DEFINIZIONI - GEOMETRIA (TEORIA). (1)

STRUTTURA ALGEBRICA:

~~Un insieme A viene chiamato "struttura algebrica"~~

Una struttura algebrica è un insieme A con una o più operazioni.

OMOMORFISMO E ISOMORFISMO E AUTOMORFISMO

Un'applicazione lineare $f: A \to B$ ~~chiamata OMOMORFISMO~~, dove A e B sono 2 strutture algebriche, si chiama OMOMORFISMO della struttura $(A,+)$ nella struttura $(B,\times)$ se

$$\boxed{f(a+b) = f(a) \times f(b) \qquad \forall a,b \in A}$$

Se la funzione f è biiettiva allora prende il nome di ISOMORFISMO e le strutture $(A,+)$ e $(B,\times)$ "isomorfe".

Se la f è biiettiva ma del tipo $f: A \to A$ di una struttura algebrica in se stessa si chiama AUTOMORFISMO.

TEOREMA: PROPRIETÀ ISOMORFISMO TRA STRUTTURE

Sia f un isomorfismo (applicazione lineare biiettiva) della struttura algebrica $(A,+)$ sulla struttura algebrica $(B,\times)$.

1) Se "+" è associativa $\Rightarrow$ "x" è associativa
2) Se "+" è commutativa $\Rightarrow$ "x" è commutativa
4) se $a \in A$ è invertibile e a' è un inverso, $\Rightarrow$ $f(a)$ è invertibile e $f(a')$ è un suo inverso
3) Se u è l'elemento neutro rispetto a + ~~altro~~ $\Rightarrow$ $f(u)$ è l'elemento neutro rispetto a x

DIMOSTRAZIONI:

1) Supponiamo "+" associativa. Presi $b_1, b_2, b_3 \in B$

$$b_1 \times (b_2 \times b_3) = f(a_1) \times [f(a_2) \times f(a_3)] = f(a_1) \times [f(a_2 + a_3)] =$$
$$= f[a_1 + (a_2 + a_3)] = f[(a_1 + a_2) + a_3] = f(a_1 + a_2) \times f(a_3) =$$
$$= [f(a_1) \times f(a_2)] \times f(a_3) = (b_1 \times b_2) \times b_3$$

Segue che x è associativa.

2) Supponiamo che "+" sia commutativa. $\forall b_1, b_2 \in B$ si ha

$$b_1 \times b_2 = f(a_1) \times f(a_2) = f(a_1 + a_2) = f(a_2 + a_1) = f(a_2) \times f(a_1) =$$
$$= b_2 \times b_1$$

Pertanto anche $\times$ è commutativa.

3) Sia $u \in A$ l'elemento neutro rispetto a "+". $\forall b \in B$ si ha:

$$b \times f(u) = f(a) \times f(u) = f(a+u) = f(a) = b$$

e

$$f(u) \times b = f(u) \times f(a) = f(u+a) = f(a) = b$$

Allora $f(u)$ è l'elemento neutro rispetto a B.

4) Se $a \in A$ è invertibile e a' è un suo inverso, allora:

$$f(a) \times f(a') = f(a+a') = f(u)$$

e

$$f(a') \times f(a) = f(a'+a) = f(u)$$

Segue che $f(a)$ è invertibile e $f(a')$ è un suo inverso.

~~Gruppo~~: GRUPPO: Sia G un insieme con un'operazione interna +.
Allora $(G,+)$ è un gruppo se:

GRUPPO
1- l'operazione + è associativa
2- Esiste l'elemento neutro rispetto a +;
3- Ogni elemento di G è invertibile.

GRUPPO ABELIANO
4- l'operazione è inoltre commutativa

SOTTOGRUPPO: Sia $H \subset G$ non vuoto, con $(G,+)$ gruppo.
- Se l'operazione + è interna ad H, cioè: $\forall a,b \in H$ risulta $a+b \in H$
- E se la struttura algebrica $(H,+)$ è a sua volta un gruppo.
Allora $(H,+)$ è un sottogruppo.

DEFINIZIONE DI CAMPO: Sia K un insieme con due operazioni interne, "+" denominata ADDIZIONE e "x" denominata moltiplicazione.

La struttura algebrica $(K, +, x)$ è un campo se:

- la struttura algebrica $(K, +)$ è un gruppo abeliano
- sia 0 l'elemento neutro rispetto all'operazione $+$ e sia $K^* = K - \{0\}$, la struttura algebrica (K^*, x) è un gruppo commutativo.
- Vale la seguente proprietà distributiva:

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \forall a, b, c \in K.$$

N.B: "0" = ZERO DEL CAMPO
"1" = UNITÀ DEL CAMPO

DEFINIZIONE DI SOTTOCAMPO: Dato un sottoinsieme $H \subset K$, se le operazioni $+$ e x sono operazioni interne in H e la struttura algebrica $(H, +, x)$ è a sua volta un campo si dice che $(H, +, x)$ è un sottocampo di $(K, +, x)$.

SPAZI VETTORIALI: Considerato un campo K e un insieme V.
L'insieme V è uno <u>spazio vettoriale sul campo K</u> se è definita in V un'operazione interna, detta addizione con $+: V \times V \to V$, tale che la struttura algebrica $(V,+)$ sia un gruppo abeliano, ovvero:

- $u+(v+w) = (u+v)+w \quad \forall u,v,w \in V$ (associativa)
- $v+w = w+v \quad \forall v,w \in V$ (commutativa)
- $\forall v \in V \ \exists -v \in V$ tale che $v+(-v) = (-v)+v = \bar{0}$ (esiste elemento neutro)
- $\exists$ elemento neutro $\bar{0} \in V$ tale che $v+\bar{0} = \bar{0}+v \quad \forall v \in V$

e risulta definita inoltre un'operazione esterna rispetto a K
$\times: K \times V \to V$ in modo che:

- $\alpha(v+w) = \alpha v + \alpha w \quad \forall \alpha \in K, \ \forall v,w \in V$
- $(\alpha+\beta)v = \alpha v + \beta v \quad \forall \alpha,\beta \in K, \ \forall v \in V$
- $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v) \quad \forall \alpha,\beta \in K, \ \forall v \in V$
- $\forall v \in V$ risulta $1v = v$ dove 1 è l'unità del campo K.

Gli elementi dell'insieme V si chiamano <u>vettori</u>, $\bar{0}$ è il <u>vettore nullo</u>.
Gli elementi del campo K si chiamano <u>scalari</u>, lo zero del campo è 0.

SOTTOSPAZI VETTORIALI: Dato uno spazio vettoriale V su campo K e sia $W \subset V$ non vuoto. Se W è uno spazio vettoriale su K rispetto alle stesse 2 operazioni:

1. $v+u \in W \quad \forall v,w \in W$
2. $\alpha v \in W \quad \forall \alpha \in K, \ \forall v \in W$

Allora W è sottospazio di V.

SISTEMA DI GENERATORI: Un insieme di vettori che generano uno spazio vettoriale che contiene tutte le possibili combinazioni lineari degli vettori stessi.

SPAZIO VETTORIALE K^n:

Consideriamo un campo K, un intero positivo n e l'insieme K^n costituito da tutte le n-ple ordinate di elementi di K. K^n può essere visto come spazio vettoriale sul campo K definendo un'operazione interna di addizione

$$+: K^n \times K^n \to K^n \qquad X+Y = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1+y_1, \dots, x_n+y_n)$$

dove X e Y sono due qualsiasi ennuple $\boxed{\forall x, y \in K^n}$

ed un'operazione esterna rispetto a K di moltiplicazione:

$$\times: K \times K^n \to K^n \qquad \alpha X = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n) \quad \forall \alpha \in K, \forall x \in K^n$$

SOTTOSPAZIO GENERATO E SISTEMA DI GENERATORI:

Dato uno spazio vettoriale V e si considerino n vettori $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ e altrettanti scalari $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$. Il vettore

$\boxed{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n}$ è una combinazione lineare dei vettori $v_1, v_2, \dots, v_n$.

- Sia $W \subset V$ un sottospazio vettoriale di V, ovvero:
  - $(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) + (\beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n) = (\alpha_1+\beta_1) v_1 + \dots + (\alpha_n + \beta_n) v_n$
  - $\alpha(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = (\alpha\alpha_1 v_1 + \dots \alpha\alpha_n v_n)$

Il sottospazio W si chiama <u>sottospazio generato dai vettori</u> $v_1, v_2, \dots, v_n$.

Si scrive $W = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$. In questo caso i vettori $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$ saranno detti <u>SISTEMA DI GENERATORI</u> per W.

SOTTOSPAZIO GENERATO:

È un sottospazio $W \subset V$ di uno spazio vettoriale V, costituito da tutte le possibili combinazioni lineari di n vettori $v_1, \dots, v_n \in V$. Si scriverà $W: \langle v_1, \dots, v_n \rangle$

L'INSIEME $\{\bar{0}\}$ È SOTTOSPAZIO DELLO SPAZIO VETTORIALE V:

Dato uno spazio vettoriale V, l'insieme $\{\bar{0}\}$ costituito dal solo vettore nullo di V è un sottospazio di V.

DIPENDENZA LINEARE:

Sia V uno spazio vettoriale sul campo K.
Considerati n vettori $v_1, \dots, v_n$ si dice che essi sono linearmente dipendenti se esiste una n-pla di scalari non tutti nulli $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tali che

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \bar{0}$$

Se invece non esiste questa n-pla e si ha $\alpha_1 v_1 + \dots \alpha_n v_n = \bar{0}$ solo se $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.
Allora i vettori $v_1, \dots, v_n$ si dicono linearmente indipendenti.

DEFINIZIONE DI BASE:

Sia V uno spazio vettoriale sul campo K.
L'insieme ordinato di vettori $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una Base per V se i vettori $v_1, \dots, v_n$ sono:
- vettori linearmente indipendenti
- un sistema di generatori per V.

NB: Se B è formato da vettori l.i. allora il vettore nullo non è compreso in B e ogni sottoinsieme di B ancora linearmente indipendente

NB: Sia $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una BASE per lo spazio vettoriale V.
Allora scelto comunque un vettore $v \in V$ esiste una n-pla di scalari $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tale che

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$

proprio perché B è un sistema di generatori per V.
Inoltre, dato che i vettori $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti, la n-pla di scalari $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ è UNICA. Gli scalari $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ si chiamano COORDINATE DI V SU B.

Teorema del Completamento di una Base

Siano V uno spazio vettoriale di dimensione m e $\{v_1,\dots,v_r\}$ un insieme di vettori linearmente indipendenti. Esistono allora i vettori $v_{r+1},\dots,v_m$ tali che $\{v_1,\dots,v_r,v_{r+1},\dots,v_m\}$ sia una base di V.

Se $r=m$ allora i vettori dell'insieme $\{v_1,\dots,v_r\}$ rappresentano già una base per V.

Se $r<m$ allora il sottospazio $\langle v_1,\dots,v_r\rangle$ non può rappresentare tutto V.

Si sceglierà allora un vettore $v_{r+1}\in V-\langle v_1,\dots,v_r\rangle$. I vettori $v_1,\dots,v_r,v_{r+1}$ sono linearmente indipendenti.

Infatti, siano $\alpha_1,\dots,\alpha_{r+1}$ scalari non tutti nulli si ha:

$$\alpha_1v_1+\dots+\alpha_rv_r+\alpha_{r+1}v_{r+1}=0$$

Sicuramente $\alpha_{r+1}\neq 0$, perché gli scalari sono non tutti nulli e se $\alpha_{r+1}=0$ allora ci sarebbe qualche scalare non nullo e si otterrebbe il vettore nullo, pertanto $v_1,\dots,v_r$ sarebbero linearmente dipendenti, ~~vorrebbe dire che $v_{r+1}\in\langle v_1,\dots,v_r\rangle$ ma questo è impossibile per costruz~~ Ne segue che $v_{r+1}\in\langle v_1,\dots,v_r\rangle$ ma questo è assurdo quindi la combinazione lineare ...

Pertanto i vettori $\{v_1,\dots,v_{r+1}\}$ sono linearmente indipendenti.

Supponiamo adesso per induzione di aver trovato i vettori $v_{r+1},\dots,v_s$ tali che $\{v_1,\dots,v_s\}$ siano linearmente indipendenti. Se $s<m$ si può determinare allora $v_{s+1}\in V-\langle v_1,\dots,v_s\rangle$ in modo che i vettori $v_1,\dots,v_s,v_{s+1}$ siano ancora linearmente indipendenti.

Ne segue allora che si possono determinare i vettori $v_{r+1},\dots,v_m$ tali che $v_1,\dots,v_m$ siano linearmente indipendenti e quindi una base per V.

Teorema dell'Estrazione di una Base:

Siano V uno spazio vettoriale non vuoto e $G = \{v_1, \dots, v_m\}$ un sistema di generatori per tale spazio. Esiste allora un sottoinsieme di G che è una base di V.

Si considera il primo vettore di G diverso dal vettore nullo $\bar{o}$.
Sia v_h tale vettore, con $v_1, \dots, v_{h-1} = \bar{o}$.
Rinominiamo il vettore $v_h = w_1$. Scegliamo adesso il prossimo vettore appartenente a G fra $v_{h+1}, \dots, v_m$ che non sia compreso nel sottospazio $\langle w_1 \rangle$. Sia v_k tale vettore.
Sicuramente $v_k \neq \bar{o}$ poiché $\bar{o} \in \langle w_1 \rangle$, rinominiamo $v_k = w_2$.
Scelto il prossimo vettore v_t da $v_{k+1}, \dots, v_m$ che non sia compreso nel sottospazio $\langle w_1, w_2 \rangle$ generato dai vettori w_1 e w_2, poniamo $w_3 = v_t$.
Iterando tale procedimento si determina un sottoinsieme non vuoto di G, $B = \{w_1, \dots w_r\}$ tale che $\forall i = 1, \dots, r \quad w_i \neq \bar{o}$ e $\forall i = 2, \dots, r \quad w_i \notin \langle w_1, \dots, w_{i-1} \rangle$
L'insieme B sarà costituito pertanto da vettori linearmente indipendenti poiché ciascun i-esimo vettore non sarà proporzionale ai precedenti.
Tale insieme B è anche un sistema di generatori per V.
Infatti ogni vettore $v \in V$ è una combinazione lineare dei vettori di G e fra questi ogni vettore di $G - B$ o è il vettore nullo o è combinazione lineare dei vettori di B, dunque v è a maggior ragione combinazione lineare dei vettori di B.

TEOREMA DELLO SCAMBIO: Dato uno spazio vettoriale V, $\{v_1, \ldots, v_m\}$ una sua base e $\{w_1, \ldots, w_r\}$ un insieme di vettori linearmente indipendenti.

Il teorema dello scambio dimostra come un insieme di vettori che definisce una base per uno spazio vettoriale V contenga il massimo numero di vettori linearmente ~~indipendenti~~ indipendenti..

In questo caso la tesi è che $\boxed{r \leq m}$.

- L'insieme $\{v_1, \ldots, v_m\}$ è una base per lo spazio vettoriale V, quindi è un sistema di generatori per i vettori di V, inclusi i vettori $\{w_1, \ldots, w_r\}$.
- Possiamo allora dire che esistono gli scalari $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ (non tutti nulli) tali che:

$$w_1 = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m$$

w_1 fa parte di un insieme di vettori linearmente indipendenti, pertanto non può essere il vettore nullo $\bar{0}$, pertanto gli scalari $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ sono non tutti nulli.
Ipotizziamo che sia $\alpha_1 \neq 0$, allora possiamo moltiplicare ambo i membri per $\frac{1}{\alpha_1}$ (sappiamo che α_1 è invertibile) e ottenere:

$$\frac{1}{\alpha_1} w_1 = \cancel{\alpha_1} \cdot \frac{1}{\cancel{\alpha_1}} v_1 + \ldots + \frac{\alpha_m}{\alpha_1} v_m$$

$$\frac{1}{\alpha_1} w_1 = v_1 + \ldots + \frac{\alpha_m}{\alpha_1} v_m$$

$$v_1 = \frac{1}{\alpha_1} w_1 - \frac{1 \alpha_2 v_2}{\alpha_1} - \ldots - \frac{\alpha_m}{\alpha_1} v_m$$

Questo vuol dire che $v_1 \in \langle w_1, v_2, \ldots, v_m \rangle$ e i vettori $\langle w_1, v_2, \ldots, v_m \rangle$ sono un sistema di generatori per V.
Procedendo per induzione, iterando il procedimento;
Supponiamo che i vettori $w_1, \ldots w_s, v_{s+1}, \ldots, v_m$ (con $s \geq 1$, $s < r$, $s < m$) siano un sistema di generatori per V.
Avremo che $\boxed{w_{s+1} = \beta_1 w_1 + \ldots + \beta_s w_s + \gamma_{s+1} v_{s+1} + \ldots + \gamma_m v_m}$

Gli scalari γ_i (con $i = s+1, \ldots, m$) non possono essere tutti nulli, poiché altrimenti i vettori $w_1, \ldots w_s, w_{s+1}$ non sarebbero linearmente indipendenti (un sottoinsieme di un insieme di vettori lin. indip. è anche linearmente indipendente)

Poniamo allora $\gamma_{s+1} \neq 0$, potremo allora scrivere che:

$$v_{s+1} \in \langle w_1, \dots, w_s, w_{s+1}, v_{s+2}, \dots, v_m \rangle$$

e quindi i vettori $\langle w_1, \dots, w_s, w_{s+1}, v_{s+2}, \dots, v_m \rangle$ sono un sistema di generatori per V.

• Supponiamo infine $r > m$, vorrà dire che si sarà dimostrato per induzione che i vettori $\langle w_1, \dots, w_m \rangle$ sono un sistema di generatori per V, pertanto esistono m scalari $\delta_1, \dots, \delta_m$ tali che:

$$w_r = \delta_1 w_1 + \dots + \delta_m w_m$$

Ma questo è assurdo poiché i vettori $w_1, \dots, w_m, w_r$ sono per costruzione linearmente indipendenti e non si può ottenere uno di loro come combinazione lineare degli altri.

Teorema di Grassmann:

Sia V uno spazio vettoriale su campo K dotato di basi finite e siano U e W suoi sottospazi. Allora:

$$\boxed{\dim U + \dim W = \dim (U \cap W) + \dim (U + W)}$$

Poniamo $\dim U = r$ e $\dim W = s$. $(U \cap W)$ è un sottospazio sia di U che di W per cui, sarà una sua base $\{v_1, \dots, v_t\}$.

Sappiamo in generale che se abbiamo uno spazio vettoriale V di dimensione n e un insieme di suoi vettori linearmente indipendenti $\{v_1, \dots, v_t\}$ allora esistono i vettori $v_{t+1}, \dots, v_n$ tali che i vettori $\{v_1, \dots, v_t, v_{t+1}, \dots, v_n\}$ sono una base per V.

Vuol dire che nel nostro caso, dati i vettori linearmente indipendenti (base per $U \cap W$), esistono dei vettori $u_1, \dots, u_{r-t}$ di U tali che $B = \{v_1, \dots, v_t, u_1, \dots, u_{r-t}\}$ sia una base per U e $B' = \{v_1, \dots, v_t, w_1, \dots, w_{s-t}\}$ sia una base per W.

La relazione di Grassmann sarà verificata dimostrando che

$$\boxed{B \cup B' = \{v_1, \dots, v_t, u_1, \dots, u_{r-t}, w_1, \dots, w_{s-t}\}}$$ è una base di $U + W$.

~~Così si dimostrerà che dim U + dim W = dim (U∩W) + dim (U+W)~~

~~sarà base di U+W ... r + s = r + s − t + t~~

$$\underbrace{\dim (U+W)}_{r+s-t} = \underbrace{\dim U}_{r} + \underbrace{\dim W}_{s} - \underbrace{\dim (U \cap W)}_{t}$$

Dato un qualsiasi vettore $x = u + w$, con $u \in U$ e $w \in W$, sia un qualsiasi vettore di $U + W$, Considerando che $u \in U$ è una combinazione lineare della base B e w è combinazione lineare della base B', avremo che x è combinazione lineare dei vettori di $B \cup B'$, che pertanto è un sistema di generatori per $U + W$. Dimostrando che i vettori di $B \cup B'$ sono linearmente indipendenti si dimostrerà che $B \cup B'$ è una base per $U + W$.

Per mostrare che i vettori di $B \cup B'$ sono linearmente indipendenti consideriamo la relazione

$$\sum_{i=1}^{t} a_i v_i + \sum_{j=1}^{r-t} \beta_j u_j + \sum_{h=1}^{s-t} \gamma_h w_h = \bar{0} \qquad (1)$$

Il vettore:

$$-\sum_{h=1}^{s-t} \varphi_h w_h = \sum_{i=1}^{t} \alpha_i v_i + \sum_{j=1}^{r-t} \beta_j u_j$$

Pertanto il vettore al primo membro si ottiene come combinazione lineare dei vettori di B ma è associato ai vettori w_h di B', tale vettore appartiene al sottospazio $U \cap W$.

Esisteranno quindi gli scalari $\delta_1, \dots, \delta_t$ tali che:

$$-\sum_{h=1}^{s-t} \varphi_h w_h = \sum_{k=1}^{t} \delta_k v_k$$

Ne segue che:

$$\sum_{k=1}^{t} \delta_k v_k + \sum_{h=1}^{s-t} \gamma_h w_h = \bar{0}$$

Ma i vettori di B' sono linearmente indipendenti (e i vettori v_i appartengono ad una base di $U \cap W$ e sono linearmente indipendenti) pertanto tutti gli scalari dovranno essere nulli: $\delta_k = 0$ per $k = 1 \dots t$ e $\gamma_h = 0$ per $h = 1 \dots s-t$

La relazione (1) iniziale diviene allora

$$\sum_{i=1}^{t} \alpha_i v_i + \sum_{j=1}^{r-t} \beta_j u_j = \bar{0}$$

Ma questi sono i vettori di B, una base di U, e sono linearmente indipendenti pertanto si ha che $\alpha_i = 0$ per $i = 1 \dots t$ e $\beta_j = 0$ per $j = 1, \dots, r-t$.

Dunque i vettori di $B \cup B'$ sono linearmente indipendenti in quanto gli scalari devono essere tutti nulli per ottenere il vettore nullo.

Abbiamo dimostrato che i vettori di $B \cup B'$ sono un sistema di generatori per $U+W$ e sono vettori linearmente indipendenti, pertanto sono una base per $U+W$.

Avremo che quindi la dimensione dello spazio vettoriale $U+W$ sarà $\dim(U+W) = r+s-t$.

Dall'ipotesi avremo: $\dim U + \dim W = \dim(U \cap W) + \dim(U+W)$ da cui

$$\dim(U+W) = \underbrace{\dim U}_{r} + \underbrace{\dim W}_{s} - \underbrace{\dim(U \cap W)}_{t}$$

$$r+s-t = r + s - t$$

APPLICAZIONI LINEARI:

Siano V e W spazi vettoriali sullo stesso campo K.
Una applicazione lineare (o OMOMORFISMO) di V in W è una applicazione $L: V \to W$ con le seguenti proprietà:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \bullet\ L(u+v) = L(u) + L(v) & \forall u,v \in V \\ \bullet\ L(\alpha u) = \alpha L(u) & \forall \alpha \in K,\ \forall u \in V \end{array}}$$

PROPRIETÀ APPLICAZIONE LINEARE

Se l'applicazione lineare L è biettiva si parla di ISOMORFISMO.
(se esiste un isomorfismo di V in W allora gli spazi vettoriali V e W si dicono "isomorfi").
Se l'applicazione lineare L è di uno spazio vettoriale V in se stesso ed è biettiva allora è un isomorfismo particolare, chiamato AUTOMORFISMO (ENDOMORFISMO BIETTIVO)
Se l'applicazione lineare L è di uno spazio vettoriale V in se stesso e L non è biettiva allora si parla di ENDOMORFISMO.

NUCLEO E IMMAGINE:

Siano V e W spazi vettoriali sullo stesso campo K e sia $L: V \to W$ un'applicazione lineare.

NUCLEO DI L: Si chiama NUCLEO DI L e si denota con Ker L, l'insieme dei vettori di V la cui immagine in L è il vettore nullo.

$$\boxed{\operatorname{Ker} L = \{v \in V \ / \ L(v) = \bar{0}\}}$$

IMMAGINE DI L: Si chiama IMMAGINE DI L il sottoinsieme $L(v) \in W$ per qualche $v \in V$, ovvero l'insieme dei vettori di W che sono immagine tramite L di uno o più vettori di V

$$\boxed{\operatorname{Im} L = \{w \in L \ / \ L(v) = w \text{ per qualche } v \in V\}}$$

• **Ker L é sottospazio di V:**

Scelti infatti due vettori del nucleo $v_1, v_2 \in \text{Ker}\, L$ e uno scalare $\alpha \in K$:

$$\boxed{\begin{array}{l} L(v_1+v_2) = L(v_1)+L(v_2) = \bar{0}+\bar{0} = \bar{0} \\ \text{e} \\ L(\alpha v_1) = \alpha L(v_1) = \alpha\bar{0} = \bar{0} \end{array}}$$

pertanto v_1+v_2 e αv_1 sono ancora vettori del sottospazio Ker L.

• **Im L é sottospazio di W:**

Presi $w_1, w_2 \in \text{Im}\, L$ e uno scalare $\beta \in K$, posto $w_1 = L(v_1)$ e $w_2 = L(v_2)$

Avremo che:

$$\boxed{\begin{array}{l} w_1+w_2 = L(v_1)+L(v_2) = L(v_1+v_2) \\ \text{e} \\ \beta w_1 = \beta L(w_1) = L(\beta w_1) \end{array}}$$

• **Un'applicazione lineare L é ~~Biettiva~~ iniettiva se e solo il nucleo dell'applicazione é il sottospazio null**

Data un'applicazione lineare $L: V \to W$ di uno spazio vettoriale V in uno spazio vettoriale W.

$$L \text{ é iniettiva} \iff \text{Ker}\, L = \{\bar{0}\}$$

Dim. $\Rightarrow$: Se L é iniettiva, allora il nucleo non potrá contenere nessun vettore $v \neq \bar{0}$, altrimenti si avrebbe che $L(v) = \bar{0}$ e $L(\bar{0}) = \bar{0}$, pertanto $\bar{0}$ e v avrebbero le stesse immagine
L non sarebbe iniettiva

Dim $\Leftarrow$: Sia $\text{Ker}\, L = \{\bar{0}\}$, ipotizziamo che L non sia iniettiva, pertanto esistono $v_1, v_2 \in V$ tali che $L(v_1) = L(v_2)$.

Ma allora risulterebbe: $L(v_1) - L(v_2) = L(v_1 - v_2) = \bar{0}$

Pertanto $v_1 - v_2 \in \text{Ker}\, L$, ovvero $v_1 - v_2 = \bar{0}$ e cioé $v_1 = v_2$

Quindi v_1 e v_2 erano lo stesso vettore e non possono esistere vettori differenti con stesse immagine: Allora L iniett

SE L'APPLICAZIONE LINEARE $L: V \to W$ È INIETTIVA ALLORA MUTA VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI DI V IN VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI DI W:

Se $v_1, \dots, v_m \in V$ sono vettori linearmente indipendenti e $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ sono scalari tali che:

$$\alpha_1 L(v_1) + \dots + \alpha_m L(v_m) = \bar{0} \quad (*)$$

si ha che $L(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m) = \bar{0}$

Quindi il vettore $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m$ appartiene a $\mathrm{Ker}\, L$.
Ma considerando che L è iniettiva, vuol dire che $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = \bar{0}$ e poiché i vettori $v_1, \dots, v_m$ sono linearmente indipendenti si ha che gli scalari $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ sono tutti nulli.
Dunque da $(*)$ risulta che anche i vettori immagine di $v_1, \dots, v_m$ tramite L sono linearmente indipendenti.

$\vdash\!\dashv$

TEOREMA DELLA DIMENSIONE:

Siano V e W due spazi vettoriali di dimensione finita sullo stesso campo.
Per ogni applicazione lineare $L: V \to W$ si ha

$$\boxed{\dim V = \dim \operatorname{Ker} L + \dim \operatorname{Im} L}$$

DIMOSTRAZIONE:

- Se $\operatorname{Im} L = \{\bar{0}\}$, vuol dire che ogni vettore di V ha come immagine il vettore nullo, ovvero $\operatorname{Ker} L = V$ e pertanto $\dim V = \dim \operatorname{Ker} L$.
- Se $\operatorname{Im} L \neq \{\bar{0}\}$.
  - Scegliamo una base $\{w_1, \dots, w_r\}$ per $\operatorname{Im} L$.
    Siano $v_1, \dots, v_r$ i vettori per cui $L(v_1) = w_1, \dots, L(v_r) = w_r$.
    Sia $\{u_1, \dots, u_s\}$ una base per $\operatorname{Ker} L$.

    Ho le basi di Ker L e Im L e dei vettori di V le cui immagini sono i vettori della base di Im L.

  - Si dimostra che i vettori $v_1, \dots, v_r, u_1, \dots, u_s$ sono una base per V.

    Si deve dimostrare che tali vettori sono linearmente indipendenti e un sistema di generatori per V.

    Presi gli scalari $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s$ sono tali da:

    (1) $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_s u_s = \bar{0}$

    Considerando l'applicazione lineare L applicata ad ambo i membri:

    $\alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_r w_r = \bar{0}$

    Ma i vettori $w_1, \dots, w_r$ costituiscono una base per Im L e per questo sono linearmente indipendenti.
    Avremo pertanto che $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ sono tutti nulli. $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_r = 0$
    Dalla (1) avremo quindi:

    $\beta_1 u_1 + \dots + \beta_s u_s = \bar{0}$ Ma $u_1, \dots, u_s$ sono una base per Ker L, pertanto sono vettori linearmente indipendenti, quindi $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_s = 0$

Dunque i vettori $v_1, \dots, v_r, u_1, \dots, u_s$ sono linearmente indipendenti e sono anche un sistema di generatori per V, infatti: (segue prox foglio)

$\forall v \in V \quad , \quad L(v) \in \operatorname{Im} L$

Dimostriamo che $v_1, \dots, v_r, u_1, \dots, u_s$ sono un sistema di generatori per V.

Esistono quindi gli scalari $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ tali che

$$L(v) = \gamma_1 w_1 + \dots + \gamma_r w_r = \gamma_1 L(v_1) + \dots + \gamma_r (v_r) = L(\gamma_1 v_1 + \dots + \gamma_r v_r)$$

Ne segue:

$$L(v - \gamma_1 v_1 - \dots - \gamma_r v_r) = \bar{0}$$

Quindi $v - \gamma_1 v_1 - \dots - \gamma_r v_r \in \operatorname{Ker} L$

E pertanto esistono $\delta_1, \dots, \delta_s$ tali che:

$$v - \gamma_1 v_1 - \dots - \gamma_r v_r = \delta_1 u_1 + \dots + \delta_s u_s$$

Risulta pertanto che il vettore $v \in V$ si può ottenere come combinazione lineare dei vettori $v_1, \dots, v_r, u_1, \dots$

$$\boxed{v = \gamma_1 v_1 + \dots \gamma_r v_r + \delta_1 u_1 + \dots + \delta_s u_s}$$

Pertanto $\{v_1, \dots, v_r, u_1, \dots, u_s\}$ è costituito da vettori linearmente indipendenti e che sono ~~una base per~~ un sistema di generatori per V, pertanto costituisce una base per V.

APPLICAZIONI LINEARI E MATRICI:

Siano V e W due spazi vettoriali sullo stesso campo K con dimensioni rispettivamente n ed m.

Data $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V e data $B' = \{w_1, \dots, w_m\}$ una base per W, ad ogni applicazione lineare $L : V \to W$ si può associare una matrice $m \times n$ su K:

Si esprimono i vettori $L(v_1), \dots, L(v_n) \in W$ come combinazioni lineari dei vettori della base B':

$$\boxed{\begin{array}{l} L(v_1) = \alpha_{11} w_1 + \dots + \alpha_{m1} w_m \\ \vdots \\ L(v_n) = \alpha_{1n} w_1 + \dots + \alpha_{mn} w_m \end{array}}$$

e si associa ad L la matrice

$$M^{B}_{B'}(L) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

N.B.: Si ottiene una diversa applicazione, quindi una diversa matrice associata ad L, per ogni scelta delle basi B e B'.
Qualsiasi sia la scelta, si ha sempre una biiezione.

FORMULA GENERALE SVILUPPO DI LA PLACE:

$$D(A) = (-1)^{i+1} a_{i1} \cdot \det(A_{i1}) + \dots + (-1)^{i+n} a_{in} \det(A_{in})$$

SISTEMI LINEARI:

Un sistema lineare di "m" equazioni in "n" incognite a coefficienti in un dato campo K è un sistema del tipo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n} = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn} = b_m \end{cases}$$

Le incognite sono $x_1, \dots, x_n$ mentre i coefficienti a_{ij} e b_i sono elementi di K.
Le soluzioni del sistema sono le n-ple $(x_1, \dots, x_n)$ di elementi di K tali che soddisfano tutte le equazioni del sistema.

MATRICE DEL SISTEMA

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} A^1 & \dots & A^n \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Il sistema può essere riscritto come: $A_1X_1 + A_2X_2 + \dots + A_nX_n = B$

SISTEMA DI CRAMER:

Un sistema lineare di m equazioni in n incognite è detto "Sistema di Cramer" se:

- $m = n$
- il determinante della matrice del sistema è diverso da zero

Teorema: Soluzione di un sistema di Cramer:

Sia $x_1 A^1 + \dots + x_n A^n = B$ un sistema di Cramer.
Esiste allora una ed una sola soluzione del sistema, con:

$$\boxed{x_j = \frac{D(A^1, \dots, B, \dots A^n)}{D(A)}}$$

con $j = 1, \dots, n$

Ovvero x_j si trova dal rapporto fra il determinante della matrice completa, ove alla j-esima colonna si sostituisce la colonna B, e il determinante della matrice del sistema.

Dimostrazione:
Per ipotesi il sistema è crameriano, pertanto la matrice A del sistema è $n \times n$ con determinante diverso da zero.
Le sue colonne $A^1, \dots, A^n$ sono vettori di K^n linearmente indipendenti (perché $\det A \neq 0$) ed, essendo n, sono una base di K^n.
Il vettore B si può esprimere in uno ed un solo modo come combinazione lineare dei vettori $A^1, \dots, A^n$
Questo implica che esiste una sola soluzione del sistema.

Supponiamo che la soluzione del sistema sia $(x_1, \dots, x_n)$ e calcoliamo il determinante della matrice $(A^1 \dots B \dots A^n)$ ottenuta da A sostituendo A^j con B.

$$D(A^1, \dots, B, \dots, A^n) = D(A^1, \dots, x_1 A^1 + \dots x_n A^n, \dots A^n)$$
$$= x_1 D(A^1, \dots, A^1, \dots, A^n) + \dots + x_j D(A^1, \dots A^j, \dots, A^n) + x_n D(A^1, \dots, A^n, \dots, A^n)$$

Ma queste matrici hanno 2 colonne uguali e quindi determinante nullo, tranne il j-esimo termine:

$$D(A^1, \dots, B, \dots, A^n) = x_j D(A^1, \dots, A^j, \dots, A^n) = x_j D(A)$$

$$\boxed{x_j = \frac{D(A^1, \dots, B, \dots, A^n)}{D(A)}}$$

Sistemi Lineari Omogenei:

Sono sistemi lineari di m equazioni in n incognite del tipo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Teorema: Un sistema lineare omogeneo ammette sempre soluzioni.
Se r è il rango della matrice del sistema ed n è il numero di incognite allora le soluzioni del sistema sono un sottospazio di K^n di dimensione $n-r$.

Dimostrazione:

- Siano "m" il numero di equazioni del sistema e $A = (A^1, \dots, A^n)$ la matrice dei coefficienti.
- Si consideri l'applicazione ~~del sistema~~ lineare:

$$L: K^n \to K^m \quad \text{definita da} \quad L(x_1, \dots, x_n) = x_1A_1 + \dots + x_nA_n$$

- L'insieme S delle soluzioni è l'insieme dei vettori $X = (x_1, \dots, x_n)$ di K^n tali che $L(X) = \bar{0}$, ne segue $\boxed{S = \operatorname{Ker} L}$

Pertanto S è un sottospazio di K^n e il vettore nullo di K^n è sempre una soluzione del sistema.

Si ha inoltre $\operatorname{Im} L = \langle A^1, \dots, A^n \rangle$

$\dim K^n = \dim \operatorname{Ker} L + \dim \operatorname{Im} L$

Quindi, visto che $\dim K^n = \dim S + \dim \langle A^1, \dots, A^n \rangle$

Cioè:

$$\boxed{\dim S = n - r}$$

Sistemi Lineari Non Omogenei:

I sistemi lineari non omogenei non sempre hanno soluzioni.
Per determinare se un certo sistema lineare non omogeneo presente soluzioni o meno si usa il teorema di Rouché-Capelli.

Teorema di Rouché-Capelli:

Un sistema lineare $x_1 A^1 + \dots + x_m A^m = B$ é compatibile se e solo se:

$$\boxed{RANG(A^1, \dots, A^m) = RANG(A^1, \dots, A^m, B)}$$

cioé se il rango della matrice completa coincide con il rango della matrice incompleta.

Dimostrazione:

$\Leftarrow$

Posto $RANG(A^1, \dots, A^m) = r$.
Vorrá dire che delle m colonne, (vettori) ~~linearmente indipendenti~~ il massimo numero di colonne linearmente indipendenti é r.
Costruiamo allora una base dello spazio vettoriale $<A^1, \dots, A^m>$ costituito dagli r vettori linearmente indipendenti. Sia $\{A^{h_1}, \dots, A^{h_r}\}$ tale base.
Per la tesi se il sistema é compatibile anche la matrice $(A^1, \dots, A^m, B)$ ha rango r, quindi, a maggior ragione,

$$<A^{h_1}, \dots, A^{h_r}> = <A^{h_1}, \dots, A^{h_r}, B>$$

Ció implica che gli r+1 vettori $A^{h_1}, \dots, A^{h_r}, B$ sono linearmente dipendenti, esistono dunque gli scalari $\lambda_1, \dots, \lambda_r, \lambda$ non tutti nulli tali che:

$$\lambda_1 A^{h_1} + \dots \lambda_r A^{h_r} + \lambda B = \overline{0}$$

Ma si ha necessariamente che $\lambda \neq 0$, perché se fosse uguale a zero i vettori $A^{h_1}, \dots, A^{h_r}$ sarebbero linearmente dipendenti. Ne segue che $B \in <A^{h_1}, \dots, A^{h_r}> = <A^1, \dots, A^n>$ e quindi esistono soluzioni del sistema.

$\Longrightarrow$

Viceversa, se il sistema ammette soluzioni il vettore $B \in \langle A^1, \dots, A^m \rangle$

Si ha pertanto $\langle A^1, \dots, A^m, B \rangle = \langle A^1, \dots, A^m \rangle$

Cioè: $\mathrm{RANG}(A^1, \dots, A^m, B) = \mathrm{RANG}(A^1, \dots, A^m)$