运筹学与优化方法

晁国清
计算机科学与技术学院

习题1

➤对某厂I, II, III三种产品下一年各季度的合同预订数如下表所示

产品	季度			
	1	2	3	4
I	1500	1000	2000	1200
II	1500	1500	1200	1500
III	1000	2000	1500	2500

这三种产品1季度无库存，要求在4季度末各库存150件。已知该厂每季度生产工时15000h,生产I,II,III产品每件分别需时2,4,3h。因更换工艺设备，产品I在2季度无法生产。规定当产品不能按期交货时，产品I,II每件每迟交一个季度赔偿20元，产品III赔偿10元；又生产出的产品不在本季度交货的，每件每季度的库存费用为5元。问该厂应如何安排生产，使总的赔偿加库存的费用为最小（要求建立数学模型，不需要求解）

习题1

- 解：设x_{ij}为第j季度生产产品i的数量，r_{ij}为第j季度末需库存的产品i的数量，s_{ij}为第j季度不能交货的产品i的数量，o_{ij}为第j季度对产品i的预订数量。

那么，目标函数可以表示为

$$\min \sum_{j=1}^{3}\left(20\left(s_{1j}+s_{2j}\right)+10s_{3j}\right)+5\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} r_{ij}$$

约束条件

$$\begin{cases} 2x_{1j}+4x_{2j}+3x_{3j}\le 15000 \quad (j=1,2,3,4) \\ x_{12}=0 \\ \sum_{j=1}^{4} x_{ij}=\sum_{j=1}^{4} o_{ij}+150 \quad (i=1,2,3) \\ \sum_{k=1}^{j}(x_{ik})+s_{ij}-r_{ij}=\sum_{k=1}^{j} o_{ik} \quad (i=1,2,3, j=1,2,3,4) \\ x_{ij}, r_{ij}, s_{ij}\ge 0 \ (i=1,2,3, j=1,2,3,4) \end{cases}$$

习题2、3

- 设集合C是任意集合，集合外一点到集合C在任意范数下的最大距离是凸函数？

答案是

原因：集合外一点为x, 集合C内任一点为y，则有

$$f(x) = \max_{y \in C} \|x - y\|$$

对于任意固定的一点y，函数$f_y(x) = \|x - y\|$对于x是凸的(任意范数都是凸的)，然后再由凸函数的逐点最大原则($f(x) = max(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x))$是凸函数)可以得出$f(x)$是凸函数

- 集合外一点到凸集合C在任意范数下的最小距离是凸函数？

答案是

原因：$f(x) = \min_{y \in C} \|x - y\|$, 我们知道$g(x, y) = \|x - y\|$对于$x, y$联合凸，又由集合$C$凸，运用凸函数的部分最小原则($f(x) = \min_{y \in C} g(x, y)$ 是凸函数)推出$f(x)$是凸函数

哈尔滨工业大学
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

习题4

- 如果C是凸集，那么它的指示函数$I_C(x)=\begin{cases}0, & x\in C\\ \infty, & x\notin C\end{cases}$是凸函数么？
- 答案是
- 证明：假设任意两点x,y, 则它们与集合C的关系有四种

$$\begin{cases}x\in C, y\in C\\ x\in C, y\notin C\\ x\notin C, y\in C\\ x\notin C, y\notin C\end{cases}$$

当$x\in C, y\in C$时，依据C是凸集，则对于任意$\lambda\in[0,1]$, 则$\lambda x+(1-\lambda)y\in C$, 故$I_C(\lambda x+(1-\lambda)y)=0$，有$I_C(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq \lambda I_C(x)+(1-\lambda)I_C(y)$成立

对于后三种情况，$\lambda I_C(x)+(1-\lambda)I_C(y)=\infty$，$\lambda x+(1-\lambda)y$与$C$的关系不外乎属于不属于两种, 所以对应$I_C(\lambda x+(1-\lambda)y)=0$或者$I_C(\lambda x+(1-\lambda)y)=\infty$, 对于这两种情况都有$I_C(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq \lambda I_C(x)+(1-\lambda)I_C(y)$成立。得证。

习题5

基本步骤：

Step 1:给定初始点$\boldsymbol{x}^0$，终止误差$\epsilon > 0$，k=0；

Step 2:计算梯度$\nabla f(\boldsymbol{x}^k)$，判断是否满足终止条件$\|\nabla f(\boldsymbol{x}^k)\| < \epsilon$，满足则终止；否则 转step 3；

Step 3:构造牛顿方向$\boldsymbol{d}^k = -[\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^k)]^{-1}\nabla f(\boldsymbol{x}^k)$

Step 4:计算$\boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{x}^k + \boldsymbol{d}^k$，令$k = k + 1$转step 2

- 用牛顿法求解$\min f(x) = x_1^2 + 25x_2^2$，选取初始点$x^0 = \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$, $\epsilon = 10^{-6}$，问需要多少次迭代可以求得最优解？
- 答案1次

解：计算梯度和海塞矩阵

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix}2x_1\\50x_2\end{bmatrix}, \nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 50\end{bmatrix}$$

将x^0带入分别得到

$$\nabla f(x^0) = \begin{bmatrix}4\\100\end{bmatrix}, \nabla^2 f(x^0) = \begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 50\end{bmatrix}$$

继续算海塞矩阵的逆，得到

$$[\nabla^2 f(x^0)]^{-1} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\0 & \frac{1}{50}\end{bmatrix}$$

然后牛顿方向$d^0 = -[\nabla^2 f(x^0)]^{-1}\nabla f(x^0) = -\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\0 & \frac{1}{50}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\100\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$

习题5

更新得到下一点$x^1 = x^0 + d^0 = \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-2\\-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

验证终止条件，计算$\nabla f(x^1)$

$$\nabla f(x^1) = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

因为$\|\nabla f(x^1)\| < \epsilon$, 算法终止，最优解为$x^1 = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

习题6

写出下面非线性规划问题的K-T条件，并根据K-T条件求解该非线性规划问题：

$$(1)\begin{cases} \min & f(\boldsymbol{x}) = -\ln(x_1 + x_2) \\ s.t. & x_1 + 2x_2 \le 5 \\ & x_1 \ge 0 \\ & x_2 \ge 0 \end{cases}$$

（1）解：拉格朗日$L(x_1,x_2,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = -\ln(x_1+x_2) + \lambda_1(x_1+2x_2-5) - \lambda_2 x_1 - \lambda_3 x_2$

$$(1)\begin{cases} \min & f(\boldsymbol{x}) = -\ln(x_1+x_2) \\ s.t. & x_1+2x_2 \le 5 \\ & x_1 \ge 0 \\ & x_2 \ge 0 \end{cases}$$

KT条件：
$$\begin{cases} -\frac{1}{x_1+x_2} + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 & (1) \\ -\frac{1}{x_1+x_2} + 2\lambda_1 - \lambda_3 = 0 & (2) \\ \lambda_1(x_1+2x_2-5) = 0 & (3) \\ \lambda_2 x_1 = 0 & (4) \\ \lambda_3 x_2 = 0 & (5) \end{cases}$$

对$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$分九种情况讨论：

$(1)\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0$: $\mathrm{x}_1 = 0, \mathrm{x}_2 = 0$, (3)不成立

$(2)\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 = 0$： $\mathrm{x}_1 = 0, \mathrm{x}_2 = \frac{5}{2}, \lambda_1 = \frac{1}{5}, \lambda_2 = -\frac{1}{5} < 0$不是KT点

$(3)\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 > 0$： $x_2 = 0, x_1 = 5, \lambda_1 = \frac{1}{5}, \lambda_3 = 1/5$，是KT点

$(4)\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0 : x_2 = 0, x_1 = 0$ （1）不成立

$(5)\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 > 0 : x_2 = 0,$ （1）不成立

$(6)\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 = 0 : x_1 = 0,$ （2）不成立

$(7)\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0 :$ （1）（2）矛盾

$(8)\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0 :$ （1）（2）不成立