

Projekt domyślnie ma mieć Sourceforge'a (nie mam narazie czasu go ogarniać) i w połączeniu z Gitem by się go rozwijało. Jeśli masz wolnego czasu trochę i chcesz pomóc doślij jakieś rozwiązanie. Bardzo potrzebne są korekty, napewno jest tu sporo błędów. Potrzebni są też komentatorzy, chodzi o całkowicie łopatologiczny komentarz typu "tu liczymy delte bo..."

Jeśli jeszcze nie ma źródeł to niedługo będą na FTP/II rok/Systemy Dynamiczne. Ale dobrze by było jakbyście pisali że coś zmieniacie, bo dopuki nie ma tego na Gitcie możemy sobie nadpisywać i sporo tracić.

Z tego przedmiotu jest egzamin, więc warto to zrobić

## **Tydzień 3**

Dyskretny systemy dynamiczne

### Zadanie 3.1.1

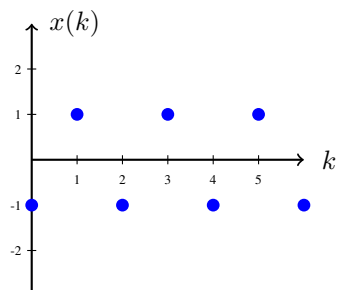
Narysować rozwiązanie równania różnicowego  $x(k+1) = \lambda_i x(k)$

dla  $i = 1, 2, 3$  gdzie

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$$

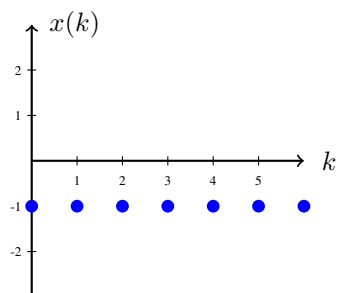
przy czym  $x(0) = -1$  i  $k \geq 0$  •  $i = 3, \lambda_i = -1$

$$x(k) = (-1)^k(-1) = (-1)^{k+1}$$



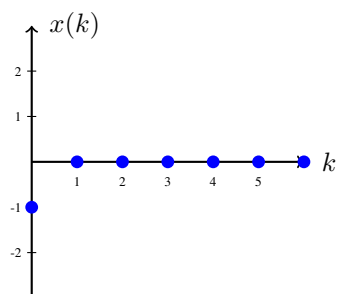
•  $i = 2, \lambda_i = 1$

$$x(k) = (1)^k(-1) = -1$$



•  $i = 0, \lambda_i = 0$

$$x(k) = (0)^k(-1) = \begin{cases} -1 & \text{dla } k = 0 \\ 0 & \text{dla } k = 1, 2, \dots \end{cases}$$



### Zadanie 3.1.2

Narysować rozwiązanie równania różnicowego  $x(k+1) = \lambda_i x(k)$

dla  $i = 1, 2, 3$  gdzie

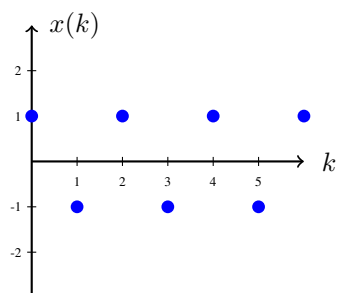
$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -\frac{1}{2}, \lambda_3 = 1$$

przy czym  $x(0) = 1$  i  $k \geq 0$

- $\lambda_1 = -1$

$$x(k+1) = -x(k)$$

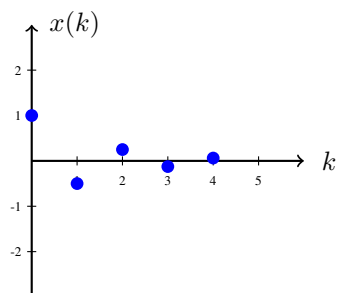
$$x(k) = (-1)^k \cdot 1 = (-1)^k$$



- $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$

$$x(k+1) = -\frac{1}{2} \cdot x(k)$$

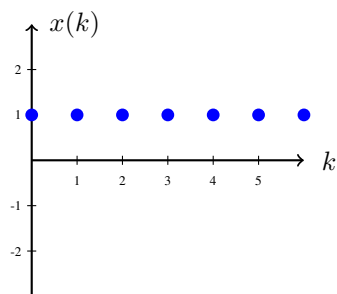
$$x(k) = \left(-\frac{1}{2}\right)^k \cdot 1 = \left(-\frac{1}{2}\right)^k$$



- $\lambda_3 = 1$

$$x(k+1) = x(k)$$

$$x(k) = 1^k \cdot 1 = 1$$



### Zadanie 3.1.3

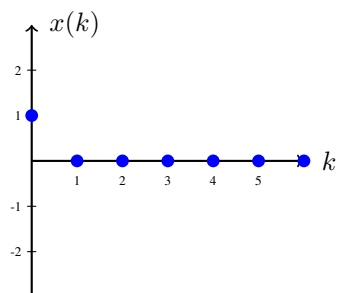
Narysować rozwiązanie równania różnicowego  $x(k+1) = \lambda_i x(k)$

dla  $i = 1, 2, 3$  gdzie

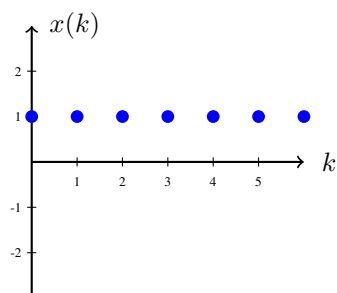
$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$

przy czym  $x(0) = 1$  i  $k \geq 0$

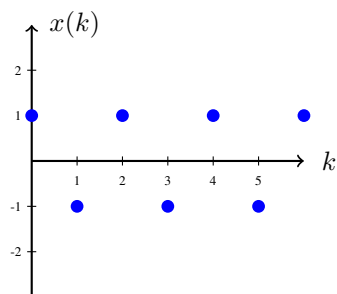
- $\lambda_1 = 0$



- $\lambda_2 = 1$



- $\lambda_3 = -1$



### Zadanie 3.2.1

Narysować rozwiązanie równania różnicowego  $x(k+1) = x(k) + u_i(k)$

dla  $i = 1, 2, 3$  gdzie

$$u_1 = -2, u_2 = 2, u_3 = 1$$

przy czym  $x(0) = 0$  i  $k \geq 0$

$$x(k+1) = Ax(i) + Bu(i)$$

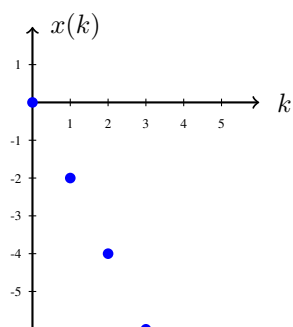
$$x(k) = A^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-1-j} Bu(j)$$

$$A = 1, B = 1, \forall j \quad u(j) = u_i$$

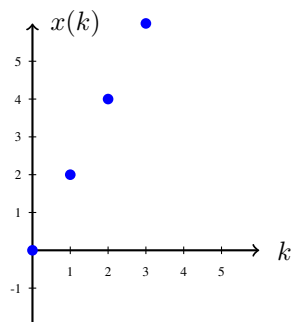
$$\Rightarrow x(k) = x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} u \text{ dla } x(0) = 0$$

$$\Rightarrow x(k) = u_i \cdot k$$

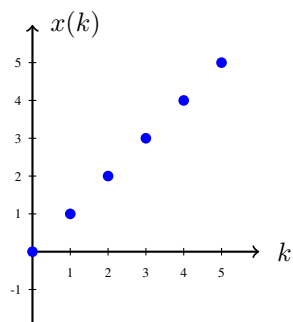
- $i = 1, u_i = -2$



- $i = 2, u_i = 2$



- $i = 3, u_i = 1$



### Zadanie 3.2.2

Narysować rozwiązanie równania różnicowego  $x(k+1) = 2x(k) + u_i(k)$

dla  $i = 1, 2, 3$  gdzie

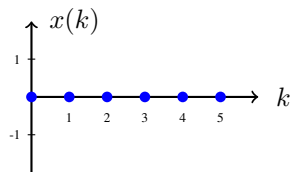
$$u_1 = 0, u_2 = -2, u_3 = 2$$

przy czym  $x(0) = 0$  i  $k \geq 0$

- $u_1 = 0$

$$x(k+1) = 2x(k) + 0$$

$$x(k) = 2^k \cdot 0 = 0$$

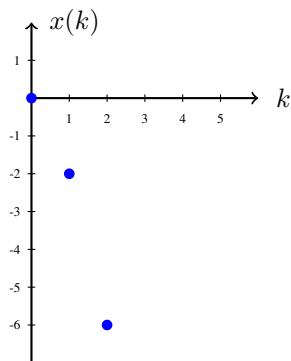


- $u_2 = -2$

$$x(k+1) = 2x(k) - 2$$

$$x(k) = 2^k \cdot 0 + \sum_{j=0}^{k-1} 2^{k-1-j} \cdot (-2) = -2 \cdot \sum_{j=0}^{k-1} (2^k \cdot 2^{-1} \cdot 2^{-j})$$

$$= -2^k \cdot \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^j = -2^k \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k}{1 - \frac{1}{2}} = -2^{k+1} + 2$$

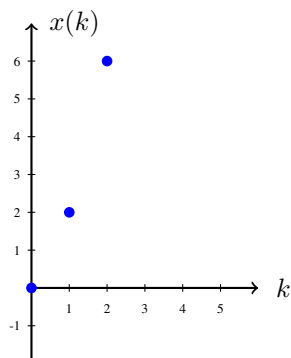


- $u_3 = 2$

$$x(k+1) = 2x(k) + 2$$

$$x(k) = 2^k \cdot 0 + \sum_{j=0}^{k-1} 2^{k-1-j} \cdot (2) = 2 \cdot \sum_{j=0}^{k-1} (2^k \cdot 2^{-1} \cdot 2^{-j})$$

$$= 2^k \cdot \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^j = 2^k \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k}{1 - \frac{1}{2}} = 2^{k+1} - 2$$



### Zadanie 3.3.1

Niech będzie dany układ ciągły opisany równaniem  $\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t)$

(a) Znaleźć rozwiązanie tego układu dla:  $x(0) = 0$ ,  $u(t) = 1$ ,  $a = -4$ ,  $b = 3$ .

(b) Znaleźć parametry układu dyskretnego, jeśli podłączono ekstrapolator pierwszego rzędu na wejściu i impulsator na wyjściu, przy czym pracują one synchronicznie z okresem próbkowania  $t = 1$ . Rozwiązać powstały układ.

(c) Jak wyżej, przy założeniu  $t = 12$ .

(d) Narysować wszystkie rozwiązania na jednym układzie współrzędnych. Opisać różnice.

Brak rozwiązania



### Zadanie 3.3.2

Niech będzie dany układ ciągły opisany równaniem  $\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t)$

(a) Znaleźć rozwiązanie tego układu dla:  $x(0) = 0, u(t) = 1, a = -1, b = 2$ .

(b) Znaleźć parametry układu dyskretnego, jeśli podłączono ekstrapolator pierwszego rzędu na wejściu i impulsator na wyjściu, przy czym pracują one synchronicznie z okresem próbkowania  $t = 1$ . Rozwiązać powstały układ.

(c) Jak wyżej, przy założeniu  $t = 10$ .

(d) Narysować wszystkie rozwiązania na jednym układzie współrzędnych. Opisać różnice.

(a)

$$\dot{x} = -x + 2$$

$$\frac{dx}{dt} = -x + 2$$

$$\frac{dx}{-x+2} = dt$$

$$-\ln|-x+2| = t + \tilde{c}$$

$$ce^{-t} = -x + 2 \Rightarrow x(t) = ce^{-t} + 2 = -2e^{-t} + 2$$

$$x(0) = c + 2 = 0 \Rightarrow c = -2$$

(b)

$$h = 1$$

$$x^t(i) = x(ih) = x(i)$$

$$u^t(i) = u(i)$$

$$y^t(i) = y(i)$$

$$A^t = e^{hA} = e^{-1}$$

$$B^t = \int_0^1 e^{tA} B dt = 2 \int_0^1 e^{-t} dt = -2e^t|_0^1 = -2(e^{-1} - 1) = 2 - \frac{2}{e}$$

$$C^t = C$$

$$x(i+1) = e^{-1}x(i) + (2 - \frac{2}{e})u(i) = \frac{x(i)}{e} + 2 - \frac{2}{e}$$

$$x(k) = (e^{-1})^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} (e^{-1})^{k-1-j} (2 - \frac{2}{e}) = (2 - \frac{2}{e}) \sum_{j=0}^{k-1} (e^{-k} \cdot e^1 \cdot e^j)$$

$$= (2 - \frac{2}{e}) e^{1-k} \cdot \frac{1-e^k}{1-e} = 2(e \cdot e^{-k} - e^{-k}) \frac{1-e^k}{1-e} = 2(-e^{-k})(1-e^k) = 2 - 2e^{-k}$$

(c)

$$h = 10$$

$$x^t(i) = x(10i)$$

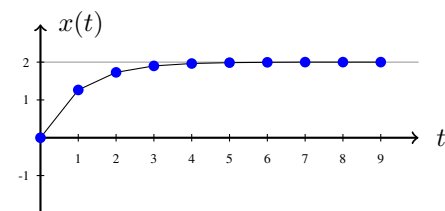
$$u^t(i) = u(10i)$$

$$A^t = e^{10A} = e^{-10}$$

$$B^t = 2 \int_0^{10} e^{-t} dt = 2(-e^{-t}|_0^{10}) = -2(e^{-10} - 1) = 2 - 2e^{-10}$$

$$x(k) = \underbrace{(e^{-10})^k x(0)}_{=0} + \sum_{j=0}^{k-1} (e^{-10})^{k-1-j} (2 - 2e^{-10}) = (2 - 2e^{-10}) \cdot e^{-10k-10} \cdot \frac{1-(e^{10})^k}{1-e^{10}}$$

$$= 2(e^{-10k} \cdot e^{10} - e^{-10} \cdot e^{-10k} \cdot e^{10}) \cdot \frac{1-e^{10k}}{1-e^{10}} = 2(-e^{-10k}(1-e^{10})) \frac{1-e^{10k}}{1-e^{10}} = 2 - 2e^{-10k}$$



- wykres (a) jest liniowy, (b) i (c) punktowe - (a) punkty co 1, (b) punkty co 10 (?)

### Zadanie 3.4.1

Obliczyć  $A^n$  dla macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^n = PJP^{-1}$$

$$A^n = \underbrace{(PJP^{-1})(PJP^{-1})\dots(PJP^{-1})}_n$$

$$A^n = PJ^nP^{-1}$$

$$|[A - \lambda I]| = 0$$

$$(4 - \lambda)(2 - \lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 4, \lambda_2 = 2$$

$$[A - \lambda I]\omega_1 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{11} \\ \omega_{12} \end{bmatrix} = 0 \quad \begin{matrix} -2\omega_{12} = 0 \\ \omega_{11} \in \mathbb{R} \end{matrix} \quad \omega_1 = \begin{bmatrix} \omega_{11} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{21} \\ \omega_{22} \end{bmatrix} = 0 \quad \begin{matrix} 2\omega_{21} - 2\omega_{22} = 0 \\ \omega_{22} = \omega_{21} \\ \omega_{21} \in \mathbb{R} \end{matrix} \quad \omega_2 = \begin{bmatrix} \omega_{21} \\ \omega_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P = [\omega_1 \ \omega_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, J^n = \begin{bmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}$$

$$A^n = PJ^nP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4^n & 2^n \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4^n & 2^n - 4^n \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}$$

### Zadanie 3.4.2

Obliczyć  $A^n$  dla macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^n = P J^n P^{-1}$$

$$|[A - \lambda I]| = (-\lambda)(2 - \lambda) + 4 = \lambda^2 - 2\lambda + 4 = 0$$

$$\Delta = 4 - 16 = -12$$

$$\lambda = 1 \pm i\sqrt{3}$$

$$\boxed{\lambda = 1 + i\sqrt{3}}$$

$$[A - \lambda I]\omega_1 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2 - 1 - i\sqrt{3} & 1 \\ -4 & -1 - i\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(1 - i\sqrt{3})\omega_1 + \omega_2 = 0 \Rightarrow \omega_2 = -(1 - i\sqrt{3})\omega_1$$

$$-4\omega_1 + (-1 - i\sqrt{3})\omega_2 = 0 \Rightarrow -4\omega_1 + 4\omega_1 = 0$$

$$\omega = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 + i\sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \lambda = a \pm ib \\ tg\varphi = \frac{b}{a} \Rightarrow \varphi = \arctg \frac{b}{a} \\ J = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \rightarrow J^n = (\sqrt{a^2 + b^2})^n \begin{bmatrix} \cos n\varphi & \sin n\varphi \\ -\sin n\varphi & \cos n\varphi \end{bmatrix} \end{array}}$$

$$\varphi = \arctg \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

$$J^n = 2^n \begin{bmatrix} \cos n\frac{\pi}{3} & \sin n\frac{\pi}{3} \\ -\sin n\frac{\pi}{3} & \cos n\frac{\pi}{3} \end{bmatrix}$$

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \cdot 2^n \cdot \begin{bmatrix} \cos n\frac{\pi}{3} & \sin n\frac{\pi}{3} \\ -\sin n\frac{\pi}{3} & \cos n\frac{\pi}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$$

$$= 2^n \begin{bmatrix} \cos + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin & \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \\ -\frac{4}{3}\sqrt{3} \sin & -\frac{\sqrt{3}}{3} \sin + \cos \end{bmatrix}$$

### Zadanie 3.4.3

Obliczyć  $A^n$  dla macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^n = PJ^nP^{-1}$$

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-3)^2 - 1 = (\lambda-3-1)(\lambda-3+1) = (\lambda-4)(\lambda-2) = 0$$

$$\lambda_1 = 4 \quad \lambda_2 = 2$$

$$\begin{aligned} (A - \lambda_1 I)\omega_1 &= 0 & (A - \lambda_2 I)\omega_2 &= 0 \\ \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{11} \\ \omega_{12} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{21} \\ \omega_{22} \end{bmatrix} \\ -\omega_{11} - \omega_{12} &= 0 & \omega_{21} &= \omega_{22} \end{aligned}$$

$$\omega_{12} = -\omega_{11}$$

$$\omega_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \omega_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{4^n}{2} = \frac{4^n}{4^{\frac{1}{2}}} = 4^{n-\frac{1}{2}} = \frac{2^n}{2} = 2^{n-1}$$

$$J = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$J^n = \begin{bmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4^n & 2^n \\ -4^n & 2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4^{n-\frac{1}{2}} + 2^{n-1} & -4^{n-\frac{1}{2}} + 2^{n-1} \\ -4^{n-\frac{1}{2}} + 2^{n-1} & 4^{n-\frac{1}{2}} + 2^{n-1} \end{bmatrix}$$

### Zadanie 3.5.1

Do ciągłego systemu dynamicznego opisanego równaniami

$$\dot{x}_1(t) = 2\pi x_2(t),$$

$$\dot{x}_2(t) = -2\pi x_1(t) + u(t),$$

podłączono ekstrapolator rzędu zerowego na wejściu i impulsator na wyjściu, przy czym pracują one synchronicznie z okresem próbkowania  $h = 1s$ . Wyliczyć parametry systemu dyskretnego odpowiadające takiemu połączeniu.

$$\dot{x}_1(t) = \begin{bmatrix} 0 & 2\pi \\ -2\pi & 0 \end{bmatrix}_A x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_B u(t)$$

$$x^t(vi) = A^t x^t(i) + B^t u^t(i), h = 1s$$

$$A^t = e^{hA}$$

$$A^t = e^A = P e^J P^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 2\pi \\ -2\pi i & -\lambda \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda^2 + 4\pi^2 = 0 \\ \lambda = -4\pi^2 \\ \lambda_{1,2} = \pm 2\pi i \end{cases} \quad (p = 0, q = 2\pi)$$

$$\begin{bmatrix} -2\pi i & \boxed{2\pi} \\ -2\pi & -2\pi i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{11} \\ \omega_{12} \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} \omega_{11} &\in \mathbb{R} \\ -2\pi i \omega_{11} + 2\pi \omega_{12} &= 0 \Rightarrow \omega_1 = \begin{bmatrix} \omega_{11} \\ \omega_{12} \end{bmatrix} = \omega_{11} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \omega_{11} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + i \omega_{11} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \omega_{12} &= i \omega_{11} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = P^{-1} = I$$

$$\Rightarrow A \text{ jest postaci Jordana} \Rightarrow J = A = \begin{bmatrix} 0 & 2\pi \\ -2\pi & 0 \end{bmatrix}$$

$$e^J = e^P \cdot \begin{bmatrix} \cos(q) & \sin(q) \\ -\sin(q) & \cos(q) \end{bmatrix}$$

$$e^J = \cdot \begin{bmatrix} \cos(2\pi) & \sin(2\pi) \\ -\sin(2\pi) & \cos(2\pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P e^J P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^t = \int_0^t e^{tA} B dt$$

$B$  jest stałą

$$B^t = \int_0^t e^{tA} dt B$$

$$\left| \begin{array}{l} tA = u - 1 \\ t = uA \\ dt = duA^{-1} \end{array} \right| B^t = \int_0^{hA} e^u du A^{-1} B = [e^{hA} - e^0] A^{-1} B$$

$$e^{hA} = e^A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^0 = 1 = J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B^t = 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x^t(i+1) = A^t x^t(i) + B^t u^t(i)$$

$$x^t(i+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x^t(i)$$

### Zadanie 3.5.2

Do ciągłego systemu dynamicznego opisanego równaniami

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

$$y(t) = Cx(t),$$

przy czym

$$A = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

połączono ekstrapolator rzędu zerowego na wejściu i impulsator na wyjściu, przy czym pracują one synchronicznie z okresem próbkowania  $h = 1s$ . Wyliczyć parametry systemu dyskretnego odpowiadające takiemu połączeniu.

$$x^t(i) = x(ih) = x(i)$$

$$y^t(i) = y(ih) = y(i)$$

$$u^t(i) = u(ih) = u(i)$$

$$A^t = e^{hA}$$

A jest w postaci Jordana, więc  $A = J$

$$A^t = e^{hJ} = e^J = \begin{bmatrix} e^{-0.5} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2} \end{bmatrix}$$

$$B^t = \int_0^h e^{tA} B dt = \int_0^1 \begin{bmatrix} e^{-0.5} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} dt = \int_0^1 \begin{bmatrix} e^{-\frac{t}{2}} \\ e^{-t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix} dt$$

$$= \begin{bmatrix} -2e^{-\frac{t}{2}} \big|_0^1 \\ -e^{-t} \big|_0^1 \\ -\frac{1}{2}e^{-2t} \big|_0^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - 2e^{-\frac{1}{2}} \\ 1 - e^{-1} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2} \end{bmatrix}$$

$$C^t = C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

### Zadanie 3.5.3

Do ciągłego systemu dynamicznego opisanego równaniami

$$\dot{x}_1(t) = -2x_1(t) + x_2(t),$$

$$\dot{x}_2(t) = -2x_1(t),$$

podłączono ekstrapolator rzędu zerowego na wejściu i impulsator na wyjściu, przy czym pracują one synchronicznie z okresem próbkowania  $h = 1s$ . Wyliczyć parametry systemu dyskretnego odpowiadające takiemu połączeniu.

$$A = -2 \quad B = 1 \quad C = -2$$

$$A^+ = e^{Ah} = e^{-2}$$

$$B^+ = \int_0^h e^{tA} B dt = \int_0^h e^{-2t} dt = \left| -\frac{1}{2}e^{-2t} \right|_0^h = -\frac{1}{2}e^{-2}$$

$$C^+ = C = -2$$

|  |
|--|
| $A^+ = e^{-2} \quad B^+ = -\frac{1}{2}e^{-2} \quad C^+ = -2$ |
|--|

### Zadanie 3.6.1

Dla jakich wartości parametrów  $k_1$  i  $k_2$  system dynamiczny

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & k_2 \end{bmatrix} x(k)$$

będzie asymptotycznie stabilny. Zaznaczyć obszar stabilności na płaszczyźnie  $k_1 \times k_2$

$$x(k+1) = Ax(k)$$

$$|[A - \lambda I]| = 0$$

$$(-\lambda)(k_2 - \lambda) + k_1 = 0$$

$$\lambda^2 - k_2\lambda + k_1 = 0$$

$$\lambda = \frac{z+1}{z-1}$$

$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2 - k_2\left(\frac{z+1}{z-1}\right) + k_1 = 0$$

$$\frac{(z+1)^2 - k_2(z+1)(z-1) + k_1(z-1)^2}{(z-1)^2} = 0$$

Rozważany układ jest asymptotycznie stabilny  $\Leftrightarrow$  wartości własne ( $\lambda$ ) macierzy  $A$  leżą wewnątrz koła jednostkowego na płaszczyźnie zespolonej  $\Leftrightarrow$  pierwiastki wielomianu  $L(z) = (z+1)^2 - k_2(z+1)(z-1) + k_1(z-1)^2$  leżą w lewej półpłaszczyźnie zespolonej  $\Leftrightarrow$  spełnione jest dla wielomianu  $L(z)$  kryterium Hurwitza

$$L(z) = (z+1)^2 - k_2(z+1)(z-1) + k_1(z-1)^2$$

$$L(z) = z^2 + 2z + 1 - k_2z^2 + k_2 + k_1z^2 - 2k_1z + k_1$$

$$L(z) = z^2(1 + k_1 - k_2) + z(2 - 2k_1) + (1 + k_1 + k_2) = 0$$

W.K.  $a_2 > 0, a_1 > 0, a_0 > 0$

$$1 + k_1 - k_2 > 0$$

$$k_2 < k_1 + 1$$

$$2 - 2k_1 > 0$$

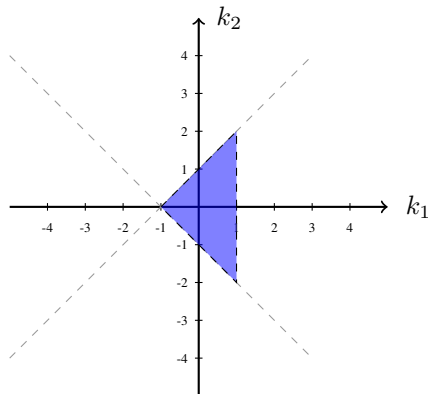
$$k_1 < 1$$

$$1 + k_1 + k_2 > 0$$

$$k_2 > -k_1 - 1$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - 2k_1 & 0 \\ 1 + k_1 - k_2 & 1 + k_1 + k_2 \end{bmatrix}$$

$a_1 > 0 \wedge a_1 a_0 > 0$  - spełnione dla W.K.





### Zadanie 3.6.2

Dla jakich wartości parametrów  $k_1$  i  $k_2$  system dynamiczny

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} k_1 - k_2 & 1 & 2 \\ 0 & k_1 + k_2 & 1 \\ 0 & 0 & k_1^2 + k_2^2 \end{bmatrix} x(k)$$

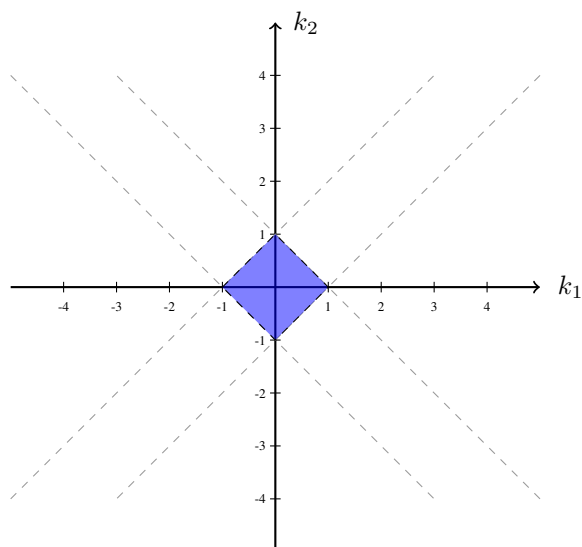
będzie asymptotycznie stabilny. Zaznaczyć obszar stabilności na płaszczyźnie  $k_1 \times k_2$

$$\lambda_1 = k_1 - k_2 \quad \vee \quad \lambda_2 = k_1 + k_2 \quad \vee \quad \lambda_3 = k_1^2 + k_2^2$$

dyskretny system liniowy jest asymptotycznie stabilny  $\Leftrightarrow$  wartości własne macierzy  $A$  leżą w kole jednostkowym o środku w zerze na płaszczyźnie zespolonej (wystarczy sprawdzić warunek  $|\lambda_i| < 1$ , nie trzeba z Hurwitza)

- $\lambda_1 = k_1 - k_2$   
 $k_1 - k_2 < 1 \quad \wedge \quad k_1 - k_2 > -1$   
 $k_2 > k_1 - 1 \quad \wedge \quad k_2 < k_1 + 1$
- $\lambda_2 = k_1 + k_2$   
 $k_1 + k_2 < 1 \quad \wedge \quad k_1 + k_2 > -1$   
 $k_2 < -k_1 + 1 \quad \wedge \quad k_2 > -k_1 - 1$
- $\lambda_3 = k_1^2 + k_2^2$   
 $k_1^2 + k_2^2 < 1 \quad \wedge \quad k_1^2 + k_2^2 > 0$

$$\lambda_1 = k_1 - k_2 \quad \wedge \quad \lambda_2 = k_1 + k_2 \quad \wedge \quad \lambda_3 = k_1^2 + k_2^2$$



### Zadanie 3.6.3

Dla jakich wartości parametrów  $k_1$  i  $k_2$  system dynamiczny

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} -k_2 & k_1 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix} x(k)$$

będzie asymptotycznie stabilny. Zaznaczyć obszar stabilności na płaszczyźnie  $k_1 \times k_2$

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\begin{bmatrix} -k_2 - \lambda & k_1 \\ -k_1 & -k_2 - \lambda \end{bmatrix} = (k_2 + \lambda)^2 + k_1^2 = (k_2 + \lambda)^2 - (ik_1)^2 = (\lambda + k_2 + ik_1) \cdot (\lambda + k_2 - ik_1)$$

$$\lambda = -k_2 \pm k_1$$

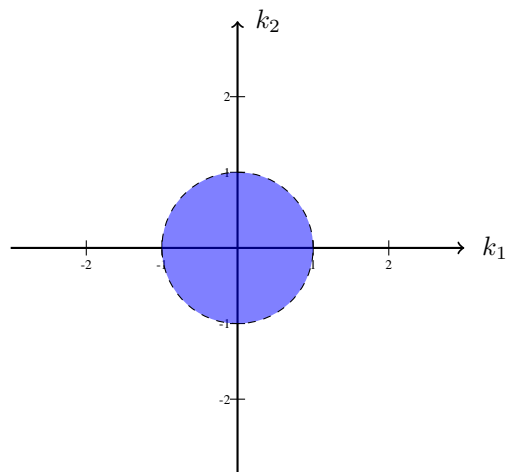
Układ jest asymptotycznie stabilny, gdy wartości własne macierzy leżą wewnątrz koła jednostkowego na płaszczyźnie zespolonej o środku w zerze.

$$|\lambda| < 1$$

$$|\lambda| = \sqrt{(-k_2)^2 + k_1^2}$$

$$\sqrt{k_1^2 + k_2^2} < 1$$

$$k_1^2 + k_2^2 < 1$$



### Zadanie 3.7.1

Dla jakich wartości parametru  $k_1$  system dynamiczny

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} -0.5k_1 & 0 \\ 2 & -k_1 \end{bmatrix} x(k)$$

będzie niestabilny.

$$(-0.5k_1 - 2)(-k_1 - \lambda) = 0$$

$$0.5k_1^2 + 0.5k_1\lambda + k_1\lambda + \lambda^2 = 0$$

$$\lambda^2 + 1.5k_1\lambda + 0.5k_1^2 = 0$$

$$\lambda = \frac{z+1}{z-1}$$

$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2 - 1.5k_1\left(\frac{z+1}{z-1}\right) + 0.5k_1^2 = 0$$

$$z^2 + 2z + 1 + 1.5k_1z^2 - 1.5k_1 + 0.5k_1^2z^2 - k_1^2z + 0.5k_1^2 = 0$$

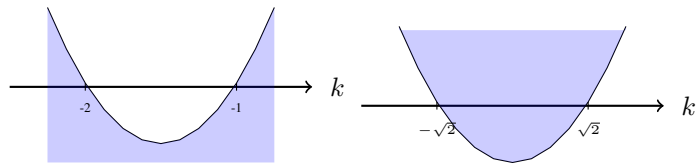
$$z^2 \underbrace{(0.5k_1^2 + 1.5k_1 + 1)}_{a_2} + z \underbrace{(2 - k_1^2)}_{a_1} + \underbrace{(0.5k_1^2 - 1.5k_1 + 1)}_{a_0} = 0$$

Z kryterium Hurwitza system będzie stabilny gdy:

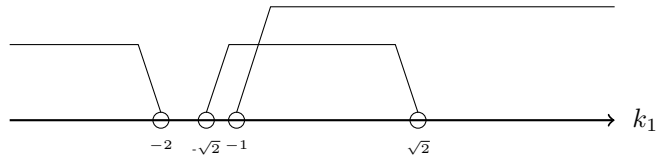
$$a_2 > 0 \quad 0.5k_1^2 + 1.5k_1 + 1 > 0 \quad 2 - k_1^2 > 0$$

$$a_1 > 0 \Leftrightarrow k_1^2 + 3k_1 + 2 > 0 \quad \vee \quad (\sqrt{2} - k_1)(\sqrt{2} + k_1) > 0 \quad \text{ponieważ W.K. zawiera w sobie W.W., aby spełnione zostało}$$

$$a_0 > 0 \quad (k_1 + 1)(k_1 + 2) > 0 \quad (k_1 - \sqrt{2})(\sqrt{2} + k_1) < 0$$



kryterium Hurwitza musi być spełniony iloczyn warunków:  $a_2 > 0 \wedge a_1 > 0$



$$\Rightarrow \text{układ jest stabilny} \Leftrightarrow k_1 \in (-1, \sqrt{2})$$

$$\Rightarrow \text{układ jest niestabilny} \Leftrightarrow k_1 \in (-\infty, -1) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$$

### Zadanie 3.7.2

Dla jakich wartości parametru  $k_1$  system dynamiczny

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} -1 & -k_1 \\ -k_1 & -3 \end{bmatrix} x(k)$$

będzie niestabilny.

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -k_1 \\ -k_1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (1+\lambda)(3+\lambda) - k_1^2 = \lambda^2 + 3 + 4\lambda - k_1^2 = 0$$
$$\Delta = 16 - 12 + 4k_1^2 = 4 + 4k_1^2$$
$$\lambda = -2 \pm \sqrt{1 + k_1^2}$$

system będzie niestabilny  $\Leftrightarrow |\lambda_i| > 1$

$$\begin{aligned} \bullet \quad & \lambda = -2 + \sqrt{1 + k_1^2} \\ & -2 + \sqrt{1 + k_1^2} > 1 \quad \vee \quad -2 + \sqrt{1 + k_1^2} < -1 \\ & \sqrt{1 + k_1^2} > 3 \quad \sqrt{1 + k_1^2} < 1 \\ & k_1^2 > 8 \quad k_1^2 < 0 \\ & k_1 > 2\sqrt{2} \vee k_1 < -2\sqrt{2} \quad \text{sprzeczne} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad & \lambda = -2 - \sqrt{1 + k_1^2} \\ & -2 - \sqrt{1 + k_1^2} > 1 \quad \vee \quad -2 - \sqrt{1 + k_1^2} < -1 \\ & \sqrt{1 + k_1^2} > -3 \quad \sqrt{1 + k_1^2} > -1 \\ & \text{sprzeczne} \quad k_1 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\lambda = -2 + \sqrt{1 + k_1^2} \vee \lambda = -2 - \sqrt{1 + k_1^2} \Rightarrow k_1 \in \mathbb{R}$$

### Zadanie 3.8.1

Wyznaczyć rozwiązanie następującego równania różnicowego (rekurencyjnego)

$$x(k+2) + x(k+1) - 2x(k) = 0, x(0) = 1, x(1) = -1$$

zakładam rozwiązanie postaci  $z^n$

$$x^n, +z^{n-1} + 2z^{n-2} = 0$$

$$z^2 + z - 2 = 0 \text{ - wielomian charakterystyczny}$$

$$W(z) = (z+2)(z-1)$$

$$z_1 = -2, \quad z_2 = 1$$

rozwiązanie równania jest postaci:

$$x(k) = Cz_1^k + Dz_2^k$$

podstawiając  $x(0)$  oraz  $x(1)$

$$\begin{cases} x(0) = 1 = C + D \\ x(1) = -1 = Cz_1 + Dz_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C = 1 - D \\ -1 = -2C + D \end{cases}$$

$$\begin{cases} D = 1 - C \\ -1 = -2C + 1 - C \end{cases}$$

$$\begin{cases} D = 1 - C \\ 3C = 2 \end{cases}$$

$$C = \frac{2}{3} \quad D = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow x(k) = \frac{1}{3}(2 \cdot (-2)^k + 1^k)$$

$$\boxed{x(k) = \frac{2}{3}(-2)^k + \frac{1}{3}1^k}$$

### Zadanie 3.8.2

Wyznaczyć rozwiązanie następującego równania różnicowego (rekurencyjnego)

$$x(k+2) + 3x(k+1) + 2x(k) = 0, x(0) = 2, x(1) = -3$$

$$q^{k+2} + 3q^{k+1} + 2q = 0$$

$$q^2 + 3q + 2 = 0$$

$$\Delta = 9 - 8 = 1$$

$$q = \frac{-3+1}{2} = -1 \quad \vee \quad q = \frac{-3-1}{2} = -2$$

$$x(k) = a(-1)^k + b(-2)^k$$

$$\begin{cases} x(0) = a + b = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(1) = -a - 2b = -3 \end{cases}$$

$$b = 1 \wedge a = 1$$

$$x(k) = (-1)^k + (-2)^k$$

### Zadanie 3.8.3

Wyznaczyć rozwiązanie następującego równania różnicowego (rekurencyjnego)

$$x(k+2) + 2x(k+1) - 3x(k) = 0, x(0) = 2, x(1) = -2$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$\Delta = 4 + 12 = 16, \sqrt{\Delta} = 4$$

$$x_1 = \frac{-2-4}{2} = -3 \wedge x_2 = 1$$

$$x(k) = C_1 x_1^k + C_2 x_2^k$$

$$\begin{cases} x(0) = 2 = C_1 + C_2 \Rightarrow C_2 = 2 - C_1 \\ x(1) = -2 = -3C_1 + C_2 \\ -2 = -3C_1 + 2 - C_1 \Rightarrow C_1 = 1 \\ C_2 = 1 \end{cases}$$

$$x(k) = -3^k + 1$$

**Alternatywne :**

równanie charakterystyczne

$$r^2 + 2r - 3 = 0$$

$$(r+1)^2 - 4 = 0$$

$$(r+1-2)(r+1+2) = 0$$

$$(r-1)(r+3)$$

$$r_1 = 1 \quad r_2 = -3$$

$$x(k) = c_1 r_1^k + c_2 r_2^k$$

$$x(0) = 2 = c_1 + c_2$$

$$x(1) = -2 = c_1 + 3c_2$$

$$\begin{cases} 2 = c_1 + c_2 \\ -2 = c_1 + 3c_2 \end{cases}$$

$$4 = 4c_2$$

$$c_1 = 1 \quad c_2 = 1$$

$$x(k) = 1 + (-3)^k$$

### Zadanie 3.9.1

Dany jest układ dyskretny

$$x(k+1) = Ax(k), A = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

przy czym  $k = 1, 2, \dots$ . Wyznaczyć  $x(n)$ .

wielomian charakterystyczny:  $|[A - \lambda I]| = 0$

$$\begin{bmatrix} -\lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} = (-\lambda)^n (\text{wyznacznik macierzy diagonalnej})$$

Z Tw. Cagleya-Hamiltona wiadomo, że każda macierz spełnia swój wielomian charakterystyczny

$$A^n = 0$$

rozwiązanie równania  $x(k+1) = Ax(k)$  ma postać  $x(k) = A^k x(0)$  czyli  $x(n) = A^n x(0) = 0$

Biorąc więc pod uwagę fakt  $A^n = 0$  wiadomo, że rozwiązanie  $x(k)$  stanie się zerem w cco najwyżej  $n$  krokach, niezależnie od warunku początkowego  $x(0)$



### Zadanie 3.9.2

Dany jest układ dyskretny

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

przy czym  $k = 1, 2, \dots$ . Wyznaczyć  $x(n)$  wiedząc, że  $u(i) = 1$  dla  $i = 1, 2, \dots, n$ .

$$x(n) = A^n x(0) + \sum_{j=0}^{n-1} A^{n-1-j} B u(j)$$

Zauważmy, że  $\det(A) = 0$  (bo same zera na przekątnej)

wtedy  $\det(\lambda I - A) = \lambda^n$

z Tw. Cagleya-Hamiltona  $A^n = 0$  (każda macierz spełnia swój wielomian charakterystyczny)

mamy więc  $A^n x(0) = 0$ , czyli  $x(n) = \sum_{j=0}^{n-1} A^{n-1-j} \underbrace{B u(j)}_{=1}$

Przy kolejnych mnożeniach macierzy  $A$  podniesionej do jakiejś potęgi przez  $B$  otrzymujemy pierwszą kolumnę macierzy  $A$ , która zawiera same zera, poza przypadkiem  $A^0 = I$  (macierz jednostkowa), więc sumujemy  $n - 1$  kolumn samych zer oraz jedną równą  $B$  ( $I \cdot B = B$ )

ostatecznie  $\boxed{x(n) = B}$

### Zadanie 3.9.3

Dany jest układ dyskretny

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

przy czym  $k = 1, 2, \dots$  Wyznaczyć  $x(n)$  wiedząc, że  $u(i) = 1$  dla  $i = 1, 2, \dots, n$ .

$$|A| = 0$$

$$x(k+1) = Ax(k)$$

$$|\lambda I - A| = \lambda^n$$

z Tw. Cagleya-Hamiltona:

$$A^n = 0$$

$$x(1) = Ax(0) + B$$

$$x(2) = A^2x(0) + (A + 1)B$$

$$x(3) = A^3x(0) + (A^2 + A + 1)B$$

...

$$x(n) = A^n x(0) + (A^{n-1} + A^{n-2} + \dots + 1)B$$

ponieważ tylko  $A^n = 0$ , więc dla każdego  $A^{n-1}, A^{n-2}, \dots \neq 0$

te potęgi będą miały jakieś śmieci w wartościach, nie istotne co tam będzie. Ważne, że tam gdzie w  $A$  są 0 nie pojawi się nic nowego, czyli gdzie było 0 przed potęgowaniem, tam będzie też po.  $\Rightarrow$  wynik iloczynu  $A^i B = 0$  (macierz zerowa),

$$i = 1, \dots, n-1 \Rightarrow \boxed{x(n) = B}$$

### Zadanie 3.9.4

Dany jest układ dyskretny

$$x(k+1) = Ax(k), A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

przy czym  $k = 1, 2, \dots$ . Wyznaczyć  $x(2n)$ .

$$|A| = 0$$

$$x(k+1) = Ax(k)$$

$$|\lambda I - A| = \lambda^n$$

z Tw. Cagleya-Hamiltona:

$$A^n = 0$$

$$x(1) = Ax(0)$$

$$x(2) = A^2x(0)$$

$$x(3) = A^3x(0)$$

...

$$x(n) = A^n x(0) = 0$$

$$x(2n) = A^n x(n) = 0$$

## **Autorzy:**

### **Skład:**

Jacek Pietras

### **Rozwiązania:**

Magdalena Warzesia

Ania Szarawara

irytek102

Gniewomir

### **Komentarze:**