HITWH
SE

第三章

排序与分治算法

HITWH
SE

参考材料

《Introduction to Algorithm》

Chapter 6, 7, 8, 9

《Introduction to the Design and Analysis of Algorithm》

Chapter 4

提要

3.1 分治算法的原理
3.2 基于分治思想的排序算法
3.3 Medians and Order Statistics
3.4 最邻近点对
3.5 线性时间排序算法
3.6 凸包问题
3.7 FFT
3.8 整数乘法

HITWH
SE

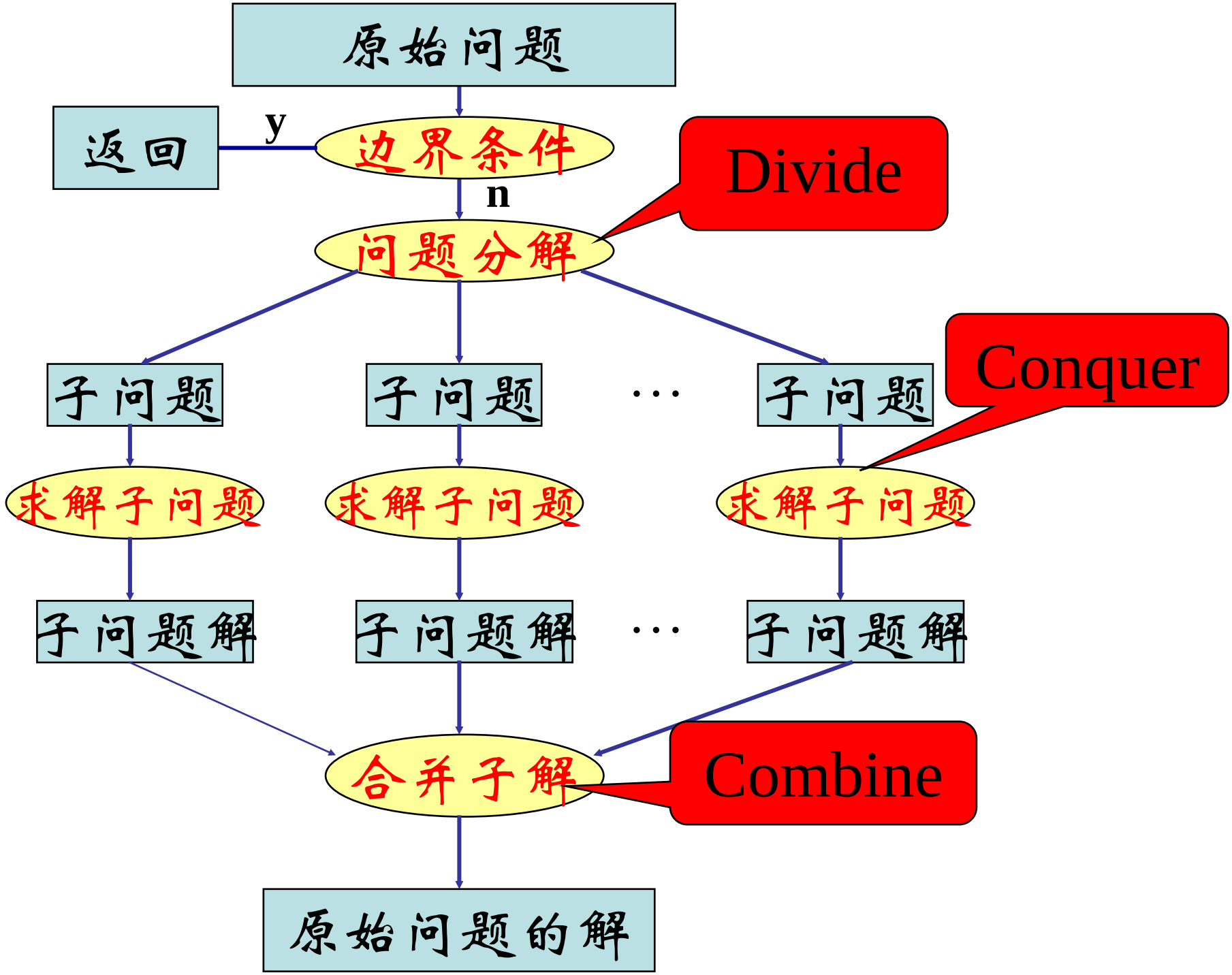
3.1 Divide-and-Conquer原理

- Divide-and-Conquer算法的设计
- Divide-and-Conquer算法的分析

HITWH
SE

Divide-and-Conquer算法的设计

- 设计过程分为三个阶段
  - Divide： 整个问题划分为多个子问题
    - 注意： 分解的这组子问题$p_1,p_2,...p_m$未必一定是相同的子问题，即p_i和p_j可以是分别完成不同任务的子问题
  - Conquer：求解各子问题(递归调用正设计的算法)
  - Combine：合并子问题的解，形成原始问题的解


原始问题
返回
y
边界条件
n
Divide
问题分解
子问题
子问题
…
子问题
Conquer
求解子问题
求解子问题
求解子问题
子问题解
子问题解
…
子问题解
合并子解
Combine
原始问题的解

HITWH
SE

Divide-and-Conquer算法的分析

- 分析过程
  - 建立递归方程
  - 求解
- 递归方程的建立方法
  - 设输入大小为n, $T(n)$为时间复杂性
  - 当$n<c$, $T(n)=\theta(1)$

– Divide阶段的时间复杂性
  - 划分问题为a个子问题。
  - 每个子问题大小为n/b。
  - 划分时间可直接得到=$D(n)$
– Conquer阶段的时间复杂性
  - 递归调用
  - Conquer时间 = $aT(n/b)$
– Combine阶段的时间复杂性
  - 时间可以直接得到=$C(n)$

最后得到递归方程：

- $T(n)=\theta(1)$ if $n\le c$
- $T(n)=aT(n/b)+D(n)+C(n)$ if $n>c$

HITWH
SE

举例：最大最小值问题

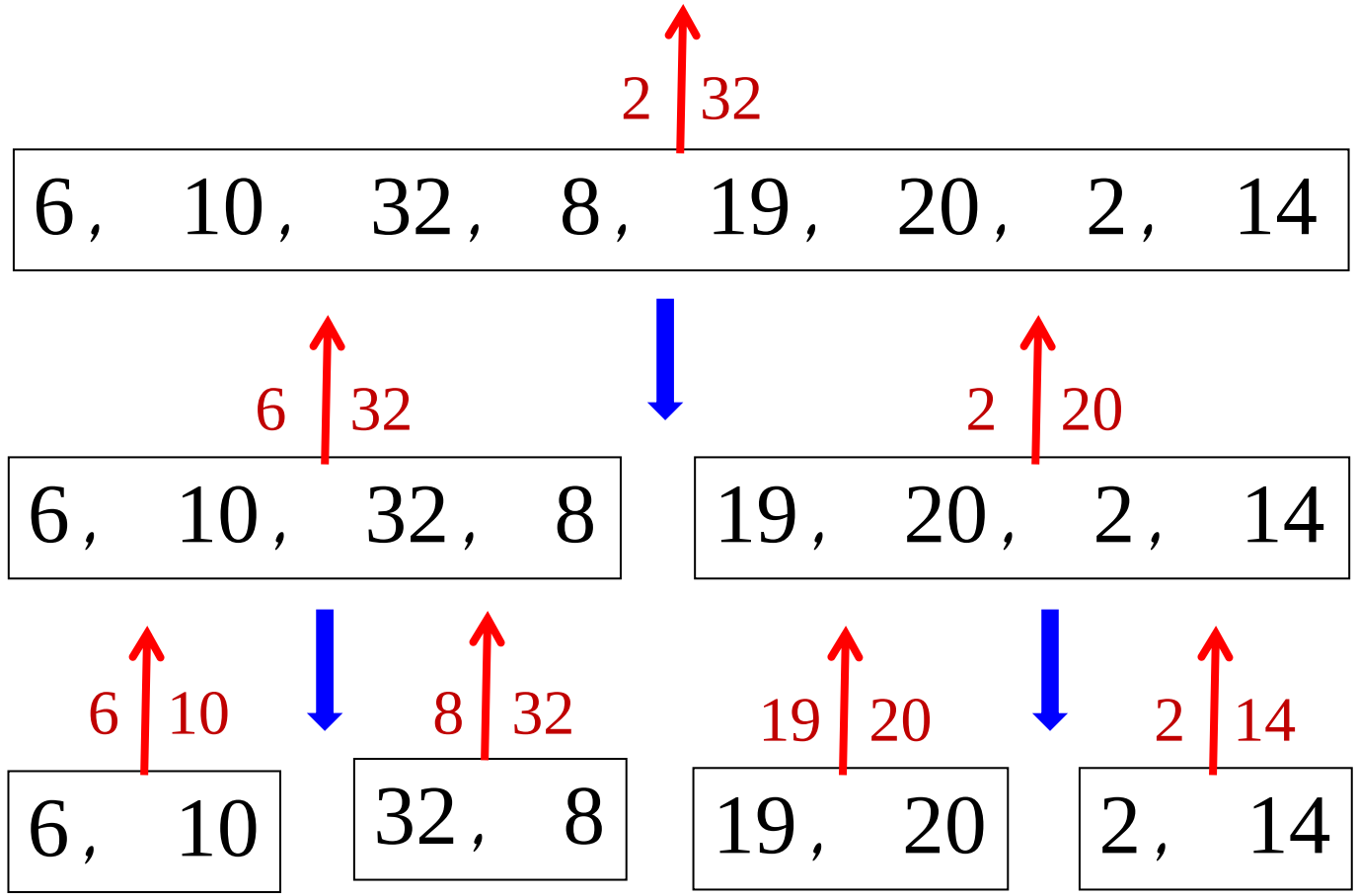
输入：数组$A[1,\ldots,n]$

输出：A中的max和min

通常，直接扫描需要$2n$-2次比较操作

我们给出一个仅需$\lceil 3n/2-2 \rceil$次比较操作的算法

基本思想


2 32
6, 10, 32, 8, 19, 20, 2, 14
6 32
2 20
6, 10, 32, 8
19, 20, 2, 14
6 10
8 32
19 20
2 14
6, 10
32, 8
19, 20
2, 14

算法

算法MaxMin(A)
输入: 数组$A[i,\ldots,j]$
输出:数组$A[i,\ldots,j]$中的max和min

1. If j-i+1 =1 Then 输出$A[i]$,$A[i]$,算法结束
2. If j-i+1 =2 Then
3. If $A[i]< A[j]$ Then 输出$A[i]$,$A[j]$; else 输出$A[j]$,$A[i]$;
   算法结束
4. $k\leftarrow(j+i)/2$
5. $m_1,M_1 \leftarrow$MaxMin($A[i{:}k]$);
6. $m_2,M_2 \leftarrow$MaxMin($A[k+1{:}j]$);
7. $m \leftarrow\min(m_1,m_2)$;
8. $M \leftarrow\max(M_1,M_2)$;
9. 输出m,M

算法复杂性分析

$T(1)=0$

$T(2)=1$

$T(n)=2T(n/2)+2$

$= 2(2T(n/2^2)+2)+2 = 2^2T(n/2^2)+2^2+2$

$= \ldots$

$=2^{k-1}T(2)+2^{k-1}+2^{k-2}+\ldots+2^2+2$

$=2^{k-1}+ 2^k-2$

$=n/2+ n -2$

$=3n/2-2$

$n=2^k$

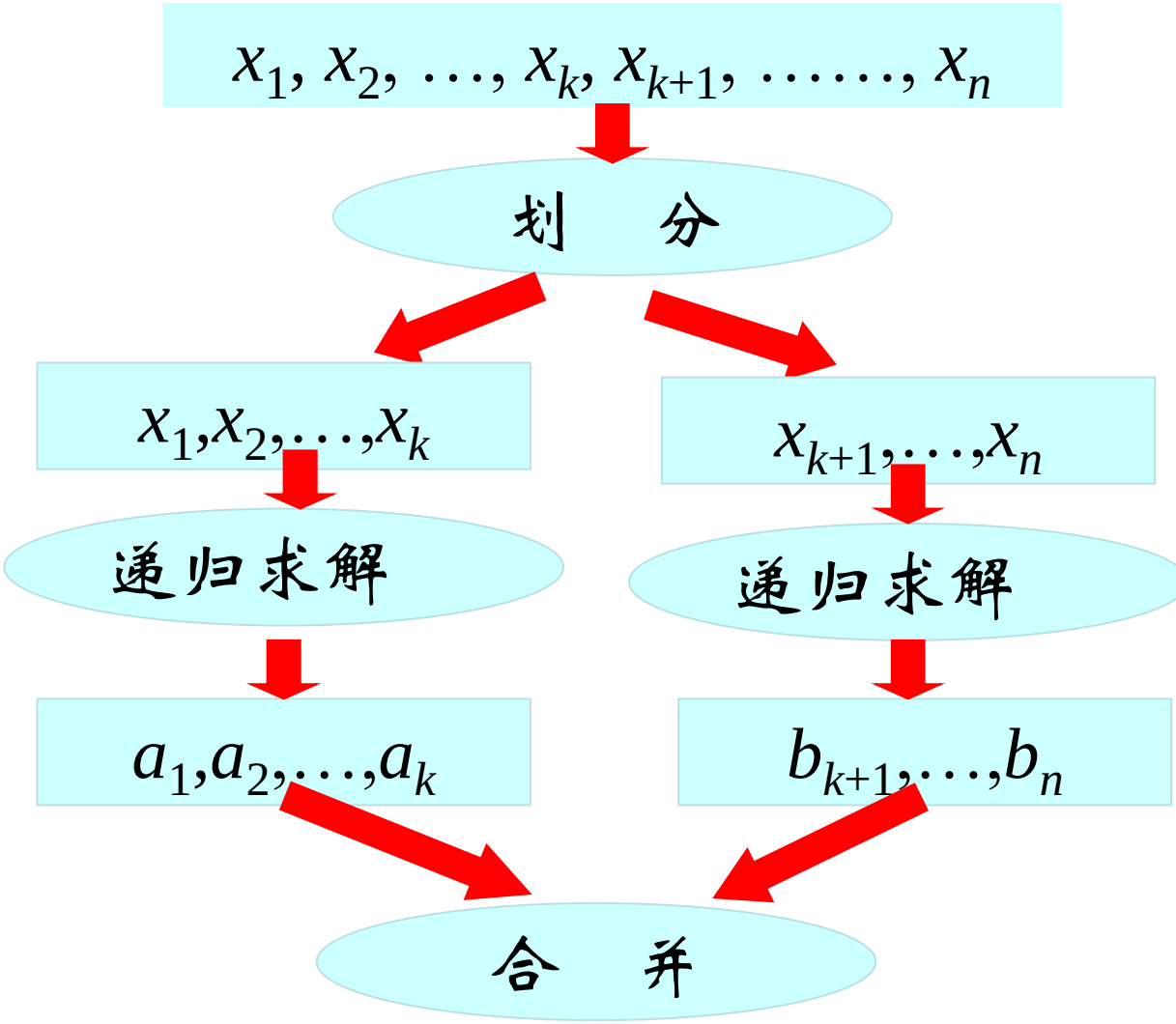
与Naïve算法相比，虽然同阶，但系数有所改进

HITWH
SE

3.2 基于分治的排序算法

- *Quicksort* Algorithm
- 排序问题的下界

基于分治思想的排序算法



划分的策略

根据某一策略将数据集合划分成两个部分

Mergesort：中间点

Quicksort：任选一个划分点x，利用x的值将数据划分成两部分

合并策略

不同的划分策略对应不同的合并策略

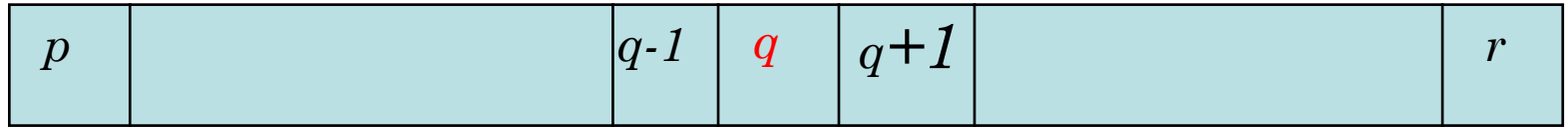
HITWH
SE

3.2.1 *Quicksort*

- Idea of *Quicksort*
- *Quicksort* Algorithm
- Correctness Proof
- Performance Analysis
- Randomized Quicksort Algorithms

Idea of *Quicksort*

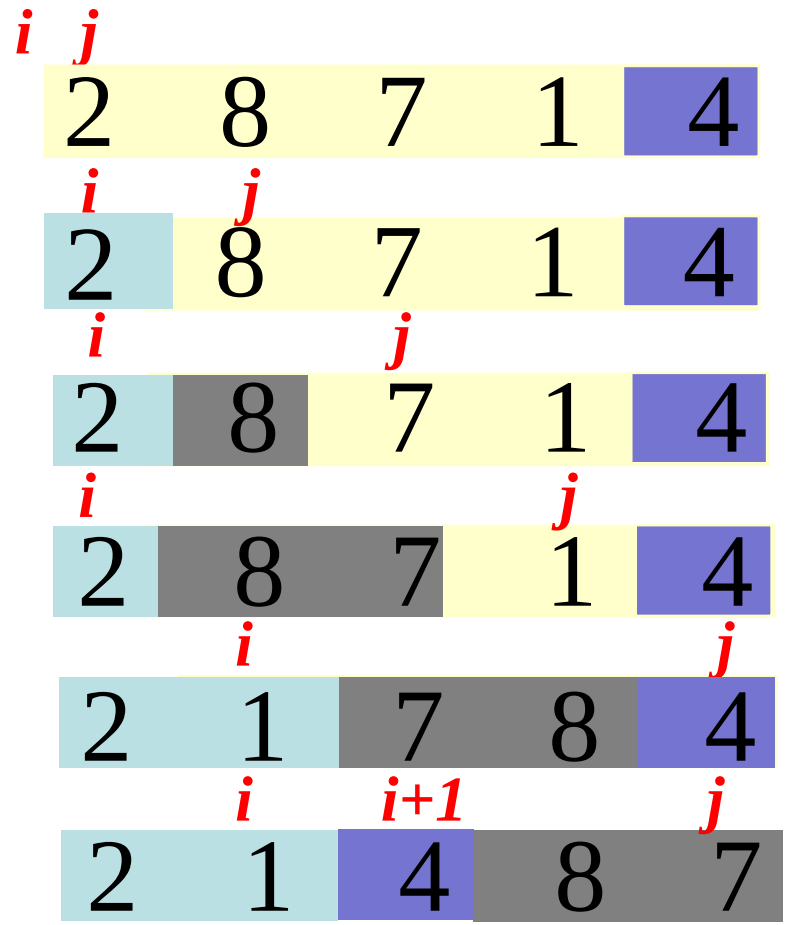
- Divide-and-Conquer
  - Divide:
    - Partition *A[p..r]* into *A[p..q]* and *A[q+1..r]*.



    - $\forall x \in A[p...q], x \le A[q], \ \forall y \in A[q+1...r], y > A[q]$.
    - *q* is generated by partition algorithm.
  - Conquer：
    - Sort *A[p...q-1]* and *A[q+1...r]* using quicksort recursively
  - Combine：
    - Since *A[p...q-1]* and *A[q+1...r]* have been sorted, nothing to do

- 划分 $A[p..r]$
  - 选择元素x作为划分点，$x=A[r]$
  - x逐一与其它元素作比较

算法执行过程中，
A 被分成4个区域



HITWH
SE

Partition(A, p, r)

$x \leftarrow A[r]$;

$i \leftarrow p-1$;

for $j \leftarrow p$ to $r-1$

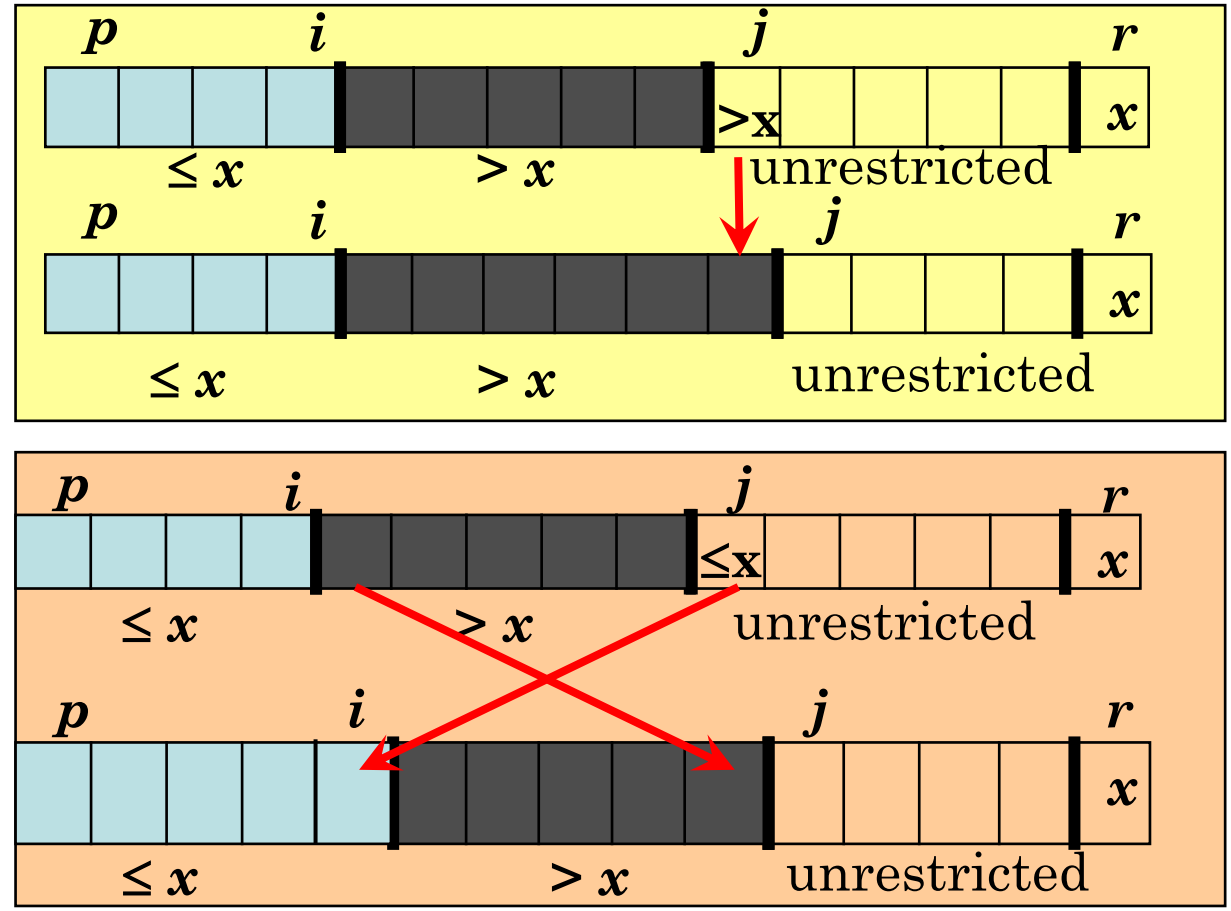
do if $A[j] \leq x$

$i \leftarrow i+1$;

exchange $A[i] \leftrightarrow A[j]$;

exchange $A[i+1] \leftrightarrow A[r]$;

return $i+1$;



Running time: $\Theta(n)$

Quicksort Algorithm

Quicksort(*A*,*p*,*r*)

If *p*<*r*

Then *q*=Partition(*A*, *p*, *r*);

Quicksort (*A*,*p*,*q-1*);

Quicksort (*A*,*q*+*1*,*r*);

Correctness Proof

- Loop Invariant(循环不变量方法)

  证明主要结构是循环结构的算法的正确性

  循环不变量：数据或数据结构的关键性质
  依赖于具体的算法和算法特点

  证明分三个阶段

  (1) 初始阶段：循环开始前循环不变量成立

  (2) 循环阶段：循环体每执行一次,循环不变量成立

  (3) 终止阶段：算法结束后，循环不变量保证算法正确

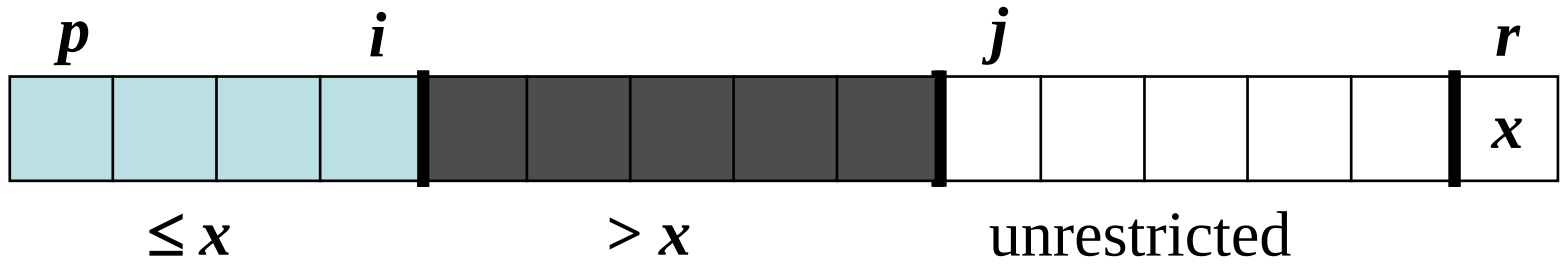
```
Partition(A, p, r)
   x ← A[r];
   i ← p − 1;
(3) for j ← p to r − 1
(4)    do if A[j] ≤ x
(5)          i ← i + 1;
(6)          exchange A[i] ↔ A[j];
   exchange A[i + 1] ↔ A[r];
   return i + 1;
```

- Correctness Proof

定义循环不变量：

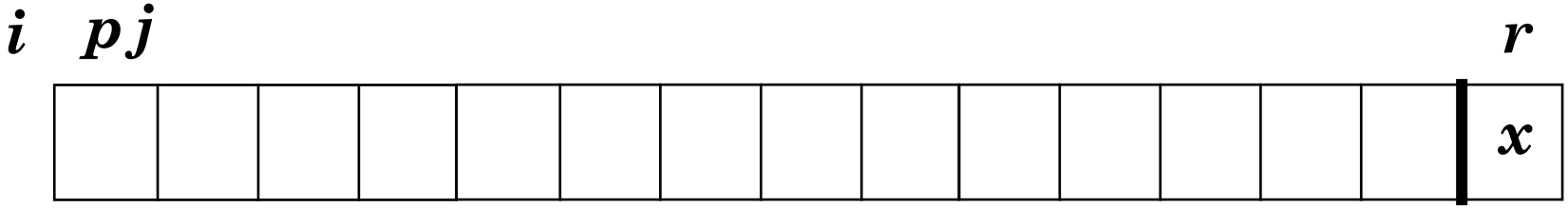
At the start of the loop of lines 3-6, for any *k*

1. *if* $p \le k \le i$, *then* $A[k] \le x$.
2. *if* $i+1 \le k \le j-1$, *then* $A[k] > x$.
3. *if* $k=r$, *then* $A[k]=x$.



– 初始阶段：$j=p$

算法迭代前：$i=p-1$, $j=p$, 条件 1 和 2 为真. 算法第1行使得条件 3 为真.

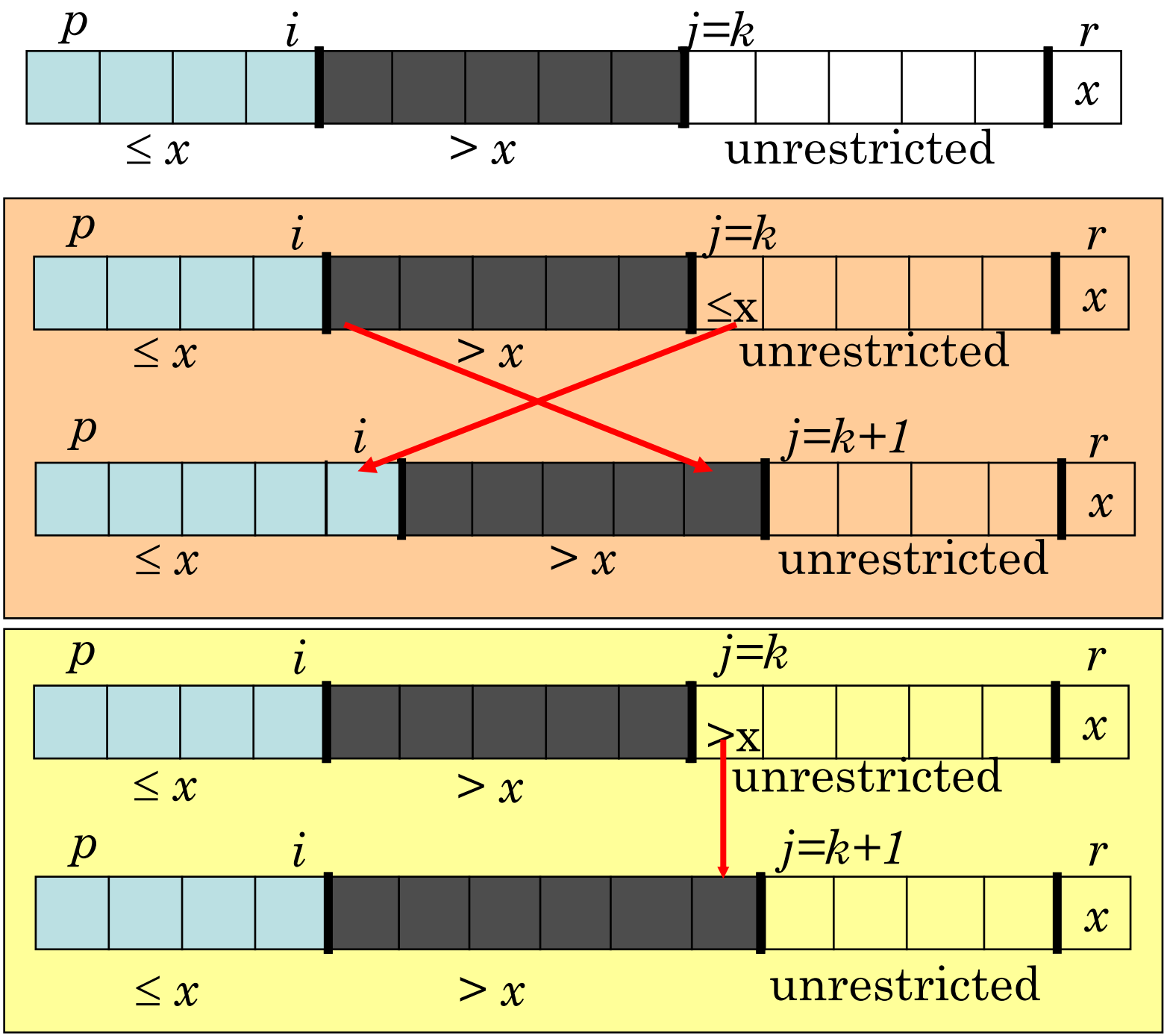


一保持阶段

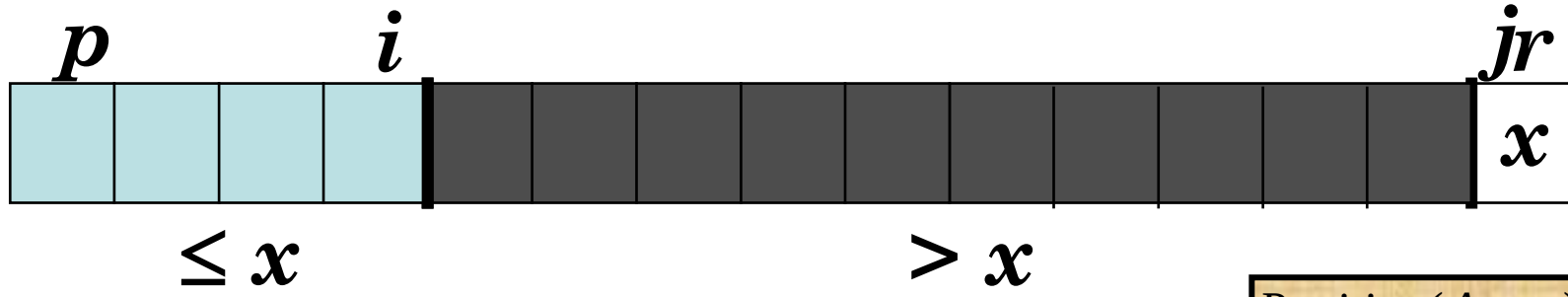
设$j=k$时循环不变量成立.

往证$j=k+1$时不变量成立.

```
Partition(A, p, r)
  x ← A[r];
  i ← p − 1;
  for j ← p to r − 1
    do if A[j] ≤ x
          i ← i + 1;
          exchange A[i] ↔ A[j];
  exchange A[i + 1] ↔ A[r];
  return i + 1;
```



– 终止阶段



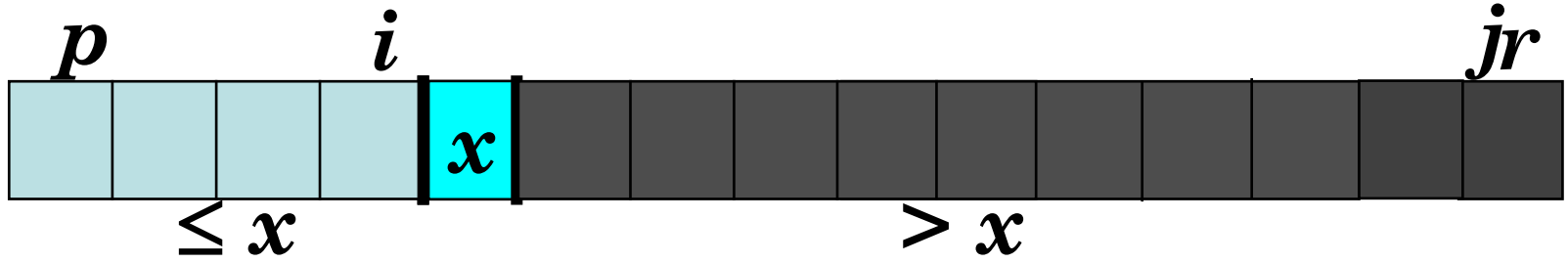
算法结束时, $j=r$, 产生三个集合:

1. 所有小于等于x的元素构成的集合.
2. 所有大于x的元素构成的集合.
3. 由元素x构成的集合.

算法结束时

最后一个步骤将A[r]与A[$i+1$]互换.

```
Partition(A, p, r)
  x ← A[r];
  i ← p − 1;
  for j ← p to r − 1
     do if A[ j] ≤ x
           i ← i + 1;
           exchange A[i] ↔ A[ j];
  exchange A[i + 1] ↔ A[r];
  return i + 1;
```



Performance Analysis

- Time complexity of PARTITION: $\theta(n)$
- Best case time complexity of *Quicksort*
  - Array in partition into 2 equal sets
  - $T(n)=2T(n/2)+\theta(n)$
  - $T(n)=\theta(n\log n)$

Performance Analysis

- Worst case time complexity of Quicksort
  - Worst Case
    - $|A[p..q-1]|=0$, $|A[q+1..r]|=n-1$

    - The worst case happens in call to Partition Algorithm
  - Worst case time complexity
    - $T(n)= T(0)+T(n-1)+\theta(n)=T(n-1)+\theta(n)=\theta(n^2)$

Performance Analysis

What is the average time complexity?

$T(n)=O(n\log n)$

Why?

Performance Analysis

- 假如第一次划分后产生两个子序列，一个子序列包含s个元素，另一个子序列包含n-1-s个元素
- 一共有n种可能的划分，即$0 \le s \le n-1$，每种可能划分产生的概率为$1/n$
- 平均复杂性$T(n) = \frac{1}{n}\sum_{s=0}^{n-1}\big(T(s)+T(n-1-s)\big)+cn$

$$\frac{1}{n}\sum_{s=0}^{n-1}\big(T(s)+T(n-1-s)\big)=\frac{1}{n}\big(T(0)+T(n-1)+T(1)+T(n-2)+\cdots+T(n-1)+T(0)\big)$$

由于T(0)=0，有：$T(n)=\frac{1}{n}\big(2T(1)+2T(2)+\cdots+2T(n-1)\big)+cn$

$$nT(n)=2T(1)+2T(2)+\cdots+2T(n-1)+cn^2$$

Performance Analysis

$$nT(n) = 2T(1) + 2T(2) + \cdots + 2T(n-1) + cn^2$$

用n替换为n-1代入上式，有：

$$(n-1)T(n-1) = 2T(1) + 2T(2) + \cdots + 2T(n-2) + c(n-1)^2$$

两式相减：$nT(n) - (n-1)T(n-1) = 2T(n-1) + c(2n-1)$

$$nT(n) - (n+1)T(n-1) = c(2n-1)$$

$$\frac{T(n)}{n+1} - \frac{T(n-1)}{n} = c\frac{(2n-1)}{(n+1)n} = c\frac{\big(3n-(n+1)\big)}{(n+1)n} = c\left(\frac{3}{n+1} - \frac{1}{n}\right)$$

递归地：$\dfrac{T(n-1)}{n} - \dfrac{T(n-2)}{n-1} = c\left(\dfrac{3}{n} - \dfrac{1}{n-1}\right)$

…

$$\frac{T(2)}{3} - \frac{T(1)}{2} = c\left(\frac{3}{3} - \frac{1}{2}\right)$$

Performance Analysis

我们得到：

$$\frac{T(n)}{n+1}-\frac{T(n-1)}{n}=\mathrm{c}\left(\frac{3}{n+1}-\frac{1}{n}\right)$$

$$\frac{T(n-1)}{n}-\frac{T(n-2)}{n-1}=\mathrm{c}\left(\frac{3}{n}-\frac{1}{n-1}\right)$$

$$\cdots$$

$$\frac{T(2)}{3}-\frac{T(1)}{2}=\mathrm{c}\left(\frac{3}{3}-\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{T(n)}{n+1}=3\mathrm{c}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{3}\right)-c\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\cdots+\frac{1}{2}\right)+\frac{T(1)}{2}$$

$$=2\mathrm{c}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\cdots+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1\right)-\frac{7}{2}c+\frac{T(1)}{2}+\frac{3c}{n+1}$$

$$=2cH_n-\frac{7}{2}c+\frac{T(1)}{2}+\frac{3c}{n+1}$$

$$T(n)=2cnH_n+2cH_n+\left(\frac{T(1)}{2}-\frac{7}{2}c\right)n+\left(\frac{T(1)}{2}-\frac{7}{2}c+3c\right)=O(n\log n)$$

Randomized Quicksort Algorithms

- **Randomized-Partition(*A*, *p*, *r*)**

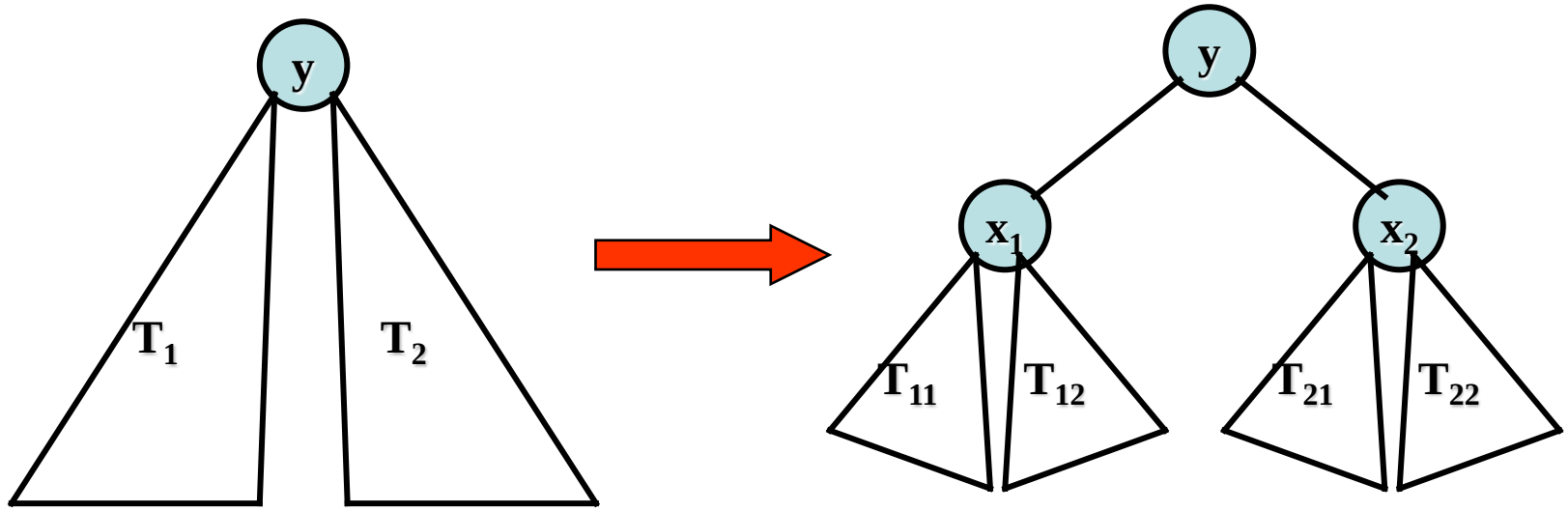
  1. i := Random(p, r)
  2. $A[r] \leftrightarrow A[i]$;
  3. Return Partition(A, p, r)

- **Randomized-Quicksort(*A*, *p*, *r*)**

  1. **If** $p < r$
  2. **Then** q := Randomized-Partition(A, p, r);
  3. Randomized-Quicksort(A, p, q-1);
  4. Randomized-Quicksort(A, q+1, r).

随机快速排序复杂性分析

- 我们可以用树表示算法的计算过程



- 我们可以观察到如下事实:
  - 一个子树的根必须与其子树的所有节点比较
  - 不同子树中的节点不可能比较
  - 任意两个节点至多比较一次

随机快速排序复杂性分析

- 基本概念
  - $x_{(i)}$表示A中Rank为i的元素(第i小元素)

    例如，$x_{(1)}$和$x_{(n)}$分别是最小和最大元素
  - 随机变量X_{ij}定义如下:

    X_{ij}=1如果$x_{(i)}$和$x_{(j)}$在运行中被比较，否则为0

    X_{ij}是$x_{(i)}$和$x_{(j)}$ 的比较次数
  - 算法的比较次数为 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i} X_{ij}$
  - 算法的复杂性为T(n)= $E[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i} X_{ij}]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i} E[X_{ij}]$

随机快速排序复杂性分析

$$T(n)=E[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}X_{ij}]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}E[X_{ij}]$$

- 计算$E[X_{ij}]$
  - 设p_{ij}为$x_{(i)}$和$x_{(j)}$在运行中被比较的概率，则

$$E[X_{ij}]=p_{ij}\times 1+(1-p_{ij})\times 0=p_{ij}$$

关键问题成为求解p_{ij}

随机快速排序复杂性分析

- 求解p_{ij}
  - $Z_{ij}=\{x_{(i)}, x_{(i+1)}, \cdots, x_{(j)}\}$是$x_{(i)}$和$x_{(j)}$之间元素集合，$Z_{ij}$在同一棵子树时，$x_{(i)}$和$x_{(j)}$才可能比较.
  - $x_{(i)}$和$x_{(j)}$在执行中被比较，需满足下列条件：
    - $x_{(i)}$是Z_{ij}中第一个被选择的子树根节点，或者
    - $x_{(j)}$是Z_{ij}中第一个被选择的子树根节点
  - 一棵子树所有点等可能地被选为划分点，所以$x_{(i)}$或$x_{(j)}$被选为划分点的概率 $= 2/|T|=2/(j-i+1)$.
  - $x_{(i)}$和$x_{(j)}$被进行比较的概率：

$$p_{ij} = 2/(j-i+1)$$

随机快速排序复杂性分析

- 现在我们有

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}E[X_{ij}]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}p_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}\frac{2}{j-i+1}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n-i}\frac{2}{k+1}\le\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n-i}\frac{2}{k}$$

$$\le 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=2nH_n=O(n\log n)$$

定理. 随机排序算法的期望时间复杂性为$O(n\log n)$

HITWH
SE

3.2.2 排序问题的下界

问题的下界

- 问题的下界(lower bound of a problem)
  - 是用于解决该问题的任意算法所需要的最小时间复杂度
  - 问题难度的一种度量
    - 如果问题可由一个具有较低时间复杂性的算法解决，则该问题是简单的；否则是困难的
  - 通常指：最坏情况下界
- 问题的下界是不唯一的
  - 例如. $\Omega(1)$, $\Omega(n)$, $\Omega(n\log n)$ 都是排序的下界
  - 只有$\Omega(n\log n)$是有意义的
  - 下界应尽可能地高，达到上限
  - 下界的分析都是经过严格理论分析和证明，而非纯粹猜测

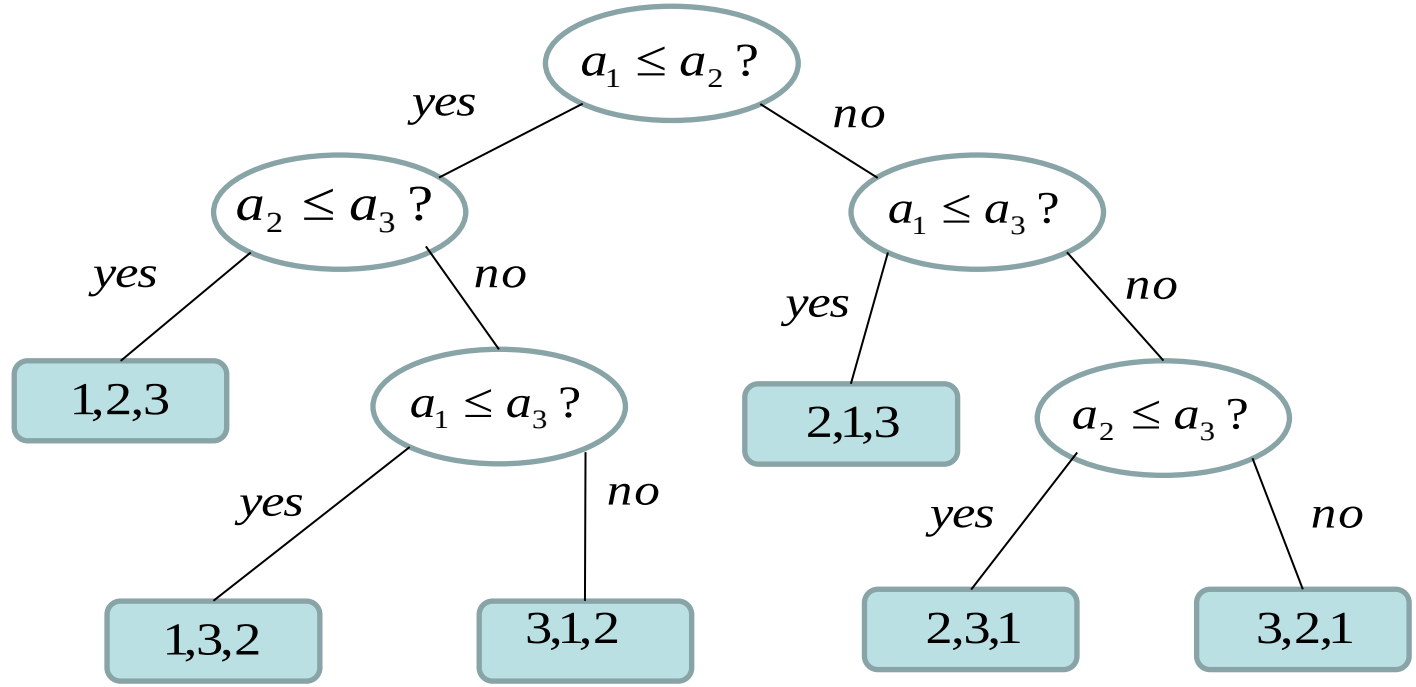
问题的下界的意义

- 如果一个问题的最高下界是$\Omega(n\log n)$而当前最好算法的时间复杂性是$O(n^2)$.
  - 我们可以寻找一个更高的下界.
  - 我们可以设计更好的算法.
  - 下界和算法都是可能改进的.
- 如果一个问题的下界是$\Omega(n\log n)$且算法的时间复杂性是$O(n\log n)$, 那么这个算法是最优的

排序的下界

- 通常，基本操作是比较和交换的排序算法可以用一个二叉决策树描述
  - 通过忽略比较以外的细节来抽象表示比较排序算法
  - 每个内节点表示一个比较操作$a_i \leq a_j$；
  - 所有被排序元素的全排列是树的叶节点；

对于特定输入数据集的排序过程，对应于从树的根结点到叶子节点的一条路径



排序的下界

- n个元素有$n!$种不同排列
- 其排序过程对应于一个高度为h，具有$n!$个叶子节点的二叉决策树 .
- 由于高度为h的二叉树至多有2^h个叶子节点
- 则有$2^h \geq n!$

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

即： $h \geq \lg(n!) = \Omega(n\lg n)$

排序的下界是: $\Omega(n\log n)$

HITWH
SE

3.3 Medians and Order Statistics

- Decrease and Conquer原理
- Selection Problem

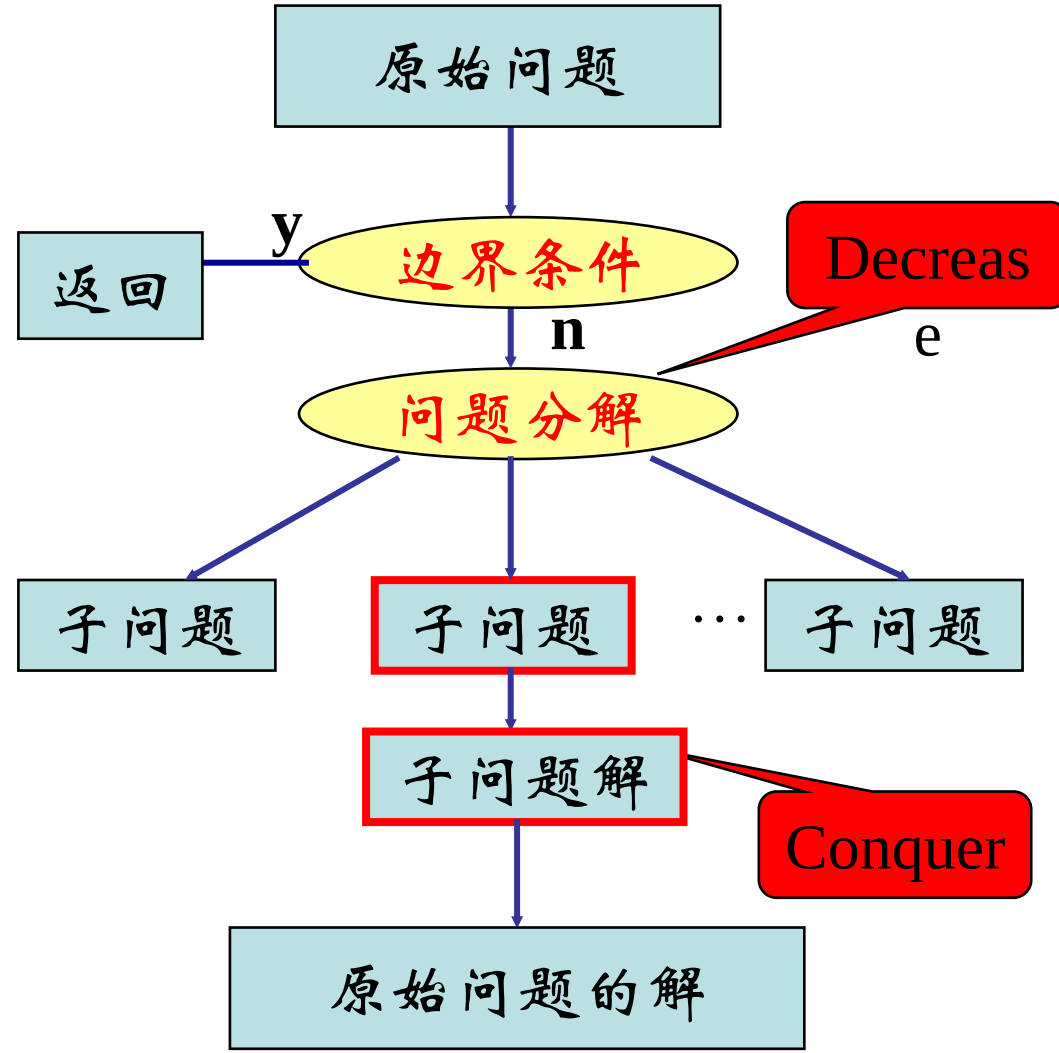
Decrease and Conquer原理

- 原始问题划分为若干子问题，将原始计算问题转化为其中某一个子问题的计算问题

例如：折半查找

$T(n)=T(\lfloor n/2 \rfloor)+1$

- 非常有效的一种方法，通常用于解决优化问题



Decrease and Conquer原理

- 与Divide-and Conquer的不同
  - 分治方法：递归求解每一个子问题，然后通过合并各个子问题的解最后得到原始问题的解
  - 减治方法：仅通过求解某一个子问题的解得到原始问题的解

Medians and Order Statistics

- **The i^{th} order statistic problem**
  - Input: set S of n (distinct) elements, and a number i.
  - Output: element x in S that is greater than exactly $i-1$ elements in S.
  - Special order statistics
    - The 1^{st} order statistic is the *minimum* in S
    - The n^{th} order statistic is the *maximum* in S
    - The *median* in S is at
      - $(n+1)/2$ when n is odd
      - $n/2$ and $n/2+1$ when n is even

Selection Problem

- **Problem**
  - Input: set A of n (distinct) elements, and a number k.
  - Output: element x in A that is greater than exactly $k-1$ elements in A, i.e the k^{th} smallest element.

The straightforward algorithm:

step 1: Sort the n elements

step 2: Locate the k^{th} element in the sorted list.

Time complexity: O($n$log$n$)

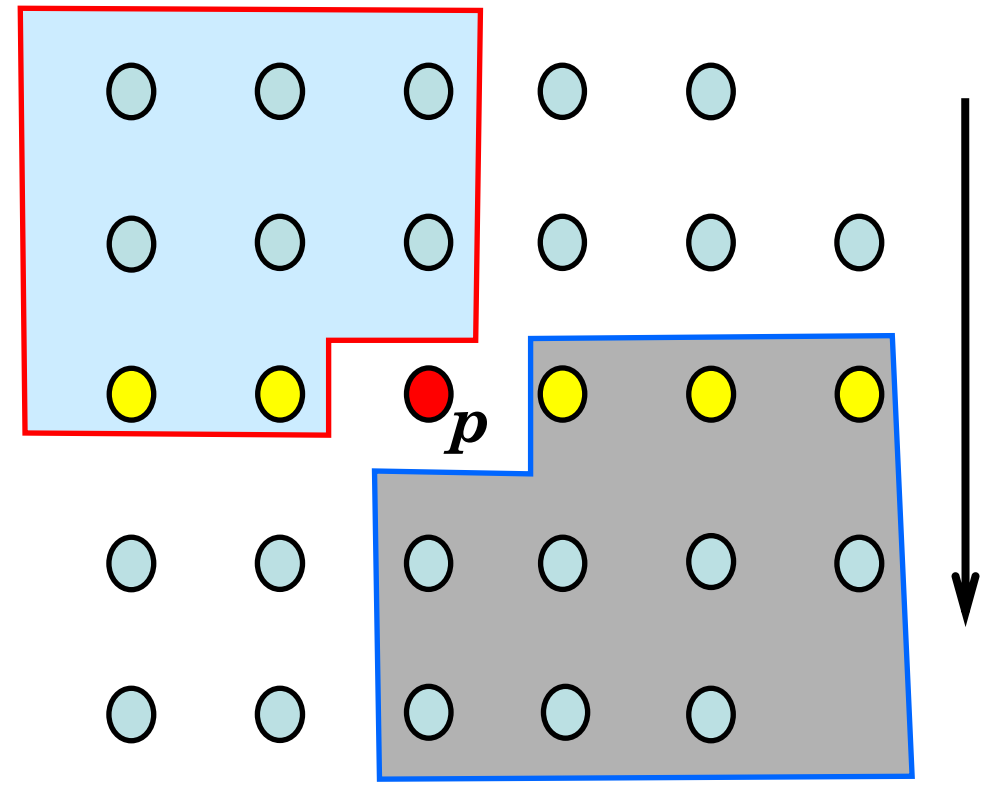
HITWH
SE

Algorithm of Selection Problem

- **Main Idea**
  - $S=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$
  - Let $p \in S$, 用p 将S 划分为3 个子集合S_1 , S_2 , S_3:
    - $S_1=\{ a_i \mid a_i < p , 1 \le i \le n\}$
    - $S_2=\{ a_i \mid a_i = p , 1 \le i \le n\}$
    - $S_3=\{ a_i \mid a_i > p , 1 \le i \le n\}$
  - 3 种情况:
    - 若$|S_1| > k$, 则在集合S_1中搜索第k小的元素.
    - 否则, 若$|S_1| + |S_2| > k$, 则 p 是S中第k小的元素.
    - 否则, 在S_3中搜索第$(k - |S_1| - |S_2|)$小的元素.

Algorithm of Selection Problem

- 如何选择p?
  - The n elements are divided into $\lceil \frac{n}{5} \rceil$ subsets (Each subset has 5 elements.)
  - Sort each subset
  - Find the element ***p*** which is the median of the medians of the $\lceil n/5 \rceil$ subsets



HITWH
SE

Algorithm of Selection Problem

算法步骤:

$O(n)$

Step 1: 划分 S 为 $\lceil n/5 \rceil$ 个组. 每组包含5个元素. 若最后一组不足5个元素，则用 ∞ 补足.

Step 2: 排序每组5个元素，并确定每一分组的中位数. $O(n)$

Step 3: 计算 $\lceil n/5 \rceil$ 个中位数的中位数 p. $T(n/5)$

Step 4: p 将 S 划分为三个子集合 S_1, S_2 及 S_3, S_1 中元素均小于 p， S_2 中元素均等于 p， S_3 中元素均大于 p.

$O(n)$

Step 5: 若 $|S_1| \geq k$, 则递归地在 S_1 中搜索第 k 小元素;

否则，若 $|S_1| + |S_2| \geq k$，则 p 即为 S 中第 k 小元素;

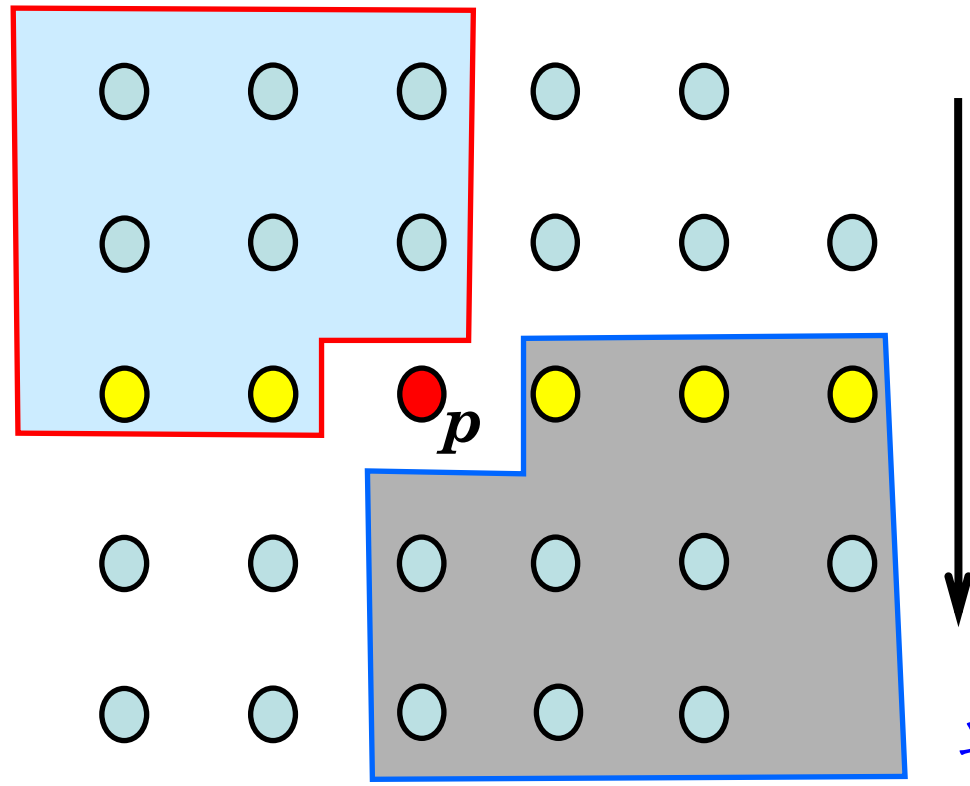
否则，令 $k' = k - |S_1| - |S_2|$，递归地在 S_3 中搜索第 k' 小元素.

?

Performance Analysis

Each 5-element subset is sorted in non-decreasing sequence.

至少$|S|/4$个元素小于等于p



至少$|S|/4$个元素大于等于p

Algorithm of Selection Problem

算法步骤:

$O(n)$

Step 1: 划分 S 为 $\lceil n/5 \rceil$ 个组. 每组包含5个元素. 若最后一组不足5个元素，则用 ∞ 补足.

Step 2: 排序每组5个元素，并确定每一分组的中位数. $O(n)$

Step 3: 计算 $\lceil n/5 \rceil$ 个中位数的中位数 p. $T(n/5)$

Step 4: p 将 S 划分为三个子集合 S_1, S_2 及 S_3, S_1 中元素均小于 p， S_2 中元素均等于 p， S_3 中元素均大于 p. $O(n)$

Step 5: 若 $|S_1| \geq k$, 则递归地在 S_1 中搜索第 k 小元素; $T(3n/4)$

否则，若 $|S_1| + |S_2| \geq k$，则 p 即为 S 中第 k 小元素;

否则，令 $k' = k - |S_1| - |S_2|$，递归地在 S_3 中搜索第 k' 小元素.

Performance Analysis

- 算法复杂性分析

$T(n)=T(3n/4)+T(n/5) + O(n)$

Let $T(n) = a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \ldots$, $a_1 \neq 0$

$T(3n/4) = a_0 + (3/4)a_1 n + (9/16)a_2 n^2 + \ldots$

$T(n/5) = a_0 + (1/5)a_1 n + (1/25)a_2 n^2 + \ldots$

$T(3n/4 + n/5) = T(19n/20) = a_0 + (19/20)a_1 n + (361/400)a_2 n^2 + \ldots$

$T(3n/4) + T(n/5) = a_0 + a_0 + (19/20)a_1 n + (241/400)a_2 n^2 + \ldots$

$\leq a_0 + T(19n/20)$

$\Rightarrow T(n) \leq cn + T(19n/20)$

Performance Analysis

$$\Rightarrow T(n) \le cn + T(19n/20)$$

$$\le cn + (19/20)cn + T((19/20)^2 n)$$

$$\vdots$$

$$\le cn + (19/20)cn + (19/20)^2 cn + \ldots + (19/20)^p cn + T((19/20)^{p+1} n) \ ,$$

$$(19/20)^{p+1} n \le 1 \le (19/20)^p n$$

$$= cn\,(1 + 19/20 + (19/20)^2 + \ldots + (19/20)^p) + b$$

$$= \frac{1 - (\frac{19}{20})^{p+1}}{1 - \frac{19}{20}} cn + b$$

$$\le 20\, cn + b$$

$$= O(n)$$

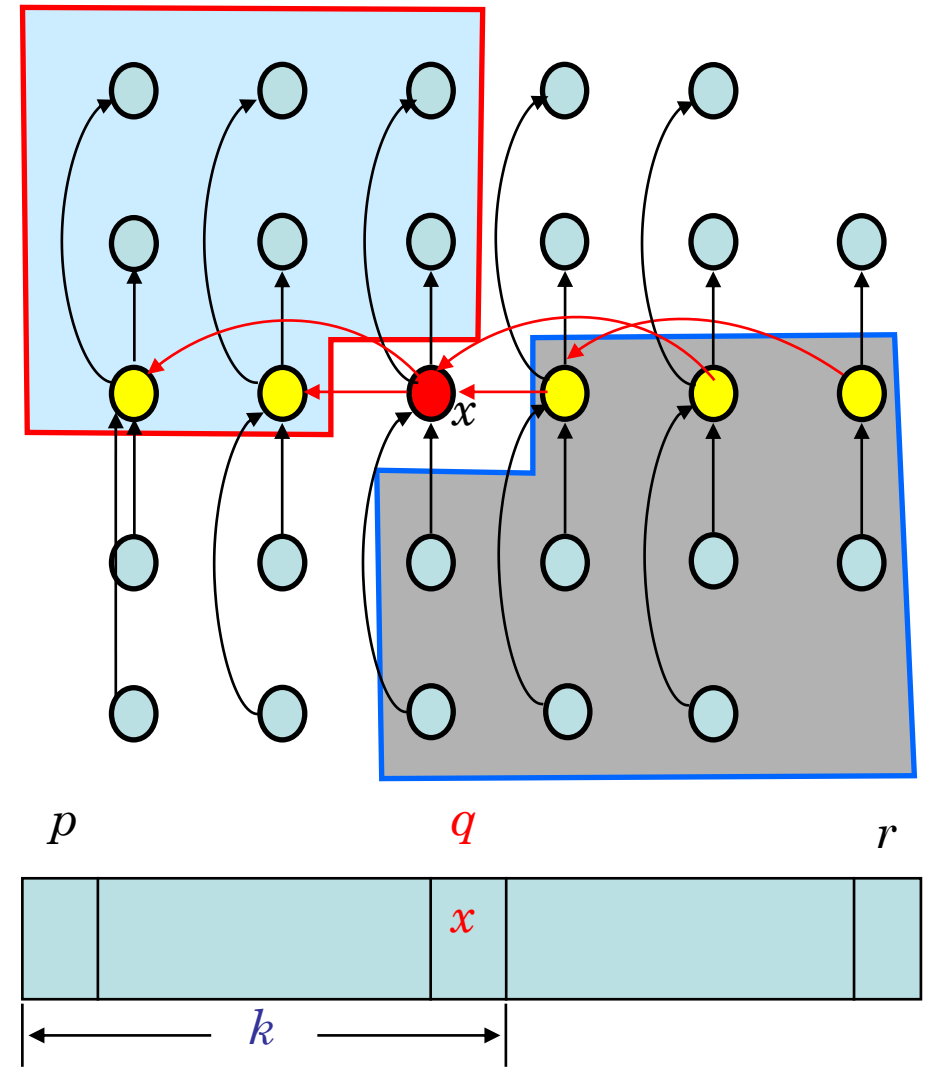
- **Time complexity analysis**
  - The number of elements that greater than the partition element x is at least

$$3\left(\left\lceil\frac{1}{2}\left\lceil\frac{n}{5}\right\rceil\right\rceil-2\right)\geq\frac{3n}{10}-6$$

  - Thus, in the worst case, the number of elements that great than the x is at most

    n-((3n/10)-6) =7n/10+6.
  - Similarly, the number of elements that less than the x is also at most

    7n/10+6



HITWH SE

1. Divide n elements in A into $\lceil n/5 \rceil$ groups of 5 elements each, at most one group has (n mod 5) elements. — $O(n)$

2. Find median of each group by sorting first. — $O(n)$

3. Use Select recursively to find the median x of the $\lceil n/5 \rceil$ medians. In case of having two medians, take the lower. — $T(\lceil n/5 \rceil)$

4. Exchange x with the last element in A and apply Partition subroutine. Let k be the number of elements on the low side of the partition including x. — $O(n)$

5. If $i = k$, return x. Otherwise, use Select recursively to find the i^{th} smallest element on the low side if $i \le k$, or the $(i-k)^{\text{th}}$ smallest element on the high side if $i > k$. — $T(7n/10+6)$

$$T(n) \le \begin{cases} \theta(1) & \text{if } n \le 140 \\ T(\lceil n/5 \rceil) + T(7n/10+6) + O(n) & \text{if } n > 140 \end{cases}$$

- **Now we have**

$$T(n) \le \begin{cases} \theta(1) & \text{if } n \le 140 \\ T(\lceil n/5 \rceil) + T(7n/10 + 6) + O(n) & \text{if } n > 140 \end{cases}$$

- **Using inductive method, we can prove $T(n) \le cn$ for some c and $n>140$.**
- **Thus, the worst case time complexity is $T(n)=O(n)$.**

HITWH
SE

$$T(n)=\theta(1) \quad \text{if } n\le c$$
$$T(n)=aT(n/b)+D(n)+C(n) \quad \text{if } n>c$$

3.4 Finding the closest pair of points

优化combine阶段，降低$T(n)=aT(n/b)+f(n)$中的$f(n)$

问题定义

输入：Euclidean空间上的n个点的集合Q

输出： $A, B \in Q,$

$Dis(A, B)=Min\{Dis(P_i, P_j) \mid P_i, P_j \in Q\}$

$Dis(P_i, P_j)$是Euclidean距离：

如果$P_i=(x_i, y_i)$, $P_j=(x_j, y_j)$， 则

$$Dis(P_i,P_j)=\sqrt{(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2}$$

一维空间算法

- 利用排序的算法
  - 算法
    - 把Q中的点排序

    - 通过有序集合的线性扫描找出最近点对
  - 时间复杂性
    - $T(n)=O(n\log n)$

一维空间算法(续)

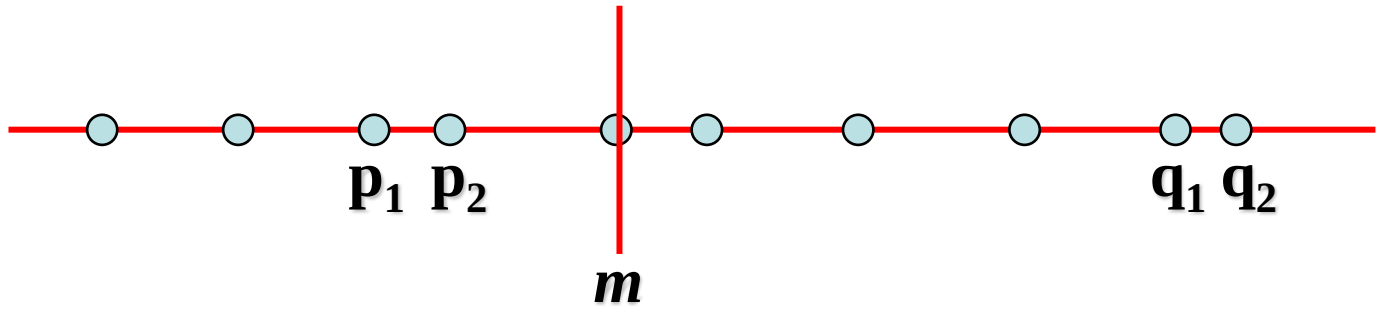
- Divide-and-conquer算法

边界条件:

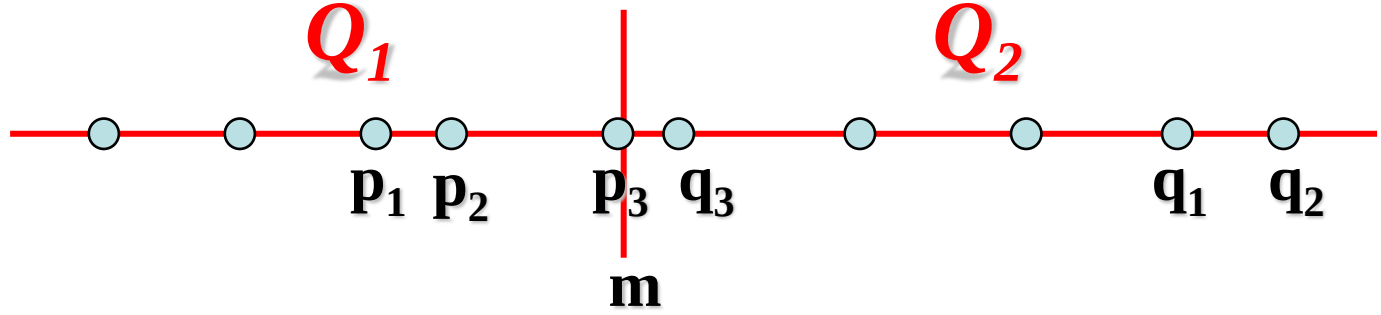
1. 如果Q中仅包含2个点，则返回这个点对；

Divide:

2. 求Q中点的中位数m;



3. 用Q中点坐标中位数m把Q划分为两个大小相等的子集合$Q_1=\{x\in Q \mid x\le m\}$, $Q_2=\{x\in Q \mid x>m\}$

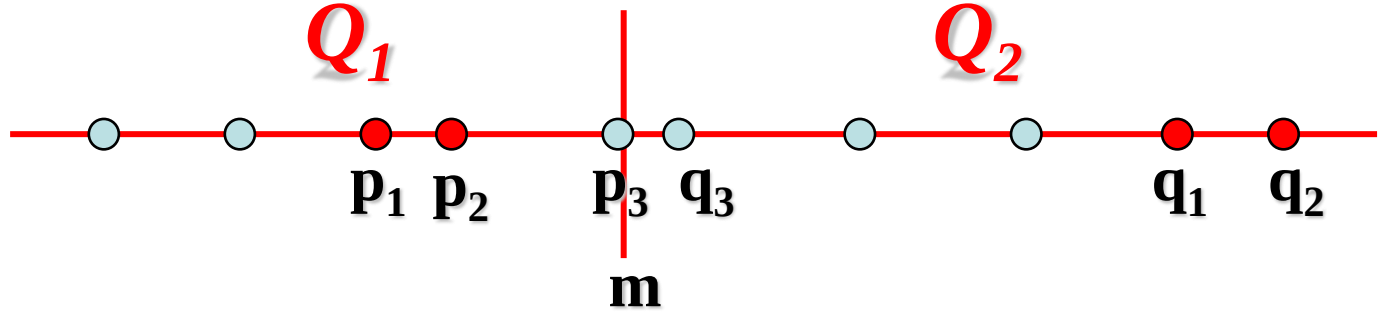


Conquer:

4. 递归地在Q_1和Q_2中找出最接近点对

(p_1, p_2)和(q_1, q_2)

Merge:



5. 在(p_1, p_2)、(q_1, q_2)和某个(p_3, q_3)之间选择最接近点对(x, y)，其中p_3是Q_1中最大点，q_3是Q_2中最小点。

(x, y)是Q中最接近点对

- 时间复杂性
  - Divide阶段需要$O(n)$时间
  - Conquer阶段需要$2T(n/2)$时间
  - Merge阶段需要$O(n)$时间
  - 递归方程

$$T(n)= O(1) \qquad n = 2$$

$$T(n) = 2T(n/2) + O(n) \qquad n \geq 3$$

  - 用Master定理求解$T(n)$

$$T(n) = O(n\log n)$$

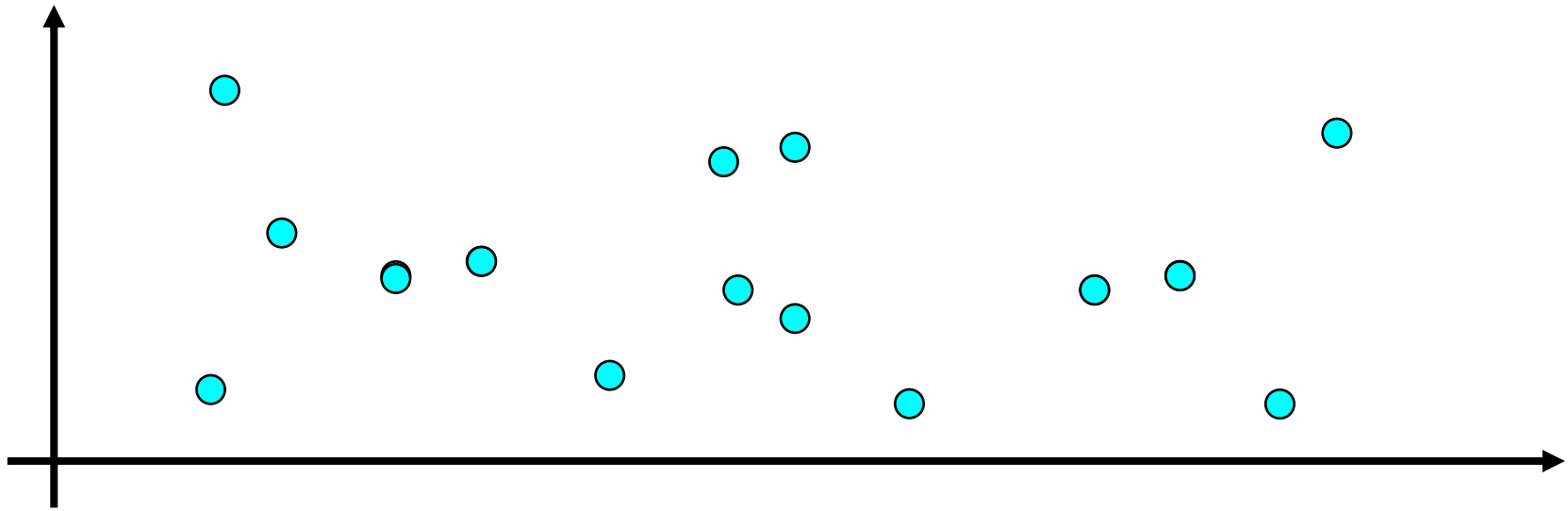
二维空间算法

- Divide-and-conquer算法

Assume: Q中点已经分别按x坐标和y坐标排序后存储在X和Y中.

边界 条件:

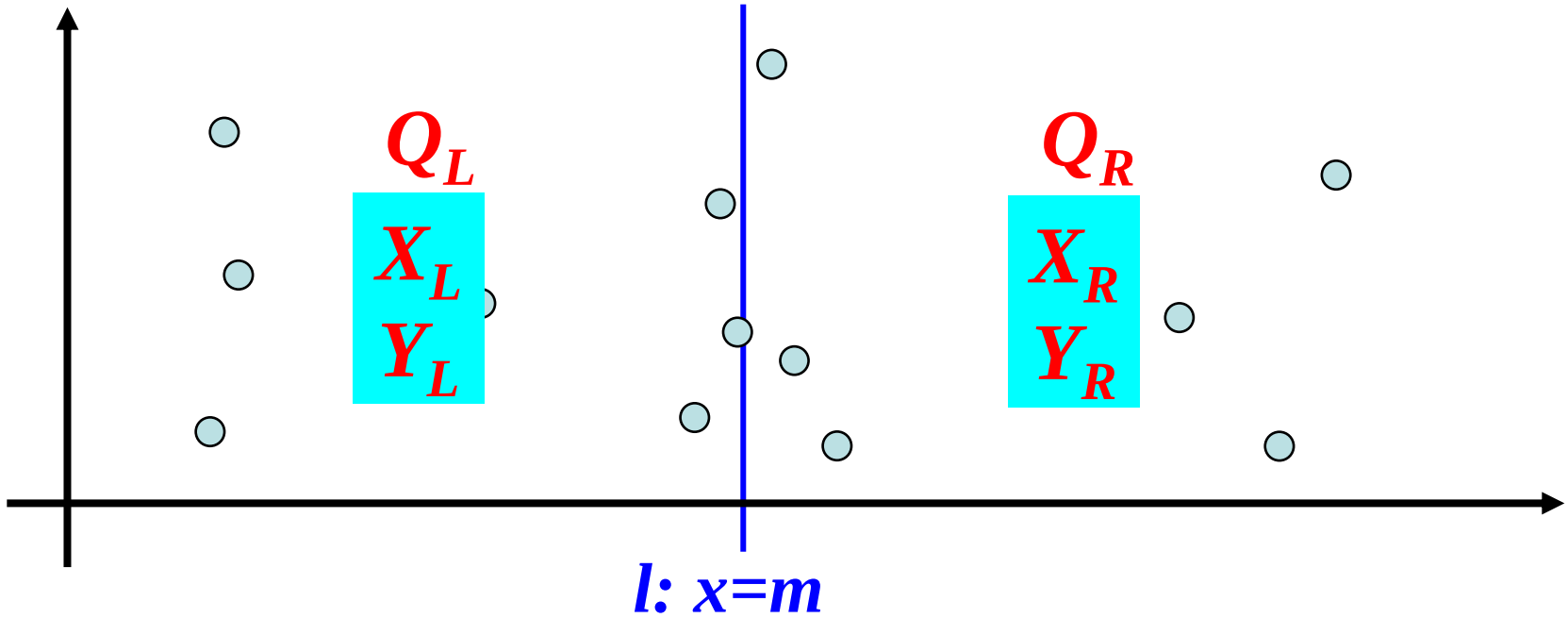
1. 如果Q中仅包含3个点,则返回最近点对,结束;

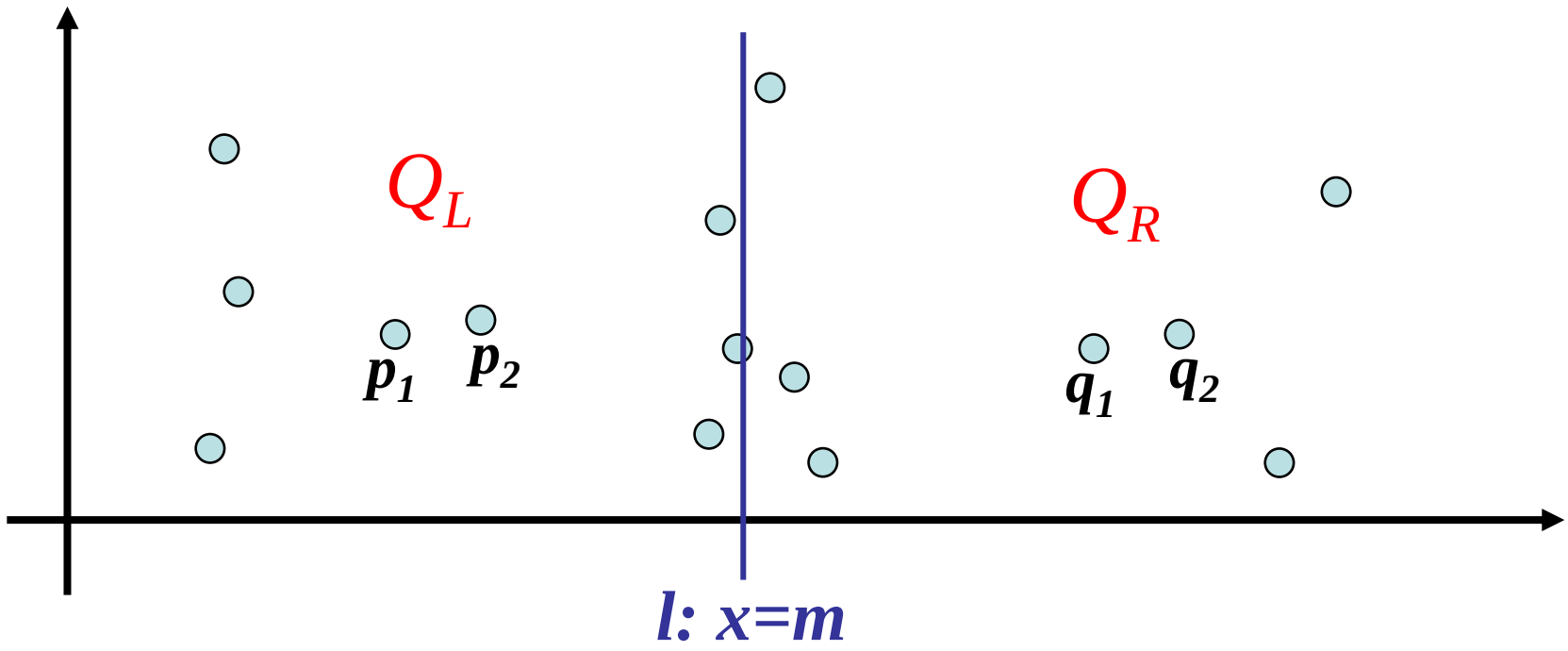


HITWH
SE

Divide:

2. 计算Q中各点x-坐标的中位数m；
3. 用垂线l: $x=m$把Q划分成两个大小相等的子集合Q_L和Q_R，Q_L中点在l左边，Q_R中点在l右边；
4. 把X划分为X_L和X_R；把Y划分为Y_L和Y_R；



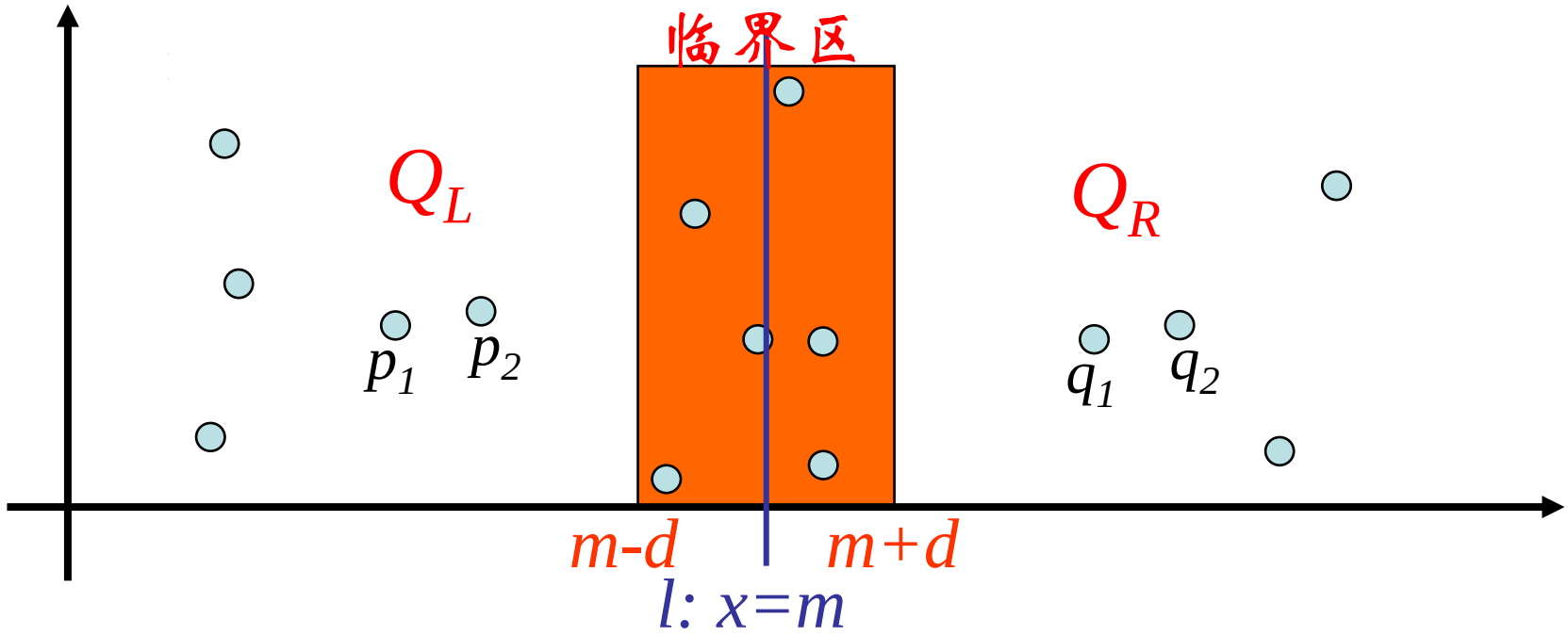


Conquer:

5. 递归地在Q_L、Q_R中找出最近点对：

$(p_1, p_2)\in Q_L$, $(q_1, q_2)\in Q_R$

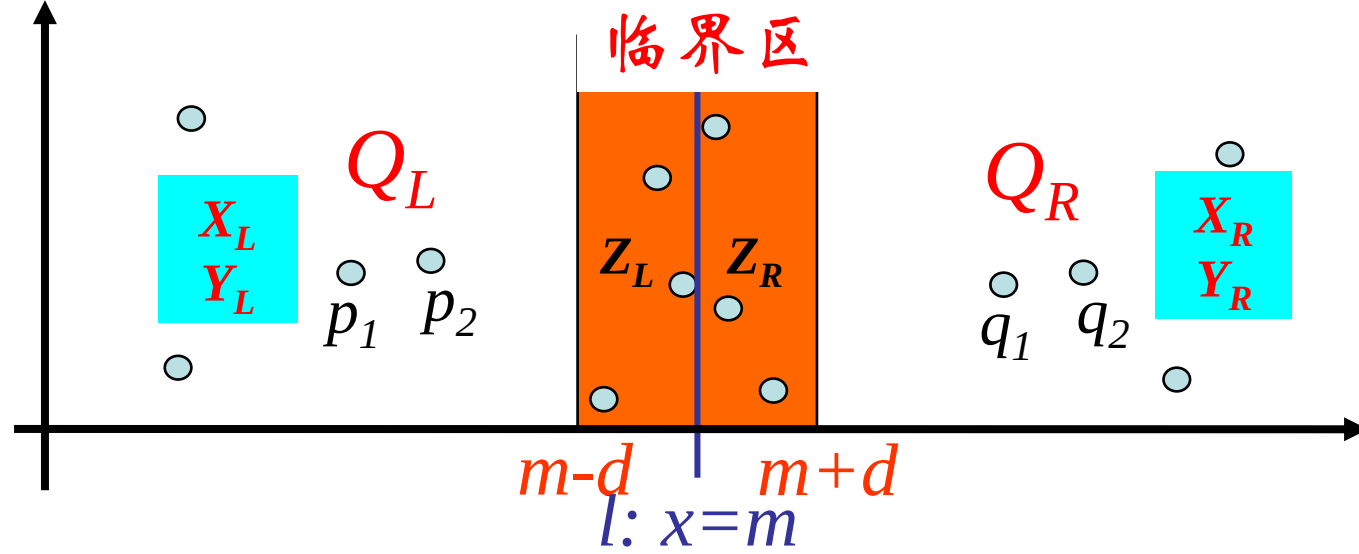
6. $d=\min\{Dis(p_1, p_2),\ Dis(q_1, q_2)\}$;



Merge:

1. 在临界区查找距离小于d的最近点对(p_l, q_r), $p_l \in Q_L$, $q_r \in Q_R$;
2. 若找到，则(p_l, q_r)是Q中最近点对，否则(p_1, p_2)和(q_1, q_2)中距离最小者为Q中最近点对.

关键是(p_l, q_r)的搜索方法及其搜索时间



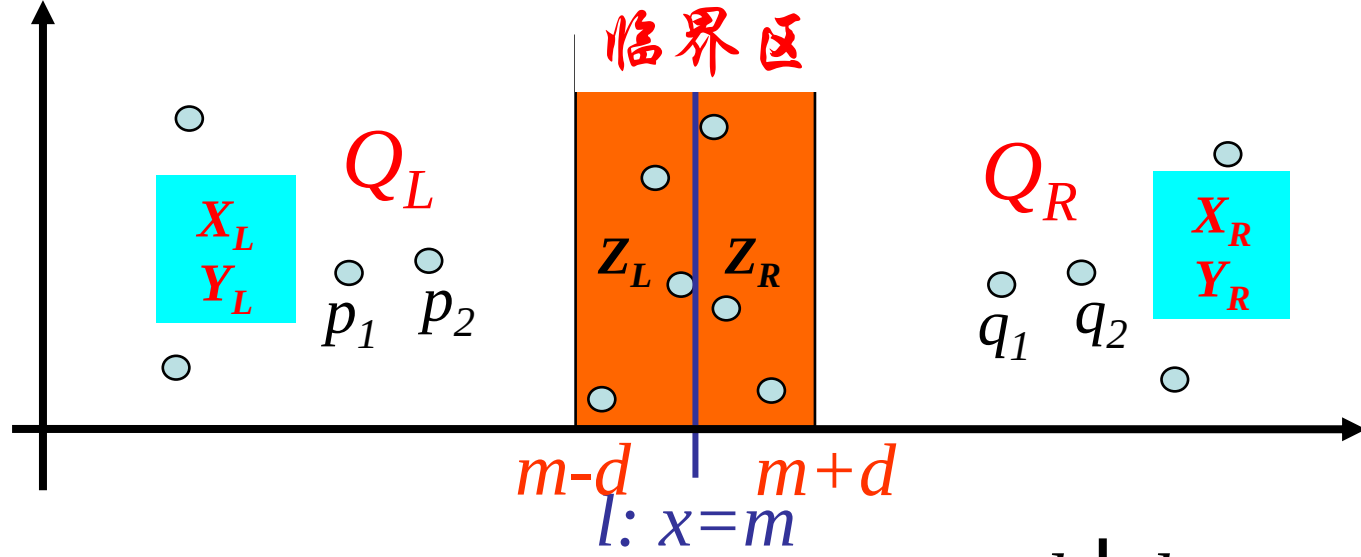
- (p_l, q_r)搜索算法

1. $Z_L = \{Q_L$ 中左临界区点$\}$;
   $Z_R = \{Q_R$ 中右临界区点$\}$;

HITWH
SE

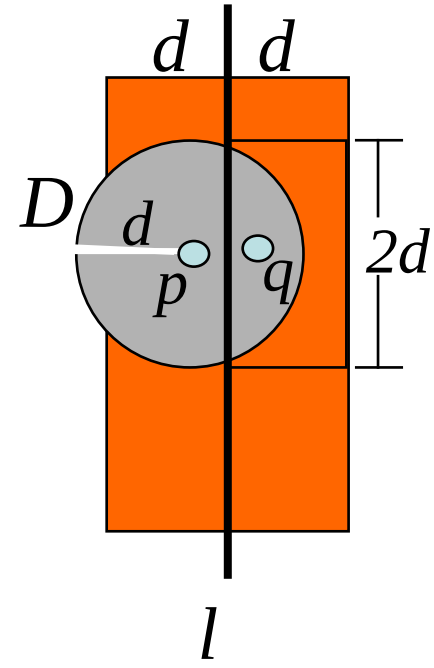
- 时间复杂性

$O(6n)=O(n)$



- (p_l, q_r)搜索算法

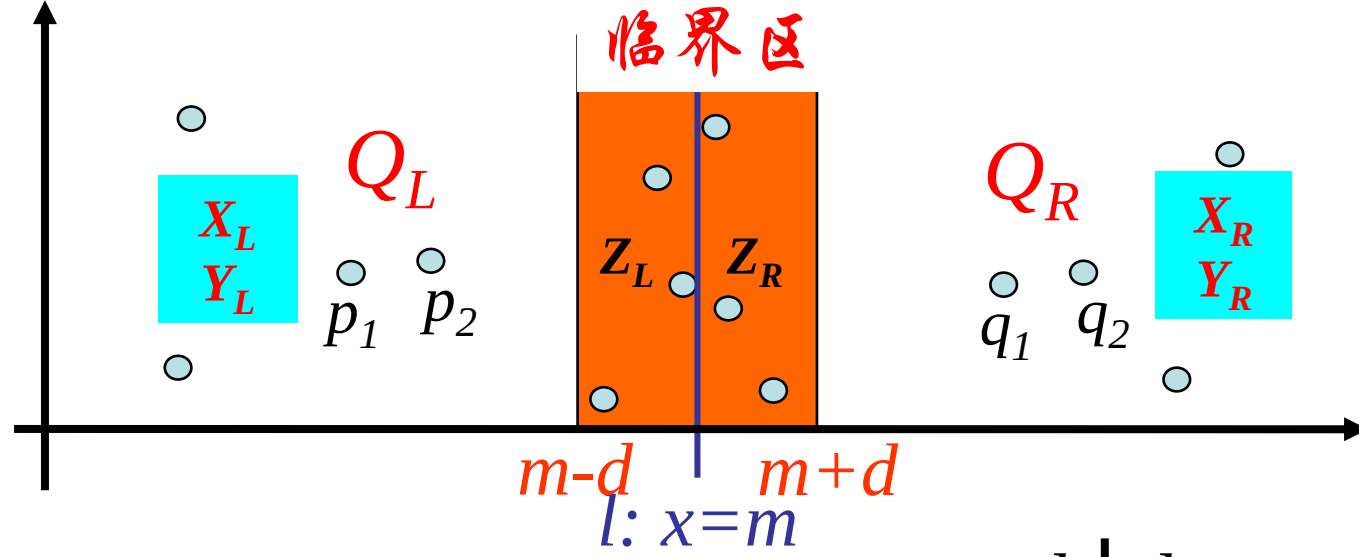
1. Z_L = {Q_L 中左临界区点};
   Z_R = {Q_R 中右临界区点};
2. For $\forall p(x_p, y_p) \in Z_L$ Do
3. For $\forall q(x_q, y_q) \in Z_R$ Do $(y_p\text{-}d \le y_q \le y_p+d)$
   这样点至多6个\
4. If $Dis(p, q)<d$
5. Then $d=Dis(p, q)$, 记录(p, q);
6. 如果d发生过变化, 与最后的d对应的点对即为(p_l, q_r), 否则不存在(p_l, q_r).



HITWH
SE

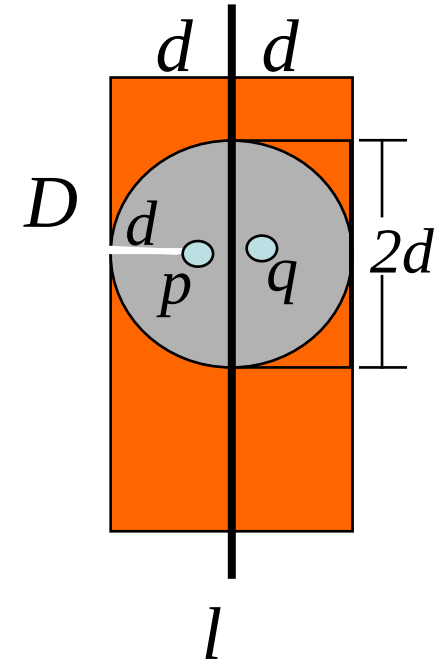
- 时间复杂性

$O(6n)=O(n)$



- (p_l, q_r)搜索算法

1. Z_L = {Q_L 中左临界区点};
   Z_R = {Q_R 中右临界区点};
2. For $\forall p(x_p, y_p) \in Z_L$ Do
3. For $\forall q(x_q, y_q) \in Z_R$ Do $(y_p\text{-}d \le y_q \le y_p+d)$
   这样点至多6个\
4. If $Dis(p, q)<d$
5. Then $d=Dis(p, q)$, 记录(p, q);
6. 如果d发生过变化, 与最后的d对应的点对即为(p_l, q_r), 否则不存在(p_l, q_r).



- 时间复杂性
  - Divide阶段需要$O(n)$时间
  - Conquer阶段需要$2T(n/2)$时间
  - Merge阶段需要$O(n)$时间
  - 递归方程

$$T(n)= O(1) \qquad n \le 3$$

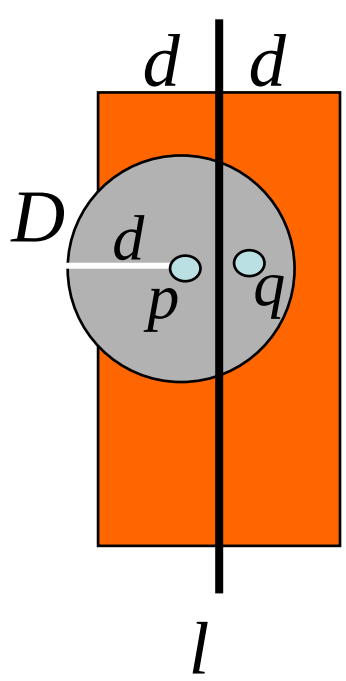
$$T(n) = 2T(n/2) + O(n) \qquad n > 3$$

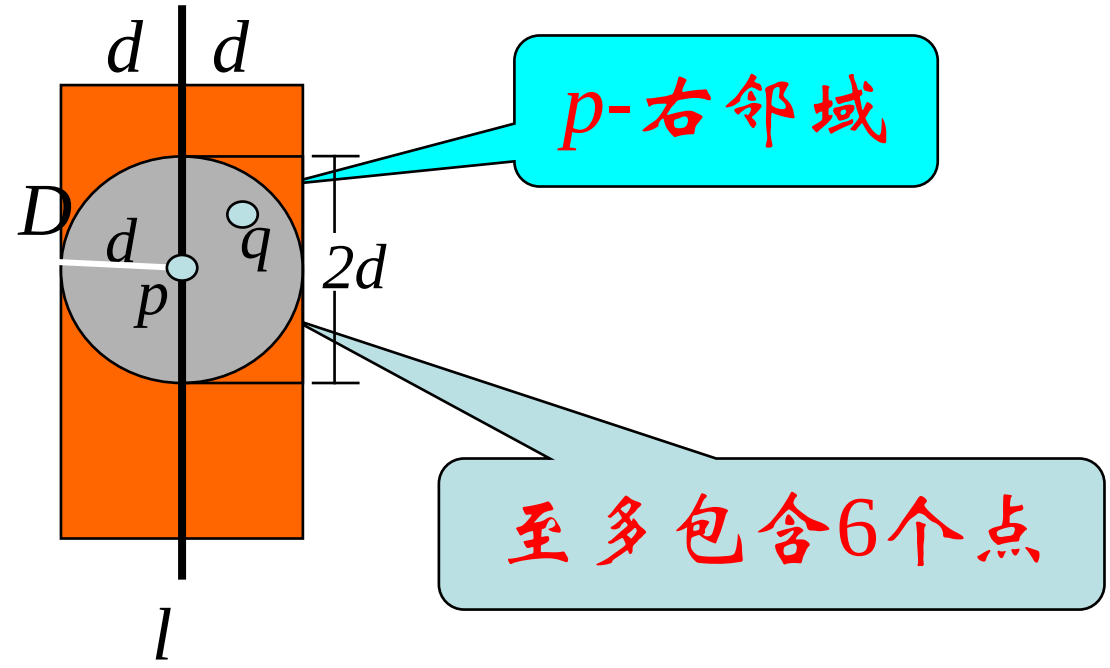
  - 用Master定理求解$T(n)$

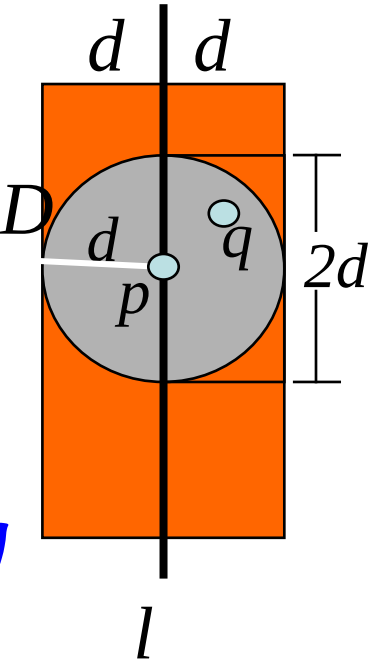
$$T(n) = O(n\log n)$$

(p_l, q_r)的搜索时间：

- 若(p, q)是最近点对而且$p \in Q_L, q \in Q_R$，
  $dis(p, q) < d$，(p, q)只能在下图的区域D.
- 若p在分割线l上，包含(p, q)的区域D最大，
  嵌于$d \times 2d$的矩形(p-右邻域)中，如下图所示.

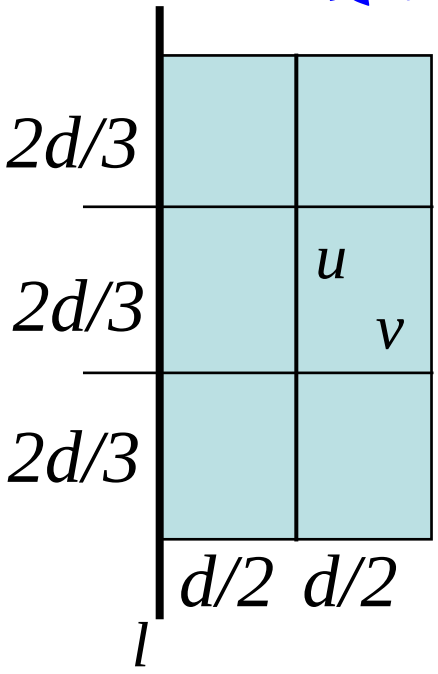






定理1. 对于左临界区中的每个点p，p-右邻域中至多包含6个点。

证明：把p-右邻域划分为6个$(d/2)\times(2d/3)$的矩形。



若p-右邻域中点数大于6，由鸽巢原理，至少有一个矩形中有两个点. 设为u、v，则

$$(x_u-x_v)^2+(y_u-y_v)^2 \le (d/2)^2+(2d/3)^2=25d^2/36$$

即$Dis(u, v)\le 5d/6<d$，与d的定义矛盾。

- **Assume:**

  Q中点已经分别按x坐标和y坐标排序后存储在X和Y中.

1. X=按x排序Q中点；
2. Y=按y排序Q中点；
3. FindCPP(X, Y).

时间复杂性=O(*n*log*n*)+T(FindCPP)=O(*n*log*n*)

扩展到三维空间或更高维空间如何？

Closest-point problems, FOCS 1975

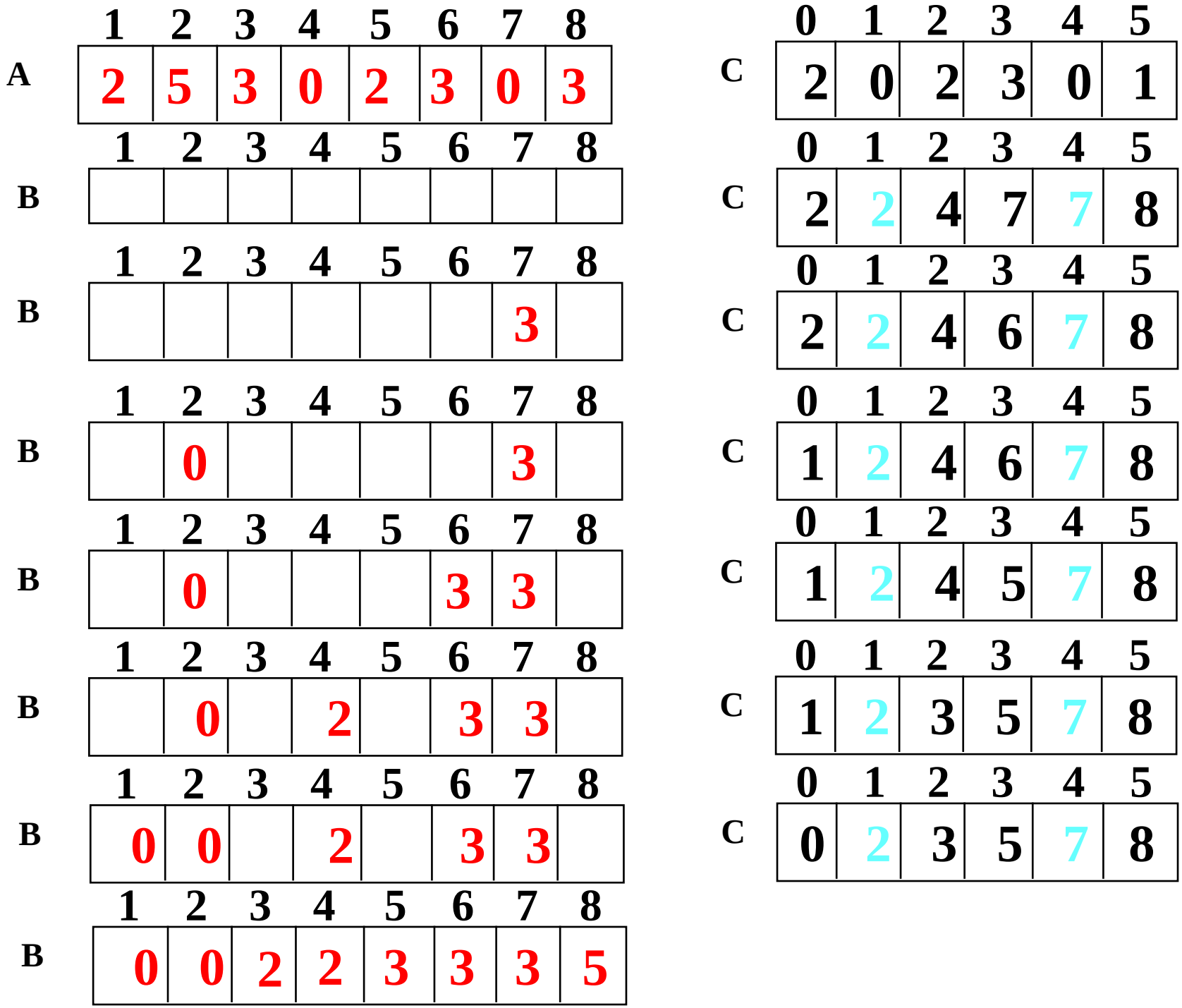
HITWH
SE

3.5 Sorting in Linear Time

- Counting Sort Algorithm
- Radix Sort Algorithm
- Bucket Sort Algorithm

Counting Sort

- Input: $A[1..n]$, $0 \le A[i] \le k$ for $1 \le i \le n$
- Output: $B[1..n]$=sorted $A[1..n]$
- Idea
  - Use $C[0..k]$ to compute the position of each $A[i]$
  - Put each $A[i]$ for $i=n$ *to* 1 into $B[C[A[i]]]$


A
1 2 3 4 5 6 7 8
2 5 3 0 2 3 0 3
C
0 1 2 3 4 5
2 0 2 3 0 1
B
1 2 3 4 5 6 7 8
C
0 1 2 3 4 5
2 2 4 7 7 8
B
1 2 3 4 5 6 7 8
3
C
0 1 2 3 4 5
2 2 4 6 7 8
B
1 2 3 4 5 6 7 8
0 3
C
0 1 2 3 4 5
1 2 4 6 7 8
B
1 2 3 4 5 6 7 8
0 3 3
C
0 1 2 3 4 5
1 2 4 5 7 8
B
1 2 3 4 5 6 7 8
0 2 3 3
C
0 1 2 3 4 5
1 2 3 5 7 8
B
1 2 3 4 5 6 7 8
0 0 2 3 3
C
0 1 2 3 4 5
0 2 3 5 7 8
B
1 2 3 4 5 6 7 8
0 0 2 2 3 3 3 5

- Algorithm and Time complexity

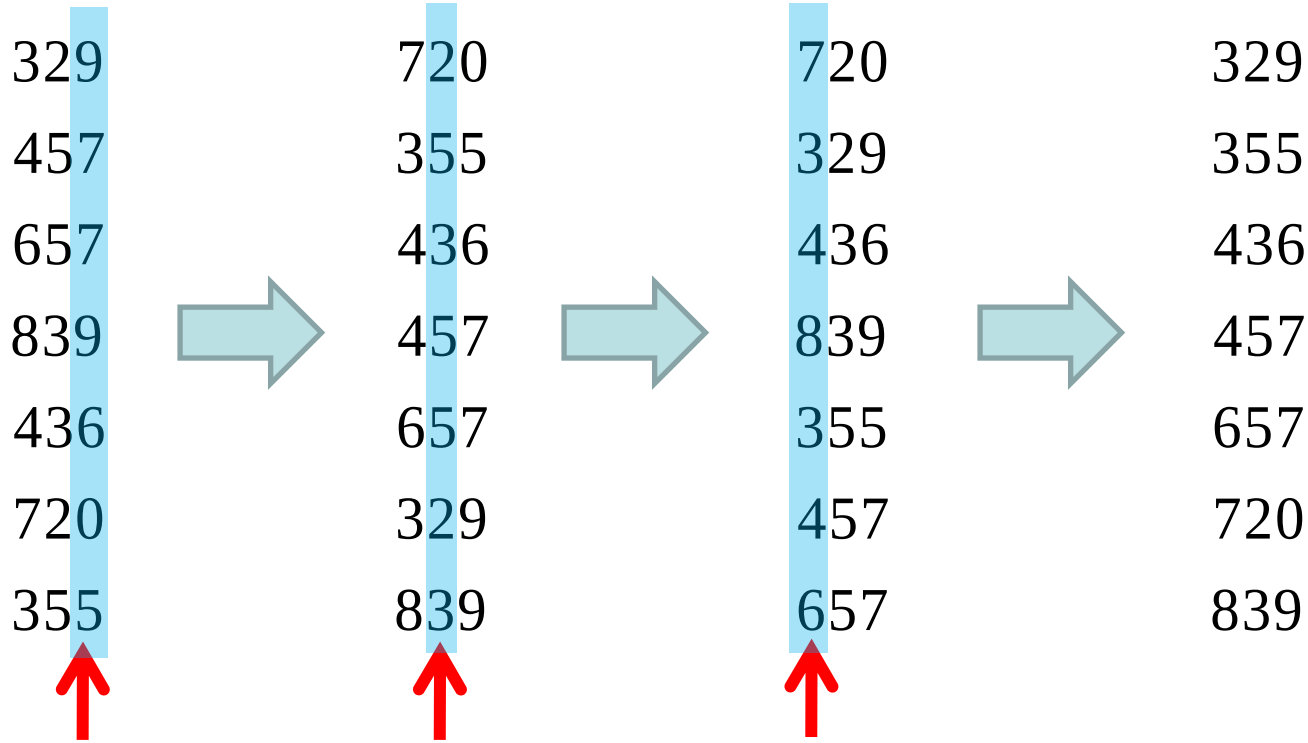
```
for i ← 0 to k                                   O(k)
    do C[i] ← 0;
for j ← 1 to length[A]                           O(n)
    do C[A[j]] ← C[A[j]] + 1;
for i ← 1 to k                                   O(k)
    do C[i] ← C[i] + C[i − 1];
for j ← length[A] downto 1                       O(n)
    do begin
        B[C[A[j]]] ← A[j];
        C[A[j]] ← C[A[j]] − 1;
```

Time Complexity=O(n+k)

- Counting Sort算法性质
  - Counting sort doesn't sort in place
  - Counting sort is stable
    - That is, the same values appear in the output array in the same order as they do in the input array.
  - Problems
    - *A[i]* must be integer.
    - *k* should be small

Radix Sort Algorithm

- Idea of Radix sort algorithm
  - Use stable sort algorithm
  - Sort the *n* *d*-digit elements from the lowest digit to the highest digit



- Radix sort algorithm

Ininput: Array A, each element is a number of d digit.

Radix-Sort(A, d)

for $i \leftarrow 1$ to d do

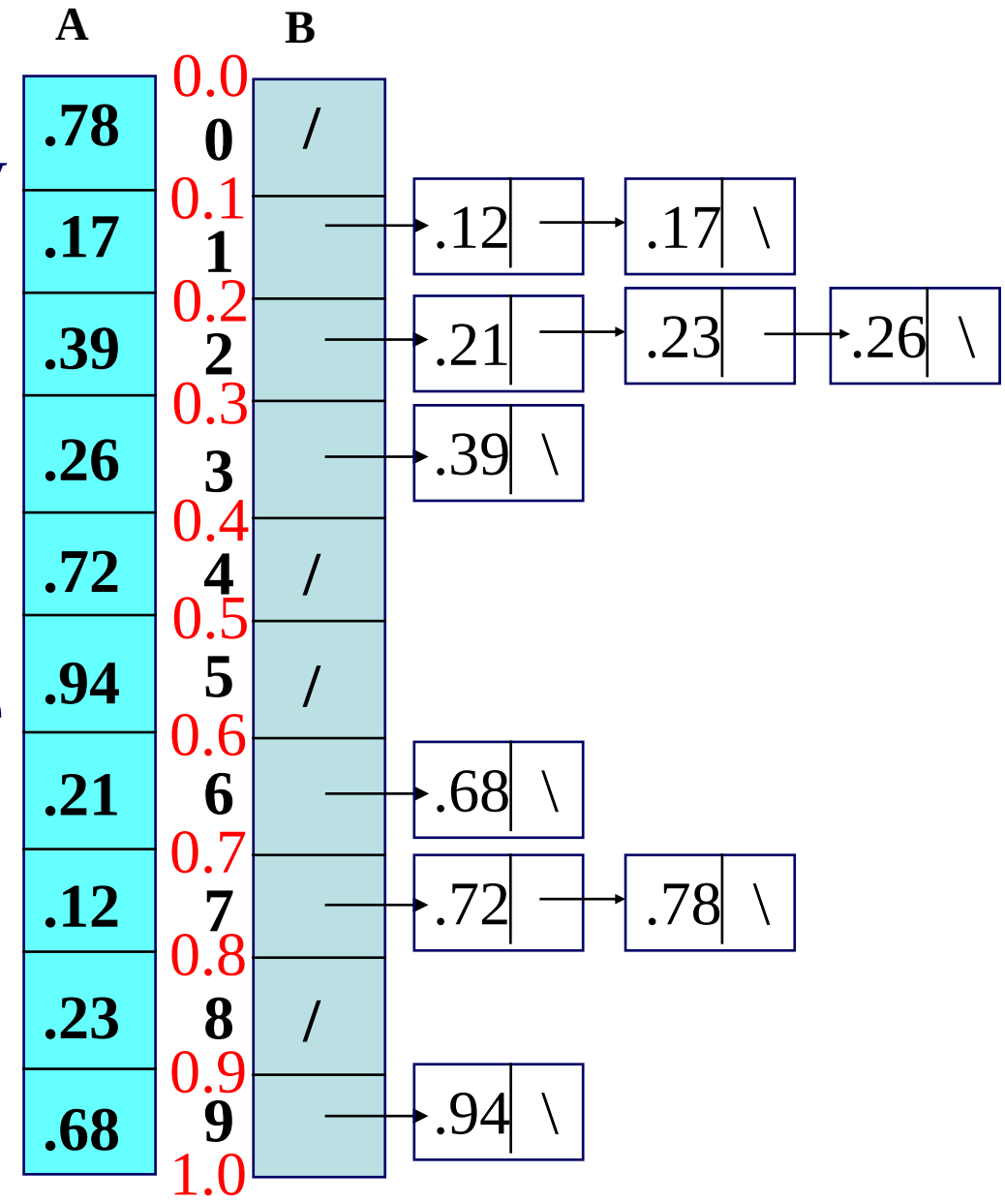
    use a stable sort to sort array A on digit i;

- Time complexity of Radix sort algorithm
  - Using Counting sort algorithm, $0 \leq A[i] \leq k$
  - The time complexity is $O(d(n+k))$
- Problems

- Extension of Radix sort
  - Input: n b-binary-digit number, any $r \leq b$
  - Radix sort can sort these numbers in $\Theta((b/r)(n+2^r))$
  - Why
    - View each number as $d = \lceil b/r \rceil$ digits of r bits each.
    - Each digit is an integer in the range 0 to $2^r - 1$
    - Use counting sort with $k = 2^r - 1$
  - How about b=500, r=100?

Bucket Sort

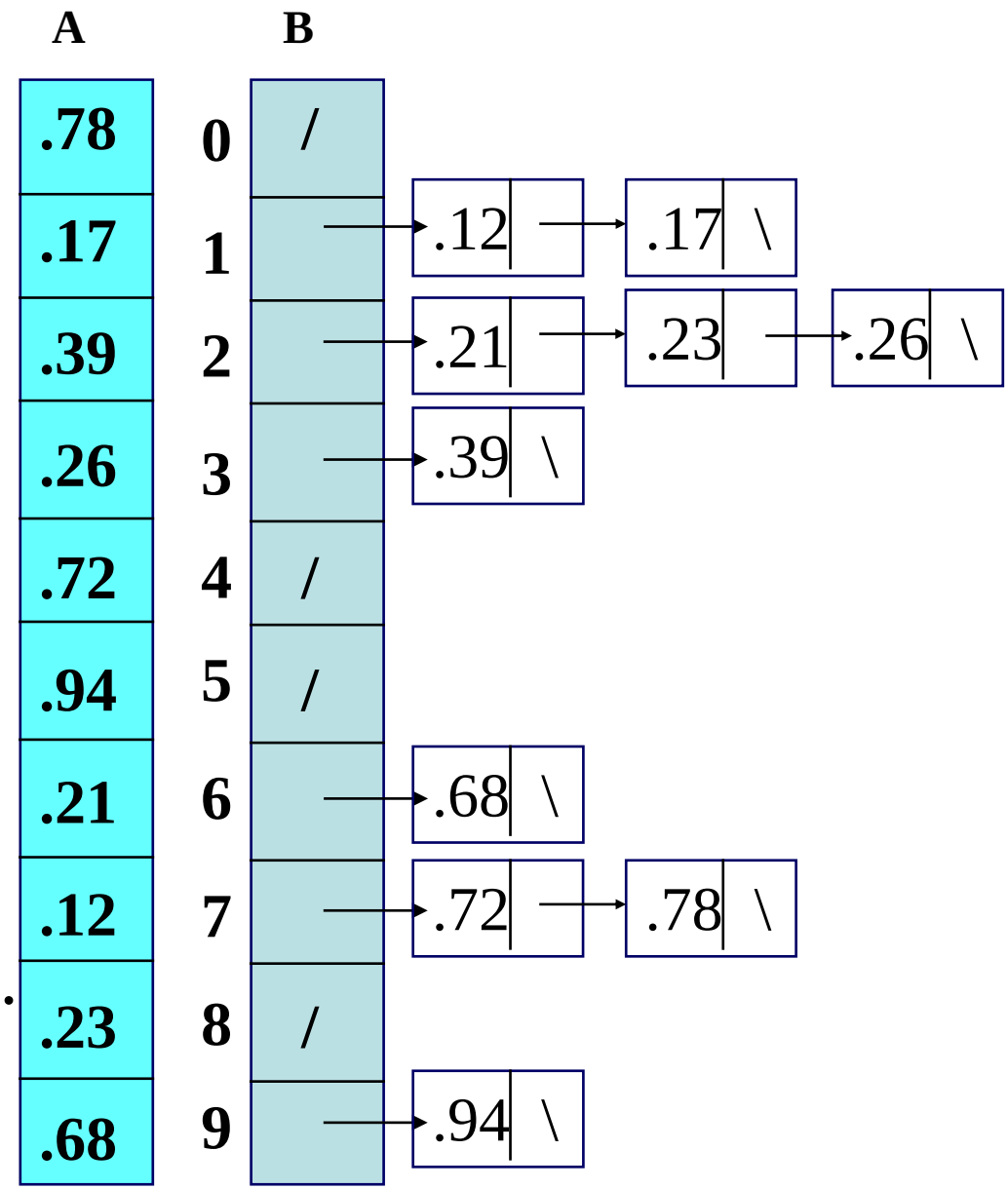
- **Assumption of Bucket Sort**
  - Input is elements uniformly distributed in [0, 1) independently
- **Idea of Bucket Sort**
  - Divide [0, 1) into *n* equal-sized bucket
  - Distribute the input into the *n* bucket
  - Sort the numbers in each bucket
  - List all the sorted numbers in each bucket in order



- **Bucket Sort Algorithm**

Bucket-Sort(*A*)

1. *n*=*length*[*A*];
2. For *i*=*1* To *n* Do
3. Insert *A*[*i*] into list *B*[$\lfloor nA[i] \rfloor$];
4. For i=0 To n-1 Do
5. Sort list *B*[*i*] with insert sort;
6. concatenate lists *B*[*0*], …, *B*[*n-1*].



- **Time complexity**
  - Let the random variable $n_i=|B[i]|$
  - The time complexity:

$$T(n)=\Theta(n)+\sum_{i=0}^{n-1}O(n_i^{\,2})$$

  - Since $E[n_i^2]=2-1/n$

$$E[T(n)]=\Theta(n)+\sum_{i=0}^{n-1}E[O(n_i^{\,2})]$$

$$=\Theta(n)+O(n(2-1/n))=\Theta(n)$$

HITWH
SE

3.6 Finding the convex hull

问题定义

输入：平面上的n个点的集合Q

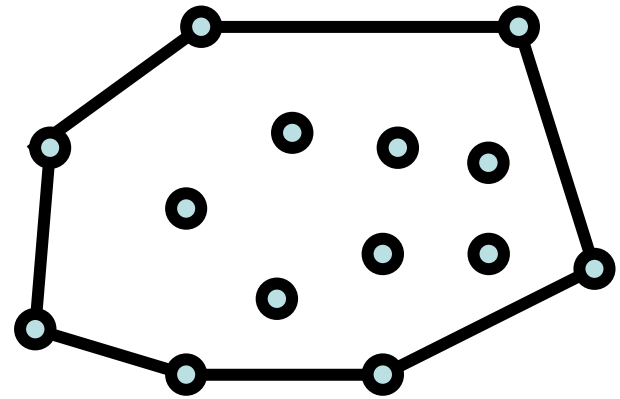
输出：CH(Q): Q的convex hull

Q的convex hull是一个最小凸多边形P，Q的点或者在P上或者在P内

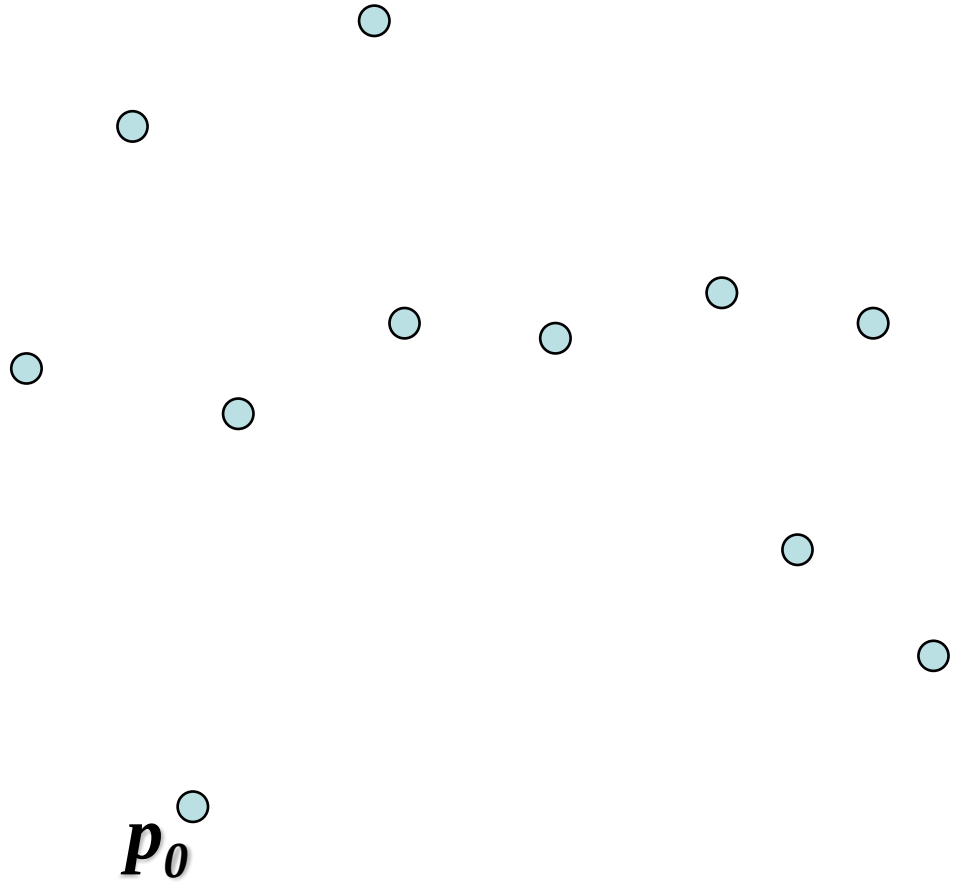
凸多边形P是具有如下性质多边形：连接P内任意两点的边都在P内

Graham-Scan算法

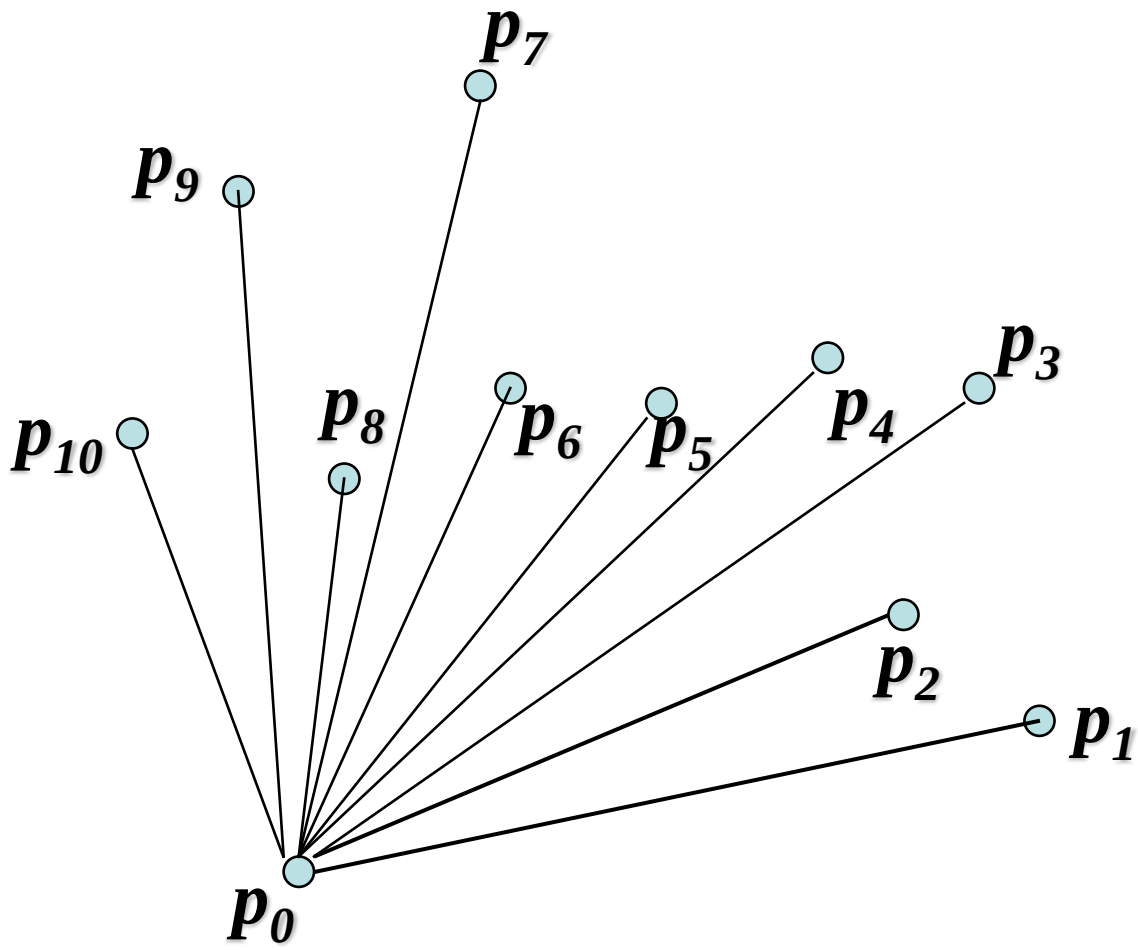
- 基本思想
  - 当沿着Convex hull逆时针漫游时，总是向左转
  - 在极坐标系下按照极角大小排列，然后逆时针方向漫游点集，去除非Convex hull顶点(非左转点)。



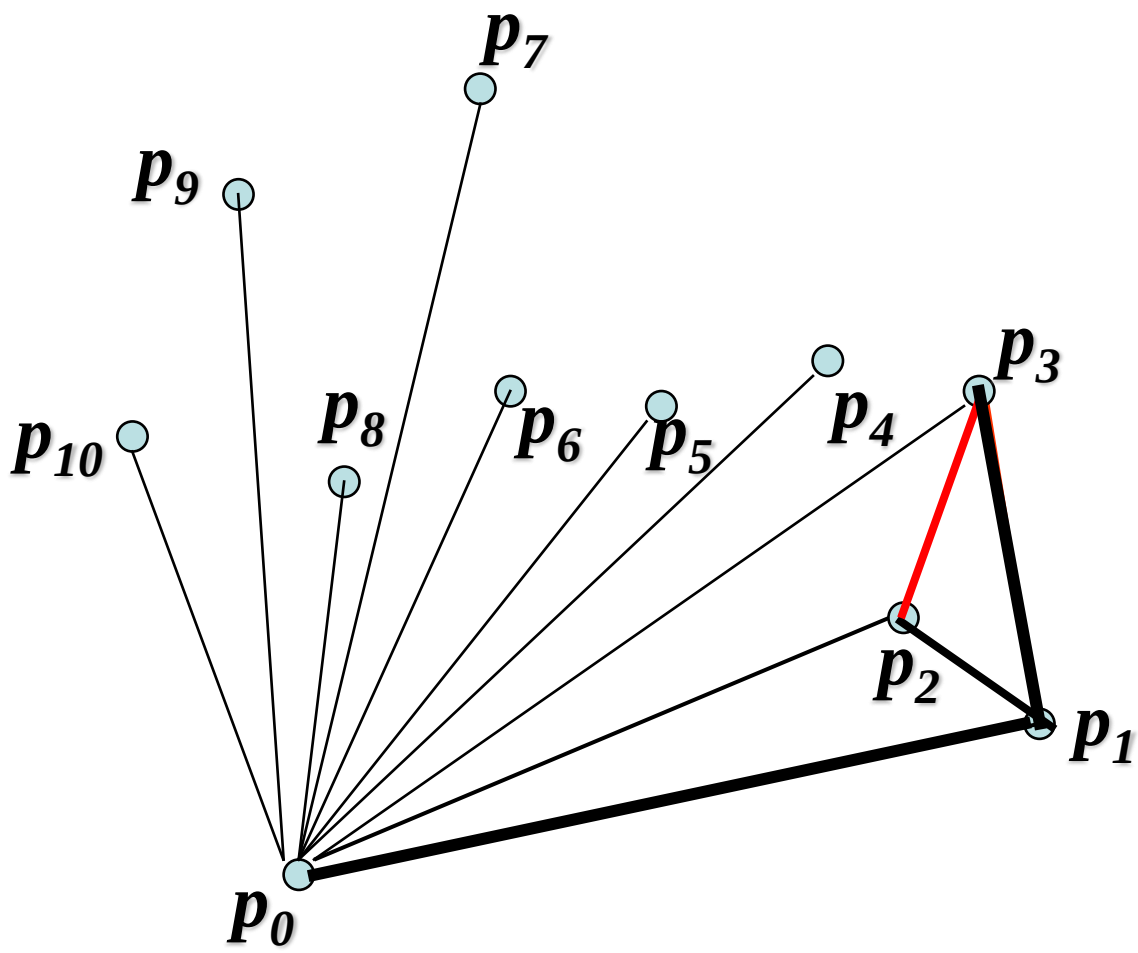
第1步

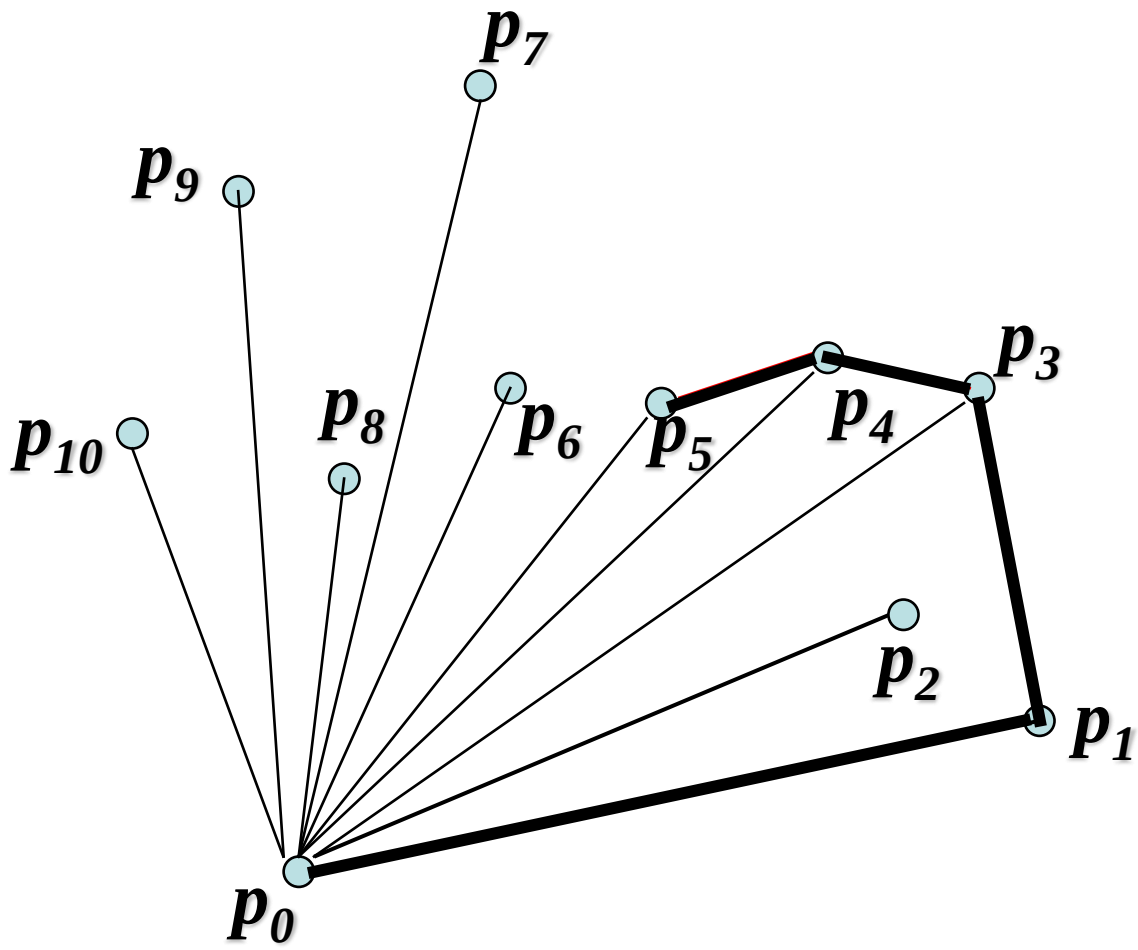


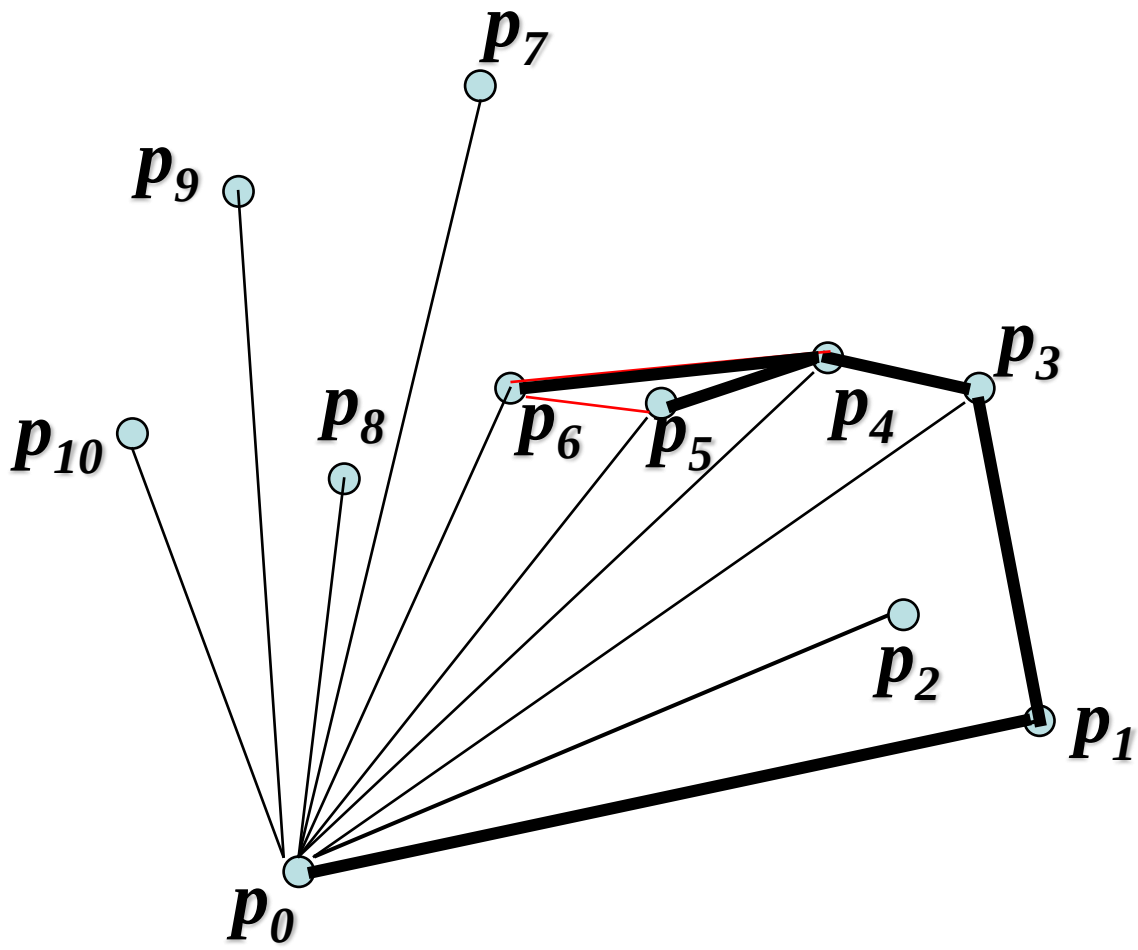
第2步

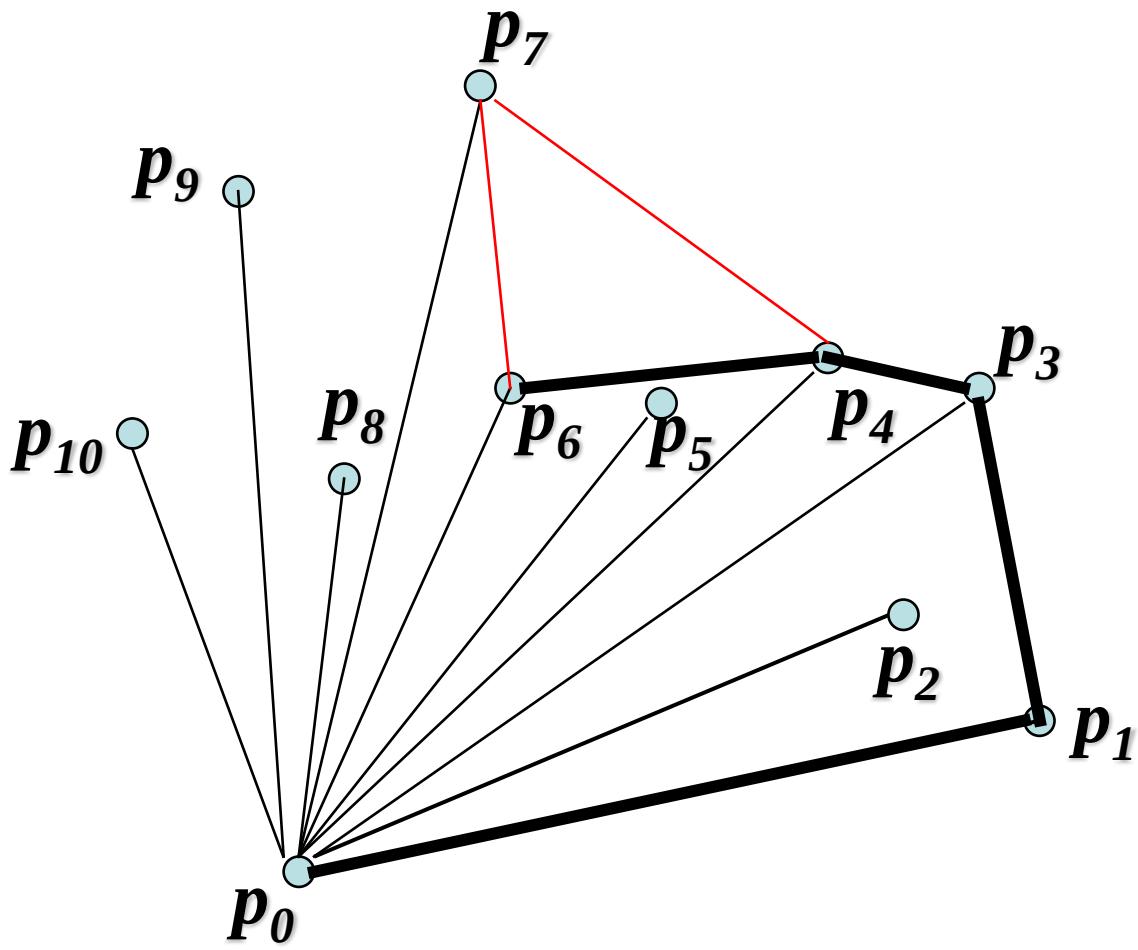


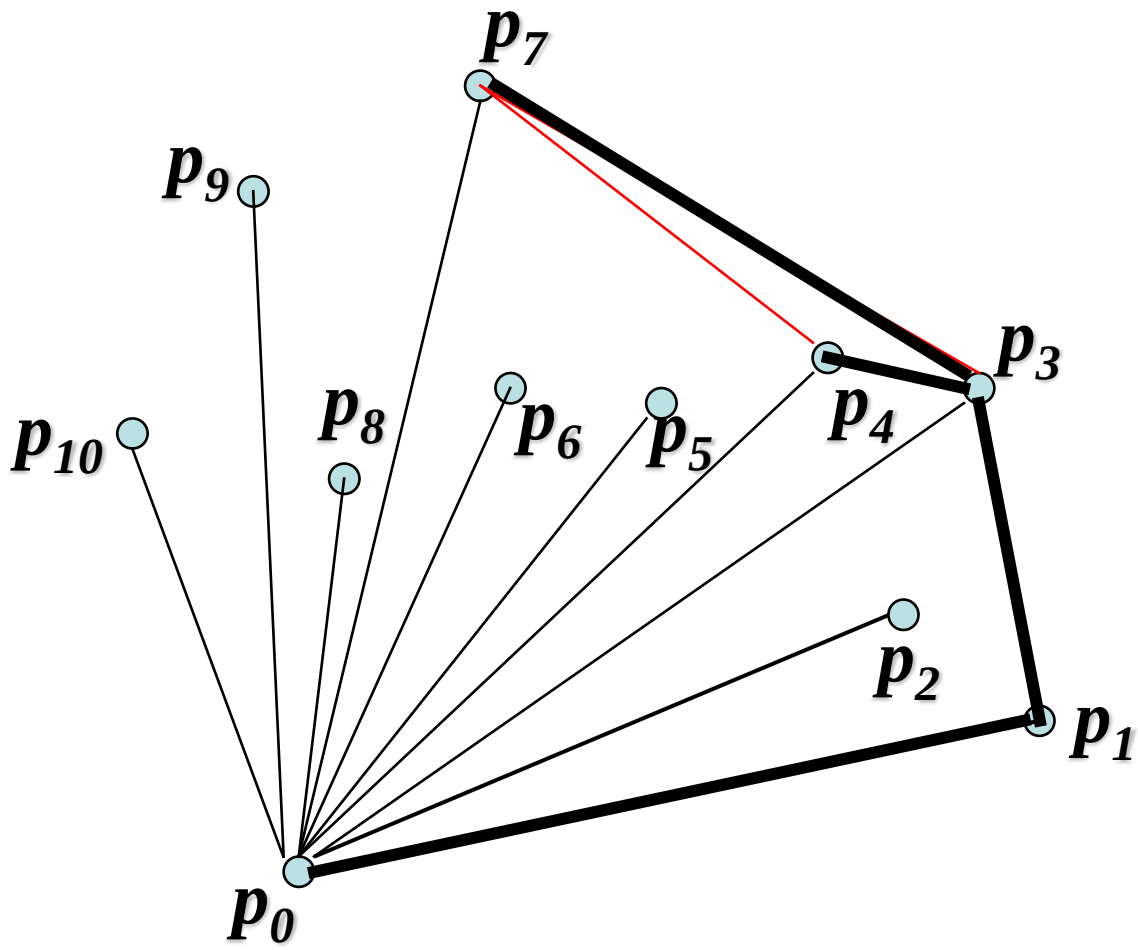
第3步

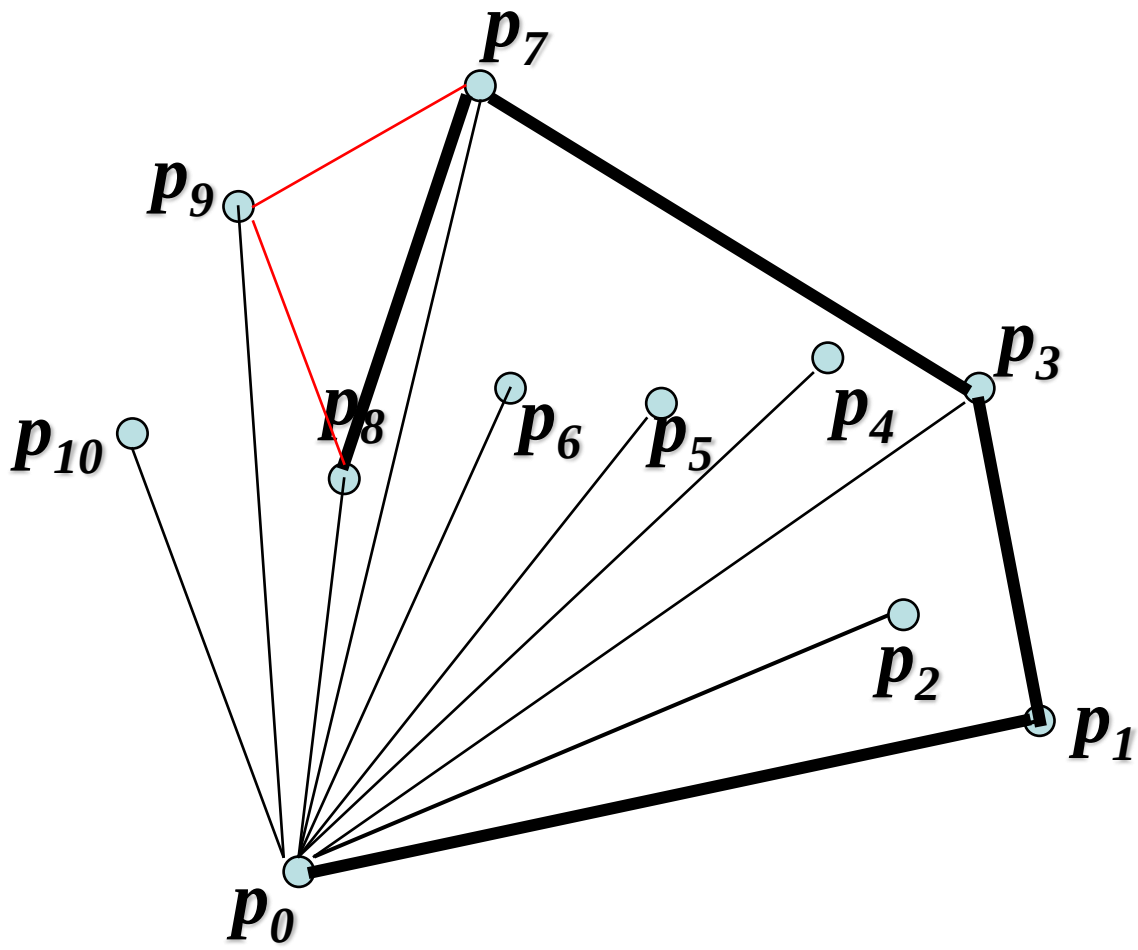


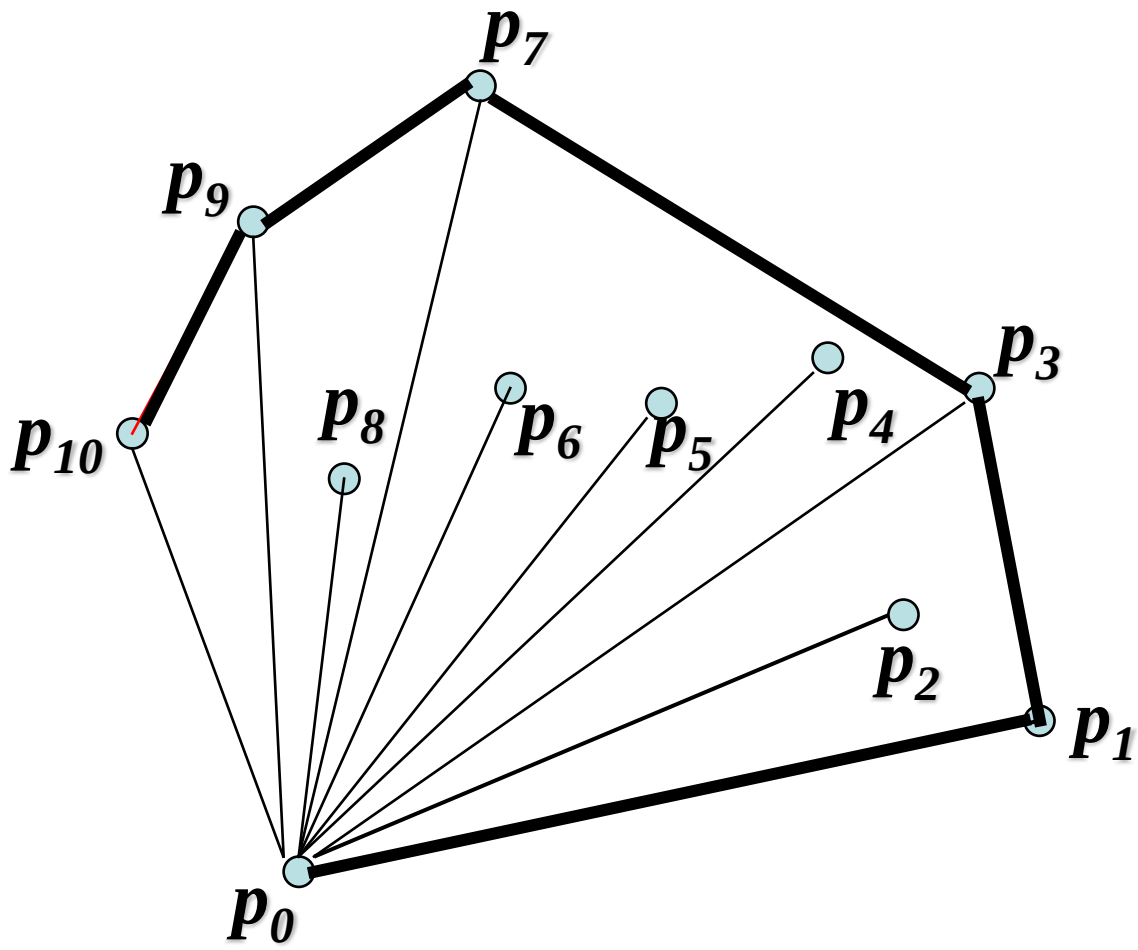

p_7
p_9
p_3
p_{10}
p_8
p_6
p_5
p_4
p_2
p_1
p_0


p_7
p_9
p_3
p_{10}
p_8
p_6
p_5
p_4
p_2
p_1
p_0


p_7
p_9
p_3
p_8
p_6
p_5
p_4
p_{10}
p_2
p_1
p_0


p_7
p_9
p_3
p_{10}
p_8
p_6
p_5
p_4
p_2
p_1
p_0

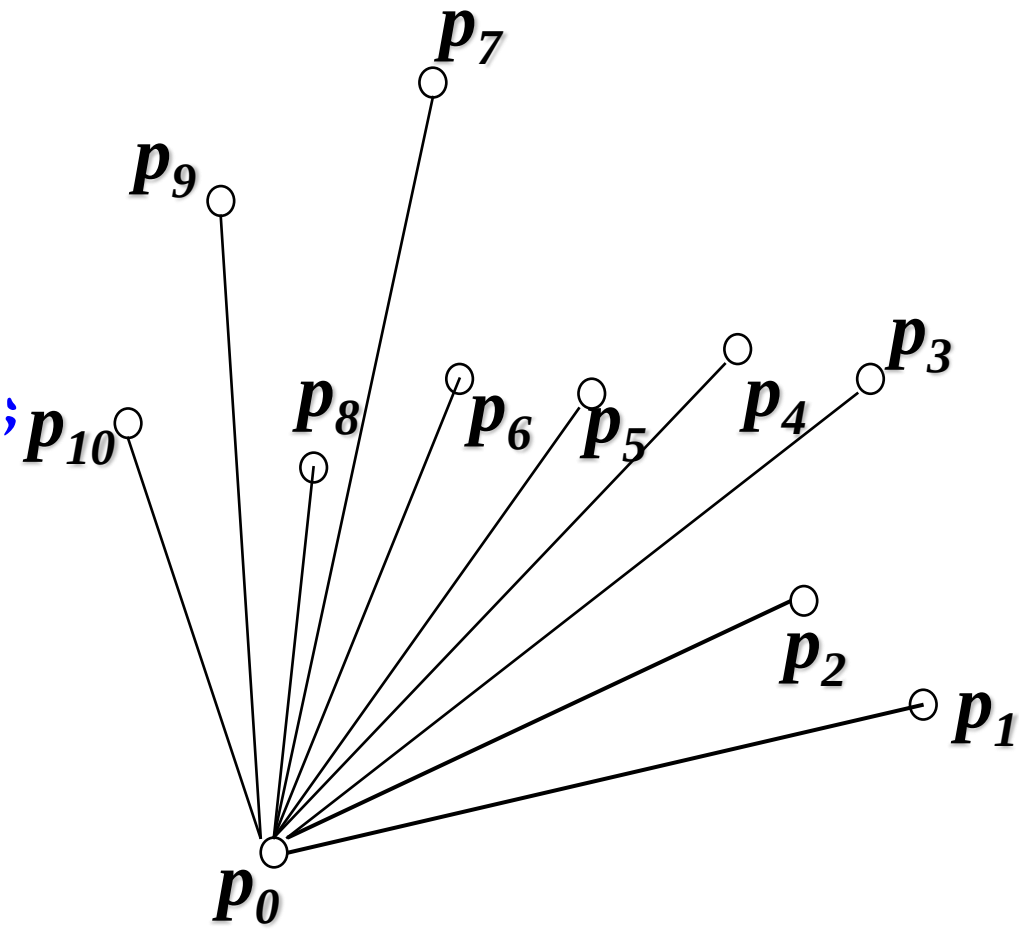

p_7
p_9
p_3
p_{10}
p_8
p_6
p_5
p_4
p_2
p_1
p_0


p_7
p_9
p_3
p_{10}
p_8
p_6
p_5
p_4
p_2
p_1
p_0

算法Graham-Scan(Q)

/* 栈S从底到顶存储按逆时针方向排列的CH(Q)顶点 */

1. 求Q中y-坐标值最小的点p_0;
2. 按照与p_0极角(逆时针方向)大小排序Q中其余点，结果为$<p_1, p_2, \ldots, p_n>$;
3. Push p_0, p_1, p_2 into S;
4. FOR i=3 TO n DO
5. While Next-to-top(S)、Top(S)和p_i形成非左移动 Do
6. Pop(S);
7. Push(p_i, S);
8. Rerurn S.



- 时间复杂性$T(n)$

1. 求Q中y-坐标值最小的点p_0;
2. 按照与p_0极角(逆时针方向)
   大小排序Q中其余点，
   结果为$<p_1, p_2, \ldots, p_n>$;
3. Push p_0, p_1, p_2 into S;
4. **FOR** i=3 TO n DO
5. **While** Next-to-top(S)、Top(S)
   和p_i形成非左移动 **Do**
6. Pop(S);
7. Push(p_i, S);
8. Rerurn S.

- 第1步需要$O(n)$时间
- 第2步需要$O(n\log n)$时间
- 第3步需要$O(1)$时间
- 第4-7步需要$O(n)$时间
  - 因为每个点至多进栈一次出栈一次，每次需要常数计算时间
- **$T(n)= O(n\log n)$**

- 正确性分析

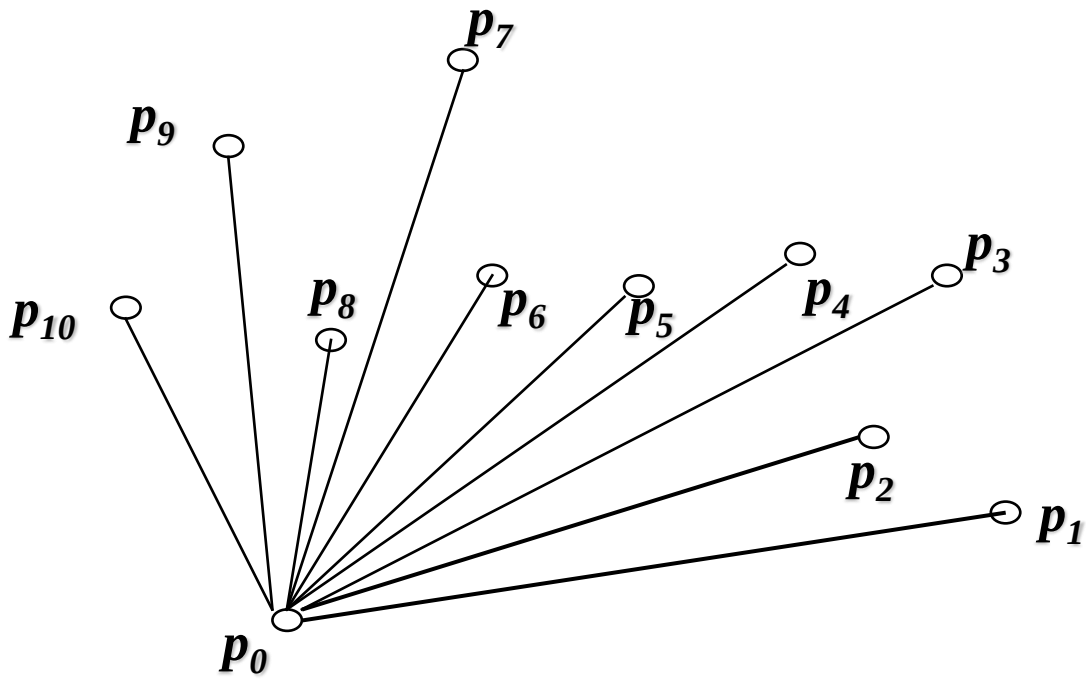
定理. 设n个二维点的集合Q是Graham-Scan算法的输入，$|Q|\geq 3$，算法结束时，栈S中自底到顶存储$CH(Q)$的顶点（按照逆时针顺序）.

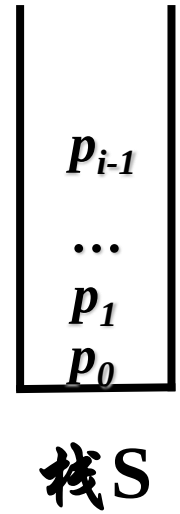
证明: 使用循环不变量方法

```
3.  Push p0, p1, p2 into S;
4.  FOR  i=3  TO  n  DO
5.     While  Next-to-top(S)、Top(S)
                和pi形成非左移动   Do
6.                  Pop(S);
7.       Push(pi, S);
```

Loop invariant

在处理第i个顶点之前，栈S中自底到顶存储$CH(Q_{i-1})$的顶点.





栈S

3. Push p_0, p_1, p_2 into S;
4. **FOR** i=3 TO n DO
5. **While** Next-to-top(S)、Top(S)
   和p_i形成非左移动 **Do**
6. Pop(S);
7. Push(p_i, S);

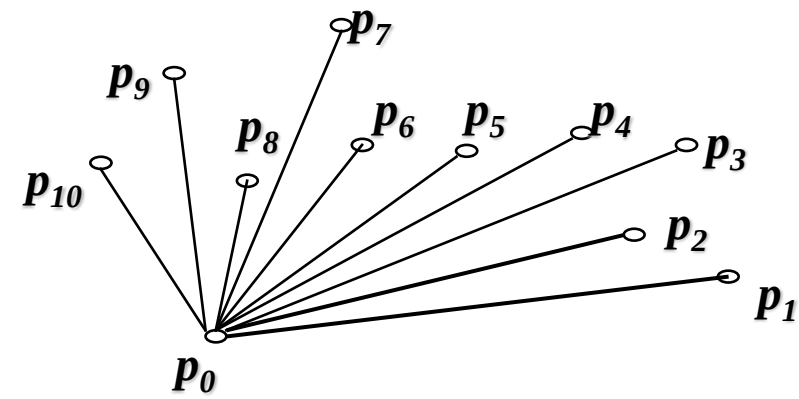
循环不变量

在处理第i个顶点之前，栈S自底到顶存储CH(Q_{i-1})的顶点.

- Proof by induction
  - Initialization: (第3步)
    - 处理i=3之前．栈S中包含了$Q_{i-1}=Q_2=\{p_0,p_1,p_2\}$中的顶点，这三个点形成了一个CH. 循环不变量为真.
  - Maintenance:
    - 设在处理第$i(i\geq 3)$个顶点之前，循环不变量为真，即：栈S中自底到顶存储CH(Q_{i-1})的顶点.
    - 往证：

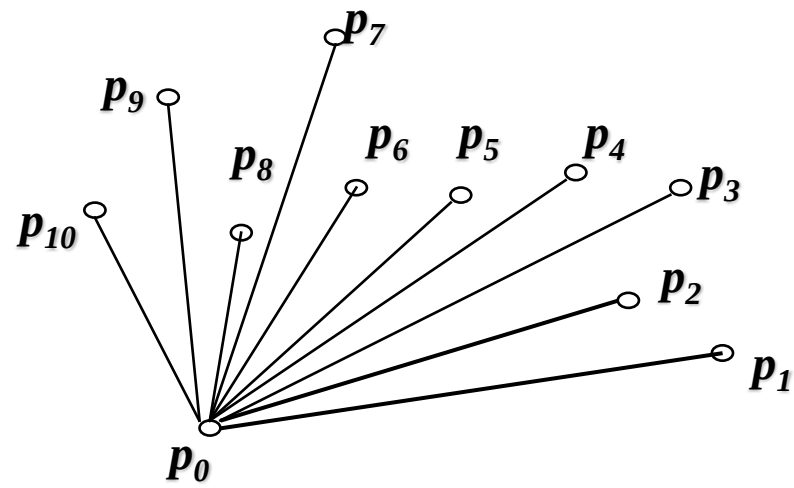
      算法执行5~7步之后，栈S中自底到顶存储CH(Q_i)的顶点.

```
3. Push p0, p1, p2 into S;
4. FOR i=3 TO n DO
5.    While Next-to-top(S)、Top(S)
                和pi形成非左移动  Do
6.                Pop(S);
7.     Push(pi, S);
```



- 证：算法执行5~7步后，栈S中自底到顶存储$CH(Q_i)$的顶点
  - 5~6步while循环执行结束后，第7步将p_i压入栈之前，设栈顶元素为p_j，次栈顶元素为p_k，则此时，栈中包含了与for循环的第j轮迭代后相同的顶点，即$CH(Q_j)$，循环不变量为真.
  - 执行第7步之后，p_i入栈，则栈S中包含了$CH(Q_j \cup \{p_i\})$中的顶点，且这些点仍按逆时针顺序，自底向上出现在栈中.　　$CH(Q_j \cup \{p_i\}) = CH(Q_i)$?
  - 对于任意一个在第i轮迭代中被弹出的栈顶点p_t，设p_r为紧靠p_t的次栈顶点，p_t被弹出当且仅当p_r、p_t、p_i构成非左移动。因此，p_t不是$CH(Q_i)$的一个顶点，即$CH(Q_i - \{p_t\}) = CH(Q_i)$。
  - 设P_i为for循环第i轮迭代中被弹出的所有点的集合，则有$CH(Q_i - P_i) = CH(Q_i)$
  - 又 $Q_i - P_i = Q_j \cup \{p_i\}$，故有$CH(Q_j \cup \{p_i\}) = CH(Q_i - P_i) = CH(Q_i)$
  - 即得到：一旦将p_i压入栈后，栈S中恰包含$CH(Q_i)$中的顶点，且按照逆时针顺序，自底向上排列。

3. Push p_0, p_1, p_2 into S;
4. **FOR** i=3 TO n DO
5. **While** Next-to-top(S)、Top(S)
   和p_i形成非左移动 **Do**
6. Pop(S);
7. Push(p_i, S);



– Termination:

• $i=n+1$,栈S中自底到顶存储CH(Q_n)的顶点，算法正确.

证毕.

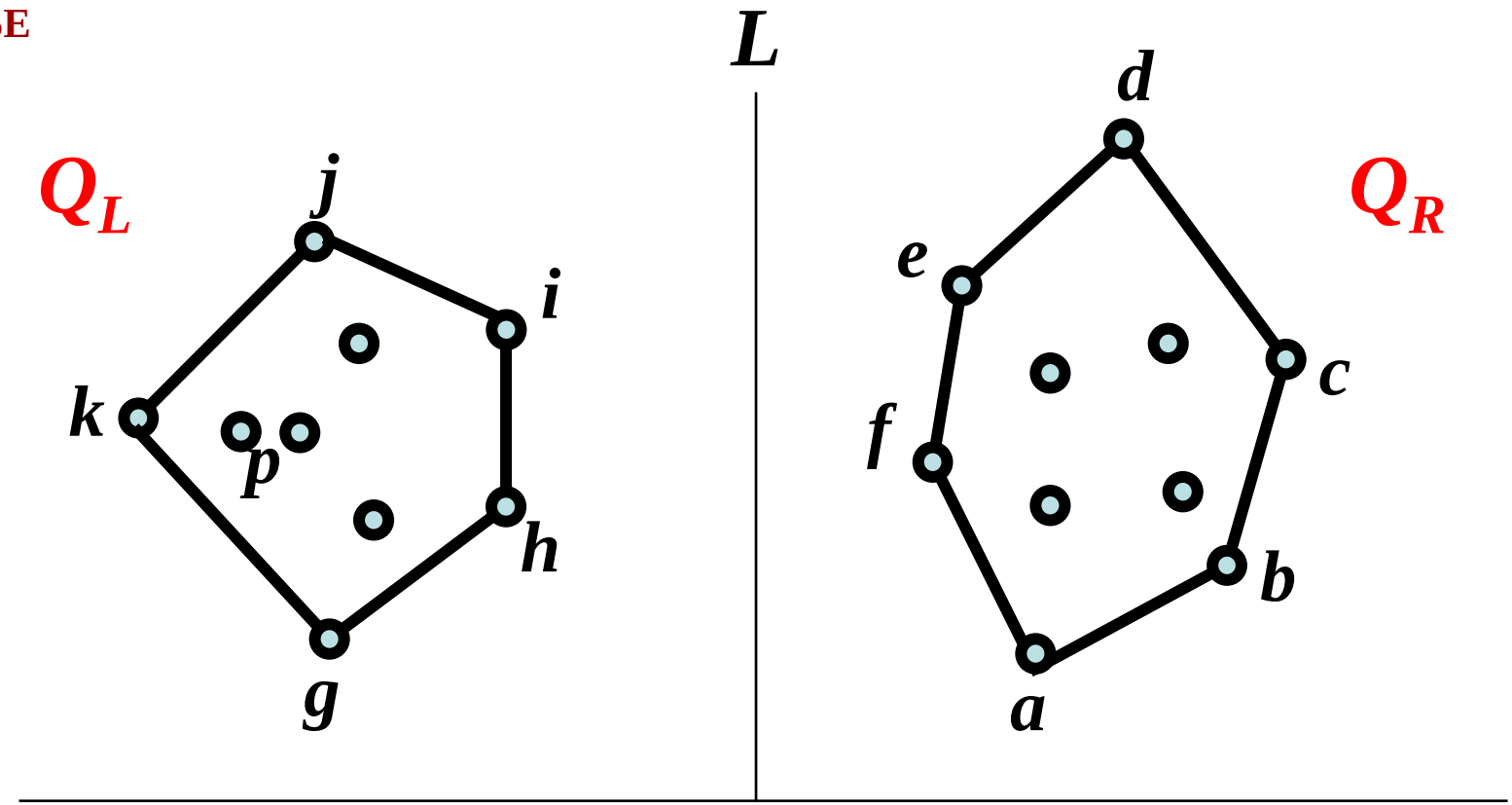
Divide-and-conquer算法

边界条件：(时间复杂性为$O(1)$)

1. 如果$|Q|<3$, 算法停止;
2. 如果$|Q|=3$, 按照逆时针方向输出CH(Q)的顶点;
3. 如果$|Q|<5$, 使用Graham-Scan求$CH(Q)$;

Divide:(使用$O(n)$算法求中值)

1. 选择一个垂直于x-轴的直线把Q划分为基本相等的两个集合Q_L和Q_R, Q_L在Q_R的左边;



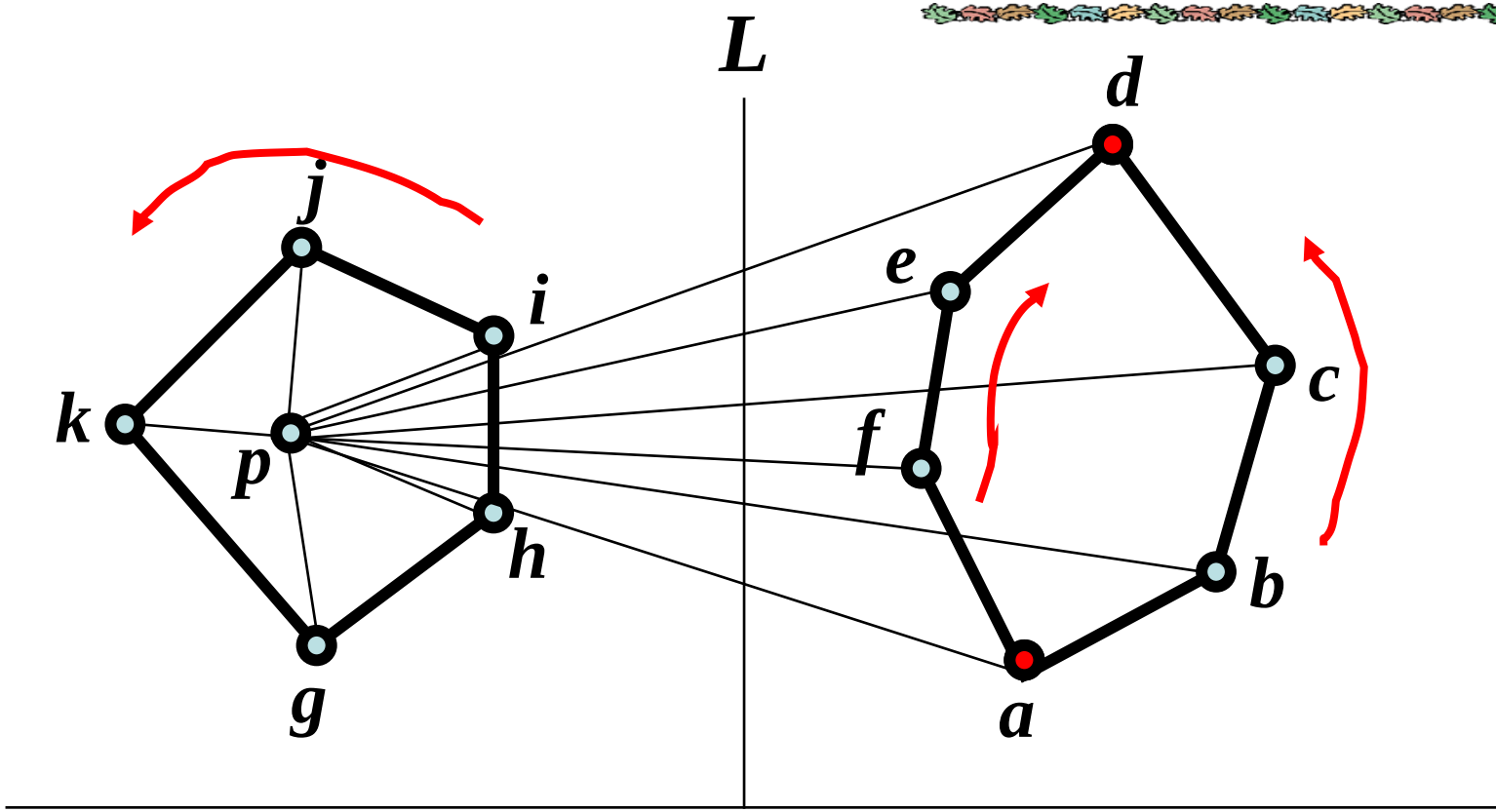
Conquer: (时间复杂性为$2T(n/2)$)

1. 递归地为Q_L和Q_R构造CH(Q_L)和CH(Q_R);

Merge:

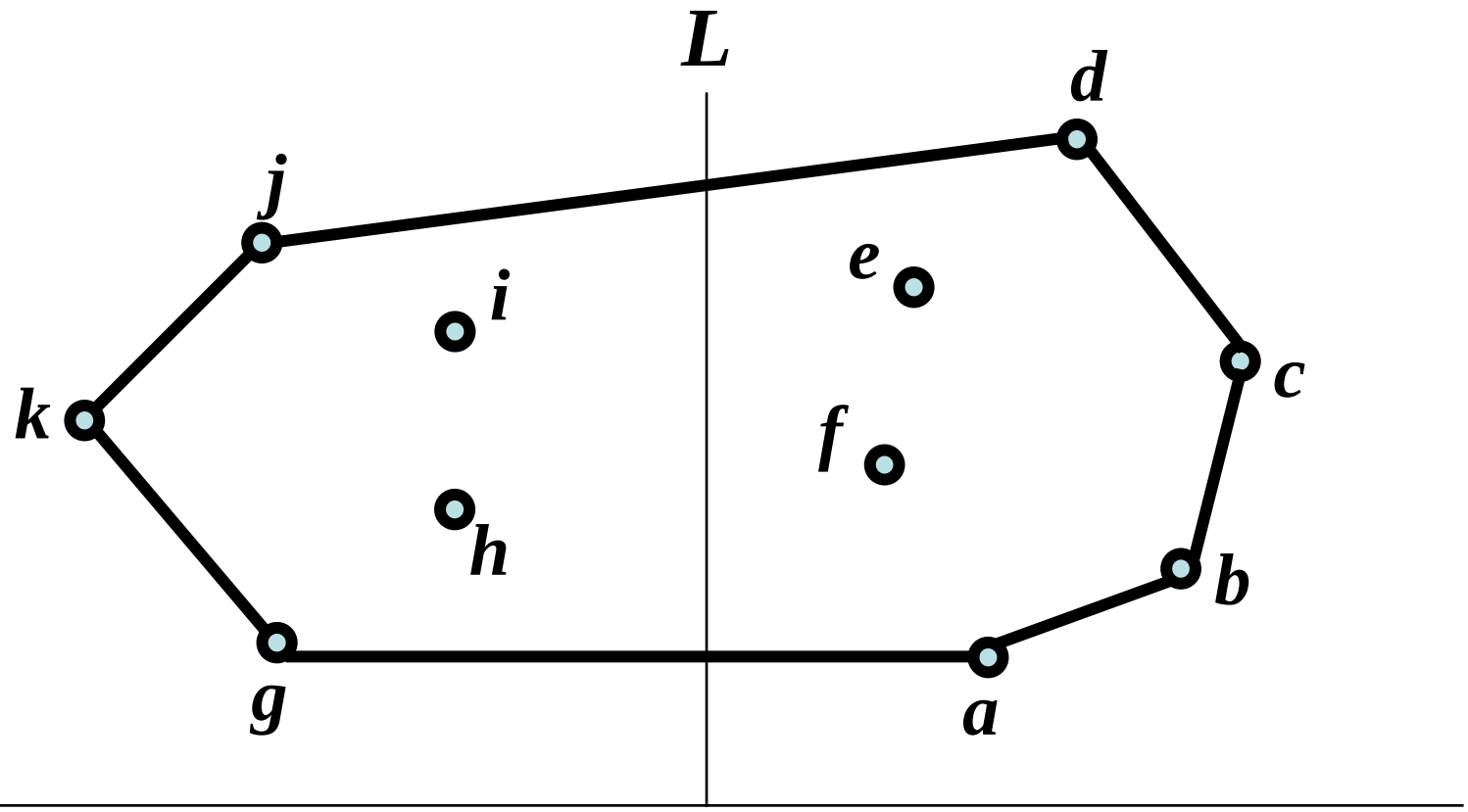
我们先通过一个例子来看Merge的思想

Merge实例



3个序列：<g, h, i, j, k>, <a, b, c, d>, <f, e>

合并以后：<g, h, a, b, f, c, e, d, i, j, k>



选择p点为y坐标最小的点

在合并的序列上运行Graham-Scan，排序部分合并三个有序序列即可

Merge:(时间复杂性为$O(n)$)

1. 找到Q_L和Q_R中y坐标最小的点p(假设在Q_L中);
2. 在$\mathrm{CH}(Q_R)$中找与p的极角最大和最小顶点u和v;
3. 构造如下三个点序列:
   (1) 按逆时针方向排列的$\mathrm{CH}(Q_L)$的所有顶点,
   (2) 按逆时针方向排列的$\mathrm{CH}(Q_R)$从v到u的顶点,
   (3) 按顺时针方向排列的$\mathrm{CH}(Q_R)$从v到u的顶点;
4. 合并上述三个序列;
5. 在合并的序列上应用Graham-Scan.

时间复杂性

- Preprocessing阶段
  - *O(1)*
- Divide阶段(使用*O(n)*算法求中值)
  - *O(n)*
- Conquer阶段
  - *2T(n/2)*
- Merge阶段
  - *O(n)*

- 总的时间复杂性

  $T(n)=2T(n/2)+O(n)$

- 使用Master定理

  $T(n)= O(n\log n)$

HITWH
SE

3.7 快速傅里叶变换

问题定义

输入：$a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$，$a_i$是实数，$(0 \le i \le n-1)$

输出：$A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$，使得，

$$A_j = \sum_{k=0}^{n-1} a_k e^{\frac{2\pi ijk}{n}}$$

其中：

(2) $0 \le j \le n-1$

(3) e是自然对数的底数

(4) $i = \sqrt{-1}$ 是虚数单位

蛮力法利用定义计算每个A_j，时间复杂度为$\Theta(n^2)$

$$A_j = \sum_{k=0}^{n-1} a_k e^{\frac{2\pi ijk}{n}} \quad \text{令} w_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}, \quad \text{有：} A_j = \sum_{k=0}^{n-1} a_k w_n^{jk}$$

$$A_j = a_0 + a_1 w_n^j + a_2 w_n^{2j} + a_3 w_n^{3j} + a_4 w_n^{4j} + \ldots\ldots + a_{n-2} w_n^{(n-2)j} + a_{n-1} w_n^{(n-1)j}$$

$$= (a_0 + a_2 w_n^{2j} + a_4 w_n^{4j} + \ldots\ldots + a_{n-2} w_n^{(n-2)j})$$

$$+ (a_1 w_n^j + a_3 w_n^{3j} + a_5 w_n^{5j} + \ldots\ldots + a_{n-1} w_n^{(n-1)j})$$

$$= (a_0 + a_2 w_n^{2j} + a_4 w_n^{4j} + \ldots\ldots + a_{n-2} w_n^{(n-2)j})$$

$$+ w_n^j (a_1 + a_3 w_n^{2j} + a_5 w_n^{4j} + \ldots\ldots + a_{n-1} w_n^{(n-2)j})$$

算法的数学基础

$$A_j = (a_0 + a_2 w_n^{2j} + a_4 w_n^{4j} + \ldots\ldots + a_{n-2} w_n^{(n-2)j})$$

奇数输入项的FFT

$$+ w_n^j (a_1 + a_3 w_n^{2j} + a_5 w_n^{4j} + \ldots\ldots + a_{n-1} w_n^{(n-2)j})$$

偶数输入项的FFT

由于$w_n^2 = w_{n/2}$,以及$w_n^{n+k} = w_n^k$,

$$A_j = (\underbrace{a_0 + a_2 w_{n/2}^j + a_4 w_{n/2}^{2j} + \ldots\ldots + a_{n-2} w_{n/2}^{\frac{(n-2)j}{2}}}_{B_j})$$

将问题划分为两个子问题

$$+ \underbrace{w_n^j (a_1 + a_3 w_{n/2}^j + a_5 w_{n/2}^{2j} + \ldots\ldots + a_{n-1} w_{n/2}^{\frac{(n-2)j}{2}})}_{C_j}$$

于是，$A_j = B_j + w_n^j C_j$　还可证明，$A_{j+n/2} = B_j + w_n^{j+n/2} C_j$

分治算法过程

划分： 将输入折分成$a_0,a_2,\ldots,a_{n-2}$和$a_1,a_3,\ldots,a_{n-1}$.

递归求解： 递归计算$a_0,a_2,\ldots,a_{n-2}$的变换$B_0,B_1,\ldots,B_{n/2-1}$
递归计算$a_1,a_3\ldots,a_{n-1}$的变换$C_0,C_1,\ldots,C_{n/2-1}$

合并： 根据$A_j= B_j+C_j\cdot W_n^{\,j}\ (j<n/2)$和$A_j=B_{j-n/2}+C_{j-n/2}\cdot W_n^{\,j}$
$(n/2\le j<n-1)$依次求得$A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$.

分治算法过程

例如：计算8个点$a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$的FFT.

计算4个点
a_0, a_2, a_4, a_6的FFT.

计算4个点
a_1, a_3, a_5, a_7的FFT.

计算2个点
a_0, a_4的FFT.

计算2个点
a_2, a_6的FFT.

计算2个点
a_1, a_5的FFT.

计算2个点
a_3, a_7的FFT.

算法及复杂性分析

算法FFT($a_0,a_2,\ldots,a_{n-1}, n$)

输入：$a_0,a_1,\ldots,a_{n-1}$， $n=2^k$

输出：$a_0,a_1,\ldots,a_{n-1}$的傅里叶变换$A_0,\ldots,A_{n-1}$

1. $W \leftarrow \exp(2\pi i/n)$;
2. If (n=2) Then
3. 　$A_0 \leftarrow a_0+a_1$;
4. 　$A_1 \leftarrow a_0-a_1$;
5. 输出A_0,A_1,算法结束；
6. $B_0,B_1,\ldots,B_{n/2-1} \leftarrow$FFT($a_0,a_2,\ldots,a_{n-2}, n/2$);
7. $C_0,C_1,\ldots,C_{n/2-1} \leftarrow$FFT($a_1,a_3,\ldots,a_{n-1}, n/2$);
8. For j=0 To n/2-1
9. 　$A_j \leftarrow B_j+C_j \cdot W^j$;
10. 　$A_{j+n/2} \leftarrow B_j+C_j \cdot W^{j+n/2}$;
11. 输出$A_0,A_1,\ldots,A_{n-1}$,算法结束；

$T(n)=\theta(1)$ If $n=2$

$T(n)=2T(n/2)+\theta(n)$ If $n>2$

$T(n)=\theta(n\log n)$

HITWH
SE

$$T(n)=\theta(1) \quad \text{if } n\le c$$
$$T(n)=aT(n/b)+D(n)+C(n) \quad \text{if } n>c$$

3.8 整数乘法

优化划分阶段，降低$T(n)=aT(n/b)+f(n)$中的a

问题定义

输入：n位二进制整数X和Y

输出：X和Y的乘积

通常，计算X*Y时间复杂性为$O(n^2)$，
我们给出一个复杂性为$O(n^{1.59})$的算法。

算法的思想

$$XY = (A2^{n/2} + B)(C2^{n/2} + D)$$
$$= AC2^{n} + AD2^{n/2} + BC2^{n/2} + BD$$
$$= AC2^{n} + ((A-B)(D-C)+AC+BD)2^{n/2} + BD$$

如此计算需要
$T(n)=4T(n/2)+O(n)=O(n^2)$

时间复杂性

$T(n)=\theta(1)$ if $n=1$

$T(n)=3T(n/2)+O(n)$ if $n>1$

使用Master定理

$T(n)=O(n^{\log_2 3})=O(n^{1.59})$

给定一棵树T，其中每个顶点n的代价记为c(n)，树T中一个顶点集合S的代价为$C(S)=\sum_{n\in S}c(n)$。记树T的顶点集合为V(T)，T的切面定义如下：

一个顶点集合S称为树T的一个切面，如果S满足以下两个条件：

(1) $S\subseteq V(T)$;

(2) 从T的根顶点到任意叶子顶点的路径上有且只有一个顶点属于S。

请设计算法，求解T的一个切面S使得C(S)最小，并分析算法的时间开销。