高等数学

浙江普通专升本专用教材

作者：Jaccoobo

组织：龙津教育

时间：2021 年 4 月

版本：第一版

“不论一个人的数学水平有多高，只要对数学拥有一颗真诚的心，他就在自己的心灵上得到了升华。” —*SCIbird*

前言

高等数学是全国高等院校理工科的基础课程, 这门课的任务是以丰富的背景、巧妙的思维和有趣的结论吸引读者, 使学生在浓厚的兴趣中学习和掌握高等数学的基本概念、基本方法和基本理论. 我们正是抱着这样的心愿编写这本教科书, 并努力去实现它.

本讲义集依据“专升本”高等数学考试大纲, 由本人亲笔编写. 相信这本书将来会对很多人的学习产生帮助. 由于编写时间仓促, 且限于编者水平, 本书不当之处难免存在, 诚望读者批评指正!

Jaccoobo

浙江 · 杭州

2021 年 4 月

目录

第一部分

函数与极限论

第一章 函数与极限

1.1 数集与函数

1.1.1 数集与区间

1. 数集

   人类对数的认识是逐步发展的, 常用的数集有:

   - 自然数集 $\mathbb{N}=\{0,1,2,\cdots\}$
   - 整数集 $\mathbb{Z}=\{0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots\}$
   - 正整数集合 $\mathbb{N}^*=\mathbb{N}-\{0\}$
   - 有理数集 $\mathbb{Q}$
   - 实数集 $\mathbb{R}\longleftarrow$ 高等数学的研究对象
   - 复数集 $\mathbb{C}$

2. 区间

   数轴上长度大于零的一段称为区间 .

   有限区间有四种 ($a<b$, a 和 b 称为区间的端点):

$$
\begin{aligned}
(a,b)&=\{x\mid a<x<b\} && \text{有限开区间}\\
[a,b]&=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\} && \text{有限闭区间}\\
(a,b]&=\{x\mid a<x\leqslant b\} && \text{左开右闭区间}\\
[a,b)&=\{x\mid a\leqslant x<b\} && \text{左闭右开区间}
\end{aligned}
$$

   无限区间有五种 (其中 a 或 b 称为区间的端点):

$$
\begin{aligned}
&(-\infty,b)=\{x\mid x<b\} && \text{无限开区间}\\
&(a,+\infty)=\{x\mid x>a\} && \text{无限开区间}\\
&(-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b\} && \text{无限闭区间}\\
&[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\} && \text{无限闭区间}\\
&(-\infty,+\infty)=\mathbb{R} && \text{既是开区间又是闭区间}
\end{aligned}
$$

3. 邻域

   - a 的邻域 $U(a,\delta)$: $U(a,\delta)=\left\{x\,\middle|\,|x-a|<\delta\right\}=(a-\delta,a+\delta)$
   - a 的去心邻域 $\mathring{U}(a,\delta)$: $\mathring{U}(a,\delta)=\left\{x\,\middle|\,0<|x-a|<\delta\right\}=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$
   - a 的左邻域: $U_-(a,\delta)=(a-\delta,a]$
   - a 的右邻域: $U_+(a,\delta)=[a,a+\delta)$
   - a 的去心左邻域: $\mathring{U}_-(a,\delta)=(a-\delta,a)$
   - a 的去心右邻域: $\mathring{U}_+(a,\delta)=(a,a+\delta)$

   其中 a 称为邻域的中心, δ 称为邻域的半径. 邻域这一概念的重要性将体现在极限的严格定义之中.

1.1.2 函数

1. 函数的定义

定义 1.1

设非空数集 $D \subset \mathbb{R}$, 如果存在一个对应规则 f, 使得对每个 $x \in D$, 都有一个确定的实数 y 与之对应, 则称 f 为定义在 D 上的一个函数, 记为 $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, 简记为 $y = f(x)$.

- x 称为自变量;
- y 称为因变量;
- D 称为定义域;
- $Z = f(D) = \{y \,|\, y = f(x), x \in D\}$ 称为值域.

注 两个函数相同, 当且仅当两者的定义域和对应规则都相同.

例 1.1 思考 $y = x$ 和 $y = \dfrac{x^2}{x}$ 是不是相同的函数.

例 1.2 思考 $y = x$ 和 $y = \sqrt{x^2}$ 是不是相同的函数.

2. 函数的定义域的确定

对未指明定义域的函数, 通常根据函数表达式确定它的自然定义域; 根据问题的实际背景所要求的自变量的取值范围则要确定它的实际定义域. 求函数的自然定义域时有三个基本要求:

- 偶次根号里面的被开方数要求大于等于零;
- 对数里面要求真数大于零;
- 分母要求不能等于零.

诸如 $y = \sqrt{x}$ 的定义域为 $D = [0, +\infty)$, $y = \log_a x$ 的定义域为 $D = (0, +\infty)$, $y = \dfrac{1}{x}$ 的定义域为 $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 等.

1.1.3 函数的性质

1. 函数的奇偶性

定义 1.2

给定函数 $y = f(x)$,

- 如果 $\forall x \in D$, 总有 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为偶函数.
- 如果 $\forall x \in D$, 总有 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 为奇函数.

例 1.3 x, x^3, $\dfrac{1}{x}$, $\dfrac{1}{x^3}$, $\sin x$, $\tan x$, $\tan x$ 为奇函数.

例 1.4 x^2, x^4, $\dfrac{1}{x^2}$, $\dfrac{1}{x^4}$, $\cos x$ 为偶函数.

2. 函数的周期性

定义 1.3

对于函数 $y=f(x)$, 如果存在正常数 T 使得 $f(x+T)=f(x)$ 恒成立, 则称此函数为周期函数; 满足这个等式的最小正数 T, 称为此函数的周期.

例 1.5 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 以 2π 为周期.

例 1.6 $y=\tan x$ 和 $y=\cot x$ 以 π 为周期.

3. 函数的单调性

定义 1.4

设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义, 对于任意两点 x_1,$x_2 \in I$,

- 若当 $x_1<x_2$ 时有 $f(x_1)<f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的;
- 若当 $x_1<x_2$ 时有 $f(x_1)>f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的.

4. 函数的有界性

定义 1.5

设函数 $y=f(x)$ 在数集 I 上有定义, 如果存在一个正数 M, 对于所有 $x\in I$, 恒有 $|f(x)|\leqslant M$, 则称函数 $f(x)$ 在数集 I 上有界. 若这样的 M 不存在, 则称 $f(x)$ 在 I 上无界. 如果函数在其定义域上有界, 则称它为有界函数; 否则称它为无界函数.

例 1.7 $y=\sin x$, $y=\cos x$ 是有界函数.

例 1.8 $y=x^2$, $y=\tan x$, $y=x\cos x$ 是无界函数.

类似地, 我们可以定义函数有上界和有下界的概念.

- 存在实数 $M>0$, 对于所有 x, 恒有 $|f(x)|\leqslant M$ .... 有界
- 存在实数 $M_1>0$, 对于所有 x, 恒有 $f(x)\leqslant M_1$ .... 有上界
- 存在实数 $M_2>0$, 对于所有 x, 恒有 $f(x)\geqslant M_2$ .... 有下界
- 对于任意实数 $M_3>0$, 总存在 x_0, 恒有 $f(x_0)>M_3$ .... 无界

注 补充两个逻辑记号: 存在量词 $\exists$ 表示 “存在, 至少有一个”; 全称量词 $\forall$ 表示 “任意的, 每一个”.

1.1.4 函数的构建

1. 反函数

定义 1.6

设 $y=f(x)$ 的定义域为 D, 值域为 Z. 如果对每个 $y\in Z$, 有唯一的 $x\in D$ 满足 $y=f(x)$, 则可以得到定义在 Z 上的函数 $x=f^{-1}(y)$, 称为 $y=f(x)$ 的反函数. 注 设 $f^{-1}:B\to A$ 为 $f:A\to B$ 的反函数, 则有 $\left(f^{-1}\circ f\right)(x)=x,\forall x\in A;\left(f\circ f^{-1}\right)(y)=y,\forall y\in B$.

例 1.9 求函数 $y=2\ln x+1$ 的反函数.

例 1.10 求函数 $y=\dfrac{\mathrm{e}^x-2}{\mathrm{e}^x}$ 的反函数.

例 1.11 求函数 $y=\dfrac{x-1}{x+2}$ 的反函数.

2. 复合函数

定义 1.7

设 $y=f(u)$ 的定义域是 $D(f)$, $u=g(x)$ 的值域是 $Z(g)$, $D(f)\cap Z(g)$ 非空, 则称 $y=(f\circ g)(x)=f[g(x)]$ 为 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 的复合函数. 复合函数的定义域是那些使得它有意义的 x 所组成的集合.

例 1.12 两个函数 $y=\sqrt{u}$ 和 $u=1-x^2$ 的复合函数是 $y=\sqrt{1-x^2}$.

例 1.13 三个函数 $y=\sin u$、$u=v^2-1$ 和 $v=\mathrm{e}^x$ 的复合函数是 $y=\sin(\mathrm{e}^{2x}-1)$.

例 1.14 设 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$, 求复合函数 $y=f[\dfrac{1}{f(x)}]$ 的表达式和定义域.

3. 三角函数
   ① 正弦函数 $y=\sin x$
   ② 余弦函数 $y=\cos x$
   ③ 正切函数 $y=\tan x,x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$
   ④ 余切函数 $y=\cot x,x\neq k\pi,k\in\mathbb{Z}$
   ⑤ 正割函数 $y=\sec x=1/\cos x$
      - $\sec^2 x=\tan^2 x+1$
   ⑥ 余割函数 $y=\csc x=1/\sin x$
      - $\csc^2 x=\cot^2 x+1$
4. 反三角函数
   ① 反正弦函数 $y=\arcsin x$ .... $x=\sin y$

- $x \in [-1,1]$, $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

② 反余弦函数 $y = \arccos x$ .... $x = \cos y$

- $x \in [-1,1]$, $y \in [0,\pi]$

③ 反正切函数 $y = \arctan x$ .... $x = \tan y$

- $x \in (-\infty,+\infty)$, $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

④ 反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$ .... $x = \cot y$

- $x \in (-\infty,+\infty)$, $y \in (0,\pi)$

5. 初等函数

下面这六种函数, 统称为基本初等函数:

① 常值函数 $y = c$;

② 幂函数 $y = x^{\mu}$;

③ 指数函数 $y = a^x$;

④ 对数函数 $y = \log_a x$; 常用 $y = \log_e x = \ln x$, $y = \log_{10} x = \lg x$;

⑤ 三角函数 $y = \sin x$, $y = \cos x$ 等;

⑥ 反三角函数 $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$ 等.

由六种基本初等函数经过有限次四则运算和函数复合所得到的由一个统一的解析式表示的函数, 称为初等函数. 例如多项式函数:

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n.$$

有理函数:

$$f(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m} = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}(a_i, b_j \in \mathbb{R}, i = 0,1,\cdots,n, j = 0,1,\cdots,m).$$

它们都是初等函数.

定义 1.8

通过对多项式进行代数运算 (四则运算、乘方和开方) 所得到函数称为代数函数, 非代数函数的函数称为超越函数. 代数函数包括有理函数 (多项式的加减乘除) 与无理函数; 超越函数包括三角函数、反三角函数、指数函数、对数函数等.

例 1.15 将下列初等函数分解为简单函数的复合:

① $y = (1 + \ln x)^5$;

② $y = \sin^2(3x + 1)$;

③ $y = \mathrm{e}^{2x^2-1}$;

④ $y = \sqrt{2 + \cos^2 x}$;

⑤ $f(x) = \dfrac{x^4 - 20x^2}{x + \sqrt{1-x}} + (x^2 - 2)\sqrt[3]{x+3}$.

解 ①$y = u^5$, $u = 1 + \ln x$; ②$y = u^2$, $u = \sin v$, $v = 3x + 1$. ③④⑤略.

□

注

- 符号函数 $\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$ 不是初等函数.
- 但是分段函数也有可能是初等函数 (如绝对值函数即可以分段表达又可以用初等函数表达).
- 理解复合函数的复合过程是基本的, 在第二章对复合函数求导数过程中就需要读者对这一基本概念的把握, 提醒读者需要重视它!

✍ 习题 1.1

1. 求下列函数的自然定义域.

(1) $y=1/(\sin x-\cos x)$

(2) $y=\lg(\cos\lg x)$

(3) $y=\arcsin[\lg(x/10)]$

(4) $y=\dfrac{1}{[x+1]}$

(5) $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x-3}$

(6) $y=\sqrt{x}/\sin\pi x$

(7) $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$

(8) $y=\arccos\sqrt{x/(2x-1)}$

提示 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 即有 $x-1<[x]<x$ 或者 $[x]\leqslant x<[x]+1$.

2. 已知 $f(x)$ 的定义域为 $[0,3]$, 求 $g(x)=f[\tan^2 x]$ 的定义域.

3. 已知 $f(x)=\ln\dfrac{2+x}{2-x}$, 求 $f(x)+f(2/x)$ 的定义域.

4. 已知 $f(x)=\lg(x^2-x-2)+\dfrac{x}{\sqrt{x+2}}$, 求 $f(x)$ 的定义域.

5. 设 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$, 试验证 $f\{f(f[f(x)])\}=x$, 并求 $f\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)(x\neq 0,x\neq 1)$.

6. 设 $f(x)=\begin{cases}0,x<0,\\ x,x\geqslant 0.\end{cases}$ $g(x+1)=x^2+x+1$, 试求 $f[g(x)],g[f(x)],f[f(g(x))],f[g(f(x))]$.

7. 设 $f(x)=\begin{cases}1,|x|\leqslant 1;\\ 0,|x|>1.\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 2;\\ 2, & |x|>2\end{cases}$ 求

(1) $y=f[g(x)]$

(2) $y=g[g(x)]$

提示 由分段函数 $f(x),g(x)$ 求复合函数 $f[g(x)],g[f(x)]$ 的表示式, 可把函数关系式 $f(x)$ 中的 x 都换成 $g(x)$, 且把 $f(x)$ 的自变量取值范围（一般用不等式表示）中的 x 也同时换成 $g(x)$, 即可求得 $f[g(x)]$ 的表示式. 然后解所得到的 $g(x)$ 的不等式, 即可求出 $f[g(x)]$ 的定义域.

8. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & 当|x|<1;\\ 0, & 当|x|=1;\\ -1, & 当|x|>1.\end{cases}$ $g(x)=\mathrm{e}^x$. $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$, 并作出这两个函数的图形.

9. $f(x+1/x)=x^2+1/x^2$, 求 $f(x)$.

10. $f(x)+f(\dfrac{x-1}{x})=1+x(x\neq 0,1)$, 求 $f(x)$.

11. 求下列函数的反函数及其定义域.

(1) $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$

(2) $y=1+2\sin\dfrac{x-1}{x+1}(x\geqslant 0)$

(3) $y=\dfrac{1-\sqrt{1-2x}}{1+\sqrt{1-2x}}(x\leqslant 1/2)$

12. 求$y=f(x)=\begin{cases}1+x^2, & x>0;\\ 0, & x=0;\\ -1-x^2, & x<0\end{cases}$ 的反函数并作图.

13. 判定 $\phi(x)=a^x+a^{-x}(a>0)$ 和 $\psi(x)=a^x-a^{-x}$ 的奇偶性.

14. 证明下列命题:

(1) 设 $f(x)$ 定义在对称区间上 $(-l,l)$ 上的任意函数, 则有: $\phi(x)=f(x)+f(-x)$ 是偶函数, $\psi(x)=f(x)-f(-x)$ 是奇函数.

(2) 定义在对称区间上 $(-l,l)$ 上的任意函数均可分解为偶函数与奇函数之和. 即 $f(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}+\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$.

(3) 若 $f(u),u=g(x)$ 的奇偶性不同, 则其复合函数 $y=f(g(x))$ 必为偶函数.

(4) 若 $f(u),u=g(x)$ 的奇偶性相同, 则其复合函数 $y=f(g(x))$与$f(u)$ 奇偶性相同.

结论

	$f(x)$ 为奇	$f(x)$ 为偶	$g(x)$ 为奇	$g(x)$ 为偶
$f(x)$ 为奇函数	$f[f(x)]$ 为奇	$f(x)\equiv 0$ 为奇、偶	$f[g(x)]$ 为奇	$f[g(x)]$ 为偶
$f(x)$ 为偶函数	$f(x)\equiv 0$为奇、偶	$f[f(x)]$ 为偶	$f[g(x)]$ 为偶	$f[g(x)]$ 为偶
$g(x)$ 为奇函数	$g[f(x)]$为奇	$g[f(x)]$ 为偶	$g[g(x)]$ 为奇	$g(x)\equiv 0$ 为奇、偶
$g(x)$ 为偶函数	$g[f(x)]$为偶	$g[f(x)]$ 为偶	$g(x)\equiv 0$ 为奇、偶	$g[g(x)]$ 为偶

15. 判定 $f(x)=\begin{cases}\cos x-x, & -\pi\leqslant x\leqslant 0;\\ \cos x+x, & 0<x\leqslant\pi.\end{cases}$ 的奇偶性.

16. 判定下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=\dfrac{a^x-1}{a^x+1}(a>0\text{且}a\neq 1)$

(2) $f(x)=|x\sin x|\mathrm{e}^{\cos x}$

(3) $f(x)=x^3+\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}$

(4) $f(x)=x+\sin x+\mathrm{e}^x$

(5) $f(x)=\ln(\sqrt{1+x^2}+x$

(6) $f(x)=\ln(\sqrt{1+x^2}-x)$

17. 已知 $f(x)$ 定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上, 证明满足下列条件的函数 f 是周期函数.

(1) $\exists T\neq 0, f(x+T)=-f(x)$

(2) $\exists T\neq 0, f(x+T)=1/f(x)$

提示 周期为 $2T$.

1.2 数列的极限

1.2.1 数列极限的定义

1. 数列的定义

定义 1.9
一列按照正整数从小到大顺序排列的数 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$ 称为数列, 记为 $\{x_n\}$. 第 n 项 x_n 的表达式称为数列的通项或一般项.

随着 n 的增大, x_n 也跟着变化. 当 n 趋于无穷大时, x_n 是否会无限接近一个确定的数?

例 1.16 数列的例子

- $x_n = 3 \quad 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ \cdots \longrightarrow 3$
- $x_n = \dfrac{1}{n} \quad 1,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{4},\ \cdots \longrightarrow 0$
- $x_n = \dfrac{1}{2^n} \quad \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{8},\ \dfrac{1}{16},\ \cdots \longrightarrow 0$
- $x_n = \dfrac{n}{n+1} \quad \dfrac{1}{2},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{3}{4},\ \dfrac{4}{5},\ \cdots \longrightarrow 1$
- $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n} \quad -1,\ \dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{4},\ \cdots \longrightarrow 0$
- $x_n = 2^n \quad 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \cdots \times$
- $x_n = (-1)^n \quad -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots \times$

有些数列则不容易凭借观察得出其变化趋势, 比如: $x_n = \sqrt[n]{n},\ \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. [1]

2. 数列的极限

定义 1.10
设 $\{x_n\}$ 为一个数列, 如果存在常数 a, 对任何 $\varepsilon > 0$, 总存在 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时, 总有

$$|x_n - a| < \varepsilon,$$

则称数列 $\{x_n\}$ 的极限等于 a, 或者称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a, 记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ 或者 } x_n \to a (n \to \infty).$$

如果这样的常数 a 不存在, 则称数列 $\{x_n\}$ 发散. 特别地, 我们称收敛到零的数列

1两个与对数、自然常数、阶乘相关的不等式

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$$
$$\left(\frac{n+1}{e}\right)^n < n! < e\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}, n \in \mathbb{N}$$

x_n 为无穷小 (变) 量 (或无穷小数列). 数列 $\{x_n\}$ 收敛到 a 等价于数列 $\{a_n - a\}$ 是无穷小量. 我们用以下逻辑符号 ($\varepsilon-\delta$ 语言) 严格地表述数列极限这一概念:

$$\exists a \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N : |x_n - a| < \varepsilon.$$

其中 N 一般是与我们事先任意给定的 ε 有关, 即 $N = N(\varepsilon)$.

推论 1.1

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow$ 当$n > N$ 时, 所有的点x_n 都落在$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 内, 只有有限个 (至多只有 N 个) 落在其外.

注 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq a \Leftrightarrow \forall a \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon_0 > 0, \forall N \in \mathbb{N}^*, \exists n_0 > N : |x_{n_0} - a| \geqslant \varepsilon_0$.

定义 1.11. 设

数列 $\{x_n\}$. 若对任意的正数 M, 都存在正整数 N, 使得当 $n > N$ 时, 有 $|x_n| \geqslant M$, 则称 $\{x_n\}$ 为无穷大量 (记为 $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = +\infty$); 若存在正数 M 以及正整数 N 使得当 $n \geqslant N$ 时, 有 $|x_n| \leqslant M$, 则称 $\{a_n\}$ 为有界变量.

注 发散的数列至少有这两种可能:

(1) 无界型的: 比如 $x_n = 2^n$;

(2) 摆动型的: 比如 $x_n = \cos n\pi = (-1)^n$.

例 1.17 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$.

证明 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = [\dfrac{1}{\varepsilon}]$, 则当 $n > N$ 时就有

$$|x_n - 0| = \left|\tfrac{(-1)^n}{n} - 0\right| = \tfrac{1}{n} < \varepsilon.$$

□

例 1.18 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$.

证明 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = [\dfrac{1}{\varepsilon}]$, 则当 $n > N$ 时就有

$$|x_n - 0| = \left|\tfrac{1}{2^n} - 0\right| = \tfrac{1}{2^n} < \tfrac{1}{n} < \varepsilon.$$

其中不等式 $2^n > n$ 可由数学归纳法得到.

□

1.2.2 数列极限的运算

1. 数列极限的四则运算法则

定理 1.1

如果 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$, 那么

① $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n = A \pm B$;

② $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n = A \cdot B$;

③ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}=\dfrac{A}{B}$ (要求分母不为零).

推论 1.2

$\lim\limits_{n\to\infty}(c\cdot x_n)=c\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

证明 (1) $\forall\varepsilon>0$, 取 $\varepsilon_1=\varepsilon/2$, 则由 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ 得到, $\exists N_1>0$ 使得当 $n>N_1$ 时总有

$$|x_n-A|<\varepsilon_1$$

再取 $\varepsilon_2=\varepsilon/2$, 则由 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$ 得到, $\exists N_1>0$ 使得当 $n>N_1$ 时总有

$$|y_n-B|<\varepsilon_2.$$

令 $N=\max\{N_1,N_2\}$, 则当 $n>N$ 时总有

$$\begin{aligned}|(x_n+y_n)-(A+B)|&=|(x_n-A)+(y_n-B)|\\&\leqslant|x_n-A|+|y_n-B|<\varepsilon_1+\varepsilon_2=\varepsilon.\end{aligned}$$

(2)(3) 略.

□

例 1.19 求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+4}{n^2+1}$.

解 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{n}+4\cdot\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{1}{n^2}}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}+4\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}}$

$=\dfrac{0+4\times0}{1+0}=0.$

□

例 1.20 求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+(-1)^n}{n+1}$.

解 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{(-1)^n}{n}}{1+\frac{1}{n}}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}$

$=\dfrac{1+0}{1+0}=1.$

□

例 1.21 求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\times3^n}{3^n+1}$.

解 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{1+\dfrac{1}{3^n}}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}2}{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3^n}}$

$=\dfrac{2}{1+0}=2.$

□

例 1.22 求下列数列的极限

$$(1)\ \lim_{n\to\infty}\frac{2n+3n^2}{1+n^3};\qquad (2)\ \lim_{n\to\infty}\frac{3n+(-1)^n}{n+(-1)^n};\qquad (3)\ \lim_{n\to\infty}\frac{3^n+1}{6^n+1}.$$

1.2.3 数列极限的性质

1. 收敛数列的性质

性质 1.1 若 $\{x_n\}$ 收敛, 则其极限是唯一的.

性质 1.2 设 $\{x_n\}$ 收敛, 则存在 $M>0$ 使得对任何 n 都有 $|x_n|\leqslant M$.

证明 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.取 $\varepsilon=1$, 则存在 $N>0$, 使得当 $n>N$ 时有 $|x_n-A|<\varepsilon=1$. 此时

$$|x_n|=|(x_n-A)+A|\leqslant|x_n-A|+|A|<1+|A|$$

取 $M=\max\{x_1,x_2,\cdots,x_{[N]},1+|A|\}$, 则对任何 n 都有 $|x_n|\leqslant M$.

□

性质 1.3 设数列 x_n 收敛于 $A>0$（或 $A<0$）, 则存在 $N>0$, 使得当 $n>N$ 时有 $x_n>0$（或 $x_n<0$).

证明 取 $\varepsilon=A/2$, 则存在 $N>0$, 使得当 $n>N$ 时有 $|x_n-A|<\varepsilon=A/2$. 此时 $x_n>A/2>0$.

□

推论 1.3

设数列 $x_n\geqslant 0$（或 $x_n\leqslant 0$）, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$, 则有 $A\geqslant 0$（或 $A\leqslant 0$).

推论 1.4

如果 $x_n\geqslant y_n$(或者$x_n>y_n$), 而且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$, 则有 $A\geqslant B$.

2. 数列与子数列

定理 1.2. 数列与子数列的敛散性

若数列 x_n 收敛于 A, 则它的任一子数列也收敛, 且其极限也是 A.

推论 1.5

若数列 x_n 有两个子数列收敛于不同的极限值, 则 x_n 发散. 判定一个数列是否发散, 常常考虑该数列的奇数列子列和偶数子列的极限.

数列与子数列的关系还有:

- 若 $\{x_n\}$ 是有界列, 则必存在一个收敛子列.
- 若 $\{x_n\}$ 是无上（下）界数列, 则存在子列 $\{x_{n_k}\}$, 使得 $x_{n_k}\to+\infty(-\infty)(k\to\infty)$.
- 若 $\{x_n\}$ 满足 $x_{2n}\to A, x_{2n-1}\to A(n\to\infty)$, 则 $x_n\to A(n\to\infty)$.
- 若 $\{x_n\}$ 的任一子列均含有收敛子列, 则 $\{x_n\}$ 是有界列.

注 数列无界的充要条件是有以无穷大为的极限子列. 但是无界数列的极限不一定是无穷大, 它的极限有可能不存在.

1.2.4 小结

与数列相关的常用的公式

① 自然求和公式: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

② 自然数平方求和公式: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

③ 自然数立方求和公式: $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

④ 等差数列 $a_n = a_1 + (n-1)d$ 的前 n 项和公式: $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2} = na_1 + \frac{n(n-1)d}{2}$

⑤ 等比数列 $a_n = a_1 q^{n-1} (q \neq 1)$ 的前 n 项和公式: $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

⑥ 二项展开公式: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$.

其中 $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$为二项式系数, 也记为$\binom{n}{m}$

⑦ $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$

常用不等式回顾:

① 三角不等式: $||a| - |b|| \leqslant |a \pm b| \leqslant |a| + |b|$

② 几何平均-算术平均不等式: 对 $a_i \geqslant 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$, 有

$$\frac{1}{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right)} \leqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

等号成立当且仅当 $a_i = a_j (i, j = 1, 2, \cdots, n)$. 即调和平均 $\leqslant$ 几何平均 $\leqslant$ 算术平均.

③ 伯努利 (Bernoulli) 不等式:

$$x > -1, (1+x)^n > 1 + nx, n \in N^*$$

④ 柯西 (*Cauchy*) 不等式: 对任意实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 和 $b_1, b_2, \cdots, b_n$, 都有

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

等号成立当且仅当 $b_i = 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$ 或存在常数 k, 使得 $a_i = kb_i$

常用数列极限结论

① $\lim\limits_{n\to\infty} C = C$

② $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^k} = 0 \ (\forall k > 0)$

③ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} = 0(\forall \alpha > 0)$

④ $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0(\forall |q| < 1)$

⑤ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1(\forall a > 0)$

⑥ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

⑦ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0(\forall a > 0)$

⑧ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^b}{a^n} = 0(\forall a > 1, b > 0)$

⑨ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln^b n}{n^a} = 0(\forall a > 1)$

⑩ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{k}{x_n} = \dfrac{k}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}$

⑪ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a(\exists) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots a_n}{n} = a$

⑫ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = A(\exists) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = A$ (如 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}/n = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$).

极限的等价定义

① 定义 1: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\quad \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N$, 成立 $|a_n - a| < \varepsilon$.

② 定义 2: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{N}^*, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N$, 成立 $|a_n - a| < \dfrac{1}{m}$.

③ 定义 3: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\quad \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N$, 成立 $|a_n - a| < M\varepsilon$, 其中 M 是一个与 ε 和 n 都无关的正的常数.

④ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n-1} = a \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_{3n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{3n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{3n-2} = a$.

✍ 习题 1.2

1. 已知数列 $\{x_n\}$ 的通项为 $x_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+1}$, 试判定该数列的有界性和敛散性.
2. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.
3. 比较无限循环小数 $0.9999\cdots$ 和 1 的大小.
4. 判别下面各小题的求解过程是否正确:

   (1) $1 = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = \lim\limits_{n\to\infty} (\dfrac{1}{n} \cdot n); = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} n = 0 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} n = 0.$

   (2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n^2+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+1/n}{n+1/n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+0}{n+0} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

5. 求下列数列极限

   (1) $a_n = \left(1 - \dfrac{1}{3}\right)\left(1 - \dfrac{1}{6}\right) \cdots \left(1 - \dfrac{1}{n(n+1)/2}\right) (n \in \mathbf{N});$

   (2) $a_n = \left(1 - \dfrac{1}{2^2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}\right) (n \in \mathbf{N});$

   (3) $a_n = \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{5}{4} \cdot \dfrac{17}{16} \cdots \dfrac{2^{2^{n-1}}+1}{2^{2^{n-1}}} (n \in \mathbf{N});$

   (4) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(k+1)\sqrt{k} + k\sqrt{k+1}};$

   (5) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{2k-1} + \sqrt{2k+1}};$

   (6) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)};$

   (7) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)(k+2)};$

   (8) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \left(\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}} \right).$

6. 求下列数列极限

   (1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n - 2n^2}{n^2 + (-1)^n}$

   (2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 + (-1)^n}{2n^2 + n + (-1)^n}$

   (3) $\lim\limits_{n\to\infty} [(n+1)^\alpha - n^\alpha] (\alpha \in (0,1))$

   (4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{a^n+1} \quad (a \neq -1)$

   (5) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+c^n} (c > 0)$

   (6) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + c^n + (c^2/2)^n} (c > 0)$

7. 补充思考题 (选做)

   (1) 设 $a_1 + a_2 + a_3 = 0$, 试论极限 $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$, 其中 $I_n = a_1\sqrt{n} + a_2\sqrt{n+1} + a_3\sqrt{n+2}$.

   (2) 试定 a, b, c 之值, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 2$, 其中 $I_n = n\left(an + \sqrt{2 + bn + cn^2}\right)$.

1.3 函数的极限 I

1.3.1 函数极限的定义

1. 函数的极限 $(x \to \infty)$

定义 1.12. 函数的极限 I

设 $f(x)$ 在 $|x|$ 足够大时有定义，如果存在常数 A，对任何 $\epsilon > 0$，总存在 $N > 0$，使得当 $|x| > N$ 时，总有 $|f(x) - A| < \epsilon$，则称当 $x \to \infty$ 时 $f(x)$ 以 A 为极限，记为

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \text{ 或者 } f(x) \to A(x \to \infty).$$

如果这样的 A 不存在，则称当 $x \to \infty$ 时 $f(x)$ 的极限不存在.

注 $x \to \infty$ 有两种方向，即 $x \to -\infty$ 和 $x \to +\infty$. 类似地可以定义 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$.

定理 1.3. 函数极限存在的充要条件 I

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ 当且仅当 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$.

例 1.23 函数极限的例子

- $y = \dfrac{1}{x}$
  - $x \to +\infty$ 时 $y \to 0$
  - $x \to -\infty$ 时 $y \to 0$
- $y = \dfrac{1}{x^2}$
  - $x \to +\infty$ 时 $y \to 0$
  - $x \to -\infty$ 时 $y \to 0$
- $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$
  - $x \to +\infty$ 时 $y \to 0$
- $y = 2^x$
  - $x \to -\infty$ 时 $y \to 0$

例 1.24 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2^x} = 0$.

证明 $\forall \varepsilon > 0$，由数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$ 知道，存在 $N_1 > 0$ 使得当 $n > N_1$ 时有 $\dfrac{1}{2^n} < \varepsilon$.

取 $N = N_1 + 1$，则当 $x > N$ 时有 $[x] > N_1$，从而

$$\left|\frac{1}{2^x} - 0\right| = \frac{1}{2^x} \leqslant \frac{1}{2^{[x]}} < \frac{1}{2^{N_1}} < \varepsilon.$$

□

2. 函数极限的基本公式 I

① $\lim\limits_{x\to\infty} C = C$

② $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^k} = 0 \quad (k\text{为正整数})$

③ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{a^x} = 0 \quad (a>1)$

④ $\lim\limits_{x\to-\infty} b^x = 0 \quad (b>1)$

1.3.2 函数极限的运算

定理 1.4. 函数极限的四则运算法则 I

如果 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = B$, 那么

① $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)\pm g(x)) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) \pm \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = A\pm B$

② $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = A\cdot B$

③ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to\infty} f(x)}{\lim\limits_{x\to\infty} g(x)} = \dfrac{A}{B}(B\neq 0)$

推论 1.6

$\lim\limits_{x\to\infty}\big(c\cdot f(x)\big) = c\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

证明 我们只证明 (2). 利用 (1) 我们只需要证明 $A=B=0$ 时以及 $f(x)=A$ 时结论成立. 由 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ 知, $\forall\varepsilon_1>0, \exists N_1>0$ 使得当 $|x|>N_1$ 时有 $|f(x)-0| = |f(x)| < \varepsilon_1$.

由 $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$ 知, $\forall\varepsilon_2>0, \exists N_2>0$ 使得当 $|x|>N_2$ 时有 $|g(x)-0| = |g(x)| < \varepsilon_2$.

$\forall\varepsilon>0$, 令 $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\sqrt{\varepsilon}$, $N=\max\{N_1,N_2\}$, 则当 $|x|>N$ 时总有

$$|f(x)g(x)-0| = |f(x)|\cdot|g(x)| < \varepsilon_1\cdot\varepsilon_2 = \varepsilon.$$

□

例 1.25 求函数极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-1}{3x+4}$.

解 原式 $= \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-\dfrac{1}{x}}{3+4\cdot\dfrac{1}{x}} = \dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}2-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}}{\lim\limits_{x\to\infty}3+4\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}}$

$= \dfrac{2-0}{3+4\times 0} = \dfrac{2}{3}$

□

例 1.26 求函数极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+1}{x^2+5x}$.

解 原式 $= \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+\dfrac{1}{x^2}}{1+5\cdot\dfrac{1}{x}} = \dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}3+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}1+5\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}}$

$= \dfrac{3+0}{1+5\times 0} = 3$

$\square$

1.3.3 函数极限的性质

性质 1.4 若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 存在, 则极限唯一.

性质 1.5 如果 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$, 则存在 $N > 0$ 和 $M > 0$, 使得当 $|x| > N$ 时有 $|f(x)| \leqslant M$.

性质 1.6 如果 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$, 且 $A > 0$（或 $A < 0$）, 则存在 $N > 0$, 使得当 $|x| > N$ 时有 $f(x) > \dfrac{A}{2} > 0$（或 $f(x) < \dfrac{A}{2} < 0$).

推论 1.7

设 $f(x) \geqslant 0$（或 $f(x) \leqslant 0$）, 且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$, 则 $A \geqslant 0$（或 $A \leqslant 0$).

推论 1.8

如果函数 $g(x) \geqslant h(x)$, 而且 $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = A$, $\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = B$, 则有 $A \geqslant B$.

✍ 习题 1.3

1. 求极限

(1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+3}{x^2+2x+1}$　　(2) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x^2+3x-5}{x^2+2x-3}$.

2. 求极限

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2^x+4}{4^x+1}$　　(2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2^x+4}{4^x+1}$

3. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2(\sqrt{x^4-2}-x^2)$.

4. 已知 $\lim\limits_{n\to+\infty}(3x-\sqrt{ax^2+bx+1})=2$. 求 a,b 的值.

5. 若 $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{2x^2+5}{x-1}+ax+b)=3$. 求 a,b 的值.

6. 求下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$　　(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1})$　　(4) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1})$

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{3x^2+4x+7}}{x}$　　(6) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{3x^2+4x+7}}{x}$

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{3x^2+4x+7}-\sqrt{3}x)$　　(8) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{3x^2+4x+7}+\sqrt{3}x)$

1.4 函数的极限 II

1.4.1 函数极限的定义

1. 函数的极限 $(x \to x_0)$

定义 1.13. 函数的极限 II

设 $f(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域内有定义, 如果存在常数 A, 对于任何 $\varepsilon > 0$, 总存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 总有

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

则称当 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 以 A 为极限, 记为

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \text{ 或者 } f(x) \to A (x \to x_0).$$

如果这样的常数 A 不存在, 就称当 $x \to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限不存在.

注 $x \to x_0$ 代表了两个方向, 即 $x \to x_0^+$ 和 $x \to x_0^-$. 类似地可以定义左极限 $\lim\limits_{x \to x_{0-}} f(x) = f(x_0^-)$ 和右极限 $\lim\limits_{x \to x_{0+}} f(x) = f(x_0^+)$. 参见定义 1.14 .

例 1.27 函数极限的例子

- $y = c$
  - 当 $x \to x_0$ 时, $y \to c$
- $y = x$
  - 当 $x \to x_0$ 时, $y \to x_0$
- $y = \sqrt{x}$
  - 当 $x \to x_0$ 时, $y \to \sqrt{x_0}$
- $y = \dfrac{\sin x}{x}$
  - 当 $x \to 0$ 时, $y \to ?$

例 1.28 证明 $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0} \ (x_0 > 0)$.

证明 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \sqrt{x_0}\,\varepsilon$, 则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$\begin{aligned} \left|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}\right| &= \left|\frac{x - x_0}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}\right| \\ &\leqslant \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}} < \frac{\delta}{\sqrt{x_0}} = \frac{\sqrt{x_0}\,\varepsilon}{\sqrt{x_0}} = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

2. 函数极限的基本公式 II

定理 1.5. 初等函数的连续性

如果初等函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域有定义, 则有

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

例 1.29 对于六种基本初等函数, 我们有这些极限:

- $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$
- $\lim\limits_{x\to 2} x^3 = 2^3 = 8$
- $\lim\limits_{x\to 3} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^3$
- $\lim\limits_{x\to 9} \log_3 x = \log_3 9 = 2$
- $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \sin x = \sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$
- $\lim\limits_{x\to 1} \arctan x = \arctan 1 = \dfrac{\pi}{4}$

注 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 与 $f(x_0)$ 未必总是相等.

例 1.30 设 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x\neq 1; \\ 3, & x=1. \end{cases}$ 则 $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$.

例 1.31 函数极限 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = 2$.

注 即使 $f(x)$ 在 x_0 处无定义, 极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 仍可能存在.

例 1.32 函数极限 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+1}{x-1}$ 不存在.

1.4.2 函数的左极限与右极限

定义 1.14. 左极限

设 $f(x)$ 在点 x_0 左邻域有定义, 如果对任何 $\varepsilon>0$, 总存在 $\delta>0$, 使得当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 以 A 为左极限, 记为

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = A \quad 或 \quad f(x_0^-) = A.$$

定义 1.15. 右极限

设 $f(x)$ 在点 x_0 右邻域有定义, 如果对任何 $\varepsilon>0$, 总存在 $\delta>0$, 使得当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 以 A 为右极限, 记为

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = A \quad 或 \quad f(x_0^+) = A.$$

定理 1.6. 函数极限存在的充要条件 II

极限存在等价于左右极限都存在且相等, 即

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x) = A = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

注 研究当 $x\to x_0$ 时, 函数 $f(x)$ 的左右极限不必要求 $f(x)$ 在 x_0 处有定义.

例 1.33 设 $f(x)=\begin{cases}1, & x<0\\ x, & x\geqslant 0\end{cases}$，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在.

✍ **练习 1.1** 设 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<1\\ x^2-x+2, & x>1\end{cases}$，求 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$.

✍ **练习 1.2** 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+x+1, & x<0\\ \mathrm{e}^x, & 0<x<1\\ x^2-1, & x>1\end{cases}$；判断极限 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 是否存在, 若存在求出该极限.

1.4.3 函数极限的运算

定理 1.7. 函数极限的四则运算法则 II

如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$, 那么

① $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\pm B$

② $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\cdot B$

③ $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=\dfrac{A}{B}$ （此时要求 $B\neq 0$）

推论 1.9

$\lim\limits_{x\to x_0}\big(c\cdot f(x)\big)=c\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$.

证明 我们只证明 (3). 利用 (2) 我们只需要证明

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{B}.$$

由 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$, 可以知道, $\forall\varepsilon_1>0$, $\exists\delta_1>0$, 使得当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时有 $|g(x)-B|<\varepsilon_1$.

再由函数极限的局部保号性, $\exists\delta_2>0$, 使得当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时有 $|g(x)|>|B|/2$.

故 $\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, $\varepsilon_1=|B|^2\varepsilon/2$, 则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有 $\left|\dfrac{1}{g(x)}-\dfrac{1}{B}\right|=\left|\dfrac{g(x)-B}{Bg(x)}\right|<\dfrac{\varepsilon_1}{|B|\cdot|B|/2}=\varepsilon$.

□

例 1.34 求函数极限 $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2-2x+1)$.

解
$$\begin{aligned}\text{原式}&=3\lim_{x\to 1}x^2-2\lim_{x\to 1}x+\lim_{x\to 1}1\\&=3\times 1^2-2\times 1+1=2\end{aligned}$$

□

例 1.35 求函数极限 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}=\lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{4}+2}=\frac{1}{4}$$

□

1.4.4 函数极限的性质

性质 1.7 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在, 则极限唯一.

性质 1.8 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 则存在 $\delta>0$ 和 $M>0$, 使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有 $|f(x)|\leqslant M$.

证明 取 $\varepsilon=1$, 则存在 $\delta>0$, 使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有 $|f(x)-A|<\varepsilon=1$. 此时

$$\begin{aligned}|f(x)|&=|(f(x)-A)+A|\\&\leqslant|f(x)-A|+|A|<1+|A|\end{aligned}$$

取 $M=1+|A|$, 就得到函数极限的局部有界性.

□

性质 1.9 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 且 $A>0$(或 $A<0$), 则存在 $\delta>0$, 使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有 $f(x)>\dfrac{A}{2}>0$ (或 $f(x)<\dfrac{A}{2}<0$).

证明 取 $\varepsilon=A/2$, 则存在 $\delta>0$, 使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有 $|f(x)-A|<\varepsilon=A/2$. 此时 $f(x)>A/2>0$.

□

推论 1.10

设 $f(x)\geqslant 0$ (或 $f(x)\leqslant 0$) , 且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 则 $A\geqslant 0$ (或 $A\leqslant 0$).

推论 1.11

如果函数 $g(x)\geqslant h(x)$, 而且 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=B$, 则有 $A\geqslant B$.

例 1.36 设 $f(x)=1/x$, 则 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$, 此时当 $0<|x-1|<1/2$ 时有 $|f(x)|\leqslant 2$.

例 1.37 设 $f(x)=2x-1$, 则 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1>0$, 此时当 $0<|x-1|<1/4$ 时, 有 $f(x)>1/2>0$.

最后, 我们给出数列极限与函数极限之间的关系.

定理 1.8. 海涅定理

设 $f(x)$ 定义在 $\mathring{U}(x_0,\delta^\star)$ 上, 则

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A\Leftrightarrow\forall\{x_n\}\in\mathring{U}(x_0,\delta^\star),\ \lim_{n\to\infty}x_n=x_0,\ \lim_{n\to\infty}f(x_n)=A.$$

注 依据定理1.8, 可以得到 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在的几种情况:

- 存在 $\{x_n\},\{y_n\}\in \mathring{U}(x_0,\delta_1)$ 均收敛到 x_0, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A_1(\exists)$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)=A_2(\exists)$, 但是 $A_1\neq A_2$.
- 存在 $\{x_n\}\in \mathring{U}(x_0,\delta_1)$ 收敛到 x_0, 但是 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 不存在.

下面我们用 $\varepsilon-\delta$ 语言给出该定理的严谨证明.

证明 必要性: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A.\Rightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0(\delta<\delta^\star),\forall x\in\mathring{U}(x_0,\delta):|f(x)-A|<\varepsilon.$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0, x_n\neq x_0,\forall n\in\mathbb{N}.\Rightarrow \exists N\in\mathbb{N}^+,\forall n>N:\forall x_n\in\mathring{U}(x_0,\delta)$, 有 $\forall n>N:$ $f(x_n)\in\mathring{U}(A,\varepsilon)\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A.$

充分性: 用反证法. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq A\Rightarrow \exists\varepsilon_0>0$, 取 $\delta_n=min(\frac{1}{n},\delta^*),\exists x_n\in\mathring{U}(x_0,\delta_n),\forall x_n:x_n\in\mathring{U}(x_n,\delta_n)$, 但是 $|f(x_n)-A|\geqslant\varepsilon_0>0$, 可见 $\exists\{x_n\}\in\mathring{U}(x_0,\delta_n):$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$, 这与 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)\neq A$ 矛盾.

□

例 1.38 证明 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在.

证明 不妨取 $x_n=1/(n\pi), y_n=\dfrac{1}{2n\pi+\pi/2}\to 0(n\to\infty)(x_n,y_n\neq 0)$, 显见 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{1}{x_n}=0\neq\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{1}{y_n}=1$. 由海涅定理知 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在.

□

✍ 习题 1.4

1. 函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处有定义是当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 极限存在的_____ 条件.

2. 计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5}{x-3}$

(2) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{x^2+1}$

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$

(5) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)$

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$

(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{x^4-3x^2+1}$

(9) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$

(10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(2-\dfrac{1}{x^2}\right)$

(11) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)$

(12) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum_{k=1}^{n-1}k}{n^2}$

(13) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3}$

(14) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$

3. 求极限

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+3x-5}{x^2+2x-3}$

(2) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+3x-5}{x^2+2x-3}$

4. 求极限 $\lim\limits_{x\to -1}(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{3}{x^3+1})$.

5. 求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{\sqrt{x+1}-1}$.

6. 求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$.

7. 求极限 $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x^2-1}\right)$.

8. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})/(\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x})$

1.5 无穷小量与无穷大量

1.5.1 无穷小量

1. 无穷小量的定义

定义 1.16

如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, 就称 $f(x)$ 为 $x \to x_0$ 时的无穷小量.

定义 1.17

如果 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$, 就称 $f(x)$ 为 $x \to \infty$ 时的无穷小量.

注 类似地, 可以定义 $x \to -\infty$、$x \to +\infty$ 、$x \to x_0^-$ 和 $x \to x_0^+$ 时的无穷小量.

例 1.39 0、x、x^2、$\sin x$、$1 - \cos x$、$\sqrt{1+x} - 1$ 和 $\mathrm{e}^x - 1$ 都是 $x \to 0$ 时的无穷小量.

例 1.40 函数 $\dfrac{1}{x}$、$\dfrac{2}{1+x}$ 和 $\dfrac{x}{x^2+1}$ 都是 $x \to \infty$ 时的无穷小量.

例 1.41 函数 $y = \dfrac{x-1}{x^2-1}$ 何时是无穷小量?

例 1.42 e^x 是 $x \to -\infty$ 时的无穷小量, 即 $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$.

2. 无穷小量的运算法则

① 两个无穷小量的和差还是无穷小量.
② 两个无穷小量的乘积还是无穷小量.
③ 无穷小量和有界函数的乘积还是无穷小量.

例 1.43 求下列函数极限.

(1) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sin x}{x}$

(2) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sin x + \cos x}{x^2}$

(3) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x+1}{x + \sin x}$

(4) $\lim\limits_{x \to 0} x \sin \dfrac{1}{x}$

(5) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\cos x}{x^2}$

(6) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 + \cos x}{\cos x + 3x^2}$

1.5.2 无穷大量

1. 无穷大量 ($x \to \infty$)

定义 1.18

设 $f(x)$ 在 $|x|$ 大于某个正数时有定义. 如果对任何 $M > 0$, 总存在 $N > 0$, 使得只要 $|x| > N$, 就有 $|f(x)| > M$, 则称 $f(x)$ 为 $x \to \infty$ 时的无穷大量, 记为

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

类似地可以定义 $x \to -\infty$ 的无穷大量, 记为

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$$

以及和 $x \to +\infty$ 时的无穷大量, 记为

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty$$

例 1.44 x, x^2, $x+1$ 都是 $x \to \infty$ 时的无穷大量, 即 $\lim\limits_{x \to \infty} x = \infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} x^2 = \infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} (x+1) = \infty$.

例 1.45 e^x 是 $x \to +\infty$ 时的无穷大量, 即 $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = \infty$(参见例 1.5.4).

注

- 判定一个函数是无穷小量或无穷大量是与其自变量的变化过程相关的.
- 还要注意的是无穷大量是特殊的无界变量, 无界变量并不都是无穷大量.$f(x) = \dfrac{1}{x} \sin \dfrac{1}{x}$ 在 $(-1,0) \cup (0,1) \subset \mathbb{R} \backslash \{0\}$ 上无界, 但是 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ 不存在 (考虑子列极限, 有子列 $f(\dfrac{1}{n\pi})$ 极限为 0), 故而其不是无穷大量.

2. 无穷大量 $(x \to x_0)$

定义 1.19

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域有定义. 如果对任何给定的 $M > 0$, 总存在 $\delta > 0$, 使得只要 $0 < |x - x_0| < \delta$, 就有 $|f(x)| > M$, 则称 $f(x)$ 为 $x \to x_0$ 时的**无穷大量**, 记为 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

例 1.46 $\dfrac{1}{x}$ 和 $\dfrac{x+1}{x^2}$ 是 $x \to 0$ 时的无穷大量; $\dfrac{1}{x-1}$ 和 $\dfrac{x+2}{x^2-1}$ 是 $x \to 1$ 时的无穷大量; 函数 $y = \dfrac{x-1}{x^2-1}$ 是 $x \to -1$ 时无穷大量.

3. 无穷大量与无穷小量的关系

定理 1.9

无穷大量 y 的倒数 $\dfrac{1}{y}$ 为无穷小量, 而非零无穷小量y 的倒数 $\dfrac{1}{y}$ 为无穷大量.

例 1.47 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x+1}{2x^2+1} = 0 \implies \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^2+1}{3x+1} = \infty.$

✍ 习题 1.5

1. 证明有理分式的极限

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & n=m;\\ 0, & n<m;\\ \infty, & n>m.\end{cases}$$

2. 计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+2x^2}{(x-2)^2}$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{2x+1}$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2x^3-x+1\right)$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\arctan x/over x$

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos x+2x}{x+\cos x}$

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\sin x\sin\dfrac{1}{x}$

(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$

3. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{32+x}-2}{x}$.

提示 利用根式代换.

4. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(2+\sqrt{x})}{\ln(6+\sqrt[6]{x})}$.

5. 数学笑话

题目 已知 $\dfrac{1}{\infty}=0$, 证明 $\dfrac{1}{0}=\infty$.

证明 因为 $\dfrac{1}{\infty}=0$, 两边同时旋转得

$$-18=0$$

两边同时 $+8$ 得

$$-10=8$$

两边同时旋转得

$$\frac{1}{0}=\infty$$

1.6 两个重要极限

本节基本内容

极限存在准则 I	极限存在准则 II
$\Downarrow$	$\Downarrow$
重要极限 I	重要极限 II
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$

1.6.1 重要极限 I

1. 极限存在准则 I—迫敛性定理 (又称夹逼准则、两边夹法则)

定理 1.10. 夹逼准则

如果 $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$, 且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$, 则有 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$.

注 若将 $x\to x_0$ 全部改为 $x\to\infty$, 定理仍成立. 在上述定理中, 如果不等式 $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$ 仅在 x_0 的某个去心邻域上成立, 结论不变.

例 1.48 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+k}}$.

解 因 $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}<\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+k}}<\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}=1=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$. 由夹逼准则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+k}}=1$.

□

2. 重要极限 I

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

一般地, 如果当 $x\to\square$ 时, $\phi(x)\to 0$, 则有

$$\lim_{x\to\square}\frac{\sin\phi(x)}{\phi(x)}=1$$

其中 $\square$ 可以是 x_0 或 ∞.

例 1.49 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$.

解 原式

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1\times\frac{1}{1} = 1$$

□

例 1.50 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$.

解 原式

$$= \lim_{x\to 0}\left(3\cdot\frac{\sin 3x}{3x}\right)$$

$$= 3\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x} = 3\times 1 = 3$$

□

例 1.51 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sin 4x}$.

解 原式

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{4x}{\sin 4x}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{4x}{\sin 4x}$$

$$= \frac{1}{4}\times 1\times 1 = \frac{1}{4}$$

□

练习 1.3 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{4x}$ (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$ (3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2x^2)}{3x^2}$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\tan 5x}$ (5) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin\sqrt{x}\ \tan\sqrt{x}}{x}$ (6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-\sin 3x}{4x}$

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-\sin 3x}{x+x^2}$ (8) $\lim\limits_{x\to 0}2^n\sin\dfrac{4}{2^n}$ (9) $\lim\limits_{x\to 0}x\cot 3x$

练习 1.4 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$ (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}$

(3) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\dfrac{\pi x}{2}$

提示 作变量代换.

练习 1.5 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\frac{1}{2}x^2}$ (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x\sin(\sin x)}{x+\tan x}$

1.6.2 重要极限 II

1. 极限存在准则 II—单调有界定理

定理 1.11. 单调有界准则

单调且有界的数列必定收敛.

① 单调增加且有上界的数列必定收敛.

② 单调减少且有下界的数列必定收敛.

若数列是某一项开始单调变化, 定理1.11 的结论仍然成立.

例 1.52 证明数列 $x_n = \sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+\cdots+\sqrt{3}}}}$(n 重根式) 收敛, 并求其极限值.

证明 显然 $x_n \leqslant x_{n+1}$, 故 $\{x_n\}$ 递增; 又 $x_1 = \sqrt{3} < 3$, 假定 $x_k < 3$, 有 $x_{k+1} = \sqrt{3+x_k} = \sqrt{3+3} < 3$. 由数学归纳法知 $x_n < 3, \forall n \in \mathbb{N}$. 故而 $\{x_n\}$ 有上界. 由单调有界定理知数列 x_n 收敛. 记 $\lim\limits_{n\to\infty} = a(a \geqslant 0)$, 则有 $a^2 = 3 + a$, 解得 $a = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$ 或 $a = \dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$(舍去).

□

例 1.53 设 $x_1 = \sqrt{10}, x_{n+1} = \sqrt{6+x_n}, n \in \mathbb{N}^*$, 证明数列 x_n 收敛, 并求其极限值.

2. 重要极限 II

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e} \xrightarrow{u=1/x} \lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}} = \mathrm{e}$$

一般地, 如果当 $x \to \square$ 时, $\psi(x) \to 0$, 则有

$$\lim_{x\to\square}\Big(1+\psi(x)\Big)^{\frac{1}{\psi(x)}} = \mathrm{e}$$

其中 □ 可以是 x_0 或 ∞.

注 重要极限 II 本质上是 “ 1^∞ ” 型极限 (一种未定式极限). 其简单情形如下例题.

“ 1^∞ ” 型极限 · 简单情形

例 1.54 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x$

解 原式 $= \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}\cdot 2}$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^2 = \mathrm{e}^2$$

□

例 1.55 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{3x}\right)^x$

解 原式 $= \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{-1}{3x}\right)^{\frac{3x}{-1}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)}$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-1}{3x}\right)^{\frac{3x}{-1}}\right]^{-\frac{1}{3}} = \mathrm{e}^{-1/3}$$

□

例 1.56 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$

解 原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{-x}{2}\right)^{\frac{2}{-x}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{-x}{2}\right)^{\frac{2}{-x}}\right]^{-\frac{1}{2}} = \mathrm{e}^{-1/2}$$

□

“ 1^∞ ” 型极限 · 幂指情形如下例题.

例 1.57 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$

解 原式 $= \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}\cdot\frac{2x}{x-1}}$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right]^{\frac{2x}{x-1}} = \lim_{x\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{2x}{x-1}} = \mathrm{e}^2.$$

□

例 1.58 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{\sin x}}$

解 原式 $= \lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{\sin x}}$

$$= \lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{3x}\cdot\frac{3x}{\sin x}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[(1+3x)^{\frac{1}{3x}}\right]^{\frac{3x}{\sin x}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{3x}{\sin x}} = \mathrm{e}^3.$$

□

例 1.59 求函数极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x)^{\frac{1}{\cos x}}$.

解 因为当 $x\to 0$ 时, $\cos x$ 不是无穷小量, 所以不能用重要极限 II 公式来计算. 实际上, 这个函数是初等函数, 且在 0 的邻域有定义, 所以其极限为 $(1+1)^1=2$.

□

3. 幂指函数的极限

定理 1.12

若 $\lim\limits_{x\to\square} u(x)=A>0$, $\lim\limits_{x\to\square} v(x)=B$, 则有

$$\lim_{x\to\square} u(x)^{v(x)}=A^B.$$

推论 1.12

设 $f(x)$ 在 x 的某邻域或无穷邻域内非负. 若 $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} f(x)=A(\exists)$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} \sqrt[k]{f(x)}=\sqrt[k]{\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} f(x)}=\sqrt[k]{A}$ (k为正常数).

注 没有这样的结论: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{f(n)}=\sqrt[n]{\lim\limits_{n\to\infty} f(n)}$.

4. 常数 e 的意义

例 1.60 复利问题: 假设银行活期存款的年利率为 0.5%, 存入 M 元一年后最多可以得到多少钱?

解 粗略: $M(1+0.5\%)=M\times 1.005$; 正常: $M\left(1+\dfrac{0.5\%}{4}\right)^4=M\times 1.00500938$; 极端: $M\left(1+\dfrac{0.5\%}{360}\right)^{360}=M\times 1.00501249$.

□

常数 e 反映了连续增长的规律.

1.6.3 小结

重要公式

① $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

② $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=\mathrm{e}$

③ 变形公式: (a) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n=\mathrm{e}$; (b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$ 或者 $\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a (a>0,\neq 1)$; (c) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)=l$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0}(1+f(x))^{g(x)}=\mathrm{e}^l$.

第一个重要极限本质上是 “$\dfrac{0}{0}$” 型; 第二个重要极限本质上是 “1^∞” 型, 它们均属于未定型 (求未定型的极限常用的是洛必达法则, 具体内容参见第二章内容). 使用时注意公式中自变量的趋向并学会对公式进行适当变形. 比如当 $x\to x_0, f(x)\to 1$, 有 $\ln f(x)=\ln(1+(f(x)-1))\sim f(x)-1$(见下节内容).

④ 对数恒等式 $u(x)^v(x)=\mathrm{e}^{v(x)\ln u(x)}(u(x)>0)$. 特别是当其为 “$1^\infty$” 型, 求其极限有时候使用起来显得更为方便.

✍ 习题 1.6

1. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{5}{x})^x$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{4}{x})^x$

(3) $\lim\limits_{x\to0}(1-2x)^{\frac{1}{3x}}$

(4) $\lim\limits_{x\to0}(1-2\sin x)^{\frac{1}{3x}}$

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x^2-1}{x^2})^{x\sin x}$

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{2x-1}{2x+1})^{3x+1}$

(7) $\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{\sin x}{2x})^{x^2+1}$

(8) $\lim\limits_{x\to\infty}(\cos\dfrac{1}{x})^{x^2}$

(9) $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x+1}{x-1})^x$

(10) $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x+1}{x-1})^{\frac{2x-1}{x+1}}$

(11) $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{x+n}{n-1})^n$

(12) $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{n})$

(13) $\lim\limits_{x\to a}(\dfrac{\sin x}{\sin a})^{\frac{1}{x-a}}(\sin a\neq0)$

(14) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin(x-a)}{x^2-a^2}$

(15) $\lim\limits_{x\to0^+}(\sin x)^{\frac{1}{\ln x}}$

2. 用极限存在准则证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}=1$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{1}{n^2+\pi}+\dfrac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n\pi}\right)=1.$

(3) 数列 $\sqrt{2},\ \sqrt{2+\sqrt{2}},\ \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\cdots$ 的极限存在.

(4) $\lim\limits_{x\to0}\sqrt[n]{1+x}=1.$

(5) $\lim\limits_{x\to0^+}x\left[\dfrac{1}{x}\right]=1.$

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$

3. 证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\rho$(存在), 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ 存在且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\rho(a_n>0)$.

4. 设数列 $x_n=\dfrac{n!}{n^n}$, 试问 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 是否存在, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}$ 又是否存在.

5. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1=\dfrac{1}{2}$, 且当 $n\geqslant1$ 时有 $x_{n+1}=\dfrac{1+x_n^2}{2}$. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

提示 先说明数列收敛, 再根据数列的递归关系求出其极限.

1.7 无穷小量的比较

1.7.1 无穷小量的阶

1. 无穷小量阶的比较

定义 1.20. 无穷小量

设 α、β 是同一变化过程中的两个无穷小量.

① 称 β 比 α 高阶, 若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 0$, 记为 $\beta = o(\alpha)$. 另外记 $\beta = o(1) \Leftrightarrow \lim \beta = 0$.

② 称 β 比 α 低阶, 若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = \infty$.

③ 称 β 和 α 同阶, 若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$.

④ 称 β 和 α 等价, 若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 1$, 记为 $\beta \sim \alpha$. [★]

注

- 若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0$, $k > 0$, 则称 β 是关于 α 的 k 阶无穷小.
- 设 $f(x)$ 在 $x \to x_0(x_0^+, x_0^-)$ 是无穷小量, 如果 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{(x - x_0)^k} = l \neq 0(\forall k > 0)$, 则称 $f(x)$ 是 $x \to x_0$ 时的 k 阶无穷小.
- 设 $f(x)$ 在 $x \to \infty(\pm\infty)$ 是无穷小量, 如果 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x^k} = l \neq 0(\forall k > 0)$, 则称 $f(x)$ 是 $x \to \infty$ 时的 k 阶无穷小.
- 依据无穷小量与无穷大量的关系, 可以比较无穷大量的阶, 其定义与以上定义平行类似. 基于此, 关于无穷大量的量化性质讨论便不再赘述.

例 1.61 比较 $x \to 0$ 时的三个无穷小量 x, $2x$, x^2.

x	1	0.1	0.01	0.001	$\cdots$	$\to$	0
$2x$	2	0.2	0.02	0.002	$\cdots$	$\to$	0
x^2	1	0.01	0.0001	0.000001	$\cdots$	$\to$	0

例 1.62 常值函数 0 是最高阶的无穷小量.

例 1.63 在 $x \to 0$ 时, 无穷小量 x^2 比 x 高阶; 无穷小量 x^2 比 x^3 低阶; 无穷小量 x^2 和 $5x^2$ 同阶; 无穷小量 x^2 和 $x^2 + 2x^3$ 等价;$2x^3$ 是关于 x 的 3 阶无穷小量.

例 1.64 易知 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ 和 $g(x) = x^2$ 均为 $x \to 0$ 时的无穷小量.

- 何时 $f(x)$ 比 $g(x)$ 高阶?
- 何时 $f(x)$ 比 $g(x)$ 低阶?
- 何时 $f(x)$ 与 $g(x)$ 同阶?
- 何时 $f(x)$ 与 $g(x)$ 等价?

2. 常用的等价无穷小量[★]

试说明当 $x \to 0$ 时, 有下列等价无穷小量:

常用的等价无穷小量

① $\sin x \sim x$
② $\tan x \sim x$
③ $\arcsin x \sim x$
④ $\arctan x \sim x$
⑤ $\ln(1+x) \sim x$
⑥ $\mathrm{e}^x - 1 \sim x$
⑦ $1 - \cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$
⑧ $\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \dfrac{x}{n}$

解 ①–④,⑦的结果我们已熟知.

⑤ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\ln\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}} \overset{?}{=} \ln\mathrm{e} = 1.$

⑥ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\ln(1+t)} = 1.$

⑧ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{(1+t)^n - 1} = \dfrac{1}{n}.$

□

更一般地, 我们有

⑤′
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} &= \lim_{x\to 0}\log_a\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}\\ &\overset{?}{=} \log_a\mathrm{e} = \frac{1}{\ln a}.\end{aligned}$$

⑥′ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x - 1}{x} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\log_a(1+t)} = \ln a.$

⑧′
$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^a - 1}{x}\\ =&\lim_{x\to 0}\left[\frac{(1+x)^a - 1}{\ln(1+x)^a}\cdot\frac{\ln(1+x)^a}{x}\right]\\ =&\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^a - 1}{\ln(1+x)^a}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)^a}{x}\\ =&\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{a\ln(1+x)}{x}\\ =&1\cdot a = a.\end{aligned}$$

因此, 当 $x\to 0$ 时, 我们有:

$\log_a(1+x) \sim \dfrac{x}{\ln a}$; $a^x - 1 \sim x\ln a$; $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x(a > 0, \neq 1; \forall\alpha\in\mathbb{R})$.

注 对 $\forall n, m \in \mathbb{N}^*$,

$$a^k - b^k = (a-b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + \cdots + b^{k-1});$$
$$\begin{aligned}a^n - b^m &= (a^{1/m})^{mn} - (b^{1/n})^{mn}\\ &= (a^{1/m} - b^{1/n})(a^{\frac{nm-1}{m}} + a^{\frac{nm-2}{m}}b^{\frac{1}{n}} + \cdots + b^{\frac{nm-2}{n}}a^{\frac{1}{m}} + b^{\frac{nm-1}{m}}).\end{aligned}$$

我们可以得到结论: $\sqrt[m]{1+ax} - \sqrt[n]{1+bx} \sim \dfrac{na - mb}{mn}x(x\to 0)$.

1.7.2 等价无穷小量代换

1. 等价无穷小代换定理

定理 1.13. 等价第一定理

设当 $x \to x_0$ 时 α、α'、β、β' 都为非零无穷小量, 而且 $\alpha \sim \alpha'$、$\beta \sim \beta'$, 则有

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha'}{\beta'}$$

推论 1.13

设当 $x \to x_0$ 时 α 和 α' 是无穷小量, $\alpha \sim \alpha'$, 而且 γ 为无穷大量, 则有

$$\lim_{x \to x_0} \alpha\gamma = \lim_{x \to x_0} \alpha'\gamma$$

例 1.65 求函数极限:

(1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan 2x}{\sin 3x}$; (2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 5x}{\sin(x^2)}$; (3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt[3]{1+2x} - 1}$;

(4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{x^2} - 1}{(\sqrt{1+x} - 1)\arcsin x}$; (5) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x \cdot (\mathrm{e}^{x+1} - 1)}{\sqrt{1+x+x^2} - 1}$

注 只能代换无穷小量, 不能代换非无穷小量.

例 1.66 求函数极限 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}$.

注 只能分别代换乘除项, 不能分别代换加减项. 当 $\alpha \sim \alpha'$、$\beta \sim \beta'$ 时, 下列等式总是成立:

$$\alpha \cdot \beta \overset{\checkmark}{\sim} \alpha' \cdot \beta'$$

但下列等式未必成立:

$$\alpha \pm \beta \overset{\times}{\sim} \alpha' \pm \beta'$$

例 1.67 当 $x \to 0$ 时, 有

$$\boxed{\begin{array}{c} x + x^2 \sim x + x^3 \\ x \sim x \end{array}} \xrightarrow{\text{两边同时相减}} \boxed{x^2 \overset{\times}{\sim} x^3}$$

例 1.68 当 $x \to 0^+$ 时, 下列各无穷小量中与 $\sqrt{x}$ 等价的是 ( )

A. $1 - \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$ B. $\ln \dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$

C. $\sqrt{1+\sqrt{x}} - 1$ D. $1 - \cos\sqrt{x}$

解 $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln \frac{1+x}{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to 0^+} \left[\dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} - \dfrac{\ln(1-\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right]$

$= \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x}{\sqrt{x}} - \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 0 - (-1) = 1.$ □

选项 B 正确.

2. 等价无穷小的性质

性质 1.10 设 α、β 是同一变化过程中两个无穷小量, 则

① $\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta = o(\alpha)$;;

② α 与 β 同阶不等价 $\Leftrightarrow \alpha - \beta$ 与 α 同阶不等价;

③ α 比 β 低阶 $\Leftrightarrow \alpha - \beta \sim \alpha$.

推论 1.14

设 $x \to 0, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, 则

① $o(x^\alpha) \pm o(x^\beta) = o(x^{min(\alpha,\beta)})$(抓主要矛盾-保留变化最快的);

② $o(x^\alpha) \times o(x^\beta) = o(x^{\alpha+\beta})$.

定理 1.14. 等价第二定理

若 α 与 β 不等价, $\alpha \sim \alpha'$, $\beta \sim \beta'$, 则有

$$\alpha - \beta \sim \alpha' - \beta'.$$

此时若 $\gamma \sim \gamma'$, 则有 $\lim \dfrac{\alpha - \beta}{\gamma} = \lim \dfrac{\alpha' - \beta'}{\gamma'}$.

这个定理的证明作为习题 (给出).

✍ 习题 1.7

1. 证明等价第一定理和等价第二定理.

证明 在此我只证定理1.14. 设 $\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{\beta}{\alpha}=c$, $\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha}=d$, 则 $d=1-c$. 因此

(1) $c=1$ 等价于 $d=0$.

(2) $c\neq 0,1$ 等价于 $d\neq 0,1$.

(3) $c=0$ 等价于 $d=1$.

□

2. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\arctan(1-x)+\ln x}{1-x}$

(2) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{(\sqrt{1+\sqrt{x}}-1)(\mathrm{e}^{\sqrt{x}}-1)}{\sin x}$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\ln(\cos 2x)/x^2$

(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\sqrt[3]{1-2x^2}-1)(\mathrm{e}^{2x+1}-1)}{\sin(x^2)}$

(5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-2x+x^2)\cdot\tan 3x}{1-\cos 3x}$

(6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-\tan x}{\sqrt{1-x^3}-1}$

(7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\tan^4 x}{\sin^3 x(1-\cos x)}$

(8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}$

(9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x^4}-1}{1-\cos^2 x}$

(10) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\cos 2x)}{x}$

(11) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x+x^2)^{\frac{1}{n}}-1}{\sin 2x}, n\in N^*$

(12) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan(\tan x)}{\sin x}$

3. 确定实数 a 与 α, 使下列各无穷小量或无穷大量等价于 $(\sim)ax^\alpha$.

(1) $u(x)=x^5-3x^4+2x^3(x\to0,\infty)$

(2) $u(x)=\dfrac{x^5+2x^2}{3x^4-x^3}(x\to0,\infty)$

(3) $u(x)=\sqrt{x^3}+\sqrt[3]{x^2}\quad(x\to0^+,+\infty)$

(4) $u(x)=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\,(x\to0^+,+\infty)$

(5) $u(x)=\sqrt{1+3x}-\sqrt[3]{1+2x}\quad(x\to0,+\infty)$

(6) $u(x)=\sqrt{x^2+1}-x(x\to+\infty)$

(7) $u(x)=\sqrt{x^3+x}-x^{\frac{3}{2}}(x\to0^+)$

(8) $u(x)=\sqrt{1+x\sqrt{x}}-\mathrm{e}^{2x}(x\to0^+)$

(9) $u(x)=\ln\cos x-\arctan x^2(x\to0)$

(10) $u(x)=\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\sin x}(x\to0)$

4. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+2x^2}}{\ln(1+3x)}$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x})$

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}\right)$

(5) $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{a^x-a^\alpha}{x-\alpha}(a>0)$

(6) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^\alpha-a^\alpha}{x-a}(a>0)$

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\ln(1+x)-\ln x)$

(8) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}(a>0)$

(9) $\lim\limits_{x\to 0}(x+\mathrm{e}^x)^{\frac{1}{x}}$

(10) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x-\dfrac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

(11) $\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt[n]{x}-1)\quad(x>0)$

(12) $\lim\limits_{n\to\infty}n^2(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n+1]{x})\quad(x>0)$

5. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x-\sin 2x}{x^3}$

(3) $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\tan x-1}{x-\pi/4}$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{ax}-\mathrm{e}^{bx}}{x}$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{2x-3}{2x+1})^{2x}$

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}(\cos\dfrac{5}{x})^{x^2}$

(7) $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\sin x)^{\tan x}$

(8) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\sin x)^x$

(9) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin 1/x+\cos 1/x)^x$

(10) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x\ln(1+3x)}{(1-\cos 2\sqrt{x})^2}$

(11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-3^x}{3^x-4^x}$

(12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos(ax)}{\ln\cos(bx)}(b\neq 0)$

6. 试证: 当 $\Delta x\to 0$ 时,

(1) $o(\Delta x^m)+o(\Delta x^n)=o(\Delta x^n)(m>n>0)$;

(2) $o(\Delta x^m)o(\Delta x^n)=o\big(\Delta x^{m+n}\big)(m,n>0)$;

(3) $|f(x)|\leqslant M$, 则 $f(x)o(\Delta x)=o(\Delta x)$;

(4) $\Delta x^m\cdot o(1)=o(\Delta x^m)$.

证明

(1) 由于 $\Delta x\to 0$, 故 $\Delta x^m\to 0,\Delta x^n\to 0$, 于是 $\dfrac{o(\Delta x^m)}{\Delta x^m}\to 0,\dfrac{o(\Delta x^n)}{\Delta x^n}\to 0$ 又 $m>n>0$, 故 $\dfrac{\Delta x^m}{\Delta x^n}=\Delta x^{m-n}\to 0$, 于是 $\dfrac{o(\Delta x^m)+o(\Delta x^n)}{\Delta x^n}=\dfrac{o(\Delta x^m)}{\Delta x^m}\cdot\dfrac{\Delta x^m}{\Delta x^n}+\dfrac{o(\Delta x^n)}{\Delta x^n}\to 0$ 从而 $o(\Delta x^m)+o(\Delta x^n)=o(\Delta x^n)$.

(2) 由于 $\dfrac{o(\Delta x^m)}{\Delta x^m}\to 0,\dfrac{o(\Delta x^n)}{\Delta x^n}\to 0$ 于是 $\dfrac{o(\Delta x^m)o(\Delta x^n)}{\Delta x^{m+n}}=\dfrac{o(\Delta x^m)}{\Delta x^m}\cdot\dfrac{o(\Delta x^n)}{\Delta x^n}\to 0$ 从而 $o(\Delta x^m)o(\Delta x^n)=o\big(\Delta x^{m+n}\big)$.

(3) $\Delta x\to 0$, 故 $\dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x}\to 0$, 又 $|f(x)|\leqslant M$, 故 $f(x)$ 有界, 于是 $\dfrac{f(x)o(\Delta x)}{\Delta x}=f(x)\dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x}\to 0$, 从而 $f(x)o(\Delta x)=o(\Delta x)$.

(4) 由于 o(1) 是无穷小量, 则 o (1) $\to 0$, 于是 $\dfrac{\Delta x^m\cdot o(1)}{\Delta x^m}=\dfrac{\Delta x^m}{\Delta x^m}o(1)=o(1)\to 0$, 从而 $\Delta x^m\cdot o(1)=o(\Delta x^m)$.

□

1.8 函数的连续性

1.8.1 函数的连续性

1. 连续的概念

定义 1.21. 连续

设 $y=f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义，如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\big(f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\big)=0,$$

即（或）$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

定义 1.22. 左、右连续

$f(x)$ 在 x_0 点左连续是指 $f(x_0^-)=f(x_0)$;
$f(x)$ 在 x_0 点右连续是指 $f(x_0^+)=f(x_0)$.

定义 1.23. 连续函数

如果 $f(x)$ 在区间 I 的每一点都连续，则称 $f(x)$ 在区间 I 上连续，或称 $f(x)$ 是区间 I 上的连续函数.

注 连续函数的图形是一条连续而不间断的曲线.

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$（极限存在）:

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ x\in\mathring{U}(x_0,\delta)\to f(x)\in U(A,\varepsilon)$$

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$（连续）:

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ x\in U(x_0,\delta)\to f(x)\in U(f(x_0),\varepsilon)$$

依据以上定义知道 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$（极限存在）是 $f(x)$ 在点 x_0 连续的必要不充分条件.

2. 函数连续的充要条件

定理 1.15. 函数连续的充要条件

$f(x)$ 在 x_0 点连续 $\Leftrightarrow f(x_0^-)=f(x_0^+)=f(x_0)$.

1.8.2 连续函数的运算

1. 复合函数的极限

定理 1.16. 复合函数的极限

如果 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$，$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$，并且存在 $\delta_0>0$ 使得 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta_0)$

时 $g(x) \neq u_0$，则有

$$\lim_{x \to x_0} f[g(x)] = A$$

例 1.69 设 $u = g(x) \equiv 1$, $y = f(u) = \begin{cases} 1, & u \neq 1 \\ 2, & u = 1 \end{cases}$, 则复合函数为 $y = f(g(x)) \equiv 2$. 此时有

$$\lim_{x \to 1} u = 1, \quad \lim_{u \to 1} y = 1, \quad \text{但是} \quad \lim_{x \to 1} y = 2.$$

定理 1.17. 复合函数连续性定理

若 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = u_0$ 且 $f(u)$ 在 u_0 点连续，则

$$\lim_{x \to x_0} f[g(x)] = f\left[\lim_{x \to x_0} g(x)\right] = f(u_0).$$

注 对比上述两个定理，我们容易看出复合函数的连续性比复合函数的极限少了在 x_0 处取值的限制，即当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta_0)$ 时，计算复合函数的极限要求或限制 $g(x) \neq u_0$，定理1.17并无要求. 另外定理1.17实际上表示了连续函数运算与极限运算可以交换次序，这正是连续函数的重要性质，其为计算极限提供了便利.

例 1.70 $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{\dfrac{x-2}{x^2-4}} = \sqrt{\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x-2}{x^2-4}} = \sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}$.

2. 反函数的连续性

定理 1.18. 反函数的连续性

单调连续函数的反函数仍然是单调连续函数.

3. 初等函数的连续性

定理 1.19. 基本初等函数的连续性

基本初等函数在其定义域内都是连续函数.

定理 1.20. 初等函数的连续性

初等函数在其定义区间内都是连续函数.

注 两个连续函数的四则运算仍然是连续函数；两个连续函数的复合函数仍然是连续函数.

例 1.71 已知函数

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{ax} - 1}{x}, & x < 0, \\ 2, & x = 0, \\ \dfrac{\sqrt[3]{1 - bx + x^2} - 1}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

在 $x = 0$ 点连续，求 a 和 b 的值.

解 $f(0)=2$,

$$f(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\mathrm{e}^{ax}-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{ax}{x}=a,$$

$$\begin{aligned}f(0^+)&=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt[3]{1-bx+x^2}-1}{x}\\&=\lim_{x\to 0^+}\frac{(-bx+x^2)/3}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-b+x}{3}=-\frac{b}{3}.\end{aligned}$$

$f(x)$ 在 $x=0$ 点连续, 故 $f(0)=f(0^-)=f(0^+)$, 即有 $a=2$, $b=-6$.

□

✍ **练习 1.6** 判断下列函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 点的连续性:

(1) $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0,\\ x-1, & x\geqslant 0.\end{cases}$ (2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2\sin x}{x}, & x<0,\\ 2, & x=0,\\ \dfrac{x}{\sqrt{1+x}-1}, & x>0.\end{cases}$

✍ **练习 1.7** 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x<0,\\ 1, & x=0,\\ x^2+1, & x>0.\end{cases}$ 判断它在 $x=0$ 点的连续性.

✍ **练习 1.8** 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x<1,\\ b, & x=1,\\ ax+1, & x>1\end{cases}$ 是连续的, 求常数 a 和 b 的值.

1.8.3 函数的间断点

1. 函数的间断点

定义 1.24. 间断点

设 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域有定义, 如果 $f(x)$ 在点 x_0 不连续, 则称它在点 x_0 间断, 或者称点 x_0 是 $f(x)$ 的间断点.

2. 间断点的分类

第一类间断点: $f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 均存在

- 可去间断点: $f(x_0^-)=f(x_0^+)$;
- 跳跃间断点: $f(x_0^-)\neq f(x_0^+)$.

第二类间断点: $f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 至少有一个不存在

- 无穷间断点: $f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 至少有一个为无穷大;
- 振荡间断点: $f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 均不为无穷大.

✍ **练习 1.9** $x=0$ 属于 $\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 的哪种间断点?

例 1.72 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\neq 1,\\ 1, & x=1\end{cases}$ 有可去间断点 $x=1$.

例 1.73 $f(x)=\begin{cases}x-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x+1, & x>0\end{cases}$ 有跳跃间断点 $x=0$.

例 1.74 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 有无穷间断点 $x=0$.

例 1.75 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 有振荡间断点 $x=0$.

✍ **练习 1.10** 分析 $\dfrac{\sin x}{x}$ 及 $x\sin\dfrac{1}{x}$ 的间断点.

注 间断点常见位置：（1）分母为零的点；（2）分段点.

1.8.4 函数曲线的渐近线

1. 曲线的渐近线

定义 1.25. 渐近线

如果在某个极限过程 (指 $x\to x_0, x_0^+, x_0^-, \infty, +\infty, -\infty$ 这些过程) 中，函数 $y=f(x)$ 的动点 $p(x,y)$ 到直线 $Ax+By=C$ 的距离 d(d 实际上是关于 x 的函数）趋于 0，则称该直线是 $y=f(x)$ 的一条渐近线.

函数的渐近线是用来近似描述函数变化趋势的一个概念.

2. 渐近线的分类及求法

① 铅直（或垂直）渐近线：若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$, 或 $f(a-0)=\infty$ 与 $f(a+0)=\infty$ 二者之一成立，则称直线 $x=a$ 为函数 $y=f(x)$ 的铅直（垂直）渐近线.

② 水平渐近线：若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=b$ 存在，或 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$ 与 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=b$ 二者之一存在，则称直线 $y=b$ 为函数 $y=f(x)$ 的水平渐近线.

③ 斜渐近线：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-kx]=b$, 或 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k$ 与 $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-kx]=b$ 这二者之一成立，则称 $y=kx+b$ 为函数 $y=f(x)$ 的斜渐近线.

例 1.76 求函数 $f(x)=\dfrac{4}{2-x^2}$ 的图形的渐近线.

解 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$, 所以 $y=0$ 是函数图形的水平渐近线. 因为 $\lim\limits_{x\to-\sqrt{2}}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}f(x)=\infty$, 所以 $x=-\sqrt{2}$ 及 $x=\sqrt{2}$ 都是函数图形的铅直渐近线. □

✍ 习题 1.8

1. 求下列函数的连续范围:

(1) $y=\tan x$

(2) $y=\dfrac{1}{x^n}$

(3) $y=\sec x+\csc x$

(4) $y=\dfrac{1}{\sqrt{\cos x}}$

(5) $y=\dfrac{\ln(1+x)}{x^2-2x}$

(6) $y=\dfrac{[x]\tan x}{1+\sin x}$

2. 求函数 $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}$ 的间断点, 并判断其类型.

3. 求函数 $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+x-6}$ 的连续区间, 并求极限 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$, $\lim\limits_{x\to2}f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to3}f(x)$.

4. 求 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}, & x\leqslant 1, x\neq 0,\\ \dfrac{x^2-4}{x-2}, & x>1, x\neq 2\end{cases}$ 的间断点, 并判断其类型.

5. 研究下列函数的连续性, 并作出函数的图形:

(1) $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-x, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases}x, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ 1, & x<-1 \text{ 或} x>1.\end{cases}$

6. 已知函数 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+1}$, 则点 $x=0$ 属于 $f(x)$ 的 ( )

A. 可去间断点

B. 跳跃间断点

C. 第二类间断点

D. 连续点

7. 设函数

$$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x, & x<0\\ a+x, & x\geqslant 0\end{cases}$$

应当怎样选择数 a, 使得 $f(x)$ 成为在 $(-\infty,+\infty)$ 内的连续函数.

8. 设函数

$$f(x)=\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right).$$

问当 $x\to 0$ 时, $f(x)$ 的极限是否存在?

9. 分析 $\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ 和 $\arctan\dfrac{1}{x}$ 的间断点.

10. 讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x$ 的连续性, 若有间断点, 判别其类型.

11. 求曲线 $y=(2x-1)\mathrm{e}^x$ 的斜渐近线.

1.9 闭区间上连续函数的性质

前面几节我们讨论了函数在一点附近的的局部性质, 本节将讨论在闭区间上连续的函数在整个闭区间上有什么样的整体性质. 在开始之前我们来看这样的两个例子.

例 1.77 设 $f(x)=\dfrac{1}{x}$, 其在有限开区间 $(0,1)$ 上连续, 但无界.

例 1.78 设 $f(x)=x$, 其在无限半闭区间 $[0,\infty)$ 上连续, 但也无界.

注 分析易知有限开区间上的连续函数未必有界, 无界区间上的连续函数未必有界.

定理 1.21. 最值定理

设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在该区间上有界而且一定能取到最大值 M 和最小值 m.

注 函数 $y=\tan x$ 在开区间 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上是连续的, 但在这个开区间上它是无界的, 而且也没有最大值和最小值. 可见上述定理的闭区间这一条件是必不可少的.

定理 1.22. 零值定理

设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 且 $f(a)$ 和 $f(b)$ 异号, 则在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ, 使得 $f(\xi)=0$.

例 1.79 证明方程 $x=a\sin x+b(a,b>0$) 至少有一个正根.

证明 令 $f(x)=x-a\sin x-b$, 则 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续. 取 $A>a+b$, 则 $f(0)<0, f(A)>0$, 由零点存在定理, $f(x)$ 在 $(0,A)$ 上至少有一个根.

□

例 1.80 证明方程 $x^3+px+q=0p>0$) 有且仅有一个实根.

证明 令 $f(x)=x^3+px+q$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是严格单调增加的. 由 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, 易知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有且仅有一个实根.

□

✍ **练习 1.11** 证明方程 $x^3-3x^2+1=0$ 在区间 $(-1,0)$, $(0,1)$, $(1,3)$ 内各有一个实根.

✍ **练习 1.12** 证明方程 $2\sin x=x+1$ 有实数解.

定理 1.23. 介值定理

设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 且 $f(a)=A$ 和 $f(b)=B$ 不相等, 则对于 A 与 B 之间的任何数 C, 在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ, 使得 $f(\xi)=C$.

证明 令 $g(x)=f(x)-C$. 则由零值定理可得结论.

□

第一章 习题

1. 设 $f(x)$ 的定义域是 [0,1], 求下列函数的定义域:

(1) $f(\mathrm{e}^x)$　　(2) $f(\ln x)$

(3) $f(\arctan x)$　　(4) $f(\cos x)$

2. 已知函数

$$f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{-x^2}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$$

在 $x=0$ 连续, 则 $a=$ ______.

3. 设

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ x, & x>0,\end{cases}\quad g(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ -x^2, & x>0\end{cases}$$

求 $f[f(x)],g[g(x)],f[g(x)],g[f(x)]$

4. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-x+1}{(x-1)^2}$　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}(a>0,b>0,c>0)$　　(6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}$

5. 设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1}, & x>0\\ \ln(1+x), & -1<x\leqslant 0\end{cases}$$

求 $f(x)$ 的间断点, 并说明间断点所属类型.

6. 求下列函数 $y=f(x)$ 的渐近线方程.

(1) $y=x\ln(\mathrm{e}+\dfrac{1}{x})(x>0)$　　(2) $y=\dfrac{x^3}{x^2+2x-3}$

7. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续, 而且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在. 证明 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界.

8. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 且 $f(a)<a$, $f(b)>b$. 证明存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f(\xi)=\xi$.

9. 证明方程 $\sin x+x+1=0$ 在开区间 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内至少有一个根.

10. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $a\leqslant x_1<x_2<\cdots<x_n\leqslant b$, 证明在 $[a,b]$ 中必有 ξ, 使得

$$f(\xi)=\frac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)]$$

第二部分

一元函数微分学

第二章 导数

内容提要

- 导数与微分的定义
- 四则运算法则
- 复合函数求导
- 高阶导数
- 隐函数求导
- 参量函数求导

在许多实际问题中, 需要从数量上研究变量的变化速度. 如物体的运动速度, 电流强度, 线密度, 比热, 化学反应速度及生物繁殖率等, 所有这些在数学上都可归结为函数的变化率问题, 即导数.

本章将通过对实际问题的分析, 引出微分学中两个最重要的基本概念——导数与微分, 然后再建立求导数与微分的运算公式和法则, 从而解决有关变化率的计算问题.

导数和微分是继连续性之后, 函数研究的进一步深化. 导数反映的是因变量相对于自变量变化的快慢程度和增减情况, 而微分则是指明当自变量有微小变化时, 函数大体上变化多少.

2.1 导数的概念

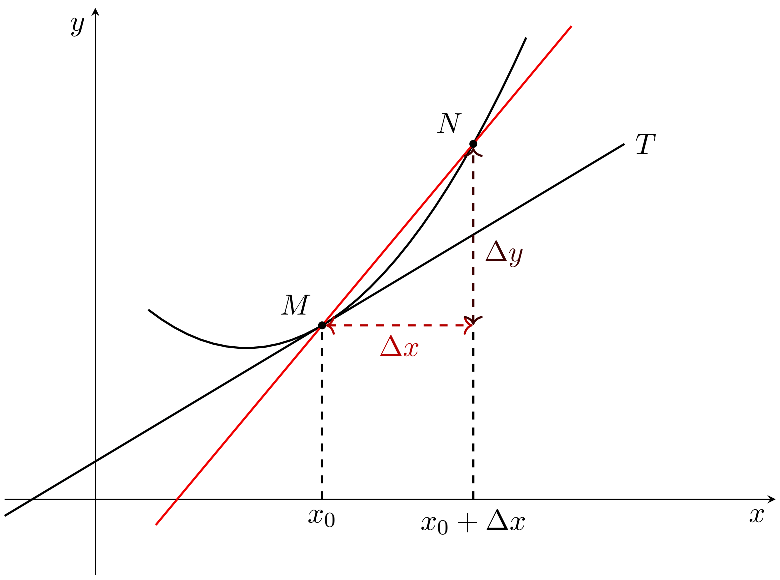
2.1.1 问题的提出

例 2.1 物体作变速直线运动, 经过的路程 s 是时刻 t 的函数, $s=f(t)$. 求在 t_0 时刻物体的瞬时速度.

- 从 t_0 到 $t_0+\Delta t$ 的平均速度为
$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}$$
- 在 t_0 时刻的瞬时速度为
$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}$$

例 2.2 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0,y_0)$ 处的切线斜率.

- 设 N 点在 M 附近, 则割线 MN 的斜率为
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$
- 让 N 点趋向 M 点, 则切线 MT 的斜率为
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$



定义 2.1. 导数的定义

设 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域有定义. 若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在, 则称此极限为 $f(x)$ 在 x_0 处的导数 (或微商). 记为 $f'(x_0)$, $y'|_{x=x_0}$, $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$, 或 $\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\right|_{x=x_0}$.

注 导数 $f'(x_0)$ 反映了 $f(x)$ 在点 x_0, 因此 $f'(x_0)$ 又称为 $f(x)$ 在 x_0 点的变化率.

由定义, 我们得到导数定义的几种形式如下.

- $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ (定义)
- $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ (令 $h=\Delta x$)
- $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (令 $x=x_0+h$)

如果 $f(x)$ 在 x_0 处有导数, 则称函数 $f(x)$ 在 x_0 点可导. 否则, 称 $f(x)$ 在 x_0 处不可导.

如果 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内每一点都可导, 则称 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内可导.

定义 2.2. 导函数的定义

如果 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内可导, 则每个 $x_0\in(a,b)$ 都有一个导数值 $f'(x_0)$ 与之对应, 从而得到一个函数 $f'(x)$:

$$f':x_0\longmapsto f'(x_0)$$

$f'(x)$ 称为 $f(x)$ 在 (a,b) 内的导函数 (简称导数) , 记为 $f'(x)$, 或 y', 或 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, 或 $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$. 此时有

$$f'(x_0)=f'(x)|_{x=x_0}.$$

由定义我们得到导函数的几种形式如下.

- $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ （定义）
- $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ （令 $h=\Delta x$）

2.1.2 分段函数的导数

对于分段函数，我们有（假定 $g(x)$ 和 $h(x)$ 总可导）：

$$f(x)=\begin{cases} g(x), & x\leqslant a \\ h(x), & x>a \end{cases} \Longrightarrow f'(x)=\begin{cases} g'(x), & x<a \\ h'(x), & x>a \end{cases}$$

注 $f'(a)$ 需要单独研究：未必有 $f'(a)=g'(a)$.

定理 2.1. 连续性与可导性

$f(x)$ 在 x_0 点可导 $\Longrightarrow f(x)$ 在 x_0 点连续.

证明 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)\Longrightarrow\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha$，其中 $\alpha\to 0(\Delta x\to 0)\Longrightarrow\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha\Delta x\Longrightarrow\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[f'(x_0)\Delta x+\alpha\Delta x\right]=0\Longrightarrow$ 函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续. □

推论 2.1. 连续性与可导性

$f(x)$ 在 x_0 点不连续 $\Longrightarrow f(x)$ 在 x_0 点不可导.

例 2.3 判断 $f(x)=\begin{cases} x^3, & x\leqslant -1 \\ x^2, & x>-1 \end{cases}$，在点 $x=-1$ 处的连续性与可导性.

定义 2.3. 左导数和右导数

设 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0]$ 上有定义，若左极限

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

存在，则称它为 $f(x)$ 在 x_0 处的左导数，记为 $f'_-(x_0)$. 同理我们可以定义 $f(x)$ 在 x_0 处的右导数，记为 $f'_+(x_0)$.

性质 2.1 导数存在 $\Longleftrightarrow$ 左导数和右导数都存在且相等.

$$\text{导数: } f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$$\text{左导数: } f'_-(x_0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$$\text{右导数: } f'_+(x_0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

性质 2.2 分段函数的导数 假定 $g(x)$ 和 $h(x)$ 总可导，记分段函数

$$f(x)=\begin{cases} g(x), & x\leqslant a, \\ h(x), & x>a. \end{cases}$$

如果 $f(x)$ 在 $x=a$ 点连续, 则有

$$f'_-(a)=g'(a),\qquad f'_+(a)=h'(a).$$

注 如果 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内可导, 且 $f'_+(a)$ 及 $f'_-(b)$ 都存在, 就说 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可导.

例 2.4 设函数 $f(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\geqslant x_0,\\ \psi(x), & x<x_0.\end{cases}$ 讨论在点 x_0 的可导性.

解

$$\text{若}\lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\psi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0)}{\Delta x}=f'_-(x_0)\ \text{存在},$$

$$\text{若}\lim_{\Delta x\to +0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0)}{\Delta x}=f'_+(x_0)\ \text{存在},$$

$$\text{且} f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=a,$$

则 $f(x)$ 在点 x_0 可导, 且$f'(x_0)=a$.

□

例 2.5 判断函数 $f(x)=\begin{cases}x^3, & x\leqslant -1,\\ x^2, & x>-1\end{cases}$ 在点 $x=-1,0,1$ 的连续性与可导性.

解 因 $f(-1^-)=-1, f(-1^+)=1$, 故 $f(-1^-)\neq f(1-^+)$, 故而 f 在 $x=-1$ 处不连续且不可导. 同理可得 f 在 $x=0$ 处连续且可导, f 在 $x=1$ 处连续但不可导.

□

练习 2.1 判断函数在分段点处的连续性和可导性.

(1) $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<-1;\\ 2, & x\geqslant -1.\end{cases}$　　(2) $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<1;\\ 1/x, & x\geqslant 1.\end{cases}$

练习 2.2 判断函数在 $x=1$ 的连续性和可导性.

(1) $f(x)=\begin{cases}x+1, & x>1;\\ -x, & x\leqslant 1.\end{cases}$　　(2) $f(x)=\begin{cases}x+1, & x>1;\\ 2x, & x\leqslant 1.\end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases}x^2+x+2, & x\geqslant 1;\\ -x^2+5x, & x<1.\end{cases}$

练习 2.3 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某邻域内有定义, 则 $f(x)$ 在 $x=a$ 点可导的一个充分条件是 (　　)

A. $\lim\limits_{h\to+\infty} h\left[f(a+\frac{1}{h})-f(a)\right]$ 存在

B. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$ 存在

C. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ 存在

D. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a)-f(a-h)}{h}$ 存在

注

- 函数 $f(x)$ 连续，若 $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$，则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的角点，函数在角点不可导．例如，
$$f(x)=\begin{cases} x^2, x \leqslant 0, \\ x, x \geqslant 0. \end{cases}$$
在 $x=0$ 处不可导，$x=0$ 为 $f(x)$ 的角点．
- 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续，但 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \infty$，称函数 $f(x)$ 在点 x_0 有无穷导数.(不可导) 例如，$f(x)=\sqrt[3]{x-1}$ 在 $x=1$ 处不可导．
- 函数 $f(x)$ 在连续点的左右导数都不存在 (指摆动不定)，则 x_0 点不可导．例如，
$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$
在 $x=0$ 处不可导．
- 若 $f'(x_0)$ 在点 x_0 的两个单侧导数符号相反，则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的尖点 (不可导点)．例如，$f(x)=|x-a|$ 在 $x=a$ 处不可导．

2.1.3 由定义求导数（三步法）

由定义求导数的步骤:

- 求增量 $\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x)$;
- 求比值 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$;
- 求极限 $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

例 2.6 求函数 $f(x)=C(C$ 为常数) 的导数．

解 $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{C-C}{h}=0$. 即 $(C)'=0$.

□

例 2.7 设函数 $f(x)=\sin x$，求 $(\sin x)'$ 及 $(\sin x)'|_{x=\frac{\pi}{4}}$.

解
$$\begin{aligned}(\sin x)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \cos x.\end{aligned}$$
$$\text{即} (\sin x)' = \cos x.$$
$$\therefore (\sin x)'_{x=\frac{\pi}{4}} = \cos x|_{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

□

例 2.8 求函数 $y=x^n$(n 为正整数) 的导数．

解

$$
\begin{aligned}
(x^n)' &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h + \cdots + h^{n-1}\right]\\
&= nx^{n-1}.
\end{aligned}
$$

□

例 2.9 求函数 $f(x) = a^x(a>0, a\neq 1)$ 的导数.

解

$$
\begin{aligned}
(a^x)' &= \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h} - a^x}{h}\\
&= a^x \lim_{h\to 0}\frac{a^h - 1}{h}\\
&= a^x \ln a.
\end{aligned}
$$

即 $(a^x)' = a^x \ln a$. 特别别地 $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$.

□

例 2.10 求函数 $y = \log_a x(a>0, a\neq 1)$ 的导数.

解

$$
\begin{aligned}
y' &= \lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}\cdot\frac{1}{x}\\
&= \frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} = \frac{1}{x}\log_a e
\end{aligned}
$$

即 $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$. 特别地 $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

□

2.1.4 导数的几何意义和物理意义

1. 导数的几何意义

   函数 $f(x)$ 在 x_0 处的导数 $f'(x_0)$, 就是曲线 $y = f(x)$ 在点 (x_0, y_0) 处的切线斜率. 从而点 (x_0, y_0) 处的切线方程为

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0),$$

   法线方程为

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

   当 $f'(x_0) = 0$ 时, 切线方程为 $y = f(x_0)$, 法线方程为 $x = f(x_0)$. 当 $f'(x_0) = \infty$ 时, 切线方程为 $x = x_0$, 法线方程为 $x = f(x_0)$.

✍ **练习 2.4** 求 $f(x) = x^2$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程和法线方程.

✍ **练习** 2.5 求 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在点 $(2,\dfrac{1}{2})$ 处的切线方程和法线方程.

2. 导数的物理意义

导数是非均匀变化量的瞬时变化率.

- 变速直线运动: 路程对时间的导数为物体的瞬时速度. $v(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$.
- 交流电路: 电量对时间的导数为电流强度. $i(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta a}{\Delta t}=\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$.
- 非均匀的物体: 质量对长度 (面积, 体积) 的导数为物体的线 (面, 体) 密度.

求导数的方法称为微分法. 用定义只能求出一些较简单的函数的导数（常函数、幂函数、正、余弦函数、指数函数、对数函数）, 对于比较复杂的函数则往往很困难. 下面我们就来建立求导数的基本公式和基本法则, 借助于这些公式和法则就能比较方便地求出常见的函数——初等函数的导数, 从而使初等函数的求导问题系统化, 简单化.

2.1.5 和、差、积、商的求导法则

定理 2.2. 求导四则运算法则

如果函数 $u(x),v(x)$ 在点 x 处可导, 则它们的和、差、积、商 (分母不为零) 在点 x 处也可导, 并且

- $[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$
- $[u(x)\cdot v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$
- $\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]'=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$

例 2.11 求 $y=x^3-2x^2+\sin x$ 的导数.

解 $y'=3x^2-4x+\cos x$.

□

例 2.12 求 $y=\sin 2x\cdot\ln x$ 的导数.

解 因 $y=2\sin x\cdot\cos x\cdot\ln x$, 故

$$y'=2\cos x\cdot\cos x\cdot\ln x+2\sin x\cdot(-\sin x)\cdot\ln x+2\sin x\cdot\cos x\cdot\frac{1}{x}=2\cos 2x\ln x+\frac{1}{x}\sin 2x.$$

□

例 2.13 求 $y=\tan x$ 的导数.

解 $y'=(\tan x)'=\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)'=\dfrac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}=\dfrac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\dfrac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$, 即 $(\tan x)'=\sec^2 x$.

同理可得 $(\cot x)'=-\csc^2 x$.

□

例 2.14 $y=\sec x$ 求 y'.

解 $y'=\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)'=-\dfrac{(\cos x)'}{\cos^2 x}=\dfrac{\sin x}{\cos x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}=\sec x\cdot\tan x$.

同理可得 $(\csc x)'=-\csc x\cdot\cot x$.

□

例 2.15 设

$$f(x)=\begin{cases} x, & x<0, \\ \ln(1+x), & x\geqslant 0. \end{cases} \text{求} f'(x).$$

解

$$\begin{aligned}
&\text{当} x<0, f'(x)=1,\\
&\text{当} x>0, f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+x+h)-\ln(1+x)}{h}\\
&\qquad\qquad\quad =\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln\left(1+\frac{h}{1+x}\right)\\
&\qquad\qquad\quad =\frac{1}{1+x},\\
&\text{当} x=0, f'_-(0)=1,\\
&\qquad\quad f'_+(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{\ln[1+(0+h)]-\ln(1+0)}{h}=1,\\
&\qquad\therefore f'(0)=1,\\
&\qquad\therefore f'(x)=\begin{cases} 1, & x\leqslant 0, \\ \dfrac{1}{1+x}, & x>0. \end{cases}
\end{aligned}$$

□

2.1.6 反函数的导数

定理 2.3. 反函数的导数

如果函数 $x=\varphi(y)$ 在某区间 I_y 内单调、可导且 $\varphi'(y)\neq 0$, 那么它的反函数 $y=f(x)$ 在对应区间 I_x 内也可导, 且有

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(x)}$$

即反函数的导数等于直接函数导数的倒数.

例 2.16 求函数 $y=\arcsin x$ 的导数.

解 $\because x=\sin y$ 在 $I_y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调、可导, 且 $(\sin y)'=\cos y>0$, $\therefore$ 在 $I_x\in(-1,1)$ 内有 $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{(\sin y)'}=\dfrac{1}{\cos y}=\dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

同理可得 $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. $(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$; $(\operatorname{arccot} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$. □

例 2.17 求函数 $y=\log_a x$ 的导数.

解 $\because x=a^y$ 在 $I_y\in(-\infty,+\infty)$ 内单调、可导, 且 $(a^y)'=a^y\ln a\neq 0$, $\therefore$ 在 $I_x\in(0,+\infty)$ 内有

$$(\log_a x)'=\frac{1}{(a^y)'}=\frac{1}{a^y\ln a}=\frac{1}{x\ln a}.$$

特别地 $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$.

□

2.1.7 复合函数的求导法则

前面我们已经会求简单函数, 基本初等函数经有限次四则运算的结果的导数, 但是像 $\ln\tan x, \mathrm{e}^{x^2}, \sin\dfrac{2x}{x^2+1}$. 等函数（复合函数）是否可导, 可导的话, 如何求它们的导数?

定理 2.4. 复合函数的导数

如果函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x_0 可导, 而 $y=f(u)$ 在点 $u_0=\varphi(x_0)$ 可导, 则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 x_0 可导, 且其导数为

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}=f'(u_0)\cdot\varphi'(x_0)$$

即因变量对自变量求导, 等于因变量对中间变量求导, 乘以中间变量对自变量求导 (链式法则). 若 $u=\varphi(x)$ 在 I 上可导, $y=f(u)$ 在 I_1 上可导. $\forall x\in I, u=\varphi(x)\in I_1$, 则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在 I 上可导, 且有 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$.

证明 由 $y=f(u)$ 在点 u_0 可导, $\lim\limits_{\Delta u\to0}\dfrac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u_0)$, 故 $\dfrac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u_0)+\alpha\left(\lim\limits_{\Delta u\to0}\alpha=0\right)$, 则

$$\begin{aligned}\Delta y&=f'(u_0)\Delta u+\alpha\Delta u\\ \lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}&=\lim_{\Delta x\to0}\left[f'(u_0)\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\frac{\Delta u}{\Delta x}\right]\\ &=f'(u_0)\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to0}\alpha\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\\ &=f'(u_0)\varphi'(x_0).\end{aligned}$$

□

注

- 链式法则——“由外向里, 逐层求导”；
- 注意中间变量;
- 推广: 设 $y=f(u), u=\varphi(v), v=\psi(x)$, 则复合函数 $y=f\{\varphi[\psi(x)]\}$ 的导数为
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$
.

例 2.18 求函数 $y=\ln\sin x$ 的导数.

解 $\because y=\ln u, u=\sin x$. $\therefore \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{u}\cdot\cos x=\dfrac{\cos x}{\sin x}=\cot x$.

□

例 2.19 求函数 $y=(x+1)^{10}$ 的导数.

解 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=10\left(x^2+1\right)^9\cdot\left(x^2+1\right)'=10\left(x^2+1\right)^9\cdot2x=20x\left(x^2+1\right)^9$.

□

例 2.20 $y=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$ 的导数

解 $y'=\left(\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}\right)'+\left(\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\right)'=\frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{a^2}{2\sqrt{a^2-x^2}}=\sqrt{a^2-x^2}$.

□

练习 2.6 求下列函数的导数.

(1) $y=\ln\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{x-2}}(x>2)$

(2) $y=\mathrm{e}^{\sin\frac{1}{x}}$

(3) $y=x^u\ (u\in\mathbb{R})$

(4) $y=f^n[\varphi^n(\sin x^n)]$

注

- 基本初等函数的导数公式和上述求导法则是初等函数求导运算的基础, 必须熟练掌握;
- 复合函数求导的链式法则是一元函数微分学的理论基础和精神支柱, 要深刻理解, 熟练应用——注意不要漏层;
- 对于分段函数求导问题: 在定义域的各个部分区间内部, 仍按初等函数的求导法则处理, 在分界点处须用导数的定义仔细分析, 即分别求出在各分界点处的左、右导数, 然后确定导数是否存在.

练习 2.7 设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}} & x\neq 0,\\ 0 & x=0.\end{cases}\quad 求 f'(x).$$

2.1.8 初等函数的求导问题

1. 基本初等函数的导数公式

(1) $(C)'=0$

(2) $(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}$

(3) $(\sin x)'=\cos x$

(4) $(\cos x)'=-\sin x$

(5) $(\tan x)'=\sec^2 x$

(6) $(\cot x)'=-\csc^2 x$

(7) $(\sec x)'=\sec x\tan x$

(8) $(\csc x)'=-\csc x\cot x$

(9) $(a^x)'=a^x\ln a$

(10) $(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$

(11) $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$

(12) $(\ln x)'=\frac{1}{x}$

(13) $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(14) $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(15) $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ (16) $(\operatorname{arccot} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

2. 函数的和、差、积、商的求导法则

   设 $u = u(x), v = v(x)$ 可导, 则

   (1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$ (2) $(cu)' = cu'$(C 是常数)

   (3) $(uv)' = u'v + uv'$ (4) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}(v \neq 0)$

3. 复合函数的求导法则

   设 $y = f(u, u = \varphi(x))$, 则复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 的导数为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ 或 $y'(x) = f'(u) \cdot \varphi'(x)$.

   利用上述公式及法则初等函数求导问题可完全解决.

   注 初等函数的导数仍为初等函数.

2.1.9 小结

- 分段函数求导时, 分界点导数用左右导数求;
- 反函数的求导法则（注意成立条件）;
- 复合函数的求导法则（注意函数的复合过程, 合理分解正确使用链导法）;
- 复合函数求导关键: 正确分解初等函数的复合结构.

例 2.21 若 $f(u)$ 在 u_0 不可导, $u = g(x)$ 在 x_0 可导, 且 $u_0 = g(x_0)$, 则 $f[g(x)]$ 在 x_0 处: (1) 必可导; (2) 必不可导; (3) 不一定可导;

解 正确的选择是 (3). (1) 、(2) 可以举反列如下:

$f(u) = |u|$ 在 $u = 0$ 处不可导, 取 $u = g(x) = \sin x$ 在 $x = 0$ 处可导, $f[g(x)] = |\sin x|$ 在 $x = 0$ 处不可导, (1) 不正确.

取 $u = g(x) = x^4$ 在 $x = 0$ 处可导, $f[g(x)] = \left|x^4\right| = x^4$ 在 $x = 0$ 处可导, (2) 不正确.

□

2.2 高阶导数

定义 2.4. 高阶导数

假定函数 $y = f(x)$ 可以多次求导, 则

- $f''(x) = \left[f'(x)\right]'$ 称为二阶导数,
  - 也可记为 y'' 或 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.
- $f'''(x) = \left[f''(x)\right]'$ 称为三阶导数,
  - 也可记为 y''' 或 $\dfrac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}$.
- $f^{(n)}(x) = \left[f^{(n-1)}(x)\right]'$ 称为 n 阶导数,
  - 也可记为 $y^{(n)}$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}$.

注 规定 $f^{(0)}(x)=f(x)$, 即 $y^{(0)}=y$.

2.2.1 高阶导数求法举例

1. 直接法：由高阶导数的定义逐步求高阶导数.

例 2.22 设 $y=\arctan x$, 求 $f''(0), f'''(0)$.

解 $y'=\dfrac{1}{1+x^2}$, $\quad y''=\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)'=\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$, $\quad y'''=\left(\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}\right)'=\dfrac{2\left(3x^2-1\right)}{(1+x^2)^3}$

$\therefore f''(0)=\left.\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}\right|_{x=0}=0$; $f'''(0)=\left.\dfrac{2\left(3x^2-1\right)}{(1+x^2)^3}\right|_{x=0}=-2$.

□

例 2.23 设 $y=x^\alpha(\alpha\in\mathbb{R})$, 求 $y^{(n)}$.

解

$$
\begin{aligned}
y' &= \alpha x^{\alpha-1}, \\
y'' &= \left(\alpha x^{\alpha-1}\right)'=\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}, \\
y''' &= \left(\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}\right)'=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}, \\
&\cdots\cdots \\
y^{(n)} &= \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n} \quad (n\geqslant 1),
\end{aligned}
$$

若 α 为自然数 n, 则

$$
y^{(n)}=(x^n)^{(n)}=n!, \quad y^{(n+1)}=(n!)'=0.
$$

□

例 2.24 设 $y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$, 求 $y^{(n)}$.

解

$$
\begin{aligned}
y' &= na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\cdots+2a_{n-2}x+a_{n-1}, \\
y'' &= n(n-1)a_0x^{n-2}+(n-1)(n-2)a_1x^{n-3}+\cdots+2a_{n-2}+\cdots, \\
y^{(k)} &= n(n-1)\cdots(n-k+1)a_0x^{n-k}+(n-1)(n-2)\cdots(n-k)a_1x^{n-k-1}+\cdots+k!a_{n-k}, \\
&\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow \quad y^{(n)}=n!a_0.$

□

注 求 n 阶导数时, 求出 $1--3$ 或 4 阶导数后, 不要急于合并, 应分析结果的规律性, 写出 n 阶导数.(数学归纳法证明)——逐阶求导, 寻求规律, 写出通式.

例 2.25 设 $y=\ln(1+x)$, 求 $y^{(n)}$.

解

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{1}{1+x}, \\
y'' &= -\frac{1}{(1+x)^2}, \\
y''' &= \frac{2!}{(1+x)^3}, \\
y^{(4)} &= -\frac{3!}{(1+x)^4}, \\
&\cdots\cdots \\
y^{(n)} &= (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}\ (n \geqslant 1, 0! = 1).
\end{aligned}
$$

□

例 2.26 设 $y = \sin x$, 求 $y^{(n)}$.

解

$$
\begin{aligned}
y' &= \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2}), \\
y'' &= \cos(x + \frac{\pi}{2}) = \sin(x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = \sin(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}), \\
y''' &= \cos(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}) = \sin(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}), \\
&\cdots\cdots \\
y^{(n)} &= \sin(x + n \cdot \frac{\pi}{2}).
\end{aligned}
$$

同理可得 $(\cos x)^{(n)} = \cos(x + n \cdot \frac{\pi}{2})$.

□

例 2.27 设 $y = \mathrm{e}^{ax}\sin bx$ $(a, b$ 为常数), 求 $y^{(n)}$.

解

$$
\begin{aligned}
y' &= ae^{ax}\sin bx + be^{ax}\cos bx, \\
&= e^{ax}\underline{(a\sin bx + b\cos bx)}, \\
&= e^{ax} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}\sin(bx + \varphi)\ (\varphi = \arctan\frac{b}{a}), \\
y'' &= \sqrt{a^2 + b^2} \cdot [ae^{ax}\sin(bx + \varphi) + be^{ax}\cos(bx + \varphi)], \\
&= \sqrt{a^2 + b^2} \cdot e^{ax} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}\sin(bx + 2\varphi), \\
&\cdots\cdots \\
y^{(n)} &= \left(a^2 + b^2\right)^{\frac{n}{2}} \cdot \mathrm{e}^{ax}\sin(bx + n\varphi)\ (\varphi = \arctan\frac{b}{a}).
\end{aligned}
$$

□

2. 高阶导数的运算法则

设函数 u 和 v 具有 n 阶导数, 则

- $(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$
- $(Cu)^{(n)} = Cu^{(n)} \Longrightarrow (\alpha u + \beta v)^{(n)} = \alpha u^{(n)} + \beta v^{(n)}$

- 莱布尼茨公式

$$
\begin{aligned}
(uv)^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, u^{(n-k)}\, v^{(k)} \\
&= u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' \\
&+ \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} + \cdots + uv^{(n)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}
\end{aligned}
$$

例 2.28 设 $y = x^2 \mathrm{e}^{2x}$, 求 $y^{(20)}$.

解 设 $u = \mathrm{e}^{2x}, v = x^2$, 则由莱布尼兹公式知

$$
\begin{aligned}
y^{(20)} =& \left(\mathrm{e}^{2x}\right)^{(20)} \cdot x^2 + 20\left(e^{2x}\right)^{(19)} \cdot \left(x^2\right)' \\
&+ \frac{20(20-1)}{2!}\left(e^{2x}\right)^{(18)} \cdot \left(x^2\right)'' + 0 \\
=& 2^{20}\mathrm{e}^{2x} \cdot x^2 + 20 \cdot 2^{19} e^{2x} \cdot 2x \\
&+ \frac{20 \cdot 19}{2!} 2^{18} \mathrm{e}^{2x} \cdot 2 \\
=& 2^{20}\mathrm{e}^{2x}\left(x^2 + 20x + 95\right)
\end{aligned}
$$

□

例 2.29 设 $f(x) = \arctan x$, 求 $f^{(n)}(0)$.

解 由 $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ 得 $\left(1+x^2\right)f'(x) = 1$, 由 Lebniz 公式, 两边求 n 阶导数, 有

$$
\begin{aligned}
&\left[\left(1+x^2\right)f'(x)\right]^{(n)} = 0 \\
\Rightarrow\quad & \left[f'(x)\right]^{(n)}\left(1+x^2\right) + n\left[f'(x)\right]^{(n-1)}\left(1+x^2\right)' + \frac{n(n-1)}{2!}\left[f'(x)\right]^{(n-2)}\left(1+x^2\right)'' = 0 \\
\Rightarrow\ & \left(1+x^2\right)f^{(n+1)}(x) + 2nxf^{(n)}(x) + n(n-1)f^{(n-1)}(x) = 0
\end{aligned}
$$

令 $x = 0$ 得 $f^{(n+1)}(0) + n(n-1)f^{(n-1)}(0) = 0.$ 注意到 $f(0) = 0, f'(0) = 1$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow\quad & f^{(2n)}(0) = 0 \\
& f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n(2n)!
\end{aligned}
$$

□

注 这一解法的特点: 找到了 $y = \arctan x$ 的连续三阶导数之间的关系, 利用 $x = 0$ 得到两相隔导数之间的关系, 从而解决问题.

3. 利用已知的高阶导数公式, 通过四则运算, 变量代换等方法, 求出 n 阶导数. 常用的高阶导数公式如下. $(k \in \mathbb{Z},\ a > 0, \alpha\ \neq -1)$

(1) $(a^x)^{(n)} = a^x \cdot \ln^n a$

(2) $(\sin kx)^{(n)} = k^n \sin(kx + n \cdot \dfrac{\pi}{2})$

(3) $(\cos kx)^{(n)} = k^n \cos(kx + n \cdot \dfrac{\pi}{2})$

(4) $(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$

(5) $(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{x^n}$

(6) $(\dfrac{1}{x})^{(n)} = (-1)^n\dfrac{n!}{x^{n+1}}$

例 2.30 设 $y=\dfrac{1}{x^2-1}$, 求 $y^{(5)}$.

解

$$\begin{aligned}\because y&=\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)\\ \therefore y^{(5)}&=\frac{1}{2}\left[\frac{-5!}{(x-1)^6}-\frac{-5!}{(x+1)^6}\right]\\ &=60\left[\frac{1}{(x+1)^6}-\frac{1}{(x-1)^6}\right]\end{aligned}$$

□

例 2.31 设 $y=\sin^6x+\cos^6x$, 求 $y^{(n)}$.

解 $y=\left(\sin^2x\right)^3+\left(\cos^2x\right)^3=\left(\sin^2x+\cos^2x\right)\left(\sin^4x-\sin^2x\cos^2x+\cos^4x\right)=\left(\sin^2x+\cos^2x\right)^2-3\sin^2x\cos^2x=1-\dfrac{3}{4}\sin^2 2x=1-\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1-\cos 4x}{2}=\dfrac{5}{8}+\dfrac{3}{8}\cos 4x$

$\therefore y^{(n)}=\dfrac{3}{8}\cdot 4^n\cdot\cos(4x+n\cdot\dfrac{\pi}{2})$

□

例 2.32 试从 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{1}{y'}$ 导出

(1) $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=-\dfrac{y''}{(y')^3}$

(2) $\dfrac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}y^3}=\dfrac{3(y'')^2-y'\cdot y'''}{(y')^5}$

解 (1) $y=y(x)\Rightarrow x=\varphi(y)$，注意函数关系：$y'\rightarrow x\rightarrow y$. 由 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{1}{y'}$ 得 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{dy^2}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\dfrac{1}{y'}\right)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{1}{y'}\right)\cdot\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{-1}{(y')^2}\cdot y''\cdot\dfrac{1}{y'}=-\dfrac{y''}{(y')^3}$.

(2) $\dfrac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}y^3}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}\right)=-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[\dfrac{y''}{(y')^3}\right]\quad=-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\dfrac{y''}{(y')^3}\right]\cdot\dfrac{dx}{dy}=-\dfrac{y'''\cdot(y')^3-y''\cdot 3(y')^2\cdot y''}{(y')^6}\cdot\dfrac{1}{y'}=\dfrac{3(y'')^2-y'\cdot y'''}{(y')^5}$.

□

例 2.33 设 $g'(x)$ 连续, 且 $f(x)=(x-a)^2g(x)$, 求 $f''(a)$.

解 因 $g(x)$ 可导, 有 $f'(x)=2(x-a)g(x)+(x-a)^2g'(x)$. 而 $g''(x)$ 不一定存在, 故需用定义求 $f''(a)$.

$f''(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)-f'(a)}{x-a}\xlongequal{f'(a)=0}\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\left[2g(x)+(x-a)g'(x)\right]=2g(a)$.

□

2.2.2 小结

- 关于抽象函数求导数, 必须注意并分清是对哪一个变量来求导数, 尤其是求高阶导数.
- $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y},\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2},y',y''$ 都是对 x 求导

- $[f(x^2)]' \neq f'(x^2)$, $[f(x^2)]'$ 为复合函数 $y=f(x^2)$ 对 x 的导数. $f'(x^2) = f'(u)_{u=x^2}$ 即是 $y=f(u)$ 对 u 求导数再用 $u=x^2$ 代回.

2.3 隐函数与参量函数微分法

2.3.1 隐函数的导数

定义 2.5. 隐函数与显函数

由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 称为隐函数. $y=f(x)$ 形式称为显函数. 隐函数的显化: $F(x,y)=0 \Longrightarrow y=f(x)$.

问题: 隐函数不易显化或不能显化如何求导?

隐函数求导法则: 用复合函数求导法则直接对方程两边求导. 即将 y 看成 x 的函数, 方程两边同时对 x 求导.

例 2.34 求由方程 $xy-\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y=0$ 所确定的隐函数 y 的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$.

解 方程两边对 x 求导, 得

$$y+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$$

解得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{e}^x-y}{x+\mathrm{e}^y}$, 由原方程知 $x=0, y=0$, 则

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=\left.\frac{e^x-y}{x+e^y}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}=1.$$

□

例 2.35 设曲线 C 的方程为 $x^3+y^3=3xy$, 求过 C 上点 $\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2}\right)$ 的切线方程, 并证明曲线 C 在该点的法线通过原点.

解 方程两边对 x 求导, $3x^2+3y^2y'=3y+3xy'$, 则

$$y'\big|_{\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)}=\left.\frac{y-x^2}{y^2-x}\right|_{\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2};\right)}=-1$$

所求切线方程为 $y-\dfrac{3}{2}=-\left(x-\dfrac{3}{2}\right)$ 即 $x+y-3=0$. 法线方程为 $y-\dfrac{3}{2}=x-\dfrac{3}{2}$ 即 $y=x$, 显然其通过原点.

□

例 2.36 设 $x^4-xy+y^4=1$, 求 y'' 在点 $(0,1)$ 处的值.

解 方程两边对 x 求导得

$$4x^3-y-xy'+4y^3y'=0$$

代入 $x=0, y=1$, $y'\big|_{\substack{x=0\\y=1}}=\dfrac{1}{4}$ 将方程 (1) 两边再对 x 求导得 $12x^2-2y'-xy''+12y^2(y')^2+4y^3y''=0$. 代入 $x=0, y=1$ 得 $y'\big|_{\substack{x=0\\y=1}}=\dfrac{1}{4}$. 得 $y'\big|_{\substack{x=0\\y=1}}=-\dfrac{1}{16}$.

□

✍ **练习 2.8** 求方程 $y = x\ln y$ 确定的隐函数的导数.

✍ **练习 2.9** 求曲线 $x^2 + xy + y^2 = 4$ 在点 $(2,-2)$ 处的切线方程和法线方程.

例 2.37 利用反函数求导证明反函数的求导法则.

证明 设 $x = \varphi(y)$ 为直接函数, $y = f(x)$ 为其反函数 $y = f(x)$ 可视为由方程 $x - \varphi(y) = 0$ 确定的一个隐函数. 由隐函数的微分法则, 方程 $x = \varphi(y)$ 两边对 x 求导得

$$1 = \varphi'(y)\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\varphi'(y)}$$

□

例 2.38 设 $\arctan\dfrac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2+y^2}$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解 方程两边对 x 求导得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)' \\
\Rightarrow &\frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{y'x-y}{x^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{2x+2yy'}{2\sqrt{x^2+y^2}} \\
\Rightarrow &y'x - y = x + yy' \\
&\Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x+y}{x-y}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x+y}{x-y}\right) \\
&= \frac{(1+y')(x-y)-(x+y)(1-y')}{(x-y)^2} \\
&= \frac{2xy'-2y}{(x-y)^2} = 2\cdot\frac{x(x+y)-y(x-y)}{(x-y)^3} \\
&= \frac{2\left(x^2+y^2\right)}{(x-y)^3}.
\end{aligned}$$

□

例 2.39 求证抛物线 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ 上任一点的切线在两坐标轴上的截距之和等于 a.

证明 方程 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ 两边对 x 求导得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0 \\
\Rightarrow &\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

故曲线上任一点 (x_0, y_0) 处切线的斜率为

$$k = \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} = -\frac{\sqrt{y_0}}{\sqrt{x_0}}$$

切线方程为 $\quad y - y_0 = -\dfrac{\sqrt{y_0}}{\sqrt{x_0}}(x - x_0)$

$$\Rightarrow \sqrt{x_0}y + \sqrt{y_0}x = \sqrt{x_0}y_0 + \sqrt{y_0}x_0$$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow \sqrt{x_0}y+\sqrt{y_0}x=\sqrt{x_0}y_0+\sqrt{y_0}x_0\\&=\sqrt{x_0}\sqrt{y_0}(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0})=\sqrt{a}\sqrt{x_0}\sqrt{y_0}\\&\Rightarrow \frac{x}{\sqrt{a}\sqrt{x_0}}+\frac{y}{\sqrt{a}\sqrt{y_0}}=1\end{aligned}$$

故在两坐标轴上的截距之和为

$$\sqrt{a}\sqrt{x_0}+\sqrt{a}\sqrt{y_0}=\sqrt{a}(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0})=a.$$

□

2.3.2 对数求导法

有时会遇到这样的情形, 即虽然给出的是显函数但直接求导有困难或很麻烦.

考虑函数 $y=\dfrac{(x+1)\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2\mathrm{e}^x}$ 和 $y=x^{\sin x}$. 求它们导数的方法是: 先在方程两边取对数, 然后利用隐函数的求导方法求出导数. 目的是利用对数的性质简化求导运算. 这就是所谓的对数求导法.

对数求导法适用范围: 多个函数相乘、乘方、开方和幂指函数 $u(x)^{v(x)}$ 的情形.

例 2.40 设 $y=\dfrac{(x+1)\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2e^x}$, 求 y'.

解 等式两边取对数得

$$\ln y=\ln(x+1)+\frac{1}{3}\ln(x-1)-2\ln(x+4)-x$$

上式两边对 x 求导得

$$\begin{aligned}\frac{y'}{y}&=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{3(x-1)}-\frac{2}{x+4}-1\\ \therefore y'&=\frac{(x+1)\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2e^x}\left[\frac{1}{x+1}+\frac{1}{3(x-1)}-\frac{2}{x+4}-1\right]\end{aligned}$$

□

例 2.41 求 $y=\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$ 的导数

解 这函数的定义域满足

$$x>4,2<x<3,x<1$$

若 $x>4$, 两边取对数得

$$y=\frac{1}{2}[\ln(x-1)+\ln(x-2)-\ln(x-3)-\ln(x-4)]$$

两边对 x 求导得

$$\begin{aligned}\frac{1}{y}\cdot y'&=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right]\\ \Rightarrow y'&=\frac{y}{2}\left[\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-3}\right]\end{aligned}$$

若 $x<1$, $y=\sqrt{\dfrac{(1-x)(2-x)}{(3-x)(4-x)}}$ 两边取对数得

$$\ln y=\frac{1}{2}[\ln(1-x)+\ln(2-x)-\ln(3-x)-\ln(4-x)]$$

两边对 x 求导得

$$\begin{aligned}\frac{1}{y}\cdot y' &= \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{1-x}+\frac{-1}{2-x}-\frac{-1}{3-x}-\frac{-1}{4-x}\right]\\ \Rightarrow y' &= \frac{y}{2}\left[\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-3}\right]\end{aligned}$$

同理, 若 $2<x<3$

$$\Rightarrow y'=\frac{y}{2}\left[\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-3}\right]$$

□

例 2.42 设 $x^y=y^x$, 求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解 两边取对数得

$$y\ln x=x\ln y$$

两边对 x 求导得

$$\begin{aligned}y'\ln x+y\cdot\frac{1}{x} &= \ln y+x\cdot\frac{1}{y}\cdot y'\\ \Rightarrow\quad y' &= \frac{xy\ln y-y^2}{xy\ln x-x^2}\end{aligned}$$

□

例 2.43 设 $y=(x-a_1)^{a_1}(x-a_2)^{a_2}\cdots(x-a_n)^{a_n}$ 求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解 两边取对数得

$$\operatorname{In} y=a_1\ln(x-a_1)+a_2\ln(x-a_2)+\cdots+a_n\ln(x-a_n)$$

两边对 x 求导得

$$\begin{aligned}\frac{1}{y}\cdot y' &= \frac{a_1}{x-a_1}+\frac{a_2}{x-a_2}+\cdots+\frac{a_n}{x-a_n}\\ y' &= y\left[\frac{a_1}{x-a_1}+\frac{a_2}{x-a_2}+\cdots+\frac{a_n}{x-a_n}\right.\end{aligned}$$

□

例 2.44 设 $y=x^{\sin x}(x>0)$, 求 y'.

解 等式两边取对数得

$$\ln y=\sin x\cdot\ln x$$

两边对 x 求导得

$$\begin{aligned}\frac{1}{y}y' &= \cos x\cdot\ln x+\sin x\cdot\frac{1}{x}\\ \therefore y' &= y\left(\cos x\cdot\ln x+\sin x\cdot\frac{1}{x}\right)\\ &= x^{\sin x}\left(\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)\end{aligned}$$

□

注 一般地

$$
\begin{aligned}
f(x) &= u(x)^{v(x)} \quad (u(x) > 0) \\
\because \ln f(x) &= v(x) \cdot \ln u(x) \\
\therefore \frac{d}{dx} \ln f(x) &= \frac{1}{f(x)} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) \\
\therefore f'(x) &= f(x) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln f(x) \\
\therefore f'(x) &= u(x)^{v(x)} \left[v'(x) \cdot \ln u(x) + \frac{v(x)u'(x)}{u(x)} \right]
\end{aligned}
$$

2.3.3 由参数方程所确定的函数的导数

若参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ 确定 y 与 x 间的函数关系称此为由参数方程所确定的函数. 例如 $\begin{cases} x = 2t \\ y = t^2, \end{cases} \Rightarrow t = \dfrac{x}{2} \xrightarrow{\text{消去参数}t} y = t^2 = \left(\dfrac{x}{2}\right)^2 = \dfrac{x^2}{4} \quad \therefore y' = \dfrac{1}{2}x.$

我们现在的问题是：消参困难或无法消参时如何求导？

定理 2.5. 参数方程求导公式

设函数 $x = \varphi(t)$ 具有单调连续的反函数 $t = \varphi^{-1}(x)$, $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ 都可导, 且 $\varphi(t) \neq 0$, 参量函数 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$. 则

$$
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \Big/ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}
$$

证明 因 $y = \psi[\varphi^{-1}(x)]$— 参量函数.

由复合函数及反函数的求导法则得

$$
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}
$$

即 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \Big/ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$.

进一步, 若函数 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ 二阶可导, 则

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right) \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} \\
&= \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^2(t)} \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} \\
&= \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)}.
\end{aligned}
$$

□

例 2.45 求摆线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ 在 $t = \dfrac{\pi}{2}$ 处的切线方程.

解

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\overline{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{a\sin t}{a-a\cos t}=\frac{\sin t}{1-\cos t}$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}\bigg|_{t=\frac{\pi}{2}}=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{1-\cos\frac{\pi}{2}}=1$$

当 $t=\dfrac{\pi}{2}$ 时, $x=a\left(\dfrac{\pi}{2}-1\right), y=a$. 所求切线方程为

$$y-a=x-a\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$$

即 $y=x+a\left(2-\dfrac{\pi}{2}\right)$.

□

例 2.46 设 $\begin{cases} x=\sqrt{1+t}, \\ y=\sqrt{1-t}. \end{cases}$ 证明 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{x}{y}, \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-\dfrac{2}{y^3}$.

证明

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\frac{-1}{2\sqrt{1-t}}}{\frac{1}{2\sqrt{1+t}}}=-\frac{\sqrt{1+t}}{\sqrt{1-t}}=-\frac{x}{y}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x}{y}\right)\\&=-\frac{y-xy'}{y^2}=-\frac{y+\frac{x}{y}}{y^2}\\&=-\frac{x^2+y^2}{y^3}=-\frac{2}{y^3}\quad(x^2+y^2=2)\end{aligned}$$

□

例 2.47 设曲线 Γ 由极坐标方程 $r=r(\theta)$ 所确定, 试求该曲线上任一点的切线斜率, 并写出过对数螺线 $r=\mathrm{e}^{\theta}$ 上点 $\left(\mathrm{e}^{\pi/2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 处的切线的直角坐标方程.

解 由极坐标和直角坐标的变换关系知

$$\begin{cases} x=r(\theta)\cos\theta, \\ y=r(\theta)\sin\theta. \end{cases}$$

$$\Rightarrow\quad\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}}=\frac{r'(\theta)\sin\theta+r(\theta)\cos\theta}{r'(\theta)\cos\theta-r(\theta)\sin\theta}$$

当 $r=\mathrm{e}^{\theta}$ 时,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{e}^{\theta}(\sin\theta+\cos\theta)}{\mathrm{e}^{\theta}(\cos\theta-\sin\theta)}=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$$

当 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 时, 切线斜率为 $k=\dfrac{dy}{dx}\bigg|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=-1$. 而 $r=e^{\theta}$ 上点 $\left(e^{\frac{\pi}{2}},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 所对应的直角坐标为 $\left(0,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}\right)$ 故切线的直角坐标方程为

$$y-\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}=-(x-0)$$

即 $x+y=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}$.

□

例 2.48 不计空气的阻力, 以初速度 v_0, 发射角 α 发射炮弹, 其运动方程为

$$\begin{cases} x = v_0 t\cos\alpha, \\ y = v_0 t\sin\alpha - \dfrac{1}{2}gt^2. \end{cases}$$

求:

(1) 炮弹在时刻 t_0 的运动方向;

(2) 炮弹在时刻 t_0 的速度大小.

解 (1) 在 t_0 时刻的运动方向即轨迹在 t_0 时刻的切线方向, 可由切线的斜率来反映. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\left(v_0 t\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2\right)'}{(v_0 t\cos\alpha)'} = \dfrac{v_0\sin\alpha - gt}{v_0\cos\alpha}$ $\therefore$ $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=t_0} = \dfrac{v_0\sin\alpha - gt_0}{v_0\cos\alpha}$.

(2) 炮弹在 t_0 时刻沿 x, y 轴方向的分速度分别为

$$v_x = \left.\frac{\mathrm{d}x}{dt}\right|_{t=t_0} = (v_0 t\cos\alpha)'|_{t=t_0} = v_0\cos\alpha,$$

$$v_y = \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0} = \left.\left(v_0 t\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2\right)'\right|_{t=t_0} = v_0\sin\alpha - gt_0.$$

故在 t_0 时刻炮弹的速度为

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 - 2v_0 g t_0\sin\alpha + g^2 t_0^2}.$$

□

2.3.4 小结

- 隐函数求导法则: 直接对方程两边求导.
- 对数求导法: 对方程两边取对数, 按隐函数的求导法则求导.
- 参数方程求导: 实质上是利用复合函数求导法则.

2.4 函数的微分

前面我们从变化率问题引出了导数概念, 它是微分学的一个重要概念. 在工程技术中, 还会遇到与导数密切相关的另一类问题, 这就是当自变量有一个微小的增量时, 要求计算函数的相应的增量. 一般来说, 计算函数增量的准确值是比较繁难的, 所以需要考虑用简便的计算方法来计算它的近似值, 由此引出了微分学的另一个基本概念——微分.

2.4.1 微分的引例

例 2.49 一块正方形金属薄片受热后, 其边长由 x_0 增加到 $x_0 + \Delta x$. 求此薄片面积的改变量 Δy.

解 正方形面积为 $y = f(x) = x^2$. 则面积改变量为

$$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2.$$

比如, 当 $x_0 = 1$, $\Delta x = 0.1$ 时,

$$\Delta y = 2 \cdot 1 \cdot 0.1 + 0.1^2 = 0.2 + 0.01.$$

$\square$

注 若 Δx 很小, 则 $2x_0\Delta x$ 远比 $(\Delta x)^2$ 大. 因此

$$\boxed{\Delta y \approx 2x_0\Delta x} \quad \text{即} \quad \boxed{\Delta y \approx f'(x_0)\Delta x}$$

定义 2.6. 微分

对于自变量在点 x 处的改变量 Δx, 如果函数 $y = f(x)$ 的相应改变量 Δy 可以表示为

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x) \qquad (\Delta x \to 0)$$

其中 A 与 Δx 无关, 则称 $y = f(x)$ 在点 x 处可微, 并称 $A\Delta x$ 为函数 $y = f(x)$ 在点 x 处的微分, 记为

$$\mathrm{d}y = A\Delta x.$$

注 由微分的定义知:

- dy 是自变量的改变量 Δx 的线性函数;
- $\Delta y - \mathrm{d}y = o(\Delta x)$ 是比 Δx 高阶无穷小;
- 当 $A \neq 0$ 时, dy 与 Δy 是等价无穷小, 故 $\dfrac{\Delta y}{\mathrm{d}y} = 1 + \dfrac{o(\Delta x)}{A \cdot \Delta x} \to 1 \quad (x \to 0)$
- A 是与 Δx 无关的常数, 但与 $f(x)$ 和 x_0 有关;
- 当 $|\Delta x$ 很小时, $\Delta y \approx \mathrm{d}y$ (我们也称微分 $\mathrm{d}y$ 是函数增量 Δy 的线性主部, 这就是微分的实质).

2.4.2 可微的条件

定理 2.6. 可微与可导的关系

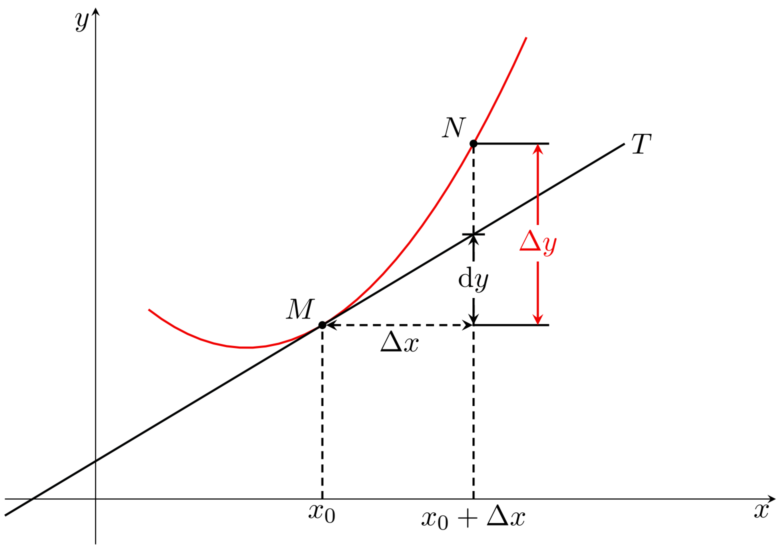
$y = f(x)$ 在点 x 处可微 $\Longleftrightarrow$ $y = f(x)$ 在点 x 处可导, 且此时有 $\mathrm{d}y = f'(x)\Delta x$.

函数 $y = f(x)$ 在任意点 x 的微分, 称为函数的微分, 记作 dy 或 $df(x)$, 即 $\mathrm{d}y = f'(x)\Delta x$.

注 从 $y = x$ 可以得到 $\mathrm{d}x = \Delta x$, 因此通常把自变量 x 的增量 Δx 称为自变量的微分, 记作 $\mathrm{d}x$, 即 $\mathrm{d}x = \Delta x$, 故定理中的等式可以写为 $\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$.

$$\therefore \mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x. \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x).$$

即函数的微分 $\mathrm{d}y$ 与自变量的微分 $\mathrm{d}x$ 之商等于该函数的导数, 因此导数也叫 “微商”.



微分的几何意义：以直代曲.

2.4.3 微分的求法

求法: $\mathrm{d}y=f'(x)\,\mathrm{d}x$, 即计算函数的导数, 乘以自变量的微分.

1. 基本初等函数的微分公式

(1) $\mathrm{d}(C)=0$

(2) $\mathrm{d}(x^{\mu})=\mu x^{\mu-1}\,\mathrm{d}x$

(3) $\mathrm{d}(\sin x)=\cos x\,\mathrm{d}x$

(4) $\mathrm{d}(\cos x)=-\sin x dx$

(5) $\mathrm{d}(\tan x)=\sec^2 x\,\mathrm{d}x$

(6) $\mathrm{d}(\cot x)=-\csc^2 x\,\mathrm{d}x$

(7) $\mathrm{d}(\sec x)=\sec x\tan x\,\mathrm{d}x$

(8) $\mathrm{d}(\csc x)=-\csc x\cot x\,\mathrm{d}x$

2. 微分的四则运算:

(1) $\mathrm{d}(u\pm v)=\mathrm{d}u\pm\mathrm{d}v$

(2) $\mathrm{d}(Cu)=C\,\mathrm{d}u$

(3) $\mathrm{d}(uv)=v\,\mathrm{d}u+u\,\mathrm{d}v$

(4) $\mathrm{d}\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{v\,\mathrm{d}u-u\,\mathrm{d}v}{v^2}$

例 2.50 设 $y=\ln\left(x+e^{x^2}\right)$, 求 $\mathrm{d}y$.

解 因 $y'=\dfrac{1+2x\mathrm{e}^{x^2}}{x+\mathrm{e}^{x^2}}$, 则 $\mathrm{d}y=\dfrac{1+2x\mathrm{e}^{x^2}}{x+\mathrm{e}^{x^2}}\,\mathrm{d}x$.

□

例 2.51 设 $y=\mathrm{e}^{1-3x}\cos x$, 求 $\mathrm{d}y$.

解

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}y&=\cos x\,\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{1-3x}\right)+\mathrm{e}^{1-3x}\,\mathrm{d}(\cos x)\\
\because \left(\mathrm{e}^{1-3x}\right)'&=-3\mathrm{e}^{1-3x},(\cos x)'=-\sin x\\
\therefore \mathrm{d}y&=\cos x\cdot\left(-3\mathrm{e}^{1-3x}\right)\mathrm{d}x+\mathrm{e}^{1-3x}\cdot(-\sin x)\,\mathrm{d}x\\
&=-\mathrm{e}^{1-3x}(3\cos x+\sin x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

□

2.4.4 一阶微分的形式不变性

设函数 $y=f(x)$ 有导数 $f'(x)$.

- 若 x 是自变量时, $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$;
- 若 x 是中间变量时, 即另一变量 t 的可微函数 $x=\varphi(t)$, 则

$$\because \varphi'(t)\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}x, \therefore \mathrm{d}y=f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

结论: 无论 x 是自变量还是中间变量, 函数 $y=f(x)$ 的微分形式总是 $\mathrm{d}y=f'(x)\,\mathrm{d}x$

例 2.52 设 $y=\sin(2x+1)$, 求 $\mathrm{d}y$.

解

$$\begin{aligned}\because y &= \sin u, u=2x+1\\ \therefore \mathrm{d}y &= \cos u\,\mathrm{d}u=\cos(2x+1)\,\mathrm{d}(2x+1)\\ &= \cos(2x+1)\cdot 2\,\mathrm{d}x=2\cos(2x+1)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

□

例 2.53 设 $y=\mathrm{e}^{-ax}\sin bx$, 求 $\mathrm{d}y$.

解

$$\begin{aligned}\mathrm{d}y &= \mathrm{e}^{-ax}\cdot\cos bx\,\mathrm{d}(bx)+\sin bx\cdot\mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}(-ax)\\ &= \mathrm{e}^{-ax}\cdot\cos bx\cdot b\,\mathrm{d}x+\sin bx\cdot e^{-ax}\cdot(-a)dx\\ &= \mathrm{e}^{-ax}(b\cos bx-a\sin bx)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

□

例 2.54 设 $\mathrm{e}^{xy}=a^x b^y$, 求 $\mathrm{d}y, \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解 两边同时求微分得 $\mathrm{d}(\mathrm{e}^{xy})=\mathrm{d}(a^x b^y)$,

$$\begin{aligned}\Rightarrow \mathrm{e}^{xy}\,\mathrm{d}(xy) &= b^y\,\mathrm{d}(a^x)+a^x\,\mathrm{d}(b^y)\\ \Rightarrow \mathrm{e}^{xy}[x\,\mathrm{d}y+y\,\mathrm{d}x] &= a^x b^y[\ln a\,\mathrm{d}x+\ln b\,\mathrm{d}y]\\ \Rightarrow y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y &= \ln a\,\mathrm{d}x+\ln b\,\mathrm{d}y\\ \Rightarrow \mathrm{d}y &= \frac{\ln a-y}{x-\ln b}\,\mathrm{d}x\\ \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\ln a-y}{x-\ln b}.\end{aligned}$$

或者两边取对数得 $xy=x\ln a+y\ln b$, 两边对 x 求导, 有

$$y+xy'=\ln a+y'\ln b$$

$$\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\ln a-y}{x-\ln b}\quad\Rightarrow\quad \mathrm{d}y=\frac{\ln a-y}{x-\ln b}\cdot\mathrm{d}x.$$

由上面的例子还可以看出, 求导数与求微分的方法在本质上并没有区别, 因此把两者统称为微分法.

□

2.4.5 微分在近似计算中的应用 ★

- 计算数的近似值

- 求 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 附近的近似值;

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\cdot\Delta x.$$

$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x_0\quad(\Delta x\mid \text{很小时})$

- 求 $f(x)$ 在点 $x=0$ 附近的近似值; 令 $x_0=0,\Delta x=x.\ \because f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x$

$$\therefore f(x)\approx f(0)+f'(0)\cdot x$$

- 常用近似公式 ($|x|$ 很小时)
  - $\sqrt[n]{1+x}\approx 1+\dfrac{1}{n}x$
  - $\sin x\approx x$(x 为弧度);
  - $\tan x\approx x$(x 为弧度) ;
  - $\mathrm{e}^x\approx 1+x$;
  - $\ln(1+x)\approx x$

证明 (1) 设 $f(x)=\sqrt[n]{1+x},\quad f'(x)=\dfrac{1}{n}(1+x)^{\frac{1}{n}-1},\ f(0)=1,f'(0)=\dfrac{1}{n}$, 故 $f(x)\approx f(0)+f'(0)x=1+\dfrac{x}{n}$.

其余同理可证.

2.4.6 小结

- 微分学所要解决的两类问题:

$$\begin{cases}\text{函数的变化率问题}\Longrightarrow\ \text{导数的概念}\\ \text{函数的增量问题}\Longrightarrow\ \text{微分的概念}\end{cases}$$

求导数与微分的方法, 叫做微分法. 研究微分法与导数理论及其应用的科学, 叫做微分学.

- 导数与微分的联系: 可导 $\Leftrightarrow$ 可微.
- 导数与微分的区别:
  - 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数是一个定数 $f'(x_0)$, 而微分 $\mathrm{d}y=f'(x_0)(x-x_0)$ 是 x 的线性函数, 它的定义域是 R, 实际上, 它是无穷小.

$$\because \lim_{x\to x_0}\mathrm{d}y=\lim_{x\to x_0}f'(x_0)(x-x_0)=0$$

  - 从几何意义上来看, $f'(x_0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处切线的斜率, 而微 $dy=f'(x_0)\ (x-x_0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线方程在点 x_0 的纵坐标增量.
  - 近似计算的基本公式:

    当 Δx 很小时, $\Delta y_{x=x_0}\approx dy_{x=x_0}=f'(x_0)\cdot\Delta x,\ f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$.

    当 $x=0$ 时, $f(x)\approx f(0)+f'(0)\cdot x$.

注 因为一元函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的可微性与可导性是等价的, 所以有人说 “微分就是导数, 导数就是微分” , 这说法对吗?

这种说法是不对的. 从概念上讲, 微分是从求函数增量引出线性主部而得到的, 导数是从函数变化率问题归纳出函数增量与自变量增量之比的极限, 它们是完全不同的概念.

第二章 习题

1. 函数 f(x) 在 x = x$_0$ 处的导教 $f'(x_0)$ 可定义为 ( )

A. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

B. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

C. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{\Delta x}$

D. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}$.

2. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)-f(0)}{x}=\dfrac{1}{2}$, 则 $f'(0)$ 等于______.

3. 设 f 在 x_0 存在左、右导数，则 f 在 x_0 处 ( )

A. 可导; B. 连续:

C. 不可导; D. 不连续.

4. $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导是 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续的______ 条件.

5. 求 $f(x)=\ln\left(\dfrac{1}{x}+\ln\left(\dfrac{1}{x}+\ln\dfrac{1}{x}\right)\right)$ 的导数.

6. 求 $f(x)=\sin x^{\cos x}\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 导数

7. 已知 $\sqrt{x^2+y^2}=\mathrm{e}^{\left(\arctan\frac{y}{x}\right)}$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

8. 求 $y=\dfrac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{a}(a>0)$ 的导数.

9. 设 $y=\arctan x$, 求 $f''(0)$.

10. 设 $y=\sin^6 x+\cos^6 x$, 求 $y^{(n)}$.

11. 设 $y=\mathrm{e}^{ax}\sin bx(a,b$ 为常数 $)$, 求 $y^{(n)}$.

12. 设 $y=x^3\mathrm{e}^{2x}$, 求$y^{(20)}$.

13. 求下列函数的导数:

(1) $y=x^3-2x-6$ (2) $y=\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}$

(3) $y=\dfrac{1-x^2}{1+x+x^2}$ (4) $y=\dfrac{x}{m}+\dfrac{m}{x}+2\sqrt{x}+\dfrac{2}{\sqrt{x}}$

(5) $y=x^3\log_3 x$ (6) $y=\mathrm{e}^x\cos x$

(7) $y=\left(x^2+1\right)(3x-1)\left(1-x^3\right)$ (8) $y=\dfrac{\tan x}{x}$

(9) $y=\dfrac{1+\ln x}{1-\ln x}$　　(10)$y=(\sqrt{x}+1)\arctan x$;

(11)$y=\dfrac{1+x^2}{\sin x+\cos x}$　　(12)$y=\mathrm{e}^{ax}\cos bx$

(13)$y=\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}$　　(14)$y=x\sin x\ln x$

(15)$y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$　　(16)$y=\ln(\cos x+\sin x)$

(17)$y=\left(x^2-1\right)^3$　　(18)$y=\left(\dfrac{1+x^2}{1-x}\right)^3$

(19)$y=\ln(\ln x)$　　(20)$y=\ln\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$

(21)$y=\left(\arctan x^3\right)^2$　　(22)$y=\arcsin\left(\sin^2 x\right)$

(23)$y=\sin(\sin(\sin x))$　　(24)$y=\sin\left(\dfrac{x}{\sin\left(\frac{x}{\sin x}\right)}\right)$

14. 求下列函数的导数:

(1) $f(x)=ax^n+ax^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$

(2) $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

(3) $y=x^x$

(4) $y=u(x)^{v(x)}$, 其中 $u(x)>0$, 且 $u(x)$ 与 $v(x)$ 均可导

(5) $y=(x-a))^{a_1}(x-a_2)^{a_2}\cdots(x-a_n)^{a_n}$

(6) $y=\sqrt[3]{\dfrac{(x+1)^2(x+2)^3}{(x+3)^4(x+4)^5}}$

(7) $y=\dfrac{(x+5)^2(x-4)^{\frac{1}{3}}}{(x+2)^5(x+4)^{\frac{1}{2}}}$

15. 求 $f(x)=|x+1|^3=\begin{cases}(x+1)^3, x\geqslant -1,\\ -(x+1)^3, x<-1\end{cases}$ 的导函数 $f'(x)$, 并说明其连续性.

16. 设 $f(x)=\begin{cases}x^m\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

(1) m 为何值时, f 在 $x=0$ 处可导;

(2) m 为何值时, f' 在 $x=0$ 处连续.

17. 设 $f(x)=x(x-1)^2(x-2)^3$. 求 $f'(0), f'(1)$, 和 $f'(2)$.

18. 设 $f(x_0)=0, f'(x_0)=4$. 求极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+2\Delta x)}{\Delta x}$.

19. 确定曲线 $y=\ln x$ 上哪些点的切线平行于下列直线.

(1) $y=x-1$

(2) $y=2x-3$

20. 求下列曲线在指定点 P 的切线方程与法线方程.

(1) $y=\dfrac{x^2}{4}, P=(2,1)$

(2) $y=\cos x, P=(0,1)$.

21. 求下列函数的导函数:

(1) $f(x)=|x|^3$

(2) $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\geqslant 0, \\ 1, & x<0. \end{cases}$

22. 设 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\geqslant 3, \\ ax+b, & x<3. \end{cases}$ 试确定 a,b 的值, 使 f 在 $x=3$ 处可导.

23. 设 $g(0)=g'(0)=0$,

$$f(x)=\begin{cases} g(x)\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

求 $f'(0)$.

24. 设函数 f 在点 x_0 处存在左右导数. 证明 : f 在点 x_0 处连续.

25. 证明

(1) 可导的周期为 T 的函数 f, 其导函数 f' 仍为周期 T 的函数.

(2) 可导的奇函数 f, 其导函数必为偶函数.

(3) 可导的偶函数, 其导函数必为奇函数.

26. 设 f 为可导函数, 求下列各函数的一阶导数:

(1) $y=f(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^{f(x)}$

(2) $y=f(f(f(x)))$

27. 构造一个函数, 它仅在点 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 处不可导.

第 三 章 微分中值定理及导数的应用

内容提要

- ❏ 微分中值定理
- ❏ L'Hospital 法则
- ❏ Taylor 公式
- ❏ 函数的性态

3.1 微分中值定理

第二章我们讨论了微分法, 解决了曲线的切线、法线及有关变化率问题. 这一章我们来讨论导数的应用问题.

我们知道, 当 $|\Delta x|$ 充分小时, $\Delta y/\Delta x \approx f'(x_0)$. 但这只是近似关系, 而 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$ 是极限关系, 都不便应用. 我们的任务是寻求差商与导数的直接关系, 既不是极限关系, 也不是近似关系. 对此, Lagrange 中值定理给出了圆满的解答:

$$\Delta y = f'(x_0+\theta\Delta x)\Delta x.$$

其中 θ 介于 x 与 x_0 之间. 这正是导数应用的基础.

本章我们先给出 Rolle 定理（它是 Lagrange 定理的特殊情况）, 由特殊过渡到一般来证明 Lagrange 定理和 Cauchy 定理, 有了 Cauchy 定理就可以给出 Taylor 中值定理及 L' Hospital 法则, 这就是本章理论部分的主要内容.

本章的导数应用部分就是以此为基础展开讨论的, 利用 Lagrange 定理给出了可导函数的单调性和凹凸性的判定法则, 可以讨论可导函数取得极值的条件; 有了 L'Hospital 法则, 就可以讨论未定式的极限; 此外利用中值定理和单调性还可证明一些不等式.

3.1.1 罗尔中值定理

引理 3.1. 费马 (Fermat) 引理

设 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义, 且 $\forall x\in U(x_0)$ 有 $f(x)\leqslant f(x_0)$ (或 $f(x)\geqslant f(x_0)$). 如果 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 则有 $f'(x_0)=0$.

证明 由于假设 $f'(x_0)$ 存在, 按定义, 也就是

$$f'_+(x_0)=f'_-(x_0)=f'(x_0)$$

另一方面, 由于 $f(x)\leqslant f(x_0)$, 所以对 $(x_0, x_0+\delta)$ 上的各点 x 有:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leqslant 0$$

而对 $(x_0-\delta, x_0)$ 上的各点 x 有:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geqslant 0$$

再由极限性质 (保号性) 得:

$$f'(x_0)=f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leqslant 0$$

$$f'(x_0)=f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geqslant 0$$

而 $f'(x_0)$ 是一个定数，因此它必须等于零，即 $f'(x_0)=0$. 对于 $f(x)\geqslant f(x_0)$ 的情形，也可相仿证明.

□

定理 3.1. 罗尔 (Rolle) 中值定理

如果函数 $f(x)$ 满足条件：

① 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，

② 在开区间 (a,b) 上可导，

③ 在端点处 $f(a)=f(b)$,

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f'(\xi)=0$.

证明 若 $f(x)$ 恒为常数，则 $f'(x)=0$ 在 (a,b) 上处处成立，这时定理的结论是明显的.

若 $f(x)$ 不恒为常数，由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，由闭区间连续函数的性质，$f(x)$ 必在 $[a,b]$上达到其最大值 M 和最小值 m. 由于 $f(x)$ 不恒为常数，所以此时必有 $M>m$, 且 M 和 m 中至少有一个不等于 $f(a)$ (即 $f(b)$). 这时根据闭区间上连续函数的性质，在 (a,b) 至少有一点 ξ, 使 $f(\xi)=M($ 或使 $f(\xi)=m)$, 于是对 (a,b) 内任一点 x, 必有

$$f(x)\leqslant f(\xi)(\text{ 或} f(x)\geqslant f(\xi))$$

于是由费尔马定理，即得

$$f'(\xi)=0$$

□

注

- 罗尔定理的几何解释：若连续曲线弧的两个端点的纵坐标相等，且除去两个端点外处处有不垂直于横轴的切线，在曲线弧 AB 上至少有一点处的切线是水平的.
- 罗尔定理的三个条件只是充分条件，而非必要条件. 但定理的条件又都是必须的，即为了保证结论成立，三个条件缺一不可.
- 罗尔定理的结论是在开区间内至少有一使导数等于 0 的点. 有的函数这样的点可能不止一个. 另外还要注意点 ξ 并未具体指出，即使对于给定的具体函数，点 ξ 也不一定能指出是哪一点，但根据定理，这样的点是存在的. 即便如此，我们将会看到，这丝毫不影响这一重要定理的应用.

例 3.1 证明方程 $x^5-5x+1=0$ 有且仅有一个小于 1 的正实根.

解 设 $f(x)=x^5-5x+1$, 则 $f(x)$ 在 [0,1] 连续，且 $f(0)=1,f(1)=-3$. 由介值定理 $\exists x_0\in(0,1)$, 使 $f(x_0)=0$. 即为方程的小于 1 的正实根. 设另有 $x_1\in(0,1),x_1\neq x_0$, 使 $f(x_1)=0$. $\because f(x)$ 在 x_0,x_1 之间满足罗尔定理的条件，$\therefore$ 至少存在一个 $\xi($ 在 x_0,x_1 之间), 使得但 $f'(x)=5\left(x^4-1\right)<0,(x\in(0,1))$ 矛盾，$\therefore$ 为唯一实根.

□

例 3.2 证明 $e^x - (ax^2+bx+c) = 0$ 至多有三个实根.

解 记$f(x) = e^x - (ax^2+bx+c)$. 直接证明有困难, 采用反证法. 设 $f(x) = 0$ 有四个实根 $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ 记 $f(x) = e^x - (ax^2+bx+c)$ 连续、可导, 对 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2],[x_2,x_3],[x_3,x_4]$ 用罗尔定理得

$$\exists x_1 < \xi_1 < x_2 < \xi_2 < x_3 < \xi_3 < x_4$$

使 $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = f'(\xi_3) = 0$, $f'(x) = e^x - 2ax - b$ 连续、可导, 对 $f'(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2],[\xi_2,\xi_3]$ 用罗尔定理得

$$\exists \xi_1 < \eta_1 < \xi_2 < \eta_2 < \xi_3$$

使 $f''(\eta_1) = f''(\eta_2) = 0$,$f''(x) = e^x - 2a$ 连续、可导, 对 $f''(x)$ 在 $[\eta_1,\eta_2]$ 用罗尔定理得

$$\exists \xi \in [\eta_1,\eta_2] \subset [x_1,x_4],\ 使f'''(x) = 0$$

但 $f'''(x) = e^x > 0$, 矛盾, 得证结论成立.

□

例 3.3 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内有二阶导数, 且 $f(a) = f(b) = 0$. 证明: $\forall c \in (a,b)$, $\exists \xi \in (a,b)$, 使得

$$f(c) = \tfrac{1}{2} f''(\xi)(c-a)(c-b).$$

解 分析: 若能找到一辅助函数 $L(x)$, 使得 $L(a) = L(c) = L(b)$, 且

$$L''(x) = f''(x)(c-a)(c-b) - 2f(c).$$

则由罗尔定理, 存在 $\xi_1 \in (a,c)$, $\xi_2 \in (c,b)$, 使得 $L'(\xi_1) = L'(\xi_2) = 0$. 再由罗尔定理, $\exists \xi \in (\xi_1,\xi_2)$, 使得 $L''(\xi) = 0$, 从而结论成立.

对 $L''(x)$ 积分, 逐步寻找 $L(x)$:

$$\begin{aligned}
& & L''(x) &= f''(x)(c-a)(c-b) - 2f(c) \\
&\Rightarrow & L'(x) &= f'(x)(c-a)(c-b) - 2f(c)x + k \\
&\Rightarrow & L(x) &= f(x)(c-a)(c-b) - f(c)x^2 + kx
\end{aligned}$$

其中 k 为任意常数. 利用条件 $L(a) = L(b)$ 可取 $k = f(c)(a+b)$. 因此

$$L(x) = f(x)(c-a)(c-b) - f(c)x^2 + f(c)(a+b)x$$

为所求. 或者也可令 $L(x)$ 减去 $L(c) = f(c)ab$ 得到似乎更"美"的

$$\tilde{L}(x) = f(x)(c-a)(c-b) - f(c)(x-a)(x-b).$$

□

注 以上辅助函数的构造并不唯一.

3.1.2 拉格朗日 (Lagrange) 中值定理

定理 3.2. 拉格朗日中值定理

如果函数 $f(x)$ 满足下列条件:

① 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,

② 在开区间 (a,b) 内可导,

则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$ 使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

证明 作辅助函数 $\varphi(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x$, 利用 *Rolle* 定理得证.

□

显然, 若取 $f(a)=f(b)$, 则从本定理的结论立即得到 *Rolle* 定理. 故 *Rolle* 定理是本定理之特例. 定理结论的表达式也称中值公式或拉格朗日公式, 它也经常用另一种形式表示. 由于 ξ 是 (a,b) 中的一个点, 故可表示成 $a+\theta(b-a)(0<\theta<1)$ 的形式, 于是定理的结论就可改写为在 (0,1) 中至少存在一个 θ 值, 使

$$f'(a+\theta(b-a))=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

或

$$f(b)-f(a)=f'(a+\theta(b-a))(b-a)$$

请读者注意, 如果定理的条件不全满足, 则其结论就不一定成立. 例如函数 $y=|x|$ 在 $[-1,1]$ 连续, 但在 $(-1,1)$ 不可导, 容易知道在 $(-1,1)$ 不存在这样的 ξ, 使 $f'(\xi)=0$. 然而不能认为, 如果定理的条件不全成立, 那么一定没有适合定理结论的点 ξ 存在. 事实上, 可以很容易地举出例子来说明, 即使定理的条件不全满足, 但结论仍然可以成立. 这就表明, 定理的条件是充分的, 但不是必要的. 从本定理我们可以得到下面三个重要的推论.

推论 3.1

若 $f(x)$ 在 (a,b) 内有 $f'(x)\equiv 0$, 则在 (a,b) 内 $f(x)$ 为一常数.

证明 对于 (a,b) 内任意两点 x_1 和 x_2, 设 $x_1<x_2$, 在 $[x_1,\ x_2\ ]$ 上应用拉格朗日定理有 $f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1), \xi\in(x_1,x_2)$ 注意到 $f'(\xi)=0$, 即得

$$f(x_2)=f(x_1)$$

而这个等式对 (a,b) 内任意两点成立, 这就证明了 $f(x)$ 在 (a,b) 为一常数.

□

推论 3.2

若两函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在 (a,b) 内成立

$$f'(x)=g'(x)$$

则在 (a,b) 内 $f(x)=g(x)+c$ (c 为一常数).

为了方便叙述下一个推论, 先引进下面的一个概念.

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义, 且存在常数 L, 使对 $[\ a,b]$ 上任意两点 x',x'' 成立

$$\left|f\left(x'\right)-f\left(x''\right)\right|\leqslant L\left|x'-x''\right|$$

则说 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足李普希兹 (Lipschitz) 条件.

推论 3.3

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在有界导数, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 满足李普希兹条件.

证明 有题意, 设 $\left|f'(x)\right|\leqslant L\quad(L$ 为一常数) 利用拉格朗日公式, 对 $[\ a,b\ ]$ 内任意两点 x' 及 x'' 有

$$\left|f\left(x'\right)-f\left(x''\right)\right|=\left|f'(\xi)\left(x'-x''\right)\right|\leqslant L\left|x'-x''\right|$$

这就是李普希兹条件.

□

注

- 拉格朗日中值定理的几何意义: 在光滑曲线弧 AB 上至少有一点处的切线是平行弧 AB.
- 拉氏公式精确地表达了函数在一个区间上的增量与函数在这区间内某点处的导数之间的关系. 设 $f(x)$ 在在 (a,b) 内可导, $x_0,x_0+\Delta x\in(a,b)$, 则有

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0+\theta\Delta x)\cdot\Delta x\quad(0<\theta<1)$$

  拉格朗日中值公式又称有限增量公式, 拉格朗日中值定理又称有限增量定理 (微分中值定理).

例 3.4 证明: $\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}(-1\leqslant x\leqslant 1)$.

证明 设 $f(x)=\arcsin x+\arccos x$, $x\in[-1,1]$, 有 $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\left(-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)=0$, 依据推论 3.1 知 $f(x)\equiv C,\quad x\in[-1,1]$. 而 $f(0)=\arcsin 0+\arccos 0=0+\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{2}$, 即有 $\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$.

□

例 3.5 证明: 当 $x>0$ 时, $\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$.

证明 设 $f(x)=\ln(1+x)$, $f(x)$ 在 $[0,\ x]$ 上满足拉氏定理的条件, 有 $f(x)-f(0)=f'(\xi)(x-0)\ (0<\xi<x)$, 又 $f(0)=0, f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$, 有 $\ln(1+x)=\dfrac{x}{1+\xi}$, 又 $0<\xi<x\Rightarrow 1<1+\xi<1+x\Rightarrow\dfrac{1}{1+x}<\dfrac{1}{1+\xi}<1$, 故 $\dfrac{x}{1+x}<\dfrac{x}{1+\xi}<x$, 即 $\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$.

□

例 3.6 设在 $[0,a]$ 上, $\left|f''(x)\right|\leqslant M$, 且 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 内取得最大值, 试证:

$$\left|f'(0)\right|+\left|f'(a)\right|\leqslant Ma.$$

证明 由于 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续, 在 $(0,a)$ 内可导且 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 内取得最大值由引理

3.1 知, $\exists c \in (0,a)$, 使 $f'(c)=0$. 对 $f'(x)$ 在 $[0,c],[c,a]$ 上分别使用 Lagrange 定理

$$\begin{aligned}&\Rightarrow f'(c)-f'(0)=f''(\xi_1)\cdot c \quad (0<\xi_1<c)\\&\Rightarrow f'(a)-f'(c)=f''(\xi_2)\cdot(a-c) \quad (c<\xi_2<a)\\&\Rightarrow |f'(0)|+|f'(a)|=|f''(\xi_1)|\cdot c+|f''(\xi_2)|(a-c)\\&\quad \leqslant M(c+a-c)=Ma.\end{aligned}$$

□

3.1.3 柯西中值定理

定理 3.3. 柯西 (Cauchy) 中值定理

如果函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足下列条件:

① 在闭区间 $[a,b]$ 上都连续,

② 在开区间 (a,b) 内都可导,

③ 在开区间 (a,b) 内 $g'(x)\neq 0$,

则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$ 使得 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

证明 首先可以肯定 $g(a)\neq g(b)$, 否则若 $g(a)=g(b)$, 那么由定理 3.1 知 $g'(x)$ 在 (a,b) 内存在零点, 此与假设矛盾. 作辅助函数

$$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g(x)$$

并运用定理 3.1, 本定理立即得证.

□

若取 $g(x)=x$, 则从本定理的结论立即得到拉格朗日定理. 故拉格朗日定理是本定理之特例, 故而 Cauchy 定理又称为广义微分中值定理.

注 柯西定理的几何意义: 在光滑曲线弧 AB 上至少有一点 $(F(\xi),f(\xi))$, 在该点处的切线平行于弦 AB.

例 3.7 设函数 $f(x)$ 在 [0,1] 上连续, 在 (0,1) 内可导, 证明: 至少存在一点 $\xi\in(0,1)$, 使 $f'(\xi)=2\xi[f(1)-f(0)]$.

证明 分析: 结论可变形为

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{f'(\xi)}{2\xi}=\frac{f'(x)}{(x^2)'}\bigg|_{x=\xi}.$$

设 $g(x)=x^2$, 则 $f(x),g(x)$ 在 [0,1] 上满足柯西中值定理的条件, 故在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ, 有

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{f'(\xi)}{2\xi},$$

即 $f'(\xi)=2\xi[f(1)-f(0)]$.

□

例 3.8 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有二阶导数, 且 $f(0)=f'(0)=0$, 试证

$$\frac{f(x)}{x^2}=\frac{f''(\theta x)}{2!}\ (0<\theta<1).$$

证明 不妨设 $x(>0)$ 为 $x=0$ 的某邻域内的任一点，由题设知 $f(x), g(x)=x^2$ 在 $[0,x]$ 上满足 Cauchy 定理的条件，由 Cauchy 公式得

$$\frac{f(x)}{x^2}=\frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)}=\frac{f'(\xi_1)}{2\xi_1},\ \xi_1\in(0,x).$$

再对函数 $f'(x), g'(x)=2x$ 在 $[0,\xi_1]$ 上应用 Cauchy 公式，有

$$\frac{f(x)}{x^2}=\frac{f'(\xi_1)-f'(0)}{g'(\xi_1)-g'(0)}=\frac{f''(\xi_2)}{2!},\ \xi_2\in(0,\xi_1).$$

由于 ξ_2 在 0 与 x 之间，可记 $\xi_2=\theta x\ (0<\theta<1)$，则

$$\Rightarrow\quad \frac{f(x)}{x^2}=\frac{f''(\theta x)}{2!}\ (0<\theta<1).$$

□

注 若 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有 n 阶导数，且 $f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0$，则依据本题结论，$\dfrac{f(x)}{x^n}=\dfrac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}$. 这就是下节内容 Taylor 公式的一个具体例子.

例 3.9 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$a\geqslant 0$. 证明: $\exists x_1,x_2,x_3\in(a,b)$，使

$$f'(x_1)=(b+a)\frac{f'(x_2)}{2x_2}=\left(b^2+ab+a^2\right)\frac{f'(x_3)}{3x_3}.$$

证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足 Lagrange 定理的条件，则

$$\exists x_1\in(a,b), 使 f(b)-f(a)=f'(x_1)(b-a).$$

又 $f(x), g_1(x)=x^2$ 在 $[a,b]$ 上满足 Cauchy 定理的条件，则

$$\exists x_2\in(a,b), 使 \frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(x_2)}{2x_2}.$$

又 $f(x), g_2(x)=x^3$ 在 $[a,b]$ 上满足 Cauchy 定理的条件，则

$$\exists x_3\in(a,b), 使 \frac{f(b)-f(a)}{b^3-a^3}=\frac{f'(x_3)}{3x_3^2}.$$

有

$$\begin{aligned}
f'(x_1)(b-a)\ &= \frac{f'(x_2)}{2x_2}(b+a)(b-a)\\
&= \frac{f'(x_3)}{3x_3^2}(b-a)\left(b^2+ab+a^2\right)\\
\Rightarrow f'(x_1)\ &= \frac{f'(x_2)}{2x_2}(b+a)=\frac{f'(x_3)}{3x_3^2}\left(b^2+ab+a^2\right)
\end{aligned}$$

□

注 这类所谓多中值问题的证明一般不作辅助函数，而是分别求出一个函数的 Lagrange 公式，另一个函数的 Cauchy 公式，利用 $f(b)-f(a)$ 或某种运算建立关系. 最后我们给出用 Rolle 定理证明中值等式的辅助函数的构造方法.

3.1.4 辅助函数 $F(x)$ 的构造

关于常见中值等式的辅助函数 F(x) 的构造方法, 这里主要考虑 *Rolle* 定理一个中值的问题. 在下面总结出了一些常见辅助函数的取法.

$G(\xi)=0$	$F(x)\ (F'(\xi)=G(\xi))$
$f'(\xi)+A\xi^k+B=0(A,B$ 为常数$)$	$f(x)+\dfrac{Ax^{k+1}}{k+1}+Bx$
$f(a)g'(\xi)-f'(\xi)g(a)-k=0$	$f(a)g(x)-f(x)g(a)-kx$
$\sum\limits_{i=0}^{n-1}a_i(n-i)\xi^{n-1-i}=0$	$\sum\limits_{i=0}^{n-1}a_ix^{n-i}$
$f'(\xi)g(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$	$f(x)g(x)$
$f(\xi)g''(\xi)-f''(\xi)g(\xi)=0$	$f(x)g'(x)-f'(x)g(x)$
$\xi f'(\xi)+kf(\xi)=0$	$x^kf(x)$
$(\xi-1)f'(\xi)+kf(\xi)=0$	$(x-1)^kf(x)$
$f'(\xi)g(1-\xi)-kf(\xi)g'(1-\xi)=0$	$g^k(1-x)f(x)$
$f'(\xi)+\lambda f(\xi)=0$	$e^{\lambda x}f(x)$
$f'(\xi)+g'(\xi)f(\xi)=0$	$\mathrm{e}^{g(x)}f(x)$
$\xi f'(\xi)-kf(\xi)=0$	$f(x)/x^k$
$f'(\xi)-kf(\xi)=0$	$f(x)/\mathrm{e}^{kx}$
$f'(\xi)g(\xi)-f(\xi)g'(\xi)=0$	$\dfrac{f(x)}{g(x)}$
$(1-\xi^2)/(1+\xi^2)^2=0$	$x/(1+x^2)$

注 假设要证 $G(\xi)=0$, 要使得 $F'(x)=G(x)$, 这样当 F 满足 Rolle 定理条件, 便有 $F'(\xi)=G(\xi)=0$. 注意灵活变形, 比如要证 $\xi f''(\xi)+2f'(\xi)=0,\xi\in(0,c)$, 则取 $k=-2$, **构造** $F(x)=x^2f'(x)$. 显然已经有 $F(0)=0$, 只要找到一点 $a\in(0,c)$, 使得$f'(a)=0$, 有 $F(a)=0=F(0)$, 由 Rolle 定理结论便得证.

3.2 泰勒公式

现在我们考虑的问题是能不能用一个简单的函数来近似表示一个比较复杂的函数. 如果能, 那么不论在近似计算或理论分析中, 这将会带来很大的方便, 一般说来, 最简单的是多项式函数, 因为多项式只是关于变量进行加、减、乘的运算, 但是怎样从一个函数本身得出我们所需要的多项式呢?

这里要特别指出, *Taylor* 公式是 *Lagrange* 中值定理的进一步推广, 毫不夸张地说, 它是一元函数微分学的顶峰. 掌握了 *Taylor* 公式之后, 再回过头来看一看微分中值定理, 将有一种 "会当凌绝顶, 一览众山小" 的意境.

假设 $f'(x_0)$ 存在, 我们已经知道当 $x \to x_0$ 时有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \mathrm{o}(x - x_0)$$

是否存在二次多项式 $g(x)$ 使得当 $x \to x_0$ 时有

$$f(x) \stackrel{?}{=} g(x) + \mathrm{o}\big((x - x_0)^2\big)$$

令 $g(x) = A + B(x - x_0) + C(x - x_0)^2$, 则有

$$A = f(x_0), \qquad B = f'(x_0), \qquad C = \frac{1}{2} f''(x_0).$$

$$f(x) = A + B(x - x_0) + C(x - x_0)^2 + \mathrm{o}\big((x - x_0)^2\big)$$

令 $x \to x_0$, 得到 $A = f(x_0)$, 从而

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = B + C(x - x_0) + \mathrm{o}(x - x_0).$$

再令 $x \to x_0$, 得到 $B = f'(x_0)$. 因此

$$\begin{aligned} C &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{(x - x_0)^2} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{2(x - x_0)} \qquad \boxed{\text{洛必达法则}} \\ &= \frac{1}{2} f''(x_0) \qquad \boxed{\text{导数的定义}} \end{aligned}$$

更一般地, 我们有下列重要定理 (统称泰勒定理).

定理 3.4. 惟一性定理

设

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) \\ &= \sum_{k=0}^{n} b_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n), \quad x \to x_0 \end{aligned}$$

则 $a_k = b_k, k = 0, 1, \cdots, n$.

定理 3.5. 带佩亚诺余项的泰勒公式

设 $f(x)$ 在 x_0 点存在 n 阶导数, 则有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$$

$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\mathrm{o}\left((x-x_0)^n\right)$$

证明 略.

□

定理 3.6. 带拉格朗日余项的泰勒公式

设 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内存在 $n+1$ 阶导数, 则 $\forall x\in U(x_0)$ 有

$$\begin{aligned}f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2\\+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x),\end{aligned}$$

其中余项 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, ξ 介于 x_0 和 x 之间.

证明 由假设, 误差 $R_n(x)$ 在 (a,b) 内具有直到 $(n+1)$ 阶导数, 显然 $R_n^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x)$, 且

$$R_n(x_0)=R_n'(x_0)=R_n''(x_0)=\cdots=R_n^{(n)}(x_0)=0$$

两函数 $R_n(x)$ 及 $(x-x_0)^{n+1}$ 在以 x_0 及 x 为端点的区间上满足柯西中值定理的条件, 得

$$\begin{aligned}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}&=\frac{R_n(x)-R_n(x_0)}{(x-x_0)^{n+1}-0}\\&=\frac{R_n'(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n}\quad(\xi在x_0与x之间)\end{aligned}$$

两函数 $R_n'(x)$ 及 $(n+1)(x-x_0)^n$ 在以 x_0 及 ξ_1 为端点的区间上满足柯西中值定理的条件, 得

$$\begin{aligned}\frac{R_n'(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n}&=\frac{R_n'(\xi_1)-R_n'(x_0)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n-0}\\&=\frac{R_n''(\xi_2)}{n(n+1)(\xi_2-x_0)^{n-1}}\quad(\xi_2\ 在x_0与\xi_1之间)\end{aligned}$$

如此下去, 经过 $(n+1)$ 次后, 得

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}=\frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

其中 ξ 在 x_0 与 ξ_n 之间, 也在 x_0 与 x 之间.

□

定理 3.7. 带 Cauchy 型余项的 Taylor 公式

设 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内存在 $n+1$ 阶导数, 则 $\forall x\in U(x_0)$ 有

$$\begin{aligned}f(x)&=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0)\\&=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1},\end{aligned}$$

其中 $\xi\in(x_0,x)($ 或 $\xi\in(x,x_0)),\theta\in(0,1)$.

当 $x_0=0$ 时, 泰勒公式 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x)$ 称为 n 阶 麦克劳林公式, 其中 $R_n(x)=\mathrm{o}(x^n)$ 称为 佩亚诺余项, 或者 $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$ 称为拉格朗日余项(ξ 介于 0 和 x 之间), 令 $\xi=\theta x$, 则 $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$, $0<\theta<1$.

例 3.10 求函数 $(1+x)^\alpha(\forall\alpha\in\mathbb{R})$ 关于 $x=0$ 的泰勒公式.

解 这里把 $x=0$ 依次代入上列各式, 有

$$f(0)=1, f'(0)=\alpha, f''(0)=\alpha(\alpha-1),\cdots$$
$$f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1),\cdots$$

于是得到二项式 $(1+x)^\alpha$ 关于 $x=0$ 的泰勒公式

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha=&1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots\\&+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)\end{aligned}$$

特别当 $\alpha=n$(正整数) 时, 有

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\cdots+nx^{n-1}+x^n$$

□

推论 3.4. 初等函数的麦克劳林公式

(1) $\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+R_n(x)$

(2) $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+R_{2n}(x)$

(3) $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+R_{2n+1}(x)$

(4) $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+R_n(x)$

(5) $(1+x)^\alpha=1+C_\alpha^1x+C_\alpha^2x^2+C_\alpha^3x^3+\cdots+C_\alpha^nx^n+R_n(x)$

(6) $\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}+R_{2n+2}(x)$

以上 $R_n(x)=o(x^n)$.

推论 3.5. 常见初等函数的麦克劳林公式 (带 Lagrange 余项)

(1) $\mathrm{e}^r=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\frac{\mathrm{e}^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}$

(2) $\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1}+(-1)^n\frac{\sin\left(\xi+\frac{\pi}{2}\right)}{(2n+1)!}x^{2n+1}$

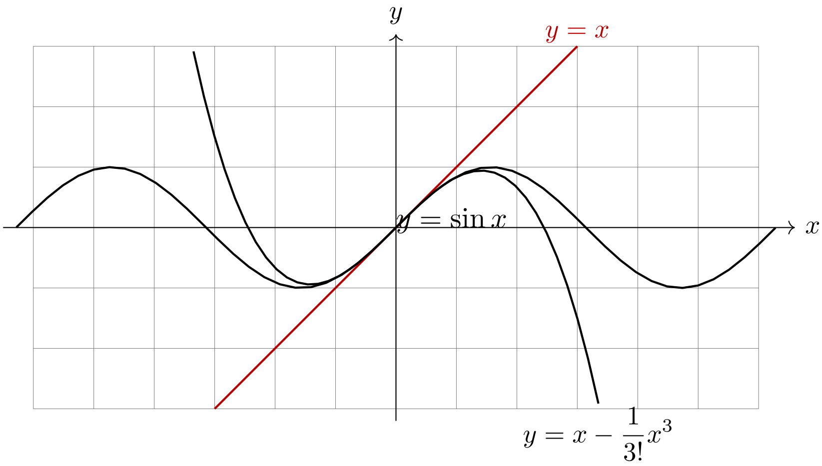
(3) $\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n)!}x^{2n}+(-1)^{n+1}\frac{\cos\xi}{(2n+2)!}x^{2n+2}$

(4) $\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n+(-1)^n\frac{1}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}x^{n+1}$

(5) $(1+x)^\alpha=1+ax+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\frac{a(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\xi)^{\alpha-1}x^{n+1}$

例 3.11 正弦函数的近似：

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\frac{1}{9!}x^9+\cdots$$



例 3.12 证明常数 e 是无理数.

证明 用反证法. 假设 $\mathrm{e}=\frac{m}{n}$ 为有理数，其中 $n\geqslant 2$. 在 e^x 的麦克劳林公式中令 $x=1$，得到 $(0<\theta<1)$

$$\frac{m}{n}=\mathrm{e}=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{\mathrm{e}^\theta}{(n+1)!}$$

两边同时乘以 $n!$ 得到

$$\frac{m\cdot n!}{n}=n!+n!+\frac{n!}{2!}+\frac{n!}{3!}+\cdots+\frac{n!}{n!}+\frac{\mathrm{e}^\theta}{n+1}$$

由于 $0<\mathrm{e}^\theta<3$，所以最后一项为分数，但是其他各项都为整数，矛盾.

□

例 3.13 求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$$

解 利用泰勒公式,

$$
\begin{aligned}
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \\
\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} &= 1 + \left(-\frac{x^2}{2}\right) + \frac{1}{2!}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2 + o(x^4) \\
\cos x - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} &= -\frac{1}{12}x^4 + o(x^4)
\end{aligned}
$$

所以

$$
\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{12}x^4 + o(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{12}
$$

□

例 3.14 确定常数 a, b, 使

$$
\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2+4x-1} - ax - b\right) = 0
$$

解

$$
\begin{aligned}
\sqrt{2x^2+4x-1} &= \sqrt{2}x\sqrt{1+\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{2x^2}\right)} \\
&= \sqrt{2}x + \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{4x} + \varepsilon \quad \left(\lim_{x\to+\infty}\varepsilon = 0\right)
\end{aligned}
$$

所以

$$
\sqrt{2x^2+4x-1} - ax - b = (\sqrt{2}-a)x + (\sqrt{2}-b) - \frac{\sqrt{2}}{4x} + \varepsilon
$$

由此可知, 欲使必须

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2+4x-1} - ax - b\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty}\left[(\sqrt{2}-a)x + (\sqrt{2}-b) - \frac{\sqrt{2}}{4x} + \varepsilon\right] = 0 \\
&a = \sqrt{2}, b = \sqrt{2}
\end{aligned}
$$

这个极限式说明当 $x\to+\infty$ 时, 曲线 $y = \sqrt{2x^2+4x-1}$ 以直线 $y = \sqrt{2}x + \sqrt{2}$ 为渐近线.

□

例 3.15 证明: 当 $x > 0$ 时, 有 $\ln(1+x) > x - \dfrac{x^2}{2}$.

证明 利用 $\ln(1+x)$ 的 2 阶麦克劳林公式得证.

□

✍ 习题 3.2

1. 设函数 f 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $f(a)=f(b)=0$. 证明 : $\exists\xi\in(a,b), s.t.$

$$f(\xi)+f'(\xi)=0$$

2. 设 f 与 g 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导. 且 $f(a)=f(b)=0$. 证明 : $\exists\xi\in(a,b)$, $s.t.$

$$f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$$

3. 设 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 连续, 在 (0,1) 内可导 , $f(0)=\mathrm{C}$, 且 $\forall x\in(0,1)$ 都有 $f(x)\neq 0$. 证明 : $\exists\xi\in(0,1), s.t.$

$$\frac{nf'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$$

其中, n 为自然数.(提示: 令 $F(x)=(f(x))^n f(1-x)$)

4. 求证: 当 $0<x_1<x_2<\dfrac{\pi}{2}$ 时有 $\dfrac{\tan x_2}{\tan x_1}>\dfrac{x_2}{x_1}$.

5. 利用泰勒公式求下列极限:

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+3x}+\sqrt{4-3x}-4}{x^2}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}+\frac{1}{12}x^4}{x^6}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}\right)$

(8) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(\sin x)}{2\ln(1+x^2)}$

6. 试分别确定 α, β, 使

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[4]{16x^4-8x^3+10x-7}-\alpha x-\beta\right)=0$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[4]{16x^4-8x^3+10x-7}-\alpha x-\beta\right)=0$

3.3 导数的应用

3.3.1 洛必达法则

1. "$\dfrac{0}{0}$" 型的洛必达法则

定理 3.8. 洛必达法则 1

设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可微 ,$g'(x) \neq 0(a < x < b)$, 且 $f(a^+) = 0 = g(a^+)$. 若存在极限 $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, 则当 $x \to a+$ 时 , $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 的极限存在, 且有

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(类似地, 对 $x \to b^-$ 也有相应结论) .

注

- 当 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x = a$ 处无定义时, 只要有 $f(a^+) = 0 = g(a^+)$, 则结论仍然成立. 实际上, 只需补充 $f(a) = 0, g(a) = 0$, 则 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上就连续了.
- 若有 $f'(a^+) = 0, g'(a^+) = 0$, 而 $f'(x)$ 与 $g'(x)$ 还在 (a,b) 上可微, 则在下式右端极限存在时, 仍有
$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} \left(= \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \right) = \lim_{x \to a^+} \frac{f''(x)}{g''(x)}$$
- 若定理中相应的条件改为 $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty($ 或 $-\infty)$, 则也有结论
$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty(\text{ 或 } -\infty)$$
- 设 $f(x) = x^{3/2} \sin \dfrac{1}{x}, g(x) = x$, 则 $f(x) \to 0, g(x) \to 0(x \to 0)$, 且有 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, 但不存在 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. 又存在 $\lim\limits_{x \to 0} x^3 \sin(1/x)/\sin^2 x$, 但不能用 $L'Hospital$ 法则. 再有 $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x + \sin 2x + 1)/[(2x + \sin 2x)\ (\sin x + 4)^2] = 0$, 也不能用 $L'Hospital$ 法则. 因为求导后, 分母中 $\cos x$ 在 $2n\pi + \pi/2(n \in \mathbb{N})$ 上取零值.

推论 3.6

设 $f(x)$ 在 (a, ∞) 上可微, 且有 $f(x) \to 0, g(x) \to 0(x \to +\infty)$. 若存在极限 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, 则

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

例 3.16 求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - x\cos x}{x - \sin x}$.

解 它是 “$\dfrac{0}{0}$” 待定型，于是

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{x-x\cos x}{x-\sin x} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+x\sin x}{1-\cos x}\left(\text{仍为}\frac{0}{0}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x+\sin x+x\cos x}{\sin x}\\
&= \lim_{x\to 0}\left(2+\frac{x\cos x}{\sin x}\right)\\
&= 2+\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\lim_{x\to 0}\cos x = 2+1=3
\end{aligned}
$$

□

例 3.17 求极限 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)}{\frac{1}{x}}$.

解 它是 “$\dfrac{0}{0}$” 待定型，于是

$$
\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{x^2+1}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=1
$$

□

2. “$\dfrac{\infty}{\infty}$” 型的洛必达法则

定理 3.9. 洛必达法则 2

设 $f(x),g(x)$ 在 (a,b) 上可微，且 $g'(x)\neq 0, a<x<b$，且有 $\displaystyle\lim_{x\to a^+}g(x)=\pm\infty$. 若存在极限

$$
\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A
$$

则

$$
\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A.
$$

对 $x\to b^-$ 以及 $x\to\infty$ 的情形，也有类似结果.

例 3.18 求 $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\sin mx}{\ln\sin nx}\ (m,n>0)$.

解 由 $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\ln\sin mx=\lim_{x\to 0^+}\ln\sin nx=-\infty$，所以上述极限是 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 待定型，

$$
\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\sin mx}{\ln\sin nx}=\lim_{x\to 0^+}\frac{m}{n}\cdot\frac{\cos mx\sin nx}{\cos nx\sin mx}=\frac{m}{n}\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin nx}{mx}=1
$$

□

例 3.19 求 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{\mathrm{e}^x}$($\alpha$ 为任意正实数).

解

$$
\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{\mathrm{e}^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)x^{\alpha-k}}{\mathrm{e}^x}
$$

若 α 为整数，则求导 α 次后，即变成

$$
\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-\alpha+1)}{\mathrm{e}^x}=0
$$

若 α 不是整数, 则必存在 k, 使 $\alpha-k<0$, 于是求导 k 次后得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{x^{k-\alpha}\mathrm{e}^x}=0$$

总之, 不论 α 是否为整数, 总有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^\alpha}{\mathrm{e}^x}=0$.

□

3. 其他的不定型

形如 "$0\cdot\infty$", "0^0", "∞^0", "1^∞", "$\infty-\infty$" 求解的方法是将它们都化归为前述两种情形.

- 当 $x\to x_0$ 时, $f(x)\to0, g(x)\to\infty$, 则 $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]$ 属于 "$0\cdot\infty$" 型. 此时, 作形式转换
$$f(x)g(x)=\frac{f(x)}{1/g(x)}=\frac{g(x)}{1/f(x)}$$
就可化为 "$\dfrac{0}{0}$" 或 "$\dfrac{\infty}{\infty}$" 型.
- 当 $x\to x_0$ 时, $f(x)\to\infty, g(x)\to\infty$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]$ 属于 "$\infty-\infty$" 型. 此时, 作形式转换
$$f(x)-g(x)=\left[\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}\right]\Big/\frac{1}{f(x)g(x)}$$
就可化为 "$\dfrac{0}{0}$" 型.
- 对于 "1^∞" 型, "0^0" 型和 "∞^0" 型的未定式, 我们可以将它们变换为 "$0\cdot\infty$" 型未定式, 进而化为 "$\dfrac{0}{0}$" 型或 "$\dfrac{\infty}{\infty}$" 型, 然后使用洛必达法则. 它们的变换原则都是基于以下对数恒等式求极限的技巧:
$$\lim u(x)^{v(x)}=\lim\mathrm{e}^{v(x)\ln u(x)}=\mathrm{e}^{\lim v(x)\ln u(x)}.$$

例 3.20 求 $\lim\limits_{x\to0^+}x^\alpha\ln x(\alpha>0)$.

解 当 $x\to0^+$ 时 ,$x^\alpha\to0,\ln x\to-\infty$, 所以它是 "$0\cdot\infty$" 的待定型. 我们将 $x^\alpha\ln x$ 改写为 $\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x^\alpha}}$, 它就是 "$\dfrac{\infty}{\infty}$" 型了. 于是

$$\lim_{x\to0^+}x^\alpha\ln x=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^\alpha}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{-\alpha x^{-\alpha}}=0$$

□

例 3.21 求 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$, 它是 "$\infty-\infty$" 型.

解

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)&=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}\left(\text{是}\frac{0}{0}\text{型}\right)\\&=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{2\cos x-x\sin x}=0\end{aligned}$$

□

例 3.22 求 $\lim\limits_{x\to0^+} x^x$, 它为 "$0^0$" 型.

解

$$\begin{aligned} \text{由于} \qquad & x^x = e^{x\ln x} \\ \text{所以} \qquad & \lim_{x\to0^+} x^x = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0^+} x\ln x} \\ \text{而} \qquad & \lim_{x\to0^+} x\ln x = \lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = 0 \\ \text{得} \qquad & \lim_{x\to0^+} x^x = \mathrm{e}^0 = 1 \end{aligned}$$

□

例 3.23 求 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$, 它是 "$1^\infty$" 型.

解 设

$$A = \lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

于是

$$\ln A = \lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to0}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x^2}$$

就化为 "$\dfrac{0}{0}$" 型了, 且

$$\begin{aligned} \lim_{x\to0}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x^2} &= \lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}\left[\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}\right] \\ &= \lim_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^2\sin x} \\ &= \lim_{x\to0}\frac{-\sin x}{2(2\sin x+x\cos x)} \\ &= \lim_{x\to0}\frac{-\cos x}{2(3\cos x-x\sin x)} = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

即 $\ln A = -\dfrac{1}{6}$, $A = \mathrm{e}^{-\frac{1}{6}}$.

□

例 3.24 求 $A = \lim\limits_{x\to+0}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$, 它是 "$\infty^0$" 型.

解

$$\ln A = \lim_{x\to0^+}\frac{\ln\cot x}{\ln x} = \lim_{x\to0^+}\frac{-\frac{1}{\cot x\sin^2 x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to0^+}\frac{x}{\cos x\sin x} = -1, A = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

□

注

- 洛必达法则只能对 "$\dfrac{0}{0}$" 或 "$\dfrac{\infty}{\infty}$" 型才可直接使用, 其他待定型必须先化成这两种类型之一, 然后再应用洛必达法则.
- 洛必达法则只说明当 $\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 等于 A (有限值或为无穷) 时, 那么 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 也存在且就是 A. 也就是说在遇到 $\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在的时候, 并不能断定 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 也不存在, 只是在这时不能利用洛必达法则, 而须用其他方法讨论 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

例 3.25 说明以下例子中洛必达法则失效.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$ (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$

解 (1) 这时若对分子分母分别求导, 成为求

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1}=\lim_{x\to\infty}(1+\cos x)$$

右边极限是不存在的, 洛必达法则失效. 但事实上可以求得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x}\sin x)=1.$$

(2) 洛必达法则失效. 但事实上可以求得 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}=1.$

□

3.3.2 函数的单调性、凹凸性与最值

Lagrange 中值公式把函数值的差与其导数值联结成一个 “精确的” 等式, 这就为我们用导数的知识研究函数的性态提供了极大的方便.

1. 函数的单调性与函数导数的关系

定理 3.10. 函数的单调性与函数导数的关系

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$, (a,b) 上可导.

① 若在 (a,b) 上有 $f'(x)\geqslant 0(>0)$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是递增 (严格递增) 的.

② 若在 (a,b) 上有 $f'(x)\leqslant 0(<0)$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是递减 (严格递减) 的.

上述定理对于无穷区间如 $[a,\infty)$, 也有同样的结论. 定理结果常用符号简示为:

$$f(x)\text{ 在}[a,b]\nearrow\Leftrightarrow f'(x)\geqslant 0$$

或

$$f(x)\text{ 在}[a,b]\searrow\Leftrightarrow f'(x)\leqslant 0$$

证明 我们就单调上升的情形给出证明. 先证必要性: 即证

$$f(x)\nearrow\Rightarrow f'(x)\geqslant 0$$

因 $f(x)$ 在 (a,b) 可导, 故对 (a,b) 内任一点 x_0, 有

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

又因 $f(x)\nearrow$, 所以不论 $x>x_0$ 还是 $x<x_0$, 总有

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geqslant 0$$

于是按极限性质, 便得到

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geqslant 0$$

再证充分性, 即证

$$f(x)\nearrow\Leftarrow f'(x)\geqslant 0$$

设 x_1,x_2 为 $[a,b]$ 内任意两点，不妨设 $x_1<x_2$，由中值定理，有

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)\quad (x_1<\xi<x_2)$$

因为假设 $f'(x)\geqslant 0$，且 $x_2-x_1>0$，于是由上式得知，必有 $f(x_2)-f(x_1)\geqslant 0$ 即 $f(x_2)\geqslant f(x_1),(x_2>x_1)$，这就是说 $f(x)$ 是单调递增的.

□

从充分性的证明中容易看出，可有以下推论：

推论 3.7

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 可导，且 $f'(x)$ 不变号，那么

① 如 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 严格单调上升；

② 如 $f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 严格单调下降.

例 3.26 讨论 $y=3x-x^3$ 的上升与下降情况.

解 此时 $y'=3-3x^2=3\left(1-x^2\right)=3(1+x)(1-x)$. 于是 $-1<x<1$ 时，$y'>0$，从而函数是严格上升的；在 $x<-1,x>1$ 时，$y'<0$，从而函数是严格下降的.

通常，我们常列表如下：（表中 $\nearrow$ 表示上升，$\searrow$ 表示下降）

x	$(-\infty,-1)$	(-1,1)	$(1,+\infty)$
y'	$-$	$+$	$-$
y	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

□

我们还可以利用函数的升降性与它的导数之间的关系来证明不等式和判定方程根的个数.

例 3.27 证明 $x>0$ 时 $\sin x>x-\dfrac{x^3}{3!}$.

证明 即须证明 $\sin x-x+\dfrac{x^3}{3!}>0(x>0)$，为此，我们考虑函数

$$f(x)=\sin x-x+\frac{x^3}{3!}$$

此时

$$f'(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2},$$

$f''(x)=-\sin x+x$. 但已知道，当 $x>0$ 时 $\sin x<x$，亦即在 $(0,+\infty)$ 内 $f''(x)>0$，因此 $f'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上升，而 $f'(0)=0$，所以在 $(0,+\infty)$ 内有

$$f'(x)>f'(0)=0,$$

这就是说，$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内上升，因而当 $x>0$ 时

$$f(x)=\sin x-x+\frac{x^3}{3!}>f(0)=0$$

□

例 3.28 证明方程 $x-\dfrac{1}{2}\sin x=0$ 只有一个根 $x=0$.

证明 作函数 $y = x - \frac{1}{2}\sin x$ 求导数, 得 $y' = 1 - \frac{1}{2}\cos x > 0.(-\infty < x < +\infty)$ 因而函数 $x - \frac{1}{2}\sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 为严格上升, 于是就不可能有两个零点, 即最多只有一个零点, 而 $x = 0$ 满足方程是明显的, 这就证明了方程 $x - \frac{1}{2}\sin x = 0$ 有唯一的根 $x = 0$.

□

2. 函数的极大值与极小值

定义 3.1. 极值

假定 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是连续的.

① 若对于一点 x_0, 存在 x_0 的某一邻域 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta), (\delta > 0)$, 使对于此邻域中的任意点 x, 都有 $f(x) \leqslant f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在 x_0 有一极大值 $f(x_0), x_0$ 称为极大点.

② 如果在 x_0 的某一邻域总有 $f(x) \geqslant f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在 x_0 有一极小值 $f(x_0), x_0$ 称为极小点, 极大值与极小值统称为极值. 极大点与极小点统称为极值点.

注 由定义可知, 函数的极值只是在一点的近旁这样一个小范围内的最大值或最小值, 是局部性的, 所以这样的极值也叫局部极值. 一个定义在 a, b 上的函数可以有许多个极大值或极小值, 且其中的极大值不一定都大于每一个极小值.

首先来看一下, 如果 x_0 是 $f(x)$ 的极值点, x_0 将满足什么条件?

- 若 $f(x)$ 在 x_0 可导, 那么由费尔马定理易知必有 $f'(x_0) = 0$. 这是因为 x_0 是极值点, 因而总存在 x_0 的一个邻域, 使在此邻域中总有 $f(x) \geqslant f(x_0)$(或 $f(x) \leqslant f(x_0)$), 也就是适合费尔马定理的条件, 因而必有 $f'(x_0) = 0$.
- 若 $f(x)$ 在 x_0 不可导, 这时 x_0 也可能是极值点. 例如 $y = |x|$, 它在 $x = 0$ 不可导, 但是显然 $x = 0$ 是其极小点.

定理 3.11. 极值的必要条件

(极值的必要条件) 若 x_0 是 $f(x)$ 的极值点, 那么 x_0 只可能是 $f'(x)$ 的零点或 $f(x)$ 的不可导点.

既然定理 3.11 给出的只是极值点的必要条件, 那么根据定理3.11 求出可能使 $f(x)$ 达到极值的点之后, 就必须进一步加以判定, 这些点究竟是不是极值点. 下面, 我们给出极值点的两个充分性判别法.

定理 3.12. 极值的第一充分条件

设 $f(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 和 $(x_0, x_0 + \delta)$(其中 $\delta > 0$) 可导, 那么

① 若在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 内 $f'(x) < 0$, 而在 $(x_0, x_0 + \delta)$ 内 $f'(x) > 0$, 则 x_0 为极小点;

② 若在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 内 $f'(x) > 0$, 而在 $(x_0, x_0 + \delta)$ 内 $f'(x) < 0$, 则 x_0 为极大点;

③ 若 $f'(x)$ 在这两个区间内不变号, 则 x_0 不是极值点.

证明 (1) 按照判断函数升降的定理可知, 此时 $f(x)$ 在 $(x_0-\ \delta, x_0)$ 内严格下降, 而在 $(x_0, x_0+\delta)$ 内严格上升, 故 $f(x_0)$ 必为极小值.

(2) 同理可证.

(3) 此时 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 内严格单调, 从而 x_0 不可能是极值点.

□

如果 $f'(x_0)=0$ 而 $f''(x_0)\neq 0$, 那么我们也可以用 $f''(x_0)$ 的符号来判断 $f(x_0)$ 是否为极值, 以代替上述 (1)、(2) 的讨论, 这就是下面的定理.

定理 3.13. 极值的第二充分条件

设 $f'(x_0)=0$.

① 若 $f''(x_0)<0$, 则 $f(x_0)$ 是极大值;

② 若 $f''(x_0)>0$, 则 $f(x_0)$ 是极小值.

证明 (1) 按二阶导数的定义, 且注意到 $f'(x_0)=0$, 有

$$f''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{x-x_0}<0$$

于是, 由极限性质知道, 在 x_0 附近有

$$\frac{f'(x)}{x-x_0}<0$$

就是, 存在 $\delta>0$, 当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时 $f'(x)>0$, 当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时 $f'(x)<0$, 于是由定理 3.12 即知 x_0 是极大点.

(2) 同理可证.

□

例 3.29 讨论 $y=(x-1)\sqrt[3]{x^2}$ 的极值.

解 我们有

$$y'=x^{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}(x-1)x^{-\frac{1}{3}}=\frac{5x-2}{3x^{\frac{1}{3}}}$$

当 $x=\dfrac{2}{5}$ 时, $y'=0; x=0$ 时 y' 不存在, 所以函数只可能在这两点有极值. 现列表讨论如下.

x	$(-\infty,0)$	0	$\left(0,\dfrac{2}{5}\right)$	$\dfrac{2}{5}$	$\left(\dfrac{2}{5},+\infty\right)$
y'	$+$	不存在	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	极大值 0	$\searrow$	极小值 $-\dfrac{3}{5}\dfrac{\sqrt[3]{4}}{25}$	$\uparrow$

对于 $x=\dfrac{2}{5}$ 这一点, 我们可以有定理??来判定极值类型.

$y''=\dfrac{10x+2}{9x^{\frac{4}{3}}}$, 当 $x=\dfrac{2}{5}$ 时, $y''=\dfrac{5}{3}\sqrt[3]{\dfrac{5}{2}}>0$, 于是即可判定 $f(x)$ 在 $x=\dfrac{2}{5}$ 时有极小值.

□

3. 函数最值的求解步骤

根据上面的讨论, 进一步, 我们把可导函数在区间 $[a,b]$ 上的最大值和最小值的求法可归结于下:

① 解方程 $f'(x)=0$, 如果它的根 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是有限个, 算出 $f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n)$;

② 算出区间 $[\ a,\ b\ ]$ 的两端点的函数值 $f(a),f(b)$;

③ 比较 $f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n),f(a),f(b)$ 的大小, 其中最大的一个是最大值, 最小的一个是最小值.

在实际问题中, 如果在 (a,b) 的内部 $f'(x)=0$ 的根只有一个 x_1, 而且从实际问题本身又可以知道在 (a,b) 内必定有最大值或最小值, 那么, $f(x_1)$ 就是所要求的最大值或最小值, 不需要再算出 $f(a)$ 和 $f(b)$.

例 3.30 求 $f(x)=(x-1)\sqrt[3]{x^2}$ 在 $\left[-1,\dfrac{1}{2}\right]$ 上的最大值及最小值.

解 由例 3.29 已知 $f(x)$ 在 $\left(-1,\dfrac{1}{2}\right)$ 中有极大值 0, 极小值 $-\dfrac{3}{5}\sqrt[3]{\dfrac{4}{25}}$, 因为它在区间的端点有

$$f(-1)=-2, f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{8}\sqrt[3]{2}.$$

所以函数的最大值是 0, 最小值是 -2.

□

4. 函数曲线的凹凸性

定义 3.2. 凹凸性

设 $f(x)$ 在 $[a,b\ ]$ 上连续, 对 $[\ a,\ b\ ]$ 中任意两点 x_1 , x_2,

① 若恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\geqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是凸的.

② 若恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是凹的.

当定义中等号恒不成立时, 我们称此函数在 $[a,b]$ 上是严格凸的 (或严格凹的).

进一步分析, 函数的凸或凹和它的导数之间有以下联系.

定理 3.14. 凹凸性的充要条件

设 $f(x)$ 在 (a,b) 内存在二阶导数 $f''(x)$, 那么

① 若在 (a,b) 内 $f''(x)<0$, 则 $f(x)$ 在 (a,b) 为凸;

② 若在 (a,b) 内 $f''(x)>0$, 则 $f(x)$ 在 (a,b) 为凹;

证明 现证 $f''(x)<0$ 的情形. 设 x_1 和 x_2 为 (a,b) 内任意两点, 且 $x_1<x_2$, 记 $x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}$, 并改记 x_1 为 x_0-h, x_2 为 x_0+h, 利用拉格朗日公式, 得到

$$\begin{aligned}&f(x_0+h)-f(x_0)+f(x_0-h)-f(x_0)\\&=\left[f'(x_0+\theta_1 h)-f'(x_0-\theta_2 h)\right]h\end{aligned}$$

再利用拉格朗日公式, 得

$$\left[f'(x_0+\theta_1 h)-f'(x_0-\theta_2 h)\right]h=f''(\xi)(\theta_1+\theta_2)h^2$$

其中 $0<\theta_1<1, 0<\theta_2<1, x_0-\theta_2 h<\xi<x_0+\theta_1 h$, 由于 $f''(\xi)<0$, 故有 $f(x_0+h)-f(x_0)+f(x_0-h)-f(x_0)<0$, 也就是 $\dfrac{f(x_0+h)+f(x_0-h)}{2}=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}<f(x_0)=f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$, 而 x_1 与 x_2 是 (a,b) 内任意两点, 这就证明了此时 $f(x)$ 在 (a,b) 为凸的. □

类似地, 可证明 $f''(x)>0$ 的情形.

定义 3.3. 拐点

若曲线上有这样的点 $(x_0, f(x_0))$, 曲线在此点的一边为凸, 而在它的另一边为凹时, 则称此点为曲线的拐点.

例 3.31 讨论 $y=(x-1)\sqrt[3]{x^2}$ 的凸性及拐点.

解 此时有

$$y'=\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$
$$y''=\frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}}=\frac{2(5x+1)}{9x^{\frac{4}{3}}}$$

于是当 $x=-\dfrac{1}{5}$ 时 ,$y''=0$, 当 $x=0$ 时, y'' 不存在. 显然, $x<-\dfrac{1}{5}$ 时 $y''<0$, $x>-\dfrac{1}{5}$ 时 $y''>0$. 所以曲线在 $x=-\dfrac{1}{5}$ 处有一个拋点, 曲线在 $x=-\dfrac{1}{5}$ 左边为凸, 在右边为凹. 拐点的坐标 $\left(-\dfrac{1}{5},-\dfrac{6}{5}\sqrt[3]{\dfrac{1}{25}}\right)$. 在 $x=0$ 的附近不论 $x<0$ 或 $x>0$ 时恒有 $y''>0$, 所以 (0,0) 不是拐点.

□

例 3.32 讨论函数 $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$ 上升或下降, 以及凸性, 并求出它的极值.

解 先求出 $y'=\dfrac{2\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2}=0$ 的根 $x=-1$ 和 $x=1$, 然后确定 y' 在 $x=-1$ 和 $x=1$ 这两点附近的符号变化情况, 列出下表:

x	$(-\infty,-1)$	-1	(-1,1)	1	$(1,+\infty)$
y' 符号	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\searrow$	极小值 -1	$\nearrow$	极大值 1	$\searrow$

当 $x=-1$ 时 ,y 有极小值, 其值是 -1; 当 $x=1$ 时 ,y 有极大值, 其值是 1. 为了考察函数图形的凸性, 必须求出 y 的二阶导数 $y''=\dfrac{4x\left(x^2-3\right)}{\left(1+x^2\right)^3}$ 这时 $y''=0$ 的根为 $x=-\sqrt{3},0,\sqrt{3}$. 根据 y " 在 $x=-\sqrt{3}, x=0$ 和 $x=\sqrt{3}$ 三点附近的符号变化, 再列下表:

x	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3},0)$	$(0,\sqrt{3})$	$(\sqrt{3},+\infty)$
y'' 符号	$-$	$+$	$-$	$+$
y	凸	凹	凸	凹

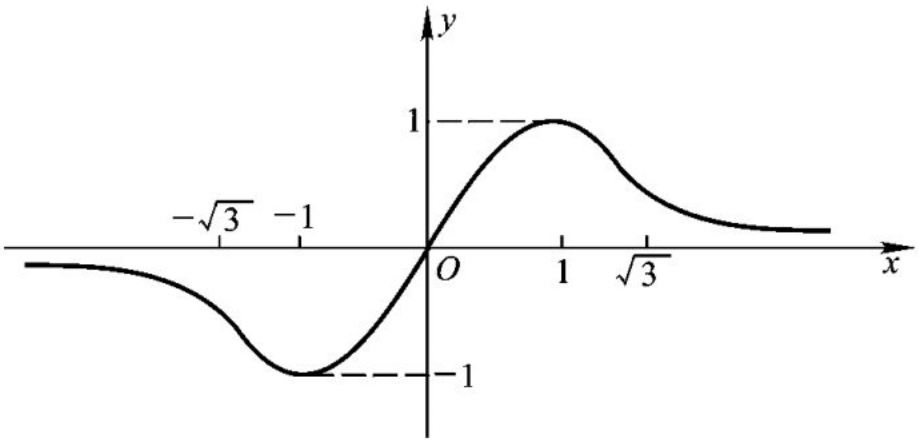
这两张表给出了函数 $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$ 的上升或下降区间以及图形的凹凸区间, 还给出了

它的极值.

在作出这个图形时,我们还利用了以下极限

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{1+x^2}=0$$

即曲线的水平渐近线为 $y=0$. 顺便指出,函数 $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$ 还是奇函数,因而实际上我们只需讨论 $x>0$ 情况,画出 $x>0$ 这一部分的图形,然后利用对称性即可画出 $x<0$ 的部分,如图所示.



□

5. 绘制函数图像的一般步骤

前面我们利用导数分析了函数的上升、下降 (单调性), 图形的凸性和极值问题. 根据这些讨论可以帮助我们画出用公式表示的函数的图形. 作图的步骤大致可概括为如下几点:

① 确定函数 $y=f(x)$ 的定义域, 讨论函数的一些基本性质, 如奇偶性、对称性和周期性等;

② 求出使 $f'(x)=0$ 和 $f''(x)=0$; 及 f', f'' 不存在的点.

③ 确定函数的上升或下降区间, 图形的上凸或下凸区间以及极值;

④ 求出渐近线;

⑤ 描点作图.

当然, 具体情况要具体对待, 有时也不一定要对上述几点都作讨论, 而只需讨论其中一部分就够了. 此外, 利用这种方法来作图, 也具有一定的局限性, 更何况很多实际问题所得函数不一定是可以用公式表示的, 而只是测得一系列数据, 因而用数值计算适当地多算出一些点, 然后描点作图, 仍不失为一种有效的作图方法. 随着电子计算机的发展和应用的普及, 用描点法作图也就更方便、更精确.

第三章习题

1. 求函数极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-4}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^a-1}{x}$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}$.

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x+1}{3x^2-x+4}$.

(5) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\sin x}{\ln x}$

2. 求函数极限:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)$

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$

(3) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2\ln x$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$

3. 求函数极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\mathrm{e}^x)^{\frac{1}{x}}$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$

(6) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x}$

4. 求函数极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}\ln x$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right)$

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)$

(5) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\tan x}$

5. 利用洛必达法则求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan ax}{\sin bx}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x^2}{x^3\sin x}$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\sin\frac{1}{x}}$

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^b}{e^x}(a,b>0)$

(5) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$

(6) $\lim\limits_{x\to\pi}(\pi-x)\tan\dfrac{x}{2}$

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$

(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{x}$

(10) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\ln x}$

(11) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-x^a}{x-a}(a>0)$

(12) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{1-2\sin x}{\cos 3x}$

(13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\cot x}$

(14) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln^c x}{x^b}(b,c>0)$

(15) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$

(16) $\lim\limits_{x\to 0} x^b\ln^c x(b,c>0)$

(17) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\text{sn }x}$

(18) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

(19) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$

(20) $\lim\limits_{x\to +0}\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^x$

6. 试说明下列函数不能用洛必达法则求极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x-\cos x}$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+\sin 2x}{(2x+\sin x)e^{\sin x}}$

(4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(x^2-1\right)\sin x}{\ln\left(1+\sin\frac{\pi}{2}x\right)}$

7. 求 $y=x+\arctan x$ 的渐近线.

8. 求函数 $y=x+\dfrac{x}{x^2-1}$ 的单调区间, 极值, 凹凸区间, 拋点, 渐近线, 并作函数的图形.

9. 设 $f(x)$ 在 $[0,1$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=0, f(1)=1$. 证明在 $(0,1)$ 内存在不同的 ξ,η 使得

$$\frac{a}{f'(\xi)}+\frac{b}{f'(\eta)}=a+b.$$

第三部分

一元函数积分学

第四章 不定积分

前面我们已经研究了一元函数微分学. 但在科学技术领域中, 还会遇到与此相反的问题: 即寻求一个可导函数, 使其导数等于一个已知函数, 从而产生了一元函数积分学. 积分学分为不定积分和定积分两部分.

本章我们先从导数的逆运算引出不定积分的概念, 然后介绍其性质, 最后着重系统地介绍积分方法.

4.1 不定积分的概念和性质

内容提要

- ❑ 原函数与不定积分的概念
- ❑ 基本积分公式
- ❑ 换元积分法与分部积分法
- ❑ 有理函数积分

4.1.1 原函数与不定积分

定义 4.1. 原函数

如果在区间 I 内, 可导函数 $F(x)$ 的导函数为 $f(x)$, 即 $\forall x \in I$, 都有 $F'(x) = f(x)$ 或 $dF(x) = f(x)dx$, 那么函数 $F(x)$ 就称为 $f(x)$ 或 $f(x)dx$ 在区间 I 内原函数.

例 4.1 $(\sin x)' = \cos x$ 故 $\sin x$ 是 $\cos x$ 的原函数; $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$, 故 $\ln x$ 是 $\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内的原函数.

原函数的研究须讨论解决以下两个问题:

- 是否任何一个函数都存在原函数?
- 原函数是否唯一? 若不唯一, 它们之间有什么联系?

例 4.2 考察如下的例子:

$f(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ 若存在可导函数 $F(x)$ 使 $F'(x) = f(x)$ 则由 $f(x)$ 的定义当 $x < 0$ 时, $F'(x) = f(x) = 0 \Rightarrow F(x) = C_1$ 当 $F'(x) = f(x) = 0 \Rightarrow F(x) = C_2$, 由 $F(x)$ 可导 $\Rightarrow F(x)$ 在 $x = 0$ 处连续. $\Rightarrow C_1 = C_2$ (左、右极限存在且相等)

$$\Rightarrow F(x) = C \Rightarrow F'(0) = 0$$

而已知 $F'(0) = f(0) = 1$ 矛盾, 这说明 $f(x)$ 没有原函数.

既然不是每一个函数都有原函数, 那么我们自然要问: 具备什么条件的函数才有原函数? 对此我们给出如下的结论—连续函数一定有原函数.

定理 4.1. 原函数存在定理

如果函数 $f(x)$ 在区间 I 内连续, 那么在区间 I 内存在可导函数 $\mathrm{F}(x)$, 使 $\forall x \in I$, 都有 $F'(x) = f(x)$.

针对第二个问题, 我们给出以下结论.

① 若 $F'(x)=f(x)$, 则对于任意常数 C, $F(x)+C$ 都是 $f(x)$ 的原函数.

② 若 $F(x)$ 和 $G(x)$ 都是 $f(x)$ 的原函数, 则 $F(x)-G(x)=C$, C 为任意常数.

证明 因

$$\begin{aligned}[F(x)-G(x)]' &= F'(x)-G'(x)\\ &= f(x)-f(x)=0\end{aligned}$$

故 $F(x)-G(x)=C$.

□

定义 4.2. 不定积分的定义

函数 $f(x)$ 的带有任意常数项的原函数, 称为 $f(x)$ 的不定积分, 记为

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)+C$$

其中, 我们称 $\int$ 为积分号, $f(x)$ 为被积函数, $f(x)\,\mathrm{d}x$ 为被积表达式, x 为积分变量.

为求不定积分, 只须求出被积函数的一个原函数再加上积分常数即可. 显然, 求不定积分得到一积分曲线族.

✍ **练习 4.1** 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的不定积分.

✍ **练习 4.2** 求过点 $(1,3)$, 且其切线斜率为 $2x$ 的曲线方程.

4.1.2 不定积分的性质

1. 导数运算与不定积分运算互为逆运算:
   ① $\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f(x)$
   ② $\int F'(x)\,\mathrm{d}x = F(x)+C$
2. 类似地, 微分运算与不定积分运算互为逆运算:
   ① $\mathrm{d}\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right) = f(x)\,\mathrm{d}x$
   ② $\int \mathrm{d}\big(F(x)\big) = F(x)+C$
3. 线性性质
   ① 两个函数的和/差的积分, 等于函数积分的和/差. 即有
   $$\int (f(x)\pm g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x$$
   ② 非零的常数因子, 可以移到积分号前面. 即有
   $$\int af(x)\,\mathrm{d}x = a\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

✍ **练习 4.3** 在下列等式中, 正确的结果是 (　　)

A. $\int f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)$　　B. $\int \mathrm{d}f(x) = f(x)$

C. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right) = f(x)$　　D. $\mathrm{d}\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right) = f(x)$

4.2 公式法求不定积分

既然积分运算和微分运算是互逆的, 因此可以根据求导公式得出积分公式. 下述公式是求不定积分的基础, 称为基本积分表, 读者须熟练掌握.

4.2.1 基本积分表

常用基本积分表 (c 为任意常数)

$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)+c$	$f(x)=F'(x)$
$\int k\,\mathrm{d}x = kx+c$	$\int x^\alpha\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+1}x^\alpha + c \quad (\alpha\neq -1)$
$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln\lvert x\rvert + c$	$\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a}+c$
$\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + c$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \ln\lvert f(x)\rvert + c$
$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + c$	$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + c$
$\int \tan x\,\mathrm{d}x = -\ln\lvert\cos x\rvert + c$	$\int \cot x\,\mathrm{d}x = \ln\lvert\sin x\rvert + c$
$\int \sec x\,\mathrm{d}x = \ln\lvert\sec x + \csc x\rvert + c$	$\int \csc x\,\mathrm{d}x = \ln\lvert\csc x - \cot x\rvert + c$
$\int \csc^2 x\,\mathrm{d}x = -\cot x + c$	$\int \sec^2 x\,\mathrm{d}x = \tan x + c$
$\int \csc x\cot x\,\mathrm{d}x = -\csc x + c$	$\int \sec x\tan x\,\mathrm{d}x = \sec x + c$
$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+c$	$\int \frac{1}{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\lvert\frac{x-a}{x+a}\rvert + c$
$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{a}+c$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,\mathrm{d}x = \ln\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\rvert + c$
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,\mathrm{d}x = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+c$	$\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+c$

例 4.3 验证下列不定积分公式:

(1) $\displaystyle\int \sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\rvert + c$

(2) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + c$

(3) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx) + c$

(4) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + c$

练习 4.4 求不定积分

(1) $\int(2x+5x^2+7x^3)\,\mathrm{d}x$

(2) $\int(2-\sqrt{x})\,\mathrm{d}x$

(3) $\int(2x+1)^2\,\mathrm{d}x$

练习 4.5 求不定积分 $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, 其中

$$f(x)=\begin{cases}2x+1, & x<0,\\ \mathrm{e}^x, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

练习 4.6 求不定积分 $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, 其中

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x<1,\\ 2x, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

练习 4.7 求不定积分

(1) $\int(\sin x-2e^x)\,\mathrm{d}x$

(2) $\int\frac{(2x+3)^2}{x}\,\mathrm{d}x$

(3) $\int\frac{x^2-1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

练习 4.8 设 $f'(\ln x)=1+x$, 则 $f(x)$ 等于 (　　)

A. $x+\mathrm{e}^x+C$

B. $\mathrm{e}^x+\frac{1}{2}x^2+C$

C. $\mathrm{e}^x+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+C$

✍ 习题 4.2

1. 求不定积分

(1) $\int(1-2x^2)\,\mathrm{d}x$　　(2) $\int(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2})\,\mathrm{d}x$

(3) $\int(\sqrt[3]{x}-\frac{1}{\sqrt{x}})\,\mathrm{d}x$　　(4) $\int\sqrt{x}(x-3)\,\mathrm{d}x$

(5) $\int\frac{(x+1)^2}{x}\,\mathrm{d}x$　　(6) $\int\frac{x^2+\sqrt{x^3}+3}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

(7) $\int(4\mathrm{e}^x-x^{\mathrm{e}})\,\mathrm{d}x$　　(8) $\int\frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x$

(9) $\int(x^2+2^x)\,\mathrm{d}x$　　(10) $\int(\sin x+2\cos x)\,\mathrm{d}x$

(11) $\int\cos^2\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$　　(12) $\int\tan^2 x\,\mathrm{d}x$

(13) $\int\sin^2\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$　　(14) $\int\cot^2 x\,\mathrm{d}x$

(15) $\int\frac{\cos 2x}{\cos x+\sin x}\,\mathrm{d}x$　　(16) $\int\frac{x^4}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

(17) $\int\frac{1}{x^2(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$　　(18) $\int\frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

2. 求以下函数的不定积分

(1) $f(x)=|x|$　　(2) $f(x)=\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}$

(3) $f(x)=\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}$　　(4) $f(x)=(\sin x+\cos x)\mathrm{e}^x$

3. 求以下函数的不定积分

(1) $f(x)=|1+x|-|1-x|$　　(2) $f(x)=(2x-3)|x-2|$

(3) $f(x)=\mathrm{e}^{|x|}$　　(4) $f(x)=\max\left(1,x^2\right)$

4. 解答以下问题:

(1) 求满足方程 $f'\left(x^2\right)=1/x(x\in(0,\infty))$之$f(x)$.

(2) 求满足方程 $f'(\ln x)=\begin{cases}1, 0<x\leqslant 1,\\ x, 1<x<\infty\end{cases}$ 之$f(x)$.

(3) 求满足方程 $f'\left(\sin^2 x\right)=\cos 2x+\tan^2 x$ 之$f(x)$.

5. 求以下函数的不定积分:

(1) $I=\int\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}\,\mathrm{d}x(a>0)$

(2) $I=\int\frac{\ln x+1}{1+x\ln x}\,\mathrm{d}x$

(3) $I=\int\frac{\sin 2x}{a^2\sin^2 x+b^2\cos x}\,\mathrm{d}x\left(a^2\neq b^2\right)$

(4) $I=\int\frac{x-1}{\sqrt{2-2x-x^2}}\,\mathrm{d}x$

(5) $I=\int(3x-1)\sqrt{3x^2-2x+7}\,\mathrm{d}x$

6. 求以下函数的不定积分:

(1) $I=\int\frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$

(2) $I=\int\frac{\mathrm{d}x}{x(x^n+1)}$

4.3 换元积分法求不定积分

4.3.1 第一类积分换元法

定理 4.2. 第一积分换元法

若 $f(u)$ 在区间 J 上有原函数 $F(u)$:

$$\int f(u)\mathrm{d}u = F(u) + C, u \in J$$

则 $F(\varphi(x))$ 是 $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ 在区间 I 上的原函数:

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = F(\varphi(x)) + C, \quad x \in I$$

其中 $u = \varphi(x)$ 是 I 上的可微函数, 且 $R(\varphi) \subset J$.

注: 本公式称为第一换元积分公式, 为求 $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x$, 就用 u 去替换 $\varphi(x)$, 并视积分号下的 $\varphi'(x)\mathrm{d}x$ 为 $\mathrm{d}u$, 则问题可转化为求不定积分 $\int f(u)\mathrm{d}u$. 因此, 在其体应用这一公式时, 允许作下列演算:

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int f[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x) \overset{\varphi(x)=u}{=} \int f(u)\mathrm{d}u$$

$$= F(u) + C \overset{u=\varphi(x)}{=} F[\varphi(x)] + C, \quad x \in I$$

因此, 关键在于将被积函数凑成$f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x$ 的形式, 俗称**凑微分法**.

顺便指出: 有了这一换元积分法, 原先不定积分中纯符号 $\mathrm{d}x$, 现在可以当作 x 的微分来对待, 这说明恰当运用数学符号的重要性. 在下文的不定积分表达式中, 若未明示存在区域, 则暗指定义区域.

✍ **练习 4.9** 求不定积分 $\int (2x+1)^{10}\,\mathrm{d}x$.

✍ **练习 4.10** 求不定积分

(1) $\int \frac{\mathrm{d}x}{2x+1}$ (2) $\int (x+3)^{10}\,\mathrm{d}x$

(3) $\int \sin(3x+4)\,\mathrm{d}x$ (4) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(4x+5)^2}$

(5) $\int \mathrm{e}^{-3x+2}\,\mathrm{d}x$ (6) $\int \sqrt{3x-1}\,\mathrm{d}x$

注 最常用的积分换元 一般地, 如果 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$, 则有

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\ F(ax+b) + C.$$

这个公式利用换元 $u = ax + b$ 可以得到.

✍ **练习 4.11** 求不定积分

(1) $\int x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$ (2) $\int \frac{\mathrm{e}^{1/x}}{x^2}\,\mathrm{d}x$

(3) $\int x\sqrt{x^2-3}\,\mathrm{d}x$ (4) $\int xe^{3x^2}\,\mathrm{d}x$

(5) $\int x^2(x^3+1)^9\,\mathrm{d}x$ (6) $\int \frac{x}{x^2+3}\,\mathrm{d}x$

(7) $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}$ (其中 $a>0$) (8) $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2}$ (其中 $a>0$)

(9) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ ($a>0$) (10) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x-2)}$

(11) $\int \sin^2 x\cos x\,\mathrm{d}x$ (12) $\int \sin^3 x\,\mathrm{d}x$

(13) $\int \cos^6 x\sin x\,\mathrm{d}x$ (14) $\int \cos^5 x\,\mathrm{d}x$

(15) $\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x$ (16) $\int \cos^2 2x\,\mathrm{d}x$

(17) $\int \sec^4 x\tan^2 x\,\mathrm{d}x$ (18) $\int \sec^3 x\tan^3 x\,\mathrm{d}x$

(19) $\int \sec^5 x\tan^5 x\,\mathrm{d}x$ (20) $\int \sec^6 x\tan^6 x\,\mathrm{d}x$

(21) $\int \tan x\,\mathrm{d}x$ (22) $\int \csc x\,\mathrm{d}x$

(23) $\int \cot x\,\mathrm{d}x$ (24) $\int \sec x\,\mathrm{d}x$

4.3.2 第二类积分换元法

定理 4.3. 第二积分换元法

设 $G(t)$ 是 $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ 在区间 I 上的原函数:

$$\int f(\phi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = G(t)+C$$

则 $G\big(\varphi^{-1}(x)\big)$ 是 $f(x)$ 在区间 J 上的原函数

$$\int f(x)\mathrm{d}x = G\big(\varphi^{-1}(x)\big)+C,\quad x\in J$$

其中 $f(x)$ 在区间 J 上有定义, $x=\varphi(t)$ 在 I 上连续且在 I 内部可微 ,$R(\varphi)=J$ 且 $\varphi'(t)\neq 0$.

注 本公式称为第二换元积分公式, 为求 $\int f(x)\mathrm{d}x$, 就用 $\varphi(t)$ 去替换 x, 并视 $\mathrm{d}x$ 为微分 $\varphi'(t)\mathrm{d}t$, 从而将 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 化成不定积分 $\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$ 来计算. 因此, 在具体演算时, 可采用如下形式写出:

$$\int f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{x=\varphi(t)} \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t = G(t)+C \xlongequal{t=\varphi^{-1}(x)} G\big[\varphi^{-1}(x)\big]+C$$

✍ **练习** 4.12 求不定积分

(1) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x-3}}\,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}$

✍ **练习** 4.13 求不定积分

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\,\mathrm{d}x$

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x$

(5) $\displaystyle\int \frac{1}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x$

(6) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}\,\mathrm{d}x$

(7) $\displaystyle\int \sqrt{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$

(8) $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$, 其中 $a>0$

(9) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

(10) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}$

(11) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}$

(12) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-1}}$

注 三角函数换元总结

① $\displaystyle\int f(x,\sqrt{a^2-x^2})\,\mathrm{d}x$,

令 $x=a\sin t,\ t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

② $\displaystyle\int f(x,\sqrt{x^2+a^2})\,\mathrm{d}x$,

令 $x=a\tan t,\ t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

③ $\displaystyle\int f(x,\sqrt{x^2-a^2})\,\mathrm{d}x$,

令 $x=a\sec t,\ t\in[0,\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2},\pi]$

✍ 习题 4.3

1. 求以下函数的不定积分:

(1) $I=\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4+x}$ (2) $I=\int \frac{x\ \mathrm{d}x}{\sqrt{1-4x^4}}$

(3) $I=\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4\sqrt{1+x^2}}$ (4) $I=\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\sqrt{\mathrm{e}^x}}$

(5) $I=\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^6-7x^4+x^2}}\ \mathrm{d}x$ (6) $I=\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$

(7) $I=\int x(1-x)^n\ \mathrm{d}x$ (8) $I=\int \frac{1+x}{x(1+x\mathrm{e}^x)}\mathrm{d}x$

2. 求以下函数的不定积分:

(1) $I=\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$ (2) $I=\int \frac{\sec x\cdot\csc x}{\ln(\tan x)}\mathrm{d}x$

(3) $I=\int \frac{\mathrm{d}x}{x\cdot\ln x\cdot\ln\ln x}$

3. 求以下函数的不定积分:

(1) $I=\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$ (2) $I=\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$

(3) $I=\int \frac{\cos x\ \mathrm{d}x}{\sqrt{\cos 2x}}$ (4) $I=\int \frac{\sqrt[4]{\tan x}}{\sin^2 x}\ \mathrm{d}x$

(5) $I=\int \frac{\mathrm{d}x}{3\cos^2 x+4\sin^2 x}$ (6) $I=\int \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}\ \mathrm{d}x$

(7) $I=\int \frac{\sin x}{1+\sin x}\ \mathrm{d}x$

4. 求以下函数的不定积分:

(1) $I=\int \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos^2 x}$ (2) $I=\int \frac{dx}{\sin(3x)\cdot\cos x}$

(3) $I=\int \frac{\sin x}{\sqrt{1+\sin x}}\ \mathrm{d}x$ (4) $I=\int \frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{\sin(2x)}}\mathrm{d}x$

(5) $I=\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x+3\sin x}$ (6) $I=\int \frac{\sin(2x)}{1+\mathrm{e}^{\sin^2 x}}\ \mathrm{d}x$

5. 求以下函数的不定积分:

(1) $I=\int \sin x\cdot\sin 2x\cdot\sin 3x\ \mathrm{d}x$ (2) $I=\int \frac{\cos(2x)}{(1-\sin x)(1-\cos x)}\mathrm{d}x$

(3) $I=\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x+a)\cdot\sin(x+b)}(a\neq b)$ (4) $I=\int \frac{\sin x}{\sqrt{2}x+\sin x+\cos x}\ \mathrm{d}x$

6. 试求下列不定积分:

(1) $I=\int \sin x\cdot\sin 2x\cdot\sin 3x dx$ (2) $I=\int \frac{\cos(2x)\mathrm{d}x}{(1-\sin x)(1-\cos x)}$

(3) $I=\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x+a)\cdot\sin(x+b)}(a\neq b)$ (4) $I=\int \frac{\sin x\cdot\mathrm{d}x}{\sqrt{2}+\sin x+\cos x}$

4.4 分部积分法求不定积分

定理 4.4. 分部积分法

设 $u(x), v(x)$ 在区间 I 上可微, 若 $v(x)u'(x)$ 在 I 上有原函数 (例如 $u'(x)$ 在 I 上连续), 则 $u(x)v'(x)$ 在 I 上也有原函数, 而且

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\mathrm{d}x$$

或写成

$$\int u(x)\mathrm{d}v(x) = u(x)v(x) - \int v(x)\mathrm{d}u(x)$$

注

- 分部积分法是基于函数乘积的求导公式 $u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$,
- 分部积分法主要用于被积函数是两个不同类型函数乘积的不定积分, 此时, 先求其中一部分 $v'(x)$ 的积分 $v(x)$, 然后将 $\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x$ 化归为求解 $\int v(x)u'(x)\mathrm{d}x$.
- 使用这一方法是否有效, 取决于选择好谁是 u, v, 且使 $v(x)u'(x)$ 的原函数容易求出. 在这里介绍一种优先选 u 的一般顺序:
  对数函数 → 反三角函数 → 代数函数 → 三角函数 → 指数函数.
  举例言之, 如果被积函数是对数函数 f 与代数函数 g 的乘积, 那么取 f 为 $u, g\ \mathrm{d}x$ 为 $\mathrm{d}v$. 此时, 在 $\int v du$ 中, 对数的特征将在微分后消失. 因此, 在 $\int v\ \mathrm{d}u$ 的被积函数是代数函数, 有希望比 $\int u\ \mathrm{d}v$ 更易计算.

练习 4.14 求 $\int x\ln x\ \mathrm{d}x$.

解 设

$u = \ln x,\ \mathrm{d}v = x\ \mathrm{d}x$, 则

$$\begin{aligned}\int x\ln x\ \mathrm{d}x &= \int \ln x\ \mathrm{d}\frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\ \mathrm{d}(\ln x)\\ &= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x\ \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C.\end{aligned}$$

□

练习 4.15 求 $\int \arccos x\ \mathrm{d}x$.

练习 4.16 求 $\int x\arctan x\ \mathrm{d}x$.

练习 4.17 求不定积分

(1) $\int \mathrm{e}^x \sin x\ \ \mathrm{d}x$　　(2) $\int \sec^3 x\ \ \mathrm{d}x$

(3) $\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\ \ \mathrm{d}x$

✍ 习题 4.4

1. 求不定积分:

(1) $I=\int x^2\mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x$　(2) $I=\int x\mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x$

(3) $I=\int \ln(1+\sqrt{x})\mathrm{d}x$　(4) $I=\int\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\ \mathrm{d}x$

(5) $I=\int\frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}}\ \mathrm{d}x$　(6) $I=\int\frac{\ln\left(x^2-1\right)}{\sqrt{x+1}}\ \mathrm{d}x$

(7) $I=\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x$

2. 求下列不定积分:

(1) $I=\int x\cdot\cos x dx$　(2) $I=\int\left(2x+3x^2\right)\arctan x\ \mathrm{d}x$

(3) $I=\int\frac{x\cdot\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\ \mathrm{d}x$　(4) $I=\int\frac{\arctan x}{x^3}\ \mathrm{d}x$

(5) $I=\int\frac{x\cdot\arctan x}{(1-x^2)^{3/2}}\ \mathrm{d}x$　(6) $I=\int e^{arccosx}\mathrm{d}x$

(7) $I=\int(\arccos x)^2\ \mathrm{d}x$

3. 求不定积分:

(1) $I=\int\frac{\ln\sin x}{\sin^2 x}\ \mathrm{d}x$　(2) $I=\int\sin\ln x\ \mathrm{d}x.$

(3) $I=\int\cos\ln x\ \mathrm{d}x$

4. 求不定积分:

(1) $I=\int\mathrm{e}^x\left(\frac{1-x}{1+x^2}\right)^2\ \mathrm{d}x$　(2) $I=\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x$

(3) $I=\int\mathrm{e}^{-x}\cdot\arctan(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x$　(4) $I=\int\frac{x+\sin x}{1+\cos x}\ \mathrm{d}x$

(5) $I=\int\frac{x^2\ \mathrm{d}x}{(x\sin x+\cos x)^2}$

5. 求不定积分:

(1) $I=\int e^x\sin x dx$

(2) $I=\int\mathrm{e}^x\cos x\ \mathrm{d}x$

(3) $I=\int x\mathrm{e}^{\mathrm{ax}}\cdot\cos bx\ \mathrm{d}x,J=\int x\mathrm{e}^{\mathrm{ar}}\sin bx\ \mathrm{d}x(a\neq 0)$

(4) $I=\int x^2\mathrm{e}^{2x}\cdot\sin^2 x\ \mathrm{d}x$

6. 求不定积分:

(1) $\displaystyle\int \arccos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle I = \int \frac{1-2x^3}{(x^2-x+1)^3}\ \mathrm{d}x$

7. 求不定积分-递推公式型:

(1) $\displaystyle I_n = \int \tan^n x\ \mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle I_n = \int \cos^n x\ \mathrm{d}x$

(3) $\displaystyle I_n = \int \sec^n x\ \mathrm{d}x$

(4) $\displaystyle I_n = \int (\arcsin x)^n\ \mathrm{d}x$

(5) $\displaystyle I_n = \int \ln^n x\ \mathrm{d}x$

(6) $\displaystyle I_{m,n} = \int \sin^m x \cdot \cos nx\ \mathrm{d}x; J_{m,n} = \int \sin^m x \cdot \sin nx\ \mathrm{d}x$

(7) $\displaystyle I_{m,n} = \int \cos^m x \cdot \sin nx\ \mathrm{d}x; J_{m,n} = \int \cos^m x \cdot \cos nx\ \mathrm{d}x$

(8) $\displaystyle I_{m,n} = \int x^m \ln^n x\ \mathrm{d}x$

(9) $\displaystyle I_{n,m} = \int \frac{x^m}{(x^3+A)^n}\ \mathrm{d}x$

4.5 有理函数的不定积分

有理函数的不定积分问题, 只须考察有理真分式:

$$f(x)=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}\quad(a_0,b_0\neq 0,n<m)$$

不难证明, 它总可分解为形如下列四种最简真分式的组合

- $\dfrac{A}{x-a}$
- $\dfrac{A}{(x-a)^k}\ (k\geqslant 2)$
- $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}\ \left(p^2-4q<0\right)$
- $\dfrac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^k}\ \left(p^2-4q<0,k\geqslant 2\right)$.

它们的不定积分分别计算如下:

(1) $\displaystyle\int\frac{A}{x-a}\,\mathrm{d}x=\mathrm{A}\ln|x-a|+C_4$

(2) $\displaystyle\int\frac{A}{(x-a)^4}\,\mathrm{d}x=A\int(x-a)^{-4}\,\mathrm{d}x=A\frac{(x-a)^{1-k}}{1-k}+C_5$

(3) $\displaystyle\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)}\mathrm{d}x=\int\frac{\frac{A}{2}(2x+p)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x$

$$=\frac{A}{2}\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}$$

(4) $\displaystyle\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^2}\,\mathrm{d}x=\int\frac{\frac{A}{2}(2x+p)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{(x^2+px+q)^2}\,\mathrm{d}x$

$$=\frac{A}{2}\int\frac{2x+p}{(x^2+bx+q)^2}\,\mathrm{d}x+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^k}$$

$$=\frac{A}{2}I_k+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)J_k$$

$$I_k=\int\frac{\mathrm{d}t}{t^k}=\frac{t^{1-k}}{1-k}+C=\frac{1}{(1-k)(x^2+px+q)^{-1}}+C.$$

注意到 $q-\dfrac{p^2}{4}>0$, 故可对 J_k 用变换 $x+\dfrac{p}{2}=t,\ \mathrm{d}x=\mathrm{d}t, q-\dfrac{p^2}{4}=l^2$, 则可得

$$J_k=\int\frac{\mathrm{d}x}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right]^t}=\int\frac{\mathrm{d}t}{\left(t^2+l^2\right)^k}$$

$$J_k=\int\frac{\mathrm{d}t}{\left(t^2+l^2\right)^t}=\frac{1}{l^2}\int\frac{\left(t^2+l^2\right)-t^2}{\left(t^2+l^2\right)^k}\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{l^2}\int\frac{\mathrm{d}t}{\left(t^2+l^2\right)^{k-1}}-\frac{1}{l^2}\int\frac{t^2}{\left(t^2+l^2\right)^t}\,\mathrm{d}t.$$

$$\int \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{(t^2+l^2)^k} = \frac{1}{2}\int t\frac{\mathrm{d}\left(t^2+l^2\right)}{(t^2+l^2)^k} = -\frac{1}{2(k-1)}\int t\ \mathrm{d}\left(\frac{1}{(t^2+l^2)^{k-1}}\right),$$

根据分部积分公式知

$$\int \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{(t^2+l^2)^k} = -\frac{1}{2(k-1)}\left[t\frac{1}{(t^2+l^2)^{k-1}} - \int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+l^2)^{t-1}}\right]$$

代入 (*), 得到

$$\begin{aligned} J_k =& \int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+l^2)^k} = \frac{1}{l^2}\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+l^2)^{k-1}} \\ &+ \frac{1}{l_2}\frac{1}{2(k-1)}\left[\frac{t}{(t^2+l^2)^{k-1}} - \int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+l^2)^{k-1}}\right] \\ =& \frac{t}{2l^2(k-1)(t^2+l^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2l^2(k-1)}\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+l^2)^{k-1}} \end{aligned}$$

上式右端之不定积分与 J_k 型类似, 只不过这里的 k 次方已下降为 $k-1$, 可记为 J_{k-1}. 这就是说, 不定积分 J_k 可用 J_{k-1} 来表出. 因此, 继续上述计算过程, 最后将化归为下述不定积分:

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+l^2} = \frac{1}{l}\arctan\frac{t}{l} + C$$

至于在最后的表达式中的 t 与 l, 再用 x 以及 A, B, p 与 q 代一即可.

结论 根据以上讨论可知, 任一有理函数的不定积分均可用初等函数表达出来, 实际上它就是由下述三类函数组成:

- 有理函数
- 对数函数
- 反正切函数

✍ 习题 4.5

1. 求不定积分:

(1) $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^3+1)^2}$

(2) $I = \displaystyle\int \frac{x\left(x^2+3\right)\mathrm{d}x}{(x^2-1)(x^2+1)^2}$

(3) $I = \displaystyle\int \frac{2x^4+5x^2-2}{2x^3-x-1}\,\mathrm{d}x$

(4) $I = \displaystyle\int \frac{x+2}{(x^2+2x+2)^2}\,\mathrm{d}x$

4.6 关于无理函数的不定积分

对一些简单的无理函数的不定积分可经过**变量代换**化为有理函数的积分. 注意并不是所有的无理函数的不定积分均可用初等函数表示.

✍ 习题 4.6

1. 求不定积分:

$I=\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2)\sqrt{2x^2-2x+5}}$

解 1) **作替换** $x=\frac{\alpha t+\beta}{t+1}$, 则 (让 t 的一次项消失, 再定 α,β) 得

$$x^2+2=\frac{(at+\beta)^2+2(t+1)^2}{(t+1)^2}=\frac{(\alpha^2+2)t^2+\beta^2+2}{(t+1)^2}$$

$$2x^2-2x+5=\frac{(2\alpha^2-2\alpha+5)t^2+2\beta^2-2\beta+5}{(t+1)^2}$$

其中, 利用方程组

$$\begin{cases}2\alpha\beta+4=0,\\ 4\alpha\beta-2\alpha-2\beta+10=0,\end{cases}\qquad \begin{cases}\alpha=2,\\ \beta=-1,\end{cases}\qquad \begin{cases}\alpha=-1,\\ \beta=2\end{cases}$$

确定 α,β 值. 例如取 $\alpha=-1,\beta=2$, 有

$$x=\frac{2-t}{1+t},\quad t=\frac{2-x}{1+x},\ \mathrm{d}x=\frac{-3\ \mathrm{d}t}{(1+t)^2}$$

$$x^2+2=\frac{3t^2+6}{(t+1)^2},2x^2-2x+5=\frac{9t^2+9}{(t+1)^2}$$

从而可知

$$I=-\frac{1}{3}\int\frac{|t+1|\mathrm{d}t}{(t^2+2)\sqrt{t^2+1}}$$

在 $t+1>0$ 即 $t>-1$ 的区域, 我们有

$$I=-\frac{1}{3}\int\frac{t\ \mathrm{d}t}{(t^2+2)\sqrt{t^2+1}}-\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+2)\sqrt{t^2+1}}$$

在上式第一个积分中再用替换 $u^2=t^2+1$, 第二个积分再用替换 $v=\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$, 可得

$$\begin{aligned}I&=-\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}u}{u^2+1}-\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}v}{2-v^2}=-\frac{1}{3}\arctan u-\frac{1}{6\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+v}{\sqrt{2}-v}+C\\ &=-\frac{1}{3}\arctan\frac{\sqrt{2x^2-2x+5}}{x+1}-\frac{1}{6\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}+2-x}{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}-2+x}+C.\end{aligned}$$

在 $x<-1$ 的区域, 可类似地操作.

Note: 一般地, 对不定积分

$$I=\int\frac{\mathrm{d}\,x}{(\alpha x+\beta)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

可用替换 $\alpha x+\beta=\frac{1}{t}$ 得到

$$I=\int\frac{t^k}{\sqrt{At^2+Bt+C}}\mathrm{d}t.$$

4.7 关于三角（超越）函数的不定积分

作万能三角函数替换:

$$t = \tan\frac{x}{2}, \quad x \in (-\pi, \pi)$$

一定能把

$$\int R(\cos x, \sin x)\mathrm{d}x$$

化为关于 t 的有理函数的不定积分. 此时, 我们有

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$x = 2\arctan t, \ \mathrm{d}x = \frac{2\ \mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

从而可得

$$\int R(\cos x, \sin x)\mathrm{d}x = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2\ \mathrm{d}t}{1+t^2}$$

注意到有理函数的有理函数仍为有理函数, 故上式右端是 t 的有理函数之不定积分.

注

- 虽然用替换 $t = \tan\frac{x}{2}$ 对 $\int R(\cos x, \sin x)\mathrm{d}x$ 的计算总是有效的, 但不一定是最简便的. 因此, 遇到下列情形, 应灵活设计变量替换:
  1. 若有 $R(\cos x, -\sin x) = -R(\cos x, \sin x)$, 则可用替换 $t = \cos x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
  2. 若有 $R(-\cos x, \sin x) = -R(\cos x, \sin x)$, 则可用替换 $t = \sin x, x \in (0, \pi)$.
  3. 若有 $R(-\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, 则可用替换 $t = \tan x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
- 对于不定积分 $\int \sin^p x \cdot \cos^q x\ \mathrm{d}x, p, q \in Q$, 可用替换 $t = \sin x$ 或 $t = \cos x$, 总能将其化为二项式微分型之不定积分.

✍ 习题 4.7

1. 求下列不定积分:

(1) $I=\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{a+b\tan x}$　　(2) $I=\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{1-\sin x}$

(3) $I=\displaystyle\int\frac{\sin x}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x$　　(4) $I=\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{1+3\sin x+4\cos x}$

(5) $I=\displaystyle\int\frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\mathrm{d}x$　　(6) $I=\displaystyle\int\frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x$

解

(1) 令 $\tan x=t$, 则 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}t/\left(1+t^2\right)$. 故知

$$\begin{aligned}
I&=\int\frac{1}{a+bt}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\int\left(\frac{b^2}{a^2+b^2}\frac{1}{a+bt}+\frac{1}{a^2+b^2}\frac{a-bt}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t\\
&=\frac{b^2}{a^2+b^2}\cdot\frac{1}{b}\ln|a+bt|-\frac{1}{a^2+b^2}\frac{b}{2}\ln\left(1+t^2\right)+\frac{a}{a^2+b^2}\arctan t+C\\
&=\frac{b}{a^2+b^2}\ln\left|\frac{a+\tan x}{\sec x}\right|+\frac{a}{a^2+b^2}x+C\\
&=\frac{b}{a^2+b^2}\ln|a\cos x+b\sin x|+\frac{a}{a^2+b^2}x+C
\end{aligned}$$

(2) 令 $\tan\dfrac{x}{2}=t$, 我们有

$$\begin{aligned}
I&=\int\frac{1}{1-2t/(1+t^2)}\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}=\int\frac{2\,\mathrm{d}t}{(1-t)^2}\\
&=\frac{2}{1-t}+C=\frac{2}{1-\tan(x/2)}+C
\end{aligned}$$

(3) 令 $\tan\dfrac{x}{2}=t$, 我们有

$$\begin{aligned}
I&=4\int\frac{t}{(1+t)^2}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=4\int\left\{\frac{-1}{2(1+t)^2}+\frac{1}{2(1+t^2)}\right\}\mathrm{d}t\\
&=\frac{2}{1+t}+2\arctan t+C\\
&=\frac{2}{1+\tan(x/2)}+2\arctan\left(\tan\frac{x}{2}\right)+C\\
&=\frac{2}{1+\tan(x/2)}+x+C
\end{aligned}$$

(4) 令 $\tan\dfrac{x}{2}=t$, 我们有

$$\begin{aligned}
I&=2\int\frac{\mathrm{d}t}{6t+4(1-t^2)+5(1+t^2)}=2\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+6t+9}\\
&=2\int(t+3)^{-2}\,\mathrm{d}t=-\frac{2}{t+3}+C=-\frac{2}{3+\tan\frac{x}{2}}+C
\end{aligned}$$

(5) 令 $\tan\dfrac{x}{2}=t$, 我们有

$$\begin{aligned}
I&=\frac{1}{2}\int\frac{(1+t)^2}{t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\ln|t|+t+\frac{t^2}{4}+C\\
&=\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}+C
\end{aligned}$$

(6) 令 $\tan\frac{x}{2}=t$, 我们有

$$\begin{aligned}I&=\int\frac{2t\ \mathrm{d}t}{(t+1)(t^2+1)}=-\int\frac{\mathrm{d}t}{t+1}+\int\frac{t+1}{t^2+1}\ \mathrm{d}t\\&=-\ln|t+1|+\frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right)+\arctan t+C\\&=\ln\frac{\sqrt{t^2+1}}{|t+1|}+\arctan t+C\\&=\ln\left|\sec\frac{x}{2}\Big/\left(\tan\frac{x}{2}+1\right)\right|+\arctan\left(\tan\frac{x}{2}\right)+C\\&=\frac{x}{2}-\ln\left|\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right|+C\end{aligned}$$

□

2. 非初等可积函数举例:

(1) $\int \mathrm{e}^{-x^2}\ \mathrm{d}x$　　(2) $\int\frac{\sin x}{x}\ \mathrm{d}x$

(3) $\int\sin\left(x^2\right)\mathrm{d}x$　　(4) $\int\frac{\cos x}{x}\ \mathrm{d}x$

(5) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$　　(6) $\int\frac{\mathrm{e}^x}{x}\ \mathrm{d}x$

(7) $\int\ln\sin x\ \mathrm{d}x$　　(8) $\int\sqrt{x+\frac{1}{x}}\ \mathrm{d}x$

(9) $\int\mathrm{e}^{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x\quad(a>0)$　　(10) $\int\mathrm{e}^{-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)}\mathrm{d}x$

(11) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\cos 2x}}$　　(12) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-2\cos x}}$

等均是非初等可积的.

第四章习题

1. 求不定积分

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)(x+1)^2}$;　(2) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{(x^2-1)(x^2+1)}\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int \frac{xdx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$;　(4) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+4x+4)(x^2+4x+5)^2}$;

(5) $\displaystyle\int \frac{3}{x^3+1}\mathrm{d}x$;　(6) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4+x^2+1}$;

(7) $\displaystyle\int \frac{x^4+5x+4}{x^2+5x+4}\mathrm{d}x$;　(8) $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^3+5x-6}\mathrm{d}x$;

(9) $\displaystyle\int \frac{x^2}{1-x^4}\mathrm{d}x$;　(10) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$;

(11) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2+x+1)}$;　(12) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x(x^3-1)}\mathrm{d}x$;

(13) $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{(x^2+x+1)^2}\mathrm{d}x$　(14) $\displaystyle\int \frac{1-x^7}{x(1+x^7)}\mathrm{d}x$;

(15) $\displaystyle\int \frac{x^9}{(x^{10}+2x^5+2)^2}\mathrm{d}x$;　(16) $\displaystyle\int \frac{x^{3n-1}}{(x^{2n}+1)^2}\mathrm{d}x$

2. 求不定积分

(1) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{2+4x}}\mathrm{d}x$;　(2) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$;

(3) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}\mathrm{d}x$;　(4) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}}\mathrm{d}x$;

(5) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x$　(6) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\mathrm{d}x$;

(7) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1+x)}}$;　(8) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4\sqrt{1+x^2}}$

(9) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$;　(10) $\displaystyle\int \sqrt[3]{\frac{(x-4)^2}{(x+1)^8}}\mathrm{d}x$

(11) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x-2)(x+1)^2}}$;　(12) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt[4]{1+x^4}}$;

3. 求不定积分

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{4+5\cos x}$　(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\sin x}$;

(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{3+\sin^2 x}$;　(4) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$

(5) $\displaystyle\int \frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}$;　(6) $\displaystyle\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}$

(7) $\displaystyle\int \frac{dx}{\tan x+\sin x}$ (8) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin(x+a)\cos(x+b)}$

(9) $\displaystyle\int \tan x\tan(x+a)dx$; (10) $\displaystyle\int \frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}dx$;

(11) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$; (12) $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}dx$

4. 求不定积分

(1) $\displaystyle\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}dx$; (2) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{3/2}}dx$;

(3) $\displaystyle\int \ln^2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$ (4) $\displaystyle\int \sqrt{x}\ln^2 x dx$

(5) $\displaystyle\int x^2e^x\sin x dx$ (6) $\displaystyle\int \ln\left(1+x^2\right)dx$

(7) $\displaystyle\int \frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ (8) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-2x-3}}dx$;

(9) $\displaystyle\int \arctan\sqrt{x}dx$ (10) $\displaystyle\int \sqrt{x}\sin\sqrt{x}dx$

(11) $\displaystyle\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx$ (12) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\sin x}}{\cos x}dx$;

(13) $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}dx$ (14) $\displaystyle\int e^{\sin x}\frac{x\cos^3 x-\sin x}{\cos^2 x}dx$;

(15) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x-e^{-x}}$ (16) $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}(ab\neq 0)$;

(17) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}dx$ (18) $\displaystyle\int x\ln\frac{1+x}{1-x}dx$;

(19) $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\arcsin x dx$ (20) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+e^x)^2}$

第五章 定积分

内容提要

- 定积分的概念和性质
- 微积分基本公式
- 定积分的换元法和分部积分法

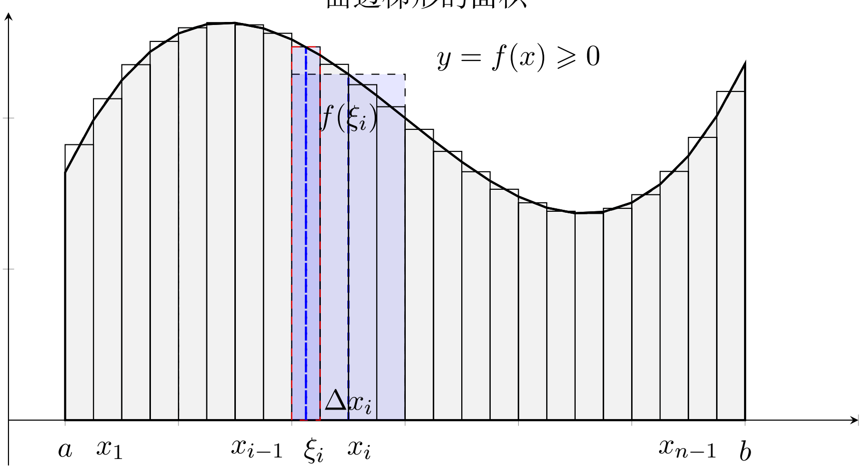
前一章我们从导数的逆运算引出了不定积分，系统地介绍了积分法，这是积分学的第一类基本问题. 本章先从实例出发，引出积分学的第二类基本问题——定积分，它是微分（求局部量）的逆运算（微分的无限求和——求总量），然后着重介绍定积分的计算方法，它在科学技术领域中有着极其广泛的应用.

5.1 定积分的定义-黎曼积分

5.1.1 问题的提出

例 5.1 计算由曲线 $y = f(x)$，直线 $x = a$，$x = b$，和 x 轴所围成的曲边梯形的面积 S.

曲边梯形的面积



$$S = \sum_i \Delta S_i \approx \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i \to S = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i$$

解 求解该问题可分为三步：

1. 将区间 $[a, b]$ 分为 n 段 $[x_{i-1}, x_i]$，各段的长度为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$，$1 \leqslant i \leqslant n$.
2. 在每小段区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任取一点 ξ_i，得到面积的近似值为 $S \approx \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.
3. 令 $\Delta x = \max\limits_i \{\Delta x_i\}$，则当 $\Delta x \to 0$ 时就得到面积的实际值为 $S = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

□

例 5.2 设物体以速度 $v = v(t)$ 沿直线运动，求在时间段 $a \leqslant t \leqslant b$ 内的位移 s.

解 求解该问题可分为三步：

1. 将时间段 $[a,b]$ 分为 n 段 $[t_{i-1},t_i]$, 各段的长度为 $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $1 \leqslant i \leqslant n$.
2. 在每小段区间 $[t_{i-1},t_i]$ 上任取一点 ξ_i, 得到位移的近似值为 $s \approx \sum\limits_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i$.
3. 令 $\Delta t = \max\limits_{i}\{\Delta t_i\}$, 则当 $\Delta t \to 0$ 时就得到位移的实际值为 $s = \lim\limits_{\Delta t\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i$.

□

定义 5.1. 定积分定义 1

设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义, 用点 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ 将区间分为 n 段 $[x_{i-1},x_i]$ $(i = 1,2,\cdots,n)$, 其长度分别为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. 在每段 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取一点 ξ_i, 得到近似和

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

记 $\Delta x = \max\limits_{i}\{\Delta x_i\}$, 如果 $\Delta x \to 0$ 时近似和的极限存在, 我们就称 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是可积的, 并将这个极限值称为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分, 记为

$$\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

定义 5.2. 定积分定义 2

设 $f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的函数. 若有实数 J, 对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对满足 $\|\Delta\| < \delta$ 的任意分划 Δ, 以及任取的插点组 $\langle\xi\rangle$, 均有

$$|S_\Delta(f,\xi) - J| < \varepsilon$$

则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是 (Riemann) 可积的 $(f \in R([a,b]))$, 或说 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的 (Riemann) 定积分存在, 并简记为

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} S_\Delta(f,\xi) = J, \quad \lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = J$$

数值 J 称为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分, 也称为 $f(x)$ 从 a 到 b 的定积分 (值), 记 $J = \displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, 其中 a 称为积分下限, b 称为积分上限.

注

- 定积分的值只与被积函数 f 和积分区间 $[a,b]$ 有关, 而与积分变量用什么字母无关. 即有
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$$
- 定义中区间 $[a,b]$ 的分法和 ξ_i 的取法是任意的.
- 如果 $a > b$, 我们规定
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$
特别地, 如果 $a = b$, 我们可以得到
$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

例 5.3 利用定义计算定积分 $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$.

解 小区间$[x_{i-1},x_i]$ 的长度$\Delta x_i=\frac{1}{n},(i=1,2,\cdots,n)$, 取$\xi_i=x_i,(i=1,2,\cdots,n)$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\\
&=\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}x_i^2\Delta x_i\\
&=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\
&=\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right),\quad \lambda\to 0\Rightarrow n\to\infty
\end{aligned}
$$

故而

$$
\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\Delta x_i=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}
$$

□

例 5.4 利用定义计算定积分 $\int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

解 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 在 $[0,1]$ 上连续, 故 $f(x)$ 在 [0,1] 上可积. 为方便计, 将 $[0,1]n$ 等分, 左侧取点 $\xi_i=\frac{i-1}{n},\Delta x_i=\frac{1}{n},f(\xi_i)=e^{\frac{i-1}{n}}$, 则

$$
\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\frac{1}{n}\left[e^0+e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\cdots+e^{\frac{n-1}{n}}\right](\text{等比数列})
$$

$$
=\frac{1}{n}\cdot\frac{1-\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n}{1-e^{\frac{1}{n}}}=(e-1)\frac{\frac{1}{n}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1}
$$

故 $\int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}-1.$

□

练习 5.1 设函数 $f(x)$ 在区间 [0,1] 上连续, 且取正值. 试证

$$
\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)\cdot f\left(\frac{2}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n}{n}\right)}=\mathrm{e}^{\int_0^1\ln f(x)\,\mathrm{d}x}
$$

.

练习 5.2 将和式极限: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right]$ 表示成定积分.

5.1.2 定积分存在定理

定理 5.1. 定积分存在定理 1

当函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续时, 称 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积.

定理 5.2. 定积分存在定理 2

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界, 且只有有限个间断点, 则 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积.

推论 5.1. 函数可积的必要条件

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 则 $f(x)$ 在 [a,b] 上有界.

注 该推论的逆命题不真, 即有界函数不一定可积, 例如 Dirichlet 函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 是有理数},\\ 0, & x\text{ 是无理数}.\end{cases}$$

在 $[0,1]$ 上是不可积的.

5.1.3 定积分的几何意义

设由曲线 $y=f(x)$, 直线 $x=a$, $x=b$, 和 x 轴所围成的曲边梯形的面积为 S.

1. 如果在 $[a,b]$ 上 $f(x)\geqslant 0$, 则定积分

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=S.$$

2. 如果在 $[a,b]$ 上 $f(x)\leqslant 0$, 则定积分

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=-S.$$

例 5.5 利用定积分的几何意义, 说明下列等式:

(1) $\displaystyle\int_0^1\sqrt{1-x^2\,\mathrm{d}x}=\frac{\pi}{4}$ (2) $\displaystyle 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,\mathrm{d}x.$

5.1.4 定积分的性质

1. 唯一性

   若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 则积分值唯一.

2. 线性性

   ① 设 $f\in R([a,b]),g\in R([a,b])$, 则 $f+g\in R([a,b])$, 且有

$$\int_a^b[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

   ② 设 $f\in R([a,b]),c$ 是常数 , 则 $cf\in R([a,b])$, 且有 $\displaystyle\int_a^b[cf(x)]\mathrm{d}x=c\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$

3. 保序性

   若 $f\in R([a,b]),g\in R([a,b])$, 且有 $f(x)\leqslant g(x),x\in[a,b]$, 则 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$

4. 积分区间的可加性

设 $a<c<b$, 则 $f\in R([a,b])$ 的充分必要条件是 $f\in R([a,c])$ 以及 $f\in R([c,b])$. 此时有 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x \quad (\star)$

注 实际上, 只要式 $(\star)$ 中的三个积分都存在, 那么不论 a,b 与 c 的大小次序如何, 式 $(\star)$ 总成立. 例如对 $c<b<a$ 的情形, 因为我们有等式

$$\int_c^b f(x)\mathrm{d}x+\int_b^a f(x)\mathrm{d}x=\int_c^a f(x)\mathrm{d}x=-\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$$

所以由移项可知

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

5. 绝对值的可积性

若 $f\in \mathrm{R}[a,b]$, 则 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上可积 (反之不真), 且有 $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$.

6. 估值定理

设 M 及 m 分别是函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$,

$$\text{则}\quad m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)dx\leqslant M(b-a)$$

证明 $\because m\leqslant f(x)\leqslant M, \therefore \int_a^b mdx\leqslant\int_a^b f(x)dx\leqslant\int_a^b Mdx$

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)dx\leqslant M(b-a)$$

□

此性质可用于估计积分值的大致范围.

例 5.6 估计积分 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx$ 的值.

解

$$f(x)=\frac{\sin x}{x},\quad x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$$

$$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{\cos x(x-\tan x)}{x^2}<0$$

$f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调下降, 故 $x=\frac{\pi}{4}$ 为极大点, $x=\frac{\pi}{2}$ 为极小点, $M=f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$,

$$m=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{\pi},\quad \because b-a=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}\leqslant\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx\leqslant\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \frac{1}{2}\leqslant\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$$

□

7. 定积分中值定理

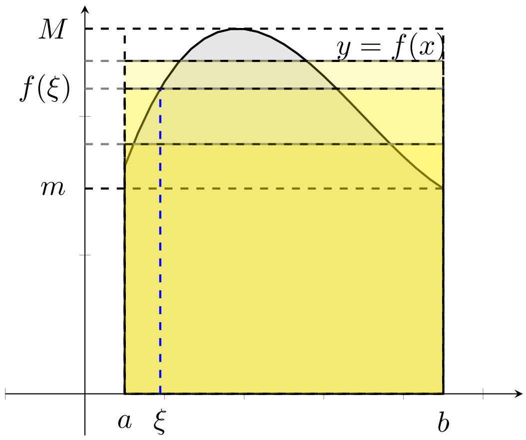
如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 则至少存在一点 $\xi \in [a,b]$, 使

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

注上述性质也是说, 存在 $\xi \in [a,b]$, 使得

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)$$

说明连续函数在区间 $[a,b]$ 上的平均值是可以取到的.



证明 利用闭区间上连续函数的性质.

□

例 5.7 设 $f(x)$ 可导, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$, 求

$$\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+2} t\sin\frac{3}{t}f(t)dt$$

解 由积分中值定理知有 $\xi \in [x,x+2]$,

$$\begin{aligned}
&\text{使} \int_x^{x+2} t\sin\frac{3}{t}f(t)dt = \xi\sin\frac{3}{\xi}f(\xi)(x+2-x),\\
&\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+2} t\sin\frac{3}{t}f(t)dt = 2\lim_{\xi\to+\infty}\xi\sin\frac{3}{\xi}f(\xi)\\
&=2\lim_{\xi\to+\infty}3f(\xi)=6
\end{aligned}$$

□

例 5.8 设在 $[a,b]$ 上 $f(x)$ 连续, $f(x)\geqslant 0$, 且 $f(x)$ 不恒为零, 证明

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0 \text{ (定积分的保号性)}$$

解 设 $f(c)>0$, 则由极限的保号性, 存在 $\delta>0$, 使得当 $c-\delta<x<c+\delta$ 时, 总有 $f(x)>f(c)/2$. 从而

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &\geqslant \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)\,\mathrm{d}x\\
&\geqslant \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(c)/2\,\mathrm{d}x = \delta\cdot f(c) > 0
\end{aligned}$$

□

✍ 习题 5.1

1. 假设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数, 则必有 ( )

   A. $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数

   B. $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数

   C. $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是周期函数

   D. $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是单调函数

2. 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 证明以下结论:

   ① 若在 $[a, b]$ 上 $f(x) \geqslant 0$ 且 $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ 则在 $[a, b]$ 上 $f(x) \equiv 0$.

   ② 若在 $[a, b]$ 上 $f(x) \geqslant 0$ 且 $f(x) \neq 0$ 则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0$.

   ③ 若在 $[a, b]$ 上 $f(x) \leqslant g(x)$. 且 $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$. 则在 $[a, b]$ 上 $f(x) \equiv g(x)$.

5.2 微积分基本定理

在上一节我们已经看到, 直接用定义计算定积分是十分繁难的, 因此我们期望寻求一种计算定积分的简便而又一般的方法. 我们将会发现定积分与不定积分之间有着十分密切的联系, 从而可以利用不定积分来计算定积分.

5.2.1 积分上限函数及其导数

设函数 $f(x)$ 在区间 [a,b] 上连续, 并且设 x 为 $[a,b\ ]$ 上的一点, 考察定积分

$$\int_a^x f(x)dx=\int_a^x f(t)dt$$

如果上限 x 在区间 $[a,b\ ]$ 上任意变动, 则对于每一个取定的 x 值, 定积分有一个对应值, 所以它在 [a,b] 上定义了一个函数, 记 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$. 这就是积分上限函数.

定义 5.3. 变上限积分

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 令 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, $x\in[a,b]$, 称为变上限积分.

定理 5.3. 变上限积分求导定理

$$p'(x)=\left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)'=f(x)$$

证明

$$\Phi(x+\Delta x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt$$

$$\begin{aligned}\Delta\Phi=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)&=\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\\&=\int_a^x f(t)dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\\&=\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

由积分中值定理得

$$\Delta\Phi=f(\xi)\Delta x,\xi\in[x,x+\Delta x]$$

$\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta x}=f(\xi)$, $\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}f(\xi)$. 当 $\Delta x\to0,\xi\to x,\therefore\Phi'(x)=f(x)$.

□

注

- 上述定理说明, 对于闭区间上的连续函数, 它的原函数总是存在的, 即变上限积分函数 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 就是 $f(x)$ 的一个原函数. 另外
- 此定理表明连续函数取变上限定积分再对上限自变量 x 求导, 其结果就等于被积函数在上限自变量 x 处的函数值. 若上限不是 x 而是 x 的函数 $a(x)$, 则求导时必须按复合函数的求导法则进行.

定理 5.4. 变限积分求导定理

对于更一般的变限积分，我们有下面求导公式：

$$\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,\mathrm{d}t\right)' = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x)$$

特别地，我们有

$$\left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)' = f(x)$$

$$\left(\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t\right)' = -f(x)$$

证明

$$F(x) = \left(\int_{a(x)}^0 + \int_0^{b(x)}\right) f(t)dt = \int_0^{b(x)} f(t)dt - \int_0^{a(x)} f(t)dt$$

$$F'(x) = f[b(x)]b'(x) - f[a(x)]a'(x)$$

□

例 5.9 求 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_{\cos x}^1 e^{-t^2}dt}{x^2}$

解 [分析]：这是型不定式，应用洛必达法则.

$$\frac{d}{dx}\int_{\cos x}^1 e^{-t^2}dt = -\frac{d}{dx}\int_1^{\cos x} e^{-t^2}dt$$

$$= -e^{-\cos^2 x}\cdot(\cos x)' = \sin x\cdot e^{-\cos^2 x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_{\frac{\cos}{x}}^1 e^{-t^2}dt}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot e^{-\cos^2 x}}{2x} = \frac{1}{2e}.$$

□

练习 5.3 求函数 $f(x) = \int_0^x t(t-4)\,\mathrm{d}t$ 的极值.

例 5.10 求 k 的值，使得 $\int_k^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{40}{3}$，其中

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \leqslant 2; \\ x^2+1, & x > 2. \end{cases}$$

定理 5.5. 微积分基本公式

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，且在 $[a,b]$ 上有原函数 $F(x)$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \triangleq F(x)\Big|_a^b \text{或者} [F(x)]_a^b$$

它称为微积分基本公式或牛顿 - 莱布尼茨 (Newton-Leibniz) 公式.

证明 $\because$ 已知 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，又 $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ 也是 $f(x)$ 的一个原函数，$\therefore$ $F(x) - \Phi(x) = C \quad x \in [a,b]$. 令 $x = a \Rightarrow F(a) - \Phi(a) = C$，$\because \Phi(a) = \int_a^a f(t)dt = 0 \Rightarrow F(a) = C$ $\because F(x) - \int_a^x f(t)dt = C$ $\therefore \int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$ 令

$x=b \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$.

□

注

- 一个连续函数在区间 $[a,b]$ 上的定积分等于它在该区间上的任意一个原函数在区间 $[a,b]$ 上的增量.
- 注意到 $f(x)$ 是 $f'(x)$ 的原函数, 故当 $f' \in R([a,b])$ 时, $\mathrm{N-L}$ 公式可写为
$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x = f(b)-f(a)$$
- N-L 公式揭示了积分学两类基本问题——不定积分与定积分两者之间的内在联系.
- 求定积分问题转化为求原函数的问题.
- 为定积分的计算提供了一个普遍、有效而又简便的方法, 使得定积分的计算大为简化.
- 上述定理并不是说可积函数一定有原函数, 而是说如果存在原函数, 那么可用来计算定积分的值. 例如 $f(x)=\begin{cases} -1, & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ 1, & 1<x\leqslant 2, \end{cases}$ 在 [0,2] 上可积, 但在 [0,2] 上不存在原函数. 此外, 即使有原函数存在的函数也不一定可积. 例如在 [-1,1] 上的函数
$$F(x)=\begin{cases} 0, & x=0 \\ x^2\sin\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0, \end{cases}$$
是函数 $f(0)=0, f(x)=-\dfrac{2}{x}\cos\dfrac{1}{x^2}+2x\sin\dfrac{1}{x^2}(x\neq 0)$ 在 [-1,1] 上的原函数, 但 $f\notin R([-1,1]$).
- 对于 $a>b$ 的情况, 公式也成立.
- 注意使用公式的条件. 通常若被积函数 $f(x)$ 连续且 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在该区间上的任一原函数, 那么公式是适用的.

例 5.11 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos x+\sin x-1)dx$

解 原式 $=[2\sin x-\cos x-x]_0^{\frac{\pi}{2}}=3-\dfrac{\pi}{2}$.

□

例 5.12 设 $f(x)=\begin{cases} 2x & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ 5 & 1<x\leqslant 2 \end{cases}$, 求 $\int_0^2 f(x)dx$.

解 $\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx$ 在 $[1,2]$ 上规定当 $x=1$ 时, $f(x)=5$, 原式 $=\int_0^1 2xdx+\int_1^2 5dx=6$.

□

例 5.13 求 $\int_{-2}^{-1}\dfrac{1}{x}dx$.

解 当 $x<0$ 时, $\dfrac{1}{x}$ 的一个原函数是 $\ln|x|$, $\int_{-2}^{-1}\dfrac{1}{x}dx=[\ln|x|]_{-2}^{-1}=\ln 1-\ln 2=-\ln 2$. □

✍ **练习 5.4** 计算曲线 $y=\sin x$ 在 $[0,\pi]$ 上与 x 轴所围成的平面图形的面积.

练习 5.5 求 $\int_{-2}^{2} \max\{x, x^2\} dx$.

例 5.14 求数列极限 $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n})$.

解 原式 $= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+i/n}\cdot\frac{1}{n}$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = \ln 2.$$

□

定理 5.6. 积分中值定理

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$, 使得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

证明 利用微积分基本公式和微分中值定理.

□

例 5.15 设 $f(x)$ 在 $[0,\infty]$ 上连续且 $f(x)>0$. 证明

$$F(x) = \frac{\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}$$

在 $(0,\infty)$ 上是单调递增的.

证明

$$F'(x) = \frac{xf(x)\int_0^x f(t)dt - f(x)\int_0^x tf(t)dt}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2}$$

$$F'(x) = \frac{f(x)\int_0^x (x-t)f(t)dt}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2}$$

$$\because f(x)>0, \quad (x>0) \quad \therefore \int_0^x f(t)dt>0$$

$$\because (x-t)f(t)>0, \therefore \int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t>0$$

$\therefore F(x)>0(x>0)$, 故 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内为单调增加函数.

□

例 5.16 设 $f(x)$ 在 [0,1] 上连续, 且 $f(x)<1$. 证明

$$2x - \int_0^x f(t)dt = 1$$

在 $[0,1]$ 上只有一个解.

解 令 $F(x) = 2x - \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - 1$,

$$\because f(x)<1, \therefore F'(x) = 2-f(x)>0$$

$F(x)$ 在 [0,1] 上为单调增加函数. $F(0) = -1 < 0$

$$F(1) = 1 - \int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 [1-f(t)]\,\mathrm{d}t > 0$$

所以 $F(x)=0$ 即原方程在 $[0,1]$ 上只有一个解.

□

例 5.17 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且单调递增, 证明

$$\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

证明 令 $L(t)=\int_a^t xf(x)\,\mathrm{d}x-\frac{a+t}{2}\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$, 求导后便得证.

□

例 5.18 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 证明

$$\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$$

证明 欲利用导数证明不等式, 先作换元 $u=bx$ ($b>0$), 则有

$$b\int_0^b f^2(u/b)\,\mathrm{d}u \geqslant \left(\int_0^b f(u/b)\,\mathrm{d}u\right)^2$$

再令 $g(u)=f(u/b)$, 则只需证明下面推广的不等式

$$b\int_0^b g^2(u)\,\mathrm{d}u \geqslant \left(\int_0^b g(u)\,\mathrm{d}u\right)^2$$

令 $L(t)=t\int_0^t g^2(u)\,\mathrm{d}u-\left(\int_0^t g(u)\,\mathrm{d}u\right)^2$, 求导可得.

□

例 5.19 设连续函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减. 试证明对于任何 $q\in[0,1]$, 都有不等式

$$\int_0^q f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant q\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明 [方法 1] 令 $L(t)=\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x-t\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$, 则有 $L'(t)=f(t)-\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=f(t)-f(\xi)$. 因此, 当 $0\leqslant q\leqslant \xi$ 时, $L'(t)\geqslant 0$, 从而 $L(q)\geqslant L(0)=0$. 当 $\xi\leqslant q\leqslant 1$ 时, $L'(t)\leqslant 0$, 从而 $L(q)\geqslant L(1)=0$.

□

证明 [方法 2] $\int_0^q f(x)\,\mathrm{d}x-q\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=(1-q)\int_0^q f(x)\,\mathrm{d}x-q\int_q^1 f(x)\,\mathrm{d}x=(1-q)\cdot q\,f(\xi_1)-q\cdot(1-q)\,f(\xi_2)=q(1-q)[f(\xi_1)-f(\xi_2)]\geqslant 0$. 其中 $\xi_1\in(0,q),\xi_2\in(q,1)$.

□

✍ 习题 5.2

1. 求下列定积分.

(1) $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$ (2) $\int_2^4 \frac{\mathrm{d}x}{x}$

(3) $\int_{-1}^3 |2-2x|\,\mathrm{d}x$ (4) $\int_0^1 e^x\,\mathrm{d}x$

(5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x$ (6) $\int_{-1}^2 |2x|\,\mathrm{d}x$

2. 求下列定积分.

(1) $\int_0^x e^{2t}\,\mathrm{d}t$ (2) $\int_x^{-1} \cos^2 t\,\mathrm{d}t$

(3) $\int_x^{x^2} \sin t\,\mathrm{d}t$ (4) $\int_0^{x^2} \arctan t\,\mathrm{d}t$

(5) $\int_{\cos x}^0 t^2\,\mathrm{d}t$ (6) $\int_{\ln x}^{e^x} t^3\,\mathrm{d}t$

3. 求下列函数极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sin x} e^t\,\mathrm{d}t}{x}$ (2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x (e^t-1)\,\mathrm{d}t}{x^2}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \cos^2 t\,\mathrm{d}t}{x}$ (4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_x^0 \arctan t\,\mathrm{d}t}{x^2}$

4. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x\right) =$ ________.

5. $\int_a^x \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\right)\mathrm{d}x =$ ________.

6. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^{-2} \sqrt[3]{t}\ln\left(t^2+1\right)\mathrm{d}t =$ ________.

7. 求 $\int_0^2 f(x)dx$, 其中 $f(x)=\begin{cases} x^2, 0\leqslant x\leqslant 1 \\ 2-x, 1<x<2 \end{cases}$.

8. 设 $I_1=\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cdot\cos nx\,\mathrm{d}x,\ I_2\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cdot\sin nx dx$

(1) 当 $m=n$ 时, $I_1=$ ________.$I_2=$ ________.

(2) 当 $m\neq n$ 时, $I_1=$ ________.$I_2=$ ________.

9. 设 $I_3=\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cdot\sin nx\,\mathrm{d}x$

(1) 当 $m=n$ 时,$I_3=$ ________.

(2) 当 $m\neq n$ 时, $I_3=$ ________.

10. $\int_4^9 \sqrt{x}(1+\sqrt{x})\,\mathrm{d}x =$ ________.

11. $\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} =$ ________________.

12. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \cos t^2\,\mathrm{d}t}{x} =$ ________________.

13. 计算下列各定积分.

(1) $\displaystyle\int_1^2 \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

(4) $\displaystyle\int_0^{2\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x$

14. 求下列极限.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2}\,\mathrm{d}t}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to+0} \frac{\int_0^{x^{\frac{1}{2}}} (1-\cos t^2)\,\mathrm{d}t}{x^{\frac{5}{2}}}$

15. 设 $f(x)$ 为连续函数, 证明: $\displaystyle\int_0^x f(t)(x-t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \left(\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t.$

16. 求函数 $\displaystyle f(x) = \int_0^x \frac{3t+1}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t$ 在区间 $[0,1]$ 上的最大值与最小值.

17. 设 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\sin x, & \text{当} 0 \leqslant x \leqslant \pi \text{ 时}, \\ 0, & \text{当} x<0 \text{ 或} x>\pi \text{ 时}. \end{cases}$ 求 $\displaystyle\varphi(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的表达式 .

5.3 定积分的换元积分法

定理 5.7. 换元积分公式

设 $f\in R([a,b]),\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可微且严格单调 ,$\varphi(a)=a$, $\varphi(\beta)=b$, 且 $\varphi'\in R([\alpha,\beta])$, 则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

证明 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数,

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

$$\because \Phi(t)=F[\phi(t)]$$

$$\Phi'(t)=\frac{dF}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=f(x)\varphi'(t)=f[\varphi(t)]\varphi'(t),$$

$\therefore \Phi(t)$ 是 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 的个原函数

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt=\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)$$

$\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$, $\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)=F[\varphi(\beta)]-F[\varphi(\alpha)]=F(b)-F(a)$, $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a),=\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$

□

注

- 当 $\alpha>\beta$, 公式仍成立.
- 换元必须对应地换积分限.
- 定积分的换元积分公式也可以反过来使用, 但须注意如明确引入新变量, 则必须换限.

例 5.20 证明以下结论 (偶倍奇零).

(1) 若 $f(x)$ 为奇函数, 则 $\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x=0$.

(2) 若 $f(x)$ 为偶函数, 则 $\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x=2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

证明

(1) $\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-a}^0 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$.而 $\int_{-a}^0 f(x)\,\mathrm{d}x=-\int_a^0 f(-t)\,\mathrm{d}t \xlongequal{(\text{令 } t=-x)} -\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t=-\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$. 从而 $\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x=-\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x=0$.

(2) 同理可证.

□

例 5.21 计算 $\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$.

解 方法 1: 由定积分的几何意义, 该积分等于圆周的第一象限部分的面积 $\frac{\pi a^2}{4}$.

方法 2: 利用 N—L 公式. $\int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$. 故

$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \dfrac{\pi a^2}{4}$

方法 3: 令 $x = a\sin t, \mathrm{d}x = a\cos t$

$$x=0 \Rightarrow t=0, x=a \Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} a^2\cos^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi a^2}{4}$$

方法 4: 令 $x = acost$ 仍可得到上述结果.

□

例 5.22 计算 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\sin x dx.$

解 令$t=\cos x, \mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x, x=\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow t=0, x=0 \Rightarrow t=1, \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x\sin x\,\mathrm{d}x = -\int_1^0 t^5\,\mathrm{d}t = \left.\frac{t^6}{6}\right|_0^1 = \frac{1}{6}.$

□

例 5.23 计算 $\displaystyle\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^3 x - \sin^5 x dx}.$

解 $\because f(x) = \sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x} = \cos x(\sin x)^{\frac{3}{2}} \therefore \displaystyle\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x dx} = \int_0^{\pi}\cos x(\sin x)^{\frac{3}{2}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x(\sin x)^{\frac{3}{2}}dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x(\sin x)^{\frac{3}{2}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\frac{3}{2}}d\sin x - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\sin x)^{\frac{3}{2}}d\sin x = \left.\frac{2}{5}(\sin x)^{\frac{5}{2}}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} - \left.\frac{2}{5}(\sin x)^{\frac{5}{2}}\right|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{4}{5}.$

□

例 5.24 计算 $\displaystyle\int_{\sqrt{e}}^{\frac{3}{4}}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x(1-\ln x)}}.$

解 原式 $\displaystyle = \int_{\sqrt{e}}^{e^{\frac{3}{4}}}\frac{d(\ln x)}{\sqrt{\ln x(1-\ln x)}} = \int_{\sqrt{e}}^{e^{\frac{3}{4}}}\frac{d(\ln x)}{\sqrt{\ln x}\sqrt{(1-\ln x)}} = 2\int_{\sqrt{e}}^{e^{\frac{3}{4}}}\frac{d\sqrt{\ln x}}{\sqrt{1-(\sqrt{\ln x})^2}} = 2[\arcsin(\sqrt{\ln x})]_{\sqrt{e}}^{\frac{3}{4}} = \frac{\pi}{6}.$

□

例 5.25 计算 $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{x+\sqrt{a^2-x^2}}dx(a>0).$

解 令 $x=a\sin t$, $dx = a\cos tdt$, $x=a \Rightarrow t=\dfrac{\pi}{2}, x=0 \Rightarrow t=0$. 原式 $\displaystyle = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a\cos t}{a\sin t+\sqrt{a^2(1-\sin^2 t)}}\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\sin t+\cos t}dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}\right)dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}[\ln|\sin t+\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$

□

例 5.26 计算 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{2x^2+x\cos x}{1+\sqrt{1-x^2}}dx.$

解 利用奇偶性,

$$原式 = \int_{-1}^{1} \frac{2x^2}{1+\sqrt{1-x^2}} = 4\int_0^1 \frac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2})} dx = 4\int_0^1 \frac{x^2\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)}{1-(1-x^2)\,\mathrm{d}x} = 4-4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= 4-\pi.$$

□

例 5.27 若 $f(x)$ 在 [0,1] 上连续, 证明

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,\mathrm{d}x$ (2) $\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,\mathrm{d}x$

由此计算 $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.

解

(1) 设 $x = \frac{\pi}{2}-t \quad \Rightarrow dx = -dt\ x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}, \quad x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0, \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right]dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx.$

(2) 设 $x = \pi - t \quad \Rightarrow dx = -dt,\ x = 0 \Rightarrow t = \pi, \quad x = \pi \Rightarrow t = 0, \int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = -\int_{\pi}^{0}(\pi-t)f[\sin(\pi-t)]dt = \int_0^{\pi}(\pi-t)f(\sin t)dt, \int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \pi\int_0^{\pi} f(\sin t)dt - \int_0^{\pi} tf(\sin t)dt$ $= \pi\int_0^{\pi} f(\sin x)dx - \int_0^{\pi} xf(\sin x)dx$ 故 $\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx.$

我们有 $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx = -\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\cos^2 x}d(\cos x) = -\frac{\pi}{2}[\arctan(\cos x)]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{4}.$

□

✍ 习题 5.3

1. 计算下列定积分.

(1) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) \mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \left(1-\sin^3 \theta\right) \mathrm{d}\theta$

(3) $\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2}\, \mathrm{d}x$

(4) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x$

(5) $\displaystyle\int_{-5}^{5} \frac{x^3 \sin^2 x}{x^4+2x^2+1} \mathrm{d}x$

(6) $\displaystyle\int_{-2}^{-\sqrt{2}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

5.4 定积分计算的分部积分法

定积分也可以象不定积分一样进行分部积分,

定理 5.8. 分部积分公式一

设 $u(x), v(x)$ 都是 $[a,b]$ 上的可微函数, 而且 $u', v' inR([a,b])$, 则

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x.$$

证明 $(uv)' = u'v + uv', \int_a^b (uv)'dx = [uv]_a^b, [uv]_a^b = \int_a^b u'vdx + \int_a^b uv'dx, \Rightarrow \int_a^b udv = [uv]_a^b - \int_a^b vdu.$ □

例 5.28 计算 $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx.$

解 令 $u = \arcsin x, dv = dx$, 则 $du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, v = x$ $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx = [x \arcsin x]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} d(1-x^2) = \frac{\pi}{12} + \left[\sqrt{1-x^2}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1.$ □

定理 5.9. 分部积分公式二

设 $f \in R([a,b]), g \in R([a,b])$, 且记

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t + A, \quad G(x) = \int_a^x g(t)\mathrm{d}t + B$$

则

$$\int_a^b F(x)g(x)\mathrm{d}x = F(x)G(x)\Big|_a^b - \int_a^b G(x)f(x)\mathrm{d}x$$

例 5.29 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{xdx}{1+\cos 2x}.$

解 $\because 1+\cos 2x = 2\cos^2 x \therefore \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{xdx}{1+\cos 2x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{xdx}{2\cos^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{2} d(\tan x) = \frac{1}{2}[x \tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}[\ln \sec x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} - \frac{\ln 2}{4}.$ □

例 5.30 计算 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2+x)^2} dx.$

解

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2+x)^2}dx &= -\int_0^1 \ln(1+x)d\frac{1}{2+x}\\ &= -\left[\frac{\ln(1+x)}{2+x}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{2+x}d\ln(1+x)\\ &= -\frac{\ln 2}{3} + \int_0^1 \frac{1}{2+x}\cdot\frac{1}{1+x}dx\\ &= -\frac{\ln 2}{3} + [\ln(1+x)-\ln(2+x)]_0^1\\ &= \frac{5}{3}\ln 2 - \ln 3.\end{aligned}$$

□

例 5.31 设 $f(x)=\int_1^{x^2}\frac{\sin t}{t}dt$, 求 $\int_0^1 xf(x)dx$.

解 因为 $\frac{\sin t}{t}$ 没有初等形式的原函数，无法直接求出 $f(x)$，所以采用分部积分法

$$\begin{aligned}\int_0^1 xf(x)dx &= \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)d\left(x^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left[x^2f(x)\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 x^2df(x)\\ &= \frac{1}{2}f(1) - \frac{1}{2}\int_0^1 x^2f'(x)dx\end{aligned}$$

$\because f(x)=\int_1^{x^2}\frac{\sin t}{t}dt,\quad f(1)=\int_1^1\frac{\sin t}{t}dt=0\ f'(x)=\frac{\sin x^2}{x^2}\cdot 2x=\frac{2\sin x^2}{x}.$

$\therefore \int_0^1 xf(x)dx = \frac{1}{2}f(1)-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2f'(x)dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 2x\sin x^2dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 \sin x^2dx^2$ $=\frac{1}{2}\left[\cos x^2\right]_0^1=\frac{1}{2}(\cos 1-1).$

□

例 5.32 设 $f(x)$ 连续, 证明

$$\int_0^x (x-t)f(t)dt = \int_0^x\left[\int_0^t f(u)du\right]dt$$

证明 记 $F(x)=\int_0^x (x-t)f(t)dt,\ \ G(x)=\int_0^x\left[\int_0^t f(u)du\right]dt\ F'(x)=G'(x)=\int_0^x f(t)dt \Rightarrow$ $F(x)-G(x)=C$, 而 $F(0)=G(0)=0$, 故 $F(x)=G(x)$.

□

练习 5.6 证明定积分公式

$$\begin{aligned}I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx\\ &= \begin{cases}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, & n \text{ 为正偶数}\\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}, & n \text{ 为大于1 的正奇数}\end{cases}\end{aligned}$$

✍ 习题 5.4

1. 计算下列定积分.

(1) $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x}\,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int_1^e x\ln x\,\mathrm{d}x$

(3) $\displaystyle\int_0^1 x\arctan x\,\mathrm{d}x$

(4) $\displaystyle\int_1^e \sin(\ln x)\,\mathrm{d}x$

(5) $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x|\,\mathrm{d}x$

2. 设 $f''(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $f(0)=1$, $f(2)=3, f'(2)=5$, 求 $\displaystyle\int_0^1 xf''(2x)\,\mathrm{d}x$.

5.5 定积分中值定理

定理 5.10. 定积分第一中值定理

设 $g \in R([a,b])$, 且函数值不变号 (即对一切 $x \in [a,b], g(x) \geqslant 0$ 或 $g(x) \leqslant 0$).
(i) 若 $f \in R([a,b])$, 且记 $M = \sup\limits_{[a.b]}\{f(x)\}, m = \inf\limits_{[a,b]}\{f(x)\}$, 则存在 $\mu : m \leqslant \mu \leqslant M$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \mu \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

(ii) 若 $f \in C([a,b])$, 则存在 $\xi \in [a,b]$, 使得 $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

例 5.33 证明以下结论:
(1) 设 $f(x)$ 在 [0,1] 上可导, 且有等式 $f(1) = 4\displaystyle\int_0^{1/4} \mathrm{e}^{1-x^3} f(x)\mathrm{d}x$, 则存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f'(\xi) = 3\xi^2 f(\xi)$.
(2) 设 $f \in C^{(2)}([-1,1]), f(0) = 0$, 则存在 $\xi \in [-1,1]$, 使得

$$f''(\xi) = 3\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x$$

(3) 设 $f \in C([0,\pi])$, 且有等式

$$\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x = 0, \quad \int_0^\pi f(x)\cos x \ \mathrm{d}x = 0$$

则存在 $\xi_1, \xi_2 \in (0,\pi)$, 使得 $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$.
(4) 设 $F \in C([a,b]), G(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微，且 $G'(x) \geqslant 0, G' \in R([a,b])$, 则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x F(t)G'(t)\mathrm{d}t = F(x)G'(x)$$

证明 (1) 由题设知, 存在 $\xi_1 \in (0,1/4)$, 使得

$$f(1) = 4 \cdot \mathrm{e}^{1-\xi_1^3} f(\xi_1) \cdot \frac{1}{4}, \quad f(1) = \mathrm{e}^{1-\xi_1^3} \cdot f(\xi_1)$$

作函数 $F(x) = \mathrm{e}^{1-x^3} f(x)$, 则 $F(1) = F(\xi_1)$. 由此知存在 $\xi \in (\xi_1, 1)$, 使得 $F'(\xi) =$

$$0, \text{ 即} \mathrm{e}^{1-\xi^3}\left[f'(\xi) - 3\xi^2 f(\xi)\right] = 0, f'(\xi) = 3\xi^2 f(\xi)$$

(2) 将 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处展成 Taylor 公式

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\theta x)x^2}{2}, \quad 0 < \theta < 1$$

注意到 $f(0) = 0$, 以及 x 是奇函数, 我们有

$$\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 f''(\theta x)x^2 \ \mathrm{d}x$$

假设 $M = \max\{f''(x) : -1 \leqslant x \leqslant 1\}, m = \min\{f''(x) : -1 \leqslant x \leqslant 1\}$, 则可得

$$\frac{1}{2}m\int_{-1}^1 x^2 \ \mathrm{d}x \leqslant \int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}M\int_{-1}^1 x^2 \ \mathrm{d}x$$

$$\frac{m}{3} \leqslant \int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{M}{3}, m \leqslant 3\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant M$$

根据 $f''(x)$ 的近续性可知, 存在 $\xi \in [-1,1]$, 使得 $f''(\xi) = 3\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$.

(3) 如果对题设两个等式直接用中值公式, 虫可得 $f(\xi') = 0 = f(\xi'')\cos\xi''$, 但不能保证 $\xi' \neq \xi''$ 且还有可能 $\cos\xi'' = 0$. 因此想到更换因子 $\cos x$, 而采用分部积分法. 令 $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t (0 \leqslant x \leqslant \pi)$, 则依题设可知 $F(\pi) = F(0) = 0$. 由此可得

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_0^{\pi} f(x)\cos x \ \mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \cos x \ \mathrm{d}F(x) = F(x)\cos x|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} F(x)\sin x \ \mathrm{d}x \\
&= 0 + \int_0^{\pi} F(x)\sin x \ \mathrm{d}x = \pi F(\xi)\sin\xi, \quad 0 < \xi < \pi
\end{aligned}
$$

由此知 $F(\xi) = 0$. 这说明 $f(x)$ 的原函数 $F(x)$ 有三个零点 : $0, \xi, \pi$, 从而 $f(x)$ 就有两个不同零点.

(4) 根据积分中值公式, 我们有

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{h}\int_x^{x+h} F(t)G'(t)\mathrm{d}t = F(x+\theta h)\int_x^{x+h} G'(t)\mathrm{d}t/h \\
=&F(x+\theta h)\frac{G(x+h)-G(x)}{h} \quad (0 < \theta < 1),
\end{aligned}
$$

由此即得所证.

□

例 5.34 (中值公式推广形式) 设 $f \in R([a,b])$, 且有 $F'(x) = f(x)(a \leqslant x \leqslant b)$. 又 $g \in R([a,b])$ 且不变号 , 则存在 $\xi \in (a,b)$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

证明 不妨假定 $g(x) \geqslant 0$ 且 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$, 以及 $m = \inf\limits_{[a,b]}\{f(x)\} \leqslant f(x) \leqslant \sup\limits_{[a,b]}\{f(x)\} = M(a \leqslant x \leqslant b)$, 则存在 μ, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \mu\int_a^b g(x)\mathrm{d}x, \quad m \leqslant \mu \leqslant M$$

若 $m < \mu < M$, 则存在 $[a,b]$ 中的 $x_1, x_2 : x_1 < x_2$,

$$m \leqslant f(x_1) < \mu, \quad \mu < f(x_2) \leqslant M$$

即 $F'(x_1) < \mu < F'(x_2)$. 根据导函数的介值性, 可知存在 $\xi : x_1 < \xi < x_2$, 使得 $f(\xi) = F'(\xi) = \mu$ 由此即得所证.

□

定理 5.11. 定积分第二中值定理 ★

(Bonnet 型) 设 $g \in R([a,b])$.

(i) 若 $f(x)$ 是 $[\,a,b]$ 上非负递减函数, 则存在 $\xi \in [a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(a)\int_a^{\xi} g(x)\mathrm{d}x$$

(ii) 若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上非负递增函数, 则存在 $\xi \in [a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(b)\int_{\xi}^b g(x)\mathrm{d}x$$

(Weierstrass 型) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是单调函数，$g \in R([a,b])$, 则存在 $\xi \in [a, \mathrm{b}]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(a)\int_a^\ell g(x)\mathrm{d}x + f(b)\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x$$

✍ 习题 5.5

1. 试证明下列不等式 $(0<a<b)$:

(1) $\left|\int_a^b \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{2}{a}$;

(2) $\left|\int_a^b \sin x^2\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{a}$.

(3) $\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$($f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的递增函数).

(4) $\left|\int_a^b \cos f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{2}{m}$($f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导 , $f'(x)$ 递减且 $f'(b)\geqslant m>0$).

证明 应用 Bonnet 型中值公式, 我们有

(1) $\left|\int_a^b \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\right| = \left|\frac{1}{a}\int_a^\xi \sin x\right|\mathrm{d}x \leqslant \frac{2}{a}$;

(2) $\left|\int_a^b \sin x^2\,\mathrm{d}x\right| = \frac{1}{2}\left|\int_{a^2}^{b^2} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t\right| = \frac{1}{2a}\left|\int_{a^2}^{\xi} \sin t\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{2}{2a} = \frac{1}{a}$.

(3) 应用 Weierstrass 型中值公式, 我们有

$$\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x = f(a)\int_a^\xi\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x + f(b)\int_\xi^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=f(a)\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x + [f(b)-f(a)]\int_\xi^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=0+[f(b)-f(a)]\left\{\frac{b^2-\xi^2}{2}-\frac{a+b}{2}(b-\xi)\right\} = [f(b)-f(a)]\frac{b-\xi}{2}(b+\xi-a-b)\geqslant 0$$

(4) 注意函数 f(x) 在 [a, b] 上非负递增, 故由 Bonnet 型第二中值定理知

$$\left|\int_a^b \cos f(x)\mathrm{d}x\right| = \left|\int_a^b \frac{f'(x)\cos f(x)}{f'(x)}\mathrm{d}x\right|$$

$$=\frac{1}{f'(b)}\left|\int_\xi^b f'(x)\cos f(x)\mathrm{d}x\right| = \frac{1}{f'(b)}|\sin f(b)-\sin f(\xi)| \leqslant \frac{2}{m}$$

□

5.6 *Stirling* 公式、*Wallis* 公式 ⋆

有许多课题, 特别是在统计和概率理论的计算中, 常须考察 $n!$ 的渐近估计. 对此, 我们不加证明地给出等价关系 (Stirling 公式) 1

$$\boxed{n! \sim \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2n\pi} \quad (n \to \infty)} \tag{5.6.1}$$

更确切地说, 有

$$\sqrt{2n\pi} \cdot n^n \mathrm{e}^{-n} < n! < \sqrt{2n\pi} n^n \mathrm{e}^{-n}\left(1+\frac{1}{4n}\right)$$

(Wallis 公式)

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2} \quad (n=1,2,\cdots).} \tag{5.6.2}$$

现在来证明公式 5.6.2. 由积分不等式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x \, \mathrm{d}x < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \, \mathrm{d}x < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x \, \mathrm{d}x$$

以及先例的计算可知

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$$

从而有

$$\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2} < \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2n}$$

估计上式左、右端的差, 即得

$$\frac{\pi}{2} - \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2n+1} < \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}\right)$$
$$= \left\{\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2n+1}\right\} \frac{1}{2n} < \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2n} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

即得所证.

注意以上证明用到了定积分公式（Wallis 公式）

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, \mathrm{d}x = \frac{(n-1)(n-3)\cdots 3\cdot 1}{(n)(n-2)\cdots 4\cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2}, \text{ 当 n 为偶数}$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, \mathrm{d}x = \frac{(n-1)(n-3)\cdots 4\cdot 2}{(n)(n-2)\cdots 3\cdot 1}, \text{ 当 n 为奇数}$$

且有

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x \, \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, \mathrm{d}x$$

1带 ⋆ 部分表示内容不要求掌握

5.7 反常积分

5.7.1 反常积分的定义

定义 5.4. 无穷限反常积分

设

$$L=\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(t)dt$$

存在且有限，则称反常积分 $\int_a^\infty f(t)dt$ 收剑，并记

$$\int_a^\infty f(t)dt=L=\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(t)dt.$$

若上述极限不存在或极限等于 $\pm\infty$，则称反常积分发散.

定义 5.5. 无界反常积分

设 $f:(a,b]\to R$ 对于任何 $c\in(a,b)$ 在 $[c,b]$ 上是可积的，而 f 在 a 的任何小邻域内是无界的. 若极限

$$L=\lim_{c\to a+0}\int_c^b f(t)dt$$

存在且有限，则称反常积分收敛，并记

$$\int_a^b f(t)dt=L=\lim_{c\to a+0}\int_c^b f(t)dt$$

若山述极限不存在或极限等于 $\pm\infty$，则称反常积分发散.

上述两种反常积分是两种典型的反常积分. 以下的反常积分

$$\int_{-\infty}^b f(t)dt=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(t)dt$$

和

$$\int_a^b f(t)dt=\lim_{c\to b-0}\int_a^c f(t)dt$$

可以类似地处理. 应该注意，有时我们会遇到上述这四种反常积分之外的积分. 但它们往往可以通过上述这四种反常积分表示出来. 例如

$$\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-x^2}dx=\int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{-x^2}dx+\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}dx$$

又如积分

$$\int_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}dt$$

其中 $0<x<1$，可以看成

$$\int_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}dt=\int_0^1 t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}dt+\int_1^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}dt$$

注 虽然 $[-1,1]$ 为对称区间，且 $\dfrac{1}{x^3}$ 是奇函数，但由于函数在 $x=0$ 处有瑕点，不能说积分等于 0.

例 5.35 考虑积分
$$\int_0^1 x^p dx$$
的敛散性.

当 $p \geqslant 0$ 时是可积的; 当 $p < 0$ 时, 它是不可积的, 因为这时被积函数在 [0,1] 上无界. 但作为反常积分, 当 $p > -1$ 时它收敛; 当 $p \leqslant -1$ 反常称分时它发散.

证明 这是因为当 $p \neq -1$ 时有
$$\lim_{\delta \to 0} \int_\delta^1 x^p dx = \lim_{\delta \to 0} \frac{1-\delta^{p+1}}{p+1} = \begin{cases} 1/(p+1), & 若 p > -1, \\ \infty, & 若 p < -1 \end{cases}$$
而当 $p = -1$ 时有
$$\lim_{\delta \to 0} \int_\delta^1 x^{-1} dx = \lim_{\delta \to 0} (\ln 1 - \ln \delta) = +\infty.$$

□

例 5.36 考虑积分
$$\int_1^\infty x^p dx$$
的敛散性.

作为反常积分, 当 $p < -1$ 时它收敛; 当 $p \geqslant -1$ 时它发散. 这是因为当 $p \neq -1$ 时有
$$\lim_{\delta \to \infty} \int_1^\delta x^p dx = \lim_{\delta \to \infty} \frac{\delta^{p+1}-1}{p+1} = \begin{cases} -1/(p+1), & 若 p < -1, \\ \infty, & 若 p > -1 \end{cases}$$
而当 $p = -1$ 时有
$$\lim_{\delta \to \infty} \int_1^\delta x^{-1} dx = \lim_{\delta \to \infty} (\ln \delta - \ln 1) = \infty.$$

注 作为一个特例, 可知瑕积分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^p} (p > 0)$ 在且仅在 $p < 1$ 时收敛.
此外, 同理可证瑕积分 $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^p} (p > 0)$ 在且仅在 $p < 1$ 时收敛.

由反常积分的定义和积分的分部积分公式与换元公式, 我们有

定理 5.12. 反常积分的分部积分公式

设函数 F 和 G 分别是函数 f 和 g 在区间 $[a, \infty)$ 上的原函数, 又设 $\displaystyle\int_a^\infty fG dx$ 在 $[a, \infty)$ 上收敛, 对于任何 $b > a, gF$ 在 $[a, b]$ 上可积, 且极限 $\displaystyle\lim_{b \to \infty} F(b)G(b) = F(\infty)G(\infty)$ 存在, 则反常积分 $\displaystyle\int_a^\infty g(x)F(x)dx$ 存在, 且
$$\int_a^\infty g(x)F(x)dx = F(\infty)G(\infty) - F(a)G(a) - \int_a^\infty f(x)G(x)dx$$

证明 令定积分的分部积分公式
$$\int_a^b g(x)F(x)dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b f(x)G(x)dx$$
中的 $b \to \infty$, 便可.

□

定理 5.13. 反常积分的换元公式

设 $\phi:[\alpha,\infty)\to I$ 是可微的，且导数 ϕ' 在 $[\alpha,\infty)$ 上连续，$f:I\to R$ 在 I 上连续，$\phi(\infty)=\lim\limits_{\beta\to\infty}\phi(\beta)$ 存在，且下式右端的反常积分收敛，则下式左端的积分或反常积分收敛，且

$$\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\infty)} f(x)dx=\int_{\alpha}^{\infty} f\circ\phi(u)\cdot\phi'(u)du$$

证明 在定积分的换元公式

$$\int_{\alpha}^{\beta} f\circ\phi(u)\cdot\phi'(u)du=\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x)dx$$

中，让 $\beta\to\infty$ 便可.

□

例 5.37 证明

$$\Gamma(x)=\int_0^{\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}dt$$

在 $x>0$ 时收敛.

解 这是因为

$$\int_0^{\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}dt=\int_0^{1} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}dt+\int_1^{\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}dt$$

右端第一项的被积函数在 $t=0$ 附近（当 $x<1$ 时）无界，但因 $t\geqslant 0$ 时，

$$\left|t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\right|\leqslant t^{x-1}$$

而反常积分

$$\int_0^1 t^{x-1}dt$$

在 $x>0$ 时是收敛的，反常积分

$$\int_0^1 t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}dt$$

在 $x>0$ 时收敛.

□

又因 $t\to\infty$ 时，$t^{x-1}\mathrm{e}^{-t/2}\to 0$，所以，当 t 充分大时，

$$\left|t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\right|\leqslant\left|t^{x-1}\mathrm{e}^{-t/2}\right|\mathrm{e}^{-t/2}\leqslant\mathrm{e}^{-t/2}$$

而

$$\lim_{b\to\infty}\int_1^b \mathrm{e}^{-t/2}dt=\lim_{b\to\infty}\left[-2\mathrm{e}^{-t/2}\right]_1^b=2\mathrm{e}^{-1/2}$$

所以反常积分

$$\int_1^{\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}dt$$

定义了一个自变量为 x 的 $\Gamma(x)$ 函数. Γ 函数是瑞士数学家 Euler 首先加以认真研

究的. 进一步:

$$\begin{aligned}\Gamma(x) &= \int_0^{\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}dt\\ &= t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty}(x-1)t^{x-2}\mathrm{e}^{-t}dt\\ &= (x-1)\Gamma(x-1)\end{aligned}$$

这 Γ 函数的一条重要性质. 又

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t}dt = -\mathrm{e}^{-t}\big|_0^{\infty} = 1$$

用数学归纳原理, 我们有: $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

例 5.38 计算下列反常积分:

(1) (p -积分)$I = \displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$.

(2) $I = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}$.

(3) $I = \displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^5}(a>1)$.

(4) $I = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^2\,\mathrm{d}x}{1+x^4}$.

解

1. (i) $p \neq 1: I = \displaystyle\lim_{A\to+\infty}\int_1^A\frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \begin{cases}-1/(1-p), & p>1,\\ +\infty, & p<1.\end{cases}$ (ii) $p=1: I = \displaystyle\lim_{A\to+\infty}\int_1^A\frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{A\to+\infty}\ln A = +\infty$.
   这说明 p -积分在 $p>1$ 时收敛, $p \leqslant 1$ 时发散.
2. $\displaystyle\int_0^A\frac{x\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^A x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}\right) = \frac{x}{1+\mathrm{e}^{-x}}\bigg|_0^A - \int_0^A\frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^{-x}} = \frac{A\mathrm{e}^A}{1+\mathrm{e}^A} - \int_0^A\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = A - \frac{A}{1+\mathrm{e}^A} - \ln(1+\mathrm{e}^A) + \ln 2 = A - \frac{A}{1+\mathrm{e}^A} - A - \ln(1+\mathrm{e}^{-A}) + \ln 2$ $\displaystyle I = \lim_{A\to+\infty}\int_0^A\frac{x\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty}\left[-\frac{A}{1+\mathrm{e}^A} - \ln(1+\mathrm{e}^{-A}) + \ln 2\right] = \ln 2$
3. $\displaystyle\int_a^A\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^s} = \frac{1}{1-s}\frac{1}{(\ln x)^{-1}}\bigg|_a^A = \frac{1}{s-1}\left[\frac{1}{(\ln a)^{-1}} - \frac{1}{(\ln A)^{5-1}}\right] \quad (s\neq 1)$.

   $\displaystyle s>1: I = \lim_{A\to+\infty}\int_a^A\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^s} = \frac{1}{s-1}\frac{1}{(\ln a)^{s-1}}$ 积分收敛

   $\displaystyle s<1: I = \lim_{A\to+\infty}\int_a^A\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^s} = +\infty$, 积分发散.

   $\displaystyle s=1: I = \int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\cdot\ln x} = \lim_{A\to+\infty}\int_a^A\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x} = \lim_{A\to+\infty}\ln(\ln x)\bigg|_a^A = +\infty$. (积分发散)
4. 用替换 $x=1/t$, $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t/t^2$, 可知 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^2\,\mathrm{d}x}{1+x^4} = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^4}$. 从而我们有

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1+1/x^2}{x^2+1/x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}(x-1/x)}{(x-1/x)^2+2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{x-1/x}{\sqrt{2}}\bigg|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\end{aligned}$$

□

例 5.39 计算下列反常积分

(1) $I=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(2x^2+1)\sqrt{1+x^2}}$　　(2) $I=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{x+1}+\mathrm{e}^{3-x}}$

(3) $I=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\left(x^2+a^2/x^2\right)}\mathrm{d}x(a>0)$　　(4) $I_n=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^n}(a\neq 0)$

解

1. 令 $x=\tan t$, 我们有 $I=\int_0^{\pi/2}\frac{\sec^2 t\ \mathrm{d}t}{(2\tan^2 t+1)\sec t}=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos t\ \mathrm{d}t}{2\sin^2 t+\cos^2 t}=\frac{\pi}{4}$
2. $I=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{3-x}(\mathrm{e}^{2x-2}+1)}=\frac{1}{\mathrm{e}^2}\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{x-1}\right)}{1+\left(\mathrm{e}^{x-1}\right)^2}=\frac{1}{\mathrm{e}^2}\frac{\pi}{4}$.
3. 将积分区间分段, $I=\left(\int_0^{\sqrt{a}}+\int_{\sqrt{a}}^{+\infty}\right)\mathrm{e}^{-\left(x^2+a^2/x^2\right)}\mathrm{d}x\triangleq I_1+I_2$. 令 $x=a/t$, 可知 $I_1=\int_{\sqrt{a}}^{+\infty}\frac{a}{t^2}\mathrm{e}^{-\left(t^2+a^2/t^2\right)}\mathrm{d}t.\quad I=\int_{\sqrt{a}}^{+\infty}\left(1+\frac{a}{x^2}\right)\mathrm{e}^{-(x-a/x)^2-2a}\ \mathrm{d}x$
   令 $t=x-a/x$, 有 $\mathrm{d}t=\left(1+a/x^2\right)\mathrm{d}x$, 故
   $$I=\mathrm{e}^{-2a}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-2a}$$
4. 应用分部积分公式, 我们有
   $$\begin{aligned}I_n&=\left.\frac{x}{(a^2+x^2)^n}\right|_0^{+\infty}+2n\int_0^{+\infty}\frac{x^2\ \mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^{n+1}}\\&=2n\int_0^{+\infty}\frac{a^2+x^2-a^2}{(a^2+x^2)^{n+1}}\ \mathrm{d}x=2nI_n-2na^2I_{n+1}\end{aligned}$$
   从而可知 $2na^2I_{n+1}=(2n-1)I_n,(2n-2)a^2I_n=(2n-3)I_{n-1}$. 由此得到
   $$\begin{aligned}I_n&=\frac{2n-3}{2n-2}\frac{2n-5}{2n-4}\cdots\frac{1}{2}\cdot I_1\cdot\left(\frac{1}{a^2}\right)^{n-1}\\&=\frac{(2n-3)(2n-5)\cdots 1}{(2n-2)(2n-4)\cdots 2}\frac{1}{a^{2n-2}}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}\\&=\frac{(2n-3)(2n-5)\cdots 1}{(2n-2)(2n-4)\cdots 2}\frac{1}{a^{2n-1}}\frac{\pi}{2}\cdot\varepsilon\quad\left(\varepsilon=\begin{cases}1, & a>0\\-1, & a<0\end{cases}\right).\end{aligned}$$

□

例 5.40 计算下列定积分:

(1) $I=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2 x\ \mathrm{d}x}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}(ab\neq 0)$　　(2) $I=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$

(3) $I=\int_0^{\pi}\frac{x\ \mathrm{d}x}{1+\cos\alpha\cdot\sin x}(0<\alpha<\pi/2)$

解

1. 令 $\tan x=t,\cos^2 x=1/\left(1+t^2\right),\sin^2 x=t\left(1+t^2\right)$, 我们有
   $I=\int_0^{+\infty}\frac{t^2\ \mathrm{d}t}{(a^2t^2+b^2)(1+t^2)}=\int_0^{+\infty}\frac{1}{b^2-a^2}\left(\frac{b^2}{a^2t^2+b^2}-\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t$ $=\frac{b^2}{a^2(b^2-a^2)}\cdot\frac{a}{b}\arctan\left.\frac{at}{b}\right|_0^{+\infty}-\frac{1}{b^2-a^2}\arctan t\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2a(a\pm b)}$ ($ab>0$ 时取"+"号, $ab<0$ 时取"—"号).

2. $$I=8\int_0^{\pi/4}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x+\cos^4 x}=8\int_0^{\pi/4}\frac{\mathrm{d}x}{\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)^2+2\cos^2 x\sin^2 x}$$
$$=8\int_0^{\pi/4}\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2(2x)+\frac{1}{2}\sin^2(2x)}=4\int_0^{\pi/4}\frac{\mathrm{d}\tan(2x)}{1+\tan^2(2x)/2}$$
$$\xlongequal{t=\tan(2x)}4\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2/2}=2\pi\sqrt{2}$$

3. 令 $x=\pi-\theta$, 我们有
$$I=\int_0^{\pi}\frac{\pi-\theta}{1+\cos\alpha\cdot\sin\theta}\mathrm{d}\theta=\pi\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+\cos\alpha\cdot\sin\theta}-I.$$
$$2I=\pi\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+\cos\alpha\cdot\sin\theta}\xlongequal{\tan\frac{\theta}{2}=t}2\pi\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+2t\cdot\cos\alpha+t^2}$$
$$=2\pi\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(t+\cos\alpha)^2+1-\cos^2\alpha}$$
$$=\frac{2\pi}{\sin\alpha}\arctan\left(\frac{t+\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\Big|_0^{+\infty}=\frac{2\pi}{\sin\alpha}\left[\frac{\pi}{2}-\arctan(\cot\alpha)\right]$$
$$=\frac{2\pi}{\sin\alpha}\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]=\frac{2\pi\alpha}{\sin\alpha},\quad I=\frac{\pi\alpha}{\sin\alpha}.$$

□

5.7.2 积分收敛与发散的判别法 ★

1. 非负函数积分敛散性的比较判别法

比较判别法主要针对非负函数而言的，下面以 $[a,+\infty)$ 为例论述判别法则，对 $(-\infty,b]$ 的情形也有相应的结果.

定理 5.14. 有界性定理

非负函数 $f(x)$ 的积分 $I=\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的必要充分条件是：存在正数 M，使得对任意的 $A:A>a$，均有 $\int_a^A f(x)\mathrm{d}x\leqslant M$.

定理 5.15. 比较判别法

设有定义在 $[a,+\infty)$ 上的两个非负函数 $f(x),g(x)$，它们满足 $0\leqslant f(x)\leqslant g(x),x\in[a,+\infty)$. (i) 若 $\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$ 收玫，则 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；(ii) 若 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 发散，则 $\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$ 发散.

推论 5.2. 比较判别法的极限形式

对于非负函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上的积分，若存在 $g(x)>0,x\in[a,+\infty)$，且存在极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l$，则

当 $l>0$ 时，积分 $I=\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 与 $J=\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$ 同敛散.

若 $l=0,J$ 收敛，则 I 收敛 (I 发散，J 发散)

若 $l=+\infty$，J 发散，I 发散 (I 收敛，J 收敛).

注 在上述定理中，取 $g(x)=x^{-p}$，且存在极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^pf(x)=l>0$，则积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛当且仅当 $p>1$.

2. 一般函数积分敛散性的判别法

这里所谓的一般函数，指的是其值可以变号的函数.

定义 5.6. 绝对收敛

设 $f\in R([a,b])$ (任意的 $b>a$). 若积分 $\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛，则称积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 是绝对收敛的，此时也称 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上是绝对可积的.

若上述积分发散，而 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则称 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 为条件收敛.

注 若 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上的积分绝对收敛，则 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上的积分必收敛.

推论 5.3. 绝对收敛的性质

设对任意的 $b > a, g \in R([a,b])$, 且 $g(x)$ 在 $[a,\infty)$ 上有界. 若 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛, 则积分 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛 , 且有 $\int_a^{+\infty} |f(x)g(x)|\mathrm{d}x \leqslant M\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ 其中 $|g(x)| \leqslant M(a \leqslant x < \infty)$

5.7.3 其他判敛法 *

最后, 当被积函数是两种不同类型的函数的乘积时, 我们有下列判别收敛的方法:

定理 5.16. *Weierstrass* 判别法

设 $f(x), g(x)$ 定义在 $[\,a,\infty)$ 上. 若

(i) 对任意的 $b: b > a, f \in R([a,b])$, 且 $f(x)$ 的变上限积分有界, 即存在正数 M, 使得 $\left|\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant M \quad (a \leqslant x < \infty)$ (当 $f \in C([a,\infty))$ 时, 上述条件就是指其原函数有界.)

(ii) $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调 , 且有 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$. 则反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛. (对于积分 $\int_{-\infty}^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$, 其收敛的条件也类似.)

定理 5.17. Abel 判别法

设 $f(x), g(x)$ 定义在 $[a,\infty)$ 上. 若 (i) 积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛

(ii) $g(x)$ 是 $[\,a,\infty)$ 上的有界单调函数, 则反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛. (对于积分 $\int_{-\infty}^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$, 其收敛的条件也类似.)

✍ 习题 5.7

1. 试判别下列反常积分的敛散性:

(1) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{2x^5-1}}\,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int_2^{+\infty} (\sqrt{x+1}-\sqrt{x})^p \ln\frac{x+1}{x-1}\,\mathrm{d}x$

(3) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p \ln^q x}$

2. 判别下列积分的敛散性:

(1) $\displaystyle I=\int_1^{+\infty} \tan\left(\frac{\sin x}{x}\right)\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle I=\int_1^{+\infty} \ln\left(\cos\frac{1}{x}\right)/x^p\,\mathrm{d}x$

3. 判别下列积分的敛散性:

(1) $\displaystyle I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x(p>0)$

(2) $\displaystyle I=\int_0^1 \frac{\cos^2(1/x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x.$

(3) $\displaystyle I=\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3}}$

(4) $\displaystyle I=\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x}-2x+\sqrt{x}}$

(5) $\displaystyle I=\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}}\mathrm{d}x$

4. 判别下列积分的敛散性

(1) $\displaystyle I=\int_0^1 \frac{\ln\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)}{\sqrt{x}\sin\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle I=\int_0^2 \frac{\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{\sin x}-1}$

(3) $\displaystyle I=\int_0^1 \frac{\arctan\left(x^2+x^{2a}\right)}{x\ln^\alpha(1+x)}\mathrm{d}x$

(4) $\displaystyle I=\int_0^1 x^a\ln^\beta x\,\mathrm{d}x$

(5) $\displaystyle I=\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x-\mathrm{e}^{-x^2}}{x^a\tan x}\,\mathrm{d}x$

(6) $\displaystyle I=\int_0^1 \mathrm{e}^{\frac{\alpha}{x}}(\cos x)x^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x$

5. 判别下列积分的敛散性:

(1) $\displaystyle I=\int_0^{+\infty} x^{\alpha-x}\,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle I=\int_0^{+\infty} \frac{\ln\left(1+x^{-2a}\right)}{\sqrt{x^a+x^{-\alpha}}}\mathrm{d}x(\alpha>0)$

(3) $\displaystyle I=\int_0^{+\infty} \left(x+\frac{1}{x}\right)^\alpha \ln\left(1+x^{-3\alpha}\right)\mathrm{d}x(\alpha>0)$

(4) $\displaystyle I=\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}|\ln x|^p\,\mathrm{d}x$

(5) $\displaystyle I=\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}x^{\alpha-1}|\ln x|^n\,\mathrm{d}x(\alpha>0)$

5.8 定积分几何应用举例

1. 平面图形的面积

① 由连续曲线 $y=f(x)$, 直线 $x=a,x=b(a<b)$ 与 x 轴所围的曲边梯形面积为

$$S=\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$$

更一般地, 由上、下两条连续曲线 $y=f_2(x)$ 与 $y=f_1(x)$ 以及两条直线 $x=a$ 与 $x=b(a<b)$ 所围图形的面积为

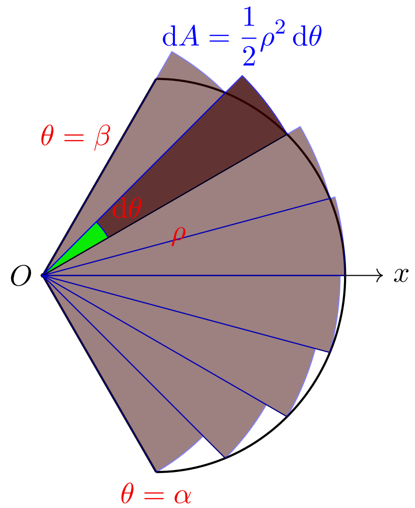
$$S=\int_a^b |f_2(x)-f_1(x)|\mathrm{d}x$$

② 如果曲线 C 由极坐标方程

$$\rho=\rho(\theta),\quad \theta\in[\alpha,\beta]$$

给出, 其中 $\rho(\theta)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续, $\beta-\alpha\leqslant 2\pi$. 由曲线 C 与两条射线 $\theta=\alpha,\theta=\beta$ 所围图形 (扇形) 的面积计算公式为

$$S=\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^n \frac{1}{2}\rho^2(\xi_i)\Delta\theta_i=\frac{1}{2}\int_a^\beta \rho^2(\theta)\mathrm{d}\theta$$



③ 如果曲线 C 由参数方程

$$\begin{cases} x=x(t)\\ y=y(t), \end{cases}\quad t\in[\alpha,\beta]$$

记 $a=x(\alpha),b=x(\beta)(a<b$ 或 $b<a)$, 则由曲线 C 与直线 $x=a,x=b$ 及 x 轴所围图形的面积公式为

$$S=\int_a^\beta \big|y(t)x'(t)\big|\mathrm{d}t$$

或

$$S=\int_a^\beta \big|x(t)y'(t)\big|\mathrm{d}t$$

注 如果由参数方程

$$\begin{cases} x=x(t)\\ y=y(t), \end{cases}\quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta$$

所表示的曲线是封闭的, 且 $x(t), y(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续可导, 即有

$$(x(\alpha), y(\alpha)) = (x(\beta), y(\beta))$$

且在 (α, β) 内曲线自身不再相交, 则由曲线自身所围图形的面积计算公式为

$$S = \left|\int_a^{\beta} y(t)x'(t)\mathrm{d}t\right|$$

或

$$S = \left|\int_a^{\beta} x(t)y'(t)\mathrm{d}t\right|$$

求面积时注意数形结合, 具体而言:

(1) 画出曲线草图

(2) 确定积分区间 $\Longleftarrow$ 从曲线交点得到

(3) 确定被积函数 $\Longleftarrow$ 从曲线方程得到

(4) 计算积分结果

例 5.41 求由抛物线 $y^2 = x$ 与直线 $x - 2y - 3 = 0$ 所围图形的面积.

解 法 1 抛物线 $y^2 = x$ 与直线 $x - 2y - 3 = 0$ 的交点为 $(1, -1)$ 与 $(9, 3)$. $S = \int_{-1}^{3} [(2y+3) - y^2]\mathrm{d}y = \left(y^2 + 3y - \dfrac{y^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{3} = (9+9-9) - \left(1 - 3 + \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{32}{3}$.

法 2 $S = S_1 + S_2 = \int_0^1 [\sqrt{x} - (-\sqrt{x})]\mathrm{d}x + \int_1^9 \left(\sqrt{x} - \dfrac{x-3}{2}\right)\mathrm{d}x$

$= 2\int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x + \int_1^9 \left(\sqrt{x} - \dfrac{x-3}{2}\right)\mathrm{d}x$

$= \dfrac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 + \left(\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{3}{2}x\right)\Big|_1^9 = \dfrac{32}{3}$.

□

✍ **练习** 5.7 求由直线 $y = x + 1$, x 轴, $x = -2$ 和 $x = 2$ 所围成的图形的面积.

✍ **练习** 5.8 求由曲线 $y = 1 - x^2$ 与 x 轴所围成的图形的面积.

2. 旋转体的体积

设 f 为 $[a, b]$ 上的连续函数, Ω 是由平面图形

$$\{(x, y) | a \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant |y| \leqslant |f(x)|\}$$

绕 x 轴旋转一周所得的旋转体. 易知截面 (半径为 $|f(x)|$ 的圆片) 面积

$$S(x) = \pi[f(x)]^2, \quad x \in [a, b]$$

于是, 旋转体 Ω 的体积公式为

$$V = \int_a^b S(x)\mathrm{d}x = \pi\int_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$$

同理, 设 g 为 $[a, b]$ 上的连续函数, Ω 是由平面图形

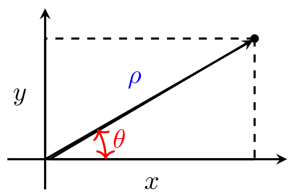
$$\{(x, y) | c \leqslant y \leqslant d, 0 \leqslant |x| \leqslant |g(y)|\}$$

绕 y 轴旋转一周所得的旋转体. 于是, 旋转体 Ω 的体积公式为

$$V=\int_c^d S(x)\mathrm{d}x=\pi\int_c^d[g(x)]^2\,\mathrm{d}x$$

注

- 曲边梯形 $0\leqslant y\leqslant f(x), a\leqslant x\leqslant b$ 绕 y 轴旋转所得立体的体积公式
$$V=2\pi\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x$$
- 曲边梯形 $0\leqslant x\leqslant g(y), c\leqslant y\leqslant d$ 绕 x 轴旋转所得立体的体积公式
$$V=2\pi\int_c^d y\,g(y)\mathrm{d}y$$
- 当曲线是由不同的方程给出时, 注意参数方程和直角坐标方程的转化. 直角坐标 (x,y) 和极坐标 (ρ,θ) 的关系为
$$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$$



3. 直角坐标下的弧长*

设曲线弧由参数方程 $\begin{cases}x=\phi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$ $(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$ 给出，则它的长度为

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{\phi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

例 5.42 求摆线 $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$ 对应 $0\leqslant t\leqslant 2\pi$ 的一拱的长度.

4. 极坐标下的弧长 *

设曲线弧由极坐标方程 $\rho=\rho(\theta)$ $(\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$ 给出，则它的长度为

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

例 5.43 计算阿基米德螺线 $\rho=a\theta$ $(a>0)$ 相应于 $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ 的一段弧长.

✍ 习题 5.8

1. 求下列曲线所围的图形面积

(1) $y=\dfrac{1}{x},\quad y=x,\quad x=2$;

(2) $y^2=4(x+1),\quad y^2=4(1-x)$;

(3) $y=x,\quad y=x+\sin^2 x,\quad x=0,\quad x=\pi$;

(4) $y=\mathrm{e}^x,\quad y=\mathrm{e}^{-x},\quad x=1$;

(5) $y=|\ln x|,\quad y=0,\quad x=0.1,\quad x=10$;

(6) 叶形线 $\begin{cases} x=2t-t^2, \\ y=2t^2-t^3, \end{cases}\quad 0\leqslant t\leqslant 2$;

(7) 星形线 $\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t \end{cases}\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi$;

(8) 阿基米德螺线 $r=a\theta,\theta=0,\theta=2\pi$;

(9) 对数螺线 $r=a\mathrm{e}^{\theta},\theta=0,\theta=2\pi$;

(10)蚌线 $r=a\cos\theta+b\quad(b\geqslant a>0)$;

(11)$r=3\cos\theta,\quad r=1+\cos\theta\quad \left(-\dfrac{\pi}{3}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{3}\right)$;

(12)双纽线 $r^2=a^2\cos 2\theta$;

(13)四叶玫瑰线 $r=a\cos 2\theta$.

(14)Descartes 叶形线 $x^3+y^3=3axy$;

(15)$x^4+y^4=a^2\left(x^2+y^2\right)$.

2. 求下列曲线绕指定轴旋转一周所围成的旋转体的体积.

(1) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, 绕 x 轴;

(2) $y=\sin x,\quad y=0,\quad 0\leqslant x\leqslant\pi$, (1) 绕 x 轴; (2) 绕 y 轴.

(3) 星形线 $\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t, \end{cases}$ $0\leqslant t\leqslant\pi$, 绕 x 轴;

(4) 旋轮线 $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t), \end{cases}\quad t\in[0,2\pi],\quad y=0$, (1) 绕 y 轴, (2) 绕直线 $y=2a$;

(5) $x^2+(y-b)^2=a^2,(0<a\leqslant b)$, 绕 x 轴;

(6) 心脏线 $r=a(1-\cos\theta)$, 绕极轴;

(7) 对数螺线 $r=a\mathrm{e}^{\theta},0\leqslant\theta\leqslant\pi$, 绕极轴;

(8) $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(x^2-y^2\right)$, 绕 x 轴.

第五章习题

1. 定积分习题

(1) $\displaystyle\int_0^1 x^2\left(2-x^2\right)^2 \mathrm{d}x;$

(2) $\displaystyle\int_1^2 \frac{(x-1)\left(x^2-x+1\right)}{2x^2} \mathrm{d}x;$

(3) $\displaystyle\int_0^2 (2^x+3^x)^2 \mathrm{d}x$

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} x\left(1-4x^2\right)^{10} \mathrm{d}x;$

(5) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{(x+1)\,\mathrm{d}x}{(x^2+2x+5)^2};$

(6) $\displaystyle\int_0^1 \arcsin x \,\mathrm{d}x;$

(7) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} \mathrm{d}x$

(8) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\tan^2 x \,\mathrm{d}x;$

(9) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \sin^2 x \,\mathrm{d}x$

(10) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \sin(\ln x) \,\mathrm{d}x$

(11) $\displaystyle\int_0^1 x^2 \arctan x \,\mathrm{d}x$

(12) $\displaystyle\int_1^{e+1} x^2 \ln(x-1) \,\mathrm{d}x$

(13) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\ln 2}} x^3\mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x$

(14) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{2\sqrt{x+1}} \mathrm{d}x$

(15) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}};$

(16) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

(17) $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4 \mathrm{d}x$

(18) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+1}{x^4+1} \mathrm{d}x$

(19) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}$

(20) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{\frac{x}{2-x}} \,\mathrm{d}x$

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且满足

$$\frac{2}{b-a}\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx = f(b)$$

证明: 存在 $\xi \in (a,b)$, 使得 $f'(\xi)=0$.

3. 设直线 $y=ax(0<a<1)$ 与抛物线 $y=x^2$ 所围成的图形的面积为 S_1, 且它们与直线 $x=1$ 所围成图形的面积为 S_2 .

(1) 确定 a 的值, 使得 S_1+S_2 达到最小, 并求出最小值;

(2) 该最小值所对应的平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

第四部分

无穷级数与微分方程

第六章 无穷级数

内容提要

- 无穷级数的概念
- 数项级数及其审敛法
- 幂级数
- 傅里叶级数 ★

6.1 无穷级数的概念与性质

6.1.1 无穷级数的概念

定义 6.1. 无穷级数

给定数列：$u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots$，式子

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

称为无穷级数（简称级数），记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，其中第 n 项称为级数的通项.

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的前 n 项的和 $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ 称为第 n 次部分和，各个部分和 $S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots$ 构成一个数列.

- 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ 收敛，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；
  - 此时称 S 为级数的和，
  - 称 $R_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$ 为级数的余项；
- 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 发散，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

例 6.1 讨论几何级数（或称等比级数）

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots$$

的敛散性，其中 $a \neq 0$，而 q 称为级数的公比.

例 6.2 讨论下列级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\dfrac{n+1}{n}$

6.1.2 收敛级数的性质

无穷级数的运算：化正为负. 我们来考虑下列问题：

$$\begin{aligned} S &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots\right) = 1 + \frac{1}{2} S \end{aligned}$$

$\therefore\ S=2$

即 $\quad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=2 \qquad \checkmark$

....

$$\begin{aligned} T &= 1+2+4+8+\cdots=1+(2+4+8+\cdots) \\ &= 1+2\cdot(1+2+4+\cdots)=1+2T \end{aligned}$$

$\therefore\ T=-1 \quad$ 即 $\quad 1+2+4+8+\cdots=-1 \qquad$ ✗

性质 6.1 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 都收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$ 也收敛，而且有

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n\pm\sum_{n=1}^{\infty}v_n.$$

性质 6.2 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}au_n$ 也收敛，而且有

$$\sum_{n=1}^{\infty}au_n=a\sum_{n=1}^{\infty}u_n.$$

推论

级数的每一项同乘以不为 0 的常数后，其敛散性不变.

例 6.3 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}+\frac{2}{5^n}$ 的和.

例 6.4 判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}3\ln\frac{n+1}{n}$ 的敛散性.

性质 6.3 在一个级数前面加上（或者去掉）有限项，级数的敛散性不变.

例 6.5 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的第 n 次部分和 $S_n=\frac{n}{2n-1}$，判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{n+2}$ 的敛散性. 若级数收敛，求出它的和.

考虑以下无穷级数的运算：其属于“无中生有”，显然是不正确的.

$$\begin{aligned} 0 &= 0+0+0+\cdots \\ &= (1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots \\ &= 1-1+1-1+1-1+\cdots \qquad ✗ \\ &= 1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+\cdots \\ &= 1+0+0+0+\cdots \\ &= 1 \end{aligned}$$

性质 6.4 如果一个级数收敛，加括号后所成的级数也收敛，且与原级数有相同的和.

例 6.6 已知几何级数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots=\frac{1}{1-1/2}=2.$$

加括号后得到的新级数

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{32}\right)+\cdots$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{3}{8} + \frac{3}{32} + \cdots = \frac{3/2}{1 - 1/4} = 2.$$

注 发散级数加括号后, 可能发散也可能收敛.

定理 6.1. 收敛的必要条件

如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则有 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

注 若通项不趋于零, 则级数一定发散.

例 6.7 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$ 的通项趋于 1, 因此它发散.

注 若通项趋于零, 则级数未必收敛.

例 6.8 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n}$ 的通项趋于 0, 但是它发散.

✍ **练习 6.1** 判断级数的敛散性. 如果级数收敛, 求出它的和.

(1) $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{7}{8} + \cdots + \frac{2n-1}{2n} + \cdots$ (2) $(\frac{3}{2} + \frac{1}{3}) + (\frac{3}{4} + \frac{1}{9}) + (\frac{3}{8} + \frac{1}{27}) + \cdots$

例 6.9 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ 的敛散性, 若收敛求其和.

解 寻找 v_n 使得 $\frac{n}{2^n} = v_n - v_{n+1}$. 设 $v_n = \frac{an+b}{2^n}$, 用待定系数法可以确定 $a = b = 2$. 从而 $S_n = v_1 - v_{n+1} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$, 级数的和为 2.

□

6.2 常数项级数的审敛法

6.2.1 正项级数及其审敛法

定义 6.2. 正项级数

若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足条件 $u_n \geqslant 0$（对所有 n），则称它为正项级数.

性质 6.5 正项级数的部分和数列 $\{S_n\}$ 是单调递增数列.

定理 6.2. 正项级数收敛的充要条件

正项级数收敛 $\Longleftrightarrow$ 它的部分和数列有界.

注 正项级数加括号后, 其敛散性不变.

6.2.1.1 比较判别法

定理 6.3. 比较判别法

对于两个正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$, 若有 $c > 0$ 使得 $u_n \leqslant cv_n$, 对所有 n, 则有

① 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛;

② 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散.

例 6.10 调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ 发散.

例 6.11 判断 p 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ 的敛散性.

例 6.12 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^n}$ 的敛散性.

定理 6.4. 比较判别法的极限形式

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 都为正项级数, 且有 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = l$.

① 若 $0 < l < +\infty$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 同敛散;

② 若 $l = 0$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛;

③ 若 $l = +\infty$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散.

例 6.13 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，能否推出级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 也收敛？

解 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n^2}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$，用比较判别法知级数收敛. □

例 6.14 判断以下级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n-1}$　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{3n^2+n}}$

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{4n^3-3}}$　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)$

✍ **练习 6.2** 判断级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3n-2}$　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\sqrt{n+1}}$

6.2.1.2 比值判别法

定理 6.5. 比值判别法

如果正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$，则有

① 若 $l < 1$，则级数收敛；
② 若 $l > 1$，则级数发散；
③ 若 $l = 1$，则级数可能收敛也可能发散.

例 6.15 设 $x > 0$，判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$ 的敛散性.

例 6.16 判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n\cos^2 \frac{n\pi}{3}}{2^n}$ 的敛散性.

6.2.1.3 根值判别法

定理 6.6. 根值判别法

如果正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$，则有

① 若 $\rho < 1$，则级数收敛；
② 若 $\rho > 1$，则级数发散；
③ 若 $\rho = 1$，则级数可能收敛也可能发散.

例 6.17 设 $a > 0$，判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{na}{n+1}\right)^n$ 的敛散性.

✍ **练习** 6.3 判定级数的敛散性:

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n(n+1)}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2^n(\arctan n)^n}$

6.3 任意项级数的敛散性

6.3.1 交错级数及其审敛法

定义 6.3. 交错级数

正负项相间的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$, 即

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + u_{2k-1} - u_{2k} + \cdots,$$

其中每个 $u_n > 0$, 称为交错级数.

定理 6.7. 莱布尼兹定理

如果交错级数满足条件

① $u_{n+1} \leqslant u_n$, $n = 1, 2, 3, \cdots$;

② $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$;

则级数收敛, 且其和 $S \leqslant u_1$, 余项满足 $|R_n| \leqslant u_{n+1}$.

例 6.18 交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ 收敛.

定义 6.4. 绝对收敛与条件收敛

对任意项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$,

① 称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛, 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛, 但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散;

② 称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛, 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 都收敛.

定理 6.8. 绝对收敛的性质

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛.

推论 6.1

对于任意项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l$, 则有

① 当 $l < 1$ 时级数绝对收敛;

② 当 $l > 1$ 时级数发散.

练习 6.4 判定级数是发散的, 还是条件收敛的, 还是绝对收敛的:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n!}{n^n}$

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$

✍ **练习 6.5** 判定级数是发散的, 还是条件收敛的, 还是绝对收敛的:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{2n-1}$　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}$

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n\cdot 2^n}$

✍ **练习 6.6** 下列级数中收敛的是 (　　)

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\ (0<p\leqslant 1)$　　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}-1\right)$

C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$　　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{5}{2}\right)^n$

✍ **练习 6.7** 设 $u_n\neq 0\ (n=1,2,3,\cdots)$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{u_n}=1$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)$ (　　)

A. 发散　　B. 绝对收敛

C. 条件收敛　　D. 收敛性不能由条件确定

6.4 幂级数

6.4.1 幂级数的概念

定义 6.5. 幂级数

形如 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 的级数, 即

$$a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

称为 $x-x_0$ 的幂级数. 特别地, 当 $x_0 = 0$ 时, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 即

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

称为 x 的幂级数.

对于幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$,

- 若 $x = x_0$ 时级数收敛, 称 x_0 为幂级数的收敛点
- 若 $x = x_0$ 时级数发散, 称 x_0 为幂级数的发散点

幂级数的全体收敛点构成的集合称为幂级数的收敛域.

定理 6.9. 幂级数的收敛域 (Abel)

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 设 $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$, 则

① 当 $|x| < 1/\rho$ 时, 级数绝对收敛;

② 当 $|x| > 1/\rho$ 时, 级数发散;

③ 当 $|x| = 1/\rho$ 时, 级数的敛散性未定.

称 $R = 1/\rho$ 为幂级数的收敛半径, 称 $(-R, R)$ 为幂级数的收敛区间.

注 当 $\rho = 0$ 时, 规定 $R = +\infty$; 当 $\rho = +\infty$ 时, 规定 $R = 0$.

例 6.19 给定幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 求出它的收敛域.

解 首先求出收敛半径 R;

- 若 $0 < R < +\infty$, 则收敛域有四种可能
  ① $(-R, R)$
  ② $[-R, R)$
  ③ $(-R, R]$
  ④ $[-R, R]$
- 若 $R = 0$, 则收敛域为 $\{0\}$;
- 若 $R = +\infty$, 则收敛域为 $(-\infty, +\infty)$.

□

例 6.20 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$ 的收敛域.

例 6.21 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^n$ 的收敛域.

例 6.22 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ 的收敛域.

例 6.23 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x+1)^n}{n}$ 的收敛域.

解 令 $t=2x+1$.

□

例 6.24 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3^n x^{2n}}{n}$ 的收敛域.

解 令 $t=x^2$ 或者令 $t=3x^2$.

□

练习 6.8 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(2n-1)(2n)}$ 的收敛域.

6.4.2 幂级数的运算性质

定理 6.10

设 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n$ 的收敛半径分别为 R_1 和 R_2, $R=\min\{R_1,R_2\}$, 则有

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n\Big)\cdot\Big(\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n\Big)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n,$$

其中 $c_n=\sum_{k=0}^{n}a_k b_{n-k}$, 等式在 $(-R,R)$ 中成立.

定理 6.11

设 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n$ 的收敛半径分别为 R_1 和 R_2, $R=\min\{R_1,R_2\}$, 则有

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n\Big)\Big/\Big(\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n\Big)=\sum_{n=0}^{\infty}d_n x^n,$$

其中等式在 $(-R,R)$ 的某个子区间内成立.

性质 6.6 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛域上连续.

性质 6.7 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛域上可积, 且有逐项积分公式

$$\int_0^x S(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n\,\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n x^n \, \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

逐项积分后得到的幂级数和原级数有相同的收敛半径.

性质 6.8 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛区间 $(-R, R)$ 上可导, 且有逐项求导公式

$$\begin{aligned} S'(x) &= \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\Big)' \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \end{aligned}$$

逐项求导后得到的幂级数和原级数有相同的收敛半径.

例 6.25 对几何级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ 逐项求导和逐项积分.

✍ **练习** 6.9 求无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{3^n}$ 的和.

✍ **练习** 6.10 设数列 $\{a_n\}$ 单调减少, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 部分和数列 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_n \ (n = 1, 2, \cdots)$ 无界, 则幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 的收敛域为 ( )

A. $(-1, 1]$ B. $[-1, 1)$

C. $[0, 2)$ D. $(0, 2]$

解 由莱布尼兹判别法 $x = 0$ 时级数收敛. 另外 $x = 2$ 时级数发散.

□

6.5 函数展开成泰勒级数

6.5.1 泰勒公式和泰勒级数

定理 6.12. 泰勒公式

如果函数 $f(x)$ 在包含 x_0 的区间 (a,b) 内有直到 $n+1$ 阶的连续导数，则当 $x \in (a,b)$ 时，$f(x)$ 可按 $x-x_0$ 的方幂展开为

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 \\ + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x), \end{aligned}$$

其中余项 $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, ξ 介于 x_0 和 x 之间.

当 $x_0 = 0$ 时, 泰勒公式称为麦克劳林公式

$$\begin{aligned} f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 \\ + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x), \end{aligned}$$

其中 $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$, ξ 介于 0 和 x 之间.

令 $\xi = \theta x$, 则 $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$, $0 < \theta < 1$.

定义 6.6. 泰勒级数

如果 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内各阶导数都存在, 而且当 $n \to \infty$ 时 $R_n(x) \to 0$, 则得

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

该级数称为函数 $f(x)$ 的泰勒级数.

特别地, 当 $x_0 = 0$ 时, 上式变成

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,$$

该级数称为函数 $f(x)$ 的麦克劳林级数.

6.5.2 初等函数的幂级数展开式

1. 直接展开法

   例 6.26 求初等函数的幂级数展开式.

   (1) $f(x) = \mathrm{e}^x$　　(2) $f(x) = \sin x$

   (3) $f(x) = (1+x)^\alpha$

2. 间接展开法

   利用常见初等函数的幂级数展开式

①$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$

②$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots$

③$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$

④$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$

⑤$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + \cdots$

⑥$(1+x)^\alpha = 1 + C_\alpha^1 x + C_\alpha^2 x^2 + C_\alpha^3 x^3 + \cdots + C_\alpha^n x^n + \cdots$

例 6.27 求初等函数的幂级数展开式.

(1) $f(x) = \ln(1+x)$

(2) $f(x) = \arctan x$

(3) $f(x) = \cos x$

例 6.28 求 $\arcsin x$ 的幂级数展开式.

解 由 $(1+x)^\alpha$ 的幂级数展开式, 可得

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \cdots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \cdots$$

等式两边从 0 到 x 积分, 即有

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \cdots$$

□

例 6.29 将 $f(x) = \arctan\frac{1+x}{1-x}$ 展开为 x 的幂级数.

解 $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$, $x \in (-1,1)$.

$$f(x) - f(0) = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$$

另外 $x = \pm 1$ 时级数也收敛, 故收敛区间为 $[-1,1]$.

□

例 6.30 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ 的和函数.

解 $\frac{1}{2}\sin x + \frac{x}{2}\cos x$, $x \in (-\infty,+\infty)$.

□

✍ **练习 6.11** 将以下函数 $\mathrm{e}^{-x/3}$ 展成对应点 $x = x_0$ 处的幂级数.

(1) $\mathrm{e}^{-x/3}$, $x = 0$

(2) $\sin^2 x$, $x = 0$

(3) $\dfrac{x}{x+1}$, $x=0$

(4) $\dfrac{1}{5-x}$, $x=2$

(5) $\ln(1-x^2)$, $x=0$

(6) $\dfrac{x}{x+1}$, $x=1$

✍ **练习** 6.12 将函数 $\ln(2+x-3x^2)$ 展开为 x 的幂级数.

6.6 幂级数的应用 ★

✍ **练习 6.13** 计算下列数的近似值.

(1) e

(2) π

(3) $\sqrt[5]{245}$

(4) $\int_0^{0.2} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

推论 6.2. 欧拉

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}.$$

证明 由 $\arcsin x$ 的展开式及 $\int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1} t\,\mathrm{d}t$ 的公式有:

$$\arcsin x = x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7}+\cdots$$

$$t=\sin t+\frac{1}{2}\frac{\sin^3 t}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{\sin^5 t}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{\sin^7 t}{7}+\cdots$$

从 0 到 $\frac{\pi}{2}$ 积分, 得到 $\frac{\pi^2}{8}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots$.

□

推论 6.3. 欧拉

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}.$$

证明

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} &= 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots\\
&=\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\cdots\right)\\
&\quad+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}+\cdots\right)\\
&=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}
\end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

□

6.7 傅里叶级数 ★

6.7.1 问题的提出

1. 认识声波信号
   声音由物体的振动产生, 如乐器演奏, 声带振动.
   - 基本的简谐振动产生正弦波 $y = A\sin(\omega t + \varphi)$
     - 振幅 A 反映声音的音量
     - 频率 ω 反映声音的音调
   - 复杂的物体振动的声波由不同频率的正弦波组成.
     - 各频率正弦波的比例反映声音的音色

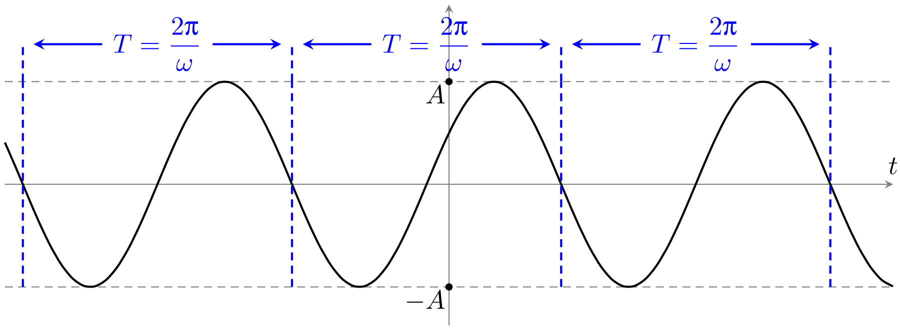
   人耳能感知的声音频率在 20Hz 至 20000Hz 之间, 话音的频率在 300Hz 至 3400Hz 之间. 现在的问题是:
   - 如何记录声音?
   - 如何压缩声音?
   - 如何去除噪音?
2. 音频文件的波形
   许多音乐播放器都可以在播放时显示音频文件的波形. 以 Windows Media Player 为例:
   (1) 在音频文件的右键菜单选择
   "打开方式 → Windows Media Player"
   (2) 在 "Windows Media Player" 的右键菜单选择
   "可视化效果 → 条形与波浪 → 波形"

   播放时可以随时暂停, 并查看当前时刻的波形.

6.7.2 三角级数与三角函数系

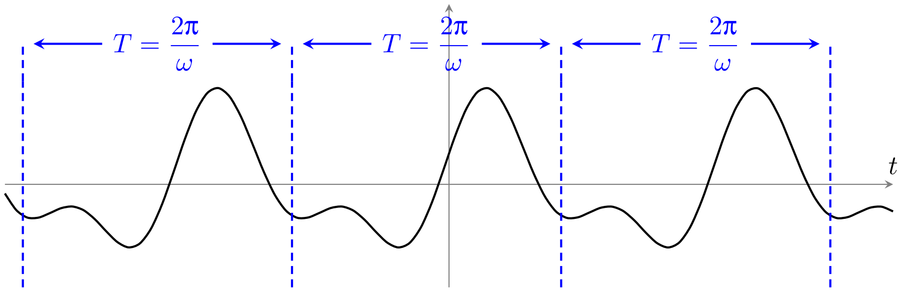
1. 正弦函数 $y = A\sin(\omega t + \varphi)$ 具有周期 $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, 即

$$A\sin(\omega t + \varphi) = A\sin(\omega(t + T) + \varphi)$$



设 n 为正整数, 正弦函数 $y = A_n\sin(n\omega t + \varphi_n)$ 的最小正周期是 $\dfrac{2\pi}{n\omega}$, 显然 $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ 也是周期.

设 $f(t)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的周期函数, 周期也是 $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.



2. 是否可将周期函数表示成正弦级数组成的级数

$$f(t)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(n\omega t+\varphi_n)\ ?$$

设 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2l$, 则 $f(t)$ 有周期区间为 $[-l,l]$,

$$\begin{aligned}A_n\sin(n\omega t+\varphi_n)&=A_n\sin\left(\frac{n\pi t}{l}+\varphi_n\right)\\&=A_n\left[\sin\varphi_n\cos\frac{n\pi t}{l}+\cos\varphi_n\sin\frac{n\pi t}{l}\right]\\&=a_n\cos\frac{n\pi t}{l}+b_n\sin\frac{n\pi t}{l}\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}f(t)&=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(n\omega t+\varphi_n)\\&=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi t}{l}+b_n\sin\frac{n\pi t}{l}\right)\end{aligned}$$

若周期 $T=2\pi$ $(l=\pi)$. $f(x)$ 有周期区间为 $[-\pi,\pi]$,

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$$

性质 6.9 三角函数系 $1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \cdots,\ \cos nx,\ \sin nx,\ \cdots$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上正交. 即上述任何两个相异函数乘积, 在 $[-\pi,\pi]$ 上积分为零:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x=0,\quad \int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x=0\quad (n\in\mathbb{N})$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cdot\cos nx\,\mathrm{d}x=0\qquad (k,n\in\mathbb{N},\ k\neq n)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cdot\sin nx\,\mathrm{d}x=0\qquad (k,n\in\mathbb{N},\ k\neq n)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cdot\cos nx\,\mathrm{d}x=0\qquad (k,n\in\mathbb{N},\ k\neq n)$$

…………………………另外 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\,\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,\mathrm{d}x=\pi\quad (n\in\mathbb{N})$

6.7.3 函数展开为傅里叶级数

定理 6.13. 傅里叶系数

若周期为 2π 的函数 $f(x)$ 能展开为三角级数

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \cos nx + b_n \sin nx\Big)$$

则有

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \,\mathrm{d}x \quad (n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx \,\mathrm{d}x \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

我们称 a_n, b_n 为傅里叶系数.

定义 6.7. 傅里叶级数

$f(x)$ 的傅里叶级数定义为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \cos nx + b_n \sin nx\Big)$$

其中

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \quad (n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$$

例 6.31 何时有 $f(x) \stackrel{?}{=} \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

定理 6.14. 收敛定理

设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，如果它满足：

- 在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点
- 在一个周期内至多只有有限个极值点

那么 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛，并且

① 当 x 是 $f(x)$ 的连续点时，级数收敛于 $f(x)$

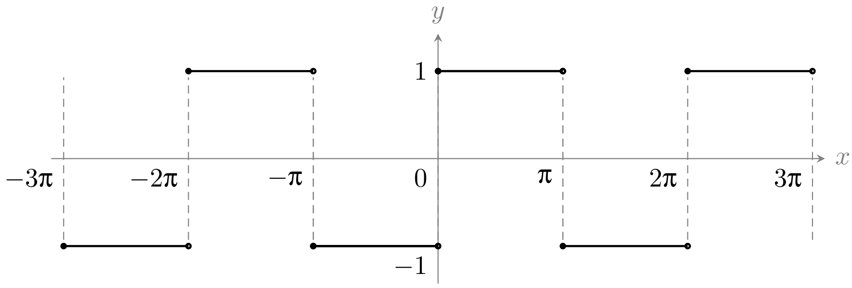
② 当 x 是 $f(x)$ 的间断点时，级数收敛于

$$\frac{1}{2}[f(x^-) + f(x^+)]$$

例 6.32 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为

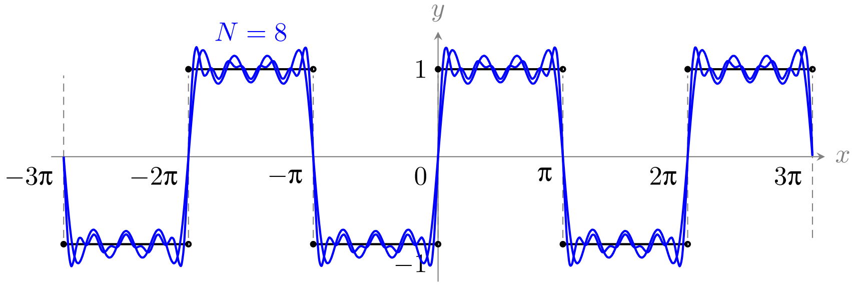
$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \leqslant x < 0, \\ 1, & 0 \leqslant x < \pi. \end{cases}$$

求出 $f(x)$ 的傅里叶级数.



解 $f(x)$ 的傅里叶级数是 $\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n-1}\sin\left[(2n-1)x\right]$. □

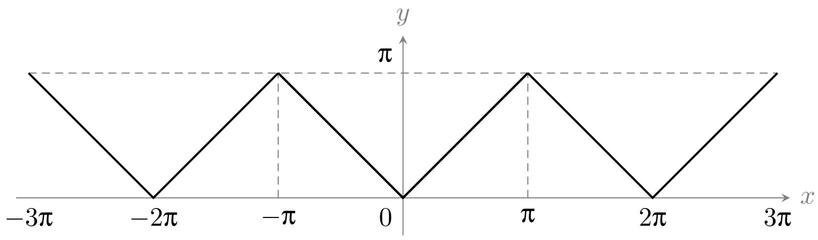
考虑级数的部分和, 即前 N 项之和:



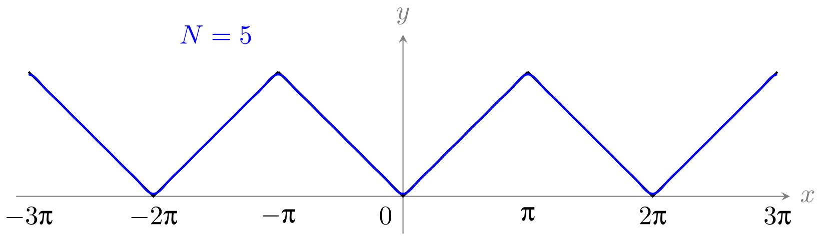
例 6.33 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数, 在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为

$$f(x)=|x|$$

求出 $f(x)$ 的傅里叶级数.



$f(x)$ 的傅里叶级数是 $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos[(2n-1)x]}{(2n-1)^2}$ 考虑级数的部分和, 即前 N 项之和:



6.7.4 正弦级数和余弦级数

性质 6.10 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数,

- 若 $f(x)$ 是奇函数, 则傅里叶级数为正弦级数

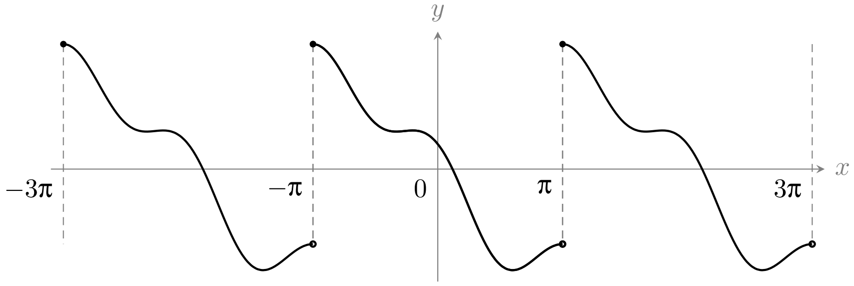
$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx,\qquad b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x$$

- 若 $f(x)$ 是偶函数, 则傅里叶级数为余弦级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x$$

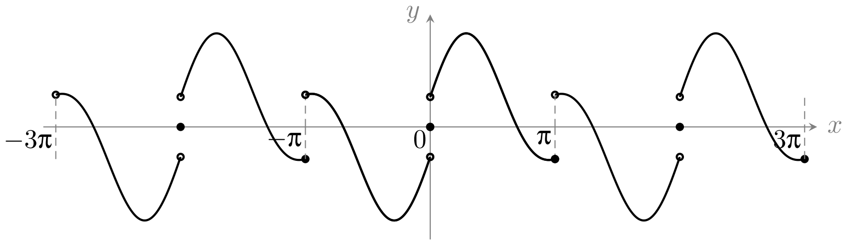
1. 周期延拓

设 $f(x)$ 是定义在区间 $[-\pi,\pi)$（或 $(-\pi,\pi]$）上的函数, 可以对其进行周期延拓, 从而得到定义在 $\mathbb{R}$ 上的周期函数:



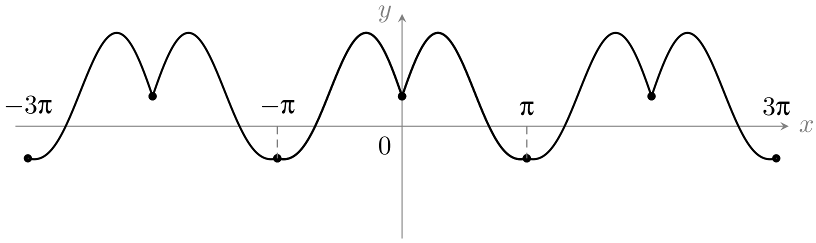
延拓后的周期函数仍记为 $f(x)$, 此时可作傅里叶展开.

2. 奇延拓 设 $f(x)$ 是定义在区间 $(0,\pi]$ 上的函数, 可以对其进行奇延拓, 从而得到定义在 $\mathbb{R}$ 上的周期奇函数.



3. 偶延拓

设 $f(x)$ 是定义在区间 $[0,\pi]$ 上的函数, 可以对其进行偶延拓, 从而得到定义在 $\mathbb{R}$ 上的周



期偶函数.

例 6.34 将下面函数分别展开成正弦级数和余弦级数

$$f(x)=\begin{cases}\cos x, & 0\leqslant x<\pi/2,\\ 0, & \pi/2\leqslant x\leqslant\pi.\end{cases}.$$

注 积化和差公式

$$\begin{aligned}
\sin x\cos y &= \frac{1}{2}\Big(\sin(x+y)+\sin(x-y)\Big)\\
\cos x\sin y &= \frac{1}{2}\Big(\sin(x+y)-\sin(x-y)\Big)\\
\cos x\cos y &= \frac{1}{2}\Big(\cos(x+y)+\cos(x-y)\Big)\\
\sin x\sin y &= -\frac{1}{2}\Big(\cos(x+y)-\cos(x-y)\Big)
\end{aligned}$$

例 6.35 将 $f(x)=\begin{cases} x, & 0\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{2} \\ 2-2x, & \frac{\pi}{2}<x<\pi \end{cases}$ 展开成傅里叶级数 $S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$ $(-\infty<x<\infty)$，其中 $a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x$ $(n=0,1,2,\cdots)$，则

$S(-\frac{5\pi}{2})$ 等于 ( )

A. $\frac{\pi}{2}$

B. $-\frac{\pi}{2}$

C. $\frac{3\pi}{4}$

D. $-\frac{3\pi}{4}$

解 偶延拓, $S(-\frac{5\pi}{2})=S(-\frac{\pi}{2})=S(\frac{\pi}{2})$.

□

6.7.5 一般周期函数的傅里叶级数

假设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上周期函数, 周期为 $T=2l$, 其傅里叶级数为:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

其中

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x\quad(n=0,1,2,3,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x\quad(n=0,1,2,3,\cdots)$$

例 6.36 设 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数, 它在 $[-2,2]$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases} 0, & -1\leqslant x<0, \\ h, & 0\leqslant x\leqslant 2. \end{cases}.$$

将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数.

例 6.37 将 $f(x)=2+|x|$ $(-1\leqslant x\leqslant 1)$ 展开成以 2 为周期的傅里叶级数.

解 $b_n=0$, $a_0=5$, $a_n=\frac{2}{n^2\pi^2}\Big((-1)^n-1\Big)$.

□

第六章 习题

1. 讨论下列级数的收敛性 (包括条件收敛与绝对收敛).

(1) $1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4!}+\frac{1}{5}-\cdots$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+x}(x\neq -n)$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{x}{n}$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{n}}$

(5) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\ln^2 n}{n}$

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos\frac{n\pi}{3}$

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{4^n\sin^{2n}x}{n}$

(8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n+1)x\cos(n-1)x}{n^p}$

(9) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{2^n}x^n$

(10) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln(2+\frac{1}{n})}{\sqrt{(3n-2)(3n+2)}}$

(11) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n^p\ln^q n}$

(12) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\frac{a}{1+a^n}(a>0)$

2. 求下列幂级数的收敛半径与收敛域.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}x^n$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)(x-1)^n$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n\cdot 2^n}$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln(n+1)}{n+1}(x+1)^n$

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$

(6) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln^2 n}{n^n}x^{n^2}$

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}x^n$

(8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$

(9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^n$

3. 应用逐项求导或逐项求积分等性质, 求下列幂级数的和函数, 并指出它们的定义域.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$

(2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^2x^n$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$

(6) $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n!}x^n$

4. 应用幂级数性质求下列级数的和.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{2^n}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+2)}{4^{n+1}}$

(4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{2^n}$

(5) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3^n(2n+1)}$

(6) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n(n^2-1)}$

(7) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{n+1}}{n!}$

5. 求下列函数在指定点的 Taylor 展开, 并确定它们的收敛范围:

(1) $1+2x-3x^2+5x^3, x_0=1$

(2) $\dfrac{1}{x^2}, x_0=-1$

(3) $\dfrac{x}{2-x-x^2}, x_0=0$

(4) $\sin x, x_0=\dfrac{\pi}{6}$

(5) $\ln x, x_0=2$

(6) $\sqrt[3]{4-x^2}, x_0=0$

(7) $\dfrac{x-1}{x+1}, x_0=1$

(8) $(1+x)\ln(1-x), x_0=0$

(9) $\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}, x_0=0$

(10) $\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1-x}, x_0=0$

6. 求下列函数在 $x_0=0$ 的 Taylor 展开.

(1) $\dfrac{x}{\sin x}$ 展开至 x^4

(2) $\mathrm{e}^{\sin x}$ 展开至 x^4

(3) $\ln\cos x$ 展开至 x^6

(4) $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ 展开至 x^4

第七章 常微分方程

内容提要

- 微分方程的概念
- 可分离变量的微分方程
- 高阶微分方程
- 常系数线性微分方程

7.1 微分方程的基本概念

定义 7.1. 微分方程

含有未知函数的导数或微分的方程

$$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

称为微分方程. 其中出现的导数的最高阶数 n, 称为微分方程的阶

例 7.1 判别下列微分方程的阶数:

(1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = x$

(2) $x\,\mathrm{d}x - y^2\,\mathrm{d}y = 0$

(3) $y'' + y' = \mathrm{e}^x$

例 7.2 求解一阶微分方程 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x \\ y\big|_{x=1} = 3 \quad \cdots\cdots \text{初始条件} \end{cases}$

解 对方程两边积分, 得到

$y = x^2 + C$ (C 为任意常数) ······ 通解

将 $x = 1$ 时 $y = 3$ 代入上式, 得到 $C = 2$. 因此

$y = x^2 + 2$ ······ 特解

□

例 7.3 求解二阶微分方程 $\begin{cases} y'' = -1, \\ y\big|_{x=0} = 0,\ y'\big|_{x=0} = 1. \end{cases}$

解 对方程两边积分, 得到

① $y' = -x + C_1$ (C_1 为常数), 再对前式两边积分, 得到

② $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + C_1 x + C_2$ (C_1, C_2 为常数) ······ 通解

将初始条件 $y'|_{x=0} = 1$ 代入 ①, 得到 $C_1 = 1$. 将初始条件 $y|_{x=0} = 0$ 代入 ②, 得到 $C_2 = 0$. 因此 $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + x$ ······ 特解

□

7.2 可分离变量微分方程

7.2.1 一阶微分方程

一阶微分方程的一般形式为 $F(x,y,y')=0$. 对应的初始条件为 $y|_{x=x_0}=y_0$. 在这一章中, 我们将研究 3 种一阶微分方程:

① 可分离变量微分方程
② 齐次微分方程
③ 一阶线性微分方程

定义 7.2. 可分离变量微分方程

形如 $f(y)\,\mathrm{d}y=g(x)\,\mathrm{d}x$ 的方程称为可分离变量微分方程.
对这种方程的两边同时积分, 就可以求出它的通解.

例 7.4 求微分方程 $y'=2xy^2$ 的通解, 以及在初始条件 $y\big|_{x=0}=-1$ 下的特解.

解 通解为 $y=-\dfrac{1}{x^2+C}$.

□

注 通解 $\neq$ 全部解.

练习 7.1 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{y}{x}$ 的通解.

练习 7.2 求微分方程 $(1+y)\,\mathrm{d}x-(1-x)\,\mathrm{d}y=0$ 的通解.

练习 7.3 求微分方程 $y'=-\dfrac{x}{y}$ 在初始条件 $y|_{x=0}=1$ 下的特解.

定义 7.3. 齐次微分方程

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{y}{x}\right)$$

的微分方程称为齐次微分方程.

例如: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x-2y}{x+y}, \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y^2}{xy-x^2}$.

注 齐次微分方程的解法

- 标准化: 将微分方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(\dfrac{y}{x})$
- 换元: 令 $v=\dfrac{y}{x}$, 则有 $y=xv$,
  从而 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}+v$. 代入原方程得到
  $$x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}+v=f(v)$$
- 分离变量: 得到 $\dfrac{\mathrm{d}v}{f(v)-v}=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$
- 两边积分: 得到通解, 然后将 v 回代.

例 7.5 求微分方程 $\left(x\tan\dfrac{y}{x}+y\right)\mathrm{d}x=x\,\mathrm{d}y$ 在初始条件 $y|_{x=2}=\pi$ 下的特解.

解 方程即为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \tan\dfrac{y}{x} + \dfrac{y}{x}$.

- 令 $v = \dfrac{y}{x}$, 得到 $x\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v = \tan v + v$.
- 分离变量, 得到 $\cot v\,\mathrm{d}v = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$.
- 两边积分, 得到 $\ln|\sin v| = \ln|x| + C_0$.
- 整理等式, 得到 $\sin v = Cx$, 即 $\sin\dfrac{y}{x} = Cx$.

代入初始条件, 得到 $C = \dfrac{1}{2}$, 故特解为 $\sin\dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{2}x$.

□

✍ **练习** 7.4 求微分方程 $(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x - xy\,\mathrm{d}y = 0$ 在初始条件 $y|_{x=1} = 0$ 下的特解.

7.2.2 一阶线性微分方程

定义 7.4. 一阶线性微分方程

形如 $y' + p(x)y = q(x)$ 的微分方程称为 一阶线性微分方程.

① 若 $q(x) \equiv 0$, 称为一阶线性齐次微分方程.

② 若 $q(x) \not\equiv 0$, 称为一阶线性非齐次微分方程.

例如:

- $y' + xy = x^2$ ✓
- $y' + y^2 = \sin x$ ✗
- $yy' + xy = 1$ ✗

例 7.6 求一阶线性齐次微分方程 $y' + p(x)y = 0$ 的通解.

解 分离变量得到

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -p(x)\,\mathrm{d}x$$

两边同时积分, 得到

$$\ln|y| = -\int p(x)\,\mathrm{d}x + C_0$$

消去对数, 得到通解为 (其中 $C = \pm\mathrm{e}^{C_0}$)

$$y = C\mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}$$

□

下面我们利用常数变易法求解一阶线性非齐次方程的通解公式.

将 $y = u(x)\,\mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}$ 代入 $y' + p(x)y = q(x)$.

$$\begin{aligned} y' &= u'(x)\,\mathrm{e}^{\int -p(x)\,\mathrm{d}x} + u(x)\left(\mathrm{e}^{\int -p(x)\,\mathrm{d}x}\right)' \\ &= u'(x)\,\mathrm{e}^{\int -p(x)\,\mathrm{d}x} - u(x)\,p(x)\,\mathrm{e}^{\int -p(x)\,\mathrm{d}x} \\ &= u'(x)\,\mathrm{e}^{\int -p(x)\,\mathrm{d}x} - p(x)y \end{aligned}$$

得到

$$u'(x)\,\mathrm{e}^{\int -p(x)\,\mathrm{d}x} = q(x)$$

即有

$$u'(x) = q(x)\,\mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}$$

将 $y = u(x)\,\mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}$ 代入 $y' + p(x)y = q(x)$.

$$\begin{aligned} & u'(x) = q(x)\,\mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x} \\ \Rightarrow\ & u(x) = \int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x} + C \\ \Rightarrow\ & y = \mathrm{e}^{\int -p(x)\,\mathrm{d}x}\left(\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x} + C\right) \end{aligned}$$

这即为一阶线性非齐次方程的通解公式.

另外, 也可以这样考虑. 已知微分方程 $y' + p(x)y = 0 \Leftrightarrow y = C\mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}$

$$\begin{aligned} & y = C\mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x} \\ \Leftrightarrow\ & y\,\mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x} = C \\ \Leftrightarrow\ & \left(y\mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}\right)' = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}\left(y' + p(x)y\right) = 0 \end{aligned}$$

注 方程两边同乘 $\mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}$ 后, 方程左边可以表示为导数.此方法也可以用于一阶线性非齐次微分方程.

例 7.7 求微分方程 $y' + \frac{1}{x}y = 1$ 的通解.

解

- 恒等变形: $xy' + y = x$
- 合并左边: $(xy)' = x$
- 两边积分: $xy = \frac{1}{2}x^2 + C$
- 得到通解: $y = \frac{1}{2}x + C\frac{1}{x}$

□

例 7.8 求微分方程 $y' - \frac{1}{x}y = x^2$ 的通解.

解

- 恒等变形: $\frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = x$
- 合并左边: $\left(\frac{1}{x}y\right)' = x$
- 两边积分: $\frac{1}{x}y = \frac{1}{2}x^2 + C$
- 得到通解: $y = \frac{1}{2}x^3 + Cx$

□

例 7.9 求微分方程 $y' + y = 1$ 的通解.

解

- 恒等变形：$e^x y' + e^x y = e^x$
- 合并左边：$(e^x y)' = e^x$
- 两边积分：$e^x y = e^x + C$
- 得到通解：$y = 1 + Ce^{-x}$

□

再看一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

- 恒等变形：$v(x)\,y' + p(x)v(x)\,y = q(x)v(x)$
- 合并左边：$\big(v(x)\,y\big)' = q(x)v(x)$
- 两边积分：$v(x)\,y = \int q(x)v(x)\,dx + C$
- 得到通解：$y = \dfrac{1}{v(x)}\left(\int q(x)v(x)\,dx + C\right)$

积分因子 $v(x)$ 是否一定存在？如何求出它？

例 7.10 寻找 $v = v(x)$ 使得 $v\,y' + p(x)\,v\,y = (v\,y)'$.

解 展开等式右边得 $v\,y' + p(x)\,v\,y = v\,y' + v'\,y$

- 化简条件：$p(x)\,v = v'$，即 $p(x)\,v = \dfrac{dv}{dx}$
- 分离变量：$\dfrac{dv}{v} = p(x)$
- 求解方程：$\ln v = \int p(x)\,dx$，即 $v = e^{\int p(x)\,dx}$

□

定理 7.1. 一阶线性微分方程的通解

一阶线性微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$ 的通解为

$$y = e^{-\int p(x)\,dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)\,dx}\,dx + C\right)$$

注

- 公式已经包含了任意常数，因此计算积分时不需要再加上任意常数.
- 若 $\int p(x)\,dx = \ln|f(x)|$，则代入公式时去掉绝对值号不影响结果.

例 7.11 求 $y' + \dfrac{1}{2x}\,y = 1$ 的通解.

解 积分因子 $v(x) = e^{\int dx/(2x)} = e^{\ln\sqrt{|x|}} = \sqrt{|x|}$. 方程的通解为 $y = \dfrac{1}{\sqrt{|x|}}\left(\int\sqrt{|x|}\,dx + C\right)$.

即当 $x > 0$ 时，$y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\left(\int\sqrt{x}\,dx + C\right) = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{C_0}{\sqrt{x}}$；当 $x < 0$ 时，$y = \dfrac{1}{\sqrt{-x}}\left(\int\sqrt{-x}\,dx + C\right) = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{C_0}{\sqrt{-x}}$. 因此通解为 $y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{C_0}{\sqrt{|x|}}$. 也可继续整理，得通解为

$$x\left(y - \frac{2}{3}x\right)^2 = C，其中\ C = \pm C_0^2.$$

□

例 7.12 求一阶微分方程 $xy' + y = 3x^2$ 在初始条件 $y|_{x=1} = 0$ 下的特解.

解 通解 $y=\frac{1}{x}\left(x^3+C\right)$, 特解 $y=\frac{1}{x}\left(x^3-1\right)$.

□

例 7.13 求可导函数 $\phi(x)$, 使其满足

$$\phi(x)+\int_0^x \phi(t)\,\mathrm{d}t=\mathrm{e}^x.$$

解 求导得到微分方程, 解得 $\phi(x)=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}\right)$.

□

✍ **练习 7.5** 求 $y'-\frac{2}{x+1}y=(x+1)^3$ 的通解.

✍ **练习 7.6** 求 $y'+y=\mathrm{e}^{-x}$ 的通解.

✍ **练习 7.7** 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x+y}$.

注 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+p(y)x=q(y)$ 也是一阶线性微分方程.

7.3 可降阶的高阶微分方程

7.3.1 $y'' = f(x)$ 型

两端多次积分即可.

✍ **练习 7.8** 求 $y'' = \mathrm{e}^{2x}$ 的通解.

7.3.2 $y'' = f(x, y')$ 型

方程

$$y'' = f\left(x, y'\right)$$

的右端不显含未知函数 y. 如果我们设 $y' = p$, 那么

$$y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = p',$$

方程就成为

$$p' = f(x, p)$$

这是一个关于变量 x, p 的一阶微分方程. 设其通解为

$$p = \varphi(x, C_1),$$

但是 $p = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, 因此又得到一个一阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \varphi(x, C_1)$$

对它进行积分, 便得方程的通解为

$$y = \int \varphi(x, C_1)\mathrm{d}x + C_2$$

✍ **练习 7.9** 求 $y'' = \dfrac{1}{x} y'$ 的通解.

✍ **练习 7.10** 求 $xy'' + y' = 0$ 的通解.

7.3.3 $y'' = f(y, y')$ 型

方程

$$y'' = f\left(y, y'\right)$$

中不明显地含自变量 x. 为了求出它的解, 我们令 $y' = p$, 并利用复合函数的求导法则把 y'' 化为对 y 的导数, 即

$$y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$$

这样, 方程就成为

$$p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = f(y, p)$$

这是一个关于变量 y,p 的一阶微分方程. 设它的通解为

$$y' = p = \varphi(y, C_1),$$

分离变量并积分, 便得方程的通解为

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2$$

✍ **练习 7.11** 求以下满足初始条件的微分方程的解 (特解).

(1) $y'' = \dfrac{3}{2}y^2$ 满足初始条件 $y|_{x=3} = 1$, $y'|_{x=3} = 1$

(2) $y'' = 3\sqrt{y}$ 满足初始条件 $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 2$

✍ **练习 7.12** 求下列各微分方程的通解:

(1) $y'' = x + \sin x$

(2) $y''' = x\mathrm{e}^x$

(3) $y'' = \dfrac{1}{1+x^2}$

(4) $y'' = 1 + y'^2$

(5) $y'' = y' + x$

(6) $xy'' + y' = 0$

(7) $yy'' + 2y'^2 = 0$

(8) $y^3y'' - 1 = 0$

(9) $y'' = \dfrac{1}{\sqrt{y}}$

(10)$y'' = \left(y'\right)^3 + y'$

✍ **练习 7.13** 求下列各微分方程满足所给初值条件的特解:

(1) $y^3y'' + 1 = 0$, $y|_{x=1} = 1$, $y'\big|_{x=1} = 0$

(2) $y'' - ay'^2 = 0$, $y|_{x=0} = 0$, $y'\big|_{x=0} = -1$

(3) $y''' = \mathrm{e}^{ax}$, $y|_{x=1} = y'\big|_{x=1} = y''\big|_{x=1} = 0$

(4) $y'' = \mathrm{e}^{2y}$, $y|_{x=0} = y'\big|_{x=0} = 0$

(5) $y'' = 3\sqrt{y}$, $y|_{x=0} = 1$, $y'\big|_{x=0} = 2$

(6) $y'' + \left(y'\right)^2 = 1$, $y|_{x=0} = 0$, $y'\big|_{x=0} = 0$.

7.4 高阶线性微分方程

7.4.1 二阶线性微分方程

定义 7.5. 二阶线性微分方程

形如 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ 的微分方程称为二阶线性微分方程.

① 若 $f(x) \equiv 0$, 称为二阶齐次线性微分方程

② 若 $f(x) \not\equiv 0$, 称为二阶非齐次线性微分方程

下面我们研究二阶齐次线性微分方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ 的通解.

定义 7.6. 线性相关与线性无关

设 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 是定义在区间 I 上的 n 个函数, 如果存在 n 个不全为零的常数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$, 使得当 $x \in I$ 时有恒等式

$$k_1y_1 + k_2y_2 + \cdots + k_ny_n \equiv 0$$

成立, 则称这 n 个函数线性相关; 否则称线性无关.

注 $y_1(x), y_2(x)$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)}$ 恒为常数.

如果 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是方程的两个解, 那么

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) \quad (C_1, C_2 \text{ 为任意常数})$$

也是方程的解.

定理 7.2. 二阶齐次线性微分方程通解结构

如果 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是方程的两个线性无关的特解, 那么

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) \quad (C_1, C_2 \text{ 为任意常数})$$

就是方程的通解.

例 7.14 求微分方程 $y'' + y = 0$ 的通解.

定义 7.7. 齐次解与非齐次解

齐次线性微分方程 (1) 的解称为齐次解, 而非齐次线性微分方程 (2) 的解称为非齐次解.

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \tag{1}$$
$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \tag{2}$$

推论 7.1. 线性微分方程的解的性质

线性微分方程的解有下列性质:

① 非齐次解 + 齐次解 = 非齐次解

② 非齐次解 − 齐次解 = 非齐次解

③ 非齐次解 − 非齐次解 = 齐次解

定理 7.3. 二阶非齐次线性微分方程的解的结构

假设 $Y(x)$ 是齐次线性方程 (1) 的通解, 而 $y^*(x)$ 是非齐次线性方程 (2) 的一个特解, 则

$$y = Y(x) + y^*(x)$$

是非齐次线性方程 (2) 的通解. 即有

$$\boxed{\text{齐次通解} + \text{非齐次特解} = \text{非齐次通解}}$$

例 7.15 求微分方程 $y'' + y = x^2$ 的通解.

定理 7.4. 叠加原理

设 $y_1^*(x)$ 和 $y_2^*(x)$ 分别是下列两个方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x),$$
$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_2(x)$$

的特解, 则 $y_1^*(x) + y_2^*(x)$ 是方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$$

的特解.

例 7.16 求微分方程 $y'' + y = x^2 + \mathrm{e}^x$ 的一个特解和通解.

练习 7.14 设非齐次线性微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$ 有两个不同的解 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$, C 为任意常数, 则该方程的通解为 ( )

A. $C[y_1(x) - y_2(x)]$

B. $y_1(x) + C[y_1(x) - y_2(x)]$

C. $C[y_1(x) + y_2(x)]$

D. $y_1(x) + C[y_1(x) + y_2(x)]$

练习 7.15 设线性无关的函数 y_1, y_2, y_3 都是二阶非齐次线性微分方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ 的解, C_1, C_2 为任意常数, 则该方程的通解为 ( )

A. $C_1y_1 + C_2y_2 + y_3$

B. $C_1y_1 + C_2y_2 + (C_1 + C_2)y_3$

C. $C_1y_1 + C_2y_2 - (1 - C_1 - C_2)y_3$

D. $C_1y_1 + C_2y_2 + (1 - C_1 - C_2)y_3$

7.5 常系数齐次线性微分方程

7.5.1 二阶常系数齐次线性方程

例 7.17 求微分方程 $y''+4y'+4y=0$ 的通解.

解

- 恒等变形：得 $(y''+2y')+2(y'+2y)=0$
- 变量代换：令 $z=y'+2y$，则 $z'+2z=0$
- 求解方程：得 $z=C\mathrm{e}^{-2x}$，即 $y'+2y=C\mathrm{e}^{-2x}$
- 求解方程：得 $y=(C_1+C_2x)\,\mathrm{e}^{-2x}$

□

例 7.18 研究二阶常系数齐次线性方程：$y''+py'+qy=0$

解

- 恒等变形：得 $(y''-ay')-b(y'-ay)=0$
- 变量代换：令 $z=y'-ay$，则 $z'-bz=0$
- 求解方程：得 $z=C\mathrm{e}^{bx}$，即 $y'-ay=C\mathrm{e}^{bx}$
- 求解方程：得 $y=\mathrm{e}^{ax}\left(\int C\mathrm{e}^{(b-a)x}\,\mathrm{d}x+C'\right)$
    - 当 $a\neq b$ 时，$y=C_1\,\mathrm{e}^{ax}+C_2\,\mathrm{e}^{bx}$
    - 当 $a=b$ 时，$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{ax}$

□

常数 a 和 b 是否一定存在？如何求出它？事实上，a 和 b 是方程 $r^2+pr+q=0$ 的两个根.

定理 7.5. 二阶常系数齐次线性方程的通解

对于二阶常系数齐次线性方程：$y''+py'+qy=0$，设其特征方程 $r^2+pr+q=0$ 的两个根为 r_1 和 r_2，则

① 若 $r_1\neq r_2$ 为相异实根，则方程的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{r_1x}+C_2\mathrm{e}^{r_2x}$$

② 若 $r_1=r_2=r$ 为相同实根，则方程的通解为

$$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{rx}$$

③ 若 $r_1=\alpha+i\beta,r_2=\alpha-i\beta$ 为共轭复根，则方程的通解为

$$y=\mathrm{e}^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$$

✍ **练习 7.16** 求以下微分方程的通解.

(1) $y''-2y'-3y=0$

(2) $y''+2y'+y=0$，$y|_{x=0}=4$，$y'|_{x=0}=-2$

(3) $y''-2y'+5y=0$

定理 7.6. n 阶常系数齐次线性方程的通解

对于n 阶常系数齐次线性方程：

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \cdots + p_{n-1} y' + p_n y = 0$$

求出对应的特征方程

$$r^n + p_1 r^{n-1} + p_2 r^{n-2} + \cdots + p_{n-1} r + p_n = 0$$

的全部根，便可以写出微分方程的通解：

① 一个 k 重实根 r 给出通解的 k 项

$$\mathrm{e}^{rx}(C_1 + C_2 x + \cdots + C_k x^{k-1})$$

② 一对 k 重复根 $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ 给出通解的 $2k$ 项

$$\mathrm{e}^{\alpha x}\big[(C_1 + C_2 x + \cdots + C_k x^{k-1}) \cos \beta x \\ +(D_1 + D_2 x + \cdots + D_k x^{k-1}) \sin \beta x\big]$$

练习 7.17 求以下微分方程的通解.

(1) $y^{(4)} - 2y''' + 5y'' = 0$

(2) $y^{(4)} + y = 0$

(3) $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$

(4) $y^{(5)} - y^{(4)} = 0$

7.6 常系数非齐次线性微分方程

由第六节和第七节的结论，只需讨论求该微分方程的一个特解的方法．我们将关注以下两种类型．

① $f(x) = \mathrm{e}^{\lambda x} P_m(x)$ 型

② $f(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}\left[P_l(x)\cos\omega x + Q_n(x)\sin\omega x\right]$ 型

7.6.1 $f(x) = \mathrm{e}^{\lambda x} P_m(x)$ 型

定理 7.7

二阶常系数非齐次线性微分方程

$$y'' + py' + qy = \mathrm{e}^{\lambda x} P_m(x)$$

有特解

$$y^* = x^k Q_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$$

其中 $P_m(x)$ 是 m 次多项式，k 等于 λ 作为特征方程的根的重数．一般用待定系数法确定多项式 $Q_m(x)$，对 n 阶常系数非齐次线性微分方程有同样解法．

✍ **练习 7.18** 求以下微分方程的通解．

(1) $y'' - 2y' - 3y = 3x + 1$

(2) $y'' - 5y' + 6y = x\mathrm{e}^{2x}$

7.6.2 $f(x)=\mathrm{e}^{\lambda x}\left[P_l(x)\cos\omega x+Q_n(x)\sin\omega x\right]$ 型

定理 7.8

二阶常系数非齐次线性微分方程

$$y''+py'+qy=\mathrm{e}^{\lambda x}\left[P_l(x)\cos\omega x+Q_n(x)\sin\omega x\right]$$

有特解

$$y^*=x^k\mathrm{e}^{\lambda x}\left[R_m(x)\cos\omega x+S_m(x)\sin\omega x\right]$$

其中 $P_l(x)$ 是 l 次多项式, $Q_n(x)$ 是 n 次多项式, $m=\max\{l,n\}$, k 等于 $\lambda+\omega i$ 作为特征方程的根的重数. 一般用待定系数法确定多项式 $R_m(x)$ 和 $S_m(x)$, 对 n 阶常系数非齐次线性微分方程有同样解法.

例 7.19 已知常系数线性微分方程 $y''+ay'+by=c\mathrm{e}^x$ 有特解 $y^*=\mathrm{e}^{-x}(1+x\mathrm{e}^{2x})$, 则

A. $a=0,\ b=1,\ c=2$　　B. $a=0,\ b=1,\ c=-2$

C. $a=0,\ b=-1,\ c=2$　　D. $a=0,\ b=-1,\ c=-2$

解 将特解 $y^*=\mathrm{e}^{-x}+x\mathrm{e}^x$ 代入微分方程, 得到

$$(1-a+b)\mathrm{e}^{-x}+(2+a)\mathrm{e}^x+(1+a+b)x\mathrm{e}^x=c\mathrm{e}^x$$

解得 $a=0,\ b=-1,\ c=2$.

注 也可以这样考虑: 由于 $y^*=\mathrm{e}^{-x}+x\mathrm{e}^x$ 中包含 e^{-x}, 而方程右边不含 e^{-x}, 所以特征方程一定有一个解为 $r_1=-1$. 又因为 $y^*=\mathrm{e}^{-x}+x\mathrm{e}^x$ 中包含 $x\mathrm{e}^x$, 所以特征方程的另一个解只能是 $r_2=1$. 从而特征方程为 $r^2-1=0$, 即得 $a=0,\ b=-1$. 此时 $x\mathrm{e}^x$ 也是特解, 将它代入微分方程, 解得 $c=2$.

□

练习 7.19 微分方程 $y''+y=x^2+1+\sin x$ 的特解形式可设为　　(　　)

A. $y^*=ax^2+bx+c+x(A\sin x+B\cos x)$

B. $y^*=x(ax^2+bx+c+A\sin x+B\cos x)$

C. $y^*=ax^2+bx+c+A\sin x$

D. $y^*=ax^2+bx+c+A\cos x$

练习 7.20 求以下微分方程的通解.

(1) $y''+y=x\cos 2x$　　(2) $y''-y=\mathrm{e}^x\cos 2x$

(3) $y''+4y'+4y=\mathrm{e}^{\alpha x}$　　(4) $y''-2y'-3y=\mathrm{e}^x+3x+1$

第七章 习题

1. 求以下列各式所表示的函数为通解的微分方程.

   (1) $(x+C)^2+y^2=1$ (其中 C 为任意常数)

   (2) $y=C_1\mathrm{e}^{\mathrm{x}}+\mathrm{C}_2\mathrm{e}^{2\mathrm{x}}$ (其中 C_1, C_2 为任意常数).

2. 求下列微分方程的通解.

   (1) $xy'+y=2\sqrt{xy}$

   (2) $xy'\ln x+y=ax(\ln x+1)$

   (3) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{2(\ln y-x)}$

   (4) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+xy-x^3y^3=0$

   (5) $y''+y'^2+1=0$

   (6) $yy''-y'^2-1=0$

   (7) $y''+2y'+5y=\sin 2x$

   (8) $y'''+y''-2y'=x(\mathrm{e}^x+4)$

   (9) $\left(y^4-3x^2\right)\mathrm{d}y+xy\ \mathrm{d}x=0$

   (10) $y'+x=\sqrt{x^2+y}$

3. 求下列微分方程满足所给初值条件的特解.

   (1) $y^3\ \mathrm{d}x+2\left(x^2-xy^2\right)\mathrm{d}y=0, x=1$ 时 $y=1$

   (2) $y''-ay'^2=0, x=0$ 时 $y=0, y'=-1$

   (3) $2y''-\sin 2y=0, x=0$ 时 $y=\dfrac{\pi}{2}, y'=1$

   (4) $y''+2y'+y=\cos x, x=0$ 时 $y=0, y'=\dfrac{3}{2}$

4. 设可导函数 $\varphi(x)$ 满足

$$\varphi(x)\cos x+2\int_0^x\varphi(t)\sin t\ \mathrm{d}t=x+1$$

求 $\varphi(x)$.

第五部分

向量代数与空间解析几何

第八章 向量代数与空间解析几何

内容提要

- ❏ 向量及其线性运算
- ❏ 数量积与向量积
- ❏ 空间平面、直线及其方程
- ❏ 空间曲面、曲线及其方程 ★

大纲考点释疑

- 向量代数考点
  - 理解向量的概念, 掌握向量的坐标表示法, 会求单位向量、方向余弦及向量在坐标轴上的投影.
  - 掌握向量的线性运算、向量的数量积和向量积的计算方法.
  - 掌握两向量平行、垂直的充要条件.
- 解析几何考点
  - 会求平面的方程; 会判定两平面的平行、垂直关系.
  - 会求直线的方程; 会判定两直线的关系.(平行、垂直、异面)
  - 会判定直线与平面的关系.(平行、垂直、斜交、线在面上)
  - 会求点到平面的距离、点到直线的距离与两异面直线的距离.

8.1 向量及其线性运算

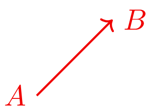
定义 8.1. 向量

向量: 既有大小, 又有方向的量称为向量. 一般将向量表示为: $\overrightarrow{AB}$, 或 $\vec{a}$, 或 a.

与向量相关的术语:

相等向量 若 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的大小和方向都相同, 称两者相等, 记为 $\vec{a} = \vec{b}$.

向量的模 向量的大小称为向量的模, 记为 $|\overrightarrow{AB}|$, 或 $|\vec{a}|$, 或 $|a|$.



单位向量 模为 1 的向量, 常记为 $\vec{e}$.

零向量 模为 0 的向量, 记为 $\vec{0}$.

平行向量 若向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的方向相同或相反, 则称 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 平行, 记为 $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

- 规定零向量与任何向量都平行.

共线向量 若两个向量可平移到一条直线上, 则称它们共线.

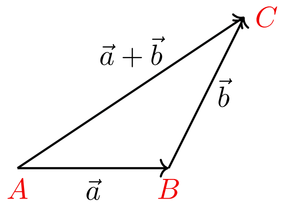
- 两向量平行等同于两向量共线.

共面向量 若三个或更多个向量可平移到一个平面上, 则称它们共面.

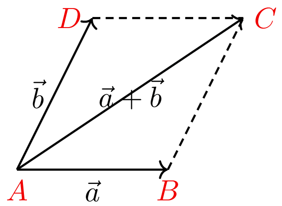
8.1.1 向量的线性运算

1. 向量的加法

    - 三角形法则



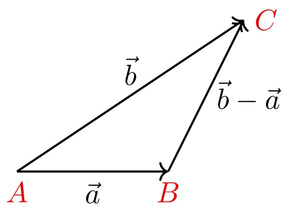
    - 平行四边形法则



性质 8.1 向量的加法满足下列运算定律.

- $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$
- $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

2. 向量的减法 与 $\vec{a}$ 大小相同而方向相反的向量, 称为 $\vec{a}$ 的负向量, 记为 $-\vec{a}$.
三角形法则: $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$



- $\vec{a}-\vec{a}=\vec{0}$
- $|\vec{a}+\vec{b}|\leqslant|\vec{a}|+|\vec{b}|$
- $|\vec{a}-\vec{b}|\leqslant|\vec{a}|+|\vec{b}|$

3. 向量的数乘

数 λ 与向量 $\vec{a}$ 的乘积是一个新向量, 记为 $\lambda\vec{a}$. 规定 $|\lambda\vec{a}|=|\lambda|\cdot|\vec{a}|$, 而且

- 若 $\lambda>0$, 则 $\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 同向
- 若 $\lambda<0$, 则 $\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 反向
- 若 $\lambda=0$, 则 $\lambda\vec{a}=\vec{0}$

性质 8.2 向量的数乘满足下列性质.

- $1\vec{a}=\vec{a}$, $(-1)\vec{a}=-\vec{a}$
- $\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}=\mu(\lambda\vec{a})$
- $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$, $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$

例 8.1 设 $\vec{a}$ 为非零向量, 则 $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ 为单位向量.

练习 8.1 设 M 为平行四边形 $ABCD$ 对角线的交点, $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, 试用 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{MA}$、$\overrightarrow{MB}$、$\overrightarrow{MC}$、$\overrightarrow{MD}$.

定理 8.1. 共线向量充要条件

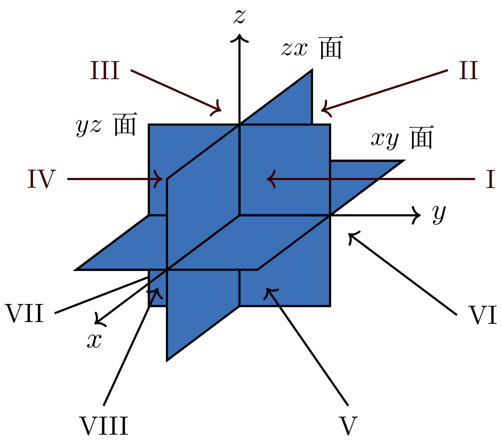
设 $\vec{a}$ 为非零向量, 则有

$$\vec{b}\parallel\vec{a}\Longleftrightarrow\vec{b}=\lambda\vec{a}$$

其中实数 λ 是唯一的.

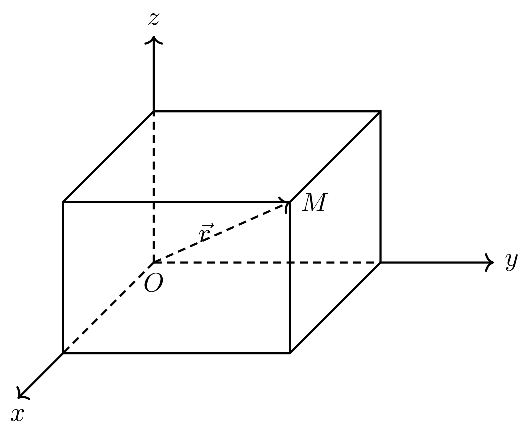
8.1.2 空间直角坐标系

1. 空间直角坐标系
   - 三个坐标轴
   - 三个坐标面
   - 八个卦限



在空间直角坐标系中, 我们有

$$\text{点 } M\longleftrightarrow\text{坐标 }(x,y,z)\longleftrightarrow\text{向量 }\vec{r}=\overrightarrow{OM}$$



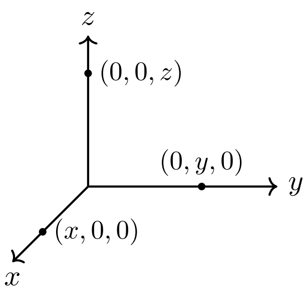
2. 坐标面上的点
   - xy 面 $\leftrightarrow z=0$
   - yz 面 $\leftrightarrow x=0$

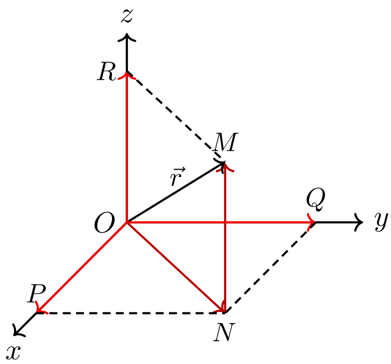
- zx 面 $\leftrightarrow y=0$

3. 坐标轴上的点
   - x 轴 $\leftrightarrow y=z=0$
   - y 轴 $\leftrightarrow z=x=0$
   - z 轴 $\leftrightarrow x=y=0$

8.1.3 利用坐标作向量的线性运算

1. 向量的坐标分解





   - x 轴上单位向量 $\vec{i}$
   - y 轴上单位向量 $\vec{j}$
   - z 轴上单位向量 $\vec{k}$

$$\begin{aligned}\vec{r}&=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OR}\\&=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k}=(x,y,z)\end{aligned}$$

2. 向量的坐标运算

   设 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$, λ 为实数. 由向量的坐标分解可得

$$\vec{a}\pm\vec{b}=(a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z)$$
$$\lambda\vec{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)$$

   当 $\vec{a}\neq\vec{0}$ 时, $\vec{b}\parallel\vec{a}\Leftrightarrow\vec{b}=\lambda\vec{a}\Leftrightarrow\dfrac{b_x}{a_x}=\dfrac{b_y}{a_y}=\dfrac{b_z}{a_z}$ 即平行向量对应坐标成比例

✍ **练习** 8.2 求解以向量为未知元的线性方程组

$$\begin{cases}5\vec{x}-3\vec{y}=\vec{a}\\3\vec{x}-2\vec{y}=\vec{b}\end{cases}$$

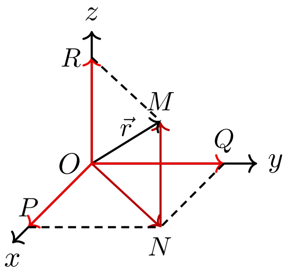
其中 $\vec{a}=(2,1,2)$, $\vec{b}=(-1,1,-2)$.

✍ **练习** 8.3 已知两点 $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$ 以及实数 $\lambda\neq-1$, 在直线 AB 上求点 M, 使得 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$.

注 点 M 的坐标等于向量 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标.

8.1.4 向量的模、方向角、投影

1. 向量的模 · 两点距离



$$\begin{aligned}\vec r = \overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR} \\ &= x\,\vec i + y\,\vec j + z\,\vec k = (x, y, z)\end{aligned}$$

$\therefore\quad |\vec r| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

设 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, 则有

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$|AB| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

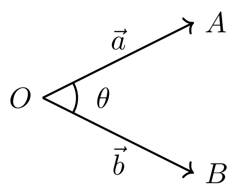
✍ **练习** 8.4 求证以 $M_1(4, 3, 1)$, $M_2(7, 1, 2)$, $M_3(5, 2, 3)$ 为顶点的三角形是等腰三角形.

✍ **练习** 8.5 在 z 轴上求与两点 $A(-4, 1, 7)$ 和 $B(3, 5, -2)$ 等距离的点.

✍ **练习** 8.6 已知两点 $A(4, 0, 5)$ 和 $B(7, 1, 3)$, 求与 $\overrightarrow{AB}$ 方向相同的单位向量 $\vec e$.

2. 向量的夹角

设有非零向量 $\vec a$ 和 $\vec b$, 任取空间中一点 O, 作 $\overrightarrow{OA} = \vec a$, $\overrightarrow{OB} = \vec b$.



称 $\angle AOB = \theta$ $(0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$ 为向量的 $\vec a$ 和 $\vec b$ 的夹角, 记为 $\angle(\vec a, \vec b) = \theta$.

3. 方向角和方向余弦

给定 $\vec r = \overrightarrow{OM} = (x, y, z)$, 称 $\vec r$ 与三个坐标轴的夹角 α, β, γ 为方向角. 方向角的余弦称为方向余弦.

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\vec r|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{y}{|\vec r|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{|\vec r|} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

方向余弦满足下面性质:

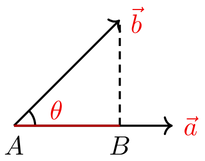
- $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$
- $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|}=\vec{e}_{\vec{r}}$

例 8.2 已知两点 $M_1(2,2,\sqrt{2})$, $M_2(1,3,0)$, 计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角.

4. 向量的投影

若 $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=\theta$, 记 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上的投影为

$$\mathrm{Prj}_{\vec{a}}\,\vec{b}=|\vec{b}|\cos\theta$$



同理, 若 $\vec{b}\neq\vec{0}$, $\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\,\vec{a}=|\vec{a}|\cos\theta$.

性质 8.3 向量投影有线性运算:

- $\mathrm{Prj}_{\vec{c}}(\lambda\vec{a})=\lambda\,\mathrm{Prj}_{\vec{c}}\,\vec{a}$
- $\mathrm{Prj}_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b})=\mathrm{Prj}_{\vec{c}}\,\vec{a}+\mathrm{Prj}_{\vec{c}}\,\vec{b}$

✍ **练习 8.7** 设正方体的一条对角线为 OM, 一条棱为 OA, 且 $|OA|=a$. 求 $\overrightarrow{OA}$ 在 $\overrightarrow{OM}$ 方向上的投影 $\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{OM}}\,\overrightarrow{OA}$.

✍ **练习 8.8** 设三角形 $\triangle ABC$ 的三边 $\overrightarrow{BC}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CA}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{c}$, 三边中点依次为 D, E, F. 证明

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\vec{0}.$$

✍ **练习 8.9** 下列哪组角可作为空间向量的方向角 ( )

A. $30^\circ,45^\circ,60^\circ$

B. $45^\circ,60^\circ,90^\circ$

C. $60^\circ,90^\circ,120^\circ$

D. $45^\circ,90^\circ,135^\circ$

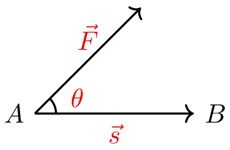
8.2 数量积与向量积

8.2.1 两向量的数量积

1. 两向量的数量积

例 8.3 设一物体在常力 $\vec{F}$ 作用下, 沿与力夹角为 θ 的直线移动, 位移为 $\vec{s}$. 则力 $\vec{F}$ 所做的功为

$$W = |\vec{F}|\,|\vec{s}|\cos\theta = \vec{F}\cdot\vec{s}$$



定义 8.2. 数量积

设向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的夹角为 θ, 称

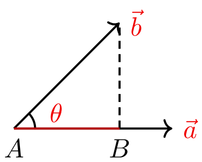
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$$

为 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的数量积（点乘）.

2. 数量积与投影

数量积与投影的关系如下:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta = |\vec{a}|\,\mathrm{Prj}_{\vec{a}}\vec{b}$$



同理, 我们有 $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{b}|\,|\vec{a}|\cos\theta = |\vec{b}|\,\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\vec{a}$.

3. 数量积的性质

性质 8.4 规定零向量和任何向量都垂直, 则有

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \iff \vec{a}\perp\vec{b}$$

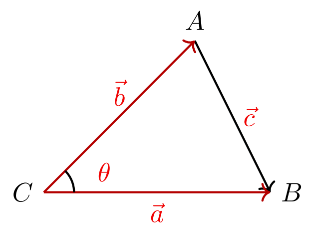
性质 8.5 向量的数量积符合下列运算定律:

- $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$
- $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$
- $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}$
- $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = \lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$

例 8.4 试用向量证明三角形的余弦定理

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

解 设 $\overrightarrow{CB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$, 依据三角形法则及数量积易证.



□

4. 数量积的坐标表示 设 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$, 则有

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

对于非零向量, 由 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$, 得

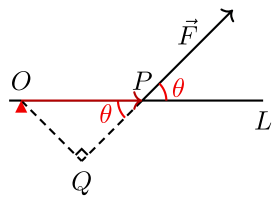
$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$$

此式即为两向量的夹角公式.

例 8.5 已知三个点 $M(1,1,1)$, $A(2,2,1)$ 和 $B(2,1,2)$, 求 $\angle AMB$.

8.2.2 两向量的向量积

例 8.6 考虑力矩问题: 设 O 为杠杆 L 的支点, 有一个与杠杆夹角为 θ 的力 $\vec{F}$ 作用在杠杆的 P 点上. 则力 $\vec{F}$ 作用在杠杆上的力矩 $\vec{M}$ 是一个向量:



- $|\vec{M}|=|OQ|\,|\vec{F}|=|\overrightarrow{OP}|\,|\vec{F}|\sin\theta$
- $\vec{M}\perp\overrightarrow{OP}$, $\vec{M}\perp\vec{F}$, $\overrightarrow{OP}$、$\vec{F}$、$\vec{M}$ 符合右手定则

1. 两向量的向量积

定义 8.3. 向量积

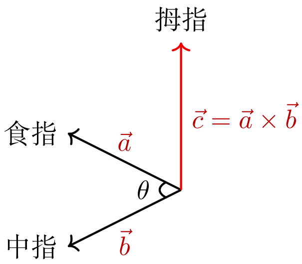
设 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 θ, 定义向量 $\vec{c}$

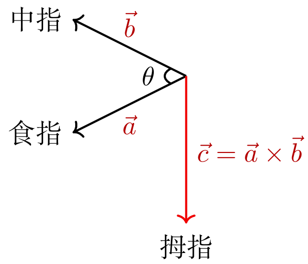
- 大小: $|\vec{c}|=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\theta$
- 方向: $\vec{c}\perp\vec{a}$, $\vec{c}\perp\vec{b}$ 且 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 符合右手定则

称 $\vec{c}$ 为向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的向量积（叉乘）, 记为

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}$$

2. 弗莱明右手定则 右手定则是一个在数学及物理学上使用的定则, 由英国物理学家约翰 · 弗莱明于 19 世纪末发明.





$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ 符合右手定则 $\leftrightarrow$ [食指, 中指, 拇指]

3. 向量积的性质

性质 8.6 规定零向量和任何向量都平行, 则有

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}\Longleftrightarrow\vec{a}\parallel\vec{b}$$

性质 8.7 向量的向量积符合下列运算定律:

- $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$
- $\vec{b}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{b}$
- $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$
- $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$

4. 向量积的坐标表示

设 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$, 则有

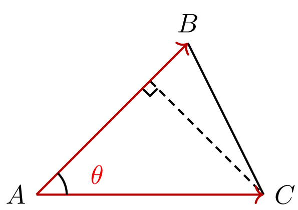
$$\begin{aligned}\vec{a}\times\vec{b}&=\left(\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_z & a_x\\ b_z & b_x\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\right)\\&=\left(a_yb_z-a_zb_y,a_zb_x-a_xb_z,a_xb_y-a_yb_x\right)\end{aligned}$$

其中二阶行列式的定义为

$$\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc$$

例 8.7 已知 $\triangle ABC$ 的顶点为 $A(1,2,3)$, $B(3,4,5)$ 和 $C(2,4,7)$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

解 $S=\dfrac{1}{2}|AB|\,|AC|\sin\theta=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$

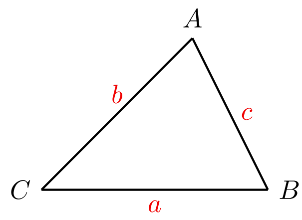


□

✍ **练习 8.10** 已知向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的夹角 $\theta=\dfrac{3\pi}{4}$, 且 $|\vec{a}|=\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=3$, 求 $|\vec{a}-\vec{b}|$.

✍ **练习** 8.11 证明三角形的正弦定理

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$



✍ **练习** 8.12 在顶点为 $A(1,-1,2)$, $B(1,1,0)$, $C(1,3,-1)$ 的三角形中, 求 AC 边上的高 BD 的长度.

✍ **练习** 8.13 下列关系式错误的是 ( )

A. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

B. $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$

C. $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$

D. $\vec{a}\times\vec{a}=0$

✍ **练习** 8.14 设 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 是非零向量, 且满足 $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$, 则必有 ( )

A. $\vec{a}-\vec{b}=\vec{0}$

B. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$

C. $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

D. $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$

8.3 平面及其方程

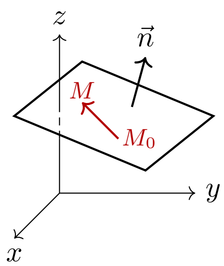
8.3.1 平面的点法式方程

1. 平面的点法式方程

   设一平面通过已知点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 且垂直于非零向量 $\vec{n} = (A, B, C)$, 则该平面 Π 的方程为

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

- 称它为平面的点法式方程
- 称 $\vec{n}$ 为平面的法向量



例 8.8 求过点 $(2, -3, 0)$ 且以 $\vec{n} = (1, -2, 3)$ 为法向量的平面的方程.

例 8.9 已知三个点坐标 $M_1(2, -1, 4)$, $M_2(-1, 3, -2)$ 和 $M_3(0, 2, 3)$, 求过这三个点的平面的方程.

2. 平面的一般方程

   平面的点法式方程

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

等价于平面的一般方程为 $Ax + By + Cz + D = 0$

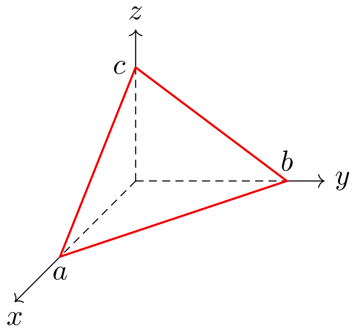
- $D = 0$ 表示平面过原点
  - ◇ $A = 0$ 表示平面平行于 x 轴
  - ◇ $B = 0$ 表示平面平行于 y 轴
  - ◇ $C = 0$ 表示平面平行于 z 轴
- $A = B = 0$ 表示平面平行于 xy 面
- $A = C = 0$ 表示平面平行于 xz 面
- $B = C = 0$ 表示平面平行于 yz 面

例 8.10 求通过 x 轴和点 $(4, -3, -1)$ 的平面的方程.

例 8.11 设一平面与三个坐标轴的交点分别为 $P(a, 0, 0)$、$Q(0, b, 0)$、$R(0, 0, c)$. 求该平面的方程.

解 平面方程为 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$, 这称为平面的截距式方程.

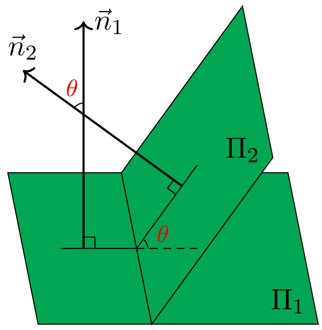
□



8.3.2 两平面的夹角

设平面 Π_1 和 Π_2 的法向量分别为 $\vec{n}_1$ 和 $\vec{n}_2$, 则两平面的夹角 θ 的余弦为

$$\cos\theta=\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}$$



若 $\vec{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$, $\vec{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$, 则有

$$\cos\theta=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

$\Pi_1:\quad \vec{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$

$\Pi_2:\quad \vec{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$

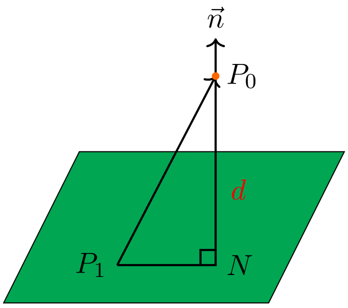
$$\cos\theta=\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}$$

- $$\begin{aligned}\Pi_1\perp\Pi_2 &\iff \vec{n}_1\perp\vec{n}_2\\ &\iff A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\Pi_1\parallel\Pi_2 &\iff \vec{n}_1\parallel\vec{n}_2\\ &\iff \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\end{aligned}$$

例 8.12 求两平面 $x-y+2z-6=0$ 和 $2x+y+z-5=0$ 的夹角.

例 8.13 一平面通过两点 $M_1(1,1,1)$ 和 $M_2(0,1,-1)$ 且垂直于平面 $x+y+z=0$, 求它的方程.

例 8.14 设 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 是平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 外一点, 求 P_0 到该平面的距离.



$$\boxed{d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}$$

例 8.15 平面 $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$ 与平面 $2x + 3y - 4z = 1$ 的位置关系是 ( )

A. 相交但不垂直

B. 互相垂直

C. 平行但不重合

D. 互相重合

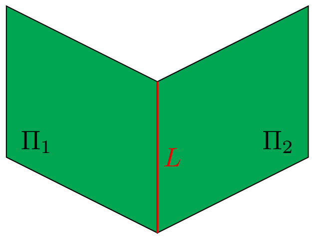
8.4 空间直线及其方程

8.4.1 空间直线的方程

1. 直线的一般式方程

空间直线可视为两平面的交线, 其一般式方程为

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$



2. 直线的对称式方程

已知直线上一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 和其方向向量 $\vec{s} = (m, n, p)$, 则它的方程为

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_o}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

此式称为直线的对称式方程或点向式方程.

3. 直线的参数式方程

在对称式方程中令

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_o}{n} = \frac{z - z_0}{p} = t$$

得到直线的参数式方程:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$

例 8.16 用对称式方程及参数式方程表示直线

$$\begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ 2x - y + 3z + 4 = 0 \end{cases}$$

8.4.2 两直线的夹角

1. 两直线的夹角

两直线的夹角, 是指两者的方向向量的夹角 (取锐角或直角). 设直线 L_1 和 L_2 的方向向量分别为

$$\vec{s}_1 = (m_1, n_1, p_1), \quad \vec{s}_2 = (m_2, n_2, p_2),$$

则有

$$\cos\theta = \frac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1|\,|\vec{s}_2|} = \frac{|m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\,\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$

2. 两直线的夹角

- $L_1 \perp L_2 \Longleftrightarrow \vec{s}_1 \perp \vec{s}_2 \Longleftrightarrow m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$
- $L_1 \parallel L_2 \Longleftrightarrow \vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2 \Longleftrightarrow \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{p_1}{p_2}$

注 在空间中, 两条直线垂直时未必相交.

例 8.17 求直线 L_1 和 L_2 的夹角.

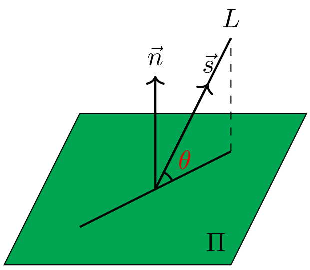
$$L_1: \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-4} = \frac{z}{1}$$
$$L_2: \quad \frac{x}{2} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z}{-1}$$

8.4.3 直线与平面的夹角

1. 直线与平面的夹角

当直线和平面不垂直时, 直线和它在平面上的投影直线 所夹锐角 θ, 称为直线和平面的夹角.

$$\sin\theta = \cos(\angle(\vec{s}, \vec{n})) = \frac{|\vec{s}\cdot\vec{n}|}{|\vec{s}|\,|\vec{n}|}$$



当直线和平面垂直时, 规定它们的夹角为 $\dfrac{\pi}{2}$.

2. 直线与平面的夹角

设直线 L 的方向向量为 $\vec{s} = (m, n, p)$, 平面 Π 的法向量为 $\vec{n} = (A, B, C)$, 则两者夹角满足

$$\sin\theta = \frac{|\vec{s}\cdot\vec{n}|}{|\vec{s}|\,|\vec{n}|} = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

注

- $L \perp \Pi \Longleftrightarrow \vec{s} \parallel \vec{n} \quad \Longleftrightarrow \dfrac{A}{m} = \dfrac{B}{n} = \dfrac{C}{p}$
- $L \parallel \Pi \Longleftrightarrow \vec{s} \perp \vec{n} \quad \Longleftrightarrow Am + Bn + Cp = 0$

例 8.18 求过点 $(1, -2, 4)$ 且与平面 $2x - 3y + z - 4 = 0$ 垂直的直线的方程.

例 8.19 求与两平面 $x - 4z = 3$ 和 $2x - y - 5z = 1$ 的交线平行, 且过点 $(-3, 2, 5)$ 的直线的方程.

例 8.20 求直线 $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z-4}{2}$ 与平面 $2x + y + z - 6 = 0$ 的交点.

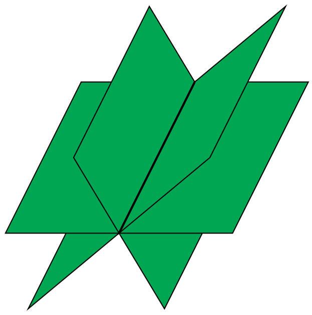
例 8.21 求过点 $(2, 1, 3)$ 且与直线 $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{-1}$ 垂直相交的直线的方程.

3. 平面束的方程

过直线

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

的平面束的方程为



$$\lambda_1(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda_2(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

其中, λ_1, λ_2 不全为零.

4. 平面束的方程

在平面束方程 (λ_1, λ_2 不全为零)

$$\lambda_1(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda_2(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

中通常固定 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda$, 得到简化写法

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

注 简化写法缺少平面 $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

例 8.22 求直线 $\begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ x - y + z + 1 = 0 \end{cases}$ 在平面 $x+y+z=0$ 的投影直线的方程.

例 8.23 一直线过点 $A(1, 2, 1)$ 且垂直于直线

$$L_1 : \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$$

又和直线

$$L_2 : \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$$

相交, 求此直线方程.

解 $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z-1}{-5}$.

□

例 8.24 求过点 $M_0(1, 1, 1)$ 且与两直线 $L_1 : \begin{cases} y = 2x \\ z = x - 1 \end{cases}$ 和 $L_2 : \begin{cases} y = 3x - 4 \\ z = 2x - 1 \end{cases}$ 都相交的直线 L.

解 利用参数式方程, 可以设 L 与 L_1、L_2 的交点分别为 $M_1(t_1, 2t_1, t_1 - 1)$ 和 $M_2(t_2, 3t_2 - 4, 2t_2 - 1)$.

由 M_0, M_1, M_2 三点共线有 $\overrightarrow{M_0M_1} \parallel \overrightarrow{M_0M_2}$, 从而

$$\frac{t_1 - 1}{t_2 - 1} = \frac{2t_1 - 1}{3t_2 - 5} = \frac{t_1 - 2}{2t_2 - 2}$$

解得 $t_1 = 0$, $t_2 = 2$. 即 $M_1(0, 0, -1)$, $M_2(2, 2, 3)$.

所求直线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}.$$

□

例 8.25 求过直线 $L:\begin{cases} x+5y+z=0 \\ x-z+4=0 \end{cases}$ 且与平面 $x-4y-8z+12=0$ 夹成 $\dfrac{\pi}{4}$ 角的平面方程.

解 过直线 L 的平面束的方程为（忽略一个平面）

$$(1+\lambda)x+5y+(1-\lambda)z+4\lambda=0.$$

由两个平面夹角为 $\dfrac{\pi}{4}$ 得

$$\tfrac{\sqrt{2}}{2}=\cos\tfrac{\pi}{4}=\tfrac{|9\lambda-27|}{\sqrt{81}\sqrt{2\lambda^2+27}}=\tfrac{|\lambda-3|}{\sqrt{2\lambda^2+27}}.$$

平方得 $2\lambda^2+27=2\lambda^2-12\lambda+18$, 解得 $\lambda=-\dfrac{3}{4}$.

即平面 $x+20y+7z-12=0$ 满足题目要求. 另外,

$$\cos\theta=\tfrac{|1\cdot 1+0\cdot(-4)+(-1)\cdot(-8)|}{\sqrt{2}\sqrt{81}}=\tfrac{9}{9\sqrt{2}}=\tfrac{\sqrt{2}}{2},$$

故平面 $x-z+4=0$ 也满足题目要求.

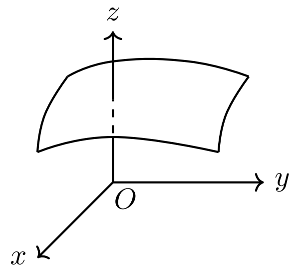
□

8.5 曲面及其方程 ★

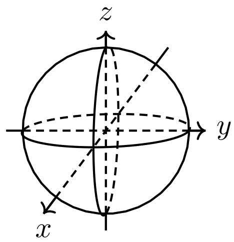
8.5.1 曲面方程的概念

定义 8.4. 方程与曲面

- 方程 $F(x,y,z)=0$ 对应一个曲面 S
- 曲面 S 对应一个方程 $F(x,y,z)=0$



例 8.26 球心在原点, 半径为 R 的球面方程为 $x^2+y^2+z^2=R^2$.



8.5.2 旋转曲面

定义 8.5. 旋转曲面

设在 yz 面上的曲线 C 的方程为 $f(y,z)=0$. 它绕 z 轴旋转一周得到的旋转曲面方程为

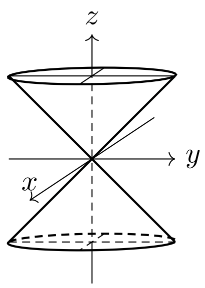
$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0.$$

它绕 y 轴旋转一周得到的旋转曲面方程为

$$f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0.$$

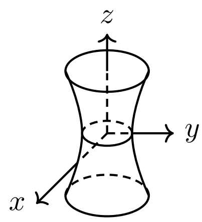
曲线 C 称为旋转曲面的母线,

1. 圆锥面
   - yz 面上的直线 $z=ay$ 绕 z 轴旋转一周
   - 圆锥面 $z^2=a^2(x^2+y^2)$



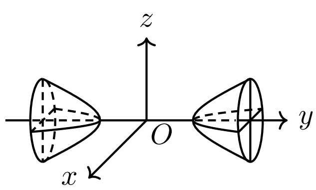
2. 旋转单叶双曲面

将 yz 面上的双曲线 $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 绕 z 轴旋转一周，得到 旋转单叶双曲面 $\frac{x^2+y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.（实例：广州塔）



3. 旋转双叶双曲面

将 yz 面上的双曲线 $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 绕 y 轴旋转一周，得到 旋转双叶双曲面 $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2+z^2}{c^2}=1$.



8.5.3 柱面

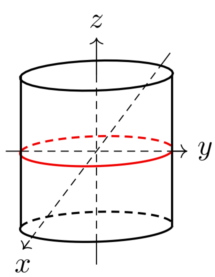
1. 圆柱面

例 8.27 $x^2+y^2=R^2$

由平行于 z 轴的直线沿 xy 面上的圆 $x^2+y^2=R^2$ 移动而得.

准线：xy 面的圆 $x^2+y^2=R^2$.

母线：平行于 z 轴的直线.



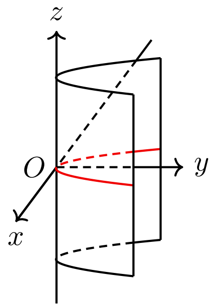
一般地, 方程 $F(x,y)=0$ 在空间中表示一个柱面.

2. 抛物柱面

例 8.28 $y=x^2$

准线 xy 面上的抛物线 $y=x^2$

母线 平行于 z 轴的直线

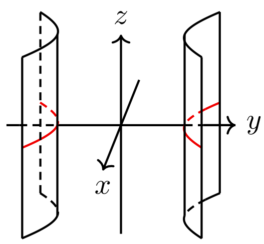


3. 双曲柱面

例 8.29 $y^2-x^2=1$

准线 xy 面上的双曲线

母线 平行于 z 轴的直线

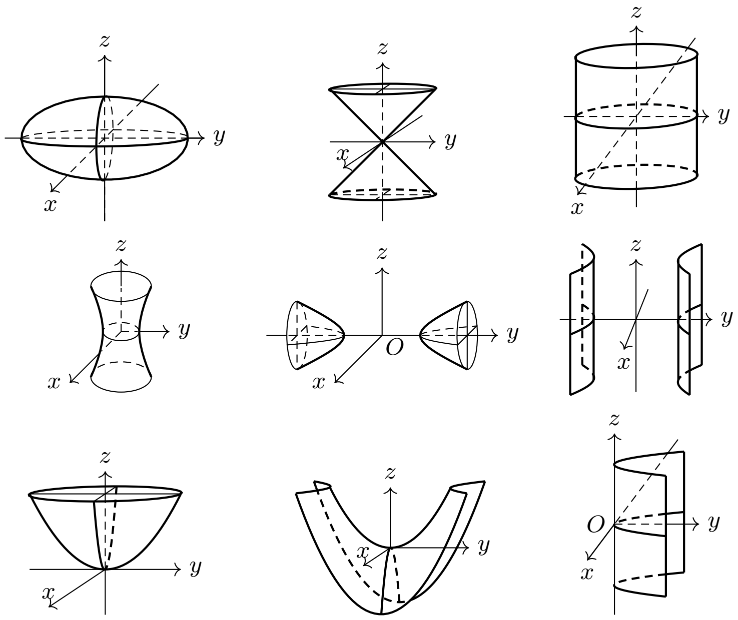


8.5.4 二次曲面

1. 二次曲面的分类

椭圆型	椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	椭圆锥面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2$	椭圆柱面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
双曲型	单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	双叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	双曲柱面 $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
抛物型	椭圆抛物面 $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$	双曲抛物面 $z=-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$	抛物柱面 $x=ay^2$

2. 二次曲面的图形



例 8.30 求内切于平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标面所构成四面体的球面方程.

解 $\left(x-\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}\right)^2+\left(y-\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}\right)^2+\left(z-\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}\right)^2=\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}\right)^2$

□

✍ **练习** 8.15 下列结论中, 错误的是 (　　)

A. $z+2x^2+y^2=0$ 表示椭圆抛物面

B. $x^2+2y^2=1+3z^2$ 表示双叶双曲面

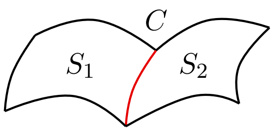
C. $x^2+y^2-(z-1)^2=0$ 表示圆锥面

D. $y^2=5x$ 表示抛物柱面

8.6 空间曲线及其方程 ★

8.6.1 空间曲线的一般方程

空间曲线可视为两个曲面的交线.



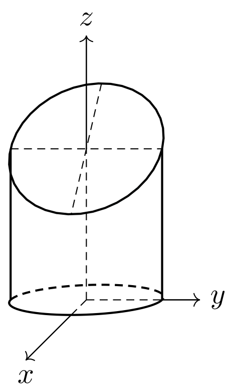
其一般方程为方程组

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

例 8.31 方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ 2x+3z=6 \end{cases}$$

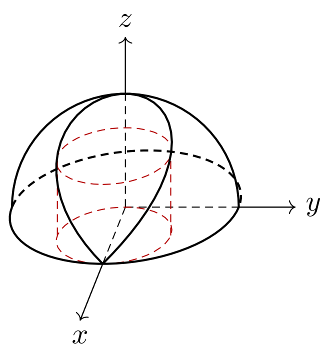
表示圆柱面和平面的交线.



例 8.32 方程组

$$\begin{cases} z=\sqrt{a^2-x^2-y^2} \\ x^2+y^2-ax=0 \end{cases}$$

表示上半球面和圆柱面的交线.



8.6.2 空间曲线的参数方程

将曲线 C 上动点的坐标 x, y, z 表示为参数 t 的函数

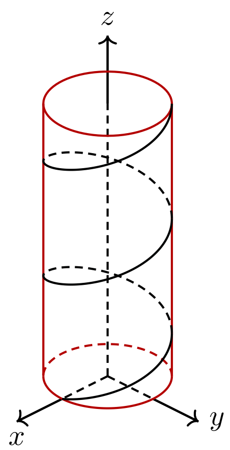
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

称它为空间曲线的参数方程.

例 8.33 螺旋线

$$\begin{cases} x = a\cos\omega t \\ y = a\sin\omega t \\ z = vt \end{cases}$$

- 以角速度 ω 围绕 z 轴旋转
- 以线速度 v 平行 z 轴上升



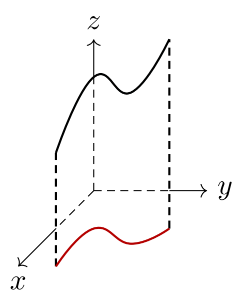
✍ **练习** 8.16 将下列曲线化为参数方程表示：

(1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 2x + 3z = 6 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \\ x^2 + y^2 - ax = 0 \end{cases}$

8.6.3 空间曲线在坐标面上的投影

设空间曲线 C 的一般方程为

$$\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$$



消去 z 得到投影柱面 $H(x,y)=0$, 则 C 在 xy 面上的投影曲线为

$$\begin{cases} H(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$$

类似地, 我们可以求得该曲线在其余平面上的投影曲线方程.

消去 x 得到 $R(y,z)=0$, 则 C 在 yz 面上的投影曲线为

$$\begin{cases} R(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$$

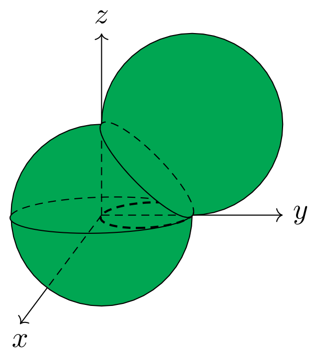
消去 y 得到 $T(x,z)=0$, 则 C 在 xz 面上的投影曲线为

$$\begin{cases} T(x,z)=0 \\ y=0 \end{cases}$$

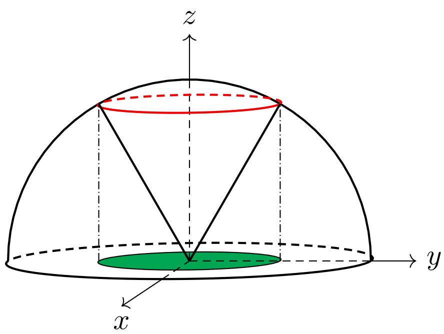
例 8.34 已知两球面的方程分别为

$$x^2+y^2+z^2=1 \text{ 和 } x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$$

求它们的交线 C 在 xy 面上的投影曲线方程.



✍ **练习** 8.17 设立体由上半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 和锥面 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ 围成. 求它在 xy 面上的投影区域.



✍ **练习** 8.18 求曲线 $\begin{cases} z=y^2 \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转所得的曲面与平面 $x+y+z=1$ 的交线在 xy 面上的投影曲线方程.

✍精 选 例 题 8

例 8.35 求过点 $(1,-2,4)$ 且与平面 $2x-3y+z-4=0$ 垂直的直线的方程.

例 8.36 求与两平面 $x-4z=3$ 和 $2x-y-5z=1$ 的交线平行, 且过点 $(-3,2,5)$ 的直线的方程.

例 8.37 求过 $(2,-1,4),(-1,3,2),(0,2,3)$ 的平面的方程.

例 8.38 求过 x 轴 $(2,-1,4)$ 的平面的方程. (提示 $By+Cz=0$)

例 8.39 求平面 $x-y+x=0$ 与平面 $2x-3y+z-4=0$ 的夹角.

例 8.40 求直线 L_1 和 L_2 的夹角.

$$L_1: \quad \frac{x-1}{1}=\frac{y}{-4}=\frac{z}{1}$$
$$L_2: \quad \frac{x}{2}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{-1}$$

例 8.41 求平面 $x-y+x=0$ 与平面 $2x-3y+z-4=0$ 的夹角.

例 8.42 用对称式方程及参数方程表示直线

$$\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x-y+3z+4=0 \end{cases}$$

例 8.43 求与平面 $2x+y-z+3=0$ 的距离为 $\sqrt{6}$ 的平面方程

例 8.44 求平面 $2x+y-z+3=0$ 与平面 $2x+y-z-1=0$ 之间的距离 (2012)

例 8.45 求直线$\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-4}{2}$ 与平面$2x+y+z-6=0$ 的交点.

例 8.46 求与两平面 $x-4z=3$ 和 $2x-y-5z=1$ 的交线平行且过点 $(-3,,2,5)$ 的直线的对称式方程、参数方程和一般式方程.

例 8.47 求过点$(2,1,3)$ 且与直线$\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$ 垂直相交的直线的方程.

例 8.48 求直线$\begin{cases} x+y-z-1=0, \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$ 在平面$x+y+z=0$ 上的投影直线的方程.

例 8.49 设 M_0 是直线 L 外一点, M 是直线 L 上任意一点, 且直线的方向向量为 s, 试证: 点 M_0 到直线 L 的距离

$$d=\frac{\left|\overrightarrow{M_0M}\times s\right|}{|s|}$$

第 八 章 习题

1. 求过点 (4,-1,3) 且平行于直线 $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{5}$ 的直线方程.
2. 求过两点 $M_1(3,-2,1)$ 和 $M_2(-1,0,2)$ 的直线方程.
3. 用对称式方程及参数方程表示直线 $\begin{cases} x-y+z=1, \\ 2x+y+z=4. \end{cases}$
4. 求过点 (2,0,-3) 且与直线 $\begin{cases} x-2y+4z-7=0, \\ 3x+5y-2z+1=0 \end{cases}$ 垂直的平面方程.
5. 求直线 $\begin{cases} 5x-3y+3z-9=0, \\ 3x-2y+z-1=0 \end{cases}$ 与直线 $\begin{cases} 2x-2y-x+23=0, \\ 3x+8y+z-18=0 \end{cases}$ 的夹角的余弦.
6. 证明直线 $\begin{cases} x+2y-z=7, \\ -2x+y+z=7 \end{cases}$ 与直线 $\begin{cases} 3x+6y-3z=8, \\ 2x-y-z=0 \end{cases}$ 平行.
7. 求过点 (0,2,4) 且与两平面 $x+2z=1$ 和 $y-3z=2$ 平行的直线方程.
8. 求过点 (3,1,-2) 且通过直线 $\dfrac{x-4}{5}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z}{1}$ 的平面方程.
9. 求直线 $\begin{cases} x+y+3z=0 \\ x-y-z=0 \end{cases}$ 与平面 $x-y-z+1=0$ 的夹角.
10. 试确定下列各组中的直线和平面间的关系:

    (1) $\dfrac{x+3}{-2}=\dfrac{y+4}{-7}=\dfrac{z}{3}$ 和 $4x-2y-2z=3$; (2) $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z}{7}$ 和 $3x-2y+7z=8$;

    (3)$\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-3}{-4}$ 和$x+y+z=3$.
11. 求过点 (1,2,1) 而与两直线 $\begin{cases} x+2y-z+1=0, \\ x-y+z-1=0 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} 2x-y+z=0, \\ x-y+z=0 \end{cases}$ 平行的平面方程.
12. 求点 (-1,2,0) 在平面 $x+2y-z+1=0$ 上的投影.
13. 求点 $P(3,-1,2)$ 到直线 $\begin{cases} x+y-z+1=0, \\ 2x-y+z-4=0 \end{cases}$ 的距离.
14. 求直线 $\begin{cases} 2x-4y+z=0, \\ 3x-y-2z-9=0 \end{cases}$ 在平面 $4x-y+z=1$ 上的投影直线的方程.
15. 设向量 $\vec{P}$ 与三轴正方向的夹角分别为 α,β,γ. 当 $\cos\gamma=1$ 时, 问向量 $\vec{P}$ 与平面 XOY 是什么关系?
16. 求 $M(1,2,1)$ 关于平面 $x+2y+2z-10=0$ 的对称点.
17. 求通过直线 $\begin{cases} 3x-2y+2=0, \\ x-2y-z+6=0 \end{cases}$ 且与点 $P(1,2,1)$ 距离为 1 的平面方程.
18. 求点 $M(1,2,3)$ 到直线 $L:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-4}{-3}=\dfrac{z-3}{-2}$ 的距离.
19. 求两异面直线 $L_1:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{0}$, 与 $L_2:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z}{1}$ 的距离.