https://github.com/Jock69pl/SystemyDynamiczne.git

Jeśli masz wolnego czasu troche i chcesz pomóc doślij jakieś rozwiązanie.
Bardzo potrzebne są korekty, napewno jest tu sporo błędów.
Potrzebni są też komentatorzy, chodzi o całkowicie łopatologiczny komentarz typu "tu liczymy delte bo..."

Z tego przedmiotu jest egzamin, więc warto to zrobić

Tydzień 1

Systemy liniowe 1-go rzedu

$$\dot{x}(t) = \overset{n \times n}{A}\,\underbrace{\overset{\text{Stan}}{x(t)}}_{\in\mathbb{R}^n} + \overset{n \times r}{B}\,\underbrace{\overset{\text{Sterowanie}}{u(t)}}_{\in\mathbb{R}^r}$$

rozwiązanie:
$x(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-r)A} Bu(r)\, dr$

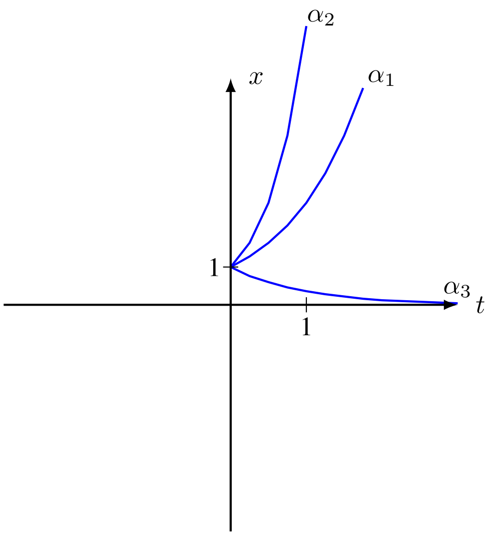
dla autonomicznych ($r = n = 1, t \geqslant 0, u(t) \equiv 0$)
$x(t) = e^{tA}x_0$

Zadanie 1.1.1

Naszkicować rozwiazania równania rózniczkowego:
$\dot{x}(t) = \alpha_i x(t)$
dla $x(0) = 1, t \geqslant 0$ przy czym $i = 1, 2, 3$ zaś
$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 2, \quad \alpha_3 = -1$

$\frac{dx}{dt} = \alpha_i x$
$\frac{dx}{x} = \alpha_i dt$
całkowanie:
$\ln|x| = \alpha_i t + c$
$x = ce^{\alpha_i t}$
$x(0) = c = 1$
$x = e^{\alpha_i t}$

$x = e^t \ \vee \ x = e^{2t} \ \vee \ x = e^{-t}$
($t \geqslant 0$, więc tylko prawa strona)

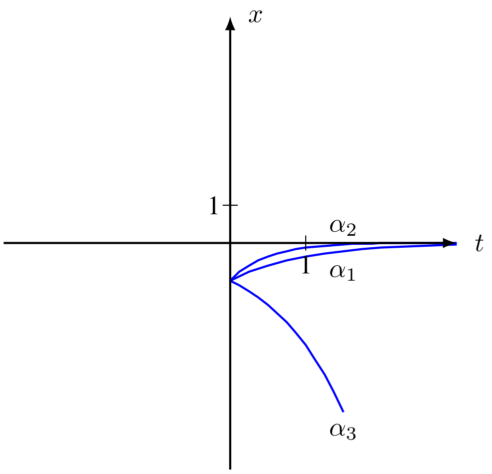


Zadanie 1.2.1

Naszkicować rozwiazania równania rózniczkowego:
$\dot{x}(t) = \alpha_i x(t)$
dla $x(0) = -1, t \geqslant 0$ przy czym $i = 1, 2, 3$ zaś
$\alpha_1 = -1, \quad \alpha_2 = -2, \quad \alpha_3 = 1$

$x = ce^{\alpha_i t}$
$x(0) = c = -1$
$x = -e^{\alpha_i t}$

$x = -e^{-t} \lor x = -e^{-2t} \lor x = -e^{t}$
($t \geqslant 0$, więc tylko prawa strona)

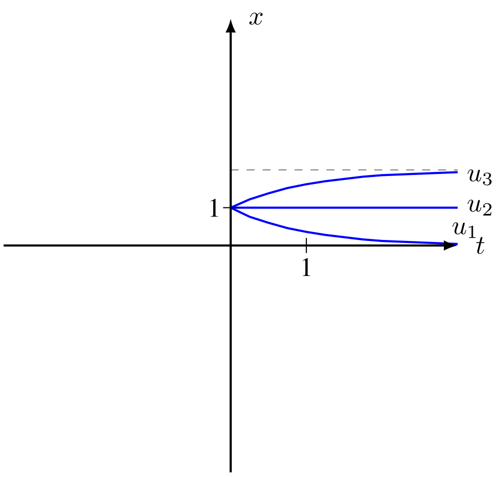


Zadanie 1.3.1

Naszkicować rozwiazania równania rózniczkowego:
$\dot{x}(t) = -x(t) + u_i$
dla $x(0) = 1, t \geqslant 0$ przy czym $i = 1, 2, 3$ zaś
$u_1 = 0, \quad u_2 = 1, \quad u_3 = 2$

$\frac{dx}{dt} = -x + u_i$
$\frac{dx}{-x+u_i} = dt$
całkowanie:
$-\ln|-x + u_i| = t + c$
$ce^{-t} = -x + u_i$
$x = u_i - ce^{-t}$
$x(0) = u_i - c = 1 \Rightarrow c = u_i - 1$
$x = u_i - (u_i - 1)e^{-t} = u_i(1 - e^{-t}) + e^{-t}$

$x = e^{-t} \ \vee \ x = 1 \ \vee \ x = 2 - e^{-t}$
($t \geqslant 0$, więc tylko prawa strona)

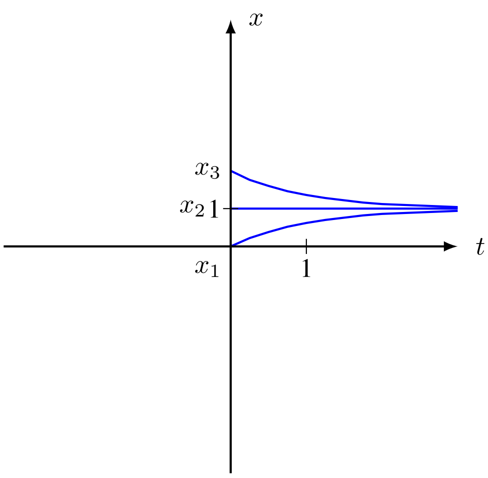


Zadanie 1.4.1

Naszkicować rozwiazania równania rózniczkowego:
$\dot{x}(t) = -x(t) + 1$
dla $x(0) = x_i, t \geqslant 0$ przy czym $i = 1, 2, 3$ zaś
$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 2$

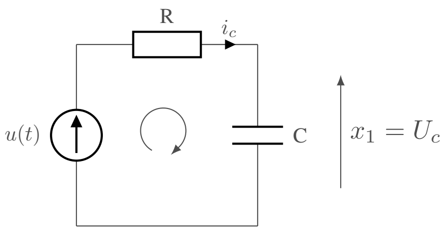
$\frac{dx}{dt} = -x + 1$
$-\ln|-x+1| = t + c$
$ce^{-t} = -x + 1$
$x = 1 - ce^{-t}$
$x(0) = 1 - c = x_i \Rightarrow c = 1 - x_i$
$x = 1 - (1 - x_i)e^{-t}$

$x = 1 - e^{-t} \ \vee \ x = 1 \ \vee \ x = 1 + e^{-t}$
($t \geqslant 0$, więc tylko prawa strona)



Zadanie 1.5.1

Dany jest obwód elektryczny jak na rysunku poniżej.



$R = 100[K\Omega]$
$U_c(0) = -1.72[V]$
$C = 1[\mu F]$

Źródło napięcia przez jedną sekundę podawało napięcie $1[V]$, a następnie przestało podawać dalej napięcie (przyjąć $0[V]$). Zamodelować obwód w postaci równania różniczkowego, wyliczyć wartość napięcia w chwili $T = 2[s]$ i naszkicować przebieg napięcia w funkcji czasu.

$i(t) = c \cdot \dot{x}_1(t)$
$u - Ri_c - x_1 = 0$
$u(t) - RCx_1'(t) - x_1(t) = 0$

$1^\circ \;\; t \in < 0, 1 > \;\; \boxed{u(t) = 1}$
$1 - RCx_1'(t) - x_1(t) = 0$
$x_1'(t) = -\frac{x_1(t)}{RC} + \frac{1}{RC}$
$\frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{RC}(1 - x_1)$
$\frac{dx_1}{1-x_1} = \frac{1}{RC}dt$
$-\ln|1 - x_1| = \frac{1}{RC}t + k$
$ke^{-\frac{t}{RC}} = 1 - x_1$
$x_1 = 1 - ke^{-\frac{t}{RC}}$
$x_1(0) = u_c = -1.72 = 1 - k \Rightarrow k = 2.72$
$x_1(1) = 1 - 2.72e^{-\frac{1}{RC}} \approx 0.000632$

$2^\circ \;\; t > 0 \;\; \boxed{u(t) = 0}$
$x_2'(t) = -\frac{x_2(t)}{RC}$
$\frac{dx_2}{dt} = -\frac{1}{RC}x_2$
$\frac{dx_2}{x_2} = -\frac{1}{RC}dt$
$\ln|x_2| = -\frac{t}{RC} + k$
$ke^{-\frac{t}{RC}} = x_2$
$x_2(0) = x_1(1)$
$x_2(0) = k = x_1(1)$
$x_2(2) = x_1(1)e^{-\frac{2}{RC}}$
$x_2(2) = -0.0000855$

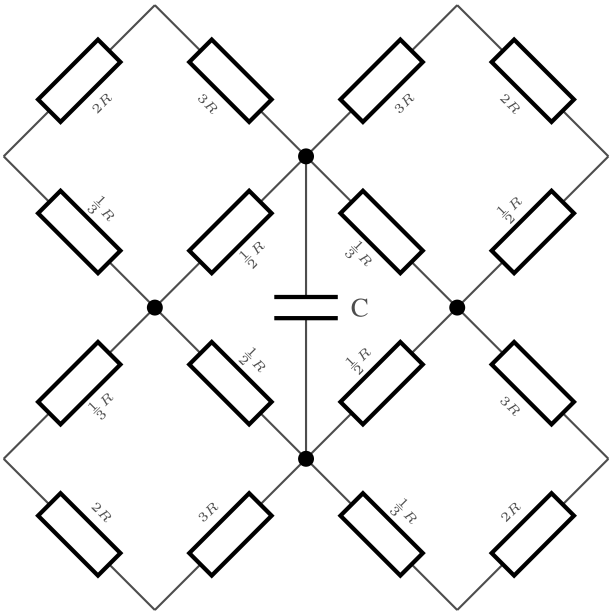
Zadanie 1.6.1

Dane jest równanie różniczkowe
$\dot{x}(t) = -2x(t) + u(t)$
gdzie $x(0) = 1, t \geqslant 0$. Znaleźć takie sterowanie $u(t)$, że $x(t) = e^{-t}$ dla $t \geqslant 0$.

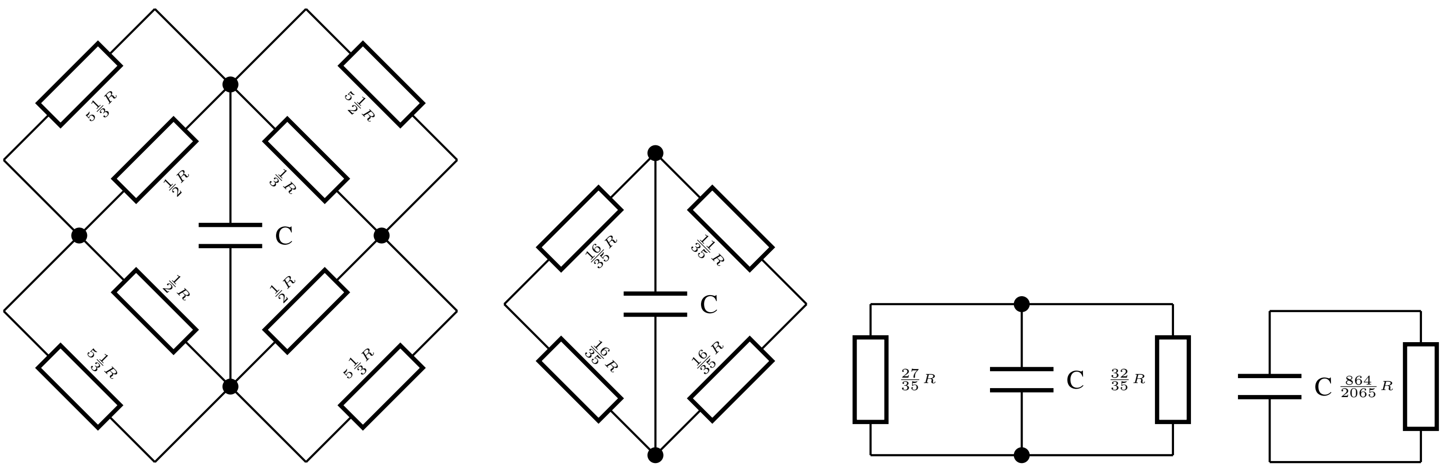
$x(t) = e^{-t}$
$x'(t) = -e^{-t}$
przyrównujemy $\dot{x}(t)$
$-e^{-t} = -2e^{-t} + u(t) \Rightarrow \boxed{u(t) = e^{-t}}$

Zadanie 1.7.1

Zamodelować poniższy obwód elektryczny za pomocą równania różniczkowego



Przy czym $R = 4.7k\Omega$ zaś $C = 2\mu F$.



$u(t) = RC\dot{x}(t) + x(t)$
$x'(t) = \frac{u(t)}{RC} - \frac{x}{RC}$
$u(t) = 0$
$x'(t) = -\frac{x}{RC}$

$$\boxed{x'(t) = -\frac{x}{\frac{864}{2065} \cdot R \cdot C}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\frac{x}{RC} \\ \ln|x| &= -\frac{t}{RC} + k \\ ke^{-\frac{t}{RC}} &= x \end{aligned}}$$

Zadanie 1.8.1

Dane jest równanie różniczkowe
$\dot{x}(t) = -2x(t) + 3$
gdzie $x(0) = -1, t \geqslant 0$. Po jakim czasie t_k zachodzi $x(t_k) = 2$.

$\frac{dx}{dt} = -2x(t) + 3$
$\frac{dx}{-2x+3} = dt$
$\int \frac{1}{-2x+3} dx = \left| \begin{array}{c} u = -2x + 3 \\ du = -2dx \end{array} \right| = -\frac{1}{2} \ln|-2x+3| = t + c$
$ce^{-2t} = -2x + 3$
$x = \frac{3-ce^{-2t}}{2}$
$x(0) = \frac{3-c}{2} = -1 \Rightarrow c = 5$
$x = \frac{3-5e^{-2t}}{2}$
$x(t_k) = 2 = \frac{3-5e^{-2t_k}}{2}$
$4 = 3 - 5e^{-2t_k} \Rightarrow e^{-2t_k} = -\frac{1}{5}$ $\boxed{\text{Sprzeczność}}$

Zadanie 1.9.1

Rozwiązanie równania różniczkowego
$\dot{x}(t) = -100x(t) + 2\sin(t)$
gdzie $x(0) = 2, t \geqslant 0$ ma postać
$x(t) = ae^{-100t} + A\sin(t + \varphi)$
Obliczyć A i φ.

Pochodna równania (2):
$\dot{x}(t) = -100ae^{-100t} + Acos(t + \varphi)$
Z równań (1) i (3):
$-100ae^{-100t} + Acos(t + \varphi) = -100x(t) + 2sin(t)$
Założenie, żeby ułatwić życie: $t = 0$

$\begin{cases} -100a + Acos(\varphi) = -200 \\ a + Asin(\varphi) = 2 \quad /*(-100) \end{cases}$

$\begin{cases} -100a + Acos(\varphi) = -200 \\ -100a - 100Asin(\varphi) = -200 \end{cases}$

$Acos(\varphi) = -100Asin(\varphi)$
$\frac{sin(\varphi)}{cos(\varphi)} = tg(\varphi) = -\frac{1}{100}$
$\varphi = arctg(-\frac{1}{100})$

Dalej chyba logiczne:
$x(0) = 2 = a + Asin(\varphi)$
$Asin(\varphi) = 2 - a$
$A = \frac{2-a}{sin(arctg(-\frac{1}{100}))}$

Drugie rozwiązanie

$x(0) = a + A\sin\varphi = 2 \Rightarrow \boxed{A = \dfrac{2-a}{\sin\varphi}}$

$\frac{dx}{dt} + 100x = 2\sin t$
$\frac{dx}{dt} + 100x = 0$
$\ln|x| = -100t + c$
$c(t)e^{-100t} = x$
$c'e^{-100t} - \cancel{100ce^{-100t}} = -\cancel{100ce^{-100t}} + 2\sin t$
$c' = 2\sin te^{100t}$

$\int \sin te^{100t} = \begin{vmatrix} \sin t & \cos t \\ e^{100t} & \frac{1}{100}e^{100t} \end{vmatrix} = \frac{1}{100}\sin te^{100t} - \frac{1}{100}\int \cos te^{100t} = \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ e^{100t} & \frac{1}{100}e^{100t} \end{vmatrix} =$

$= \frac{1}{100}\sin te^{100t} - \frac{1}{100^2}\cos te^{100t} - \frac{1}{100}\int \sin te^{100t} \Rightarrow \int \sin te^{100t}dt = \boxed{\dfrac{100\sin t - \cos t}{1001}e^{100t} + c}$

$\boxed{x = Ke^{-100t} + 2 \cdot \dfrac{100\sin t - \cos t}{10001}}$

$x = Ke^{-100t} + \frac{200\sin t - 2\cos t}{10001}$
$x(0) = K - \frac{2}{10001} = 2 \Rightarrow K = \frac{20004}{10001}$
$ae^{-100t} + A\sin(t + \varphi) = Ke^{-100t} + \frac{200\sin t - 2\cos t}{10001}$
$a = K$
$A = \frac{2-a}{\sin\varphi} = \frac{2 - \frac{20004}{10001}}{\sin\varphi} = \frac{-2}{1000t\sin\varphi}$
$A(\sin t\cos\varphi + \sin\varphi\cos t) = \frac{200\sin t}{10001} - \frac{2\cos t}{10001}$
$\cancel{\sin t}\text{ctg}\varphi + \cancel{\cos t} = -100\cancel{\sin t} + \cancel{\cos t}$
$\text{ctg}\varphi = -100$
$\text{tg}\varphi = \frac{-1}{100} \Rightarrow \boxed{\text{arctg}(\dfrac{-1}{100}) = \varphi}$

Zadanie 1.10.1

Dane jest równanie różniczkowe
$\dot{x}(t) = -x(t) + u(t)$
gdzie $x(0) = 0, t \geqslant 0$
zaś sterowanie ma postać sygnału PWM o amplitudzie 15, okresie 1s i współczynniku wypełnienia $\theta \in (0, 1]$, tzn.
$u(t) = \begin{cases} 15 & \text{dla} \quad t \in [n, n+\theta] \\ 0 & \text{dla} \quad t \in (n+\theta, n+1) \end{cases}$
Wiedząc, że $x(3) = 1$ obliczyć θ.

$x(t) = \underbrace{e^{tA}x(0)}_{=0} + \int_0^t e^{(t-\tau)A}Bu(\tau)\, d\tau$
$x(t) = \int_0^t e^{-t+\tau}u\, d\tau$
$x(3) = ue^{-3}\int_0^3 e^{\tau}\ d\tau = 15e^{-3}(e^{\theta}-1+e^{1+\theta}-e+e^{2+\theta}-e^2) = 15e^{-3}(e^{\theta}(1+e+e^2)-(1+e+e^2)) = 15e^{-3}((e^{\theta}-1)(1+e+e^2)) = \boxed{1}$
$\frac{e^3}{15(1+e+e^2)} + 1 = e^{\theta} \Rightarrow \boxed{\theta = \ln(1 + \frac{e^3}{15(1+e+e^2)})}$

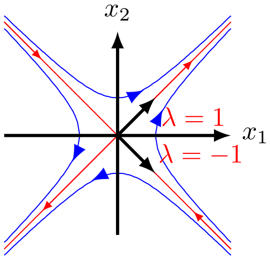
Tydzień 2

Portrety fazowe systemów liniowych

Ciągły system dynamiczny jest asymptotycznie stabilny, gdy części rzeczywiste jego wartości własnych są ujemne.
Ciągły system dynamiczny jest stabilny, gdy części rzeczywiste jego wartości własnych są niedodatnie oraz klatki Jordana macierzy J odpowiadające wartością własnym macierzy A położonym na osi urojonej mają wymiary 1×1.

Portrety fazowe

1. Wyznaczyć wielomian charakterystyczny macierzy A i wartości własne
2. Wyznaczyć wektory własne macierzy A i narysować je w układzie współrzędnych
Jeśli wektor własny jest związany z $\lambda < 0$ to wzdłuż tego wektora trajektorie schodzą do zera.
Jeśli z $\lambda > 0$, uciekają w nieskończoność
3. Sprawdzić kierunek trajektorii
Wybieramy punkt np $(1, 0)$. Mnożymy macierz A przez ten punkt. Otrzymujemy wektor, który wskazuje kierunek z tego punktu.



Klatki Jordana
$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, \lambda = a, b \quad \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}, \lambda = a \quad \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}, \lambda = a \pm bi$

$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ gwiazda, $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ węzeł, $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ poziome, $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ węzeł zdegenerowany, $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ siodło
$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ ognisko, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ kółka

Frobenius

$Frobenius_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c_{m-2} & -c_{m-1} \end{bmatrix}$
$m = 2$

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c_0 & -c_1 \end{bmatrix}$
$-c_0 = 1, \quad -c_1 = 0,$ $\boxed{\text{zawsze } c_2 = 1}$
i z tego mamy wielomian charakterystyczny:
$c_2\lambda^2 + c_1\lambda + c_0 = 0$
tutaj : $\lambda^2 - 1 = 0$

Dla jakich parametrów system będzie asymptotycznie stabilny
1. Sprawdzamy czy macierz jest w postaci Frobeniusa
2. Jeśli nie wyliczamy wielomian charakterystyczny ($|A - \lambda I| = 0$)
3. Na podstawie charakterystycznego tworzymy macierz Hurwitza
4. Jeżeli czy wszystkie minory są większe od 0 to system jest asymptotycznie stabilny
5. Jeżeli jeden minor jest równy 0 to system jest stabilny, przeciwnie niestabilny

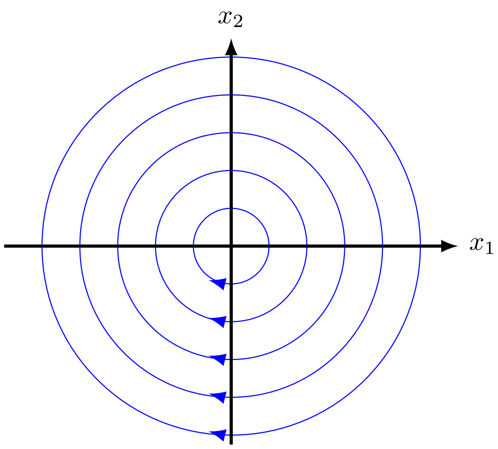
Zbadaj charakter pracy układu w zależności od parametrów
1. Podstawiamy $u(t)$ do pierwszego równania
2. Grupujemy współczynniki
3. Tworzymy wielomian charakterystyczny
4. Tworzymy macierz Hurwitza
5. Sprawdzamy czy minory są większe od 0
6. Rysujemy wykres i zaznaczamy obszary stabilności. Wewnątrz obszaru system jest **asymptotycznie stabilny**, na prostych granicznych jest **stabilny**, na przecięciach i w pozostałych obszarach jest **niestabilny**
7. Delta wielomianu charakterystycznego <0
8. Obliczamy nierówność kwadratową w zależności od k_2
9. Rysujemy tą funkcję
10. Powyżej funkcji będą występować oscylacje, poniżej zanikanie wykładnicze

Liczenie e^{At}
1. równanie charakterystyczne
2. Wektory własne
3. Macierze P, P^{-1}, J
4. $e^{Jt} = e^{\lambda} \cdot J$
5. $e^{At} = P \cdot e^{Jt} \cdot P^{-1}$

Zadanie 2.1.1

Naszkicować portrety fazowe systemów dynamicznych
$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$ i $\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$
i opisać czym się różnią.

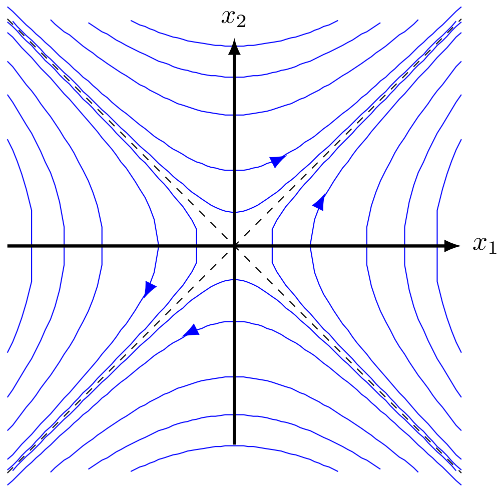
$\lambda^2 + 1 = 0$
$\lambda = \pm i$
$J = A$
$\begin{bmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
$-i\omega_1 + \omega_2 = 0$
$-\omega_1 - i\omega_2 = 0$
$\omega_1 = -i\omega_2$



$\lambda^2 = 1$
$\lambda = \pm 1$
$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \neq A$
$\boxed{\lambda = 1}$
$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
$\begin{cases} -\omega_1 + \omega_2 = 0 \\ \omega_1 - \omega_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \omega_1 = \omega_2$
$\boxed{\lambda = -1}$
$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
$\omega_1 + \omega_2 = 0 \Rightarrow \omega_1 = -\omega_2$

wektory własne:
$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ wyznaczają osie

kierunek strzałek:
$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ taki sam wektor więc strzałki $+\infty \quad -\infty$
$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ inny więc strzałki do 0



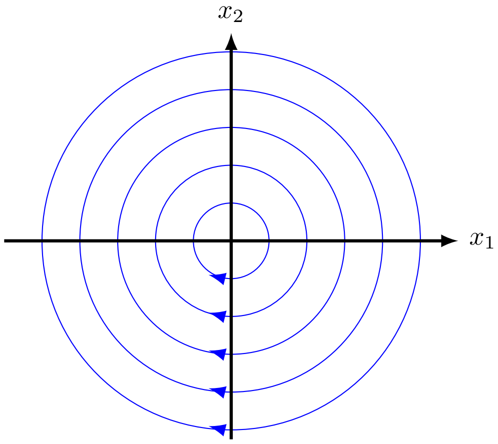
Pierwszy portret fazowy to środek, a drugi to siodło.

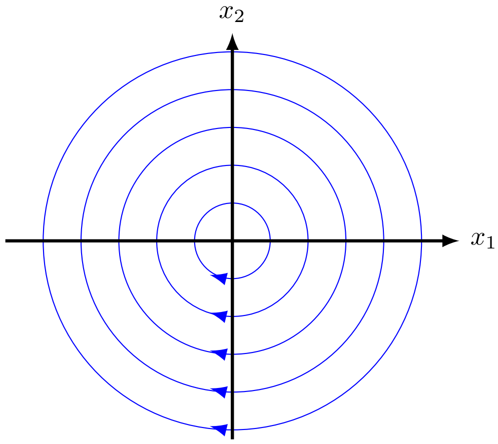
Zadanie 2.2.1

Naszkicować portrety fazowe systemów dynamicznych
$\begin{array}{l}\dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t)\end{array}$ i $\begin{array}{l}\dot{x}_1(t) = 10x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -10x_1(t)\end{array}$
i opisać czym się różnią.

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t)\end{cases}$$
$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$
$$J = A$$

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t) = 10x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -10x_1(t)\end{cases}$$
$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ -10 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$
$$J = A$$

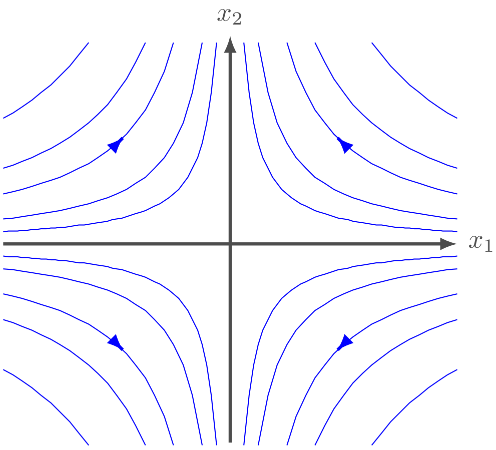




Portrety są identyczne. Jedyną różnicą jest szybkość poruszania się trajektorii w dziedzinie czasu. Dla 1 mamy t, a dla 2 $10t$

Zadanie 2.3.1

Podać wartości własne, jakie mogą odpowiadać poniższemu portretowi fazowemu.



Dla siodła: dwie wartości własne rzeczywiste przeciwnych znaków np 1 i -1

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

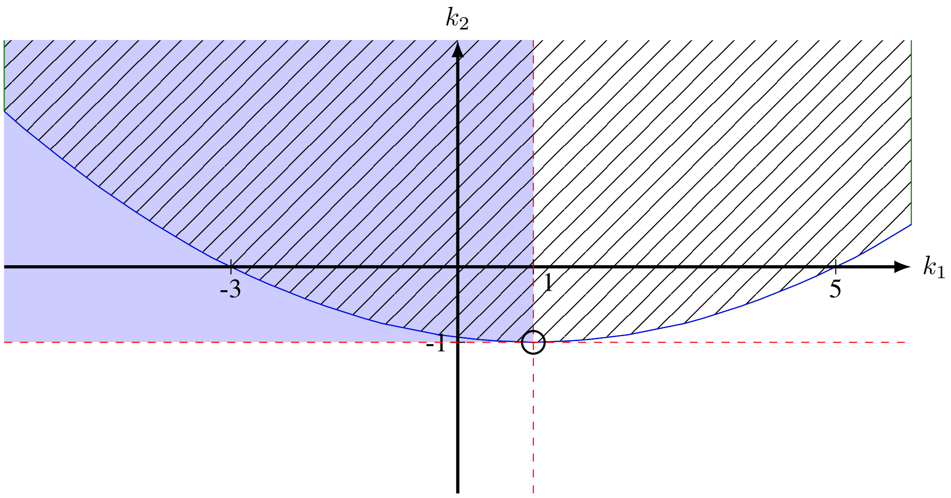
Zadanie 2.4.1

Dla systemu

$$\begin{aligned} x(t) + 4\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) &= u(t) \\ u(t) &= k_1\dot{x}(t) - k_2 x(t) \end{aligned}$$

zbadać zachowanie się układu w zależności od k_1 i k_2. Zaznaczyć odpowiednie obszary na płaszczyźnie $k_1 \times k_2$

$x + 4\ddot{x} + \dot{x} = k_1\dot{x} - k_2 x$
$4\ddot{x} + (1 - k_1)\dot{x} + (1 + k_2)x = 0$
wielomian charakterystyczny:
$x = e^{\lambda t} \quad \dot{x} = \lambda e^{\lambda t} \quad \ddot{x} = \lambda^2 e^{\lambda t}$
$4\lambda^2 + (1 - k_1)\lambda + 1 + k_2 = 0$
macierz Hurwitza dla wielomianu stopnia drugiego: $a_0 x^2 + a_1 x + a_2 = 0$
$\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ a_0 & a_2 \end{bmatrix}$ czyli $\begin{bmatrix} 1 - k_1 & 0 \\ 4 & 1 + k_2 \end{bmatrix}$
żeby układ był stabilny to $|a_1| > 0$ i $\begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0$
więc:
$1 - k_1 > 0 \Rightarrow \boxed{k_1 < 1}$
$(1 - k_1)(1 + k_2) > 0 \Rightarrow 1 + k_2 > 0 \Rightarrow \boxed{k_2 > -1}$
dla $\Delta < 0$ występują oscylacje, więc:
$\Delta = (1 - k_1)^2 - 4 \cdot 4(1 - k_2) = (1 - k_1)^2 - 16 - 16k_2 < 0$
$k_2 > \frac{1}{16}(1 - k_1)^2 - 1$



wewnątrz niebieskiego obszaru asymptotycznie stabilny $k_1 < 1 \wedge k_2 > -1)$
na czerwonych prostych granicznych stabilny $(k_1 = 1 \vee k_2 = -1)$ bez punktu wspólnego
niestabilny na przecięciu prostych i w pozostałych obszarach
oscylacje dla zakreskowanego $k_2 > \frac{1}{16}(1 - k_1)^2 - 1$

Zadanie 2.5.1

Zbadać charakter pracy układu

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t) &= u(t) \\ u(t) &= Kx(t) \end{aligned}$$

w zależności od parametru K. Zaznaczyć wszystkie istotne rodzaje zachowań na osi liczbowej.

$\ddot{x} + \dot{x} + x = Kx$

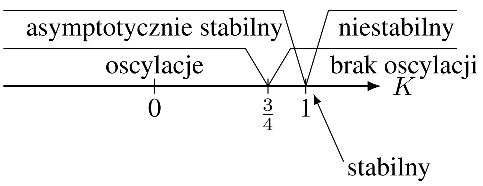
$\ddot{x} + \dot{x} + x(1 - K) = 0$

$\lambda^2 + \lambda + 1 - K = 0$ wielomian charakterystyczny

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 - K \end{bmatrix}$ macierz Hurwitza

$1 - K > 0 \Rightarrow K < 1$

$\Delta = 1 - 4(1 - K) = -3 + 4K < 0 \Rightarrow K < \frac{3}{4}$



Zadanie 2.6.1

Dla jakich wartości parametru k system opisany równaniami:

$$\begin{aligned} 4\dot{x}_1 &= 12x_1 - 0.25kx_2 \\ 0.5\dot{x}_2 &= \frac{1}{k}x_1 + kx_2 \end{aligned}$$

będzie niestabilny.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 3x_1 - \frac{1}{16}kx_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{2}{k}x_1 + 2kx_2 \end{aligned}$$

$\dot{x} = \begin{bmatrix} 3 & -\frac{1}{16}k \\ \frac{2}{k} & 2k \end{bmatrix} x$

$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -\frac{1}{16}k \\ \frac{2}{k} & 2k-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(2k-\lambda) + (\frac{1}{16}k)(\frac{2}{k}) = \lambda^2 - (3+2k)\lambda + 6k + \frac{1}{8}$ wielomian charakterystyczny

$\begin{bmatrix} -(3+2k) & 0 \\ 1 & 6k+\frac{1}{8} \end{bmatrix}$ macierz Hurwitz'a

$-3-2k > 0 \Rightarrow k < -\frac{3}{2}$

$-(3+2k)(6k+\frac{1}{8}) > 0 \Rightarrow 6k + \frac{1}{8} > 0 \Rightarrow k > -\frac{1}{8}$

stabilny dla $k < -\frac{3}{2} \wedge k > -\frac{1}{8} \Rightarrow k \in \varnothing$

niestabilny dla $k \in \mathbb{R}$

Zadanie 2.7.1

Wyznaczyć macierz e^{At} dla macierzy

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$e^{At} = P \cdot e^{Jt} \cdot P^{-1}$
$e^{Jt} = e^{\lambda} \cdot J$

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda(2+\lambda)+2 = \lambda^2+2\lambda+2 = 0$$

$\sqrt{\Delta} = 2i$

$\lambda_1 = \frac{-2+2i}{2} = -1+i \qquad \lambda_2 = -1-i$

$\boxed{\lambda_1 = -1+i}$

$$\begin{bmatrix} -2+1-i & 1 \\ -2 & 1-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -(1+i)\omega_i + \omega_2 = 0 \Rightarrow \omega_2 = \omega_1 + i\omega_1 \\ -2\omega_1 + (1-i)\omega_2 = 0 \end{cases}$$

$-2\omega_1 + (1-i)(1+i)\omega_1 = 0$
$-2\omega_1 + 2\omega_1 = 0$

$$\boxed{\begin{aligned} \text{dla } \lambda &= a \pm ib \\ J &= \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \\ e^{tJ} = e^{at} & \begin{bmatrix} \cos bt & \sin bt \\ -\sin bt & \cos t \end{bmatrix} \end{aligned}}$$

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$e^{tJ} = e^{-t} \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} 1 \\ 1+i \end{bmatrix} \omega = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + pi \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot e^{-t} \cdot \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = e^{-t} \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ \cos t - \sin t & \sin t + \cos t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} =$$
$$= e^{-t} \begin{bmatrix} \cos t - \sin t & \sin t \\ -2\sin t & \sin t + \cos t \end{bmatrix}$$

Zadanie 2.8.1

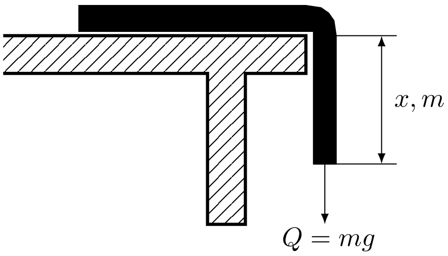
Wyznaczyć rozwiązanie $x(t), t \geqslant 0$ równania
$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + 3x(t) = 0$
$x(0) = 1, \;\; \dot{x}(0) = 0$

$x = e^{\lambda t} \quad \dot{x} = \lambda e^{\lambda t} \quad \ddot{x} = \lambda^2 e^{\lambda t}$
$\lambda^2 e^{\lambda t} + \lambda e^{\lambda t} + 3e^{\lambda t} = 0$
$\lambda^2 + \lambda + 3 = 0$
$\Delta = 1 - 12 = -11 < 0$
$\lambda_1 = \alpha + i\beta \quad \alpha = \frac{-b}{2a} \quad \alpha = \frac{-1}{2}$
$\lambda_2 = \alpha - i\beta \quad \beta = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a} \quad \beta = \frac{\sqrt{11}}{2}$

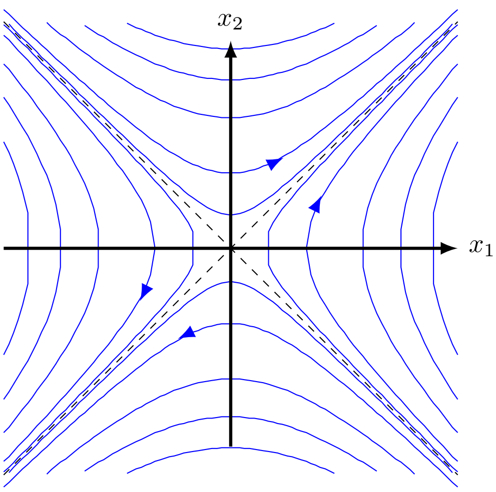
$x(t) = Ae^{\alpha t}\cos\beta t + Be^{\alpha t}\sin\beta t$
$x(t) = Ae^{-\frac{t}{2}}\cos(\frac{\sqrt{11}}{2}t) + Be^{-\frac{t}{2}}\sin(\frac{\sqrt{11}}{2}t)$
$x(0) = A \cdot e^0 \cdot \cos 0 + B \cdot e^0 \cdot \underbrace{\sin 0}_{=0} = \boxed{A = 1}$
$\dot{x}(t) = -\beta Ae^{\alpha t}\sin\beta t + \alpha Ae^{\alpha t}\cos\beta t + \beta Be^{\alpha t}\cos\beta t + \alpha Be^{\alpha t}\sin\beta t$
$\dot{x}(0) = \underbrace{-\dfrac{\sqrt{11}}{2} \cdot e^0 \cdot \sin 0}_{=0} - \frac{1}{2} \cdot e^0 \cos 0 + \frac{\sqrt{11}}{2}B \cdot e^0 \cdot \cos 0 - \underbrace{\dfrac{1}{2}Be^0 \sin 0}_{=0} =$
$= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{11}}{2}B = 0 \Rightarrow \boxed{B = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{\sqrt{11}} = \dfrac{\sqrt{11}}{11}}$
$\boxed{x(t) = e^{-\frac{t}{2}}\cos(\dfrac{\sqrt{11}}{2}t) + \dfrac{\sqrt{11}}{11}e^{-\frac{t}{2}}\sin(\dfrac{\sqrt{11}}{2}t)}$

Zadanie 2.9.1

Na gładkim stole leży sznur o długości 0.3 m i masie 50g, przy czym część sznura zwisa ze stołu jak na rysunku. Zamodelować ruch sznura po stole za pomocą równania różniczkowego. Naszkicować portret fazowy systemu opisanego tym równaniem



$l = 0.3m \quad m = 50g$
$m = M \cdot \frac{x}{l}$
$M \cdot \ddot{x} = m \cdot g$
$\cancel{M} \cdot \ddot{x} = \cancel{M} \cdot \frac{x}{l} \cdot g$
$\ddot{x} = x\frac{g}{l} \quad k = \frac{g}{l}$
$x_1 = x$
$x_2 = \dot{x}$
$\dot{x}_1 = \dot{x} = x_2$
$\dot{x}_2 = \ddot{x} = x_1 k$
$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k & 0 \end{bmatrix} x$
$\lambda^2 - k = 0$
$\lambda = \pm\sqrt{k}$
$J = \begin{bmatrix} \sqrt{k} & 0 \\ 0 & -\sqrt{k} \end{bmatrix}$
$\lambda = \sqrt{k}$
$\begin{bmatrix} -\sqrt{k} & 1 \\ k & -\sqrt{k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
$-\sqrt{k}\omega_1 + \omega_2 = 0$
$k\omega_1 - \sqrt{k}\omega_2 = 0$
$\omega_2 = \sqrt{k}\omega_1$
$\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{k} \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{k} \\ k \end{bmatrix}$



Zadanie 2.10.1

Dany jest system opisany równaniem
$\dot{x}_1(t) = -\pi x_2(t)$
$\dot{x}_2(t) = \pi x_1(t)$
Naszkicować zbiór punktów powstałych z trajektorii stanu systemu w chwili $t = 0.75s$ dla warunków początkowych branych ze zbioru $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1 + x_2| = 1\}$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -\pi \\ \pi & 0 \end{bmatrix} x$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -\pi \\ \pi & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \pi^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -\pi^2 \qquad \lambda = \pm i\pi$$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -\pi \\ \pi & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = J, a = 0, b = \pi$$

$$e^{tJ} = e^t \begin{bmatrix} \cos(\pi t) & \sin(\pi t) \\ -\sin(\pi t) & \cos(\pi t) \end{bmatrix}$$

$$x(t) = e^{tJ}x(0) + \underbrace{\int_0^t e^{(t-\tau)A} Bu(\tau)\, d\tau}_{=0,\ \text{bo } u=0 \quad B=0}$$

$$x(t) = e^{tJ}x(0)$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} \cos(\pi t) & \sin(\pi t) \\ -\sin(\pi t) & \cos(\pi t) \end{bmatrix} x(0)$$

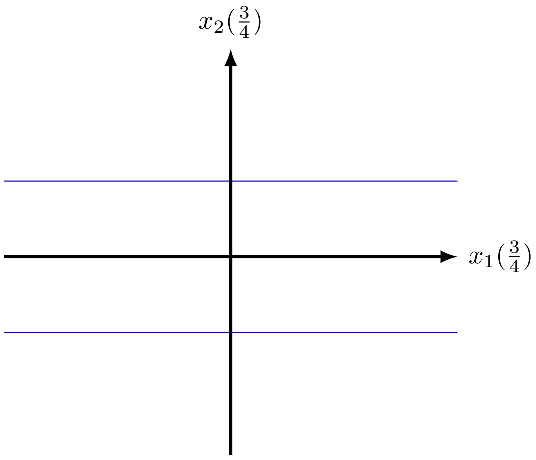
$$t = \tfrac{3}{4}s$$

$$x(\tfrac{3}{4}) = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} x(0) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x(0)$$

$$\begin{cases} x_1(\frac{3}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}(x_1(0) - x_2(0)) \\ x_2(\frac{3}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}(x_1(0) + x_2(0)) \\ |x_1 + x_2| = 1 \Rightarrow \begin{array}{ccc} x_1 + x_2 = 1 & \vee & x_1 + x_2 = -1 \\ x_1 = 1 - x_2 & \vee & x_1 = -1 - x_2 \end{array} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(\frac{3}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}(-x_2(0) + 1 - x_2(0)) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}x_2(0) \\ x_2(\frac{3}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}(-x_2(0) + 1 + x_2(0)) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(\frac{3}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}(-1 - x_2(0) - x_2(0)) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}x_2(0) \\ x_2(\frac{3}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}(-1 - x_2(0) + x_2(0)) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$



Tydzień 3

Dyskretne systemy dynamiczne

Równanie różnicowe
$x(i+1) = Ax(i) + Bu(i)$
$y(i) = Cx(i)$
rozwiązanie:
$x(k) = A^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-1-j} Bu(j)$

$A = PJP^{-1}$
$A^n = (PJP^{-1})^n = PJ^nP^{-1}$

Asymptotyczna stabilność:
$\forall x(0),\ \ x(k) = A^k x(0) \to 0,$ gdy $k \to \infty$

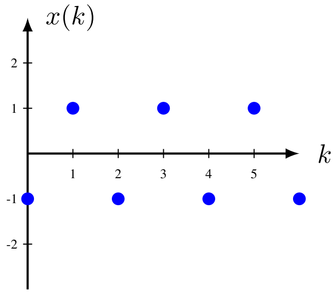
Parametry systemu dyskretnego odpowiadającemu połączeniu eksploratora rzędu zerowego na wejściu i impulsatora na wyjściu
Sprawdzamy czy A nie jest w postaci kanonicznej Jordana ($A^+ = e^{hJ} = e^{hA}$)
Jeśli nie, wartości własne, wektory własne, macierze P, J. Następnie $e^{Jt} = e^{\lambda} J$. Następnie $e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}$
$A^+ = e^{hA}$
$B^+ = \int_0^h e^{tA} B \, dt$
$C^+ = C$

Zadanie 3.1.1

Narysować rozwiązanie równania różnicowego $x(k+1) = \lambda_i x(k)$
dla $i = 1, 2, 3$ gdzie
$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$
przy czym $x(0) = -1$ i $k \geq 0$

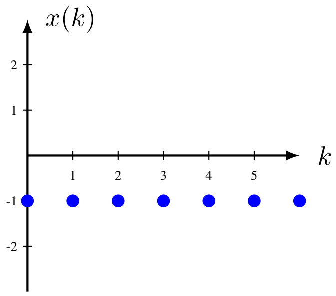
- $i = 3, \lambda_i = -1$

$x(k) = (-1)^k(-1) = (-1)^{k+1}$



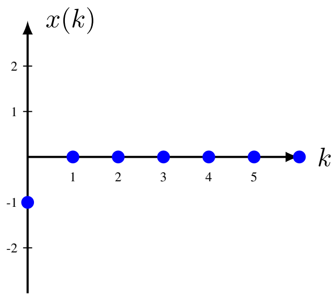
- $i = 2, \lambda_i = 1$

$x(k) = (1)^k(-1) = -1$



- $i = 0, \lambda_i = 0$

$$x(k) = (0)^k(-1) = \begin{cases} -1 & \text{dla } k = 0 \\ 0 & \text{dla } k = 1, 2, ... \end{cases}$$

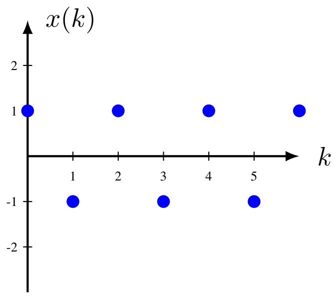


Zadanie 3.1.2

Narysować rozwiązanie równania różnicowego $x(k+1) = \lambda_i x(k)$
dla $i = 1, 2, 3$ gdzie
$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -\frac{1}{2}, \lambda_3 = 1$
przy czym $x(0) = 1$ i $k \geq 0$

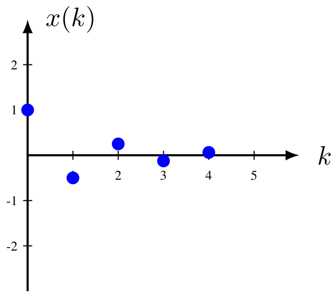
- $\lambda_1 = -1$

$x(k+1) = -x(k)$
$x(k) = (-1)^k \cdot 1 = (-1)^k$



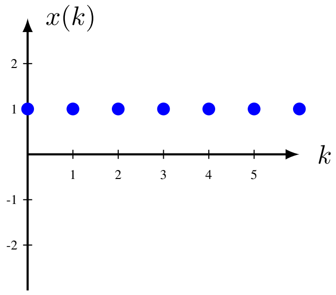
- $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$

$x(k+1) = -\frac{1}{2} \cdot x(k)$
$x(k) = (-\frac{1}{2})^k \cdot 1 = (-\frac{1}{2})^k$



- $\lambda_3 = 1$

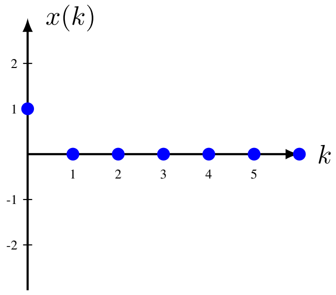
$x(k+1) = x(k)$
$x(k) = 1^k \cdot 1 = 1$



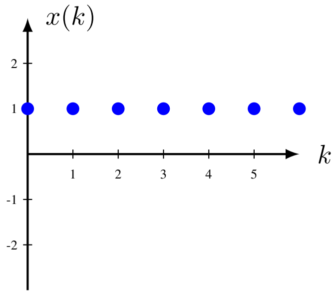
Zadanie 3.1.3

Narysować rozwiązanie równania różnicowego $x(k+1) = \lambda_i x(k)$
dla $i = 1, 2, 3$ gdzie
$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$
przy czym $x(0) = 1$ i $k \geq 0$

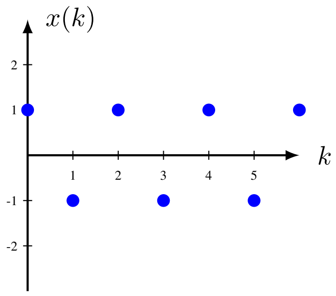
- $\lambda_1 = 0$



- $\lambda_2 = 1$



- $\lambda_3 = -1$

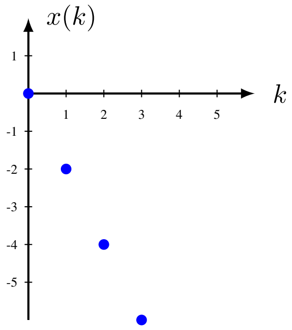


Zadanie 3.2.1

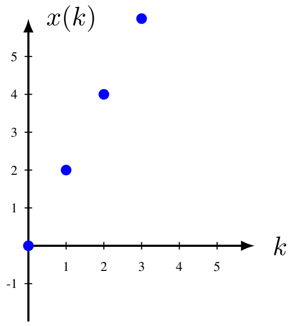
Narysować rozwiązanie równania różnicowego $x(k+1) = x(k) + u_i(k)$
dla $i = 1, 2, 3$ gdzie
$u_1 = -2, u_2 = 2, u_3 = 1$
przy czym $x(0) = 0$ i $k \geq 0$

$x(k+1) = Ax(i) + Bu(i)$
$x(k) = A^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-1-j} Bu(j)$
$A = 1, B = 1, \forall j \quad u(j) = u_i$
$\Rightarrow x(k) = x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} u$ dla $x(0) = 0$
$\Rightarrow x(k) = u_i \cdot k$

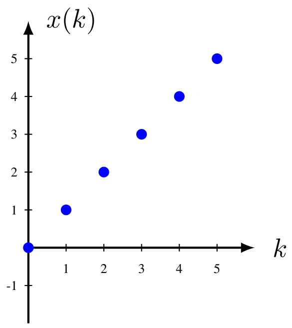
- $i = 1, u_i = -2$



- $i = 2, u_i = 2$



- $i = 3, u_i = 1$

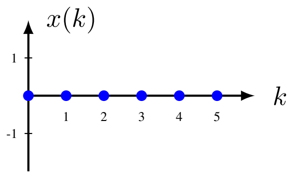


Zadanie 3.2.2

Narysować rozwiązanie równania różnicowego $x(k+1) = 2x(k) + u_i(k)$
dla $i = 1, 2, 3$ gdzie
$u_1 = 0, u_2 = -2, u_3 = 2$
przy czym $x(0) = 0$ i $k \geq 0$

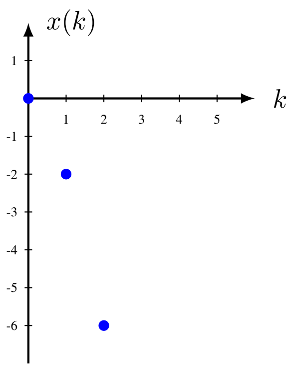
- $u_1 = 0$

$x(k+1) = 2x(k) + 0$
$x(k) = 2^k \cdot 0 = 0$



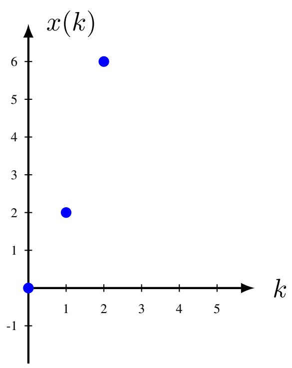
- $u_2 = -2$

$x(k+1) = 2x(k) - 2$
$x(k) = 2^k \cdot 0 + \sum_{j=0}^{k-1} 2^{k-1-j} \cdot (-2) = -2 \cdot \sum_{j=0}^{k-1} (2^k \cdot 2^{-1} \cdot 2^{-j})$
$= -2^k \cdot \sum_{j=0}^{k-1} (\frac{1}{2})^j = -2^k \cdot \frac{1-(\frac{1}{2})^k}{1-\frac{1}{2}} = -2^{k+1} + 2$



- $u_3 = 2$

$x(k+1) = 2x(k) + 2$
$x(k) = 2^k \cdot 0 + \sum_{j=0}^{k-1} 2^{k-1-j} \cdot (2) = 2 \cdot \sum_{j=0}^{k-1} (2^k \cdot 2^{-1} \cdot 2^{-j})$
$= 2^k \cdot \sum_{j=0}^{k-1} (\frac{1}{2})^j = 2^k \cdot \frac{1-(\frac{1}{2})^k}{1-\frac{1}{2}} = 2^{k+1} - 2$



Zadanie 3.3.1

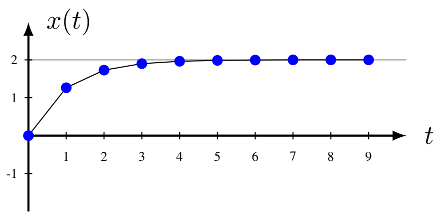
Niech będzie dany układ ciągły opisany równaniem $\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t)$
(a) Znaleźć rozwiązanie tego układu dla: $x(0) = 0, u(t) = 1, a = -1, b = 2$.
(b) Znaleźć parametry układu dyskretnego, jeśli podłączono ekstrapolator pierwszego rzędu na wejściu i impulsator na wyjściu, przy czym pracują one synchronicznie z okresem próbkowania $t = 1$. Rozwiązać powstały układ.
(c) Jak wyżej, przy założeniu $t = 10$.
(d) Narysować wszystkie rozwiązania na jednym układzie współrzędnych. Opisać różnice.

(a)
$\dot{x} = -x + 2$
$\frac{dx}{dt} = -x + 2$
$\frac{dx}{-x+2} = dt$
$-\ln|-x+2| = t + c$, gdzie c jest stałą
$\ln|-x+2| = -t + c$
$e^{-t+c} = -x + 2$
$e^{-t}e^{c} = -x + 2$
$ce^{-t} = -x + 2$, bo e^c to też stała

$x(0) = c + 2 = 0 \Rightarrow c = -2$
$ce^{-t} = -x + 2 \Rightarrow \boxed{x(t) = ce^{-t} + 2 = -2e^{-t} + 2}$

(b)
$h = 1$
$x^+(i) = x(ih) = x(i)$
$u^+(i) = u(i)$
$y^+(i) = y(i)$
$A^+ = e^{hA} = e^{-1}$
$B^+ = \int_0^1 e^{tA}B\,dt = \int_0^1 e^{-t}2\,dt = 2\int_0^1 e^{-t}\,dt = -2e^{t}|_0^1 = -2(e^{-1} - 1) = 2 - \frac{2}{e}$
$C^+ = C$
$x(i+1) = e^{-1}x(i) + (2 - \frac{2}{e})u(i) = \frac{x(i)}{e} + 2 - \frac{2}{e}$
$x(k) = (e^{-1})^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1}(e^{-1})^{k-1-j}(2 - \frac{2}{e}) = (2 - \frac{2}{e})\sum_{j=0}^{k-1}(e^{-k}\cdot e^1 \cdot e^j)$
$= (2 - \frac{2}{e})e^{1-k}\cdot\frac{1-e^k}{1-e} = 2(e\cdot e^{-k} - e^{-k})\frac{1-e^k}{1-e} = 2(-e^{-k})(1 - e^k) = 2 - 2e^{-k}$

(c)
$h = 10$
$x^+(i) = x(10i)$
$u^+(i) = u(10i)$
$A^+ = e^{10A} = e^{-10}$
$B^+ = 2\int_0^{10} e^{-t}\,dt = 2(-e^{-t}|_0^{10}) = -2(e^{-10} - 1) = 2 - 2e^{-10}$
$x(k) = \underbrace{(e^{-10})^k x(0)}_{=0} + \sum_{j=0}^{k-1}(e^{-10})^{k-1-j}(2 - 2e^{-10}) = (2 - 2e^{-10})\cdot e^{-10k-10}\cdot\frac{1-(e^{10})^k}{1-e^{10}}$
$= 2(e^{-10k}\cdot e^{10} - e^{-10}\cdot e^{-10k}\cdot e^{10})\cdot\frac{1-e^{10k}}{1-e^{10}} = 2(-e^{-10k}(1 - e^{10}))\frac{1-e^{10k}}{1-e^{10}} = 2 - 2e^{-10k}$



- wykres (a) jest liniowy, (b) i (c) punktowe - (a) punkty co 1, (b) punkty co 10 (?)

Zadanie 3.4.1

Obliczyć A^n dla macierzy
$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$A = PJP^{-1}$
$A^n = \underbrace{(PJP^{-1})(PJP^{-1})...(PJP^{-1})}_{n}$
$A^n = PJ^nP^{-1}$
$|[A - \lambda I]| = 0$
$(4-\lambda)(2-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 4, \lambda_2 = 2$
$[A - \lambda I]\omega_1 = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{11} \\ \omega_{12} \end{bmatrix} = 0 \qquad \begin{matrix} -2\omega_{12} = 0 \\ \omega_{11} \in \mathbb{R} \end{matrix} \qquad \omega_1 = \begin{bmatrix} \omega_{11} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{21} \\ \omega_{22} \end{bmatrix} = 0 \qquad \begin{matrix} 2\omega_{21} - 2\omega_{22} = 0 \\ \omega_{22} = \omega_{21} \\ \omega_{21} \in \mathbb{R} \end{matrix} \qquad \omega_2 = \begin{bmatrix} \omega_{21} \\ \omega_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$P = [\omega_1 \ \ \omega_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
$P^{-1} = \frac{1}{det(P)} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
$J = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, J^n = \begin{bmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}$
$A^n = PJ^nP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4^n & 2^n \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4^n & 2^n - 4^n \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}$

Zadanie 3.4.2

Obliczyć A^n dla macierzy
$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$

$A^n = PJ^nP^{-1}$
$|[A-\lambda I]| = (-\lambda)(2-\lambda)+4 = \lambda^2 - 2\lambda + 4 = 0$
$\Delta = 4 - 16 = -12$
$\lambda = 1 \pm i\sqrt{3}$

$\boxed{\lambda = 1 + i\sqrt{3}}$

$[A-\lambda I]\omega_1 = 0$

$$\begin{bmatrix} 2-1-i\sqrt{3} & 1 \\ -4 & -1-i\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ll} (1-i\sqrt{3})\omega_1 + \omega_2 = 0 & \Rightarrow \omega_2 = -(1-i\sqrt{3})\omega_1 \\ -4\omega_1 + (-1-i\sqrt{3})\omega_2 = 0 & \Rightarrow -4\omega_1 + 4\omega_1 = 0 \end{array}$$

$$\omega = \begin{bmatrix} 1 \\ -1+i\sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{r} \lambda = a \pm ib \\ tg\varphi = \dfrac{b}{a} \Rightarrow \varphi = arctg\dfrac{b}{a} \\ J = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \rightarrow J^n = (\sqrt{a^2+b^2})^n \begin{bmatrix} \cos n\varphi & \sin n\varphi \\ -\sin n\varphi & \cos n\varphi \end{bmatrix} \end{array}}$$

$\varphi = arctg\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$

$$J^n = 2^n \begin{bmatrix} \cos n\frac{\pi}{3} & \sin n\frac{\pi}{3} \\ -\sin n\frac{\pi}{3} & \cos n\frac{\pi}{3} \end{bmatrix}$$

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \cdot 2^n \cdot \begin{bmatrix} \cos n\frac{\pi}{3} & \sin n\frac{\pi}{3} \\ -\sin n\frac{\pi}{3} & \cos n\frac{\pi}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$$

$$= 2^n \begin{bmatrix} \cos + \frac{\sqrt{3}}{3}\sin & \frac{\sqrt{3}}{3}\sin \\ -\frac{4}{3}\sqrt{3}\sin & -\frac{\sqrt{3}}{3}\sin + \cos \end{bmatrix}$$

Zadanie 3.4.3

Obliczyć A^n dla macierzy
$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

$A^n = PJ^nP^{-1}$
$|A - \lambda I| = 0$
$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-3)^2 - 1 = (\lambda-3-1)(\lambda-3+1) = (\lambda-4)(\lambda-2) = 0$

$\lambda_1 = 4$ $\quad\quad$ $\lambda_2 = 2$

$(A-\lambda_1 I)\omega_1 = 0$ $\quad\quad$ $(A-\lambda_1 I)\omega_2 = 0$

$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \omega_{11} \\ \omega_{12} \end{bmatrix}$ $\quad\quad$ $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \omega_{21} \\ \omega_{22} \end{bmatrix}$

$-\omega_{11} - \omega_{12} = 0$ $\quad\quad$ $\omega_{21} = \omega_{22}$

$\omega_{12} = -\omega_{11}$

$\omega_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\quad\quad$ $\omega_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\boxed{\frac{4^n}{2} = \frac{4^n}{4^{\frac{1}{2}}} = 4^{n-\frac{1}{2}} = \frac{2^n}{2} = 2^{n-1}}$

$J = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$J^n = \begin{bmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}$

$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4^n & 2^n \\ -4^n & 2^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4^{n-\frac{1}{2}} + 2^{n-1} & -4^{n-\frac{1}{2}} + 2^{n-1} \\ -4^{n-\frac{1}{2}} + 2^{n-1} & 4^{n-\frac{1}{2}} + 2^{n-1} \end{bmatrix}$

Zadanie 3.5.1

Do ciągłego systemu dynamicznego opisanego równaniami
$\dot{x}_1(t) = 2\pi x_2(t)$,
$\dot{x}_2(t) = -2\pi x_1(t) + u(t)$,
podłączono ekstrapolator rzędu zerowego na wejściu i impulsator na wyjściu, przy czym pracują one synchronicznie z okresem próbkowania $h = 1s$. Wyliczyć parametry systemu dyskretnego odpowiadające takiemu połączeniu.

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 2\pi \\ -2\pi & 0 \end{bmatrix}}_{A} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} u(t)$$

$x^+(vi) = A^+x^+(i) + B^+u^+(i), h = 1s$

$A^+ = e^{hA}$

$A^+ = e^A = Pe^JP^{-1}$

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 2\pi \\ -2\pi & -\lambda \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{array}{l} \lambda^2 + 4\pi^2 = 0 \\ \lambda = -4\pi^2 \\ \lambda_{1,2} = \pm 2\pi i \qquad (p = 0, q = 2\pi) \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} -2\pi i & \boxed{2\pi} \\ -2\pi & -2\pi i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{11} \\ \omega_{12} \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{array}{c} \omega_{11} \in \mathbb{R} \\ -2\pi i\omega_{11} + 2\pi\omega_{12} = 0 \\ \omega_{12} = i\omega_{11} \end{array} \Rightarrow \omega_1 = \begin{bmatrix} \omega_{11} \\ \omega_{12} \end{bmatrix} = \omega_{11} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \omega_{11} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + i\omega_{11} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = P^{-1} = I$$

$\Rightarrow A$ jest postaci Jordana $\Rightarrow J = A = \begin{bmatrix} 0 & 2\pi \\ -2\pi & 0 \end{bmatrix}$

$$e^J = e^p \cdot \begin{bmatrix} \cos(q) & \sin(q) \\ -\sin(q) & \cos(q) \end{bmatrix}$$

$$e^J = \begin{bmatrix} \cos(2\pi) & \sin(2\pi) \\ -\sin(2\pi) & \cos(2\pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Pe^JP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$B^+ = \int_0^h e^{tA}B\ dt$

B jest stałą

$$\int_0^h e^{tA}B\ dt = \int_0^h \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} dt = \int_0^h \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} dt$$

teraz $\int dt = t + c$:

całkujemy każdy element wektora:

$h = 1$

$$t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Bigg|_0^1 = 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$x^+(i+1) = A^+x^+(i) + B^+u^+(i)$

$$x^+(i+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x^+(i) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u^+(i)$$

Zadanie 3.5.2

Do ciągłego systemu dynamicznego opisanego równaniami
$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$
$y(t) = Cx(t),$
przy czym
$A = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 9 \end{bmatrix}$
podłączono ekstrapolator rzędu zerowego na wejściu i impulsator na wyjściu, przy czym pracują one synchronicznie z okresem próbkowania $h = 1s$. Wyliczyć parametry systemu dyskretnego odpowiadające takiemu połączeniu.

$x^+(i) = x(ih) = x(i)$
$y^+(i) = y(ih) = y(i)$
$u^+(i) = u(ih) = u(i)$
$A^+ = e^{hA}$
A jest w postaci Jordana, więc $A = J$
$A^+ = e^{hJ} = e^J = \begin{bmatrix} e^{-0.5} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2} \end{bmatrix}$
$B^+ = \int_0^h e^{tA} B \, dt = \int_0^1 \begin{bmatrix} e^{-\frac{t}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} dt = \int_0^1 \begin{bmatrix} e^{-\frac{t}{2}} \\ e^{-t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix} dt$
$= \begin{bmatrix} -2e^{-\frac{t}{2}}|_0^1 \\ -e^{-t}|_0^1 \\ -\frac{1}{2}e^{-2t}|_0^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - 2e^{-\frac{1}{2}} \\ 1 - e^{-1} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2} \end{bmatrix}$
$C^+ = C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 9 \end{bmatrix}$

Zadanie 3.5.3

Do ciągłego systemu dynamicznego opisanego równaniami
$\dot{x}_1(t) = -2x_1(t) + x_2(t),$
$\dot{x}_2(t) = -2x_1(t),$
podłączono ekstrapolator rzędu zerowego na wejściu i impulsator na wyjściu, przy czym pracują one synchronicznie z okresem próbkowania $h = 1s$. Wyliczyć parametry systemu dyskretnego odpowiadające takiemu połączeniu.

$A^+ = e^{At}$
$B^+ = 0$
$C^+ = 0$
reszta jak w 2.7.1 tylko $t = 1$

Zadanie 3.6.1

Dla jakich wartości parametrów k_1 i k_2 system dynamiczny

$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & k_2 \end{bmatrix} x(k)$

będzie asymptotycznie stabilny. Zaznaczyć obszar stabilności na płaszczyźnie $k1 \times k2$

$x(k+1) = Ax(k)$
$|[A - \lambda I]| = 0$
$(-\lambda)(k_2 - \lambda) + k_1 = 0$
$\lambda^2 - k_2\lambda + k_1 = 0$
$\lambda = \frac{z+1}{z-1}$
$(\frac{z+1}{z-1})^2 - k_2(\frac{z+1}{z-1}) + k_1 = 0$
$\frac{(z+1)^2 - k_2(z+1)(z-1) + k_1(z-1)^2}{(z-1)^2} = 0$

Rozważany układ jest asymptotycznie stabilny $\Leftrightarrow$ wartości własne (λ) macierzy A leżą wewnątrz koła jednostkowego na płaszczyźnie zespolonej $\Leftrightarrow$ pierwiastki wielomianu $L(z) = (z+1)^2 - k_2(z+1)(z-1) + k_1(z-1)^2$ leżą w lewej półpłaszczyźnie zespolonej $\Leftrightarrow$ spełnione jest dla wielomianu $L(z)$ kryterium Hurwitza

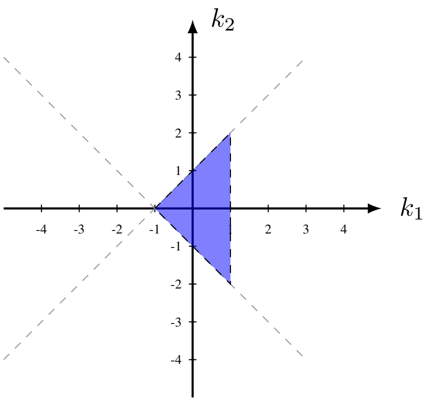
$L(z) = (z+1)^2 - k_2(z+1)(z-1) + k_1(z-1)^2$
$L(z) = x^2 + 2z + 1 - k_2z^2 + k_2 + k_1z^2 - 2k_1z + k_1$
$L(z) = z^2(1 + k_1 - k_2) + z(2 - 2k_1) + (1 + k_1 + k_2) = 0$

W.K. $a_2 > 0, a_1 > 0, a_0 > 0$

$$\begin{aligned} 1 + k_1 - k_2 &> 0 \\ k_2 &< k_1 + 1 \\ 2 - 2k_1 &> 0 \\ k_1 &< 1 \\ 1 + k_1 + k_2 &> 0 \\ k_2 &> -k_1 - 1 \end{aligned}$$

$\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - 2k_1 & 0 \\ 1 + k_1 - k_2 & 1 + k_1 + k_2 \end{bmatrix}$

$a_1 > 0 \wedge a_1 a_0 > 0$ - spełnione dla W.K.



Zadanie 3.6.2

Dla jakich wartości parametrów k_1 i k_2 system dynamiczny

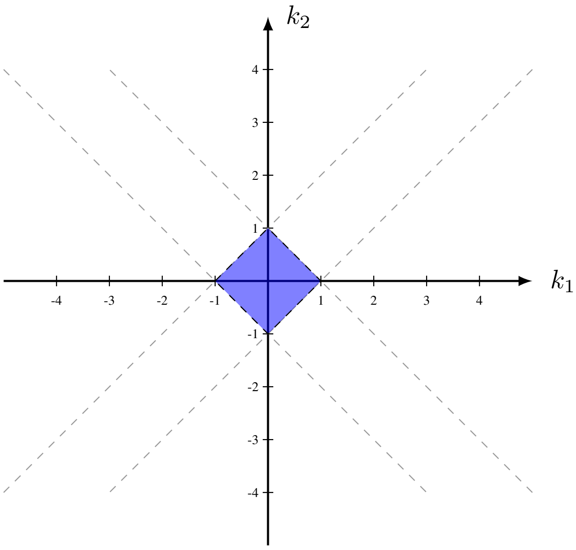
$$x(k+1) = \begin{bmatrix} k_1 - k_2 & 1 & 2 \\ 0 & k_1 + k_2 & 1 \\ 0 & 0 & k_1^2 + k_2^2 \end{bmatrix} x(k)$$

będzie asymptotycznie stabilny. Zaznaczyć obszar stabilności na płaszczyźnie $k1 \times k2$

$\lambda_1 = k_1 - k_2 \ \vee \ \lambda_2 = k_1 + k_2 \ \vee \ \lambda_3 = k_1^2 + k_2^2$
dyskretny system liniowy jest asymptotycznie stabilny $\Leftrightarrow$ wartości własne macierzy A leżą w kole jednostkowym o środku w zerze na płaszczyźnie zespolonej (wystarczy sprawdzić warunek $|\lambda_i| < 1$, nie trzeba z Hurwitza)

- $\lambda_1 = k_1 - k_2$
  $k_1 - k^2 < 1 \quad \wedge \quad k_1 - k_2 > -1$
  $k_2 > k_1 - 1 \quad \wedge \quad k_2 < k_1 + 1$
- $\lambda_1 = k_1 + k_2$
  $k_1 + k_2 < 1 \quad \wedge \quad k_1 + k_2 > -1$
  $k_2 < -k_1 + 1 \quad \wedge \quad k_2 > -k_1 - 1$
- $\lambda_1 = k_1^2 + k_2^2$
  $k_1^2 + k_2^2 < 1 \quad \wedge \quad k_1^2 + k_2^2 > -1$

$\lambda_1 = k_1 - k_2 \ \wedge \ \lambda_2 = k_1 + k_2 \ \wedge \ \lambda_3 = k_1^2 + k_2^2$

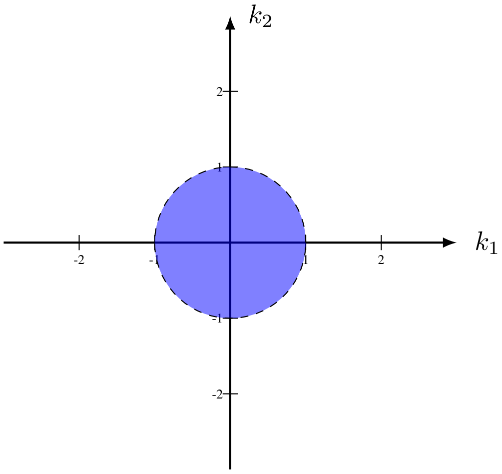


Zadanie 3.6.3

Dla jakich wartości parametrów k_1 i k_2 system dynamiczny
$x(k+1) = \begin{bmatrix} -k_2 & k_1 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix} x(k)$
będzie asymptotycznie stabilny. Zaznaczyć obszar stabilności na płaszczyźnie $k1 \times k2$

$|A - \lambda I| = 0$
$\begin{bmatrix} -k_2 - \lambda & k_1 \\ -k_1 & -k_2 - \lambda \end{bmatrix} = (k_2 + \lambda)^2 + k_1^2 = (k_2 + \lambda)^2 - (ik_1)^2 = (\lambda + k_2 + ik_1) \cdot (\lambda + k_2 - ik_1) = 0$

$\lambda = -k_2 \pm ik_1$
Układ jest asymptotycznie stabilny, gdy wartości własne macierzy leżą wewnątrz koła jednostkowego na płaszczyźnie zespolonej o środku w zerze.
$|\lambda| < 1$
$|\lambda| = \sqrt{(-k_2)^2 + k_1^2}$
$\sqrt{k_1^2 + k_2^2} < 1$
$k_1^2 + k_2^2 < 1$



Zadanie 3.7.1

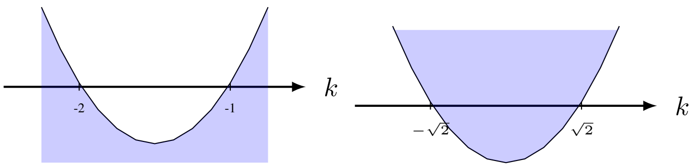
Dla jakich wartości parametru k_1 system dynamiczny
$x(k+1) = \begin{bmatrix} -0.5k_1 & 0 \\ 2 & -k_1 \end{bmatrix} x(k)$
będzie niestabilny.

$(-0.5k_1 - \lambda)(-k_1 - \lambda) = 0$
$0.5k_1^2 + 0.5k_1\lambda + k_1\lambda + \lambda^2 = 0$
$\lambda^2 + 1.5k_1\lambda + 0.5k_1^2 = 0$
$\lambda = \frac{z+1}{z-1}$
$(\frac{z+1}{z-1})^2 - 1.5k_1(\frac{z+1}{z-1}) + 0.5k_1^2 = 0$
$z^2 + 2z + 1 + 1.5k_1z^2 - 1.5k_1 + 0.5k_1^2z^2 - k_1^2z + 0.5k_1^2 = 0$
$z^2 \underbrace{(0.5k_1^2 + 1.5k_1 + 1)}_{a_2} + z\underbrace{(2 - k_1^2)}_{a_1} + \underbrace{(0.5k_1^2 - 1.5k_1 + 1)}_{a_0} = 0$

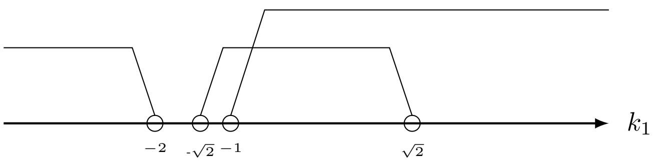
Z kryterium Hurwitza system będzie stabilny gdy:

$$\begin{array}{lclcr} a_2 > 0 & & 0.5k_1^2 + 1.5k_1 + 1 > 0 & & 2 - k_1^2 > 0 \\ a_1 > 0 & \Leftrightarrow & k_1^2 + 3k_1 + 2 > 0 & \vee & (\sqrt{2} - k_1)(\sqrt{2} + k_1) > 0 \\ a_0 > 0 & & (k_1 + 1)(k_1 + 2) > 0 & & (k_1 - \sqrt{2})(\sqrt{2} + k_1) < 0 \end{array}$$

ponieważ W.K. zawiera w sobie W.W., aby spełnione zostało



kryterium Hurwitza musi być spełniony iloczyn warunków: $a_2 > 0 \wedge a_1 > 0$



$\Rightarrow$ układ jest stabilny $\Leftrightarrow k_1 \in (-1, \sqrt{2})$
$\Rightarrow$ układ jest niestabilny $\Leftrightarrow k_1 \in (-\infty, -1) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$

Zadanie 3.7.2

Dla jakich wartości parametru k_1 system dynamiczny
$x(k+1) = \begin{bmatrix} -1 & -k_1 \\ -k_1 & -3 \end{bmatrix} x(k)$
będzie niestabilny.

$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -k_1 \\ -k_1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (1+\lambda)(3+\lambda) - k_1^2 = \lambda^2 + 3 + 4\lambda - k_1^2 = 0$
$\Delta = 16 - 12 + 4k_1^2 = 4 + 4k_1^2$
$\lambda = -2 \pm \sqrt{1+k_1^2}$

system będzie niestabilny $\Leftrightarrow |\lambda_i| > 1$

- $\lambda = -2 + \sqrt{1+k_1^2}$

$$\begin{array}{ccc} -2 + \sqrt{1+k_1^2} > 1 & \vee & -2 + \sqrt{1+k_1^2} < -1 \\ \sqrt{1+k_1^2} > 3 & & \sqrt{1+k_1^2} < 1 \\ k_1^2 > 8 & & k_1^2 < 0 \\ k_1 > 2\sqrt{2} \vee k_1 < -2\sqrt{2} & & \text{sprzeczne} \end{array}$$

- $\lambda = -2 - \sqrt{1+k_1^2}$

$$\begin{array}{ccc} -2 - \sqrt{1+k_1^2} > 1 & \vee & -2 - \sqrt{1+k_1^2} < -1 \\ \sqrt{1+k_1^2} < -3 & & \sqrt{1+k_1^2} > -1 \\ \text{sprzeczne} & & k_1 \in \mathbb{R} \end{array}$$

$k_1 > 2\sqrt{2} \vee k_1 < -2\sqrt{2} \vee k_1 \in \mathbb{R} \Rightarrow k_1 \in \mathbb{R}$

Zadanie 3.7.3

Dla jakich wartości parametru k_1 system dynamiczny
$x(k+1) = \begin{bmatrix} -k_1 & k_1 \\ -k_1 & -k_1 \end{bmatrix} x(k)$
będzie niestabilny.

$\begin{bmatrix} -k_1 - \lambda & k_1 \\ -k_1 & -k_1 - \lambda \end{bmatrix} = (-k_1-\lambda)^2+k_1^2 = (-k_1-\lambda)^2-(ik_1)^2 = (-k_1-\lambda-ik_1)(-k_1-\lambda+ik_1) = (\lambda+k_1-ik_1)(\lambda+k_1+ik_1) = 0$
$\lambda = -k_1 \pm ik_1$
układ jest niestabilny gdy $|\lambda| > 1$
podstawiamy tu moduł - więc usuwamy i z zespolonej.
$|\lambda| = \sqrt{(-k_1)^2 + (k_1)^2} = \sqrt{k_1^2 + k_1^2} > 1$
$2k_1^2 > 1$
$k_1^2 > \frac{1}{2}$
$k_1 > \frac{\sqrt{2}}{2}$

Zadanie 3.8.1

Wyznaczyć rozwiązanie następującego równania różnicowego (rekurencyjnego)
$x(k+2) + x(k+1) - 2x(k) = 0, x(0) = 1, x(1) = -1$

---

zakładam rozwiązanie postaci z^n
$z^n + z^{n-1} + 2z^{n-2} = 0 \mid : z^{n-2}$
$z^2 + z - 2 = 0$ - wielomian charakterystyczny
$W(z) = (z+2)(z-1)$
$z_1 = -2, \;\; z_2 = 1$
rozwiązanie równania jest postaci:
$x(k) = Cz_1^k + Dz_2^k$
podstawiając $x(0)$ oraz $x(1)$

$$\begin{cases} x(0) = 1 = C + D \\ x(1) = -1 = Cz_1 + Dz_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C = 1 - D \\ -1 = -2C + D \end{cases}$$

$$\begin{cases} D = 1 - C \\ -1 = -2C + 1 - C \end{cases}$$

$$\begin{cases} D = 1 - C \\ 3C = 2 \end{cases}$$

$C = \frac{2}{3} \quad D = \frac{1}{3}$
$\Rightarrow x(k) = \frac{1}{3}(2 \cdot (-2)^k + 1^k)$

$$\boxed{x(k) = \frac{2}{3}(-2)^k + \frac{1}{3}1^k}$$

Zadanie 3.8.2

Wyznaczyć rozwiązanie następującego równania różnicowego (rekurencyjnego)
$x(k+2)+3x(k+1)+2x(k)=0, x(0)=2, x(1)=-3$

$q^{k+2}+3q^{k+1}+2q=0$
$q^2+3q+2=0$
$\Delta=9-8=1$
$q=\frac{-3+1}{2}=-1 \quad \vee \quad q=\frac{-3-1}{2}=-2$
$x(k)=a(-1)^k+b(-2)^k$
$\begin{cases} x(0)=a+b=2 \\ x(1)=-a-2b=-3 \end{cases}$
$b=1 \wedge a=1$
$\boxed{x(k)=(-1)^k+(-2)^k}$

Zadanie 3.8.3

Wyznaczyć rozwiązanie następującego równania różnicowego (rekurencyjnego)
$x(k+2) + 2x(k+1) - 3x(k) = 0, x(0) = 2, x(1) = -2$

$x^2 + 2x - 3 = 0$
$\Delta = 4 + 12 = 16, \sqrt{\Delta} = 4$
$x_1 = \frac{-2-4}{2} = -3 \wedge x_2 = 1$
$x(k) = C_1 x_1^k + C_2 x_2^k$
$$\begin{cases} x(0) = 2 = C_1 + C_2 \Rightarrow C_2 = 2 - C_1 \\ x(1) = -2 = -3C_1 + C_2 \end{cases}$$
$-2 = -3C_1 + 2 - C_1 \Rightarrow C_1 = 1$
$C_2 = 1$
$\boxed{x(k) = -3^k + 1}$

Alternatywne :
równanie charakterystyczne
$r^2 + 2r - 3 = 0$
$(r+1)^2 - 4 = 0$
$(r+1-2)(r+1+2) = 0$
$(r-1)(r+3)$
$r_1 = 1 \quad r_2 = -3$

$x(k) = c_1 r_1^k + c_2 r_2^k$
$x(0) = 2 = c_1 + c_2$
$x(1) = -2 = c_1 + 3c_2$

$$\begin{cases} 2 = c_1 + c_2 \\ -2 = c_1 - 3c_2 \end{cases}$$
$4 = 4c_2$
$c_1 = 1 \quad c_2 = 1$

$\boxed{x(k) = 1 + (-3)^k}$

Zadanie 3.9.1

Dany jest układ dyskretny

$$x(k+1) = Ax(k), A = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

przy czym $k = 1, 2, ...$ Wyznaczyć $x(n)$.

---

wielomian charakterystyczny: $|[A - \lambda I]| = 0$

$$\begin{bmatrix} -\lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} = (-\lambda)^n \text{(wyznacznik macierzy diagonalnej)}$$

Z Tw. Cagleya-Hamiltona wiadomo, że każda macierz spełnia swój wielomian charakterystyczny
$A^n = 0$

rozwiązanie równania $x(k+1) = Ax(k)$ ma postać $x(k) = A^k x(0)$ czyli $x(n) = A^n x(0) = 0$
Biorąc więc pod uwagę fakt $A^n = 0$ wiadomo, że rozwiązanie x(k) stanie się zerem w co najwyżej n krokach, niezależnie od warunku początkowego $x(0)$

Zadanie 3.9.2

Dany jest układ dyskretny

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n\times n}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

przy czym $k = 1, 2, ...$ Wyznaczyć $x(n)$ wiedząc, że $u(i) = 1$ dla $i = 1, 2, ..., n$.

$x(n) = A^n x(0) + \sum_{j=0}^{n-1} A^{n-1-j} Bu(j)$
Zauważmy, że $\det(A) = 0$ (bo same zera na przekątnej)
wtedy $\det(\lambda I - A) = \lambda^n$
z Tw. Cagleya-Hamiltona $A^n = 0$ (każda macierz spełnia swój wielomian charakterystyczny)
mamy więc $A^n x(0) = 0$, czyli $x(n) = \sum_{j=0}^{n-1} A^{n-1-j} B \underbrace{u(j)}_{=1}$

Przy kolejnych mnożeniach macierzy A podniesionej do jakiejś potęgi przez B otrzymujemy pierwszą kolumnę macierzy A, która zawiera same zera, poza przypadkiem $A^0 = I$ (macierz jednostkowa), więc sumujemy $n - 1$ kolumn samych zer oraz jedną równą B $(I \cdot B = B)$
ostatecznie $\boxed{x(n) = B}$

Zadanie 3.9.3

Dany jest układ dyskretny

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n\times n}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

przy czym $k = 1, 2, ...$ Wyznaczyć $x(n)$ wiedząc, że $u(i) = 1$ dla $i = 1, 2, ..., n$.

$|A| = 0$
$x(k+1) = Ax(k)$
$|\lambda I - A| = \lambda^n$
z Tw. Cagleya-Hamiltona:
$A^n = 0$
$x(1) = Ax(0) + B$
$x(2) = A^2x(0) + (A+1)B$
$x(3) = A^3x(0) + (A^2 + A + 1)B$
...
$x(n) = A^nx(0) + (A^{n-1} + A^{n-2} + ... + 1)B$
ponieważ tylko $A^n = 0$, więc dla każdego $A^{n-1}, A^{n-2}, ... \neq 0$
te potęgi będą miały jakieś śmieci w wartościach, nie istotne co tam będzie. Ważne, że tam gdzie w A są 0 nie pojawi się nic nowego, czyli gdzie było 0 przed potęgowaniem, tam będzie też po. $\Rightarrow$ wynik iloczynu $A^iB = 0$ (macierz zerowa), $i = 1, ..., n-1 \Rightarrow \boxed{x(n) = B}$

Zadanie 3.9.4

Dany jest układ dyskretny

$$x(k+1) = Ax(k), A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

przy czym $k = 1, 2, ...$ Wyznaczyć $x(2n)$.

$|A| = 0$
$x(k+1) = Ax(k)$
$|\lambda I - A| = \lambda^n$
z Tw. Cagleya-Hamiltona:
$A^n = 0$
$x(1) = Ax(0)$
$x(2) = A^2 x(0)$
$x(3) = A^3 x(0)$
...
$x(n) = A^n x(0) = 0$
$x(2n) = A^n x(n) = 0$

Tydzień 4

Analiza częstotliwościowa systemów dynamicznych (Transmitancja)

Transmitancja - $G(s)$

$$\underset{\text{Laplace wyjście}}{Y(s)} = G(s)\underset{\text{Laplace wejście}}{U(s)} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \\ x(0) = 0 \end{array}$$

$G(s) = C(sI - A)^{-1}B$

Kryterium Michajłowa
$G(s) = \frac{L(s)}{M(s)}$
$M(s) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0$
Układ jest asymptotycznie stabilny jeśli przyrost argumentu $M(j\omega)$ rzędu n przy zmianie ω od $-\infty$ do $+\infty$ wynosi $n\pi$: $\Delta Arg\ M(j\omega)|_{-\infty}^{+\infty} = n\pi$

Kryterium Nyquista
Jeżeli układ otwarty opisany transmitancją $G(s)$ jest asymptotycznie stabilny, to układ ze sprzężeniem zwrotnym, opisany za pomocą transmitancji $G_z(s)$ jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy wykres charakterystyki amplitudowo-fazowej transmitancji $G(s)$ nie obejmuje punktu $(-1, 0)$ na płaszczyźnie zespolonej.

Laplace :
$e^{ax} \leftrightarrow \frac{1}{s-a}$
$1 \leftrightarrow \frac{1}{s}$

Zadanie 4.1.1

Układ jest opisany równaniami stanu w postaci

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

z macierzami

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Znaleźć transmitancję operatorową tego układu przy założeniu zerowych warunków początkowych $x(0) = 0$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} \cdot B$$
$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ -2 & s-3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s-1)(s-3)} \begin{bmatrix} s-3 & 0 \\ 2 & s-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & 0 \\ \frac{2}{(s-1)(s-3)} & \frac{1}{s-3} \end{bmatrix}$$
$$G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & 0 \\ \frac{2}{(s-1)(s-3)} & \frac{1}{s-3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{s-1}$$

Zadanie 4.1.2

Układ jest opisany równaniami stanu w postaci

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

z macierzami

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Znaleźć transmitancję operatorową tego układu przy założeniu zerowych warunków początkowych $x(0) = 0$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s-2 & 0 \\ 5 & s \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{s-2} & 0 \\ \frac{-5}{s(s-2)} & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{2}{s} - \frac{10}{s \cdot (s-2)} = \frac{2s-14}{s(s-2)}$$

Zadanie 4.2.1

Mając dana transmitancje $G(s) = \frac{5}{s+3}$ okreslić amplitudę sygnału wyjściowego, jesli na wejście podano:
a) $2\sin(4t + 2\pi)$
b) $-\sin(t)$
c) $0.1\cos(4t + \frac{\pi}{6})$

$G(s) = \frac{5}{s+3}$
$A(\omega) = |G(j\omega)|$
$u(t) = A_u \sin(\omega t + \varphi_u)$ - wejście
$A_y = A(\omega) \cdot A_u$

a)
$2\sin(4t + 2\pi) = u(t)$
$A_u = 2$
$\omega = 4$
$A(\omega) = |\frac{5}{4j+3}| = |\frac{5(3-4j)}{9+16}| = |\frac{3-4j}{5}| = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = 1$
$A_y = 1 \cdot 2 = \boxed{2}$ $A(\omega) = \frac{5}{\sqrt{16+9}} = 1$

b)
$-\sin(t) = u(t)$
$A_u = -1$
$\omega = 1$
$A(\omega) = |\frac{5}{j+3}| = |\frac{5(3-j)}{9+1}| = |\frac{3-j}{2}| = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$
$A_y = -1 \cdot \frac{\sqrt{10}}{2} = \boxed{-\frac{\sqrt{10}}{2}}$ $A(\omega) = \frac{5}{\sqrt{9+1}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

c)
$0.1\cos(4t + \frac{\pi}{6}) = u(t)$
$\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha \Rightarrow \cos(4t + \frac{\pi}{6}) = \cos(\frac{\pi}{2} - (\frac{2\pi}{6} - 4t)) = \sin(\frac{2\pi}{6} - 4t)$
$u(t) = \frac{1}{10}\sin(\frac{\pi}{3} - 4t)$
$A_u = \frac{1}{10}$ $\omega = -4$
$A(\omega) = |\frac{5}{-4j+3}| = |\frac{5(3+4j)}{9+16}| = |\frac{3+4j}{5}| = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = 1$
$A_y = 1 \cdot \frac{1}{10} = \boxed{\frac{1}{10}}$ $A(\omega) = \frac{5}{\sqrt{16+9}} = 1$

Zadanie 4.2.2

Mając dana transmitancje $G(s) = \frac{1}{s+2}$ okreslić amplitudę sygnału wyjściowego, jesli na wejście podano:
a) $5\sin(2t + \pi)$
b) $-2\sin(3t)$
c) $0.1\cos(t + \frac{\pi}{3})$

$G(s) = \frac{1}{s+2}$
$A(\omega) = |G(j\omega)|$
$u(t) = A_u \sin(\omega t + \varphi_u)$ - wejście
$A_y = A(\omega) \cdot A_u$
alternatywnie (nie skonczone)
$A(\omega) = |\frac{1}{j\omega+2}| = |\frac{j\omega-2}{-\omega^2-4}| = |\frac{2}{\omega^2+4} + j(\frac{\omega}{-\omega^2-4})| = \sqrt{\frac{4}{(\omega^2+4)^2} - \frac{\omega^2}{(\omega^2+4)^2}} = \sqrt{\frac{(4-\omega)^2}{(\omega^2+4)^2}} = \frac{\sqrt{(2-\omega)(2+\omega)}}{\omega^2+4}$

a)
$A_y = \frac{\sqrt{(2-\omega)(2+\omega)}}{\omega^2+4} \cdot 5$
b)
$A_y = \frac{\sqrt{(2-\omega)(2+\omega)}}{\omega^2+4} \cdot (-2)$
c)
$A_y = \frac{\sqrt{(2-\omega)(2+\omega)}}{\omega^2+4} \cdot (0.1)$

Zadanie 4.3.1

Za pomocą transmitancji znaleźć odpowiedź układu 1 na skok jednostkowy, czyli funkcję postaci:
$u(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ 1, t \geqslant 0 \end{cases}$
Zakladamy, że $x(0) = 0$
$\dot{x}(t) = -4x(t) + 8u(t)$
$y(t) = x(t)$

$C = 1 \quad A = -4 \quad B = 8$
$G(s) = 1 \cdot (s+4)^{-1} \cdot 8 = 8 \cdot \frac{1}{s+4}$
$U(s) = \frac{1}{s}$
tw. Laplace'a dla skoku jednostkowego $Y(s) = G(s) \cdot U(s)$
$Y(s) = \frac{8}{s+4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{s} - \frac{2}{s+4}$
$\frac{A}{s} + \frac{B}{s+4} = \frac{8}{s(s+4)}$
$A(s+4) + Bs = 8$
$s(A+B) + 4A = 8$
$A = 2 \quad B = -2$
$\boxed{y(t) = -2e^{-4t} + 2}$
$\uparrow$
odwrotne tw. Laplace'a
$\mathcal{L}\{a\} = a\frac{1}{s}$
$\mathcal{L}\{ae^{bt}\} = a\frac{1}{s-b}$

Zadanie 4.4.1

Na układ o transmitancji operatorowej $G(s) = \frac{20}{s+10}$ podano sygnał sinusoidalny $2\sin(4.5t + \frac{\pi}{6})$. Obliczyć, jak zmieni się amplituda sygnału wyjściowego.

$A_u = 2 \quad \omega = 4.5 = \frac{9}{2}$
$A(\omega) = |\frac{20}{j\frac{9}{2}+10}| = |\frac{20(10-\frac{9}{2}j)}{100+\frac{81}{4}}| = |\frac{80(10-\frac{9}{2})j}{481}| = \sqrt{\frac{800^2+360^2}{481^2}} \approx 1.82$
$A(\omega) = |\frac{20}{j\frac{9}{2}+10}| = \frac{20}{\sqrt{100+\frac{81}{4}}} = \frac{40}{\sqrt{481}} \approx 1.82$ $A_y = A(\omega) \cdot 2$
$\frac{A_y}{A_u} = A(\omega)$

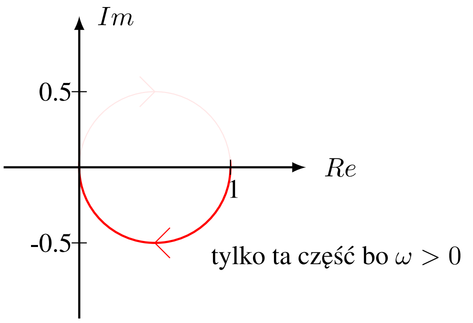
Amplituda sygnału wejśicowego będzie ok. 1.82 razy większa niż wejściowego

Zadanie 4.5.1

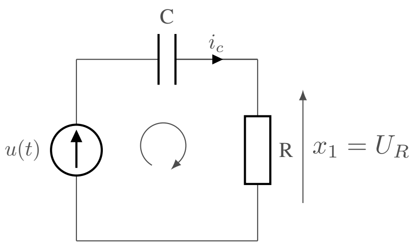
Narysowac charakterystyki Nyquista dla układu opisanego transmitancja operatorowa:
$G(s) = \frac{s+2}{s^2+3s+2}$
Podac wzór na transmitancje widmowa tego układu (w postaci rozbicia na czesc urojona i rzeczywistą).

$G(s) = \frac{s+2}{s^2+3s+2} = \frac{s+2}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1}$

$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega+1} = \frac{1-j\omega}{1+\omega^2} = \boxed{\dfrac{1}{1+\omega^2} + j\dfrac{-\omega}{1+\omega^2}}$



Zadanie 4.6.1



Przeanalizować układ z rysunku i znaleźć równania opisujące ten układ. Za wyjście przyjąć napięcie na oporniku. Znaleźć transmitancję operatorową i widmową układu
Zakladamy ze: $R = 1000\Omega, C = 1mF$

$$\begin{cases} u(t) - u_c(t) - u_R(t) = 0 \\ y(t) = u_R(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(t) - u_c(t) - RC\dot{u}_c(t) = 0 \\ y(t) = RC\dot{u}_c(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(t) = +u_c(t) + RC\dot{u}_c(t) \\ y(t) = RC\dot{u}_c(t) \end{cases} \Bigg| \mathscr{L}$$

Transformata Laplace'a

$$\begin{cases} U(s) = U_c(s) + sRC \cdot U_c(s) + u_c(0) \\ Y(s) = sRC \cdot U_c(s) + u_c(0) \end{cases}$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{sRC \cdot U_c(s) + u_c(0)}{U_c(s) + sRC \cdot U_c(s) + u_c(0)} = \frac{sRC \cdot U_c(s)}{U_c(s) + sRC \cdot U_c(s)} = \frac{\cancel{U_c(s)} \cdot sRC}{\cancel{U_c(s)} \cdot (sRC+1)}$$

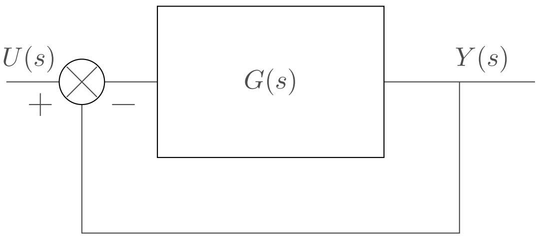
Podstawiamy R i C

$$G(s) = \frac{s}{s+1}$$

$$G(j\omega) = \frac{j\omega}{j\omega+1} = \frac{j\omega}{j\omega+1} \cdot \frac{1-j\omega}{1-j\omega} = \frac{j\omega+\omega^2}{1+\omega^2} = \frac{\omega^2}{\omega^2+1} + j\frac{\omega}{\omega^2+1}$$

Zadanie 4.7.1

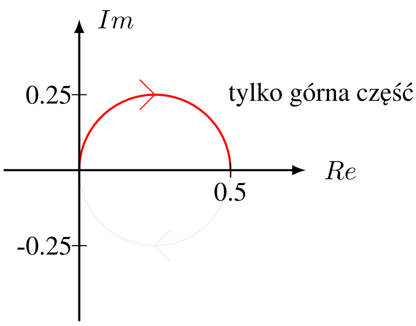
Niech będzie dany układ opisany transmitancją $G(s)$:
$G(s) = \frac{s}{s^2+2s+1}$
Korzystajac z kryterium Nyquista sprawdzić, czy układ zamkniety postaci 7 będzie asymptotycznie stabilny.



$G(s) = \frac{s}{s^2+2s+1}$
$a_2 = 1$ $a_1 = 2$ $a_0 = 1$
Układ zamknięty będzie asymptotycznie stabilny jeżeli układ otwarty będzie asymptotycznie stabilny oraz wykres charakterystyki amplitudowo-fazowej transformacji $G(s)$ nie będzie obejmował punktu (-1, 0) na płaszczyźnie zespolonej.
sprawdź czy układ otwarty jest asymptotycznie stabilny z Hurwitza. Wystarczy sprawdzić dla $s^2 + 2s + 1$

$$\begin{array}{cc} a_1 & a_3 \\ \multicolumn{2}{c}{\left[\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{array}\right]} \\ a_0 & a_2 \end{array}$$

$2 > 0$
$2 \cdot 1 - 0 > 0$
więc układ otwarty jest asymptotycznie stabilny. $G(j\omega) = \frac{j\omega}{(j\omega)^2+2j\omega+1} = \frac{j\omega}{-\omega^2+2j\omega+1} = \frac{j\omega(1-\omega^2-2j\omega)}{(1-\omega^2+2j\omega)(1-\omega^2-2j\omega)} = \frac{j\omega-j\omega^3+2\omega^2}{1-2\omega^2+\omega^4+4\omega^2} = \frac{2\omega^2}{(\omega^2+1)^2} + j\frac{\omega-\omega^3}{(\omega^2+1)^2}$



Nie obejmuje punktu (-1,0) więc jest asymptotycznie stabilny.

Zadanie 4.8.1

Rozwiązanie równania różniczkowego
$\dot{x}(t) = -4x(t) + 3\sin(2t)$
gdzie $x(0) = 0, t \geqslant 0$ ma postać
$x(t) = ae^{-4t} + A\sin(2t + \varphi)$
Obliczyć A i φ.

$u(t) = 3\sin(2t)$
$A_u = 3 \quad \omega = 2 \quad \varphi_u = 0$
$A = -4 \quad B = 3 \quad C = 1$
$G(s) = 1 \cdot (s+4)^{-1} \cdot 3 = 3 \cdot \frac{1}{s+4}$
$A(\omega) = |\frac{3}{2j+4}| = \frac{3}{\sqrt{16+4}} = \frac{3}{2\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{10}$
$A_y = 3 \cdot A(\omega) = \frac{9\sqrt{5}}{10}$
$\varphi_y = \arg G(j\omega) + \varphi_u$
$G(j\omega) = \frac{3}{2j+4} = \frac{3(4-2j)}{20} = \frac{3}{5} - \frac{3}{10}j$

argument liczby $a + bi$:
$$\varphi = \begin{cases} \text{arctg}(\frac{b}{a}), a > 0 \\ \text{arctg}(\frac{b}{a}) + \pi, a < 0 \end{cases}$$

$\arg G(j\omega) = \text{arctg}(-\frac{3}{10} \cdot \frac{5}{3}) = \boxed{\text{arctg}(-\frac{1}{2})}$

Zadanie 4.9.1

Rozwiązanie równania różniczkowego
$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) = -4x(t) + 3\sin(\omega t)$
gdzie $x(0) = 0$, ($\dot{x}(0)$ - w domysle), $t \geq 0$ ma postać
$x(t) = f(t) + A\sin(\omega t + \varphi)$
znaleźć takie ω, dla którego A jest największe

$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + 4x(t) = 3\sin(\omega t)$
$u(t) = \sin(\omega t) = \frac{\ddot{x}(t)+\dot{x}(t)+4x(t)}{3}$
$Y(s) = G(s) \cdot U(s) \Rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$
Transformata Laplace'a
$X(s) = Y(s)$

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathcal{L}\{f'\} = s\mathcal{L}\{f\} - f(0^+) \\ \mathcal{L}\{f''\} = s^2\mathcal{L}\{f\} - sf(0^+) - f'(0^+) \end{array}}$$

$U(s) = \frac{s^2X(s)-s\cdot x(0)-\dot{x}(0)+sX(s)-x(0)+4X(s)}{3} = \frac{X(s)(s^2+s+4)}{3}$
$G(s) = \frac{X(s)}{\frac{X(s)(s^2+s+4)}{3}} = \frac{3\cancel{X(s)}}{\cancel{X(s)}(s^2+s+4)} = \frac{3}{s^2+s+4}$
$A = \underbrace{A_y}_{\text{wyjście}} = \underbrace{A_u}_{\text{wejście}} \cdot A(\omega)$
$A(\omega) = |G(\omega j)|$
A będzie maksymalne dla $|G(\omega j)|$ maksymalnego
$|G(\omega j)| = |\frac{3}{-\omega^2+j\omega+4}| = |\frac{3}{\sqrt{(4-\omega^2)^2+\omega^2}}| = |\frac{3}{\sqrt{16-8\omega^2+\omega^4+\omega^2}}| = |\frac{3}{\sqrt{\omega^4-7\omega^2+16}}|$
$\frac{3}{\sqrt{\omega^4-7\omega^2+16}}$ maksymalne $\Leftrightarrow \sqrt{\omega^4 - 7\omega^2 + 16}$ minimalne
$z = \omega^2$
szukamy min funkcji $z^2 - 7z + 16$
dodatni znak przy z^2, więc minimum będzie na wierzchołku, czyli $x_w = \frac{-b}{2a} = \frac{7}{2}$
$\omega = \sqrt{\frac{7}{2}} \quad \vee \quad \omega = -\sqrt{\frac{7}{2}}$
$\omega = -\sqrt{\frac{7}{2}}$ odpada, bo nie może być < 0

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{7}{2}}}$$

Zadanie 4.9.2

Rozwiązanie równania różniczkowego
$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) = -x(t) + 12\sin(\omega t)$
gdzie $x(0) = 0$, ($\dot{x}(0)$ - w domysle), $t \geq 0$ ma postać
$x(t) = f(t) + A\sin(\omega t)$
znaleźć takie ω, dla którego A jest największe

$u(t) = \sin(\omega t)$
$y(t) = x(t)$

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + \dot{x}(t) = -x(t) + 12u(t) \\ y(t) = x(t) \end{cases}$$

$$\left.\begin{cases} u(t) = \frac{\ddot{x}(t)+\dot{x}(t)+x(t)}{12} \\ y(t) = x(t) \end{cases}\quad\right| \mathscr{L}$$

$$\begin{cases} U(s) = \frac{s^2\cdot X(s) - s\cdot x(0) - \dot{x}(0) + sX(s) - x(0) + X(s)}{12} \\ Y(s) = X(s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} U(s) = \frac{s^2\cdot X(s) + sX(s) + X(s)}{12} \\ Y(s) = X(s) \end{cases}$$

$$G(S) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{12\cdot \cancel{X(s)}}{\cancel{X(s)}\cdot(s^2+s+1)} = \frac{12}{s^2+s+1}$$

$$G(j\omega) = \frac{12}{-\omega^2+j\omega+1} = -\frac{12\cdot\omega^2-12}{\omega^4-\omega^2+1} - j\frac{12\cdot\omega}{\omega^4-\omega^2+1}$$

$A_y = A_u \cdot ku(\omega)$

$$ku(\omega) = |G(j\omega)| = \sqrt{\left(\frac{12\cdot\omega^2-12}{\omega^4-\omega^2+1}\right)^2 + \left(\frac{12\cdot\omega}{\omega^4-\omega^2+1}\right)^2} = 12\cdot\sqrt{\frac{1}{\omega^4-\omega^2+1}}$$

A_y będzie max., gdy $ku(\omega)$ będzie max., tj. $\sqrt{\omega^4-\omega^2+1}$ będzie min. $\omega \geq 0$, $min(\sqrt{\omega^4-\omega^2+1})$ dla $\omega = \frac{1}{\sqrt{2}}$

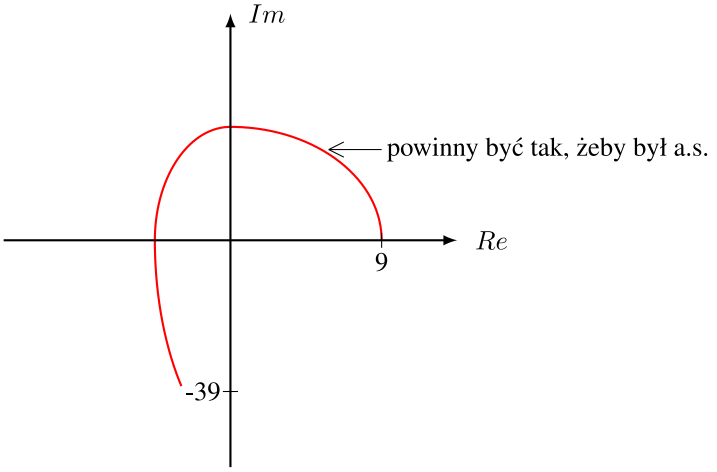
Zadanie 4.10.1

Korzystając z kryterium Michajłowa zbadać stabilność asymptotyczną układu opisanego transmitancją $G(s)$:
$G(s) = \frac{s^2+3s+1}{s^3+s^2-4s+9}$

Kryterium Michajłowa
$G(s) = \frac{L(s)}{M(s)}$
$M(s) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0$
Układ jest asymptotycznie stabilny jeśli przyrost argumentu $M(j\omega)$ rzędu n przy zmianie ω od $-\infty$ do $+\infty$ wynosi $n\pi$: $\Delta Arg\ M(j\omega)|_{-\infty}^{+\infty} = n\pi$

Ponieważ funkcja $M(j\omega)$ jest symetryczna względem osi rzeczywistej, więc wystarczy $\Delta Arg\ M(j\omega)|_0^{+\infty} = n\frac{\pi}{2}$
inna postać kryterium (wynikająca z powyższego): wystarczy pokazać, że charakterystyka częstotliwościowa funkcji $M(j\omega)$ $0 < \omega < \infty$ przechodzi przez n ćwiartek w kierunku dodatnim.
$n = 3$ więc musi przechodzić przez I, II i III ćwiartkę
$M(s) = s^3 + s^2 - 4s + 9$
$M(j\omega) = -j\omega^3 - \omega^2 - 4j\omega + 9 = \underbrace{9 - \omega^2}_{Re} + j\underbrace{(-\omega^3 - 4\omega)}_{Im}$

$\omega = 0 \Rightarrow M(j0) = 9$



spr. gdzie przecina Im dla $Re = 0$
$9 - \omega^2 = 0 \Rightarrow \omega = 3$
$Im = -3^3 - 4 \cdot 3 = -39$ (Im powinno być dodatnie, aby układ był asymptotycznie stabilny)
spr. czy przecina oś Re w przedziale $(-\infty, 0)$
$Im = 0 \Rightarrow -\omega(\omega^2 + 4) = 0$
$\omega = 0 \quad \omega^2 = -4$
$Re = 9 + 4 = 13$
więc, układ nie jest asymptotycznie stabilny.

Tydzień 5

Wprowadzenie do układów nieliniowych - Linearyzacja

I metoda Lapunowa
Punkt równowagi, dla którego system zlinearyzowany jest asymptotycznie stabilny jest lokalnie asymptotycznie stabilny. Jeżeli zaś chociaż jedna z wartości własnych macierzy systemu zlinearyzowanego ma dodatnią część rzeczywistą to punkt równowagi jest niestabilny.

Macierz Hurwitz'a
Wielomian charakterystyczny: $a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_{n-1}\lambda + a_n$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

Kryterium Hurwitz'a
Jeśli wszystkie minory wiodące są większe od zera, to jest asymptotycznie stabilny.

tw. Grobmana-Hartmana:
Jeżeli $\det(j\omega I - J(x_r)) \neq 0, \quad \omega \in \mathbb{R}, \quad j^2 = -1$
to trajektorie fazowe systemu nieliniowego w pewnym otoczeniu równowagi zachowują się podobnie jak trajektorie układu zlinearyzowanego w tym punktcie w otoczeniu zera. Warunek jest równoważny temu, że macierz $J(x_r)$ nie może posiadać wartości własnych na osi urojonej.

Lapunowem zbadać stabilność punktów równowagi
1. wyznaczamy punkt równowagi. Przyrównujemy równanie układu do zera.
2. Podstawiamy do macierzy Jacobiego punkt

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

3. Wyliczamy wartości własne macierzy Jacobiego i sprawdzamy czy ich część rzeczywista jest mniejsza od 0. Jeśli tak to punkt jest lokalnie asymptotycznie stabilny. Jeśli nie to punkt równowagi jest niestabilny.
Jeśli wyjdzie 0 to "Twierdzenie to nie rozstrzyga o stabilności punktu równowagi, jeżeli system zlinearyzowany jest jedynie stabilny"

Zadanie 5.1.1

Dany jest system dynamiczny
$\dot{x}(t) = \cos(x(t))e^{-x(t)^2}$
Wyznaczyć jego punkty równowagi i za pomocą I metody Lapunowa zbadać ich stabilność.

$\dot{x}(t) = \cos(x(t))e^{-x(t)^2}$
$\dot{x}(t) = f(x(t))$
x_r jest punktem równowagi $\Leftrightarrow f(x_r) = 0$
$f(x_r) = \cos(x_r) \cdot \underbrace{e^- x_r^2}_{<0} = 0 \Rightarrow cos(x_r) = 0 \Rightarrow x_r = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

System zlinearyzowany: $\dot{x}(t) = J(x_r)x(t)$

$$J(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix} \quad f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}$$

$J(x) = \frac{\partial f}{\partial x} = -\sin(x) \cdot e^{-x^2} + \cos(x) \cdot (-2xe^{-x^2}) = -e^{-x^2}(\sin(x) + 2x\cos(x))$
$J(x_r) = \underbrace{-e^{-(\frac{\pi}{2}+k\pi)^2}}_{<0}(\underbrace{\sin(\frac{\pi}{2} + k\pi))}_{=1 \vee =-1} + \underbrace{2(\frac{\pi}{2} + k\pi)\cos(\frac{\pi}{2} + k\pi)}_{=0} = -e^{-(\frac{\pi}{2}+k\pi)^2}(\sin(\frac{\pi}{2} + k\pi))$

I metoda Lapunowa
Punkt równowagi, dla którego system zlinearyzowany jest asymptotycznie stabilny jest lokalnie asymptotycznie stabilny. Jeżeli zaś chociaż jedna z wartości własnych macierzy systemu zlinearyzowanego ma dodatnią część rzeczywistą to punkt równowagi jest niestabilny.

$\lambda = -e^{-(\frac{\pi}{2}+k\pi)^2} \cdot \sin(\frac{\pi}{2} + k\pi)$
niestabilny :
$-e^{-(\frac{\pi}{2}+k\pi)^2} \cdot \sin(\frac{\pi}{2} + k\pi) > 0 \Rightarrow \sin(\frac{\pi}{2} + k\pi) = -1 \Rightarrow x_r = \frac{\pi}{2} + (2k\pi + 1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$
(z Hurwitza)
$-e^{-(\frac{\pi}{2}+k\pi)^2} \cdot \sin(\frac{\pi}{2} + k\pi) > 0 \Rightarrow \sin(\frac{\pi}{2} + k\pi) = 1 \Rightarrow x_r = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-(\frac{\pi}{2}+k\pi)^2} \cdot \sin(\frac{\pi}{2} + k\pi) \end{bmatrix}$$

Zadanie 5.1.2

Dany jest system dynamiczny
$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$
$\dot{x}_2(t) = -2x_1(t) - 3x_1(t)^2 - x_2(t)$
Wyznaczyć jego punkty równowagi i za pomocą I metody Lapunowa zbadać ich stabilność.

$J(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2-6x_1 & -1 \end{bmatrix}$

$\begin{cases} x_2 = 0 \\ -2x_1 - 3x_1^2 - x_2 = 0 \end{cases}$

$-2x_1 - 3x_1^2 = 0$

$x_1(2 + 3x_1) = 0$

$x_1 = 0 \ \vee \ x_1 = -\frac{2}{3}$

$x_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$J(x_r) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -1-\lambda \end{vmatrix}$

$= (-\lambda)(-1-\lambda) + 2 = \lambda^2 + \lambda + 2$

$\Delta = -7$

$\lambda = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2} i$

$\lambda = -\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow$ Stabilny

$\vee$

$x_r = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$

$J(x_r) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix}$

$= (-\lambda)(-1-\lambda) - 2 = \lambda^2 + \lambda - 2$

$\Delta = 9$

$\lambda = \frac{-1 \pm 3}{2}$

$\lambda = 1 \ \vee \ \lambda = -2$

$\lambda = 1 > 0 \Rightarrow$ Niestabilny

Zadanie 5.2.1

Wyznaczyć punkty równowagi układu generatora synchronicznego, który jest systemem dynamicznym opisanym następującymi równaniami
$\dot{x}_1 = x_2$
$\dot{x}_2 = -Dx_2 - \sin x_1 + \sin \delta_0$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -Dx_2 - \sin x_1 + \sin \delta_0 \end{cases}$$
$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -Dx_2 - \sin x_1 + \sin \delta_0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} x_2 \\ -Dx_2 - \sin x_1 + \sin \delta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$x_2 = 0$
$-\sin x_1 + \sin \delta_0 = 0 \Rightarrow \sin \delta_0 = \sin x_1 \Rightarrow$
$\Rightarrow x_1 = \delta_0 + 2k\pi \quad \vee \quad x_1 = -\delta_0 + (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

Zadanie 5.2.2

Wyznaczyć punkty równowagi dla obwodu Chuy, który jest systemem dynamicznym opisanym następującymi równaniami:
$C_1\dot{x}_1(t) = -\frac{1}{R}x_1(t) + \frac{1}{R}x_2(t) - g(x_1(t))$
$C_2\dot{x}_2(t) = \frac{1}{R}x_1(t) - \frac{1}{R}x_2(t) + x_3(t)$
$L\dot{x}_3(t) = -x_2(t) - R_0x_3(t)$
przy czym $g(v) = g_1v + g_2v^3$

$$\begin{cases} -\frac{1}{RC_1}x_1 + \frac{1}{RC_1}x_2 - \frac{g_1}{C_1}x_1 - \frac{g_2}{C_1}x_1^3 = 0 \\ \frac{1}{RC_2}x_1 - \frac{1}{RC_2}x_2 + \frac{x_3}{C_2} = 0 \\ -\frac{1}{L}x_2 - \frac{R_0}{L}x_3 = 0 \qquad \Rightarrow x_2 = -R_0x_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} g_1Rx_1 + g_2Rx_1^3 + x_1 = x_2 \\ x_1 + Rx_3 = x_2 \\ x_2 = -R_0x_3 \end{cases}$$

z drugiego i trzeciego:
$x_3 = \frac{-x_1}{R+R_0}$
z pierwszego i drugiego:
$g_1Rx_1 + g_2Rx_1^3 = Rx_3$
$g_1x_1 + g_2x_1^3 = x_3$
podstawiam x_3 z trzeciego:
$g_1x_1 + g_2x_1^3 = \frac{-x_1}{R+R_0}$
$g_1x_1 + x_1^3g_2 + \frac{x_1}{R+R_0} = 0$
$x_1^3g_2 + x_1(g_1 + \frac{1}{R+R_0}) = 0$
podstawiam pomocnicze zmienne:
$a = g_2, \quad b = g_1 + \frac{1}{R+R_0}$
$ax_1^3 + bx_1 = 0$
$x_1(ax_1^2 + b) = 0$
(1) $x_1 = 0 \quad \vee \quad ax_1^2 + b = 0$
(2) $x_1 = \sqrt{\frac{-b}{a}} \quad \vee$ (3) $x_1 = -\sqrt{\frac{-b}{a}}$
podstawiam $x_1 = 0$:

$$x_r = \begin{bmatrix} x_{1r} \\ x_{2r} \\ x_{3r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

(1) $x_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(2) $x_r = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{-g_1 - \frac{1}{R+R_0}}{g_2}} \\ -R_0\frac{-\sqrt{\frac{-g_1 - \frac{1}{R+R_0}}{g_2}}}{R+R_0} \\ \frac{-\sqrt{\frac{-g_1 - \frac{1}{R+R_0}}{g_2}}}{R+R_0} \end{bmatrix}$

(3) $x_r = \begin{bmatrix} -\sqrt{\frac{-g_1 - \frac{1}{R+R_0}}{g_2}} \\ -R_0\frac{\sqrt{\frac{-g_1 - \frac{1}{R+R_0}}{g_2}}}{R+R_0} \\ \frac{\sqrt{\frac{-g_1 - \frac{1}{R+R_0}}{g_2}}}{R+R_0} \end{bmatrix}$

Zadanie 5.3.1

Dla jakich wartości parametru ϵ zerowy punkt równowagi układu zwanego oscylatorem Van der Pola będzie niestabilny
$\ddot{x}(t) - \epsilon(1 - x(t)^2)\dot{x}(t) + x(t) = 0$

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{x} = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{x} = \epsilon(1 - x(t)^2) \cdot \dot{x}(t) - x(t) = \epsilon(1 - x_1^2) \cdot x_2 - x_1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ \epsilon(1 - x_1^2) \cdot x_2 - x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ \epsilon(1 - x_1^2) \cdot x_2 - x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases} \quad x_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$J(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2\epsilon x_1 x_2 - 1 & \epsilon(1 - x_1^2) \end{bmatrix} \quad \boxed{\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}}$$

$$J(x_r) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \epsilon \end{bmatrix}$$

Z Lapunowa:
$(-\lambda)(\epsilon - \lambda) + 1 = \lambda^2 - \lambda\epsilon + 1 = 0$
$\Delta = \epsilon^2 - 4 \Rightarrow \lambda = \frac{\epsilon \pm \sqrt{\epsilon^2 - 4}}{2}$
niestabilny: Jeżeli część rzeczywista $> 0 \Rightarrow \frac{\epsilon}{2} > 0 \Rightarrow \boxed{\epsilon > 0}$
asymptotycznie stabilny : $\begin{bmatrix} -\epsilon & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ Hurwitz $-\epsilon > 0 \Rightarrow \boxed{\epsilon < 0}$

Zadanie 5.4.1

Dla jakich wartości parametru a linearyzacja przestaje spełniać warunki twierdzenia Grobmana-Hartmana dla układu opisanego równaniami:
$\dot{x_1}(t) = -x_2(t) + (a - x_1(t)^2 - x_2(t)^2)x_1(t)$
$\dot{x_2}(t) = x_1(t) + (a - x_1(t)^2 - x_2(t)^2)x_2(t)$

$\dot{x_1}(t) = -x_2(t) + (a - x_1(t)^2 - x_2(t)^2)x_1(t) = f_1(x(t))$
$\dot{x_2}(t) = x_1(t) + (a - x_1(t)^2 - x_2(t)^2)x_2(t) = f_2(x(t))$

$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix}$

$\begin{cases} -x_2 + (a - x_1^2 - x_2^2)x_1 = 0 \\ x_1 + (a - x_1^2 - x_2^2)x_2 = 0 \end{cases}$

Zauważamy, że albo $x_1 = x_2 = 0$ albo dla $x_2 \neq 0 \wedge x_1 \neq 0$:

$\begin{cases} -\frac{x_2}{x_1} + (a - x_1^2 - x_2^2) = 0 \\ \frac{x_1}{x_2} + (a - x_1^2 - x_2^2) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \frac{-x_2}{x_1} = \frac{x_1}{x_2} \Rightarrow -x_2^2 = x_1^2 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$ (sprzeczność)

więc $x_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$J(x) = \begin{bmatrix} a - 3x_1^2 - x_2^2 & -1 - 2x_2x_1 \\ 1 - 2x_1x_2 & a - x_1^2 - 3x_2^2 \end{bmatrix}$

$J(x_r) = \begin{bmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{bmatrix}$

z tw. Grobmana-Hartmana:

$\det(j\omega I - J(x_r)) \neq 0, \quad \omega \in \mathbb{R}$

$\begin{vmatrix} j\omega - a & -1 \\ 1 & j\omega - a \end{vmatrix} = 0$

$(j\omega - a)^2 + 1 = 0$

$j\omega - a = \pm j \Rightarrow \boxed{a = 0}$

$J(x_r)$ nie ma wartości własnych na osi urojonej

$\begin{bmatrix} a - \lambda & -1 \\ 1 & a - \lambda \end{bmatrix}$

$(a - \lambda)^2 + 1 = 0$

$a^2 - 2a\lambda + \lambda^2 + 1 = 0$

$\lambda^2 - 2a\lambda + a^2 + 1 = 0$

$\Delta = 4a^2 - 4a^2 - 4$

$\sqrt{\Delta} = 2i$

$\lambda = \frac{2a \pm 2i}{2} = a \pm i$

dla $a = 0$ wartości własne są na osi urojonej

Zadanie 5.5.1

Dla jakich wartości parametru a zerowy punkt równowagi układu opisanego równaniami
$\dot{x_1}(t) = x_2(t) + (a - x_1(t)^2 - x_2(t)^2)x_1(t)$
$\dot{x_2}(t) = x_1(t) + (a - x_1(t)^2 - x_2(t)^2)x_2(t)$
będzie niestabilny.

$x_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$J(x) = \begin{bmatrix} a - 3x_1^2 - x_2^2 & 1 - 2x_2x_1 \\ 1 - 2x_1x_2 & a - x_1^2 - 3x_2^2 \end{bmatrix}$

$J(x_r) = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{bmatrix}$

$\begin{vmatrix} a - \lambda & 1 \\ 1 & a - \lambda \end{vmatrix} = 0$

$(a - \lambda)^2 - 1 = 0$

$(a - \lambda - 1)(a - \lambda + 1) = 0$

$\lambda = a - 1 \quad \vee \quad \lambda = a + 1$

niestabilny, gdy $Re(\lambda) > 0$

$a - 1 > 0 \qquad a + 1 > 0$

$a > 1 \qquad a > -1$

$(a > 1 \quad \vee \quad a > -1) \Rightarrow \boxed{a > -1}$

Alternatywnie: Bez podanego punktu równowagi

$\dot{x_1}(t) = x_2(t) + (a - x_1(t)^2 - x_2(t)^2)x_1(t) = f_1(x(t))$
$\dot{x_2}(t) = x_1(t) + (a - x_1(t)^2 - x_2(t)^2)x_2(t) = f_2(x(t))$

$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix}$

$\begin{cases} x_2 + (a - x_1^2 - x_2^2)x_1 = 0 \\ x_1 + (a - x_1^2 - x_2^2)x_2 = 0 \end{cases}$

Zauważamy, że albo $x_1 = x_2 = 0$ albo dla $x_1 \neq 0 \wedge x_2 \neq 0$:

$\begin{cases} \frac{x_2}{x_1} + (a - x_1^2 - x_2^2) = 0 \\ \frac{x_1}{x_2} + (a - x_1^2 - x_2^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1}{x_2} \Rightarrow \begin{matrix} x_2^2 = x_1^2 \\ x_1 = x_2 \vee x_1 = -x_2 \end{matrix}$

więc $\overset{1}{x_r} = \begin{bmatrix} k \\ k \end{bmatrix} \vee \overset{2}{x_r} = \begin{bmatrix} k \\ -k \end{bmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}$

$J(x) = \begin{bmatrix} a - 3x_1^2 - x_2^2 & 1 - 2x_2x_1 \\ 1 - 2x_1x_2 & a - x_1^2 - 3x_2^2 \end{bmatrix}$

$J(\overset{1}{x_r}) = \begin{bmatrix} a - 4k^2 & 1 - 2k^2 \\ 1 - 2k^2 & a - 4k^2 \end{bmatrix} \quad \vee \quad J(\overset{2}{x_r}) = \begin{bmatrix} a - 4k^2 & 1 + 2k^2 \\ 1 + 2k^2 & a - 4k^2 \end{bmatrix}$

$(a - 4k^2 - \lambda)^2 - (1 - 2k^2)^2 = 0 \quad \vee \quad (a - 4k^2 - \lambda)^2 - (1 + 2k^2)^2 = 0$

$(a - 4k^2 - \lambda - 1 + 2k^2)(a - 4k^2 - \lambda + 1 - 2k^2) = 0 \quad \vee \quad (a - 4k^2 - \lambda - 1 - 2k^2)(a - 4k^2 - \lambda + 1 + 2k^2) = 0$

$\lambda = a - 1 - 2k^2 \vee \lambda = a + 1 - 6k^2 \quad \vee \quad \lambda = a - 1 - 6k^2 \vee \lambda = a + 1 - 2k^2$

$niestebilny:$

$Re\lambda > 0$

$a - 1 - 2k^2 > 0 \vee a + 1 - 6k^2 > 0 \qquad a - 1 - 6k^2 > 0 \vee a + 1 - 2k^2 > 0$

$\overset{1}{a > 1 + 2k^2} \quad \overset{2}{a > 6k^2 - 1} \qquad \overset{3}{a > 1 + 6k^2} \quad \overset{4}{a > 2k^2 - 1}$

odp. niestabilny dla $a > 1 \vee a > 2 \vee a > 3 \vee a > 4$

Zadanie 5.5.2

Dla jakich wartości parametru a zerowy punkt równowagi układu opisanego równaniami
$\dot{x_1}(t) = -x_2(t) + (a - x_1(t)^2 - x_2(t)^2)x_1(t)$
$\dot{x_2}(t) = x_1(t) + (a - x_1(t)^2 - x_2(t)^2)x_2(t)$
będzie niestabilny.

$x_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
$J(x) = \begin{bmatrix} a - 3x_1^2 - x_2^2 & -1 - 2x_2x_1 \\ 1 - 2x_1x_2 & a - x_1^2 - 3x_2^2 \end{bmatrix}$
$J(x_r) = \begin{bmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{bmatrix}$
$\begin{vmatrix} a - \lambda & -1 \\ 1 & a - \lambda \end{vmatrix} = 0$
$\lambda^2 - 2a\lambda + a^2 + 1 = 0$
$\Delta = -4$
$\lambda = \frac{2a \pm 2i}{2} = a \pm i$
niestabilny, gdy $Re(\lambda) > 0$
$\boxed{a > 0}$

Zadanie 5.6.1

Dla jakich wartości parametru a zerowy punkt równowagi układu opisanego równaniami
$\dot{x_1}(t) = -x_2(t) + (a - x_1(t)^2 - x_2(t)^2)x_1(t)$
$\dot{x_2}(t) = x_1(t) + (a - x_1(t)^2 - x_2(t)^2)x_2(t)$
będzie asymptotycznie stabilny.

$x_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$J(x) = \begin{bmatrix} a - 3x_1^2 - x_2^2 & -1 - 2x_2x_1 \\ 1 - 2x_1x_2 & a - x_1^2 - 3x_2^2 \end{bmatrix}$

$J(x_r) = \begin{bmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{bmatrix}$

$\begin{vmatrix} a - \lambda & -1 \\ 1 & a - \lambda \end{vmatrix} = 0$

$\lambda^2 - 2a\lambda + a^2 + 1 = 0$

Macierz Hurwitz'a
Wielomian charakterystyczny: $a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_{n-1}\lambda + a_n$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2a & 0 \\ 1 & a^2 + 1 \end{bmatrix}$$

Kryterium Hurwitz'a
Jeśli wszystkie minory wiodące są większe od zera, to jest asymptotycznie stabilny.

$-2a > 0 \Rightarrow a < 0$
$-2a(a^2 + 1) > 0 \Rightarrow \boxed{a < 0}$

Autorzy:

Skład:

Jacek Pietras
Grzegorz Tokarz
Jakub Hyła

Rozwiązania:

Magdalena Warzesia
Ania Szarawara
irytek102
Gniewomir
Jacek Pietras
Grzegorz Tokarz
Magdalena Jaroszyńska

Komentarze: