运筹学与优化方法

晁国清
计算机科学与技术学院

本节课内容

- 运筹学与优化方法简介
- 最优化问题分类与建模
- 课程主要内容
- 预备知识
- 参考文献及考核方式
- 课程要求

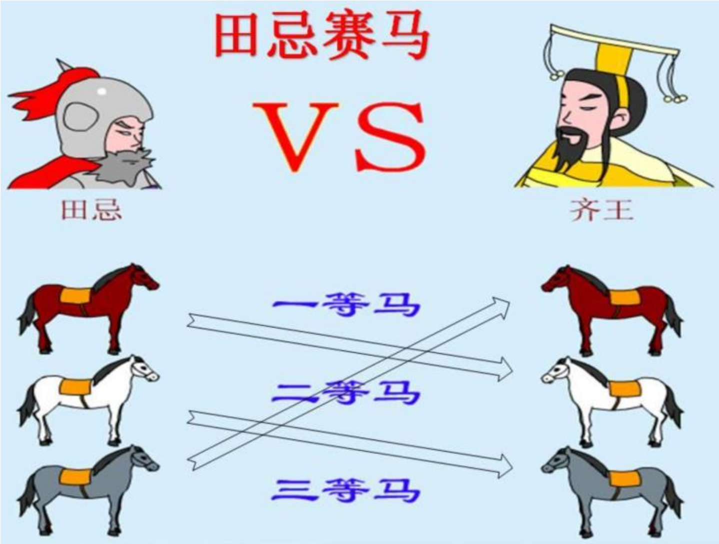
运筹学

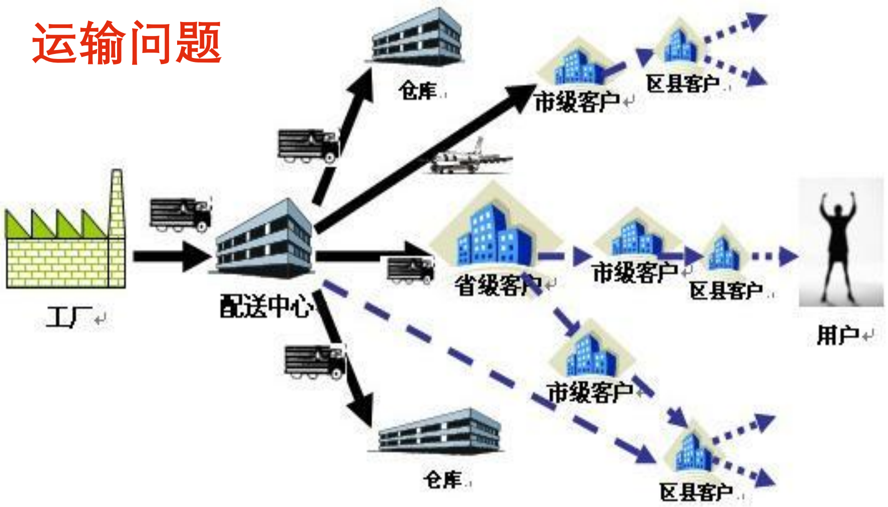
➢运筹学-简称O.R.

（英国）Operational Research（1938年该词出现）

（美国）Operation’s Research （1948年MIT开课）

（中国）1957年从“运筹于帷幄之中，决胜于千里之外”《史记·高祖本纪》取“运筹”二字翻译为运筹学，包含运用筹划，以策略取胜之意。





运筹学

- 《大英百科全书》："运筹学是一门应用于管理有组织系统的科学，为掌管这类系统的人提供决策目标和数量分析的工具"。

- 《中国大百科全书》："运筹学是用数学方法研究经济、民政和国防等部门在内外环境的约束条件下合理分配人力、物力、财力等资源，使实际系统有效运行的技术科学，它可以用来预测发展趋势，制订行动规划或优选可行方案"。

- 运筹学是应用数学的一个分支，主要是将生产、生活、管理、军事等现实世界中的普遍性问题加以提炼形成数学模型然后利用优化方法进行求解。

2022 MCM-ICM

Mathematical Contest in Modeling

Interdisciplinary Contest in Modeling

- MCM Problem A: Power Profile of a Cyclist
- MCM Problem B: Water and Hydroelectric Power Sharing
- MCM Problem C: Trading Strategies
- ICM Problem D: Data Paralysis? Use Our Analysis!
- ICM Problem E: Forestry for Carbon Sequestration
- ICM Problem F: All for One and One (Space) for All!

最优化问题

- 最优化问题是决策问题，选择一些可以执行的策略使目标最优。
- 最优化问题的组成：

1. 决策变量
2. 一个或多个目标函数
3. 一个由可行策略组成的集合，可由等式或不等式描述（约束条件）

最优化问题的基本形式

$$\begin{cases} \quad \min \quad f(x_1, \cdots, x_n) \\ s.t. \quad g_i(x_1, \cdots, x_n) \le 0, i = 1, \cdots, m, \\ \qquad\quad h_j(x_1, \cdots, x_n) = 0, j = 1, \cdots, l, \\ \qquad\quad x = (x_1, \cdots, x_n) \in X \end{cases}$$

其中X表示给定的集合，如R_+^n, Z^n

- $x = (x_1, \cdots, x_n)^T$是决策变量
- $f(x)$是 目标函数
- $g_i(x) \le 0, h_j(x) = 0$分别为不等式约束和等式约束

集合$S = \{x \in X | g_i(x) \le 0, i = 1, \cdots, m, h_j(x) = 0, j = 1, \cdots, l\}$ 是最优化问题的可行集（可行域）， $x \in X$称为可行解

哈爾濱工業大學 HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

最优化问题的分类

$$
\begin{cases}
\min & f(x_1,\cdots,x_n) \\
s.t. & g_i(x_1,\cdots,x_n), i = 1,\cdots,m, \\
 & h_j(x_1,\cdots,x_n) = 0, j = 1,\cdots,l, \\
 & x = (x_1,\cdots,x_n) \in X
\end{cases}
$$

- 无约束优化与约束优化
- 线性优化与非线性优化
- 凸优化与非凸优化
- 连续优化与离散优化（运输问题）
- 单目标优化与多目标优化（行车路线规划）
- 确定性优化与随机优化/鲁棒性优化

无约束优化与约束优化

- 无约束优化： $\min f(x_1,\cdots,x_n)$

- 约束优化：

$$\begin{cases} \min \quad f(x_1,\cdots,x_n) \\ s.t. \quad g_i(x_1,\cdots,x_n), i=1,\cdots,m, \\ \qquad\quad h_i(x_1,\cdots,x_n)=0, i=1,\cdots,l, \\ \qquad\quad x=(x_1,\cdots,x_n)\in X \end{cases}$$

实际问题很少存在无约束优化问题，为什么还要研究？

线性规划与非线性规划

- 线性规划：$\begin{cases} \min c^T x \\ s.t. Ax = b \\ \qquad x \geq 0 \end{cases}$

- 非线性规划：均值方差模型(投资组合)

$$\begin{cases} \min \ var\left(\sum_{i=1}^{n} x_i R_i\right) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j \mathrm{cov}(R_i, R_j) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij} \\ s.\mathrm{t.} \ \sum_{i=1}^{n} x_i E(R_\mathrm{i}) \geq \mu \\ \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\ \qquad x_i \geq 0 \end{cases}$$

x_i: 投资股票i的资金比例；R_i:股票i的投资收益(亏损)率, $E(R_\mathrm{i}) = r_i$

$cov(R_i, R_j) = \sigma_{ij}$

哈爾濱工業大學 HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

连续优化与离散优化

➢连续优化：

$$\begin{cases} \min \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij} \\ s.\text{t.} \ \sum_{i=1}^{n} x_i \mathrm{r}_i \geq \mu \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\ x_i \geq 0\,, i = 1, \cdots, n \end{cases}$$

离散优化：

$$\begin{cases} \min \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij} \\ s.\text{t.} \ \sum_{i=1}^{n} x_i \mathrm{r}_i \geq \mu \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\ x_i \in \{0,1\}\,, i = 1, \cdots, n \end{cases}$$

单目标优化与多目标优化

- 多目标优化
  - 目标1：　$\min \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij}$
  - 目标2：　$\max \sum_{i=1}^{n} x_i \mathrm{r}_i$
- 单目标优化
  - $\min \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij} - \sum_{i=1}^{n} x_i \mathrm{r}_i$
  - $\begin{cases} \max \sum_{i=1}^{n} x_i \mathrm{r}_i \\ s.t. \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij} \le \sigma_0 \end{cases}$

确定性优化与随机优化鲁棒优化

- 确定性优化：

$$\begin{cases} \min \quad 5x_1 + 10x_2 \\ s.t. \quad w_1x_1 + w_2x_2 \geq 10 \\ \qquad\quad x \in X \end{cases}$$

w_1, w_2取确定的值

- 随机优化：

w_1, w_2取值不确定，是随机变量

  - $E[\ w_1x_1 + w_2x_2] \geq 10$
  - $P(\ w_1x_1 + w_2x_2 \geq 10) \geq 95\%$

- 鲁棒优化：

w_1, w_2取自某一特定集合或区间，譬如$w_1 \in [a,b], w_2 \in [c,d]$

$$\min_{\substack{w_1 \in [a,b], \\ w_2 \in [c,d]}} \{w_1x_1 + w_2x_{2\}} \geq 10$$

优化问题建模

➢例题1. 美佳公司计划制造I，II两种家电产品。已知各制造一件时分别占用的设备A、设备B的台时、调试工序时间及每天可用于这两种家电的能力、各售出一件时的获利情况，如下表所示：

项目	I	II	每天可用能力
设备A/h	0	5	15
设备B/h	6	2	24
测试工序/h	1	1	5
利润/元	2	1	

问该公司应制造两种家电各多少件，使获取的利润最大(只建模，不求解)

解：设两种家电I和II各制造件数x_1，x_2

目标函数： $\max z = 2x_1 + x_2$

约束条件：s.t. $\begin{cases} 5x_2 \le 15 \\ 6x_1 + 2x_2 \le 24 \\ x_1 + x_2 \le 5 \\ x_1,\ x_2 \ge 0 \\ x_1, x_2 \in Z_+ \end{cases}$

价值系数 c

资源系数 b

工艺系数 a

解题步骤：
1) 设决策变量
2) 列目标函数
3) 列约束条件

哈爾濱工業大學 HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

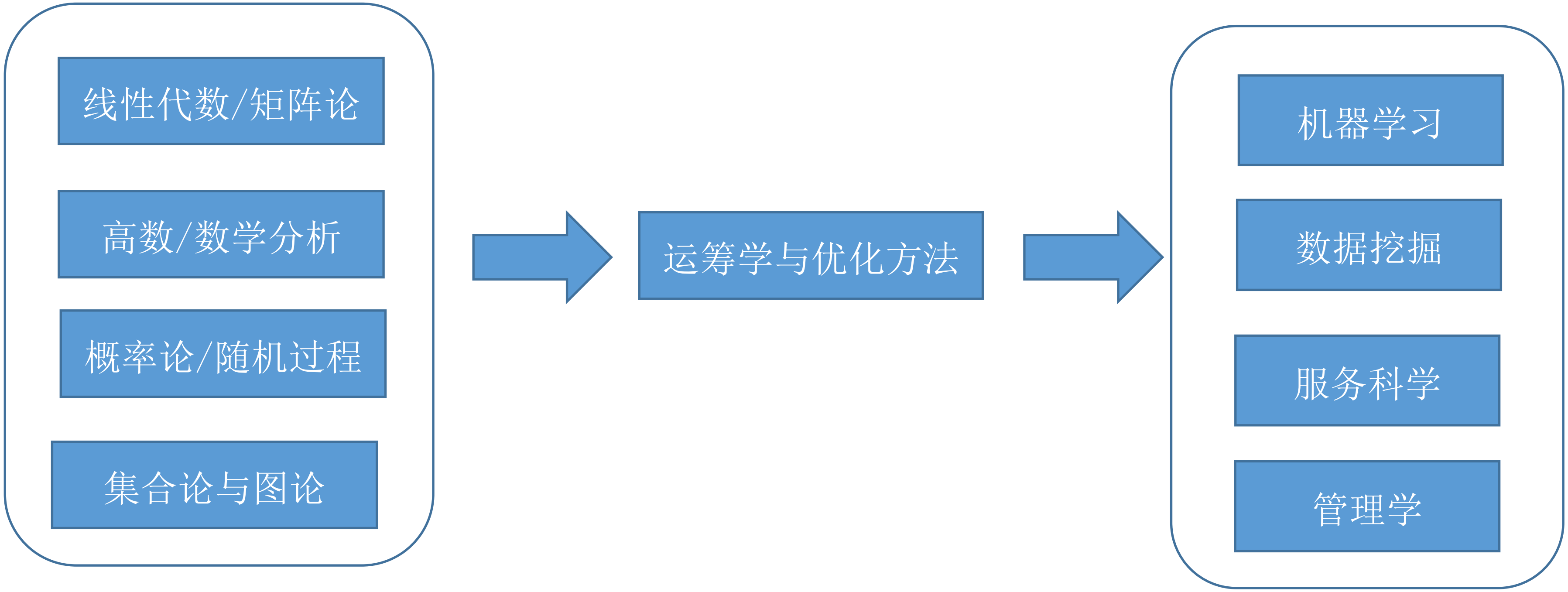
主要内容

主要参考教材：《运筹学与最优化算法》

- 凸优化理论：凸集，凸函数，凸优化问题（ 第二章）
- 无约束优化问题的算法（第四、五章）
- 约束优化的最优性条件及对偶理论（第六章）
- 约束优化的罚函数方法与ADMM算法（第六章）
- 智能优化算法 （第十一章）

预备知识

- 向量、矩阵、二次型等知识
- 微积分知识（泰勒展开式、级数等）
- 简单的概率知识（期望、方差等）



哈爾濱工業大學
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

课程要求

- 掌握理解运筹学最优化算法的基本思想，并会运用它们求解问题
- 构建最优化问题的知识网络
- 至少会用一种常用编程语言如Python实现重要的最优化算法

课程参考书目与考核方式

➢参考书目：

1. 《运筹学与最优化方法》（第2版），机械工业出版社，2013.
2. 《最优化方法》 （第一版），何坚勇，清华大学出版社，2007.
3. 《最优化基础理论与方法》（第二版），王燕军、梁治安、崔雪婷，复旦大学出版社，2018.
4. Nonlinear Programming: Theory and algorithm, 3rd edition, Bazaraa et al, 2006.
5. Convex Optimization, Stephen Boyd and Lieven Vandenberghe, Cambridge University Press, 2016.
6. Numerical Optimization, Jorge Nocedal and Stephen J. Wrightm Springer,2006.

➢网课推荐：最优化理论与方法

➢考核方式

平时成绩【签到平时作业】（10%）实验成绩（20%）+闭卷期末考试（70%）

平时作业通过课堂上的传统作业形式、雨课堂、云班课进行

哈爾濱工業大學 HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

交流方式

- 课程相关材料上传至云班课或QQ群
- 云班课课号: 服科6767088 软工2782572
- 交流沟通：QQ群：750173103
- 邮箱：guoqing.chao@hit.edu.cn

习题

➢对某厂I, II, III三种产品下一年各季度的合同预订数如下表所示

产品	季度			
	1	2	3	4
I	1500	1000	2000	1200
II	1500	1500	1200	1500
III	1000	2000	1500	2500

这三种产品1季度无库存，要求在4季度末各库存150件。已知该厂每季度生产工时15000h,生产I,II,III产品每件分别需时2,4,3h。因更换工艺设备，产品I在2季度无法生产。规定当产品不能按期交货时，产品I,II每件每迟交一个季度赔偿20元，产品III赔偿10元；又生产出的产品不在本季度交货的，每件每季度的库存费用为5元。问该厂应如何安排生产，使总的赔偿加库存的费用为最小（要求建立数学模型，不需要求解）