VARIABILI ALEATORIE DISCRETE

Prof. Rosario Lo Franco – Lezione 6

Riferimenti: [1] Sheldon M. Ross, *Introduzione alla statistica*, Apogeo Editore;
[2] Maria Garetto, *Statistica*, Università di Torino

Variabili aleatorie discrete

Esempio 1
Si effettua il lancio di una moneta. Lo spazio campione è

$$S = \{T,C\}$$

Ponendo

$$X(C) = m \qquad X(T) = n \qquad m,\ n \in \mathbf{R}$$

si definisce una variabile aleatoria X.

Esempio 2
Si effettuano due lanci di una moneta. Lo spazio campione è

$$S = \{TT,CC,TC,CT\}$$

Ad ogni elemento dello spazio campione possiamo associare un numero reale che rappresenta il numero delle volte che esce T, secondo la seguente tabella

Elementi di S	TT	TC	CT	CC
X	2	1	1	0

Tabella 1

ossia

$$X(TT) = 2 \qquad X(TC) = 1 \qquad X(CT) = 1 \qquad X(CC) = 0$$

X è una variabile aleatoria.
Si osservi che si possono definire altre variabili aleatorie su questo spazio campione: ad esempio il quadrato del numero delle teste, anziché il numero delle teste, o il numero delle teste meno il numero delle croci.

Variabili aleatorie discrete

Osservazione

In generale, se X è una variabile aleatoria, si usano notazioni del tipo seguente

Evento "X assume il valore a" $\quad X = a$

Evento "X assume valori compresi nell'intervallo $(a\ ,\ b)$" $\quad a < X < b$

Evento "X assume valori minori o uguali a c" $\quad X \leq c$.

Indichiamo con $P(X = a)$, $P(a < X < b)$, $P(X \leq c)$ le probabilità dei precedenti eventi.

Per il teorema 9, pag. 72, si ha

$$P(X > c) = 1 - P(X \leq c) \qquad c \in \mathbf{R}$$

dove $P(X > c)$ indica la probabilità che X assuma un valore maggiore di c.

Variabili aleatorie discrete

Sia X una variabile aleatoria discreta e siano $x_1, x_2, \dots$ i valori che essa può assumere; si supponga per semplicità che la variabile aleatoria assuma un numero finito di valori[2] e inoltre che questi valori siano assunti con probabilità

$$P(X = x_i) \qquad i = 1,2,\dots$$

La funzione

$$f(x_i) = P(X = x_i) \qquad i = 1,2,\dots$$

che ad ogni valore assunto dalla variabile aleatoria discreta X associa la corrispondente probabilità è detta **distribuzione di probabilità** della variabile aleatoria X.

Variabili aleatorie discrete

Si definisce **funzione di distribuzione** o **funzione di ripartizione** di una variabile aleatoria X la funzione

$$F(x) = P(X \leq x) \qquad x \in \mathbf{R}$$

Per variabili discrete, in particolare:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i) \qquad f(x_i) = P(X = x_i)$$

Variabili aleatorie discrete

Esempio 3
Si consideri la variabile aleatoria discreta X, definita come il numero di teste T in due lanci di una moneta; si ha ad esempio

$$P(X=2)=\frac{1}{4} \qquad P(X=1)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$P(1<X<2)=0 \qquad P(1<X\leq 2)=\frac{1}{4} \qquad P(0\leq X\leq 2)=1$$

Esempio 4
Si consideri la variabile aleatoria discreta X, definita come il numero ottenuto nel lancio di un dado; si ha ad esempio

$$P(5<X<6)=0 \qquad P(5\leq X<6)=\frac{1}{6} \qquad P(1\leq X\leq 6)=1$$

$$P(X>2)=1-P(X\leq 2)=1-\frac{2}{6}=\frac{2}{3}$$

Variabili aleatorie discrete

Esempio 4.1.2. Un tizio acquista due componenti elettronici, ciascuno dei quali può essere *a*ccettabile o *d*ifettoso. Supponiamo che le probabilità dei 4 esiti possibili – $(d,d), (d,a), (a,d), (a,a)$ – siano rispettivamente 0.09, 0.21, 0.21 e 0.49. Sia X il numero di componenti accettabili; allora X è una variabile aleatoria che può assumere i valori 0, 1 o 2 con probabilità

$$P(X=0) = 0.09$$
$$P(X=1) = 0.42$$
$$P(X=2) = 0.49$$

Se vogliamo limitarci a registrare se vi sia almeno un componente accettabile, possiamo definire una variabile aleatoria I come segue,

$$I := \begin{cases} 1 & \text{se } X = 1 \text{ o } 2 \\ 0 & \text{se } X = 0 \end{cases}$$

Se con A si denota l'evento che vi sia almeno un componente accettabile, allora I è detta la *funzione indicatrice* dell'evento A, infatti I assume i valori 1 o 0 a seconda se l'evento A si verifica o meno. Le probabilità corrispondenti ai valori possibili di I sono

$$P(I=1) = 0.91$$
$$P(I=0) = 0.09 \quad \square$$

Variabili aleatorie discrete

Si effettuano due lanci consecutivi di una moneta. La variabile aleatoria X è il numero di volte che esce T ed è descritta dalla tabella 1 (esempio 2).
Si ha

$$P(\mathrm{TT}) = \frac{1}{4} \qquad P(\mathrm{TC}) = \frac{1}{4} \qquad P(\mathrm{CT}) = \frac{1}{4} \qquad P(\mathrm{CC}) = \frac{1}{4}$$

quindi

$$P(X=0) = P(\mathrm{CC}) = \frac{1}{4}$$

$$P(X=1) = P(\mathrm{TC} \cup \mathrm{CT}) = P(\mathrm{TC}) + P(\mathrm{CT}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(X=2) = P(\mathrm{TT}) = \frac{1}{4}$$

x_i	0	1	2
$f(x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

continua

Variabili aleatorie discrete

segue slide precedente

La funzione $f(x)$ può essere rappresentata con un diagramma a barre (figura 1), o con un istogramma (figura 2).

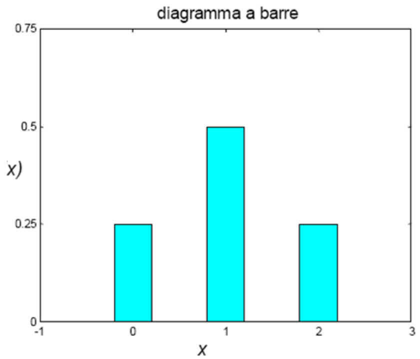


Figura 1

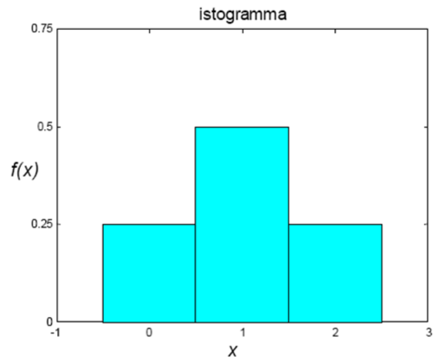


Figura 2

Ricaviamo ora la funzione di distribuzione $F(x)$

x	$F(x) = P(X \le x)$
$x < 0$	0
$0 \le x < 1$	$\frac{1}{4}$
$1 \le x < 2$	$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$
$x \ge 2$	$\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$

Variabili aleatorie discrete

Esempio 4.1.1. Si tirano due dadi indipendenti e non truccati, e si denota con la lettera X la variabile aleatoria definita dalla loro somma. Ha senso domandarsi quanto vale la probabilità che $X = 3$, ovvero la probabilità dell'evento $\{s \in S : X(s) = 3\}$. Vi sono due elementi dello spazio degli esiti di questo esperimento che danno ad X il valore 3. Essi sono $(1,2)$ e $(2,1)$. Perciò, con una notazione più leggera,

$$\{X = 3\} = \{s \in S : X(s) = 3\} = \{(1,2),(2,1)\} \tag{4.1.1}$$

e di conseguenza la probabilità che $X = 3$ è pari a $2/36$ perché abbiamo a che fare con esiti equiprobabili. Il modo corretto di scrivere questo risultato sarebbe, $P(\{X = 3\}) = 2/36$, ma è invalso l'uso di scrivere, con leggero abuso di notazione $P(X = 3) = 2/36$. Ricorrendo a questa convenzione elenchiamo le probabilità per tutti i valori possibili di X.

$$\begin{aligned}
P(X=2) &= P\{(1,1)\} = \tfrac{1}{36} \\
P(X=3) &= P\{(1,2),(2,1)\} = \tfrac{2}{36} \\
P(X=4) &= P\{(1,3),(2,2),(3,1)\} = \tfrac{3}{36} \\
P(X=5) &= P\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\} = \tfrac{4}{36} \\
P(X=6) &= P\{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\} = \tfrac{5}{36} \\
P(X=7) &= P\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\} = \tfrac{6}{36} \qquad (4.1.2) \\
P(X=8) &= P\{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\} = \tfrac{5}{36} \\
P(X=9) &= P\{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\} = \tfrac{4}{36} \\
P(X=10) &= P\{(4,6),(5,5),(6,4)\} = \tfrac{3}{36} \\
P(X=11) &= P\{(5,6),(6,5)\} = \tfrac{2}{36} \\
P(X=12) &= P\{(6,6)\} = \tfrac{1}{36}
\end{aligned}$$

La variabile aleatoria X può assumere tutti i valori interi che vanno da 2 a 12, con probabilità specificate dalle Equazioni (4.1.2). Siccome X deve assumere uno di questi valori, ne segue che $S = \bigcup_{i=2}^{12}\{X = i\}$, e di conseguenza

$$1 = P(S) = P\left(\bigcup_{i=2}^{12}\{X = i\}\right) = \sum_{i=2}^{12} P(X = i)$$

come si verifica facilmente dalle (4.1.2).

Un'altra variabile aleatoria di possibile interesse all'interno di questo esperimento è il valore del primo dado. La denotiamo con Y e notiamo che

$$P(Y = i) = 1/6, \qquad i = 1,2,3,4,5,6$$

Ovvero Y può assumere ciascuno dei valori interi da 1 a 6 con la stessa probabilità.

Variabili aleatorie discrete

Si consideri la variabile aleatoria discreta X = numero ottenuto nel lancio di un dado; i valori che X può assumere sono i numeri 1,2,...,6.

x_i	1	2	3	4	5	6
$f(x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

x	$F(x) = P(X \leq x)$
$x < 1$	0
$1 \leq x < 2$	$\frac{1}{6}$
$2 \leq x < 3$	$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$
$3 \leq x < 4$	$\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$
$4 \leq x < 5$	$\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$
$5 \leq x < 6$	$\frac{1}{6} + \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$
$x \geq 6$	$\frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1$

Variabili aleatorie discrete

Si effettua il lancio di due dadi. La variabile aleatoria X è la somma dei risultati dei due dadi.

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

x	$F(x) = P(X \leq x)$	x	$F(x) = P(X \leq x)$
$x < 2$	0	$7 \leq x < 8$	$\frac{7}{12}$
$2 \leq x < 3$	$\frac{1}{36}$	$8 \leq x < 9$	$\frac{13}{18}$
$3 \leq x < 4$	$\frac{1}{12}$	$9 \leq x < 10$	$\frac{15}{18}$
$4 \leq x < 5$	$\frac{1}{6}$	$10 \leq x < 11$	$\frac{11}{12}$
$5 \leq x < 6$	$\frac{5}{18}$	$11 \leq x < 12$	$\frac{35}{36}$
$6 \leq x < 7$	$\frac{15}{36}$	$x \geq 12$	1

Variabili aleatorie discrete

Si considerino le famiglie con 4 figli;

Il numero dei casi possibili è $2^4 = 16$. Se si trascura l'ordine di nascita, i 16 casi si riducono ai 5 seguenti

MMMM MMMF MMFF MFFF FFFF

Supponendo che gli eventi "nascita di un maschio" e "nascita di una femmina" siano equiprobabili, si costruisce la seguente tabella della distribuzione di probabilità

evento	MMMM	MMMF	MMFF	MFFF	FFFF
n° casi favorevoli	1	4	6	4	1
probabilità	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

Scegliendo come variabile aleatoria X il numero delle figlie femmine, la tabella della distribuzione di probabilità $f(x)$ può essere riscritta nel modo seguente

x_i	0	1	2	3	4
$f(x_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

Variabili aleatorie discrete

Valore medio e varianza

Se la variabile aleatoria X è il punteggio ottenuto nel lancio di un dado, poiché i 6 risultati possibili sono ugualmente probabili, si ha

$$\mu = E(X) = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3.5$$

La variabile aleatoria X indica la somma dei punti ottenuti con il lancio di due dadi.
La tabella della distribuzione di probabilità $f(x)$ è la seguente (vedere esempio 10)

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Tabella 13

Per il valor medio si ottiene

$$\mu = \sum_{i=2}^{12} x_i \cdot f(x_i) = 2\cdot\frac{1}{36} + 3\cdot\frac{2}{36} + 4\cdot\frac{3}{36} + \ldots + 11\cdot\frac{2}{36} + 12\cdot\frac{1}{36} = 7$$

Si noti che in questo esempio i valori x_i non sono ugualmente probabili.

Variabili aleatorie discrete

Valore medio e varianza

Trovare il valor medio della variabile aleatoria X definita come il numero di teste ottenute con tre lanci successivi di una moneta.

I casi possibili sono $2^3 = 8$

$$
\begin{array}{lll}
\text{CCC} & \text{nessuna testa} & X = 0 \\
\left.\begin{array}{l}\text{CCT}\\ \text{CTC}\\ \text{TCC}\end{array}\right\} & \text{1 testa} & X = 1 \\
\left.\begin{array}{l}\text{CTT}\\ \text{TCT}\\ \text{TTC}\end{array}\right\} & \text{2 teste} & X = 2 \\
\text{TTT} & \text{3 teste} & X = 3
\end{array}
$$

x_i	0	1	2	3
$f(x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$\mu = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{2}.$$

Variabili aleatorie discrete

Valore medio e varianza

Trovare la varianza della variabile aleatoria X definita come il numero di teste ottenute con tre lanci successivi di una moneta .

x_i	0	1	2	3
$f(x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$\mu = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{2} .$$

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{4} \left(x_i - \frac{3}{2} \right)^2 f(x_i) = \left(-\frac{3}{2} \right)^2 \frac{1}{8} + \left(1 - \frac{3}{2} \right)^2 \frac{3}{8} + \left(2 - \frac{3}{2} \right)^2 \frac{3}{8} + \left(3 - \frac{3}{2} \right)^2 \frac{1}{8} = \frac{3}{4} .$$

Variabili aleatorie discrete

Distribuzione Binomiale o di Bernoulli

Alcuni esperimenti consistono nell'eseguire ripetutamente una data prova. Ad esempio vogliamo conoscere la probabilità che 45 su 300 guidatori fermati a un blocco stradale indossino la cintura di sicurezza, oppure la probabilità che 9 su 10 lampadine durino almeno 1000 ore.

In ciascuno di questi esempi si cerca la probabilità di ottenere **x successi in n prove** o, in altre parole, x successi e $n - x$ insuccessi.

1 – ci sono solo due possibili risultati mutuamente esclusivi per ogni prova, chiamati arbitrariamente "successo" e "insuccesso";
2 – la probabilità di successo p è la stessa per ogni prova;
3 – tutte le prove sono indipendenti; l'indipendenza significa che il risultato di una prova non è influenzato dal risultato di qualunque altra prova; ad esempio, l'evento "alla terza prova si ha successo" è indipendente dall'evento "alla prima prova si ha successo".

Variabili aleatorie discrete

Distribuzione Binomiale o di Bernoulli

Il lancio di una moneta è una prova bernoulliana: si può considerare successo l'evento "esce testa" e insuccesso l'evento "esce croce". In questo caso la probabilità di successo vale $p = \frac{1}{2}$.

Nel lancio di due dadi si può considerare successo ad esempio l'evento "la somma dei punti è 7" e insuccesso l'evento complementare: in questo caso si tratta di una prova bernoulliana e la probabilità di successo è $p = \frac{1}{6}$.

Sia p la probabilità di successo in una prova bernoulliana.
La variabile aleatoria X che conta il numero di successi in n prove si dice **variabile aleatoria binomiale di parametri n e p**; X può assumere come valori gli interi compresi fra 0 e n.

distribuzione di probabilità binomiale

$$\boxed{f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \qquad \text{per } x = 0,1,2,\ldots,n}$$

funzione di distribuzione binomiale

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k=0}^{x} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Variabili aleatorie discrete

Distribuzione Binomiale o di Bernoulli

Valor medio e varianza

$$\mu = np$$

$$\sigma^2 = np(1-p)$$

Variabili aleatorie discrete

Distribuzione Binomiale o di Bernoulli

Calcolare la probabilità di ottenere 2 volte testa, effettuando 6 lanci di una moneta.

numero prove $n = 6$

numero successi $x = 2$

probabilità di successo $p = \frac{1}{2}$

$$P(X = 2) = \binom{6}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(1-\frac{1}{2}\right)^{6-2} = \frac{6!}{2!4!}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{16} = \frac{15}{64} \cong 0.2344$$

Si effettuano 20 lanci di un dado; il successo sia di ottenere 3. Calcolare la probabilità di ottenere 2 volte il caso di successo.

$$n = 20 \qquad x = 2 \qquad p = \frac{1}{6}$$

$$P(X = 2) = \binom{20}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(1-\frac{1}{6}\right)^{20-2} = \binom{20}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{18} \cong 0.1982$$

Variabili aleatorie discrete

Distribuzione Binomiale o di Bernoulli

Calcolare la probabilità che effettuando 6 lanci di due dadi si ottenga la somma 9
a – 2 volte;
b – almeno 2 volte.

$$p = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

a – $n = 6$ $x = 2$ $p = \frac{1}{9}$

$$P(X = 2) = \binom{6}{2}\left(\frac{1}{9}\right)^2\left(\frac{8}{9}\right)^4 = 0.1156$$

b – $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - \left[P(X = 0) + P(X = 1)\right] =$

$$= 1 - \left[\binom{6}{0}\left(\frac{1}{9}\right)^0\left(\frac{8}{9}\right)^6 + \binom{6}{1}\left(\frac{1}{9}\right)^1\left(\frac{8}{9}\right)^5\right] = 1 - (0.4933 + 0.3700) = 0.1367$$

Variabili aleatorie discrete

Distribuzione Binomiale o di Bernoulli

La ditta produttrice sostiene che nel 60% degli impianti a pannelli solari installati si è verificata una riduzione di un terzo del costo della fattura dell'energia elettrica. Calcolare la probabilità che questa riduzione si verifichi

a – in 4 su 5 installazioni;

b – in almeno 4 installazioni.

a – $n = 5$ $x = 4$ $p = 0.60$

$$P(X = 4) = \binom{5}{4}(0.60)^4(1-0.60)^{5-4} = 0.2592$$

b – $n = 5$ $x = 5$ $p = 0.60$

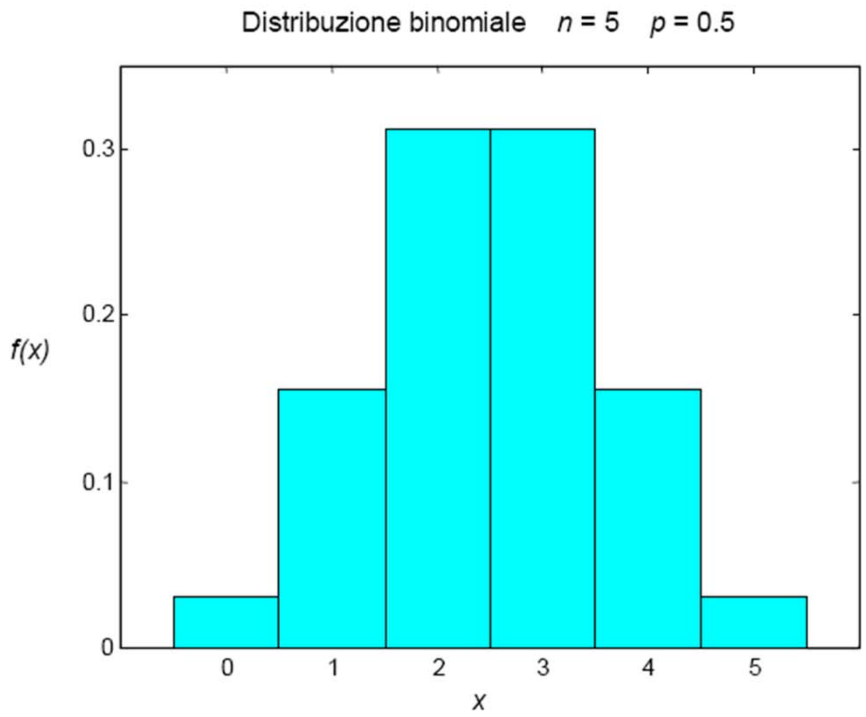
$$P(X = 5) = \binom{5}{5}(0.60)^5(1-0.60)^{5-5} = 0.07776$$

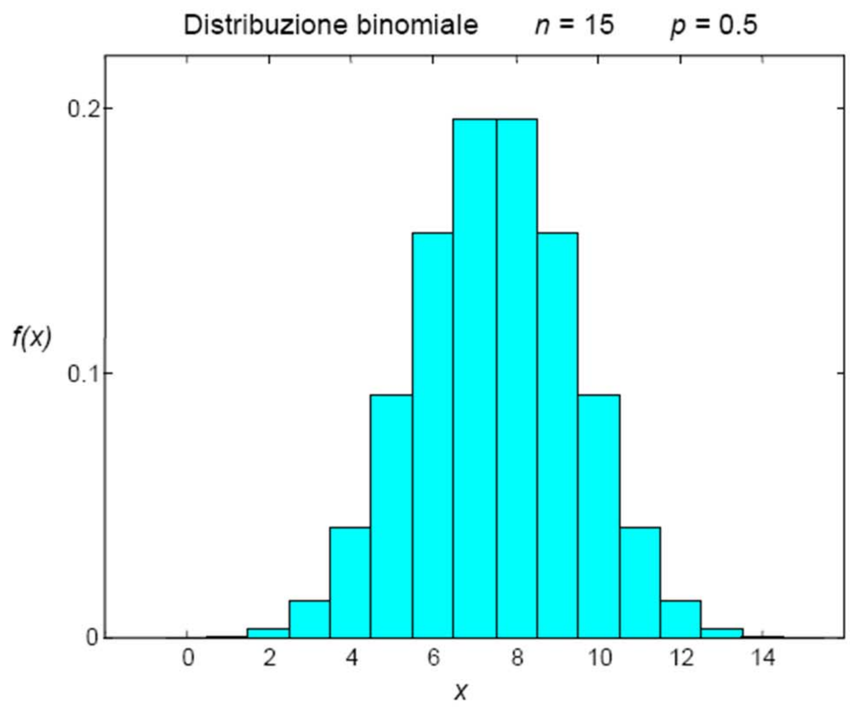
$$P(X \geq 4) = P(X = 4) + P(X = 5) = 0.2592 + 0.07776 = 0.3370$$

Variabili aleatorie discrete

Distribuzione Binomiale o di Bernoulli

Rappresentazione grafica

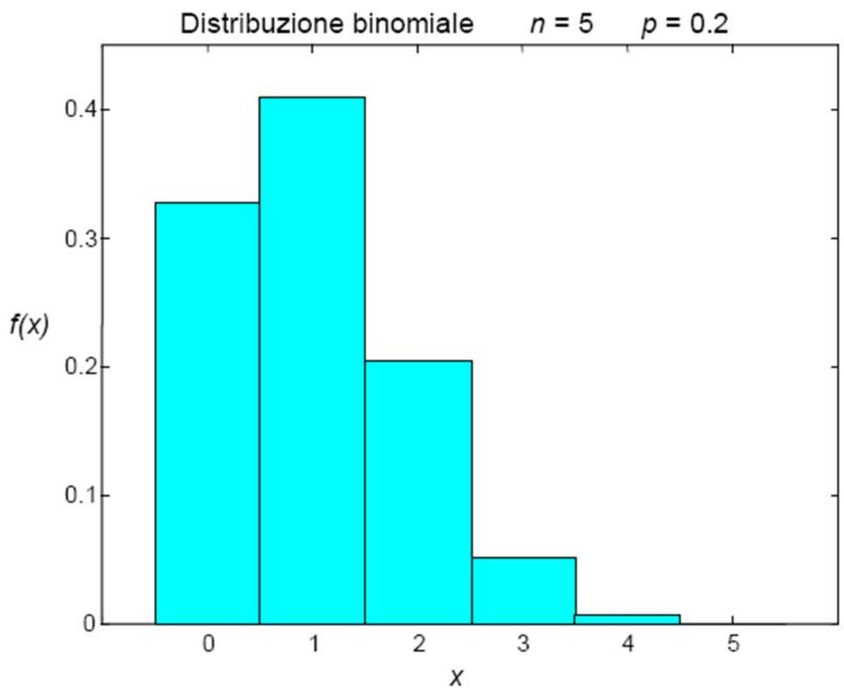


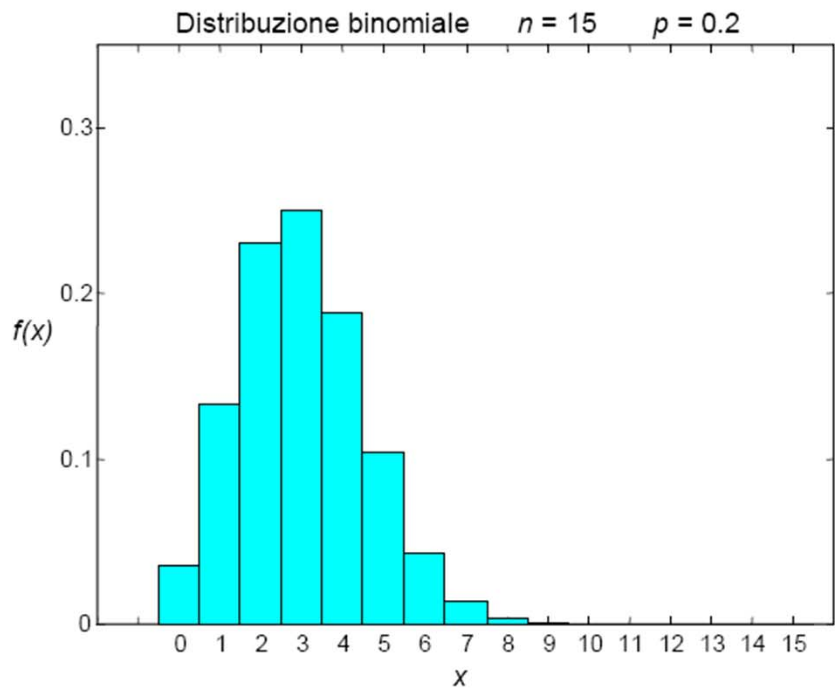


Variabili aleatorie discrete

Distribuzione Binomiale o di Bernoulli

Rappresentazione grafica

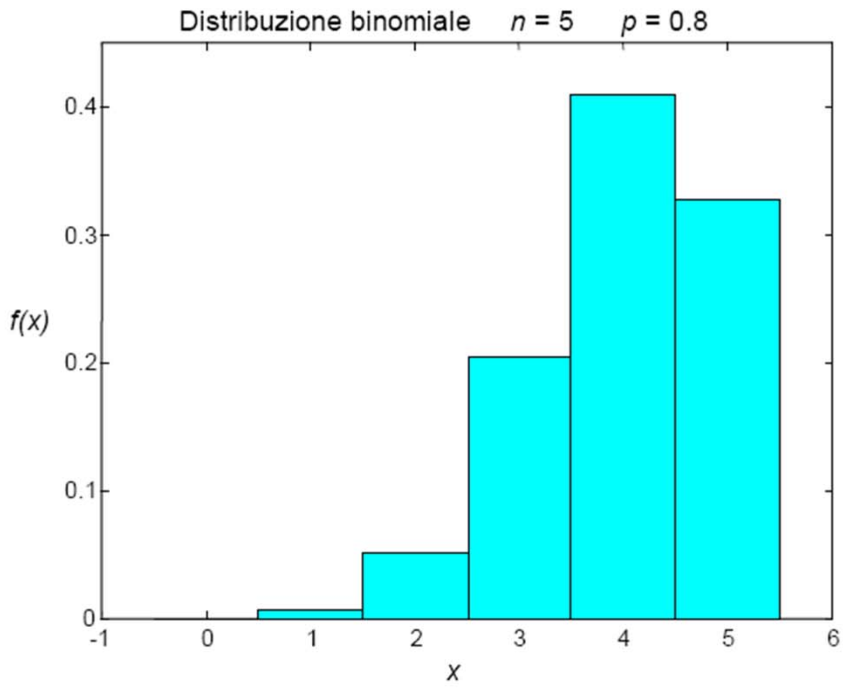


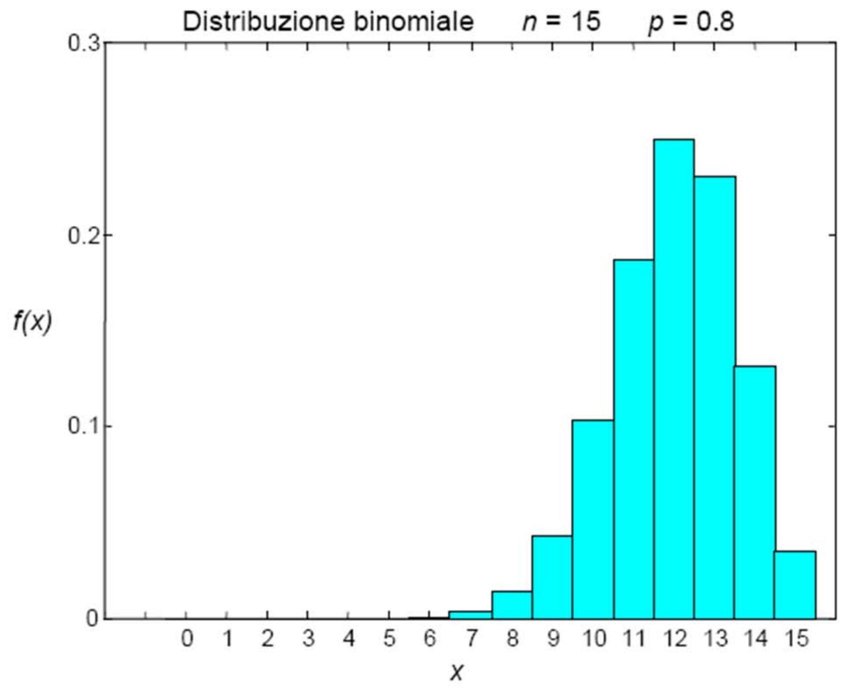


Variabili aleatorie discrete

Distribuzione Binomiale o di Bernoulli

Rappresentazione grafica





Variabili aleatorie discrete

Distribuzione di Poisson (cenni)

Vi sono fenomeni in cui determinati eventi, con riferimento a un certo intervallo di tempo o di spazio, accadono raramente: il numero di eventi che si verificano in quell'intervallo varia da 0 a n, e n non è determinabile a priori. Ad esempio, il numero di automobili che transitano in una strada poco frequentata in un intervallo di tempo di 5 minuti scelto a caso, può essere considerato un evento raro; analogamente sono eventi rari il numero di infortuni sul lavoro che accadono in una azienda in una settimana o il numero di errori di stampa presenti in una pagina di un libro.

Nello studio degli eventi rari, come quelli degli esempi citati, è fondamentale il riferimento a uno specifico intervallo di tempo o di spazio.

Le seguenti condizioni descrivono il così detto **processo di Poisson**:
1 – le realizzazioni degli eventi sono indipendenti: il verificarsi di un evento in un intervallo di tempo o di spazio non ha alcun effetto sulla probabilità di verificarsi dell'evento una seconda volta nello stesso, o in un altro, intervallo;
2 – la probabilità di una singola realizzazione dell'evento in un dato intervallo è proporzionale alla lunghezza dell'intervallo;
3 – in ogni parte arbitrariamente piccola dell'intervallo, la probabilità che l'evento si verifichi più di una volta è trascurabile.

Variabili aleatorie discrete

Distribuzione di Poisson (cenni)

Sia X la variabile aleatoria che indica il numero di volte in cui si verifica un evento raro in un dato intervallo di tempo o di spazio, ossia il numero di successi; la variabile X può assumere i valori $x = 0,1,2,\ldots$. Si dimostra il seguente risultato.

La probabilità che la variabile aleatoria X assuma il valore x è data dalla **distribuzione di probabilità di Poisson**

$$f(x) = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \qquad \text{per } x = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

dove il parametro $\lambda > 0$ indica il numero medio di realizzazioni dell'evento nell'intervallo assegnato.

Il **valor medio** e la **varianza** della distribuzione di Poisson di parametro λ sono dati da

$$\mu = \lambda \qquad\qquad \sigma^2 = \lambda$$

Variabili aleatorie (dicrete) di Poisson

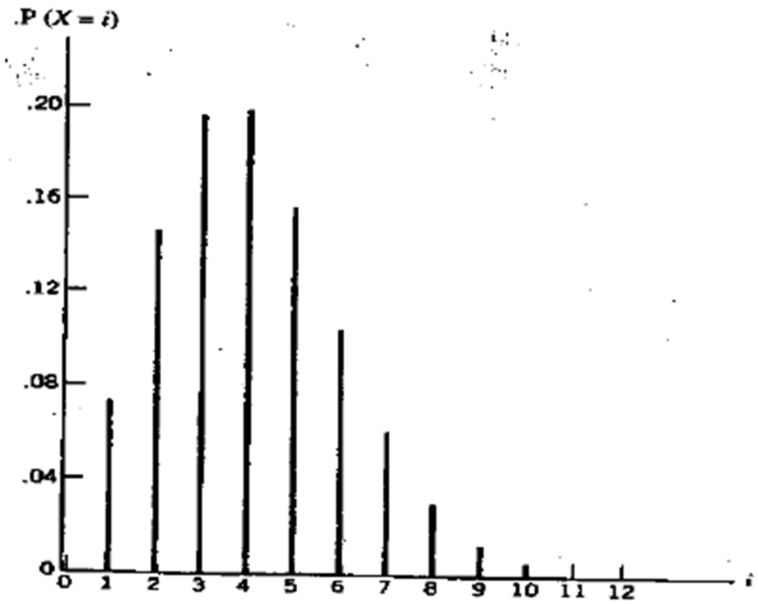


Figura 5.3 La funzione di massa di probabilità della distribuzione di Poisson con parametro $\lambda = 4$.

$$P(X = i) = \frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots$$

Variabili aleatorie discrete

Distribuzione di Poisson (cenni)

Dalle statistiche degli ultimi 5 anni, un'azienda ha calcolato che ogni giorno sono assenti in media 1.8 operai. Calcolare la probabilità che in un giorno qualsiasi ci siano 3 operai assenti contemporaneamente.

Il numero medio di assenti giornalieri è piccolo, perciò si può usare la distribuzione di Poisson con parametro $\lambda = 1.8$; si trova

$$P(X = 3) = \frac{e^{-1.8}(1.8)^3}{3!} = 0.1607$$