https://github.com/Jock69pl/SystemyDynamiczne.git

Jeśli masz wolnego czasu troche i chcesz pomóc doślij jakieś rozwiązanie.
Bardzo potrzebne są korekty, napewno jest tu sporo błędów.
Potrzebni są też komentatorzy, chodzi o całkowicie łopatologiczny komentarz typu "tu liczymy delte bo..."

Z tego przedmiotu jest egzamin, więc warto to zrobić

Tydzień 3

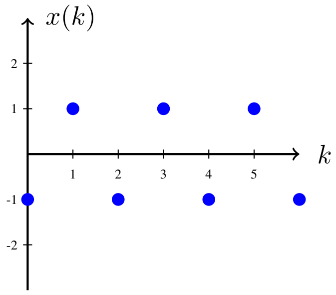
Dyskretne systemy dynamiczne

Zadanie 3.1.1

Narysować rozwiązanie równania różnicowego $x(k+1) = \lambda_i x(k)$
dla $i = 1, 2, 3$ gdzie
$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$
przy czym $x(0) = -1$ i $k \geq 0$

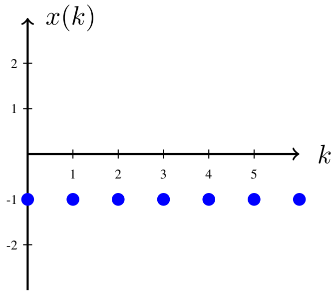
- $i = 3, \lambda_i = -1$

$x(k) = (-1)^k(-1) = (-1)^{k+1}$



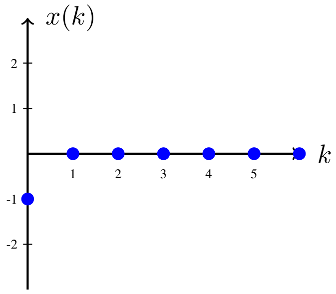
- $i = 2, \lambda_i = 1$

$x(k) = (1)^k(-1) = -1$



- $i = 0, \lambda_i = 0$

$$x(k) = (0)^k(-1) = \begin{cases} -1 & \text{dla } k = 0 \\ 0 & \text{dla } k = 1, 2, ... \end{cases}$$

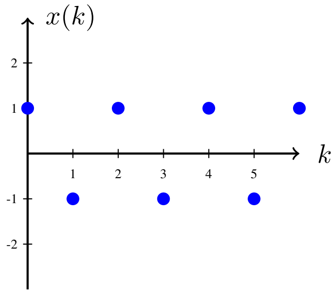


Zadanie 3.1.2

Narysować rozwiązanie równania różnicowego $x(k+1) = \lambda_i x(k)$
dla $i = 1, 2, 3$ gdzie
$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -\frac{1}{2}, \lambda_3 = 1$
przy czym $x(0) = 1$ i $k \geq 0$

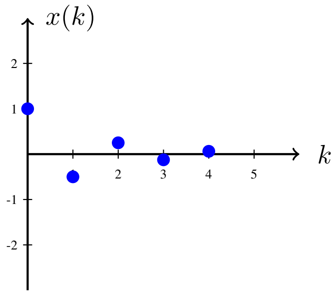
- $\lambda_1 = -1$

$x(k+1) = -x(k)$
$x(k) = (-1)^k \cdot 1 = (-1)^k$



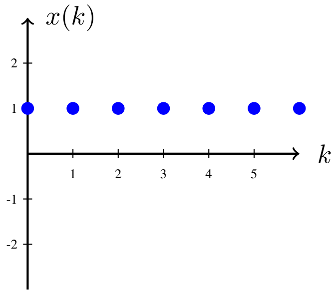
- $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$

$x(k+1) = -\frac{1}{2} \cdot x(k)$
$x(k) = (-\frac{1}{2})^k \cdot 1 = (-\frac{1}{2})^k$



- $\lambda_3 = 1$

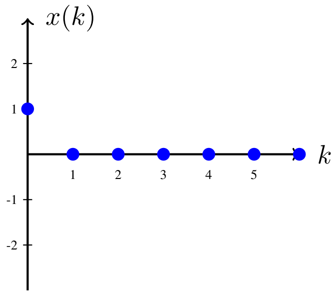
$x(k+1) = x(k)$
$x(k) = 1^k \cdot 1 = 1$



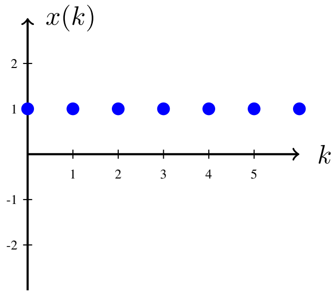
Zadanie 3.1.3

Narysować rozwiązanie równania różnicowego $x(k+1) = \lambda_i x(k)$
dla $i = 1, 2, 3$ gdzie
$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$
przy czym $x(0) = 1$ i $k \geq 0$

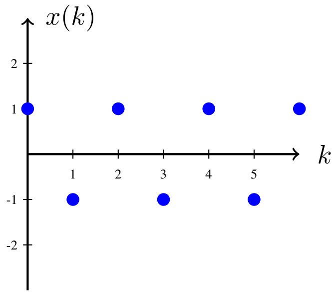
- $\lambda_1 = 0$



- $\lambda_2 = 1$



- $\lambda_3 = -1$

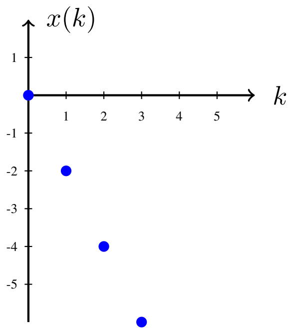


Zadanie 3.2.1

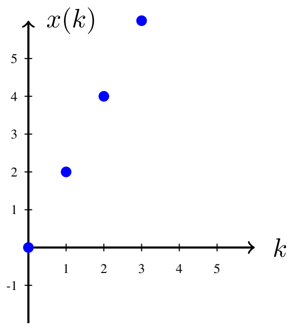
Narysować rozwiązanie równania różnicowego $x(k+1) = x(k) + u_i(k)$
dla $i = 1, 2, 3$ gdzie
$u_1 = -2, u_2 = 2, u_3 = 1$
przy czym $x(0) = 0$ i $k \geq 0$

$x(k+1) = Ax(i) + Bu(i)$
$x(k) = A^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-1-j} Bu(j)$
$A = 1, B = 1, \forall j \quad u(j) = u_i$
$\Rightarrow x(k) = x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} u$ dla $x(0) = 0$
$\Rightarrow x(k) = u_i \cdot k$

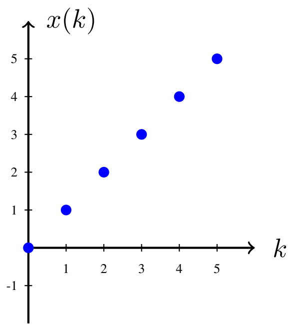
- $i = 1, u_i = -2$



- $i = 2, u_i = 2$



- $i = 3, u_i = 1$

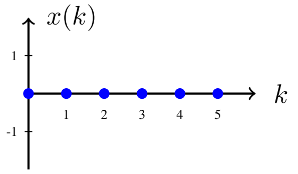


Zadanie 3.2.2

Narysować rozwiązanie równania różnicowego $x(k+1) = 2x(k) + u_i(k)$
dla $i = 1, 2, 3$ gdzie
$u_1 = 0, u_2 = -2, u_3 = 2$
przy czym $x(0) = 0$ i $k \geq 0$

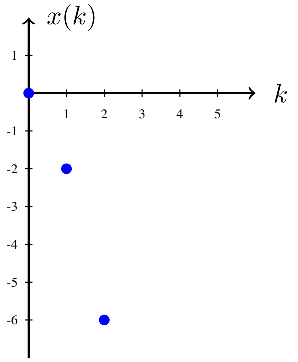
- $u_1 = 0$

$x(k+1) = 2x(k) + 0$
$x(k) = 2^k \cdot 0 = 0$



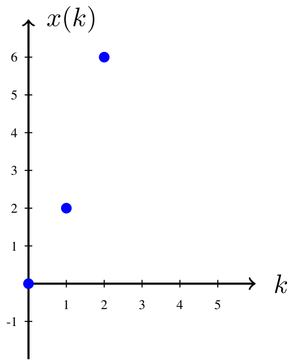
- $u_2 = -2$

$x(k+1) = 2x(k) - 2$
$x(k) = 2^k \cdot 0 + \sum_{j=0}^{k-1} 2^{k-1-j} \cdot (-2) = -2 \cdot \sum_{j=0}^{k-1} (2^k \cdot 2^{-1} \cdot 2^{-j})$
$= -2^k \cdot \sum_{j=0}^{k-1} (\frac{1}{2})^j = -2^k \cdot \frac{1-(\frac{1}{2})^k}{1-\frac{1}{2}} = -2^{k+1} + 2$



- $u_3 = 2$

$x(k+1) = 2x(k) + 2$
$x(k) = 2^k \cdot 0 + \sum_{j=0}^{k-1} 2^{k-1-j} \cdot (2) = 2 \cdot \sum_{j=0}^{k-1} (2^k \cdot 2^{-1} \cdot 2^{-j})$
$= 2^k \cdot \sum_{j=0}^{k-1} (\frac{1}{2})^j = 2^k \cdot \frac{1-(\frac{1}{2})^k}{1-\frac{1}{2}} = 2^{k+1} - 2$



Zadanie 3.3.1

Niech będzie dany układ ciągły opisany równaniem $\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t)$
(a) Znaleźć rozwiązanie tego układu dla: $x(0) = 0, u(t) = 1, a = -4, b = 3$.
(b) Znaleźć parametry układu dyskretnego, jeśli podł¡czono ekstrapolator pierwszego rzędu na wejściu i impulsator na wyjściu, przy czym pracuj¡ one synchronicznie z okresem próbkowania $t = 1$. Rozwiązać powstały układ.
(c) Jak wyżej, przy założeniu $t = 12$.
(d) Narysować wszystkie rozwiązania na jednym układzie współrzędnych. Opisać różnice.

Brak rozwiązania

Zadanie 3.3.2

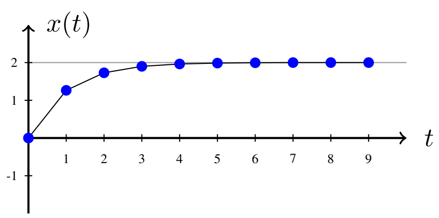
Niech będzie dany układ ciągły opisany równaniem $\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t)$
(a) Znaleźć rozwiązanie tego układu dla: $x(0) = 0, u(t) = 1, a = -1, b = 2$.
(b) Znaleźć parametry układu dyskretnego, jeśli podłączono ekstrapolator pierwszego rzędu na wejściu i impulsator na wyjściu, przy czym pracują one synchronicznie z okresem próbkowania $t = 1$. Rozwiązać powstały układ.
(c) Jak wyżej, przy założeniu $t = 10$.
(d) Narysować wszystkie rozwiązania na jednym układzie współrzędnych. Opisać różnice.

(a)
$\dot{x} = -x + 2$
$\frac{dx}{dt} = -x + 2$
$\frac{dx}{-x+2} = dt$
$-\ln|-x+2| = t + c$, gdzie c jest stałą
$\ln|-x+2| = -t + c$
$e^{-t+c} = -x + 2$
$e^{-t}e^{c} = -x + 2$
$ce^{-t} = -x + 2$, bo e^c to też stała

$x(0) = c + 2 = 0 \Rightarrow c = -2$
$ce^{-t} = -x + 2 \Rightarrow \boxed{x(t) = ce^{-t} + 2 = -2e^{-t} + 2}$

(b)
$h = 1$
$x^+(i) = x(ih) = x(i)$
$u^+(i) = u(i)$
$y^+(i) = y(i)$
$A^+ = e^{hA} = e^{-1}$
$B^+ = \int_0^1 e^{tA}B\,dt = \int_0^1 e^{-t}2\,dt = 2\int_0^1 e^{-t}\,dt = -2e^t|_0^1 = -2(e^{-1} - 1) = 2 - \frac{2}{e}$
$C^+ = C$
$x(i+1) = e^{-1}x(i) + (2 - \frac{2}{e})u(i) = \frac{x(i)}{e} + 2 - \frac{2}{e}$
$x(k) = (e^{-1})^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1}(e^{-1})^{k-1-j}(2 - \frac{2}{e}) = (2 - \frac{2}{e})\sum_{j=0}^{k-1}(e^{-k} \cdot e^1 \cdot e^j)$
$= (2 - \frac{2}{e})e^{1-k} \cdot \frac{1-e^k}{1-e} = 2(e \cdot e^{-k} - e^{-k})\frac{1-e^k}{1-e} = 2(-e^{-k})(1 - e^k) = 2 - 2e^{-k}$

(c)
$h = 10$
$x^+(i) = x(10i)$
$u^+(i) = u(10i)$
$A^+ = e^{10A} = e^{-10}$
$B^+ = 2\int_0^{10} e^{-t}\,dt = 2(-e^{-t}|_0^{10}) = -2(e^{-10} - 1) = 2 - 2e^{-10}$
$x(k) = \underbrace{(e^{-10})^k x(0)}_{=0} + \sum_{j=0}^{k-1}(e^{-10})^{k-1-j}(2 - 2e^{-10}) = (2 - 2e^{-10}) \cdot e^{-10k-10} \cdot \frac{1-(e^{10})^k}{1-e^{10}}$
$= 2(e^{-10k} \cdot e^{10} - e^{-10} \cdot e^{-10k} \cdot e^{10}) \cdot \frac{1-e^{10k}}{1-e^{10}} = 2(-e^{-10k}(1 - e^{10}))\frac{1-e^{10k}}{1-e^{10}} = 2 - 2e^{-10k}$



- wykres (a) jest liniowy, (b) i (c) punktowe - (a) punkty co 1, (b) punkty co 10 (?)

Zadanie 3.4.1

Obliczyć A^n dla macierzy

$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$A^n = PJP^{-1}$

$A^n = \underbrace{(PJP^{-1})(PJP^{-1})...(PJP^{-1})}_{n}$

$A^n = PJ^nP^{-1}$

$|[A - \lambda I]| = 0$

$(4 - \lambda)(2 - \lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 4, \lambda_2 = 2$

$[A - \lambda I]\omega_1 = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{11} \\ \omega_{12} \end{bmatrix} = 0 \qquad \begin{matrix} -2\omega_{12} = 0 \\ \omega_{11} \in \mathbb{R} \end{matrix} \qquad \omega_1 = \begin{bmatrix} \omega_{11} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{21} \\ \omega_{22} \end{bmatrix} = 0 \qquad \begin{matrix} 2\omega_{21} - 2\omega_{22} = 0 \\ \omega_{22} = \omega_{21} \\ \omega_{21} \in \mathbb{R} \end{matrix} \qquad \omega_2 = \begin{bmatrix} \omega_{21} \\ \omega_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$P = [\omega_1 \;\; \omega_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$P^{-1} = \frac{1}{det(P)} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$J = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, J^n = \begin{bmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}$

$A^n = PJ^nP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4^n & 2^n \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4^n & 2^n - 4^n \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}$

Zadanie 3.4.2

Obliczyć A^n dla macierzy
$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$

$A^n = PJ^nP^{-1}$
$|[A-\lambda I]| = (-\lambda)(2-\lambda)+4 = \lambda^2-2\lambda+4 = 0$
$\Delta = 4-16 = -12$
$\lambda = 1 \pm i\sqrt{3}$

$\boxed{\lambda = 1 + i\sqrt{3}}$

$[A-\lambda I]\omega_1 = 0$

$$\begin{bmatrix} 2-1-i\sqrt{3} & 1 \\ -4 & -1-i\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{array}{ll} (1-i\sqrt{3})\omega_1+\omega_2=0 & \Rightarrow \omega_2 = -(1-i\sqrt{3})\omega_1 \\ -4\omega_1+(-1-i\sqrt{3})\omega_2=0 & \Rightarrow -4\omega_1+4\omega_1=0 \end{array}$$
$$\omega = \begin{bmatrix} 1 \\ -1+i\sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$
$$P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{r} \lambda = a \pm ib \\ tg\varphi = \dfrac{b}{a} \Rightarrow \varphi = arctg\dfrac{b}{a} \\ J = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \rightarrow J^n = (\sqrt{a^2+b^2})^n \begin{bmatrix} \cos n\varphi & \sin n\varphi \\ -\sin n\varphi & \cos n\varphi \end{bmatrix} \end{array}}$$

$\varphi = arctg\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$
$$J^n = 2^n \begin{bmatrix} \cos n\frac{\pi}{3} & \sin n\frac{\pi}{3} \\ -\sin n\frac{\pi}{3} & \cos n\frac{\pi}{3} \end{bmatrix}$$
$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \cdot 2^n \cdot \begin{bmatrix} \cos n\frac{\pi}{3} & \sin n\frac{\pi}{3} \\ -\sin n\frac{\pi}{3} & \cos n\frac{\pi}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$$
$$= 2^n \begin{bmatrix} \cos+\frac{\sqrt{3}}{3}\sin & \frac{\sqrt{3}}{3}\sin \\ -\frac{4}{3}\sqrt{3}\sin & -\frac{\sqrt{3}}{3}\sin+\cos \end{bmatrix}$$

Zadanie 3.4.3

Obliczyć A^n dla macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^n = PJ^nP^{-1}$$

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-3)^2 - 1 = (\lambda-3-1)(\lambda-3+1) = (\lambda-4)(\lambda-2) = 0$$

$$\lambda_1 = 4 \qquad \lambda_2 = 2$$

$$(A - \lambda_1 I)\omega_1 = 0 \qquad (A - \lambda_1 I)\omega_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{11} \\ \omega_{12} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{21} \\ \omega_{22} \end{bmatrix}$$

$$-\omega_{11} - \omega_{12} = 0 \qquad \omega_{21} = \omega_{22}$$

$$\omega_{12} = -\omega_{11}$$

$$\omega_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \omega_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\frac{4^n}{2} = \frac{4^n}{4^{\frac{1}{2}}} = 4^{n-\frac{1}{2}} = \frac{2^n}{2} = 2^{n-1}}$$

$$J = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$J^n = \begin{bmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4^n & 2^n \\ -4^n & 2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4^{n-\frac{1}{2}} + 2^{n-1} & -4^{n-\frac{1}{2}} + 2^{n-1} \\ -4^{n-\frac{1}{2}} + 2^{n-1} & 4^{n-\frac{1}{2}} + 2^{n-1} \end{bmatrix}$$

Zadanie 3.5.1

Do ciągłego systemu dynamicznego opisanego równaniami
$\dot{x}_1(t) = 2\pi x_2(t)$,
$\dot{x}_2(t) = -2\pi x_1(t) + u(t)$,
podłączono ekstrapolator rzędu zerowego na wejściu i impulsator na wyjściu, przy czym pracują one synchronicznie z okresem próbkowania $h = 1s$. Wyliczyć parametry systemu dyskretnego odpowiadające takiemu połączeniu.

$\dot{x}_1(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 2\pi \\ -2\pi & 0 \end{bmatrix}}_{A} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} u(t)$
$x^+(vi) = A^+x^+(i) + B^+u^+(i), h = 1s$
$A^+ = e^{hA}$
$A^+ = e^A = Pe^JP^{-1}$
$\begin{bmatrix} -\lambda & 2\pi \\ -2pi & -\lambda \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{array}{l} \lambda^2 + 4\pi^2 = 0 \\ \lambda = -4\pi^2 \\ \lambda_{1,2} = \pm 2\pi i \quad (p = 0, q = 2\pi) \end{array}$
$\begin{bmatrix} -2\pi i & \boxed{2\pi} \\ -2\pi & -2\pi i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{11} \\ \omega_{12} \end{bmatrix} = 0$
$\begin{array}{c} \omega_{11} \in \mathbb{R} \\ -2\pi i\omega_{11} + 2\pi\omega_{12} = 0 \\ \omega_{12} = i\omega_{11} \end{array} \Rightarrow \omega_1 = \begin{bmatrix} \omega_{11} \\ \omega_{12} \end{bmatrix} = \omega_{11} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \omega_{11} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + i\omega_{11} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
$\Rightarrow P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = P^{-1} = I$
$\Rightarrow A$ jest postaci Jordana $\Rightarrow J = A = \begin{bmatrix} 0 & 2\pi \\ -2\pi & 0 \end{bmatrix}$
$e^J = e^P \cdot \begin{bmatrix} \cos(q) & \sin(q) \\ -\sin(q) & \cos(q) \end{bmatrix}$
$e^J = \cdot \begin{bmatrix} \cos(2\pi) & \sin(2\pi) \\ -\sin(2\pi) & \cos(2\pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
$Pe^JP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
$B^+ = \int_0^n e^{tA} B\, dt$
B jest stałą
$B^+ = \int_0^n e^{tA}\, dt\, B$
$\left| \begin{array}{c} tA = u - 1 \\ t = uA \\ dt = duA^{-1} \end{array} \right| B^+ = \int_o^{hA} e^u\, du\, A^{-1}B = [e^{hA} - e^0]A^{-1}B$
$e^{hA} = e^A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
$e^0 = 1 = J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\Rightarrow B^+ = 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
$x^+(i+1) = A^+x^+(i) + B^+u^+(i)$
$x^+(i+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x^+(i)$

Zadanie 3.5.2

Do ciągłego systemu dynamicznego opisanego równaniami
$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$
$y(t) = Cx(t),$
przy czym

$$A = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

podłączono ekstrapolator rzędu zerowego na wejściu i impulsator na wyjściu, przy czym pracują one synchronicznie z okresem próbkowania $h = 1s$. Wyliczyć parametry systemu dyskretnego odpowiadające takiemu połączeniu.

$x^+(i) = x(ih) = x(i)$
$y^+(i) = y(ih) = y(i)$
$u^+(i) = u(ih) = u(i)$
$A^+ = e^{hA}$
A jest w postaci Jordana, więc $A = J$

$$A^+ = e^{hJ} = e^J = \begin{bmatrix} e^{-0.5} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2} \end{bmatrix}$$

$$B^+ = \int_0^h e^{tA}B\,dt = \int_0^1 \begin{bmatrix} e^{-0.5} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} dt = \int_0^1 \begin{bmatrix} e^{-\frac{t}{2}} \\ e^{-t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix} dt$$

$$= \begin{bmatrix} -2e^{-\frac{t}{2}}|_0^1 \\ -e^{-t}|_0^1 \\ -\frac{1}{2}e^{-2t}|_0^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - 2e^{-\frac{1}{2}} \\ 1 - e^{-1} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2} \end{bmatrix}$$

$$C^+ = C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

Zadanie 3.5.3

Do ciągłego systemu dynamicznego opisanego równaniami
$\dot{x}_1(t) = -2x_1(t) + x_2(t),$
$\dot{x}_2(t) = -2x_1(t),$
podłączono ekstrapolator rzędu zerowego na wejściu i impulsator na wyjściu, przy czym pracują one synchronicznie z okresem próbkowania $h = 1s$. Wyliczyć parametry systemu dyskretnego odpowiadające takiemu połączeniu.

$A = -2 \quad B = 1 \quad C = -2$
$A^+ = e^{Ah} = e^{-2}$
$B^+ = \int_0^h e^{tA} B \, dt = \int_0^h e^{-2t} \, dt = | -\frac{1}{2} e^{-2t} |_0^h = -\frac{1}{2} e^{-2}$
$C^+ = C = -2$

$$\boxed{A^+ = e^-2 \qquad B^+ = -\frac{1}{2} e^{-2} \qquad C^+ = -2}$$

Zadanie 3.6.1

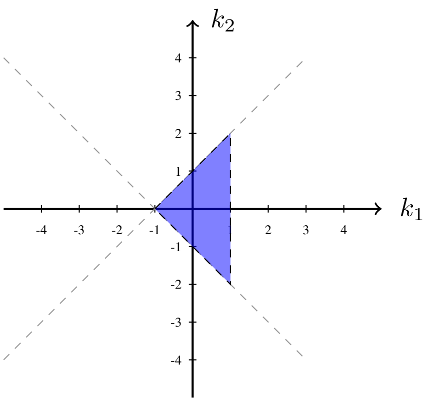
Dla jakich wartości parametrów k_1 i k_2 system dynamiczny
$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & k_2 \end{bmatrix} x(k)$
będzie asymptotycznie stabilny. Zaznaczyć obszar stabilności na płaszczyźnie $k1 \times k2$

$x(k+1) = Ax(k)$
$|[A - \lambda I]| = 0$
$(-\lambda)(k_2 - \lambda) + k_1 = 0$
$\lambda^2 - k_2\lambda + k_1 = 0$
$\lambda = \frac{z+1}{z-1}$
$(\frac{z+1}{z-1})^2 - k_2(\frac{z+1}{z-1}) + k_1 = 0$
$\frac{(z+1)^2 - k_2(z+1)(z-1) + k_1(z-1)^2}{(z-1)^2} = 0$
Rozważany układ jest asymptotycznie stabilny $\Leftrightarrow$ wartości własne (λ) macierzy A leżą wewnątrz koła jednostkowego na płaszczyźnie zespolonej $\Leftrightarrow$ pierwiastki wielomianu $L(z) = (z+1)^2 - k_2(z+1)(z-1) + k_1(z-1)^2$ leżą w lewej półpłaszczyźnie zespolonej $\Leftrightarrow$ spełnione jest dla wielomianu $L(z)$ kryterium Hurwitza
$L(z) = (z+1)^2 - k_2(z+1)(z-1) + k_1(z-1)^2$
$L(z) = x^2 + 2z + 1 - k_2z^2 + k_2 + k_1z^2 - 2k_1z + k_1$
$L(z) = z^2(1 + k_1 - k_2) + z(2 - 2k_1) + (1 + k_1 + k_2) = 0$

W.K. $a_2 > 0, a_1 > 0, a_0 > 0$

$$\begin{aligned} 1 + k_1 - k_2 &> 0 \\ k_2 &< k_1 + 1 \\ 2 - 2k_1 &> 0 \\ k_1 &< 1 \\ 1 + k_1 + k_2 &> 0 \\ k_2 &> -k_1 - 1 \end{aligned}$$

$\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - 2k_1 & 0 \\ 1 + k_1 - k_2 & 1 + k_1 + k_2 \end{bmatrix}$
$a_1 > 0 \wedge a_1 a_0 > 0$ - spełnione dla W.K.



Zadanie 3.6.2

Dla jakich wartości parametrów k_1 i k_2 system dynamiczny

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} k_1 - k_2 & 1 & 2 \\ 0 & k_1 + k_2 & 1 \\ 0 & 0 & k_1^2 + k_2^2 \end{bmatrix} x(k)$$

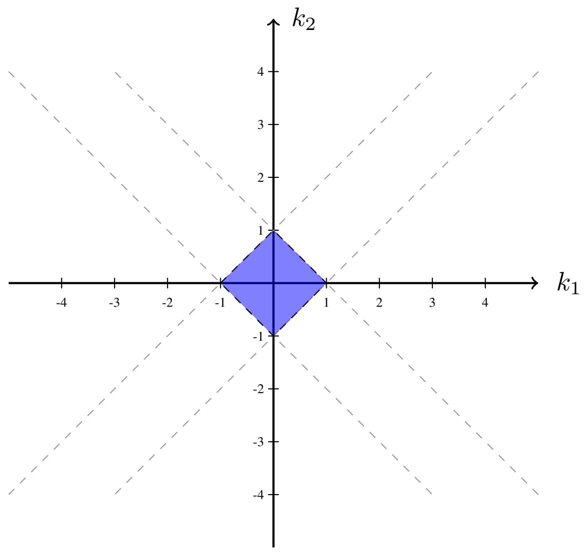
będzie asymptotycznie stabilny. Zaznaczyć obszar stabilności na płaszczyźnie $k1 \times k2$

$\lambda_1 = k_1 - k_2 \ \vee \ \lambda_2 = k_1 + k_2 \ \vee \ \lambda_3 = k_1^2 + k_2^2$

dyskretny system liniowy jesy asymprotycznie stabilny ⇔ wartości własne macierzy A leżą w kole jednostkowym o środku w zerze na płaszczyźnie zespolonej (wystarczy sprawdzić warunek $|\lambda_i| < 1$, nie trzeba z Hurwitza)

- $\lambda_1 = k_1 - k_2$
  $k_1 - k^2 < 1 \quad \wedge \quad k_1 - k_2 > -1$
  $k_2 > k_1 - 1 \quad \wedge \quad k_2 < k_1 + 1$
- $\lambda_1 = k_1 + k_2$
  $k_1 + k_2 < 1 \quad \wedge \quad k_1 + k_2 > -1$
  $k_2 < -k_1 + 1 \quad \wedge \quad k_2 > -k_1 - 1$
- $\lambda_1 = k_1^2 + k_2^2$
  $k_1^2 + k_2^2 < 1 \quad \wedge \quad k_1^2 + k_2^2 > -1$

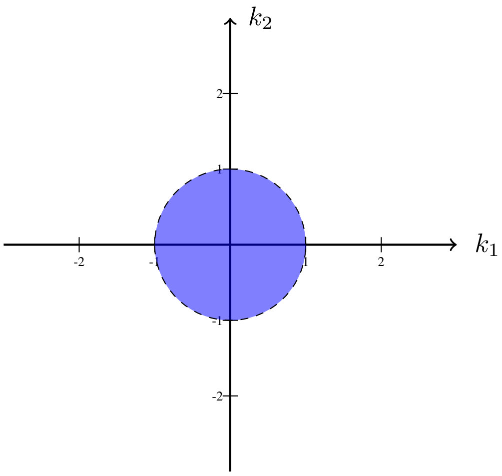
$\lambda_1 = k_1 - k_2 \ \wedge \ \lambda_2 = k_1 + k_2 \ \wedge \ \lambda_3 = k_1^2 + k_2^2$



Zadanie 3.6.3

Dla jakich wartości parametrów k_1 i k_2 system dynamiczny
$x(k+1) = \begin{bmatrix} -k_2 & k_1 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix} x(k)$
będzie asymptotycznie stabilny. Zaznaczyć obszar stabilności na płaszczyźnie $k1 \times k2$

$|A - \lambda I| = 0$
$\begin{bmatrix} -k_2 - \lambda & k_1 \\ -k_1 & -k_2 - \lambda \end{bmatrix} = (k_2 + \lambda)^2 + k_1^2 = (k_2 + \lambda)^2 - (ik_1)^2 = (\lambda + k_2 + ik_1) \cdot (\lambda + k_2 - ik_1) = 0$
$\lambda = -k_2 \pm k_1$
Układ jest asymptotycznie stabilny, gdy wartości własne macierzy leżą wewnątrz koła jednostkowego na płaszczyźnie zespolonej o środku w zerze.
$|\lambda| < 1$
$|\lambda| = \sqrt{(-k_2)^2 + k_1^2}$
$\sqrt{k_1^2 + k_2^2} < 1$
$k_1^2 + k_2^2 < 1$



Zadanie 3.7.1

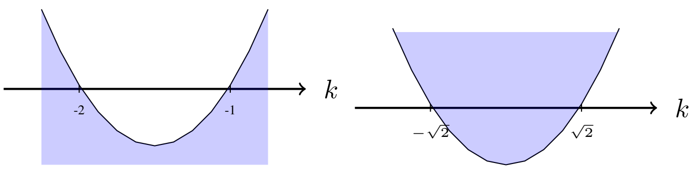
Dla jakich wartości parametru k_1 system dynamiczny
$x(k+1) = \begin{bmatrix} -0.5k_1 & 0 \\ 2 & -k_1 \end{bmatrix} x(k)$
będzie niestabilny.

$(-0.5k_1 - 2)(-k_1 - \lambda) = 0$
$0.5k_1^2 + 0.5k_1\lambda + k_1\lambda + \lambda^2 = 0$
$\lambda^2 + 1.5k_1\lambda + 0.5k_1^2 = 0$
$\lambda = \frac{z+1}{z-1}$
$(\frac{z+1}{z-1})^2 - 1.5k_1(\frac{z+1}{z-1}) + 0.5k_1^2 = 0$
$z^2 + 2z + 1 + 1.5k_1z^2 - 1.5k_1 + 0.5k_1^2z^2 - k_1^2z + 0.5k_1^2 = 0$
$z^2\underbrace{(0.5k_1^2 + 1.5k_1 + 1)}_{a_2} + z\underbrace{(2 - k_1^2)}_{a_1} + \underbrace{(0.5k_1^2 - 1.5k_1 + 1)}_{a_0} = 0$

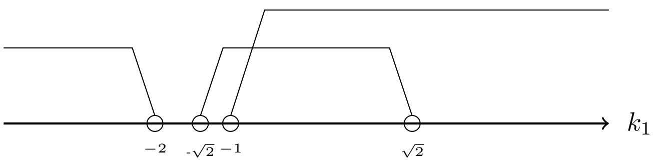
Z kryterium Hurwitza system będzie stabilny gdy:

$$\begin{array}{lcrcr} a_2 > 0 & & 0.5k_1^2 + 1.5k_1 + 1 > 0 & & 2 - k_1^2 > 0 \\ a_1 > 0 & \Leftrightarrow & k_1^2 + 3k_1 + 2 > 0 & \vee & (\sqrt{2} - k_1)(\sqrt{2} + k_1) > 0 \\ a_0 > 0 & & (k_1+1)(k_1+2) > 0 & & (k_1 - \sqrt{2})(\sqrt{2} + k_1) < 0 \end{array}$$

ponieważ W.K. zawiera w sobie W.W., aby spełnione zostało



kryterium Hurwitza musi być spełniony iloczyn warunków: $a_2 > 0 \wedge a_1 > 0$



$\Rightarrow$ układ jest stabilny $\Leftrightarrow k_1 \in (-1, \sqrt{2})$
$\Rightarrow$ układ jest niestabilny $\Leftrightarrow k_1 \in (-\infty, -1) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$

Zadanie 3.7.2

Dla jakich wartości parametru k_1 system dynamiczny
$x(k+1) = \begin{bmatrix} -1 & -k_1 \\ -k_1 & -3 \end{bmatrix} x(k)$
będzie niestabilny.

$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -k_1 \\ -k_1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (1+\lambda)(3+\lambda) - k_1^2 = \lambda^2 + 3 + 4\lambda - k_1^2 = 0$
$\Delta = 16 - 12 + 4k_1^2 = 4 + 4k_1^2$
$\lambda = -2 \pm \sqrt{1+k_1^2}$

system będzie niestabilny $\Leftrightarrow |\lambda_i| > 1$

- $\lambda = -2 + \sqrt{1+k_1^2}$

$$\begin{array}{ccc} -2 + \sqrt{1+k_1^2} > 1 & \vee & -2 + \sqrt{1+k_1^2} < -1 \\ \sqrt{1+k_1^2} > 3 & & \sqrt{1+k_1^2} < 1 \\ k_1^2 > 8 & & k_1^2 < 0 \\ k_1 > 2\sqrt{2} \vee k_1 < -2\sqrt{2} & & \text{sprzeczne} \end{array}$$

- $\lambda = -2 - \sqrt{1+k_1^2}$

$$\begin{array}{ccc} -2 - \sqrt{1+k_1^2} > 1 & \vee & -2 - \sqrt{1+k_1^2} < -1 \\ \sqrt{1+k_1^2} > -3 & & \sqrt{1+k_1^2} > -1 \\ \text{sprzeczne} & & k_1 \in \mathbb{R} \end{array}$$

$\lambda = -2 + \sqrt{1+k_1^2} \vee \lambda = -2 - \sqrt{1+k_1^2} \Rightarrow k_1 \in \mathbb{R}$

Zadanie 3.7.3

Dla jakich wartości parametru k_1 system dynamiczny
$x(k+1) = \begin{bmatrix} -k_1 & k_1 \\ -k_1 & -k_1 \end{bmatrix} x(k)$
będzie niestabilny.

$\begin{bmatrix} -k_1 - \lambda & k_1 \\ -k_1 & -k_1 - \lambda \end{bmatrix} = (-k_1-\lambda)^2+k_1^2 = (-k_1-\lambda)^2-(ik_1)^2 = (-k_1-\lambda-ik_1)(-k_1-\lambda+ik_1) = (\lambda+k_1-ik_1)(\lambda+k_1+ik_1) = 0$
$\lambda = -k_1 \pm ik_1$
układ jest niestabilny gdy $|\lambda| > 1$
podstawiamy tu moduł - więc usuwamy i z zespolonej.
$|\lambda| = \sqrt{(-k_1)^2 + (k_1)^2} = \sqrt{k_1^2 + k_1^2} > 1$
$2k_1^2 > 1$
$k_1^2 > \frac{1}{2}$
$k_1 > \frac{\sqrt{2}}{2}$

Zadanie 3.8.1

Wyznaczyć rozwiązanie następującego równania różnicowego (rekurencyjnego)
$x(k+2) + x(k+1) - 2x(k) = 0, x(0) = 1, x(1) = -1$

zakładam rozwiązanie postaci z^n
$x^n, +z^{n-1} + 2z^{n-2} = 0$
$z^2 + z - 2 = 0$ - wielomian charakterystyczny
$W(z) = (z+2)(z-1)$
$z_1 = -2, \;\; z_2 = 1$
rozwiązanie równania jest postaci:
$x(k) = Cz_1^k + Dz_2^k$
podstawiając $x(0)$ oraz $x(1)$

$$\begin{cases} x(0) = 1 = C + D \\ x(1) = -1 = Cz_1 + Dz_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C = 1 - D \\ -1 = -2C + D \end{cases}$$

$$\begin{cases} D = 1 - C \\ -1 = -2C + 1 - C \end{cases}$$

$$\begin{cases} D = 1 - C \\ 3C = 2 \end{cases}$$

$C = \frac{2}{3} \quad D = \frac{1}{3}$
$\Rightarrow x(k) = \frac{1}{3}(2 \cdot (-2)^k + 1^k)$

$$\boxed{x(k) = \frac{2}{3}(-2)^k + \frac{1}{3}1^k}$$

Zadanie 3.8.2

Wyznaczyć rozwiązanie następującego równania różnicowego (rekurencyjnego)
$x(k+2)+3x(k+1)+2x(k)=0, x(0)=2, x(1)=-3$

$q^{k+2}+3q^{k+1}+2q=0$
$q^2+3q+2=0$
$\Delta=9-8=1$
$q=\frac{-3+1}{2}=-1 \quad \vee \quad q=\frac{-3-1}{2}=-2$
$x(k)=a(-1)^k+b(-2)^k$
$\begin{cases} x(0)=a+b=2 \\ x(1)=-a-2b=-3 \end{cases}$
$b=1 \wedge a=1$
$\boxed{x(k)=(-1)^k+(-2)^k}$

Zadanie 3.8.3

Wyznaczyć rozwiązanie następującego równania różnicowego (rekurencyjnego)
$x(k+2) + 2x(k+1) - 3x(k) = 0, x(0) = 2, x(1) = -2$

$x^2 + 2x - 3 = 0$
$\Delta = 4 + 12 = 16, \sqrt{\Delta} = 4$
$x_1 = \frac{-2-4}{2} = -3 \wedge x_2 = 1$
$x(k) = C_1 x_1^k + C_2 x_2^k$
$\begin{cases} x(0) = 2 = C_1 + C_2 \Rightarrow C_2 = 2 - C_1 \\ x(1) = -2 = -3C_1 + C_2 \end{cases}$
$-2 = -3C_1 + 2 - C_1 \Rightarrow C_1 = 1$
$C_2 = 1$
$\boxed{x(k) = -3^k + 1}$

Alternatywne :
równanie charakterystyczne
$r^2 + 2r - 3 = 0$
$(r+1)^2 - 4 = 0$
$(r+1-2)(r+1+2) = 0$
$(r-1)(r+3)$
$r_1 = 1 \quad r_2 = -3$

$x(k) = c_1 r_1^k + c_2 r_2^k$
$x(0) = 2 = c_1 + c_2$
$x(1) = -2 = c_1 + 3c_2$

$\begin{cases} 2 = c_1 + c_2 \\ -2 = c_1 - 3c_2 \end{cases}$
$4 = 4c_2$
$c_1 = 1 \quad c_2 = 1$

$\boxed{x(k) = 1 + (-3)^k}$

Zadanie 3.9.1

Dany jest układ dyskretny

$$x(k+1) = Ax(k), A = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

przy czym $k = 1, 2, ...$ Wyznaczyć $x(n)$.

wielomian charakterystyczny: $|[A - \lambda I]| = 0$

$$\begin{bmatrix} -\lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} = (-\lambda)^n \text{(wyznacznik macierzy diagonalnej)}$$

Z Tw. Cagleya-Hamiltona wiadomo, że każda macierz spełnia swój wielomian charakterystyczny
$A^n = 0$

rozwiązanie równania $x(k+1) = Ax(k)$ ma postać $x(k) = A^k x(0)$ czyli $x(n) = A^n x(0) = 0$
Biorąc więc pod uwagę fakt $A^n = 0$ wiadomo, że rozwiązanie x(k) stanie się zerem w cco najwyżej n krokach, niezależnie od warunku początkowego $x(0)$

Zadanie 3.9.2

Dany jest układ dyskretny

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n\times n}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

przy czym $k = 1, 2, ...$ Wyznaczyć $x(n)$ wiedząc, że $u(i) = 1$ dla $i = 1, 2, ..., n$.

$x(n) = A^n x(0) + \sum_{j=0}^{n-1} A^{n-1-j} Bu(j)$
Zauważmy, że $\det(A) = 0$ (bo same zera na przekątnej)
wtedy $\det(\lambda I - A) = \lambda^n$
z Tw. Cagleya-Hamiltona $A^n = 0$ (każda macierz spełnia swój wielomian charakterystyczny)
mamy więc $A^n x(0) = 0$, czyli $x(n) = \sum_{j=0}^{n-1} A^{n-1-j} B \underbrace{u(j)}_{=1}$

Przy kolejnych mnożeniach macierzy A podniesionej do jakiejś potęgi przez B otrzymujemy pierwszą kolumnę macierzy A, która zawiera same zera, poza przypadkiem $A^0 = I$ (macierz jednostkowa), więc sumujemy $n - 1$ kolumn samych zer oraz jedną równą B $(I \cdot B = B)$
ostatecznie $\boxed{x(n) = B}$

Zadanie 3.9.3

Dany jest układ dyskretny

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n\times n}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

przy czym $k = 1, 2, ...$ Wyznaczyć $x(n)$ wiedząc, że $u(i) = 1$ dla $i = 1, 2, ..., n$.

$|A| = 0$
$x(k+1) = Ax(k)$
$|\lambda I - A| = \lambda^n$
z Tw. Cagleya-Hamiltona:
$A^n = 0$
$x(1) = Ax(0) + B$
$x(2) = A^2x(0) + (A + 1)B$
$x(3) = A^3x(0) + (A^2 + A + 1)B$
...
$x(n) = A^nx(0) + (A^{n-1} + A^{n-2} + ... + 1)B$
ponieważ tylko $A^n = 0$, więc dla każdego $A^{n-1}, A^{n-2}, ... \neq 0$
te potęgi będą miały jakieś śmieci w wartościach, nie istotne co tam będzie. Ważne, że tam gdzie w A są 0 nie pojawi się nic nowego, czyli gdzie było 0 przed potęgowaniem, tam będzie też po. $\Rightarrow$ wynik iloczynu $A^iB = 0$ (macierz zerowa), $i = 1, ..., n-1$ $\Rightarrow$ $\boxed{x(n) = B}$

Zadanie 3.9.4

Dany jest układ dyskretny

$$x(k+1) = Ax(k), A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

przy czym $k = 1, 2, ...$ Wyznaczyć $x(2n)$.

$|A| = 0$
$x(k+1) = Ax(k)$
$|\lambda I - A| = \lambda^n$
z Tw. Cagleya-Hamiltona:
$A^n = 0$
$x(1) = Ax(0)$
$x(2) = A^2 x(0)$
$x(3) = A^3 x(0)$
...
$x(n) = A^n x(0) = 0$
$x(2n) = A^n x(n) = 0$

Tydzień 4

Analiza częstotliwościowa systemów dynamicznych

Zadanie 4.1.2

Układ jest opisany równaniami stanu w postaci

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

z macierzami

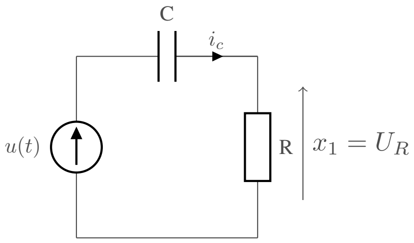
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Znaleźć transmitancję operatorową tego układu przy założeniu zerowych warunków początkowych $x(0) = 0$

Rozwiązanie:
$G(s) = C(sI - A)^{-1}B$

$$G(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s-2 & 0 \\ 5 & s \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{s-2} & 0 \\ -5 & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{2}{s} - \frac{10}{s\cdot(s-2)} = \frac{2s-14}{s(s-2)}$$

Zadanie 4.6.2



Przeanalizować układ z rysunku i znaleźć równania opisujące ten układ. Za wyjście przyjąć napięcie na oporniku. Znaleźć transmitancję operatorową i widmową układu

Zakladamy ze: $R = 1000\Omega, C = 1mF$

Rozwiązanie:

$$\begin{cases} u(t) - u_c(t) - u_R(t) = 0 \\ y(t) = u_R(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(t) - u_c(t) - RC\dot{u}_c(t) = 0 \\ y(t) = RC\dot{u}_c(t) \end{cases}$$

$$\left.\begin{cases} u(t) = +u_c(t) + RC\dot{u}_c(t) \\ y(t) = RC\dot{u}_c(t) \end{cases}\right| \mathscr{L}$$

$$\begin{cases} U(s) = U_c(s) + sRC \cdot U_c(s) + u_c(0) \\ Y(s) = sRC \cdot U_c(s) + u_c(0) \end{cases}$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{sRC \cdot U_c(s) + u_c(0)}{U_c(s) + sRC \cdot U_c(s) + u_c(0)} = \frac{sRC \cdot U_c(s)}{U_c(s) + sRC \cdot U_c(s)} = \frac{\cancel{U_c(s)} \cdot sRC}{\cancel{U_c(s)} \cdot (sRC + 1)}$$

Podstawiamy R i C

$$G(s) = \frac{s}{s+1}$$

$$G(j\omega) = \frac{j\omega}{j\omega+1} = \frac{j\omega}{j\omega+1} \cdot \frac{1-j\omega}{1-j\omega} = \frac{j\omega+\omega^2}{1+\omega^2} = \frac{\omega^2}{\omega^2+1} + j\frac{\omega}{\omega^2+1}$$

Zadanie 4.9.2

Rozwiązanie równania różniczkowego

$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) = -x(t) + 12\sin(\omega t)$
gdzie $x(0) = 0$, ($\dot{x}(0)$ - w domysle), $t \geq 0$ ma postać

$x(t) = f(t) + A\sin(\omega t)$
znalezc takie ω, dla którego A jest największe

Rozwiązanie:
$u(t) = \sin(\omega t)$
$y(t) = x(t)$

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + \dot{x}(t) = -x(t) + 12u(t) \\ y(t) = x(t) \end{cases}$$

$$\left.\begin{cases} u(t) = \frac{\ddot{x}(t)+\dot{x}(t)+x(t)}{12} \\ y(t) = x(t) \end{cases}\right| \mathscr{L}$$

$$\begin{cases} U(s) = \frac{s^2 \cdot X(s) - s \cdot x(0) - \dot{x}(0) + sX(s) - x(0) + X(s)}{12} \\ Y(s) = X(s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} U(s) = \frac{s^2 \cdot X(s) + sX(s) + X(s)}{12} \\ Y(s) = X(s) \end{cases}$$

$$G(S) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{12 \cdot \cancel{X(s)}}{\cancel{X(s)} \cdot (s^2+s+1)} = \frac{12}{s^2+s+1}$$

$$G(j\omega) = \frac{12}{-\omega^2+j\omega+1} = -\frac{12\cdot\omega^2-12}{\omega^4-\omega^2+1} - j\frac{12\cdot\omega}{\omega^4-\omega^2+1} \quad A_y = A_u \cdot ku(\omega)$$

$$ku(\omega) = |G(j\omega)| = \sqrt{\left(\frac{12\cdot\omega^2-12}{\omega^4-\omega^2+1}\right)^2 + \left(\frac{12\cdot\omega}{\omega^4-\omega^2+1}\right)^2} = 12 \cdot \sqrt{\frac{1}{\omega^4-\omega^2+1}}$$

A_y będzie max., gdy $ku(\omega)$ będzie max., tj. $\sqrt{\omega^4 - \omega^2 + 1}$ będzie min. $\omega \geq 0$, $min(\sqrt{\omega^4 - \omega^2 + 1})$ dla $\omega = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Tydzień 5

Wprowadzenie do układów nieliniowych - Linearyzacja

Zadanie 5.1.1

Dany jest system dynamiczny
$\dot{x}(t) = \cos(x(t))e^{-x(t)^2}$
Wyznaczyć jego punkty równowagi i za pomocą I metody Lapunowa zbadać ich stabilność.

$\dot{x}(t) = \cos(x(t))e^{-x(t)^2}$
$\dot{x}(t) = f(x(t))$
x_r jest punktem równowagi $\Leftrightarrow f(x_r) = 0$
$f(x_r) = \cos(x_r) \cdot \underbrace{e^- x_r^2}_{<0} = 0 \Rightarrow cos(x_r) = 0 \Rightarrow x_r = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

System zlinearyzowany: $\dot{x}(t) = J(x_r)x(t)$

$$J(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix} \quad f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}$$

$J(x) = \frac{\partial f}{\partial x} = -\sin(x) \cdot e^{-x^2} + \cos(x) \cdot (-2xe^{-x^2}) = -e^{-x^2}(\sin(x) + 2x\cos(x))$
$J(x_r) = \underbrace{-e^{-(\frac{\pi}{2}+k\pi)^2}}_{<0}(\underbrace{\sin(\frac{\pi}{2} + k\pi))}_{=1 \vee =-1} + \underbrace{2(\frac{\pi}{2} + k\pi)\cos(\frac{\pi}{2} + k\pi)}_{=0} = -e^{-(\frac{\pi}{2}+k\pi)^2}(\sin(\frac{\pi}{2} + k\pi))$

I metoda Lapunowa
Punkt równowagi, dla którego system zlinearyzowany jest asymptotycznie stabilny jest lokalnie asymptotycznie stabilny. Jeżeli zaś chociaż jedna z wartości własnych macierzy systemu zlinearyzowanego ma dodatnią część rzeczywistą to punkt równowagi jest niestabilny.

$\lambda = -e^{-(\frac{\pi}{2}+k\pi)^2} \cdot \sin(\frac{\pi}{2} + k\pi)$
niestabilny :
$-e^{-(\frac{\pi}{2}+k\pi)^2} \cdot \sin(\frac{\pi}{2} + k\pi) > 0 \Rightarrow \sin(\frac{\pi}{2} + k\pi) = -1 \Rightarrow x_r = \frac{\pi}{2} + (2k\pi + 1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$
(z Hurwitza)
$-e^{-(\frac{\pi}{2}+k\pi)^2} \cdot \sin(\frac{\pi}{2} + k\pi) > 0 \Rightarrow \sin(\frac{\pi}{2} + k\pi) = 1 \Rightarrow x_r = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-(\frac{\pi}{2}+k\pi)^2} \cdot \sin(\frac{\pi}{2} + k\pi) \end{bmatrix}$$

Zadanie 5.1.2

Dany jest system dynamiczny
$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$
$\dot{x}_2(t) = -2x_1(t) - 3x_1(t)^2 - x_2(t)$
Wyznaczyć jego punkty równowagi i za pomocą I metody Lapunowa zbadać ich stabilność.

$J(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2-6x_1 & -1 \end{bmatrix}$
$\begin{cases} x_2 = 0 \\ -2x_1 - 3x_1^2 - x_2 = 0 \end{cases}$
$-2x_1 - 3x_1^2 = 0$
$x_1(2+3x_1) = 0$
$x_1 = 0 \ \vee \ x_1 = -\frac{2}{3}$

$x_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\vee$	$x_r = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$
$J(x_r) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$		$J(x_r) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$
$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -1-\lambda \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix}$
$= (-\lambda)(-1-\lambda) + 2 = \lambda^2 + \lambda + 2$		$= (-\lambda)(-1-\lambda) - 2 = \lambda^2 + \lambda - 2$
$\Delta = -7$		$\Delta = 9$
$\lambda = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}i$		$\lambda = \frac{-1\pm 3}{2}$
$\lambda = -\frac{1}{2} > 0 \Rightarrow$ Stabilny		$\lambda = 1 \ \vee \ \lambda = -2$
		$\lambda = 1 > 0 \Rightarrow$ Niestabilny

Zadanie 5.2.1

Wyznaczyć punkty równowagi układu generatora synchronicznego, który jest systemem dynamicznym opisanym następującymi równaniami
$\dot{x}_1 = x_2$
$\dot{x}_2 = -Dx_2 - \sin x_1 + \sin \delta_0$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -Dx_2 - \sin x_1 + \sin \delta_0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -Dx_2 - \sin x_1 + \sin \delta_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ -Dx_2 - \sin x_1 + \sin \delta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x_2 = 0$
$-\sin x_1 + \sin \delta_0 = 0 \Rightarrow \sin \delta_0 = \sin x_1 \Rightarrow$
$\Rightarrow x_1 = \delta_0 + 2k\pi \quad \vee \quad x_1 = -\delta_0 + (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

Zadanie 5.2.2

Wyznaczyć punkty równowagi dla obwodu Chuy, który jest systemem dynamicznym opisanym następującymi równaniami:
$C_1\dot{x}_1(t) = -\frac{1}{R}x_1(t) + \frac{1}{R}x_2(t) - g(x_1(t))$
$C_2\dot{x}_2(t) = \frac{1}{R}x_1(t) - \frac{1}{R}x_2(t) + x_3(t)$
$L\dot{x}_3(t) = -x_2(t) - R_0x_3(t)$
przy czym $g(v) = g_1v + g_2v^3$

$$\begin{cases} -\frac{1}{RC_1}x_1 + \frac{1}{RC_1}x_2 - \frac{g_1}{C_1}x_1 - \frac{g_2}{C_1}x_1^3 = 0 \\ \frac{1}{RC_2}x_1 - \frac{1}{RC_2}x_2 + \frac{x_3}{C_2} = 0 \\ -\frac{1}{L}x_2 - \frac{R_0}{L}x_3 = 0 \qquad \Rightarrow x_2 = -R_0x_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} g_1Rx_1 + g_2Rx_1^3 + x_1 = x_2 \\ x_1 + Rx_3 = x_2 \\ x_2 = -R_0x_3 \end{cases}$$

z drugiego i trzeciego:
$x_3 = \frac{-x_1}{R+R_0}$
z pierwszego i drugiego:
$g_1Rx_1 + g_2Rx_1^3 = Rx_3$
$g_1x_1 + g_2x_1^3 = x_3$
podstawiam x_3 z trzeciego:
$g_1x_1 + g_2x_1^3 = \frac{-x_1}{R+R_0}$
$g_1x_1 + x_1^3g_2 + \frac{x_1}{R+R_0} = 0$
$x_1^3g_2 + x_1(g_1 + \frac{1}{R+R_0}) = 0$
podstawiam pomocnicze zmienne:
$a = g_2, \quad b = g_1 + \frac{1}{R+R_0}$
$ax_1^3 + bx_1 = 0$
$x_1(ax_1^2 + b) = 0$

$x_1 = 0 \quad \vee \quad ax_1^2 + b = 0$
$\Delta = -4$
x_r to czas więc musi być rzeczywiste

podstawiam $x_1 = 0$:

$$x_r = \begin{bmatrix} x_{1r} \\ x_{2r} \\ x_{3r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Zadanie 5.3.1

Dla jakich wartości parametru ϵ zerowy punkt równowagi układu zwanego oscylatorem Van der Pola będzie niestabilny
$\ddot{x}(t) - \epsilon(1 - x(t)^2)\dot{x}(t) + x(t) = 0$

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{x} = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{x} = \epsilon(1 - x(t)^2) \cdot \dot{x}(t) - x(t) = \epsilon(1 - x_1^2) \cdot x_2 - x_1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ \epsilon(1 - x_1^2) \cdot x_2 - x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ \epsilon(1 - x_1^2) \cdot x_2 - x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases} \quad x_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$J(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2\epsilon x_1 x_2 - 1 & \epsilon(1 - x_1^2) \end{bmatrix} \quad \boxed{\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}}$$

$$J(x_r) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \epsilon \end{bmatrix}$$

Z Lapunowa:
$(-\lambda)(\epsilon - \lambda) + 1 = \lambda^2 - \lambda\epsilon + 1 = 0$
$\Delta = \epsilon^2 - 4 \Rightarrow \lambda = \frac{\epsilon \pm \sqrt{\epsilon^2 - 4}}{2}$
niestabilny: Jeżeli część rzeczywista $> 0 \Rightarrow \frac{\epsilon}{2} > 0 \Rightarrow \boxed{\epsilon > 0}$
asymptotycznie stabilny : $\begin{bmatrix} -\epsilon & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ Hurwitz $-\epsilon > 0 \Rightarrow \boxed{\epsilon < 0}$

Zadanie 5.4.1

Dla jakich wartości parametru a linearyzacja przestaje spełniać warunki twierdzenia Grobmana-Hartmana dla układu opisanego równaniami:
$\dot{x_1}(t) = -x_2(t) + (a - x_1(t)^2 - x_2(t)^2)x_1(t)$
$\dot{x_2}(t) = x_1(t) + (a - x_1(t)^2 - x_2(t)^2)x_2(t)$

$\dot{x_1}(t) = -x_2(t) + (a - x_1(t)^2 - x_2(t)^2)x_1(t) = f_1(x(t))$
$\dot{x_2}(t) = x_1(t) + (a - x_1(t)^2 - x_2(t)^2)x_2(t) = f_2(x(t))$
$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix}$
$\begin{cases} -x_2 + (a - x_1^2 - x_2^2)x_1 = 0 \\ x_1 + (a - x_1^2 - x_2^2)x_2 = 0 \end{cases}$
Zauważamy, że albo $x_1 = x_2 = 0$ albo dla $x_2 \neq 0 \wedge x_1 \neq 0:$
$\begin{cases} -\frac{x_2}{x_1} + (a - x_1^2 - x_2^2) = 0 \\ \frac{x_1}{x_2} + (a - x_1^2 - x_2^2) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \frac{-x_2}{x_1} = \frac{x_1}{x_2} \Rightarrow -x_2^2 = x_1^2 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$ (sprzeczność)
więc $x_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
$J(x) = \begin{bmatrix} a - 3x_1^2 - x_2^2 & -1 - 2x_2x_1 \\ 1 - 2x_1x_2 & a - x_1^2 - 3x_2^2 \end{bmatrix}$
$J(x_r) = \begin{bmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{bmatrix}$
z tw. Grobmana-Hartmana:

$\det(j\omega I - J(x_r)) \neq 0, \quad \omega \in \mathbb{R}$
$\begin{vmatrix} j\omega - a & -1 \\ 1 & j\omega - a \end{vmatrix} = 0$
$(j\omega - a)^2 + 1 = 0$
$j\omega - 1 = \pm j \Rightarrow \boxed{a = 0}$

$J(x_r)$ nie ma wartości własnych na osi urojonej
$\begin{bmatrix} a - \lambda & -1 \\ 1 & a - \lambda \end{bmatrix}$
$(a - \lambda)^2 + 1 = 0$
$a^2 - 2a\lambda + \lambda^2 + 1 = 0$
$\lambda^2 - 2a\lambda + a^2 + 1 = 0$
$\Delta = 4a^2 - 4a^2 - 4$
$\sqrt{\Delta} = 2i$
$\lambda = \frac{2a \pm 2i}{2} = a \pm i$
dla $a = 0$ wartości własne są na osi urojonej

Zadanie 5.5.1

Dla jakich wartości parametru a zerowy punkt równowagi układu opisanego równaniami
$\dot{x_1}(t) = x_2(t) + (a - x_1(t)^2 - x_2(t)^2)x_1(t)$
$\dot{x_2}(t) = x_1(t) + (a - x_1(t)^2 - x_2(t)^2)x_2(t)$
będzie niestabilny.

$x_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
$J(x) = \begin{bmatrix} a - 3x_1^2 - x_2^2 & 1 - 2x_2x_1 \\ 1 - 2x_1x_2 & a - x_1^2 - 3x_2^2 \end{bmatrix}$
$J(x_r) = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{bmatrix}$
$\begin{vmatrix} a - \lambda & 1 \\ 1 & a - \lambda \end{vmatrix} = 0$
$(a - \lambda)^2 - 1 = 0$
$(a - \lambda - 1)(a - \lambda + 1) = 0$
$\lambda = a - 1 \quad \vee \quad \lambda = a + 1$
niestabilny, gdy $Re(\lambda) > 0$
$a - 1 > 0 \qquad a + 1 > 0$
$a > 1 \qquad a > -1$
$(a > 1 \quad \vee \quad a > -1) \Rightarrow \boxed{a > -1}$

Alternatywnie: Bez podanego punktu równowagi
$\dot{x_1}(t) = x_2(t) + (a - x_1(t)^2 - x_2(t)^2)x_1(t) = f_1(x(t))$
$\dot{x_2}(t) = x_1(t) + (a - x_1(t)^2 - x_2(t)^2)x_2(t) = f_2(x(t))$
$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix}$
$\begin{cases} x_2 + (a - x_1^2 - x_2^2)x_1 = 0 \\ x_1 + (a - x_1^2 - x_2^2)x_2 = 0 \end{cases}$
Zauważamy, że albo $x_1 = x_2 = 0$ albo dla $x_1 \neq 0 \wedge x_2 \neq 0$:
$\begin{cases} \frac{x_2}{x_1} + (a - x_1^2 - x_2^2) = 0 \\ \frac{x_1}{x_2} + (a - x_1^2 - x_2^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1}{x_2} \Rightarrow \begin{matrix} x_2^2 = x_1^2 \\ x_1 = x_2 \vee x_1 = -x_2 \end{matrix}$
więc $\underset{x_r}{1} = \begin{bmatrix} k \\ k \end{bmatrix} \vee \underset{x_r}{2} = \begin{bmatrix} k \\ -k \end{bmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}$
$J(x) = \begin{bmatrix} a - 3x_1^2 - x_2^2 & 1 - 2x_2x_1 \\ 1 - 2x_1x_2 & a - x_1^2 - 3x_2^2 \end{bmatrix}$
$J(\underset{x_r}{1}) = \begin{bmatrix} a - 4k^2 & 1 - 2k^2 \\ 1 - 2k^2 & a - 4k^2 \end{bmatrix} \quad \vee \quad J(\underset{x_r}{2}) = \begin{bmatrix} a - 4k^2 & 1 + 2k^2 \\ 1 + 2k^2 & a - 4k^2 \end{bmatrix}$
$(a - 4k^2 - \lambda)^2 - (1 - 2k^2)^2 = 0 \quad \vee \quad (a - 4k^2 - \lambda)^2 - (1 + 2k^2)^2 = 0$
$(a - 4k^2 - \lambda - 1 + 2k^2)(a - 4k^2 - \lambda + 1 - 2k^2) = 0 \quad \vee \quad (a - 4k^2 - \lambda - 1 - 2k^2)(a - 4k^2 - \lambda + 1 + 2k^2) = 0$
$\lambda = a - 1 - 2k^2 \vee \lambda = a + 1 - 6k^2 \quad \vee \quad \lambda = a - 1 - 6k^2 \vee \lambda = a + 1 - 2k^2$
$niestebilny:$
$Re\lambda > 0$
$a - 1 - 2k^2 > 0 \vee a + 1 - 6k^2 > 0 \qquad a - 1 - 6k^2 > 0 \vee a + 1 - 2k^2 > 0$
$\underset{a > 1 + 2k^2}{1} \quad \underset{a > 6k^2 - 1}{2} \qquad \underset{a > 1 + 6k^2}{3} \quad \underset{a > 2k^2 - 1}{4}$
odp. niestabilny dla $a > 1 \vee a > 2 \vee a > 3 \vee a > 4$

Zadanie 5.5.2

Dla jakich wartości parametru a zerowy punkt równowagi układu opisanego równaniami
$\dot{x_1}(t) = -x_2(t) + (a - x_1(t)^2 - x_2(t)^2)x_1(t)$
$\dot{x_2}(t) = x_1(t) + (a - x_1(t)^2 - x_2(t)^2)x_2(t)$
będzie niestabilny.

$x_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
$J(x) = \begin{bmatrix} a - 3x_1^2 - x_2^2 & -1 - 2x_2x_1 \\ 1 - 2x_1x_2 & a - x_1^2 - 3x_2^2 \end{bmatrix}$
$J(x_r) = \begin{bmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{bmatrix}$
$\begin{vmatrix} a - \lambda & -1 \\ 1 & a - \lambda \end{vmatrix} = 0$
$\lambda^2 - 2a\lambda + a^2 + 1 = 0$
$\Delta = -4$
$\lambda = \frac{2a \pm 2i}{2} = a \pm i$
niestabilny, gdy $Re(\lambda) > 0$
$\boxed{a > 0}$

Zadanie 5.6.1

Dla jakich wartości parametru a zerowy punkt równowagi układu opisanego równaniami
$\dot{x_1}(t) = -x_2(t) + (a - x_1(t)^2 - x_2(t)^2)x_1(t)$
$\dot{x_2}(t) = x_1(t) + (a - x_1(t)^2 - x_2(t)^2)x_2(t)$
będzie asymptotycznie stabilny.

$$x_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$J(x) = \begin{bmatrix} a - 3x_1^2 - x_2^2 & -1 - 2x_2x_1 \\ 1 - 2x_1x_2 & a - x_1^2 - 3x_2^2 \end{bmatrix}$$
$$J(x_r) = \begin{bmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{bmatrix}$$
$$\begin{vmatrix} a - \lambda & -1 \\ 1 & a - \lambda \end{vmatrix} = 0$$
$$\lambda^2 - 2a\lambda + a^2 + 1 = 0$$

Macierz Hurwitz'a
Wielomian charakterystyczny: $a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_{n-1}\lambda + a_n$
$$\begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2a & 0 \\ 1 & a^2 + 1 \end{bmatrix}$$

Kryterium Hurwitz'a
Jeśli wszystkie minory wiodące są większe od zera, to jest asymptotycznie stabilny.

$-2a > 0 \Rightarrow a < 0$
$-2a(a^2 + 1) > 0 \Rightarrow \boxed{a < 0}$

Autorzy:

Skład:

Jacek Pietras
Grzegorz Tokarz

Rozwiązania:

Magdalena Warzesia
Ania Szarawara
irytek102
Gniewomir
Jacek Pietras
Grzegorz Tokarz

Komentarze: