数学专业考研笔记

数分高代-结论与真题

作者：谈欣
组织：湖北第二师范学院数学与统计学院

时间：2022/12/31
版本：1.0
自定义：信息

ElegantLaTeX Program

本书参考李扬老师的早期训练营、张祖锦老师的真题，仅供学习用途！

目录

第一章 数分重要命题与结论

1.1 几个很有用的不等式

命题 1.1 (Bernoulli 不等式)

设 $h > -1, n \in N_+$，则有不等式：

$$(1+h)^n \geq 1+nh, \tag{1.1}$$

成立，其中 $n > 1$ 时等号成立的充要条件是 $h = 0$.

推论 1.1 (对 Bernoulli 不等式的补充)

设 $h > -1, n \in N_+$，则有不等式：

$$(1+h)^n \geq 1+\frac{n(n-1)h^2}{2}, \tag{1.2}$$

成立，其中 $n > 1$ 时等号成立的充要条件是 $h = 0$.

这个命题以及推论在求数列极限中是有非常大的作用的，均可由二项式公式轻松推得，杀伤力极强！

命题 1.2 (均值不等式)

设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 为 n 个非负实数，则有不等式：

$$\frac{1}{\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} \leq \frac{a_1+\cdots+a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{{a_1}^2+\cdots+{a_n}^2}{n}}, \tag{1.3}$$

成立，其中等号成立的充要条件时 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

均值不等式链的作用是不言而喻的，在高中就已经接触到的最基本的不等式，在数分高代中依然屡见不鲜！

命题 1.3 (Cauchy-Schwarz 不等式)

对实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 和 $b_1, b_2, \ldots, b_n$ 有不等式：

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {a_i}^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} {b_i}^2} \tag{1.4}$$

推论 1.2 (柯西不等式积分形式)

假设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在闭合区间 $[a, b]$ 上连续，则有不等式：

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leq \int_a^b f(x)^2\,dx \cdot \int_a^b g(x)^2\,dx, \tag{1.5}$$

成立。其中 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是定义在 $[a, b]$ 上的可积函数。

两种形式的柯西不等式，分别对应求和和积分两种情况——这也让我们有了初步的对求和和积分之间建立桥梁的意识，二者在做题时在不同情况下有非常好的效果！

命题 1.4

如果 $0 < x < \frac{\pi}{2}$，则有不等式：

$$\sin x < x < \tan x. \tag{1.6}$$

$\forall x \geq 0$ 有不等式：

$$\sin x \leq x. \tag{1.7}$$

$\forall x \in R$ 有不等式：

$$|\sin x| \leq |x|. \tag{1.8}$$

1.2 基本极限

命题 1.5 (基本极限)

在求极限时有一些常见的极限，称之为基本极限：

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0, \forall \alpha > 0.$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0, \forall |q| < 1.$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \forall a > 0.$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1, \forall a > 0.$
5. $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e.$

命题 1.6 (重要极限)

两个重要极限也是非常重要的：

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$
2. $\lim\limits_{x\to\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e.$

从此以后遇到的我认为有意义、值得记忆的极限我都会记录在这里，随时更新！

1.3 两个求分式数列极限的杀招

命题 1.7 (Cauchy 命题)

设数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，则有：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=a. \tag{1.9}$$

成立，其中 a 可以是有限数，也可以是 $+\infty$ 或 $-\infty$，但不能是 ∞.

命题 1.8 (Stolz 定理)

设 $\{b_n\}$ 是严格单调递增且趋于 $+\infty$ 的数列，如果：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=A,$$

则有：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A. \tag{1.10}$$

成立，其中 A 可以是有限数，也可以是 $+\infty$ 或 $-\infty$，但不能是 ∞.

这两个结论相当的重要，都没有在课本上出现，但却是求数列极限的杀招，尤其是针对分式型数列。

1.4 一个易错的命题

命题 1.9

对任意的 $p\in N^+$，都有

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+p}-a_n)=0,$$

但数列 $\{a_n\}$ 未必收敛.

例题 1.1 我们在这里可以给出反例来说明本命题的正确：设 $a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$. 由柯西收敛准则知：$\{a_n\}$ 是发散数列. 又对 $\forall p\in N^+$ 有：

$$a_{n+p}-a_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+p}\le\frac{p}{n+1}\to 0, n\to\infty.$$

故命题证毕.

接下来补充一个命题，这是华东师大课本上的一道课后习题，大家可以比较一下这两道题目，同时思考一下二者的关系，以及命题 1.1.9 中原数列不收敛的原因

命题 1.10

已知 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)=a$，则对任意的 $k\in N^+$，都有

$$\lim_{n\to\infty}a_{n+k}=a. \tag{1.11}$$

1.5 三角函数的求和结论

命题 1.11

$\forall x \neq 2k\pi(k \in Z)$ 时有等式：

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} \tag{1.12}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} \tag{1.13}$$

♠

这个命题经常在使用狄利克雷判别法时发挥极强的作用！

1.6 关于欧拉常数

命题 1.12

关于欧拉常数，有以下两个结论：

1. 对 $\forall n \in N^{+}$，有不等式：
$$(1+\frac{1}{n})^{n} < e < (1+\frac{1}{n})^{n+1} \tag{1.14}$$
成立，且左侧数列单调递增趋于 e 而右侧数列单调递减趋于 e.
2. 数列 $\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right\}$ 收敛于欧拉常数 ϕ.

♠

1.7 数列递推的两个重要命题

命题 1.13 (不动点的定义)

设数列 $\{x_n\}$ 满足递推公式：

$$a_{n+1} = f(x_n), n \in N^+, \tag{1.15}$$

且有：

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0, \tag{1.16}$$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0), \tag{1.17}$$

则极限 x_0 为方程 $f(x) = x$ 的根，此时称 x_0 为方程的不动点.

命题 1.14 (递推数列推出单调性)

设数列 $\{x_n\}$ 满足递推公式：

$$a_{n+1} = f(x_n), n \in N^+, \tag{1.18}$$

其中函数 $f(x)$ 与数列 $\{x_n\}$ 的每一项均在 I 上，则关于数列 $\{x_n\}$ 仅有两种可能：

1. 若 $f(x)$ 为单调递增函数，则数列 $\{x_n\}$ 为单调数列.
2. 若 $f(x)$ 为单调递减函数，则数列 $\{x_n\}$ 的两个子列 $\{x_{2n}\}$ 与 $\{x_{2n-1}\}$ 均为单调数列，但单调性相反.

这两个命题拿出了对待递推公式的数列的应有的礼仪，一般可以解决问题。

命题 1.15 (压缩映射原理)

设 $f(x)$ 定义在区间 $[a,b]$ 上且有 $f([a,b]) \subset [a,b]$。若有 $k \in (0,1)$ 使 $\forall x, y \in [a,b]$ 都有不等式：

$$|f(x) - f(y)| \le k|x-y| \tag{1.19}$$

成立，则有：

1. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在唯一的不动点 $\zeta = f(\zeta)$
2. 对于满足 $a_{n+1} = f(a_n)$ 的数列 $\{a_n\}$ 必有：

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \zeta. \tag{1.20}$$

压缩映射原理基本上是处理递推数列的最后杀招了，简而言之最重要的就是要有能力找到压缩系数 k，

1.8 实数系的基本定理

下面的定理为实数系基本定理，以任意的一个为已知条件可以推出另外五个，请务必注意理解这六个定理：

定理 1.1 (确界存在定理)
在实数集中，有上界的数集一定有上确界，有下界的数集一定有下确界.

定理 1.2 (单调有界定理)
单调有界数列一定收敛.

定理 1.3 (Cauchy 收敛准则)
数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是：对于 $\forall\epsilon > 0$，存在 $N \in N^+$，使得 $\forall m, n > N$ 都有不等式：

$$|a_m - a_n| < \epsilon \tag{1.21}$$

成立.

定理 1.4 (闭区间套定理)
设有闭区间序列 $\{[a_n, b_n]\}$ 满足条件：

$$a_n \le a_{n+1} \le b_{n+1} \le b_n, n \in N^+, \tag{1.22}$$

则存在 ζ 使得 $a_n \le \zeta \le b_n, n \in N^+$. 若有：

$$\lim_{n\to\infty} |b_n - a_n| = 0, \tag{1.23}$$

则 ζ 唯一，且数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 从 ζ 的两侧单调收敛于 ζ.

定理 1.5 (聚点定理)
有界数列必有收敛子集.

定理 1.6 (有限覆盖定理)
设 $[a, b] \subset \bigcup\limits_{\alpha} O_\alpha$，其中每个 O_α 都是开区间（此时我们称 O_α 为 $[a, b]$ 上的开覆盖），则存在 $\{O_\alpha\}$ 的有限子集 $\{O_1, O_2, \ldots, O_n\}$ 是区间的开覆盖，即：

$$[a, b] \subset \bigcup_{i=1}^{n} O_i. \tag{1.24}$$

这 6 条定理给我背得死死的，彻底理解清楚！

1.9 数列的上下极限

数列的上下极限有两种定义方式，二者是等价的，这里逐个介绍：

定义 1.1 (极限点)

数列的极限点是数列的收敛子列的极限。特别地，若存在正（负）无穷大量的子列，亦将 $+\infty(-\infty)$ 作为该数列的极限点.

定义 1.2 (第一定义)

数列的上极限是该数列最大的极限点，记为 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$；数列的下极限是该数列最小的极限点，记为 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$.

从上下极限的第一定义可以看出：

1. 如果一个数列收敛，则其上下极限都存在且都等于极限值.
2. 对于 $\forall\{x_n\}$ 有 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n \geq \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$.

定义 1.3 (第二定义)

每个数列都有上下极限，且有：

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n}\{x_k\}. \tag{1.25}$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n}\{x_k\}. \tag{1.26}$$

1.10 数分中的双曲函数

命题 1.16

函数：

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}. \tag{1.27}$$

分别称为双曲余弦和双曲正弦，则有：

1. $\cosh x$ 是偶函数，$\sinh x$ 是奇函数.
2. $\sinh x$ 的反函数为 $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$，$\cosh x$ 的反函数为 $y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$.
3. $(\sinh x)' = \cosh x$，$(\cosh x)' = \sinh x$.

命题 1.17 (补充结论)

两个双曲函数还有以下性质，注意补充：

1. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, x \in R$.
2. $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x, \cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$.
3. $\cosh^2 \left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cosh x + 1}{2}$，$\sinh^2 \left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cosh x - 1}{2}$.

这些性质在积分还原的时候有非常好的效果，需要注意！

1.11 求极限时变量替换的陷阱

命题 1.18 (变量替换的充分条件)

设 $\lim_{x\to a} g(x)=A$，$\lim_{y\to A} f(x)=B$ 成立，且在点 a 的某个领域上有 $g(x)=y$，如果满足下面三个条件之一：

1. 存在点 a 的一个空心领域 $O_\delta\{a\}-\{a\}$，在其中 $g(x)\neq A$.
2. $\lim_{y\to A} f(y)=f(A)$.
3. $A=\infty$ 且 $\lim_{y\to A} f(y)$

则有：

$$\lim_{x\to a} f(g(x))=\lim_{y\to A} f(y)=B. \tag{1.28}$$

注意：在使用变量替换求函数极限的时候要注意条件. 具体来说就是在求极限 $\lim_{x\to a} F(a)$ 时，如果有 $F(x)=f(g(x))$，又有 $\lim_{x\to a} g(x)=A,\lim_{y\to A} f(y)=B$，能否推出 $\lim_{x\to A} F(x)=B$?

不能！可以给出反例：设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 分别为：

$$f(y)=\begin{cases}1 & y=0\\ 0 & y\neq 0\end{cases} \tag{1.29}$$

$$g(x)\equiv 0. \tag{1.30}$$

则有 $f(g(x))\equiv 1$，但 $\lim_{y\to 0} f(y)=0,\lim_{x\to 0} f(g(x))=1$.

1.12 函数间的比较关系

这个问题比较拗口，所以在此归纳一下：

定义 1.4

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是在 a 的某个去心邻域 $U(a)$ 上有定义的无穷小量，且有 $g(x)\neq 0$，那么就有：

1. $f(x)=o(g(x))(x\to a)$ 的定义是：$\lim_{x\to a}(f(x)/g(x))=0$. 此时也称 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的高阶无穷小量. 那么 $f(x)=o(1)(x\to a)$ 就可以自然地表示为 $\lim_{x\to a} f(x)=0$.
2. $f(x)=O(g(x))(x\to a)$ 的定义是：存在 $M>0$ 使得 $|\frac{f(x)}{g(x)}|\leq M$ 在 a 的某去心邻域成立，也即 $|f(x)|\leq M|g(x)|$. 那么 $f(x)=O(1)(x\to a)$ 就可以表示为 $f(x)$ 在 a 的去心邻域上有界. 但是这并不是同阶无穷小量!!!
3. 如果有 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=A\neq 0$，称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为同阶无穷小量.
4. $f(x)\sim g(x)(x\to a)$ 的定义是：$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1$. 此时称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为等价无穷小量.

1.13 等价量的替换

定理 1.7 (等价量的替换)

设 $f(x), g(x)$ 和 $h(x)$ 在 $U^o(x_0)$ 有定义，且有：

$$f(x) \sim g(x)(x \to x_0), \tag{1.31}$$

则有：

1. 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)h(x) = A$，则 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)h(x) = A$.
2. 若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{h(x)}{f(x)} = B$，则 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{h(x)}{g(x)} = B$.

务必注意这种替换只能在乘法与除法中实现!!!

命题 1.19

1. $e^x - 1 \sim x(x \to 0)$
2. $\tan x - x \sim \dfrac{x^3}{3}(x \to 0)$
3. $x - \sin x \sim \tan x(x \to 0)$
4. $\ln(1+x) \sim x(x \to 0)$
5. $\sin x \sim x(x \to 0)$
6. $a^x - 1 \sim x \ln a(x \to 0)$
7. $(1+x)^\alpha - 1 \sim ax(x \to 0)$
8. $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}(x \to 0)$

1.14 归结原则

定理 1.8 (归结原则)

设 $x_0, A \in \mathbb{R}$，存在极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 的充要条件是：$\forall\{x_n\}(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0)$ 且 $x_n \neq x_0(\forall n \in \mathbb{N})$ 都有：

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A. \tag{1.32}$$

设 $A \in \mathbb{R}$，存在极限 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ 的充要条件是：$\forall\{x_n\}(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty)$ 都有：

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A. \tag{1.33}$$

♡

归结原则要求这个数列每一项都不为 , 因为函数的极限过程仅与 去心邻域中的点有关, 而与 处的取值无关；归结原则的条件还可以强化以应对各种情景的函数极限：

推论 1.3 (归结原则的强化)

一般通过给定数列的单调性来实现强化

1. 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某空心右邻域 $U_+^o(x_0)$ 有定义，$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = A$ 的充要条件是：对任给的以 x_0 为极限的递减数列 $\{x_n\} \subset U_+^o(x_0)$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.
2. 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某空心左邻域 $U_-^o(x_0)$ 有定义，$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = A$ 的充要条件是：对任给的以 x_0 为极限的递增数列 $\{x_n\} \subset U_-^o(x_0)$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.
3. 设函数 $f(x)$ 在点 $+\infty$ 的某空心邻域 $U^o(+\infty)$ 有定义，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ 的充要条件是：对任给的以 x_0 为极限的递减数列 $\{x_n\} \subset U^o(+\infty)$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.
4. 设函数 $f(x)$ 在点 $-\infty$ 的某空心邻域 $U^o(-\infty)$ 有定义，$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$ 的充要条件是：对任给的以 x_0 为极限的递增数列 $\{x_n\} \subset U^o(-\infty)$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

♡

1.15 连续函数基础

定义 1.5

如果有 $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ 成立，则称 $f(x)$ 在点 $x = a$ 处连续；如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上的每个点上连续，则称 $f(x)$ 在区间 I 上连续.

如果一个函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续，那么则称 $x = x_0$ 是 $f(x)$ 的间断点，对于间断点类别的判定有下面的结论：

命题 1.20 (间断点的判定)

1. 若 $\lim_{x \to x_0} f(x) = A \neq f(x_0)$，则称 x_0 为 $f(x)$ 的可去间断点.
2. 若 $\lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^-} f(x)$，则称 x_0 为 $f(x)$ 的跳跃间断点.
3. 若 $f(x)$ 在 x_0 处的左极限或右极限不存在，则称 x_0 为 $f(x)$ 的第二类间断点.

PS: 可去间断点和跳跃间断点统称为第一类间断点.

1.16 闭区间上连续函数的性质

闭区间上的连续函数有很多很好的性质，本部分逐个介绍：

定理 1.9 (最大值最小值定理)

设 f 为闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有最大值、最小值.

推论 1.4 (有界性定理)

设 f 为闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界.

定理 1.10 (介值性定理)

设 f 为闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数，且有 $f(a) \neq f(b)$，若 μ 为介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 的常数，则至少存在一点 $x_0 \in (a, b)$ 使得：

$$f(x_0) = \mu. \tag{1.34}$$

推论 1.5 (根的存在性定理)

设 f 为闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号（$f(a)f(b) < 0$），则至少存在一点 $x_0 \in (a, b)$ 使得：

$$f(x_0) = 0. \tag{1.35}$$

即 $f(x)$ 在 (a, b) 至少存在一个根.

1.17 函数的一致收敛

函数的连续性是函数的局部性质，而一致连续则是函数的全局性质——这是二者最大的区别!!! 一定要好好地理解。

定义 1.6

设 $f(x)$ 是定义在区间 I 上的函数,若任给的 $\epsilon > 0$,存在 $\delta > 0$ 使得 $\forall x', x'' \in I(|x' - x''| < \delta|)$ 有不等式:

$$|f(x') - f(x'')| < \epsilon \tag{1.36}$$

成立，则称 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续. ♣

定理 1.11 (Cantor 定理)

设 $f(x)$ 为定义在闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数，则 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上一致连续. ♡

推论 1.6

设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上一致连续，则 $f(x)$ 在闭区间 $[c, d] \subset [a, b]$ 上一致连续. ♡

命题 1.21

有界开区间 (a, b) 上的连续函数 $f(x)$ 在 (a, b) 上一致连续的充要条件是：$f(x)$ 在 $x = a$ 处的右极限和 $x = b$ 处的左极限均存在且有限. ♠

推论 1.7

开区间上的一致连续函数一定在开区间上有界. ♡

命题 1.22

$f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续，则存在正实数 a, b 使得:

$$|f(x)| \leq a|x| + b. \tag{1.37}$$

♠

1.18 震撼的反例

命题 1.23

存在函数 $f(x)$，在任意的 x_0 的邻域 $U(x_0)$ 内都是无界的，但当 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 并不趋于无穷大.

例题 1.2 设 $f(x) = \dfrac{\cos\frac{1}{x}}{x}$.$\forall n \in \mathbb{N}^+$，取 $x_n = \dfrac{1}{n\pi}$，则有：

$$|f(x_n)| = \left|\frac{\cos n\pi}{\frac{1}{n\pi}}\right| = n\pi \to \infty, n \to \infty. \tag{1.38}$$

这说明 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的任一邻域无界. 若取 $\{y_n\} = \dfrac{1}{(n+\frac{1}{2})\pi}$，则有：

$$|f(y_n)| = 0. \tag{1.39}$$

这说明 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \neq \infty$.

1.19 原函数与导函数的奇偶性与周期性

命题 1.24

1. 若 $f(x)$ 为可导的周期函数，则 $f'(x)$ 也是周期函数；反之不成立.
2. 若 $f(x)$ 为可导的奇函数，则 $f'(x)$ 为偶函数；反之不成立.
3. 若 $f(x)$ 为可导的偶函数，则 $f'(x)$ 为奇函数；反之不成立.
4. 若 $f'(x)$ 为区间上连续的奇函数，则 $f(x)$ 是偶函数.

1.20 乘积的高阶导函数

定理 1.12 (Leibniz 公式)

对于两个函数乘积的高阶导数，有如下公式：

$$\begin{aligned}(uv)^{(n)} &= u^{(n)}v^0 + \binom{n}{1}u^{(n-1)}v^{(1)} + \binom{n}{2}u^{(n-2)}v^2 + \cdots + u^{(0)}v^{(n)} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(n-k)}v^{(k)}.\end{aligned} \tag{1.40}$$

有一些常见的 n 阶导函数是需要记忆的，如下：

推论 1.8

1. $(\sin x)^{(n)} = \sin(x + \frac{n\pi}{2}), (\cos x)^{(n)} = \cos(x + \frac{n\pi}{2})$.
2. $((1+x)^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$.
3. $\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = (-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}, \left((1+x)^{-1}\right)^{(n)} = (-1)^n\frac{n!}{(1+x)^{n+1}}, \left((1-x)^{-1}\right)^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$.
4. $(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}, (\ln(1+x))^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$.
5. $(\ln(1-x))^{(n)} = -\frac{(n-1)!}{(1-x)^n}$.

1.21 三大微分中值定理

定理 1.13 (罗尔中值定理)

若函数 f 同时满足如下三个条件：

1. 在闭区间 $[a,b]$ 连续；
2. 在开区间 (a,b) 可导；
3. $f(a)=f(b)$.

则在 (a,b) 上至少存在一点 ζ 使得：

$$f'(\zeta)=0. \tag{1.41}$$

♡

定理 1.14 (拉格朗日中值定理)

若函数 f 同时满足如下两个条件：

1. 在闭区间 $[a,b]$ 连续；
2. 在开区间 (a,b) 可导；

则在 (a,b) 上至少存在一点 ζ 使得：

$$f'(\zeta)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \tag{1.42}$$

♡

定理 1.15 (柯西中值定理)

若函数 f 与 g 同时满足如下四个条件：

1. 在闭区间 $[a,b]$ 连续；
2. 在开区间 (a,b) 可导；
3. $\forall x\in[a,b]$ 有 $f'(x)\neq g'(x))$.
4. $g(a)\neq g(b)$.

则在 (a,b) 上至少存在一点 ζ 使得：

$$\frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}. \tag{1.43}$$

♡

1.22 函数极限的杀招：洛必达法则

定理 1.16 (洛必达法则)

设函数 f 和 g 满足：

1. $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$. 或 $\lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$.
2. 在点 $x = x_0$ 的某空心邻域 $U^o(x_0)$ 上可导，且有 $g'(x) \neq 0$.
3. $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$.

则有：

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A. \tag{1.44}$$

此处 A 可以是实数，也可以是 $+\infty, -\infty, \infty$.

一定要注意：洛必达法则要求两个函数在点的空心邻域可导，而不是单点可导.

1.23 泰勒公式

定理 1.17 (泰勒公式)

设函数 f 在 (a,b) 上存在公式中出现的各阶导数，对于任意固定的 $x_0 \in (a,b)$ 有：

$$\begin{aligned} f(x) =& f(x_0) + \frac{1}{1!}f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2 \\ &+ \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + R_n(x), x \in (a,b). \end{aligned} \tag{1.45}$$

其中 R_n 为泰勒公式的余项，通常有四种可供选择：

1. 佩亚诺型余项：
$$R_n(x) = o((x-x_0)^n, x \to x_0. \tag{1.46}$$
2. 拉格朗日型余项：
$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \tag{1.47}$$
其中，ζ 是介于 x 与 x_0 之间的值. 此时的泰勒公式即泰勒定理.
3. 柯西型余项：
$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{n!}(x-\zeta)^n(x-x_0), \tag{1.48}$$
其中，ζ 是介于 x 与 x_0 之间的值.
4. 积分型余项：
$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\mathbf{d}x \tag{1.49}$$
这里要求 f 在 (a,b) 有连续的 $n+1$ 阶导数.

1.24 凸性的定义与性质

定义 1.7

设 f 为区间 I 上的函数，如果对于任给的 $x, y \in I$，以及 $\lambda \in [0,1]$ 都有：

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y). \tag{1.50}$$

则称 f 为 I 上的凸函数.

定理 1.18

对于凸函数有以下等价的论断：

1. $f(x)$ 在 I 上为凸函数.
2. 若 f 在 I 上可微，$f'(x)$ 为 I 上的增函数.
3. 若 f 在 I 上二阶可微，$f''(x) \ge 0, x \in I$.
4. $\forall x_1, x_2 \in I$ 有不等式：
$$f(x_2) \ge f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1). \tag{1.51}$$
5. $\forall x_1 < x_2 < x_3$ 有：
$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}. \tag{1.52}$$

定义 1.8 (Lipschitz 连续)

函数 f 在 I 上 Lipschitz 连续的充要条件是：存在 $L > 0$，使得对于所有 x_1 和 x_2，满足：

$$|f(x_1) - f(x_2)| \le L|x_1 - x_2|. \tag{1.53}$$

Lipschitz 连续性是连续性的一种更强的要求。连续性要求函数在某个点附近具有足够的光滑性，而 Lipschitz 连续性则进一步要求函数的变化率受到一定限制，不允许出现过于剧烈的变化。**并非所有连续函数都是 Lipschitz 连续的，但 Lipschitz 连续的函数一定是连续的。**

命题 1.25

设函数 f 为区间 I 上的凸函数，则有：

1. f 在 I 的内部 Lipschitz 连续. 特别地，开区间上的凸函数必为连续函数.
2. f 在 I 的内部有单调递增的 $f'_-(x)$ 和 $f'_+(x)$，且有不等式：
$$f'_-(x) \le f'_+(x). \tag{1.54}$$

命题 1.26

若 f 为 $[a,b]$ 上的连续的凸函数，则有：

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathbf{d}x \le \frac{f(a)+f(b)}{2}. \tag{1.55}$$

1.25 两类詹森不等式

詹森不等式是凸函数的重要性质之一类似于柯西不等式的，詹森不等式也有离散和连续两个版本，且表现为求和和积分形式。

定理 1.19 (离散的詹森不等式)

设函数 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的凸函数，则对 $\forall x_i \in [a,b], \lambda_i > 0 (i=1,2,\ldots,n)$，有：

$$f\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right) \le \frac{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}. \tag{1.56}$$

定理 1.20 (连续的詹森不等式)

设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，其中 $g(x) > 0, m \le f(x) \le M$，如果 $\varphi(x)$ 是 $[m,M]$ 上的连续的凸函数，则有：

$$f\left(\frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathbf{d}x}{\int_a^n g(x)\mathbf{d}x}\right) \le \frac{\int_a^b \varphi(f(x))g(x)\mathbf{d}x}{\int_a^b g(x)\mathbf{d}x}. \tag{1.57}$$

1.26 极值点的判定

定理 1.21

设 f 在 x_0 连续，在某邻域 $U^o(x_0,\delta)$ 上可导，若当 $x \in (x_0-\delta, x_0)$ 时 $f'(x) \le (\ge) 0$. 若当 $x \in (x_0, x_0+\delta)$ 时 $f'(x) \ge (\le) 0$，则 $f(x)$ 在 x_0 处取极小（大）值.

这是最常见的一种极值点判定的方法，还有另一种在一些情况有奇效：

定理 1.22

设 f 在 x_0 的某邻域 $U(x_0,\delta)$ 上存在 $n-1$ 阶导数，在 $x=x_0$ 处存在 n 阶导数，且 $f^{(k)}(x_0) = 0 (k=1,2,\ldots,n-1), f^{(n)} \ne 0$，则有：

1. 当 n 为偶数，f 在 x_0 处取极值. 且当 $f^{(n)}(x_0) < 0$ 时取极大值，当 $f^{(n)}(x_0) > 0$ 时取极小值.
2. 当 n 为奇数，f 在 x_0 处不取极值.

注意：这两种方法都是充分条件，反之不一定成立.

1.27 反函数的秘密

定义 1.9 (反函数的定义)

对于给定的函数 f，如果存在另一个函数 g，使得对于 f 的定义域内的每个元素 x，都有：

$$g(f(x)) = x, \tag{1.58}$$

并且对于 g 的定义域内的每个元素 y，都有：

$$f(g(y)) = y, \tag{1.59}$$

则函数 g 称为函数 f 的反函数。

♣

定义 1.10 (单射、满射与双射)

对于定义在 D 上的值域为 I 的函数 $f(x)$:

1. $\forall x_1, x_2 \in D$，若 $f(x_1) = f(x_2)$ 则有 $x_1 = x_2$，则称 f 为单射.
2. $\forall y \in I$，都存在 $x \in D$，使得 $f(x) = y$，则称函数 f 为满射.
3. 既是单射又是满射的映射是双射.

♣

定义 1.11 (单调函数的定义)

设 $f(x)$ 为定义在 D 上的函数，若对 $\forall x_1, x_2 \in D$，当 $x_1 < x_2$ 时总有：

1. $f(x_1) \le f(x_2)$，则称 f 为 D 上的增函数. 特别地，若有不等式 $f(x_1) < f(x_2)$ 成立，则称 f 为 D 上的严格增函数.
2. $f(x_1) \ge f(x_2)$，则称 f 为 D 上的减函数. 特别地，若有不等式 $f(x_1) > f(x_2)$ 成立，则称 f 为 D 上的严格减函数.

增函数和减函数统称为单调函数，严格增函数和严格减函数统称为严格单调函数.

♣

命题 1.27

1. 若函数 f 为双射，则 f 一定有反函数. 反之不成立.
2. 若函数 f 在 D 上严格单调递增（递减），则 f 在 D 上一定有反函数. 反之不成立.

♠

1.28 可微性、连续性与区间的渊源

定义 1.12 (单点连续)

设 f 为定义在 $U(x_0)$ 上的函数，若对 $x_0 \in U(x_0)$ 有：

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{1.60}$$

则称 f 在 x_0 处连续.

定义 1.13 (单点可微)

设 f 为定义在 $U(x_0)$ 上的函数，若对 $x_0 \in U(x_0)$ 有：

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{1.61}$$

存在，则称 f 在 x_0 处可导.

由此可见：想要函数 f 在 x_0 连续或可导，那么 f 必须在 $U(x_0)$ 有定义.

定理 1.23

若 f 在 x_0 上可导，则 f 在 x_0 上连续.

定义 1.14 (单点二阶可导)

设 f 的导函数 $f'(x)$ 在点 x_0 可导，即：

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \tag{1.62}$$

存在，则将其记为 $f''(x_0)$，并称 f 在 x_0 处二阶可导.

要搞清楚一点：f' 要想在 x_0 处可导，则 f' 必须在在 $U(x_0)$ 有定义.

定义 1.15 (补充：连续可微)

若函数 f 在 I 上可导，且导函数在 I 上连续，则称 f 在 I 上连续可微.

命题 1.28

1. 若函数 f 在区间 I 上可导，则 f 在区间 I 上没有间断点. 函数在区间上可导要求函数在区间上不仅连续，而且光滑. 且 f' 在 I 上没有第一类间断点，可能有第二类间断点.
2. 若函数 f 在 $x = x_0$ 处 n 阶可导，则 f 在 $U(x_0)$ 有 $n-1$ 阶导函数，且 $f^{(n-1)}$ 在 $U(x_0)$ 连续.
3. 若函数 f 在 $U(x_0)$ 上 n 阶可导，则 f 在 $U(x_0)$ 上 $k(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ 阶可导，且 $f^{(n)}$ 在 $U(x_0)$ 连续.

第二章 高代重要命题与结论

第三章 数学分析解题总结

第四章 高等代数解题总结

第五章 数学分析真题集

第六章 高等代数真题集