



UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO

FACULTAD DE EDUCACIÓN Y HUMANIDADES  
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN  
ESCUELA DE PEDAGOGÍA EN MATEMÁTICA

# INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA FRACTAL

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE PROFESOR DE  
ENSEÑANZA MEDIA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

AUTOR:	VALDÉS VÁSQUEZ, PATRICIO ALEJANDRO
Profesor Guía:	Coronel Pérez, Aníbal
Co-guía:	Huancas Suarez, Fernando

CHILLÁN, 2016

## Resumen

En esta memoria se introducen los conceptos y características esenciales de los fractales, sus construcciones, lugar donde los podemos encontrar y la aplicación de ellos. Además, se teoriza con los conjuntos de Julia y Mandelbrot, finalizando con la relación que se establece con la Teoría del Caos.

## Abstract

In this memory there get the concepts and essential characteristics of fractals, his constructions, place where we them can find and the application of them. In addition, one theorizes with the sets of Julia and Mandelbrot, finishing with the relation that is established by the Theory of the Chaos.

### Dedicatoria

Dedicado a Verónica Beroíza Guajardo, por el apoyo incondicional en estos años de carrera y a Dayana Pradena Álvarez, que ha sido un pilar fundamental en esta etapa de mi vida. Y por sobre todas las cosas, dedicado a mi familia; especialmente a mis padres, por todo el apoyo brindado en el desarrollo de mi carrera profesional.

### Agradecimientos

Quiero dar mis más sinceros agradecimientos a todas las personas que han estado en este proceso, empezando por los profesores de enseñanza básica, como lo fue mi profesora jefe Florentina Caro, también a mi profesoras jefes de enseñanza media Eugenia Parada, Marcela Angulo y mi profesor de matemática Juan Neira. Finalmente agradecer a mis profesores que han estado presentes en este proceso de Titulación Fernando Huancas, Fernando Toledo y Anibal Coronel.

También quiero agradecer a mi familia empezando por mi madre Claudia Vásquez, mi padre Patricio Valdés y mis hermanos Marlenne y Juan Valdés. Y no menos importantes a mi amiga y compañera Verónica Beroíza y a mi polola Dayana Pradena Álvarez por todas las horas, días, semanas y meses de apoyo en este proceso.

“La geometría Fractal cambiará a fondo su visión de las cosas. Seguir leyendo es peligroso. Se arriesga a perder definitivamente la imagen inofensiva que tiene de nubes, bosques, galaxias, hojas, plumas, flores, rocas, montañas, tapices, y de muchas otras cosas. Jamás volverá a recuperar las interpretaciones de todos estos objetos que hasta ahora le eran familiares.”  
(Michael F. Barnsley)

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>7</b>
<b>1. Conceptos Preliminares</b>	<b>9</b>
1.1. Concepto de fractal . . . . .	9
1.2. Características . . . . .	10
1.2.1. Autosimilitud . . . . .	10
1.2.2. Dimensión . . . . .	10
1.2.3. Iteraciones . . . . .	12
1.3. Definición formal de fractal . . . . .	13
1.4. Fractales lineales y no lineales . . . . .	13
1.4.1. Fractales lineales . . . . .	13
1.4.2. Fractales no lineales . . . . .	15
1.5. Números Complejos . . . . .	15
<b>2. Fractales clásicos</b>	<b>17</b>
2.1. Polvo de Cantor . . . . .	17
2.1.1. Construcción . . . . .	17
2.1.2. Características y perímetro . . . . .	18
2.1.3. Usos . . . . .	19
2.2. Curva de Koch . . . . .	20
2.2.1. Construcción . . . . .	20
2.2.2. Características, área y perímetro . . . . .	21
2.2.3. Usos . . . . .	22
2.3. Triángulo de Sierpinski . . . . .	22
2.3.1. Construcción . . . . .	22
2.3.2. Características, área y perímetro . . . . .	23
2.3.3. Triángulo de Pascal . . . . .	24
2.4. Tapete de Sierpinski . . . . .	25
2.4.1. Construcción . . . . .	25
2.4.2. Características, área y perímetro . . . . .	26
2.4.3. Usos . . . . .	27

---

<b>3. Conjunto de Julia</b>	<b>28</b>
3.1. Dinámica Holomorfa . . . . .	28
3.2. Atractor de Julia . . . . .	29
3.2.1. Conjunto de Julia con $C$ distinto . . . . .	31
<b>4. Conjunto de Mandelbrot</b>	<b>33</b>
4.1. Características . . . . .	33
4.2. Relación con el Conjunto de Julia . . . . .	34
<b>5. Fractales y el Caos</b>	<b>38</b>
5.1. Definiciones del caos . . . . .	38
5.2. Efecto Mariposa . . . . .	39
5.3. Teoría del Caos . . . . .	39
5.4. El atractor de Lorenz . . . . .	40
5.5. Propiedades del Caos . . . . .	42
5.5.1. Extrema sensibilidad a las condiciones iniciales . . . . .	42
5.5.2. Ubicuidad . . . . .	42
5.5.3. Existencia de un camino universal hacia el caos . . . . .	42
5.6. Relación de la Geometría Fractal y la Teoría del Caos . . . . .	43

# Introducción

La geometría siempre ha estado presente en nuestra evolución. Es así que se han formulado distintas teorías relativas a esta área de la ciencia. Pero sólo una a funcionado, aproximando de manera más coherente el mundo en el cual nos desenvolvemos a diario: esta es la geometría euclidiana. Esta geometría debe su nombre al célebre matemático griego Euclides, quién en su libro *“Los elementos de Euclides”* resume lo que los griegos ya conocían de la matemática.

La geometría euclidiana representa una buena aproximación y de hecho puede ser utilizada en muchas aplicaciones con una gran versatilidad. Sin embargo, muchos matemáticos trataron de levantar una aparente incoherencia que existía en el quinto postulado. Se afirmaba que esta admitía una demostración en base a los otros postulados y las proposiciones que de estos se pueden deducir. Sin embargo, todos los intentos continuaron por descubrir dos tipos de geometrías que actualmente se conocen como la geometría de Lobatchvski y la geometría de Riemann. Las cuales inspiraron otro tipo de geometrías que la general son conocidas como geometrías no euclidianas.

Con el transcurso del tiempo la matemática fue creciendo, las necesidades del saber y poder tener respuesta a todo, se fueron sustentando con la teoría de la relatividad de Albert Einstein(1905), que habla sobre la curvatura del espacio-tiempo, creando un nuevo horizonte y aplicaciones prácticas de las geometrías no euclidianas.

Las perpestivas modernas dividen la teoría geométrica no euclideana en hiperbólica y elíptica. Dentro de la geometría no euclidiana encontramos la geometría hiperbólica, que satisface solo 4 de los postulados de Euclides, y cuya curvatura es negativa. También tenemos la geometría elíptica, que también satisface solo 4 postulados, pero con una curvatura positiva.

A pesar de los grandes avances de la geometría no euclidianas, en algún momento se observo que ni la geometría euclidiana y ninguna otra podía estabecer el estudio de la naturaleza, que sólo se puede estudiar las regularidades presentes en la naturaleza, más no sus irregularidades, es por esto que fue necesario trabajar con una geometría que las rigera; es así como Benoît Mandelbrot se pregunta lo siguiente *“¿Por qué a menudo se describe la geometría como algo «frío» y «seco»? Una de las razones es su incapacidad de*



---

*describir la forma de una nube, una montaña, una costa o un árbol*” (Mandelbrot, 2006, p.15)[2]. Con lo anterior, surge la preocupación por el estudio de este tipo de geometría, uno de los trabajos pioneros lo desarrolla Mandelbrot en su libro “*La geometría de la naturaleza*”, explicando lo que pudo lograr con sus investigaciones en diferentes área y entregándole un nombre a esta nueva geometría, tal como lo expresa el mismo.

*“concebí y desarrollé una nueva geometría de la naturaleza y empecé a usarla en una serie de campos. Permite describir muchas de las formas irregulares y fragmentadas que nos rodean . . . identificando una serie de formas que llamo fractales”* (Mandelbrot, 2006, p.15)[2].

La razón para escribir esta monografía es introducir esta nueva geometría joven. Además, al hacerlo se prioriza el hecho de hacerlo de una manera popular, y en consecuencia, se opta por una complejidad baja que no requiere de un gran conocimiento matemático para poder entenderla. Así mismo nuestra presentación se orienta a estudiantes que estén terminando la enseñanza media o esta comenzando la enseñanza superior.

Para cumplir el objetivo de esta tesis, de mostrar al lector la geometría de la naturaleza, debemos identificar los lugares donde encontramos estas figuras y ver claramente sus características. Además, se considerará la teoría, revisando conjuntos fractales complejos que no se pueden encontrar fácilmente, pero que sí son útiles para otras áreas no matemáticas. Finalmente, observaremos la relación que existe entre los fractales y el caos.

# Capítulo 1

## Conceptos Preliminares

En este capítulo se presentarán los conceptos preliminares y necesarios para una lectura continua y comprensiva de la monografía. Se presenta el concepto de fractal, se presentan los números complejos, se define un fractal de manera precisa y se presentan propiedades tal como la autosimilitud y la dimensión.

### 1.1. Concepto de fractal

El termino fractal proviene del vocablo latino fractus que se traduce como “quebrado, fragmentado, etc” y fue acuñado por el francés Benoît Mandelbrot.

Por otro lado, un concepto a tener en cuenta es el relativo a la “geometría fractal”, la cual también es llamada “geometría de la naturaleza” y que en palabras de Braña [3]:

*“es un conjunto de estructuras irregulares y complejas descritas a través de algoritmos matemáticos y computacionales; los cuales reemplazan a los puntos, rectas, circunferencias y demás figuras provenientes de la matemática tradicional . Estos objetos tienen como características fundamentales las propiedades de autosimilitud y la de convivir con extraños paisajes formados por dimensiones fraccionarias”*

Se hará la distinción entre un “conjunto fractal” y “fractal natural”. Conjunto fractal lo podemos definir como un ente matemático, cuyas características pueden definirse rigurosamente (como figuras creadas), mientras que el fractal natural se representa a través de objetos naturales que tienen ciertas regularidades (que pueden ser nubes, estructura de árboles, costas, etc).

## 1.2. Características

Entre las características que usamos de los fractales se encuentran la autosimilitud, la dimensión y las iteraciones.

### 1.2.1. Autosimilitud

Se puede decir que está formada por partes más pequeñas que se parecen. Esta similitud puede ser geométricamente estricta o bien puede ser solamente aproximada o estadística.

Ejemplos de autosimilitud estricta tenemos el Polvo de Cantor (ver figura 3) y la Curva de Koch (ver figura 4) y en la Autosimilitud aproximada o estadística son los fractales naturales como los contornos de las nubes, costas, las ramificaciones de los árboles, entre otras.

No todos son autosimilares, porque los fractales plasmáticos tienen una forma muy indefinida y tienen componentes aleatorias. Lo podemos ver en la simulación de paisajes reales, para ser usado en animaciones como lo son películas, juegos etc.

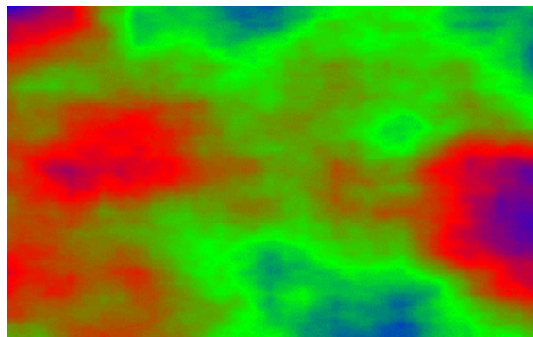


Figura 1: Imagen de un fractal plasmático.[3]

### 1.2.2. Dimensión

En la geometría fractal es frecuente hablar de distintas dimensiones, para ello a continuación se introduce de manera precisa estos conceptos. Así se presentarán lo relativo a la dimensión euclídea, topológica, de Hausdorff-Besicovitch y fractal.

#### Euclídea

Es el número de coordenadas requeridas para especificar un objeto. Ejemplos: Un punto dimensión uno, un plano dimensión dos y el espacio dimensión tres.

## Topológica

*“La dimensión topológica mide la habilidad para cubrir un objeto con conjuntos abiertos de radio pequeño. Una dimensión topológica cero describe un conjunto que puede ser cubierto por pequeños conjuntos abiertos que son disyuntos. La dimensión topológica uno describe un conjunto que puede ser cubierto por pequeños conjuntos abiertos con sólo una intersección entre adyacentes pares de ellos. Un conjunto es considerado de dimensión topológica dos si puede ser cubierto por pequeños conjuntos abiertos que se intersecan sólo tres veces... La dimensión topológica usualmente tiene el mismo valor que la dimensión euclídea”* (Rivera, 2011, p.270)[4]

Entonces:

$D_T = -1,$	El vacío
$D_T = 0,$	Un punto
$D_T = 1,$	Un segmento
$D_T = 2,$	Un cuadrado
$D_T = 3,$	Un cubo

## Hausdorff-Besicovitch

Dimensión de Contenido o Dimensión de Hausdorff - Besicovitch: Se define como *“Un contenido lineal se calcula sumando pasos  $r$  elevados al exponente uno, que es la dimensión de la línea recta. Un contenido de superficie se calcula sumando pasos  $r$  (donde  $r$  es el lado de cada uno de los cuadrados que compone la superficie) elevados al exponente dos, que es la dimensión del plano. Un contenido de volumen se calcula sumando pasos  $r$  (donde  $r$  es el lado de cada uno de los cubos que compone el volumen) elevados al exponente tres, que es la dimensión del espacio”* (Rivera, 2011, p.270)[4].

$$Contenido = Nr^D$$

La Dimensión de Hausdorff - Besicovitch, está dada por la fórmula:

$$D = \frac{\log(N)}{\log(1/r)}$$

donde,  $N$  es el número de copias de sí mismo,  $D$  es la dimensión de Hausdorff y  $r$  es la razón de homotecia(razón de similitud).

Usando la función inversa del logaritmo en ambos lados de la igualdad, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} 1 &= Nr^D \\ \text{contenido} &= Nr^D \end{aligned}$$

## Fractal

*“en un sentido genérico es un número que sirva para cuantificar el grado de irregularidad y fragmentación de un conjunto geométrico o de un objeto natural. La dimensión fractal no es necesariamente entera”* (Rivera, 2011, p.269)[4],

pero se debe cumplir que su dimensión de Hausdorff debe ser superior a su dimensión topológica.

Existen curvas llamadas de relleno de dimensión  $n$ , la cual puede llenar una superficie, una de estas es la curva de peano o también curva de Hilbert quien hizo una variación sobre esta curva. La cual tiene un patrón y esta se va uniendo hasta completar el plano como lo muestra la figura.

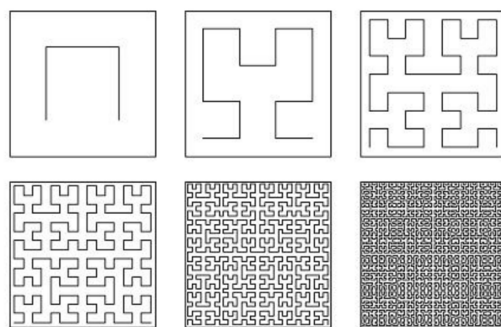


Figura 2: Iteraciones de la curva de Hilbert.[10]

cuya dimensión topológica es 1 y con la iteración llena el espacio cuya dimensión final es 2, por lo anterior, la dimensión de Hausdorff es mayor que la topológica y además, cumple con la característica de autosimilitud.

### 1.2.3. Iteraciones

Las iteraciones consisten en repetir  $n$  veces la misma figura o patrón. En los fractales lo que se itera son las fórmulas, ecuaciones o el patrón generador dependiendo del fractal. El problema es como iterar  $n$  veces esas ecuaciones o fórmulas, si además, tenemos en ellos

números complejos, la solución la encontramos en las computadoras. Esta es una razón técnica por la cual esta geometría lleva no más de 40 años.

Con lo anterior, tomemos una figura a estudiar el “Triángulo de Sierpinski” (ver figura 4), si nos acercamos cada vez más en el triángulo, podemos observar que la estructura no va cambiando, sólo que el tamaño o escala son distintas a las anteriores y esto es lo que nos dice Braña[3]:

*“si alguno ya usó algún software como el Fractint, Ultrafractal, o cualquier otro para generar imágenes fractales, habrá notado que llega un momento en que la pantalla irremediamente se queda en negro o blanco. Si son observadores deberían haberse preguntado por qué pasó eso si los fractales en teoría tienen detalles infinitos y siempre deberíamos encontrar una nueva imagen. Bueno, esto se debe justamente a lo que hablábamos recién, todavía no se han podido escribir programas con iteración infinita”*

Si ahora vamos a los fractales naturales como lo son cerros y árboles, y ocupamos la misma analogía (acercándonos, vemos la misma estructura pero a diferente escala, llegando a un punto que no se puede seguir descomponiendo), esto nos dice que no son fractales perfectos, solo existen en el campo teórico.

### 1.3. Definición formal de fractal

*“Un fractal es por definición, un conjunto cuya dimensión de Hausdorff-Besicovitch es estrictamente mayor que su dimensión topológica. . . Los conjuntos con  $D$  no entera son fractales”* (Mandelbrot, 2006, p.32)[2].

Los conjuntos con dimensión de contenido no entera son fractales, como lo es el Conjunto de Cantor, quien tiene una dimensión igual a  $\log 2 / \log 3 = 0,6309$ , que es mayor a su dimensión topológica la cual es 0. Respetando, naturalmente, la definición de fractal: la dimensión de Hausdorff-Besicovitch es mayor que la dimensión topológica.

### 1.4. Fractales lineales y no lineales

En esta sección presentaremos los conceptos de fractal lineal y no lineal.

#### 1.4.1. Fractales lineales

Son aquellos que se construyen con un simple cambio de escala, como lo son los conjuntos fractales creados por el hombre con figuras sencillas (rectas, triángulos, etc.) y la mezcla

de ellas. Los ejemplos clásicos de fractales lineales son el Conjunto de Cantor, Curva de Von Koch, Triángulo de Sierpinski, entre otras.

Si observamos todas esas figuras haciendo un zoom, determinamos que existe un patrón constante que se va repitiendo infinitas veces.

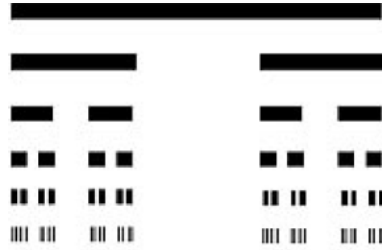


Figura 3: Polvo de Cantor.[2]

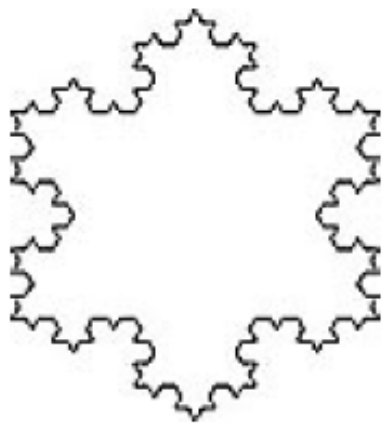


Figura 4: Curva de Von Koch.[10]



Figura 5: Triángulo de Sierpinski.[10]

### 1.4.2. Fractales no lineales

Son aquellos que están formados por los números complejos, debido a esto se les designa el término de caóticos. Estos fractales son generados por computadoras y creados por el hombre, como lo son el Conjunto de Mandelbrot y el Conjunto de Julia, entre otros.

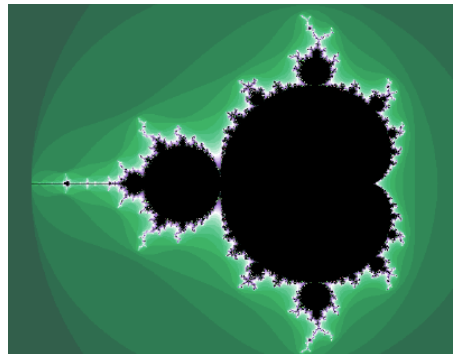


Figura 6: Conjunto de Mandelbrot.[3]

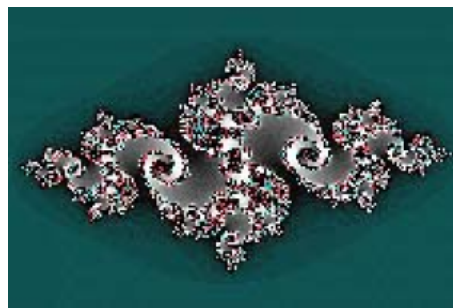


Figura 7: Conjunto de Julia.[3]

## 1.5. Números Complejos

El sistema de los números complejos se convierte en una herramienta sustantiva para definir y representar los fractales no lineales. En general, se recuerda que el conjunto de los números complejos se define como el conjunto:

$$\mathbb{C} = a + bi ; a, b \in \mathbb{R}$$

donde  $i$  es tal que cumple las siguientes soluciones



$$\begin{aligned}i &= \sqrt{-1}, \\i^2 &= -1, \\i^3 &= -i = -\sqrt{-1}, \\i^4 &= 1.\end{aligned}$$

Ahora, el conjunto  $\mathbb{C}$  se convierte en el sistema de los números complejos al dotarlo de las operaciones de adición y multiplicación y con los cuales se satisface los axiomas de cuerpo.

Para precisar veamos brevemente como se aplican los Números Complejos en la geometría fractal, y para ello seleccionamos la ecuación de Mandelbrot, la cual se define del siguiente modo.

$$Z_{n+1} = Z_n^2 + C \quad \text{con} \quad Z = X + Yi \quad \text{y} \quad C = a + bi.$$

Reemplazamos los dos números complejos en la ecuación, y separamos la parte real e imaginaria, resultando lo siguiente:

$$\begin{aligned}X_{n+1} &= X_n^2 - Y_n^2 + a, \\Y_{n+1} &= 2X_nY_n + b,\end{aligned}$$

siendo la expresión final de la ecuación de Mandelbrot que genera el Conjunto.

## Capítulo 2

### Fractales clásicos

En este capítulo presentaremos ejemplos clásicos de fractales. Históricamente se recuerda que Benoît Mandelbrot en el año 1958, cuando ingresa a trabajar en International Business Machines Corporation (IMB), realiza un análisis del ruido y perturbaciones eléctricas, que son ráfagas de errores en las líneas de transmisión de datos. En ellas encuentra unas extrañas figuras que se ven vacías, y que se van iterando en la línea. Lo estudiado de esas ráfagas, lo llevan a deducir que las imágenes son muy poco habituales en las ciencias de la naturaleza, pero en la matemática pura, ya lo habían utilizado George Cantor. Es así que en el capítulo se estudia este fractal y otros

#### 2.1. Polvo de Cantor

El Conjunto de Cantor o Polvo de Cantor, fue ideado por Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor en 1883, considerado un fractal por antonomasia, además de ser el primero conocido. Como ejemplo del conjunto de longitud cero, tenemos aquellos puntos que se pueden identificar uno a uno, con todos los puntos de una recta que tiene longitud infinita.

##### 2.1.1. Construcción

El Polvo de Cantor (Figura 3) está formado por una recta, imaginemos que tenemos una recta de intervalo  $[0,1]$  equivalente a  $C$  (recta original), debemos dividir la recta en tres segmentos iguales, los cuales serán los intervalos  $[0,1/3]$ ,  $(1/3,2/3)$ ,  $[2/3,1]$ . Luego debemos eliminar el intervalo abierto intermedio, es decir, quitamos el segmento  $(1/3,2/3)$ . Entonces nuestro  $C_1$  será la unión de los dos intervalos:

$$C_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$$

Ahora, se toma cada intervalo y se realiza el mismo procedimiento anterior, dividir cada segmento en tres intervalos iguales y el intervalo abierto, o sea, el segmento intermedio, eliminarlo. Con ese proceso nuestro  $C_2$  estaría compuesto así:

$$C_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 3/9] \cup [6/9, 7/9] \cup [8/9, 1]$$

Una iteración más, nos queda:

$$C_3 = [0, 1/27] \cup [2/27, 3/27] \cup [6/27, 7/27] \cup [8/27] \cup [9/27] \cup [18/27, 19/27] \cup [20/27, 21/27] \cup [24/27, 25/27] \cup [26/27, 1]$$

Este proceso sigue indefinidamente. Es decir, para obtener a  $C_n$  se debe conocer  $C_{n-1}$ .

Como podemos observar en la imagen, y como veremos en los siguientes fractales, su construcción se obtiene después de infinitas iteraciones de un algoritmo o patrón geométrico sencillo, en algunos casos.

### 2.1.2. Características y perímetro

El Polvo de Cantor, es un fractal cuya dimensión fractal es  $Dr = \log 2 / \log 3 = 0,6309$ , siendo un fractal lineal con autosimilitud estricta. Recordemos que su dimensión topológica es 0, solo para confirmar que:  $Dr > Dt = 0,6309 > 0$ .

*“El polvo de Cantor es extraordinariamente difícil de ilustrar. Pues de tan fino y disperso, resulta invisible. Para ayudar a la intuición a hacerse una idea de su forma, lo hacemos más grueso hasta convertirlo en lo que se podría llamar barra de Cantor”.* (Mandelbrot, 2006, P.117)[1].

Cada fractal tiene una figura iniciadora y una generadora, que en el caso del Polvo de Cantor la figura iniciadora es un segmento  $[0,1]$  y su generador está compuesto por un  $N$  y  $r$ , que son las partes divididas y la proporción de estas respectivamente, como se nos presenta en la imagen.

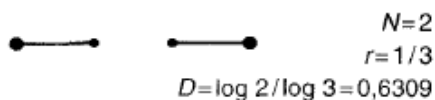


Figura 8: Generador del Polvo de Cantor. [1].

Variando los datos anteriores, podemos formar distintos fractales con sus respectivas dimensiones, aclarando que las nuevas dimensiones las podemos encontrar entre 0 y 1, como en los siguientes ejemplos:

Si  $N = 2$  y  $r = 1/4$  la dimensión de este Polvo de Cantor será  $D = \log 2 / \log 4 = 0,5$

Si  $N = 3$  y  $r = 1/5$  la dimensión de este Polvo de Cantor será  $D = \log 3 / \log 5 = 0,6826$

Si  $N = 3$  y  $r = 1/9$  la dimensión de este Polvo de Cantor será  $D = \log 3 / \log 9 = 0,5$

Podemos decir, que todos los Polvo de Cantor anteriores son fractales, ya que  $Dt = 0$ , e incluso podemos decir que dos fractales con aspectos muy distintos, pueden tener una misma dimensión.

¿Cuál es la longitud del Conjunto de Cantor, si la longitud del segmento inicial es 1? En cada etapa de la construcción del Conjunto de Cantor, al segmento inicial se le va quitando sucesivamente.

$$1, 2, 2^2, 2^3, \dots, 2^{n-1}$$

segmentos cada uno de ellos de longitud igual a:

$$\frac{1}{3}, \left(\frac{1}{3}\right)^2, \left(\frac{1}{3}\right)^3, \dots, \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

respectivamente.

Por lo tanto, la longitud del Conjunto de Cantor es:

$$L = 1 - 1/3 \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \right) = 0$$

¿Una figura de longitud 0? Esta es una de tantas característica de los fractales que llevó a dejarlos de lado, incluso acuñándoles el nombre monstruos. En este fractal podemos ver claramente las características nombradas del capítulo I, como su autosimilitud estricta, linealidad y patrón bien definido.

### 2.1.3. Usos

¿Donde podemos encontrar el Polvo de Cantor en la naturaleza? Lo podemos encontrar en los anillos de Saturno. Antigüamente, se creía que este anillo era único, pero con el

avance de la tecnología, se fue descubriendo que tenía diferentes cortes produciendo distintos anillos, hasta que el Voyager (sondas espaciales estadounidense enviada a Júpiter y Saturno), encontraron un número ilimitado de cortes muy finos, que dejan pasar gran parte de la luz solar. A este fenómeno se le denomina diáfanos.

## 2.2. Curva de Koch

La Curva de Koch fue creada por Niels Fabián Helge Von Koch, en el año 1904. Diferenciaremos dos figuras: el Triángulo de Koch [Figura 9], forma triádica o también llamada copo de nieve, de la Curva de Koch. Ambas formas tienen una dimensión  $D = \log 4 / \log 3 = 1,2618$ , con una razón de homotecia ( $r$ ) igual a  $1/3$ .

### 2.2.1. Construcción

Construyamos el Triángulo de Koch: esta figura parte con un triángulo equilátero de 1 unidad; luego se divide cada segmento en tres partes iguales de  $1/3$  y el segmento del medio se elimina, lo mismo que ocurría en el Polvo de Cantor teniendo que agregar un triángulo equilátero en el segmento eliminado ( $1/3$ ) en cada lado del triángulo; finalmente este proceso se tiene que repetir infinitas veces en cada uno de los segmentos que tiene la nueva figura [Figura 9].

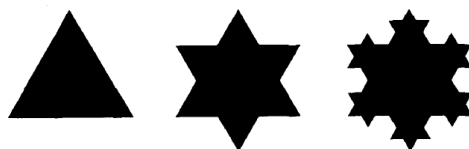


Figura 9: Triángulo de Von Koch, primeras iteraciones.[10]

Para construir la Curva de Koch, podemos evidenciar que la curva es la iteración de solo un lado del Triángulo de Koch, iterado infinitas veces como nos muestra la [Figura 10].

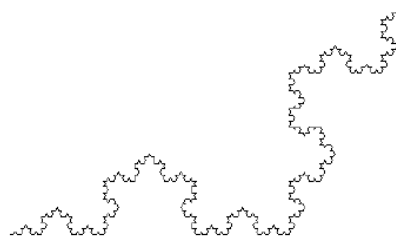


Figura 10: Curva de Von Koch.[4]

Esta curva es muy sugerente para poder medir la longitud de costas, pero es muy rígida.

### 2.2.2. Características, área y perímetro

Estudiamos el Triángulo de Koch, tanto su área como perímetro, teniendo en cuenta que el área de la curva no se puede obtener, pero si del Triángulo de Koch y cada segmento inicial mide 1 unidad.

Como hemos visto en la construcción de la figura, la cantidad de segmentos que aparecen es igual a

$$1, 4, 4^2, 4^3, \dots, 4^{n-1}$$

y cada uno de ellos con una longitud

$$1, \left(\frac{1}{3}\right)^2, \left(\frac{1}{3}\right)^3, \dots, \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

respectivamente. Por lo tanto, su longitud la podemos expresar de la siguiente forma:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^{n+1} = +\infty$$

Este perímetro es igual, tanto para el triángulo, como para la Curva de Koch.

Para calcular el área del Triángulo de Koch, tenemos que ver la cantidad de triángulos que se van agregando en cada secuencia, desde la etapa inicial hasta la general de la construcción.

$$3, 3 \cdot 4, 3 \cdot 4^2, 3 \cdot 4^3, \dots, 3 \cdot 4^{n-1}$$

triángulos, cada uno de ellos con área

$$\frac{A_0}{9}, \frac{A_0}{9^2}, \frac{A_0}{9^3}, \dots, \frac{A_0}{9^n}$$

respectivamente. Por lo tanto, el área encerrada por los triángulos es:

$$A = A_0 \left( 1 + \frac{3}{9} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \dots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \right) \right) = \frac{8}{5} A_0$$

El Triángulo de Koch tiene un perímetro infinito, mientras que su área tiende a un número finito. Además, esta curva es continua, pero no posee ninguna tangente. Asimismo, el Polvo de Cantor es un fractal simétrico, con autosimilitud estricta y lineal.

### 2.2.3. Usos

La Curva de Koch la podemos relacionar con el contorno de costas, debido a que sus figura se asemejan mucho entre sí. Mandelbrot en su libro “*La geometría de la naturaleza*” plantea la siguiente pregunta: ¿Cuánto mide la costa de Bretaña? Pensemos que necesitamos calcular el perímetro de una costa, como se lo propone Mandelbrot: primero medimos con una regla de un kilómetro la costa; luego hacemos lo mismo, pero con una regla de un metro; y finalmente con una de 1 centímetro. Él nos dice que si vamos disminuyendo el tamaño del instrumento de medida, esta será más precisa, puesto que con el instrumento más pequeño podrá recorrer lugares de la costa que no podía hacer con los instrumentos anteriores, por lo tanto, mientras más pequeño el instrumento mayor la medida, que tendera al infinito.

Mandelbrot saca algunas conclusiones respecto a cuánto mide la costa de Bretaña, las cuales son:

- a) La mejor aproximación a un costa no es una curva suave.
- b) La curva que mejor la aproxima debe tener una infinidad de puntas (picos).
- c) Los ”picos” se repiten en todas escalas (autosimilares).

El Triángulo de Koch también lo podemos encontrar en la medicina, en investigaciones de Ebstein sobre anomalías cardíacas, que en el Triángulo de Koch(TK) en el corazón se encuentra una mayor probabilidad de anomalías cardíacas(AE), como se expresa en la siguiente investigación:

*“Conocer las dimensiones del TK y la situación del nodo auriculoventricular (AV) y sus extensiones en la AE puede ser clínicamente útil en la escena del tratamiento quirúrgico de la válvula tricúspide y electrofisiológico de vías accesorias u otros sustratos arrítmicos en las proximidades de la base del TK, para evitar complicaciones como el bloqueo AV completo” [12].*

## 2.3. Triángulo de Sierpinski

El matemático polaco Waclav Sierpinski es el creador de las dos figuras restantes del capítulo a estudiar. El Triángulo de Sierpinski se creó en el año 1919, el cual se construye de la siguiente manera:

### 2.3.1. Construcción

Construimos un triángulo equilátero de lado 1 (no necesariamente debe ser equilátero), este es sólo un ejemplo y para la vista. Ahora, a cada lado se debe encontrar sus puntos

medios y se deben unir formando 4 triángulos internos (equiláteros) de lado  $1/2$  cada uno, pero el triángulo del medio se elimina, luego con los 3 triángulos restantes se tiene que hacer lo mismo, luego con los 9 y así sucesivamente como muestra la [Figura 11].

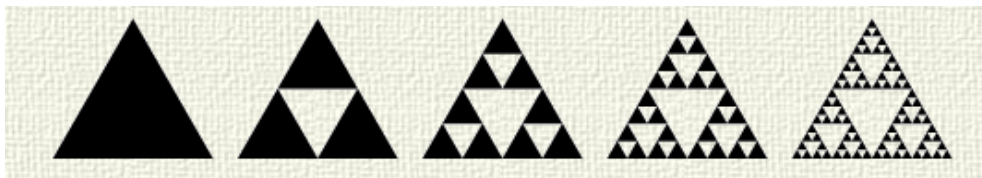


Figura 11: Secuencia del Triángulo de Sierpinski, hasta la iteración 4.[10]

### 2.3.2. Características, área y perímetro

Podemos observar que con cada paso el triángulo se obtiene 3 triángulos más pequeños por cada uno anterior, siendo cada uno semejantes a los anteriores.

Para calcular el área y perímetro, necesitamos la cantidad de triángulos para  $n$  cada secuencia son.

$$1, 3, 3^2, 3^3, \dots, 3^n$$

debemos conocer el lado de cada triángulo en cada secuencia

$$1, \frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^3, \dots, \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

respectivamente, por lo tanto, el perímetro de la figura se puede representar como

$$L = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = \infty$$

Ahora para calcular el área de la figura sombreada, necesitamos la cantidad de triángulos extraídos en cada secuencia

$$1, 3, 3^2, 3^3, \dots, 3^{n-1}$$

respectivamente, ahora el área de cada uno de ellos es

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^n}$$



respectivamente. Por lo tanto

$$A = 1 - \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{3}{4} + \left( \frac{3}{4} \right)^2 + \dots + \left( \frac{3}{4} \right)^n \right) = 0$$

Una figura con área cero y con un perímetro infinito es muy contradictorio poder ver gráficamente, como lo pudimos apreciar en la secuencia anterior.

El triángulo de Sierpinski tiene una dimensión fractal  $D = \log 3 / \log 2 = 1,5849$  aproximadamente.

El Triángulo de Sierpinski como también el Triángulo de Koch tiene una versión generalizada en 3D y en este caso es una pirámide de base cuadrada que se suele llamar como el tetraedro de Sierpinski. El método de construcción es análogo a la figura en 2D solo que las iteraciones en cada cara del tetraedro se iteran simultáneamente y cada una de las caras corresponde a un Triángulo de Sierpinski en 2D. La dimensión de esta figura es de 2,3219, como nos muestra la [Figura 11]

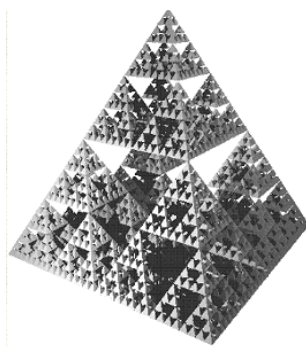


Figura 12: Triángulo de Sierpinski en su forma 3D, con base cuadrada.[10]

### 2.3.3. Triángulo de Pascal

Una curiosidad del Triángulo de Sierpinski es una relación con el triángulo de pascal que veremos a continuación. El triángulo de pascal define de arriba abajo la suma de sus coeficientes de cada uno de los términos del desarrollo de un binomio elevado a un número natural. Ahora si superponemos el Triángulo de Sierpinski en el Triángulo de Pascal siendo ambos de igual tamaño, se puede ver en la [Figura 12].

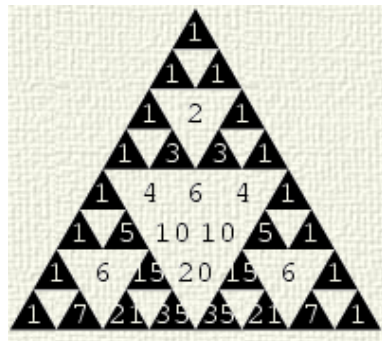


Figura 13: Triángulo de Sierpinski superpuesto al Triángulo de Pascal.[10]

Podemos observar que en cada triángulo eliminado queda un número par, mientras que los números impares se encuentran en los triángulos sombreados. Esto mismo lo podemos ver con los números de pascal en modulo 2, los 1 quedan sobre los espacios sombreados y los 0 en los espacios en blanco o extraídos.

## 2.4. Tapete de Sierpinski

Este fractal es muy similar al Triángulo de Sierpinski, solo que en esta vez se empieza con un cuadrado y este se divide en 9 cuadrados semejantes al original y congruentes entre ellos eliminando el cuadrado interior.

### 2.4.1. Construcción

Ahora construyamos el cuadrado de Sierpinski, comencemos tomando un cuadrado de 1 unidad de medida cualesquiera, a cada lado del cuadrado se debe dividir en tres partes iguales como lo que ocurría en el Polvo de Cantor, luego unimos los puntos marcados de cada lado con su opuesto dividiendo el cuadrado original en 9 cuadrados semejante al original y congruente entre ellos y además se debe eliminar el cuadrado central de estos. Ahora este proceso de debe repetir infinitas veces para formar el Tapete o Alfombra de Sierpinski como lo muestra la [Figura 14]

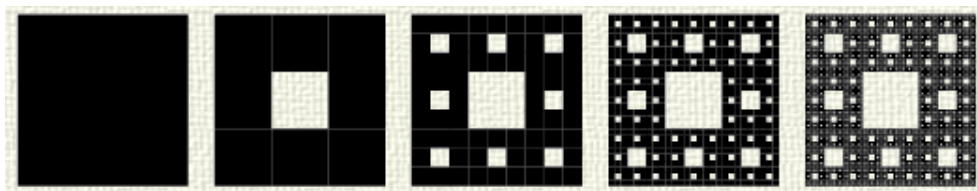


Figura 14: Secuencia del Tapete de Sierpinski, hasta la iteración 4.[10]

### 2.4.2. Características, área y perímetro

Con lo anterior, veamos las cantidades de cuadrados sombreados o no eliminados y sus respectivas medidas para calcular la dimensión de la figura.

El número de cuadrados va aumentando de la siguiente manera

$$1, 8, 8^2, \dots, 8^n$$

respectivamente, y cada lado del cuadrado mide

$$1, \frac{1}{3}, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^3, \dots, \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

respectivamente. por lo tanto la dimensión fractal es

$$D = \text{Log}8/\text{Log}3 = 1,8927$$

Este fractal también se puede ver como una generalización del Conjunto de Cantor, trazando un línea vertical u horizontal pasando por el centro. El cual se puede observar la evolución que tiene la figura en las distintas etapas de su iteración y finalmente se obtiene el Conjunto de Cantor.

Además como se vio anteriormente en el Triángulo de Sierpinski en su forma 3D podemos tener una construcción propia de este fractal en 3D con un cubo llamado la Esponja de Menger o Tapete de Sierpinski en 3D, que se muestra en la [figura 15].

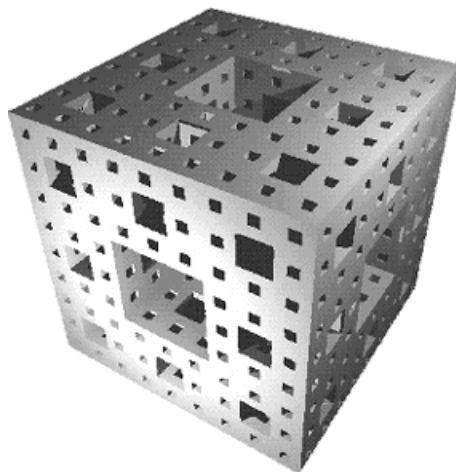


Figura 15: Tapete de Sierpinski en su forma 3D(Esponja de Menger).[10]

---

El Tapete de Sierpinski en 3D, está formado por 6 caras de la forma 2D de la figura anterior, es una forma generalizadora y las iteraciones se deben ir realizando simultáneamente para su construcción. Este fractal tiene una dimensión de 2,7268.

Podemos encontrar muchas figuras relacionadas a Sierpinski ahora solo nombraremos algunas de ellas como el Pentágono y Hexágono, estas figuras están unidas por la misma cantidad de lado de estas como por ejemplo el Pentágono 5 lados y misma cantidad de figuras unidas con sus aristas y así sucesivamente y como es un fractal también tiene una dimensión la cual es 1,7564.

### 2.4.3. Usos

¿Dónde podemos usar, encontrar el Triángulo o el Tapete de Sierpinski? La respuesta a esta pregunta nos la presenta Nathan Cohen, un investigador en el área militar que se encuentra con los fractales. Esto es lo que nos dice: las antenas que tienen una forma fractal poseen la cualidad de tener una muy buena banda ancha y la respuesta de frecuencia multibanda, que se deriva de las propiedades inherentes de la geometría. Además, el tamaño es compacto en comparación a las antenas convencionales, incluso, pueden llegar a ser 4 veces mejor. Simplicidad mecánica y robustez; características de la antena fractal, que se obtienen debido a su geometría, no por la adición de componentes discretos. Finalmente, el diseño de características particulares, contienen multifrecuencias de bandas de rechazo determinadas, así como múltiples bandas de pasos específicos.

Todas las figuras fractales que hemos visto en este capítulo, tienen muchas cosas curiosas respecto a sus áreas y perímetros. Es más, algunas de estas figuras las han llamado “monstruos de la geometría”.

# Capítulo 3

## Conjunto de Julia

Gaston Maurice Julia (1878-1929), matemático francés, nacido en Argelia, se le considera uno de los padres de la geometría fractal -como también a Benoît Mandelbrot-. Fue uno de los primeros en realizar estudios sobre funciones complejas, que generaban conjuntos extraños prácticamente imposible dibujarlos a pulso, debido a que su longitud era infinita. A estas figuras se les denomina Conjunto de Julia.

### 3.1. Dinámica Holomorfa

Antes de estudiar el Conjunto de Julia, debemos conocer un poco sobre Dinámica Holomorfa que estudia los sistemas dinámicos que se presenta a continuación:

*“La Dinámica Holomorfa es una rama de las matemáticas que estudia el comportamiento asintótico de puntos en el plano complejo bajo iteración de funciones holomorfas (por ejemplo, polinomios, funciones trigonométricas, entre otras). Los orígenes de la dinámica holomorfa se remonta a 1920 con los trabajos de Pierre Fatou y Gaston Julia, dando los fundamentos a la teoría de iteraciones”. (Dimensión y conjuntos de Julia).*

Dado un sistema dinámico complejo, se define el Conjunto de Julia asociado a  $f$ ,  $J(f)$ , como el conjunto de puntos periódicos repulsivos.

Existen varias técnicas asociadas a cada sistema dinámico (dependiendo de la función  $f$ ). Vamos a describir fundamentalmente la determinación de los Conjuntos de Julia asociados a los sistemas dinámicos complejos cuadráticos, que son los basados en la función  $f(z) = z^2 + c$ , siendo  $c$  un número complejo.

## 3.2. Atractor de Julia

Los matemáticos franceses Pierre Fatou (1878-1929) y Gaston Julia, a principios del siglo XX, fueron capaces de develar propiedades básicas de la iteración de funciones polinómicas complejas.

Los trabajos de Julia y Fatou, estuvieron motivados por un problema propuesto por el matemático británico Sir Arthur Cayley, que consistía en encontrar en cuencas de atracción de los ceros del polinomio  $z^3 - 1 = 0$  en el plano complejo por el método de Newton. Las soluciones (ceros) del polinomio son:  $\{1, e^{2\pi/3}, e^{4\pi/3}\}$ . Como ya sabemos calcular, el método de Newton para esta ecuación, nos proporciona la siguiente función iterada.

$$Z_{n+1} = Z_n - \frac{Z_n^3 - 1}{3Z_n^2}$$

Cayley, pretendía responder a la pregunta dónde terminaría la iteración infinito de un punto,  $Z_0$  arbitrario. Recordemos que el conjunto de puntos  $Z_0$  que desemboca asintóticamente, en una raíz que se denomina cuenca de esa raíz. Esta actúa como atractor para toda su cuenca. Como ya hemos visto las fronteras de las cuencas de atracción se mostraba de una complejidad geométrica enorme.

A partir de estos trabajos, Julia intuyó que todo un universo matemático se habría ante él, al estudiar con una nueva mirada los sencillos polinomios de grado 2. Ciertamente, fue uno de los pioneros en sistemas dinámicos.

Ahora vamos a mostrar algunas nociones breves de los sistemas dinámicos, para que se pueda comprender de una manera sencilla la estructuras de los fractales con una base compleja, entendiendo sus imágenes generadas en los programas computacionales.

Se entenderá como sistema dinámico el par  $(X, f)$ , donde  $X$  es un conjunto distinto del vacío y  $f$  una aplicación  $f : X \rightarrow X$ . Una órbita de  $X$  será la sucesión de valores obtenidos a partir de  $x$ .

Ahora por aplicación sucesiva de la función  $f$ , i, e:

$$\{f^n X\}_{n \rightarrow \infty} = \{x, f(x), f^2(x), f^3(x), \dots\}$$

Tomemos como primer ejemplo la función compleja  $f : C \rightarrow C$ ,  $Z \rightarrow Z^2$ . Es decir, estudiaremos su iteración.

$$Z_{n+1} = Z_n^2$$

Utilizaremos ahora, la notación polar para visualizar mejor lo que va a ocurrir con cada punto en nuestra iteración. Así, un número complejo quedará representado por su módulo  $r$  y su argumento  $q$ :

$$Z = re^{iq}$$

Recordemos ahora el teorema de Moire, que nos permitirá fácilmente encontrar la potencia de un Número Complejo:

$$Z^m = (r \cdot e^{iq})^m = r^m \cdot e^{imq}$$

Esto nos ayudará a determinar la forma económica del comportamiento asintótico, a largo plazo en nuestra función iterada. Si comenzamos con  $Z = re^{iq}$  en el paso  $m$ -ésimo de la iteración:

$$Z_m = Z^{2m} = (r \cdot e^{iq})^{2m} = r^{2m} \cdot e^{i2mq}$$



Figura 14: Atractor del Conjunto de Julia.[10]

Si comenzamos con un Número Complejo de módulo  $r < 1$ , sucesivamente el módulo irá disminuyendo hasta tomar el valor  $r = 0$  para  $m$  infinito. Al contrario, si  $r > 1$  el módulo aumentará exponencialmente, tendiendo a infinito. Finalmente, en el caso de la frontera  $r = 1$ , mantendrá en un círculo de radio 1 sobre el plano complejo. De modo que todos los valores posibles del plano Complejo pertenecen a uno de estos dos conjuntos (Véase en figura 14):

- a) Escapan al infinito: Conjunto de escape E.
- b) Pertenece recluidos en una región finita: Conjunto prisionero P.

Ambos conjuntos pueden ser interpretados como cuencas de atracción: E es una cuenca del infinito y P exceptuando la frontera  $r = 1$  (que separa las cuencas) es la cuenca de atracción del atractor  $r = 0$ . Justamente la frontera entre cuencas, es lo que se denominará como Conjunto de Julia. A quién, computacionalmente se le dará colores o en blanco y negro, siendo E blanco y P negro esto mismo pasará con el Conjunto de Mandelbrot. En otras palabras, los valores  $Z$  que son invariantes frente a la iteración, constituyen el Conjunto de Julia o Conjunto J, de forma abreviada. De modo que para esta ecuación

de iteración el Conjunto J consiste en un círculo de radio unidad. Pero Julia centró su trabajo en una familia de funciones cuadráticas:

$$F_C(Z) = Z^2 + C$$

donde tanto Z como C son Números Complejos. Fijado el parámetro C establecemos una función cuadrática en concreta.

Observamos que al trabajar funciones Complejas, es equivalente a trabajar con mapas bidimensionales. En este caso, la familia de funciones cuadráticas es equivalente al mapa bidireccional:

$$f : (x, y) \rightarrow (x^2 - Y^2 + a, 2xy + b)$$

donde

$$Z = x + iy = (x, y) \text{ y } C = a + b = (a, b)$$

Así, el mapa cuadrático de números Complejos puede ser estudiado como una familia de transformaciones en el plano Complejo.

Hasta ahora, hemos visto el caso más sencillo de  $c = 0$ . Repetimos que el Conjunto de escape es:  $E_C = Z : r \rightarrow \infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$  y el Conjunto prisionero como:  $P_c = Z : Z$  no pertenece a  $E_C$  es decir, el conjunto complementario de  $E_c$ .

### 3.2.1. Conjunto de Julia con C distinto

Ahora veremos distintas imágenes del Conjunto de Julia para distintos valores de C como lo muestra la imagen 17



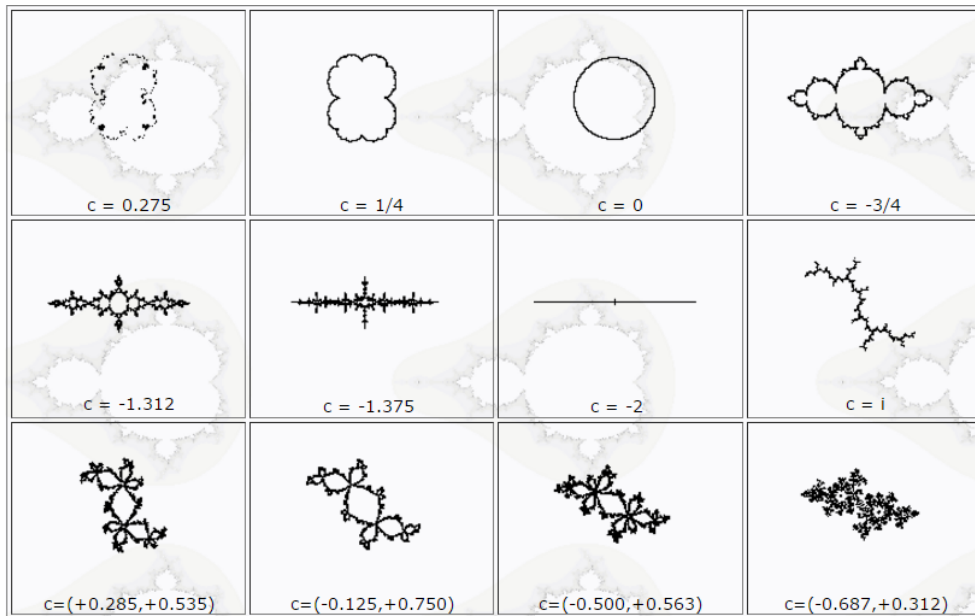


Figura 17: Conjunto de Julia. extraído en [10].

Como podemos ver en la imagen anterior, se nos muestra el Conjunto de Julia con distintos valores de  $C$  en los Complejos, con cada  $C$  el conjunto es único. En la década de los 80 recién se pudieron observar estas figuras, exceptuando  $c = 0$  puesto que es una circunferencia, y todo gracias al avance de la tecnología en los ordenadores.

Se puede apreciar que cuando  $c$  distinto 0, el Conjunto de Julia es autosimilar. Además este conjunto se puede categorizar en conexos e inconexos, siendo la primera y la última imagen de conjuntos desconexos y el resto conexos.

Algunas figuras de las presentadas, reciben distintos nombres, asemejándose a figuras como lo son cuando  $c = 1/4$  como un brócoli,  $c = 0$  una circunferencia,  $c = i$  como dendritas, o como el conejo de Douady entre otras.

El Conjunto de Julia presenta las siguientes propiedades:

- Es no vacío.
- Es un Conjunto invariante hacia delante y hacia atrás.
- Es acotado y cerrado.
- Tiene interior vacío y no tiene puntos aislados (se dice perfecto).

## Capítulo 4

# Conjunto de Mandelbrot

Luego de revisar el Conjunto de Julia con su iteración de funciones complejas, con Benoît nos volvemos a encontrar con estas iteraciones. El Conjunto de Mandelbrot o Conjunto M es considerado como el objeto geométrico más complicado creado por el hombre, claro que usando las herramientas tecnológicas. Igual como en el Conjunto J, la frontera que delimita el objeto en el plano complejo es un fractal, siendo tan complicado que su dimensión  $D$  es igual a 2. Este conjunto se puede crear en distintos programas como el Fractint, del cual se obtendrán algunas imágenes recopiladas en distintos documentos.

### 4.1. Características

La siguiente imagen muestra el fractal original de Mandelbrot, el cual fue presentado a la comunidad científica a fines de los años 70, hay que tener en consideración que la computación de esa época no es como la de hoy en día, que disponemos de imágenes con mayor calidad.

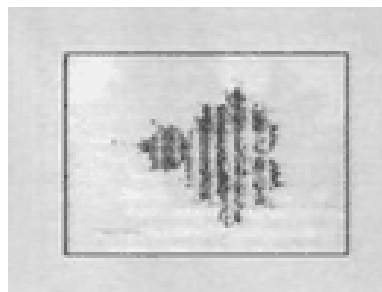


Figura 18: Conjunto de Mandelbrot original [10].

Ahora, en el Conjunto de Mandelbrot no estudiaremos tan profundo como lo hicimos con el Conjunto de Julia, pero si vamos a estudiar su gráfica y cuál es la relación que tiene

con el conjunto anterior.

Tomemos una imagen de buena calidad del Conjunto M y la vamos ampliando. Nos encontramos que la figura inicial se vuelve a repetir en diferentes escalas. Podríamos decir coloquialmente mini-mandelbrot, aclarando que no son claramente idénticas a la anterior o la que se encuentran cerca de ellas, pero si son todas semejantes entre sí. Volvemos a ampliar y nos volvemos a encontrar con lo anterior descrito, lo cual podemos ver en la siguiente secuencia de imágenes.

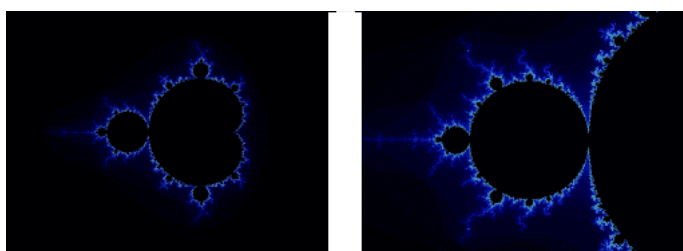


Figura 19: Figura de la izquierda original, de la derecha aplicada un zoom.[10]

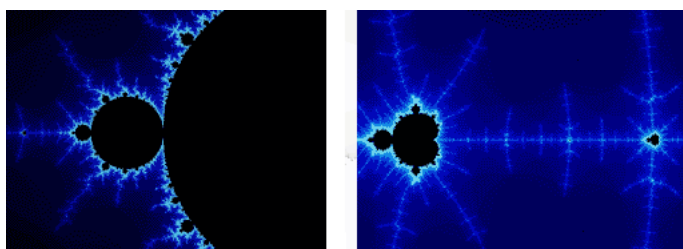


Figura 20: Figuras aplicadas el zoom a la anterior.[10]

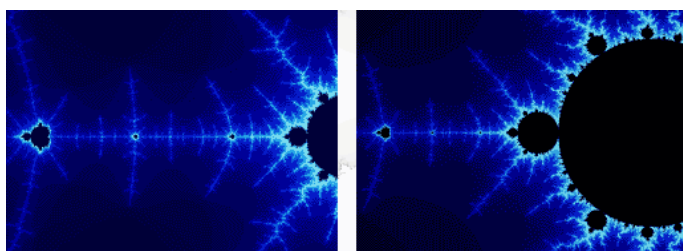


Figura 21: Figuras aplicadas el zoom a la anterior.[10]

## 4.2. Relación con el Conjunto de Julia

Ahora podemos hacer una primera comparación con el Conjunto de Julia, que está relacionada con su autosimilitud estricta, mientras que el Conjunto de Mandelbrot no lo es

(cuasi-autosimilitud). Todo esto va dependiendo de la zona y del grado de profundidad que se le de al objeto fractal.

Vamos a mostrar de una forma muy general de como es la construcción de este conjunto, puesto que para poder dibujarlo, se necesita de un ordenador. El proceso de su iteración es el siguiente:

$$Z_{n+1} = Z_n^2 + C$$

donde  $Z$  y  $C$  son números complejos. Debo dejar claro que el Conjunto de Julia es la iteración de una función, mientras que el Conjunto de Mandelbrot es la iteración de infinitas funciones. Además, sabemos que el valor  $c$  determina si el conjunto es conexo o desconexo, debemos estudiar qué valor de  $c$  corresponde a cada uno de ellos.

*“Para determinar que los valores de  $c$  producen conjuntos conexos y cuales desconexos parece que no nos queda más remedio que determinar cada conjunto iterando todos los puntos del plano complejo para cada función  $f_c = z^2$ . Afortunadamente se puede demostrar que basta con iterar el  $(0,0)$  para cada función  $f_c$  y la órbita determina la conectividad del Complejo.*

*Si la órbita del origen (condición inicial  $z_0 = (0,0)$ ) para la iteración de  $f_c$  no escapa al infinito, entonces:*

- (1) o bien pertenece al Conjunto de Julia de  $f_c$*
- (2) o bien está atrapado”*

Como conclusión, se verá en el primer caso, el Conjunto de Julia con su forma dendrítica; y el segundo caso, será topológicamente hablando de un círculo, por lo que el conjunto será conexo.

Por lo tanto, el conjunto de todos los valores de  $c$ , tales que sus correspondientes Conjunto de Julia son conexos, forman en el plano complejo el Conjunto de Mandelbrot, siendo el Conjunto de Julia, un sub-conjunto de este.

A continuación, se mostrará una imagen del Conjunto de Mandelbrot, mostrando el lugar del perímetro donde se encuentra el conjunto conexo de Julia, y donde se presentan las formas más relevantes de su frontera. Todas estas imágenes, son solo aproximaciones, porque la calidad de las imágenes se pierde.

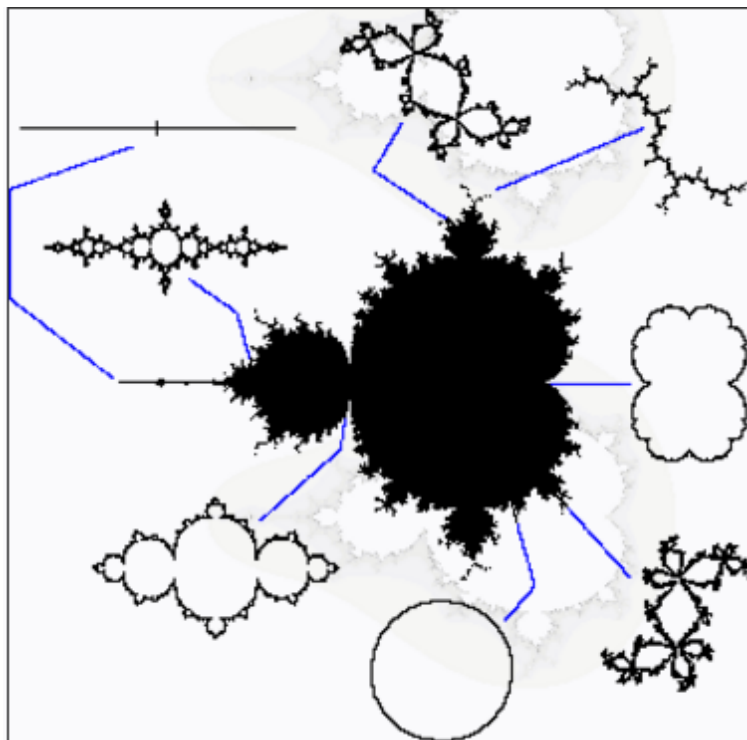


Figura 22: Conjunto de Julia en el Conjunto de Mandelbrot.[10]

Hasta ahora hemos visto la gran complejidad que nos tiene el Conjunto de Mandelbrot *“Para los matemáticos realistas”, el conjunto de Mandelbrot es una prueba de sus concepciones filosóficas: el conjunto es tan complejo que no podemos decir que lo hayamos inventado, sino descubierto. A eso se refieren algunos matemáticos cuando hablan de la realidad” del Conjunto de Mandelbrot o del número  $\pi$ ”*.

La matemática es tan abstracta, que aún así puede regir el orden del universo con esta nueva geometría que, gracias a los avances tecnológicos, ha podido salir adelante, e incluso, llegando a las aulas.

*“En líneas generales, se puede decir que la iteración se estudio en tres estadios. El primero, que se ocupaba del caso complejo, estuvo dominado por Pierre Fatou (1878-1929) y Gaston Julia (1893-1978). Sus publicaciones son obras maestras del análisis complejo clásico muy admiradas entre los matemáticos, aunque demasiado difíciles . . . El consiguiente resurgir de este campo de investigación hace que las propiedades de iteración sean esenciales para la teoría de los fractales. El hecho de que los resultados de Fatou-Julia no progresaran por sí solos hasta convertirse en el origen de esta teoría nos sugiere que incluso el análisis clásico necesita de la intuición para avanzar, y que los ordenadores pueden ser útiles para este fin.*

*El estadio intermedio incluye los estudios de P.J Myrberg sobre iteración de aplicaciones cuadráticas reales (sobre  $\mathbb{R}$ ), por ejemplo Myrberg (1962), Stein y Ulam (1964), y Brolin (1965).*

*El estadio actual ignora en gran medida el pasado, y se concentra en las aplicaciones de  $[0,1]$  en sí mismo, como se estudia en Gurel y Rossler (1979), Helleman (1980), Collet y Eckman (1980), Feigenbaum (1981), y Hofstadter (1981)".*  
(Benoît, 2006, p.258)

Gracias a todos estos trabajos sobre la iteración hemos podido llegar a trabajar con los fractales.

Nosotros conocemos distintos conjuntos de Números, los cuales son:  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{I}$  y  $\mathbb{C}$ . Pero no son todos los conjunto numéricos que se conocen. Ahora veremos brevemente, el conjunto de los Cuaterniones, que son números complejos en cuatro dimensiones. El cual se expresa de la siguiente forma:

$$q = a + ib + jc + kd$$

donde a, b, c y d son números reales, mientras que 1, i, j y k son la base vectorial. Sabemos que los números complejos tienen como base el 1 e i, pero en los cuaterniones solo se agregan dos vectores unitarios j y k perpendicularmente entre sí.

El álgebra de los cuaterniones está bien definida, y gracias a esto, este nuevo conjunto numérico lo podemos ocupar en las fórmulas generales de los Conjuntos de Mandelbrot y Julia, claro que las representaciones son más complejas de obtener en los ordenadores. No es suficiente el plano para poder representarla, debido que se necesita de un hiperespacio de cuatro dimensiones para poder graficarla. En este hiperespacio, cada punto representa a un cuaternión. Así el conjunto obtenido con este conjunto numérico, sería de cuatro dimensiones y a partir de un punto del hiperespacio, podemos generar un Conjunto de Julia también de cuatro dimensiones, algo muy similar cuando se trabaja solo con dos y con el Conjunto Complejo.

# Capítulo 5

## Fractales y el Caos

El Caos o sistema caótico, a finales del siglo XX va teniendo un gran auge, paralelamente a la geometría fractal. Ambas se van convirtiendo en un concepto cada vez más extendido por todas las ciencias, dado que gracias a estas, el conocimiento encontró nuevos horizontes.

### 5.1. Definiciones del caos

La palabra caos, ha sido asociada a la palabra desorden, pero buscando en la DRAE aparecen tres definiciones 1) Estado amorfo e indefinido que se supone anterior a la ordenación del cosmos, 2) Confusión, desorden 3) Fis y mat. Comportamiento aparentemente errático e impredecible de algunos sistemas dinámicos deterministas con gran sensibilidad a las condiciones iniciales.

La teoría del caos es algo aparentemente contradictorio, puesto que la palabra teoría se refiere al uso de un conjunto de leyes que sirven para ordenar los conocimientos de ciertos fenómenos, lo que nos lleva a una contradicción.

Por lo anterior, ¿qué sentido tiene en hablar sobre una teoría del desorden o del caos? La respuesta a esta pregunta es afirmativa. Tiene sentido porque esta teoría viene a resolver y mostrar que efectivamente existe un orden subyacente en los aparentemente más desordenados e impredecibles de los comportamientos naturales.

*“El concepto de caos, con su inevitable referencia al orden subyacente en el desorden resultó muy atractivo desde el primer momento no sólo a la comunidad científica, sino al público en general” (Al-Majdalawi, 2005, p. 34)*

## 5.2. Efecto Mariposa

Esto nos lleva al “efecto mariposa”, que es sólo la punta del iceberg de la Teoría del Caos, que en este caso es la relación entre causa y efecto que puede ser visto desde dos puntos de vista: cualitativo y cuantitativo. Desde la primera perspectiva, las relaciones causa-efecto puede ser concebidas de varias maneras:

- a) Como vínculos unidireccionales: A causa a B, B causa a C, etc. Pero los efectos resultantes no vuelven a ejercer influencia sobre sus causas originales.
- b) Como eventos independientes: según esta concepción no habría ni causas ni efectos. Cada acontecimiento ocurriría al azar en independiente de los otros.
- c) Como vínculos circulares: A causa B, y B a su vez causa a A, es decir, el efecto influye a su vez sobre la causa, como resultado de los cuales ambos acontecimientos son a la vez causa y efectos. Se trata de los llamados círculos de retroalimentación, que pueden ser negativos o positivos.

Lo anterior, está relacionado claramente con el efecto mariposa, y a su vez, con la famosa frase “el batir de las alas de una mariposa puede provocar un huracán en otra parte del mundo”, esta frase puede ser ocupada en distintas materias, como en la psicología: “las cosas que hagamos hoy influirán en nuestro futuro”.

Relacionemos los tres puntos anteriores del efecto mariposa con la teoría del caos, en la medida que existan procesos aleatorios, el cual se puede adoptar a la postura (b), pero en los que ciertos procesos no son caóticos, sino ordenados, sosteniendo que si existen vínculos causales como los círculos de retroalimentación, como en la postura (c).

## 5.3. Teoría del Caos

Entremos ahora en la Teoría del Caos, “*Esta teoría puede ser definida como el estudio cuantitativo del comportamiento dinámico aperiódico, mostrado por sistemas deterministas no lineales*” (Al-Majdalawis, 2005, p.34)

Tengo que mencionar que el caos, alude a sistemas dinámicos, es decir, son sistemas que muestran variaciones a través del tiempo. Si estos cambios no mantienen ninguna de las propiedades o variables en sus distintas repeticiones, la podemos definir como sistemas dinámico aperiódicos, porque no poseen regularidad aparente.

Todo esto resulta muy admirable, puesto que como dijimos anteriormente, la Teoría del Caos teniendo un comportamiento aperiódico la podemos describir matemáticamente en conjuntos sencillos, de ecuaciones que manifiestan comportamientos complejos o impredecibles.



Recordemos que cuando vimos el Conjunto de Julia, vimos un poco sobre sistemas dinámicos. Esto nos puede decir que existe una relación entre la geometría fractal y el caos, relación que veremos al final de este capítulo.

Entrando en el caos, nos encontramos con el caos determinista. Como la palabra lo dice, determinar que se refiera a predecir el futuro en este caso de un sistema, teniendo un sistema anterior.

*“El impacto que la formalización del comportamiento caótico ha tenido en la ciencia de nuestro tiempo es consecuencia del hecho de que vino a romper la concepción de la naturaleza que se tenía desde los trabajos de Newton (1643-1727) y Laplace (1749-1827). Las aportaciones de Isaac Newton están estrechamente asociadas con el establecimiento del determinismo en la ciencia moderna, mientras que el segundo filósofo, físico y matemático francés enunció la máxima determinista por excelencia al afirmar que el comportamiento futuro de cualquier sistema podría predecirse si se conociera con suficiente exactitud los valores de las variables, paramétricas y leyes que controlan un sistema” (Al-Majdalawi, 2005, p.35).*

Entre ambos podemos decir que es posible predecir el comportamiento futuro, e incluso, el pasado de los sistemas.

Con lo anterior vemos que el comportamiento de un sistema no es siempre lineal y esto ocurre cuando los efectos no son proporcionales a las causas.

## 5.4. El atractor de Lorenz

*“Fue Edward Norton Lorenz, que estaba trabajando en el MIT (Massachusetts Institute of Technology) en un modelo extremadamente simplificado de la convección atmosférica cuando lo describió casualmente en 1963. Un atractor extraño con una forma de alas de mariposa que jamás se cortaba a sí mismo. Un complejo infinito de superficies separadas. Un insólito espectáculo geométrico” [11].*

El diseño del atractor de Lorenz es un modelo matemático basado en 3 ecuaciones diferenciales, conocidas en la física de fluidos, a continuación el modelo:

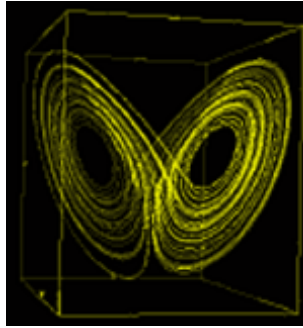


Figura 23: Atractor de Lorenz.[10]

Modelo simplificado de Lorenz:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \delta \cdot (y - x) \\ \frac{dy}{dt} &= r \cdot x - y - x \cdot z \\ \frac{dz}{dt} &= x \cdot y - b \cdot z\end{aligned}$$

Este tipo de ecuaciones se estudian en la rama de las matemáticas denominada cálculo. Pero para calcular las ecuaciones diferenciales es recomendable usar computadores en los casos más complejos. Las ecuaciones diferenciales tienen distintos resultados y estos están directamente relacionados con las condiciones iniciales de las ecuaciones como lo hemos visto anteriormente, que las condiciones iniciales afectan en sus consecuencias como el efecto mariposa.

Como podemos ver en las ecuaciones diferenciales las 3 variables están en por lo menos dos ecuaciones esto nos muestra que son variables dependientes una de otras, y al variar una la otra se verá afectada.

Imaginemos que tenemos 3 variables (temperatura, velocidad del viento y humedad) que se encuentran en los ejes al formar un cubo. Vamos a un vértice superior derecho donde hace frío, el viento sopla fuerte y está lloviendo las 3 variables en su extremo, mientras que en el vértice opuesto ocurre todo lo contrario con las variables hace claro, no corre viento y nula humedad. Ahora ubiquémonos en un punto de ese cubo con una temperatura, velocidad del viento y humedad, en condiciones normales si tomamos el recorrido de todas estas variables en condiciones normales no podemos predecir el comportamiento del recorrido nos puede expresar el atractor de Lorenz.

## 5.5. Propiedades del Caos

Además de las características, el caos tiene algunas propiedades generales de las cuales sólo veremos 3 para poder comprender mejor este concepto.

### 5.5.1. Extrema sensibilidad a las condiciones iniciales

Esta característica es la más significativa, como esta basado en los dos conceptos que vimos anteriormente como el efecto mariposa y el atractor de Lorez siendo fundamental para la evolución de esta teoría.

*“Este fenómeno, común en la Teoría del Caos, se conoce sensibilidad a las condiciones iniciales: basta un pequeño cambio en estas para que el comportamiento a largo plazo sea totalmente diferente. Y puesto que es imposible medir con tal alto grado de precisión ninguna variable, la conclusión es que en este tipo de sistemas es imposible predecir la evolución futura, particularmente a largo plazo”.*[14]

### 5.5.2. Ubicuidad

*“La ubicuidad se refiere a la presencia del caos en gran número de sistemas. Esta propiedad está presente no sólo en el caos sino también en los fenómenos oscilatorios (perturbación periódica). La ubicuidad implica que “el caos se halla por doquier”, como en el humo que se deshace; en volutas; en la bandera que flamea al viento; el grifo goteante que va de un chorrito uniforme a uno sin orden ni concierto; en el tiempo atmosférico; el aeroplano durante el vuelo; los automóviles que se arraciman en una autopista; el petróleo de los oleoductos subterráneos, los sistemas biológicos de comportamiento no lineal, etcétera”.*[13]

A pesar de su Ubicuidad el caos determinista lleva muy poco tiempo, dado que tiene una directa relación con la tecnologías como lo son los computadores. Los cálculos que se deriban son muy tediosos y repetitivos y es por esta razón lo anterior.

### 5.5.3. Existencia de un camino universal hacia el caos

Podemos encontrar la tercera propiedad como Universalidad como se presenta en el siguiente fragmento:

*La universalidad denota que el comportamiento caótico responde a unas pautas universales y perfectamente determinadas. Para Mitchell Feigenbaum, tenido como el descubridor de esta propiedad del caos, la universalidad significa que sistemas diferentes se portan de manera idéntica, en el punto de transición del orden al caos,*

*porque en los sistemas no lineales hay estructuras siempre iguales, si se consideran adecuadamente, o sea como estructuras escalares, en las que se ve “cómo se relacionan los grandes detalles con los pequeños”, pues “las cosas escalares son lo único que llega a ser, en algún sentido, universal”.*

## 5.6. Relación de la Geometría Fractal y la Teoría del Caos

Caos no es sinónimo de fractal, aunque se habla cotidianamente sobre la relación de estos e incluso hay trabajos que ilustran imágenes del caos con imágenes de fractales. La geometría fractal como la hemos visto, describe los sistemas caóticos que encontramos en la naturaleza, mientras que los sistemas caóticos no son aleatorios, ni desordenados, solo lo parecen.

*“Las palabras claves del caos son: impredecibilidad, sensibilidad a las condiciones iniciales, en tanto que el grupo de ecuaciones determinístico describe el fenómeno. Las palabras claves de los fractales son: autosimilitud e invarianza en la escala. Muchos fractales no son caóticos como el Triángulo de Sierpinski, o las curvas de Koch. Aun así, partiendo de bases distintas, los dos ámbitos tienen mucho en común: muchos fenómenos caóticos exhiben estructuras fractales (en los atractores extraños por ejemplo...; la estructura fractal también es obvia en fenómenos caóticos con sucesivas bifurcaciones como las ecuaciones logísticas o de población)”. [14].*

Es por eso que podemos relacionar tanto el caos con los fractales, el fractal se manifiesta en varios aspecto al caos y podemos encontrar distintas características de uno en el otro como la autosimilitud, característica de los fractales o al revés cuencas de atracción o diagramas de bifurcaciones.

Hasta no hace mucho tiempo había un código impregnado en la comunidad científica que en sistemas sencillos se comportan de manera sencilla y que el comportamiento complejo era el resultado de causas similares(complejas). Pero la aparición de la Teoría del Caos y la Geometría Fractal vienen a desmontar ese prejuicio: los sistemas sencillos pueden dar lugar a comportamientos complejos o sencillos. Además los científicos han podido comprender cómo sistemas que anteriormente se creían totalmente caóticos, ahora exhiben patrones predecibles.

# Conclusiones

La geometría fractal es una geometría joven, que cumple con ciertas condiciones que posee algunas características esenciales para poder ser construida. Además, existen distintos tipos y formas ocupando los números complejos, como base en algunas estructuras.

Existen distintos tipos de figuras(montrous) y dimensiones(valores reales entre 0 y 3). Esta geometría se diferencia de la euclidiana, por no cumplir todos sus postulados.

Tanto el Conjunto de Julia Y Mandelbrot, son construidos por funciones complejas e incluso el C.M. es formado por cuaterniones, un nuevo conjunto numérico que ayuda en su construcción.

Existe una relación entre esta geometría y la teoría del caos, ya que ambas comparten algunas propiedades y pueden dar solución a problemas que no los tenían.

La geometría fractal es una geometría que viene a solucionar el dilema de cómo se comporta la naturaleza. Esta geometría, es interdisciplinaria, porque abarca distintas áreas, siendo gran parte de ellas muy distintas. Con ella se pueden introducir o enseñar distintos contenidos en la enseñanza media o superior como lo son sucesiones, series, perímetros, áreas, dimensiones etc.

# Bibliografía

- [1]Mandelbrot, Benoît. Los objetos fractales. Forma, azar y dimensión. Tusquets editores S.A. Barcelona. 2006.
- [2]Mandelbrot, Benoît. La geometría fractal de la naturaleza. Tusquets editores S.A. Barcelona. 2006.
- [3]Braña, Juan Pablo. Introducción a la geometría fractal. Buenos Aires, Argentina 2003.
- [4]Rivera Henao, Eduard; López Varona, Ricardo. Geometría fractal y transformada de Fourier. Scientia ET Technica vol XVI núm. 48, Agosto, 2011, pp 269-274. Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira, Colombia.
- [5]Mandelbrot, Benoît. La geometria fractal de la naturaleza. Tusquets editores S.A. Barcelona 1997.
- [6]Cohen, N. (En línea) “fractals new era in military antenna design”. *defense electronics*. Recuperado de <http://defenseelectronicsmag.com/site-files/defenseelectronicsmag.com/files/archive/rfdesign.com/mag/508RFDSF1.pdf> // [consultado el 18 de octubre del 2016].
- [7]“Exploring chaos. A guide to the new science of Disorder”Nina Hall. 1993. norton. new york.
- [8]Fractals, chaos, power laws minutes from aninfinite paradise. Manfred Schroeder. 1991. freeman. new york.
- [9] How nature works. the science of self-organized criticality. Per Bak. 1997. oxford university press. tokyo.
- [10]Agea, A. ,Luque, B. (s.f.). *Fractales en la red*. Recuperado en <http://www.dmae.upm.es/cursofractales/> [Consultado el 27 de octubre de 2016].

---

[11]Argote, J. (En línea) “peano”.*Mundo fractal*. Recuperado en <http://www.asociacionceat.org/aw/2/peano.htm> / [Consultado el 03 de diciembre del 2016].

[12]Sanchez, D. Picazo, B. Cabrera, A. Murillo, M. Cabrera, J.(En línea)*Revista española de Cardiología* Recuperado en <http://www.revespcardiol.org/es/el-triangulo-koch-el-nodo/articulo/13151002/> / [Consultado el 03 de diciembre del 2016].

[13] Borjón, José Jesús. Caos, orden y desorden en el sistema monetario y financiero internacional. Plaza y Valdes PyV. México. 2002.

[14] Al-Majadalawi. Fractales. 2006.