Mathematik für Mathematisch technische Softwareentwickler

Allgemeine Beweisführung in der Mathematik

Kleiner Gauß

Boolsche Algebra

Mengen

Folgen und Reihen

Folgen

Arithmetische Folgen

Geometrische Folgen

Folgen explizit definieren

Folgen recursiv definieren

Reihen

Arithmetische Reihen

Geometrische Reihen

Monotonie von Folgen und Teilfolgen

Grenzverhalten von Folgen und Teilfolgen

Divergenz und Konvergenz

Divergenz

Konvergenz

Funktionen

Wenn wir von Funktionen reden, meinen wir eigentlich eine spezielle Form der Relation. Dabei ist jede Relation eine Abbildung einer Menge auf eine andere Menge. Diese Mengen bezeichnen wir als **Bildmenge** und als **Zielmenge** bzw. **Wertebereich**.

Relation und Funktionen

Relationen sind alle Abbildungen der Bildmenge auf den Wertebereich. Nur **linkstotale** und **rechts eindeutige** Abbildungen bezeichnen wir als Funktion.

Aber was bedeutet das eigentlich?

- Linkstotal: `AA a in A EE b in B: (a;b) in RR`. Jedem Wert der Bildmenge ist ein Wert im Wertebereich zu geordnet.
- Rechtseindeutig: `AAa in A AAb,c in B: (a;b) in RR ^^ (a;c) in RR => b=c`. Für jeden Wert aus dem Wertebereich gibt es genau einen Wert in der Zielmenge.

Ist keine Definitionsmenge angegeben gilt allgemein, dass die Bildmenge den Definitionsbereich darstellt. Ist kein Wertebereich angegeben ist der Definitionsbereich der Bildmenge anzunehmen.

Beispiel:

Wollen von `f:A->B` abbilden. Dann ist ohne weitere Angaben der größt mögliche Definitionsbereich für `A` anzunehmen. Somit ist unsere Bildmenge `RR`, analog dazu gilt das selbe für `B`, sprich unsere Zielmenge.

Injektiv

Eine Funktion gilt als injektiv wenn:

`AAx_1,x_2 in A: x_2!=x_1 => f(x_1)!=f(x_2)`

Im Klartext bedeuted das, dass eine funktion injektiv ist wenn, für jeden wert aus der Wertemenge `A` ein wert in der Zielmenge `B` existiert.

Surjektiv

Eine Funktion gilt als surjektiv wenn:

`AAy in B EEx in A: y=f(x)`

Für jedes y in der Zielmenge `B` muss es in der Wertemenge `A` mindestens einen Wert geben.

Bijektiv

Eine Funktion gilt als bijektiv wenn:

`AAy in B  EE!x in A: y=f(x)`

Jedem Wert in der Zielmenge `B` kann genau ein Wert aus der Bildmenge `A` zugewiesen werden.

[injektiv bijektiv surjektiv] | */Abbildungen/injektiv_bijektiv_surjektiv.png*

Eigenschaften von Funktionen

Monotonie

Beschränktheit

Achsensymetrie

Eine Funktion ist Achsensymetrisch wenn: `f(x)=f(-x)`

```
i) f(x) = x^4-2x

z.z.
f(x)=f(-x)

f(-x) = (-x)^4-2(-2)^2 = x^4-2x = f(x)
    q.e.d.
```

`=>` `f` ist achsensymetrisch

`ii)` `g(x) = cos(x)`

Es Gilt: `cos(x) = cos(-x)` `=>g` ist achsensymetrisch

`iii)` `h(x) = x => h(-x) = -x !=h(x)`

```
"Sei " p " ein Polynom und "n=2m,m in NN_0.

p(x) = sum_(k=0)^m=a_(2k)*x^(2k),(-x)^(2k)=[(-x)^2]^k = [x^2]^k = x^(2k)

p(-x) = sum_(k=0)^m= a_(2k)*(-x)^(2k) = sum_(k=0)^m=a_(2k)*x^(2k) = p(x)
```

`=>` Sind alle Exponenten eines Polynoms gerade, so ist der Graph des Polynoms achsensymetrisch.

Punktsymetrie

`f(x) = 2x^5-3x^3+x`

`i)` z.z. `f(x) = -f(-x)` bzw.

```
f(-x) = -f(x)


-f(-x) = -[2(-x)^5-3(-x)^3+(-x)]



=-[-2x^5+3x^3-x]

= 2x^5-3x^3+x

 = f(x)

q.e.d.
```

Gegenbeweis

`ii) f(x) = 2x^5-3x^3+x^color(red)(2)`

analog zu i):

`-f(-x)= -[-2x^5+3x^3+x^2] = 2x^5-3x^3-x^2 != f(x)`

Grenzwertverhalten - Limes

Unstetikeit bei Funktionen und Unstetigkeitsstellen

Unstetigkeit ist am besten beschrieben durch ein Beispiel. Nehmen wir eine Funktion `f`. Wenn wir den Graphen der Funktion Zeichnen wollen und dabei den Stift absetzen müssen da wir an einer Anderen Stelle wieder ansetzen müssen, haben wir eine Unstetigkeit. ein Beispiel dafür wäre `f(x) = 1/x`.

Wir können zwischen vier Unstetigkeitstellen unterscheiden. Polstellen **mit** Vorzeichenwechsel, Polstellen **ohne** Vorzeichenwechsel, Sprungstellen, und Hebbaren Lücken.

Um festzustellen um welche art von Unstetigkeitsstelle es sich handelt betrachten wir den undefinierten Bereich der Funktion.

[Unstetigeitstellen] | */Abbildungen/Unstetigkeit/Unstetigeitstellen.png*

Polstellen

Polstellen mit Vorzeichenwechsel

Bei Polstellen mit Vorzeichenwechsel handelt es sich um Unstetigkeiten in der Funktion. In der Regel Konvergiert der Wert an der stelle `x_0`, abhängig von der richtung von der man die Polstelle betrachtet gegen `-oo` und `oo`.

`f(x) = 1/x,D= RR\{0}`

Wir sehen, dass 0 nicht in unserer Definitionsmenge enthalten ist da es sich sonnst nicht um eine Funktion handeln würde. Betrachten wir nun die Werte um 0 herum können wir die beiden Extrema analysieren. In unserem Fall würden wir für: `lim_(x->0^-) 1/x` und `lim_(x->0^+) 1/x` betrachten.

`lim_(x->0^-) 1/x = -oo`

`lim_(x->0^+) 1/x == oo`

Somit handelt es sich um eine Sprungstelle mit Vorzeichenwechsel

[Polstelle mit Vorzeichenwechsel] | */Abbildungen/Unstetigkeit/PolstelleMitVZW.png*

Pollstellen ohne Vorzeichenwechsel

`f(x) = 1/x^2,D= RR\{0}`

Wir erkennen, dass 0 abermals nicht in unserer Definitionsmenge enthalten ist. Betrachten wir nun die Werte um 0 herum sehen wir das wir es mit einer Polstelle ohne Vorzeichenwechsel zu tun haben.

`lim_(x->0^-) 1/x^2` und `lim_(x->0^+) 1/x^2` betrachten.

`lim_(x->0^-) 1/x^2 = oo`

`lim_(x->0^+) 1/x^2 == oo`

[Polstelle ohne Vorzeichenwechsel] | */Abbildungen/Unstetigkeit/PolstelleOhneVZW.png*

Sprungstellen

Polstellen sind Werte bei denen unsere Funktion einen einen "Sprung" macht. Sie können bei Falluntersheidungen zustande kommen. Ein solcher fall wäre `f(x)={(x,",",x<0),(x+1,",",x>0):}`

Auch hier wird der Grenzwert an der Stelle `x_0` von beiden Seiten betrachtet.

Sprich `lim_(x->x_0^-)` und `lim_(x->x_0^+)` in unserem Fall ist `x_0=0`.

[Sprungstellen] | */Abbildungen/Unstetigkeit/Sprungstelle.png*

Hebbare Lücken

Bei Hebbaren Lücken handelt es sich um Undefinierte Bereiche in unserer Funktion für die wir eine Akternative Funktion finden können.

`f(x) = x^2/x` ist so ein Fall. Für `x = 0` ist unsere Funktion nicht deffiniert. Allerdings verhält sie sich für alle weiteren x genau wie `f(x)=x`.

Unsere Vermutung bestätigt sich wenn wir `x_0` von beiden seiten betrachten.

`lim_(x->x_0^-` und `lim_(x->x_0^+`

[Hebbare Lücken] | */Abbildungen/Unstetigkeit/HebbareLuecke.png*

Nullstellen

Lösen von Nullstellen mittels Polynomdivision

Lösen von Nullstellen nach Hornerschema