《最优化方法》1

一、填空题：

1．最优化问题的数学模型一般为：____________________________，其中___________称为目标函数，___________称为约束函数，可行域 D 可以表示为_____________________________，若______________________________，称 x^* 为问题的局部最优解，若_____________________________________，称 x^* 为问题的全局最优解。

2．设 f(x)= $2x_1^2+2x_1x_2-x_1+5x_2$，则其梯度为___________，海色矩阵___________,令 $\bar{x}=(1,2)^T, d=(1,0)^T$, 则 f(x)在 $\bar{x}$ 处沿方向 d 的一阶方向导数为___________，几何意义为__________________________________,二阶方向导数为___________________，几何意义为____。

3．设严格凸二次规划形式为：

$$\begin{aligned} \min\ & f(x)=2x_1^2+2x_2^2-2x_1-x_2 \\ s.t.\ & 2x_1+x_2\le 1 \\ & x_1\ge 0 \\ & x_2\ge 0 \end{aligned}$$

则其对偶规划为____。

4．求解无约束最优化问题：$\min f(x), x \in R^n$，设 x^k 是不满足最优性条件的第 k 步迭代点，则：

用最速下降法求解时，搜索方向 d^k =___________

用 **Newton** 法求解时，搜索方向 d^k =___________

用共轭梯度法求解时，搜索方向 d^k =_______________

____。

二．（10 分）简答题：试设计求解无约束优化问题的一般下降算法。

三．（25 分）计算题

1．（10 分）用一阶必要和充分条件求解如下无约束优化问题的最优解：

$$\min f(x) = 2x_1^3 - 3x_1^2 - 6x_1x_2(x_1 - x_2 - 1).$$

2．（15 分）用约束问题局部解的一阶必要条件和二阶充分条件求约束问题：

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) = x_1x_2 \\ s.t. \quad & c(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \end{aligned}$$

的最优解和相应的乘子。

四．证明题（共 33 分）

1．（10 分）设 $f(x) = \dfrac{1}{2}x^TGx + r^Tx + \delta$ 是正定二次函数，证明一维问题

$$\min \varphi(a) = f(x^k + ad^k)$$

的最优步长为$a_k = -\dfrac{\nabla f(x^k)^T d^k}{d^{kT} G d^k}$.

2．（10 分）证明凸规划

$\min f(x), x \in D$ **（其中 $f(x)$ 为严格凸函数，D 是凸集）**

的最优解是唯一的

3. （13 分）考虑不等式约束问题

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ s.t. \quad & c_i(x) \le 0, i \in I = \{1,2,\cdots,m\} \end{aligned}$$

其中 $f(x), c_i(x)(i \in I)$ 具有连续的偏导数，设 $\bar{x}$ 是约束问题的可行点，若在 $\bar{x}$ 处 d 满足

$$\begin{aligned} & \nabla f(\bar{x})^T d < 0, \\ & \nabla c_i(\bar{x})^T d < 0, i \in I(\bar{x}) \end{aligned}$$

则 d 是 $\bar{x}$ 处的可行下降方向。

《最优化方法》2

一、填空题：

1．最优化问题的数学模型一般为：______________________________，其中____________称为目标函数，____________称为约束函数，可行域 D 可以表示为_______________________________，若________________________________，

称 x^* 为问题的局部最优解，若_______________________________________，称 x^* 为问题的全局最优解。

2．设 f(x)= $x_1^2 + 2x_1x_2 - 10x_1 + 5x_2$，则其梯度为____________，海色矩阵

____________,令 $\bar{x}=(1,0)^T, d=(1,-1)^T$, 则 **f(x)**在 $\bar{x}$ 处沿方向 **d** 的一阶方向导数为 ____________，几何意义为____________________________________,二阶方向导数为____________________，几何意义为__________________________

____________________________________。

3．设严格凸二次规划形式为:

$$\begin{aligned} \min\ & f(x)=x_1^2+x_2^2-2x_1-x_2 \\ s.t.\ & x_1+x_2\le 1 \\ & x_1\ge 0 \\ & x_2\ge 0 \end{aligned}$$

则其对偶规划为____。

4．求解无约束最优化问题： $\min f(x), x\in R^n$**，设** x^k **是不满足最优性条件的第 k 步迭代点，则:**

用最速下降法求解时，搜索方向 $d^k=$____________

用 Newton 法求解时，搜索方向 $d^k=$____________

用共轭梯度法求解时，搜索方向 $d^k=$________________

____。

二．（10 分）简答题：试叙述求解无约束优化问题的优化方法及其优缺点。（200 字左右）

三．（25 分）计算题

3．（10 分）用一阶必要和充分条件求解如下无约束优化问题的最优解:

$$\min f(x)=2x_1^3-3x_1^2-6x_1x_2(x_1-x_2-1).$$

4. （15 分）用约束问题局部解的一阶必要条件和二阶充分条件求解约束问题：

$$\min \quad f(x)=\sum_{i=1}^{n} x_i^p$$

$$s.t. \quad c(x)=\sum_{i=1}^{n} x_i - a = 0$$

其中 $p>1, a>0.$

四． 证明题（共 33 分）

1．（10 分）

设 $f(x)=\frac{1}{2}x^T Gx + r^T x + \delta$ 是正定二次函数，证明一维问题

$$\min \varphi(a)=f(x^k + ad^k)$$

的最优步长为 $a_k = -\frac{\nabla f(x^k)^T d^k}{{d^k}^T G d^k}$.

2．（23 分）考虑如下规划问题

$$\min \quad f(x), x\in R^n$$

$$s.t. \quad c_i(x)\le 0, i=1,2,\cdots,m.$$

其中 $f(x), c_i(x)(i=1,\cdots,n)$ 是凸函数，证明：

（1） （7 分）上述规划为凸规划；

（2） （8 分）上述规划的最优解集 R^* 为凸集；

（3） （8 分）设 $f(x), c_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$ 有连续的一阶偏导数，若 x^* 是 KT 点，则 x^* 是上述凸规划问题的全局解。

《最优化方法》试题 3

一、 填空题

1. 设 $f(x)$ 是凸集 $S\subset R^n$ 上的一阶可微函数，则 $f(x)$ 是 S 上的凸函数的一阶充要条件是（　　　　　），当 n=2 时，该充要条件的几何意义是（　　　　　　　）；

2. 设 $f(x)$ 是凸集 R^n 上的二阶可微函数，则 $f(x)$ 是 R^n 上的严格凸函数（　　　　　）（填‘当’或‘当且仅当’）对任意 $x\in R^n$，$\nabla^2 f(x)$ 是（　　　　　　　）矩阵；

3. 已知规划问题 $\begin{cases}\min z=x_1^2+x_2^2-x_1x_2-2x_1-3x_2\\ s.t.\quad -x_1-x_2\ge -2\\ \qquad -x_1-5x_2\ge -5\quad x_1,x_2\ge 0\end{cases}$，则在点 $\bar{x}=(\frac{5}{6},\frac{5}{6})^T$ 处的可行方向集为（　　　　　），下降方向集为（　　　　　　　）。

二、选择题

1. 给定问题 $\begin{cases}\min f=(x_1-2)^2+x_2^2\\ s.t.\quad -x_1+x_2^2\le 0\\ \qquad x_1-x_2\le 0\end{cases}$，则下列各点属于 K-T 点的是（　　　　　）

A) $(0,0)^T$　　B) $(1,1)^T$　　C) $(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})^T$　　D) $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})^T$

2. 下列函数中属于严格凸函数的是（　　　）

A) $f(x)=x_1^2+2x_1x_2-10x_1+5x_2$　　B) $f(x)=x_1^2-x_2^3\quad(x_2<0)$

C) $f(x)=2x_1^2+x_1x_2+x_2^2+2x_3^2-6x_1x_3$ D) $f(x)=3x_1+4x_2-6x_3$

三、求下列问题

$$\begin{aligned}&\min f(x)=\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2-5x_1-10x_2\\&s.t.\quad 2x_1-3x_2\le 30\\&\qquad\ \ x_1+4x_2\le 20\\&\qquad\ \ x_1,x_2\ge 0\end{aligned}$$

取初始点$(0,5)^T$。

四、考虑约束优化问题

$$\begin{aligned}&\min f(x)=x_1^2+4x_2^2\\&s.t.\quad 3x_1+4x_2\ge 13\end{aligned}$$

用两种惩罚函数法求解。

五. 用牛顿法求解二次函数

$$f(x)=(x_1-x_2+x_3)^2+(-x_1+x_2+x_3)^2+(x_1+x_2-x_3)^2$$

的极小值。初始点$x_0=\left(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}\right)^T$。

六、证明题

1. 对无约束凸规划问题$\min f(x)=\frac{1}{2}x^TQx+c^Tx$，设从点$\bar{x}\in R^n$出发，沿方向$\bar{d}\in R^n$作最优一维搜索，得到步长$\bar{t}$和新的点$\bar{y}=\bar{x}+\bar{t}\bar{d}$，试证当$\bar{d}^TQ\bar{d}=1$时，$\bar{t}^2=2[f(\bar{x})-f(\bar{y})]$。

2. 设$x^*=(x_1^*,x_2^*,x_3^*)^T>0$是非线性规划问题$\begin{aligned}&\min f(x)=x_1+2x_2+3x_3\\&s.t.\quad x_1^4+x_2^4+x_3^4=10\end{aligned}$的最优解，试证$x^*$也是非线性规划问题$\begin{aligned}&\min x_1^4+x_2^4+x_3^4\\&s.t.\quad x_1+2x_2+3x_3=f^*\end{aligned}$的最优解，其中

$f^* = x_1^* + 2x_2^* + 3x_3^*$。

《最优化方法》试题 4

一、 是非题

1. 若某集合是凸集，则该集合中任意两点的所有正线性组合均属于此集合。
2. 设函数 $f(x) \in C^2$，若 $\nabla f(x^*) = 0$，并且 $\nabla^2 f(x^*)$ 半正定，则 x^* 是 $\min f(x)$ 的局部最优解。
3. 设 x^* 是 $\min f(x)$ 的局部最优解，则在 x^* 处的下降方向一定不是可行方向。
4. 设 x^* 是 $\min f(x)$ 的局部最优解，则 x^* 是 $\min f(x)$ 的 K-T 点。
5. 设函数 $f(x) \in C^2$，则用最速下降法求解 $\min f(x)$ 时，在迭代点 x^k 处的搜索方向一定是 $f(x)$ 在 x^k 处的下降方向。
6. 用外点法求解约束优化问题时，要求初始点是不可行点。

二、在区间 $[-1,1]$ 上用黄金分割法求函数 $f(x) = x^2 - x + 2$ 的极小点，求出初始的两个试点及保留区间。

三、验证点 $(\frac{1+\sqrt{17}}{2}, \frac{1-\sqrt{17}}{2})^T$ 与 $(0,-3)^T$ 是否是规划问题

$$\begin{aligned} &\min f(x) = x_1^2 + x_2 \\ &s.t. \quad x_1^2 + x_2^2 \le 9 \\ &\qquad\ -x_1 - x_2 + 1 \ge 0 \end{aligned}$$

的 K-T 点。对 K-T 点写出相应的 Lagrange 乘子。

四、用外点法求解

$$\min f(x) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2$$
$$s.t. \quad x_2 \ge 1$$

五. 用共轭梯度法求解无约束优化问题

$$\min x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 - x_1 + x_2$$

取初始点 $x_0 = (0,0)^T$，精度为 10^{-3}。

六、证明题

1. 设集合 $S \subset R^n$ 是凸集，$f_1(x), \cdots f_k(x)$ 是 S 上的凸函数，令

$$f(x) = \max\{f_1(x), \cdots f_k(x)\} \quad x \in S$$

证明 $f(x)$ 也是 S 上的凸函数。

2. 设 $X_L = \left\{x \in R^n \mid \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i, i = 1, \cdots, m, x_j \ge 0, j = 1, \cdots, n\right\}$， $x \in X_L$，记

$$I(x) = \left\{i \in \{1, \cdots, m\} \mid \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i\right\},$$

$$J(x) = \left\{j \in \{1, \cdots, n\} \mid x_j = 0\right\},$$

证明：p 是 X_L 在 x 处的可行方向的充要条件是

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}p_j \ge 0, \quad i \in I(x); \quad p_j \ge 0, \quad j \in J(x)。$$

《最优化方法》试题 5

二、 填空题

1. 设 Q 为 n 阶对称正定矩阵， $A_{m\times n}$ 为行满秩矩阵，则问题 $\begin{cases}\min f(x)=\dfrac{1}{2}x^TQx \\ s.t.\quad Ax=b\end{cases}$ 的 K-T 点为（　　　）；

2. $\min f(x)=(x_1-2)^4+(x_1-2x_2)^2$ 的平稳点为（　　　　　），该平稳点（　　　）（填‘是’或‘不是’）局部最优解；

3. 设 $\hat{x}$ 是问题 $\begin{cases}\min f(x) \\ s.t.\quad Ax\ge b \\ A\in R^{m\times n}, x\in R^n, b\in R^m\end{cases}$ 的可行解，则在 $\hat{x}$ 处有 $A_1\hat{x}=b_1, A_2\hat{x}>b_2$，其中 $A=(A_1^T,A_2^T)^T, b=(b_1^T,b_2^T)^T$，则 $d\neq 0$ 是 $\hat{x}$ 的下降方向的充要条件为（　　　　　　　），$d\neq 0$ 是 $\hat{x}$ 的可行方向的充要条件为（　　　　　　　）。

二. 运用 0.618 法求

$$\min f(x)=x^2-x+2$$

在区间 $[-1,3]$ 上的极小点。要求最终区间长度不大于原区间长度的 0.08 倍。(计算结果精确到 0.001)

三、用最速下降法求解无约束问题 $\min f(x)=3(x_1-2)^2+4(x_2-3)^2$，取初始点 $x^{(1)}=(4,3)^T$。

四、证明题

1. 用牛顿法求函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^TAx+b^Tx+c$（A 为对称正定矩阵）的极小值只需一次迭代；

2. 罚函数内点法定义惩罚函数$G(x,r)=f(x)+rB(x)$，（其中$B(x)>0$）。设$r_{k+1}>r_k \quad (k=1,\cdots)$产生序列$\{x^{(k)}\}$，证明：

（1）$G(x^{(k+1)},r_{k+1})\le G(x^{(k)},r_k)$；

（2）$B(x^{(k+1)})\ge B(x^{(k)})$；

（3）$f(x^{(k+1)})\le f(x^{(k)})$.

五、求约束问题 $\begin{aligned}&\min f=x_1^2+x_2\\ &s.t.\begin{cases}x_1^2+x_2^2-9=0\\ x_1+x_2-1=0\end{cases}\end{aligned}$ 的 Kuhn—Tucker 点。

六．设$f:R^n\to R$连续可微，考虑约束问题$P_1:\min\limits_{x\in D} f(x)$，其中$D=\{x\mid Ax=b,x\ge 0\}$。设$x\in D$，$y^*$是问题$P_2:\min\limits_{y\in D}\nabla f(x)^T(y-x)$的最优解。

求：

1) 什么条件下x是问题P_1的 K-T 点；

2) 什么条件下$d=y^*-x$为x处的可行下降方向.

七、某银行有投资资金x_0，投资于 A, B 两个项目，计划 5 年为一个周期。A, B 两个项目的资金回收率分别为 a, b（$0\le a<1, 0\le b<1$）。设第i年（i＝1，2，…, 4）底根据现有投资资金x_i对 A, B 两个项目的投资额做出决策，以y_i投资于 A 项目，一年中可产生经济效益$g(y_i)$，余额（x_i-y_i）投资于 B 项目，一年可产生经济效益$h(x_i-y_i)$，其中 g, h 为两个单调非减函数(显然不投资则效益为 0). 问每年底作何投资决策，可使在第 5 年底的总效益最大？试合理选择问题的特征量，建立特征量之间的定量关系，写出数学模型。