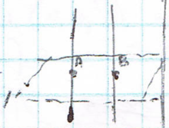
PROCEDURE RISOLUTIVE ESERCIZI RETTA E PIANI:

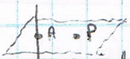
DISTANZA FRA 2 RETTE:

- Si determina se le rette sono parallele con la regola $rang\begin{pmatrix} l & m & n \\ l' & m' & n' \end{pmatrix} = 1$ (servono punti ...)



- Si determina un punto A per una delle 2 rette, ad esempio imponendo un valore per t;
- Si determina il piano ortogonale ad entrambe le rette e passante per A con la formula $l(x-x_0)+m(y-y_0)+n(z-z_0)=0$
- Si determina l'intersezione fra il piano e la retta di cui non si conosce un punto per trovare tale punto di intersezione B
- Si calcola la distanza $d(A,B)$

DISTANZA DI UN PUNTO P DA UNA RETTA r:



- Determinare parametri direttori retta r;
- Determinare piano ortogonale e passante per P con la formula $l(x-x_0)+m(y-y_0)+n(z-z_0)=0$
- Determinare punto A intersezione fra piano e retta.
- Calcolare la distanza $d(A,P)$.

RETTE SGHEMBE e RETTA DI MINIMA DISTANZA E MINIMA DISTANZA

- Per stabilire se 2 rette sono sghembe si verifica che non siano complanari (non parallele e non incidenti)
- Considerare 2 punti generici, uno per ciascuna retta
- Determinare la retta che passa per i 2 punti generici, con

$$\frac{x-x_2}{x_2-x_1} = \frac{y-y_2}{y_2-y_1} = \frac{z-z_2}{z_2-z_1}$$

- Considerando i parametri direttori delle 2 rette iniziali e della nuova retta trovata, siano (l,m,n), (l',m',n') e (l'',m'',n'') rispettivamente, le 2 rette iniziali devono essere contemporaneamente perpendicolari alla nuova retta trovata sfruttando 2 volte la formula $ll'+mm'+nn'=0$, condizione di perpendicolarità di 2 rette. Avremo allora:

$$\begin{cases} ll''+mm''+nn''=0 \\ l'l''+m'm''+n'n''=0 \end{cases}$$

Così facendo troveremo i valori di h e k dei punti generici e sostituendoli alla terza retta trovata avremo la retta di minima distanza

- Dei 2 punti generici iniziali, sostituendo h e k troviamo 2 punti specifici delle 2 rette, ovvero i punti di intersezione fra le 2 rette e la retta di minima distanza. La distanza $d(R,S)$ sarà proprio la minima distanza e si calcola con la formula

$$d(R,S) = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

RETTE SGHEMBE (r e s) E "SOLA" MINIMA DISTANZA:

- Come prima si verifica che le rette r e s sono sghembe dimostrando che non sono parallele e non sono incidenti.
- Si sceglie un punto della retta r e i parametri direttori di r, e si determina il piano che contiene s (dal fascio di piani di s) $(x-1)+\lambda(y-z)=0$ $\quad x+\lambda y-\lambda z-1=0$
- Il piano trovato avrà l'incognita λ, rappresenta infiniti piani che contengono s. Prendiamo quello parallelo alla retta r dalla condizione di parallelismo $al+bm+cn=0$ fra piano e retta, dove $(a,b,c)\rightarrow(1,\lambda,-\lambda)$ e (l,m,n) sono quelli della retta r.
- Trovato λ e sostituito abbiamo trovato il piano // a r e che contiene s
- Dalla formula della distanza piano-punto tra il piano trovato e il punto scelto all'inizio, si ottiene la distanza minima.

$$\delta(R,\pi) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

RETTA PASSANTE PER UN PUNTO, PARALLELA AD UN PIANO E INCIDENTE UNA RETTA r:

- Per determinare la retta si determinano 2 piani, uno parallelo al piano π e passante per P e uno che contiene la retta r ed è passante per P. La loro intersezione, se i 2 piani non sono paralleli, rappresenterà la retta desiderata.
- Cerco il piano parallelo a π e passante per P, conoscendo (a,b,c) del piano π e note le coordinate di P avremo:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

- Cerco il piano contenente r e passante per P, dal fascio di piani di asse la retta r e poi sostituendo a (x,y,z) le coordinate del punto P potremo trovare tale piano.
- I 2 piani trovati rappresentano una retta se non sono paralleli, ovvero se

$$rang\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} \neq 1$$

- Risolvendo il sistema lineare si può ottenere l'equazione cartesiana e parametrica della retta. Pag 38 Ex 9

VEDERE ANCHE Ex. 6 pag 30

PROCEDURE RISOLUTIVE ESERCIZI RETTE E PIANI; ②

DETERMINARE
PIANO PASSANTE PER UNA RETTA r E PARALLELO AD UN'ALTRA RETTA s:

- Si determina il fascio di piani con asse r, proprio ottenendo, al variare di λ, tutti i piani che contengono r.
- Si utilizza la condizione di parallelismo $al + bm + cn = 0$ tra piano e retta per determinare il piano del fascio parallelo alla retta s.

DATA UNA RETTA r E UN PUNTO $P(x_0, y_0, z_0)$, DETERMINARE IL PIANO ORTOGONALE ALLA RETTA r E PASSANTE PER P.

Siano (l, m, n) i parametri direttori della retta, si prosegue:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

$$l(x-x_0)+m(y-y_0)+n(z-z_0)=0$$

ROTAZIONE RETTA ATTORNO ALTRA RETTA:

- Si verifica che le 2 rette siano sghembe.
- Si considera un generico punto R sulla retta r (ricavato parametrizzando per il punto) e si determina il piano ortogonale alla retta s passante per R.
- Si considera un punto qualsiasi S sulla retta s, tale punto sarà il centro di una sfera di raggio $d(R, S)$.
- Una volta determinata l'equazione della sfera, mettendo a sistema questa con il piano si ottiene la circonferenza.

DATO UN PIANO π E UN PUNTO $P(x_0, y_0, z_0)$, DETERMINARE LA RETTA PERPENDICOLARE AL PIANO E PASSANTE PER P.

Siano (a, b, c) i parametri di giacitura con $(a,b,c) \rightarrow (l,m,n)$

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases} \Rightarrow$$

RETTE PARTICOLARI:

Asse x: $\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$

Asse y: $\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$

Asse z: $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

PROCEDURE RISOLUTIVE ESERCIZI: SFERA

SFERA TANGENTE IN UN PUNTO A UNA RETTA r E IL CUI CENTRO APPARTIENE AD UN'ALTRA RETTA s:

- Per determinare l'equazione della sfera si deve determinare il centro e raggio della sfera.
- Si determina il piano ortogonale alla retta r e passante per A, tale piano passerà per il centro della sfera. Si usa la regola

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$
$$l(x-x_0)+m(y-y_0)+n(z-z_0)=0$$

- Si considera il sistema, ovvero l'intersezione, fra il piano trovato e la retta s (entrambi passanti per il centro) trovando il centro della sfera.
- Calcolando la distanza $d(A,C)$ fra il centro della sfera e il punto di tangenza si ottiene il raggio della sfera. $C(\alpha,\beta,\gamma)$ $r=\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta}$
- Dalla formula $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=r^2$ si ottiene l'equazione cartesiana della sfera.

SFERA TANGENTE IN UN PUNTO A UN PIANO β E AVENTE CENTRO SU UN PIANO α:

- Per determinare l'equazione della sfera si devono determinare i suoi centro e raggio.
- Si determina la retta perpendicolare al piano β passante per il punto A di tangenza. Tale retta passerà per il centro. Per ricavarla si usano i parametri di giacitura del piano β nella formula seguente come parametri direttori

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

tale retta sarà ortogonale al piano β e passerà per A e per il centro.

- Si considera l'intersezione della retta ottenuta col piano α, passanti entrambi per il centro della sfera. Così facendo si ricaveranno le coordinate del centro.
- Considerando la distanza $d(A,C)$, fra il centro della sfera e il punto A di tangenza, si ottiene il raggio della sfera.
- La ~~equazione~~ sfera si ricava come di consueto. (guardare formula accanto)

SFERA CON CENTRO SU UN PIANO α, AVENTE DISTANZA MINIMA DALL'ORIGINE, E TANGENTE ALLA RETTA s

- Per determinare l'equazione della sfera bisogna conoscere centro e raggio della sfera.
- Si determina la retta perpendicolare al piano α, che contiene il centro, e passante per O. Tale retta passerà per il centro. Noti (a,b,c) del piano e $O(0,0,0)$ si scrive $\alpha(a,b,c)\rightarrow(1,-1,2)$

$$\begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt \\ z=z_0+nt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0+t \\ y=0-t \\ z=0+2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=2t \end{cases}$$

- Si considera l'intersezione della retta trovata e il piano α, entrambi passanti per il centro, per trovare le coordinate del centro.
- Bisogna adesso trovare il punto di tangenza, utile per trovare successivamente il raggio. Per trovare il punto di tangenza si considera il piano ortogonale alla retta s ~~tangente la sfera~~ (retta tangente la sfera) passante per il centro. Dall'intersezione fra tale piano e la retta s si troverà il punto di tangenza A.
- Calcolando la distanza $d(A,C)$ si ottiene il raggio e avendo il centro si può ricavare l'equazione della sfera.

PROCEDURE RISOLUTIVE ESERCIZI:

DETERMINARE CENTRO E RAGGIO CIRCONFERENZA NOTI LA SFERA E IL PIANO

- Questa circonferenza è vista come intersezione d'un piano e una sfera.
- Determino dall'equazione della sfera il centro della sfera, ricordando che $C(\alpha,\beta,\gamma)$ e la sfera è
  $x^2+y^2+z^2-2\alpha x-2\beta y-2\gamma z+d=0$.
- Determiniamo la retta perpendicolare al piano e passante per il centro della sfera, ricordando che si usano i parametri di giacitura del piano come parametri direttori della retta. Sia $C(x_c,y_c,z_c)$ avremo
  $(a,b,c)\rightarrow(l,m,n)$

$$\begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt \\ z=z_0+nt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=x_c+at \\ y=y_c+bt \\ z=z_c+ct \end{cases}$$

- Dall'intersezione della retta trovata e il piano si trova il centro della circonferenza cercata.
- Per trovare il raggio della circonferenza si applica il teorema di Pitagora. Si calcola il raggio della sfera dall'equazione della sfera ricordando che $R=\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-d}$, si calcola la distanza del centro della sfera dal piano iniziale $d(\pi, C_s)$. Il raggio della circonferenza, per il teorema di Pitagora, sarà il cateto seguente:

$$r_c=\sqrt{R^2-d^2(\pi,C_s)}$$

PASSAGGIO DA EQUAZIONI CARTESIANE A PARAMETRICHE: RETTA:

IMPORTANTE!

Per passare dalle equazioni cartesiane alle parametriche, basta risolvere il sistema lineare formato dalle equazioni cartesiane della retta.
Tale sistema possiede sicuramente ∞^1 soluzioni e risolvendo rispetto ad una variabile libera avente come parametro avremo delle equazioni parametriche. Ad esempio:

$$\begin{cases} 2x+z-1=0 \\ y-z+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=-2x+1 \\ y=z-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=-2x+1 \\ y=-2x+1-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=-2x+1 \\ y=-2x \end{cases}$$

x diventa il parametro t, pertanto avremo:

$$\begin{cases} x=t \\ y=-2t \\ z=1-2t \end{cases}$$

A questo punto possiamo facilmente ricavare i parametri direttori della retta $\vec{r}(1,-2,-2)$ oppure un qualsiasi punto della retta, ad esempio per $t=0$ il punto $A(0,0,1)$ appartiene alla retta.

RETTE PARALLELE:

CONDIZIONE PER EQUAZIONI PARAMETRICHE E CARTESIANE

2 rette sono parallele se sono complanari e se coincidono o non hanno punti in comune.
Dati i vettori direttori di 2 rette $\vec{v_1}(l,m,n)$ e $\vec{v_2}(l',m',n')$, r e r' sono parallele se e solo se:

$$\boxed{\text{rang}\begin{pmatrix} l & m & n \\ l' & m' & n' \end{pmatrix} = 1}$$

questa regola si può usare per le rette in forma parametrica o cartesiana una volta ricavati (l,m,n).
Se il rango è uguale a 2 i punti P_0P_1 e P_0P_2 non sono allineati

Date 2 rette espresse secondo equazioni cartesiane r e r':

$$r: \begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases} \qquad r': \begin{cases} \alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0 \\ \alpha' x+\beta' y+\gamma' z+\delta'=0 \end{cases}$$

Le rette saranno parallele se e solo se

$$\boxed{\text{rang}\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{pmatrix} = 2}$$

RETTE PERPENDICOLARI:

Due rette di parametri direttori (l,m,n) e (l',m',n') sono perpendicolari se e solo se:

$$ll'+mm'+nn'=0$$

PASSAGGIO DA EQUAZIONE PARAMETRICA A CARTESIANA - RETTA:

Data un'equazione in forma parametrica:

¡IMPORTANTE!

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-2t \\ z = 1-4t \end{cases}$$

Possiamo ottenere le equazioni cartesiane secondo il seguente procedimento:

- Ricavare il parametro t dal sistema:

$$\begin{cases} x-1 = t \\ \frac{y-2}{-2} = t \\ \frac{z-1}{4} = t \end{cases}$$

Consideriamo allora le seguenti relazioni:

$$\boxed{t = x-1 = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-1}{4}}$$

N.B. Questa operazione può essere effettuata anche nella direzione inversa. Data $(l,m,n) \Rightarrow (1,-2,4)$

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-1}{4} = t$$

Possiamo ricavare:

$$\begin{cases} x-1 = t \\ \frac{y-2}{-2} = t \\ \frac{z-1}{4} = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-2t \\ z = 1+4t \end{cases}$$

$$(l,m,n) \rightarrow (1,-2,4)$$

Da cui possiamo fin da subito ricavare i parametri direttori (che sono i coefficienti di t all'inizio) e ricavare la retta in forma di equazioni cartesiane, eliminando il parametro t e uguagliando primo e secondo membro e primo e terzo membro:

$$\begin{cases} x-1 = \frac{y-2}{-2} \\ x-1 = \frac{z-1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x+2-y+2=0 \\ 4x-4-z+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x-y+4=0 \\ 4x-z-3=0 \end{cases}$$

N.B.: Si sarebbe potuto uguagliare il primo membro al secondo e poi il secondo al terzo, ottenendo una soluzione equivalente. É importante ricordare che, nel caso in cui nella forma parametrica manchi il termine t per un'equazione, tale equazione può essere assunta come una delle cartesiane.

RETTE SGHEMBE:

IMPORTANTE

2 rette si dicono sghembe se non sono complanari, ovvero non appartengono ad uno stesso piano.
Per verificare se due rette sono sghembe bisogna verificare che non abbiano punti in comune e ~~che~~ (verificando che il sistema lineare di 4 eq. in 3 incognite sia impossibile) e che siano parallele (si può fare facilmente tramite la matrice dei parametri direttori delle 2 rette che deve avere rango 1)