https://github.com/Jock69pl/SystemyDynamiczne.git

Jeśli masz wolnego czasu troche i chcesz pomóc doślij jakieś rozwiązanie.
Bardzo potrzebne są korekty, napewno jest tu sporo błędów.
Potrzebni są też komentatorzy, chodzi o całkowicie łopatologiczny komentarz typu "tu liczymy delte bo..."

Z tego przedmiotu jest egzamin, więc warto to zrobić

Tydzień 1

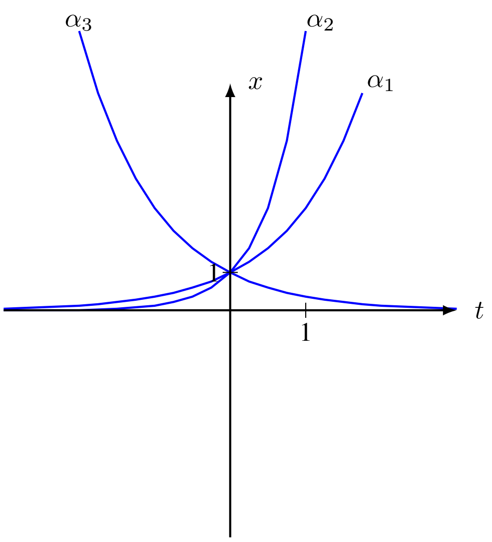
Systemy liniowe 1-go rzedu

Zadanie 1.1.1

Naszkicować rozwiazania równania rózniczkowego:
$\dot{x}(t) = \alpha_i x(t)$
dla $x(0) = 1, t \geqslant 0$ przy czym $i = 1, 2, 3$ zaś
$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 2, \quad \alpha_3 = -1$

$\frac{dx}{dt} = \alpha_i x$
$\frac{dx}{x} = \alpha_i dt$
$\ln|x| = \alpha_i t + c$
$x = ce^{\alpha_i t}$
$x(0) = c = 1$
$x = e^{\alpha_i t}$

$x = e^t \ \vee \ x = e^{2t} \ \vee \ x = e^{-t}$

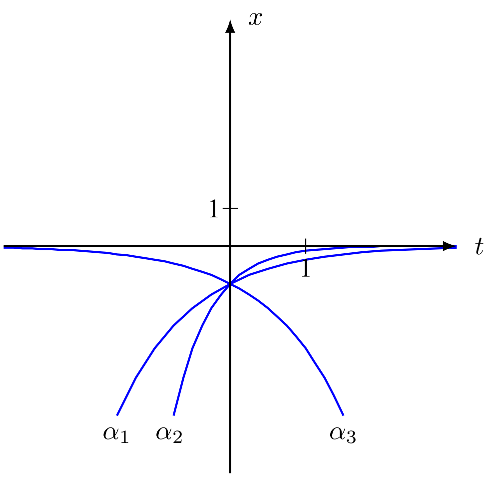


Zadanie 1.2.1

Naszkicować rozwiazania równania rózniczkowego:
$\dot{x}(t) = \alpha_i x(t)$
dla $x(0) = -1, t \geqslant 0$ przy czym $i = 1, 2, 3$ zaś
$\alpha_1 = -1, \quad \alpha_2 = -2, \quad \alpha_3 = 1$

$x = ce^{\alpha_i t}$
$x(0) = c = -1$
$x = -e^{\alpha_i t}$

$x = -e^{-t} \ \vee \ x = -e^{-2t} \ \vee \ x = -e^{t}$

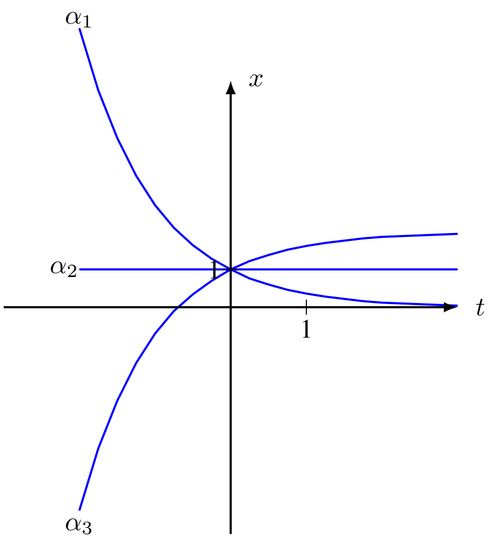


Zadanie 1.3.1

Naszkicować rozwiazania równania rózniczkowego:
$\dot{x}(t) = -x(t) + u_i$
dla $x(0) = 1, t \geqslant 0$ przy czym $i = 1, 2, 3$ zaś
$u_1 = 0, \quad u_2 = 1, \quad u_3 = 2$

$\frac{dx}{dt} = -x + u_i$
$\frac{dx}{-x+u_i} = dt$
$-\ln|-x + u_i| = t + c$
$ce^{-t} = -x + u_i$
$x = u_i - ce^{-t}$
$x(0) = u_i - c = 1 \Rightarrow c = u_i - 1$
$x = u_i - (u_i - 1)e^{-t} = u_i(1 - e^{-t}) + e^{-t}$

$x = e^{-t} \ \vee \ x = 1 \ \vee \ x = 2 - e^{-t}$

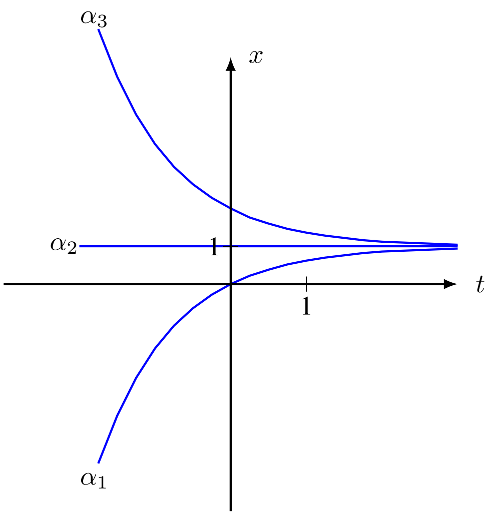


Zadanie 1.4.1

Naszkicować rozwiazania równania rózniczkowego:
$\dot{x}(t) = -x(t) + 1$
dla $x(0) = x_i, t \geqslant 0$ przy czym $i = 1, 2, 3$ zaś
$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 2$

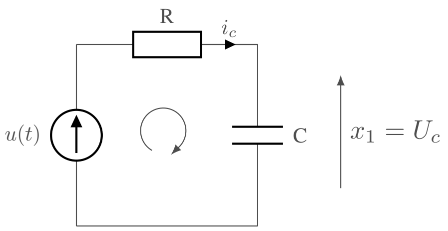
$\frac{dx}{dt} = -x + 1$
$-\ln|-x+1| = t + c$
$ce^{-t} = -x + 1$
$x = 1 - ce^{-t}$
$x(0) = 1 - c = x_i \Rightarrow c = 1 - x_i$
$x = 1 - (1 - x_i)e^{-t}$

$x = 1 - e^{-t} \ \vee \ x = 1 \ \vee \ x = 1 + e^{-t}$



Zadanie 1.5.1

Dany jest obwód elektryczny jak na rysunku poniżej.



$R = 100[K\Omega]$
$U_c(0) = -1.72[V]$
$C = 1[\mu F]$

Źródło napięcia przez jedną sekundę podawało napięcie $1[V]$, a następnie przestało podawać dalej napięcie (przyjąć $0[V]$). Zamodelować obwód w postaci równania różniczkowego, wyliczyć wartość napięcia w chwili $T = 2[s]$ i naszkicować przebieg napięcia w funkcji czasu.

$i(t) = c \cdot \dot{x}_1(t)$
$u - Ri_c - x_1 = 0$
$u(t) - RCx_1'(t) - x_1(t) = 0$

$1^\circ \ \ t \in <0, 1> \ \ \boxed{u(t) = 1}$
$1 - RCx_1'(t) - x_1(t) = 0$
$x_1'(t) = -\frac{x_1(t)}{RC} + \frac{1}{RC}$
$\frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{RC}(1 - x_1)$
$\frac{dx_1}{1-x_1} = \frac{1}{RC}dt$
$-\ln|1 - x_1| = \frac{1}{RC}t + k$
$ke^{-\frac{t}{RC}} = 1 - x_1$
$x_1 = 1 - ke^{-\frac{t}{RC}}$
$x_1(0) = u_c = -1.72 = 1 - k \Rightarrow k = 2.72$
$x_1(1) = 1 - 2.72e^{-\frac{1}{RC}} \approx 0.000632$

$2^\circ \ \ t > 0 \ \ \boxed{u(t) = 0}$
$x_2'(t) = -\frac{x_2(t)}{RC}$
$\frac{dx_2}{dt} = -\frac{1}{RC}x_2$
$\frac{dx_2}{x_2} = -\frac{1}{RC}dt$
$\ln|x_2| = -\frac{t}{RC} + k$
$ke^{-\frac{t}{RC}} = x_2$
$x_2(0) = x_1(1)$
$x_2(0) = k = x_1(1)$
$x_2(2) = x_1(1)e^{-\frac{2}{RC}}$
$x_2(2) = -0.0000855$

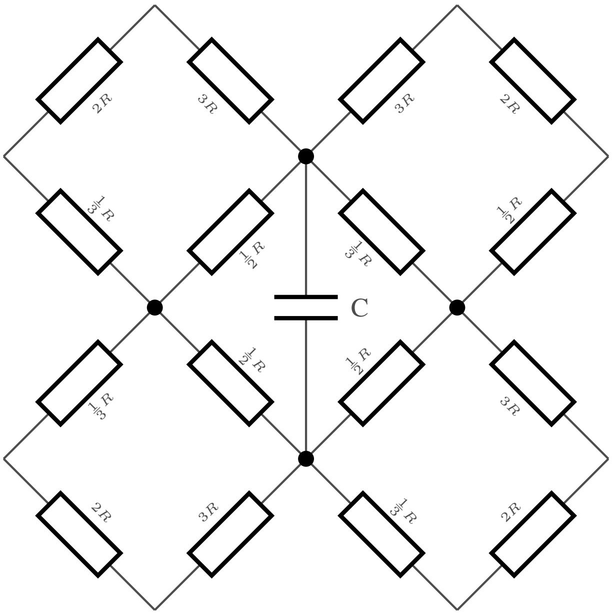
Zadanie 1.6.1

Dane jest równanie różniczkowe
$\dot{x}(t) = -2x(t) + u(t)$
gdzie $x(0) = 1, t \geqslant 0$. Znaleźć takie sterowanie $u(t)$, że $x(t) = e^{-t}$ dla $t \geqslant 0$.

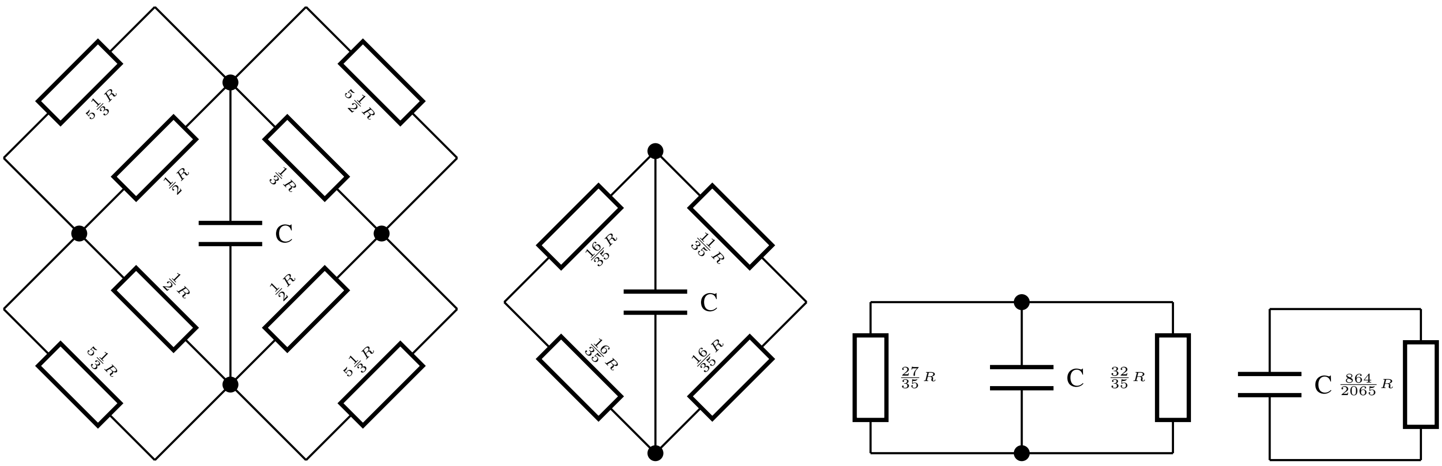
$x(t) = e^{-t}$
$x'(t) = -e^{-t}$
$-e^{-t} = -2e^{-t} + u(t) \Rightarrow \boxed{u(t) = e^{-t}}$

Zadanie 1.7.1

Zamodelować poniższy obwód elektryczny za pomocą równania różniczkowego



Przy czym $R = 4.7k\Omega$ zaś $C = 2\mu F$.



$u(t) = RC\dot{x}(t) + x(t)$
$x'(t) = \frac{u(t)}{RC} - \frac{x}{RC}$
$u(t) = 0$
$x'(t) = -\frac{x}{RC}$

$$\boxed{x'(t) = -\frac{x}{\frac{864}{2065} \cdot R \cdot C}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\frac{x}{RC} \\ \ln|x| &= -\frac{t}{RC} + k \\ ke^{-\frac{t}{RC}} &= x \end{aligned}}$$

Zadanie 1.8.1

Dane jest równanie różniczkowe
$\dot{x}(t) = -2x(t) + 3$
gdzie $x(0) = -1, t \geqslant 0$. Po jakim czasie t_k zachodzi $x(t_k) = 2$.

$\frac{dx}{dt} = -2x(t) + 3$
$\frac{dx}{-2x+3} = dt$
$\int \frac{1}{-2x+3} dx = \left| \begin{array}{c} u = -2x + 3 \\ du = -2dx \end{array} \right| = -\frac{1}{2} \ln|-2x+3| = t + c$
$ce^{-2t} = -2x + 3$
$x = \frac{3-ce^{-2t}}{2}$
$x(0) = \frac{3-c}{2} = -1 \Rightarrow c = 5$
$x = \frac{3-5e^{-2t}}{2}$
$x(t_k) = 2 = \frac{3-5e^{-2tk}}{2}$
$4 = 3 - 5e^{-2tk} \Rightarrow e^{-2tk} = -\frac{1}{5}$ $\boxed{\text{Sprzeczność}}$

Zadanie 1.9.1

Rozwiązanie równania różniczkowego
$\dot{x}(t) = -100x(t) + 2\sin(t)$
gdzie $x(0) = -1, t \geqslant 0$ ma postać
$x(t) = ae^{-100t} + A\sin(t + \varphi)$
Obliczyć A i φ.

$x(0) = a + A\sin\varphi = 2 \Rightarrow \boxed{A = \dfrac{2-a}{\sin\varphi}}$
$\frac{dx}{dt} + 100x = 2\sin t$
$\frac{dx}{dt} + 100x = 0$
$\ln|x| = -100t + c$
$c(t)e^{-100t} = x$
$c'e^{-100t} - \cancel{100ce^{-100t}} = -\cancel{100ce^{-100t}} + 2\sin t$
$c' = 2\sin te^{100t}$
$\int \sin te^{100t} = \begin{vmatrix} \sin t & \cos t \\ e^{100t} & \frac{1}{100}e^{100t} \end{vmatrix} = \frac{1}{100}\sin te^{100t} - \frac{1}{100}\int \cos te^{100t} = \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ e^{100t} & \frac{1}{100}e^{100t} \end{vmatrix} =$
$= \frac{1}{100}\sin te^{100t} - \frac{1}{100^2}\cos te^{100t} - \frac{1}{100}\int \sin te^{100t} \Rightarrow \int \sin te^{100t}dt = \boxed{\dfrac{100\sin t - \cos t}{1001}e^{100t} + e}$
$\boxed{x = Ke^{-100t} + 2 \cdot \dfrac{100\sin t - \cos t}{10001}}$
$x = Ke^{-100t} + \frac{200\sin t - 2\cos t}{10001}$
$x(0) = K - \frac{2}{10001} = 2 \Rightarrow K = \frac{20004}{10001}$
$ae^{-100t} + A\sin(t+\varphi) = Ke^{-100t} + \frac{200\sin t - 2\cos t}{10001}$
$a = K$
$A = \frac{2-a}{\sin\varphi} = \frac{2 - \frac{20004}{10001}}{\sin\varphi} = \frac{-2}{1000t\sin\varphi}$
$A(\sin t\cos\varphi + \sin\varphi\cos t) = \frac{200\sin t}{10001} - \frac{2\cos t}{10001}$
$\cancel{\sin t}\mathrm{ctg}\varphi + \cancel{\cos t} = -100\cancel{\sin t} + \cancel{\cos t}$
$\mathrm{ctg}\varphi = -100$
$\mathrm{tg}\varphi = \frac{-1}{100} \Rightarrow \boxed{\mathrm{arctg}(\dfrac{-1}{100}) = \varphi}$

Zadanie 1.10.1

Dane jest równanie różniczkowe
$\dot{x}(t) = -x(t) + u(t)$
gdzie $x(0) = 1, t \geqslant 0$
zaś sterowanie ma postać sygnału PWM o amplitudzie 15, okresie 1s i współczynniku wypełnienia $\theta \in (0, 1]$, tzn.
$u(t) = \begin{cases} 15 & \text{dla} \quad t \in [n, n+\theta] \\ 0 & \text{dla} \quad t \in (n+\theta, n+1) \end{cases}$
Wiedząc, że $x(3) = 1$ obliczyć θ.

$x(t) = \underbrace{e^{tA}x(0)}_{=0} + \int_0^t e^{(t-\tau)A}Bu(\tau)\, d\tau$
$x(t) = \int^t +0e^{-t+\tau}15\, d\tau = 15e^{-t}(e^t - 1)$
$x(3) = 15e^{-3}(e^\theta - 1 + e^{1+\theta} - e + e^{2+\theta} - e^2) = 15e^{-3}(e^\theta(1+e+e^2) - (1+e+e^2)) = 15e^{-3}((e^\theta - 1)(1+e+e^2)) = \boxed{1}$
$\frac{3}{15(1+e+e^2)} + 1 = e^\theta \Rightarrow \boxed{\theta = \ln(1 + \frac{e^3}{15(1+e+e^2)})}$

Tydzień 2

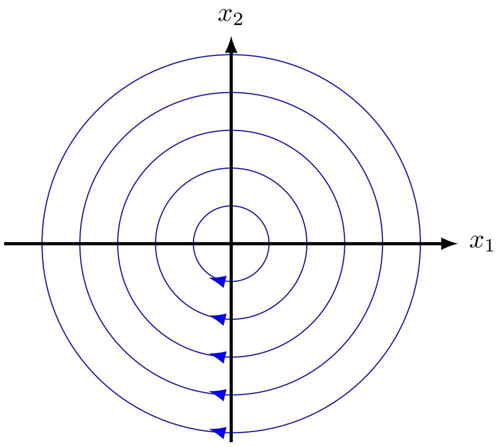
Portrety fazowe systemów liniowych

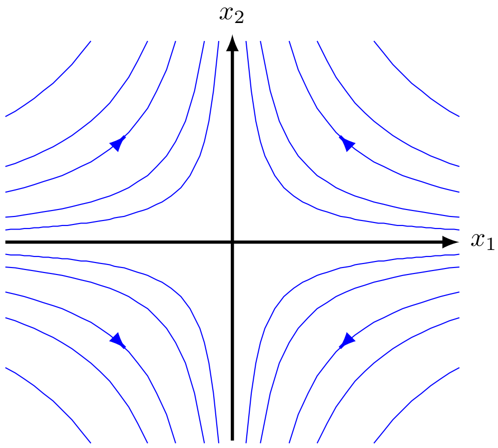
Zadanie 2.1.1

Naszkicować portrety fazowe systemów dynamicznych
$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$ i $\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$
i opisać czym się różnią.

$\lambda^2 + 1 = 0$
$\lambda = \pm i$
$J = A$
$\begin{bmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
$-i\omega_1 + \omega_2 = 0$
$-\omega_1 - i\omega_2 = 0$
$\omega_1 = -i\omega_2$
$\lambda^2 = 1$

$\lambda = \pm 1$
$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
$-\omega_1 + \omega_2 = 0$
$\omega_1 - \omega_2 = 0$
$\omega_1 = \omega_2$





Pierwszy portret fazowy to środek, a drugi to siodło.

Zadanie 2.2.1

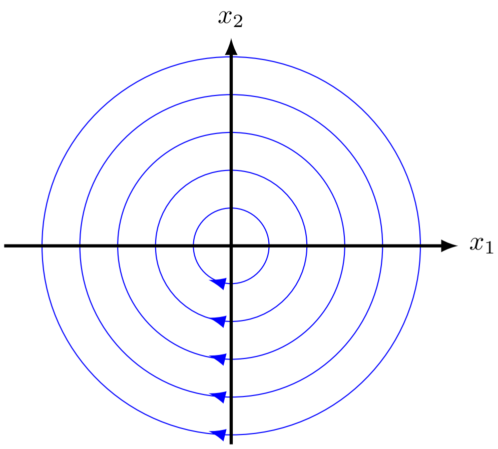
Naszkicować portrety fazowe systemów dynamicznych

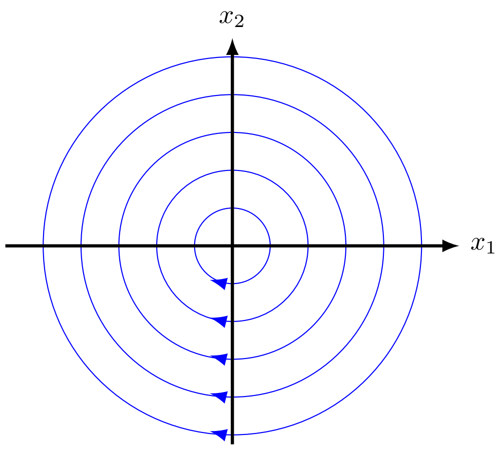
$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$ i $\dot{x}_1(t) = 10x_2(t)$
$\dot{x}_2(t) = -x_1(t)$ $\dot{x}_2(t) = -10x_1(t)$

i opisać czym się różnią.

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) \end{cases}$$
$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$
$$J = A$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 10x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -10x_1(t) \end{cases}$$
$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ -10 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$
$$J = A$$

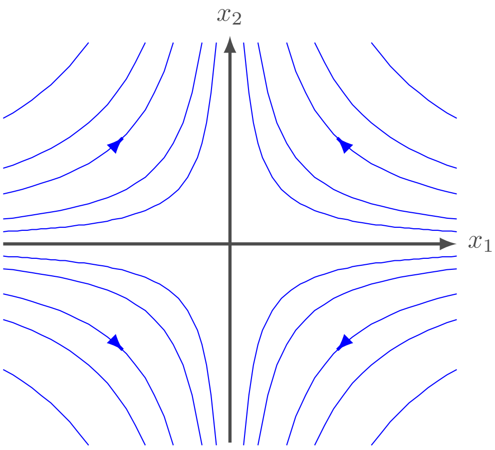




Portrety są identyczne. Jedyną różnicą jest szybkość poruszania się trajektorii w dziedzinie czasu. Dla 1 mamy t, a dla 2 $10t$

Zadanie 2.3.1

Podać wartości własne, jakie mogą odpowiadać poniższemu portretowi fazowemu.



Dla siodła: dwie wartości własne rzeczywiste przeciwnych znaków np 1 i -1

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Zadanie 2.4.1

Dla systemu

$$\begin{aligned} x(t) + 4\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) &= u(t) \\ u(t) &= k_1\dot{x}(t) - k_2 x(t) \end{aligned}$$

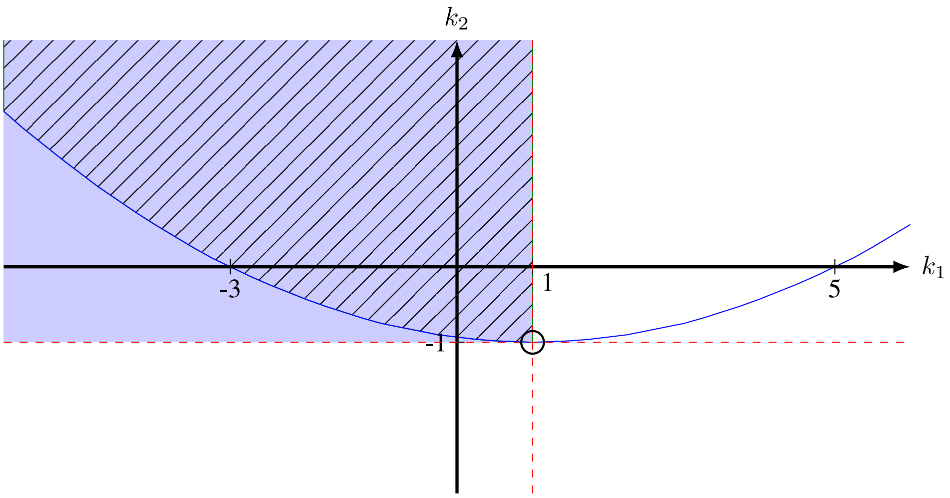
zbadać zachowanie się układu w zależności od k_1 i k_2. Zaznaczyć odpowiednie obszary na płaszczyźnie $k_1 \times k_2$

$x + 4\ddot{x} + \dot{x} = k_1\dot{x} - k_2 x$
$4\ddot{x} + (1-k_1)\dot{x} + (1+k_2)x = 0$
wielomian charakterystyczny:
$x = e^{\lambda t} \quad \dot{x} = \lambda e^{\lambda t} \quad \ddot{x} = \lambda^2 e^{\lambda t}$
$4\lambda^2 + (1-k_1)\lambda + 1 + k_2 = 0$
macierz Hurwitza dla wielomianu stopnia drugiego: $a_0x^2 + a_1x + a_2 = 0$

$\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ a_0 & a_2 \end{bmatrix}$ czyli $\begin{bmatrix} 1-k_1 & 0 \\ 4 & 1+k_2 \end{bmatrix}$

żeby układ był stabilny to $|a_1| > 0$ i $\begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0$

więc:
$1 - k_1 > 0 \Rightarrow \boxed{k_1 < 1}$
$(1-k_1)(1+k_2) > 0 \Rightarrow 1 + k_2 > 0 \Rightarrow \boxed{k_2 > -1}$
dla $\Delta < 0$ występują oscylacje, więc:
$\Delta = (1-k_1)^2 - 4\cdot 4(1-k_2) = (1-k_1)^2 - 16 - 16k_2 < 0$
$k_2 > \frac{1}{16}(1-k_1)^2 - 1$



wewnątrz niebieskiego obszaru asymptotycznie stabilny $k_1 < 1 \wedge k_2 > -1)$
na czerwonych prostych granicznych stabilny $(k_1 = 1 \vee k_2 = -1)$ bez punktu wspólnego
niestabilny na przecięciu prostych i w pozostałych obszarach
oscylacje dla zakreskowanego $k_2 > \frac{1}{16}(1-k_1)^2 - 1$

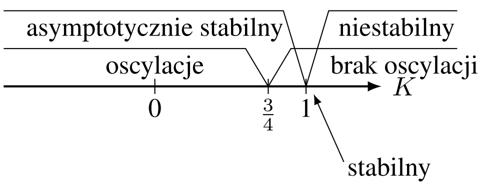
Zadanie 2.5.1

Zbadać charakter pracy układu

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t) &= u(t) \\ u(t) &= Kx(t) \end{aligned}$$

w zależności od parametru K. Zaznaczyć wszystkie istotne rodzaje zachowań na osi liczbowej.

$\ddot{x} + \dot{x} + x = Kx$
$\ddot{x} + \dot{x} + x(1 - K) = 0$
$\lambda^2 + \lambda + 1 - K = 0$ wielomian charakterystyczny
$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1-K \end{bmatrix}$ macierz Hurwitza
$1 - K > 0 \Rightarrow K < 1$
$\Delta = 1 - 4(1 - K) = -3 \cdot 4K < 0 \Rightarrow K < \frac{3}{4}$



Zadanie 2.6.1

Dla jakich wartości parametru k system opisany równaniami:

$$\begin{aligned} 4\dot{x}_1 &= 12x_1 - 0.25kx_2 \\ 0.5\dot{x}_2 &= \frac{1}{k}x_1 + kx_2 \end{aligned}$$

będzie niestabilny.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 3x_1 - \frac{1}{16}kx_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{2}{k}x_1 + 2kx_2 \end{aligned}$$

$\dot{x} = \begin{bmatrix} 3 & -\frac{1}{16}k \\ \frac{2}{k} & 2k \end{bmatrix} x$

$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -\frac{1}{16}k \\ \frac{2}{k} & 2k-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(2k-\lambda) + \frac{1}{16}k - \frac{2}{k} = \lambda^2 - (3+2k)\lambda + 6k + \frac{1}{8}$ wielomian charakterystyczny

$\begin{bmatrix} -(3+2k) & 0 \\ 1 & 6k+\frac{1}{8} \end{bmatrix}$ macierz Hurwitz'a

$-3-2k > 0 \Rightarrow k < -\frac{3}{2}$

$-(3+2k)(6k+\frac{1}{8}) > 0 \Rightarrow 6k + \frac{1}{8} > 0 \Rightarrow k > -\frac{1}{8}$

stabilny dla $k < -\frac{3}{2} \wedge k > -\frac{1}{8} \Rightarrow k \in \varnothing$

niestabilny dla $k \in \mathbb{R}$

Zadanie 2.7.1

Wyznaczyć macierz e^{At} dla macierzy
$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

$e^{At} = P \cdot e^{Jt} \cdot P^{-1}$
$e^{Jt} = e^{\lambda} \cdot J$

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{dla } \lambda = a \pm ib \\ &J = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \\ e^{tJ} = a^{\alpha t} &\begin{bmatrix} \cos bt & \sin bt \\ -\sin bt & \cos t \end{bmatrix} \end{aligned}}$$

$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda(2+\lambda) + 2 = \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$
$\sqrt{\Delta} = 2i$
$\lambda_1 = \frac{-2+2i}{2} = -1 + i \qquad \lambda_2 = -1 - i$

$\boxed{\lambda_2 = -1 + i}$
$\begin{bmatrix} -2+1-i & 1 \\ -2 & 1-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
$\begin{cases} -(1+i)\omega_i + \omega_2 = 0 \Rightarrow \omega_2 = \omega_1 + i\omega_1 \\ -2\omega_1 + (1-i)\omega_2 = 0 \end{cases}$
$-2\omega_1 + (1-i)(1+i)\omega_1 = 0$
$-2\omega_1 + 2\omega_1 = 0$
$J = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$
$e^{tJ} = e^{-t} \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} W = \begin{bmatrix} 1 \\ 1+i \end{bmatrix} \omega = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + pi \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\boxed{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}$$

$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot e^{-t} \cdot \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = e^{-t} \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ \cos t - \sin t & \sin t + \cos t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} =$
$= e^{-t} \begin{bmatrix} \cos t - \sin t & \sin t \\ -2\sin t & \sin t + \cos t \end{bmatrix}$

Zadanie 2.8.1

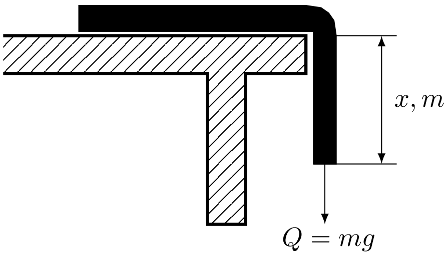
Wyznaczyć rozwiązanie $x(t), t \geqslant 0$ równania
$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + 3x(t) = 0$
$x(0) = 1, \;\; \dot{x}(0) = 0$

$x^{\lambda t} \quad \dot{x} = \lambda e^{\lambda t} \quad \ddot{x} = \lambda^2 e^{\lambda t}$
$\lambda^2 e^{\lambda t} + \lambda e^{\lambda t} + 3e^{\lambda t} = 0$
$\lambda^2 + \lambda + 3 = 0$
$\Delta = 1 - 12 = -11 < 0$
$\lambda_1 = \alpha + i\beta \quad \alpha = \frac{-b}{2a} \quad \alpha = \frac{-1}{2}$
$\lambda_2 = \alpha - i\beta \quad \beta = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a} \quad \beta = \frac{\sqrt{11}}{2}$

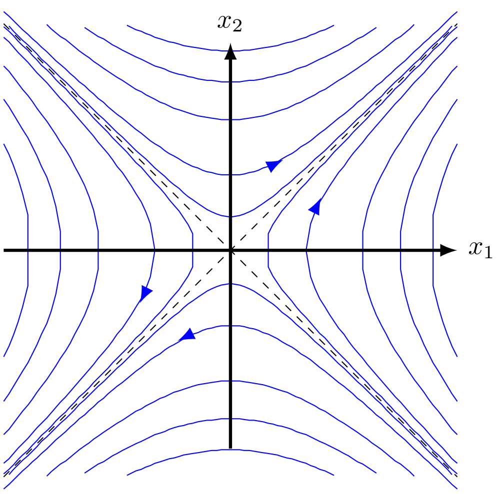
$x(t) = Ae^{\alpha t} \cos \beta t + Be^{\alpha t} \sin \beta t$
$x(t) = Ae^{-\frac{t}{2}} \cos(\frac{\sqrt{11}}{2}t) + Be^{-\frac{t}{2}} \sin(\frac{\sqrt{11}}{2}t)$
$x(0) = A \cdot \underbrace{e}_{=0} \cdot \cos 0 + B \cdot e^0 \sin 0 = \boxed{A = 1}$
$\dot{x}(t) = -\beta Ae^{\alpha t} \sin \beta t + \alpha Ae^{\alpha t} \cos \beta t + \beta Be^{\alpha t} \cos \beta t + \alpha Be^{\alpha t} \sin \beta t$
$$\dot{x}(0) = \underbrace{-\frac{\sqrt{11}}{2} \cdot e^0 \cdot \sin 0}_{=0} - \tfrac{1}{2}A \cdot e^0 \cos 0 + \tfrac{\sqrt{11}}{2}B \cdot e^0 \cdot \cos 0 - \underbrace{\frac{1}{2}Be^0 \sin 0}_{=0} =$$
$$= -\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{11}}{2}B = 0 \Rightarrow \boxed{B = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{11}}{11}}$$
$$\boxed{x(t) = e^{-\frac{t}{2}} \cos(\frac{\sqrt{11}}{2}t) + \frac{\sqrt{11}}{11} e^{-\frac{t}{2}} \sin(\frac{\sqrt{11}}{2}t)}$$

Zadanie 2.9.1

Na gładkim stole leży sznur o długości 0.3 m i masie 50g, przy czym część sznura zwisa ze stołu jak na rysunku. Zamodelować ruch sznura po stole za pomocą równania różniczkowego. Naszkicować portret fazowy systemu opisanego tym równaniem



$l = 0.3m \quad m = 50g$
$m = M \cdot \frac{x}{l}$
$M \cdot \ddot{x} = m \cdot g$
$\cancel{M} \cdot \ddot{x} = \cancel{M} \cdot \frac{x}{l} \cdot g$
$\ddot{x} = x\frac{g}{l} \quad k = \frac{g}{l}$
$x_1 = x$
$x_2 = \dot{x}$
$\dot{x}_1 = \dot{x} = x_2$
$\dot{x}_2 = \ddot{x} = x_1 k$
$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k & 0 \end{bmatrix} x$
$\lambda^2 - k = 0$
$\lambda = \pm\sqrt{k}$
$J = \begin{bmatrix} \sqrt{k} & 0 \\ 0 & -\sqrt{k} \end{bmatrix}$
$\lambda = \sqrt{k}$
$\begin{bmatrix} -\sqrt{k} & 1 \\ k & -\sqrt{k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
$-\sqrt{k}\omega_1 + \omega_2 = 0$
$k\omega_1 - \sqrt{k}\omega_2 = 0$
$\omega_2 = \sqrt{k}\omega_1$
$\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{k} \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{k} \\ k \end{bmatrix}$



Zadanie 2.10.1

Dany jest system opisany równaniem
$\dot{x}_1(t) = -\pi x_2(t)$
$\dot{x}_2(t) = \pi x_1(t)$
Naszkicować zbiór punktów powstałych z trajektorii stanu systemu w chwili $t = 0.75s$ dla warunków początkowych branych ze zbioru $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1 + x_2| = 1\}$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -\pi \\ \pi & 0 \end{bmatrix} x$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -\pi \\ \pi & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \pi^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -\pi^2 \qquad \lambda = \pm i\pi$$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & \pi \\ -\pi & 0 \end{bmatrix}$$

$$e^{tJ} = e^{at} \begin{bmatrix} \cos(\pi t) & \sin(\pi t) \\ -\sin(\pi t) & \cos(\pi t) \end{bmatrix}$$

$$x(t) = e^{tJ}x(0) + \underbrace{\int_0^t e^{(t-\tau)A} Bu(\tau)\, d\tau}_{=0,\ \text{bo}\ u=0\quad B=0}$$

$$x(t) = e^{tJ}x(0)$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} \cos(\pi t) & \sin(\pi t) \\ -\sin(\pi t) & \cos(\pi t) \end{bmatrix} x(0)$$

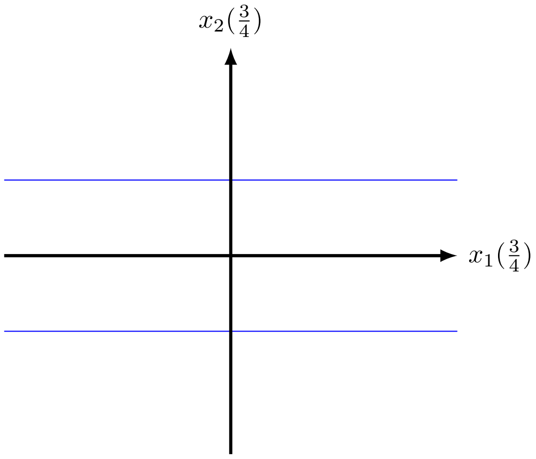
$t = \frac{3}{4}s$

$$x(\tfrac{3}{4}) = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} x(0) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x(0)$$

$$\begin{cases} x_1(\frac{3}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}(x_1(0) - x_2(0)) \\ x_2(\frac{3}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}(x_1(0) + x_2(0)) \\ |x_1 + x_2| = 1 \Rightarrow \begin{matrix} x_1 + x_2 = 1 & \vee & x_1 + x_2 = -1 \\ x_1 = 1 - x_2 & \vee & x_1 = -1 - x_2 \end{matrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(\frac{3}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}(-x_2(0) + 1 - x_2(0)) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}x_2(0) \\ x_2(\frac{3}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}(-x_2(0) + 1 + x_2(0)) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(\frac{3}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}(-1 - x_2(0) - x_2(0)) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}x_2(0) \\ x_2(\frac{3}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}(-1 - x_2(0) + x_2(0)) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$



Tydzień 3

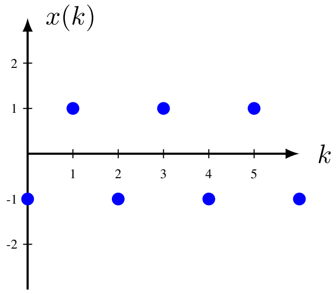
Dyskretne systemy dynamiczne

Zadanie 3.1.1

Narysować rozwiązanie równania różnicowego $x(k+1) = \lambda_i x(k)$
dla $i = 1, 2, 3$ gdzie
$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$
przy czym $x(0) = -1$ i $k \geq 0$

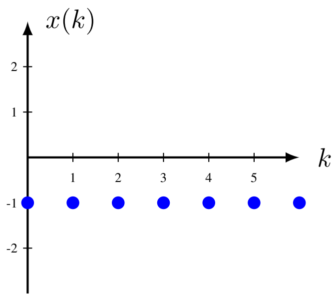
- $i = 3, \lambda_i = -1$

$x(k) = (-1)^k(-1) = (-1)^{k+1}$



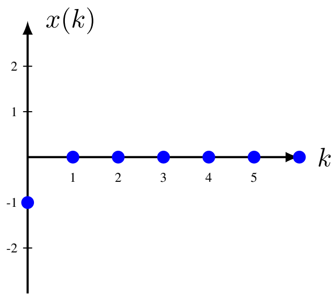
- $i = 2, \lambda_i = 1$

$x(k) = (1)^k(-1) = -1$



- $i = 0, \lambda_i = 0$

$$x(k) = (0)^k(-1) = \begin{cases} -1 & \text{dla } k = 0 \\ 0 & \text{dla } k = 1, 2, ... \end{cases}$$

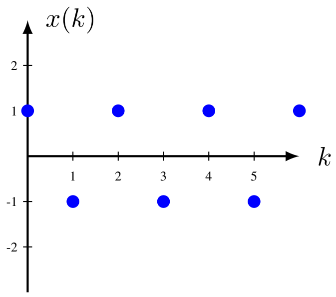


Zadanie 3.1.2

Narysować rozwiązanie równania różnicowego $x(k+1) = \lambda_i x(k)$
dla $i = 1, 2, 3$ gdzie
$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -\frac{1}{2}, \lambda_3 = 1$
przy czym $x(0) = 1$ i $k \geq 0$

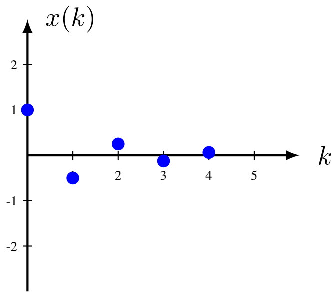
- $\lambda_1 = -1$

$x(k+1) = -x(k)$
$x(k) = (-1)^k \cdot 1 = (-1)^k$



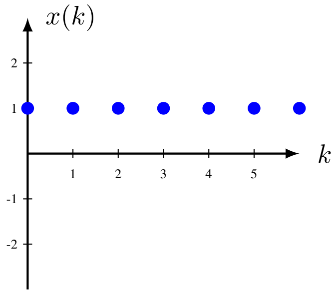
- $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$

$x(k+1) = -\frac{1}{2} \cdot x(k)$
$x(k) = (-\frac{1}{2})^k \cdot 1 = (-\frac{1}{2})^k$



- $\lambda_3 = 1$

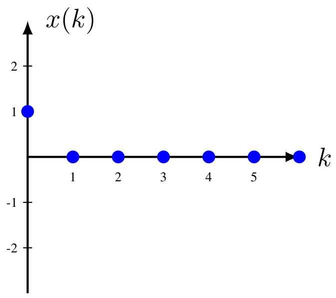
$x(k+1) = x(k)$
$x(k) = 1^k \cdot 1 = 1$



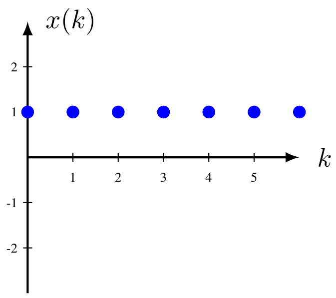
Zadanie 3.1.3

Narysować rozwiązanie równania różnicowego $x(k+1) = \lambda_i x(k)$
dla $i = 1, 2, 3$ gdzie
$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$
przy czym $x(0) = 1$ i $k \geq 0$

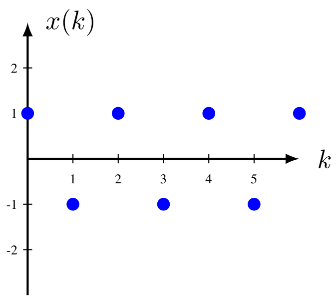
- $\lambda_1 = 0$



- $\lambda_2 = 1$



- $\lambda_3 = -1$

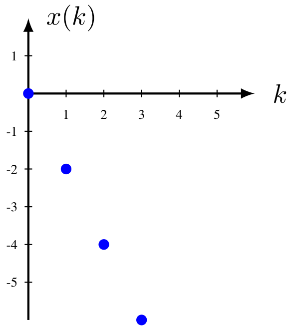


Zadanie 3.2.1

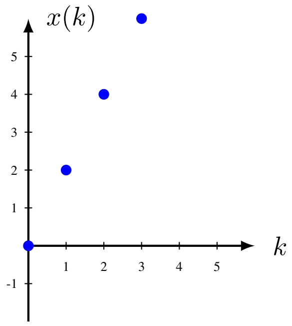
Narysować rozwiązanie równania różnicowego $x(k+1) = x(k) + u_i(k)$
dla $i = 1, 2, 3$ gdzie
$u_1 = -2, u_2 = 2, u_3 = 1$
przy czym $x(0) = 0$ i $k \geq 0$

$x(k+1) = Ax(i) + Bu(i)$
$x(k) = A^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-1-j} Bu(j)$
$A = 1, B = 1, \forall j \quad u(j) = u_i$
$\Rightarrow x(k) = x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} u$ dla $x(0) = 0$
$\Rightarrow x(k) = u_i \cdot k$

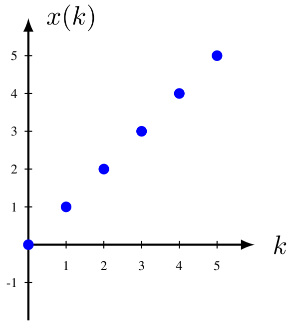
- $i = 1, u_i = -2$



- $i = 2, u_i = 2$



- $i = 3, u_i = 1$

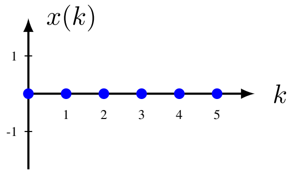


Zadanie 3.2.2

Narysować rozwiązanie równania różnicowego $x(k+1) = 2x(k) + u_i(k)$
dla $i = 1, 2, 3$ gdzie
$u_1 = 0, u_2 = -2, u_3 = 2$
przy czym $x(0) = 0$ i $k \geq 0$

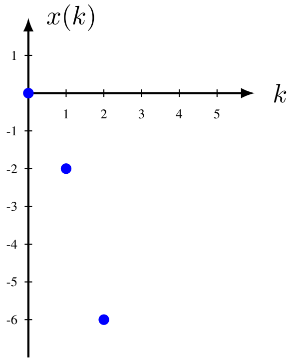
- $u_1 = 0$

$x(k+1) = 2x(k) + 0$
$x(k) = 2^k \cdot 0 = 0$



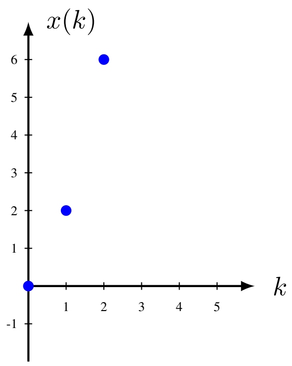
- $u_2 = -2$

$x(k+1) = 2x(k) - 2$
$x(k) = 2^k \cdot 0 + \sum_{j=0}^{k-1} 2^{k-1-j} \cdot (-2) = -2 \cdot \sum_{j=0}^{k-1} (2^k \cdot 2^{-1} \cdot 2^{-j})$
$= -2^k \cdot \sum_{j=0}^{k-1} (\frac{1}{2})^j = -2^k \cdot \frac{1-(\frac{1}{2})^k}{1-\frac{1}{2}} = -2^{k+1} + 2$



- $u_3 = 2$

$x(k+1) = 2x(k) + 2$
$x(k) = 2^k \cdot 0 + \sum_{j=0}^{k-1} 2^{k-1-j} \cdot (2) = 2 \cdot \sum_{j=0}^{k-1} (2^k \cdot 2^{-1} \cdot 2^{-j})$
$= 2^k \cdot \sum_{j=0}^{k-1} (\frac{1}{2})^j = 2^k \cdot \frac{1-(\frac{1}{2})^k}{1-\frac{1}{2}} = 2^{k+1} - 2$



Zadanie 3.3.1

Niech będzie dany układ ciągły opisany równaniem $\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t)$
(a) Znaleźć rozwiązanie tego układu dla: $x(0) = 0, u(t) = 1, a = -4, b = 3$.
(b) Znaleźć parametry układu dyskretnego, jeśli podł¡czono ekstrapolator pierwszego rzędu na wejściu i impulsator na wyjściu, przy czym pracuj¡ one synchronicznie z okresem próbkowania $t = 1$. Rozwiązać powstały układ.
(c) Jak wyżej, przy założeniu $t = 12$.
(d) Narysować wszystkie rozwiązania na jednym układzie współrzędnych. Opisać różnice.

Brak rozwiązania

Zadanie 3.3.2

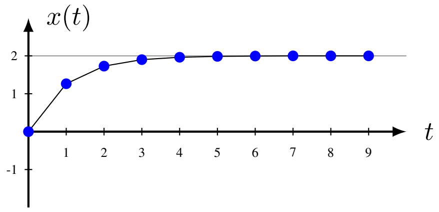
Niech będzie dany układ ciągły opisany równaniem $\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t)$
(a) Znaleźć rozwiązanie tego układu dla: $x(0) = 0, u(t) = 1, a = -1, b = 2$.
(b) Znaleźć parametry układu dyskretnego, jeśli podłączono ekstrapolator pierwszego rzędu na wejściu i impulsator na wyjściu, przy czym pracują one synchronicznie z okresem próbkowania $t = 1$. Rozwiązać powstały układ.
(c) Jak wyżej, przy założeniu $t = 10$.
(d) Narysować wszystkie rozwiązania na jednym układzie współrzędnych. Opisać różnice.

(a)
$\dot{x} = -x + 2$
$\frac{dx}{dt} = -x + 2$
$\frac{dx}{-x+2} = dt$
$-\ln|-x+2| = t + c$, gdzie c jest stałą
$\ln|-x+2| = -t + c$
$e^{-t+c} = -x + 2$
$e^{-t}e^{c} = -x + 2$
$ce^{-t} = -x + 2$, bo e^c to też stała

$x(0) = c + 2 = 0 \Rightarrow c = -2$
$ce^{-t} = -x + 2 \Rightarrow \boxed{x(t) = ce^{-t} + 2 = -2e^{-t} + 2}$

(b)
$h = 1$
$x^+(i) = x(ih) = x(i)$
$u^+(i) = u(i)$
$y^+(i) = y(i)$
$A^+ = e^{hA} = e^{-1}$
$B^+ = \int_0^1 e^{tA}B\,dt = \int_0^1 e^{-t}2\,dt = 2\int_0^1 e^{-t}\,dt = -2e^t|_0^1 = -2(e^{-1} - 1) = 2 - \frac{2}{e}$
$C^+ = C$
$x(i+1) = e^{-1}x(i) + (2 - \frac{2}{e})u(i) = \frac{x(i)}{e} + 2 - \frac{2}{e}$
$x(k) = (e^{-1})^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1}(e^{-1})^{k-1-j}(2 - \frac{2}{e}) = (2 - \frac{2}{e})\sum_{j=0}^{k-1}(e^{-k} \cdot e^1 \cdot e^j)$
$= (2 - \frac{2}{e})e^{1-k} \cdot \frac{1-e^k}{1-e} = 2(e \cdot e^{-k} - e^{-k})\frac{1-e^k}{1-e} = 2(-e^{-k})(1 - e^k) = 2 - 2e^{-k}$

(c)
$h = 10$
$x^+(i) = x(10i)$
$u^+(i) = u(10i)$
$A^+ = e^{10A} = e^{-10}$
$B^+ = 2\int_0^{10} e^{-t}\,dt = 2(-e^{-t}|_0^{10}) = -2(e^{-10} - 1) = 2 - 2e^{-10}$
$x(k) = \underbrace{(e^{-10})^k x(0)}_{=0} + \sum_{j=0}^{k-1}(e^{-10})^{k-1-j}(2 - 2e^{-10}) = (2 - 2e^{-10}) \cdot e^{-10k-10} \cdot \frac{1-(e^{10})^k}{1-e^{10}}$
$= 2(e^{-10k} \cdot e^{10} - e^{-10} \cdot e^{-10k} \cdot e^{10}) \cdot \frac{1-e^{10k}}{1-e^{10}} = 2(-e^{-10k}(1 - e^{10}))\frac{1-e^{10k}}{1-e^{10}} = 2 - 2e^{-10k}$



- wykres (a) jest liniowy, (b) i (c) punktowe - (a) punkty co 1, (b) punkty co 10 (?)

Zadanie 3.4.1

Obliczyć A^n dla macierzy
$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$A^n = PJP^{-1}$
$A^n = \underbrace{(PJP^{-1})(PJP^{-1})...(PJP^{-1})}_{n}$
$A^n = PJ^nP^{-1}$
$|[A - \lambda I]| = 0$
$(4-\lambda)(2-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 4, \lambda_2 = 2$
$[A - \lambda I]\omega_1 = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{11} \\ \omega_{12} \end{bmatrix} = 0 \qquad \begin{matrix} -2\omega_{12} = 0 \\ \omega_{11} \in \mathbb{R} \end{matrix} \qquad \omega_1 = \begin{bmatrix} \omega_{11} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{21} \\ \omega_{22} \end{bmatrix} = 0 \qquad \begin{matrix} 2\omega_{21} - 2\omega_{22} = 0 \\ \omega_{22} = \omega_{21} \\ \omega_{21} \in \mathbb{R} \end{matrix} \qquad \omega_2 = \begin{bmatrix} \omega_{21} \\ \omega_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$P = [\omega_1 \ \ \omega_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
$P^{-1} = \frac{1}{det(P)} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
$J = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, J^n = \begin{bmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}$
$A^n = PJ^nP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4^n & 2^n \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4^n & 2^n - 4^n \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}$

Zadanie 3.4.2

Obliczyć A^n dla macierzy
$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$

$A^n = PJ^nP^{-1}$
$|[A-\lambda I]| = (-\lambda)(2-\lambda)+4 = \lambda^2 - 2\lambda + 4 = 0$
$\Delta = 4 - 16 = -12$
$\lambda = 1 \pm i\sqrt{3}$

$\boxed{\lambda = 1 + i\sqrt{3}}$

$[A-\lambda I]\omega_1 = 0$

$$\begin{bmatrix} 2-1-i\sqrt{3} & 1 \\ -4 & -1-i\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{array}{ll} (1-i\sqrt{3})\omega_1 + \omega_2 = 0 & \Rightarrow \omega_2 = -(1-i\sqrt{3})\omega_1 \\ -4\omega_1 + (-1-i\sqrt{3})\omega_2 = 0 & \Rightarrow -4\omega_1 + 4\omega_1 = 0 \end{array}$$
$$\omega = \begin{bmatrix} 1 \\ -1+i\sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$
$$P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{r} \lambda = a \pm ib \\ tg\varphi = \dfrac{b}{a} \Rightarrow \varphi = arctg\dfrac{b}{a} \\ J = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \rightarrow J^n = (\sqrt{a^2+b^2})^n \begin{bmatrix} \cos n\varphi & \sin n\varphi \\ -\sin n\varphi & \cos n\varphi \end{bmatrix} \end{array}}$$

$\varphi = arctg\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$
$$J^n = 2^n \begin{bmatrix} \cos n\frac{\pi}{3} & \sin n\frac{\pi}{3} \\ -\sin n\frac{\pi}{3} & \cos n\frac{\pi}{3} \end{bmatrix}$$
$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \cdot 2^n \cdot \begin{bmatrix} \cos n\frac{\pi}{3} & \sin n\frac{\pi}{3} \\ -\sin n\frac{\pi}{3} & \cos n\frac{\pi}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$$
$$= 2^n \begin{bmatrix} \cos + \frac{\sqrt{3}}{3}\sin & \frac{\sqrt{3}}{3}\sin \\ -\frac{4}{3}\sqrt{3}\sin & -\frac{\sqrt{3}}{3}\sin + \cos \end{bmatrix}$$

Zadanie 3.4.3

Obliczyć A^n dla macierzy
$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

$A^n = PJ^nP^{-1}$
$|A - \lambda I| = 0$
$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-3)^2 - 1 = (\lambda - 3 - 1)(\lambda - 3 + 1) = (\lambda-4)(\lambda-2) = 0$

$\lambda_1 = 4$ $\qquad\qquad$ $\lambda_2 = 2$

$(A - \lambda_1 I)\omega_1 = 0$ $\qquad$ $(A - \lambda_1 I)\omega_2 = 0$

$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \omega_{11} \\ \omega_{12} \end{bmatrix}$ $\qquad$ $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \omega_{21} \\ \omega_{22} \end{bmatrix}$

$-\omega_{11} - \omega_{12} = 0$ $\qquad$ $\omega_{21} = \omega_{22}$

$\omega_{12} = -\omega_{11}$

$\omega_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\qquad$ $\omega_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\boxed{\frac{4^n}{2} = \frac{4^n}{4^{\frac{1}{2}}} = 4^{n-\frac{1}{2}} = \frac{2^n}{2} = 2^{n-1}}$

$J = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$J^n = \begin{bmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}$

$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4^n & 2^n \\ -4^n & 2^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4^{n-\frac{1}{2}} + 2^{n-1} & -4^{n-\frac{1}{2}} + 2^{n-1} \\ -4^{n-\frac{1}{2}} + 2^{n-1} & 4^{n-\frac{1}{2}} + 2^{n-1} \end{bmatrix}$

Zadanie 3.5.1

Do ciągłego systemu dynamicznego opisanego równaniami
$\dot{x}_1(t) = 2\pi x_2(t)$,
$\dot{x}_2(t) = -2\pi x_1(t) + u(t)$,
podłączono ekstrapolator rzędu zerowego na wejściu i impulsator na wyjściu, przy czym pracują one synchronicznie z okresem próbkowania $h = 1s$. Wyliczyć parametry systemu dyskretnego odpowiadające takiemu połączeniu.

$\dot{x}_1(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 2\pi \\ -2\pi & 0 \end{bmatrix}}_{A} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} u(t)$
$x^+(vi) = A^+x^+(i) + B^+u^+(i), h = 1s$
$A^+ = e^{hA}$
$A^+ = e^A = Pe^JP^{-1}$

$\begin{bmatrix} -\lambda & 2\pi \\ -2pi & -\lambda \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{array}{l} \lambda^2 + 4\pi^2 = 0 \\ \lambda = -4\pi^2 \\ \lambda_{1,2} = \pm 2\pi i \quad (p = 0, q = 2\pi) \end{array}$

$\begin{bmatrix} -2\pi i & \boxed{2\pi} \\ -2\pi & -2\pi i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{11} \\ \omega_{12} \end{bmatrix} = 0$

$\begin{array}{r} \omega_{11} \in \mathbb{R} \\ -2\pi i\omega_{11} + 2\pi\omega_{12} = 0 \\ \omega_{12} = i\omega_{11} \end{array} \Rightarrow \omega_1 = \begin{bmatrix} \omega_{11} \\ \omega_{12} \end{bmatrix} = \omega_{11} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \omega_{11} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + i\omega_{11} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = P^{-1} = I$

$\Rightarrow A$ jest postaci Jordana $\Rightarrow J = A = \begin{bmatrix} 0 & 2\pi \\ -2\pi & 0 \end{bmatrix}$

$e^J = e^P \cdot \begin{bmatrix} \cos(q) & \sin(q) \\ -\sin(q) & \cos(q) \end{bmatrix}$

$e^J = \cdot \begin{bmatrix} \cos(2\pi) & \sin(2\pi) \\ -\sin(2\pi) & \cos(2\pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$Pe^JP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$B^+ = \int_0^n e^{tA}B\, dt$
B jest stałą
$B^+ = \int_0^n e^{tA}\, dt\; B$

$\left| \begin{array}{r} tA = u - 1 \\ t = uA \\ dt = duA^{-1} \end{array} \right| B^+ = \int_o^{hA} e^u\, du\; A^{-1}B = [e^{hA} - e^0]A^{-1}B$

$e^{hA} = e^A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$e^0 = 1 = J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow B^+ = 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$x^+(i+1) = A^+x^+(i) + B^+u^+(i)$

$x^+(i+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x^+(i)$

Zadanie 3.5.2

Do ciągłego systemu dynamicznego opisanego równaniami
$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$,
$y(t) = Cx(t)$,
przy czym

$$A = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

podłączono ekstrapolator rzędu zerowego na wejściu i impulsator na wyjściu, przy czym pracują one synchronicznie z okresem próbkowania $h = 1s$. Wyliczyć parametry systemu dyskretnego odpowiadające takiemu połączeniu.

$x^+(i) = x(ih) = x(i)$
$y^+(i) = y(ih) = y(i)$
$u^+(i) = u(ih) = u(i)$
$A^+ = e^{hA}$
A jest w postaci Jordana, więc $A = J$

$$A^+ = e^{hJ} = e^J = \begin{bmatrix} e^{-0.5} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2} \end{bmatrix}$$

$$B^+ = \int_0^h e^{tA} B\, dt = \int_0^1 \begin{bmatrix} e^{-0.5} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} dt = \int_0^1 \begin{bmatrix} e^{-\frac{t}{2}} \\ e^{-t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix} dt$$

$$= \begin{bmatrix} -2e^{-\frac{t}{2}}|_0^1 \\ -e^{-t}|_0^1 \\ -\frac{1}{2}e^{-2t}|_0^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - 2e^{-\frac{1}{2}} \\ 1 - e^{-1} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2} \end{bmatrix}$$

$$C^+ = C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

Zadanie 3.5.3

Do ciągłego systemu dynamicznego opisanego równaniami
$\dot{x}_1(t) = -2x_1(t) + x_2(t)$,
$\dot{x}_2(t) = -2x_1(t)$,
podłączono ekstrapolator rzędu zerowego na wejściu i impulsator na wyjściu, przy czym pracują one synchronicznie z okresem próbkowania $h = 1s$. Wyliczyć parametry systemu dyskretnego odpowiadające takiemu połączeniu.

$A = -2 \quad B = 1 \quad C = -2$
$A^+ = e^{Ah} = e^{-2}$
$B^+ = \int_0^h e^{tA} B\, dt = \int_0^h e^{-2t}\, dt = | -\frac{1}{2} e^{-2t}|_0^h = -\frac{1}{2} e^{-2}$
$C^+ = C = -2$

$$\boxed{A^+ = e^-2 \qquad B^+ = -\frac{1}{2} e^{-2} \qquad C^+ = -2}$$

Zadanie 3.6.1

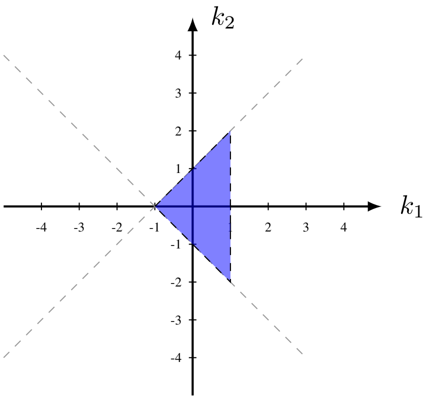
Dla jakich wartości parametrów k_1 i k_2 system dynamiczny
$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & k_2 \end{bmatrix} x(k)$
będzie asymptotycznie stabilny. Zaznaczyć obszar stabilności na płaszczyźnie $k1 \times k2$

$x(k+1) = Ax(k)$
$|[A - \lambda I]| = 0$
$(-\lambda)(k_2 - \lambda) + k_1 = 0$
$\lambda^2 - k_2\lambda + k_1 = 0$
$\lambda = \frac{z+1}{z-1}$
$(\frac{z+1}{z-1})^2 - k_2(\frac{z+1}{z-1}) + k_1 = 0$
$\frac{(z+1)^2 - k_2(z+1)(z-1) + k_1(z-1)^2}{(z-1)^2} = 0$
Rozważany układ jest asymptotycznie stabilny $\Leftrightarrow$ wartości własne (λ) macierzy A leżą wewnątrz koła jednostkowego na płaszczyźnie zespolonej $\Leftrightarrow$ pierwiastki wielomianu $L(z) = (z+1)^2 - k_2(z+1)(z-1) + k_1(z-1)^2$ leżą w lewej półpłaszczyźnie zespolonej $\Leftrightarrow$ spełnione jest dla wielomianu $L(z)$ kryterium Hurwitza
$L(z) = (z+1)^2 - k_2(z+1)(z-1) + k_1(z-1)^2$
$L(z) = x^2 + 2z + 1 - k_2z^2 + k_2 + k_1z^2 - 2k_1z + k_1$
$L(z) = z^2(1 + k_1 - k_2) + z(2 - 2k_1) + (1 + k_1 + k_2) = 0$

W.K. $a_2 > 0, a_1 > 0, a_0 > 0$

$$\begin{aligned} 1 + k_1 - k_2 &> 0 \\ k_2 &< k_1 + 1 \\ 2 - 2k_1 &> 0 \\ k_1 &< 1 \\ 1 + k_1 + k_2 &> 0 \\ k_2 &> -k_1 - 1 \end{aligned}$$

$\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - 2k_1 & 0 \\ 1 + k_1 - k_2 & 1 + k_1 + k_2 \end{bmatrix}$
$a_1 > 0 \wedge a_1a_0 > 0$ - spełnione dla W.K.



Zadanie 3.6.2

Dla jakich wartości parametrów k_1 i k_2 system dynamiczny

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} k_1 - k_2 & 1 & 2 \\ 0 & k_1 + k_2 & 1 \\ 0 & 0 & k_1^2 + k_2^2 \end{bmatrix} x(k)$$

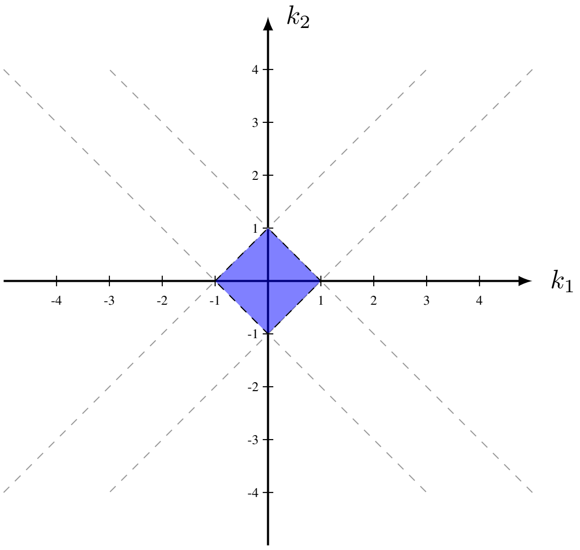
będzie asymptotycznie stabilny. Zaznaczyć obszar stabilności na płaszczyźnie $k1 \times k2$

$\lambda_1 = k_1 - k_2 \ \vee \ \lambda_2 = k_1 + k_2 \ \vee \ \lambda_3 = k_1^2 + k_2^2$

dyskretny system liniowy jesy asymprotycznie stabilny $\Leftrightarrow$ wartości własne macierzy A leżą w kole jednostkowym o środku w zerze na płasczyźnie zespolonej (wystarczy sprawdzić warunek $|\lambda_i| < 1$, nie trzeba z Hurwitza)

- $\lambda_1 = k_1 - k_2$
  $k_1 - k^2 < 1 \quad \wedge \quad k_1 - k_2 > -1$
  $k_2 > k_1 - 1 \quad \wedge \quad k_2 < k_1 + 1$
- $\lambda_1 = k_1 + k_2$
  $k_1 + k_2 < 1 \quad \wedge \quad k_1 + k_2 > -1$
  $k_2 < -k_1 + 1 \quad \wedge \quad k_2 > -k_1 - 1$
- $\lambda_1 = k_1^2 + k_2^2$
  $k_1^2 + k_2^2 < 1 \quad \wedge \quad k_1^2 + k_2^2 > -1$

$\lambda_1 = k_1 - k_2 \ \wedge \ \lambda_2 = k_1 + k_2 \ \wedge \ \lambda_3 = k_1^2 + k_2^2$

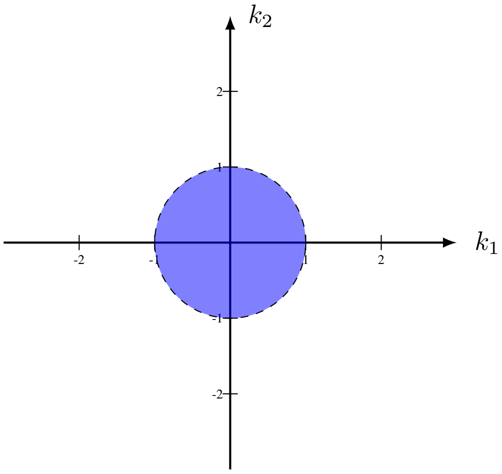


Zadanie 3.6.3

Dla jakich wartości parametrów k_1 i k_2 system dynamiczny
$x(k+1) = \begin{bmatrix} -k_2 & k_1 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix} x(k)$
będzie asymptotycznie stabilny. Zaznaczyć obszar stabilności na płaszczyźnie $k1 \times k2$

$|A - \lambda I| = 0$
$\begin{bmatrix} -k_2 - \lambda & k_1 \\ -k_1 & -k_2 - \lambda \end{bmatrix} = (k_2 + \lambda)^2 + k_1^2 = (k_2 + \lambda)^2 - (ik_1)^2 = (\lambda + k_2 + ik_1) \cdot (\lambda + k_2 - ik_1) = 0$

$\lambda = -k_2 \pm k_1$
Układ jest asymptotycznie stabilny, gdy wartości własne macierzy leżą wewnątrz koła jednostkowego na płaszczyźnie zespolonej o środku w zerze.
$|\lambda| < 1$
$|\lambda| = \sqrt{(-k_2)^2 + k_1^2}$
$\sqrt{k_1^2 + k_2^2} < 1$
$k_1^2 + k_2^2 < 1$



Zadanie 3.7.1

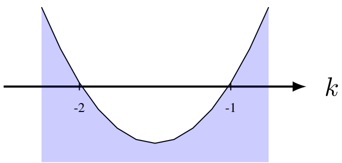
Dla jakich wartości parametru k_1 system dynamiczny
$x(k+1) = \begin{bmatrix} -0.5k_1 & 0 \\ 2 & -k_1 \end{bmatrix} x(k)$
będzie niestabilny.

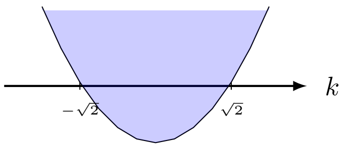
$(-0.5k_1 - 2)(-k_1 - \lambda) = 0$
$0.5k_1^2 + 0.5k_1\lambda + k_1\lambda + \lambda^2 = 0$
$\lambda^2 + 1.5k_1\lambda + 0.5k_1^2 = 0$
$\lambda = \frac{z+1}{z-1}$
$(\frac{z+1}{z-1})^2 - 1.5k_1(\frac{z+1}{z-1}) + 0.5k_1^2 = 0$
$z^2 + 2z + 1 + 1.5k_1z^2 - 1.5k_1 + 0.5k_1^2z^2 - k_1^2z + 0.5k_1^2 = 0$
$z^2\underbrace{(0.5k_1^2 + 1.5k_1 + 1)}_{a_2} + z\underbrace{(2 - k_1^2)}_{a_1} + \underbrace{(0.5k_1^2 - 1.5k_1 + 1)}_{a_0} = 0$

Z kryterium Hurwitza system będzie stabilny gdy:

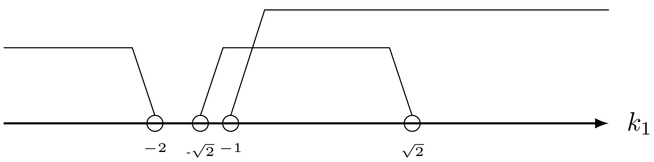
$$\begin{array}{lcrcr} a_2 > 0 & & 0.5k_1^2 + 1.5k_1 + 1 > 0 & & 2 - k_1^2 > 0 \\ a_1 > 0 & \Leftrightarrow & k_1^2 + 3k_1 + 2 > 0 & \vee & (\sqrt{2} - k_1)(\sqrt{2} + k_1) > 0 \\ a_0 > 0 & & (k_1 + 1)(k_1 + 2) > 0 & & (k_1 - \sqrt{2})(\sqrt{2} + k_1) < 0 \end{array}$$

ponieważ W.K. zawiera w sobie W.W., aby spełnione zostało





kryterium Hurwitza musi być spełniony iloczyn warunków: $a_2 > 0 \wedge a_1 > 0$



$\Rightarrow$ układ jest stabilny $\Leftrightarrow k_1 \in (-1, \sqrt{2})$
$\Rightarrow$ układ jest niestabilny $\Leftrightarrow k_1 \in (-\infty, -1) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$

Zadanie 3.7.2

Dla jakich wartości parametru k_1 system dynamiczny
$x(k+1) = \begin{bmatrix} -1 & -k_1 \\ -k_1 & -3 \end{bmatrix} x(k)$
będzie niestabilny.

$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -k_1 \\ -k_1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (1+\lambda)(3+\lambda) - k_1^2 = \lambda^2 + 3 + 4\lambda - k_1^2 = 0$
$\Delta = 16 - 12 + 4k_1^2 = 4 + 4k_1^2$
$\lambda = -2 \pm \sqrt{1+k_1^2}$

system będzie niestabilny $\Leftrightarrow |\lambda_i| > 1$

- $\lambda = -2 + \sqrt{1+k_1^2}$

$$\begin{array}{ccc} -2+\sqrt{1+k_1^2} > 1 & \vee & -2+\sqrt{1+k_1^2} < -1 \\ \sqrt{1+k_1^2} > 3 & & \sqrt{1+k_1^2} < 1 \\ k_1^2 > 8 & & k_1^2 < 0 \\ k_1 > 2\sqrt{2} \vee k_1 < -2\sqrt{2} & & \text{sprzeczne} \end{array}$$

- $\lambda = -2 - \sqrt{1+k_1^2}$

$$\begin{array}{ccc} -2-\sqrt{1+k_1^2} > 1 & \vee & -2-\sqrt{1+k_1^2} < -1 \\ \sqrt{1+k_1^2} > -3 & & \sqrt{1+k_1^2} > -1 \\ \text{sprzeczne} & & k_1 \in \mathbb{R} \end{array}$$

$\lambda = -2 + \sqrt{1+k_1^2} \vee \lambda = -2 - \sqrt{1+k_1^2} \Rightarrow k_1 \in \mathbb{R}$

Zadanie 3.7.3

Dla jakich wartości parametru k_1 system dynamiczny
$x(k+1) = \begin{bmatrix} -k_1 & k_1 \\ -k_1 & -k_1 \end{bmatrix} x(k)$
będzie niestabilny.

$\begin{bmatrix} -k_1 - \lambda & k_1 \\ -k_1 & -k_1 - \lambda \end{bmatrix} = (-k_1-\lambda)^2+k_1^2 = (-k_1-\lambda)^2-(ik_1)^2 = (-k_1-\lambda-ik_1)(-k_1-\lambda+ik_1) = (\lambda+k_1-ik_1)(\lambda+k_1+ik_1) = 0$
$\lambda = -k_1 \pm ik_1$
układ jest niestabilny gdy $|\lambda| > 1$
podstawiamy tu moduł - więc usuwamy i z zespolonej.
$|\lambda| = \sqrt{(-k_1)^2 + (k_1)^2} = \sqrt{k_1^2 + k_1^2} > 1$
$2k_1^2 > 1$
$k_1^2 > \frac{1}{2}$
$k_1 > \frac{\sqrt{2}}{2}$

Zadanie 3.8.1

Wyznaczyć rozwiązanie następującego równania różnicowego (rekurencyjnego)
$x(k+2) + x(k+1) - 2x(k) = 0, x(0) = 1, x(1) = -1$

---

zakładam rozwiązanie postaci z^n
$x^n, +z^{n-1} + 2z^{n-2} = 0$
$z^2 + z - 2 = 0$ - wielomian charakterystyczny
$W(z) = (z+2)(z-1)$
$z_1 = -2, \;\; z_2 = 1$
rozwiązanie równania jest postaci:
$x(k) = Cz_1^k + Dz_2^k$
podstawiając $x(0)$ oraz $x(1)$
$\begin{cases} x(0) = 1 = C + D \\ x(1) = -1 = Cz_1 + Dz_2 \end{cases}$
$\begin{cases} C = 1 - D \\ -1 = -2C + D \end{cases}$
$\begin{cases} D = 1 - C \\ -1 = -2C + 1 - C \end{cases}$
$\begin{cases} D = 1 - C \\ 3C = 2 \end{cases}$
$C = \frac{2}{3} \quad D = \frac{1}{3}$
$\Rightarrow x(k) = \frac{1}{3}(2 \cdot (-2)^k + 1^k)$
$\boxed{x(k) = \dfrac{2}{3}(-2)^k + \dfrac{1}{3}1^k}$

Zadanie 3.8.2

Wyznaczyć rozwiązanie następującego równania różnicowego (rekurencyjnego)
$x(k+2) + 3x(k+1) + 2x(k) = 0, x(0) = 2, x(1) = -3$

$q^{k+2} + 3q^{k+1} + 2q = 0$
$q^2 + 3q + 2 = 0$
$\Delta = 9 - 8 = 1$
$q = \frac{-3+1}{2} = -1 \quad \vee \quad q = \frac{-3-1}{2} = -2$
$x(k) = a(-1)^k + b(-2)^k$
$\begin{cases} x(0) = a + b = 2 \\ x(1) = -a - 2b = -3 \end{cases}$
$b = 1 \wedge a = 1$
$\boxed{x(k) = (-1)^k + (-2)^k}$

Zadanie 3.8.3

Wyznaczyć rozwiązanie następującego równania różnicowego (rekurencyjnego)
$x(k+2) + 2x(k+1) - 3x(k) = 0, x(0) = 2, x(1) = -2$

$x^2 + 2x - 3 = 0$
$\Delta = 4 + 12 = 16, \sqrt{\Delta} = 4$
$x_1 = \frac{-2-4}{2} = -3 \wedge x_2 = 1$
$x(k) = C_1 x_1^k + C_2 x_2^k$
$\begin{cases} x(0) = 2 = C_1 + C_2 \Rightarrow C_2 = 2 - C_1 \\ x(1) = -2 = -3C_1 + C_2 \end{cases}$
$-2 = -3C_1 + 2 - C_1 \Rightarrow C_1 = 1$
$C_2 = 1$
$\boxed{x(k) = -3^k + 1}$

Alternatywne :
równanie charakterystyczne
$r^2 + 2r - 3 = 0$
$(r+1)^2 - 4 = 0$
$(r+1-2)(r+1+2) = 0$
$(r-1)(r+3)$
$r_1 = 1 \quad r_2 = -3$

$x(k) = c_1 r_1^k + c_2 r_2^k$
$x(0) = 2 = c_1 + c_2$
$x(1) = -2 = c_1 + 3c_2$

$\begin{cases} 2 = c_1 + c_2 \\ -2 = c_1 - 3c_2 \end{cases}$
$4 = 4c_2$
$c_1 = 1 \quad c_2 = 1$

$\boxed{x(k) = 1 + (-3)^k}$

Zadanie 3.9.1

Dany jest układ dyskretny

$$x(k+1) = Ax(k), A = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

przy czym $k = 1, 2, ...$ Wyznaczyć $x(n)$.

---

wielomian charakterystyczny: $|[A - \lambda I]| = 0$

$$\begin{bmatrix} -\lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} = (-\lambda)^n \text{(wyznacznik macierzy diagonalnej)}$$

Z Tw. Cagleya-Hamiltona wiadomo, że każda macierz spełnia swój wielomian charakterystyczny
$A^n = 0$

rozwiązanie równania $x(k+1) = Ax(k)$ ma postać $x(k) = A^k x(0)$ czyli $x(n) = A^n x(0) = 0$
Biorąc więc pod uwagę fakt $A^n = 0$ wiadomo, że rozwiązanie x(k) stanie się zerem w cco najwyżej n krokach, niezależnie od warunku początkowego $x(0)$

Zadanie 3.9.2

Dany jest układ dyskretny

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n\times n}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

przy czym $k = 1, 2, ...$ Wyznaczyć $x(n)$ wiedząc, że $u(i) = 1$ dla $i = 1, 2, ..., n$.

$x(n) = A^n x(0) + \sum_{j=0}^{n-1} A^{n-1-j} Bu(j)$
Zauważmy, że $\det(A) = 0$ (bo same zera na przekątnej)
wtedy $\det(\lambda I - A) = \lambda^n$
z Tw. Cagleya-Hamiltona $A^n = 0$ (każda macierz spełnia swój wielomian charakterystyczny)
mamy więc $A^n x(0) = 0$, czyli $x(n) = \sum_{j=0}^{n-1} A^{n-1-j} B \underbrace{u(j)}_{=1}$

Przy kolejnych mnożeniach macierzy A podniesionej do jakiejś potęgi przez B otrzymujemy pierwszą kolumnę macierzy A, która zawiera same zera, poza przypadkiem $A^0 = I$ (macierz jednostkowa), więc sumujemy $n-1$ kolumn samych zer oraz jedną równą B $(I \cdot B = B)$
ostatecznie $\boxed{x(n) = B}$

Zadanie 3.9.3

Dany jest układ dyskretny

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n\times n}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

przy czym $k = 1, 2, ...$ Wyznaczyć $x(n)$ wiedząc, że $u(i) = 1$ dla $i = 1, 2, ..., n$.

$|A| = 0$
$x(k+1) = Ax(k)$
$|\lambda I - A| = \lambda^n$
z Tw. Cagleya-Hamiltona:
$A^n = 0$
$x(1) = Ax(0) + B$
$x(2) = A^2x(0) + (A+1)B$
$x(3) = A^3x(0) + (A^2 + A + 1)B$
...
$x(n) = A^nx(0) + (A^{n-1} + A^{n-2} + ... + 1)B$
ponieważ tylko $A^n = 0$, więc dla każdego $A^{n-1}, A^{n-2}, ... \neq 0$
te potęgi będą miały jakieś śmieci w wartościach, nie istotne co tam będzie. Ważne, że tam gdzie w A są 0 nie pojawi się nic nowego, czyli gdzie było 0 przed potęgowaniem, tam będzie też po. $\Rightarrow$ wynik iloczynu $A^iB = 0$ (macierz zerowa), $i = 1, ..., n-1 \Rightarrow \boxed{x(n) = B}$

Zadanie 3.9.4

Dany jest układ dyskretny

$$x(k+1) = Ax(k), A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

przy czym $k = 1, 2, ...$ Wyznaczyć $x(2n)$.

$|A| = 0$
$x(k+1) = Ax(k)$
$|\lambda I - A| = \lambda^n$
z Tw. Cagleya-Hamiltona:
$A^n = 0$
$x(1) = Ax(0)$
$x(2) = A^2x(0)$
$x(3) = A^3x(0)$
...
$x(n) = A^nx(0) = 0$
$x(2n) = A^nx(n) = 0$

Tydzień 4

Analiza częstotliwościowa systemów dynamicznych

Zadanie 4.1.1

Układ jest opisany równaniami stanu w postaci

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

z macierzami

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Znaleźć transmitancję operatorową tego układu przy założeniu zerowych warunków początkowych $x(0) = 0$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} \cdot B$$

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ -2 & s-3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s-1)(s-3)} \begin{bmatrix} s-3 & 0 \\ 2 & s-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & 0 \\ \frac{2}{(s-1)(s-3)} & \frac{1}{s-3} \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & 0 \\ \frac{2}{(s-1)(s-3)} & \frac{1}{s-3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{s-1}$$

Zadanie 4.1.2

Układ jest opisany równaniami stanu w postaci

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

z macierzami

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Znaleźć transmitancję operatorową tego układu przy założeniu zerowych warunków początkowych $x(0) = 0$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s-2 & 0 \\ 5 & s \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{s-2} & 0 \\ -5 & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{2}{s} - \frac{10}{s \cdot (s-2)} = \frac{2s-14}{s(s-2)}$$

Zadanie 4.1.3

Układ jest opisany równaniami stanu w postaci

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

z macierzami

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Znaleźć transmitancję operatorową tego układu przy założeniu zerowych warunków początkowych $x(0) = 0$

Zadanie 4.2.1

Mając dana transmitancje $G(s) = \frac{5}{s+3}$ okreslić amplitudę sygnału wyjściowego, jesli na wejście podano:
a) $2\sin(4t + 2\pi)$
b) $-\sin(t)$
c) $0.1\cos(4t + \frac{\pi}{6})$

$G(s) = \frac{5}{s+3}$
$A(\omega) = |G(j\omega)|$
$u(t) = A_u \sin(\omega t + \varphi_u)$ - wejście
$A_y = A(\omega) \cdot A_u$

a)
$2\sin(4t + 2\pi) = u(t)$
$A_u = 2$
$\omega = 4$
$A(\omega) = |\frac{5}{4j+3}| = |\frac{5(3-4j)}{9+16}| = |\frac{3-4j}{5}| = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = 1$
$A_y = 1 \cdot 2 = \boxed{2}$ $\quad A(\omega) = \frac{5}{\sqrt{16+9}} = 1$

b)
$-\sin(t) = u(t)$
$A_u = -1$
$\omega = 1$
$A(\omega) = |\frac{5}{j+3}| = |\frac{5(3-j)}{9+1}| = |\frac{3-j}{2}| = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$
$A_y = -1 \cdot \frac{\sqrt{10}}{2} = \boxed{-\frac{\sqrt{10}}{2}}$ $\quad A(\omega) = \frac{5}{\sqrt{9+1}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

c)
$0.1\cos(4t + \frac{\pi}{6}) = u(t)$
$\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha \Rightarrow \cos(4t + \frac{\pi}{6}) = \cos(\frac{\pi}{2} - (\frac{2\pi}{6} - 4t) = \sin(\frac{2\pi}{6} - 4t)$
$u(t) = \frac{1}{10}\sin(\frac{\pi}{3} - 4t)$
$A_u = \frac{1}{10} \quad \omega = -4$
$A(\omega) = |\frac{5}{-4j+3}| = |\frac{5(3+4j)}{9+16}| = |\frac{3+4j}{5}| = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = 1$
$A_y = 1 \cdot \frac{1}{10} = \boxed{\frac{1}{10}}$ $\quad A(\omega) = \frac{5}{\sqrt{16+9}} = 1$

Zadanie 4.2.2

Mając dana transmitancje $G(s) = \frac{30}{s+2}$ okreslić amplitudę sygnału wyjściowego, jesli na wejście podano:
a) $\sin(t + \frac{2\pi}{3})$
b) $0.5\sin(2t)$
c) $8\cos(3t + \frac{2\pi}{3})$

Zadanie 4.3.1

Za pomocą transmitancji znaleźć odpowiedź układu 1 na skok jednostkowy, czyli funkcję postaci:
$u(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ 1, t \geqslant 0 \end{cases}$
Zakladamy, że $x(0) = 0$
$\dot{x}(t) = -4x(t) + 8u(t)$
$y(t) = x(t)$

$\begin{cases} \dot{x}(t) = -4x(t) + 8u(t) \\ y(t) = x(t) \end{cases} \qquad x(0) = 0$
$C = 1 \quad A = -4 \quad B = 8$
$G(s) = 1 \cdot (s+4)^{-1} \cdot 8 = 8 \cdot \frac{1}{s+4}$
$U(s) = \frac{1}{s}$
tw. Laplace'a dla skoku jednopstkowego $Y(s) = G(s) \cdot U(s)$
$Y(s) = \frac{8}{s+4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{s} - \frac{2}{s+4}$
$\frac{A}{s} + \frac{B}{s+4} = \frac{8}{s(s+4)}$
$A(s+4) + Bs = 8$
$s(A+B) + 4A = 8$
$A = 2 \quad B = -2$
$\boxed{y(t) = -2e^{-4t} + 2}$
$\uparrow$
odwrotne tw. Laplace'a
$\mathcal{L}\{a\} = a\frac{1}{s}$
$\mathcal{L}\{ae^{bt}\} = a\frac{1}{s-b}$

Zadanie 4.3.2

Za pomocą transmitancji znaleźć odpowiedź układu 1 na skok jednostkowy, czyli funkcję postaci:
$u(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ 1, t \geqslant 0 \end{cases}$
Zakladamy, że $x(0) = 0$
$\dot{x}(t) = 5x(t) - 3u(t)$
$y(t) = x(t)$

Zadanie 4.4.1

Na układ o transmitancji operatorowej $G(s) = \frac{20}{s+10}$ podano sygnał sinusoidalny $2\sin(4.5t + \frac{\pi}{6})$. Obliczyć, jak zmieni się amplituda sygnału wyjściowego.

$A_u = 2 \quad \omega = 4.5 = \frac{9}{2}$

$A(\omega) = |\frac{20}{j\frac{9}{2}+10}| = |\frac{20(10-\frac{9}{2}j)}{100+\frac{81}{4}}| = |\frac{80(10-\frac{9}{2})j}{481}| = \sqrt{\frac{800^2+360^2}{481^2}} \approx 1.82$

$A(\omega) = |\frac{20}{j\frac{9}{2}+10}| = \frac{20}{\sqrt{100+\frac{81}{4}}} = \frac{40}{\sqrt{481}} \approx 1.82$ $A_y = A(\omega) \cdot 2$

$\frac{A_y}{A_u} = A(\omega)$

Amplituda sygnału wejśicowego będzie ok. 1.82 razy większa niż wejściowego

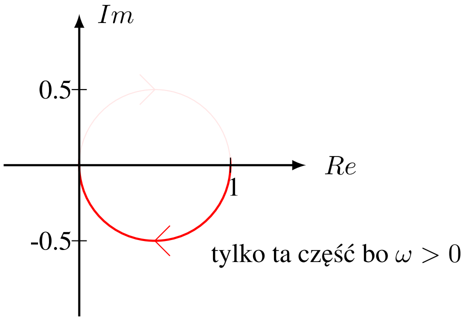
Zadanie 4.4.2

Na układ o transmitancji operatorowej $G(s) = \frac{400}{s+30}$ podano sygnał sinusoidalny $5\sin(2t + \frac{\pi}{3})$. Obliczyć, jak zmieni się amplituda sygnału wyjściowego.

Zadanie 4.5.1

Narysowac charakterystyki Nyquista dla układu opisanego transmitancja operatorowa:
$G(s) = \frac{s+2}{s^2+3s+2}$
Podac wzór na transmitancje widmowa tego układu (w postaci rozbicia na czesc urojona i rzeczywistą).

$G(s) = \frac{s+2}{s^2+3s+2} = \frac{s+2}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1}$

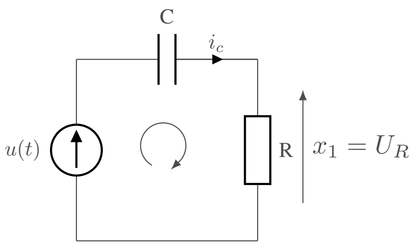


$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega+1} = \frac{1-j\omega}{1+\omega^2} = \boxed{\frac{1}{1+\omega^2} + j\frac{-\omega}{1+\omega^2}}$

Zadanie 4.5.2

Narysowac charakterystyki Nyquista dla układu opisanego transmitancja operatorowa:
$G(s) = \frac{2s}{3s^2+3s}$
Podac wzór na transmitancje widmowa tego układu (w postaci rozbicia na czesc urojona i rzeczywistą).

Zadanie 4.6.1



Przeanalizować układ z rysunku i znaleźć równania opisujące ten układ. Za wyjście przyjąć napięcie na oporniku. Znaleźć transmitancję operatorową i widmową układu
Zakladamy ze: $R = 1000\Omega, C = 1mF$

$$\begin{cases} u(t) - u_c(t) - u_R(t) = 0 \\ y(t) = u_R(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(t) - u_c(t) - RC\dot{u}_c(t) = 0 \\ y(t) = RC\dot{u}_c(t) \end{cases}$$

$$\left.\begin{cases} u(t) = +u_c(t) + RC\dot{u}_c(t) \\ y(t) = RC\dot{u}_c(t) \end{cases}\quad\right| \mathscr{L}$$

Transformata Laplace'a

$$\begin{cases} U(s) = U_c(s) + sRC \cdot U_c(s) + u_c(0) \\ Y(s) = sRC \cdot U_c(s) + u_c(0) \end{cases}$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{sRC \cdot U_c(s) + u_c(0)}{U_c(s) + sRC \cdot U_c(s) + u_c(0)} = \frac{sRC \cdot U_c(s)}{U_c(s) + sRC \cdot U_c(s)} = \frac{\cancel{U_c(s)} \cdot sRC}{\cancel{U_c(s)} \cdot (sRC+1)}$$

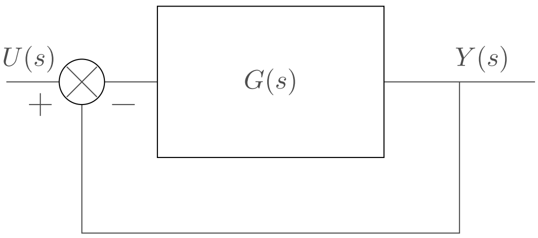
Podstawiamy R i C

$$G(s) = \frac{s}{s+1}$$

$$G(j\omega) = \frac{j\omega}{j\omega+1} = \frac{j\omega}{j\omega+1} \cdot \frac{1-j\omega}{1-j\omega} = \frac{j\omega+\omega^2}{1+\omega^2} = \frac{\omega^2}{\omega^2+1} + j\frac{\omega}{\omega^2+1}$$

Zadanie 4.7.1

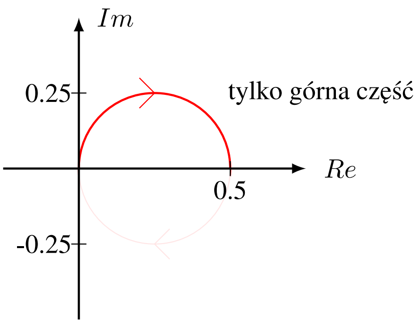
Niech będzie dany układ opisany transmitancją $G(s)$:
$G(s) = \frac{s}{s^2+2s+1}$
Korzystajac z kryterium Nyquista sprawdzić, czy układ zamkniety postaci 7 będzie asymptotycznie stabilny.



$G(s) = \frac{s}{s^2+2s+1}$
$a_2 = 1 \;\; a_1 = 2 \;\; a_0 = 1$
Układ zamknięty będzie asymptotycznie stabilny jeżeli układ otwarty będzie asymptotycznie stabilny oraz wykres charakterystyki amplitudowo-fazowej transformacji $G(s)$ nie będzie obejmował punktu (-1, 0) na płaszczyźnie zespolonej.
sprawdź czy układ otwarty jest asymptotycznie stabilny z Hurwitza. Wystarczy sprawdzić dla $s^2 + 2s + 1$

$$\begin{array}{cc} a_1 & a_3 \\ \multicolumn{2}{c}{\left[\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{array}\right]} \\ a_0 & a_2 \end{array}$$

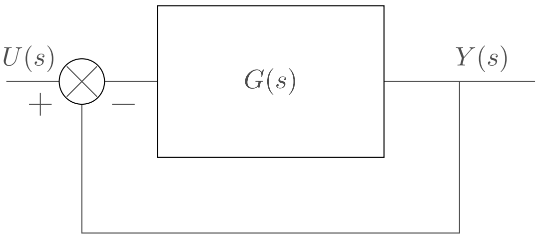
$2 > 0$
$2 \cdot 1 - 0 > 0$
więc układ otwarty jest asymptotycznie stabilny.



Nie obejmuje punktu (-1,0) więc jest asymptotycznie stabilny.
$G(j\omega) = \frac{j\omega}{(j\omega)^2+2j\omega+1} = \frac{j\omega}{-\omega^2+2j\omega+1} = \frac{j\omega(1-\omega^2-2j\omega)}{(1-\omega^2+2j\omega)(1-\omega^2-2j\omega)} = \frac{j\omega-j\omega^3+2\omega^2}{1-2\omega^2+\omega^4+4\omega^2} = \frac{2\omega^2}{(\omega^2+1)^2} + j\frac{\omega-\omega^3}{(\omega^2+1)^2}$

Zadanie 4.7.2

Niech będzie dany układ opisany transmitancją $G(s)$:
$G(s) = \frac{s^2+s+1}{s^3-s^2+2s-2}$
Korzystajac z kryterium Nyquista sprawdzić, czy układ zamkniety postaci 7 będzie asymptotycznie stabilny.



Zadanie 4.8.1

Rozwiązanie równania różniczkowego
$\dot{x}(t) = -4x(t) + 3\sin(2t)$
gdzie $x(0) = 0, t \geqslant 0$ ma postać
$x(t) = ae^{-4t} + A\sin(2t + \varphi)$
Obliczyć A i φ.

$u(t) = 3\sin(2t)$
$A_u = 3 \quad \omega = 2 \quad y_u = 0$
$A = -4 \quad B = 3 \quad C = 1$
$G(s) = 1 \cdot (s+4)^{-1} \cdot 3 = 3 \cdot \frac{1}{s+4}$
$A(\omega) = |\frac{3}{2j+4}| = \frac{3}{\sqrt{16+4}} = \frac{3}{2\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{10}$
$A_y = 3 \cdot A(\omega) = \frac{9\sqrt{5}}{10}$
$\varphi_y = \arg G(j\omega) + \varphi_u$
$G(j\omega) = \frac{3}{2j+4} = \frac{3(4-2j)}{20} = \frac{3}{5} - \frac{3}{10}j$

argument liczby $a + bi$:
$$\varphi = \begin{cases} \text{arctg}(\frac{b}{a}), a > 0 \\ \text{arctg}(\frac{b}{a}) + \pi, a < 0 \end{cases}$$

$\arg G(j\omega) = \text{arctg}(-\frac{3}{10} \cdot \frac{5}{3}) = \boxed{\text{arctg}(-\frac{1}{2})}$

Zadanie 4.8.2

Rozwiązanie równania różniczkowego
$\dot{x}(t) = -x(t) + 10\sin(5t + \frac{\pi}{3})$
gdzie $x(0) = 0, t \geqslant 0$ ma postać
$x(t) = ae^{-4t} + A\sin(5t + \varphi)$
Obliczyć A i φ.

Zadanie 4.9.1

Rozwiązanie równania różniczkowego
$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) = -4x(t) + 3\sin(\omega t)$
gdzie $x(0) = 0$, ($\dot{x}(0)$ - w domysle), $t \geq 0$ ma postać
$x(t) = f(t) + A\sin(\omega t + \varphi)$
znaleźć takie ω, dla którego A jest największe

$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + 4x(t) = 3\sin(\omega t)$
$u(t) = \sin(\omega t) = \frac{\ddot{x}(t)+\dot{x}(t)+4x(t)}{3}$
$Y(s) = G(s) \cdot U(s) \Rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$
Transformata Laplace'a
$X(s) = Y(s)$

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathcal{L}\{f'\} = s\mathcal{L}\{f\} - f(0^+) \\ \mathcal{L}\{f''\} = s^2\mathcal{L}\{f\} - sf(0^+) - f'(0^+)\end{array}}$$

$U(s) = \frac{s^2X(s) - s\cdot x(0) - \dot{x}(0) + sX(s) - x(0) + 4X(s)}{3} = \frac{X(s)(s^2+s+4)}{3}$
$G(s) = \frac{X(s)}{\frac{X(s)(s^2+s+4)}{3}} = \frac{3\cancel{X(s)}}{\cancel{X(s)}(s^2+s+4)} = \frac{3}{s^2+s+4}$
$A = \underbrace{A_y}_{\text{wyjście}} = \underbrace{A_u}_{\text{wejście}} \cdot A(\omega)$
$A(\omega) = |G(\omega j)|$
A będzie maksymalne dla $|G(\omega j)|$ maksymalnego
$|G(\omega j)| = |\frac{3}{-\omega^2+j\omega+4}| = |\frac{3}{\sqrt{(4-\omega^2)^2+\omega^2}}| = |\frac{3}{\sqrt{16-8\omega^2+\omega^4+\omega^2}}| = |\frac{3}{\sqrt{\omega^4-7\omega^2+16}}|$
$\frac{3}{\sqrt{\omega^4-7\omega^2+16}}$ maksymalne $\Leftrightarrow \sqrt{\omega^4 - 7\omega^2 + 16}$ minimalne
$z = \omega^2$
szukamy min funkcji $z^2 - 7z + 16$
dodatni znak przy z^2, więc minimum będzie na wierzchołku, czyli $x_w = \frac{-b}{2a} = \frac{7}{2}$
$\omega = \sqrt{\frac{7}{2}} \quad \vee \quad \omega = -\sqrt{\frac{7}{2}}$
$\omega = -\sqrt{\frac{7}{2}}$ odpada, bo nie może być < 0

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{7}{2}}}$$

Zadanie 4.9.2

Rozwiązanie równania różniczkowego
$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) = -x(t) + 12\sin(\omega t)$
gdzie $x(0) = 0$, ($\dot{x}(0)$ - w domysle), $t \geq 0$ ma postać
$x(t) = f(t) + A\sin(\omega t)$
znaleźć takie ω, dla którego A jest największe

$u(t) = \sin(\omega t)$
$y(t) = x(t)$

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + \dot{x}(t) = -x(t) + 12u(t) \\ y(t) = x(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(t) = \frac{\ddot{x}(t)+\dot{x}(t)+x(t)}{12} \\ y(t) = x(t) \end{cases} \Bigg| \mathscr{L}$$

$$\begin{cases} U(s) = \frac{s^2 \cdot X(s) - s \cdot x(0) - \dot{x}(0) + sX(s) - x(0) + X(s)}{12} \\ Y(s) = X(s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} U(s) = \frac{s^2 \cdot X(s) + sX(s) + X(s)}{12} \\ Y(s) = X(s) \end{cases}$$

$$G(S) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{12 \cdot \cancel{X(s)}}{\cancel{X(s)} \cdot (s^2+s+1)} = \frac{12}{s^2+s+1}$$

$$G(j\omega) = \frac{12}{-\omega^2+j\omega+1} = -\frac{12 \cdot \omega^2 - 12}{\omega^4-\omega^2+1} - j\frac{12 \cdot \omega}{\omega^4-\omega^2+1} \; A_y = A_u \cdot ku(\omega)$$

$$ku(\omega) = |G(j\omega)| = \sqrt{\left(\frac{12 \cdot \omega^2 - 12}{\omega^4-\omega^2+1}\right)^2 + \left(\frac{12 \cdot \omega}{\omega^4-\omega^2+1}\right)^2} = 12 \cdot \sqrt{\frac{1}{\omega^4-\omega^2+1}}$$

A_y będzie max., gdy $ku(\omega)$ będzie max., tj. $\sqrt{\omega^4 - \omega^2 + 1}$ będzie min. $\omega \geq 0$, $min(\sqrt{\omega^4 - \omega^2 + 1})$ dla $\omega = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Zadanie 4.9.3

Rozwiązanie równania różniczkowego
$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) = -5x(t) + 15\sin(\omega t)$
gdzie $x(0) = 0$, ($\dot{x}(0)$ - w domysle), $t \geq 0$ ma postać
$x(t) = f(t) + A\sin(\omega t + \varphi)$
znaleźć takie ω, dla którego A jest największe

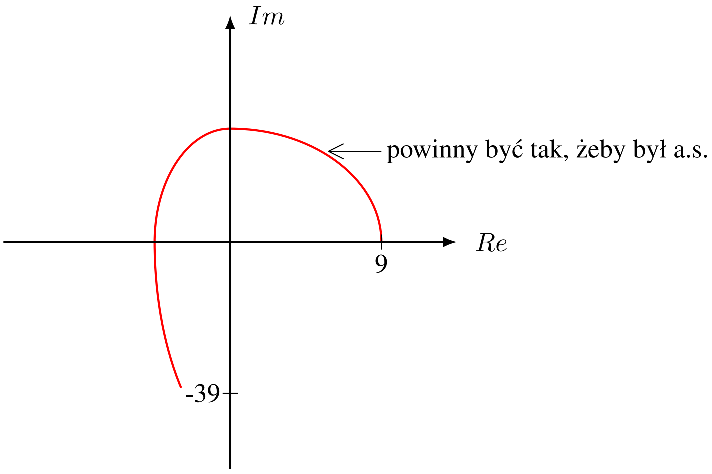
Zadanie 4.10.1

Korzystając z kryterium Michajłowa zbadać stabilność asymptotyczną układu opisanego transmitancją $G(s)$:
$G(s) = \frac{s^2+3s+1}{s^3+s^2-4s+9}$

Kryterium Michajłowa
$G(s) = \frac{L(s)}{M(s)}$
$M(s) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0$
Układ jest asymptotycznie stabilny jeśli przyrost argumentu $M(j\omega)$ rzędu n przy zmianie ω od $-\infty$ do $+\infty$ wynosi $n\pi$: $\Delta Arg\ M(j\omega)|_{-\infty}^{+\infty} = n\pi$

Ponieważ funkcja $M(j\omega)$ jest symetryczna względem osi rzeczywistej, więc wystarczy $\Delta Arg\ M(j\omega)|_{0}^{+\infty} = n\frac{\pi}{2}$
inna postać kryterium (wynikająca z powyższego): wystarczy pokazać, że charakterystyka częstotliwościowa funkcji $M(j\omega)$ $0 < \omega < \infty$ przechodzi przez n ćwiartek w kierunku dodatnim.
$n = 3$ więc musi przechodzić przez I, II i III ćwiartkę
$M(s) = s^3 + s^2 - 4s + 9$
$M(j\omega) = -j\omega^3 - \omega^2 - 4j\omega + 9 = \underbrace{9-\omega^2}_{Re} + j\underbrace{(-\omega^3 - 4\omega)}_{Im}$

$\omega = 0 \Rightarrow M(j0) = 9$



spr. gdzie przecina Im dla $Re = 0$
$9 - \omega^2 = 0 \Rightarrow \omega = 3$
$Im = -3^3 - 4 \cdot 3 = -39$ (Im powinno być dodatnie, aby układ był asymptotycznie stabilny)
spr. czy przecina oś Re w przedziale $(-\infty, 0)$
$Im = 0 \Rightarrow -\omega(\omega^2 + 4) = 0$
$\omega = 0 \quad \omega^2 = -4$
$Re = 9 + 4 = 13$
więc, układ nie jest asymptotycznie stabilny.

Zadanie 4.10.2

Korzystając z kryterium Michajłowa zbadać stabilność asymptotyczną układu opisanego transmitancją $G(s)$:
$G(s) = \frac{s^2+s+1}{s^3-s^2+2s-2}$

Tydzień 5

Wprowadzenie do układów nieliniowych - Linearyzacja

Zadanie 5.1.1

Dany jest system dynamiczny
$\dot{x}(t) = \cos(x(t))e^{-x(t)^2}$
Wyznaczyć jego punkty równowagi i za pomocą I metody Lapunowa zbadać ich stabilność.

$\dot{x}(t) = \cos(x(t))e^{-x(t)^2}$
$\dot{x}(t) = f(x(t))$
x_r jest punktem równowagi $\Leftrightarrow f(x_r) = 0$
$f(x_r) = \cos(x_r) \cdot \underbrace{e^- x_r^2}_{<0} = 0 \Rightarrow cos(x_r) = 0 \Rightarrow x_r = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

System zlinearyzowany: $\dot{x}(t) = J(x_r)x(t)$

$$J(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix} f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}$$

$J(x) = \frac{\partial f}{\partial x} = -\sin(x) \cdot e^{-x^2} + \cos(x) \cdot (-2xe^{-x^2}) = -e^{-x^2}(\sin(x) + 2x\cos(x))$
$J(x_r) = \underbrace{-e^{-(\frac{\pi}{2}+k\pi)^2}}_{<0}(\underbrace{\sin(\frac{\pi}{2} + k\pi)}_{=1 \vee =-1}) + \underbrace{2(\frac{\pi}{2} + k\pi)\cos(\frac{\pi}{2} + k\pi}_{=0}) = -e^{-(\frac{\pi}{2}+k\pi)^2}(\sin(\frac{\pi}{2} + k\pi))$

I metoda Lapunowa
Punkt równowagi, dla którego system zlinearyzowany jest asymptotycznie stabilny jest lokalnie asymptotycznie stabilny. Jeżeli zaś chociaż jedna z wartości własnych macierzy systemu zlinearyzowanego ma dodatnią część rzeczywistą to punkt równowagi jest niestabilny.

$\lambda = -e^{-(\frac{\pi}{2}+k\pi)^2} \cdot \sin(\frac{\pi}{2} + k\pi)$
niestabilny :
$-e^{-(\frac{\pi}{2}+k\pi)^2} \cdot \sin(\frac{\pi}{2} + k\pi) > 0 \Rightarrow \sin(\frac{\pi}{2} + k\pi) = -1 \Rightarrow x_r = \frac{\pi}{2} + (2k\pi + 1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$
(z Hurwitza)
$-e^{-(\frac{\pi}{2}+k\pi)^2} \cdot \sin(\frac{\pi}{2} + k\pi) > 0 \Rightarrow \sin(\frac{\pi}{2} + k\pi) = 1 \Rightarrow x_r = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-(\frac{\pi}{2}+k\pi)^2} \cdot \sin(\frac{\pi}{2} + k\pi) \end{bmatrix}$$

Zadanie 5.1.2

Dany jest system dynamiczny
$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$
$\dot{x}_2(t) = -2x_1(t) - 3x_1(t)^2 - x_2(t)$
Wyznaczyć jego punkty równowagi i za pomocą I metody Lapunowa zbadać ich stabilność.

$J(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2-6x_1 & -1 \end{bmatrix}$

$\begin{cases} x_2 = 0 \\ -2x_1 - 3x_1^2 - x_2 = 0 \end{cases}$

$-2x_1 - 3x_1^2 = 0$

$x_1(2+3x_1) = 0$

$x_1 = 0 \ \vee \ x_1 = -\frac{2}{3}$

$x_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$J(x_r) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -1-\lambda \end{vmatrix}$

$= (-\lambda)(-1-\lambda) + 2 = \lambda^2 + \lambda + 2$

$\Delta = -7$

$\lambda = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}i$

$\lambda = -\frac{1}{2} > 0 \Rightarrow$ Stabilny

$\vee$

$x_r = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$

$J(x_r) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix}$

$= (-\lambda)(-1-\lambda) - 2 = \lambda^2 + \lambda - 2$

$\Delta = 9$

$\lambda = \frac{-1\pm 3}{2}$

$\lambda = 1 \ \vee \ \lambda = -2$

$\lambda = 1 > 0 \Rightarrow$ Niestabilny

Zadanie 5.2.1

Wyznaczyć punkty równowagi układu generatora synchronicznego, który jest systemem dynamicznym opisanym następującymi równaniami
$\dot{x}_1 = x_2$
$\dot{x}_2 = -Dx_2 - \sin x_1 + \sin \delta_0$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -Dx_2 - \sin x_1 + \sin \delta_0 \end{cases}$$
$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -Dx_2 - \sin x_1 + \sin \delta_0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} x_2 \\ -Dx_2 - \sin x_1 + \sin \delta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$x_2 = 0$
$-\sin x_1 + \sin \delta_0 = 0 \Rightarrow \sin \delta_0 = \sin x_1 \Rightarrow$
$\Rightarrow x_1 = \delta_0 + 2k\pi \quad \vee \quad x_1 = -\delta_0 + (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

Zadanie 5.2.2

Wyznaczyć punkty równowagi dla obwodu Chuy, który jest systemem dynamicznym opisanym następującymi równaniami:
$C_1\dot{x}_1(t) = -\frac{1}{R}x_1(t) + \frac{1}{R}x_2(t) - g(x_1(t))$
$C_2\dot{x}_2(t) = \frac{1}{R}x_1(t) - \frac{1}{R}x_2(t) + x_3(t)$
$L\dot{x}_3(t) = -x_2(t) - R_0x_3(t)$
przy czym $g(v) = g_1v + g_2v^3$

$$\begin{cases} -\frac{1}{RC_1}x_1 + \frac{1}{RC_1}x_2 - \frac{g_1}{C_1}x_1 - \frac{g_2}{C_1}x_1^3 = 0 \\ \frac{1}{RC_2}x_1 - \frac{1}{RC_2}x_2 + \frac{x_3}{C_2} = 0 \\ -\frac{1}{L}x_2 - \frac{R_0}{L}x_3 = 0 \qquad \Rightarrow x_2 = -R_0x_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} g_1Rx_1 + g_2Rx_1^3 + x_1 = x_2 \\ x_1 + Rx_3 = x_2 \\ x_2 = -R_0x_3 \end{cases}$$

z drugiego i trzeciego:
$x_3 = \frac{-x_1}{R+R_0}$
z pierwszego i drugiego:
$g_1Rx_1 + g_2Rx_1^3 = Rx_3$
$g_1x_1 + g_2x_1^3 = x_3$
podstawiam x_3 z trzeciego:
$g_1x_1 + g_2x_1^3 = \frac{-x_1}{R+R_0}$
$g_1x_1 + x_1^3g_2 + \frac{x_1}{R+R_0} = 0$
$x_1^3g_2 + x_1(g_1 + \frac{1}{R+R_0}) = 0$
podstawiam pomocnicze zmienne:
$a = g_2, \quad b = g_1 + \frac{1}{R+R_0}$
$ax_1^3 + bx_1 = 0$
$x_1(ax_1^2 + b) = 0$
(1) $x_1 = 0 \quad \vee \quad ax_1^2 + b = 0$
(2) $x_1 = \sqrt{\frac{-b}{a}} \quad \vee$ (3) $x_1 = -\sqrt{\frac{-b}{a}}$
podstawiam $x_1 = 0$:

$$x_r = \begin{bmatrix} x_{1r} \\ x_{2r} \\ x_{3r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

(1) $x_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(2) $x_r = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{-g_1 - \frac{1}{R+R_0}}{g_2}} \\ -R_0\frac{-\sqrt{\frac{-g_1 - \frac{1}{R+R_0}}{g_2}}}{R+R_0} \\ \frac{-\sqrt{\frac{-g_1 - \frac{1}{R+R_0}}{g_2}}}{R+R_0} \end{bmatrix}$

(3) $x_r = \begin{bmatrix} -\sqrt{\frac{-g_1 - \frac{1}{R+R_0}}{g_2}} \\ -R_0\frac{\sqrt{\frac{-g_1 - \frac{1}{R+R_0}}{g_2}}}{R+R_0} \\ \frac{\sqrt{\frac{-g_1 - \frac{1}{R+R_0}}{g_2}}}{R+R_0} \end{bmatrix}$

Zadanie 5.3.1

Dla jakich wartości parametru ϵ zerowy punkt równowagi układu zwanego oscylatorem Van der Pola będzie niestabilny
$\ddot{x}(t) - \epsilon(1 - x(t)^2)\dot{x}(t) + x(t) = 0$

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{x} = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{x} = \epsilon(1 - x(t)^2) \cdot \dot{x}(t) - x(t) = \epsilon(1 - x_1^2) \cdot x_2 - x_1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ \epsilon(1 - x_1^2) \cdot x_2 - x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ \epsilon(1 - x_1^2) \cdot x_2 - x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases} \quad x_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$J(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2\epsilon x_1 x_2 - 1 & \epsilon(1 - x_1^2) \end{bmatrix} \quad \boxed{\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}}$$

$$J(x_r) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \epsilon \end{bmatrix}$$

Z Lapunowa:

$(-\lambda)(\epsilon - \lambda) + 1 = \lambda^2 - \lambda\epsilon + 1 = 0$

$\Delta = \epsilon^2 - 4 \Rightarrow \lambda = \frac{\epsilon \pm \sqrt{\epsilon^2 - 4}}{2}$

niestabilny: Jeżeli część rzeczywista $> 0 \Rightarrow \frac{\epsilon}{2} > 0 \Rightarrow \boxed{\epsilon > 0}$

asymptotycznie stabilny : $\begin{bmatrix} -\epsilon & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ Hurwitz $-\epsilon > 0 \Rightarrow \boxed{\epsilon < 0}$

Zadanie 5.4.1

Dla jakich wartości parametru a linearyzacja przestaje spełniać warunki twierdzenia Grobmana-Hartmana dla układu opisanego równaniami:
$\dot{x_1}(t) = -x_2(t) + (a - x_1(t)^2 - x_2(t)^2)x_1(t)$
$\dot{x_2}(t) = x_1(t) + (a - x_1(t)^2 - x_2(t)^2)x_2(t)$

$\dot{x_1}(t) = -x_2(t) + (a - x_1(t)^2 - x_2(t)^2)x_1(t) = f_1(x(t))$
$\dot{x_2}(t) = x_1(t) + (a - x_1(t)^2 - x_2(t)^2)x_2(t) = f_2(x(t))$

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -x_2 + (a - x_1^2 - x_2^2)x_1 = 0 \\ x_1 + (a - x_1^2 - x_2^2)x_2 = 0 \end{cases}$$

Zauważamy, że albo $x_1 = x_2 = 0$ albo dla $x_2 \neq 0 \wedge x_1 \neq 0$:

$$\begin{cases} -\frac{x_2}{x_1} + (a - x_1^2 - x_2^2) = 0 \\ \frac{x_1}{x_2} + (a - x_1^2 - x_2^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{-x_2}{x_1} = \frac{x_1}{x_2} \Rightarrow -x_2^2 = x_1^2 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0 \text{ (sprzeczność)}$$

więc $x_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$J(x) = \begin{bmatrix} a - 3x_1^2 - x_2^2 & -1 - 2x_2x_1 \\ 1 - 2x_1x_2 & a - x_1^2 - 3x_2^2 \end{bmatrix}$$

$$J(x_r) = \begin{bmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{bmatrix}$$

z tw. Grobmana-Hartmana:

$\det(j\omega I - J(x_r)) \neq 0, \quad \omega \in \mathbb{R}$

$$\begin{vmatrix} j\omega - a & -1 \\ 1 & j\omega - a \end{vmatrix} = 0$$

$(j\omega - a)^2 + 1 = 0$

$j\omega - a = \pm j \Rightarrow \boxed{a = 0}$

$J(x_r)$ nie ma wartości własnych na osi urojonej

$$\begin{bmatrix} a - \lambda & -1 \\ 1 & a - \lambda \end{bmatrix}$$

$(a - \lambda)^2 + 1 = 0$
$a^2 - 2a\lambda + \lambda^2 + 1 = 0$
$\lambda^2 - 2a\lambda + a^2 + 1 = 0$
$\Delta = 4a^2 - 4a^2 - 4$
$\sqrt{\Delta} = 2i$
$\lambda = \frac{2a \pm 2i}{2} = a \pm i$

dla $a = 0$ wartości własne są na osi urojonej

Zadanie 5.5.1

Dla jakich wartości parametru a zerowy punkt równowagi układu opisanego równaniami
$\dot{x_1}(t) = x_2(t) + (a - x_1(t)^2 - x_2(t)^2)x_1(t)$
$\dot{x_2}(t) = x_1(t) + (a - x_1(t)^2 - x_2(t)^2)x_2(t)$
będzie niestabilny.

$x_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$J(x) = \begin{bmatrix} a - 3x_1^2 - x_2^2 & 1 - 2x_2x_1 \\ 1 - 2x_1x_2 & a - x_1^2 - 3x_2^2 \end{bmatrix}$

$J(x_r) = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{bmatrix}$

$\begin{vmatrix} a-\lambda & 1 \\ 1 & a-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$(a-\lambda)^2 - 1 = 0$

$(a-\lambda-1)(a-\lambda+1) = 0$

$\lambda = a-1 \quad \vee \quad \lambda = a+1$

niestabilny, gdy $Re(\lambda) > 0$

$a - 1 > 0 \qquad a + 1 > 0$

$a > 1 \qquad a > -1$

$(a > 1 \quad \vee \quad a > -1) \Rightarrow \boxed{a > -1}$

Alternatywnie: Bez podanego punktu równowagi

$\dot{x_1}(t) = x_2(t) + (a - x_1(t)^2 - x_2(t)^2)x_1(t) = f_1(x(t))$
$\dot{x_2}(t) = x_1(t) + (a - x_1(t)^2 - x_2(t)^2)x_2(t) = f_2(x(t))$

$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix}$

$\begin{cases} x_2 + (a - x_1^2 - x_2^2)x_1 = 0 \\ x_1 + (a - x_1^2 - x_2^2)x_2 = 0 \end{cases}$

Zauważamy, że albo $x_1 = x_2 = 0$ albo dla $x_1 \neq 0 \wedge x_2 \neq 0$:

$\begin{cases} \frac{x_2}{x_1} + (a - x_1^2 - x_2^2) = 0 \\ \frac{x_1}{x_2} + (a - x_1^2 - x_2^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1}{x_2} \Rightarrow \begin{array}{c} x_2^2 = x_1^2 \\ x_1 = x_2 \vee x_1 = -x_2 \end{array}$

więc $\underset{x_r}{①} = \begin{bmatrix} k \\ k \end{bmatrix} \vee \underset{x_r}{②} = \begin{bmatrix} k \\ -k \end{bmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}$

$J(x) = \begin{bmatrix} a - 3x_1^2 - x_2^2 & 1 - 2x_2x_1 \\ 1 - 2x_1x_2 & a - x_1^2 - 3x_2^2 \end{bmatrix}$

$J(\underset{x_r}{①}) = \begin{bmatrix} a - 4k^2 & 1 - 2k^2 \\ 1 - 2k^2 & a - 4k^2 \end{bmatrix} \quad \vee \quad J(\underset{x_r}{②}) = \begin{bmatrix} a - 4k^2 & 1 + 2k^2 \\ 1 + 2k^2 & a - 4k^2 \end{bmatrix}$

$(a - 4k^2 - \lambda)^2 - (1 - 2k^2)^2 = 0 \quad \vee \quad (a - 4k^2 - \lambda)^2 - (1 + 2k^2)^2 = 0$

$(a - 4k^2 - \lambda - 1 + 2k^2)(a - 4k^2 - \lambda + 1 - 2k^2) = 0 \quad \vee \quad (a - 4k^2 - \lambda - 1 - 2k^2)(a - 4k^2 - \lambda + 1 + 2k^2) = 0$

$\lambda = a - 1 - 2k^2 \vee \lambda = a + 1 - 6k^2 \quad \vee \quad \lambda = a - 1 - 6k^2 \vee \lambda = a + 1 - 2k^2$

$niestebilny:$

$Re\lambda > 0$

$a - 1 - 2k^2 > 0 \vee a + 1 - 6k^2 > 0 \qquad a - 1 - 6k^2 > 0 \vee a + 1 - 2k^2 > 0$

$\underset{a > 1 + 2k^2}{①} \quad \underset{a > 6k^2 - 1}{②} \qquad \underset{a > 1 + 6k^2}{③} \quad \underset{a > 2k^2 - 1}{④}$

odp. niestabilny dla $a > ① \vee a > ② \vee a > ③ \vee a > ④$

Zadanie 5.5.2

Dla jakich wartości parametru a zerowy punkt równowagi układu opisanego równaniami
$\dot{x_1}(t) = -x_2(t) + (a - x_1(t)^2 - x_2(t)^2)x_1(t)$
$\dot{x_2}(t) = x_1(t) + (a - x_1(t)^2 - x_2(t)^2)x_2(t)$
będzie niestabilny.

$x_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
$J(x) = \begin{bmatrix} a - 3x_1^2 - x_2^2 & -1 - 2x_2x_1 \\ 1 - 2x_1x_2 & a - x_1^2 - 3x_2^2 \end{bmatrix}$
$J(x_r) = \begin{bmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{bmatrix}$
$\begin{vmatrix} a - \lambda & -1 \\ 1 & a - \lambda \end{vmatrix} = 0$
$\lambda^2 - 2a\lambda + a^2 + 1 = 0$
$\Delta = -4$
$\lambda = \frac{2a \pm 2i}{2} = a \pm i$
niestabilny, gdy $Re(\lambda) > 0$
$\boxed{a > 0}$

Zadanie 5.6.1

Dla jakich wartości parametru a zerowy punkt równowagi układu opisanego równaniami
$\dot{x_1}(t) = -x_2(t) + (a - x_1(t)^2 - x_2(t)^2)x_1(t)$
$\dot{x_2}(t) = x_1(t) + (a - x_1(t)^2 - x_2(t)^2)x_2(t)$
będzie asymptotycznie stabilny.

$x_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
$J(x) = \begin{bmatrix} a - 3x_1^2 - x_2^2 & -1 - 2x_2x_1 \\ 1 - 2x_1x_2 & a - x_1^2 - 3x_2^2 \end{bmatrix}$
$J(x_r) = \begin{bmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{bmatrix}$
$\begin{vmatrix} a - \lambda & -1 \\ 1 & a - \lambda \end{vmatrix} = 0$
$\lambda^2 - 2a\lambda + a^2 + 1 = 0$

Macierz Hurwitz'a
Wielomian charakterystyczny: $a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_{n-1}\lambda + a_n$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2a & 0 \\ 1 & a^2 + 1 \end{bmatrix}$$

Kryterium Hurwitz'a
Jeśli wszystkie minory wiodące są większe od zera, to jest asymptotycznie stabilny.

$-2a > 0 \Rightarrow a < 0$
$-2a(a^2 + 1) > 0 \Rightarrow \boxed{a < 0}$

Autorzy:

Skład:

Jacek Pietras
Grzegorz Tokarz

Rozwiązania:

Magdalena Warzesia
Ania Szarawara
irytek102
Gniewomir
Jacek Pietras
Grzegorz Tokarz

Komentarze: