Projekt domyślnie ma mieć Sourceforge'a (nie mam narazie czasu go ogarniać) i w połączeniu z Gitem by się go rozwijało. Jeśli masz wolnego czasu troche i chcesz pomóc doślij jakieś rozwiązanie. Bardzo potrzebne są korekty, napewno jest tu sporo błędów. Potrzebni są też komentatorzy, chodzi o całkowicie łopatologiczny komentarz typu "tu liczymy delte bo..."
Jeśli jeszcze nie ma źródeł to niedługo będą na FTP/II rok/Systemy Dynamiczne. Ale dobrze by było jakbyście pisali że coś zmieniacie, bo dopuki nie ma tego na Gitcie możemy sobie nadpisywać i sporo tracić.
Z tego przedmiotu jest egzamin, więc warto to zrobić

Tydzień 3

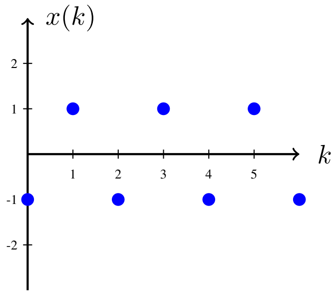
Dyskretne systemy dynamiczne

Zadanie 3.1.1

Narysować rozwiązanie równania różnicowego $x(k+1) = \lambda_i x(k)$
dla $i = 1, 2, 3$ gdzie
$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$
przy czym $x(0) = -1$ i $k \geq 0$

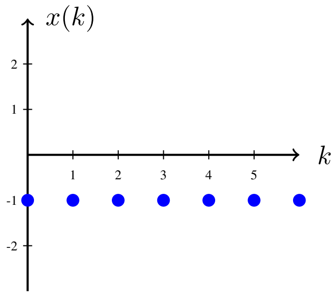
- $i = 3, \lambda_i = -1$

$x(k) = (-1)^k(-1) = (-1)^{k+1}$



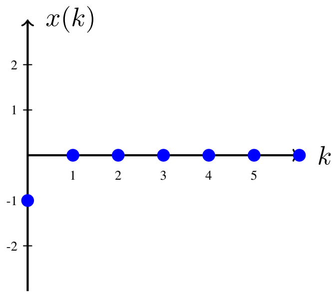
- $i = 2, \lambda_i = 1$

$x(k) = (1)^k(-1) = -1$



- $i = 0, \lambda_i = 0$

$$x(k) = (0)^k(-1) = \begin{cases} -1 & \text{dla } k = 0 \\ 0 & \text{dla } k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

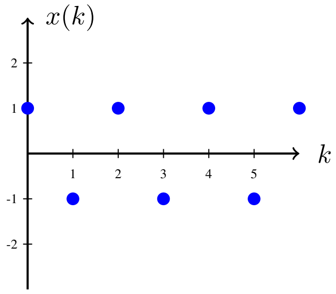


Zadanie 3.1.2

Narysować rozwiązanie równania różnicowego $x(k+1) = \lambda_i x(k)$
dla $i = 1, 2, 3$ gdzie
$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -\frac{1}{2}, \lambda_3 = 1$
przy czym $x(0) = 1$ i $k \geq 0$

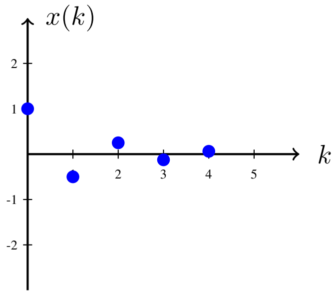
- $\lambda_1 = -1$

$x(k+1) = -x(k)$
$x(k) = (-1)^k \cdot 1 = (-1)^k$



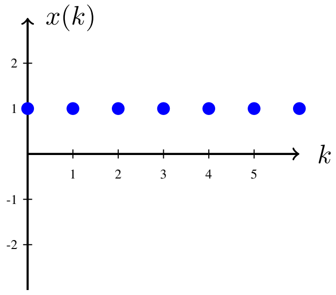
- $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$

$x(k+1) = -\frac{1}{2} \cdot x(k)$
$x(k) = (-\frac{1}{2})^k \cdot 1 = (-\frac{1}{2})^k$



- $\lambda_3 = 1$

$x(k+1) = x(k)$
$x(k) = 1^k \cdot 1 = 1$

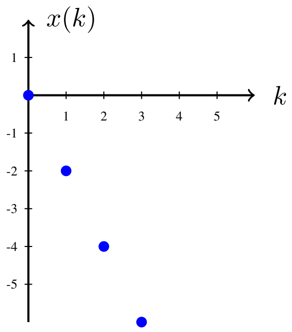


Zadanie 3.2.1

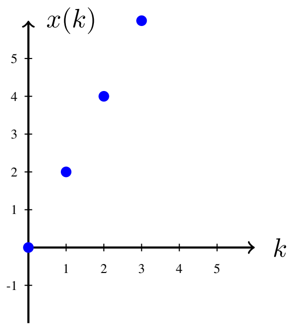
Narysować rozwiązanie równania różnicowego $x(k+1) = x(k) + u_i(k)$
dla $i = 1, 2, 3$ gdzie
$u_1 = -2, u_2 = 2, u_3 = 1$
przy czym $x(0) = 0$ i $k \geq 0$

$x(k+1) = Ax(i) + Bu(i)$
$x(k) = A^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-1-j} Bu(j)$
$A = 1, B = 1, \forall j \quad u(j) = u_i$
$\Rightarrow x(k) = x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} u$ dla $x(0) = 0$
$\Rightarrow x(k) = u_i \cdot k$

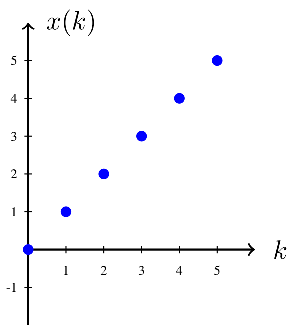
- $i = 1, u_i = -2$



- $i = 2, u_i = 2$



- $i = 3, u_i = 1$

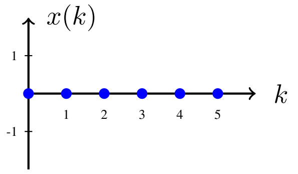


Zadanie 3.2.2

Narysować rozwiązanie równania różnicowego $x(k+1) = 2x(k) + u_i(k)$
dla $i = 1, 2, 3$ gdzie
$u_1 = 0, u_2 = -2, u_3 = 2$
przy czym $x(0) = 0$ i $k \geq 0$

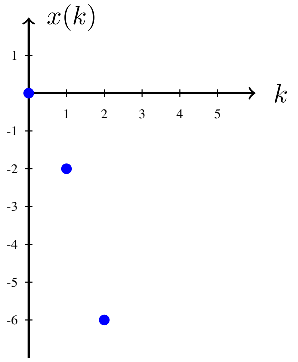
- $u_1 = 0$

$x(k+1) = 2x(k) + 0$
$x(k) = 2^k \cdot 0 = 0$



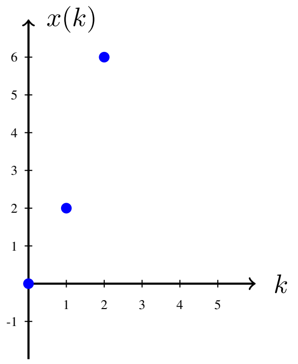
- $u_2 = -2$

$x(k+1) = 2x(k) - 2$
$x(k) = 2^k \cdot 0 + \sum_{j=0}^{k-1} 2^{k-1-j} \cdot (-2) = -2 \cdot \sum_{j=0}^{k-1} (2^k \cdot 2^{-1} \cdot 2^{-j})$
$= -2^k \cdot \sum_{j=0}^{k-1} (\frac{1}{2})^j = -2^k \cdot \frac{1-(\frac{1}{2})^k}{1-\frac{1}{2}} = -2^{k+1} + 2$



- $u_3 = 2$

$x(k+1) = 2x(k) + 2$
$x(k) = 2^k \cdot 0 + \sum_{j=0}^{k-1} 2^{k-1-j} \cdot (2) = 2 \cdot \sum_{j=0}^{k-1} (2^k \cdot 2^{-1} \cdot 2^{-j})$
$= 2^k \cdot \sum_{j=0}^{k-1} (\frac{1}{2})^j = 2^k \cdot \frac{1-(\frac{1}{2})^k}{1-\frac{1}{2}} = 2^{k+1} - 2$



Zadanie 3.3.1

Niech będzie dany układ ciągły opisany równaniem $\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t)$
(a) Znaleźć rozwiązanie tego układu dla: $x(0) = 0, u(t) = 1, a = -4, b = 3$.
(b) Znaleźć parametry układu dyskretnego, jeśli podł¡czono ekstrapolator pierwszego rzędu na wejściu i impulsator na wyjściu, przy czym pracuj¡ one synchronicznie z okresem próbkowania $t = 1$. Rozwiązać powstały układ.
(c) Jak wyżej, przy założeniu $t = 12$.
(d) Narysować wszystkie rozwiązania na jednym układzie współrzędnych. Opisać różnice.

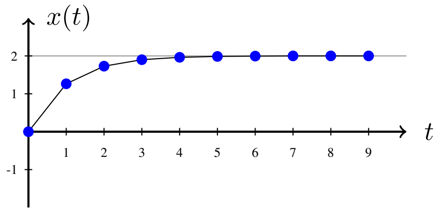
Brak rozwiązania

Zadanie 3.3.2

Niech będzie dany układ ciągły opisany równaniem $\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t)$
(a) Znaleźć rozwiązanie tego układu dla: $x(0) = 0, u(t) = 1, a = -1, b = 2.$
(b) Znaleźć parametry układu dyskretnego, jeśli podł¡czono ekstrapolator pierwszego rzędu na wejściu i impulsator na wyjściu, przy czym pracuj¡ one synchronicznie z okresem próbkowania $t = 1$. Rozwiązać powstały układ.
(c) Jak wyżej, przy założeniu $t = 10$.
(d) Narysować wszystkie rozwiązania na jednym układzie współrzędnych. Opisać różnice.

(a)
$x = -x + 2$
$\frac{dx}{dt} = -x + 2$
$\frac{dx}{-x+2} = dt$
$-\ln|-x+2| = t + \tilde{c}$
$ce^{-t} = -x + 2 \Rightarrow \boxed{x(t) = ce^{-t} + 2 = -2e^{-t} + 2}$
$x(0) = c + 2 = 0 \Rightarrow c = -2$
(b)
$h = 1$
$x^t(i) = x(ih) = x(i)$
$u^t(i) = u(i)$
$y^t(i) = y(i)$
$A^t = e^{hA} = e^{-1}$
$B^t = \int_0^1 e^{tA}B\, dt = 2\int_0^1 e^{-t}\, dt = -2e^t|_0^1 = -2(e^{-1} - 1) = 2 - \frac{2}{e}$
$C^t = C$
$x(i+1) = e^{-1}x(i) + (2 - \frac{2}{e})u(i) = \frac{x(i)}{e} + 2 - \frac{2}{e}$
$x(k) = (e^{-1})^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1}(e^{-1})^{k-1-j}(2 - \frac{2}{e}) = (2 - \frac{2}{e})\sum_{j=0}^{k-1}(e^{-k} \cdot e^1 \cdot e^j)$
$= (2 - \frac{2}{e})e^{1-k} \cdot \frac{1-e^k}{1-e} = 2(e \cdot e^{-k} - e^{-k})\frac{1-e^k}{1-e} = 2(-e^{-k})(1 - e^k) = 2 - 2e^{-k}$

(c)
$h = 10$
$x^t(i) = x(10i)$
$u^t(i) = u(10i)$
$A^t = e^{10A} = e^{-10}$
$B^t = 2\int_0^{10} e^{-t}\, dt = 2(-e^{-t}|_0^{10}) = -2(e^{-10} - 1) = 2 - 2e^{-10}$
$x(k) = \underbrace{(e^{-10})^k x(0)}_{=0} + \sum_{j=0}^{k-1}(e^{-10})^{k-1-j}(2 - 2e^{-10}) = (2 - 2e^{-10}) \cdot e^{-10k-10} \cdot \frac{1-(e^{10})^k}{1-e^{10}}$
$= 2(e^{-10k} \cdot e^{10} - e^{-10} \cdot e^{-10k} \cdot e^{10}) \cdot \frac{1-e^{10k}}{1-e^{10}} = 2(-e^{-10k}(1 - e^{10}))\frac{1-e^{10k}}{1-e^{10}} = 2 - 2e^{-10k}$



- wykres (a) jest liniowy, (b) i (c) punktowe - (a) punkty co 1, (b) punkty co 10 (?)

Zadanie 3.4.1

Obliczyć A^n dla macierzy
$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$A^n = PJP^{-1}$
$A^n = \underbrace{(PJP^{-1})(PJP^{-1})...(PJP^{-1})}_{n}$
$A^n = PJ^nP^{-1}$
$|[A - \lambda I]| = 0$
$(4-\lambda)(2-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 4, \lambda_2 = 2$
$[A - \lambda I]\omega_1 = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{11} \\ \omega_{12} \end{bmatrix} = 0 \qquad \begin{matrix} -2\omega_{12} = 0 \\ \omega_{11} \in \mathbb{R} \end{matrix} \qquad \omega_1 = \begin{bmatrix} \omega_{11} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{21} \\ \omega_{22} \end{bmatrix} = 0 \qquad \begin{matrix} 2\omega_{21} - 2\omega_{22} = 0 \\ \omega_{22} = \omega_{21} \\ \omega_{21} \in \mathbb{R} \end{matrix} \qquad \omega_2 = \begin{bmatrix} \omega_{21} \\ \omega_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$P = [\omega_1 \;\; \omega_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$P^{-1} = \frac{1}{det(P)} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$J = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, J^n = \begin{bmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}$

$A^n = PJ^nP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4^n & 2^n \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4^n & 2^n - 4^n \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}$

Zadanie 3.4.2

Obliczyć A^n dla macierzy
$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$

$A^n = PJ^nP^{-1}$
$|[A - \lambda I]| = (-\lambda)(2-\lambda) + 4 = \lambda^2 - 2\lambda + 4 = 0$
$\Delta = 4 - 16 = -12$
$\lambda = 1 \pm i\sqrt{3}$

$\boxed{\lambda = 1 + i\sqrt{3}}$

$[A - \lambda I]\omega_1 = 0$

$$\begin{bmatrix} 2-1-i\sqrt{3} & 1 \\ -4 & -1-i\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ll} (1-i\sqrt{3})\omega_1 + \omega_2 = 0 & \Rightarrow \omega_2 = -(1-i\sqrt{3})\omega_1 \\ -4\omega_1 + (-1-i\sqrt{3})\omega_2 = 0 & \Rightarrow -4\omega_1 + 4\omega_1 = 0 \end{array}$$

$$\omega = \begin{bmatrix} 1 \\ -1+i\sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{r} \lambda = a \pm ib \\ tg\varphi = \dfrac{b}{a} \Rightarrow \varphi = arctg\dfrac{b}{a} \\ J = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \rightarrow J^n = (\sqrt{a^2+b^2})^n \begin{bmatrix} \cos n\varphi & \sin n\varphi \\ -\sin n\varphi & \cos n\varphi \end{bmatrix} \end{array}}$$

$\varphi = arctg\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$

$$J^n = 2^n \begin{bmatrix} \cos n\frac{\pi}{3} & \sin n\frac{\pi}{3} \\ -\sin n\frac{\pi}{3} & \cos n\frac{\pi}{3} \end{bmatrix}$$

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \cdot 2^n \cdot \begin{bmatrix} \cos n\frac{\pi}{3} & \sin n\frac{\pi}{3} \\ -\sin n\frac{\pi}{3} & \cos n\frac{\pi}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$$

$$= 2^n \begin{bmatrix} \cos + \frac{\sqrt{3}}{3}\sin & \frac{\sqrt{3}}{3}\sin \\ -\frac{4}{3}\sqrt{3}\sin & -\frac{\sqrt{3}}{3}\sin + \cos \end{bmatrix}$$

Zadanie 3.5.1

Do ciągłego systemu dynamicznego opisanego równaniami
$\dot{x}_1(t) = 2\pi x_2(t)$,
$\dot{x}_2(t) = -2\pi x_1(t) + u(t)$,
podłączono ekstrapolator rzędu zerowego na wejściu i impulsator na wyjściu, przy czym pracują one synchronicznie z okresem próbkowania $h = 1s$. Wyliczyć parametry systemu dyskretnego odpowiadające takiemu połączeniu.

$\dot{x}_1(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 2\pi \\ -2\pi & 0 \end{bmatrix}}_{A} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} u(t)$
$x^t(vi) = A^t x^t(i) + B^t u^t(i), h = 1s$
$A^t = e^{hA}$
$A^t = e^A = Pe^J P^{-1}$

$\begin{bmatrix} -\lambda & 2\pi \\ -2pi & -\lambda \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{array}{l} \lambda^2 + 4\pi^2 = 0 \\ \lambda = -4\pi^2 \\ \lambda_{1,2} = \pm 2\pi i \quad (p = 0, q = 2\pi) \end{array}$

$\begin{bmatrix} -2\pi i & \boxed{2\pi} \\ -2\pi & -2\pi i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{11} \\ \omega_{12} \end{bmatrix} = 0$

$\begin{array}{r} \omega_{11} \in \mathbb{R} \\ -2\pi i\omega_{11} + 2\pi\omega_{12} = 0 \\ \omega_{12} = i\omega_{11} \end{array} \Rightarrow \omega_1 = \begin{bmatrix} \omega_{11} \\ \omega_{12} \end{bmatrix} = \omega_{11} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \omega_{11} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + i\omega_{11} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = P^{-1} = I$

$\Rightarrow A$ jest postaci Jordana $\Rightarrow J = A = \begin{bmatrix} 0 & 2\pi \\ -2\pi & 0 \end{bmatrix}$

$e^J = e^P \cdot \begin{bmatrix} \cos(q) & \sin(q) \\ -\sin(q) & \cos(q) \end{bmatrix}$

$e^J = \cdot \begin{bmatrix} \cos(2\pi) & \sin(2\pi) \\ -\sin(2\pi) & \cos(2\pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$Pe^J P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$B^t = \int_0^n e^{tA} B \, dt$
B jest stałą
$B^t = \int_0^n e^{tA} \, dt \, B$

$\left| \begin{array}{c} tA = u - 1 \\ t = uA \\ dt = duA^{-1} \end{array} \right| B^t = \int_o^{hA} e^u \, du \, A^{-1}B = [e^{hA} - e^0]A^{-1}B$

$e^{hA} = e^A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$e^0 = 1 = J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow B^t = 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$x^t(i+1) = A^t x^t(i) + B^t u^t(i)$

$x^t(i+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x^t(i)$

Zadanie 3.5.2

Do ciągłego systemu dynamicznego opisanego równaniami
$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$,
$y(t) = Cx(t)$,
przy czym
$A = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 9 \end{bmatrix}$
podłączono ekstrapolator rzędu zerowego na wejściu i impulsator na wyjściu, przy czym pracują one synchronicznie z okresem próbkowania $h = 1s$. Wyliczyć parametry systemu dyskretnego odpowiadające takiemu połączeniu.

$x^t(i) = x(ih) = x(i)$
$y^t(i) = y(ih) = y(i)$
$u^t(i) = u(ih) = u(i)$
$A^t = e^{hA}$
A jest w postaci Jordana, więc $A = J$
$A^t = e^{hJ} = e^J = \begin{bmatrix} e^{-0.5} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2} \end{bmatrix}$
$B^t = \int_0^h e^{tA}B\, dt = \int_0^1 \begin{bmatrix} e^{-0.5} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} dt = \int_0^1 \begin{bmatrix} e^{-\frac{t}{2}} \\ e^{-t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix} dt$
$= \begin{bmatrix} -2e^{-\frac{t}{2}}|_0^1 \\ -e^{-t}|_0^1 \\ -\frac{1}{2}e^{-2t}|_0^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - 2e^{-\frac{1}{2}} \\ 1 - e^{-1} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2} \end{bmatrix}$
$C^t = C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 9 \end{bmatrix}$

Zadanie 3.6.1

Dla jakich wartości parametrów k_1 i k_2 system dynamiczny

$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & k_2 \end{bmatrix} x(k)$

będzie asymptotycznie stabilny. Zaznaczyć obszar stabilności na płaszczyźnie $k1 \times k2$

$x(k+1) = Ax(k)$
$|[A - \lambda I]| = 0$
$(-\lambda)(k_2 - \lambda) + k_1 = 0$
$\lambda^2 - k_2\lambda + k_1 = 0$
$\lambda = \frac{z+1}{z-1}$
$(\frac{z+1}{z-1})^2 - k_2(\frac{z+1}{z-1}) + k_1 = 0$
$\frac{(z+1)^2 - k_2(z+1)(z-1) + k_1(z-1)^2}{(z-1)^2} = 0$

Rozważany układ jest asymptotycznie stabilny $\Leftrightarrow$ wartości własne (λ) macierzy A leżą wewnątrz koła jednostkowego na płaszczyźnie zespolonej $\Leftrightarrow$ pierwiastki wielomianu $L(z) = (z+1)^2 - k_2(z+1)(z-1) + k_1(z-1)^2$ leżą w lewej półpłaszczyźnie zespolonej $\Leftrightarrow$ spełnione jest dla wielomianu $L(z)$ kryterium Hurwitza

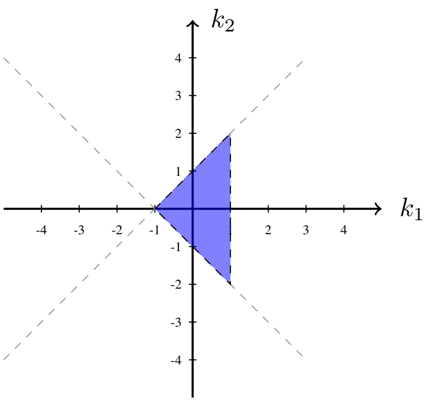
$L(z) = (z+1)^2 - k_2(z+1)(z-1) + k_1(z-1)^2$
$L(z) = x^2 + 2z + 1 - k_2z^2 + k_2 + k_1z^2 - 2k_1z + k_1$
$L(z) = z^2(1 + k_1 - k_2) + z(2 - 2k_1) + (1 + k_1 + k_2) = 0$

W.K. $a_2 > 0, a_1 > 0, a_0 > 0$

$$\begin{aligned} 1 + k_1 - k_2 &> 0 \\ k_2 &< k_1 + 1 \\ 2 - 2k_1 &> 0 \\ k_1 &< 1 \\ 1 + k_1 + k_2 &> 0 \\ k_2 &> -k_1 - 1 \end{aligned}$$

$\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - 2k_1 & 0 \\ 1 + k_1 - k_2 & 1 + k_1 + k_2 \end{bmatrix}$

$a_1 > 0 \wedge a_1a_0 > 0$ - spełnione dla W.K.



Zadanie 3.6.2

Dla jakich wartości parametrów k_1 i k_2 system dynamiczny

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} k_1 - k_2 & 1 & 2 \\ 0 & k_1 + k_2 & 1 \\ 0 & 0 & k_1^2 + k_2^2 \end{bmatrix} x(k)$$

będzie asymptotycznie stabilny. Zaznaczyć obszar stabilności na płaszczyźnie $k1 \times k2$

$\lambda_1 = k_1 - k_2 \;\vee\; \lambda_2 = k_1 + k_2 \;\vee\; \lambda_3 = k_1^2 + k_2^2$

dyskretny system liniowy jesy asymprotycznie stabilny $\Leftrightarrow$ wartości własne macierzy A leżą w kole jednostkowym o środku w zerze na płaszczyźnie zespolonej (wystarczy sprawdzić warunek $|\lambda_i| < 1$, nie trzeba z Hurwitza)

- $\lambda_1 = k_1 - k_2$

  $k_1 - k^2 < 1 \quad \wedge \quad k_1 - k_2 > -1$

  $k_2 > k_1 - 1 \quad \wedge \quad k_2 < k_1 + 1$

- $\lambda_1 = k_1 + k_2$

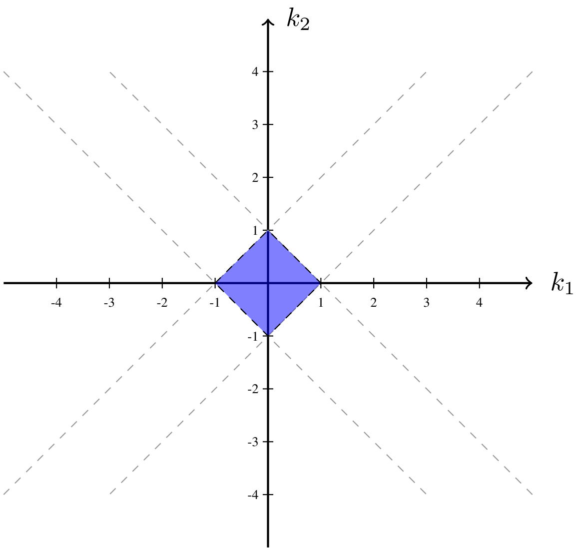
  $k_1 + k_2 < 1 \quad \wedge \quad k_1 + k_2 > -1$

  $k_2 < -k_1 + 1 \quad \wedge \quad k_2 > -k_1 - 1$

- $\lambda_1 = k_1^2 + k_2^2$

  $k_1^2 + k_2^2 < 1 \quad \wedge \quad k_1^2 + k_2^2 > -1$

$\lambda_1 = k_1 - k_2 \;\wedge\; \lambda_2 = k_1 + k_2 \;\wedge\; \lambda_3 = k_1^2 + k_2^2$



Zadanie 3.7.1

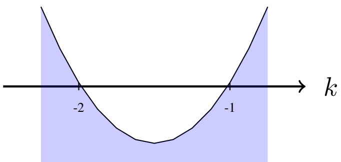
Dla jakich wartości parametru k_1 system dynamiczny
$x(k+1) = \begin{bmatrix} -0.5k_1 & 0 \\ 2 & -k_1 \end{bmatrix} x(k)$
będzie niestabilny.

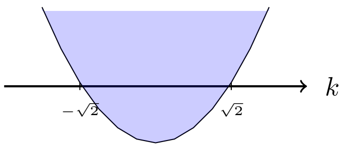
$(-0.5k_1 - 2)(-k_1 - \lambda) = 0$
$0.5k_1^2 + 0.5k_1\lambda + k_1\lambda + \lambda^2 = 0$
$\lambda^2 + 1.5k_1\lambda + 0.5k_1^2 = 0$
$\lambda = \frac{z+1}{z-1}$
$(\frac{z+1}{z-1})^2 - 1.5k_1(\frac{z+1}{z-1}) + 0.5k_1^2 = 0$
$z^2 + 2z + 1 + 1.5k_1z^2 - 1.5k_1 + 0.5k_1^2z^2 - k_1^2z + 0.5k_1^2 = 0$
$z^2 \underbrace{(0.5k_1^2 + 1.5k_1 + 1)}_{a_2} + z \underbrace{(2 - k_1^2)}_{a_1} + \underbrace{(0.5k_1^2 - 1.5k_1 + 1)}_{a_0} = 0$

Z kryterium Hurwitza system będzie stabilny gdy:

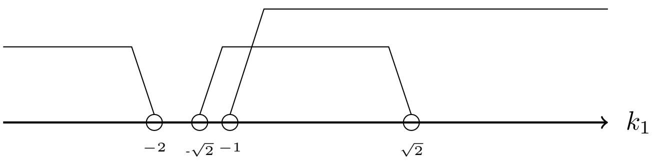
$$\begin{array}{lcrcr} a_2 > 0 & & 0.5k_1^2 + 1.5k_1 + 1 > 0 & & 2 - k_1^2 > 0 \\ a_1 > 0 & \Leftrightarrow & k_1^2 + 3k_1 + 2 > 0 & \vee & (\sqrt{2} - k_1)(\sqrt{2} + k_1) > 0 \\ a_0 > 0 & & (k_1+1)(k_1+2) > 0 & & (k_1 - \sqrt{2})(\sqrt{2} + k_1) < 0 \end{array}$$

ponieważ W.K. zawiera w sobie W.W., aby spełnione zostało





kryterium Hurwitza musi być spełniony iloczyn warunków: $a_2 > 0 \wedge a_1 > 0$



$\Rightarrow$ układ jest stabilny $\Leftrightarrow k_1 \in (-1, \sqrt{2})$
$\Rightarrow$ układ jest niestabilny $\Leftrightarrow k_1 \in (-\infty, -1) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$

Zadanie 3.7.2

Dla jakich wartości parametru k_1 system dynamiczny
$x(k+1) = \begin{bmatrix} -1 & -k_1 \\ -k_1 & -3 \end{bmatrix} x(k)$
będzie niestabilny.

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -k_1 \\ -k_1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (1+\lambda)(3+\lambda) - k_1^2 = \lambda^2 + 3 + 4\lambda - k_1^2 = 0$$
$\Delta = 16 - 12 + 4k_1^2 = 4 + 4k_1^2$
$\lambda = -2 \pm \sqrt{1+k_1^2}$

system będzie niestabilny $\Leftrightarrow |\lambda_i| > 1$

- $\lambda = -2 + \sqrt{1+k_1^2}$

$$\begin{array}{ccc} -2+\sqrt{1+k_1^2} > 1 & \vee & -2+\sqrt{1+k_1^2} < -1 \\ \sqrt{1+k_1^2} > 3 & & \sqrt{1+k_1^2} < 1 \\ k_1^2 > 8 & & k_1^2 < 0 \\ k_1 > 2\sqrt{2} \vee k_1 < -2\sqrt{2} & & \text{sprzeczne} \end{array}$$

- $\lambda = -2 - \sqrt{1+k_1^2}$

$$\begin{array}{ccc} -2-\sqrt{1+k_1^2} > 1 & \vee & -2-\sqrt{1+k_1^2} < -1 \\ \sqrt{1+k_1^2} > -3 & & \sqrt{1+k_1^2} > -1 \\ \text{sprzeczne} & & k_1 \in \mathbb{R} \end{array}$$

$\lambda = -2 + \sqrt{1+k_1^2} \vee \lambda = -2 - \sqrt{1+k_1^2} \Rightarrow k_1 \in \mathbb{R}$

Zadanie 3.8.1

Wyznaczyć rozwiązanie następującego równania różnicowego (rekurencyjnego)
$x(k+2) + x(k+1) - 2x(k) = 0, x(0) = 1, x(1) = -1$

zakładam rozwiązanie postaci z^n
$x^n, +z^{n-1} + 2z^{n-2} = 0$
$z^2 + z - 2 = 0$ - wielomian charakterystyczny
$W(z) = (z+2)(z-1)$
$z_1 = -2, \;\; z_2 = 1$
rozwiązanie równania jest postaci:
$x(k) = Cz_1^k + Dz_2^k$
podstawiając $x(0)$ oraz $x(1)$

$$\begin{cases} x(0) = 1 = C + D \\ x(1) = -1 = Cz_1 + Dz_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C = 1 - D \\ -1 = -2C + D \end{cases}$$

$$\begin{cases} D = 1 - C \\ -1 = -2C + 1 - C \end{cases}$$

$$\begin{cases} D = 1 - C \\ 3C = 2 \end{cases}$$

$C = \frac{2}{3} \quad D = \frac{1}{3}$
$\Rightarrow x(k) = \frac{1}{3}(2 \cdot (-2)^k + 1^k)$

Zadanie 3.8.2

Wyznaczyć rozwiązanie następującego równania różnicowego (rekurencyjnego)
$x(k+2) + 3x(k+1) + 2x(k) = 0, x(0) = 2, x(1) = -3$

$q^{k+2} + 3q^{k+1} + 2q = 0$
$q^2 + 3q + 2 = 0$
$\Delta = 9 - 8 = 1$
$q = \frac{-3+1}{2} = -1 \quad \vee \quad q = \frac{-3-1}{2} = -2$
$x(k) = a(-1)^k + b(-2)^k$
$\begin{cases} x(0) = a + b = 2 \\ x(1) = -a - 2b = -3 \end{cases}$
$b = 1 \wedge a = 1$
$\boxed{x(k) = (-1)^k + (-2)^k}$

Zadanie 3.9.1

Dany jest układ dyskretny

$$x(k+1) = Ax(k), A = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

przy czym $k = 1, 2, ...$ Wyznaczyć $x(n)$.

wielomian charakterystyczny: $|[A - \lambda I]| = 0$

$$\begin{bmatrix} -\lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} = (-\lambda)^n \text{(wyznacznik macierzy diagonalnej)}$$

Z Tw. Cayley'a-Hamillona wiadomo, że każda macierz spełnia swój wielomian charakterystyczny
$A^n = 0$

rozwiązanie równania $x(k+1) = Ax(k)$ ma postać $x(k) = A^k x(0)$ czyli $x(n) = A^n x(0) = 0$
Biorąc więc pod uwagę fakt $A^n = 0$ wiadomo, że rozwiązanie x(k) stanie się zerem w cco najwyżej n krokach, niezależnie od warunku początkowego $x(0)$

Zadanie 3.9.2

Dany jest układ dyskretny

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n\times n}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

przy czym $k = 1, 2, ...$ Wyznaczyć $x(n)$ wiedząc, że $u(i) = 1$ dla $i = 1, 2, ..., n$.

$x(n) = A^n x(0) + \sum_{j=0}^{n-1} A^{n-1-j} Bu(j)$
Zauważmy, że $\det(A) = 0$ (bo same zera na przekątnej)
wtedy $\det(\lambda I - A) = \lambda^n$
z Tw. Cayley'a-Hamiltona $A^n = 0$ (każda macierz spełnia swój wielomian charakterystyczny)
mamy więc $A^n x(0) = 0$, czyli $x(n) = \sum_{j=0}^{n-1} A^{n-1-j} B \underbrace{u(j)}_{=1}$

Przy kolejnych mnożeniach macierzy A podniesionej do jakiejś potęgi przez B otrzymujemy pierwszą kolumnę macierzy A, która zawiera same zera, poza przypadkiem $A^0 = I$ (macierz jednostkowa), więc sumujemy $n-1$ kolumn samych zer oraz jedną równą B $(I \cdot B = B)$
ostatecznie $\boxed{x(n) = B}$

Autorzy:

Skład:

Jacek Pietras

Rozwiązania:

Magdalena Warzesia
Ania Szarawara

Komentarze: