Metody Numeryczne - Projekt nr. 3

Aproksymacja profilu wysokościowego

Jacenty Andruszkiewicz 184788

Informatyka, semestr 4, grupa 3

1. Wstęp

Celem projektu była implementacja algorytmów służących do aproksymacji profili wysokościowych. Zastosowano dwie metody, metodę wykorzystującej wielomian interpolacyjny Lagrange'a oraz metodę wykorzystującą funkcje sklejane trzeciego stopnia. Dane o wysokości wybrano z paczki danych załączonej na portalu enauczanie. Wykorzystano 3 zestawy danych o różnych profilach wysokościowych, trasa prawie płaska bez różnic wysokości, trasa o jednym wyraźnym wzniesieniu, trasa o wielu stromych wzniesieniach. Do implementacji został użyty język Python.

2. Interpolacja Lagrange'a

Interpolacja Lagrange'a jest interpolacją globalną, czyli przybliża wykres funkcji dla wszystkich danych punktów jednocześnie.

W opiera się na wyznaczeniu zbioru funkcji, zwanego Bazą Lagrange'a. Zaczynamy od (n + 1) punktów:

$$P_i = (x_i, y_i)$$

Baza Lagrange do interpolacji składa się z funkcji określonych wzorem:

$$\phi_i(x) = \prod_{j=1, j\neq i}^{n+1} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

$$\text{for } i = 1, 2 \ldots n + 1.$$

Następnie, aby obliczyć funkcję interpolacyjną F(x) należy wykonać operację:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n+1} y_i \phi_i(x)$$

Wpływ liczby punktów węzłowych na wyniki:

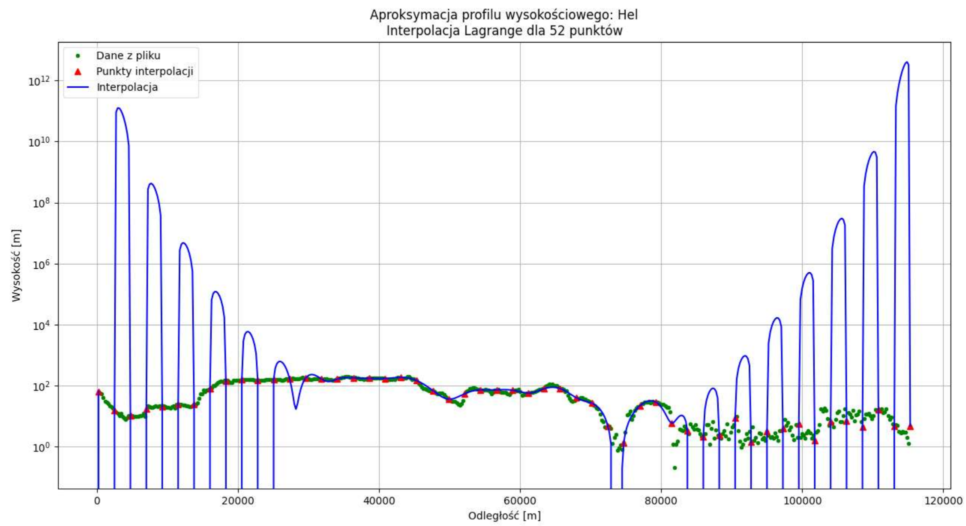
Wraz ze wzrostem liczby punktów interpolacyjnych wzrasta dokładność funkcji interpolacyjnej. Jednak na krawędziach pojawiają się oscylacje. Problem ten, nazywany efektem Rungego, pojawia się, kiedy wykorzystuje się wielomiany wysokiego stopnia do interpolacji węzłów w równo-odległych punktach.

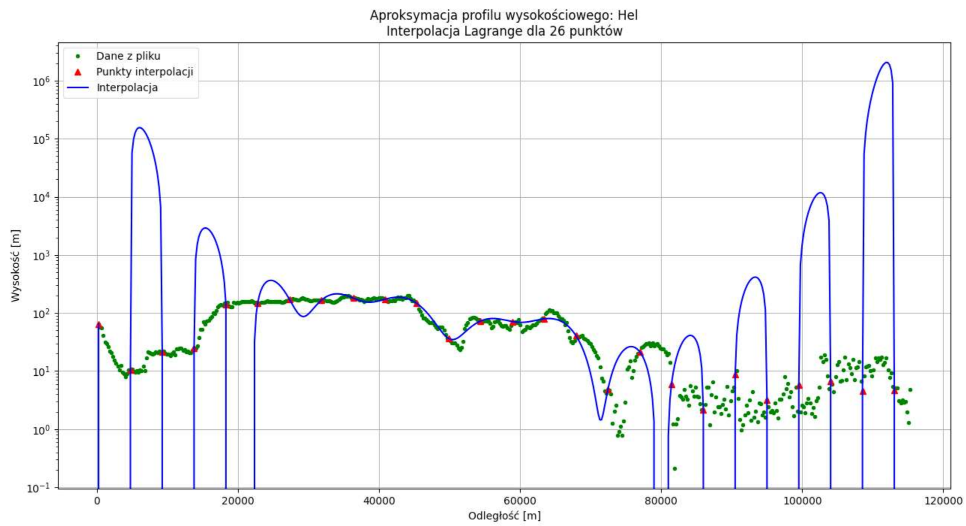
Metody wykorzystujące interpolację globalną są ryzykowne. Za dużo węzłów powoduje efekt Rungego, za mało - niedokładną interpolację. Rozwiązaniem jest interpolacja lokalna, między poszczególnymi węzłami.

Na poniższych wykresach przedstawiono efekty zastosowania metody interpolacyjnej Lagrange'a.

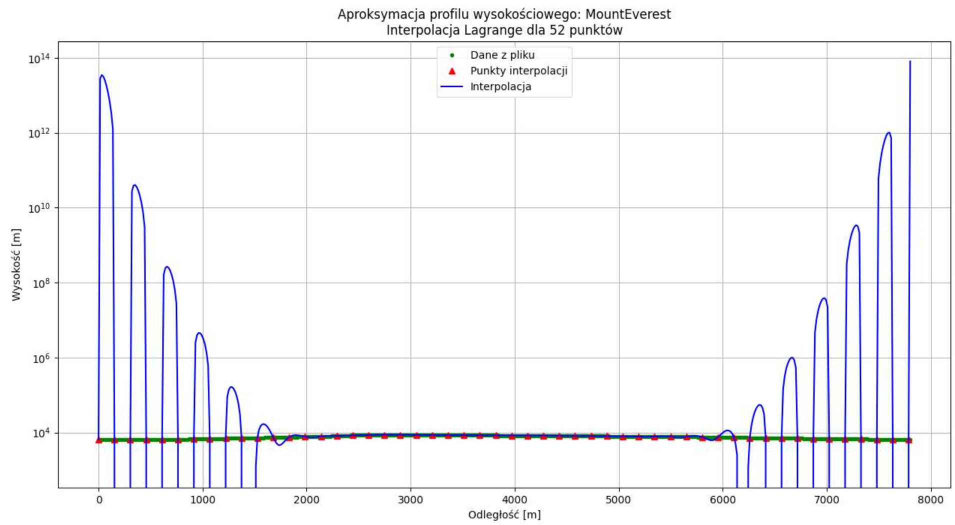
(Wykresy w lepszej jakości załączono jako osobne pliki)

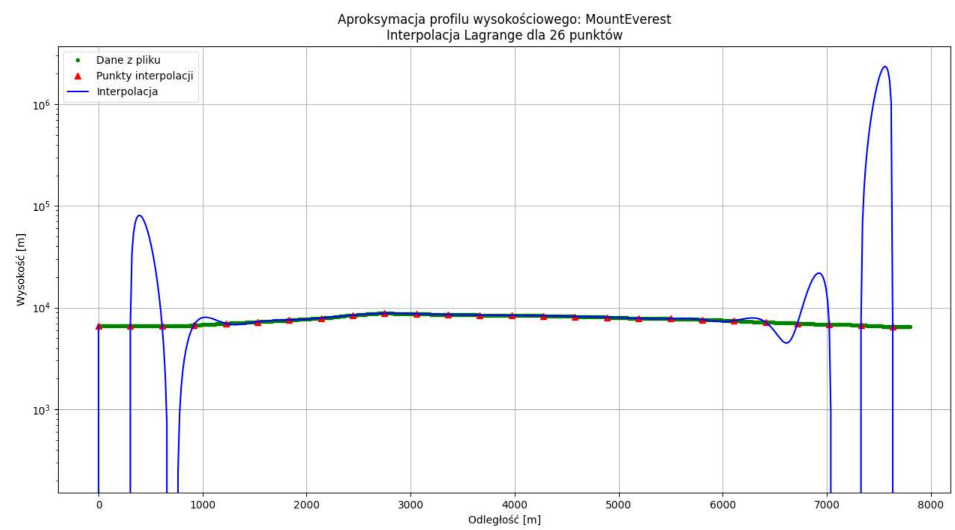
Hel



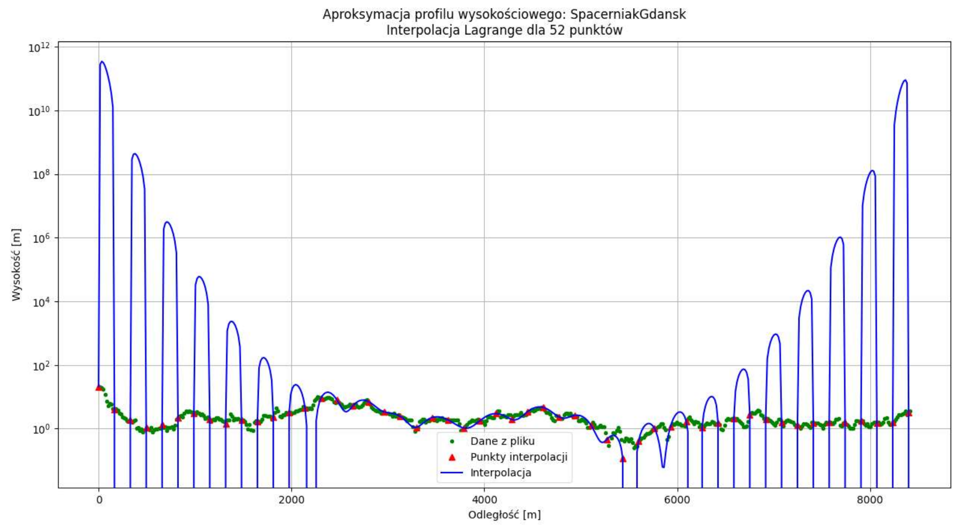


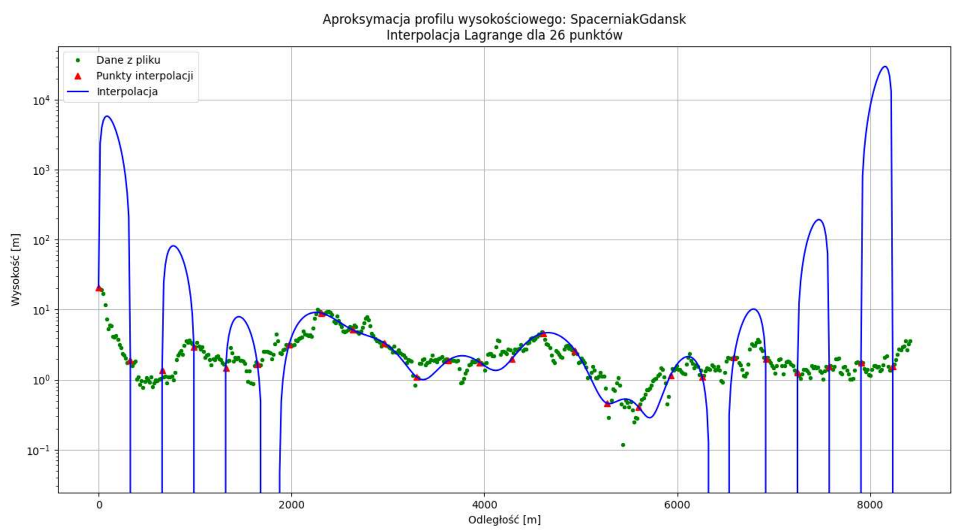
Mount Everest





Spacerniak Gdańsk





Wpływ charakteru trasy na wyniki:

Metoda interpolacji Lagrange'a jest skuteczna, gdy kolejne punkty układają się w funkcję, której pierwsza pochodna nie zmienia często swojego znaku. Natomiast gdy interpolowana funkcja oscyluje wokół danej wartości, interpolacja metodą Lagrange'a jest mniej skuteczna.

3. Interpolacja splajnami

Interpolacja splajnami polega na wyznaczaniu wielomianów n-tego stopnia na przedziałach pomiędzy punktami wybranymi do interpolacji. W tym przypadku wyznaczane są wielomiany 3-ego stopnia. Metoda polega na wyznaczeniu układu 4(n − 1) równań, gdzie n jest liczbą wybranych punktów. Zakładamy, że pomiędzy punktami x oraz xi istnieje wielomian:

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$$

Wtedy możemy wyznaczyć następujące równania:

$S_j(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, ..., n-1$

$S_j(x_{j+1}) = f(x_{j+1}), \quad j = 0, 1, ..., n-1$

Dla węzłów wewnętrznych x_j: $S'_{j-1}(x_j) = S'_j(x_j), \quad j = 1, ..., n-1$

Dla węzłów wewnętrznych x_j: $S''_{j-1}(x_j) = S''_j(x_j), \quad j = 1, ..., n-1$

Na krawędziach: $S''_0(x_0) = 0$ i $S''_{n-1}(x_n) = 0$

Mamy (n − 1) przedziałów, więc musimy wyznaczyć 4(n − 1) współczynników.

Powyższy układ równań możemy przedstawić w postaci Ax = b. Rozwiązanie tego równania, po odpowiednim przestawieniu wierszy, jest przeprowadzane za pomocą faktoryzacji LU. W ten sposób wyznaczone jest (n − 1) wielomianów, pomiędzy n punktami.

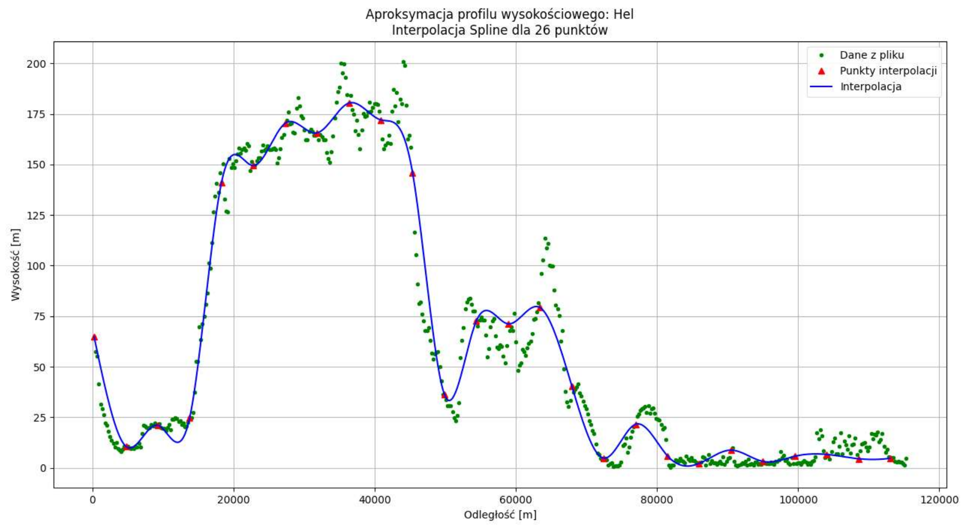
Wpływ liczby punktów węzłowych na wyniki:

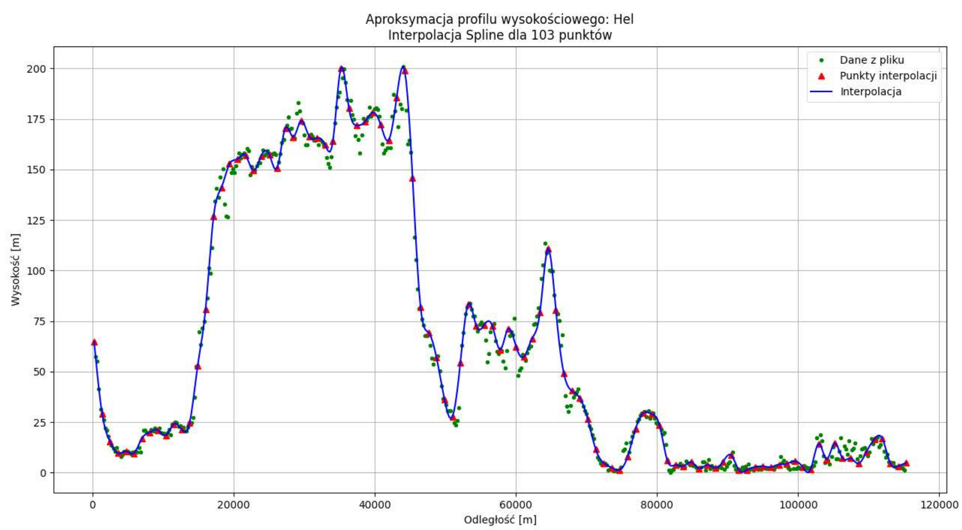
Ze wzrostem liczby punktów węzłowych wykorzystywanych do interpolacji rośnie dokładność przybliżenia, ale rosną również rozmiary macierzy, a w związku z tym też czas wykonywania obliczeń.

Na poniższych wykresach przedstawiono efekty zastosowania metody interpolacyjnej Splajnami.

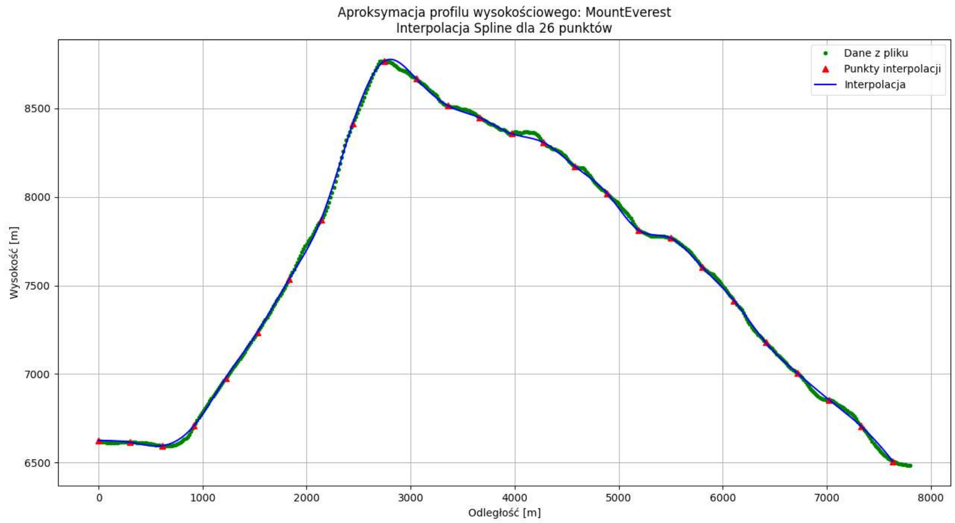
(Wykresy w lepszej jakości załączono jako osobne pliki)

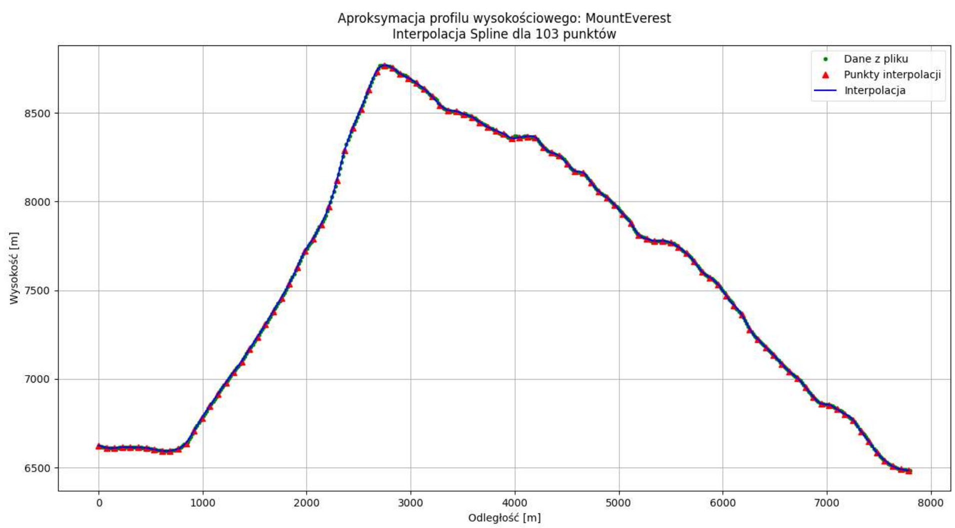
Hel



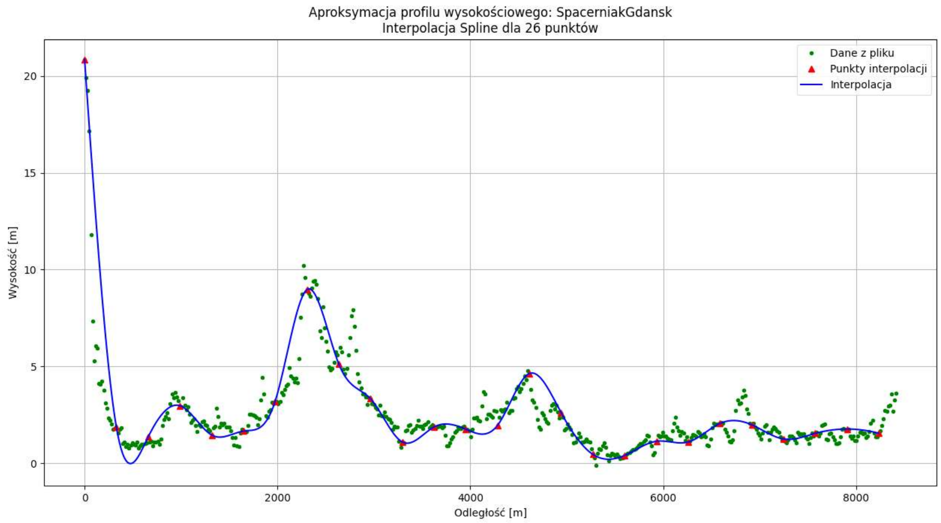


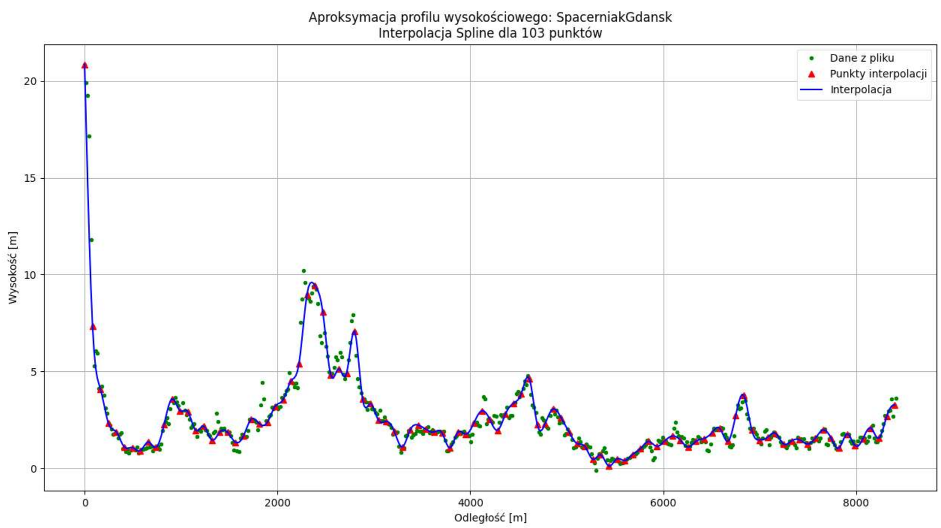
Mount Everest





Spacerniak Gdańsk





Wpływ charakteru trasy na wyniki:

Metoda interpolacji splajnami sprawdza się najlepiej, gdy interpolowana funkcja przypomina funkcję wielomianową. W związku z tym dla trasy Mount Everest, gdzie profil początkowo gwałtownie rośnie, po czym gwałtownie maleje przybliżenie jest bardzo dokładne na całej długości trasy. Natomiast w sytuacji, gdy pojawiają się ”skoki” wartości, funkcja interpolacyjna może nie być dokładna, można to zaobserwować na wykresie trasy Spacerniak Gdańsk.

4. Podsumowanie

Metoda interpolacji Lagrange’a ma mniejsze zapotrzebowanie pamięciowe oraz wyznacza przybliżenia funkcji w czasie krótszym niż metoda interpolacji splajanami. Jest jednak podatna na efekt Rungego, czyli znaczące oscylacje na krańcach przedziałów. Zbyt wiele punktów interpolacyjnych powoduje efekt Rungego, zbyt mała niedokładną interpolację.

Metoda interpolacji splajnami wymaga wyznaczenia układu równań oraz rozwiązania go, przez co ma większe zapotrzebowanie pamięciowe, a obliczenia zajmują więcej czasu. Nie jest jednak podatna na efekt Rungego.

Podsumowując, metoda interpolacji splajnami nadaje się lepiej do interpolacji profili wysokościowych niż metoda interpolacji Lagrange’a.