东拼西凑PBR：PBR基础

by 杨超 （wantnon）

qq群：物理渲染（697412576）

基于经验的渲染模型

例子：

Blinn-Phong： $ambientColor + diffColor * \max(0, dot(n,l)) + specColor * \max(0, dot(n,h))^{shininess}$

其中 $h = \frac{l+v}{|l+v|}$ （半角向量）

基于物理的渲染模型（PBR）

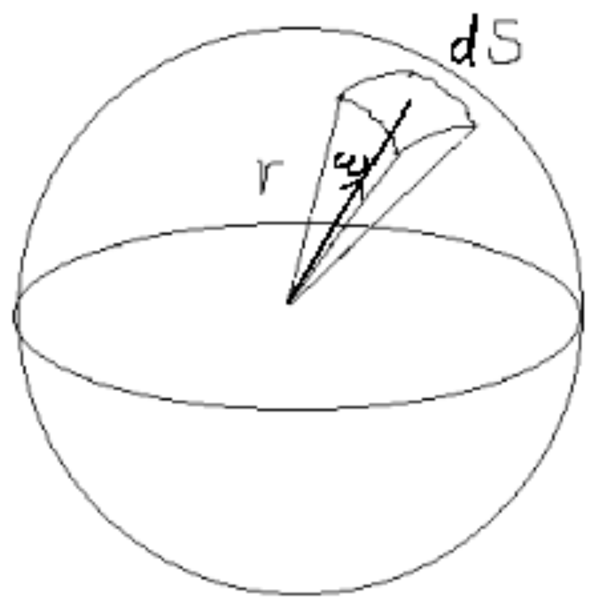
表面反射

- 辐射测量学
- BRDF
- 微表面模型
- 渲染方程求解方案举例

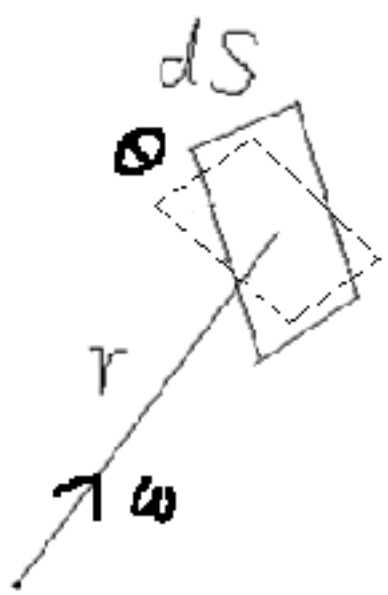
~~次表面散射~~

~~体散射~~

立体角（solid angle）

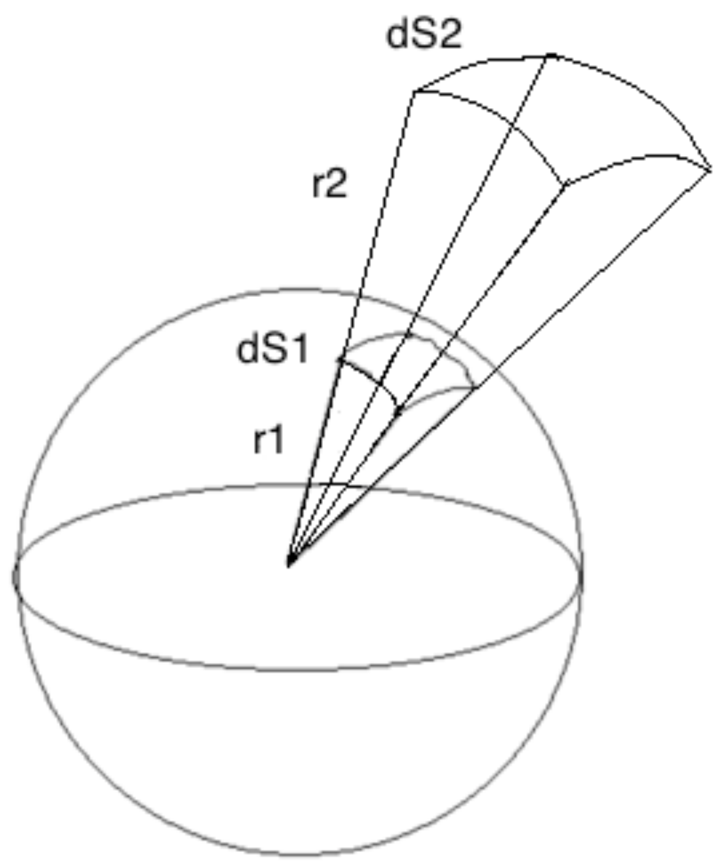


$$d\omega = \frac{dS}{r^2}$$



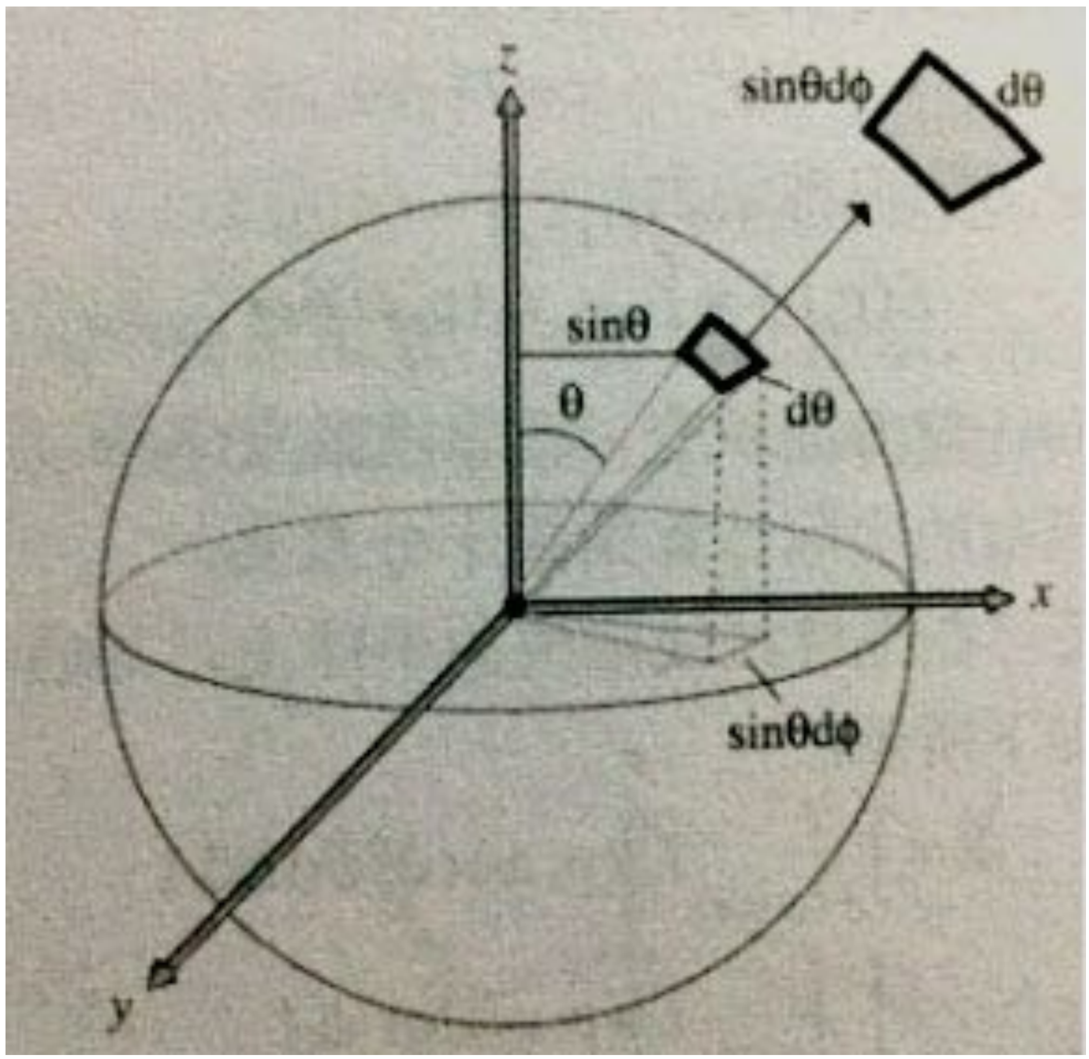
$$d\omega = \frac{dS * \cos\theta}{r^2}$$

立体角本质：立体角相等，则锥顶角相等



$$\frac{dS_1}{r_1^{\ 2}} = \frac{dS_2}{r_2^{\ 2}}$$

球面积分



$$d\omega = \sin\theta * d\theta * d\phi$$

例子：

$$\int_{\Omega} d\omega = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \, d\theta = 2\pi$$

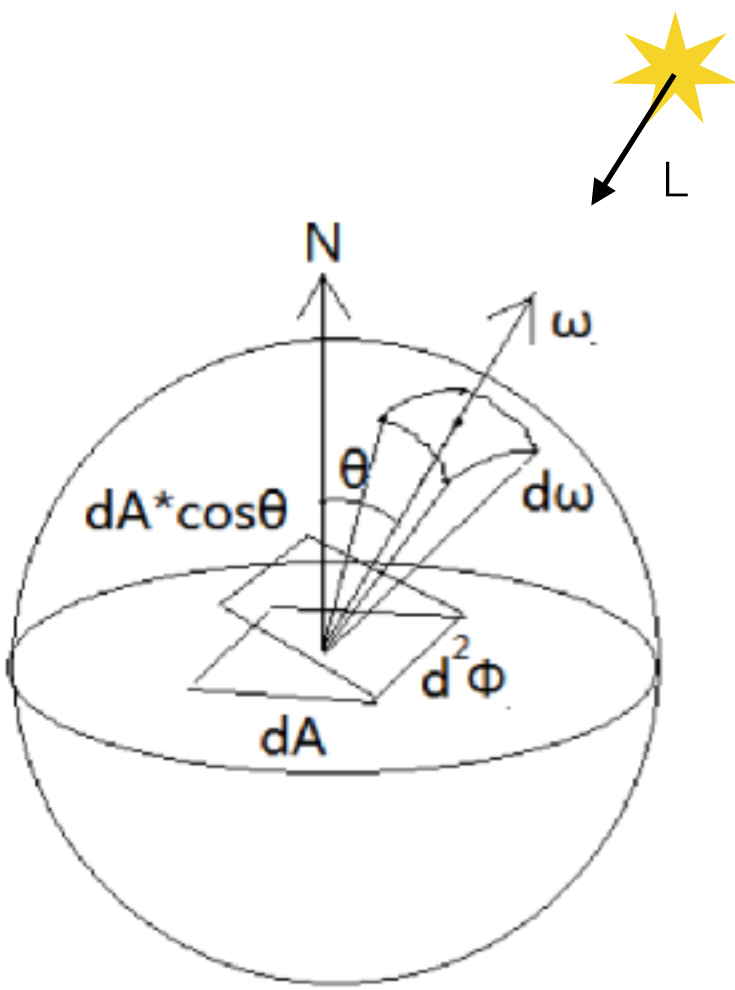
（Ω为半球面）

$$\int_{\Omega} \cos\theta \, d\omega = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sin\theta \, d\theta = \pi$$

辐射测量学物理量

光通（flux）	单位时间通过截面的能量，单位:W	Φ
照度（irradiance）	单位面积光通，单位：W/m^2	$E = \frac{d\Phi}{dA}$
光强（indensity）	单位立体角光通，单位W/sr	$I = \frac{d\Phi}{d\omega}$
亮度（radiance）	单位立体角单位投影面积光通，单位W/m^2/sr	$L = \frac{d\Phi}{d\omega * dA * \cos\theta}$

亮度（radiance）



不强调微分阶数时$d^2\Phi$也可写为$d\Phi$

$$L=\frac{d^2\Phi}{d\omega * dA\cos\theta}$$

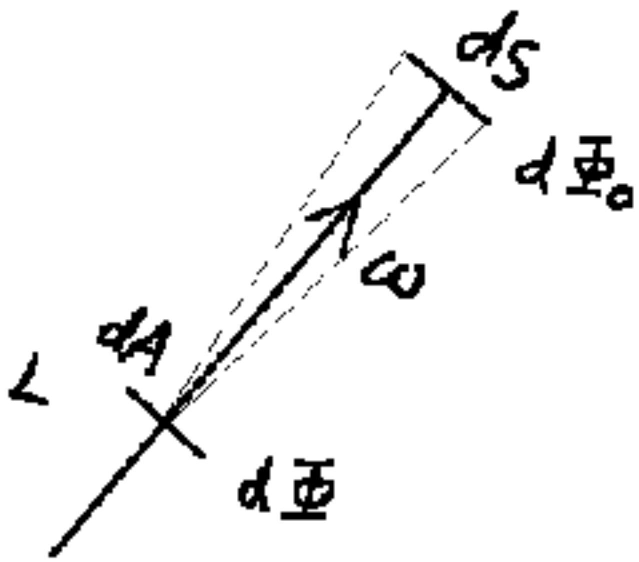
对于斜射情况，要让面元接收到同等能量，需要更大的亮度L

亮度与照度的关系

$$L=\frac{d^2\Phi}{d\omega * dA\cos\theta}=\frac{dE}{d\omega * \cos\theta} \Rightarrow E=\int_{\Omega} L*\cos\theta * d\omega$$

光在真空中传播，亮度不变（与距离无关）的证明

仅对发射面与接收面垂直的情况为例



$$L=\frac{d\Phi}{dA*d\omega}\propto\frac{\frac{d\Phi_0}{r^2}dA}{dA\frac{dS}{r^2}}=\frac{d\Phi_0}{dS}$$ （与r无关）

dS：发射面（光源） ← 辐射理论中一切光源皆面光源。

dA：接收面（亮度测量仪）

亮度概念为何重要

亮度与发射面面积、角度、接收面面积、角度无关。

光在真空中传播，亮度不变（与距离无关）。

排除一切外部干扰因素，
体现光本身属性

亮度与（HDR）颜色直接对应

应用很方便!

辐射理论观点

一切物体皆光源

一切光源皆面光源

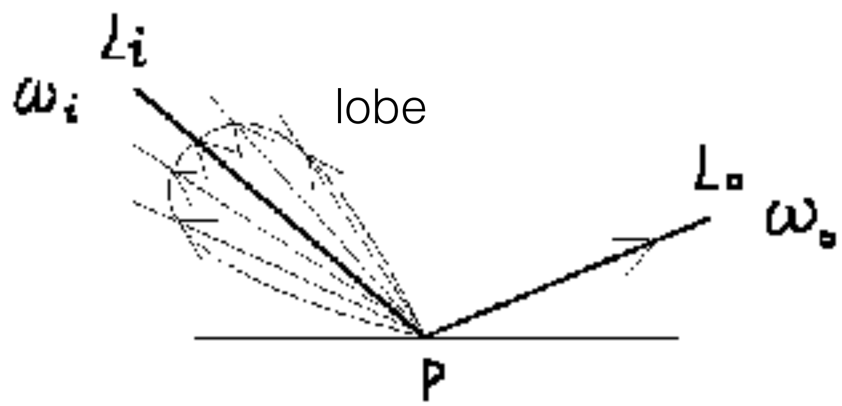
BRDF

BRDF：bidirectional reflectance distribution function

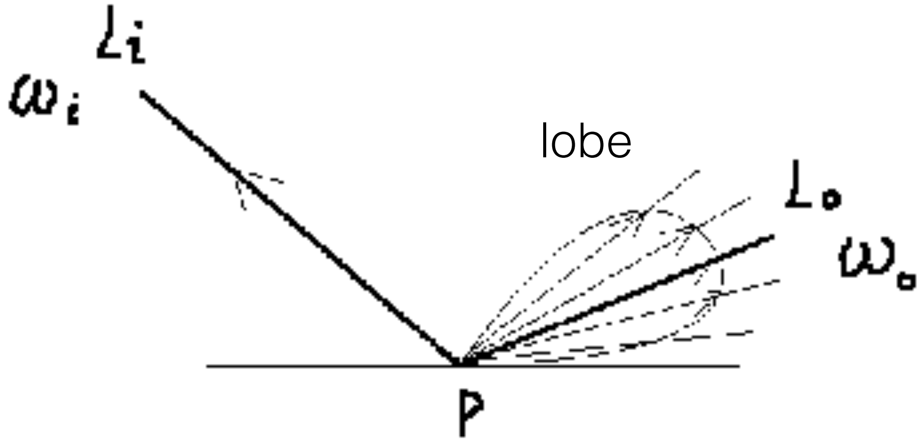
$$f(p,\omega_i,\omega_o)=\frac{dL_o}{dE_i}=\frac{dL_o}{L_i\cos\theta_i d\omega_i}$$

ωi方向入射照变化引起的ωo方向出射亮度变化

两种理解都对：



体现不同入射方向对特定出射方向的贡献。



体现特定入射方向对不同出射方向的贡献。

能量守恒

能量守恒条件： $$\forall \omega_i, \int_{\Omega} f(\omega_i, \omega_o)\cos\theta_o d\omega_o \le 1$$

证明： 设ωi方向发射面元为σ

$$E_i = \int_{\sigma} L_i \cos\theta_i \, d\omega_i = L_i \cos\theta_i \int_{\sigma} d\omega_i$$

（σ覆盖的立体角很小，此范围内Li和θi，故可提出）

$$L_o = \int_{\sigma} f(\omega_i, \omega_o) L_i \cos\theta_i \, d\omega_i = f(\omega_i, \omega_o) L_i \cos\theta_i \int_{\sigma} d\omega_i = f(\omega_i, \omega_o) E_i$$

$$E_o = \int_{\Omega} L_o \cos\theta_o \, d\omega_o = \int_{\Omega} f(\omega_i, \omega_o) E_i \cos\theta_o \, d\omega_o = E_i \int_{\Omega} f(\omega_i, \omega_o) \cos\theta_o \, d\omega_o$$

$$E_o \le E_i$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} f(\omega_i, \omega_o)\cos\theta_o d\omega_o \le 1$$

参考：https://en.wikipedia.org/wiki/Bidirectional_reflectance_distribution_function

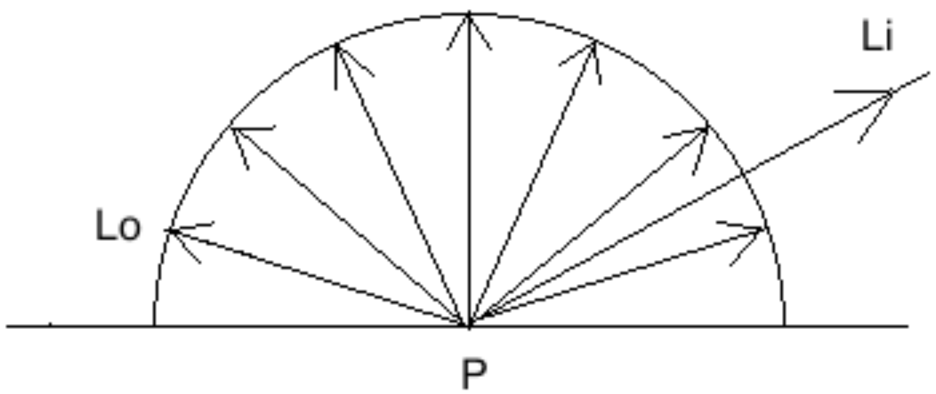
渲染方程

$$L_o = \int_{\Omega} f(p,\omega_i,\omega_o) L_i \cos\theta_i \, d\omega_i$$

（由BRDF定义立得）

不同渲染技术，就是对此方程的不同求解方法。

漫反射（lambert）BRDF



$$f_{Lambert}(l,v) = \frac{albedo}{\pi}$$

漫反射率，即固有色

证明：设单位面积上入射能量转化为出射能量的比例为Albedo

$$Albedo = \frac{E_o}{E_i}$$

$$E_o = \int_{\Omega} L_o \cos\theta_o \, d\omega_o = L_o \int_{\Omega} \cos\theta_o \, d\omega_o = \pi L_o$$

理想漫反射各方向出射亮度相等，Lo可提出

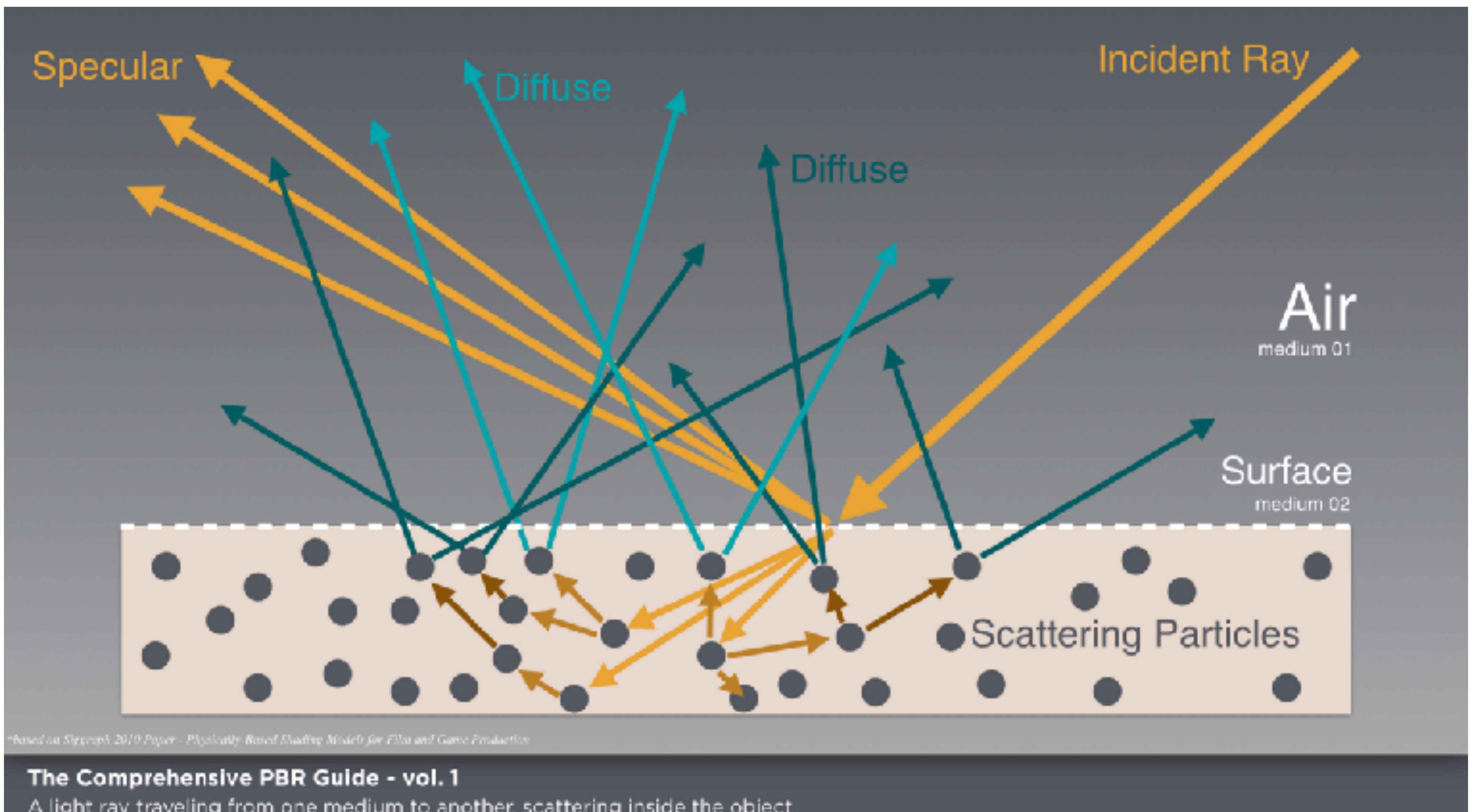
$$LambertBRDF = \frac{L_o}{E_i}$$

$$LambertBRDF = \frac{Albedo}{\pi}$$

漫反射本质：忽略了出入点间距离的次表面散射

折入又折出
因表面下散射，折出方向随机
出入点之间距离可忽略

注意：漫反射不是反射



高光（反射）BRDF

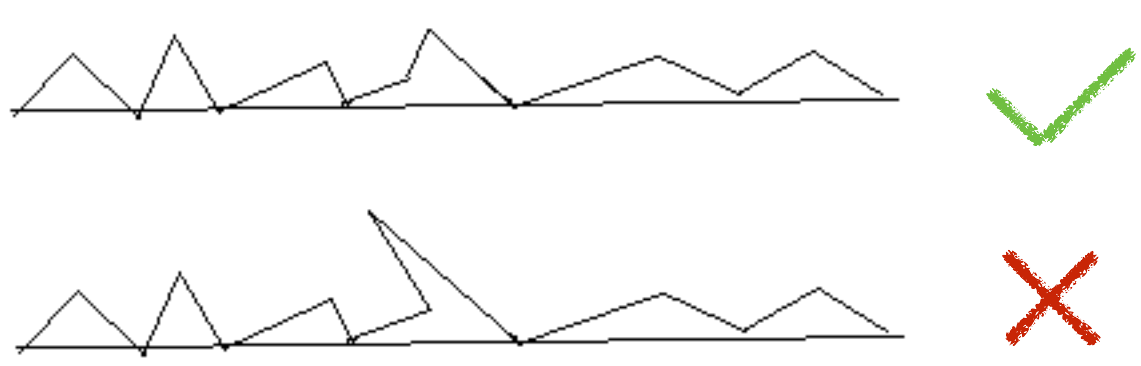
绝对光滑表面高光相对简单：反射角等于入射角，清晰映射周围环境，
亮度遵循菲涅尔。

粗糙表面高光比较复杂，不同粗糙程度，高光范围和亮度不同。如何建模?

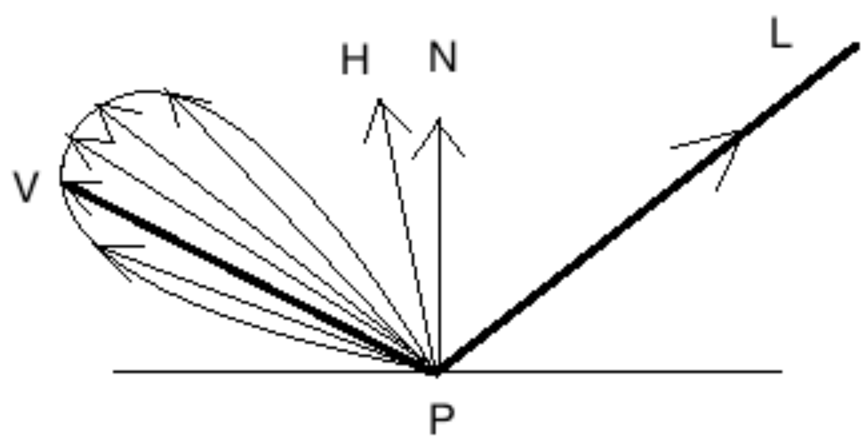
Cook-Torrance微表面模型：

将粗糙表面看作由无数绝对光滑的微表面构成，
微表面朝向越混乱，相应宏表面越粗糙。

height field简化假设：



cook-Torrance BRDF反射项表达式



所以，所有反射都是菲涅尔反射

微表面菲涅尔系数　微表面几何遮挡　微表面法向分布

$$f_{\text{Cook-Torrance}}(l,v)=\frac{F(v,h)G(l,n,v)D(h)}{4(n\cdot l)(n\cdot v)}$$

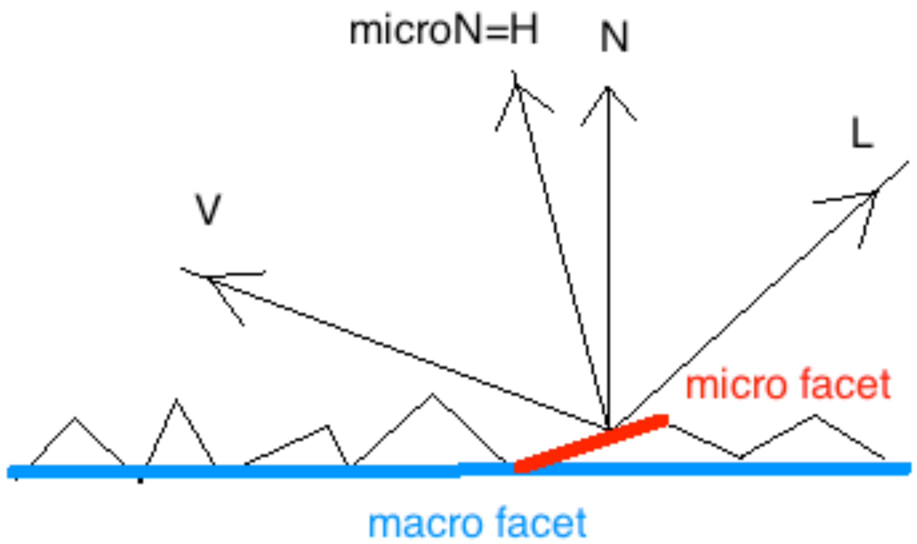
是一个框架，F,G,D函数可自行选取

参考：《physically based rendering from theory to implementation(third edition)》，p545

高光和反射是一回事

所有反射都是菲涅尔反射

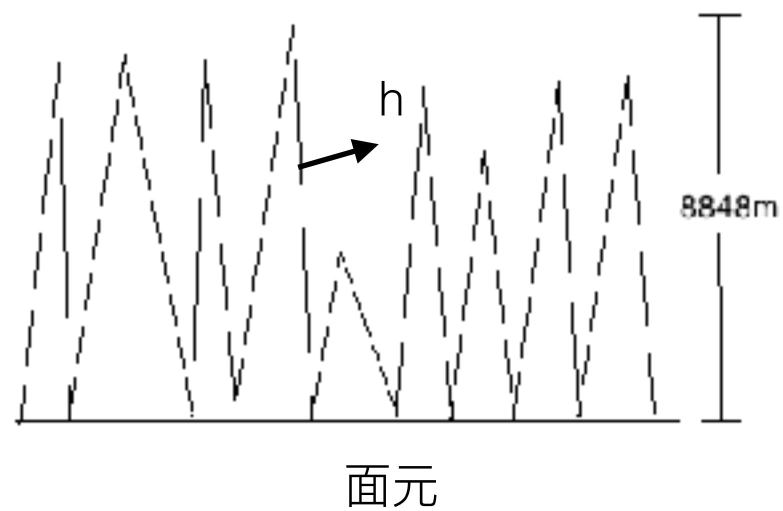
微表面法向分布　D(h)



D(h)含义：单位宏表面上法向量等于h的微表面总面积

因为只有法向量等于h的微表面才会把光反射到眼睛里（v方向上），
故只需考虑这部分微表面

D(h)可以无限大



D(h)满足归一化约束　$$\int_{\Omega} D(h)\cos\theta_h \, d\omega_h = 1$$　(由height field假设立得)

对于光滑表面　$$D(x) = \begin{cases} 1 & x = n \\ 0 & x \neq n \end{cases}$$

D函数举例：

Normalized Blinn-Phong Distribution $D(h)=\frac{e+2}{2\pi}(h\cdot n)^e$

满足归一化约束 $\int_\Omega D(h)\cos\theta_h\,d\omega_h=1$

验证：

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \frac{e+2}{2\pi}(h\cdot n)^e\cos\theta_h d\omega_h \\
&=\frac{e+2}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta_h)^e\cos\theta_h\sin\theta_h d\theta_h \\
&=\frac{e+2}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\frac{\pi}{2}}-(\cos\theta_h)^{e+1}d(\cos\theta_h) \\
&=\frac{e+2}{2\pi}2\pi\int_1^0-u^{e+1}du \\
&=\frac{e+2}{2\pi}2\pi(-\frac{u^{e+2}}{e+2}|_1^0) \\
&=1
\end{aligned}
$$

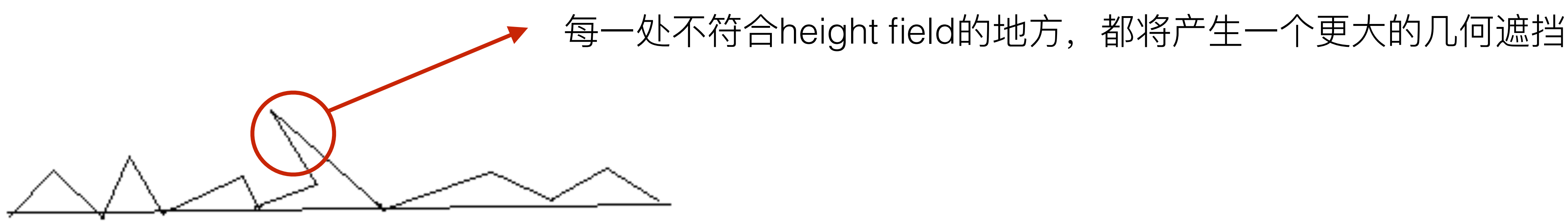
Normalized Blinn-Phong较Blinn-Phong“更符合”能量守恒

为啥Normalized较非Normalized“更符合”能量守恒?

在有height field简化假设的情况下，主要靠归一化约束维护能量守恒，几何遮挡起辅助作用。

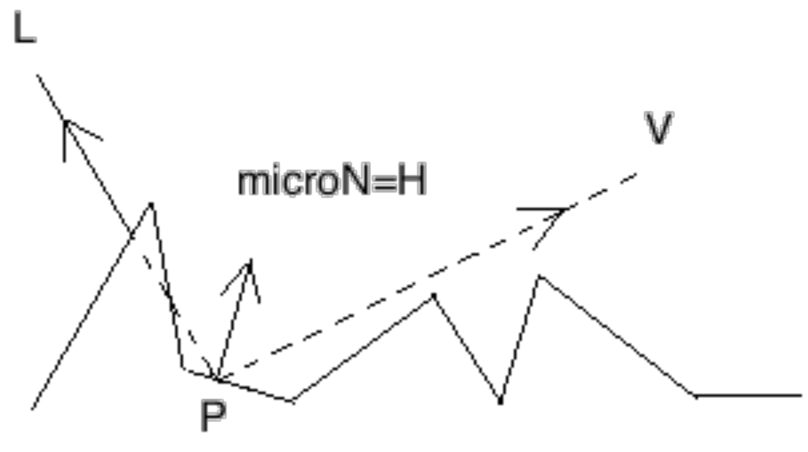
疑问：
如果出现了一个更强大的模型，不依赖于height field简化假设，
那么这个模型靠啥维护能量守恒?

答：如果没有height field假设，几何遮挡将剧增（如图），
此时几何遮挡将成为维护能量守恒的主力。

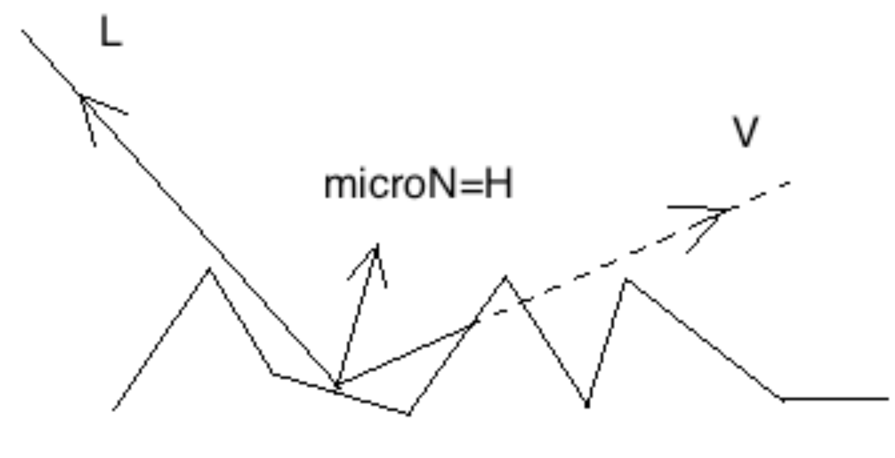


微表面几何遮挡 G(l,n,v)

由于微表面对光线或视线的遮挡，使进入眼睛的亮度减少



Shadowing



Masking

对于光滑表面 G(l,n,v)=1

G函数举例：

$$G(l,n,v)=\min\{1,G_{masking},G_{shadowing}\}=\min\{1,\frac{2(n\cdot h)(n\cdot v)}{v\cdot h},\frac{2(n\cdot h)(n\cdot l)}{l\cdot h}\}$$

参考：《3D游戏与计算机图形学中的数学方法(第3版)》P124

微表面菲涅尔（Fresnel）系数 $F(v,h)$

F(v,h)含义：法向量等于h的微表面反射率

实时渲染中通常使用Schlick近似公式：

$$F_{Schlick}(v,n) = F_0 + (1 - F_0)(1 - n \cdot v)^5$$

参考：https://en.wikipedia.org/wiki/Schlick%27s_approximation

光滑表面掠角(gazing angle)为完美镜面

金属没有漫反射（光线折入表面即吸收）

金属高光可能有颜色（F0有颜色），非金属高光无颜色（F0为灰度）

参考：https://www.allegorithmic.com/system/files/software/download/build/PBR_Guide_Vol.1.pdf

漫反射与反射配比

$$f(l,v) = f_{Lambert}(l,v)(1 - F_{macro}(v,n)) + f_{Cook-Torrance}(l,v)$$

用 1-宏表面菲涅尔 作为漫反射比例

$$F_{macro}(v,n) = \frac{\int_{\Omega} F(v,microN)D(microN)d\omega_{microN}}{\int_{\Omega} D(microN)d\omega_{microN}}$$

对于光滑表面而言，microN=n，D(microN)=D(n)=1，退化为：

$$F_{macro}(v,n) = F(v,n)$$

出于简化，往往粗糙表面也近似使用此式。

BRDF最终表达式

$$f_{Lambert}(l,v)=\frac{albedo}{\pi}$$

$$f_{\text{Cook-Torrance}}(l,v)=\frac{F(v,h)G(l,n,v)D(h)}{4(n\cdot l)(n\cdot v)}$$

$$F_{macro}(v,n)\approx F(v,n)$$

$$f(l,v)=f_{Lambert}(l,v)(1-F_{macro}(v,n))+f_{Cook-Torrance}(l,v)$$

即：

$$f(l,v)=\frac{Albedo}{\pi}(1-F(v,n))+\frac{F(v,h)G(l,n,v)D(h)}{4(n\cdot l)(n\cdot v)}$$

渲染方程求解方案举例

精确光源

实时

IBL

~~光线追踪　（离线）~~

精确光源(Punctual Light Sources)

传统光源类型，如directional light，在辐射理论中该如何表示?

精确光源：

面积无限小，亮度无限大，贡献有限亮度的发光面。

渲染方程为

$$L_o = \pi c_{light} f(l,v)(n \cdot l)$$

终于不再带有积分符号，可以写进shader了!

推导：

精确光源颜色定义为垂直照射固有色为白色的lambert表面，表面被染成的颜色：

$$c_{light} = \int_\sigma \frac{white}{\pi} L d\omega = \frac{white}{\pi} \int_\sigma L\, d\omega$$

所以：

$$L_o = \int_\sigma f(l,v) L (n \cdot l) d\omega$$

$$= f(l,v)(n \cdot l) \int_\sigma L\, d\omega$$

(σ覆盖的立体角很小，此范围内 ℓ不变，故可提出)

$$= f(l,v)(n \cdot l) \pi c_{light}$$

参考：http://renderwonk.com/publications/s2010-shading-course/hoffman/s2010_physically_based_shading_hoffman_a_notes.pdf

基于图像的光照（IBL）

用环境贴图充当渲染方程 $L_o = \int_{\Omega} f(p,\omega_i,\omega_o) L_i \cos\theta_i \, d\omega_i$ 中的Ω，进行照明

求解方法：

~~暴力计算：直接计算球面积分。~~

离线

~~重要性采样：按lobe进行采样，即对出射方向贡献大的入射方向采样密集，贡献小的采样稀疏。~~

实时 ← 预卷积（prefiltering）：

漫反射和高光分开卷积。

漫反射预卷积可存到cubemap。近似充当环境光(ambient)。

高光预卷积结果维数较高，需做诸多近似才能存入cubemap