MATRICI - DEFINIZIONI DI BASE

• Una matrice può essere indicata in questo modo:

$\boxed{M_{m \times n}(\mathbb{R})}$

m indica il numero di righe

n indica il numero di colonne

$\mathbb{R}$ indica l'insieme dei valori che possiamo assegnare come elementi della matrice.

• Ogni elemento è indicato in questo modo:

$\boxed{a_{ij}}$

i indica la riga e j la colonna

Quindi una matrice può essere espressa anche in questo modo:

$$\boxed{M = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}} \qquad \text{con } i, j \in \mathbb{N}$$

Se $m = n$ allora la matrice viene detta "quadrata".

Se $m \neq n$ allora è "rettangolare".

Per "ordine" di una matrice si intende la sua dimensione.

Ecco, le matrici generiche di ordine 2×2 e 3×3.

$$M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$M_{3\times 3}(\mathbb{R}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

MATRICI SIMMETRICHE DI ORDINE 2X2

Per definizione una matrice è simmetrica quando:

$$\boxed{a_{ij} = a_{ji}}$$

Ovvero:

$$S_{2x2}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, a_{ij} \in \mathbb{R} \,/\, a_{ij} = a_{ji} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$$

Esempio di matrici simmetriche:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ oppure } \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ oppure } \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} \ldots$$

Si può notare che se scambiamo le righe con le colonne otteniamo la stessa matrice.

Per individuare gli elementi di una matrice simmetrica 2x2 abbiamo bisogno di 3 parametri: $\boxed{a_{11}, a_{12} \text{ e } a_{22}}$

"a_{22}" non serve perché sappiamo che è uguale ad "a_{12}"

Oltre a questi 3 parametri serve una "base canonica" ovvero uno spazio vettoriale che permette di generare qualsiasi matrice simmetrica 2x2:

$$\boxed{\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle}$$

indicato anche così:

$$\text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Facendo la "combinazione lineare" con i parametri si ottiene:

$$a_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{22} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Ricordo che gli elementi della base canonica sono simmetrici e "linearmente indipendenti" (cioè l'unico parametro che fa ottenere la matrice nulla è lo scalare 0 (zero).

MATRICI ANTISIMMETRICHE DI ORDINE 2X2

Per definizione una matrice è antisimmetrica quando:

$$\boxed{a_{ij} = -a_{ji}}$$

Ovvero:

$$A_{2\times2}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, a_{ij} \in \mathbb{R} / a_{ij} = -a_{ji} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{pmatrix}, a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$$

Esempio di matrici antisimmetriche

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ oppure } \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \text{ oppure } \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -7 & 0 \end{pmatrix} \dots$$

Si può notare che la diagonale principale ha solo elementi 0.

Per individuare una matrice antisimmetrica 2X2 abbiamo bisogno soltanto del parametro $\boxed{a_{12}}$.

La base canonica in questo caso è:

$$\boxed{\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle} \quad \text{o anche } \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Facendo la combinazione lineare con il parametro a_{12} si ottiene:

$$a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

Anche in questo caso si nota che l'elemento della base canonica è antisimmetrico.

MATRICI SIMMETRICHE DI ORDINE 3X3

Si ripetono gli stessi concetti delle matrici 2x2.
In questo caso i parametri da prendere in considerazione sono:

$\boxed{a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{22}, a_{23}, a_{33}}$

Non è necessario prendere a_{21}, a_{31} e a_{32} perchè sono uguali rispettivamente a a_{12}, a_{13} e a_{23}.
La base canonica sarà:

$$\boxed{\left\langle \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&1&0\\1&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&1\\0&0&0\\1&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&1&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&1\\0&1&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&1 \end{pmatrix} \right\rangle}$$

Come sempre, combinando linearmente i parametri con la forma canonica si ottiene la matrice simmetrica di ordine 3X3.

MATRICI ANTISIMMETRICHE DI ORDINE 3X3

I parametri sono:

$\boxed{a_{12}, a_{13}, a_{23}}$

La base canonica sarà

$$\boxed{\left\langle \begin{pmatrix} 0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0 \end{pmatrix} \right\rangle}$$

SCOMPOSIZIONE DI UNA MATRICE GENERICA COME SOMMA FRA UNA M. SIMMETRICA E UNA M. ANTISIMMETRICA

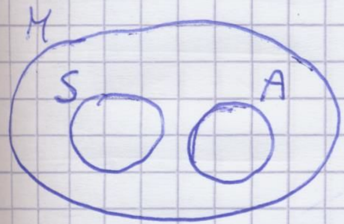
Ogni matrice quadrata si può ottenere sommando una matrice simmetrica con una matrice antisimmetrica. Ovvero:

$M_{3\times3}(\mathbb{R}) = S_{3\times3}(\mathbb{R}) + A_{3\times3}(\mathbb{R})$

Bisogna dire che $S(\mathbb{R})$ e $A(\mathbb{R})$ sono 2 sottoinsiemi disgiunti. Infatti solo la matrice nulla è contemporaneamente simmetrica e antisimmetrica.

$$S \cap A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Facendo il grafico di Eulero-Venn:



Prendiamo adesso una matrice simmetrica (con gli elementi indicati con "a") e sommiamola con una matrice antisimmetrica (elementi indicati con "b"). Otterremo la matrice somma (elementi indicati con "c").

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} \\ -b_{12} & 0 & b_{23} \\ -b_{13} & -b_{23} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{12}-b_{12} & a_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{13}-b_{13} & a_{23}-b_{23} & a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

Quindi se abbiamo le 2 matrici **S** ed A possiamo ricavarci gli elementi della matrice somma così:

$c_{11} = a_{11}$ $\qquad$ $c_{21} = a_{12} - b_{12}$ $\qquad$ $c_{31} = a_{13} - b_{13}$

$c_{12} = a_{12} + b_{12}$ $\qquad$ $c_{22} = a_{22}$ $\qquad$ $c_{32} = a_{23} - b_{23}$

$c_{13} = a_{13} + b_{13}$ $\qquad$ $c_{23} = a_{23} + b_{23}$ $\qquad$ $c_{33} = a_{33}$

Viceversa, se abbiamo una matrice e dobbiamo scomporla in 2 matrici (una simmetrica e una antisimmetrica):

$a_{11} = c_{11}$ $\qquad$ $b_{11} = 0$

$a_{12} = \dfrac{c_{12} + c_{21}}{2}$ $\qquad$ $b_{12} = \dfrac{c_{12} - c_{21}}{2}$

$a_{13} = \dfrac{c_{13} + c_{31}}{2}$ $\qquad$ $b_{13} = \dfrac{c_{13} - c_{31}}{2}$

$a_{22} = c_{22}$ $\qquad$ $b_{22} = 0$

$a_{23} = \dfrac{c_{23} + c_{32}}{2}$ $\qquad$ $b_{23} = \dfrac{c_{23} - c_{32}}{2}$

$a_{33} = c_{33}$ $\qquad$ $b_{33} = 0$

Esempio:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Simmetrica}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1/2 & -3/2 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ 3/2 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Antisimmetrica}}$$