凉学长数学2023考前冲刺四套卷（一）

数学（新高考）试题

（满分：150分，考试时间：120分钟）

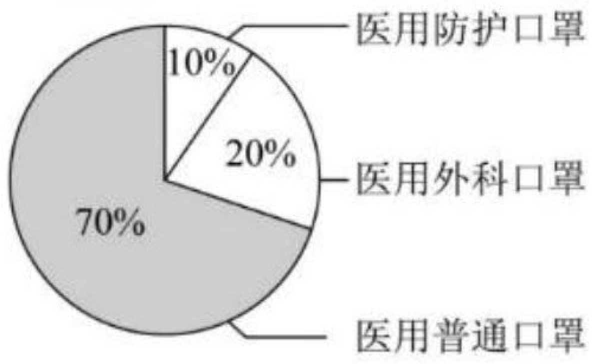
第Ⅰ卷（选择题 共60分）

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.已知集合 $A=\{x|x^2-2<0\}$，且 $a\in A$，则 a 可以为（　　）

A. −2　　B. −1　　C. $\dfrac{3}{2}$　　D. $\sqrt{2}$

2.某医用口罩生产厂家生产医用普通口罩、医用外科口罩、医用防护口罩三种产品，三种产品的生产比例如图所示，且三种产品中绑带式口罩的比例分别为90%，50%，40%.若从该厂生产的口罩中任选一个，则选到绑带式口罩的概率为（　　）

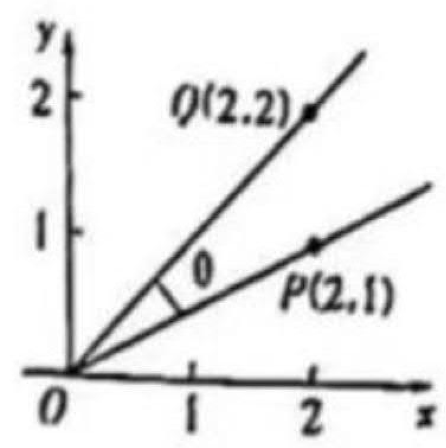


A. 0.23　　B. 0.47　　C. 0.53　　D. 0.77

3.已知函数 $f(x)=a\cos x-x^2-1$ 有且只有1个零点，则实数 a 的值是（　　）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

4.如图，$\cos(\theta+\dfrac{3\pi}{4})=$（　　）



A. $-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　　B. $-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　C. $-\dfrac{4}{5}$　　D. $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

5.某些首饰，如手镯，项链吊坠等都是椭圆形状，这种形状给人以美的享受，在数学中，我们把这种椭圆叫做“黄金椭圆”，其离心率 $e=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，设黄金椭圆的长半轴，短半轴，半焦距分别为a，b，c，则a，b，c满足的关系是（　　）

A. 2b=a+c　　B. $b^2=ac$　　C. a=b+c　　D. 2b=ac

6.已知一个竖直放在水平地面上的圆柱形容器中盛有 20cm 高的水，若将一半径与圆柱底面半径相同的实心钢球缓缓放入该容器中，最后水面恰好到达钢球顶部，则该钢球的表面积为（　　）.

A. $2700\pi\ \text{cm}^2$　　B. $3600\pi\ \text{cm}^2$　　C. $4800\pi\ \text{cm}^2$　　D. $6400\pi\ \text{cm}^2$

7.已知正整数 $n \geq 4, p \in (0,1)$，随机变量 X 的分布列是

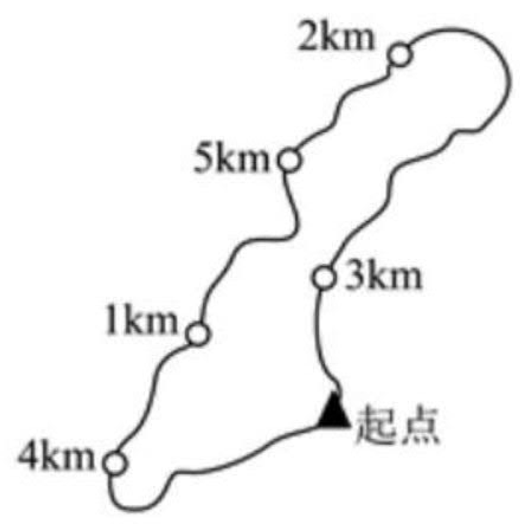
X	1	p	p^2	$\cdots$	p^{n-2}	p^{n-1}
P	p	p^2	p^3	$\cdots$	p^{n-1}	p^n

则当 n 在[4，100]内增大时，（　　）

A. $E(X)<1$　　B. $E(X)=1$

C. $E(X)>1$　　D. $E(X)$与 1 没有确定的大小关系

8.刘老师沿着某公园的环形道（周长大于 1km）按逆时针方向跑步，他从起点出发、并用软件记录了运动轨迹，他每跑 1km，软件会在运动轨迹上标注出相应的里程数，已知刘老师共跑了 11km，恰好回到起点，前 5km 的记录数据如图所示，则刘老师总共跑的圈数为（　　）



A. 7　　B. 8　　C. 9　　D. 10

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分。

9.下列命题正确的是(　　)

A.若 z_1, z_2 为复数，则 $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

B.若 $\vec{a}, \vec{b}$ 为向量，则 $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$

C. 若 z_1, z_2 为复数, 且 $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$, 则 $z_1 z_2 = 0$

D. 若 $\vec{a}, \vec{b}$ 为向量，且 $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

10.在 $\triangle ABC$ 中，若 $A > B$，则(　)

A. $\sin A > \sin B$　　B. $\cos A < \cos B$

C. $\sin 2A > \sin 2B$　　D. $\cos 2A < \cos 2B$

11.已知 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 是圆 $O: x^2 + y^2 = 4$ 上的两点，则下列结论正确的是(　　)

A. 若 $|AB|=2\sqrt{3}$，则 $\angle AOB=\dfrac{\pi}{3}$

B. 若点 O 到直线 AB 的距离为 $\sqrt{2}$，则 $|AB|=2\sqrt{2}$

C. 若 $\angle AOB=\dfrac{\pi}{2}$，则 $|x_1+y_1-1|+|x_2+y_2-1|$ 的最大值为 4

D. $x_1x_2+y_1y_2$ 的最小值为 -4

12. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，中心为 O，以 O 为球心的球与四面体 AB_1CD_1 的四个面相交所围成的曲线总长度为 $\dfrac{2\sqrt{3}\pi}{3}$，则球 O 的半径为(　　)

A. $\dfrac{\sqrt{15}}{24}$　　B. $\dfrac{\sqrt{15}}{12}$　　C. $\dfrac{\sqrt{15}}{6}$　　D. $\dfrac{\sqrt{15}}{3}$

第II卷（共90分）

三、 填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 已知 $(x+m)^6=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+a_6x^6$，且 $a_3+a_6=1$，则 m=_______

14. 把正整数按如下规律排列：1，2，2，3，3，3，4，4，4，4，5，……，构成数列 $\{a_n\}$，则 $a_{91}=$________

15. 已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左，右焦点分别为 F_1,F_2，C 的渐近线与圆 $x^2+y^2=a^2$ 在第一象限的交点为 M，线段 MF_2 与 C 交于点 N，O 为坐标原点. 若 $MF_1 // ON$，则 C 的离心率为________

16. 已知定义在 N^* 上的单调递增函数 $y=f(x)$，对于任意的 $n\in N^*$，都有 $f(n)\in N^*$，且 $f(f(n))=3n$ 恒成立，则 $f(2022)-f(2019)=$______

四、解答题：本题共6小题，共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本题满分10分）

已知 D 是 $Rt\triangle ABC$ 斜边 AB 上一点，AC=CD，记 $\angle BCD=\alpha,\angle CAD=\beta$

（1）求证：$\sin\alpha+\cos 2\beta=0$；

（2）若 $BC=\sqrt{3}DB$，求 β 的值；

18.（本题满分 12 分）

已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=3,a_{n+1}=2a_n+2^{n+2}-n^2+2n+1$.

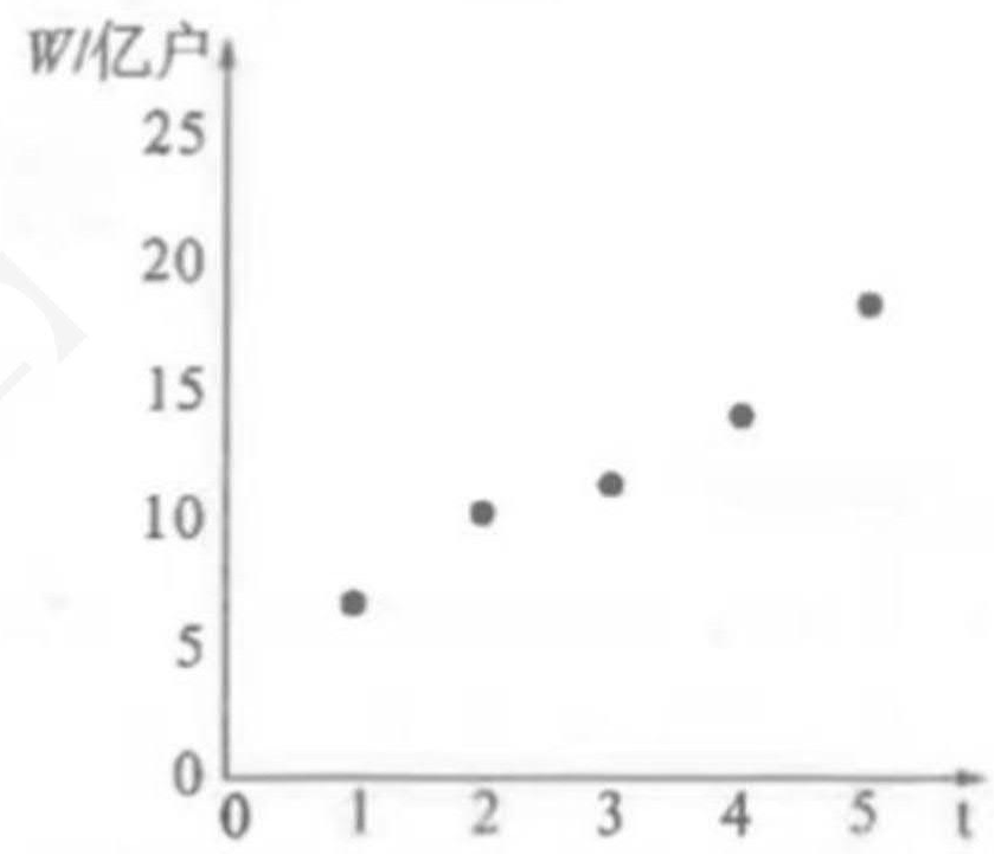
（1）求证:$\left\{\dfrac{a_n-n^2}{2^n}\right\}$是等差数列;

（2）令$b_n=\left[\dfrac{a_n}{2^n}\right]$（$[x]$表示不超过$x$的最大整数. 提示:当$a\in Z$时，$[a+x]=a+[x]$），

求使得$b_1+b_2+\cdots+b_n\le 100$成立的最大整数$n$的值.

19.（本题满分 12 分）

移动物联网广泛应用于生产制造、公共服务、个人消费等领域. 截至 2022 年底，我国移动物联网连接数达 18.45 亿户，成为全球主要经济体中首个实现“物超人”的国家. 右图是 2018-2022 年移动物联网连接数W与年份代码t的散点图，其中年份 2018-2022 对应的t分别为 1-5.



(1)根据散点图推断两个变量是否线性相关. 计算样本相关系数(精确到 0.01)，并推断它们的相关程度;

(2)(i)假设变量x与变量Y的n对观测数据为$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$,，两个变量满足一元线性回归模型$\begin{cases}Y=bx+e,\\E(e)=0,D(e)=\sigma^2\end{cases}$（随机误差$e_i=y_i-bx_i$），请推导:当随机误差平方和$Q=\sum\limits_{i=1}^{n}e_i^2$取得最小值时,参数$b$的最小二乘估计.

(ii)令变量$x=t-\bar{t},y=w-\bar{w}$,，则变量x与变量Y满足一元线性回归模型$\begin{cases}Y=bx+e,\\E(e)=0,D(e)=\sigma^2\end{cases}$，利用(i)中结论求$y$关于$x$的经验回归方程，并预测 2024 年移动物联网连接数.

附:样本样关系数$r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(t_i-\bar{t}\right)(w_i-\bar{w})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(t_i-\bar{t}\right)^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(w_i-\bar{w}\right)^2}}$

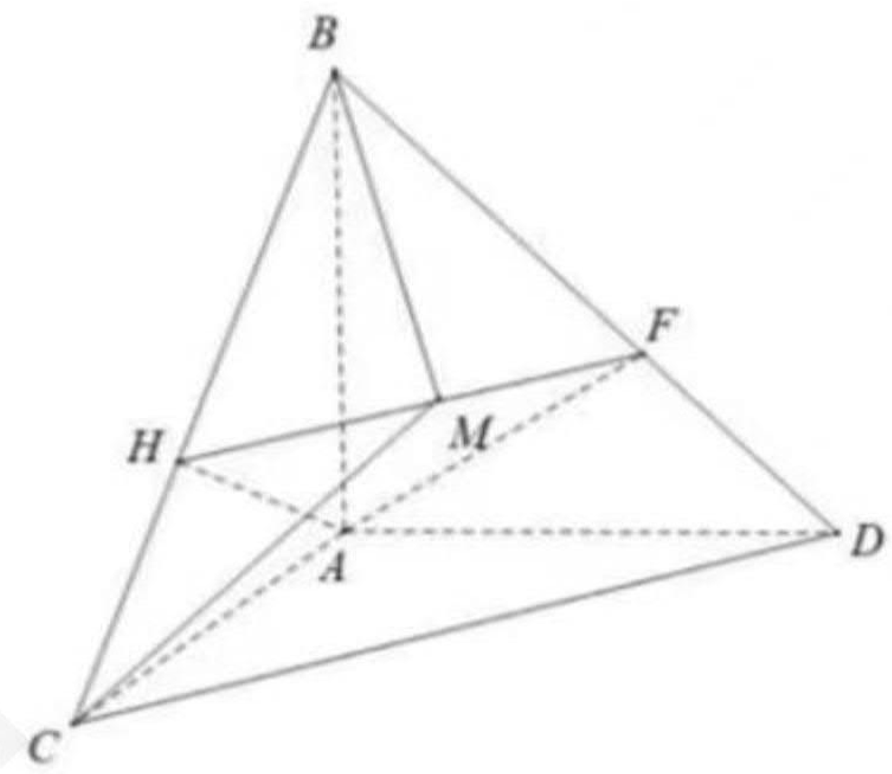
$$\sum_{i=1}^{5}\left(w_i-\bar{w}\right)^2=76.9,\sum_{i=1}^{5}\left(t_i-\bar{t}\right)\left(w_i-\bar{w}\right)=27.2,\sum_{i=1}^{5}w_i=60.8,\sqrt{769}\approx 27.7$$

20.（本题满分 12 分）

如图，四面体 $ABCD$ 中，$\angle BAD=\angle BAC=\angle CAD=90^{\circ}, AC=AD, AB$ 与面 BCD 的所成角为 45°．

（1）若四面体 ABCD 的体积为 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，求 AC 的长；

（2）设点 M 在面 BCD 中，$\angle ABM=45^{\circ},\angle ACM=30^{\circ}$,，过 M 作 CD 的平行线，分别交 BC,BD 于点 H,F，求面 AFH 与面 ACD 所成夹角的余弦值.



21.（本题满分 12 分）

已知抛物线 $C:x^{2}=2py(p>0)$ 的顶点为 O，点 P 是第一象限内 C 上的一点，Q 是 y 轴上一点，PQ 为抛物线的切线，且 $|PQ|=2\sqrt{2}$

（1）若 $Q(0,-1)$，求抛物线的方程;

（2）若圆 C_1,C_2 都与直线 OP 相切于点 P，且都与 y 轴相切，求两圆面积之和的最小值

22.（本题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=x-\dfrac{1}{x}-a\ln x(a>0),g(x)=x^2-1-x\ln x.$

（1）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（2）若函数 $f(x)$ 有三个零点 x_1,x_2,x_3，求证：$g(x_1)+g(x_2)+g(x_3)>0.$