一元函数微分学—习题讲义

郭凡荣 *

2021 年 3 月 16 日

目录

*Email：jaccoobo@163.com

第一部分　一元函数微分学主要内容

1. 导数的各种计算方法
   (1) 定义法求导
   (2) 四则运算法则求导
   (3) 复合函数求导 (对数求导、幂指函数求导)
   (4) 参数方程求导
   (5) 隐函数求导
   (6) 高阶导数
   (7) 其他 (见6)
2. 微分学的三大中值定理：罗尔定理、拉格朗日中值定理、柯西中值定理
3. 导数应用
   (1) 利用函数的一阶导数研究函数的单调性问题
   (2) 利用函数的一阶导数和二阶导数研究函数的极值问题
   (3) 利用函数的二阶导数研究函数的凹凸性问题
4. 求不定型函数极限的洛必达法则
5. 函数作图的一般方法
6. 注记
   (1) 函数项级数的逐项求导

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x).$$

   (2) 参变量积分的求导:

$$\psi'(u) = \left(\int_{a(u)}^{b(u)} f(x,u)\mathrm{d}x\right)' = \int_{a(u)}^{b(u)} f_u'(x,u)\mathrm{d}x + f(b(u),u)b'(u) - f(a(u),u)a'(u)$$

   (3) 无穷积分对参变量求导:

$$\varphi'(u) = \left(\int_{a}^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\right)' = \int_{a}^{+\infty} f_u'(x,u)\mathrm{d}x$$

郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com

1 导数定义

定义1.1 导数

设函数 $y=f(x)$ 在 $U\left(x_0\right)$ 上定义, 考虑自变量在 $U\left(x_0\right)$ 内的一个变动, x_0 变到 x, 并估计差 $f(x)-f\left(x_0\right)$ 与 $x-x_0$ 的比值 (商)

$$\frac{f(x)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}$$

若在 $x \rightarrow x_0$ 时, 此比值的极限存在, 则称 $f(x)$ (关于变量 x) 在点 x_0 处可时, 而此极限值称为 $f(x)$ (关于变量 x) 在点 x_0 处的导数, 并记为 $f'\left(x_0\right)$:

$$f'\left(x_0\right) \triangleq \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}$$

$f(x)$ 在点 x_0 处可导也称为导数 $f'\left(x_0\right)$ 存在. 若在导数的定义中, 记 $x-x_0=h$ (可正可负), 则极限 $x \rightarrow x_0$ 就转化为 $h \rightarrow 0$, 从而有

$$f'\left(x_0\right)=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)}{h}$$

这样, 对于讨论函数在点 x 上的导数, 记法上就清晰多了:

$$f'(x)=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

为了方便起见, 我们有时也用记号 y_x' 或 y'; $[f(x)]_x'$ 或 $[\ f(x)]'$ 表示 $y=f(x)$ 在点 x 处的导数. 若比值

$$\frac{f(x)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}$$

定义1.2 单侧导数

当 $x \rightarrow x_0+$ 时极限存在, 则称 $f(x)$ 在点 x_0 处的右导数存在, 并称此极限值为 $f(x)$ 在点 x_0 处的右导数, 记为 $f_+'\left(x_0\right)$:

$$f_+'\left(x_0\right) \triangleq \lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f(x)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}$$

类似地可理解左导数 $f'-\left(x_0\right)$:

$$f'-\left(x_0\right) \triangleq \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}$$

显然, 关于右 (左) 导数 $f_+'\left(x_0\right)\left(f_-'\left(x_0\right)\right)$, 只要求函数在点 x_0 的右 (左) 半邻域有定义即可. 此外, 可知 $f'\left(x_0\right)$ 存在当且仅当 $f'+\left(x_0\right)$ 和 $f'-\left(x_0\right)$ 存在且相等.

上述算式中的 h 用来描述自变量改变的大小, 为了能明确地表示变量 x 的改变, 更常用的记法是用 Δx 表示, 称为 x 的改变量或增量, 而随之引起的函数值的改变记为 $\Delta y=f(x+\Delta x)\ f(x)$, 称为函数的改变量. 从而差商就成为改变量之比

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$h \rightarrow 0$ 转化为 $\Delta x \rightarrow 0$. 而函数在点 x 处的导数成为

$$f'(x)=\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

即改变量之比的极限, 且其极限值也记为 $\frac{\mathrm{d} y}{\mathrm{~d} x}$, 即[1]

$$\frac{\mathrm{d} y}{\mathrm{~d} x}=\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

[1] 若 $f'\left(x_0\right)$ 存在, 则 $\lim\limits_{n \rightarrow \infty}\left[f\left(x_0+1 / n\right)-f\left(x_0\right)\right]=f'\left(x_0\right)$, 但反之不然 (例如 $f(x)=x(x \in \mathbf{Q}), f(x)=0(x \bar{\in} \mathbf{Q})$)

郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com

定理1.1 $f(x)$ x_0 可导 $\Leftrightarrow f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$.

定义1.3 函数在区间上可导

1) $f(x)$ 定义在 $(a,b), \forall x_0\in(a,b), f'(x_0)$ 存在, 则称 $f(x)$ 在 (a,b) 上可导.

2) 若 $f(x)$ 在 (a,b) 上可导, 且在 a,b 点单侧导数存在, 则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导.

定理1.2 若 $f'(x_0)$ 存在, 则 $f(x)$ 在点 x_0 必连续 (反之不真).

证 根据等式

$$\begin{aligned}&\lim_{\Delta x\to 0}\left[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\right]\\ =&\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\cdot\Delta x\right]=f'(x_0)\cdot 0=0\end{aligned}$$

可知, $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

1. 证明下列各题

(1) 设 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 的邻域 $U(x_0)$ 上恒等于一个常数 c, 则 $f'(x_0)=0$.

(2) 设 $f(x)=|x|$, 则 $f(x)$ 在 $x\neq 0$ 处可导，且 $f'(x_0)=x/|x|$.

(3) 函数 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$ ，在 $x=0$ 处的导数为 0.

(4) 函数 $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$, 在点 $x=0$ 处不可导.

证明 (1) 因为我们有

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{c-c}{x-x_0}=0,\quad x\in U(x_0)\ 且 x\neq x_0$$

所以当 $x\to x_0$ 时，上式左端的极限值也为 0. 即 $f'(x_0)=0$.

(2) 对 $x_0>0$, 我们有

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{x-x_0}=1$$

类似地可知, 对 $x_0<0$ 有 $f'(x_0)=-1$. 这说明曲线 $y=|x|$ 在 $x\neq 0$ 时有切线 $y=x(x>0); y=-x(x<0)$. 总之 , 当 $x\neq 0$ 时, $(|x|)'=\dfrac{x}{|x|}\left(\text{ 或 }\dfrac{|x|}{x}\right)$.

对 $x_0=0$, 因为

$$\begin{aligned}f'+(0)&=\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{x-0}{x}=1\\ f'_-(0)&=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{-x-0}{x}=-1\end{aligned}$$

$f'+(0)\neq f'-(0)$. 这说明在点 $x=0$ 处导数不存在, 或说曲线在点 $x=0$ 处无切线. 这从几何上看十分明显, 曲线 $y=|x|$ 的图形在点 $x=0$ 处有一个角点. 在这里, 我们见到了导数不存在的一种几何形象.

(3) 只需注意

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$$

(4) 因为

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{x\sin\frac{1}{x}-0}{x}=\sin\frac{1}{x}$$

而当 $x\to 0$ 时 ,$\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在极限, 所以 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处不可导.

郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com

2. 证明下列各题

(1) 设定义在 $(-\infty,\infty)$ 上的 $g(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导. 又令 $f(x)=g\left(x_0+bx\right)-g\left(x_0-bx\right)$, 试求 $f'(0)$.

(2) 设 $f(x),g(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 且有

$$f(0)=g'(0)=0,\quad g(0)=f'(0)=1$$

若对 $x\in U(0)$ 有关系

$$f(x+h)=f(x)g(h)+f(h)g(x)$$

试证明 $f'(x)=g(x),x\in U(0)$.

(3) 设 $f'(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上存在且是连续函数 (简记为 $f\in C([0,\infty))$). 则存在导数 a,β, 使得函数

$$g(x)=\begin{cases}\alpha f(-x)+\beta f(-2x), & x<0\\ f(x), & x\geqslant 0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处可导.

解 (1) 我们有

$$\begin{aligned}f'(0)&=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{g\left(x_0+bx\right)-g\left(x_0-bx\right)}{x}\\&=b\lim_{x\to 0}\frac{g\left(x_0+bx\right)-g\left(x_0\right)}{bx}+b\lim_{x\to 0}\frac{g\left(x_0-bx\right)-g\left(x_0\right)}{-bx}\\&=bg'\left(x_0\right)+bg'\left(x_0\right)=2bg'\left(x_0\right).\end{aligned}$$

(2) 我们有

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)g(h)+f(h)g(x)-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}f(x)\frac{g(h)-g(0)}{h}+\lim_{h\to 0}g(x)\frac{f(h)-f(0)}{h}\\&=f(x)g'(0)+g(x)f'(0)=g(x)\end{aligned}$$

(3) 为使 $g(x)$ 在 $x=0$ 处可导，$g(x)$ 必须在 $x=0$ 处连续, 故应有

$$\lim_{x\to 0-}g(x)=\lim_{x\to 0-}[\alpha f(-x)+\beta f(-2x)]=g(0)=f(0)$$

$$\alpha f(0)+\beta f(0)=f(0),\quad \alpha+\beta=1.\quad (\text{设}f(0)\neq 0)$$

又由 $g'_{-}(0)=g'_{+}(0)$, 可知

$$-\alpha f'(0)-2\beta f'(0)=f'(0),\quad \alpha+2\beta=-1$$

从而解出得 $\alpha=3,\beta=-2$.

郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com

2 基本初等函数的导数

1. 基本初等函数的导数公式

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
c (常数)	0	x^a	αx^{a-1}
$\sin x$	$\cos x$	$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\sec^2 x$	$\cot x$	$-\csc^2 x$
$\sec x$	$\sec x\cdot\tan x$	$\csc x$	$-\csc x\cdot\cot x$
e^x	e^x	a^x	$a^x\ln a$
$\ln x$	$1/x$	$\log_a x$	$\frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

定理2.1 (导数的四则运算法则) 设 $u(x), v(x)$ 在点 x 处导数存在, 我们有

(1) $y=u(x)\pm v(x)$ 在点 x 处导数存在, 且有 $[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$;

(2) $y=u(x)v(x)$ 在点 x 处时数存在, 且有 $[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$;

(3) 若 $v(x)\neq 0$, 则 $y=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ 在点 x 处导数存在, 且有 $\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]'=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$.

定理2.2 (复合函数求导公式）设函数 $y=F(x)$ 可视为两个函数 $y=f(u)$ 与 $u=g(x)$ 的夏合函数:

$$F(x)=f[g(x)]$$

其中 $u=g(x)$ 在点 x_0 处可导, $y=f(u)$ 在点 $u_0=g(x_0)$ 处可导, 则 $y=F(x)$ 在点 x_0 处可导, 且有 $F'(x_0)=f'(u_0)g'(x_0)=f'[g(x_0)]g'(x_0)$ 一般情况下，也写为

$$(f[g(x)])'=f'[g(x)]\cdot g'(x),\quad \text{或}\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right|_{u=g(x)}.$$

定理2.3 (反函数求导法则）设 $y=f(x)$ 是 $U(x_0)$ 上的严格单调函数, 其反函数记为 $x=f^{-1}(y)$. 若 $f(x)$ 在点 x_0 处口导, 且 $f'(x_0)\neq 0$, 则 $f^{-1}(y)$ 在 $y_0=f(x_0)$ 处可导, 且有

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}=\frac{1}{f'[f^{-1}(y_0)]}$$

注 1 (i) $f(x)=x^2$ 在 (-1,1) 上不是单调函数, 但 $f'(x)=2x$ 是单调函数; $f(x)=x+\sin x$ 在 $(0,\infty)$ 上是单调函数, 但 $f'(x)=1+\cos x$ 不是单调的. (ii) $f(x)=x$ 不是周期函数, 但 $f'(x)=1$ 是周期函数; 若可导函数 $f(x)=x$ 是可导的偶 (奇) 函数, 则 $f'(x)$ 是奇 (偶) 函数.

注 2 $f(x)=g(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处均不可导, 但 $h(x)=f(x)\quad g(x)=x^2$ 在 $x=0$ 处可导.

注 3 $f(x)=|x-1||x-2||x-3|$ 在 $x=1,2,3$ 处均不可导.

注 4 $f(x)=x^2\left|\cos\dfrac{\pi}{x}\right|$ 在 $x=0$ 处可导，但在 $(-\delta,\delta)(\delta>0)$ 内有无穷多个不可导点 $(x_n=2/(2n+1), n=1,2,\cdots)$

注 5 关于复合函数的导数, 我们有

(i) $f(x)=x^2, g(x)=|x|$, 则存在 $f'[g(0)]$, 但 $g'(0)$ 不存在. (ii) $f(x)=|x|, g(x)=x^2$, 则 $f'[g(x_0)]$ 不存在, 但 $g'(0)$ 存在. (iii) $f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$ $g(x)=|x|$, 则 $f'[g(0)]$ 与 $g'(0)$ 均不存在.

注 6 $f(x)=|x|^{2/3}$, 则 $f(x), f^2(x)$ 在 $x=0$ 处不可导, $f^3(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com

2. 试求下列函数 $y=f(x)$ 的导数 $y'\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$：

(1) 设 $y=\dfrac{1+x^2}{\sqrt[3]{x^4}\cdot\sin^7 x}, x\neq n\pi, n\in\mathbf{Z}$

(2) $y=\ln^2\left(\sec\left(2^{\sqrt{x}}\right)\right)$

(3) $y=x+x^x+x^{x^x}$.

(4) $f(x)>0$ 且存在 $f'(x), g'(x), y=f(x)^{g(x)}$

解 (1) 令 $z=\ln|y|$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$. 因为有

$$z=\ln\left(1+x^2\right)-\frac{4}{3}\ln|x|-7\ln|\sin x|$$

得 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\dfrac{2x}{1+x^2}-\dfrac{4}{3x}-\dfrac{7\cos x}{\sin x}$. 从而可知

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1+x^2}{\sqrt[3]{x^4}\cdot\sin^7 x}\left(\frac{2x}{1+x^2}-\frac{4}{3x}-\frac{7\cos x}{\sin x}\right)$$

(2) $y'=\dfrac{\ln 2}{3}\left(\sec\left(2^{\sqrt[3]{x}}\right)\right)\tan 2^{3x}\dfrac{2^{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}$

(3) $y'=1+x^x(\ln x+1)+x^{x^x}\left[x^{x-1}+x^x(1+\ln x)\ln x\right]$

(4) 因为原式可写为 $y=\mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}$, 所以有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}&=\mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[g(x)\ln f(x)]\\&=f(x)^{g(x)}\left[g'(x)\ln f(x)+\frac{g(x)}{f(x)}f'(x)\right]\end{aligned}$$

注意：

(1) 视 $g(x)$ 为常数 , $f(x)^{g(x)}$ 为幂函数, 则其导数为 $g(x)f(x)^{g(x)-1}f'(x)$.

(2) 视 $f(x)$ 为常数 , $f(x)^{g(x)}$ 为指数函数, 则其导数为 $f(x)^{g(x)}\ln f(x)g'(x)$.

3. 解答下列问题:

(1) 设 $f(x)=|\ln|x||$, 试求 $f'(x)(x\neq 0)$.

(2) 设 $f(x)$ 在 $U\left(x_0\right)$ 上定义, 且 $f\left(x_0\right)=0$, 试证明 $F(x)=|f(x)|$ 在 $x=x_0$ 处可导的充分必要条件是 $f'\left(x_0\right)=0$.

(3) 设 $f'\left(x_0\right), g'\left(x_0\right)$ 存在, 且 $g\left(x_0\right)=0, g'\left(x_0\right)\neq 0$, 试证明 $F(x)=f(x).\ g(x)\mid$ 在 $x=x_0$ 处可导的充分必要条件是 $f\left(x_0\right)=0$.

解 (1) 运用复合函数求导法 ($(|x|)'=x/|x|$), 我们有

$$f'(x)=\frac{\ln|x|}{|\ln|x||}\frac{1}{|x|}\frac{|x|}{x}=\frac{\ln|x|}{|\ln|x||}\frac{1}{x}\quad(x\neq 0)$$

(2) (i) 若 $f'\left(x_0\right)=0$, 则

$$\begin{aligned}F_{+}'\left(x_0\right)&=\lim_{x\to x_0+}\frac{F(x)-F\left(x_0\right)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0+}\frac{|f(x)|-\left|f\left(x_0\right)\right|}{x-x_0}\\&=\lim_{x\to x_0+}\frac{|f(x)|}{\left|x-x_0\right|}=\lim_{x\to x_0+}\left|\frac{f(x)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}\right|=\left|f'\left(x_0\right)\right|=0\end{aligned}$$

$$F_{-}'\left(x_0\right)=-\lim_{x\to x_0-}\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|=-\left|f'\left(x_0\right)\right|=0$$

由此知 $F(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导, 且 $F'\left(x_0\right)=0$.

(ii) 若 $F'\left(x_0\right)$ 存在, 则

$$\lim_{x\to x_0+}\left|\frac{f(x)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}\right|=\lim_{x\to x_0+}\frac{|f(x)|-\left|f\left(x_0\right)\right|}{x-x_0}=F'\left(x_0\right),$$

$$\lim_{x\to x_0}\left|\frac{f(x)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}\right|=\lim_{x\to x_0-}\frac{|f(x)|-\left|f\left(x_0\right)\right|}{x-x_0}=F'\left(x_0\right).$$

郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com

因此知 $f_{+}'(x_0)=f_{-}'(x_0)=0$, 即 $f'(x_0)=0$.

(3) 注意到等式

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)|g(x)|}{x-x_0}$$

$$=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}|g(x)|+\frac{|g(x)|-|g(x_0)|}{x-x_0}f(x_0),$$

以及 $|g(x)|$ 在 $x=x_0$ 处不可导 (见 (2)), 故得所证.

4. 试求下列极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}-x\right)$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1-\cos 2x)-f(0)}{(\tan x)^2}$ (已知 $f'(0)$ 存在).

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{xf(x_0)-x_0f(x)}{x-x_0}$ (已知 $f'(x_0)$ 存在).

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^n$ (已知$f'(a)$ 存在且$f(a)\neq 0$).

解 (1) 令 $x=\sqrt{t}$, 则我们有

$$\text{原式}=\lim_{n\to 0}\frac{\sqrt{t+1/n}-\sqrt{t}}{1/n}=(\sqrt{t})'=\frac{1}{2\sqrt{t}}=\frac{1}{2x}\quad(x\neq 0)$$

(2) $\text{原式}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1-\cos 2x)-f(0)}{1-\cos 2x}\frac{2\sin^2 x}{x^2}\frac{x^2}{(\tan x)^2}=2f'(0).$

(3) $\text{原式}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{xf(x_0)-xf(x)+xf(x)-x_0f(x)}{x-x_0}$

$$=\lim_{x\to x_0}\left[-x\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+f(x)\right]=f(x_0)-x_0f'(x_0)$$

(4) 首先，将此数列极限转换成连续变量的函数极限，即考察 $\lim\left[\frac{f(a+x)}{f(a)}\right]^{\frac{1}{x}}$ · 由于在 $|x|$ 充分小时, 有 $\frac{f(a+x)}{f(a)}>0$, 故可先取对数, 即得

$$\ln\left[\frac{f(a+x)}{f(a)}\right]^{1/x}=\frac{\ln|f(a+x)|-\ln|f(a)|}{x}$$

最后令 $x\to 0$, 上式极限可视为 $\ln|f(x)|$ 在 $x=a$ 处的导数, 故有

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f(a+1/n)}{f(a)}\right]^n=\mathrm{e}_{x\to 0}\lim\frac{\ln|f(a+x)|-\ln|f(a)|}{x}=\mathrm{e}^{f'(a)/f(a)}$$

5. 求下列函数 $y=f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(y)$ 在指定点处的导数.

(1) $y=2x-\cos(x/2), y_0=-1/2$. (2) $y=2x^2-x^4(0<x<1), y_0=3/4$

解 (1) 由方程一 $1/2=2x-\cos(x/2)$ 可知, 它有唯一解 $x_0=0$. 从而我们有

$$\left[f^{-1}(y)\right]'_{y_0=-1/2}=\left.\frac{1}{2+\sin(x/2)/2}\right|_{x_0=0}=1/2$$

(2) 方程 $3/4=2x^2-x^4$ 在 $0<x<1$ 中有唯一解 $x_0=1/\sqrt{2}$, 从而我们有

$$\left[f^{-1}(y)\right]'_{y_0=3/4}=\left.\frac{1}{4x-4x^3}\right|_{x_0=1/\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

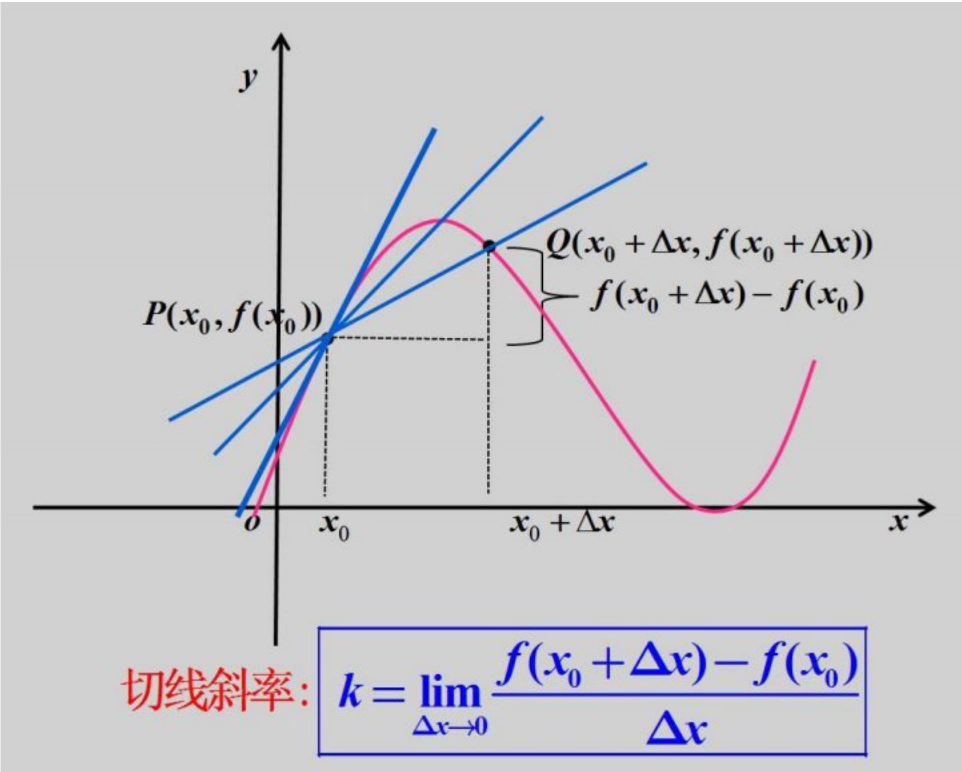
 郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com

3 导数的几何意义

1. 导数的几何意义

设 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导, 则曲线 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有切线存在, 切线斜率就是 $f'(x_0)$, 切线方程为 $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0,\quad y_0=f(x_0)$. 法线方程为 $y=\dfrac{-1}{f'(x_0)}(x-x_0)+y_0$.

(若 $f'(x_0)=\infty$, 则表示曲线 $y=f(x_0)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处有垂直切线, 若 $f'(x_0)=0$, 则为水平切线.)



2. 解答下列问题:

(1) 求曲线 $y=3x^3+14x^2+3x+8$ 上的点, 使其上之切线通过原点.

(2) 求曲线 $y=x^3-3x^2+2$ 上的点, 使其上之切线平行于直线 $y=9x+4$.

(3) 求曲线 $y=x^2$ 与曲线 $y=1/x$ 之公切线.

解 (1) 曲线上点 (x_0,y_0) 满足 $y_0=3x_0^3+14x_0^2+3x_0+8$, 且在该点处的切线方程为

$$y=\left(9x_0^2+28x_0+3\right)(x-x_0)+y_0$$

由于切线过原点, 故可知

$$y_0=9x_0^3+28x_0^2+3x_0$$

从而我们有 $3x_0^3+7x_0^2-4=0$, 即

$$(x_0+1)\left(3x_0^2+4x_0-4\right)=0$$

最后求得曲线上的点为 (-1,16),(2/3,154/9), 以及 (一 2,34).

(2) 曲线上点 (x_0,y_0) 应满足

$$y_0=x_0^3-3x_0^2+2$$

而在该点处的切线斜率为 $3x_0^2-6x_0$, 故依题设应有 $9=3x_0^2-6x_0$. 由此知 $x_0=3$, -1, 从而求得之点为 (3,2),(-1,-2) .

郭凡荣 Email: jaccoobo@163.com

(3) 两曲线上点 $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ 应满足

$$y_0 = x_0^2, \quad y_1 = 1/x_1$$

因为其切线斜率相同, 所以有 $2x_0 = -1/x_1^2$. 另一方面, 两曲线之切线各为

$$y - x_0^2 = 2x_0 (x - x_0), \quad y - \frac{1}{x_1} = -\frac{1}{x_1^2} (x - x_1)$$

得

$$\frac{1}{x_1} - x_0^2 = 2x_0 (x_1 - x_0)$$

又由 x_0 与 x_1 之关系可知 $1/x_1 + \left(1/2x_1^2\right)^2 = -1/x_1$. 从而得出 $x_1^3 = -1/8$, 即 $x_1 = -1/2$, 故 $x_0 = -2$. 因为曲线 $y = x^2$ 在 $x_0 = -2$ 处的切线斜率为 $-4, y_0 = 4$, 所以公切线是 $y = -4x - 4$.

3. 设有曲线 $y = f(x) = \dfrac{1}{1+x^n}$, 记其在点 $(1, 1/2)$ 处的切线与 x 轴之交点为 $(x_n, 0)$, 试求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

解因为 $f'(1) = -n/4$, 所以过点 $(1, 1/2)$ 之切线方程为 $y - 1/2 = -n(x - 1)/4$. 从而它与 x 轴之交点的横坐标 x_n 满足

$$-\frac{1}{2} = -\frac{n}{4} (x_n - 1), \quad x_n - 1 = \frac{2}{n}$$

故得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com

4 参数方程求导与隐函数求导法

4.1 参数方程求导法则

设有 x 的函数 $y=f(x)$ 由参数式方程 $\left\{\begin{array}{l}x=\varphi(t), \\ y=\psi(t),\end{array}\right.$ $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ 给出 ,$\varphi'(t)$ 及 $\psi'(t)$ 存在, 且 $x=\varphi(t)$ 存在反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$, 反函数可导又不为雯. 从而 y 通过中间变显 t 可表示为 x 的复合函数. 根据复合函数求导公式可知

$$\frac{\mathrm{d} y}{\mathrm{~d} x}=\frac{\mathrm{d} y}{\mathrm{~d} t} \cdot \frac{\mathrm{d} t}{\mathrm{~d} x}=\psi'(t) \cdot\left(\varphi^{-1}(x)\right)'$$

而 $\left(\varphi^{-1}(x)\right)'=\dfrac{1}{\varphi'(t)}\left(t=\varphi^{-1}(x)\right)$, 故我们有

$$\frac{\mathrm{d} y}{\mathrm{~d} x}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \quad\left(t=\varphi^{-1}(x)\right)$$

1. 求旋轮线 $\left\{\begin{array}{l}x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t),\end{array}\right.$ $0 \leqslant t \leqslant 2\pi, a>0$ 的 y_x'. 解因为 $x_t'=a(1-\cos t), y_t'=a \sin t$, 所以得

$$\frac{\mathrm{d} y}{\mathrm{~d} x}=\frac{a \sin t}{a(1-\cos t)}=\cot \frac{t}{2}$$

2. 解答下列问题

(1) 设 $y=y(x)$ 由参数方程 $\left\{\begin{array}{l}x=t^2+2t, \\ y=\ln(1+t)\end{array}\right.$ 确定, 试求此曲线在 $x=3$ 处的法线方程.

(2) 设函数 $y=f(x)$ 的动点坐标 (x, y) 在极坐标 (r, θ) 中表示为

$$r=a(1+\cos \theta), \quad \theta \in(0,2\pi/3),$$

试求 $f'(x)$.

解 1) 由题设知 $3=t^2+2t$, 故有

$$t^2+2t-3=(t+3)(t-1)=0$$

即 $x=3$ 相应于 $t=1(t=-3$ 不合理), 且此时 $y=\ln(1+1)=\ln 2$.

(2) 应用 (x, y) 与 (r, θ) 之关系, 我们有

$$\left\{\begin{array}{l}x=r \cos \theta=a(1+\cos \theta) \cos \theta \\ y=r \sin \theta=a(1+\cos \theta) \sin \theta\end{array}\right.$$

由此可知

$$\frac{\mathrm{d} y}{\mathrm{~d} x}=\frac{\mathrm{d} y}{\mathrm{~d} \theta} / \frac{\mathrm{d} x}{\mathrm{~d} \theta}=-\cot\left(\frac{3 \theta}{2}\right)$$

郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com

4.2 隐函数求导法则

1. 设有函数方程 $y-\varepsilon\sin y=x(0\leqslant\varepsilon<1)$, 试求 $y'(x)$.

解 (i) 若对一个 x 值, 对应两个值 y_1,y_2, 则有

$y_1-y_2=\varepsilon\left(\sin y_1-\sin y_2\right)=2\varepsilon\cdot\sin\dfrac{y_1-y_2}{2}\cdot\cos\dfrac{y_1-y_2}{2}$

从而得 $|y_1-y_2|\leqslant 2\varepsilon\cdot\left|\left(y_1-y_2\right)/2\right|=\varepsilon\left|y_1-y_2\right|$, 矛盾. 这说明该方程确定了一个隐函数 $y(x)$.

(ii) 因为 $x'(y)=1-\varepsilon\cos y$, 所以 $y'(x)=1/(1-\varepsilon\cos y)$

2. 求下列方程确定的隐函数 $y(x)$ 的的导数 $y'(x)$

(1) $y^2+2\ln y=x^4$.

(2) $x^y=y^x(x>0,y>0)$

(3) $x^2-4xy+4y^2+4x-3y-7=0(x<2y-1)$.

解 (1) 视 y 为 x 的 (隐) 函数, 在公式两端对 x 求导, 得 $2yy'+\dfrac{2}{y}y'=4x^3$. 由此得 $y'=\dfrac{4x^3}{2y+\frac{2}{y}}=\dfrac{2x^3y}{1+y^2}$

(2) 首先将原式转换形式 (取对数), 得 $y\ln x=x\ln y$. 其次, 在上式两端对 x 求导, 可知 $y'\ln x+\dfrac{y}{x}=\ln y+\dfrac{x}{y}y'$. 由此知

$$y'(x)=\frac{\ln y-\frac{y}{x}}{\ln x-\frac{x}{y}}=\frac{y(x\ln y-y)}{x(y\ln x-x)}$$

(3) 在方程的两端对 x 求导，我们有

$$y'(8y-4x-3)=4y-2x-4$$

注意到 $x<2y-1$, 故得

$$y'(x)=(4y-2x-4)/(8y-4x-3)$$

3. 设 $y=y(x)$ 是由方程 $\left(x^2+y^2\right)^2=3x^2y-y^3$ 确定的隐函数 (严格的说, $y(x)$ 并不是一般意义上的单值函数), 求在 $x=0,y=0$ 处的 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解 引入参变量 $t:y=tx$, 则代人原方程后可得

$$x=\frac{3t-t^3}{\left(1+t^2\right)^2},\quad y=\frac{3t^2-t^4}{\left(1+t^2\right)^2}$$

从而知道

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\left(1+t^2\right)\left(6t-4t^3\right)-4t\left(3t^2-t^4\right)}{\left(1+t^2\right)\left(3-3t^2\right)-4t\left(3t-t^3\right)}$$

注意到 $x=0,y=0$ 相当于 $t=0,\sqrt{3},-\sqrt{3}$, 因此有

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}=0,\quad \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\sqrt{3}}=\sqrt{3},\quad \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\sqrt{3}}=-\sqrt{3}.$$

5 微分

5.1 微分的概念

定义5.1 微分设 $y=f(x)$ 定义在 $U(x_0)$ 上, 若对 x 的改变量 $\Delta x=x-x_0$, 函数 y 的改变量 Δy 可以写成 $\Delta y\left(=f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)\right)=A\cdot\Delta x+\alpha\cdot\Delta x$ 其中 A 是常数 ,$\alpha=o(1)(\Delta x\rightarrow 0)$, 则称 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可微, 式中 $A\cdot\Delta x$ 称为 $y=f(x)$ 的微分 (线性主部) , 记为 $\mathrm{d}y$.

定理5.1 函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可微的充要条件是 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导. 此时 $A=f'\left(x_0\right)$. 且记 $\mathrm{d}x=\Delta x$, 则有

$$\mathrm{d}y=f'\left(x_0\right)\mathrm{d}x,\quad \Delta y=f'\left(x_0\right)\Delta x+\alpha\cdot\Delta x,\quad \alpha=o(1)\quad(\Delta x\rightarrow 0)$$

1. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 且有 $\lim\limits_{x\rightarrow 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可

微, 且 $f'(0)=A$. 证明 由题设知 $\dfrac{f(x)}{x}-A=o(1)(x\rightarrow 0)$. 从而有

$$f(x)=Ax+o(x)\quad(x\rightarrow 0)$$

由此可得 $\lim\limits_{x\rightarrow 0}f(x)=0$. 根据连续性, 我们有 $f(0)=0$. 上式可改写为 $f(x)-f(0)=Ax+o(x)(x\rightarrow 0)$. 即得所证.

注设有函数 $f(x)$, 假定 $f\left(x_0\right)$ 的值易被算出, 且 $f'\left(x_0\right)$ 存在, 则由 $\Delta y=f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)\approx\mathrm{d}y=f'\left(x_0\right)\Delta x$ 可知 $f\left(x_0+\Delta x\right)\approx f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\Delta x$ 其中值 $|\Delta x|$ 较小.

2. $\sqrt{3.98}=\sqrt{4-0.02}\approx\sqrt{4}+\left.(\sqrt{x})'\right|_{x=4}\cdot(-0.02)$
$=\sqrt{4}-\dfrac{0.02}{2\sqrt{4}}=1.995$

如上所述, 我们对函数的导数概念的认识达到了一个新的高度, 即 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 作为函数 $y=f(x)$ 的导数, 原先只是一个表示符号, 现在有了微分概念以后, 导数可以当作两个微分 $\mathrm{d}y$ 与 $\mathrm{d}x$ 的商, 即分数来处理了. 这就是导数称作微商的理由, 而求函数的导数与求它的微分也就统一了 (求导运算也称为微分法). 由于微分 $\mathrm{d}y$ 与导数 $y'=f'(x)$ 只差一个因子 $\mathrm{d}x$, 故基本初等函数的微分公式可直接得出.

3. 关于可微函数 $u(x)$ 与 $v(x)$ 的四则运算, 其微分关系可归结为下列公式:

(1) $\mathrm{d}(cu)=c\ \mathrm{d}u, c$ 是常数;

(2) $\mathrm{d}(u\pm v)=\mathrm{d}u\pm\mathrm{d}v$

(3) $\mathrm{d}(u\cdot v)=u\ \mathrm{d}v+v\ \mathrm{d}u$

(4) $\mathrm{d}\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{v\ \mathrm{d}u-u\ \mathrm{d}v}{v^2}, v\neq 0.$

4. 求解下列问题

(1) 试问对什么 x 值, 函数 $y=f(x)=\cos x$ 在 $\Delta x\rightarrow 0$ 时, 其微分 $\mathrm{d}y$ 与差分 $\Delta y=\Delta f(x)$ 不等价?

(2) 设 $y=x^3-3x$, 试问当 $\Delta x\rightarrow 0$ 时 ,$\Delta y-\mathrm{d}y$ 是 Δx 的几阶无穷小?

解 (1) 因为 $\mathrm{d}y=-\sin x\cdot\Delta x$, 以及 $\Delta y=\cos(x+\Delta x)-\cos x=-2\sin\dfrac{2x+\Delta x}{2}\cdot\sin\dfrac{\Delta x}{2}$ 所以答案为 $x\neq k\pi$.

(2) 因为 $\Delta y-\mathrm{d}y=3x(\Delta x)^2-(\Delta x)^3$, 所以当 $x\neq 0$ 时为二阶无穷小量 ;$x=0$ 时为三阶无穷小量.

郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com

5.2 复合函数的微分法与微分形式的不变性

设 $y = f[\dot{g}(x)]$ 是两个可微函数 $y = f(u)$ 与 $u = g(x)$ 的復合函数，易知 y 对 x 的微分为

$$\mathrm{d}y = y'_x \cdot \mathrm{d}x \tag{1}$$

但将 $y'_x = y'_u u'_x$ 代人, 则可得

$$\mathrm{d}y = y'_u u'_x \mathrm{d}x$$

因为 $u'_x \mathrm{d}x$ 是 $u = g(x)$ 作为 x 的函数时的微分, 即 $\mathrm{d}u = u'_x \mathrm{d}x$, 所以我们有

$$\mathrm{d}y = y'_u \cdot \mathrm{d}u \tag{2}$$

也就是说, 我们永远可以把 y 的微分写成 (2) 的形式, 不论 u 是否是自变量 (其中的差别只是: 若 u 不是自变量, 则 $\mathrm{d}u$ 并不表示改变量 Δu, 而是表示 u 作为另一自变量 x 的函数的微分). 因此, 微分的这一性质称为微分的形式不变性. 由于导数可以看作是微分的商, 故微分形式的不变性也就给求导带来方便. 例如 y 与 x 的函数关系由参数方程

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad a \leqslant t \leqslant \beta$$

表达时, 其导数 y'_x 可直接计算如下:

$$y'_x = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \Big/ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{y'(t)}{x_(t)} = \frac{\psi'(t)}{\varphi(t)} \quad (\varphi'(t) \neq 0)\,.$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = 1 \Big/ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com

6 高阶导数与高阶微分

6.1 高阶导数

观察函数 $f'(x)$ 在点 x_0 处的导数. 若存在极限 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=A$ 则称 $f(x)$ 在点 x_0 处存在二阶导数 (或称为二次可导), 并称 A 为 $f(x)$ 的二阶导数 (值), 记为 $A=f''(x_0)$

若 $f(x)$ 在区间 I 中每一点 x 上均二阶可导, 则称 $f(x)$ 在 I 上二次可导，其导函数记为 $f''(x)=[f'(x)]'$, 也记为

$$y''=(y')', \quad \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right), \quad \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right).$$

类似地, 可以定义三阶导数 $f''(x), \cdots$, 以及 n 阶导数

$$y^{(n)}=\left(y^{(n-1)}\right)', \quad f^{(n)}(x)=\left[f^{(n-1)}(x)\right]', \quad \frac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}f^{(n-1)}(x)}{\mathrm{d}x}\right)$$

也同样可以理解 $f''+(x), f''-(x)$ 等. 此外, 为便于统一陈述, 规定 $f^{(0)}(x)=f(x)$. 这里, 我们还要指出的是, 凡提到 $f^{(n)}(x_0)$ 存在, 总是首先假定在某个邻域 $U(x_0)$ 上 $f^{(n-1)}(x)$ 存在, 且由此又可知在 $U(x_0)$ $f^{(n-2)}(x)$ 不仅存在而且是连续函数. 一般, 当 $f^{(k)}(x)$ 在 I 上连续时, 称 $f(x)$ 在 I 上 k 阶连续可导, 记为 $f \in C^k(I)$,$C^k(I)$ 示一切在 I 上 k 阶连续可导函数的全体构成的集合, 而 $C^{\infty 0}(I)$ 则表示一切在 I 上任意次可导的函数的全体.

1. n 次求导的运算法则

   $(u+v)^{(n)}=u^{(n)}+v^{(n)}, (cu)^{(n)}=cu^{(n)}$, 以及如下定理.

   定理6.1 (Leibniz 法则) 设 $u=u(x), v=v(x)$ 在点 x 处有 n 阶导数存在, 则

   $$(u \cdot v)^{(n)}=\sum_{k=0}^{k} u^{(n-k)} v^{(k)}$$
   $$=u^{(n)}v+mu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v^{(2)}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)}+\cdots+uw^{(n)}$$

2. 常用初等函数的 n 阶导数公式归纳如表

$f(x)$	$f^{(n)}(x)$
x^a	$\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)x^{a-n}$
$1/x$	$(-1)^n n!/x^{n+1}$
$1/(ax+b)$	$(-1)^n n! a^n/(ax+b)^{n+1}$
$\sin x$	$\sin(x+n\pi/2)$
$\cos x$	$\cos(x+n\pi/2)$
e^x	e^x
$\ln x$	$(-1)^{n-1}(n-1)!/x^n$
a^x	$a^x(\ln a)^n$
$1/\left(x^2+a^2\right)$	$(-1)^n n! \sin\left[(n+1)\operatorname{arccot}\dfrac{x}{a}\right]/\left[a\left(x^2+a\right)^{\frac{n+1}{2}}\right]$
$x/\left(x^2+a^2\right)$	$(-1)^n n! \cos\left[(n+1)\operatorname{arccot}\dfrac{x}{a}\right]/\left[\left(a^2+x^2\right)^{\frac{n+1}{2}}\right]$

注 1 设 $f(x)=-\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{3-1/x+2/(2x-3)}(0<x<3/2), f(0)=0(x \leqslant 0$ 或 $x \geqslant 3/2)$, 则 $f \in C^{(\infty)}(\mathbf{R})$, 且 $f'(1)=1$.

注 2 设 $f(x)=x^{2n} \cdot \sin(1/x)(x \neq 0), f(0)=0$, 则在 $x=0$ 处 $f(x)n$ 阶可导，但不存在 $(n+1)$ 阶导数. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}=l$ 但 $f''(x_0)$ 不一定存在. 例如 $f(x)=x^2\sin(1/x)(x \neq 0), f(0)=0$

 郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com

3. 设 $y=f[g(x)]$, 求 y'''.

解记 $u=g(x)$, 则

$y_z'=(f[g(x)])'=f'(u)g'(x)=f'[g(x)]g'(x)$.

$(f[g(x)])''=f''(u)\left[g'(x)\right]^2+f'(u)g''(x)$

$=f''[g(x)]\left[g'(x)\right]^2+f'[g(x)]g''(x)(f[g(x)])'''=f'''(u)\left[g'(x)\right]^3+2f''(u)g'(x)g''(x)+f''(u)g'(x)g''(x)+f'(u)g'''(x)$

$=f'''[g(x)]\left[g'(x)\right]^3+3f''[g(x)]g'(x)g''(x)+f'[g(x)]g'''(x)$.

为 x 的函数对 x 的二次导数.

4. 解答下列问题:

(1) 设 $f(x)$ 在 ($-\infty,x_0]$ 上二次可导, 试求 a, b, c 之值, 使得

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & x\leqslant 0,\\ a\left(x-x_0\right)^2+b\left(x-x_0\right)+c, & x>0\end{cases}$$

在 $x=x_0$ 处二次可导.

(2) 设 $ax^2+bx+c>0(-\infty<x<\infty)$, 试证明

$$I=\lim_{x\to+\infty}x^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x}\sqrt{ax^2+bx+c}=0$$

解 (1) 为使 $f''\left(x_0\right)$ 存在, 必须有 (i) $F(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续，由此易知 $c=f\left(x_0\right)$. (ii) 由 $F_-'\left(x_0\right)=F_+'\left(x_0\right)$ 可知 , $b=f'\left(x_0\right)$. (iii) 由 $F_-''\left(x_0\right)=F''+\left(x_0\right)$ 可知 , $a=f''\left(x_0\right)/2$.

(2) 记 $\varphi(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}$, 我们有

$$\begin{aligned}\varphi'(x)&=\frac{ax+b/2}{\varphi(x)}\\ \varphi''(x)&=\left[a\cdot\varphi(x)-(ax+b/2)^2/\varphi(x)\right]/\varphi^2(x)\\ &=\left(ac-b^2/4\right)\varphi^3(x)\end{aligned}$$

由此即得所证.

5. 求下列 $f(x)$ 的 n 阶导数:

(1) $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}(c\neq 0)$. (2) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}$.

解 (1) 改写 $f(x)$ 为

$$f(x)=\frac{a}{c}+\frac{1}{c}\left(b-\frac{ad}{c}\right)(x+d/c)^{-1}$$

则可得

$$f^{(n)}(x)=(-1)^n\frac{1}{c}\left(b-\frac{ad}{c}\right)\left(x+\frac{d}{c}\right)^{n-1}\cdot n!$$

(2) $f'(x)=1\cdot(1-2x)^{-3/2}, f''(x)=1\cdot 3(1-2x)^{-5/2}$, 设 $f^{(k)}(x)=(2k-1)!!\ (1-2x)^{-(2k+1)/2}$, 则 $f^{(k+1)}(x)=(2k+1)!!(1-2x)^{-[2(k+1)+1]/2}$.

$$f^{(n)}(x)=(2n-1)!!(1-2x)^{-(2n+1)/2}$$

6. $f(x)$ 的 n 阶导数:

(1) $f(x)=x^2\cos 2x$ (2) $f(x)=e^x\cdot\sin x$ (3) $f(x)=x^n\ln x(x>0)$ (4) $f(x)=\ln x/x(x>0)$ (5) $f(x)=x^{n-1}\mathrm{e}^{1/x}$

郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com

解 (1) 应用 Leibniz 法则, 视 $u=\cos 2x, v=x^{2}$, 并注意到 $\left(x^{2}\right)^{(k)}=0(k>2)$, 则有

$$\left(x^{2} \cos 2x\right)^{(n)}=\binom{n}{0} x^{2}(\cos 2x)^{(n)}+\binom{n}{1}\left(x^{2}\right)^{\prime}(\cos 2x)^{(n-1)}+\binom{n}{2}\left(x^{2}\right)^{\prime \prime}(\cos 2x)^{(n-2)}$$

再利用余弦函数的 n 阶导数公式, 可知

$$\left(x^{2} \cos 2x\right)^{(n)}=2^{n}\left(x^{2}-\frac{n(n-1)}{4}\right) \cos \left(2x+\frac{n \pi}{2}\right)+2^{n} n x \sin \left(2x+\frac{n \pi}{2}\right)$$

(2) $\left(\mathrm{e}^{x} \sin x\right)^{(n)}=2^{n/2} \cdot \mathrm{e}^{x} \cdot \sin (x+n \pi/4)$

(3) $\left(x^{n} \ln x\right)^{(n)}=n!(\ln x+1+1/2+1/3+\cdots+1/n)$.

(4) $(\ln x/x)^{(n)}=(-1)^{n} \cdot n! \quad \cdot x^{-n-1}(\ln x-1-1/2-\cdots-1/n)$

(5) $\left(x^{n-1} \mathrm{e}^{1/x}\right)^{(n)}=(-1)^{n} \mathrm{e}^{1/x}/x^{n+1}(x \neq 0)$

注一般情况: $\left[x^{n-1} f\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{(n)}=(-1)^{n} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)/x^{n+1}$.

7. 解答下列问题:

(1) 设 $f(x)=\arctan x$, 求 $f^{(n)}(0)$.

(2) 设 $P_{n,m}(x)=\frac{\mathrm{d}^{n}}{\mathrm{d}x^{n}}\left(1-x^{m}\right)^{n}$, 求 $P_{n,m}(1)$.

解　(1) 因为 $f^{\prime}(x)=\frac{1}{1+x^{2}}$, 所以可以写成 $f^{\prime}(x)\left(1+x^{2}\right)=1$. 对该式两端求 $(n-1)$ 阶导数, 且对左端应用 Leibniz 法则, 视 $u=f^{\prime}(x), v=\left(1+x^{2}\right)$, 可得 $\left(1+x^{2}\right) f^{(n)}(x)+2(n-1) x f^{(n-1)}(x)+(n-1)(n-2) f^{(n-2)}(x)=0$ 由此知 $f^{(n)}(0)=-(n-1)(n-2) f^{(n-2)}(0) \quad (n \geqslant 2)$ 由 $f^{(2)}(0)=0$, 我们有 $f^{(2k)}(0)=0$. 由 $f^{\prime}(0)=1$, 我们有 $f^{(2k+1)}(0)=(-1)^{k}.\ (2k)!$

(2) 我们有

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(1-x^{m}\right)^{n}= & n\left(1-x^{m}\right)^{n-1} \cdot(-1) \cdot m x^{m-1} \\
\frac{\mathrm{d}^{2}}{\mathrm{d}x^{2}}\left(1-x^{m}\right)^{n}= & n(n-1)\left(1-x^{m}\right)^{n-2}(-1)^{2}\left(m x^{m-1}\right)^{2} \\
& +n\left(1-x^{m}\right)^{n-1}(-1) m(m-1) x^{m-2}, \\
\frac{\mathrm{d}^{n}}{\mathrm{d}x^{n}}\left(1-x^{m}\right)^{n}= & n!(-1)^{n}\left(m x^{m-1}\right)^{n}+\cdots
\end{aligned}$$

由此知 $P_{n,m}(1)=(-1)^{n} \cdot n! m^{n}$.

8. 解答下列问题:

(1) $f(x)=\frac{1}{x^{2}-4}$. 　(2) $f(x)=\frac{12}{x^{2}+a^{2}}$.

解 (1) 因为 $\frac{1}{x^{2}-4}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right)$, 所以

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{x^{2}-4}\right)^{(n)} & =\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-2}\right)^{(n)}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x+2}\right)^{(n)} \\
& =\frac{(-1)^{n} n!}{4}\left(\frac{1}{\left(x-2^{3}\right)^{n+1}}-\frac{1}{(x+2)^{n+1}}\right).
\end{aligned}$$

注本例求导运算之所以简便, 是因为将原式分解成一次式 $(ax+b)^{a}$ 的组合. 类似地如对 $P(x)=\left(x^{2}-1\right)^{n}$ 求 $P^{(n)}(1)$, 也是先用分解 $\left(x^{2}-1\right)^{n}=(x-1)^{n}(x+1)^{n}$, 再用 Leibniz 法则来得方便. 还有, 如求 $\sin^{2} x$ 以及 $\ln\left(x^{2}+x-2\right)$ 的 n 阶导数, 也应先将其化为 $\frac{1-\cos 2x}{2}$ 以及 $\ln|x-1|+\ln|x+2|$ 再求导为宜.

(2) 利用复数分解公式 $\dfrac{1}{x^2+a^2}=\dfrac{1}{2a\mathrm{i}}\left(\dfrac{1}{x-a\mathrm{i}}-\dfrac{1}{x+a\mathrm{i}}\right), \mathrm{i}=\sqrt{-1}$, 可知

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{x^2+a^2}\right)^{(n)}&=\frac{1}{2a\mathrm{i}}\left[\frac{(-1)^n n!}{(x-a i)^{n+1}}-\frac{(-1)^n n!}{(x+a i)^{n+1}}\right]\\&=\frac{(-1)^n n!}{2a i}\left[\frac{1}{(x-a i)^{n+1}}-\frac{1}{(x+a i)^{n+1}}\right].\end{aligned}$$

现在令 $x=a\cot\theta, 0<\theta<\pi, \theta=\operatorname{arccot}(x/a)$, 则

$$x\pm a\mathrm{i}=a(\cot\theta\pm\mathrm{i})=a(\cos\theta\pm\mathrm{i}\sin\theta)/\sin\theta$$

由此可知

$$\frac{1}{(x\pm a i)^{n+1}}=\frac{\sin^{n+1}\theta}{a^{n+1}}[\cos(n+1)\theta\mp i\sin(n+1)\theta]$$

代人前式并注意 $\sin\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}$, 我们有

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{x^2+a^2}\right)^{(n)}&=\frac{(-1)^n n!\sin^{n+1}\theta\sin(n+1)\theta}{a^{n+2}}\\&=(-1)^n n!\frac{\sin[(n+1)\operatorname{arccot}(x/a)]}{a\left(x^2+a^2\right)^{(n+1)/2}}\end{aligned}$$

9. 设 $y=x+x^5$, 求 x''_{y^2}.

解　因为 $y'_x=1+5x^4, y''_x=20x^3$, 所以 $x''_{y^2}=\dfrac{-20x^3}{\left(1+5x^4\right)^3}$. 设有 x 的函数 y 由参数方程 $(\varphi'(t),\psi'(t)$ 存在)

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases}\quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta$$

给出, $x=\varphi(t)$ 存在反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$, 且 $\varphi'(t)\neq 0$, 则由

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\quad\left(t=\varphi^{-1}(x)\right)$$

得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}{[\varphi'(t)]^2}\frac{1}{\varphi'(t)}\\&=\frac{\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}{[\varphi'(t)]^3}\end{aligned}$$

注　具体计算时, 不一定硬套公式.

10. 对由参数方程 $\begin{cases}x=t-\sin t,\\ y=1-\cos t\end{cases}$ 表达的函数 $y=y(x)$, 已知 $y'_x=\cot\dfrac{t}{2}$, 所以

$$y''_{x^2}=\left(\cot\frac{t}{2}\right)'_t t'_x=\left(\cot\frac{t}{2}\right)'_t\cdot\frac{1}{x'_t}=-\frac{1}{2\sin^2\frac{t}{2}}\frac{1}{1-\cos t}=-\frac{1}{4\sin^4\frac{t}{2}}$$

6.2 高阶微分

设 $y=f(x)$ 在区间 I 上可微 (即可导). 因为 $f'(x)$ 是 I 上的函数, 所以其微分（ $\mathrm{d}x$ 给定） $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$ 仍是 I 上的函数. 因此, 如果 $\mathrm{d}y$ 在某点 x 处可微, 那么仍可计算它的一阶微分, 即它在点 x 的导数乘以 x 的改变量. 在这里, 我们特别取此改变量与原来对 $y=f(x)$ 作一阶微分时相同，即 $\mathrm{d}x=\Delta x$, 且称此时 $\mathrm{d}y$ 的微分为 $y=f(x)$ 在点 x 处的二阶微分量, 记为 d^2y 或 $\mathrm{d}^2f(x)$. 从而有

$$\mathrm{d}^2y \triangleq \mathrm{d}(\mathrm{d}y)=\mathrm{d}\left(f'(x)\mathrm{d}x\right)=\left(f'(x)\mathrm{d}x\right)'\mathrm{d}x=f''(x)(\mathrm{d}x)^2$$

$$\mathrm{d}^2y \triangleq \mathrm{d}(\mathrm{d}y)=\mathrm{d}\left(f'(x)\mathrm{d}x\right)=\left(f'(x)\mathrm{d}x\right)'\mathrm{d}x=f''(x)(\mathrm{d}x)^2$$

或记为

$$\mathrm{d}^2y=f''(x)\mathrm{d}x^2$$

注这里的 $\mathrm{d}x$ 与 x 无关, 所以 $(\mathrm{d}x)'_x=0$. 此外, 还把 $(\mathrm{d}x)^2$ 记为 $\mathrm{d}x^2$, 在函数 $y=f(x)$ 高阶微分表达式中, 这种记法不会理解为 x^2 的微分. 类似地, 若 $y=f(x)$ 的二阶微分 d^2y 在点 $x\in I$ 处可导, 仍取 x 的改变量与原来的相同, 可以定义它的三阶微分

$$\mathrm{d}^3y=\mathrm{d}\left(\mathrm{d}^2y\right)=f''(x)(\mathrm{d}x)^3=f'''(x)\mathrm{d}x^3$$

应用数学归纳法, 当 $\mathrm{d}^{n-1}y$ 在点 $x\in I$ 处可导时, 作 $\mathrm{d}^{n-1}y$ 的一阶微分, 并取 x 的改变量与原来的相同, 记为 $\mathrm{d}^ny=\mathrm{d}\left(\mathrm{d}^{n-1}y\right)$, 称为 $y=f(x)$ 在点 x 处的 n 阶微分. 即

$$\mathrm{d}^ny=y^{(n)}\mathrm{d}x^n=f^{(n)}(x)\mathrm{d}x^n$$

因此, 由高阶微分表达式还可得到

$$\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}=y^{(n)}=f^{(n)}(x)$$

相应于高阶导数的运算关系，也可推出 n 阶微分运算公式. 设 $u=u(x),v=v(x)$ 在点 x 处的 n 阶微分存在, 易知

$$\mathrm{d}^n(cu)=c\,\mathrm{d}^nu,\qquad \mathrm{d}^n(u+v)=\mathrm{d}^nu+\mathrm{d}^nv$$

以及 Leibniz 法则:

$$\mathrm{d}^n(u\cdot v)=\sum_{k=0}^{n}\left(\begin{array}{c}n\\k\end{array}\right)\mathrm{d}^{n-k}u\cdot\mathrm{d}^kv$$

其中约定 $\mathrm{d}^\circ u=u,\ \mathrm{d}^0v=v$.

关于函数的音 $\frac{u}{v}$, 以二阶微分为例, 我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^2\left(\frac{u}{v}\right)&=\mathrm{d}\left(\mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right)\right)=\mathrm{d}\left(\frac{\partial\mathrm{d}u-u\ \mathrm{d}v}{v^2}\right)\\
&=\frac{v^2\cdot\mathrm{d}(v\ \mathrm{d}u-u\ \mathrm{d}v)-(v\ \mathrm{d}u-u\ \mathrm{d}v)\mathrm{d}\left(v^2\right)}{v^4}\\
&=\frac{v^2\cdot\left(v\ \mathrm{d}^2u+\mathrm{d}u\ \mathrm{d}v-\mathrm{d}u\ \mathrm{d}v-u\ \mathrm{d}^2v\right)}{v^4}-\frac{2v\ \mathrm{d}v(v\ \mathrm{d}u-u\ \mathrm{d}v)}{v^4}\\
&=\frac{1}{v}\ \mathrm{d}^2u-\frac{u}{v^2}\ \mathrm{d}^2v-\frac{2}{\vartheta^2}\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v+\frac{2u}{v^3}\ \mathrm{d}v^2
\end{aligned}$$

在复合函数 $y=y[u(x)]$ 的情形, 求 y 对 x 的二阶微分时，自变量是 x(不是 u) 从而在 $\mathrm{d}y=y'_u\mathrm{d}u$ 中, $\mathrm{d}u=u'_x\mathrm{d}x$ 是 x 的函数. 故得

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^2y&=\mathrm{d}\left(y'_u\mathrm{d}u\right)=\mathrm{d}\left(y'_u\right)\mathrm{d}u+y'_u\mathrm{d}(\mathrm{d}u)\\
&=y''_u\mathrm{d}u\cdot\mathrm{d}u+y'_u\mathrm{d}^2u=y''_u\mathrm{d}u^2+y''_u\mathrm{d}^2u
\end{aligned}$$

注 这是二阶微分的一般公式. 当 u 是自变量时, 有 $\mathrm{d}^2u = \mathrm{d}(\mathrm{d}u) = 0$, 所以又回到 $\mathrm{d}^2y = y''_{u^2}\mathrm{d}u^2$. 因此, 一般说来, 函数的二阶微分，没有微分形式的不变性, 且在 x 不是自变盟时，$\mathrm{d}^n y/\mathrm{d}x^n$ 也不是 n 阶导数 $y^{(n)}_{x^n}$.

1. 设 $y = x^n\mathrm{e}^x$, 求 $\mathrm{d}^n y$.

解 根据 Leibniz 公式, 我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^n y &= \sum_{k=0}^{n}\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)\mathrm{d}^k\left(x^n\right)\mathrm{d}^{(n-k)}\left(\mathrm{e}^x\right) \\
&= \mathrm{e}^x\sum_{k=0}^{n}\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)(\mathrm{d}x)^{n-k}\cdot n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)x^{n-k}(\,\mathrm{d}x)^k \\
&= \mathrm{e}^x(\,\mathrm{d}x)^n\sum_{k=0}^{n}\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)^2 k!x^{n-k}
\end{aligned}$$

郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com

7 微分中值定理与泰勒公式

7.1 微分中值定理

详见教材.

关于常见中值等式的辅助函数 F(x) 的构造方法

假设要证 $G(\xi)=0$, 要使得 $F'(x)=G(x)$, 这样当 F 满足 Rolle 定理条件，便有 $F'(\xi)=G(\xi)=0$。注意总结课上讲过的构造方法。

$$
\begin{aligned}
&G(\xi)=0\\
&f'(\xi)+A\xi^{k}+B=0(A,B\text{ 为常数}) &&(1)\\
&f(a)g'(\xi)-f'(\xi)g(a)-k=0 &&(2)\\
&\sum_{i=0}^{n-1}a_i(n-i)\xi^{n-1-i}=0 &&(3)\\
&f'(\xi)g(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0 &&(4)\\
&f(\xi)g''(\xi)-f''(\xi)g(\xi)=0 &&(5)\\
&\xi f'(\xi)+kf(\xi)=0 &&(6)\\
&(\xi-1)f'(\xi)+kf(\xi)=0 &&(7)\\
&f'(\xi)g(1-\xi)-kf(\xi)g'(1-\xi)=0 &&(8)\\
&f'(\xi)+\lambda f(\xi)=0 &&(9)\\
&f'(\xi)+g'(\xi)f(\xi)=0 &&(10)\\
&\xi f'(\xi)-kf(\xi)=0 &&(11)\\
&f'(\xi)-kf(\xi)=0 &&(12)\\
&f'(\xi)g(\xi)-f(\xi)g'(\xi)=0 &&(13)\\
&\left(1-\xi^{2}\right)/\left(1+\xi^{2}\right)^{2}=0 &&(14)
\end{aligned}
$$

郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com

对应的 F 依次取值为：

$$F(x)$$

$$f(x)+\frac{Ax^{k+1}}{k+1}+Bx \tag{1}$$

$$f(a)g(x)-f(x)g(a)-kx \tag{2}$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^{n-i} \tag{3}$$

$$f(x)g(x) \tag{4}$$

$$f(x)g'(x)-f'(x)g(x) \tag{5}$$

$$x^k f(x) \tag{6}$$

$$(x-1)^k f(x) \tag{7}$$

$$g^k(1-x)f(x) \tag{8}$$

$$e^{\lambda x} f(x) \tag{9}$$

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{g}(x)} f(x) \tag{10}$$

$$f(x)/x^k \tag{11}$$

$$f(x)/\mathrm{e}^{kx} \tag{12}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \tag{13}$$

$$x/\left(1+x^2\right) \tag{14}$$

注意灵活变形。

1. 要证 $\xi f''(\xi)+2f'(\xi)=0, \xi\in(0,c)$，则取 $k=-2$, **构造** $F(x)=x^2 f'(x)$. 显然已经有 $F(0)=0$, 只要找到一点 $a\in(0,c)$ $such \quad that f'(a)=0$, 有 $F(a)=0=F(0)$, 由 Rolle 定理结论得证。

7.2 泰勒公式

参见教材.

8 导数的应用

参见教材.

 郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com

第二部分　典型例题

常用导数公式

(a) 四则运算

(1) $\left[\sum_{i=1}^{n} f_i(x)\right]' = \sum_{i=1}^{n} f_i'(x)$

(2) $[Cf(x)]' = Cf'(x)$

(3) $[f_1(x)f_2(x)f_3(x)]' = [(f_1(x)f_2(x))\,f_3(x)]' = (f_1(x)f_2(x))'\,f_3(x) + (f_1(x)f_2(x))\,f_3'(x)$

$= f_1'(x)f_2(x)f_3(x) + f_1(x)f_2'(x)f_3(x) + f_1(x)f_2(x)f_3'(x)$

(4) $\left[\prod_{i=1}^{n} f_i(x)\right]' = \sum_{j=1}^{n} f_1(x)f_2(x)\cdots f_j'(x)\cdots f_n(x)$

$= f_1'(x)f_2(x)\cdots f_n(x) + f_1(x)f_2'(x)\cdots f_{n-1}(x)f_n(x)$

$+\cdots + f_1(x)f_2(x)\cdots f_n'(x)$

(b) 复合函数运算: 如果函数 $\boldsymbol{u} = \phi(\boldsymbol{x})$ 在点 $\boldsymbol{x}_0$ 可导，而 $y = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})$ 在点 $\boldsymbol{u}_0 = \phi(\boldsymbol{x}_0)$ 可导, 则复合函数 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}[\phi(\boldsymbol{x})]$ 在点 x_0 可导，且其导数为

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = \left(\left.\frac{df(u)}{du}\right|_{u=u_0}\right)\left(\left.\frac{d\phi(x)}{dx}\right|_{x=x_0}\right) = f'(u_0)\cdot\phi'(x_0)$$

推广　设 $y = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{u} = \phi(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})$ 导数存在则复合函数 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}\{\phi[w(x)]\}$ 的导数为 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}$

(c) 幂指函数 $f(x) = u(x)^{v(x)}(u(x) > 0)$. 求导的一般方法:

利用对数函数简化运算

$$\ln(a_1a_2\cdots a_n) = \ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n$$
$$\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$
$$a^b = e^{b\ln a}(a>0),\quad \log_{10}10^{1000} = 1000$$

方法: $f(x) = e^{v(x)\ln u(x)}$

(d) 参数方程求导

设 $x = \varphi(t)$严格单调可导, $\varphi'(t) \neq 0$, 则 $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{\varphi}^{-1}(\boldsymbol{x})$ 存在并且可导, 由复合函数及反函数的求导法则得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}\quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{dx}\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

若函数 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ 二阶可导，则

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)\frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^2(t)}\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)}$$

(e) **隐函数求导:** 若方程 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}$, 当任意 $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I}$, 总存在唯一 y 满足方程, 则称 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}$ 在 $\boldsymbol{I}$ 上确定了一个隐函数.

(f) 反函数求导：如果函数 $x = f(y)$ 在区间 I_1 内单调可导, 且 $f'(y) \neq 0$, 那么它的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 在区间 $I_x = \{x \mid x = f(y), y \in I_y\}$ 内也可导, 且有

$$\left[f^{-1}(x)\right]' = \frac{1}{f'(y)}$$

(g) 高阶导数

二阶导数记作 $f''(x), y''(x), \frac{d^2y}{dx^2}$ 或 $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$

三阶导数记作 $f'''(x), y'''(x), \frac{d^3y}{dx^3}$

$f(x)$ 的 n 阶导数记为 $f^{(n)}(x), y^{(n)}(x), \frac{d^ny}{dx^n}$ 或 $\frac{d^nf(x)}{dx^n}$ 二阶和二阶以上的导数统称为高阶导数.

常用 n 阶导数公式

(1) $(a^x)^{(n)} = a^x \cdot \ln^n a (a > 0)\, (e^x)^{(n)} = e^x$

(2) $(\sin \alpha x)^{(n)} = \alpha^n \sin\left(\alpha x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$

(3) $(\cos \alpha x)^{(n)} = \alpha^n \cos\left(\alpha x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$

(4) $(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha - 1)\cdots(\alpha - n + 1)x^{\alpha - n}$

(5) $(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$

(6)N-L 公式

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)}$$

$$\text{其中} C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com

1. 回答下列问题

(1) 函数 f(x) 在 $\mathrm{x}=\mathrm{x}_0$ 处的导教 $f'(x_0)$ 可定义为

(A) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

(B) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

(C) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{\Delta x}$

(D) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}$.

(2) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)-f(0)}{x}=\dfrac{1}{2}$, 则 $f'(0)$ 等于_____.

(3) 设 f 在 x_0 存在左、右导数 , 则 f 在 x_0 处

(A) 可导;

(B) 连续:

(C) 不可导;

(D) 不连续.

(4) $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导是 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续的_____ 条件.

(5) 求 $f(x)=\ln\left(\dfrac{1}{x}+\ln\left(\dfrac{1}{x}+\ln\dfrac{1}{x}\right)\right)$ 的导数.

注 复合结构: $f(x)=\ln(u), u=\dfrac{1}{x}+\ln\left(\dfrac{1}{x}+\ln\dfrac{1}{x}\right), f'(x)=\dfrac{1}{\frac{1}{x}+\ln\left(\frac{1}{x}+\ln\frac{1}{x}\right)}\left\{-\dfrac{1}{x^2}+\left[\ln\left(\dfrac{1}{x}+\ln\dfrac{1}{x}\right)\right]\right.$

复合结构 : $\ln\left(\dfrac{1}{x}+\ln\dfrac{1}{x}\right)=\ln v, v=\dfrac{1}{x}+\ln\dfrac{1}{x}, f'(x)=\dfrac{1}{\frac{1}{x}+\ln\left(\frac{1}{x}+\ln\frac{1}{x}\right)}\left\{-\dfrac{1}{x^2}+\left[\dfrac{1}{\frac{1}{x}+\ln\frac{1}{x}}\left(-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}\right)\right]\right.$

$=-\dfrac{1+x+\frac{1}{x}+\ln\frac{1}{x}}{\left(1+x\ln\frac{1}{x}\right)\left(1+x\ln\left(\frac{1}{x}+\ln\frac{1}{x}\right)\right)}$

(6) 求 $f(x)=\sin x^{\cos x}\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 导数

解 : $f'(x)=\left(e^{\cos x\ln\sin x}\right)e^u, u=\cos x\ln\sin x=e^{\cos x\ln\sin x}\left(\dfrac{\cos^2 x}{\sin x}-\sin x\ln\sin x\right)f'(x)=$ $e^{\cos x\ln\sin x}(\cos x\cot x-\sin x\ln\sin x)$

(7) 求 $f(x)=x+x^x+x^{x^x}(x>0)$ 导数

解: $f'(x)=\left(x+x^x+x^{x^x}\right)'=\left(x+e^{x\ln x}+e^{x^x\ln x}\right)e^u$,

$u=x\ln x\left[\left(e^{x\ln x}\right)'=x^x[1+\ln x]\ e^u, u=x^x\ln x\left[\left(e^{x^x\ln x}\right)'=x^{x^x}\left[(\ln x)x^x(1+\ln x)+\dfrac{1}{x}x^x\right]\right.\right.$

$f'(x)=1+x^x[1+\ln x]+x^{x^x}\left\{(\ln x)x^x(1+\ln x)+\dfrac{1}{x}x^x\right\}$

(8) 求由方程 $\left\{\begin{array}{l}x=a\cos^3 t\\ y=a\sin^3 t\end{array}\right.$ 表示的函数的二阶导数.

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=\dfrac{d}{dt}(-\tan t)\cdot\dfrac{dt}{dx}$

$=\dfrac{(-\tan t)'}{(a\cos^3 t)'}=\dfrac{-\sec^2 t}{-3a\cos^2 t\sin t}=\dfrac{\sec^4 t}{3a\sin t}$

(9) 已知 $\sqrt{x^2+y^2}=e^{\left(\arctan\frac{y}{x}\right)}$, 求 $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解方程两端分别对 x 求导, 得到

$$\frac{x+y\frac{dy}{dx}}{\sqrt{x^2+y^2}}=e^{\left(\arctan\frac{y}{x}\right)}\frac{\frac{x\frac{dy}{dx}-y}{x^2}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

再由$\dfrac{e^{\left(\arctan \frac{y}{x}\right)}}{\sqrt{x^2+y^2}}=1$，得$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+y}{x-y}$

(1)

对 (1) 两边继续求导，得

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{x+y}{x-y}\right)'=\frac{\left(1+\frac{dy}{dx}\right)(x-y)-\left(1-\frac{dy}{dx}\right)(x+y)}{(x-y)^2}$$
$$=\frac{2\left(x^2+y^2\right)}{(x-y)^3}$$

(10) 求 $y=\dfrac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{a}(a>0)$ 的导数.

解 $y'=\left(\dfrac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}\right)'+\left(\dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{a}\right)'=\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}-\dfrac{1}{2}\dfrac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}+\dfrac{a^2}{2\sqrt{a^2-x^2}}=\sqrt{a^2-x^2}$

(11) 设 $y=\arctan x$, 求 $f''(0)$.

解 $y'=\dfrac{1}{1+x^2}$ $y''=\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)'=\dfrac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2}$ $f''(0)=\left.\dfrac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2}\right|_{x=0}=0$

(12) 设 $y=\sin^6 x+\cos^6 x$, 求 $y^{(n)}$

解 $y=\left(\sin^2 x\right)^3+\left(\cos^2 x\right)^3=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)\left(\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x\right)=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-3\sin^2 x\cos^2 x=1-\dfrac{3}{4}\sin^2 2x=1-\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1-\cos 4x}{2}=\dfrac{5}{8}+\dfrac{3}{8}\cos 4x$

$y^{(n)}=\dfrac{3}{8}\cdot 4^n\cdot\cos\left(4x+n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$

(13) $y=e^{ax}\sin bx(a,b$ 为常数), 求 $y^{(n)}$

解 $y'=ae^{ax}\sin bx+be^{ax}\cos bx=e^{ax}(a\sin bx+b\cos bx)=e^{ax}\sqrt{a^2+b^2}\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin bx+\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos bx\right)$
$=e^{ax}\sqrt{a^2+b^2}(\sin bx\cos\phi+\sin\phi\cos bx)=e^{ax}\sqrt{a^2+b^2}\sin(bx+\varphi)\left(\varphi=\arctan\dfrac{b}{a}\right)$ $y''=e^{ax}\sqrt{a^2+b^2}\cdot[a\sin(bx+\varphi)+b\cos(bx+\varphi)]=\left(a^2+b^2\right)e^{ax}\sin(bx+2\varphi)$ $y^{(n)}=\left(a^2+b^2\right)^{\frac{n}{2}}\cdot e^{ax}\sin(bx+n\varphi)\left(\varphi=\arctan\dfrac{b}{a}\right)$

(14) 设$y=x^2e^{2x}$，求$y^{(20)}$.

解：设$u=e^{2x},v=x^2$

由莱布尼茨公式$(uv)^{(20)}=\sum\limits_{k=0}^{2}C_{20}^{k}u^{(20-k)}v^{(k)}y^{(20)}=\left(e^{2x}\right)^{(20)}\cdot x^2+20\left(e^{2x}\right)^{(19)}\cdot\left(x^2\right)'+\dfrac{20(20-1)}{2!}\left(e^{2x}\right)^{(18)}\cdot\left(x^2\right)''=2^{20}e^{2x}\cdot x^2+20\cdot 2^{19}e^{2x}\cdot 2x+\dfrac{20\cdot 19}{2!}2^{18}e^{2x}\cdot 2$
$=2^{20}e^{2x}\left(x^2+20x+95\right)$

2. 求下列函数的导数:

(1) $y=x^3-2x-6$

(2) $y=\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}$

(3) $y=\dfrac{1-x^2}{1+x+x^2}$

(4) $y=\dfrac{x}{m}+\dfrac{m}{x}+2\sqrt{x}+\dfrac{2}{\sqrt{x}}$

(5) $y=x^3\log_3 x$

(6) $y=\mathrm{e}^x\cos x$

(7) $y=\left(x^2+1\right)(3x-1)\left(1-x^3\right)$

(8) $y=\dfrac{\tan x}{x}$

郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com

(9) $y=\dfrac{1+\ln x}{1-\ln x}$

(10) $y=(\sqrt{x}+1)\arctan x$;

(11) $y=\dfrac{1+x^2}{\sin x+\cos x}$

(12) $y=\mathrm{e}^{ax}\cos bx$

(13) $y=\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}$;

(14) $y=x\sin x\ln x$;

(15) $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$;

(16) $y=\ln(\cos x+\sin x)$

(17) $y=\left(x^2-1\right)^3$

(18) $y=\left(\dfrac{1+x^2}{1-x}\right)^3$

(19) $y=\ln(\ln x)$

(20) $y=\ln\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$

(21) $y=\left(\arctan x^3\right)^2$

(22)$y=\arcsin\left(\sin^2 x\right)$

(23) $y=\sin(\sin(\sin x))$

(24) $y=\sin\left(\dfrac{x}{\sin\left(\frac{x}{\sin x}\right)}\right)$

(25) $y=(x-a))^{a_1}\left(x-a_2\right)^{a_2}\cdots\left(x-a_n\right)^{a_n}$ (26) $y=\sqrt[3]{\dfrac{(x+1)^2(x+2)^3}{(x+3)^4(x+4)^5}}$

3. 求下列函数的导数:

(1) $f(x)=ax^n+ax^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$

(2) $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$;

(3) $y=x^x$

(4) $y=u(x)^{v(x)}$, 其中 $u(x)>0$, 且 $u(x)$ 与 $v(x)$ 均可导.

解 (1) $f'(x)=nax^{n-1}+(n-1)ax^{n-2}+\cdots+a_{n-1}$.

(2) $f'(x)=\left(\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right)'=\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

(3)$y'=(x^x)'=\left(\mathrm{e}^{x\ln x}\right)'=\mathrm{e}^{x\ln x}\cdot\left(\ln x+x\cdot\dfrac{1}{x}\right)$

$=x^x(\ln x+1)$

或者

$y=x^x,\quad \ln y=x\ln x\dfrac{y'}{y}=\ln x+x\cdot\dfrac{1}{x}=\ln x+1y'=x^x(\ln x+1)$

$$y'=\left(u(x)^{t(x)}\right)'=\left(\mathrm{e}^{v(x)\ln u(x)}\right)'=\mathrm{e}^{v(x)\ln u(x)}\left[v'(x)\ln u(x)+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right]$$

$$=u(x)^{v(x)}\left[v'(x)\ln u(x)+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right]$$

$$=u(x)^{v(x)}v'(x)\ln u(x)+u(x)^{t(x)-1}u'(x)v(x).$$

或者, 对 $\ln y=v(x)\ln u(x)$ 两边关于 x 求导得 $\dfrac{y'}{y}=v'(x)\ln u(x)+v(x)\dfrac{u'(x)}{u(x)}, y'=u(x)^{v(x)}v'(x)\ln u(x)+u(x)^{v(x)-1}u'(x)v(x)$.

4. (对数求导法）求

$y=\dfrac{(x+5)^2(x-4)^{\frac{1}{3}}}{(x+2)^5(x+4)^{\frac{1}{2}}}$ 的导数 y'.

解 $\ln|y|=2\ln|x+5|+\dfrac{1}{3}\ln|x-4|-5\ln|x+2|-\dfrac{1}{2}\ln|x+4|$,

$$\frac{y'}{y}=\frac{2}{x+5}+\frac{1}{3(x-4)}-\frac{5}{x+2}-\frac{1}{2(x+4)}$$
$$y'=\frac{(x+5)^2(x-4)^{\frac{1}{3}}}{(x+2)^5(x+4)^{\frac{1}{2}}}\cdot\left[\frac{2}{x+5}+\frac{1}{3(x-4)}-\frac{5}{x+2}-\frac{1}{2(x+4)}\right].$$

5. 求 $f(x)=|x+1|^3=\begin{cases}(x+1)^3, x\geqslant -1,\\ -(x+1)^3, x<-1\end{cases}$ 的导函数 $f'(x)$, 并说明其连续性.

解 $\quad f'(x)=\begin{cases}3(x+1)^2, & x\geqslant -1\\ -3(x+1)^2, & x<-1\end{cases}$ $f'(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续.

思考：

$$f(x)=\begin{cases}x^m\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

试问 : (1)m 为何值时 , f 在 $x=0$ 处连续 ; (2) m 为何值时 , f 在 $x=0$ 处可导 (3) m 为何值时 , f' 在 $x=0$ 处连续。

参考解答：(1) 当 $m>0$ 时 , f 在 $x=0$ 处连续 ; (2) 当 m >1 时, f 在 $x=0$ 处可导 (3) 当 $m>2$ 时 , f' 在 $x=0$ 处连续.、

6. 设 $f(x)=x(x-1)^2(x-2)^3$. 求 $f'(0),f'(1),f'(2)$.

7. 设 $f(x_0)=0, f'(x_0)=4$. 求极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)}{\Delta x}$.

8. 确定曲线 $y=\ln x$ 上哪些点的切线平行于下列直线: (1) $y=x-1$; (2) $y=2x-3$.

9. 求下列曲线在指定点 P 的切线方程与法线方程

(1) $y=\dfrac{x^2}{4}, P=(2,1)$; (2) $y=\cos x, P=(0,1)$.

10. 求下列函数的导函数: (1) $f(x)=|x|^3$; (2) $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\geqslant 0,\\ 1, & x<0.\end{cases}$

11. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 3,\\ ax+b, & x<3.\end{cases}$ 试确定 a,b 的值, 使 f 在 $x=3$ 处可导.

12. 设 $g(0)=g'(0)=0$,

$$f(x)=\begin{cases}g(x)\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

求 $f'(0)$.

13. 设函数 f 在点 x_0 处存在左右导数. 证明 : f 在点 x_0 处连续.

14. 证明

(1) 可导的周期为 T 的函数 f, 其导函数 f' 仍为周期 T 的函数.

(2) 可导的奇函数 f, 其导函数必为偶函数.

(3) 可导的偶函数, 其导函数必为奇函数.

证明 (1) 因为 $f(x+T)=f(x),\forall x\in\mathrm{R}$, 所以,

$$f'(x)=f'(x+T)(x+T)'=f'(x+T),\forall x\in\mathrm{R}$$

即 f' 仍为周期 T 的函数.

(2) 因 $f(-x)=-f(x),\forall x\in\mathrm{R}$, 故

$$\begin{gathered}-f'(x)=f'(-x)\cdot(-1),\\ f'(-x)=f'(x),\end{gathered}$$

从而 f' 为偶函数.

(3) 因 $f(-x)=f(x),\forall x\in\mathrm{R}$, 故

$$\begin{gathered}f'(-x)\cdot(-1)=f'(x)\\ f'(-x)=-f'(x)\end{gathered}$$

15. 设 f 为可导函数, 求下列各函数的一阶导数:

(1) $y=f\left(\mathrm{e}^{x}\right)\mathrm{e}^{f(x)}$

(2) $y=f(f(f(x)))$.

16. 证明参变量求导公式

设 $y=y(t),x=x(t)$, 如果它们都可导，且 $x'(t)\neq 0$, 则

$$y'_x=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{y'(t)}{x'(t)}$$

如果它们二阶可导, 则

$$y''_{xx}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)'}{x'(t)}=\frac{y''(t)x'(t)-y'(t)x''(t)}{\left[x'(t)\right]^3}$$

17. 构造一个函数, 它仅在点 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 处不可导.

令 $f(x)=\varphi_1(x)+\varphi_2(x)+\cdots+\varphi_n(x)=|x-a_1|+|x-a_2|+\cdots+|x-a_n|$. 对 $\forall x_0\neq a_i,i=1,2,\cdots,n$, 由于每个 φ_i 在 x_0 处可导, 其和 $f(x)$ 也在 x_0 处可导.

由于 $\varphi_1(x)$ 在 a_1 处不可导 ,$\varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x)$ 在 a_1 处可导, 所以 $f(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}\varphi_i(x)$ 在 a_1 处不可导 (否则 $\varphi_1(x)=f(x)-\sum\limits_{i=2}^{n}\varphi_i(x)$ 在 a_1 处可导). 同理, $f(x)$ 在 $a_2,\cdots,a_n$ 处都不可导. 而在其他点处可导，故 $f(x)$ 即为所求.

18. 设函数 f 在 $x=0$ 处连续, 如果

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(x)}{x}=m$$

证明: $f'(0)=m$.

证 令 $\varphi(x)=f(x)-mx-f(0)$, 则 $\varphi(x)$ 也在 $x=0$ 处连续 , 且 $\varphi(0)=\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to 0}[f(x)-mx-f(0)]=f(0)-f(0)=0$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(2x)-\varphi(x)}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{f(2x)-2mx-f(0)-(f(x)-mx-f(0))}{x}\\ &=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(2x)-f(x)}{x}-m\right]=0\end{aligned}$$

于是 $\varphi(2x)-\varphi(x)=o(x)\Leftrightarrow\varphi(x)-\varphi\left(\dfrac{x}{2}\right)=o(x).\ ),\varphi(x)=o(x)\ (x\to 0)$. 即

$$0=\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-mx-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x}-m\right),$$

于是$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=m$.

 郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com

19. 求 $(\mathrm{e}^x\,,\cos x)^{(n)}$ $(\mathrm{e}^x\sin x)^{(n)}$

解法 1 $(\mathrm{e}^x\cos x)'=\mathrm{e}^x\cos x-\mathrm{e}^x\sin x=\mathrm{e}^x(\cos x-\sin x)=\sqrt{2}\mathrm{e}^x\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$,

$$(\mathrm{e}^x\cos x)''=\sqrt{2}\mathrm{e}^x\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right]=(\sqrt{2})^2\mathrm{e}^x\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot 2+x\right)$$

归纳可得

$(e^x\cos x)^{(n)}=2^{\frac{n}{2}}\mathrm{e}^x\cos\left(\frac{n\pi}{4}+x\right)$

同理 $(\mathrm{e}^x\sin x)^{(n)}=2^{\frac{n}{2}}\mathrm{e}^x\sin\left(\frac{n\pi}{4}+x\right)$

解法 2

$$(\mathrm{e}^x\cos x)^{(n)}+\mathrm{i}\,(\mathrm{e}^x\sin x)^{(n)}=\left(\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}\right)^{(n)}=(1+\mathrm{i})^n\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}=2^{\frac{n}{2}}\mathrm{e}^{\frac{n\pi}{4}\mathrm{i}}\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}$$
$$=2^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}\left(\frac{n\pi}{4}+x\right)}=2^{\frac{n}{2}}\mathrm{e}^x\cos\left(\frac{n\pi}{4}+x\right)+\mathrm{i}2^{\frac{n}{2}}\mathrm{e}^x\sin\left(\frac{n\pi}{4}+x\right)$$
$$(\mathrm{e}^x\cos x)^{(n)}=2^{\frac{n}{2}}\mathrm{e}^x\cos\left(\frac{n\pi}{4}+x\right),\quad (\mathrm{e}^x\sin x)^{(n)}=2^{\frac{n}{2}}\mathrm{e}^x\sin\left(\frac{n\pi}{4}+x\right)$$

 郭凡荣 Email：jaccoobo@163.com