一元函数积分学—习题讲义

郭凡荣*

2021 年 3 月 12 日

目录

*Email：jaccoobo@163.com

第一部分 不定积分

1 公式法求不定积分

1. 常用基本积分表

$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c$	$f(x) = F'(x)$
$\int k\,\mathrm{d}x = kx + c$	$\int x^\alpha\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+1}x^\alpha + c \quad (\alpha \neq -1)$
$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln\lvert x\rvert + c$	$\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + c$
$\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + c$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \ln\lvert f(x)\rvert + c$
$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + c$	$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + c$
$\int \tan x\,\mathrm{d}x = -\ln\lvert\cos x\rvert + c$	$\int \cot x\,\mathrm{d}x = \ln\lvert\sin x\rvert + c$
$\int \sec x\,\mathrm{d}x = \ln\lvert\sec x + \csc x\rvert + c$	$\int \csc x\,\mathrm{d}x = \ln\lvert\csc x - \cot x\rvert + c$
$\int \csc^2 x\,\mathrm{d}x = -\cot x + c$	$\int \sec^2 x\,\mathrm{d}x = \tan x + c$
$\int \csc x\cot x\,\mathrm{d}x = -\csc x + c$	$\int \sec x\tan x\,\mathrm{d}x = \sec x + c$
$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + c$	$\int \frac{1}{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\lvert\frac{x-a}{x+a}\rvert + c$
$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{a} + c$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,\mathrm{d}x = \ln\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\rvert + c$
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,\mathrm{d}x = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + c$	$\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + c$
$\int \sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\rvert + c$	$\int \sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + c$
$\int e^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx) + c$	$\int e^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + c$

2. 求以下函数的不定积分

(1) $f(x) = |x|$.

(2) $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}$.

(3) $f(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x - 1}$.

(4) $f(x) = (\sin x + \cos x)\mathrm{e}^x$

解 (1) 因为 $\left(\dfrac{x|x|}{2}\right)' = |x|$, 所以 $\int |x|\mathrm{d}x = \dfrac{x|x|}{2} + C$.

（2）因为 $(2\sqrt{\sin x})' = \dfrac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}$, 所以 $\int \dfrac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{\sin x} + C$.

(3) 因为 $\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1} = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}} = \left[\ln\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)\right]'$, 所以 $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x-1} = \ln\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right) + C$.

郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com

(4) 因为 $(\sin x\cdot \mathrm{e}^x)'=(\sin x+\cos x)\mathrm{e}^x$, 所以 $\int(\sin x+\cos x)\mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x=\sin x\cdot\mathrm{e}^x+C$.

3. 求以下函数的不定积分

(1) $f(x)=|1+x|-|1-x|$.

(2) $f(x)=(2x-3)|x-2|$.

(3) $f(x)=\mathrm{e}^{|x|}$.

(4) $f(x)=\max\left(1,x^2\right)$.

解 (1) 注意到 $(x|x|/2)'=|x|$, 故有 $\left(\dfrac{(1+x)|1+x|}{2}\right)'=|1+x|$, $\left(\dfrac{(1-x)|1-x|}{2}\right)'=-|1-x|$, 由此知

$$\int[|1+x|-|1-x|]\mathrm{d}x=\frac{(1+x)|1+x|+(1-x)|1-x|}{2}+C$$

(2) 注意到 $(2x-3)|x-2|=2(x-2)|x-2|+|x-2|$, 以及 $\left(\dfrac{|x|^3}{3}\right)'=x|x|$, 故

$$\int(2x-3)|x-2|\mathrm{d}x=\frac{2}{3}|x-2|^3+\frac{1}{2}(x-2)|x-2|+C$$

(3) 当 $x\geqslant 0$ 时, $f(x)=\mathrm{e}^x$, 故 $F(x)=\mathrm{e}^x+C$; 当 $x<0$ 时, $f(x)=\mathrm{e}^{-x}$, 故 $F(x)=-\mathrm{e}^{-x}+C'$. 因为存在极限 $\lim\limits_{x\to 0^-}F(x)=F(0)$, 所以 $C'=2+C$. 而得

$$F(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x+C, & x\geqslant 0\\ -\mathrm{e}^{-x}+2+C, & x<0\end{cases}$$

(4) 当$|x|\leqslant 1$ 时, $f(x)=1$, 故 $F(x)=x+C$; 当 $|x|>1$ 时, $f(x)=x^2$, 故 $F(x)=\dfrac{x^3}{3}+C_i'(i=1,2)$. 注意到 $\lim\limits_{x\to 1^+}F(x)=1+C_1'$, $\lim\limits_{x\to -1^-}F(x)=-1+C_2'$. 从而知

$$F(x)=\begin{cases}x+C, & |x|\leqslant 1\\ \dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2\operatorname{sgn}x}{3}+C, & |x|>1\end{cases}$$

4. 解答以下问题:

(1) 求满足方程$f'\left(x^2\right)=1/x(x\in(0,\infty))$之$f(x)$.

(2) 求满足$f'(\ln x)=\begin{cases}1,0<x\leqslant 1,\\ x,1<x<\infty\end{cases}$ 之$f(x)$.

(3) 求满足方程$f'\left(\sin^2 x\right)=\cos 2x+\tan^2 x$之$f(x)$.

解 (1) 令 $x^2=t$, 则 $f'(t)=1/\sqrt{t}$. 从而我们有

$$f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}+C$$

(2) 令 $x=\mathrm{e}^t$, 则有

$$f'(t)=\begin{cases}1, & -\infty<t\leqslant 0,\\ \mathrm{e}^t, & 0<t<\infty.\end{cases}\qquad f(t)=\begin{cases}t+C', & -\infty<t\leqslant 0\\ \mathrm{e}^t+C, & 0<t<\infty.\end{cases}$$

由此易知 $f(x)=\begin{cases}x+C+1, & -\infty<x\leqslant 0,\\ \mathrm{e}^x+C, & 0<x<\infty.\end{cases}$ (3) 令 $\sin^2 x=t$, 则有

$$\begin{aligned}f'(t)&=1-2t+\frac{t}{1-t}=-2t+\frac{1}{1-t}\\ f(t)&=\int\left[-2t+\frac{1}{1-t}\right]\mathrm{d}t=-t^2-\ln(1-t)+C\end{aligned}$$

 郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com

(4) 令 $x=\ln t$, 则 $f(t)=1+\ln t$. 我们有

$$f[\varphi(t)]=1+\ln\varphi(t)=1+t+\ln t\quad(t\geqslant 1)$$

由此知 $\ln\varphi(t)=t+\ln t$, 即 $\varphi(t)=t\cdot\mathrm{e}^t,\varphi(1)=e$.

5. 求以下函数的不定积分:

(1) $I=\displaystyle\int\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}\,\mathrm{d}x(a>0)$

(2) $I=\displaystyle\int\frac{\ln x+1}{1+x\ln x}\,\mathrm{d}x$

(3) $I=\displaystyle\int\frac{\sin 2x}{a^2\sin^2 x+b^2\cos x}\,\mathrm{d}x\left(a^2\neq b^2\right)$

(4) $I=\displaystyle\int\frac{x-1}{\sqrt{2-2x-x^2}}\,\mathrm{d}x$

(5) $I=\displaystyle\int(3x-1)\sqrt{3x^2-2x+7}\,\mathrm{d}x$

解 (1) 注意到 $\left(a^x+a^{-x}\right)'=\left(a^x-a^{-x}\right)\ln a$, 因此有

$$I=\frac{1}{\ln a}\int\frac{\left(a^x+a^{-x}\right)'}{a^x+a^{-x}}\,\mathrm{d}x=\frac{\ln\left(a^x+a^{-x}\right)}{\ln a}+C$$

(2) 注意到 $(x\ln x)'=\ln x+1$, 因此有

$$I=\int\frac{(1+x\ln x)'}{1+x\ln x}\,\mathrm{d}x=\ln|1+x\ln x|+C$$

(3) 注意到 $\left(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x\right)'=\left(a^2-b^2\right)\sin 2x$, 因此可得 $I=\dfrac{1}{a^2-b^2}\displaystyle\int\frac{\left(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x\right)'}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

(4) 改写被积函数为

$$\frac{x-1}{\sqrt{2-2x-x^2}}=\frac{-2-2x}{-2\sqrt{2-2x-x^2}}+\frac{-2}{\sqrt{3-(x+1)^2}}$$

有

$$I=-\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2-2x-x^2}-2\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{3}}+C$$

(5) 改写被积函数为

$$(3x-1)\sqrt{3x^2-2x+7}=\frac{1}{2}(6x-2)\sqrt{3x^2-2x+7}$$

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{2}\int(6x-2)\sqrt{3x^2-2x+7}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left(3x^2-2x+7\right)^{3/2}+C\\&=\frac{1}{3}\sqrt{\left(3x^2-2x+7\right)^3}+C\end{aligned}$$

6. 求以下函数的不定积分:

(1) $I=\displaystyle\int\frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$

(2) $I=\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x\left(x^n+1\right)}$

解 (1) 改写被积函数为

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}&=\frac{\sqrt{x(x+1)}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}\\&=\sqrt{x}(x+1)-x\sqrt{x+1}\\&=x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{1}{2}}-(x+1)^{\frac{3}{2}}+(x+1)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com

则得

$$I=\int x^{\frac{3}{2}}\ \mathrm{d}x-\int x^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{d}x-\int(x+1)^{\frac{3}{2}}\ \mathrm{d}x+\int(x+1)^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{d}x$$

即

$$I=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C.$$

(2) 注意 $1=x^n+1-x^n$, 故

$$\begin{aligned}I&=\int\frac{x^n+1-x^n}{x\left(x^n+1\right)}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}-\int\frac{x^{n-1}}{x^n+1}\ \mathrm{d}x\\&=\ln|x|-\frac{1}{n}\int\left(\ln\left|x^n+1\right|\right)'\mathrm{d}x=\ln|x|-\ln\sqrt[n]{|x^n+1|}+C(\text{凑微分})\end{aligned}$$

2 换元积分法求不定积分

1. 定理一 (第一积分换元法）若 f(u) 在区间 J 上有原函数 F(u) :

$$\int f(u)\mathrm{d}u=F(u)+C,\quad u\in J$$

则 $F(\varphi(x))$ 是 $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ 在区间 I 上的原函数:

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x=F(\varphi(x))+C,\quad x\in I$$

其中 $u=\varphi(x)$ 是 I 上的可微函数, 且 $R(\varphi)\subset J$. 注本公式称为第一换元积分公式, 为求 $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x$, 就用 u 去替换 $\varphi(x)$, 并视积分号下的 $\varphi'(x)\mathrm{d}x$ 为 $\mathrm{d}u$, 则问题可转化为求不定积分 $\int f(u)\mathrm{d}u$. 因此, 在其体应用这一公式时，允许作下列演算:

$$\begin{aligned}\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x&=\int f[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x)\overset{\varphi(x)=u}{=}\int f(u)\mathrm{d}u\\&=F(u)+C\overset{u=\varphi(x)}{=}F[\varphi(x)]+C,\quad x\in I\end{aligned}$$

因此, 关键在于将被积函数奏成$f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x$ 的形式, 俗称**凑微分法**. 顺便指出: 有了这一换元积分法, 原先不定积分中纯符号 $\mathrm{d}x$, 现在可以当作 x 的微分来对待，这说明恰当运用数学符号的重要性. 在下文的不定积分表达式中, 若未明示存在区域, 则暗指定义区域.

2. 定理二 (第二积分换元法）设 $G(t)$ 是 $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ 在区间 I 上的原函数:

$$\int f(\phi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t=G(t)+C$$

则 $G\left(\varphi^{-1}(x)\right)$ 是 $f(x)$ 在区间 J 上的原函数

$$\int f(x)\mathrm{d}x=G\left(\varphi^{-1}(x)\right)+C,\quad x\in J$$

其中 $f(x)$ 在区间 J 上有定义, $x=\varphi(t)$ 在 I 上连续且在 I 内部可微 ,$R(\varphi)=J$ 且 $\varphi'(t)\neq 0$. 注本公式称为第二换元积分公式, 为求 $\int f(x)\mathrm{d}x$, 就用 $\varphi(t)$ 去替换 x, 并视 $\mathrm{d}x$ 为微分 $\varphi'(t)\mathrm{d}t$, 从而将 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 化咸不定积分 $\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$ 来计算. 因此, 在具体演算时, 可采用如下形式写出:

$$\int f(x)\mathrm{d}x\xlongequal{x=\varphi(t)}\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t=G(t)+C\xlongequal{t=\varphi^{-1}(x)}G\left[\varphi^{-1}(x)\right]+C$$

郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com

3. 求以下函数的不定积分:

(1) $I=\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4+x}$ (2) $I=\int \frac{x\ \mathrm{d}x}{\sqrt{1-4x^4}}$ (3) $I=\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4\sqrt{1+x^2}}$

(4) $I=\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\sqrt{\mathrm{e}^x}}$ (5) $I=\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^6-7x^4+x^2}}\ \mathrm{d}x$ (6) $I=\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$

(7) $I=\int x(1-x)^n\ \mathrm{d}x$ (8) $I=\int \frac{1+x}{x\left(1+x\mathrm{e}^x\right)}\mathrm{d}x$

解 (1) 令$x^3=t$, 则$3x^2\ \mathrm{d}x=\mathrm{d}t$. 故有

$$\begin{aligned}I&=\int \frac{x^2\ \mathrm{d}x}{x^3\left(x^3+1\right)}=\frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)}=\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{t}{t+1}\right|+C=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x^3}{1+x^3}\right|+C\end{aligned}$$

(2) 令 $x^2=t$, 则 $2x\ \mathrm{d}x=\mathrm{d}t$. 故有

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-4t^2}}=\frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1/2)^2-t^2}}\\&=\frac{1}{4}\arcsin(2t)+C=\frac{1}{4}\arcsin\left(2x^2\right)+C\end{aligned}$$

(3) 令 $x=\tan t$, 则 $\mathrm{d}x=1/\cos^2 t$. 故有

$$\begin{aligned}I&=\int \frac{\cos^3 t}{\sin^4 t}\ \mathrm{d}t=\int \frac{1-\sin^2 t}{\sin^4 t}\ \mathrm{d}\sin t=\frac{\sin t-u}{3u^8}+\frac{1}{u}+C=-\frac{1}{3\sin^3 t}+\frac{1}{\sin t}+C\\&=-\frac{1}{x}+C=\frac{2x^2-1}{3x^3}\sqrt{1+x^2}+C.\end{aligned}$$

(4) 令 $\mathrm{e}^x=1/t^2$, 则 $t=\mathrm{e}^{-\mathrm{x}/2}$, $\mathrm{d}x=-2\ \mathrm{d}t/t$. 故有

$$\begin{aligned}I&=-2\int \frac{t\ \mathrm{d}t}{1+t}=-2\left[\int \mathrm{d}t-\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t}\right]\\&=-2t+\ln(1+t)+C--x+\frac{2}{\sqrt{\mathrm{e}^x}}+2\ln\left(1+\sqrt{\mathrm{e}^-}\right)+C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I&=\int \frac{x^2+1}{x^2\sqrt{x^2-7+1/x^2}}dx=\int \frac{1+1/x^2}{\sqrt{x^2-7+1/x^2}}\ \mathrm{d}x\\&=\int \frac{\mathrm{d}(x-1/x)}{\sqrt{(x-1/x)^2-5}}=\ln\left|x-\frac{1}{x}+\sqrt{x^2-7+1/x^2}\right|+C\end{aligned}$$

(6) 令 $x=\mathrm{sect}$, 则 $\mathrm{d}x=\sin t\cdot\sec^2 t\ \mathrm{d}t$. 故得

$$I=\int 1\ \mathrm{d}t=t+C=\arccos\left(\frac{1}{x}\right)+C$$

(7) 令 $x=1-t$, $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$, 我们有

$$\begin{aligned}I&=-\int(1-t)t^n\ \mathrm{d}t=-\int t^n\ \mathrm{d}t+\int t^{n+1}\ \mathrm{d}t\\&=-\frac{t^{n+1}}{n+1}+\frac{t^{n+2}}{n+2}+C=-\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}+\frac{(1-x)^{n+2}}{n+2}+C\end{aligned}$$

(8) 令 $1+x\mathrm{e}^x=t$, 则 $\mathrm{e}^x(1+x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$, 我们有

$$I=\int \frac{\mathrm{d}t}{t(t-1)}=\ln\left|\frac{t-1}{t}\right|+C=\ln\left|1-\frac{1}{1+x\mathrm{e}^x}\right|+C$$

郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com

4. 求以下函数的不定积分:

(1) $I=\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$ (2) $I=\int \frac{\sec x\cdot\csc x}{\ln(\tan x)}\mathrm{d}x$ (3) $I=\int \frac{\mathrm{d}x}{x\cdot\ln x\cdot\ln\ln x}$

解 (1) 令 $\ln x=t$, 则 $\mathrm{d}x=\mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t$. 故有

$$I=\int \frac{\mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t\cdot t}=\int \frac{\mathrm{d}t}{t}=\ln|t|+C=\ln|\ln x|+C$$

(2) 改写被积函数, 且令 $\tan x=t$, 则

$$\begin{aligned}I&=\int \frac{\sec^2 x\cdot\csc x}{\sec x\cdot\ln(\tan x)}\mathrm{d}x=\int \frac{\mathrm{d}(\tan x)}{\tan x\cdot\ln(\tan x)}\\&=\int \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}=\ln|\ln t|+C=\ln|\ln(\tan x)|+C.\end{aligned}$$

(3) 令 $\ln x=t$, 我们有

$$\begin{aligned}I&=\int \frac{\mathrm{d}\ln x}{\ln x\cdot\ln\ln x}=\int \frac{\mathrm{d}t}{t\cdot\ln t}\\&=\ln|\ln t|+C=\ln|\ln\ln x|+C\end{aligned}$$

5. 求以下函数的不定积分:

(1) $I=\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$. (2) $I=\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$.

(3) $I=\int \frac{\cos x\ \mathrm{d}x}{\sqrt{\cos 2x}}$. (4) $I=\int \frac{\sqrt[4]{\tan x}}{\sin^2 x}\ \mathrm{d}x$

(5) $I=\int \frac{\mathrm{d}x}{3\cos^2 x+4\sin^2 x}$. (6) $I=\int \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}\ \mathrm{d}x$

(7) $I=\int \frac{\sin x}{1+\sin x}\ \mathrm{d}x$

解:(1) 应用公式 $\sin x=2\sin(x/2)\cdot\cos(x/2)$, 则得

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sin(x/2)\cdot\cos(x/2)}=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\tan\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2}}\\&=\int \frac{d\left(\tan\frac{x}{2}\right)}{\tan\frac{x}{2}}=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C\end{aligned}$$

(2) 改写被积函数, 我们有

$$I=\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}=\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2\frac{x}{2}\left(1-\tan^2\frac{x}{2}\right)}$$

$$=2\int \frac{\mathrm{d}\left(\tan\frac{x}{2}\right)}{1-\tan^2\frac{x}{2}}=\int\left(\frac{1}{1-\tan\frac{x}{2}}+\frac{1}{1+\tan\frac{x}{2}}\right)\mathrm{d}\left(\tan\frac{x}{2}\right)$$

$$=\ln\left|\frac{1+\tan(x/2)}{1-\tan(x/2)}\right|+C=\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C.$$

(3) 改写被积函数, 我们有

$$I=\int \frac{\mathrm{d}\sin x}{\sqrt{1-2\sin^2 x}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin(\sqrt{2}\sin x)+C$$

(4) 令 $\tan x=t^4$, 则 $\mathrm{d}x=4t^3\ \mathrm{d}t/\left(1+t^8\right)$, 以及 $\sin x=t^4/\sqrt{t^8+1}$, 故有

$$\begin{aligned}I&=\int \frac{4t^4}{1+t^6}\frac{t^8+1}{t^8}\ \mathrm{d}t=\int 4t^{-4}\ \mathrm{d}t\\&=-\frac{4}{3}\frac{1}{t^3}+C=-\frac{4}{3}\sqrt[4]{\cot^3 x}+C.\end{aligned}$$

郭凡荣 Email: jaccoobo@163.com

(5) 改写被积函数, 我们有

$$I=\int\frac{1}{3\cos^2 x}\frac{dx}{1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\tan x\right)^2}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\int\frac{d\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\tan x\right)}{1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\tan x\right)^2}$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2\tan x}{\sqrt{3}}\right)+C$$

(6) 改写被积函数, 我们有

$$\begin{aligned}I&=\int\frac{\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}\ \mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin\frac{x}{2}}\\&=\sqrt{2}\int\frac{\mathrm{d}\left(\tan\frac{x}{4}\right)}{\tan\frac{x}{4}}=\sqrt{2}\ln\left|\tan\frac{x}{4}\right|+\mathrm{C}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I&=\int\frac{\sin x+1-1}{\sin x+1}\ \mathrm{d}x=\int 1\ \mathrm{d}x-\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}\\&=x-\int\frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}\ \mathrm{d}x=x-\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}+\int\frac{\sin x\ \mathrm{d}x}{\cos^2 x}\\&=x-\tan x+\frac{1}{\cos x}+C\end{aligned}$$

6. 求以下函数的不定积分:

(1) $I=\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{2+\cos^2 x}$ (2) $I=\displaystyle\int\frac{dx}{\sin(3x)\cdot\cos x}$

(3) $I=\displaystyle\int\frac{\sin x}{\sqrt{1+\sin x}}\ \mathrm{d}x$ (4) $I=\displaystyle\int\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{\sin(2x)}}\mathrm{d}x.$

(5) $I=\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x+3\sin x}$ (6) $I=\displaystyle\int\frac{\sin(2x)}{1+\mathrm{e}^{\sin^2 x}}\ \mathrm{d}x.$

解 (1) 改写被积函数, 我们有

$$I=\int\frac{\mathrm{d}x}{3\cos^2 x+2\sin^2 x}=\frac{1}{\sqrt{6}}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}\tan x}{\sqrt{3}}\right)+C$$

(2) 改写被积函数, 我们有

$$\begin{aligned}I&=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{2\sin x\cdot\cos^2 x}\ \mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\left(\frac{\sin x}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin x}\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2\cos x}+\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C\end{aligned}$$

（3）改写被积昂数, 我们有

$$I=\int\frac{1+\sin x-1}{\sqrt{1+\sin x}}\ \mathrm{d}x=\int\sqrt{1+\sin x}\ \mathrm{d}x-\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\sin x}}$$

应用公式 $\sqrt{1+\sin x}=\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$, 则 ( )

$$\begin{aligned}I&=\int\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\\&=2\sin\frac{x}{2}-2\cos\frac{x}{2}-\sqrt{2}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{8}\right)\right|+\mathrm{C}\end{aligned}$$

(4) 令 $\sin x+\cos x=t$, 则 $(\cos x-\sin x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$, 且 $\sin(2x)=2\sin x\cdot\cos x=(\cos x+\sin x)^2-1=t^2-1$. 改而得

$$\begin{aligned}I&=\int\frac{-\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2-1}}=-\ln\left(t+\sqrt{t^2-1}\right)+C\\&=-\ln(\sin x+\cos x+\sqrt{\sin 2x})+C\end{aligned}$$

郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com

(5) 改写被积函数, 且令 $\cos x=t$, 则得

$$
\begin{aligned}
I&=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x\left(\sin^2 x+3\right)}=\int\frac{\sin x\cdot\mathrm{d}x}{\sin^2 x\left(4-\cos^2 x\right)}\\
&=\int\frac{-\mathrm{d}t}{\left(1-t^2\right)\left(4-t^2\right)}=\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{t^2-1}-\frac{1}{t^2-4}\right)\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{6}\left\{\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|\right\}+C\\
&=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right|-\frac{1}{12}\ln\frac{2-\cos x}{2+\cos x}+C
\end{aligned}
$$

(6) 注意到 $\mathrm{d}\left(\sin^2 x\right)=\sin(2x)$, 且令 $\sin^2 x=t$, 有

$$
\begin{aligned}
I&=\int\frac{\mathrm{d}\left(\sin^2 x\right)}{1+\mathrm{e}^{\sin^2 x}}=\int\frac{\mathrm{d}t}{1+\mathrm{e}^{x}}=-\int\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{-t}}{\mathrm{e}^{-t}+1}=-\int\frac{\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{-t}+1\right)}{\mathrm{e}^{-t}+1}\\
&=\ln\left(\mathrm{e}^{-t}+1\right)+\mathrm{C}=-\ln\left(\mathrm{e}^{-\sin^2 x}+1\right)+\mathrm{C}
\end{aligned}
$$

7. 求以下函数的不定积分:

(1)$I=\displaystyle\int\sin x\cdot\sin 2x\cdot\sin 3x\ \mathrm{d}x$　(2) $I=\displaystyle\int\frac{\cos(2x)}{(1-\sin x)(1-\cos x)}\mathrm{d}x$

(3) $I=\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin(x+a)\cdot\sin(x+b)}(a\neq b)$　(4)$I=\displaystyle\int\frac{\sin x}{\sqrt{2}x+\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x$

解 (1) 改写被积函数, 我们有

$$
I=\int\frac{\mathrm{d}x}{3\cos^2 x+2\sin^2 x}=\frac{1}{\sqrt{6}}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}\tan x}{\sqrt{3}}\right)+C
$$

(2) 改写被积函数, 我们有

$$
\begin{aligned}
I&=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{2\sin x\cdot\cos^2 x}\ \mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\left(\frac{\sin x}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin x}\right)\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2\cos x}+\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C
\end{aligned}
$$

(3) 改写被积函数, 我们有

$$
I=\int\frac{1+\sin x-1}{\sqrt{1+\sin x}}\ \mathrm{d}x=\int\sqrt{1+\sin x}\ \mathrm{d}x-\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\sin x}}
$$

应用公式 $\sqrt{1+\sin x}=\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$, 则

$$
\begin{aligned}
I&=\int\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\\
&=2\sin\frac{x}{2}-2\cos\frac{x}{2}-\sqrt{2}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{8}\right)\right|+C
\end{aligned}
$$

(4) 令 $\sin x+\cos x=t$, 则 $(\cos x-\sin x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$, 且 $\sin(2x)=2\sin x\cdot\cos x=(\cos x+\sin x)^2-1=t^2-1$. 从而得

$$
\begin{aligned}
I&=\int\frac{-\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2-1}}=-\ln\left(t+\sqrt{t^2-1}\right)+C\\
&=-\ln(\sin x+\cos x+\sqrt{\sin 2x})+C
\end{aligned}
$$

郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com

(5) 改写被积函数, 且令 $\cos x=t$, 则得

$$
\begin{aligned}
I&=\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x\left(\sin^2 x+3\right)}=\int \frac{\sin x\cdot \mathrm{d}x}{\sin^2 x\left(4-\cos^2 x\right)}\\
&=\int \frac{-\mathrm{d}t}{\left(1-t^2\right)\left(4-t^2\right)}=\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{t^2-1}-\frac{1}{t^2-4}\right)\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{6}\left\{\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|\right\}+C\\
&=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right|-\frac{1}{12}\ln\frac{2-\cos x}{2+\cos x}+C
\end{aligned}
$$

(6) 注意到 $\mathrm{d}\left(\sin^2 x\right)=\sin(2x)$, 且令 $\sin^2 x=t$, 则有

$$
\begin{aligned}
I&=\int\frac{\mathrm{d}\left(\sin^2 x\right)}{1+\mathrm{e}^{\sin^2 x}}=\int\frac{\mathrm{d}t}{1+\mathrm{e}^t}=-\int\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{-t}}{\mathrm{e}^{-t}+1}=-\int\frac{\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{-t}+1\right)}{\mathrm{e}^{-t}+1}\\
&=\ln\left(\mathrm{e}^{-t}+1\right)+C=-\ln\left(\mathrm{e}^{-\sin^2 x}+1\right)+C
\end{aligned}
$$

8. 试求下列不定积分:

(1) $I=\int \sin x\cdot\sin 2x\cdot\sin 3x dx$ (2)$I=\int\frac{\cos(2x)\mathrm{d}x}{(1-\sin x)(1-\cos x)}$

(3)$I=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin(x+a)\cdot\sin(x+b)}(a\neq b)$ (4)$I=\int\frac{\sin x\cdot\mathrm{d}x}{\sqrt{2}+\sin x+\cos x}$

解：(1) 改写被积函数, 有

$$
\begin{aligned}
I&=2\int\sin^2 x\cdot\cos x\left(3\sin x-4\sin^3 x\right)\mathrm{d}x\\
&=6\int\sin^3 x\ \mathrm{d}(\sin x)-8\int\sin^5 x\ \mathrm{d}(\sin x)=\frac{3}{2}\sin^4 x-\frac{4}{3}\sin^6 x+C
\end{aligned}
$$

(2) 应用三角公式改写被积函数, 则得

$$
\begin{aligned}
&\frac{\cos(2x)}{(1-\sin x)(1-\cos x)}=\frac{\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)(1+\sin x)(1+\cos x)}{\left(1-\sin^2 x\right)\left(1-\cos^2 x\right)}\\
=&\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}(1+\sin x+\cos x+\sin x\cdot\cos x)\\
=&\csc^2 x-\sec^2 x+\frac{1}{\sin x}-\frac{\sin x}{\cos^2 x}+\frac{\cos x}{\sin^2 x}-\frac{1}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\sin x}{\cos x}
\end{aligned}
$$

可知

$$
\begin{aligned}
I=&-\cot x-\tan x+\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|-\frac{1}{\cos x}-\frac{1}{\sin x}\\
&-\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+\ln|\sin x|+\ln|\cos x|+C\\
=&-\frac{1+\sin x+\cos x}{\sin x\cdot\cos x}+\ln\frac{\tan(x/2)\sin x\cdot\cos x}{\tan(x/2+\pi/4)}+C
\end{aligned}
$$

(3) 改写被积函数, 我们有

$$
\begin{aligned}
I&=\frac{1}{\sin(a-b)}\int\frac{\sin(x+a)\cdot\cos(x+b)-\cos(x+a)\cdot\sin(x+b)}{\sin(x+a)\cdot\sin(x+b)}\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{\sin(a-b)}\left\{\int\frac{\cos(x+b)}{\sin(x+b)}\mathrm{d}x-\int\frac{\cos(x+a)}{\sin(x+a)}\mathrm{d}x\right\}\\
&=\frac{1}{\sin(a-b)}\{\ln|\sin(x+b)|-\ln|\sin(x+a)|\}+C
\end{aligned}
$$

 郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com

(4) 应用待定系数法, 改写 $\sin x$ 为

$$\sin x=A(\sqrt{2}+\sin x+\cos x)+B(\sqrt{2}+\sin x+\cos x)'+C$$

则易知 $A=1/2, B=-1/2, C=-\sqrt{2}/2$. 故得 (注意三角公式)

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{2}\int 1\cdot \mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int\frac{(\sqrt{2}+\sin x+\cos x)'}{\sqrt{2}+\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2}+\sin x+\cos x}\\&=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\ln|\sqrt{2}+\sin x+\cos x|-\frac{1}{2}\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)+C\end{aligned}$$

注意灵活变形。

3 分部积分法求不定积分

1. 定理一 (分部积分法) 设 $u(x),v(x)$ 在区间 I 上可微, 若 $v(x)u'(x)$ 在 I 上有原函数 (例如 $u'(x)$ 在 I 上连续), 则 $u(x)v'(x)$ 在 I 上也有原函数, 而且

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x=u(x)v(x)-\int v(x)u'(x)\mathrm{d}x$$

或写成

$$\int u(x)\mathrm{d}v(x)=u(x)v(x)-\int v(x)\mathrm{d}u(x)$$

注 1: 分部积分法是基于函数乘积的求导公式 $u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$,
注 2: 分部积分法主要用于被积函数是两个不同类型函数乘积的不定积分, 此时，先求其中一部分 $v'(x)$ 的积分 $v(x)$, 然后将 $\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x$ 化归为求解 $\int v(x)u'(x)\mathrm{d}x$.
注 3: 使用这一方法是否有效, 取决于选择好谁是 u,v, 且使 $v(x)u'(x)$ 的原函数容易求出. 在这里我介绍一种优先选 u 的一般顺序:
对数函数 $\rightarrow$ 反三角函数 $\rightarrow$ 代数函数 $\rightarrow$ 三角函数 $\rightarrow$ 指数函数.
举例言之, 如果被积函数是对数函数 f 与代数函数 g 的乘积, 那么取 f 为 $u, g\ \mathrm{d}x$ 为 $\mathrm{d}v$. 此时, 在 $\int vdu$ 中, 对数的特征将在微分后消失. 因此, 在 $\int v\ \mathrm{d}u$ 的被积函数是代数函数, 有希望比 $\int u\ \mathrm{d}v$ 更易计算.

2. 求不定积分：

$(1)I=\int\ln x\ \mathrm{d}x\quad (2)I=\int x\mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x\quad (3)I=\int\ln(1+\sqrt{x})\mathrm{d}x$

$(4)I=\int\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\ \mathrm{d}x\quad (5)I=\int\frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}}\ \mathrm{d}x\quad (6)I=\int\frac{\ln(x^2-1)}{\sqrt{x+1}}\ \mathrm{d}x$

$(7)I=\int\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x$

(5) 提示：$(\sqrt{1+x^2})'=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
(6) 提示：令 $x+1=t^2$
(7) 提示：令 $t=e^{\sqrt{x}}$
解：
1) 视 $u=\ln x,\ \mathrm{d}v=\mathrm{d}x$, 则 $I=x\ln x-\int x\ \mathrm{d}(\ln x)=x\ln x-\int\frac{x}{x}\ \mathrm{d}x=x\ln x-x+C$
(2) $I=\int x\mathrm{d}\mathrm{e}^x=x\mathrm{e}^x-\int\mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x=x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+C.$
(3) $I=x\ln(1+\sqrt{x})-\frac{1}{2}\int\frac{\sqrt{x}\ \mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}=x\ln(1+\sqrt{x})-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$, 令 $x=t^2$, 有

郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com

$\int \frac{\mathrm{d}e^x}{1+\sqrt{x}} = 2\int \frac{t\mathrm{d}t}{1+t} = 2t - \int \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = 3\sqrt{x} - 2\ln(1+\sqrt{x}) + C.$

(4) $I = -\int \ln^2 x \; \mathrm{d}(\frac{1}{x}) = -\left\{\frac{\ln^2 x}{x} - 2\int \frac{\ln x}{x^2} \; \mathrm{d}x\right\} = -\left\{\frac{\ln^2 x}{x} + 2\int \ln x \; \mathrm{d}(\frac{-1}{x})\right\}$

$= -(\frac{ln^2x}{x} + 2\frac{\ln x}{x} - 2\int \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x) = -\frac{1}{x}(\ln^2 x + 2\ln x + 2) + c$

(5) 注意到 $\left(\sqrt{1+x^2}\right)' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, 故知

$$I = \int \ln x \cdot \mathrm{d}\sqrt{1+x^2} = \ln x \cdot \sqrt{1+x^2} - \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \; \mathrm{d}x$$

对上式右端第二个积分, 作变换 $x = \tan t$, 则有

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \; \mathrm{d}x &= \int \frac{\mathrm{d}t}{\sin t \cdot \cos^2 t} = -\int \frac{\mathrm{dcost}}{\sin^2 t \cdot \cos^2 t} \\
&\overset{u=\cos t}{=} -\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2\left(1-u^2\right)} = -\int \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{1-u^2}\right) \mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{u} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + C = \frac{1}{\cos t} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cos t}{1-\cos t}\right| + C \\
&= \sqrt{1+x^2} + \ln \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} + C
\end{aligned}$$

又有

$$I = \sqrt{1+x^2} \cdot \ln\frac{x}{e} - \ln\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} + C$$

(6) 令 $x+1 = t^2, \; \mathrm{d}x = 2t \; \mathrm{d}t, x^2+1 = t^2\left(t^2-2\right)$, 则得

$$\begin{aligned}
I &= 2\int \left[\ln t^2 + \ln\left(t^2-2\right)\right] \mathrm{d}t = 4\int \ln t \; \mathrm{d}t + 2\int \ln\left(t^2-2\right) \mathrm{d}t \\
&= 4(t\ln t - t) + 2\int [\ln(t-\sqrt{2}) + \ln(t+\sqrt{2})]\mathrm{d}t \\
&= 2\sqrt{x+1}\left[\ln\left(x^2-1\right) - 4\right] - 4\sqrt{2}\ln\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1} + C
\end{aligned}$$

(7) 视 $u = \mathrm{e}^{\sqrt{x}}, \; \mathrm{d}v = \mathrm{d}x$, 则得

$$I = x\mathrm{e}^{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x} \; \mathrm{d}x = 2(\sqrt{x}-1)\mathrm{e}^{\sqrt{x}} + C$$

3. 求不定积分：

(1) $I = \int x \cdot \cos x dx$ (2) $I = \int \left(2x+3x^2\right) \arctan x \; \mathrm{d}x$

(3) $I = \int \frac{x \cdot \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \; \mathrm{d}x$ (4) $I = \int \frac{\arctan x}{x^3} \; \mathrm{d}x$

(5) $I = \int \frac{x \cdot \arctan x}{\left(1-x^2\right)^{3/2}} \; \mathrm{d}x$ (6) $I = \int e^{arccosx}\mathrm{d}x$ (7) $I = \int (\arccos x)^2 \; \mathrm{d}x$

解：

(1)$I = \int x \; \mathrm{d}(\sin x) = x\sin x - \int \sin x \; \mathrm{d}x = x\sin x + \cos x + C.$

(2) 根据分部积分法, 我们有 $I = \int \arctan x d\left(x^2+x^3\right) = \left(x^2+x^3\right)\arctan x - \int \frac{\left(x^2+x^3\right)}{1+x^2} \; \mathrm{d}x$

因为

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2+x^3}{1+x^2} \; \mathrm{d}x &= \int \left(x+1-\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) - \arctan x + C
\end{aligned}$$

所以

$$I=\left(x^3+x^2-1\right)\arctan x+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)-\frac{x^2}{2}\quad x+C$$

(3) 注意到 $\left(\sqrt{1-x^2}\right)'=-x/\sqrt{1-x^2}$, 我们有

$$\begin{aligned}
I&=-\int\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x\ \mathrm{d}x=-\int\arcsin x\ \mathrm{d}\left(\sqrt{1-x^2}\right)\\
&=-\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x+\int\sqrt{1-x^2}\ \mathrm{d}(\arcsin x)\\
&=-\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x+\int 1\ \mathrm{d}x\\
&=x-\sqrt{1-x^2}\arcsin x+C
\end{aligned}$$

(4) 注意到 $\mathrm{d}\left(1/x^2\right)=-2\ \mathrm{d}x/x^3$, 我们有

$$\begin{aligned}
I&=-\int\arctan x\ \mathrm{d}\left(\frac{1}{2x^2}\right)=-\frac{\arctan x}{2x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\left(1+x^2\right)}\\
&=-\frac{\arctan x}{2x^2}+\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x\\
&=-\frac{\arctan x}{2x^2}-\frac{1}{2x}-\frac{\arctan x}{2}+C\\
&=-\frac{1+x^2}{2x^2}\arctan x-\frac{1}{2x}+C
\end{aligned}$$

(5) 注意到 $\left(1/\sqrt{1-x^2}\right)'=x/\left(1-x^2\right)^{3/2}$, 故知

$$I=\frac{\arctan x}{\sqrt{1-x^2}}-\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}\left(1+x^2\right)}$$

令 $x=\sin\theta$, 我们有

$$\begin{aligned}
\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}\left(1+x^2\right)}&=\int\frac{\cos\theta\mathrm{d}\theta}{\cos\theta\left(1+\sin^2\theta\right)}=\int\frac{\csc^2\theta}{\csc^2\theta+1}\ \mathrm{d}\theta\\
&=\int\frac{-\mathrm{d}(\cot\theta)}{2+\cot^2\theta}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\cot\theta}{\sqrt{2}}\right)+C\\
&=-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}x}\right)+C
\end{aligned}$$

从而得

$$I=\frac{\arctan x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}x}\right)+C$$

(6) 视 $u=\mathrm{e}^{\arccos x},\mathrm{d}v=\mathrm{d}x$, 我们有由此可得

$$I=x(\arccos x)^2+2\int\frac{x\cdot\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\ \mathrm{d}x\triangleq I_1+2I_2$$

(7) 视 $u=(\arccos x)^2,\ \mathrm{d}v=\mathrm{d}x$, 我们有注意到 $\left(\sqrt{1-x^2}\right)'=-x/\sqrt{1-x^2}$, 故得

$$I_2=-\sqrt{1-x^2}\cdot\arccos x-\int 1\ \mathrm{d}x=-\sqrt{1-x^2}\cdot\arccos x-x+C$$

从而可知

$$I=x\cdot(\arccos x)^2-2\sqrt{1-x^2}\cdot\arccos x-2x+C$$

郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com

4. 求不定积分：

(1) $I=\int \frac{\ln \sin x}{\sin^2 x}\ \mathrm{d}x$. (2) $I=\int \sin \ln x\ \mathrm{d}x$. (3) $I=\int \cos \ln x\ \mathrm{d}x$.

解：

(1) 注意到 $(\cot x)'=-1/\sin^2 x$, 故有

$$\begin{aligned} I &= -\int \ln \sin x\ \mathrm{d}(\cot x) = -\cot x\cdot \ln \sin x + \int \frac{\cot x\cdot \cos x}{\sin x}\ \mathrm{d}x \\ &= I_1 + I_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\ \mathrm{d}x = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}\ \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} - \int 1\ \mathrm{d}x \\ &= -\cot x - x + C \end{aligned}$$

可知

$$I=-(x+\cot x\cdot \ln(e\cdot \sin x))+C$$

(2) 令 $u=\sin \ln x,\ \mathrm{d}v=\mathrm{d}x$, 有

$$\begin{aligned} I &= x\cdot \sin \ln x - \int \cos \ln x dx \\ &= x\cdot \sin \ln x - x\ln \cos x - \int \sin \ln x dx \end{aligned}$$

由此可知

$$I=\frac{x}{2}(\sin \ln x - \cos \ln x)+C$$

5. 求不定积分：

(1) $I=\int \mathrm{e}^x\left(\frac{1-x}{1+x^2}\right)^2\ \mathrm{d}x$ (2) $I=\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x$

(3) $I=\int \mathrm{e}^{-x}\cdot \arctan\left(\mathrm{e}^x\right)\mathrm{d}x$ (4) $I=\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}\ \mathrm{d}x$

(5) $I=\int \frac{x^2\ \mathrm{d}x}{(x\sin x+\cos x)^2}$.

解：

(1) 因为 $(1-x)^2=1+x^2-2x$, 所以

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x}{1+x^2} - \int \frac{2x\mathrm{e}^x}{\left(1+x^2\right)^2}\ \mathrm{d}x \\ &= \frac{\mathrm{e}^x}{1+x^2} - \int \mathrm{e}^x \frac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2}\ \mathrm{d}x - \int \frac{2x\mathrm{e}^x}{\left(1+x^2\right)^2}\ \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^x}{1+x^2}+C. \end{aligned}$$

(2) 因为 $\left(\cos \frac{x}{2}+\sin \frac{x}{2}\right)^2=1+\sin x$, 所以

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\left(\cos \frac{x}{2}+\sin \frac{x}{2}\right)^2}{2\cos^2(x/2)}\mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \left(1+\tan \frac{x}{2}\right)^2 \mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x + \int \mathrm{e}^x \tan \frac{x}{2}\ \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^x\cdot \tan^2 \frac{x}{2}\ \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^x\left(1+\tan^2 \frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x + \int \mathrm{e}^x \tan \frac{x}{2}\ \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^x \sec^2 \frac{x}{2}\ \mathrm{d}x + \int \tan \frac{x}{2}\mathrm{d}\mathrm{e}^x \\ &= \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^x \sec^2 \frac{x}{2}\ \mathrm{d}x + \mathrm{e}^x \tan \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^x \sec^2 \frac{x}{2}\ \mathrm{d}x \end{aligned}$$

郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com

$$= e^x \tan\frac{x}{2} + C$$

(3) 令 $\mathrm{e}^x = t$, 我们有

$$\begin{aligned}
I &= -\int \operatorname{arctan} \mathrm{e}^x \ \mathrm{d}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^x}\right) = -\int \operatorname{arctan} t \mathrm{d}\left(\frac{1}{t}\right) \\
&= -\frac{1}{t}\arctan t + \int \frac{\mathrm{d}t}{t\left(1+t^2\right)} \Delta I_1 + I_2
\end{aligned}$$

对于 I_2, 今 $t = \tan u$, 我们有

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int \frac{\cos u \ \mathrm{d}u}{\sin u} = \ln|\sin u| + C \\
&= \ln\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} + C = \ln\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}} + C
\end{aligned}$$

由此可知

$$I = -x + \frac{1}{2}\ln\left(1+\mathrm{e}^{2x}\right) - \mathrm{e}^{-x}\operatorname{arctan}\mathrm{e}^x + C$$

(4) 改写被积函数, 我们有

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{x \ \mathrm{d}x}{1+\cos x} + \int \frac{\sin x \ \mathrm{d}x}{1+\cos x} \\
&= \frac{1}{2}\int x\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x - \ln(1+\cos x) \\
&= \int x \ \mathrm{d}\left(\tan\frac{x}{2}\right) - \ln(1+\cos x) \\
&= x\tan\frac{x}{2} - \int \tan\frac{x}{2} \ \mathrm{d}x - \ln\left(2\cos^2\frac{x}{2}\right) \\
&= x\tan\frac{x}{2} + 2\ln\cos\frac{x}{2} - \ln 2 - 2\ln\cos\frac{x}{2} + C \\
&= x\tan\frac{x}{2} + C
\end{aligned}$$

(5) 注意到 ($x\sin x + \cos x)' = x\cos x$, 故有

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{x\cos x}{(x\sin x+\cos x)^2} x\sec x \cdot \mathrm{d}x = \int \frac{(x\sin x+\cos x)'}{(x\sin x+\cos x)^2} x\sec x \cdot \mathrm{d}x \\
&= -\int x\sec x \ \mathrm{d}\left(\frac{1}{x\sin x+\cos x}\right) \\
&= -\frac{x\sec x}{x\sin x+\cos x} + \int \frac{\sec x + x\sec x\tan x}{x\sin x+\cos x} \ \mathrm{d}x \\
&= -\frac{x\sec x}{x\sin x+\cos x} + \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} \\
&= -x\frac{\sec x}{x\sin x+\cos x} + \tan x + C
\end{aligned}$$

6. 求不定积分：

(1) $I = \int e^x \sin x dx$, (2) $I = \int \mathrm{e}^x \cos x \ \mathrm{d}x$

(3) $I = \int x\mathrm{e}^{\mathrm{ax}} \cdot \cos bx \ \mathrm{d}x, J = \int x\mathrm{e}^{\mathrm{ar}} \sin bx \ \mathrm{d}x (a \neq 0)$ (4) $I = \int x^2\mathrm{e}^{2x} \cdot \sin^2 x \ \mathrm{d}x$

解: (1) 视 $u = \sin x$, $\mathrm{d}v = \mathrm{e}^x \ \mathrm{d}x$, 则得

$$\begin{aligned}
I &= \int \sin x \mathrm{d}\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x \sin x - \int \mathrm{e}^x \cos x \ \mathrm{d}x \\
&= \mathrm{e}^x \sin x - \mathrm{e}^x \cos x - \int \mathrm{e}^x \cdot \sin x \ \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

由此可知

$$I=\frac{\sin x-\cos x}{2}\mathrm{e}^{x}+C$$

(2) 类似 (1), 易知 $I=\mathrm{e}^{x}(\sin x+\cos x)/2+\mathrm{C}$. (3) 视 $u=x\cos bx$, $\mathrm{d}v=\mathrm{e}^{ax}\ \mathrm{d}x/a$, 则得

$$\begin{aligned}I&=\frac{\mathrm{e}^{ax}x\cos\alpha x}{a}-\frac{1}{a}\int\mathrm{e}^{ax}(\cos bx-bx\sin bx)\mathrm{d}x\\&=\frac{x\mathrm{e}^{ax}\cos bx}{a}-\frac{\mathrm{e}^{ax}(a\cos bx+b\sin bx)}{a\left(a^{2}+b^{2}\right)}+\frac{b}{a}J.\end{aligned}$$

由此可知

$$aI-bJ=x\mathrm{e}^{ax}\cos bx-\frac{\mathrm{e}^{ax}(a\cos bx+b\sin bx)}{a^{2}+b^{2}}$$

同理易得

$$aI+bJ=x\mathrm{e}^{ax}\sin bx-\frac{\mathrm{e}^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)}{a^{2}+b^{2}}$$

联立上两公式, 可解出

$$\begin{aligned}I&=\frac{x\mathrm{e}^{4x}(a\cos bx+b\sin bx)}{a^{2}+b^{2}}-\frac{\mathrm{e}^{ax}\left\{(a^{2}-b^{2})\cos bx+2ab\sin bx\right\rangle}{\left(a^{2}+b^{2}\right)^{2}}\\J&=\frac{x\mathrm{e}^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)}{a^{2}+b^{2}}-\frac{\mathrm{e}^{ax}\left\{(a^{2}-b^{2})\sin bx-2ab\cos bx\right\}}{\left(a^{2}+b^{2}\right)^{2}}\end{aligned}$$

(4) 应用公式 $\sin^{2}x=(1-\cos 2x)/2$, 我们有

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{2}\int x^{2}\mathrm{e}^{2x}(1-\cos 2x)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int x^{2}\mathrm{e}^{2x}\ \mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int x^{2}\mathrm{e}^{2x}\cdot\cos 2x\cdot\mathrm{d}x\triangleq I_{1}-I_{2}\\I_{1}&=\frac{1}{4}\int x^{2}\mathrm{d}\mathrm{e}^{2x}=\frac{1}{4}\left(x^{2}\mathrm{e}^{2x}-2\int x\mathrm{e}^{2x}\ \mathrm{d}x\right)\\&=\frac{1}{4}\left(x^{2}\mathrm{e}^{2x}-x\mathrm{e}^{2x}+\int\mathrm{e}^{2x}\ \mathrm{d}x\right)\\&=\frac{1}{4}\left(x^{2}\mathrm{e}^{2x}-x\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{2x}/2\right)+\mathrm{C}\end{aligned}$$

对于 I_{2}, 令 $2x=t$, 则得

$$\begin{aligned}I_{2}&=\frac{1}{16}\int t^{2}e^{t}\cos t\ \mathrm{d}t=\frac{1}{16}\int t^{2}\mathrm{cost}\cdot\mathrm{d}\mathrm{e}^{t}\\&=\frac{1}{16}\left[\mathrm{e}^{t}t^{2}\cos t-\int\mathrm{e}^{t}\left(2t\cos t-t^{2}\sin t\right)\mathrm{d}t\right]\\&=\frac{1}{16}\left[\mathrm{e}t^{2}\cos t-2\int t\mathrm{e}^{t}\cos t\ \mathrm{d}t+\int t^{2}\mathrm{e}^{t}\sin t\ \mathrm{d}t\right]\\&=\frac{1}{16}\left[\mathrm{e}^{t}t^{2}\cos t-t\mathrm{e}^{t}(\cos t+\sin t)+\mathrm{e}^{t}\sin t+\int t^{2}\mathrm{e}^{t}\cdot\sin t\ \mathrm{d}t\right]\end{aligned}$$

类似可得

$$\int t^{2}\mathrm{e}^{t}\sin t\ \mathrm{d}t=t^{2}\mathrm{e}^{t}\sin t-t\mathrm{e}^{t}(\sin t-\cos t)-\mathrm{e}^{t}\cos t-\int t^{2}\mathrm{e}^{2}\cos t\ \mathrm{d}t$$

由此可知

$$\begin{aligned}2\int t^{2}\mathrm{e}^{t}\cos t\ \mathrm{d}t&=t^{2}\mathrm{e}^{t}(\cos t+\sin t)-2t\mathrm{e}^{t}\sin t+\mathrm{e}^{t}(\sin t-\cos t)\\2\int t^{2}\mathrm{e}^{t}\sin t\ \mathrm{d}t&=t^{2}\mathrm{e}^{t}(\sin t-\cos t)+2\mathrm{e}^{t}t\cos t-\mathrm{e}^{t}(\cos t+\sin t)\end{aligned}$$

最后我们有

$$I=\frac{\mathrm{e}^{2x}}{8}\left(2x^{2}-2x+1\right)-\frac{\mathrm{e}^{2x}}{32}\left[\left(4x^{2}-1\right)\cos 2x+\left(4x^{2}-4x+1\right)\sin 2x\right]$$

郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com

7. 求不定积分：

(1)

$$\int \arccos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$$

.

(2)

$$I=\int \frac{1-2x^3}{\left(x^2-x+1\right)^3}\ \mathrm{d}x$$

解: (1) 提示：换元后分部积分

(2) 我们有

$$-\frac{1}{x^2-x+1}=\int \frac{2x-1}{\left(x^2-x+1\right)^2}\ \mathrm{d}x=\frac{x^2-x}{\left(x^2-x+1\right)^2}+2\int \frac{\left(x^2-x\right)(2x-1)}{\left(x^2-x+1\right)^3}\ \mathrm{d}x$$

$$=\frac{x^2-x}{\left(x^2-x+1\right)^2}+2\int \frac{\left(2x^3-1\right)-3x^2+3x-3-2x+4}{\left(x^2-x+1\right)^3}\ \mathrm{d}x$$

$$=\frac{x^2-x}{\left(x^2-x+1\right)^2}-2I-6\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x^2-x+1\right)^2}-2\int \frac{2x-4}{\left(x^2-x+1\right)^3}\ \mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x^2-x+1\right)^2}=\frac{x}{\left(x^2-x+1\right)^2}+2\int \frac{x(2x-1)}{\left(x^2-x+1\right)^3}\ \mathrm{d}x$$

$=\dfrac{x}{\left(x^2-x+1\right)^2}+4\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x^2-x+1\right)^2}+\int \frac{2x-4}{\left(x^2-x+1\right)^3}\ \mathrm{d}x$. 由此可知

$$3\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x^2-x+1\right)^2}+\int \frac{2x-4}{\left(x^2-x+1\right)^3}\ \mathrm{d}x=\frac{-x}{\left(x^2-x+1\right)^2}$$

从而我们有

$$2I=\frac{1}{x^2-x+1}+\frac{x^2-x}{\left(x^2-x+1\right)^2}+\frac{2x}{\left(x^2-x+1\right)^2}=\frac{2x^2+1}{\left(x^2-x+1\right)^2}$$

$$I=\frac{2x^2+1}{2\left(x^2-x+1\right)^2}$$

8. 求不定积分-递推公式型：不定积分的递推公式在许多不定积分中, 被积函数不仅是自变量的函数, 而且还依赖于正整数指标 n. 此时, 经过一次变量和换或分部积分. 往往不能直接得出具体的原函数, 而是另一个类似的表达式, 其中指标 n 的值减少了. 这就启示我们, 只要再作相应的推演，逐步地可使 n 降到最低值, 从而全部求出不定积分。

(1) $I_n=\displaystyle\int \tan^n x\ \mathrm{d}x$ (2) $I_n=\displaystyle\int \cos^n x\ \mathrm{d}x$

(3) $I_n=\displaystyle\int \sec^n x\ \mathrm{d}x$ (4) $I_n=\displaystyle\int (\arcsin x)^n\ \mathrm{d}x$

(5) $I_n=\displaystyle\int \ln^n x\ \mathrm{d}x$ (6) $I_{m,n}=\displaystyle\int \sin^m x\cdot\cos nx\ \mathrm{d}x;J_{m,n}=\int \sin^m x\cdot\sin nx\ \mathrm{d}x$

(7) $I_{m,n}=\displaystyle\int \cos^m x\cdot\sin nx\ \mathrm{d}x;J_{m,n}=\int \cos^m x\cdot\cos nx\ \mathrm{d}x$ (8) $I_{m,n}=\displaystyle\int x^m\ln^n x\ \mathrm{d}x$

(9) $I_{n,m}=\displaystyle\int \frac{x^m}{\left(x^3+A\right)^n}\ \mathrm{d}x$

解 (1) 应用公式 $\tan^2 x=\sec^2 x-1$, 我们有

$$\begin{aligned}I_n&=\int \tan^{n-2}x\tan^2 x\ \mathrm{d}x=\int \tan^{n-2}x\left(\sec^2 x-1\right)\mathrm{d}x\\&=\int \tan^{n-2}x\sec^2 x\ \mathrm{d}x-\int \tan^{n-2}x\ \mathrm{d}x=\frac{\tan^{n-1}x}{n-1}-I_{n-2}\quad(n>1).\end{aligned}$$

（2) 应用公式 $(\sin x)' = \cos x$, 我们有

$$\begin{aligned} I_n &= \int \cos^{n-1} x \cdot \cos x \ \mathrm{d}x = \int \cos^{n-1} x \ \mathrm{d}(\sin x) \\ &= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \cdot \sin^2 x \ \mathrm{d}x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \left(1 - \cos^2 x\right) \mathrm{d}x \\ &= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n \end{aligned}$$

从而可得

$$I_n = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad (n > 1)$$

(3) 应用公式 $(\ \tan x)' = \sec^2 x$, 我们有

$$\begin{aligned} I_n &= \int \sec^{n-2} x \cdot \sec^2 x \ \mathrm{d}x = \int \sec^{n-2} x \, \mathrm{d}\tan x \\ &= \sec^{n-2} x \cdot \tan x - (n-2) \int \tan x \cdot \sec^{n-3} x \cdot \sec x \cdot \tan x \ \mathrm{d}x \\ &= \sec^{n-2} x \cdot \tan x - (n-2) \int \sec^{n-2} x \cdot \tan^2 x \ \mathrm{d}x \\ &= \sec^{n-2} x \cdot \tan x - (n-2) \int \sec^{n-2} x \left(\sec^2 x - 1\right) \mathrm{d}x \\ &= \sec^{n-2} x \cdot \tan x - (n-2) \left(I_n - I_{n-2}\right) \end{aligned}$$

从而可知

$$I_n = \frac{1}{n-1} \sec^{n-2} x \cdot \tan x + \frac{n+2}{n-1} I_{n-2} \quad (n > 1)$$

(4) 视 $u = (\arcsin x)^n, \ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x$, 我们有

$$\begin{aligned} I_n =& x \cdot (\arcsin x)^n - n \int \frac{x (\arcsin x)^{n-1}}{\sqrt{1-x^2}} \ \mathrm{d}x \\ =& x \cdot (\arcsin x)^n - n \Big\{ -\sqrt{1-x^2} (\arcsin x)^{n-1} \\ & + (n-1) \int \frac{\sqrt{1-x^2} (\arcsin x)^{n-2}}{\sqrt{1-x^2}} \ \mathrm{d}x \end{aligned}$$

从而可知

$$I_n = x (\arcsin x)^n + n \sqrt{1-x^2} (\arcsin x)^{n-1} - n(n-1) I_{n-2} \quad (n > 1)$$

(5) $I_n = x \cdot \ln nx - n \int \ln^{n-1} x \ \mathrm{d}x = x \ln^n x - n I_{n-1}$

(6) 根据分部积分法，我们有

$$\begin{aligned} I_{m,n} &= \sin^m x \frac{\sin nx}{n} - \frac{m}{n} \int \sin nx \cdot \sin^{m-1} x \cdot \cos x \ \mathrm{d}x \\ J_{m,n} &= -\sin^m x \frac{\cos nx}{n} + \frac{m}{n} \int \cos nx \cdot \sin^{m-1} x \cdot \cos x \ \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{m,n} =&\frac{\sin^m x\cdot\sin nx}{n}-\frac{m}{n}\left\{-\frac{\cos nx}{n}\sin^{m-1}x\cos x\right.\\
&\left.+\frac{1}{n}\int\cos nx\left[(m-1)\sin^{m-2}x\cdot\cos^2 x-\sin^{m-1}x\cdot\sin x\right]\mathrm{d}x\right\}\\
=&\frac{\sin^m x\cdot\sin nx}{n}+\frac{m\cos nx\cdot\sin^{m-1}x\cdot\cos x}{n^2}\\
&-\frac{m}{n^2}\int\cos nx\left[(m-1)\sin^{m-2}x-m\sin^m x\right]\mathrm{d}x\\
=&\frac{\sin^m x\cdot\sin nx}{n}+\frac{m\cos nx\cdot\sin^{n-1}x\cdot\cos x}{n^2}\\
&-\frac{m(m-1)}{n^2}I_{m-2,n}+\frac{m^2}{n^2}I_{m,n}\quad(m>1)
\end{aligned}$$

由此可知

$$\begin{aligned}
\left(n^2-m^2\right)I_{m,n}=&\sin^{n-1}x(m\cos nx\cdot\cos x+n\cdot\sin nx\cdot\sin x)\\
&-m(m-1)I_{m-2,n}
\end{aligned}$$

类似地可推

$$\begin{aligned}
\left(n^2-m^2\right)J_{\mathrm{m},n}=&\sin^{m-1}x(m\sin nx\cdot\cos x-n\cos nx\cdot\sin nx)\\
&-m(m-1)J_{m-2,n}
\end{aligned}$$

(ii) 对 (1) 式右端积分作计算, 有

$$\begin{aligned}
&\int\sin^{n-1}x\cdot\sin nx\cdot\cos x dx=\int\sin^{m-1}x\frac{\sin(n+1)x+\sin(n-1)x}{2}\,\mathrm{d}x\\
=&\int\sin^{n-1}x\left[\frac{\sin(n+1)x-\sin(n-1)x}{2}+\sin(n-1)x\right]\mathrm{d}x\\
=&\int\sin^{n-1}x[\cos nx\cdot\sin x+\sin(n-1)x]\mathrm{d}x\\
=&I_{m,n}+J_{m-1,n-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{m,n}&=\frac{\sin^m x\cdot\sin nx}{n}-\frac{m}{n}I_{m,n}-\frac{m}{n}J_{m-1,n-1},\\
(m+n)I_{m,\pi}&=\sin^m x\cdot\sin nx-mJ_{m-1,n-1}
\end{aligned}$$

对 (2) 式右端的积分再作计算, 我们有

$$\begin{aligned}
&\int\sin^{-1}x\cdot\cos nx\cdot\cos x dx=\int\sin^{m-1}x\frac{\cos(n+1)x+\cos(n-1)x}{2}\,\mathrm{d}x\\
=&\int\sin^{m-1}x\left[\frac{\cos(n+1)x-\cos(n-1)x}{2}+\cos(n-1)x\right]\mathrm{d}x\\
=&\int\sin^{m-1}x[-\sin nx\cdot\sin x+\cos(n-1)x]\mathrm{d}x\\
=&-J_{m\cdot n}+I_{m-1,n-1}
\end{aligned}$$

将此结果代人 (2) 式, 可得

$$(m+n)J_{m,n}=-\sin^m x\cdot\cos nx+mI_{w-1.n-1}$$

(iii) 当 $m=n$ 时, 可知

$$\begin{aligned}
I_{n-2,n}&=\frac{1}{n-1}\sin^{n-1}x(\cos nx\cdot\cos x+\sin nx\cdot\sin x)\\
&=\sin^{n-1}x\cdot\cos(n-1)x/(n-1)\quad(n>1)
\end{aligned}$$

 郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com

类似地可推

$$J_{n-2,n}=\sin^{n-1}x\cdot\sin(n-1)x/(n-1)\quad(n>1).$$

(iv) 当 $m=n$ 时，由 (ii) 的结论可知

$$\begin{aligned}2nI_{n.n}&=\sin^n x\cdot\sin nx-nI_{w-1,n-1}\\2nJ_{n,n}&=-\sin^n x\cdot\cos nx+nJ_{n-1,n-1}\end{aligned}$$

(2) 应用分部积分公式, 我们有

$$I_{m,n}=-\frac{\cos^m x\cdot\cos nx}{n}-\frac{m}{n}\int\cos^{m-1}x\cdot\sin x\cdot\cos nxdx$$

(i) 对 (*) 式中分部积分, 可得

$$\begin{aligned}I_{\mathrm{m+}n}=&-\frac{\cos^m x\cdot\cos nx}{n}-\frac{m}{n}\left\{\frac{\sin nx}{n}\cos^{m-1}x\cdot\sin x\right.\\&\left.-\frac{1}{n}\int\sin nx\left[\cos^m x-(m-1)\cos^{m-1}x\cdot\sin^2 x\right]\mathrm{d}x\right\}\\=&-\frac{\cos^m x\cdot\cos nx}{n}-\frac{m\sin nx\cdot\sin x\cdot\cos^{m-1}x}{n^2}\\&+\frac{m}{n^2}\int\sin nx\left[m\cos^m x-(m-1)\cos^{m-2}x\right]\mathrm{d}x\end{aligned}$$

由此可知

$$\begin{aligned}\left(m^2-n^2\right)I_{m,1}=&\cos^{m-1}x(m\sin nx\cdot\sin x+n\cos nx\cdot\cos x)\\&+(m-1)mI_{m-2,n}\end{aligned}$$

(ii) 改写 (*) 式右端积分中之被积函数, 我们有

$$\begin{aligned}\cos^{m-1}x\cdot\sin x\cdot\cos nx&=\cos^{\infty-1}x\frac{\sin(n+1)x-\sin(n-1)x}{2}\\&=\cos^{n-1}x\left\{\frac{\sin(n+1)x+\sin(n-1)x}{2}-\sin(n-1)x\right\rangle\\&=\cos^{m+1}x\cdot\sin nx\cdot\cos x-\cos^{m-1}x\cdot\sin(n-1)x\\&=\cos^m x\cdot\sin nx-\cos^{m-1}x\cdot\sin(n-1)x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_{m,n}&=-\frac{\cos^m x\cdot\cos nx}{n}-\frac{m}{n}I_{n,m}+\frac{m}{n}I_{m-1,n-1}\\(n+m)I_{m,n}&=-\cos^m x\cdot\cos nx+mI_{m-1,n-1}\end{aligned}$$

(iii) 在 (i) 中令 $m=n$, 左端为零, 可得

$$\begin{aligned}(n-1)nI_{n-2,n}&=-n\cos^{n-1}x(\cos nx\cdot\cos x+\sin nx\cdot\sin x)\\&=-n\cos^{n-1}x\cdot\cos(n-1)x\end{aligned}$$

或

$$\int\cos^{\pi-2}x\cdot\sin nxdx=-\frac{\cos^{n-1}x\cdot\cos(n-1)x}{n-1}.$$

(iv) 在 (ii) 中令 $m=n$, 易知有

$$2nI_{n,n}=-\cos^n x\cdot\cos nx+n\cdot I_{n-1\cdot n-1}$$

对 $J_{\mathrm{m.n}}$, 用同样的方法可时

$$\left(m^2-n^2\right)J_{m,n}=\cos^{m-1}x(m\cos mx\sin x-n\sin nx\cdot\cos x)+m(m-1)J_{m-2,n}$$

$(m+n)J_{m,n}=\cos^m x\cdot\sin nx+mJ_{m-1,n-1}$

$$\begin{aligned}I_{m,x}&=\frac{x^{m+1}}{m+1}(\ln x)^n-\frac{n}{m+1}\int x^{m+1}(\ln x)^{n-1}\frac{\mathrm{d}x}{x}\\&=\frac{x^{m+1}}{m+1}\ln^n x-\frac{n}{m+1}I_{m,n-1}\end{aligned}$$

(4) 用分部分公式, 有

$$\begin{aligned}I_{\pi,m}&=\frac{x^{m+1}}{m+1}\frac{1}{(x^3+A)^n}-\frac{1}{m+1}\int\frac{x^{m+1}\left(-n\cdot 3x^2\right)}{(x^3+A)^{n+1}}\,\mathrm{d}x\\(m+1)I_{n,m}&=\frac{x^{m+1}}{(x^3+A)^n}+3n\int\frac{x^m\left(x^3+A-A\right)}{(x^3+A)^{n+1}}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{x^{m+1}}{(x^3+A)^n}+3n\left(I_{n,m}-AI_{n+1,m}\right)\\I_{n+1,m}&=\frac{x^{m+1}}{3nA\left(x^3+A\right)^n}+\frac{3n-m-1}{3nA}I_{n,m}\end{aligned}$$

4 有理函数的不定积分

1. 有理函数的不定积分问题, 只须考察有理真分式:

$$f(x)=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}\quad(a_0,b_0\neq 0,n<m)$$

不难证明, 它总可分解为形如下列四种最简真分式的组合

$$\frac{A}{x-a};\quad\frac{A}{(x-a)^k}(k\geqslant 2);$$
$$\frac{Ax+B}{x^2+px+q};\quad\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}\left(p^2-4q<0,k\geqslant 2\right).$$

(i) $\int\frac{A}{x-a}\,\mathrm{d}x=\mathrm{A}\ln|x-a|+C_4$

(ii) $\int\frac{A}{(x-a)^4}\,\mathrm{d}x=A\int(x-a)^{-4}\,\mathrm{d}x=A\frac{(x-a)^{1-k}}{1-k}+C_5$

(iii) $\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)}\mathrm{d}x=\int\frac{\frac{A}{2}(2x+p)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x$

$$=\frac{A}{2}\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}$$

(iv) $$\begin{aligned}\int\frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^2}\,\mathrm{d}x&=\int\frac{\frac{A}{2}(2x+p)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{\left(x^2+px+q\right)^2}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{A}{2}\int\frac{2x+p}{\left(x^2+bx+q\right)^2}\,\mathrm{d}x+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{\mathrm{d}x}{\left(x^2+px+q\right)^k}\\&=\frac{A}{2}I_k+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)J_k\end{aligned}$$

$$I_k=\int\frac{\mathrm{d}t}{t^k}=\frac{t^{1-k}}{1-k}+C=\frac{1}{(1-k)\left(x^2+px+q\right)^{-1}}+C.$$

注意到 $q-\frac{p^2}{4}>0$, 故可对 J_k 用变换 $x+\frac{p}{2}=t,\ \mathrm{d}x=\mathrm{d}t,q-\frac{p^2}{4}=l^2$, 则可得

$$J_k=\int\frac{\mathrm{d}x}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right]^t}=\int\frac{\mathrm{d}t}{\left(t^2+l^2\right)^k}$$

郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com

$$
\begin{aligned}
J_k &= \int \frac{\mathrm{d}t}{\left(t^2+l^2\right)^t} = \frac{1}{l^2}\int \frac{\left(t^2+l^2\right)-t^2}{\left(t^2+l^2\right)^k}\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{l^2}\int \frac{\mathrm{d}t}{\left(t^2+l^2\right)^{k-1}} - \frac{1}{l^2}\int \frac{t^2}{\left(t^2+l^2\right)^t}\ \mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

$$
\int \frac{t^2\ \mathrm{d}t}{\left(t^2+l^2\right)^k} = \frac{1}{2}\int t\frac{\mathrm{d}\left(t^2+l^2\right)}{\left(t^2+l^2\right)^k} = -\frac{1}{2(k-1)}\int t\ \mathrm{d}\left(\frac{1}{\left(t^2+l^2\right)^{k-1}}\right),
$$

根据分部积分公式知

$$
\int \frac{t^2\ \mathrm{d}t}{\left(t^2+l^2\right)^k} = -\frac{1}{2(k-1)}\left[t\frac{1}{\left(t^2+l^2\right)^{k-1}} - \int \frac{\mathrm{d}t}{\left(t^2+l^2\right)^{t-1}}\right]
$$

代入 (*), 得到

$$
\begin{aligned}
J_k =&\int \frac{\mathrm{d}t}{\left(t^2+l^2\right)^k} = \frac{1}{l^2}\int \frac{\mathrm{d}t}{\left(t^2+l^2\right)^{k-1}} \\
&+ \frac{1}{l_2}\frac{1}{2(k-1)}\left[\frac{t}{\left(t^2+l^2\right)^{k-1}} - \int \frac{\mathrm{d}t}{\left(t^2+l^2\right)^{k-1}}\right] \\
=&\frac{t}{2l^2(k-1)\left(t^2+l^2\right)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2l^2(k-1)}\int \frac{\mathrm{d}t}{\left(t^2+l^2\right)^{k-1}}
\end{aligned}
$$

上式右端之不定积分与 J_k 型类似, 只不过这里的 k 次方已下降为 $k-1$, 可记为 J_{k-1}. 这就是说, 不定积分 J_k 可用 J_{k-1} 来表出. 因此, 继续上述计算过程, 最后将化归为下述不定积分：

$$
\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+l^2} = \frac{1}{l}\arctan\frac{t}{l} + C
$$

至于在最后的表达式中的 t 与 l, 再用 x 以及 A, B, p 与 q 代一即可. 小结根据以上讨论可知, 任一有理函数的不定积分均可用初等函数表达出来, 实际上它就是由下述三类函数组成: (1) 有理函数 ; (2) 对数函数; (3) 反正切函数.

2. 求不定积分：

(1) $I=\int \frac{\mathrm{d}x}{x\left(x^3+1\right)^2}$. (2) $I=\int \frac{x\left(x^2+3\right)\mathrm{d}x}{\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)^2}$

(3) $I=\int \frac{2x^4+5x^2-2}{2x^3-x-1}\ \mathrm{d}x$ (4) $I=\int \frac{x+2}{\left(x^2+2x+2\right)^2}\ \mathrm{d}x$.

解：(1) 令 $x^3=t, 3x^2\ \mathrm{d}x=\mathrm{d}t$, 则

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{x^2\ \mathrm{d}x}{x^3\left(x^3+1\right)^2} = \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)^2} = \frac{1}{3}\left\{\int \frac{\mathrm{d}t}{t} - \int \frac{\mathrm{d}t}{t+1} - \int \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)^2}\right\} \\
&= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{t}{t+1}\right| + \frac{1}{3}\frac{1}{t+1} + C = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x^3}{1+x^3}\right| + \frac{1}{3}\frac{1}{1+x^3} + C
\end{aligned}
$$

(2) (i) 对被积函数作部分分式分解，令

$$
\frac{x\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{\left(x^2+1\right)^2}
$$

故有

$$
\begin{aligned}
x\left(x^2+3\right) \equiv& A(x+1)\left(x^2+1\right)^2 + B(x-1)\left(x^2+1\right)^2 \\
&+ (Cx+D)\left(x^4-1\right) + (Ex+F)\left(x^2-1\right) \\
x^3+3x \equiv& (A+B+C)x^5 + (A-B+D)x^4 + (2A+2B+E)x^3 \\
&+ (2A-2B+F)x^2 + (A+B-C-E)x + A-B-D-F.
\end{aligned}
$$

 郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com

由此可知

$$A+B+C=0, \quad A-B+D=0, \quad 2A+2B+E=1$$

$$2A-2B+F=0, \quad A+B-C-E=3, \quad A-B-D-F=0$$

解出可得 $A=1/2, B=1/2, C=E=-1, D=F=0$.

(ii) 从而我们有

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1}+\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+1}-\frac{1}{2}\int \frac{2x\ \mathrm{d}x}{x^2+1}-\frac{1}{2}\int \frac{2x\ \mathrm{d}x}{\left(x^2+1\right)^2} \\ &= \frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}+C \\ &= \ln\sqrt{\frac{\left|x^2-1\right|}{x^2+1}}+\frac{1}{2\left(x^2+1\right)}+C \end{aligned}$$

(3) 首先, 将被积函数化为真分式:

$$\frac{2x^4+5x^2-2}{2x^3-x-1}=x+\frac{6x^2+x-2}{2x^3-x-1}$$

注意到 $2x^3-x-1=(x-1)\left(2x^2+2x+1\right)$, 故令

$$\begin{gathered} \frac{6x^2+x-2}{2x^3-x-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{2x^2+2x+1} \\ 6x^2+x-2=A\left(2x^2+2x+1\right)+(Bx+C)(x-1) \end{gathered}$$

由此可知 $A=1, B=4, C=3$. 其次, 由上式得

$$\begin{aligned} I &= \int x\ \mathrm{d}x+\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1}+\int \frac{4x+3}{2x^2+2x+1}\ \mathrm{d}x \\ &= \frac{x^2}{2}+\ln|x-1|+\ln\left|2x^2+2x+1\right|+\arctan(2x+1)+C \end{aligned}$$

(4) 改写被积函数, 并令 $x+1=t$, 我们有

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x+1+1}{\left[(x+1)^2+1\right]^2}\ \mathrm{d}x=\int \frac{t+1}{\left(t^2+1\right)^2}\ \mathrm{d}t \\ &= \int \frac{t\ \mathrm{d}t}{\left(t^2+1\right)^2}+\int \frac{\mathrm{d}t}{\left(t^2+1\right)^2}=-\frac{1}{2}\frac{1}{t^2+1}+\frac{1}{2}\left(\frac{t}{t^2+1}+\arctan t\right)+C \\ &= \frac{t-1}{2\left(t^2+1\right)}+\frac{1}{2}\arctan t=\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+2x+2}+\frac{1}{2}\arctan(x+1)+C \end{aligned}$$

5 关于无理函数的不定积分

对一些简单的无理函数的不定积分可经过**变量代换**化为有理函数的积分。注意并不是所有的无理函数的不定积分均可用初等函数表示。更多的例子参见教材。

1. 求不定积分:
$I=\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x^2+2\right)\sqrt{2x^2-2x+5}}$

解 1) **作替换** $x=\dfrac{\alpha\mathbf{t}+\beta}{\mathbf{t}+\mathbf{1}}$, 则 (让 t 的一次项消失, 再定 α, β) 得

$$x^2+2=\frac{(at+\beta)^2+2(t+1)^2}{(t+1)^2}=\frac{\left(\alpha^2+2\right)t^2+\beta^2+2}{(t+1)^2}$$

$$2x^2-2x+5=\frac{\left(2\alpha^2-2\alpha+5\right)t^2+2\beta^2-2\beta+5}{(t+1)^2}$$

郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com

其中, 利用方程组

$$\begin{cases} 2\alpha\beta+4=0, \\ 4\alpha\beta-2\alpha-2\beta+10=0, \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha=2, \\ \beta=-1, \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha=-1, \\ \beta=2 \end{cases}$$

确定 α,β 值. 例如取 $\alpha=-1,\beta=2$, 有

$$x=\frac{2-t}{1+t},\quad t=\frac{2-x}{1+x},\ \mathrm{d}x=\frac{-3\ \mathrm{d}t}{(1+t)^2}$$

$$x^2+2=\frac{3t^2+6}{(t+1)^2}, 2x^2-2x+5=\frac{9t^2+9}{(t+1)^2}$$

从而可知

$$I=-\frac{1}{3}\int\frac{|t+1|\mathrm{d}t}{(t^2+2)\sqrt{t^2+1}}$$

在 $t+1>0$ 即 $t>-1$ 的区域, 我们有

$$I=-\frac{1}{3}\int\frac{t\ \mathrm{d}t}{(t^2+2)\sqrt{t^2+1}}-\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+2)\sqrt{t^2+1}}$$

在上式第一个积分中再用替换 $u^2=t^2+1$, 第二个积分再用替换 $v=\dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}$, 可得

$$\begin{aligned} I&=-\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}u}{u^2+1}-\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}v}{2-v^2}=-\frac{1}{3}\arctan u-\frac{1}{6\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+v}{\sqrt{2}-v}+C \\ &=-\frac{1}{3}\arctan\frac{\sqrt{2x^2-2x+5}}{x+1}-\frac{1}{6\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2\left(2x^2-2x+5\right)}+2-x}{\sqrt{2\left(2x^2-2x+5\right)}-2+x}+C. \end{aligned}$$

在 $x<-1$ 的区域, 可类似地操作.

Note: 一般地，对不定积分

$$I=\int\frac{\mathrm{d}\,x}{(\alpha x+\beta)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

可用替换 $\alpha\mathbf{x}+\beta=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{t}}$ 得到

$$I=\int\frac{t^k}{\sqrt{At^2+Bt+C}}\mathrm{d}t.$$

6 关于三角（超越）函数的不定积分

作万能三角函数替换:

$$t=\tan\frac{x}{2},\quad x\in(-\pi,\pi)$$

一定能把

$$\int R(\cos x,\sin x)\mathrm{d}x$$

化为关于 t 的有理函数的不定积分. 此时, 我们有

$$\sin x=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$x=2\arctan t,\ \mathrm{d}x=\frac{2\ \mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

从而可得

$$\int R(\cos x, \sin x)\mathrm{d}x = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2\ \mathrm{d}t}{1+t^2}$$

注意到有理函数的有理函数仍为有理函数, 故上式右端是 t 的有理函数之不定积分.

注 1 虽然用替换 $t=\tan\dfrac{x}{2}$ 对 $\displaystyle\int R(\cos x,\sin x)\mathrm{d}x$ 的计算总是有效的, 但不一定是最简便的. 因此, 遇到下列情形, 应灵活设计变量替换:

(i) 若有 $R(\cos x, -\sin x) = -R(\cos x, \sin x)$, 则可用替换 $t=\cos x, x\in\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

(ii) 若有 $R(-\cos x, \sin x) = -R(\cos x, \sin x)$, 则可用替换 $t=\sin x, x\in(0,\pi)$.

(iii) 若有 $R(-\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, 则可用替换 $t=\tan x, x\in\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

注 2 对于不定积分 $\displaystyle\int \sin^p x\cdot\cos^q x\ \mathrm{d}x, p, q\in\mathbf{Q}$, 可用替换 $t=\sin x$ 或 $t=\cos x$, 总能将其化为二项式微分型之不定积分.

1. 求下列不定积分:

(1) $I=\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{a+b\tan x}$. (2) $I=\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{1-\sin x}$.

(3) $I=\displaystyle\int\frac{\sin x}{1+\sin x}\ \mathrm{d}x$ (4) $I=\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{1+3\sin x+4\cos x}$.

(5) $I=\displaystyle\int\frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\mathrm{d}x$ (6) $I=\displaystyle\int\frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}\ \mathrm{d}x$

解:

(1) 令 $\tan x=t$, 则 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}t/\left(1+t^2\right)$. 故知

$$\begin{aligned}
I &= \int\frac{1}{a+bt}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int\left(\frac{b^2}{a^2+b^2}\frac{1}{a+bt}+\frac{1}{a^2+b^2}\frac{a-bt}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{b^2}{a^2+b^2}\cdot\frac{1}{b}\ln|a+bt| - \frac{1}{a^2+b^2}\frac{b}{2}\ln\left(1+t^2\right)+\frac{a}{a^2+b^2}\arctan t + C \\
&= \frac{b}{a^2+b^2}\ln\left|\frac{a+\tan x}{\sec x}\right| + \frac{a}{a^2+b^2}x + C \\
&= \frac{b}{a^2+b^2}\ln|a\cos x+b\sin x| + \frac{a}{a^2+b^2}x + C
\end{aligned}$$

(2) 令 $\tan\dfrac{x}{2}=t$, 我们有

$$\begin{aligned}
I &= \int\frac{1}{1-2t/\left(1+t^2\right)}\frac{2\ \mathrm{d}t}{1+t^2} = \int\frac{2\ \mathrm{d}t}{(1-t)^2} \\
&= \frac{2}{1-t}+C = \frac{2}{1-\tan(x/2)}+C
\end{aligned}$$

(3) 令 $\tan\dfrac{x}{2}=t$, 我们有

$$\begin{aligned}
I &= 4\int\frac{t}{(1+t)^2}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = 4\int\left\{\frac{-1}{2(1+t)^2}+\frac{1}{2\left(1+t^2\right)}\right\}\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{1+t}+2\arctan t + C \\
&= \frac{2}{1+\tan(x/2)}+2\arctan\left(\tan\frac{x}{2}\right)+C \\
&= \frac{2}{1+\tan(x/2)}+x+C
\end{aligned}$$

郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com

(4) 令 $\tan\dfrac{x}{2}=t$, 我们有

$$\begin{aligned}I&=2\int\frac{\mathrm{d}t}{6t+4\left(1-t^2\right)+5\left(1+t^2\right)}=2\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+6t+9}\\&=2\int(t+3)^{-2}\,\mathrm{d}t=-\frac{2}{t+3}+C=-\frac{2}{3+\tan\frac{x}{2}}+C\end{aligned}$$

(5) 令 $\tan\dfrac{x}{2}=t$, 我们有

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{2}\int\frac{(1+t)^2}{t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\ln|t|+t+\frac{t^2}{4}+C\\&=\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}+C\end{aligned}$$

(6) 令 $\tan\dfrac{x}{2}=t$, 我们有

$$\begin{aligned}I&=\int\frac{2t\,\mathrm{d}t}{(t+1)\left(t^2+1\right)}=-\int\frac{\mathrm{d}t}{t+1}+\int\frac{t+1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t\\&=-\ln|t+1|+\frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right)+\arctan t+C\\&=\ln\frac{\sqrt{t^2+1}}{|t+1|}+\arctan t+C\\&=\ln\left|\sec\frac{x}{2}\Big/\left(\tan\frac{x}{2}+1\right)\right|+\arctan\left(\tan\frac{x}{2}\right)+C\\&=\frac{x}{2}-\ln\left|\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right|+C\end{aligned}$$

2. 非初等可积函数举例：

$$\int\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x,\quad\int\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x,\quad\int\sin\left(x^2\right)\mathrm{d}x,\quad\int\frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x,\quad\int\frac{\mathrm{d}x}{\ln x},\quad\int\frac{\mathrm{e}^x}{x}\,\mathrm{d}x,\quad\int\ln\sin x\,\mathrm{d}x.$$

$$\int\sqrt{x+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x,\quad\int\mathrm{e}^{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x\quad(a>0),\quad\int\mathrm{e}^{-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)}\mathrm{d}x,\quad\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\cos 2x}},\quad\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-2\cos x}}.$$

郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com

第二部分 定积分

1 定积分的定义-黎曼积分

定义 1 设 $f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的函数. 若有实数 J, 对任给的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得对满足 $\|\Delta\|<\delta$ 的任意分划 Δ, 以及任取的插点组 $\langle\xi\rangle$, 均有

$$|S_\Delta(f,\xi)-J|<\varepsilon$$

则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是 (Riemann) 可积的, 或说 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的 (Riemann) 定积分存在, 并简记为

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} S_\Delta(f,\xi)=J, \quad \lim_{1\Delta 1\to 0}\sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\Delta x_i=J$$

数值 J 称为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分，也称为 $f(x)$ 从 a 到 b 的定积分 (值)，记 $J=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ ，其中 a 称为积分下限, b 称为积分上限. 约定：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\mathrm{d}x, \quad \int_a^a f(x)\mathrm{d}x=0$$

定理 1 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 则积分值唯一.

定理 2 (函数可积的必要条件）若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 则 $f(x)$ 在 [a,b] 上有界. 注有界函数不一定可积, 例如 Dirichlet 函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x \text{ 是有理数}, \\ 0, & x \text{ 是无理数}.\end{cases}$$

1. 可积函数的初等性质回顾

(1) 若 $f(x)=k$, 则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=k(b-a)$

(2) (积分的线性性) (i) 设 $f\in R([a,b]), g\in R([a,b])$, 则 $f+g\in R([a,b])$, 且有

$$\int_a^b[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

(ii) 设 $f\in R([a,b]), c$ 是常数 , 则 $cf\in R([a,b])$, 且有 $\int_a^b[cf(x)]\mathrm{d}x=c\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

(3) (积分的保序性) 若 $f\in R([a,b]), g\in R([a,b])$, 且有 $f(x)\leqslant g(x), x\in[a,b]$ ，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

(4) (积分区间的可加性）设 $a<c<b$, 则 $f\in R([a,b])$ 的充分必要条件是 $f\in R([a,c])$ 以及 $f\in R([c,b])$. 此时有 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x \quad (\star)$

注: 实际上, 只要式 $(\star)$ 中的三个积分都存在, 那么不论 a,b 与 c 的大小次序如何, 式 $(\star)$ 总成立. 例如对 $c<b<a$ 的情形, 因为我们有等式

$$\int_c^b f(x)\mathrm{d}x+\int_b^a f(x)\mathrm{d}x=\int_c^a f(x)\mathrm{d}x=-\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$$

所以由移项可知

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$

(5) 设 $f\in C[a,b]$且$f(x)\geq 0$, 若有 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$, 则 $f(x)=0$.

(6) (绝对值的可积性) 若 $f\in \mathbf{R}[a,b]$, 则 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上可积 (反之不真), 且有 $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$

2 微积分基本定理

（微积分基本定理一 Newton-Leibniz 公式）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 且在 $[a,b]$ 上有原函数 $F(x)$, 则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)\triangleq F(x)\Big|_a^b$$

（此公式也简称为 N-L 公式. ）

注 1 注意到 $f(x)$ 是 $f'(x)$ 的原函数, 故当 $f'\in R([a,b])$ 时, $\mathrm{N-L}$ 公式可写为

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x=f(b)-f(a)$$

注 2 上述定理并不是说可积函数一定有原函数, 而是说如果存在原函数, 那么可用来计算定积分的值. 例如 $f(x)=\begin{cases}-1, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$ 在 [0,2] 上可积, 但在 [0,2] 上不存在原函数. 此外, 即使有原函数存在的函数也不一定可积. 例如在 [-1,1] 上的函数

$$F(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ x^2\sin\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0,\end{cases}$$

是函数 $f(0)=0, f(x)=-\dfrac{2}{x}\cos\dfrac{1}{x^2}+2x\sin\dfrac{1}{x^2}(x\neq 0)$ 在 [-1,1] 上的原函数, 但 $f\bar{\in}R([-1,1])$.

1. 试证明下列不等式:

(1) $\dfrac{1}{20\sqrt{2}}<\displaystyle\int_0^1\frac{x^{19}}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x<\frac{1}{20}$.

(2) $\ln(1+x)\leqslant\arctan x(0\leqslant x\leqslant 1)$.

(3) $\dfrac{4}{9}(\mathrm{e}-1)<\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{(x+1)(2-x)}<\frac{1}{2}(\mathrm{e}-1)$.

(4) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^7 x\,\mathrm{d}x<\int_0^{\pi/2}\sin^3 x\,\mathrm{d}x$.

证明 (1) 注意 $x^{19}/\sqrt{2}\leqslant x^{19}/\sqrt{1+x^2}\leqslant x^{19}(0\leqslant x\leqslant 1)$, 再作定积分.

(2) 注意到 $1/(1+t)\leqslant 1/\left(1+t^2\right)(0\leqslant x\leqslant 1)$, 可知 $\ln(1+x)=\displaystyle\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1+t}\leqslant\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\arctan x$

(3) 注意, 函数 $f(x)=1/(x+1)(2-x)(0\leqslant x\leqslant 1)$ 在 $x=1/2$ 处取到最小值 $4/9$, 在 $x=0$ 和 1 处取到最大值 $1/2$.

(4) $0\leqslant\sin x\leqslant 1(0\leqslant x\leqslant\pi/2)$.

2. 利用定积分定义证明下列极限等式 (更多例子点击此处)

(1) $I=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\sec^2\frac{i\pi}{4n}=\frac{4}{n}$

 郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com

(2) $I=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}\Big/(n+\frac{k}{n})=\frac{2}{\pi}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n^2}\frac{n}{n^2+i^2}=\frac{\pi}{2}$

(4) $I=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{2^{\frac{i}{n}}}{n+\frac{1}{i}}=\frac{1}{\ln 2}$

解：(1)

$$I=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sec^2\frac{i\pi}{4n}\cdot\frac{\pi}{4n}\cdot\frac{4}{\pi}=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/4}\sec^2 x\ \mathrm{d}x=\frac{4}{\pi}\tan x\Big|_0^{\pi/4}=\frac{4}{\pi}$$

(2) 作看 $I_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}\cdot\frac{1}{n+\frac{k}{n}}$, 有点像函数 $\sin x$ 在 $[0,\pi]$ 上的积分和:

$$2=\int_0^{\pi}\sin x\ \mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}\cdot\frac{\pi}{n}$$

但实际上不是, 其不同之处就在乘积因子 $1/(n+k/n)$. 因此, 我们要把它化去，为此, 运用放大缩小的方法:

$$\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}\cdot\frac{\pi}{n+1}\leqslant I_n\leqslant\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}\cdot\frac{\pi}{n}$$

由此令 $n\to\infty$ 可得 $I=\frac{2}{\pi}$.

(3)（i）首先我们有

$$\sum_{i=1}^{n^2}\frac{n}{n^2+i^2}=\sum_{i=1}^{n^2}\frac{1}{1+(i/n)^2}\cdot\frac{1}{n}\leqslant\int_0^{n^2}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\arctan n^2$$

(ii) 其次我们有 $(n>k)$

$$\sum_{i=1}^{n^2}\frac{n}{n^2+i^2}>\sum_{i=1}^{kn}\frac{n}{n^2+i^2}=\sum_{i=1}^{kn}\frac{1}{1+(i/n)^2}\frac{1}{n}$$

因为 $\arctan n^2<\pi/2$, 且有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{kn}\frac{1}{1+(i/n)^2}\frac{1}{n}=\int_0^k\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\arctan k$, 所以

$$\frac{\pi}{2}\leqslant\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n^2}\frac{n}{n^2+i^2}\leqslant\frac{\pi}{2}$$

(4) 根据不等式

$$2^{i/n}>\frac{2^{i/n}}{1+1/ni}=2^{(i-1)/n}\frac{2^{1/n}}{1+1/ni}>2^{\frac{i-1}{n}}\frac{1+\ln 2/n}{1+1/ni}>2^{\frac{i-1}{n}}$$

可知存在$\xi_i\in[(i-1)/n,i/n](i\geqslant 2)$, 使得$\frac{2^{i/n}}{1+1/ni}=2^{\xi_i}$. 我们有

$$I=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{2^{i/n}}{1+1/ni}\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}2^{\xi_i}\frac{1}{n}=\int_0^1 2^x\ \mathrm{d}x=\frac{1}{\ln 2}$$

3. 例 **1.2.14** 试求下列极限:

$$(1)\ I=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{1+2^{a+1}+3^{a+1}+\cdots+n^{a+1}}{1+2^a+3^\alpha+\cdots+n^\alpha}(\alpha>-1)$$

$$(2)\ I=\lim_{n\to\infty}\frac{1^k+3^k+\cdots+(2n-1)^k}{n^{k+1}}(k\geqslant 0)$$

解 (1) 因为

$$\frac{1}{n}\frac{\sum_{k=1}^{n}k^{\alpha+1}}{\sum_{k=1}^{n}k^{\alpha}}=\frac{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha+1}\cdot\frac{1}{n}}{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha}\cdot\frac{1}{n}}$$

所以得到

$$I=\int_{0}^{1}x^{a+1}\,\mathrm{d}x\Big/\int_{0}^{1}x^{a}\,\mathrm{d}x=\frac{\alpha+1}{\alpha+2}$$

(2) 因为

$$\frac{1^k+3^k+\cdots+(2n-1)^k}{n^{k+1}}=\frac{2^k}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2i-1}{2n}\right)^k,$$

又注意到对 [0,1] 作分划 $x_i=i/n(i=0,1,2,\cdots,n)$ 时, 其中

$$\frac{2i-1}{2n}=\frac{1}{2}\left(\frac{i-1}{n}+\frac{i}{n}\right)\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

是 x_{i-1} 与 x_i 的中间值, 所以可知

$$I=\lim_{n\to\infty}2^k\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2i-1}{2n}\right)^k\cdot\frac{1}{n}=2^k\int_{0}^{1}x^k\,\mathrm{d}x=\frac{2^k}{k+1}$$

3 变限积分和原函数

1. 变上限积分定义：设 $f\in R([a,b])$, 则对于任意取定的 $x:a\leqslant x\leqslant b$, 有 $f\in R([a,x])$. 因此, 积分

$$\int_{a}^{x}f(t)\mathrm{d}t,\quad x\in[a,b]$$

的值由上限 x 的值唯一确定，我们称它为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的变上限积分. 这是一个以新的面貌出现的关于 x 的函数.

若 $F(x)$ 是 $[a,b]$ 上的可积函数 $f(x)$ 的一个原函数，则根据 $N--L$ 公式可得

$$\int_{a}^{x}f(t)\mathrm{d}t=F(x)-F(a),\quad x\in[a,b]$$

由此知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{a}^{x}f(t)\mathrm{d}t=F'(x)=f(x),\quad x\in[a,b]$$

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int_{a}^{x}f(t)\mathrm{d}t+C,\quad x\in[a,b]$$

注意, 这一公式只在 f 具有原函数的前提下才成立, 而我们已熟知一个事实: **可积函数不一定具有原函数.** 此外, 企图在式中以不同的 a 值来获得所有的原函数也是不行的.

引理 1　设 $f\in R([a,b])$, 且在点 $x_0\in[a,b]$ 处连续, 则其变上限积分 $\int_{a}^{x}f(t)\mathrm{d}t$ 在点 $x=x_0$ 处可导, 且其导数是 $f\left(x_0\right)$. 定理 1.3.1 若 $f\in C([a,b])$, 则其变上限积分 $\int_{a}^{x}f(t)\mathrm{d}t$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{a}^{x}f(t)\mathrm{d}t=f(x),\quad x\in[a,b]$$

推论设 $f\in C([a,b])$, 且有定义在 $[c,d]$ 上的可微函数 $\varphi(x),\psi(x)$, 满足 $a\leqslant\varphi(x)\leqslant b,a\leqslant\psi(x)\leqslant b,x\in[c,d]$, 则函数

$$F(x)=\int_{\rho(x)}^{\phi(x)}f(t)\mathrm{d}t,\quad x\in[c,d]$$

在 $[c,d]$ 上可微，且 (看成复合函数)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x)=f[\psi(x)]\psi'(x)-f[\varphi(x)]\varphi'(x)$$

注 1 连续函数 $f(t)$ 的变上限积分的微分公式也可写为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{\Delta x}\displaystyle\int_x^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t=f(x)$.

注 2 在 $[a,b]$ 上可积但不连续的函数也可能有原函数.(连续函数必有原函数, 反之不真.)

注 3 函数 $f(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ \sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\end{cases}$ $\varphi(x)=\begin{cases}\sin^2\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 1/2, & x=0\end{cases}$ 在 [0,1] 上有原函数. 事实上, 作函数

$$g(x)=\begin{cases}x^2\cos\dfrac{1}{x}, & 0<x\leqslant 1,\\ 0, & x=0,\end{cases}\qquad h(x)=\begin{cases}2x\cos\dfrac{1}{x}, & 0<x\leqslant 1,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

则 $h(x)$ (连续函数) 有原函数. 由

$$g'(x)=\begin{cases}2x\cos\dfrac{1}{x}+\sin\dfrac{1}{x}, & 0<x\leqslant 1,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

可知 $f(x)=g'(x)-h(x)(0\leqslant x\leqslant 1)$. 这说明 $f(x)$ 存在原函数. 作函数

$$g(x)=\begin{cases}x/2+\left(x^2/4\right)\sin\dfrac{2}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}\qquad h(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{2}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

则 $\varphi(x)=g'(x)-h(x)$ 有原函数. 注 4 设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上均有原函数, 但乘积 $f(x)\cdot g(x)$ 在 $[a,b]$ 　　数, 例如:

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin x^{-3}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}\qquad G(x)=\begin{cases}x^2\cos x^{-3}, & x\neq 0,\\ 0,\cdot & x=0,\end{cases}$$

则易知

$$f(x)G'(x)=\begin{cases}2x^3\sin x^{-3}\cos x^{-3}+3\sin^2 x^{-3}, & x\neq 0\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

$$f'(x)G(x)=\begin{cases}2x^3\sin x^{-3}\cos x^{-3}-3\cos^2 x^{-3}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

作函数

$$\Phi(x)=f(x)G'(x)-f'(x)G(x)=\begin{cases}3, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

注意到 $f(x)G'(x)+f'(x)G(x)=[f(x)G(x)]'$, 可知若 $f(x)G'(x)$ 与 $f'(x)G(x)$ 中有一个具有原函数, 则另一个也必有原函数. 由此立即推出 $\Phi(x)$ 具有原函数. 然而 $\Phi(x)$ 是没有原函数的第一类间断点). 这一矛盾说明, $f(x)G'(x)$ 与 $f'(x)G(x)$ 皆无原函数. 但有下述结论: $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有原函数 $F(x)$, $G(x)$在$[a,b]$ 上可微，且 $G'(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则乘积 $f(x)G(x)$ 在 $[a,b]$ 上有原函数.

定理 1.3.2　若 $f\in R([a,b])$, 则其变上限积分 $\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t(x\in[a,b])$ 在 $[a,b]$ 上一致连续.

推论 1 若 $f\in R([a,b])$, 则 $\displaystyle\lim_{\delta\to 0^+}\int_{a+\delta}^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\delta\to 0^-}\int_a^{b-\delta}f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

推论 2 设 $f\in R([a,b])$, 且在开区间 (a,b) 上 $f(x)$ 有原函数 $F(x)$. (i) 若 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$; (ii) 若在点 a,b 上有 $\lim\limits_{x\to a+}F(x)=A$, $\lim\limits_{x\to b^-}F(x)=B$, 则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=B-A=[F(b-)-F(a+)]$$

2. 求下列极限:

(1) $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\int_0^r\left(\dfrac{1}{u}-\cot u\right)\mathrm{d}u.$

(2) $I=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\ \mathrm{d}t\right)^{1/x^2}$

(3) $I=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^a}\int_0^x \ln\dfrac{P(t)}{Q(t)}\mathrm{d}t(\alpha>1;P(t),Q(t)>0,$为多项式$).$

(4) $I=\lim\limits_{x\to 0}\int_0^x\left(\int_3^{y^2}\dfrac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t\right)\mathrm{d}y\Big/x^3.$

解：利用 $L'Hospital$ 法则得：

(1)$I=\dfrac{1}{6}$

(2) 利用对数恒等式后得 $I=e$

(3)$I=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln P(x)-\ln Q(x)}{\alpha x^{\alpha-1}}=0$

(4)$I=\dfrac{1}{3}$

3. 解答以下问题：

(1) 试给出 a 与 b 的关系，使得极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a}{x^2}+\dfrac{b}{x^3}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t\right)$ 存在.

(2) 试给出正值 a,b, 使得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{bx-\sin x}\int_0^x\dfrac{t^2\ \mathrm{d}t}{\sqrt{a+t}}=1$. 解 (1) 改写函数为 $\dfrac{a}{x^2}+\dfrac{b}{x^3}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t=\dfrac{1}{x^2}\left(a+\dfrac{b}{x}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t\right)$, 则要求

$$\lim_{x\to 0}\left[a+\frac{b}{x}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t\right]=0,\quad \lim_{x\to 0}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t/x=-\frac{a}{b}.$$

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t/x=\lim \mathrm{e}^{-x^2}=1$, 所以给出 $-a=b$, 即 $a+b=0$.

(2) 注意到 $\int_0^x\left(t^2/\sqrt{a+t}\right)\mathrm{d}t/x\to 0(x\to 0)$, 故

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{b-\sin x/x}\cdot\frac{1}{x}\int_0^x\frac{t^2\ \mathrm{d}t}{\sqrt{a+t}}=1$$

要求 $b=1$. 从而原式可写为

$$\begin{aligned}1&=\lim_{x\to 0}\frac{x^3/6}{x^3/6+o\left(x^4\right)}\cdot\frac{6}{x^3}\int_0^x\frac{t^2\ \mathrm{d}t}{\sqrt{a+t}}=\lim_{x\to 0}\frac{6}{x^3}\int_0^x\frac{t^2\ \mathrm{d}t}{\sqrt{a+t}}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2/\sqrt{a+x}}{x^2}=\frac{2}{\sqrt{a}}\end{aligned}$$

由此可定 $a=4$. 最后得到 $a=4,b=1$.

4. 设 $f\in C^{(1)}((-\infty,\infty))$, 且 $f(0)=0$, 令

$$F(x)=\begin{cases}\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t/x^2, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

证明：$F\in C^{(1)}((-\infty,\infty))$ 且 $F'(0)=f'(0)/3$.

证：(i) 当 $x\neq 0$ 时, 显然 $F(x)$ 是连续的. 由

$$F'(x)=\left[x^3f(x)-2x\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t\right]/x^4=\frac{f(x)}{x}-2\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t/x^3$$

郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com

可知, $F'(x)$ 在 $x\neq 0$ 处连续. (ii) 当 $x=0$ 时, 因为 $\lim\limits_{x\to 0}F(x)=\lim\limits_{x\to 0}xf(x)/2x=f(0)/2=0$, 所以 $F(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 由

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}F'(x)&=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}-\lim_{x\to 0}2\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t/x^3\\&=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}-\lim_{x\to 0}\frac{2xf(x)}{3x^2}=f'(0)-\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=f'(0)/3,\end{aligned}$$

可知 $F'(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 证毕.

5. 计算定积分 $I=\displaystyle\int_{-1}^{2}\frac{1+x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$.

解：在 $x\neq 0$ 时, 易知

$$\int\frac{1+x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right)}{2+\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}+C$$

这说明在 [-1,0),(0,2] 上 , $\dfrac{1+x^2}{1+x^4}$ 的原函数之一是 $F(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\arctan\dfrac{x^2-1}{\sqrt{2}x}$. 因我们有 $F(0+)=\lim\limits_{x\to 0+}F(x)=-\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}, F(0-)=\lim\limits_{x\to 0-}F(x)=\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$. 所以得到 $I=\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{1+x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x+\int_0^2\frac{1+x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$

$$=F(0-)-F(-1)+F(2)-F(0+)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\arctan\frac{3\sqrt{2}}{4}+\pi\right)$$

6. 证明：

(1) 设 $f\in C([0,1])$, 则存在 $\varepsilon\in(0,1)$, 使得

$$\xi f(\xi)=\int_\xi^1 f(x)\mathrm{d}x$$

(2) 设 $f\in C([a,b])$, 且 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$, 则存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)$$

(3) 设 $f\in C([a,b])$ 且 $a>0$. 若 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$, 则存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x=\xi f(\xi)$$

(4) 设 $f\in C([a,b]), g\in C([a,b])$, 则存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$g(\xi)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_\varepsilon^b g(x)\mathrm{d}x$$

(5) 设恒为正值的函数 $f,g\in C([a,b])$ 则存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$\frac{f(\xi)}{\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x}-\frac{g(\xi)}{\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x}=1$$

(6) 设 $f\varphi\in C([a,b]), g\varphi\in C([a,b])$, 且 $\varphi(x)\neq 0(a<x<b)$, 则存在 $\xi\in(a,\ b\ )$, 使得

$$g(\xi)\int_a^b f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$$

 郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com

证明 (1) 令 $F(x)=x\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t(0\leqslant x\leqslant 1)$, 则有 $F(0)=0=F(1)$. 故存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $F'(\xi)=0$, 即 $\int_\xi^1 f(x)\mathrm{d}x-\xi f(\xi)=0$

(2) 令 $F(x)=\mathrm{e}^{-x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, 则 $F(a)=F(b)=0$. 从而知存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$F'(\xi)=\mathrm{e}^{-\xi}f(\xi)-\mathrm{e}^{-\xi}\int_a^\xi f(t)\mathrm{d}t=0$$

(3) 令 $F(x)=\dfrac{1}{x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, 则 $F(a)=F(b)=0$. 从而知存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$F'(\xi)=-\frac{1}{\xi^2}\int_a^\xi f(t)\mathrm{d}t+\frac{f(\xi)}{\xi}=0$$

(4) 令 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\cdot\int_x^b g(t)\mathrm{d}t$, 则 $F(a)=F(b)=0$. 故存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $F'(\xi)=0$, 即

$$f(\xi)\int_\xi^b g(t)\mathrm{d}t-g(\xi)\int_a^\xi f(t)\mathrm{d}t=0$$

(5) 令 $F(x)=\mathrm{e}^{-x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\cdot\int_x^b g(t)\mathrm{d}t$, 则 $F(a)=0,F(b)=0$. 故存在 $\xi\in$ (a, b) , 使得 $F'(\xi)=0$, 即

$$\mathrm{e}^{-\xi}\left(-\int_a^\varepsilon f(t)\mathrm{d}t\int_\xi^b g(t)\mathrm{d}t+f(\xi)\int_\xi^b g(t)\mathrm{d}t-g(\xi)\int_a^\xi f(t)\mathrm{d}t\right)=0$$

(6) 记 $A=\int_a^b f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x,B=\int_a^b g(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$, 且令
$F(x)=A\int_a^x g(t)\varphi(t)\mathrm{d}t-B\int_a^x f(t)\varphi(t)\mathrm{d}t$
易知 $F(a)=F(b)=0$. 故存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $F'(\xi)=0$, 即

$$Ag(\xi)\varphi(\xi)-Bf(\xi)\varphi(\xi)=0$$

由 $\varphi(\xi)\neq 0$ 即得所证.

4 定积分计算的换元积分法

1. 定理 (换元积分公式）设 $f\in R([a,b]),\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可微且严格单调 ,$\varphi(a)=a$, $\varphi(\beta)=b$, 且 $\varphi'\in R([\alpha,\beta])$, 则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_0^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

推论 1 设 $f\in R([a,b]),\varphi\in C^{11}([\alpha,\beta])$, 且有 $\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b;\varphi'(t)>0,t\in[\alpha,\beta]$,
推论 2 设 $f(x)$ 是 $[-a,a](a>0)$ 上的可积函数, 则
(1) 若 $f(x)$ 是偶函数, 则 $\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.
(2) 若 $f(x)$ 是奇函数, 则 $\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=0$.

2. 计算下列定积分

$$(1)\ \int_0^{\ln 2}\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x\quad (2)\ \int_0^2(2x+1)\sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x\ (3)\ \int_{-4}^{-3}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-4}}.$$

 郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com

(4) $\int_0^{\pi/4} \tan^{14} x \, \mathrm{d}x$ (5) $\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x} \, \mathrm{d}x$.

解 (1) 令 $t = \sqrt{\mathrm{e}^x - 1}$, 则 $0 \leqslant x \leqslant \ln 2$ 相当于 $0 \leqslant t \leqslant 1$. 从而知

$$\int_0^{\ln 2} \sqrt{\mathrm{e}^x - 1} \, \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{2t^2}{1+t^2} \, \mathrm{d}t = 2\left[\int_0^1 \frac{t^2+1}{1+t^2} \, \mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\right] = \frac{4-\pi}{2}.$$

(2) 令 $x - 1 = t, 0 \leqslant x \leqslant 2$ 相当于 $-1 \leqslant t \leqslant 1$, 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^2 (2x+1)\sqrt{2x-x^2} \, \mathrm{d}x &= \int_0^2 (3+2(x-1))\sqrt{1-(x-1)^2} \, \mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^1 (3+2t)\sqrt{1-t^2} \, \mathrm{d}t = 3\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \, \mathrm{d}t + 0 = \frac{3\pi}{2}\end{aligned}$$

(3) 令 $x = 1/t$, 则 $\mathrm{d}x/x = -\mathrm{d}t/t$. 我们有

$$\begin{aligned}\int_{-4}^{-3} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-4}} &= \int_{-4}^{-3} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-4/x^2} \cdot (-x^2)} = \int_{-1/4}^{-1/3} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-4t^2}} \\ &= \frac{1}{2} \arcsin(2t)\Big|_{-1/4}^{-1/3} = -\frac{1}{2}\left(\arcsin \frac{2}{3} - \frac{\pi}{6}\right)\end{aligned}$$

(4) 令 $\tan x = t$, 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4} \tan^{14} x \, \mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{t^{14}}{1+t^2} \, \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^{14}+1}{1+t^2} \, \mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^{7} (-1)^{-1} t^{2(i-1)} \mathrm{d}t - \frac{\pi}{4} \\ &= \sum_{i=1}^{7} (-1)^{i-1}/(2i-1) - \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

(5) 令 $x = (1-t)/(1+t), \arctan x = \arctan 1 - \arctan t$, 我们有

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x} \, \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\arctan 1}{1+t} \, \mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{\arctan t}{1+t} \, \mathrm{d}t$$
$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \frac{\pi}{8} \ln 2$$

3. 证明下列积分等式：

$$\begin{aligned}&(1)\ I = \int_0^1 x(1-x)^n \, \mathrm{d}x = \frac{1}{n^2+3n+2} \\ &(2)\ I = \int_0^1 \frac{\arctan x}{x} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{t \, \mathrm{d}t}{\sin t} \\ &(3)\ I = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1+\tan^\alpha x} = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1+\cot^2 x} = \frac{\pi}{4} \\ &(4)\ I = \int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{(\mathrm{e}^x+1)(x^2+1)} = \frac{\pi}{4} \\ &(5)\ I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x \, \mathrm{d}x}{\sin x + \cos x} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &(6)\ I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{8} \ln 2\end{aligned}$$

证明 (1) 作变量替换 $x = 1-t$, 我们有

$$I = \int_0^1 (1-t)t^n \, \mathrm{d}x = \int_0^1 t^n \, \mathrm{d}t - \int_0^1 t^{n+1} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{n^2+3n+2}$$

郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com

(2) 令 $x=\tan(t/2)$, 我们有

$$I=\int_0^{\pi/2}\frac{t/2}{\sin\frac{t}{2}\cdot 2\cos\frac{t}{2}}\ \mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{t\ \mathrm{d}t}{\sin t}$$

(3) (i) 令 $x=\pi/2-t$, 我们有

$$I=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^\alpha x\ \mathrm{d}x}{\cos^\alpha x+\sin^\alpha x}=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^\alpha t\ \mathrm{d}t}{\cos^a t+\sin^\alpha t}=\int_0^{\sqrt{/2}}\frac{\mathrm{d}t}{1+\cot^a t}$$

(ii) 由 (i) 知

$$\begin{aligned}2I&=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^\alpha x\ \mathrm{d}x}{\cos^a x+\sin^a x}+\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^a x\ \mathrm{d}x}{\cos^a x+\sin^a x}\\&=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^\circ x+\sin^\alpha x}{\cos^a x+\sin^\alpha x}\ \mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

从而得 $I=\pi/4$. (4) 因为我们有

$$\int_{-1}^0\frac{\mathrm{d}x}{(\mathrm{e}^x+1)(x^2+1)}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(\mathrm{e}^{-x}+1)(x^2+1)}$$

(5) 令 $x=\pi/4-t$, 我们有

$$I=\int_0^{\pi/4}\frac{\sin(\pi/4-x)\mathrm{d}x}{\sin(\pi/4-x)+\cos(\pi/4-x)}$$

$$=\int_0^{\pi/4}\frac{\cos x-\sin x}{2\cos x}\ \mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{\sqrt{2}}$$

(6) 令 $x=\tan t$, 我们有

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{\pi/4}\ln(1+\tan t)\mathrm{d}t=\int_0^{\pi/4}\ln\left(\frac{\cos t+\sin t}{\cos t}\right)\mathrm{d}t\\&=\int_0^{\pi/4}\ln(\cos t+\sin t)\mathrm{d}t-\int_0^{\pi/4}\ln\cos t\ \mathrm{d}t\\&=\int_0^{\pi/4}\ln\left[\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right]\mathrm{d}t-\int_0^{\pi/4}\ln\cos t\ \mathrm{d}t\\&=\frac{\pi}{8}\ln 2+\int_0^{\pi/4}\ln\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\mathrm{d}t-\int_0^{\pi/4}\ln\cos t\ \mathrm{d}t\\&=\frac{\pi}{8}\ln 2+\int_0^{\pi/4}\ln\cos x\ \mathrm{d}x-\int_0^{\pi/4}\ln\cos t\ \mathrm{d}t=\frac{\pi}{8}\ln 2\end{aligned}$$

5 定积分计算的分部积分法

定理 1 (分部积分公式一）设 $u(x),v(x)$ 都是 $[a,b]$ 上的可微函数，而且 $u',v'inR([a,b])$, 则

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int u'(x)v(x)\mathrm{d}x.$$

定理 2 (分部积分公式之二）设 $f\in R([a,b]),g\in R([a,b])$, 且记

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+A,\quad G(x)=\int_a^x g(t)\mathrm{d}t+B$$

则

$$\int_a^b F(x)g(x)\mathrm{d}x=F(x)G(x)\Big|_a^b-\int_a^b G(x)f(x)\mathrm{d}x$$

 郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com

1. 计算下列定积分:

(1) $I=\int_0^1 x(\arctan x)^2\ \mathrm{d}x$ (2) $I=\int_0^{\pi/2} \sin x\cdot\ln\sin x\ \mathrm{d}x$

(3) $I=\int_0^1 \mathrm{e}^x\frac{(1-x)^2}{(1+x^2)^2}\ \mathrm{d}x$. (4) $I=\int_0^{\pi/2}\frac{x\sin x\cos x\ \mathrm{d}x}{\left(a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x\right)^2}(ab\neq 0)$

(5)$I=\int_0^{\pi}\frac{x^2\cdot\sin 2x\cdot\sin(\pi\cos x/2)}{2x-\pi}\mathrm{d}x$ (6)$I=\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\left(\text{ 已知}f(x)=\int_0^{a-x}\mathrm{e}^{t(2a-t)}\mathrm{d}t\right)$

解 (1) 令 $x=\tan t$, 我们有

$$I=\int_0^{\pi/4}t^2\cdot\tan t\ \mathrm{d}(\tan t)=t^2\cdot\left.\frac{\tan^2 t}{2}\right|_0^{\pi/4}-\int_0^{\pi/4}t\tan^2 t\ \mathrm{d}t$$
$$=\frac12\left(\frac{\pi}{4}\right)^2-\int_0^{\pi/4}t\left(\sec^2 t-1\right)\mathrm{d}t$$
$$=\frac12\left(\frac{\pi}{4}\right)^2+\int_0^{\pi/4}t\ \mathrm{d}t-\left[[t\tan t]_0^{\pi/4}-\int_0^{\pi/4}\tan t\ \mathrm{d}t\right]$$
$$=\frac12\left(\frac{\pi}{4}\right)^2+\left.\frac{t^2}{2}\right|_0^{\pi/4}-\frac{\pi}{4}+(-\ln\cos t)|_0^{\pi/4}$$
$$=\frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{4}-1\right)+\ln\sqrt2$$

(2)

$$I=\int_0^{\pi/2}\ln\sin x\ \mathrm{d}(1-\cos x)$$
$$=(1-\cos x)\ln\sin x|_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos x}{\sin x}\cos x\ \mathrm{d}x$$
$$=2\sin^2\frac{x}{2}\ln\sin x\Big|_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos^2 x}{\sin x(1+\cos x)}\cos x\ \mathrm{d}x$$
$$=0-\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x\cos x}{1+\cos x}\ \mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{1+\cos x}\ \mathrm{d}\cos x$$
$$=-1-\ln(1+\cos x)|_0^{\pi/2}=-1-\ln 2$$

(3) $$I=\int_0^1\mathrm{e}^x\frac{1+x^2-2x}{(1+x^2)^2}\ \mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x}{1+x^2}-\int_0^1\frac{2x\mathrm{e}^x}{(1+x^2)^2}\ \mathrm{d}x$$
$$=\mathrm{e}^x\frac{1}{1+x^2}\Big|_0^1-\int_0^1\mathrm{e}^x\frac{-2x\ \mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}-\int_0^1\mathrm{e}^x\frac{2x\ \mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}=\frac{\mathrm{e}}{2}-1$$

(4) $$I=\frac{1}{2\left(b^2-a^2\right)}\int_0^{\pi/2}\frac{x\cdot2\left(b^2-a^2\right)\sin x\cos x}{\left(a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x\right)^2}\ \mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2\left(b^2-a^2\right)}\int_0^{\pi/2}x\cdot\mathrm{d}\left(-\frac{1}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}\right)$$
$$=\frac{1}{2\left(b^2-a^2\right)}\left[\left.\frac{-x}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}\right|_0^{\pi/2}+\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}\right.$$
$$=\frac{1}{2\left(b^2-a^2\right)}\left[-\frac{\pi}{2b^2}+\frac{\varepsilon\pi}{2ab}\right]=\frac{\pi}{4ab^2(a\pm b)}\left(\begin{array}{l}+:ab>0\\-:ab<0\end{array}\right)$$

注: $\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}=\frac{1}{ab}\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}(\frac{b}{a}\tan x)}{1+(\frac{b}{a})^2\tan^2 x}==\frac{1}{ab}\arctan(\frac{b}{a}\tan x)\Big|_0^{\pi/2}$.

(5) 易知 $x=\pi/2$ 是被积函数的连续点. 将原积分分解为

$$I=\left\{\int_0^{\pi/2}+\int_{\pi/2}^{\pi}\right\}\frac{x^2\cdot\sin 2x\cdot\sin(\pi\cos x/2)}{2x-\pi}\mathrm{d}x\triangleq I_1+I_2,$$

郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com

$I_2 \xlongequal{x=\pi-t} \int_0^{\pi/2} \frac{t^2-\pi(2t-\pi)}{2t-\pi} \sin 2t \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\cos t\right) \mathrm{d}t \quad = -I_1 + \pi \int_0^{\pi/2} \sin 2t \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\cos t\right) \mathrm{d}t$

$I = 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin t \cdot \cos t \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\cos t\right) \mathrm{d}t \quad = -2\pi \int_0^{\pi/2} \cos t \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\cos t\right) \mathrm{d}\cos t$

$\xlongequal{\cos t = 2y/\pi} \frac{8}{\pi} \int_0^{\pi/2} y \sin y \ \mathrm{d}y = \frac{8}{\pi}\left[-y\cos y|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos y \ \mathrm{d}y\right] = \frac{8}{\pi}.$

(6) $I = \int_0^a f(x)\mathrm{d}x = xf(x)|_0^a - \int_0^a xf'(x)\mathrm{d}x \quad = -\int_0^a x\mathrm{e}^{(a-x)[2a-(a-x)]}(-1)\mathrm{d}x = \int_0^a x\mathrm{e}^{a^2-x^2} \ \mathrm{d}x$
$= \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{a^2} - 1\right)$

2. 计算下列定积分 (递推公式型):

(1) $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \ \mathrm{d}x (n \geqslant 2).$ (2) $I_n = \int_0^1 (\arcsin x)^n \ \mathrm{d}x.$

(3) $I_n = \int_0^n x^{a-1}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \ \mathrm{d}x (a>0).$ (4) $I_{m,n} = \int_0^1 x^m(1-x)^n \ \mathrm{d}x$.

解 (1) 根据分部积分法, 我们有

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \sin x \ \mathrm{d}x = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \ \mathrm{d}\cos x$

$= -\sin^{n-1} x \cos x|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x \ \mathrm{d}x$ 即 $I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$, 从而

$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\left(1-\sin^2 x\right)\mathrm{d}x$

得到 $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$. 由此公式进行递推, 可知

$$I_{2m} = \frac{2m-1}{2m}\frac{2m-3}{2m-2}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot I_0, \quad m \in \mathbf{N}$$

$$I_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot I_1, \quad m \in \mathbf{N}$$

因为 $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0 x \ \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}, I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \ \mathrm{d}x = 1$, 所以

$$I_{2m} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x \ \mathrm{d}x = \frac{2m-1}{2m}\frac{2m-3}{2m-2}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\frac{\pi}{2}$$

$$I_{2m+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x \ \mathrm{d}x = \frac{2m}{2m+1}\frac{2m-2}{2m-1}\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3} = \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}$$

(2) 令 $\sin t = x$, 我们有

$I_n = \int_0^{\pi/2} t^n \cos t \ \mathrm{d}t = \left(\frac{\pi}{2}\right)^n - n(n-1)I_{n-2}$

$= \left(\frac{\pi}{2}\right)^n - n(n-1)I_{n-2} + \cdots + \begin{cases} (-1)^{n/2}\cdot n!, n \text{ 是偶数} \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}}\cdot n!, n \text{ 是奇数.} \end{cases}$

(3) $I_n = \frac{1}{a}\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \ \mathrm{d}x^a = \frac{1}{a}\left[x^a\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\Big|_0^n + \int_0^n x^a\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-1} \ \mathrm{d}x\right] = \frac{1}{a}\int_0^n x^a\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-1} \ \mathrm{d}x =$

$\frac{n-1}{a(a+1)n}\int_0^n x^{a+1}\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-1} \ \mathrm{d}x = \cdots = \frac{(n-1)(n-2)\cdots[n-(n-1)]}{a(a+1)\cdots(a+n-1)n^{n-1}}\int_0^n x^{a+n-1}\left(1-\frac{x}{n}\right)^0 \ \mathrm{d}x$

$= \frac{n!}{a(a+1)\cdots(a+n-1)\cdot n^n}\frac{x^{a+n}}{a+n}\Big|_0^n = \frac{n!n^a}{a(a+1)\cdots(a+n)}$

(4) $I_{m,n} = \int_0^1 (1-x)^n \ \mathrm{d}x^{m+1}/(m+1) = \frac{x^{m+1}}{m+1}(1-x)^n\Big|_0^1 + \frac{n}{m+1}\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^{n-1} \ \mathrm{d}x$

$= \frac{n}{m+1}I_{m+1,n-1}I_{m,n} = \frac{n}{m+1}\frac{n-1}{m+2}\cdots\frac{n-(n-1)}{m+n}I_{m+n,0}$

$= \frac{n!}{(m+1)(m+2)\cdots(m+n)}\int_0^1 x^{m+n} \ \mathrm{d}x = \frac{n!\cdot m!}{(m+n+1)!}$

郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com

3. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\dfrac{1}{n^3+1^3}+\dfrac{1}{n^3+2^3}+\cdots+\dfrac{1}{n^3+n^3}\right)$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdots x_n}\,(x_k=2+2k/n, k=0,1,2,\cdots,n)$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}}{n}$. (4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^4}\prod\limits_{i=1}^{2n}\left(n^2+i^2\right)^{1/n}$

解

(1)

$$\lim_{n\to\infty} n^2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n^3+i^3}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+(i/n)^3}\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}=\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^3}{1+x^3}\bigg|_0^1+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\bigg|_0^1$$

$$=\frac{1}{3}\left(\ln 2+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)$$

（2）取对数, 我们有

$$\ln\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdots x_n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=\sum_{i=1}^{n}\ln\left(2+\frac{2i}{n}\right)\frac{1}{n}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(\ln 2+\ln(1+i/n))\frac{1}{n}=\ln 2+\sum_{i=1}^{n}\ln(1+i/n)\frac{1}{n}$$

$$\to\ln 2+\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x=\ln 2+\ln 2-\int_0^1\frac{x\ \mathrm{d}x}{1+x}$$

$$=2\ln 2-1+\ln 2=3\ln 2-1\quad(n\to\infty)$$

从而可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdots x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\ln\sqrt[n]{x_1\cdots x_n}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{x_1\cdots x_n}}=\mathrm{e}^{3\ln 2-1}=8/\mathrm{e}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}}{n}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln(1+i/n)/n}=\mathrm{e}^{\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x}=\dfrac{4}{\mathrm{e}}$

(4) 取对数, 我们有

$$\ln\left(\prod_{i=1}^{2n}\left(n^2+i^2\right)^{1/n}/n^4\right)=\sum_{i=1}^{2n}\frac{\ln\left(n^2+i^2\right)}{n}-\ln n^4$$

$$=\sum_{i=1}^{2n}\frac{\ln n^2}{n}+\sum_{i=1}^{2n}\ln\left(1+\left(\frac{i}{n}\right)^2\right)\frac{1}{n}-\ln n^4$$

$$=2\ln n^2+\sum_{i=1}^{2n}\ln\left(1+\left(\frac{i}{n}\right)^2\right)\frac{1}{n}-\ln n^4=\sum_{i=1}^{2n}\ln\left(1+\left(\frac{i}{n}\right)^2\right)\cdot\frac{1}{n}.$$

从而可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\prod_{i=1}^{2n}\left(n^2+i^2\right)^{1/n}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(\prod\limits_{i=1}^{2n}\left(n^2+i^2\right)^{1/n}/n^4\right)}$$

$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{2n}\ln\left(1+(i/n)^2\right)/n}=\mathrm{e}^{\int_0^2\ln(1+x)^2\mathrm{d}x}=25\mathrm{e}^{2\arctan 2-4}.$$

郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com

6 定积分中值定理

定理 (定积分第一中值定理) 设 $g \in R([a, b])$, 且函数值不变号 (即对一切 $x \in [a, b], g(x) \geqslant 0$ 或 $g(x) \leqslant 0)$.

(i) 若 $f \in R([a, b])$, 且记 $M=\sup\limits_{[a . b]}\{f(x)\}, m=\inf\limits_{[a, b]}\{f(x)\}$, 则存在 $\mu: m \leqslant \mu \leqslant M$, 使得

$$
\int_a^b f(x) g(x) \mathrm{d} x=\mu \int_a^b g(x) \mathrm{d} x
$$

(ii) 若 $f \in C([a, b])$, 则存在 $\xi \in[a, b]$, 使得 $\int_a^b f(x) g(x) \mathrm{d} x=f(\xi) \int_a^b g(x) \mathrm{d} x$.

1. 证明以下结论:

(1) 设 $f(x)$ 在 [0,1] 上可导, 且有等式 $f(1)=4 \int_0^{1 / 4} \mathrm{e}^{1-x^3} f(x) \mathrm{d} x$, 则存在 $\xi \in(0,1)$, 使得 $f^{\prime}(\xi)=3 \xi^2 f(\xi)$.

(2) 设 $f \in C^{(2)}([-1,1]), f(0)=0$, 则存在 $\xi \in[-1,1]$, 使得

$$
f^{\prime \prime}(\xi)=3 \int_{-1}^1 f(x) \mathrm{d} x
$$

(3) 设 $f \in C([0, \pi])$, 且有等式

$$
\int_0^\pi f(x) \mathrm{d} x=0, \quad \int_0^\pi f(x) \cos x \mathrm{~d} x=0
$$

则存在 $\xi_1, \xi_2 \in(0, \pi)$, 使得 $f\left(\xi_1\right)=f\left(\xi_2\right)=0$.

(4) 设 $F \in C([a, b]), G(x)$ 在 $[a, b]$ 上可微 , 且 $G^{\prime}(x) \geqslant 0, G^{\prime} \in R([a, b])$, 则

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d} x} \int_a^x F(t) G^{\prime}(t) \mathrm{d} t=F(x) G^{\prime}(x)
$$

证明:

(1) 由题设知, 存在 $\xi_1 \in(0,1 / 4)$, 使得

$$
f(1)=4 \cdot \mathrm{e}^{1-\xi_1^3} f\left(\xi_1\right) \cdot \frac{1}{4}, \quad f(1)=\mathrm{e}^{1-\xi_1^3} \cdot f\left(\xi_1\right)
$$

作函数 $F(x)=\mathrm{e}^{1-x^3} f(x)$, 则 $F(1)=F\left(\xi_1\right)$. 由此知存在 $\xi \in\left(\xi_1, 1\right)$, 使得 $F^{\prime}(\xi)=$

$$
0, \text{ 即} \mathrm{e}^{1-\xi^3}\left[f^{\prime}(\xi)-3 \xi^2 f(\xi)\right]=0, f^{\prime}(\xi)=3 \xi^2 f(\xi)
$$

（2) 将 $f(x)$ 在 $x=0$ 处展成 Taylor 公式

$$
f(x)=f(0)+f^{\prime}(0) x+\frac{f^{\prime \prime}(\theta x) x^2}{2}, \quad 0<\theta<1
$$

注意到 $f(0)=0$, 以及 x 是奇函数, 我们有

$$
\int_{-1}^1 f(x) \mathrm{d} x=\frac{1}{2} \int_{-1}^1 f^{\prime \prime}(\theta x) x^2 \mathrm{~d} x
$$

假设 $M=\max \left\{f^{\prime \prime}(x):-1 \leqslant x \leqslant 1\right\}, m=\min \left\{f^{\prime \prime}(x):-1 \leqslant x \leqslant 1\right\}$, 则可得

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{2} m \int_{-1}^1 x^2 \mathrm{~d} x \leqslant \int_{-1}^1 f(x) \mathrm{d} x \leqslant \frac{1}{2} M \int_{-1}^1 x^2 \mathrm{~d} x \\
\frac{m}{3} \leqslant \int_{-1}^1 f(x) \mathrm{d} x \leqslant \frac{M}{3}, m \leqslant 3 \int_{-1}^1 f(x) \mathrm{d} x \leqslant M
\end{gathered}
$$

郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com

根据 $f''(x)$ 的近续性可知, 存在 $\xi \in [-1,1]$, 使得 $f''(\xi)=3\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$.

(3) 如果对题设两个等式直接用中值公式, 虫可得 $f(\xi')=0=f(\xi'')\cos\xi''$, 但不能保证 $\xi' \neq \xi''$ 且还有可能 $\cos\xi''=0$. 因此想到更换因子 $\cos x$, 而采用分部积分法. 令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t (0 \leqslant x \leqslant \pi)$, 则依题设可知 $F(\pi)=F(0)=0$. 由此可得

$$
\begin{aligned}
0=\int_0^\pi f(x)\cos x \, \mathrm{d}x &= \int_0^\pi \cos x \, \mathrm{d}F(x) = F(x)\cos x|_0^\pi + \int_0^\pi F(x)\sin x \, \mathrm{d}x \\
&= 0 + \int_0^\pi F(x)\sin x \, \mathrm{d}x = \pi F(\xi)\sin\xi, \quad 0<\xi<\pi
\end{aligned}
$$

由此知 $F(\xi)=0$. 这说明 $f(x)$ 的原函数 $F(x)$ 有三个零点 : $0,\xi,\pi$, 从而 $f(x)$ 就有两个不同零点.

(4) 根据积分中值公式, 我们有

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{h}\int_x^{x+h} F(t)G'(t)\mathrm{d}t = F(x+\theta h)\int_x^{x+h} G'(t)\mathrm{d}t/h \\
=&F(x+\theta h)\frac{G(x+h)-G(x)}{h} \quad (0<\theta<1),
\end{aligned}
$$

由此即得所证.

2. (中值公式推广形式) 设 $f \in R([a,b])$, 且有 $F'(x)=f(x)(a \leqslant x \leqslant b)$. 又 $g \in R([a,b])$ 且不变号 , 则存在 $\xi \in (a,b)$, 使得

$$
\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x
$$

证: 不妨假定 $g(x) \geqslant 0$ 且 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$, 以及 $m=\inf\limits_{[a,b]}\{f(x)\} \leqslant f(x) \leqslant \sup\limits_{[a,b]}\{f(x)\}=M(a \leqslant x \leqslant b)$, 则存在 μ, 使得

$$
\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \mu\int_a^b g(x)\mathrm{d}x, \quad m \leqslant \mu \leqslant M
$$

若 $m<\mu<M$, 则存在 $[a,b]$ 中的 $x_1,x_2 : x_1<x_2$,

$$
m \leqslant f(x_1)<\mu, \quad \mu<f(x_2) \leqslant M
$$

即 $F'(x_1)<\mu<F'(x_2)$. 根据导函数的介值性, 可知存在 $\xi : x_1<\xi<x_2$, 使得 $f(\xi)=F'(\xi)=\mu$ 由此即得所证.

定积分第二中值定理

定理 (Bonnet 型) 设 $g \in R([a,b])$.

(i) 若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上非负递减函数, 则存在 $\xi \in [a,b]$, 使得

$$
\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(a)\int_a^\xi g(x)\mathrm{d}x
$$

(ii) 若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上非负递增函数, 则存在 $\xi \in [a,b]$, 使得

$$
\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(b)\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x
$$

定理 (Weierstrass 型) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是单调函数 , $g \in R([a,b])$, 则存在 $\xi \in [a, \mathrm{b}]$, 使得

$$
\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(a)\int_a^\ell g(x)\mathrm{d}x + f(b)\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x
$$

3. 试证明下列不等式 $(0<a<b)$:

(1) $\left|\int_a^b \frac{\sin x}{x}\ \mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{2}{a}$;

(2) $\left|\int_a^b \sin x^2\ \mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{a}$.

(3) $\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$($f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的递增函数).

(4) $\left|\int_a^b \cos f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{2}{m}$ ($f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导 , $f'(x)$ 递减且 $f'(b)\geqslant m>0$).

证明应用 Bonnet 型中值公式, 我们有

(1) $\left|\int_a^b \frac{\sin x}{x}\ \mathrm{d}x\right| = \left|\frac{1}{a}\int_a^\xi \sin x\right| \mathrm{d}x \leqslant \frac{2}{a}$;

(2) $\left|\int_a^b \sin x^2\ \mathrm{d}x\right| = \frac{1}{2}\left|\int_{a^2}^{b^2} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t\right| = \frac{1}{2a}\left|\int_{a^2}^{\xi} \sin t\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{2}{2a} = \frac{1}{a}$.

(3) 应用 Weierstrass 型中值公式, 我们有

$$\int_a^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right) f(x)\mathrm{d}x = f(a)\int_a^\xi \left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x + f(b)\int_\xi^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=f(a)\int_a^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x + [f(b)-f(a)]\int_\xi^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=0+[f(b)-f(a)]\left\{\frac{b^2-\xi^2}{2}-\frac{a+b}{2}(b-\xi)\right\} = [f(b)-f(a)]\frac{b-\xi}{2}(b+\xi-a-b)\geqslant 0$$

证毕.

(4) 注意函数 f(x) 在 [a, b] 上非负递增, 故由 Bonnet 型第二中值定理知

$$\left|\int_a^b \cos f(x)\mathrm{d}x\right| = \left|\int_a^b \frac{f'(x)\cos f(x)}{f'(x)}\mathrm{d}x\right|$$

$$=\frac{1}{f'(b)}\left|\int_\xi^b f'(x)\cos f(x)\mathrm{d}x\right| = \frac{1}{f'(b)}|\sin f(b)-\sin f(\xi)| \leqslant \frac{2}{m}$$

郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com

7 *Stirling* 公式、*Wallis* 公式 ⋆

1. (Stirling 公式) [1]有许多课题, 特别是在统计和概率理论的计算中，常须考察 $n!$ 的渐近估计. 对此, 我们不加证明地给出等价关系

$$\boxed{n! \sim \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2n\pi} \quad (n \to \infty)} \tag{1}$$

更确切地说, 有

$$\sqrt{2n\pi} \cdot n^n \mathrm{e}^{-n} < n! < \sqrt{2n\pi} n^n \mathrm{e}^{-n} \left(1 + \frac{1}{4n}\right)$$

2. (Wallis 公式)

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2} \quad (n = 1, 2, \cdots).} \tag{2}$$

现在来证明该公式 ：由积分不等式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x \,\mathrm{d}x < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \,\mathrm{d}x < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x \,\mathrm{d}x$$

以及先例的计算可知

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$$

从而有

$$\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2} < \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2n}$$

估计上式左、右端的差, 即得

$$\begin{aligned} &\frac{\pi}{2} - \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2n+1} < \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}\right) \\ = &\left\{\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2n+1}\right\} \frac{1}{2n} < \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2n} \to 0 \quad (n \to \infty) \end{aligned}$$

即得所证.
注意以上证明用到了定积分公式（Wallis 公式）

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x \,\mathrm{d}x = \frac{(n-1)(n-3)\cdots 3 \cdot 1}{(n)(n-2)\cdots 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2}，\text{当 n 为偶数}$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x \,\mathrm{d}x = \frac{(n-1)(n-3)\cdots 4 \cdot 2}{(n)(n-2)\cdots 3 \cdot 1}\ ，\text{当 n 为奇数}$$

且有

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x \,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \,\mathrm{d}x$$

[1]带 ⋆ 部分表示内容不要求掌握

郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com

8 反常积分

定义: 设 $f:[a,\infty)\to\mathbf{R}$ 对于任何 $b>a$ 在 $[a,b]$ 上是可积的, 若极限

$$L=\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(t)dt$$

存在且有限，则称反常积分 $\int_a^\infty f(t)dt$ 收剑, 并记

$$\int_a^\infty f(t)dt=L=\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(t)dt.$$

若上述极限不存在或极限等于 $\pm\infty$, 则称反常积分发散.

定义: 设 $f:(a,b]\to\mathbf{R}$ 对于任何 $c\in(a,b)$ 在 $[c,b]$ 上是可积的, 而 f 在 a 的任何小邻域内是无界的. 若极限

$$L=\lim_{c\to a+0}\int_c^b f(t)dt$$

存在且有限, 则称反常积分收敛, 并记

$$\int_a^b f(t)dt=L=\lim_{c\to a+0}\int_c^b f(t)dt$$

若山述极限不存在或极限等于 $\pm\infty$, 则称反常积分发散. 上述两种反常积分是两种典型的反常积分. 以下的反常积分

$$\int_{-\infty}^b f(t)dt=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(t)dt$$

和

$$\int_a^b f(t)dt=\lim_{c\to b-0}\int_a^c f(t)dt$$

可以类似地处理. 应该注意，有时我们会遇到上述这四种反常积分之外的积分. 但它们往往可以通过上述这四种反常积分表示出来. 例如

$$\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-x^2}dx=\int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{-x^2}dx+\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}dx$$

又如积分

$$\int_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}dt$$

其中 $0<x<1$, 可以看成

$$\int_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}dt=\int_0^1 t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}dt+\int_1^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}dt$$

1. 考虑积分

$$\int_0^1 x^p dx$$

当 $p\geqslant 0$ 时是可积的; 当 $p<0$ 时, 它是不可积的, 因为这时被积函数在 [0,1] 上无界. 但作为反常积分, 当 $p>-1$ 时它收敛; 当 $p\leqslant -1$ 反常称分时它发散. 这是因为当 $p\neq -1$ 时有

$$\lim_{\delta\to0}\int_\delta^1 x^p dx=\lim_{\delta\to0}\frac{1-\delta^{p+1}}{p+1}=\begin{cases}1/(p+1), & 若p>-1,\\ \infty, & 若p<-1\end{cases}$$

而当 $p=-1$ 时有

$$\lim_{\delta\to0}\int_\delta^1 x^{-1}dx=\lim_{\delta\to0}(\ln1-\ln\delta)=+\infty.$$

郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com

2. 考虑积分

$$\int_1^\infty x^p dx$$

作为反常积分, 当 $p<-1$ 时它收敛; 当 $p\geqslant -1$ 时它发散. 这是因为当 $p\neq -1$ 时有

$$\lim_{\delta\to\infty}\int_1^\delta x^p dx=\lim_{\delta\to\infty}\frac{\delta^{p+1}-1}{p+1}=\begin{cases}-1/(p+1), & 若p<-1,\\ \infty, & 若p>-1\end{cases}$$

而当 $p=-1$ 时有

$$\lim_{\delta\to\infty}\int_1^\delta x^{-1}dx=\lim_{\delta\to\infty}(\ln\delta-\ln 1)=\infty.$$

由反常积分的定义和积分的分部积分公式与换元公式, 我们有

3. 反常积分的分部积分公式

设函数 F 和 G 分别是函数 f 和 g 在区间 $[a,\infty)$ 上的原函数, 又设 $\int_a^\infty fGdx$ 在 $[a,\infty)$ 上收敛, 对于任何 $b>a, gF$ 在 $[a,b]$ 上可积 , 且极限 $\lim\limits_{b\to\infty}F(b)G(b)=F(\infty)G(\infty)$ 存在, 则反常积分 $\int_a^\infty g(x)F(x)dx$ 存在, 且

$$\int_a^\infty g(x)F(x)dx=F(\infty)G(\infty)-F(a)G(a)-\int_a^\infty f(x)G(x)dx$$

证：令定积分的分部积分公式

$$\int_a^b g(x)F(x)dx=F(b)G(b)-F(a)G(a)-\int_a^b f(x)G(x)dx$$

中的 $b\to\infty$, 便可.

4. 反常积分的换元公式

设 $\phi:[\alpha,\infty)\to I$ 是可微的, 且导数 ϕ' 在 $[\alpha,\infty)$ 上连续, $f:I\to\mathbf{R}$ 在 I 上连续, $\phi(\infty)=\lim\limits_{\beta\to\infty}\phi(\beta)$ 存在, 且下式右端的反常积分收敛，则下式左端的积分或反常积分收敛, 且

$$\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\infty)}f(x)dx=\int_\alpha^\infty f\circ\phi(u)\cdot\phi'(u)du$$

证在定积分的换元公式

$$\int_\alpha^\beta f\circ\phi(u)\cdot\phi'(u)du=\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)}f(x)dx$$

中, 让 $\beta\to\infty$ 便可.

5. 证明

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}dt$$

在 $x>0$ 时收敛. 这是因为

$$\int_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}dt=\int_0^1 t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}dt+\int_1^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}dt$$

右端第一项的被积函数在 $t=0$ 附近 (当 $x<1$ 时) 无界, 但因 $t\geqslant 0$ 时,

$$\left|t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\right|\leqslant t^{x-1}$$

而反常积分

$$\int_0^1 t^{x-1}dt$$

郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com

在 $x>0$ 时是收敛散的, 反常积分

$$\int_0^1 t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}dt$$

在 $x>0$ 时收针. 又因 $t\to\infty$ 时, $t^{x-1}\mathrm{e}^{-t/2}\to 0$, 所以, 当 t 充分大时,

$$\left|t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\right|\leqslant\left|t^{x-1}\mathrm{e}^{-t/2}\right|\mathrm{e}^{-t/2}\leqslant \mathrm{e}^{-t/2}$$

而

$$\lim_{b\to\infty}\int_1^b \mathrm{e}^{-t/2}dt=\lim_{b\to\infty}\left[-2\mathrm{e}^{-t/2}\right]_1^b=2\mathrm{e}^{-1/2}$$

所以反常积分

$$\int_1^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}dt$$

定义了一个自变量为 x 的 $\Gamma(x)$ 函数. Γ 函数是瑞士数学家 Euler 首先加以认真研究的. 进一步:

$$\begin{aligned}\Gamma(x)&=\int_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}dt\\&=t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\Big|_0^\infty+\int_0^\infty(x-1)t^{x-2}\mathrm{e}^{-t}dt\\&=(x-1)\Gamma(x-1)\end{aligned}$$

这 Γ 函数的一条重要性质. 又

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}dt=-\left.\mathrm{e}^{-t}\right|_0^\infty=1$$

用数学归纳原理, 我们有: $\forall n\in\mathbb{N}$

$$\Gamma(n)=(n-1)!$$

6. 例 2.1.1 计算下列反常积分:

(1) (p -积分)$I=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$. (2) $I=\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x}{\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)^2}$.

(3) $I=\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^5}(a>1)$. (4) $I=\int_0^{+\infty}\frac{x^2\,\mathrm{d}x}{1+x^4}$.

解 (1) (i) $p\neq 1: I=\lim\limits_{A\to+\infty}\int_1^A\frac{\mathrm{d}x}{x^p}=\begin{cases}-1/(1-p), & p>1,\\+\infty, & p<1.\end{cases}$ (ii) $p=1: I=\lim\limits_{A\to+\infty}\int_1^A\frac{\mathrm{d}x}{x}=\lim\limits_{A\to+\infty}\ln A=+\infty$.

这说明 p -积分在 $p>1$ 时收敛, $p\leqslant 1$ 时发散.

(2) $\int_0^A\frac{x\mathrm{e}^{-x}}{\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^A x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}\right)=\left.\frac{x}{1+\mathrm{e}^{-x}}\right|_0^A-\int_0^A\frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^{-x}}\quad=\frac{A\mathrm{e}^A}{1+\mathrm{e}^A}-\int_0^A\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x=A-\frac{A}{1+\mathrm{e}^A}-\ln\left(1+\mathrm{e}^A\right)+\ln 2\quad=A-\frac{A}{1+\mathrm{e}^A}-A-\ln\left(1+\mathrm{e}^{-A}\right)+\ln 2$ $I=\lim\limits_{A\to+\infty}\int_0^A\frac{x\mathrm{e}^{-x}}{\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)^2}\,\mathrm{d}x=\lim\limits_{A\to+\infty}\left[-\frac{A}{1+\mathrm{e}^A}-\ln\left(1+\mathrm{e}^{-A}\right)+\ln 2\right]=\ln 2$

(3) $\int_a^A\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^s}=\left.\frac{1}{1-s}\frac{1}{(\ln x)^{-1}}\right|_a^A=\frac{1}{s-1}\left[\frac{1}{(\ln a)^{-1}}-\frac{1}{(\ln A)^{5-1}}\right]\quad(s\neq 1)$.

$s>1: I=\lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^s}=\frac{1}{s-1}\frac{1}{(\ln a)^{s-1}}$ 积分收敛

$s<1: I=\lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^s}=+\infty$, 积分发散.

 郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com

$s=1: I=\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\cdot\ln x}=\lim_{A\to+\infty}\int_a^A\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}=\lim_{A\to+\infty}\ln(\ln x)\Big|_a^A=+\infty$. (积分发散)

(4) 用替换 $x=1/t$, $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t/t^2$, 可知 $\int_0^{+\infty}\frac{x^2\,\mathrm{d}x}{1+x^4}=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^4}$. 从而我们有

$$
\begin{aligned}
I&=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1+1/x^2}{x^2+1/x^2}\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}(x-1/x)}{(x-1/x)^2+2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{x-1/x}{\sqrt{2}}\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

7. 计算下列反常积分

(1) $I=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(2x^2+1)\sqrt{1+x^2}}$

(2)$I=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{x+1}+\mathrm{e}^{3-x}}$.

(3)$I=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\left(x^2+a^2/x^2\right)}\mathrm{d}x(a>0)$.

(4) $I_n=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\left(a^2+x^2\right)^n}(a\neq 0)$.

解

(1) 令 $x=\tan t$, 我们有 $I=\int_0^{\pi/2}\frac{\sec^2 t\ \mathrm{d}t}{\left(2\tan^2 t+1\right)\sec t}=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos t\ \mathrm{d}t}{2\sin^2 t+\cos^2 t}=\frac{\pi}{4}$

(2) $I=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{3-x}\left(\mathrm{e}^{2x-2}+1\right)}=\frac{1}{\mathrm{e}^2}\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{x-1}\right)}{1+\left(\mathrm{e}^{x-1}\right)^2}=\frac{1}{\mathrm{e}^2}\frac{\pi}{4}$.

(3) 将积分区间分段, $I=\left(\int_0^{\sqrt{a}}+\int_{\sqrt{a}}^{+\infty}\right)\mathrm{e}^{-\left(x^2+a^2/x^2\right)}\mathrm{d}x\triangleq I_1+I_2$. 令 $x=a/t$, 可知 $I_1=\int_{\sqrt{a}}^{+\infty}\frac{a}{t^2}\mathrm{e}^{-\left(t^2+a^2/t^2\right)}\mathrm{d}t$. $\quad I=\int_{\sqrt{a}}^{+\infty}\left(1+\frac{a}{x^2}\right)\mathrm{e}^{-(x-a/x)^2-2a}\ \mathrm{d}x$

令 $t=x-a/x$, 有 $\mathrm{d}t=\left(1+a/x^2\right)\mathrm{d}x$, 故

$$
I=\mathrm{e}^{-2a}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-2a}
$$

（4）应用分部积分公式, 我们有

$$
\begin{aligned}
I_n&=\frac{x}{\left(a^2+x^2\right)^n}\Big|_0^{+\infty}+2n\int_0^{+\infty}\frac{x^2\ \mathrm{d}x}{\left(a^2+x^2\right)^{n+1}}\\
&=2n\int_0^{+\infty}\frac{a^2+x^2-a^2}{\left(a^2+x^2\right)^{n+1}}\ \mathrm{d}x=2nI_n-2na^2I_{n+1}
\end{aligned}
$$

从而可知 $2na^2I_{n+1}=(2n-1)I_n,(2n-2)a^2I_n=(2n-3)I_{n-1}$. 由此得到

$$
\begin{aligned}
I_n&=\frac{2n-3}{2n-2}\frac{2n-5}{2n-4}\cdots\frac{1}{2}\cdot I_1\cdot\left(\frac{1}{a^2}\right)^{n-1}\\
&=\frac{(2n-3)(2n-5)\cdots 1}{(2n-2)(2n-4)\cdots 2}\frac{1}{a^{2n-2}}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}\\
&=\frac{(2n-3)(2n-5)\cdots 1}{(2n-2)(2n-4)\cdots 2}\frac{1}{a^{2n-1}}\frac{\pi}{2}\cdot\varepsilon\quad\left(\varepsilon=\begin{cases}1, & a>0\\ -1, & a<0\end{cases}\right).
\end{aligned}
$$

8. 计算下列定积分:

(1) $I=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2 x\ \mathrm{d}x}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}(ab\neq 0)$. (2) $I=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$

(3) $I=\int_0^{\pi}\frac{x\ \mathrm{d}x}{1+\cos\alpha\cdot\sin x}(0<\alpha<\pi/2)$

郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com

解

(1) 令 $\tan x=t,\cos^2 x=1/\left(1+t^2\right),\sin^2 x=t\left(1+t^2\right)$, 我们有

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{t^2\,\mathrm{d}t}{\left(a^2t^2+b^2\right)\left(1+t^2\right)}=\int_0^{+\infty}\frac{1}{b^2-a^2}\left(\frac{b^2}{a^2t^2+b^2}-\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{b^2}{a^2\left(b^2-a^2\right)}\cdot\frac{a}{b}\arctan\frac{at}{b}\bigg|_0^{+\infty}-\frac{1}{b^2-a^2}\arctan t\bigg|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2a(a\pm b)}$$

($ab>0$ 时取”十” 号, $ab<0$ 时取 “一” 号) .

(2) $$I=8\int_0^{\pi/4}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x+\cos^4 x}=8\int_0^{\pi/4}\frac{\mathrm{d}x}{\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)^2+2\cos^2 x\sin^2 x}$$

$$=8\int_0^{\pi/4}\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2(2x)+\frac{1}{2}\sin^2(2x)}=4\int_0^{\pi/4}\frac{\mathrm{d}\tan(2x)}{1+\tan^2(2x)/2}$$

$$\xlongequal{t=\tan(2x)}4\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2/2}=2\pi\sqrt{2}$$

(3) 令 $x=\pi-\theta$, 我们有

$$I=\int_0^{\pi}\frac{\pi-\theta}{1+\cos\alpha\cdot\sin\theta}\mathrm{d}\theta=\pi\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+\cos\alpha\cdot\sin\theta}-I.$$

$$2I=\pi\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+\cos\alpha\cdot\sin\theta}\xlongequal{\tan\frac{\theta}{2}=t}2\pi\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+2t\cdot\cos\alpha+t^2}$$

$$=2\pi\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(t+\cos\alpha)^2+1-\cos^2\alpha}$$

$$=\frac{2\pi}{\sin\alpha}\arctan\left(\frac{t+\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\bigg|_0^{+\infty}=\frac{2\pi}{\sin\alpha}\left[\frac{\pi}{2}-\arctan(\cot\alpha)\right]$$

$$=\frac{2\pi}{\sin\alpha}\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]=\frac{2\pi\alpha}{\sin\alpha},\quad I=\frac{\pi\alpha}{\sin\alpha}.$$

9. 积分收敛与发散的判别法

(一）非负函数积分敛散性的比较判别法

比较判别法主要针对非负函数而言的, 下面以 $[a,+\infty)$ 为例论述判别法则，对 $(-\infty,b]$ 的情形也有相应的结果.

定理 (有界性定理）非负函数 $f(x)$ 的积分 $I=\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的必要充分条件是: 存在正数 M, 使得对任意的 $A:A>a$, 均有 $\int_a^{A}f(x)\mathrm{d}x\leqslant M$.

定理 (函数间大小比较法）设有定义在 $[a,+\infty)$ 上的两个非负函数 $f(x),g(x)$, 它们满足 $0\leqslant f(x)\leqslant g(x),x\in[a,+\infty)$. (i) 若 $\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$ 收玫, 则 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛; (ii) 若 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 发散, 则 $\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$ 发散.

定理 (比较判别法的极限形式）对于非负函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上的积分, 若存在 $g(x)>0,x\in[a,+\infty)$, 且存在极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l$, 则

当 $l>0$ 时, 积分 $I=\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 与 $J=\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$ 同敛散.

若 $l=0,J$ 收敛，则 I 收敛;

若 $l=+\infty,J$ 发散 ,I 发散.

推论在上述定理中, 取 $g(x)=x^{-p}$, 且存在极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^pf(x)=l>0$, 则积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛当且仅当 $p>1$.

郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com

9 定积分几何应用举例

1. 参加教材内容。

郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com