

<https://github.com/Jock69pl/SystemyDynamiczne.git>

Jeśli masz wolnego czasu trochę i chcesz pomóc doślij jakieś rozwiązanie.

Bardzo potrzebne są korekty, napewno jest tu sporo błędów.

Potrzebni są też komentatorzy, chodzi o całkowicie łopatologiczny komentarz typu "tu liczymy delte bo..."

Z tego przedmiotu jest egzamin, więc warto to zrobić

# Tydzień 1

## Systemy liniowe 1-go rzędu

### Zadanie 1.1.1

Naszkicować rozwiązania równania różniczkowego:

$$\dot{x}(t) = \alpha_i x(t)$$

dla  $x(0) = 1, t \geq 0$  przy czym  $i = 1, 2, 3$  zaś

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 2, \quad \alpha_3 = -1$$

$$\frac{dx}{dt} = \alpha_i x$$

$$\frac{dx}{x} = \alpha_i dt$$

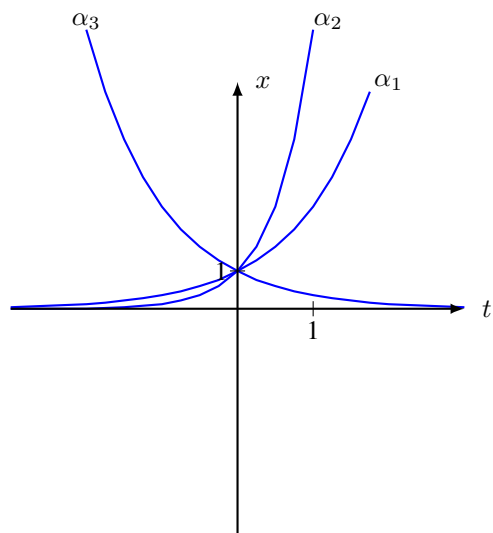
$$\ln |x| = \alpha_i t + c$$

$$x = ce^{\alpha_i t}$$

$$x(0) = c = 1$$

$$x = e^{\alpha_i t}$$

$$x = e^t \vee x = e^{2t} \vee x = e^{-t}$$



### Zadanie 1.2.1

Naszkicować rozwiązanie równania różniczkowego:

$$\dot{x}(t) = \alpha_i x(t)$$

dla  $x(0) = -1, t \geq 0$  przy czym  $i = 1, 2, 3$  zaś

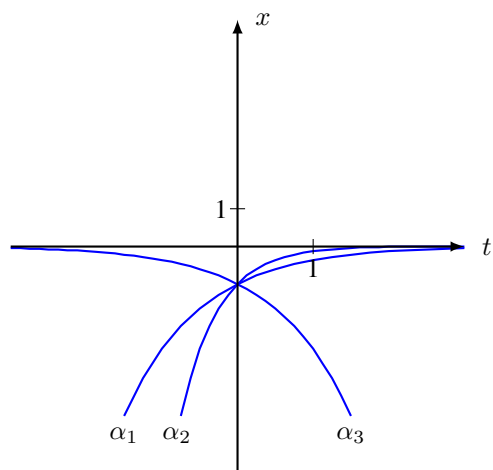
$$\alpha_1 = -1, \quad \alpha_2 = -2, \quad \alpha_3 = 1$$

$$x = ce^{\alpha_i t}$$

$$x(0) = c = -1$$

$$x = -e^{\alpha_i t}$$

$$x = -e^{-t} \vee x = -e^{-2t} \vee x = -e^t$$



### Zadanie 1.3.1

Naszkicować rozwiązanie równania różniczkowego:

$$\dot{x}(t) = -x(t) + u_i$$

dla  $x(0) = 1, t \geq 0$  przy czym  $i = 1, 2, 3$  zaś

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 1, \quad u_3 = 2$$

$$\frac{dx}{dt} = -x + u_i$$

$$\frac{dx}{-x+u_i} = dt$$

$$-\ln|-x+u_i| = t + c$$

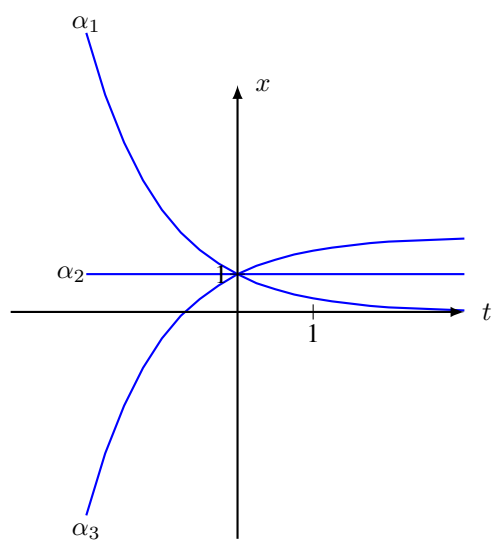
$$ce^{-t} = -x + u_i$$

$$x = u_i - ce^{-t}$$

$$x(0) = u_i - c = 1 \Rightarrow c = u_i - 1$$

$$x = u_i - (u_i - 1)e^{-t} = u_i(1 - e^{-t}) + e^{-t}$$

$$x = e^{-t} \vee x = 1 \vee x = 2 - e^{-t}$$



### Zadanie 1.4.1

Naszkicować rozwiązania równania różniczkowego:

$$\dot{x}(t) = -x(t) + 1$$

dla  $x(0) = x_i, t \geq 0$  przy czym  $i = 1, 2, 3$  zaś

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 2$$

$$\frac{dx}{dt} = -x + 1$$

$$-\ln|-x + 1| = t + c$$

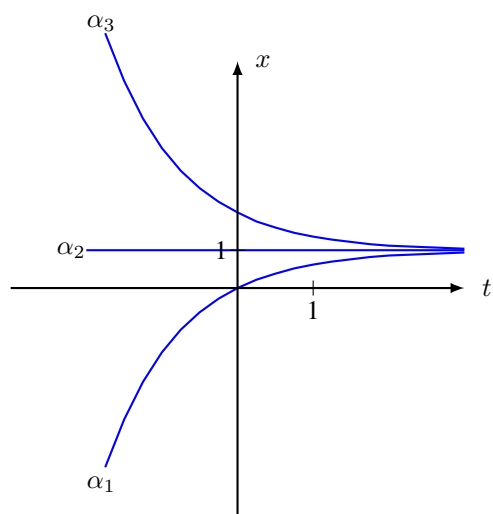
$$ce^{-t} = -x + 1$$

$$x = 1 - ce^{-t}$$

$$x(0) = 1 - c = x_i \Rightarrow c = 1 - x_i$$

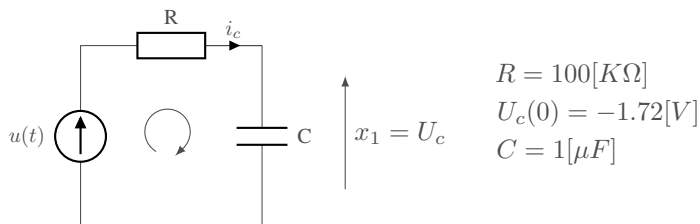
$$x = 1 - (1 - x_i)e^{-t}$$

$$x = 1 - e^{-t} \vee x = 1 \vee x = 1 + e^{-t}$$



### Zadanie 1.5.1

Dany jest obwód elektryczny jak na rysunku poniżej.



Źródło napięcia przez jedną sekundę podawało napięcie  $1[V]$ , a następnie przestało podawać dalej napięcie (przyjąć  $0[V]$ ). Zamodelować obwód w postaci równania różniczkowego, wyliczyć wartość napięcia w chwili  $T = 2[s]$  i naszkicować przebieg napięcia w funkcji czasu.

$$\begin{aligned}
 i(t) &= C \cdot \dot{x}_1(t) \\
 u - Ri_c - x_1 &= 0 \\
 u(t) - RCx'_1(t) - x_1(t) &= 0 \\
 1^\circ \quad t \in < 0, 1 > \quad &\boxed{u(t) = 1} \\
 1 - RCx'_1(t) - x_1(t) &= 0 \\
 x'_1(t) &= -\frac{x_1(t)}{RC} + \frac{1}{RC} \\
 \frac{dx_1}{dt} &= \frac{1}{RC}(1 - x_1) \\
 \frac{dx_1}{1-x_1} &= \frac{1}{RC}dt \\
 -\ln|1-x_1| &= \frac{1}{RC}t + k \\
 ke^{-\frac{t}{RC}} &= 1 - x_1 \\
 x_1 &= 1 - ke^{-\frac{t}{RC}} \\
 x_1(0) = u_c = -1.72 = 1 - k &\Rightarrow k = 2.72 \\
 x_1(1) &= 1 - 2.72e^{-\frac{1}{RC}} \approx 0.000632 \\
 2^\circ \quad t > 0 \quad &\boxed{u(t) = 0} \\
 x'_2(t) &= -\frac{x_2(t)}{RC} \\
 \frac{dx_2}{dt} &= -\frac{1}{RC}x_2 \\
 \frac{dx_2}{x_2} &= -\frac{1}{RC}dt \\
 \ln|x_2| &= -\frac{t}{RC} + k \\
 ke^{-\frac{t}{RC}} &= x_2 \\
 x_2(0) &= x_1(1) \\
 x_2(0) &= k = x_1(1) \\
 x_2(2) &= x_1(1)e^{-\frac{2}{RC}} \\
 x_2(2) &= -0.0000855
 \end{aligned}$$

### Zadanie 1.6.1

Dane jest równanie różniczkowe

$$\dot{x}(t) = -2x(t) + u(t)$$

gdzie  $x(0) = 1, t \geq 0$ . Znaleźć takie sterowanie  $u(t)$ , że  $x(t) = e^{-t}$  dla  $t \geq 0$ .

---

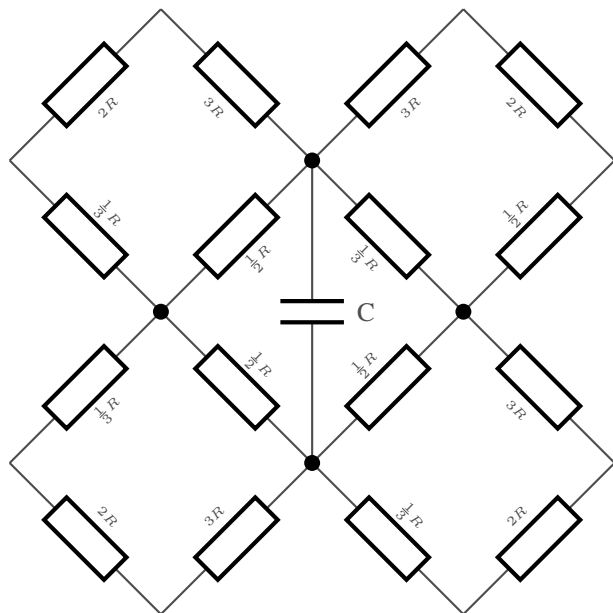
$$x(t) = e^{-t}$$

$$x'(t) = -e^{-t}$$

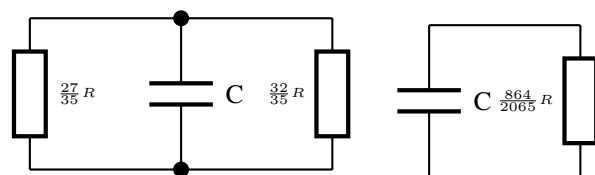
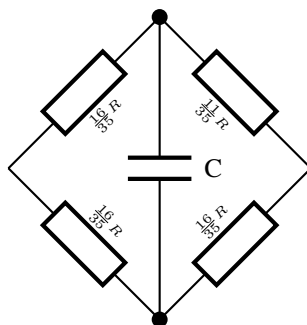
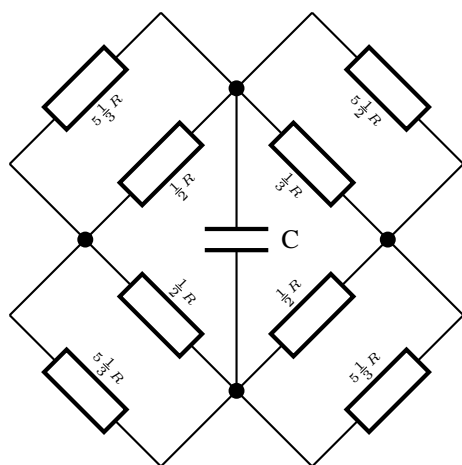
$$-e^{-t} = -2e^{-t} + u(t) \Rightarrow \boxed{u(t) = e^{-t}}$$

### Zadanie 1.7.1

Zamodelować poniższy obwód elektryczny za pomocą równania różniczkowego



Przy czym  $R = 4.7k\Omega$  zaś  $C = 2\mu F$ .



$$u(t) = RC\dot{x}(t) + x(t)$$

$$x'(t) = \frac{u(t)}{RC} - \frac{x}{RC}$$

$$u(t) = 0$$

$$x'(t) = -\frac{x}{RC}$$

$$x'(t) = -\frac{x}{\frac{864}{2065} \cdot R \cdot C}$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{RC}$$

$$\ln|x| = -\frac{t}{RC} + k$$

$$ke^{-\frac{t}{RC}} = x$$



### Zadanie 1.8.1

Dane jest równanie różniczkowe

$$\dot{x}(t) = -2x(t) + 3$$

gdzie  $x(0) = -1, t \geq 0$ . Po jakim czasie  $t_k$  zachodzi  $x(t_k) = 2$ .

$$\frac{dx}{dt} = -2x(t) + 3$$

$$\frac{dx}{-2x+3} = dt$$

$$\int \frac{1}{-2x+3} dx = \left| \begin{array}{l} u = -2x + 3 \\ du = -2dx \end{array} \right| = -\frac{1}{2} \ln | -2x + 3 | = t + c$$

$$ce^{-2t} = -2x + 3$$

$$x = \frac{3-ce^{-2t}}{2}$$

$$x(0) = \frac{3-c}{2} = -1 \Rightarrow c = 5$$

$$x = \frac{3-5e^{-2t}}{2}$$

$$x(t_k) = 2 = \frac{3-5e^{-2t_k}}{2}$$

$$4 = 3 - 5e^{-2t_k} \Rightarrow e^{-2t_k} = -\frac{1}{5} \quad \boxed{\text{Sprzeczność}}$$

## Zadanie 1.9.1

Rozwiązanie równania różniczkowego

$$\dot{x}(t) = -100x(t) + 2 \sin(t)$$

gdzie  $x(0) = -1, t \geq 0$  ma postać

$$x(t) = ae^{-100t} + A \sin(t + \varphi)$$

Obliczyć  $A$  i  $\varphi$ .

$$x(0) = a + A \sin \varphi = 2 \Rightarrow \boxed{A = \frac{2-a}{\sin \varphi}}$$

$$\frac{dx}{dt} + 100x = 2 \sin t$$

$$\frac{dx}{dt} + 100x = 0$$

$$\ln |x| = -100t + c$$

$$c(t)e^{-100t} = x$$

$$c'e^{-100t} - 100ce^{-100t} = -100ce^{-100t} + 2 \sin t$$

$$c' = 2 \sin te^{100t}$$

$$\int \sin te^{100t} = \left| \begin{array}{cc} \sin t & \cos t \\ e^{100t} & \frac{1}{100}e^{100t} \end{array} \right| = \frac{1}{100} \sin te^{100t} - \frac{1}{100} \int \cos te^{100t} = \left| \begin{array}{cc} \cos t & \sin t \\ e^{100t} & \frac{1}{100}e^{100t} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{100} \sin te^{100t} - \frac{1}{100^2} \cos te^{100t} - \frac{1}{100} \int \sin te^{100t} \Rightarrow \int \sin te^{100t} dt = \boxed{\frac{100 \sin t - \cos t}{1001} e^{100t} + e}$$

$$\boxed{x = Ke^{-100t} + 2 \cdot \frac{100 \sin t - \cos t}{10001}}$$

$$x = Ke^{-100t} + \frac{200 \sin t - 2 \cos t}{10001}$$

$$x(0) = K - \frac{2}{10001} = 2 \Rightarrow K = \frac{20004}{10001}$$

$$ae^{-100t} + A \sin(t + \varphi) = Ke^{-100t} + \frac{200 \sin t - 2 \cos t}{10001}$$

$$a = K$$

$$A = \frac{2-a}{\sin \varphi} = \frac{2 - \frac{20004}{10001}}{\sin \varphi} = \frac{-2}{10001 \sin \varphi}$$

$$A(\sin t \cos \varphi + \sin \varphi \cos t) = \frac{200 \sin t}{10001} - \frac{2 \cos t}{10001}$$

$$\sin t \operatorname{ctg} \varphi + \cos t = -100 \sin t + \cos t$$

$$\operatorname{ctg} \varphi = -100$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-1}{100} \Rightarrow \boxed{\operatorname{arctg}\left(\frac{-1}{100}\right) = \varphi}$$

### Zadanie 1.10.1

Dane jest równanie różniczkowe

$$\dot{x}(t) = -x(t) + u(t)$$

gdzie  $x(0) = 1, t \geq 0$

zaś sterowanie ma postać sygnału PWM o amplitudzie 15, okresie 1s i współczynniku wypełnienia  $\theta \in (0, 1]$ , tzn.

$$u(t) = \begin{cases} 15 & \text{dla } t \in [n, n + \theta] \\ 0 & \text{dla } t \in (n + \theta, n + 1) \end{cases}$$

Wiedząc, że  $x(3) = 1$  obliczyć  $\theta$ .

$$x(t) = \underbrace{e^{tA}x(0)}_{=0} + \int_0^t e^{(t-\tau)A}Bu(\tau) d\tau$$

$$x(t) = \int_0^t 0e^{-t+\tau}15 d\tau = 15e^{-t}(e^t - 1)$$

$$x(3) = 15e^{-3}(e^\theta - 1 + e^{1+\theta} - e + e^{2+\theta} - e^2) = 15e^{-3}(e^\theta(1 + e + e^2) - (1 + e + e^2)) = 15e^{-3}((e^\theta - 1)(1 + e + e^2)) = \boxed{1}$$

$$\frac{3}{15(1+e+e^2)} + 1 = e^\theta \Rightarrow \theta = \ln\left(1 + \frac{e^3}{15(1 + e + e^2)}\right)$$

## Tydzień 3

### Dyskretny systemy dynamiczne

#### Zadanie 3.1.1

Narysować rozwiązanie równania różnicowego  $x(k+1) = \lambda_i x(k)$

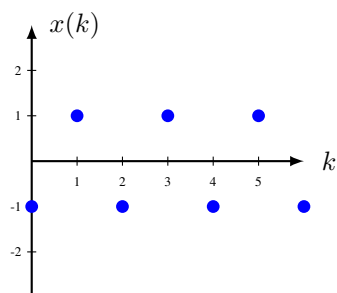
dla  $i = 1, 2, 3$  gdzie

$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$

przy czym  $x(0) = -1$  i  $k \geq 0$

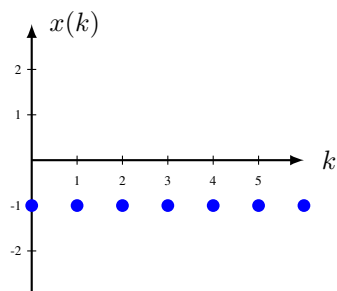
- $i = 3, \lambda_i = -1$

$$x(k) = (-1)^k(-1) = (-1)^{k+1}$$



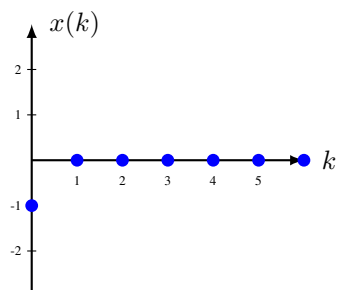
- $i = 2, \lambda_i = 1$

$$x(k) = (1)^k(-1) = -1$$



- $i = 0, \lambda_i = 0$

$$x(k) = (0)^k(-1) = \begin{cases} -1 & \text{dla } k = 0 \\ 0 & \text{dla } k = 1, 2, \dots \end{cases}$$



### Zadanie 3.1.2

Narysować rozwiązanie równania różnicowego  $x(k+1) = \lambda_i x(k)$

dla  $i = 1, 2, 3$  gdzie

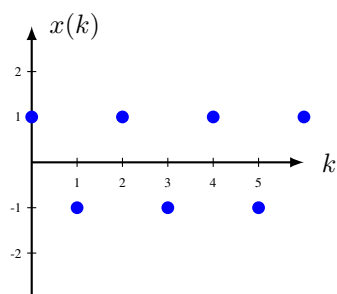
$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -\frac{1}{2}, \lambda_3 = 1$$

przy czym  $x(0) = 1$  i  $k \geq 0$

- $\lambda_1 = -1$

$$x(k+1) = -x(k)$$

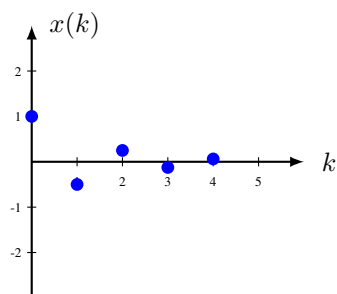
$$x(k) = (-1)^k \cdot 1 = (-1)^k$$



- $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$

$$x(k+1) = -\frac{1}{2} \cdot x(k)$$

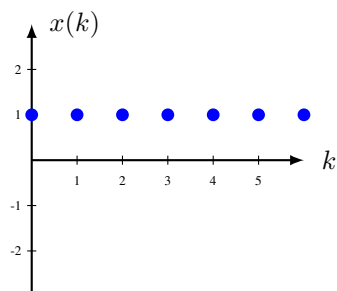
$$x(k) = \left(-\frac{1}{2}\right)^k \cdot 1 = \left(-\frac{1}{2}\right)^k$$



- $\lambda_3 = 1$

$$x(k+1) = x(k)$$

$$x(k) = 1^k \cdot 1 = 1$$



### Zadanie 3.1.3

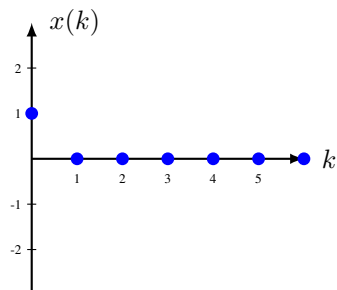
Narysować rozwiązanie równania różnicowego  $x(k+1) = \lambda_i x(k)$

dla  $i = 1, 2, 3$  gdzie

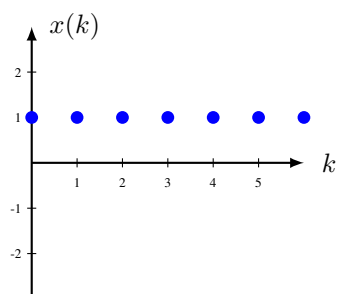
$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$

przy czym  $x(0) = 1$  i  $k \geq 0$

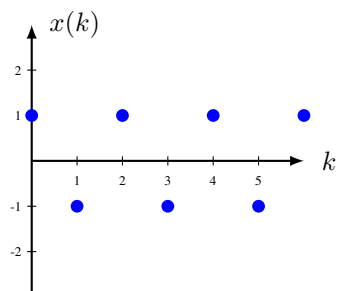
•  $\lambda_1 = 0$



•  $\lambda_2 = 1$



•  $\lambda_3 = -1$



### Zadanie 3.2.1

Narysować rozwiązanie równania różnicowego  $x(k+1) = x(k) + u_i(k)$

dla  $i = 1, 2, 3$  gdzie

$u_1 = -2, u_2 = 2, u_3 = 1$

przy czym  $x(0) = 0$  i  $k \geq 0$

$$x(k+1) = Ax(i) + Bu(i)$$

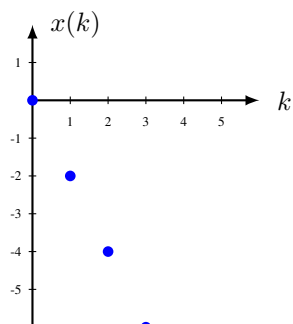
$$x(k) = A^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-1-j} Bu(j)$$

$$A = 1, B = 1, \forall j \quad u(j) = u_i$$

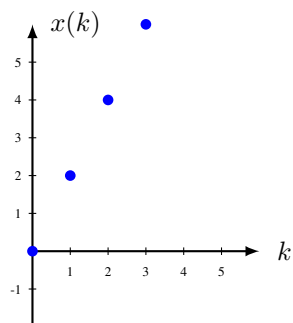
$$\Rightarrow x(k) = x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} u \text{ dla } x(0) = 0$$

$$\Rightarrow x(k) = u_i \cdot k$$

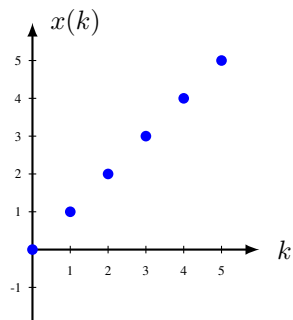
- $i = 1, u_i = -2$



- $i = 2, u_i = 2$



- $i = 3, u_i = 1$



### Zadanie 3.2.2

Narysować rozwiązanie równania różnicowego  $x(k+1) = 2x(k) + u_i(k)$

dla  $i = 1, 2, 3$  gdzie

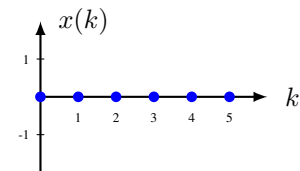
$$u_1 = 0, u_2 = -2, u_3 = 2$$

przy czym  $x(0) = 0$  i  $k \geq 0$

•  $u_1 = 0$

$$x(k+1) = 2x(k) + 0$$

$$x(k) = 2^k \cdot 0 = 0$$

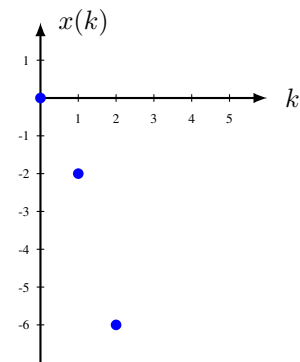


•  $u_2 = -2$

$$x(k+1) = 2x(k) - 2$$

$$x(k) = 2^k \cdot 0 + \sum_{j=0}^{k-1} 2^{k-1-j} \cdot (-2) = -2 \cdot \sum_{j=0}^{k-1} (2^k \cdot 2^{-1} \cdot 2^{-j})$$

$$= -2^k \cdot \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^j = -2^k \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k}{1 - \frac{1}{2}} = -2^{k+1} + 2$$

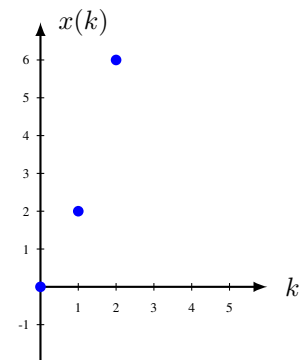


•  $u_3 = 2$

$$x(k+1) = 2x(k) + 2$$

$$x(k) = 2^k \cdot 0 + \sum_{j=0}^{k-1} 2^{k-1-j} \cdot (2) = 2 \cdot \sum_{j=0}^{k-1} (2^k \cdot 2^{-1} \cdot 2^{-j})$$

$$= 2^k \cdot \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^j = 2^k \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k}{1 - \frac{1}{2}} = 2^{k+1} - 2$$





### Zadanie 3.3.1

Niech będzie dany układ ciągły opisany równaniem  $\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t)$

(a) Znaleźć rozwiązanie tego układu dla:  $x(0) = 0$ ,  $u(t) = 1$ ,  $a = -4$ ,  $b = 3$ .

(b) Znaleźć parametry układu dyskretnego, jeśli podłączono ekstrapolator pierwszego rzędu na wejściu i impulsator na wyjściu, przy czym pracują one synchronicznie z okresem próbkowania  $t = 1$ . Rozwiązać powstały układ.

(c) Jak wyżej, przy założeniu  $t = 12$ .

(d) Narysować wszystkie rozwiązania na jednym układzie współrzędnych. Opisać różnice.

---

Brak rozwiązania

### Zadanie 3.3.2

Niech będzie dany układ ciągły opisany równaniem  $\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t)$

(a) Znaleźć rozwiązanie tego układu dla:  $x(0) = 0, u(t) = 1, a = -1, b = 2$ .

(b) Znaleźć parametry układu dyskretnego, jeśli podłączono ekstrapolator pierwszego rzędu na wejściu i impulsator na wyjściu, przy czym pracują one synchronicznie z okresem próbkowania  $t = 1$ . Rozwiązać powstały układ.

(c) Jak wyżej, przy założeniu  $t = 10$ .

(d) Narysować wszystkie rozwiązania na jednym układzie współrzędnych. Opisać różnice.

(a)

$$\dot{x} = -x + 2$$

$$\frac{dx}{dt} = -x + 2$$

$$\frac{dx}{-x+2} = dt$$

$$-\ln|-x+2| = t + c, \text{ gdzie } c \text{ jest stałą}$$

$$\ln|-x+2| = -t + c$$

$$e^{-t+c} = -x + 2$$

$$e^{-t}e^c = -x + 2$$

$$ce^{-t} = -x + 2, \text{ bo } e^c \text{ to też stała}$$

$$x(0) = c + 2 = 0 \Rightarrow c = -2$$

$$ce^{-t} = -x + 2 \Rightarrow x(t) = ce^{-t} + 2 = -2e^{-t} + 2$$

(b)

$$h = 1$$

$$x^+(i) = x(ih) = x(i)$$

$$u^+(i) = u(i)$$

$$y^+(i) = y(i)$$

$$A^+ = e^{hA} = e^{-1}$$

$$B^+ = \int_0^1 e^{tA} B dt = \int_0^1 e^{-t} 2 dt = 2 \int_0^1 e^{-t} dt = -2e^t \Big|_0^1 = -2(e^{-1} - 1) = 2 - \frac{2}{e}$$

$$C^+ = C$$

$$x(i+1) = e^{-1}x(i) + (2 - \frac{2}{e})u(i) = \frac{x(i)}{e} + 2 - \frac{2}{e}$$

$$x(k) = (e^{-1})^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} (e^{-1})^{k-1-j} (2 - \frac{2}{e}) = (2 - \frac{2}{e}) \sum_{j=0}^{k-1} (e^{-k} \cdot e^1 \cdot e^j)$$

$$= (2 - \frac{2}{e}) e^{1-k} \cdot \frac{1-e^k}{1-e} = 2(e \cdot e^{-k} - e^{-k}) \frac{1-e^k}{1-e} = 2(-e^{-k})(1 - e^k) = 2 - 2e^{-k}$$

(c)

$$h = 10$$

$$x^+(i) = x(10i)$$

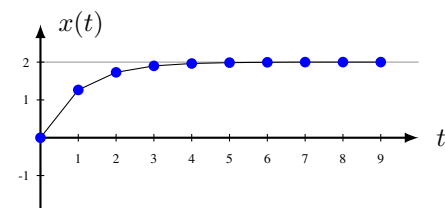
$$u^+(i) = u(10i)$$

$$A^+ = e^{10A} = e^{-10}$$

$$B^+ = 2 \int_0^{10} e^{-t} dt = 2(-e^{-t} \Big|_0^{10}) = -2(e^{-10} - 1) = 2 - 2e^{-10}$$

$$x(k) = \underbrace{(e^{-10})^k x(0)}_{=0} + \sum_{j=0}^{k-1} (e^{-10})^{k-1-j} (2 - 2e^{-10}) = (2 - 2e^{-10}) \cdot e^{-10k-10} \cdot \frac{1-(e^{10})^k}{1-e^{10}}$$

$$= 2(e^{-10k} \cdot e^{10} - e^{-10} \cdot e^{-10k} \cdot e^{10}) \cdot \frac{1-e^{10k}}{1-e^{10}} = 2(-e^{-10k}(1 - e^{10})) \frac{1-e^{10k}}{1-e^{10}} = 2 - 2e^{-10k}$$



- wykres (a) jest liniowy, (b) i (c) punktowe - (a) punkty co 1, (b) punkty co 10 (?)

### Zadanie 3.4.1

Obliczyć  $A^n$  dla macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

---

$$A^n = PJP^{-1}$$

$$A^n = \underbrace{(PJP^{-1})(PJP^{-1})\dots(PJP^{-1})}_n$$

$$A^n = PJ^nP^{-1}$$

$$|[A - \lambda I]| = 0$$

$$(4 - \lambda)(2 - \lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 4, \lambda_2 = 2$$

$$[A - \lambda I]\omega_1 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{11} \\ \omega_{12} \end{bmatrix} = 0 \quad \begin{matrix} -2\omega_{12} = 0 \\ \omega_{11} \in \mathbb{R} \end{matrix} \quad \omega_1 = \begin{bmatrix} \omega_{11} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{21} \\ \omega_{22} \end{bmatrix} = 0 \quad \begin{matrix} 2\omega_{21} - 2\omega_{22} = 0 \\ \omega_{22} = \omega_{21} \\ \omega_{21} \in \mathbb{R} \end{matrix} \quad \omega_2 = \begin{bmatrix} \omega_{21} \\ \omega_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P = [\omega_1 \ \omega_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, J^n = \begin{bmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}$$

$$A^n = PJ^nP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4^n & 2^n \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4^n & 2^n - 4^n \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}$$

### Zadanie 3.4.2

Obliczyć  $A^n$  dla macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^n = P J^n P^{-1}$$

$$|[A - \lambda I]| = (-\lambda)(2 - \lambda) + 4 = \lambda^2 - 2\lambda + 4 = 0$$

$$\Delta = 4 - 16 = -12$$

$$\lambda = 1 \pm i\sqrt{3}$$

$$\boxed{\lambda = 1 + i\sqrt{3}}$$

$$[A - \lambda I]\omega_1 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2 - 1 - i\sqrt{3} & 1 \\ -4 & -1 - i\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(1 - i\sqrt{3})\omega_1 + \omega_2 = 0 \Rightarrow \omega_2 = -(1 - i\sqrt{3})\omega_1$$

$$-4\omega_1 + (-1 - i\sqrt{3})\omega_2 = 0 \Rightarrow -4\omega_1 + 4\omega_1 = 0$$

$$\omega = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 + i\sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \lambda = a \pm ib \\ tg\varphi = \frac{b}{a} \Rightarrow \varphi = \arctg \frac{b}{a} \\ J = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \rightarrow J^n = (\sqrt{a^2 + b^2})^n \begin{bmatrix} \cos n\varphi & \sin n\varphi \\ -\sin n\varphi & \cos n\varphi \end{bmatrix} \end{array}}$$

$$\varphi = \arctg \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

$$J^n = 2^n \begin{bmatrix} \cos n\frac{\pi}{3} & \sin n\frac{\pi}{3} \\ -\sin n\frac{\pi}{3} & \cos n\frac{\pi}{3} \end{bmatrix}$$

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \cdot 2^n \cdot \begin{bmatrix} \cos n\frac{\pi}{3} & \sin n\frac{\pi}{3} \\ -\sin n\frac{\pi}{3} & \cos n\frac{\pi}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$$

$$= 2^n \begin{bmatrix} \cos + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin & \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \\ -\frac{4}{3}\sqrt{3} \sin & -\frac{\sqrt{3}}{3} \sin + \cos \end{bmatrix}$$

### Zadanie 3.4.3

Obliczyć  $A^n$  dla macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^n = PJ^nP^{-1}$$

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-3)^2 - 1 = (\lambda-3-1)(\lambda-3+1) = (\lambda-4)(\lambda-2) = 0$$

$$\lambda_1 = 4$$

$$\lambda_2 = 2$$

$$(A - \lambda_1 I)\omega_1 = 0$$

$$(A - \lambda_2 I)\omega_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{11} \\ \omega_{12} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{21} \\ \omega_{22} \end{bmatrix}$$

$$-\omega_{11} - \omega_{12} = 0$$

$$\omega_{21} = \omega_{22}$$

$$\omega_{12} = -\omega_{11}$$

$$\omega_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\omega_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\frac{4^n}{2} = \frac{4^n}{4^{\frac{1}{2}}} = 4^{n-\frac{1}{2}} = \frac{2^n}{2} = 2^{n-1}}$$

$$J = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$J^n = \begin{bmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4^n & 2^n \\ -4^n & 2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4^{n-\frac{1}{2}} + 2^{n-1} & -4^{n-\frac{1}{2}} + 2^{n-1} \\ -4^{n-\frac{1}{2}} + 2^{n-1} & 4^{n-\frac{1}{2}} + 2^{n-1} \end{bmatrix}$$

### Zadanie 3.5.1

Do ciągłego systemu dynamicznego opisanego równaniami

$$\dot{x}_1(t) = 2\pi x_2(t),$$

$$\dot{x}_2(t) = -2\pi x_1(t) + u(t),$$

podłączono ekstrapolator rzędu zerowego na wejściu i impulsator na wyjściu, przy czym pracują one synchronicznie z okresem próbkowania  $h = 1s$ . Wyliczyć parametry systemu dyskretnego odpowiadające takiemu połączeniu.

$$\dot{x}_1(t) = \begin{bmatrix} 0 & 2\pi \\ -2\pi & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$x^+(vi) = A^+ x^+(i) + B^+ u^+(i), h = 1s$$

$$A^+ = e^{hA}$$

$$A^+ = e^A = P e^J P^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 2\pi \\ -2\pi i & -\lambda \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda^2 + 4\pi^2 = 0 \\ \lambda = -4\pi^2 \\ \lambda_{1,2} = \pm 2\pi i \end{cases} \quad (p = 0, q = 2\pi)$$

$$\begin{bmatrix} -2\pi i & \boxed{2\pi} \\ -2\pi & -2\pi i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{11} \\ \omega_{12} \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} \omega_{11} &\in \mathbb{R} \\ -2\pi i \omega_{11} + 2\pi \omega_{12} &= 0 \Rightarrow \omega_1 = \begin{bmatrix} \omega_{11} \\ \omega_{12} \end{bmatrix} = \omega_{11} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \omega_{11} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + i \omega_{11} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \omega_{12} &= i \omega_{11} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = P^{-1} = I$$

$$\Rightarrow A \text{ jest postaci Jordana} \Rightarrow J = A = \begin{bmatrix} 0 & 2\pi \\ -2\pi & 0 \end{bmatrix}$$

$$e^J = e^P \cdot \begin{bmatrix} \cos(q) & \sin(q) \\ -\sin(q) & \cos(q) \end{bmatrix}$$

$$e^J = \cdot \begin{bmatrix} \cos(2\pi) & \sin(2\pi) \\ -\sin(2\pi) & \cos(2\pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P e^J P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^+ = \int_0^n e^{tA} B dt$$

$B$  jest stałą

$$B^+ = \int_0^n e^{tA} dt B$$

$$\left| \begin{array}{l} tA = u - 1 \\ t = uA \\ dt = duA^{-1} \end{array} \right| B^+ = \int_0^{hA} e^u du A^{-1} B = [e^{hA} - e^0] A^{-1} B$$

$$e^{hA} = e^A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^0 = 1 = J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B^+ = 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x^+(i+1) = A^+ x^+(i) + B^+ u^+(i)$$

$$x^+(i+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x^+(i)$$

### Zadanie 3.5.2

Do ciągłego systemu dynamicznego opisanego równaniami

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

$$y(t) = Cx(t),$$

przy czym

$$A = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

podłączono ekstrapolator rzędu zerowego na wejściu i impulsator na wyjściu, przy czym pracują one synchronicznie z okresem próbkowania  $h = 1s$ . Wyliczyć parametry systemu dyskretnego odpowiadające takiemu połączeniu.

$$x^+(i) = x(ih) = x(i)$$

$$y^+(i) = y(ih) = y(i)$$

$$u^+(i) = u(ih) = u(i)$$

$$A^+ = e^{hA}$$

A jest w postaci Jordana, więc  $A = J$

$$A^+ = e^{hJ} = e^J = \begin{bmatrix} e^{-0.5} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2} \end{bmatrix}$$

$$B^+ = \int_0^h e^{tA} B dt = \int_0^1 \begin{bmatrix} e^{-0.5} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} dt = \int_0^1 \begin{bmatrix} e^{-\frac{t}{2}} \\ e^{-t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix} dt$$

$$= \begin{bmatrix} -2e^{-\frac{t}{2}} \big|_0^1 \\ -e^{-t} \big|_0^1 \\ -\frac{1}{2}e^{-2t} \big|_0^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - 2e^{-\frac{1}{2}} \\ 1 - e^{-1} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2} \end{bmatrix}$$

$$C^+ = C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

### Zadanie 3.5.3

Do ciągłego systemu dynamicznego opisanego równaniami

$$\dot{x}_1(t) = -2x_1(t) + x_2(t),$$

$$\dot{x}_2(t) = -2x_1(t),$$

podłączono ekstrapolator rzędu zerowego na wejściu i impulsator na wyjściu, przy czym pracują one synchronicznie z okresem próbkowania  $h = 1s$ . Wyliczyć parametry systemu dyskretnego odpowiadające takiemu połączeniu.

$$A = -2 \quad B = 1 \quad C = -2$$

$$A^+ = e^{Ah} = e^{-2}$$

$$B^+ = \int_0^h e^{tA} B \, dt = \int_0^h e^{-2t} \, dt = \left| -\frac{1}{2}e^{-2t} \right|_0^h = -\frac{1}{2}e^{-2}$$

$$C^+ = C = -2$$

$A^+ = e^{-2} \quad B^+ = -\frac{1}{2}e^{-2} \quad C^+ = -2$
--



### Zadanie 3.6.1

Dla jakich wartości parametrów  $k_1$  i  $k_2$  system dynamiczny

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & k_2 \end{bmatrix} x(k)$$

będzie asymptotycznie stabilny. Zaznaczyć obszar stabilności na płaszczyźnie  $k_1 \times k_2$

$$x(k+1) = Ax(k)$$

$$|[A - \lambda I]| = 0$$

$$(-\lambda)(k_2 - \lambda) + k_1 = 0$$

$$\lambda^2 - k_2\lambda + k_1 = 0$$

$$\lambda = \frac{z+1}{z-1}$$

$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2 - k_2\left(\frac{z+1}{z-1}\right) + k_1 = 0$$

$$\frac{(z+1)^2 - k_2(z+1)(z-1) + k_1(z-1)^2}{(z-1)^2} = 0$$

Rozważany układ jest asymptotycznie stabilny  $\Leftrightarrow$  wartości własne ( $\lambda$ ) macierzy  $A$  leżą wewnątrz koła jednostkowego na płaszczyźnie zespolonej  $\Leftrightarrow$  pierwiastki wielomianu  $L(z) = (z+1)^2 - k_2(z+1)(z-1) + k_1(z-1)^2$  leżą w lewej półpłaszczyźnie zespolonej  $\Leftrightarrow$  spełnione jest dla wielomianu  $L(z)$  kryterium Hurwitza

$$L(z) = (z+1)^2 - k_2(z+1)(z-1) + k_1(z-1)^2$$

$$L(z) = z^2 + 2z + 1 - k_2z^2 + k_2 + k_1z^2 - 2k_1z + k_1$$

$$L(z) = z^2(1 + k_1 - k_2) + z(2 - 2k_1) + (1 + k_1 + k_2) = 0$$

W.K.  $a_2 > 0, a_1 > 0, a_0 > 0$

$$1 + k_1 - k_2 > 0$$

$$k_2 < k_1 + 1$$

$$2 - 2k_1 > 0$$

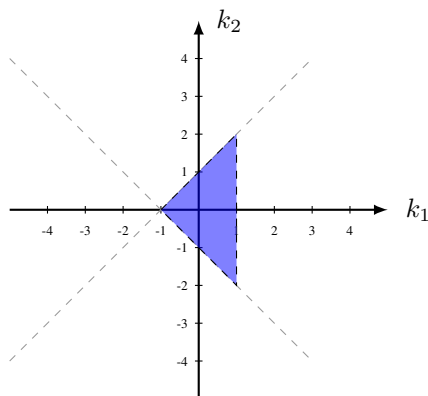
$$k_1 < 1$$

$$1 + k_1 + k_2 > 0$$

$$k_2 > -k_1 - 1$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - 2k_1 & 0 \\ 1 + k_1 - k_2 & 1 + k_1 + k_2 \end{bmatrix}$$

$a_1 > 0 \wedge a_1 a_0 > 0$  - spełnione dla W.K.



### Zadanie 3.6.2

Dla jakich wartości parametrów  $k_1$  i  $k_2$  system dynamiczny

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} k_1 - k_2 & 1 & 2 \\ 0 & k_1 + k_2 & 1 \\ 0 & 0 & k_1^2 + k_2^2 \end{bmatrix} x(k)$$

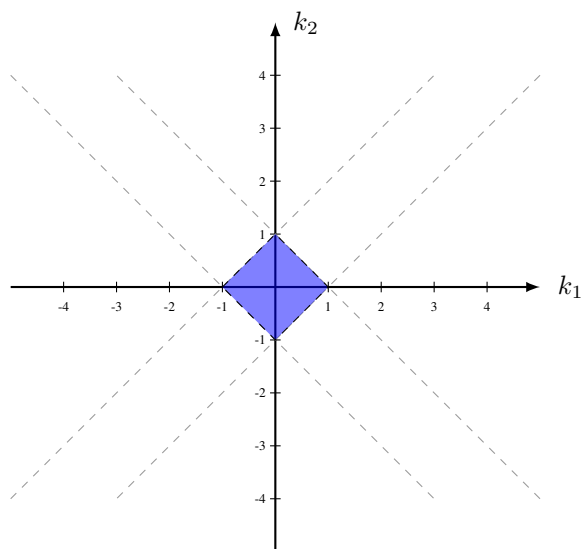
będzie asymptotycznie stabilny. Zaznaczyć obszar stabilności na płaszczyźnie  $k_1 \times k_2$

$$\lambda_1 = k_1 - k_2 \quad \vee \quad \lambda_2 = k_1 + k_2 \quad \vee \quad \lambda_3 = k_1^2 + k_2^2$$

dyskretny system liniowy jest asymptotycznie stabilny  $\Leftrightarrow$  wartości własne macierzy  $A$  leżą w kole jednostkowym o środku w zerze na płaszczyźnie zespolonej (wystarczy sprawdzić warunek  $|\lambda_i| < 1$ , nie trzeba z Hurwitza)

- $\lambda_1 = k_1 - k_2$   
 $k_1 - k_2 < 1 \quad \wedge \quad k_1 - k_2 > -1$   
 $k_2 > k_1 - 1 \quad \wedge \quad k_2 < k_1 + 1$
- $\lambda_2 = k_1 + k_2$   
 $k_1 + k_2 < 1 \quad \wedge \quad k_1 + k_2 > -1$   
 $k_2 < -k_1 + 1 \quad \wedge \quad k_2 > -k_1 - 1$
- $\lambda_3 = k_1^2 + k_2^2$   
 $k_1^2 + k_2^2 < 1 \quad \wedge \quad k_1^2 + k_2^2 > -1$

$$\lambda_1 = k_1 - k_2 \quad \wedge \quad \lambda_2 = k_1 + k_2 \quad \wedge \quad \lambda_3 = k_1^2 + k_2^2$$



### Zadanie 3.6.3

Dla jakich wartości parametrów  $k_1$  i  $k_2$  system dynamiczny

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} -k_2 & k_1 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix} x(k)$$

będzie asymptotycznie stabilny. Zaznaczyć obszar stabilności na płaszczyźnie  $k_1 \times k_2$

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\begin{bmatrix} -k_2 - \lambda & k_1 \\ -k_1 & -k_2 - \lambda \end{bmatrix} = (k_2 + \lambda)^2 + k_1^2 = (k_2 + \lambda)^2 - (ik_1)^2 = (\lambda + k_2 + ik_1) \cdot (\lambda + k_2 - ik_1) = 0$$

$$\lambda = -k_2 \pm k_1$$

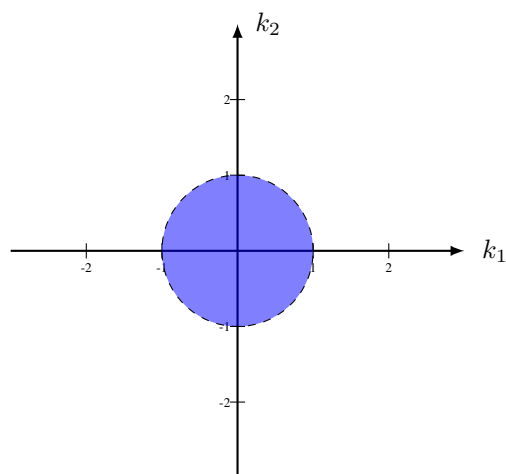
Układ jest asymptotycznie stabilny, gdy wartości własne macierzy leżą wewnątrz koła jednostkowego na płaszczyźnie zespolonej o środku w zerze.

$$|\lambda| < 1$$

$$|\lambda| = \sqrt{(-k_2)^2 + k_1^2}$$

$$\sqrt{k_1^2 + k_2^2} < 1$$

$$k_1^2 + k_2^2 < 1$$



### Zadanie 3.7.1

Dla jakich wartości parametru  $k_1$  system dynamiczny

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} -0.5k_1 & 0 \\ 2 & -k_1 \end{bmatrix} x(k)$$

będzie niestabilny.

$$(-0.5k_1 - 2)(-k_1 - \lambda) = 0$$

$$0.5k_1^2 + 0.5k_1\lambda + k_1\lambda + \lambda^2 = 0$$

$$\lambda^2 + 1.5k_1\lambda + 0.5k_1^2 = 0$$

$$\lambda = \frac{z+1}{z-1}$$

$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2 - 1.5k_1\left(\frac{z+1}{z-1}\right) + 0.5k_1^2 = 0$$

$$z^2 + 2z + 1 + 1.5k_1z^2 - 1.5k_1 + 0.5k_1^2z^2 - k_1^2z + 0.5k_1^2 = 0$$

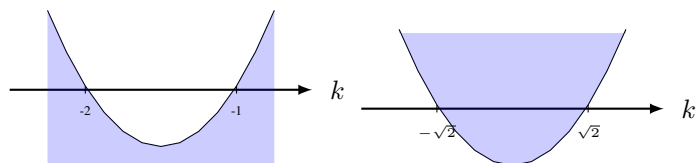
$$z^2 \underbrace{(0.5k_1^2 + 1.5k_1 + 1)}_{a_2} + z \underbrace{(2 - k_1^2)}_{a_1} + \underbrace{(0.5k_1^2 - 1.5k_1 + 1)}_{a_0} = 0$$

Z kryterium Hurwitza system będzie stabilny gdy:

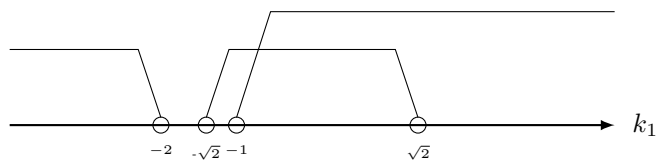
$$a_2 > 0 \quad 0.5k_1^2 + 1.5k_1 + 1 > 0 \quad 2 - k_1^2 > 0$$

$$a_1 > 0 \Leftrightarrow k_1^2 + 3k_1 + 2 > 0 \quad \vee \quad (\sqrt{2} - k_1)(\sqrt{2} + k_1) > 0 \quad \text{ponieważ W.K. zawiera w sobie W.W., aby spełnione zostało}$$

$$a_0 > 0 \quad (k_1 + 1)(k_1 + 2) > 0 \quad (k_1 - \sqrt{2})(\sqrt{2} + k_1) < 0$$



kryterium Hurwitza musi być spełniony iloczyn warunków:  $a_2 > 0 \wedge a_1 > 0$



$$\Rightarrow \text{układ jest stabilny} \Leftrightarrow k_1 \in (-1, \sqrt{2})$$

$$\Rightarrow \text{układ jest niestabilny} \Leftrightarrow k_1 \in (-\infty, -1) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$$

### Zadanie 3.7.2

Dla jakich wartości parametru  $k_1$  system dynamiczny

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} -1 & -k_1 \\ -k_1 & -3 \end{bmatrix} x(k)$$

będzie niestabilny.

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -k_1 \\ -k_1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (1+\lambda)(3+\lambda) - k_1^2 = \lambda^2 + 3 + 4\lambda - k_1^2 = 0$$
$$\Delta = 16 - 12 + 4k_1^2 = 4 + 4k_1^2$$
$$\lambda = -2 \pm \sqrt{1 + k_1^2}$$

system będzie niestabilny  $\Leftrightarrow |\lambda_i| > 1$

$$\begin{aligned} \bullet \lambda = -2 + \sqrt{1 + k_1^2} \\ -2 + \sqrt{1 + k_1^2} > 1 \quad \vee \quad -2 + \sqrt{1 + k_1^2} < -1 \\ \sqrt{1 + k_1^2} > 3 \quad \quad \quad \sqrt{1 + k_1^2} < 1 \\ k_1^2 > 8 \quad \quad \quad k_1^2 < 0 \\ k_1 > 2\sqrt{2} \vee k_1 < -2\sqrt{2} \quad \quad \quad \text{sprzeczne} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lambda = -2 - \sqrt{1 + k_1^2} \\ -2 - \sqrt{1 + k_1^2} > 1 \quad \vee \quad -2 - \sqrt{1 + k_1^2} < -1 \\ \sqrt{1 + k_1^2} > -3 \quad \quad \quad \sqrt{1 + k_1^2} > -1 \\ \text{sprzeczne} \quad \quad \quad k_1 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\lambda = -2 + \sqrt{1 + k_1^2} \vee \lambda = -2 - \sqrt{1 + k_1^2} \Rightarrow k_1 \in \mathbb{R}$$

### Zadanie 3.7.3

Dla jakich wartości parametru  $k_1$  system dynamiczny

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} -k_1 & k_1 \\ -k_1 & -k_1 \end{bmatrix} x(k)$$

będzie niestabilny.

$$\begin{bmatrix} -k_1 - \lambda & k_1 \\ -k_1 & -k_1 - \lambda \end{bmatrix} = (-k_1 - \lambda)^2 + k_1^2 = (-k_1 - \lambda)^2 - (ik_1)^2 = (-k_1 - \lambda - ik_1)(-k_1 - \lambda + ik_1) = (\lambda + k_1 - ik_1)(\lambda + k_1 + ik_1) = 0$$

$$\lambda = -k_1 \pm ik_1$$

układ jest niestabilny gdy  $|\lambda| > 1$

podstawiamy tu moduł - więc usuwamy i z zespolonej.

$$|\lambda| = \sqrt{(-k_1)^2 + (k_1)^2} = \sqrt{k_1^2 + k_1^2} > 1$$

$$2k_1^2 > 1$$

$$k_1^2 > \frac{1}{2}$$

$$k_1 > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

### Zadanie 3.8.1

Wyznaczyć rozwiązanie następującego równania różnicowego (rekurencyjnego)

$$x(k+2) + x(k+1) - 2x(k) = 0, x(0) = 1, x(1) = -1$$

zakładam rozwiązanie postaci  $z^n$

$$x^n, +z^{n-1} + 2z^{n-2} = 0$$

$z^2 + z - 2 = 0$  - wielomian charakterystyczny

$$W(z) = (z+2)(z-1)$$

$$z_1 = -2, \quad z_2 = 1$$

rozwiązanie równania jest postaci:

$$x(k) = Cz_1^k + Dz_2^k$$

podstawiając  $x(0)$  oraz  $x(1)$

$$\begin{cases} x(0) = 1 = C + D \\ x(1) = -1 = Cz_1 + Dz_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C = 1 - D \\ -1 = -2C + D \end{cases}$$

$$\begin{cases} D = 1 - C \\ -1 = -2C + 1 - C \end{cases}$$

$$\begin{cases} D = 1 - C \\ 3C = 2 \end{cases}$$

$$C = \frac{2}{3} \quad D = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow x(k) = \frac{1}{3}(2 \cdot (-2)^k + 1^k)$$

$$\boxed{x(k) = \frac{2}{3}(-2)^k + \frac{1}{3}1^k}$$

### Zadanie 3.8.2

Wyznaczyć rozwiązanie następującego równania różnicowego (rekurencyjnego)

$$x(k+2) + 3x(k+1) + 2x(k) = 0, x(0) = 2, x(1) = -3$$

$$q^{k+2} + 3q^{k+1} + 2q = 0$$

$$q^2 + 3q + 2 = 0$$

$$\Delta = 9 - 8 = 1$$

$$q = \frac{-3+1}{2} = -1 \quad \vee \quad q = \frac{-3-1}{2} = -2$$

$$x(k) = a(-1)^k + b(-2)^k$$

$$\begin{cases} x(0) = a + b = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(1) = -a - 2b = -3 \end{cases}$$

$$b = 1 \wedge a = 1$$

$$x(k) = (-1)^k + (-2)^k$$



### Zadanie 3.8.3

Wyznaczyć rozwiązanie następującego równania różnicowego (rekurencyjnego)

$$x(k+2) + 2x(k+1) - 3x(k) = 0, x(0) = 2, x(1) = -2$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$\Delta = 4 + 12 = 16, \sqrt{\Delta} = 4$$

$$x_1 = \frac{-2-4}{2} = -3 \wedge x_2 = 1$$

$$x(k) = C_1 x_1^k + C_2 x_2^k$$

$$\begin{cases} x(0) = 2 = C_1 + C_2 \Rightarrow C_2 = 2 - C_1 \\ x(1) = -2 = -3C_1 + C_2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -2 &= -3C_1 + 2 - C_1 \Rightarrow C_1 = 1 \\ C_2 &= 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{x(k) = -3^k + 1}$$

**Alternatywne :**

równanie charakterystyczne

$$r^2 + 2r - 3 = 0$$

$$(r+1)^2 - 4 = 0$$

$$(r+1-2)(r+1+2) = 0$$

$$(r-1)(r+3)$$

$$r_1 = 1 \quad r_2 = -3$$

$$x(k) = c_1 r_1^k + c_2 r_2^k$$

$$x(0) = 2 = c_1 + c_2$$

$$x(1) = -2 = c_1 + 3c_2$$

$$\begin{cases} 2 = c_1 + c_2 \\ -2 = c_1 + 3c_2 \end{cases}$$

$$4 = 4c_2$$

$$c_1 = 1 \quad c_2 = 1$$

$$\boxed{x(k) = 1 + (-3)^k}$$

### Zadanie 3.9.1

Dany jest układ dyskretny

$$x(k+1) = Ax(k), A = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

przy czym  $k = 1, 2, \dots$  Wyznaczyć  $x(n)$ .

wielomian charakterystyczny:  $|[A - \lambda I]| = 0$

$$\begin{bmatrix} -\lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} = (-\lambda)^n (\text{wyznacznik macierzy diagonalnej})$$

Z Tw. Cagleya-Hamiltona wiadomo, że każda macierz spełnia swój wielomian charakterystyczny  
 $A^n = 0$

rozwiązanie równania  $x(k+1) = Ax(k)$  ma postać  $x(k) = A^k x(0)$  czyli  $x(n) = A^n x(0) = 0$

Biorąc więc pod uwagę fakt  $A^n = 0$  wiadomo, że rozwiązanie  $x(k)$  stanie się zerem w cco najwyżej  $n$  krokach, niezależnie od warunku początkowego  $x(0)$

### Zadanie 3.9.2

Dany jest układ dyskretny

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

przy czym  $k = 1, 2, \dots$ . Wyznaczyć  $x(n)$  wiedząc, że  $u(i) = 1$  dla  $i = 1, 2, \dots, n$ .

$$x(n) = A^n x(0) + \sum_{j=0}^{n-1} A^{n-1-j} B u(j)$$

Zauważmy, że  $\det(A) = 0$  (bo same zera na przekątnej)

wtedy  $\det(\lambda I - A) = \lambda^n$

z Tw. Cagleya-Hamiltona  $A^n = 0$  (każda macierz spełnia swój wielomian charakterystyczny)

mamy więc  $A^n x(0) = 0$ , czyli  $x(n) = \sum_{j=0}^{n-1} A^{n-1-j} \underbrace{B u(j)}_{=1}$

Przy kolejnych mnożeniach macierzy  $A$  podniesionej do jakiejś potęgi przez  $B$  otrzymujemy pierwszą kolumnę macierzy  $A$ , która zawiera same zera, poza przypadkiem  $A^0 = I$  (macierz jednostkowa), więc sumujemy  $n - 1$  kolumn samych zer oraz jedną równą  $B$  ( $I \cdot B = B$ )

ostatecznie  $\boxed{x(n) = B}$

### Zadanie 3.9.3

Dany jest układ dyskretny

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

przy czym  $k = 1, 2, \dots$  Wyznaczyć  $x(n)$  wiedząc, że  $u(i) = 1$  dla  $i = 1, 2, \dots, n$ .

$$|A| = 0$$

$$x(k+1) = Ax(k)$$

$$|\lambda I - A| = \lambda^n$$

z Tw. Cagleya-Hamiltona:

$$A^n = 0$$

$$x(1) = Ax(0) + B$$

$$x(2) = A^2x(0) + (A + 1)B$$

$$x(3) = A^3x(0) + (A^2 + A + 1)B$$

...

$$x(n) = A^n x(0) + (A^{n-1} + A^{n-2} + \dots + 1)B$$

ponieważ tylko  $A^n = 0$ , więc dla każdego  $A^{n-1}, A^{n-2}, \dots \neq 0$

te potęgi będą miały jakieś śmieci w wartościach, nie istotne co tam będzie. Ważne, że tam gdzie w  $A$  są 0 nie pojawi się nic nowego, czyli gdzie było 0 przed potęgowaniem, tam będzie też po.  $\Rightarrow$  wynik iloczynu  $A^i B = 0$  (macierz zerowa),

$$i = 1, \dots, n-1 \Rightarrow \boxed{x(n) = B}$$

### Zadanie 3.9.4

Dany jest układ dyskretny

$$x(k+1) = Ax(k), A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

przy czym  $k = 1, 2, \dots$  Wyznaczyć  $x(2n)$ .

$$|A| = 0$$

$$x(k+1) = Ax(k)$$

$$|\lambda I - A| = \lambda^n$$

z Tw. Cagleya-Hamiltona:

$$A^n = 0$$

$$x(1) = Ax(0)$$

$$x(2) = A^2x(0)$$

$$x(3) = A^3x(0)$$

...

$$x(n) = A^n x(0) = 0$$

$$x(2n) = A^n x(n) = 0$$

## Tydzień 4

Analiza częstotliwościowa systemów dynamicznych

### Zadanie 4.1.1

Układ jest opisany równaniami stanu w postaci

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

z macierzami

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Znaleźć transmitancję operatorową tego układu przy założeniu zerowych warunków początkowych  $x(0) = 0$

---

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} \cdot B$$

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ -2 & s-3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s-1)(s-3)} \begin{bmatrix} s-3 & 0 \\ 2 & s-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-3} & 0 \\ \frac{2}{(s-1)(s-3)} & \frac{1}{s-1} \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{s-3} & 0 \\ \frac{2}{(s-1)(s-3)} & \frac{1}{s-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-3} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{s-3}$$

### Zadanie 4.1.2

Układ jest opisany równaniami stanu w postaci

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

z macierzami

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Znaleźć transmitancję operatorową tego układu przy założeniu zerowych warunków początkowych  $x(0) = 0$

---

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s-2 & 0 \\ 5 & s \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{s-2} & 0 \\ -5 & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{2}{s} - \frac{10}{s \cdot (s-2)} = \frac{2s-14}{s(s-2)}$$

### Zadanie 4.1.3

Układ jest opisany równaniami stanu w postaci

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

z macierzami

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}, C = [0 \quad 1]$$

Znaleźć transmitancję operatorową tego układu przy założeniu zerowych warunków początkowych  $x(0) = 0$

---



### Zadanie 4.2.1

Mając dana transmitancję  $G(s) = \frac{5}{s+3}$  określić amplitudę sygnału wyjściowego, jeśli na wejście podano:

a)  $2 \sin(4t + 2\pi)$

b)  $-\sin(t)$

c)  $0.1 \cos(4t + \frac{\pi}{6})$

$$G(s) = \frac{5}{s+3}$$

$$A(\omega) = |G(j\omega)|$$

$$u(t) = A_u \sin(\omega t + \varphi_u) - \text{wejście}$$

$$A_y = A(\omega) \cdot A_u$$

**a)**

$$2 \sin(4t + 2\pi) = u(t)$$

$$A_u = 2$$

$$\omega = 4$$

$$A(\omega) = \left| \frac{5}{4j+3} \right| = \left| \frac{5(3-4j)}{9+16} \right| = \left| \frac{3-4j}{5} \right| = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = 1$$

$$A_y = 1 \cdot 2 = \boxed{2} \quad A(\omega) = \frac{5}{\sqrt{16+9}} = 1$$

**b)**

$$-\sin(t) = u(t)$$

$$A_u = -1$$

$$\omega = 1$$

$$A(\omega) = \left| \frac{5}{j+3} \right| = \left| \frac{5(3-j)}{9+1} \right| = \left| \frac{3-j}{2} \right| = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$A_y = -1 \cdot \frac{\sqrt{10}}{2} = \boxed{-\frac{\sqrt{10}}{2}} \quad A(\omega) = \frac{5}{\sqrt{9+1}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

**c)**

$$0.1 \cos(4t + \frac{\pi}{6}) = u(t)$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin \alpha \Rightarrow \cos(4t + \frac{\pi}{6}) = \cos(\frac{\pi}{2} - (\frac{2\pi}{6} - 4t)) = \sin(\frac{2\pi}{6} - 4t)$$

$$u(t) = \frac{1}{10} \sin(\frac{\pi}{3} - 4t)$$

$$A_u = \frac{1}{10} \quad \omega = -4$$

$$A(\omega) = \left| \frac{5}{-4j+3} \right| = \left| \frac{5(3+4j)}{9+16} \right| = \left| \frac{3+4j}{5} \right| = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = 1$$

$$A_y = 1 \cdot \frac{1}{10} = \boxed{\frac{1}{10}} \quad A(\omega) = \frac{5}{\sqrt{16+9}} = 1$$

### Zadanie 4.2.2

Mając dana transmitancję  $G(s) = \frac{30}{s+2}$  określić amplitudę sygnału wyjściowego, jeśli na wejście podano:

a)  $\sin(t + \frac{2\pi}{3})$

b)  $0.5 \sin(2t)$

c)  $8 \cos(3t + \frac{2\pi}{3})$

---

### Zadanie 4.3.1

Za pomocą transmitancji znaleźć odpowiedź układu 1 na skok jednostkowy, czyli funkcję postaci:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

Zakładamy, że  $x(0) = 0$

$$\dot{x}(t) = -4x(t) + 8u(t)$$

$$y(t) = x(t)$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -4x(t) + 8u(t) \\ y(t) = x(t) \end{cases} \quad x(0) = 0$$

$$C = 1 \quad A = -4 \quad B = 8$$

$$G(s) = 1 \cdot (s + 4)^{-1} \cdot 8 = 8 \cdot \frac{1}{s+4}$$

$$U(s) = \frac{1}{s}$$

tw. Laplace'a dla skoku jednostkowego  $Y(s) = G(s) \cdot U(s)$

$$Y(s) = \frac{8}{s+4} \cdot \frac{1}{s} = \frac{2}{s} - \frac{2}{s+4}$$

$$\frac{A}{s} + \frac{B}{s+4} = \frac{8}{s(s+4)}$$

$$A(s+4) + Bs = 8$$

$$s(A+B) + 4A = 8$$

$$A = 2 \quad B = -2$$

$$\boxed{y(t) = -2e^{-4t} + 2}$$

↑

odwrotne tw. Laplace'a

$$\mathcal{L}\{a\} = a \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}\{ae^{bt}\} = a \frac{1}{s-b}$$

### Zadanie 4.3.2

Za pomocą transmitancji znaleźć odpowiedź układu 1 na skok jednostkowy, czyli funkcję postaci:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

Zakładamy, że  $x(0) = 0$

$$\dot{x}(t) = 5x(t) - 3u(t)$$

$$y(t) = x(t)$$

---

### Zadanie 4.4.1

Na układ o transmitancji operatorowej  $G(s) = \frac{20}{s+10}$  podano sygnał sinusoidalny  $2 \sin(4.5t + \frac{\pi}{6})$ . Obliczyć, jak zmieni się amplituda sygnału wyjściowego.

$$A_u = 2 \quad \omega = 4.5 = \frac{9}{2}$$

$$A(\omega) = \left| \frac{20}{j\frac{9}{2} + 10} \right| = \left| \frac{20(10 - \frac{9}{2}j)}{100 + \frac{81}{4}} \right| = \left| \frac{80(10 - \frac{9}{2}j)}{481} \right| = \sqrt{\frac{800^2 + 360^2}{481^2}} \approx 1.82$$

$$A(\omega) = \left| \frac{20}{j\frac{9}{2} + 10} \right| = \frac{20}{\sqrt{100 + \frac{81}{4}}} = \frac{40}{\sqrt{481}} \approx 1.82 \quad A_y = A(\omega) \cdot 2$$

$$\frac{A_y}{A_u} = A(\omega)$$

Amplituda sygnału wejściowego będzie ok. 1.82 razy większa niż wyjściowego

### Zadanie 4.4.2

Na układ o transmitancji operatorowej  $G(s) = \frac{400}{s+30}$  podano sygnał sinusoidalny  $5 \sin(2t + \frac{\pi}{3})$ . Obliczyć, jak zmieni się amplituda sygnału wyjściowego.

---

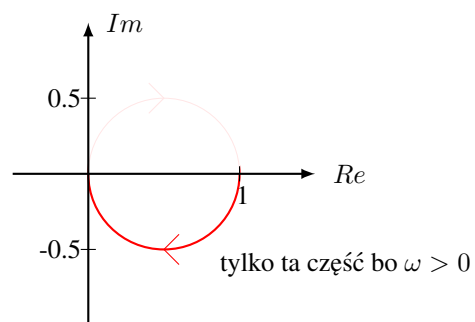
### Zadanie 4.5.1

Narysować charakterystyki Nyquista dla układu opisanego transmitancją operatorową:

$$G(s) = \frac{s+2}{s^2+3s+2}$$

Podać wzór na transmitancję widmową tego układu (w postaci rozbitcia na część urojoną i rzeczywistą).

$$G(s) = \frac{s+2}{s^2+3s+2} = \frac{s+2}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1}$$



$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega+1} = \frac{1-j\omega}{1+\omega^2} = \boxed{\frac{1}{1+\omega^2} + j \frac{-\omega}{1+\omega^2}}$$

### Zadanie 4.5.2

Narysować charakterystyki Nyquista dla układu opisanego transmitancją operatorową:

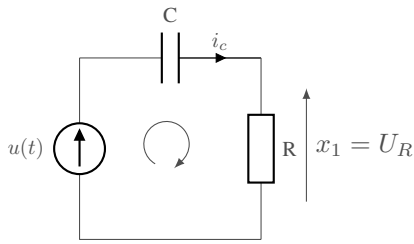
$$G(s) = \frac{2s}{3s^2 + 3s}$$

Podać wzór na transmitancję widmową tego układu (w postaci rozbitcia na część urojona i rzeczywistą).

---



### Zadanie 4.6.1



Przeanalizować układ z rysunku i znaleźć równania opisujące ten układ. Za wyjście przyjąć napięcie na oporniku. Znaleźć transmitancję operatorową i widmową układu

Zakładamy ze:  $R = 1000\Omega$ ,  $C = 1mF$

$$\begin{cases} u(t) - u_c(t) - u_R(t) = 0 \\ y(t) = u_R(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(t) - u_c(t) - RC\dot{u}_c(t) = 0 \\ y(t) = RC\dot{u}_c(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(t) = +u_c(t) + RC\dot{u}_c(t) \\ y(t) = RC\dot{u}_c(t) \end{cases} \quad \Bigg| \mathcal{L}$$

Transformata Laplace'a

$$\begin{cases} U(s) = U_c(s) + sRC \cdot U_c(s) + u_c(0) \\ Y(s) = sRC \cdot U_c(s) + u_c(0) \end{cases}$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{sRC \cdot U_c(s) + u_c(0)}{U_c(s) + sRC \cdot U_c(s) + u_c(0)} = \frac{sRC \cdot U_c(s)}{U_c(s) + sRC \cdot U_c(s)} = \frac{\cancel{U_c(s)} \cdot sRC}{\cancel{U_c(s)} \cdot (sRC + 1)}$$

Podstawiamy R i C

$$G(s) = \frac{s}{s+1}$$

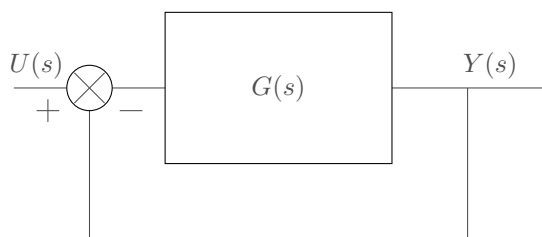
$$G(j\omega) = \frac{j\omega}{j\omega+1} = \frac{j\omega}{j\omega+1} \cdot \frac{1-j\omega}{1-j\omega} = \frac{j\omega+\omega^2}{1+\omega^2} = \frac{\omega^2}{\omega^2+1} + j\frac{\omega}{\omega^2+1}$$

### Zadanie 4.7.1

Niech będzie dany układ opisany transmitancją  $G(s)$ :

$$G(s) = \frac{s}{s^2 + 2s + 1}$$

Korzystając z kryterium Nyquista sprawdzić, czy układ zamknięty postaci 7 będzie asymptotycznie stabilny.



$$G(s) = \frac{s}{s^2 + 2s + 1}$$

$$a_2 = 1 \quad a_1 = 2 \quad a_0 = 1$$

Układ zamknięty będzie asymptotycznie stabilny jeżeli układ otwarty będzie asymptotycznie stabilny oraz wykres charakterystyki amplitudowo-fazowej transformacji  $G(s)$  nie będzie obejmował punktu  $(-1, 0)$  na płaszczyźnie zespolonej.

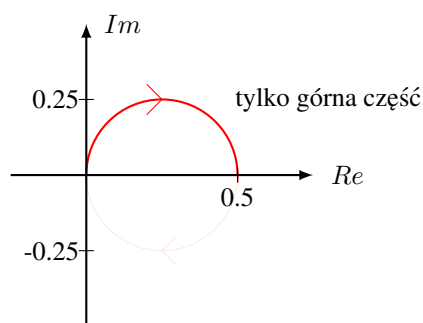
sprawdź czy układ otwarty jest asymptotycznie stabilny z Hurwita. Wystarczy sprawdzić dla  $s^2 + 2s + 1$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ 2 & 0 \\ a_0 & a_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2 > 0$$

$$2 \cdot 1 - 0 > 0$$

więc układ otwarty jest asymptotycznie stabilny.



Nie obejmuje punktu  $(-1,0)$  więc jest asymptotycznie stabilny.

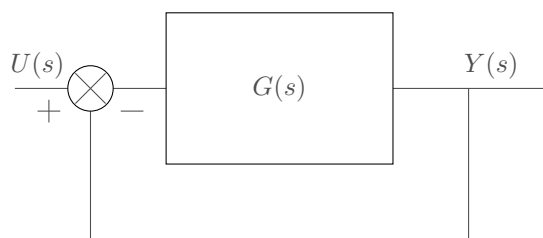
$$G(j\omega) = \frac{j\omega}{(j\omega)^2 + 2j\omega + 1} = \frac{j\omega}{-\omega^2 + 2j\omega + 1} = \frac{j\omega(1 - \omega^2 - 2j\omega)}{(1 - \omega^2 + 2j\omega)(1 - \omega^2 - 2j\omega)} = \frac{j\omega - j\omega^3 + 2\omega^2}{1 - 2\omega^2 + \omega^4 + 4\omega^2} = \frac{2\omega^2}{(\omega^2 + 1)^2} + j \frac{\omega - \omega^3}{(\omega^2 + 1)^2}$$

### Zadanie 4.7.2

Niech będzie dany układ opisany transmitancją  $G(s)$ :

$$G(s) = \frac{s^2 + s + 1}{s^3 - s^2 + 2s - 2}$$

Korzystając z kryterium Nyquista sprawdzić, czy układ zamknięty postaci 7 będzie asymptotycznie stabilny.



### Zadanie 4.8.1

Rozwiązanie równania różniczkowego

$$\dot{x}(t) = -4x(t) + 3 \sin(2t)$$

gdzie  $x(0) = 0, t \geq 0$  ma postać

$$x(t) = ae^{-4t} + A \sin(2t + \varphi)$$

Obliczyć  $A$  i  $\varphi$ .

$$u(t) = 3 \sin(2t)$$

$$A_u = 3 \quad \omega = 2 \quad y_u = 0$$

$$A = -4 \quad B = 3 \quad C = 1$$

$$G(s) = 1 \cdot (s+4)^{-1} \cdot 3 = 3 \cdot \frac{1}{s+4}$$

$$A(\omega) = \left| \frac{3}{2j+4} \right| = \frac{3}{\sqrt{16+4}} = \frac{3}{2\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{10}$$

$$A_y = 3 \cdot A(\omega) = \frac{9\sqrt{5}}{10}$$

$$\varphi_y = \arg G(j\omega) + \varphi_u$$

$$G(j\omega) = \frac{3}{2j+4} = \frac{3(4-2j)}{20} = \frac{3}{5} - \frac{3}{10}j$$

argument liczby  $a + bi$  :

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right), a > 0 \\ \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right) + \pi, a < 0 \end{cases}$$

$$\arg G(j\omega) = \operatorname{arctg}\left(-\frac{3}{10} \cdot \frac{5}{3}\right) = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right)$$

### Zadanie 4.8.2

Rozwiązanie równania różniczkowego

$$\dot{x}(t) = -x(t) + 10 \sin(5t + \frac{\pi}{3})$$

gdzie  $x(0) = 0, t \geq 0$  ma postać

$$x(t) = ae^{-4t} + A \sin(5t + \varphi)$$

Obliczyć  $A$  i  $\varphi$ .

---

### Zadanie 4.9.1

Rozwiązanie równania różniczkowego

$$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) = -4x(t) + 3 \sin(\omega t)$$

gdzie  $x(0) = 0$ ,  $(\dot{x}(0) - \text{w domyśle})$ ,  $t \geq 0$  ma postać

$$x(t) = f(t) + A \sin(\omega t + \varphi)$$

znaleźć takie  $\omega$ , dla którego  $A$  jest największe

$$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + 4x(t) = 3 \sin(\omega t)$$

$$u(t) = \sin(\omega t) = \frac{\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + 4x(t)}{3}$$

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) \Rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Transformata Laplace'a

$$X(s) = Y(s)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f'\} &= s\mathcal{L}\{f\} - f(0^+) \\ \mathcal{L}\{f''\} &= s^2\mathcal{L}\{f\} - sf(0^+) - f'(0^+) \end{aligned}$$

$$U(s) = \frac{s^2 X(s) - s \cdot x(0) - \dot{x}(0) + sX(s) - x(0) + 4X(s)}{3} = \frac{X(s)(s^2 + s + 4)}{3}$$

$$G(s) = \frac{X(s)}{\frac{X(s)(s^2 + s + 4)}{3}} = \frac{3\cancel{X(s)}}{\cancel{X(s)}(s^2 + s + 4)} = \frac{3}{s^2 + s + 4}$$

$$A = \underbrace{A_y}_{\text{wyjście}} = \underbrace{A_u}_{\text{wejście}} \cdot A(\omega)$$

$$A(\omega) = |G(\omega j)|$$

$A$  będzie maksymalne dla  $|G(\omega j)|$  maksymalnego

$$|G(\omega j)| = \left| \frac{3}{-\omega^2 + j\omega + 4} \right| = \left| \frac{3}{\sqrt{(4 - \omega^2)^2 + \omega^2}} \right| = \left| \frac{3}{\sqrt{16 - 8\omega^2 + \omega^4 + \omega^2}} \right| = \left| \frac{3}{\sqrt{\omega^4 - 7\omega^2 + 16}} \right|$$

$$\frac{3}{\sqrt{\omega^4 - 7\omega^2 + 16}} \text{ maksymalne} \Leftrightarrow \sqrt{\omega^4 - 7\omega^2 + 16} \text{ minimalne}$$

$$z = \omega^2$$

szukamy min funkcji  $z^2 - 7z + 16$

dodatni znak przy  $z^2$ , więc minimum będzie na wierzchołku, czyli  $x_w = \frac{-b}{2a} = \frac{7}{2}$

$$\omega = \sqrt{\frac{7}{2}} \quad \vee \quad \omega = -\sqrt{\frac{7}{2}}$$

$$\omega = -\sqrt{\frac{7}{2}} \text{ odpada, bo nie może być } < 0$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{7}{2}}}$$

### Zadanie 4.9.2

Rozwiązanie równania różniczkowego

$$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) = -x(t) + 12 \sin(\omega t)$$

gdzie  $x(0) = 0$ ,  $(\dot{x}(0) - \text{w domyśle})$ ,  $t \geq 0$  ma postać

$$x(t) = f(t) + A \sin(\omega t)$$

znaleźć takie  $\omega$ , dla którego  $A$  jest największe

$$u(t) = \sin(\omega t)$$

$$y(t) = x(t)$$

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + \dot{x}(t) = -x(t) + 12u(t) \\ y(t) = x(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(t) = \frac{\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t)}{12} \\ y(t) = x(t) \end{cases} \quad \Bigg| \quad \mathcal{L}$$

$$\begin{cases} U(s) = \frac{s^2 \cdot X(s) - s \cdot x(0) - \dot{x}(0) + sX(s) - x(0) + X(s)}{12} \\ Y(s) = X(s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} U(s) = \frac{s^2 \cdot X(s) + sX(s) + X(s)}{12} \\ Y(s) = X(s) \end{cases}$$

$$G(S) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{12 \cdot \cancel{X(s)}}{\cancel{X(s)} \cdot (s^2 + s + 1)} = \frac{12}{s^2 + s + 1}$$

$$G(j\omega) = \frac{12}{-\omega^2 + j\omega + 1} = -\frac{12 \cdot \omega^2 - 12}{\omega^4 - \omega^2 + 1} - j \frac{12 \cdot \omega}{\omega^4 - \omega^2 + 1} \quad A_y = A_u \cdot ku(\omega)$$

$$ku(\omega) = |G(j\omega)| = \sqrt{\left(\frac{12 \cdot \omega^2 - 12}{\omega^4 - \omega^2 + 1}\right)^2 + \left(\frac{12 \cdot \omega}{\omega^4 - \omega^2 + 1}\right)^2} = 12 \cdot \sqrt{\frac{1}{\omega^4 - \omega^2 + 1}}$$

$A_y$  będzie max., gdy  $ku(\omega)$  będzie max., tj.  $\sqrt{\omega^4 - \omega^2 + 1}$  będzie min.  $\omega \geq 0$ ,  $\min(\sqrt{\omega^4 - \omega^2 + 1})$  dla  $\omega = \frac{1}{\sqrt{2}}$

### Zadanie 4.9.3

Rozwiązanie równania różniczkowego

$$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) = -5x(t) + 15 \sin(\omega t)$$

gdzie  $x(0) = 0$ ,  $(\dot{x}(0) - \text{w domysle})$ ,  $t \geq 0$  ma postać

$$x(t) = f(t) + A \sin(\omega t + \varphi)$$

znaleźć takie  $\omega$ , dla którego  $A$  jest największe

---



### Zadanie 4.10.1

Korzystając z kryterium Michajłowa zbadać stabilność asymptotyczną układu opisanego transmitancją  $G(s)$ :

$$G(s) = \frac{s^2 + 3s + 1}{s^3 + s^2 - 4s + 9}$$

#### Kryterium Michajłowa

$$G(s) = \frac{L(s)}{M(s)}$$

$$M(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$$

Układ jest asymptotycznie stabilny jeśli przyrost argumentu  $M(j\omega)$  rzędu  $n$  przy zmianie  $\omega$  od  $-\infty$  do  $+\infty$  wynosi  $n\pi$ :  $\Delta \text{Arg } M(j\omega)|_{-\infty}^{+\infty} = n\pi$

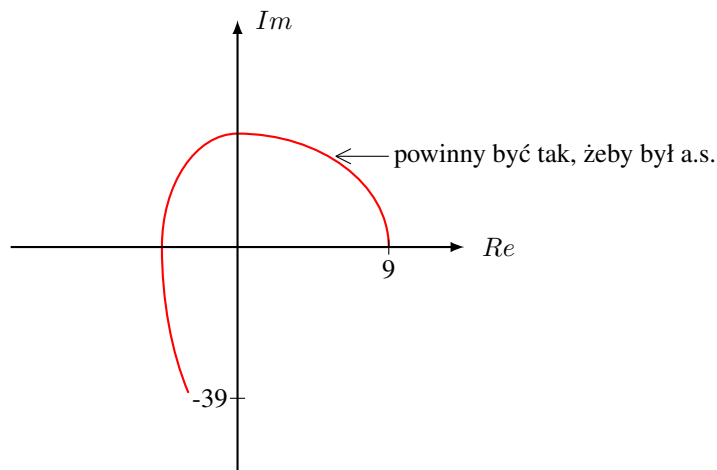
Ponieważ funkcja  $M(j\omega)$  jest symetryczna względem osi rzeczywistej, więc wystarczy  $\Delta \text{Arg } M(j\omega)|_0^{+\infty} = n\frac{\pi}{2}$  inna postać kryterium (wynikająca z powyższego): wystarczy pokazać, że charakterystyka częstotliwościowa funkcji  $M(j\omega)$   $0 < \omega < \infty$  przechodzi przez  $n$  ćwiartek w kierunku dodatnim.

$n = 3$  więc musi przechodzić przez I, II i III ćwiartkę

$$M(s) = s^3 + s^2 - 4s + 9$$

$$M(j\omega) = -j\omega^3 - \omega^2 - 4j\omega + 9 = \underbrace{9 - \omega^2}_{Re} + j \underbrace{(-\omega^3 - 4\omega)}_{Im}$$

$$\omega = 0 \Rightarrow M(j0) = 9$$



spr. gdzie przecina  $Im$  dla  $Re = 0$

$$9 - \omega^2 = 0 \Rightarrow \omega = 3$$

$$Im = -3^3 - 4 \cdot 3 = -39 \text{ (Im powinno być dodatnie, aby układ był asymptotycznie stabilny)}$$

spr. czy przecina oś  $Re$  w przedziale  $(-\infty, 0)$

$$Im = 0 \Rightarrow -\omega(\omega^2 + 4) = 0$$

$$\omega = 0 \quad \omega^2 = -4$$

$$Re = 9 + 4 = 13$$

więc, układ nie jest asymptotycznie stabilny.

### Zadanie 4.10.2

Korzystając z kryterium Michajłowa zbadać stabilność asymptotyczną układu opisanego transmitancją  $G(s)$ :

$$G(s) = \frac{s^2 + s + 1}{s^3 - s^2 + 2s - 2}$$

---

## Tydzień 5

### Wprowadzenie do układów nieliniowych - Linearyzacja

#### Zadanie 5.1.1

Dany jest system dynamiczny

$$\dot{x}(t) = \cos(x(t))e^{-x(t)^2}$$

Wyznaczyć jego punkty równowagi i za pomocą I metody Lapunowa zbadać ich stabilność.

$$\dot{x}(t) = \cos(x(t))e^{-x(t)^2}$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$

$x_r$  jest punktem równowagi  $\Leftrightarrow f(x_r) = 0$

$$f(x_r) = \cos(x_r) \cdot \underbrace{e^{-x_r^2}}_{<0} = 0 \Rightarrow \cos(x_r) = 0 \Rightarrow x_r = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

System zlinearyzowany: $\dot{x}(t) = J(x_r)x(t)$	
$J(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix}$	$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}$

$$J(x) = \frac{\partial f}{\partial x} = -\sin(x) \cdot e^{-x^2} + \cos(x) \cdot (-2xe^{-x^2}) = -e^{-x^2}(\sin(x) + 2x \cos(x))$$

$$J(x_r) = \underbrace{-e^{-(\frac{\pi}{2}+k\pi)^2}}_{<0} \underbrace{\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)\right)}_{=1 \vee =-1} + 2 \underbrace{\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)}_{=0} = -e^{-(\frac{\pi}{2}+k\pi)^2} \sin\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$$

#### I metoda Lapunowa

Punkt równowagi, dla którego system zlinearyzowany jest asymptotycznie stabilny jest lokalnie asymptotycznie stabilny. Jeżeli zaś chociaż jedna z wartości własnych macierzy systemu zlinearyzowanego ma dodatnią część rzeczywistą to punkt równowagi jest niestabilny.

$$\lambda = -e^{-(\frac{\pi}{2}+k\pi)^2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$$

**niestabilny :**

$$-e^{-(\frac{\pi}{2}+k\pi)^2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right) > 0 \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right) = -1 \Rightarrow x_r = \frac{\pi}{2} + (2k\pi + 1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

(z Hurwitza)

$$-e^{-(\frac{\pi}{2}+k\pi)^2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right) > 0 \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right) = 1 \Rightarrow x_r = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-(\frac{\pi}{2}+k\pi)^2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right) \end{bmatrix}$$

### Zadanie 5.1.2

Dany jest system dynamiczny

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -2x_1(t) - 3x_1(t)^2 - x_2(t)$$

Wyznaczyć jego punkty równowagi i za pomocą I metody Lapunowa zbadać ich stabilność.

$$J(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 - 6x_1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ -2x_1 - 3x_1^2 - x_2 = 0 \end{cases}$$

$$-2x_1 - 3x_1^2 = 0$$

$$x_1(2 + 3x_1) = 0$$

$$x_1 = 0 \vee x_1 = -\frac{2}{3}$$

$$x_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$J(x_r) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -1 - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-\lambda)(-1 - \lambda) + 2 = \lambda^2 + \lambda + 2$$

$$\Delta = -7$$

$$\lambda = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}i$$

$$\lambda = -\frac{1}{2} > 0 \Rightarrow \text{Stabilny}$$

$\vee$

$$x_r = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$J(x_r) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & -1 - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-\lambda)(-1 - \lambda) - 2 = \lambda^2 + \lambda - 2$$

$$\Delta = 9$$

$$\lambda = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$\lambda = 1 \vee \lambda = -2$$

$$\lambda = 1 > 0 \Rightarrow \text{Niestabilny}$$

### Zadanie 5.2.1

Wyznaczyć punkty równowagi układu generatora synchronicznego, który jest systemem dynamicznym opisanym następującymi równaniami

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -Dx_2 - \sin x_1 + \sin \delta_0$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -Dx_2 - \sin x_1 + \sin \delta_0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -Dx_2 - \sin x_1 + \sin \delta_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ -Dx_2 - \sin x_1 + \sin \delta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = 0$$

$$-\sin x_1 + \sin \delta_0 = 0 \Rightarrow \sin \delta_0 = \sin x_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = \delta_0 + 2k\pi \quad \vee \quad x_1 = -\delta_0 + (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

## Zadanie 5.2.2

Wyznaczyć punkty równowagi dla obwodu Chuy, który jest systemem dynamicznym opisanym następującymi równaniami:

$$C_1 \dot{x}_1(t) = -\frac{1}{R}x_1(t) + \frac{1}{R}x_2(t) - g(x_1(t))$$

$$C_2 \dot{x}_2(t) = \frac{1}{R}x_1(t) - \frac{1}{R}x_2(t) + x_3(t)$$

$$L \dot{x}_3(t) = -x_2(t) - R_0 x_3(t)$$

$$\text{przy czym } g(v) = g_1 v + g_2 v^3$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{RC_1}x_1 + \frac{1}{RC_1}x_2 - \frac{g_1}{C_1}x_1 - \frac{g_2}{C_1}x_1^3 = 0 \\ \frac{1}{RC_2}x_1 - \frac{1}{RC_2}x_2 + \frac{x_3}{C_2} = 0 \\ -\frac{1}{L}x_2 - \frac{R_0}{L}x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_2 = -R_0 x_3$$

$$\begin{cases} g_1 R x_1 + g_2 R x_1^3 + x_1 = x_2 \\ x_1 + R x_3 = x_2 \\ x_2 = -R_0 x_3 \end{cases}$$

z drugiego i trzeciego:

$$x_3 = \frac{-x_1}{R+R_0}$$

z pierwszego i drugiego:

$$g_1 R x_1 + g_2 R x_1^3 = R x_3$$

$$g_1 x_1 + g_2 x_1^3 = x_3$$

podstawiam  $x_3$  z trzeciego:

$$g_1 x_1 + g_2 x_1^3 = \frac{-x_1}{R+R_0}$$

$$g_1 x_1 + x_1^3 g_2 + \frac{x_1}{R+R_0} = 0$$

$$x_1^3 g_2 + x_1 \left( g_1 + \frac{1}{R+R_0} \right) = 0$$

podstawiam pomocnicze zmienne:

$$a = g_2, \quad b = g_1 + \frac{1}{R+R_0}$$

$$a x_1^3 + b x_1 = 0$$

$$x_1 (a x_1^2 + b) = 0$$

$$\textcircled{1} x_1 = 0 \quad \vee \quad a x_1^2 + b = 0$$

$$\textcircled{2} x_1 = \sqrt{\frac{-b}{a}} \quad \vee \quad \textcircled{3} x_1 = -\sqrt{\frac{-b}{a}}$$

podstawiam  $x_1 = 0$ :

$$x_r = \begin{bmatrix} x_{1r} \\ x_{2r} \\ x_{3r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{1} x_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{2} x_r = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{-g_1 - \frac{1}{R+R_0}}{g_2}} \\ -R_0 \sqrt{\frac{-g_1 - \frac{1}{R+R_0}}{g_2}} \\ -\sqrt{\frac{-g_1 - \frac{1}{R+R_0}}{g_2}} \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{3} x_r = \begin{bmatrix} -\sqrt{\frac{-g_1 - \frac{1}{R+R_0}}{g_2}} \\ -R_0 \sqrt{\frac{-g_1 - \frac{1}{R+R_0}}{g_2}} \\ \sqrt{\frac{-g_1 - \frac{1}{R+R_0}}{g_2}} \end{bmatrix}$$

### Zadanie 5.3.1

Dla jakich wartości parametru  $\epsilon$  zerowy punkt równowagi układu zwanego oscylatorem Van der Pola będzie niestabilny

$$\ddot{x}(t) - \epsilon(1 - x(t)^2)\dot{x}(t) + x(t) = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = x & \begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{x} = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{x} = \epsilon(1 - x(t)^2) \cdot \dot{x}(t) - x(t) = \epsilon(1 - x_1^2) \cdot x_2 - x_1 \end{cases} \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ \epsilon(1 - x_1^2) \cdot x_2 - x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ \epsilon(1 - x_1^2) \cdot x_2 - x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases} \quad x_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$J(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2\epsilon x_1 x_2 - 1 & \epsilon(1 - x_1^2) \end{bmatrix} \quad \boxed{\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}}$$

$$J(x_r) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \epsilon \end{bmatrix}$$

Z Lapunowa:

$$(-\lambda)(\epsilon - \lambda) + 1 = \lambda^2 - \lambda\epsilon + 1 = 0$$

$$\Delta = \epsilon^2 - 4 \Rightarrow \lambda = \frac{\epsilon \pm \sqrt{\epsilon^2 - 4}}{2}$$

niestabilny: Jeżeli część rzeczywista  $> 0 \Rightarrow \frac{\epsilon}{2} > 0 \Rightarrow \boxed{\epsilon > 0}$

asymptotycznie stabilny :  $\begin{bmatrix} -\epsilon & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  Hurwitz  $-\epsilon > 0 \Rightarrow \boxed{\epsilon < 0}$

### Zadanie 5.4.1

Dla jakich wartości parametru  $a$  linearyzacja przestaje spełniać warunki twierdzenia Grobmana-Hartmana dla układu opisanego równaniami:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -x_2(t) + (a - x_1(t)^2 - x_2(t)^2)x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) + (a - x_1(t)^2 - x_2(t)^2)x_2(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -x_2(t) + (a - x_1(t)^2 - x_2(t)^2)x_1(t) = f_1(x(t)) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) + (a - x_1(t)^2 - x_2(t)^2)x_2(t) = f_2(x(t))\end{aligned}$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -x_2 + (a - x_1^2 - x_2^2)x_1 = 0 \\ x_1 + (a - x_1^2 - x_2^2)x_2 = 0 \end{cases}$$

Zauważamy, że albo  $x_1 = x_2 = 0$  albo dla  $x_2 \neq 0 \wedge x_1 \neq 0$ :

$$\begin{cases} -\frac{x_2}{x_1} + (a - x_1^2 - x_2^2) = 0 \\ \frac{x_1}{x_2} + (a - x_1^2 - x_2^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{-x_2}{x_1} = \frac{x_1}{x_2} \Rightarrow -x_2^2 = x_1^2 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0 \text{ (sprzeczność)}$$

$$\text{więc } x_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$J(x) = \begin{bmatrix} a - 3x_1^2 - x_2^2 & -1 - 2x_2x_1 \\ 1 - 2x_1x_2 & a - x_1^2 - 3x_2^2 \end{bmatrix}$$

$$J(x_r) = \begin{bmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{bmatrix}$$

z tw. Grobmana-Hartmana:

$$\det(j\omega I - J(x_r)) \neq 0, \quad \omega \in \mathbb{R} \quad J(x_r) \text{ nie ma wartości własnych na osi urojonej}$$

$$\begin{vmatrix} j\omega - a & -1 \\ 1 & j\omega - a \end{vmatrix} = 0$$

$$(j\omega - a)^2 + 1 = 0$$

$$j\omega - 1 = \pm j \Rightarrow \boxed{a = 0}$$

$$\begin{bmatrix} a - \lambda & -1 \\ 1 & a - \lambda \end{bmatrix}$$

$$(a - \lambda)^2 + 1 = 0$$

$$a^2 - 2a\lambda + \lambda^2 + 1 = 0$$

$$\lambda^2 - 2a\lambda + a^2 + 1 = 0$$

$$\Delta = 4a^2 - 4a^2 - 4$$

$$\sqrt{\Delta} = 2i$$

$$\lambda = \frac{2a \pm 2i}{2} = a \pm i$$

dla  $a = 0$  wartości własne są na osi urojonej



### Zadanie 5.5.1

Dla jakich wartości parametru  $a$  zerowy punkt równowagi układu opisanego równaniami

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) + (a - x_1(t)^2 - x_2(t)^2)x_1(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = x_1(t) + (a - x_1(t)^2 - x_2(t)^2)x_2(t)$$

będzie niestabilny.

$$x_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$J(x) = \begin{bmatrix} a - 3x_1^2 - x_2^2 & 1 - 2x_2x_1 \\ 1 - 2x_1x_2 & a - x_1^2 - 3x_2^2 \end{bmatrix}$$

$$J(x_r) = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & 1 \\ 1 & a - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(a - \lambda)^2 - 1 = 0$$

$$(a - \lambda - 1)(a - \lambda + 1) = 0$$

$$\lambda = a - 1 \quad \vee \quad \lambda = a + 1$$

niestabilny, gdy  $Re(\lambda) > 0$

$$a - 1 > 0 \quad a + 1 > 0$$

$$a > 1 \quad a > -1$$

$$(a > 1 \quad \vee \quad a > -1) \Rightarrow \boxed{a > -1}$$

**Alternatywnie: Bez podanego punktu równowagi**

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) + (a - x_1(t)^2 - x_2(t)^2)x_1(t) = f_1(x(t))$$

$$\dot{x}_2(t) = x_1(t) + (a - x_1(t)^2 - x_2(t)^2)x_2(t) = f_2(x(t))$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_2 + (a - x_1^2 - x_2^2)x_1 = 0 \\ x_1 + (a - x_1^2 - x_2^2)x_2 = 0 \end{cases}$$

Zauważamy, że albo  $x_1 = x_2 = 0$  albo dla  $x_1 \neq 0 \wedge x_2 \neq 0$ :

$$\begin{cases} \frac{x_2}{x_1} + (a - x_1^2 - x_2^2) = 0 \\ \frac{x_1}{x_2} + (a - x_1^2 - x_2^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1}{x_2} \Rightarrow x_2^2 = x_1^2$$

$$\text{więc } \textcircled{1} \quad x_r = \begin{bmatrix} k \\ k \end{bmatrix} \vee \textcircled{2} \quad x_r = \begin{bmatrix} k \\ -k \end{bmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}$$

$$J(x) = \begin{bmatrix} a - 3x_1^2 - x_2^2 & 1 - 2x_2x_1 \\ 1 - 2x_1x_2 & a - x_1^2 - 3x_2^2 \end{bmatrix}$$

$$J(\textcircled{1}) = \begin{bmatrix} a - 4k^2 & 1 - 2k^2 \\ 1 - 2k^2 & a - 4k^2 \end{bmatrix}$$

$$(a - 4k^2 - \lambda)^2 - (1 - 2k^2)^2 = 0$$

$$(a - 4k^2 - \lambda - 1 + 2k^2)(a - 4k^2 - \lambda + 1 - 2k^2) = 0$$

$$\lambda = a - 1 - 2k^2 \vee \lambda = a + 1 - 6k^2$$

niestabilny:

$$Re\lambda > 0$$

$$a - 1 - 2k^2 > 0 \vee a + 1 - 6k^2 > 0$$

$$\textcircled{1} \quad a > 1 + 2k^2 \quad \textcircled{2} \quad a > 6k^2 - 1$$

odp. niestabilny dla  $a > \textcircled{1} \vee a > \textcircled{2} \vee a > \textcircled{3} \vee a > \textcircled{4}$

$$\vee \quad J(\textcircled{2}) = \begin{bmatrix} a - 4k^2 & 1 + 2k^2 \\ 1 + 2k^2 & a - 4k^2 \end{bmatrix}$$

$$\vee \quad (a - 4k^2 - \lambda)^2 - (1 + 2k^2)^2 = 0$$

$$\vee \quad (a - 4k^2 - \lambda - 1 - 2k^2)(a - 4k^2 - \lambda + 1 + 2k^2) = 0$$

$$\vee \quad \lambda = a - 1 - 6k^2 \vee \lambda = a + 1 - 2k^2$$

$$a - 1 - 6k^2 > 0 \vee a + 1 - 2k^2 > 0$$

$$\textcircled{3} \quad a > 1 + 6k^2 \quad \textcircled{4} \quad a > 2k^2 - 1$$

### Zadanie 5.5.2

Dla jakich wartości parametru  $a$  zerowy punkt równowagi układu opisanego równaniami

$$\dot{x}_1(t) = -x_2(t) + (a - x_1(t)^2 - x_2(t)^2)x_1(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = x_1(t) + (a - x_1(t)^2 - x_2(t)^2)x_2(t)$$

będzie niestabilny.

$$x_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$J(x) = \begin{bmatrix} a - 3x_1^2 - x_2^2 & -1 - 2x_2x_1 \\ 1 - 2x_1x_2 & a - x_1^2 - 3x_2^2 \end{bmatrix}$$

$$J(x_r) = \begin{bmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & -1 \\ 1 & a - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - 2a\lambda + a^2 + 1 = 0$$

$$\Delta = -4$$

$$\lambda = \frac{2a \pm 2i}{2} = a \pm i$$

niestabilny, gdy  $Re(\lambda) > 0$

$$\boxed{a > 0}$$

### Zadanie 5.6.1

Dla jakich wartości parametru  $a$  zerowy punkt równowagi układu opisanego równaniami

$$\dot{x}_1(t) = -x_2(t) + (a - x_1(t)^2 - x_2(t)^2)x_1(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = x_1(t) + (a - x_1(t)^2 - x_2(t)^2)x_2(t)$$

będzie asymptotycznie stabilny.

$$x_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$J(x) = \begin{bmatrix} a - 3x_1^2 - x_2^2 & -1 - 2x_2x_1 \\ 1 - 2x_1x_2 & a - x_1^2 - 3x_2^2 \end{bmatrix}$$

$$J(x_r) = \begin{bmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & -1 \\ 1 & a - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - 2a\lambda + a^2 + 1 = 0$$

#### Macierz Hurwitz'a

Wielomian charakterystyczny:  $a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_{n-1}\lambda + a_n$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2a & 0 \\ 1 & a^2 + 1 \end{bmatrix}$$

#### Kryterium Hurwitz'a

Jeśli wszystkie minory wiodące są większe od zera, to jest asymptotycznie stabilny.

$$-2a > 0 \Rightarrow a < 0$$

$$-2a(a^2 + 1) > 0 \Rightarrow \boxed{a < 0}$$

## **Autorzy:**

### **Skład:**

Jacek Pietras  
Grzegorz Tokarz

### **Rozwiązania:**

Magdalena Warzesia  
Ania Szarawara  
irytek102  
Gniewomir  
Jacek Pietras  
Grzegorz Tokarz

### **Komentarze:**