第4章　数值微分与数值积分

陈路　CHENLU.SCIEN@GMAIL.COM

201800301206

1. 分析讨论题

问题 1.1

推导复合(Composite)梯形公式及其误差估计.

解:

定理 1

复合梯形公式：设等距节点$[x_k, x_{k+1}], k = 0, 1, \cdots, M$将区间$[a, b]$划分为宽度为 $h = (b - a)/M$的M个子区间$x_k = a + kh$.M个子区间的组合梯形公式

$$T(f, h) = \frac{h}{2}(f(a) + f(b)) + h\sum_{k=1}^{M-\mathrm{r}} f\left(x_k\right)$$

是区间$[a, b]$上$f(x)$积分的逼近，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx T(f, h)$$

证明：

在每个子区间$[x_{k-1}, x_k]$上应用梯形公式

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_1)) \tag{1}$$

利用子区间上积分的可加性:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{M}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{M}\frac{h}{2}\left(f\left(x_{k-1}\right) + f\left(x_k\right)\right)$$

证毕. ■

定理 2

复合梯形公式的误差分析：设区间$[a, b]$划分为宽度为$h = (b - a)/M$的M个子区间$x_k =$

$a+kh$，组合梯形公式

$$T(f,h)=\frac{h}{2}(f(a)+f(b))+h\sum_{k=1}^{M-\mathrm{r}} f\left(x_k\right)$$

是对积分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=T(f,h)+E_T(f,h)$$

的逼近. 如果$f\in C^2[a,b]$, 则存在值$c, a<c<b$, 使得误差项$E_T(f,h)$具有形式

$$E_T(f,h)=\frac{-(b-a)f^{(2)}(c)h^2}{12}=O\left(h^2\right)$$

证明：

首先确定公式在区间$[x_0,x_1]$上的误差项. 对拉格朗日多项式$P_1(x)$及其余项进行积分得：

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx=\int_{x_0}^{x_1} P_1(x)dx+\int_{x_0}^{x_1}\frac{\left(x-x_0\right)\left(x-x_1\right)f^{(2)}(c(x))}{2!}dx$$

在区间$[x_0,x_1]$上, 项$\left(x-x_0\right)\left(x-x_1\right)$符号不变, 而$f^{(2)}(c(x))$连续. 因此由积分第二中值定理知: 存在值$c_1$, 使得

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx=\frac{h}{2}\left(f_0+f_1\right)+f^{(2)}\left(c_1\right)\int_{x_0}^{x_1}\frac{\left(x-x_0\right)\left(x-x_1\right)}{2!}dx$$

对上式右端的积分进行变量代换$x=x_0+ht$:

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx&=\frac{h}{2}\left(f_0+f_1\right)+\frac{f^{(2)}\left(c_1\right)}{2}\int_0^1 h(t-0)h(t-1)hdt\\&=\frac{h}{2}\left(f_0+f_1\right)+\frac{f^{(2)}\left(c_1\right)h^3}{2}\int_0^1\left(t^2-t\right)dt\\&=\frac{h}{2}\left(f_0+f_1\right)-\frac{f^{(2)}\left(c_1\right)h^3}{12}\end{aligned}$$

将所有区间$[x_{k-1},x_k], k=1,2,\cdots,M$上的误差相加，得：

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx&=\sum_{k=1}^{M}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx\\&=\sum_{k=1}^{M}\frac{h}{2}\left(f\left(x_{k-1}\right)+f\left(x_k\right)\right)-\frac{h^3}{12}\sum_{k=1}^{M} f^{(2)}\left(c_k\right)\end{aligned}$$

第一个和式为复合梯形公式$T(f,h)$. 在第二项中,将一个h因子用等式$h=(b-a)/M$替换,得:

$$\int_a^b f(x)dx=T(f,h)-\frac{(b-a)h^2}{12}\left(\frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M} f^{(2)}\left(c_k\right)\right)$$

括号中的项可看成是2阶导数的一个均值,因此可用$f^{(2)}(c)$替换,从而得到

$$\int_a^b f(x)dx = T(f,h) - \frac{(b-a)f^{(2)}(c)h^2}{12}$$

证毕. ■

问题 1.2

推导基于误差控制的逐次半积分梯形公式及其误差估计.

解:

定义 1

梯形公式序列: 定义$T(0)=(h/2)(f(a)+f(b))$为步长$h=b-a$的梯形公式. 对于所有$Je1$, 定义$T(J)=T(f,h)$, 其中$T(f,h)$为步长$h=(b-a)/2^J$的梯形公式.

定理 3

由$T(0)=(h/2)(f(a)+f(b))$开始，梯形公式序列$T(J)$可由以下递归公式生成：

$$T(J)=\frac{T(J-1)}{2}+h\sum_{k=1}^{M} f\left(x_{2k-1}\right), \quad J=1,2,\cdots$$

其中，$h=(b-a)/2^J$, $x_k=a+kh, k=0,1,\cdots,M$.

证明：

对偶数节点$x_0<x_2<\cdots<x_{2M-2}<x_{2M}$，使用步长为$2h$的梯形公式：

$$T(J-1)=\frac{2h}{2}\left(f_0+2f_2+2f_4+\cdots+2f_{2M-4}+2f_{2M-2}+f_{2M}\right)$$

对全体节点$x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{2M-1}<x_{2M}$，使用步长为$h$的梯形公式：

$$T(J)=\frac{h}{2}\left(f_0+2f_1+2f_2+\cdots+2f_{2M-2}+2f_{2M-1}+f_{2M}\right)$$

将上式中奇数项和偶数项的和分别累加，得：

$$T(J)=\frac{h}{2}\left(f_0+2f_2+\cdots+2f_{2M-2}+f_{2M}\right)+h\sum_{k=1}^{M} f_{2k-1} \quad =\frac{T(J-1)}{2}+h\sum_{k=1}^{M} f\left(x_{2k-1}\right)$$

证毕. ■

问题 2

令$h=(b-a)/3, x_0=a, x_1=a+h, x_2=b$. 请给出积分公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{9}{4}hf\left(x_1\right)+\frac{3}{4}hf\left(x_2\right)$$

的精确度.

解:

由精确度的定义：

一个数值积分公式$Q(f)$的精确度是一个最大的正整数n，使得

$$\int_a^b x^k \mathrm{d}x = Q(x^k), k = 0, 1, \cdots, n.$$

分别令$f(x) = x^0 = 1, f(x) = x, f(x) = x^2, \cdots$

积分得：$\int_a^b x^k \mathrm{d}x = \frac{1}{k+1}(b^{k+1} - a^{k+1})$.

计算过程如表1所示.

Table 1: 积分公式精确度计算过程

k	$f(x)$	$\frac{1}{k+1}\left(b^{k+1} - a^{k+1}\right)$	$\frac{9}{4}hf(a+h) + \frac{3}{4}hf(b)$
0	1	$b - a$	$\frac{9}{4}h + \frac{3}{4}h = 3h = b - a$
1	x	$\frac{1}{2}\left(b^2 - a^2\right)$	$\frac{9}{4}h(a+h) + \frac{3}{4}h(b) = \frac{3h}{4}(3(a+h)+b)\ \frac{b-a}{4}(3a+b-a+b)$ $= \frac{b-a}{4}(2a+2b) = \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}a^2$
2	x^2	$\frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{3}a^3$	$\frac{9}{4}h(a+h)^2 + \frac{3}{4}hb^2 = \frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{3}a^3$
3	x^3	$\frac{1}{4}b^4 - \frac{1}{4}a^4$	$\frac{9}{4}h(a+h)^3 + \frac{3}{4}hb^3 = -\frac{1}{9}ba^3 + \frac{1}{6}b^2a^2 - \frac{1}{9}b^3a + \frac{5}{18}b^4 - \frac{2}{9}a^4$

可见，积分公式$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{9}{4}hf(x_1) + \frac{3}{4}hf(x_2)$的精确度为2.

2. 上机实验题

问题 3.1

自行编制复合梯形公式、Simpson公式的计算程序.

复合梯形公式的代码实现

```
function s = traprl(f, a, b, M)
% Composite Trapezoidal Rule
% Input  - f   the integrand input as string 'f'
%        - a,b upper and lower limits of integration
%        - M   the number of subintervals
% Output - s   the sum of Trapezoidal Rule

h = (b-a)/M;
s = 0;

for k = 1 : (M-1)
  x = a + h*k;
  s = s + feval(f,x);
end
s = h*(feval(f,a) + feval(f,b))/2 + h*s;
```

```

end
```

复合Simpson公式的代码实现

```
function s = simprl(f, a, b, M)
% Composite Simpson Rule
% Input  - f   the integrand input as string 'f'
%        - a,b upper and lower limits of integration
%        - M   the number of subintervals
% Output - s   the sum of Trapezoidal Rule

h = (b-a)/(2*M);
s1 = 0;
s2 = 0;

for k = 1 : M
  x = a + h*(2*k-1);
  s1 = s1 + feval(f,x);
end
for k = 1 : (M-1)
  x = a + h*(2*k);
  s2 = s2 + feval(f,x);
end
s = h*(feval(f,a) + feval(f,b) + 4*s1 + 2*s2)/3;

end
```

问题 3.2

取$h = 0.01$，分别利用复合梯形公式、Simpson公式计算定积分

$$I(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 \exp -\frac{x^2}{2} \mathrm{d}x$$

试与精确解比较，说明两种格式的优劣.

解:

```
function y = f(x)
y = (1/sqrt(2*pi)) * exp(-(x^2)/2);
```

```
syms x;
t = traprl('f',0,1,100);
s = simprl('f',0,1,100);
```

运行上述程序，得:

复合梯形公式求解结果$t = 0.341342729639117$, 复合Simpson公式求解结果$s = 0.341344746070223$, 精确值$r = 0.341344746068543$.

问题 3.3
若取计算精度为10^{-4}，则$h=?$，$n=?$.

解:
I. 考虑使用复合梯形公式的情况
被积函数为$f(x)=\exp(-\frac{x^2}{2})$，其前两阶导数为

$$f'(x)=-x\cdot\exp(-\frac{x^2}{2});f''(x)=(x^2-1)\exp(-\frac{x^2}{2}).$$

区间$[0,1]$上$f''(x)$单调递增，$f''(0)=-1,f''(1)=0$，$|f''(x)|$的最大值在端点$x=0$处取得，从而对$0\le c\le 1$，$|f''(c)|\le|f''(0)|=1$.
代入复合梯形公式误差项得

$$|E_T(f,h)|=\frac{|-(b-a)f^{(2)}(c)h^2|}{12}\le\frac{h^2}{12}.$$

步长h与n满足关系$h=1/n$，代入上式，得：

$$|E_T(f,h)|\le\frac{1}{12\cdot n^2}\le 10^{-4}.$$

解得：$n>28.8675$.
由于n必须为整数，取$n=29$，对应的步长$h=1/n\approx 0.0344827586$.
II. 考虑使用复合Simpson公式的情况
被积函数为$f(x)=\exp(-\frac{x^2}{2})$，其四阶导数为

$$f^{(4)}(x)=(x^4-6x^2+3)\exp(-\frac{x^2}{2}).$$

区间$[0,1]$上$f^{(4)}(x)$单调递减，$f^{(4)}(0)=3,f^{(4)}(1)=-2/\sqrt{e}$，$|f^{(4)}(x)|$的最大值在端点$x=0$处取得，从而对$0\le c\le 1$，$|f^{(4)}(c)|\le|f^{(4)}(0)|=3$.
代入复合Simpson公式误差项得

$$|E_T(f,h)|=\frac{|-(b-a)f^{(4)}(c)h^4|}{180}\le\frac{3h^4}{180}=\frac{h^4}{60}.$$

步长h与n满足关系$h=1/n$，代入上式，得：

$$|E_T(f,h)|\le\frac{1}{60\cdot n^4}\le 10^{-4}.$$

解得：$n>3.5930$.
由于n必须为整数，取$n=4$，对应的步长$h=1/n\approx 0.25$.