\} = \{c = 0\}$  равносильно условию (17). Кроме того, здесь  $R(A^*) = \overline{R(A^*)}$ . Отсюда и из утверждения 3 теоремы 3 следует, что для полной управляемости системы (2) необходимо и достаточно, чтобы тождество (17) выполнялось только при  $c = 0$ . Наконец, утверждение 3 теоремы 4 равносильно утверждению 5 теоремы 3.  $\square$

Опираясь на теорему 4, сформулируем условие полной управляемости системы (2) непосредственно в терминах матриц  $D(t), B(t)$ .

**Теорема 5** (Н. Н. Красовский). Пусть матрицы  $D(t), B(t)$  дифференцируемы  $n - 1$  раз на отрезке  $[0, T]$ . Последовательно определим матрицы

$$K_0(t) = B(t), \quad K_{m+1}(t) = \dot{K}_m(t) - D(t)K_m(t), \quad m = 0, 1, \dots, n - 1, \quad (18)$$

и составим блочную матрицу

$$K(t) = (K_0(t), \dots, K_{n-1}(t)), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (19)$$

размера  $n \times nr$ . Для полной управляемости системы (2) достаточно, чтобы существовал хотя бы один момент  $\tau \in [0, T]$  такой, что

$$\text{rang } K(\tau) = n. \quad (20)$$

**Доказательство.** Возьмем произвольный вектор  $c \in E^n$  и составим функцию

$$z(t, c) = c^T \Phi(T, t)B(t) = c^T \Phi(T, t)K_0(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (21)$$

Поскольку  $\frac{d\Phi(T, t)}{dt} = -\Phi(T, t)D(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$  (см. упражнение 3.3), то, пользуясь индукцией и равенствами (18), нетрудно доказать, что

$$\frac{d^m z(t, c)}{dt^m} = c^T \Phi(T, t)K_m(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad m = 0, 1, \dots, n - 1. \quad (22)$$

Покажем, что  $z(t, c) \equiv 0$ ,  $0 \leq t \leq T$ , только при  $c = 0$ . В самом деле, если  $z(t, c) \equiv 0$ , то и все производные этой функции равны нулю на  $[0, T]$ . С учетом (19), (22) отсюда имеем

$$\begin{aligned} (c^T \Phi(T, t)K_0(t), \dots, c^T \Phi(T, t)K_m(t), \dots, c^T \Phi(T, t)K_{n-1}(t)) = \\ = c^T \Phi(T, t)K(t) \equiv 0 \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

В частности это верно и для момента  $t = \tau$ , взятого из (20), так что  $c^T \Phi(T, \tau) K(\tau) = 0$  или  $K^T(\tau) \Phi^T(T, \tau) c = 0$ . Однако ранг матрицы  $K^T(\tau)$  равен  $n$  в силу (20), поэтому последнее равенство возможно только при  $\Phi^T(T, \tau) c = 0$ . Отсюда, учитывая, что квадратная матрица  $\Phi(T, \tau)$  невырожденная, получаем, что  $c = 0$ . Тем самым установлено, что  $z(t, c) = c^T \Phi(T, t) B(t) \equiv 0$ ,  $0 \leq t \leq T$ , только при  $c = 0$ . Это значит, что равенство (17) возможно только при  $c = 0$ . Согласно теореме 4 система (2) вполне управляема.  $\square$

Для стационарных систем, когда  $D(t), B(t)$  — постоянные матрицы, оказывается, условие (20) необходимо для полной управляемости системы (2).

**Теорема 6** (Р. Е. Калман). Система (20)

$$\dot{x} = Dx + Bu, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (23)$$

где  $D, B$  — постоянные матрицы, вполне управляема тогда и только тогда, когда

$$\text{rang}(B, DB, \dots, D^{n-1}B) = n. \quad (24)$$

**Доказательство.** **Достаточность.** Для постоянных матриц  $D, B$  из (18), (19) следует, что  $K_m = (-1)^m D^m B$ ,  $K = (B, -DB, D^2B, \dots, (-1)^{n-1} D^{n-1}B)$ . Нетрудно видеть, что ранги матрицы  $K$  и матрицы (24) равны, так как столбцы этих матриц отличаются лишь знаками. Отсюда и из (24) следует, что  $\text{rang } K = n$ , и в силу теоремы 5 система (23) вполне управляема.

Заметим, что поскольку матрица (19) здесь не зависит от  $t$ , то условие (20) выполняется при всех  $\tau \in [0, T]$ . Это значит, что при выполнении условия (24) стационарная система (23) вполне управляема на любом отрезке  $[0, T]$ ,  $T > 0$ .

**Необходимость.** Пусть система (23) вполне управляема. Покажем, что тогда выполняется условие (24). Снова воспользуемся функцией (21)

$$z(t, c) = c^T \Phi(T, t) B, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Так как матрицы  $B, D$  не зависят от  $t$ , то функция  $z(t, c)$  бесконечно дифференцируема. Как и в (22), с помощью индукции нетрудно доказать, что

$$z^{(m)} \equiv \frac{d^m z(t, c)}{dt^m} = (-1)^m c^T \Phi(T, t) D^m B \quad \forall t, \quad m = 0, 1, \dots \quad (25)$$

Далее, воспользуемся теоремой Кэли–Гамильтона [192; 353]: любая квадратная матрица  $D$  является корнем своего характеристического многочлена  $\det(D - \lambda I) = 0$ . Это значит, что если  $\det(D - \lambda I) = (\lambda^n + \beta_1 \lambda^{n-1} + \dots + \beta_{n-1} \lambda + \beta_n)(-1)^n$ , то  $D^n + \beta_1 D^{n-1} + \dots + \beta_{n-1} D + \beta_n I = 0$ . Умножим это матричное равенство слева на  $c^T \Phi(T, t)$ , справа на  $B$ . С учетом равенств (25) получим

$$z^{(n)} - \beta_1 z^{(n-1)} + \beta_2 z^{(n-2)} + \dots + (-1)^{n-1} \beta_{n-1} z' + (-1)^n \beta_n z = 0 \quad (26)$$

$$\forall t \in \mathbb{R}.$$

Таким образом, функция  $z = z(t, c)$  при любом фиксированном  $c \in E^n$  является решением линейного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка

с постоянными коэффициентами. Так как  $\Phi(T, T) = I$ , то  $z = z(t, c)$  при  $t = T$  удовлетворяет условиям

$$z^{(m)}(T, c) = (-1)^m c^T D^m B, \quad m = 0, 1, \dots, n-1. \quad (27)$$

Так как по условию система (23) вполне управляема, то равенство (17) возможно только при  $c = 0$ . Отсюда и из (26) следует, что набор

$$(z(t, c), z'(t, c), \dots, z^{(n-1)}(t, c)) \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall c \neq 0. \quad (28)$$

В самом деле, если  $(z(t_0, c_0), \dots, z^{(n-1)}(t_0, c_0)) = 0$  при каких-то  $t_0$  и  $c_0 \neq 0$ , то по теореме единственности решения задачи Коши для уравнения (26) [588; 694]  $z(t, c_0) \equiv 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ , что невозможно в силу (17). Положим в (28)  $t = T$ . С учетом равенств (27) получим  $(c^T B, -c^T DB, c^T D^2 B, \dots, (-1)^{n-1} c^T D^{n-1} B) = c^T (B, -DB, D^2 B, \dots, (-1)^{n-1} D^{n-1} B) \neq 0$  при всех  $c \in E^n$ ,  $c \neq 0$ , что равносильно (24). Теорема 6 доказана.  $\square$

Таким образом, проблему полной управляемости стационарной системы (23) удалось свести к алгебраической задаче (24) определения ранга некоторой матрицы. Условия полной управляемости для задач управления, аналогичных задачам из примеров 2–4, исследованы, например, в [11; 122; 123; 175; 287; 354; 355; 404; 730; 784; 797; 802; 804; 812]. Заметим, что задачу управления (1), конечно, можно записать в виде задачи минимизации квадратичной функции (2.3):  $J(u) = \|Au - f\|_F^2 \rightarrow \inf, u \in U = H$ , из которой при  $J_* = 0$ ,  $U_* \neq \emptyset$  получим решение задачи (1).

4. Покажем, что с каждой задачей управления (1) тесно связана некоторая так называемая двойственная *задача наблюдения*, которую сформулируем следующим образом. Пусть за системой  $A$  ведется наблюдение, и с помощью какой-то измерительной аппаратуры определяется элемент

$$g = A^* c \in H, \quad (29)$$

называемый сигналом; здесь  $A^*$  — оператор, сопряженный к оператору  $A$  из (1). Предполагается, что элемент  $c \in F$  мы не можем наблюдать напрямую, и мы желаем по сигналу (29) определить проекцию неизвестного нам элемента  $c$  на заданный элемент  $f \in F$ , точнее, скалярное произведение  $\langle f, c \rangle_F$ . Будем искать такой элемент  $u \in H$ , называемый *восстанавливающей* величиной  $\langle f, c \rangle_F$ , чтобы скалярное произведение элемента  $u$  на наблюдаемый сигнал  $g$  в точности равнялось искомой величине  $\langle f, c \rangle_F$ , каким бы ни был неизвестный элемент  $c$ , порождающий сигнал (29), т. е. выполнялось равенство

$$\langle u, g \rangle_H = \langle f, c \rangle_F \quad \forall c \in F. \quad (30)$$

Сформулированная задача наблюдения (29), (30) называется *двойственной* к задаче управления (1). На первый взгляд может показаться, что эти задачи слабо связаны друг с другом. Однако верна

**Теорема 7.** *Задачи (1) и (29), (30) одновременно разрешимы или неразрешимы. Если они разрешимы, то решение  $u \in H$  каждой из них удовлетворяет операторному уравнению (1).*

**Доказательство.** Пусть задача наблюдения (29), (30) разрешима, пусть  $u$  — восстанавливающий элемент этой задачи. Тогда из равенств (29), (30) имеем:

$$\langle f, c \rangle_F = \langle u, g \rangle_H = \langle u, A^*c \rangle = \langle Au, c \rangle \quad \forall c \in F. \quad (31)$$

Отсюда следует, что  $\langle Au - f, c \rangle_F = 0 \quad \forall c \in F$ . Полагая в этом равенстве  $c = Au - f$ , получим  $Au - f = 0$ , т. е. восстанавливающий элемент  $u$  является решением уравнения (1). Таким образом, если задача наблюдения (29), (30) разрешима, то задача управления (1) также разрешима. Обратно: если задача управления (1) имеет решение, то для решения этой задачи справедлива та же цепочка равенств (31), из которой следует, что любое решение  $u$  уравнения (1) является восстанавливающим элементом задачи наблюдения (29), (30).  $\square$

Заметим, что задачи (1) и (29), (30) являются *взаимодвойственными* и для их формулировки достаточно знать оператор  $A$  или  $A^*$  и элемент  $f$ . Здесь, конечно, мы учитываем, что  $A \in \mathcal{L}(H \rightarrow F)$ , где  $H, F$  — гильбертовы пространства, и справедливо равенство  $A^{**} = A$ .

**О п р е д е л е н и е 2.** Система  $A$  называется  *$f$ -наблюдаемой* или *поточечной наблюдаемой* по сигналу (29), если уравнение (1) при заданном  $f \in F$  имеет хотя бы одно решение. Система  $A$  называется *вполне наблюдаемой* по сигналу (29), если уравнение (1) имеет решение при всех  $f \in F$ .

Сравнивая определения 1, 2, заключаем, что понятию поточечной управляемости [полной управляемости] в задаче управления соответствует понятие поточечной наблюдаемости [полной наблюдаемости] в двойственной задаче наблюдения.

В силу теоремы 7, связывающей взаимодвойственные задачи управления и наблюдения, при исследовании задачи наблюдения (29), (30) могут быть использованы те же теоремы 1–3. В частности, для выяснения того, будет ли система  $A$   $f$ -наблюдаемой, можно воспользоваться уравнением (13). Если система  $A$  вполне наблюдаема, то в силу утверждения 4 теоремы 3 оператор  $A^*$  обратим,  $(A^*)^{-1} \in \mathcal{L}(R(A^*) \rightarrow F)$ . Отсюда следует, что равенство (29), рассматриваемое как уравнение относительно неизвестного (наблюдаемого) элемента  $c$ , однозначно разрешимо и  $c = (A^*)^{-1}g$ . Оператор  $U = (A^*)^{-1}$  естественно назвать *восстанавливающим оператором*. Если  $F$  — сепарабельное пространство и система  $A$  вполне наблюдаема, то в качестве элемента  $f$  в (30) можно последовательно брать  $f = f_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , где  $\{f_k\}$  — ортонормированный базис в  $F$ . Каждое уравнение  $Au = f_k$  имеет хотя бы одно решение  $u = u_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Тогда по формулам (30), (31) мы можем определить коэффициент Фурье  $c_k = \langle f_k, c \rangle = \langle u_k, g \rangle$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , неизвестного элемента  $c$  и восстановить его по формуле  $c = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \langle u_k, g \rangle f_k$ .

**5.** Сформулируем задачи наблюдения, двойственные к задачам управления из примеров 1–4.

**П р и м е р 1\*.** Оператор  $A^*$ , сопряженный к оператору (4), имеет вид

$$A^*c = B^T(t)\psi(t; c), \quad 0 \leq t \leq T,$$

где  $\psi = \psi(t; c)$  — решение задачи Коши:

$$\dot{\psi} = -D^T(t)\psi, \quad 0 \leq t \leq T; \quad \psi(T) = c \in E^n = F \quad (32)$$

(см. пример 3.7). Задача наблюдения (29), (30) для системы (32), двойственная к задаче управления (2), (3), формулируется так: найти элемент  $u = u(t) \in H = L_2^r[0, T]$ , восстанавливающий величину  $\langle f, c \rangle_{E^n}$  по формуле (30), где  $g(t) = B^T(t)\psi(t; c)$ ,  $0 \leq t \leq T$ , — наблюдаемый сигнал. Согласно теореме 7 восстанавливающий элемент  $u = u(t)$  является решением уравнения (1), где  $A$  — оператор (4). Для решения задачи  $f$ -наблюдаемости для системы (32) можно воспользоваться уравнением (13) с матрицей (15). Теоремы 5, 6 содержат условия полной наблюдаемости системы (32), совпадающие с условиями полной управляемости системы (2).

**Пример 2\*.** Оператор  $A^*$ , сопряженный к оператору (8), действует по формуле

$$A^*c = \psi(l, t; c), \quad 0 \leq t \leq T,$$

где  $\psi = \psi(s, t; c)$  — решение краевой задачи (7.20) с  $c = c(s) \in F = L_2[0, l]$ . Задача наблюдения для системы (7.20), двойственная к задаче управления (6), (7), формулируется так: найти элемент  $u = u(t) \in L_2[0, T] = H$ , восстанавливающий величину  $\langle f, c \rangle_F = \int_0^l f(s)c(s) ds$  по формуле (30), где  $g(t) = \psi(l, t; c)$  — наблюдаемый сигнал. Согласно теореме 7 восстанавливающий элемент  $u = u(t)$  является решением уравнения (1), где  $A$  — оператор (8).

**Пример 3\*.** Оператор  $A^*$ , сопряженный к оператору (11), имеет вид

$$A^*c = \psi(0, t; c),$$

где  $\psi = \psi(s, t; c)$  — решение краевой задачи (8.11), (8.12) при  $c = c(s) = (c_0(s), c_1(s)) \in F = L_2[0, l] \times L_2[0, l]$ . Задача наблюдения для системы (8.11), (8.12), двойственная к задаче управления (9), (10), формулируется так. Наблюдаемый сигнал имеет вид

$$g = g(t) = A^*c = \psi(0, t; c), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Требуется найти функцию  $u = u(t) \in L_2[0, T] = H$ , для которой

$$\langle u, g \rangle_H = \int_0^T u(t)(A^*c)(t) dt = \langle f, c \rangle_F = \int_0^l (f_0(s)c_0(s) + f_1(s)c_1(s)) ds, \quad (33)$$

где  $f = (f_0(s), f_1(s))$  — заданный элемент из  $F$ . Восстанавливающий элемент  $u = u(t)$  является решением уравнения (1), где  $A$  — оператор (11).

**Пример 4\*.** Оператор  $A^*$ , сопряженный к оператору (11), порожденному системой (12), согласно формуле (8.24) имеет вид

$$A^*c = \int_0^l r(s)\psi(s, t; c) ds, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (34)$$

где  $\psi = \psi(s, t; c)$  — решение краевой задачи (8.25). Задача наблюдения для системы (8.25), двойственная к задаче управления (12), (10), формулируется так. Наблюдаемый сигнал имеет вид (34). Требуется найти функцию  $u = u(t) \in L_2[0, T] = H$ , для которой выполняется равенство (33). Восстанавливающий элемент  $u = u(t)$  является решением уравнения (1), где  $A$  — оператор (11), соответствующий системе (12).

**6.** Описанная схема составления взаимодвойственных задач управления и наблюдения может быть применена и к другим классам линейных динамических систем, описываемых различными дифференциальными, интегродифференциальными, разностными уравнениями.

Параллельное изучение пар взаимодвойственных задач управления и наблюдения позволяет глубже понять многие аспекты теории таких задач, открывает возможности использования методов, разработанных для решения, скажем, задач управления, и применения их к задачам наблюдения и наоборот. В частности, отметим, что сформулированный выше класс задач наблюдения (29), (30) является подклассом обратных задач. Поэтому математический аппарат, разработанный в рамках теории и методов решения обратных задач (см., например, [127; 230; 269; 557; 618; 812]), может быть использован для исследования как задач наблюдения, так и двойственных к ним задач управления. Использование идей двойственности полезно также и при исследовании вопросов аппроксимации задач управления и наблюдения [170; 363; 433; 598; 599; 607; 797; 804].

### Упражнения

**У п р а ж н е н и е 1.** Проверить, что система  $\dot{x} = u(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ , вполне управляема в классе постоянных управлений при всех  $T > 0$ .

**У п р а ж н е н и е 2.** Доказать, что система  $\dot{x} = u(t)$ ,  $\dot{y} = -u(t)$ ,  $u = u(t) \in L_2[0, T]$ , поточно управляема тогда и только тогда, когда  $x(T) + y(T) = x(0) + y(0)$ .

**У п р а ж н е н и е 3.** Исследовать, будут ли следующие системы поточно или вполне управляемы [наблюдаемы]:

$$\begin{array}{lll} 1) \begin{cases} \dot{x} = y + u(t), \\ \dot{y} = -x; \end{cases} & 2) \begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = u(t); \end{cases} & 3) \begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x + u(t); \end{cases} & 4) \begin{cases} \dot{x} = x + u(t), \\ \dot{y} = x + y; \end{cases} \\ 5) \begin{cases} \dot{x} = x + u(t), \\ \dot{y} = x + y + v(t); \end{cases} & 6) \begin{cases} \dot{x} = 2x - 2y + u(t), \\ \dot{y} = y - x - \frac{1}{2}u(t); \end{cases} & 7) \begin{cases} \dot{x}^1 = x^2, \\ \dot{x}^2 = x^3, \\ \dot{x}^3 = u(t). \end{cases} \end{array}$$

**У п р а ж н е н и е 4.** Доказать, что система (2) не является вполне управляемой тогда и только тогда, когда существует такой вектор  $c_* \in E^n$ ,  $c_* \neq 0$ , что правые концы всех траекторий системы принадлежат гиперплоскости  $\Gamma = \{x \in E^n: \langle c_*, x \rangle = 0\}$ , т. е.  $\langle c_*, x(T, u) \rangle = 0 \forall u \in L_2^*[0, T]$ . **У к а з а н и е:** воспользоваться утверждением 2) теоремы 4 (см. также [411; 712]).

**У п р а ж н е н и е 5.** Можно ли утверждать, что если  $N(A^*) = \{0\}$ , то  $N(A)$  также состоит из единственной нулевой точки? **У к а з а н и е:** рассмотреть оператор с матрицей  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ , действующий из  $E^2$  в  $E^3$ .

**У п р а ж н е н и е 6.** Доказать, что если  $A \in \mathcal{L}(H \rightarrow F)$ ,  $H, F$  — гильбертовы пространства, то  $R(A) = \overline{R(A)}$  тогда и только тогда, когда или 1)  $R(A^*) = \overline{R(A^*)}$  [416], или 2)  $\inf \|Au\| > 0$ , где нижняя грань берется по всем  $u \in H$ ,  $\|u\| = 1$ ,  $\langle u, v \rangle = 0 \forall v \in N(A)$  [131].



У п р а ж н е н и е 7. Докажите теоремы 1–3.

У п р а ж н е н и е 8. Доказать, что оператор  $A^+$ , который каждому  $f \in R(A)$  ставит в соответствие нормальное решение уравнения (1), является линейным. Если  $R(A) = \overline{R(A)}$ , то  $A^+ \in \mathcal{L}(R(A) \rightarrow F)$ ,  $N(A^+) = N(A^*)$ ,  $R(A^+) = R(A^*)$ ,  $A^+A = I - \mathcal{P}_{N(A)}$  ( $\mathcal{P}_U$  — оператор проектирования на  $U$ ),  $AA^+ = \mathcal{P}_{R(A)}$  (в частности, если  $R(A) = F$ , то  $AA^+ = I$ , поэтому оператор  $A^+$  называют *псевдообратным* к оператору  $A$ ),  $AA^+A = A$ ,  $A^+AA^+ = A^+$ ,  $(AA^+)^* = AA^+$ ,  $(A^+A)^* = A^+A$ ,  $A^{++} = A$ ,  $(A^*)^+ = (A^+)^*$ .

У п р а ж н е н и е 9. Для системы (7.2)–(7.5) задачу управления  $x(s, T; u) = f(s)$ ,  $0 \leq s \leq l$ , записать в виде уравнения (1); сформулировать двойственную к ней задачу наблюдения. У к а з а н и е: воспользоваться операторами (7.10), (7.19).

У п р а ж н е н и е 10. Для системы (8.2), (8.3) задачу управления (10) записать в виде уравнения (1); сформулировать двойственную к ней задачу наблюдения. У к а з а н и е: воспользоваться операторами (8.7), (8.10).

У п р а ж н е н и е 11. Для системы (8.27)–(8.30) задачу управления (10) записать в виде уравнения (1); сформулировать двойственную к ней задачу наблюдения. У к а з а н и е: по формуле (11) ввести оператор  $A$ , действующий из  $H = L_2(Q)$  в  $F = L_2[0, l] \times L_2[0, l]$ ; убедиться, что  $A \in \mathcal{L}(H \rightarrow F)$ ; показать, что сопряженный оператор  $A^*$  действует по правилу  $A^*c = \psi(s, t; c)$ , где  $\psi = \psi(s, t; c)$  — решение краевой задачи (8.39).

У п р а ж н е н и е 12. Пусть колебания струны описываются краевой задачей

$$x_{tt} = x_{ss}, \quad (s, t) \in Q = (0, l) \times (0, T), \\ x|_{s=0} = u(t), \quad x|_{s=l} = 0, \quad 0 < t < T; \quad x|_{t=0} = 0, \quad x_t|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq s \leq l.$$

Задача управления: найти  $u = u(t) \in L_2[0, T]$ , чтобы  $x|_{t=T} = y_0(s)$ ,  $x_t|_{t=T} = y_1(s)$ ,  $0 \leq s \leq l$ . Доказать [804], что эта задача при  $T > 2l$  имеет решение при всех  $y_0(s) \in L_2[0, l]$ ,  $y_1(s) \in H^{-1}[0, l]$ . Сформулировать двойственную задачу наблюдения. У к а з а н и е: показать, что оператор  $A$  из (11) в этой задаче действует из  $H = L_2[0, T]$  в  $F = L_2[0, l] \times H^{-1}[0, l]$ , непрерывен, а сопряженный к нему оператор  $A^*$  действует по правилу:  $A^*c = \psi_s(0, t; c)$ , где  $\psi = \psi(s, t; c)$  — решение краевой задачи

$$\psi_{tt} = \psi_{ss}, \quad (s, t) \in Q; \quad \psi|_{s=0} = \psi|_{s=l} = 0, \quad \psi|_{t=T} = c_1(s), \quad \psi_t|_{t=T} = -c_0(s),$$

где  $c = (c_0(s), c_1(s)) \in F^* = L_2[0, l] \times H_0^1[0, l]$ ; доказать оценку:  $\|A^*c\|_H \geq \frac{T-2l}{l}\|c\|_F$  [804] и воспользоваться утверждением 4) теоремы 3 (в других функциональных пространствах такая задача управления исследовалась в [354; 355]).

У п р а ж н е н и е 13. За динамической системой

$$\dot{\psi}t = \psi_{ss}, \quad (s, t) \in Q = (0, l) \times (0, T), \quad \psi|_{s=0} = \psi|_{s=l} = 0, \quad \psi|_{t=T} = c(s)$$

ведется наблюдение и измеряется сигнал  $g(t) = \psi_s(0, t; c)$ ,  $0 \leq t \leq T$ . Требуется найти элемент  $u = u(t) \in L_2[0, T] = H$ , восстанавливающий величину  $\langle f, c \rangle_{L_2[0, l]}$  по правилу (30), где  $f = f(s) \in F = L_2[0, l]$  — заданный элемент. Для этой задачи наблюдения сформулировать двойственную задачу управления.

## § 11. Метод моментов

1. Сначала изложим элементы теории моментов. Начнем с так называемой *конечномерной проблемы моментов*.

Пусть  $B$  — банахово пространство,  $B^*$  — сопряженное к  $B$  пространство. Пусть заданы элементы  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \in B$  и вещественные числа  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ . Проблема моментов формулируется так: найти линейный функционал  $u \in B^*$  такой, что

$$\langle u, \varphi_i \rangle = \mu_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1)$$

Напоминаем, что через  $\langle u, \varphi \rangle$  мы обозначаем значение функционала  $u$  на элементе  $\varphi \in B$ . Рассмотрим условия, обеспечивающие существование решения проблемы (1). Если  $\mu = 0$ , то, очевидно, проблема (1) всегда имеет решение, например,  $u = 0$ . Пусть  $\mu \neq 0$ . Тогда, оказывается, важную роль при исследовании вопросов существования решения проблемы (1) играет следующая конечномерная задача минимизации:

$$g(c) = \left\| \sum_{i=1}^n c^i \varphi_i \right\|_B \rightarrow \inf, \quad c \in \Gamma_\mu = \{c = (c^1, \dots, c^n) \in E^n : \langle \mu, c \rangle = 1\}. \quad (2)$$

Убедимся, что задача (2) имеет решение. Заметим, что  $\Gamma_\mu$  — гиперплоскость в  $E^n$  — это непустое выпуклое замкнутое множество. Функция  $g(c)$  непрерывна и, более того, удовлетворяет условию Липшица на  $E^n$ :

$$|g(c + \delta c) - g(c)| \leq \left\| \sum_{i=1}^n \delta c^i \varphi_i \right\| \leq \max_{1 \leq i \leq n} |\delta c^i| \sum_{i=1}^n \|\varphi_i\| = L \|\delta c\|_\infty \quad \forall c, c + \delta c \in E^n.$$

Сначала рассмотрим случай, когда система  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  линейно независима. При этом  $g(c) = 0$  тогда и только тогда, когда  $c = 0$ . Непрерывная функция  $g(c) > 0$  на компактном множестве  $S = \{c : |c| = 1\}$  достигает своей нижней грани хотя бы в одной точке  $c_0 \in S$ , причем  $g(c_0) = \min_S g(c) > 0$ . Поэтому

$$g(c) = |c| \cdot \left\| \sum_{i=1}^n \frac{c^i}{|c|} \varphi_i \right\| \geq |c| g(c_0) \rightarrow +\infty \quad \text{при} \quad |c| \rightarrow \infty.$$

Согласно теореме 2.1.3 найдется точка  $c_* \in \Gamma_\mu$ , для которой  $\inf_{c \in \Gamma_\mu} g(c) = g(c_*) = g_*$ . Так как  $0 \notin \Gamma_\mu$ , то  $c_* \neq 0$  и  $g(c_*) = g_* > 0$ .

Пусть теперь система  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  линейно зависима. Не умаляя общности, можем считать, что элементы  $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ ,  $k < n$ , линейно независимы, а остальные  $\varphi_{k+1}, \dots, \varphi_n$  линейно выражаются через них:

$$\varphi_j = \sum_{i=1}^k \alpha_{ij} \varphi_i, \quad (\alpha_{1j}, \dots, \alpha_{kj}) \neq 0, \quad j = k+1, \dots, n. \quad (3)$$

Тогда

$$g(c) = \left\| \sum_{i=1}^k c^i \varphi_i + \sum_{j=k+1}^n c^j \left( \sum_{i=1}^k \alpha_{ij} \varphi_i \right) \right\| = \left\| \sum_{i=1}^k \left( c^i + \sum_{j=k+1}^n c^j \alpha_{ij} \right) \varphi_i \right\|. \quad (4)$$

Допустим, что

$$\mu_j = \sum_{i=1}^k \alpha_{ij} \mu_i, \quad j = k+1, \dots, n. \quad (5)$$

Условие  $\langle \mu, c \rangle = 1$  в этом случае запишется в виде

$$\sum_{i=1}^k c^i \mu_i + \sum_{j=k+1}^n c^j \left( \sum_{i=1}^k \alpha_{ij} \mu_i \right) = \sum_{i=1}^k \left( c^i + \sum_{j=k+1}^n c^j \alpha_{ij} \right) \mu_i = 1. \quad (6)$$

Введем новые переменные  $\bar{c}^i = c^i + \sum_{j=k+1}^n c^j \alpha_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, k$ ,  $\bar{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_k)$ ,  $\bar{g}(\bar{c}) = \left\| \sum_{i=1}^k \bar{c}_i \varphi_i \right\|$ . Тогда с учетом соотношений (4), (6) имеем:  $\inf_{\langle \mu, c \rangle = 1} g(c) = \inf_{\langle \bar{\mu}, \bar{c} \rangle = 1} \bar{g}(\bar{c})$ . Так как элементы  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}$  линейно независимы, то, как было установлено выше, найдется точка  $\bar{c}_* = (\bar{c}_*^1, \dots, \bar{c}_*^k)$ ,  $\langle \bar{\mu}, \bar{c}_* \rangle = 1$ , такая, что  $\bar{g}(\bar{c}_*) = \inf_{\langle \bar{\mu}, \bar{c} \rangle = 1} \bar{g}(\bar{c}) > 0$ . Тогда  $c_* = (\bar{c}_*^1, \dots, \bar{c}_*^k, 0, \dots, 0) \in E^n$  удовлетворяет условию  $\langle \mu, c_* \rangle = 1$  и  $\bar{g}(\bar{c}_*) = g(c_*) = \inf_{\langle \mu, c \rangle = 1} g(c) = g_* > 0$ . Таким образом, задача (2) разрешима и в случае (3), (5), причем  $g_* > 0$ . Наконец, рассмотрим случай, когда  $\varphi_1, \dots, \varphi_k$  линейно независимы, выполнены условия (3), но (5) нарушено при некотором  $j = j_0$ ,  $k + 1 \leq j_0 \leq n$ , т. е.  $\mu_{j_0} - \sum_{i=1}^k \alpha_{ij_0} \mu_i = \alpha \neq 0$ . Определим  $c_* = (c_*^1, \dots, c_*^n)$  так:  $c_*^i = -\frac{\alpha_{ij_0}}{\alpha}$ ,  $i = 1, \dots, k$ ,  $c_*^{j_0} = \frac{1}{\alpha}$ , остальные  $c_*^j = 0$ . Тогда

$$\langle \mu, c_* \rangle = \sum_{i=1}^k \mu_i \left( -\frac{\alpha_{ij_0}}{\alpha} \right) + \mu_{j_0} \frac{1}{\alpha} = \left( \mu_{j_0} - \sum_{i=1}^k \mu_i \alpha_{ij_0} \right) \frac{1}{\alpha} = 1,$$

т. е.  $c_* \in \Gamma_\mu$ . Кроме того, с учетом равенства (4) имеем:

$$g(c_*) = \left\| \sum_{i=1}^k \left( -\frac{\alpha_{ij_0}}{\alpha} + \frac{\alpha_{ij_0}}{\alpha} \right) \varphi_i \right\| = 0 = \inf_{\langle \mu, c \rangle = 1} g(c) = g_*.$$

Таким образом, доказана

**Теорема 1.** Пусть  $\mu \neq 0$ . Тогда задача (2) имеет решение, т. е. существует такое  $c_* \in \Gamma_\mu$ , что  $\inf_{\langle \mu, c \rangle = 1} g(c) = g(c_*) = g_* \geq 0$ , причем:

1)  $g_* > 0$ , если  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  линейно независимы или  $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ ,  $k < n$ , линейно независимы и выполнены равенства (3), (5);

2)  $g_* = 0$ , если  $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ ,  $k < n$ , линейно независимы, выполнены равенства (3), но хотя бы одно из равенств (5) не выполнено.

Теперь мы можем сформулировать следующий критерий существования решения проблемы моментов (1). Обозначим через  $U_*$  множество решений этой проблемы. Заметим, что проблема (1) в общем случае может иметь много решений. Решение  $u_*$  проблемы (1) назовем *нормальным решением*, если  $\|u_*\| = \min_{u \in U_*} \|u\|$ . Если  $\mu = 0$ , то  $u_* = 0$ , очевидно, является нормальным решением проблемы (1).

**Теорема 2.** Пусть  $\mu \neq 0$ . Тогда для того чтобы  $U_* \neq \emptyset$ , необходимо и достаточно, чтобы в задаче (2)  $g_* = \inf_{\langle \mu, c \rangle = 1} \left\| \sum_{i=1}^n c^i \varphi_i \right\| > 0$ . Если  $U_* \neq \emptyset$ , то существует нормальное решение  $u_*$  проблемы (1), причем  $\|u_*\| = \frac{1}{g_*}$ . Множество решений проблемы (1) представимо в виде:  $U_* = u_* + U_{0*}$ , где  $U_{0*}$  — множество решений проблемы (1) при  $\mu = 0$ .

**Доказательство.** Необходимость. Пусть  $U_* \neq \emptyset$ . Возьмем произвольные  $u \in U_*$  и  $c \in \Gamma_\mu$ . Умножим  $i$ -е равенство (1) на  $c^i$

и просуммируем получившиеся равенства:

$$\sum_{i=1}^n c^i \langle u, \varphi_i \rangle = \left\langle u, \sum_{i=1}^n c^i \varphi_i \right\rangle = \langle \mu, c \rangle = 1.$$

Тогда

$$1 \leq \|u\| \cdot \left\| \sum_{i=1}^n c^i \varphi_i \right\| \quad \forall c \in \Gamma_\mu.$$

Переходя к нижней грани по  $c \in \Gamma_\mu$ , отсюда получаем  $1 \leq \|u\| g_*$ . Следовательно,  $g_* > 0$  и, кроме того,

$$0 < \frac{1}{g_*} \leq \|u\| \quad \forall u \in U_*. \quad (7)$$

**Д о с т а т о ч н о с т ь.** Пусть  $g_* > 0$ . Покажем, что тогда проблема моментов (1) имеет хотя бы одно решение, причем  $\exists u_* \in U_*$ , для которого  $\|u_*\| = \frac{1}{g_*}$ . Введем два множества  $M$  и  $N$  следующим образом:

$$M = \{\varphi \in B: \|\varphi\| \leq g_*\},$$

$$N = \left\{ \varphi \in B: \varphi = \sum_{i=1}^n c^i \varphi_i \text{ для какого-либо } c \in \Gamma_\mu \right\}.$$

Нетрудно проверить, что оба множества выпуклы,  $\text{int } M \neq \emptyset$ . Кроме того,  $\|\varphi\| \geq g_* \quad \forall \varphi \in N$  и  $\|\varphi\| < g_* \quad \forall \varphi \in \text{int } M$ , так что  $\text{int } M \cap N = \emptyset$ . По теореме 3.9 множества  $M$  и  $N$  отделимы, т. е. существует такое  $u_* \in B^*$ , что

$$\langle u_*, \varphi \rangle \leq 1 \quad \forall \varphi \in M, \quad \langle u_*, \varphi \rangle \geq 1 \quad \forall \varphi \in N. \quad (8)$$

Возьмем какую-либо точку  $c_* \in \Gamma_\mu$ , для которой  $g(c_*) = \inf_{\Gamma_\mu} g(c) = g_*$  (теорема 1), и положим  $\varphi_* = \sum_{i=1}^n c_*^i \varphi_i$ . Нетрудно видеть, что  $\varphi_* \in M \cap N$ . Тогда из (8) следует, что  $\langle u_*, \varphi_* \rangle = 1$ . Покажем, что

$$\langle u_*, \varphi \rangle = 1 \quad \forall \varphi \in N. \quad (9)$$

Возьмем произвольный элемент  $\varphi \in N$ . По определению множества  $N$  найдется точка  $c \in \Gamma_\mu$ , что  $\varphi = \sum_{i=1}^n c^i \varphi_i$ . Для точки  $c_\alpha = \alpha c + (1 - \alpha)c_*$  имеем  $\langle \mu, c_\alpha \rangle = \alpha \langle \mu, c \rangle + (1 - \alpha) \langle \mu, c_* \rangle = 1 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$ . Тогда

$$\varphi_\alpha = \alpha \varphi + (1 - \alpha) \varphi_* = \alpha \sum_{i=1}^n c^i \varphi_i + (1 - \alpha) \sum_{i=1}^n c_*^i \varphi_i = \sum_{i=1}^n c_\alpha^i \varphi_i \in N \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

В силу (8)  $1 \leq \langle u_*, \varphi_\alpha \rangle = \langle u_*, \alpha \varphi + (1 - \alpha) \varphi_* \rangle = \langle u_*, \varphi_* \rangle + \alpha \langle u_*, \varphi - \varphi_* \rangle = 1 + \alpha \langle u_*, \varphi - \varphi_* \rangle$  или  $0 \leq \alpha \langle u_*, \varphi - \varphi_* \rangle \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$ . Это возможно только при  $\langle u_*, \varphi - \varphi_* \rangle = 0$ , т. е.  $\langle u_*, \varphi \rangle = \langle u_*, \varphi_* \rangle = 1 \quad \forall \varphi \in N$ . Равенство (9) установлено. Покажем, что  $u_*$  — решение проблемы (1). Так как  $\mu \neq 0$ , то  $\mu_i \neq 0$  при каком-либо  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Для таких  $\mu_i$  положим  $c = c_0 = \left(0, \dots, 0, c_0^i = \frac{1}{\mu_i}, 0, \dots, 0\right)$ .

Ясно, что  $\langle \mu, c_0 \rangle = 1$ , поэтому  $\varphi_0 = \frac{1}{\mu_i} \varphi_i \in N$ . Согласно (9) тогда  $1 = \langle u_*, \varphi_0 \rangle = \frac{1}{\mu_i} \langle u_*, \varphi_i \rangle$ , т. е.  $\langle u_*, \varphi_i \rangle = \mu_i$  для всех  $i$ , для которых  $\mu_i \neq 0$ . Если же  $\mu_i = 0$ , то возьмем  $c_\beta = (c_*^1, \dots, c_*^{i-1}, c^i = \beta, c_*^{i+1}, \dots, c_*^n)$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ . Так как  $\langle \mu, c_\beta \rangle = \sum_{j=1, j \neq i}^n \mu_j c_*^j + 0 \cdot \beta = \langle \mu, c_* \rangle = 1 \quad \forall \beta \in \mathbb{R}$ , то  $\varphi_\beta = \sum_{i=1}^n c_\beta^i \varphi_i \in N \quad \forall \beta \in \mathbb{R}$ . В силу (9) тогда  $1 = \langle u_*, \varphi_\beta \rangle = \sum_{j=1, j \neq i}^n c_\beta^j \varphi_j + \beta \langle u_*, \varphi_i \rangle \quad \forall \beta \in \mathbb{R}$ . Разделим это равенство на  $\beta > 0$  и устремим  $\beta \rightarrow +\infty$ . Получим:  $\langle u_*, \varphi_i \rangle = 0 = \mu_i$ . Таким образом, показано, что  $\langle u_*, \varphi_i \rangle = \mu_i$  при всех  $i = 1, \dots, n$ , т. е.  $u_* \in U_*$ .

Убедимся, что  $u_*$  — нормальное решение проблемы (1). Так как  $\langle u_*, \varphi \rangle \leq 1 \quad \forall \varphi \in M$  в силу (8), то

$$\|u_*\| = \sup_{\|\varphi\| \leq 1} \langle u_*, \varphi \rangle = \sup_{\|\varphi\| \leq g_*} \left\langle u_*, \frac{\varphi}{g_*} \right\rangle = \frac{1}{g_*} \sup_{\varphi \in M} \langle u_*, \varphi \rangle \leq \frac{1}{g_*}.$$

С другой стороны, для точки  $u_* \in U_*$  из условия (7) имеем:  $\|u_*\| \geq \frac{1}{g_*}$ . Следовательно,  $\|u_*\| = \inf_{U_*} \|u\| = \frac{1}{g_*}$ , т. е.  $u_*$  — нормальное решение проблемы (1). Попутно получили, что

$$g_* \|u_*\| = 1 = \langle u_*, \varphi_* \rangle. \quad (10)$$

Равенство

$$U_* = u_* + U_{0*}$$

предлагаем читателю доказать самостоятельно.  $\square$

**2.** Рассмотрим так называемую конечномерную  $l$ -проблему моментов: найти функционал  $u \in B^*$  такой, что

$$\langle u, \varphi_i \rangle = \mu_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad \|u\| \leq l, \quad (11)$$

где  $l > 0$  — заданное число. Как видим,  $l$ -проблема моментов отличается от проблемы (1) наличием дополнительного ограничения  $\|u\| \leq l$ . Опираясь на теорему 2, нетрудно получить критерий разрешимости  $l$ -проблемы (11). Заметим тогда, что при  $\mu = 0$  проблема (11) всегда имеет решение, например,  $u_* = 0$ .

**Теорема 3** (см. [441]). Пусть  $\mu \neq 0$ . Для того чтобы проблема (11) имела хотя бы одно решение, необходимо и достаточно, чтобы

$$g_* = \inf_{\langle \mu, c \rangle = 1} \left\| \sum_{i=1}^n c^i \varphi_i \right\| \geq \frac{1}{l}. \quad (12)$$

**Доказательство. Необходимость.** Пусть  $u$  — решение  $l$ -проблемы (11). Тогда  $u$  является решением и проблемы (1), и по теореме 2 необходимо  $g_* > 0$ ,  $l \geq \|u\| \geq \frac{1}{g_*}$ .

**Д о с т а т о ч н о с т ь.** Пусть  $g_* \geq \frac{1}{l}$ . Согласно теореме 2 проблема (1) имеет нормальное решение  $u_*$  с нормой  $\|u_*\| = \frac{1}{g_*} \leq l$ , так что  $u_*$  — решение проблемы (11). Теорема 3 доказана.  $\square$

**З а м е ч а н и е 1.** Основываясь на теоремах 1–3, можно наметить следующий порядок действий для определения решения проблем (1), (11). Можем считать, что  $\mu \neq 0$ . Тогда задача (2) имеет смысл, и, решая эту задачу, можем определить

$$c_* \in \Gamma_\mu, \quad g(c_*) = g_* = \|\varphi_*\|, \quad \varphi_* = \sum_{i=1}^n c_*^i \varphi_i.$$

Так как проекция точки на гиперплоскость  $\Gamma_\mu$  легко вычисляется (пример 4.4.2), то при решении задачи (2) можно использовать метод проекции градиента или субградиента (см. § 5.2, 5.3). Если при этом выяснится, что  $g_* = 0$ , то согласно теореме 2 проблема (1) не имеет решения. Если  $g_* > 0$ , то проблема (1) разрешима. Нормальное решение  $u_*$  проблемы (1) удовлетворяет равенствам (10), которые можно присоединить к системе уравнений (1). В частности, если равенства (10) однозначно определяют элемент  $u_*$ , то  $u_*$  — нормальное решение проблемы (1). Например, если  $B = H$  — гильбертово пространство, то из (10) имеем  $u_* = \frac{\varphi_*}{g_*}$ . Если найденное нормальное решение  $u_*$  проблемы (1) удовлетворяет неравенству  $\|u_*\| \leq l$ , то  $u_*$  — решение  $l$ -проблемы (11). Если же  $\|u_*\| > l$ , то проблема (11) не имеет решения.

**З а м е ч а н и е 2.** Если  $B = H$  — гильбертово пространство, то можно предложить следующий более простой метод решения проблемы (1), явно не использующий задачу (2). А именно, решение можем искать в виде

$$u = \sum_{i=1}^n a^i \varphi_i. \quad (13)$$

Подставив (13) в (1) для определения неизвестных коэффициентов  $a^1, \dots, a^n$ , получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^n \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle a^i = \mu_j, \quad j = 1, \dots, n. \quad (14)$$

Нетрудно видеть, что элемент  $u$  из (13) будет решением проблемы (1) тогда и только тогда, когда  $a = (a^1, \dots, a^n)$  — решение системы (14). Матрица системы (14) симметрична и представляет собой матрицу Грама [89; 192; 353] системы векторов  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ . Если эти векторы линейно независимы, то матрица Грама невырождена, и система (14) имеет единственное решение.

**3.** Остановимся на бесконечномерной проблеме моментов, также имеющей приложение в задачах управления. Пусть заданы некоторая последовательность элементов  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$  из банахова пространства  $B$  и числовая последовательность  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, \dots$ . Требуется найти функционал  $u \in B^*$ , удовлетворяющий условиям

$$\langle u, \varphi_i \rangle = \mu_i, \quad i = 1, 2, \dots \quad (15)$$

Покажем, что разрешимость сформулированной проблемы моментов (15) тесно связана с разрешимостью следующих конечномерных проблем моментов, полученных «усечением» проблемы (15): ищется функционал  $u_n \in B^*$  такой, что

$$\langle u_n, \varphi_i \rangle = \mu_i, \quad i = 1, \dots, n; \quad n = 1, 2, \dots \quad (16)$$

Согласно теореме 2 проблема (16) при каждом фиксированном  $n$  разрешима тогда и только тогда, когда  $(\mu_1, \dots, \mu_n) = 0$  или  $g_{n*} > 0$ , где

$$g_{n*} = \inf_{\langle \mu_n, c_n \rangle = 1} \left\| \sum_{i=1}^n c_n^i \varphi_i \right\|, \quad c_n = (c_n^1, \dots, c_n^n).$$

**Теорема 4.** Пусть  $B$  — сепарабельное банахово пространство. Для того чтобы проблема (15) имела решение, необходимо и достаточно, чтобы проблемы (16) были разрешимы при каждом  $n \geq 1$  и  $\sup_{n \geq 1} \|u_{n*}\| < \infty$ , где  $u_{n*}$  — нормальное решение проблемы (16).

**Доказательство. Необходимость.** Пусть  $u$  — решение проблемы (15). Тогда, очевидно,  $u$  является решением проблемы (16) при каждом  $n \geq 1$ . Из разрешимости проблемы (16) при каждом  $n \geq 1$  и теоремы 2 следует существование нормального решения  $u_{n*}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Тогда  $\|u_{n*}\| \leq \|u\|$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , так что  $\sup_{n \geq 1} \|u_{n*}\| \leq \|u\| < \infty$ .

**Достаточность.** Пусть при каждом  $n \geq 1$  проблема (16) разрешима и  $\sup_{n \geq 1} \|u_{n*}\| < \infty$ , где  $u_{n*}$  — нормальное решение проблемы (16). Так как пространство  $B$  сепарабельно, то из ограниченной последовательности  $\{u_{n*}\}$  можно выбрать подпоследовательность  $\{u_{n_k*}\}$ , которая сходится к некоторому элементу  $v \in B^*$  в следующем смысле:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle u_{n_k*}, \varphi \rangle = \langle v, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in B$$

(см. [393, гл. IV, § 3]). Отсюда и из равенств  $\langle u_{n_k*}, \varphi_i \rangle = \mu_i$ ,  $i = 1, \dots, n_k$ , при  $k \rightarrow \infty$  получим  $\langle v, \varphi_i \rangle = \mu_i$  для всех  $i = 1, 2, \dots$ . Следовательно,  $v$  — решение проблемы (15). Теорема 4 доказана.  $\square$

Добавив к (15), (16) условие

$$\|u\| \leq l, \quad (17)$$

получим бесконечномерную  $l$ -проблему моментов и ее конечномерные аппроксимации соответственно. Аналогично теореме 4 доказывается

**Теорема 5.** Пусть  $B$  — сепарабельное банахово пространство. Тогда  $l$ -проблема моментов (15), (17) разрешима тогда и только тогда, когда при каждом  $n \geq 1$  разрешима  $l$ -проблема (16), (17), причем  $\|u_{n*}\| \leq l$   $\forall n = 1, 2, \dots$ , где  $u_{n*}$  — нормальное решение проблемы (16), (17).

При поиске решения каждой из конечномерных проблем (16) или (16), (17) можно действовать по схеме, изложенной в замечании 1. Может случиться, что при каком-то  $n \geq 1$  проблема (16) или (16), (17) не имеет решения. Тогда согласно теоремам 4, 5 соответствующая бесконечномерная проблема (15) или (15), (17) также не имеет решения.

Теоремы существования решений бесконечномерной проблемы моментов для конкретных систем  $\{\varphi_i, i = 1, 2, \dots\}$  см., например, в [11; 122; 123; 166; 287; 400; 415; 784; 802].

4. Проиллюстрируем метод моментов на задаче управления динамической системой

$$\dot{x} = D(t)x + B(t)u(t), \quad 0 \leq t \leq T; \quad x(0) = 0, \quad (18)$$

где момент  $T > 0$  задан,  $A(t), B(t)$  — кусочно непрерывные на  $[0, T]$  матрицы  $n \times n, n \times r$  соответственно. Управление  $u = (u^1(t), \dots, u^r(t))$  будем называть допустимым, если  $u^i(t)$  — ограниченная измеримая функция, почти всюду на отрезке  $[0, T]$  удовлетворяющая неравенству

$$|u^i(t)| \leq l, \quad i = 1, \dots, r, \quad l > 0. \quad (19)$$

Пусть задана точка  $x_1 \in E^n, x_1 \neq 0$ . Будем искать такое допустимое управление, что

$$x(T; u) = x_1, \quad (20)$$

где  $x = x(t; u)$  — траектория системы (18), соответствующая управлению  $u$ .

Сведем задачу (18)–(20) к  $l$ -проблеме моментов (11) в подходящим образом выбранных банаховых пространствах  $B, B^*$ . С этой целью воспользуемся уже известным нам представлением (см. пример 3.7) решения системы (18):

$$x(t; u) = \int_0^t \Phi(t, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau, \quad 0 \leq t \leq T,$$

где матрица  $\Phi(t, \tau)$  размера  $n \times n$  определена условиями  $\frac{d\Phi(t, \tau)}{dt} = D(t)\Phi(t, \tau), 0 \leq t, \tau \leq T; \Phi(\tau, \tau) = I$ . Тогда условие (20) можем записать в виде уравнения

$$\int_0^T \Phi(T, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau = x_1. \quad (21)$$

Обозначим  $i$ -ю строку матрицы  $\Phi(T, \tau) B(\tau)$  через

$$\varphi_i = \varphi_i(T, \tau) = (\varphi_i^1(T, \tau), \dots, \varphi_i^r(T, \tau)), \quad 0 \leq \tau \leq T; \quad i = 1, \dots, n.$$

Тогда уравнение (21) перепишется в следующей покоординатной форме

$$\langle u, \varphi_i \rangle = \int_0^T \left( \sum_{j=1}^r \varphi_i^j(T, \tau) u^j(\tau) \right) d\tau = x_1^i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (22)$$

Функции  $\varphi_i = \varphi_i(T, \tau), i = 1, \dots, n$ , кусочно непрерывны на  $[0, T]$ , и поэтому можем считать, что  $\varphi_i \in B = L_1^r[0, T]$  — банахово пространство с нормой  $\|\varphi_i\|_B = \int_0^T \sum_{j=1}^r |\varphi_i^j(T, \tau)| d\tau$ . Сопряженным к  $B$  является пространство



$B^* = L_\infty^r[0, T]$  с нормой  $\|u\|_{B^*} = \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \max_{1 \leq i \leq r} |u^i(t)|$  [258]. Условие (19) теперь можем записать в виде:

$$\|u\|_{B^*} \leq l, \quad (23)$$

результат  $\langle u, \varphi_i \rangle$  применения функционала  $u \in B^*$  к элементу  $\varphi_i \in B$  определяется формулой (22). Тем самым задача (18)–(20) сведена к задаче (22), (23), представляющей собой  $l$ -проблему моментов (11) при  $\mu = x_1 \neq 0$  на паре пространств  $B = L_1^r[0, T]$ ,  $B^* = L_\infty^r[0, T]$ , и для ее исследования могут быть использованы теоремы 1, 2 по схеме, изложенной в замечании 1. Поскольку в задаче (2) целевая функция  $g(c)$  удовлетворяет условию Липшица, то при решении этой задачи можно использовать подходящие модификации метода покрытий из § 5.13.

При вычислении значений функции

$$g(c) = \left\| \sum_{i=1}^n c^i \varphi_i(T, \tau) \right\|_B$$

в фиксированной точке  $c$  необязательно иметь явное выражение для матрицы  $\Phi(T, \tau)$ . Дело в том, что здесь

$$\sum_{i=1}^n c^i \varphi_i(T, \tau) = (\Phi_i(T, \tau) B(\tau))^T c = B^T(\tau) \Phi^T(T, \tau) c = B^T(\tau) \psi(\tau; c),$$

где  $\psi = \psi(\tau; c) = \Phi^T(T, \tau) c$  является решением задачи Коши:  $\dot{\psi} = -D^T \psi$ ,  $0 \leq \tau \leq T$ ,  $\psi(T) = c$ . Следовательно,

$$g(c) = \int_0^T \sum_{j=1}^r \left| \sum_{i=1}^n b_{ij}(\tau) \psi^i(\tau; c) \right| d\tau.$$

Для более общих систем вида (10.5) задачу управления при условиях (19), (20) можно свести к  $l$ -проблеме моментов (22), (23) с помощью уже известного нам приема, изложенного в примере 10.1 (см. также примеры 2.15, 3.8). Если условия на управления заданы в виде

$$\alpha_i(t) \leq u^i(t) \leq \beta_i(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad i = 1, \dots, r,$$

то можно перейти к новому управлению  $v = (v^1, \dots, v^r)$  по формулам

$$v^i = \left[ u^i - \frac{1}{2}(\alpha_i(t) + \beta_i(t)) \right] \frac{2}{\beta_i(t) - \alpha_i(t)}, \quad i = 1, \dots, r,$$

с ограничениями вида (19):  $|v^i(t)| \leq 1$ ,  $i = 1, \dots, r$ .

**З а м е ч а н и е 3.** Предполагая, что матрицы  $D(t), B(t)$  из (18) определены при всех  $t \geq 0$  и на каждом конечном отрезке  $[0, T]$  кусочно непрерывны, рассмотрим следующую задачу быстрогодействия: найти минимальное время  $T = T_*$  и управление  $u = u(t)$ ,  $0 \leq t \leq T_*$ , удовлетворяющее условиям (19), при которых уравнение (20) имеет решение. Для поиска решения этой задачи можно воспользоваться методом моментов. По определению оптимального

времени  $T_*$  задача (18)–(20) разрешима при  $T = T_*$ , а при всех  $T$ ,  $0 < T < T_*$ , эта задача не имеет решения. Согласно теореме 3 тогда

$$g_* = g_*(T) = \inf_{\langle x_1, c \rangle = 1} \left\| \sum_{i=1}^r c^i \varphi_i(T, \tau) \right\|_B < \frac{1}{l}$$

при всех  $T$ ,  $0 < T < T_*$ , и  $g_*(T_*) \geq \frac{1}{l}$ . В случае непрерывности функции  $g_*(T)$  это означает, что время  $T_*$  является минимальным корнем уравнения  $g_*(T) = \frac{1}{l}$ , и для поиска  $T_*$  могут быть использованы известные методы (см., например, § 5.19). К задачам быстрогодействия мы еще вернемся в § 10.6.

**З а м е ч а н и е 4.** Мы рассмотрели метод моментов для задачи (18)–(20) при специальном выборе «базисных» функций  $\varphi_1(T, t), \dots, \varphi_n(T, t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ , порожденных самой системой (18) и уравнением (21). Разумеется, здесь можно использовать и другие базисные функции  $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t), \dots$  (например, тригонометрическую систему). Однако в этом случае мы уже не можем гарантировать, что получающаяся при этом  $l$ -проблема моментов будет конечномерной.

**З а м е ч а н и е 5.** При переходе от задачи (18)–(20) к  $l$ -проблеме моментов (22), (23) выбор пространств  $B = L_1^r[0, T]$ ,  $B^* = L_\infty^r[0, T]$  был продиктован видом ограничений (19). Приведем примеры других ограничений на управления, когда задачу управления (18), (20) также удастся свести к  $l$ -проблеме моментов (22) с ограничением вида

$$\|u\|_{B^*} \leq l \quad (24)$$

на других парах пространств  $B, B^*$ .

Если в задаче (18), (20) ограничение на управление имеет вид

$$|u(t)|_p = \left( \sum_{i=1}^r |u^i(t)|^p \right)^{1/p} \leq l \quad \text{почти всюду на } [0, T], \quad 1 \leq p < \infty,$$

тогда такая задача сводится к  $l$ -проблеме моментов (22), (24) в банаховом пространстве  $B^*$  с нормой  $\|u\|_{B^*} = \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} |u(t)|_p$ , сопряженном к банахову

пространству  $B$  с нормой  $\|\varphi\|_B = \int_0^T |\varphi(t)|_q dt$ , где  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  [258].

Если в задаче (18), (20) ограничение на управление имеет вид

$$\left( \int_0^T |u(t)|_\alpha^p dt \right)^{1/p} \leq l, \quad 1 \leq p < \infty, \quad 1 \leq \alpha \leq \infty,$$

то в (22), (24) в качестве  $B^*$  надо принять банахово пространство с нормой

$$\|u\|_{B^*} = \left( \int_0^T |u(t)|_\alpha^p dt \right)^{1/p},$$

сопряженное к банахову пространству  $B$  с нормой

$$\|\varphi\|_B = \left( \int_0^T |\varphi(t)|_\beta^q dt \right)^{1/q},$$

где  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ,  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$  (случай  $p = \alpha = 2$ ,  $l = \infty$  рассмотрен в п. 3 § 10).

5. Применим метод моментов к следующей задаче управления колебаниями струны:

$$\begin{aligned} x_{tt} &= x_{ss} + r(s)u(t), \quad (s, t) \in Q = (0, l) \times (0, T), \\ x|_{s=0} &= x|_{s=l} = 0, \quad 0 \leq t \leq T; \quad x|_{t=0} = 0, \quad x_t|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq s \leq l, \end{aligned} \quad (25)$$

где  $r = r(s) \in L_2[0, l]$  — заданная функция. Требуется найти управление  $u = u(t) \in L_2[0, T]$  такое, что

$$x|_{t=T} = y_0(s), \quad x_t|_{t=T} = y_1(s), \quad 0 \leq s \leq l, \quad (26)$$

где  $y_0(s) \in H_0^1[0, l]$ ,  $y_1(s) \in L_2[0, l]$  — заданные функции (см. пример 10.4).

Как было замечено в § 8, решение  $x = x(s, t; u)$  краевой задачи (25) представимо в виде ряда (8.23):

$$x(s, t; u) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r_k}{\sqrt{\lambda_k}} e_k(s) \int_0^t u(\xi) \sin \sqrt{\lambda_k}(t - \xi) d\xi, \quad (s, t) \in Q, \quad (27)$$

где  $e_k(s) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi k s}{l}$  — собственная функция оператора  $-\frac{d^2 \varphi}{ds^2}$ ,  $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$ , соответствующая собственному числу  $\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2$ . Как известно (см., например, [557]), система функций  $\{e_k(s), 0 \leq s \leq l, k = 1, 2, \dots\}$  образует ортонормированный базис в пространствах  $L_2[0, l]$ ,  $H_0^1[0, l]$ ,  $H^{-1}[0, l]$ , поэтому справедливы разложения

$$y_0(s) = \sum_{k=1}^{\infty} y_{0k} e_k(s), \quad y_1(s) = \sum_{k=1}^{\infty} y_{1k} e_k(s), \quad r(s) = \sum_{k=1}^{\infty} r_k e_k(s), \quad 0 \leq s \leq l, \quad (28)$$

где

$$y_{0k} = \int_0^l y_0 e_k(s) ds, \quad y_{1k} = \int_0^l y_1 e_k(s) ds, \quad r_k = \int_0^l r(s) e_k(s) ds, \quad k = 1, 2, \dots$$

Производная функции (27) по переменной  $t$  имеет вид

$$x_t(s, t; u) = \sum_{k=1}^{\infty} r_k e_k(s) \int_0^t u(\xi) \cos \sqrt{\lambda_k}(t - \xi) d\xi, \quad (s, t) \in Q. \quad (29)$$

Отметим, что ряд (27) сходится в норме  $\max_{0 \leq t \leq T} \left( \int_0^l y_s^2(s, t) ds \right)^{1/2}$ , ряд (29) — в норме  $\max_{0 \leq t \leq T} \left( \int_0^l y^2(s, t) ds \right)^{1/2}$  (подробнее см., например, в [557]).

Подставим выражения (27)–(29) в равенства (26), умножим получившиеся равенства на  $e_j(s)$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , скалярно в  $L_2[0, l]$ . С учетом ортонормированности системы  $\{e_k\}$  в  $L_2[0, l]$  получим систему уравнений для искомого управления  $u = u(t)$ :

$$\begin{aligned} \frac{r_k}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^T u(\xi) \sin \sqrt{\lambda_k}(T - \xi) d\xi &= y_{0k}, \\ r_k \int_0^T u(\xi) \cos \sqrt{\lambda_k}(T - \xi) d\xi &= y_{1k}, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Отсюда, считая, что

$$r_k \neq 0 \quad \forall k = 1, 2, \dots, \quad (30)$$

имеем

$$\begin{aligned} \int_0^T u(\xi) \cos \sqrt{\lambda_k}(T - \xi) d\xi &= \frac{y_{1k}}{r_k} = a_k, \\ \int_0^T u(\xi) \sin \sqrt{\lambda_k}(T - \xi) d\xi &= \frac{y_{0k} \sqrt{\lambda_k}}{r_k} = b_k, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (31)$$

Система (31) представляет собой бесконечномерную проблему моментов (15) относительно  $u = u(t) \in B^* = L_2[0, T]$ , в которой роль элементов  $\{\varphi_k\}$  играют функции  $\{\cos \sqrt{\lambda_k}(T - \xi), \sin \sqrt{\lambda_k}(T - \xi), k = 1, 2, \dots\}$ , принадлежащие пространству  $B = L_2[0, T]$ .

Предполагая, что наряду с (30) выполняются условия

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{y_{1k}}{r_k} \right)^2 + \left( \frac{y_{0k}}{r_k} \right)^2 \lambda_k \right] < \infty, \quad (32)$$

покажем, что проблема моментов (31) и, следовательно, задача управления (25), (26) разрешима при всех  $T \geq 2l$ .

Сначала рассмотрим случай  $T = 2l$ . В интегралах (31) сделаем замену переменных  $T - \xi = \tau$ . Учитывая, что  $T = 2l$ , получим

$$\begin{aligned} \int_0^{2l} u(2l - \tau) \cos \sqrt{\lambda_k} \tau d\tau &= a_k, \\ \int_0^{2l} u(2l - \tau) \sin \sqrt{\lambda_k} \tau d\tau &= b_k, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (33)$$

Поскольку  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \sqrt{\lambda_k} \tau, \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \sqrt{\lambda_k} \tau \right\}$ , где  $\lambda_k = \left( \frac{\pi k}{l} \right)^2$ , является ортонормированной системой в  $L_2[0, 2l]$ , то по теореме Рисса–Фишера [393] при условии (32) функция

$$u_*(2l - \tau) = \frac{1}{\sqrt{l}} \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \sqrt{\lambda_k} \tau + b_k \sin \sqrt{\lambda_k} \tau \right), \quad 0 \leq \tau \leq 2l, \quad (34)$$

является решением проблемы моментов (33). Ряд (34) сходится в норме  $L_2[0, 2l]$ , и его сумма  $u_*(2l - \tau) \in L_2[0, 2l]$ . Перейдем в (34) к переменной  $t = 2l - \tau$ . Учитывая, что

$$\begin{aligned} \cos \sqrt{\lambda_k} (2l - t) &= \cos \left( 2\pi k - \frac{\pi k}{l} t \right) = \cos \sqrt{\lambda_k} t, \\ \sin \sqrt{\lambda_k} (2l - t) &= \sin \left( 2\pi k - \frac{\pi k}{l} t \right) = -\sin \sqrt{\lambda_k} t, \end{aligned}$$

получим

$$u_*(t) = \frac{1}{\sqrt{l}} \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \sqrt{\lambda_k} t - b_k \sin \sqrt{\lambda_k} t \right), \quad 0 \leq t \leq 2l, \quad (35)$$

где коэффициенты  $a_k, b_k$  взяты из (31). Заметим, что

$$\int_0^{2l} u_*(t) dt = 0, \quad (36)$$

так как функции  $\{ \cos \sqrt{\lambda_k} t, \sin \sqrt{\lambda_k} t, k = 1, 2, \dots \}$  ортогональны в  $L_2[0, 2l]$  к элементу  $e_0(s) \equiv 1$ . Тем самым показано, что при  $T = 2l$  задача управления (25), (26) имеет решение (35), обладающее свойством (36).

Рассмотрим случай  $T > 2l$ . Нетрудно проверить, что функция

$$v(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq T - 2l, \\ u_*(T - t), & T - 2l \leq t \leq T, \end{cases} \quad (37)$$

является решением проблемы (31) и задачи управления (25), (26) при  $T > 2l$ . Покажем, что при  $T > 2l$  задача (25), (26) имеет другое, в отличие от (37),  $2l$ -периодическое решение. А именно, пусть  $T = 2lN + \alpha$ ,  $0 \leq \alpha < 2l$ , где  $N \geq 1$  — целое число. Через  $v_*(t)$  обозначим  $2l$ -периодическую функцию, которая на одном периоде  $[0, 2l]$  определяется следующим образом:

$$v_*(t) = \begin{cases} \frac{1}{N+1} u_*(t), & 0 \leq t \leq \alpha, \\ \frac{1}{N} u_*(t), & \alpha < t \leq 2l, \end{cases} \quad (38)$$

где функция  $u_*(t)$  взята из (35). Убедимся, что  $v_*(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ , — решение проблемы моментов (31). Поскольку функции  $v_*(t)$ ,  $\cos \sqrt{\lambda_k} (T - \xi)$  являются  $2l$ -периодическими, то их произведение  $v_*(t) \cos \sqrt{\lambda_k} (T - \xi)$  также

$2l$ -периодично. Поэтому, учитывая, что  $u_*(t)$  — решение проблемы (33), имеем

$$\begin{aligned}
 \int_0^T v_*(\xi) \cos \sqrt{\lambda_k}(T - \xi) d\xi &= \\
 &= \int_0^{2Nl} v_*(\xi) \cos \sqrt{\lambda_k}(T - \xi) d\xi + \int_{2Nl}^{2Nl+\alpha} v_*(\xi) \cos \sqrt{\lambda_k}(T - \xi) d\xi = \\
 &= N \int_0^{2l} v_*(\xi) \cos \sqrt{\lambda_k}(T - \xi) d\xi + \int_0^\alpha v_*(\xi) \cos \sqrt{\lambda_k}(T - \xi) d\xi = \\
 &= (N+1) \int_0^\alpha v_*(\xi) \cos \sqrt{\lambda_k}(T - \xi) d\xi + N \int_\alpha^{2l} v_*(\xi) \cos \sqrt{\lambda_k}(T - \xi) d\xi = \\
 &= \int_0^{2l} u_*(\xi) \cos \sqrt{\lambda_k}(T - \xi) d\xi = a_k, \quad k = 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

Аналогично доказывается, что

$$\int_0^T v_*(\xi) \sin \sqrt{\lambda_k}(T - \xi) d\xi = b_k, \quad k = 1, 2, \dots; \quad \int_0^T v_*(t) dt = \int_0^T u_*(t) dt = 0.$$

Таким образом, функция (38) является решением задачи управления (25), (26). Можно показать [802], что (38) — нормальное решение этой задачи.

Применения метода моментов к различным задачам управления читатель найдет, например, в [11; 122; 123; 166; 287; 400; 411; 415; 784; 802].

### Упражнения

**Упражнение 1.** Пользуясь методом моментов, решить задачи управления из упражнения 10.3, считая, что управление удовлетворяет ограничениям: 1)  $|u(t)| \leq l$ ; 2)  $0 \leq u(t) \leq l$ ; 3)  $\int_0^T u^2(t) dt \leq l$  и, кроме того,  $x(0) = y(0) = 0$ ,  $x(T) = f_1$ ,  $y(T) = f_2$ .

**Упражнение 2.** Примените метод моментов к задачам управления из примеров 10.2–10.4, а также упражнений 10.9–10.13.

# Г Л А В А 9

## МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕУСТОЙЧИВЫХ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ

При численном решении прикладных задач важное значение имеет тот факт, будет ли решение рассматриваемой задачи непрерывно зависеть от исходных данных или, иначе говоря, будет ли искомое решение устойчивым по отношению к возмущениям входных данных. Если решение устойчиво по входным данным, то можно быть уверенным в том, что достаточно малые погрешности в задании входных данных приведут к малым погрешностям в определении решения. Иное дело решать неустойчивую или, как еще говорят, некорректную задачу, решение которой не является непрерывно зависящим от входных данных: в этом случае приближенное решение задачи, соответствующее неточным входным данным, может как угодно сильно отличаться от искомого точного решения при сколь угодно малых погрешностях входных данных. Между тем неустойчивые задачи не такая уж большая редкость — они часто встречаются в самых различных областях физики, техники, экономики и т. д. [695]. Возникает важная проблема: как решать такие задачи?

Основы теории и методов решения неустойчивых задач заложены в работах А. Н. Тихонова, В. К. Иванова, М. М. Лаврентьева и др. К настоящему времени создана достаточно полная общая теория неустойчивых (некорректных) задач, разработаны приближенные методы решения таких задач. Из обширной литературы, в которой отражены современная теория неустойчивых задач, методы их решения, приложения, исторические аспекты, библиография, мы здесь в состоянии упомянуть лишь ее малую часть [17; 22; 23; 28; 60; 62–64; 91; 113; 115; 127; 130; 131; 142; 145–147; 149–153; 155–165; 167–174; 176–182; 184; 185; 188–190; 192; 215; 223; 224; 229; 230; 235–238; 242; 268–271; 275; 334; 335; 360; 363; 365; 367; 389; 391; 394; 403; 405; 421; 432; 438; 439; 443; 445; 450–455; 461; 462; 467; 474; 490; 501; 506–510; 519; 522; 524; 526; 537; 556; 557; 579; 592; 593; 596; 597; 599; 600; 618; 619; 621; 622; 625–628; 651; 658; 659; 679; 680; 691–693; 695–697; 708; 714; 740; 741; 757; 758; 764; 771; 782; 783; 788; 799; 800; 805; 808; 812; 817; 839; 840; 850; 857; 910; 914; 936; 945; 947].

В этой главе мы рассмотрим лишь некоторые из методов решения неустойчивых задач минимизации.

### § 1. Постановка задачи. Устойчивые и неустойчивые задачи минимизации

Будем рассматривать задачу

$$J(u) \rightarrow \inf, \quad u \in U, \quad (1)$$

$$U = \{u \in U_0 : g_i(u) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m; \quad g_i(u) = 0, \quad i = m + 1, \dots, s\}, \quad (2)$$

где  $U_0$  — заданное множество из некоторого метрического пространства  $M$  с метрикой  $\rho(u, v)$ , функции  $J(u)$ ,  $g_i(u)$ ,  $1, \dots, s$ , определены на  $U_0$  и принимают на этом множестве конечные значения. В (2) не исключаются возможности, когда отсутствуют либо ограничения типа неравенств ( $m = 0$ ), либо типа равенств ( $s = m$ ), либо оба вида таких ограничений ( $m = s = 0$ ,  $U = U_0$ ). Пусть  $U \neq \emptyset$ . Напоминаем (см. § 1.1, 2.1), что задачу (1), (2) можно истолковать

либо как *задачу первого типа*, когда ищется величина  $J_* = \inf_U J(u)$  (или приближение к  $J_*$ ) и при этом не предполагается, что указанная нижняя грань непременно достигается в какой-либо точке, либо как *задачу второго типа*, когда ищется не только  $J_*$ , но какая-либо точка  $u_* \in U_0$ , близкая к множеству  $U_* = \{u \in U: J(u) = J_*\}$ , подразумевая при этом, что  $J_* > -\infty$ ,  $U_* \neq \emptyset$ .

Будем считать, что множество  $U_0$  известно точно (например,  $U_0 = \mathcal{M}$ ), а вместо функций  $J(u), g_i(u)$  известны их приближения  $J_\delta(u), g_{i\delta}(u)$  такие, что

$$|J_\delta(u) - J(u)| \leq \Psi_0(\delta, u), \quad |g_{i\delta}(u) - g_i(u)| \leq \Psi_i(\delta, u) \quad (3)$$

$$\forall u \in U_0, \quad i = 1, \dots, s,$$

где  $\Psi_i(\delta, u)$  — погрешности задания входных данных  $J(u), g_i(u)$ ,  $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_q) > 0$  — параметры погрешности. Предполагается, что

$$\Psi_i(\delta, u) \geq 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \Psi_i(\delta, u) = 0 \quad \forall u \in U_0, \quad i = 0, 1, \dots, s.$$

Например, возможно,  $\Psi_i(\delta, u) = \delta_i$  или  $\Psi_i(\delta, u) = |\delta|(1 + \Omega(u))$ ,  $u \in U_0$ ,  $i = 0, 1, \dots, s$ , где  $\Omega(u) \geq 0$  — известная функция,  $|\delta| = \delta_1 + \dots + \delta_q$ . Зависимость функции  $\Psi_i$  от переменной  $u$  отражает нередко возникающую на практике ситуацию, когда в разных точках  $u \in U_0$  измерения величин проводятся с разной точностью. При необходимости можем считать, что  $0 < \delta \leq \delta_0 = (\delta_{01}, \dots, \delta_{0q}) < \infty$  (т. е.  $0 < \delta_i \leq \delta_{0i}$ ), где  $\delta_{0i}$  — верхняя оценка для разумно мыслимых значений погрешности  $\delta_i$ ,  $i = 1, \dots, q$ .

Пользуясь приближениями  $J_\delta(u), g_{i\delta}(u)$  из (3), по аналогии с (1), (2) мы можем составить задачу

$$J_\delta(u) \rightarrow \inf, \quad u \in U_\delta, \quad (4)$$

$$U_\delta = \{u \in U_0: g_{i\delta}(u) \leq 0, i = 1, \dots, m; g_{i\delta}(u) = 0, i = m + 1, \dots, s\}, \quad (5)$$

называемую *возмущенной задачей*. Допустим, что множество  $U_\delta$  непусто и нам удалось определить величину  $J_{\delta*}$ , а в случае  $J_{\delta*} > -\infty$  еще и какую-либо точку  $u_{\delta*} \in U_{\delta*} = \{u \in U_\delta: J_\delta(u) = J_{\delta*}\}$ . Возникает естественный вопрос: можно ли при малых  $\delta$  использовать величину  $J_{\delta*}$  и точку  $u_{\delta*} \in U_{\delta*}$  в качестве приближения для  $J_*$  и  $U_*$  соответственно, зная, что в силу (3) погрешность задания входных данных стремится к нулю при  $\delta \rightarrow 0$ , т. е. можно ли ожидать, что  $\lim_{\delta \rightarrow 0} J_{\delta*} = J_*$  и  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \rho(u_{\delta*}, U_*) = 0$ ? Для ответа на этот вопрос рассмотрим простенький пример.

**Пример 1.** Задача:

$$J(u) \equiv 0 \rightarrow \inf, \quad u \in U = E^1.$$

Очевидно, здесь  $J_* = 0$ ,  $U_* = E^1$ . Пусть приближения  $J_\delta(u)$  таковы, что

$$|J_\delta(u) - J(u)| \leq \Psi_0(\delta, u) \equiv \delta, \quad \delta > 0 \quad \forall u \in E^1. \quad (6)$$

Тогда возмущенная задача имеет вид:

$$J_\delta(u) \rightarrow \inf, \quad u \in U_\delta = U = E^1.$$



Нетрудно видеть, что  $|J_{\delta*} - J_*| = |J_{\delta*}| \leq \delta \quad \forall \delta > 0$ . Это означает, что при достаточно малом  $\delta > 0$  величина  $J_{\delta*}$  вполне может служить приближением для  $J_* = 0$  независимо от выбора  $J_\delta(u)$  из (6). Посмотрим, можно ли при условиях (6) использовать решение  $u_{\delta*}$  возмущенной задачи в качестве приближения к множеству  $U_*$ . Для этого мы прежде всего должны быть уверены, что множество  $U_{\delta*}$  непусто. Однако нетрудно видеть, что выполнение такого требования можно гарантировать далеко не для всех реализаций  $J_\delta(u)$  из (6). Так, например, если  $J_\delta(u) = \delta e^{-|u|}$ , то  $U_{\delta*} = \emptyset \quad \forall \delta > 0$ . Заметим, что эта функция непрерывна на  $E^1$ . А если реализации  $J_\delta(u)$  из (6) будут разрывными, то ясно, что ситуация лишь ухудшится. Рассмотрим случай, когда в рассматриваемой задаче погрешность зависит от  $u$ . А именно, пусть

$$|J_\delta(u) - J(u)| \leq \Psi_0(\delta, u) \equiv \delta(1 + |u|), \quad \delta > 0 \quad \forall u \in E^1. \quad (7)$$

Условию (7) удовлетворяет функция  $J_\delta(u) = -\delta(1 + |u|)$ . Очевидно, тогда  $J_{\delta*} = -\infty \quad \forall \delta > 0$ . Полученное значение  $J_{\delta*}$  трудно признать высокоточным приближением для  $J_* = 0$ , какими бы малыми ни были числа  $\delta > 0$ . Нетрудно указать реализации приближения  $J_\delta(u)$  из условия (7), для которых  $J_{\delta*} > -\infty$ . Однако и в этом случае возможно, что  $J_{\delta*}$  не будет близким к  $J_* = 0$ . Так, например, если  $J_\delta(u) = -\delta|u|e^{-\delta|u|}$ , то условие (7) выполняется и  $J_{\delta*} = J_\delta\left(\frac{1}{\delta}\right) = -e^{-1} \quad \forall \delta > 0$ , но  $\lim_{\delta \rightarrow 0} J_{\delta*} = -e^{-1} \neq 0 = J_*$ . Конечно, из (7) можно извлечь и такие реализации  $J_\delta(u)$  (например,  $J_\delta(u) \equiv 0$  или любые  $J_\delta(u)$  из (6)), когда  $\lim_{\delta \rightarrow 0} J_{\delta*} = J_*$ . Однако выборка реализаций  $J_\delta(u)$  носит, как правило, случайный характер, и у нас нет оснований полагать, что попавшая в наше распоряжение реализация  $J_\delta(u)$  из (7) непременно будет хорошей. Таким образом, при условиях (7) величина  $J_{\delta*}$ , полученная из возмущенной задачи, вообще говоря, не может служить хорошим приближением для  $J_*$ .

Пример 1 показывает, что возмущенная задача (4), (5) не всегда может быть использована для получения приближенного решения исходной задачи (1), (2). Выясняется, что конкретные реализации приближений  $J_\delta(u)$ ,  $g_{i\delta}(u)$  из (3), используемые для формирования возмущенной задачи (4), (5), могут быть «хорошими» или «плохими», и в зависимости от этого задача (4), (5) будет «хорошей» или «плохой». Решение «хорошей» возмущенной задачи может быть использовано для получения приближенного решения задачи (1), (2), а «плохая» задача для этих целей не годится. Однако у нас нет никаких критериев для оценки качества приближения, кроме условий (3), и мы не в состоянии отличить «хорошее» приближение от «плохого». Поэтому при попытке использовать возмущенную задачу (4), (5) для построения приближенного решения исходной задачи (1), (2) приходится иметь в виду всевозможные (включая самые «худшие») реализации приближений входных данных.

Кроме того, заметим, что использование элементов множества  $U_{\delta*}$  в качестве приближений к множеству  $U_*$  предполагает, что  $U_{\delta*} \neq \emptyset$ . Однако, как видно из примера 1, множество  $U_{\delta*}$  может оказаться пустым даже в простейших задачах минимизации с точно заданным множеством. Имея в виду это

обстоятельство, вместо множества  $U_{\delta*}$  разумнее пользоваться множеством

$$U_{\delta\varepsilon} = \{u \in U_\delta : J_\delta(u) \leq J_{\delta*} + \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0, \quad (8)$$

так как, во-первых, это множество непусто по определению нижней грани при всех реализациях  $J_\delta(u), g_{i\delta}(u)$  из (3), лишь бы  $U_\delta \neq \emptyset, J_{\delta*} > -\infty$ , и, во-вторых, если все же  $U_{\delta*} \neq \emptyset$ , то  $U_{\delta*} \subset U_{\delta\varepsilon} \quad \forall \varepsilon > 0$ . Для иллюстрации этих соображений рассмотрим

**Пример 2.** Задача:  $J(u) = u^2 \rightarrow \inf, u \in U = E^1$ . Здесь  $J_* = 0, U_* = \{u_* = 0\}$ . Пусть приближение  $J_\delta(u)$  таково, что

$$|J_\delta(u) - J(u)| \leq \delta(1 + u^2), \quad 0 < \delta < 1, \quad \forall u \in E^1.$$

Это означает, что  $u^2 - \delta(1 + u^2) = J_-(u) \leq J_\delta(u) \leq J_+(u) = u^2 + \delta(1 + u^2) \quad \forall u \in E^1$ . Отсюда, переходя к нижней грани по  $u \in E^1$ , получим  $-\delta \leq J_{\delta*} = \inf_{E^1} J_\delta(u) \leq \delta$ , так что  $\lim_{\delta \rightarrow 0} J_{\delta*} = J_* = 0$ . Кроме того, пользуясь графиками функций  $J_-(u), J_+(u)$ , нетрудно показать, что

$$U_{\delta\varepsilon} \in \left[ -\sqrt{\frac{2\delta + \varepsilon}{1 - \delta}}; \sqrt{\frac{2\delta + \varepsilon}{1 - \delta}} \right]$$

при всех  $0 < \delta < 1, \varepsilon > 0$ , где множество  $U_{\delta\varepsilon}$  определено согласно (8). Отсюда следует, что  $\sup_{u \in U_{\delta\varepsilon}} |u - u_*| \leq \sqrt{\frac{2\delta + \varepsilon}{1 - \delta}} \rightarrow 0$  при  $(\delta, \varepsilon) \rightarrow 0$ . Это означает, что при достаточно малых  $\delta, \varepsilon$  любая точка  $u_{\delta\varepsilon} \in U_{\delta\varepsilon}$  может быть использована в качестве приближения к точке  $u_* = 0$ . В то же время множество  $U_{\delta*} = \{u \in E^1 : J_\delta(u) = J_{\delta*}\}$  вполне может оказаться пустым.

Заметим также, что если в рассматриваемом примере приближения  $J_\delta(u)$  удовлетворяют условию  $|J_\delta(u) - J(u)| \leq \delta(1 + |u|^\gamma), u \in E^1, \gamma > 2$ , то в худшем случае может реализоваться выборка  $J_\delta(u) = u^2 - \delta(1 + |u|^\gamma)$ . Тогда  $J_{\delta*} = -\infty \quad \forall \delta > 0$ , и о близости  $J_{\delta*}$  к  $J_* = 0$  говорить не приходится, а множество (8) не имеет смысла.

Приведенные примеры показывают, что возмущенная задача (4), (5) в каких-то случаях вполне может быть использована для получения приближенного решения задачи (1), (2), в каких-то случаях — нет. Это зависит от того, устойчива задача (1), (2) к возмущениям входных данных  $J(u), g_i(u), i = 1, \dots, s$ , или неустойчива. Перейдем к строгим определениям.

**Определение 1.** Задачу (1), (2) называют *устойчивой по функциям*, если при любом выборе  $J_\delta(u), g_{i\delta}(u), i = 1, \dots, s$ , из условий (3) в возмущенной задаче (4), (5) множество  $U_\delta \neq \emptyset \quad \forall \delta > 0$  и справедливо равенство

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} J_{\delta*} = J_* \quad (9)$$

(возможность  $J_* = -\infty$  здесь не исключается). Если существуют  $J_\delta(u), g_{i\delta}(u), i = 1, \dots, s$ , удовлетворяющие условиям (3), для которых либо  $U_\delta = \emptyset$  при некоторых сколь угодно малых  $\delta > 0$ , либо  $U_\delta \neq \emptyset$  при всех  $\delta, 0 < \delta < \delta_0$ , но не выполняется равенство (9), то задача (1), (2) называется *неустойчивой по функциям*.

Заметим, что если задача (1), (2) устойчива по функции и  $J_* > -\infty$ , то  $J_{\delta*} > -\infty$  и, следовательно, множество  $U_{\delta\epsilon}$ , определенное согласно (8), непусто при всех достаточно малых  $\delta$  и любых  $J_\delta(u)$ ,  $g_{i\delta}(u)$  из (3). Поэтому имеет смысл следующее определение.

**О п р е д е л е н и е 2.** Пусть в задаче (1), (2)  $J_* > -\infty$ ,  $U_* \neq \emptyset$ . Эту задачу называют *устойчивой по аргументу*, если она устойчива по функции и

$$\lim_{(\delta, \epsilon) \rightarrow 0} \sup_{u \in U_{\delta\epsilon}} \inf_{v \in U_*} \rho(u, v) = 0, \quad (10)$$

где множество  $U_{\delta\epsilon}$  определено согласно (8). Задача (1), (2) называется *неустойчивой по аргументу*, если она неустойчива по функции или не соблюдается равенство (10) для каких-либо  $J_\delta(u)$ ,  $g_{i\delta}(u)$ ,  $i = 1, \dots, s$ , из (3).

Поясним геометрический смысл равенства (10). Величина  $\inf_{v \in U_*} \rho(u, v) = \rho(u, U_*)$  — расстояние от точки  $u$  до множества  $U_*$  — нам уже знакома. Равенство (10) означает, что для любого числа  $\gamma > 0$  найдутся такие числа  $\delta_0 > 0$ ,  $\epsilon_0 > 0$ , что при всех  $\delta, \epsilon$ ,  $0 < |\delta| < \delta_0$ ,  $0 < \epsilon < \epsilon_0$  множество  $U_{\delta\epsilon}$  принадлежит множеству  $\{u \in \mathcal{M} : \rho(u, U_*) \leq \gamma\}$ , называемому  $\gamma$ -раздутием множества  $U_*$  (см. ниже упражнения 6, 7).

Если задача (1), (2) устойчива по функции, то, как следует из (9), при любых реализациях  $J_\delta(u)$ ,  $g_{i\delta}(u)$  из (3) величину  $J_{\delta*}$  при достаточно малых  $\delta > 0$  можно взять в качестве приближенного решения этой задачи, рассматриваемой как задача первого типа. Если задача (1), (2) устойчива по аргументу, то, как следует из равенства (10), любая точка  $u_{\delta\epsilon} \in U_{\delta\epsilon}$  при достаточно малых  $\delta, \epsilon$  будет близкой к множеству  $U_*$  и может быть взята в качестве приближенного решения задачи (1), (2) второго типа.

На практике точно вычислить значение  $J_{\delta*}$  удастся лишь в редких случаях. Обычно приходится довольствоваться тем, что с помощью того или иного метода минимизации, примененного к задаче (4), (5), определяем какую-либо точку  $u_\delta \in U_\delta$ , для которой

$$J_{\delta*} \leq J_\delta(u_\delta) \leq J_{\delta*} + \mu(\delta), \quad \mu(\delta) > 0,$$

где предполагается, что  $J_{\delta*} > -\infty$ ,  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \mu(\delta) = 0$ . Тогда, если задача (1), (2) устойчива по функции [по аргументу], то при малых  $\delta > 0$  величина  $J_\delta(u_\delta)$  близка к  $J_*$  [точка  $u_{\delta\epsilon} \in U_{\delta\epsilon}$  близка к множеству  $U_*$ ].

Проблеме устойчивости задач оптимизации посвящена обширная литература, см., например, [45; 52; 70; 84; 87; 88; 179; 181; 233; 277; 363; 448; 501; 502; 720; 789; 791; 817]. Здесь мы приведем две теоремы, выделяющие подклассы устойчивых задач (1), (2). А именно, рассмотрим задачу

$$J(u) \rightarrow \inf, \quad u \in U, \quad (11)$$

считая множество  $U$  известным точно (в (2)  $m = s = 0$ ,  $U = U_0$ ), а приближения  $J_\delta(u)$  функции  $J(u)$  удовлетворяют условию

$$|J_\delta(u) - J(u)| \leq \delta \quad \forall u \in U, \quad \delta > 0. \quad (12)$$

**Теорема 1.** *Задача (11) при выполнении условия (12) устойчива по функции.*

**Доказательство.** По условию  $U_\delta = U \quad \forall \delta > 0$ . Неравенство (12) перепишем в виде

$$J(u) - \delta \leq J_\delta(u) \leq J(u) + \delta \quad \forall u \in U = U_\delta, \quad \delta > 0. \quad (13)$$

Если  $J_* = -\infty$ , то из (13) следует, что  $J_{\delta*} = \inf_U J_\delta(u) = -\infty$ , так что равенство (9) соблюдается. Если  $J_* > -\infty$ , то, переходя в неравенствах (13) почленно к нижней грани при  $u \in U_\delta = U$ , получим:  $J_* - \delta \leq J_{\delta*} \leq J_* + \delta \quad \forall \delta > 0$ . Отсюда при  $\delta \rightarrow 0$  приходим к равенству (9) и в этом случае.  $\square$

**Теорема 2.** *Пусть  $U$  — компактное множество из  $\mathcal{M}$ , функция  $J(u)$  полунепрерывна снизу на  $U$ , приближения  $J_\delta(u)$  удовлетворяют условию (12),  $U_\delta = U \quad \forall \delta > 0$ . Тогда задача (11) устойчива по аргументу.*

**Доказательство.** В силу теоремы 8.2.1  $J_* > -\infty$ ,  $U_* \neq \emptyset$ . Устойчивость задачи (11) по функции установлена в теореме 1. Из  $J_* > -\infty$  и равенства (9) следует, что  $J_{\delta*} > -\infty$  при всех достаточно малых  $\delta > 0$ . Тогда множество  $U_{\delta\varepsilon} \neq \emptyset \quad \forall \varepsilon > 0$  по определению нижней грани. Возьмем произвольную последовательность  $\{(\delta_k, \varepsilon_k)\} \rightarrow 0$ ,  $\delta_k > 0$ ,  $\varepsilon_k > 0$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Для краткости положим  $U_{\delta_k \varepsilon_k} = U_k$ . По определению верхней грани найдется точка  $u_k \in U_k$  такая, что

$$\sup_{u \in U_k} \rho(u, U_*) - \frac{1}{k} \leq \rho(u_k, U_*), \quad k = 1, 2, \dots \quad (14)$$

Включение  $u_k \in U_k$  согласно (8) означает, что  $u_k \in U_{\delta_k \varepsilon_k}$  и для некоторой реализации  $J_{\delta_k}(u)$  из (12) выполняются неравенства  $J_{\delta_k*} = \inf_{U_k} J_{\delta_k}(u) \leq J_{\delta_k}(u_k) \leq J_{\delta_k*} + \varepsilon_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Отсюда и из теоремы 1 следует, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} J_{\delta_k}(u_k) = J_*$ . Тогда в силу (12)  $\lim_{k \rightarrow \infty} J(u_k) = J_*$ . Это означает, что  $\{u_k\}$  — минимизирующая последовательность задачи (11). По теореме 8.2.1 тогда  $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(u_k, U_*) = 0$ . Отсюда и из (14) имеем  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{u \in U_k} \rho(u, U_*) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{u \in U_{\delta_k \varepsilon_k}} \rho(u, U_*) = 0$ . В силу произвольности последовательности  $(\delta_k, \varepsilon_k) \rightarrow 0$  отсюда непосредственно вытекает равенство (10). Теорема 2 доказана.  $\square$

Для иллюстрации вышеизложенного рассмотрим несколько примеров.

**Пример 3.** Задача:  $J(u) = \frac{u^2}{1+u^4} \rightarrow \inf, u \in U = E^1$ . Здесь  $J_* = 0$ ,  $U_* = \{u_* = 0\}$ . Пусть приближения  $J_\delta(u)$  удовлетворяют условию (12),  $U_\delta = E^1 \quad \forall \delta > 0$ . По теореме 1 эта задача устойчива по функции. Покажем, что она неустойчива по аргументу. Возьмем реализацию  $J_\delta(u) = J(u)$ ,  $u \in E^1$ . Тогда  $J_{\delta*} = J_* = 0$ . Точка  $u_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$  принадлежит множеству (8), так как  $J_\delta(u_\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2} \leq \varepsilon = J_{\delta*} + \varepsilon$ . Однако  $\sup_{u \in U_{\delta\varepsilon}} \rho(u, U_*) \geq \rho(u_\varepsilon, U_*) = |u_\varepsilon| \rightarrow \infty$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Равенство (10) не выполняется. Отметим, что в этой задаче множество  $U$  некомпактно.

Пример 4. Рассмотрим задачу оптимального управления

$$J(u) = \int_0^1 x^2(t; u) dt \rightarrow \inf, \quad \dot{x}(t) = u(t), \quad 0 \leq t \leq 1; \quad x(0) = 0,$$

$$u = u(t) \in U = \{u(t) \in L_2(0, 1) : |u(t)| \leq 1 \text{ почти всюду на } [0, 1]\}.$$

Здесь  $J_* = 0$ ,  $U_* = \{u_*(t) \equiv 0, 0 \leq t \leq 1\}$ .

Пусть вместо точной траектории  $x(t; u)$ , соответствующей управлению  $u = u(t) \in U$ , нам известно ее приближение  $x_\delta(t; u)$  такое, что

$$|x_\delta(t; u) - x(t; u)| \leq \delta \quad \forall t \in [0, 1].$$

Пусть приближение  $J_\delta(u)$  функции  $J(u)$  вычисляется по формуле

$$J_\delta(u) = \int_0^1 x_\delta^2(t; u) dt.$$

Тогда

$$|J_\delta(u) - J(u)| = \left| \int_0^1 ((x_\delta(t; u))^2 - (x(t; u))^2) dt \right| \leq \int_0^1 \delta(|x_\delta(t; u)| + |x(t; u)|) dt \leq 3\delta, \\ 0 < \delta \leq 1.$$

Это значит, что исходная задача устойчива по функции (теорема 1), и для приближенного значения  $J_*$  можно взять  $J_{\delta*} = \inf_{U_\delta} J_\delta(u)$ , где  $U_\delta = U$ .

Посмотрим, устойчива ли эта задача по аргументу. Пусть приближенная траектория  $x_\delta(t; u) = x(t; u) + \delta \sin \frac{t}{\delta}$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . Ясно, что  $|x_\delta(t; u) - x(t; u)| \leq \delta \left| \sin \frac{t}{\delta} \right| \leq \delta$ ,  $\forall t \in [0, 1]$ , и тогда

$$J_\delta(u) \leq \int_0^1 \left| x(t; u) + \delta \sin \frac{t}{\delta} \right|^2 dt.$$

Возмущенная задача  $J_\delta(u) \rightarrow \inf, u \in U = U_\delta$ , имеет решение  $u = u_{\delta*}(t) = \cos \frac{t}{\delta}$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $J_{\delta*} = 0$ . Однако

$$\sup_{u \in U_{\delta\varepsilon}} \|u - u_*\|_{L_2}^2 \geq \|u_{\delta*} - u_*\|_{L_2}^2 = \int_0^1 \cos^2 \frac{t}{\delta} dt = \\ = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\delta}{2} \sin \frac{2}{\delta} \right) \rightarrow \frac{1}{2} \neq 0 \quad \text{при } \delta \rightarrow 0.$$

Значит, рассматриваемая задача неустойчива по аргументу в метрике  $L_2(0, 1)$ .

Пример 5. Рассмотрим задачу

$$J(u) = \int_0^1 u^2(t) dt \rightarrow \inf, \quad u = u(t) \in U = \{u \in C[0, 1] : |u(t)| \leq 1 \quad \forall t \in [0, 1]\}.$$

Очевидно,  $J_* = 0$ ,  $U_* = \{u_* \equiv 0\}$ . Пусть приближения  $J_\delta(u)$  удовлетворяют условию (12),  $U_\delta = U$ . Задача устойчива по функции в силу теоремы 1. В возмущенной задаче:  $J_\delta(u) = J(u) \rightarrow \inf$ ,  $u \in U_\delta$ , последовательность

$$u_k = u_k(t) = \begin{cases} 1 - |2kt - 1|, & 0 \leq t \leq \frac{1}{k}, \\ 0, & \frac{1}{k} \leq t \leq 1, \quad k = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

является минимизирующей. Отсюда следует, что  $u_k \in U_{\delta\varepsilon}$  при  $\forall \varepsilon > 0$ , если номер  $k$  достаточно велик. Однако  $\lim_{(\delta, \varepsilon) \rightarrow 0} \sup_{u \in U_{\delta\varepsilon}} \|u - u_*\|_C \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - u_*\|_C = 1$ .

Поэтому задача неустойчива по аргументу в метрике  $C[0, 1]$ . Нетрудно проверить, что при тех же условиях эта задача будет устойчива по аргументу в метрике  $L_2[0, 1]$ .

Заметим, что в теоремах 1, 2 и примерах 1–5 предполагалось, что множество (2) известно точно. Если же множество также задается с погрешностями, то задача (1), (2) может оказаться неустойчивой (по функции или по аргументу) даже при дополнительном требовании компактности множества. Более того, множество (5) может оказаться пустым при всех сколь угодно малых  $\delta$ , и возмущенная задача (4), (5) не будет иметь смысла. Покажем это на примерах.

**Пример 6.** Задача:  $J(u) = u \rightarrow \inf$ ,  $u \in U = \{u \in U_0 = E^1: g_1(u) = \frac{u^2}{1+u^4} \leq 0\}$ . Здесь  $U = \{0\}$ ,  $J_* = 0$ ,  $U_* = \{0\}$ . Пусть функции  $J_\delta(u)$ ,  $g_{1\delta}(u)$  удовлетворяют условиям (3) с функциями  $\Psi_0(\delta, u) = \Psi_1(\delta, u) = \delta$ . В частности, если  $J_\delta(u) = u$ ,  $g_{1\delta}(u) = g_1(u) - \delta$ , то  $U_\delta \neq \emptyset$ ,  $J_{\delta*} = -\infty \quad \forall \delta > 0$ . Если же  $g_{1\delta}(u) = g_1(u) + \delta$ , то  $U_\delta = \{u \in E^1: g_{1\delta}(u) \leq 0\} = \emptyset \quad \forall \delta > 0$ , и возмущенная задача теряет смысл. Задача неустойчива по функции и тем более по аргументу.

**Пример 7.** Задача:  $J(u) = u \rightarrow \inf$ ,  $u \in U = \{u \in U_0 = E^1: g_1(u) = |u - 1| + |u + 1| - 2 = 0\}$ . Здесь  $U = [-1, +1]$ ,  $J_* = -1$ ,  $U_* = \{u_* = -1\}$ . Пусть условия (3) выполняются с функциями  $\Psi_0(\delta, u) = \Psi_1(\delta, u) = 2\delta(1 + |u|)$ . В возмущенной задаче:  $J_\delta(u) = u \rightarrow \inf$ ,  $u \in U_\delta = \{u \in E^1: g_{1\delta}(u) = |(1 + \delta)u - 1| + |(1 - \delta)u + 1| - 2 = 0\}$  множество  $U_\delta$  при всех  $\delta$ ,  $0 < \delta < 1$ , состоит из двух точек  $u = 0$  и  $u = 1$ , так что  $J_{\delta*} = 0$ ,  $U_{\delta*} = \{u_{\delta*} = 0\}$ . Равенство (9) нарушается, задача неустойчива даже по функции. Заметим, что если  $g_{1\delta}(u) = |u - 1| + |u + 1| - 2 + \delta$ , то множество  $U_\delta = \{u \in E^1: g_{1\delta}(u) = 0\} = \emptyset \quad \forall \delta > 0$ , возмущенная задача не имеет смысла.

**Пример 8.** Рассмотрим задачу линейного программирования:  $J(u) = -x - y \rightarrow \inf$ ,  $u \in U = \{u = (x, y) \in U_0: g_1(u) = x - y \leq 0, g_2(u) = -x + y \leq 0\}$ , где  $U_0 = \{u = (x, y) \in E^2: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$  — компактное множество. Здесь  $J_* = -2$ ,  $U_* = \{u_* = (1; 1)\}$ . Пусть условия (3) выполняются с функциями  $\Psi_i(\delta, u) = \delta(1 + |u|)$ ,  $i = 0, 1, 2$ . Возмущенная задача может иметь вид:  $J_\delta(u) = -x - y \rightarrow \inf$ ,  $u \in U_\delta = \{u \in U_0: g_{1\delta}(u) = (1 + \delta)x - y \leq 0, g_{2\delta}(u) = (-1 + \delta)x + y \leq 0\}$ , где  $0 < \delta < 1$ . Тогда  $U_\delta = \{u = (0, 0)\}$ ,  $J_{\delta*} = 0$ ,  $U_{\delta*} = U_\delta$ . Равенство (9) не выполняется. Задача неустойчива по функции. Более того,

если  $g_{1\delta}(u) = g_1(u) + \delta$ ,  $g_{2\delta}(u) = g_2(u) + \delta$  или  $g_{1\delta}(u) = (1 + \delta)x - y + \delta$ ,  $g_{2\delta}(u) = -(1 - \delta)x + y + \delta$ , то множество  $U_\delta = \{u \in U_0 : g_{1\delta}(u) \leq 0, g_{2\delta}(u) \leq 0\}$  пусто при всех  $\delta$ ,  $0 < \delta < 1$ , и возмущенная задача не имеет смысла.

**Пример 9.** Рассмотрим задачу квадратичного программирования:

$$J(u) = x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \inf, \quad u \in U = \{u = (x, y, z) \in E^3 :$$

$$g_1(u) = 1 - x - y - z \leq 0, \quad g_2(u) = y + z - 1 \leq 0, \quad g_3(x) = x \leq 0\}.$$

Если  $u = (x, y, z) \in U$ , то  $y + z \geq 1 - x = 1 + |x| \geq 1 \geq y + z$ , что возможно только при  $x = 0$ ,  $y + z = 1$ . Это значит, что  $U \subseteq U_1 = \{u = (x, y, z) \in E^3 : y + z = 1, x = 0\}$ . С другой стороны,  $U_1 \subseteq U$ . Следовательно,  $U = U_1$ . Нетрудно проверить, что решением рассматриваемой задачи является точка  $u_* = (x_* = 0, y_* = \frac{1}{2}, z_* = \frac{1}{2})$ , причем  $J(u_*) = J_* = \frac{1}{2}$ . Так как множество  $U$  выпукло, а функция  $J(u)$  сильно выпукла на  $U$ , то задача других решений не имеет. Пусть возмущенная задача имеет вид:  $J_\delta(u) = J(u) = x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \inf, u \in U_\delta = \{u \in E^3 : g_{1\delta}(u) = g_1(u) = 1 - x - y - z \leq 0, g_{2\delta}(u) = y + (1 + \delta)z - 1 \leq 0, g_{3\delta}(u) = g_3(u) = x \leq 0\}$ ,  $\delta > 0$ . Покажем, что  $U_\delta = U_{\delta 1} = \{u \in E^3 : 1 - x - y - z \leq 0, y + (1 + \delta)z - 1 \leq 0, x \leq 0, y \geq 1, z \leq 0\} \quad \forall \delta > 0$ . Очевидно,  $U_{\delta 1} \subseteq U_\delta$ . Обратно, если  $u = (x, y, z) \in U_\delta$ , то  $y + z \geq 1 - x = 1 + |x| \geq 1 \geq y + (1 + \delta)z$ , что возможно только при  $0 \geq \delta z$  или  $0 \geq z$ . А тогда  $y \geq 1 - x - z = 1 + |x| + |z| \geq 1$ . Следовательно,  $U_\delta \subseteq U_{\delta 1}$ , так что  $U_\delta = U_{\delta 1} \quad \forall \delta > 0$ . Нетрудно проверить, что решением возмущенной задачи является точка  $u_{\delta*} = (x_{\delta*} = 0, y_{\delta*} = 1, z_{\delta*} = 0)$ . В самом деле,  $J'(u_{\delta*}) = (0, 2, 0)$  и  $\langle J'(u_{\delta*}), u - u_{\delta*} \rangle = 2(y - 1) \geq 0 \quad \forall u \in U_{\delta 1} = U_\delta$  (теорема 4.2.3). Кроме того,  $J_{\delta*} = J(u_{\delta*}) = 1$ . Таким образом,  $|J_{\delta*} - J_*| = \frac{1}{2}$ ,  $\rho(u_{\delta*}, u_*) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \forall \delta > 0$ . Задача неустойчива ни по функции, ни по аргументу.

Приведенные примеры показывают, что неустойчивые задачи нередки в линейном, выпуклом и невыпуклом программировании, в области оптимального управления, в теории приближения. Если задача неустойчива по функции [или по аргументу], то при решении задачи первого [второго] типа пользоваться возмущенной задачей (4), (5) нужно с большой осторожностью, помня, что здесь многое зависит от того, какие реализации входных данных  $J_\delta(u)$ ,  $g_{i\delta}(u)$  из (3) имеются в нашем распоряжении, и что в общем случае на этом пути получение хороших приближений решения исходной задачи (1), (2) не гарантировано.

Возникает естественный вопрос: можно ли разумно распорядиться имеющимися у нас входными данными  $J_\delta(u)$ ,  $g_{i\delta}(u)$  из (3) и с их помощью сконструировать новую вспомогательную экстремальную задачу, решив которую, мы могли бы при достаточно малых погрешностях получить решение исходной задачи с высокой точностью? Ответ на этот важный для практики вопрос дается в следующих параграфах, в которых излагаются различные устойчивые методы решения неустойчивых задач минимизации, разработанные в рамках общей теории и методов неустойчивых (некорректных) задач [184; 439; 695; 697 и др.].



## Упражнения

Упражнение 1. Доказать, что задача:  $J(u) = -u \rightarrow \inf, u \in U = \{u \in E_+^1 = U_0: g_1(u) = -u \leq 0, g_2(u) = u - 1 \leq 0\}$  устойчива по функции и по аргументу, если погрешности задания входных данных  $J(u), g_1(u), g_2(u)$  удовлетворяют условиям (3) с функциями  $\Psi_i(\delta, u) = \delta(1 + |u|), i = 0, 1, 2$ .

Упражнение 2. Исследовать на устойчивость задачу:  $J(u) = (x - 1)^2 + (0 \cdot y - 1)^2 \rightarrow \inf, u = (x, y) \in U = E^2$ , считая, что погрешность задания функции  $J(u)$  удовлетворяет условию:  $|J_\delta(u) - J(u)| \leq \delta(1 + |u|^2)$ . Указание: рассмотреть приближение  $J_\delta(u) = (x - 1)^2 + (\delta y - 1)^2$ .

Упражнение 3. Доказать, что задача:  $J(u) = x - y \rightarrow \inf, u \in U = \{u = (x, y) \in E_+^2: g_1(u) = x + y - 1 \leq 0, g_2(u) = -x - y + 1 \leq 0\}$  неустойчива по функции, если погрешности задания входных данных  $J(u), g_1(u), g_2(u)$  удовлетворяют условиям (3) при  $\Psi_i(\delta, u) = \delta(1 + |x| + |y|), u \in E_+^2$ . Указание: рассмотреть возмущенную задачу (4), (5) при  $J_\delta(u) = x - y, g_{1\delta}(u) = (1 + \delta)x + (1 + \delta)y - 1 + \delta, g_{2\delta}(u) = (-1 + \delta)x + (-1 + \delta)y + 1 - \delta, 0 < \delta < 1$ .

Упражнение 4. Исследовать на устойчивость задачу:  $J(u) = u \rightarrow \inf, u \in U = \{u \in E^1: g_1(u) = |u - 1| + |u + 1| - 2 \leq 0\}$ , считая, что входные данные удовлетворяют условиям (3) с  $\Psi_i(\delta, u) = 2\delta(1 + |u|), i = 0, 1$ . Указание: рассмотреть реализации  $J_\delta(u), g_{1\delta}(u)$  из примера 7.

Упражнение 5. Исследовать на устойчивость по функции и по аргументу задачу:  $J(u) = x^2 + y^2 \rightarrow \inf, u = (x, y) \in E^2$ , когда погрешность  $|J_\delta(u) - J(u)| \leq \Psi(\delta, u) = \delta(1 + |u|^\gamma), \gamma \geq 0$ . Рассмотреть случаи  $\gamma = 0, 1, 2, 3$ .

Упражнение 6. Пусть  $A, B$  — два множества из некоторого метрического пространства  $M$ . Уклонением множества  $A$  от множества  $B$  называется величина  $\beta(A, B) = \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \rho(a, b)$ . Приведите пример двух множеств  $A, B$  таких, что  $\beta(A, B) \neq \beta(B, A)$ .

Указание: рассмотрите случай, когда  $B \subset A, B \neq A$  (см. равенство (10)).

Упражнение 7. Пусть  $A, B$  — два множества из метрического пространства  $M$ . Величина  $h(A, B) = \max\{\beta(A, B); \beta(B, A)\}$  (см. упражнение 6) называется хаусдорфовым расстоянием между множествами  $A$  и  $B$ . Докажите, что на множестве всех ограниченных замкнутых множеств из  $M$  величина  $h(A, B)$  удовлетворяет всем аксиомам метрического пространства [192; 350; 393; 428]. Выясните геометрический смысл величины  $h(A, B)$  (см. § 10.5).

## §2. Методы регуляризации для решения неустойчивых задач первого типа

Рассмотрим задачу

$$J(u) \rightarrow \inf, \quad u \in U, \quad (1)$$

$$u \in U = \{u \in U_0: g_i(u) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m; \quad g_i(u) = 0, \quad i = m + 1, \dots, s\}, \quad (2)$$

как задачу первого типа, когда ищется величина  $J_* = \inf_U J(u)$ . Будем предполагать, что множество (2) непусто, причем множество  $U_0$  известно точно, а вместо функций  $J(u), g_i(u)$  известны их приближения, удовлетворяющие условиям (1.3). Выше было показано, что задача (1), (2) может оказаться неустойчивой по функции (определение 1.1), и тогда величина  $J_{\delta*} = \inf_{U_\delta} J_\delta(u)$ ,

полученная как решение возмущенной задачи (1.4), (1.5) первого типа, вообще говоря, не может служить хорошим приближением для величины  $J_*$ , какими бы малыми ни были погрешности задания входных данных. Для надежного получения решения неустойчивой по функции задачи (1), (2) первого типа нужно иметь специальные методы, называемые *методами регуляризации*.



Такие методы для решения задач первого типа разрабатывались, например, в [445; 501; 507; 697; 817]. Изложим некоторые из них.

1. Сначала рассмотрим задачу:

$$J(u) \rightarrow \inf, \quad u \in U, \quad (3)$$

предполагая, что множество  $U$  известно точно, а приближения  $J_\delta(u)$  функции  $J(u)$  удовлетворяют условию

$$|J_\delta(u) - J(u)| \leq \Psi(\delta, u) \quad \forall u \in U; \quad \delta > 0, \quad (4)$$

где функция  $\Psi(\delta, u) \geq 0 \quad \forall u \in U, \delta > 0, \lim_{\delta \rightarrow 0} \Psi(\delta, u) = 0 \quad \forall u \in U$ . Следуя [445; 697; 817], возмущенную задачу:

$$J_\delta(u) \rightarrow \inf, \quad u \in U_\delta = U, \quad \delta > 0,$$

заменим задачей:

$$\chi_\delta(u) = J_\delta(u) + \Psi(\delta, u) \rightarrow \inf, \quad u \in U, \quad (5)$$

где  $J_\delta(u)$  — произвольная функция, удовлетворяющая условию (4). Предположим, что каким-либо методом нам удалось найти величину  $\chi_{\delta*} = \inf_{u \in U} \chi_\delta(u)$ .

**Теорема 1.** Пусть множество  $U$  в задаче (3) известно точно, пусть выполнено условие (4). Тогда при любом выборе  $J_\delta(u)$  из (4) справедливо равенство

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \chi_{\delta*} = J_*. \quad (6)$$

**Доказательство.** Из (4), (5) имеем:  $\chi_\delta(u) \geq J(u) \quad \forall u \in U$ . Следовательно,  $\chi_{\delta*} \geq J_* \geq -\infty$ . Тогда  $J_* \leq \chi_{\delta*} \leq \chi_\delta(u) = J_\delta(u) + \Psi(\delta, u) \leq J(u) + 2\Psi(\delta, u) \quad \forall u \in U, \quad \forall \delta > 0$ . При  $\delta \rightarrow 0$  отсюда получаем:  $J_* \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \chi_{\delta*} \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \chi_\delta(u) \leq \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \chi_{\delta*} \leq J(u) + \lim_{\delta \rightarrow 0} 2\Psi(\delta, u) = J(u) \quad \forall u \in U$ . Перейдем в этих неравенствах к нижней грани по  $u \in U$ . Будем иметь:  $-\infty \leq J_* \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \chi_{\delta*} \leq \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \chi_{\delta*} \leq J_*$ .

Следовательно,  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \chi_{\delta*} = \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \chi_{\delta*} = J_*$ , что равносильно (6). Теорема 1 доказана.  $\square$

Равенство (6) означает, что величина  $\chi_{\delta*}$ , полученная как решение задачи (5) при достаточно малых  $\delta > 0$ , будет близка к  $J_\delta$  даже в том случае, когда исходная задача (3) была неустойчива по функции. Однако точное значение  $\chi_{\delta*}$  можно найти лишь в редких случаях, и на практике мы можем иметь лишь какое-то приближение к  $\chi_{\delta*}$ . В свою очередь такое приближение можно получить, решая задачу (3), лишь тогда, когда задача (5) сама устойчива по функции. Будет ли она таковой? Оказывается, что при малых погрешностях, допускаемых при вычислении значений функции  $\chi_\delta(u)$ , задача (5) будет устойчивой по функции. А именно, пусть вместо точного значения  $\chi_\delta(u)$  мы можем вычислить его приближение  $\chi_{\delta\mu}(u)$  такое, что

$$|\chi_{\delta\mu}(u) - \chi_\delta(u)| \leq \mu \quad \forall u \in U. \quad (7)$$

Тогда, как следует из теоремы 1.1, задача (5) устойчива по функции, т. е.  $\lim_{\mu \rightarrow 0} \chi_{\delta\mu*} = \chi_{\delta*}$ , где  $\chi_{\delta\mu*} = \inf_U \chi_{\delta\mu}(u)$ . Следовательно,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\mu \rightarrow 0} \chi_{\delta\mu*} = J_*.$$

Более того, поскольку в (7) величина  $\mu$  не зависит от  $\delta$ , нетрудно установить более сильное утверждение:

$$\lim_{(\delta, \mu) \rightarrow 0} \chi_{\delta\mu*} = J_*. \quad (8)$$

Докажем его. Переходя к нижней грани по  $u \in U$ , из (7) имеем:  $|\chi_{\delta\mu*} - \chi_{\delta*}| \leq \mu$ . Тогда

$$|\chi_{\delta\mu*} - J_*| \leq |\chi_{\delta\mu*} - \chi_{\delta*}| + |\chi_{\delta*} - J_*| \leq \mu + |\chi_{\delta*} - J_*|.$$

Отсюда и из (6) следует равенство (8).

Допустим, что нам удалось найти величину  $\tilde{\chi}_{\delta\mu}$ , для которой

$$|\tilde{\chi}_{\delta\mu} - \chi_{\delta\mu*}| \leq \varepsilon(\mu), \quad \lim_{\mu \rightarrow 0} \varepsilon(\mu) = 0. \quad (9)$$

Из (8), (9) непосредственно следует, что при достаточно малых  $(\delta, \mu)$  величину  $\tilde{\chi}_{\delta\mu}$  можно взять в качестве приближения для искомой величины  $J_*$ . Для поиска  $\tilde{\chi}_{\delta\mu}$  может быть использована устойчивая по функции при условиях (7) задача (5).

**2.** Рассмотрим задачу (1), (2), когда множество  $U$  известно неточно и погрешность задания входных данных  $J(u)$ ,  $g_i(u)$ ,  $i = 1, \dots, s$ , удовлетворяют условиям (1.3):

$$|J_\delta(u) - J(u)| \leq \Psi_0(\delta, u) \quad \forall u \in U_0 \quad (10)$$

$$|g_{i\delta}(u) - g_i(u)| \leq \Psi_i(\delta, u) \quad \forall u \in U_0, \quad i = 1, \dots, s, \quad (11)$$

где функции  $\Psi_i(\delta, u) \geq 0 \quad \forall \delta > 0, \forall u \in U_0, \lim_{\delta \rightarrow 0} \Psi_i(\delta, u) = 0 \quad \forall u \in U_0, i = 0, \dots, s$ .

Для учета ограничений типа равенств и неравенств из (2) воспользуемся штрафными функциями (см. § 5.16). Ограничимся рассмотрением простейшей штрафной функции:

$$P(u) = \sum_{i=1}^s (g_i^+(u))^p, \quad u \in U_0, \quad p > 0, \quad (12)$$

где  $g_i^+(u) = \max\{0; g_i(u)\}$  при  $i = 1, \dots, m$ ,  $g_i^+(u) = |g_i(u)|$  при  $i = m+1, \dots, s$ . При выполнении условий (11) в качестве приближения для функции  $P(u)$  можно взять функцию

$$P_\delta(u) = \sum_{i=1}^s (g_{i\delta}^+(u))^p, \quad u \in U_0, \quad p > 0. \quad (13)$$

Оценим разность  $|P_\delta(u) - P(u)|$ . Заметим, что из неравенства (5.14.15):  $|a^+ - b^+| \leq |a - b|$  следует

$$|g_{i\delta}^+(u) - g_i^+(u)| \leq |g_{i\delta}(u) - g_i(u)| \leq \Psi_i(\delta, u) \quad (14)$$

$$\forall u \in U_0, \quad \delta > 0, \quad i = 1, \dots, s.$$

Поскольку

$$|a^\nu - b^\nu| \leq |a - b|^\nu \quad \forall a \geq 0, \quad b \geq 0, \quad 0 < \nu \leq 1, \quad (15)$$

то с учетом (12)–(14) имеем

$$|P_\delta(u) - P(u)| \leq \sum_{i=1}^s \Psi_i(\delta, u) \quad \forall u \in U_0, \quad \delta > 0, \quad 0 < p \leq 1. \quad (16)$$

В случае  $p > 1$  воспользуемся формулой конечных приращений Лагранжа для функции  $\varphi(x) = x^p$ ,  $x \in E_+^1$ . Получим  $|a^p - b^p| = p|b + \theta(a - b)|^{p-1}|a - b| \leq p(|b| + |a - b|)^{p-1}|a - b| \quad \forall a \geq 0, b \geq 0$ . Отсюда и из (11)–(13) вытекает:

$$|P_\delta(u) - P(u)| \leq \sum_{i=1}^s p(g_i^+(u) + \Psi_i(\delta, u))^{p-1} \Psi_i(\delta, u) \quad (17)$$

$$\forall u \in U_0, \quad \delta > 0, \quad p > 1.$$

Из (16), (17) следует, что для штрафных функций (12), (13) при условиях (11) справедлива оценка

$$|P_\delta(u) - P(u)| \leq \tilde{\Psi}(\delta, u) \quad \forall u \in U_0, \quad \delta > 0, \quad (18)$$

где

$$\tilde{\Psi}(\delta, u) = \begin{cases} \sum_{i=1}^s \Psi_i(\delta, u) & \text{при } 0 < p \leq 1, \\ \sum_{i=1}^s p(g_i^+(u) + \Psi_i(\delta, u))^{p-1} \Psi_i(\delta, u) & \text{при } p > 1. \end{cases} \quad (19)$$

Заметим, что в дальнейшем мы не будем пользоваться явным видом (13), (19) функций  $P_\delta(u)$ ,  $\tilde{\Psi}(\delta, u)$ , нам будет достаточно того, что некоторая функция  $P_\delta(u)$  удовлетворяет неравенству (18), где  $\tilde{\Psi}(\delta, u) \geq 0 \quad \forall u \in U_0, \delta > 0$ ,  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \tilde{\Psi}(\delta, u) = 0 \quad \forall u \in U_0$ . Введем функцию

$$\chi_\delta(u) = J_\delta(u) + A(\delta)P_\delta(u) + \Psi_0(\delta, u) + A(\delta)\tilde{\Psi}(\delta, u), \quad u \in U_0, \quad \delta > 0, \quad (20)$$

где  $J_\delta(u)$ ,  $P_\delta(u)$  — какие-либо функции, удовлетворяющие условиям (10), (18),  $A(\delta) > 0$  — штрафной коэффициент. Рассмотрим задачу

$$\chi_\delta(u) \rightarrow \inf, \quad u \in U_0. \quad (21)$$

Приведем достаточные условия, гарантирующие равенство

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \chi_{\delta*} = J_*, \quad \chi_{\delta*} = \inf_{u \in U_0} \chi_\delta(u). \quad (22)$$

Мы здесь не будем стремиться к формулировкам возможно общих условий, при которых справедливо равенство (22), а ограничимся рассмотрением уже знакомого нам класса задач (1), (2) с сильно согласованной постановкой (см. определение 5.16.3). А именно, пусть существуют постоянные  $c_1 \geq 0, \dots, c_s \geq 0, \nu > 0$ , такие, что

$$J_* \leq J(u) + \sum_{i=1}^s c_i(g_i^+(u))^\nu, \quad u \in U_0. \quad (23)$$

Условия, обеспечивающие выполнение неравенства (23), приведены в леммах 5.16.1, 5.16.5 (см. также пример 5.16.8), которые сохраняют силу и в метрических пространствах.

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия (10), (18), (23), параметры  $p, \nu$  из (12), (23) таковы, что  $p \geq \nu$ . Пусть  $A(\delta) > 0$ ,  $\lim_{\delta \rightarrow 0} A(\delta) = +\infty$ ,  $\lim_{\delta \rightarrow 0} A(\delta) \tilde{\Psi}(\delta, u) = 0 \quad \forall u \in U_0$ . Тогда справедливо равенство (22).

**Доказательство.** Из условия (23) вытекает неравенство

$$J_* \leq J(u) + A(\delta)P(u) + BA^{-\frac{\nu}{p-\nu}} \quad \forall u \in U_0, \quad \delta > 0, \quad p \geq \nu, \quad (24)$$

где при  $p = \nu$  по определению полагается  $A^{-\frac{\nu}{p-\nu}} = 0$ ,  $B = 0$  и считается, что  $A(\delta) \geq |c| = \max_{1 \leq i \leq s} |c_i|$ , а при  $p > \nu$  здесь

$$B = (p - \nu) \nu^{\frac{\nu}{p-\nu}} p^{-\frac{p}{p-\nu}} |c|^{\frac{p}{p-\nu}}, \quad |c| = \left( \sum_{i=1}^s |c_i|^{\frac{p}{p-\nu}} \right)^{\frac{p-\nu}{p}}.$$

Для доказательства (24) при  $p > \nu$  надо воспользоваться рассуждениями, использованными при переходе от неравенства (5.16.25) к (5.16.26), с заменой  $A_k$  на  $A(\delta)$ , функции  $\Phi_k(u) = J(u) + A_k P(u)$  на  $\Phi_\delta(u) = J(u) + A(\delta)P(u)$ . При  $p = \nu$  из (12) и (23) непосредственно имеем  $J_* \leq J(u) + \max_{1 \leq i \leq s} |c_i| P(u) \leq J(u) + A(\delta)P(u) \quad \forall u \in U_0$ . Из (24) с учетом неравенств (10), (18) и определения (20) функции  $\chi_\delta(u)$  следует

$$\begin{aligned} J_* &\leq J_\delta(u) + A(\delta)P_\delta(u) + \Psi_0(\delta, u) + A(\delta)\tilde{\Psi}(\delta, u) + B(A(\delta))^{-\frac{\nu}{p-\nu}} = \\ &= \chi_\delta(u) + B(A(\delta))^{-\frac{\nu}{p-\nu}} \quad \forall u \in U_0. \end{aligned}$$

Тогда  $J_* \leq \chi_{\delta*} + B(A(\delta))^{-\frac{\nu}{p-\nu}}$ . Отсюда, снова обращаясь к (10), (18), (20), получаем

$$\begin{aligned} J_* - B(A(\delta))^{-\frac{\nu}{p-\nu}} &\leq \chi_{\delta*} \leq \chi_\delta(u) \leq \\ &\leq J(u) + A(\delta)P(u) + 2\Psi_0(\delta, u) + 2A(\delta)\tilde{\Psi}(\delta, u) \quad \forall u \in U_0, \quad \delta > 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Эти неравенства справедливы и для точек  $u \in U$ . Так как  $P(u) = 0$  при  $u \in U$ , то из (25) имеем:  $J_* - B(A(\delta))^{-\frac{\nu}{p-\nu}} \leq \chi_{\delta*} \leq J(u) + 2\Psi_0(\delta, u) + 2A(\delta)\tilde{\Psi}(\delta, u) \quad \forall u \in U, \quad \forall \delta > 0$ . Отсюда и из свойств функций  $\Psi_0(\delta, u)$ ,  $\tilde{\Psi}(\delta, u)$  при  $\delta \rightarrow 0$  следует:  $J_* \leq \varliminf_{\delta \rightarrow 0} \chi_{\delta*} \leq \varlimsup_{\delta \rightarrow 0} \chi_{\delta*} \leq J(u) \quad \forall u \in U$ . Перейдем в этих неравенствах к нижней грани по  $u \in U$ . Получим  $\varliminf_{\delta \rightarrow 0} \chi_{\delta*} = \varlimsup_{\delta \rightarrow 0} \chi_{\delta*} = J_*$ , что равносильно по (22). Теорема 2 доказана. Случай  $J_* = -\infty$  в (22) не исключается.  $\square$

Отметим, что если погрешности при вычислении значений функции (20) таковы, что  $|\chi_{\delta\mu}(u) - \chi_\delta(u)| \leq \mu \quad \forall u \in U_0$  (ср. с (7)), то из теоремы 1.1 и равенств (22) вытекает, что задача (21) устойчива по функции и вполне может быть использована для получения приближенного значения искомой величины  $J_*$ .

**3.** Рассмотрим метод регуляризации для решения неустойчивых задач (1), (2) первого типа, не использующий штрафные функции и основанный на идее расширения множества. Предположим, что погрешности задания входных данных удовлетворяют условиям (10), (11). Введем множество

$$\begin{aligned} W(\delta, \theta) = \{u \in U_0: g_{i\delta}(u) \leq \Psi_i(\delta, u) + \theta, \quad i = 1, \dots, m, \\ |g_{i\delta}(u)| \leq \Psi_i(\delta, u) + \theta, \quad i = m+1, \dots, s\} = \\ = \{u \in U_0: g_{i\delta}^+(u) \leq \Psi_i(\delta, u) + \theta, \quad i = 1, \dots, s\}, \quad \delta > 0, \quad \theta \geq 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Убедимся, что  $W(\delta, \theta) \neq \emptyset \quad \forall \delta > 0, \theta \geq 0$ . Возьмем произвольную точку  $u \in U$ . Тогда  $g_i^+(u) = 0$  и из (14) имеем  $g_{i\delta}^+(u) \leq g_i^+(u) + \Psi_i(\delta, u) \leq \Psi_i(\delta, u) + \theta$ ,  $i = 1, \dots, s$ . Отсюда следует, что  $U \subset W(\delta, \theta) \quad \forall \delta > 0, \theta \geq 0$ , т. е.  $W(\delta, \theta)$  — расширение множества  $U$ . Далее, предполагая, что задача (1), (2) имеет сильно согласованную постановку и нам известны величины  $c_i, \nu$  из (23) (или их оценки сверху), введем функцию

$$\chi_\delta(u) = J_\delta(u) + \Psi_0(\delta, u) + \sum_{i=1}^s c_i (2\Psi_i(\delta, u))^\nu, \quad u \in U_0, \quad (27)$$

и рассмотрим задачу

$$\chi_\delta(u) \rightarrow \inf, \quad u \in W(\delta, \theta). \quad (28)$$

**Теорема 3.** Пусть выполнены условия (10), (11), (23), пусть  $0 < \nu \leq 1$ . Тогда

$$\lim_{(\delta, \theta) \rightarrow 0} \chi_{\delta*}(\theta) = J_*, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \chi_{\delta*}(0) = J_*, \quad (29)$$

$$\text{где } \chi_{\delta*}(\theta) = \inf_{u \in W(\delta, \theta)} \chi_\delta(u) \quad \forall \delta > 0, \theta \geq 0.$$

**Доказательство.** Из (14), (26) следует

$$g_i^+(u) \leq g_{i\delta}^+(u) + \Psi_i(\delta, u) \leq 2\Psi_i(\delta, u) + \theta \quad \forall u \in W(\delta, \theta), \quad i = 1, \dots, s.$$

Отсюда с учетом условий (10), (23), определения (27) функции  $\chi_\delta(u)$  и неравенства (15) имеем

$$\begin{aligned} J_* \leq J(u) + \sum_{i=1}^s c_i (2\Psi_i(\delta, u) + \theta)^\nu \leq J_\delta(u) + \Psi_0(\delta, u) + \sum_{i=1}^s c_i (2\Psi_i(\delta, u))^\nu + \\ + \sum_{i=1}^s c_i |(2\Psi_i(\delta, u) + \theta)^\nu - (2\Psi_i(\delta, u))^\nu| \leq \chi_\delta(u) + |c|_1 \theta^\nu \quad \forall u \in W(\delta, \theta), \end{aligned}$$

где  $|c|_1 = c_1 + \dots + c_s$ . Переходя в этих неравенствах к нижней грани по  $u \in W(\delta, \theta)$ , получим  $J_* \leq \chi_{\delta*}(\theta) + |c|_1 \theta^\nu \quad \forall \delta > 0, \theta \geq 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} J_* \leq \chi_{\delta*}(\theta) + |c|_1 \theta^\nu \leq \chi_\delta(u) + |c|_1 \theta^\nu \leq \\ \leq J(u) + 2\Psi_0(\delta, u) + \sum_{i=1}^s c_i (\Psi_i(\delta, u))^\nu + |c|_1 \theta^\nu \quad \forall u \in W(\delta, \theta). \end{aligned} \quad (30)$$

В частности, эти неравенства справедливы для всех  $u \in U \subseteq W(\delta, \theta)$ . При  $(\delta, \theta) \rightarrow 0$  с учетом свойств функций  $\Psi_i(\delta, u)$ ,  $i = 0, \dots, s$ , из (30) имеем

$$J_* \leq \lim_{(\delta, \theta) \rightarrow 0} \chi_{\delta*}(\theta) \leq \overline{\lim}_{(\delta, \theta) \rightarrow 0} \chi_{\delta*}(\theta) \leq J(u) \quad \forall u \in U.$$

В силу произвола в выборе  $u \in U$  это возможно лишь тогда, когда

$$\lim_{(\delta, \theta) \rightarrow 0} \chi_{\delta*}(\theta) = \overline{\lim}_{(\delta, \theta) \rightarrow 0} \chi_{\delta*}(\theta) = J_*,$$

что равносильно первому равенству (29). Опираясь на неравенства (30) при  $\theta = 0$ , аналогичными рассуждениями приходим к второму равенству (29). Теорема 3 доказана.  $\square$

Выясним, будет ли сама задача (26)–(28) устойчивой по функции. Сразу заметим, что при  $\theta = 0$  эта задача может оказаться неустойчивой. В самом деле, например, может случиться, что  $g_{i\delta}(u) = g_i(u) + \Psi_i(\delta, u)$ ,  $\delta > 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $m = s$ . Тогда  $W(\delta, 0) = U$  и, как мы видели в примерах 1.7, 1.8, малейшее возмущение входных данных задачи (26)–(28) при  $\theta = 0$  может привести к пустому множеству.

Рассмотрим случай  $\theta > 0$ . Предположим, что вместо точных значений  $J_\delta(u)$ ,  $g_{i\delta}^+(u)$ ,  $\Psi_i(\delta, u)$  мы можем вычислить лишь их приближения  $J_{\delta\mu}(u)$ ,  $g_{i\delta\mu}^+(u)$ ,  $\Psi_{i\mu}(\delta, u)$ , для которых

$$\begin{aligned} |J_{\delta\mu}(u) - J_\delta(u)| &\leq \mu, \quad |g_{i\delta\mu}^+(u) - g_{i\delta}^+(u)| \leq \mu, \quad i = 1, \dots, s, \\ |\Psi_{i\mu}(\delta, u) - \Psi_i(\delta, u)| &\leq \mu, \quad i = 0, \dots, s, \quad \forall u \in U_0, \quad \delta > 0, \quad \theta > 0, \quad \mu > 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Тогда вместо функции  $\chi_\delta(u)$  из (27) будем иметь

$$\chi_{\delta\mu}(u) = J_{\delta\mu}(u) + \Psi_{0\mu}(\delta, u) + \sum_{i=1}^s c_i (2\Psi_{i\mu}(\delta, u))^\nu, \quad u \in U_0. \quad (32)$$

Отсюда с учетом (31) и неравенства (15) получаем

$$|\chi_{\delta\mu}(u) - \chi_\delta(u)| \leq 2\mu + \sum_{i=1}^s c_i |(2\Psi_{i\mu}(\delta, u))^\nu - (2\Psi_i(\delta, u))^\nu| \leq 2\mu + |c|_1 (2\mu)^\nu \quad \forall u \in U_0$$

или

$$\chi_\delta(u) - 2\mu - |c|_1 (2\mu)^\nu \leq \chi_{\delta\mu}(u) \leq \chi_\delta(u) + 2\mu + |c|_1 (2\mu)^\nu \quad \forall u \in U_0. \quad (33)$$

Далее, в определении (26) множества  $W(\delta, \theta)$  положим  $\theta = 2\mu$  и заменим  $g_{i\delta}^+(u)$ ,  $\Psi_i(\delta, u)$  функциями  $g_{i\delta\mu}(u)$ ,  $\Psi_{i\mu}(\delta, u)$ , взятыми из (31). Тогда получим множество

$$W_\mu(\delta, 2\mu) = \{u \in U_0: g_{i\delta\mu}^+(u) \leq \Psi_{i\mu}(\delta, u) + 2\mu, \quad i = 1, \dots, s\}. \quad (34)$$

Покажем, что

$$W(\delta, 0) \subseteq W_\mu(\delta, 2\mu) \subseteq W(\delta, \theta) \quad \forall \theta \geq 4\mu. \quad (35)$$

В самом деле, если  $u \in W(\delta, 0)$ , то  $g_{i\delta}^+(u) \leq \Psi_i(\delta, u)$  и с учетом (31) имеем

$$g_{i\delta\mu}^+(u) \leq g_{i\delta}^+(u) + \mu \leq \Psi_i(\delta, u) + \mu \leq \Psi_{i\mu}(\delta, u) + 2\mu \quad \forall u \in W(\delta, 0),$$

$$i = 1, \dots, s.$$

Это означает, что  $W(\delta, 0) \subseteq W_\mu(\delta, 2\mu)$ . Аналогично, если  $u \in W_\mu(\delta, 2\mu)$ , то

$$g_{i\delta\mu}^+(u) \leq g_{i\delta\mu}^+(u) + \mu \leq \Psi_{i\mu}(\delta, u) + 3\mu \leq \Psi_i(\delta, u) + 4\mu \leq \Psi_i(\delta, u) + \theta,$$

$$i = 1, \dots, s,$$

так что  $W_\mu(\delta, 2\mu) \subseteq W(\delta, \theta) \quad \forall \theta \geq 4\mu$ . Включения (35) установлены. Из них следует, что

$$\chi_{\delta*}(\theta) = \inf_{u \in W(\delta, \theta)} \chi_\delta(u) \leq \inf_{u \in W_\mu(\delta, 2\mu)} \chi_\delta(u) \leq \inf_{u \in W(\delta, 0)} \chi_\delta(u) = \chi_{\delta*}(0)$$

$$\forall \theta \geq 4\mu. \quad (36)$$

В неравенствах (33) почленно перейдем к нижней грани по  $u \in W_\mu(\delta, 2\mu)$ . С учетом (36) получим

$$\chi_{\delta*}(\theta) - 2\mu - |c|_1(2\mu)^\nu \leq \inf_{u \in W_\mu(\delta, 2\mu)} \chi_{\delta\mu}(u) = \chi_{\delta\mu*} \leq \chi_{\delta*}(0) + 2\mu + |c|_1(2\mu)^\nu,$$

$$\forall \theta \geq 4\mu.$$

Отсюда и из (29) следует, что

$$\lim_{(\delta, \theta) \rightarrow 0, \theta \geq 4\mu} \chi_{\delta\mu*} = J_*.$$

Это означает, что при условиях (31),  $\theta \geq 4\mu > 0$ , задача (26)–(28) устойчива по функции, и она может быть использована для вычисления величины  $\chi_{\delta\mu*}$ , которая согласно теореме 3 при достаточно малых  $(\delta, \theta)$  является приближенным решением задачи (1), (2) первого типа.

Отметим, что для задач линейного программирования в [179] предложен и исследован метод регуляризации, основанный на идее расширения множества и приводящий к устойчивой вспомогательной задаче вида (26)–(28), также являющейся задачей линейного программирования (см. ниже § 7, п. 4). Другой вариант метода регуляризации задач минимизации первого типа, основанный на сочетании идей расширения множества и метода покрытий, можно извлечь из работы [592], в которой рассмотрены более сложные по сравнению с (1), (2) многокритериальные задачи и устойчивые методы их решения.

4. В заключение параграфа сделаем несколько замечаний.

**З а м е ч а н и е 1.** В теории и методах неустойчивых (некорректных) задач фундаментальную роль играет понятие регуляризующего оператора (регуляризующего алгоритма) [63; 695]. Сформулируем это понятие применительно к задаче (1), (2) первого типа.

**О п р е д е л е н и е 1.** Оператор  $R_\delta$ , который каждому набору приближенных данных  $(J_\delta(u), \Psi_0(\delta, u), g_{i\delta}(u), \Psi_i(\delta, u), i = 1, \dots, s)$ , удовлетворяющих условиям (10), (11), ставит в соответствие число  $\chi_\delta$ , называется *регуляризующим оператором задачи (1), (2) первого типа*, если  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \chi_\delta = J_*$ .

Изложенные выше три метода регуляризации (метод (5), методы (20), (21) и (26)–(28)) определяют оператор, который при выполнении условий теорем 1–3 является регуляризирующим.

**З а м е ч а н и е 2.** Перечисленные методы регуляризации отличаются друг от друга тем, что для своей реализации требуют различную априорную информацию. В методе (5) мы должны заранее знать, что множество  $U$  непусто и известно точно и, кроме того, должны иметь приближения  $J_\delta(u)$  для целевой функции, удовлетворяющие условию (4) с известной функцией  $\Psi(\delta, u)$ . Для реализации метода (20), (21) нужно иметь приближения  $J_\delta(u)$ ,  $P_\delta(u)$  и функции погрешности  $\Psi_0(\delta, u)$ ,  $\tilde{\Psi}(\delta, u)$  из (10), (18), множество  $U_0$ , а также знать информацию о том, что задача (1), (2) имеет сильно согласованную постановку и оценку сверху показателя  $\nu$  из (23) для правильного выбора параметра  $p$  в штрафной функции (12); в методе (26)–(28) нужно еще дополнительно иметь оценки сверху для величин  $c_i$  из (23).

Подчеркнем, что все методы решения неустойчивых задач так или иначе предполагают наличие какой-либо априорной информации о рассматриваемой задаче, о ее входных данных и их погрешностях и т. д. Различные аспекты проблемы использования априорной информации в методах решения неустойчивых задач обсуждаются, например, в [184; 450; 509; 557; 693; 695; 697; 757; 817] (см. ниже замечание 6.1).

**З а м е ч а н и е 3.** В описанных методах регуляризации мы не касались конкретных методов определения величин  $\chi_{\delta*}$  в задачах (5), (21) и (26)–(28). Для вычисления  $\chi_{\delta*}$  могут быть использованы любые подходящие методы минимизации (например, методы из гл. 5) в зависимости от свойств функции  $\chi_\delta(u)$ , структуры множеств  $U$ ,  $U_0$ ,  $W(\delta, \theta)$ . К сожалению, здесь нет общих рецептов, и тонкую работу по согласованию параметров используемого метода минимизации с параметрами изложенных выше методов регуляризации каждый раз приходится проводить отдельно с учетом конкретных особенностей решаемой задачи. Требуют дальнейшего исследования также проблемы, связанные с задачами (1), (2) первого типа, когда входными данными являются не значения функций  $J(u)$ ,  $g_i(u)$ , а какие-то другие элементы этих задач, например, производные упомянутых функций.

### Упражнения

**У п р а ж н е н и е 1.** К задачам из примеров 1.1–1.9 применить изложенные выше методы регуляризации. Проверить, имеют ли эти задачи сильно согласованную постановку в смысле неравенства (23).

**У п р а ж н е н и е 2.** Применимы ли изложенные методы регуляризации к задачам из упражнений 1.1–1.4?

## § 3. Стабилизатор. Леммы о регуляризации

### 1. Задачу

$$J(u) \rightarrow \inf, \quad u \in U, \quad (1)$$

$$U = \{u \in U_0 : g_i(u) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m; g_i(u) = 0, \quad i = m + 1, \dots, s\} \quad (2)$$



далее будем рассматривать, как задачу второго типа, считая, что  $U_0$  — заданное множество из некоторого метрического пространства  $\mathcal{M}$  с метрикой  $\rho(u, v)$ , функции  $J(u), g_i(u)$ ,  $i = 1, \dots, s$ , определены на  $U_0$  и принимают на этом множестве конечные значения. Напоминаем, что в задачах второго типа наряду с величиной, близкой к  $J_* = \inf_{u \in U} J(u)$ , ищется точка  $u \in U_0$ , близкая в метрике  $\mathcal{M}$  к множеству  $U_* = \{u \in U: J(u) = J_*\}$ . Здесь и далее предполагается, что

$$J_* > -\infty, \quad U_* \neq \emptyset. \quad (3)$$

В § 1 было показано, что задача (1), (2) может оказаться неустойчивой по аргументу при возмущениях входных данных  $J(u), g_i(u)$ ,  $i = 1, \dots, s$ , и попытка использовать решение (см. множество (1.8)) возмущенной задачи (1.4), (1.5) в качестве приближенного решения задачи (1), (2) второго типа не всегда оправдана. Для гарантированного получения хорошего приближения, как и в случае задачи (1), (2) первого типа, здесь нужно пользоваться методами регуляризации [695]. Для описания этих методов нам понадобится понятие стабилизатора.

**О п р е д е л е н и е 1.** Функция  $\Omega(u)$ , определенная на непустом множестве  $U_\Omega \subseteq U_0$ , называется *стабилизатором* задачи (1), (2) в метрике  $\mathcal{M}$ , если:

1)  $\Omega(u) \geq 0 \quad \forall u \in U_\Omega$ ;

2) множество  $\Omega_c = \{u \in U_\Omega: \Omega(u) \leq c\}$  при всех  $c$ , для которых  $\Omega_c \neq \emptyset$ , относительно компактно, т. е. из любой последовательности  $\{u_k\} \in \Omega_c$  можно выбрать подпоследовательность, которая в метрике  $\mathcal{M}$  сходится к некоторой точке  $u \in \mathcal{M}$ ;

3) множество

$$U_{\Omega*} = U_* \cap U_\Omega \neq \emptyset. \quad (4)$$

Приведем примеры функций, которые могут служить стабилизатором для задачи (1), (2) в некоторых функциональных пространствах.

**П р и м е р 1.** Пусть  $\mathcal{M} = E^n$  —  $n$ -мерное евклидово пространство. Тогда в качестве стабилизатора задачи (1), (2) можно взять функции

$$\Omega(u) = |u - \bar{u}|^l, \quad \Omega(u) = (\langle D(u - \bar{u}), u - \bar{u} \rangle)^l, \quad u \in E^n, \quad (5)$$

где  $\bar{u}$  — заданная точка из  $E^n$ ,  $D$  — заданная положительно определенная матрица  $n$ -го порядка,  $l$  — любое положительное число. Относительная компактность множества  $\Omega_c$  здесь вытекает из классической теоремы Больцано–Вейерштрасса [350; 352]. Требование (4) в задаче (1), (2) при  $\mathcal{M} = E^n$  равносильно условию  $U_* \neq \emptyset$ , так как функции (5) определены на  $E^n$  и поэтому можем считать, что  $U_\Omega = U_0$ ,  $U = U \cap U_\Omega$ ,  $U_{\Omega*} = U_* \cap U_\Omega = U_*$ .

**П р и м е р 2.** Пусть  $\mathcal{M} = C_r[a, b]$  — банахово пространство  $r$ -мерных непрерывных вектор-функций  $u = u(t) = (u^1(t), \dots, u^r(t))$ ,  $a \leq t \leq b$ , с нормой  $\|u\|_{C_r} = \max_{a \leq t \leq b} |u(t)|$ . Рассмотрим функцию

$$\Omega(u) = \|u\|_{H_r^1}^2 = \int_a^b (|u(t)|^2 + |\dot{u}(t)|^2) dt, \quad (6)$$

определенную на множестве  $H_r^1[a, b]$  (обозначения см в § 8.1). В силу известных теорем вложения (см., например, [492; 557; 648])  $H_r^1[a, b] \subset C_r[a, b]$ . Убеждаемся, что множество  $\Omega_c = \{u \in H_r^1[a, b] : \Omega(u) \leq c\}$  относительно компактно в метрике  $C_r[a, b]$ . В самом деле, из неравенства  $\Omega(u) \leq c$  следует существование хотя бы одной точки  $t_1 \in [a, b]$  такой, что  $|u(t_1)| \leq (c(b-a)^{-1})^{1/2}$ . Тогда

$$\begin{aligned} |u(t)| &= \left| \int_{t_1}^t \dot{u}(\tau) d\tau + u(t_1) \right| \leq (c(b-a)^{-1})^{1/2} + (b-a)^{1/2} \left( \int_a^b |\dot{u}(\tau)|^2 d\tau \right)^{1/2} \leq \\ &\leq (c(b-a)^{-1})^{1/2} + (c(b-a))^{1/2} = \text{const} \quad \forall u \in \Omega_c. \end{aligned}$$

Далее, имеем

$$|u(t) - u(\tau)| = \left| \int_{\tau}^t \dot{u}(s) ds \right| \leq |t - \tau|^{1/2} \left( \int_a^b |\dot{u}(s)|^2 ds \right)^{1/2} \leq (c|t - \tau|)^{1/2} \quad \forall u \in \Omega_c.$$

Таким образом, множество функций  $\Omega_c$  равномерно ограничено и равностепенно непрерывно на отрезке  $[a, b]$ . Из теоремы [393, с. 110] тогда следует, что из любой последовательности  $\{u_k(t)\} \in \Omega_c$  можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторой непрерывной функции  $u(t)$  равномерно на отрезке  $[a, b]$ . Относительная компактность множества  $\Omega_c$  в метрике  $C_r[a, b]$  установлена. Для задачи (1), (2) с множеством  $U_0 \subseteq C_r[a, b]$  требование (4) означает, что эта задача имеет хотя бы одно решение  $u_* = u_*(t) \in H_r^1[a, b]$ . При выполнении этого условия функция (6) с областью определения  $U_\Omega = U_0 \cap H_r^1[a, b]$  является стабилизатором задачи (1), (2). Стабилизатором может служить также функция  $\Omega(u) = (\|u\|_{H_r^1})^l$  при любом  $l > 0$ .

Покажем, что функция

$$\Omega(u) = \left( \max_{a \leq t \leq b} |u(t)| + \sup_{\substack{t, \tau \in [a, b] \\ t \neq \tau}} \frac{|u(t) - u(\tau)|}{|t - \tau|^\gamma} \right)^l, \quad 0 < \gamma \leq 1, \quad l > 0, \quad (7)$$

также может быть использована в качестве стабилизатора в задаче (1), (2) при  $U_0 \subseteq C_r[a, b]$ , если эта задача имеет хотя бы одно решение  $u_* = u_*(t)$ , удовлетворяющее условию Гёльдера:  $|u_*(t) - u_*(\tau)| \leq L|t - \tau|^\gamma$ ,  $t, \tau \in [a, b]$ . В самом деле, если  $\Omega(u) \leq c$ , то  $\max_{a \leq t \leq b} |u(t)| \leq c_1 = c^{1/l}$ ,  $|u(t) - u(\tau)| \leq c_1|t - \tau|^\gamma$ ,  $t, \tau \in [a, b] \quad \forall u \in \Omega_c$ . Это значит, что множество функций  $\Omega_c$  равномерно ограничено и равностепенно непрерывно на отрезке  $[a, b]$ . В силу теоремы Арцела множество  $\Omega_c$  относительно компактно в метрике  $C_r[a, b]$ .

Функции (6), (7) могут служить стабилизатором и в задаче (1), (2) при  $\mathcal{M} = L_p^r[a, b]$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , так как из равномерной сходимости последовательности непрерывных функций следует ее сходимость в норме  $L_p[a, b]$ .

**Пример 3.** Пусть  $\mathcal{M} = C_r^m[a, b]$  — банахово пространство  $m$  раз непрерывно дифференцируемых  $r$ -мерных вектор-функций с нормой  $\|u\|_{C_r^m} = \sum_{i=0}^m \max_{a \leq t \leq b} \left| \frac{d^i u(t)}{dt^i} \right|$ . Если в задаче (1), (2) множество  $U_0 \subseteq C_r^m[a, b]$  и эта задача

имеет хотя бы одно решение  $u(t) \in H_r^{m+1}[a, b]$  (см. обозначение в § 8.1), то стабилизатором в ней можно взять функцию

$$\Omega(u) = \|u\|_{H_r^{m+1}}^2 = \int_a^b \left( |u(t)|^2 + \sum_{i=1}^{m+1} \left| \frac{d^i u(t)}{dt^i} \right|^2 \right) dt.$$

Если же такая задача (1), (2) имеет решение  $u(t) \in C_r^m[a, b]$ ,  $m$ -я производная которого удовлетворяет условию Гёльдера

$$\left| \frac{d^m u(t)}{dt^m} - \frac{d^m u(\tau)}{dt^m} \right| \leq L|t - \tau|^\gamma, \quad \forall t, \tau \in [a, b], \quad 0 < \gamma \leq 1,$$

то стабилизатором может служить функция

$$\Omega(u) = \|u\|_{C_r^m} + \sup_{\substack{t, \tau \in [a, b] \\ t \neq \tau}} \left| \frac{d^m u(t)}{dt^m} - \frac{d^m u(\tau)}{dt^m} \right| |t - \tau|^{-\gamma}.$$

Эти утверждения доказываются с помощью рассуждений, аналогичных приведенным в примере 2.

**Пример 4.** Пусть в задаче (1), (2)  $U_0 \subseteq \mathcal{M} = L_1^r[a, b]$ , и эта задача имеет хотя бы одно решение  $u_* = u_*(t) \in V^r[a, b]$ . Здесь под  $V^r[a, b]$  понимается банахово пространство вектор-функций  $u(t) = (u^1(t), \dots, u^r(t))$  с ограниченным изменением, в котором норма равна  $\|u\|_{V^r} = |u(a)| + V_a^b(u)$ ,  $V_a^b(u)$  — полное изменение функции  $u = u(t)$  на отрезке  $[a, b]$  ([393], см. также § 6.4). В такой задаче стабилизатором можно взять функцию  $\Omega(u) = \|u\|_{V^r}$ . Покажем, что множество  $\Omega_c = \{u \in V^r[a, b] : \Omega(u) \leq c\}$  относительно компактно в метрике  $L_1^r[a, b]$ . В самом деле, из неравенства  $\Omega(u) \leq c$  следует, что

$$|u(t)| \leq |u(a)| + |u(t) - u(a)| \leq |u(a)| + V_a^b(u) \leq c \quad \forall t \in [a, b] \quad \forall u \in \Omega_c.$$

Далее, считая для определенности  $u(t) \equiv u(b) \quad \forall t > b$ , будем иметь

$$\begin{aligned} \int_a^b |u(t + \tau) - u(t)| dt &\leq \int_a^b V_t^{t+\tau}(u) dt = \int_a^b (V_a^{t+\tau}(u) - V_a^t(u)) dt = \\ &= \int_b^{b+\tau} V_a^t(u) dt - \int_a^{a+\tau} V_a^t(u) dt \leq 2c\tau \quad \forall \tau > 0, \quad \forall u \in \Omega_c. \end{aligned}$$

Следовательно, множество функций  $\Omega_c$  равномерно ограничено и равномерно непрерывно в норме  $L_1^r[a, b]$ . Это значит (см. теорему 8.2.2), что множество  $\Omega_c$  относительно компактно в метрике  $L_1^r[a, b]$ .

При исследовании задач (1), (2), когда  $U_0 \subseteq \mathcal{M} = B$  — банахово пространство, ниже нам понадобится понятие слабого стабилизатора.

**О п р е д е л е н и е 2.** Функция  $\Omega(u)$ , определенная на непустом множестве  $U_\Omega \subseteq U_0 \subseteq B$ , называется *слабым стабилизатором* задачи (1), (2), если:

- 1)  $\Omega(u) \geq 0 \quad \forall u \in U_\Omega$ ;
- 2) множество  $\Omega_c = \{u \in U_\Omega : \Omega(u) \leq c\}$  при всех  $c$ , для которых  $\Omega_c \neq \emptyset$ , относительно слабо компактно, т. е. из любой последовательности  $\{u_k\} \in \Omega_c$  можно выбрать подпоследовательность, которая слабо в  $B$  сходится к некоторой точке  $u \in B$ ;
- 3) множество  $U_{\Omega*} = U_* \cap U_\Omega$  непусто.

**П р и м е р 5.** Пусть  $\mathcal{M} = B$  — рефлексивное банахово пространство. Тогда в качестве слабого стабилизатора задачи (1), (2) возьмем функцию

$$\Omega(u) = \|u - \bar{u}\|_B^\gamma, \quad u \in B; \quad \gamma > 0,$$

где  $\bar{u}$  — заданный элемент из  $B$ . Относительно слабая компактность множества  $\Omega_c$  следует из теоремы 8.2.3; требование  $U_{\Omega*} \neq \emptyset$  равносильно условию  $U_* \neq \emptyset$ , так как здесь можем считать, что  $U_\Omega = U_0$ , и, следовательно,  $U_{\Omega*} = U_*$ .

Если  $U_0$  — выпуклое множество из рефлексивного банахова пространства, то в качестве слабого стабилизатора можно взять равномерно выпуклую функцию  $\Omega(u)$  на  $U_0$ . Тогда множество  $\Omega_c = \{u \in U_0 : \Omega(u) \leq c\}$  ограничено (теорема 4.7.1) и относительно слабо компактно (теорема 8.2.3).

Примеры 1–5 показывают, что при построении стабилизаторов для задачи (1), (2) весьма полезны знания условий относительной компактности [относительно слабой компактности] множеств в конкретных метрических [банаховых] пространствах, теорем вложения одного функционального пространства в другое [95; 492; 535; 557; 648; 649; 872; 957].

**2.** В трех основных методах регуляризации для решения задачи (1), (2) второго типа (методы стабилизации, невязки, квазирешений), которые будут изложены ниже, строится однопараметрическое семейство точек  $\{u_\delta, \delta > 0\} \in U_\Omega$ , удовлетворяющее условиям

$$J(u_\delta) \leq J_* + \beta(\delta), \quad J_* = \inf_U J(u); \quad (8)$$

$$g_i(u_\delta) \leq \rho(\delta), \quad i = 1, \dots, m, \quad |g_i(u_\delta)| \leq \rho(\delta), \quad i = m+1, \dots, s; \quad (9)$$

$$\Omega(u_\delta) \leq \Omega_* + \gamma(\delta), \quad \Omega_* = \inf_{U_{\Omega*}} \Omega(u), \quad (10)$$

где  $\beta(\delta), \gamma(\delta), \rho(\delta)$  — некоторые функции параметра  $\delta > 0$ . При исследовании сходимости упомянутых методов регуляризации важную роль играют следующие две леммы, которые будем называть *леммами о регуляризации*.

**Л е м м а 1.** Пусть

1) множество  $U_0$  замкнуто в метрике  $\mathcal{M}$ , функции  $J(u), g_i(u)$ ,  $i = 1, \dots, m$ ;  $|g_i(u)|$ ,  $i = m+1, \dots, s$ , полунепрерывны снизу на  $U_0$ , множество (2) непусто и выполнены условия (3);

2)  $\Omega(u)$  — стабилизатор задачи (1), (2) в метрике  $\mathcal{M}$ ;

3) точки  $u_\delta \in U_\Omega$ ,  $\delta > 0$ , таковы, что выполнены условия (8)–(10), где

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \beta(\delta) = 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \rho(\delta) = 0, \quad \sup_{\delta > 0} |\gamma(\delta)| < \infty. \quad (11)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} J(u_\delta) &= J_*, \quad \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} g_i(u_\delta) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m; \\ \lim_{\delta \rightarrow 0} g_i(u_\delta) &= 0, \quad i = m+1, \dots, s, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \rho(u_\delta, U_*) = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Если наряду с условиями 1–3 выполнено еще условие

4)  $U_\Omega = U_0$ , функция  $\Omega(u)$  полунепрерывна снизу на  $U_0$ ,  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \gamma(\delta) = 0$ , то наряду с (12)

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \Omega(u_\delta) = \Omega_*, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \rho(u_\delta, U_{**}) = 0, \quad (13)$$

где  $U_{**} = \{u \in U_* : \Omega(u) = \Omega_*\}$ .

**Доказательство.** Из (10), (11) следует, что  $\Omega(u_\delta) \leq \Omega_* + \sup_{\delta > 0} |\gamma(\delta)| = c < \infty$ , т. е.  $u_\delta \in \Omega_c = \{u \in U_\Omega : \Omega(u) \leq c\}$ . Поскольку множество  $\Omega_c$  относительно компактно, то из любой последовательности  $\{u_k = u_{\delta_k}\}$ , где  $\{\delta_k\} \rightarrow 0$ , можно выбрать подпоследовательность  $\{u_{k_r}\}$ , сходящуюся к некоторой точке  $v_* \in \mathcal{M}$ . Из замкнутости  $U_0$  и из  $\{u_k\} \subset U_\Omega \subseteq U_0$  следует, что  $v_* \in U_0$ . Далее, пользуясь полунепрерывностью снизу функций  $g_i(u)$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $|g_i(u)|$ ,  $i = m+1, \dots, s$ , и включением  $v_* \in U_0$ , из (9), (11) имеем

$$\begin{aligned} g_i(v_*) &\leq \lim_{r \rightarrow \infty} g_i(u_{k_r}) \leq \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} g_i(u_{k_r}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ 0 \leq |g_i(v_*)| &\leq \lim_{r \rightarrow \infty} |g_i(u_{k_r})| \leq \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} |g_i(u_{k_r})| = 0, \quad i = m+1, \dots, s. \end{aligned} \quad (14)$$

Это означает, что  $v_* \in U$ . Из полунепрерывности снизу функции  $J(u)$ , условий (8), (11) вытекает  $J_* \leq J(v_*) \leq \lim_{r \rightarrow \infty} J(u_{k_r}) \leq \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} J(u_{k_r}) \leq J_*$ , т. е.  $\lim_{r \rightarrow \infty} J(u_{k_r}) = J(v_*) = J_*$ . Это означает, что  $v_* \in U_*$ . Тогда  $0 \leq \rho(u_{k_r}, U_*) \leq \rho(u_{k_r}, v_*)$ ,  $r = 1, 2, \dots$ , поэтому  $\lim_{r \rightarrow \infty} \rho(u_{k_r}, U_*) = 0 = \rho(v_*, U_*)$ . Тем самым показано, что для любой точки  $v_*$ , являющейся пределом какой-либо подпоследовательности  $\{u_{k_r}\}$  произвольной последовательности  $\{u_k = u_{\delta_k}\}$ , где  $\{\delta_k\} \rightarrow 0$ , справедливы равенства  $\lim_{r \rightarrow \infty} J(u_{k_r}) = J(v_*) = J_*$ ,  $\lim_{r \rightarrow \infty} \rho(u_{k_r}, U_*) = 0 = \rho(v_*, U_*)$ . Отсюда следует, что каждое из числовых множеств  $\{J(u_\delta), \delta > 0\}$ ,  $\{\rho(u_\delta, U_*), \delta > 0\}$  имеет единственную предельную точку, равную  $J_*$  и 0 соответственно, что равносильно утверждению (12).

Пусть теперь выполнены все условия 1–4 леммы. Снова возьмем произвольную последовательность  $\{u_k = u_{\delta_k}\}$ , где  $\{\delta_k\} \rightarrow 0$ , и произвольную точку  $v_*$ , являющуюся пределом какой-либо подпоследовательности  $\{u_{k_r}\}$  этой последовательности. По доказанному  $v_* \in U_*$ . Отсюда с учетом равенства  $U_{\Omega_*} = U_*$ , полунепрерывности снизу стабилизатора  $\Omega(u)$  на  $U_0$ ,  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \gamma(\delta) = 0$  и условия (10) имеем

$$\Omega_* = \inf_{U_*} \Omega(u) \leq \Omega(v_*) \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \Omega(u_{k_r}) \leq \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \Omega(u_{k_r}) \leq \Omega_*, \quad (15)$$

т. е.  $\lim_{r \rightarrow \infty} \Omega(u_{k_r}) = \Omega(v_*) = \Omega_*$ ,  $v_* \in U_{**}$ . Тогда  $0 \leq \rho(u_{k_r}, U_{**}) \leq \rho(u_{k_r}, v_*)$ ,  $r = 1, 2, \dots$ , и, следовательно,  $\lim_{r \rightarrow \infty} \rho(u_{k_r}, U_{**}) = 0$ . Это означает, что каждое

из числовых множеств  $\{\Omega(u_\delta), \delta > 0\}$ ,  $\{\rho(u_\delta, U_{**}), \delta > 0\}$  имеет единственную предельную точку, равную  $\Omega_*$  и 0 соответственно, что равносильно утверждению (13). Лемма 1 доказана.  $\square$

Заметим, что примерами стабилизатора  $\Omega(u)$ , удовлетворяющего всем условиям леммы 1, являются функции (5) на множестве  $U_\Omega = U_0 \subseteq \mathcal{M} = E^n$ .

**3.** В выпуклых задачах (1), (2), когда  $\mathcal{M} = B$  — банахово пространство, сходимость к множеству  $U_*$  в метрике  $B$  семейства  $\{u_\delta, \delta > 0\}$ , удовлетворяющего условиям (8)–(10), иногда удается получить, когда функция  $\Omega(u)$  является слабым стабилизатором. Такая возможность обсуждается в следующей лемме.

**Л е м м а 2.** Пусть

1)  $B$  — рефлексивное банахово пространство,  $U_0$  — выпуклое замкнутое множество из  $B$ , функции  $J(u)$ ,  $g_i(u)$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $|g_i(u)|$ ,  $i = m + 1, \dots, s$ , выпуклы и полунепрерывны снизу на  $U_0$ , множество (2) непусто и выполнены условия (3);

2) функция  $\Omega(u)$  определена, полунепрерывна снизу, строго равномерно выпукла на  $U_0$ ;

3) точки  $u_\delta \in U_0$  удовлетворяют условиям (8)–(10), где

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \beta(\delta) = 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \rho(\delta) = 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \gamma(\delta) = 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} J(u_\delta) &= J(v_*) = J_*, \quad \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} g_i(u_\delta) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m; \\ \lim_{\delta \rightarrow 0} g_i(u_\delta) &= 0, \quad i = m + 1, \dots, s, \\ \lim_{\delta \rightarrow 0} \Omega(u_\delta) &= \Omega(v_*) = \Omega_*, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \|u_\delta - v_*\| = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

где  $v_*$  — точка минимума функции  $\Omega(u)$  на множестве  $U_*$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Из (10) следует, что

$$u_\delta \in \Omega_c = \{u \in U_0 : \Omega(u) \leq c\} \quad \forall \delta > 0, \quad c = \Omega_* + \sup_{\delta > 0} |\gamma(\delta)| < \infty.$$

Это множество ограничено в норме  $B$ , что доказывается так же, как в теореме 4.7.1. Отсюда и из теоремы 8.2.3 вытекает, что  $\Omega_c$  относительно слабо компактно в  $B$ . Поэтому из любой последовательности  $\{u_k = u_{\delta_k}\}$ , где  $\{\delta_k\} \rightarrow 0$ , можно выбрать подпоследовательность  $\{u_{k_r}\}$ , слабо сходящуюся к некоторой точке  $v_* \in B$ . Так как множество  $U_0$  выпукло, замкнуто,  $\{u_{k_r}\} \in U_0$ ,  $r = 1, 2, \dots$ , то  $v_* \in U_0$  (следствие к теореме 8.2.5). Функции  $J(u)$ ,  $g_i(u)$ ,  $i = 1, \dots, m$ ;  $|g_i(u)|$ ,  $i = m + 1, \dots, s$ ,  $\Omega(u)$  выпуклы и полунепрерывны снизу на  $U_0$ , следовательно, они слабо полунепрерывны снизу (теорема 8.2.7). Отсюда и из (9), (11) следуют неравенства (14), т. е.  $v_* \in U$ . Далее, как и в лемме 1, доказываем, что  $\lim_{r \rightarrow \infty} J(u_{k_r}) = J(v_*) = J_*$ , так что  $v_* \in U_*$ . Тогда справедливы неравенства (15), откуда получаем, что  $\lim_{r \rightarrow \infty} \Omega(u_{k_r}) = \Omega(v_*) = \Omega_*$ ,  $v_* \in U_{**} = \{u \in U_* : \Omega(u) = \Omega_*\}$ , т. е.  $v_*$  — точка минимума строго равномерно выпуклой функции на выпуклом множестве  $U_*$ . Следовательно,  $U_{**} = \{v_*\}$  (теорема 4.2.1). Кроме того, из определения равномерной выпуклости

функции  $\Omega(u)$  следует

$$\frac{1}{4}\delta(\|u_{k_r} - v_*\|) \leq \frac{1}{2}\Omega(u_{k_r}) + \frac{1}{2}\Omega(v_*) - \Omega\left(\frac{u_{k_r} + v_*}{2}\right), \quad r = 1, 2, \dots$$

Отсюда, учитывая, что  $\frac{1}{2}(u_{k_r} + v_*)$  сходится к  $v_*$  при  $r \rightarrow \infty$  слабо в  $B$  и функция  $\Omega(u)$  слабо полунепрерывна снизу (теорема 8.2.7), имеем:

$$\begin{aligned} 0 \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \delta(\|u_{k_r} - v_*\|) &\leq \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \delta(\|u_{k_r} - v_*\|) \leq \\ &\leq \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2}(\Omega(u_{k_r}) + \Omega(v_*)) + \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \left(-\Omega\left(\frac{1}{2}(u_{k_r} + v_*)\right)\right) \leq 0. \end{aligned}$$

Поэтому  $\lim_{r \rightarrow \infty} \delta(\|u_{k_r} - v_*\|) = 0$ . По свойству модуля строго равномерно выпуклой функции это возможно только при  $\lim_{r \rightarrow \infty} \|u_{k_r} - v_*\| = 0$ . Из проведенных рассуждений следует, что каждое из числовых множеств  $\{J(u_\delta), \delta > 0\}$ ,  $\{\Omega(u_\delta), \delta > 0\}$ ,  $\{\|u_\delta - v_*\|, \delta > 0\}$  при  $\delta \rightarrow 0$  имеет единственную предельную точку, равную  $J_*, \Omega_*, 0$  соответственно, что доказывают равенства (16).  $\square$

Примеры строго равномерно выпуклых функций были приведены в § 8.2. Если  $B = H$  — гильбертово пространство, то в лемме 2 можно взять сильно выпуклую функцию  $\Omega(u)$ , например,  $\Omega(u) = \|u\|_H^2$ .

**4.** При исследовании методов регуляризации нам еще понадобятся некоторые результаты из § 5.16 о штрафных функциях, которые мы здесь переформулируем в удобной для дальнейших ссылок форме.

**Л е м м а 3.** Пусть задача (1), (2) имеет сильно согласованную постановку (определение 5.16.3), т. е.

$$-\infty < J_* \leq J(u) + \sum_{i=1}^s c_i (g_i^+(u))^\nu, \quad u \in U_0 \quad (17)$$

при некоторых  $c_i \geq 0, i = 1, \dots, s, \nu > 0$ ; точки  $u_\delta \in U_0, \delta > 0$ , удовлетворяют неравенству

$$J(u_\delta) + A(\delta)P(u_\delta) \leq J_* + \beta(\delta), \quad (18)$$

где  $P(u) = \sum_{i=1}^s (g_i^+(u))^p, u \in U_0$ , — штрафная функция множества (2),  $p \geq \nu$ ,

$$\beta(\delta) \geq 0, \quad A(\delta) > 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \beta(\delta) = 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} A(\delta) = +\infty.$$

Тогда

$$0 \leq g_i^+(u_\delta) \leq (P(u_\delta))^{1/p} \leq \rho(\delta), \quad i = 1, \dots, s, \quad \delta > 0, \quad (19)$$

$$-|c|(\rho(\delta))^\nu \leq J(u_\delta) - J_* \leq \beta(\delta), \quad \delta > 0, \quad (20)$$

где

$$\rho(\delta) = \begin{cases} \left(\frac{\beta(\delta)}{A(\delta) - |c|}\right)^{1/\nu}, & A(\delta) > |c| = \max |c_i| & \text{при } p = \nu; \\ \left[\left(\frac{|c|}{A(\delta)}\right)^{\frac{p}{p-\nu}} + \frac{p}{p-\nu} \frac{\beta(\delta)}{A(\delta)}\right]^{1/p}, & |c| = \left(\sum_{i=1}^s |c_i|^{\frac{p}{p-\nu}}\right)^{\frac{p-\nu}{p}} & \text{при } p > \nu. \end{cases} \quad (21)$$

Доказательство проводится так же, как в теореме 5.16.5 при  $p > \nu$  и теореме 5.16.6 при  $p = \nu$  с заменой в них величины  $A_k$  на  $A(\delta)$ ,  $\varepsilon_k$  — на  $\beta(\delta)$ ,  $u_k$  — на  $u_\delta$ . Поэтому мы здесь ограничимся приведением лишь краткой схемы доказательства.

Из (17), (18) имеем  $J(u_\delta) + A(\delta)P(u_\delta) \leq J(u_\delta) + \sum_{i=1}^s c_i(g_i^+(u_\delta))^\nu + \beta(\delta)$ , или

$$0 \leq A(\delta)P(u_\delta) \leq \sum_{i=1}^s c_i(g_i^+(u_\delta))^\nu + \beta(\delta) \quad \forall \delta > 0. \quad (22)$$

Пусть  $p > \nu$ . Тогда с помощью неравенства Гёльдера получаем

$$0 \leq \sum_{i=1}^s c_i(g_i^+(u_\delta))^\nu \leq |c|(P(u_\delta))^{\nu/p} \quad \forall \delta > 0. \quad (23)$$

Из (22), (23) следует, что

$$0 \leq A(\delta)P(u_\delta) \leq |c|(P(u_\delta))^{\nu/p} + \beta(\delta) \leq \frac{|c|}{(A(\delta))^{\nu/p}} (A(\delta)P(u_\delta))^{\nu/p} + \beta(\delta).$$

Отсюда и из леммы 2.6.11 при  $z = (A(\delta)P(u_\delta))^{\nu/p}$  получаем

$$A(\delta)P(u_\delta) \leq \left( |c|A(\delta)^{-\nu/p} \right)^{\frac{p}{p-\nu}} + \frac{p}{p-\nu}\beta(\delta), \quad \forall \delta > 0.$$

После простых преобразований полученного неравенства, учитывая, что  $g_i^+(u_\delta) \leq (P(u_\delta))^{1/p}$ , приходим к оценке (19) при  $p > \nu$ .

При  $p = \nu$  из (22) сразу имеем  $A(\delta)P(u_\delta) \leq |c|P(u_\delta) + \beta(\delta)$ . Отсюда при  $A(\delta) > |c|$  следует  $P(u_\delta) \leq \frac{\beta(\delta)}{A(\delta) - |c|}$ , что равносильно оценке (19) при  $p = \nu$ . Наконец, из (17), (18), (23) вытекают неравенства

$$-|c|(P(u_\delta))^{\nu/p} \leq -\sum_{i=1}^s c_i(g_i^+(u))^\nu \leq J(u_\delta) - J_* \leq \beta(\delta).$$

Отсюда и из (19) получаем оценку (20). □

### Упражнения

У п р а ж н е н и е 1. Можно ли функцию  $\Omega(u) = \int_0^1 (u^2(t) + \dot{u}^2(t)) dt$  взять в качестве стабилизатора в метрике  $C[0, 1]$  в задаче минимизации функции  $J(u) = \int_0^1 u^2(t) dt$  на множестве  $U = L_2[0, 1]$ ?

У п р а ж н е н и е 2. Задача:  $J(u) = \max_{0 \leq t \leq 1} |u(t)| + \max_{0 \leq t \leq 1} |\dot{u}(t)| \rightarrow \inf, u \in U = C^2[0, 1]$ . При каких  $m, p$  функция

$$\Omega(u) = \int_0^1 \sum_{i=0}^m \left| \frac{d^i u(t)}{dt^i} \right|^p dt$$

может служить стабилизатором этой задачи в метрике  $C^2[0, 1]$ ?



У п р а ж н е н и е 3. Задача:  $J(u) = \int_0^1 |u(t)| dt \rightarrow \inf, u \in U = L_1[0, 1]$ . Какие из функций  $\Omega(u) = \int_0^1 |u(t)|^p dt$ ,  $\Omega(u) = \max_{0 \leq t \leq 1} |u(t)|$ ,  $\Omega(u) = \int_0^1 (|u(t)| + |\dot{u}(t)|) dt$  являются стабилизатором этой задачи в метрике  $L_1[0, 1]$ ?

У п р а ж н е н и е 4. Доказать, что если задача (1), (2) при  $\mathcal{M} = C_r[a, b]$  имеет хотя бы одно решение, принадлежащее пространству  $H_2^1[a, b]$ , то функция  $\Omega(u) = \int_a^b [k(t)(\dot{u}(t))^2 + q(t)u(t)] dt$ , где функции  $k(t), q(t)$  непрерывны и положительны на  $[a, b]$ , является стабилизатором в метрике  $C_r[a, b]$ .

У п р а ж н е н и е 5. Для задачи минимизации функций на выпуклом замкнутом множестве из  $L_p[a, b]$ ,  $1 < p < \infty$ , привести примеры слабых стабилизаторов.

У п р а ж н е н и е 6. Доказать, что в задаче минимизации функций на множестве  $U$  из  $C^m(G)$ ,  $G \in E^n$ , при  $n < 2m$  в качестве стабилизатора в метрике  $C^m(G)$  можно взять  $\Omega(u) = \|u\|_{H^{m+1}}$ , если  $U_* \cap H^{m+1}(G) \neq \emptyset$ . У к а з а н и е: воспользоваться теоремой вложения пространства  $H^{m+1}(G)$  в  $C^m(G)$  при  $n < 2m$  [492; 648; 649] (обозначения см. в § 8.1).

У п р а ж н е н и е 7. Доказать, что если  $\Omega_1(u), \Omega_2(u)$  — стабилизаторы [слабые стабилизаторы] с одной и той же областью определения  $U_\Omega$ , то  $\Omega(u) = \alpha_1 \Omega_1(u) + \alpha_2 \Omega_2(u)$ ,  $\alpha_1 \geq 0$ ,  $\alpha_2 \geq 0$ ,  $\alpha_1 + \alpha_2 > 0$ , также является стабилизатором [слабым стабилизатором].

У п р а ж н е н и е 8. Доказать, что в равенствах (12), (13), (16) предел равномерен относительно выбора точек  $u_\delta$  из множества  $Z(\delta) = \{u \in U_\Omega : J(u_\delta) \leq J_* + \beta(\delta), g_i^+(u_\delta) \leq \rho(\delta), i = 1, \dots, s, \Omega(u_\delta) \leq \Omega_* + \gamma(\delta)\}$ .

#### § 4. Метод стабилизации

1. Изложение методов регуляризации для решения неустойчивых задач второго типа начнем с *метода стабилизации*, разработанного А. Н. Тихоновым [695]. Этот метод в литературе часто называют *методом стабилизирующих функционалов*. Опишем этот метод применительно к следующей задаче второго типа:

$$J(u) \rightarrow \inf, \quad u \in U, \quad (1)$$

$$U = \{u \in U_0, g_i(u) \leq 0, i = 1, \dots, m; g_i(u) = 0, i = m + 1, \dots, s\}, \quad (2)$$

где  $U_0$  — заданное множество из некоторого метрического пространства  $\mathcal{M}$ , функции  $J(u), g_i(u)$ ,  $i = 1, \dots, s$ , определены на  $U_0$  и принимают на нем конечное значение. Будем предполагать, что

$$J_* = \inf_U J(u) > -\infty, \quad U_* = \{u \in U : J(u) = J_*\} \neq \emptyset. \quad (3)$$

Для учета ограничений типа равенств и неравенств, задающих множество (2), воспользуемся штрафной функцией

$$P(u) = \sum_{i=1}^s (g_i^+(u))^p, \quad u \in U_0, \quad p > 0, \quad (4)$$

где  $g_i^+ = \max\{g_i(u); 0\}$  при  $i = 1, \dots, m$ ,  $g_i^+ = |g_i|$  при  $i = m + 1, \dots, s$ . Пусть  $\Omega(u)$  — какой-либо стабилизатор задачи (1), (2) с областью определения  $U_\Omega \subseteq U_0$ . Предполагается, что множество  $U_0$  известно точно, а вместо функций  $J(u), P(u)$ , которые наряду с  $J(u), g_i(u)$ ,  $i = 1, \dots, s$ , также будем называть входными данными задачи (1), (2), известны их приближения  $J_\delta(u), P_\delta(u)$ ,

причем погрешности согласованы со стабилизатором в следующем смысле:

$$|J_\delta(u) - J(u)| \leq \delta(1 + \Omega(u)), \quad |P_\delta(u) - P(u)| \leq \delta(1 + \Omega(u)), \quad u \in U_\Omega, \quad (5)$$

$\delta > 0$  — скалярный параметр погрешности. Заметим, что возможный способ перехода от приближений  $g_{i\delta}(u)$ ,  $i = 1, \dots, s$ , к  $P_\delta(u)$  обсуждался в § 2 (см. формулы (2.10)–(2.19)).

Составим функцию

$$t_\delta(u) = J_\delta(u) + A(\delta)P_\delta(u) + \alpha(\delta)\Omega(u), \quad u \in U_\Omega, \quad (6)$$

называемую *функцией Тихонова*. Здесь  $J_\delta(u)$ ,  $P_\delta(u)$  — какие-либо конкретные реализации приближений входных данных из (5),  $A(\delta) > 0$  — штрафной коэффициент,  $\alpha(\delta) > 0$  — *параметр регуляризации*.

Рассмотрим задачу первого типа

$$t_\delta(u) \rightarrow \inf, \quad u \in U_\Omega. \quad (7)$$

Для решения задачи (7) могут быть использованы методы, описанные в § 2. Дальнейшее изложение не зависит от метода решения этой задачи. Мы будем предполагать, что нам известна какая-либо точка  $u_\delta$ , удовлетворяющая условиям

$$u_\delta \in U_\Omega, \quad t_\delta(u_\delta) \leq t_{\delta*} + \varepsilon(\delta), \quad (8)$$

где подразумевается, что  $t_{\delta*} = \inf_{u \in U_\Omega} t_\delta(u) > -\infty$ ,  $\varepsilon(\delta) > 0$ . На формальном уровне метод стабилизации описан. Осталось обсудить условия сходимости метода (8) при  $\delta \rightarrow 0$ , указать условия согласования параметров  $\alpha(\delta)$ ,  $A(\delta)$ ,  $\varepsilon(\delta)$  этого метода.

Сначала приведем достаточные условия, гарантирующие неравенство  $t_{\delta*} > -\infty$ ,  $\forall \delta > 0$ . Как и в § 2, ограничимся рассмотрением класса задач (1), (2), имеющих сильно согласованную постановку (определение 5.16.3), когда

$$-\infty < J_* \leq J(u) + \sum_{i=1}^s c_i (g_i^+(u))^\nu, \quad u \in U_0, \quad (9)$$

при некоторых  $c_1 \geq 0, \dots, c_s \geq 0$ ,  $\nu > 0$ . Тогда справедливо неравенство (2.24):

$$-\infty < J_* \leq J(u) + A(\delta)P(u) + BA^{-\frac{\nu}{p-\nu}} \quad \forall u \in U_0, \quad \delta > 0, \quad p \geq \nu, \quad (10)$$

где при  $p = \nu$  по определению полагается  $A^{-\frac{\nu}{p-\nu}} = 0$ ,  $B = 0$  и при этом считается, что  $A(\delta) \geq |c| = \max_{1 \leq i \leq s} c_i$ , а при  $p > \nu$  здесь

$$B = (p - \nu)\nu^{\frac{\nu}{p-\nu}} p^{-\frac{p}{p-\nu}} |c|^{\frac{p}{p-\nu}}, \quad |c| = \left( \sum_{i=1}^s c_i^{\frac{p}{p-\nu}} \right)^{\frac{p-\nu}{p}}.$$

Предположим, что параметры  $\alpha(\delta)$ ,  $A(\delta)$  метода (8) таковы, что

$$\delta + \delta A(\delta) \leq \alpha(\delta) \quad \forall \delta > 0. \quad (11)$$

Тогда из (5), (6), (10), (11) имеем

$$\begin{aligned} t_\delta(u) &\geq J(u) - \delta(1 + \Omega(u)) + A(\delta)P(u) - A(\delta)\delta(1 + \Omega(u)) + \alpha(\delta)\Omega(u) \geq \\ &\geq J_* - BA^{-\frac{\nu}{p-\nu}} + (\alpha(\delta) - \delta - \delta A(\delta))\Omega(u) - (\delta + \delta A(\delta)) \geq \\ &\geq J_* - BA^{-\frac{\nu}{p-\nu}} - (\delta + \delta A(\delta)) \quad \forall u \in U_\Omega, \quad \delta \geq 0. \end{aligned}$$

Это означает, что  $t_{\delta*} > -\infty \quad \forall \delta > 0$ . Тогда точка  $u_\delta$  из (8) существует при любом выборе  $\varepsilon(\delta) > 0$  по определению нижней грани.

**2.** Покажем, что при соответствующем согласовании параметров  $\alpha(\delta)$ ,  $A(\delta)$ ,  $\varepsilon(\delta)$  метода (8) и некоторых дополнительных требованиях к задаче (1), (2) точка  $u_\delta$  из (8) при малых  $\delta > 0$  будет близка в метрике  $\mathcal{M}$  к множеству  $U_*$ , а величина  $J_\delta(u_\delta)$  близка к  $J_*$ , т. е. пара  $(J_\delta(u_\delta), u_\delta)$  является приближенным решением задачи (1), (2) второго типа. А именно, справедлива

**Т е о р е м а 1.** Пусть

1) множество  $U_0$  замкнуто в метрике  $\mathcal{M}$ , функции  $J(u), g_1(u), \dots, g_m(u), |g_{m+1}(u)|, \dots, |g_s(u)|$  полунепрерывны снизу на  $U_0$ , выполнены условия (3), (9);

2)  $\Omega(u)$  — стабилизатор задачи (1), (2),  $P(u)$  — штрафная функция, определенная формулой (4) с параметром  $p \geq \nu$ ;

3) приближения  $J_\delta(u)$ ,  $P_\delta(u)$  функций  $J(u), P(u)$  удовлетворяют условиям (5);

4) параметры  $\alpha(\delta)$ ,  $A(\delta)$ ,  $\varepsilon(\delta)$  таковы, что

$$\begin{aligned} \alpha(\delta) > 0, \quad A(\delta) > 0, \quad \varepsilon(\delta) \geq 0, \quad \forall \delta > 0, \\ \lim_{\delta \rightarrow 0} (\alpha(\delta) + \varepsilon(\delta)) = 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} A(\delta) = +\infty, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\sup_{\delta > 0} \left( \frac{\delta + \delta A(\delta)}{\alpha(\delta)} \right) < 1, \quad \sup_{\delta > 0} \frac{\varepsilon(\delta)}{\alpha(\delta)} < \infty, \quad \inf_{\delta > 0} \alpha(\delta)(A(\delta))^{\frac{\nu}{p-\nu}} > 0 \quad (13)$$

(при  $p = \nu$  последнее из условий (13) не нужно, а условие  $\lim_{\delta \rightarrow 0} A(\delta) = +\infty$  можно заменить на  $A(\delta) > \max_{1 \leq i \leq s} c_i$ ).

Тогда семейство  $\{u_\delta, \delta > 0\}$ , определяемое методом (8), таково, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} J(u_\delta) = J_*, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} g_i^+(u_\delta) = 0, \quad i = 1, \dots, s; \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \rho(u_\delta, U_*) = 0, \quad (14)$$

причем пределы в (14) равномерны относительно выбора  $J_\delta(u), P_\delta(u)$  из (5) и выбора точки  $u_\delta$  из (8), точнее,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{u \in X(\delta)} |J(u) - J_*| = 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{u \in X(\delta)} |g_i^+(u)| = 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{u \in X(\delta)} \rho(u, U_*) = 0, \quad (15)$$

где  $X(\delta)$  — множество, представляющее собой объединение множеств

$$x(\delta) = \{u \in U_\Omega : t_\delta(u) = J_\delta(u) + A(\delta)P_\delta(u) + \alpha(\delta)\Omega(u) \leq t_{\delta*} + \varepsilon(\delta)\}$$

по всевозможным реализациям  $J_\delta(u), P_\delta(u)$  из (5).

Пусть наряду с условиями 1–4 еще выполнено условие

5)  $U_\Omega = U_0$ , функция  $\Omega(u)$  полунепрерывна снизу на  $U_0$ ,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta + \delta A(\delta)}{\alpha(\delta)} = 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\varepsilon(\delta)}{\alpha(\delta)} = 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \alpha(\delta)(A(\delta))^{\frac{\nu}{p-\nu}} = +\infty \quad (16)$$

(при  $p = \nu$  последнее из условий (16) не нужно). Тогда справедливы равенства (14) и, кроме того,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \Omega(u_\delta) = \Omega_*, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \rho(u_\delta, U_{**}) = 0, \quad (17)$$

где  $\Omega_* = \inf_{u \in U_*} \Omega(u)$ ,  $U_{**} = \{u \in U_* : \Omega(u) = \Omega_*\}$ , причем пределы в (17) равномерны относительно выбора  $J_\delta(u)$ ,  $P_\delta(u)$  из (5) и выбора точки  $u_\delta$  из (8), т. е.

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{u \in X(\delta)} |\Omega(u) - \Omega_*| = 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{u \in X(\delta)} \rho(u, U_{**}) = 0. \quad (18)$$

**Доказательство.** Первое из неравенств (13) влечет за собой условие (11). Отсюда и из (10) следует, что множество  $x(\delta) = \{u \in U_\Omega : t_\delta(u) \leq \leq t_{\delta*} + \varepsilon(\delta)\}$  непусто при всех  $\varepsilon(\delta) > 0$  (если  $\varepsilon(\delta) = 0$ , то условие  $x(\delta) \neq \emptyset$  предполагается). Кроме того, по определению стабилизатора множество  $U_{\Omega_*} = U_* \cap U_\Omega \neq \emptyset$ . Возьмем произвольные точки  $u_\delta \in x(\delta)$ ,  $u_* \in U_{\Omega_*}$ . Учитывая, что  $\Omega(u) \geq 0$ ,  $P(u) \geq 0$  на  $U_\Omega$ ,  $P(u_*) = 0$ , и неравенства (5), (8), (10), можем написать следующую цепочку неравенств

$$\begin{aligned} J(u_\delta) + A(\delta)P(u_\delta) &\leq J(u_\delta) + A(\delta)P(u_\delta) + \alpha(\delta)\Omega(u_\delta) \leq \\ &\leq J_\delta(u_\delta) + A(\delta)P_\delta(u_\delta) + \alpha(\delta)\Omega(u_\delta) + (\delta + \delta A(\delta))(1 + \Omega(u_\delta)) = \\ &= t_\delta(u_\delta) + (\delta + \delta A(\delta))(1 + \Omega(u_\delta)) \leq t_{\delta*} + \varepsilon(\delta) + (\delta + \delta A(\delta))(1 + \Omega(u_\delta)) \leq \\ &\leq J(u_*) + A(\delta)P(u_*) + \alpha(\delta)\Omega(u_*) + \varepsilon(\delta) + \\ &+ (\delta + \delta A(\delta))(1 + \Omega(u_\delta)) + (\delta + \delta A(\delta))(1 + \Omega(u_*)) \leq \\ &\leq J(u_\delta) + A(\delta)P(u_\delta) + B(A(\delta))^{-\frac{\nu}{p-\nu}} + \alpha(\delta)\Omega(u_*) + \varepsilon(\delta) + \\ &+ (\delta + \delta A(\delta))(1 + \Omega(u_\delta)) + (\delta + \delta A(\delta))(1 + \Omega(u_*)) \quad \forall \delta > 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Выделив второе и последнее звенья этой цепочки, имеем

$$\begin{aligned} \alpha(\delta)\Omega(u_\delta) &\leq B(A(\delta))^{-\frac{\nu}{p-\nu}} + \alpha(\delta)\Omega(u_*) + \varepsilon(\delta) + \\ &+ (\delta + \delta A(\delta))(1 + \Omega(u_\delta)) + (\delta + \delta A(\delta))(1 + \Omega(u_*)), \quad \delta > 0. \end{aligned}$$

Пользуясь произволом в выборе точки  $u_* \in U_{\Omega_*}$ , в этом неравенстве величину  $\Omega(u_*)$  можем заменить на  $\Omega_* = \inf_{U_{\Omega_*}} \Omega(u)$  и переписать его в виде:

$$\begin{aligned} (\alpha(\delta) - \delta - \delta A(\delta))\Omega(u_\delta) &\leq \\ &\leq (\alpha(\delta) + \delta + \delta A(\delta))\Omega_* + \varepsilon(\delta) + (\delta + \delta A(\delta)) + B(A(\delta))^{-\frac{\nu}{p-\nu}} \end{aligned}$$

или

$$\Omega(u_\delta) \leq \Omega_* + \gamma(\delta), \quad \delta > 0, \quad (20)$$

где

$$\gamma(\delta) = \frac{2\left(\frac{\delta + \delta A(\delta)}{\alpha(\delta)}\right)(1 + \Omega_*) + \frac{\varepsilon(\delta)}{\alpha(\delta)} + \frac{B}{\alpha(\delta)(A(\delta))^{\frac{\nu}{p-\nu}}}}{1 - \frac{\delta + \delta A(\delta)}{\alpha(\delta)}}. \quad (21)$$

Из выражения (21) следует, что  $\gamma(\delta) \geq 0$ ,  $\sup_{\delta > 0} \gamma(\delta) < \infty$  при выполнении условий (12), (13) и  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \gamma(\delta) = 0$  при условиях (12), (16). Далее, взяв первое и предпоследнее звенья цепочки неравенств (19), с учетом уже доказанного неравенства (20) имеем

$$J(u_\delta) + A(\delta)P(u_\delta) \leq J_* + \alpha(\delta)\Omega(u_*) + \varepsilon(\delta) + (\delta + \delta A(\delta))(2 + \Omega_* + \gamma(\delta) + \Omega(u_*)).$$

Пользуясь произволом в выборе  $u_* \in U_{\Omega_*}$ , отсюда получаем

$$J(u_\delta) + A(\delta)P(u_\delta) \leq J_* + \beta(\delta), \quad (22)$$

где

$$\beta(\delta) = \alpha(\delta)\Omega_* + \varepsilon(\delta) + \alpha(\delta) \cdot \left(\frac{\delta + \delta A(\delta)}{\alpha(\delta)}\right)(2 + 2\Omega_* + \gamma(\delta)) \geq 0, \quad \delta > 0, \quad (23)$$

причем  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \beta(\delta) = 0$  при условиях (12), (13). Из (22), (23) и леммы 3.3 следуют оценки

$$0 \leq g_i^+(u_\delta) \leq \rho(\delta), \quad i = 1, \dots, s; \quad (24)$$

$$-|c|(\rho(\delta))^\nu \leq J(u_\delta) - J_* \leq \beta(\delta), \quad \forall \delta > 0, \quad (25)$$

где величина  $\beta(\delta)$  определена формулой (23), величина  $\rho(\delta)$  — формулой (3.21), причем  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \rho(\delta) = 0$ . Оценки (20), (24), (25) означают, что семейство точек  $\{u_\delta, \delta > 0\}$  удовлетворяет условиям (3.8)–(3.10). Отсюда и из леммы 3.1 следуют равенства (14), (17). Остается доказать равенства (15), (18). Первые два равенства (15) вытекают из оценок (24), (25), так как величины  $\rho(\delta)$ ,  $\beta(\delta)$ , как видно из формул (3.21), (23), не зависят от конкретной реализации  $J_\delta(u)$ ,  $P_\delta(u)$  из (5) и выбора точки  $u_\delta$  из (8). Докажем третье из равенств (15). Пусть

$$\overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \sup_{u \in X(\delta)} \rho(u, U_*) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{u \in X(\delta_k)} \rho(u, U_*),$$

где  $\{\delta_k\} \rightarrow 0$ . По определению верхней грани для каждого номера  $k$  найдется точка  $u_k \in X(\delta_k)$  такая, что

$$\sup_{u \in X(\delta_k)} \rho(u, U_*) \leq \rho(u_k, U_*) + \frac{1}{k}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (26)$$

Включение  $u_k \in X(\delta_k)$  означает, что  $u_k \in U_\Omega$ ,  $t_{\delta_k}(u_k) \leq t_{\delta_k*} + \varepsilon(\delta_k)$ , где  $t_{\delta_k}(u)$  составлена по формуле (6) для каких-то реализаций  $J_{\delta_k}(u)$ ,  $P_{\delta_k}(u)$  из (5), т. е.  $u_k = u_{\delta_k} \in x(\delta_k)$ . Из третьего равенства (14) имеем  $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(u_k, U_*) = 0$ .

Отсюда и из (26) следует:

$$\begin{aligned} 0 \leq \varliminf_{\delta \rightarrow 0} \sup_{u \in X(\delta)} \rho(u, U_*) &\leq \varlimsup_{\delta \rightarrow 0} \sup_{u \in X(\delta)} \rho(u, U_*) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{u \in X(\delta_k)} \rho(u, U_*) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \rho(u_k, U_*) = 0, \end{aligned}$$

что равносильно третьему равенству (15). Аналогично, выделяя последовательности  $\{\delta_k\} \rightarrow 0$ , для которых

$$\begin{aligned} \varlimsup_{\delta \rightarrow 0} \sup_{u \in X(\delta)} |\Omega(u) - \Omega_*| &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{u \in X(\delta_k)} |\Omega(u) - \Omega_*|, \\ \varlimsup_{\delta \rightarrow 0} \rho(u, U_{**}) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{u \in X(\delta_k)} \rho(u, U_{**}), \end{aligned}$$

и последовательности  $\{v_k\}$ ,  $\{w_k\}$  со свойствами

$$\begin{aligned} v_k \in X(\delta_k), \quad \sup_{u \in X(\delta_k)} |\Omega(u) - \Omega_*| &\leq |\Omega(v_k) - \Omega_*| + \frac{1}{k}, \quad k = 1, 2, \dots, \\ w_k \in X(\delta_k), \quad \sup_{u \in X(\delta_k)} \rho(u, U_{**}) &\leq \rho(w_k, U_{**}) + \frac{1}{k}, \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

с помощью уже доказанных равенств (17) приходим к (18). Теорема 1 доказана.  $\square$

**3.** Отдельно остановимся на выпуклых задачах (1), (2), когда  $\mathcal{M} = B$  — банахово пространство. Покажем, что в этом случае для семейства  $\{u_\delta, \delta > 0\}$ , определяемого методом стабилизации (8), сходимость к решению в норме  $B$  удастся получить и тогда, когда функция  $\Omega(u)$  является слабым стабилизатором (определение 3.2).

**Теорема 2.** Пусть

1)  $B$  — рефлексивное банахово пространство,  $U_0$  — выпуклое замкнутое множество из  $B$ , функции  $J(u)$ ,  $g_i(u)$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $|g_i(u)|$ ,  $i = m + 1, \dots, s$ , выпуклы и полунепрерывны снизу на  $U_0$ , множество (2) непусто, выполняются условия (3), (9);

2) функция  $\Omega(u)$  полунепрерывна снизу, строго равномерно выпукла на  $U_0$ ;  $P(u)$  — штрафная функция, определенная формулой (4) с параметром  $p \geq \nu$ ;

3) приближения  $J_\delta(u)$ ,  $P_\delta(u)$  функций  $J(u)$ ,  $P(u)$  удовлетворяют условиям (5);

4) параметры  $\alpha(\delta)$ ,  $A(\delta)$ ,  $\varepsilon(\delta)$  удовлетворяют условиям (12), (16).

Тогда семейство  $\{u_\delta, \delta > 0\}$ , определенное методом (8), таково, что

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} J(u_\delta) &= J_*, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} g_i^+(u_\delta) = 0, \quad i = 1, \dots, s, \\ \lim_{\delta \rightarrow 0} \Omega(u_\delta) &= \Omega_*, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \|u_\delta - v_*\|_B = 0, \end{aligned} \tag{27}$$

где  $v_*$  — точка минимума функции  $\Omega(u)$  на множестве  $U_*$ , причем пределы в (27) равномерны относительно выбора  $J_\delta(u)$ ,  $P_\delta(u)$  из (5) и точки  $u_\delta$  из (8).

**Доказательство.** Повторяя доказательство теоремы 1 при  $U_\Omega = U_0$ , убеждаемся, что оценки (20)–(25) сохраняют силу при всех достаточно малых

$\delta > 0$ . Это значит, что при сделанных предположениях семейство  $\{u_\delta, \delta > 0\}$  из (8) удовлетворяет условиям леммы 3.2, из которой следуют существование и единственность точки  $u_*$  и равенства (27). Равномерность пределов (27) доказывается так же, как равенства (15), (18).  $\square$

4. Сделаем несколько замечаний, комментирующих теоремы 1, 2.

З а м е ч а н и е 1. В качестве параметров  $\alpha(\delta), A(\delta), \varepsilon(\delta)$  метода (8), удовлетворяющих условиям (12), (13), (16), можно, например, принять

$$\alpha(\delta) = a_1 \delta^\alpha, \quad A(\delta) = a_2 \delta^{-A}, \quad \varepsilon(\delta) = a_3 \delta^\varepsilon, \quad \delta > 0, \quad (28)$$

где  $a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 \geq 0, 0 < \alpha \leq \varepsilon, A > 0, A + \alpha \leq 1, \alpha \leq A^{\frac{p}{p-\nu}}$  (при  $p = \nu$  последнее неравенство не нужно). Поскольку соотношения (12), (13), (16) интересуют нас лишь при малых  $\delta > 0$ , то от параметров  $\alpha(\delta), A(\delta), \varepsilon(\delta)$  достаточно требовать соблюдения этих условий на каком-либо полуинтервале  $0 < \delta \leq \delta_0$ , содержащем допускаемые неравенствами (5) погрешности измерений.

З а м е ч а н и е 2. Примером стабилизатора, который обладает всеми свойствами, требуемыми в теореме 1, являются функции (3.5), когда  $M = E^n$  и  $U_\Omega = U_0$ .

З а м е ч а н и е 3. Правые части условий (5) на погрешности можно заменить на  $\delta c_0(1 + \Omega(u))$ , где  $c_0 = \text{const} > 0$ . Теоремы 1, 2 и их доказательства при этом сохраняются, нужно лишь первое из неравенств (13) заменить на  $\sup_{\delta > 0} \frac{c_0(\delta + \delta A(\delta))}{\alpha(\delta)} < 1$ , а условие (11) — на  $c_0(\delta + \delta A(\delta)) \leq \alpha(\delta), \delta > 0$ .

З а м е ч а н и е 4. Кратко остановимся на методе стабилизации для задачи второго типа

$$J(u) \rightarrow \inf, \quad u \in U, \quad (29)$$

когда множество  $U$  известно точно (например,  $U = M$  или  $U = B$ ). Эта задача является частным случаем задачи (1), (2) при  $m = s = 0, U = U_0$ . Пусть для приближений  $J_\delta(u)$  функции  $J(u)$  выполнено первое из равенств (5), где  $\Omega(u)$  — стабилизатор задачи (29) (см. определение 3.1 при  $U = U_0$ ). Тогда метод (8) применим и к задаче (29), если в качестве функции Тихонова взять  $t_\delta(u) = J_\delta(u) + \alpha(\delta)\Omega(u)$ . Теоремы сходимости метода (8) в этом случае получатся из теорем 1, 2, если в них и в их доказательствах принять  $U_0 = U, P(u) = P_\delta(u) = 0$ , а в (12), (13), (16) исключить элементы, содержащие параметр  $A(\delta)$  (например, равенство  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta + \delta A(\delta)}{\alpha(\delta)} = 0$  здесь должно быть заменено на  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta}{\alpha(\delta)} = 0$ ).

З а м е ч а н и е 5. Равенство  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{u \in X(\delta)} \rho(u, U_*) = 0$  из (15) выражает стремление к нулю при  $\delta \rightarrow 0$  отклонения множества  $X(\delta)$  от множества  $U_*$  (см. (1.10), упражнение 1.6). Равенство  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{u \in X(\delta)} |J(u) - J_*| = 0$  означает, что отклонение множества  $\{J(u), u \in X(\delta), \delta > 0\}$  от множества, состоящего из одной точки  $J_*$ , стремится к нулю при  $\delta \rightarrow 0$ . Аналогичный смысл имеют остальные равенства (15), (18).

**З а м е ч а н и е 6.** Выше мы считаем, что стабилизатор  $\Omega(u)$  известен точно. Однако такое предположение не всегда оправдано. Например, если используется стабилизатор  $\Omega(u) = \int_a^b (u^2(t) + (\dot{u}(t))^2) dt$ , то для вычисления интегралов здесь придется применять какие-либо квадратурные формулы и неизбежно появятся погрешности. Для охвата подобных ситуаций можно считать, что вместо точных значений  $\Omega(u)$  известно их приближение  $\Omega_\chi(u)$ , причем

$$|\Omega_\chi(u) - \Omega(u)| \leq \chi(1 + \Omega(u)), \quad u \in U_\Omega, \quad 0 < \chi \leq 1. \quad (30)$$

Условие (30) при возможных больших значениях  $\Omega(u)$  характеризует относительную погрешность в задании стабилизатора, так как тогда

$$\left| \frac{\Omega_\chi(u)}{\Omega(u)} - 1 \right| \leq \chi \left( 1 + \frac{1}{\Omega(u)} \right) \simeq \chi.$$

При выполнении условий (30) в функции (6) вместо  $\Omega(u)$  надо взять  $\Omega_\chi(u)$ , а параметр  $\chi = \chi(\delta)$  надо согласовать с погрешностью  $\delta$ , взяв  $\sup_{\delta > 0} \chi(\delta) < \infty$  в дополнение к условиям (13) и  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \chi(\delta) = 0$  — к условиям (16). Наличие в пра-

вых частях неравенств (5), (30) слагаемого 1 в сумме  $1 + \Omega(u)$  оправдано тем, что возможны малые значения  $\Omega(u)$  или даже  $\Omega(u) = 0$  в некоторых точках  $u$ , и в этом случае замена  $1 + \Omega(u)$  на  $\Omega(u)$  в (5), (30) привела бы к неоправданно жестким требованиям на точность задания функций  $J(u)$ ,  $P(u)$ ,  $\Omega(u)$ .

**З а м е ч а н и е 7.** Обсудим содержательный смысл элементов множества  $U_{**}$ , введенного в (17).

**О п р е д е л е н и е 1.** Точку  $u_* \in U_*$  назовем *нормальным решением* задачи (1), (2) по функции  $\Omega(u)$  или, короче,  $\Omega$ -нормальным решением, если  $\Omega(u_*) = \inf_{u \in U_*} \Omega(u) = \Omega_*$ . Если  $\Omega(u) = \|u\|$  — норма в банаховом пространстве, то  $\Omega$ -нормальное решение называют просто нормальным решением задачи.

В задачах оптимального планирования функция  $\Omega(u)$  может выражать собой стоимость затрат на организационные и технологические перестройки при переходе от существующего состояния производства к его новому состоянию, соответствующему оптимальному плану  $u$ . Тогда среди всех оптимальных планов  $u \in U_*$  естественно выбрать тот план  $u_*$ , для которого стоимость затрат  $\Omega(u)$  минимальна. Это означает, что наилучший оптимальный план  $u_*$  представляет собой  $\Omega$ -нормальное решение задачи (1), (2) [374; 695]. Как утверждается в теореме 1, при определенных условиях метод стабилизации (8) может быть использован для получения приближений к  $\Omega$ -нормальному решению задачи (1), (2).

Задача поиска  $\Omega$ -нормального решения относится к *лексикографическим* задачам минимизации, когда имеется некоторое упорядоченное множество функций  $J_1(u), J_2(u), \dots, J_l(u)$ , определенных на некотором множестве  $U$ , и требуется последовательно решить задачи минимизации в следующем порядке. Сначала решается задача:  $J_1(u) \rightarrow \inf, u \in U$ , находится множество  $U_{1*} = \left\{ u \in U : J_1(u) = \inf_U J_1(u) \right\}$ . Затем рассматривается задача:  $J_2(u) \rightarrow \inf,$



$u \in U_{1*}$ , определяется множество  $U_{2*} = \left\{ u \in U_{1*} : J_2(u) = \inf_{U_{1*}} J_2(u) \right\}$  и т. д., пока не будет найдено множество  $U_{l*} = \left\{ u \in U_{l-1*} : J_l(u) = \inf_{U_{l-1*}} J_l(u) \right\}$ . Отсюда ясно, что  $\Omega$ -нормальное решение задачи (1), (2) является решением лексикографической задачи, когда  $J_1(u) = J(u)$ ,  $J_2(u) = \Omega(u)$ ,  $U_{1*} = U_*$ ,  $U_{2*} = U_{**}$ . Нетрудно понять, что лексикографические задачи относятся к неустойчивым задачам, так как множества точек минимума  $U_{1*}, \dots, U_{l*}$  при небольших возмущениях входных данных могут сильно изменяться, более того, могут оказаться пустыми. Теорема 1 показывает, что для решения некоторых таких задач может быть использован метод стабилизации [169].

**5.** Для иллюстрации изложенного метода стабилизации рассмотрим несколько примеров.

**Пример 1.** Задача:

$$J(u) = \int_c^d \left( \int_a^b K(s, t, u(t)) dt \right)^2 ds \rightarrow \inf, \quad u \in U = C[a, b], \quad (31)$$

где  $K(s, t, u)$  — непрерывная функция по совокупности аргументов  $(s, t, u) \in [c, d] \times [a, b] \times E^1$ . Эта задача тесно связана с интегральным уравнением  $\int_a^b K(s, t, u(t)) dt = 0$  и, вообще говоря, неустойчива в метрике  $C[a, b]$  [695; 697].

Пусть задача (31) имеет хотя бы одно решение  $u = u_*(t) \in H^1[a, b]$ . Тогда функция  $\Omega(u) = \|u\|_{H^1}^2 = \int_a^b (|u(t)|^2 + |\dot{u}(t)|^2) dt$ , определенная на множестве  $U_\Omega = H^1[a, b]$ , является стабилизатором задачи (31) в метрике  $C[a, b]$  (пример 3.2). Пусть  $|K(s, t, u)| \leq c_0(1 + |u|)$ ,  $c_0 = \text{const} > 0$ , и пусть вместо точной функции  $K(s, t, u)$  нам известно приближение  $K_\delta(s, t, u)$  такое, что

$$|K_\delta(s, t, u) - K(s, t, u)| \leq \delta(1 + |u|), \quad \delta > 0, \quad \forall (s, t, u) \in [c, d] \times [a, b] \times E^1.$$

Если в качестве приближенного значения функции  $J(u)$  возьмем

$$J_\delta(u) = \int_c^d \left( \int_a^b K_\delta(s, t, u(t)) dt \right)^2 ds,$$

получим

$$\begin{aligned} |J_\delta(u) - J(u)| &= \left| \int_c^d \left( \int_a^b (K_\delta(s, t, u(t)) - K(s, t, u(t))) dt \right) \times \right. \\ &\quad \times \left. \left( \int_a^b (K_\delta(s, t, u(t)) + K(s, t, u(t))) dt \right) ds \right| \leq \\ &\leq \int_c^d \left( \int_a^b \delta(1 + |u(t)|) dt \cdot \int_a^b (\delta + 2c_0)(1 + |u(t)|) dt \right) ds \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \delta(\delta + 2c_0)(d - c)(b - a + 1) \left( 1 + \int_a^b |u(t)|^2 dt \right) \leq \\ &\leq \delta(\delta + 2c_0)(d - c)(b - a + 1)^2 (1 + \|u\|_{H^1}^2), \end{aligned}$$

т. е. погрешность согласована со стабилизатором (см. замечание 3). Функция Тихонова

$$t_\delta(u) = \int_c^d \left( \int_a^b K_\delta(s, t, u(t)) dt \right)^2 ds + \alpha(\delta) \int_a^b (|u(t)|^2 + |\dot{u}(t)|^2) dt$$

определена на  $U_\Omega = H^1[a, b]$ . Если  $u_\delta = u_\delta(t) \in H^1[a, b]$ ,  $t_\delta(u_\delta) \leq \inf_{H^1[a, b]} t_\delta(u) + \varepsilon(\delta)$ , параметры  $\alpha(\delta), \varepsilon(\delta)$  выбраны так, как требуется в теореме 2, то семейство  $\{u_\delta(t), \delta > 0\}$  сходится к множеству  $U_*$  в метрике  $C[a, b]$ .

Если задача (31) имеет хотя бы одно решение  $u(t)$ , удовлетворяющее условию Гёльдера, то в качестве стабилизатора этой задачи в метрике  $C[a, b]$  можно использовать стабилизатор (3.7).

**Пример 2.** Рассмотрим задачу минимизации квадратичной функции

$$J(u) = \|Au - b\|_F^2 \rightarrow \inf, \quad u \in U, \quad (32)$$

где  $A \in \mathcal{L}(H \rightarrow F)$ ,  $H, F$  — гильбертовы пространства,  $b \in H$ ,  $U$  — выпуклое замкнутое множество из  $H$  (например,  $U = H$ ). Пусть эта задача имеет хотя бы одно решение. Условие разрешимости задачи (32) рассматривались в § 8.2 (теоремы 8.2.12, 8.2.13). Будем искать точку  $u_* \in U_*$ , ближе всего расположенную к заданному элементу  $\bar{u} \in H$ . Такая точка является  $\Omega$ -нормальным решением задачи (32), если  $\Omega(u) = \|u - \bar{u}\|_H^2$ . Пусть оператор  $A$  и элемент  $b$  заданы своими приближениями  $A_\delta \in \mathcal{L}(H \rightarrow F)$ ,  $b_\delta \in F$ , причем

$$\|A_\delta - A\| \leq \delta, \quad \|b_\delta - b\| \leq \delta, \quad (33)$$

пусть множество  $U$  известно точно. В качестве приближенной функции тогда естественно взять  $J_\delta(u) = \|A_\delta u - b_\delta\|^2$ . Допускаемая при этом погрешность оценивается так:

$$\begin{aligned} |J_\delta(u) - J(u)| &= |\langle (A_\delta u - b_\delta) - (Au - b), (A_\delta u - b_\delta) + (Au - b) \rangle| \leq \\ &\leq (\delta\|u\| + \delta)((2\|A\| + \delta)\|u\| + 2\|b\| + \delta) \leq \\ &\leq \delta(1 + \|u\|)^2(\|A\| + \|b\| + \delta). \end{aligned}$$

Но  $(1 + \|u\|)^2 \leq (1 + \|\bar{u}\| + \|u - \bar{u}\|)^2 \leq 2(1 + \|\bar{u}\|)^2(1 + \|u - \bar{u}\|)^2$ , поэтому

$$|J_\delta(u) - J(u)| \leq 4\delta(1 + \|\bar{u}\|)^2(\|A\| + \|b\| + \delta)(1 + \Omega(u)), \quad u \in H. \quad (34)$$

Отсюда видно, что погрешность с учетом замечания 3 удовлетворяет условию (5). Задача (32) при условиях (33), вообще говоря, неустойчива [334; 695]

(см. пример 1.4). Для определения ее  $\Omega$ -нормального решения можно воспользоваться методом стабилизации (8). Составим функцию Тихонова

$$t_\delta(u) = \|A_\delta u - b_\delta\|^2 + \alpha \|u - \bar{u}\|_H^2, \quad u \in H,$$

и определим точку  $u_\delta$  из условий:

$$u_\delta \in U, \quad t_\delta(u_\delta) \leq \inf_{u \in U} t_\delta(u) + \varepsilon(\delta). \quad (35)$$

В частности, если  $U = H$ , то сильно выпуклая дифференцируемая функция  $t_\delta(u)$  достигает минимума в единственной точке  $u_\delta$ , которая является решением операторного уравнения

$$t'_\delta(u) = 2A_\delta^*(A_\delta u - b_\delta) + 2\alpha(\delta)(u - \bar{u}) = 0.$$

Если

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \alpha(\delta) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \varepsilon(\delta) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta + \varepsilon(\delta)}{\alpha(\delta)} = 0, \quad (36)$$

то из теоремы 2 следует, что  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \|u_\delta - u_*\|_H = 0$ , где  $u_*$  —  $\Omega$ -нормальное решение задачи (32).

**Пример 3.** Задача:

$$J(u) = \int_c^d \left( \int_a^b K(s, t) u(t) dt - b(s) \right)^2 ds \rightarrow \inf, \quad u \in U = L_2[a, b], \quad (37)$$

где  $b(s) \in L_2[c, d]$ ,  $K(s, t) \in L_2(Q)$ ,  $Q = [c, d] \times [a, b]$ . Эта задача тесно связана с интегральным уравнением Фредгольма первого рода

$$\int_a^b K(s, t) u(t) dt = b(s), \quad c \leq s \leq d.$$

Задача (37) является частным случаем задачи (32) при  $H = L_2[a, b]$ ,  $F = L_2[c, d]$ ,

$$Au = \int_a^b K(t, s) u(s) ds \quad (38)$$

(оператор Фредгольма, пример 8.3.11). Пусть  $U_* \neq \emptyset$  и пусть вместо функций  $K(s, t), b(s)$  известны их приближения  $K_\delta(s, t) \in L_2(Q)$ ,  $b_\delta(s) \in L_2[c, d]$  такие, что

$$\iint_Q |A_\delta(s, t) - A(s, t)|^2 ds dt \leq \delta^2, \quad \int_c^d |b_\delta(s) - b(s)|^2 ds \leq \delta^2. \quad (39)$$

Тогда для приближенной функции

$$J_\delta(u) = \int_c^d \left( \int_a^b K_\delta(s, t) u(t) dt - b_\delta(s) \right)^2 ds$$

справедлива оценка (34), где  $\Omega(u) = \int_a^b |u(t) - \bar{u}(t)|^2 dt$ . Функция Тихонова имеет вид

$$t_\delta(u) = \int_c^d \left( \int_a^b A_\delta(s, t) u(t) dt - b_\delta(s) \right)^2 ds + \alpha(\delta) \int_a^b |u(t) - \bar{u}(t)|^2 dt, \quad (40)$$

$$u \in L_2[a, b].$$

Если выполнены условия (36), то точки  $u_\delta$ , определяемые из (35), (40) при  $U = L_2[a, b]$ , таковы, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_a^b |u_\delta(t) - u_*(t)|^2 dt = 0,$$

где  $u_* = u_*(t)$  —  $\Omega$ -нормальное решение задачи (37).

Пусть задача (37) имеет хотя бы одно решение  $v_* = v_*(t) \in H^1[a, b]$ . Покажем, как тогда можно построить семейство  $\{v_\delta \in U, \delta > 0\}$ , сходящееся при  $\delta \rightarrow 0$  к одному из решений этой задачи равномерно на  $[a, b]$ . Заметим, что оператор (38) определен и на  $H_1 = H^1[a, b] \subset L_2[a, b]$ , более того,  $A \in \mathcal{L}(H_1 \rightarrow F)$ , так как

$$\begin{aligned} \|A\|_{\mathcal{L}(H_1 \rightarrow F)}^2 &= \sup_{\|u\|_{H^1[a, b]} \leq 1} \int_c^d ((Au)(s))^2 ds \leq \sup_{\|u\|_{L_2[a, b]} \leq 1} \int_c^d ((Au)(s))^2 ds = \\ &= \|A\|_{\mathcal{L}(H \rightarrow F)} = \iint_Q K^2(s, t) dt ds. \end{aligned} \quad (41)$$

Поэтому имеет смысл задача:

$$J(u) \rightarrow \inf, \quad u \in U_1 = H^1[a, b], \quad (42)$$

где функция  $J(u)$  взята из (37). Множество решений задачи (42) обозначим через  $U_{1*}$ . По предположению, существует точка  $v_* \in U_* \cap H^1[a, b]$ . Нетрудно видеть, что  $J(v_*) \geq \inf_{U_1} J(u) = J_{1*} \geq \inf_U J(u) = J_* = J(v_*)$ . Отсюда следует, что  $J_{1*} = J_*$  и  $U_{1*} = U_* \cap H^1[a, b] \neq \emptyset$ . Рассуждая так же, как при выводе оценки (34) с учетом (39), (41), получаем

$$|J_\delta(u) - J(u)| \leq 4\delta(\|A\|_{\mathcal{L}(H \rightarrow F)} + \|b\|_F + \delta)(1 + \|u\|_{H^1[a, b]}^2) \quad \forall u \in H^1[a, b].$$

Составим функцию Тихонова задачи (42):  $t_\delta(u) = J_\delta(u) + \alpha(\delta)\|u\|_{H^1[a, b]}^2$  и определим точку  $v_\delta \in U_1 = H^1[a, b]$ ,  $t_\delta(v_\delta) \leq \inf_{U_1} t_\delta(u) + \varepsilon(\delta)$ . При выполнении условий (36) согласно теореме 2 получим  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \|v_\delta - w_*\|_{H^1[a, b]} = 0$ , где  $w_* \in U_{1*}$ ,  $\|w_*\|_{H^1[a, b]} = \inf_{U_{1*}} \|u\|_{H^1[a, b]}$ . Так как  $U_{1*} = U_* \cap H^1[a, b]$ , то  $w_* \in U_*$ , так что построенное семейство  $\{v_\delta, \delta > 0\}$  сходится к решению  $w_*$  задачи (37) в норме  $H^1[a, b]$  и, тем более, в норме  $C[a, b]$ .

Пример 4. Рассмотрим задачу оптимального управления:

$$J(u) = \int_{t_0}^T |x(t; u) - b(t)|_{E^n}^2 dt \rightarrow \inf, \quad u \in U, \quad (43)$$

где  $x(t; u) = x(t)$  — решение системы

$$\dot{x}(t) = D(t)x(t) + B(t)u(t), \quad t_0 \leq t \leq T; \quad x(t_0) = 0, \quad (44)$$

$U$  — выпуклое замкнутое ограниченное множество из  $L_2^r[t_0, T]$  (обозначения см. в примере 8.2.16). Введем оператор  $Au = x(t; u)$ , действующий из  $H = L_2^r[t_0, T]$  в  $F = L_2^n[t_0, T]$ . В примере 8.2.16 было доказано, что  $A \in \mathcal{L}(H \rightarrow F)$ , и задача (43), (44) сводится к задаче (32). При сделанных предположениях в задаче (43), (44) множество  $U_*$  ее решений непусто (теорема 8.2.12).

Пусть вместо матриц  $D(t), B(t), b(t)$  известны их кусочно непрерывные приближения  $D_\delta(t), B_\delta(t), b_\delta(t)$  такие, что

$$\|D_\delta(t) - D(t)\| \leq \delta, \quad \|B_\delta(t) - B(t)\| \leq \delta, \quad |b_\delta(t) - b(t)| \leq \delta \quad \forall t \in [t_0, T]. \quad (45)$$

Определим приближение  $A_\delta$  к оператору  $A$  следующим образом:  $A_\delta u = x_\delta(t, u)$ , где  $x_\delta = x_\delta(t; u)$  — решение системы:

$$\dot{x}_\delta(t) = D_\delta(t)x_\delta(t) + B_\delta(t)u(t), \quad t_0 \leq t \leq T, \quad x_\delta(t_0) = 0. \quad (46)$$

Как и в примере 8.2.16, нетрудно установить, что  $A_\delta \in \mathcal{L}(H \rightarrow F) \quad \forall \delta > 0$ . Оценим  $\|A_\delta - A\|$ . Из (44), (46) имеем:

$$\begin{aligned} x_\delta(t; u) - x(t; u) &= \int_{t_0}^t [D_\delta(\tau)x_\delta(\tau) + B_\delta(\tau)u(\tau) - D(\tau)x(\tau) - B(\tau)u(\tau)] d\tau = \\ &= \int_{t_0}^t (D_\delta(\tau)[x_\delta(\tau; u) - x(\tau; u)] + [D_\delta(\tau) - D(\tau)]x(\tau; u) + [B_\delta(\tau) - B(\tau)]u(\tau)) d\tau. \end{aligned}$$

Отсюда и из (45) следует:

$$\begin{aligned} |x_\delta(t; u) - x(t; u)| &\leq \sup_{\tau \in [t_0, T]} \|D_\delta(\tau)\| \int_{t_0}^t |x_\delta(\tau; u) - x(\tau; u)| d\tau + \\ &\quad + \delta \int_{t_0}^T |x(\tau; u)| d\tau + \delta \int_{t_0}^T |u(t)| dt \quad \forall t \in [t_0, T]. \end{aligned}$$

Далее воспользуемся леммой 6.3.1. Учитывая неравенство  $\sup_{\tau} \|D_\delta(\tau)\| \leq \sup_t \|D(t)\| + \delta = D_{\max} + \delta$  и оценку (8.2.8), получим

$$\begin{aligned} |x_\delta(t; u) - x(t; u)| &\leq c_1 \delta \|u\|_{L_2^r} \quad \forall t \in [t_0, T], \\ c_1 &= e^{(D_{\max} + \delta)(T - t_0)} \cdot [(T - t_0)c_0 + \sqrt{T - t_0}]. \end{aligned} \quad (47)$$

Из (47) имеем

$$\begin{aligned} \|A_\delta - A\| &= \sup_{\|u\|_{L_2^n} \leq 1} \|A_\delta u - Au\|_{L_2^n} = \\ &= \sup_{\|u\|_{L_2^n} \leq 1} \left( \int_{t_0}^T |x_\delta(t; u) - x(t; u)|_{E^n}^2 dt \right)^{1/2} \leq c_1 \sqrt{T - t_0} \delta. \end{aligned} \quad (48)$$

Таким образом, условия (33) на погрешности в этой задаче выполнены. Далее, предлагаем читателю взять стабилизатор  $\Omega(u) = \|u\|_{L_2^n}^2$  и, следуя рассуждениям из примера 2, применить метод стабилизации для задачи (43), (44) при условиях (45), сформулировать условия сходимости метода к  $\Omega$ -нормальному решению в норме  $L_2^n[t_0, T]$ .

**Пример 5.** Рассмотрим каноническую задачу линейного программирования:

$$J(u) = \langle c, u \rangle \rightarrow \inf, \quad u \in U = \{u \geq 0, Au = b\}, \quad (49)$$

где  $A$  — матрица размера  $m \times n$ ,  $b \in E^m$ ,  $u \in E^n$ . Пусть  $J_* > -\infty$ . Тогда  $U_* \neq \emptyset$  (теорема 3.5.1), функция Лагранжа задачи (49) имеет седловую точку (теорема 3.5.5), и, следовательно, в этой задаче выполнено условие (9) сильно согласованной постановки (лемма 5.16.1). Пусть вместо точных  $c, A, b$  известны их приближения  $c_\delta, A_\delta, b_\delta$  с погрешностями

$$|c_\delta - c| \leq \delta, \quad \|A_\delta - A\| \leq \delta, \quad |b_\delta - b| \leq \delta. \quad (50)$$

Опишем метод стабилизации для задачи (49) при условиях (50). Ограничения  $Au = b$  будем учитывать с помощью штрафной функции  $P(u) = |Au - b|^2$ . Положим  $J_\delta(u) = \langle c_\delta, u \rangle$ ,  $P_\delta(u) = |A_\delta u - b_\delta|^2$ . Стабилизатор возьмем  $\Omega(u) = |u|^2$ . Имеем:

$$\begin{aligned} |J_\delta(u) - J(u)| &\leq \delta |u| \leq \frac{1}{2} \delta (1 + |u|^2), \\ |P_\delta(u) - P(u)| &= |\langle (A_\delta u - b_\delta) - (Au - b), (A_\delta u - b_\delta) + (Au - b) \rangle| \leq \\ &\leq \delta (1 + |u|) ((2\|A\| + \delta)|u| + 2|b| + \delta) \leq 2\delta (1 + |u|)^2 (\|A\| + |b| + \delta) \leq \\ &\leq 4\delta (1 + |u|^2) (\|A\| + |b| + \delta), \quad u \in E^n. \end{aligned}$$

Как видим, погрешности согласованы со стабилизатором (замечание 3). Задача (7) здесь представляет собой задачу квадратичного программирования для сильно выпуклой функции (§ 5.8):

$$\begin{aligned} t_\delta(u) &= \langle c_\delta, u \rangle + A(\delta) |A_\delta u - b_\delta|^2 + \alpha(\delta) |u|^2 \rightarrow \inf, \\ u &\in U_0 = \{u \in E^n : u \geq 0\}. \end{aligned}$$

Определим точку  $u_\delta$  из условий:  $u_\delta \in U_0$ ,  $t_\delta(u_\delta) \leq \inf_{u \in U_0} t_\delta(u) + \varepsilon(\delta)$ . Если параметры  $\alpha(\delta), A(\delta), \varepsilon(\delta)$  удовлетворяют условиям (12), (16), то, согласно теоремам 1, 2, семейство  $\{u_\delta, \delta > 0\}$  при  $\delta \rightarrow 0$  сходится к  $\Omega$ -нормальному решению задачи (49).

Другой вариант метода стабилизации для задачи (49) при условиях (50), заключающийся в переходе к новой вспомогательной задаче, также являющейся задачей линейного программирования, будет рассмотрен в § 7.

Приведем еще несколько простых примеров, показывающих, что условия (12), (13), (16) на параметры  $\alpha(\delta)$ ,  $A(\delta)$ ,  $\varepsilon(\delta)$  на классе задач (1), (2) не являются грубыми.

**Пример 6.** Задача:  $J(u) \equiv 0 \rightarrow \inf, u \in U = E^1$ . Тогда  $J_* = 0$ ,  $U_* = U = E^1$ . Возьмем стабилизатор  $\Omega(u) = u^2$ . Тогда множество  $U_{**}$   $\Omega$ -нормальных решений состоит из одной точки  $u_* = 0$ . Пусть  $|J_\delta(u) - J(u)| \leq \delta(1 + u^2)$ . Тогда может случиться, что  $J_\delta(u) = -\delta(1 + u^2)$ . Функция Тихонова равна  $t_\delta(u) = -\delta(1 + u^2) + \alpha u^2 = (\alpha - \delta)u^2 - \delta$ . Если  $\alpha = \alpha(\delta) < \delta$ , то  $t_{\delta*} = \inf_{E^1} t_\delta(u) = -\infty$ . Поэтому для реализуемости метода (8) необходимо условие  $\delta \leq \alpha(\delta)$  (ср. с (11)). Тогда  $t_{\delta*} = -\delta = t_\delta(u_\delta)$ , где  $u_\delta = 0 = u_* \quad \forall \delta > 0$  без каких-либо дополнительных согласований параметров. Условию  $t_\delta(u_\delta) \leq t_{\delta*} + \varepsilon(\delta) = -\delta + \varepsilon(\delta)$  удовлетворяет точка

$$u_\delta = \sqrt{\frac{\varepsilon(\delta)}{\alpha - \delta}} = \sqrt{\frac{\varepsilon(\delta)}{\alpha(\delta)} \left(1 - \frac{\delta}{\alpha(\delta)}\right)^{-1}}, \quad \delta > 0.$$

Отсюда видно, что семейство  $\{u_\delta, \delta > 0\}$  ограничено, если  $\sup_{\delta > 0} \frac{\delta}{\alpha(\delta)} < 1$ ,  $\sup_{\delta > 0} \frac{\varepsilon(\delta)}{\alpha(\delta)} < \infty$ , а для выполнения равенства  $\lim_{\delta \rightarrow 0} u_\delta = u_* = 0$  нужно еще требовать  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\varepsilon(\delta)}{\alpha(\delta)} = 0$ .

Если оказалось, что  $J_\delta(u) = \frac{1}{2}\delta(1 + u)^2$ , то  $t_\delta(u) = \frac{1}{2}\delta(1 + u)^2 + \alpha u^2$ ,  $t_{\delta*} = \inf_{E^1} t_\delta(u) = \frac{\alpha\delta}{2\alpha + \delta} = t_\delta(u_\delta)$ , где  $u_\delta = \frac{-\delta}{2\alpha + \delta} = -\frac{\delta}{\alpha(\delta)} \left(2 + \frac{\delta}{\alpha(\delta)}\right)$ . Отсюда видно, что сходимость  $u_\delta$  к  $\Omega$ -нормальному решению возможна лишь при  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta}{\alpha(\delta)} = 0$ .

**Пример 7.** Задача: минимизировать функцию

$$J(u) = \begin{cases} \frac{(u-1)^2}{1+u^4}, & u > 1, \\ 0, & u \leq 1, \end{cases}$$

на множестве  $U = \{u \in E^1: u \geq -1\}$ . Здесь  $J_* = 0$ ,  $U_* = \{u \in E^1: |u| \leq 1\}$ . Пусть  $\Omega(u) = u^2$ ,  $|J_\delta(u) - J(u)| \leq \delta(1 + u^2) \quad \forall u \in E^1$ , множество  $U$  известно точно. Тогда  $\Omega_* = \inf_{|u| \leq 1} u^2 = 0$ ,  $U_{**} = \{u_* = 0\}$ . Допустим, что  $J_\delta(u) = J(u)$ . То-

гда  $t_\delta(u) = J(u) + \alpha u^2$ ,  $t_{\delta*}(u) = 0 = t_\delta(0)$ . Пусть  $\alpha = \alpha(\delta) = \delta^2$ ,  $\varepsilon = \varepsilon(\delta) = 2\delta$  при  $0 \leq \delta \leq 1$ ,  $\varepsilon(\delta) = 2$  при  $\delta > 1$ . Тогда условию  $t_\delta(u) \leq t_{\delta*} + \varepsilon(\delta)$  удовлетворяет точка  $u_\delta = \frac{1}{\sqrt{\delta}}$ . Хотя и  $\lim_{\delta \rightarrow 0} J(u_\delta) = 0 = J_*$ , но  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \rho(u_\delta, U_{**}) = +\infty$ . Здесь

нарушено условие  $\sup_{\delta > 0} \frac{\varepsilon(\delta)}{\alpha(\delta)} < \infty$ .

Рассмотрим другой набор параметров:  $\alpha(\delta) = \delta^2$ ,  $\varepsilon(\delta) = 2\delta^2(1 + \delta)$  при  $0 < \delta \leq 1$ ,  $\varepsilon(\delta) = 2$  при  $\delta > 1$ . Пусть снова  $J_\delta(u) = J(u)$ . Тогда точка  $u_\delta = 1 + \delta$  удовлетворяет условию  $t_\delta(u) \leq t_{\delta*} + \varepsilon(\delta)$  при  $0 < \delta \leq 1$ . Ясно, что  $\lim_{\delta \rightarrow 0} J(u_\delta) = 0 = J_*$ ,  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \rho(u_\delta, U_*) = 0$ , но  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \rho(u_\delta, U_{**}) = 1$ . Здесь  $\sup_{1 \geq \delta > 0} \frac{\varepsilon(\delta)}{\alpha(\delta)} < \infty$ , однако условие  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\varepsilon(\delta)}{\alpha(\delta)} = 0$  нарушено.

**Пример 8.** Задача:  $J(u) \equiv 0 \rightarrow \inf$ ,  $u \in U = \{u \in E^1 = U_0 : g(u) = u \leq 0\}$ . Здесь  $J_* = 0$ ,  $U_* = U$ . Функция Лагранжа этой задачи  $L(u, \lambda) = \lambda u$ ,  $u \in E^1$ ,  $\lambda \geq 0$  имеет седловую точку  $(u_*, \lambda^* = 0)$  при любом выборе  $u_* \in U_* = U$ , так что условие (9) сильно согласованной постановки здесь выполнено при  $s = 1$ ,  $c = \lambda^* = 0$ ,  $\nu = 1$  (лемма 5.16.1). Пусть приближения  $J_\delta(u), g_\delta(u)$  таковы, что  $|J_\delta(u) - J(u)| \leq \delta(1 + u^2)$ ,  $u \in E^1$ . Эта задача неустойчива (пример 1.8). Возьмем стабилизатор  $\Omega(u) = u^2$ , штрафную функцию  $P(u) = \max\{0; u\}$  и ее приближение  $P_\delta(u) = \max\{u; 0\} - \delta u^2$ . Нетрудно видеть, что  $|P_\delta(u) - P(u)| \leq \delta(1 + \Omega(u)) \forall u \in E^1$ . Пусть  $J_\delta(u) = -\delta u^2$ . Тогда функция Тихонова

$$\begin{aligned} t_\delta(u) &= -\delta u^2 + A(\delta)[\max\{u; 0\} - \delta u^2] + \alpha u^2 = \\ &= \begin{cases} A(\delta)u + u^2(\alpha - \delta - \delta A(\delta)), & u \geq 0; \\ u^2(\alpha - \delta - \delta A(\delta)), & u < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Если  $\alpha - \delta - \delta A(\delta) \geq 0$ , то  $t_{\delta*} = \inf_{E^1} t_\delta(u) = 0$ ; если  $\alpha - \delta - \delta A(\delta) < 0$ , то  $t_{\delta*} = -\infty$ . Как видим, нарушение условий (11) может привести к тому, что метод (8) потеряет смысл. Пусть  $\alpha - \delta - \delta A(\delta) \geq 0$ . Тогда условию (8)  $t_\delta(u_\delta) \leq \varepsilon(\delta)$  удовлетворяет точка

$$u_\delta = \frac{2 \frac{\varepsilon(\delta)}{\alpha(\delta)}}{\sqrt{\frac{A(\delta)}{\alpha(\delta)} + 4 \frac{\varepsilon(\delta)}{\alpha(\delta)} \left(1 - \frac{\delta + \delta A(\delta)}{\alpha(\delta)}\right)} + \frac{A(\delta)}{\alpha(\delta)}}, \quad \delta > 0.$$

Отсюда видно, что для справедливости равенства  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \rho(u_\delta, U_*) = 0$  необходимо выполнение соотношений  $\sup_{\delta > 0} \frac{\varepsilon(\delta)}{\alpha(\delta)} < \infty$ ,  $A(\delta) > 0$ ,  $\alpha(\delta) > 0$ ,  $\lim_{\delta \rightarrow 0} A(\delta) = +\infty$ ,  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \alpha(\delta) = 0$  из (12), (13), причем первое из условий (13) строгого неравенства заменено нестрогим, вытекающим из (11). Заметим, что здесь  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \rho(u_\delta, U_{**}) = 0$ ,  $U_{**} = \{u_* = 0\}$  и без требования условий (16).

**6.** Для удобства дальнейших ссылок в § 8–13 отдельно сформулируем и докажем специальный случай теоремы 2, когда семейство  $\{u_\delta, \delta > 0\}$  определяется из условий (8) при  $\varepsilon(\delta) = 0$ , а в (6) используются точные входные данные.

**Теорема 3.** Пусть

1)  $U_0$  — выпуклое замкнутое множество из рефлексивного банахова пространства  $B$ , функции  $J(u), g_i(u)$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $|g_i(u)|$ ,  $i = m + 1, \dots, s$ , выпуклы и полунепрерывны снизу на  $U_0$ , множество (2) непусто, выполняются условия (3), (9);



2) функция  $\Omega(u)$  полунепрерывна снизу, строго равномерно выпукла на  $U_0$ ,  $P(u)$  — штрафная функция, определяемая формулой (4) с параметром  $p \geq \max\{\nu; 1\}$ ;

3) параметры  $\alpha(\delta)$ ,  $A(\delta)$  удовлетворяют условиям

$$\alpha(\delta) > 0, \quad A(\delta) > 0 \quad \forall \delta > 0, \quad (51)$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \alpha(\delta) = 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} A(\delta) = +\infty, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \alpha(\delta)(A(\delta))^{\frac{\nu}{p-\nu}} = \infty$$

(при  $p = \nu \geq 1$  последнее условие не нужно);

4) точка  $u_\delta$  является решением задачи

$$T_\delta(u) = J(u) + A(\delta)P(u) + \alpha(\delta)\Omega(u) \rightarrow \inf, \quad u \in U_0, \quad (52)$$

т. е.

$$u_\delta \in U_0, \quad T_\delta(u_\delta) = \inf_{u \in U_0} T_\delta(u), \quad \delta > 0. \quad (53)$$

Тогда

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} J(u_\delta) = J_*, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} g_i^+(u_\delta) = 0, \quad i = 1, \dots, s; \quad (54)$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \Omega(u_\delta) = \Omega_*, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \|u_\delta - u_*\| = 0,$$

где

$$\Omega_* = \inf_{u \in U_*} \Omega(u) = \Omega(u_*), \quad u_* \in U_*. \quad (55)$$

**Доказательство.** При сделанных предположениях функция  $T_\delta(u)$  строго равномерно выпукла на выпуклом замкнутом множестве  $U_0$ , полунепрерывна снизу на  $U_0$  и достигает своей нижней грани на  $U_0$  в единственной точке (теорема 8.2.11), так что задача (52) разрешима и точка  $u_\delta$ , удовлетворяющая условиям (53), определяется однозначно.

Так как множество  $U_*$  выпукло, замкнуто, то по той же теореме 8.2.11 точка  $u_*$ , удовлетворяющая условиям (55), существует и единственна. Далее, с учетом (10), (53), соотношений  $\Omega(u) \geq 0$ ,  $P(u) \geq 0$  и  $P(u_*) = 0$  получаем цепочку неравенств

$$\begin{aligned} J(u_\delta) + A(\delta)P(u_\delta) &\leq J(u_\delta) + A(\delta)P(u_\delta) + \alpha(\delta)\Omega(u_\delta) = T_\delta(u_\delta) \leq \\ &\leq T_\delta(v_*) = J(v_*) + A(\delta)P(v_*) + \alpha(\delta)\Omega(v_*) = J_* + \alpha(\delta)\Omega_* \leq \\ &\leq J(u_\delta) + A(\delta)P(u_\delta) + \alpha(\delta)\Omega_* + B(A(\delta))^{-\frac{\nu}{p-\nu}}, \quad \delta > 0, \end{aligned}$$

аналогичную цепочке (19). Отсюда имеем

$$\Omega(u_\delta) \leq \Omega_* + \frac{B}{\left(\alpha(\delta)(A(\delta))^{\frac{\nu}{p-\nu}}\right)} \quad \forall \delta > 0 \quad (56)$$

$$J(u_\delta) + A(\delta)P(u_\delta) \leq J_* + \alpha(\delta)\Omega_* \quad \forall \delta > 0. \quad (57)$$

Из неравенства (57) и леммы 3.3 получаем оценки

$$0 \leq g_i^+(u_\delta) \leq \rho(\delta), \quad -|c|(\rho(\delta))^\nu \leq J(u_\delta) - J_* \leq \beta(\delta) \quad \forall \delta > 0, \quad (58)$$

где величина  $\rho(\delta)$  определяется формулой (3.21),  $\beta(\delta) = \alpha(\delta)\Omega_*$ . Из (56), (57) и из леммы 3.2 следует утверждение теоремы 3.  $\square$

Переформулируем теорему 3 для случая, когда в (1), (2)  $m = s = 0$ ,  $U = U_0$ .

**Теорема 4.** Пусть  $U$  — выпуклое замкнутое множество из рефлексивного банахова пространства  $B$ , функция  $J(u)$  выпукла и полунепрерывна снизу на  $U$ ;  $J_* > -\infty$ ,  $U_* \neq \emptyset$ ,  $\Omega(u) = \|u\|^2$ ,  $\alpha(\delta) > 0$ ,  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \alpha(\delta) = 0$ , точка  $u_\delta$  определена из условий

$$u_\delta \in U, \quad T_\delta(u_\delta) = \inf_U T_\delta(u), \quad T_\delta(u) = J(u) + \alpha(\delta)\|u\|^2 \quad \forall \delta > 0.$$

Тогда

$$J_* \leq J(u_\delta) \leq J_* + \alpha(\delta)\|u_*\|^2, \quad \|u_\delta\| \leq \|u_*\| = \inf_{U_*} \|u\|, \quad u_* \in U_*,$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \|u_\delta - u_*\| = 0.$$

### Упражнения

**У п р а ж н е н и е 1.** Нарисовать график функции Тихонова  $t_\delta(u) = u^2(1 + u^4)^{-1} + \alpha(\delta)u^2$  для минимизации функции  $J(u) = u^2(1 + u^4)^{-1}$  на множестве  $U = E^1$ . Показать на этом графике, что для сходимости точек  $u_\delta$  из (8) к множеству  $U_* = \{0\}$  необходимо согласованное стремление к нулю параметров  $\alpha(\delta), \varepsilon(\delta)$ . Указать условие согласования этих параметров.

**У п р а ж н е н и е 2.** Применить метод стабилизации к задачам из примеров 1.1–1.9, указать условия согласования параметров метода.

**У п р а ж н е н и е 3.** Применить метод стабилизации (8) к общей задаче линейного программирования.

**У п р а ж н е н и е 4.** Применить метод стабилизации к задаче оптимального управления:

$$J(u) = |x(T; u) - b|_{E^n}^2 \rightarrow \inf,$$

$$\dot{x}(t) = D(t)x(t) + B(t)u(t) + f(t), \quad t_0 \leq t \leq T; \quad x(t_0) = x_0,$$

$u = u(t) \in U$  — выпуклое замкнутое множество из  $L_2^r[t_0, T]$ , считая, что матрицы  $D(t), B(t)$ , вектора  $f(t), b, x_0$  известны неточно (обозначения см. в примере 8.2.15) и выполнены условия (45),  $|x_{0\delta} - x_0| \leq \delta$ ,  $|f_\delta(t) - f(t)| \leq \delta \quad \forall t \in [t_0, T]$ . У к а з а н и е: воспользоваться стабилизатором  $\Omega(u) = \|u\|_{L_2^r[t_0, T]}^2$ .

**У п р а ж н е н и е 5.** В упражнении 4 функцию  $J(u)$  заменить на  $J(u) = \int_a^b |x(t) - y(t)|^2 dt$ , считать, что  $|y_\delta(t) - y(t)| \leq \delta$ .

**У п р а ж н е н и е 6.** В задачах из упражнений 4, 5 использовать стабилизатор  $\Omega(u) = \|u\|_{H_r^1[t_0, T]}^2$ , считая, что  $U_* \cap H_r^1[t_0, T] \neq \emptyset$ .

**У п р а ж н е н и е 7.** Показать, что задача

$$J(u) = \int_a^b \left( \int_a^t u(s) ds - f(t) \right)^2 dt \rightarrow \inf, \quad u \in U = L_2[a, b],$$

неустойчива к возмущениям функции  $f(t) \in C^1[a, b]$  в метрике  $L_2[a, b]$  или  $C[a, b]$  (задача дифференцирования функции  $f(t)$ ). У к а з а н и е: взять  $f_\delta(t) = f(t) + \delta \sin \frac{t}{\delta}$ ,  $t \in [a, b]$ . Применить к этой задаче метод стабилизации, взяв стабилизатор  $\Omega(u) = \|u\|_{L_2[a, b]}^2$ .

**У п р а ж н е н и е 8.** Сформулировать и доказать аналоги теорем 1, 2 для задачи:  $J(u) \rightarrow \inf$ ,  $u \in U$ , когда множество  $U$  известно точно, а приближения  $J_\delta(u)$  функции  $J(u)$  удовлетворяют первому из неравенств (5) (см. замечание 3).

У п р а ж н е н и е 9. В задаче (32) предположить, что вместо  $A, b$  известны их приближения  $A_h, b_\delta$  такие, что  $\|A_h - A\| \leq h, \|b_\delta - b\| \leq \delta$ , множество  $U$  известно точно. Описать метод стабилизации со стабилизатором  $\Omega(u) = \|u\|^2$ . Указать условия согласования параметров  $\alpha = \alpha(h, \delta), \varepsilon = \varepsilon(h, \delta)$ , обеспечивающие сходимость метода к  $\Omega$ -нормальному решению задачи в метрике  $H$ . У к а з а н и е: воспользоваться схемой доказательства теорем 1, 2.

У п р а ж н е н и е 10. Исследовать сходимость при  $\alpha \rightarrow +0$  метода стабилизации

$$\langle c, u \rangle + \frac{1}{2}\alpha|u|^2 \rightarrow \inf, \quad u \in U = \{u \geq 0: Au = b\} \quad (59)$$

для канонической задачи линейного программирования

$$\langle c, u \rangle \rightarrow \inf, \quad u \in U, \quad (60)$$

где  $A$  — матрица размера  $m \times n$ ,  $b \in E^m, c \in E^n$ . Показать, что двойственная к (59) задача (§ 4.9) имеет вид

$$-\langle b, \lambda \rangle - \frac{1}{2\alpha} |\max\{-(c + A^\top \lambda); 0\}|^2 \rightarrow \sup, \quad \lambda \in E^m. \quad (61)$$

Убедиться, что задача (61) при  $\alpha \rightarrow +0$  равносильна методу штрафных функций для двойственной к (60) задачи линейного программирования:  $-\langle b, \lambda \rangle \rightarrow \sup, \lambda \in \Lambda = \{\lambda \in E^m: A^\top \lambda + c \geq 0\}$ . У к а з а н и е: показать, что  $\inf_{x \geq 0} \left( \frac{1}{2}\alpha x^2 + \beta x \right) = -\frac{1}{2\alpha} |\max\{-\beta; 0\}|^2 \forall \alpha > 0, \forall \beta$ .

## § 5. Метод невязки

1. Этот метод опишем применительно к уже рассмотренной задаче минимизации (4.1), (4.2) второго типа при тех же предположениях (4.3)–(4.5). Введем множество

$$V(\delta) = \{u \in U_\Omega: J_\delta(u) + A(\delta)P_\delta(u) \leq \overline{\varphi}_{\delta*} + \sigma(\delta)\}, \quad (1)$$

где  $J_\delta(u), P_\delta(u)$  — какие-либо конкретные реализации приближений  $J(u), P(u)$  из (4.5),  $\Omega(u), u \in U_\Omega$  — стабилизатор задачи (4.1), (4.2),  $A(\delta) > 0, \sigma(\delta) > 0$  — параметры метода,  $\lim_{\delta \rightarrow 0} A(\delta) = +\infty, \lim_{\delta \rightarrow 0} \sigma(\delta) = 0, \overline{\varphi}_{\delta*} = \inf_{u \in U_\Omega} (J_\delta(u) + A(\delta)P_\delta(u) + (\delta + \delta A(\delta))\Omega(u))$ . Предположим, что  $V(\delta) \neq \emptyset$  и, приближенно решая задачу первого типа

$$\Omega(u) \rightarrow \inf, \quad u \in V(\delta),$$

нам удалось найти точку  $u_\delta$ , удовлетворяющую условиям:

$$u_\delta \in V(\delta), \quad \Omega(u_\delta) \leq \Omega_{\delta*} + \mu(\delta), \quad (2)$$

где  $\Omega_{\delta*} = \inf_{u \in V(\delta)} \Omega(u), \mu(\delta) > 0$ . На формальном уровне метод невязки описан.

Осталось указать условия, гарантирующие непустоту множества  $V(\delta)$ , условия согласования параметров метода, условия сходимости метода.

Но сначала кратко поясним название метода невязки. Этот метод первоначально применялся для минимизации функции  $J(u) = \rho_F(Au, f)$ , возникающей при исследовании уравнений  $Au = f$ , где  $A$  — оператор, действующий из некоторого метрического пространства  $\mathcal{M}$  в метрическое пространство  $F, f \in F, \rho_F(f_1, f_2)$  — расстояние между точками  $f_1, f_2 \in F$ . Величину

$J(u) = \rho_F(Au, f)$  принято называть *невязкой* уравнения  $Au = f$ . Если это уравнение имеет решение, то  $\inf_{u \in \mathcal{M}} J(u) = J_* = 0$ , и в этом случае метод невязки [334; 508; 697] сводится к задаче минимизации стабилизатора  $\Omega(u)$  на множестве  $V(\delta) = \{u \in U_\Omega : J(u) \leq \sigma(\delta)\}$ , состоящем из точек, для которых невязка уравнения не превосходит некоторой малой величины  $\sigma(\delta)$ . В задаче минимизации:  $J(u) \rightarrow \inf, u \in U$  невязкой можно назвать величину  $J(u) - J_*$  и в качестве множества, на котором невязка мала, взять  $V = \{u \in U : J(u) - J_* \leq \sigma\}$ ; в задаче (4.1), (4.2) при использовании штрафной функции  $V = \{u \in U_0 : \Phi(u) = J(u) + AP(u) \leq \inf_{u \in U_\Omega} \Phi(u) + \sigma\}$  и при неточном задании исходных данных аналогом множества  $V$  является множество (1). Таким образом, метод невязки заключается в минимизации стабилизатора  $\Omega(u)$  на множестве точек из  $U_\Omega$ , для которых невязка мала. Это обстоятельство нашло отражение в названии метода невязки.

Метод невязки (1), (2) удобно применять, когда величина  $\overline{\varphi}_{\delta*} + \sigma(\delta)$ , входящая в определение множества  $V(\delta)$ , известна. Если эта величина заранее неизвестна, то для ее определения предварительно нужно, решая задачу первого типа

$$\overline{\varphi}_\delta(u) = J_\delta(u) + A(\delta)P_\delta(u) + (\delta + \delta A(\delta))\Omega(u) \rightarrow \inf, \quad u \in U_\Omega, \quad (3)$$

найти величину  $\overline{\varphi}_{\delta*}$  или ее оценку  $\overline{\varphi}_{\delta*} + \sigma(\delta)$ . При решении задач (3) и (1), (2) возможно использование методов из § 2. Дальнейшее изложение не зависит от метода решения перечисленных задач.

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия 1–3 теоремы 4.1 и параметры  $A(\delta), \sigma(\delta), \mu(\delta)$  таковы, что

$$A(\delta) > 0, \quad \sigma(\delta) > 0, \quad \mu(\delta) > 0, \quad (4)$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} (\sigma(\delta) + \delta A(\delta)) = 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} A(\delta) = +\infty, \quad (5)$$

$$\sup_{\delta > 0} \mu(\delta) < \infty, \quad (\delta + \delta A(\delta))(3 + \Omega_*) + B(A(\delta))^{-\frac{\nu}{p-\nu}} \leq \sigma(\delta), \quad \delta > 0$$

(при  $p = \nu$  последнее слагаемое в (5) отсутствует, а условие  $\lim_{\delta \rightarrow 0} A(\delta) = +\infty$  можно заменить на  $A(\delta) > \max_{1 \leq i \leq s} c_i$ ), где

$$B = (p - \nu)\nu^{\frac{\nu}{p-\nu}} p^{-\frac{p}{p-\nu}} |c|^{\frac{p}{p-\nu}}, \quad |c| = \left( \sum_{i=1}^s |c_i|^{\frac{p}{p-\nu}} \right)^{\frac{p-\nu}{p}}$$

при  $p > \nu$ ,  $\Omega_* = \inf_{U_{\Omega_*}} \Omega(u)$ ,  $U_{\Omega_*} = U_* \cap U_\Omega$ . Тогда множество  $V(\delta)$ , определенное равенством (1), непусто при всех  $\delta > 0$ , семейство  $\{u_\delta, \delta > 0\}$  из (2) таково, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} J(u_\delta) = J_*, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} g_i^+(u_\delta) = 0, \quad i = 1, \dots, s; \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \rho(u_\delta, U_*) = 0. \quad (6)$$

Если кроме перечисленных условий еще известно, что  $U_\Omega = U_0$ , функция  $\Omega(u)$  полунепрерывна снизу на  $U_0$ ,  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \mu(\delta) = 0$ , то тогда наряду с (6)

справедливы равенства

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \Omega(u_\delta) = \Omega_*, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \rho(u_\delta, U_{**}) = 0, \quad (7)$$

где  $U_{**} = \left\{ u \in U_* : \Omega(u) = \Omega_* = \inf_{U_*} \Omega(u) \right\}$  — множество  $\Omega$ -нормальных решений задачи (4.1), (4.2). Пределы в (6), (7) равномерны относительно выбора  $J_\delta(u)$ ,  $P_\delta(u)$  из (4.5) и выбора точки  $u_\delta$  из (2), т. е. справедливы равенства (4.15), (4.18), где  $X(\delta)$  — объединение множеств  $x(\delta) = \{u \in V(\delta) : \Omega(u_\delta) \leq \Omega_{\delta*} + \mu(\delta)\}$  по всевозможным реализациям  $J_\delta(u)$ ,  $P_\delta(u)$  из (4.5).

**Доказательство.** Сначала покажем, что множество (1) непусто при всех  $\delta > 0$ . Воспользуемся неравенством (4.10):

$$J_* \leq J(u) + A(\delta)P(u) + B(A(\delta))^{-\frac{\nu}{p-\nu}} \quad \forall u \in U_0, \quad \delta > 0, \quad p \geq \nu \quad (8)$$

(при  $p = \nu$  последнее слагаемое в (8) отсутствует и  $A(\delta) \geq |c| = \max_{1 \leq i \leq s} |c_i|$ ). Из (3), (8), (4.5) имеем

$$\begin{aligned} \overline{\varphi}_\delta(u) &\geq J(u) + A(\delta)P(u) - (\delta + \delta A(\delta))(1 + \Omega(u)) + (\delta + \delta A(\delta))\Omega(u) \geq \\ &\geq J_* - B(A(\delta))^{-\frac{\nu}{p-\nu}} - (\delta + \delta A(\delta)) \quad \forall u \in U_\Omega, \end{aligned}$$

так что  $\overline{\varphi}_{\delta*} > -\infty$ . Далее, по определению  $\Omega_*$  для любого  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < 1$ , найдется точка  $w_\varepsilon$  такая, что

$$w_\varepsilon \in U_{\Omega_*}, \quad \Omega(w_\varepsilon) \leq \Omega_* + \varepsilon. \quad (9)$$

Тогда с учетом (4.5), (8) получим

$$\begin{aligned} J_\delta(w_\varepsilon) + A(\delta)P_\delta(w_\varepsilon) &\leq J(w_\varepsilon) + A(\delta)P(w_\varepsilon) + (\delta + \delta A(\delta))(1 + \Omega(w_\varepsilon)) \leq \\ &\leq J_* + (\delta + \delta A(\delta))(1 + \Omega_* + \varepsilon) \leq \\ &\leq J(u) + A(\delta)P(u) + B(A(\delta))^{-\frac{\nu}{p-\nu}} + (\delta + \delta A(\delta))(2 + \Omega_*) \leq \\ &\leq J_\delta(u) + A(\delta)P_\delta(u) + (\delta + \delta A(\delta))(1 + \Omega(u)) + \\ &+ B(A(\delta))^{-\frac{\nu}{p-\nu}} + (\delta + \delta A(\delta))(2 + \Omega_*) = \\ &= \overline{\varphi}_\delta(u) + (\delta + \delta A(\delta))(3 + \Omega_*) + B(A(\delta))^{-\frac{\nu}{p-\nu}} \quad \forall u \in U_\Omega. \end{aligned}$$

Переходя к нижней грани по  $u \in U_\Omega$ , отсюда с учетом второго неравенства (5) имеем:  $J_\delta(w_\varepsilon) + A(\delta)P_\delta(w_\varepsilon) \leq \overline{\varphi}_{\delta*} + \sigma(\delta)$ , т. е.  $w_\varepsilon \in V(\delta) \quad \forall \delta > 0$ . Таким образом,  $V(\delta) \neq \emptyset \quad \forall \delta > 0$ . Так как  $\Omega(u) \geq 0 \quad \forall u \in U_\Omega$ , то  $\Omega_{\delta*} = \inf_{u \in V(\delta)} \Omega(u) \geq 0$

и точка  $u_\delta$ , удовлетворяющая условиям (2), существует по определению нижней грани. Для любой такой точки  $u_\delta$  с учетом включения  $w_\varepsilon \in V(\delta)$  имеем:

$$\Omega(u_\delta) \leq \Omega(w_\varepsilon) + \mu(\delta) \leq \Omega_* + \varepsilon + \mu(\delta), \quad \forall \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

Переходя к пределу при  $\varepsilon \rightarrow +0$ , отсюда получим

$$\Omega(u_\delta) \leq \Omega_* + \gamma(\delta), \quad \gamma(\delta) = \mu(\delta) \quad \forall \delta > 0. \quad (10)$$

Кроме того, из (4.5), (1), (2), (9), (10) следует

$$\begin{aligned}
 J(u_\delta) + A(\delta)P(u_\delta) &\leq J_\delta(u_\delta) + A(\delta)P_\delta(u_\delta) + \\
 &+ (\delta + \delta A(\delta))(1 + \Omega(u_\delta)) \leq \overline{\varphi}_{\delta*} + \sigma(\delta) + (\delta + \delta A(\delta))(1 + \Omega_* + \mu(\delta)) \leq \\
 &\leq \overline{\varphi}_\delta(w_\varepsilon) + \sigma(\delta) + (\delta + \delta A(\delta))(1 + \Omega_* + \mu(\delta)) \leq \\
 &\leq J(w_\varepsilon) + A(\delta)P(w_\varepsilon) + (\delta + \delta A(\delta))(1 + \Omega(w_\varepsilon)) + \\
 &+ (\delta + \delta A(\delta))\Omega(w_\varepsilon) + \sigma(\delta) + (\delta + \delta A(\delta))(1 + \Omega_* + \mu(\delta)) \leq \\
 &\leq J_* + (\delta + \delta A(\delta))(2 + 3\Omega_* + 2\varepsilon + \mu(\delta)) + \sigma(\delta) \quad \forall \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < 1.
 \end{aligned}$$

Отсюда при  $\varepsilon \rightarrow 0$  имеем:

$$\begin{aligned}
 J(u_\delta) + A(\delta)P(u_\delta) &\leq J_* + \beta(\delta), \\
 \beta(\delta) &= (\delta + \delta A(\delta))(2 + 3\Omega_* + \mu(\delta)) + \sigma(\delta), \quad \forall \delta > 0.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Отсюда и из леммы 3.3 следуют оценки

$$\begin{aligned}
 0 &\leq g_i^+(u_\delta) \leq \rho(\delta), \quad i = 1, \dots, s; \\
 -|c|(\rho(\delta))^\nu &\leq J(u_\delta) - J_* \leq \beta(\delta), \quad \forall \delta > 0,
 \end{aligned} \tag{12}$$

где величина  $\beta(\delta)$  взята из (11), а  $\rho(\delta)$  определяется формулой (3.21). Из оценок (10)–(12) и леммы 3.1 получаем равенства (6), (7). Равенства (4.15), (4.18) здесь доказываются так же, как в теореме 4.1.  $\square$

**З а м е ч а н и е 1.** Вместо второго из неравенств (5) на практике удобнее требовать:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta + \delta A(\delta)}{\sigma(\delta)} = 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \sigma(\delta)(A(\delta))^{\frac{\nu}{p-\nu}} = \infty \tag{13}$$

(при  $p = \nu$  последнее равенство не нужно). В качестве параметров  $A(\delta)$ ,  $\sigma(\delta)$ ,  $\mu(\delta)$ , удовлетворяющих условиям (4), (5), (13), можно, например, взять

$$A(\delta) = a_1 \delta^{-A}, \quad \sigma(\delta) = a_2 \delta^\sigma, \quad \mu(\delta) = a_3 \delta^\mu \quad \forall \delta > 0, \tag{14}$$

где  $A, \sigma, \mu, a_1, a_2, a_3$  — положительные постоянные.

Замечание 4.2 сохраняет силу и для метода невязки.

**2.** В выпуклых задачах (4.1), (4.2) в банаховых пространствах в методе (1), (2) возможно использование слабого стабилизатора.

**Т е о р е м а 2.** Пусть выполнены условия 1–3 теоремы 4.2 и параметры  $A(\delta), \sigma(\delta), \mu(\delta)$  удовлетворяют условиям (4), (13),  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \mu(\delta) = 0$ . Тогда семейство  $\{u_\delta, \delta > 0\}$ , определенное методом (1), (2), таково, что

$$\begin{aligned}
 \lim_{\delta \rightarrow 0} J(u_\delta) &= J_*, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} g_i^+(u_\delta) = 0, \quad i = 1, \dots, s; \\
 \lim_{\delta \rightarrow 0} \Omega(u_\delta) &= \Omega_*, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \|u_\delta - v_*\|_B = 0,
 \end{aligned} \tag{15}$$

где  $v_*$  — точка минимума функции  $\Omega(u)$  на множестве  $U_*$ . Пределы в (15) равномерны относительно выбора  $J_\delta(u)$ ,  $P_\delta(u)$  из (4.5) и точки  $u_\delta$  из (2).

**Доказательство.** Повторяя доказательство теоремы 1 при  $U_\Omega = U_0$ , убеждаемся, что оценки (10)–(12) сохраняют силу при всех достаточно малых  $\delta > 0$ . Отсюда и из леммы 3.2 следуют существование и единственность точки  $u_*$  и равенства (15). Равномерность пределов (15) доказывается так же, как равенства (4.15), (4.18).  $\square$

Замечания 4.3–4.7 с очевидными изменениями сохраняют силу и для метода (1), (2).

### Упражнения

Упражнение 1. Описать метод невязки для задач из примеров 1.1–1.9, 4.1–4.5.

Упражнение 2. Привести примеры задач, показывающих, что условия (4), (5), (13) на параметры метода невязки не являются грубыми на классе задач (4.1), (4.2).

Упражнение 3. Применить метод невязки к задачам из упражнений 4.4–4.7.

Упражнение 4. Сформулировать и доказать аналоги теорем 1, 2 для задачи:  $J(u) \rightarrow \inf, u \in U$ , когда множество  $U$  известно точно, а приближения  $J_\delta(u)$  функции  $J(u)$  удовлетворяют первому из неравенств (4.5).

Упражнение 5. К задаче (4.32) применить метод невязки в предположении, что  $\|A_h - A\| \leq h, \|b_\delta - b\| \leq \delta$ , множество  $U$  известно точно,  $\Omega(u) = \|u\|^2$ . Указать условия согласования параметров метода с погрешностями  $(h, \delta)$ .

## § 6. Метод квазирешений

1. Этот метод также опишем применительно к задаче минимизации (4.1), (4.2) второго типа при тех же предположениях (4.3)–(4.5). Будем также предполагать, что нам известно число  $r$  такое, что

$$U_{\Omega*} \cap Q_r \neq \emptyset, \quad Q_r = \{u \in U_\Omega: \Omega(u) \leq r\}, \quad (1)$$

где  $\Omega(u)$  — стабилизатор задачи (1), (2) в метрике  $\mathcal{M}$ ; напомним, что множество  $U_{\Omega*} = U_\Omega \cap U_*$  непусто по определению стабилизатора. Метод квазирешений сводится к приближенному решению задачи первого типа

$$\varphi_\delta(u) = J_\delta(u) + A(\delta)P_\delta(u) \rightarrow \inf, \quad u \in Q_r,$$

и определению точки  $u_\delta$  из условий

$$u_\delta \in Q_r, \quad \varphi_\delta(u_\delta) \leq \varphi_{\delta*} + \xi(\delta), \quad (2)$$

где  $\varphi_{\delta*} = \inf_{Q_r} \varphi_\delta(u)$ ,  $\xi(\delta) > 0 \quad \forall \delta > 0$ .

Название метода квазирешений также связано с уравнением  $Au = f$ , где  $A$  — оператор, действующий из некоторого метрического пространства  $\mathcal{M}$  в метрическое пространство  $F$ ,  $f \in F$ . Пусть  $\rho_F(Au, f)$  — невязка этого уравнения. *Квазирешением* уравнения  $Au = f$  называют точку  $u_* \in \mathcal{M}$ , для которой  $\rho_F(Au_*, f) = \inf_{u \in \mathcal{M}} \rho_F(Au, f)$ . Если  $\rho_F(Au_*, f) = 0$ , то квазирешение  $u_*$  превращается в обычное решение уравнения  $Au = f$ . Однако квазирешение может существовать и тогда, когда это уравнение не имеет решения. Предположим, что известно компактное в  $\mathcal{M}$  множество  $Q \subseteq \mathcal{M}$ , содержащее хотя

бы одно квазирешение уравнения  $Au = f$ . Тогда метод квазирешения [334; 695] сводится к задаче минимизации:  $\rho(Au, f) \rightarrow \inf, u \in Q$ . Обобщением этого метода применительно к задаче (4.1), (4.2) является метод (2), в котором роль  $Q$  играет множество  $Q_r$ , роль невязки — функция  $\varphi_\delta(u)$ .

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия 1–3 теоремы 4.1, условие (1) при некотором  $r$  и параметры  $A(\delta), \xi(\delta)$  метода (2) таковы, что

$$A(\delta) > 0, \quad \xi(\delta) > 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} A(\delta) = +\infty, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \xi(\delta) = 0 \quad (3)$$

(при  $p = \nu$  условие  $\lim_{\delta \rightarrow 0} A(\delta) = +\infty$  можно заменить на  $A(\delta) > \max_{1 \leq i \leq s} c_i$ ).

Тогда точка  $u_\delta$ , определяемая условиями (2), существует при всех  $\delta > 0$  и

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} J(u_\delta) = J_*; \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} g_i^+(u_\delta) = 0, \quad i = 1, \dots, s; \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \rho(u_\delta, U_*) = 0. \quad (4)$$

Пределы в (4) равномерны относительно выбора  $J_\delta(u)$ ,  $P_\delta(u)$  из (4.5) и выбора точек  $u_\delta$  из (2), т. е. справедливы равенства (4.15), где  $X(\delta)$  — объединение множества  $x(\delta) = \{u \in Q_r: \varphi_\delta(u) \leq \varphi_{\delta*} + \xi(\delta)\}$  по всевозможным  $J_\delta(u)$ ,  $P_\delta(u)$  из (4.5).

**Доказательство.** Прежде всего из (4.5), неравенства (4.10) и определения множества  $Q_r$  в (1) имеем:

$$\begin{aligned} \varphi_\delta(u) = J_\delta(u) + A(\delta)P_\delta(u) &\geq J(u) + A(\delta)P(u) - (\delta + \delta A(\delta))(1 + \Omega(u)) \geq \\ &\geq J_* - B(A(\delta))^{-\frac{\nu}{p-\nu}} - (\delta + \delta A(\delta))(1 + r) \quad \forall u \in Q_r. \end{aligned}$$

Следовательно,  $\varphi_{\delta*} = \inf_{Q_r} \varphi_\delta(u) > -\infty$  и точка  $u_\delta$  из условий (2) существует по определению нижней грани. Возьмем произвольные точки  $u_\delta$  из (2),  $u_* \in U_{\Omega_*} \cap Q_r$ . С учетом (4.5), (2), неравенств  $\Omega(u_\delta) \leq r$ ,  $\Omega(u_*) \leq r$  получаем

$$\begin{aligned} J(u_\delta) + A(\delta)P(u_\delta) &\leq \varphi_\delta(u_\delta) + (\delta + \delta A(\delta))(1 + \Omega(u_\delta)) \leq \\ &\leq \varphi_{\delta*} + \xi(\delta) + (\delta + \delta A(\delta))(1 + r) \leq \varphi_\delta(u_*) + \xi(\delta) + (\delta + \delta A(\delta))(1 + r) \leq \\ &\leq J(u_*) + A(\delta)P(u_*) + \xi(\delta) + 2(\delta + \delta A(\delta))(1 + r) = J_* + \beta(\delta), \\ \beta(\delta) &= \xi(\delta) + 2(\delta + \delta A(\delta))(1 + r) \quad \forall \delta > 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Из (5) и леммы 3.3 следуют оценки

$$\begin{aligned} 0 &\leq g_i^+(u_\delta) \leq \rho(\delta), \quad i = 1, \dots, s, \\ -|c|(\rho(\delta))^\nu &\leq J(u_\delta) - J_* \leq \beta(\delta) \quad \forall \delta > 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где величина  $\rho(\delta)$  определяется формулой (3.21), а  $\beta(\delta)$  взята из (5). Неравенство  $\Omega(u_\delta) \leq r$  можем записать в виде (3.10):

$$\Omega(u_\delta) \leq \Omega_* + \gamma(\delta), \quad \gamma(\delta) \equiv r - \Omega_*, \quad \delta > 0. \quad (7)$$

Из оценок (5)–(7) и леммы 3.1 получаем равенства (4). Равенства (4.15) доказываются так же, как в теореме 4.1.  $\square$



Для того чтобы семейство точек  $\{u_\delta, \delta > 0\}$  из (2) при  $\delta \rightarrow 0$  сходилась к множеству  $\Omega$ -нормальных решений задачи (4.1), (4.5), нужно, чтобы в неравенстве (3.10) величина  $\gamma(\delta)$  обладала свойством  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \gamma(\delta) = 0$ . Однако, как видно из (7), описанный вариант метода квазирешений таким свойством не обладает. Существует более тонкий и конструктивно более сложный вариант метода квазирешений [113; 151; 165], в котором неравенство (3.10) выполняется с  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \gamma(\delta) = 0$  и для которого имеют место равенства (4.18), а также справедлив аналог теоремы 4.2.

**2.** Сделаем несколько общих замечаний по поводу изложенных выше трех методов регуляризации.

**З а м е ч а н и е 1.** Каждый из этих методов (как и методы § 2, см. замечание 2.2) для своей реализации требует наличия некоторой априорной информации. Прежде всего во всех трех методах предполагается, что в задаче (4.1), (4.2) нам уже известно, что  $U \neq \emptyset$ ,  $J_* = \inf_{u \in U} J(u) > -\infty$ ,  $U_* = \{u \in U : J(u) = J_*\} \neq \emptyset$  и, кроме того, подразумевается, что существует стабилизатор в нужной метрике и выполнены условия (4.5). На практике перечисленная информация обычно добывается на стадии формирования математической модели задачи, предварительного исследования ее свойств, и, как правило, эта работа требует немалых усилий. Часть из этих проблем, относящихся к условиям  $J_* > -\infty$ ,  $U_* \neq \emptyset$ , мы немного обсуждали в § 8.2. При выборе стабилизатора  $\Omega(u)$  наиболее труднопроверяемым является условие принадлежности хотя бы одного решения  $u_*$  задачи (4.1), (4.2) области его определения  $U_\Omega$ . Включение  $u_* \in U_\Omega$  обычно означает, что это решение  $u_*$  обладает некоторыми дополнительными свойствами «гладкости» (непрерывность, гёльдеровость, наличие производных и т. п.), которые в исходном определении решения задачи, возможно, и не предусматривались, и выяснение таких свойств не всегда простое дело.

В задаче (4.1), (4.2), когда множество  $U$  известно неточно, в § 4–6 мы еще предполагали, что задача имеет сильно согласованную постановку в смысле выполнения неравенства (4.9), что позволило нам правильно выбрать параметры методов и единообразно исследовать их сходимость. По-видимому, условие (4.9), характеризующее условие роста целевой функции и ограничений на множестве  $U_0$ , может быть заменено другой, более удобной априорной информацией о задаче. Наличие перечисленной априорной информации дало нам возможность реализовать метод стабилизации. Для метода невязки к этой информации понадобилось добавить еще знание оценки  $J_*$  (или, точнее, оценки величины  $\bar{\varphi}_{\delta*}$  из (5.1)), а в методе квазирешений — оценки значения стабилизатора на каком-либо элементе  $u_* \in U_{\Omega*}$  (см. условие (1)).

Предупреждаем читателя, что вспомогательные задачи (4.8), (5.2), (2), лежащие в основе описанных методов регуляризации, могут иметь смысл и в том случае, когда какая-то часть упомянутой априорной информации отсутствует. Однако тогда решения  $u_\delta$  этих вспомогательных задач могут и не иметь какого-либо отношения к исходной задаче (4.1), (4.2), что видно из следующего примера.

**Пример 1.** Задача:  $J(u) = u \rightarrow \inf, u \in U = \{u \in E^1: u \geq 0, g_1(u) = u - 1 \leq 0, g_2(u) = -u + 2 \leq 0\}$ . Очевидно,  $U = \emptyset$ , и задача не имеет решения. Тем не менее, если здесь мы формально применим метод стабилизации (4.8) со стабилизатором  $\Omega(u) = u^2$ , то придем к задаче:  $t_\delta(u) = u + A(\delta)(\max\{g_1(u); 0\} + \max\{g_2(u); 0\}) + \alpha(\delta)u^2 \rightarrow \inf, u \geq 0$ , которая при любых  $\alpha(\delta) > 0$  будет иметь единственное решение  $u_\delta$ . Однако в этой задаче  $U_* = \emptyset$ , и мы не можем утверждать, что  $\rho(u_\delta, U_*) \rightarrow 0$  при  $\delta \rightarrow 0$ .

Этот простой пример показывает, что перед применением того или иного метода регуляризации нужно предварительно убедиться, что необходимая для реализации метода информация уже имеется. О роли априорной информации, важности ее учета при построении более эффективных методов регуляризации см., например, в [184; 450; 509; 557; 693; 695; 697; 757; 817].

**Замечание 2.** Изложенные в § 4–6 методы регуляризации содержат параметры, которые в каждом методе удовлетворяют своим условиям согласования и прямо или косвенно учитывают имеющуюся информацию о задаче (4.1), (4.2) (см. условие (4.12), (4.13), (4.16) в методе стабилизации, (5.4), (5.5) — в методе невязки, (3) — в методе квазирешений). Эти параметры не зависят от того, какая реализация входных данных  $J_\delta(u), P_\delta(u)$  из (4.5) имеется в нашем распоряжении, и могут быть выбраны заранее, до начала вычислений. Поэтому такой выбор параметров принято называть *априорным*. Условия согласования параметров оставляют достаточно большой произвол в их выборе (см., например, формулы (4.28), (5.14)). Следует сказать, что выбор параметров является тонким делом, от этого зависит скорость сходимости методов, их трудоемкость, точность. Для некоторых классов задач проблема оптимального априорного выбора параметров исследована, например, в [334; 462; 659; 679; 695].

Существует и другой, так называемый *апостериорный*, способ выбора параметров методов регуляризации, в котором учитываются свойства конкретных приближений входных данных, имеющихся в нашем распоряжении, свойства точек  $u_\delta$ , определяемых из вспомогательных задач и т. д. Апостериорный выбор несколько усложняет реализацию методов, но обладает немалыми достоинствами в смысле точности, лучшего учета конкретных особенностей задачи и ее входных данных. Не имея возможности подробнее останавливаться на проблеме апостериорного выбора параметров методов регуляризации, отсылаем читателя к специальной литературе [130; 334; 507; 679; 693; 696; 697] и др.

**Замечание 3.** Каждый из методов, описанных в § 4–6, определяет оператор  $R_\delta$ , который каждому набору приближенных входных данных  $(J_\delta(u), P_\delta(u))$  из (4.5) и набору своих параметров ставит в соответствие точку  $u_\delta$ , определяемую из вспомогательных задач (4.8), (5.2), (2) минимизации первого типа, и при выполнении условий теорем сходимости (теоремы 4.1, 4.2, 5.1, 5.2, 1) обеспечивает выполнение равенств (4). Это означает, что такой оператор  $R_\delta$  является регуляризующим.

**Определение 1.** Оператор  $R_\delta$ , который каждому набору приближенных входных данных задачи (4.1), (4.2) второго типа ставит в соответ-

ствие точку  $u_\delta \in U_0$ , называется *регуляризирующим*, если  $\lim_{\delta \rightarrow 0} J(u_\delta) = J_*$ ,  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \rho(u, U_*) = 0$ ,  $\lim_{\delta \rightarrow 0} g_i^+(u_\delta) = 0$ ,  $i = 1, \dots, s$  (ср. с определением 2.1).

Проблема существования регуляризирующих операторов, построение оптимальных в том или ином смысле операторов  $R_\delta$  для различных классов неустойчивых задач исследована, например, в [62; 63; 188; 334; 501; 693; 695; 697] и др.

**З а м е ч а н и е 4.** Неравенства (4.24), (4.25), (5.12), (6) представляют собой оценки скорости сходимости изложенных методов регуляризации по функции. При дополнительных ограничениях на задачу (4.1), (4.2) удастся получить оценки скорости сходимости этих методов по аргументу, т. е. оценки для  $\rho(u_\delta, U_*)$ ,  $\rho(u_\delta, U_{**})$  [162; 173]. Оценки скорости сходимости методов регуляризации для различных классов неустойчивых задач исследовались в [179; 192; 334; 507; 508; 679; 697; 740] и др.

### Упражнения

**У п р а ж н е н и е 1.** Для задачи:  $J(u) \rightarrow \inf$ ,  $u \in U$  с точно заданным множеством  $U$  описать метод квазирезений, сформулировать и доказать аналог теоремы 1.

**У п р а ж н е н и е 2.** Применить метод квазирезений для задач из примеров 1.1–1.9, 4.1–4.5, из упражнений 4.4–4.7.

**У п р а ж н е н и е 3.** Пусть  $u_\alpha$  — точка минимума функции  $T_\alpha(u) = |Au - b|^2 + \alpha|u|^2$  при  $u \in E^n$ ; здесь  $A$  — матрица размера  $m \times n$ ,  $b \in E^m$ ,  $\alpha > 0$ . Доказать, что тогда  $|u_\alpha - u_*| \leq \alpha|v|$ , где  $v$  — решение уравнения  $(A^*A)^2 u = A^*b$  с минимальной нормой [192, с. 301].

## § 7. Методы регуляризации с расширением множества

В методах регуляризации, описанных и исследованных в § 4–6, ограничения типа равенств и неравенств в задании множества (4.2) учитывались с помощью штрафных функций. Ниже излагаются методы регуляризации, в которых вместо штрафных функций используется некоторое расширение множества, согласованное со стабилизатором и с погрешностями в задании исходных данных.

Как и выше, будем рассматривать задачу

$$J(u) \rightarrow \inf, \quad u \in U, \quad (1)$$

$$U = \{u \in U_0: g_i(u) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m; \quad g_i(u) = 0, \quad i = m + 1, \dots, s\}, \quad (2)$$

где  $U_0$  — заданное множество из метрического пространства  $\mathcal{M}$  с метрикой  $\rho = \rho(u, v)$ , функции  $J(u)$ ,  $g_i(u)$ ,  $i = 1, \dots, s$ , определены и конечны на  $U_0$ . Пусть  $J_* > -\infty$ ,  $U_* \neq \emptyset$ . Пусть  $\Omega(u)$ ,  $u \in U_\Omega \subseteq U_0$  — какой-либо стабилизатор задачи (1), (2) в метрике  $\mathcal{M}$ . Как и выше, будем предполагать, что множество  $U_0$  известно точно, а вместо функций  $J(u)$ ,  $g_i(u)$  известны их приближения  $J_\delta(u)$ ,  $g_{i\delta}(u)$  такие, что

$$\begin{aligned} |J_\delta(u) - J(u)| &\leq \delta(1 + \Omega(u)), & |g_{i\delta}(u) - g_i(u)| &\leq \delta(1 + \Omega(u)), \\ i &= 1, \dots, s, & u &\in U_\Omega, \quad \delta > 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Рассмотрим следующее множество

$$\begin{aligned} W(\delta) = \{u \in U_\Omega: g_{i\delta}(u) \leq \theta(\delta)(1 + \Omega(u)), \quad i = 1, \dots, m; \\ |g_{i\delta}(u)| \leq \theta(\delta)(1 + \Omega(u)), \quad i = m + 1, \dots, s\} = \\ = \{u \in U_\Omega: g_{i\delta}^+(u) \leq \theta(\delta)(1 + \Omega(u)), \quad i = 1, \dots, s\}, \quad \theta(\delta) \geq \delta. \end{aligned} \quad (4)$$

Нетрудно убедиться, что множество  $W(\delta)$  заведомо непусто и, более того, представляет собой расширение множества  $U \cap U_\Omega$ . В самом деле, для любой точки  $u \in U \cap U_\Omega$  с учетом (3) имеем:

$$g_{i\delta}^+(u) \leq g_i^+(u) + \delta(1 + \Omega(u)) \leq \delta(1 + \Omega(u)) \leq \theta(\delta)(1 + \Omega(u)), \quad i = 1, \dots, s.$$

Это означает, что  $U \cap U_\Omega \subseteq W(\delta)$ , так что  $W(\delta)$  действительно является расширением множества  $U \cap U_\Omega$ .

Далее будем предполагать, что задача (1), (2) имеет сильно согласованную постановку, т. е. выполняется неравенство

$$J_* \leq J(u) + \sum_{i=1}^s c_i (g_i^+(u))^\nu, \quad u \in U_0, \quad c_i \geq 0, \quad \nu > 0. \quad (5)$$

Так как для любой точки  $u \in W(\delta)$  справедливы неравенства

$$\begin{aligned} g_i^+(u) \leq g_{i\delta}^+(u) + \delta(1 + \Omega(u)) \leq \theta(1 + \Omega(u)) + \delta(1 + \Omega(u)) \leq \\ \leq 2\theta(1 + \Omega(u)) \quad \forall u \in W(\delta), \quad i = 1, \dots, s, \end{aligned} \quad (6)$$

то из (5) следует, что

$$J_* \leq J(u) + |c|_1 (2\theta)^\nu (1 + \Omega(u))^\nu \quad \forall u \in W(\delta), \quad \delta > 0, \quad |c|_1 = \sum_{i=1}^s |c_i|. \quad (7)$$

Перейдем к описанию методов регуляризации, представляющих собой модификации методов стабилизации, невязки, квазирешений, реализованные на расширенном множестве (4). Как и в § 2, будем считать, что  $0 < \nu \leq 1$ .

**1.** Начнем с *метода стабилизации*. Возьмем функцию Тихонова

$$t_\delta(u) = J_\delta(u) + \alpha(\delta)\Omega(u), \quad u \in U_\Omega.$$

Решая задачу минимизации первого типа:  $t_\delta(u) \rightarrow \inf, u \in W(\delta)$ , определим точку  $u_\delta$  из условий

$$u_\delta \in W(\delta); \quad t_\delta(u_\delta) \leq t_{\delta*} + \varepsilon(\delta), \quad (8)$$

где  $\varepsilon(\delta) > 0$ ,  $t_{\delta*} = \inf_{W(\delta)} t_\delta(u)$ .

**Теорема 1.** Пусть

1) множество  $U_0$  замкнуто в метрике  $\mathcal{M}$ , функции  $J(u), g_i(u)$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $|g_i(u)|$ ,  $i = m + 1, \dots, s$ , полунепрерывны снизу на  $U_0$ ;  $J_* > -\infty$ ,  $U_* \neq \emptyset$ , выполнено условие (5) с  $0 < \nu \leq 1$ ;

- 2)  $\Omega(u)$  — стабилизатор задачи (1), (2) в метрике  $\mathcal{M}$ ;  
 3) приближения  $J_\delta(u)$ ,  $g_{i\delta}(u)$ ,  $i = 1, \dots, s$ , удовлетворяют условиям (3);  
 4) параметры  $\alpha(\delta)$ ,  $\theta(\delta)$ ,  $\varepsilon(\delta)$  таковы, что

$$\alpha(\delta) > 0, \quad \varepsilon(\delta) > 0, \quad \theta(\delta) > \delta, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} (\alpha(\delta) + \varepsilon(\delta) + \theta(\delta)) = 0, \quad (9)$$

$$\sup_{\delta > 0} \frac{\delta}{\alpha(\delta)} + |c|_1 \frac{(2\theta(\delta))^\nu}{\alpha(\delta)} < 1, \quad \sup_{\delta > 0} \frac{\varepsilon(\delta)}{\alpha(\delta)} < \infty. \quad (10)$$

Тогда точка  $u_\delta$ , определяемая методом (8), существует при всех  $\delta > 0$  и

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} J(u_\delta) = J_*, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} g_i^+(u_\delta) = 0, \quad i = 1, \dots, s, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \rho(u_\delta, U_*) = 0. \quad (11)$$

Пусть наряду с условиями 1–4 еще выполнено условие

- 5)  $U_\Omega = U_0$ , функция  $\Omega(u)$  полунепрерывна снизу на  $U_0$ ,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta + (\theta(\delta))^\nu}{\alpha(\delta)} = 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\varepsilon(\delta)}{\alpha(\delta)} = 0. \quad (12)$$

Тогда кроме (11)

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \Omega(u_\delta) = \Omega_*, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \rho(u_\delta, U_{**}) = 0, \quad (13)$$

где  $\Omega_* = \inf_{u \in U_*} \Omega(u)$ ,  $U_{**} = \{u \in U_* : \Omega(u) = \Omega_*\}$  — множество  $\Omega$ -нормальных решений задачи (1), (2). Пределы (11), (13) равномерны относительно выбора  $J_\delta(u)$ ,  $g_{i\delta}(u)$  из (3) и выбора точки  $u_\delta$  из (8).

**Доказательство.** Из (3), (7), (10) с учетом неравенства  $(1 + \Omega(u))^\nu \leq (1 + \Omega(u))$  имеем

$$\begin{aligned} t_\delta(u) &\geq J(u) + \alpha(\delta)\Omega(u) - \delta(1 + \Omega(u)) \geq \\ &\geq J_* - |c|_1(2\theta(\delta))^\nu(1 + \Omega(u)) + \alpha(\delta)\Omega(u) - \delta(1 + \Omega(u)) = \\ &= J_* + \Omega(u)(\alpha(\delta) - \delta - |c|_1(2\theta(\delta))^\nu) - \delta - |c|_1(2\theta(\delta))^\nu \geq \\ &\geq J_* - \delta - |c|_1(2\theta(\delta))^\nu > -\infty \quad \forall u \in W(\delta), \end{aligned}$$

так что  $t_{\delta*} = \inf_{W(\delta)} t_\delta(u) > -\infty$  и точка  $u_\delta$  из (8) существует при всех  $\delta > 0$

по определению нижней грани. Далее с помощью условий (3), (7), (8) можем написать следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} J(u_\delta) &\leq J(u_\delta) + \alpha(\delta)\Omega(u_\delta) \leq J_\delta(u_\delta) + \alpha(\delta)\Omega(u_\delta) + \delta(1 + \Omega(u_\delta)) = \\ &= t_\delta(u_\delta) + \delta(1 + \Omega(u_\delta)) \leq t_{\delta*} + \varepsilon(\delta) + \delta(1 + \Omega(u_\delta)) \leq \\ &\leq J(u_*) + \alpha(\delta)\Omega(u_*) + \delta(1 + \Omega(u_*)) + \varepsilon(\delta) + \delta(1 + \Omega(u_\delta)) \leq \\ &\leq J(u_\delta) + |c|_1(2\theta(\delta))^\nu(1 + \Omega(u_\delta)) + \alpha(\delta)\Omega(u_*) + \\ &+ \delta(1 + \Omega(u_*)) + \varepsilon(\delta) + \delta(1 + \Omega(u_\delta)) \quad \forall u_* \in U_{\Omega_*}, \quad U_{\Omega_*} \stackrel{\text{def}}{=} U_\Omega \cap U_*. \quad (14) \end{aligned}$$

Выделим второе и последнее звенья этой цепочки:

$$\alpha(\delta)\Omega(u_\delta) \leq |c|_1(2\theta(\delta))^\nu(1 + \Omega(u_\delta)) + \alpha(\delta)\Omega(u_*) + \\ + \delta(1 + \Omega(u_*)) + \varepsilon(\delta) + \delta(1 + \Omega(u_\delta)).$$

Пользуясь произволом в выборе точки  $u_* \in U_{\Omega_*}$ , в полученном неравенстве величину  $\Omega(u_*)$  можем заменить на  $\Omega_* = \inf_{U_{\Omega_*}} \Omega(u)$  и переписать его в виде

$$\Omega(u_\delta) \leq \Omega_* + \gamma(\delta), \quad \gamma(\delta) = \frac{\frac{2\delta + |c|_1(2\theta(\delta))^\nu}{\alpha(\delta)}(\Omega_* + 1) + \frac{\varepsilon(\delta)}{\alpha(\delta)}}{1 - \frac{|c|_1(2\theta(\delta))^\nu + \delta}{\alpha(\delta)}}, \quad \delta > 0. \quad (15)$$

Выделим первое и предпоследнее звенья цепочки неравенств (14). С учетом уже доказанной оценки (15) получим

$$J(u_\delta) \leq J_* + \beta(\delta), \\ \beta(\delta) = \alpha(\delta)\Omega_* + \delta(1 + \Omega_*) + \varepsilon(\delta) + \delta(1 + \Omega_* + \gamma(\delta)), \quad \delta > 0. \quad (16)$$

Кроме того, из (6), (15) имеем

$$g_i^+(u_\delta) \leq 2\theta(\delta)(1 + \Omega_* + \gamma(\delta)) = \rho(\delta), \quad i = 1, \dots, s, \quad \delta > 0. \quad (17)$$

Заметим также, что из (5), (16), (17) следует

$$-|c|_1(\rho(\delta))^\nu \leq J(u_\delta) - J_* \leq \beta(\delta), \quad \delta > 0. \quad (18)$$

Дальнейшее доказательство опирается на лемму 3.1 и проводится так же, как в теореме 4.1. Замечания 4.1–4.7 к теореме 4.1 с очевидными изменениями сохраняют силу и здесь.  $\square$

В выпуклых задачах (1), (2) в банаховых пространствах возможно использование слабых стабилизаторов. Справедлива

**Т е о р е м а 2.** Пусть

1)  $B$  — рефлексивное банахово пространство,  $U_0$  — выпуклое замкнутое множество из  $B$ , функции  $J(u)$ ,  $g_i(u)$ ,  $i = 1, \dots, t$ ,  $|g_i(u)|$ ,  $i = t + 1, \dots, s$ , выпуклы и полунепрерывны снизу на  $U_0$ ;  $J_* > -\infty$ ,  $U_* \neq \emptyset$ , выполнено условие (5) с  $0 < \nu \leq 1$ ;

2) функция  $\Omega(u)$  полунепрерывна снизу, строго равномерно выпукла на  $U_0$ ;

3) приближения  $J_\delta(u)$ ,  $g_{i\delta}(u)$ ,  $i = 1, \dots, s$ , удовлетворяют условиям (3);

4) параметры  $\alpha(\delta)$ ,  $\varepsilon(\delta)$ ,  $\theta(\delta)$  удовлетворяют условиям (9), (12).

Тогда семейство точек  $\{u_\delta, \delta > 0\}$ , определенное методом (8), таково, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} J(u_\delta) = J_*, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} g_i^+(u_\delta) = 0, \quad i = 1, \dots, s, \\ \lim_{\delta \rightarrow 0} \Omega(u_\delta) = \Omega_*, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \|u_\delta - v_*\| = 0, \quad (19)$$

где  $v_*$  — точка минимума функции  $\Omega(u)$  на множестве  $U_*$ . Пределы в (19) равномерны относительно выбора  $J_\delta(u)$ ,  $g_{i\delta}(u)$ ,  $i = 1, \dots, s$ , из (3) и выбора точки  $u_\delta$  из (8).

Доказательство опирается на уже доказанные оценки (15)–(18), на лемму 3.2 и проводится так же, как в теореме 4.2.  $\square$

**2. Метод невязки** с расширением множества заключается в определении точки  $u_\delta$  из условий

$$u_\delta \in V(\delta) = \{u \in W(\delta) : J_\delta(u) \leq \bar{J}_{\delta*} + \sigma(\delta)\}, \quad (20)$$

$$\Omega(u_\delta) \leq \Omega_{\delta*} + \mu(\delta), \quad \delta > 0, \quad (21)$$

где  $\bar{J}_{\delta*} = \inf_{W(\delta)} (J_\delta(u) + \delta\Omega(u) + |c|_1(2\theta(\delta))^\nu(1 + \Omega(u))^\nu)$ ,  $\Omega_{\delta*} = \inf_{V(\delta)} \Omega(u)$ ,  $\sigma(\delta) > 0$ ,  $\mu(\delta) > 0$ . Если величина  $\bar{J}_{\delta*}$  или ее оценка  $\bar{J}_{\delta*} + \sigma(\delta)$ , характеризующие множество  $V(\delta)$ , заранее неизвестны, то предварительно нужно решить задачу первого типа

$$\bar{J}_\delta(u) = J_\delta(u) + \delta\Omega(u) + |c|_1(2\theta(\delta))^\nu(1 + \Omega(u))^\nu \rightarrow \inf, \quad u \in W(\delta),$$

и лишь затем приступить к поиску точки  $u_\delta$  как приближенного решения задачи первого типа:  $\Omega(u) \rightarrow \inf, u \in V(\delta)$ .

**Теорема 3.** Пусть выполнены условия 1–3 теоремы 1 и параметры  $\sigma(\delta)$ ,  $\mu(\delta)$ ,  $\theta(\delta)$  таковы, что

$$\sigma(\delta) > 0, \quad \mu(\delta) > 0, \quad \theta(\delta) > \delta, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} (\sigma(\delta) + \theta(\delta)) = 0, \quad (22)$$

$$\sup_{\delta > 0} \mu(\delta) < \infty, \quad \delta(3 + \Omega_*) \leq \sigma(\delta), \quad \delta > 0, \quad (23)$$

где  $\Omega_* = \inf_{U_{\Omega_*}} \Omega(u)$ . Тогда множество  $V(\delta)$ , определенное согласно (20), непусто при всех  $\delta > 0$ , семейство  $\{u_\delta, \delta > 0\}$  из (21) таково, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} J(u_\delta) = J_*, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} g_i^+(u_\delta) = 0, \quad i = 1, \dots, s; \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \rho(u_\delta, U_*) = 0. \quad (24)$$

Если, кроме того,  $U_\Omega = U_0$ , функция  $\Omega(u)$  полунепрерывна снизу на  $U_0$ ,  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \mu(\delta) = 0$ , то наряду с (24) справедливы равенства

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \Omega(u_\delta) = \Omega_*, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \rho(u_\delta, U_{**}) = 0, \quad (25)$$

где  $U_{**} = \{u \in U_* : \Omega(u) = \Omega_* = \inf_{U_*} \Omega(u)\}$ . Пределы в (21), (25) равномерны относительно выбора  $J_\delta(u)$ ,  $g_{i\delta}(u)$  из (3) и выбора точки  $u_\delta$  из (20), (21).

**Доказательство.** Из (3), (7) имеем:  $\bar{J}_\delta(u) \geq J(u) - \delta(1 + \Omega(u)) + \delta\Omega(u) + |c|_1(2\theta(\delta))^\nu(1 + \Omega(u))^\nu \geq J_* - \delta \quad \forall u \in W(\delta)$ , т. е.  $\bar{J}_{\delta*} > -\infty$ . Далее, по определению  $\Omega_*$  для любого  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon \leq 1$ , найдется точка  $w_\varepsilon \in U_{\Omega_*} \subset W(\delta)$ ,  $\Omega(w_\varepsilon) \leq \Omega_* + \varepsilon$ . Тогда с учетом (3), (7) получаем  $J_\delta(w_\varepsilon) \leq J(w_\varepsilon) + \delta(1 + \Omega(w_\varepsilon)) \leq J(u) + |c|_1(2\theta(\delta))^\nu(1 + \Omega(u))^\nu + \delta(1 + \Omega_* + \varepsilon) \leq \bar{J}_\delta(u) + \delta(3 + \Omega_*) \quad \forall u \in W(\delta)$ . Отсюда и из (23) следует, что  $J_\delta(w_\varepsilon) \leq \bar{J}_{\delta*} + \sigma(\delta)$ . Это значит, что  $w_\varepsilon \in V(\delta)$ , т. е.  $V(\delta) \neq \emptyset \quad \forall \delta > 0$ . Тогда точка  $u_\delta$  из (20), (21) существует по определению нижней грани. Для любой точки  $u_\delta$  с учетом включения  $w_\varepsilon \in V(\delta)$  имеем:  $\Omega(u_\delta) \leq \Omega(w_\varepsilon) + \mu(\delta) \leq \Omega_* + \varepsilon + \mu(\delta) \quad \forall \varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon \leq 1$ . Отсюда при  $\varepsilon \rightarrow 0$  получим

$$\Omega(u_\delta) \leq \Omega_* + \gamma(\delta), \quad \gamma(\delta) = \mu(\delta), \quad \delta > 0. \quad (26)$$

Далее, из (3), (20), (21), (26),  $w_\varepsilon \in V(\delta)$  следует:

$$\begin{aligned} J(u_\delta) &\leq J_\delta(u_\delta) + \delta(1 + \Omega(u_\delta)) \leq \bar{J}_{\delta*} + \sigma(\delta) + \delta(1 + \Omega_* + \mu(\delta)) \leq \\ &\leq \bar{J}_\delta(w_\varepsilon) + \sigma(\delta) + \delta(1 + \Omega_* + \mu(\delta)) \leq \\ &\leq J(w_\varepsilon) + \delta\Omega(w_\varepsilon) + |c|_1(2\theta(\delta))^\nu(1 + \Omega(w_\varepsilon))^\nu + \\ &\quad + \delta(1 + \Omega(w_\varepsilon)) + \sigma(\delta) + \delta(1 + \Omega_* + \mu(\delta)) \leq \\ &\leq J_* + \delta(1 + 2\Omega_* + 2\varepsilon) + |c|_1(2\theta(\delta))^\nu(1 + \Omega_* + \varepsilon)^\nu + \sigma(\delta) + \delta(1 + \Omega_* + \mu(\delta)). \end{aligned}$$

При  $\varepsilon \rightarrow 0$  отсюда приходим к оценке

$$\begin{aligned} J(u_\delta) &\leq J_* + \beta(\delta), \\ \beta(\delta) &= \delta(2 + 3\Omega_* + \mu(\delta)) + |c|_1(2\theta(\delta))^\nu(1 + \Omega_*)^\nu + \sigma(\delta), \quad \delta > 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Оценки (17), (18), где величина  $\beta(\delta)$  взята из (27), остаются справедливыми и для метода невязки. Дальнейшее доказательство опирается на лемму 3.1 и проводится так же, как в теореме 4.1.  $\square$

**Теорема 4.** Пусть выполнены условия 1–3 теоремы 2, параметры  $\sigma(\delta)$ ,  $\mu(\delta)$ ,  $\theta(\delta)$  удовлетворяют условиям (22), (23),  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \mu(\delta) = 0$ . Тогда для семейства точек  $\{u_\delta, \delta > 0\}$ , определенных методом (20), (21), справедливы утверждения теоремы 2.

Доказательство опирается на уже доказанные оценки (26), (27), (17), на лемму 3.2 и проводится так же, как в теореме 4.1.  $\square$

**3.** Наконец, кратко остановимся на методе квазирешений с расширением множества. Этот вариант метода квазирешений также применяется при выполнении предположения (6.1), когда известно число  $r$  такое, что

$$U_{\Omega*} \cap Q_r \neq \emptyset, \quad Q_r = \{u \in U_\Omega : \Omega(u) \leq r\}. \quad (28)$$

Тогда  $U_{\Omega*} \cap Q_r \subseteq Q_{r\delta} = \{u \in W(\delta) : \Omega(u) \leq r\} \neq \emptyset \quad \forall \delta > 0$ . Суть метода: ищется точка  $u_\delta$  из условий:

$$u_\delta \in Q_{r\delta}, \quad J_\delta(u_\delta) \leq J_{\delta*} + \xi(\delta), \quad (29)$$

где  $J_{\delta*} = \inf_{Q_{r\delta}} J_\delta(u)$ ,  $\xi(\delta) > 0 \quad \forall \delta > 0$ .

**Теорема 5.** Пусть выполнены условия 1–3 теоремы 1 и параметры  $\xi(\delta)$ ,  $\theta(\delta)$  таковы, что

$$\xi(\delta) > 0, \quad \theta(\delta) > \delta, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} (\xi(\delta) + \theta(\delta)) = 0. \quad (30)$$

Тогда точка  $u_\delta$ , определяемая условиями (29), существует при всех  $\delta > 0$  и

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} J(u_\delta) = J_*; \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} g_i^+(u_\delta) = 0, \quad i = 1, \dots, s; \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \rho(u_\delta, U_*) = 0. \quad (31)$$

Пределы в (31) равномерны относительно выбора  $J_\delta(u)$ ,  $g_{i\delta}(u)$ ,  $i = 1, \dots, s$ , из (3) и выбора точек  $u_\delta$  из (29).



Доказательство. Из (3), (7) и неравенства  $\Omega(u) \leq r \quad \forall u \in Q_{r\delta}$  имеем

$$\begin{aligned} J_\delta(u) &\geq J(u) - \delta(1 + \Omega(u)) \geq J_* - |c|_1(2\theta(\delta))^\nu(1 + \Omega(u))^\nu - \delta(1 + r) \geq \\ &\geq J_* - |c|_1(2\theta(\delta))^\nu(1 + r)^\nu - \delta(1 + r) \quad \forall u \in Q_{r\delta}. \end{aligned}$$

Следовательно,  $J_{\delta*} > -\infty$  и точка  $u_\delta$  из (29) существует по определению нижней грани. Возьмем произвольные точки  $u_\delta$  из (29),  $u_* \in U_{\Omega*} \cap Q_r$ . Тогда

$$\Omega(u_\delta) \leq \Omega_* + \gamma(\delta), \quad \gamma(\delta) = r - \Omega_* \quad \forall \delta > 0. \quad (32)$$

Кроме того, с учетом (3), (29) получаем

$$\begin{aligned} J(u_\delta) &\leq J_\delta(u_\delta) + \delta(1 + \Omega(u_\delta)) \leq J_{\delta*} + \xi(\delta) + \delta(1 + r) \leq \\ &\leq J(u_*) + \delta(1 + \Omega(u_*)) + \xi(\delta) + \delta(1 + r) \leq J_* + \beta(\delta), \\ \beta(\delta) &= \xi(\delta) + 2\delta(1 + r) \quad \forall \delta > 0. \quad (33) \end{aligned}$$

Оценки (17), (18) с  $\gamma(\delta)$  из (32),  $\beta(\delta)$  из (33) справедливы и для метода (29). Дальнейшее доказательство опирается на лемму 3.1 и проводится так же, как в теореме 4.1.  $\square$

Требуемое в теоремах 1–5 условие  $\theta(\delta) > \delta$  формально можно заменить на  $\theta(\delta) \geq \delta$ , однако при  $\theta(\delta) = \delta$ , как было замечено в § 2, входящие в методы регуляризации вспомогательные задачи первого типа могут оказаться неустойчивыми.

Другие модификации методов регуляризации задач минимизации второго типа, основанных на сочетании идей расширения множества и методов покрытий, можно извлечь из работы [592], в которой рассмотрены более сложные по сравнению с (1), (2) многокритериальные задачи и устойчивые методы их решения.

4. Для иллюстрации вышеизложенного рассмотрим каноническую задачу линейного программирования:

$$\begin{aligned} J(u) &= \langle c, u \rangle \rightarrow \inf, \\ u \in U &= \{u \geq 0: Au = b\} = \{u \geq 0: g_i(u) = \langle a_i, u \rangle - b^i = 0, \quad i = 1, \dots, m\}, \end{aligned} \quad (34)$$

где  $A = \{a_{ij}\}$  — матрица размера  $m \times n$ ,  $a_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$  —  $i$ -я строка этой матрицы,  $b = (b^1, \dots, b^m)^\top$ ,  $c = (c^1, \dots, c^n)^\top$ . Предположим, что  $U \neq \emptyset$ ,  $J_* > -\infty$ ; тогда  $U_* \neq \emptyset$  (теорема 3.5.1). Пусть вместо точных  $a_{ij}$ ,  $b^i$ ,  $c^j$  известны их приближения  $a_{ij\delta}$ ,  $b_\delta^i$ ,  $c_\delta^j$  такие, что

$$|a_{ij\delta} - a_{ij}| \leq \delta, \quad |b_\delta^i - b^i| \leq \delta, \quad |c_\delta^j - c^j| \leq \delta, \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n. \quad (35)$$

Положим тогда

$$J_\delta(u) = \langle c_\delta, u \rangle, \quad g_{i\delta}(u) = \langle a_{i\delta}, u \rangle - b_\delta^i, \quad i = 1, \dots, m; \quad a_{i\delta} = (a_{i1\delta}, \dots, a_{in\delta}). \quad (36)$$

Поскольку  $u \geq 0$ , то стабилизатором в этой задаче можно взять функцию  $\Omega(u) = u^1 + \dots + u^n$ . Погрешности задания входных данных  $J(u)$ ,  $g_i(u)$

согласованы с этим стабилизатором:

$$\begin{aligned} |J_\delta(u) - J(u)| &\leq \delta|u| \leq \delta(1 + \Omega(u)), \\ |g_{i\delta}(u) - g_i(u)| &\leq \delta(1 + \Omega(u)), \quad \forall u \geq 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (37)$$

Ограничимся здесь рассмотрением лишь приближений вида (36), хотя условия (37), конечно, допускают и другие функции  $J_\delta(u)$ ,  $g_{i\delta}(u)$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Тогда расширенное множество  $W(\delta)$  может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} W(\delta) = \{u \geq 0: -\theta(\delta)(1 + u^1 + \dots + u^n) \leq \langle a_{i\delta}, u \rangle - b_{i\delta} \leq \\ \leq \theta(\delta)(1 + u^1 + \dots + u^n), \quad i = 1, \dots, m\}. \end{aligned} \quad (38)$$

Метод стабилизации сводится к задаче

$$t_\delta(u) = \langle c_\delta, u \rangle + \alpha(\delta)(u^1 + \dots + u^n) \rightarrow \inf, \quad u \in W(\delta), \quad (39)$$

которая, как нетрудно видеть, также является задачей линейного программирования. Задачу (39) можно решать приближенно в смысле неравенства (8). Пусть параметры  $\alpha(\delta)$ ,  $\theta(\delta)$ ,  $\varepsilon(\delta)$  удовлетворяют условиям (9) и

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta + \theta(\delta) + \varepsilon(\delta)}{\alpha(\delta)} = 0.$$

Функция Лагранжа задачи (34) имеет седловую точку (теорема 3.5.5), поэтому эта задача имеет сильно согласованную постановку, и неравенство (5) может быть записано в виде:  $J_* \leq \langle c, u \rangle + \sum_{i=1}^m |\lambda_i^*| |\langle a_i, u \rangle - b^i| \quad \forall u \geq 0$ . Таким образом, все условия теоремы 1 выполнены, и для точек  $u_\delta$  из (8), (39) справедливы все равенства (11), (13).

Нетрудно убедиться, что методы невязки и квазирешений для задачи (34) приводят к задачам (20), (21) и (29) соответственно, являющиеся также задачами линейного программирования. Более подробно методы регуляризации для общей задачи линейного программирования рассмотрены в [179], там же приведены оценки скорости сходимости методов, показано, что эти оценки неулучшаемы по порядку на классе задач линейного программирования и их порядок совпадает с порядком погрешности задания входных данных. Интересно отметить, что в задачах линейного программирования понятия устойчивости по функции и устойчивости по аргументу в предположениях (35), (36) равносильны [179], поэтому в линейном программировании нет большого смысла различать задачи первого и второго типов, строить для них отдельные методы регуляризации.

Замечания 6.1–6.4 с очевидными уточнениями остаются справедливыми и для методов регуляризации, рассмотренных в этом параграфе. Отметим также, что методы (8), (21), (29) могут применяться, например, в тех случаях, когда использование методов из § 4–6 затруднительно из-за возможной овражности вспомогательных задач, связанной с наличием в этих методах неограниченно возрастающего штрафного коэффициента.

Перейдем к изложению других методов регуляризации, которые представляют собой сочетание метода стабилизации из § 4 и уже известных нам методов минимизации из гл. 5, § 8.4.

### Упражнения

У п р а ж н е н и е 1. Применить методы невязки и квазирешений к канонической задаче линейного программирования (34).

У п р а ж н е н и е 2. Применить методы (8), (21), (29) к задачам из примеров 1.6–1.9.

## § 8. Регуляризованный метод проекции градиента

Методы решения неустойчивых задач второго типа можно также строить на основе обычных методов минимизации, подвергнув их некоторой процедуре регуляризации. Для построения регуляризованных методов часто поступают следующим образом: в общей схеме конкретного метода минимизации вместо целевой функции используют функцию Тихонова. Так, например, если в итерационный процесс градиентного метода  $u_{k+1} = u_k - \beta_k J'(u_k)$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , вместо  $J'(u_k)$  формально подставить градиент функции Тихонова  $T_\delta(u) = J(u) + \alpha(\delta)\|u\|^2$  в точке  $u_k$ , то придем к регуляризованному градиентному методу

$$u_{k+1} = u_k - \beta_k(J'(u_k) + 2\alpha_k u_k), \quad \alpha_k = \alpha(\delta_k), \quad k = 0, 1, \dots,$$

в котором надо согласованно выбрать параметры  $\alpha_k$ ,  $\beta_k$ . Именно по этой схеме мы дальше будем проводить регуляризацию метода проекции градиента, условного градиента и некоторых других методов минимизации из гл. 5. Для исследования возникающих здесь трудных проблем согласования параметров исходного метода минимизации с параметрами, входящими в функцию Тихонова, для доказательства сходимости получившегося метода мы будем пользоваться принципом итеративной регуляризации из [62; 63].

1. Начнем с метода проекции градиента для задачи

$$J(u) \rightarrow \inf, \quad u \in U, \quad (1)$$

$$U = \{u \in U_0: g_i(u) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m; \quad g_i(u) = 0, \quad i = m+1, \dots, s\}, \quad (2)$$

где  $U_0$  — заданное выпуклое замкнутое множество из гильбертова пространства  $H$  (возможно,  $U_0 = H$ ), считая, что функции  $J(u)$ ,  $g_i(u)$  дифференцируемы по Фреше на  $U_0$  (определение 8.3.3). Ограничения типа равенств и неравенств из (2) будем учитывать с помощью штрафной функции (5.16.8):

$$P(u) = \sum_{i=1}^s (g_i^+(u))^p, \quad u \in U_0, \quad p > 1. \quad (3)$$

Тогда точная функция Тихонова

$$T_k(u) = J(u) + A_k P(u) + \alpha_k \|u\|^2, \quad u \in U_0, \quad A_k > 0, \quad \alpha_k > 0, \quad k = 0, 1, \dots \quad (4)$$

при каждом  $k$  дифференцируема по Фреше на  $U_0$ , причем ее градиент равен

$$T'_k(u) = J'(u) + A_k P'(u) + 2\alpha_k u, \quad u \in U_0, \quad k = 0, 1, \dots \quad (5)$$

Пусть вместо точных значений градиентов  $J'(u), P'(u)$  известны их приближения  $J'_k(u), P'_k(u)$ . Тогда в качестве приближения для точного значения градиента (5) можем взять

$$t'_k(u) = J'_k(u) + A_k P'_k(u) + 2\alpha_k u, \quad u \in U_0, \quad k = 0, 1, \dots \quad (6)$$

Рассмотрим итерационный метод

$$u_{k+1} = \mathcal{P}_{U_0}(u_k - \beta_k t'_k(u_k)), \quad \beta_k > 0, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (7)$$

где  $\mathcal{P}_{U_0}(z)$  — проекция точки  $z \in H$  на множество  $U_0$ . Метод (7) будем называть регуляризованным методом проекции градиента. Приведем условия на задачу (1), (2), условия согласования параметров  $\alpha_k, A_k, \beta_k$  с погрешностью задания производных  $J'(u), P'(u)$ , обеспечивающие сходимость последовательности  $\{u_k\}$ , порожденной методом (7), к нормальному решению задачи (1), (2) в метрике  $H$ .

**Теорема 1.** Пусть

1)  $U_0$  — выпуклое замкнутое множество из гильбертова пространства  $H$ , функции  $J(u), g_i(u), i = 1, \dots, s$ , дифференцируемы по Фреше на  $U_0$ , функции  $J(u), g_i(u), i = 1, \dots, m, |g_i(u)|, i = m + 1, \dots, s$ , выпуклы на  $U_0$ ;  $J_* > -\infty, U_* \neq \infty$  и справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \|J'(u) - J'(v)\|^2 &\leq L \langle J'(u) - J'(v), u - v \rangle \quad \forall u, v \in U_0, \\ \|P'(u) - P'(v)\|^2 &\leq L \langle P'(u) - P'(v), u - v \rangle \quad \forall u, v \in U_0, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $L = \text{const} > 0$ ; задача (1), (2) имеет сильно согласованную постановку, т. е. выполняется неравенство

$$J_* \leq J(u) + \sum_{i=1}^s c_i (g_i^+(u))^\nu \quad \forall u \in U_0.$$

при некоторых  $c_i \geq 0, \nu > 0$ ; параметр  $p$  штрафной функции (3) таков, что  $p > 1, p \geq \nu$ ;

2) при каждом фиксированном  $u \in U_0$  и каждом  $k \geq 0$  вместо точных  $J'(u), P'(u)$  имеются их приближения  $J'_k(u), P'_k(u)$  с погрешностями:

$$\begin{aligned} \|J'_k(u) - J'(u)\| &\leq \delta_k(1 + \|u\|), \quad \|P'_k(u) - P'(u)\| \leq \delta_k(1 + \|u\|) \\ \forall u \in U_0, \quad \delta_k &> 0, \quad k = 0, 1, \dots; \end{aligned} \quad (9)$$

3) числовые последовательности  $\{\alpha_k\}, \{A_k\}, \{\beta_k\}, \{\delta_k\}$  удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \alpha_k \geq \alpha_{k+1} > 0, \quad A_{k+1} \geq A_k > 0, \quad \delta_k > 0, \quad 0 < \beta_k \leq \frac{2}{4\alpha_k + L + LA_k}, \\ k = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\alpha_k + \delta_k) = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} A_k = +\infty, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k A_k^{\frac{\nu}{p-\nu}} = +\infty \quad (11)$$

(при  $p = \nu > 1$  последнее условие не нужно),

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\alpha_k - \alpha_{k+1}}{\alpha_k^2 \beta_k} = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{A_{k+1} - A_k}{\alpha_k^2 \beta_k} = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\delta_k + \delta_k A_k}{\alpha_k} = 0. \quad (12)$$

Тогда при любом начальном приближении  $u_0 \in U_0$  последовательность  $\{u_k\}$ , определяемая методом (7), такова, что

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} J(u_k) = J(u_*) = J_*, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} g_i^+(u_k) = 0, \quad i = 1, \dots, s, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - u_*\| = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $u_*$  — нормальное решение задачи (1), (2). Сходимость в (13) равномерная относительно выбора реализаций  $J'_k(u)$ ,  $P'_k(u)$  из условия (9).

**З а м е ч а н и е 1.** Из условия (8) следует, что  $J(u)$ ,  $P(u)$  — выпуклые функции и их градиенты удовлетворяют условию Липшица:

$$\|J'(u) - J'(v)\| \leq L\|u - v\|, \quad \|P'(u) - P'(v)\| \leq L\|u - v\|, \quad \forall u, v \in U \quad (14)$$

(теорема 4.2.16, достаточность). Заметим, что теорема 4.2.16 остается верной и в гильбертовом пространстве, если  $\text{int } U_0 \neq \emptyset$ ,  $J(u) \in C^2(U_0)$ .

**З а м е ч а н и е 2.** В качестве последовательностей  $\{\alpha_k\}$ ,  $\{A_k\}$ ,  $\{\beta_k\}$ ,  $\{\delta_k\}$ , удовлетворяющих условиям (10)–(12), можно, например, взять

$$\begin{aligned} \alpha_k = a(k+1)^{-\alpha}, \quad A_k = (k+1)^A, \quad \delta_k = b(k+1)^{-\gamma}, \\ \beta_k = \frac{2}{L + 4a + L(k+1)^A}, \quad k = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (15)$$

где постоянные  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $\alpha > 0$ ,  $A > 0$ ,  $\gamma > 0$ ,  $\alpha + A < \min\left\{\frac{1}{2}; \gamma\right\}$ ,  $\alpha < A \frac{\nu}{p-\nu}$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1.** При сделанных предположениях множества  $U$ ,  $U_*$  выпуклы, замкнуты, и сильно выпуклая  $\Omega(u) = \|u\|^2$  достигает нижней грани на  $U_*$  в единственной точке  $u_*$  (теорема 8.2.10), т. е. нормальное решение  $u_*$  задачи (1), (2) существует и единственно. Кроме того, функция  $T_k(u)$ , определенная формулой (4), сильно выпукла на выпуклом замкнутом множестве  $U_0$ , поэтому условия

$$v_k \in U_0, \quad T_k(v_k) = \inf_{u \in U_0} T_k(u) \quad (16)$$

однозначно определяют точку  $v_k$ . Покажем, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J(v_k) = J_*, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} g_i^+(v_k) = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|v_k - u_*\| = 0. \quad (17)$$

Воспользуемся теоремой 4.3. Положим

$$\alpha(\delta) = \alpha_k, \quad A(\delta) = A_k, \quad u_\delta = v_k \quad \forall \delta, \quad \delta_k \leq \delta < \delta_{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Из (10), (11) следует, что так определенные функции  $\alpha(\delta)$ ,  $A(\delta)$  удовлетворяют условиям (4.51), а для такой точки  $u_\delta$  в силу (4), (16) выполнены условия (4.53). Отсюда и из теоремы 4.3 вытекают равенства (17); из (4.56) следует оценка

$$\|v_k\| \leq R = \begin{cases} \left( \|u_*\|^2 + \frac{B}{\alpha_k A_k^{\nu/(p-\nu)}} \right)^{1/2} & \text{при } p > \nu, \\ \|u_*\| & \text{при } p = \nu > 1. \end{cases} \quad (18)$$

Поскольку

$$\|u_k - u_*\| \leq \|u_k - v_k\| + \|v_k - u_*\|, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (19)$$

то из (17), (19) следует, что для доказательства равенства  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - u_*\| = 0$  достаточно установить, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - v_k\| = 0$ . Обозначим  $w_k = \|u_k - v_k\|^2$ .

Справедливо элементарное неравенство

$$(a + b)^2 \leq (1 + \alpha_k \beta_k) a^2 + (1 + \alpha_k \beta_k) \frac{1}{\alpha_k \beta_k} b^2 \quad \forall a, b, \quad \alpha_k > 0, \quad \beta_k > 0. \quad (20)$$

Из (20) имеем

$$\begin{aligned} w_{k+1} = \|u_{k+1} - v_{k+1}\|^2 &\leq (\|u_{k+1} - v_k\| + \|v_k - v_{k+1}\|)^2 \leq \\ &\leq (1 + \alpha_k \beta_k) \|u_{k+1} - v_k\|^2 + (1 + \alpha_k \beta_k) \frac{1}{\alpha_k \beta_k} \|v_k - v_{k+1}\|^2, \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (21)$$

Сначала оценим слагаемое  $\|v_k - v_{k+1}\|^2$ . Из (16) следует

$$\langle T'_k(v_k), u - v_k \rangle \geq 0 \quad \forall u \in U_0, \quad k = 0, 1, \dots \quad (22)$$

(теорема 8.3.3). Взяв в (22)  $u = v_{k+1}$ , получим

$$\langle T'_k(v_k), v_{k+1} - v_k \rangle \geq 0, \quad k = 0, 1, \dots$$

Аналогично имеем

$$\langle T'_{k+1}(v_{k+1}), v_k - v_{k+1} \rangle \geq 0, \quad k = 0, 1, \dots$$

Из сильной выпуклости функции (4) с постоянной сильной выпуклости  $\varkappa = \mu = 2\alpha_k$  и теоремы 4.3.3 следует, что

$$2\alpha_k \|v_k - v_{k+1}\|^2 \leq \langle T'_k(v_{k+1}) - T'_k(v_k), v_{k+1} - v_k \rangle, \quad k = 0, 1, \dots$$

Сложим последние три неравенства:

$$2\alpha_k \|v_k - v_{k+1}\|^2 \leq \langle T'_k(v_{k+1}) - T'_{k+1}(v_{k+1}), v_{k+1} - v_k \rangle, \quad k = 0, 1, \dots \quad (23)$$

Из (5) и (23) получаем

$$\begin{aligned} 2\alpha_k \|v_k - v_{k+1}\|^2 &\leq (A_k - A_{k+1}) \langle P'(v_{k+1}), v_{k+1} - v_k \rangle + \\ &+ 2(\alpha_k - \alpha_{k+1}) \langle v_{k+1}, v_{k+1} - v_k \rangle, \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (24)$$

Зафиксируем произвольную точку  $\bar{u} \in U_0$ . Тогда из (14), (18) имеем

$$\|P'(v_{k+1})\| \leq L\|v_{k+1} - \bar{u}\| + \|P'(\bar{u})\| \leq L(R + \|\bar{u}\|) + \|P'(\bar{u})\|.$$

Отсюда и из (18), (24) вытекает оценка

$$\|v_{k+1} - v_k\| \leq \frac{(\alpha_k - \alpha_{k+1})}{\alpha_k} R + \frac{A_{k+1} - A_k}{2\alpha_k} [L(R + \|\bar{u}\|) + \|P'(\bar{u})\|], \quad (25)$$

$$k = 0, 1, \dots$$

Перейдем к оценке величины  $\|u_{k+1} - v_k\|$  из первого слагаемого правой части (21). Примем в (22)  $u = u_{k+1}$ , получим

$$\langle T'_k(v_k), u_{k+1} - v_k \rangle \geq 0, \quad k = 0, 1, \dots \quad (26)$$

Далее, из (7) следует (теорема 4.4.1)

$$\langle u_{k+1} - u_k + \beta_k t'_k(u_k), u - u_{k+1} \rangle \geq 0 \quad \forall u \in U_0, \quad k = 0, 1, \dots$$

Отсюда при  $u = v_k$  имеем

$$\langle u_{k+1} - u_k + \beta_k t'_k(u_k), v_k - u_{k+1} \rangle \geq 0, \quad k = 0, 1, \dots$$

Сложим это неравенство с неравенством (26), умноженным на  $\beta_k > 0$ , получим

$$\langle u_{k+1} - u_k, v_k - u_{k+1} \rangle + \beta_k \langle t'_k(u_k) - T'_k(v_k), v_k - u_{k+1} \rangle \geq 0, \quad k = 0, 1, \dots \quad (27)$$

С учетом формул (5), (6) для  $T'_k(u)$ ,  $t'_k(u)$  перепишем (27) в виде

$$0 \leq \langle u_{k+1} - u_k, v_k - u_{k+1} \rangle + 2\alpha_k \beta_k \langle u_k - v_k, v_k - u_{k+1} \rangle +$$

$$+ \beta_k \langle J'_k(u_k) - J'(v_k), v_k - u_{k+1} \rangle +$$

$$+ \beta_k A_k \langle P'_k(u_k) - P'(v_k), v_k - u_{k+1} \rangle, \quad k = 0, 1, \dots \quad (28)$$

Оценим каждое слагаемое из правой части (28). Для первого и второго слагаемых имеем

$$\langle u_{k+1} - u_k, v_k - u_{k+1} \rangle = \frac{1}{2} \|u_k - v_k\|^2 - \frac{1}{2} \|u_{k+1} - u_k\|^2 - \frac{1}{2} \|v_k - u_{k+1}\|^2, \quad (29)$$

$$k = 0, 1, \dots$$

$$\langle u_k - v_k, v_k - u_{k+1} \rangle = \frac{1}{2} \|u_{k+1} - u_k\|^2 - \frac{1}{2} \|u_k - v_k\|^2 - \frac{1}{2} \|v_k - u_{k+1}\|^2, \quad (30)$$

$$k = 0, 1, \dots$$

Для оценки третьего и четвертого слагаемых воспользуемся неравенствами:

$$\langle J'(u) - J'(v), v - w \rangle \leq \frac{1}{4} L \|u - w\|^2, \quad (31)$$

$$\langle P'(u) - P'(v), v - w \rangle \leq \frac{1}{4} L \|u - w\|^2 \quad \forall u, v, w \in U_0,$$

вытекающими из условий (8) (теорема 4.2.16). Из первого неравенства (31) при  $u = u_k$ ,  $v = v_k$ ,  $w = u_{k+1}$  и условий (9), (14) следует

$$\begin{aligned} \langle J'_k(u_k) - J'(v_k), v_k - u_{k+1} \rangle &= \\ &= \langle (J'_k(u_k) - J'(u_k)) + (J'(u_k) - J'(v_k)), v_k - u_{k+1} \rangle \leq \\ &\leq \delta_k(1 + \|u_k\|)\|v_k - u_{k+1}\| + \frac{1}{4}L\|u_k - u_{k+1}\|^2. \end{aligned} \quad (32)$$

С помощью элементарных неравенств  $|ab| \leq a^2 + \frac{1}{4}b^2$ ,  $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$  и оценки (18) из (32) имеем

$$\begin{aligned} \langle J'_k(u_k) - J'(v_k), v_k - u_{k+1} \rangle &\leq \frac{1}{4}L\|u_k - u_{k+1}\|^2 + \delta_k\|u_{k+1} - v_k\|^2 + \\ &+ \frac{1}{2}\delta_k\|u_k - v_k\|^2 + \frac{1}{2}\delta_k(1 + R)^2, \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (33)$$

Рассуждая так же, с учетом второго неравенства (31) получаем оценку

$$\begin{aligned} \langle P'_k(u_k) - P'(v_k), v_k - u_{k+1} \rangle &\leq \frac{1}{4}L\|u_k - u_{k+1}\|^2 + \delta_k\|u_{k+1} - v_k\|^2 + \\ &+ \frac{1}{2}\delta_k\|u_k - v_k\|^2 + \frac{1}{2}\delta_k(1 + R)^2, \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (34)$$

Подставим оценки (29), (30), (33), (34) в (28). После простых преобразований будем иметь

$$\begin{aligned} \|u_{k+1} - v_k\|^2(1 + 2\alpha_k\beta_k - 2\beta_k\delta_k - 2\beta_k\delta_k A_k) &\leq \\ &\leq \|u_k - v_k\|^2(1 - 2\alpha_k\beta_k + \beta_k\delta_k + \beta_k\delta_k A_k) + \\ &+ \|u_{k+1} - u_k\|^2\left(-1 + 2\alpha_k\beta_k + \frac{1}{2}L\beta_k + \frac{1}{2}L\beta_k A_k\right) + \\ &+ (\beta_k\delta_k + \beta_k\delta_k A_k)(1 + R)^2, \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (35)$$

В силу условий (10)–(12) справедливы неравенства:

$$\begin{aligned} -1 + 2\alpha_k\beta_k + \frac{1}{2}L\beta_k + \frac{1}{2}L\beta_k A_k &= -1 + \frac{\beta_k}{2}(4\alpha_k + L + LA_k) \leq 0, \quad k = 0, 1, \dots, \\ 1 + 2\alpha_k\beta_k - 2\beta_k\delta_k - 2\beta_k\delta_k A_k &= 1 + 2\alpha_k\beta_k\left(1 - \frac{\delta_k + \delta_k A_k}{\alpha_k}\right) \geq 1 \quad \forall k \geq k_0, \end{aligned} \quad (36)$$

где  $k_0$  — достаточно большой номер. Поэтому из (35) следует

$$\begin{aligned} \|u_{k+1} - v_k\|^2 &\leq \|u_k - v_k\|^2(1 - 2\alpha_k\beta_k + \beta_k\delta_k + \beta_k\delta_k A_k) + \\ &+ \beta_k(\delta_k + \delta_k A_k)(1 + R)^2 \quad \forall k \geq k_0. \end{aligned} \quad (37)$$

Подставим оценки (25), (37) в (21). Получим

$$w_{k+1} \leq (1 - s_k)w_k + d_k, \quad \forall k \geq k_0, \quad (38)$$

где

$$s_k = \alpha_k\beta_k \left[ 1 + 2\alpha_k\beta_k - (1 + \alpha_k\beta_k) \frac{\delta_k + \delta_k A_k}{\alpha_k} \right], \quad (39)$$



$$d_k = \alpha_k \beta_k (1 + \alpha_k \beta_k) \left( \frac{\delta_k + \delta_k A_k}{\alpha_k} (1 + R)^2 + \right. \\ \left. + \left[ \frac{|\alpha_k - \alpha_{k+1}|}{\alpha_k^2 \beta_k} R + \frac{A_{k+1} - A_k}{2\alpha_k^2 \beta_k} L(R + \|\bar{u}\| + \|P'(\bar{u})\|) \right]^2 \right). \quad (40)$$

С учетом условий (10)–(12), взяв при необходимости номер  $k_0$  из (36) еще большим, можем считать, что

$$0 < s_k \leq 1 \quad \forall k \geq k_0. \quad (41)$$

Кроме того,

$$0 \leq A_{k+1} - A_k = \frac{A_{k+1} - A_k}{\alpha_k^2 \beta_k} \alpha_k^2 \beta_k \leq \alpha_k \beta_k \quad \forall k \geq k_0.$$

Суммируя эти неравенства по  $k$  от  $k_0$  до  $N$ , получим, что

$$\sum_{k=k_0}^N \alpha_k \beta_k \geq A_{N+1} - A_{k_0} \rightarrow +\infty \quad \text{при} \quad N \rightarrow \infty,$$

т. е.  $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \beta_k = +\infty$ . Как следует из (39), тогда  $\sum_{k=0}^{\infty} s_k = +\infty$ . Наконец, из условий (10)–(12) и выражений (39), (40) для  $s_k, d_k$  вытекает, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d_k}{s_k} = 0$ . Отсюда и из (38), (41) с помощью леммы 2.6.6 имеем  $w_k = \|u_k - v_k\| \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Тогда, как следует из (17), (19),  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - u_*\| = 0$ . Отсюда и из непрерывности функций  $J(u), g_i^+(u)$  вытекают и остальные равенства (13). Так как величины  $s_k, d_k$  из (38)–(40) не зависят от выбора реализаций  $J'_k(u), P'_k(u)$  из (9), то предел  $\lim_{k \rightarrow \infty} w_k = 0$ , а также все пределы из (13) равномерны относительно этих реализаций. Теорема 1 доказана.  $\square$

**2.** В практических задачах исходные данные, как правило, задаются с какой-то фиксированной погрешностью. В частности, в рассматриваемой задаче (1), (2) вместо условия (9), где  $\{\delta_k\} \rightarrow 0$ , практически более реальным представляется следующее условие: при каждом фиксированном  $u \in U_0$  вместо точного значения градиентов  $J'(u), P'(u)$  известны их приближения  $J'_\delta(u), P'_\delta(u)$  такие, что

$$\|J'_\delta(u) - J'(u)\| \leq \delta(1 + \|u\|), \quad \|P'_\delta(u) - P'(u)\| \leq \delta(1 + \|u\|), \quad u \in U_0, \quad (42)$$

где  $\delta > 0$  — заданное число. Тогда в методе (7) приближения  $J'_k(u), P'_k(u)$  естественно заменить на  $J'_\delta(u), P'_\delta(u)$  и вместо  $t'_k(u)$  из (6) использовать

$$t'_k(u) = J'_\delta(u) + A_k P'_\delta(u) + 2\alpha_k u, \quad k = 0, 1, \dots \quad (43)$$

Однако при фиксированном уровне погрешности  $\delta > 0$  условия (10)–(12) согласованного изменения параметров  $\{\alpha_k\}, \{A_k\}, \{\beta_k\}$  и  $\{\delta_k = \delta\}$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , заведомо будут нарушены, и поэтому процесс (7), (43) может расходиться.

Возникает интересный вопрос: до какого разумного номера  $k = k(\delta)$  следует продолжать итерационный процесс (7), (43), чтобы получившуюся точку  $u_{k(\delta)} = u(\delta)$  можно было принять в качестве приближения  $u_*$ , соответствующего погрешности  $\delta > 0$ ? Оказывается, опираясь на теорему 1, можно дать ответ на этот важный для практики вопрос.

А именно, зафиксируем какую-либо начальную точку  $u_0 \in U_0$  и последовательности  $\{\alpha_k\}$ ,  $\{A_k\}$ ,  $\{\beta_k\}$ ,  $\{\delta_k\}$ , удовлетворяющие условиям (10)–(12); можем считать, что  $\delta_0 \geq \delta$  (например, можно взять последовательности (15) при  $\delta_0 = b \geq \delta$ ). Подчеркнем, что поскольку выполнение условия (9) теперь не предполагается (вместо (9) у нас имеется лишь условие (42) с фиксированным  $\delta > 0$ ), то последовательность  $\{\delta_k\}$  будем считать параметром метода (7), (43) (наряду с другими параметрами  $\alpha_k, A_k, \beta_k$ ), напрямую не связывая  $\{\delta_k\}$  с каким-либо условием вида (9). Можно предложить следующее простое *правило останова* процесса (7), (43): при каждом  $\delta$ ,  $0 < \delta \leq \delta_0$ , итерации нужно продолжать до такого наибольшего номера  $k = k(\delta)$ , при котором выполняются неравенства

$$\delta_k \geq \delta, \quad k = 0, 1, \dots, k(\delta). \quad (44)$$

Поскольку  $\{\delta_k\} \rightarrow 0$ ,  $\delta_0 \geq \delta$ , то при любом  $\delta > 0$  такой номер  $k(\delta)$  непременно существует. Обоснование сформулированного правила останова (44) процесса (7), (43) дается в следующей теореме.

**Теорема 2.** Пусть выполнены все условия теоремы 1, кроме условия (9), и приближения  $J'_\delta(u), P'_\delta(u)$  для  $J'(u), P'(u)$  удовлетворяют условию (42). Пусть точки  $u_1, u_2, \dots, u_{k(\delta)}$  получены методом (7), (43), где номер  $k(\delta)$  определен в соответствии с правилом останова (44). Тогда точка  $u(\delta) = u_{k(\delta)}$  такова, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} J(u(\delta)) = J_*, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} g_i^+(u(\delta)) = 0, \quad i = 1, \dots, s, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \|u(\delta) - u_*\| = 0, \quad (45)$$

причем сходимость в (45) равномерная относительно выбора  $J'_\delta(u), P'_\delta(u)$  из (42).

**Доказательство.** Из (42), (44) следует, что

$$\|J'_\delta(u) - J'(u)\| \leq \delta_k(1 + \|u\|), \quad \|P'_\delta(u) - P'(u)\| \leq \delta_k(1 + \|u\|) \quad (46) \\ \forall u \in U_0, \quad k = 0, 1, \dots, k(\delta),$$

так что функции  $J'_k(u) \equiv J'_\delta(u)$ ,  $P'_k(u) \equiv P'_\delta(u)$  удовлетворяют условию (9) при всех  $k = 0, 1, \dots, k(\delta)$ . Далее, согласно правилу останова номер  $k(\delta)$  является наибольшим номером, для которого выполнено условие (44). Отсюда и из  $\{\delta_k\} \rightarrow 0$  следует, что  $k(\delta) \rightarrow +\infty$  при  $\delta \rightarrow 0$ . Это значит, что при всех малых  $\delta > 0$  номер  $k(\delta)$  в (46) можно сделать как угодно большим.

Согласно теореме 1 при выполнении всех ее условий, включая условие (9), последовательность  $\{u_k\}$ , получаемая методом (6), (7), сходится в норме  $H$  к нормальному решению  $u_*$ , т. е. для любого числа  $\varepsilon > 0$  найдется номер  $N = N(\varepsilon)$  такой, что

$$\|u_k - u_*\| \leq \varepsilon \quad \forall k \geq N(\varepsilon), \quad (47)$$

причем номер  $N(\varepsilon)$  не зависит от выбора реализаций  $J'_k(u)$ ,  $P'_k(u)$  из (9). Так как  $\lim_{\delta \rightarrow 0} k(\delta) = +\infty$ , то существует число  $\delta(\varepsilon) > 0$  такое, что  $k(\delta) > N(\varepsilon)$  при всех  $\delta$ ,  $0 < \delta < \delta(\varepsilon)$ . Это значит, что для всех  $\delta$ ,  $0 < \delta < \delta(\varepsilon)$ , метод (7), (43), (44) порождает точки  $z_1, \dots, z_{k(\delta)}$ , которые могут быть получены также и методом (6), (7) с реализациями  $J'_k(u) = J'_\delta(u)$ ,  $P'_k(u) = P'_\delta(u)$ ,  $k = 0, 1, \dots, k(\delta)$ , удовлетворяющими в силу (46) условию (9). Поскольку  $k(\delta) > N(\varepsilon)$ , то можем воспользоваться неравенством (47) при  $k = k(\delta)$  и утверждать, что  $\|u_{k(\delta)} - u_*\| < \varepsilon$  при всех  $\delta$ ,  $0 < \delta < \delta(\varepsilon)$ . В силу произвольности  $\varepsilon > 0$  отсюда приходим к равенству  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \|u_{k(\delta)} - u_*\| = 0$ . Приняв  $u(\delta) = u_{k(\delta)}$ , с учетом непрерывности функций  $J(u)$ ,  $P(u)$  получаем равенства (45). Теорема 2 доказана.  $\square$

Равенства (45) оправдывают сформулированное выше правило останова (44) процесса (7), (43) при фиксированном уровне погрешностей  $\delta > 0$  в (42). Тем самым построен оператор  $R_\delta$ , который каждому набору входных данных  $(J'_\delta(u), P'_\delta(u), \delta)$  из (42) ставит в соответствие точку  $u_{k(\delta)} = u(\delta)$ , определяемую методом (7), (43), (44). Равенства (45) означают, что такой оператор  $R_\delta$  является регуляризирующим (определение 6.1). Подчеркнем, что в этом определении оператора  $R_\delta$  параметры  $\alpha_k, A_k, \beta_k, \delta_k$  из (10)–(12) и начальная точка  $u_0$  предполагаются фиксированными и не меняются от изменения  $\delta$ ,  $0 < \delta < \delta_0$ .

**З а м е ч а н и е 3.** В методе (7) операцию проектирования можно выполнять с погрешностью, определяя точку  $u_{k+1}$  из условий

$$u_{k+1} \in U_0, \quad \varphi_k(u_{k+1}) \leq \inf_{U_0} \varphi_k(u) + \varepsilon_k^2, \quad \varepsilon_k > 0, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (48)$$

где  $\varphi_k(u) = \|u - (u_k - \beta_k t'_k(u_k))\|^2$ . Тогда получим

$$\|u_{k+1} - \mathcal{P}_{U_0}(u_k - \beta_k t'_k(u_k))\|^2 \leq \varphi_k(u_{k+1}) - \varphi_k(\mathcal{P}_{U_0}(u_k - \beta_k t'_k(u_k))) \leq \varepsilon_k^2$$

(ср. с (5.2.8)). Для последовательности  $\{u_k\}$ , определяемой из (48), справедливы все утверждения теорем 1, 2, нужно лишь к (10)–(12) добавить условия:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_k}{\alpha_k \beta_k} = 0.$$

**3.** Кратко остановимся на задаче

$$J(u) \rightarrow \inf, \quad u \in U, \quad (49)$$

где  $U$  — выпуклое замкнутое множество из  $H$ , известное точно (например,  $U = H$ ). Регуляризованный метод проекции градиента (7) здесь имеет вид:

$$u_{k+1} = \mathcal{P}_U(u_k - \beta_k t'_k(u_k)), \quad t'_k(u) = J'_k(u) + 2\alpha_k u, \quad k = 0, 1, \dots \quad (50)$$

**Т е о р е м а 3.** Пусть

1)  $U$  — выпуклое замкнутое множество из  $H$ , функция  $J(u)$  выпукла и дифференцируема по Фреше на  $U$ ;  $J_* > -\infty$ ,  $U_* \neq \emptyset$  и справедливо первое из неравенств (8) при  $U_0 = U$ ;

2) вместо точного градиента  $J'(u)$  известно его приближение  $J'_k(u)$ , удовлетворяющее первому из неравенств (9);

3) числовые последовательности  $\{\alpha_k\}$ ,  $\{\beta_k\}$ ,  $\{\delta_k\}$  таковы, что

$$\alpha_k \geq \alpha_{k+1} > 0, \quad \delta_k > 0, \quad 0 < \beta_k \leq \frac{2}{L + 4\alpha_k}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} (\alpha_k + \delta_k) = 0,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \beta_k = +\infty, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\alpha_k - \alpha_{k+1}|}{\alpha_k^2 \beta_k} = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\delta_k}{\alpha_k} = 0.$$

Тогда при любом начальном приближении  $u_0 \in U$  последовательность  $\{u_k\}$ , определяемая методом (50), такова, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J(u_k) = J_*, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - u_*\| = 0, \quad (51)$$

где  $u_*$  — нормальное решение задачи (49). Сходимость в (51) равномерна относительно выбора реализаций  $J'_k(u)$  из (9).

Доказательство проводится по той же схеме, как и в теореме 1, надо лишь учесть, что здесь  $m = s = 0$ ,  $U_0 = U$ ,  $P(u) \equiv 0$ ,  $A_k = 0$ ,  $R = \|u_*\|$ . Из (23) вместо (25) здесь получаем:  $\|v_{k+1} - v_k\| \leq \frac{|\alpha_k - \alpha_{k+1}|}{\alpha_k} \|u_*\|$ . Равенство  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|v_k - u_*\| = 0$  следует из теоремы 4.4. Интересно отметить, что в отличие от теоремы 1, где  $\lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k = 0$ , здесь  $\lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k = \frac{2}{L} > 0$ .  $\square$

Замечания 1–3 и правило останова (44) сохраняют силу и для метода (50).

### Упражнения

Упражнение 1. Применить метод (50) к задаче минимизации квадратичного функционала  $J(u) = \|Au - b\|_F^2$  при условиях (4.33).

Упражнение 2. Применить метод (7) или (50) к задачам из примеров 4.3–4.5, из упражнений 4.3–4.5.

Упражнение 3. Пусть  $\{\alpha_k\}$  — последовательность положительных чисел,  $\alpha_k \geq \alpha_{k+1}$ ,  $k = 0, 1, \dots$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\alpha_k - \alpha_{k+1}}{\alpha_k^2} = 0$ . Доказать, что тогда  $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = +\infty$ .

## § 9. Регуляризованный метод условного градиента

1. Будем рассматривать задачу

$$J(u) \rightarrow \inf, \quad u \in U, \quad (1)$$

$$U = \{u \in U_0 : g_i(u) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m; \quad g_i(u) = 0, \quad i = m+1, \dots, s\},$$

где  $U_0$  — выпуклое замкнутое ограниченное множество из гильбертова пространства  $H$ , функции  $J(u), g_i(u)$  дифференцируемы по Фреше на  $U_0$ . Для описания и исследования регуляризованного метода условного градиента будет удобнее взять функцию Тихонова в следующем виде:

$$T_k(u) = \gamma_k J(u) + P(u) + \gamma_k \alpha_k \|u\|^2, \quad \gamma_k > 0, \quad \alpha_k > 0, \quad u \in U_0,$$

где  $P(u) = \sum_{i=1}^s (g_i^+(u))^p$  — штрафная функция множества  $U$ ,  $p > 1$ . Если разделить функцию  $T_k(u)$  на  $\gamma_k$  и обозначить  $A_k = \frac{1}{\gamma_k}$ , то придем к функции

Тихонова из § 8. Пусть вместо точных функций  $J(u)$ ,  $P(u)$  и их градиентов  $J'(u)$ ,  $P'(u)$  известны их приближения  $J_k(u)$ ,  $P_k(u)$ ,  $J'_k(u)$ ,  $P'_k(u)$ , тогда вместо функции  $T_k(u)$  и ее производной

$$T'_k(u) = \gamma_k J'(u) + P'(u) + 2\gamma_k \alpha_k u, \quad u \in U_0,$$

будем иметь их приближения

$$\begin{aligned} t_k(u) &= \gamma_k J_k(u) + P_k(u) + \gamma_k \alpha_k \|u\|^2, \\ t'_k(u) &= \gamma_k J'_k(u) + P'_k(u) + 2\gamma_k \alpha_k u, \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Подчеркнем, что здесь элементы  $J'_k(u)$ ,  $P'_k(u) \in H$  необязательно являются производными функций  $J(u)$ ,  $P(u)$ , так как они могут быть получены на практике в результате отдельных измерений, возможно, напрямую не связанных с измерениями самих функций  $J(u)$ ,  $P(u)$ . По этой же причине  $t'_k(u) \in H$  необязательно равна производной приближенной функции  $t_k(u)$ .

Пусть начальная точка  $u_0$  известна. Если  $k$ -е приближение  $u_k \in U_0$  при некотором  $k \geq 0$  уже известно, то сначала определим вспомогательное приближение  $\bar{u}_k$  из условий

$$\bar{u}_k \in U_0: \langle t'_k(u_k), \bar{u}_k - u_k \rangle \leq \inf_{u \in U_0} \langle t'_k(u_k), u - u_k \rangle + \varepsilon_k, \quad \varepsilon_k > 0, \quad (2)$$

и в качестве следующего приближения возьмем точку

$$u_{k+1} = u_k + \beta_k (\bar{u}_k - u_k), \quad 0 < \beta_k \leq 1, \quad (3)$$

где число  $\beta_k$  таково, что

$$t_k(u_{k+1}) \leq \inf_{0 \leq \beta \leq 1} t_k(u_k + \beta(\bar{u}_k - u_k)) + \delta_k, \quad \delta_k > 0. \quad (4)$$

Регуляризованный метод условного градиента для задачи (1) описан. Нетрудно видеть, что метод (2)–(4) получен из одного из вариантов метода условного градиента (§ 5.4) формальной заменой  $J(u)$ ,  $J'(u)$  на  $t_k(u)$ ,  $t'_k(u)$  соответственно.

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия:

1)  $U_0$  — выпуклое замкнутое ограниченное множество из гильбертова пространства  $H$ , функции  $J(u)$ ,  $g_i(u)$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $|g_i(u)|$ ,  $i = m+1, \dots, s$ , выпуклы на  $U_0$ ;  $J(u)$ ,  $g_i(u)$ ,  $i = 1, \dots, s$ , непрерывно дифференцируемы по Фреше,  $U_* \neq \emptyset$ , производные  $J'(u)$ ,  $P'(u)$  удовлетворяют условию Липшица:

$$\|J'(u) - J'(v)\| \leq L\|u - v\|, \quad \|P'(u) - P'(v)\| \leq L\|u - v\| \quad \forall u, v \in U_0; \quad (5)$$

задача (1) имеет сильно согласованную постановку, т. е.

$$J_* \leq J(u) + \sum_{i=1}^s c_i (g_i^+(u))^\nu, \quad u \in U_0, \quad c_i \geq 0, \quad \nu > 0;$$

параметр  $p$  штрафной функции таков, что  $p \geq \nu$ ,  $p > 1$ ;

2) вместо точных  $J(u)$ ,  $P(u)$ ,  $J'(u)$ ,  $P'(u)$  известны их приближения  $J_k(u)$ ,  $P_k(u)$ ,  $J'_k(u)$ ,  $P'_k(u)$  такие, что

$$\begin{aligned} |J_k(u) - J(u)| &\leq \eta_k, & |P_k(u) - P(u)| &\leq \eta_k, & u &\in U_0, \\ \|J'_k(u) - J'(u)\| &\leq \xi_k, & \|P'_k(u) - P'(u)\| &\leq \xi_k, & u &\in U_0, & k = 0, 1, \dots; \end{aligned} \quad (6)$$

3) числовые последовательности  $\{\alpha_k\}$ ,  $\{\gamma_k\}$ ,  $\{\delta_k\}$ ,  $\{\varepsilon_k\}$ ,  $\{\eta_k\}$ ,  $\{\xi_k\}$  таковы, что

$$\begin{aligned} \alpha_k &\geq \alpha_{k+1} > 0, & \gamma_k &\geq \gamma_{k+1} > 0, & \delta_k &> 0, & \varepsilon_k &> 0, \\ \eta_k &> 0, & \xi_k &> 0, & k &= 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\alpha_k + \gamma_k + \delta_k + \varepsilon_k + \eta_k + \xi_k) = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k \gamma_k^{-\frac{\nu}{p-\nu}} = +\infty \quad (8)$$

(при  $p = \nu > 1$  последнее условие не нужно),

$$\alpha_k \gamma_k - \alpha_{k+1} \gamma_{k+1} \leq c_0 (\gamma_k - \gamma_{k+1}), \quad \alpha_k \gamma_k \geq c_1 k^{-\mu}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} (\delta_k + \eta_k) < \infty, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \gamma_k - \gamma_{k+1} + \delta_k + \varepsilon_k + \eta_k + \xi_k &\leq c_2 k^{-2\rho}, & k &= 1, 2, \dots \\ 0 < \mu < p < 1, & c_i = \text{const} > 0, & i &= 0, 1, 2. \end{aligned} \quad (10)$$

Тогда при любом выборе начальной точки  $u_0 \in U_0$  последовательность  $\{u_k\}$ , определяемая методом (2)–(4), такова, что

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} J(u_k) &= J(u_*) = J_*, & \lim_{k \rightarrow \infty} g_i^+(u_k) &= 0, & i &= 1, \dots, s, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - u_*\| &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $u_*$  — нормальное решение задачи (1). Сходимость в (11) равномерная относительно выбора реализаций  $J_k(u)$ ,  $P_k(u)$ ,  $J'_k(u)$ ,  $P'_k(u)$  из условий (6).

**Доказательство.** При сделанных предположениях множество  $U$  выпукло, замкнуто, ограничено,  $J_* > -\infty$ , множество  $U_*$  непусто, выпукло, замкнуто, ограничено, нормальное решение  $u_*$  задачи (1) существует и единственно (теоремы 8.2.8, 8.2.10). Функция Тихонова сильно выпукла на  $U_0$ , поэтому условия

$$v_k \in U_0, \quad T_k(v_k) = \inf_{U_0} T_k(u) \quad (12)$$

однозначно определяют точку  $v_k$ . В теореме 4.3 положим

$$\alpha(\delta) = \alpha_k, \quad A(\delta) = \gamma_k^{-1}, \quad u_\delta = v_k, \quad \delta_k \leq \delta < \delta_{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Из (7), (8) следует, что такие функции  $\alpha(\delta)$ ,  $A(\delta)$  удовлетворяют условиям (4.51), а для точки  $u_\delta$  в силу (12) выполнены условия (4.53). Отсюда и из теоремы 4.3 следует

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} J(v_k) &= J(u_*) = J_*, & \lim_{k \rightarrow \infty} g_i^+(v_k) &= 0, & i &= 1, \dots, s; \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \|v_k - u_*\| &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

По условию множество  $U_0$  ограничено, так что

$$\sup_{U_0} \|u\| \leq D < \infty, \quad \sup_{u, v \in U_0} \|u - v\| \leq d < \infty. \quad (14)$$

Отсюда, из (5), леммы 2.6.1 имеем:

$$\begin{aligned} |J(u)| &\leq |J(w)| + \|J'(w)\| \|u - w\| + \frac{1}{2} L \|u - w\|^2 \leq |J(w)| + d \|J'(w)\| + \frac{1}{2} L d^2, \\ |P(u)| &\leq |P(w)| + d \|P'(w)\| + \frac{1}{2} L d^2 \quad \forall u \in U_0, \end{aligned}$$

где  $w$  — какая-либо фиксированная точка из  $U_0$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \sup_{U_0} |J(u)| = J^{**} < \infty, \quad \sup_{U_0} |P(u)| = P^{**} < \infty, \\ \sup_{U_0} |T_k(u)| \leq c_3 < \infty, \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (15)$$

здесь и далее через  $c_i$ , как и в (9), (10), обозначаются положительные константы, не зависящие от  $u, k$ . Далее, из условий (6) следует, что

$$\begin{aligned} |t_k(u) - T_k(u)| &\leq \eta_k + \gamma_k \eta_k, \quad |t'_k(u) - T'_k(u)| \leq \xi_k + \gamma_k \xi_k \\ \forall u \in U_0, \quad k &= 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (16)$$

Из (9), (14), (15) получаем

$$\begin{aligned} |T_k(u) - T_{k+1}(u)| &\leq (\gamma_k - \gamma_{k+1}) |J(u)| + (\gamma_k \alpha_k - \gamma_{k+1} \alpha_{k+1}) \|u\|^2 \leq \\ &\leq c_4 (\gamma_k - \gamma_{k+1}) \quad \forall u \in U_0. \end{aligned} \quad (17)$$

В силу (5), (7) имеем

$$\begin{aligned} \|T'_k(u) - T'_k(v)\| &\leq (\gamma_k L + L + 2\gamma_k \alpha_k) \|u - v\| \leq c_5 \|u - v\| \\ \forall u, v \in U_0, \quad k &= 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (18)$$

Введем числовую последовательность

$$a_k = T_k(u_k) - T_k(v_k), \quad k = 0, 1, \dots$$

и получим для нее некоторые рекуррентные неравенства. Имеем

$$\begin{aligned} a_{k+1} = T_{k+1}(u_{k+1}) - T_{k+1}(v_{k+1}) &= (T_{k+1}(u_{k+1}) - T_k(u_{k+1})) + (T_k(u_{k+1}) - \\ &- T_k(u_k)) + (T_k(u_k) - T_k(v_k)) + (T_k(v_k) - T_k(v_{k+1})) + (T_k(v_{k+1}) - T_{k+1}(v_{k+1})). \end{aligned}$$

Заметим, что третье слагаемое из правой части этого равенства есть  $a_k$ , четвертое слагаемое неположительно в силу (12), а первое и пятое слагаемое можно оценить с помощью неравенства (17). Поэтому

$$0 \leq a_{k+1} \leq 2c_4 (\gamma_k - \gamma_{k+1}) + a_k + (T_k(u_{k+1}) - T_k(u_k)), \quad k = 1, 2, \dots \quad (19)$$

Оценим последнее слагаемое из правой части (19). Из условия (4) и неравенств (16) имеем

$$T_k(u_{k+1}) - T_k(u_k) \leq t_k(u_{k+1}) - t_k(u_k) + 2(\eta_k + \gamma_k \eta_k) \leq \delta_k + 2(\eta_k + \gamma_k \eta_k). \quad (20)$$

Наряду с (20) нам далее понадобится также и более тонкая оценка. Для ее получения сначала установим, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (T_k(u_{k+1}) - T_k(u_k)) = 0, \quad (21)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle T'_k(u_k), \bar{u}_k - u_k \rangle = 0. \quad (22)$$

С учетом (17), (20) имеем

$$\begin{aligned} T_{k+1}(u_{k+1}) &\leq T_k(u_{k+1}) + c_4(\gamma_k - \gamma_{k+1}) \leq \\ &\leq T_k(u_k) + \delta_k + 2(\eta_k + \gamma_k \eta_k) + c_4(\gamma_k - \gamma_{k+1}). \end{aligned} \quad (23)$$

В силу (15) последовательность  $\{T_k(u_k)\}$  ограничена сверху, а в силу (7), (9) получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} [\delta_k + 2(\eta_k + \gamma_k \eta_k) + c_4(\gamma_k - \gamma_{k+1})] \leq c_6 \sum_{k=1}^{\infty} (\delta_k + \eta_k) + c_4 \gamma_0 < \infty.$$

Отсюда и из (23) с помощью леммы 2.6.2 заключаем, что существует конечный предел  $\lim_{k \rightarrow \infty} T_k(u_k)$ . Тогда  $\lim_{k \rightarrow \infty} [T_k(u_k) - T_{k+1}(u_{k+1})] = 0$ . Отсюда и из (8), (17) имеем

$$\begin{aligned} |T_k(u_{k+1}) - T_k(u_k)| &\leq \\ &\leq |T_k(u_{k+1}) - T_{k+1}(u_{k+1})| + |T_{k+1}(u_{k+1}) - T_k(u_k)| \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Равенство (21) установлено.

Далее, с учетом (4), (14), (16), (18) получаем

$$\begin{aligned} T_k(u_{k+1}) - T_k(u_k) &\leq t_k(u_{k+1}) - t_k(u_k) + 2(\eta_k + \gamma_k \eta_k) \leq \\ &\leq t_k(u_k + \beta(\bar{u}_k - u_k)) - t_k(u_k) + \delta_k + 2(\eta_k + \gamma_k \eta_k) \leq \\ &\leq T_k(u_k + \beta(\bar{u}_k - u_k)) - T_k(u_k) + \delta_k + 4(\eta_k + \gamma_k \eta_k) = \\ &= \int_0^1 \langle T'_k(u_k + t\beta(\bar{u}_k - u_k)), \beta(\bar{u}_k - u_k) \rangle dt + \delta_k + 4(\eta_k + \gamma_k \eta_k) = \\ &= \int_0^1 \langle T'_k(u_k), \beta(\bar{u}_k - u_k) \rangle dt + \int_0^1 \langle T'_k(u_k + t\beta(\bar{u}_k - u_k)) - T'_k(u_k), \beta(\bar{u}_k - u_k) \rangle dt + \\ &\quad + \delta_k + 4(\eta_k + \gamma_k \eta_k) \leq \beta \langle T'_k(u_k), \bar{u}_k - u_k \rangle + \frac{1}{2} \beta^2 c_5 d^2 + \delta_k + 4(\eta_k + \gamma_k \eta_k) \\ &\quad \forall \beta, 0 \leq \beta \leq 1, \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (24)$$

Из (24) следует неравенство

$$\begin{aligned} \langle T'_k(u_k), \bar{u}_k - u_k \rangle &\geq \frac{1}{\beta} (T_k(u_{k+1}) - T_k(u_k)) - \frac{1}{2} \beta c_5 d^2 - \frac{1}{\beta} (\delta_k + 4(\eta_k + \gamma_k \eta_k)) \\ &\quad \forall \beta, \quad 0 \leq \beta \leq 1, \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned}$$



Переходя здесь к пределу сначала при  $k \rightarrow \infty$ , затем при  $\beta \rightarrow +0$ , с учетом уже доказанного равенства (21) получим

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle T'_k(u_k), \bar{u}_k - u_k \rangle \geq 0. \quad (25)$$

С другой стороны, в силу условия (2) и неравенств (14), (16) имеем

$$\langle T'_k(u_k), \bar{u}_k - u_k \rangle \leq \langle t'_k(u_k), \bar{u}_k - u_k \rangle + (\xi_k + \gamma_k \xi_k) d \leq \varepsilon_k + (\xi_k + \gamma_k \xi_k) d;$$

здесь учтено, что  $\inf_{u \in U_0} \langle t'_k(u_k), u - u_k \rangle \leq \langle t'_k(u_k), u_k - u_k \rangle = 0$ . Отсюда и из (8) следует, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle T'_k(u_k), \bar{u}_k - u_k \rangle \leq 0.$$

Совмещая это неравенство с (25), приходим к равенству (22).

Далее, из выпуклости  $T_k(u)$  (теорема 4.2.2), из (2), (14), (16) имеем

$$\begin{aligned} 0 \leq a_k = T_k(u_k) - T_k(v_k) &\leq \langle T'_k(u_k), u_k - v_k \rangle \leq \\ &\leq \langle t'_k(u_k), u_k - v_k \rangle + (\xi_k + \gamma_k \xi_k) d \leq -\langle t'_k(u_k), \bar{u}_k - u_k \rangle + \varepsilon_k + (\xi_k + \gamma_k \xi_k) d \leq \\ &\leq -\langle T'_k(u_k), \bar{u}_k - u_k \rangle + \varepsilon_k + 2(\xi_k + \gamma_k \xi_k) d, \end{aligned}$$

или

$$a_k - \varepsilon_k - 2(\xi_k + \gamma_k \xi_k) d \leq -\langle T'_k(u_k), \bar{u}_k - u_k \rangle, \quad k = 0, 1, \dots \quad (26)$$

Множество натуральных чисел разобьем на два класса:

$$I_0 = \{k: a_k > \varepsilon_k + 2(\xi_k + \gamma_k \xi_k) d\}, \quad I_1 = \{k: a_k \leq \varepsilon_k + 2(\xi_k + \gamma_k \xi_k) d\}.$$

Пусть сначала  $k \in I_0$ . Тогда в силу (26) получаем

$$0 < -\langle T'_k(u_k), \bar{u}_k - u_k \rangle = |\langle T'_k(u_k), \bar{u}_k - u_k \rangle|,$$

и из неравенства (24) имеем

$$\begin{aligned} T_k(u_{k+1}) - T_k(u_k) &\leq -\beta |\langle T'_k(u_k), \bar{u}_k - u_k \rangle| + \frac{1}{2} \beta^2 c_5 d^2 + \delta_k + 4(\eta_k + \gamma_k \eta_k) \\ &\quad \forall \beta, \quad 0 \leq \beta \leq 1, \quad \forall k \in I_0. \end{aligned} \quad (27)$$

Заметим, что функция  $\varphi_k(\beta) = -\beta |\langle T'_k(u_k), \bar{u}_k - u_k \rangle| + \frac{1}{2} \beta^2 c_5 d^2$  достигает на числовой оси своего минимума в точке  $\beta_{k*} = \frac{1}{c_5 d^2} |\langle T'_k(u_k), \bar{u}_k - u_k \rangle|$ . В силу (22)  $\lim_{k \rightarrow \infty} \beta_{k*} = 0$ . Поэтому, беря при необходимости постоянную  $c_5$  еще большей, можем считать, что  $0 \leq \beta_{k*} \leq 1 \quad \forall k \geq 0$ . Полагая  $\beta = \beta_{k*}$ , из (27) тогда получим

$$\begin{aligned} T_k(u_{k+1}) - T_k(u_k) &\leq -\frac{1}{2c_5 d^2} |\langle T'_k(u_k), \bar{u}_k - u_k \rangle|^2 + \delta_k + 4(\eta_k + \gamma_k \eta_k) \\ &\quad \forall k \in I_0. \end{aligned} \quad (28)$$

Так как в силу (15)  $0 \leq a_k \leq 2c_3 = c_7$ , то из (26) для  $k \in I_0$  имеем

$$\begin{aligned} |(T'_k(u_k), \bar{u}_k - u_k)|^2 &\geq (a_k - \varepsilon_k - 2d(\xi_k + \gamma_k \xi_k))^2 \geq \\ &\geq a_k^2 - 2c_7[2d(\xi_k + \gamma_k \xi_k) + \varepsilon_k] \geq a_k^2 - c_8(\varepsilon_k + \xi_k), \quad k \in I_0. \end{aligned}$$

Подставив эту оценку в (28), получим

$$T_k(u_{k+1}) - T_k(u_k) \leq -\frac{1}{2c_5 d^2} a_k^2 + \frac{c_8}{2c_5 d^2} (\varepsilon_k + \xi_k) + \delta_k + 4(\eta_k + \gamma_k \eta_k), \quad k \in I_0.$$

Отсюда с учетом условия (10) из (19) имеем

$$\begin{aligned} 0 \leq a_{k+1} &\leq a_k - a_k^2 \frac{1}{2c_5 d^2} + c_9(\varepsilon_k + \xi_k + \delta_k + \eta_k + \gamma_k - \gamma_{k+1}) \leq \\ &\leq a_k - a_k^2 \frac{1}{c_{10}} + c_{11} k^{-2\rho} \leq a_k - a_k^2 \frac{1}{A} + A k^{-2\rho}, \quad A = \max\{c_{10}; c_{11}\}, \quad k \in I_0. \end{aligned} \quad (29)$$

Пусть теперь  $k \in I_1$ . Тогда, подставив в (19) оценку (20), с учетом (10) получим

$$a_{k+1} \leq a_k + c_{12}(\gamma_k - \gamma_{k+1} + \delta_k + \eta_k) \leq a_k + c_{13} k^{-2\rho}, \quad k \in I_1. \quad (30)$$

Кроме того, по определению  $I_1$

$$0 \leq a_k \leq \varepsilon_k + 2(\xi_k + \gamma_k \xi_k) d \leq c_{14} k^{-2\rho} \quad \forall k \in I_1. \quad (31)$$

Таким образом, последовательность  $\{a_k\}$  удовлетворяет условиям (29)–(31). Отсюда и из леммы 2.6.5 следует, что

$$0 \leq a_k = T_k(u_k) - T_k(v_k) \leq c_{15} k^{-\rho}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Из (12), теоремы 8.2.10 тогда имеем

$$\alpha_k \gamma_k \|u_k - v_k\|^2 \leq T_k(u_k) - T_k(v_k) = a_k \leq c_{15} k^{-\rho}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Отсюда с учетом второго неравенства (9) получим

$$\|u_k - v_k\|^2 \leq c_{15} k^{-\rho} \frac{1}{\alpha_k \gamma_k} \leq c_{16} k^{-\rho+\mu}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad 0 < \mu < \rho < 1. \quad (32)$$

Из (13), (32) следуют все утверждения теоремы 1.  $\square$

В качестве последовательностей, удовлетворяющих условиям (7)–(10), можно, например, взять

$$\begin{aligned} \alpha_k &= a_1(k+1)^{-\alpha}, \quad \gamma_k = a_2(k+1)^{-\gamma}, \quad \delta_k = a_3(k+1)^{-\delta}, \\ \varepsilon_k &= a_4(k+1)^{-\varepsilon}, \quad \eta_k = a_5(k+1)^{-\chi_1}, \quad \xi_k = a_6(k+1)^{-\chi_2}, \quad k = 0, 1, \dots \\ a_i &> 0, \quad i = 1, \dots, 6; \quad 0 < \alpha < \gamma \frac{\nu}{p-1}, \quad \gamma > 0, \quad \alpha + \gamma < \mu < \rho < 1/2, \\ 0 &< \delta \leq 1, \quad 0 < \chi_1 \leq 1, \quad 2\rho < \min\{1 + \gamma; \delta; \varepsilon; \chi_1; \chi_2\}. \end{aligned} \quad (33)$$

**2.** Сформулируем правило останова в методе (2)–(4) для случая, когда уровень погрешности в задании исходных данных фиксирован. А именно, пусть при каждом  $u \in U_0$  вместо точных значений  $J(u)$ ,  $P(u)$ ,  $J'(u)$ ,  $P'(u)$  известны их приближения  $J_\eta(u)$ ,  $P_\eta(u)$ ,  $J'_\xi(u)$ ,  $P'_\xi(u)$  такие, что

$$\begin{aligned} |J_\eta(u) - J(u)| &\leq \eta, & |P_\eta(u) - P(u)| &\leq \eta, & u \in U_0, \\ |J'_\xi(u) - J'(u)| &\leq \xi, & |P'_\xi(u) - P'(u)| &\leq \xi, & u \in U_0, \end{aligned} \quad (34)$$

где  $\eta > 0$ ,  $\xi > 0$  — фиксированные числа. Тогда в методе (2)–(4) можно взять

$$t_k(u) = \gamma_k J_\eta(u) + P_\eta(u) + \gamma_k \alpha_k \|u\|^2, \quad t'_k(u) = \gamma_k J'_\xi(u) + P'_\xi(u) + 2\gamma_k \alpha_k u. \quad (35)$$

Возникает вопрос: до какого разумного номера  $k = k(\eta, \xi)$  следует продолжать процесс (2)–(4), (35), чтобы получившуюся точку  $u(\eta, \xi) = u_{k(\eta, \xi)}$  можно было принять в качестве приближения к нормальному решению  $u_*$  задачи (1)? Для ответа на этот вопрос зафиксируем какую-либо начальную точку  $u_0 \in U_0$  и последовательности, удовлетворяющие условиям (7)–(10), считая, что  $\eta_0 \geq \eta$ ,  $\xi_0 \geq \xi$  (например, можно взять последовательности (33) при  $a_5 \geq \eta$ ,  $a_6 \geq \xi$ ). Рассмотрим следующее правило останова процесса (2)–(4), (35): при каждом фиксированном  $\eta, \xi$ ,  $0 < \eta \leq \eta_0$ ,  $0 < \xi \leq \xi_0$ , итерации будем продолжать до такого наибольшего номера  $k = k(\eta, \xi)$ , при котором выполняются неравенства

$$\eta_k \geq \eta, \quad \xi_k \geq \xi, \quad k = 0, 1, \dots, k(\eta, \xi). \quad (36)$$

**Теорема 2.** Пусть выполнены все условия теоремы 1, кроме условия (6); пусть выполнены условия (34). Пусть точки  $u_1, u_2, \dots, u_k$ ,  $k = k(\eta, \xi)$ , получены методом (2)–(4), (35), (36). Тогда точка  $u(\delta) = u_{k(\delta)}$ ,  $\delta = (\eta, \xi)$  такова, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} J(u(\delta)) = J_*, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} g_i^+(u(\delta)) = 0, \quad i = 1, \dots, s; \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \|u(\delta) - u_*\| = 0.$$

**Доказательство** опирается на теорему 1 и проводится так же, как и доказательство аналогичной теоремы 8.2 из § 8.  $\square$

Из теоремы 2 следует, что оператор  $R_\delta$ , который каждому набору  $(J_\eta(u), P_\eta(u), J'_\xi(u), P'_\xi(u), \delta = (\eta, \xi))$  входных данных из (34) ставит в соответствие точку  $u(\delta) = (\eta, \xi) = u_{k(\eta, \xi)}$ , определяемую методом (2)–(4), (35), (36), является регуляризующим оператором задачи (1) в метрике  $H$  (определение 6.1).

## Упражнения

**Упражнение 1.** Для задачи  $J(u) \rightarrow \inf, u \in U$ , считая, что множество  $U$  известно точно, описать регуляризованный метод условного градиента, сформулировать и доказать аналоги теорем 1, 2.

**Упражнение 2.** Применить регуляризованный метод условного градиента к задаче минимизации квадратичного функционала  $J(u) = \|Au - b\|_F^2$  при условиях (4.33) и к задачам из примеров 4.3–4.5, из упражнений 4.3–4.5.

### § 10. Регуляризованный экстраградиентный метод

#### 1. Рассмотрим задачу

$$J(u) \rightarrow \inf, \quad u \in U = \{u \in U_0 : g(u) = (g_1(u), \dots, g_m(u))^T \leq 0\}, \quad (1)$$

где  $U_0$  — выпуклое замкнутое множество из  $E^n$ , функции  $J(u)$ ,  $g_i(u)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , выпуклы и непрерывно дифференцируемы на  $U_0$ .

Для решения этой задачи с точно заданными входными данными  $f(x)$ ,  $g(x)$  в 5.15 был предложен и исследован экстраградиентный метод. Здесь мы рассмотрим регуляризованный вариант этого метода, предполагая, что входные данные известны неточно и задача (1), возможно, неустойчива. Введем функцию

$$T_k(u, \lambda) = J(u) + \langle \lambda, g(u) \rangle + \frac{1}{2} \alpha_k (|u|^2 - |\lambda|^2), \quad u \in U_0, \quad \lambda \in \Lambda_0 \stackrel{\text{def}}{=} E_+^m, \quad (2)$$

которую будем называть функцией Тихонова; здесь  $\alpha_k > 0$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , — параметр регуляризации. По аналогии с (5.15.4), (5.15.5), заменив в них производную  $L_x(x, \lambda)$  на  $\frac{\partial T_k(u, \lambda)}{\partial u} = J'(u) + \lambda^T g'(u) + \alpha_k u$ ,  $L_\lambda(x, \lambda)$  на  $\frac{\partial T_k(u, \lambda)}{\partial \lambda} = g(u) - \alpha_k \lambda$ , получим итерационный процесс

$$\begin{aligned} \bar{u}_k &= \mathcal{P}_{U_0} \left( u_k - \beta \frac{\partial T_k(u_k, \lambda_k)}{\partial u} \right) = \mathcal{P}_{U_0} (u_k - \beta (J'(u_k) + \lambda_k^T g'(u_k) + \alpha_k u_k)), \\ \bar{\lambda}_k &= \mathcal{P}_{\Lambda_0} \left( \lambda_k + \beta \frac{\partial T_k(u_k, \lambda_k)}{\partial \lambda} \right) = \mathcal{P}_{\Lambda_0} (\lambda_k + \beta (g(u_k) - \alpha_k \lambda_k)) \end{aligned} \quad (3)$$

(прогнозный шаг),

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= \mathcal{P}_{U_0} \left( u_k - \beta \frac{\partial T_k(\bar{u}_k, \bar{\lambda}_k)}{\partial u} \right) = \mathcal{P}_{U_0} (u_k - \beta (J'(\bar{u}_k) + \bar{\lambda}_k^T g'(\bar{u}_k) + \alpha_k \bar{u}_k)), \\ \lambda_{k+1} &= \mathcal{P}_{\Lambda_0} \left( \lambda_k + \beta \frac{\partial T_k(\bar{u}_k, \bar{\lambda}_k)}{\partial \lambda} \right) = \mathcal{P}_{\Lambda_0} (\lambda_k + \beta (g(\bar{u}_k) - \alpha_k \bar{\lambda}_k)) \end{aligned} \quad (4)$$

(основной шаг),  $k = 0, 1, \dots$ , с точными входными данными. Пользуясь обозначениями, аналогичными (5.15.6):

$$z = \begin{pmatrix} u \\ \lambda \end{pmatrix}, \quad Az = \begin{pmatrix} J'(u) + \lambda^T g'(u) \\ -g(u) \end{pmatrix}, \quad Z = U_0 \times \Lambda_0, \quad (5)$$

процесс (3), (4) кратко можем записать так:

$$\begin{aligned} \bar{z}_k &= \mathcal{P}_Z (z_k - \beta (Az_k + \alpha_k z_k)), \quad z_{k+1} = \mathcal{P}_Z (z_k - \beta (A\bar{z}_k + \alpha_k \bar{z}_k)), \\ k &= 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (6)$$

Теперь предположим, что вместо точных входных данных  $J(u)$ ,  $g(u)$ ,  $J'(u)$ ,  $g'(u)$ ,  $u \in U_0$ , известны их приближения  $J_k(u)$ ,  $g_k(u)$ ,  $J'_k(u)$ ,  $g'_k(u)$ ,  $u \in U_0$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , и в (6) оператор  $A$  из (4) заменим на

$$A_k z = \begin{pmatrix} J'_k(u) + \lambda^T g'_k(u) \\ -g_k(u) \end{pmatrix}, \quad z \in Z, \quad k = 0, 1, \dots \quad (7)$$

Получим

$$\bar{z}_k = \mathcal{P}_Z(z_k - \beta(A_k z_k + \alpha_k z_k)), \quad z_{k+1} = \mathcal{P}_Z(z_k - \beta(A_k \bar{z}_k + \alpha_k \bar{z}_k)), \quad (8)$$

$$k = 0, 1, \dots$$

Регуляризованный экстраградиентный метод решения задачи (1) с неточно заданными входными данными описан. Сходимость метода (8) будем исследовать, предполагая, что выполнены следующие условия I–VII.

I. Множество  $U_0 \subseteq E^n$  — выпукло, замкнуто.

II. Функции  $J(u)$ ,  $g_1(u), \dots, g_m(u)$  выпуклы и непрерывно дифференцируемы на  $U_0$ .

III. Функция Лагранжа

$$L(u, \lambda) = J(u) + \langle \lambda, g(u) \rangle, \quad u \in U_0, \quad \lambda \in \Lambda_0, \quad (9)$$

задачи (1) имеет хотя бы одну седловую точку  $s_* = \begin{pmatrix} u_* \\ \lambda_* \end{pmatrix} \in Z$ , т. е.

$$L(u_*, \lambda) \leq L(u_*, \lambda_*) \leq L(u, \lambda_*) \quad \forall u \in U_0, \quad \forall \lambda \in \Lambda_0 = E_+^m. \quad (10)$$

IV. Для любого ограниченного подмножества  $U_1$  множества  $U_0$  существует постоянная  $L_1 > 0$  такая, что

$$\begin{aligned} |g(u) - g(v)| &\leq L_1 |u - v|, & |J'(u) - J'(v)| &\leq L_1 |u - v|, \\ |g'(u) - g'(v)| &\leq L_1 |u - v| \quad \forall u, v \in U_1. \end{aligned} \quad (11)$$

V. Вместо точных значений функций  $J(u)$ ,  $g(u)$  и их производных  $J'(u)$ ,  $J'_k(u)$  известны их приближения  $J_k(u)$ ,  $g_k(u)$ ,  $J'_k(u)$ ,  $g'_k(u)$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} |g_k(u) - g(u)| &\leq \delta_k(1 + |u|), \quad u \in U_0, \\ |J'_k(u) - J'(u)| &\leq \delta_k, \quad |g'_k(u) - g'(u)| \leq \delta_k, \quad u \in U_0, \quad k = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $\delta_k > 0$  — параметр, характеризующий погрешность. Подчеркнем, что в (12)  $J'_k(u)$ ,  $g'_k(u)$  необязательно являются производными функций  $J_k(u)$ ,  $g_k(u)$ .

VI. Параметры регуляризации  $\alpha_k$  и погрешности  $\delta_k$  согласованы следующим образом:

$$\begin{aligned} \alpha_k > 0, \quad \delta_k > 0, \quad k = 0, 1, \dots, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k = 0, \quad \sup_{k \geq 0} \frac{\delta_k}{\alpha_k} < \frac{1}{24}, \\ \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = +\infty, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\alpha_{k+1} - \alpha_k}{\alpha_k^2} = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\delta_k}{\alpha_k} = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

В качестве таких параметров можно, например, взять

$$\alpha_k = \frac{a}{(k+1)^\alpha}, \quad \delta_k = \frac{b}{(k+1)^\delta}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (14)$$

где  $0 < \alpha < 1$ ,  $\delta \geq 1$ ,  $a, b$  — положительные числа.

VII. При доказательстве сходимости метода (8) нам понадобится условие Липшица для оператора  $A$ . Однако, как видно из формулы (5), компонента  $J'(u) + \lambda^\top g'(u)$  этого оператора содержит неограниченный множитель  $\lambda \in \Lambda_0 = E_+^m$  и по переменной  $u$  не может удовлетворять условию Липшица на  $Z$ . В то же время, оказывается, последовательности  $\{z_k\}$ ,  $\{\bar{z}_k\}$ , порождаемые методом (8), на самом деле принадлежат некоторому ограниченному подмножеству  $S_0$  множества  $Z$  и от оператора  $A$  достаточно потребовать условие Липшица лишь на  $S_0$ . Ниже будет показано, что в качестве такого множества можно, например, взять

$$S_0 = \left\{ z = \begin{pmatrix} u \\ \lambda \end{pmatrix} \in Z : |z - z_0| \leq 8 \left( 1 + \sup_{k \geq 0} \alpha_k + \sup_{k \geq 0} \delta_k \right) (|\bar{z}_0 - z_0| + |z_0 - z_*| + (1 + |z_*|)\sqrt{c_0} + (1 + |z_0|) + |Az_0|) \stackrel{\text{def}}{=} R_0 \right\}, \quad (15)$$

где  $z_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ \lambda_0 \end{pmatrix} \in Z$  — начальная точка метода (8),  $\bar{z}_0 = \mathcal{P}_Z(z_0 - \beta(Az_0 + \alpha_0 z_0))$  — прогнозная точка метода (8) при  $k = 0$ ,  $z_*$  — ближайшая к  $z = 0$  седловая точка функции  $L(u, \lambda)$  из (9) (см. замечание 5.15.1 при  $z_0 = 0$ ) и

$$c_0 = 8 \left( 2 \sup_{k \geq 0} \frac{\delta_k}{\alpha_k} + 1 \right) \left( 1 - 24 \sup_{k \geq 0} \frac{\delta_k}{\alpha_k} \right)^{-1}.$$

Если  $z = \begin{pmatrix} u \\ \lambda \end{pmatrix} \in S_0$ , то  $u \in U_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in U_0 : |u - u_0| \leq |z - z_0| \leq R_0\}$ ,  $\lambda \in \Lambda_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{\lambda \in \Lambda_0 : |\lambda - \lambda_0| \leq |z - z_0| \leq R_0\}$ , так что множества  $U_1$ ,  $\Lambda_1$  ограничены. Отсюда, из условия (11) с таким  $U_1$  и определения  $A$  из (5) следует существование такой константы  $L_0 > 0$ , что

$$|Az - Ay| \leq L_0 |z - y| \quad \forall z, y \in S_0. \quad (16)$$

Будем считать, что параметр  $\beta$  столь мал, что выполнены неравенства

$$\begin{aligned} 0 < \beta < 1, \quad 0 < \frac{1}{2} \alpha_k \beta \left( 1 - 24 \frac{\delta_k}{\alpha_k} \right) &\leq 1, \\ 0 < \frac{1}{4} \alpha_k \beta \left( 1 + \frac{1}{2} \alpha_k \beta - 48 \frac{\delta_k}{\alpha_k} - 12 \delta_k \beta \right) &\leq 1, \\ \beta < \frac{1}{L_0 + 12 \delta_k + 4 \alpha_k}, \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (17)$$

где постоянная  $L_0 > 0$  взята из (16), параметры  $\{\alpha_k\}$ ,  $\{\beta_k\}$  — из (13) (как, например, из (14)).

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия I–VII. Тогда метод (8) порождает последовательность  $\{z_k\}$ , которая принадлежит множеству  $S_0$  из (15) и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |z_k - z_*| = 0, \quad (18)$$

где  $z_* = \begin{pmatrix} u_* \\ \lambda_* \end{pmatrix}$  — ближайшая к  $z = 0$  седловая точка функции Лагранжа (9). Сходимость в (18) равномерна относительно выбора  $J_k(u)$ ,  $g_k(u)$ ,  $J'_k(u)$ ,  $g'_k(u)$  из условия (12).

**2.** Для доказательства теоремы 1 нам понадобятся несколько вспомогательных утверждений.

**Л е м м а 1.** Пусть выполнены условия I, II. Тогда функция Тихонова  $T_k(u, \lambda)$  из (2) при каждом  $k = 0, 1, \dots$  обладает единственной седловой точкой  $s_k = \begin{pmatrix} v_k \\ p_k \end{pmatrix} \in Z$ , т. е.

$$T_k(v_k, \lambda) \leq T_k(v_k, p_k) \leq T_k(u, p_k) \quad \forall u \in U_0, \quad \forall \lambda \in \Lambda_0. \quad (19)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Отметим, что функция  $T_k(u, \lambda)$  сильно выпукла по  $u$  на  $U_0$ , сильно вогнута и квадратична по  $\lambda$  на  $\Lambda_0$ , множества  $U_0, \Lambda_0$  выпуклы, замкнуты. Согласно теореме 4.3.1 сильно вогнутая функция  $T_k(u, \lambda)$ ,  $\lambda \in \Lambda_0$ , при каждом фиксированном  $u \in U_0$  достигает своей верхней грани на  $\Lambda_0$  в единственной точке  $\lambda = \lambda_k(u)$ . Более того, как видно из (9), на множестве  $\Lambda_0 = E_+^m$  справедливо равенство

$$\max_{\lambda \in \Lambda_0} T_k(u, \lambda) = \sum_{i=1}^m \max_{\lambda_i \geq 0} \left( \lambda_i g_i(u) - \frac{1}{2} \alpha_k \lambda_i^2 \right) + J(u) + \frac{1}{2} \alpha_k |u|^2 \quad \forall u \in U_0,$$

и точку максимума функции  $T_k(u, \lambda)$  на  $\Lambda_0$  и само максимальное значение этой функции несложно представить в следующей явной форме:

$$\lambda_k(u) = \frac{1}{\alpha_k} \max\{g(u); 0\}, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \chi_k(u) &\stackrel{\text{def}}{=} \max_{\lambda \in \Lambda_0} T_k(u, \lambda) = T_k(u, \lambda_k(u)) = \frac{1}{2\alpha_k} (\max\{g(u); 0\})^2 + J(u) + \frac{1}{2} \alpha_k |u|^2 \geq \\ &\geq T_k(u, \lambda) \quad \forall \lambda \in \Lambda_0, \quad \forall u \in U_0, \end{aligned} \quad (21)$$

где  $\max\{g(u); 0\}$  — вектор-функция с координатами  $\max\{g_i(u); 0\}$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Из (20), (21) и непрерывности  $J(u)$ ,  $g(u)$  следует непрерывность функций  $\lambda_k(u)$ ,  $\chi_k(u)$  на  $U_0$ . Кроме того, функция  $\chi_k(u)$  сильно выпукла на замкнутом выпуклом множестве  $U_0$  (теоремы 4.2.6–4.2.8, следствия к ним; сильная выпуклость слагаемого  $\frac{1}{2} \alpha_k |u|^2$ ) и в силу теоремы 4.3.1 достигает своей нижней грани в единственной точке  $v_k \in U_0$ :

$$\inf_{u \in U_0} \chi_k(u) = \chi_k(v_k) \leq \chi_k(u) = T_k(u, \lambda_k(u)) \quad \forall u \in U_0. \quad (22)$$

Убедимся, что точка  $s_k = \begin{pmatrix} v_k \\ p_k = \lambda_k(v_k) \end{pmatrix}$  является седловой точкой функции  $T_k(u, \lambda)$ . По построению  $s_k \in Z$ . Проверим справедливость неравенств (19). Из соотношений

$$T_k(v_k, \lambda) \leq T_k(v_k, \lambda(v_k)) = T_k(v_k, p_k) \quad \forall \lambda \in \Lambda_0$$

следует левое неравенство (19). Для доказательства правого неравенства заметим, что из выпуклости  $T_k(u, \lambda)$  по  $u$  на  $U_0$  вытекает, что

$$\begin{aligned} T_k(\gamma u + (1 - \gamma)v_k, \lambda) &\leq \gamma T_k(u, \lambda) + (1 - \gamma)T_k(v_k, \lambda) \leq \gamma T_k(u, \lambda) + (1 - \gamma)\chi_k(v_k) \\ &\forall u \in U_0, \quad \gamma \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом (21), (22) имеем

$$\begin{aligned}\chi_k(v_k) &\leq \chi_k(\gamma u + (1 - \gamma)v_k) = T_k(\gamma u + (1 - \gamma)v_k, \lambda(\gamma u + (1 - \gamma)v_k)) \leq \\ &\leq \gamma T_k(u, \lambda(\gamma u + (1 - \gamma)v_k)) + (1 - \gamma)T_k(v_k, \lambda(\gamma u + (1 - \gamma)v_k)) \leq \\ &\leq \gamma T_k(u, \lambda(v_k + \gamma(u - v_k))) + (1 - \gamma)\chi_k(v_k) \quad \forall \gamma \in [0, 1], \quad \forall u \in U_0,\end{aligned}$$

так что

$$\gamma \chi_k(v_k) \leq \gamma T_k(u, \lambda(v_k + \gamma(u - v_k))) \quad \forall \gamma \in [0, 1], \quad \forall u \in U_0.$$

Разделим это неравенство на  $\gamma$ ,  $0 < \gamma \leq 1$  и устремим  $\gamma \rightarrow 0$ . В силу непрерывности функций  $\lambda_k(u)$ ,  $T_k(u, \lambda)$  будем иметь  $\chi_k(v_k) \leq T_k(u, \lambda(v_k)) = T_k(u, p_k)$   $\forall u \in U_0$ . Правое неравенство (19) также доказано. Единственность седловой точки  $s_k$  вытекает из сильной выпуклости по  $u$  и сильной вогнутости по  $\lambda$  функции  $T_k(u, \lambda)$ . Лемма 1 доказана.  $\square$

**Л е м м а 2.** Пусть выполнены условия I, II. Тогда точка  $s_k = \begin{pmatrix} v_k \\ p_k \end{pmatrix}$  из  $Z$  будет седловой точкой функции (2) тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

$$\langle As_k + \alpha_k s_k, z - s_k \rangle \geq 0 \quad \forall z \in Z. \quad (23)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о** проводится так же, как в аналогичной лемме 5.15.1, и опирается на неравенство (19).  $\square$

**Л е м м а 3.** Пусть выполнены условия I–III,  $s_k = \begin{pmatrix} v_k \\ p_k \end{pmatrix}$  — седловая точка функции  $T_k(u, \lambda)$  из (2),  $z_* = \begin{pmatrix} u_* \\ \lambda_* \end{pmatrix}$  — ближайшая к  $z = 0$  седловая точка функции Лагранжа (9), пусть  $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0$ . Тогда

$$|s_k| \leq |z_*| \quad \forall k = 0, 1, \dots, \quad (24)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = z_*, \quad (25)$$

$$|s_k - s_{k+1}| \leq \frac{|\alpha_k - \alpha_{k+1}|}{\alpha_k} |z_*|, \quad k = 0, 1, \dots \quad (26)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Существование седловых точек  $s_k$ ,  $z_*$  было установлено выше (см. лемму 1, замечание 5.15.1 при  $z_0 = 0$ ). Из неравенств (10) при  $s_* = z_*$  и (19) следует

$$\begin{aligned}L(u_*, \lambda_*) + \frac{1}{2}\alpha_k(|v_k|^2 - |\lambda_*|^2) &\stackrel{(10)}{\leq} L(v_k, \lambda_*) + \frac{1}{2}\alpha_k(|v_k|^2 - |\lambda_*|^2) = \\ &= T_k(v_k, \lambda_*) \stackrel{(19)}{\leq} T_k(v_k, p_k) \stackrel{(19)}{\leq} T_k(u_*, p_k) = L(u_*, p_k) + \frac{1}{2}\alpha_k(|u_*|^2 - |p_k|^2) \stackrel{(10)}{\leq} \\ &\stackrel{(10)}{\leq} L(u_*, \lambda_*) + \frac{1}{2}\alpha_k(|u_*|^2 - |p_k|^2).\end{aligned}$$

Сравнивая крайние звенья полученной цепочки неравенств, получаем

$$|v_k|^2 + |p_k|^2 = |s_k|^2 \leq |u_*|^2 + |\lambda_*|^2 = |z_*|^2,$$



что равносильно (24). Таким образом, последовательность  $\{s_k\}$  ограничена. По теореме Больцано–Вейерштрасса найдется подпоследовательность  $\{s_{k_l}\}$ , сходящаяся к некоторой точке  $s' \in Z$ . Переходя к пределу при  $k = k_l \rightarrow +\infty$  в неравенстве (23), получим  $\langle As', z - s' \rangle \geq 0 \quad \forall z \in Z$ . В силу леммы 5.15.1 точка  $s'$  является седловой для функции  $L(u, \lambda)$ . Из (24) при  $k = k_l \rightarrow \infty$  будем иметь  $|s'| \leq |z_*|$ . Однако  $z_*$  — ближайшая к  $z = 0$  седловая точка функции  $L(u, \lambda)$ , поэтому  $|s'| \geq |z_*|$ .

Сравнивая последние два неравенства, мы заключаем, что  $|z_*| = |s'|$ , т. е. точка  $s'$  также является седловой точкой функции  $L(u, \lambda)$ , ближайшей к  $z = 0$ . Однако такая точка одна, поэтому  $s' = z_*$ . Таким образом, последовательность  $\{s_k\}$  имеет единственную предельную точку  $z_*$ , откуда следует равенство (25).

Докажем неравенство (26). Пользуясь монотонностью оператора  $A$  (лемма 5.15.2), имеем

$$\begin{aligned} \langle As_{k+1} - As_k + \alpha_k s_{k+1} - \alpha_k s_k, s_{k+1} - s_k \rangle &= \\ &= \langle As_{k+1} - As_k, s_{k+1} - s_k \rangle + \alpha_k |s_{k+1} - s_k|^2 \geq \alpha_k |s_{k+1} - s_k|^2. \end{aligned}$$

Из леммы 2 следует

$$\langle As_k + \alpha_k s_k, s_{k+1} - s_k \rangle \geq 0, \quad \langle As_{k+1} + \alpha_{k+1} s_{k+1}, s_k - s_{k+1} \rangle \geq 0.$$

Сложим последние три неравенства. Получим

$$(\alpha_k - \alpha_{k+1}) \langle s_{k+1}, s_{k+1} - s_k \rangle \geq \alpha_k |s_{k+1} - s_k|^2.$$

Отсюда с помощью неравенства Коши–Буняковского и оценки (24) имеем

$$\alpha_k |s_{k+1} - s_k|^2 \leq |\alpha_k - \alpha_{k+1}| |s_{k+1}| |s_{k+1} - s_k| \leq |\alpha_k - \alpha_{k+1}| |z_*| |s_{k+1} - s_k|,$$

что равносильно (26).  $\square$

**3. Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1.** Сначала убедимся, что последовательность  $\{z_k\}$ ,  $\{\bar{z}_k\}$ , порожденная методом (8), такова, что

$$z_k \in S_0, \quad \bar{z}_k \in S_0, \quad |z_k - z_*|^2 \leq |z_0 - z_*|^2 + c_0(1 + |z_*|)^2. \quad (27)$$

Напоминаем, что множество  $S_0$  определено согласно (15),  $z_*$  — ближайшая к  $z = 0$  седловая точка функции  $L(u, \lambda)$  из (9) и

$$c_0 = 8 \left( 2 \sup_{k \geq 0} \frac{\delta_k}{\alpha_k} + 1 \right) \left( 1 - 24 \sup_{k \geq 0} \frac{\delta_k}{\alpha_k} \right)^{-1}.$$

Воспользуемся методом математической индукции. При  $k = 0$  соотношения (27), очевидно, выполнены. Предположим, что соотношения (27) справедливы при некотором  $k \geq 0$ , и докажем, что они будут выполняться для следующего номера  $k + 1$ .

Пользуясь характеристическим свойством проекции (теорема 4.4.1), равенства (8) запишем в виде вариационных неравенств

$$\begin{aligned} \langle \bar{z}_k - z_k + \beta(A_k z_k + \alpha_k z_k), z - \bar{z}_k \rangle &\geq 0, \\ \langle z_{k+1} - z_k + \beta(A_k \bar{z}_k + \alpha_k \bar{z}_k), z - z_{k+1} \rangle &\geq 0 \quad \forall z \in Z, \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (28)$$

В первом неравенстве (28) возьмем  $z = z_{k+1}$ , во втором —  $z = s_m$  и сложим получившиеся неравенства:

$$\begin{aligned} \langle \bar{z}_k - z_k, z_{k+1} - \bar{z}_k \rangle + \langle z_{k+1} - z_k, s_m - z_{k+1} \rangle + \beta \langle A_k z_k, z_{k+1} - \bar{z}_k \rangle + \\ + \beta \langle A_k \bar{z}_k, s_m - z_{k+1} \rangle + \alpha_k \beta \langle z_k, z_{k+1} - \bar{z}_k \rangle + \alpha_k \beta \langle \bar{z}_k, s_m - z_{k+1} \rangle \geq 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Пользуясь тождеством (5.15.18), преобразуем первые два слагаемых из (29):

$$\begin{aligned} \langle \bar{z}_k - z_k, z_{k+1} - \bar{z}_k \rangle + \langle z_{k+1} - z_k, s_m - z_{k+1} \rangle = \\ = \frac{1}{2} (|s_m - z_k|^2 - |s_m - z_{k+1}|^2 - |\bar{z}_k - z_k|^2 - |z_{k+1} - \bar{z}_k|^2), \end{aligned}$$

и перепишем (29) в виде

$$\begin{aligned} |z_{k+1} - s_m|^2 \leq |z_k - s_m|^2 - |\bar{z}_k - z_k|^2 - |z_{k+1} - \bar{z}_k|^2 + 2\beta \langle A_k z_k - A z_k, z_{k+1} - \bar{z}_k \rangle + \\ + 2\beta \langle A z_k - A \bar{z}_k, z_{k+1} - \bar{z}_k \rangle + 2\beta \langle A \bar{z}_k - A_k \bar{z}_k, z_{k+1} - \bar{z}_k \rangle + \\ + 2\beta \langle A_k \bar{z}_k - A \bar{z}_k, s_m - \bar{z}_k \rangle + 2\beta \langle A \bar{z}_k - A s_m, s_m - \bar{z}_k \rangle + \\ + 2\beta \langle A s_m + \alpha_m s_m, s_m - \bar{z}_k \rangle + 2\beta (\alpha_k - \alpha_m) \langle s_m, s_m - \bar{z}_k \rangle + \\ + 2\alpha_k \beta (\langle s_m, \bar{z}_k - s_m \rangle + \langle z_k, z_{k+1} - \bar{z}_k \rangle + \langle \bar{z}_k, s_m - z_{k+1} \rangle), \quad m = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (30)$$

Пользуясь элементарными неравенствами

$$\begin{aligned} ab \leq \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2, \quad (a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2, \quad (1+|a|^2)^{1/2} \leq 1+|a| \\ \forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \forall \varepsilon > 0, \end{aligned} \quad (31)$$

оценим слагаемые из правой части (30). При этом нам еще понадобится оценка погрешности, возникающей при замене оператора  $A$  из (5) оператором  $A_k$  из (7). С учетом условия (12) имеем

$$\begin{aligned} |A_k z - A z| = [(J'_k(u) + \lambda^\top g'_k(u) - J'(u) - \lambda^\top g'(u))^2 + (g_k(u) - g(u))^2]^{1/2} \leq \\ \leq [\delta_k^2(1+|\lambda|)^2 + \delta_k^2(1+|u|)^2]^{1/2} \leq \delta_k(4+2|z|^2)^{1/2} \leq 2\delta_k(1+|z|), \quad z \in Z. \end{aligned} \quad (32)$$

С помощью неравенств (24), (31), (32) первое слагаемое из правой части (30) можно оценить так:

$$\begin{aligned} 2\beta \langle A_k z_k - A z_k, z_{k+1} - \bar{z}_k \rangle &\leq 4\delta_k \beta (1+|z_k|) |z_{k+1} - \bar{z}_k| \leq \\ &\leq 4\delta_k \beta (1+|z_k - s_m| + |s_m|) |z_{k+1} - \bar{z}_k| \leq \\ &\leq 2\delta_k \beta |z_k - s_m|^2 + 4\delta_k \beta |z_{k+1} - \bar{z}_k|^2 + 2\delta_k \beta (1+|z_*|)^2. \end{aligned} \quad (33)$$

Аналогично оценивается шестое и седьмое слагаемые:

$$\begin{aligned} 2\beta\langle A_k \bar{z}_k - A_k \bar{z}_k, z_{k+1} - \bar{z}_k \rangle &\leq 4\delta_k \beta (1 + |\bar{z}_k - z_k| + |z_k - s_m| + |s_m|) |z_{k+1} - \bar{z}_k| \leq \\ &\leq 2\delta_k \beta |z_k - \bar{z}_k|^2 + 2\delta_k \beta |z_k - s_m|^2 + 6\delta_k \beta |z_{k+1} - \bar{z}_k|^2 + 2\delta_k \beta (1 + |z_*|)^2, \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} 2\beta\langle A_k \bar{z}_k - A \bar{z}_k, s_m - \bar{z}_k \rangle &\leq \\ &\leq 4\delta_k \beta (1 + |\bar{z}_k - z_k| + |z_k - s_m| + |s_m|) (|s_m - z_k| + |z_k - \bar{z}_k|) \leq \\ &\leq 10\delta_k \beta |z_k - \bar{z}_k|^2 + 8\delta_k \beta |z_k - s_m|^2 + 4\delta_k \beta (1 + |z_*|)^2. \end{aligned} \quad (35)$$

Оценим пятое слагаемое. В силу индуктивного предположения точки  $z_k, \bar{z}_k \in S_0$ , поэтому в (16) можем принять  $z = z_k, y = \bar{z}_k$ . А тогда

$$\begin{aligned} 2\beta\langle Az_k - A \bar{z}_k, z_{k+1} - \bar{z}_k \rangle &\leq 2\beta L_0 |z_k - \bar{z}_k| |z_{k+1} - \bar{z}_k| \leq \\ &\leq \beta L_0 (|z_k - \bar{z}_k|^2 + |z_{k+1} - \bar{z}_k|^2). \end{aligned} \quad (36)$$

В силу монотонности оператора  $A$  (см. лемму 5.15.2) для восьмого слагаемого имеем:

$$2\beta\langle A \bar{z}_k - As_m, s_m - \bar{z}_k \rangle \leq 0. \quad (37)$$

Из неравенства (23) (лемма 2) при  $z = \bar{z}_k$  получаем оценку девятого слагаемого:

$$2\beta\langle As_m + \alpha_m s_m, s_m - \bar{z}_k \rangle \leq 0. \quad (38)$$

Оценим десятое слагаемое

$$\begin{aligned} 2\beta(\alpha_k - \alpha_m)\langle s_m, s_m - \bar{z}_k \rangle &\leq 2\beta \left( |s_m - \bar{z}_k| \sqrt{\frac{\alpha_k}{4}} \right) \cdot \left( |\alpha_k - \alpha_m| \cdot \sqrt{\frac{4}{\alpha_k}} |s_m| \right) \leq \\ &\leq \beta \left( \frac{\alpha_k}{4} |s_m - \bar{z}_k|^2 + |s_m|^2 \frac{|\alpha_k - \alpha_m|^2}{\alpha_k} \cdot 4 \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{4} \beta \alpha_k (|s_m - z_k| + |z_k - \bar{z}_k|)^2 + 4\beta \frac{|\alpha_k - \alpha_m|^2}{\alpha_k} |s_m|^2 \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \alpha_k \beta |z_k - s_m|^2 + \frac{1}{2} \alpha_k \beta |z_k - \bar{z}_k|^2 + 4\beta \frac{|\alpha_k - \alpha_m|^2}{\alpha_k} |z_*|^2. \end{aligned} \quad (39)$$

Наконец, последние три слагаемых из правой части (30) преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned} 2\alpha_k \beta (\langle s_m, \bar{z}_k - s_m \rangle + \langle z_k, z_{k+1} - \bar{z}_k \rangle + \langle \bar{z}_k, s_m - z_{k+1} \rangle) &= \\ = 2\alpha_k \beta [\langle s_m, \bar{z}_k - s_m \rangle + \langle z_k, z_{k+1} - s_m \rangle + \langle z_k, s_m - \bar{z}_k \rangle + \langle \bar{z}_k, s_m - z_{k+1} \rangle] &= \\ = 2\alpha_k \beta [\langle s_m - z_k, \bar{z}_k - s_m \rangle + \langle z_k - \bar{z}_k, z_{k+1} - s_m \rangle] &= \\ = 2\alpha_k \beta [\langle s_m - z_k, \bar{z}_k - z_k + z_k - s_m \rangle + \langle z_k - \bar{z}_k, z_{k+1} - \bar{z}_k + \bar{z}_k - z_k + z_k - s_m \rangle] &= \\ = 2\alpha_k \beta [-|z_k - s_m|^2 - |z_k - \bar{z}_k|^2 + 2\langle s_m - z_k, \bar{z}_k - z_k \rangle + \langle z_k - \bar{z}_k, z_{k+1} - \bar{z}_k \rangle]. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом неравенств

$$\begin{aligned} 2\langle s_m - z_k, \bar{z}_k - z_k \rangle &\leq \frac{1}{2} |s_m - z_k|^2 + 2|\bar{z}_k - z_k|^2, \\ \langle z_k - \bar{z}_k, z_{k+1} - \bar{z}_k \rangle &\leq \frac{1}{2} |z_k - \bar{z}_k|^2 + \frac{1}{2} |z_{k+1} - \bar{z}_k|^2 \end{aligned}$$

получим

$$2\alpha_k\beta[\langle s_m, \bar{z}_k - s_m \rangle + \langle z_k, z_{k+1} - \bar{z}_k \rangle + \langle \bar{z}_k, s_m - z_{k+1} \rangle] \leq \\ \leq -\alpha_k\beta|z_k - s_m|^2 + 3\alpha_k\beta|z_k - \bar{z}_k|^2 + \alpha_k\beta|z_{k+1} - \bar{z}_k|^2. \quad (40)$$

Оценки (33)–(40) подставим в (30). Будем иметь

$$|z_{k+1} - s_m|^2 \leq |z_k - s_m|^2 \left(1 - \frac{1}{2}\alpha_k\beta + 12\beta\delta_k\right) + \\ + |z_k - \bar{z}_k|^2(-1 + \beta L_0 + 12\beta\delta_k + 4\alpha_k\beta) + |z_{k+1} - \bar{z}_k|^2(-1 + \beta L_0 + 10\beta\delta_k + \alpha_k\beta) + \\ + 8\delta_k\beta(1 + |z_*|)^2 + 4\beta\frac{|\alpha_k - \alpha_m|^2}{\alpha_k}|z_*|^2, \quad m = 0, 1, \dots \quad (41)$$

Из условий (17) следует, что в (41) коэффициенты при  $|z_k - \bar{z}_k|^2$ ,  $|z_{k+1} - \bar{z}_k|^2$  неположительны, и, заменив их нулями, из (41) получим

$$|z_{k+1} - s_m|^2 \leq |z_k - s_m|^2 \left(1 - \frac{1}{2}\alpha_k\beta + 12\beta\delta_k\right) + \\ + 8\delta_k\beta(1 + |z_*|)^2 + 4\beta\frac{(\alpha_k - \alpha_m)^2}{\alpha_k}|z_*|^2, \quad m = 0, 1, \dots \quad (42)$$

Перейдем в (42) к пределу при  $m \rightarrow \infty$ . С учетом равенств  $\lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_m = 0$ ,  $\lim_{m \rightarrow \infty} s_m = z_*$  (лемма 3) имеем

$$|z_{k+1} - z_*|^2 \leq |z_k - z_*|^2(1 - \mu_k) + \nu_k, \quad (43)$$

где  $\mu_k = \frac{1}{2}\alpha_k\beta\left(1 - 24\frac{\delta_k}{\alpha_k}\right)$ ,  $\nu_k = 4\alpha_k\beta\left(2\frac{\delta_k}{\alpha_k} + 1\right)(1 + |z_*|)^2$ . Из условий (13), (17) следует, что

$$0 < \mu_k \leq 1, \quad \frac{\nu_k}{\mu_k} = 8\left(2\frac{\delta_k}{\alpha_k} + 1\right)\left(1 - 24\frac{\delta_k}{\alpha_k}\right)^{-1}(1 + |z_*|)^2 \leq c_0(1 + |z_*|)^2, \\ c_0 = 8\left(2\sup_{k \geq 0} \frac{\delta_k}{\alpha_k} + 1\right)\left(1 - 24\sup_{k \geq 0} \frac{\delta_k}{\alpha_k}\right). \quad (44)$$

По предположению индукции (27) справедливо неравенство

$$|z_k - z_*|^2 \leq |z_0 - z_*|^2 + c_0(1 + |z_*|)^2. \quad (45)$$

Отсюда и из (43), (44) вытекает

$$|z_{k+1} - z_*|^2 \leq |z_0 - z_*|^2(1 - \mu_k) + (1 - \mu_k)c_0(1 + |z_*|)^2 + \mu_k c_0(1 + |z_*|)^2 = \\ = |z_0 - z_*|^2(1 - \mu_k) + c_0(1 + |z_*|)^2 \leq |z_0 - z_*|^2 + c_0(1 + |z_*|)^2, \quad (46)$$

т. е. неравенство (27) остается справедливым и для номера  $k + 1$ . Пользуясь неравенством  $\sqrt{a^2 + b^2} \leq |a| + |b|$ , из (46) получаем

$$|z_{k+1} - z_*| \leq |z_0 - z_*| + \sqrt{c_0}(1 + |z_*|). \quad (47)$$

Тогда

$$|z_{k+1} - z_0| \leq |z_{k+1} - z_*| + |z_* - z_0| \leq 2|z_0 - z_*| + \sqrt{c_0}(1 + |z_*|) \leq R_0. \quad (48)$$

Это означает, что  $z_{k+1} \in S_0$  из (15). Далее, для  $\bar{z}_{k+1}$  с учетом (16) при  $x = z_{k+1} \in S_0$ ,  $y = z_0 \in S_0$  и (32) имеем

$$\begin{aligned} |\bar{z}_{k+1} - z_0| &= |\mathcal{P}_Z(z_{k+1} - \beta(A_{k+1}z_{k+1} + \alpha_{k+1}z_{k+1}) - \mathcal{P}_Z z_0)| \leq \\ &\leq |z_{k+1} - z_0| + \beta|A_{k+1}z_{k+1} - Az_{k+1}| + \beta|Az_{k+1} - Az_0| + \beta|Az_0| + \alpha_{k+1}\beta|z_{k+1}| \leq \\ &\leq |z_{k+1} - z_0| + 2\delta_{k+1}\beta(1 + |z_{k+1} - z_0| + |z_0|) + \beta L_0|z_{k+1} - z_0| + \beta|Az_0| + \\ &+ \alpha_{k+1}\beta|z_{k+1} - z_0| + \alpha_{k+1}\beta|z_0| = |z_{k+1} - z_0|(1 + 2\delta_{k+1}\beta + \beta L_0 + \alpha_{k+1}\beta) + \\ &+ 2\delta_{k+1}\beta(1 + |z_0|) + \beta|Az_0| + \alpha_{k+1}\beta|z_0|. \end{aligned} \quad (49)$$

Из (17) следует, что

$$0 < \beta < \min\left\{1; \frac{1}{L_0}\right\}.$$

Отсюда и из (49) с учетом оценки (48) получим

$$\begin{aligned} |\bar{z}_{k+1} - z_0| &\leq (2|z_0 - z_*| + \sqrt{c_0}(1 + |z_*|))\left(2 + 2\sup_{k \geq 0} \delta_k + \sup_{k \geq 0} \alpha_k\right) + \\ &+ 2\sup_{k \geq 0} \delta_k(1 + |z_0|) + |Az_0| + \sup_{k \geq 0} \alpha_k|z_0| \leq R_0, \end{aligned}$$

т. е.  $\bar{z}_{k+1} \in S_0$ . Таким образом, доказаны включения

$$z_{k+1} \in S_0, \quad \bar{z}_{k+1} \in S_0. \quad (50)$$

Из (46), (50) следует, что соотношения (27) справедливы для следующего номера  $k + 1$ . Индуктивные рассуждения закончены, доказано, что соотношения (27) справедливы для всех  $k = 0, 1, \dots$

Остается доказать равенство (18). Положим в (42)  $m = k$ . Получим

$$\begin{aligned} |z_{k+1} - s_k|^2 &\leq |z_k - s_k|^2 \left(1 - \frac{1}{2}\alpha_k\beta + 12\beta\delta_k\right) + 8\delta_k\beta(1 + |z_*|)^2, \\ k &= 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (51)$$

Введем величину

$$b_k = |z_k - s_k|, \quad k = 0, 1, \dots,$$

где, напомним, точка  $z_k$  порождена методом (8),  $s_k$  — седловая точка функции  $T_k(u, \lambda)$  из (2). Тогда

$$b_{k+1} = |z_{k+1} - s_{k+1}| \leq |z_{k+1} - s_k| + |s_k - s_{k+1}|. \quad (52)$$

Из (52) с учетом (51), (26) получим

$$b_{k+1} \leq \sqrt{b_k^2 \left(1 - \frac{1}{2}\alpha_k\beta + 12\beta\delta_k\right) + 8\delta_k\beta(1 + |z_*|)^2} + \frac{|\alpha_k - \alpha_{k+1}|}{\alpha_k} |z_*|. \quad (53)$$

Возведем неравенство (53) в квадрат и воспользуемся неравенством

$$(a+b)^2 \leq a^2 + b^2 + a^2\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}b^2 = (1+\varepsilon)\left(a^2 + \frac{b^2}{\varepsilon}\right) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

при  $\varepsilon = \frac{1}{4}\alpha_k\beta$ . Будем иметь

$$\begin{aligned} b_{k+1}^2 &\leq \left(1 + \frac{\alpha_k\beta}{4}\right) \left[ b_k^2 \left(1 - \frac{1}{2}\alpha_k\beta + 12\beta\delta_k\right) + 8\delta_k\beta(1 + |z_*|)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{4}{\alpha_k\beta} \left(\frac{\alpha_k - \alpha_{k+1}}{\alpha_k} |z_*|\right)^2 \right] = b_k^2 \left(1 - \frac{1}{4}\alpha_k\beta + 12\beta\delta_k - \frac{1}{8}(\alpha_k\beta)^2 + 3\alpha_k\delta_k\beta\right) + \\ &\quad + \left(1 + \frac{\alpha_k\beta}{4}\right) 8\delta_k\beta(1 + |z_*|)^2 + \left(\frac{4}{\alpha_k\beta} + 1\right) \left(\frac{\alpha_k - \alpha_{k+1}}{\alpha_k}\right)^2 |z_*|^2, \quad k = 0, 1, \dots, \end{aligned}$$

или короче

$$b_{k+1}^2 \leq b_k^2(1 - \rho_k) + d_k, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (54)$$

где

$$\rho_k = \frac{1}{4}\alpha_k\beta \left(1 - 48\frac{\delta_k}{\alpha_k} + \frac{1}{2}\alpha_k\beta - 12\beta\delta_k\right), \quad (55)$$

$$\begin{aligned} d_k &= \alpha_k\beta \left[ \left(8\frac{\delta_k}{\alpha_k} + 2\beta\delta_k\right)(1 + |z_*|)^2 + \left(\frac{\alpha_k - \alpha_{k+1}}{\alpha_k^2\beta}\right)^2 (4 + \alpha_k\beta)|z_*|^2 \right], \\ &k = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (56)$$

Условия (13), (17) обеспечивают выполнение соотношений

$$0 < \rho_k \leq 1, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \rho_k = +\infty, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d_k}{\rho_k} = 0. \quad (57)$$

В силу леммы 2.6.6 из (54)–(57) следует, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0$ . Отсюда и из неравенств

$$|z_k - z_*| \leq |z_k - s_k| + |s_k - z_*| = b_k + |s_k - z_*|, \quad k = 0, 1, \dots$$

с учетом (25) имеем равенство (18). Так как величины  $\rho_k$ ,  $d_k$  в (54)–(57) не зависят от выбора конкретных реализаций  $J_k(u)$ ,  $g_k(u)$ ,  $J'_k(u)$ ,  $g'_k(u)$  из условий (12), то предел (18) является равномерным относительно этого выбора. Теорема 1 доказана.  $\square$

4. В практических задачах (1) более реальными, чем (12), являются условия: вместо точных  $g(u)$ ,  $J'(u)$ ,  $g'(u)$  известны их приближения  $g_\delta(u)$ ,  $J'_\delta(u)$ ,  $g'_\delta(u)$  такие, что

$$|g_\delta(u) - g(u)| \leq \delta(1 + |u|), \quad |J'_\delta(u) - J(u)| \leq \delta, \quad |g'_\delta(u) - g'(u)| \leq \delta, \quad u \in U_0, \quad (58)$$

где  $\delta > 0$  — известное число. Тогда в методе (8) оператор  $A_k z$  можно заменить на

$$A_\delta z = \begin{pmatrix} J'_\delta(u) + \lambda^\top g'_\delta(u) \\ -g_\delta(u) \end{pmatrix}, \quad (59)$$

и приближения  $z_k = z_k(\delta)$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , искать из условий

$$\bar{z}_k = \mathcal{P}_Z(z_k - \beta(A_\delta z_k + \alpha_k z_k)), \quad z_{k+1} = \mathcal{P}_Z(z_k - \beta(A_\delta \bar{z}_k + \alpha_k \bar{z}_k)), \quad (60)$$

$$k = 0, 1, \dots,$$

считая, что при любом  $\delta > 0$  начальное приближение  $z_0 \in Z$  в (60) выбирается таким же, что и в методе (8). Процесс (60) имеет смысл продолжать до наибольшего номера  $k = k(\delta)$ , при котором выполняются неравенства

$$\delta_k \geq \delta, \quad k = 0, 1, \dots, k(\delta), \quad (61)$$

где параметры  $\delta_k$  взяты из (13) (если  $\delta_0 \leq \delta$ , то  $k(\delta) \stackrel{\text{def}}{=} 0$ ). Разумность правила останова (61) процесса (60) вытекает из следующей теоремы.

**Теорема 2.** Пусть выполнены все условия теоремы 1, кроме условия (12). Пусть приближения  $g_\delta(u)$ ,  $J'_\delta(u)$ ,  $g'_\delta(u)$  удовлетворяют условиям (58), и точки  $z_0, z_1, \dots, z_{k(\delta)}$  получены методом (59)–(61). Тогда точка  $z_{k(\delta)} = z(\delta)$  такова, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} |z(\delta) - z_*| = 0, \quad (62)$$

где  $z_*$  — ближайшая к  $z = 0$  седловая точка функции Лагранжа (9). Предел (62) равномерен относительно выбора конкретных реализаций  $g_\delta(u)$ ,  $J'_\delta(u)$ ,  $g'_\delta(u)$  из (58).

**Доказательство** опирается на теорему 1 и проводится так же, как доказательство аналогичных теорем 8.2, 9.2.

Равенство (62) оправдывает сформулированное выше правило останова (61) процесса (60) при фиксированном уровне погрешностей  $\delta > 0$  в (58). Тем самым построен оператор  $R_\delta$ , который каждому набору входных данных  $g_\delta(u)$ ,  $J'_\delta(u)$ ,  $g'_\delta(u)$  из (58) ставит в соответствие точку  $z(\delta) = z_{k(\delta)}$ , определяемую методом (59)–(61). Равенство (62) означает, что такой оператор  $R_\delta$  является регуляризующим. Подчеркнем, что в определении оператора  $R_\delta$  параметры  $\{\alpha_k\}$ ,  $\{\delta\}$ ,  $\beta$  из (13), (14), (17) предполагаются фиксированными и не меняются при изменении  $\delta > 0$ . Замечание 5.15.3 сохраняет силу и здесь.

## § 11. Регуляризованный проксимальный метод

### 1. Рассмотрим задачу минимизации

$$J(u) \rightarrow \inf, \quad u \in U, \quad (1)$$

где  $U$  — выпуклое замкнутое множество из некоторого гильбертова пространства  $H$ , функция  $J(u)$  выпукла и полунепрерывна снизу на  $U$ . Введем функцию Тихонова

$$T_k(u) = J(u) + \alpha_k \|u\|^2, \quad \alpha_k > 0, \quad k = 0, 1, \dots$$

В качестве начальной возьмем какую-либо точку  $u_0 \in U$ . Пусть известно  $k$ -е приближение  $u_k \in U$  при некотором  $k \geq 0$ . Составим функцию

$$\Phi_k(u) = \frac{1}{2} \|u - u_k\|^2 + \beta_k T_k(u) \quad (2)$$

и определим следующее приближение  $u_{k+1}$  из условия

$$u_{k+1} \in U, \quad \Phi_k(u_{k+1}) = \inf_{u \in U} \Phi_k(u). \quad (3)$$

Нетрудно видеть, что метод (2), (3) получен из проксимального метода (см. § 5.6) заменой целевой функции  $J(u)$  на функцию Тихонова  $T_k(u)$ . Так как функция  $\Phi_k(u)$  сильно выпукла и полунепрерывна снизу на выпуклом и замкнутом множестве  $U$ , то точка  $u_{k+1}$  условием (3) определяется однозначно (теорема 8.2.10).

**Теорема 1.** Пусть  $U$  — выпуклое замкнутое множество из некоторого гильбертова пространства  $H$ , функция  $J(u)$  выпукла и полунепрерывна снизу на  $U$ ;  $J_* > -\infty$ ,  $U_* \neq \emptyset$ . Параметры  $\alpha_k, \beta_k$  таковы, что

$$\begin{aligned} \alpha_k > 0, \quad \beta_k > 0, \quad \sup_{k \geq 0} \beta_k < \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \beta_k = +\infty, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\alpha_k - \alpha_{k+1}|}{\alpha_k^3 \beta_k^2} = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}} = c_0 > 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Тогда последовательность  $\{u_k\}$ , определяемая методом (2), (3), при любом выборе  $u_0 \in U$  обладает свойством

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J(u_k) = J_*, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - u_*\| = 0, \quad (5)$$

где  $u_*$  — нормальное решение задачи (1).

**Доказательство.** При сделанных предположениях нормальное решение  $u_*$  задачи (1) существует и определяется однозначно (теорема 8.2.10). Рассмотрим последовательность  $\{v_k\}$ , определяемую условием

$$v_k \in U, \quad T_k(v_k) = \inf_U T_k(u), \quad k = 0, 1, \dots \quad (6)$$

Согласно теореме 4.4

$$\|v_k\| \leq \|u_*\|, \quad k = 0, 1, \dots, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} J(v_k) = J_*, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|v_k - u_*\| = 0. \quad (7)$$

Поскольку

$$\|u_k - u_*\| \leq \|u_k - v_k\| + \|v_k - u_*\|, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (8)$$

то для доказательства теоремы остается доказать, что  $\omega_k = \|u_k - v_k\| \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ .

Убедимся, что величины  $\omega_k$  удовлетворяют неравенствам

$$0 \leq \omega_{k+1} \leq (1 - s_k)\omega_k + d_k, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (9)$$

где

$$s_k = 1 - (1 + 2\alpha_k\beta_k)^{-1/2}, \quad d_k = \left( \frac{|\alpha_k - \alpha_{k+1}|}{\alpha_k + \alpha_{k+1}} \right)^{1/2} \|u_*\|. \quad (10)$$

Заметим, что

$$\omega_{k+1} = \|u_{k+1} - v_{k+1}\| \leq \|v_{k+1} - v_k\| + \|v_k - u_{k+1}\|, \quad k = 0, 1, \dots \quad (11)$$



Оценим сверху первое слагаемое из правой части неравенства (11). Так как функция  $T_k(u)$  сильно выпукла с константой сильной выпуклости  $\varkappa = 2\alpha_k > 0$ , то из (6) и теоремы 8.2.10 получаем

$$\alpha_k \|u - v_k\|^2 \leq T_k(u) - T_k(v_k) \quad \forall u \in U.$$

В частности, при  $u = v_{k+1}$  отсюда имеем

$$\alpha_k \|v_{k+1} - v_k\|^2 \leq T_k(v_{k+1}) - T_k(v_k).$$

Аналогично устанавливается неравенство

$$\alpha_{k+1} \|v_k - v_{k+1}\|^2 \leq T_{k+1}(v_k) - T_{k+1}(v_{k+1}).$$

Сложим два последних неравенства и получим

$$\begin{aligned} (\alpha_k + \alpha_{k+1}) \|v_k - v_{k+1}\|^2 &\leq (\alpha_k - \alpha_{k+1}) (\|v_{k+1}\|^2 - \|v_k\|^2) \leq \\ &\leq |\alpha_k - \alpha_{k+1}| \max\{\|v_k\|^2, \|v_{k+1}\|^2\}. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом (7) имеем

$$\|v_k - v_{k+1}\| \leq \left( \frac{|\alpha_k - \alpha_{k+1}|}{\alpha_k + \alpha_{k+1}} \right)^{1/2} \|u_*\|, \quad k = 0, 1, \dots \quad (12)$$

Оценим второе слагаемое из правой части (11). Функция (2) сильно выпукла с константой сильной выпуклости  $\varkappa = 1 + 2\alpha_k\beta_k$ , тогда из (3) и теоремы 8.2.10 следует, что

$$\left( \frac{1}{2} + \alpha_k\beta_k \right) \|u - u_{k+1}\|^2 \leq \Phi_k(u) - \Phi_k(u_{k+1}) \quad \forall u \in U. \quad (13)$$

Положим в (13)  $u = v_k$ . С учетом (6) имеем

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{2} + \alpha_k\beta_k \right) \|v_k - u_{k+1}\|^2 &\leq \Phi_k(v_k) - \Phi_k(u_{k+1}) \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \|v_k - u_k\|^2 - \frac{1}{2} \|u_{k+1} - u_k\|^2 + \beta_k (T_k(v_k) - T_k(u_{k+1})) \leq \frac{1}{2} \|v_k - u_k\|^2, \end{aligned}$$

или

$$\|v_k - u_{k+1}\| \leq (1 + 2\alpha_k\beta_k)^{-\frac{1}{2}} \|v_k - u_k\| \quad k = 0, 1, \dots \quad (14)$$

Подставив оценки (12), (14) в (11), получаем неравенства (9) с величинами  $s_k, d_k$  из (10). Из условий (4) и формул (10) для  $s_k, d_k$  вытекает, что  $0 < s_k < 1$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{s_k}{\alpha_k\beta_k} = 1$ ,  $\sum_{k=0}^{\infty} s_k = +\infty$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d_k}{s_k} = 0$ . Тогда  $\omega_k = \|v_k - u_k\| \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$  (лемма 2.6.6). Отсюда и из (7), (8) следуют равенства (5). Теорема 1 доказана.  $\square$

**2.** Теперь изложим регуляризованный проксимальный метод в предположении, что вместо точных значений функции  $J(u)$  нам известны приближения  $J_k(u)$ , удовлетворяющие неравенству

$$|J_k(u) - J(u)| \leq \delta_k (1 + \|u\|^2) \quad \forall u \in U, \quad \delta_k > 0, \quad k = 0, 1, \dots \quad (15)$$

Пусть при некотором  $k \geq 0$  известна точка  $z_k \in U$ . Введем функцию

$$\varphi_k(u) = \frac{1}{2} \|u - z_k\|^2 + \beta_k (J_k(u) + \alpha_k \|u\|^2), \quad u \in U. \quad (16)$$

Допустим, что, приближенно решая задачу минимизации:  $\varphi_k(u) \rightarrow \inf, u \in U$  каким-либо методом, нам удалось определить точку  $z_{k+1}$  из условия

$$z_{k+1} \in U, \quad \varphi_k(z_{k+1}) \leq \inf_U \varphi_k(u) + \varepsilon_k, \quad \varepsilon_k > 0. \quad (17)$$

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия теоремы 1, неравенства (15), параметры  $\alpha_k, \beta_k, \delta_k, \varepsilon_k$  положительны и наряду с (4) удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\delta_k}{\beta_k \alpha_k^2} = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_k}{\beta_k^2 \alpha_k^2} = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\beta_k}{\beta_{k+1}} = c_1 > 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\delta_k}{\delta_{k+1}} = c_2 > 0, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_{k+1}} = c_3 > 0, \quad \alpha_k \geq 2\delta_k, \quad k = 0, 1, \dots, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Тогда последовательность  $\{z_k\}$ , определяемая методом (16), (17) при любом выборе начального приближения  $z_0 \in U$ , сходится в норме  $H$  к нормальному решению  $u_*$  задачи (1),  $\lim_{k \rightarrow \infty} J(z_k) = J_*$ , равномерно относительно выбора реализаций  $J_k(u)$  из (15), точек  $z_{k+1}$  из (17).

**Доказательство.** Из (15), (16), (18) имеем

$$\varphi_k(u) \geq \frac{1}{2} \|u - z_k\|^2 + \beta_k (J(u) + \alpha_k \|u\|^2) - \beta_k \delta_k (1 + \|u\|^2) \equiv h_k(u), \quad u \in U,$$

где функция  $h_k(u)$  сильно выпукла на  $U$  с константой сильной выпуклости  $\varkappa_k = 1 + 2\beta_k(\alpha_k - \delta_k) \geq 1$ . Поэтому  $\inf_U \varphi_k(u) \geq \inf_U h_k(u) > -\infty$  и при любом  $\varepsilon_k > 0$  существует точка  $z_{k+1}$ , удовлетворяющая условиям (17). Пусть  $\{z_k\}$  — произвольная последовательность, полученная методом (16), (17) при каком угодно выборе функции  $J_k(u)$  из условия (15). Введем вспомогательную последовательность  $\{w_k\}$ , определяемую условием

$$w_{k+1} \in U, \quad \psi_k(w_{k+1}) = \inf_U \psi_k(u), \quad w_0 = z_0, \quad (19)$$

где  $\psi_k(u) = \frac{1}{2} \|u - z_k\|^2 + \beta_k (J(u) + \alpha_k \|u\|^2)$ . Так как функция  $\psi_k(u)$  сильно выпукла на  $U$  с константой сильной выпуклости  $\varkappa_k = 1 + 2\alpha_k \beta_k$ , то условие (19) однозначно определяет точку  $w_{k+1}$ , причем (теорема 8.2.10)

$$\left(\frac{1}{2} + \alpha_k \beta_k\right) \|u - w_{k+1}\|^2 \leq \psi_k(u) - \psi_k(w_{k+1}) \quad \forall u \in U. \quad (20)$$

Кроме того, к рассуждениям привлечем также последовательность  $\{u_k\}$ , определяемую условиями (2), (3) при  $u_0 = z_0$ . Тогда

$$\|z_k - u_*\| \leq \|z_k - w_k\| + \|w_k - u_k\| + \|u_k - u_*\|, \quad k = 0, 1, \dots \quad (21)$$

В силу (5)  $\|u_k - u_*\| \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Остается убедиться, что первое и второе слагаемые из правой части (21) также стремятся к нулю. С этой целью положим в (20)  $u = u_{k+1}$ , в (13) —  $u = w_{k+1}$  и сложим получившиеся неравенства:

$$\begin{aligned} (1 + 2\alpha_k\beta_k)\|u_{k+1} - w_{k+1}\|^2 &\leq \psi_k(u_{k+1}) - \psi_k(w_{k+1}) + \Phi_k(w_{k+1}) - \Phi_k(u_{k+1}) = \\ &= \frac{1}{2}(\|u_{k+1} - z_k\|^2 - \|w_{k+1} - z_k\|^2 + \|w_{k+1} - u_k\|^2 - \|u_{k+1} - u_k\|^2) = \\ &= \langle u_{k+1} - w_{k+1}, u_k - z_k \rangle, \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Отсюда, пользуясь элементарными неравенствами  $|ab| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ ,  $(a + b)^2 \leq (1 + \varepsilon)\left(a^2 + \frac{b^2}{\varepsilon}\right)$ ,  $\forall a, b, \varepsilon > 0$ , имеем

$$\begin{aligned} (1 + 2\alpha_k\beta_k)\|u_{k+1} - w_{k+1}\|^2 &\leq \frac{1}{2}\|u_{k+1} - w_{k+1}\|^2 + \frac{1}{2}(\|u_k - w_k\| + \|w_k - z_k\|)^2 \leq \\ &\leq \frac{1}{2}\|u_{k+1} - w_{k+1}\|^2 + \frac{1}{2}(1 + 2\alpha_k\beta_k)\left(\|u_k - w_k\|^2 + \frac{1}{\alpha_k\beta_k}\|w_k - z_k\|^2\right), \end{aligned}$$

или

$$(1 + 4\alpha_k\beta_k)\|u_{k+1} - w_{k+1}\|^2 \leq (1 + \alpha_k\beta_k)\left(\|u_k - w_k\|^2 + \frac{1}{\alpha_k\beta_k}\|w_k - z_k\|^2\right), \quad (22)$$

$$k = 0, 1, \dots$$

Далее, из (20) при  $u = z_{k+1}$  с учетом (15)–(17) получим

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} + \alpha_k\beta_k\right)\|z_{k+1} - w_{k+1}\|^2 &\leq \psi_k(z_{k+1}) - \psi_k(w_{k+1}) \leq \\ &\leq \varphi_k(z_{k+1}) - \varphi_k(w_{k+1}) + \beta_k\delta_k(2 + \|z_{k+1}\|^2 + \|w_{k+1}\|^2) \leq \\ &\leq \varepsilon_k + 2\beta_k\delta_k + \beta_k\delta_k(2\|z_{k+1} - w_{k+1}\|^2 + 3\|w_{k+1}\|^2) \leq \\ &\leq \varepsilon_k + 2\beta_k\delta_k + 2\beta_k\delta_k\|z_{k+1} - w_{k+1}\|^2 + \\ &+ 6\beta_k\delta_k\|w_{k+1} - u_{k+1}\|^2 + 6\beta_k\delta_k\|u_{k+1}\|^2, \quad k = 0, 1, \dots \quad (23) \end{aligned}$$

Так как в силу теоремы 1 имеем  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - u_*\| = 0$ , то  $\sup_{k \geq 0} \|u_k\| = R < \infty$ .

Тогда из неравенства (23) с учетом условия  $\alpha_k \geq 2\delta_k$  получим

$$\|z_{k+1} - w_{k+1}\|^2 \leq 2\varepsilon_k + 4\beta_k\delta_k(1 + 3R^2) + 12\beta_k\delta_k\|w_{k+1} - u_{k+1}\|^2, \quad k = 0, 1, \dots,$$

или

$$\|z_k - w_k\|^2 \leq 2\varepsilon_{k-1} + 4\beta_{k-1}\delta_{k-1}(1 + 3R^2) + 12\beta_{k-1}\delta_{k-1}\|w_k - u_k\|^2, \quad (24)$$

$$k = 0, 1, \dots$$

Подставим оценку (24) в правую часть (22). Получим

$$\begin{aligned} (1 + 4\alpha_k\beta_k)\|u_{k+1} - w_{k+1}\|^2 &\leq \\ &\leq \left(1 + \alpha_k\beta_k + 12\beta_{k-1}\delta_{k-1}(1 + \alpha_k\beta_k)\frac{1}{\alpha_k\beta_k}\right)\|u_k - w_k\|^2 + \\ &+ (2\varepsilon_{k-1} + 4\beta_{k-1}\delta_{k-1}(1 + 3R^2))(1 + \alpha_k\beta_k)\frac{1}{\alpha_k\beta_k}, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Отсюда заключаем, что величина  $\omega_k = \|u_k - w_k\|^2$  также удовлетворяет неравенству (9), где

$$\begin{aligned} s_k &= \frac{3\alpha_k\beta_k}{1+4\alpha_k\beta_k} \left( 1 - \frac{4\beta_{k-1}\delta_{k-1}}{\alpha_k^2\beta_k^2} (1 + \alpha_k\beta_k) \right), \\ d_k &= \alpha_k\beta_k(1 + \alpha_k\beta_k) \left( \frac{2\varepsilon_{k-1}}{\alpha_k^2\beta_k^2} + \frac{4\beta_{k-1}}{\beta_k} \frac{\delta_{k-1}}{\beta_k\alpha_k^2} (1 + 3R^2) \right), \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (25)$$

Из условий (4), (18) следует, что  $0 < s_k \leq 1$  для всех достаточно больших номеров  $k$ . Поскольку  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{s_k}{\alpha_k\beta_k} = 3$ , то из  $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k\beta_k = +\infty$  вытекает, что  $\sum_{k=0}^{\infty} s_k = +\infty$ . Кроме того,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d_k}{s_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d_k}{\alpha_k\beta_k} = 0$ . Тогда  $\omega_k = \|u_k - w_k\|^2 \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$  (лемма 2.6.6), а из (24) имеем  $\|z_k - w_k\| \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Поэтому из (5), (21) получим

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|z_k - u_*\| = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} J(z_k) = J_*.$$

Заметим, что сходимость здесь равномерная относительно выбора реализаций  $J_k(u)$  из (15), точек  $z_{k+1}$  из (17), так как величины  $\alpha_k, \beta_k, \delta_k, \varepsilon_k$  в (9), (10), (24), (25) от перечисленных реализаций не зависят. Таким образом, теорема 2 доказана.  $\square$

В качестве последовательностей, удовлетворяющих условиям (4), (18), можно, например, взять

$$\beta_k = 1, \quad \alpha_k = 2c(k+1)^{-\alpha}, \quad \delta_k = c(k+1)^{-\delta}, \quad \varepsilon_k = (k+1)^{-\varepsilon}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (26)$$

где  $\delta > 0, \varepsilon > 0, 0 < 2\alpha < \min\{\delta; \varepsilon; 1\}, c > 0$ .

**3.** В практических задачах (1) более реальным, чем (15), представляется следующее условие: при каждом фиксированном  $u \in U$  вместо точного значения  $J(u)$  может быть вычислено его приближение  $J_\delta(u)$  такое, что

$$|J_\delta(u) - J(u)| \leq \delta(1 + \|u\|^2), \quad u \in U, \quad (27)$$

где  $\delta > 0$  известное число. Тогда в методе (16), (17) приближение  $J_k(u)$  естественно заменить на  $J_\delta(u)$  и вместо функции  $\varphi_k(u)$  из (16) пользоваться функцией

$$\varphi_k(u) = \frac{1}{2}\|u - z_k\|^2 + \beta_k(J_\delta(u) + \alpha_k\|u\|^2), \quad u \in U, \quad k = 0, 1, \dots \quad (28)$$

Сформулируем правило останова процесса (17), (28) в зависимости от уровня погрешности  $\delta$  в (27). Будем считать, что зафиксированы какая-либо начальная точка и параметры  $\alpha_k, \beta_k, \delta_k, \varepsilon_k$ , удовлетворяющие условиям (4), (18) (например, как в (26)), и пусть  $\delta < \delta_0$ . Тогда процесс (17), (28) можно продолжать до такого наибольшего номера  $k = k(\delta)$ , при котором выполняются неравенства

$$\delta_k \geq \delta, \quad k = 0, 1, \dots, k(\delta). \quad (29)$$

Поскольку  $\{\delta_k\} \rightarrow 0, \delta_0 > \delta$ , то такой номер  $k(\delta)$  непременно найдется. Оправданием сформулированного правила останова (29) процесса (17), (28) служит

**Теорема 3.** Пусть выполнены все условия теорем 1, 2, кроме условия (15), пусть приближение  $J_\delta(u)$  функции  $J(u)$  удовлетворяет условию (27). Тогда точка  $u(\delta) = z_{k(\delta)}$ , полученная методом (17), (28), (29), обладает свойством

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} J(u(\delta)) = J_*, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \|u(\delta) - u_*\| = 0,$$

где  $u_*$  — нормальное решение задачи (1).

**Доказательство** опирается на теорему 2 и проводится так же, как и доказательство аналогичной теоремы 8.2.  $\square$

Из теоремы 3 следует, что оператор  $R_\delta$ , который каждому набору  $(J_\delta(u), \delta)$  входных данных из (27) ставит в соответствие точку  $u(\delta) = z_{k(\delta)}$ , определяемую методом (17), (28), (29), является регуляризующим оператором задачи (1) в метрике  $H$  (определение 6.1).

Заметим, что для задачи (1), когда множество  $U$  имеет вид (8.2) и задано с погрешностью, аналогичный регуляризованный проксимальный метод в сочетании со штрафными функциями был исследован в [168]. Другие более тонкие варианты регуляризованного проксимального метода, в которых для решения задач вида (16) используются те или иные конкретные методы минимизации, изучались в [799].

## § 12. Регуляризованный метод Ньютона

Для решения задачи

$$J(u) \rightarrow \inf, \quad u \in U \quad (1)$$

в § 5.9 была описана общая схема метода Ньютона, исследована сходимость некоторых его вариантов. Ниже будет проиллюстрировано, как можно регуляризовать вариант (5.9.6) этого метода. Напомним, что согласно (5.9.6) по известному приближению  $u_k \in U$  следующее приближение  $u_{k+1} \in U$  определяется как решение задачи:

$$J_k(u) \equiv \langle J'(u_k), u - u_k \rangle + \frac{1}{2} \langle J''(u_k)(u - u_k), u - u_k \rangle \rightarrow \inf, \quad u \in U, \quad k = 0, 1, \dots,$$

считая, что  $U$  — выпуклое множество, функция  $J(u)$  выпукла на  $U$ . Эту задачу можно записать в виде равносильного вариационного неравенства: найти точку  $z = u_{k+1}$  из условий:

$$z \in U: \langle J'_k(z), u - z \rangle \equiv \langle J'(u_k) + J''(u_k)(z - u_k), u - z \rangle \geq 0 \quad \forall u \in U. \quad (2)$$

**1.** Отталкиваясь от (2), опишем регуляризованный метод Ньютона применительно к задаче (1), где

$$U = \{u \in U_0: g_i(u) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m; \quad g_i(u) = 0, \quad i = m + 1, \dots, s\}, \quad (3)$$

$U_0$  — заданное множество из гильбертова пространства  $H$ , функции  $J(u)$ ,  $g_1(u), \dots, g_s(u)$  определены и дважды непрерывно дифференцируемы на  $U_0$ .

Для учета ограничений типа равенств и неравенств, задающих множество (3), воспользуемся простейшей штрафной функцией

$$P(u) = \sum_{i=1}^s (g_i^+(u))^p, \quad u \in U_0, \quad (4)$$

где  $g_i^+ = \max\{g_i; 0\}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ;  $g_i^+ = |g_i|$ ,  $i = m+1, \dots, s$ . В качестве стабилизатора возьмем функцию  $\Omega(u) = \frac{1}{2}\|u\|_H^2$ . Составим функцию Тихонова:

$$T_k(u) = J(u) + A_k P(u) + \frac{\alpha_k}{2} \|u\|^2, \quad (5)$$

$$u \in U_0, \quad A_k \geq 1, \quad \alpha_k > 0, \quad k = 0, 1, \dots$$

Если в (4) параметр  $p$  достаточно велик (например,  $p = 4$ ), то при сделанных предположениях функция (5) дважды непрерывно дифференцируема на  $U_0$ , причем

$$T'_k(u) = J'(u) + A_k P'(u) + \alpha_k u, \quad T''_k(u) = J''(u) + A_k P''(u) + \alpha_k I, \quad (6)$$

$$u \in U_0, \quad k = 0, 1, \dots,$$

где  $I$  — единичный оператор на  $H$ .

Перепишем вариационное неравенство (2), заменив в нем множество  $U$  на  $U_0$ , функцию  $J(u)$  на  $T_k(u)$ :

$$\langle T'_k(u_k) + T''_k(u_k)(z - u_k), u - z \rangle \geq 0 \quad \forall u \in U_0. \quad (7)$$

Предположим, что вместо точных значений производных  $J'(u)$ ,  $P'(u)$ ,  $J''(u)$ ,  $P''(u)$  известны их приближения  $J'_k(u)$ ,  $P'_k(u) \in H$ ,  $J''_k(u)$ ,  $P''_k(u) \in \mathcal{L}(H \rightarrow H)$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , такие, что

$$\max\{\|J'_k(u) - J'(u)\|; \|P'_k(u) - P'(u)\|\} \leq \delta_{1k}(1 + \|u\|), \quad u \in U_0, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (8)$$

$$\max\{\|J''_k(u) - J''(u)\|; \|P''_k(u) - P''(u)\|\} \leq \delta_{2k}, \quad u \in U_0, \quad k = 0, 1, \dots \quad (9)$$

Тогда в качестве приближений для производных (6) можем взять:

$$t'_k(u) = J'_k(u) + A_k P'_k(u) + \alpha_k u, \quad t''_k(u) = J''_k(u) + A_k P''_k(u) + \alpha_k I, \quad (10)$$

$$u \in U_0, \quad k = 0, 1, \dots$$

Из (6), (8)–(10) с учетом условия  $A_k \geq 1$  имеем

$$\|t'_k(u) - T'_k(u)\| \leq 2\delta_{1k} A_k (1 + \|u\|), \quad \|t''_k(u) - T''_k(u)\| \leq 2\delta_{2k} A_k, \quad (11)$$

$$u \in U_0, \quad k = 0, 1, \dots$$

Теперь можем дать формальное описание регуляризованного метода Ньютона для поиска решения задачи (1)–(3) с неточными входными данными. Пусть задано начальное приближение  $u_0 \in U_0$ . Если приближение  $u_k$ ,  $k \geq 0$ , известно, то следующее приближение  $u_{k+1} \in U_0$  определим из условий

$$\|u_{k+1} - \tilde{u}_{k+1}\| \leq \varepsilon_k (1 + \|u_k\|), \quad (12)$$

где  $z = \tilde{u}_{k+1} \in U_0$  — решение вариационного неравенства

$$\langle t'_k(u_k) + t''_k(u_k)(z - u_k), u - z \rangle \geq 0 \quad \forall u \in U_0, \quad (13)$$

полученного из (7) заменой точных  $T'_k(u_k)$ ,  $T''_k(u_k)$  на их приближения из (11).

Условие (12) означает, что вариационное неравенство (13) мы решаем приближенно и вместо его точного решения  $z = \tilde{u}_{k+1}$  берем какую-либо точку  $u_{k+1} \in U_0$ , удовлетворяющую неравенству (12), где  $\varepsilon_k \geq 0$  — характеристика возникающей при этом погрешности.

Заметим, что если в (3)  $U_0 \equiv H$ , то вариационное неравенство (13) равносильно операторному уравнению

$$t''_k(u_k)(z - u_k) = -t'_k(u_k)$$

относительно неизвестной точки  $z$ . Отсюда в случае существования обратного оператора  $(t''_k(u_k))^{-1}$  получаем «привычное» явное выражение для  $(k+1)$ -го приближения метода Ньютона (ср. с (5.9.8))

$$u_{k+1} = u_k - (t''_k(u_k))^{-1}t'_k(u_k),$$

соответствующего случаю  $\varepsilon_k = 0$  в (12).

## 2. Исследуем сходимость метода (12), (13).

**Теорема 1.** Пусть

1)  $U_0$  — выпуклое замкнутое множество из гильбертова пространства  $H$  с непустой внутренностью  $\text{int } U_0$ , функции  $J(u)$ ,  $g_i(u)$ ,  $i = 1, \dots, s$ , дважды непрерывно дифференцируемы по Фреше на  $U_0$ , функции  $J(u)$ ,  $g_i(u)$ ,  $i = 1, \dots, t$ ,  $|g_i(u)|$ ,  $i = t+1, \dots, s$ , выпуклы на  $U_0$ ;  $J_* > -\infty$ ,  $U_* \neq \emptyset$ ,  $u_*$  — нормальное решение задачи (1), (3); выполнено условие Липшица

$$\max\{\|J''(u) - J''(v)\|; \|P''(u) - P''(v)\|\} \leq L\|u - v\| \quad \forall u, v \in U_0; \quad (14)$$

задача (1), (3) имеет сильно согласованную постановку, т. е. существуют числа  $c_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, s$ ,  $\nu > 0$ , такие, что

$$-\infty < J_* \leq J(u) + \sum_{i=1}^s c_i (g_i^+(u))^\nu, \quad u \in U_0; \quad p \geq \nu, \quad p > 2, \quad (15)$$

где  $p$  — параметр функции (4);

2) вместо точных производных  $J'(u)$ ,  $P'(u)$ ,  $J''(u)$ ,  $P''(u)$  известны их приближения  $J'_k(u)$ ,  $P'_k(u)$ ,  $J''_k(u)$ ,  $P''_k(u)$ ,  $u \in U_0$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , удовлетворяющие условиям (8), (9);

3) числовые последовательности  $\{\alpha_k\}$ ,  $\{A_k\}$ ,  $\{\varepsilon_k\}$ ,  $\{\delta_{1k}\}$ ,  $\{\delta_{2k}\}$  положительны и таковы, что

$$A_k \geq 1, \quad \frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}} \leq 2, \quad \frac{A_{k+1}}{A_k} \leq 2, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (16)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\alpha_k + A_k^{-1} + \varepsilon_k + \delta_{1k} + \delta_{2k}) = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k A_k^{\frac{p}{p-\nu}} = +\infty$$

(при  $p = \nu$  последнее условие не нужно),

$$\frac{16\delta_{1k}A_k + 18\delta_{2k}A_k}{\alpha_k} + 4\varepsilon_k + \left( \frac{32L\varepsilon_k A_k}{\alpha_k} + \frac{128L\delta_{1k}A_k^2}{\alpha_k^2} \right) (1 + R) + \\ + \frac{32LR|\alpha_k - \alpha_{k+1}|A_k}{\alpha_k^2} + \frac{32L\tilde{R}|A_k - A_{k+1}|A_k}{\alpha_k^2} \leq \frac{1}{2}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (17)$$

где

$$R = \sup_{k \geq 0} R_k, \quad R_k = \left( \|u_*\|^2 + \frac{B}{\alpha_k A_k^{\frac{p}{p-\nu}}} \right)^{1/2} \quad \text{при } p > \nu, \\ R_k = \|u_*\| \quad \text{при } p = \nu, \quad (18) \\ B = (p - \nu)p^{-\frac{p}{p-\nu}} \nu^{\frac{\nu}{p-\nu}} \left( \sum_{i=1}^s |c_i|^{\frac{p}{p-\nu}} \right), \quad \tilde{R} = \sup_{\|v\| \leq R} \|P'(v)\|;$$

4) начальное приближение  $u_0 \in U_0$  таково, что

$$\|u_0 - v_0\| \leq \frac{1}{8L} \frac{\alpha_0}{A_0}, \quad (19)$$

где  $v_0 \in U_0$ ,  $T_0(v_0) = \min_{u \in U_0} T_0(u)$ .

Тогда метод (12), (13) определяет последовательность  $\{u_k\}$ , для которой

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - u_*\| = 0, \quad (20)$$

причем сходимость в (20) равномерная относительно выбора  $J'_k(u)$ ,  $P'_k(u)$ ,  $J''_k(u)$ ,  $P''_k(u)$  из (8), (9).

Для доказательства теоремы 1 нам понадобятся следующие две леммы.

**Л е м м а 1.** Пусть  $U_0$  — выпуклое множество из гильбертова пространства  $H$ ,  $\text{int } U_0 \neq \emptyset$ , функция  $J(u)$  дважды непрерывно дифференцируема на  $U_0$ . Тогда для выпуклости функции  $J(u)$  на  $U_0$  необходимо и достаточно, чтобы

$$\langle J''(u)h, h \rangle \geq 0 \quad \forall h \in H, \quad \forall u \in U_0. \quad (21)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о** этой леммы проводится по той же схеме, что и теоремы 4.2.5. При этом мы будем опираться на теоремы 4.1.3, 4.2.4, формулировка и доказательство которых остаются справедливыми в любых гильбертовых пространствах.

**Н е о б х о д и м о с т ь.** Пусть  $J(u)$  выпукла на  $U_0$ . Тогда согласно теореме 4.2.4

$$\langle J'(v) - J'(u), v - u \rangle \geq 0 \quad \forall u, v \in U_0. \quad (22)$$

Сначала установим, что лемма справедлива для любых  $u \in \text{int } U_0$ . Тогда для любого  $h \in H$  существует число  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(h) > 0$  такое, что  $v = u + \varepsilon h \in U_0 \quad \forall \varepsilon, 0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ . Положим в (22)  $v = u + \varepsilon h$  и воспользуемся формулой (8.3.10):

$$0 \leq \langle J'(u + \varepsilon h) - J'(u), \varepsilon h \rangle = \varepsilon^2 \langle J''(u + \theta \varepsilon h)h, h \rangle, \\ 0 < \theta < 1, \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_0.$$



Разделив на  $\varepsilon^2 > 0$  и устремив  $\varepsilon \rightarrow +0$ , с учетом непрерывности  $J''(u)$  отсюда получим неравенство (21).

Если  $u$  — граничная точка множества  $U_0$ , то существует последовательность  $\{u_k\} \in \text{int } U_0$  такая, что  $\|u_k - u\| \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$  (теорема 4.1.3). По доказанному  $\langle J''(u_k)h, h \rangle \geq 0 \quad \forall h \in H, k = 0, 1, \dots$ . Отсюда при  $k \rightarrow \infty$  получим (21) и для граничных точек множества  $U_0$ .

**Д о с т а т о ч н о с т ь.** Пусть функция  $J(u)$  дважды непрерывно дифференцируема на  $U_0$  и удовлетворяет условию (21). Возьмем произвольные точки  $u, v \in U_0$ . Пользуясь формулой конечных приращений (8.3.11) и неравенством (21) при  $h = u - v$ , имеем

$$\begin{aligned} \langle J'(u) - J'(v), u - v \rangle &= \int_0^1 \langle J''(v + t(u - v))(u - v), u - v \rangle dt = \\ &= \int_0^1 \langle J''(w(t))(w(t) - v), w(t) - v \rangle \frac{1}{t^2} dt \geq 0, \end{aligned}$$

где  $w(t) = v + t(u - v)$ . Это значит, что справедливо неравенство (22). Отсюда и из теоремы 4.2.4 следует, что функция  $J(u)$  выпукла на  $U_0$ .  $\square$

**Л е м м а 2.** Пусть  $U_0$  — выпуклое замкнутое множество из гильбертова пространства  $H$ ,  $F = F(z): H \rightarrow H$  — сильно монотонный оператор на  $U_0$ , т. е.

$$\langle F(u) - F(v), u - v \rangle \geq \mu \|u - v\|^2 \quad \forall u, v \in U_0, \quad \mu = \text{const} > 0, \quad (23)$$

$u$ , кроме того,

$$\|F(u) - F(v)\| \leq L_1 \|u - v\| \quad \forall u, v \in U_0, \quad L_1 = \text{const} > 0. \quad (24)$$

Тогда вариационное неравенство

$$\langle F(z), v - z \rangle \geq 0 \quad \forall u \in U_0, \quad (25)$$

имеет, притом единственное, решение  $z$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Введем оператор

$$Az = \mathcal{P}_{U_0}(z - tF(z)), \quad t > 0, \quad (26)$$

где  $\mathcal{P}_{U_0}(u)$  — проекция точки  $u \in H$  на множество  $U_0$ . Убедимся, что точка  $z = z_* \in H$  является решением вариационного неравенства (25) тогда и только тогда, когда  $z_*$  — неподвижная точка оператора (26), т. е.

$$z_* = Az_*. \quad (27)$$

В самом деле, если  $\langle F(z_*), v - z_* \rangle \geq 0 \quad \forall v \in U_0$ , то

$$\langle z_* - (z_* - tF(z_*)), v - z_* \rangle \geq 0 \quad \forall v \in U_0, \quad \forall t > 0. \quad (28)$$

Точка  $z_*$ , удовлетворяющая неравенству (28), согласно теореме 4.4.1 (п. 2) является проекцией точки  $z_* - tF(z_*)$  на множество  $U_0$ , т. е.  $z_* = Az_*$ . Проведенные рассуждения обратимы, т. е.  $z_*$  из (27) в силу той же теоремы 4.4.1 удовлетворяет неравенству (28), что равносильно (25) при  $z = z_*$ .

Докажем, что оператор (26) является сжимающим при всех достаточно малых  $t > 0$ . В самом деле, пользуясь условиями (23), (24) и теоремой 4.4.2, имеем

$$\begin{aligned} \|Au - Av\|^2 &= \|\mathcal{P}_{U_0}(u - tF(u)) - \mathcal{P}_{U_0}(v - tF(v))\|^2 \leq \\ &\leq \|(u - v) - t(F(u) - F(v))\|^2 = \|u - v\|^2 - 2t\langle F(u) - F(v), u - v \rangle + \\ &\quad + t^2\|F(u) - F(v)\|^2 \leq \|u - v\|^2(1 - 2t\mu + L_1^2 t^2). \end{aligned}$$

Так как  $q^2(t) \equiv 1 - 2t\mu + L_1^2 t^2 \in (0, 1)$  при всех  $0 < t < \frac{2\mu}{L_1^2}$ , то  $\|Au - Av\| \leq q(t)\|u - v\|$ ,  $0 < q(t) < 1$ . Таким образом, оператор (26) сжимающий при малых  $t > 0$  и обладает [393] единственной неподвижной точкой  $z_*$ , которая является решением вариационного неравенства (25).  $\square$

Заметим, что доказательство леммы 2 полностью аналогично доказательству теоремы 5.2.3; отличие лишь в том, что здесь не предполагается, что оператор  $F(u)$  является производной Фреше какой-либо функции  $J(u)$ .

**Доказательство теоремы 1.** При сделанных предположениях множества  $U$ ,  $U_*$  выпуклы, замкнуты, сильно выпуклая функция  $\Omega(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2$  достигает нижней грани на  $U_*$  в единственной точке  $u_*$ , т. е. нормальное решение  $u_*$  задачи (1), (3) существует и единственно. Кроме того, функция  $T_k(u)$ , определенная формулой (5), сильно выпукла на выпуклом замкнутом множестве  $U_0$ , поэтому условия

$$v_k \in U_0, \quad T_k(v_k) = \inf_{u \in U_0} T_k(u) \quad (29)$$

однозначно определяют точку  $v_k$  при каждом  $k = 0, 1, \dots$ . Согласно теореме 8.3.3 точка  $v_k$ , удовлетворяющая условию (29), является решением вариационного неравенства

$$\langle T'_k(v_k), u - v_k \rangle \geq 0 \quad \forall u \in U_0. \quad (30)$$

Справедливы соотношения (см. (8.17), (8.18), (8.24), (8.25))

$$\|v_k\| \leq R_k, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (31)$$

$$\|v_k - v_m\| \leq \frac{|\alpha_k - \alpha_m|R + |A_k - A_m|\tilde{R}}{\alpha_k}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (32)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J(v_k) = J_*, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|v_k - v_*\| = 0, \quad (33)$$

где постоянные  $R_k$ ,  $R$ ,  $\tilde{R}$  определены формулами (18).

Докажем, что вариационное неравенство (13) при каждом  $k = 0, 1, \dots$  однозначно определяет точку  $t = \tilde{u}_{k+1} \in U_0$ . Из выпуклости и дифференцируемости функций  $J(u)$ ,  $P(u)$ , сильной выпуклости функции  $\frac{1}{2}\|u\|^2$ , формулы (6)

для  $T'_k(u)$  имеем

$$\langle T'_k(u) - T'_k(v), u - v \rangle \geq \alpha_k \|u - v\|^2 \quad \forall u, v \in U_0, \quad k = 0, 1, \dots \quad (34)$$

Из леммы 1, формулы (6) для  $T''_k(u)$  следует

$$\langle T''_k(u)h, h \rangle \geq \alpha_k \|h\|^2 \quad \forall u \in U_0, \quad h \in H, \quad k = 0, 1, \dots \quad (35)$$

С учетом оценок (11), (32) и неравенства  $2\delta_{2k}A_k \leq \frac{1}{2}\alpha_k$ , вытекающего из условия (17), получаем

$$\begin{aligned} \langle t''_k(u)h, h \rangle &= \langle (t''_k(u) - T''_k(u))h, h \rangle + \langle T''_k(u)h, h \rangle \geq \\ &\geq (\alpha_k - 2\delta_{2k}A_k) \|h\|^2 \geq \frac{1}{2}\alpha_k \|h\|^2 \quad \forall u \in U_0, \quad h \in H, \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (36)$$

Проверим, что оператор

$$F(t) = F_k(z) = t'_k(u_k) + t''_k(u_k)(z - u_k)$$

вариационного неравенства (13) удовлетворяет условиям леммы 2. Из оценок (36) имеем

$$\begin{aligned} \langle F_k(u) - F_k(v), u - v \rangle &= \langle t''_k(u_k)(u - v), u - v \rangle \geq \frac{1}{2}\alpha_k \|u - v\|^2 \\ &\quad \forall u, v \in U_0, \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Это значит, что условие (23) выполняется при  $\mu = \frac{1}{2}\alpha_k > 0$ . Далее

$$\|F_k(u) - F_k(v)\| = \|t''_k(u_k)(u - v)\| \leq \|t''_k(u_k)\| \|u - v\| \quad \forall u, v \in U_0, \quad k = 0, 1, \dots$$

Как видим, условие Липшица (24) также имеет место с постоянной  $L_1 = \|t''_k(u_k)\|$ . Отсюда и из леммы 2 следует, что вариационное неравенство (13) при каждом  $k$  однозначно определяет точку  $z = \tilde{u}_{k+1}$ . Как было замечено выше, необязательно точно знать точку  $\tilde{u}_{k+1}$ , в качестве следующего приближения  $u_{k+1}$  достаточно взять любую точку, удовлетворяющую неравенству (12). Тем самым существование последовательности  $\{u_k\}$ , порождаемой методом (12), (13), установлено.

Наряду с (13) рассмотрим вариационное неравенство

$$\langle T'_k(u_k) + T''_k(u_k)(z - u_k), u - z \rangle \geq 0 \quad \forall u \in U_0, \quad (37)$$

полученной из (13) заменой приближенных операторов  $t'_k(u_k)$ ,  $t''_k(u_k)$  точками  $T'_k(u_k)$ ,  $T''_k(u_k)$ . Оператор  $F(z) = T'_k(u_k) + T''_k(u_k)(z - u_k)$  неравенства (37) удовлетворяет условию (23) в силу оценки (35), а условие (24), очевидно, выполняется с постоянной  $L_1 = \|T''_k(u_k)\|$ . Отсюда и из леммы 2 следует, что вариационное неравенство (37) имеет, притом единственное, решение  $z = w_{k+1} \in U_0$ .

Положим в (30)  $u = w_{k+1}$ , в (37)  $z = w_{k+1}$ ,  $u = v_k$ :

$$\langle T'_k(v_k), w_{k+1} - v_k \rangle \geq 0, \quad \langle T'_k(u_k) + T''_k(u_k)(w_{k+1} - u_k), v_k - w_{k+1} \rangle \geq 0.$$

Сложим эти два неравенства и после простых преобразований получим

$$\begin{aligned} \langle T_k''(u_k)(w_{k+1} - v_k), w_{k+1} - v_k \rangle &\leq \\ &\leq \langle T_k''(u_k)(v_k - u_k) + T_k'(u_k) - T_k'(v_k), v_k - w_{k+1} \rangle, \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Отсюда с учетом неравенства (35) имеем

$$\alpha_k \|w_{k+1} - v_k\|^2 \leq \langle T_k''(u_k)(v_k - u_k) + T_k'(u_k) - T_k'(v_k), w_{k+1} - v_k \rangle. \quad (38)$$

Для оценки правой части (38) воспользуемся формулой конечных приращений (8.3.11) и неравенством Липшица для  $T_k''(u)$ :

$$\|T_k''(u) - T_k''(v)\| \leq L(1 + A_k)\|u - v\| \leq 2LA_k\|u - v\| \quad \forall u, v \in U_0,$$

вытекающим из условий (14),  $A_k \geq 1$ . Получим

$$\begin{aligned} \langle T_k''(u_k)(v_k - u_k) + T_k'(u_k) - T_k'(v_k), w_{k+1} - v_k \rangle &= \\ &= \int_0^1 \langle T_k''(u_k)(v_k - u_k), w_{k+1} - v_k \rangle dt - \\ &- \int_0^1 \langle T_k''(v_k + t(u_k - v_k))(u_k - v_k), w_{k+1} - v_k \rangle dt = \\ &= \int_0^1 \langle (T_k''(u_k) - T_k''(v_k + t(u_k - v_k)))(u_k - v_k), w_{k+1} - v_k \rangle dt \leq \\ &\leq 2LA_k \|u_k - v_k\|^2 \|w_{k+1} - v_k\| \cdot \int_0^1 (1 - t) dt = LA_k \|u_k - v_k\|^2 \cdot \|w_{k+1} - v_k\|. \end{aligned}$$

Отсюда и из (38) вытекает

$$\alpha_k \|w_{k+1} - v_k\| \leq LA_k \|u_k - v_k\|^2, \quad k = 0, 1, \dots \quad (39)$$

Далее, положим в (13)  $z = \tilde{u}_{k+1}$ ,  $u = w_{k+1}$ , в (37)  $z = w_{k+1}$ ,  $u = \tilde{u}_{k+1}$ :

$$\begin{aligned} \langle t_k'(u_k) + t_k''(u_k)(\tilde{u}_{k+1} - u_k), w_{k+1} - \tilde{u}_{k+1} \rangle &\geq 0, \\ \langle T_k'(u_k) + T_k''(u_k)(w_{k+1} - u_k), \tilde{u}_{k+1} - w_{k+1} \rangle &\geq 0. \end{aligned}$$

Сложим эти два неравенства. Имеем

$$\begin{aligned} \langle T_k''(u_k)(w_{k+1} - \tilde{u}_{k+1}), w_{k+1} - \tilde{u}_{k+1} \rangle &\leq \\ &\leq \langle (t_k''(u_k) - T_k''(u_k))(\tilde{u}_{k+1} - u_k) + t_k'(u_k) - T_k'(u_k), w_{k+1} - \tilde{u}_{k+1} \rangle. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом оценки (35) и условий (11) на погрешности получим

$$\alpha_k \|w_{k+1} - \tilde{u}_{k+1}\|^2 \leq [2\delta_{2k}A_k \|\tilde{u}_{k+1} - u_k\| + 2\delta_{1k}A_k(1 + \|u_k\|)] \|w_{k+1} - \tilde{u}_{k+1}\|,$$

или

$$\alpha_k \|w_{k+1} - \tilde{u}_{k+1}\|^2 \leq 2\delta_{2k} A_k (\| \tilde{u}_{k+1} - w_{k+1} \| + \|w_{k+1} - v_k\| + \|v_k - u_k\|) + \\ + 2\delta_{1k} A_k (1 + \|u_k - v_k\| + \|v_k\|),$$

или

$$(\alpha_k - 2\delta_{2k} A_k) \|w_{k+1} - \tilde{u}_{k+1}\| \leq 2\delta_{2k} A_k (\|w_{k+1} - v_k\| + \|v_k - u_k\|) + \\ + 2\delta_{1k} A_k (\|v_k - u_k\| + 1 + \|v_k\|). \quad (40)$$

Поскольку  $\alpha_k - 2\delta_{2k} A_k \geq \frac{1}{2}\alpha_k$  в силу (17),  $\|v_k\| \leq R$  в силу (31), то из (40) следует:

$$\|w_{k+1} - \tilde{u}_{k+1}\| \leq \frac{4\delta_{2k} A_k}{\alpha_k} (\|w_{k+1} - v_k\| + \|v_k - u_k\|) + \\ + \frac{4\delta_{1k} A_k}{\alpha_k} (\|v_k - u_k\| + 1 + R), \quad k = 0, 1, \dots \quad (41)$$

Опираясь на полученные оценки (39), (41), по индукции докажем, что

$$\|v_k - u_k\| \leq \frac{1}{8L} \frac{\alpha_k}{A_k}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (42)$$

При  $k = 0$  эта оценка справедлива по условию (19). Пусть оценка (42) имеет место при некотором  $k \geq 0$ . С помощью неравенств (12), (41) имеем

$$\|v_{k+1} - u_{k+1}\| \leq \|u_{k+1} - \tilde{u}_{k+1}\| + \|\tilde{u}_{k+1} - w_{k+1}\| + \|w_{k+1} - v_k\| + \|v_k - v_{k+1}\| \leq \\ \leq \varepsilon_k (1 + \|u_k - v_k\| + \|v_k\|) + \frac{4\delta_{2k} A_k}{\alpha_k} (\|w_{k+1} - v_k\| + \|v_k - u_k\|) + \\ + \frac{4\delta_{1k} A_k}{\alpha_k} (\|v_k - u_k\| + 1 + R) + \|w_{k+1} - v_k\| + \|v_k - v_{k+1}\| = \\ = \left( \frac{4\delta_{2k} A_k}{\alpha_k} + 1 \right) \|w_{k+1} - v_k\| + \left( \varepsilon_k + \frac{4\delta_{2k} A_k}{\alpha_k} + \frac{4\delta_{1k} A_k}{\alpha_k} \right) \|v_k - u_k\| + \\ + \left( \varepsilon_k + \frac{4\delta_{1k} A_k}{\alpha_k} \right) (1 + R) + \|v_k - v_{k+1}\|. \quad (43)$$

Из предположения индукции (42), оценок (32), (39), условий (16), (17) на параметры метода (12), (13), неравенства (43) получаем

$$\|v_{k+1} - u_{k+1}\| \leq \left( \frac{4\delta_{2k} A_k}{\alpha_k} + 1 \right) \frac{L A_k}{\alpha_k} \|u_k - v_k\|^2 + \\ + \left( \varepsilon_k + \frac{4\delta_{1k} A_k + 4\delta_{2k} A_k}{\alpha_k} \right) \|u_k - v_k\| + \left( \varepsilon_k + \frac{4\delta_{1k} A_k}{\alpha_k} \right) (1 + R) + \|v_k - v_{k+1}\| \leq \\ \leq \frac{1}{8L} \frac{\alpha_k}{A_k} \left[ \left( \frac{4\delta_{2k} A_k}{\alpha_k} + 1 \right) \cdot \frac{L A_k}{\alpha_k} \cdot \frac{1}{8L} \cdot \frac{\alpha_k}{A_k} + \left( \varepsilon_k + \frac{4\delta_{1k} A_k + 4\delta_{2k} A_k}{\alpha_k} \right) + \right. \\ \left. + 8L \frac{A_k}{\alpha_k} \left( \varepsilon_k + \frac{4\delta_{1k} A_k}{\alpha_k} \right) (1 + R) + 8L \frac{A_k}{\alpha_k} \left( \frac{|\alpha_k - \alpha_{k+1}|}{\alpha_k} R + \frac{|A_k - A_{k+1}|}{\alpha_k} \tilde{R} \right) \right] \leq \\ \leq \frac{1}{8L} \frac{\alpha_{k+1}}{A_{k+1}} \cdot \frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}} \cdot \frac{A_{k+1}}{A_k} \left[ \frac{1}{8} + \frac{\delta_{2k} A_k}{2\alpha_k} + \varepsilon_k + \frac{4\delta_{1k} A_k + 4\delta_{2k} A_k}{\alpha_k} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left( 8L \frac{\varepsilon_k A_k}{\alpha_k} + 32L \delta_{1k} \frac{A_k^2}{\alpha_k^2} \right) (1+R) + 8LR \frac{|\alpha_k - \alpha_{k+1}| A_k}{\alpha_k^2} + 8L \tilde{R} \frac{|A_k - A_{k+1}| A_k}{\alpha_k^2} \Big] \leq \\
& \leq \frac{1}{8L} \frac{\alpha_{k+1}}{A_{k+1}} \left[ \frac{1}{2} + 4\varepsilon_k + \frac{16\delta_{1k} A_k + 18\delta_{2k} A_k}{\alpha_k} + \left( 32L \frac{\varepsilon_k A_k}{\alpha_k} + 128L \frac{16\delta_{1k} A_k^2}{\alpha_k^2} \right) (1+R) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{32LR |\alpha_k - \alpha_{k+1}| A_k}{\alpha_k^2} + \frac{32L \tilde{R} |A_k - A_{k+1}| A_k}{\alpha_k^2} \right] \leq \frac{1}{8L} \frac{\alpha_{k+1}}{A_{k+1}}.
\end{aligned}$$

Оценка (42) доказана.

Из (16), (33), (42) следует равенство (20). Поскольку правые части оценок (36)–(43) не зависят от выбора приближений  $J'_k(u)$ ,  $J''_k(u)$ ,  $P'_k(u)$ ,  $P''_k(u)$  из (8), (9), то предел в (20) равномерен относительно выбора перечисленных приближений. Теорема 1 доказана.

**3.** Покажем, что последовательности  $\{\alpha_k\}$ ,  $\{A_k\}$ ,  $\{\varepsilon_k\}$ ,  $\{\delta_{1k}\}$ ,  $\{\delta_{2k}\}$ , удовлетворяющие условиям (16)–(17), существуют. Убедимся, что их можно выбрать в виде

$$\begin{aligned}
\alpha_k &= \frac{\alpha_0}{(k+1)^\alpha}, \quad A_k = A_0(k+1)^A, \quad \varepsilon_k = \frac{\varepsilon_0}{(k+1)^\varepsilon}, \\
\delta_{1k} &= \frac{\delta_{10}}{(k+1)^{\delta_1}}, \quad \delta_{2k} = \frac{\delta_{20}}{(k+1)^{\delta_2}}, \quad k = 0, 1, \dots,
\end{aligned} \tag{44}$$

где  $\alpha_0$ ,  $\alpha$ ,  $A_0$ ,  $A$ ,  $\varepsilon_0$ ,  $\varepsilon$ ,  $\delta_{10}$ ,  $\delta_1$ ,  $\delta_{20}$ ,  $\delta_2$  — некоторые положительные величины. Нетрудно проверить, что условия (16) будут выполнены, если

$$A_0 \geq 1, \quad 0 < \alpha < \frac{A\nu}{p-\nu}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad 0 < A \leq 1. \tag{45}$$

Согласно формуле конечных приращений Лагранжа

$$\begin{aligned}
0 \leq \alpha_k - \alpha_{k+1} &= \alpha_0 \alpha (k+1 + \theta_{1k})^{-\alpha-1}, \quad 0 \leq A_{k+1} - A_k = A_0 A (k+1 + \theta_{2k})^{A-1}, \\
0 < \theta_{1k}, \quad \theta_{2k} < 1, \quad k &= 0, 1, \dots
\end{aligned}$$

Отсюда и из (45) следует

$$\begin{aligned}
0 \leq \alpha_k - \alpha_{k+1} &\leq \alpha_0 (k+1)^{-\alpha-1}, \\
0 \leq A_{k+1} - A_k &\leq A_0 A (k+1)^{A-1}, \quad k = 0, 1, \dots
\end{aligned} \tag{46}$$

Имея в виду (44), заменим в двух последних слагаемых левой части (17) разности  $\alpha_k - \alpha_{k+1}$ ,  $A_{k+1} - A_k$  правыми частями (46). Получим величины

$$\begin{aligned}
N_k &= \frac{16A_0\delta_{10}}{\alpha_0} (k+1)^{A+\alpha-\delta_1} + \frac{18A_0\delta_{20}}{\alpha_0} (k+1)^{A+\alpha-\delta_2} + 4\varepsilon_0 (k+1)^{-\varepsilon} + \\
&+ 32L(1+R) \frac{\varepsilon_0 A_0}{\alpha_0} (k+1)^{A+\alpha-\varepsilon} + 128L(1+R) \frac{\delta_{10} A_0^2}{\alpha_0^2} (k+1)^{2A+2\alpha-\delta_1} + \\
&+ 32LR \frac{A_0}{\alpha_0} (k+1)^{A+\alpha-1} + 32L \tilde{R} \frac{A_0^2}{\alpha_0^2} (k+1)^{2A+2\alpha-1}. \tag{47}
\end{aligned}$$

Зафиксируем в (44), (47) положительные числа  $A_0, \varepsilon_0, \delta_{10}, \delta_{20}, \alpha, A, \varepsilon, \delta_1, \delta_2$ , считая, что наряду с (45) выполнены условия

$$\varepsilon_0 \leq \frac{1}{16}, \quad \alpha + A \leq \min\left\{\frac{1}{2}; \frac{\delta_1}{2}; \delta_2; \varepsilon\right\}, \quad (48)$$

а параметр  $\alpha_0 > 0$  пока оставим свободным, рассчитывая, что в дальнейшем мы его будем увеличивать. Заметим, что величины  $R, \tilde{R}$ , определенные формулами (18), при  $p > \nu$  зависят от  $\{\alpha_k\}, \{A_k\}$ . Как видно из (44), (45), последовательность

$$\left\{ \alpha_k A_k^{\frac{\nu}{p-\nu}} = \alpha_0 A_0^{\frac{\nu}{p-\nu}} (k+1)^{\frac{\nu}{p-\nu} - \alpha} \right\}$$

монотонно возрастает, стремится к бесконечности при  $k \rightarrow \infty$ ; последовательность  $\{R_k\}$  из (18) монотонно убывает и

$$R = \sup_{k \geq 0} R_k = R_0 = \frac{1}{\alpha_0 A_0^{\frac{\nu}{p-\nu}}}.$$

Отсюда видно, что при увеличении  $\alpha_0$  величины

$$R = R_0(\alpha_0), \quad \tilde{R} = \tilde{R}(\alpha_0) = \sup_{\|u\| \leq R(\alpha_0)} \|P'(u)\|$$

монотонно убывают. Следовательно, величины  $N_k = N_k(\alpha_0)$ , определенные формулой (47) при условиях (45), (48), монотонно убывают при увеличении  $k$  и  $\alpha_0$  и стремятся к нулю при  $k \rightarrow \infty, \alpha_0 \rightarrow +\infty$ . Поэтому можно выбрать  $\alpha_0$  столь большим, что

$$\begin{aligned} N_k(\alpha_0) = & \frac{16A_0\delta_{10}}{\alpha_0} + \frac{18A_0\delta_{20}}{\alpha_0} + 4\varepsilon_0 + 32L(1 + R(\alpha_0))\frac{\varepsilon_0 A_0}{\alpha_0} + \\ & + 128L(1 + R(\alpha_0))\frac{\delta_{10}A_0^2}{\alpha_0^2} + 32LR(\alpha_0)\frac{A_0}{\alpha_0} + 32L\tilde{R}(\alpha_0)\frac{A_0^2}{\alpha_0^2} \leq \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (49)$$

Тогда

$$N_k(\alpha_0) \leq N_0(\alpha_0) \leq \frac{1}{2}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Поскольку левая часть неравенства (17) не превышает  $N_k(\alpha_0)$ , то условие (17) также будет выполняться при всех  $k = 0, 1, \dots$ . Тем самым возможность выбора параметров метода (12), (13) в виде (44) установлена.

**4.** В практических задачах трудно ожидать, что погрешности задания входных данных будут стремиться к нулю. Скорее всего эти погрешности будут равны фиксированным положительным числам. Поэтому вместо (8), (9) более реальными представляются следующие условия: при каждом фиксированном  $u \in U_0$  вместо точных  $J'(u), J''(u), P'(u), P''(u)$  известны их приближения  $J'_\delta(u), J''_\delta(u), P'_\delta(u), P''_\delta(u)$  такие, что

$$\max\{\|J'_\delta(u) - J'(u)\|; \|P'_\delta(u) - P'(u)\|\} \leq \delta_1(1 + \|u\|), \quad u \in U_0, \quad (50)$$

$$\max\{\|J''_\delta(u) - J''(u)\|; \|P''_\delta(u) - P''(u)\|\} \leq \delta_2, \quad u \in U_0, \quad (51)$$

где  $\delta_1 > 0$ ,  $\delta_2 > 0$  заданы. Тогда в методе (12), (13) вместо прежних  $t'_k(u_k)$ ,  $t''_k(u_k)$  из (10) возьмем

$$t'_k(u_k) = J'_\delta(u_k) + A_k P'_\delta(u_k) + \alpha_k u_k, \quad t''_k(u_k) = J''_\delta(u_k) + A_k P''_\delta(u_k) + \alpha_k I. \quad (52)$$

Сформулируем правило останова процесса (12), (13), (52) в зависимости от  $\delta = (\delta_1, \delta_2)$ . Зафиксируем последовательности  $\{\alpha_k\}$ ,  $\{A_k\}$ ,  $\{\varepsilon_k\}$ ,  $\{\delta_{1k}\}$ ,  $\{\delta_{2k}\}$ , удовлетворяющие условиям (16), (17), и какую-либо начальную точку  $u_0 \in U_0$  из (19). При каждом  $\delta = (\delta_1, \delta_2) > 0$  итерации (12), (13), (52) будем продолжать до такого наибольшего номера  $k = k(\delta)$ , при котором одновременно выполняются неравенства

$$\delta_{1k} \geq \delta_1, \quad \delta_{2k} \geq \delta_2, \quad k = 0, 1, \dots, k(\delta). \quad (53)$$

Поскольку  $\{\delta_{1k}\}$ ,  $\{\delta_{2k}\} \rightarrow 0$ , то при каждом  $\delta = (\delta_1, \delta_2) > 0$  такой номер  $k(\delta) \geq 0$  непременно существует. Если при  $k = 0$  окажется, что либо  $\delta_{10} < \delta_1$ , либо  $\delta_{20} < \delta_2$ , то по определению в (53) примем  $k(\delta) = 0$ . Обоснованием правила останова (53) процесса (12), (13), (52) служит

**Т е о р е м а 2.** Пусть выполнены все условия теоремы 1, кроме условий (8), (9); пусть приближения  $J'_\delta(u)$ ,  $J''_\delta(u)$ ,  $P'_\delta(u)$ ,  $P''_\delta(u)$  удовлетворяют условиям (50), (51). Тогда точка  $u(\delta) = u_k(\delta)$ , полученная методом (12), (13), (52), (53), обладает свойством

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} J(u(\delta)) = J_*, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \|u(\delta) - u_*\| = 0,$$

где  $u_*$  — нормальное решение задачи (1), (3).

Доказательство опирается на теорему 1 и проводится так же, как аналогичная теорема 8.2.

### § 13. Регуляризованный непрерывный метод проекции градиента

#### 1. Рассмотрим задачу

$$J(u) \rightarrow \inf, \quad u \in U, \quad (1)$$

где  $U$  — выпуклое замкнутое множество из гильбертова пространства  $H$ , функция  $J(u)$  определена и дифференцируема по Фреше на  $H$ . Введем функцию Тихонова

$$T(u, t) = J(u) + \frac{1}{2} \alpha(t) \|u\|^2, \quad \alpha(t) > 0, \quad t \geq 0, \quad u \in H, \quad (2)$$

которая также будет дифференцируемой по Фреше, и ее градиент равен

$$T'(u, t) = J'(u) + \alpha(t)u, \quad u \in H.$$

Будем предполагать, что множество  $U$  известно точно, а вместо градиента  $J'(u)$  известно его приближение  $J'(u, t)$ , зависящее от параметра  $t \geq 0$  и удовлетворяющее неравенству

$$\|J'(u, t) - J'(u)\| \leq \delta(t)(1 + \|u\|), \quad \delta(t) > 0, \quad t \geq 0, \quad u \in H. \quad (3)$$



Пусть  $u = u(t)$ ,  $t \geq 0$  — траектория дифференциального уравнения

$$u'(t) = \mathcal{P}_U(u(t) - \beta(t)(J'(u, t) + \alpha(t)u(t))) - u(t), \quad t > 0; \quad u(0) = u_0, \quad (4)$$

где  $u_0$  — произвольная фиксированная точка из  $H$ ,  $\mathcal{P}_U(z)$  — проекция точки  $z \in H$  на множество  $U$ , производная  $u'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(t + \Delta t) - u(t)}{\Delta t}$ , где сходимость понимается в норме  $H$ . Далее нас будет интересовать поведение траектории системы (4) при  $t \rightarrow \infty$ . Регуляризованный непрерывный метод проекции градиента описан. Нетрудно видеть, что метод (4) получен из метода (5.2.34) формальной заменой градиента  $J'(u)$  на приближенное значение градиента функции (2).

**Теорема 1.** Пусть

1)  $U$  — выпуклое замкнутое множество из  $H$ , функция  $J(u)$  выпукла на  $H$ ;  $J(u) \in C^1(H)$ ,  $J_* > -\infty$ ,  $U_* \neq \emptyset$ , справедливо неравенство

$$\|J'(u) - J'(v)\|^2 \leq L \langle J'(u) - J'(v), u - v \rangle \quad \forall u, v \in H; \quad L = \text{const} > 0; \quad (5)$$

2) приближение  $J'(u, t)$  градиента  $J'(u)$  непрерывно по  $u$  при всех  $t \geq 0$ , измеримо по  $t$  при всех  $u \in H$  (об измеримых функциях со значениями из  $H$  см., например, [557; 357]) и удовлетворяет условию (3);

3) параметры  $\alpha(t), \beta(t), \delta(t)$  метода (4) таковы, что

$$\begin{aligned} \alpha(t), \beta(t) \in C^1[0, +\infty), \quad \delta(t) \in C[0, +\infty), \quad \alpha(t) \text{ выпукла на } [0, +\infty), \\ \alpha(t) > 0, \quad \beta(t) > 0, \quad \delta(t) > 0, \quad \alpha'(t) \leq 0, \quad \beta'(t) \leq 0 \quad \forall t \geq 0, \\ 8 \frac{\delta(t)}{\alpha(t)} + 2\alpha(0)\beta(0) \leq 1, \quad (1+L)(\beta(0) + 4\beta(0)\delta(t)) \leq 3 \quad \forall t \geq 0, \quad (6) \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \alpha(t) + \beta(t) + \frac{\delta(t)}{\alpha(t)} + \frac{|\alpha'(t)|}{\alpha^2(t)\beta(t)} + \frac{|\beta'(t)|}{\alpha(t)\beta^2(t)} \right) = 0. \end{aligned}$$

Тогда

$$\lim_{t \rightarrow \infty} J(u(t)) = J_*, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (\|u(t) - u_*\| + \|u'(t)\|) = 0, \quad (7)$$

где  $u(t)$  — решение задачи Коши (4),  $u_*$  — нормальное решение задачи (1), причем сходимость в (7) равномерная относительно выбора реализаций  $J'(u, t)$  из (3).

В качестве функций  $\alpha(t), \beta(t), \delta(t)$ , удовлетворяющих условиям (6), можно, например, взять

$$\alpha(t) = a_1(1+t)^{-1/8}, \quad \beta(t) = a_2(1+t)^{-1/4}, \quad \delta(t) = a_3(1+t)^{-1}, \quad t \geq 0, \quad (8)$$

где  $a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0$ ,  $8 \frac{a_3}{a_1} + 2a_1a_2 \leq 1$ ,  $4a_2a_3 + (1+L)a_2 \leq 3$ .

**Доказательство.** Из условий теоремы следует, что функция  $f(u, t) = \mathcal{P}_U(u - \beta(t)(J'(u, t) + \alpha(t)u)) - u$  измерима по  $t$  при всех  $u \in H$  и непрерывна по  $u$  на  $H$  для всех  $t \geq 0$ ,  $\|f(u, t)\| \leq c_0(1 + \|u\|)$ . Отсюда следует, что задача Коши (4) при любом начальном условии  $u_0 \in E^n$  имеет хотя бы

одно решение, определенное при всех  $t$ ,  $0 \leq t < \infty$  [132; 208]. Так как функция  $T(u, \tau)$  сильно выпукла на  $U$ , то найдется единственная точка  $v(\tau)$  такая, что

$$v(\tau) \in U, \quad T(v(\tau), \tau) = \inf_U T(u, \tau), \quad \tau \geq 0 \quad (9)$$

(теорема 8.2.10). Положим  $\tau = \frac{1}{\delta}$ ,  $t_\delta(u) = T(u, \frac{1}{\delta})$ ,  $\delta > 0$ . Тогда точка  $u_\delta = v(\frac{1}{\delta})$ ,  $\delta > 0$ , является решением задачи

$$t_\delta(u) = J(u) + \alpha\left(\frac{1}{\delta}\right)\|u\|^2 \rightarrow \inf, \quad u \in U,$$

так как  $t_\delta(u_\delta) = T(v(\frac{1}{\delta}), \frac{1}{\delta}) = T(v(\tau), \tau) = \inf_U T(u, \tau) = \inf_U t_\delta(u)$ . Поскольку  $\alpha(\frac{1}{\delta}) > 0$ ,  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \alpha(\frac{1}{\delta}) = 0$ , то из теоремы 4.4 имеем

$$\begin{aligned} \|v(\tau)\| &= \|u_\delta\| \leq \|u_*\| \quad \forall \tau > 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} J(v(\tau)) = \lim_{\delta \rightarrow 0} J(u_\delta) = J_*, \\ \lim_{\tau \rightarrow \infty} \|v(\tau) - u_*\| &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \|u_\delta - u_*\| = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Далее, из условия (9) следует (теорема 8.3.3):

$$\begin{aligned} \langle T'(v(\tau), \tau), v - v(\tau) \rangle &= \langle J'(v(\tau)) + \alpha(\tau)v(\tau), v - v(\tau) \rangle \geq 0 \\ \forall v \in U, \quad \forall \tau \geq 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Из свойства оператора проектирования (неравенство (4.4.1)) с учетом (4) имеем:

$$\langle u'(t) + \beta(t)(J'(u(t), t) + \alpha(t)u(t), w - u'(t) - u(t)) \rangle \geq 0 \quad \forall w \in U, \quad t \geq 0. \quad (12)$$

В неравенстве (11) положим  $v = u'(t) + u(t) \in U$ , умножим его на  $\beta(t)$  и сложим с (12) при  $w = v(\tau) \in U$ . После простых преобразований получим

$$\begin{aligned} \|u'(t)\|^2 + (1 + \alpha(t)\beta(t))\langle u'(t), u(t) - v(\tau) \rangle + \alpha(t)\beta(t)\|u(t) - v(\tau)\|^2 &\leq \\ &\leq \beta(t)\langle (J'(u(t), t) - J'(u(t))) + (J'(u(t)) - J'(v(\tau))) + \\ &\quad + (\alpha(t) - \alpha(\tau))v(\tau), v(\tau) - u(t) - u'(t) \rangle \quad \forall t, \tau \geq 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Из условия (5) следует, что

$$\langle J'(u(t)) - J'(v(\tau)), v(\tau) - u(t) - u'(t) \rangle \leq \frac{1}{4}L\|u'(t)\|^2$$

(теорема 4.2.16). Учитывая это неравенство и условие (3), из (13) имеем

$$\begin{aligned} \|u'(t)\|^2 + (1 + \alpha(t)\beta(t))\langle u'(t), u(t) - v(\tau) \rangle + \alpha(t)\beta(t)\|u(t) - v(\tau)\|^2 &\leq \\ &\leq \frac{1}{4}L\beta(t)\|u'(t)\|^2 + \beta(t)\delta(t)(1 + \|u(t)\|)(\|u'(t)\| + \|u(t) - v(\tau)\|) + \\ &\quad + \beta(t)|\alpha(t) - \alpha(\tau)|\|v(\tau)\|(\|u'(t)\| + \|u(t) - v(\tau)\|) \quad \forall t, \tau \geq 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Пользуясь элементарными неравенствами  $|ab| \leq \frac{1}{2}\varepsilon a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}b^2$ ,  $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2 \quad \forall a, b, \varepsilon > 0$ , и учитывая, что

$$\|v(\tau)\| \leq \|u_*\|, \quad \alpha(0) \geq \alpha(t) > 0 \quad \forall t \geq 0,$$

получим:

$$\begin{aligned} (1 + \|u(t)\|)(\|u'(t)\| + \|u(t) - v(\tau)\|) &\leq (1 + \|v(\tau)\| + \|u(t) - v(\tau)\|) \times \\ &\times (\|u'(t)\| + \|u(t) - v(\tau)\|) = (1 + \|v(\tau)\|)(\|u'(t)\| + \|u(t) - v(\tau)\|) + \\ &+ \|u(t) - v(\tau)\|(\|u'(t)\| + \|u(t) - v(\tau)\|) \leq (1 + \|v(\tau)\|)^2 + \\ &+ \frac{1}{4}(\|u'(t)\| + \|u(t) - v(\tau)\|)^2 + \frac{1}{2}\|u'(t)\|^2 + \frac{1}{2}\|u(t) - v(\tau)\|^2 + \|u(t) - v(\tau)\|^2 \leq \\ &\leq (1 + \|u_*\|)^2 + \|u'(t)\|^2 + 2\|u(t) - v(\tau)\|^2 \quad \forall t, \tau \geq 0; \\ |\alpha(t) - \alpha(\tau)|\|v(\tau)\|(\|u'(t)\| + \|u(t) - v(\tau)\|) &\leq \\ &\leq |\alpha(t) - \alpha(\tau)|\|u_*\|\|u'(t)\| + |\alpha(t) - \alpha(\tau)|\|u_*\|\|u(t) - v(\tau)\| \leq \\ &\leq |\alpha(t) - \alpha(\tau)|^2\|u_*\|^2 + \frac{1}{4}\|u'(t)\|^2 + \frac{|\alpha(t) - \alpha(\tau)|^2}{\alpha(t)}\|u_*\|^2 + \frac{1}{4}\alpha(t)\|u(t) - v(\tau)\|^2 \leq \\ &\leq |\alpha(t) - \alpha(\tau)|^2\|u_*\|^2 \frac{1 + \alpha(0)}{\alpha(t)} + \frac{1}{4}\|u'(t)\|^2 + \frac{1}{4}\alpha(t)\|u(t) - v(\tau)\|^2 \quad \forall t, \tau \geq 0. \end{aligned}$$

Подставим эти оценки в правую часть (14). После простых преобразований будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(1 + \alpha(t)\beta(t))\frac{d}{dt}\|u(t) - v(\tau)\|^2 + \left(1 - \beta(t)\delta(t) - \frac{1}{4}(L+1)\beta(t)\right)\|u'(t)\|^2 + \\ + \alpha(t)\beta(t)\left(\frac{3}{4} - \frac{2\delta(t)}{\alpha(t)}\right)\|u(t) - v(\tau)\|^2 \leq (1 + \|u_*\|)^2\beta(t)\delta(t) + \\ + \beta(t)\frac{(\alpha(t) - \alpha(\tau))^2}{\alpha(t)}\|u_*\|^2(1 + \alpha(0)) \leq c_1 b(t, \tau) \quad \forall t, \tau \geq 0, \quad (15) \end{aligned}$$

где  $c_1 = \max\{(1 + \|u_*\|)^2; (1 + \alpha(0))\|u_*\|^2\}$ ,

$$b(t, \tau) = \beta(t)\delta(t) + \frac{\beta(t)}{\alpha(t)}|\alpha(t) - \alpha(\tau)|^2, \quad t, \tau \geq 0. \quad (16)$$

Умножим неравенство (15) на функцию  $\mu(t) = \exp\left(\int_0^t \alpha(\theta)\beta(\theta) d\theta\right) > 0$  и проинтегрируем на отрезке  $[0, t]$ . Первый интеграл преобразуем по частям. Получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(1 + \alpha(t)\beta(t))\|u(t) - v(\tau)\|^2\mu(t) + \\ + \int_0^t \left(1 - \beta(s)\delta(s) - \frac{1}{4}(L+1)\beta(s)\right)\mu(s)\|u'(s)\|^2 ds + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^t \left[ \alpha(s)\beta(s) \left( \frac{3}{4} - 2 \frac{\delta(s)}{\alpha(s)} \right) \mu(s) - \frac{1}{2} \frac{d}{ds} ((1 + \alpha(s)\beta(s))\mu(s)) \right] \|u(s) - v(\tau)\|^2 ds \leq \\
& \leq c_1 \int_0^t b(s, \tau) \mu(s) ds + c_2, \quad c_2 = \frac{1}{2} (1 + \alpha(0)\beta(0)) (\|u_0\| + \|u_*\|)^2. \quad (17)
\end{aligned}$$

Из условий (6) вытекает, что подынтегральные функции в левой части неравенства (17) неотрицательны, поэтому из (17) следует

$$\frac{1}{2} (1 + \alpha(t)\beta(t)) \mu(t) \|u(t) - v(\tau)\|^2 \leq c_1 \int_0^t b(s, \tau) \mu(s) ds + c_2 \quad \forall t, \tau \geq 0.$$

Полагая  $\tau = t$ , отсюда имеем

$$\frac{1}{2} (1 + \alpha(t)\beta(t)) \mu(t) \|u(t) - v(t)\|^2 \leq c_1 \int_0^t b(s, t) \mu(s) ds + c_2 \quad \forall t \geq 0. \quad (18)$$

Так как функция  $\alpha(t)$  выпукла и монотонно убывает, то

$$0 \leq \alpha(s) - \alpha(t) \leq \alpha'(s)(s - t) \quad \forall t, s, \quad 0 \leq s \leq t$$

(теорема 4.2.2), поэтому  $|\alpha(s) - \alpha(t)| \leq |\alpha'(s)||s - t|$ ,  $0 \leq s \leq t$ . Отсюда и из определения (16) функции  $b(s, t)$  получаем

$$b(s, t) \leq \beta(s)\delta(s) + \frac{\beta(s)}{\alpha(s)} (\alpha'(s))^2 (s - t)^2 \quad \forall t, s, \quad 0 \leq s \leq t.$$

Тогда из (18) с учетом неравенства  $1 + \alpha(t)\beta(t) \geq 1$  имеем

$$\begin{aligned}
\|u(t) - v(t)\|^2 & \leq 2c_1 \frac{1}{\mu(t)} \int_0^t \left( \beta(s)\delta(s) + \frac{\beta(s)}{\alpha(s)} (\alpha'(s))^2 (s - t)^2 \right) \mu(s) ds + \frac{c_2}{\mu(t)} \quad (19) \\
& \quad \forall t \geq 0.
\end{aligned}$$

Совершим в (19) предельный переход при  $t \rightarrow \infty$ . Сначала докажем две леммы.

**Л е м м а 1.** Пусть функция  $\nu(t) \in C^1[0, +\infty)$  такова, что

$$\nu(t) > 0, \quad \nu'(t) \leq 0 \quad \forall t \geq 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\nu'(t)}{\nu^2(t)} = 0.$$

Тогда

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \nu^n(t) \exp \left( \int_0^t \nu(\theta) d\theta \right) = +\infty \quad (20)$$

при каждом  $n = 0, 1, \dots$

**Доказательство.** Зафиксируем произвольное целое число  $n \geq 0$ . По условию леммы  $\frac{|\nu'(t)|}{\nu^2(t)} = -\frac{\nu'(t)}{\nu^2(t)} \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , поэтому найдется  $t_n \geq 0$ , что  $-\frac{\nu'(s)}{\nu^2(t)} \leq \frac{1}{n+1} \quad \forall s \geq t_n$ . Интегрируя это неравенство на отрезке  $[t_n, t]$ ,  $t \geq t_n$ , получим

$$\int_{t_n}^t \left( -\frac{\nu'(s)}{\nu^2(t)} \right) ds = \int_{t_n}^t \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{\nu(s)} \right) ds = \frac{1}{\nu(t)} - \frac{1}{\nu(t_n)} \leq \frac{t - t_n}{n+1} \quad \forall t \geq t_n.$$

Следовательно,

$$\nu(t) \geq \frac{n+1}{t - t_n + c_n} \quad \forall t \geq t_n, \quad c_n = \frac{n+1}{\nu(t_n)} > 0. \quad (21)$$

Отсюда имеем

$$\int_0^t \nu(\theta) d\theta \geq \int_{t_n}^t \frac{n+1}{\theta - t_n + c_n} d\theta = (n+1) \ln \frac{t - t_n + c_n}{c_n} = \ln \left( \frac{t - t_n + c_n}{c_n} \right)^{n+1} \quad \forall t \geq t_n.$$

Из (21) и последнего неравенства следует

$$\nu^n(t) \exp \left( \int_0^t \nu(\theta) d\theta \right) \geq \frac{(n+1)^n}{c_n^{n+1}} (t - t_n + c_n) \quad \forall t \geq t_n.$$

Отсюда при  $t \rightarrow \infty$  приходим к равенству (20). Лемма 1 доказана.  $\square$

**Лемма 2.** Пусть функция  $\nu(t)$  удовлетворяет условиям леммы 1 и  $\mu(t) = \exp \left( \int_0^t \nu(\theta) d\theta \right)$ . Тогда

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{dt}(\nu^n(t)\mu(t))}{\nu^{n+1}(t)\mu(t)} = 1 \quad \forall n = 0, 1, \dots \quad (22)$$

**Доказательство.** Зафиксируем любое целое число  $n \geq 0$ . Заметим, что

$$\frac{d}{dt}(\nu^n(t)\mu(t)) = n\nu'(t)\nu^{n-1}(t)\mu(t) + \nu^{n+1}(t)\mu(t) = (n\nu'(t)\nu^{n-1}(t) + \nu^{n+1}(t))\mu(t),$$

поэтому

$$\frac{\frac{d}{dt}(\nu^n(t)\mu(t))}{\nu^{n+1}(t)\mu(t)} = n \frac{\nu'(t)}{\nu^2(t)} + 1.$$

Учитывая условие  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\nu'(t)}{\nu^2(t)} = 0$ , отсюда получаем равенство (22). Лемма 2 доказана.  $\square$

Продолжим доказательство теоремы 1. Положим  $\nu(t) = \alpha(t)\beta(t)$ . Из условий (6) следует, что

$$\nu'(t) = \alpha'(t)\beta(t) + \alpha(t)\beta'(t) \leq 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\nu'(t)}{\nu^2(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{\alpha'(t)}{\alpha^2(t)\beta(t)} + \frac{\beta'(t)}{\alpha(t)\beta^2(t)} \right) = 0.$$

Согласно лемме 1 тогда

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha^n(t) \beta^n(t) \mu(t) = +\infty \quad \forall n = 0, 1, \dots \quad (23)$$

Из леммы 2 для функции  $\nu(t) = \alpha(t)\beta(t)$  имеем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\alpha(t)\beta(t))^{n+1} \mu(t)}{\frac{d}{dt}(\alpha^n(t)\beta^n(t)\mu(t))} = 1. \quad (24)$$

Пользуясь равенством (23) при  $n = 0$ , заключаем, что второе слагаемое в правой части неравенства (19) стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$ . Далее, трижды применяя правило Лопиталя с учетом (6), (23), (24), получим:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t \left( \beta(s) \delta(s) + \frac{\beta(s)}{\alpha(s)} (\alpha'(s))^2 (t-s)^2 \right) \mu(s) ds}{\mu(t)} = \\ = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \int_0^t \frac{\beta(s)}{\alpha(s)} (\alpha'(s))^2 2(t-s) \mu(s) ds + \beta(t) \delta(t) \mu(t) \right) \frac{1}{\alpha(t)\beta(t)\mu(t)} = \\ = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2 \int_0^t \frac{\beta(s)}{\alpha(s)} (\alpha'(s))^2 \mu(s) ds}{\frac{d}{dt}(\alpha(t)\beta(t)\mu(t))} + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\delta(t)}{\alpha(t)} = \\ = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2 \int_0^t \frac{\beta(s)}{\alpha(s)} (\alpha'(s))^2 \mu(s) ds}{\alpha^2(t) \beta^2(t) \mu(t)} \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\alpha^2(t) \beta^2(t) \mu(t)}{\frac{d}{dt}(\alpha(t)\beta(t)\mu(t))} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2 \frac{\beta(t)}{\alpha(t)} (\alpha'(t))^2 \mu(t)}{\frac{d}{dt}(\alpha^2(t) \beta^2(t) \mu(t))} = \\ = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2 \frac{\beta(t)}{\alpha(t)} (\alpha'(t))^2 \mu(t)}{\alpha^3(t) \beta^3(t) \mu(t)} \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\alpha^3(t) \beta^3(t) \mu(t)}{\frac{d}{dt}(\alpha^2(t) \beta^2(t) \mu(t))} = \lim_{t \rightarrow \infty} 2 \left( \frac{\alpha'(t)}{\alpha^2(t) \beta(t)} \right)^2 = 0. \end{aligned}$$

Отсюда и из (19) следует, что  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t) - v(t)\| = 0$ . Тогда с учетом (10) имеем  $\|u(t) - u_*\| \leq \|u(t) - v(t)\| + \|v(t) - u_*\| \rightarrow 0$ ,  $J(u(t)) \rightarrow J_*$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Наконец, из (6), (15), (16) при  $\tau = t$  получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \|u'(t)\|^2 &\leq c_1 b(t, t) + (1 + \alpha(t)\beta(t)) \|u'(t)\| \|u(t) - v(t)\| \leq \\ &\leq c_1 \beta(t) \alpha(t) + \frac{\varepsilon}{2} \|u'(t)\|^2 + \frac{1}{2\varepsilon} (1 + \alpha(t)\beta(t))^2 \|u(t) - v(t)\|^2 \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

Примем здесь  $\varepsilon = 1/4$ . Тогда

$$\frac{1}{8} \|u'(t)\|^2 \leq c_1 \beta(t) \alpha(t) + 2(1 + \alpha(t)\beta(t))^2 \|u(t) - v(t)\|^2 \quad \forall t \geq 0.$$

Отсюда с учетом уже доказанного имеем:  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|u'(t)\| = 0$ . Равенства (7) доказаны. Равномерная сходимость в (7) относительно выбора  $J'(u, t)$  из (3) следует из того, что в (15), (19) коэффициенты при степенях  $\|u(t) - v(\tau)\|^2$ ,  $\|u'(t)\|^2$  не зависят от конкретных реализаций  $J'(u, t)$  из (3). Теорема 1 доказана.  $\square$

2. Сформулируем правило останова процесса (4) для случая, когда уровень погрешности в задании градиента фиксирован и вместо  $J'(u, t)$  из (3) имеем приближение  $J'_\delta(u) \in H$  такое, что

$$\|J'_\delta(u) - J'(u)\| \leq \delta(1 + \|u\|) \quad \forall u \in H, \quad (25)$$

где  $\delta > 0$  — известное число. Заменяя в уравнении (4)  $J'(u, t)$  на  $J'_\delta(u)$ , получим процесс

$$z'(t) = \mathcal{P}_U(z(t) - \beta(t)(J'_\delta(z(t)) + \alpha(t)z(t))) - z(t), \quad t \geq 0, \quad z(0) = u_0. \quad (26)$$

Будем предполагать, что параметры  $\alpha(t), \beta(t), \delta(t)$ , удовлетворяющие условиям (6), как-то зафиксированы, пусть  $\delta(0) > \delta$ . При каждом фиксированном  $\delta$ ,  $0 < \delta < \delta(0)$ , процесс (26) будем продолжать до момента  $t = t(\delta)$ , определяемого условием

$$t(\delta) = \sup\{t : \delta(s) > \delta, 0 \leq s \leq t\}. \quad (27)$$

Поскольку  $\delta(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ ,  $\delta(0) > \delta$ , то такой момент  $t(\delta)$  будет конечным при каждом  $\delta > 0$  и, зная  $\delta(t)$ , его можно заранее вычислить с нужной точностью. Обоснованием сформулированного правила останова (27) процесса (26) служит

**Теорема 2.** Пусть выполнены все условия теоремы 1, кроме условия (3), пусть приближение  $J'_\delta(u)$  градиента  $J'(u)$  удовлетворяет условию (25). Пусть  $z(t)$ ,  $0 \leq t \leq t(\delta)$ , траектория процесса (26), момент  $t(\delta)$  определен согласно (27). Тогда

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} J(z(t(\delta))) = J_*, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \|z(t(\delta)) - u_*\| = 0. \quad (28)$$

**Доказательство.** Из (25), (27) следует, что

$$\|J'_\delta(u) - J'(u)\| \leq \delta(t)(1 + \|u\|) \quad \forall u \in H, \quad 0 \leq t \leq t(\delta), \quad (29)$$

так что функция  $J'(u, t) = J'_\delta(u)$  удовлетворяет условию (3) при всех  $t$ ,  $0 \leq t \leq t(\delta)$ . Далее, согласно правилу останова (27), из  $\delta(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$  следует, что  $t(\delta) \rightarrow \infty$  при  $\delta \rightarrow 0$ . Это значит, что при всех малых  $\delta > 0$  момент  $t(\delta)$  в (29) можно сделать сколь угодно большим.

Согласно теореме 1 при выполнении всех ее условий, включая условие (3), траектория  $u(t)$ , порождаемая методом (4), сходится в норме  $H$  к точке  $u_*$ , т. е. для  $\forall \varepsilon > 0 \exists$  момент  $T = T(\varepsilon)$  такой, что

$$\|u(t) - u_*\| < \varepsilon \quad \forall t \geq T(\varepsilon), \quad (30)$$

причем момент  $T(\varepsilon)$  не зависит от выбора реализаций  $J'(u, t)$  из (3). Так как  $\lim_{\delta \rightarrow 0} t(\delta) = \infty$ , то  $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ , что  $t(\delta) \geq T(\varepsilon)$  при всех  $\delta$ ,  $0 < \delta < \delta(\varepsilon)$ . Это значит, что для всех  $\delta$ ,  $0 < \delta < \delta(\varepsilon)$ , метод (26) при  $0 \leq t \leq t(\delta)$ , где  $t(\delta)$  определен согласно (27), порождает траекторию  $z(t)$ ,  $0 \leq t \leq t(\delta)$ , которую можно получить также и методом (4) с реализациями  $J'(\delta, t) = J'_\delta(u)$  при  $0 \leq t \leq t(\delta)$ ,

удовлетворяющими, в силу (29), условию (3). Поскольку  $t(\delta) \geq T(\varepsilon)$ , то, используя неравенство (30) при  $t = t(\delta)$ , получаем неравенство  $\|z(t(\delta)) - u_*\| < \varepsilon$ , справедливое при всех  $\delta$ ,  $0 < \delta < \delta(\varepsilon)$ . В силу произвольности  $\varepsilon > 0$  приходим к второму равенству (28). Отсюда и из непрерывности  $J(u)$  следует первое равенство (28). Теорема 2 доказана.  $\square$

Из теоремы 2 следует, что оператор  $R_\delta$ , который каждому набору  $(J'_\delta(u), \delta)$  из (25) ставит в соответствие точку  $u(\delta) = z(t(\delta))$ , определяемую методом (26), (27), является регуляризующим оператором (определение 6.1).

Для задачи (1), когда множество  $U$  имеет вид (8.2) и задано с погрешностью, аналогичный регуляризованный непрерывный метод проекции градиента в сочетании со штрафными функциями исследован в [522].

В заключение отметим, что при отборе материала в § 8–13 мы руководствовались желанием пошире продемонстрировать разнообразие технических приемов, используемых при исследовании регуляризованных методов минимизации.

Другие регуляризованные методы вида (4), использующие дифференциальные уравнения более высоких порядков и их разностные аналоги, а также регуляризованные варианты других методов для задач минимизации и их обобщений, см., например, в [62–64; 147; 149–153; 155–159; 168; 171–174; 176–178; 185; 389; 522; 537].

## § 14. Метод динамической регуляризации

Рассмотрим процесс, динамика которого описывается системой

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad 0 \leq t \leq T; \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

где  $t$  — время,  $x = x(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$  — фазовая траектория,  $x_0 \in E^n$  — начальная точка,  $u = u(t) = (u^1(t), \dots, u^r(t))$  — управление,  $A, B$  — заданные матрицы размера  $n \times n, n \times r$  соответственно, момент  $T$  задан. Управление  $u = u(t)$  будем называть *допустимым*, если

$$u \in U = \{u = u(t) \in L_2^r[0, T]: u(t) \in V \text{ почти всюду на } [0, T]\}, \quad (2)$$

где  $V$  — заданное множество из  $E^r$ .

При исследовании задач оптимального управления, связанных с системами вида (1), нам до сих пор приходилось определять траекторию (решение)  $x(t) = x(t; u)$ ,  $0 \leq t \leq T$ , задачи (1) по известному управлению  $u \in U$ . В этом параграфе мы займемся исследованием обратной задачи, когда траектория  $x(t; u)$  задана и ищется допустимое управление (или одно из таких управлений), которое порождает эту траекторию. Эту задачу, постановка которой ниже будет уточнена, мы кратко будем именовать обратной задачей (1). Подобные задачи, когда по наблюдаемой траектории (или ее элементам) требуется восстановить какие-либо характеристики (коэффициенты, параметры) динамической системы, имеют широкие приложения и относятся к *обратным задачам*, теория и методы которых составляют интенсивно развивающуюся



область математики (см., например, [17; 60; 127; 230; 236; 268–270; 300; 365; 403; 405; 438; 439; 474; 482; 556; 557; 618; 619; 621; 651; 708; 771; 782; 788; 812]). Обратные задачи, вообще говоря, неустойчивы к ошибкам наблюдения и для их решения нужно пользоваться методами регуляризации.

**Пример 1.** Рассмотрим задачу:  $\dot{x}(t) = u(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ ,  $x(0) = 0$ ;  $u = u(t) \in V = \{u \in E^1 : |u| \leq 1\}$ . Предположим, что ведется наблюдение за траекторией  $x(t) \equiv 0$ , соответствующей допустимому управлению  $u_* = u_*(t) \equiv 0$ . Пусть из-за погрешностей наблюдения вместо точной траектории  $x(t) \equiv 0$  получено ее приближение  $x_\delta(t) = \delta \sin \frac{t}{\delta}$ ,  $0 \leq t \leq T$ ;  $0 < \delta \leq 1$ . Так как  $u(t) = \dot{x}(t)$ , то по аналогии в качестве приближения к искомому управлению  $u_*(t) \equiv 0$  можно попытаться взять  $u_\delta = u_\delta(t) = \dot{x}(t) = \cos \frac{t}{\delta}$ ,  $0 \leq t \leq T$ . Однако

$$\|u_\delta - u_*\|_{L_2}^2 = \int_0^T \left( \cos \frac{t}{\delta} \right)^2 dt = \frac{1}{2} \left( T + \frac{\delta}{2} \left( \sin \frac{2T}{\delta} \right) \right) \rightarrow \frac{T}{2} \neq 0$$

при  $\delta \rightarrow 0$ , т. е. обратная задача неустойчива в метрике  $L_2[0, T]$  (ср. пример 1.4).

Для решения обратной задачи (1) воспользуемся методом динамической регуляризации, разработанным Ю. С. Осиповым и его учениками [421; 556; 557; 808]. Уточним постановку задачи. Будем предполагать, что наблюдения за траекторией  $x(t) = x(t; u)$  проводятся в некоторые дискретные моменты времени  $t_i$ ,  $i = 0, \dots, N-1$ ,  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = T$ , причем из-за погрешностей измерений вместо точных значений  $x(t_i)$  известны их приближения  $x_{\delta i}$  такие, что

$$|x_{\delta i} - x(t_i)| \leq \delta, \quad i = 0, \dots, N-1, \quad 0 < \delta \leq \delta_0. \quad (3)$$

Пусть величины  $x_{\delta 0}, \dots, x_{\delta, N-1}$  измеряются и поступают в наше распоряжение последовательно во времени. Управление  $u_\delta(t)$ , являющееся приближением к искомому управлению, будем строить последовательно на отрезках  $[t_0, t_1]$ ,  $[t_1, t_2], \dots, [t_{N-1}, t_N]$  по мере поступления информации об измерениях, используя при построении  $u_\delta(t)$  на частичном отрезке  $[t_i, t_{i+1}]$  лишь значения  $x_{\delta 0}, \dots, x_{\delta i}$  и не предполагая знания остальных значений  $x_{\delta, i+1}, \dots, x_{\delta, N-1}$ , которые в момент  $t_i$ , возможно, еще не измерены. Приведем индуктивное описание метода динамической регуляризации. В этом методе наряду с управлением  $u_\delta(t)$  на каждом шаге еще строится вспомогательная функция  $z_\delta(t)$ , помогающая отслеживать наблюдаемую траекторию  $x(t)$  по ее приближенным значениям  $x_{\delta i}$  из (3).

Пусть при  $i = 0$  известно наблюдаемое значение  $x_{\delta 0}$  начальной точки  $x(0) = x_0$ . Положим  $z_\delta(0) = x_{\delta 0}$ . Решая вспомогательную задачу минимизации

$$t_{\delta 0}(u) = 2\langle z_\delta(0) - x_{\delta 0}, Bu \rangle + \alpha(\delta)|u|^2 \rightarrow \inf, \quad u \in V; \quad \alpha(\delta) > 0,$$

определим точку  $u_0 \in V$  такую, что  $t_{\delta 0}(u_0) = \inf_{u \in V} t_{\delta 0}(u)$ . Затем полагаем

$$u_\delta(t) = u_0, \quad z_\delta(t) = z_\delta(0) + (Ax_{\delta 0} + Bu_0)t \quad \forall t \in [t_0 = 0, t_1].$$

Пусть для некоторого  $i$ ,  $0 < i < N - 1$ , уже определены  $u_\delta(t)$ ,  $z_\delta(t)$ ,  $0 \leq t \leq t_i$ , и пусть нам стало известно измерение  $x_{\delta i}$  наблюдаемой траектории  $x(t)$  в момент  $t_i$ . Тогда решаем вспомогательную задачу минимизации

$$t_{\delta i}(u) = 2\langle z_\delta(t_i) - x_{\delta i}, Bu \rangle + \alpha(\delta)|u|^2 \rightarrow \inf, \quad u \in V \quad (4)$$

и находим точку  $u_i \in V$ ,  $t_{\delta i}(u_i) = \inf_{u \in V} t_{\delta i}(u)$ . Затем полагаем

$$u_\delta(t) = u_i, \quad z_\delta(t) = z_\delta(t_i) + (Ax_{\delta i} + Bu_i)(t - t_i), \quad t \in [t_i, t_{i+1}]. \quad (5)$$

Далее, по мере поступления информации  $x_{\delta, i+1}, \dots, x_{\delta, N-1}$  последовательно определяются  $u_\delta(t)$ ,  $z_\delta(t)$  на следующих отрезках  $[t_{i+1}, t_{i+2}], \dots, [t_{N-1}, t_N = T]$ .

Описанный метод представляет собой сочетание принципа экстремального прицеливания Н. Н. Красовского [414] и метода регуляризации А. Н. Тихонова (см. метод стабилизации, § 4) [695]. Вспомогательную траекторию  $z_\delta(t)$  из (5) принято называть *поводырем*, а условие (4) выбора  $u_i$  называется *правильным экстремальным прицеливанием*. Для построения поводыря использован аналог разностного метода Эйлера для решения задачи Коши (1), отличающийся от классического метода Эйлера [74; 89] тем, что в (5) правая часть  $Ax + Bu$  вычислена в точке  $x = x_{\delta i}$ , управление  $u = u_i$  взято из (4). Заметим, что задача (4) является конечномерной задачей минимизации и для ее решения могут быть использованы, например, методы из гл. 5. Функция  $t_{\delta i}(u)$  в (4) сильно выпукла, квадратична и на выпуклом замкнутом множестве  $V$  достигает своей нижней грани в единственной точке  $u_i$ . В частности, если  $V$  — многогранное множество, то задача (4) превращается в задачу квадратичного программирования (см. § 5.8). Отметим, что при  $i = 0$  функция  $t_{\delta 0}(u)$  имеет особенно простой вид:  $t_{\delta 0}(u) = \alpha(\delta)|u|^2$ . Важно также заметить, что в точном определении точки минимума  $u_i$  в (4) нет необходимости — достаточно найти  $u_i$  из условий

$$u_i \in V, \quad t_{\delta i}(u_i) \leq \inf_{u \in V} t_{\delta i}(u) + \varepsilon(\delta), \quad \varepsilon(\delta) > 0. \quad (6)$$

В дальнейшем будем предполагать, что функции  $u_\delta(t)$ ,  $z_\delta(t)$  построены по формулам (5) с использованием точек  $u_i$  из (6).

Покажем, что если параметры  $\alpha(\delta), \varepsilon(\delta), h(\delta) = \max_{0 \leq i \leq N-1} \{t_{i+1} - t_i\}$  методов (4)–(6) согласованно стремятся к нулю при  $\delta \rightarrow 0$ , то построенное по формуле (5) управление  $u_\delta(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ , при  $\delta \rightarrow 0$  сходится в метрике  $L_2^r[0, T]$  к нормальному решению обратной задачи (1). Поясним, что здесь понимается под нормальным решением этой задачи. Введем множество  $U_* = \{u = u(t) \in U : x(t) = x(t; u), 0 \leq t \leq T\}$ , где  $x(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$  — наблюдаемая траектория,  $U$  — определено согласно (2). Таким образом, множество  $U_*$  состоит из всех допустимых управлений, порождающих одну и ту же траекторию  $x(t)$  системы (1). Из самой постановки обратной задачи (1) следует, что  $U_* \neq \emptyset$ , так как предполагается, что наблюдаемая траектория  $x(t)$  действительно является траекторией системы (1), порожденной хотя бы одним управлением  $v = v(t) \in U$ , т. е.  $x(t) = x(t; v)$ ,  $0 \leq t \leq T$ . Однако множество  $U_*$  может состоять

более чем из одного элемента  $v$ . Управление  $u_* = u_*(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ , называется *нормальным* решением обратной задачи (1), если

$$u_* \in U_*, \quad \|u_*\|_{L_2^r} = \inf_{u \in U_*} \|u\|_{L_2^r}.$$

Если  $V$  — выпуклое замкнутое множество, то нормальное решение этой задачи существует и единственно. В самом деле, тогда  $U_*$  — выпуклое замкнутое множество в  $L_2^r[0, T]$  (пример 8.2.9). Нетрудно проверить, что множество  $U_*$  также выпукло.

Далее, если  $u_k = u_k(t) \rightarrow u_* = u_*(t)$  при  $k \rightarrow \infty$  в норме  $L_2^r[0, T]$ , то  $\lim_{k \rightarrow \infty} x(t; u_k) = x(t; u_*) \quad \forall t \in [0, T]$  (теорема 6.3.1). Поэтому если  $u_k \in U_*$ , то  $u_* \in U_*$ , т. е.  $U_*$  замкнуто в  $L_2^r[0, T]$ . Применяя теорему 8.2.10 к задаче:  $J(u) = \|u\|_{L_2^r}^2 \rightarrow \inf, u \in U_*$ , убеждаемся, что нормальное решение обратной задачи (1) существует и определяется однозначно.

**Теорема 1.** Пусть  $V$  — выпуклое замкнутое ограниченное множество из  $E^r$ , приближенные значения  $x_{\delta i}$  наблюдаемой траектории  $x(t)$  в моменты  $t_i$ ,  $i = 0, \dots, N-1$ , удовлетворяют условию (3), параметры  $\alpha = \alpha(\delta)$ ,  $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ ,  $h = h(\delta)$  положительны, стремятся к нулю при  $\delta \rightarrow 0$  и

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta + h(\delta) + \varepsilon(\delta)}{\alpha(\delta)} = 0. \quad (7)$$

Тогда функции  $u_\delta(t)$ ,  $z_\delta(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ , определяемые методом (4)–(6), таковы, что

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \|u_\delta - u_*\|_{L_2^r} &= 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \max_{0 \leq t \leq T} |z_\delta(t) - x(t)|_{E^n} = 0, \\ \lim_{\delta \rightarrow 0} \|\dot{z}_\delta - \dot{x}\|_{L_2^2[0, T]} &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $u_*$  — нормальное решение обратной задачи (1),  $x = x(t) = x(t, u_*)$  — наблюдаемая траектория системы (1).

**Доказательство.** Прежде всего убедимся, что

$$|x(t; u)|_{E^n} \leq c_0 < \infty \quad \forall t \in [0, T] \quad \forall u \in U, \quad (9)$$

$$|\dot{x}(t; u)| \leq c_1 < \infty, \quad |x(t; u) - x(\tau; u)| \leq c_1 |t - \tau| \quad \forall t, \tau \in [0, T], \quad \forall u \in U. \quad (10)$$

Неравенство (9) нетрудно доказать, пользуясь леммой Гронуолла 6.3.1 (см. аналогичную оценку (8.2.8)). Отсюда и из уравнения (1), а также из ограниченности  $V$  следует:  $|\dot{x}(t; u)| \leq \|A\|c_0 + \|B\| \cdot |V| = c_1 < \infty$ , где  $|V| = \sup_{u \in V} |u|$ . Тогда

$$|x(t; u) - x(\tau; u)| = \left| \int_{\tau}^t \dot{x}(\xi; u) d\xi \right| \leq c_1 |t - \tau| \quad \forall t, \tau \in [0, T].$$

Из (3), (9) получаем

$$|x_{\delta i}| \leq \delta + \max_{0 \leq i \leq N-1} |x(t_i)| \leq \delta_0 + c_0 = c_2 < \infty \quad \forall i = 0, \dots, N-1. \quad (11)$$

Аналогичные оценки верны и для поводыря  $z_\delta(t)$ . Из (5) следует, что функция  $z_\delta(t)$  непрерывна на  $[0, T]$  и кусочно дифференцируема:  $\dot{z}_\delta(t) = Ax_{\delta i} + Bu_i$   $\forall t \in [t_i, t_{i+1}]$ ,  $i = 0, \dots, N-1$ . Отсюда и из (11) имеем

$$|\dot{z}_\delta(t)| \leq \|A\|c_2 + \|B\|\|V\| = c_3 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (12)$$

Тогда

$$\begin{aligned} |z_\delta(t)| &= \left| \int_0^t \dot{z}_\delta(\xi) d\xi + x_{\delta 0} \right| \leq c_3 T + c_2, \\ |z_\delta(t) - z_\delta(\tau)| &= \left| \int_0^t \dot{z}_\delta(\xi) d\xi \right| \leq c_3 |t - \tau| \quad \forall t, \tau \in [0, T]. \end{aligned} \quad (13)$$

Введем теперь функцию (*функция Ляпунова*):

$$w(t) = |z_\delta(t) - x(t)|_{E^n}^2 + \alpha(\delta) \int_0^t |u_\delta(\tau)|^2 d\tau, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (14)$$

Зафиксируем произвольный момент времени  $t \in (0, T]$  и вычислим производную  $\dot{w}(t)$  этой функции. Пусть для определенности  $t \in (t_i, t_{i+1}]$ . Тогда

$$\begin{aligned} \dot{w}(t) &= 2\langle z_\delta(t) - x(t), \dot{z}_\delta(t) - \dot{x}(t) \rangle_{E^n} + \alpha(\delta) |u_\delta(t)|_{E^r}^2 = \\ &= 2\langle z_\delta(t_i) - x_{\delta i}, \dot{z}_\delta(t) - \dot{x}(t) \rangle + 2\langle (z_\delta(t) - z_\delta(t_i)) + (x_{\delta i} - x(t_i)) + \\ &\quad + (x(t_i) - x(t)), \dot{z}_\delta(t) - \dot{x}(t) \rangle + \alpha(\delta) |u_i|_{E^r}^2. \end{aligned} \quad (15)$$

Второе слагаемое правой части (15) в силу неравенств (3), (9)–(13) оценивается величиной  $2(c_3 h(\delta) + \delta + c_1 h(\delta))(c_1 + c_3) \leq c_4(\delta + h(\delta))$ . Поэтому из (15) с учетом уравнений (1),  $\dot{z}_\delta(t) = Ax_{\delta i} + Bu_i$  имеем:

$$\begin{aligned} \dot{w}(t) &\leq 2\langle z_\delta(t_i) - x_{\delta i}, Ax_{\delta i} + Bu_i - Ax(t) - Bu_*(t) \rangle + c_4(\delta + h(\delta)) + \alpha(\delta) |u_i|_{E^r}^2 = \\ &= 2\langle z_\delta(t_i) - x_{\delta i}, Bu_i - Bu_*(t) \rangle + \alpha(\delta) |u_i|_{E^r}^2 + 2\langle z_\delta(t_i) - x_{\delta i}, A(x_{\delta i} - x(t_i)) + \\ &\quad + A(x(t_i, u_*) - x(t, u_*)) \rangle + c_4(\delta + h(\delta)), \quad t \in (t_i, t_{i+1}]. \end{aligned}$$

Отсюда и из (3), (4), (6), (10), (11), (13) следует

$$\begin{aligned} \dot{w}(t) &\leq t_{\delta i}(u_i) - t_{\delta i}(u_*(t)) + \alpha(\delta) |u_*(t)|_{E^r}^2 + c_5(\delta + h(\delta)) \leq \\ &\leq \alpha(\delta) |u_*(t)|_{E^r}^2 + c_6(\delta + h(\delta) + \varepsilon(\delta)) \end{aligned}$$

почти для всех  $t \in [0, T]$ . Интегрируя это неравенство на отрезке  $[0, t]$ , с учетом равенства  $w(0) = 0$  получим

$$w(t) \leq \alpha(\delta) \int_0^t |u_*(\tau)|^2 d\tau + c_6 T(\delta + h(\delta) + \varepsilon(\delta)) \quad \forall t \in [0, T].$$

Отсюда с учетом определения (14) функции  $w(t)$  имеем

$$\begin{aligned} |z_\delta(t) - x(t)|_{E^n}^2 + \alpha(\delta) \int_0^t |u_\delta(\tau)|^2 d\tau &\leq \\ &\leq \alpha(\delta) \int_0^T |u_*(\tau)|^2 d\tau + c_6 T(\delta + h(\delta) + \varepsilon(\delta)) \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (16)$$

Из оценки (16) следуют два важных неравенства:

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t \leq T} |z_\delta(t) - x(t)|_{E^n}^2 &\leq \alpha(\delta) \|u_*\|_{L_2^r}^2 + c_6 T(\delta + h(\delta) + \varepsilon(\delta)) \\ &\forall \delta, \quad 0 < \delta \leq \delta_0, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t \leq T} \int_0^t |u_\delta(\tau)|^2 d\tau &= \int_0^T |u_\delta(\tau)|^2 d\tau = \|u_\delta\|_{L_2^r}^2 \leq \|u_*\|_{L_2^r}^2 + c_6 T \frac{\delta + h(\delta) + \varepsilon(\delta)}{\alpha(\delta)} \\ &\forall \delta, \quad 0 < \delta \leq \delta_0. \end{aligned} \quad (18)$$

Второе из равенств (8) вытекает из (17) при  $\delta \rightarrow 0$ . Из (18) с учетом условия (7) имеем

$$\|u_\delta\|_{L_2^r}^2 \leq \|u_*\|_{L_2^r}^2 + \sup_{0 < \delta \leq \delta_0} c_6 T \frac{\delta + h(\delta) + \varepsilon(\delta)}{\alpha(\delta)} = c_7 < \infty.$$

Тогда существует последовательность  $\{\delta_k\} \rightarrow 0$  такая, что  $u_k = u_k(t) = u_{\delta_k}(t)$  слабо в  $L_2^r[0, T]$  сходится к некоторому управлению  $v_* = v_*(t)$ , причем  $v_* \in U$  в силу слабой компактности  $U$  (теоремы 8.2.3, 8.2.6). Кроме того,  $\lim_{k \rightarrow \infty} x(t, u_k) = x(t, v_*) \quad \forall t \in [0, T]$  (примеры 8.2.14–8.2.17). Покажем, что  $v_* \in U_*$ . Из (5) при  $t = t_{j+1}$  имеем

$$z_\delta(t_{j+1}) = z_\delta(t_j) + \int_{t_j}^{t_{j+1}} (Ax_{\delta j} + Bu_j) dt, \quad j = 0, \dots, N-1.$$

Суммируя это равенство по  $j$  от  $j = 0$  до некоторого  $j = i-1 \leq N-1$ , с учетом начального условия  $z_\delta(0) = x_{\delta 0}$  получим

$$z_\delta(t_i) = x_{\delta 0} + \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (Ax_{\delta j} + Bu_j) d\tau. \quad (19)$$

Введем кусочно постоянную функцию  $\tilde{x}_\delta(\tau) = x_{\delta j}$ ,  $\tau \in [t_j, t_{j+1}]$ . Учитывая определение (5) функции  $u_\delta(\tau)$ , равенство (19) теперь можем переписать в виде

$$z_\delta(t_i) = x_{\delta 0} + \int_0^{t_i} (A\tilde{x}_\delta(\tau) + Bu_\delta(\tau)) d\tau.$$

Сложим это равенство с  $z_\delta(t)$  из (5). Получим

$$z_\delta(t) = x_{\delta 0} + \int_0^t (A\tilde{x}_\delta(\tau) + Bu_\delta(\tau)) d\tau. \quad (20)$$

В силу (3), (10) при  $\tau \in [t_j, t_{j+1}]$  имеем:  $|\tilde{x}_\delta(\tau) - x(\tau)| \leq |x_{\delta j} - x(t_j)| + |x(t_j) - x(\tau)| \leq \delta + c_1 h(\delta) \rightarrow 0$  при  $\delta \rightarrow 0$ . Это значит, что  $\tilde{x}_\delta(t) \rightarrow x(t)$  при  $\delta \rightarrow 0$  равномерно на  $[0, T]$ . Кроме того,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^t Bu_{\delta_k}(\tau) d\tau = \int_0^t Bv_*(\tau) d\tau \quad \forall t \in [0, T],$$

так как  $\{u_{\delta_k}\} \rightarrow v_*$  слабо в  $L_2^r[0, T]$ . Тогда из (20) при  $\delta = \delta_k \rightarrow 0$  с учетом (3) и уже доказанного второго равенства (8) получаем

$$x(t) = x_0 + \int_0^t (Ax(\tau) + Bv_*(\tau)) d\tau \quad \forall t \in [0, T].$$

Это означает, что  $x(t) = x(t, v_*)$ ,  $0 \leq t \leq T$ , т. е.  $v_* \in U_* = \{u = u(t) \in U : x(t, u) = x(t), 0 \leq t \leq T\}$ . Так как  $u_* = u_*(t) \in U_*$  — нормальное решение обратной задачи (1), то из оценки (18) при  $\delta = \delta_k \rightarrow 0$  с учетом слабой полунепрерывности снизу функции  $\|u\|^2$  и равенства (7) имеем:

$$\|u_*\|_{L_2^r}^2 \leq \|v_*\|_{L_2^r}^2 \leq \varliminf_{k \rightarrow \infty} \|u_{\delta_k}\|_{L_2^r}^2 \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \|u_{\delta_k}\|_{L_2^r}^2 \leq \|u_*\|_{L_2^r}^2.$$

Следовательно, существует предел  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_{\delta_k}\|_{L_2^r}^2 = \|u_*\|_{L_2^r}^2 = \|v_*\|_{L_2^r}^2$ . Отсюда вытекает, что  $v_*$  также является нормальным решением обратной задачи (1). Однако нормальное решение единственно, поэтому  $v_* = u_*$ . Тем самым доказано, что семейство  $\{u_\delta(t), \delta > 0\}$  при  $\delta \rightarrow 0$  слабо в  $L_2^r[0, T]$  сходится к  $u_*$  и  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \|u_\delta\|_{L_2^r}^2 = \|u_*\|_{L_2^r}^2$ . Тогда  $\|u_\delta - u_*\|_{L_2^r}^2 = \|u_\delta\|_{L_2^r}^2 - 2\langle u_*, u_\delta \rangle_{L_2^r} + \|u_*\|_{L_2^r}^2 \rightarrow 0$  при  $\delta \rightarrow 0$ . Первое из равенств (8) доказано.

Наконец, дифференцируя равенство (20), имеем:  $\dot{z}_\delta(t) = A\tilde{x}_\delta(t) + Bu_\delta(t)$   $\forall t \in [0, T], t \neq t_i, i = 1, \dots, N-1$ . Правая часть этого равенства в силу уже доказанных соотношений при  $\delta \rightarrow 0$  сходится в норме  $L_2^r[0, T]$  к  $Ax(t) + Bu_*(t) = \dot{x}(t)$ . Это значит, что  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \|\dot{z}_\delta - \dot{x}\|_{L_2^r} = 0$ . Теорема 1 доказана.  $\square$

Из этой теоремы следует, что оператор  $R_\delta$ , который каждому набору измерений  $\{x_{\delta i}, i = 0, \dots, N-1; \delta\}$  ставит в соответствие управление  $u_\delta(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ , определенное методом (4)–(6), является регуляризирующим оператором обратной задачи (1).

Возвращаясь к описанию метода (4)–(6), приведем соображения, поясняющие, откуда возникла задача (4). Роль поводыря, как было замечено выше, заключается в том, чтобы отслеживать наблюдаемую траекторию  $x(t)$  по ее приближенным значениям  $x_{\delta i}$  из (3) с тем, чтобы затем строить управление

$u_\delta(t) = u_i, t \in [t_i, t_{i+1}], i = 0, \dots, N - 1$ , выбирая  $u_i$  наилучшим образом в смысле (4). Эту идею наилучшего выбора  $u_i$  можно реализовать несколько иначе, сделав его, возможно, более понятным, если  $u_i$  выбирать из условия минимума отклонения значения поводыря  $z_\delta(t_{i+1}) = z_\delta(t_{i+1}, u)$  от наблюдаемого значения  $x_{\delta i}$ , считая  $u_i$  решением задачи

$$|z_\delta(t_{i+1}, u) - x_{\delta i}|^2 \rightarrow \inf, \quad u \in V. \quad (21)$$

С учетом (5) имеем:

$$\begin{aligned} |z_\delta(t_{i+1}, u) - x_{\delta i}|^2 &= |z_\delta(t_i) + (Ax_{\delta i} + Bu)(t_{i+1} - t_i) - x_{\delta i}|^2 = \\ &= |z_\delta(t_i) - x_{\delta i}|^2 + 2\langle z_\delta(t_i) - x_{\delta i}, Bu \rangle(t_{i+1} - t_i) + \\ &+ 2\langle z_\delta(t_i) - x_{\delta i}, Ax_{\delta i} \rangle(t_{i+1} - t_i) + |Ax_{\delta i} + Bu|^2(t_{i+1} - t_i)^2. \end{aligned} \quad (22)$$

Как видим, первое и третье слагаемые из правой части (22) от  $u$  не зависят и не влияют на выбор точки минимума  $u_i$  в задаче (21), поэтому они могут быть опущены без ущерба для задачи (21). Если теперь пренебречь и четвертым слагаемым из правой части (22), имеющим порядок  $O(h^2)$ , то от задачи (21) придем к задаче:  $2\langle z_\delta(t_i) - x_{\delta i}, Bu \rangle \rightarrow \inf, u \in V$ . Применив к этой задаче метод стабилизации (§ 4), получаем задачу (4).

Метод динамической регуляризации выше мы изложили для простейшей обратной задачи (1). Применение этого метода к более сложным задачам, включая обратные задачи для уравнений с частными производными, см., например, в [403; 421; 474; 556; 557; 808].

## ГЛАВА 10

### АППРОКСИМАЦИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

Численная реализация многих методов решения задач оптимального управления процессами, описываемыми системами обыкновенных дифференциальных уравнений или уравнений с частными производными, невозможна без использования тех или иных методов приближенного решения возникающих здесь начально-краевых задач, приближенного вычисления встречающихся интегралов.

Для решения начально-краевых задач часто применяют такие методы, как разностный метод, метод конечных элементов, метод прямых, метод характеристик, методы Рунге или Галёркина и т. д., для приближенного вычисления интегралов используют формулы численного интегрирования [74; 89; 480; 481; 630–635; 826]. В результате исходная задача оптимального управления заменяется некоторой последовательностью вспомогательных аппроксимирующих экстремальных задач. Здесь возникают естественные вопросы: будут ли сходиться решения вспомогательных экстремальных задач к решению исходной задачи, каким условиям должны удовлетворять аппроксимирующие экстремальные задачи для обеспечения сходимости? Аналогичные вопросы возникают, когда исходные данные — целевая функция и множество — известны с погрешностью.

В этой главе мы ограничимся рассмотрением разностных аппроксимаций для простейших задач оптимального управления и, кроме того, приведем общие условия аппроксимации экстремальных задач. Вопросам аппроксимации различных классов экстремальных задач посвящены, например, работы [2–4; 111; 114; 120; 129; 140; 141; 152; 153; 170; 184; 303; 339; 340; 360; 362; 363; 402; 461; 462; 464; 467; 501; 502; 504; 593–599; 607; 700; 720; 895; 896; 904; 905; 967].

#### § 1. Разностная аппроксимация квадратичной задачи оптимального управления

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления:

$$J(u) = |x(T, u) - y|^2 \rightarrow \inf, \quad (1)$$

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + f(t), \quad t_0 \leq t \leq T, \quad x(t_0) = x_0, \quad (2)$$

$$u(t) \in U = \{u = u(t) \in L_2^r[t_0, T]: u(t) \in V \text{ почти всюду на } [t_0, T]\}, \quad (3)$$

где  $A(t) = \{a_{ij}(t)\}$  — матрица порядка  $n \times n$ ,  $B(t) = \{b_{ij}(t)\}$  — матрица порядка  $n \times r$ ,  $f(t) = \{f^i(t)\}$  матрица порядка  $n \times 1$ , т. е. вектор-столбец; моменты времени  $t_0, T$ , а также точки  $x_0, y \in E^n$  заданы;  $V$  — заданное множество из  $E^r$ ,  $x(t, u) = x(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$  — решение (траектория) задачи (2), соответствующее управлению  $u = u(t) = (u^1(t), \dots, u^r(t)) \in L_2^r[t_0, T]$ . Будем предполагать, что элементы  $a_{ij}(t), b_{ij}(t), f^i(t)$  матриц  $A(t), B(t), f(t)$  кусочно непрерывны на отрезке  $t_0 \leq t \leq T$ .

Напоминаем, что задача (1)–(3) уже рассматривалась в § 8.2–8.4. Здесь мы займемся исследованием разностных аппроксимаций этой задачи. Разобьем



отрезок  $t_0 \leq t \leq T$  на  $N$  частей точками  $\{t_i, i = 0, \dots, N\}$ :  $t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = T$ , приняв эти точки в качестве узловых, уравнения (2) заменим разностными уравнениями с помощью простейшей явной схемы Эйлера. В результате придем к следующей задаче:

$$I_N([u]_N) = |x_N([u]_N) - y|^2 \rightarrow \inf, \quad (4)$$

$$x_{i+1} = x_i + \Delta t_i (A_i x_i + B_i u_i + f_i), \quad i = 0, \dots, N-1, \quad (5)$$

$$[u]_N \in U_N = \{[u]_N = (u_0, u_1, \dots, u_{N-1}): u_i \in V, i = 0, \dots, N-1\}, \quad (6)$$

где  $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ ,  $A_i = A(t_i + 0)$ ,  $B_i = B(t_i + 0)$ ,  $f_i = f(t_i + 0)$ ,  $i = 0, \dots, N-1$ ;  $[x([u]_N)]_N = (x_1([u]_N), \dots, x_N([u]_N))$  — решение задачи (5), соответствующее управлению  $[u]_N$ .

Введем пространство  $L_{2N}^r$  дискретных функций — управлений  $[u]_N = (u_0, u_1, \dots, u_{N-1})$ ,  $[v]_N = (v_0, \dots, v_{N-1})$ , ... — со скалярным произведением

$$\langle [u]_N, [v]_N \rangle_{L_{2N}} = \sum_{i=0}^{N-1} \Delta t_i \langle u_i, v_i \rangle_{E^r}$$

и с нормой

$$\| [u]_N \|_{L_{2N}} = (\langle [u]_N, [u]_N \rangle)^{1/2} = \left( \sum_{i=0}^{N-1} \Delta t_i |u_i|_{E^r}^2 \right)^{1/2}.$$

Пространство  $L_{2N}^r$  является разностным аналогом пространства  $L_2^r[t_0, T]$ , соответствующим разбиению  $\{t_i, i = 0, \dots, N\}$  отрезка  $[t_0, T]$ .

Таким образом, задаче (1)–(3), рассматриваемой в пространстве  $L_2^r[t_0, T]$  при каждом целом  $N \geq 1$  и разбиении  $\{t_i, i = 0, \dots, N\}$  отрезка  $[t_0, T]$ , соответствует дискретная задача оптимального управления (4)–(6), рассматриваемая в пространстве  $L_{2N}^r$ .

При каждом фиксированном  $N \geq 1$  и разбиении  $\{t_i, i = 0, \dots, N\}$  задачу (4)–(6) можно решать с помощью разностного аналога методов проекции градиента, условного градиента и других методов из § 8.4; при вычислении градиента функции (4) можно пользоваться результатами § 8.6; здесь возможно также использование метода динамического программирования (гл. 7).

Предположим, что при каждом  $N \geq 1$  и заданном разбиении  $\{t_i, i = 0, \dots, N\}$  с помощью какого-либо метода минимизации получены приближенное значение  $I_{N*} + \varepsilon_N$  нижней грани  $I_{N*}$  функции (4) при условиях (5), (6) и дискретное управление  $[u]_{N\varepsilon} = (u_{0\varepsilon}, \dots, u_{N-1,\varepsilon})$ :  $u_{i\varepsilon} \in V$ ,  $i = 0, \dots, N-1$ , такие, что

$$I_{N*} \leq I_N([u]_{N\varepsilon}) \leq I_{N*} + \varepsilon_N, \quad (7)$$

где  $\{\varepsilon_N\}$  — положительная последовательность, сходящаяся к нулю.

Возникают вопросы, будет ли сходиться последовательность  $\{I_{N*}\}$  к нижней грани  $J_*$  функции (1) при условиях (2), (3), если неограниченно измельчать шаг разбиения  $\{t_i, i = 0, \dots, N\}$ , т. е.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \max_{0 \leq i \leq N-1} \Delta t_i = 0,$$

и можно ли принять дискретное управление  $[u]_{N\varepsilon}$  из (7) в качестве некоторого приближения оптимального управления задачи (1)–(3)?

Для ответа на эти вопросы нам понадобятся некоторые свойства решений задач (2) и (5). Приведем эти свойства. Будем пользоваться обозначениями

$$A_{\max} = \sup_{t_0 \leq t \leq T} \|A(t)\|, \quad B_{\max} = \sup_{t_0 \leq t \leq T} \|B(t)\|, \quad f_{\max} = \max_{t_0 \leq t \leq T} |f(t)|.$$

Если  $W$  — произвольное ограниченное множество из  $L_2^r[t_0, T]$ , т. е.  $\sup_{u \in W} \|u\|_{L_2} \leq R < \infty$ , то тогда

$$\sup_{u \in W} \max_{t_0 \leq t \leq T} |x(t, u)| \leq C_0, \quad (8)$$

где

$$C_0 = e^{A_{\max}(T-t_0)} [|x_0| + B_{\max}(T-t_0)^{1/2}R + f_{\max}(T-t_0)].$$

В самом деле, по определению решения задачи (2) имеем

$$x(t, u) = \int_{t_0}^t [A(\tau)x(\tau, u) + B(\tau)u(\tau) + f(\tau)] d\tau + x_0. \quad (9)$$

При всех  $t, t_0 \leq t \leq T$ , тогда справедливо неравенство

$$|x(t, u)| \leq A_{\max} \int_{t_0}^t |x(\tau, u)| d\tau + B_{\max} \int_{t_0}^T |u(\tau)| d\tau + f_{\max}(T-t_0) + |x_0|.$$

Отсюда с помощью леммы 6.3.1 получаем оценку (8).

Далее, если  $W$  — произвольное ограниченное множество из  $L_2^r[t_0, T]$ , то

$$\sup_{u \in W} |x(t, u) - x(\tau, u)| \leq C_1 |t - \tau|^{1/2}, \quad t_0 \leq t, \tau \leq T, \quad (10)$$

где

$$C_1 = A_{\max} C_0 (T - t_0)^{1/2} + B_{\max} R + (T - t_0)^{1/2} f_{\max},$$

постоянная  $C_0$  взята из (8). Действительно, из (9) с помощью оценки (8) имеем

$$\begin{aligned} |x(t, u) - x(\tau, u)| &= \left| \int_{\tau}^t [A(\xi)x(\xi, u) + B(\xi)u(\xi) + f(\xi)] d\xi \right| \leq \\ &\leq A_{\max} C_0 |t - \tau| + B_{\max} |t - \tau|^{1/2} R + |t - \tau| f_{\max} \leq C_1 (t - \tau)^{1/2} \end{aligned}$$

при всех  $t, \tau \in [t_0, T]$  и  $u \in W$ .

Если  $W$  — ограниченное множество из  $L_{\infty}^r[t_0, T]$ , то вместо (10) можно аналогично получить лучшее неравенство

$$\sup_{u \in W} |x(t, u) - x(\tau, u)| \leq C_1 |t - \tau|, \quad t_0 \leq t, \tau \leq T, \quad (11)$$

где  $C_1 = A_{\max} C_0 + B_{\max} \sup_{u \in W} \|u\|_{L_{\infty}} + f_{\max}$ .

Далее, докажем, что если последовательность  $\{u_k = u_k(t)\}$  сходится к  $u = u(t)$  слабо в  $L_2[t_0, T]$ , то  $\{x(t, u_k)\}$  сходится к  $x(t, u)$  равномерно на отрезке  $[t_0, T]$ , т. е.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t_0 \leq t \leq T} |x(t, u_k) - x(t, u)| = 0. \quad (12)$$

Сначала покажем, что  $\{x(t, u_k)\}$  сходится к  $x(t, u)$  при каждом  $t \in [0, T]$ . Обозначим  $z_k(t) = x(t, u_k) - x(t, u)$ ,  $t_0 \leq t \leq T$ . Из равенства (9) имеем

$$z_k(t) = \int_{t_0}^t A(\tau) z_k(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t B(\tau) [u_k(\tau) - u(\tau)] d\tau, \quad t_0 \leq t \leq T.$$

Тогда

$$|z_k(t)| \leq A_{\max} \int_{t_0}^t |z_k(\tau)| d\tau + \left| \int_{t_0}^t B(\tau) (u_k(\tau) - u(\tau)) d\tau \right|, \quad t_0 \leq t \leq T.$$

Отсюда с помощью леммы 6.3.1 получим

$$|z_k(t)| \leq A_{\max} \int_{t_0}^t b_k(\tau) e^{A_{\max}(t-\tau)} d\tau + b(t), \quad t_0 \leq t \leq T, \quad (12.A)$$

где

$$b_k(t) = \left| \int_{t_0}^t B(\tau) (u_k(\tau) - u(\tau)) d\tau \right| = \left( \sum_{i=1}^n \left| \int_{t_0}^t \langle b_i(\tau), u_k(\tau) - u(\tau) \rangle d\tau \right|^2 \right)^{1/2},$$

$$t_0 \leq t \leq T,$$

$b_i(\tau)$  —  $i$ -я строка матрицы  $B(t)$ . В силу слабой сходимости  $\{u_k(t)\}$  к  $u(t)$  имеем

$$\int_{t_0}^t \langle b_i(\tau), u_k(\tau) - u(\tau) \rangle d\tau = \int_{t_0}^T \langle c_i(\tau), u_k(\tau) - u(\tau) \rangle d\tau \rightarrow 0 \quad \forall t \in [t_0, T], \quad k \rightarrow \infty,$$

где  $c_i(\tau) = b_i(\tau)$  при  $t_0 \leq \tau \leq t$ ,  $c_i(\tau) = 0$  при  $t < \tau \leq T$ . Поэтому  $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k(t) = 0$   $\forall t \in [t_0, T]$ . Кроме того,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t b_k(\tau) e^{A_{\max}(t-\tau)} d\tau = 0$  в силу теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла [695]. Отсюда и из (12.A) получаем  $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k(t) = 0$ , или  $\lim_{k \rightarrow \infty} x(t, u_k) = x(t, u) \quad \forall t \in [t_0, T]$ .

Допустим, что  $\{x(t, u_k)\}$  не сходится к  $x(t, u)$  равномерно на  $[t_0, T]$ . Это значит, что существует число  $\varepsilon_0 > 0$  такое, что для любого номера  $m \geq 1$  найдутся номер  $k_m > m$  и точка  $t_{k_m} \in [t_0, T]$ , для которых  $|x(t_{k_m}, u_{k_m}) - x(t_{k_m}, u)| \geq \varepsilon$ . Можем считать, что  $k_1 < k_2 < \dots < k_m < \dots$ . Заметим также, что слабо сходящаяся последовательность  $\{u_k\}$  ограничена по норме  $L_2^r[t_0, T]$ , т. е.  $\sup_{k \geq 1} \|u_k\|_{L_2} \leq R < \infty$ . Согласно оценкам (8), (10) тогда семейство функций

$\{x(t, u_{k_m})\}$  равномерно ограничено и равностепенно непрерывно на отрезке  $[t_0, T]$ . В силу теоремы Арцела [695] из  $\{x(t, u_{k_m})\}$  можно выбрать подпоследовательность, которая равномерно на  $[t_0, T]$  сходится к  $x(t, u)$ . Без умаления общности можем считать, что сама подпоследовательность  $\{x(t, u_{k_m})\}$  равномерно сходится к  $x(t, u)$ . Это означает, что для любого  $\varepsilon > 0$ , в частности, для  $\varepsilon = \varepsilon_0$ , найдется номер  $m_0$  такой, что  $|x(t, u_{k_m}) - x(t, u)| < \varepsilon_0$  для всех  $m \geq m_0$  и всех  $t \in [t_0, T]$ . В то же время по определению подпоследовательности  $\{x(t, u_{k_m})\}$  имеем  $|x(t_{k_m}, u_{k_m}) - x(t_{k_m}, u)| \geq \varepsilon_0$ . Противоречие. Равенство (12) доказано.

Далее, для любых  $u, v \in L_2^r[t_0, T]$  справедлива оценка

$$\sup_{t_0 \leq t \leq T} |x(t, u) - x(t, v)| \leq C_2 \|u - v\|_{L_2}, \quad (13)$$

где

$$C_2 = e^{A_{\max}(T-t_0)}(T-t_0)^{1/2} B_{\max}.$$

В самом деле, из (9) следует, что

$$\begin{aligned} |x(t, u) - x(t, v)| &= \left| \int_{t_0}^t [A(\tau)(x(\tau, u) - x(\tau, v)) + B(\tau)(u(\tau) - v(\tau))] d\tau \right| \leq \\ &\leq A_{\max} \int_{t_0}^t |x(\tau, u) - x(\tau, v)| d\tau + B_{\max}(T-t_0)^{1/2} \left( \int_{t_0}^T |u(\tau) - v(\tau)|^2 d\tau \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Отсюда с помощью леммы 6.3.1 получаем оценку (13).

На любом ограниченном множестве  $W$  из  $L_2^r[t_0, T]$  функция (1) удовлетворяет условию Липшица

$$|J(u) - J(v)| \leq C_3 \|u - v\|_{L_2}, \quad u, v \in W, \quad (14)$$

где  $C_3 = (4C_0 + 2|y|)C_2$ , постоянные  $C_0, C_2$  взяты из (11), (13). Действительно,

$$\begin{aligned} |J(u) - J(v)| &= ||x(T, u) - y|^2 - |x(T, v) - y|^2| = \\ &= |2\langle x(T, v) + \theta(x(T, u) - x(T, v)) - y, x(T, u) - x(T, v) \rangle|, \quad 0 < \theta < 1, \end{aligned}$$

так что

$$|J(u) - J(v)| \leq 2(|x(T, u)| + |x(T, v)| + |y|) |x(T, u) - x(T, v)|.$$

Отсюда и из оценок (8), (13) следует неравенство (14).

Если  $W_N$  — произвольное ограниченное множество из  $L_{2N}^r$ , т. е.  $\sup_{W_N} \| [u]_N \| \leq R < \infty$ , и, кроме того,

$$d_N = \max_{0 \leq i \leq N-1} \Delta t_i \leq \frac{(T-t_0)M}{N}, \quad M = \text{const} > 0, \quad (15)$$

то

$$\sup_{[u]_N \in W_N} \max_{0 \leq i \leq N} |x_i([u]_N)| \leq C_4, \quad (16)$$

где

$$C_4 = e^{A_{\max}(T-t_0)M} (|x_0| + B_{\max}(T-t_0)^{1/2}R + f_{\max}(T-t_0)).$$

В самом деле, из (5) имеем

$$x_{i+1} = \sum_{j=0}^i \Delta t_j (A_j x_j + B_j u_j + f_j) + x_0, \quad i = 0, \dots, N-1. \quad (17)$$

Следовательно,

$$|x_{i+1}| \leq A_{\max} d_N \sum_{j=0}^i |x_j| + B_{\max}(T-t_0)^{1/2} \| [u]_N \|_{L_{2N}} + (T-t_0) f_{\max} + |x_0|, \\ i = 0, \dots, N-1.$$

С помощью леммы 8.6.1 отсюда получаем

$$|x_i| \leq (1 + A_{\max} d_N)^i (|x_0| + B_{\max}(T-t_0)^{1/2}R + f_{\max}(T-t_0)), \\ i = 0, \dots, N. \quad (18)$$

Поскольку  $1 + x \leq e^x$  при всех действительных  $x$ , то с учетом (15) имеем

$$(1 + A_{\max} d_N)^i \leq (e^{A_{\max} d_N})^i \leq e^{A_{\max} d_N N} \leq e^{A_{\max}(T-t_0)M}. \quad (19)$$

Отсюда и из (18) следует оценка (16).

Для исследования связи между задачами (1)–(3) и (4)–(6) нам ниже будут полезны следующие два отображения  $Q_N$  и  $P_N$ . Отображение  $Q_N$ , действующее из пространства  $L_2^r[t_0, T]$  в  $L_{2N}^r$ , определяется так:

$$Q_N(u) = (u_0, u_1, \dots, u_{N-1}): u_i = \frac{1}{\Delta t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} u(t) dt, \quad i = 0, \dots, N-1, \quad (20)$$

отображение  $P_N$ , действующее из  $L_{2N}^r$  в  $L_2^r[t_0, T]$ , определяется следующим образом:

$$P_N([u]_N) = u_i \quad \text{при} \quad t_i < t \leq t_{i+1}, \quad i = 0, \dots, N-1. \quad (21)$$

Из (20), (21) непосредственно следует, что

$$\|Q_N(u)\|_{L_{2N}}^2 = \sum_{i=0}^{N-1} \left( \frac{1}{\Delta t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} u(t) dt \right)^2 \Delta t_i = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{\Delta t_i} \left( \int_{t_i}^{t_{i+1}} u(t) dt \right)^2 \leq \\ \leq \sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |u(t)|^2 dt = \int_{t_0}^T |u(t)|^2 dt = \|u\|_{L_2}^2, \quad (22)$$

$$\|P_N([u]_N)\|_{L_2}^2 = \int_{t_0}^T |P_N([u]_N)|^2 dt = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |u_i|^2 dt = \\ = \sum_{i=0}^{N-1} \Delta t_i |u_i|^2 = \|[u]_N\|_{L_{2N}}^2. \quad (23)$$

Ниже докажем несколько лемм, связанных со свойствами отображений  $Q_N$  и  $P_N$ .

**Л е м м а 1.** Пусть  $V$  — выпуклое замкнутое множество из  $E^r$ , а управление  $u = u(t)$  принадлежит  $L_2^r[t_0, T]$  и  $u(t) \in V$  почти всюду на отрезке  $[t_0, T]$ . Тогда

$$u_i = \frac{1}{\Delta t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} u(t) dt \in V$$

при всех  $t_i, t_{i+1} \in [t_0, T]$ ,  $t_i < t_{i+1}$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Сначала установим, что всякое выпуклое замкнутое множество  $V$  из  $E^r$  является пересечением полупространств, образованных всевозможными опорными гиперплоскостями к множеству  $V$  и содержащих  $V$  (см. определение 4.5.2). Возьмем произвольную граничную точку  $v$  множества  $V$ . Пусть  $c_v$  — опорный вектор множества  $V$  в точке  $v$ , т. е.  $c_v \neq 0$  и  $\langle c_v, u - v \rangle \geq 0$  при всех  $u \in V$ . Обозначим

$$W = \bigcap_{v \in \text{Гр } V} \{u : \langle c_v, u - v \rangle \geq 0\}.$$

Надо показать, что  $W = V$ . Если  $u \in V$ , то  $\langle c_v, u - v \rangle \geq 0$  для всех  $v \in \text{Гр } V$ , поэтому  $u \in W$ . Это значит, что  $V \subseteq W$ .

Покажем, что справедливо включение  $W \subseteq V$ . Допустим противное: пусть существует точка  $w \in W$ , но  $w \notin V$ . Тогда по теореме 4.5.1 множество  $V$  и точка  $w$  сильно отделимы, и гиперплоскость  $\langle c_v, u - v \rangle = 0$ , где  $v = P_V(w)$  — проекция точки  $w$  на множество  $V$ , обладает свойствами:  $\langle c_v, u - v \rangle \geq 0$  при всех  $u \in V$ , а  $\langle c_v, w - v \rangle < 0$ . Но поскольку  $v \in \text{Гр } V$  и  $w \in W$ , то  $\langle c_v, w - v \rangle \geq 0$  по определению множества  $W$ . Противоречие. Следовательно,  $W \subseteq V$ . Требуемое равенство  $W = V$  доказано.

Возьмем произвольное управление  $u = u(t)$ , удовлетворяющее условию леммы. Пусть  $v$  — любая точка из  $\text{Гр } V$ ,  $c_v$  — опорный вектор к  $V$  в точке  $v$ . Тогда  $\langle c_v, u(t) - v \rangle \geq 0$  почти всюду на  $[t_0, T]$ . Интегрируя это неравенство на отрезке  $[t_i, t_{i+1}]$ , получим

$$\frac{1}{\Delta t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \langle c_v, u(t) \rangle dt = \left\langle c_v, \frac{1}{\Delta t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} u(t) dt \right\rangle = \langle c_v, u_i \rangle \geq \langle c_v, v \rangle,$$

или  $\langle c_v, u_i - v \rangle \geq 0$  для всех  $v \in \text{Гр } V$ . Следовательно,  $u_i \in W = V$ . Лемма 1 доказана.  $\square$

**Л е м м а 2.** Пусть матрицы  $A(t), B(t), f(t)$  кусочно непрерывны на отрезке  $t_0 \leq t \leq T$ , разбиения  $\{t_i, i = 0, \dots, N\}$  отрезка  $[t_0, T]$  удовлетворяют условию (15). Пусть  $W$  и  $W_N$  — произвольные ограниченные множества из  $L_2^r[t_0, T]$  и  $L_{2N}^r$  соответственно, т. е.  $\sup_W \|u\|_{L_2} \leq R < \infty$ ,  $\sup_{W_N} \|[u]_N\|_{L_{2N}} \leq R < \infty$ . Тогда

$$\sup_{u \in W} \max_{0 \leq i \leq N} |x(t_i, u) - x_i(Q_N(u))| \leq \delta_N, \quad (24)$$

$$\sup_{[u]_N \in W_N} \max_{0 \leq i \leq N} |x(t_i, P_N([u]_N)) - x_i([u]_N)| \leq \delta_N, \quad N = 1, 2, \dots, \quad (25)$$

зде

$$\begin{aligned} \delta_N = e^{A_{\max}(T-t_0)M} & \left[ \sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left( \|A(\tau) - A_i\| \sup_{\|u\|_{L_2}} \max_{t_0 \leq \tau \leq T} |x(\tau, u)| + \right. \right. \\ & \left. \left. + A_{\max} \sup_{\|u\|_{L_2}} |x(\tau, u) - x(t_i, u)| + |f(\tau) - f_i| \right) d\tau \right] + \\ & + R \left( \sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|B(\tau) - B_i\|^2 d\tau \right)^{1/2} \rightarrow 0 \quad \text{при } N \rightarrow \infty. \quad (26) \end{aligned}$$

**Доказательство.** Возьмем произвольные  $u \in L_2^r[t_0, T]$  и  $[u]_N \in L_{2N}^r$ , для которых  $\|u\|_{L_2} \leq R$ ,  $\|[u]_N\|_{L_{2N}} \leq R$ , и соответствующие им решения  $x(t, u)$  и  $[x([u]_N)]_N$  задач (2) и (5). Из равенств (9) и (17) следует

$$\begin{aligned} |x(t_{i+1}, u) - x_{i+1}([u]_N)| &= \left| \sum_{j=0}^i \int_{t_j}^{t_{j+1}} [(A(\tau) - A_j)x(\tau, u) + A_j(x(\tau, u) - x(t_j, u)) + \right. \\ & \left. + A_j(x(t_j, u) - x_j([u]_N)) + (B(\tau) - B_j)u(\tau) + B_j(u(\tau) - u_j) + (f(\tau) - f_j)] d\tau \right| \leq \\ & \leq A_{\max} d_N \sum_{j=0}^i |x(t_j, u) - x_j([u]_N)| + \sum_{j=0}^{N-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (\|A(\tau) - A_j\| |x(\tau, u)| + \\ & + A_{\max} |x(\tau, u) - x(t_j, u)| + |f(\tau) - f_j|) d\tau + \left( \sum_{j=0}^{N-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \|B(\tau) - B_j\|^2 d\tau \right)^{1/2} \|u\|_{L_2} + \\ & + \sum_{j=0}^{N-1} \|B_j\| \left| \int_{t_j}^{t_{j+1}} (u(\tau) - u_j) d\tau \right|, \quad i = 0, \dots, N-1. \end{aligned}$$

Отсюда с помощью леммы 8.6.1 и неравенств (18) получаем

$$|x(t_i, u) - x_i([u]_N)| \leq \delta_N + e^{A_{\max}(T-t_0)M} B_{\max} \sum_{j=0}^{N-1} \left| \int_{t_j}^{t_{j+1}} (u(\tau) - u_j) d\tau \right|, \quad (27)$$

$$i = 0, \dots, N,$$

для всех  $u$ ,  $[u]_N$ ,  $\|u\|_{L_2} \leq R$ ,  $\|[u]_N\|_{L_{2N}} \leq R$ . Однако, если  $\|u\|_{L_2} \leq R$ , то в силу (22) имеем  $\|Q_N(u)\|_{L_{2N}} \leq R$ . Поэтому, учитывая, что  $\int_{t_j}^{t_{j+1}} (u(\tau) - Q_N(u)) d\tau = 0$ ,  $j = 0, \dots, N-1$ , из (27) при  $[u]_N = Q_N(u)$  получим оценку (24). Аналогично, если  $\|[u]_N\|_{L_{2N}} \leq R$ , то согласно (23) тогда  $\|P_N([u]_N)\|_{L_2} \leq R$  и поэтому, учитывая, что  $\int_{t_j}^{t_{j+1}} (P_N([u]_N) - u_j) d\tau = 0$ ,  $j = 0, \dots, N-1$ , из (27) при  $u = P_N([u]_N)$  получим оценку (25).

Остается доказать, что величина  $\delta_N$ , определяемая равенством (26), стремится к нулю при  $N \rightarrow \infty$ . Пусть  $\theta_1, \dots, \theta_s$  — точки разрыва элементов матрицы  $A(t)$  на отрезке  $[t_0, T]$ :  $t_0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_s < T = \theta_{s+1}$ . Доопределим матрицу  $A(t)$ ,  $\theta_i < t < \theta_{i+1}$ , при  $t = \theta_i$  и  $t = \theta_{i+1}$  предельными значениями при  $t \rightarrow \theta_i + 0$  и  $t \rightarrow \theta_{i+1} - 0$ ; тогда  $A(t)$  будет непрерывной и, следовательно, равномерно непрерывной на отрезке  $[\theta_i, \theta_{i+1}]$ ,  $i = 0, \dots, s$ . Отсюда следует, что для любого  $\varepsilon > 0$  можно указать номер  $N_0 = N_0(\varepsilon)$  такой, что как только  $N \geq N_0$ ,  $0 < t_{i+1} - t_i = \Delta t_i \leq d_N$  и отрезок  $[t_i, t_{i+1}]$  не содержит ни одной точки  $\{\theta_j\}$  разрыва  $A(t)$ , то  $\|A(\tau) - A_i\| < \varepsilon$  для всех  $\tau$ ,  $t_i \leq \tau \leq t_{i+1}$ . Имеем

$$\sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|A(\tau) - A_i\| d\tau = \sum_i' \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|A(\tau) - A_i\| d\tau + \sum_i'' \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|A(\tau) - A_i\| d\tau, \quad (28)$$

где  $\sum_i'$  означает суммирование по тем номерам  $i$ , для которых отрезок  $[t_i, t_{i+1}]$  не содержит ни одной точки разрыва  $A(t)$ , а  $\sum_i''$  — суммирование по остальным номерам  $i$ . Тогда

$$\sum_i' \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|A(\tau) - A_i\| d\tau \leq \sum_i' \int_{t_i}^{t_{i+1}} \varepsilon d\tau \leq (T - t_0)\varepsilon \quad \text{для всех } N \geq N_0.$$

Взяв при необходимости номер  $N_0$  еще большим, можем сделать

$$\sum_i'' \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|A(\tau) - A_i\| d\tau \leq 2A_{\max} \sum_i'' \Delta t_i \leq 2A_{\max}(s+1)d_N < \varepsilon$$

для всех  $N \geq N_0$ . Отсюда и из (28) следует, что

$$\sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|A(\tau) - A_i\| d\tau \rightarrow 0 \quad \text{при } N \rightarrow \infty.$$

Аналогично доказывается, что

$$\sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|B(\tau) - B_i\|^2 d\tau \rightarrow 0, \quad \sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |f(\tau) - f_i| d\tau \rightarrow 0$$

при  $N \rightarrow \infty$ . Отсюда и из неравенств (8), (10) следует, что  $\delta_N \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$ . Лемма 2 доказана.  $\square$

**Лемма 3.** Пусть выполнены все условия леммы 2, пусть  $u = u(t)$  — произвольное управление из  $W$ . Тогда

$$|I_N(Q_N(u)) - J(u)| \leq C_5 \delta_N, \quad C_5 = 2C_0 + 2C_4 + 2|y|, \quad N = 1, 2, \dots, \quad (29)$$

где  $C_0, C_4$  — постоянные из (8), (16), а величина  $\delta_N$  определена формулой (26).



**Доказательство.** Заметим, что

$$\begin{aligned} |I_N(Q_N(u)) - J(u)| &= |x_N(Q_N(u)) - y|^2 - |x(T, u) - y|^2 = \\ &= |2\langle x(T, u) + \theta(x_N(Q_N(u)) - x(T, u)) - y, x_N(Q_N(u)) - x(T, u) \rangle|, \end{aligned}$$

$0 < \theta < 1$ . Отсюда и из оценок (8), (16), (24) следует утверждение леммы 3.  $\square$

**Лемма 4.** Пусть выполнены все условия леммы 2 и пусть  $[u]_N$  — произвольное управление из  $W_N$ . Тогда

$$|J(P_N([u]_N)) - I_N([u]_N)| \leq C_6 \delta_N, \quad C_6 = 2C_4 + 2C_0 + 2|y|, \quad N = 1, 2, \dots, \quad (30)$$

где  $C_0, C_4$  — постоянные из (8), (16),  $\delta_N$  определена формулой (26).

**Доказательство.** Имеем

$$\begin{aligned} |J(P_N([u]_N)) - I_N([u]_N)| &= |2\langle x_N([u]_N) + \theta(x(T, P_N([u]_N)) - x_N([u]_N)) - \\ &\quad - y, x(T, P_N([u]_N)) - x_N([u]_N) \rangle|, \quad 0 < \theta < 1. \end{aligned}$$

Отсюда и из оценок (8), (16), (25) следует утверждение леммы 4.  $\square$

**Теорема 1.** Пусть матрицы  $A(t), B(t), f(t)$  кусочно непрерывны на отрезке  $t_0 \leq t \leq T$ ,  $V$  — выпуклое замкнутое ограниченное множество из  $E^r$ , разбиения  $\{t_i, i = 0, \dots, N\}$  отрезка  $[t_0, T]$  удовлетворяют условию (15). Пусть  $J_*$  — нижняя грань функции (1) при условиях (2), (3),  $I_{N*}$  — нижняя грань функции (4) при условиях (5), (6), последовательность  $\{[u]_{N\varepsilon}\}$  определена из условий (7). Тогда  $\lim_{N \rightarrow \infty} I_{N*} = J_*$  и справедливы оценки

$$-C_6 \delta_N \leq I_{N*} - J_* \leq C_5 \delta_N, \quad N = 1, 2, \dots, \quad (31)$$

$$0 \leq J(P_N([u]_{N\varepsilon})) - J_* \leq (C_5 + C_6) \delta_N + \varepsilon_N, \quad N = 1, 2, \dots, \quad (32)$$

где постоянные  $C_5, C_6$  взяты из оценок (29), (30) при  $W = U$  и  $W_N = U_N$  соответственно, а величина  $\delta_N$  определена формулой (26).

**Доказательство.** При сделанных предположениях  $U_* \neq \emptyset$  (пример 8.2.15) возьмем какое-либо управление  $u_* \in U_*$ . Согласно лемме 1 имеем  $Q_N(u_*) \in U_N$ . Отсюда и из леммы 3 следует

$$I_{N*} \leq I_N(Q_N(u_*)) \leq J(u_*) + C_5 \delta_N = J_* + C_5 \delta_N, \quad N = 1, 2, \dots \quad (33)$$

Далее, функция (4) конечного числа переменных  $[u]_N = (u_0, \dots, u_{N-1})$  на компактном множестве  $U_N$  достигает своей нижней грани, т. е.  $I_{N*} > -\infty$ ,  $U_{N*} \neq \emptyset$ . Возьмем какое-нибудь управление  $[u]_{N*} \in U_{N*}$ . Из (21) непосредственно следует, что  $P_N([u]_{N*}) \in U$ . Из леммы 4 тогда получим

$$J_* \leq J(P_N([u]_{N*})) \leq I_N([u]_{N*}) + C_6 \delta_N = I_{N*} + C_6 \delta_N, \quad N = 1, 2, \dots \quad (34)$$

Из неравенств (33), (34) следует оценка (31). Так как согласно лемме 2 имеем  $\lim_{N \rightarrow \infty} \delta_N = 0$ , то  $\lim_{N \rightarrow \infty} I_{N*} = J_*$ .

Рассмотрим последовательность  $\{[u]_{N\varepsilon}\}$  из (7). Тогда  $P_N([u]_{N\varepsilon}) \in U$  и  $0 \leq J(P_N([u]_{N\varepsilon})) - J_* = [J(P_N([u]_{N\varepsilon})) - I_N([u]_{N\varepsilon})] + [I_N([u]_{N\varepsilon}) - I_{N*}] + [I_{N*} - J_*]$ ,  $N = 1, 2, \dots$ . Отсюда и из неравенств (7), (30), (31) следует оценка (32). Тем самым установлено, что  $\{P_N([u]_{N\varepsilon})\}$  — минимизирующая последовательность задачи (1)–(3). Рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 8.2.4, можно показать, что любая точка  $u_*$ , являющаяся слабым пределом какой-либо подпоследовательности из  $\{P_N([u]_{N\varepsilon})\}$ , принадлежит  $U_*$ .  $\square$

Заметим, что множество  $U$ , определяемое условиями (3), при выполнении условий теоремы 1 ограничено в метрике  $L_\infty^r[t_0, T]$  и, следовательно, справедливо неравенство (11). Поэтому, если матрицы  $A(t), B(t), f(t)$  на интервалах непрерывности удовлетворяют условию Липшица (например, если эти матрицы не зависят от времени), то из (8), (11), (26) и (31) следует оценка

$$|I_{N*} - J_*| \leq C_7 d_N = C_7 \max_{0 \leq i \leq N-1} \Delta t_i. \quad (35)$$

Заметим также, что при доказательстве теоремы 1 неравенства (29), (30) были использованы не полностью: для получения оценки (31) оказалось достаточно справедливости неравенств (33), (34). В следующем параграфе будет выяснено, что неравенства (33), (34) в некотором смысле являются необходимыми для справедливости равенства  $\lim_{N \rightarrow \infty} I_{N*} = J_*$ .

В заключение предлагаем читателю в качестве упражнения доказать оценки типа (31), (32) в предположении, что в задаче (1)–(3) элементы матриц  $A(t), B(t), f(t)$  принадлежат  $L_\infty[t_0, T]$ , а в (4)–(6) принято

$$A_i = \frac{1}{\Delta t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} A(t) dt, \quad B_i = \frac{1}{\Delta t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} B(t) dt, \quad f_i = \frac{1}{\Delta t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t) dt, \\ i = 0, \dots, N-1.$$

## § 2. Общие условия аппроксимации

Перейдем к рассмотрению общей задачи минимизации и сформулируем критерий аппроксимации по функции. Пусть  $X, X_1, X_2, \dots, X_N, \dots$  — некоторые множества произвольной природы. Элементы множества  $X$  будем обозначать через  $u$ , а элементы  $X_N$  — через  $[u]_N$ . Пусть  $U$  — некоторое непустое множество из  $X$ ,  $U_N$  — непустое множество из  $X_N$ ,  $N = 1, 2, \dots$ . Пусть функции  $J(u), I_1([u]_1), \dots, I_N([u]_N), \dots$  определены соответственно на множествах  $U, U_1, \dots, U_N, \dots$ . Рассмотрим задачу

$$J(u) \rightarrow \inf, \quad u \in U, \quad (1)$$

и последовательность «аппроксимирующих» ее задач

$$I_N([u]_N) \rightarrow \inf, \quad [u]_N \in U_N, \quad N = 1, 2, \dots \quad (2)$$

О п р е д е л е н и е 1. Обозначим

$$J_* = \inf_U J(u), \quad I_{N*} = \inf_{U_N} I_N([u]_N), \quad N = 1, 2, \dots$$

Скажем, что последовательность задач (2) аппроксимирует задачу (1) по функции, если

$$\lim_{N \rightarrow \infty} I_{N*} = J_*. \quad (3)$$

Нетрудно видеть, что в схему задач (1), (2) укладываются задачи (1.1)–(1.3) и (1.4)–(1.6), в которых роль множеств  $X$  и  $X_N$  играют пространства  $L_2^r[t_0, T]$  и  $L_{2N}^r$  соответственно, множества  $U$  и  $U_N$  описываются условиями (1.3) и (1.6), причем в теореме 1.1 сформулированы условия, гарантирующие аппроксимацию по функции. Заметим, что в задачах (1.1)–(1.3) и (1.4)–(1.6) множества  $X$  и  $X_N$  имеют различную природу: в задаче (1.1)–(1.3) управления и траектории зависят от непрерывного времени, а в (1.4)–(1.6) — от дискретного времени.

В § 1 для задачи (1.1)–(1.3) аппроксимирующая последовательность задач (1.4)–(1.6) была получена с помощью разностной аппроксимации уравнений (1.2) и множества (1.3). В этой и других задачах оптимального управления, рассмотренных в гл. 6–9, при конструировании аппроксимирующих задач наряду с разностными методами могут быть использованы и другие методы, такие как, например, метод конечных элементов, метод прямых, возможна аппроксимация управления с помощью частичных сумм ряда, представляющего собой разложение по каким-нибудь базисным функциям или по степеням какого-либо параметра и т. п. Все эти методы аппроксимации экстремальных задач также укладываются в схему задач (1), (2). Разумеется, в (1), (2) не исключается и такая возможность, когда множества  $X$  и  $X_N$  имеют одну и ту же природу, а множества  $U_N$  и функции  $I_N([u]_N) = I_N(u)$ ,  $N = 1, 2, \dots$ , представляют собой приближенно заданное множество  $U$  и функцию  $J(u)$  соответственно.

Таким образом, задачи (1), (2) позволяют охватить широкие классы экстремальных задач и их аппроксимаций. Возникает важный вопрос: каким условиям должна удовлетворять последовательность задач (2) для того, чтобы она аппроксимировала задачу (1) по функции, т. е. чтобы выполнялось равенство (3)?

1. Следующая теорема дает один из возможных ответов на этот вопрос, указывает подход к построению последовательности аппроксимирующих задач в конкретных экстремальных задачах, к исследованию сходимости в смысле равенства (3).

**Теорема 1.** *Для того чтобы последовательность задач (2) аппроксимировала задачу (1) по функции, необходимо и достаточно, чтобы существовали отображения  $Q_N: X \rightarrow X_N$  и  $P_N: X_N \rightarrow X$  такие, что*

1) *для любой точки  $u \in U$  справедливо включение  $Q_N(u) \in U_N$ ,  $N = 1, 2, \dots$ , и*

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (I_N(Q_N(u)) - J(u)) \leq 0; \quad (4)$$

2) для любой точки  $[u]_N \in U_N$  справедливо включение  $P_N([u]_N) \in U$ ,  $N = 1, 2, \dots$ , и

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (J(P_N([u]_N)) - I_N([u]_N)) \leq 0. \quad (5)$$

Если выполнены условия 1, 2 и, кроме того, последовательности  $\{\beta_N\}$ ,  $\{\gamma_N\}$  неотрицательны, стремятся к нулю и таковы, что

$$I_N(Q_N(u)) - J(u) \leq \beta_N, \quad u \in U, \quad N = 1, 2, \dots, \quad (6)$$

$$J(P_N([u]_N)) - I_N([u]_N) \leq \gamma_N, \quad [u]_N \in U_N, \quad N = 1, 2, \dots, \quad (7)$$

то справедлива оценка

$$-\gamma_N \leq I_{N*} - J_* \leq \beta_N, \quad N = 1, 2, \dots \quad (8)$$

Наконец, если последовательность  $\{[u]_{N\varepsilon}\}$  такова, что

$$[u]_{N\varepsilon} \in U_N, \quad I_{N*} \leq I_N([u]_{N\varepsilon}) \leq I_{N*} + \varepsilon_N, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \varepsilon_N = 0, \quad (9)$$

то при выполнении условий 1, 2  $\lim_{N \rightarrow \infty} J(P_N([u]_{N\varepsilon})) = J_*$ , а из условий (6), (7) следует оценка

$$0 \leq J(P_N([u]_{N\varepsilon})) - J_* \leq \beta_N + \gamma_N + \varepsilon_N, \quad N = 1, 2, \dots \quad (10)$$

**Доказательство. Необходимость.** Пусть последовательность задач (2) аппроксимирует задачу (1) по функции, т. е. справедливо равенство (3). Возьмем произвольные последовательности  $\{v_N\}$ ,  $\{[v]_N\}$  такие, что

$$v_N \in U, \quad N = 1, 2, \dots; \quad \lim_{N \rightarrow \infty} (J(v_N) - J_*) = 0, \quad (11)$$

$$[v]_N \in U_N, \quad N = 1, 2, \dots; \quad \lim_{N \rightarrow \infty} (I_N([v]_N) - I_{N*}) = 0. \quad (12)$$

Существование таких последовательностей вытекает из определения нижней грани. Определим отображения  $Q_N$  и  $P_N$  следующим образом:

$$Q_N(u) = [v]_N \quad \text{при всех } u \in X, \quad N = 1, 2, \dots$$

$$P_N([u]_N) = v_N \quad \text{при всех } [u]_N \in U_N, \quad N = 1, 2, \dots$$

Ясно, что  $Q_N(u) \in U_N$  при всех  $u \in U$ ,  $P_N([u]_N) \in U$  при всех  $[u]_N \in U_N$ ,  $N = 1, 2, \dots$ . Далее, так как  $J_* \leq J(u)$  при  $u \in U$ , то

$$\begin{aligned} I_N(Q_N(u)) - J(u) &= (I_N(Q_N(u)) - I_{N*}) + (I_{N*} - J_*) + (J_* - J(u)) \leq \\ &\leq (I_N([v]_N) - I_{N*}) + (I_{N*} - J_*) \end{aligned}$$

при всех  $u \in U$ ,  $N = 1, 2, \dots$ . Переходя в этом неравенстве к верхнему пределу при  $N \rightarrow \infty$ , с учетом условий (3), (12) придем к неравенству (4). Наконец, поскольку  $I_{N*} \leq I_N([u]_N)$  при  $[u]_N \in U_N$ , то

$$\begin{aligned} J(P_N([u]_N)) - I_N([u]_N) &= (J(P_N([u]_N)) - J_*) + (J_* - I_{N*}) + (I_{N*} - I_N([u]_N)) \leq \\ &\leq (J(v_N) - J_*) + (J_* - I_{N*}) \end{aligned}$$

при всех  $[u]_N \in U_N$ ,  $N = 1, 2, \dots$ . Переходя в этом неравенстве к верхнему пределу при  $N \rightarrow \infty$ , с учетом условий (3), (11) получим неравенство (5). Необходимость доказана.

**Д о с т а т о ч н о с т ь.** Пусть для некоторых отображений  $Q_N$ ,  $P_N$  выполнены условия 1, 2. Докажем, что тогда справедливо равенство (3). Поскольку  $Q_N(u) \in U_N$  при всех  $u \in U$ , то  $I_{N*} \leq I_N(Q_N(u))$  и

$$\begin{aligned} I_{N*} - J_* &= (I_{N*} - I_N(Q_N(u))) + (I_N(Q_N(u)) - J(u)) + (J(u) - J_*) \leq \\ &\leq (I_N(Q_N(u)) - J(u)) + (J(u) - J_*) \end{aligned}$$

при всех  $u \in U$  и  $N = 1, 2, \dots$ . Переходя в этом неравенстве к верхнему пределу при  $N \rightarrow \infty$ , с учетом условия (4) получим

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (I_{N*} - J_*) \leq J(u) - J_*, \quad u \in U.$$

Левая часть этого неравенства не зависит от  $u$ , поэтому, переходя в правой части к нижней грани по  $u \in U$ , будем иметь  $\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (I_{N*} - J_*) \leq J_* - J_* = 0$ . С другой стороны, поскольку  $P_N([u]_N) \in U$  при всех  $[u]_N \in U_N$ , то  $J_* \leq J(P_N([u]_N))$  и

$$\begin{aligned} J_* - I_{N*} &= (J_* - J(P_N([u]_N))) + (J(P_N([u]_N)) - I_N([u]_N)) + (I_N([u]_N) - I_{N*}) \leq \\ &\leq (J(P_N([u]_N)) - I_N([u]_N)) + (I_N([u]_N) - I_{N*}) \end{aligned}$$

для всех  $[u]_N \in U_N$ ,  $N = 1, 2, \dots$ . При  $N \rightarrow \infty$  отсюда с учетом условия (5) получим

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (J_* - I_{N*}) \leq \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (I_N([u]_N) - I_{N*})$$

при любом выборе  $[u]_N \in U_N$ ,  $N = 1, 2, \dots$ . В частности, если, пользуясь определением нижней грани  $I_{N*}$ , при каждом  $N = 1, 2, \dots$  взять  $[u]_N \in U_N$  так, чтобы  $I_N([u]_N) \leq I_{N*} + 1/N$ , то из предыдущего неравенства будем иметь

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (J_* - I_{N*}) \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} = 0.$$

Итак, из вышеизложенного следует, что

$$0 \leq - \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (J_* - I_{N*}) = \underline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (I_{N*} - J_*) \leq \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (I_{N*} - J_*) \leq 0,$$

т. е.

$$\underline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (I_{N*} - J_*) = \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (I_{N*} - J_*) = 0.$$

Отсюда следует, что предел  $\lim_{N \rightarrow \infty} J_{N*}$  существует и равен  $J_*$ . Достаточность доказана.

Докажем оценку (8). Так как  $Q_N(u) \in U_N$  при всех  $u \in U$ , то с учетом оценки (6) имеем  $I_{N*} \leq I_N(Q_N(u)) \leq J(u) + \beta_N$ , или  $I_{N*} \leq J(u) + \beta_N$  для всех  $u \in U$ ,  $N = 1, 2, \dots$ . Переходя в правой части последнего неравенства к нижней

границы по  $u \in U$ , получим  $I_{N*} \leq J_* + \beta_N$ , или  $I_{N*} - J_* \leq \beta_N$ ,  $N = 1, 2, \dots$ . Правое неравенство (8) доказано. Далее, так как  $P_N([u]_N) \in U$  при всех  $[u]_N \in U_N$ , то с учетом оценки (7) имеем  $J_* \leq J(P_N([u]_N)) \leq J_N([u]_N) + \gamma_N$ , или  $J_* \leq I_N([u]_N) + \gamma_N$  для всех  $[u]_N \in U_N$ ,  $N = 1, 2, \dots$ . Переходя в правой части этого неравенства к нижней границе по  $[u]_N \in U_N$ , получим  $J_* \leq I_{N*} + \gamma_N$ , или  $-\gamma_N \leq I_{N*} - J_*$ ,  $N = 1, 2, \dots$ . Левая оценка (8) также доказана.

Итак, пусть последовательность  $[u]_{N\varepsilon}$  удовлетворяет условиям (9). Тогда

$$0 \leq J(P_N([u]_{N\varepsilon})) - J_* = (J(P_N([u]_{N\varepsilon})) - I_N([u]_{N\varepsilon})) + (I_N([u]_{N\varepsilon}) - I_{N*}) + (I_{N*} - J_*) \leq (J(P_N([u]_{N\varepsilon})) - I_N([u]_{N\varepsilon})) + \varepsilon_N + (I_{N*} - J_*), \quad N = 1, 2, \dots$$

Отсюда и из (3)–(5) следует, что последовательность  $\{P_N([u]_{N\varepsilon})\}$  является минимизирующей для задачи (1), а из оценок (6)–(8) вытекает оценка (10). Теорема 1 доказана.  $\square$

Нетрудно видеть, что проведенное в § 1 исследование поведения разностных аппроксимаций (1.4)–(1.6) задачи (1.1)–(1.3) укладывается в схему теоремы 1. В самом деле, отображения  $Q_N$  и  $P_N$  в этой задаче были определены формулами (1.20), (1.21), в леммах 1.3 и 1.4 были установлены неравенства (4), (5) и оценки (6), (7), а оценки (1.31), (1.32) являются следствиями оценок (8), (10).

**2.** Для иллюстрации теоремы 1 кратко остановимся здесь еще на задаче (1.1), (1.2) при условии

$$u = u(t) \in U = \left\{ u(t) \in L_2^r[t_0, T]: \int_{t_0}^T |u(t)|^2 dt \leq R^2 \right\}, \quad (13)$$

где  $R > 0$  — заданное число. В качестве аппроксимирующей последовательности для задачи (1.1), (1.2), (13) возьмем разностные аппроксимации (1.4), (1.5) при условии

$$[u]_N \in U_N = \left\{ [u]_N = (u_0, u_1, \dots, u_{N-1}) \in L_{2N}^r: \sum_{i=0}^{N-1} \Delta t_i |u_i|^2 \leq R^2 \right\}. \quad (14)$$

В качестве отображений  $Q_N$  и  $P_N$  возьмем отображения, определяемые формулами (1.20), (1.21). Справедлива

**Теорема 2.** Пусть матрицы  $A(t), B(t), f(t)$  кусочно непрерывны на отрезке  $[t_0, T]$ , разбиения  $\{t_i, i = 0, \dots, N\}$  отрезка  $[t_0, T]$  таковы, что  $d_N = \max_{0 \leq i \leq N-1} \Delta t_i \leq (T - t_0)M/N$ ,  $N = 1, 2, \dots$ ,  $M = \text{const} > 0$ . Пусть  $J_*$  — нижняя грань функции (1.1) при условиях (1.2), (13),  $I_{N*}$  — нижняя грань функции (1.4) при условиях (1.5), (14), а последовательность  $\{[u]_{N\varepsilon}\}$  определена из условий (9). Тогда справедливы оценки

$$-C_6 \delta_N \leq I_{N*} - J_* \leq C_5 \delta_N, \quad N = 1, 2, \dots, \\ 0 \leq J(P_N([u]_{N\varepsilon})) - J_* \leq (C_5 + C_6) \delta_N + \varepsilon_N, \quad N = 1, 2, \dots,$$

где постоянные  $C_5, C_6$  взяты из оценок (1.29), (1.30) при  $W = U$  и  $W_N = U_N$  соответственно, величина  $\delta_N$  определена формулой (1.26).

**Доказательство.** Из соотношений (1.22), (1.23) следует, что отображения (1.20), (1.21) таковы, что  $Q_N(u) \in U_N$  при всех  $u \in U$  и  $P_N([u]_N) \in U$  при всех  $[u]_N \in U_n$ ,  $N = 1, 2, \dots$ . Далее, оценки (1.8), (1.10), (1.16) и леммы 1.2–1.4 остаются справедливыми и для множеств (13), (14). Поэтому из лемм 1.3 и 1.4 имеем неравенства (4), (5) и оценки (6), (7). Отсюда и из теоремы 1 следуют все утверждения теоремы 2.  $\square$

**3.** Следует оговориться, что в более сложных задачах минимизации построение аппроксимирующих задач, удовлетворяющих условиям теоремы 1, может оказаться непростым делом. Так, например, даже в простейших задачах оптимального управления вида (1.1)–(1.3) или (1.1), (1.2), (1.3) при наличии фазовых ограничений не всегда бывает ясно, как строить разностные аппроксимации, обеспечивающие непустоту множества  $U_N$  и удовлетворяющие условиям теоремы 1. Для определения возникающих здесь трудностей иногда полезно работать с расширениями  $U^\varepsilon$  и сужениями  $U^{-\varepsilon}$  множества, на котором имеется минимум.

Приведем два критерия аппроксимации по функции, использующие упомянутые расширения и сужения множества  $U$ .

**Теорема 3.** Для того чтобы последовательность задач (2) аппроксимировала задачу (1) по функции, необходимо и достаточно, чтобы при некотором  $\varepsilon_0 > 0$  существовали семейства непустых множеств  $U^\varepsilon \subseteq X$ ,  $U^{-\varepsilon} \subseteq X$ ,  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ , и отображения  $Q_N: X \rightarrow X_N$ ,  $P_N: X_N \rightarrow X$  такие, что функция  $J(u)$  определена на объединении множеств  $U^\varepsilon$ ,  $U^{-\varepsilon}$  по всем  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ , и, кроме того:

1) для любого  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ , найдется номер  $N_1 = N_1(\varepsilon)$  такой, что  $Q_N(u) \in U_N$  при всех  $u \in U^{-\varepsilon}$  и  $N \geq N_1$  и при каждом фиксированном  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ , для всех  $u \in U^{-\varepsilon}$  выполняется неравенство

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (I_N(Q_N(u)) - J(u)) \leq 0; \quad (15)$$

2) для любого  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ , найдется номер  $N_2 = N_2(\varepsilon)$  такой, что  $P_N([u]_N) \in U^\varepsilon$  для всех  $[u]_N \in U_N$  и  $N \geq N_2$  и при любом выборе  $[u]_N \in U_N$ ,  $N \geq 1$ , выполняется неравенство

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (J(P_N([u]_N)) - I_N([u]_N)) \leq 0; \quad (16)$$

3) справедливы неравенства

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} J_*(\varepsilon) \geq J_*, \quad (17)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_*(-\varepsilon) \leq J_*, \quad (18)$$

где  $J_*(\varepsilon) = \inf_{U^\varepsilon} J(u)$ ,  $J_*(-\varepsilon) = \inf_{U^{-\varepsilon}} J(u)$ .

**Доказательство. Необходимость.** Пусть последовательность задач (2) аппроксимирует задачу (1) по функции, т. е. справедливо равенство (3). Положим  $\varepsilon_0 = 1$ ,  $U^\varepsilon = U^{-\varepsilon} = U$ ,  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ . Тогда  $J_*(\varepsilon) = J_*(-\varepsilon) = J_*$ ,

$0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ , и условия (17), (18) тривиально выполняются. Выберем произвольные последовательности  $\{v_N\}$ ,  $\{[v]_N\}$  такие, что

$$v_N \in U, \quad N = 1, 2, \dots, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} (J(v_N) - J_*) = 0, \quad (19)$$

$$[v]_N \in U_N, \quad N = 1, 2, \dots, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} (I_N([v]_N) - I_{N*}) = 0. \quad (20)$$

Определим отображения  $Q_N$  и  $P_N$  следующим образом:

$$Q_N(u) = [v]_N, \quad u \in X; \quad P_N([u]_N) = v_N, \quad [u]_N \in X_N, \quad N = 1, 2, \dots$$

Ясно, что  $Q_N(u) \in U_N$  при всех  $u \in U^{-\varepsilon} = U$  и всех  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ ,  $N \geq 1 = N_1$ ,  $P_N([u]_N) \in U^\varepsilon = U$  при всех  $[u]_N \in U_N$  и всех  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ ,  $N \geq 1 = N_2$ .

Далее, так как  $J_* \leq J(u)$  при  $u \in U = U^{-\varepsilon}$ , то

$$\begin{aligned} I_N(Q_N(u)) - J(u) &= (I_N([v]_N) - I_{N*}) + (I_{N*} - J_*) + (J_* - J(u)) \leq \\ &\leq (I_N([v]_N) - I_{N*}) + (I_{N*} - J_*) \end{aligned}$$

при всех  $u \in U = U^{-\varepsilon}$ ,  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ ,  $N = 1, 2, \dots$ . Переходя в этом неравенстве к верхнему пределу при  $N \rightarrow \infty$  с учетом условий (3), (20), придем к неравенству (15).

Наконец, поскольку  $I_{N*} \leq I_N([u]_N)$  при  $[u]_N \in U_N$ , то

$$\begin{aligned} J(P_N([u]_N)) - I_N([u]_N) &= (J(v_N) - J_*) + (J_* - I_{N*}) + (I_{N*} - I_N([u]_N)) \leq \\ &\leq (J(v_N) - J_*) + (J_* - I_{N*}) \end{aligned}$$

при всех  $[u]_N \in U_N$ ,  $N = 1, 2, \dots$ . Отсюда с учетом условий (3), (19) при  $N \rightarrow \infty$  получим неравенство (16). Необходимость доказана.

**Д о с т а т о ч н о с т ь.** Пусть выполнены условия 1–3. Докажем, что тогда справедливо равенство (3). Зафиксируем произвольное число  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ . Так как  $Q_N(u) \in U_N$  при всех  $u \in U^{-\varepsilon}$  и  $N \geq N_1$ , то  $I_{N*} \leq I_N(Q_N(u))$  и

$$\begin{aligned} I_{N*} - J_* &= (I_{N*} - I_N(Q_N(u))) + (I_N(Q_N(u)) - J(u)) + (J(u) - J_*) \leq \\ &\leq (I_N(Q_N(u)) - J(u)) + (J(u) - J_*), \quad u \in U^{-\varepsilon}, \quad N \geq N_1. \end{aligned}$$

Отсюда при  $N \rightarrow \infty$  с учетом условия (15) получим

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (I_{N*} - J_*) \leq J(u) - J_*, \quad u \in U^{-\varepsilon}, \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_0.$$

Левая часть этого неравенства не зависит от  $u \in U^{-\varepsilon}$ , поэтому, переходя в правой части к нижней грани по  $u \in U^{-\varepsilon}$ , будем иметь

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (I_{N*} - J_*) \leq J(-\varepsilon) - J_*, \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_0.$$

При  $\varepsilon \rightarrow 0$  отсюда с помощью условия (18) получим

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (I_{N*} - J_*) \leq 0.$$



С другой стороны, поскольку  $P_N([u]_N) \in U^\varepsilon$  при всех  $[u]_N \in U_N$ ,  $N \geq N_2$ , то  $J_*(\varepsilon) \leq J(P_N([u]_N))$  и

$$\begin{aligned} J_*(\varepsilon) - I_{N*} &= (J_*(\varepsilon) - J(P_N([u]_N))) + (J(P_N([u]_N)) - I_N([u]_N)) + \\ &+ (I_N([u]_N) - I_{N*}) \leq (J(P_N([u]_N)) - I_N([u]_N)) + (I_N([u]_N) - I_{N*}), \\ &[u]_N \in U_N, \quad N \geq N_2. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом условия (16) при  $N \rightarrow \infty$  непосредственно получим, что

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (J_*(\varepsilon) - I_{N*}) \leq \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (I_N([u]_N) - I_{N*})$$

при любом выборе  $[u]_N \in U_N$ ,  $N \geq 1$ , и любом фиксированном  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ . В частности, если, пользуясь определением  $I_{N*}$ , при каждом  $N \geq 1$  взять  $[u]_N \in U_N$  так, чтобы  $I_N([u]_N) \leq I_{N*} + 1/N$ , то из предыдущего неравенства будем иметь

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (J_*(\varepsilon) - I_{N*}) = J_*(\varepsilon) + \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (-I_{N*}) \leq \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} = 0$$

при любом  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ . Отсюда с помощью условия (17) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  получим

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (J_* - I_{N*}) = J_* + \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (-I_{N*}) \leq 0.$$

Итак, показано, что

$$0 \leq -\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (J_* - I_{N*}) = \underline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (I_{N*} - J_*) \leq \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (I_{N*} - J_*) \leq 0,$$

т. е.

$$\underline{\lim}_{N \rightarrow \infty} I_{N*} = \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} I_{N*} = J_*.$$

Отсюда следует равенство (3). Достаточность доказана.  $\square$

**Теорема 4.** Для того чтобы последовательность задач (2) аппроксимировала задачу (1) по функции, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность непустых множеств  $U^{\varepsilon_N} \subseteq X$ ,  $N = 1, 2, \dots$ , и отображения  $Q_N: X \rightarrow X_N$ ,  $P_N: X_N \rightarrow X$  такие, что функция  $J(u)$  определена на объединении множеств  $\left(\bigcup_{N=1}^{\infty} U^{\varepsilon_N}\right) \cup U$  и, кроме того:

1) при всех  $u \in U$  справедливо включение  $Q_N(u) \in U_N$ ,  $N = 1, 2, \dots$ , и выполняется неравенство

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (I_N(Q_N(u)) - J(u)) \leq 0;$$

2) при всех  $[u]_N \in U_N$  справедливо включение  $P_N([u]_N) \in U^{\varepsilon_N}$ ,  $N = 1, 2, \dots$ , и выполняется неравенство

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (J(P_N([u]_N)) - I_N([u]_N)) \leq 0;$$

3) справедливо неравенство

$$\underline{\lim}_{N \rightarrow \infty} J_*(\varepsilon_N) \geq J_*, \quad \text{где} \quad J_*(\varepsilon_N) = \inf_{U^{\varepsilon_N}} J(u).$$

Если же выполнены условия 1–3 и, кроме того, имеются неотрицательные последовательности  $\{\beta_N\}$ ,  $\{\gamma_N\}$ ,  $\{\nu_N\}$ , сходящиеся к нулю и такие, что

$$I_N(Q_N(u)) - J(u) \leq \beta_N, \quad u \in U, \quad N = 1, 2, \dots, \quad (21)$$

$$J(P_N([u]_N)) - I_N([u]_N) \leq \gamma_N, \quad [u]_N \in U_N, \quad N = 1, 2, \dots, \quad (22)$$

$$J_* - J_*(\varepsilon_N) \leq \nu_N, \quad N = 1, 2, \dots, \quad (23)$$

то справедлива оценка

$$-\gamma_N - \nu_N \leq I_{N*} - J_* \leq \beta_N, \quad N = 1, 2, \dots \quad (24)$$

Доказательство того, что условия 1–3 необходимы и достаточны для выполнения равенства (3), проводится так же, как в теореме 3, нужно лишь в этих рассуждениях заменить  $U^{-\varepsilon}$  на  $U$ ,  $U^\varepsilon$  на  $\{U^{\varepsilon_N}\}$ . Докажем оценку (24). Из того, что  $Q_N(u) \in U_N$  при всех  $u \in U$ ,  $N = 1, 2, \dots$ , и из условия (21) следует, что  $I_{N*} \leq I_N(Q_N(u)) \leq J(u) + \beta_N$ , или  $I_{N*} \leq J(u) + \beta_N$  при всех  $u \in U$ ,  $N = 1, 2, \dots$

Переходя к нижней грани по  $u \in U$ , откуда получим  $I_{N*} \leq J_* + \beta_N$ ,  $N = 1, 2, \dots$  Правое неравенство (24) доказано. Далее, так как  $P_N([u]_N) \in U^{\varepsilon_N}$  при всех  $[u]_N \in U_N$ ,  $N = 1, 2, \dots$ , то с учетом условий (22), (23) имеем

$$J_* - \nu_N \leq J_*(\varepsilon_N) \leq J(P_N([u]_N)) \leq I_N([u]_N) + \gamma_N,$$

или  $J_* - \nu_N \leq I_N([u]_N) + \gamma_N$  при всех  $[u]_N \in U_N$ ,  $N = 1, 2, \dots$  Отсюда следует, что  $J_* - \nu_N \leq I_{N*} + \gamma_N$ ,  $N = 1, 2, \dots$  Оценка (24) доказана.  $\square$

Приложения критериев аппроксимации, приведенных в теоремах 1, 3, 4, рассмотрим ниже. Наряду с теоремами 1, 3, 4 существуют и другие варианты критериев аппроксимации по функции [114; 303; 363; 501]; некоторые такие критерии сформулированы далее в виде упражнений.

### Упражнения

**Упражнение 1.** Равенство (3) имеет место тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия: 1) для любого числа  $\delta > 0$  существует номер  $N_1 = N_1(\delta)$  такой, что для всех  $N \geq N_2$  и  $u \in U$  найдется точка  $[u]_{N\delta} \in U_N$ , удовлетворяющая неравенству  $I_N([u]_{N\delta}) \leq J(u) + \delta$ ; 2) для любого числа  $\delta > 0$  существует номер  $N_2 = N_2(\delta)$  такой, что для всех  $N \geq N_2$  и  $[u]_N \in U_N$  найдется точка  $u_{N\delta} \in U$ , для которой  $J(u_{N\delta}) \leq I_N([u]_N) + \delta$ . Доказать.

**Упражнение 2.** Для того чтобы имело место равенство (3), необходимо и достаточно, чтобы существовали отображения  $Q_N: X \rightarrow X_N$  и  $P_N: X_N \rightarrow X$  такие, что: 1) для некоторой последовательности  $\{u_N\} \in U$ ,  $\lim_{N \rightarrow \infty} (J(u_N) - J_*) = 0$ , выполняются условия:  $Q_N(u_N) \in U_N$ ,  $N = 1, 2, \dots$ , и  $\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (I_N(Q_N(u_N)) - J(u_N)) \leq 0$ ; 2) для некоторой последовательности  $[u]_N \in U_N$ ,  $N = 1, 2, \dots$ ,  $\lim_{N \rightarrow \infty} (I_N([u]_N) - I_{N*}) = 0$ , выполняются условия:  $P_N([u]_N) \in U$ ,  $N = 1, 2, \dots$ , и  $\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (J(P_N([u]_N)) - I_N([u]_N)) \leq 0$ . Доказать.

**Упражнение 3.** Равенство (3) имеет место тогда и только тогда, когда при некотором  $\varepsilon_0 > 0$  существуют семейства непустых множеств  $U^\varepsilon \subseteq X$ ,  $U^{-\varepsilon} \subseteq X$ ,  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ , и отображения  $Q_N: X \rightarrow X_N$  и  $P_N: X_N \rightarrow X$  такие, что функция  $J(u)$  определена на объединении множеств  $U^\varepsilon$ ,  $U^{-\varepsilon}$  по всем  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ , и, кроме того: 1) для некоторого

семейства  $\{u_\varepsilon\}$ ,  $u_\varepsilon \in U^{-\varepsilon}$ ,  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ ,  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (J(u_\varepsilon) - J_*(-\varepsilon)) = 0$ , при каждом  $\varepsilon$  найдется номер  $N_1 = N_1(\varepsilon)$  такой, что  $Q_N(u_\varepsilon) \in U_N$  при всех  $N \geq N_1$  и  $\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (I_N(Q_N(u_\varepsilon)) - J(u_\varepsilon)) \leq 0$ ; 2) для некоторой последовательности  $[u]_N \in U_N$ ,  $N = 1, 2, \dots$ ,  $\lim_{N \rightarrow \infty} (I_N([u]_N) - I_{N*}) = 0$ , и любого  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ , найдется номер  $N_2 = N_2(\varepsilon)$  такой, что  $P_N([u]_N) \in U^\varepsilon$  при всех  $N \geq N_2$  и  $\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (J(P_N([u]_N)) - I_N([u]_N)) \leq 0$ ; 3) выполнены условия (17), (18). Доказать.

### § 3. Разностная аппроксимация для квадратичной задачи с фазовыми ограничениями

1. Рассмотрим следующую задачу оптимального управления:

$$J(u) = |x(T, u) - y|^2 \rightarrow \inf, \quad (1)$$

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + f(t), \quad t_0 \leq t \leq T, \quad x(t_0) = x_0, \quad (2)$$

$$u = u(t) \in U = \{u(t) \in L_2^r[t_0, T]: u(t) \in V \text{ почти всюду на } [t_0, T], \\ x(t, u) \in G(t), t_0 \leq t \leq T\}, \quad (3)$$

где  $G(t)$  — заданные множества из  $E^n$  при каждом  $t \in [t_0, T]$ ,  $x_0 \in G(t_0)$ . В качестве аппроксимирующих задач возьмем последовательность задач:

$$I_N([u]_N) = |x_N([u]_N) - y|^2 \rightarrow \inf, \quad (4)$$

$$x_{i+1} = x_i + \Delta t_i (A_i x_i + B_i u_i + f_i), \quad i = 0, \dots, N-1, \quad (5)$$

$$[u]_N = (u_0, u_1, \dots, u_{N-1}) \in U_N = \{[u]_N \in L_{2N}^r: u_i \in V, \quad i = 0, \dots, N-1; \\ x_i([u]_N) \in G_i = G(t_i), \quad i = 0, \dots, N\} \quad (6)$$

(все обозначения здесь взяты из § 1).

Для того чтобы задача (1)–(3) имела смысл, естественно требовать, чтобы  $U \neq \emptyset$ . Возникают вопросы: можно ли тогда гарантировать, что при достаточно мелком разбиении отрезка  $[t_0, T]$  множество  $U_N$  также будет непустым, и при каких условиях последовательность задач (4)–(6) будет аппроксимировать задачу (1)–(3) по функции?

Как показывает следующий пример, из того, что  $U \neq \emptyset$ , вообще говоря, не следует, что  $U_N \neq \emptyset$ .

**Пример 1.** Пусть требуется минимизировать функцию  $J(u) = x^2(1)$  при условиях  $\dot{x}(t) = x(t) - u(t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $x(0) = 1$ ,  $u = u(t) \in U = \{u(t) \in L_2[0, 1]: 0 \leq u(t) \leq 1 \text{ почти всюду на } [0, 1]; x(t, u) \geq e^t \text{ при всех } t \in [0, 1]\}$ . Поскольку

$$x(t, u) = e^t \left( 1 - \int_0^1 e^\tau u(\tau) d\tau \right) \leq e^t, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

при всех  $u(t) \in L_2[0, 1]$ ,  $0 \leq u(t) \leq 1$ , то условие  $x(t, u) \geq e^t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , выполняется лишь при  $u = u(t) \equiv 0$ . Следовательно, множество  $U$  непусто и состоит из единственного управления  $u(t) \equiv 0$ .

Рассмотрим следующую разностную аппроксимацию этой задачи:

$$\begin{aligned} I_N([u]_N) &= x_N^2 \rightarrow \inf, \quad x_{i+1} = x_i + \Delta t(x_i - u_i), \quad i = 0, \dots, N-1, \quad x_0 = 1, \\ [u]_N &= (u_0, u_1, \dots, u_{N-1}) \in U_N = \{[u]_N \in L_{2N} : 0 \leq u_i \leq 1, \quad i = 0, \dots, N-1; \\ &\quad x_i \geq e^{t_i}, \quad i = 0, \dots, N\}, \quad \Delta t = 1/N, \quad N = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Из  $0 \leq u_i \leq 1$  следует, что  $(1 + \Delta t)x_i - \Delta t \leq x_{i+1} = (1 + \Delta t)x_i - \Delta t u_i \leq (1 + \Delta t)x_i$ ,  $i = 0, \dots, N-1$ ,  $x_0 = 1$ . Отсюда по индукции нетрудно получить, что  $1 \leq x_i \leq (1 + \Delta t)^i$ ,  $i = 0, \dots, N$ . Так как  $1 + \Delta t < e^{\Delta t}$  при всех  $\Delta t > 0$ , то  $x_i < e^{i\Delta t} = e^{t_i}$  для всех  $i = 1, \dots, N$  при любом выборе  $[u]_N = (u_0, u_1, \dots, u_{N-1})$ ,  $0 \leq u_i \leq 1$ ,  $i = 0, \dots, N-1$ . Это значит, что множество  $U_N$  пусто при всех  $N = 1, 2, \dots$

**2.** Таким образом, важно выяснить, при каких условиях из непустоты множества (3) следует, что множество (6) также не будет пустым, а также указать способы аппроксимации задачи (1)–(3) для случаев, когда условие  $U \neq \emptyset$  не гарантирует, что  $U_N \neq \emptyset$ . Здесь мы ограничимся изложением результатов, принадлежащих М. М. Потапову (теорема 1) и Е. Р. Авакову (теорема 2). Для упрощения выкладок задачу (1)–(3) будем рассматривать при дополнительном предположении, что множество  $G(t)$  не зависит от  $t$ , т. е.  $G(t) \equiv G$ ,  $t_0 \leq t \leq T$ .

Ниже нам понадобятся так называемые  $\varepsilon$ -расширения  $G^\varepsilon$  и  $\varepsilon$ -сужения  $G^{-\varepsilon}$  множества  $G$ , определяемые так:

$$\begin{aligned} G^\varepsilon &= \left\{ x \in E^n : \rho(x, G) = \inf_{z \in G} |x - z| \leq \varepsilon \right\}, \quad \varepsilon \geq 0, \\ G^{-\varepsilon} &= \left\{ x \in G : \inf_{z \in \text{Гр } G} |x - z| \geq \varepsilon \right\}, \quad \varepsilon \geq 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\text{Гр } G$  — совокупность граничных точек множества  $G$ . Кроме того, мы будем широко пользоваться оценками и соотношениями (1.8)–(1.26), считая, что встречающиеся в них константы  $C_0, C_1, \dots$  отвечают множествам управлений

$$\begin{aligned} W &= \{u(t) \in L_2^r[t_0, T] : u(t) \in V \text{ почти всюду на } [t_0, T]\}, \\ W_N &= \{[u]_N = (u_0, u_1, \dots, u_{N-1}) \in L_{2N}^r : u_i \in V, \quad i = 0, \dots, N-1\}. \end{aligned} \quad (8)$$

**Теорема 1.** Пусть матрицы  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $f(t)$  кусочно непрерывны на отрезке  $t_0 \leq t \leq T$ ,  $V$  — выпуклое замкнутое ограниченное множество из  $E^r$ ,  $G$  — выпуклое замкнутое множество из  $E^n$  с непустой внутренностью, причем существуют число  $\varepsilon_0 > 0$  и управление  $\bar{u} = \bar{u}(t) \in U$  такие, что

$$x(t, \bar{u}) \in G^{-\varepsilon_0}, \quad t_0 \leq t \leq T. \quad (9)$$

Пусть, кроме того, разбиения  $\{t_i, i = 0, \dots, N\}$  отрезка  $[t_0, T]$  удовлетворяют условию

$$d_N = \max_{0 \leq i \leq N-1} \Delta t_i \leq \frac{(T - t_0)M_0}{N}, \quad M_0 = \text{const} > 0, \quad N = 1, 2, \dots$$

Тогда множество  $U_N$ , определяемое условиями (6), при всех достаточно больших  $N$  непусто и  $\lim_{N \rightarrow \infty} I_{N*} = J_*$ , где  $J_*$  — нижняя грань функции (1) при условиях (2), (3),  $I_{N*}$  — нижняя грань функции (4) при условиях (5), (6).

Доказательство. Положим  $X = L_2^r[t_0, T]$ ,  $X_N = L_{2N}^r$ ,  $N = 1, 2, \dots$ ,

$$U^\varepsilon = \{u = u(t) \in W : x(t, u) \in G^\varepsilon, t_0 \leq t \leq T\},$$

$$U^{-\varepsilon} = \{u = u(t) \in W : x(t, u) \in G^{-\varepsilon}, t_0 \leq t \leq T\},$$

где  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ , число  $\varepsilon_0$  взято из условия теоремы, множество  $W$  — из (8). Определим отображения  $Q_N : X \rightarrow X_N$  и  $P_N : X_N \rightarrow X$  формулами (1.20), (1.21):

$$Q_N(u) = (u_0, u_1, \dots, u_{N-1}) : u_i = \frac{1}{\Delta t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} u(\tau) d\tau, \quad i = 0, \dots, N-1, \quad (10)$$

$$P_N([u]_N) = u_i \quad \text{при} \quad t_i < t \leq t_{i+1}, \quad i = 0, \dots, N-1.$$

Проверим, что для введенных множеств  $U^\varepsilon, U^{-\varepsilon}$  и отображений  $Q_N, P_N$  выполнены все условия теоремы 2.3. Зафиксируем произвольное число  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ . Возьмем какое-либо управление  $u \in U^{-\varepsilon}$ . Согласно оценке (1.24)

$$\max_{0 \leq i \leq N} |x(t_i, u) - x_i(Q_N(u))| \leq \delta_N, \quad N = 1, 2, \dots \quad (11)$$

Так как  $\delta_N \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$ , то найдется номер  $N_1 = N_1(\varepsilon)$  такой, что  $\delta_N \leq \varepsilon$  при всех  $N \geq N_1$ . По определению (7) множества  $G^{-\varepsilon}$  шар  $|x - z| \leq \varepsilon$  принадлежит множеству  $G$  при всех  $z \in G^{-\varepsilon}$ . Тогда для любого  $u \in U^{-\varepsilon}$  шар  $|x - x(t_i, u)| \leq \varepsilon$  принадлежит множеству  $G$  при всех  $i = 0, \dots, N$  и  $N \geq N_1$ . Отсюда и из оценки (11) следует, что  $x_i(Q_N(u)) \in G$  при всех  $i = 0, \dots, N$ ,  $u \in U^{-\varepsilon}$ ,  $N \geq N_1$ . Кроме того,  $Q_N(u)$  принадлежит множеству  $W_N$  из (8) при всех  $u \in W$  согласно лемме 1.1. Тем самым показано, что  $Q_N(u) \in U_N$  при всех  $u \in U^{-\varepsilon}$  и  $N \geq N_1$ . Кроме того, из леммы 1.3 имеем

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (I_N(Q_N(u)) - J(u)) = 0, \quad u \in U^{-\varepsilon}.$$

Таким образом, условие 1 теоремы 2.3 выполнено.

Далее, согласно ранее приведенной оценке (1.25), получаем

$$\max_{0 \leq i \leq N} |x(t_i, P_N([u]_N)) - x_i([u]_N)| \leq \delta_N, \quad N = 1, 2, \dots,$$

а из оценки (1.11) имеем

$$|x(t, P_N([u]_N)) - x(t_i, P_N([u]_N))| \leq C_1 d_N$$

при всех  $t$ ,  $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ ,  $i = 0, \dots, N-1$ ,  $[u]_N \in U_N$ ,  $N = 1, 2, \dots$ . Тогда

$$|x(t, P_N([u]_N)) - x_i([u]_N)| \leq \delta_N + C_1 d_N \quad (12)$$

для всех  $t$ ,  $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ ,  $i = 0, \dots, N-1$ ,  $[u]_N \in U_N$ ,  $N = 1, 2, \dots$ . Однако  $\delta_N \rightarrow 0$ ,  $d_N \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$ , поэтому найдется номер  $N_2 = N_2(\varepsilon)$  такой, что  $\delta_N + C_1 d_N \leq \varepsilon$  при всех  $N \geq N_2$ . Отсюда, из оценки (12) и определения (6) множества  $U_N$  следует, что  $x(t, P_N([u]_N)) \in G^\varepsilon$  при всех  $t$ ,  $t_0 \leq t \leq T$ , т. е.  $P_N([u]_N) \in U^\varepsilon$  при всех  $N \geq N_2$ . Кроме того, из леммы 1.4 имеем

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (J(P_N([u]_N)) - I_N([u]_N)) = 0.$$

Таким образом, условие 2 теоремы 2.3 также выполнено.

Наконец, проверим, выполняется ли условие 3 теоремы 2.3. Сначала установим, что  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_*(\varepsilon) = J_*$ , где  $J_*(\varepsilon) = \inf_{U^\varepsilon} J(u)$ . Заметим, что если  $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_0$ , то  $U \subseteq U^{\varepsilon_1} \subseteq U^{\varepsilon_2}$  и, следовательно,  $J_*(\varepsilon_2) \leq J_*(\varepsilon_1) \leq J_*$ . Отсюда следует, что существует предел  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_*(\varepsilon)$ , причем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_*(\varepsilon) \leq J_*. \quad (13)$$

При каждом  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ , выберем  $u_\varepsilon \in U^\varepsilon$  так, чтобы  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (J_*(\varepsilon) - J(u_\varepsilon)) = 0$ . Так как множество  $W$  из (8) слабо компактно в  $L_2^*[t_0, T]$  и  $\{u_\varepsilon\} \in W$ ,  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ , то существует последовательность  $\{\varepsilon_k\}$ , сходящаяся к нулю,  $0 < \varepsilon_k < \varepsilon_0$ , и такая, что последовательность управлений  $\{u_k = u_{\varepsilon_k}\}$  будет слабо сходиться к некоторому управлению  $v = v(t) \in W$ . Согласно (1.12) последовательность  $\{x(t, u_k)\}$  сходится к  $x(t, v)$  равномерно на отрезке  $[t_0, T]$ , т. е.  $\sup_{t_0 \leq t \leq T} |x(t, u_k) - x(t, v)| = \xi_k \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Поскольку  $x(t, u_k) \in G^{\varepsilon_k}$ , то

$$x(t, v) \in G^{\varepsilon_k + \xi_k}, \quad t_0 \leq t \leq T, \quad k = 1, 2, \dots \quad (14)$$

Однако  $\varepsilon_k + \xi_k \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ , траектория  $x(t, v)$  от номера  $k$  не зависит, множество  $G$  замкнуто. Отсюда и из (14) следует, что  $x(t, v) \in G$  при всех  $t$ ,  $t_0 \leq t \leq T$ . Это значит, что  $v \in U$  и  $J(v) \geq J_*$ . Поскольку  $\{u_k\}$  сходится к  $v$  слабо в  $L_2^*[t_0, T]$ , а функция  $J(u)$  слабо непрерывна, то  $\lim_{k \rightarrow \infty} J(u_k) = J(v) \geq J_*$ . С учетом определения последовательности  $\{u_k = u_{\varepsilon_k}\}$  тогда получим

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_*(\varepsilon) = \lim_{k \rightarrow \infty} J_*(\varepsilon_k) = J(v) \geq J_*.$$

Отсюда и из (13) следует, что  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_*(\varepsilon) = J_*$ .

Теперь покажем, что  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_*(-\varepsilon) = J_*$ , где  $J_*(-\varepsilon) = \inf_{U^{-\varepsilon}} J(u)$ . Заметим, что если  $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_0$ , то  $U^{-\varepsilon_2} \subseteq U^{-\varepsilon_1} \subseteq U$  и, следовательно,  $J_* \leq J_*(\varepsilon_1) \leq J_*(\varepsilon_2)$ . Отсюда следует, что существует предел  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_*(-\varepsilon)$ , причем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_*(-\varepsilon) \geq J_*. \quad (15)$$

Возьмем любую последовательность управлений  $\{u_k\} \in U$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} J(u_k) = J_*$ , и числовую последовательность  $\{\alpha_k\}$ ,  $0 < \alpha_k < 1$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0$ . По условию теоремы существует управление  $\bar{u} = \bar{u}(t) \in U$ , для которого справедливо

включение (9). Составим последовательность  $v_k = \alpha_k \bar{u} + (1 - \alpha_k)u_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , и покажем, что  $v_k \in U^{-\varepsilon_0 \alpha_k}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Так как  $\bar{u}, u_k \in W$ , то  $v_k \in W$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , в силу выпуклости  $W$ . Остается показать, что

$$x(t, v_k) \in G^{-\varepsilon_0 \alpha_k}, \quad t_0 \leq t \leq T, \quad k = 1, 2, \dots \quad (16)$$

Заметим теперь, что

$$x(t, v_k) = \alpha_k x(t, \bar{u}) + (1 - \alpha_k)x(t, u_k), \quad t_0 \leq t \leq T, \quad k = 1, 2, \dots \quad (17)$$

Из условия (9) следует, что при каждом  $t \in [t_0, T]$  и  $k = 1, 2, \dots$  шар  $S(t) = \{x: |x - x(t, \bar{u})| \leq \varepsilon_0\}$  принадлежит множеству  $G$ . Покажем, что тогда шар  $S_k(t) = \{x: |x - x(t, v_k)| \leq \varepsilon_0 \alpha_k\}$  также принадлежит  $G$  при всех  $t \in [t_0, T]$  и  $k = 1, 2, \dots$ . Возьмем произвольную точку  $x \in S_k(t)$  и положим  $z = x(t, \bar{u}) + (x - x(t, v_k))/\alpha_k$ . Так как  $|z - x(t, \bar{u})| = |x - x(t, v_k)|/\alpha_k \leq \varepsilon_0$ , то  $z \in S(t) \in G$ . Из определения точки  $z$  и равенства (17) тогда имеем  $x = x(t, v_k) + \alpha_k(z - x(t, \bar{u})) = \alpha_k z + (1 - \alpha_k)x(t, u_k)$ , где  $z \in G$ ,  $x(t, u_k) \in G$ ,  $0 < \alpha_k < 1$ . В силу выпуклости множества  $G$  отсюда следует, что  $x \in G$ . Таким образом,  $S_k(t) \in G$  при всех  $t \in [t_0, T]$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Отсюда и из определения шара  $S_k(t)$  вытекает включение (16). Тем самым показано, что  $v_k \in U^{-\varepsilon_0 \alpha_k}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Зафиксируем некоторый номер  $k$  и возьмем число  $\varepsilon$  таким, чтобы  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0 \alpha_k$ . Тогда  $v_k \in U^{-\alpha_k \varepsilon_0} \subset U^{-\varepsilon}$  и  $J_*(-\varepsilon) \leq J(v_k)$  при всех  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0 \alpha_k$ . Отсюда при  $\varepsilon \rightarrow 0$  получим

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_*(-\varepsilon) \leq J(v_k) \quad \text{при всех } k = 1, 2, \dots \quad (18)$$

Так как  $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0$ ,  $\sup_W \|u\| \leq R < \infty$ , то с учетом оценки (1.14) имеем  $|J(u_k) - J(v_k)| \leq C_3 \|u_k - v_k\| = C_3 \alpha_k \|u_k - \bar{u}\| \leq 2RC_3 \alpha_k \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Следовательно,  $\lim_{k \rightarrow \infty} J(v_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} J(u_k) = J_*$ . Отсюда и из неравенства (18) вытекает, что  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_*(-\varepsilon) \leq J_*$ . Сравнивая полученное неравенство с (15), заключаем, что  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_*(-\varepsilon) = J_*$ . Таким образом, условие 3 теоремы 2.3 также выполнено. Из теоремы 2.3 следует, что  $\lim_{N \rightarrow \infty} J_{N*} = J_*$ . Теорема 1 доказана.  $\square$

**3.** При доказательстве того, что множество (6) непусто, в теореме 1 было существенно использовано условие (9). Однако это условие не всегда легко проверяемо и не всегда оно выполняется. Поэтому при аппроксимации задачи (1)–(3) вместо задачи (4)–(6) можно попытаться рассмотреть задачу минимизации функции (4) при условии (5) на несколько расширенном по сравнению с (6) множестве

$$U_N = \{[u]_N \in W: x_i([u]_N) \in G^{\xi_N}, i = 0, \dots, N\}. \quad (19)$$

Оказывается, если исходное множество (3) непусто, то при достаточно большом  $\xi_N$  и множество (19) не будет пустым, и, кроме того, если  $\xi_N \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$  согласованно с  $d_N = \max_{0 \leq i \leq N-1} \Delta t_i$ , то последовательность задач (4), (5), (19) будет аппроксимировать задачу (1)–(3) по функции. А именно, справедлива

**Теорема 2.** Пусть матрицы  $A(t), B(f), f(t)$  кусочно непрерывны на отрезке  $t_0 \leq t \leq T$ ,  $V$  — выпуклое замкнутое ограниченное множество из  $E^r$ ,  $G$  — замкнутое множество из  $E^n$ , множество (3) непусто. Пусть, кроме того, разбиения отрезка  $[t_0, T]$  удовлетворяют условию

$$d_N = \max_{0 \leq i \leq N-1} \Delta t_i \leq (T - t_0) \frac{M_0}{N}, \quad M_0 = \text{const} > 0, \quad N = 1, 2, \dots,$$

и  $\lim_{N \rightarrow \infty} \xi_N = 0$ ,  $\xi_N \geq \delta_N$ ,  $N = 1, 2, \dots$ , где величина  $\delta_N$  определена формулой (1.26). Тогда множество (19) непусто при всех  $N = 1, 2, \dots$  и  $\lim_{N \rightarrow \infty} I_{N*} = J_*$ , где  $J_*$  — нижняя грань функции (1) при условиях (2), (3),  $I_{N*}$  — нижняя грань функции (4) при условиях (5), (19). Если, кроме того, множество  $G$  выпукло, имеет непустую внутренность и выполнено условие (9), а также  $\xi_N \leq M_1 \delta_N$ ,  $M_1 = \text{const} \geq 1$ ,  $N = 1, 2, \dots$ , то справедлива оценка

$$2RC_3 \frac{(M_1 + 1)\delta_N + C_1 d_N^{1/2}}{\varepsilon_0 + 2\delta_N + C_1 d_N^{1/2}} - C_6 \delta_N \leq I_{N*} - J_* \leq C_5 \delta_N, \quad N = 1, 2, \dots, \quad (20)$$

где постоянные  $C_1, C_3, C_5, C_6$  взяты из (1.10), (1.14), (1.29), (1.30) соответственно,  $\sup_W \|u\| \leq R$ .

**Доказательство.** Положим  $X = L_2^r[t_0, T]$ ,  $X_N = L_{2N}^r$ ,  $N = 1, 2, \dots$ ,  $U^{\varepsilon_N} = \{u(t) \in W : x(t, u) \in G^{\varepsilon_N}\}$ , где  $\varepsilon_N = \xi_N + \delta_N + C_1 d_N^{1/2}$  (кстати, здесь можно было бы воспользоваться оценкой (1.11) и всюду ниже принять  $\varepsilon_N = \xi_N + \delta_N + C_1 d_N$ ). Определим отображения  $Q_N, P_N$  формулами (10). Проверим выполнение условий теоремы 2.4.

Возьмем произвольное управление  $u \in U$ . Согласно оценке (1.24)

$$\max_{0 \leq i \leq N} |x(t_i, u) - x_i(Q_N(u))| \leq \delta_N, \quad N = 1, 2, \dots$$

Отсюда, учитывая, что  $x(t, u) \in G$ ,  $t_0 \leq t \leq T$ , и  $\delta_N \leq \xi_N$ ,  $N = 1, 2, \dots$ , имеем включение  $x_i(Q_N(u)) \in G^{\varepsilon_N}$  при всех  $i = 0, \dots, N$ ,  $N = 1, 2, \dots$ . Это значит, что  $Q_N(u) \in U_N$  при всех  $u \in U$  и  $N = 1, 2, \dots$ . Кроме того, из леммы 1.3 имеем оценку

$$I_N(Q_N(u)) - J(u) \leq C_5 \delta_N = \beta_N, \quad u \in U, \quad N = 1, 2, \dots$$

Таким образом, выполнение условия 1 теоремы 2.4 проверено и, кроме того, установлена оценка (2.21).

Далее, согласно оценке (1.25), имеем

$$\max_{0 \leq i \leq N} |x(t_i, P_N([u]_N)) - x_i([u]_N)| \leq \delta_N, \quad [u]_N \in U_N, \quad N = 1, 2, \dots$$

Из оценки (1.10) следует

$$|x(t, P_N([u]_N)) - x(t_i, P_N([u]_N))| \leq C_1 d_N^{1/2}$$

при всех  $t$ ,  $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ ,  $i = 0, \dots, N-1$ ,  $[u]_N \in U_N$ ,  $N = 1, 2, \dots$ . Тогда

$$|x(t, P_N([u]_N)) - x_i([u]_N)| \leq \delta_N + C_1 d_N^{1/2}$$



для всех  $t$ ,  $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ ,  $i = 0, \dots, N-1$ ,  $[u]_N \in U_N$ ,  $N = 1, 2, \dots$ . Отсюда, учитывая, что по определению множества  $U_N$  точки  $x_i([u]_N)$  принадлежат  $G^{\xi_N}$ ,  $i = 0, \dots, N$ , имеем

$$x(t, P_N([u]_N)) \in G^{\varepsilon_N} \quad \text{при} \quad \varepsilon_N = \xi_N + \delta_N + C_1 d_N^{1/2}$$

для всех  $[u]_N \in U_N$ ,  $N = 1, 2, \dots$ . Тем самым показано, что  $P_N([u]_N) \in U^{\varepsilon_N}$  при всех  $[u]_N \in U_N$ ,  $N = 1, 2, \dots$ . Кроме того, из леммы 1.4 следует

$$J(P_N([u]_N)) - I_N([u]_N) \leq C_6 \delta_N = \gamma_N, \quad [u]_N \in U_N, \quad N = 1, 2, \dots$$

Таким образом, выполнение условия 2 теоремы 2.4 также проверено и, кроме того, установлена оценка (2.22).

Далее, рассуждая так же, как при доказательстве равенства  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_*(\varepsilon) = J_*$  в теореме 1, можно показать, что  $\lim_{N \rightarrow \infty} J_*(\varepsilon_N) = J_*$ . Это значит, что условие 3 теоремы 2.4 также выполнено. Из теоремы 2.4 следует, что  $\lim_{N \rightarrow \infty} I_{N*} = J_*$ .

Дополнительно предполагая, что  $G$  — выпуклое множество и существует управление  $\bar{u} = \bar{u}(t) \in U$  такое, что  $x(t, \bar{u}) \in G^{-\varepsilon_0}$ ,  $t_0 \leq t \leq T$ ,  $\varepsilon_0 > 0$ , докажем оценку (20). Так как множество  $U^{\varepsilon_N}$  слабо компактно в  $L_2^r[t_0, T]$ , а функция (1) слабо непрерывна на  $U^{\varepsilon_N}$ , то в силу теоремы 8.2.4 при каждом фиксированном  $N = 1, 2, \dots$  существует управление  $u_{N*} \in U^{\varepsilon_N}$  такое, что  $J_*(\varepsilon_N) = J(u_{N*})$ . Составим управление  $v_N = \alpha_N \bar{u} + (1 - \alpha_N) u_{N*}$ , где  $\alpha_N = \varepsilon_N / (\varepsilon_0 + \varepsilon_N)$ ,  $N = 1, 2, \dots$ . Так как  $W$  — выпуклое множество,  $0 < \alpha_N < 1$ , а  $\bar{u}$ ,  $u_{N*} \in W$ , то  $v_N \in W$  при всех  $N = 1, 2, \dots$ . Далее, в силу определения (7) сужения множества  $G^{-\varepsilon_0} = (G^{\varepsilon_N})^{-(\varepsilon_0 + \varepsilon_N)}$  — это  $(\varepsilon_0 + \varepsilon_N)$ -сужение множества  $G^{\varepsilon_N}$ . Тогда  $x(t, \bar{u}) \in G^{-\varepsilon_0} = (G^{\varepsilon_N})^{-(\varepsilon_0 + \varepsilon_N)}$ ,  $x(t, u_{N*}) \in G^{\varepsilon_N}$ . Повторив рассуждения, проведенные при доказательстве включения (16), получаем, что

$$x(t, v_N) \in (G^{\varepsilon_N})^{-(\varepsilon_0 + \varepsilon_N)\alpha_N} = G^{\varepsilon_N - \alpha_N(\varepsilon_0 + \varepsilon_N)} = G^0 = G, \\ t_0 \leq t \leq T, \quad N = 1, 2, \dots,$$

поскольку  $\varepsilon_N - \alpha_N(\varepsilon_0 + \varepsilon_N) = 0$  в силу определения  $\alpha_N$ . Следовательно,  $v_N \in U$  и  $J(v_N) \geq J_*$ ,  $N = 1, 2, \dots$ . С учетом оценки (1.14) тогда имеем  $0 \leq J_* - J_*(\varepsilon_N) = J_* - J(u_{N*}) = (J_* - J(v_N)) + (J(v_N) - J(u_{N*})) \leq J(v_N) - J(u_{N*}) \leq C_3 \|v_N - u_{N*}\|$ . Из определения  $v_N$  следует  $\|v_N - u_{N*}\| = \alpha_N \|\bar{u} - u_{N*}\| \leq \alpha_N \cdot 2R$ , так что

$$0 \leq J_* - J_*(\varepsilon_N) \leq 2RC_3 \alpha_N = \\ = 2RC_3 \frac{\varepsilon_N}{(\varepsilon_0 + \varepsilon_N)} = 2RC_3 \frac{(\xi_N + \delta_N + C_1 d_N^{1/2})}{(\varepsilon_0 + \xi_N + \delta_N + C_1 d_N^{1/2})}, \quad N = 1, 2, \dots$$

Поскольку  $\delta_N \leq \xi_N \leq M_1 \delta_N$ , то

$$0 \leq J_* - J_*(\varepsilon_N) \leq \nu_N = 2RC_3 \frac{((M_1 + 1)\delta_N + C_1 d_N^{1/2})}{(\varepsilon_0 + 2\delta_N + C_1 d_N^{1/2})}, \quad N = 1, 2, \dots$$

Оценка (2.23) получена. Теперь ясно, что оценка (20) является следствием оценки (2.24). Теорема 2 доказана.  $\square$

Предлагаем читателю самостоятельно убедиться в справедливости теорем 1, 2, когда вместо множеств (3), (6), (19) берутся соответственно множества

$$\begin{aligned} U &= \{u(t) \in L_2^r[t_0, T]: \|u\|_{L_2} \leq R, \ x(t, u) \in G, \ t_0 \leq t \leq T\}, \\ U_N &= \{[u]_N \in L_{2N}^r[t_0, T]: \|[u]_N\|_{L_{2N}} \leq R, \ x_i([u]_N) \in G, \ i = 0, \dots, N\}, \\ U_N &= \{[u]_N \in L_{2N}^r[t_0, T]: \|[u]_N\|_{L_{2N}} \leq R, \ x_i([u]_N) \in G^{\xi_N}, \ i = 0, \dots, N\}. \end{aligned}$$

#### § 4. Регуляризация аппроксимаций экстремальных задач

Пусть  $X$  — заданное множество, на котором введена некоторая топология  $\tau$  (см. определения в § 8.2, п. 7), функция  $J(u)$  определена на  $X$ . Рассмотрим задачу

$$J(u) \rightarrow \inf, \quad u \in U, \quad (1)$$

где  $U$  — заданное подмножество из  $X$ . Предположим, что

$$J_* = \inf_U J(u) > -\infty, \quad U_* = \{u \in U: J(u) = J_*\} \neq \emptyset.$$

Пусть последовательность задач

$$I_N([u]_N) \rightarrow \inf, \quad u \in U_N \subseteq X_N, \quad N = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

где  $X_N$ ,  $U_N$  — заданные множества,  $I_N([u]_N)$  — заданные функции на  $U_N$ ,  $N = 1, 2, \dots$ , аппроксимирует задачу (1) по функции.

Возникает вопрос: нельзя ли провести регуляризацию последовательности задач (2) или, иными словами, нельзя ли с помощью задач (2) построить минимизирующую последовательность для задачи (1), сходящуюся к множеству  $U_*$  в топологии  $\tau$ ?

1. В следующей теореме, принадлежащей Е. Р. Авакову, указываются достаточные условия для регуляризации последовательности задач (2).

**Теорема 1.** Пусть выполнены следующие условия:

- 1)  $J_* > -\infty$ ,  $U_* \neq \emptyset$ , функция  $\Omega(u)$  определена и неотрицательна на  $X$ ;
- 2) последовательность  $\{[v]_N\}$  определена из условий

$$[v]_N \in U_N, \quad T_N([v]_N) \leq T_{N*} + \mu_N, \quad N = 1, 2, \dots, \quad (3)$$

где

$$T_N([u]_N) = I_N([u]_N) + \alpha_N \Omega_N([u]_N), \quad [u]_N \in U_N,$$

— функция Тихонова задачи (2),  $\Omega_N([u]_N)$  — заданная на  $U_N$  функция,  $T_{N*} = \inf_{U_N} T_N([u]_N)$ ;  $\{\mu_N\}$ ,  $\{\alpha_N\}$  — положительные последовательности, сходящиеся к нулю (если нижняя грань  $T_{N*}$  достигается в какой-либо точке из  $U_N$ , то в (3) не исключается возможность  $\mu_N = 0$ );

3) существуют последовательность множеств  $U^{\varepsilon_N} \subseteq X$  и отображения  $P_N: X_N \rightarrow X$  такие, что

$$P_N([v]_N) \in U^{\varepsilon_N}, \quad N = 1, 2, \dots, \quad (4)$$

$$J(P_N([v]_N)) - I_N([v]_N) \leq \gamma_N, \quad N = 1, 2, \dots, \quad (5)$$

$$\Omega(P_N([v]_N)) \leq \Omega_N([v]_N) + \xi_N, \quad N = 1, 2, \dots, \quad (6)$$

где  $\{\gamma_N\}, \{\xi_N\}$  — последовательности, сходящиеся к нулю;

4) существуют отображения  $Q_N: X \rightarrow X_N$  такие, что для всех  $u_* \in U_*$  выполняются соотношения

$$Q_N(u_*) \in U_N, \quad N = 1, 2, \dots, \quad (7)$$

$$I_N(Q_N(u_*)) - J(u_*) \leq \beta_N, \quad N = 1, 2, \dots, \quad (8)$$

$$\Omega_N(Q_N(u_*)) \leq \Omega(u_*) + \eta_N, \quad N = 1, 2, \dots, \quad (9)$$

где  $\{\beta_N\}, \{\eta_N\}$  — последовательности, сходящиеся к нулю;

5) имеются оценки

$$J_* - J_*(\varepsilon_N) \leq \nu_N, \quad J_*(\varepsilon_N) = \inf_{U^{\varepsilon_N}} J(u), \quad N = 1, 2, \dots, \quad (10)$$

где  $\{\nu_N\}$  — последовательность, сходящаяся к нулю. Тогда

$$\lim_{N \rightarrow \infty} J(P_N([v]_N)) = J_*. \quad (11)$$

Пусть наряду с условиями 1–5 выполняются еще следующие условия:

6) функции  $J(u), \Omega(u)$   $\tau$ -секвенциально полунепрерывны снизу на  $X$ ; функция  $\Omega(u)$  является  $\tau$ -стабилизатором, т. е. множество  $\Omega_C = \{u \in X, \Omega(u) \leq C\}$   $\tau$ -секвенциально компактно при любом  $C \geq 0$ ; всякая точка  $v \in X$ , являющаяся  $\tau$ -пределом какой-либо последовательности  $\{u_N\}$ ,  $u_N \in U^{\varepsilon_N}$ ,  $N = 1, 2, \dots$ , принадлежит  $U$  (см. определения 8.2.9, 8.2.10, 8.2.13);

7) справедливо равенство

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(\beta_N + \gamma_N + \mu_N + \nu_N)}{\alpha_N} = 0. \quad (12)$$

Тогда последовательность  $\{P_N([v]_N)\}$   $\tau$ -сходится к множеству  $U_{**} = \{w \in U_*: \Omega(w) = \inf_{U_*} \Omega(u) = \Omega_*\}$  и  $\lim_{N \rightarrow \infty} \Omega(P_N([v]_N)) = \Omega_*$ .

**Доказательство.** Возьмем произвольную точку  $u_* \in U_*$ . Из условий (3)–(10) следует цепочка неравенств

$$\begin{aligned} J_* &\leq J_*(\varepsilon_N) + \nu_N \leq J(P_N([v]_N)) + \nu_N \leq J(P_N([v]_N)) + \alpha_N \Omega(P_N([v]_N)) + \nu_N \leq \\ &\leq I_N([v]_N) + \gamma_N + \alpha_N \Omega_N([v]_N) + \alpha_N \xi_N + \nu_N = T_N([v]_N) + \gamma_N + \nu_N + \alpha_N \xi_N \leq \\ &\leq T_{N*} + \mu_N + \gamma_N + \nu_N + \alpha_N \xi_N \leq T_N(Q_N(u_*)) + \mu_N + \gamma_N + \nu_N + \alpha_N \xi_N = \\ &= I_N(Q_N(u_*)) + \alpha_N \Omega_N(Q_N(u_*)) + \mu_N + \gamma_N + \nu_N + \alpha_N \xi_N \leq \\ &\leq J(u_*) + \beta_N + \alpha_N \Omega(u_*) + \alpha_N \eta_N + \mu_N + \gamma_N + \nu_N + \alpha_N \xi_N \leq \\ &\leq J_*(\varepsilon_N) + 2\nu_N + \beta_N + \alpha_N \Omega(u_*) + \mu_N + \gamma_N + \nu_N + \alpha_N (\xi_N + \eta_N) \leq \\ &\leq J(P_N([v]_N)) + \alpha_N \Omega(u_*) + 2\nu_N + \beta_N + \mu_N + \gamma_N + \alpha_N (\eta_N + \xi_N), \quad N = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Отсюда с учетом произвола в выборе  $u_* \in U_*$  имеем

$$J_* - \nu_N \leq J(P_N([v]_N)) \leq J_* + \alpha_N \Omega_* + \beta_N + \gamma_N + \mu_N + \alpha_N(\xi_N + \eta_N), \quad (13)$$

$$N = 1, 2, \dots$$

$$\Omega(P_N([v]_N)) \leq \Omega_* + \frac{(\beta_N + \gamma_N + \mu_N + \nu_N)}{\alpha_N} + \xi_N + \eta_N, \quad N = 1, 2, \dots \quad (14)$$

Из (13) следует равенство (11), причем неравенства (13) представляют собой оценку скорости сходимости в (11).

Далее предположим, что выполнены все условия 1–7 теоремы. Для краткости обозначим  $v_N = P_N([v]_N)$ ,  $N = 1, 2, \dots$ . Из (14) имеем  $\Omega(v_N) \leq \leq \Omega_* + \text{const} = C < \infty$ . Кроме того, согласно (4) имеем  $v_N \in U^{\varepsilon_N} \subseteq X$ ,  $N = 1, 2, \dots$ . Это значит, что  $\{v_N\} \in \Omega_C$ . По условию, множество  $\Omega_C$   $\tau$ -секвенциально компактно. Поэтому последовательность  $\{v_N\}$  имеет хотя бы одну  $\tau$ -сходящуюся подпоследовательность. Возьмем произвольную точку  $v_*$ , являющуюся  $\tau$ -пределом какой-либо подпоследовательности  $\{v_{N_k}\}$ . По условию теоремы  $v_* \in U$ . Тогда с учетом  $\tau$ -секвенциальной полунепрерывности снизу функции  $J(u)$  и равенства (11) имеем  $J_* \leq J(v_*) \leq \varliminf_{k \rightarrow \infty} J(v_{N_k}) = \lim_{N \rightarrow \infty} J(v_N) = J_*$ , т. е.  $J(v_*) = J_*$ , или  $v_* \in U_*$ . Далее, из  $\tau$ -секвенциальной полунепрерывности снизу функции  $\Omega(u)$  и неравенства (14) вытекает, что  $\Omega_* \leq \Omega(v_*) \leq \varliminf_{k \rightarrow \infty} \Omega(v_{N_k}) \leq \varlimsup_{k \rightarrow \infty} \Omega(v_{N_k}) \leq \Omega_*$ , т. е.  $\lim_{k \rightarrow \infty} \Omega(v_{N_k}) = \Omega_* = \Omega(v_*)$ , или  $v_* \in U_{**}$ . Тем самым показано, что любая точка  $v_*$ , являющаяся  $\tau$ -пределом какой-либо подпоследовательности  $\{v_{N_k}\}$ , принадлежит множеству  $U_{**}$  и  $\{\Omega(v_{N_k})\} \rightarrow \Omega_*$ . Отсюда получаем, что последовательность  $\{v_N\}$   $\tau$ -сходится к множеству  $U_{**}$  и  $\{\Omega(v_N)\} \rightarrow \Omega_*$  при  $N \rightarrow \infty$ . Теорема доказана.  $\square$

**2.** Для иллюстрации теоремы 1 рассмотрим задачу

$$J(u) = |x(T, u) - y|^2 \rightarrow \inf, \quad (15)$$

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + f(t), \quad t_0 \leq t \leq T, \quad x(t_0) = x_0, \quad (16)$$

$$u = u(t) \in U = \{u(t) \in L_2^r[t_0, T]: u(t) \in V \text{ почти всюду на } [t_0, T];$$

$$x(t, u) \in G, \quad t_0 \leq t \leq T\}; \quad (17)$$

все обозначения здесь взяты из § 1, 3. Так же, как в § 3, для аппроксимации этой задачи рассмотрим последовательность разностных задач

$$I_N([u]_N) = |x_N([u]_N) - y|^2 \rightarrow \inf, \quad (18)$$

$$x_{i+1} = x_i + \Delta t_i(A_i x_i + B_i u_i + f_i), \quad i = 0, \dots, N-1, \quad (19)$$

$$[u]_N \in U_N = \{[u]_N = (u_0, u_1, \dots, u_{N-1}): u_i \in V,$$

$$i = 0, \dots, N-1; x_i([u]_N) \in G^{\xi_N}, \quad i = 0, \dots, N\}, \quad N = 1, 2, \dots \quad (20)$$

(обозначения см. в § 1, 3). Если в задаче (15)–(17) фазовых ограничений нет, т. е.  $G \equiv E^n$ , то в (20) нет необходимости рассматривать расширения  $G^{\xi_N}$  и можно принять

$$\xi_N = 0, \quad G^{\xi_N} = E^n, \quad N = 1, 2, \dots$$

Положим  $X = L_2^r[t_0, T]$ ,  $X_N = L_{2N}^r$ ,  $N = 1, 2, \dots$ , в качестве стабилизатора возьмем  $\Omega(u) = \int_{t_0}^T |u(t)|^2 dt = \|u\|_{L_2}^2$ ,  $\Omega_N([u]_N) = \sum_{i=0}^{N-1} \Delta t_i |u_i|^2 = \|[u]_N\|_{L_{2N}}^2$  и определим отображения  $Q_N: X \rightarrow X_N$ ,  $P_N: X_N \rightarrow X$  формулами

$$Q_N(u) = (u_0, u_1, \dots, u_{N-1}): u_i = \frac{1}{\Delta t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} u(t) dt, \quad i = 0, \dots, N-1,$$

$$P_N([u]_N) = u_i, \quad t_i < t \leq t_{i+1}, \quad i = 0, \dots, N-1.$$

Из соотношений (1.22), (1.23) следует, что

$$\Omega_N(Q_N(u)) \leq \Omega(u), \quad \Omega(P_N([u]_N)) = \Omega_N([u]_N) \quad (21)$$

при всех  $u \in L_2^r[t_0, T]$ ,  $[u]_N \in L_{2N}^r$ .

Заметим также, что ниже мы будем пользоваться соотношениями (1.8)–(1.26), считая, что встречающиеся в них константы  $C_0, C_1, \dots$  соответствуют множествам

$$W = \{u(t) \in L_2^r[t_0, T]: u(t) \in V \text{ почти всюду на } [t_0, T]\}, \\ W_N = \{[u]_N \in L_{2N}^r: u_i \in V, i = 0, \dots, N-1\}, \quad N = 1, 2, \dots \quad (22)$$

**Теорема 2.** Пусть матрицы  $A(t), B(t), f(t)$  кусочно непрерывны на отрезке  $[t_0, T]$ ;  $V$  — выпуклое замкнутое ограниченное множество из  $E^r$ ;  $G$  — выпуклое замкнутое множество из  $E^n$ ,  $\text{int } G \neq \emptyset$ ; существуют число  $\varepsilon_0 > 0$  и управление  $\bar{u} = \bar{u}(t) \in U$  такие, что  $x(t, \bar{u}) \in G^{-\varepsilon_0}$ ,  $t_0 \leq t \leq T$ . Пусть разбиение  $\{t_i, i = 0, \dots, N\}$  отрезка  $[t_0, T]$  удовлетворяет условию

$$d_N = \max_{0 \leq i \leq N-1} \Delta t_i \leq (T - t_0) \frac{M_0}{N}, \quad N = 1, 2, \dots, M_0 = \text{const} > 0,$$

и, кроме того,

$$\delta_N \leq \xi_N \leq M_1 \delta_N, \quad M_1 = \text{const} \geq 1, \quad N = 1, 2, \dots,$$

где величина  $\delta_N$  взята из (1.26), а последовательности  $\{\alpha_N\}$ ,  $\{\mu_N\}$  таковы, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\delta_N + \mu_N + d_N}{\alpha_N} = 0. \quad (23)$$

Наконец, пусть последовательность  $\{[v]_N\}$  определена условиями

$$[v]_N \in U_N, \quad T_N([v]_N) \leq T_{N*} + \mu_N, \quad N = 1, 2, \dots, \quad (24)$$

где

$$T_N([v]_N) = I_N([v]_N) + \alpha_N \sum_{i=0}^{N-1} \Delta t_i |u_i|^2, \quad T_{N*} = \inf_{U_N} T_N([u]_N).$$

Тогда последовательность  $\{P_N([v]_N)\}$  сходится к  $\Omega$ -нормальному решению  $u_* = u_*(t)$  задачи (15)–(17) по норме  $L_2^r[t_0, T]$ .

**Доказательство.** Из условий теоремы следует, что множество (17) непусто, выпукло, замкнуто и ограничено, а функция (15) выпукла и непрерывна в метрике  $L_2^r[t_0, T]$  (она даже слабо непрерывна в  $L_2^r[t_0, T]$ ). В силу теоремы 8.2.8 множество  $U_*$  непусто, выпукло, замкнуто и ограничено. Тогда сильно выпуклая функция  $\Omega(u) = \|u\|_{L_2}^2$  на множестве  $U_*$  согласно теореме 8.2.10 достигает своей нижней грани  $\inf_{U_*} \Omega(u) = \Omega_*$  в единственной точке  $u_* = u_*(t) \in U_*$ . Таким образом,  $\Omega$ -нормальное решение задачи (15)–(17) существует и единственно.

Определим множество

$$U^{\varepsilon_N} = \{u(t) \in W : x(t, u) \in G^{\varepsilon_N}, t_0 \leq t \leq T\},$$

где  $\varepsilon_N = \xi_N + \delta_N + C_1 d_N$  (если  $G \equiv E^n$ , то  $\varepsilon_N = 0$ ),  $N = 1, 2, \dots$ . Заметим, что поскольку множество  $W$  из (22) ограничено в метрике  $L_\infty^r[t_0, T]$ , то можем пользоваться оценкой (1.11). Рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 3.2, можно показать, что в рассматриваемом случае для введенных множеств  $U^{\varepsilon_N}$ , отображений  $Q_N, P_N$  справедливы включения (4), (7) и неравенства (5), (8), (10) при  $\beta_N = C_5 \delta_N$ ,  $\gamma_N = C_6 \delta_N$ ,  $\nu_N = 2RC_3 \varepsilon_0^{-1}((M_1 + 1)\delta_N + C_1 d_N)$ ,  $N = 1, 2, \dots$ . Тогда из условия (23) вытекает условие (12). Из (21) следуют неравенства (6), (9) при  $\xi_N = \eta_N = 0$ ,  $N = 1, 2, \dots$ .

Далее, функция  $J(u)$  слабо непрерывна,  $\Omega(u)$  неотрицательна и слабо полунепрерывна снизу на  $L_2^r[t_0, T]$ , множество  $\Omega_C = \{u \in L_2^r[t_0, T] : \Omega(u) \leq C\}$  слабо компактно при любом  $C \geq 0$ .

Наконец, всякая точка  $v = v(t) \in L_2^r[t_0, T]$ , являющаяся слабым пределом какой-либо последовательности  $\{u_N\}$ ,  $u_N \in U^{\varepsilon_N}$ ,  $N = 1, 2, \dots$ , принадлежит множеству  $U$ . В самом деле, условие  $u_N \in U^{\varepsilon_N}$  означает, что  $u_N \in W$ ,  $x(t, u_N) \in G^{\varepsilon_N}$ ,  $t_0 \leq t \leq T$ ,  $N = 1, 2, \dots$ . Из слабой замкнутости множества  $W$  следует, что  $v \in W$ . Далее, согласно (1.12),

$$\sup_{t_0 \leq t \leq T} |x(t, u_N) - x(t, v)| = \chi_N \rightarrow 0$$

при  $N \rightarrow \infty$ , поэтому  $x(t, v) \in G^{\varepsilon_N + \chi_N}$ ,  $t_0 \leq t \leq T$ ,  $N = 1, 2, \dots$ . Так как  $\varepsilon_N + \chi_N \rightarrow 0$ , множество  $G$  замкнуто, а  $x(t, v)$  не зависит от  $N$ , то последнее включение возможно только при  $x(t, v) \in G$ ,  $t_0 \leq t \leq T$ . Следовательно,  $v \in U$ .

Таким образом, в рассматриваемом случае все условия теоремы 1 выполнены, если в качестве топологии  $\tau$  в ней взять слабую топологию пространства  $L_2^r[t_0, T]$ . Из теоремы 1 тогда следует, что последовательность  $\{P_N([v]_N)\}$  сходится к  $u_*$  слабо в  $L_2^r[t_0, T]$  и, кроме того,

$$\|P_N([v]_N)\|_{L_2}^2 = \Omega(P_N([v]_N)) \rightarrow \|u_*\|_{L_2}^2 = \Omega(u_*)$$

при  $N \rightarrow \infty$ . Но

$$\|P_N([v]_N) - u_*\|_{L_2}^2 = 2(\|P_N([v]_N)\|_{L_2}^2 + \|u_*\|_{L_2}^2) - \|P_N([v]_N) + u_*\|_{L_2}^2,$$

$$N = 1, 2, \dots$$

Отсюда, пользуясь слабой полунепрерывностью снизу нормы в  $L_2^r[t_0, T]$ , получаем, что последовательность  $\{P_N([v]_N)\}$  сходится к  $u_*$  по норме  $L_2^r[t_0, T]$ . Теорема 2 доказана.  $\square$

**3.** Прокомментируем условие (23). Оно означает, что шаг  $d_N = \max_{0 \leq i \leq N-1} \Delta t_i$  разбиений отрезка  $[t_0, T]$ , а также точность решения задачи минимизации функции Тихонова  $T_N([u]_N)$  на множестве  $U_N$  в смысле неравенства (24) должны быть согласованы с параметром регуляризации  $\alpha_N$ . В частном случае, когда матрицы  $A(t), B(t), f(t)$  на интервалах непрерывности удовлетворяют условию Липшица (например, когда эти матрицы не зависят от  $t$ ), пользуясь оценкой (1.11) из (1.26), имеем  $\delta_N \leq C_8 d_N$ ,  $C_8 = \text{const} > 0$ . Тогда условие (23) запишется в виде

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{d_N + \mu_N}{\alpha_N} = 0. \quad (25)$$

Заметим, что теорема 2 остается верной и в случае, когда в задачах (15)–(17) и (18)–(20) множества  $U$  и  $U_N$  отличны от множеств (17), (20) и имеют, например, вид

$$\begin{aligned} U &= \{u(t) \in L_2^r[t_0, T]: \|u\|_{L_2} \leq R, \quad x(t, u) \in G, \quad t_0 \leq t \leq T\}, \\ U_N &= \{[u]_N \in L_{2N}^r: \|[u]_N\|_{L_{2N}} \leq R, \quad x_i([u]_N) \in G^{\xi_N}, \quad i = 0, \dots, N\}, \\ &N = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (26)$$

Однако для множеств (26) условие (23) нужно заменить на

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\delta_N + \mu_N + d_N^{1/2}}{\alpha_N} = 0. \quad (27)$$

Подчеркнем, что если при регуляризации разностных аппроксимаций задач оптимального управления параметр регуляризации  $\alpha_N$  и шаг  $d_N$  разбиений отрезка  $[t_0, T]$  стремятся к нулю несогласованно, то получающаяся при этом последовательность  $\{P_N([v]_N)\}$  может не сходиться к множеству  $\Omega$ -нормальных решений в нужной метрике. Это видно из следующих примеров [359].

**Пример 1.** Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} J(u) &= x(1, u) - \int_0^1 (x(t, u) + tu(t)) dt \rightarrow \inf, \\ \dot{x}(t) &= u(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad x(0) = 0, \\ u &= u(t) \in U = \{u(t) \in L_p[0, 1], |u(t)| \leq 1 \text{ почти всюду на } [0, 1]\}, \end{aligned}$$

где  $p$  — фиксированное число,  $1 < p < \infty$ .

Поскольку  $\int_0^1 tu(t) dt = \int_0^1 t \dot{x}(t) dt = x(1) - \int_0^1 x(t) dt$ , то  $J(u) \equiv 0$  при всех  $u \in U$ . Следовательно,  $J_* = 0$ ,  $U_* = U$ . Возьмем стабилизатор  $\Omega(u) = \int_0^1 |u(t)|^p dt$ .

Тогда  $U_{**} = \{v \in U_* : \Omega(v) = \inf_{U_*} \Omega(u)\} = \{0\}$ , т. е.  $\Omega$ -нормальное решение единственно и равно  $u_* = 0$ .

Рассмотрим следующую разностную аппроксимацию этой задачи:

$$\begin{aligned} I_N([u]_N) &= x_N - \sum_{i=0}^{N-1} (x_i + t_i u_i) \Delta t \rightarrow \inf, \\ x_{i+1} &= x_i + \Delta t u_i, \quad i = 0, \dots, N-1, \quad x_0 = 0, \\ [u]_N \in U_N &= \{[u]_N = (u_0, u_1, \dots, u_{N-1}) : |u_i| \leq 1, \quad i = 0, \dots, N-1\}, \\ \Delta t &= \frac{1}{N} = d_N, \quad N = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Введем разностную функцию Тихонова

$$T_N([u]_N) = x_N - \sum_{i=0}^{N-1} (x_i + t_i u_i) \Delta t + \alpha_N \sum_{i=0}^{N-1} \Delta t |u_i|^p, \quad [u]_N \in U_N.$$

Так как

$$\begin{aligned} x_N - \sum_{i=0}^{N-1} \Delta t x_i &= x_N - \sum_{i=0}^{N-1} (t_{i+1} - t_i) x_i = x_N - \sum_{i=0}^{N-1} t_i x_{i-1} + \sum_{i=0}^{N-1} t_i x_i = \\ &= x_N + \sum_{i=1}^{N-1} t_i (x_i - x_{i-1}) - x_{N-1} = \sum_{i=1}^N t_i (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=0}^{N-1} t_{i+1} \Delta t u_i, \end{aligned}$$

то  $T_N([u]_N) = \sum_{i=0}^{N-1} \Delta t (\Delta t u_i + \alpha_N |u_i|^p)$ . Следовательно,

$$\min_{U_N} T_N([u]_N) = T_{N*} = \sum_{i=0}^{N-1} \Delta t \min_{|u| \leq 1} (\Delta t u + \alpha_N |u|^p) = \min_{|u| \leq 1} (\Delta t u + \alpha_N |u|^p).$$

Отсюда, исследуя поведение функции  $\varphi(u) = \Delta t u + \alpha_N |u|^p$  на отрезке  $[-1, 1]$ , нетрудно установить, что

$$T_{N*} = \begin{cases} -\frac{\Delta t}{q} \left( \frac{\Delta t}{\alpha_N p} \right)^{1/(p-1)} & \text{при } \frac{\Delta t}{p \alpha_N} \leq 1, \quad q = (p-1)^{-1} p, \\ -\Delta t + \alpha_N & \text{при } \frac{\Delta t}{p \alpha_N} > 1, \end{cases}$$

причем нижняя грань достигается при  $[v]_N = (v_0, v_1, \dots, v_{N-1})$ , где

$$v_i = \begin{cases} -\left( \frac{\Delta t}{p \alpha_N} \right)^{1/(p-1)} & \text{при } \frac{\Delta t}{p \alpha_N} \leq 1, \\ -1 & \text{при } \frac{\Delta t}{p \alpha_N} > 1, \end{cases} \quad i = 0, \dots, N-1.$$

Таким образом, если  $\Delta t = d_N = 1/N \rightarrow 0$ ,  $\alpha_N \rightarrow 0$ , но  $\frac{\Delta t}{p \alpha_N} > 1$ , то  $P_N([v]_N) = -1$  при всех  $t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $N = 1, 2, \dots$ , и последовательность  $\{P_N([v]_N)\}$  не может сходиться к нормальному решению  $u_* = 0$  в метрике



$L_p[0, 1]$  ни при каких  $p$ ,  $1 < p < \infty$ . Остается рассмотреть случай, когда  $\Delta t = d_N \rightarrow 0$ ,  $\alpha_N \rightarrow 0$ ,  $\frac{\Delta t}{p\alpha_N} \leq 1$ . Тогда

$$P_N([v]_N) = -\left(\frac{\Delta t}{p\alpha_N}\right)^{-1/(1-p)}$$

при всех  $t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , и

$$\|P_N([v]_N) - 0\|_{L_p}^p = \int_0^1 \left(\frac{\Delta t}{p\alpha_N}\right)^{p/(1-p)} dt = \left(\frac{d_N}{p\alpha_N}\right)^{1/q}, \quad N = 1, 2, \dots$$

Отсюда ясно, что для сходимости последовательности  $\{P_N([v]_N)\}$  к  $u_* = 0$  в метрике  $L_p[0, 1]$ ,  $1 < p < \infty$ , необходимо и достаточно, чтобы  $\frac{d_N}{\alpha_N} = \frac{1}{N\alpha_N} \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$ .

**Пример 2.** Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} J(u) &= 4x(1, u) - 3 \int_0^1 u(t) dt \rightarrow \inf, \quad \dot{x}(t) = u(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad x(0) = 0, \\ u = u(t) \in U &= \left\{ u(t) \in L_p[0, 1]: \|u\|_{L_p}^p = \int_0^1 |u(t)|^p dt \leq 1, \right. \\ &\quad \left. u(t) \geq 0 \text{ почти всюду на } [0, 1] \right\}, \quad 1 < p < \infty. \end{aligned}$$

Поскольку  $x(t, u) = \int_0^t u(\tau) d\tau$ , то

$$J(u) = 4 \int_0^1 u(t) dt - 3 \int_0^1 u(t) dt = \int_0^1 u(t) dt \geq 0$$

при  $u \in U$ . Отсюда ясно, что  $J_* = 0$ ,  $U_* = \{0\}$ . В качестве стабилизатора возьмем  $\Omega(u) = \|u\|_{L_p}^p$ .

Рассмотрим следующую разностную аппроксимацию этой задачи:

$$\begin{aligned} I_N([u]_N) &= 4\left(\frac{x_N + x_{N-1}}{2}\right) - 3 \sum_{i=0}^{N-1} \Delta t u_i \rightarrow \inf, \\ x_{i+1} &= x_i + \Delta t u_i, \quad i = 0, \dots, N, \quad x_0 = 0, \\ [u]_N \in U_N &= \left\{ [u]_N: \sum_{i=0}^{N-1} \Delta t |u_i|^p \leq 1, \quad u_i \geq 0, \quad i = 0, \dots, N-1 \right\}, \\ \Delta t &= 1/N, \quad N = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Введем разностную функцию Тихонова

$$T_N([u]_N) = 2(x_N + x_{N-1}) - 3 \sum_{i=0}^{N-1} \Delta t u_i + \alpha_N \sum_{i=0}^{N-1} \Delta t |u_i|^p.$$

Так как  $x_{j+1} = \sum_{i=0}^j \Delta t u_i$ ,  $j = 0, \dots, N-1$ , то получаем

$$\begin{aligned} T_N([u]_N) &= \sum_{i=0}^{N-2} \Delta t (u_i + \alpha_N |u_i|^p) + \Delta t (-u_{N-1} + \alpha_N |u_{N-1}|^p) \geq \\ &\geq \Delta t (-u_{N-1} + \alpha_N |u_{N-1}|^p), \quad [u]_N \in U_N. \end{aligned}$$

Отсюда, исследуя поведение функции  $\varphi(u) = -u + \alpha_N |u|^p$  при  $|u|^p \Delta t \leq 1$ ,  $u \geq 0$ , или при  $0 \leq u \leq (\Delta t)^{-1/p}$ , нетрудно получить, что

$$T_{N*} = \inf_{U_N} T_N([u]_N) = \begin{cases} -\frac{1}{q} \frac{1}{(p\alpha_N)^{1/(p-1)}} & \text{при } \Delta t \leq (p\alpha_N)^q, \\ -(\Delta t)^{1/q} + \alpha_N & \text{при } \Delta t > (p\alpha_N)^q, \end{cases} \quad q = p(p-1)^{-1},$$

причем нижняя грань  $T_{N*}$  достигается в точке

$$[v]_N = \begin{cases} (0, 0, \dots, 0, (\Delta t)^{-1/p}) & \text{при } \Delta t > (p\alpha_N)^q, \\ (0, 0, \dots, 0, (p\alpha_N)^{-1/(p-1)}) & \text{при } \Delta t \leq (p\alpha_N)^q. \end{cases}$$

Таким образом, если  $\Delta t = 1/N$ ,  $\alpha_N \rightarrow \infty$ ,  $N \rightarrow \infty$ , но  $\Delta t > (p\alpha_N)^q$ , то  $P_N([v]_N) \equiv 0$  при  $0 \leq t \leq 1 - \Delta t$ ,  $P_N([v]_N) = (\Delta t)^{-1/p}$  при  $1 - \Delta t < t \leq 1$  и  $\|P_N([v]_N)\|_{L_p}^p = 1$ ,  $N = 1, 2, \dots$ , так что  $\{P_N([v]_N)\}$  не будет сходиться к  $u_* = 0$  в метрике  $L_P[0, 1]$  ни при каких  $p$ ,  $1 < p < \infty$ .

Остается рассмотреть случай  $\Delta t \leq (p\alpha_N)^q$ . Тогда  $P_N([v]_N) = 0$  при  $0 \leq t \leq 1 - \Delta t$ ,  $P_N([v]_N) = (p\alpha_N)^{1/(1-p)}$  при  $1 - \Delta t < t \leq 1$  и

$$\|P_N([v]_N)\|_{L_p}^p = \frac{\Delta t}{(p\alpha_N)^q} = \frac{d_N}{(p\alpha_N)^q}, \quad N = 1, 2, \dots$$

Следовательно, для сходимости  $\{P_N([v]_N)\}$  к  $u_* = 0$  в метрике  $L_P[0, 1]$ ,  $1 < p < \infty$ , необходимо и достаточно, чтобы  $\frac{d_N}{\alpha_N^q} = \frac{1}{N\alpha_N^q} \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$ .

Любопытно, что в примере 2 условие сходимости  $\{P_N([v]_N)\}$  в метрике  $L_P[0, 1]$  зависит от  $p$ , а в примере 1 такое условие  $\frac{1}{N\alpha_N} \rightarrow 0$  не зависит от  $p$ , но зато  $U \subset L_P[0, 1]$  при всех  $p$ ,  $1 \leq p \leq +\infty$ .

Приведенные примеры показывают, что при регуляризации разностных аппроксимаций задач оптимального управления условия типа (23), (25) или (27) являются существенными.

4. При построении разностной задачи (18)–(20), аппроксимирующей задачу (15)–(17), были использованы расширения множества  $G$ , согласованные с шагом  $d_N$  разбиения  $\{t_i\}$ . Следуя Е. Р. Авакову, покажем, что при выполнении условий теоремы 2 регуляризованную аппроксимирующую задачу можно построить и без расширений множества  $G$ . А именно, в качестве множества  $U_N$  вместо (20) введем множество

$$U_N = \{[u]_N = (u_0, u_1, \dots, u_{N-1}) : u_i \in V, \quad i = 0, \dots, N-1, \quad x_i([u]_N) \in G, \quad i = 0, \dots, N\} \quad (28)$$

и возьмем число  $N_0$  столь большим, чтобы

$$\delta_N \leq \varepsilon_0 \quad \text{при всех} \quad N \geq N_0, \quad (29)$$

где величина  $\delta_N$  взята из (1.26), а  $\varepsilon_0$  — из условий теоремы 2.

Прежде всего покажем, что тогда множество (28) непусто при всех  $N \geq N_0$ . Будем пользоваться теми же отображениями  $Q_N, P_N$ , а также множествами (22), которые были введены в п. 2. Возьмем  $\Omega$ -нормальное решение  $u_*$  задачи (15)–(17) и положим

$$w_N = \zeta_N \bar{u} + (1 - \zeta_N) u_*, \quad \zeta_N = \frac{\delta_N}{\varepsilon_0}, \quad N \geq N_0.$$

В силу (29) имеем  $0 < \zeta_N \leq 1$ . Отсюда и из выпуклости множества  $W$  следует, что  $w_N \in W$ . Так как  $x(t, \bar{u}) \in G^{-\varepsilon_0}$ ,  $x(t, u_*) \in G$ ,  $t_0 \leq t \leq T$ , то, рассуждая так же, как при доказательстве включения (3.16), получим, что  $x(t, w_N) \in G^{-\zeta_N \varepsilon_0}$ ,  $t_0 \leq t \leq T$ . Отсюда и из оценки (1.24) следует, что  $x_i(Q_N(w_N)) \in G^{-\zeta_N \varepsilon_0 + \delta_N} = G$ ,  $i = 0, \dots, N$ . Это значит, что

$$Q_N(w_N) \in U_N \neq \emptyset, \quad N \geq N_0. \quad (30)$$

Далее,  $\|w_N - u_*\| = \zeta_N \|\bar{u} - u_*\| \leq 2R\zeta_N = 2R\frac{\delta_N}{\varepsilon_0}$ , где  $R = \sup_W \|u\| < \infty$ . Поэтому

$$|\Omega(w_N) - \Omega(u_*)| = \|\|w_N\|^2 - \|u_*\|^2\| \leq 4R^2 \frac{\delta_N}{\varepsilon_0} \quad (31)$$

и, кроме того, из оценки (1.14) имеем

$$|J(w_N) - J(u_*)| \leq 2RC_3 \frac{\delta_N}{\varepsilon_0}, \quad N \geq N_0. \quad (32)$$

Наконец, согласно оценке (1.29)

$$I_N(Q_N(w_N)) - J(w_N) \leq C_5 \delta_N = \beta_N, \quad N \geq N_0. \quad (33)$$

Теперь возьмем последовательность  $\{[v]_N\}$ , определенную условиями (24) для множества (28). Тогда  $x_i([v]_N) \in G$ ,  $i = \overline{0, N}$ . Из оценок (1.11), (1.25) получим  $x(t, P_N([v]_N)) \in G^{\varepsilon_N}$ ,  $t_0 \leq t \leq T$ , где  $\varepsilon_N = \delta_N + C_1 d_N$ . Положим  $v_N = \chi_N \bar{u} + (1 - \chi_N) P_N([v]_N)$ ,  $\chi_N = \varepsilon_N / (\varepsilon_0 + \varepsilon_N)$ ,  $N \geq N_0$ . Так как  $\bar{u} \in W$ ,  $P_N([v]_N) \in W$ ,  $0 < \chi_N < 1$ , то  $v_N \in W$ . По условию теоремы 2 имеем  $x(t, \bar{u}) \in G^{-\varepsilon_0}$ ,  $t_0 \leq t \leq T$ . Однако  $G^{-\varepsilon_0} = G^{-\varepsilon_N - (\varepsilon_0 + \varepsilon_N)} = (G^{\varepsilon_N})^{-(\varepsilon_0 + \varepsilon_N)}$  — это  $(\varepsilon_0 + \varepsilon_N)$ -сужение множества  $G^{-\varepsilon_N}$ . Поэтому, рассуждая так же, как при доказательстве включения (3.16), получим  $x(t, v_N) \in (G^{\varepsilon_N})^{-\chi_N(\varepsilon_0 + \varepsilon_N)} = G$ ,  $t_0 \leq t \leq T$ . Это значит, что  $v_N \in U$ ,  $N \geq N_0$ .

Далее,  $\|v_N - P_N([v]_N)\| = \chi_N \|\bar{u} - P_N([v]_N)\| \leq 2R\chi_N$ . Из оценки (1.14) тогда имеем

$$|J(v_N) - J(P_N([v]_N))| \leq 2RC_3 \chi_N \leq 2RC_3 \frac{(\delta_N + C_1 d_N)}{\varepsilon_0} = \nu_N.$$

Следовательно,

$$J_* \leq J(v_N) \leq J(P_N([v]_N)) + \nu_N, \quad N \geq N_0. \quad (34)$$

Наконец, согласно оценке (1.30)

$$J(P_N([v]_N)) - I_N([v]_N) \leq C_6 \delta_N = \gamma_N, \quad N \geq N_0. \quad (35)$$

Из соотношений (21), (24), (30)–(35) следует цепочка неравенств

$$\begin{aligned} J_* &\leq J(P_N([v]_N)) + \nu_N \leq J(P_N([v]_N)) + \alpha_N \Omega(P_N([v]_N)) + \nu_N \leq \\ &\leq I_N([v]_N) + \gamma_N + \alpha_N \Omega_N([v]_N) + \nu_N \leq T_{N*} + \mu_N + \gamma_N + \nu_N \leq \\ &\leq T_N(Q_N(w_N)) + \mu_N + \gamma_N + \nu_N = \\ &= I_N(Q_N(w_N)) + \alpha_N \Omega_N(Q_N(w_N)) + \mu_N + \gamma_N + \nu_N \leq \\ &\leq J(w_N) + \alpha_N \Omega_N(w_N) + \beta_N + \mu_N + \gamma_N + \nu_N \leq \\ &\leq J(u_*) + \alpha_N \Omega(u_*) + 2R(C_3 + 2R\alpha_N) \frac{\delta_N}{\varepsilon_0} + \beta_N + \mu_N + \gamma_N + \nu_N \leq \\ &\leq J(P_N([v]_N)) + \alpha_N \Omega(u_*) + 2R(C_3 + 2R\alpha_N) \frac{\delta_N}{\varepsilon_0} + \\ &\quad + \beta_N + \mu_N + \gamma_N + 2\nu_N, \quad N \geq N_0. \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} J_* - \nu_N &\leq J(P_N([v]_N)) \leq \\ &\leq J_* + \alpha_N \Omega(u_*) + 2R(C_3 + 2R\alpha_N) \frac{\delta_N}{\varepsilon_0} + \beta_N + \mu_N + \gamma_N, \quad N \geq N_0, \\ \Omega(P_N([v]_N)) &\leq \Omega_* + \frac{2R(C_3 + 2R\alpha_N) \frac{\delta_N}{\varepsilon_0} + \beta_N + \mu_N + \gamma_N + \nu_N}{\alpha_N} \leq \\ &\leq \Omega_* + \text{const} \frac{(\delta_N + d_N + \mu_N)}{\alpha_N}, \quad N \geq N_0. \end{aligned}$$

Следовательно,  $\lim_{N \rightarrow \infty} J(P_N([v]_N)) = J_*$ . Кроме того, повторив рассуждения, проведенные выше, получаем, что последовательность  $\{P_N([v]_N)\}$  сходится к  $u_*$  слабо в  $L_2^r[t_0, T]$  и  $\{\Omega(P_N([v]_N))\} \rightarrow \Omega_* = \Omega(u_*)$ , что равносильно сходимости  $\{P_N([v]_N)\}$  к  $u_*$  в метрике  $L_2^r[t_0, T]$ .

## § 5. Разностная аппроксимация квадратичной задачи с переменной областью управления

### 1. Рассмотрим задачу

$$J(u) = |x(T, u) - y|^2 \rightarrow \inf, \quad (1)$$

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + f(t), \quad t_0 \leq t \leq T; \quad x(t_0) = x_0, \quad (2)$$

$$u = u(t) \in U = \{u(t) \in L_2[t_0, T]: u(t) \in V(t) \text{ почти всюду на } [t_0, T]\}, \quad (3)$$

где  $V(t)$  — заданное семейство множеств, зависящих от  $t \in [t_0, T]$ . Для аппроксимации этой задачи введем последовательность разностных задач

$$I_N([u]_N) = |x_N([u]_N) - y|^2 \rightarrow \inf, \quad (4)$$

$$x_{i+1} = x_i + \Delta t_i (A_i x_i + B_i u_i + f_i), \quad i = 0, \dots, N-1, \quad (5)$$

$$[u]_N \in U_N = \{[u]_N = (u_0, u_1, \dots, u_{N-1}) : u_i \in V_i = V(t_i), i = 0, \dots, N-1\}, \quad (6)$$

$$N = 1, 2, \dots$$

(обозначения см. в § 1).

Для исследования поведения решений задачи (4)–(6) при  $N \rightarrow \infty$  ниже будут использованы теорема 2.1 и схема рассуждений из § 1. Однако из-за зависимости области управления от времени в рассматриваемой задаче не все результаты из § 1 сохраняют силу. Например, для отображения  $Q_N(u) = (u_0, u_1, \dots, u_{N-1})$ , где  $u_i = \frac{1}{\Delta t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} u(t) dt$ ,  $i = 0, \dots, N-1$  (см. формулы (1.20)), включения  $u_i \in V_i = V(t_i)$  могут нарушаться, несмотря на то, что  $u = u(t) \in V(t)$  почти всюду на  $[t_0, T]$  и  $V(t)$  выпукло при каждом  $t \in [t_0, T]$ . Аналогично, для отображения  $P_N([u]_N)$ , определяемого формулами (1.21), включение  $P_N([u]_N) \in U$  может соблюдаться не при всех  $[u]_N$  из множества (6). В то же время, кажется, что если множества  $V(t)$  непрерывно зависят от  $t$ , то упомянутые включения, по-видимому, будут нарушаться незначительно. Однако пока неясно, что значит, что множества  $V(t)$  непрерывно зависят от  $t$ , как понимать близость между множествами, что такое расстояние между множествами. Перейдем к обсуждению этих вопросов.

**2. Из различных возможных подходов к определению понятия расстояния между множествами здесь мы остановимся на понятии расстояния в смысле Хаусдорфа или, короче, хаусдорфова расстояния.**

**О п р е д е л е н и е 1.** Пусть  $M$  — метрическое пространство с расстоянием  $\rho(a, b)$  между точками  $a, b \in M$ , и пусть  $A$  и  $B$  — два множества из  $M$ . *Хаусдорфовым расстоянием* между множествами  $A$  и  $B$  называется величина

$$h(A, B) = \max \left\{ \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \rho(a, b); \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} \rho(a, b) \right\}. \quad (7)$$

Поясним геометрический смысл хаусдорфова расстояния, считая, что множества  $A$  и  $B$  замкнуты в метрике  $M$ . Напомним, что величина

$$\rho(a, Z) = \inf_{z \in Z} \rho(a, z)$$

называется расстоянием от точки  $a \in M$  до множества  $Z \subset M$ . Кроме того, как и в § 3, 4, введем  $\varepsilon$ -расширение множества  $Z$  так:

$$Z^\varepsilon = \{z \in M : \rho(z, Z) \leq \varepsilon\}, \quad \varepsilon \geq 0.$$

Тогда величина

$$\sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \rho(a, b) = \sup_{a \in A} \rho(a, B) = \delta(A, B) = \beta,$$

называемая *уклоном* множества  $A$  от множества  $B$ , равна минимальному числу, на которое надо расширить множество  $B$ , для того чтобы получившееся после расширения множество содержало множество  $A$ , т. е.  $A \subseteq B^\varepsilon$  при всех  $\varepsilon \geq \beta$  и  $A \not\subseteq B^\varepsilon$  при  $0 \leq \varepsilon < \beta$ . Аналогично, величина

$$\sup_{b \in B} \inf_{a \in A} \rho(a, b) = \sup_{b \in B} \rho(b, A) = \delta(B, A) = \gamma,$$

называемая *уклонением множества  $B$  от множества  $A$* , такова, что  $B \subseteq A^\varepsilon$  при всех  $\varepsilon \geq \gamma$  и  $B \not\subseteq A^\varepsilon$  при  $0 \leq \varepsilon < \gamma$ . Таким образом, хаусдорфово расстояние  $h(A, B)$  между множествами  $A$  и  $B$  равно нижней грани всех тех чисел  $\varepsilon > 0$  таких, что  $A \subseteq B^\varepsilon$  и  $B \subseteq A^\varepsilon$ .

Отсюда следует, что если  $h(A, B) \leq \varepsilon$ , то справедливы следующие два включения:

$$A \subseteq B^\varepsilon, \quad B \subseteq A^\varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \quad (8)$$

Рассмотрим несколько примеров.

**Пример 1.** Пусть  $M = E^1$ ,  $A = \{u \in E^1 : a \leq u \leq b\}$ ,  $B = \{u \in E^1 : c \leq u \leq d\}$ . Пользуясь приведенной выше геометрической интерпретацией хаусдорфова расстояния, нетрудно вычислить, что

$$h(A, B) = \max\{|a - c|, |b - d|\}.$$

**Пример 2.** Пусть  $M = R_\infty^r$  —  $r$ -мерное линейное пространство с метрикой  $\rho_\infty(u, v) = \max_{1 \leq i \leq r} |u^i - v^i|$ , соответствующей норме  $\|u\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq r} |u^i|$ , и

$$A = \{u = (u^1, u^2, \dots, u^r) : a^i \leq u^i \leq b^i, \quad i = 1, \dots, r\},$$

$$B = \{u = (u^1, u^2, \dots, u^r) : c^i \leq u^i \leq d^i, \quad i = 1, \dots, r\}.$$

В рассматриваемой метрике  $A^\varepsilon$  —  $\varepsilon$ -расширение множества  $A$  — имеет вид  $A^\varepsilon = \{u = (u^1, \dots, u^r) : a^i - \varepsilon \leq u^i \leq b^i + \varepsilon, \quad i = 1, \dots, r\}$ . Тогда ясно, что

$$h_\infty(A, B) = \max\{|a - c|_\infty, |b - d|_\infty\} = \max\left\{\max_{1 \leq i \leq r} |a^i - c^i|; \max_{1 \leq i \leq r} |b^i - d^i|\right\},$$

где  $a = (a^1, \dots, a^r)$ ,  $b = (b^1, \dots, b^r)$ ,  $c = (c^1, \dots, c^r)$ ,  $d = (d^1, \dots, d^r)$ .

Если те же множества  $A$  и  $B$  рассматривать в евклидовом пространстве  $M = E^r$  с метрикой

$$\rho(u, v) = \left( \sum_{i=1}^r |u^i - v^i|^2 \right)^{1/2},$$

то для соответствующего хаусдорфова расстояния имеем оценку

$$h_\infty(A, B) \leq h(A, B) \leq h_\infty(A, B) \sqrt{r},$$

или

$$\max\{|a - c|_\infty, |b - d|_\infty\} \leq h(A, B) \leq \sqrt{r} \max\{|a - c|_\infty, |b - d|_\infty\}.$$

Эти оценки следуют из неравенств  $|u|_\infty \leq |u|_{E^r} \leq \sqrt{r} |u|_\infty$ .

**Пример 3.** Пусть  $M = E^r$ ,  $V(t) = \{u = (u^1, \dots, u^r) \in E^r : \alpha_i(t) \leq u^i \leq \beta_i(t), \quad i = 1, \dots, r\}$ ,  $t_0 \leq t \leq T$ , где  $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_r(t))$ ,  $\beta(t) = (\beta_1(t), \dots, \beta_r(t))$  — заданные функции,  $\alpha_i(t) \leq \beta_i(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq T$ . Пользуясь результатами примера 2, имеем

$$\frac{1}{\sqrt{r}} \max\{|\alpha(t) - \alpha(\tau)|_{E^r}; |\beta(t) - \beta(\tau)|_{E^r}\} \leq h(V(t); V(\tau)) \leq$$

$$\leq \sqrt{r} \max\{|\alpha(t) - \alpha(\tau)|_{E^r}; |\beta(t) - \beta(\tau)|_{E^r}\}, \quad t_0 \leq t, \quad \tau \leq T.$$

**Пример 4.** Пусть  $M = E^2$ ,  $A = \{u = (x, y): x^2 + y^2 \leq 1\}$ ,  $B = B(t) = \{u = (x, y): (x - 2t)^2 + y^2 \leq t^2\}$ ,  $t \geq 0$ . Из геометрических соображений нетрудно получить, что  $\delta(A, B) = t + 1$  при всех  $t \geq 0$ ;

$$\delta(B, A) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq t \leq 1/3, \\ 3t - 1 & \text{при } t > 1/3, \end{cases} \quad h(A, B) = \begin{cases} t + 1 & \text{при } 0 \leq t \leq 1, \\ 3t - 1 & \text{при } t > 1. \end{cases}$$

Заметим, что здесь  $h(B(t), B(\tau)) = 3|t - \tau|$  при всех  $t, \tau \geq 0$ .

Покажем, что хаусдорфово расстояние обладает следующими тремя замечательными свойствами [428]:

1) Если  $A$  и  $B$  — замкнутые множества из метрического пространства  $M$ , то  $h(A, B) = 0$  тогда и только тогда, когда  $A = B$ . В самом деле, если замкнутые множества  $A$  и  $B$  не совпадают, то либо  $\delta(A, B) > 0$ , либо  $\delta(B, A) > 0$ , поэтому

$$h(A, B) = \max\{\delta(A, B); \delta(B, A)\} > 0.$$

Если же  $A = B$ , то, очевидно,  $h(A, B) = 0$ .

2) Хаусдорфово расстояние симметрично, т. е.  $h(A, B) = h(B, A)$ . Это свойство следует из определения (7) и симметричности расстояния  $\rho(a, b)$  в исходном метрическом пространстве  $M$ .

3) Справедливо неравенство треугольника

$$h(A, B) \leq h(A, C) + h(C, B), \quad A, B, C \in M. \quad (9)$$

В самом деле, из неравенства треугольника для исходного пространства  $M$  имеем  $\rho(a, b) \leq \rho(a, c) + \rho(c, b)$  при всех  $a \in A$ ,  $b \in B$ ,  $c \in C$ . Тогда

$$\begin{aligned} \rho(a, B) &= \inf_{b \in B} \rho(a, b) \leq \rho(a, c) + \inf_{b \in B} \rho(c, b) = \rho(a, c) + \rho(c, B) \leq \\ &\leq \rho(a, c) + \sup_{c \in C} \rho(c, B) = \rho(a, c) + \delta(C, B) \leq \rho(a, c) + h(C, B) \end{aligned}$$

для всех  $a \in A$ ,  $c \in C$ . В силу произвольности  $c \in C$  отсюда получаем

$$\begin{aligned} \rho(a, B) &\leq \inf_{c \in C} \rho(a, c) + h(C, B) = \rho(a, C) + h(C, B) \leq \\ &\leq \delta(A, C) + h(C, B) \leq h(A, C) + h(C, B), \quad a \in A. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\delta(A, B) = \sup_{a \in A} \rho(a, B) \leq h(A, C) + h(C, B).$$

Поменяв в предыдущем рассуждении множества  $A$  и  $B$  ролями, будем иметь

$$\delta(B, A) \leq h(A, C) + h(C, B).$$

Из последних двух неравенств следует неравенство (9).

Приведенные свойства 1–3 хаусдорфова расстояния показывают, что множество всех ограниченных замкнутых подмножеств метрического пространства в свою очередь также образует метрическое пространство с метрикой  $h(A, B)$ .

### 3. Изучим некоторые свойства множеств, зависящих от времени.

**О п р е д е л е н и е 2.** Пусть  $V(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq T$ , — некоторое семейство множеств из метрического пространства  $M$ . Говорят, что это семейство множеств непрерывно по Хаусдорфу в точке  $t$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  найдется число  $\delta > 0$  такое, что  $h(V(t), V(\tau)) < \varepsilon$  для всех  $\tau$ , для которых  $|t - \tau| < \delta$ .

**Л е м м а 1.** Пусть  $V(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq T$ , — семейство множеств из  $E^r$ , причем в каждой точке  $t \in [t_0, T]$  множество  $V(t)$  замкнуто, ограничено и непрерывно по Хаусдорфу. Тогда множества  $V(t)$  ограничены равномерно по  $t \in [t_0, T]$ , т. е. найдется постоянная  $R > 0$  такая, что

$$\sup_{t_0 \leq t \leq T} \sup_{u \in V(t)} |u| \leq R.$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть, вопреки утверждению, множества  $V(t)$  не являются равномерно ограниченными на  $[t_0, T]$ . Это значит, что для любого натурального числа  $n$  найдутся  $t_n \in [t_0, T]$  и  $u_n \in V(t_n)$  такие, что  $|u_n| \geq n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Так как отрезок  $[t_0, T]$  — ограниченное замкнутое множество на числовой оси, то из последовательности  $\{t_n\}$  можно выбрать подпоследовательность  $\{t_{n_k}\}$ , сходящуюся при  $n_k \rightarrow \infty$  к некоторой точке  $\tau \in [t_0, T]$ . Без ограничения общности можем считать, что сама последовательность  $\{t_n\}$  стремится к  $\tau$ . Так как семейство  $V(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq T$ , непрерывно по Хаусдорфу в точке  $\tau$ , то для любого  $\varepsilon > 0$  найдется номер  $n_0$  такой, что  $h(V(t_n), V(\tau)) < \varepsilon$  при всех  $n \geq n_0$ . Согласно (8) это означает, что  $V(t_n) \subset (V(\tau))^\varepsilon$ ,  $n \geq n_0$ . Но  $V(\tau)$  — ограниченное множество, поэтому его  $\varepsilon$ -расширение  $(V(\tau))^\varepsilon$  также ограничено. Тогда последовательность  $\{u_n\}$ :  $u_n \in V(t_n) \subset (V(\tau))^\varepsilon$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , будет ограниченной. В то же время по построению  $|u_n| \geq n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Полученное противоречие доказывает лемму 1.  $\square$

**Л е м м а 2.** Пусть  $V(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq T$ , — семейство множеств из  $E^r$ , причем в каждой точке  $t \in [t_0, T]$  множество  $V(t)$  замкнуто, ограничено и непрерывно по Хаусдорфу. Тогда это семейство равномерно непрерывно на отрезке  $[t_0, T]$ , т. е. для любого  $\varepsilon > 0$  найдется  $\delta > 0$  такое, что  $h(V(t), V(\tau)) < \varepsilon$  для всех  $t, \tau \in [t_0, T]$ , лишь бы  $|t - \tau| < \delta$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть множества  $V(t)$  не являются равномерно непрерывными на  $[t_0, T]$ . Это значит, что существует число  $\varepsilon_0 > 0$  такое, что для любого натурального числа  $n$  найдутся точки  $t_n, \tau_n \in [t_0, T]$ , для которых хотя  $|t_n - \tau_n| < 1/n$ , но  $h(V(t_n), V(\tau_n)) \geq \varepsilon_0$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Из последовательности  $\{t_n\}$  выберем подпоследовательность  $\{t_{n_k}\}$ , сходящуюся к некоторой точке  $t \in [t_0, T]$ . Так как  $|t_n - \tau_n| < 1/n$ , то  $\{\tau_{n_k}\}$  также сходится к  $t$ . Из непрерывности  $V(t)$  по Хаусдорфу следует, что  $h(V(t_{n_k}), V(t)) \rightarrow 0$ ,  $h(V(\tau_{n_k}), V(t)) \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Тогда, пользуясь неравенством треугольника (9), получим

$$h(V(t_{n_k}), V(\tau_{n_k})) \leq h(V(t_{n_k}), V(t)) + h(V(\tau_{n_k}), V(t)) \rightarrow 0$$

при  $k \rightarrow \infty$ . В то же время по построению

$$h(V(t_{n_k}), V(\tau_{n_k})) \geq \varepsilon_0 > 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Полученное противоречие доказывает лемму 2.  $\square$



**О п р е д е л е н и е 3.** Хаусдорфовым модулем непрерывности семейства множеств  $V(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq T$ , называется функция  $\omega_V(d) = \sup h(V(t), V(\tau))$ , где верхняя грань берется по всем  $t, \tau \in [t_0, T]$ , для которых  $|t - \tau| \leq d$ .

Нетрудно видеть, что  $\omega_V(d)$  не убывает при возрастании  $d$ . Если выполнены условия леммы 2, то  $\omega_V(d) \rightarrow 0 = \omega_V(0)$  при  $d \rightarrow 0$ .

Заметим, что для множеств  $B(t)$  из примера 4 модуль непрерывности равен  $\omega_B(d) = 3d$ . Для множеств  $V(t)$  из примера 3 для модуля непрерывности  $V(t)$  справедлива оценка  $\omega_V(d) \leq \sqrt{r} \max\{\omega_\alpha(d); \omega_\beta(d)\}$ , где  $\omega_\alpha(d), \omega_\beta(d)$  — модули непрерывности функций  $\alpha(t), \beta(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq T$ . В частности, если  $\alpha(t), \beta(t)$  удовлетворяют условию Гёльдера

$$|\alpha(t) - \alpha(\tau)| \leq L|t - \tau|^\alpha, \quad |\beta(t) - \beta(\tau)| \leq L|t - \tau|^\alpha, \quad 0 < \alpha \leq 1,$$

то  $\omega_V(d) \leq \sqrt{r}Ld^\alpha$ .

**Л е м м а 3.** Пусть  $V(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq T$ , — семейство множеств из  $E^r$ , причем в каждой точке  $t \in [t_0, T]$  множество  $V(t)$  выпукло, замкнуто, ограничено и непрерывно по Хаусдорфу. Если функция  $u(t) = (u^1(t), \dots, u^r(t))$ ,  $t_0 \leq t \leq T$ , непрерывна в точке  $t$ , то функция

$$v(t) = P_{V(t)}u(t), \quad t_0 \leq t \leq T, \quad (10)$$

где  $P_{V(t)}z$  — проекция точки  $z \in E^r$  на множество  $V(t)$ , также непрерывна в точке  $t$ . Если функция  $u(t)$  кусочно непрерывна на отрезке  $[t_0, T]$ , то функция (10) тоже кусочно непрерывна на этом отрезке.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть  $t \in [t_0, T]$  — какая-либо точка непрерывности функции  $u(t)$ . С учетом (10) имеем

$$\begin{aligned} |v(\tau) - v(t)| &= |P_{V(\tau)}u(\tau) - v(t)| \leq \\ &\leq |P_{V(\tau)}u(\tau) - P_{V(\tau)}u(t)| + |P_{V(\tau)}u(t) - v(t)|, \quad \tau \in [t_0, T]. \end{aligned} \quad (11)$$

Операция проектирования обладает сжимающим свойством (теорема 4.4.2):

$$|P_{V(\tau)}u(\tau) - P_{V(\tau)}u(t)| \leq |u(\tau) - u(t)|.$$

Отсюда и из непрерывности  $u(t)$  в точке  $t$  следует, что первое слагаемое в правой части неравенства (11) стремится к нулю при  $\tau \rightarrow t$ . Покажем, что и второе слагаемое стремится к нулю при  $\tau \rightarrow t$ .

По лемме 1 семейство множеств  $V(\tau)$  ограничено равномерно по  $\tau \in [t_0, T]$ . Следовательно, множество точек  $\{P_{V(\tau)}u(t)\} \in V(\tau)$ ,  $t_0 \leq \tau \leq T$ , ограничено и имеет хотя бы одну предельную точку  $\omega$  при  $\tau \rightarrow t$ . Это значит, что существует последовательность  $\{\tau_k\} \rightarrow t$  такая, что  $\omega_k = P_{V(\tau_k)}u(t) \rightarrow \omega$  при  $k \rightarrow \infty$ . Покажем, что  $\omega = P_{V(t)}u(t) = v(t)$ . Сначала убедимся в том, что  $\omega \in V(t)$ . В силу непрерывности семейства множеств  $V(t)$  по Хаусдорфу для любого  $\varepsilon > 0$  найдется номер  $k_0$  такой, что  $h(V(\tau_k), V(t)) \leq \varepsilon$  при всех  $k \geq k_0$ . Согласно (8) тогда  $V(\tau_k) \subset (V(t))^\varepsilon$  при всех  $k \geq k_0$ . Поэтому  $\omega_k \in (V(t))^\varepsilon$ ,  $k \geq k_0$ . Так как  $V(t)$  замкнуто, то  $(V(t))^\varepsilon$  также замкнуто. Отсюда и из того, что  $\{\omega_k\} \rightarrow \omega$ , следует, что  $\omega \in (V(t))^\varepsilon$ . В силу произвольности  $\varepsilon > 0$  и замкнутости  $V(t)$  последнее включение возможно лишь в случае  $\omega \in V(t)$ .

Далее, имеем

$$\begin{aligned} |\omega_k - u(t)| &= |P_{V(\tau_k)}u(t) - u(t)| = \inf_{u \in V(\tau_k)} |u - u(t)| \leq |P_{V(\tau_k)}v(t) - u(t)| \leq \\ &\leq |v(t) - u(t)| + |P_{V(\tau_k)}v(t) - v(t)|, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} |P_{V(\tau_k)}v(t) - v(t)| &= \inf_{u \in V(\tau_k)} |u - v(t)| = \rho(v(t), V(\tau_k)) \leq \\ &\leq \sup_{v \in V(t)} \rho(v, V(\tau_k)) \leq h(V(t), V(\tau_k)) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при  $k \rightarrow \infty$ , то, переходя к пределу при  $k \rightarrow \infty$ , из предыдущего неравенства получим  $|\omega - u(t)| \leq |v(t) - u(t)|$ . С другой стороны, по определению проекции точки и условию (10) с учетом  $\omega \in V(t)$  имеем

$$|v(t) - u(t)| = \inf_{u \in V(t)} |u - u(t)| \leq |\omega - u(t)|.$$

Следовательно,

$$|\omega - u(t)| = |v(t) - u(t)| = |P_{V(t)}u(t) - u(t)|.$$

Однако проекция точки  $u(t)$  на выпуклое замкнутое множество  $V(t)$  определяется однозначно (см. теорему 4.4.1), т. е.  $\omega = v(t) = P_{V(t)}u(t)$ .

Тем самым показано, что любая точка  $\omega$ , являющаяся предельной для семейства точек  $\{P_{V(\tau)}u(t)\}$  при  $\tau \rightarrow t$ , совпадает с  $v(t)$ . Это значит, что указанное семейство сходится к  $v(t)$ , т. е.  $|P_{V(\tau)}u(t) - v(t)| \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow t$ .

Таким образом, второе слагаемое в правой части неравенства (11) также стремится к нулю при  $\tau \rightarrow t$ . Следовательно, если  $u(t)$  непрерывна в точке  $t$ , то и функция  $v(t)$  из (10) также непрерывна в этой точке. В частности, если  $u(t)$  непрерывна на отрезке  $[t_0, T]$ , то  $v(t)$  также непрерывна на этом отрезке.

Наконец, из приведенного доказательства видно, что если существует предел  $\lim_{\tau \rightarrow t \pm 0} u(\tau) = u(t \pm 0)$ , то существует  $\lim_{\tau \rightarrow t \pm 0} v(\tau) = P_{V(t)}u(t \pm 0)$ . Это значит, что если  $u(t)$  кусочно непрерывна на отрезке  $[t_0, T]$ , то  $v(t)$  также кусочно непрерывна на этом отрезке. Лемма 3 доказана.  $\square$

4. Вернемся к задачам (1)–(3) и (4)–(6). Через  $J_*$  обозначим нижнюю грань функции (1) при условиях (2), (3), через  $I_{N*}$  — нижнюю грань функции (4) при условиях (5), (6).

**Теорема 1.** Пусть матрицы  $A(t), B(t), f(t)$  кусочно непрерывны на отрезке  $[t_0, T]$ , множества  $V(t)$  выпуклы, замкнуты, ограничены и непрерывны по Хаусдорфу при всех  $t \in [t_0, T]$ . Пусть разбиения  $\{t_i, i = 0, \dots, N\}$  отрезка  $[t_0, T]$  таковы, что

$$d_N = \max_{0 \leq i \leq N-1} \Delta t_i \leq (T - t_0) \frac{M_0}{N}, \quad N = 1, 2, \dots$$

Тогда  $\lim_{N \rightarrow \infty} I_{N*} = J_*$  и справедлива оценка

$$-C_6 \delta_N \leq I_{N*} - J_* \leq C_5 \delta_N, \quad N = 1, 2, \dots, \quad (12)$$

где  $C_5 = 2C_0 + 2C_4 + 2|y| = C_6$ , постоянные  $C_0, C_4$  взяты из (1.8), (1.16) при  $W = U$ ,  $W_N = U_N$  соответственно, а величина  $\delta_N$  определяется формулой

$$\delta_N = e^{A_{\max}(T-t_0)M_0} \sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left( \|A(\tau) - A_i\| C_0 + A_{\max} C_1 d_N + |f(\tau) - f_i| + \right. \\ \left. + \sup_{t_0 \leq t \leq T} \sup_{u \in V(t)} |u| \|B(\tau) - B_i\| + B_{\max} \omega(d_N) \right) d\tau; \quad (13)$$

здесь  $\omega(d)$  — хаусдорфов модуль непрерывности множеств  $V(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq T$ ,  $A_{\max} = \sup_{t_0 \leq t \leq T} \|A(t)\|$ ,  $B_{\max} = \sup_{t_0 \leq t \leq T} \|B(t)\|$ , постоянная  $C_1$  взята из оценки (1.11) при  $W = U$ .

**Доказательство.** Положим  $X = L_2^r[t_0, T]$ ,  $X_N = L_{2N}^r$ . Отображения  $Q_N: X \rightarrow X_N$ ,  $P_N: X_N \rightarrow X$  определим так:

$$Q_N(u) = (u_0, u_1, \dots, u_{N-1}): u_i = P_{V_i}(v_i), \quad v_i = \frac{1}{\Delta t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} u(t) dt, \quad (14)$$

$$P_N([u]_N) = P_{V(t)} u_i \quad \text{при} \quad t_i \leq t < t_{i+1}, \quad i = 0, \dots, N-1, \quad (15)$$

где  $P_V(z)$  — проекция точки  $z \in E^r$  на множество  $V$ . Как видим, в рассматриваемом случае отображения  $Q_N, P_N$  имеют несколько более сложный вид, чем в предыдущих параграфах, в которых задача вида (1)–(3) исследовалась при  $V(t) \equiv V$ ,  $t_0 \leq t \leq T$ . При  $V(t) \equiv V$ ,  $t_0 \leq t \leq T$ , формулы (14), (15) превращаются в формулы (1.20) и (1.21) соответственно.

Так как множества  $V(t)$  выпуклы и замкнуты при каждом  $t \in [t_0, T]$ , то отображения  $Q_N, P_N$  из (14), (15) определяются однозначно. Функция  $v(t) = P_N([u]_N) = P_{V(t)} u_N(t)$ , полученная проектированием кусочно постоянной функции  $u_N(t) = u_i$ ,  $t_i \leq t < t_{i+1}$ ,  $i = 0, \dots, N-1$ , согласно лемме 3, кусочно непрерывна на  $[t_0, T]$  и, следовательно,  $P_N([u]_N) \in L_2^r[t_0, T]$  при всех  $[u]_N \in L_{2N}^r$ . Отсюда и из (14), (15) вытекает, что

$$Q_N(u) \in U_N, \quad P_N([u]_N) \in U \quad \text{при всех} \quad u \in U, \quad [u]_N \in U_N, \quad N = 1, 2, \dots$$

Заметим также, что согласно лемме 1

$$\sup_{t_0 \leq t \leq T} \sup_{u \in V(t)} |u| \leq R < \infty,$$

откуда следует, что множество (3) ограничено в метрике  $L_\infty^r[t_0, T]$ , и мы можем пользоваться оценкой (1.11) при  $W = U$ , а также оценками (1.8), (1.16) при  $W = U$ ,  $W_N = U_N$ .

Покажем теперь, что справедливы оценки

$$\sup_{u \in U} \max_{0 \leq i \leq N} |x(t_i, u) - x_i(Q_N(u))| \leq \delta_N, \quad u \in U, \quad N = 1, 2, \dots, \quad (16)$$

$$\sup_{[u]_N \in U_N} \max_{0 \leq i \leq N} |x(t_i, P_N([u]_N)) - x_i([u]_N)| \leq \delta_N, \quad [u]_N \in U_N, \quad N = 1, 2, \dots, \quad (17)$$

где величина  $\delta_N$  определяется формулой (13). Рассуждая так же, как при получении неравенства (1.27), с помощью оценок (1.8) и (1.11) имеем

$$|x(t_i, u) - x_i([u]_N)| \leq e^{A_{\max}(T-t_0)M_0} \sum_{i=0}^{N-1} \left[ \int_{t_i}^{t_{i+1}} (\|A(\tau) - A_i\|C_0 + A_{\max}C_1 d_N + \right. \\ \left. + \|B(\tau) - B_i\|R + |f(\tau) - f_i|) d\tau + B_{\max} \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} (u(\tau) - u_i) d\tau \right| \right], \\ u \in U, \quad [u]_N \in U_N, \quad i = 0, \dots, N, \quad N = 1, 2, \dots \quad (18)$$

Зафиксируем какое-либо управление  $u$  и в (18) примем  $[u]_N = Q_N(u)$ . Поскольку по условию  $h(V(\tau), V_i) \leq \omega(|\tau - t_i|) \leq \omega(d_N)$  при  $t_i \leq \tau \leq t_{i+1}$ , то согласно (8) имеем  $V(\tau) \subset V_i^{\omega(d_N)}$  при всех  $\tau \in [t_i, t_{i+1}]$ ,  $i = 0, \dots, N-1$ . Тогда из включения  $u(\tau) \subset V(\tau)$  следует, что  $u(\tau) \in V_i^{\omega(d_N)}$  почти всюду на  $[t_i, t_{i+1}]$ . Отсюда, замечая, что множество  $V_i^{\omega(d_N)}$  выпукло, замкнуто и не зависит от  $\tau$ , с помощью леммы 1.1 получаем  $v_i = \frac{1}{\Delta t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} u(\tau) d\tau \in V_i^{\omega(d_N)}$ ,  $i = 0, \dots, N-1$ . Следовательно,

$$|P_{V_i}(v_i) - v_i| = \rho(v_i, V_i) \leq h(V_i^{\omega(d_N)}, V_i) \leq \omega(d_N), \quad i = 0, \dots, N-1.$$

Отсюда и из (14) имеем

$$\left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} (u(\tau) - u_i) d\tau \right| = \Delta t_i |v_i - u_i| \leq \Delta t_i \omega(d_N), \quad i = 0, \dots, N-1.$$

Тогда из (18) при  $[u]_N = Q_N(u)$ ,  $u \in U$ , получим оценку (16).

Далее, возьмем какое-либо  $[u]_N \in U_N$  и в (18) примем  $u = P_N([u]_N)$ . Из того, что  $h(V(\tau), V_i) \leq \omega(|\tau - t_i|) \leq \omega(d_N)$  при  $t_i \leq \tau \leq t_{i+1}$ , согласно (8) следует, что  $V_i \subset (V(\tau))^{\omega(d_N)}$  при всех  $\tau \in [t_i, t_{i+1}]$ . Поскольку  $[u]_N = (u_0, u_1, \dots, u_{N-1}) \in U_N$  означает, что  $u_i \in V_i$ , то  $u_i \in (V(\tau))^{\omega(d_N)}$  при всех  $\tau \in [t_i, t_{i+1}]$ ,  $i = 0, \dots, N-1$ . Следовательно,  $|P_{V(\tau)}u_i - u_i| = \rho(u_i, V(\tau)) \leq h((V(\tau))^{\omega(d_N)}, V_i) \leq \omega(d_N)$ ; отсюда и из (15) имеем

$$\left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} (P_N([u]_N) - u_i) d\tau \right| \leq \Delta t_i \omega(d_N), \quad i = 0, \dots, N-1.$$

Тогда из (18) при  $u = P_N([u]_N)$ ,  $[u]_N \in U_N$  следует оценка (17).

Далее, рассуждая так же, как в леммах 1.3 и 1.4, из оценок (16), (17) получаем, что

$$|I_N(Q_N(u)) - J(u)| \leq C_5 \delta_N = \beta_N, \quad u \in U, \quad N = 1, 2, \dots, \\ |J(P_N([u]_N)) - I_N([u]_N)| \leq C_6 \delta_N = \gamma_N, \quad [u]_N \in U_N, \quad N = 1, 2, \dots$$

Таким образом, выполнены все условия теоремы 2.1, из которой следует оценка (12). Остается заметить, что величина  $\delta_N$  из оценки (12), определяемая формулой (13), стремится к нулю при  $N \rightarrow \infty$ ; это доказывается так же, как аналогичное утверждение в лемме 1.2. Теорема 1 доказана.  $\square$

Предлагаем читателям самостоятельно рассмотреть задачи (1)–(3) и (4)–(6) при наличии фазовых ограничений

$$x(t, u) \in G(t), \quad t_0 \leq t \leq T, \quad x_i([u]_N) \in G(t_i), \quad i = 0, \dots, N,$$

где  $G(t)$  — замкнутые множества, непрерывные по Хаусдорфу на отрезке  $[t_0, T]$ , и доказать аналоги теорем из § 3, 4.

## § 6. Аппроксимация задачи быстрогодействия

1. Пусть процесс описывается условиями

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + f(t), \quad t \geq t_0, \quad x(t_0) = x_0, \quad (1)$$

$$u = u(t) \in L_2^r[t_0, a] \text{ при любом } a > t_0, \quad u(t) \in V(t) \text{ для почти всех } t \geq t_0, \quad (2)$$

где  $A(t), B(t), f(t)$  — матрицы порядка  $n \times n$ ,  $n \times r$ ,  $n \times 1$  соответственно, определенные при всех  $t \geq t_0$  и кусочно непрерывные на любом конечном отрезке  $[t_0, a]$ ; начальный момент  $t_0$  и точка  $x_0 \in E^n$  известны;  $V(t)$  — заданное при  $t \geq t_0$  семейство множеств из  $E^r$ . Через  $x(t, u)$ ,  $t \geq t_0$ , как обычно, будем обозначать траекторию задачи (1), соответствующую управлению  $u = u(t)$ ,  $t \geq t_0$ .

Пусть  $Y$  и  $G(t)$ ,  $t \geq t_0$ , — заданные множества из  $E^n$ .

**О п р е д е л е н и е 1.** Скажем, что система (1), (2)  $(T, G(t), Y)$ -управляема, если существуют хотя бы одно управление  $u = u(t)$ ,  $t \geq t_0$ , удовлетворяющее условиям (2), и момент  $t = t(u)$ ,  $t_0 \leq t(u) \leq T$ , такие, что

$$x(t, u) \in G(t), \quad t_0 \leq t \leq t(u), \quad (3)$$

$$x(t(u), u) \in Y, \quad x(t, u) \notin Y \quad \text{при} \quad t_0 \leq t < t(u). \quad (4)$$

Момент времени  $t(u)$ , удовлетворяющий условиям (4), назовем *временем первой встречи* траектории  $x(t, u)$  с множеством  $Y$ .

Таким образом,  $(T, G(t), Y)$ -управляемость системы (1), (2) при некотором  $T \geq t_0$  означает, что множество  $U(T)$ , которое состоит из всех управлений  $u = u(t)$ , удовлетворяющих условиям (2)–(4), непусто. Напоминаем, что задача управления системой (1) при  $G(t) \equiv E^n$ ,  $Y = \{x_1\}$  и специальном выборе множества  $V(t)$  исследовалась в § 8.11.

Будем рассматривать задачу

$$t(u) \rightarrow \inf, \quad u \in U(T), \quad (5)$$

представляющую собой задачу быстрогодействия, в которой требуется за наименьшее время попасть из точки  $x_0$  на множество  $Y$ , двигаясь по траекториям системы (1), (2) с соблюдением фазовых ограничений (3).

Величину  $t_* = \inf t(u)$  называют *оптимальным временем* задачи (1)–(5); управление  $u_* = u_*(t) \in U(T)$ , для которого  $t(u_*) = t_*$ , называют *оптимальным управлением*, а  $x(t, u_*)$  — *оптимальной траекторией* задачи (1)–(5).

**2.** Приведем достаточные условия, при которых в (5) нижняя грань достигается.

**Теорема 1.** Пусть матрицы  $A(t), B(t), f(t)$ ,  $t \geq t_0$ , кусочно непрерывны на любом конечном отрезке, множество  $V(t)$  при каждом  $t$  выпукло, замкнуто и

$$\sup_{t_0 \leq t \leq a} \sup_{u \in V(t)} |u| \leq R = R(a) < \infty$$

при всех  $a > t_0$ ; множества  $G(t)$ ,  $t \geq t_0$ , и  $Y$  замкнуты; система (1), (2)  $(T, G(t), Y)$ -управляема при некотором  $T > t_0$ . Тогда  $t_* = \inf_{U(T)} t(u) \leq T$  и в задаче (1)–(5) существует оптимальное управление.

**Доказательство.** По условию множество  $U(T) \neq \emptyset$ , и при любых  $u \in U(T)$  справедливо неравенство  $t_0 \leq t(u) \leq T$ . Поэтому  $t_0 \leq t_* \leq T < \infty$ . По определению нижней грани (5) существуют последовательность  $\{t_k\} \rightarrow t_*$ ,  $T \geq t_k \geq t_*$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , и управления  $u_k = u_k(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq T$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , такие, что

$$\begin{aligned} x(t, u_k) &\in G(t), \quad t_0 \leq t \leq t_k, \quad x(t_k, u_k) \in Y, \\ x(t, u_k) &\notin Y, \quad t_0 \leq t < t_k, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Заметим, что множество

$$W(T) = \{u = u(t) \in L_2^r[t_0, T]: u(t) \in V(t) \text{ почти всюду на } [t_0, T]\} \quad (6)$$

выпукло, замкнуто и ограничено в метрике  $L_2^r[t_0, T]$  (пример 8.2.9) и, следовательно, слабо компактно в  $L_2^r[t_0, T]$  (теорема 8.2.6). Поэтому, выбирая при необходимости подпоследовательность из  $\{u_k\}$ , можем считать, что сама последовательность  $\{u_k\}$  сходится к некоторому управлению  $u_* = u_*(t) \in W(T)$  слабо в  $L_2^r[t_0, T]$ . Тогда  $\{x(t, u_k)\}$  сходится к  $x(t, u_*)$  равномерно на  $[t_0, T]$ . Однако  $x(t, u_k) \in G(t)$  при всех  $t$ ,  $t_0 \leq t \leq t_* \leq t_k \leq T$ , поэтому в силу замкнутости  $G(t)$  справедливо включение  $x(t, u_*) \in G(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq t_*$ . Далее, в силу оценки (1.11) имеем

$$\sup_{u \in W(T)} |x(t_k, u) - x(t_*, u)| \leq C_1 |t_k - t_*| \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Тогда  $|x(t_k, u_k) - x(t_*, u_*)| \leq |x(t_k, u_k) - x(t_*, u_k)| + |x(t_*, u_k) - x(t_*, u_*)| \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ , т. е.  $\{x(t_k, u_k)\} \rightarrow x(t_*, u_*)$ . Однако  $x(t_k, u_k) \in Y$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , причем  $Y$  — замкнутое множество. Следовательно,  $x(t_*, u_*) \in Y$ . Таким образом,  $u_* \in U(T)$  и время первой встречи  $t(u_*)$  траектории  $x(t, u_*)$  с множеством  $Y$  таково, что  $t(u_*) \leq t_*$ . С другой стороны,  $t_* \leq t(u_*)$  в силу определения  $t_*$ . Это значит, что  $t(u_*) = t_*$ , т. е.  $u_*$  — оптимальное управление в задаче (1)–(5). Теорема 1 доказана.  $\square$

**3.** Для аппроксимации задачи (1)–(5) для каждого натурального числа  $N \geq 1$  на полуоси  $t \geq t_0$  введем точки  $t_0 = t_{0N} < t_{1N} < \dots < t_{iN} < \dots$ ,  $\lim_{i \rightarrow \infty} t_{iN} = \infty$ . Положим  $A_{iN} = A(t_{iN} + 0)$ ,  $B_{iN} = B(t_{iN} + 0)$ ,  $f_{iN} = f(t_{iN} + 0)$ ,

$V_{iN} = V(t_{iN})$ ,  $G_{iN} = G(t_{iN})$ ,  $\Delta t_{iN} = t_{i+1,N} - t_{iN}$ , и рассмотрим следующую аппроксимацию системы (1), (2):

$$x_{i+1N} = x_{iN} + \Delta t_{iN}(A_{iN}x_{iN} + B_{iN}u_{iN} + f_{iN}), \quad i = 0, 1, \dots, \quad x_{0N} = x_0, \quad (7)$$

$$[u]_N = (u_{0N}, u_{1N}, \dots, u_{iN}, \dots): u_{iN} \in V_{iN}, \quad i = 0, 1, \dots \quad (8)$$

Через  $[x([u]_N)]_N = (x_0([u]_N) = x_0, \dots, x_i([u]_N) = x_{iN}, \dots)$  будем обозначать траекторию дискретной задачи (7), соответствующую управлению  $[u]_N$ .

Введем расширение множеств  $G^{\xi_N}, Y^{\nu_N}$ , где  $\{\xi_N\}$ ,  $\{\nu_N\}$  — положительные последовательности, стремящиеся к нулю. Напоминаем, что согласно (3.7)  $\varepsilon$ -расширением множества  $Z \subset E^n$  называется множество

$$Z^\varepsilon = \{x \in E^n: \rho(x, Z) = \inf_{z \in Z} |x - z| \leq \varepsilon\}.$$

**О п р е д е л е н и е 2.** Систему (7), (8) назовем  $(T, G_{iN}^{\xi_N}, Y^{\nu_N})$ -управляемой, если существуют хотя бы одно управление  $[u]_N$ , удовлетворяющее условиям (8), и точка  $t_{iNN} \in \{t_{iN}\}$ ,  $t_0 \leq t_{iNN} \leq T$ , такие, что

$$x_i([u]_N) \in G_{iN}^{\xi_N}, \quad i = 0, \dots, i_N, \quad (9)$$

$$x_{iNN}([u]_N) \in Y^{\nu_N}, \quad x_i([u]_N) \notin Y^{\nu_N}, \quad \text{при } 0 \leq i \leq i_N - 1. \quad (10)$$

Момент времени  $t_{iNN} = t_N([u]_N)$ , удовлетворяющий условиям (10), назовем *временем первой встречи дискретной траектории  $[x([u]_N)]_N$  с множеством  $Y^{\nu_N}$* .

Таким образом,  $(T, G_{iN}^{\xi_N}, Y^{\nu_N})$ -управляемость системы (7), (8) означает, что множество  $U_N(T)$ , которое состоит из всех управлений  $[u]_N$ , удовлетворяющих условиям (8)–(10), непусто.

Рассмотрим дискретную задачу быстрогодействия

$$t_N([u]_N) \rightarrow \inf, \quad [u]_N \in U_N(T). \quad (11)$$

Величину  $t_{N*} = \inf_{U_N(T)} t_N([u]_N)$  будем называть *оптимальным временем задачи (7)–(11)*.

Приведем достаточные условия, при которых из  $(T, G(t), Y)$ -управляемости системы (1), (2) следует  $(T, G_{iN}^{\xi_N}, Y^{\nu_N})$ -управляемость системы (7), (8) и последовательность задач (7)–(11) аппроксимирует задачу (1)–(5) по функции, т. е.  $\lim_{N \rightarrow \infty} t_{N*} = t_*$ .

**Т е о р е м а 2.** Пусть матрицы  $A(t), B(t), f(t)$  определены при  $t \geq t_0$ , кусочно непрерывны на любом конечном отрезке  $[t_0, a]$ ; множество  $V(t)$  при всех  $t \geq t_0$  выпукло, замкнуто, ограничено и непрерывно по Хаусдорфу; множество  $G(t)$  при всех  $t \geq t_0$  замкнуто и непрерывно по Хаусдорфу; система (1), (2)  $(T, G(t), Y)$ -управляема для некоторого  $T$ ,  $t_0 \leq T < \infty$ . Пусть разбиения  $\{t_{iN}\} = \{t_{0N} = t_0 < t_{1N} < \dots < t_{iN} < \dots\}$  таковы, что

$$d_N = d_N(T) = \max_{0 \leq i \leq m_N} \Delta t_{iN} = (T - t_0) \frac{M_0(T)}{(m_N + 1)}, \quad N = 1, 2, \dots,$$

где  $m_N$  — число, определяемое условием  $t_{m_N N} < T \leq t_{m_N+1, N}$ ,  $M_0(T) = \text{const} > 0$ ; последовательности  $\{\xi_N\}$ ,  $\{\nu_N\}$  из (9), (10) стремятся к нулю и таковы, что

$$\xi_N \geq \delta_N, \quad \nu_N \geq \delta_N + C_1 d_N + \omega_G(d_N), \quad N = 1, 2, \dots,$$

где величина  $\delta_N$  определяется формулой (5.13), постоянная  $C_1$  взята из (1.11) при  $W = W(T)$ , а  $\omega_G(d)$  — хаусдорфов модуль непрерывности множества  $G(t)$  на  $[t_0, T]$ . Тогда дискретная система (7), (8)  $(T, G_{iN}^{\xi_N}, Y^{\nu_N})$ -управляема при  $N = 1, 2, \dots$  и  $\lim_{N \rightarrow \infty} t_{N*} = t_*$ .

**Доказательство.** Положим  $X = L_2^r[t_0, T]$ ,

$$X_N = L_{2N}^r = \left\{ [u]_N = (u_{0N}, u_{1N}, \dots, u_{m_N N}) : \sum_{i=0}^{m_N} u_{iN}^2 \Delta t_{iN} = \|[u]_N\|_{L_{2N}}^2 < \infty \right\}.$$

Напоминаем, что  $t_{m_N N} < T \leq t_{m_N+1, N}$ . Ниже будем считать, что  $t_{m_N+1, N} = T$ ; узловые точки  $t_{iN} > T$  нам не понадобятся, так как все рассуждения будут проводиться на отрезке  $[t_0, T]$ . Введем отображения  $Q_N: X \rightarrow X_N$ ,  $P_N: X_N \rightarrow X$  следующим образом:

$$Q_N(u) = (u_{0N}, u_{1N}, \dots, u_{m_N N}) : u_{iN} = P_{V_{iN}}(v_{iN}),$$

$$v_{iN} = \frac{1}{\Delta t_{iN}} \int_{t_{iN}}^{t_{i+1N}} u(t) dt, \quad i = 0, \dots, m_N, \quad (12)$$

$$P_N([u]_N) = P_{V(t)}(u_i), \quad t_{iN} < t \leq t_{i+1N}, \quad i = 0, \dots, m_N, \quad (13)$$

где  $P_V(z)$  — проекция точки  $z \in E^r$  на множество  $V$ .

Дальнейшие рассуждения, представляющие собой проверку условий 1–3 теоремы 2.4, оформим в виде трех лемм.

**Л е м м а 1.** Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда

$$Q_N(u) \in U_N(T), \quad t_N(Q_N(u)) \leq t(u) \quad \text{при всех } u \in U(T), \quad N = 1, 2, \dots$$

**Доказательство.** Возьмем произвольное управление  $u \in U(T)$ . Тогда существует момент  $t(u)$  — время первой встречи траектории  $x(t, u)$  с множеством  $Y$ , определяемый условиями (3), (4). Возьмем точку  $t_{s_N N} \in \{t_{iN}\}$  такую, что  $t_{s_N N} < t(u) \leq t_{s_N+1, N}$ . Рассмотрим задачу (7) при  $[u]_N = Q_N(u)$ . Покажем, что соответствующая дискретная траектория  $x_i(Q_N(u))$ ,  $i = 0, \dots, m_N + 1$ , такова, что

$$x_i(Q_N(u)) \in G_{iN}^{\xi_N}, \quad i = 0, \dots, s_N, \quad x_{s_N}(Q_N(u)) \in Y^{\nu_N}. \quad (14)$$

В самом деле, согласно оценке (5.16)

$$|x(t_i, u) - x_i(Q_N(u))| \leq \delta_N, \quad i = 0, \dots, m_N + 1. \quad (15)$$



Так как  $x(t, u) \in G(t)$  при  $t_0 \leq t \leq t(u)$ , то  $x(t_i, u) \in G_{iN}$  и  $x_i(Q_N(u)) \in G_{iN}^{\delta_N} \subset G_{iN}^{\xi_N}$  при всех  $i = 0, \dots, s_N$ . Далее, согласно оценке (1.11) и выбору узла  $t_{s_N N}$  имеем

$$|x(t(u), u) - x(t_{s_N N}, u)| \leq C_1(t_{s_N+1, N} - t_{s_N N}) \leq C_1 d_N.$$

Отсюда и из (15) с учетом включения  $x(t(u), u) \in Y$  получаем  $x_{s_N}(Q_N(u)) \in Y^{\delta_N + C_1 d_N} \subset Y^{\nu_N}$ . Включения (14) доказаны. Отсюда следует, что время первой встречи  $t_N(Q_N(u))$  траектории  $[x(Q_N(u))]_N$  с множеством  $Y^{\nu_N}$  удовлетворяет неравенствам  $t_N(Q_N(u)) \leq t_{s_N N} < t(u) \leq T$ . Кроме того,  $Q_N(u) \in U_N(T)$ , так что система (7), (8)  $(T, G_{iN}^{\xi_N}, Y^{\nu_N})$ -управляема и дискретная задача быстрого действия (7)–(11) имеет смысл. Лемма 1 доказана.  $\square$

**Л е м м а 2.** Пусть выполнены все условия теоремы 2, и пусть  $U^{\varepsilon_N}(T)$  — множество всех управлений  $u = u(t)$ , которые удовлетворяют условиям (2) и для которых существует момент  $t(u)$ ,  $t_0 \leq t(u) \leq T$ , такой, что

$$\begin{aligned} x(t, u) &\in G^{\varepsilon_N}(t), \quad t_0 \leq t \leq t(u), \\ x(t(u), u) &\in Y^{\varepsilon_N}, \quad x(t, u) \notin Y^{\varepsilon_N} \quad \text{при} \quad t_0 \leq t < t(u). \end{aligned}$$

Пусть  $\varepsilon_N = \xi_N + \nu_N$ ,  $N = 1, 2, \dots$ . Тогда

$$P_N([u]_N) \in U^{\varepsilon_N}(T), \quad t(P_N([u]_N)) \leq t_N([u]_N)$$

при всех  $[u]_N \in U_N(T)$ ,  $N = 1, 2, \dots$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Возьмем произвольное управление  $[u]_N \in U_N(T)$ . Тогда существует момент  $t_N([u]_N) = t_{i_N N} \leq T$ , определяемый условиями (9), (10). Рассмотрим задачу (1) при  $u = P_N([u]_N)$  и покажем, что

$$x(t, P_N([u]_N)) \in G^{\varepsilon_N}(t), \quad t_0 \leq t \leq t_{i_N N}, \quad x(t_{i_N N}, P_N([u]_N)) \in Y^{\varepsilon_N}. \quad (16)$$

Согласно оценке (5.17)

$$|x(t_i, P_N([u]_N)) - x_i([u]_N)| \leq \delta_N, \quad i = 0, \dots, i_N. \quad (17)$$

Отсюда и из (9) следует, что  $x(t_i, P_N([u]_N)) \in G_{iN}^{\xi_N + \delta_N}$ ,  $i = 0, \dots, i_N$ . Далее из оценки (1.11) имеем

$$|x(t, P_N([u]_N)) - x(t_i, P_N([u]_N))| \leq C_1|t - t_{i_N N}| \leq C_1 d_N$$

при всех  $t$ ,  $t_{i_N N} \leq t \leq t_{i+1, N}$ ,  $i = 0, \dots, i_N$ . Это значит, что  $x(t, P_N([u]_N)) \in G_{iN}^{\xi_N + \delta_N + C_1 d_N}$ ,  $t_{i_N N} \leq t \leq t_{i+1, N}$ ,  $i = 0, \dots, i_N$ . Наконец, из условия  $h(G(t), G(t_{i_N N})) \leq \omega_G(d_N)$ ,  $t_{i_N N} \leq t \leq t_{i+1, N}$ , следует, что  $G(t_{i_N N}) \subset G^{\omega_G(d_N)}(t)$ , или  $G_{iN}^{\xi_N + \delta_N + C_1 d_N} \subset G^{\varepsilon_N}(t)$ ,  $t_{i_N N} \leq t \leq t_{i+1, N}$ ,  $i = 0, \dots, i_N$ . Тогда  $x(t, P_N([u]_N)) \in G^{\varepsilon_N}(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq t_{i_N N}$ . Кроме того, из условий (10) и (17) имеем  $x(t_{i_N N}, P_N([u]_N)) \in Y^{\nu_N + \delta_N} \subset Y^{\varepsilon_N}$ . Включения (16) доказаны. Отсюда следует, что  $P_N([u]_N) \in U^{\varepsilon_N}(T)$  и время  $t(P_N([u]_N))$  первой встречи траектории  $x(t, P_N([u]_N))$  с множеством  $Y^{\varepsilon_N}$  не превышает  $t_N([u]_N)$ . Лемма 2 доказана.  $\square$

Наряду с задачей (1)–(5) рассмотрим расширенную задачу быстрогодействия. Для этого при каждом  $\varepsilon > 0$  введем множество  $U^\varepsilon(T)$  всех управлений  $u = u(t)$ ,  $t \geq t_0$ , которые удовлетворяют условиям (2) и для которых существует момент  $t(u)$ ,  $t_0 \leq t(u) \leq T$ , такой, что

$$x(t, u) \in G^\varepsilon(t), \quad t_0 \leq t \leq t(u), \quad (18)$$

$$x(t(u), u) \in Y^\varepsilon, \quad x(t, u) \notin Y^\varepsilon \quad \text{при} \quad t_0 \leq t < t(u). \quad (19)$$

Рассмотрим задачу

$$t(u) \rightarrow \inf, \quad u \in U^\varepsilon(T). \quad (20)$$

Обозначим через  $t_*(\varepsilon) = \inf_{U^\varepsilon(T)} t(u)$  — оптимальное время задачи быстрогодействия (1), (2), (18)–(20).

**Л е м м а 3.** Пусть выполнены все условия теоремы 2. Тогда  $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} t_*(\varepsilon) = t_*$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Поскольку  $G(t) \subset G^\varepsilon(t) \subset G^\gamma(t)$ ,  $Y \subset Y^\varepsilon(t) \subset Y^\gamma$  при всех  $0 < \varepsilon < \gamma$ , то  $U(T) \subseteq U^\varepsilon(T) \subseteq U^\gamma(T)$ . Отсюда следует, что система (1), (2),  $(T, G^\varepsilon(t), Y^\varepsilon)$ -управляема при всех  $\varepsilon > 0$  и  $t_*(\gamma) \leq t_*(\varepsilon) \leq t_*$  при  $0 < \varepsilon < \gamma$ . Тогда существует  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} t_*(\varepsilon) = T_0 \leq t_*$ . Покажем, что  $T_0 = t_*$ . Возьмем какую-либо последовательность  $\{\varepsilon_k\} \rightarrow 0$ ,  $\varepsilon_k > 0$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Заметим, что из замкнутости множеств  $G(t)$ ,  $Y$  следует замкнутость  $G^\varepsilon(t)$ ,  $Y^\varepsilon$ . Отсюда и из теоремы 1 с учетом уже установленной  $(T, G^\varepsilon(t), Y^\varepsilon)$ -управляемости системы (1), (2) вытекает, что в задаче (1), (2), (18)–(20) существует хотя бы одно оптимальное управление  $u_{\varepsilon_*} = u_{\varepsilon_*}(t) \in U^\varepsilon(T)$ . Положим  $u_k = u_{\varepsilon_k}(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq T$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} u_k &\in W(T), \quad x(t, u_k) \in G^{\varepsilon_k}(t), \quad t_0 \leq t \leq t_k = t_*(\varepsilon_k), \\ x(t_k, u_k) &\in Y^{\varepsilon_k}, \quad x(t, u_k) \notin Y^{\varepsilon_k}, \\ t_0 &\leq t < t_k, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (21)$$

Поскольку множество  $W(T)$ , определяемое условиями (6), слабо компактно в  $L_2^r[t_0, T]$ , то, выбирая при необходимости подпоследовательность из  $\{u_k\}$ , можем считать, что сама последовательность  $\{u_k\}$  слабо в  $L_2^r[t_0, T]$  сходится к некоторому управлению  $v_* \in W(T)$ . Согласно (1.12) тогда

$$\sup_{t_0 \leq t \leq T} |x(t, u_k) - x(t, v_*)| = \mu_k \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty.$$

Отсюда и из (21) следует, что

$$x(t, v_*) \in G^{\varepsilon_k + \mu_k}(t), \quad t_0 \leq t \leq t_k, \quad x(t_k, v_*) \in Y^{\varepsilon_k + \mu_k}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (22)$$

Кроме того, согласно оценке (1.11)

$$|x(t, v_*) - x(T_0, v_*)| \leq C_1(T_0 - t_k) = \beta_k, \quad t_k \leq t \leq T_0,$$

поэтому

$$x(t, v_*) \in G^{\varepsilon_k + \mu_k + \beta_k}(t_k), \quad t_k \leq t \leq T_0, \quad (23)$$

$$x(T_0, v_*) \in Y^{\varepsilon_k + \mu_k + \beta_k}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (24)$$

Далее, учитывая, что множество  $G(t)$  непрерывно по Хаусдорфу и  $h(G(t), G(T_0)) \leq \omega_G(T_0 - t) \leq \omega_G(T_0 - t_k) = \gamma_k$  при всех  $t, t_k \leq t \leq T_0$ , имеем  $G(t_k) \in G^{\gamma_k}(t)$  при  $t, t_k \leq t \leq T_0$ . Отсюда и из (23) получаем включение  $x(t, v_*) \in G^{\varepsilon_k + \mu_k + \beta_k + \gamma_k}(t)$  при  $t_k \leq t \leq T_0$ . С учетом первого из включений (22) тогда будем иметь, что

$$x(t, v_*) \in G^{\varepsilon_k + \mu_k + \beta_k + \gamma_k}(t) \quad \text{при всех } t, \quad t_0 \leq t \leq T_0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (25)$$

Поскольку  $\varepsilon_k + \mu_k + \beta_k + \gamma_k \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ , а множества  $G(t), Y$  замкнуты, то из (24), (25) при  $k \rightarrow \infty$  получим, что  $x(t, v_*) \in G(t), t_0 \leq t \leq T_0, x(T_0, v_*) \in Y$ . Таким образом,  $v_* \in U(T)$  и время первой встречи  $t(v_*)$  траектории  $x(t, v_*)$  с множеством  $Y$  таково, что  $t_* \leq t(v_*) \leq T_0$ . Отсюда имеем неравенство  $t_* \leq T_0$ . Выше было установлено, что  $T_0 \leq t_*$ . Следовательно,  $t_* = T_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} t_*(\varepsilon)$ . Лемма 3 доказана.  $\square$

Таким образом, если принять  $J(u) = t(u), u \in U = U(T), I_N([u]_N) = t_N([u]_N), [u]_N \in U_N = U_N(T)$ , то тогда из лемм 1–3 вытекает выполнение условий 1–3 теоремы 2.4. Отсюда следует справедливость утверждения теоремы 2.  $\square$

4. Таким образом, показано, что при выполнении условий теоремы 2 для приближенного решения задачи быстрого действия (1)–(5) может быть использована последовательность разностных аппроксимирующих задач (7)–(11). В свою очередь, для решения разностной задачи (7)–(11) при каждом фиксированном  $N$  можно рассмотреть следующее семейство задач: минимизировать функцию

$$I_N([u]_N, y) = |x_j([u]_N) - y|^2 \quad (26)$$

при условиях (7), (8) и

$$x_i([u]_N) \in G_i^{\xi_N}, \quad i = 0, \dots, j, \quad y \in Y, \quad (27)$$

где  $j$  — фиксированный номер, последовательно пробегающий значения  $j = 0, 1, \dots, m_N$ ; здесь номер  $m_N$  определяется условием  $t_{m_N N} < T \leq t_{m_N + 1, N}$ , момент  $T$  взят из теоремы 2. Для решения задачи (26), (27), (7), (8) при каждом фиксированном  $j$  могут быть использованы известные методы минимизации функций конечного числа переменных или дискретные аналоги методов из гл. 8.

Обозначим  $\rho_{jN} = \inf I_N([u]_N, y)$ , где нижняя грань берется по всем  $([u]_N, y)$ , удовлетворяющим условиям (7), (8), (27). Может случиться, что  $\rho_{jN} > 0$  при всех  $j, 0 \leq j < k$ , а  $\rho_{kN} = 0$  — это значит, что  $t_{N*} = t_{kN}$ . Если же  $\rho_{jN} > 0$  при всех  $j = 0, \dots, m_N$ , то ясно, что  $t_{N*} \geq T > t_{m_N N}$ . Отсюда следует, что, взяв номер  $N$  достаточно большим, согласно теореме 2 в принципе можно получить достаточно точное значение оптимального времени задачи (1)–(5). Однако нужно заметить, что такой подход к решению задачи быстрого действия на практике может оказаться не очень удобным, поскольку с ростом  $N$  растет число задач вида (26), (27), (7), (8) и, следовательно, вообще говоря, расчет и объем вычислений. Поэтому желательно иметь другие более удобные

методы решения задачи (1)–(5), не требующие перебора всех задач вида (26), (27), (7), (8).

5. Остановимся на одном из таких методов. Для простоты ограничимся рассмотрением задачи быстрогодействия (1)–(5) при дополнительных предположениях, когда фазовые ограничения отсутствуют, множество  $Y$  состоит из одной точки, а множество  $V(t)$  не зависит от времени, т. е.

$$G(t) \equiv E^n, \quad V(t) \equiv V \quad \text{при} \quad t_0 \leq t \leq T, \quad Y = \{y\}. \quad (28)$$

Как и выше, будем предполагать, что матрицы  $A(t), B(t), f(t)$  кусочно непрерывны на любом конечном отрезке  $[t_0, a]$ , множество  $V$  выпукло, замкнуто и ограничено.

Возьмем некоторое достаточно большое число  $T > t_0$ , зафиксируем  $t$ ,  $t_0 < t \leq T$ , и рассмотрим задачу

$$J(u, t) = |x(t, u) - y|^2 \rightarrow \inf, \quad (29)$$

$$\dot{x}(\tau) = A(\tau)x(\tau) + B(\tau)u(\tau) + f(\tau), \quad t_0 \leq \tau \leq t, \quad x(t_0) = x_0, \quad (30)$$

$$\begin{aligned} u &= u(\tau) \in W = W(T) = \\ &= \{u(\tau) \in L_2^r[t_0, T]: u(\tau) \in V \text{ почти всюду на } [t_0, T]\}. \end{aligned} \quad (31)$$

Заметим, что значения управлений  $u(\tau)$  при  $t \leq \tau \leq T$  на задачу (29)–(31) не влияют. Но тем не менее мы здесь рассматриваем множество (31), так как в дальнейшем нам будет удобно считать, что управления доопределены на всем отрезке  $[t_0, T]$ . Обозначим

$$\rho(t) = \inf_{u \in W} J(u, t), \quad t_0 < t \leq T; \quad (32)$$

при  $t = t_0$  положим  $\rho(t_0) = |x_0 - y|^2$ . Будем считать, что  $\rho(t_0) > 0$ , так как при  $\rho(t_0) = 0 = |x_0 - y|^2$  задача (1)–(5), (28) становится тривиальной:  $t_* = t_0$ .

Так как множество  $W$  слабо компактно в  $L_2^r[t_0, T]$  и функция  $J(u, t)$  слабо непрерывна на  $W$ , то в (32) нижняя грань достигается, т. е. существует управление  $u = u_t \in W$  такое, что  $\rho(t) = J(u_t, t) = |x(t, u_t) - y|^2$  (пример 8.2.15). Отсюда ясно, что для того, чтобы момент  $t_*$  был оптимальным временем задачи (1)–(5), (28), необходимо и достаточно, чтобы

$$\rho(t_*) = 0, \quad \rho(t) > 0 \quad \text{при} \quad t_0 \leq t < t_*,$$

т. е.  $t_*$  — минимальный корень уравнения  $\rho(t) = 0$ . Это значит, что для поиска  $t_*$  могут быть использованы известные методы решения уравнений. В частности, здесь может быть использован метод, описанный в § 5.19 (см. процесс (5.19.20) и пояснения к нему). Этот метод был описан в предположении, что функция  $\rho(t)$  удовлетворяет условию Липшица. Покажем, что в рассматриваемой задаче это условие выполняется. Пусть

$$\rho(t) = |x(t, u_t) - y|^2, \quad \rho(\tau) = |x(\tau, u_\tau) - y|^2, \quad u_t, u_\tau \in W.$$

Тогда из определения (32) функции  $\rho(t)$  с учетом оценок (1.8), (1.11) имеем

$$\begin{aligned}\rho(t) - \rho(\tau) &\leq |x(t, u_\tau) - y|^2 - |x(\tau, u_\tau) - y|^2 \leq \\ &\leq 2(C_0 + |y|)|x(t, u_\tau) - x(\tau, u_\tau)| \leq 2(C_0 + |y|)C_1|t - \tau|, \\ \rho(t) - \rho(\tau) &\geq |x(t, u_t) - y|^2 - |x(\tau, u_t) - y|^2 \geq \\ &\geq -2(C_0 + |y|)|x(t, u_t) - x(\tau, u_t)| \geq -2(C_0 + |y|)C_1|t - \tau|.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$|\rho(t) - \rho(\tau)| \leq L|t - \tau|, \quad t_0 \leq t, \tau \leq T, \quad L = 2(C_0 + |y|)C_1. \quad (33)$$

Для вычисления приближенного значения  $\rho(t)$ , удовлетворяющего условию (5.19.20), можно воспользоваться разностными аппроксимациями задачи (29)–(31), описанными в § 1.

Заметим, что метод (5.19.20) поиска минимального корня уравнения  $\rho(t)$  может быть модифицирован на случай функций  $\rho(t)$ , удовлетворяющих более общим, чем (33), условиям

$$|\rho(t) - \rho(\tau)| \leq \omega(|t - \tau|), \quad t_0 \leq t, \tau \leq T,$$

где  $\omega(d)$  — неубывающая функция переменной  $d \geq 0$ ,  $\omega(0) = 0$ , и применен для решения нелинейных задач быстрогодействия [141].

О других аспектах задач быстрогодействия, различных приложениях, о дифференциальных играх преследования-уклонения, обобщающих задачи быстрогодействия на случай конфликтных ситуаций, см., например, в [10; 39; 82; 97; 98; 100; 138; 140; 141; 212; 241; 244; 245; 287; 288; 310; 312; 333; 336–338; 380; 382–384; 400; 440; 504; 505; 530; 551–554; 569–571; 589; 637; 647; 719; 755; 801; 809; 815].

## § 7. Разностная аппроксимация задачи об оптимальном нагреве стержня

1. Рассмотрим задачу

$$J(u) = \int_0^l |x(s, T; u) - b(s)|^2 ds \rightarrow \inf, \quad u \in U, \quad (1)$$

где  $x = x(s, t) = x(s, t; u)$  — решение краевой задачи

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + u(s, t), \quad (s, t) \in Q = (0, l) \times (0, T), \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial x}{\partial s} \right|_{s=0} = \left. \frac{\partial x}{\partial s} \right|_{s=l} = 0, \quad 0 < t < T; \quad x|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq s \leq l, \quad (3)$$

управление  $u = u(s, t)$  принадлежит множеству

$$U = \left\{ u(s, t) \in L_2(Q) : \iint_Q u^2(s, t) ds dt \leq R^2 \right\}, \quad (4)$$

$b = b(s) \in L_2(0, l)$  — заданная функция,  $R = \text{const} > 0$ .

Напоминаем, что близкую задачу о нагреве стержня мы уже рассматривали в § 8.7.

**О п р е д е л е н и е 1.** Обобщенным решением задачи (2), (3), соответствующим управлению  $u \in L_2(Q)$ , будем называть функцию  $x = x(s, t; u) \in H^{1,0}(Q)$ , имеющую следы  $x(\cdot, t) \in L_2(0, l)$  при всех  $t \in (0, T)$ , непрерывные в метрике  $L_2(0, l)$ , и удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_0^l x(s, T) \psi(s, T) ds - \iint_Q \left( x \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial \psi}{\partial s} \right) ds dt = \iint_Q u \psi ds dt$$

$$\forall \psi = \psi(s, t) \in H^1(Q)$$

(ср. с определением 8.7.1).

Существование и единственность обобщенного решения задачи (2), (3) при каждом фиксированном  $u \in L_2(Q)$  доказана, например, в [441; 492]. Отметим, что эта задача на самом деле имеет более гладкое решение, чем это указано в определении 1 — этот вопрос кратко будет обсуждаться ниже. Так же, как это делалось в § 8.7, можно доказать, что множество  $U_*$  решений задачи минимизации (1)–(4) непусто.

**2.** Сформулируем разностную задачу минимизации, аппроксимирующую задачу (1)–(4). На прямоугольнике  $\bar{Q} = [0, l] \times [0, T]$  зададим сетку  $\omega_{h\tau} = \{(s_i, t_j) : s_i = ih, t_j = j\tau, i = 0, \dots, M, j = 0, \dots, N\}$ , где  $h, \tau$  — шаги сетки,  $hM = l$ ,  $\tau N = T$ . Для функции  $y_{h\tau} = \{y_{ij}, i = 0, \dots, M, j = 0, \dots, N\}$ , заданной на сетке  $\omega_{h\tau}$ , введем разделенные разности

$$y_{\bar{t}ij} = \frac{1}{\tau}(y_{ij} - y_{ij-1}), \quad y_{\bar{s}ij} = \frac{1}{h}(y_{ij} - y_{i-1j}), \quad y_{sij} = \frac{1}{h}(y_{i+1j} - y_{ij}),$$

$$y_{\bar{s}sij} = \frac{1}{h}(y_{sij} - y_{\bar{s}ij}) = \frac{1}{h^2}(y_{i+1j} - 2y_{ij} + y_{i-1j}).$$

Рассмотрим разностную задачу минимизации:

$$I_{h\tau}(u_{h\tau}) = \sum_{i=1}^{M-1} h |y_{iN} - b_i|^2 \rightarrow \inf, \quad u_{h\tau} \in U_{h\tau}, \quad (5)$$

где  $y_{h\tau} = y_{h\tau}(u_{h\tau})$  — решение разностной краевой задачи

$$y_{\bar{t}ij} = y_{\bar{s}sij} + u_{ij}, \quad i = 1, \dots, M-1, \quad j = 1, \dots, N, \quad (6)$$

$$y_{\bar{s}1j} = 0, \quad y_{\bar{s}Mj} = 0, \quad j = 1, \dots, N, \quad y_{i0} = 0, \quad i = 0, \dots, M; \quad (7)$$

разностное управление  $u_{h\tau} = \{u_{ij}, i = 1, \dots, M-1, j = 1, \dots, N\}$  принадлежит множеству

$$U_{h\tau} = \left\{ u_{ij} : \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M-1} h\tau u_{ij}^2 \leq R^2 \right\}. \quad (8)$$

Задача (6), (7) при каждом фиксированном  $u_{h\tau} = \{u_{ij}\}$  представляет собой систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных  $y_{h\tau} = \{y_{ij}\}$ , для нахождения ее решения можно воспользоваться методом

прогонки [89; 635]. При каждом фиксированном  $h, \tau$  задача (5)–(8) является задачей минимизации непрерывной функции конечного числа переменных  $\{u_{ij}\}$  на компактном множестве  $U_{h\tau}$ , множество  $U_{h\tau*}$  ее решений непусто. Для поиска решений задачи (5)–(8) могут быть использованы методы гл. 5.

Обозначим  $J_* = \inf_U J(u)$ ,  $I_{h\tau*} = \inf_{U_{h\tau}} I_{h\tau}(u_{h\tau})$ . Следуя [362], ниже покажем, что при специальном выборе  $b_h = (b_1, \dots, b_{M-1})$  и  $(h, \tau) \rightarrow 0$  решение разностной задачи (5)–(8) сходится к решению задачи (1)–(4) по функции, т. е.  $\lim_{(h, \tau) \rightarrow 0} I_{h\tau*} = J_*$ . С этой целью сначала нам нужно будет получить априорные энергетические оценки решений краевых задач (2), (3) и (6), (7), а также оценить близость решений этих задач.

**3.** Начнем с доказательства следующих двух оценок для достаточно гладких классических решений задачи (2), (3):

$$\max_{0 \leq t \leq T} \int_0^l x^2(s, t; u) ds + \iint_Q x_s^2(s, t; u) ds dt \leq C \iint_Q u^2(s, t) ds dt, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t \leq T} \int_0^l \left| \frac{\partial x(s, t; u)}{\partial s} \right|^2 ds + \iint_Q \left( \left| \frac{\partial x(s, t; u)}{\partial t} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 x(s, t; u)}{\partial s^2} \right|^2 \right) ds dt \leq \\ \leq C \iint_Q u^2(s, t) ds dt. \end{aligned} \quad (10)$$

В оценках (9), (10) постоянные  $C$ , зависящие лишь от  $l, T$ , но не зависящие от выбора  $u \in L_2(Q)$ , конечно, разные. Однако конкретные значения этих постоянных в дальнейшем для нас несущественны, поэтому здесь и далее подобные константы мы будем обозначать одной и той же буквой  $C$ . Кроме того, далее без дополнительных оговорок будем пользоваться неравенством Коши–Буняковского для сумм и интегралов и элементарными неравенствами

$$\begin{aligned} |ab| \leq \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2, \quad (a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2, \\ (a+b+c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2) \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}, \quad \forall \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Заметим, что оценка (9) аналогична оценке (8.7.15) и доказывается аналогично. А именно, умножим уравнение (2) на  $x(s, t; u)$  и полученное равенство проинтегрируем по прямоугольнику  $Q_\tau = \{(s, t): 0 \leq s \leq l, 0 \leq t \leq \tau\}$ , где  $\tau$  — произвольный фиксированный момент времени,  $0 \leq \tau \leq T$ :

$$\iint_{Q_\tau} \frac{\partial x}{\partial t} x ds dt - \iint_{Q_\tau} \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} x ds dt = \iint_{Q_\tau} u x ds dt. \quad (11)$$

С учетом условий (3) имеем

$$\iint_{Q_\tau} \frac{\partial x}{\partial t} x ds dt = \int_0^l \left( \int_0^\tau \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (x^2) dt \right) ds = \frac{1}{2} \int_0^l x^2(s, \tau) ds,$$

$$\iint_{Q_\tau} \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} x \, ds \, dt = \int_0^\tau \left( \left. \frac{\partial x}{\partial s} x \right|_{s=0}^l - \int_0^l \left( \frac{\partial x(s, t)}{\partial s} \right)^2 ds \right) dt = - \iint_{Q_\tau} \left( \frac{\partial x}{\partial s} \right)^2 ds \, dt.$$

Подставим эти равенства в (11). Получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^l x^2(s, \tau) \, ds + \iint_{Q_\tau} \left( \frac{\partial x}{\partial s} \right)^2 ds \, dt &= \iint_{Q_\tau} ux \, ds \, dt \leq \\ &\leq \int_0^\tau \left( \int_0^l x^2(s, t) \, ds \right)^{1/2} \left( \int_0^l u^2(s, t) \, ds \right)^{1/2} dt \leq \max_{0 \leq t \leq \tau} \left( \int_0^l x^2(s, t) \, ds \right)^{1/2} \times \\ &\times \int_0^\tau \left( \int_0^l u^2(s, t) \, ds \right)^{1/2} dt \leq \max_{0 \leq t \leq \tau} \left( \int_0^l x^2(s, t) \, ds \right)^{1/2} \sqrt{T} \|u\|_{L_2(Q)}. \quad (12) \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\int_0^l x^2(s, \tau) \, ds \leq \max_{0 \leq t \leq T} \left( \int_0^l x^2(s, t) \, ds \right)^{1/2} 2\sqrt{T} \|u\|_{L_2(Q)} \quad \forall \tau \in [0, T],$$

поэтому

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq \tau \leq T} \int_0^l x^2(s, \tau) \, ds &= \left( \max_{0 \leq t \leq T} \left( \int_0^l x^2(s, t) \, dt \right)^{1/2} \right)^2 \leq \\ &\leq \max_{0 \leq t \leq T} \left( \int_0^l x^2(s, t) \, ds \right)^{1/2} 2\sqrt{T} \|u\|_{L_2(Q)}, \end{aligned}$$

или

$$\max_{0 \leq t \leq T} \int_0^l x^2(s, t) \, ds \leq 4T \|u\|_{L_2(Q)}^2. \quad (13)$$

Далее, из (12), (13) имеем

$$\iint_{Q_\tau} \left( \frac{\partial x}{\partial s} \right)^2 ds \, dt \leq \left( \max_{0 \leq t \leq T} \int_0^l x^2(s, t) \, ds \right)^{1/2} \sqrt{T} \|u\|_{L_2(Q)} \leq 2T \|u\|_{L_2(Q)}^2 \quad \forall \tau \in [0, T].$$

Сложив это неравенство при  $\tau = T$  с (13), придем к оценке (9) с постоянной  $C = 6T$ .

Докажем оценку (10). Умножим уравнение (2) на  $\frac{\partial x(s, t)}{\partial t}$  и проинтегрируем по области  $Q_\tau$ :

$$\iint_{Q_\tau} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 ds \, dt = \iint_{Q_\tau} \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} \frac{\partial x}{\partial t} ds \, dt = \iint_{Q_\tau} u \frac{\partial x}{\partial t} ds \, dt. \quad (14)$$



Поскольку в силу условий (3)

$$\begin{aligned} \iint_{Q_\tau} \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} \frac{\partial x}{\partial t} ds dt &= \int_0^\tau \left( \left. \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial t} \right|_{s=0}^l - \int_0^l \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial^2 x}{\partial s \partial t} ds \right) dt = \\ &= - \int_0^l \left( \int_0^\tau \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \left( \frac{\partial x}{\partial s} \right)^2 \right) dt \right) ds = - \frac{1}{2} \int_0^l \left( \frac{\partial x(s, \tau)}{\partial s} \right)^2 ds, \end{aligned}$$

то из (14) имеем

$$\begin{aligned} \iint_{Q_\tau} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 ds dt + \frac{1}{2} \int_0^l \left( \frac{\partial x(s, \tau)}{\partial s} \right)^2 ds &= \iint_{Q_\tau} u \frac{\partial x}{\partial t} ds dt \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \|u\|_{L_2(Q)}^2 + \frac{1}{2} \iint_{Q_\tau} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 ds dt, \end{aligned}$$

или

$$\iint_{Q_\tau} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 ds dt + \int_0^l \left( \frac{\partial x(s, \tau)}{\partial s} \right)^2 ds \leq \|u\|_{L_2(Q)}^2 \quad \forall \tau \in [0, T].$$

Отсюда имеем два неравенства

$$\iint_{Q_\tau} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 ds dt \leq \|u\|_{L_2(Q)}^2, \quad \int_0^l \left( \frac{\partial x(s, \tau)}{\partial s} \right)^2 ds \leq \|u\|_{L_2(Q)}^2 \quad \forall \tau \in [0, T].$$

Пользуясь произволом в выборе  $\tau \in [0, T]$ , получаем

$$\iint_Q \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 ds dt \leq \|u\|_{L_2(Q)}^2, \quad \max_{0 \leq \tau \leq T} \int_0^l \left( \frac{\partial x(s, \tau)}{\partial s} \right)^2 ds \leq \|u\|_{L_2(Q)}^2. \quad (15)$$

Кроме того, из уравнения (2) с учетом (15) имеем

$$\begin{aligned} \iint_Q \left( \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} \right)^2 ds dt &= \iint_Q \left( \frac{\partial x}{\partial t} - u \right)^2 ds dt \leq \\ &\leq 2 \iint_Q \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 ds dt + 2 \iint_Q u^2 ds dt \leq 4 \|u\|_{L_2(Q)}^2. \end{aligned} \quad (16)$$

Сложив неравенства (15), (16), придем к оценке (10) с константой  $C = 6$ . Приведем два следствия из оценок (9), (10):

$$\max_{(s,t) \in \bar{Q}} |x(s, t; u)|^2 \leq C \|u\|_{L_2(Q)}^2, \quad (17)$$

$$\max_{0 \leq s \leq l} \int_0^T \left( \frac{\partial x(s, t; u)}{\partial s} \right)^2 dt \leq C \|u\|_{L_2(Q)}^2. \quad (18)$$

Для доказательства оценки (17) заметим, что

$$\begin{aligned} x^2(s, t) &= \left( \int_{\xi}^s \frac{\partial x(\eta, t)}{\partial s} d\eta + x(\xi, t) \right)^2 \leq 2 \left( \int_{\xi}^s \frac{\partial x(\eta, t)}{\partial s} d\eta \right)^2 + 2x^2(\xi, t) \leq \\ &\leq 2l \int_0^l \left( \frac{\partial x(s, t)}{\partial s} \right)^2 ds + 2x^2(\xi, t) \quad \forall (s, t) \in Q, \quad \forall \xi \in [0, l]. \end{aligned}$$

Интегрируя это неравенство по  $\xi$  на  $[0, l]$ , с учетом оценок (13), (15) получим

$$lx^2(s, t) \leq 2l \max_{0 \leq t \leq T} \int_0^l \left( \frac{\partial x(s, t)}{\partial s} \right)^2 ds + 2 \max_{0 \leq t \leq T} \int_0^l x^2(s, t) ds \leq (2l + 8T) \|u\|_{L_2(Q)}^2$$

$$\forall (s, t) \in Q.$$

Отсюда получаем оценку (17) с  $C = 2 + 8\frac{T}{l}$ . Оценка (18) следует из (16) и неравенства

$$\int_0^T \left( \frac{\partial x(s, t)}{\partial s} \right)^2 dt = \int_0^T \left( \int_0^s \frac{\partial^2 x(\xi, t)}{\partial s^2} d\xi + \frac{\partial x(0, t)}{\partial s} \right)^2 dt \leq l \iint_Q \left( \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} \right)^2 ds dt$$

$$\forall s \in [0, l].$$

4. Опираясь на оценки (9), (10), нетрудно доказать, что решение задачи (2), (3) представимо в виде ряда Фурье

$$x(s, t; u) = \sum_{k=1}^{\infty} e_k(s) \int_0^t u_k(\tau) e^{-\lambda_k(t-\tau)} d\tau, \quad (19)$$

где  $e_k(s) = \sqrt{\frac{2}{l}} \cos \lambda_k s$  — собственные функции оператора  $-\frac{d^2 \varphi}{ds^2}$  при  $\varphi'(0) = \varphi'(l) = 0$ , соответствующие собственному числу  $\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ;  $u_k(t) = \int_0^l u(s, t) e_k(s) ds \in L_2[0, T]$ . Функции  $\{e_k(s)\}$  образуют полную ортонормированную систему в  $L_2[0, T]$  (см., например, [492; 557]), и ряд  $u(s, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) e_k(s)$  сходится в метрике  $L_2(Q)$  и в метрике  $L_2[0, l]$  почти всех  $t \in [0, T]$ . Частичные суммы  $x_m(s, t) = \sum_{k=1}^m e_k(s) \int_0^t u_k(\tau) e^{-\lambda_k(t-\tau)} d\tau$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , ряда (19) являются классическим решением задачи (2), (3), и для них справедливы априорные оценки (9), (10), (17), (18). Из этих оценок следует, что последовательность  $\{x_m(s, t)\}$  фундаментальна в пространствах  $C(\bar{Q})$ ,  $H^{2,1}(Q)$ , ряд  $\frac{\partial x(s, t)}{\partial s}$ , полученный формальным дифференцированием ряда (19), сходится в пространствах  $C([0, T], L_2(0, l))$ ,  $C([0, l], L_2(0, T))$  с нормами  $\max_{0 \leq t \leq T} \left( \int_0^l f^2(s, t) ds \right)^{1/2}$ ,  $\max_{0 \leq s \leq l} \left( \int_0^T f^2(s, t) dt \right)^{1/2}$  соответственно. В силу

полноты перечисленных пространств сумма ряда (19) при каждом фиксированном  $u = u(s, t) \in L_2(Q)$  является непрерывной функцией на  $\bar{Q}$ , принадлежит  $H^{2,1}(Q)$ , почти всюду на  $Q$  удовлетворяет уравнению (2), почти всюду на  $[0, T]$  следы  $\frac{\partial x(\cdot, t)}{\partial s}$  при  $s = 0$ ,  $s = l$  и след  $x(s, \cdot)$  при  $t = 0$  удовлетворяют условиям (3), т. е. ряд (19) представляет собой почти классическое решение краевой задачи (2), (3); для него справедливы оценки (9), (10), (17), (18).

5. Покажем, что для решения разностной задачи (6), (7) справедливы следующие оценки

$$\max_{1 \leq j \leq N} \sum_{i=1}^{M-1} h y_{ij}^2 + \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M-1} h \tau y_{sij}^2 \leq C \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M-1} h \tau u_{ij}^2, \quad (20)$$

$$\max_{1 \leq j \leq N} \sum_{i=1}^{M-1} h y_{sij}^2 + \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M-1} h \tau (y_{tij}^2 + y_{ssij}^2) \leq C \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M-1} h \tau u_{ij}^2, \quad (21)$$

являющиеся разностными аналогами энергетических оценок (9), (10) соответственно. Оценки (20), (21) доказываются по той же схеме, что и оценки (9), (10). Для доказательства (20) умножим уравнение (6) на  $h \tau y_{ij}$  и просуммируем по  $i$  от 1 до  $M-1$ :

$$\sum_{i=1}^{M-1} \tau h y_{tij} y_{ij} - \sum_{i=1}^{M-1} \tau h y_{ssij} y_{ij} = \sum_{i=1}^{M-1} \tau h u_{ij} y_{ij}, \quad j = 1, \dots, N. \quad (22)$$

Нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned} \tau h y_{tij} y_{ij} &= (y_{ij} - y_{ij-1}) y_{ij} = \frac{1}{2} (y_{ij}^2 - y_{ij-1}^2) + \frac{1}{2} (y_{ij} - y_{ij-1})^2 \geq \\ &\geq \frac{1}{2} (y_{ij}^2 - y_{ij-1}^2) \quad i = 1, \dots, M-1, \quad j = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (23)$$

Поэтому

$$\sum_{i=1}^{M-1} \tau h y_{tij} y_{ij} \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{M-1} h y_{ij}^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{M-1} h y_{ij-1}^2, \quad j = 1, \dots, N. \quad (24)$$

Для преобразования второго слагаемого из левой части равенства (22) воспользуемся известной формулой суммирования по частям:

$$\sum_{i=1}^{M-1} h a_{si} b_i = - \sum_{i=1}^{M-1} h a_i b_{\bar{s}i} + a_M b_{M-1} - a_1 b_0, \quad (25)$$

где  $a_{si} = \frac{a_{i+1} - a_i}{h}$ ,  $b_{\bar{s}i} = \frac{b_i - b_{i-1}}{h}$ . Отсюда при  $a_i = y_{sij}$ ,  $b_i = y_{ij}$  с учетом граничных условий (7) имеем

$$\sum_{i=1}^{M-1} \tau h y_{ssij} y_{ij} = - \sum_{i=1}^{M-1} \tau h y_{sij}^2, \quad j = 1, \dots, N. \quad (26)$$

Подставим (24), (26) в (22). Получим

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{M-1} hy_{ij}^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{M-1} hy_{ij-1}^2 + \sum_{i=1}^{M-1} h\tau y_{sij}^2 \leq \sum_{i=1}^{M-1} h\tau u_{ij} y_{ij}, \quad j = 1, \dots, N.$$

Просуммируем эти неравенства по  $j$  от 1 до некоторого  $n$ ,  $1 \leq n \leq N$ . С учетом начального условия  $y_{i0} = 0$ ,  $i = 0, \dots, M$ , получим разностный аналог неравенств (12):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{M-1} hy_{in}^2 + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{M-1} \tau hy_{sij}^2 &\leq \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{M-1} h\tau u_{ij} y_{ij} \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^n \tau \left( \sum_{i=1}^{M-1} hu_{ij}^2 \right)^{1/2} \max_{1 \leq j \leq n} \left( \sum_{i=1}^{M-1} hy_{ij}^2 \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \max_{1 \leq j \leq N} \left( \sum_{i=1}^{M-1} hy_{ij}^2 \right)^{1/2} \sqrt{T} \left( \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M-1} h\tau u_{ij}^2 \right)^{1/2} \quad \forall n, \quad 1 \leq n \leq N. \end{aligned} \quad (27)$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{M-1} hy_{in}^2 \leq \max_{1 \leq j \leq N} \left( \sum_{i=1}^{M-1} hy_{ij}^2 \right)^{1/2} 2\sqrt{T} \left( \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M-1} h\tau u_{ij}^2 \right)^{1/2} \quad \forall n, \quad 1 \leq n \leq N.$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq n \leq N} \sum_{i=1}^{M-1} hy_{in}^2 &= \left( \max_{1 \leq j \leq N} \left( \sum_{i=1}^{M-1} hy_{ij}^2 \right)^{1/2} \right)^2 \leq \\ &\leq \max_{1 \leq j \leq N} \left( \sum_{i=1}^{M-1} hy_{ij}^2 \right)^{1/2} 2\sqrt{T} \left( \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M-1} h\tau u_{ij}^2 \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

или

$$\max_{1 \leq j \leq N} \sum_{i=1}^{M-1} hy_{ij}^2 \leq 4T \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M-1} h\tau u_{ij}^2. \quad (28)$$

Кроме того, из (27), (28) получаем

$$\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M-1} h\tau y_{sij}^2 \leq 2T \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M-1} h\tau u_{ij}^2.$$

Сложив это неравенство с (28), придем к оценке (20) с  $C = 6T$ .

Докажем оценку (21). Умножим уравнение (6) на  $h\tau y_{tij}$  и просуммируем по  $i$  от 1 до  $M-1$ :

$$\sum_{i=1}^{M-1} \tau hy_{tij}^2 - \sum_{i=1}^{M-1} \tau hy_{sij} y_{tij} = \sum_{i=1}^{M-1} h\tau u_{ij} y_{tij}, \quad j = 1, \dots, N. \quad (29)$$

Второе слагаемое из левой части (29) преобразуем с помощью формулы (25) при  $a_i = y_{\bar{s}ij}$ ,  $b_i = y_{\bar{t}ij}$ . С учетом граничных условий (7) имеем

$$- \sum_{i=1}^{M-1} \tau h y_{\bar{s}ij} y_{\bar{t}ij} = \sum_{i=1}^{M-1} \tau h y_{\bar{s}ij} y_{\bar{t}\bar{s}ij} - (y_{\bar{s}Mj} y_{\bar{t}M-1j} - y_{\bar{s}1j} y_{\bar{t}0j}) \tau = \sum_{i=1}^{M-1} \tau h y_{\bar{s}ij} y_{\bar{t}\bar{s}ij}.$$

Правую часть этого равенства оценим теперь снизу с помощью неравенства вида (23):

$$\tau y_{\bar{s}ij} y_{\bar{t}\bar{s}ij} = (y_{\bar{s}ij} - y_{\bar{s}ij-1}) y_{\bar{s}ij} \geq \frac{1}{2} (y_{\bar{s}ij}^2 - y_{\bar{s}ij-1}^2).$$

Получим

$$- \sum_{i=1}^{M-1} \tau h y_{\bar{s}ij} y_{\bar{t}ij} \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{M-1} h y_{\bar{s}ij}^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{M-1} h y_{\bar{s}ij-1}^2.$$

Подставим эту оценку в (29):

$$\sum_{i=1}^{M-1} \tau h y_{\bar{t}ij}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{M-1} h y_{\bar{s}ij}^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{M-1} h y_{\bar{s}ij-1}^2 \leq \sum_{i=1}^{M-1} \tau h u_{ij} y_{\bar{t}ij}, \quad j = 1, \dots, N.$$

Отсюда, суммируя по  $j$  от 1 до некоторого  $n$ ,  $1 \leq n \leq N$ , с учетом равенств  $y_{\bar{s}i0} = 0$ ,  $i = 1, \dots, M$ , получим

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{M-1} \tau h y_{\bar{t}ij}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{M-1} h y_{\bar{s}in}^2 &\leq \\ &\leq \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{M-1} \tau h u_{ij} y_{\bar{t}ij} \leq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{M-1} h \tau y_{\bar{t}ij}^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{M-1} h \tau u_{ij}^2, \end{aligned}$$

или

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{M-1} \tau h y_{\bar{t}ij}^2 + \sum_{i=1}^{M-1} h y_{\bar{s}in}^2 \leq \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{M-1} h \tau u_{ij}^2 \quad \forall n, \quad 1 \leq n \leq N. \quad (30)$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{i=1}^{M-1} h y_{\bar{s}in}^2 \leq \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M-1} h \tau u_{ij}^2 \quad \forall n, \quad 1 \leq n \leq N,$$

поэтому

$$\max_{1 \leq n \leq N} \sum_{i=1}^{M-1} h y_{\bar{s}in}^2 \leq \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M-1} \tau h u_{ij}^2. \quad (31)$$

Кроме того, из (30) имеем

$$\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M-1} h \tau y_{\bar{t}ij}^2 \leq \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M-1} h \tau u_{ij}^2. \quad (32)$$

Наконец, из уравнения (6) с учетом (32) получаем

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M-1} h\tau y_{ssij}^2 &= \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M-1} h\tau (y_{tij} - u_{ij})^2 \leq \\ &\leq 2 \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M-1} h\tau y_{tij}^2 + 2 \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M-1} h\tau u_{ij}^2 \leq 4 \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M-1} h\tau u_{ij}^2. \end{aligned} \quad (33)$$

Сложив неравенства (31)–(33), придем к оценке (21). Отметим, что справедливости и разностные аналоги оценок (17), (18), однако они нам ниже явно не понадобятся.

**6.** Оценим разность между решениями задач (2), (3) и (6), (7). Введем гильбертово пространство  $L_{2h\tau}$ , являющееся разностным аналогом пространства  $L_2(Q)$ . Элементами пространства  $L_{2h\tau}$  являются сеточные функции  $f_{h\tau} = \{f_{ij}, i = 1, \dots, M-1, j = 1, \dots, N\}$ , скалярное произведение и норма в  $L_{2h\tau}$  равны

$$\langle f_{h\tau}, g_{h\tau} \rangle_{L_{2h\tau}} = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M-1} h\tau f_{ij} g_{ij}, \quad \|f_{h\tau}\|_{L_{2h\tau}} = \left( \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M-1} h\tau f_{ij}^2 \right)^{1/2}.$$

Через  $p_{h\tau} f_{h\tau}$  будем обозначать кусочно постоянное продолжение сеточной функции  $f_{h\tau}$  по правилу

$$\begin{aligned} p_{h\tau} f_{h\tau} &= (p_{h\tau} f_{h\tau})(s, t) = f_{ij}, \\ (s, t) &\in Q_{ij} = \{(s, t): s_i \leq s < s_{i+1}, t_{j-1} < t \leq t_j\}, \\ i &= 1, \dots, M-1, \quad j = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Область определения функции  $p_{h\tau} f_{h\tau}$  обозначим  $Q_h = \{(s, t): h \leq s < l, 0 < t \leq T\}$ . Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \iint_{Q_h} p_{h\tau} f_{h\tau} ds dt &= \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M-1} h\tau f_{ij}, \\ \langle p_{h\tau} f_{h\tau}, p_{h\tau} g_{h\tau} \rangle_{L_2(Q_h)} &= \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M-1} h\tau f_{ij} g_{ij} = \langle f_{h\tau}, g_{h\tau} \rangle_{L_{2h\tau}}, \\ \|p_{h\tau} f_{h\tau}\|_{L_2(Q_h)} &= \|f_{h\tau}\|_{L_{2h\tau}}. \end{aligned}$$

Разностное уравнение (6) теперь можем записать в виде

$$p_{h\tau} y_{th\tau} - p_{h\tau} y_{ssh\tau} = p_{h\tau} u_{h\tau}, \quad (s, t) \in Q_h. \quad (34)$$

Из уравнения (2) вычтем (34), полученное равенство умножим на  $x(s, t) - p_{h\tau} y_{h\tau}$  и проинтегрируем по области  $Q_h$ :

$$\iint_{Q_h} \left( \frac{\partial x(s, t)}{\partial t} - p_{h\tau} y_{th\tau} \right) (x(s, t) - p_{h\tau} y_{h\tau}) ds dt -$$

$$\begin{aligned}
& - \iint_{Q_h} \left( \frac{\partial^2 x(s, t)}{\partial s^2} - p_{h\tau} y_{\overline{s}sh\tau} \right) (x(s, t) - p_{h\tau} y_{h\tau}) ds dt = \\
& = \iint_{Q_h} (u(s, t) - p_{h\tau} u_{h\tau}) (x(s, t) - p_{h\tau} y_{h\tau}) ds dt. \quad (35)
\end{aligned}$$

Первое слагаемое из левой части равенства (35) оценим тогда следующим образом:

$$\begin{aligned}
& \iint_{Q_h} \left( \frac{\partial x(s, t)}{\partial t} - p_{h\tau} y_{\overline{t}h\tau} \right) (x(s, t) - p_{h\tau} y_{h\tau}) ds dt = \\
& = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left( \frac{\partial x(s, t)}{\partial t} - y_{\overline{t}ij} \right) (x(s, t) - y_{ij}) ds dt = \\
& = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (x(s, t) - (t - t_j) y_{\overline{t}ij} - y_{ij})^2 + \right. \\
& \quad \left. + \left( \frac{\partial x(s, t)}{\partial t} - y_{\overline{t}ij} \right) (t - t_j) y_{\overline{t}ij} \right] ds dt = \\
& = \sum_{i=1}^{M-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N (x(s, t) - (t - t_j) y_{\overline{t}ij} - y_{ij})^2 \Big|_{t=t_{j-1}}^{t_j} ds + \\
& \quad + \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left[ \frac{\partial x(s, t)}{\partial t} (t - t_j) y_{\overline{t}ij} - (t - t_j) y_{\overline{t}ij}^2 \right] ds dt = \\
& = \sum_{i=1}^{M-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N [(x(s, t_j) - y_{ij})^2 - (x(s, t_{j-1}) - y_{ij-1})^2] ds + \\
& \quad + \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left[ x(s, t) (t - t_j) y_{\overline{t}ij} \Big|_{t=t_{j-1}}^{t_j} - \int_{t_{j-1}}^{t_j} x(s, t) y_{\overline{t}ij} dt - y_{\overline{t}ij}^2 \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t - t_j) dt \right] ds = \\
& = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{M-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} |x(s, t_N) - y_{iN}|^2 ds + \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left[ \tau x(s, t_{j-1}) y_{\overline{t}ij} - \right. \\
& \quad \left. - \int_{t_{j-1}}^{t_j} x(s, t) y_{\overline{t}ij} dt + \frac{\tau^2}{2} y_{\overline{t}ij}^2 \right] ds \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{M-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} (x(s, t_N) - y_{iN})^2 ds + \\
& \quad + \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{s_i}^{s_{i+1}} (x(s, t_{j-1}) - x(s, t)) y_{\overline{t}ij} ds dt. \quad (36)
\end{aligned}$$

Преобразуем теперь второе слагаемое из левой части (35). Предварительно заметим, что

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{M-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left( \frac{\partial^2 x(s, t)}{\partial s^2} - y_{sij} \right) (x(s, t) - y_{ij}) ds = \\
 = \sum_{i=1}^{M-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left[ \left( \frac{\partial^2 x(s, t)}{\partial s^2} - x_{\overline{s}s}(s_i, t) \right) (x(s, t) - y_{ij}) + \right. \\
 \left. + (x_{\overline{s}s}(s_i, t) - y_{sij})(x(s, t) - x(s_i, t)) + (x_{\overline{s}s}(s_i, t) - y_{sij})(x(s_i, t) - y_{ij}) \right] ds \\
 \forall t, \quad t_{j-1} < t \leq t_j, \quad j = 1, \dots, N, \quad (37)
 \end{aligned}$$

где использованы обозначения:  $x_{\overline{s}s}(s_i, t) = \frac{1}{h}(x_s(s_i, t) - x_{\overline{s}}(s_i, t))$ ,  $x_s(s_i, t) = \frac{1}{h}(x(s_{i+1}, t) - x(s_i, t))$ ,  $x_{\overline{s}}(s_i, t) = \frac{1}{h}(x(s_i, t) - x(s_{i-1}, t))$ . Первое слагаемое из правой части (37) можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{M-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{\partial}{\partial s} \left[ \left( \frac{\partial x(s, t)}{\partial s} - (s - s_i)x_{\overline{s}s}(s_i, t) - x_{\overline{s}}(s_i, t) \right) (x(s, t) - y_{ij}) \right] ds = \\
 = \sum_{i=1}^{M-1} \left[ \left( \frac{\partial x(s, t)}{\partial s} - (s - s_i)x_{\overline{s}s}(s_i, t) - x_{\overline{s}}(s_i, t) \right) (x(s, t) - y_{ij}) \right]_{s=s_i}^{s_{i+1}} - \\
 - \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left( \frac{\partial x(s, t)}{\partial s} - (s - s_i)x_{\overline{s}s}(s_i, t) - x_{\overline{s}}(s_i, t) \right) \frac{\partial x(s, t)}{\partial s} ds = \\
 = \sum_{i=1}^{M-1} \left[ \left( \frac{\partial x(s_{i+1}, t)}{\partial s} - x_{\overline{s}}(s_{i+1}, t) \right) (x(s_{i+1}, t) - y_{i+1j}) - \right. \\
 \left. - \left( \frac{\partial x(s_i, t)}{\partial s} - x_{\overline{s}}(s_i, t) \right) (x(s_i, t) - y_{ij}) + \left( \frac{\partial x(s_{i+1}, t)}{\partial s} - x_{\overline{s}}(s_{i+1}, t) \right) (y_{i+1j} - y_{ij}) \right] - \\
 - \sum_{i=1}^{M-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left( \frac{\partial x(s, t)}{\partial s} - (s - s_i)x_{\overline{s}s}(s_i, t) - x_{\overline{s}}(s_i, t) \right) \frac{\partial x(s, t)}{\partial s} ds = \\
 = \left( \frac{\partial x(s_M, t)}{\partial s} - x_{\overline{s}}(s_M, t) \right) (x(s_M, t) - y_{Mj}) - \left( \frac{\partial x(s_1, t)}{\partial s} - x_{\overline{s}}(s_1, t) \right) (x(s_1, t) - y_{1j}) + \\
 + \sum_{i=1}^{M-1} \left( \frac{\partial x(s_{i+1}, t)}{\partial s} - x_{\overline{s}}(s_{i+1}, t) \right) h y_{sij} - \sum_{i=1}^{M-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left( \frac{\partial x(s, t)}{\partial s} - x_{\overline{s}}(s_i, t) \right) \frac{\partial x(s, t)}{\partial s} ds + \\
 + \sum_{i=1}^{M-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} x_{\overline{s}s}(s_i, t) (s - s_i) \frac{\partial x(s, t)}{\partial s} ds \quad \forall t, \quad t_{j-1} < t \leq t_j, \quad j = 1, \dots, N. \quad (38)
 \end{aligned}$$



Третье слагаемое из правой части равенства (37) преобразуем с помощью формулы (25) при  $a_i = x_{\bar{s}}(s_i, t) - y_{\bar{s}ij}$ ,  $b_i = x(s_i, t) - y_{ij}$ :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{M-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} (x_{\bar{s}s}(s_i, t) - y_{\bar{s}sij})(x(s_i, t) - y_{ij}) ds &= \sum_{i=1}^{M-1} h(x(s_i, t) - y_{ij})_{\bar{s}s}(x(s_i, t) - y_{ij}) = \\ &= - \sum_{i=1}^{M-1} h(x_{\bar{s}}(s_i, t) - y_{\bar{s}ij})^2 + (x_{\bar{s}}(s_M, t) - y_{\bar{s}Mj})(x(s_{M-1}, t) - y_{M-1j}) - \\ &\quad - (x_{\bar{s}}(s_1, t) - y_{\bar{s}1j})(x(0, t) - y_{0j}) \quad \forall t, t_{j-1} < t \leq t_j, j = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (39)$$

Неравенство (36) и равенство (37) с учетом (38), (39) подставим в левую часть (35). Получим:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{M-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} (x(s, t_N) - y_{iN})^2 ds + \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M-1} h \int_{t_{j-1}}^{t_j} (x_{\bar{s}}(s_i, t) - y_{\bar{s}ij})^2 dt \leq \sum_{i=1}^{10} R_i, \quad (40)$$

где

$$\begin{aligned} R_1 &= \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{s_i}^{s_{i+1}} (x(s, t) - x(s, t_{j-1})) y_{\bar{s}ij} ds dt, \\ R_2 &= \sum_{j=1}^N \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left( \frac{\partial x(s_M, t)}{\partial s} - x_{\bar{s}}(s_M, t) \right) (x(s_M, t) - y_{Mj}) dt, \\ R_3 &= - \sum_{j=1}^N \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left( \frac{\partial x(s_1, t)}{\partial s} - x_{\bar{s}}(s_1, t) \right) (x(s_1, t) - y_{1j}) dt, \\ R_4 &= \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left( \frac{\partial x(s_{i+1}, t)}{\partial s} - x_{\bar{s}}(s_{i+1}, t) \right) h y_{sij} dt, \\ R_5 &= - \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left( \frac{\partial x(s, t)}{\partial s} - x_{\bar{s}}(s_i, t) \right) \frac{\partial x(s, t)}{\partial s} ds dt, \\ R_6 &= \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{s_i}^{s_{i+1}} x_{\bar{s}s}(s_i, t) (s - s_i) \frac{\partial x(s, t)}{\partial s} ds dt, \\ R_7 &= \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{s_i}^{s_{i+1}} (x_{\bar{s}s}(s_i, t) - y_{\bar{s}sij})(x(s, t) - x(s_i, t)) ds dt, \\ R_8 &= \sum_{j=1}^N \int_{t_{j-1}}^{t_j} (x_{\bar{s}}(s_M, t) - y_{\bar{s}Mj})(x(s_{M-1}, t) - y_{M-1j}) dt, \end{aligned}$$

$$R_9 = - \sum_{j=1}^N \int_{t_{j-1}}^{t_j} (x_{\bar{s}}(s_1, t) - y_{\bar{s}1j})(x(0, t) - y_{0j}) dt,$$

$$R_{10} = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{s_i}^{s_{i+1}} (u(s, t) - u_{ij})(x(s, t) - y_{ij}) ds dt.$$

Оценим сверху каждую из величин  $|R_i|$ ,  $i = 1, \dots, 10$ . Для этого наряду с оценками (9), (10), (20), (21) нам понадобятся еще несколько вспомогательных неравенств. Приведем их. Начнем с неравенства:

$$(x(s_i, t) - y_{ij})^2 \leq C \left( \sum_{m=1}^{M-1} h[(x_{\bar{s}}(s_m, t) - y_{\bar{s}mj})^2 + (x(s_m, t) - y_{mj})^2] \right) \quad (41)$$

$$\forall i = 1, \dots, M-1, \quad j = 1, \dots, N, \quad t \in [0, T].$$

Напоминаем, что через  $C$ , как и в оценках (9), (10), (20), (21), мы здесь и далее обозначаем постоянные, которые не зависят от  $h, \tau, u, u_{h\tau}$ . Будем считать, что  $h < 1$ ,  $h < l/2$ ,  $\tau < 1$ . Нетрудно проверить, что

$$x(s_i, t) = \sum_{m=p+1}^i h x_{\bar{s}}(s_m, t) + x(s_p, t) \quad \forall t \in [0, T],$$

$$y_{ij} = \sum_{m=p+1}^i h y_{\bar{s}mj} + y_{pj} \quad \forall j = 1, \dots, N,$$

где  $1 \leq p \leq i \leq M-1$ ; при  $i = p$  по определению считаем  $\sum_{m=p+1}^p a_m = 0$ . Тогда

$$(x(s_i, t) - y_{ij})^2 = \left( \sum_{m=p+1}^i h(x_{\bar{s}}(s_m, t) - y_{\bar{s}mj}) + (x(s_p, t) - y_{pj}) \right)^2 \leq$$

$$\leq 2 \sum_{m=1}^{M-1} h(x_{\bar{s}}(s_m, t) - y_{\bar{s}mj})^2 + 2(x(s_p, t) - y_{pj})^2.$$

Умножим это неравенство на  $h$  и просуммируем его по  $p$  от 1 до  $M-1$ . Получим

$$(l-h)(x(s_i, t) - y_{ij})^2 \leq 2(l-h) \sum_{m=1}^{M-1} h(x_{\bar{s}}(s_m, t) - y_{\bar{s}mj})^2 + 2 \sum_{p=1}^{M-1} h(x(s_p, t) - y_{pj})^2$$

$$\forall i = 1, \dots, M-1, \quad j = 1, \dots, N, \quad t \in [0, T],$$

что равносильно неравенству (41) с  $C = \max \left\{ 2; \frac{4}{l} \right\}$ . Для  $i = 0$ ,  $i = M$  с учетом граничных условий (7) имеем:

$$(x(0, t) - y_{0j})^2 = ((x(0, t) - x(s_1, t)) + (x(s_1, t) - y_{1j}))^2 \leq$$

$$\leq 2h \int_0^{s_1} \left| \frac{\partial x(\xi, t)}{\partial s} \right|^2 d\xi + 2(x(s_1, t) - y_{1j})^2,$$

$$\begin{aligned}
(x(s_M, t) - y_{Mj})^2 &= ((x(s_M, t) - x(s_{M-1}, t)) + (x(s_{M-1}, t) - y_{M-1j}))^2 \leq \\
&\leq 2h \int_{s_{M-1}}^{s_M} \left| \frac{\partial x(\xi, t)}{\partial s} \right|^2 d\xi + 2(x(s_{M-1}, t) - y_{M-1j})^2. \quad (42)
\end{aligned}$$

Заметим также, что

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^N \int_{t_{j-1}}^{t_j} \sum_{m=1}^{M-1} h(x(s_m, t) - y_{mj})^2 dt &= \sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^{M-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{s_m}^{s_{m+1}} [(x(s_m, t) - x(s, t)) + \\
&+ (x(s, t) - x(s, t_j)) + (x(s, t_j) - y_{mj})]^2 ds dt \leq \\
&\leq 3 \sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^{M-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{s_m}^{s_{m+1}} \left[ \left( \int_{s_m}^s \frac{\partial x(\xi, t)}{\partial s} d\xi \right)^2 + \right. \\
&\quad \left. + \left( \int_t^{t_j} \frac{\partial x(s, \tau)}{\partial t} d\tau \right)^2 + (x(s, t_j) - y_{mj})^2 \right] ds dt \leq \\
&\leq 3 \sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^{M-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{s_m}^{s_{m+1}} \left[ h \int_{s_m}^{s_{m+1}} \left| \frac{\partial x(\xi, t)}{\partial s} \right|^2 d\xi + \right. \\
&\quad \left. + \tau \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left| \frac{\partial x(s, \tau)}{\partial t} \right|^2 d\tau + (x(s, t_j) - y_{mj})^2 \right] ds dt \leq \\
&\leq 3h^2 \left\| \frac{\partial x}{\partial s} \right\|_{L_2(Q)}^2 + 3\tau^2 \left\| \frac{\partial x}{\partial t} \right\|_{L_2(Q)}^2 + 3 \sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^{M-1} \tau \int_{s_m}^{s_{m+1}} (x(s, t_j) - y_{mj})^2 ds \leq \\
&\leq C(h^2 + \tau^2) \|u\|_{L_2(Q)}^2 + 3 \sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^{M-1} \tau \int_{s_m}^{s_{m+1}} (x(s, t_j) - y_{mj})^2 ds \quad (43)
\end{aligned}$$

в силу (9), (10). Из (41)–(43) следует, что

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^N \int_{t_{j-1}}^{t_j} (x(s_i, t) - y_{ij})^2 dt &\leq C \sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^{M-1} \left[ h \int_{t_{j-1}}^{t_j} (x_{\bar{s}}(s_m, t) - y_{\bar{s}mj})^2 dt + \right. \\
&\quad \left. + \tau \int_{s_m}^{s_{m+1}} (x(s, t_j) - y_{mj})^2 ds \right] + C(h + \tau) \|u\|_{L_2(Q)}^2 \quad i = 0, \dots, M. \quad (44)
\end{aligned}$$

Далее заметим, что

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x(s, t)}{\partial s} - x_{\bar{s}}(s_i, t) &= \frac{1}{h} \int_{s_{i-1}}^{s_i} \left( \frac{\partial x(s, t)}{\partial s} - \frac{\partial x(\xi, t)}{\partial s} \right) d\xi = \frac{1}{h} \int_{s_{i-1}}^{s_i} \left( \int_{\xi}^s \frac{\partial^2 x(\eta, t)}{\partial s^2} d\eta \right) d\xi \\
&\forall s \in [0, l], \quad t \in [0, T], \quad i = 1, \dots, M.
\end{aligned}$$

Отсюда для всех  $s$ ,  $s_{i-1} \leq s \leq s_{i+1}$ ,  $i = 1, \dots, M-1$  имеем

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left( \frac{\partial x(s, t)}{\partial s} - x_{\bar{s}}(s_i, t) \right)^2 dt &\leq \sum_{j=1}^N \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left( \frac{1}{h} \int_{s_{i-1}}^{s_i} \left( \int_{s_{i-1}}^{s_{i+1}} \left| \frac{\partial^2 x(\eta, t)}{\partial s^2} \right| d\eta \right) d\xi \right)^2 dt \leq \\ &\leq h \sum_{j=1}^N \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{s_{i-1}}^{s_{i+1}} \left| \frac{\partial^2 x(\eta, t)}{\partial s^2} \right|^2 d\eta dt. \quad (45) \end{aligned}$$

Из (45) и оценки (10) получаем

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left( \frac{\partial x(s, t)}{\partial s} - x_{\bar{s}}(s_i, t) \right)^2 dt &\leq 2h \sum_{j=1}^N \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_0^l \left| \frac{\partial^2 x(\eta, t)}{\partial s^2} \right|^2 d\eta dt = \\ &= 2h \left\| \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} \right\|_{L_2(Q)}^2 \leq hC \|u\|_{L_2(Q)}^2 \quad \forall s, \quad s_{i-1} \leq s \leq s_{i+1}, \quad i = 1, \dots, M-1. \quad (46) \end{aligned}$$

Кроме того, с учетом (45), (10) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left( \frac{\partial x(s, t)}{\partial s} - x_{\bar{s}}(s_i, t) \right)^2 ds dt &\leq \\ &\leq \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left( h \int_{s_{i-1}}^{s_{i+1}} \left| \frac{\partial^2 x(\eta, t)}{\partial s^2} \right|^2 d\eta \right) ds dt \leq \\ &\leq 2h^2 \left\| \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} \right\|_{L_2(Q)}^2 \leq h^2 C \|u\|_{L_2(Q)}^2. \quad (47) \end{aligned}$$

Наконец, из равенства

$$\begin{aligned} x_{\bar{s}s}(s_i, t) &= \frac{1}{h^2} \left( \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{\partial x(\xi, t)}{\partial s} d\xi - \int_{s_{i-1}}^{s_i} \frac{\partial x(\eta, t)}{\partial s} d\eta \right) = \\ &= \frac{1}{h^2} \left( \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{\partial x(\xi, t)}{\partial s} d\xi - \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{\partial x(\xi - h, t)}{\partial s} d\xi \right) = \frac{1}{h^2} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left( \int_{\xi-h}^{\xi} \frac{\partial^2 x(\eta, t)}{\partial s^2} d\eta \right) d\xi, \\ &\quad i = 1, \dots, M-1, \quad t \in [0, T], \end{aligned}$$

и оценки (10) следует

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{s_i}^{s_{i+1}} (x_{\bar{s}s}(s_i, t))^2 ds dt &= \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{1}{h^3} \left( \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left( \int_{\xi-h}^{\xi} \frac{\partial^2 x(\eta, t)}{\partial s^2} d\eta \right) d\xi \right)^2 dt \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{1}{h^2} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left( \int_{\xi-h}^{\xi} \frac{\partial^2 x(\eta, t)}{\partial s^2} d\eta \right)^2 d\xi dt \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{1}{h^2} \int_{s_i}^{s_{i+1}} h \int_{s_{i-1}}^{s_{i+1}} \left| \frac{\partial^2 x(\eta, t)}{\partial s^2} \right|^2 d\eta d\xi dt = \\
&= \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{s_{i-1}}^{s_{i+1}} \left| \frac{\partial^2 x(\eta, t)}{\partial s^2} \right|^2 d\eta dt \leq 2 \left\| \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} \right\|_{L_2(Q)}^2 \leq C \|u\|_{L_2(Q)}^2. \quad (48)
\end{aligned}$$

Теперь можем перейти к оценкам величин  $R_i$ ,  $i = 1, \dots, 10$ , из (40). Начнем с оценки  $R_1$ :

$$\begin{aligned}
|R_1| &= \left| \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left( \int_{t_{j-1}}^t \frac{\partial x(s, \tau)}{\partial t} d\tau \right) y_{\bar{t}ij} ds dt \right| \leq \\
&\leq \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left( \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left| \frac{\partial x(s, \tau)}{\partial t} \right| d\tau |y_{\bar{t}ij}| \right) ds dt \leq \\
&\leq \frac{1}{2} \tau \left( \left\| \frac{\partial x}{\partial t} \right\|_{L_2(Q)}^2 + \|y_{\bar{t}h\tau}\|_{L_{2h\tau}}^2 \right) \leq \tau C (\|u\|_{L_2(Q)}^2 + \|u_{h\tau}\|_{L_{2h\tau}}^2); \quad (49)
\end{aligned}$$

здесь мы учли оценки (10), (21). Далее, с помощью оценок (44) при  $i = M$ , (46) при  $i = M$ ,  $s = s_M$  имеем

$$\begin{aligned}
|R_2| &\leq \left( \sum_{j=1}^N \int_{t_{j-1}}^{t_j} (x(s_M, t) - y_{Mj})^2 dt \right)^{1/2} \left( \sum_{j=1}^N \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left( \frac{\partial x(s_M, t)}{\partial s} - x_{\bar{s}}(s_M, t) \right)^2 dt \right)^{1/2} \leq \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} C \left[ \sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^{M-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{s_m}^{s_{m+1}} ((x_{\bar{s}}(s_m, t) - y_{\bar{s}mj})^2 + (x(s, t_j) - y_{mj})^2) ds dt + \right. \\
&\quad \left. + (\tau + h) \|u\|_{L_2(Q)}^2 \right] + \frac{h}{2\varepsilon} C \|u\|_{L_2(Q)}^2 \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (50)
\end{aligned}$$

Аналогично с помощью тех же оценок (44) при  $i = 1$ , (46) при  $i = 1$ ,  $s = s_1$  получаем

$$\begin{aligned}
|R_3| &\leq \frac{\varepsilon}{2} C \left[ \sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^{M-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{s_m}^{s_{m+1}} ((x_{\bar{s}}(s_m, t) - y_{\bar{s}mj})^2 + (x(s, t_j) - y_{mj})^2) ds dt + \right. \\
&\quad \left. + (\tau + h) \|u\|_{L_2(Q)}^2 \right] + \frac{h}{2\varepsilon} C \|u\|_{L_2(Q)}^2 \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (51)
\end{aligned}$$

Из оценок (10), (20), (21), (47) следует

$$|R_4| \leq \left( \sum_{i=1}^{M-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left( \sum_{j=1}^N \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left( \frac{\partial x(s_{i+1}, t)}{\partial s} - \frac{\partial x(s, t)}{\partial s} \right) + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \frac{\partial x(s, t)}{\partial s} - x_{\bar{s}}(s_i, t) \right) - h x_{\bar{s}s}(s_i, t) \Big)^2 dt \Big) ds \Big)^{1/2} \|y_{sh\tau}\|_{L_{2h\tau}} \leq \\
& \leq \left( 3 \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left( \left( \int_s^{s_{i+1}} \frac{\partial^2 x(\xi, t)}{\partial s^2} d\xi \right)^2 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \left( \frac{\partial x(s, t)}{\partial s} - x_{\bar{s}}(s_i, t) \right)^2 + h^2 (x_{\bar{s}s}(s_i, t))^2 \right) ds dt \right)^{1/2} \|y_{sh\tau}\|_{L_{2h\tau}} \leq \\
& \leq hC \|u\|_{L_2(Q)} \|u_{h\tau}\|_{L_{2h\tau}} \leq hC (\|u\|_{L_2(Q)}^2 + \|u_{h\tau}\|_{L_{2h\tau}}^2). \quad (52)
\end{aligned}$$

Из (9), (47) имеем

$$\begin{aligned}
|R_5| & \leq \left( \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left( \frac{\partial x(s, t)}{\partial s} - x_{\bar{s}}(s_i, t) \right)^2 ds dt \right)^{1/2} \left\| \frac{\partial x}{\partial s} \right\|_{L_2(Q)} \leq \\
& \leq hC \|u\|_{L_2(Q)}^2. \quad (53)
\end{aligned}$$

Далее, с учетом оценок (9), (10), (48) получаем

$$\begin{aligned}
|R_6| & \leq \left( \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{s_i}^{s_{i+1}} |x_{\bar{s}s}(s_i, t)|^2 (s - s_i)^2 ds dt \right)^{1/2} \left\| \frac{\partial x}{\partial s} \right\|_{L_2(Q)}^2 = \\
& = \left( \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} |x_{\bar{s}s}(s_i, t)|^2 \frac{h^3}{3} dt \right)^{1/2} \left\| \frac{\partial x}{\partial s} \right\|_{L_2(Q)} \leq \\
& \leq 2h \left\| \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} \right\|_{L_2(Q)} \cdot \left\| \frac{\partial x}{\partial s} \right\|_{L_2(Q)} \leq hC \|u\|_{L_2(Q)}^2. \quad (54)
\end{aligned}$$

Из (9), (10), (21), (48) следует

$$\begin{aligned}
|R_7| & \leq \left( \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{s_i}^{s_{i+1}} (|x_{\bar{s}s}(s_i, t)| + |y_{\bar{s}sij}|)^2 ds dt \right)^{1/2} \times \\
& \times \left( \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left( \int_s^s \frac{\partial x(\xi, t)}{\partial s} d\xi \right)^2 ds dt \right)^{1/2} \leq \left( 2 \left\| \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} \right\|_{L_2(Q)} + \|y_{sh\tau}\|_{L_{2h\tau}} \right) \times \\
& \times \left( \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{s_i}^{s_{i+1}} (s - s_i) \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left| \frac{\partial x(\xi, t)}{\partial s} \right|^2 d\xi ds dt \right)^{1/2} \leq \\
& \leq C (\|u\|_{L_2(Q)} + \|u_{h\tau}\|_{L_{2h\tau}}) h \left\| \frac{\partial x}{\partial s} \right\|_{L_2(Q)} \leq hC (\|u\|_{L_2(Q)}^2 + \|u_{h\tau}\|_{L_{2h\tau}}^2). \quad (55)
\end{aligned}$$

При оценке  $|R_8|$  воспользуемся тем, что  $x_{\bar{s}}(s_M, t) - y_{\bar{s}Mj} = x_{\bar{s}}(s_M, t) - \frac{\partial x(s_M, t)}{\partial s}$  в силу граничных условий  $\frac{\partial x(s_M, t)}{\partial s} = 0$ ,  $y_{\bar{s}Mj} = 0$ , неравенствами (44) при  $i = M - 1$ , оценками (46) при  $i = M$ ,  $s = s_M$ :

$$\begin{aligned}
 |R_8| &\leq \left( \sum_{j=1}^N \int_{t_{j-1}}^{t_j} (x(s_{M-1}, t) - y_{M-1j})^2 dt \right)^{1/2} \times \\
 &\quad \times \left( \sum_{j=1}^N \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left( \frac{\partial x(s_M, t)}{\partial s} - x_{\bar{s}}(s_M, t) \right)^2 dt \right)^{1/2} \leq \\
 &\leq \frac{\varepsilon}{2} C \left[ \sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^{M-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{s_m}^{s_{m+1}} ((x_{\bar{s}}(s_m, t) - y_{\bar{s}mj})^2 + (x(s, t_j) - y_{mj})^2) ds dt + \right. \\
 &\quad \left. + (\tau + h) \|u\|_{L_2(Q)}^2 \right] + \frac{h}{2\varepsilon} C \|u\|_{L_2(Q)}^2 \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (56)
 \end{aligned}$$

Аналогично с учетом равенства  $x_{\bar{s}}(s_1, t) - y_{\bar{s}1j} = x_{\bar{s}}(s_1, t) - \frac{\partial x(0, t)}{\partial s}$ , вытекающего из граничных условий (3), (7), с помощью тех же оценок (44) при  $i = 0$ , неравенств (46) при  $i = 1$ ,  $s = 0$  получаем

$$\begin{aligned}
 |R_9| &\leq \frac{\varepsilon}{2} C \left[ \sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^{M-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{s_m}^{s_{m+1}} ((x_{\bar{s}}(s_m, t) - y_{\bar{s}mj})^2 + (x(s, t_j) - y_{mj})^2) ds dt + \right. \\
 &\quad \left. + (\tau + h) \|u\|_{L_2(Q)}^2 \right] + \frac{h}{2\varepsilon} C \|u\|_{L_2(Q)}^2 \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (57)
 \end{aligned}$$

Наконец, для  $|R_{10}|$  с учетом оценки (10) имеем

$$\begin{aligned}
 |R_{10}| &\leq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{s_i}^{s_{i+1}} (u(s, t) - u_{ij})^2 ds dt + \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{s_i}^{s_{i+1}} ((x(s, t) - x(s, t_j)) + (x(s, t_j) - y_{ij}))^2 ds dt \leq \\
 &\leq \frac{1}{2} \|u - p_{h\tau} u_{h\tau}\|_{L_2(Q_h)}^2 + \\
 &\quad + \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left( \left( \int_t^{t_j} \frac{\partial x(s, \tau)}{\partial t} d\tau \right)^2 + (x(s, t_j) - y_{ij})^2 \right) ds dt \leq \\
 &\leq \frac{1}{2} \|u - p_{h\tau} u_{h\tau}\|_{L_2(Q_h)}^2 + \tau^2 C \|u\|_{L_2(Q)}^2 + \sum_{j=1}^N \tau \sum_{i=1}^{M-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} (x(s, t_j) - y_{ij})^2 ds. \quad (58)
 \end{aligned}$$

Подставим оценки (49)–(58) в (40). Получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{M-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} (x(s, t_N) - y_{iN})^2 ds + \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M-1} h \int_{t_{j-1}}^{t_j} (x_{\overline{s}}(s_i, t) - y_{\overline{s}ij})^2 dt \leq \\ & \leq \varepsilon C \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} h (x_{\overline{s}}(s_i, t) - y_{\overline{s}ij})^2 dt + \|u - p_{h\tau} u_{h\tau}\|_{L_2(Q_h)}^2 + \\ & + \tau(1 + \varepsilon C) \sum_{j=1}^N \left( \sum_{i=1}^{M-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} (x(s, t_j) - y_{ij})^2 ds \right) + \\ & + C(\tau + h) \left( 1 + \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \right) (\|u\|_{L_2(Q)}^2 + \|u_{h\tau}\|_{L_{2h\tau}}^2), \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{2} - \tau(1 + \varepsilon C) \right) \sum_{i=1}^{M-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} (x(s, t_N) - y_{iN})^2 ds + \\ & + (1 - \varepsilon C) \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M-1} h \int_{t_{j-1}}^{t_j} (x_{\overline{s}}(s_i, t) - y_{\overline{s}ij})^2 dt \leq \\ & \leq \tau(1 + \varepsilon C) \sum_{j=1}^{N-1} \left( \sum_{i=1}^{M-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} (x(s, t_j) - y_{ij})^2 ds \right) + C(\tau + h) \left( 1 + \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \right) \times \\ & \times (\|u\|_{L_2(Q)}^2 + \|u_{h\tau}\|_{L_{2h\tau}}^2) + \|u - p_{h\tau} u_{h\tau}\|_{L_2(Q_h)}^2 \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (59) \end{aligned}$$

Зафиксируем  $\varepsilon > 0$  столь малым, чтобы  $1 - \varepsilon C > 0$ . Кроме того, будем считать  $\tau$  столь малым, что  $\frac{1}{2} - \tau(1 + \varepsilon C) \geq \frac{1}{4}$ . Тогда из (59) имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{M-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} (x(s, t_N) - y_{iN})^2 ds \leq 4\tau(1 + \varepsilon C) \sum_{j=1}^{N-1} \left( \sum_{i=1}^{M-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} (x(s, t_j) - y_{ij})^2 ds \right) + \\ & + C(\tau + h) \left( 1 + \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \right) (\|u\|_{L_2(Q)}^2 + \|u_{h\tau}\|_{L_{2h\tau}}^2) + \|u - p_{h\tau} u_{h\tau}\|_{L_2(Q_h)}^2. \end{aligned}$$

Отсюда, пользуясь леммой 8.6.1, получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{M-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} (x(s, t_N) - y_{iN})^2 ds \leq \\ & \leq (1 + \tau C_1)^N (\|u - p_{h\tau} u_{h\tau}\|_{L_2(Q_h)}^2 + (\tau + h) C_2 (\|u\|_{L_2(Q)}^2 + \|u_{h\tau}\|_{L_{2h\tau}}^2)), \end{aligned}$$

где

$$C_1 = 4(1 + \varepsilon C), \quad C_2 = C \left( 1 + \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \right).$$

Поскольку

$$(1 + \tau C_1) \leq e^{\tau C_1}, \quad (1 + \tau C_1)^N \leq e^{TC_1},$$



тогда

$$\sum_{i=1}^{M-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} (x(s, t_N) - y_{iN})^2 ds \leq C(\|u - p_{h\tau} u_{h\tau}\|_{L_2(Q_h)}^2 + (\tau + h)(\|u\|_{L_2(Q)}^2 + \|u_{h\tau}\|_{L_{2h\tau}}^2)). \quad (60)$$

Отметим, что из (59), (60) нетрудно вывести оценку [362]:

$$\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left( \frac{\partial x(s, t)}{\partial s} - y_{sij} \right)^2 ds dt \leq C(\|u - p_{h\tau} u_{h\tau}\|_{L_2(Q_h)}^2 + (\tau + h)(\|u\|_{L_2(Q)}^2 + \|u_{h\tau}\|_{L_{2h\tau}}^2)).$$

**7.** Пользуясь оценкой (60), докажем, что задача (5)–(8) аппроксимирует задачу (1)–(4) по функции.

**Теорема 1.** Пусть в задаче (5)–(8)  $b_i = \frac{1}{h} \int_{s_i}^{s_{i+1}} b(\xi) d\xi$ ,  $i = 1, \dots, M-1$ . Тогда  $\lim_{(h, \tau) \rightarrow 0} I_{h\tau*} = J_*$ .

**Доказательство.** Оценим разность  $J(u) - I_{h\tau}(u_{h\tau})$ , считая, что  $u \in U$ ,  $u_{h\tau} \in U_{h\tau}$ . Учитывая оценки (9), (10), (17), (20), (21), (60), определение множеств (4), (8), неравенство

$$\sum_{i=1}^{M-1} h b_i^2 = \sum_{i=1}^{M-1} h \left( \frac{1}{h} \int_{s_i}^{s_{i+1}} b(\xi) d\xi \right)^2 \leq \sum_{i=1}^{M-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} b^2(\xi) d\xi \leq \|b\|_{L_2[0, l]}^2,$$

имеем

$$\begin{aligned} |J(u) - I_{h\tau}(u_{h\tau})| &= \int_0^h |x(s, T; u) - b(s)|^2 ds + \sum_{i=1}^{M-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} ((x(s, t_N; u) - y_{iN}) + \\ &+ (b_i - b(s)))(x(s, t_N; u) - b(s) + y_{iN} - b_i) ds \leq \int_0^h 2(|x(s, T; u)|^2 + b^2(s)) ds + \\ &+ \left[ \left( \sum_{i=1}^{M-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} |x(s, t_N; u) - y_{iN}|^2 ds \right)^{1/2} + \left( \sum_{i=1}^{M-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} |b(s) - b_i|^2 ds \right)^{1/2} \right] \times \\ &\times \left[ \left( \int_0^l x^2(s, t_N; u) ds \right)^{1/2} + \left( \sum_{i=1}^{M-1} h y_{iN}^2 \right)^{1/2} + \|b\|_{L_2[0, l]} + \left( \sum_{i=1}^{M-1} h b_i^2 \right)^{1/2} \right] \leq \\ &\leq C \left( \|u - p_{h\tau} u_{h\tau}\|_{L_2(Q_h)} + \sqrt{\tau + h} + \left( \sum_{i=1}^{M-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} (b(s) - b_i)^2 ds \right)^{1/2} \right) + \\ &+ h C R^2 + 2 \int_0^h b^2(s) ds. \quad (61) \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{M-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} (b(s) - b_i)^2 ds &= \sum_{i=1}^{M-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left( \frac{1}{h} \int_{s_i}^{s_{i+1}} (b(s) - b(\xi)) d\xi \right)^2 ds \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{M-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left( \frac{1}{h} \int_{-h}^h (b(s+z) - b(s))^2 dz \right) ds = \\ &= \frac{1}{h} \int_{-h}^h \left( \sum_{i=1}^{M-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} (b(s+z) - b(s))^2 ds \right) dz \leq \max_{|z| \leq h} \int_0^l |b(s+z) - b(s)|^2 ds \rightarrow 0 \quad (62) \end{aligned}$$

при  $h \rightarrow 0$  в силу непрерывности в среднем функции  $b(s) \in L_2(0, l)$  [371; 393; 648]; здесь предполагается, что  $b(s) \equiv 0$  вне  $[0, l]$ .

Выше было отмечено, что задачи (1)–(4), (5)–(8) имеют решение, т. е.  $U_* \neq \emptyset$ ,  $U_{h\tau*} \neq \emptyset$ . Зафиксируем какие-либо  $u_* \in U_*$ ,  $u_{h\tau*} \in U_{h\tau*}$ . Поскольку  $\|p_{h\tau} u_{h\tau*}\|_{L_2(Q_h)} = \|u_{h\tau*}\|_{L_2h} \leq R$ , то, приняв  $p_{h\tau} u_{h\tau*} = 0$  вне  $Q_h$ , можем считать, что  $p_{h\tau} u_{h\tau*} \in U$ . Для управления  $u_* \in U_*$  построим его дискретный аналог  $Q_{h\tau} u_* = \{u_{*ij}, i = 1, \dots, M-1, j = 1, \dots, N\}$  по правилу

$$u_{*ij} = \frac{1}{h\tau} \iint_{Q_{ij}} u_*(s, t) ds dt.$$

Так как

$$\begin{aligned} \|Q_{h\tau} u_*\|_{L_{2h\tau}}^2 &= \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M-1} h\tau \left( \frac{1}{h\tau} \iint_{Q_{ij}} u_*(s, t) ds dt \right)^2 \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M-1} \iint_{Q_{ij}} u_*^2(s, t) ds dt = \|u_*\|_{L_2(Q_h)}^2 \leq \|u_*\|_{L_2(Q)}^2 \leq R^2, \end{aligned}$$

то  $Q_{h\tau} u_* \in U_{h\tau}$ . Нетрудно проверить, что  $p_{h\tau} Q_{h\tau} u_* \in U$ . Кроме того,

$$\lim_{(h, \tau) \rightarrow 0} \|u_* - p_{h\tau} Q_{h\tau} u_*\|_{L_2(Q_h)} = 0, \quad (63)$$

что доказывается так же, как аналогичное утверждение (62). Из оценки (61) имеем

$$\begin{aligned} J_* - I_{h\tau*} &\leq J(p_{h\tau} u_{h\tau*}) - I_{h\tau}(u_{h\tau*}) \leq \\ &\leq C \left( \sqrt{\tau + h} + \left( \sum_{i=1}^{M-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} |b(s) - b_i|^2 ds \right)^{1/2} \right) + hCR^2 + 2 \int_0^h b^2(s) ds. \quad (64) \end{aligned}$$

Из (64) с учетом (62) получаем

$$\overline{\lim}_{(h, \tau) \rightarrow 0} (J_* - I_{h\tau*}) \leq 0. \quad (65)$$

С другой стороны, из той же оценки (61) следует

$$J_* - I_{h\tau*} \geq J(u_*) - I_{h\tau}(Q_{h\tau}u_*) \geq -C \left( \|u_* - p_{h\tau}Q_{h\tau}u_*\|_{L_2(Q_h)} + \sqrt{\tau + h} + \right. \\ \left. + \left( \sum_{i=1}^{M-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} |b(s) - b_i|^2 ds \right)^{1/2} \right) - hCR^2 - 2 \int_0^h b^2(s) ds. \quad (66)$$

Отсюда и из (62), (63) имеем

$$\lim_{(h,\tau) \rightarrow 0} (J_* - I_{h\tau*}) \geq 0. \quad (67)$$

Из (65), (67) вытекает утверждение теоремы 1. Неравенства (64), (66) можно считать оценкой скорости сходимости для  $J_* - I_{h\tau*}$ . Если  $b(s)$ ,  $u_* = u_*(s, t)$  достаточно гладкие, например,  $b(s) \in H^1[0, l]$ ,  $u_* \in H^1(Q)$ ,  $\frac{\partial^2 u_*}{\partial s \partial t} \in L_2(Q)$ , то из (64), (66) следует, что  $J_* - I_{h\tau*} = O(\sqrt{\tau + h})$ .  $\square$

Вопросы аппроксимации для задач оптимального управления процессами, описываемыми уравнениями с частными производными, изучались, например, в работах [120; 170; 339; 360–363; 464; 467; 504; 593; 596–599; 607; 700].

### Упражнения

У п р а ж н е н и е 1. Рассмотреть задачу (1)–(3), считая, что

$$U = \{u(s, t) \in L_2(Q) : \alpha \leq u(s, t) \leq \beta \text{ почти всюду на } Q\}, \quad (68)$$

где  $\alpha, \beta$  — заданные постоянные. В задаче (5)–(7) принять  $U_{h\tau} = \{u_{ij} : \alpha \leq u_{ij} \leq \beta, i = 1, \dots, M-1; j = 1, \dots, N\}$ . Доказать, что получившаяся разностная задача минимизации аппроксимирует исходную по функции. У к а з а н и е: воспользоваться оценкой (60).

У п р а ж н е н и е 2. Рассмотреть задачу (1)–(3), считая, что  $u(s, t) = d(s)u(t)$ ,  $d(s) \in L_2[0, l]$  — заданная функция, управление  $u = u(t)$  принадлежит множеству

$$U_1 = \left\{ u(t) \in L_2(0, T) : \int_0^T u^2(t) dt \leq R^2 \right\} \quad (69)$$

или

$$U_2 = \{u(t) \in L_2(0, T) : \alpha \leq u(t) \leq \beta \text{ почти всюду на } [0, T]\}. \quad (70)$$

В задаче (5)–(8) взять  $u_{ij} = d_i u_j$ , где  $d_i = \frac{1}{h} \int_{s_i}^{s_{i+1}} d(\xi) d\xi$ ,  $i = 1, \dots, M-1$ ,  $j = 1, \dots, N$ ; управление  $u_\tau = (u_1, \dots, u_N) \in U_{1\tau} = \left\{ u_\tau : \sum_{j=1}^N \tau u_j^2 \leq R^2 \right\}$  в случае множества (69) и  $u_\tau \in U_{2\tau} = \{u_\tau : \alpha \leq u_j \leq \beta, j = 1, \dots, N\}$  — в случае (70). Доказать, что полученная разностная задача минимизации аппроксимирует исходную по функции. У к а з а н и е: воспользоваться оценкой (60).

У п р а ж н е н и е 3. Доказать дифференцируемость функций (1), (5) в пространствах  $L_2(Q)$ ,  $L_{2h\tau}$  соответственно. Описать методы проекции градиента, условного градиента для задач (1)–(3), (5)–(7), считая, что множество  $U$  имеет вид (4) или (68). Те же проблемы рассмотреть для множеств (69), (70).

У п р а ж н е н и е 4. Опираясь на представление решения краевой задачи (2), (3) в форме ряда (19), описать метод моментов для задачи управления  $x(s, T; u) = b(s)$ ; рассмотреть случай, когда множество  $U$  имеет вид (4), (68)–(70); дать обоснование метода [287; 802].

У п р а ж н е н и е 5. Рассмотреть задачу (1)–(3), когда в (3) граничные условия заменены на  $x|_{s=0} = x|_{s=l} = 0$ , и множество  $U$  определяется одним из равенств (4), (68)–(70). В задаче (5)–(7) граничные условия в (7) заменить на  $y_{0j} = 0$ ,  $y_{Mj} = 0$ ,  $j = 1, \dots, N$ , аппроксимирующие множества  $U_{h\tau}$ ,  $U_\tau$  взять соответственно из (8) или из упражнений 1, 2. Исследовать сходимость по функции полученных разностных задач минимизации. У к а з а н и е: получить аналоги оценок (9), (10), (20), (21), (60).

## § 8. Об аппроксимации максиминных задач

1. Пусть  $X, Y$  — множества произвольной природы,  $U, V$  — заданные множества,  $U \subseteq X$ ,  $V \subseteq Y$ , функция  $J(u, v)$  переменных  $u, v$  определена при всех  $(u, v) \in U \times V$ .

Рассмотрим задачу: найти величину

$$\sup_{u \in U} \inf_{v \in V} J(u, v) = J_* \quad (1)$$

Задачи такого типа возникают в теории игр и исследовании операций, в вопросах приближения функций, при исследовании влияния погрешности исходных данных на решение задачи минимизации и т. д. [2–4; 26; 30; 153; 218–220; 310–313; 340; 392; 399; 402; 419; 431; 432; 479; 501; 532; 537; 551–554; 569–571; 594; 595; 650; 687; 689; 720; 754; 755; 801].

Пусть  $X_N, Y_N$ ,  $N = 1, 2, \dots$ , — некоторые множества произвольной природы,  $U_N, V_N$  — заданные множества,  $U_N \subseteq X_N$ ,  $V_N \subseteq Y_N$ , функции  $I_N([u]_N, [v]_N)$  определены при всех  $([u]_N, [v]_N) \in U_N \times V_N$ ,  $N = 1, 2, \dots$ . Рассмотрим последовательность задач: найти

$$\sup_{[u]_N \in U_N} \inf_{[v]_N \in V_N} I_N([u]_N, [v]_N) = I_{N*}, \quad N = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Возникает интересный для приложений вопрос: каким условиям должны удовлетворять множества  $U_N, V_N$  и функции  $I_N([u]_N, [v]_N)$  для того, чтобы последовательность задач (2) аппроксимировала задачу (1) по функции, т. е.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} I_{N*} = J_*? \quad (3)$$

Следующая теорема дает ответ на этот вопрос.

**Т е о р е м а 1.** Для того чтобы последовательность задач (2) аппроксимировала задачу (1) по функции, необходимо и достаточно выполнения следующих двух условий:

1) для каждого натурального числа  $N \geq 1$  существует отображение  $P_N: X_N \rightarrow X$  и для любого  $[u]_N \in U_N$  существует отображение  $Q_N: Y \rightarrow Y_N$  такие, что  $P_N([u]_N) \in U$  при  $[u]_N \in U_N$ ,  $Q_N(v) \in V_N$  при  $v \in V$  и

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} [I_N([u]_N, Q_N(v_N)) - J(P_N([u]_N), v_N)] \leq 0 \quad (4)$$

при любом выборе  $[u]_N \in U_N$  и  $v_N \in V$  (подчеркнем, что отображение  $Q_N$  в (4), вообще говоря, зависит от  $[u]_N \in U_N$ );

2) для каждого натурального числа  $N \geq 1$  существует отображение  $\bar{Q}_N: X \rightarrow X_N$  и для любого  $u_N \in U$  существует отображение  $\bar{P}_N: Y_N \rightarrow Y$  такие, что  $\bar{Q}_N(u) \in U_N$  при  $u \in U$ ,  $\bar{P}_N([v]_N) \in V$  при  $[v]_N \in V_N$ ,

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} [J(u_N, \bar{P}_N([v]_N)) - I_N(\bar{Q}_N(u_N), [v]_N)] \leq 0 \quad (5)$$

при любом выборе  $u_N \in U$  и  $[v]_N \in V_N$  (подчеркнем, что отображение  $\bar{P}_N$  в (5), вообще говоря, зависит от  $u_N \in U$ ).

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Из определений величин  $J_*, I_{N*}$  следует, что

1) существуют  $u_{N*} \in U$ ,  $N = 1, 2, \dots$ , такие, что

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (J_* - J(u_{N*}, v_N)) \leq 0 \quad (6)$$

при любом выборе  $v_N \in V$ ;

2) существуют  $[u]_{N*} \in U_N$ ,  $N = 1, 2, \dots$ , такие, что

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (I_{N*} - I_N([u]_{N*}, [v]_N)) \leq 0 \quad (7)$$

при любом выборе  $[v]_N \in V_N$ ;

3) для каждого фиксированного  $u_N \in U$  найдется точка  $v_{N*} \in V$  такая, что

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (J(u_N, v_{N*}) - J_*) \leq 0; \quad (8)$$

4) для каждого фиксированного  $[u]_N \in U_N$  найдется точка  $[v]_{N*} \in V_N$  такая, что

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (I_N([u]_N, [v]_{N*}) - I_{N*}) \leq 0. \quad (9)$$

В самом деле, из определения верхней грани следует существование таких  $u_{N*} \in U$  и  $u_{N*} \in U_N$ , что

$$\inf_{v \in V} J(u_{N*}, v) \geq J_* - \frac{1}{N}, \quad \inf_{[v]_N \in V_N} I_N([u]_{N*}, [v]_N) \geq I_{N*} - \frac{1}{N}, \quad N = 1, 2, \dots$$

Вспоминая определение нижней грани, отсюда при любом выборе  $v_N \in V$ ,  $[v]_N \in V_N$  имеем

$$J(u_{N*}, v_N) \geq J_* - \frac{1}{N}, \quad I_N([u]_{N*}, [v]_N) \geq I_{N*} - \frac{1}{N},$$

или

$$J_* - J(u_{N*}, v_N) \leq \frac{1}{N}, \quad I_{N*} - I_N([u]_{N*}, [v]_N) \leq \frac{1}{N}, \quad N = 1, 2, \dots$$

Отсюда при  $N \rightarrow \infty$  получим неравенства (6) и (7).

Далее, зафиксируем произвольные  $u_N \in U$  и  $[u]_N \in U_N$ . По определению величин  $\inf_{v \in V} J(u_N, v)$ ,  $\inf_{[v]_N \in V_N} I_N([u]_N, [v]_N)$  найдутся  $v_{N*} \in V$ ,  $[v]_{N*} \in V_N$  такие, что

$$J(u_N, v_{N*}) \leq \inf_{v \in V} J(u_N, v) + \frac{1}{N} \leq J_* + \frac{1}{N},$$

$$I_N([u]_N, [v]_{N*}) \leq \inf_{[v]_N \in V_N} I_N([u]_N, [v]_N) + \frac{1}{N} \leq I_{N*} + \frac{1}{N},$$

или

$$J(u_N, v_{N*}) - J_* \leq \frac{1}{N}, \quad I_N([u]_N, [v]_{N*}) - I_{N*} \leq \frac{1}{N}, \quad N = 1, 2, \dots$$

Отсюда при  $N \rightarrow \infty$  получим неравенства (8), (9).

**Не о б о х о д и м о с т ь.** Пусть задачи (1), (2) таковы, что выполнено равенство (3). Покажем, что тогда необходимо выполняются условия 1, 2. Определим отображение  $P_N: X_N \rightarrow X$  так:  $P_N([u]_N) = u_{N*}$  при всех  $[u]_N \in X_N$ ,  $N = 1, 2, \dots$ , где  $u_{N*} \in U$  взяты из (6). Тогда из неравенства (6) следует, что

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (J_* - J(P_N([u]_N), v_N)) \leq 0, \quad [u]_N \in U_N, \quad v_N \in V. \quad (10)$$

Зафиксируем произвольный элемент  $[u]_N \in U_N$ , возьмем соответствующие ему  $[v]_{N*} \in V_N$  из (9) и определим отображение  $Q_N: Y \rightarrow Y_N$  так:  $Q_N(v) = [v]_{N*}$  при всех  $v \in Y$ ,  $N = 1, 2, \dots$ . Отсюда и из (9) имеем

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (I_N([u]_N, Q_N(v_N)) - I_{N*}) \leq 0, \quad [u]_N \in U_N, \quad v_N \in V. \quad (11)$$

Из (3), (10), (11) тогда следует, что

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (I_N([u]_N, Q_N(v_N)) - J(P_N([u]_N), v_N)) &\leq \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (I_{N*} - J_*) + \\ &+ \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (I_N([u]_N, Q_N(v_N)) - I_{N*}) + \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (J_* - J(P_N([u]_N), v_N)) \leq 0 \end{aligned}$$

при любом выборе  $[u]_N \in U_N$  и  $v_N \in V$ . Необходимость условия 1 установлена.

Далее, определим отображение  $\bar{Q}_N: X \rightarrow X_N$  так:  $\bar{Q}_N(u) = [u]_{N*}$  при всех  $u \in X$ ,  $N = 1, 2, \dots$ , где  $[u]_{N*}$  взяты из (7). Тогда из неравенства (7) следует, что

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (I_{N*} - I_N(\bar{Q}_N(u), [v]_N)) \leq 0, \quad u \in U, \quad [v]_N \in V_N. \quad (12)$$

Зафиксируем произвольный элемент  $u_N \in U$ , возьмем соответствующий ему  $v_{N*} \in V$  из (8) и определим отображение  $\bar{P}_N: Y_N \rightarrow Y$  так:  $\bar{P}_N([v]_N) = v_{N*}$  при всех  $[v]_N \in Y_N$ ,  $N = 1, 2, \dots$ . Отсюда и из (8) имеем

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (J(u_N, \bar{P}_N([v]_N)) - J_*) \leq 0, \quad u_N \in U, \quad [v]_N \in V_N. \quad (13)$$

Из (3), (12), (13) тогда следует, что

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (J(u_N, \bar{P}_N([v]_N)) - I_N(\bar{Q}_N(u_N), [v]_N)) &\leq \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (J_* - I_{N*}) + \\ &+ \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (J(u_N, \bar{P}_N([v]_N)) - J_*) + \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (I_{N*} - I_N(\bar{Q}_N(u_N), [v]_N)) \leq 0 \end{aligned}$$

при любом выборе  $u_N \in U$ ,  $[v]_N \in V_N$ . Необходимость условия 2 также установлена.

**Д о с т а т о ч н о с т ь.** Пусть выполнены условия 1, 2 теоремы. Покажем, что тогда имеет место равенство (3). Возьмем точки  $[u]_{N*} \in U_N$  из (7) и положим  $u_N = P_N([u]_{N*})$ , а затем из (8) возьмем точки  $v_{N*} \in V$ , соответствующие именно точкам  $u_N = P_N([u]_{N*})$ ,  $N = 1, 2, \dots$ . Тогда, полагая в (4)  $[u]_N = [u]_{N*}$ ,  $v_N = v_{N*}$  и взяв в качестве отображения  $Q_N$  то, которое соответствует точке  $[u]_{N*}$ , с учетом неравенств (7), (8) получим

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (I_{N*} - J_*) &\leq \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (I_{N*} - I_N([u]_{N*}, Q_N(v_{N*}))) + \\ &+ \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (I_N([u]_{N*}, Q_N(v_{N*})) - J(P_N([u]_{N*}), v_{N*})) + \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (J(P_N([u]_{N*}), v_{N*}) - J_*) \leq 0. \end{aligned}$$

Далее, возьмем точки  $u_{N*} \in U$  из (6) и положим  $[u]_N = \bar{Q}_N(u_{N*})$ , а затем из (9) возьмем точки  $[v]_{N*} \in V_N$ , соответствующие именно точкам  $[u]_N = \bar{Q}_N(u_{N*})$ ,  $N = 1, 2, \dots$ . Тогда, полагая в (5)  $u_N = u_{N*}$ ,  $[v]_N = [v]_{N*}$  и взяв в качестве отображения  $\bar{P}_N$  то, которое соответствует точке  $u_{N*}$ , с учетом неравенств (6), (9) получим

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (J_* - I_{N*}) &\leq \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (J_* - J(u_{N*}, \bar{P}_N([v]_{N*}))) + \\ &+ \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (J(u_{N*}, \bar{P}_N([v]_{N*})) - I_N(\bar{Q}_N(u_{N*}), [v]_{N*})) + \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (I_N(\bar{Q}_N(u_{N*}), [v]_{N*}) - I_{N*}) \leq 0. \end{aligned}$$

Таким образом, имеем

$$0 \leq - \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (J_* - I_{N*}) = \underline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (I_{N*} - J_*) \leq \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (I_{N*} - J_*) \leq 0,$$

или  $\underline{\lim}_{N \rightarrow \infty} I_{N*} = \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} I_{N*} = J_*$ , т. е. равенство (3). Теорема 1 доказана.  $\square$

**2.** Для иллюстрации теоремы 1 рассмотрим задачу: найти

$$\sup_{u \in U} \inf_{v \in V} J(u, v) = J_*, \quad (14)$$

где

$$J(u, v) = |x(T, u, v) - y|^2, \quad (15)$$

при следующих условиях:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + C(t)v(t) + f(t), \quad t_0 \leq t \leq T; \quad x(t_0) = x_0, \quad (16)$$

$$u = u(t) \in U = \{u(t) \in L_2^r[t_0, T]: u(t) \in P \text{ почти всюду на } [t_0, T]\}, \quad (17)$$

$$v = v(t) \in V = \{v(t) \in L_2^q[t_0, T]: v(t) \in Q \text{ почти всюду на } [t_0, T]\}, \quad (18)$$

где  $A(t), B(t), C(t), f(t)$  — матрицы порядка  $n \times n$ ,  $n \times r$ ,  $n \times q$ ,  $n \times 1$  соответственно: моменты  $t_0, T$ , точки  $x_0, y \in E^n$  заданы;  $P$  и  $Q$  — заданные множества из  $E^r$  и  $E^q$  соответственно;  $x(t, u, v)$  — решение задачи (16), соответствующее управлениям  $u = u(t) \in L_2^r[t_0, T]$ ,  $v = v(t) \in L_2^q[t_0, T]$ . Будем предполагать, что матрицы  $A(t), B(t), C(t), f(t)$  кусочно непрерывны на отрезке  $[t_0, T]$ .

Разобьем отрезок  $t_0 \leq t \leq T$  на  $N$  частей точками  $t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$  и, приняв эти точки в качестве узловых, уравнения (16) заменим разностными уравнениями с помощью схемы Эйлера. В результате придем к следующей разностной аппроксимации задачи (14)–(18): найти

$$\sup_{[u]_N \in U_N} \inf_{[v]_N \in V_N} I_N([u]_N, [v]_N) = I_{N*}, \quad (19)$$

где

$$I_N([u]_N, [v]_N) = |x_N([u]_N, [v]_N) - y|^2, \quad (20)$$

при условиях

$$x_{i+1} = x_i + \Delta t_i (A_i x_i + B_i u_i + C_i v_i + f_i), \quad i = 0, \dots, N-1, \quad (21)$$

$$[u]_N \in U_N = \{[u]_N = (u_0, \dots, u_{N-1}) \in L_{2N}^r : u_i \in P, \quad i = 0, \dots, N-1\}, \quad (22)$$

$$[v]_N \in V_N = \{[v]_N = (v_0, \dots, v_{N-1}) \in L_{2N}^q : v_i \in Q, \quad i = 0, \dots, N-1\}; \quad (23)$$

здесь  $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ ,  $A_i = A(t_i + 0)$ ,  $B_i = B(t_i + 0)$ ,  $C_i = C(t_i + 0)$ ,  $f_i = f(t_i + 0)$ ,  $[x([u]_N, [v]_N)]_N = (x_0, x_1([u]_N, [v]_N), \dots, x_N([u]_N, [v]_N))$  — решение задачи (21), соответствующее управлению

$$[u]_N \in L_{2N}^r, \quad [v]_N \in L_{2N}^q, \quad N = 1, 2, \dots$$

Опираясь на теорему 1, сформулируем условия, при которых последовательность задач (19)–(23) аппроксимирует задачу (14)–(18) по функции.

**Теорема 2.** Пусть матрицы  $A(t), B(t), C(t), f(t)$  кусочно непрерывны на отрезке  $[t_0, T]$ , множества  $P \subset E^r$ ,  $Q \subset E^q$  выпуклы, замкнуты и ограничены, разбиения  $\{t_i, i = 0, \dots, N\}$  отрезка  $[t_0, T]$  таковы, что

$$d_N = \max_{0 \leq i \leq N-1} \Delta t_i \leq \frac{(T - t_0)M_0}{N}, \quad N = 1, 2, \dots$$

Тогда

$$\lim_{N \rightarrow \infty} I_{N*} = J_*.$$

**Доказательство.** Заметим, что

$$\sup_{u \in U} \sup_{v \in V} \max_{t_0 \leq t \leq T} |x(t, u, v)| \leq C_0 < \infty, \quad (24)$$

$$\sup_{[u]_N \in U_N} \sup_{[v]_N \in V_N} \max_{0 \leq i \leq N} |x_i([u]_N, [v]_N)| \leq C_4 < \infty, \quad (25)$$

$$\sup_{u \in U} \sup_{v \in V} |x(t, u, v) - x(\tau, u, v)| \leq C_1 |t - \tau|, \quad t_0 \leq t, \tau \leq T, \quad (26)$$

где  $C_0, C_1, C_4$  — положительные константы. Оценки (24)–(26) доказываются так же, как соответствующие оценки (1.8), (1.16), (1.11).

Положим  $X = L_2^r[t_0, T]$ ,  $X_N = L_{2N}^r$ ,  $Y = L_2^q[t_0, T]$ ,  $Y_N = L_{2N}^q$ . Определим отображения  $\bar{Q}_N: X \rightarrow X_N$ ,  $Q_N: Y \rightarrow Y_N$ ,  $P_N: X_N \rightarrow X$ ,  $\bar{P}_N: Y_N \rightarrow Y$  следующим образом:

$$\bar{Q}_N(u) = (u_0, u_1, \dots, u_{N-1}): u_i = \frac{1}{\Delta t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} u(t) dt, \quad i = 0, \dots, N-1,$$

$$Q_N(v) = (v_0, v_1, \dots, v_{N-1}): v_i = \frac{1}{\Delta t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} v(t) dt, \quad i = 0, \dots, N-1,$$

$$P_N([u]_N) = u_i, \quad \bar{P}_N([v]_N) = v_i \quad \text{при} \quad t_i \leq t < t_{i+1}, \quad i = 0, \dots, N-1.$$

С помощью леммы 1.1 получаем, что

$$\bar{Q}_N(u) \in U_N \quad \text{при всех} \quad u \in U, \quad Q_N(v) \in V_N \quad \text{при всех} \quad v \in V,$$

$$P_N([u]_N) \in U \quad \text{при всех} \quad [u]_N \in U_N, \quad \bar{P}_N([v]_N) \in V \quad \text{при всех} \quad [v]_N \in V_N, \quad N = 1, 2, \dots$$

Справедливы оценки

$$\sup_{[u]_N \in U_N} \sup_{v \in V} \max_{0 \leq i \leq N} |x(t_i, P_N([u]_N), v) - x_i([u]_N, Q_N(v))| \leq \delta_N, \quad (27)$$

$$\sup_{[v]_N \in V_N} \sup_{u \in U} \max_{0 \leq i \leq N} |x(t_i, u, \bar{P}_N([v]_N)) - x_i(\bar{Q}_N(u), [v]_N)| \leq \delta_N, \quad (28)$$

где

$$\delta_N = e^{A_{\max}(T-t_0)M_0} \sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left( \|A(\tau) - A_i\| C_0 + A_{\max} C_1 d_N + \right. \\ \left. + \sup_P |u| \|B(\tau) - B_i\| + \sup_Q |v| \|C(\tau) - C_i\| + |f(\tau) - f_i| \right) d\tau \rightarrow 0$$

при  $N \rightarrow \infty$ . Оценки (27), (28) доказываются с использованием оценок (24), (26) совершенно так же, как аналогичные оценки (1.24), (1.25).

Рассуждая так же, как в леммах 1.3 и 1.4, с помощью оценок (24)–(28) получаем, что

$$|I_N([u]_N, Q_N(v)) - J(P_N([u]_N, v))| \leq C_5 \delta_N, \quad (29)$$

$$|J(u, \bar{P}_N([v]_N)) - I_N(\bar{Q}_N(u), [v]_N)| \leq C_5 \delta_N \quad (30)$$

при всех  $[u]_N \in U_N$ ,  $v \in V$ ,  $u \in U$ ,  $[v]_N \in V_N$ ,  $N = 1, 2, \dots$ , где  $C_5 = 2C_0 + 2C_4 + 2|y|$ .

Из оценок (29), (30) следуют неравенства (4), (5). Таким образом, все условия теоремы 1 выполнены. Отсюда следует, что  $\lim_{N \rightarrow \infty} I_{N*} = J_*$ . Теорема 2 доказана.  $\square$

**3.** В рассмотренной выше максиминной задаче (1), (2) множества  $U$ ,  $V$ , а также их «аппроксимации»  $U_N, V_N$  не связаны между собой, поэтому такие задачи принято называть максиминными задачами с несвязанными множествами. В приложениях, например в теории игр с непротивоположными интересами [220; 650; 720], часто встречаются максиминные задачи, в которых множества  $U$ ,  $V$  и их «аппроксимации» связаны друг с другом. Такие задачи называют максиминными задачами со связанными множествами.

Рассмотрим простейшую задачу такого типа. Пусть  $X, Y$  — множества произвольной природы,  $U$  — заданное подмножество из  $X$ , и пусть каждой точке  $u \in U$  поставлено в соответствие множество  $V(u) \subseteq Y$ . Пусть функция  $J(u, v)$  определена при всех  $(u, v) \in U \times Y$ . Рассмотрим задачу: найти величину

$$\sup_{u \in U} \inf_{v \in V(u)} J(u, v) = J_*. \quad (31)$$

Пусть  $X_N, Y_N$ ,  $N = 1, 2, \dots$ , — некоторые множества произвольной природы,  $U_N$  — заданное множество из  $X_N$ , и пусть каждому  $[u]_N \in U_N$  поставлено в соответствие множество  $V_N([u]_N) \subseteq Y_N$ , функция  $I_N([u]_N, [v]_N)$  определена при всех  $([u]_N, [v]_N) \in U_N \times Y_N$ . Рассмотрим последовательность задач: найти величины

$$\sup_{[u]_N \in U_N} \inf_{[v]_N \in V_N([u]_N)} I_N([u]_N, [v]_N) = I_{N*}, \quad N = 1, 2, \dots \quad (32)$$

В следующей теореме даются условия, при которых последовательность задач (32) аппроксимирует задачу (31) по функции, т. е.  $\lim_{N \rightarrow \infty} I_{N*} = J_*$ .

**Теорема 3.** Для того чтобы последовательность задач (32) аппроксимировала задачу (31) по функции, необходимо и достаточно выполнения следующих двух условий:

1) для каждого натурального числа  $N \geq 1$  существует отображение  $P_N: X_N \rightarrow X$  и для произвольного фиксированного  $[u]_N \in U_N$  существует отображение  $Q_N: Y_N \rightarrow Y_N$  такие, что

$$P_N([u]_N) \in U \text{ при всех } [u]_N \in U_N, \quad (33)$$

$$Q_N(v) \in V_N([u]_N) \text{ при всех } v \in V(P_N([u]_N)), \quad (34)$$

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (I_N([u]_N, Q_N(v_N)) - J(P_N([u]_N), v_N)) \leq 0 \quad (35)$$

при всех  $v_N \in V(P_N([u]_N))$ ,  $[u]_N \in U_N$ ;

2) для каждого натурального числа  $N \geq 1$  существует отображение  $\bar{Q}_N: X \rightarrow X_N$  и для любого фиксированного  $u_N \in U$  существует  $\bar{P}_N: Y_N \rightarrow Y$  такие, что

$$\bar{Q}_N(u) \in U_N \text{ при всех } u \in U, \quad (36)$$

$$\bar{P}_N([v]_N) \in V(u_N) \text{ при всех } [v]_N \in V_N(\bar{Q}_N(u_N)), \quad (37)$$

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (J(u_N, \bar{P}_N([v]_N)) - I_N(\bar{Q}_N(u_N), [v]_N)) \leq 0 \quad (38)$$

при всех  $[v]_N \in V_N(\bar{Q}_N(u_N))$ ,  $u_N \in U$ .



**Доказательство.** Из определений верхней и нижней граней, величин  $J_*$ ,  $I_{N*}$  следует, что

- 1) для каждого натурального  $N \geq 1$  существуют  $u_{N*} \in U$  такие, что

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (J_* - J(u_{N*}, v_N)) \leq 0 \quad \text{при всех } v_N \in V(u_{N*}); \quad (39)$$

- 2) для каждого  $N \geq 1$  существуют  $[u]_{N*} \in U_N$  такие, что

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (I_{N*} - I_N([u]_{N*}, [v]_N)) \leq 0 \quad (40)$$

при всех  $[v]_N \in V_N([u]_{N*})$ ;

- 3) для любого  $u_N \in U$  существует элемент  $v_{N*} \in V(u_N)$  такой, что

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (J(u_N, v_{N*}) - J_*) \leq 0; \quad (41)$$

- 4) для любого  $[u]_N \in U_N$  существует  $[v]_{N*} \in V_N([u]_N)$  такой, что

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (I_N([u]_N, [v]_{N*}) - I_{N*}) \leq 0. \quad (42)$$

Справедливость соотношений (39)–(42) устанавливается так же, как и аналогичных соотношений (6)–(9).

**Необходимость.** Пусть  $\lim_{N \rightarrow \infty} I_{N*} = J_*$ . Определим отображение  $P_N: X_N \rightarrow X$  так:  $P_N([u]_N) = u_{N*}$  при всех  $[u]_N \in X_N$ ,  $N = 1, 2, \dots$ , где  $u_{N*} \in U$  взят из (39). Ясно, что тогда включение (33) выполнено и, кроме того, согласно (39)

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (J_* - J(P_N([u]_N), v_N)) \leq 0, \quad v_N \in V(u_{N*}).$$

Возьмем произвольный элемент  $[u]_N \in U_N$ , по нему из (42) найдем соответствующий  $[v]_{N*} \in V_N([u]_N)$  и определим отображение  $Q_N: Y \rightarrow Y_N$  так:  $Q_N(v) = [v]_{N*}$  при всех  $v \in Y$ ,  $N = 1, 2, \dots$ . Тогда справедливо включение (34) и, кроме того, согласно (42)

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (I_N([u]_N, Q_N(v_N)) - I_{N*}) \leq 0.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} & \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (I_N([u]_N, Q_N(v_N)) - J(P_N([u]_N), v_N)) \leq \\ & \leq \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (I_{N*} - J_*) + \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (I_N([u]_N, Q_N(v_N)) - I_{N*}) + \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (J_* - J(P_N([u]_N), v_N)) \leq 0 \end{aligned}$$

при всех  $v_N \in V(P_N([u]_N))$ ,  $[u]_N \in U_N$ . Необходимость условия 1 доказана.

Далее, определим отображение  $\bar{Q}_N: X \rightarrow X_N$  так:  $\bar{Q}_N(u) = [u]_{N*}$  при всех  $u \in X$ ,  $N = 1, 2, \dots$ , где  $[u]_{N*}$  взят из (40). Ясно, что тогда включение (36) выполнено и, кроме того, согласно (40)

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (I_{N*} - I_N(\bar{Q}_N(u_N), [v]_N)) \leq 0.$$

Возьмем произвольный элемент  $u_N \in U$ , по нему из (41) найдем соответствующий  $v_{N*} \in V(u_N)$  и определим отображение  $\bar{P}_N: Y_N \rightarrow Y$  так:  $\bar{P}_N([v]_N) = v_{N*}$  при всех  $[v]_N \in Y_N$ ,  $N = 1, 2, \dots$ . Тогда справедливо включение (37) и, кроме того, согласно (41)

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (J(u_N, \bar{P}_N([v]_N)) - J_*) \leq 0.$$

Отсюда непосредственно следует, что

$$\begin{aligned} & \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (J(u_N, \bar{P}_N([v]_N)) - I_N(\bar{Q}_N(u_N), [v]_N)) \leq \\ & \leq \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (J_* - I_{N*}) + \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (J(u_N, \bar{P}_N([v]_N)) - J_*) + \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (I_{N*} - I_N(\bar{Q}_N(u_N), [v]_N)) \leq 0 \end{aligned}$$

при всех  $[v]_N \in V_N(\bar{Q}_N(u_N))$ ,  $u_N \in U$ . Необходимость условия 2 также доказана.

**Достаточность.** Пусть выполнены условия 1, 2. Возьмем  $[u]_{N*} \in U_N$  из (40), положим  $u_N = P_N([u]_{N*})$  и из (41) возьмем  $v_{N*} \in V(u_N) = V(P_N([u]_{N*}))$ . Обозначим

$[v]_N = Q_N(v_{N*})$ . Из (34) тогда имеем  $[v]_N \in V_N([u]_{N*})$ ,  $N = 1, 2, \dots$ . Пользуясь условием (35) при  $[u]_N = [u]_{N*}$ ,  $v_N = v_{N*}$ , с учетом (40), (41) получим

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (I_{N*} - J_*) &\leq \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (I_{N*} - I_N([u]_{N*}, [v]_N)) + \\ &+ \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (I_N([u]_{N*}, Q_N(v_{N*})) - J(P_N([u]_{N*}, v_{N*})) + \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (J(u_N, v_{N*}) - J_*) \leq 0. \end{aligned}$$

Далее, возьмем  $u_{N*} \in U$  из (41), положим  $[u]_N = \bar{Q}_N(u_{N*})$  и из (42) возьмем соответствующий элемент  $[v]_{N*} \in V_N([u]_N) = V_N(\bar{Q}_N(u_{N*}))$ . Обозначим  $v_N = \bar{P}_N([v]_{N*})$ . Из (37) тогда следует, что  $v_N \in V(u_{N*})$ ,  $N = 1, 2, \dots$ . Пользуясь условием (38) при  $u_N = u_{N*}$ ,  $[v]_N = [v]_{N*}$ , с учетом (39), (42) имеем

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (J_* - I_{N*}) &\leq \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (J_* - J(u_{N*}, v_N)) + \\ &+ \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (J(u_{N*}, \bar{P}_N([v]_{N*})) - I_N(\bar{Q}_N(u_{N*}), [v]_{N*})) + \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (I_N([u]_N, [v]_{N*}) - I_{N*}) \leq 0. \end{aligned}$$

Таким образом,  $\underline{\lim} I_{N*} = \overline{\lim} I_{N*} = J_*$ , т. е.  $\lim_{N \rightarrow \infty} I_{N*} = J_*$ . Теорема 3 доказана.  $\square$

Для иллюстрации теоремы 3 рассмотрим задачу (31) для случая, когда

$$J(u, v) = |x(T, u, v) - y|^2,$$

где  $x(t, u, v)$  — решение задачи (16),  $u \in X = L_2^r[t_0, T]$ ,  $v \in Y = L_2^q[t_0, T]$ , множества  $U$  и  $V$  имеют вид (17), (18), а множество  $V(u)$  при каждом  $u \in U$  определяется так:

$$V(u) = \left\{ v \in V : \int_{t_0}^T g(u(t), v(t)) dt \leq 0 \right\}. \quad (43)$$

Эту задачу кратко будем называть задачей (31), (15)–(18), (43).

Для аппроксимации этой задачи рассмотрим последовательность задач (32), где  $I_N([u]_N, [v]_N) = |x_N([u]_N, [v]_N) - y|^2$ ;  $x_i([u]_N, [v]_N)$ ,  $i = 0, \dots, N$ , — решение задачи (21), соответствующее управлению  $[u]_N \in X_N = L_{2N}^r$ ,  $[v]_N \in Y_N = L_{2N}^q$ ; множества  $U_N$ ,  $V_N$  имеют вид (22), (23), а множество  $V_N([u]_N)$  при каждом  $[u]_N = (u_0, u_1, \dots, u_{N-1}) \in U_N$  строится так:

$$V_N([u]_N) = \left\{ [v]_N = (v_0, v_1, \dots, v_{N-1}) \in V_N : \sum_{i=0}^{N-1} g(u_i, v_i) \Delta t_i \leq 0 \right\}. \quad (44)$$

Эти задачи кратко будем называть задачами (32), (20)–(23), (44).

Оказывается, если выполнены все условия теоремы 2 и, кроме того, функция  $g(u, v)$  непрерывна по совокупности  $(u, v) \in P \times Q$ , выпукла по переменной  $v \in Q$  при каждом фиксированном  $u \in P$  и вогнута по переменной  $u \in P$  при каждом фиксированном  $v \in Q$ , то последовательность задач (32), (20)–(23), (44) аппроксимирует задачу (31), (15)–(18), (43) по функции. Для того чтобы убедиться в этом, достаточно проверить выполнение условий теоремы 3.

Определим отображения  $P_N$ ,  $\bar{P}_N$ ,  $Q_N$ ,  $\bar{Q}_N$  так же, как в задачах (14)–(18) и (20)–(23). Тогда условия (33), (36) будут выполняться. Проверим справедливость включений (34), (37). С этой целью заметим, что из выпуклости  $g(u, v)$  по переменной  $v$  следует неравенство

$$g\left(u, \frac{1}{\Delta t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} v(t) dt\right) \leq \frac{1}{\Delta t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} g(u, v(t)) dt, \quad i = 0, \dots, N-1, \quad u \in U, \quad (45)$$

обобщающее неравенство

$$g\left(u, \sum_{j=1}^m \alpha_j v_j\right) \leq \sum_{j=1}^m g(u, v_j) \alpha_j, \quad \alpha_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^m \alpha_j = 1$$

(см. неравенство (4.2.2)). Аналогично, из вогнутости  $g(u, v)$  по переменной  $u$  получаем

$$g\left(\frac{1}{\Delta t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} u(t) dt, v\right) \geq \frac{1}{\Delta t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} g(u(t), v) dt, \quad i = 0, \dots, N-1, \quad v \in V. \quad (46)$$

Зафиксируем некоторое  $[u]_N = (u_0, \dots, u_{N-1})$  и возьмем произвольное управление  $v \in V(P_N([u]_N))$ , т. е.  $v \in V$ ,  $\int_{t_0}^T g(P_N([u]_N), v(t)) dt \leq 0$ . Тогда для  $Q_N(v) = (v_0, v_1, \dots, v_{N-1})$ ,  $v_i = \frac{1}{\Delta t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} v(t) dt$ ,  $i = 0, \dots, N-1$ , с учетом неравенства (45) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{N-1} g(u_i, v_i) \Delta t_i &= \sum_{i=0}^{N-1} g\left(u_i, \frac{1}{\Delta t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} v(t) dt\right) \Delta t_i \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} g(u_i, v(t)) dt = \int_{t_0}^T g(P_N([u]_N), v(t)) dt \leq 0. \end{aligned}$$

Это означает, что  $Q_N(v) \in V_N([u]_N)$ . Включение (34) доказано.

Далее, зафиксируем некоторое  $u_N = u_N(t) \in U$ , найдем  $\bar{Q}_N(u_N) = (\bar{u}_0, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{N-1})$ ,  $\bar{u}_i = \frac{1}{\Delta t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} u_N(t) dt$ ,  $i = 0, \dots, N-1$ , и возьмем произвольное управление  $[v]_N = (v_0, \dots, v_{N-1}) \in V_N(\bar{Q}_N(u_N))$ , т. е.  $[v]_N \in V_N$ ,  $\sum_{i=0}^{N-1} g_i(\bar{u}_i, v_i) \Delta t_i \leq 0$ . С учетом неравенства (46) тогда имеем

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^T g(u_N(t), \bar{P}_N([v]_N)) dt &= \sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} g(u_N(t), v_i) dt \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^{N-1} g\left(\frac{1}{\Delta t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} u_N(t) dt, v_i\right) \Delta t_i = \sum_{i=0}^{N-1} g(\bar{u}_i, v_i) \Delta t_i \leq 0. \end{aligned}$$

Это означает, что  $\bar{P}_N([v]_N) \in V(u_N)$ . Включение (37) также доказано. Неравенства (35), (38) являются следствием неравенств (27), (28).

Таким образом, все условия теоремы 3 выполнены. Согласно этой теореме последовательность задач (32), (20)–(23), (44) аппроксимирует задачу (31), (15)–(18), (43) по функции.

4. В конкретных максиминных задачах построение аппроксимирующих задач, удовлетворяющих условиям сформулированных выше теорем, далеко не всегда является простым делом. Например, в задачах вида (31), (32) может встретиться трудности построение отображений  $P_N, Q_N, \bar{P}_N, \bar{Q}_N$ , удовлетворяющих условиям (33), (34), (36), (37), обеспечение непустоты множеств  $U_N, V_N([u]_N)$ . Для преодоления указанных трудностей часто бывает полезно работать с расширениями множеств, встречающихся в исходной и аппроксимирующей максиминных задачах [3; 153; 594; 595]. Проиллюстрируем эту идею на примере задачи (31).

**Теорема 4.** Для того чтобы последовательность задач (32) аппроксимировала задачу (31) по функции, необходимо и достаточно, чтобы существовали последовательности множеств  $\{U^{\varepsilon_N}\} \subset X$ ,  $\{V^{\chi_N}(u)\}$ ,  $\{V^{\gamma_N}(u)\} \in Y$  таких, что  $U^{\varepsilon_N} \neq \emptyset$  и  $V^{\chi_N}(u) \neq \emptyset$  при  $u \in U$ ,  $V^{\gamma_N}(u) \neq \emptyset$  при  $u \in U^{\varepsilon_N}$ ,  $N = 1, 2, \dots$ , функция  $J(u, v)$  определена при всех  $(u, v) \in \left(\left(\bigcup_{N=1}^{\infty} U^{\varepsilon_N}\right) \cup U\right) \times Y$ ,  $u$ , кроме того, выполнены следующие условия:

1) для каждого натурального числа  $N \geq 1$  существует отображение  $P_N: X_N \rightarrow X$  и для произвольного фиксированного  $[u]_N \in U_N$  существует отображение  $Q_N: Y \rightarrow Y_N$  такие, что

$$P_N([u]_N) \in U^{\varepsilon_N}, \quad (47)$$

$$Q_N(v) \in V_N([u]_N) \quad \text{при всех } v \in V^{\gamma_N}(P_N([u]_N)), \quad (48)$$

$$\varlimsup_{N \rightarrow \infty} (I_N([u]_N, Q_N(v_N)) - J(P_N([u]_N, v_N))) \leq 0 \quad (49)$$

при всех  $v_N \in V^{\gamma N}(P_N([u]_N))$ ;

2) для каждого натурального числа  $N \geq 1$  существует отображение  $\bar{Q}_N: X \rightarrow X_N$  и для любого фиксированного  $u_N \in U$  существует отображение  $\bar{P}_N: Y_N \rightarrow Y$  такие, что

$$\bar{Q}_N(u_N) \in U_N, \quad (50)$$

$$\bar{P}_N([v]_N) \in V^{\chi N}(u_N) \text{ при всех } [v]_N \in V_N(\bar{Q}_N(u_N)), \quad (51)$$

$$\varlimsup_{N \rightarrow \infty} (J(u_N, \bar{P}_N([v]_N)) - I_N(\bar{Q}_N(u_N), [v]_N)) \leq 0 \quad (52)$$

при всех  $[v]_N \in V_N(\bar{Q}_N(u_N))$ ;

3) справедливы неравенства

$$\varlimsup_{N \rightarrow \infty} J_*(0, \chi_N) \geq J_*, \quad (53)$$

$$\varlimsup_{N \rightarrow \infty} J_*(\varepsilon_N, \gamma_N) \leq J_*, \quad (54)$$

$$\text{где } J_*(\varepsilon_N, \gamma_N) = \sup_{u \in U^{\varepsilon N}} \inf_{v \in V^{\gamma N}(u)} J(u, v), \quad J_*(0, \chi_N) = \sup_{u \in U} \inf_{v \in V^{\chi N}(u)} J(u, v).$$

До к а з а т е л ь с т в о. Из определений величин  $J_*(\varepsilon_N, \gamma_N)$ ,  $J_*(0, \chi_N)$ ,  $I_{N*}$  следует, что

1) для каждого  $N \geq 1$  существуют  $u_{N*} \in U$  такие, что

$$\varlimsup_{N \rightarrow \infty} (J_*(0, \chi_N) - J(u_{N*}, v_N)) \leq 0 \quad (55)$$

при любом выборе  $v_N \in V^{\chi N}(u_{N*})$ ;

2) для каждого  $N \geq 1$  существуют  $[u]_{N*} \in U_N$  такие, что

$$\varlimsup_{N \rightarrow \infty} (I_{N*} - I_N([u]_{N*}, [v]_N)) \leq 0 \quad (56)$$

при любом выборе  $[v]_N \in V_N([u]_{N*})$ ;

3) для каждого фиксированного элемента  $u_N \in U^{\varepsilon N}$  найдется элемент  $v_{N*} \in V^{\gamma N}(u_N)$  такой, что

$$\varlimsup_{N \rightarrow \infty} (J(u_N, v_{N*}) - J_*(\varepsilon_N, \gamma_N)) \leq 0; \quad (57)$$

4) для каждого фиксированного элемента  $[u]_N \in U_N$  найдется элемент  $[v]_{N*} \in V_N([u]_N)$  такой, что

$$\varlimsup_{N \rightarrow \infty} (I_N([u]_N, [v]_{N*}) - I_{N*}) \leq 0. \quad (58)$$

Справедливость соотношений (55)–(58) устанавливается так же, как и аналогичных соотношений (6)–(9) или (39)–(42).

Не о б о з н а ч е н и я. Пусть  $\lim_{N \rightarrow \infty} I_{N*} = J_*$ . Положим  $U^{\varepsilon N} = U$ ,  $V^{\gamma N}(u) = V^{\chi N}(u) = V(u)$  при всех  $u \in U$ ,  $N = 1, 2, \dots$  Тогда

$$J_*(\varepsilon_N, \gamma_N) = J_*(0, \chi_N) = J_*, \quad N = 1, 2, \dots, \quad (59)$$

и условия (53), (54) тривиально выполняются. Определим отображение  $P_N: X_N \rightarrow X$  так:  $P_N([u]_N) = u_{N*}$  при всех  $[u]_N \in X_N$ ,  $N = 1, 2, \dots$ , где элемент  $u_{N*} \in U = U^{\varepsilon N}$  взят из (55). Ясно, что тогда включение (47) выполнено и, кроме того, согласно (55), (59) имеем  $\varlimsup_{N \rightarrow \infty} (J_* - J(P_N([u]_N), v_N)) \leq 0$  при всех  $v_N \in V^{\chi N}(u_{N*}) = V(u_{N*}) = V(P_N([u]_N)) = V^{\gamma N}(P_N([u]_N))$ ,  $[u]_N \in U_N$ . Далее, зафиксируем любой элемент  $[u]_N \in U_N$ , по нему из (58) найдем соответствующий  $[v]_{N*} \in V_N([u]_N)$  и определим отображение  $Q_N: Y \rightarrow Y_N$  так:  $Q_N(v) = [v]_{N*}$  при всех  $v \in Y$ ,  $N = 1, 2, \dots$  Тогда справедливо включение (48) и, кроме того, согласно (58) имеем  $\varlimsup_{N \rightarrow \infty} (I_N([u]_N, Q_N(v_N)) - I_{N*}) \leq 0$  при всех  $v_N \in V^{\gamma N}(P_N([u]_N))$ . Отсюда следует, что

$$\varlimsup_{N \rightarrow \infty} (I_N([u]_N, Q_N(v_N)) - J(P_N([u]_N), v_N)) \leq$$

$$\leq \varlimsup_{N \rightarrow \infty} (I_{N*} - J_*) + \varlimsup_{N \rightarrow \infty} (I_N([u]_N, Q_N(v_N)) - I_{N*}) + \varlimsup_{N \rightarrow \infty} (J_* - J(P_N([u]_N), v_N)) \leq 0$$

при всех  $v_N \in V^{\gamma N}(P_N([u]_N))$ ,  $[u]_N \in U_N$ . Необходимость условия 1 доказана.

Далее, определим отображение  $\bar{Q}_N: X \rightarrow X_N$  так:  $\bar{Q}_N(u) = [u]_{N*}$  при всех  $u \in X$ ,  $N = 1, 2, \dots$ , где  $[u]_{N*}$  взят из (56). Тогда включение (50), очевидно, выполнено и, кроме того, согласно (56) имеем  $\varlimsup_{N \rightarrow \infty} (I_{N*} - I_N(\bar{Q}_N(u_N), [v]_N)) \leq 0$  при всех  $[v]_N \in V_N(\bar{Q}_N(u_N))$ ,  $u_N \in U$ . Зафиксируем произвольный элемент  $u_N \in U = U^{\varepsilon_N}$ , по нему из (57) найдем соответствующий  $v_{N*} \in V^{\gamma_N}(u_N) = V^{\chi_N}(u_N)$  и определим отображение  $\bar{P}_N: Y_N \rightarrow Y$  так:  $\bar{P}_N([v]_N) = v_{N*}$  при всех  $[v]_N \in Y_N$ ,  $N = 1, 2, \dots$ . Тогда справедливо включение (51) и, кроме того, согласно (57), (59) имеем  $\varlimsup_{N \rightarrow \infty} (J(u_N, \bar{P}_N([v]_N)) - J_*) \leq 0$  при всех  $[v]_N \in V_N(\bar{Q}_N(u_N))$ . Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} & \varlimsup_{N \rightarrow \infty} (J(u_N, \bar{P}_N([v]_N)) - I_N(\bar{Q}_N(u_N), [v]_N)) \leq \\ & \leq \varlimsup_{N \rightarrow \infty} (J_* - I_{N*}) + \varlimsup_{N \rightarrow \infty} (J(u_N, \bar{P}_N([v]_N)) - J_*) + \varlimsup_{N \rightarrow \infty} (I_{N*} - I_N(\bar{Q}_N(u_N), [v]_N)) \leq 0 \end{aligned}$$

при всех  $[v]_N \in V_N(\bar{Q}_N(u_N))$ ,  $u_N \in U$ . Необходимость условия 2 также установлена.

Достаточность. Пусть выполнены условия 1–3. Покажем, что тогда  $\lim_{N \rightarrow \infty} I_{N*} = J_*$ . Возьмем  $[u]_{N*} \in U_N$  из (56), положим  $u_N = P_N([u]_{N*})$ , а из (57) возьмем  $v_{N*} \in V^{\gamma_N}(u_N) = V^{\gamma_N}(P_N([u]_{N*}))$  и обозначим  $[v]_N = Q_N(v_{N*})$ . Из (48) тогда имеем  $[v]_N \in V_N([u]_{N*})$ ,  $N = 1, 2, \dots$ . Пользуясь условиями (48), (49) при  $[u]_N = [u]_{N*}$ ,  $v_N = v_{N*}$ , с учетом соотношений (54), (56), (57), получим

$$\begin{aligned} \varlimsup_{N \rightarrow \infty} (I_{N*} - J_*) & \leq \varlimsup_{N \rightarrow \infty} (I_{N*} - I_N([u]_{N*}, [v]_N)) + \varlimsup_{N \rightarrow \infty} (I_N([u]_{N*}, Q_N(v_{N*})) - \\ & - J(P_N([u]_{N*}), v_{N*})) + \varlimsup_{N \rightarrow \infty} (J(u_N, v_{N*}) - J_*(\varepsilon_N, \gamma_N)) + \varlimsup_{N \rightarrow \infty} (J_*(\varepsilon_N, \gamma_N) - J_*) \leq 0. \end{aligned}$$

Далее, возьмем  $u_{N*} \in U$  из (55), положим  $[u]_N = \bar{Q}_N(u_{N*})$ , а из (58) возьмем  $[v]_{N*} \in V_N([u]_N) = V_N(\bar{Q}_N(u_{N*}))$  и обозначим  $v_N = \bar{P}_N([v]_{N*})$ . Из (51) тогда следует, что  $v_N \in V^{\chi_N}(u_{N*})$ ,  $N = 1, 2, \dots$ . Пользуясь условиями (51), (52) при  $u_N = u_{N*}$ ,  $[v]_N = [v]_{N*}$ , с учетом соотношений (53), (55), (58) имеем

$$\begin{aligned} \varlimsup_{N \rightarrow \infty} (J_* - I_{N*}) & \leq \varlimsup_{N \rightarrow \infty} (I_N([u]_N, [v]_{N*}) - I_{N*}) + \varlimsup_{N \rightarrow \infty} (J(u_{N*}, \bar{P}_N([v]_{N*})) - \\ & - I_N(\bar{Q}_N(u_{N*}), [v]_{N*})) + \varlimsup_{N \rightarrow \infty} (J_*(0, \chi_N) - J(u_{N*}, v_N)) + \varlimsup_{N \rightarrow \infty} (J_* - J_*(0, \chi_N)) \leq 0. \end{aligned}$$

Таким образом,  $\varliminf_{N \rightarrow \infty} I_{N*} = \varlimsup_{N \rightarrow \infty} I_{N*} = J_*$ , т. е.  $\lim_{N \rightarrow \infty} I_{N*} = J_*$ . Теорема 4 доказана.  $\square$

Для иллюстрации теоремы 4 рассмотрим задачу (31) для случая, когда  $J(u, v) = |x(T, u, v) - y|^2$ , где  $x(t, u, v)$ ,  $t_0 \leq t \leq T$ , — решение задачи (16), соответствующее управлению  $u \in X = L_2^r[t_0, T]$ ,  $v \in Y = L_2^q[t_0, T]$ .

$$W = \{u = u(t) \in L_2^r[t_0, T]: u(t) \in P \text{ почти всюду на } [t_0, T]\}, \quad (60)$$

$$V = \{v = v(t) \in L_2^q[t_0, T]: v(t) \in Q \text{ почти всюду на } [t_0, T]\}, \quad (61)$$

$$V(u) = \{v = v(t) \in V: x(t, u, v) \in G, \quad t_0 \leq t \leq T\}, \quad (62)$$

$$U = \{u \in W: V(u) \neq \emptyset\}; \quad (63)$$

здесь  $P, Q, G$  — заданные множества из евклидовых пространств  $E^r, E^q, E^n$  соответственно. Эту задачу кратко будем называть задачей (31), (15), (16), (60)–(63). Для аппроксимации этой задачи рассмотрим последовательность задач (32), где  $I_N([u]_N, [v]_N) = |x_N([u]_N, [v]_N) - y|^2$ ,  $x_i([u]_N, [v]_N)$ ,  $i = 0, \dots, N$  — решение задачи (21), соответствующее управлениям  $[u]_N \in X_N = L_{2N}^r$ ,  $[v]_N \in Y_N = L_{2N}^q$ ,

$$W_N = \{[u]_N = (u_0, \dots, u_{N-1}) \in L_{2N}^r: u_i \in P, i = 0, \dots, N-1\}, \quad (64)$$

$$V_N = \{[v]_N = (v_0, \dots, v_{N-1}) \in L_{2N}^q: v_i \in Q, i = 0, \dots, N-1\}, \quad (65)$$

$$V_N([u]_N) = \{[v]_N \in V_N: x_i([u]_N, [v]_N) \in G^{\mu_N}, i = 0, \dots, N\}, \quad (66)$$

$U_N = \{[u]_N \in W_N: \text{существует } [v]_N \in V_N \text{ такой, что}$

$$x_i([u]_N, [v]_N) \in G^{\xi_N}, i = 0, \dots, N\}, \quad N = 1, 2, \dots \quad (67)$$

Эти разностные задачи кратко будем называть задачами (32), (20), (21), (64)–(67).

Для исследования поведения аппроксимирующих разностных задач определим отображения  $P_N, Q_N, \bar{P}_N, \bar{Q}_N$  так же, как в задачах (14)–(18), (19)–(23). Будем предполагать, что выполнены все условия теоремы 2 и, кроме того,  $G$  выпукло и замкнуто. Тогда справедливы включения  $\bar{Q}_N(u) \in W_N$  при  $u \in W$ ,  $Q_N(v) \in V_N$  при  $v \in V$ ,  $P_N([u]_N) \in W$  при  $[u]_N \in W_N$ ,  $\bar{P}_N([v]_N) \in V$  при  $[v]_N \in V_N$ . Кроме того, нетрудно видеть, что здесь по-прежнему сохраняют силу оценки (24)–(30) с заменой в них  $U$  на  $W$ ,  $U_N$  на  $W_N$ , где  $W, W_N$  взяты из (60), (64). Имеют место также неравенства

$$\sup_{[u]_N \in W_N} \sup_{[v]_N \in V_N} |x_i([u]_N, [v]_N) - x(t_i, P_N([u]_N), \bar{P}_N([v]_N))| \leq \delta_N, \quad (68)$$

$$\sup_{u \in W} \sup_{v \in V} \max_{0 \leq i \leq N} |x_i(\bar{Q}_N(u), Q_N(v)) - x(t_i, u, v)| \leq \delta_N, \quad (69)$$

где  $\delta_N$  взято из (27), (28).

Для того чтобы задача (31), (15), (16), (60)–(63) имела смысл, естественно предполагать, что множество (63) непусто. Оказывается, что тогда при достаточно больших  $\mu_N, \xi_N$  множества (66), (67) также непусты. А именно, выберем  $\mu_N, \xi_N$  в (66) так, чтобы

$$\delta_N \leq \xi_N \leq \mu_N, \quad N = 1, 2, \dots \quad (70)$$

Возьмем какие-либо  $u \in U, v \in V(u)$ . Тогда  $x(t, u, v) \in G^\delta, t_0 \leq t \leq T$ . Отсюда в силу (69), (70) имеем  $x_i(\bar{Q}_N(u), Q_N(v)) \in G^N \subset G^{\xi_N}, i = 0, \dots, N$ . Это значит, что  $Q_N(u) \in U_N$ , т. е.  $U_N \neq \emptyset$ . Кроме того, из (70) следует, что  $V_N([u]_N) \neq \emptyset$  при всех  $[u]_N \in U_N$ . Таким образом, задачи (32), (20), (21), (64)–(67) имеют смысл, и величины  $I_{N*}, N = 1, 2, \dots$ , определены.

В дальнейшем будем предполагать, что выполнено условие: существуют число  $\beta > 0$  и управления  $u_0 \in W, v_0 \in V$  такие, что  $x(t, u_0, v_0) \in G^{-\beta}, t_0 \leq t \leq T$ . Введем множества

$$V^{\gamma N}(u) = \{v \in V : x(t, u, v) \in G^{\gamma N}, t_0 \leq t \leq T\}, \quad (71)$$

$$U^{\varepsilon N} = \{u \in U : V^{\varepsilon N}(u) \neq \emptyset\}, \quad (72)$$

где

$$\varepsilon_N \geq \xi_N + \delta_N + C_1 d_N, \quad \gamma_N = M_2 \frac{\varepsilon_N}{(\beta + \varepsilon_N)}, \quad N = 1, 2, \dots \quad (73)$$

Здесь  $M_2 = 2R(T - t_0)^{1/2} M_1$ ,  $R$  — диаметр множества  $P$ , а константа  $M_1$  взята из неравенства (см. (1.13))  $\sup_{v \in V} \sup_{t_0 \leq t \leq T} |x(t, u, v) - x(t, w, v)| \leq M_1 \|u - w\|_{L_2}$ .

Будем предполагать, что

$$\mu_N \geq \delta_N + \gamma_N, \quad \chi_N \geq \mu_N + \delta_N + C_1 d_N, \quad N = 1, 2, \dots, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \chi_N = 0. \quad (74)$$

Проверим выполнение условий теоремы 4. Заметим, что  $V(u) \subset V^{\varepsilon N}(u)$  при всех  $u \in U$ . Это значит, что  $U \subset U^{\varepsilon N}$ , т. е.  $U^{\varepsilon N} \neq \emptyset$ . Непустота множеств  $V^{\gamma N}(u)$  при всех  $u \in U^{\varepsilon N}$  будет установлена ниже перед проверкой условия (54).

Зафиксируем  $N \geq 1$  и  $[u]_N \in U_N$ . Согласно (67) это значит, что существует  $[v]_N \in V_N$  такой, что  $x_i([u]_N, [v]_N) \in G^{\xi_N}, i = 0, \dots, N$ . Отсюда с учетом соотношений (26), (68), (73) имеем  $x(t, P_N([u]_N), \bar{P}_N([v]_N)) \in G^{\varepsilon N}, t_0 \leq t \leq T$ . Это значит, что  $\bar{P}_N([v]_N) \in V^{\varepsilon N}(P_N([u]_N))$  и  $P_N([u]_N) \in U^{\varepsilon N}$ . Включение (47) установлено. Далее, возьмем любое  $v \in V^{\gamma N}(P_N([u]_N))$ . Согласно (71), тогда  $x(t, P_N([u]_N), v) \in G^{\gamma N}, t_0 \leq t \leq T$ . Из (27), (74) следует, что  $x_i([u]_N, Q_N(v)) \in G^{\delta_N + \gamma_N} \subset G^{\mu_N}, i = 0, \dots, N$ . Отсюда и из (66) заключаем, что  $Q_N(v) \in V_N([u]_N)$ . Включение (48) доказано. Неравенство (49) является следствием неравенства (29). Условие 1 теоремы 4 выполнено.

С помощью соотношений (26), (28), (30), (60)–(67), (69)–(74) аналогично убеждаемся в справедливости условий 2 этой теоремы. В самом деле, возьмем произвольный элемент  $u_N \in U$ . Это значит, что существует  $v \in V$  такой, что  $x(t, u_N, v) \in G, t_0 \leq t \leq T$ . Отсюда и из (69), (70) имеем  $x_i(\bar{Q}_N(u_N), Q_N(v)) \in G^{\delta_N} \subset G^{\xi_N}, i = 0, \dots, N$ , т. е.  $\bar{Q}_N(u_N) \in U_N$ . Включение (50) установлено. Далее, возьмем произвольный элемент  $[v]_N \in V_N(\bar{Q}_N(u_N))$ . Согласно (66), это значит, что  $x_i(\bar{Q}_N(u_N), [v]_N) \in G^{\mu_N}, i = 0, \dots, N$ . Из (26), (28), (74) следует, что  $x(t, u_N, \bar{P}_N([v]_N)) \in G^{\chi_N}, t_0 \leq t \leq T$ , т. е.  $\bar{P}_N([v]_N) \in V^{\chi_N}(u_N)$ . Включение (51) доказано. Неравенство (52) является следствием неравенства (30). Условие 2 теоремы 4 также выполнено.

Остается проверить выполнение условия 3. Сначала докажем неравенство (53). По определению величины  $J_*$  из (31) для любого  $k \geq 1$  существует  $u_k \in U$  такой, что

$\inf_{v \in V(u_k)} J(u_k, v) \geq J_* - \frac{1}{k}$ . Далее, по определению нижней грани найдутся элементы  $v_{kN} \in V^{\chi_N}(u_k)$  такие, что

$$J(u_k, v_{kN}) \leq \inf_{v \in V^{\chi_N}(u_k)} J(u_k, v) + \frac{1}{k} \leq J_*(0, \chi_N) + \frac{1}{k}.$$

Тогда

$$J_* - J_*(0, \chi_N) \leq \inf_{v \in V(u_k)} J(u_k, v) - J(u_k, v_{kN}) + \frac{2}{k}, \quad (75)$$

$N, k = 1, 2, \dots$  Выбирая при необходимости подпоследовательности, можем считать, что  $\lim_{N \rightarrow \infty} J(u_k, v_{kN}) = \lim_{N \rightarrow \infty} J(u_k, v_{kN})$ , а  $\{v_{kN}\}$  слабо сходится в  $L_2^q[t_0, T]$  при  $N \rightarrow \infty$  к некоторому элементу  $v_k \in V$ . Так как  $v_{kN} \in V^{\chi_N}(u_k)$ , то  $x(t, u_k, v_{kN}) \in G^{\chi_N}$ ,  $t_0 \leq t \leq T$ ,  $N = 1, 2, \dots$ . Поскольку  $x(t, u_k, v_{kN}) \rightarrow x(t, u_k, v_k)$  равномерно на  $[t_0, T]$  при  $N \rightarrow \infty$ , а множество  $G$  замкнуто, то  $x(t, u_k, v_k) \in G$ ,  $t_0 \leq t \leq T$ . Это значит, что  $v_k \in V(u_k)$ , и поэтому  $\inf_{v \in V(u_k)} J(u_k, v) \leq J(u_k, v_k)$ . Тогда, учитывая, что  $\lim_{N \rightarrow \infty} J(u_k, v_{kN}) = J(u_k, v_k)$ , из (75)

при  $N \rightarrow \infty$  имеем  $\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (J_* - J_*(0, \chi_N)) \leq \inf_{v \in V(u_k)} J(u_k, v) - J(u_k, v_k) + 2/k$  при всех

$k = 1, 2, \dots$  Наконец, устремляя здесь  $k \rightarrow \infty$ , получим  $\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (J_* - J_*(0, \chi_N)) \leq 0$ , что равносильно условию (53).

Заметим, что выше мы пользовались тем, что  $V^{\gamma_N}(u) \neq \emptyset$  при всех  $u \in U^{\varepsilon_N}$ . Докажем это. Пусть  $u \in U^{\varepsilon_N}$ ,  $v \in V^{\varepsilon_N}(u)$ . Положим  $u_N = \beta_N u_0 + (1 - \beta_N)u$ ,  $v_N = \beta_N v_0 + (1 - \beta_N)v$ , где

$$0 < \beta_N = \frac{\varepsilon_N}{(\beta + \varepsilon_N)} < 1. \quad (76)$$

Так как  $x(t, u, v) \in G^{\varepsilon_N}$ ,  $x(t, u_0, v_0) \in G^{-\beta}$ , то с учетом (76) имеем  $x(t, u_N, v_N) \in G$ . Но  $|x(t, u, v_N) - x(t, u_N, v_N)| \leq M_1 \|u - u_N\|_{L_2} \leq M_2 \beta_N$ , и поэтому с помощью (73), (76) получаем  $x(t, u, v_N) \in G^{M_2 \beta_N} = G^{\gamma_N}$ . Следовательно,  $V^{\gamma_N}(u) \neq \emptyset$  при всех  $u \in U^{\varepsilon_N}$ . По определению  $J_*(\varepsilon_N, \gamma_N)$  существует  $u_{N*} \in U^{\varepsilon_N}$  такой, что  $J(\varepsilon_N, \gamma_N) - 1/N \leq \inf_{v \in V^{\gamma_N}(u_{N*})} J(u_{N*}, v)$ .

Возьмем некоторый элемент  $w_N \in V^{\varepsilon_N}(u_{N*})$ . Положим  $u_N = \beta_N u_0 + (1 - \beta_N)u_{N*}$ ,  $v_N = \beta_N v_0 + (1 - \beta_N)w_N$ , где  $\beta_N$  взято из (76). Как и выше, получаем, что  $x(t, u_N, v_N) \in G$ , т. е.  $V(u_N) \neq \emptyset$ . Возьмем  $v_{N*} \in V(u_N)$  таким, чтобы  $\inf_{v \in V(u_N)} J(u_N, v) + 1/N \geq J(u_N, v_{N*})$ .

Так как  $|x(t, u_N, v_{N*}) - x(t, u_{N*}, v_{N*})| \leq M_2 \beta_N$  и  $x(t, u_N, v_{N*}) \in G$ , то  $x(t, u_{N*}, v_{N*}) \in G^{\gamma_N}$ , т. е.  $v_{N*} \in V^{\gamma_N}(u_{N*})$ .

Таким образом,

$$\begin{aligned} J_*(\varepsilon_N, \gamma_N) &\leq \inf_{v \in V^{\gamma_N}(u_{N*})} J(u_{N*}, v) + \frac{1}{N} \leq J(u_{N*}, v_{N*}) + \frac{1}{N} \\ &\leq J(u_N, v_{N*}) + M_3 \beta_N + \frac{1}{N} \leq \inf_{v \in V(u_N)} J(u_N, v) + M_4 \varepsilon_N + \frac{2}{N} \leq J_* + M_4 \varepsilon_N + \frac{2}{N}, \quad N \geq 1. \end{aligned}$$

Отсюда при  $N \rightarrow \infty$  получаем условие (54). Таким образом, при сделанных выше предположениях согласно теореме 4 последовательность задач (32), (20), (21), (64)–(67) аппроксимирует задачу (31), (15), (16), (60)–(63) по функции.

Вопросы аппроксимации более сложных задач, содержащих кратные максимумы и несвязанными и связанными множествами, исследовались в [2–4].

**5.** Заметим, что в настоящей книге мы обсуждали проблемы оптимизации (в основном, поиска минимума), подразумевая, что целевая функция у нас одна. Однако на практике чаще встречаются более сложные, так называемые многокритериальные задачи, когда целевых функций (критериев полезности) несколько, их аргументы между собой связаны, и нужно найти какой-то оптимум по этим критериям. Но что такое оптимум в таких задачах? Ведь критерии, как правило, противоречивы, отражают реально существующую конфликтную ситуацию, и ожидать, что все критерии будут достигать своего, скажем, минимума в одной и той же точке, не приходится. Понятие оптимума в многокритериальных задачах должно вводиться на принципиально новой основе, оно должно содержать в себе

некий компромисс, как-то учитывать характер конфликта, который может быть весьма разнообразным (антагонистическим, коалиционным, иерархическим и т. п.). На сегодняшний день выработано несколько разумных принципов оптимальности в многокритериальных задачах (например, оптимальность по Парето, по Нэшу и т. д.), которые получили признание и находят широкие применения. В рамках данной книги мы не в состоянии даже мало-мальски останавливаться на возникающих здесь интересных и актуальных проблемах и отсылаем читателя к специальной литературе по исследованию операций, теории игр, теории принятия решений, теории и методов равновесного программирования [30; 31; 182; 183; 194; 218–220; 240; 241; 244; 245; 255; 310–313; 373; 375; 410; 412–414; 423; 440; 466; 473; 482; 500; 511; 566; 567; 569–571; 580; 581; 589; 590–592; 608; 643; 647; 650; 663; 686; 749–751; 755; 762; 763; 794; 809; 810; 848; 849; 879–881; 900; 906; 913; 922; 925; 937; 954]. К сказанному добавим, что задачи оптимизации, составившие предмет настоящей книги, являются необходимой ступенькой к познанию многокритериальных задач, теория и методы которых пока еще переживают пору становления и, несомненно, будут бурно развиваться.

В заключение хочется сказать, что невозможно «объять необъятное» и создать более-менее полное пособие по вопросам оптимизации. Остается лишь процитировать следующие утешающие слова из книги [75]: «При выборе способа решения конкретной задачи всякое пособие играет роль лишь общего руководства, отталкиваясь от которого исследователь анализирует свои проблемы», надеясь, что настоящее пособие кому-то поможет в таком анализе.



## РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ИСПОЛЬЗОВАНИЮ КНИГИ

Книга получилась толстой и в ней трудновато ориентироваться. Поэтому читателю, который только начинает знакомиться с теорией и методами оптимизации или желает использовать книгу в учебном процессе, возможно, будут полезны опыт работы автора с этой книгой и высказанные ниже рекомендации.

Начнем с изложения того, как книга используется при чтении основного курса лекций «Методы оптимизации» на факультете вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета (ВМиК МГУ) для студентов 4-го курса, которые уже знакомы с линейной алгеброй, классическим математическим анализом, дифференциальными уравнениями, функциональным анализом, уравнениями математической физики. Приведем список экзаменационных вопросов (билетов), выносимых на экзамен, с указанием объема включаемого в билет материала, места его расположения в книге и с некоторыми пояснениями к ним.

**1.** Методы минимизации функций одной переменной. (§ 1.1–§ 1.3, § 1.4, п. 1; § 1.6, § 1.7, п. 1–3; § 1.9, п. 1.) Этот материал читается нестрого, с пояснениями на рисунках; строго доказывается лишь теорема 2.

**2.** Теорема Вейерштрасса (метрический вариант). (§ 2.1, п. 1–4; § 8.2, п. 1–2.)

Для иллюстрации этой теоремы на лекциях приводится пример задачи:

$$J(u) = \int_0^1 F(u(t)) dt \rightarrow \inf,$$

$$u \in U = \{u = u(t) \in C[0, 1]: |u(0)| \leq M, \quad |u(t) - u(\tau)| \leq L|t - \tau| \quad \forall t, \tau \in [0, 1]\},$$

где  $F(u)$  — непрерывная функция переменной  $u \in \mathbb{R}$ ;  $L, M$  — постоянные. Компактность множества  $U$  в метрике  $C[0, 1]$  доказывается с помощью известной теоремы Арцела из [393].

**3.** Теорема Вейерштрасса (слабый вариант). (§ 8.2, примеры 1, 2, 4, 5, теорема 4 (с доказательством), теоремы 6, 8 (без доказательства).)

Для иллюстрации теоремы 4 рассматривается пример квадратичной задачи:

$$J(u) = \|Au - b\|_F^2 \rightarrow \inf, \quad u \in U \tag{R.1}$$

(см. задачу (3), теорему 12), где оператор  $A \in \mathcal{L}(H \rightarrow F)$ ,  $b \in F$ ;  $H, F$  — гильбертовы пространства,  $U$  — слабо компактное множество из  $H$  (например, шар).

4. Существование решения задач минимизации терминального и интегрального квадратичного функционала на решениях линейной системы дифференциальных уравнений. (§ 8.2, примеры 14–17, примеры 9, 10 множеств  $U$  при  $G = \{t \in \mathbb{R}: t_0 \leq t \leq T\} = [t_0, T]$ ).

5. Существование решения задачи об оптимальном нагреве стержня. (§ 8.7, задача (1)–(5) при  $q \equiv 0$ ,  $\varphi \equiv 0$ , до абзаца с формулой (17).)

6. Дифференцирование (первая и вторая производные). Применение к квадратичному функционалу (R.1). (§ 8.3, п. 1–3; пример 6.)

7. Необходимое условие локального минимума. (§ 8.3, теорема 2.)

8. Градиент терминального квадратичного функционала. (§ 8.3, пример 7, пример 8.)

9. Градиент интегрального квадратичного функционала. (§ 8.3, пример 9, пример 10.)

10. Градиент функционала в задаче о нагреве стержня. (§ 8.7, задача (1)–(5) при  $q \equiv 0$ ,  $\varphi \equiv 0$ ).

11. Выпуклые функции, их свойства. Критерий оптимальности. (§ 4.2, п. 1–4, теоремы 1–3, теорема 10; § 8.3, теорема 3.)

12. Критерии выпуклости функции. Выпуклость квадратичного функционала (R.1). (§ 4.2, п. 5, теоремы 4, 5, теорема 5 доказывается при дополнительном предположении  $\text{int } U \neq \emptyset$ ; § 8.3, теорема 1 при  $\mu = 0$ .)

13. Сильно выпуклые функции, их свойства. Критерии сильной выпуклости. (§ 4.3, п. 1 до теоремы 1; п. 2, теоремы 2–4, теорема 4 доказывается при дополнительном предположении  $\text{int } U \neq \emptyset$ ; § 8.3, теорема 1 при  $\mu > 0$ .)

14. Теорема Вейерштрасса для сильно выпуклых функций. (§ 4.3, п. 1, теорема 1; § 8.2, теорема 10.)

На лекциях теорема 10 доказывается при дополнительном предположении, что функция  $J(u)$  дифференцируема в некоторой точке  $u \in U$ . Тогда доказательство ограниченности множества Лебега  $M(v) = \{u \in U: J(u) \leq J(v)\}$  можно заменить более простым доказательством. А именно, пользуясь неравенством

$$\frac{\varkappa}{2} \|u - v\|_H^2 + \langle J'(v), u - v \rangle + J(u) \leq J(v) \quad \forall u \in U \quad (\text{R.2})$$

(теорема 2, билет 13) имеем:

$$\frac{\varkappa}{2} \|u - v\|_H^2 \leq \langle J'(v), u - v \rangle \leq \|J'(v)\| \cdot \|u - v\| \quad \forall u \in M(v).$$

Поэтому

$$\|u - v\| \leq \frac{2}{\varkappa} \|J'(v)\| \quad \forall u \in M(v),$$

т. е. множество  $M(v)$  ограничено. Выпуклость  $M(v)$  следует из выпуклости  $J(u)$  (теорема 10), замкнутость  $M(v)$  — из полунепрерывности снизу  $J(u)$  (лемма 1). Следовательно,  $M(v)$  — слабо компактное множество (теорема 6). Кроме того, функция  $J(u)$  слабо полунепрерывна снизу на  $U$  (теорема 7). Далее замечаем, что задача:  $J(u) \rightarrow \inf, u \in U$  равносильна задаче

$$J(u) \rightarrow \inf, \quad u \in M(v);$$

к последней применяем теорему 4 и заключаем, что  $J_* > -\infty$ ,  $U_* \neq \emptyset$ . Единственность точки  $u_* \in U$  следует из строгой выпуклости функции  $J(u)$  (теорема 1). Неравенство

$$\frac{1}{2}\kappa\|u - u_*\|^2 \leq J(u) - J(u_*) \quad \forall u \in U$$

вытекает из (R.2) при  $v = u_*$ , если учесть, что  $\langle J'(u_*), u - u_* \rangle \geq 0 \quad \forall u \in U$  (теорема 3).

**15.** Проекция точки на выпуклое замкнутое множество, ее свойства. Примеры. (§ 4.4, теоремы 1, 2, 4, примеры 1–6; § 8.4, множество (26).)

**16.** Градиентный метод. Метод проекции градиента, его сходимость. (§ 5.1, § 5.2, п. 1; п. 2, теорема 3; § 8.4, п. 2, теорема 3.)

**17.** Метод Ньютона, его сходимость. (§ 5.10, п. 1, теорема 2; § 8.4, метод (49), (50) при  $\alpha_k = 1$ .)

**18.** Метод покоординатного спуска, его сходимость. (§ 5.12.)

**19.** Метод штрафных функций, его сходимость. (§ 5.16, п. 1, 2; § 8.4, п. 8.)

**20.** Правило множителей Лагранжа. (§ 2.3, п. 2, теорема 2; § 5.17, п. 1; § 8.3, п. 7.)

**21.** Теорема Куна–Таккера. (§ 4.9, п. 1, 2, теоремы 1, 2.)

В лекциях дается более простое доказательство теоремы 2, опирающееся на правило множителей Лагранжа, но требующее некоторую дополнительную гладкость функций  $J(u)$ ,  $g_i(u)$ ,  $i = 1, \dots, m$ . А именно, замечаем, что ко всякой точке  $u_* \in U_*$  глобального минимума можно применить правило множителей Лагранжа (теорема 1), согласно которому найдутся числа  $\bar{\lambda}^* = (\lambda_0^*, \lambda^*) = (\lambda_0^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*)$  такие, что

$$\bar{\lambda}^* \neq 0, \quad \bar{\lambda}^* \geq 0, \quad (\text{R.3})$$

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}(u_*, \bar{\lambda}^*)}{\partial u}, u - u_* \right\rangle \geq 0 \quad \forall u \in U_0, \quad (\text{R.4})$$

$$\lambda_i^* g_i(u_*) = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (\text{R.5})$$

где

$$\mathcal{L}(u, \bar{\lambda}) = \lambda_0 J(u) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(u), \quad u \in U_0, \quad \bar{\lambda} \geq 0. \quad (\text{R.6})$$

Из выпуклости  $J(u)$ ,  $g_i(u)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , следует, что функция  $\mathcal{L}(u, \bar{\lambda})$  выпукла по  $u$  на  $U_0$  при всех  $\bar{\lambda} \geq 0$ . Отсюда и из (R.4) следует:

$$\mathcal{L}(u_*, \bar{\lambda}^*) \leq \mathcal{L}(u, \bar{\lambda}^*) \quad \forall u \in U_0 \quad (\text{R.7})$$

(теорема 3). С учетом (R.5), (R.6) неравенство (R.7) можно записать в виде:

$$\lambda_0^* J_* = \lambda_0^* J(u_*) \leq \lambda_0^* J(u) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* g_i(u) \quad \forall u \in U_0. \quad (\text{R.8})$$

Убедимся, что  $\lambda_0^* > 0$ . Допустим, что это не так, т. е.  $\lambda_0^* = 0$ . Тогда в силу (R.3)  $\lambda^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*) \geq 0$ ,  $\lambda^* \neq 0$ . По условию (15) теоремы 2 существует точка

$\bar{u} \in U$  такая, что  $g_i(\bar{u}) < 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Положим в (R.8)  $u = \bar{u}$ . Получим противоречивое неравенство

$$0 \cdot J(u_*) = 0 \leq 0 + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* g_i(\bar{u}) < 0.$$

Следовательно,  $\lambda_0^* > 0$ . Тогда, поделив (R.3)–(R.5) на  $\lambda_0^* > 0$  и переобозначив  $\frac{\lambda^*}{\lambda_0^*}$  через  $\lambda^*$ , придем к соотношениям (6), (7), откуда вытекает, что  $(u_*, \lambda^*)$  — седловая точка функции  $L(u, \lambda)$ .  $\square$

**22.** Двойственная задача, ее свойства. (§ 4.9, п. 5, теорема 5.)

**23.** Каноническая задача линейного программирования (ЛП), ее эквивалентность общей задаче ЛП. (§ 3.1, п. 1–3.)

**24.** Критерий угловой точки в канонической задаче ЛП. (§ 3.2, п. 1, 2.)

**25.** Симплекс-метод для канонической задачи ЛП. Конечность метода в невырожденной задаче ЛП. (§ 3.3, п. 1, 3.)

**26.** Симплекс-таблица, ее преобразование на одном шаге симплекс-метода. (§ 3.3, п. 1, 2.)

**27.** Вырожденная каноническая задача ЛП. Антициклин. (§ 3.3, теорема 2, п. 3, 4.)

**28.** Метод искусственного базиса для поиска угловой точки в канонической задаче ЛП. Теорема Вейерштрасса для канонической задачи ЛП. (§ 3.4, п. 1, теорема 1, 2, 3.)

**29.** Теорема Куна–Таккера для канонической задачи ЛП. Двойственная задача ЛП. Теорема двойственности. (§ 3.5, п. 2, лемма 1, теорема 5; § 4.9, п. 6.)

Для канонической задачи ЛП

$$J(u) = \langle c, u \rangle \rightarrow \inf, \quad u \in U = \{u \in E^n : u \geq 0, \quad Au = b\} \quad (\text{R.9})$$

нормальная функция Лагранжа имеет вид

$$L(u, \lambda) = \langle c, u \rangle + \langle \lambda, Au - b \rangle, \quad u \geq 0, \quad \lambda \in E^m, \quad (\text{R.10})$$

и теорема Куна–Таккера формулируется так:

**Теорема R.1.** Для того чтобы точка  $u_* \geq 0$  была решением задачи (R.9), необходимо и достаточно, чтобы существовала точка  $\lambda^* \in E^m$  такая, что пара  $(u_*, \lambda^*)$  является седловой точкой функции (R.10), т. е.

$$L(u_*, \lambda) \leq L(u_*, \lambda^*) \leq L(u, \lambda^*) \quad \forall u \geq 0, \quad \forall \lambda \in E^m \quad (\text{R.11})$$

(ср. с теоремой 5).

Заметим, что теорема R.1 не является следствием теоремы 2 (билет 21) из-за отсутствия условия регулярности Слейтера для множества  $U$  из (R.9) и нуждается в отдельном доказательстве.

**Доказательство. Необходимость.** Сначала доказываем лемму 1, из которой следует, что если  $u_* \in U_*$ , то необходимо существует точка  $\lambda^* \in E^m$  такая, что

$$A^T \lambda^* + c \geq 0, \quad \langle c, u_* \rangle = -\langle b, \lambda^* \rangle. \quad (\text{R.12})$$

Покажем, что  $(u_*, \lambda^*)$  — седловая точка функции (R.10). С учетом (R.12) имеем:

$$\begin{aligned} L(u_*, \lambda^*) &= \langle c, u_* \rangle + \langle \lambda^*, Au_* - b \rangle = \langle c, u_* \rangle = -\langle b, \lambda^* \rangle \leq \\ &\leq \langle -b, \lambda^* \rangle + \langle u, A^T \lambda^* + c \rangle = \langle c, u \rangle + \langle \lambda^*, Au - b \rangle = L(u, \lambda^*) \quad \forall u \geq 0. \end{aligned}$$

Правое неравенство (R.11) доказано. Далее,

$$L(u_*, \lambda^*) = \langle c, u_* \rangle = \langle c, u_* \rangle + \langle \lambda, Au_* - b \rangle = L(u_*, \lambda) \quad \forall \lambda \in E^m$$

— левое неравенство (R.11) также справедливо.

Д о с т а т о ч н о с т ь установлена в теореме 1 (билет 21).  $\square$

Явная формулировка двойственной к (R.9) задачи:

$$\Psi(\lambda) = \langle -b, \lambda \rangle \rightarrow \sup, \quad \lambda \in \Lambda = \{\lambda \in E^m : A^T \lambda + c \geq 0\} \quad (\text{R.13})$$

получается с помощью рассуждений из § 4.9, п. 6, которые в случае задачи (R.9) существенно упрощаются. Также доказывается, что двойственная к (R.13) задача равносильна исходной задаче (R.9), так что задачи (R.9) и (R.13) являются взаимодвойственными.

Наконец, опираясь на теорему R.1 и ранее доказанную теорему 5 (билет 22), убеждаемся, что

$$U_* \neq \emptyset, \quad \Lambda^* \neq \emptyset, \quad \Psi^* = J_*.$$

Отсюда заключаем, что взаимодвойственные задачи (R.9), (R.13) одновременно либо обе разрешимы, либо неразрешимы (теорема 2). Отсюда же легко следуют и остальные теоремы двойственности ЛП из § 3.5.

**30.** Градиент в задаче оптимального управления со свободным правым концом. (§ 8.5, п. 1.)

**31.** Принцип максимума Понтрягина в задаче оптимального управления со свободным правым концом. (§ 8.5, п. 5.)

**32.** Принцип максимума Понтрягина (общий случай). Краевая задача принципа максимума. (§ 6.2, п. 1–4, теоремы 1, 2, примеры 7–11.)

Доказательство теорем 1, 2 довольно громоздкое (§ 6.3) и в лекциях не приводится, объясняется лишь идея доказательства. Основное внимание уделяется формулировке краевой задачи принципа максимума, примерам 7–11. Теоремы 1, 2 часто излагаются для задач с закрепленным левым концом и с закрепленным начальным временем (см. формулы (30); здесь условие (31) не нужно, достаточно того, что  $x(t_0) = x_0$ ; при незакрепленном времени  $T$  к (30) нужно добавить условие (43)).

**33.** Неустойчивые задачи минимизации. Метод стабилизации Тихонова. (§ 9.1, примеры 2, 4; § 9.4, пример 2 при  $\bar{u} \equiv 0$ , пример 4.)

На лекциях метод стабилизации рассказывается на примере задачи (R.1), неустойчивость которой в метрике  $H$  демонстрируется на примере 4. Предполагается, что вместо точных  $A, b$  берутся их приближения  $A_\delta \in \mathcal{L}(H \rightarrow F)$ ,  $b_\delta \in F$  такие, что

$$\|A_\delta - A\| \leq \delta, \quad \|b_\delta - b\| \leq \delta, \quad \delta > 0, \quad (\text{R.14})$$

и в качестве приближения функции  $J(u) = \|Au - b\|_F^2$  берется функция  $J_\delta(u) = \|A_\delta u - b\|_F^2$ . Из оценки (34) при  $\bar{u} = 0$ ,  $0 < \delta \leq \delta_0$ , следует

$$\|J_\delta - J(u)\| \leq \delta(1 + \|u\|^2)c_0, \quad c_0 = 4(\|A\| + \|b\| + \delta_0), \quad \forall u \in H. \quad (\text{R.15})$$

Далее, можем ввести функцию Тихонова:

$$t_\delta(u) = J_\delta(u) + \alpha\|u\|^2, \quad u \in H,$$

где  $\alpha = \alpha(\delta) > 0$  — параметр регуляризации, и рассмотреть задачу минимизации

$$t_\delta(u) \rightarrow \inf, \quad u \in U.$$

Метод стабилизации заключается в том, что эта задача приближенно решается каким-либо методом и находится точка  $u_\delta$  со свойствами:

$$u_\delta \in U, \quad t_\delta(u_\delta) \leq t_{\delta*} + \varepsilon, \quad t_{\delta*} = \inf_U t_\delta(u) \geq 0, \quad \varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0. \quad (\text{R.16})$$

В следующей теореме доказывается, что при соответствующем согласовании параметров метода  $\alpha(\delta)$ ,  $\varepsilon(\delta)$  с погрешностью  $\delta > 0$  семейство  $\{u_\delta, \delta > 0\}$  при  $\delta \rightarrow 0$  сходится в метрике  $H$  к нормальному решению задачи (R.1).

**Теорема R.2.** Пусть  $U$  — выпуклое множество из  $H$ ; множество  $U_* = \{u \in U: J(u) = J_* = \inf_U J(u) \geq 0\}$  непусто; выполнены условия (R.14); параметры  $\alpha(\delta) > 0$ ,  $\varepsilon(\delta) > 0$  таковы, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \alpha(\delta) = 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \varepsilon(\delta) = 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta + \varepsilon(\delta)}{\alpha(\delta)} = 0; \quad (\text{R.17})$$

семейство  $\{u_\delta, \delta > 0\}$  определено условиями (R.16). Тогда

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} J(u_\delta) = J_*, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \|u_\delta - u_*\| = 0, \quad (\text{R.18})$$

где  $u_* \in U_*$ ,  $\|u_*\| = \inf_{u \in U_*} \|u\|$  — нормальное решение задачи (R.1).

Эта теорема, конечно, вытекает из более общих теорем 1, 2 из § 9.4, но для удобства читателя мы здесь приведем ее прямое и упрощенное доказательство.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Поскольку функция  $\|u\|^2$  сильно выпукла, слабо полунепрерывна снизу, множество  $U_*$  — выпукло, замкнуто, то существует и однозначно определяется нормальное решение  $u_*$  задачи (R.1) (теорема 1, теорема 10, билет 14). Из (R.15), (R.16) следует цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} J_* &\leq J(u_\delta) \leq J(u_\delta) + \alpha\|u_\delta\|^2 \leq J_\delta(u_\delta) + \delta c_0(1 + \|u_\delta\|^2) + \alpha\|u_\delta\|^2 = \\ &= t_\delta(u_\delta) + \delta c_0(1 + \|u_\delta\|^2) \leq t_{\delta*} + \varepsilon + \delta c_0(1 + \|u_\delta\|^2) = \\ &= J_\delta(u_*) + \alpha\|u_*\|^2 + \varepsilon + \delta c_0(1 + \|u_\delta\|^2) \leq \\ &\leq J(u_*) + \delta c_0(1 + \|u_*\|^2) + \alpha\|u_*\|^2 + \varepsilon + \delta c_0(1 + \|u_\delta\|^2) \leq \\ &\leq J(u_\delta) + \delta c_0(1 + \|u_*\|^2) + \alpha\|u_*\|^2 + \varepsilon + \delta c_0(1 + \|u_\delta\|^2), \quad 0 < \delta \leq \delta_0. \end{aligned}$$

Отсюда имеем:

$$\alpha\|u_\delta\|^2 \leq \delta c_0(1 + \|u_*\|^2) + \alpha\|u_*\|^2 + \varepsilon + \delta c_0(1 + \|u_\delta\|^2), \quad (\text{R.19})$$

$$J_* \leq J(u_\delta) \leq J_* + \delta c_0(1 + \|u_*\|^2) + \alpha \|u_*\|^2 + \varepsilon + \delta c_0(1 + \|u_\delta\|^2). \quad (\text{R.20})$$

Из (R.19) следует

$$(\alpha(\delta) - \delta c_0) \|u_\delta\|^2 \leq (\alpha(\delta) + \delta c_0) \|u_*\|^2 + \varepsilon(\delta) + 2\delta c_0, \quad 0 < \delta < \delta_0. \quad (\text{R.21})$$

В силу (R.17) существует число  $\delta_1$ ,  $0 < \delta_1 \leq \delta_0$  такое, что  $\alpha(\delta) - \delta c_0 = \alpha(\delta) \times \left(1 - \frac{\delta}{\alpha(\delta)} c_0\right) > 0$  для всех  $\delta$ ,  $0 < \delta < \delta_1$ . Тогда из (R.21) получаем:

$$\|u_\delta\|^2 \leq \frac{1 + \frac{\delta}{\alpha(\delta)} c_0}{1 - \frac{\delta}{\alpha(\delta)} c_0} \|u_*\|^2 + \frac{\frac{\varepsilon(\delta) + 2\delta c_0}{\alpha(\delta)}}{1 - \frac{\delta}{\alpha(\delta)} c_0} \quad \forall \delta, \quad 0 < \delta < \delta_1. \quad (\text{R.22})$$

Из (R.17), (R.22) имеем:

$$\overline{\lim}_{\delta \rightarrow +0} \|u_\delta\|^2 \leq \|u_*\|^2. \quad (\text{R.23})$$

Это означает, что

$$\|u_\delta\|^2 \leq R^2 = \text{const} < \infty \quad \forall \delta, \quad 0 < \delta < \delta_0. \quad (\text{R.24})$$

Отсюда и из (R.20) вытекает, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} J(u_\delta) = J_*. \quad (\text{R.25})$$

Из ограниченного в силу (R.24) семейства  $\{u_\delta\}$  при  $\delta \rightarrow +0$  можно извлечь (теорема 3) последовательность  $\{u_{\delta_k}\}$ , слабо в  $H$  сходящуюся к некоторой точке  $v_*$ . Так как множество  $U$  слабо замкнуто (следствие к теореме 5), то  $v_* \in U$ . В силу слабой полунепрерывности снизу  $J(u)$  и равенства (R.25) имеем

$$J_* \leq J(v_*) \leq \varliminf_{k \rightarrow \infty} J(u_{\delta_k}) = \lim_{\delta \rightarrow +0} J(u_\delta) = J_*,$$

так что  $J(v_*) = J_*$ ,  $U_* \in U_*$ . Отсюда и из слабой полунепрерывности снизу  $\|u\|^2$  с учетом (R.23) получим

$$\|u_*\|^2 \leq \|v_*\|^2 \leq \varliminf_{k \rightarrow \infty} \|u_{\delta_k}\|^2 \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \|u_{\delta_k}\|^2 \leq \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \|u_\delta\|^2 \leq \|u_*\|^2.$$

Это означает, что  $\|u_*\| = \|v_*\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_{\delta_k}\|$ , т. е.  $v_*$  — нормальное решение задачи (R.1). Однако нормальное решение единственно, поэтому  $v_* = u_*$ . Тем самым показано, что семейство  $\{u_\delta, \delta > 0\}$  при  $\delta \rightarrow +0$  имеет единственную слабую предельную точку  $u_*$ , так что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \|u_\delta\|^2 = \|u_*\|^2 = \lim_{\delta \rightarrow 0} \langle u_\delta, u_* \rangle.$$

Отсюда имеем

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \|u_\delta - u_*\|^2 = \lim_{\delta \rightarrow 0} (\|u_\delta\|^2 - 2\langle u_\delta, u_* \rangle + \|u_*\|^2) = 0.$$

Равенства (R.18) доказаны.  $\square$

Теорема R.2 иллюстрируется на примере 4 из § 9.4, когда  $\delta = \delta_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k = 0$ .

**34.** Метод динамической регуляризации. (§ 9.13.)

Подчеркнем, что обсуждаемый курс «Методы оптимизации» не сопровождался практическими занятиями, поэтому на лекциях приходилось рассматривать несложные иллюстрирующие примеры, давались задачи для самостоятельного решения. Подобные задачи предлагались и на экзамене в качестве дополнительных вопросов к билету. Ниже приводятся примеры таких задач:

1. Докажите, что функция, выпуклая на отрезке, непрерывна во всех внутренних точках отрезка. Могут ли у нее быть разрывы на концах отрезка?

2. Выясните, на каких множествах функция  $J(u) = |u|^p$ ,  $u \in E^1$ ,  $p \in \mathbb{R}$ , будет выпуклой? строго выпуклой? сильно выпуклой?

3. Опишите один шаг метода проекции градиента, метода покоординатного спуска, метода Ньютона для задачи:  $J(u) = x^2 - xy + y^2 + x \rightarrow \inf$ ,  $u = (x, y) \in U$ , когда  $U = E^2$ ?  $U = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ ,  $U = \{u \geq 0: x + y \leq 1\}$ ,  $U = \{x + y \geq 1\}$ ,  $U = \{|x| \leq 1; |y| \leq 1\}$ ? Будут ли сходиться эти методы?

4. Примените правило множителей Лагранжа к задаче

$$J(u) = 4x^2 + y^2 + yz + z^2 + z \rightarrow \inf, \quad u = (x, y, z) \in U,$$

когда  $U = E^3$ ,  $U = \{2x + y - z \leq 1\}$ ,  $U = \{x - y + z \geq 1\}$ ,  $U = \{x + y + z \geq 1, x \geq 0\}$ ,  $U = \{2x + y + z \leq 2, x + y + z = 3\}$ . Будут ли найденные точки точками минимума? Существуют ли седловые точки функции Лагранжа в перечисленных задачах? Сформулируйте двойственные задачи к ним. Распишите схему метода штрафов для перечисленных задач, исследуйте сходимость.

5. Сформулируйте краевую задачу принципа максимума для задачи оптимального управления:

$$J(u) = \int_0^1 y^2(t) dt \rightarrow \inf, \quad \dot{x} = x + y + u^1(t), \quad \dot{y} = x - 2y + u^2(t), \\ 0 \leq t \leq 1; \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 0,$$

уравнение  $u = u(t) = (u^1(t), u^2(t))$  удовлетворяет условиям:  $u^1(t), u^2(t)$  — кусочно непрерывные функции,  $|u^1(t)| \leq 1$ ,  $0 \leq u^2(t) \leq 1$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ; на правом конце траектории  $(x(t), y(t))$  выполняется одно из условий: а)  $x(1) = 0$ ,  $y(1) = 0$ ; б)  $x^2(1) + y^2(1) \leq 1$ ; в)  $x(1) = 0$ ,  $y(1) \leq 1$ ; г) правый конец свободный.

6. Опишите правило вычисления градиента функционала:

$$J(u) = x^2(1, u); \quad \dot{x} = x - y + u(t), \quad \dot{y} = 2x + y, \\ 0 \leq t \leq 1; \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 0; \quad u = u(t) \in L_2(0, 1).$$

Опишите один шаг метода проекции градиента для задачи минимизации этого функционала на множествах: а)  $U = \left\{ \int_0^1 u^2(t) dt \leq 1 \right\}$ ; б)  $U = \{|u(t)| \leq 1, t \in [0, 1]\}$ . Как штрафовать ограничения а)  $y(t) \leq t \quad \forall t \in [0, 1]$ ; б)  $y(1) \leq t$ ?



7. С помощью симплекс-метода найдите решение задач линейного программирования:

$$J(u) = x^1 + 4x^2 \rightarrow \inf, \\ u = (x^1, x^2, x^3, x^4) \in U = \{u \geq 0: x^1 + x^2 - x^3 = 1, x^1 + 2x^2 + x^4 = 4\}.$$

На том же множестве  $U$  найдите решения задач минимизации или максимизации функций а)  $J(u) = -x^1 + x^2$ ; б)  $J(u) = x^1 - x^2$ ; в)  $J(u) = 2x^1 + x^2$ .

Материал билетов 1–22 обычно читался в осеннем семестре, остальных билетов — в весеннем семестре. В те годы, когда лекции приходились на праздничные дни и терялись, часть материала приходилось излагать в облегченном варианте, без строгих доказательств и она не всегда выносилась на экзамены. Последовательность изложения материала на лекциях соответствовала порядку, в котором выше перечислялись билеты. В лекциях кратко упоминались и другие проблемы, которые не отражены в вопросах билетов, а именно: задачи большой размерности, негладкие задачи, многокритериальная оптимизация и т. п.; некоторые такие проблемы бегло рассмотрены в § 5.20 книги.

Обсуждаемый курс лекций несложно модифицировать с учетом профиля специальности, уровня предварительных знаний студентов. В частности, если студенты недостаточно знакомы с элементами функционального анализа, уравнений математической физики, то из приведенного выше курса нужно исключить материалы из II части книги, оставив, например, лишь вопросы, касающиеся конечномерных задач минимизации, теории оптимального управления процессами, описываемыми обыкновенными дифференциальными уравнениями, и добавить при необходимости другие методы из гл. 5–7.

В учебном процессе книгу можно использовать при чтении годовых или полугодовых спецкурсов. Темы таких спецкурсов подсказывают названия глав книги. Спецкурсы можно посвятить также отдельным вопросам, материал по которым, возможно, разбросан в нескольких главах. Так, например, можно организовать спецкурсы на следующие темы:

1. Методы минимизации нулевого порядка (т. е. методы, явно не требующие вычисления производных) (§ 1.3–1.7, 1.10, 5.6, 5.12–5.14, 5.16, 5.18–5.20, 9.10).
2. Методы минимизации первого порядка (использующие градиент) (§ 1.2, 1.9, 5.1–5.5, 5.7, 5.9, 5.15, 9.8, 9.9).
3. Методы минимизации с переменной метрикой (§ 5.10, 5.11, 9.12).
4. Непрерывные методы минимизации (§ 5.1, п. 6; 5.2, п. 5; 5.6, п. 2; 5.11, 9.13).
5. Методы решения задач на условный экстремум (§ 4.8, 5.14, 5.15, 5.18, 5.19).

Для спецкурсов по теории и методам оптимального управления можно использовать материалы гл. 6–8. Методам решения неустойчивых задач оптимизации можно посвятить спецкурсы:

1. Общие методы регуляризации (§ 9.4–9.7).
2. Итерационные методы регуляризации (§ 9.8–9.12).
3. Метод динамической регуляризации (§ 9.14, книга [557]).

Спецкурс на тему «Разностные аппроксимации задач оптимального управления» можно читать по материалам гл. 10.

Пользуясь гл. 3 и книгой [179], можно организовать следующие спецкурсы по линейному программированию (ЛП):

1. Методы решения задач ЛП (симплекс-метод, двойственный симплекс-метод, метод сокращения невязки и др.).
2. Критерии устойчивости задач ЛП.
3. Методы регуляризации для решения нелинейных задач ЛП.
4. Полиномиальные методы ЛП.

Надеемся, что помимо материалов для основных и специальных курсов читатель найдет в книге кое-что интересное и для самостоятельного чтения. Например, читателю, желающему познакомиться с различными подходами получения необходимых условий экстремума, возможно, покажутся интересными материалы из § 4.8 (неявные функции, теоремы отделимости), § 5.17, 6.3, 6.4 (штрафы); § 8.3, п. 6 (вариационный принцип Экланда и его обобщения), § 8.7, п. 5 (принцип Лагранжа).

Конечно, мы ожидаем, что читатель, ознакомившись с настоящей книгой и другими нашими книгами [179; 557], пожелает узнать, как освещаются проблемы оптимизации в работах других авторов. С этой целью в книге приведен довольно большой список литературы, содержащий немало прекрасных работ, отражающих современное состояние теории и методов оптимизации. Отдельно перечислим сборники задач и упражнений по оптимизации [13; 15; 54; 197; 210; 252; 320; 368; 369; 409; 488; 546; 601; 847; 909; 927; 928; 951].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Абрамов Л. М., Капустин В. Ф. Математическое программирование. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1981.
- [2] Аваков Е. Р. Об условиях аппроксимации кратного максимина // Вестник МГУ. Серия 15. Вычисл. матем. и киберн. — 1977. — № 3. — С. 37–43.
- [3] Аваков Е. Р. Об условиях аппроксимации максиминных задач со связанными множествами // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 1978. — Т. 18, № 3. — С. 603–613.
- [4] Аваков Е. Р. Об условиях аппроксимации кратного максимина по связанным множествам // Вестник МГУ. Серия 15. Вычисл. матем. и киберн. — 1979. — № 2. — С. 16–25.
- [5] Аваков Е. Р. Условия экстремума для гладких задач с ограничениями типа равенств // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 1985. — Т. 25, № 5. — С. 680–693.
- [6] Аваков Е. Р. Необходимые условия минимума для нерегулярных задач в банаховых пространствах. Принцип максимума для аномальных задач оптимального управления // Труды МИАН СССР. — 1988. — Т. 185. — С. 3–29.
- [7] Аваков Е. Р. Необходимые условия экстремума для гладких аномальных задач с ограничениями типа равенств и неравенств // Матем. заметки. — 1989. — Т. 45, № 6. — С. 3–11.
- [8] Аваков Е. Р. Теоремы об оценках в окрестности особой точки отображения // Матем. заметки. — 1990. — Т. 47, вып. 5. — С. 3–13.
- [9] Аваков Е. Р., Аграчев А. А., Арутюнов А. В. Множество уровня гладкого отображения в окрестности особой точки и нули квадратичного отображения // Матем. сб. — 1991. — Т. 182, № 8. — С. 1091–1104.
- [10] Аввакумов С. Н., Киселев Ю. Н., Орлов М. В. Методы решения задач оптимального управления на основе принципа максимума Понтрягина // Труды МИАН. — 1995. — Т. 211. — С. 3–31.
- [11] Авдонин С. А., Иванов С. А. Управляемость систем с распределенными параметрами и семейства экспонент. — Киев: Изд-во Минвуза Украинской ССР, 1989.
- [12] Аграчев А. А. Топология квадратичных отображений и гессианы гладких отображений // Итоги науки и техники. Сер. Алгебра, Геометрия, Топология. — М.: ВИНТИ, 1988. — Т. 26. — С. 85–124.
- [13] Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах. — М.: Высшая школа, 1993.
- [14] Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. — М.: Физматлит, 2009.
- [15] Алексеев В. М., Галеев Э. М., Тихомиров В. М. Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи. — М.: Физматлит, 2005.
- [16] Алексеев О. Г. Комплексное применение методов дискретной оптимизации. — М.: Наука, 1987.
- [17] Алифанов О. М., Артюхин Е. А., Румянцев С. В. Экстремальные методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1988.
- [18] Андронов В. Г., Белоусов В. Г. О сходимости по функционалу метода штрафных функций // Вестник МГУ. Серия 15. Вычисл. матем. и киберн. — 1996. — № 2. — С. 59–61.
- [19] Андронов В. Г., Белоусов В. Г. О слабой сходимости по аргументу метода штрафных функций // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 1997. — Т. 37, № 4. — С. 404–414.

- [20] Андронов В. Г., Белоусов Е. Г. О бержевой сходимости метода штрафных функций // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 1998. — Т. 38, № 4. — С. 575–591.
- [21] Анрион Р. Теория второй вариации и ее приложения в оптимальном управлении. — М.: Наука, 1979.
- [22] Антипин А. С. Об едином подходе к методам решения некорректных экстремальных задач // Вестник МГУ. Серия 1. Математика и механика. — 1973. — № 2. — С. 60–67.
- [23] Антипин А. С. Метод регуляризации в задачах выпуклого программирования // Экономика и матем. методы. — 1975. — Т. 11, № 2. — С. 336–342.
- [24] Антипин А. С. Методы нелинейного программирования, основанные на прямой и двойственной модификации функции Лагранжа. — М.: Изд-во ВНИИСИ, 1979.
- [25] Антипин А. С. Непрерывные и итерационные процессы с оператором проектирования и типа проектирования // Сб. «Вопросы кибернетики. Вычислительные вопросы анализа больших систем». — М.: Изд-во АН СССР, 1989. — С. 5–43.
- [26] Антипин А. С. Управляемые проксимальные дифференциальные системы для решения седловых задач // Диф. ур. — 1992. — Т. 28, № 11. — С. 1846–1861.
- [27] Антипин А. С., Недич А., Ячимович М. Трехшаговый метод линеаризации для задач минимизации // Известия вузов. Математика. — 1994. — № 12. — С. 3–7.
- [28] Антипин А. С., Васильев Ф. П. О непрерывном методе минимизации в пространствах с переменной метрикой // Известия вузов. Математика. — 1995. — № 12. — С. 3–9.
- [29] Антипин А. С., Недич А. Непрерывный метод линеаризации второго порядка для задач выпуклого программирования // Вестник МГУ. Серия 15. Вычисл. матем. и киберн. — 1996. — № 2. — С. 3–12.
- [30] Антипин А. С. Равновесное программирование: проксимальные методы // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 1997. — Т. 37, № 11. — С. 1327–1339.
- [31] Антипин А. С. Методы решения вариационных неравенств со связанными ограничениями // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 2000. — Т. 40, № 9. — С. 1291–1307.
- [32] Анциферов Е. Г., Ащепков Л. Т., Булатов В. П. Методы оптимизации и их приложения. Ч. 1. Математическое программирование. — Новосибирск: Наука, 1990.
- [33] Аоки М. Введение в методы оптимизации. — М.: Наука, 1977.
- [34] Аркин В. И., Кречетов Л. И. Стохастические множители Лагранжа в задачах управления и экономической динамики // Сб. «Вероятностные проблемы управления в экономике». — М.: Наука, 1977. — С. 5–32.
- [35] Арман Ж.-Л. П. Приложения теории оптимального управления системами с распределенными параметрами к задачам оптимизации конструкций. — М.: Мир, 1977.
- [36] Арутюнов А. В., Тынянский Н. Т. К необходимым условиям локального минимума в теории оптимального управления // ДАН СССР. — 1984. — Т. 275, № 2. — С. 268–272.
- [37] Арутюнов А. В., Тынянский Н. Т. О принципе максимума в задаче с фазовыми ограничениями // Известия АН СССР. Сер. Техн. киберн. — 1984. — № 4. — С. 60–68.
- [38] Арутюнов А. В. К необходимым условиям оптимальности в задаче с фазовыми ограничениями // ДАН СССР. — 1985. — Т. 280, № 5. — С. 1033–1037.
- [39] Арутюнов А. В. Пример линейной аномальной задачи оптимального управления // Диф. ур. — 2010. — Т. 46, № 12. — С. 1786–1788.
- [40] Арутюнов А. В. Возмущения экстремальных задач с ограничениями и необходимые условия оптимальности // Итоги науки и техники. ВИНТИ. Сер. Матем. анализ. — 1989. — Т. 27. — С. 147–235.
- [41] Арутюнов А. В. К теории принципа максимума в задачах оптимального управления с фазовыми ограничениями // ДАН СССР. — 1989. — Т. 304, № 1. — С. 11–14.
- [42] Арутюнов А. В., Асеев С. М., Благодатских В. И. Необходимые условия первого порядка в задаче оптимального управления дифференциальным включением с фазовыми ограничениями // Матем. сб. — 1993. — Т. 184, № 6. — С. 3–32.

- [43] А р у т ю н о в А. В. Условие второго порядка в экстремальных задачах с конечномерным образом. 2-нормальные отображения // Известия РАН. Сер. матем. — 1996. — Т. 60, № 1. — С. 37–62.
- [44] А р у т ю н о в А. В. Условия экстремума. Анормальные и вырожденные задачи. — М.: Факториал, 1997.
- [45] А р у т ю н о в А. В. Расширения и возмущения задач оптимального управления // Труды МИРАН. — 1998. — Т. 220. — С. 27–34.
- [46] А с е е в С. М. Метод гладких аппроксимаций в теории необходимых условий оптимальности для дифференциальных включений // Известия РАН. Сер. матем. — 1997. — Т. 61, № 2. — С. 3–26.
- [47] А с е е в С. М. Задача оптимального управления для дифференциального включения с фазовым ограничением. Гладкие аппроксимации и необходимые условия оптимальности // Итоги науки и техники. Серия «Современная математика и ее приложения». Т. 64. — М.: Изд-во ВИНТИ, 1999. — С. 57–81.
- [48] А с т а ф ь е в Н. Н. Линейные неравенства и выпуклость. — М.: Наука, 1982.
- [49] А с т а ф ь е в Н. Н. Бесконечные системы линейных неравенств в математическом программировании. — М.: Наука, 1991.
- [50] А ф а н а с ь е в А. П., Д и к у с а р В. В., М и л ю т и н А. А., Ч у к а н о в С. А. Необходимое условие в оптимальном управлении. — М.: Наука, 1990.
- [51] А х м е д о в К. Т., А х и е в С. С. Необходимое условие оптимальности для некоторых задач теории оптимального управления // ДАН Азерб. ССР. — 1972. — Т. 28, № 5. — С. 12–15.
- [52] А ш м а н о в С. А. Линейное программирование. — М.: Наука. 1981.
- [53] А ш м а н о в С. А. Введение в математическую экономику. — М.: Наука. 1984.
- [54] А ш м а н о в С. А., Т и м о х о в А. В. Теория оптимизации в задачах и упражнениях. — М.: Наука, 1991.
- [55] А щ е п к о в Л. Т. Оптимальное управление линейными системами. — Иркутск: Изд-во ИГУ, 1982.
- [56] А щ е п к о в Л. Т., Б е л о в Б. И., Б у л а т о в В. П., В а с и л ь е в О. В., С р о ч - к о В. А., Т а р а с е н к о Н. В. Методы решения задач математического программирования и оптимального управления. — Новосибирск: Наука, 1984.
- [57] А щ е п к о в Л. Т. Оптимальное управление разрывными системами. — Новосибирск: Наука, 1987.
- [58] А щ е п к о в Л. Т., В е л и ч е н к о В. В. Оптимальное управление. — Владивосток: Изд-во Дальневосточного ун-та, 1989.
- [59] Б а б е н к о К. И. Основы численного анализа. — М.: Наука, 1986.
- [60] Б а е в А. В. О решении одной обратной задачи для волнового уравнения с помощью регуляризирующего алгоритма // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 1985. — Т. 25, № 1. — С. 140–146.
- [61] Б а з а р а М., Ш е т т и К. Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы. — М.: Мир, 1982.
- [62] Б а к у ш и н с к и й А. Б., Г о н ч а р с к и й А. В. Итеративные методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1989.
- [63] Б а к у ш и н с к и й А. Б., Г о н ч а р с к и й А. В. Некорректные задачи. Численные методы и приложения. — М.: Изд-во МГУ, 1989.
- [64] Б а к у ш и н с к и й А. Б. Итерационные методы для решения нелинейных операторных уравнений без свойства регулярности // Фунд. и прикл. матем. — 1997. — Т. 3, № 1.
- [65] Б а л а к р и ш н а н А. Введение в теорию оптимизации в гильбертовом пространстве. — М.: Мир, 1974.
- [66] Б а н д и Б. Методы оптимизации. Вводный курс. — М.: Радио и связь, 1988.
- [67] Б а н и ч у к Н. В. Оптимизация форм упругих тел. — М.: Наука, 1980.
- [68] Б а н и ч у к Н. В. Введение в оптимизацию конструкций. — М.: Наука, 1986.

- [69] Баничук Н. В., Иванова С. Ю., Шаранюк А. В. Динамика конструкций. Анализ и оптимизация. — М.: Наука, 1989.
- [70] Банк Б., Белоусов Е. Г., Мандель Р., Черемных Ю. Н., Широнин В. М. Математическая оптимизация: вопросы разрешимости и устойчивости. — М.: Изд-во МГУ, 1986.
- [71] Батищев Д. И. Методы оптимального проектирования. — М.: Радио и связь, 1984.
- [72] Батурин В. А., Урбанович Д. Е. Приближенные методы оптимального управления, основанные на принципе расширения. — Новосибирск: Наука, 1997.
- [73] Батухтин В. Д., Майборода Л. А. Оптимизация разрывных функций. — М.: Наука, 1984.
- [74] Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. — М.: Наука, 1987.
- [75] Бахвалов Н. С., Лапин А. В., Чижонков Е. В. Численные методы в задачах и упражнениях. — М.: Высшая школа, 2000.
- [76] Бейко И. В., Бублик Б. Н., Зинько П. Н. Методы и алгоритмы решения задач оптимизации. — Киев: Вища школа, 1983.
- [77] Беленький В. З., Волконский В. А., Иванков С. А., Поманский А. Б., Шапиро А. Д. Итеративные методы в теории игр и программировании. — М.: Наука, 1974.
- [78] Беллман Р. Динамическое программирование. — М.: ИЛ, 1960.
- [79] Беллман Р. Процессы регулирования с адаптацией. — М.: Наука, 1964.
- [80] Беллман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования. — М.: Наука, 1965.
- [81] Беллман Р., Калаба Р. Динамическое программирование и современная теория управления. — М.: Наука, 1969.
- [82] Белолипецкий А. А., Рябов А. Ю. Асимптотические оценки решений задачи оптимального быстрогодействия вблизи точек излома изохронной поверхности // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 1986. — Т. 26, № 4. — С. 521–535.
- [83] Белоусов Е. Г. Введение в выпуклый анализ и целочисленное программирование. — М.: Изд-во МГУ, 1977.
- [84] Белоусов Е. Г., Андронов В. Г. Разрешимость и устойчивость задач полиномиального программирования. — М.: Изд-во МГУ, 1993.
- [85] Белоусов Е. Г., Андронов В. Г. О сводимости общей задачи выпуклого программирования к задаче на безусловный экстремум // Известия вузов. Математика. — 1995. — № 12. — С. 21–29.
- [86] Бенсусан А., Лионс Ж.-Л. Импульсное управление и квазивариационные неравенства. — М.: Наука, 1987.
- [87] Бердышев В. И. Устойчивость задачи минимизации при возмущении множества допустимых элементов // Матем. сб. — 1977. — Т. 103(145), № 4(8). — С. 467–479.
- [88] Бердышев В. И. Непрерывность многозначного отображения, связанного с задачей минимизации функционала // Известия АН СССР. Сер. матем. — 1980. — Т. 44, № 3. — С. 483–509.
- [89] Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Т. 1. — М.: Наука, 1966; Т. 2. — Физматгиз, 1962.
- [90] Березнев В. А. Математические методы планирования производственной программы предприятий легкой промышленности. — М.: Легкая индустрия, 1980.
- [91] Березнев В. А., Карманов В. Г., Третьяков А. А. Устойчивые методы решения экстремальных задач с приближенной информацией. — М.: Изд-во Научного совета по комплексной проблеме «Кибернетика» АН СССР, 1987.
- [92] Береснев В. Л., Гимади Э. Х., Дементьев В. Т. Экстремальные задачи стандартизации. — Новосибирск: Наука, 1978.

- [93] Бертсекас Д., Шрив С. Стохастическое оптимальное управление: случай дискретного времени. — М.: Наука, 1985.
- [94] Бертсекас Д. Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа. — М.: Радио и связь, 1987.
- [95] Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. — М.: Наука, 1975.
- [96] Благодатских В. И. Задача управляемости для линейных систем // Труды МИАН СССР. — 1977. — Т. 143. — С. 57–67.
- [97] Благодатских В. И. Линейная теория оптимального управления. — М.: Изд-во МГУ, 1978.
- [98] Благодатских В. И. Теория дифференциальных включений, ч. 1. — М.: Изд-во МГУ, 1979.
- [99] Благодатских В. И., Филиппов А. Ф. Дифференциальные включения и оптимальное управление // Труды МИАН СССР. — 1985. — Т. 169. — С. 194–252.
- [100] Благодатских В. И., Григоренко Н. Л., Киселев Ю. Н. Практикум по оптимальному управлению. — М.: Изд-во МГУ, 1986.
- [101] Блисс Г. А. Лекции по вариационному исчислению. — М.: ИЛ, 1950.
- [102] Бобылев Н. А., Климов В. С. Методы нелинейного анализа в негладкой оптимизации. — М.: Наука, 1992.
- [103] Бобылев Н. А., Коровин С. К. Топологические методы в вариационных задачах. — М.: Изд-во РАЕН, 1997.
- [104] Бокмельдер Е. П., Дыхта В. А., Москаленко А. И., Овсянникова Н. А. Условия экстремума и конструктивные методы решения в задачах оптимизации гиперболических систем. — Новосибирск: Наука, 1993.
- [105] Болтянский В. Г. Математические методы оптимального управления. — М.: Наука, 1969.
- [106] Болтянский В. Г. Оптимальное управление дискретными системами. — М.: Наука, 1973.
- [107] Борисович Ю. Г., Обуховский В. В. О задаче оптимизации для управляемых систем параболического типа // Труды МИРАН. — 1995. — Т. 211. — С. 95–101.
- [108] Брайсон А., Хо Ю-Ши. Прикладная теория оптимального управления. — М.: Мир, 1972.
- [109] Брежнева О. А., Третьяков А. А. Новые методы решения существенно нелинейных проблем. — М.: Изд-во ВЦ РАН, 2000.
- [110] Бублик Б. Н., Гаращенко Ф. Г., Кириченко Н. Ф. Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков. — Киев: Наукова думка, 1985.
- [111] Будаков Б. М., Беркович Е. М., Соловьева Е. Н. О сходимости разностных аппроксимаций для задач оптимального управления // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 1969. — Т. 9, № 3. — С. 522–547.
- [112] Будаков Б. М., Васильев Ф. П. Приближенные методы решения задач оптимального управления (тезисы лекций), вып. 2. — М.: Изд-во МГУ, 1969.
- [113] Будаков Б. М., Виньоли А., Гапоненко Ю. Л. Об одном способе регуляризации для непрерывного выпуклого функционала // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 1969. — Т. 9, № 5. — С. 1046–1056.
- [114] Будаков Б. М., Беркович Е. М. Об аппроксимации экстремальных задач. I, II // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 1971. — Т. 11, № 3. — С. 580–596; № 4. — С. 870–884.
- [115] Будаков Б. М., Васильев Ф. П. Некоторые вычислительные аспекты задач оптимального управления. — М.: Изд-во МГУ, 1975.
- [116] Булавский В. А., Звягина Р. А., Яковлева М. А. Численные методы линейного программирования. — М.: Наука, 1977.

- [117] Булатов В. П. Методы погружения в задачах оптимизации. — Новосибирск: Наука, 1977.
- [118] Бурак Я. И., Зозуляк Ю. Д., Гера Б. В. Оптимизация переходных процессов в термоупругих оболочках. — Киев: Наукова думка, 1984.
- [119] Бурдуковская А. В., Васильев О. В. Об алгоритмах оптимизации в системах канонических гиперболических уравнений с частными производными. — Иркутск: Изд-во Иркутского ун-та, 1998. — (Серия «Оптимизация и управление»; Вып. 2).
- [120] Бурковская В. Л., Макаров В. Л. О применимости метода сеток и метода прямых к решению одного класса задач теории оптимального управления // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 1983. — Т. 23, № 4. — С. 798–805.
- [121] Буслаев В. С. Вариационное исчисление. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1980. — 288 с.
- [122] Бутковский А. Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1965.
- [123] Бутковский А. Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1975.
- [124] Бутковский А. Г. Управление системами с распределенными параметрами // Автоматика и телемеханика. — 1979. — № 11. — С. 16–65.
- [125] Бутковский А. Г., Пустыльников Л. М. Теория подвижного управления системами с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1980.
- [126] Бутковский А. Г., Самойленко Ю. И. Управление квантовомеханическими процессами. — М.: Наука, 1984.
- [127] Бухгейм А. Л. Введение в теорию обратных задач. — Новосибирск: Наука, 1988.
- [128] Вазан М. Стохастическая аппроксимация. — М.: Мир, 1972.
- [129] Вайникко Г. М. Анализ дискретизационных методов. — Тарту: Изд-во Тартуского ун-та, 1976.
- [130] Вайникко Г. М. Методы решения линейных некорректно поставленных задач в гильбертовых пространствах. — Тарту: Изд-во Тартуского ун-та, 1982.
- [131] Вайникко Г. М., Веретенников А. Ю. Итерационные процедуры в некорректных задачах. — М.: Наука, 1986.
- [132] Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. — М.: Наука, 1977.
- [133] Васильев Н. С. О численном решении экстремальных задач построения эллипсоидов и параллелепипедов // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 1987. — Т. 27, № 3. — С. 340–348.
- [134] Васильев О. В., Срочко В. А., Терлецкий В. А. Методы оптимизации и их приложения. Часть 2. Оптимальное управление. — Новосибирск: Наука, 1990.
- [135] Васильев О. В. Лекции по методам оптимизации. — Иркутск: Изд-во Иркутского ун-та, 1994.
- [136] Васильев О. В., Аргучинцев А. В. Методы оптимизации в задачах и упражнениях. — М.: Физматлит, 1999.
- [137] Васильев Ф. П. Условия оптимальности для некоторых классов систем, не разрешенных относительно производной // ДАН СССР. — 1969. — Т. 184, № 6. — С. 1267–1270.
- [138] Васильев Ф. П. Об итерационных методах решения задач быстрогодействия, связанных с параболическими уравнениями // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 1970. — Т. 10, № 4. — С. 942–957.
- [139] Васильев Ф. П., Иванов Р. П. Некоторые приближенные методы решения задач быстрогодействия в банаховых пространствах при наличии фазовых ограничений // ДАН СССР. — 1970. — Т. 195, № 3. — С. 526–529.
- [140] Васильев Ф. П. Лекции по методам решения экстремальных задач. — М.: Изд-во МГУ, 1974.



- [141] Васильев Ф. П. Численный метод решения задачи быстрогодействия при приближенном задании исходных данных // Вестник МГУ. Серия 15. Вычисл. матем. и киберн. — 1977. — № 3. — С. 26–36.
- [142] Васильев Ф. П. О регуляризации некорректных экстремальных задач // ДАН СССР. — 1978. — Т. 241, № 5. — С. 1001–1004.
- [143] Васильев Ф. П. О методе нагруженных функционалов // Вестник МГУ. Серия 15. Вычисл. матем. и киберн. — 1978. — № 3. — С. 24–32.
- [144] Васильев Ф. П., Воронцов М. А., Литвинова О. А. Об оптимальном управлении процессом теплового самовоздействия // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 1979. — Т. 19, № 4. — С. 1053–1058.
- [145] Васильев Ф. П. О регуляризации некорректных задач минимизации на множествах, заданных приближенно // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 1980. — Т. 20, № 1. — С. 38–50.
- [146] Васильев Ф. П., Ковач М. О регуляризации некорректных экстремальных задач с использованием штрафных и барьерных функций // Вестник МГУ. Серия 15. Вычисл. матем. и киберн. — 1980. — № 2. — С. 29–35.
- [147] Васильев Ф. П., Ячимович М. Д. Об итеративной регуляризации метода условного градиента и метода Ньютона при неточно заданных исходных данных // ДАН СССР. — 1980. — Т. 250, № 2. — С. 265–269.
- [148] Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач. — М.: Наука, 1980 (1-е издание), 1988 (2-е издание).
- [149] Васильев Ф. П., Ячимович М. Д. Об итеративной регуляризации метода Ньютона // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 1981. — Т. 21, № 3. — С. 775–778.
- [150] Васильев Ф. П., Хромова Л. Н., Ячимович М. Д. Итеративная регуляризация одного метода минимизации третьего порядка // Вестник МГУ. Серия 15. Вычисл. матем. и киберн. — 1981. — № 1. — С. 31–36.
- [151] Васильев Ф. П. Методы решения экстремальных задач. — М.: Наука, 1981.
- [152] Васильев Ф. П. Итеративная регуляризация разностных аппроксимаций одной задачи оптимального управления // Вестник Киевского ун-та. Сер. Моделирование и оптимизация сложных систем. — 1982. — № 1. — С. 40–45.
- [153] Васильев Ф. П., Аваков Е. Р. Разностная аппроксимация одной максиминной задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями // Вестник МГУ. Серия 15. Вычисл. матем. и киберн. — 1982. — № 2. — С. 11–17.
- [154] Васильев Ф. П., Константинова Т. В. Об одном обобщении метода нагруженных функционалов // Вестник МГУ. Серия 15. Вычисл. матем. и киберн. — 1983. — № 2. — С. 3–8.
- [155] Васильев Ф. П. Регуляризованный метод Стеффенсена с аппроксимацией обратного оператора // Вестник МГУ. Серия 15. Вычисл. матем. и киберн. — 1984. — № 4. — С. 3–7.
- [156] Васильев Ф. П., Ковач М. О регуляризации некорректно поставленных экстремальных задач при неточно заданных исходных данных // Computational mathematics. — Warszawa: Banach Center Publication, 1984. — V. 13. — P. 237–263.
- [157] Васильев Ф. П. Регуляризация некоторых методов минимизации высокого порядка при неточных исходных данных // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 1985. — Т. 25. — № 4. — С. 492–499.
- [158] Васильев Ф. П. О регуляризации метода Ньютона при неточном задании исходных данных // Труды МИАН СССР. — 1985. — Т. 167. — С. 53–59.
- [159] Васильев Ф. П., Солодкая М. С., Ячимович М. Д. О регуляризованном методе линеаризации при наличии погрешностей в исходных данных // Вестник МГУ. Серия 15. Вычисл. матем. и киберн. — 1985. — № 4. — С. 3–8.
- [160] Васильев Ф. П. О методе невязки для решения неустойчивых задач минимизации // Вестник МГУ. Серия 15. Вычисл. матем. и киберн. — 1987. — № 4. — С. 6–10.

- [161] Васильев Ф. П. Применение негладких штрафных функций в методе регуляризации неустойчивых задач минимизации // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 1987. — Т. 27, № 10. — С. 1444–1450.
- [162] Васильев Ф. П. Оценка скорости сходимости метода регуляризации А. Н. Тихонова для неустойчивых задач минимизации // ДАН СССР. — 1988. — Т. 299. — № 4. — С. 792–796.
- [163] Васильев Ф. П. О регуляризации неустойчивых задач минимизации // Труды МИАН СССР. — 1988. — Т. 185. — С. 60–65.
- [164] Васильев Ф. П., Ковач М., Фуллер Р. Об устойчивости нечеткого решения систем линейных алгебраических уравнений с нечеткими коэффициентами // Вестник МГУ. Серия 15. Вычисл. матем. и киберн. — 1989. — № 1. — С. 5–9.
- [165] Васильев Ф. П., Куржанский М. А. О методе квазиreshений для неустойчивых задач минимизации с неточно заданными исходными данными // Вестник МГУ. Серия 15. Вычисл. матем. и киберн. — 1989. — № 4. — С. 13–18.
- [166] Васильев Ф. П., Ишмухаметов А. З., Потапов М. М. Обобщенный метод моментов в задачах оптимального управления. — М.: Изд-во МГУ, 1989.
- [167] Васильев Ф. П. Методы регуляризации для неустойчивых задач минимизации, основанные на идее расширения множества // Вестник МГУ. Серия 15. Вычисл. матем. и киберн. — 1990. — № 1. — С. 3–16.
- [168] Васильев Ф. П., Обрадович О. Регуляризованный проксимальный метод для задач минимизации с неточными исходными данными // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 1993. — Т. 33. — № 2. — С. 179–188.
- [169] Васильев Ф. П., Ячимович М. Метод стабилизации для решения лексикографических задач // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 1993. — Т. 33. — № 8. — С. 1123–1134.
- [170] Васильев Ф. П., Куржанский М. А., Потапов М. М. Метод прямых в задачах граничного управления и наблюдения для уравнения колебаний струны // Вестник МГУ. Серия 15. Вычисл. матем. и киберн. — 1993. — № 3. — С. 8–15.
- [171] Васильев Ф. П., Недич А. Регуляризованный непрерывный метод проекции градиента третьего порядка // Диф. ур. — 1994. — Т. 30. — № 12. — С. 2033–2042.
- [172] Васильев Ф. П., Недич А. Регуляризованный непрерывный метод проекции градиента второго порядка // Вестник МГУ. Серия 15. Вычисл. матем. и киберн. — 1994. — № 2. — С. 3–11.
- [173] Васильев Ф. П., Ковач М. Об оценке скорости сходимости методов регуляризации для неустойчивых задач минимизации // Numerical analysis and mathematical modelling. — Warszawa: Banach Center Publication, 1994. — V. 29. — P. 233–244.
- [174] Васильев Ф. П., Недич А., Ячимович М. Трехшаговый регуляризованный метод линеаризации для решения задач минимизации // Известия вузов. Математика. — 1994. — № 12. — С. 1–8.
- [175] Васильев Ф. П. О двойственности в линейных задачах управления и наблюдения // Диф. ур. — 1995. — Т. 31, № 11. — С. 1893–1900.
- [176] Васильев Ф. П., Антипин А. С. О непрерывном методе минимизации с переменной метрикой // Известия вузов. Математика. — 1995. — № 12. — С. 3–9.
- [177] Васильев Ф. П., Недич А., Ячимович М. Двухшаговый регуляризованный метод линеаризации для решения задач минимизации // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 1996. — Т. 36, № 5. — С. 9–19.
- [178] Васильев Ф. П., Антипин А. С., Амочкина Т. В. Регуляризованный непрерывный метод минимизации с переменной метрикой при неточно заданных исходных данных // Вестник МГУ. Серия 15. Вычисл. матем. и киберн. — 1996. — № 4. — С. 5–11.
- [179] Васильев Ф. П., Иваницкий А. Ю. Линейное программирование. — М.: Факториал, 2003.
- [180] Васильев Ф. П. Критерии устойчивости общей задачи линейного программирования // Вестник МГУ. Серия 15. Вычисл. матем. и киберн. — 1998. — № 2. — С. 17–20.

- [181] Васильев Ф. П. К вопросу устойчивости методов регуляризации в линейном программировании // Вестник МГУ. Серия 15. Вычисл. матем. и киберн. — 1998. — № 4. — С. 19–23.
- [182] Васильев Ф. П., Антипин А. С. Метод стабилизации для решения задач равновесного программирования с неточно заданным множеством // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 1999. — Т. 39. — № 11. — С. 1779–1786.
- [183] Васин А. А. Модели процессов с несколькими участниками. — М.: Изд-во МГУ, 1983.
- [184] Васин В. В., Агеев А. Л. Некорректные задачи с априорной информацией. — Екатеринбург: Наука, 1993.
- [185] Васин В. В. Методы итеративной регуляризации для некорректных задач // Известия вузов. Математика. — 1995. — № 11. — С. 69–84.
- [186] Вахрамеев С. А. Замечание о выпуклости в гладких нелинейных системах // Итоги науки и техники. Серия «Современная математика и ее приложения». Т. 60. — М.: Изд-во ВИНТИ, 1999. — С. 42–73.
- [187] Вигак В. М. Управление температурными напряжениями и перемещениями. — Киев: Наукова думка, 1988.
- [188] Винокуров В. А. О понятии регуляризуемости разрывных отображений // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 1971. — Т. 11, № 5. — С. 1097–1112.
- [189] Винокуров В. А. Приближенный метод невязки в нерелексивных пространствах // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 1972. — Т. 12, № 1. — С. 207–212.
- [190] Винокуров В. А. Два замечания о выборе параметра регуляризации // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 1972. — Т. 12, № 2. — С. 481–483.
- [191] Владимиров А. А., Нестеров Ю. Е., Чеканов Ю. Н. О равномерно выпуклых функционалах // Вестник МГУ. Серия 15. Вычисл. матем. и киберн. — 1978. — № 3. — С. 12–23.
- [192] Воеводин В. В. Линейная алгебра. — М.: Наука, 1980.
- [193] Воробьев Н. Н. Числа Фибоначчи. — М.: Наука, 1978.
- [194] Воробьев Н. Н. Основы теории игр. Бескоалиционные игры. — М.: Наука, 1984.
- [195] Воронцов М. А., Корягин А. В., Шмальгаузен В. И. Управляемые оптические системы. — М.: Наука, 1989.
- [196] Воронцов М. А., Железных Н. И., Потапов М. М. О градиентной процедуре внутрирезонаторного управления световыми пучками // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 1990. — Т. 30, № 3. — С. 449–456.
- [197] Вуколов Э. А., Ефимов А. В., Земсков В. Н., Каракулин А. Ф., Лесин В. В., Поспелов А. С., Терещенко А. М. Сборник задач по математике для вузов. Ч. 4. Методы оптимизации. Уравнения в частных производных. Интегральные уравнения. — М.: Наука, 1990.
- [198] Габасов Р. Ф., Кириллова Ф. М. Качественная теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1971.
- [199] Габасов Р. Ф., Кириллова Ф. М. Особые оптимальные управления. — М.: Наука, 1973.
- [200] Габасов Р. Ф., Кириллова Ф. М. Оптимизация линейных систем. — Минск: Изд-во БГУ, 1973.
- [201] Габасов Р. Ф., Кириллова Ф. М. Принцип максимума в теории оптимального управления. — Минск: Наука и техника, 1974.
- [202] Габасов Р. Ф., Кириллова Ф. М. Основы динамического программирования. — Минск: Изд-во БГУ, 1975.
- [203] Габасов Р. Ф., Кириллова Ф. М. Методы линейного программирования. — Минск: Изд-во БГУ, 1977 (часть 1); 1978 (часть 2); 1980 (часть 3).
- [204] Габасов Р. Ф., Кириллова Ф. М. Методы оптимизации. — Минск: Изд-во БГУ, 1981.

- [205] Габасов Р., Кириллова Ф. М., Тятюшкин А. И. Конструктивные методы оптимизации. Ч. 1. Линейные задачи. — Минск: Изд-во БГУ, 1983.
- [206] Габасов Р., Кириллова Ф. М. Конструктивные методы оптимизации. Ч. 2. Задачи управления. — Минск: Изд-во БГУ, 1984.
- [207] Габасов Р., Кириллова Ф. М., Костюкова О. И. Конструктивные методы оптимизации. Ч. 3. Сетевые задачи. — Минск: Изд-во БГУ, 1986; Ч. 4. Выпуклые задачи. — Минск: Изд-во БГУ, 1987.
- [208] Гаевский Х., Греггер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1978.
- [209] Галеев Э. М., Тихомиров В. М. Краткий курс теории экстремальных задач. — М.: Изд-во МГУ, 1989.
- [210] Галеев Э. М., Тихомиров В. М. Оптимизация: теория, примеры, задачи. — М.: Эдиториал УРСС, 2000.
- [211] Гамкрелидзе Р. В., Харатишвили Г. А. Экстремальные задачи в линейных топологических пространствах // Известия АН СССР. Сер. матем. — 1969. — Т. 33, № 4. — С. 781–839.
- [212] Гамкрелидзе Р. В. Основы оптимального управления. — Тбилиси: Изд-во Тбилисского ун-та, 1977.
- [213] Гантмахер Ф. Р. Теории матриц. — М.: Наука, 1967.
- [214] Ганшин Г. С. Методы оптимизации и решение уравнений. — М.: Наука, 1987.
- [215] Гапоненко Ю. Л. Некорректные задачи на слабых компактах. — М.: Изд-во МГУ, 1989.
- [216] Гасс С. Линейное программирование (методы и приложения). — М.: Физматгиз, 1961.
- [217] Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление. — М.: Физматгиз, 1961.
- [218] Гермейер Ю. Б. Введение в теорию исследования операций. — М.: Наука, 1971.
- [219] Гермейер Ю. Б. Игры с противоположными интересами. — М.: Наука, 1976.
- [220] Гермейер Ю. Б., Морозов В. В., Сухарев А. Г., Федоров В. В. Задачи по исследованию операций. — М.: Изд-во МГУ, 1979.
- [221] Гернет Н. Н. Об основной простейшей задаче вариационного исчисления. — С.-Петербург, 1913.
- [222] Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. — М.: Мир, 1985.
- [223] Гилязов С. Ф. Методы решения линейных некорректных задач. — М.: Изд-во МГУ, 1987.
- [224] Гилязов С. Ф. Приближенное решение некорректных задач. — М.: Изд-во МГУ, 1995.
- [225] Гирсанов И. В. Лекции по математической теории экстремальных задач. — М.: Изд-во МГУ, 1970.
- [226] Гладков Д. И. Оптимизация систем неградиентным случайным поиском. — М.: Энергоатомиздат, 1984.
- [227] Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р. Численное исследование вариационных неравенств. — М.: Мир, 1979.
- [228] Голичев И. И. Метод функции от оператора и итерационные процессы в некоторых задачах оптимального управления // Известия АН СССР. Сер. матем. — 1991. — Т. 55, № 4. — С. 815–837.
- [229] Голичев И. И. Итерационный метод решения некорректных граничных задач // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 1993. — Т. 33, № 11. — С. 1626–1637.
- [230] Гольдман Н. Л. Обратные задачи Стефана. Теория и методы решения. — М.: Изд-во МГУ, 1999.
- [231] Гольштейн Е. Г., Юдин Д. В. Новые направления в линейном программировании. — М.: Сов. радио, 1966.

- [232] Гольштейн Е. Г., Юдин Д. Б. Задачи линейного программирования транспортного типа. — М.: Наука, 1969.
- [233] Гольштейн Е. Г. Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. — М.: Наука, 1971.
- [234] Гольштейн Е. Г., Третьяков Н. В. Модифицированные функции Лагранжа. Теория и методы оптимизации. — М.: Наука, 1989.
- [235] Гончарский А. В., Черепашук А. М., Ягола А. Г. Численные методы решения обратных задач астрофизики. — М.: Наука, 1978.
- [236] Гончарский А. В., Черепашук А. М., Ягола А. Г. Некорректные задачи астрофизики. — М.: Наука, 1985.
- [237] Горбунов В. К. Методы редукции неустойчивых вычислительных задач. — Фрунзе: Изд-во «Илим», 1984.
- [238] Горбунов В. К. Экстремальные задачи обработки результатов измерений. — Фрунзе: Изд-во «Илим», 1990.
- [239] Горбунов В. К. Введение в теорию экстремума. — Ульяновск: Изд-во Ульяновского гос. ун-та, 1999.
- [240] Горелик В. А., Кононенко А. Ф. Теоретико-игровые модели принятия решений в эколого-экономических системах. — М.: Радио и связь, 1982.
- [241] Горелик В. А., Горелов М. А., Кононенко А. Ф. Анализ конфликтных ситуаций в системах управления. — М.: Радио и связь, 1991.
- [242] Гребенников А. И. Метод сплайнов и решение некорректных задач теории приближений. М.: Изд-во МГУ, 1983.
- [243] Грешилов А. А. Прикладные задачи математического программирования. — М.: Изд-во Московск. техн. ун-та, 1990.
- [244] Григоренко Н. Л. Дифференциальные игры преследования несколькими объектами. — М.: Изд-во МГУ, 1983.
- [245] Григоренко Н. Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. — М.: Изд-во МГУ, 1990.
- [246] Григорьев И. С., Григорьев К. Г., Петрикова Ю. Д. О наискорейших маневрах космического аппарата с реактивным двигателем большой ограниченной тяги в гравитационном поле в вакууме // Космические исследования. — 2000. — Т. 38, № 2. — С. 171–192.
- [247] Григорьев К. Г., Григорьев И. С. Исследование оптимальных пространственных траекторий перелетов космического аппарата с реактивным двигателем большой ограниченной тяги между орбитами искусственных спутников Земли и Луны // Космические исследования. — 1995. — Т. 33, № 1. — С. 52–75.
- [248] Григорьев К. Г., Заплетин М. П. О вертикальном старте в оптимизационных задачах ракетодинамики // Космические исследования. — 1997. — Т. 35, № 4. — С. 363–377.
- [249] Гродзовский Г. Л., Иванов Ю. Н., Токарев В. В. Механика космического полета с малой тягой. — М.: Наука, 1966.
- [250] Гроссман К., Каплан А. А. Нелинейное программирование на основе безусловной оптимизации. — Новосибирск: Наука, 1981.
- [251] Гупал А. М. Стохастические методы решения негладких экстремальных задач. — Киев: Наукова думка, 1979.
- [252] Гуревич Т. Ф., Луцук В. О. Сборник задач по математическому программированию. — М.: Колос, 1977.
- [253] Гурман В. И. Вырожденные задачи оптимального управления. — М.: Наука, 1977.
- [254] Гурман В. И. Принцип расширения в задачах управления. — М.: Физматлит, 1997.
- [255] Давыдов Э. Г. Исследование операций. — М.: Высшая школа, 1990.
- [256] Дамбраускас А. П. Симплексный поиск. — М.: Энергия, 1979.

- [257] Данилин Ю. М., Пиявский С. А. Об одном алгоритме отыскания абсолютного минимума // Сб. работ «Теория оптимальных решений». Вып. 2. — Киев: Институт кибернетики АН УССР, 1967. — С. 25–37.
- [258] Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. — М.: ИЛ, 1962.
- [259] Данциг Дж. Линейное программирование, его применения и обобщения. — М.: Прогресс, 1966.
- [260] Даффин Р., Питерсон Э., Зенер К. Геометрическое программирование. — М.: Мир, 1972.
- [261] Дементьев В. Т., Ерзин А. И., Ларин Р. М., Шамордин Ю. В. Задачи оптимизации иерархических структур. — Новосибирск: Изд-во Новосибирского ун-та, 1996.
- [262] Демиденко Е. З. Оптимизация и регрессия. — М.: Наука, 1989.
- [263] Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н. Введение в минимакс. — М.: Наука, 1972.
- [264] Демьянов В. Ф., Васильев Л. В. Недифференцируемая оптимизация. — М.: Наука, 1981.
- [265] Демьянов В. Ф., Рубинов А. М. Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. — М.: Наука, 1990.
- [266] Демьянов В. Ф. Точные штрафные функции в задачах негладкой оптимизации // Вестник СПбГУ. Серия 1. Математика, механика, астрономия. — 1994. — Вып. 4 (№ 22). — С. 21–27.
- [267] Демьянов В. Ф. Условия экстремума и вариационные задачи. — С.-Петербург: Изд-во СПбГУ, 2000.
- [268] Денисов А. М., Лукшин А. В. Математические модели однокомпонентной динамики сорбции. М.: Изд-во МГУ, 1989.
- [269] Денисов А. М. Введение в теорию обратных задач. — М.: Изд-во МГУ, 1994.
- [270] Денисов А. М. Единственность определения нелинейного коэффициента системы уравнений в частных производных в малом и в целом // Докл. РАН. — 1994. — Т. 338, № 4. — С. 444–447.
- [271] Денисов Д. В. Метод итеративной регуляризации в задачах условной минимизации // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 1978. — Т. 18, № 6. — С. 1405–1415.
- [272] Деннис Дж., Шнабель Р. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. — М.: Мир, 1988.
- [273] Дикин И. И., Зоркальцев В. И. Итеративное решение задач математического программирования. — Новосибирск: Наука, 1980.
- [274] Дикусар В. В., Милютин А. А. Качественные и численные методы в принципе максимума. — М.: Наука, 1989.
- [275] Дикусар В. В. Регуляризация вырожденной задачи оптимального управления // Диф. ур. — 1998. — Т. 34, № 11. — С. 1856–1865.
- [276] Дмитрук А. В. Принцип максимума для общей задачи оптимального управления с фазовыми и регулярными смешанными ограничениями // Сб. «Оптимальность управляемых динамических систем», вып. 14. — М.: ВНИИСИ, 1990. — С. 26–42.
- [277] Дончев А. Системы оптимального управления. Возмущения, приближения и анализ чувствительности. — М.: Мир, 1987.
- [278] Дубовицкий А. Я., Милютин А. А. Задачи на экстремум при наличии ограничений // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 1965. — Т. 5, № 3. — С. 395–453.
- [279] Дубовицкий А. Я., Милютин А. А. Теория принципа максимума // Методы теории экстремальных задач в экономике. — М.: Наука, 1981. — С. 138–177.
- [280] Дубовицкий А. Я., Дубовицкий В. А. Необходимые условия сильного минимума в задачах оптимального управления с вырождением конечных и фазовых ограничений // Успехи матем. наук. — 1985. — Т. 40, № 2. — С. 175–176.
- [281] Дудов С. И. Дифференцируемость по направлениям функции расстояния // Матем. сб. — 1995. — Т. 186, № 3. — С. 29–52.

- [282] Дыхта В. А. Вариационный принцип максимума и квадратичные условия оптимальности импульсных и особых процессов // Сиб. матем. ж. — 1994. — Т. 35, № 1. — С. 70–82.
- [283] Дыхта В. А., Самсонок О. Н. Оптимальное импульсное управление с ограничениями. — М.: Физматлит, 2003.
- [284] Дьяченко М. И., Ульянов П. Л. Мера и интеграл. — М.: Факториал, 1998.
- [285] Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. — М.: Наука, 1980.
- [286] Евтушенко Ю. Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. — М.: Наука, 1982.
- [287] Егоров А. И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. — М.: Наука, 1978.
- [288] Егоров А. И. Оптимальное управление линейными системами. — Киев: Выща школа, 1998.
- [289] Егоров Ю. В. Некоторые задачи теории оптимального управления // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 1963. — Т. 3, № 5. — С. 887–904.
- [290] Егоров Ю. В. Необходимые условия оптимальности в банаховых пространствах // Матем. сборник. — 1964. — Т. 64(106), № 1. — С. 79–101.
- [291] Елкин В. И. Редукция нелинейных управляемых систем: дифференциально-геометрический подход. — М.: Физматлит, 1997.
- [292] Емеличев В. А., Комлик В. И. Метод построения последовательности планов для решения задач дискретной оптимизации. — М.: Наука, 1981.
- [293] Емельянов С. В., Коровин С. К. Новые типы обратной связи. Управление при неопределенности. — М.: Наука, Физматлит, 1997.
- [294] Еремин И. И. О методе штрафов в выпуклом программировании // Кибернетика. — 1967. — № 4. — С. 63–67.
- [295] Еремин И. И., Астафьев Н. Н. Введение в теорию линейного и выпуклого программирования. — М.: Наука, 1976.
- [296] Еремин И. И., Мазуров В. Д. Нестационарные процессы математического программирования. — М.: Наука, 1979.
- [297] Еремин И. И., Мазуров В. Д., Астафьев Н. Н. Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. — М.: Наука, 1983.
- [298] Еремин И. И. Противоречивые модели оптимального планирования. — М.: Наука, 1988.
- [299] Еремин И. И. Теория линейной оптимизации. — Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 1998.
- [300] Еремин Ю. А., Свешников А. Г. Задачи распознавания и синтеза в теории дифракции // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 1992. — Т. 32, № 10. — С. 1594–1607.
- [301] Ермаков С. М., Жиглявский А. А. Математическая теория оптимального эксперимента. — М.: Наука, 1987.
- [302] Ермольев Ю. М. Методы стохастического программирования. — М.: Наука, 1976.
- [303] Ермольев Ю. М., Гуленко В. П., Царенко Т. И. Конечно-разностный метод в задачах оптимального управления. — Киев: Наукова думка, 1978.
- [304] Ермольев Ю. М., Ляшко И. И., Михалевич В. С., Тюття В. И. Математические методы исследования операций. — Киев: Вища школа, 1979.
- [305] Ермольев Ю. М., Ястремский А. И. Стохастические модели и методы в экономическом планировании. — М.: Наука, 1979.
- [306] Жадан В. Г. Об одном классе итеративных методов решения задач выпуклого программирования // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 1984. — Т. 24, № 5. — С. 665–676.
- [307] Жданов В. А. О методе покоординатного спуска // Матем. заметки. — 1977. — Т. 22, вып. 1. — С. 137–142.



- [308] Жиглявский А. А. Математическая теория глобального случайного поиска. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1985.
- [309] Жиглявский А. А., Жилинскас А. Г. Методы поиска глобального экстремума. — М.: Наука, 1991.
- [310] Жуковский В. И., Чикрий А. А. Линейно-квадратичные дифференциальные игры. — Киев: Наукова думка, 1994.
- [311] Жуковский В. И., Салуквадзе М. Е. Оптимизация гарантий в многокритериальных задачах управления. — Тбилиси: Мецниереба, 1996.
- [312] Жуковский В. И. Введение в дифференциальные игры при неопределенности. Ч. 1, 2. — М.: Изд-во Международного НИИ проблем управления, 1997.
- [313] Жуковский В. И. Кооперативные игры при неопределенности и их приложения. — М.: Эдиториал УРСС, 1999.
- [314] Заботин Я. И., Кораблев А. И., Хабибуллин Р. Ф. Условия экстремума функционала при наличии ограничений // Кибернетика. — 1973. — № 6. — С. 65–70.
- [315] Заботин Я. И., Кораблев А. И. Псевдовыпуклые функционалы и их экстремальные свойства // Известия вузов. Математика. — 1974. — № 4(143). — С. 27–31.
- [316] Заботин Я. И. Минимаксный метод решения задачи математического программирования // Известия вузов. Математика. — 1975. — № 6(157). — С. 36–43.
- [317] Заботин Я. И. Лекции по линейному программированию. — Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1985.
- [318] Завриев С. К. Стохастические градиентные методы решения минимаксных задач. — М.: Изд-во МГУ, 1984.
- [319] Зангвилл У. И. Нелинейное программирование. — М.: Советское радио, 1973.
- [320] Заславский Ю. Л. Сборник задач по линейному программированию. — М.: Наука, 1969.
- [321] Зеликин М. И. Оптимальное управление и вариационное исчисление. — М.: Изд-во МГУ, 1985.
- [322] Зеликин М. И., Борисов В. Ф. Режимы участвующих переключений в задачах оптимального управления // Труды МИРАН. — 1991. — Т. 197. — С. 85–167.
- [323] Зеликин М. И. Нерегулярность оптимального управления в регулярных экстремальных задачах // Фундаментальная и прикладная математика. — 1995. — Т. 1, № 2. — С. 399–408.
- [324] Зеликин М. И. Однородные пространства и уравнение Риккати в вариационном исчислении. — М.: Факториал, 1998.
- [325] Зеликина Л. Ф. Многомерный синтез и теоремы о магистрали в задачах оптимального управления // Сб. «Вероятностные проблемы управления в экономике». — М.: Наука, 1977. — С. 33–114.
- [326] Зойтендейк Г. Методы возможных направлений. — М.: ИЛ, 1963.
- [327] Зорич В. А. Математический анализ. — М.: МЦНМО, 2007.
- [328] Зубов В. И. Лекции по теории управления. — М.: Наука, 1975.
- [329] Зубов В. И. Динамика управляемых систем. — М.: Высшая школа, 1982.
- [330] Зуховицкий С. И., Авдеева Л. И. Линейное и выпуклое программирование. — М.: Наука, 1967.
- [331] Иванов А. П., Кирин Н. Е. Сопряженные задачи теории управления. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1988.
- [332] Иванов В. А., Фалдин Н. В. Теория оптимальных систем автоматического управления. — М.: Наука, 1981.
- [333] Иванов В. В., Березовский А. И., Задирака В. К., Здоренко Л. Д., Лепеха Н. П. Методы алгоритмизации непрерывных производственных процессов. — М.: Наука, 1975.
- [334] Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. — М.: Наука, 1978.



- [335] Иванов В. К., Мельникова И. В., Филинков А. И. Дифференциально-операторные уравнения и некорректные задачи. — М.: Наука, Физматлит, 1995.
- [336] Иванов Г. Е., Половинкин Е. С. О сильно выпуклых линейных дифференциальных играх // Диф. ур. — 1995. — Т. 31, № 10. — С. 1641–1648.
- [337] Иванов Р. П. Об одном критерии оптимальности и связанном с ним итерационном методе решения задачи быстродействия // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 1971. — Т. 11, № 3. — С. 597–610.
- [338] Иванов Р. П. Об одном итерационном методе решения задачи быстродействия // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 1971. — Т. 11, № 4. — С. 1031–1037.
- [339] Иванович Л. Д. Разностная аппроксимация и регуляризация задачи об оптимальном нагреве стержня // Вестник МГУ. Серия 15. Вычисл. матем. и киберн. — 1982. — № 3. — С. 10–15.
- [340] Иванович Л. Д. Разностная аппроксимация и регуляризация максиминной задачи о нагреве стержня // Вестник МГУ. Серия 15. Вычисл. матем. и киберн. — 1984. — № 2. — С. 20–23.
- [341] Ижуткин В. С., Кокурин М. Ю. О гибридном методе нелинейного программирования, использующем криволинейный спуск // Известия вузов. Математика. — 1986, № 2. — С. 61–64.
- [342] Ижуткин В. С., Кокурин М. Ю. Методы приведенных направлений с допустимыми точками для задачи нелинейного программирования // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 1990. — Т. 30, № 2. — С. 217–230.
- [343] Ижуткин В. С., Петропавловский М. В. Методы приведенных направлений на основе дифференцируемой штрафной функции для задачи нелинейного программирования // Известия вузов. Математика. — 1994. — № 12. — С. 50–59.
- [344] Ижуткин В. С., Петропавловский М. В. Методы приведенных направлений на основе модифицированной функции Лагранжа для задачи нелинейного программирования // Известия вузов. Математика. — 1995. — № 12. — С. 33–42.
- [345] Ижуткин В. С., Петропавловский М. В., Блинов А. В. Метод центров и барьерных функций с использованием приведенных направлений для задачи нелинейного программирования // Известия вузов. Математика. — 1996. — № 2. — С. 30–41.
- [346] Измаилов А. Ф. Условия оптимальности для вырожденных экстремальных задач с ограничениями типа неравенств // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 1994. — Т. 34, № 6. — С. 837–854.
- [347] Измаилов А. Ф., Третьяков А. А. Факторанализ нелинейных отображений. — М.: Наука, 1994.
- [348] Измаилов А. Ф., Третьяков А. А. 2-регулярные решения нелинейных задач. Теория и численные методы. — М.: Физматлит, 1999.
- [349] Икрамов Х. Д. Задачник по линейной алгебре. — М.: Наука, 1975.
- [350] Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. Начальный курс. — М.: Изд-во МГУ, 1985.
- [351] Ильин В. А., Ким Г. Д. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. — М.: Изд-во МГУ, 1998.
- [352] Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. Ч. I, II. — М.: Физматлит, 2002.
- [353] Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра. — М.: Физматлит, 2001.
- [354] Ильин В. А. Волновое уравнение с граничным управлением на двух концах за произвольный промежуток времени // Диф. ур. — 1999. — Т. 35, № 11. — С. 1517–1534.
- [355] Ильин В. А. Волновое уравнение с граничным управлением на одном конце при закрепленном втором конце // Диф. ур. — 1999. — Т. 35, № 12. — С. 1640–1659.
- [356] Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. — М.: Прогресс, 1975.
- [357] Иосида К. Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.

- [358] Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. — М.: Наука, 1974.
- [359] Ишмухаметов А. З., Потапов М. М. О согласовании параметра регуляризации с шагом разностной сетки // Вестник МГУ. Серия 15. Вычисл. матем. и киберн. — 1980. — № 3. — С. 66–68.
- [360] Ишмухаметов А. З. Условия аппроксимации и устойчивости в задачах оптимального управления гиперболическими системами // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 1994. — Т. 34, № 1. — С. 12–28.
- [361] Ишмухаметов А. З. Методы решения задач оптимизации. — М.: Изд-во МЭИ, 1998.
- [362] Ишмухаметов А. З., Юлина А. В. Аппроксимация квадратичной задачи оптимального управления параболической системой // Вестник МЭИ. Математика. — 1998. — № 6. — С. 73–84.
- [363] Ишмухаметов А. З. Вопросы устойчивости и аппроксимации задач оптимального управления. — М.: Изд-во ВЦ РАН, 2000.
- [364] Йованович М. В. Замечание о сильно выпуклых и квазивыпуклых функциях // Матем. заметки. — 1996. — Т. 60, вып. 5. — С. 778–779.
- [365] Кабанихин С. И. Проекционно-разностные методы определения коэффициентов гиперболических уравнений. — Новосибирск: Наука, 1988.
- [366] Казимиров В. И., Плотников В. И., Старобинец И. М. Абстрактная схема метода вариаций и необходимые условия экстремума // Известия АН СССР. Сер. матем. — 1985. — Т. 49, № 1. — С. 141–159.
- [367] Калашников А. Л. Порядковая регуляризация некорректной задачи оптимального управления // Сб. Дифференциальные и интегральные уравнения, вып. 2. — Горький: Изд-во Горьковского ун-та, 1978. — С. 124–129.
- [368] Калихман И. Л. Сборник задач по математическому программированию. — М.: Высшая школа, 1975.
- [369] Калихман И. Л., Войтенко М. А. Динамическое программирование в примерах и задачах. — М.: Высшая школа, 1979.
- [370] Канторович Л. В. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. — М.: Изд-во АН СССР, 1960.
- [371] Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. — М.: Наука, 1984.
- [372] Капустин В. Ф. Практические занятия по курсу математического программирования. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1976.
- [373] Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. — М.: Мир, 1964.
- [374] Карманов В. Г. Математическое программирование. — М.: Физматлит, 2000.
- [375] Карманов В. Г., Федоров В. В. Моделирование в исследовании операций. — М.: Твема, 1996.
- [376] Карташев А. П., Рождественский Б. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления. — М.: Наука, 1986.
- [377] Катковник В. Я. Линейные оценки и стохастические задачи оптимизации. — М.: Наука, 1976.
- [378] Киндерлерер Д., Стампакья Г. Введение в вариационные неравенства и их приложения. — М.: Мир, 1983.
- [379] Кирин Н. Е. Методы последовательных оценок в задачах оптимизации управляемых систем. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1975.
- [380] Кирин Н. Е., Морозкин Н. Д. Численные приближения экстремалей управляемых динамических систем. — Уфа: Изд-во Башкирского ун-та, 1989.
- [381] Кирин Н. Е. Методы оценивания и управления в динамических системах. — Санкт-Петербург: Изд-во СПбГУ, 1993.

- [382] Киселев Ю. Н. Линейная теория быстрогодействия с возмущениями. — М.: Изд-во МГУ, 1986.
- [383] Киселев Ю. Н. Оптимальное управление. — М.: Изд-во МГУ, 1988.
- [384] Киселев Ю. Н. Быстросходящиеся алгоритмы решения линейной задачи быстрогодействия // Кибернетика. — Киев, 1990. — № 6. — С. 47–57, 62.
- [385] Киселев Ю. Н. Построение точных решений для нелинейной задачи быстрогодействия специального вида // Фундаментальная и прикладная математика. — 1997. — Т. 3, № 3. — С. 847–868.
- [386] Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. — М.: Наука, 1988.
- [387] Коваленко А. Г. Элементы выпуклого векторного программирования. — Куйбышев: Изд-во Куйбышевского ун-та, 1990.
- [388] Ковалев М. М. Дискретная оптимизация. — Минск: Изд-во БГУ, 1977.
- [389] Ковач М. Непрерывный аналог итеративной регуляризации градиентного типа // Вестник МГУ. Серия 15. Вычисл. матем. и киберн. — 1979. — № 3. — С. 36–42.
- [390] Ковач М. О сходимости метода обобщенных барьерных функций // Вестник МГУ. Серия 15. Вычисл. матем. и киберн. — 1981. — № 1. — С. 40–45.
- [391] Кокурин М. Ю. Операторная регуляризация и исследование нелинейных монотонных задач. — Йошкар-Ола: Изд-во Марийского ун-та, 1998.
- [392] Коллатц Л., Крабс В. Теория приближений. Чебышевские приближения и их приложения. — М.: Наука, 1978.
- [393] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Физматлит, 2004.
- [394] Колпакова Э. В., Колпаков В. И. Восстановление математических объектов по неполно заданной информации. — Саратов: Изд-во Саратовского техн. ун-та, 1995.
- [395] Комков В. Теория оптимального управления демпфированием колебаний простых упругих систем. — М.: Мир, 1975.
- [396] Коннов И. В. Методы недифференцируемой оптимизации. — Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1993.
- [397] Коннов И. В. Методы решения конечномерных вариационных неравенств. — Казань: Изд-во «ДАС», 1998.
- [398] Корбут А. А., Финкельштейн Ю. Ю. Дискретное программирование. — М.: Наука, 1969.
- [399] Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближения. — М.: Наука, 1976.
- [400] Коробов В. И., Скляр Г. М. Мин-проблема моментов Маркова и быстрогодействие // Сиб. матем. ж. — 1991. — Т. 32, № 1. — С. 60–71.
- [401] Коростелев А. П. Стохастические рекуррентные процедуры (локальные свойства). — М.: Наука, 1984.
- [402] Короткий А. И., Осипов Ю. С. Аппроксимация в задачах позиционного управления параболическими системами // Прикладн. матем. и механика. — 1978. — Т. 42, № 4. — С. 599–605.
- [403] Короткий А. И. Восстановление управлений и параметров динамических систем при неполной информации // Известия вузов. Математика. — 1998. — № 11. — С. 47–55.
- [404] Костоусова Е. К. О параллельном алгоритме решения задачи наблюдения для одномерного волнового уравнения // Сб. «Алгоритмы и программные средства параллельных вычислений». — Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 1995. — С. 101–114.
- [405] Кочкиков И. В., Курамшина Г. М., Пентин Ю. А., Ягола А. Г. Обратные задачи колебательной спектроскопии. — М.: Изд-во МГУ, 1993.
- [406] Коша А. Вариационное исчисление. — М.: Высшая школа, 1983.
- [407] Кравчук А. С. Вариационные и квазивариационные неравенства в механике. — М.: МГАПИ, 1997.
- [408] Крайко А. Н. Вариационные задачи газовой динамики. — М.: Наука, 1979.

- [409] Краснов М. Л., Макаренко Г. И., Киселев А. И. Вариационное исчисление. Задачи и упражнения. — М.: Наука, 1973.
- [410] Краснощеков П. С., Петров А. А. Принципы построения моделей. — М.: Фазис, ВЦ РАН, 2000.
- [411] Красовский Н. Н. Теория управления движением. — М.: Наука, 1968.
- [412] Красовский Н. Н. Игровые задачи о встрече движений. — М.: Наука, 1970.
- [413] Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1974.
- [414] Красовский Н. Н. Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. — М.: Наука, 1985.
- [415] Крейн М. Г., Нудельман А. А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. — М.: Наука, 1973.
- [416] Крейн С. Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1971.
- [417] Кротов В. Ф., Букреев В. З., Гурман В. И. Новые методы вариационного исчисления в динамике полета. — М.: Машиностроение, 1969.
- [418] Кротов В. Ф., Гурман В. И. Методы и задачи оптимального управления. — М.: Наука, 1973.
- [419] Кружков С. Н. Нелинейные уравнения первого порядка и связанные с ними дифференциальные игры // Успехи матем. наук. — 1969. — Т. 24, № 2. — С. 227–228.
- [420] Крылов Н. В. Управляемые процессы диффузионного типа. — М.: Наука, 1977.
- [421] Кражимский А. В., Осипов Ю. С. О моделировании управления в динамической системе // Известия АН СССР. Сер. Техн. киберн. — 1983. — № 2. — С. 51–60.
- [422] Кузнецов Ю. Н., Кузубов В. И., Волощенко А. Б. Математическое программирование. — М.: Высшая школа, 1980.
- [423] Кукушкин Н. С., Морозов В. В. Теория неантагонистических игр. — М.: Изд-во МГУ, 1984.
- [424] Кулешов А. А. О задаче оптимального управления для одной смешанной системы // Вестник МГУ. Серия 15. Вычисл. матем. и киберн. — 1982. — № 3. — С. 15–20.
- [425] Кулешов А. А. Разностная аппроксимация и регуляризация одной задачи оптимального управления процессом, описываемым эллиптическим уравнением // ДАН СССР. — 1983. — Т. 269, № 4. — С. 809–813.
- [426] Куликов А. Н., Фазылов В. Р. Выпуклая оптимизация с заданной точностью // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 1990. — Т. 30, № 5. — С. 663–671.
- [427] Куликовский Р. Оптимальные и адаптивные процессы в системах автоматического регулирования. — М.: Наука, 1967.
- [428] Куратовский К. Топология. Т. 1. — М.: Мир, 1966.
- [429] Куржанский А. Б., Осипов Ю. С. К задаче об управлении с ограниченными фазовыми координатами // Прикладная матем. и механика. — 1968. — Т. 32, вып. 2. — С. 194–202.
- [430] Куржанский А. Б., Осипов Ю. С. К задачам об управлении при стесненных координатах // Прикладная матем. и механика. — 1969. — Т. 33, вып. 4. — С. 705–719.
- [431] Куржанский А. Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. — М.: Наука, 1977.
- [432] Куржанский А. Б., Сивергина И. Ф. Метод гарантированных оценок и задачи регуляризации для эволюционных систем // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 1992. — Т. 32, № 11. — С. 1720–1733.
- [433] Куржанский М. А., Потапов М. М., Разгулин А. В. Проекционная схема метода прямых в задачах зонного управления и наблюдения для уравнения колебаний струны // Вестник МГУ. Серия 15. Вычисл. матем. и киберн. — 1994. — № 3. — С. 29–35.
- [434] Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Субдифференциальное исчисление. Теория и приложения. — М.: Наука, 2007.
- [435] Кутателадзе С. С., Рубинов А. М. Двойственность Минковского и ее приложения. — Новосибирск: Наука, 1976.

- [436] Кухта К. Я., Кравченко В. П., Красношпка В. А. Качественная теория управляемых динамических систем с непрерывно дискретными параметрами. — Киев: Наукова думка, 1986.
- [437] Кюнц Г. П., Крелле В. Нелинейное программирование. — М.: Советское радио, 1965.
- [438] Лаврентьев М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики. — Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962.
- [439] Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П. Некорректные задачи математической физики и анализа. — М.: Наука, 1980.
- [440] Лагунов В. Н. Введение в дифференциальные игры. — Вильнюс: Институт матем. и киберн. АН Литовской ССР, 1979.
- [441] Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. — М.: Наука, 1973.
- [442] Ларичев О. И., Горвиц Г. Г. Методы поиска локального экстремума овражных функций. — М.: Наука, 1990.
- [443] Латтес Р., Лионс Ж.-Л. Метод квазиобращения и его приложения. — М.: Мир, 1970.
- [444] Лебедев В. И. Функциональный анализ и вычислительная математика. — М.: ВИНТИ, 1994.
- [445] Левин А. М. О регуляризации вычисления нижних граней функционалов // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 1984. — Т. 24, № 8. — С. 1123–1128.
- [446] Левин В. Л. Выпуклый анализ в пространствах измеримых функций и его применение в математике и экономике. — М.: Наука, 1985.
- [447] Левитин Е. С., Поляк Б. Т. Методы минимизации при наличии ограничений // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 1966. — Т. 6, № 5. — С. 787–823.
- [448] Левитин Е. С. Теория возмущений в математическом программировании и ее приложения. — М.: Наука, 1992.
- [449] Лейхтвейс К. Выпуклые множества. — М.: Наука, 1985.
- [450] Леонов А. С., Ягола А. Г. Можно ли решить некорректно поставленную задачу без знания погрешностей данных? // Вестник МГУ. Серия 3. Физика, Астрономия. — 1995. — Т. 36, № 4. — С. 28–33.
- [451] Леонов А. С. Функции нескольких переменных с ограниченной вариацией в некорректных задачах // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 1996. — Т. 36, № 9. — С. 35–49.
- [452] Леонов А. С., Ягола А. Г. Метод  $L$ -кривой всегда дает неустранимую систематическую ошибку // Вестник МГУ. Серия 3. Физика, астрономия. — 1997. — № 6. — С. 17–19.
- [453] Леонов А. С. Замечания о полной вариации функций нескольких переменных и многомерном аналоге принципа выбора Хелли // Матем. заметки. — 1998. — Т. 63, № 1. — С. 69–80.
- [454] Леонов А. С., Ягола А. Г. Адаптивные регуляризующие алгоритмы для решения некорректных задач // Вестник МГУ. Серия 3. Физика, астрономия. — 1998. — № 2. — С. 62–63.
- [455] Леонов А. С. О многомерных некорректных задачах с разрывными решениями // Сиб. матем. ж. — 1998. — Т. 39, № 1. — С. 74–86.
- [456] Лесин В. В., Лисовец Ю. П. Основы методов оптимизации. — М.: Изд-во МАИ, 1998.
- [457] Ли Э. Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. — М.: Наука, 1972.
- [458] Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М.: Мир, 1971.
- [459] Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. — М.: Мир, 1972.

- [460] Лионс Ж.-Л. Управление сингулярными распределенными системами. — М.: Наука, 1987.
- [461] Лисковец О. А. Дискретные схемы в методе регуляризации для некорректных экстремальных задач // ДАН СССР. — 1979. — Т. 248, № 6. — С. 1299–1303.
- [462] Лисковец О. А. Вариационные методы решения неустойчивых задач. — Минск: Наука и техника, 1981.
- [463] Литвинов В. Г. Оптимизация в эллиптических граничных задачах с приложениями к механике. — М.: Наука, 1987.
- [464] Лопес Саура И. Разностная аппроксимация и регуляризация одной параболической задачи оптимального управления // Вестник МГУ. Серия 15. Вычисл. матем. и киберн. — 1987. — № 3. — С. 35–42.
- [465] Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация. — М.: Мир, 1975.
- [466] Лотов А. В. Введение в экономико-математическое моделирование. — М.: Наука, 1984.
- [467] Лубышев Ф. В. Разностные аппроксимации задач оптимального управления системами, описываемыми уравнениями в частных производных. — Уфа: Изд-во Башкирского ун-та, 1999.
- [468] Лукьянов А. Т., Неронов В. С. Об оптимальном управлении одной параболически-гиперболической системой // Известия АН Казахской ССР. — 1976. — № 3. — С. 77–80.
- [469] Лурье К. А. Оптимальное управление в задачах математической физики. — М.: Наука, 1975.
- [470] Лэсдон Л. С. Оптимизация больших систем. — М.: Наука, 1975.
- [471] Ляшенко И. Н., Карагодова Е. А., Черникова Н. В., Шор Н. З. Линейное и нелинейное программирование — Киев: Вища школа, 1975.
- [472] Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. Выпуклый анализ и его приложения. — М.: Изд-во Эдиториал УРСС, 2000.
- [473] Макаров В. Л., Рубинов А. М. Математическая теория экономической динамики и равновесия. — М.: Наука, 1973.
- [474] Максимов В. И. Конечномерная аппроксимация входов в гиперболических вариационных неравенствах // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 1995. — Т. 35, № 11. — С. 1615–1629.
- [475] Малков В. П., Угодчиков А. Г. Оптимизация упругих систем. — М.: Наука, 1981.
- [476] Мансимов К. Б. Особые управления в системах с запаздыванием. — Баку: Изд-во «Элм», 1999.
- [477] Марданов М. Д. Некоторые вопросы математической теории оптимальных процессов в системах с запаздываниями. — Баку: Изд-во Азербайджанского ун-та, 1987.
- [478] Маркин Е. А., Стрекаловский А. С. О существовании, единственности и устойчивости решения для одного класса динамических систем, описывающих химические процессы // Вестник МГУ. Серия 15. Вычисл. матем. и киберн. — 1977. — № 4. — С. 3–11.
- [479] Маркин Е. А. О задаче уклонения для одного класса динамических систем, описываемых волновым уравнением // Кибернетика. — 1978. — № 1. — С. 132–133.
- [480] Марчук Г. И., Шайдуров В. В. Повышение точности решений разностных схем. — М.: Наука, 1979.
- [481] Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. — М.: Наука, 1980.
- [482] Марчук Г. И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. — М.: Наука, 1982.
- [483] Марчук Г. И. Сопряженные уравнения и анализ сложных систем. — М.: Наука, Физматлит, 1992.
- [484] Марчук Г. И., Агошков В. И., Шутяев В. П. Сопряженные уравнения и методы возмущений в нелинейных задачах математической физики. — М.: Наука, Физматлит, 1993.

- [485] Матвеев А. С. Вариационный анализ в задачах оптимизации систем с распределенными параметрами и вектор-функции множества // Сиб. матем. ж. — 1990. — Т. 31, № 6. — С. 127–141.
- [486] Матвеев А. С., Якубович В. А. Абстрактная теория оптимального управления. — С.-Петербург: Изд-во СПбГУ, 1994.
- [487] Мееров М. В. Исследование и оптимизация многосвязных систем управления. — М.: Наука, 1986.
- [488] Мезенцев А. В. Сборник задач по теории оптимального управления. — М.: Изд-во МГУ, 1980.
- [489] Меркулов В. И. Управление движением жидкости. — Новосибирск: Наука, 1981.
- [490] Меченов А. С. Регуляризованный метод наименьших квадратов. — М.: Изд-во МГУ, 1988.
- [491] Мину М. Математическое программирование. — М.: Наука, 1990.
- [492] Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. — М.: Наука, 1983.
- [493] Михалевич В. С., Кукса А. И. Методы последовательной оптимизации в дискретных сетевых задачах оптимального распределения ресурсов. — М.: Наука, 1983.
- [494] Михалевич В. С., Трубин В. А., Шор Н. З. Оптимизационные задачи производственно-транспортного планирования: модели, методы, алгоритмы. — М.: Наука, 1986.
- [495] Михалевич В. С., Гупал А. М., Норкин В. И. Методы невыпуклой оптимизации. — М.: Наука, 1987.
- [496] Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. — М.: ГИТТЛ, 1957.
- [497] Моисеев Н. Н. Численные методы в теории оптимальных систем. — М.: Наука, 1971.
- [498] Моисеев Н. Н. Элементы теории оптимальных систем. — М.: Наука, 1975.
- [499] Моисеев Н. Н., Иванилов Ю. П., Столярова Е. М. Методы оптимизации. — М.: Наука, 1978.
- [500] Моисеев Н. Н. Математические задачи системного анализа. — М.: Наука, 1981.
- [501] Молодцов Д. А. Устойчивость принципов оптимальности. — М.: Наука, 1987.
- [502] Мордухович Б. Ш. Методы аппроксимаций в задачах оптимизации и управления. — М.: Наука, 1988.
- [503] Мороз А. И. Курс теории систем. — М.: Высшая школа, 1987.
- [504] Морозкин Н. Д. О сходимости конечномерных приближений в задаче оптимального одномерного нагрева с учетом фазовых ограничений // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 1996. — Т. 36, № 10. — С. 12–22.
- [505] Морозкин Н. Д. Оптимальное управление процессами нагрева с учетом фазовых ограничений. — Уфа: Изд-во Башкирского ун-та, 1997.
- [506] Морозов В. А., Медведев Н. В., Иваницкий А. Ю. Регуляризация задач алгебры и анализа. — М.: Изд-во МГУ, 1987.
- [507] Морозов В. А. Методы регуляризации неустойчивых задач. — М.: Изд-во МГУ, 1987.
- [508] Морозов В. А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. — М.: Наука, 1987.
- [509] Морозов В. А., Гребенников А. И. Методы решения некорректно поставленных задач. Алгоритмический аспект. — М.: Изд-во МГУ, 1992.
- [510] Морозов В. А. Регуляризация при больших помехах // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 1996. — Т. 36, № 9. — С. 13–21.
- [511] Морозов В. В., Сухарев А. Г., Федоров В. В. Исследование операций в задачах и упражнениях. — М.: Высшая школа, 1986.



- [512] Морозов С. Ф., Сумин В. И. Оптимизация нелинейных систем теории переноса // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 1979. — Т. 19, № 1. — С. 99–111.
- [513] Москаленко А. И. Методы нелинейных отображений в оптимальном управлении. — Новосибирск: Наука, 1983.
- [514] Мосолов П. П., Мясников В. П. Механика жесткопластических сред. — М.: Наука, 1981.
- [515] Муравей Л. А. Задача управления границей для эллиптических уравнений // Вестник МГУ. Серия 15. Вычисл. матем. и киберн. — 1998. — № 3. — С. 7–13.
- [516] Муртаф Б. Современное линейное программирование. — М.: Мир, 1984.
- [517] Мухачева Э. А., Рубинштейн Г. Ш. Математическое программирование. — Новосибирск: Наука, 1987.
- [518] Назин А. В., Позняк А. С. Адаптивный выбор вариантов. Рекуррентные алгоритмы. — М.: Наука, 1986.
- [519] Наттерер Ф. Математические аспекты компьютерной томографии. — М.: Мир, 1990.
- [520] Недич А. Трехшаговый метод проекции градиента для задачи минимизации // Известия вузов. Математика. — 1993. — № 10. — С. 32–37.
- [521] Недич А. Непрерывный метод проекции градиента третьего порядка для задач минимизации // Диф. ур. — 1994. — Т. 30, № 11. — С. 1914–1922.
- [522] Недич А. Регуляризованный непрерывный метод проекции градиента для задач минимизации с неточными исходными данными // Вестник МГУ. Серия 15. Вычисл. матем. и киберн. — 1994. — № 1. — С. 3–10.
- [523] Немировский А. С., Юдин Д. Б. Сложность задач и эффективность методов оптимизации. — М.: Наука, 1979.
- [524] Неронов В. С. Оптимальное управление системами с распределенными параметрами. — Алма-Ата: Изд-во Казахского ун-та, 1989.
- [525] Нестеров Ю. Е. Эффективные методы в нелинейном программировании. — М.: Радио и связь, 1989.
- [526] Нефедов В. Н. Методы регуляризации многокритериальных задач оптимизации. — М.: Изд-во МАИ, 1984.
- [527] Нефедов В. Н. Полиномиальные задачи оптимизации // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 1987. — Т. 27, № 5. — С. 661–675.
- [528] Никольский М. С. Об одном способе убегания // ДАН СССР. — 1974. — Т. 214, № 2. — С. 287–290.
- [529] Никольский М. С. О квазилинейной задаче убегания // ДАН СССР. — 1975. — Т. 221, № 3. — С. 539–542.
- [530] Никольский М. С. Первый прямой метод Л. С. Понтрягина в дифференциальных играх. — М.: Изд-во МГУ, 1984.
- [531] Никольский М. С. О задаче управления линейной системой с нарушениями // ДАН СССР. — 1986. — Т. 287, № 6. — С. 1317–1320.
- [532] Никольский М. С. Об одной минимаксной задаче управления // Труды МИАН СССР. — 1988. — Т. 185. — С. 187–191.
- [533] Никольский М. С., Силин Д. Б. О наилучшем приближении выпуклого компакта элементами аддиала // Труды МИАН СССР. — 1995. — Т. 211. — С. 338–354.
- [534] Никольский С. М. Курс математического анализа. — М.: Физматлит, 2001.
- [535] Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. — М.: Наука, 1977.
- [536] Новикова Н. М. Стохастические методы численного решения выпуклых вариационных неравенств // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 1988. — Т. 28, № 2. — С. 186–197.
- [537] Новикова Н. М. Итеративная регуляризация метода штрафов для бесконечномерной задачи поиска стохастической седловой точки // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 1991. — Т. 31, № 9. — С. 1289–1304.



- [538] Новикова Н. М. Некоторые методы численного решения непрерывных выпуклых стохастических задач оптимального управления // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 1991. — Т. 31, № 11. — С. 1605–1618.
- [539] Новикова Н. М. Дискретные и непрерывные задачи оптимизации. — М.: Изд-во ВЦ РАН, 1996.
- [540] Новоженев М. М., Сумин В. И., Сумин М. И. Методы оптимального управления системами математической физики. — Горький: Изд-во Горьковского ун-та, 1986.
- [541] Ногин В. Д., Протоdjяконов И. О., Евлампиев И. И. Основы теории оптимизации. — М.: Высшая школа, 1986.
- [542] Нурминский Е. А. Численные методы решения детерминированных и стохастических минимаксных задач. — Киев: Наукова думка, 1979.
- [543] Обен Ж.-П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ. — М.: Мир, 1988.
- [544] Овсянников А. А. Моделирование и оптимизация динамики пучков заряженных частиц. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1990.
- [545] Олейников В. А., Зотов Н. С., Пришвин А. М. Основы оптимального и экстремального управления. — М.: Высшая школа, 1969.
- [546] Олейников В. А., Зотов Н. С., Пришвин А. М., Соловьев Н. В. Сборник задач и примеров по теории автоматического управления. — М.: Высшая школа, 1969.
- [547] Ольхофф Н. Оптимальное проектирование конструкций. — М.: Мир, 1981.
- [548] Оревков Ю. П. Методы оптимальных решений. — М.: Изд-во МГУ, 1986.
- [549] Орловский С. А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. — М.: Наука, 1981.
- [550] Ортега Д., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. — М.: Мир, 1975.
- [551] Осипов Ю. С. К теории дифференциальных игр в системах с распределенными параметрами // ДАН СССР. — 1975. — Т. 223, № 6. — С. 1314–1317.
- [552] Осипов Ю. С., Охезин С. П. К теории дифференциальных игр в параболических системах // ДАН СССР. — 1976. — Т. 226, № 6. — С. 1267–1270.
- [553] Осипов Ю. С. Позиционное управление в параболических системах // Прикладная матем. и механика. — 1977. — Т. 41, № 2. — С. 195–201.
- [554] Осипов Ю. С., Охезин С. П. К теории позиционного управления в гиперболических системах // ДАН СССР. — 1977. — Т. 233, № 4. — С. 551–554.
- [555] Осипов Ю. С., Суетов А. П. Существование оптимальных форм эллиптических систем. Случай краевых условий Дирихле. — Свердловск: Изд-во УрО АН СССР, 1990.
- [556] Осипов Ю. С., Кряжмский А. В., Максимов В. И. Задачи динамической регуляризации для систем с распределенными параметрами. — Свердловск: Изд-во ИММ УрО АН СССР, 1991.
- [557] Осипов Ю. С., Васильев Ф. П., Потапов М. М. Основы метода динамической регуляризации. — М.: Изд-во МГУ, 1999.
- [558] Островский Г. М., Волин Ю. М. Моделирование сложных химико-технологических схем. — М.: Химия, 1975.
- [559] Охезин С. П. Дифференциальная игра сближения-уклонения для параболической системы при интегральных ограничениях на управления игроков // Прикладная матем. и механика. — 1977. — Т. 41, № 2. — С. 202–209.
- [560] Охезин С. П. Об управлении гиперболической системой в условиях неопределенности // Прикладная матем. и механика. — 1978. — Т. 42, № 4. — С. 606–612.
- [561] Павловский Ю. Н., Смирнова Т. Г. Проблема декомпозиции в математическом моделировании. — М.: Фазис, 1998.
- [562] Панин В. М. Методы конечных штрафов с линейной аппроксимацией ограничений // Кибернетика. — 1984. — № 2. — С. 44–50; № 4. — С. 73–81.

- [563] Пахомов В. Ф. Нелинейное программирование. — М.: Изд-во МГУ, 1982.
- [564] Первозванский А. А., Гайцгорн В. Г. Декомпозиция, агрегирование и приближенная оптимизация. — М.: Наука, 1979.
- [565] Перевозчиков А. Г. О сложности вычисления глобального экстремума в одном классе многоэкстремальных задач // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 1990. — Т. 30, № 3. — С. 379–387.
- [566] Петров А. А., Поспелов И. Г., Шананин А. А. Опыт математического моделирования экономики. — М.: Энергоатомиздат, 1996.
- [567] Петров А. А., Поспелов И. Г., Шананин А. А. От госплана к неэффективному рынку: математический анализ российских экономических структур. — New York: Lewiston, The Edwin Mellen Press, 1999. — 400 p.
- [568] Петров Ю. П. Вариационные методы теории оптимального управления. — Л.: Энергия, 1977.
- [569] Петросян Л. А. Дифференциальные игры преследования. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1977.
- [570] Петросян Л. А., Томский Г. В. Динамические игры и их приложения. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1982.
- [571] Петросян Л. А., Зенкевич Н. А., Семина Е. А. Теория игр. — М.: Высшая школа, 1998.
- [572] Пинягина О. В., Фазылов В. Р. Метод выпуклого программирования с заданной абсолютно-относительной погрешностью // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 1998. — Т. 38, № 8. — С. 1247–1254.
- [573] Плотников В. И. Теоремы существования оптимизирующих функций для оптимальных систем с распределенными параметрами // Известия АН СССР. Сер. матем. — 1970. — Т. 34, № 3. — С. 689–711.
- [574] Плотников В. И. Необходимые и достаточные условия оптимальности и условия единственности оптимизирующих функций для управляемых систем общего вида // Известия АН СССР. Сер. матем. — 1972. — Т. 36, № 3. — С. 652–679.
- [575] Плотников В. И., Сумин В. И. Оптимизация объектов с распределенными параметрами, описываемых системами Гурса–Дарбу // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 1972. — Т. 12, № 1. — С. 61–77.
- [576] Плотников В. И., Сумин В. И. Оптимизация распределенных систем в лебеговом пространстве // Сиб. матем. ж. — 1981. — Т. 22, № 6. — С. 142–161.
- [577] Плотников В. И., Сумин М. И. О построении минимизирующих последовательностей в задачах управления системами с распределенными параметрами // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 1982. — Т. 22, № 1. — С. 49–56.
- [578] Плотников В. И., Шашков В. М., Кузенков О. А. Оптимальное управление линейными сосредоточенными системами. — Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского ун-та, 1993.
- [579] Погорелов А. Г. Обратные задачи нестационарной химической кинетики. — М.: Наука, 1988.
- [580] Подиновский В. В., Гаврилов В. М. Оптимизация по последовательно применяемым критериям. — М.: Советское радио, 1975.
- [581] Подиновский В. В., Ногин В. Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. — М.: Наука, 1982; М.: Физматлит, 2007.
- [582] Полак Э. Численные методы оптимизации. Единый подход. — М.: Мир, 1974.
- [583] Половинкин Е. С. Необходимые условия оптимальности с дифференциальными включениями // Труды МИРАН. — 1995. — Т. 211. — С. 387–400.
- [584] Половинкин Е. С. Сильно выпуклый анализ // Матем. сб. — 1996. — Т. 187, № 2. — С. 103–130.
- [585] Половинкин Е. С. О сильно выпуклых множествах и сильно выпуклых функциях // Итоги науки и техники. Серия «Современная математика и ее приложения». — М.: ВИНТИ, 1999. — Т. 61. — С. 66–138.

- [586] Поляк Б. Т. Введение в оптимизацию. — М.: Наука, 1983.
- [587] Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1976.
- [588] Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1983.
- [589] Понтрягин Л. С. Избранные научные труды. Т. II. — М.: Наука, 1988.
- [590] Попов Н. М. Приближенное решение многокритериальных задач с функциональными ограничениями // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 1986. — Т. 26, № 10. — С. 1468–1481.
- [591] Попов Н. М. К оцениванию информационной сложности глобальной оптимизации и глобального решения уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 1992. — Т. 32, № 12. — С. 1853–1868.
- [592] Попов Н. М. О некоторых принципах оптимальности в многокритериальных задачах. Проблемы математической физики // Сб. работ факультета ВМиК МГУ. — М.: Изд-во «Диалог МГУ», 1998. — С. 217–224.
- [593] Потапов М. М. Разностная аппроксимация и регуляризация задач оптимального управления системами Гурса–Дарбу // Вестник МГУ. Серия 15. Вычисл. матем. и киберн. — 1978. — № 2. — С. 17–26.
- [594] Потапов М. М. Разностная аппроксимация максиминных задач для систем Гурса–Дарбу при наличии фазовых ограничений // Вестник МГУ. Серия 15. Вычисл. матем. и киберн. — 1978. — № 4. — С. 28–36.
- [595] Потапов М. М. Об аппроксимации по функционалу максиминных задач со связанными переменными // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 1979. — Т. 19, № 3. — С. 610–621.
- [596] Потапов М. М. Аппроксимация экстремальных задач в математической физике (гиперболические уравнения). — М.: Изд-во МГУ, 1985.
- [597] Потапов М. М., Разгулин А. В., Шамеева Т. Ю. Аппроксимация и регуляризация задачи оптимального управления для уравнения типа Шредингера // Вестник МГУ. Серия 15. Вычисл. матем. и киберн. — 1987. — № 1. — С. 8–13.
- [598] Потапов М. М. Метод прямых в задачах граничного управления и наблюдения для гиперболического уравнения с краевыми условиями второго и третьего рода // Вестник МГУ. Серия 15. Вычисл. матем. и киберн. — 1996. — № 2. — С. 35–41.
- [599] Потапов М. М. О сильной сходимости разностных аппроксимаций для задач граничного управления и наблюдения для волнового уравнения // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 1998. — Т. 38, № 3. — С. 387–397.
- [600] Потапов М. М. Устойчивый метод решения линейных уравнений с неравномерно возмущенным оператором // Докл. РАН. — 1999. — Т. 365, № 5. — С. 1–3.
- [601] Практикум по линейному программированию / Под ред. Черемных Ю. Н., Павловой Л. С., Суторминой Е. И. — М.: Изд-во МГУ, 1984.
- [602] Пропой А. И. Элементы теории оптимальных дискретных процессов. — М.: Наука, 1973.
- [603] Пшеничный Б. Н., Данилин Ю. М. Численные методы в экстремальных задачах. — М.: Наука, 1975.
- [604] Пшеничный Б. Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. — М.: Наука, 1980.
- [605] Пшеничный Б. Н. Необходимые условия экстремума. — М.: Наука, 1982.
- [606] Пшеничный Б. Н. Метод линеаризации. — М.: Наука, 1983.
- [607] Разгулин А. В. Применение проекционно-разностного метода в задачах наблюдения и управления для уравнения типа Шредингера // Вестник МГУ. Серия 15. Вычисл. матем. и киберн. — 1996. — № 1. — С. 42–52.
- [608] Разумихин Б. С. Физические модели и методы теории равновесия в программировании и экономике. — М.: Наука, 1975.

- [609] Райтум У. Е. Задачи оптимального управления для эллиптических уравнений. — Рига: Зинатне, 1989.
- [610] Растрингин Л. А. Системы экстремального управления. — М.: Наука, 1974.
- [611] Раушенбах Б. В., Токарь Е. Н. Управление ориентацией космических аппаратов. — М.: Наука, 1974.
- [612] Рейклейтис Г., Рейвиндран А., Рэгсдел К. Оптимизация в технике: В 2-х кн. — М.: Мир, 1986.
- [613] Ржевский С. В. Монотонные методы выпуклого программирования. — Киев: Наукова думка, 1993.
- [614] Рихтер К. Динамические задачи дискретной оптимизации. — М.: Радио и связь, 1985.
- [615] Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. — М.: Наука, 1978.
- [616] Ройтенберг Я. Н. Автоматическое управление. — М.: Наука, 1978.
- [617] Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. — М.: Мир, 1973.
- [618] Романов В. Г. Обратные задачи математической физики. — М.: Наука, 1984.
- [619] Романов В. Г., Кабанихин С. И. Обратные задачи геоэлектрики. — М.: Наука, 1991.
- [620] Романовский И. В. Алгоритмы решения экстремальных задач. — М.: Наука, 1977.
- [621] Русов В. Д., Бибикова Ю. Ф., Ягола А. Г. Восстановление изображений в электронно-микроскопической автордиографии поверхности. — М.: Энергоатомиздат, 1991.
- [622] Рязанцева И. П. О выборе параметра регуляризации при решении выпуклых экстремальных задач // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 1997. — Т. 37, № 7. — С. 895–896.
- [623] Рязанцева И. П., Дунцева Е. А. Об одном непрерывном методе решения выпуклых экстремальных задач // Диф. ур. — 1998. — Т. 34, № 4. — С. 480–485.
- [624] Саати Т. Целочисленные методы оптимизации и связанные с ними экстремальные проблемы. — М.: Мир, 1973.
- [625] Савелова Т. И. Об устойчивом суммировании рядов Фурье // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 1979. — Т. 19, № 4. — С. 830–835.
- [626] Савелова Т. И. О связи метода регуляризации А. Н. Тихонова для некорректных уравнений типа свертки с решением краевых задач // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 1982. — Т. 22, № 6. — С. 1316–1322.
- [627] Савелова Т. И., Бухараева Т. И. Представления группы  $SU(2)$  и их применения. — М.: Изд-во МИФИ, 1996.
- [628] Савелова Т. И. Примеры решения некорректно поставленных задач. — М.: Изд-во МИФИ, 1999.
- [629] Садовничий В. А. Теория операторов. — М.: Высшая школа, 1999.
- [630] Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. — М.: Наука, 1971.
- [631] Самарский А. А., Гулин А. В. Устойчивость разностных схем. — М.: Наука, 1973.
- [632] Самарский А. А., Попов Ю. П. Разностные схемы газовой динамики. — М.: Наука, 1975.
- [633] Самарский А. А., Андреев В. Б. Разностные методы для эллиптических уравнений. — М.: Наука, 1976.
- [634] Самарский А. А. Теория разностных схем. — М.: Наука, 1977.
- [635] Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. — М.: Наука, 1978.
- [636] Самсонов С. П. Восстановление выпуклого множества по его опорной функции с заданной точностью // Вестник МГУ. Серия 15. Вычисл. матем. и киберн. — 1983. — № 1. — С. 68–71.

- [637] Сатимов Н. Ю. Об одном способе убегаания в дифференциальных играх // Матем. сборник. — 1976. — Т. 99(141), № 3. — С. 380–393.
- [638] Сеа Ж. Оптимизация. Теория и алгоритмы. — М.: Мир, 1973.
- [639] Сергиенко И. В., Лебедева Т. Т., Рощин В. А. Приближенные методы решения дискретных задач оптимизации. — Киев: Наукова думка, 1980.
- [640] Серовайский С. Я. Вариационные неравенства в оптимизационных задачах. — Алма-Ата: Изд-во Казахского ун-та, 1981.
- [641] Сиразетдинов Т. К. Оптимизация систем с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1977.
- [642] Сиразетдинов Т. К. Устойчивость систем с распределенными параметрами. — Новосибирск: Наука, 1987.
- [643] Сиразетдинов Т. К. Методы решения многокритериальных задач синтеза технических систем. — М.: Машиностроение, 1988.
- [644] Скарин В. Д. Об одном подходе к анализу несобственных задач линейного программирования // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 1986. — Т. 26, № 3. — С. 439–448.
- [645] Слугин С. Н., Шашков В. М., Мионов А. В. Топологический достаточный признак существования оптимального управления динамической системой // Известия вузов. Математика. — 1977. — № 10(185). — С. 134–137.
- [646] Смирнов Е. Я. Стабилизация программных движений. — С.-Петербург: Изд-во СПбГУ, 1997.
- [647] Смольяков Э. Р. Теория антагонизмов и дифференциальные игры. — М.: Эдиториал УРСС, 2000.
- [648] Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. — Изд-во СО АН СССР, 1962.
- [649] Соболев С. Л. Введение в теорию кубатурных формул. — М.: Наука, 1974.
- [650] Современное состояние теории исследования операций: Сб. работ под ред. Н. Н. Моисеева. — М.: Наука, 1979.
- [651] Соловьева С. И. Итерационный метод решения обратной задачи для нелинейного дифференциального уравнения // Вестник МГУ. Серия 15. Вычисл. матем. и киберн. — 1998. — № 4. — С. 14–16.
- [652] Солодовников А. С. Введение в линейную алгебру и линейное программирование. — М.: Просвещение, 1966.
- [653] Срочко В. А. Вычислительные методы оптимального управления. — Иркутск: Изд-во Иркутского ун-та, 1982.
- [654] Срочко В. А. Вариационный принцип максимума и методы линеаризации в задачах оптимального управления. — Иркутск: Изд-во Иркутского ун-та, 1989.
- [655] Срочко В. А. Методы линейно-квадратичных аппроксимаций для решения задач оптимального управления. Оптимизация, управление, интеллект. — Иркутск: Изд-во Иркутского ун-та, ВЦ СО РАН, 1995. — № 1. — С. 110–135.
- [656] Срочко В. А. Итерационные методы решения задач оптимального управления. — М.: Физматлит, 2000.
- [657] Старосельский Л. А., Шелудько Г. А., Кантор Б. Я. Об одной реализации метода оврагов с адаптацией величины овражного шага по экспоненциальному закону // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 1968. — Т. 8, № 5. — С. 1161–1167.
- [658] Старостенко В. И. Устойчивые численные методы в задачах гравиметрии. — Киев: Наукова думка, 1978.
- [659] Страхов В. Н. О построении оптимальных по порядку приближенных решений линейных условно-корректных задач // Диф. ур. — 1973. — Т. 9, № 10. — С. 1862–1874.
- [660] Стрекаловский А. С. К проблеме глобального экстремума // ДАН СССР. — 1987. — Т. 292, № 5. — С. 1062–1066.
- [661] Стрекаловский А. С. Условие глобальной оптимальности в задачах Д. С. программирования. — Иркутск: Изд-во Иркутского ун-та, 1997. — (Серия «Оптимизация и управление»; Вып. 1).

- [662] Стронгин Р. Г. Численные методы в многоэкстремальных задачах управления. — М.: Наука, 1978.
- [663] Субботин А. И., Ченцов А. Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. — М.: Наука, 1981.
- [664] Сумин В. И. Об обосновании градиентных методов для распределенных задач оптимального управления // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 1990. — Т. 30, № 1. — С. 3–21.
- [665] Сумин В. И. О достаточных условиях устойчивости существования глобальных решений управляемых краевых задач // Диф. ур. — 1990. — Т. 26, № 12. — С. 2097–2109.
- [666] Сумин В. И. Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами. — Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского ун-та, 1992.
- [667] Сумин М. И. О первой вариации в теории оптимального управления системами с распределенными параметрами // Диф. ур. — 1991. — Т. 27, № 12. — С. 2179–2181.
- [668] Сумин М. И. Субоптимальное управление системами с распределенными параметрами: минимизирующие последовательности, функция значений // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 1997. — Т. 37, № 1. — С. 23–41.
- [669] Сумин М. И. Субоптимальное управление системами с распределенными параметрами: свойства нормальности, субградиентный двойственный метод // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 1997. — Т. 37, № 2. — С. 162–178.
- [670] Сухарев А. Г., Тимохов А. В., Федоров В. В. Курс методов оптимизации. — М.: Наука, 1986; М.: Физматлит, 2005.
- [671] Сухарев А. Г. Минимаксные алгоритмы в задачах численного анализа. — М.: Наука, 1989.
- [672] Сухинин М. Ф. Полутейлоровские снизу отображения и достаточные условия экстремума // Матем. сборник. — 1991. — № 6. — С. 877–891.
- [673] Сухинин М. Ф. Избранные главы нелинейного анализа. — М.: Изд-во Российского ун-та дружбы народов, 1992.
- [674] Сухинин М. Ф. К вопросу о беллмановском подходе в теории оптимального управления // Матем. заметки. — 1999. — Т. 66, вып. 5. — С. 770–776.
- [675] Сухинин М. Ф. Численное решение некоторых экстремальных задач. — М.: Изд-во Российского ун-та дружбы народов, 2000.
- [676] Схрейвер А. Теория линейного и целочисленного программирования: В 2-х тт. — М.: Мир, 1991.
- [677] Тадумадзе Т. А. Некоторые вопросы качественной теории оптимального управления. — Тбилиси: Изд-во Тбилисского ун-та, 1983.
- [678] Танаев В. С., Шкурба В. В. Введение в теорию расписаний. — М.: Наука, 1975.
- [679] Танана В. П. Методы решения операторных уравнений. — М.: Наука, 1981.
- [680] Танана В. П., Рекант М. А., Янченко С. И. Оптимизация методов решения операторных уравнений. — Екатеринбург: Изд-во Уральского ун-та, 1987.
- [681] Тарасова В. П. Метод стратегии противника в задачах оптимального поиска. — М.: Изд-во МГУ, 1988.
- [682] Темам Р. Математические задачи теории пластичности. — М.: Наука, 1991.
- [683] Тер-Криков А. М. Оптимальное управление и математическая экономика. — М.: Наука, 1977.
- [684] Тетерев А. Г. Методы одномерной оптимизации. — Куйбышев: Изд-во Куйбышевского ун-та, 1983.
- [685] Тетерев А. Г. Линейные задачи оптимизации. — Куйбышев: Изд-во Куйбышевского ун-та, 1983.
- [686] Тимохов А. В. Математические модели экономического воспроизводства. — М.: Изд-во МГУ, 1982.

- [687] Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений. — М.: Изд-во МГУ, 1976.
- [688] Тихомиров В. М. Рассказы о максимумах и минимумах. — М.: Наука, 1986.
- [689] Тихомиров В. М. Выпуклый анализ. Теория приближений // Итоги науки и техники. Серия «Современные проблемы математики, фундаментальные направления». Т. 14. — М.: Изд-во ВИНТИ, 1987.
- [690] Тихомиров В. М. Теория экстремума и экстремальные задачи классического анализа // Итоги науки и техники. Серия «Современная математика и ее приложения». Т. 65. — М.: Изд-во ВИНТИ, 1999. — С. 188–258.
- [691] Тихонов А. Н., Васильев Ф. П., Потапов М. М., Юрий А. Д. О регуляризации задач минимизации на множествах, заданных приближенно // Вестник МГУ. Серия 15. Вычисл. матем. и киберн. — 1977. — № 1. — С. 4–19.
- [692] Тихонов А. Н., Васильев Ф. П. Методы решения некорректных экстремальных задач // В кн.: Banach Center Publications. V. 3. Mathematical models and numerical methods. — Warszawa, 1978, p. 297–342.
- [693] Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г. Регуляризующие алгоритмы и априорная информация. — М.: Наука, 1983.
- [694] Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г. Дифференциальные уравнения. — М.: Физматлит, 2002.
- [695] Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1986.
- [696] Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г. Численные методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1990.
- [697] Тихонов А. Н., Леонов А. С., Ягола А. Г. Нелинейные некорректные задачи. — М.: Наука, Физматлит, 1995.
- [698] Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. — М.: Изд-во МГУ, 1999.
- [699] Толстоногов А. А. Дифференциальные включения в банаховом пространстве. — Новосибирск: Наука, 1986.
- [700] Толстошеин А. Ю. О задаче оптимального управления процессами, описываемыми одной смешанной системой // Вестник МГУ. Серия 15. Вычисл. матем. и киберн. — 1986. — № 4. — С. 19–24.
- [701] Толстых В. К. Прямой экстремальный подход для оптимизации систем с распределенными параметрами. — Донецк: Изд-во «Юго-Восток», 1997.
- [702] Тонков Е. Л. О множестве управляемости линейного уравнения // Диф. ур. — 1983. — Т. 19, № 2. — С. 269–278.
- [703] Тонков Е. Л. Задачи управления показателями Ляпунова // Диф. ур. — 1995. — Т. 31, № 10. — С. 1682–1686.
- [704] Трауб Дж., Вожняковский Х. Общая теория оптимальных алгоритмов. — М.: Мир, 1983.
- [705] Треногин В. А. Функциональный анализ. — М.: Физматлит, 2002.
- [706] Троицкий В. А. Оптимальные процессы колебаний механических систем. — Л.: Машиностроение, 1976.
- [707] Троицкий В. А., Петухов Л. В. Оптимизация упругих тел. — М.: Наука, 1982.
- [708] Туйкина С. Р. Численные методы решения некоторых обратных задач динамики сорбции // Вестник МГУ. Серия 15. Вычисл. матем. и киберн. — 1998. — № 4. — С. 16–19.
- [709] Уайлд Д. Дж. Методы поиска экстремума. — М.: Наука, 1967.
- [710] Уздемир А. П. Динамические целочисленные задачи оптимизации в экономике. — М.: Наука, Физматлит, 1995.
- [711] Ульм С. Ю. Методы декомпозиции для решения задач оптимизации. — Таллин: Изд-во «Валгус», 1979.



- [712] Уонэм М. Линейные многомерные системы управления. — М.: Наука, 1980.
- [713] Урясьев С. П. Адаптивные алгоритмы стохастической оптимизации и теории игр. — М.: Наука, 1990.
- [714] Успенский А. Б., Федоров В. В. Вычислительные аспекты метода наименьших квадратов при анализе и планировании регрессионных экспериментов. — М.: Изд-во МГУ, 1975.
- [715] Усынин Г. Б., Карабасов А. С., Чирков В. А. Оптимизационные модели реакторов на быстрых нейтронах. — М.: Атомиздат, 1981.
- [716] Уткин В. И. Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. — М.: Наука, 1981.
- [717] Уткин В. И., Орлов Ю. В. Теория бесконечномерных систем управления на скользящих режимах. — М.: Наука, 1990.
- [718] Фазылов В. Р. Отыскание минимакса с заданной точностью // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 1994. — Т. 34, № 5. — С. 793–799.
- [719] Федоренко Р. П. Приближенное решение задач оптимального управления. — М.: Наука, 1978.
- [720] Федоров В. В. Численные методы максимина. — М.: Наука, 1979.
- [721] Фиакко А., Мак-Кормик Г. Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной минимизации. — М.: Мир, 1972.
- [722] Филиппов А. Ф. О некоторых вопросах оптимального регулирования // Вестник МГУ. Серия 1. Математика и механика. — 1959. — № 2. — С. 25–38.
- [723] Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. — М.: Наука, 1985.
- [724] Флеминг У., Ришел Р. Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. — М.: Мир, 1978.
- [725] Форд Л., Фалкерсон Д. Потоки в сетях. — М.: Мир, 1966.
- [726] Формальский А. М. Управляемость и устойчивость систем с ограниченными ресурсами. — М.: Наука, 1974.
- [727] Фурасов В. Д. Устойчивость движения, оценки и стабилизация. — М.: Наука, 1977.
- [728] Фурасов В. Д. Устойчивость и стабилизация дискретных процессов. — М.: Наука, 1982.
- [729] Фурасов В. Д. Моделирование плохоформализуемых процессов. — М.: Изд-во «Academia», 1997.
- [730] Фурсиков А. В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. — Новосибирск: Научная книга, 1999.
- [731] Хайлов Е. Н. Об экстремальных управлениях однородной билинейной системы, управляемой в положительном ортанте // Труды МИРАН. — 1998. — Т. 220. — С. 217–235.
- [732] Хапаев М. М. Дифференциальные уравнения, содержащие сингулярные многообразия в задачах управления и минимизации // Диф. ур. — 1995. — Т. 31, № 11. — С. 1886–1892.
- [733] Харатишвили Г. Л., Мачаидзе З. А., Маркозашвили Н. И., Тадумадзе Т. А. Абстрактная вариационная теория и ее применения к оптимальным задачам с запаздываниями. — Тбилиси: Мецниереба, 1973.
- [734] Харатишвили Г. Л., Тадумадзе Т. А. Нелинейные оптимальные системы управления с переменными запаздываниями // Матем. сб. — 1978. — Т. 107, вып. 4. — С. 613–633.
- [735] Харди Г. Г., Литтлвуд Дж. Е., Полиа Г. Неравенства. — М.: ИЛ, 1948.
- [736] Хачиян Л. Г. Полиномиальные алгоритмы в линейном программировании // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 1980. — Т. 20, № 1. — С. 51–68.
- [737] Хедли Дж. Нелинейное и динамическое программирование. — М.: Мир, 1967.
- [738] Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. — М.: Мир, 1975.



- [739] Хоменюк В. В. Оптимальные системы управления. — М.: Наука, 1977.
- [740] Хромова Г. В. Об оценке погрешности метода регуляризации Тихонова для интегральных уравнений с ядром Грина // Вестник МГУ. Серия 15. Вычисл. матем. и киберн. — 1992, № 4. — С. 22–27.
- [741] Хромова Г. В. Приближающие свойства резольвент дифференциальных операторов в задаче приближения функций и их производных // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 1998. — Т. 38, № 7. — С. 1036–1043.
- [742] Хромова Л. Н. Об одном методе минимизации с кубической скоростью сходимости // Вестник МГУ. Серия 15. Вычисл. матем. и киберн. — 1980. — № 3. — С. 52–56.
- [743] Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях. — М.: Мир, 1974.
- [744] Цирлин А. М., Балакирев В. С., Дудников Г. Е. Вариационные методы оптимизации управляемых объектов. — М.: Энергия, 1976.
- [745] Цирлин А. М. Методы усредненной оптимизации и их приложения. — М.: Физматлит, 1997.
- [746] Цурков В. И. Декомпозиция в задачах большой размерности. — М.: Наука, 1981.
- [747] Цурков В. И., Литвинчев И. С. Декомпозиция в динамических задачах с перекрестными связями. — М.: Физматлит, 1994.
- [748] Ченцов А. Г. Конечно-аддитивные меры и релаксации экстремальных задач. — Екатеринбург: Наука, 1993.
- [749] Черемных Ю. Н. Качественное исследование оптимальных траекторий динамических моделей экономики. — М.: Изд-во МГУ, 1975.
- [750] Черемных Ю. Н. Анализ поведения траекторий динамики народно-хозяйственных моделей. — М.: Наука, 1982.
- [751] Черемных Ю. Н. Математические модели развития народного хозяйства. — М.: Изд-во МГУ, 1986.
- [752] Черников С. Н. Линейные неравенства. — М.: Наука, 1968.
- [753] Черноусько Ф. Л., Баничук Н. В. Вариационные задачи механики и управления. — М.: Наука, 1973.
- [754] Черноусько Ф. Л., Колмановский В. Б. Оптимальное управление при случайных возмущениях. — М.: Наука, 1978.
- [755] Черноусько Ф. Л., Меликян А. А. Игровые задачи управления и поиска. — М.: Наука, 1978.
- [756] Черноусько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Соколов Б. Н. Управление колебаниями. — М.: Наука, 1980.
- [757] Чечкин А. В. Математическая информатика. — М.: Наука, 1991.
- [758] Чирич Н. Т. О регуляризованном методе линеаризации выпуклой функции на многогранном множестве при наличии погрешностей в исходных данных // Вестник МГУ. Серия 15. Вычисл. матем. и киберн. — 1987. — № 2. — С. 20–25.
- [759] Численные методы условной оптимизации: Сб. работ / Ред. Ф. Гилл, У. Мюррэй. — М.: Мир, 1977.
- [760] Чичинадзе В. К. Решение невыпуклых нелинейных задач оптимизации. — М.: Наука, 1983.
- [761] Шамеева Т. Ю. Об оптимизации в задаче о распространении светового пучка в неоднородной среде // Вестник МГУ. Серия 15. Вычисл. матем. и киберн. — 1985. — № 1. — С. 12–19.
- [762] Шананин А. А. Об агрегации функций спроса // Экономика и матем. методы. — 1989. — Т. 35, вып. 6.
- [763] Шананин А. А. Двойственность для задач обобщенного программирования и вариационные принципы в моделях экономического равновесия // Докл. РАН. — 1999. — Т. 366, № 4. — С. 462–464.
- [764] Шафиев Р. А. Псевдообращение операторов и некоторые применения. — Баку: Изд-во «Элм», 1989.

- [765] Шевченко В. Н. Качественные вопросы целочисленного программирования. — М.: Физматлит, 1995.
- [766] Шепилов М. А. О методе обобщенного градиента для экстремальных задач // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 1976. — Т. 16, № 1. — С. 242–247.
- [767] Шикин Е. В. Линейные пространства и отображения. — М: Изд-во МГУ, 1987.
- [768] Шилов Г. Е. Математический анализ (функции нескольких вещественных переменных). — М.: Наука, 1972.
- [769] Шор Н. З. Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. — Киев: Наукова думка, 1979.
- [770] Шор Н. З., Стеценко С. И. Квадратичные экстремальные задачи и недифференцируемая оптимизация. — Киев: Наукова думка, 1989.
- [771] Щеглов А. Ю. О равномерном приближении решения одной обратной задачи методом типа квазиобращения // Матем. заметки. — 1993. — Т. 53, вып. 2. — С. 168–174.
- [772] Эдвардс Р. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1969.
- [773] Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. — М.: Мир, 1979.
- [774] Эльстер К.-Х., Рейнгардт Р., Шойбле М., Донат Г. Введение в нелинейное программирование. — М.: Наука, 1985.
- [775] Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г. Линейное программирование. — М.: Физматгиз, 1963.
- [776] Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г. Линейное программирование. Теория, методы и приложения. — М.: Наука, 1969.
- [777] Юдин Д. Б. Задачи и методы стохастического программирования. — М.: Советское радио, 1979.
- [778] Юнусов М. К. Оптимальное управление системами в некоторых процессах тепло-массопереноса. — Душанбе: Дониш, 1987.
- [779] Юрий А. Д. Об одной оптимальной задаче типа Стефана // ДАН СССР. — 1980. — Т. 251, № 6. — С. 1317–1321.
- [780] Якубович В. А. К абстрактной теории оптимального управления // Сиб. матем. ж., I. — 1977. — Т. 18, № 3. — С. 685–707; II. — 1978. — Т. 19, № 2. — С. 436–460; III. — 1979. — Т. 20, № 4. — С. 385–410; IV. — 1979. — Т. 20, № 5. — С. 1131–1159.
- [781] Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. — М.: Мир, 1974.
- [782] Яхно В. Г. Обратные задачи для дифференциальных уравнений упругости. — Новосибирск: Наука, 1990.
- [783] Ячимович М. Итеративная регуляризация одного варианта метода условного градиента // Вестник МГУ. Серия 15. Вычисл. матем. и киберн. — 1980. — № 4. — С. 13–19.
- [784] Avdonin S. A., Ivanov S. A. Families of Exponentials. The Method of Moments in Controllability Problems for Distributed Parameter Systems. — Cambridge University Press, 1995.
- [785] Bertsekas D. P. Nonlinear Programming. — Athena Scientific, 1999.
- [786] Boukari D., Fiacco A. V. Survey of penalty, exact-penalty and multiplier methods from 1968 to 1993 // Optimization, 1995. — V. 32. — P. 301–334.
- [787] Bulirsch R., Montrone F., Pesch H. J. Abort landing in the presence of windshear as a minimax optimal control problem. I. Necessary conditions, II. Multiple shooting and homotopy // J. Optim. Theory Appl. — 1991. — V. 70, № 1. — P. 1–23; № 2. — P. 223–254.
- [788] Denisov A. M., Lamos H. An inverse problem for a nonlinear mathematical model of sorption dynamics with mixed-diffusional kinetics // J. Inverse and Ill-posed Problems. — 1996. — V. 4, № 3. — P. 191–202.
- [789] Dontchev A. L., Zolezzi T. Well-Posed Optimization Problems. — Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 1993.

- [790] Fattorini H. O. Optimal control of nonlinear systems: convergence of suboptimal controls. I // Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. — V. 108. — New York: Marcel Dekker, 1987.
- [791] Fiacco A. V. Introduction to sensitivity and stability analysis in nonlinear programming. — New York: Academic Press, 1983.
- [792] Grossmann C., Kaplan A. A. Strafmethoden und modifizierte Lagrangefunktionen in der nichtlinearen Optimierung. — Leipzig: Teubner, 1979.
- [793] Grossmann C., Temo J. Numerik der nichtlinearen Optimierung. — Stuttgart: Teubner, 1997.
- [794] Henkin G., Shananin A. Bernstein theorems and Radon transform. Application to the theory of production functions. Translation of mathematical monographs, 1990. — V. 81.
- [795] Hiriart-Urruty J. B., Lemarshal C. Convex Analysis and Minimization Algorithms, V. I, II. — Springer, 1993.
- [796] Hoffman A. J. On approximate solutions of systems of linear inequalities // Journ. of Research of Nat. Bureau of Standards. — 1952. — V. 49. — P. 263–265.
- [797] Jai A. El., Prichard A. J. Sensors and controls in the analysis of distributed systems. — NY: J. Wiley and Sons, 1988.
- [798] Janković V., Jovanović M. On contractibility of the operator  $I - t\nabla f$  // Matematički Vesnik. — 1997. — V. 49, № 3–4. — P. 245–248.
- [799] Kaplan A., Tichatschke R. Stable Methods for Ill-Posed Variational Problems. — Berlin: Academie Verlag, 1994.
- [800] Kaplan A., Tichatschke R. Multi-step-prox-regularization method for solving convex variational problems // Optimization. — 1995. — V. 33. — P. 287–319.
- [801] Krabs W. Optimization and Approximation. — John Wiley & Sons, 1979.
- [802] Krabs W. On moment theory and controllability of one-dimensional vibrating systems and heating processes. — Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1992.
- [803] Lemaire B. The proximal algorithm // Intern. Series of Numer. Mathem. — Basel: Birkhäuser Verlag, 1989. — V. 87. — P. 73–87.
- [804] Lions J.-L. Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems // SIAM Rev. — 1988. — V. 30, № 2. — P. 1–68.
- [805] Malanowski K. Regularity of solutions in stability analysis of optimization and optimal control problems // Control and Cybernetics. — 1994. — V. 23, № 1–2. — P. 61–86.
- [806] Mangasarian O. L. Nonlinear Programming. — Philadelphia: SIAM, 1994.
- [807] Nesterov Y., Nemirovskii A. Interior-Point Polynomial Algorithms in Convex Programming. — Philadelphia, 1994.
- [808] Osipov Yu. S., Kryazhinskiy A. V. Inverse problems for ordinary differential equation: dynamical solutions. — London: Gordon and Breach, 1995.
- [809] Petrosjan L. A. Differential Games of Pursuit. — Singapore, London: World Scientific, 1993.
- [810] Petrov A. A., Shananin A. A. Integrability conditions, income distribution and social structures // Lecture notes in economics and mathematic systems. — 1998. — V. 453.
- [811] Polak E. Optimization: Algorithms and consistent approximations. — New York: Springer, 1997.
- [812] Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A. Methods for solving inverse problems in mathematical physics. — Marcel Dekker, 2000.
- [813] Rockafellar R. T. Monotone Operators and the proximal point algorithm // SIAM J. Control and Optimisation. — 1976. — P. 877–898.
- [814] Rockafellar R. T., Wets R. J.-B. Variational Analysis. — Springer, 1998.
- [815] Silin D. B. On Discontinuous Strategies in Optimal Control Problems // Journ. of Mathematical Systems, Estimation and Control. — 1994. — V. 4, № 2. — P. 205–217.
- [816] Strekalovsky A. S. Global optimality conditions for nonconvex optimization // Journ. of Global Opt. — 1998. — V. 12. — P. 415–434.

- [817] Tikhonov A. N., Leonov A. S., Yagola A. G. Nonlinear ill-posed problems. — London: Chapman and Hall, 1998.
- [818] Vasiliev O. V. Optimization methods. — USA, Atlanta: World Federation Publishers Company, ICN, 1996.
- [819] Zelikin M. I., Borisov V. F. Theory of Chattering Control with applications to Astronautics, Robotics, Economics and Engineering. — Boston: Birkhäuser, 1994.

## ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [820] Аваков Е. Р., Арутюнов А. В., Измаилов А. Ф. Об оценках скорости сходимости методов степенного штрафа // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 2004. — Т 44, № 10. — С. 1770–1781.
- [821] Аваков Е. Р., Арутюнов А. В. Теорема об обратной функции и условия экстремума для аномальных задач с незамкнутым образом // Матем. сборник. — 2005. — Т 196, № 3. — С. 3–22.
- [822] Авербух В. И., Смолянов О. Г. Теория дифференцирования в линейных топологических пространствах // Успехи матем. наук. — 1967. — Т. 22, вып. 6. — С. 201–260.
- [823] Агошков В. И. Методы оптимального управления и сопряженных уравнений в задачах математической физики. — М.: ИВМ РАН, 2003.
- [824] Аграчев А. А., Сачков Ю. Л. Геометрическая теория управления. — М.: Физматлит, 2004.
- [825] Александров В. В., Болтянский В. Г., Лемак С. С., Парусников Н. А., Тихомиров В. М. Оптимальное управление движением. — М.: Физматлит, 2005.
- [826] Амосов А. А., Дубинский Ю. А., Копченкова Н. В. Вычислительные методы. — М.: Издательский дом МЭИ, 2008.
- [827] Андрианова А. А., Заботин Я. И. Управление процессом минимизации в параметризованном методе центров // Известия вузов. Математика. — 2002. — № 12. — С. 3–10.
- [828] Антипин А. С. Об одном методе отыскания седловой точки модифицированной функции Лагранжа // Экономика и матем. методы. — 1977. — Т. 13, № 3. — С. 560–565.
- [829] Аргучинцев А. В. Оптимальное управление начально-краевыми условиями гиперболических систем. — Иркутск: Изд-во Иркутского ун-та, 2003.
- [830] Артамонов В. А., Латышев В. Н. Линейная алгебра и выпуклая геометрия. — М.: Факториал Пресс, 2004.
- [831] Арутюнов А. В., Измаилов А. Ф. Теория чувствительности для аномальных задач оптимизации с ограничениями типа равенств // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 2003. — Т 43, № 2. — С. 186–202.
- [832] Арутюнов А. В., Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. Принцип максимума Понтрягина: доказательство и приложения. — М.: Факториал Пресс, 2005.
- [833] Арутюнов А. В., Измаилов А. Ф. Анализ чувствительности для аномальных задач оптимизации с конусным ограничением // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 2004. — Т 44, № 4. — С. 586–608.
- [834] Арутюнов А. В. Достаточные условия второго порядка для бесконечномерных экстремальных задач // Докл. РАН. — 2004. — Т. 399, № 4. — С. 439–442.
- [835] Асанов М. О. Дискретная оптимизация. — Екатеринбург: Урал-Наука, 1998. — 206 с.
- [836] Асеев С. М., Кряжимский А. В. Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста // Труды МИРАН. — М.: Наука, МАИК «Наука/Интерпериодика», 2007.
- [837] Афанасьев В. Н., Колмановский В. Б., Носов В. Р. Математическая теория конструирования систем управления. — М.: Высшая школа, 2003.
- [838] Байocchi К., Капело А. Вариационные и квазивариационные неравенства. Приложение к задачам со свободной границей. — М.: Наука, 1988.

[839] Бакушинский А. Б., Кокурин М. Ю. Итерационные методы решения некорректных операторных уравнений с гладкими операторами. — М.: Едиториал УРСС, 2002.

[840] Бакушинский А. Б., Кокурин М. Ю., Козлов А. И. Стабилизирующиеся методы градиентного типа для решения нерегулярных нелинейных операторных уравнений. — М.: Едиториал УРСС, 2007.

[841] Беников А. И. Линейное программирование. — Иркутск: Изд-во Иркутского ун-та, 2001.

[842] Благодатских В. И. Введение в оптимальное управление. — М.: Высшая школа, 2001.

[843] Бобылев Н. А., Емельянов С. В., Коровин С. К. Геометрические методы в вариационных задачах. — М.: Изд-во «Магистр», 1998.

[844] Боннезен Т., Фенхель В. Теория выпуклых тел. — М.: Фазис, 2002.

[845] Босс В. Лекции по математике. Том 7. Оптимизация. — М.: КомКнига, 2007.

[846] Будаков Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н. Сборник задач по математической физике. — М.: Физматлит, 2003.

[847] Васильева А. Б., Медведев Г. Н., Тихонов Н. А., Уразгильдина Т. А. Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление в примерах и задачах. — М.: Физматлит, 2005.

[848] Васин А. А. Некооперативные игры в природе и обществе. — М.: МАКС Пресс, 2005.

[849] Васин А. А., Морозов В. В. Теория игр и модели математической экономики. — М.: МАКС Пресс, 2005.

[850] Васин В. В. Устойчивая аппроксимация негладких решений некорректно поставленных задач // Докл. РАН. — 2005. — Т. 402, № 5. — С. 1–4.

[851] Васин В. В., Еремин И. И. Операторы и итерационные процессы фейеровского типа. Теория и приложения. — Москва, Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005.

[852] Гайшун И. В. Системы с дискретным временем. — Минск: Институт матем. НАН Белоруссии, 2001.

[853] Гайшун И. В. Введение в теорию линейных нестационарных систем. — Минск: Институт матем. НАН Белоруссии, 1999.

[854] Галеев Э. М., Зеликин М. И., Конягин С. В., Магарил-Ильяев Г. Г., Осмоловский Н. П., Протасов В. Ю., Тихомиров В. М., Фурсиков А. В. Оптимальное управление. — М.: МЦНМО, 2008.

[855] Голиков А. И., Евтушенко Ю. Г. Новый метод решения систем линейных равенств и неравенств // Докл. РАН. — 2001. — Т. 381, № 4. — С. 1–4.

[856] Голиков А. И., Евтушенко Ю. Г. Применение теоремы об альтернативе к нахождению нормальных решений линейных систем // Известия вузов. Математика. — 2001. — Т. 12. — С. 1–11.

[857] Горбунов В. К. Регуляризация нелинейных некорректных задач с параметризованными данными // Нелинейный анализ и нелинейные дифференциальные уравнения / Под ред. Треногина В. А., Филиппова А. Ф. — М.: Физматлит, 2003. — С. 418–447.

[858] Горбунов В. К. Релаксационно-штрафной метод и вырожденные экстремальные задачи // Докл. РАН. — 2001. — Т. 377, № 5. — С. 583–587.

[859] Горбунов В. К., Лутошкин И. В. Развитие и опыт применения метода параметризации в вырожденных задачах динамической оптимизации // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2004. — Т. 5. — С. 67–84.

[860] Гороховик В. В. Конечномерные задачи оптимизации. — Минск: Изд-во БГУ, 2007.

[861] Григорьев И. С., Григорьев К. Г. К проблеме решения в импульсной постановке задач оптимизации траекторий перелетов космического аппарата с реактивным двигателем большой тяги в произвольном гравитационном поле в вакууме // Космические исследования. — 2002. — Т. 40, № 1. — С. 88–111.

- [862] Григорьев И. С. Методическое пособие по численным методам решения краевых задач принципа максимума в задачах оптимального управления. — М.: Изд-во Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2005.
- [863] Гурман В. И. Принцип расширения в задачах управления. — М.: Наука, 1997.
- [864] Демьянов В. Ф. Условия экстремума и вариационное исчисление. — М.: Высшая школа, 2005.
- [865] Дикин И. И., Попова О. М. Исследование и ускорение сходимости алгоритмов метода внутренних точек. — Новосибирск: Наука, СО РАН, 1997.
- [866] Дикин И. И. Определение допустимых и оптимальных решений методом внутренних точек. — Новосибирск: Наука, СО РАН, 1998.
- [867] Дикин И. И. Решение задачи геометрического программирования методом внутренних точек. — Иркутск: Институт систем энергетики СО РАН, 2002.
- [868] Дмитрук А. В., Милютин А. А., Осмоловский Н. П. Теорема Люстерника и теория экстремума // Успехи матем. наук. — 1980. — Т. 35, № 6. — С. 11–45.
- [869] Дмитрук А. В. Квадратичные условия понтягинского максимума в задаче оптимального управления, линейной по управлению. I, II // Известия АН СССР. Сер. матем. — 1986. — Т. 50, № 3. — С. 284–312; 1987. — Т. 51, № 4. — С. 812–832.
- [870] Дмитрук А. В. Квадратичные достаточные условия сильной минимальности аномальных субримановых геодезических // Итоги науки и техники. — М.: ВИНТИ, 2000. — Т. 65. — С. 5–89.
- [871] Дмитрук А. В., Кузькина Н. В. Теорема существования в задаче оптимального управления на бесконечном интервале времени // Матем. заметки. — 2005. — Т. 78, № 4. — С. 503–518.
- [872] Дьяконов Е. Г. Энергетические пространства и их применения. — М.: Изд-во МГУ, факультет ВМиК, 2001.
- [873] Егоров А. И. Уравнения Риккати. — М.: Физматлит, 2001. — 318 с.
- [874] Егоров А. И. Основы теории управления. — М.: Физматлит, 2004.
- [875] Емельянов С. В., Коровин С. К., Бобылев Н. А. Методы нелинейного анализа в задачах управления и оптимизации. — М.: Едиториал УРСС, 2002.
- [876] Емельянов С. В., Коровин С. К., Бобылев Н. А., Булатов А. В. Гомотопии экстремальных задач. — М.: Наука, 2001.
- [877] Еремин И. И. Теория двойственности в линейной оптимизации. — Челябинск: Библиотека Миллера, 2005.
- [878] Жадаев В. Г. Численные методы линейного и нелинейного программирования. — М.: Изд-во ВЦ РАН, 2002.
- [879] Жуковский В. И., Салуквадзе М. Е. Риски и исходы в многокритериальных задачах управления. — Тбилиси: Изд-во «Интеллекти», 2004.
- [880] Жуковский В. И., Жуковская Л. В. Риск в многокритериальных и конфликтных системах при неопределенности. — М.: Едиториал УРСС, 2004.
- [881] Жуковский В. И. Конфликты и риски. — М.: РосЗИТЛП, 2007.
- [882] Заботин И. Я. Об устойчивости алгоритмов безусловной минимизации псевдовыпуклых функций // Известия вузов. Математика. — 2000. — № 12(463). — С. 33–48.
- [883] Заботин В. И., Полонский Ю. А. Псевдовыпуклые множества, отображения и их приложения к экстремальным задачам // Кибернетика. — 1981. — № 1. — С. 71–74.
- [884] Заботин В. И., Черняев Ю. А. Обобщение метода проекции градиента на экстремальные задачи с предвыпуклыми ограничениями // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 2001. — Т. 41, № 3. — С. 367–373.
- [885] Заботин Я. И., Фукин И. А. Об одной модификации метода сдвига штрафов для задач нелинейного программирования // Известия вузов. Математика. — 2000. — № 12(463). — С. 49–54.
- [886] Зеликин М. И., Борисов В. Ф. Синтез оптимальных управлений с накоплением переключений // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — М.: ВИНТИ, 2002. — Т. 90. — С. 5–189.
- [887] Зубов И. В. Методы анализа динамики управляемых систем. — М.: Физматлит, 2003.

- [888] Иванов Г. Е. Седловая точка для дифференциальных игр с сильно выпукловогнутым интегрантом // Матем. заметки. — 1997. — Т. 62, вып. 5. — С. 725–743.
- [889] Иванов Г. Е. Непрерывность оптимальных управлений в дифференциальных играх и некоторые свойства слабо и сильно выпуклых функций // Матем. заметки. — 1999. — Т. 66, вып. 6. — С. 816–839.
- [890] Иванов Г. Е. Дифференциальные игры с эллипсоидальными штрафами // Прикладная математика и механика. — 2004. — Т. 68, вып. 5. — С. 725–745.
- [891] Избранные труды Л. С. Понтрягина. — М.: МАКС Пресс, 2004.
- [892] Измаилов А. Ф., Солодов М. В. Численные методы оптимизации. — М.: Физматлит, 2003.
- [893] Измаилов А. Ф. Чувствительность в оптимизации. — М.: Физматлит, 2006.
- [894] Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Несколько замечаний о вариационных принципах // Матем. заметки. — 1997. — Т. 61, № 2. — С. 305–311.
- [895] Ишмухаметов А. З. Вопросы устойчивости и аппроксимации задач оптимального управления системами с распределительными параметрами. — М.: Изд-во ВЦ РАН, 2001.
- [896] Каменев Г. К. Оптимальные адаптивные методы полиэдральной аппроксимации выпуклых тел. — М.: Изд-во ВЦ РАН, 2007.
- [897] Киселев Ю. Н., Орлов М. В. Задача быстрогодействия для одной нелинейной управляемой модели // Вестник МГУ. Серия 15. Вычисл. матем. и киберн. — 2002. — № 2. — С. 23–30.
- [898] Киселев Ю. Н., Орлов М. В. Исследование одномерных оптимизационных моделей в случае бесконечного горизонта // Диф. ур. — 2004. — Т. 40, № 12. — С. 1615–1628.
- [899] Киселев Ю. Н., Аввакумов С. Н., Орлов М. В. Оптимальное управление. Линейная теория и приложения. — М.: МАКС Пресс, 2007.
- [900] Колемаев В. А. Математическая экономика. — М.: Юнити, 1998.
- [901] Коровин С. К., Фомичев В. В. Наблюдатели состояния для линейных систем с неопределенностью. — М.: Физматлит, 2007.
- [902] Корпелевич Г. М. Экстраградиентный метод для отыскания седловых точек и других задач // Экономика и матем. методы. — 1976. — Т. 12, № 4. — С. 747–756.
- [903] Корпелевич Г. М. Экстраполяционные градиентные методы и их связь с модифицированными функциями Лагранжа // Экономика и матем. методы. — 1983. — Т. 19, № 4. — С. 694–703.
- [904] Костоусова Е. К. О полиэдральном оценивании областей достижимости линейных многошаговых систем // Автоматика и телемеханика. — 1997. — № 3. — С. 57–58.
- [905] Костоусова Е. К. О внешних полиэдральных оценках для множеств достижимости систем с билинейной неопределенностью // Прикладная матем. и механика. — 2002. — Т. 66, № 4. — С. 559–571.
- [906] Краснощекоев П. С., Морозов В. В., Попов Н. М. Оптимизация в автоматизированном проектировании. — М.: МАКС Пресс, 2008.
- [907] Кряжимский А. В., Пашенко С. В. К решению линейной задачи быстрогодействия со смешанными ограничениями // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — М.: ВИНТИ, 2002. — Т. 90. — С. 232–260.
- [908] Кузенков О. А., Рябова Е. А. Математическое моделирование процессов отбора. — Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского ун-та, 2007.
- [909] Ларин Р. М., Плясунов А. В., Пяткин А. В. Методы оптимизации. Примеры и задачи. — Новосибирск: Изд-во НГУ, 2003.
- [910] Леонов А. С. Решения некорректно поставленных обратных задач. Очерк теории, практические алгоритмы и демонстрации в МАТЛАБ. — М.: Книжный дом «Либроком», 2010.
- [911] Лутманов С. В. Курс лекций по методам оптимизации. — Ижевск: Изд-во РХД, 2001.
- [912] Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. Метод Ньютона, дифференциальные уравнения и принцип Лагранжа для необходимых условий экстремума // Труды МИРАН. — 2008. — Т. 262.



- [913] Мазуров В. Д. Метод комитетов в задачах оптимизации и классификации. — М.: Наука, 1990. — 248 с.
- [914] Максимов В. И. Задачи динамического восстановления входов бесконечномерных систем. — Екатеринбург: Изд-во института матем. и механики УрО РАН, 2000.
- [915] Мансимов К. Б. Дискретные системы. — Баку: Изд-во БГУ, 2002.
- [916] Матвеев А. С., Якубович В. А. Оптимальные системы управления: обыкновенные дифференциальные уравнения. Специальные задачи. — С.-Петербург: Изд-во СПбГУ, 2003.
- [917] Меликов Т. К. Особые управления в системах с последствием. — Баку: Изд-во «Элм», 2002.
- [918] Меликов Т. К. Особые в классическом смысле управления в системах Гурса-Дарбу. — Баку: Изд-во «Элм», 2003.
- [919] Милютин А. А., Дмитрук А. В., Осмоловский Н. П. Принцип максимума в оптимальном управлении. — М.: Изд-во Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2005.
- [920] Милютин А. А. Принцип максимума в общей задаче оптимального управления. — М.: Физматлит, 2001.
- [921] Мионов А. А., Цурков В. И. Минимакс в транспортных задачах. — М.: Физматлит, 1997.
- [922] Морозов В. В. Основы теории игр. — М.: Изд-во МГУ, 2002.
- [923] Никольский М. С. О сходимости оптимальных управлений в некоторых оптимизационных задачах // Вестник МГУ. Серия 15. Вычисл. матем. и киберн. — 2004. — № 1. — С. 24–30.
- [924] Никольский М. С. О достаточности принципа максимума Понтрягина в некоторых оптимизационных задачах // Вестник МГУ. Серия 15. Вычисл. матем. и киберн. — 2005. — № 1. — С. 35–43.
- [925] Ногин В. Д. Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход. — М.: Физматлит, 2002.
- [926] Павловский Ю. Н. Имитационные модели и системы. — М.: Фазис, ВЦ РАН, 2000.
- [927] Пантелеев А. В., Бортакровский А. С., Летова Т. А. Оптимальное управление в примерах и задачах. — М.: Изд-во МАИ, 1996.
- [928] Пантелеев А. В., Летова Т. А. Методы оптимизации в примерах и задачах. — М.: Высшая школа, 2002.
- [929] Пападимитру Х., Стайглац К. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. — М.: Мир, 1985.
- [930] Половинкин Е. С., Балашов М. В. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. — М.: Физматлит, 2004.
- [931] Самарский А. А., Михайлов А. П. Математическое моделирование. — М.: Физматлит, 2001.
- [932] Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. — М.: Едиториал УРСС, 2004.
- [933] Сивергина И. Ф. Обратимость и наблюдаемость эволюционных систем // Докл. РАН. — 1996. — Т. 351, № 3. — С. 304–308.
- [934] Сигал И. Х., Иванова А. П. Введение в прикладное дискретное программирование: модели и вычислительные алгоритмы. — М.: Физматлит, 2002.
- [935] Сигал И. Х., Иванова А. П. Введение в прикладное дискретное программирование. — М.: Физматлит, 2007.
- [936] Скарин В. Д. О методе регуляризации для противоречивых задач выпуклого программирования // Известия вузов. Математика. — 1995. — № 12. — С. 81–88.
- [937] Смольяков Э. Р. Теория конфликтных равновесий. — М.: Едиториал УРСС, 2005.
- [938] Смольяков Э. Р. Неизвестные страницы истории оптимального управления. — М.: Едиториал УРСС, 2002.
- [939] Соловьев В. Н. Двойственность невыпуклых экстремальных задач // ДАН СССР. — 1990. — Т. 314, № 1. — С. 135–138.

- [940] Стрекаловский А. С. Теоретические основы выпуклой максимизации. — Иркутск: Изд-во Иркутского ун-та, 2001. — (Серия «Оптимизация и управление»; Вып. 4).
- [941] Стрекаловский А. С. Минимизация разности двух выпуклых функций. — Иркутск: Изд-во Иркутского ун-та, 2002. — (Серия «Оптимизация и управление»; Вып. 5).
- [942] Стрекаловский А. С., Орлов А. В. Биматричные игры и билинейное программирование. — М.: Физматлит, 2007.
- [943] Субботин А. И. Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона–Якоби. — М.: Наука, 1991.
- [944] Субботин А. И. Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. — Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
- [945] Сумин М. И. Итеративная регуляризация градиентного двойственного метода для решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода // Вестник ННГУ. Сер. Математика. — 2002. — Вып. 1(2). — С. 192–208.
- [946] Сумин В. И. Сильное вырождение особых управлений в распределенных задачах оптимизации // ДАН СССР. — 1991. — Т. 320, № 2. — С. 295–299.
- [947] Сумин М. И. Регуляризованный градиентный двойственный метод решения обратной задачи финального наблюдения для параболического уравнения // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 2004. — Т. 44, № 11. — С. 2001–2019.
- [948] Сумин М. И. Субоптимальное управление полулинейным эллиптическим уравнением с фазовым ограничением и граничным управлением // Диф. ур. — 2001. — Т. 37, № 2. — С. 260–275.
- [949] Сухинин М. Ф. Численное решение задач линейного программирования и вычисление границ спектра симметричной матрицы. — М.: Физматлит, 2002.
- [950] Тертычный-Даури В. Ю. Адаптивная механика. — М.: Факториал, 2003.
- [951] Уррути И. Оптимизация и выпуклый анализ: Сборник задач и упражнений. — Киев: Изд-во КИТ, 2004.
- [952] Хайлов Е. Н. О параметризации множества достижимости билинейной системы с коммутирующими матрицами // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — М.: ВИНТИ, 2002. — Т. 90. — С. 190–231.
- [953] Хачатуров В. Р., Веселовский В. Е., Злотов А. В. и др. Комбинаторные методы и алгоритмы решения задач дискретной оптимизации большой размерности. — М.: Наука, 2000.
- [954] Черемных Ю. Н. Математические методы исследования операций. — М.: Изд-во МГИУ, 1996.
- [955] Черноусько Ф. Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. — М.: Наука, 1988.
- [956] Шикин Е. В., Чхартишвили А. Г. Математические методы и модели в управлении. — М.: Изд-во «Дело», 2002.
- [957] Щеглов А. Ю. Прикладные вопросы функционального анализа. — М.: Изд-во МГУ, факультет ВМиК, 2003.
- [958] Эмануилов О. Ю. О существовании решения в задачах управления эллиптическими системами // Вестник МГУ. Серия 1. Математика и механика. — 1989. — № 5. — С. 70–73.
- [959] Эмануилов О. Ю. Граничная управляемость параболических уравнений // Матем. сборник. — 1995. — Т. 186, № 6. — С. 109–132.
- [960] Bonnans J. F., Gilbert J. C., Lemaréchal C., Sagastizábal C. A. Numerical Optimization. Theoretical and Practical Aspects. — Springer, 2003.
- [961] Ekeland I. On the variational principle // J. Math. and Appl. — 1974. — V. 47. — P. 324–353.
- [962] Fletcher R. Practical Methods of Optimization. Vol. 1. Unconstrained Optimization. Vol. 2. Constrained Optimization. — John Wiley and Sons, Chichester, 1981.
- [963] Floudas C. A., Pardalos P. M. Encyclopedia of optimization. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2001.
- [964] Hiriart-Urruty J. B., Baptiste J., Lemaréchal C. Fundamentals of Convex Analysis. — Springer, 2001.

- [965] Klatte D., Kummer B. Nonsmooth Equations in Optimization, Regularity, Calculus, Methods and Applications. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002.
- [966] Konnov I. V. Combined relaxation methods for variational inequalities. — Berlin: Springer, 2001.
- [967] Kurzhanski A., Valyi I. Ellipsoidal calculus for estimation and control. — Boston: Birkhauser, 1997.
- [968] Lyashko S. I. Generalized optimal control of linear systems with distributed parameters. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002.
- [969] Nesterov Yu. Introductory Lectures on Convex Optimization: A Basic Course. — Boston–Dordrecht–London: Kluwer Academic Publishers, 2004. [Имеется русское издание: Нестеров Ю. Е. Введение в выпуклую оптимизацию. — М.: МЦНМО, 2010.]
- [970] Strongin R. G., Sergeyev Y. D. Global Optimization with Non-convex Constraints. Sequential and Parallel Algorithms. — Boston–Dordrecht–London: Kluwer Academic Publishers, 2000.
- [971] Vasiliev F. P., Ivanitskiy A. Yu. In-Depth Analysis of Linear Programming. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2001.
- [972] Zlobec S. Stable parametric programming. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2001.

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Антициклон, 143

Аппроксимация задач быстродействия, 448, 952

— максиминных задач, 983

— — — со связанными множествами, 987

— экстремальных задач, 907

Базис угловой точки, 123

Базисная матрица, 125

Базисные координаты угловой точки, 123

— переменные, 123

Вариационный принцип, 676

Вектор опорный, 224

— собственно опорный, 224

Верхний предел последовательности, 60

— — — множеств, 400

Верхняя грань функции, 16, 640

Гильбертов кирпич, 687

Гиперплоскость, 57, 171, 633

— опорная, 224

— отделяющая, 219

— собственно опорная, 224

Градиент, 67, 663

Двойственные переменные, 161, 262

Допустимое множество, 17

Задача быстродействия, 448

— двойственная, 161, 262

— классического вариационного исчисления, 532

— Коши, 440

— линейного программирования вырожденная, 140

— — — двойственная, 161, 265

— — — каноническая, 116

— — — невырожденная, 140

— — — общая, 112

— — — основная (стандартная), 118

— — — разрешимая, 155

— максимизации, 16, 65

— минимизации, 14, 58

— — второго типа, 15, 16, 787

— — первого типа, 14, 16, 787

— многоэкстремальная, 364

— наблюдения, 768

— неустойчивая (некорректно поставленная) по аргументу, 790

— — — по функции, 789

— обратная, 899

— оптимального управления, 448

— — — автономная, 449

— — — с закрепленным временем, 446

— — — с закрепленным концом, 446

— — — с подвижным концом, 447

— — — с фазовыми ограничениями, 446, 499, 917

— — — со свободным концом, 447

— с сильно согласованной постановкой, 387

— с согласованной постановкой, 386

— управления, 762

— устойчивая по аргументу, 790

— — по функции, 789

Задачи взаимодвойственные, 162, 769

— на безусловный экстремум, 67

— на условный экстремум, 73

Замыкание множества, 175, 656

Зацикливание, 141

Золотое сечение отрезка, 21

**Индекс квадратичной формы, 88**

— — — отрицательный, 88

— — — положительный, 88

**Квадратичная форма (матрица) неотрицательная, 69**

— — — отрицательно определенная, 69

— — — положительно определенная, 69

Конус, 58

— Арутюнова, 86, 92

— выпуклый, 227

— двойственный (сопряженный), 227

— замкнутый, 227

— критических направлений, 83, 93

— Лагранжа, 75, 79, 246

— многогранный, 183

— неострый, 58

— острый, 58

— открытый, 227

Координата базисная, 123

— фазовая, 440

Коразмерность подпространства, 58

- Коэффициент барьерный, 407
- штрафной, 381
- Краевая задача принципа максимума, 455
- Критерий выпуклости функции, 38, 42, 185, 189, 190, 665
- оптимальности, 41, 186, 218, 233, 325, 357, 665
- сильной выпуклости функции, 209, 210, 665
- Лексикографическая задача минимизации, 819
- Лексикографически положительная симплекс-таблица, 145
- положительный вектор, 144
- Лексикографический минимум, 144
- Лексикографическое правило, 147
- упорядочение векторов, 144
- симплекс-таблиц, 145
- Локальные методы, 364
- Луч, 57
- открытый, 57
- Максимум глобальный (абсолютный), 16
- локальный, 16
- Малый лагранжиан, 450
- Метод барьерных функций, 407
- блуждающих трубок, 553
- возможных направлений, 314, 316, 705
- градиентный, 277, 695
- непрерывный, 290
- Давидона–Флетчера–Пауэлла, 356
- декомпозиции, 548
- деления отрезка пополам, 19
- динамической регуляризации, 899
- золотого сечения, 21
- искусственного базиса, 153
- касательных, 44
- квазиньютоновский, 355
- квазирешений, 834, 843
- классический, 17, 67
- линеаризации, 331
- локальных вариаций, 553
- ломаных, 30
- модифицированных функций Лагранжа, 368
- моментов, 772
- нагруженных функций, 416
- невязки, 830, 842
- непрерывный, 290, 300
- с переменной метрикой, 357
- Ньютона, 349, 707, 880
- непрерывный, 357
- овражный, 284
- оптимальный, 24
- пассивный, 25
- — оптимальный, 26
- покоординатного спуска, 359
- покрытий, 34, 364
- последовательный, 26
- — оптимальный, 27
- проекции градиента, 293, 699, 846
- — непрерывный, 300, 891
- — субградиента, 303
- проксимальный, 327, 706, 874
- равномерного перебора, 26
- регуляризации, 795, 933
- симметричный, 23
- скорейшего спуска, 278
- случайного поиска, 428
- — — без обучения, 429
- — — с обучением, 429
- сопряженных градиентов, 348
- — направлений, 340, 707
- стабилизации, 812, 839
- стохастической аппроксимации, 432
- Стронгина, 48
- тяжелого шарика, 292
- условного градиента, 309, 701, 855
- Фибоначчи, 27
- штрафных функций, 380, 708
- экстраградиентный, 373, 863
- Минимальный корень уравнения, 419
- Минимум глобальный (абсолютный), 15, 640
- лексикографический, 144
- локальный, 15, 665
- Многогранник выпуклый, 183
- Множество аффинное, 172
- выпуклое, 171
- замкнутое, 60, 176, 641, 656
- компактное, 60, 641, 658
- Лебега, 61
- многогранное (полиэдр), 174, 257
- ограниченное, 60, 641
- открытое, 175, 656
- относительно компактное, 641
- — слабо компактное, 643
- связное, 182
- секвенциально компактное, 658
- слабо компактное, 643
- счетно-компактное, 658
- эффективное, 271
- Множитель Лагранжа, 74, 75, 79, 245
- Модуль выпуклости, 240
- — точный, 240
- непрерывности множеств по Хаусдорфу, 948
- Момент времени конечный, 446
- — — закрепленный, 446
- — — начальный, 446
- — — закрепленный, 446

**Надграфик (эпиграф) функции**, 194

**Наибольшее (максимальное) значение функции**, 16

**Наименьшее (минимальное) значение функции**, 12

**Направление возможное**, 195

— убывания, 314

— рецессивное, 199

— сопряженное, 344

**Непрерывность семейства множеств по Хаусдорфу**, 947

**Неравенство Антипина**, 197, 211

— вариационное, 188

— Гроноуллы, 472

— Йенсена, 185

— Коши–Буняковского, 57, 633

— треугольника, 57

— Хоффмана, 391

**Нижний предел последовательности**, 60

**Нижняя грань функции**, 13, 640

**Норма вектора**, 57

— оператора, 635

**Нормальное решение**, 819, 902

**Нормальный вектор гиперплоскости**, 172, 633

**Оболочка аффинная**, 174

— выпуклая, 178

— коническая, 183

— линейная, 183

**Ограничения активные**, 79, 245

— интегральные, 449

— корректные, 390

— пассивные, 79, 245

— поточечные, 449

— типа неравенств, 78

— равенств, 73

— фазовые, 446

**Окрестность множества**, 656

— точки, 60, 640, 656

**Оператор линейный**, 634

— ограниченный, 634

— проектирования, 215

— проксимальный, 324

— регуляризирующий, 802, 838, 854, 862, 874, 880, 899

— самосопряженный, 635

— симметричный, 662

— сопряженный, 635

**Ортант неотрицательный**, 175

**Отделимость множеств**, 219, 687

— сильная, 220, 688

— собственная, 220

— строгая, 220

**Отображение**, 632

— дифференцируемое, 661

— многозначное, 234

— выпуклозначное, 234

— замкнутое (непрерывное сверху), 234

— компактное, 234

— монотонное, 234

— проксимальное, 324

— субдифференциальное, 234

**Отрезок локализации минимума**, 25

**Параллелепипед**, 175

**Первая вариация**, 690

**Погрешность метода**, 24

**Подпространство**, 58

— несущее, 174

— сопровождающее, 86, 92

**Позином**, 267

**Полупространство замкнутое**, 172

— открытое, 172

**Поляра**, 229

**Последовательность максимизирующая**, 16, 640

— минимизирующая, 13, 640

— ограниченная, 60

**Постоянная Липшица**, 29

— сильной выпуклости, 206

**Правило множителей Лагранжа**, 74, 76, 245, 683, 687

**Приведенная система угловой точки**, 126

— форма канонической задачи, 127

— целевой функции, 127

**Принцип максимума Понтрягина**, 437, 451, 452, 460, 510, 511

**Проблема синтеза**, 541, 555

— моментов, 772, 776, 777

**Программирование выпуклое**, 251

— геометрическое, 267

— динамическое, 536

— квадратичное, 335

— линейное, 112

— полиномиальное, 339

— равновесное, 995

— стохастическое, 432

**Проекция точки на множество**, 213

**Произведение множества на число**, 175

**Производная вторая**, 68, 662

— Гато (слабая), 690

— обобщенная, 636

— отображения, 661, 662

— первая, 67

— по направлению, 195

— Фреше (сильная), 661

**Пространство банахово**, 632

— рефлексивное, 634

— сопряженное, 633

— гильбертово, 632

— линейное, 632

— метрическое, 632, 640

- топологическое, 656
- Прямая линия, 57
- Прямое произведение множеств, 226, 633
- Размерность** множества, 174
  - подпространства, 58
- Разность множеств, 175
  - — геометрическая, 184
- Разрешающий (ведущий) элемент симплекс-таблицы, 129
- Расстояние между множествами по Хаусдорфу, 944
  - от точки до множества, 13
- Симплекс**, 179
- Симплекс-метод, 125
- Симплекс-процесс, 139
- Симплекс-таблица, 127
  - лексикографически положительная, 145
- Система вполне наблюдаемая, 769
  - — управляемая, 764
  - наблюдаемая, 769
  - сопряженная, 451
  - управляемая, 764
- Скользящий режим, 565
- Слабая сходимость последовательности, 633
- След функции, 638
- Сложность метода полиномиальная, 156
  - — экспоненциальная, 156
- Стабилизатор, 804
  - слабый, 807
- Субградиент, 230
- Субдифференциал, 230
- Сумма множеств, 175
- Сфера, 58
  - единичная, 58
- Схема Беллмана, 536, 540
  - Моисеева, 549
- Сходимость последовательности к множеству, 13, 641
  - — к точке, 633, 640
- Теорема Антипина**, 300, 329
  - Арутюнова, 86, 92, 400, 401
  - Вейерштрасса, 14, 59, 159, 207, 240, 640, 644, 649, 650, 658
  - Дубовицкого–Милютин, 225
  - Калмана, 767
  - Каратеодори, 179
  - Каруша–Джона, 78
  - Красовского, 766
  - Куна–Таккера, 255, 260
  - Мазура, 645
  - Моцкина, 170
  - Фаркаша, 168
  - Хойфмана, 391
- Теоремы двойственности, 163, 262, 266
- Топология банахова пространства, 657
  - — — слабая, 657
  - метрического пространства, 656
- Точка глобального (абсолютного) максимума, 16, 640
  - — — минимума, 12, 15, 640
  - локального максимума, 16, 73
  - — минимума, 15, 73
  - множества аномальная, 84
  - — внешняя, 176
  - — внутренняя, 175
  - — граничная, 176
  - — изолированная, 176
  - — нормальная, 83, 94
  - — относительно внутренних, 181
  - — предельная, 640, 657
  - — прикосновения, 656
  - — угловая (крайняя), 121
  - — — вырожденная, 123
  - — — невырожденная, 123
- , подозрительная на экстремум, 18, 70, 75
- седловая, 165, 252
- стационарная, 69
- строгого локального максимума, 16
  - — — минимума, 15
- экстремума, 17
- Точность метода гарантированная, 25
  - — — наилучшая, 25
- Траектории левый конец, 446, 447
  - — — закрепленный, 446
  - — — подвижный, 447
  - — — свободный, 447
- правый конец, 446, 447
  - — — закрепленный, 446
  - — — подвижный, 447
  - — — свободный, 447
- Траектория (решение) задачи Коши, 443
  - оптимальная, 448
- Управление**, 441
  - оптимальное, 448
  - особое, 465
- Уравнение Беллмана, 538, 556
  - Эйлера, 533, 534
- Условие Вейерштрасса, 534
  - дополнительности (дополняющей жесткости), 79, 245, 452
  - достаточное максимума, 70, 100
  - — минимума, 70, 99
  - — оптимальности, 99, 563, 676
  - — экстремума, 70
- Лежандра, 534
- Люстерника, 83
- Мангасариана–Фрамовица, 95

- необходимое максимума первого порядка, 69
- — второго порядка, 69
- — минимума второго порядка, 69, 82, 92, 401
- — первого порядка, 69, 75, 186, 188, 195, 397
- — оптимальности первого порядка, 69, 186, 665
- Слейтера, 251
- трансверсальности, 452, 535
- Эрмана–Вейерштрасса, 535
- Формула конечных приращений**, 103, 664
- Функции класса  $C^{1,1}(X)$** , 104, 665
- Функционал**, 631
- Функция барьерная**, 407
- Беллмана, 538, 556
- Вейерштрасса, 534
- вогнутая, 37, 184
- вторая сопряженная (биполярная), 274
- выпуклая, 37, 184, 269
- Гамильтона–Понтрягина, 450
- гладкая, 68
- дважды гладкая, 69
- — дифференцируемая, 68, 663
- — непрерывно дифференцируемая, 69
- дифференцируемая, 67, 663
- индикаторная, 202
- квадратичная, 335, 651
- квазивыпуклая, 203
- Кротова, 545, 564
- кусочно гладкая, 441
- — непрерывная, 441
- Лагранжа, 74, 78, 165, 245, 683
- — модифицированная, 368
- — нормальная, 252
- Ляпунова, 292, 903
- Минковского, 202
- непрерывная, 61, 641
- — непрерывно дифференцируемая, 68
- — несобственная, 271
- овражная, 284
- ограниченная, 16
- — сверху, 16, 639
- — снизу, 13, 639
- опорная, 202, 225
- положительно однородная, 273
- полунепрерывная сверху, 61, 641
- — снизу, 61, 641, 658
- псевдовыпуклая, 203
- равномерно выпуклая, 240
- сильно вогнутая, 213
- — выпуклая, 206
- — квазивыпуклая, 213
- синтезирующая, 542, 555
- слабо выпуклая, 213
- — непрерывная, 643
- — полунепрерывная сверху, 643
- — — снизу, 643
- собственная, 271
- сопряженная (полярная), 273
- строго вогнутая, 184
- — выпуклая, 184
- — равномерно выпуклая, 240
- — унимодальная, 15
- , удовлетворяющая условию Гёльдера, 393
- — — Липшица, 29, 104
- унимодальная, 15
- целевая, 17
- штрафная, 379
- — точная, 389
- Четтеринг-режим**, 471
- Числа Фибоначчи**, 27
- Шар**, 58, 171
- единичный, 58
- открытый, 58
- Шкала состояний**, 549
- Элементарная операция**, 550



## ОБОЗНАЧЕНИЯ

$\mathbb{R}$  — числовая ось

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$  — отрезок

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$  — интервал

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ ,  $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$  — полуинтервалы

$\mathbb{R}^n$  —  $n$ -мерное линейное пространство вектор-столбцов  $x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$ ,  $x^i$  —  $i$ -я координата

вектора  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, \dots, n$

$x^\top = (x^1, \dots, x^n)$  — вектор-строка, полученная транспонированием вектор-столбца  $x$

$|x|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x^i|^p \right)^{1/p}$ ,  $1 \leq p < \infty$ ,  $|x|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x^i|$  — нормы вектора  $x$  в  $\mathbb{R}^n$

$E^n$  —  $n$ -мерное евклидово пространство, представляющее собой пространство  $\mathbb{R}^n$ , оснащенное скалярным произведением  $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x^i y^i$

$|x| = |x|_2 = |x|_{E^n} = \left( \sum_{i=1}^n |x^i|^2 \right)^{1/2}$  — евклидова норма вектора

$e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^\top$  — вектор-столбец,  $i$ -я координата которого равна 1, остальные координаты равны нулю,  $i = 1, \dots, n$

$\{e_1, \dots, e_n\}$  — ортонормированный базис пространства  $E^n$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \{a_{ij}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n\} = \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix} = (A_1, \dots, A_m)$  — матрица размера  $m \times n$  с элементами  $a_{ij}$ , где

$a_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$  —  $i$ -я строка матрицы  $A$ ,

$A_j = (a_{1j}, \dots, a_{mj})^\top$  —  $j$ -й столбец матрицы  $A$

$A$  — квадратная матрица  $n$ -го порядка, если  $m = n$

$A^\top = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_1^\top, \dots, a_n^\top) = \begin{pmatrix} A_1^\top \\ \vdots \\ A_m^\top \end{pmatrix}$  — матрица размера  $n \times m$ , полученная транспонированием матрицы  $A$  размера  $m \times n$

$A = A^\top$  — квадратная симметричная матрица

$I_n = (e_1, \dots, e_n) = \begin{pmatrix} e_1^\top \\ \vdots \\ e_n^\top \end{pmatrix}$  — единичная матрица  $n$ -го порядка со столбцами  $e_1, \dots, e_n$

$\det A$  — определитель квадратной матрицы  $A$

$A^{-1}$  — обратная матрица для квадратной матрицы  $A$  с  $\det A \neq 0$

$\text{rang } A$  — ранг матрицы  $A$

$Ax = ((Ax)^1, \dots, (Ax)^m)^\top$ , где  $(Ax)^i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x^j$ ,  $i = 1, \dots, m$  — произведение матрицы размера  $m \times n$  на вектор  $x \in E^n$

$\|A\| = \max_{|x|_{E^n} \leq 1} |Ax|_{E^m}$  — норма матрицы  $A$  размера  $m \times n$

$AB$  — произведение матрицы  $A = \{a_{ij}\}$  размера  $m \times n$  на матрицу  $B = \{b_{ij}\}$  размера  $n \times q$  является матрицей  $C = \{c_{ij}\}$  размера  $m \times q$  с элементами  $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, q$

$A \geq 0$  — неотрицательно определенная симметричная матрица, если  $\langle Ax, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in E^n$

$A > 0$  — положительно определенная симметричная матрица, если  $\langle Ax, x \rangle > 0 \quad \forall x \in E^n$ ,  $x \neq 0$

$A \leq 0$  — неположительно определенная матрица, если  $-A \geq 0$

$A < 0$  — отрицательно определенная матрица, если  $-A > 0$

$x = (x^1, \dots, x^n)^\top \geq 0$ , если  $x^i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$

$x = (x^1, \dots, x^n)^\top > 0$ , если  $x^i > 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$

$x = (x^1, \dots, x^n)^\top \geq y = (y^1, \dots, y^n)^\top$ , если  $x - y \geq 0$

$x = (x^1, \dots, x^n)^\top > y = (y^1, \dots, y^n)^\top$ , если  $x - y > 0$

$E_+^n = \{x \in E^n : x \geq 0\}$  — неотрицательный ортант пространства  $E^n$

$x_+ = (x_+^1, \dots, x_+^n)^\top$ , где  $x_+^i = \max\{0; x^i\}$ ,  $i = 1, \dots, n$

$x = (x^1, \dots, x^n)^\top \succ 0$  — лексикографически положительный вектор, если  $x \neq 0$  и первая ненулевая координата этого вектора положительна

$x = (x^1, \dots, x^n)^\top \succ y = (y^1, \dots, y^n)^\top$ , если  $x - y \succ 0$

$x_* = \text{lex} \min_{i \in M} x_i$  — лексикографический минимум множества векторов  $\{x_i, i \in M\}$ , если для каждого номера  $i \in M$  либо  $x_i \succ x_*$ , либо  $x_i = x_*$

$S = S(v, B) = \begin{pmatrix} \Gamma \\ \Delta \end{pmatrix}$  — симплекс-таблица угловой точки  $v$  с базисом  $B$ , где  $\Gamma = (\Gamma_1, \dots, \Gamma_r)^\top$ ,  $\Gamma_i = (\gamma_{i0}, \gamma_{i1}, \dots, \gamma_{in})$ ,  $i = 1, \dots, r$ ;  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_n)$  (подробности см. в § 3.3)

$S = \begin{pmatrix} \Gamma \\ \Delta \end{pmatrix} \succ 0$  — лексикографически положительная симплекс-таблица, если  $\Gamma_i \succ 0 \quad \forall i = 1, \dots, r$

$S_1 = \begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \Delta_1 \end{pmatrix} \succ S_2 = \begin{pmatrix} \Gamma_2 \\ \Delta_2 \end{pmatrix}$  — симплекс-таблица  $S_1$  лексикографически больше симплекс-таблицы  $S_2$ , если  $\Delta_1 \succ \Delta_2$

$\overline{X}$  — замыкание множества  $X$

$\text{Гр} X$  — граничные точки множества  $X$

$\text{int} X$  — внутренние точки множества  $X$

$\text{diam} X = \sup_{x, y \in X} |x - y|$  — диаметр множества  $X$

$\text{aff} X$  — аффинная оболочка множества  $X$

$\text{Lin} X$  — несущее подпространство множества  $X$

$\text{co} X$  — выпуклая оболочка множества  $X$

$\text{ri} X$  — относительная внутренность множества  $X$

$\dim X$  — размерность множества  $X$

$\text{mes} X$  — лебегова мера множества  $X$

$|X|$  — количество элементов множества  $X$

$\rho(x, X) = \inf_{y \in X} |x - y|$  — расстояние от точки  $x$  до множества  $X$

$X \cup Y$  — объединение двух множеств  $X$  и  $Y$

$X \cap Y$  — пересечение двух множеств  $X$  и  $Y$

$X + Y$  — сумма двух множеств  $X$  и  $Y$

$X - Y$  — разность двух множеств  $X$  и  $Y$

$\alpha X$  — произведение числа  $\alpha$  на множество  $X$

$X \times Y$  — прямое (декартово) произведение двух множеств  $X$  и  $Y$

$\emptyset$  — пустое множество

$O(v, \varepsilon) = \{x \in E^n : |x - v| < \varepsilon\}$  —  $\varepsilon$ -окрестность точки  $v$ , или открытый шар радиуса  $\varepsilon > 0$  с центром в точке  $v$

$S(v, R) = \{x \in E^n : |x - v| \leq R\}$  — замкнутый шар радиуса  $R$  с центром в точке  $v$

$\Gamma = \Gamma(c, \gamma) = \{x \in E^n : \langle c, x \rangle = \gamma\}$  — гиперплоскость с нормальным вектором  $c \neq 0$ ,  $\gamma$  — заданное число

$\Gamma^+ = \{x \in E^n : \langle c, x \rangle > \gamma\}$  — открытое положительное полупространство гиперплоскости  $\Gamma$

$\Gamma^- = \{x \in E^n : \langle c, x \rangle < \gamma\}$  — открытое отрицательное полупространство гиперплоскости  $\Gamma$

$\overline{\Gamma^+} = \{x \in E^n : \langle c, x \rangle \geq \gamma\}$  — замкнутое положительное полупространство гиперплоскости  $\Gamma$

$\overline{\Gamma^-} = \{x \in E^n : \langle c, x \rangle \leq \gamma\}$  — замкнутое отрицательное полупространство гиперплоскости  $\Gamma$

$K$  — конус с вершиной в нуле

$L^\perp$  — ортогональное дополнение подпространства  $L \subseteq E^n$

$\Pi(\overline{\lambda})$  — сопровождающее подпространство точки  $\overline{\lambda}$

$\mathcal{P}_X(z)$  — проекция точки  $z \in E^n$  на множество  $X$

$\mathcal{P}_X^G(z)$  — проекция точки  $z \in E^n$  на множество  $X$  в метрике  $G$

$f(x) \rightarrow \inf, x \in X$  — краткая символическая запись задачи минимизации функции  $f(x)$  на множестве  $X$

$f_* = \inf_{x \in X} f(x)$  — нижняя грань функции  $f(x)$  на множестве  $X$

$X_* = \{x \in X : f(x) = f_* > -\infty\}$  — множество точек минимума функции  $f(x)$  на  $X$

$f(x) \rightarrow \sup, x \in X$  — краткая символическая запись задачи максимизации функции  $f(x)$  на множестве  $X$

на множестве  $X$

$f^* = \sup_{x \in X} f(x)$  — верхняя грань функции  $f(x)$  на множестве  $X$

$X^* = \{x \in X : f(x) = f^* < +\infty\}$  — множество точек максимума функции  $f(x)$  на  $X$

$\frac{\partial f(x)}{\partial x^i} = f_{x^i}(x)$  — частная производная функции  $f(x) = f(x^1, \dots, x^n)$  в точке  $x$  по переменной  $x^i, i = 1, \dots, n$

$f'(x) = \left\{ \frac{\partial f(x)}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x^n} \right\}$  — градиент функции  $f(x)$  в точке  $x$

$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^i \partial x^j} = f_{x^i x^j}(x)$  — частная производная функции  $f(x) = f(x^1, \dots, x^n)$  в точке  $x$  по переменным  $x^i, x^j, i, j = 1, \dots, n$

$f''(x) = \left\{ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^i \partial x^j}, i, j = 1, \dots, n \right\}$  — вторая производная функции  $f(x)$  в точке  $x$ , она является симметричной квадратной матрицей  $n$ -го порядка

$\partial f(x)$  — субдифференциал функции  $f(x)$  в точке  $x$

$\frac{df(x)}{de} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{f(x + te) - f(x)}{t}$  — производная функции  $f(x)$  в точке  $x$  по направлению  $e, |e| = 1$

$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}$  — первая производная функции  $x(t)$  по времени  $t$

$\ddot{x}(t) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2}$  — вторая производная функции  $x(t)$  по времени  $t$

$\text{pr}(z)$  — значение проксимального оператора в точке  $z$

$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k$  — предел последовательности  $\{x_k\} = (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots)$

$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} x_k$  — верхний предел последовательности  $\{x_k\}$

$\underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} x_k$  — нижний предел последовательности  $\{x_k\}$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  — предел функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow a$

$\overline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x)$  — верхний предел функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow a$

$\underline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x)$  — нижний предел функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow a$

$f(a+0) = \lim_{t \rightarrow a+0} f(t)$  — предел функции  $f(x)$  одной переменной  $t$  при стремлении  $t$  к точке  $a$  справа

$f(a-0) = \lim_{t \rightarrow a-0} f(t)$  — предел функции  $f(x)$  при стремлении  $t$  к точке  $a$  слева

$\mathcal{L}s \Pi_k$  — верхний предел последовательности множеств  $\{\Pi_k\}$

$O(t)$  — величина, определенная в окрестности точки  $t=0$  и такая, что  $\left| \frac{O(t)}{t} \right| \leq c$ , где  $c$  — некоторая неотрицательная постоянная

$o(t)$  — величина, определенная в окрестности точки  $t=0$  и такая, что  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{o(t)}{t} = 0$

$C(X)$  — пространство непрерывных функций  $f(x)$  на замкнутом ограниченном множестве  $X$  с нормой  $\|f\|_C = \max_{x \in X} |f(x)|$

$C^1(X)$  — пространство непрерывно дифференцируемых функций на множестве  $X$

$C^2(X)$  — пространство дважды непрерывно дифференцируемых функций на множестве  $X$

$C^{1,1}(X)$  — пространство непрерывно дифференцируемых функций на множестве  $X$ , градиент  $f'(x)$  которых удовлетворяет условию Липшица на  $X$  (определение 2.6.1 § 2.6)

$Q(L)$  — множество функций, удовлетворяющих условию Липшица на множестве  $X$  с константой  $L$

$L_1[a, b]$  — пространство функций  $f = f(t)$ , интегрируемых по Лебегу на отрезке  $[a, b]$ , с нормой  $\|f\|_{L_1[a, b]} = \|f\|_{L_1} = \int_a^b |f(t)| dt$

$L_2[a, b]$  — пространство функций  $f = f(t) \in L_1[a, b]$ ,  $|f(t)|^2 \in L_1[a, b]$  со скалярным произведением  $\langle f, g \rangle_{L_2} = \int_a^b f(t)g(t) dt$  и нормой  $\|f\|_{L_2} = \sqrt{\langle f, f \rangle_{L_2}}$

$L_p[a, b]$ ,  $1 < p < \infty$  — пространство функций  $f = f(t) \in L_1[a, b]$ ,  $|f(t)|^p \in L_1[a, b]$  с нормой  $\|f\|_{L_p} = \left( \int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p}$

$L_\infty[a, b]$  — пространство ограниченных измеримых функций  $f = f(t)$  с нормой  $\|f\|_{L_\infty}$  (подробности см. в § 6.1)

$L_2^r[a, b]$  — пространство  $r$ -мерных вектор-функций  $f = f(t) = (f^1(t), \dots, f^r(t))$ ,  $f^i(t) \in L_2[a, b]$ ,  $i = 1, \dots, r$ , со скалярным произведением  $\langle f, g \rangle_{L_2^r} = \int_a^b \langle f(t), g(t) \rangle_{E^r} dt$  и нормой  $\|f\|_{L_2^r} = \sqrt{\langle f, f \rangle_{L_2^r}}$

$L_p^r[a, b]$ ,  $1 \leq p \leq +\infty$  — пространство  $r$ -мерных вектор-функций  $f = f(t) = (f^1(t), \dots, f^r(t))$ ,  $f^i(t) \in L_p[a, b]$ ,  $i = 1, \dots, r$ , с нормой  $\|f\|_{L_p^r} = \left( \int_a^b |f(t)|_{E^r}^p dt \right)^{1/p}$  при  $1 \leq p < \infty$  и  $\|f\|_{L_\infty^r} = \| |f(t)|_{E^r} \|_{L_\infty}$

$H = H(x, u, t, \psi, a_0)$  — функция Гамильтона–Понтрягина

$l = l(x, y, t, T, a)$  — малый лагранжиан

$\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, \bar{\lambda})$  — функция Лагранжа

$L = L(x, \lambda)$  — функция Лагранжа в нормальной форме

$\Lambda(v)$  — конус Лагранжа точки  $v$  локального минимума

$\Lambda^-(v)$  — конус Лагранжа точки  $v$  локального максимума

$\Lambda_a(v)$  — конус Арутюнова точки  $v$  локального минимума

$\Lambda_a^-(v)$  — конус Арутюнова точки  $v$  локального максимума

$K(v)$  — конус критических направлений в точке  $v$

$\ker G'(v) = \{h \in E^n : \langle g'_i(v), h \rangle = 0, i \in M\}$  — ядро отображения  $G'(v) = \{g'_i(v), i \in M\}$ ,  
где  $G(x) = \{g_i(x), i \in M\}$

$\forall$  — квантор общности

$\exists$  — квантор существования

*Фёдор Павлович Васильев*

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ  
Книга 2

Издательство Московского центра  
непрерывного математического образования  
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-74-83

Подписано в печать 09.01.2011 г. Формат  $70 \times 100^{1/16}$ . Бумага офсетная.  
Печать офсетная. Усл. печ. л. 27. Тираж 1500. Заказ № .

Отпечатано с готовых диапозитивов в ППП «Типография „Наука“».  
121099, Москва, Шубинский пер., д. 6.

---

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга»,  
Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241-72-85. E-mail: biblio@mccme.ru

---