无穷级数—习题讲义

郭凡荣*

2021 年 3 月 15 日

目录

*Email：jaccoobo@163.com

第一部分 数项级数及其判敛法

1 正项级数及其判敛法

1. (正项级数比较定理) [1] 设级数 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ 和 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} b_k$ 是两个正项级数, 且存在 N, 使得当 $k \geqslant N$ 时, $a_k \leqslant b_k$, 则下列两个结论成立:

   (1) 若 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} b_k$ 收玫, 则 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ 收敛;

   (2) 若 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ 发散, 则 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} b_k$ 发散.

   (正项级数比较定理的极限形式) 级数 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ 和 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} b_k$ 是两个正颈级数, 且存在 N, 使得当 $k \geqslant N$ 时 , $a_k > 0$.

   (1) 若 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ 收敛, 且 $l = \limsup\limits_{k\to+\infty} \dfrac{b_k}{a_k} \in [0, +\infty)$, 则 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} b_k$ 收敛;

   (2) 若 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ 发散, 且 $l = \liminf\limits_{k\to+\infty} \dfrac{b_k}{a_k} \in (0, +\infty]$, 则 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} b_k$ 发散.

   注 若 $l > 0$, 则 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ 与 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} b_k$ 同敛散.

   常用比较级数：

   (1) (几何级数) $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} r^k$: 当 $|r| < 1$ 时, 收敘; 当 $|r| \geqslant 1$ 时, 发散;

   (2) (p 级数) $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^p}$: 当 $p > 1$ 时, 收玫; 当 $p \leqslant 1$ 时, 发散.

   基于几何级数的判别法如下.

2. 定理 (达朗贝尔比值判数法) 设级数 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ 的各项为正, 如果

$$q = \lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$$

   则

   (1) 当 $q < 1$ 时, 级数收玫;

   (2) 当 $q > 1$ 时, 级数发散;

   (3) 当 $q = 1$ 时, 需用其他方法判别.

   注：由此定理不必刻意去找比较级数, 而仅仅依据级数本身的行为判敛.(该定理其实是参照了几何级数的敛散性)

3. 定理 (柯西根值判数法) 设级数 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ 的各项非负, 如果

$$q = \limsup_{k\to+\infty} \sqrt[k]{a_k}$$

   则

   (1) 当 $q < 1$ 时, 级数收玫;

   (2) 当 $q > 1$ 时, 级数发散;

   (3) 当 $q = 1$ 时, 需用其他方法判别.

[1] 注意正项级数收敛的充分必要条件是其部分和数列有 (上) 界，见习题8

郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com

注 理论上, 柯西判别法比达朗贝尔判别法要更有效, 特别当极限 $\lim\limits_{k\to+\infty}\dfrac{a_{k+1}}{a_k}$ 存在时, 必有 $\lim\limits_{k\to+\infty}\sqrt[k]{a_k}=\lim\limits_{k\to+\infty}\dfrac{a_{k+1}}{a_k}$ 然而在计算上, 商的计算比方根的计算有时会简单一些. 下面我们来看一些例子.

4. 判别下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\dfrac{k!}{k^k}$; (2) $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\dfrac{(2k-1)!!}{k!}$; (3) $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\dfrac{x^k}{\prod_{j=1}^{k}(1+x^j)}, x>0$;

(4) $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\dfrac{1}{2^{\ln k}}$; (5) $\sum\limits_{k=2}^{+\infty}\dfrac{1}{(\ln k)^{\ln k}}$; (6)$\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\dfrac{1}{k!}\left(\dfrac{k}{\mathrm{e}}\right)^k$. (7)$\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\left(\mathrm{e}-\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^k\right)$.

解: (1) 这里 $a_k=\dfrac{k!}{k^k}$. 由

$$\frac{a_{k+1}}{a_k}=\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-k}\to\frac{1}{\mathrm{e}}<1(k\to+\infty)$$

所以级数 (1) 收敛.

(2) $a_k=\dfrac{(2k-1)!!}{k!}$. 由

$$\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{2k+1}{k+1}\to 2,\quad (k\to+\infty)$$

可知级数 (2) 发散.

(3) $a_k=\dfrac{x^k}{\prod_{j=1}^{k}(1+x^j)}$. 由

$$\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{x}{1+x^{k+1}}\to\begin{cases}0, & 若x>1,\\ \dfrac{1}{2}, & 若x=1,\\ x, & 若x\in(0,1).\end{cases}\qquad(k\to+\infty)$$

知, 当 $x>0$ 时该级数收敛.

(4) $a_k=\dfrac{1}{2^{\ln k}}$. 由 $\sqrt[k]{a_k}=2^{-\frac{\ln k}{k}}\to 2^0=1,\quad(k\to+\infty)$ 由根值判别法不能确定其敛散性. 不过注意到 $\dfrac{1}{2^{\ln k}}=\dfrac{1}{k^{\ln 2}}$ 因此, 级数 (4) 是 p 级数, $p=\ln 2<1$ 的情形, 因此级数 (4) 是发散的.

(5) $a_k=\dfrac{1}{(\ln k)^{\ln k}}$. 由

$$(\ln k)^{\ln k}=\exp(\ln k\ln(\ln k))$$
$$\sqrt[k]{a_k}=\exp\left(-\frac{\ln k\ln(\ln k)}{k}\right)\to\exp(0)=1,\quad(k\to+\infty)$$

由根值判政法不能确定其敛散性. 不过, 注意到

$$\frac{1}{(\ln k)^{\ln k}}=\frac{1}{k^{\ln\ln k}}$$

当 n 充分大显然有 $\dfrac{1}{k^{\ln\ln k}}<\dfrac{1}{k^2}$. 由比较判别法知原级数收敛.

(6) 利用 *Stirling* 公式

$$k!\sim\sqrt{2\pi k}\left(\frac{k}{\mathrm{e}}\right)^k,\quad(k\to+\infty)$$

得到

$$\frac{1}{k!}\left(\frac{k}{\mathrm{e}}\right)^k\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi k}}\left(\frac{\mathrm{e}}{k}\right)^k\left(\frac{k}{\mathrm{e}}\right)^k=\frac{1}{\sqrt{2\pi k}},\quad(k\to+\infty)$$

由 p 级数的结果, 就有级数 (6) 发散.

(7) 注意到 $0<\mathrm{e}-\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^k\sim\dfrac{\mathrm{e}}{2}\dfrac{1}{k},\quad(k\to+\infty)$

郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com

由于调和级数 $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k}$ 发散, 由正项级数比较定理知原级数发散.

5. 引理 (正项级数第二比较原理)* 设级数 $\sum_{k=1}^{+\infty}a_k$ 和 $\sum_{k=1}^{+\infty}b_k$ 是两个正项级数, 且存在 N, 使得

$$\forall k\geqslant N,\quad \frac{a_{k+1}}{a_k}\leqslant\frac{b_{k+1}}{b_k}$$

则下列两个结论成立: (1) 若 $\sum_{k=1}^{+\infty}b_k$ 收敛, 则 $\sum_{k=1}^{+\infty}a_k$ 收敛; (2) 若 $\sum_{k=1}^{+\infty}a_k$ 发散, 则 $\sum_{k=1}^{+\infty}b_k$ 发散.

证明: 只需要证明 (1) 就够了,(2) 是 (1) 的直接推论. 假设级数 $\sum_{k=1}^{+\infty}b_k$ 收敛, 令 $\alpha=a_N/b_N$, 则

$$a_N\leqslant\alpha b_N$$

假设, 对于 $l\geqslant N$, 有 $a_l\leqslant\alpha b_l$ 成立, 也就是

$$\frac{a_l}{b_l}\leqslant\alpha$$

由引理条件,

$$\frac{a_{l+1}}{a_l}\leqslant\frac{b_{l+1}}{b_l}$$

这样

$$a_{l+1}\leqslant\frac{a_l}{b_l}b_{l+1}\leqslant\alpha b_{l+1}$$

由数学归纳法就得到,

$$\forall k\geqslant N,\quad a_k\leqslant\alpha b_k$$

由比较原理就得到结论.

基于 p 级数的 *Raabe* 判别法如下 (比较判别法第二定理的极限形式).

6. 定理 * 设级数 $\sum_{k=1}^{+\infty}a_k$ 的各项为正, 如果

$$q=\lim_{k\to+\infty}k\left(\frac{a_k}{a_{k+1}}-1\right)$$

则

(1) 当 $q>1$ 时, 级数收敛;

(2) 当 $q<1$ 时, 级数发散;

(3) 当 $q=1$ 时, 需用其他方法判别. 证明: (1) 设 $q>1$, 则存在 $r>0$ 和 N_1, 使得

$$\forall k\geqslant N_1,\quad k\left(\frac{a_k}{a_{k+1}}-1\right)>1+2r$$

也就是,

$$\forall k\geqslant N_1,\quad \frac{a_k}{a_{k+1}}>1+\frac{1+2r}{k}$$

注意到, 存在 N_2, 使得

$$\forall k\geqslant N_2,\quad 1+\frac{1+2r}{k}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1+r}$$

令 $N=\max\{N_1,N_2\}$, 则

$$\forall k\geqslant N,\quad \frac{a_{k+1}}{a_k}<\frac{(k+1)^{-(1+r)}}{k^{-(1+r)}}$$

由 p 级数的结果和第二比较原理引理就得到级数的收敛性 (2) 设 $q<1$. 则存在 N, 使得

$$\forall k \geqslant N, \quad k\left(\frac{a_k}{a_{k+1}}-1\right) \leqslant 1,$$

也就是

$$\forall k \geqslant N, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} \geqslant \frac{k}{k+1}=\frac{(k+1)^{-1}}{k^{-1}}$$

p 级数的结果和第二比较原理引理就得到级数发散. 下面我们来看一些例子.

7. 判别下列级数的敛散性 *:

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!(2k+1)}$ (2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k!}{(x+1)\cdots(x+k)}, x>0$; (3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{k}{\mathrm{e}}\right)^k$.

解: (1) 这里 $a_k=\dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!!(2k+1)}$. 由

$$\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{(2k+1)^2}{(2k+2)(2k+3)} \rightarrow 1, \quad (k \rightarrow+\infty)$$

可知比值判敛法失效. 而

$$k\left(\frac{a_k}{a_{k+1}}-1\right)=\frac{k\left((2k+2)(2k+3)-(2k+1)^2\right)}{(2k+1)^2}=\frac{6k^2+5k}{(2k+1)^2} \rightarrow \frac{3}{2}, \quad (k \rightarrow+\infty)$$

由拉比判敛法, 级数 (1) 收敛.

(2) 此时,

$$\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{k+1}{x+k+1} \rightarrow 1, \quad (k \rightarrow+\infty)$$

而

$$k\left(\frac{a_k}{a_{k+1}}-1\right)=\frac{kx}{k+1} \rightarrow x, \quad (k \rightarrow+\infty)$$

这样, 当 $x>1$ 时, 级数 (2) 收敛; 当 $x \in(0,1)$ 时, 发散. 当 $x=1$ 时, $a_k=1/(k+1)$, 这样此时级数 (2) 也发散. 因此, 级数 (2), 当 $x \in(0,1]$ 时发散, 当 $x>1$ 是收敛.

(3) 先计算

$$\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{1}{\mathrm{e}}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$$

下面的计算复杂一些, 计算中利用一些 $k \rightarrow+\infty$ 时的等价关系:

$$\begin{aligned}
k\left(\frac{a_k}{a_{k+1}}-1\right) &=k\left[\mathrm{e}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-k}-1\right]=k\left(\exp\left[1-k \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right]-1\right) \\
&\sim k\left[1-k \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right]=k\left(1-k\left[\frac{1}{k}-\frac{1}{2} \frac{1}{k^2}+o\left(\frac{1}{k^2}\right)\right]\right) \\
&=\frac{1}{2}+o(1) \rightarrow \frac{1}{2}, \quad (k \rightarrow+\infty)
\end{aligned}$$

便知级数发散.

2 一般项数项级数及其判敛法

1. 对于变号级数, 可以考虑相应数列的正部和负部的级数, 分别展开讨论. 注意利用级数收敛的必要条件. 绝对收敛的级数可以利用正项急速的判敛法得到相关的结论. 但对于条件收攻的级数, 就需要发明一些新方法.

郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com

命题　如果级数 $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ 的绝对值级数 $\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|$ 能够用达朗贝尔比值判敛法, 或柯西根值判敛法判敛, 那么级数 $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ 的敛散性与其绝对值级数的敛散性一致.

2. 定理　(级数收数的狄利克雷判别法)* 设数列 $\{a_k\}$ 单调趋于零，级数 $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ 的部分和序列一致有界, 则级数 $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k b_k$ 收敛, 并且

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k b_k = \sum_{k=1}^{+\infty} \left((a_k - a_{k+1}) \sum_{j=1}^{k} b_j \right)$$

证明: 由级数 $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ 的部分和序列一致有界, 存在 $M > 0$ 使得

$$\left| \sum_{j=1}^{k} b_j \right| \leqslant M, \quad \forall k \in \mathbb{N}_+$$

不妨设数列 $\{a_k\}$ 单调下降, 则

$$\left| (a_k - a_{k+1}) \sum_{j=1}^{k} b_j \right| \leqslant M\left(a_k - a_{k+1}\right), \quad \forall k \in \mathbb{N}_+$$

而

$$\sum_{k=1}^{+\infty} M\left(a_k - a_{k+1}\right) = M a_1$$

注意

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} \left((a_k - a_{k+1}) \sum_{j=1}^{k} b_j \right) + a_n \sum_{j=1}^{n} b_j, \quad \forall n \in \mathbb{N}_+$$

令 $n \to +\infty$, 证毕.

该定理的一个重要推论是下面的莱布尼茨交错级数判别法.

推论　(莱布尼茨交错级数判别法) 当数列 $\{a_k\}$ 单调趋于零时, 级数

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k a_k$$

收敛.

证明: 由

$$\left| \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \right| \leqslant 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}_+$$

根据狄利克雷判别法定理就给出结论. 证毕.

3. 定理　(级数收数的阿贝尔判别法)* 设数列 $\{a_k\}$ 单调收敛于 A, 级数 $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ 收放, 则级数 $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k b_k$ 收敛, 并且

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k b_k = \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k - A)\, b_k + A \sum_{k=1}^{+\infty} b_k$$

证明: 由狄利克雷判别法, 级数

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k-A)\,b_k$$

收敛, 再由

$$a_kb_k=(a_k-A)\,b_k+Ab_k,\quad \forall k\in\mathbb{N}_+$$

便得到结论. 证毕.

4. 判别下列级数的敛散性:

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin k}{k^p},p\in\mathbb{R}$; (2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos 3k}{k}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$; (3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}\frac{1}{\sqrt[k]{k}}$

(4) $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}(-1)^k\frac{\ln k}{k}$; (5) $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\sin kx}{\ln k}\left(\frac{k}{k+1}\right)^k,x\in\mathbb{R}$.

解: (1) 先考虑 $p>0$ 的情形. 取 $a_k=1/k^p,b_k=\sin k$, 则 $a_k\searrow 0(k\to+\infty)$, 而

$$\forall n\in\mathbb{N}_+,\quad \sum_{k=1}^{n}\sin k=\frac{\sin\frac{n+1}{2}\sin\frac{n}{2}}{\sin\frac{1}{2}}$$

这样

$$\forall n\in\mathbb{N}_+,\quad \left|\sum_{k=1}^{n}\sin k\right|=\left|\frac{\sin\frac{n+1}{2}\sin\frac{n}{2}}{\sin\frac{1}{2}}\right|\leqslant\frac{1}{\sin\frac{1}{2}}$$

由狄利克雷判别法得到，当 $p>0$ 时, 级数 (1) 收敛. 当 $p>1$ 时, 级数 (1) 绝对收敛. 当 $p\in(0,1]$ 时，由

$$\frac{|\sin k|}{k^p}\geqslant\frac{\sin^2 k}{k^p}=\frac{1}{2k^p}-\frac{\cos 2k}{2k^p}$$

得到级数 (1) 的绝对值级数发散. 这样, 当 $p\in(0,1]$ 时，级数 (1) 条件收敛. 当 $p\leqslant 0$ 时, 级数 (1) 发散, 下面证明

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{\sin k}{k^p}\neq 0$$

为此, 只要证明

$$\lim_{k\to+\infty}\sin k\neq 0$$

用反证法, 假设

$$\lim_{k\to+\infty}\sin k=0$$

则

$$\lim_{k\to+\infty}\cos^2 k=1,\quad \lim_{k\to+\infty}\sin(k+1)=0$$

由 $\sin(k+1)=\sin k\cos 1+\cos k\sin 1$ 得到

$$\lim_{k\to+\infty}\cos k=0$$

这是不可能的.

(2) 由

$$\forall n\in\mathbb{N}_+,\quad \sum_{k=1}^{n}\cos 3k=\frac{\cos\frac{3(n+1)}{2}\sin\frac{3n}{2}}{\sin\frac{1}{2}}$$

得到级数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos 3k}{k}$ 收敛, 而

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\nearrow \mathrm{e}$$

由阿贝尔判别法, 级数 (2) 收敛. 与 $\mathrm{p} \in (0,1]$ 时, 级数 (1) 的类似讨论可知, 级数 (2) 是条件收敛.

(3) 考虑函数

$$f(x) = x^{-1-1/x} = \exp\left[-\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln x\right], \quad x \in [1,+\infty)$$

显然有 $f(x) \to 0(x \to +\infty)$. 另一方面, 其导数

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x^2}(\ln x - x - 1)$$

由 $\ln x$ 是凹函数, $y = \ln x$ 在其 $x = 1$ 处的切线 $y = x - 1$ 之下, 即

$$\ln x \leqslant x - 1 < x + 1$$

就有 $f'(x) < 0$. 由莱布尼茨交错级数判别法, 级数 (3) 收敛. 注意级数 (3) 的绝对值级数发散, 因此级数 (3) 条件收敛.

(4) 由 $\ln k/k \to 0(k \to +\infty)$ 和

$$\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}(1-\ln x) < 0, \quad \forall x > \mathrm{e}$$

由莱布尼茨父错级数判别法, 级数 (4) 收敛. 级数 (4) 也仅仅是条件收敛.

(5) 当 $x = m\pi, m \in \mathbb{N}_+$ 时, 级数 (5) 是零级数, 自然收敛. 下面考虑 $x \neq m\pi$ 的情形. 由 $1/\ln k \searrow 0(k \to +\infty)$ 和

$$\forall n \in \mathbb{N}_+, \quad \left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| = \left|\frac{\sin\frac{n+1}{2}x \sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$$

就得到级数

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\sin kx}{\ln k}$$

收敛. 再注意到

$$1 > \left(\frac{k}{k+1}\right)^k \searrow \frac{1}{\mathrm{e}}$$

由阿贝尔判别法, 级数 (5) 收敛, 自然也是条件收敛. 解毕.

郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com

3 精选例题

3.1 定义法判敛

1. 试求下列级数的和 (裂项消去法):

(1) $I=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{49n^2+7n-12}$. (2) $I=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+i)(n+i+j)}(i,j=0,1,2\cdots)$. (3) $I=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)(n+3)}$ (4) $I=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})\sqrt{n(n+1)}}$ (5) $I=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n(n+1)}}$. (6) $I=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$

2. 求下列级数 $I=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的和

(1) $a_n=\frac{1}{n(2n+1)}$ (2) $a_n=\frac{2n-1}{n^2(n+1)^2}$ (3) $a_n=\frac{2n-1}{2^n}$

(4) $a_n=\frac{1}{n!\,(n^4+n^2+1)}$ (5) $a_n=\frac{n}{(2n+1)!!}$ (6) $a_n=\frac{a^{2^n}}{1-a^{2^{n+1}}}(|a|>1)$.

解（1) 注意到 $\frac{1}{n(2n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{2}{2n+1}=2\left[\frac{1}{n}-\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n}\right)\right]$, 则

$$
\begin{aligned}
I&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k=\lim_{n\to\infty}2\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k}\right)\right]\\
&=2\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=2}^{2n+1}\frac{1}{k}\right]\\
&=2\lim_{n\to\infty}\left[1+(\ln n+\varepsilon_n+C)-(\ln(2n+1)+\varepsilon_{2n+1}+C)\right]
\end{aligned}
$$

$=2(1-\ln 2)$ (C 是 Euler 常数).

(2) 注意到 $a_n=4\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)-\frac{1}{n^2}-\frac{3}{(n+1)^2}$, 我们有

$$
\begin{aligned}
I&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k=\lim_{n\to\infty}\left[4\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}-3\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)^2}\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}\left[4\left(1-\frac{1}{n+1}\right)-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}-3\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k^2}+3\right]
\end{aligned}
$$

$=7-4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=7-\frac{2}{3}\pi^2\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}\right)$.

(3) 注意到 $a_k=(2k-1)\left(\frac{1}{2^{k-1}}-\frac{1}{2^k}\right)$, 我们有

$I=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^{k-1}}-\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^k}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2k+1}{2^k}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2k-1}{2^k}-\frac{2n-1}{2^n}\right)$

$=1+2\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^k}-\frac{2n-1}{2^n}\right)=3$

(4) 由 $a_n=\frac{1}{2}\left[\frac{n}{(n+1)![(n+1)n+1]}-\frac{n-1}{n![n(n-1)+1]}+\frac{1}{(n+1)!}\right]$, 知

$$
I=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left[\frac{n}{(n+1)![(n+1)n+1]}+1+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)!}\right]=\frac{\mathrm{e}}{2}.
$$

$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=\mathrm{e},\right)$

(5) 由 $a_k = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{(2k-1)!!} - \dfrac{1}{(2k+1)!!}\right)$ 可得

$$\begin{aligned} I &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{(2k-1)!!} - \frac{1}{(2k+1)!!}\right) \\ &= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{(2n+1)!!}\right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(6) 由 $a_k = \dfrac{a^{2^k}+1}{1-a^{2^{k+1}}} - \dfrac{1}{1-a^{2^{k+1}}}$ 可知.

$$I = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{1-a^{z^k}} - \frac{1}{1-a^{2^{k+1}}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1-a^2} - \frac{1}{1-a^{2^{n+1}}}\right) = \frac{1}{1-a^2}$$

3. 求下列级数 $I = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的和

(1) $a_n = \dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}}$. (2) $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n(n+2)}$

(3) $a_n = \dfrac{2n+1}{n(n+1)(n+2)}$

解

(1) 有理化得

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n}(n+1) + n\sqrt{n+1}} &= \frac{\sqrt{n}(n+1) - n\sqrt{n+1}}{n(n+1)^2 - n^2(n+1)} \\ &= \frac{\sqrt{n}(n+1) - n\sqrt{n+1}}{n(n+1)} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \end{aligned}$$

从而可得

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}(n+1) - n\sqrt{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = 1 \end{aligned}$$

(2) 分解通项为 $a_n = (-1)^{n-1}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+2}\right)$, 故有

$$S_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5}\cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \frac{(-1)^n}{n+2}\right)$$

由此易知 $I = 1/4$.

(3) 因为

$$2n+1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2} + n(n+2) - \frac{3n(n+1)}{2}$$

所以得到

$$\begin{aligned} S_n &= \left(\frac{1/2}{1} + \frac{1}{2} - \frac{3/2}{3}\right) + \left(\frac{1/2}{2} + \frac{1}{3} - \frac{3/2}{4}\right) \\ &+ \left(\frac{1/2}{3} + \frac{1}{4} - \frac{3/2}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1/2}{n-2} + \frac{1}{n-1} - \frac{3/2}{n}\right) \\ &+ \left(\frac{1/2}{n-1} + \frac{1}{n} - \frac{3/2}{n+1}\right) + \left(\frac{1/2}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{3/2}{n+2}\right) \end{aligned}$$

注意到 $(-(3/2)/k + 1/k + (1/2)/k = 0)$, 可知

$$\begin{aligned} S_n &= \left(\frac{1/2}{1} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1/2}{2}\right) + \left(\frac{-3/2}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{3/2}{n+2}\right) \\ &= \frac{5}{4} - \frac{1/2}{n+1} - \frac{3/2}{n+2} \to \frac{5}{4} \quad (n\to\infty) \end{aligned}$$

郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com

4. 求下列级数 $I=\sum\limits_{n=1} a_n$ 的和

(1) $a_n=\sin\dfrac{1}{2^n}\cdot\cos\dfrac{3}{2^n}$. (2) $a_n=\arctan\dfrac{1}{2n^2}$. (3) $a_n=3^{n-1}\cdot\sin^3\left(\dfrac{\theta}{3^n}\right)$.

(4) $a_n=\dfrac{1}{2^n}\tan\dfrac{\theta}{2^n}(\theta\neq 0)$.

解 (1) 由 $a_n=\dfrac{1}{2}\left(\sin\dfrac{1}{2^{n-2}}-\sin\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)$, 可知

$$\begin{aligned}I&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\sin\frac{1}{2^{k-2}}-\sin\frac{1}{2^{k-1}}\right)\\&=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\sin 2-\sin\frac{1}{2^{n-1}}\right)=\frac{1}{2}\sin 2\end{aligned}$$

(2) 应用反正切分解公式, 我们有

$$\begin{aligned}\arctan\left(\frac{1}{2n^2}\right)&=\arctan\left(\frac{n+1}{2n}\frac{1}{n(n+1)}\right)\\&=\arctan\left[\frac{1}{n(n+1)}/\left(1+\frac{n-1}{n+1}\right)\right]=\arctan\left|\frac{\frac{n}{n+1}-\frac{n-1}{n}}{1+\frac{n}{n+1}\frac{n-1}{n}}\right)\\&=\arctan\left(\frac{n}{n+1}\right)-\arctan\left(\frac{n-1}{n}\right),\\I&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[\arctan\left(\frac{k}{k+1}\right)-\arctan\left(\frac{k-1}{k}\right)\right]\\&=\lim_{n\to\infty}\arctan\left(\frac{n}{n+1}\right)=\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

(3) 应用公式 $\sin^3 x=\dfrac{3}{4}\sin x-\dfrac{1}{4}\sin 3x$, 我们有

$$\begin{aligned}I&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}3^{k-1}\left[\frac{3}{4}\sin\left(\frac{\theta}{3^k}\right)-\frac{1}{4}\sin\left(\frac{\theta}{3^{k-1}}\right)\right]\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4}\left[3^k\sin\left(\frac{\theta}{3^k}\right)-3^{k-1}\sin\left(\frac{\theta}{3^{k-1}}\right)\right]\\&=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\left[3^n\sin\left(\frac{\theta}{3^n}\right)-\sin\theta\right]=\frac{\theta-\sin\theta}{4}\end{aligned}$$

(4) 应用公式 $\tan\theta=\cot\theta-2\cot 2\theta$. 我们有

$$\begin{aligned}a_k&=\frac{1}{2^k}\left[\cot\left(\frac{\theta}{2^k}\right)-2\cot\left(\frac{\theta}{2^{k-1}}\right)\right]=\frac{1}{2^k}\cot\left(\frac{\theta}{2^k}\right)-\frac{1}{2^{k-1}}\cot\left(\frac{\theta}{2^{k-1}}\right)\\I&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{2^k}\cot\left(\frac{\theta}{2^k}\right)-\frac{1}{2^{k-1}}\cot\left(\frac{\theta}{2^{k-1}}\right)\right]\\&=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2^n}\cot\left(\frac{\theta}{2^n}\right)-\cot\theta\right]=\frac{1}{\theta}-\cot\theta\end{aligned}$$

5. 求下列级数 $I=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的和:

(1) $a_n=\ln\left[1-\dfrac{2}{n(n+1)}\right](n\geqslant 2)$. (2) $a_n=\ln\dfrac{n^3-1}{n^3+1}(n\geqslant 2)$. (3) $a_n=(-1)^{n-1}\ln\left[1-\dfrac{1}{(n+1)}\right]$.

(4) $a_n=n\ln\dfrac{2n+1}{2n-1}-1$.

解 (1) 注意到 $1-\frac{2}{n(n+1)}=\frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}$, 我们有

$$\begin{aligned} I&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\ln\frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\left(\ln\frac{k+2}{k}-\ln\frac{k+1}{k-1}\right)\\ &=\lim_{n\to\infty}\left(\ln\frac{n+2}{n}-\ln 3\right)=-\ln 3\end{aligned}$$

(2) 由 $\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{(n-1)\left(n^2+n+1\right)}{(n+1)\left(n^2-n+1\right)}=\frac{2\left(n^2+n+1\right)}{3n(n+1)}/\frac{2\left(n^2-n+1\right)}{3(n-1)n}$ 可知

$$\begin{aligned} I&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\left(\ln\frac{2\left(n^2+n+1\right)}{3n(n+1)}-\ln\frac{2\left(n^2-n+1\right)}{3(n-1)n}\right)\\ &=\lim_{n\to\infty}\left(\ln\frac{2\left(n^2+n+1\right)}{3n(n+1)}-0\right)=\ln\frac{2}{3}\end{aligned}$$

(3) 由 $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln\frac{n+1}{n}$, 可知

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\\ =&\ln\frac{2}{1}-\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}-\ln\frac{5}{4}+\cdots+\ln\frac{2n}{2n-1}-\ln\frac{2n+1}{2n}\\ =&\ln\frac{2\cdot 4\cdots 2n}{1\cdot 3\cdots(2n-1)}-\ln\frac{3\cdot 5\cdots(2n+1)}{2\cdot 4\cdots 2n}\\ =&\ln\left[\frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\right]\end{aligned}$$

从而得 $I=\ln\frac{\pi}{2}$. (Wallis 公式 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2=\frac{\pi}{2}$.)

(4) 应用 Stirling 公式 $n!=\varepsilon_n\cdot\sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$ $(\varepsilon_n\to 1)$, 可知

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n}\left(k\ln\frac{2k+1}{2k-1}-1\right)&=\sum_{k=1}^{n}(k\ln(2k+1)-k\ln(2k-1)-1)\\ &=n\ln(2n+1)-\ln[(2n-1)!!]-n\\ &=\frac{1}{2}\ln\frac{(2n+1)^{2n}}{[(2n-1)!!]^2\mathrm{e}^{2n}}=\frac{1}{2}\ln\frac{(2n+1)^{2n}\cdot 2^{2n}(n!)^2}{((2n)!)^2\mathrm{e}^{2n}}\\ &=\frac{1}{2}\ln\frac{(2n+1)^{2n}\cdot 2^{2n}\varepsilon_n^2\cdot 2n\pi\cdot(n/\mathrm{e})^{2n}}{\varepsilon_{2n}^2\cdot 4n\pi\cdot(2n/\mathrm{e})^{4n}\cdot\mathrm{e}^{2n}}\\ &=\frac{1}{2}\ln\left[\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^{2n}\frac{\varepsilon_n^2}{2\varepsilon_{2n}^2}\right]\end{aligned}$$

从而得到 $I=(1-\ln 2)/2$.

6. 求级数 $\frac{a}{1-a^2}+\frac{a^2}{1-a^4}+\frac{a^4}{1-a^8}+\cdots$ 之和

解 令该级数的前 n 项部分和为 S_n, 则有

$S_n=\frac{a+a^2+\cdots+a^{2^n-1}}{1-a^{2^n}}=\frac{a\left(1-a^{2^n-1}\right)}{\left(1-a^{2^n}\right)(1-a)}=\frac{a}{1-a}\frac{1/a^{2^n-1}-1}{1/a^{2^n-1}-a}$. 知

(i) $|a|<1$ 时 , $S_n\to\frac{a}{1-a}(n\to\infty)$;

(ii) $|a|>1$ 时 , $S_n\to\frac{1}{1-a}$.

郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com

7. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=2, \sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=5$, 求 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

解　由 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}=5+\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}$ 可知，只需求出 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}$.

又 $2=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-1}a_k=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}-\sum_{k=1}^{n}a_{2k}\right]=5-\sum_{k=1}^{\infty}a_{2k}, \sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}=3, \quad \sum_{n=1}^{\infty}a_n=5+3=8$

8. 证明下列定理 *

定理1　正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛当且仅当其部分和是有界的: 存在 $M>0$, 使得

$$\sum_{k=1}^{n}a_k\leqslant M\quad(n=1,2,\cdots)$$

定理2　(Cauchy 凝聚判别法）设 $\{a_n\}$ 是递减正数列, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛的充分必要条件是: 凝聚项级数 $\sum_{n=0}^{\infty}2^na_{2^n}=a_1+2a_2+4a_4+\cdots+2^na_{2^n}\cdots$ 收敛.

定理3　(Pringshcim) 设 $\{a_n\}$ 是递减正数列. 若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$. 注　此定理的逆不真, 如 $a_n=1/n\ln n$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛. 但极限 $\lim na_n$ 可以不存在, 如

$$a_n=\begin{cases}1/n, & n=k^2\\ 1/n^2, & n\neq k^2\end{cases}$$

证：略.

3.2 比较判别法判敛

1. 判别下列级数的敛散性:

 (1) $I=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$. (2) $I=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$. (3) $I=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln n\cdot\ln\ln n}$.

 解 (1) 当 $p\leqslant 0$ 时 , $\frac{1}{n^p}\geqslant 1$, 该级数显然发散. 当 $p>0$ 时 , $\left\{\frac{1}{n^p}\right\}$ 是递减正数列, 从而考察级数 $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\frac{1}{(2^n)^p}=\sum_{n=1}^{\infty}2^{n(1-p)}$. 易知它是等比级数, 且可得公比 2^{1-p}. $2^{1-p}<1$ 即 $p>1$ 时 , $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\frac{1}{(2^n)^p}$ 收敛 ; $2^{1-p}\geqslant 1$ 即 $p\leqslant 1$ 时 , $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\frac{1}{(2^n)^p}$ 发散. 因此 , I 在 $p\leqslant 1$ 时发散, $p>1$ 时收敛.

 注 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 俗称 p 级数, 是级数论中最重要的范例之一, 许多级数敛散性的判定常以它作为比较的标准.

 (2) 易知通项是递减正数列. 根据凝聚判别法，我们有

$$\sum_{n=2}^{\infty}2^n a_{2^n}=\sum_{n=2}^{\infty}2^n\frac{1}{2^n\left(\ln 2^n\right)^p}=\frac{1}{(\ln 2)^p}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^p}$$

 由此知, $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$ 在 $p>1$ 时收敛, $p\leqslant 1$ 时发散. 这一结论需要记住. 比如易知

 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^k}$ 发散, 而 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{k-1}(\ln n)^k}$ 收敛

 (3) 易知通项是递减正数列, 用凝聚判别法, 考察

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{2^n}{2^n\cdot\ln 2^n\cdot\ln\ln 2^n}=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln(n\ln 2)}\frac{1}{\ln 2}$$

 故而级数发散.

2. 判别下列级数 $I=\sum_{n=3}^{\infty}a_n$ 的敛散性:

 (1) $a_n=\frac{1}{r^{\ln n}}(r>0)$. (2) $a_n=\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$. (3) $a_n=\frac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}}$. (4) $a_n=\frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}$.

 解 1) 将 $r^{\ln n}$ 换成 $n^{\ln r}$, 易知当 $r>\mathrm{e}$ 时 , $\ln r>1; r\leqslant\mathrm{e}$ 时 , $\ln r\leqslant 1$. 从而根据尼级数的敛散性判别原则, 可知 I 在 $r>\mathrm{e}$ 时收敛, 在 $r\leqslant\mathrm{e}$ 时发散.

 (2) 记 $(\ln n)^{\ln n}=\mathrm{e}^{\ln n\cdot\ln(\ln n)}=n^{\ln(\ln n)}$, 则用 p 级数作比较, 易知 I 收敛.

 (3) 记 $(\ln\ln n)^{\ln n}=n^{\ln\operatorname{lol} m}$, 用 p 级数作比较, 易知 I 收敛.

 (4) 注意关系式 $\frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}=\frac{1}{\mathrm{e}^{(\ln\ln n)^2}}>\frac{1}{\mathrm{e}^{\ln n}}=\frac{1}{n}$, 即知 I 发散.

3. 判别下列级数 $I=\sum_{n=2}^{\infty}a_n$ 的敛散性:

 (1) $a_n=\frac{1}{\ln(n!)}$. (2) $a_n=\frac{\ln(n!)}{n^p}$.

 (3) $a_n=\frac{\sum_{k=1}^{n}\ln^2 k}{n^p}$. (4) $a_n=\frac{\ln\left(\mathrm{e}^n+n^2\right)}{\sqrt[4]{n^8+n^2+1}\cdot\ln^2(n+1)}$

 (5) $a_n=\frac{1}{n^2-\ln n}$. (6) $a_n=\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}$

 解 (1) 因为 $\ln(n!)=\sum_{k=2}^{n}\ln k<n\ln n$, 所以有 $a_n>1/n\ln n$. 从而 I 发散.

(2) 因为 $\ln(n!) = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln k > n-2$, 所以当 $p \leqslant 2$ 时该级数发散; 又由

$$\frac{\ln(n!)}{n^p} < \frac{n\ln n}{n^p} = \frac{\ln n}{n^{p-1}} \quad (n \geqslant 2),$$

可知 $p > 2$ 时 I 收敛.

(3) (i) 从 $a_n \leqslant \dfrac{n\ln^2 n}{n^p}$ 看, 可知当 $p > 2$ 时 I 收敛. (ii) 从 $a_n > \dfrac{(n-4)\ln^2 4}{n^p}$ 看, 可知当 $p \leqslant 2$ 时 I 发散.

(4) 因为 $a_n < \dfrac{\ln(2\mathrm{e}^n)}{n^2\ln^2 n} < \dfrac{2\ln \mathrm{e}^n}{n^2\ln^2 n} = \dfrac{2}{n\ln^2 n}$, 所以 I 收敛.

(5) 注意 $a_n < \dfrac{1}{n^2-n} = \dfrac{1}{n(n-1)}(n>1)$, 即知 I 收敛.

(6) 用归纳法可证 $a_n > 1/(2n-1)(n>2)$, 故 I 发散.

4. 判别下列级数 $I = \sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$ 的敛散性:

(1) $a_n = 1 - -\cos\dfrac{1}{n}$ (2) $a_n = \dfrac{1}{\ln^2\left(\sin\frac{1}{n}\right)}$ (3) $a_n = \dfrac{1}{(\ln n)^{(\ln w)^\alpha}}(1/\alpha > 0)$

(4) $a_n = (\sqrt[n]{n}-1)^a(0 < \alpha \leqslant 1)$. (5) $a_n = \dfrac{1}{p^n - q^n}(0 < q < p)$.

解 (1) 由 $a_n = 2\sin^2(1/2n) \leqslant 2/4n^2 = 1/2n^2$ 可知 ,I 收敛.

(2) 注意到 $\sin(1/n) > 2/n\pi$, 则有 $\ln^2\left(\sin\dfrac{1}{n}\right) < \ln^2(n\pi/2)$, 从而可得

$$\frac{1}{\ln^2\left(\sin\frac{1}{n}\right)} > \frac{1}{\ln^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)} > \frac{2}{n\pi}\frac{1}{\ln\left(\frac{n\pi}{2}\right)}$$

易知 I 发散.

(3) 将原式改写为则易知 $\alpha > 1$ 时 I 收敛. 对于 $\alpha < 1$, 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\ln n}{(\ln n)^{1-\alpha}} = 0$, 故 I 发散.

(4) 因为 $\ln n < n(\sqrt[n]{n}-1)$, 所以当 $n > 3$ 时有

$$(\sqrt[n]{n}-1)^\alpha > \left(\frac{\ln n}{n}\right)^a > \frac{1}{n^\alpha}$$

知 I 发散.

(5) $p > 1$ 时, 因为

$$a_n = \frac{1}{(p-q)\left(p^{n-1}+\cdots+q^{n-1}\right)} < \frac{1}{(p-q)p^{n-1}},$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(p-q)p^{n-1}$ 是公比为 $\dfrac{1}{p}$ 的等比级数, 由正项级数比较判别法知 I 收敛. 当 $p \leqslant 1$ 时, 由 $a_n \geqslant 1/p^n \geqslant 1$ 可知 ,I 发散.

5. 解答下列问题

(1) 设 $\{a_n\}$ 是方程 $\tan x = x$ 的正解数列, 试论 $\sum\limits_{n=1} 1/a_n^2$ 的敘散性.

(2) 设 $\alpha > 1, \xi_n$ 为方程 $f(x) = x^n + n^\alpha x - 1 = 0$ 的正根, 试论 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\xi_n$ 的玫散性.

(3) 设$a_1 = \sqrt{2}, a_2 = \sqrt{2-\sqrt{2}}, a_3 = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \cdots, a_n = \sqrt{2-\sqrt{2\cdot\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}, \cdots,$ 试论 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的敛散性.

解 (1) 因为 $a_n \in (n\pi, n\pi+\pi/2)$, 所以 $1/a_n^2 < 1/n^2\pi^2$. 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/a_n^2$ 收敛.

(2) 由 $f(0)=-1<0, f\left(1/n^{a}\right)>0$, 可知 $0<\xi_n<1/n^{\alpha}$, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\xi_n$ 收敛.

(3) 令 $b_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}$, 则易知 $\{b_n\}$ 是递增收敛于 2 的数列, 从而 $\left\{a_n=\sqrt{2-b_n}\right\}$ 是递减趋于零的数列. 此外, 我们有

$$\begin{aligned} a_k^2=2-b_k=\frac{4-b_k^2}{2+b_k}&=\frac{2-b_{k-1}}{2+b_k}\\ =\cdots=\left(2-b_1\right)\frac{1}{2+b_1}\cdot\frac{1}{2+b_2}&\cdots\frac{1}{2+b_k}\leqslant\left(2-b_1\right)2^{-k}\end{aligned}$$

$\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\leqslant\sqrt{2-b_1}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k,2}}$ 从而知 $\sum a_n$ 收敛.

6. 解答下列问题

(1) 判别级数 $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^{1+1/\ln inn}}$ 的敛散性.

(2) 试举例说明: 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散, 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n/\ln a_n$ 发散.

(3) 试问: 是否存在正数列 $\{a_n\}$, 使得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}1/n^2a_n$ 同收敛?

(4) 试问: 是否存在正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, 使得对任意的正敉数 k, 有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{kn}=1/k^{\sqrt{2}}$?

解 (1) 注意到等式且 $\ln n/(\ln\ln n)^2\to+\infty(n\to\infty)$, 可知

$$\frac{1}{n\cdot\ln n\cdot n^{1/\ln 1+n}}\leqslant\frac{1}{n\cdot\ln^2 n}\quad(n\geqslant 3)$$

从而该级数收玫. (2) 取 $a_1=0, a_n=1/n\cdot\ln n(n\geqslant 2)$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散. 而由不等式

$$-\frac{a_n}{\ln a_n}=\frac{1}{n\ln n\cdot(\ln n+\ln\ln n)}\leqslant\frac{1}{n\ln^2 n}$$

可知, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n/\ln a_n$ 收敛.

(2) 取 $a_1=0, a_n=1/(n\cdot\ln n)\in(0,1)(n\geqslant 2)$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散. 而由不等式 $-\frac{a_n}{\ln a_n}=\frac{1}{n\ln n\cdot(\ln n+\ln\ln n)}\leqslant\frac{1}{n\ln^2 n}$ 可知,正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}-a_n/\ln a_n$ 收敛,便有负项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n/\ln a_n$ 收敛.

(3) 假定存在正数列 $\{a_n\}$, 使得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 则由不等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n+\frac{1}{n^2a_n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(na_n+\frac{1}{na_n}\right)\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n},$$

可知级数 $\sum\limits_{n=1}\left(a_n+1/n^2a_n\right)$ 发散. 从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}1/n^2a_n$ 是发散的. 这说明不存在这样的正数列 $\{a_n\}$.

(4) 取 $a_n=b/n^{\sqrt{2}}$, 其中 $b=\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}1/n^{\sqrt{2}}\right)^{-1}$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_{kn}=\frac{1}{k^{\sqrt{2}}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b}{n^{\sqrt{2}}}=\frac{1}{k^{\sqrt{2}}}$$

郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com

7. 解答下列问题

(1) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正项收敛级数, 试证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n} n^{-p}$ 在 $p > 1/2$ 时收敛.

(2) 试判别下列级数 $I = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的敛散性:

$$\text{(i) } a_n = \int_0^{1/\sqrt{n}} \frac{x \, \mathrm{d}x}{1+x^2} \qquad \text{(ii) } a_n = 1\Big/\int_0^n \sqrt[4]{1+x^4} \, \mathrm{d}x$$
$$\text{(iii) } a_n = \int_n^{n+2} \mathrm{e}^{-4\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x \qquad \text{(iv) } a_n = \int_0^{1/n} \frac{\sqrt[3]{x}}{1+x} \, \mathrm{d}x$$

解 (1) 因为

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k} \cdot k^{-p} \right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right) \left(\sum_{k=1}^{n} k^{-2p} \right),$$

所以结论得证. (2) (i) 注意 $a_n = \ln(1+1/n)/2$. (ii) 注意 $a_n < 1\Big/\int_0^n x \, \mathrm{d}x = \dfrac{2}{n^2}$. (iii) 注意存在 $c > 0$, 使得 $a_n < 2/\mathrm{e}^{4\sqrt{n}} < c/n^2$. (iv) 注意不等式

$$a_n < \int_0^{1/n} \frac{\sqrt[3]{x} \, \mathrm{d}x}{1+x^{4/3}} = \frac{3}{4} \int_0^{1/n} \frac{\mathrm{d}\left(x^{4/3}\right)}{1+x^{4/3}} = \frac{3}{4} \ln\left(1+1/n^{4/3}\right) < \frac{3}{4} \frac{1}{n^{4/3}}.$$

注 1 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正项收敛级数, 试求正数列 $\{b_n\}$ 的条件, 仲得 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/b_n$ 何时收敛.

注解：(i) 若 $b_n = \sqrt{a_n}$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/b_n$ 均收敛.

(ii) 若两级数同时收敛, 则由 $\sqrt{a_n} = \sqrt{b_n \cdot \dfrac{a_n}{b_n}} \leqslant \dfrac{1}{2}\left(b_n + \dfrac{a_n}{b_n}\right)$ 可知 ,$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}$ 收敛.

注 2 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)^2} = \dfrac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$. 这是因为

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2}$$

3.3 比较判别法极限形式判敛

定理1 设 (A) $\sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, (B) $\sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 是两个正项级数. 若存在极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=l$$

则当 $l>0$ 时, 此两级数 (A) 与 (B) 同敛散.

1. 判别下列级数 $I=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的敛散性:

(1) $a_n=\dfrac{1}{n^{1+1/n}}$. (2) $a_n=\dfrac{\sqrt[n]{2}-1}{n^p}$. (3) $a_n=\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^p}$.

(4) $a_n=\left(\dfrac{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}-\sqrt{n}}{n}\right)^p$. (5) $a_n=\left(1-\sqrt[3]{\dfrac{n-1}{n+1}}\right)^p(p>0)$.

(6) $a_n=\dfrac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b}\cdot(n+b)^{n+a}}(a>0,b>0)$.

解 (1) 取 $b_n=1/n$, 易知 $a_n/b_n\to 1(n\to\infty)$, 故 I 发散. (2) 注意到 $(\sqrt[n]{2}-1)/(1/n)\to \ln 2(n\to\infty)$, 故取 $b_n=\ln 2/n^{p+1}$, 有 $a_n/b_n\to 1(n\to\infty$, 故 $p>0$ 时 I 收敛.

(3) 改写原式为

$$a_n=\frac{1}{n^p(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}=\frac{1}{n^{p+1/2}(\sqrt{1+1/n}+1)},$$

故取 $b_n=1/2n^{p+1/2}$, 就有 $a_n/b_n\to 1(n\to\infty)$. 由此知 , 当 $p>1/2$ 时 I 收敛.

(4) 注意到 $\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}=\sqrt{n}(1+\sqrt{n+\sqrt{n}}/n)^{1/2}$, 以及

$$\left(1+\frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}}{n}\right)^{1/2}\sim(1+1/\sqrt{n})^{1/2}=1+\frac{1}{2\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{n}\right)\quad(n\to\infty),$$

可知 $a_n\sim(1/2)^p/n^p(n\to\infty)$. 由此知 $p>1$ 时 I 收敛.

(5) 注意到 $n\to\infty$ 时有

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{\frac{n-1}{n+1}}&=\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{3}}\\&=\left(1-\frac{1}{3n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1-\frac{1}{3n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=1-\frac{2}{3n}+o\left(\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

从而可知 $\left(1-\sqrt[3]{\dfrac{n-1}{n+1}}\right)^p\sim\left(\dfrac{2}{3n}\right)^p(n\to\infty)$, 这说明 I 在 $p>1$ 时收敛 , $p\leqslant 1$ 时发散.

(6) 因为 $a_n=1/n^{a+b}(1+a/n)^{n+b}(1+b/n)^{n+a}$, 所以取 $b_n=n^{a+b}, a_n/b_n\to \mathrm{e}^{-(a+b)}\ (n\to\infty)$. 故知当 $a+b>1$ 时 I 收敛.

2. 判别下列级数 $I=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的敛散性:

(1) $a_n=\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{n}}{2}+1}-1$. (2) $a_n=\left[\mathrm{e}-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right]^p$

(3) $a_n=\left[\dfrac{\mathrm{e}^2-(1+2/n)^n}{n}\right]^p$. (4) $a_n=(\sqrt[n]{n}-1)^p(p>1)$

(5) $a_n=\left[(1+1/n)^{n+1}-\mathrm{e}\right]^p$. (6) $a_n=n^{n^p}-1(p<0)$.

(7) $a_n=\left(n^{\frac{1}{2}+1}-1\right)^p$. (8) $a_n=\alpha^{1/n}+\alpha^{-1/n}-2(\alpha>0)$.

解 (1) 由 $\mathrm{e}^{\sqrt{n}/\left(n^2+1\right)}-1=\dfrac{\sqrt{n}}{n^2+1}+O\left(\dfrac{1}{n^3}\right)(n\to\infty)$ 可知 , I 收敛.

郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com

(2) 注意到 $(1+1/n)^n=\mathrm{e}^{n\ln(1+1/n)}$, 以及

$$
\begin{aligned}
&n\ln(1+1/n)=n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)=1-\frac{1}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\quad(n\to\infty),\\
&\mathrm{e}-\mathrm{e}^{1-1/2n+o\left(1/n^2\right)}=\mathrm{e}\left(1-\mathrm{e}^{-1/2n+O(1/n^2)}\right)=\mathrm{e}\left(1-\left(1-1/2n+O\left(1/n^2\right)\right)\right)\\
&=\mathrm{e}\left(\frac{1}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\quad(n\to\infty)
\end{aligned}
$$

从而当 $p>1$ 时 I 收敛.

(3) 注意到 $(1+2/n)^n=\mathrm{e}^{2-2/n+\left(\chi 1/n^2\right)}(n\to\infty), a_n\sim C_p/n^{2p}(n\to\infty)$. 故 $p>1/2$ 时 I 收敛.

(4) 注意到 $(\sqrt[n]{n}-1)^p=\left(\mathrm{e}^{\ln n/n}-1\right)^p$ 以及

$$
\mathrm{e}^{\ln n/n}=1+\frac{\ln n}{n}+O\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right)\quad(n\to\infty),
$$

即知 I 收敛.

(5) 注意到 $(1+1/n)^{n+1}=\mathrm{e}^{(n+1)\ln(1+1/n)}$ 以及可知 $a_n=(\mathrm{e}/2n)^p+O\left(1/n^{2p}\right)(n\to\infty)$. 从而得, 当 $p>1$ 时 I 收敛.

(6) 原式 a_n 改写为

$$
a_n=\mathrm{e}^{n^p\ln n}-1=\frac{\ln n}{n^{+p}}+O\left(\frac{\ln^2 n}{n^{-2p}}\right)\quad(n\to\infty)
$$

由此知, 当 $p<-1$ 时 I 收敛.

(7) 注意 $a_n\sim\dfrac{\ln^p n}{(n^2+1)^p}(n\to\infty)$, 即知当 $p>1/2$ 时 I 收敛.

(8) 改写 a_n 为

$$
\begin{aligned}
a_n&=\mathrm{e}^{100}+\mathrm{e}^{-\frac{\ln\alpha}{n}}-2\\
&=1+\frac{\ln\alpha}{n}+\frac{\ln^2\alpha}{n^2}+O\left(\frac{\ln^3 n}{n^3}\right)+1-\frac{\ln\alpha}{n}+\frac{\ln^2\alpha}{n^2}+O\left(\frac{\ln^3\alpha}{n^3}\right)-2\\
&=2\frac{\ln^2\alpha}{n^2}+O\left(\frac{\ln^3\alpha}{n^3}\right)\quad(n\to\infty)
\end{aligned}
$$

故知 I 收敛.

3. 判别下列级数 $I=\sum\limits_{n=1}a_n$ 的敛散性:

(1) $a_n=\left(\dfrac{1}{n}-\sin\dfrac{1}{n}\right)^p(p>0)$. (2) $a_n=\left(\mathrm{e}^{1/n}-\sin\dfrac{1}{n}\right)^{n^p}-1$. (3) $a_n=\left(\cos\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{\sqrt{n^2-n}}{n}\right)^p$. (4) $a_n=n\sin^p\left(\dfrac{1}{n}-\arctan\dfrac{1}{n}\right)$ (5) $a_n=\left(\mathrm{e}^{1/n}-1\right)\sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}$. (6) $a_n=\ln\left(\dfrac{1}{\cos\frac{2\pi}{n}}\right)(n>4)$. (7) $a_n=n^\alpha\arctan n^\beta(\beta<0)$. (8) $a_n=\tan\dfrac{1}{n}-\arctan\dfrac{1}{n}$.

解 (1) 因为 $\dfrac{1}{n}-\sin\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{6n^3}+O\left(\dfrac{1}{n^5}\right)(n\to\infty)$, 所以有公式 $\left(\dfrac{1}{n}-\sin\dfrac{1}{n}\right)^p=\dfrac{1}{6^pn^{3p}}+O\left(n^{-5p}\right)\quad(n\to\infty)$ 由此知, $p>1/3$ 时 I 收敛.

(2) 因为 $\mathrm{e}^{1/n}-\sin\dfrac{1}{n}=1+\dfrac{1}{n^2}+O\left(\dfrac{1}{n^3}\right)(n\to\infty)$, 所以 $a_n=\dfrac{1}{n^{2-p}}+O\left(\dfrac{1}{n^{3-p}}\right)(n\to\infty)$. 由此知, $p<1$ 时 I 收敛.

(3) 注意到 $\cos(1/\sqrt{n})-\sqrt{n^2-n}/n=\cos(1/\sqrt{n})-\sqrt{1-1/n}$, 则

$$
\begin{aligned}
a_n&=\left[\left(1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{4!n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)-\left(1-\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right]^p\\
&=\left[\frac{1}{6n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]^p=\frac{1}{6^p}\frac{1}{n^{2p}}\left[1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right]^p\quad(n\to\infty)
\end{aligned}
$$

郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com

由此知, 当 $p>1/2$ 时 I 收敛.

(4) 注意到当 $n\to\infty$ 时有

$$\frac{1}{n}-\arctan\left(\frac{1}{n}\right)=O\left(\frac{1}{n^3}\right),\quad \sin^p\left(\frac{1}{n}-\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right)\sim\frac{1}{n^{3p}}\quad(n\to\infty),$$

可知 $a_n\sim 1/n^{3p-1}(n\to\infty)$. 故当 $p>2/3$ 时 I 收敛.

(5) 注意到在 $n\to\infty$ 时有

$$\mathrm{e}^{1/n}-1\sim\frac{1}{n},\quad \sin\frac{1}{\sqrt{n}}\sim\frac{1}{\sqrt{n}}\quad(n\to\infty),$$

故 $a_n\sim 1/n^{3/2}(n\to\infty)$, 即 I 收敛.

(6) 注意 $a_n=-\ln\cos\dfrac{2\pi}{n}=-\ln\left[1-\left(1-\cos\dfrac{2\pi}{n}\right)\right]$, 以及

$$1-\cos\frac{2\pi}{n}=2\sin^2\frac{\pi}{n}\sim 2\pi^2/n^2\quad(n\to\infty)$$

即知 $a_n\sim 2\pi^2/n^2(n\to\infty)$, 故 I 收敛.

(7) 注意 $a_n\sim n^{\alpha+\beta}(n\to\infty)$, 故当 $\alpha+\beta<-1$ 时 I 收敛.

(8) 应用 Taylor 公式, 当 $n\to\infty$ 时我们有 $\tan\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{3n^3}+O\left(\dfrac{1}{n^5}\right)$, $\arctan\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{3n^3}+O\left(\dfrac{1}{n^5}\right)$ 故 $a_n\sim\dfrac{2}{3n^3}(n\to\infty)$, 即 I 收敛.

4. 判别下列级数 $I=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的敛散性:

(1)$a_n=\left(1-\dfrac{\ln n}{n}\right)^{2n}$. (2)$a_n=\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n\ln n}$.

(3)$a_n=\log_{b^n}\left(1+\dfrac{\sqrt[n]{a}}{n}\right)(a,b>0,b\neq 1)$. (4)$a_n=\left(1-\dfrac{\ln n}{\ln(n+1)}\right)$.

(5)$a_n=1-n\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$. (6)$a_n=\dfrac{1}{n}-\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$.

(7)$a_n=n\ln\dfrac{2n+1}{2n-1}-1$. (8) $a_n=\dfrac{\ln^p(1+\sqrt{\arctan(1/n)})}{\sin(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}$

解 (1) 注意到 $a_n=\mathrm{e}^{2\ln(1-\ln n/n)}$, 以及

$$\ln\left(1-\frac{\ln n}{n}\right)=-\frac{\ln n}{n}-\frac{\ln^2 n}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\quad(n\to\infty),$$

可知 $a_n\sim 1/n^2(n\to\infty)$, 故 I 收敛.

(2) 注意到 $\ln(1-1/n)=-\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}+O\left(\dfrac{1}{n^3}\right)(n\to\infty)$, 则

$$a_n=\mathrm{e}^{\mathrm{nin}\,n\cdot\ln(1-1/n)}\sim\mathrm{e}^{-\mathrm{Irn}}=\frac{1}{n}\quad(n\to\infty)$$

由此知 I 发散.

(3) 应用 Taylor 公式, 当 $n\to\infty$ 时我们有

$$a_n=\frac{\ln(1+\sqrt[n]{a}/n)}{n\ln b}=\frac{1}{n\ln b}\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=\frac{\sqrt[n]{a}}{\ln b}\frac{1}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

由此知 I 收敛.

(4) 注意到 $a_n=\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n+1)}=\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n\ln(n+1)}\sim\dfrac{1}{n\ln n}(n\to\infty)$, 故 I 发散.

(5) 注意到 $\ln(1+1/n)=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{2n^2}+O\left(\dfrac{1}{n^3}\right)(n\to\infty)$, 则

$$n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1-\frac{1}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\quad(n\to\infty)$$

由此知 $a_n \sim 1/2n(n\to\infty)$, 故 I 发散.

(6) 易知 $a_n \sim 1/2n^2(n\to\infty)$, 故 I 收敛.

(7) 注意到 $\ln\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)=\ln\left(1+\frac{2}{2n-1}\right)$, 我们有

$$\begin{aligned}
a_n &= n\left(\frac{2}{2n-1}-\frac{2}{(2n-1)^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)-1\\
&= \frac{2n}{2n-1}-\frac{2n}{(2n-1)^2}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)-\frac{2n-1}{2n-1}\\
&= \frac{-1}{(2n-1)^2}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\quad(n\to\infty)
\end{aligned}$$

由此知 I 收敛.

(8) 注意到 $\arctan(1/n)\sim 1/(2n)(n\to\infty), \sqrt{n+1}-\sqrt{n}=1/(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$, 则 $a_n\sim\frac{1}{n^{p/2}}\cdot\frac{1}{n^{1/2}}=\frac{1}{n^{\frac{p+1}{2}}}(n\to\infty)$, 故而当 $p>3$ 时候原级数收敛.

5. 判别下列数列的敛散性:

(1) $a_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}(n=1,2,\cdots)$

(2) $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k/k-\ln^2 n/2(n=1,2,\cdots)$

解 (1) 采用表达式 $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)+a_1$, 则

$$a_n=-1-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k+1}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})^2}\quad(n=2,3,\cdots).$$

注意到 $1/\sqrt{k+1}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})^2\sim 1/2k^{3/2}(k\to\infty)$, 可知级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}1/\sqrt{k+1}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})^2$ 收放. 从而 $\{a_n\}$ 为收敛列.

(2) 改写 a_n 为 $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n-1}\left[\frac{\ln(k+1)}{k+1}+\frac{1}{2}\left(\ln^2 k-\ln^2(k+1)\right)\right]\triangleq\sum\limits_{n=1}^{n-1}b_k$,

$$\begin{aligned}
2b_k &= \frac{2\ln(k+1)}{k+1}+\ln\frac{k}{k+1}\cdot\ln k(k+1)=\frac{2\ln(k+1)}{k+1}-\frac{\ln(k+1)-\ln k}{k}+O\left(\frac{\ln k}{k^2}\right)\\
&= \frac{-2\ln k}{k(k+1)}-\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\frac{-k+1}{k(k+1)}+O\left(\frac{\ln k}{k^2}\right)\\
&= -\frac{2\ln k}{k(k+1)}+\frac{k-1}{k^2(k+1)}+O\left(\frac{\ln k}{k^2}\right)\quad(k\to\infty)
\end{aligned}$$

由此知 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}b_k$ 收敛, 即 $\{a_n\}$ 是收敛列.

郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com

3.4 比值判别法判敛

定理1 （d′ Alembert 比值判别法）设有正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

(i) 若 $\overline{\lim}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=l<1$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

(ii) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{m+1}}{a_n}=l>1$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发败.

注 1 比值判别法是对级数自身前后项之比 (后者居上) 的极限作出的判断, 因此这一判别法在表面上不必借助于外部, 但其实质仍是与几何级数比较而来. 此外, 当 $l=1$ 时, 原级数也可能收数, 也可能发散. 例如，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2},\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$. 当然, 如果此时再有条件 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}>1(n\geqslant N)$, 那么级数发散. 数. 例如

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots$$

这说明比值判别法的逆命题不成立.

1. 试论下列级数 $I=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的敛散性:

(1) $a_n=\dfrac{3^n n!}{n^n}$. (2) $a_n=\dfrac{(2n-1)!!}{n!3^n}$ (3) $a_n=\dfrac{(n!)^3}{3^{n/3}}$. (4) $a_n=n^{-n/3}\sqrt[3]{n!+1}$

(5) $a_n=\dfrac{5\cdot 8\cdots(3n+2)}{2^n(n+1)!}\arcsin\dfrac{1}{2^n}$. (6) $a_n=\dfrac{(\alpha+1)(2\alpha+1)\cdots(n\alpha+1)}{(\beta+1)(2\beta+1)\cdots(n\beta+1)}$ $(\alpha>0,\beta>0)$.

(7) $a_n=(\sqrt{2}-\sqrt[3]{2})(\sqrt{2}-\sqrt[5]{2})\cdots(\sqrt{2}-\sqrt[2n+1]{2})$. (8) $a_1=1,a_{n+1}=\sin a_n/n^p(p>0)$

(9) $a_n=n^{\alpha}\beta^n(\beta>0)$.

解 (1) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}3\Big/\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\dfrac{3}{\mathrm{e}}>1$, 所以 I 发散.

(2) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{3(n+1)}=\dfrac{2}{3}$, 所以 I 收效.

(3) 因为 $a_{n+1}/a_n=(n+1)^3/\left(3^{(n+1)^{4/3}-n^{4/3}}\right)$, 所以 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\sim\dfrac{n^3}{3^{n/3}}\to 0(n\to\infty)$, 即 I 收敛.

(4) 因为 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\left(\dfrac{(n+1)!+1}{n!+1}\right)^{1/3}\dfrac{1}{(1+1/n)^{n/3}}\cdot\dfrac{1}{(n+1)^{1/3}}\left(\dfrac{(n+1)!+1}{n!+1}\right)^{1/3}=\left(\dfrac{n+1+1/n!}{1+1/n!}\right)^{1/3}=$ $n^{1/3}\left(\dfrac{1+1/n+1/n\cdot n!}{1+1/n!}\right)^{1/3}$ 所以 $a_{n+1}/a_n\to 1/\sqrt[3]{\mathrm{e}}(n\to\infty)$, 即 I 收敛.

(5) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+5}{2(n+1)}\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{4}$, 所以 I 收敛.

(6) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{\alpha}{\beta}$, 所以当 $a\geqslant\beta$ 时 I 发散蔽, 当 $\alpha<\beta$ 将 I 收敛.

(7) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(2^{1/2}-2^{1/(2n+3)}\right)=\sqrt{2}-1$, 所以 I 收敛.

(8) 易知 $a_n\to 0(n\to\infty)$, 我们有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin a_n}{a_n}\dfrac{1}{n^p}=0$, 故 I 收敛.

(9) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\beta$, 所以当 $\beta<1$ 时, I 收敛; $\beta>1$ 时 I 发散; $\beta=1$ 且 $\alpha<-1$ 时 I 收敛; $\beta=1$ 且 $\alpha\geqslant-1$ 时 I 发散.

2. 试证明下列命题 (结合收敛数列必要条件):

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{(n!)^2}=0$

证明 (1) 视 $a_n=\dfrac{n!}{n^n}$ 为 $I=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的通项, 因为我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\frac{n^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$
$$=\lim_{n\to\infty}1/\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{\mathrm{e}}<1$$

I 收敛, 由此知 $a_n\to 0(n\to\infty)$.

(2) 视 $a_n=\dfrac{n^n}{(n!)^2}$ 为 $I=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的通项, 因为我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n/(n+1)=0$$

I 收敛. 由此知 $a_n\to 0(n\to\infty)$.

3. 判定下列级数的敛散性

(1) $\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{2}{1+a^2}+\dfrac{4}{1+a^4}+\dfrac{8}{1+a^8}+\cdots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$

(2) $\dfrac{a}{1+a}+\dfrac{2a^2}{1+a^2}+\dfrac{4a^4}{1+a^4}+\cdots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$

解 (1) 易知 $a_n=2^n/\left(1+a^{2^n}\right)>0(n=1,2,\cdots)$, 我们有 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{2^{n+1}}{1+a^{2^{n+1}}}\dfrac{1+a^{2^n}}{2^n}=2\dfrac{1+a^{2^n}}{1+a^{2^{n+1}}}$

(i) 若 $|a|<1$, 则 $a_{n+1}/a_n\to 2(n\to\infty)$. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

(ii) 若 $|a|>1$, 则由

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=2\frac{a^{2^\pi}\left(1+1/a^{2^n}\right)}{a^{2^{n+1}}\left(1+1/a^{2^{n+1}}\right)}=\frac{2}{a^{2^n}}\frac{1+1/a^{2^n}}{1+1/a^{2^{n+1}}}\to 0\quad(n\to\infty),$$

可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

(2) 易知 $a_n=\dfrac{2^na^{2^n}}{1+a^{2^n}}>0(n=1,2,\cdots)$, 且有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=2a^{2^n}\frac{1+a^{2^n}}{1+a^{2^{n+1}}}$$

(i) 若 $|a|<1$, 则 $a_{n+1}/a_n\to 0(n\to\infty)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

(ii) 若 $|a|>1$, 则 $a_{n+1}/a_n\to 2(n\to\infty)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

3.5 根值判别法判敛

定理1 (Cauchy 根值判别法）设有正项级数 $I=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.

(i) 若 $\overline{\lim}\sqrt[n]{a_n}<1$, 则 I 收敛.

(ii) 若 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}>1$, 则 I 发散.

注 1 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$, 则无法判定，例如 $a_n=1/n$ 以及 $a_n=1/n^2$.

注 2 为判定一个正项级数的敛散性, 何时采用比值判别法, 何时采用根值判别法, 还要看取比值或取根值后化简的情况而定，它与原通项的数量结构有关.

注 3 根值判别法也是建立在与几何级数比较的基础上的, 虽然在判别时表面上并不借助于外部. 此外, 根值判别法优于比值判别法.

1. 判别下列级数 $I=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的敛散性:

(1) $a_n=(\sqrt[n]{n}-1)^n$. (2) $a_n=\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n(n+1)}$. (3) $a_n=\left(\dfrac{n^2+1}{n^2+n+1}\right)^{n^2}$.

(4) $a_n=\dfrac{n^{n+1}}{(3n^2+2n+1)^{(n+3)/2}}$. (5) $a_n=\left(\dfrac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^{2n-\ln n}$. (6) $a_n=\dfrac{n^3\left(\sqrt{2}+(-1)^n\right)^n}{3^n}$

(7) $a_n=n^{\ln n}/(\ln n)^n$. (8) $a_n=\dfrac{\ln(1+\alpha^n)}{n^\beta}(\alpha\geqslant 0)$.

解 (1) 因为 $\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{n}-1\to 0(n\to\infty)$, 所以 I 收敛.

(2) 因为 $\sqrt[n]{a_n}=1/\cdot\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}\to\dfrac{1}{\mathrm{e}}<1$, 所以 I 收敛.

(3) 因为 $\sqrt[n]{a_n}=\left(1-\dfrac{n}{n^2+n+1}\right)^n\to 0<1$, 所以 I 收敛.

(4) 因为 $\sqrt[n]{a_n}=n^{1+1/n}/n^{1+3/n}\left(3+2/n+1/n^2\right)^{(n+3)/2n}\to\dfrac{1}{\sqrt{3}}<1$, 所以 I 收敛.

(5) 注意到 $(1+\cos n)/(2+\cos n)=1-1/(2+\cos n)\leqslant 2/3$, 因此 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2-\frac{\log}{n}}=$ $\dfrac{4}{9}<1$ 从而知 I 收敛.

(6) 因为 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{(\sqrt[n]{n})^3\left(\sqrt{2}+(-1)^n\right)}{3}<1$, 所以 I 收敛.

(7) 因为 $\sqrt[n]{a_n}=n^{\mathrm{lon}/n}/\ln n=\mathrm{e}^{\ln^2\pi/n}/\ln n\to 0(n\to\infty)$, 所以 I 收敛.

(8) (i) $0\leqslant\alpha<1$. 此时有 $\ln(1+\alpha^n)\sim\alpha^n(n\to\infty)$. 又因 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{\alpha^n}{n^\beta}}=\alpha<1$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\alpha^n}{n^\beta}$ 收敛, 所以对任意的 β, I 收敛.

(ii) $\alpha=1$: 此时显然对 $\beta>1$ 收敛.

(iii) $\alpha>1$: 此时我们有

$$\ln(1+\alpha^n)=n\ln\alpha+\ln(1+1/\alpha^n)\sim n\ln\alpha+\frac{1}{\alpha^n}\quad(n\to\infty)$$

注意到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\alpha/n^{\beta-1},\sum\limits_{n=1}^{\infty}1/n^\beta\alpha^n$ 在 $\beta>2$ 时收放，故当 $\alpha>1$ 且 $\beta>2$ 时 I 收敛.

郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com

3.6 *Leibniz* 判别法判敛

定义1 若一个级数中的前后相继项的正负符号交错出现, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n \quad 或 \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\alpha_n,$$

其中 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$, 则称它们为交错级数. 例如级数

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\cdots$$

关于交错级数的敛散性, 有下面的基本判别法则:

定理1 (Leibniz 判别法）若数列 $\{a_n\}$ 递减趋于零, 则交错级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n=a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots$$

收敛, 其和 $S: 0\leqslant S\leqslant a_1$.

注 1 设 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$ 且 $a_n\to 0(n\to\infty)$, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 仍可发散. 例如 $a_n=\left[2+(-1)^n\right]/n$

注 2 存在收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, 使 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}1/n^2a_n$ 收数. 例如 $a_n=(-1)^n/n$. 若 $a_n>0$, 则结论不真. 因为此时有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n+\frac{1}{n^2a_n}\right)\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2a_n^2+1}{n^2a_n}\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2ma_n}{n^2a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}=+\infty$$

注 3 对一般项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n,\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, 虽有 $\dfrac{a_n}{b_n}\to 1(n\to\infty)$, 但仍可能 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散 ,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

$$例如, a_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}, b_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}.$$

注 4 设 $\{b_n\}$ 递减趋于零, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=+\infty$, 则存在发散级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^na_n$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=1$. 例如, 假定 $b_1>1$, 且令 $c_n=(-1)^n/\sum\limits_{k=1}^{n}b_k$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^nc_nb_n=+\infty,\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^nb_n$ 收敛. 从而令 $a_n=b_n\left(1+c_n\right)$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^na_n$ 发散.

注 5 设 $\{a_n\}$ 是收敛于零的递减正数列 ,$r_n=\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k$, 则 r_n 与 $(-1)^na_{n+1}$ 同号, 且有 $|r_n|<a_{n+1}(n\in\mathbf{N})$

1. 判别下列级数 $I=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 的敛散性:

(1) $a_n=\dfrac{n}{(n+2)\sqrt[4]{n+1}}$ (2) $a_n=\sqrt[n]{n}-1$. (3) $a_n=\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}$ (4) $a_n=\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$

解 (1) 易知 $\{a_n\}$ 递减趋于零, 故根据 Leibniz 判别法, I 收敛.

(2) 注意 $\sqrt[n]{n}>\sqrt[n+1]{n+1}$, 以及 $\sqrt[n]{n}\to 1(n\to\infty)$, 故 I 收敛.

(3) 注意 $a_n=1/\left[(n+1)^{2/3}+(n+1)^{1/3}n^{1/3}+n^{2/3}\right]$, 故 I 收敛.

(4) 注意 $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=\dfrac{2n+2}{2n+1}>1(n=1,2,\cdots)$, 故 I 收敛.

2. 判别下列级数 $I=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 的敛散性:

(1) $a_n=\dfrac{(\ln n)^a}{n^\beta}(\alpha,\beta>0)$. (2) $a_n=\dfrac{\ln\ln(n+2)}{\ln(n+1)}$. (3) $a_n=\dfrac{\ln n}{(1+\ln n)^2}$.

解 (1) 应用微分学的知识可知,$f(x)=(\ln x)^\alpha/x^\beta$ 在 $\left(\mathrm{e}^{\alpha/\beta},\infty\right)$ 上递减, 且 $f(x)\to 0(x\to+\infty)$, 故 I 收敛.

（2) 用求导法可知，$f(x)=\ln\ln(2+x)/\ln(1+x)$ 在 $x\to+\infty$ 时是递减趋于零的, 故 I 收玫.

（3）用求导法可知，$f(x)=\ln x/(1+\ln x)^2$ 在 $x\to+\infty$ 时是递减趋于零的, 故 I 收玫.

3. 判定下列级数的敛散性

(1) $I=1-\dfrac{1}{2^p}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4^p}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{6^p}+\cdots(p\geqslant 1)$

(2) $I=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^{n-1}}$

(3) $I=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2}}\right)$

解 (1) 这是一个交错级数, 我们有

(i) 若 $p=1$, 则因通项递减趋于 0, 故由 Leibniz 判别法可知 ,I 收敛;

(ii) 若 $p>1$, 则记 $a_{2n-1}=\dfrac{1}{2n-1},a_{2n}=\dfrac{1}{(2n)^p}$, 该级数的前 $2n$ 项部分和可写为 $\sum\limits_{k=1}^{2n}a_k=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{2k-1}-\sum\limits_{k=1}^{n}a_{2k}$. 注意到 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_{2k-1}$ 发散 ,$\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_{2k}$ 收敛, 因此 I 发散.

(2) 注意到 (分子、分母同乘以 $\left(\sqrt{n}-(-1)^{n-1}\right)$) 通项可化为

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^{n-1}}=(-1)^n\frac{\sqrt{n}-(-1)^{n-1}}{n-1}=(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n-1}-\frac{1}{n-1}=(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}-\frac{1}{\sqrt{n}}}-\frac{1}{n-1}\quad(n\geqslant 2)$$

且 $\dfrac{1}{\sqrt{n}-\frac{1}{\sqrt{n}}}$ 随 n 增大而递减趋于 0, 可知 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}-\frac{1}{\sqrt{n}}}$ 收敛, 而级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n-1}$ 发散这说明 I 发散.

(3) 应用 Taylor 公式, 我们有

$$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2}}\right)=(-1)^n\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}+O\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}\right)\quad(n\to\infty)$$

注意到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2}}$ 收敛, 而上式右端第二项是绝对收敛级数的通项, I 收敛.

4. 判别下列级数的敛散性:

$$(1)\ I=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{\pi}{\sqrt{n}}\right).\quad(2)\ I=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right).$$

解 (1) 注意到 $1-\cos\dfrac{\pi}{\sqrt{n}}=2\sin^2\dfrac{\pi}{2\sqrt{n}}$, 而数列 $\left\{\sin^2\dfrac{\pi}{2\sqrt{n}}\right\}$ 递减且当 $n\to\infty$ 时趋于零, 故 I 收敛.

(2) 将通项改写为 $\sin\sqrt{n^2+1}\pi=(-1)^n\sin\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\pi=(-1)^n\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$ 即知 I 是交错级数. 而通项 $\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{n+1}+n}$ 当 $n\to+\infty$ 时递减趋于零, 故 I 收敛.

5. 判别下列级数的敛散性: (1) $I=\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sqrt{n}}{(-1)^n+\sqrt{n}}\sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}$. (2) $I=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

解 (1) 改写通项为

$$(-1)^n\left(1-\frac{(-1)^n}{(-1)^n+\sqrt{n}}\right)\sin\frac{1}{\sqrt{n}}=(-1)^n\sin\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{(-1)^n}{n-1}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{\sqrt{n}}{n-1}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$$

由 Leibniz 判别法可知，由上式右端第一, 二项组成的级数皆收敛, 而第三项发散的, 故 I 发散.

(2) 因为 $I=1-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{6}}-\frac{1}{\sqrt{7}}+\cdots$ 由两个交错级数

$$J_1:1-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{7}}+\cdots,\quad J_2:-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}}-\frac{1}{\sqrt{6}}+\cdots$$

相加而成, 根据 Leibniz 判别法，J_1 与 J_2 皆收敛, 故 I 收敛.

6. 证明：设 a_n 是方程 $x^n+nx-1=0(n\in\mathbf{N})$ 的正根, 则 $I=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛.

证 记 $f(x)=x^n+nx-1$, 则 $f\left(\frac{1}{n}\right)=\left(\frac{1}{n}\right)^n+1-1>0$, 且有 $f\left(\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{(n+1)^n}+\frac{n}{n+1}-1=\frac{1}{(n+1)^n}-\frac{1}{n+1}<0\quad(n\geqslant 2)$. 由此知存在 $a_n:\frac{1}{n+1}<a_n<\frac{1}{n}$, 使得 $f\left(a_n\right)=0$. (易知 a_n 是唯一的正根, 因为 $f'(x)>0$.) 显然 $\{a_n\}$ 是递减列 , 且 $a_n\to 0(n\to\infty)$. 从而 I 收敛.

郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com

3.7 绝对收敛与条件收敛的判定

定义1 对于级数
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{1}$$
若级数
$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| + \cdots \tag{2}$$
收敛, 则称其绝对收敛.

定义2 若级数 (1) 发散, 而级数(2)收敛, 则称级数 (1) 条件收敛.

定理1 设级数 (1) 绝对收敛, 则

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+, \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 收敛;

(2) 级数 (1)收敛 (即绝对收敛的级数必为收敛级数) 且有 $\left|\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

其中：

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n, & a_n \geqslant 0 \\ 0, & a_n < 0. \end{cases} \quad a_n^- = \begin{cases} -a_n, & a_n \leqslant 0, \\ 0, & a_n > 0 \end{cases}$$

推论 (i) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 且有 $|b_n| \leqslant M(n = 1, 2, \cdots)$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ 绝对收敛.

(ii) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛 , $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 条件收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ 条件收敛.

(iii) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是条件收敛级数, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+ = +\infty, \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^- = +\infty$.

注 设对级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 用比值或根值判别法判定为发散的, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

1. 判别下列级数 $I = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的绝对收敛性:

(1) $a_n' = \dfrac{\sin 3n}{n \cdot \ln n \cdot \ln^2 n} (n \geqslant 2)$. (2) $a_n = (-1)^n \dfrac{(2n)!!}{(n+1)^n}$

(3) $a_n = \ln\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt[5]{n}}\right) \arctan\left(\dfrac{\sin n}{n}\right)$. (4) $a_n = \dfrac{1}{n \sin \frac{1}{n}} - \cos\dfrac{1}{n}$.

(5) $a_n = \dfrac{\cos n}{\sqrt[3]{n^2}} - \sin\left(\dfrac{\cos n}{\sqrt[3]{n^2}}\right)$. (6) $a_n = (-1)^n(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n})$.

(7) $a_n = \left(\dfrac{nb}{n+1}\right)^n$

解 (1) 因为 $|a_n| \leqslant 1/n \cdot \ln n \cdot \ln^2 n$, 所以 I 绝对收敛.

(2) 因为 $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \dfrac{2n+2}{n+2}\left(1 - \dfrac{1}{n+2}\right)^n \to \dfrac{2}{\mathrm{e}} < 1$, 所以 I 绝对收敛.

(3) 因为 $|\arctan x| \leqslant |x|, 0 \leqslant \ln(1+x) < x (x \geqslant 0)$, 所以 $|a_n| \leqslant \left|\dfrac{\sin n}{n}\right| / \sqrt[5]{n} \leqslant 1/n^{6/5}, I$ 绝对收敛.

(4) 应用三角公式以及 Taylor 公式, 我们有 $a_n = \cos\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{2}{n \sin \frac{2}{n}} - 1\right)$

$$= \cos\frac{1}{n}\left(\frac{n}{2}\sin\frac{2}{n}\right)^{-1}\left(1 - \frac{n}{2}\sin\frac{2}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (n \to \infty),$$

故 I 绝对收敛.

郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com

(5) 应用 Taylor 公式, 我们有 $a_n=\dfrac{\cos n}{\sqrt[3]{n^2}}-\left[\dfrac{\cos n}{\sqrt[3]{n^2}}+O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right]=O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)(n\to\infty)$, 故 I 绝对收敛.

(6) 因为 $|a_n|=1/\left[(n+1)^{2/3}+(n+1)^{1/3}n^{1/3}+n^{2/3}\right]>1/3(n+1)^{2/3}$, 所以 I 不是绝对收敛.

(7) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\dfrac{nb}{n+1}\right|^n}=|b|$, 所以当 $|b|<1$ 时 ,I 绝对收敛 ;$|b|>1$ 时，I 发散; 若 $|b|=1$, 则由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{nb}{n+1}\right|^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}>1$, 可知 I 发散.

2. 判定下列级数的敛散性

$$\begin{array}{ll}(1)a_n=(-1)^n\sin\dfrac{a}{n}. & (2)a_n=(-1)^n\dfrac{(\ln n)^a}{n}.\\ (3)a_n=(-1)^n\dfrac{\ln n}{n^a} & (4)a_n=\dfrac{b^{n-1}}{nb^{n-1}+\ln n}(n\geqslant N)\\ (5)a_n=\dfrac{\alpha^n}{n^\beta(\ln n)^\gamma} & (6)a_n=\binom{n}{m}=\dfrac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}\end{array}$$

解 1 易知在 n 充分大后, I 是交错级数. 由于 $\sin\dfrac{a}{n}\to0(n\to\infty)$, 故 I 收政 (LLeibniz 判别法). 因为

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{|a|}{n}/\frac{1}{n}=|a|,$$

所以若 $a\neq0$, 则 I 非绝对收敛.

(2) 令 $f(x)=(\ln x)^a/x(x>0)$, 我们有

$$f'(x)=\frac{(\ln x)^{\sigma-1}(\alpha-\ln x)}{x^2}<0\quad(x>\max(1,\mathrm{e}^a))$$

即当 $x\to+\infty$ 时 $f(x)$ 递减趋于权, 故 I 收敛. 此外, 根据 Cauchy 凝誰判别法, 可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\ln n)^\alpha/n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^a(\ln2)^a$ 同玫散. 而后者在 $\alpha<-1$ 时收敘, 这说明 I 在 $\alpha<-1$ 时绝对收敛.

(3) 易知 $\alpha\leqslant0$ 时 I 发散. 对 $\alpha>0$, 易知当 $n>\mathrm{e}^{1/a}$ 即 $\alpha\ln n>1$ 时, $\{\ln n/n^a\}$ 因此 I 在 $0<\alpha\leqslant1$ 时条件收敘; 在 $\alpha>1$ 时绝对收敛.

(4) 若 $|b|<1$, 则当 n 充分大时有 $\left|\dfrac{b^{n-1}}{nb^{n-1}+\ln n}\right|<|b|^{n-1}$ 故 I 绝对收敛. 若 $|b|\geqslant1$, 则

$$\frac{b^{n-1}}{nb^{n-1}+\ln n}=\frac{1}{n}\frac{1}{1+\ln n/nb^{n-1}}$$

故当 n 充分大时 ,a_n 为正项，且 $a_n\sim1/n(n\to\infty)$, 即 I 发散.

(5) (i) 因为 $|a_{n+1}/a_n|\to|\alpha|(n\to\infty)$, 所以 I 当 $|\alpha|<1$ 时绝对收玫 ; 当 $|\alpha|>1$ 时 I 发散.

(ii) $\alpha=1:$ 当 $\beta>1$ 时, 此时有 $a_n=1/n^\beta(\ln n)^\gamma=o\left(\dfrac{1}{n^\beta}\right)(n\to\infty)$, 故 I 绝对收敛; 当 $\beta=1$ 时, 易知 $\gamma>1$ 时 I 绝对收玫. $\gamma\leqslant1$ 时 I 发散, 当 $\beta<1$ 时 I 发散.

(iii) $\alpha=-1:$ 此时 $a_n=(-1)^n/n^\beta(\ln n)^\gamma$, 故根据 Leibniz 判别法 ,$I$ 的收敛性等价于 $\left\{n^\beta(\ln n)^\gamma\right\}$ 速增且随 $n\to\infty$ 时趋于零. 故 $\beta>0$ 时 I 收领, 或 $\beta=0,\gamma>0$ 时 I 收敛.

时 b_n 不变号, 故不妨设为 $b_n>0(n\geqslant N)$. 因为

$$\frac{b_n}{b_{n+1}}=1+\frac{\alpha+1}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\quad(n\to\infty),$$

所以我们得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\begin{pmatrix}\alpha\\ n\end{pmatrix}\begin{cases}\text{绝对收敛}, & \alpha\geqslant0,\\ \text{条件收敛}, & -1<\alpha<0.\end{cases}$$

小结

注 1 首先, 正项级数是级数判敛中的基本内容, 要做的就是判定部分和数列是否有上界. 实际上它解决的是定号数项级数的敛散性问题 (对于负项级数，其与正项级数只是相差一个符号而已). 注意积分判敛法可以帮助我们找到一些 ""标准级数"：

$$\sum r^k, \sum \frac{1}{k^p}, \quad \sum \frac{1}{k(\ln k)^p}, \quad \sum \frac{1}{k \ln k (\ln\ln k)^p}, \cdots$$

注 2 由第一个级数和比较原理, 前面建立了比值和根值判敛法, 而由第二个级数和第二比较原理则建立了拉比判敛法. 找到这些级数的基本想法就是指数增长与幂增长的关系. 这些级数中, 后一个级数的敛散性都不能由前一个级数给出的判敛法判别. 实际上, 利用后面的级数和第二比较原理还可以建立对应的判敛法, 但从方法上已经没有什么新意和难度, 而从实用上, 必要时自己建立一下, 或许比记忆更方便些.

注 3 在讨论级数的敛散性时, 利用下面的策略时常是有效的, 如果感到无从下手, 首先讨论级数一般项的极限; 如果趋于零, 利用正项级数的判敛方法讨论其绝对值级数; 如果发散, 再考虑条件收敛的相关判别法; 所有的方法都无效时, 返回定义和级数基本性质.

注 4 对于含有变量 x 的无穷级数 (函数项级数)$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的敛散性判别, 读者不要受到变元 x 的影响, 完全可以借助正项级数的敛散性判别原则来判断. 即若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ 收敛，则原级数绝对收敛. 利用比值或根值判别法还可以确定级数收敛的 x 满足的条件-收敛域问题, 这便是下面要涉及到的问题.

郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com

第二部分 幂级数和泰勒级数

幂级数是指形式为

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x-a)^k, \quad x\in\mathbb{R} \tag{3}$$

的函数项级数, 其中 a 叫做幂级数的中心点, $a_k, k\in\mathbb{N}$ 叫做幂级数的系数. 为了记号上的简洁, 这一节主要考感 $a=0$ 时的幂级数

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k, \quad x\in\mathbb{R} \tag{4}$$

1 幂级数的敛散性

幂级数 (3) 有着非常简单的收敛性质.

1. 引理若幂级数(3) 在 $x_0\neq a$ 处收敛, 则
(1) 幂级数 (3) 在以 a 和 x_0 为端点的闭区间上一致收敛;
(2) 幂级数 (3) 在任何闭区间 $[a-|x_0-a|+\delta, a+|x_0-a|-\delta]\,(\delta\in(0,|x_0-a|)$ 上绝对收敛和一致收敛.
证明: 由 $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k\left(x_0-a\right)^k$ 收敛, 存在正常数 M, 使得

$$\left|a_k\left(x_0-a\right)^k\right|\leqslant M, \quad \forall k\in\mathbb{N}$$

由

$$a_k(x-a)^k=a_k\left(x_0-a\right)^k\left(\frac{x-a}{x_0-a}\right)^k, \quad \forall k\in\mathbb{N}$$

用阿贝尔判别法, 幂级数 (3) 在以 a 和 x_0 为端点的闭区间上一致收敛.
当 $x\in[a-|x_0-a|+\delta, a+|x_0-a|-\delta]\,(\delta\in(0,|x_0-a|)$ 时,
$\left|a_k(x-a)^k\right|=\left|a_k\left(x_0-a\right)^k\right|\left|\frac{x-a}{x_0-a}\right|^k\leqslant M\left(1-\frac{\delta}{|x_0-a|}\right)^k, \quad \forall k\in\mathbb{N}$
用魏尔斯特拉斯优级数判别法, 幂级数 (3)在闭区间 $[a-|x_0-a|+\delta, a+|x_0-a|-\delta]\,(\delta\in(0,|x_0-a|)$ 上绝对收敛和一致收敛证毕.
推论 幂级数 (3)的收敛域 Ω 只可能具有下面三种形式:
(1) $\Omega=\{a\}$;
(2)$\Omega=\mathbb{R}$;
(3) $\exists r\in(0,+\infty), \Omega$ 是以 $a\pm r$ 为端点的区间.
推论中 r 叫做幂级数 (3)的收敛半径, 而形式 (1) 和形式 (2) 可以分别看成是 $r=0$ 和 $r=+\infty$ 的特殊情形. 这三种情形都是会出现的.

2. 求下列时级数的收敛域:
(1) $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} k^k x^k$; (2) $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k^k}$; (3) $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{r^k}, r\in(0,+\infty)$
解: (1) 设 $x\neq 0$, 则

$$\left|k^k x^k\right|=(k|x|)^k\to+\infty, \quad (k\to+\infty)$$

这样, 级数 (1) 发散. 因此, 幂级数 (1) 的收放域 $\Omega=\{0\}$.
(2) 取定 $x\in\mathbb{R}$, 当 $k>|x|+1$ 时,

$$\left|\frac{x^k}{k^k}\right|\leqslant\left(\frac{|x|}{1+|x|}\right)^k$$

郭凡荣 Email: jaccoobo@163.com

由比较原理, 级数 (2) 收放. 这样幂级数 (2) 的收敛域 $\Omega = \mathbb{R}$.

(3) 幂级数 (3) 是几何级数, 有

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{r^k} = \begin{cases} \dfrac{r}{r-x}, & 若|x|<r, \\ 发散, & 若|x| \geqslant r. \end{cases}$$

因而, 幂级数 (3) 的收敛域 $\Omega = (-r, r)$. 解毕.

级数收敛半径可以利用根值判敛法得到.

3. 定理　幂级数 (3) 的收敛半径 r 由下列公式确定:

$$r = \begin{cases} \dfrac{1}{\rho}, & 若\rho \in (0, +\infty), \\ 0, & 若\rho = +\infty, \\ +\infty, & 若\rho = 0. \end{cases}$$

其中 $\rho = \limsup\limits_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$.

依据根值判敛法, 比值判敛法给出下面的结果.

4. 定理　若极限

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}$$

存在, 则幂级数(3)的收敛半径 r 为

$$r = \lim_{k\to+\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}$$

2 泰勒级数

定义1　设函数 f 在 a 的邻域 $(a-\delta, a+\delta)(\delta>0)$ 上有定义, 如果存在幂级数 $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k(x-a)^k$ 满足

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x-a)^k, \quad \forall x \in (a-\delta, a+\delta)$$

则称 f 在 a 点能展成幂级数, 也称 f 在 a 点实解析, 而幂级数 $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k(x-a)^k$ 称为 f 在 a 点的展开式. 对于函数的幂级数有下面的结论.

定理1　若 f 在 a 点能展成幂级数 $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k(x-a)^k$, 则 f 在 a 点有任意阶导数并且

$$a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

证明: 这是幂级数微分性质的直接推论.

定义2　若 $f \in C^\infty(a-\delta, a+\delta)(\delta>0)$, 称幂级数

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

为 f 在 a 点的泰勒展开式, 或泰勒级数. 特别当 $a=0$ 时, 泰勒展开式也叫做函数的麦克劳林展开式, 或麦克劳林级数.

有意思的是一个函数的泰勒展开式可以不收敛到这个函数本身, 甚至收敛半径为零.

1. 对于函数

$$f(x)=\begin{cases}\exp\left(-\dfrac{1}{x}\right), & 若x>0,\\ 0, & 若x\leqslant 0.\end{cases}$$

(1) 证明在 0 点各阶导数存在; (2) 讨论其在 0 点的泰勒展开式.

解: (1) 注意 f 在 $x\neq 0$ 点有任意阶导数, 并且在 0 点连续. 由

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}\exp\left(-\dfrac{1}{x}\right), & 若x>0,\\ 0, & 若x<0,\end{cases}$$

和 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=0$ 就得到 $f'(0)=0$. 不难验证

$$f^{(k)}(x)=\begin{cases}P_{2k}\left(\dfrac{1}{x}\right)\exp\left(-\dfrac{1}{x}\right), & 若x>0,\\ 0, & 若x<0.\end{cases}$$

其中 $P_{2k}(\lambda)$ 是 λ 的 $2k$ 次多项式. 同样有

$$\lim_{x\to 0}f^{(k)}(x)=0$$

由此就得到 $f\in C^{\infty}(\mathbb{R})$, 并且 $f^{(k)}(0)=0,\forall k\in\mathbb{N}$. (2) 此时, f 在 0 点的泰勒展开式在 $\mathbb{R}$ 上处处收敛到 0, 然而当 $x>0$ 时, $f(x)>0$ 解毕.

2. 重要结论 $\boxed{\text{常见初等函数的泰勒级数}}$

指数函数: $\mathrm{e}^x=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{x^k}{k!},\forall x\in\mathbb{R};$

正弦函数: $\sin x=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},\forall x\in\mathbb{R};$

余弦函数: $\cos x=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\dfrac{x^{2k}}{(2k)!},\forall x\in\mathbb{R};$

反正弦函数: $\arcsin x=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\dfrac{1}{2k+1}x^{2k+1},\quad\forall x\in[-1,1];$

反正切函数: $\arctan x=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\dfrac{x^{2k+1}}{2k+1},\quad\forall x\in[-1,1];$

对数函数: $\ln(1+x)=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\dfrac{x^k}{k},\forall x\in(-1,1]$; 利用幂级数的收敛域特点, 立即得到, 当 $|x|>1$ 时, 这个级数是发散的.

二项函数: $(1+x)^\alpha=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}A_k^\alpha x^k,\forall x\in(-1,1),\alpha\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$, 其中

$$A_0^\alpha=1,\quad A_k^\alpha=\frac{\alpha}{k}\cdot A_{k-1}^{\alpha-1},\quad\forall k\in\mathbb{N}_+$$

利用级数的比值判敛法可以得到当 $|x|>1$ 时, 这个级数是发散的.

定理2 二项函数 $(1+x)^\alpha,\alpha\in\mathbb{R}$, 的麦克劳林展开式在 $(-1,1)$ 内收敛到一项函数, 在 $\mathbb{R}\backslash[-1,1]$ 上发散, 在端点 ±1 处的敛散性与 α 有关:

(1) 当 $\alpha>0$ 时, 展开式在 ±1 处都收敛; 展开式收敛域为 $[-1,1]$

(2) 当 $\alpha\in(-1,0)$ 时, 展开式在 1 处收敛, 在 -1 处发散; 展开式收敛域为 $(-1,1]$

(3) 当 $\alpha\leqslant-1$ 时, 展开式在 ±1 处都发散. 展开式收敛域为 $(-1,1)$

郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com

3 典型例题

参见相关教材.