空间解析几何与向量代数—习题讲义

郭凡荣 *

2021 年 3 月 20 日

目录

*Email：jaccoobo@163.com

第一部分　向量代数与空间解析几何的主要内容

大纲考点释疑

1. 向量代数考点

- 理解向量的概念，掌握向量的坐标表示法，会求单位向量、方向余弦及向量在坐标轴上的投影.
- 掌握向量的线性运算、向量的数量积和向量积的计算方法.
- 掌握两向量平行、垂直的充要条件.

2. 解析几何考点

- 会求平面的方程; 会判定两平面的平行、垂直关系.
- 会求直线的方程; 会判定两直线的关系.(平行、垂直、异面)
- 会判定直线与平面的关系.(平行、垂直、斜交、线在面上)
- 会求点到平面的距离、点到直线的距离与两异面直线的距离.

1　向量及其线性运算

定义 1.1　向量：既有大小，又有方向的量称为向量.
向量的表示：$\overrightarrow{AB}$，或 $\vec{a}$，或 $\boldsymbol{a}$
向量的相等：若 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的大小和方向都相同，称两者相等，记为 $\vec{a}=\vec{b}$
向量的模：向量的大小称为向量的模，记为 $|\overrightarrow{AB}|$，或 $|\vec{a}|$，或 $|\boldsymbol{a}|$
单位向量：模为 1 的向量，常记为 $\vec{e}$
零向量：模为 0 的向量，记为 $\vec{0}$

定义 1.2　平行: 若向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的方向相同或相反，则称 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 平行，记为 $\vec{a}\parallel\vec{b}$. 规定零向量与任何向量都平行.

定义 1.3　共线: 若两个向量可平移到一条直线上，则称它们共线. 两向量平行等同于两向量共线.

定义 1.4　共面: 若三个或更多个向量可平移到一个平面上，则称它们共面.

1.1　向量的线性运算

1. 向量的加法

   三角形法则; 平行四边形法则.

   向量的加法满足下列运算定律：

   - $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$
   - $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

2. 向量的减法 : $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$

3. 与 $\vec{a}$ 大小相同而方向相反的向量，称为 $\vec{a}$ 的负向量，记为 $-\vec{a}$.

   - $\vec{a}-\vec{a}=\vec{0}$
   - $|\vec{a}+\vec{b}|\le|\vec{a}|+|\vec{b}|$
   - $|\vec{a}-\vec{b}|\le|\vec{a}|+|\vec{b}|$

郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com

4. 向量的数乘

   数 λ 与向量 $\vec{a}$ 的乘积是一个新向量，记为 $\lambda\vec{a}$. 规定 $|\lambda\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$，而且

   - 若 $\lambda > 0$，则 $\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 同向
   - 若 $\lambda < 0$，则 $\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 反向
   - 若 $\lambda = 0$，则 $\lambda\vec{a} = \vec{0}$

   向量的数乘满足下列性质：

   - $1\vec{a} = \vec{a}, (-1)\vec{a} = -\vec{a}$
   - $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a} = \mu(\lambda\vec{a})$
   - $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}, \lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$

   例 1.1 设 $\vec{a}$ 为非零向量，则 $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ 为单位向量.

   例 1.2 设 M 为平行四边形 $ABCD$ 对角线的交点，$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$，$\overrightarrow{AD} = \vec{b}$，试用 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{MA}$、$\overrightarrow{MB}$、$\overrightarrow{MC}$、$\overrightarrow{MD}$.

   定理 1.1 设 $\vec{a}$ 为非零向量，则有
   $$\vec{b} \parallel \vec{a} \Longleftrightarrow \vec{b} = \lambda\vec{a}$$
   其中实数 λ 是唯一的.

1.2 空间直角坐标系

1. 构成

   - 三个坐标轴
   - 三个坐标面
   - 八个卦限

   规定三个坐标轴的正向满足右手规则.

   在空间直角坐标系中，我们有
   $$\text{点 } M \longleftrightarrow \text{坐标 } (x, y, z) \longleftrightarrow \text{向量 } \vec{r} = \overrightarrow{OM}$$

2. 坐标轴上的点：

   x 轴 $\leftrightarrow y = z = 0$

   y 轴 $\leftrightarrow z = x = 0$

   z 轴 $\leftrightarrow x = y = 0$

3. 利用坐标作向量的线性运算

   - x 轴上单位向量 $\vec{i}$
   - y 轴上单位向量 $\vec{j}$
   - z 轴上单位向量 $\vec{k}$

4. 向量的坐标运算

   设 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$，λ 为实数．由向量的坐标分解可得

$$\vec{a}\pm\vec{b}=(a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z)$$

$$\lambda\vec{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)$$

   当 $\vec{a}\neq\vec{0}$ 时，$\vec{b}\parallel\vec{a}\Leftrightarrow\vec{b}=\lambda\vec{a}\Leftrightarrow\dfrac{b_x}{a_x}=\dfrac{b_y}{a_y}=\dfrac{b_z}{a_z}$ 平行向量对应坐标成比例

   例 1.2 求解以向量为未知元的线性方程组

$$\begin{cases}5\vec{x}-3\vec{y}=\vec{a}\\3\vec{x}-2\vec{y}=\vec{b}\end{cases}$$

   其中 $\vec{a}=(2,1,2)$，$\vec{b}=(-1,1,-2)$．

   例 1.3 已知两点 $A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$ 以及实数 $\lambda\neq-1$，在直线 AB 上求点 M，使得 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$.

   (提示: $M(\dfrac{x_1+\lambda x_2}{2},\dfrac{y_1+\lambda y_2}{2},\dfrac{z_1+\lambda z_2}{2}$)

   注记 点 M 的坐标等于向量 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标.

1.3 向量的模·两点距离

1. 向量的模与两点距离公式:

$$\vec{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$$

$$=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k}=(x,y,z)$$

   $\therefore\quad|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

   设 $A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$，则有

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$$

$$|AB|=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

   例 1.4 求证以 $M_1(4,3,1)$，$M_2(7,1,2)$，$M_3(5,2,3)$ 为顶点的三角形是等腰三角形.

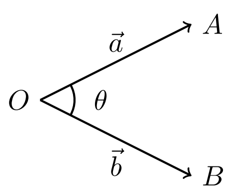
   例 1.5 在 z 轴上求与两点 $A(-4,1,7)$ 和 $B(3,5,-2)$ 等距离的点.

   (提示：$M(0,0,14/9)$)

   例 1.6 已知两点 $A(4,0,5)$ 和 $B(7,1,3)$，求与 $\overrightarrow{AB}$ 方向相同的单位向量 $\vec{e}$.

2. 向量的夹角

   设有非零向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$，任取空间中一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$.



   称 $\angle AOB=\theta$（$0\leq\theta\leq\pi$）为向量的 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的**夹角**，记为 $\angle(\mathbf{a},\mathbf{b})=\theta$.

郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com

3. 方向角和方向余弦

给定 $\vec{r}=\overrightarrow{OM}=(x,y,z)$，称 $\vec{r}$ 与三个坐标轴的夹角 α，β，γ 为**方向角**. 方向角的余弦称为**方向余弦**.

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\vec{r}|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$
$$\cos\beta=\frac{y}{|\vec{r}|}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$
$$\cos\gamma=\frac{z}{|\vec{r}|}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

方向余弦满足下面性质：

- $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$
- $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|}=\vec{e}_{\vec{r}}$

例 1.7 已知两点 $M_1(2,2,\sqrt{2})$，$M_2(1,3,0)$，计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角.

提示：$\alpha=\dfrac{2\pi}{3},\beta=\dfrac{\pi}{3},\quad\gamma=\dfrac{3\pi}{4}$

例 1.8 设点 A 位于第 I 卦限，向量 $\overrightarrow{OA}$ 与 x 轴、y 轴的夹角依次为 $\dfrac{\pi}{3}$ 和 $\dfrac{\pi}{4}$，且 $|\overrightarrow{OA}|=6$，求点 A 的坐标.

提示：$\overrightarrow{OA}=|\overrightarrow{OA}|e_{\overrightarrow{OA}}=6\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{1}{2}\right)=(3,3\sqrt{2},3)$

4. 向量的投影

若 $\vec{a}\neq\vec{0}$，$\angle(\vec{a},\vec{b})=\theta$，记 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上的**投影**为

$$\mathrm{Prj}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}=|\vec{b}|\cos\theta$$

同理，若 $\vec{b}\neq\vec{0}$，$\mathrm{Prj}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}=|\vec{a}|\cos\theta$.

向量投影有线性运算：

- $\mathrm{Prj}_{\vec{c}}(\lambda\vec{a})=\lambda\,\mathrm{Prj}_{\vec{c}}\,\vec{a}$
- $\mathrm{Prj}_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b})=\mathrm{Prj}_{\vec{c}}\,\vec{a}+\mathrm{Prj}_{\vec{c}}\,\vec{b}$

例 1.9 设正方体的一条对角线为 OM，一条棱为 OA，且 $|OA|=a$. 求 $\overrightarrow{OA}$ 在 $\overrightarrow{OM}$ 方向上的投影 $\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{OM}}\,\overrightarrow{OA}$.

解：记 $\angle MOA=\varphi$, 有

$$\cos\varphi=\frac{|OA|}{|OM|}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

于是 $\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{OM}}\,\overrightarrow{OA}=|\overrightarrow{OA}|\cos\varphi=a/\sqrt{3}$

2 数量积与向量积

定义 2.1 设向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的夹角为 θ，称

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$$

为 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的**数量积**（点乘）.

数量积与投影的关系如下：

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta=|\vec{a}|\,\mathrm{Prj}_{\vec{a}}\,\vec{b}$$

同理，我们有 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{b}|\,|\vec{a}|\cos\theta=|\vec{b}|\,\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\,\vec{a}$.

郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com

1. 数量积的性质

   规定零向量和任何向量都垂直，则有

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Longleftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$$

   向量的数量积符合下列运算定律：

   (1) $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$

   (2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

   (3) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

   (4) $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$

2. 数量积的坐标表示

   设 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$，则有

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

   对于非零向量，由 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$，得

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$$

   此式即为**两向量的夹角公式**.

   例 2.2　已知三个点 $M(1,1,1)$, $A(2,2,1)$ 和 $B(2,1,2)$，求 $\angle AMB$.
   提示：$\angle AMB=\pi/3$

3. 两向量的向量积

   定义 2.2　设 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 θ，定义向量 $\vec{c}$

   - 大小：$|\vec{c}|=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\theta$
   - 方向：$\vec{c}\perp\vec{a}$, $\vec{c}\perp\vec{b}$ 且 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 符合右手定则

   称 $\vec{c}$ 为向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的**向量积**（叉乘），记为

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}$$

   注记　右手定则是一个在数学及物理学上使用的定则，由英国物理学家约翰·弗莱明于 19 世纪末发明.

4. 向量积的性质

   规定零向量和任何向量都平行，则有

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0} \Longleftrightarrow \vec{a}\parallel\vec{b}$$

   向量的向量积符合下列运算定律：

   (1) $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$

   (2) $\vec{b}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{b}$

   (3) $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$

   (4) $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$

郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com

5. 向量积的坐标表示

设 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$, 则有

$$\begin{aligned}\vec{a}\times\vec{b}&=\left(\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_z & a_x\\ b_z & b_x\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\right)\\ &=\Big(a_yb_z-a_zb_y,a_zb_x-a_xb_z,a_xb_y-a_yb_x\Big)\end{aligned}$$

其中二阶行列式的定义为 $\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc$.

注记 $i\times i=j\times j=k\times k=0, i\times j=k, j\times k=i, k\times i=j, j\times i=-k, k\times j=-i$ 和 $i\times k=-j$

例 2.3 已知 $\triangle ABC$ 的顶点为 $A(1,2,3)$, $B(3,4,5)$ 和 $C(2,4,7)$，求 $\triangle ABC$ 的面积.

解 $S=\dfrac{1}{2}|AB|\,|AC|\sin\theta=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\sqrt{14}$

6. 小结

(1) 数量积 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Longleftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}$

(3) 向量积 $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\theta$

(4) $\vec{a}\times\vec{b}=0\Longleftrightarrow\vec{a}\parallel\vec{b}$

(5) * 混合积 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot c$ 中，若有两向量相同，则混合积为 0.

3 平面的方程

设一平面通过已知点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 且垂直于非零向量 $\vec{n}=(A,B,C)$，求该平面 Π 的方程.

解 Π :

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

称 $\vec{n}$ 为平面的**法向量**.

1. 一般式方程:

$$Ax+By+Cz+D=0$$

2. 点法式方程:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

3. 截距式方程:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

其中 a，b，c 称为截距. 平面的一般方程为 $Ax+By+Cz+D=0$.

- $D=0$ 表示平面过原点
- ◇ $A=0$ 表示平面平行于 x 轴,$\vec{n}=(0,B,C)\perp$x 轴
- ◇ $B=0$ 表示平面平行于 y 轴
- ◇ $C=0$ 表示平面平行于 z 轴
- $A=B=0$ 表示平面平行于 xy 面
- $A=C=0$ 表示平面平行于 xz 面
- $B=C=0$ 表示平面平行于 yz 面

郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com

例 3.1 已知三个点坐标 $M_1(2,-1,4)$, $M_2(-1,3,-2)$ 和 $M_3(0,2,3)$，求过这三个点的平面的方程.

例 3.2 求通过 x 轴和点 $(4,-3,-1)$ 的平面的方程.（提示：$y-3z=0$）

4. 平面直线间的夹角

- 平面与平面的夹角：$\cos\theta=\dfrac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}$ 两平面的夹角 $\theta(0\le\theta\le\pi/2)$
- 直线与直线的夹角：$\cos\theta=\dfrac{|\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2|}{|\vec{s}_1|\,|\vec{s}_2|}$
- 直线与平面的夹角：$\sin\theta=\dfrac{|\vec{s}\cdot\vec{n}|}{|\vec{s}|\,|\vec{n}|}$

例 3.3 设一平面与三个坐标轴的交点分别为 $P(a,0,0)$、$Q(0,b,0)$、$R(0,0,c)$. 求该平面的方程.

例 3.4 求两平面 $x-y+2z-6=0$ 和 $2x+y+z-5=0$ 的夹角.（$\pi/3$）

例 3.5 一平面通过两点 $M_1(1,1,1)$ 和 $M_2(0,1,-1)$ 且垂直于平面 $x+y+z=0$，求它的方程.
提示：$2x-y-z=0$

例 3.6 设 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 是平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 外一点，求 P_0 到该平面的距离.

4 直线的方程

1. 直线方程

- 一般式方程：$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$ 空间直线可视为两平面的交线
- 对称式方程：$\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_o}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$
- 参数式方程：$\begin{cases}x=x_0+mt\\y=y_0+nt\\z=z_0+pt\end{cases}$

2. 平面直线间的夹角

- 平面与平面的夹角 θ：$\cos\theta=\dfrac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}$
- 直线与直线的夹角 θ：$\cos\theta=\dfrac{|\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2|}{|\vec{s}_1|\,|\vec{s}_2|}$
- 直线与平面的夹角 θ：$\sin\theta=\dfrac{|\vec{s}\cdot\vec{n}|}{|\vec{s}|\,|\vec{n}|}$

3. 平面束的方程

定义4.1 平面束: 通过定直线的所有平面的全体.

过直线 L

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\ (1)\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\ (2)\end{cases}$$

的平面束的方程为

$$\lambda_1(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda_2(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

其中，λ_1，λ_2 不全为零. 常取 $\lambda_1=1$ 得到 (缺少平面 (2)) 直线 L 的平面束. 这一概念在求解投影直线的方程时很有用.

郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com

5 平面与直线内容总结

1. 平面方程

(1) 一般式方程：

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$

(2) 点法式方程：

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

(3) 截距式方程：

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

其中 $\vec{n} = (A, B, C)$ 为平面的**法向量**, 平面过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, a，b，c 称为相应坐标轴的截距.
解题关键：一定点，二定向.

2. 直线方程

(1) 一般式方程：$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$

(2) 对称式方程：$\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_o}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$

(3) 参数式方程：$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$

其中空间直线可视为两平面的交线, $\vec{s} = (m, n, p)$ 为直线的**方向向量**, 直线过点 $\mathrm{P}(x_0, y_0, z_0)$, t 为参数.
解题关键：一定点，二定向.

3. 线面夹角问题 $\theta (0 \leq \theta \leq \pi/2)$

(1) 平面、直线间的夹角

- 平面与平面的夹角 θ：$\cos\theta = \dfrac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$
- 直线与直线的夹角 θ：$\cos\theta = \dfrac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1|\,|\vec{s}_2|}$
- 直线与平面的夹角 θ：$\sin\theta = \dfrac{|\vec{s} \cdot \vec{n}|}{|\vec{s}|\,|\vec{n}|}$

(2) 线面平行、垂直的充要条件

$$
\begin{aligned}
L_1 \perp L_2 &\Longleftrightarrow \vec{s}_1 \perp \vec{s}_2 \\
&\Longleftrightarrow m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0 \\
L_1 \parallel L_2 &\Longleftrightarrow \vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2 \\
&\Longleftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2} \\
L \perp \Pi &\Longleftrightarrow \vec{s} \parallel \vec{n} \quad \Longleftrightarrow \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p} \\
L \parallel \Pi &\Longleftrightarrow \vec{s} \perp \vec{n} \quad \Longleftrightarrow Am + Bn + Cp = 0
\end{aligned}
$$

郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com

4. 距离问题

(1) 点到平面的距离

点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 到平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的距离为

$$d = \frac{|Ax_0 + By + 0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

(2) 两不重合平行平面的距离

设有两不重合平行平面的方程分别为 $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_1x + B_1y + C_1z + D_2 = 0$, 则它们的距离为

$$d = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}$$

(3) 点到直线的距离

设直线 L 的方向向量为 $\vec{s}$, $P \in L$, 则点 M 到直线 L 的距离为

$$d = \frac{|\overrightarrow{PM} \times \vec{s}|}{|\vec{s}|}$$

(4) 两异面直线之间的距离

设两异面直线 L_i 的对称式方程分别为 $\dfrac{x - x_i}{m_i} = \dfrac{y - y_i}{n_i} = \dfrac{z - z_i}{p_i}$, $i = 1, 2$. 则异面直线之间的距离为

$$d = \frac{|\overrightarrow{M_1M_2} \cdot (\vec{s_1} \times \vec{s_1})|}{|\vec{s_1} \times \vec{s_1}|}$$

其中 $M_i \in L_i$, s_i 为 L_i 的方向向量.

注记　两相交直线或重合的直线之间的距离定义为 0; 两平行线间的距离等于其中一条直线上的任意一点到另一直线的距离.

郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com

第二部分　习题

习　题　1

例 1.1　求过点 $(1,-2,4)$ 且与平面 $2x-3y+z-4=0$ 垂直的直线的方程.

例 1.2　求与两平面 $x-4z=3$ 和 $2x-y-5z=1$ 的交线平行，且过点 $(-3,2,5)$ 的直线的方程.

例 1.3　求过 $(2,-1,4),(-1,3,2),(0,2,3)$ 的平面的方程.

例 1.4　求过 x 轴 $(2,-1,4)$ 的平面的方程.（提示 $By+Cz=0$)

例 1.5　求平面 $x-y+x=0$ 与平面 $2x-3y+z-4=0$ 的夹角.

例 1.6　求直线 L_1 和 L_2 的夹角.

$$L_1:\quad \frac{x-1}{1}=\frac{y}{-4}=\frac{z}{1}$$
$$L_2:\quad \frac{x}{2}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{-1}$$

例 1.7　求平面 $x-y+x=0$ 与平面 $2x-3y+z-4=0$ 的夹角.

例 1.8　用对称式方程及参数方程表示直线

$$\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x-y+3z+4=0 \end{cases}$$

例 1.9　求与平面 $2x+y-z+3=0$ 的距离为 $\sqrt{6}$ 的平面方程

例 1.10　求平面 $2x+y-z+3=0$ 与平面 $2x+y-z-1=0$ 之间的距离 (2012)

例 1.11　求直线$\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-4}{2}$ 与平面$2x+y+z-6=0$ 的交点.

例 1.12　求与两平面 $x-4z=3$ 和 $2x-y-5z=1$ 的交线平行且过点 $(-3,,2,5)$ 的直线的对称式方程、参数方程和一般式方程.

例 1.13　求过点$(2,1,3)$ 且与直线$\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$ 垂直相交的直线的方程.

例 1.14　求直线$\begin{cases} x+y-z-1=0, \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$ 在平面$x+y+z=0$ 上的投影直线的方程.

例 1.15　设 M_0 是直线 L 外一点, M 是直线 L 上任意一点, 且直线的方向向量为 s, 试证: 点 M_0 到直线 L 的距离

$$d=\frac{\left|\overrightarrow{M_0M}\times s\right|}{|s|}$$

郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com

习　题　2

1. 求过点 (4,-1,3) 且平行于直线 $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{5}$ 的直线方程.

2. 求过两点 $M_1(3,-2,1)$ 和 $M_2(-1,0,2)$ 的直线方程.

3. 用对称式方程及参数方程表示直线 $\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x+y+z=4 \end{cases}$

4. 求过点 (2,0,-3) 且与直线 $\begin{cases} x-2y+4z-7=0 \\ 3x+5y-2z+1=0 \end{cases}$ 垂直的平面方程.

5. 求直线 $\begin{cases} 5x-3y+3z-9=0 \\ 3x-2y+z-1=0 \end{cases}$ 与直线 $\begin{cases} 2x-2y-x+23=0 \\ 3x+8y+z-18=0 \end{cases}$ 的夹角的余弦值.

6. 证明直线 $\begin{cases} x+2y-z=7, \\ -2x+y+z=7 \end{cases}$ 与直线 $\begin{cases} 3x+6y-3z=8, \\ 2x-y-z=0 \end{cases}$ 平行.

7. 求过点 (0,2,4) 且与两平面 $x+2z=1$ 和 $y-3z=2$ 平行的直线方程.

8. 求过点 (3,1,-2) 且通过直线 $\dfrac{x-4}{5}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z}{1}$ 的平面方程.

9. 求直线 $\begin{cases} x+y+3z=0, \\ x-y-z=0 \end{cases}$ 与平面 $x-y-z+1=0$ 的夹角.

10. 试确定下列各组中的直线和平面间的关系:

    (1) $\dfrac{x+3}{-2}=\dfrac{y+4}{-7}=\dfrac{z}{3}$ 和 $4x-2y-2z=3$; (2) $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z}{7}$ 和 $3x-2y+7z=8$; (3)$\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-3}{-4}$ 和$x+y+z=3$.

11. 求过点 (1,2,1) 而与两直线平行的平面方程. $\begin{cases} x+2y-z+1=0 \\ x-y+z-1=0 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} 2x-y+z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}$

12. 求点 (-1,2,0) 在平面 $x+2y-z+1=0$ 上的投影.

13. 求点 $P(3,-1,2)$ 到直线 $\begin{cases} x+y-z+1=0, \\ 2x-y+z-4=0 \end{cases}$ 的距离.

14. 求直线 $\begin{cases} 2x-4y+z=0, \\ 3x-y-2z-9=0 \end{cases}$ 在平面 $4x-y+z=1$ 上的投影直线的方程.

15. 设向量 $\vec{P}$ 与三轴正方向的夹角分别为 α,β,γ. 当 $\cos\gamma=1$ 时, 问向量 $\vec{P}$ 与平面 XOY 是什么关系?

16. 求 $M(1,2,1)$ 关于平面 $x+2y+2z-10=0$ 的对称点.

17. 求通过直线 $\begin{cases} 3x-2y+2=0, \\ x-2y-z+6=0 \end{cases}$ 且与点 $P(1,2,1)$ 距离为 1 的平面方程.

18. 求点 $M(1,2,3)$ 到直线 $L:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-4}{-3}=\dfrac{z-3}{-2}$ 的距离.

19. 求两异面直线 $L_1:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{0}$, 与 $L_2:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z}{1}$ 的距离.

解 1.2 因为所求直线垂直于已知平面，所以可以取已知平面的法线向量 (2,-3,1) 作为所求直线的方向向量. 由此可得所求直线的方程为 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z-4}{1}$

解 1.3 取 $\vec{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M3}=(14,9,-1)$

解 1.6 $\pi/4$

解 1.8 直线过$(1,0,-2),\vec{s}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=(4,-1,-3)$ 因此, 所给直线的对称式方程为 $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+2}{-3}$.

令 $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+2}{-3}=t$, 得所给直线的参数方程为 $\begin{cases} x=1+4t \\ y=-t \\ z=-2-3t \end{cases}$ **解** 1.9 $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

解 1.10 设平面方程为 $\Pi: 2x+y-z+D=0$, 则 $\sqrt{6}=\dfrac{|D-3|}{\sqrt{6}}, D=-3\ or\ 9$.

解 1.11 $(1,2,2)$

解 提示：取 $\vec{s}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}$ 可得点向式方程.　　过点 (-3,2,5) 且与平面 $x-4z=3$ 平行的平面的方程为

$$x-4z=-23$$

过点 (-3,2,5) 且与平面 $2x-y-5z=1$ 平行的平面的方程为 $2x-y-5z=-33$,
所求直线为上述两平面的交线, 故其方程为

$$\begin{cases} x-4z=-23 \\ 2x-y-5z=-33 \end{cases}$$

解　1.13 先作一平面过点 (2,1,3) 且垂直于已知直线, 那么这平面的方程应为

$$3(x-2)+2(y-1)-(z-3)=0$$

再求已知直线与这平面的交点. 已知直线的参数方程为

$$x=-1+3t, y=1+2t, z=-t$$

求得 $t=\dfrac{3}{7}$, 从而求得交点为 $\left(\dfrac{2}{7},\dfrac{13}{7},-\dfrac{3}{7}\right)$. 以点 (2,1,3) 为起点，点 $\left(\dfrac{2}{7},\dfrac{13}{7},-\dfrac{3}{7}\right)$ 为终点的向量是所求直线的一个方向向量, 故所求直线的方程为 $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-3}{4}$.

解 1.14　　过直线 $\begin{cases} x+y-z-1=0, \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$ 的平面束的方程为 $(x+y-z-1)+\lambda(x-y+z+1)=0$ 即

$$(1+\lambda)x+(1-\lambda)y+(-1+\lambda)z+(-1+\lambda)=0$$

其中 λ 为待定常数. 这平面与平面 $x+y+z=0$ 垂直的条件是

$$(1+\lambda)\cdot 1+(1-\lambda)\cdot 1+(-1+\lambda)\cdot 1=0$$

由此得

$$\lambda=-1$$

代人得投影平面的方程为 $2y-2z-2=0$. 即 $y-z-1=0$. 所以投影直线的方程为 $\begin{cases} y-z-1=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 证

1.15　点 M_0 到直线 L 的距离为 d. 由向量积的几何意义知 $\left|\overrightarrow{M_0M}\times s\right|$ 表示以 $\overrightarrow{M_0M}, s$ 为邻边的平行四边形的面积. 而 $\dfrac{\left|\overrightarrow{M_0}\vec{M}\times s\right|}{|s|}$ 表示以 $|s|$ 为边长的该平行四边形的高，即为点 M_0 到直线 L 的距离. 于是

$$d=\frac{\left|\overrightarrow{M_0M}\times s\right|}{|s|}$$

习题二解答

1. 取 $\vec{s}=(2,1,5)$, $\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-3}{5}$

2. $\dfrac{x-3}{-4}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{1}$

3. 解根据题意可知已知直线的方向向量

$$s=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(-2,1,3).$$

且过点 $(0,3/2,5/2)$, 由对称式方程可解.

注 由于所取的直线上的点可以不同, 因此所得到的直线对称式方程或参数方程的表达式也可以是不同的.

4. 解根据题意, 所求平面的法向量可取已知直线的方向向量

$$n=s=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix}=(-16,14,11)$$

故所求平面方程为 $-16(x-2)+14(y-0)+11(z+3)=0$. 即

$$16x-14y-11z-65=0$$

5. $\cos\theta=0$

6. 注意到 $\vec{s}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}$, 验证方向向量成比例.

7. 注意到 $\vec{s}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=(-2,3,1)$, 列出点向式方程注本题也可以这样解: 由于所求直线余已知的两个平面平行, 则可视所求直线是分别与已知平面平行的川平面的交线. 不妨设所求直线为

$$\begin{cases} x+2z=a \\ y-3z=b \end{cases}$$

将点 (0,2,4) 代人上式, 得 $a=8, b=-10$. 故所求直线为

$$\begin{cases} x+2z=8 \\ y-3z=-10 \end{cases}$$

8. 解 利用平面束方程, 过直线 $\dfrac{x-4}{5}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z}{1}$ 的平面束方程为

$$\frac{x-4}{5}-\frac{y+3}{2}+\lambda\left(\frac{y+3}{2}-z\right)=0$$

将 (3,1,-2) 代入上式得 $\lambda=\dfrac{11}{20}$. 贝此所求平面方程为

$$\frac{x-4}{5}-\frac{y+3}{2}+\frac{11}{20}\left(\frac{y+3}{2}-z\right)=0$$
$$8x-9y-22z-59=0$$

9. 注意到 $\vec{s}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=(2,4,-2), \vec{n}=(1,-1,-1)$,$\sin\varphi=|\cos(\widehat{n,s})|=\dfrac{|s\cdot n|}{|s||n|}=\dfrac{|2\cdot 1+4\cdot(-1)+(-2)\cdot(-1)|}{\sqrt{2^2+4^2+(-2)^2}\sqrt{1^2+(-1)^2+(-}$
0, $\varphi=0$

郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com

10. 解 (1) 设直线的方向向量为 s, 平面的法向量为 n, 直线与平面的夹角为 φ, 且

$$\sin\varphi = |\cos(\widehat{n,s})| = \frac{|s\cdot n|}{|s||n|}.$$

$$(1)\ s=(-2,-7,3), n=(4,-2,-2),$$

$$\sin\varphi = \frac{|(-2)\cdot 4+(-7)\cdot(-2)+3\cdot(-2)|}{\sqrt{(-2)^2+(-7)^2+3^2}\cdot\sqrt{4^2+(-2)^2+(-2)^2}} = 0$$

即 $\varphi=0$. 故直线平行于平面或在平面上, 现将直线上的点 $A(-3,-4,0)$ 代人平面方程, 方程不成立. 故点 A 不在平面上, 因此直线不在平面上, 直线与平面平行.

(2) $s=(3,-2,7), n=(3,-2,7)$, 由于 $s=n$ 或

$$\sin\varphi = \frac{|3\cdot 3+(-2)\cdot(-2)+7\cdot 7|}{\sqrt{3^2+(-2)^2+7^2}\cdot\sqrt{3^2+(-2)^2+7^2}} = 1$$

知 $\varphi=\frac{\pi}{2}$, 故直线与平面垂直.

(3) $s=(3,1,-4), n=(1,1,1)$, 由于 $s\cdot n=0$ 或

$$\sin\varphi = \frac{|3\cdot 1+1\cdot 1+(-4)\cdot 1|}{\sqrt{3^2+1^2+(-4)^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = 0$$

线面垂直

11. 解 注意到 $\vec{s_i}=\vec{n_{i1}}\times\vec{n_{i2}},\ \ i=1,2.$ 取

$$n = s_1\times s_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-1,1,-1),$$

则过点 $(1,2,1)$, 以 n 为法向量的平面方程为

$$-1\cdot(x-1)+1\cdot(y-2)-1\cdot(z-1)=0$$

即

$$x-y+z=0$$

12. 解 作过已知点且与已知平面垂直的直线. 该直线与平面的交点即为所求。根据题意, 过点 (-1,2,0) 与平面 $x+2y-z+1=0$ 垂直的直线为

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-0}{-1}$$

将它化为参数方程 $x=-1+t, y=2+2t, z=-t$, 代入平面方程得

$$-1+t+2(2+2t)-(-t)+1=0$$

整理得 $t=-\frac{2}{3}$. 从而所求点 (-1,2,0) 在平面 $x+2y-z+1=0$ 上的投影 为 $\left(-\frac{5}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$

13. 解 直线的方向向量 $s=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=(0,-3,-3)$. 在直线上取点 $(1,-2,0)$, 这样，直线的方程可表示成参数方程形式 $x=1,\quad y=-2-3t,\quad z=-3t$. 又过点 $P(3,-1,2)$, 以 $s=(0,-3,-3)$ 为法向量的平面方程为 $-3(y+1)-3(z-2)=0$. 即 $y+z-1=0$. 距离为

$$d=\sqrt{(3-1)^2+\left(-1+\frac{1}{2}\right)^2+\left(2-\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com

14. 解 作过已知直线的平面束, 在该平面束中找出与已知平面垂直的平面，该平面与已知平面的交线即为所求. 设过直线 $\begin{cases} 2x-4y+z=0, \\ 3x-y-2z-9=0 \end{cases}$ 的平面束方程为经整理得

$$\begin{aligned} 2x-4y+z+\lambda(3x-y-2z-9)=0 \\ (2+3\lambda)x+(-4-\lambda)y+(1-2\lambda)z-9\lambda=0 \end{aligned}$$

由

$$(2+3\lambda)\cdot 4+(-4-\lambda)\cdot(-1)+(1-2\lambda)\cdot 1=0$$

得 $\lambda=-\dfrac{13}{11}$. 代人平面束方程, 得

$$17x+31y-37z-117=0$$

所求投影直线的方程为

$$\begin{cases} 17x+31y-37z-117=0 \\ 4x-y+z=1 \end{cases}$$

15. $M(5/3,10/3,7/3)$

16. 过 l 的平面束为 $3x-2y+2+\lambda(x-2y-z+6)=0$, $M_0(1,2,1)$ 到该平面的距离为

$$\frac{|(3+\lambda)-2(2+2\lambda)-\lambda+2+6\lambda|}{\sqrt{(3+\lambda)^2+(-2-2\lambda)^2+(-\lambda)^2}}=1$$

得 $|2\lambda+1|=\sqrt{6\lambda^2+14\lambda+13}$, 得 $\lambda=-2$ *or* -3. 故 $x+2y+2z-10=0$ *or* $4y+3z-16=0$ 为所求.

17. $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ 提示：参考1.15或者求已知点垂直 L 的平面，求线面的交点 $M', d=|MM'|$.)

18. $\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$ 提示：设 $M_i\in L_i, i=1,2$. 则两异面直线的距离 $d=\dfrac{|(\vec{s_1}\times\vec{s_2})\cdot\overrightarrow{M_1M_2}|}{|\vec{s_1}\times\vec{s_2}|}$.

 郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com