$\frac{b \times h}{2}$

1. TEOREMA DI GRASSMAN PAG 87 a 89
2. TEOREMA ROUCHE-CAPELLI → <u>SUL WEB SPIEGATO BENE</u>
3. TEOREMA COMPLETAMENTO PAG 81 a 103.
4. CRAMER
5. TEOREMA LA PLACE-BINET PAG 187 a 191
6. TEOREMA FONDAMENTALE ALGEBRA ~~284~~ pag 251
7. L'ELIMINAZIONE DI GAUSS da 43 a 63
8. DIMENSIONE pag 67 fino 90
9. SCAMBIO pag 155
10. ESTRAZIONE pag

SUCCESSIONI (ANALISI)!!!

(a_n) $\quad f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

1) $\lim_{n \to \infty} a_n = a$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \mid \forall n > n_\varepsilon \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$

Francesca Serces

FONDAMENTI GEOMETRIA

CIRCONFERENZA

La circonferenza è il luogo dei punti del piano euclideo aventi una distanza assegnata (detta raggio) da un punto C chiamato centro

Se P(x, y) è un punto generico della circonferenza:

$$r = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} \quad \text{con } \alpha, \beta \text{ coordinate di } C.$$

$$1) \boxed{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2}$$

$$\gamma = \alpha^2 + \beta^2 - r^2$$

$$2) \boxed{x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0}$$

considerando $-2\alpha = a$, $-2\beta = b$ $\quad \gamma = c$

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

$$x - \alpha = r\cos\alpha \qquad y - \beta = r\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

$$x = \alpha + r\cos\alpha \qquad y = \beta + r\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

PUNTO DI TANGENZA TRA UNA RETTA E UNA CIRCONFERENZA

Per trovare il punto di tangenza o eventuali punti in comune fra una circonferenza e una retta basta mettere a sistema le due equazioni

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0 \\ ax + by + c = 0 \end{cases}$$

Andrea Perpola

Se la retta la vogliamo esprimere in forma parametrica sostituiamo a x o y un valore generico h e mettiamola in intersezione con la circonferenza i valori di h trovati si sostituiscono alla retta e abbiamo le coordinate dei punti di tg.

PUNTI COMUNI A DUE CIRCONFERENZE

Date due circonferenze:

$\Gamma: x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\gamma=0$

$\Gamma': x^2+y^2-2\alpha' x-2\beta' y+\gamma'=0$

Per determinare ~~gli~~ gli punti in comune basta mettere a sistema le due circonferenze oppure risolvere il sistema seguente:

$$\begin{cases} x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\gamma=0 \\ 2(\alpha-\alpha')x+2(\beta-\beta')y-(\gamma-\gamma')=0 \end{cases}$$

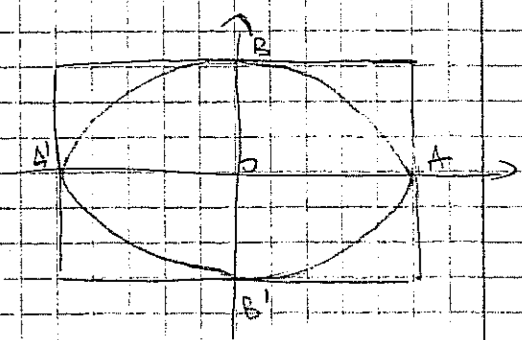
ELLISSE

Dicesi ellisse il luogo Δ dei punti del piano euclideo reale w, tali che sia costante la somma delle loro distanze da due dati punti F_1 e F_2, detti fuochi.

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$$

L'equazione dell'ellisse è la seguente:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$



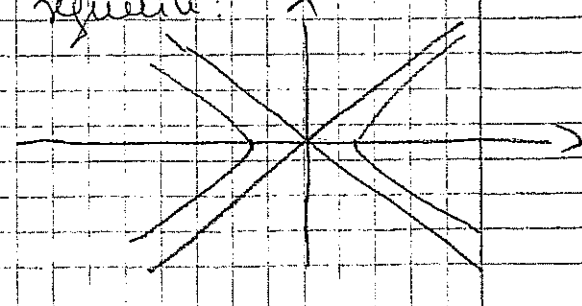
IPERBOLE

Dicesi iperbole il luogo Δ dei punti del piano euclideo w, tali che sia uguale ad una costante non nulla il valore assoluto della differenza delle loro distanze da due dati punti F_1 e F_2, detti fuochi:

$$\left|\overline{PF_2} - \overline{PF_1}\right| = 2a$$

L'equazione dell'iperbole è la seguente:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



SUPERFICIE SFERICA

La superficie sferica, come è noto, è il luogo dei punti dello spazio euclideo aventi una distanza assegnata (detta raggio) da un punto C dello spazio, chiamato centro ~~di~~ e, per semplicità di espressione, conveniamo di dire soltanto sfera invece di superficie sferica.

$C(\alpha, \beta, \gamma)$ Se $P(x, y, z)$ è un punto della sfera allora:

$$r = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2}$$

L'equazione della sfera è:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = r^2$$

$$\delta = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - r^2$$

$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + \delta = 0}$$

SUPERFICI RIGATE: Superficie costituite da rette. Un tipo di siffatte superficie è costituito dalle superficie cilindriche e coniche.

CILINDRO

Dati nello spazio affine reale una direzione δ e un insieme D di punti dipendenti da un parametro k variabile in un insieme di numeri reali, dicesi cilindro di direttrice D e di direzione δ l'insieme Δ dei punti, che appartengono alle rette (chiamate generatrici) passanti per i punti D e aventi la direzione δ.

CONI

Dati in uno spazio lineare reale un punto V e un insieme D di punti dipendenti da un parametro k variabile in un insieme D^* di numeri reali, dicesi cono di vertice V e di direttrice D l'insieme Δ dei punti appartenenti alle rette (generatrici) che congiungono V con i punti di D.

LE QUADRICHE

Definizione

Si definisce quadrica reale Γ dello spazio affine ogni quadrica reale Γ dello spazio proiettivo non avente come componente il piano π_∞ (che completa Σ_a in P^3_a) e priva della conica che essa ha in comune con π_∞.

Ai punti e alle eventuali rette della conica degenere o no, che la quadrica reale ha in comune con π_∞, corrispondono in Σ_a delle direzioni e delle giaciture che sono chiamate rispettivamente direzioni asintotiche e giaciture asintotiche di Γ, oppure punti impropri e rette improprie di Γ.

La conica Δ_∞, sezione della quadrica Γ con il piano π_∞, è non degenere, oppure semplicemente degenere o doppiamente degenere, secondo che sia 3, 2, 1 il rango della matrice L ottenuta dalla matrice A sopprimendo l'ultima riga e l'ultima colonna.

CLASSIFICAZIONE DELLE QUADRICHE REALI

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}xt +$$
$$+ 2a_{24}yt + 2a_{34}zt + a_{44}t^2 = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$\det(A)$
- > 0 punti iperbolici: iperboloide iperbolico, paraboloide iperbolico
- $= 0$ punti parabolici: coni o cilindri, quadriche degeneri
- < 0 punti ellittici: ellissoide, iperboloide ellittico, paraboloide ellittico

Consideriamo la matrice che si ottiene eliminando da A la IV colonna e la IV riga.

$$A_{44} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

nel caso che $\det(A) \neq 0$ si ha:

$$\det(A_{44}) \begin{cases} \neq 0 & \text{ellissoide o iperboloide} \\ = 0 & \text{paraboloide} \end{cases}$$

SE INVECE $\det(A) = 0$ si ha:

$$\det(A_{44}) \begin{cases} \neq 0 & \text{cono} \\ = 0 & \text{cilindro o quadrica degenere} \end{cases}$$

ESERCIZI

Quadrica contenente l'asse z, le rette improprie del piano z=0, la retta impropria del piano x=0 e il punto A(1, 0, 1, 1).

Partiamo dall'equazione della generica quadrica:

$$\cancel{a_{11}x^2} + \cancel{a_{22}y^2} + \cancel{a_{33}z^2} + 2\cancel{a_{12}xy} + 2a_{13}xz + 2\cancel{a_{23}yz} + 2a_{14}xt + 2a_{24}yt + 2\cancel{a_{34}zt} + \cancel{a_{44}t^2} = 0$$

1) Dato che contiene l'asse delle z $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

eguagliamo a 0 i termini contenenti x e y (eliminiamoli). [ossia x^2, y^2, xy]

Quindi eliminiamo $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy = 0$

2) Facendo il sistema fra la generica quadrica e la retta z deve essere identicamente soddisfatta.

$\begin{cases} z=0 \\ t=0 \end{cases}$ -> retta impropria del piano z=0

$$a_{33}z^2 + 2a_{34}zt + a_{44}t^2 = 0$$

3) Dal momento che contiene anche la retta impropria del piano x=0.

$\begin{cases} x=0 \\ t=0 \end{cases}$ $2a_{23}yz = 0$

4) Scriviamo quello che è rimasto e sostituiamo le coordinate di A.

$A(1,0,1,1)$ $a_{24}yt + a_{13}xt + a_{14}xt = 0$

$$a_{13} + a_{14} = 0$$

$$a_{14} = -a_{13}$$

$$a_{13}xt - a_{13}xt + a_{24}yt = 0$$

APPLICAZIONI LINEARI

Siano V e W ~~spazi~~ spazi vettoriali sullo stesso campo K.

Un'applicazione lineare (o omomorfismo) di V in W è un'applicazione $L: V \to W$ con le seguenti proprietà:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \cdot\ L(u+v) = L(u) + L(v) & \forall\, u, v \in V \\ \cdot\ L(\alpha u) = \alpha L(u) & \forall\, \alpha \in K,\ \forall\, u \in V \end{array}}$$

proprietà applicazioni lineari

- Se l'applicazione lineare L è biiettiva si parla di isomorfismo (se esiste un isomorfismo di V in W allora gli spazi vettoriali V e W si dicono "isomorfi").
- Se l'applicazione lineare L è biiettiva ed è di uno spazio vettoriale V in se stesso allora è un isomorfismo particolare chiamato automorfismo (endomorfismo biiettivo).
- Se l'applicazione lineare L è di uno spazio vettoriale V in se stesso e L non è biiettiva allora si parla di endomorfismo.

NUCLEO E IMMAGINE

Siano V e W spazi vettoriali sullo stesso campo K e sia $L: V \to W$ un'applicazione lineare.

NUCLEO DI L: si chiama nucleo di L e si denota con Ker L, l'insieme dei vettori di V la cui immagine in L è il vettore nullo

$$\boxed{\operatorname{Ker} L = \{ v \in V \;/\; L(v) = \bar{0} \}}$$

IMMAGINE DI L: Si chiama immagine di L il sottoinsieme $L(v) \in W$ per qualche $v \in V$, ovvero l'insieme dei vettori di W che sono immagine, tramite L, di uno o più vettori di V.

$$\boxed{\operatorname{Im} L = \{ w \in W \;/\; w = L(v) \text{ per qualche } v \in V \}}$$

- Ker L è sottospazio di V:

Scelti infatti due vettori del nucleo $v_1, v_2 \in \operatorname{Ker} L$ e uno scalare $\alpha \in K$:

$$L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2) = \bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$$

e

$$L(\alpha v_1) = \alpha L(v_1) = \alpha \bar{0} = \bar{0}$$

- Im L è sottospazio di W

Presi $w_1, w_2 \in \operatorname{Im} L$ e uno scalare $\beta \in K$, posto $w_1 = L(v_1)$ e $w_2 = L(v_2)$. Avremo che:

$$\boxed{\begin{aligned} & w_1 + w_2 = L(v_1) + L(v_2) = L(v_1+v_2) \\ & \text{e} \\ & \quad \beta w_1 = \beta L(v_1) = L(\beta v_1) \end{aligned}}$$

- UN'APPLICAZIONE LINEARE L È INIETTIVA SE E SOLO SE IL NUCLEO DELL'APPLICAZIONE È IL SOTTOSPAZIO NULLO

Data un'applicazione lineare $L: V \to W$ di uno spazio vettoriale V in uno spazio vettoriale W.

$$\boxed{L \text{ è iniettiva} \iff \operatorname{Ker} L = \{\bar{0}\}}$$

Dim $\Rightarrow$: Se L è iniettiva, allora il nucleo non potrà contenere nessun vettore $v \neq \bar{0}$, altrimenti si avrebbe che $L(v) = \bar{0}$ e $L(\bar{0}) = \bar{0}$ pertanto $\bar{0}$ e v avrebbero la stessa immagine e L non ~~sare~~ sarebbe iniettiva.

Dim $\Leftarrow$: Sia $\operatorname{Ker} L = \{\bar{0}\}$, ipotizziamo che L non sia iniettiva, pertanto esistono $v_1, v_2 \in V$ tale che
$L(v_1) = L(v_2)$.
Ma allora risulterebbe: $L(v_1) - L(v_2) = L(v_1 - v_2) = \bar{0}$
Pertanto $v_1 - v_2 \in \operatorname{Ker} L$, ovvero $v_1 - v_2 = \bar{0}$ e cioè $v_1 = v_2$. Quindi v_1 e v_2 erano lo stesso vettore e non possono esistere vettori differenti con la stessa immagine. Allora L è iniettiva.

- SE L'APPLICAZIONE LINEARE $L: V \to W$ È INIETTIVA ALLORA MUTA VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI DI V IN VETTORI LIN. INDIP. DI W.

Se $v_1, \dots, v_m \in V$ sono vettori linearmente indipendenti e $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ sono scalari tali che:

$$\alpha_1 L(v_1) + \dots + \alpha_m L(v_m) = \bar{0} \quad (*)$$

si ha che

$$L(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m) = \bar{0}$$

Quindi il vettore $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m \in \operatorname{Ker} L$.

Ma considerando che L è iniettiva, vuol dire che $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = \bar{0}$ e poiché i vettori $v_1, \dots, v_m$ sono linearmente indipendenti si ha che gli scalari $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ sono tutti nulli.

Dunque da $(*)$ risulta che anche i vettori immagine di $v_1, \dots, v_m$ tramite L sono linearmente indipendenti.

MATRICI

Defin: Consideriamo un campo K e due interi positivi m e n. Una matrice $m \times n$ a elementi in K è un insieme A di mn elementi di K disposti su m righe e su n colonne.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ciascuno degli elementi di A è dotato di due indici, il 1° si riferisce alla riga, il 2° alla colonna, così a_{ij} è l'elemento di A che appartiene alla i-esima riga e alla j-esima colonna.

Le righe di A sono vettori dello spazio vettoriale K^n, le colonne di A invece sono vettori di K^m.

- Se $m \neq n$ la matrice si dice rettangolare;
- Se $m = n$ " " " " quadrata e il comune numero di righe e di colonne si chiama ordine della matrice;
- Se $m = 1$ la matrice si dice vettore riga;
- Se $n = 1$ " " " " vettore colonna

MATRICE TRASPOSTA: Data una matrice $A_{m,n}$ la matrice $n \times m$ ottenuta da A scambiando le righe con le colonne si chiama la trasposta, A^T, di A.
MATRICE SIMMETRICA: $a_{ij} = a_{ji}$ (gli elementi sopra la diagonale principale sono uguali a quelli sotto la diagonale stessa).
MATRICE DIAGONALE: $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$ (gli elementi fuori dalla diagonale principale sono nulli).
MATRICE TRIANGOLARE SUPERIORE: gli elementi sotto la diagonale principale sono nulli.
MATRICE TRIANGOLARE INFERIORE: gli elementi sopra la diagonale principale sono nulli.
MATRICE UNITÀ O MATRICE IDENTICA: gli elementi della diagonale principale sono tutti uguali a 1, mentre gli altri sono nulli (sarà indicata con Id o I).

OPERAZIONI TRA MATRICI

SOMMA DI MATRICI: Date due matrici A e B, entrambe $m \times n$, si chiama somma di A e B, $A+B$, la matrice C ottenuta sommando gli elementi corrispondenti.

PRODOTTO DI UNA MATRICE PER UNO SCALARE:

Data una matrice A e un reale c, si chiama prodotto di A per c la matrice, cA, ottenuta moltiplicando per c tutti gli elementi di A.

PRODOTTO RIGHE PER COLONNE: Date due matrici $A_{m,p}$ e $B_{p,n}$ si chiama prodotto righe per colonne la matrice $C_{m,n}$ i cui elementi c_{ij} sono ottenuti moltiplicando ordinatamente gli elementi della i-esima riga di A per la j-esima colonna di B sommando i prodotti ottenuti.

- Se $AB = BA$ si dice che le matrici A e B commutano, altrimenti che non commutano.

- Nell'insieme delle matrici quadrate di ordine n, data una matrice A, in generale non esiste una matrice inversa, ovvero una matrice B tale che $\boxed{AB = BA = I}$. Le matrici che godono di questa proprietà si dicono <u>invertibili</u>. Si può provare che le matrici invertibili hanno <u>una sola inversa</u>.

DETERMINANTE DI UNA MATRICE
$n \times n$ (quadrata)

Ad ogni matrice quadrata A, ad elementi in un fissato campo K, si può associare un elemento di K detto il determinante di A e denotato con D(A) oppure det(A).

MINORI DI UNA MATRICE: Data una matrice A si chiama sottomatrice di A ogni matrice ottenuta da A sopprimendo un certo numero di righe e un certo numero di colonne. Si chiama minore di A una sottomatrice quadrata di A.

COMPLEMENTO ALGEBRICO O COFATTORE:

Dato un elemento a_{ij} di una matrice quadrata A si chiama suo complemento algebrico o cofattore, e si indica con A_{ij}, il determinante, moltiplicato per $(-1)^{i+j}$, del minore che si ottiene sopprimendo la riga e la colonna di A che si intersecano con a_{ij}; questo minore è anche detto minore complementare di a_{ij}

DETERMINANTE: Data una matrice quadrata A di ordine n e considerata una sua riga o colonna qualunque, il determinante di A è il numero ottenuto moltiplicando gli elementi della riga o colonna scelta per i rispettivi cofattori e sommando i risultati ottenuti.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

PROPRIETÀ DEL DETERMINANTE

- $\det(AB) = \det(A) \det B$ (regola di Binet);
- Se le matrici A e B differiscono solo per lo scambio di due linee parallele allora $\det(A) = -\det B$
- se la matrice A ha due righe uguali e proporzionali, allora $\det(A) = 0$;
- aggiungendo a una linea di una matrice A un'altra linea della matrice stessa, eventualmente moltiplicata per un numero, il det di A non cambia.
- moltiplicando una linea di A per un numero c, il determinante di A risulta moltiplicato per c.

CALCOLO DELL'INVERSA DI UNA MATRICE

Una matrice quadrata è invertibile se e solo se il suo det è $\neq 0$.

MATRICE AGGIUNTA: Data una matrice quadrata A, si chiama sua matrice aggiunta, e si indica con agg(A), la matrice che ha come elementi i cofattori degli elementi della trasposta A' di A

CALCOLO DELL'INVERSA: Data una matrice A con det $\neq$ da 0, la sua matrice inversa è data da:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|} \, agg(A)}$$

RANGO DI UNA MATRICE

def. Il rango di una matrice $A_{m,n}$, $rg(A)$, è il massimo ordine dei suoi minori con det non nullo.

metodo degli orlati
- In sostanza la definiz. implica che se $rg(A)=p$:
1) esiste almeno un minore di ordine p non nullo
2) tutti gli eventuali minori di ordine $p+1$ sono nulli

SISTEMI LINEARI

Un sistema lineare di m equazioni in n incognite a coefficienti in un dato campo K è un sistema del tipo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Le incognite sono $x_1, \dots, x_n$, mentre i coefficienti a_{ij} e b_i sono elementi di K (termini noti).

Una soluzione del sistema è ogni n-upla ordinata $(x_1, \dots, x_n)$ di elementi di K tale da soddisfare tutte le m equazioni del sistema.

La matrice:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

è detta la matrice del sistema.

Indicando con $A^1, \dots, A^n$ le colonne di A e ponendo $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ il sistema si può scrivere nella forma:

$$\boxed{x_1 A^1 + \dots + x_n A^n = B}$$

SISTEMA DI CRAMER

Un sistema lineare di m equazioni in n incognite è detto "sistema di Cramer" se:

$$\begin{cases} - \ m = n \\ - \text{ il determinante della matrice del sistema è } \neq 0 \end{cases}$$

SISTEMI LINEARI OMOGENEI

Un sistema lineare di m equazioni in n incognite si dice omogeneo se è del tipo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Un sistema lineare omogeneo a coefficienti nel campo K ammette sempre soluzioni.
Se r è il rango della matrice del sistema ed n è il numero delle incognite, le soluzioni del sistema costituiscono un sottospazio di K^n di dimensione $n-r$.

OSS: la soluzione $\bar{0} = (0, \ldots, 0)$ di ogni sistema lineare omogeneo si dice soluzione nulla.
Essa è l'unica soluzione nel caso che il rango r della matrice dei coefficienti sia uguale al numero n delle incognite, mentre il sistema

ammette soluzioni non nulle se e solo se $r < n$.
In particolare nel caso $r = n-1$, lo spazio S delle soluzioni ha dimensione uno, ogni soluzione non nulla è una base di S e quindi gli elementi non ~~nulli~~ nulli di S sono n-uple fra loro proporzionali.

SISTEMI LINEARI NON OMOGENEI

Nel caso di ~~s~~ sistemi lineari non omogenei possono esistere o non esistere soluzioni.
Un criterio per stabilirlo a priori è fornito dal teorema di Rouché - Capelli:

Il sistema lineare $x_1 A^1 + \dots + x_n A^n = B$ ammette soluzioni se e solo se:

$$\boxed{\text{rang}(A^1, \dots, A^n) = \text{rang}(A^1, \dots, A^n, B)}$$

LE CONICHE

Si chiamano coniche le curve algebriche di ordine due. Ogni conica ha equazione omogenea del tipo:

(1) $F(X,Y,T) = a_{11}X^2 + a_{22}Y^2 + 2a_{12}XY + 2a_{13}XT + 2a_{23}YT + a_{33}T^2 = 0$

o equazione cartesiana del tipo:

$f(x,y) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$

CONICHE DEGENERI

Le coniche riducibili si chiamano anche coniche degeneri. Per ~~cui~~ cui una conica $\mathscr{C}$ di equazione omogenea (1) è degenere se e solo se il polinomio F si scrive come prodotto di due polinomi di 1° grado, e quindi se e solo se $\mathscr{C}$ è composta da due rette che possono risultare, essendo $\mathscr{C}$ reale, reali e distinte o reali e coincidenti o immaginarie e coniugate. Gli eventuali punti singolari di $\mathscr{C}$ sono necessariamente punti doppi.

Dato che una conica non degenere non può avere punti doppi, l'esistenza di tali punti è condizione necessaria e sufficiente affinché una conica sia degenere.

Ponendo $a_{21} = a_{12}$, $a_{31} = a_{13}$, $a_{32} = a_{23}$, si ottiene una matrice reale simmetrica:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$ matrice della conica

Essa è anche la matrice dei coefficienti del sistema lineare omogeneo che si ottiene annullando le derivate parziali di f:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} F_x(X,Y,T) = a_{11}X + a_{12}Y + a_{13}T = 0 \\ \frac{1}{2} F_y(X,Y,T) = a_{21}X + a_{22}Y + a_{23}T = 0 \\ \frac{1}{2} F_T(X,Y,T) = a_{31}X + a_{32}Y + a_{33}T = 0 \end{cases}$$

- La conica possiede punti ~~doppi~~ doppi se e solo se il sistema ha soluzioni non nulle

(la soluzione (0, 0, 0) in coordinate omogenee non rappresenta alcun punto).

Una condizione necessaria affinché $\mathcal{C}$ sia degenere è:

$$\det(A) = 0$$

nel caso in cui

- rang(A) = 2 → le soluzioni non nulle sono proporzionali, quindi $\mathcal{C}$ ha un unico punto doppio ed è composta da due rette distinte.
- rang(A) = 1 → delle soluzioni sono tutte e sole quelle di una delle tre equazioni (i punti doppi sono tutti e soli i punti reali di una retta).

CONICHE NON DEGENERI

Le coniche non degeneri si possono classificare considerando le diverse possibilità di intersezione con la retta impropria.

Se infatti $\mathscr{C}$ è una conica reale non degenere, la retta impropria la interseca in due punti che possono essere reali e distinti, reali e coincidenti, immaginari e coniugati.
Nei 3 casi rispettivamente si dice che $\mathscr{C}$ è una ~~parabola~~ iperbole, una parabola e un'ellisse.

Se la conica ha equazione omogenea, dal sistema $F(X,Y,T)=0$ $T=0$ si ottiene il seguente:

$$\begin{cases} a_{11}\left(\dfrac{X}{Y}\right)^2 + 2a_{12}\left(\dfrac{X}{Y}\right) + a_{22}=0 \\ T=0 \end{cases}$$

Pertanto, le tre eventualità si verificano a seconda che risulti rispettivamente:

$$\boxed{a_{12}^2 - a_{11}a_{22} \gtreqless 0}$$

OSS: Esiste una e una sola conica passante per 5 punti distinti di π_∞ ~~tre~~ dei quali 3 non più di 3 allineati

FASCI DI CONICHE:

Siano $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ due coniche distinte di equazioni omogenee $F_1(X,Y,T)=0$, $F_2(X,Y,T)=0$.

Si chiama fascio di coniche definito da $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ l'insieme $\mathcal{F}$ delle coniche aventi equazione omogenea:

$$\boxed{\lambda F_1(X,Y,T)+\mu F_2(X,Y,T)=0}$$

OSS: Due qualsiasi coniche distinte di $\mathcal{F}$ definiscono lo stesso fascio $\mathcal{F}$ e hanno in comune lo stesso insieme di punti, i punti comuni a $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$.

SUPERFICI E CURVE SGHEMBE

CONI

Data una curva $\mathcal{C}$ ed un punto V, la superficie costituita dalle rette per V e per i punti della curva si chiama cono di vertice V.
Le precedenti rette si dicono le generatrici del cono e la curva una sua direttrice.

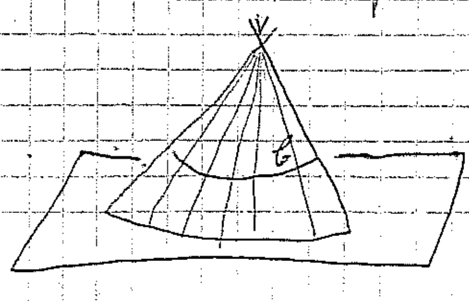
Se la curva ha equaz. parametriche e V ha coordinate cartesiane (x_0, y_0, z_0), la generatrice della superficie passante per il punto $(\alpha(t), \beta(t), \gamma(t))$ della curva ha equaz. parametriche:

$$\begin{cases} x = x_0 + (\alpha(t) - x_0)\, t' \\ y = y_0 + (\beta(t) - y_0)\, t' \\ z = z_0 + (\gamma(t) - z_0)\, t' \end{cases}$$

Queste al variare di (t, t') costituiscono un cono
Si può scrivere in modo equivalente:

$$\frac{x - x_0}{\alpha(t) - x_0} = \frac{y - y_0}{\beta(t) - y_0} = \frac{z - z_0}{\gamma(t) - z_0}$$

Per ottenere l'equazione cartesiana della superficie basta eliminare il parametro t.



CILINDRI

Siano dati una curva e una retta r.
La superficie costituita dalle rette parallele a r e passanti per i punti della curva si chiama cilindro. Tali rette si dicono generatrici del cilindro, la curva una sua direttrice.

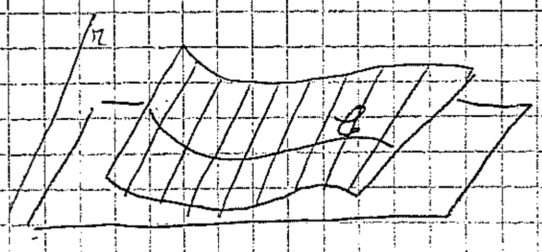
Se la curva ha equazioni parametriche e r ha parametri direttori (l, m, n), la generatrice della superficie passante per il punto $(\alpha(t), \beta(t), \gamma(t))$ della curva ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = \alpha(t) + l t' \\ y = \beta(t) + m t' \\ z = \gamma(t) + n t' \end{cases}$$

e quindi le precedenti, al variare della coppia di parametri (t, t') rappresentano il cilindro.
Scrivendo:

$$\frac{x - \alpha(t)}{l} = \frac{y - \beta(t)}{m} = \frac{z - \gamma(t)}{n}$$

eliminando il parametro t, si ottiene una equazione cartesiana di S.



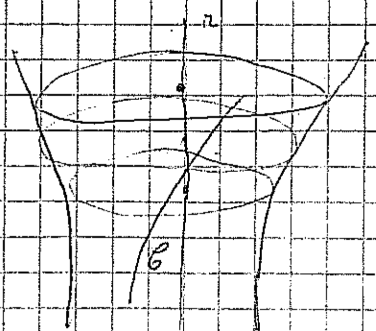
SUPERFICIE DI ROTAZIONE

Data una curva e una retta r, la superficie $\mathcal{S}$ costituita dai cerchi passanti per i punti della curva, aventi il centro su r e appartenenti a piani ortogonali a r, si chiama superficie di rotazione di asse r. Tali cerchi si dicono paralleli della superficie e le curve intersezioni della superficie con i piani del fascio di asse r meridiani di $\mathcal{S}$.

Siano (l, m, n) parametri direttori di r e sia $A = (a, b, c)$ un punto di r.
Il parallelo della superficie passante per il punto $P(t) = (\alpha(t), \beta(t), \gamma(t))$ della curva, può rappresentarsi come intersezione della sfera di centro A passante per $P(t)$ con il piano per $P(t)$ ortogonale a r.

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = (\alpha(t)-a)^2 + (\beta(t)-b)^2 + (\gamma(t)-c)^2 \\ l(x-\alpha(t)) + m(y-\beta(t)) + n(z-\gamma(t)) = 0 \end{cases}$$

Eliminando il parametro t si ottiene l'equazione cartesiana di $\mathcal{S}$.



QUADRICHE

Si chiamano quadriche le superficie algebriche di ordine due

Eq. omogenea:

$$F(X,Y,Z,T) = a_{11}X^2 + a_{22}Y^2 + a_{33}Z^2 + 2a_{12}XY + 2a_{13}XZ +$$
$$+ 2a_{23}YZ + 2a_{14}XT + 2a_{24}YT + 2a_{34}ZT + a_{44}T^2 = 0$$

Eq. cartesiana:

$$f(x,y,z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz +$$
$$+ a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

• Poiché il polinomio F è di grado due, una quadrica è riducibile se e solo se è composta da due piani, che possono essere reali e distinti, reali e coincidenti o immaginari e coniugati.

Una quadrica ha infiniti punti ~~dd~~ doppi. e può Chiamiamo quadriche degeneri le quadriche che hanno almeno un punto doppio.

Una quadrica è degenere se e solo se $\det A = 0$.

Se

- rango $A = 3$ le soluzioni non nulle del sistema sono proporzionali, esiste allora un unico punto doppio P, per cui la quadrica è irriducibile

Si consideri un qualsiasi piano π non passante per P. L'intersezione ~~tra~~ di π con Q è una conica $\mathcal{C}$. Le rette per P e per i punti di $\mathcal{C}$ $\in$ alla Q. La quadrica è composta da queste rette ed è un cono, nel caso che P sia un punto proprio, o un cilindro, nel caso che P sia improprio.

- rango A = 2, le soluzioni del sistema sono le soluzioni di due delle sue equazioni.
Quindi i punti doppi di Q sono tutti e soli i punti reali della retta r comune ai piani che esse rappresentano. Q è ~~quindi~~ ~~irriducibile~~ riducibile ed è composta di due piani per r.
- rango A = 1, le soluzioni del sistema sono le soluzioni di una delle sue equazioni.
I punti doppi di Q sono tutti e soli i punti reali del piano che essa rappresenta, pertanto Q è riducibile ed è composta da quel piano contato due volte.

CLASSIFICAZIONE DELLE QUADRICHE NON DEGENERI

Le quadriche non degeneri, prive cioè di punti doppi, sono necessariamente irriducibili.
Inoltre i loro punti sono tutti iperbolici oppure tutti ellittici. Esse si classificano rispetto alla loro intersezione con il piano improprio.

- Siano Q una quadrica reale non degenere e C_∞ la conica reale impropria di Q. La conica C_∞ può essere non degenere e priva di punti reali, non degenere e a punti reali, degenere. Nei 3 casi rispettivamente si dice che Q è un ellissoide, un iperboloide, un paraboloide.

- Se P è un qualunque punto reale proprio di Q, denotiamo con π il piano tg a Q in P, con r_∞ la retta impropria di π, con A_∞ e B_∞ i punti di intersezione di r_∞ con Σ_∞.

- Se Q è un ellissoide, i punti A_∞ e B_∞ sono immaginari e coniugati.

- Se Q è un iperboloide, i punti A_∞ e B_∞ possono essere reali e distinti oppure immaginari e coniugati. Gli iperboloidi quindi possono essere a punti iperbolici o a punti ellittici, nei due casi rispettivamente si chiamano iperboloidi iperbolici (a una falda) o iperboloidi ellittici (a due falde)

- Se Q è un paraboloide, il piano improprio è tg a Q in un punto P_∞. La conica è composta ~~da~~ da due rette distinte. Nel caso in cui esse siano reali, P_∞ è un punto iperbolico e Q si chiama ~~[illegible]~~ paraboloide iperbolico. Nel caso in cui essi siano immaginarie e coniugate, P_∞ è un punto ellittico e Q si chiama paraboloide ellittico.

Se la Q ha equaz. omogenea F la conica $\mathcal{C}_\infty$ ha equazioni $T=0$, $F(x,y,z,T)=0$.
Ne segue che la sua matrice non è altro che il minore A_{44}

AUTOVETTORI E AUTOVALORI

Sia V uno spazio vettoriale su un dato campo K, e consideriamo una applicazione lineare $L: V \to V$. Un vettore non nullo $v \in V$ si chiama AUTOVETTORE di L, o anche vettore caratteristico di L, se esiste un elemento λ di K tale che:

$$\boxed{L(v) = \lambda v} \quad (1)$$

Lo scalare λ si dice autovalore di L o un valore caratteristico di L.

- La (1) non può verificarsi per uno stesso vettore v e per due diversi scalari.
Si dice, quindi, che λ è l' ~~autovettore~~ autovalore di L relativo a v.

- $$V_\lambda = \{ v \in V \,/\, L(v) = \lambda v \} \cup \{ \bar{0} \}$$

insieme costituito dagli autovettori di L relativi allo stesso autovalore λ e del vettore nullo.
Esso è un sottospazio di V. Tale sottospazio si chiama autospazio di L relativo all'autovalore λ.

Due autospazi V_λ e V_μ relativi a due distinti autovalori λ e μ di L si intersecano nel solo vettore nullo.

POLINOMIO CARATTERISTICO

Il problema della determinazione degli autovalori di una matrice, e quindi degli autovalori di una qualsiasi applicazione lineare da esse rappresentate, si riconduce a quello della determinazione delle radici di un polinomio. Se A è una matrice quadrata di ordine n a elementi in un dato campo K, si chiama polinomio caratteristico di A il seguente polinomio a coefficienti in K:

$$P_A(t) = \det(A - tI)$$

DIAGONALIZZAZIONE

Consideriamo uno spazio vettoriale V di dimensione n nel campo K e sia L una applicazione lineare di V in V. Si dice che L è diagonalizzabile se esiste una base E di V tale che la matrice di L relativa alla base E sia una matrice diagonale.

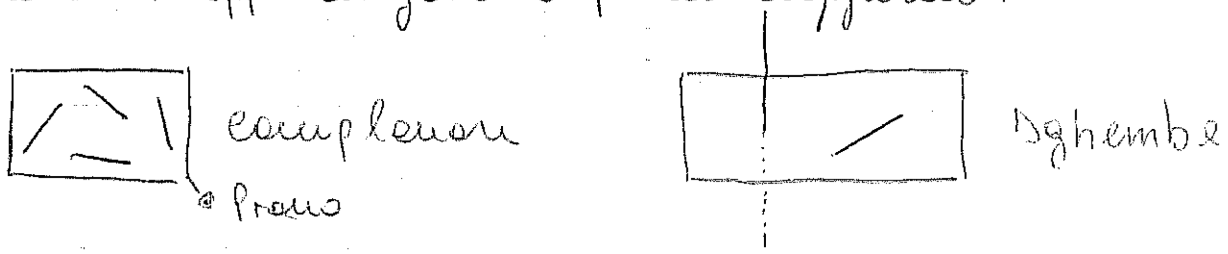
Rette

Due rette in un piano sono complanari, se ~~[illegible]~~ si trovano nello piano.

- I punti di una retta sono infiniti
- I punti in un piano sono ∞^2

Due rette che non hanno punti in comune possono essere:

- complanari: appartengono allo stesso piano
- sghembe: appartengono a piani differenti

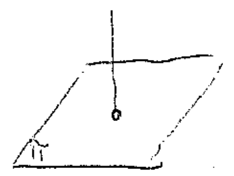


Una retta in un ~~piano~~ sistema di piani tridimens. si rappresenta attraverso un sistema di equazioni di 1° grado a 3 variabili

Due piani possono essere paralleli o coincidenti

La giacitura in un piano è la qualsiasi perpendicolare al piano

$$ax+by+cz+d=0$$



per avere la giacitura d'origine basta avere $d=0$ quindi:

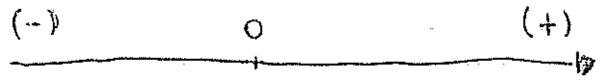
$$ax+by+cz=0$$

3 punti non allineati individuano un piano
2 punti non allineati individuano una retta

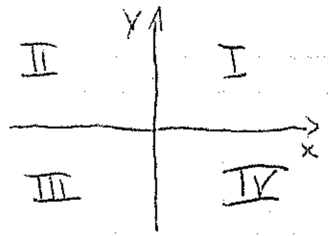
Retta orientata

Si dice orientata quando viene stabilito su di essa un verso positivo, che sarà indicato con una freccia

Si fissa un punto O (origine), che divide la retta in due semirette.



Si fissano due rette orientate sul piano, fra loro ortogonali



O= origine del sistema di riferimento

x = ascisse
y = ordinate

$P(x,y)$

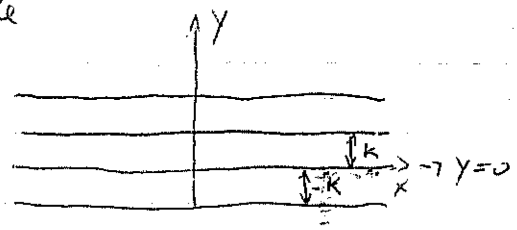
coordinate cartesiane ortogonali del punto P.

Equazioni di una retta

$$ax+by+c=0$$

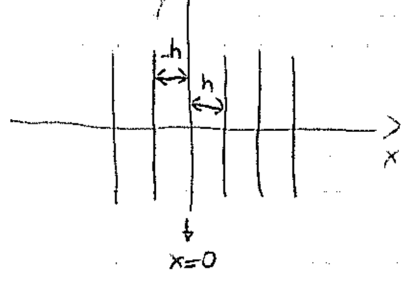
① $a=0 \quad by+c=0 \Rightarrow y=-c/b \rightarrow y=k$ (costante)

Il diagramma dell'equazione $y=k$ è rappresentato da una retta orizzontale

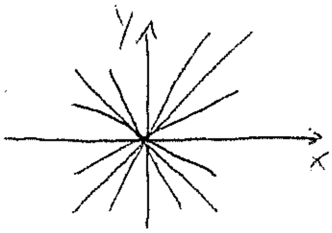


② $b=0 \quad ax+c=0 \Rightarrow x=-c/a \Rightarrow x=h$ (costante)

Il diagramma dell'equazione $x=h$ è rappresentato da una retta verticale



③ $c=0$ $\quad ax+by=0$ $\quad$ l'equazione rappresenta (al variare di "a" e "b") un fascio di rette passanti per l'origine $O(0,0)$



Equazione canonica della retta e coefficiente angolare

$b \neq 0$

$$ax+by+c=0 \Rightarrow by=-ax-c \Rightarrow y=-\frac{ax}{b}-\frac{c}{b}$$

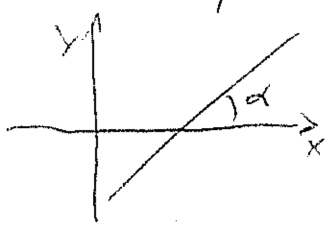
$-\frac{a}{b}=m \rightarrow$ coefficiente angolare

$-\frac{c}{b}=q \rightarrow$ termine noto

diventa quindi

$y=mx+q$ equazione canonica della retta

Il coefficiente angolare è un indice di quanto la retta è inclinata rispetto all'asse x, per le rette verticali ($y=0$) non si definisce il coefficiente angolare



se α è acuto ($<90°$) $\rightarrow m>0$

se α è ottuso ($>90°$) $\rightarrow m<0$

se α è 0 $\rightarrow m=0$

Teorema:

Lo spazio contiene infiniti punti, infinite rette, infiniti piani.

- Fascio proprio:

L'insieme di tutte le rette complanari che passano per uno stesso punto detto centro del fascio.

- Fascio improprio:

L'insieme di tutte le rette complanari che sono parallele fra loro.

- Stella di centro P:

L'insieme delle rette dello spazio che passano per P il quale è detto sostegno della stella.

- Incidenti:

Quando un piano e una retta che non gli appartiene hanno un solo punto in comune.

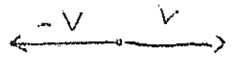
- Paralleli:

Un piano e una retta che non gli appartiene non hanno punti in comune.

I piani possono essere:

- coincidenti: quando i due piani coincidono
- incidenti: quando i due piani s'intersecano lungo una retta
- paralleli: quando i due piani non hanno punti in comune

Vettore:



La somma del vettore $\vec{v}$ più il suo opposto da un vettore nullo

$$\forall v \; \exists -v : -v + v = \vec{00}$$

$\vec{00}$ vettore nullo perché ha inizio e fine coincidenti

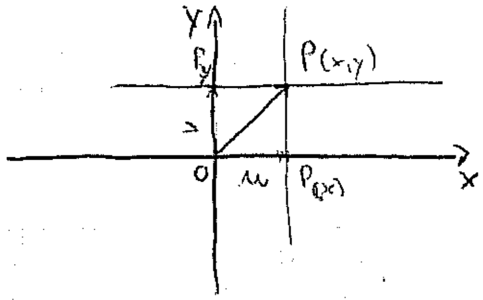
Prendendo un vettore $\vec{v}$ e aggiungendo una costante (h), il vettore $\vec{hv}$ può assumere valori:

se $h=0 \rightarrow \vec{hv} = \vec{00}$

se $h>0 \rightarrow \overrightarrow{hv} = \overrightarrow{hv}$ verso positivo

se $h<0 \rightarrow \overleftrightarrow{hv} = \overleftarrow{hv}$ verso negativo

Dati due vettori $\vec{u}, \vec{v}$ non paralleli, fissiamo un punto O, andiamo a considerare una retta parallela a O; fissiamo un sistema <u>monometrico</u>: tutto il sistema ha un'unità di misura.



P essendo nel primo quadrante le coordinate (x,y) saranno positive.

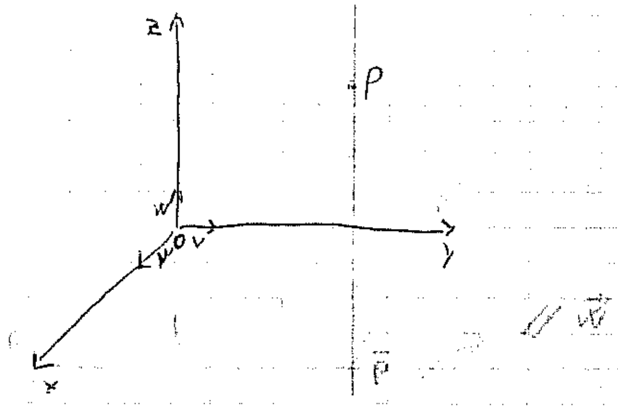
Per trovare le coordinate di P, tracciamo la parallela di y passante per P, il punto d'intersezione con l'asse delle x sarà il punto $P_{(x)}$;

$$P_{(x)} = |x| = \frac{\|OP_x\|}{\|u\|}$$

Stessa cosa con la parallela di x;

$$P_y = |y| = \frac{\|OP_y\|}{\|v\|}$$

Dati 3 vettori non complanari e non nulli;
$\vec{u}(1,0,0)$ $\vec{v}(0,1,0)$ $\vec{w}(0,0,1)$
E un punto P



Tracciamo la parallela al vettore w passante per P, il punto d'intersezione con il piano xy lo chiamiamo $\bar{P}$, tracciando le dovute proiezione sulle assi x e y ci troviamo i punti P_1 e P_2; traslando il piano fino al punto P ci trovere il punto P_3, che non sarà altro che l'intersezione tra il piano traslato fino a P e l'asse delle z; quindi ci calcoliamo le coordinate del vettore $\overline{OP}$;

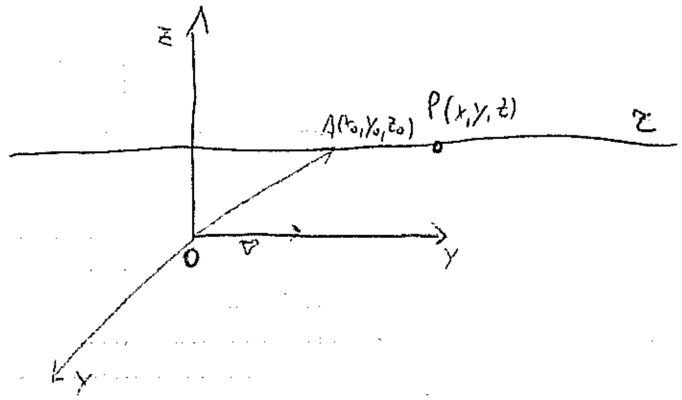
$$|u| = \frac{\|\overrightarrow{OP_1}\|}{|u|}$$

$$|y| = \frac{\|\overrightarrow{OP_2}\|}{|v|}$$

$$|z| = \frac{\|\overrightarrow{OP_3}\|}{|z|}$$

P di coordinate $(|x|, |y|, |z|)$

Determinare una retta passante per A e $/\!/ \vec{v}$



$$\vec{AP} = t \cdot \vec{v}$$

$\downarrow$ costante di proporzionalità

$$\vec{OA} + \vec{AP} = \vec{OA} + t \cdot \vec{v} \Rightarrow \vec{OP} = \vec{OA} + t\vec{v}$$

Equazione parametrica

$$\begin{cases} x = x_0 + l\,t \\ y = y_0 + m\,t \\ z = z_0 + n\,t \end{cases}$$

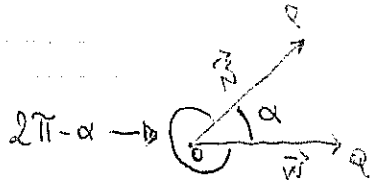
equazioni parametriche della retta passante per A avente il verso di $\vec{v}$ (non nullo).

$A(1,0,1)$ $\quad \vec{v}(2,1,0)$

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 0 + 1t \\ z = 1 + 0t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{cases} x = 1 + 2y \\ z = 1 \end{cases}\right\}$$ equazione della retta in forma cartesiana.

Il passaggio dalle equazioni parametriche a quelle cartesiane si ha eliminando la costante.

Consideriamo due vettori
$\vec{v}$ $\vec{w}$



Fissiamo un punto O come origine dei nostri vettori

Chiameremo l'angolo convesso tra i due vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ come α con

$$0 < \alpha < \pi$$
$$\alpha \in [0, \pi]$$

L'angolo complementare ad α con $2\pi - \alpha$;

- Se i due vettori sono paralleli e concordi l'angolo formato tra i due vettori è 0

- Vettore versore: è un vettore con lo stesso verso, stessa direzione ma con modulo 1 (unitario) del vettore preso in considerazione.

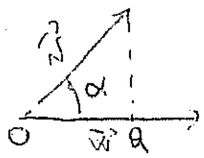
$$\vec{v} = t \cdot \vec{u} \qquad \|u\| = 1$$

principio di proporzionalità

$$\|\vec{v}\| = |t| \cdot \|u\| = |t|$$

Prodotto scalare tra due vettori equivale al prodotto dei moduli per il coseno dell'angolo tra loro compreso.

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos\alpha$$



Consideriamo la proiezione del vettore $\vec{v}$ nel vettore $\vec{w}$, attraverso la proiezione ortogonale, così fatto troviamo il punto Q, quindi in conclusione la proiezione di $\vec{v}$ sarà $\vec{OQ} = \vec{v}_w$

$$\|v_w\| = |v| \cdot \cos\alpha$$

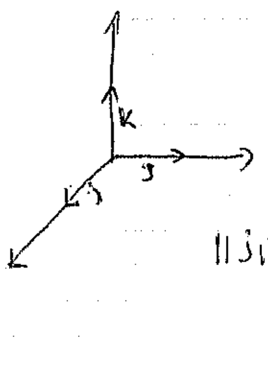
Prodotto scalare tra un vettore e se stesso

$\vec{v} \cdot \vec{v} = \|v^2\| \geq 0$

oppure

$\vec{v} \cdot \vec{v} = 0$ quando il modulo del vettore è 0

$\vec{v} \cdot \vec{w} = |v| \cdot |w| \cdot \cos\alpha = 0$ sarà 0 quando i due vettori sono perpendicolari perché il $\cos\alpha = 0$



$\|i\| = \|j\| = \|k\| = 1$ $\quad$ $i \cdot j = 0 \quad i \cdot k = 0 \quad j \cdot k = 0$

perché sono ortogonali quindi il $\cos\alpha \left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$$\underbrace{\vec{V} \cdot \vec{W}}_{\text{due vettori nello spazio 3D.}} = (V_x \cdot i + V_y \cdot j + V_z k) \cdot (W_x \cdot i + W_y \cdot j + W_z k) =$$

$$= V_x (W_x \cdot i + W_y \cdot j + W_z \cdot k) + V_y (W_x i + W_y \cdot j + W_z \cdot k) +$$

$$+ V_z (W_x \cdot i + W_y \cdot j + W_z \cdot k) =$$

$$= V_x \cdot W_x + V_y \cdot W_y + V_z \cdot W_z$$

$$\cos\alpha = \frac{V_x \cdot W_x + V_y \cdot W_y + V_z \cdot W_z}{\underbrace{\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}}_{|V|} + \underbrace{\sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2}}_{|W|}}$$

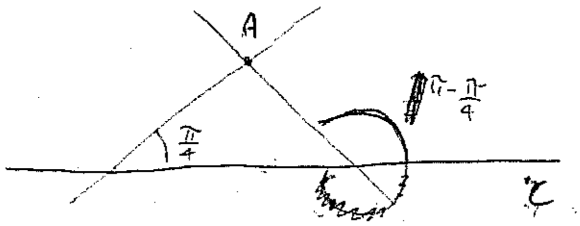
Esercizio

Fissiamo un punto A nello spazio $A(1,1,1)$

E le rette passanti per A incidenti alla retta

$r = \begin{cases} x = 2z \\ y = z+1 \end{cases}$ formanti con essa angolo $\pi/4$.

Troviamo queste rette!

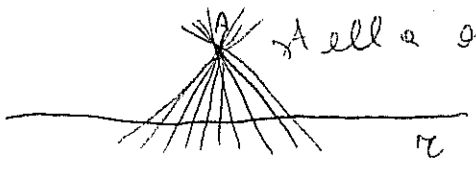


La direzione della retta $\vec{r}(2,1,1)$ i numeri direttori di $r(2,1,1)$ e li siamo trovati perché l'equazione cartesiana è in funzione di z quindi dando a $z=1$ di conseguenza avremo $x = 2z$ $y = 1z$ $z = 1$ perché prendiamo il coefficiente di z

$$r = \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + 1t \\ z = 1t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + mt \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 + lt \\ y = 1 + mt \\ z = 1 + mt \end{cases}$$

Al variare di l, m, n otterremo una stella di rette



Quindi i punti d'intersezione tra le rette passanti per A e incidenti ad r in forma generica è $(2h, 1+h, 1h) = B$

$B = (2h, h+1, h)$

Quindi ci calcoliamo la retta tra il punto A e l'incidente con la retta r che chiameremo B quindi:

$$AB = \begin{cases} x-1 = (2h-1)t \\ y-1 = (h\cancel{+1}\cancel{-1})t \\ z-1 = (h-1)t \end{cases}$$

mettiamo -1 perché le coordinate di A sono $(1,1,1)$

Soluzione:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{r_x(\overline{AB}_x) + r_y(\overline{AB}_y) + r_z(\overline{AB}_z)}{\sqrt{2^2+1^2+1^2} + \sqrt{(2h+1)^2+h^2+(h-1)^2}} =$$

$$= \frac{r_x(\overline{AB}_x) + r_y(\overline{AB}_y) + r_z(\overline{AB}_z)}{\sqrt{r_x^2+r_y^2+r_z^2} + \sqrt{AB_x^2+AB_y^2+AB_z^2}} =$$

$$= \frac{2(2h+1) + 1(h) + 1(h-1)}{\sqrt{6} + \sqrt{6h^2-6h+2}} =$$

$$= \frac{(6h-3)^3}{6\cdot(6h^2-6h+2)} =$$

$$= \frac{36+9}{6(6h^2-6h+2)} =$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}} = \frac{{}^{3}\cancel{9}(2h-1)^2}{\cancel{6}_{2}\cdot\cancel{2}(3h^2-3h+1)} =$$

$$= 3(2h-1)^2 = 2(3h^2-3h+1) =$$

$$= 3(4h^2-4h+1) = 6h^2-6h+2 =$$

$$= 12h^2-12h+3 = 6h^2-6h+2 =$$

$$= 6h^2-6h+1 = 0 \Rightarrow h = \frac{3\pm\sqrt{9-6}}{6} = \frac{3\pm\sqrt{3}}{6}$$

Determinare l'equazione del piano passante per $P(3,-2,2)$ e per la retta r $\begin{cases} 4x-y+2z+1=0 \\ x'-3y'+z'-11=0 \end{cases}$

Il fascio di piani che ha come sostegno la retta r è:

$$\lambda(4x-y+2z+1)+\mu(x'-3y'+z'-11)=0$$

$$= \lambda(12+2+4+1)+\mu(+3+6+2-11)=0$$

$$= 19\lambda+\mu(0)=$$

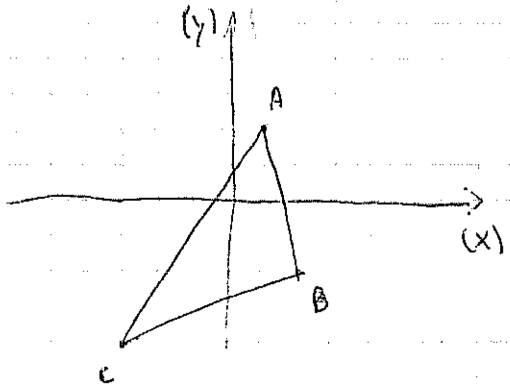
$$= \lambda=-\frac{\mu(0)}{19}=$$

$$= \lambda=0$$

Procedimento scritto:
Vogliamo sapere l'equazione del piano che contiene sia P che la retta r, quindi presa l'equazione del fascio di piani $\lambda(ax+by+cz+d)+\mu(ax'+by'+cz'+d')=0$ sostituiamo a quest'ultimi i valori di r, ed otterremo $\lambda(4x-y+2z+1)+\mu(x'-3y'+z'-11)=0$ dopo di ciò sostituiamo ai valori di x, y, z le coordinate del punto P, il risultato è il piano che contiene sia la retta ~~r~~ che il punto P.

Triangolo: vertici $A(1,2)$
$B(2,-2)$
$C(-3,-4)$

1) Scrivere l'equazione dei lati del triangolo
2) Delle parallele ai lati condotte dai vertici opposti
3) Delle congiungenti punti medi dei lati
4) l'equazione delle mediane.



① Ci calcoliamo i punti direttori del vettore (in questo caso $\vec{AB}$):

$$l = x_b - x_a \qquad m = y_b - y_a$$

$$l = 2 - 1 = 1 \qquad m = -2 - 2 = -4$$

quindi il vettore $\vec{AB}$ avrà coordinate $\vec{AB}\overset{l\ \ m}{(1,-4)}$

Ora calcoliamo l'equazione della retta AB; partiamo dalla formula parametrica.

$$\begin{cases} x = x_a + lt \\ y = y_a + mt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-4t \end{cases} \text{ ricaviamo } t \text{ dalla prima } \begin{cases} t = x-1 \\ y = 2-4(x-1) \end{cases}$$

"Al variare di t $(0 \le t \le 1)$ troveremo tutti i punti del vettore $\vec{AB}$ $[A,B]$"

Quindi abbiamo trovato l'equazione cartesiana.

$$\underset{\substack{\text{variabile}\\ \text{dipendente}}}{y} = 2 - 4(\underset{\substack{\text{variabile}\\ \text{indipendente}}}{x} - 1) \Rightarrow \underbrace{y = -4x + 6}_{\substack{\text{retta in forma esplicita}\\ \text{rispetto ad } x}} \qquad -4 = \text{coefficiente angolare}$$

Ripetiamo l'operazione per il vettore $\overline{BC}$

$l = -3 - 2 = -5 \qquad m = -4 + 2 = -2$

$\overline{BC}(-5, -2)$

$$\begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = -2 - 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{x-2}{5} \\ y = -2 - 2\cdot\left(\frac{x-2}{5}\right) \end{cases}$$

$$y = -2 - 2\cdot\left(\frac{x-2}{5}\right) = -2 \frac{+2x - 4}{5} = \frac{+2x - 14}{5}$$

$+2x - 5y - 4 = 0$ equazione della retta AB

Ripetiamo l'operazione per il vettore $\overline{AC}$

$l = -3 - 1 = -4 \qquad m = -4 - 2 = -6$

$\overline{AC}(-4, -6)$

$$\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 2 - 6t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{x-1}{4} \\ t = \frac{y-2}{6} \end{cases}$$

$$-\frac{x-1}{4} = -\frac{y-2}{6}$$

$-6(x-1) = -4(y-2)$

$-6x + 6 = -4y + 8$

$6x - 4y + 2 = 0$ dividiamo tutto per 2

$3x - 2y + 1 = 0$

$\Rightarrow$ equazione della retta AC

$\overline{AB} = +4x+y-6=0 \quad \overline{BC} = 2x-5y-14=0 \quad \overline{AC} = 3x-2y+1=0$

② equazione generica di una retta passante per un punto

$// \overline{BC} \Rightarrow A \qquad lt = (x - x_a) \qquad mt = (y - y_a)$

$-4t = (x-1) \qquad -2t = (y-2)$

sono i punti direttori della retta che si vuol far passare per il punto.

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{2}$$

$$2(x-1) = 4(y-2) \Rightarrow \underbrace{2x-4y+6=0}$$

equazione della retta $// \overline{BC}$ passante per A

$// \overline{AC} \Rightarrow B \qquad -4t = (x-2) \qquad -6t = (y+2)$

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y+2}{6}$$

$$6(x-2) = 4(y+2)$$

$$6x-12 = 4y+8$$

$-6x+4y+20=0$ equazione della retta $// \overline{AC} \Rightarrow B$

$// \overline{AB} \Rightarrow C \qquad t = (x+3) \qquad -4t = (y+4)$

$$x+3 = \frac{y+4}{4}$$

$$4x+12 = y+4$$

$4x-y+8=0$ equazione della retta $// \overline{AB} \Rightarrow C$

③ equazione del punto medio di un vettore

$$x_m = \frac{x_f + x_i}{2} \qquad y_m = \frac{y_f + y_i}{2}$$

$A(1,2) \qquad B(2,-2)$

$$x_m = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2} \qquad y_m = \frac{-2+2}{2} = 0$$

le coordinate del punto medio tra A e B sono
$M_1\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

$B(2,-2) \qquad C(-3,-4)$

$$x_m = \frac{-3+2}{2} = -\frac{1}{2} \qquad y_m = \frac{-4-2}{2} = -3$$

le coordinate del punto medio tra B e C sono
$M_2\left(-\frac{1}{2}, -3\right)$

$A(1,2) \qquad C(-3,-4)$

$$x_m = \frac{-3+1}{2} = -1 \qquad y_m = \frac{-4+2}{2} = -1$$

le coordinate del punto medio tra A e C sono
$M_3(-1,-1)$

Congiungenti punti medi

$\overrightarrow{M_1M_2}(1,-3)$

$$x = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1$$

$$y = -3 - 0 = -3$$

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2} + t \\ y = -3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} + \frac{y}{3} \\ t = \frac{y}{3} \end{cases}$$

$$x = \frac{3}{2} + \frac{y}{3}$$

$6x = 3 + y \Rightarrow 6x - y - 3 = 0$ equazione della congiungente tra il punto medio M_1 e M_2

$\overline{M_1 M_3}\left(-\frac{5}{2}, -1\right)$

$x = -1 - \frac{3}{2} = -\frac{5}{2}$

$y = -1 - 0 = -1$

$\begin{cases} x = \frac{3}{2} - \frac{5}{2}t \\ y = 0 - t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} + \frac{5}{2}y \\ t = -y \end{cases}$

$x = \frac{3}{2} + \frac{5}{2}y$

$2x = 3 + 5y$

$2x - 5y - 3 = 0$ equazione della congiungente tra i punti medi M_1 e M_3

$\overline{M_2 M_3}\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$

$x = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

$y = -\cancel{1} + 3 = 2$

$\begin{cases} x = -1 - \frac{1}{2}t \\ y = -1 + 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 - \frac{1}{2}\left(\frac{y+1}{2}\right) \\ t = \frac{y+1}{2} \end{cases}$

$x = -1 - \frac{y+1}{4} \Rightarrow -4x = +4 + y + 1$

$4x + y + 5 = 0$

equazione della congiungente tra i punti medi M_2 e M_3

Il baricentro è il punto d'incontro tra le 3 mediane
Baricentro si ha sommando tutte le coordinate
dei vertici del triangolo

$$x = \frac{x_a + x_b + x_c}{3} \qquad y = \frac{y_a + y_b + y_c}{3}$$

Le mediane non sono altro che il vettore tra
il vertice e il punto medio del lato opposto al
vertice.

7) Mediana di A

$A(1,2)$ $M_2\left(-\frac{1}{2}, -3\right)$

$\overrightarrow{AM_2}\left(-\frac{3}{2}, -5\right)$ $\qquad x = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$

$y = -3 - 2 = -5$

$$\begin{cases} x = 1 - \frac{3}{2}t \\ y = 2 - 5t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - \frac{3}{2}\left(\frac{y-2}{5}\right) \\ t = \frac{y-2}{5} \end{cases}$$

$$x = 1 - \frac{3y+6}{10} \Rightarrow 10x = 10 - 3y + 6$$

$$10x + 3y - 16 = 0$$

equazione della mediana di A

Mediana di B

$B(2,-2) \quad M_3(-1,-1)$

$x = 2+1 = 3$

$y = -2+1 = 1$

$\overrightarrow{BM_3}\,(3,-1)$

$$\begin{cases} x = 2+3t \\ y = -2-t \end{cases} \qquad t = \frac{x-2}{3}$$

$$y = -2 - \frac{x}{3} + \frac{2}{3} = -\frac{x}{3} - \frac{4}{3}$$

$$3y = -x - 4$$

equazione della mediana di B

Mediana di C

$C(-3,-4) \quad M_1\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

$x = -3 - \frac{3}{2} = -\frac{9}{2}$

$y = -4 - 0 = -4$

$\overrightarrow{CM_1}\left(-\frac{9}{2}, -4\right)$

$$\begin{cases} x = -3 - \frac{9}{2}t \\ y = -4 - 4t \end{cases} \qquad -t = \frac{y+4}{-4}$$

$$x = -3 - \frac{9}{2}\left[-\left(\frac{y+4}{-4}\right)\right] = -3 - \frac{9}{2}\left(+\frac{1}{4}y + 1\right) =$$

$$= -3 - \frac{9}{8}y - \frac{9}{2} = -\frac{9}{8}y - \frac{15}{2}$$

Circonferenza

Luogo geometrico dei punti equidistanti da un punto fisso detto centro

Equazione della circonferenza

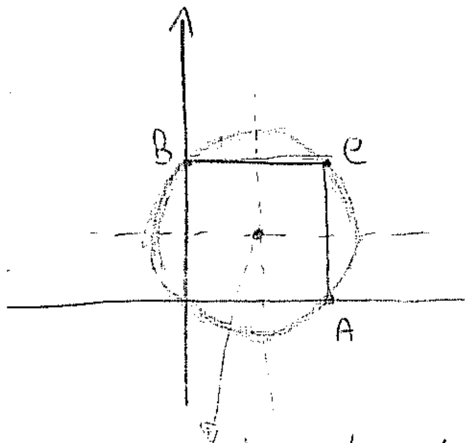
$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$$

$$x^2+\alpha^2-2\alpha x+y^2+\beta^2-2\beta y-r^2=0$$

per parlare di una circonferenza bisogna che i coefficienti delle variabili di secondo grado x^2 e y^2 sono uguali

Esempio

$A(1,0)$ $B(0,1)$ $C(1,1)$



$\overline{BC}$ = Corda

$\overline{AC}$ = Corda

punto medio $\overline{BC}$ $\left(\frac{1}{2},1\right)$

punto medio $\overline{AC}$ $\left(1,\frac{1}{2}\right)$

centro $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

3 punti non allineati danno vita ad una circonferenza

$$r=\sqrt{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2+\left(0-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$r^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$$

Distanza di due punti. Equazione di una sfera

La distanza "d" da A a B $= \|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

Equazione di una sfera

La sfera di centro "C" e raggio $R > 0$ è l'insieme dei punti che hanno distanza da "C" pari a "R".
Un punto di coordinata (x, y, z) appartiene a tale sfera se e solo se:

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 + (z - z_c)^2 = R^2$$

Sviluppando i quadrati si può riscrivere l'equazione nella forma

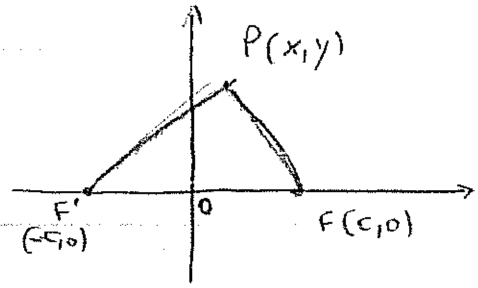
$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

dove

$$a = -2x_c \quad b = -2y_c \quad c = -2z_c$$

$$d = x_c^2 + y_c^2 + z_c^2 - R^2$$

Coniche come luogo geometrico
Ellisse



$$\overrightarrow{PF}+\overrightarrow{PF'} = \sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} + \sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2} = 2a$$ costante $a>0$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

eleviamo tutto al quadrato

$$(x-c)^2 + \cancel{y^2} = \underbrace{4a^2}_{\text{il quadrato del primo}} - \underbrace{\sqrt{x-c)^2+\cancel{y^2}}}_{\text{il quadrato del secondo}} \underbrace{-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}}_{\text{il doppio prodotto tra il primo e il secondo}}$$

$$\cancel{x^2} - 2xc + \cancel{c^2} = +4a^2 + \cancel{x^2} + 2xc + \cancel{c^2} - 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$-4a^2 - 4xc = -4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

dividiamo tutto per 4

$$a^2 - xc = -a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

togliamo la radice elevando tutto al quadrato

$$a^4 + x^2c^2 - 2xca^2 = +a^2\left((x-c)^2+y^2\right)$$

$$a^4 + x^2c^2 \cancel{-2xca^2} = ax^2 \cancel{-2xca^2} + c^2a^2 + a^2y^2$$

$$a^4 - c^2a^2 = -x^2c^2 + ax^2 + a^2y^2$$

$$a^4 - c^2a^2 = x^2(-c^2+a) + a^2y^2$$

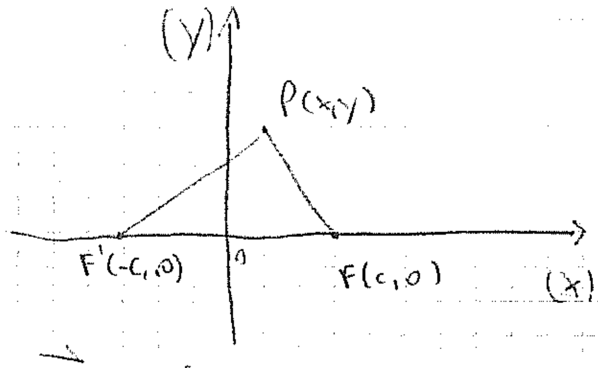
$$a^2(+a^2-c^2) = x^2(-c^2+a) + a^2y^2$$

dividiamo tutto per $a^2 \quad (a^2-c^2) = b^2$

$$1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$ equazione dell'ellisse

L'equazione dell'ellisse è di 2° grado e mancano i termini rettangolari. Se $a^2 = b^2$ avremo una circonferenza con centro l'origine e raggio $= a$

iperbola



$\|\overrightarrow{PF'}\| - \|\overrightarrow{PF}\| = 2a$

$$= \left| \sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} \right| = |2a|$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = +\sqrt{(x-c)^2+y^2} \pm 2a$$

equivale al valore assoluto

$$(x+c)^2 + \cancel{y^2} = +(x-c)^2 + \cancel{y^2} + 4a^2 \pm 4a\left(\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)$$

$$\cancel{x^2} + 2cx + \cancel{c^2} = \cancel{x^2} - 2cx + \cancel{c^2} + 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$+4cx - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$+cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$(cx - a^2)^2 = +a^2((x-c)^2+y^2)$$

$$c^2x^2 + a^4 \cancel{-2cxa^2} = +a^2x^2 + a^2c^2 \cancel{-2xca^2} + ay^2$$

$$c^2x^2 - ax^2 - y^2a^2 = -a^4 + c^2a^2$$

$$x^2(c^2-a^2) - y^2a^2 = a^2(-a^2+c^2)$$

dividiamo tutto per $a^2(-a^2+c^2) = b^2$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{equazione dell'iperbole}$$

il segno ci fa trovare da un'iperbole ad un ellisse

Iperbole equilatera

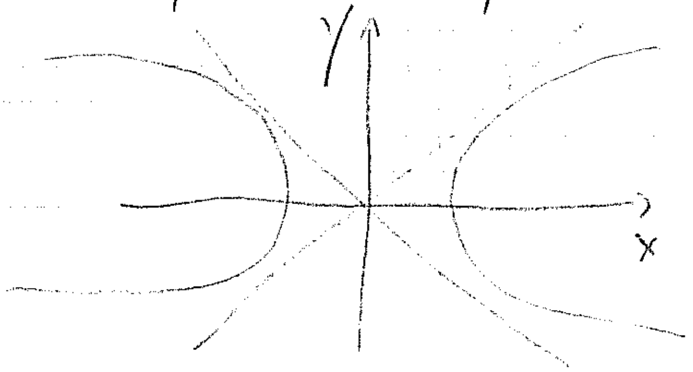
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{asintoti} = \underline{1}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$$

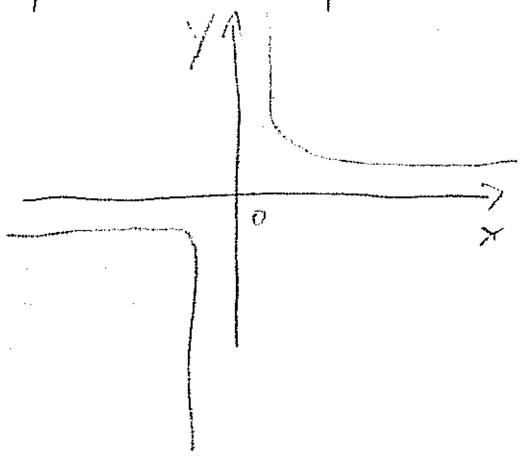
$$x^2 - y^2 = a^2 \qquad a = 1$$

$$x^2 - y^2 = 1$$

$$x^2 - y^2 = 0 \qquad x = \pm y$$

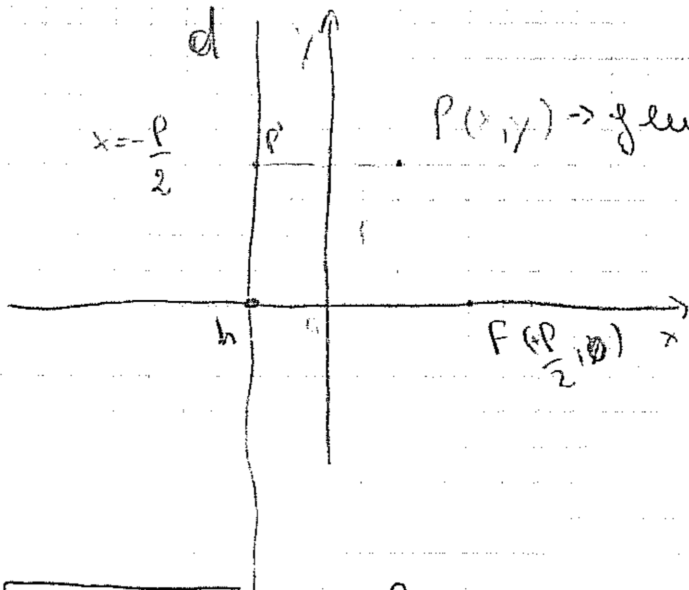


$x \cdot y = 1$ iperbole equilatera



Parabola

Luogo geometrico dei punti equidistanti da un punto fisso detto fuoco e da una retta fissa detta direttrice.



$\|\vec{PF}\| = \sqrt{(x-\frac{P}{2})^2+y^2} = x+\frac{P}{2}$ $\qquad x+\frac{P}{2}$ equazione direttrice

$= (x-\frac{P}{2})^2+y^2 = \cancel{x^2}+\cancel{\frac{P^2}{4}}+xP$

$\cancel{x^2}+\cancel{\frac{P^2}{4}}-xP+y^2 = xP$

$-Px+y^2=Px$

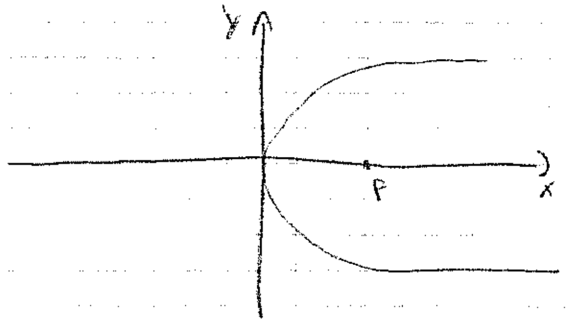
$y^2=2Px$ equazione della parabola

parabola che ha come asse l'asse delle x, come vertice l'origine e come tg all'origine l'asse delle y.

Equazione generica della parabola

$y=ax^2+bx+c$

l'asse delle x è asse di simmetria



Struttura algebrica: è un insieme non vuoto dove è definita almeno un'operazione, presi comunque due elementi dell'insieme il risultato deve far parte dell'insieme stesso

$(\mathbb{Z}, +)$ gruppo abeliano (o commutativo) rispetto all'addizione.

$$\text{gruppo} \begin{cases} \text{elemento neutro} \\ \text{elemento opposto} \\ \text{proprietà associativa} \end{cases}$$

se c'è anche

{ proprietà commutativa } diventa abeliano

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ quindi $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

elemento neutro	V
elemento opposto	non c'è
proprietà associativa	V
proprietà commutativa	V
proprietà distributiva	V

quindi è un gruppo rispetto alla moltipl.

Dividiamo gli interi relativi ($\mathbb{Z}$), in classi (sottoinsiemi) $\mathbb{Z}/p$ con $p=2$, separo da una parte tutti i pari e dall'altra tutti i dispari.

$[0]$ classe pari perché se divido per 2 il resto è 0

$[1]$ classe dispari perché se divido per 2 il resto è 1

$\left(\frac{\mathbb{Z}}{2}, +\right)$ è abeliano rispetto all'addizione

$[0]+[0]=[0]$ $[1]+[1]=[0]$

elementi opposti rispetto all'addizione

Da $\frac{\mathbb{Z}}{2}$ abbiamo ottenuto un campo delle classi resto modulo 2.

$(k, +, \cdot)$ ← lo chiamiamo campo quando è dotato di 2 operazioni addizione e moltiplicazione e l'ordine è molto importante.

$(k, +)$ è un gruppo abeliano

Consideriamo il sottoinsieme

$k^* = k - \{0\}$ ⇒ elemento neutro che tolto ci fa avere l'invertibilità

$(k^*, \cdot)$ è un campo abeliano rispetto alla moltiplicazione.

Consideriamo $\mathbb{Z}/4$

[0], [1], [2], [3] sono le classi che contengono i numeri che /4 danno resto 0/1/2/3

Dimostriamo se $\mathbb{Z}/4$ è un campo

rispetto all'addizione

- elemento neutro => [0]
- elemento opposto => [0], [1] <=> [3], [2] => [2]
- proprietà associativa => Ok
- proprietà commutativa => Ok

quindi $\mathbb{Z}/4$ è abeliana rispetto all'addizione

Rispetto alla moltiplicazione

elemento neutro => [0]

elemento opposto => [2]·[2] = [4] = [0]

che è uguale al elemento neutro quindi non c'è opposto di 2

Considerazione finale che $\mathbb{Z}/4$ non è un campo

$(\mathbb{Z}/_3, +, \cdot)$

$\mathbb{Z}/_3$ è un gruppo abeliano rispetto all'addizione

rispetto alla moltiplicazione:

- elemento neutro $= [0]$
- elemento opposto $= [1]\cdot[1] = [1], [1] \Leftrightarrow [2], [2]\cdot[2]$

$\mathbb{Z}/_3$ è un gruppo abeliano rispetto alla moltiplicazione

Quindi $\mathbb{Z}/_3$ è un campo, tutti i numeri primi sono campi; il campo più piccolo è $\mathbb{Z}/_2$

$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ $\mathbb{Q}$ è abeliano rispetto all'addizione.
$\mathbb{Q}$ è abeliano togliendo lo "0" anche rispetto alla moltiplicazione quindi $\mathbb{Q}$ è un campo

prendiamo in considerazione K

$$\mathbb{Q} \subset K = \{a + b\sqrt{2},\ a \text{ e } b \in \mathbb{Q}\}$$

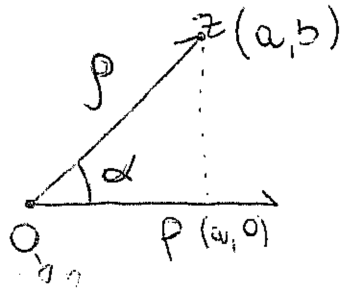
è contenuto propriamente in K perché ~~anche~~ contiene anche $\sqrt{2}$

se sommiamo due elementi di K

$$(a + b\sqrt{2}) + (a' + b'\sqrt{2}) = \underbrace{(a + a') + (b + b')\sqrt{2}}_{\text{elemento } K}$$

quindi K è abeliano rispetto l'addizione

Rappresentazione dei numeri complessi



lo assumiamo come polo

ρ = distanza dal polo al punto z

$\rho = \sqrt{a^2+b^2}$ modulo di z

$$\begin{cases} a = \rho \cos \alpha \\ b = \rho \operatorname{sen} \alpha \end{cases}$$

questi valori trovati li sostituiamo alla seguente espressione algebrica:

$z = a + bi \Rightarrow \rho \cos \alpha + \rho \operatorname{sen} i$

$$\underbrace{z = \rho(\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha \cdot i)}$$

Le usiamo per calcolare la radice n-esima

il prodotto tra due numeri complessi z e z'

$z = \rho(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha) \qquad z' = \rho'(\cos\alpha' + \operatorname{sen}\alpha')$

$z z' = \rho\rho'\left[(\cos\alpha \cos\alpha' - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\alpha') + (\cos\alpha' \operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\alpha')\right.$

$= \rho\rho'\left[\cos(\alpha+\alpha') + i \operatorname{sen}(\alpha+\alpha')\right]$

troviamo l'inversa

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\rho(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{1}{\cos\alpha + i\,\text{sen}\alpha} =$$

$$= \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\cos\alpha - i\,\text{sen}\alpha}{\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha} = \frac{1}{\rho}\left[\cos(-\alpha) + i\,\text{sen}(-\alpha)\right]$$

passo induttivo

$z^n = \rho^n(\cos n\alpha + \text{sen}\, n\alpha)$ Formula di Moivre

la formula si usa per estrarre le radice n-esima

Applicazione:

$(1+i)^{16}$

$$1+i = \sqrt{1^2+i^2} = \sqrt{2}\,(\cos\alpha + \text{sen}\,\alpha)$$

$1 = \sqrt{2}\cdot\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ radionalizziamo $\cos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$

$1 = \sqrt{2}\cdot\text{sen}\,\alpha \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ razionalizziamo $\text{sen}\,\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$(1+i)^{16} = \sqrt{2}^{\cancel{16}\,8} \cdot \left(\cos \cancel{16}^{4} \frac{\pi}{\cancel{4}} + \text{sen}\,\cancel{16}^{4}\frac{\pi}{\cancel{4}}\right) = 2^8(\underset{\substack{\downarrow\\1}}{\cos 4\pi} + \underset{\substack{\downarrow\\0}}{\text{sen}\,4\pi})$$

$$= 2^8 = 256$$

Exercicio

$$x^6 = -64 = -2^6 = 2^6(\cos\pi + i\,\text{sen}\,\underset{-1}{\pi}$$

$$x = \rho(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha) \Rightarrow x^6 = \rho^6(\cos 6\alpha + i\,\text{sen}\,6\alpha) =$$

$$= 2^6(\cos\pi + i\,\text{sen}\,\pi) \Rightarrow \rho^6 = 2^6 \Rightarrow \rho = 2$$

$$6\alpha = \pi + 2k\pi \qquad k = 0,1,2,3,4,5$$

$$\alpha = \frac{\pi + 2k\pi}{6} \qquad \alpha_0 \Rightarrow \frac{\pi}{6}$$

$$x_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \cancel{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} + \frac{i}{\cancel{2}}\right) \qquad \alpha_1 \Rightarrow \frac{1}{2}\pi$$

$$x_1 = 2\left(\cos\frac{1}{2}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow 2i \qquad \alpha_2 \Rightarrow \frac{5}{6}\pi$$

$$x_2 = 2\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{5}{6}\pi\right) \Rightarrow -\sqrt{3} + i$$

$$x_3 = 2\left(\cos\frac{7}{6}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{7}{6}\pi\right) \Rightarrow -\sqrt{3} - i \qquad \alpha_3 \Rightarrow \frac{7}{6}\pi$$

$$x_4 = 2\left(\cos\frac{3}{2}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{3}{2}\pi\right) \Rightarrow -2i \qquad \alpha_4 \Rightarrow \frac{3}{2}\pi$$

$$x_5 = 2\left(\cos\frac{11}{6}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{11}{6}\pi\right) \Rightarrow +\sqrt{3}\cdot i$$

$$\alpha_5 \Rightarrow \frac{11}{6}\pi$$

Esercizio

$x^3 - 7x^2 + 16x - 10 = 0$

$(x-1)(x^2 - 6x + 10) = 0$

$$\begin{array}{c|ccc|c}
 & 1 & -7 & 16 & -10 \\
 & & & & \\
1 & & 1 & -6 & -10 \\
\hline
 & 1 & -6 & 10 & 0
\end{array}$$

$x^2 - 6x + 10 = 0$

$\frac{\Delta}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = 9 - 10 = 1$

$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{1} = \begin{cases} 3-i \\ 3+i \end{cases}$

$X_0 = 1$

$X_1 = 3-i$

$X_2 = 3+i$

Esercizi

$z = 1 + \sqrt{3}\,i$

$\|z\| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

$z = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) \Rightarrow 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right.$

$\cos\alpha = \frac{1}{2} \quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$x^4 = 1 = \cos 0 + i \operatorname{sen} 0$

$x = \rho(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$

$x^4 = \rho^4(\cos 4\alpha + i \operatorname{sen} 4\alpha) = 1 = \cos 0 + i \operatorname{sen} 0$

$1^4 = \rho^4 = 1 \qquad k = 0, 1, 2, 3 \ldots$

$4\alpha = 0 + 2k\pi \Rightarrow \alpha = \frac{\cancel{0} + 2k\pi}{4}$

$\alpha_0 = 0 \quad \alpha_1 = \frac{1}{2}\pi \quad \alpha_2 = \pi \quad \alpha_3 = \frac{3}{2}\pi$

$x_0 = 1 \quad x_1 = i \quad \alpha_2 = -1 \quad \alpha_3 = -i$

Due rette in un piano sono complanari, se hanno lo stesso piano

I punti di una retta sono infiniti

I punti in un piano sono ∞^2

Due rette che non hanno punti in comune possono essere complanari, sghembe o parallele.

Retta = equazione 1° grado con 2 variabili

Piano = equazione 1° grado con 3 variabili

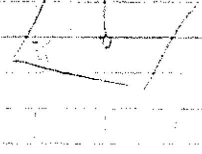
Una retta in un sistema di piani tridimensionali si rappresenta attraverso un sistema di equazioni di 1° grado a 3 variabili.

Una retta in un piano si rappresenta in un modo unico, per quanto riguarda la rappresentazione in un piano tridimensionale

Due piani possono essere paralleli o coincidenti

La giacitura in un piano è la qualsiasi perpendicolare al piano

$$ax+by+cz+d=0$$



per avere la giacitura d'origine basta avere $d=0$ quindi

$$ax+by+cz=0$$

3 punti non allineati individuano un piano
2 punti non allineati individuano una retta

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ x + y - z = k \\ 2x - y - z = 1 \end{cases} \qquad x = 2y \qquad \begin{cases} 2y + y - z = k \\ 4y - y - z = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3y - z = k \\ 3y - z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} h\cancel{x} + 2y - z = 0 \\ \cancel{x} - y + 2z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} hx + 2y - z = 0 \\ 2x + z = 2 \end{cases}$$

terna che soddisfa il sistema $z = -2x + 2$

$(x, y, -2x + 2)$

le soluzioni sono ∞^2

$al + bm + cn = 0$

$\pi // z$

R

r

e

S

x:

y:

P: (

coo

ort

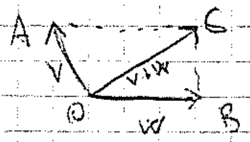
E

1

2

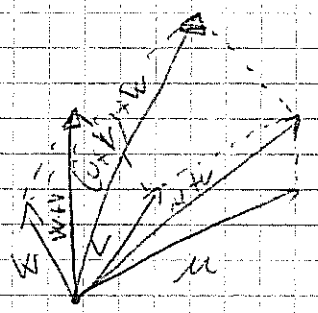
Proprietà addizione vettori

V ∦ W



$C = V + W$

$(u+v)+w$



La somma del vettore + il suo opposto da un vettore nullo $\forall V \exists -V / -V+V = \overrightarrow{OO}$

$\overrightarrow{OO}$ vettore nullo perché ha inizio e fine coincidenti

preso un vettore $\overrightarrow{AB}$ ha come vettore opposto il vettore $\overrightarrow{BA}$ quindi $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA}$

prendendo un vettore $\vec{V}$ e aggiungendo una costante h, quindi il vettore $\overrightarrow{hVA}$ può assumere valori:

se $h = 0 \rightarrow \overrightarrow{hV} = \overrightarrow{OO}$
se $h > 0 \rightarrow \overrightarrow{hV} \Rightarrow \overrightarrow{hV}$ verso positivo
se $h < 0 \rightarrow \overrightarrow{hV} \Rightarrow \overleftarrow{hV}$ verso negativo

$(h+k)v = hv + kv$ ← Proprietà distributiva in base ~~all'addizione~~ somma di scalari

$h(v+w) = hv + hw$

Proprietà distributiva in base alla somma di vettori

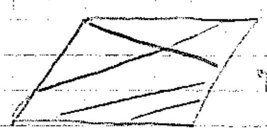
Punti = si indicano con lettere maiuscole (A, B, ...)
LINEE = con lettere minuscole (a, b, c, ...)
Piani = con lettere greche minuscole (α, β, γ, ...)

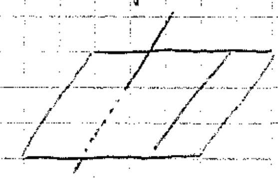
- Tre punti distinti e non allineati definiscono uno ed un solo piano.
- Se due punti di una retta appartengono ad un piano, la retta appartiene al piano.
- Il piano è un sottoinsieme proprio dello spazio

Teorema: Lo spazio contiene infiniti punti, infinite rette, infiniti piani.

Posizione reciproca di due rette:

- Complanari: due rette che appartengono allo stesso piano,
- Sghembe: due rette che appartengono a piani diversi


rette complanari


rette sghembe

- Fascio proprio: l'insieme di tutte le rette complanari che passano per uno stesso punto detto centro del fascio.
- Fascio improprio: l'insieme di tutte le rette complanari che sono parallele fra loro.
- Stella di centro P: l'insieme delle rette dello spazio che passano per P il quale è detto sostegno della stella.
- Incidenti: quando un piano ed una retta che non gli appartiene possono avere un solo punto in comune.
- Paralleli: un piano ed una retta che non gli appartiene non hanno nessun punto in comune.

Considerando due piani α e β:

- Se i due piani hanno in comune tre punti non allineati, allora sono lo stesso piano;
- Se due piani hanno in comune due punti A e B, allora hanno in comune anche tutti i punti della retta AB.

Teorema: Se due piani hanno in comune un punto, allora hanno in comune i punti ~~della~~ di una retta che passa per quel punto.

I piani possono essere:

- coincidenti: quando i due piani coincidono
- incidenti: quando i due piani si intersecano lungo una retta.
- paralleli: quando i due piani non hanno punti in comune.

Fascio proprio di piani: è l'insieme di infiniti piani che passano per la retta r, e la retta r costituisce l'asse del fascio.

Stella di piani: l'insieme dei piani che passano per uno stesso punto.

Il parallelismo nello spazio

- Parallelismo fra rette

Data una retta r ed un punto P fuori di essa, esiste ed è unica la parallela per P alla retta r

Teoremi:

- Due rette che sono perpendicolari ad uno stesso piano sono fra loro parallele e, un piano che è perpendicolare all'una è perpendicolare anche all'altra retta
- Se due rette sono parallele, ogni piano che incontra una incontra anche l'altra.
- Date due rette parallele r e s e considerati un piano passante per r e uno per s che si intersecano lungo una

terza retta t, si ha che t è parallela sia a r che a s.

- La relazione di parallelismo fra rette è:
- riflessiva: ogni retta è parallela a se stessa.
- simmetrica: se una retta a è parallela ad una retta b, anche b è parallela ad a.
- transitiva: se a è parallela a b e b è parallela a c, anche a è parallela a c.

- Il parallelismo fra rette e piano

Una retta si dice parallela ad un piano se non ha alcun punto ~~punto~~ in comune con esso oppure se appartiene interamente al piano.

teoremi:

- Se due rette sono parallele, ogni piano parallelo all'una è parallelo anche all'altro.
- Se una retta r è parallela a due piani che si intersecano lungo una retta s, allora r è parallela a s.

Il parallelismo fra piani

Due piani perpendicolari ad una stessa retta sono fra loro paralleli.

retta passante per P e $\parallel \vec{v}(1,2,1)$

$P(\underset{x_0}{1}, \underset{y_0}{1}, \underset{z_0}{0})$

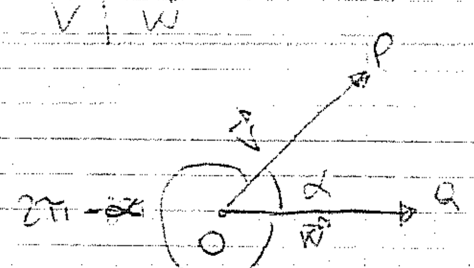
$$x = x_0 + lt \qquad x = 1 + t$$
$$y = y_0 + mt \qquad y = 1 + 2t$$
$$z = z_0 + nt \qquad z = 0 + t$$

$$\begin{cases} x = 1 + z \\ y = 1 + 2z \end{cases}$$

$$x - 1 = \frac{y - 1}{2} = z$$

Consideriamo due vettori 20/12/2012

$\vec{v}$; $\vec{w}$



fissiamo un punto come origine

chiamiamo l'angolo convesso tra i due vettori V e W come α

$$0 < \alpha < \pi$$

l'angolo complementare ad α è $2\pi - \alpha$

$\alpha \in [0, \pi]$

se i due vettori sono // e concordi l'angolo formato tra i due vettori è 0

se i due vettori sono // ma con verso opposto l'angolo formato tra i due vettori è π

vettore versore: è un vettore con lo stesso verso, stessa direzione ma con modulo 1 (unitario)

$\vec{v} = t \cdot \vec{e}$ $\quad \|e\| = 1$

t ↓ principio di proporzionalità

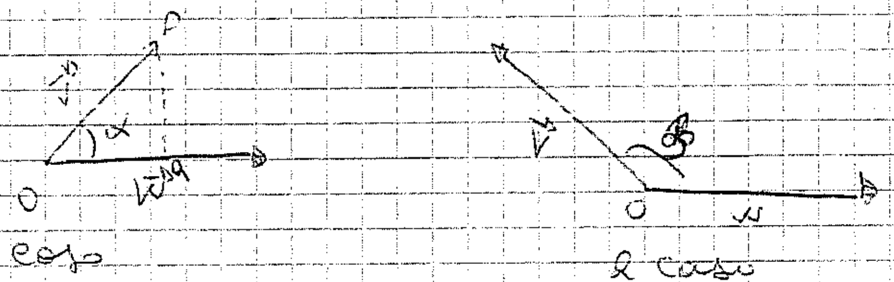
$\|\vec{v}\| = |t| \cdot \|e\| = |t|$

prodotto scalare tra due vettori equivale al prodotto dei moduli per il coseno dell'angolo compreso

$$\vec{V}\cdot\vec{W} = \|V\|\cdot\|W\|\cdot\cos\alpha$$

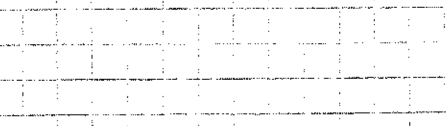
$$\vec{V}\cdot\vec{W} = \vec{W}\cdot\vec{V}$$

$$\vec{V}\cdot(\vec{W}_1+\vec{W}_2) = \vec{V}\cdot\vec{W}_1+\vec{V}\cdot\vec{W}_2$$



1 caso:
considerando il vettore v possiamo proiettarlo sul vettore w, attraverso la proiezione ortogonale, otteniamo il punto Q quindi la proiezione di $\vec{v}$ sarà $\overrightarrow{OQ} = \vec{v}_w$

$$\|V_w\| = |V|\cdot\cos\alpha$$



Per la proiezione di una retta AB sulla retta r in uno spazio tridimensionale, eseguiamo la proiezione del piano tra il punto A e la retta r, e la proiezione del piano tra il punto B e la retta r, quindi

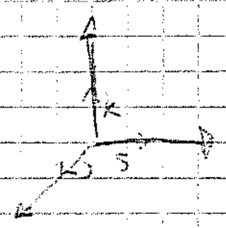
Prodotto scalare tra un vettore e se stesso

$$\vec{v}\cdot\vec{v} = \|v\|^2 \geq 0$$

$\vec{v}\cdot\vec{v} = 0$ quando il modulo del vettore è 0

$\vec{v}\cdot\vec{w} = |v|\cdot|w|\cdot\cos\alpha = 0$ sarà 0 quando i due vettori sono perpendicolari perché il $\cos\alpha = 0$

$\vec{v} \perp \vec{w}$



$$\|i\| = \|j\| = \|k\| = 1$$

$$i\cdot j = 0 = i\cdot k = j\cdot k = 0$$

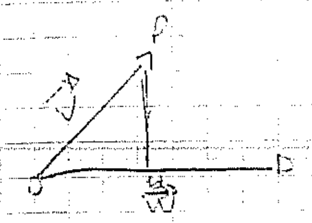
è 0 perché sono ortogonali quindi il $\cos\alpha\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$$\underbrace{\vec{v}\,\vec{w}}_{\text{due vettori in uno spazio 3D}} = (\alpha i + \beta j + \gamma k)\cdot(\alpha' i + \beta' j + \gamma' k) =$$

$$= \alpha i(\alpha' i + \beta' j + \gamma' k) + \beta j(\alpha' i + \beta' j + \gamma' k) + \gamma k(\alpha' i + \beta' j + \gamma' k) =$$

$$= \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\cdot\gamma'$$

$$\cos\alpha = \frac{\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'}{\underbrace{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}_{|v|} + \underbrace{\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2}}_{|w|}}$$



OPQ = equivalgono ad un triangolo rettangolo

$\vec{V} = \vec{OP} = \vec{OQ} + \vec{QP}$ $\quad$ $\vec{QP}$ = è il vettore ortogonale a W

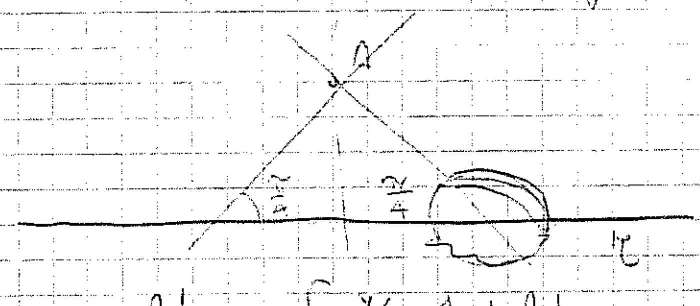
$\vec{QP} = \vec{V} - \vec{V}_W$

$\vec{QP} \perp W$

Esempio fissiamo un punto A nello spazio

$A(1,1,1)$

Rette passanti per A incidenti alla retta $r \begin{cases} x = 2z \\ y = z+1 \end{cases}$ formanti con essa angolo $\pi/4$



La direzione della retta r $\vec{r}(2,1,1)$ numeri direttori di r

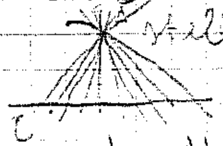
$r(2,1,1)$ e li abbiamo trovati perché l'equazione contenevano è un funzione z quindi dando a $z=1$ ~~otteniamo~~ $x = 2z$ $y = 1z$ $z=1$ perché prendiamo il coefficiente di z

$r = \begin{cases} x = 2t \\ y = 1+t \\ z = t \end{cases}$

$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} x = 1 + lt \\ y = 1 + mt \\ z = 1 + nt \end{cases}$

equazioni delle rette passanti per A

al variare di l m n otteniamo una stella di rette



quindi i punti d'intersezione tra le rette passanti per A e incidenti ad r la forma generica è $B=(2h, 1h, 1h)$

$B=(2h,\ h+1,\ h)$

equivalgono a

~~$B=(2z,\ z+1,\ z)$~~

quindi ci calcoliamo la retta tra il punto A e l'incidente con la retta r che chiameremo B quindi:

$$AB = \begin{cases} x-1 = (2h-1)\,t \\ y-1 = (h+1-1)\,t \\ z-1 = (h-1)\,t \end{cases}$$

$A=(1,1,1)$
$B=(2h,h+1,h)$

mettiamo -1 perché le coordinate di A sono $(1,1,1)$

Soluzione:

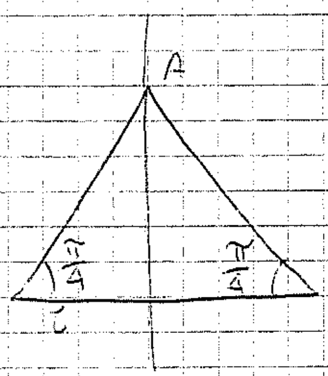
$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{r_x(\overline{AB})+r_y(\overline{AB})+r_z(\overline{AB})}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}+\sqrt{(2h-1)^2+h^2+(h-1)^2}} = \frac{r_x(\overline{AB})+r_y(\overline{AB})+r_z(\overline{AB})}{\sqrt{r_x^2+r_y^2+r_z^2}+\sqrt{AB_x^2+AB_y^2+AB_z^2}}$$

$$= \frac{2(2h+1)+1(h\cancel{+h})+1(h-1)}{\sqrt{6}+\underbrace{\sqrt{6h^2-6h+2}}_{\text{si ottiene risolvendo i quadrati di binomio}}} = \frac{(6h-3)^2}{6\cdot(6h^2-6h+2)} = \frac{36\cancel{+9}}{6\cdot(6h^2-6h+2)} =$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}} = \frac{{}^{3}\cancel{9}(2h-1)^2}{{}_{2}\cancel{6}\cdot\cancel{2}(3h^2-3h+1)} = 3(2h-1)^2 = 2(3h^2-3h+1)$$

$$3(2h-1)^2 = 2(3h^2-3h+1) =$$
$$= 3(4h^2-4h+1) = 6h^2-6h+2 =$$
$$= 12h^2-12h+3 = 6h^2-6h+2 =$$
$$= 6h^2-6h+1 = 0$$

$$h = \frac{3 \pm \sqrt{9-6}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6}$$



Vogliamo determina retta perpendicolare incidente a r e ⊥ a r.

Quindi consideriamo due piani, 1 che comprende il punto A e la retta r, e l'altro la retta ⊥ a r

NO

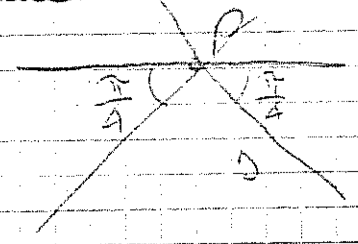
Rette appartenenti al piano $\alpha = x - y + z = 1$ incidenti la retta $r \begin{cases} x = z \\ y = 1 \end{cases}$ $P(1,1,1)$ ~~formanti con esso un angolo~~ $\frac{\pi}{4}$

mettiamo a sistema la retta r e il piano

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x = z \\ y = 1 \end{cases}$$

sostituiamo i valori $x = z$ $y = 1$ quindi

$2z - 1 = 1;\ z = 1$



$$\begin{cases} x = 1 + lt \\ y = 1 + mt \\ z = 1 + nt \end{cases}$$

Sostituiamo questi valori all'equazione del piano $\cancel{1} + lt - \cancel{1} - mt + \cancel{1} + nt = \cancel{1}$

$$lt - mt + nt = 0$$

$$(l - m + n)\,t = 0$$

$$l - m + n = 0 \qquad m = l + n \qquad \begin{cases} x = 1 + lt \\ y = 1 + (l+n)t \\ z = 1 + nt \end{cases}$$

$$0t = 0$$

condizione di parallelismo improprio di retta piano

$s = l,\ l+n,\ n$

$r = (1, 0, 1)$

$$\cos rs = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{(l \cdot 1) + (l+n)(0) + (n \cdot 1)}{\sqrt{2l^2 + 2ln + 2n^2} \cdot \sqrt{2}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{(l+n)^2}{(2l^2 + 2ln + 2n^2)\,2} =$$

$$= \frac{2}{4} = \frac{(l+n)^2}{2(2l^2 + 2n^2 + 2ln)} = (l+n)^2 = 2l^2 + 2n^2 + 2ln$$

$$l^2 + 2ln + n^2 = 2l^2 + 2n^2 + 2ln$$

Università di Palermo - Facoltà di Scienze
Corso di laurea in Informatica
Prova scritta di GEOMETRIA
(21-06-2012)

1) Determinare le equazioni della retta r passante per $P(1,1,0)$, incidente la retta $s: \begin{cases} x = z+1 \\ y = 2z \end{cases}$ e perpendicolare alla retta

$$t: \begin{cases} x = 2z \\ y = z-1 \end{cases}$$

2) Determinare l'equazione della sfera tangente in $P(1,1,0)$ alla retta $r: \begin{cases} x = 2z+1 \\ y = z+1 \end{cases}$ e tangente in $Q(0,0,1)$ alla retta

$$\cancel{s: \begin{cases} x = z-1 \\ y = 1 \end{cases}} \qquad s: \begin{cases} x = z-1 \\ y = 0 \end{cases}$$

3) Discutere ed eventualmente risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} x - y - 2z = -1 \\ x - 2y + 3z = -h \\ kx + 4y + z = -3 \end{cases}$$

al variare di h, k in $\mathbb{R}$.

4) Siano $U = \{(x,y,z,t)^T \in \mathbb{R}^4 \,/\, x+2y-z=0,\ x-2y-t=0\}$ e $W = \{(x,y,z,t)^T \in \mathbb{R}^4 \,/\, x-y+z=0,\ x+y+t=0\}$ sottospazi di $\mathbb{R}^4$.
Determinare un endomorfismo in $\mathbb{R}^4$ che ammetta U come nucleo e W come spazio immagine.

5) Data la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

determinarne autovalori ed autospazi e stabilire, motivando la risposta, se A è diagonalizzabile.

Università di Palermo - Facoltà di Scienze MM. FF. NN.
Corso di Laurea in Informatica
prova scritta di Geometria (24-01-2013)

1) Discutere ed eventualmente risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} x+y+2z=0 \\ x-y-z=h \\ x+y+z=0 \\ 2x-y-z=1 \end{cases}$$

al variare del parametro reale h.

2) Sia $f_h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito da
$f_h(x,y,z)^T = ((3+h)x,\ x+2y+z,\ x-y+4z)^T$.
Determinare $\operatorname{Ker} f_h$, $\operatorname{Im} f_h$ al variare di h in $\mathbb{R}$.

3) Considerata la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, determinarne autovalori ed autospazi corrispondenti. Stabilire se A è diagonalizzabile, motivando la risposta. In caso contrario determinarne una forma canonica di Jordan ricorrendo ad autovettori generalizzati.

1/2 4) Si considerino le rette $r: \begin{cases} x=1 \\ y=-z \end{cases}$, $s: \begin{cases} x=z \\ y=2z \end{cases}$, si verifichi che sono sghembe e se ne determini la minima distanza.

5) Determinare l'equazione cartesiana della superficie Σ ottenuta dalla rotazione della retta
$r: \begin{cases} x=1 \\ y=-z \end{cases}$ intorno alla retta $s: \begin{cases} x=z \\ y=2z \end{cases}$
Si classifichi la superficie ottenuta.

7

Endomorfismo

L'insieme degli endomorfismi di una struttura algebrica X si denota con $End(X)$

Se l'insieme X è dotato di una operazione binaria $*$, un endomorfismo di X è una funzione

$f: X \to X$: $f(x * y) = f(x) * f(y)$ $\forall x, y \in X$

Spazi vettoriali

Se V è uno spazio vettoriale un endomorfismo di V è una applicazione lineare da V in sé.

Proprietà

- Un endomorfismo che è anche biettivo è un automorfismo

Omomorfismo

Siano A e B due strutture algebriche dello stesso tipo.

Una funzione F $A \to B$ è un omomorfismo se, per ogni operazione f su ogni n-uple $x_1, \dots, x_n$ di A si ha:

$$F(f_A(x_1, \dots, x_n)) = F_B(f(x_1), \dots, f(x_n))$$

dove f_A e f_B rappresentano l'operazione f nelle strutture A e B rispettivamente

- Si chiama monomorfismo ogni omomorfismo iniettivo;
- Si chiama epimorfismo ogni omomorfismo suriettivo;
- Si chiama isomorfismo ogni omomorfismo biettivo;

Si chiama endomorfismo della struttura A ogni morfismo di A in se stesso
Si chiama automorfismo della struttura A ogni isomorfismo di A in se stesso.

Un Autovettore di una trasformazione lineare tra spazi vettoriali è un vettore la cui immagine è il vettore stesso moltiplicato per uno scalare, detto autovalore
Si definisce autospazio il sotto spazio generato da tutti gli autovettori ~~aventi un~~ corrispondenti ~~Comune~~ allo stesso autovalore
Definizione
Sia V uno spazio vettoriale su un campo k, in $\mathbb{R}$; sia T un endomorfismo di V; cioè una trasformazione lineare
$T: V \to V$
se v è un vettore non nullo in V e λ è uno scalare ~~...~~ tali che:
$T(v) = \lambda \cdot v$
allora v è un autovettore e λ è un autovalore.
Quindi autovettori aventi lo stesso autovalore λ, insieme al vettore nullo, generano un sottospazio di V chiamato l'autospazio relativo ~~all'autovettore~~ all'autovalore λ, e si indica V_λ

Spazio vettoriale
Uno spazio vettoriale, chiamato anche spazio lineare, è una struttura algebrica composta da:
- un campo
- un insieme in cui elementi sono dei vettori, non vuoto (deve contenere almeno 1 el.)
- due operazioni binarie, dette somma e moltiplicazione per scalare.

La definizione di spazio vettoriale richiede di servirsi di un campo, quindi sia K un generico campo, si dice che V è sostegno di uno spazio vettoriale sul campo K se in V è definita un'operazione binaria interna (+) per la quale (V, +) è un gruppo abeliano, e definita anche da operazione binaria esterna (*) : K×V -> V
In uno spazio vettoriale V su un campo K, gli elementi di K sono detti scalari o numeri, e gli elementi di V sono detti vettori o punti.
base
Tutti i sottospazi generati da un insieme di vettori con la proprietà di essere linearmente indipendenti, un tale insieme di vettori è chiamato base del sottospazio

Dimensione

Di uno spazio vettoriale V è la cardinalità

Cioè il numero di vettori di una base in V

Proprietà:

- Se W è un sottospazio di V, allora dim(W) ≤ dim(V)
- Due spazi vettoriali su F aventi la stessa dimensione sono isomorfi.

IV

Determinazione di dimensione e base di $U, V, U \cap V; U+V$

$$U = \{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z=0 \}$$

1. Si cerca di esprimere la funzione di definizione con il minor numero di letterali possibili
$$x+y+z=0 \Rightarrow z=-x-y$$

2. Si riscrive la definizione di insieme
$$U = \{ (x, y, -x-y, t) \mid x, y, t \in \mathbb{R} \}$$

3. Si esprime la n-pla come combinazione lineare dei vettori della base
$$(x, y, -x-y, t) = x(1,0,-1,0) + y(0,1,-1,0) + t(0,0,0,1)$$

4. La base per U è quindi
$$B_U = \langle (1,0,-1,0), (0,1,-1,0), (0,0,0,1) \rangle$$

~ ~ ~

$$V = \{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x-2z=0, \ y+t=0 \}$$

1. $\begin{cases} x-2z=0 \\ y+t=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2z \\ y=-t \end{cases}$

3. $(x, y, z, t) = (2z, -t, z, t) = z(2,0,1,0) + t(0,-1,0,1)$

4. $B_V = \langle (2,0,1,0), (0,-1,0,1) \rangle$

$U \cap V = \{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z=0 \;,\; x-2z=0 \;,\; y+t=0 \}$

1. $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-2z=0 \\ y+t=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2z-t+z=0 \\ x=2z \\ y=-t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=3z \\ x=2z \\ y=-3z \end{cases}$

2-3. $(x,y,z,t) = (2z, -3z, z, 3z) = z(2,-3,1,3)$

4. $B_{U \cap V} = \langle (2,-3,1,3) \rangle$

La base di U+V è costituita dalla B_V e B_U, si deve però verificare che non vi sia dipendenza lineare fra i vettori

$B_V = \langle (2,0,\overset{\delta}{1},0) \;,\; (0,-1,\overset{\varepsilon}{0},1) \rangle$

$B_U = \langle (1,0,\underset{\alpha}{-1},0), \; (0,1,\underset{\beta}{-1},0), \; (0,0,\underset{\gamma}{0},1) \rangle$

$\alpha(1,0,-1,0) + \beta(0,1,-1,0) + \gamma(0,0,0,1) + \delta(2,0,1,0) + \varepsilon(0,-1,0,1) = (0,0,0,0)$

$(\alpha + 2\delta \;,\; \beta - \varepsilon \;,\; -\alpha-\beta+\delta \;,\; \gamma + \varepsilon) = (0,0,0,0)$

$\begin{cases} \alpha+2\delta=0 \\ \beta-\varepsilon=0 \\ -\alpha-\beta+\delta=0 \\ \gamma+\varepsilon=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=-2\delta \\ \beta=\varepsilon \\ 2\delta-\varepsilon+\delta=0 \\ \gamma=-\varepsilon \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=-2\delta \\ \beta=3\delta \\ \varepsilon=3\delta \\ \gamma=-3\delta \end{cases}$

Il vettore $(2,0,1,0)$, che ha come coefficiente δ, è combinazione lineare degli altri, è quindi linearmente dipendente.

$B_{U+V} = \langle (1,0,-1,0), (0,1,-1,0), (0,0,0,1), (0,-1,0,1) \rangle$

Teorema Grassman

$\dim U + \dim V = \dim(U \cap V) + \dim(U+V)$

$3 + 2 = 1 + 4$ ok

SOMMA DIRETTA 1

Dati 2 sottospazi U e W di $\mathbb{R}^4$ generati da
$u_1 = (1,0,1,0)$ $u_2 = (-1,1,0,0)$
$w_1 = (1,0,0,0)$ $w_2 = (0,0,0,-1)$ $w_3 = (1,1,0,1)$
Dimostrare che $\mathbb{R}^4$ è somma diretta di U e W, cioè che $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$

1. Dimostriamo che u_1, u_2 sono una base per U, che sono cioè indipendenti (generatori lo sono x ipotesi).
$\alpha(1,0,1,0) + \beta(-1,1,0,0) = 0$
$$\begin{cases} \alpha - \beta = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{sono indipendenti}$$

2. Dimostriamo che w_1, w_2, w_3 sono indipendenti
$\alpha(1,0,0,0) + \beta(0,0,0,-1) + \gamma(1,1,0,1) = \bar{0}$
$\alpha + \gamma = 0 \Rightarrow \alpha = 0$
$\gamma = 0$
$\gamma - \beta = 0 \Rightarrow \gamma = \beta \Rightarrow \beta = 0$ $\Rightarrow$ sono indipendenti

3. Verifichiamo se u_1, u_2, w_1, w_2, w_3 sono linearmente indipend.
$\alpha(1,0,1,0) + \beta(-1,1,0,0) + \gamma(1,0,0,0) + \delta(0,0,0,-1) + \varepsilon(1,1,0,1) = \bar{0}$
$$\begin{cases} \alpha - \beta + \gamma + \varepsilon = 0 \\ \beta + \varepsilon = 0 \\ \alpha = 0 \\ \varepsilon - \delta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon + \gamma + \varepsilon = 0 \\ \beta = -\varepsilon \\ \alpha = 0 \\ \delta = \varepsilon \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma = -2\varepsilon \\ \beta = -\varepsilon \\ \alpha = 0 \\ \delta = \varepsilon \end{cases}$$

Si nota che w_3 è linearmente dipendente, mentre i vettori u_1, u_2, w_1, w_2 sono linearmente indipendenti, verifichiamo se possono generare un vettore di $\mathbb{R}^4$, ossia se $\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma w_1 + \delta w_2 = (x, y, z, t)$

(2)

$\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma w_1 + \delta w_2 = (x, y, z, t)$

$\alpha(1,0,1,0) + \beta(-1,1,0,0) + \gamma(1,0,0,0) + \delta(0,0,0,-1) = (x,y,z,t)$

$$\begin{cases} \alpha - \beta + \gamma = x \\ \beta = y \\ \alpha = z \\ -\delta = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma = x + y - z \\ \beta = y \\ \alpha = z \\ \delta = -t \end{cases}$$

dunque si ha:

$\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma w_1 + \delta w_2 = z(1,0,1,0) + y(-1,1,0,0) +$
$(x+y-z)(1,0,0,0) + (-t)(0,0,0,-1) =$
$= (z - y + x + y - z, y, z, t) = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$

$\boxed{\text{SISTEMA LINEARE NON OMOGENEO}}$

Discutere ed eventualmente risolvere il seguente sistema lineare, al variare di h e k in $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} x-2y-z=-1 \\ x+3y-2z=-3 \\ hx+y+4z=-k \end{cases}$$

Calcoliamo la matrice associata e il relativo determinante

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ h & 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = 12+4h-1+3h+8+2$$
$$= 7h+21 = 7(3+h)$$

* Per $h \neq -3$ il determinante non si annulla, e quindi il sistema ammette un'unica soluzione che, per il teorema di Cramer sono data da:

$$x = \frac{\det\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -3 & 3 & -2 \\ -k & 1 & 4 \end{pmatrix}}{\det(A)} = \frac{-12-4k+3-3k-24-2}{7(3+h)} = \frac{-7k-35}{7(3+h)} =$$

$$x = -\frac{7(k+5)}{7(3+h)} = -\frac{(k+5)}{(3+h)}$$

$$y = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & -2 \\ h & -k & 4 \end{pmatrix}}{\det(A)} = \frac{-12+2h+k-3h-2k+4}{7(3+h)} = \frac{-h-k-8}{7(3+h)}$$

$$y = -\frac{(h+k+8)}{7(3+h)}$$

2)

$$z = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -3 \\ h & 1 & -k \end{pmatrix}}{\det(A)} = \frac{-3k-1+6h+3h+3-2k}{7(h+3)} = \frac{-5k+9h+2}{7(h+3)}$$

La soluzione del sistema, al variare dei parametri h e k sarà dunque data da:

$$\left(-\frac{k+5}{3+h} \, , \, -\frac{h+k+8}{7(h+3)} \, , \, \frac{-5k+9h+2}{7(h+3)} \right)$$

* Per $h=-3$ la matrice ha determinante nullo, dunque per verificare l'esistenza di soluzioni, utilizziamo il Teorema di Rouché-Capelli, dimostrando che:

$$\text{rango}(A^1 \ldots A^n) = \text{rango}(A^1 \ldots A^n B)$$

$$\text{rang}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ h & 1 & 4 \end{pmatrix}}_{A} = \text{rang}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & -3 \\ h & 1 & 4 & -k \end{pmatrix}$$

A' B

Sostituiamo ad h il valore per cui si annulla il determinante (eventualmente ripetendo le seguenti operazioni per ogni valore che annulla il determinante) e procediamo al calcolo del rango.

B'

$$\det\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & -k \end{pmatrix} = -4k+3-12-2-3k-24 = -7k-35 = -7(k+5)$$

Per il Teorema di Rouché-Capelli anche questo det deve essere $=0$, e ciò avviene per $k=-5$, altrimenti le soluzioni sarebbero incompatibili

3)

(1)

$\boxed{\text{KER } L \text{ \& } \operatorname{Im} L}$

Sia $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito da
$L(x,y,z) = (x+y,\ x+2y+z\ ;\ y+z)$
determinare $\operatorname{Ker} L$, $\operatorname{Im} L$, le loro dimensioni ed una loro base.

1. La matrice associata all'applicazione lineare è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = 0$$

i vettori sono linearm. dipend.

Verifichiamo la dipendenza lineare
$(x+y,\ x+2y+z,\ y+z) = \bar{0}$

$$\begin{cases} x+y=0 \\ x+2y+z=0 \\ y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-y \\ // \\ z=-y \end{cases} \Rightarrow *$$

Considerando le basi canoniche di $\mathbb{R}^3$:
$L(e_1) = L(1,0,0) = (1,1,0)$
$L(e_2) = L(0,1,0) = (1,2,1)$ $\Rightarrow$ combinazione lineare di $L(e_1)$ e $L(e_3)$
$L(e_3) = L(0,0,1) = (0,1,1)$

Si ha quindi che $L(e_2) \notin \operatorname{Im} L$, quindi
$\operatorname{Im} L = \{(1,1,0),\ (0,1,1)\}$
Per definizione di $\operatorname{Ker} L$ si ha invece:
$\operatorname{Ker} L = \{ v \in \mathbb{R}^3 \mid L(v) = \bar{0} \} = (-1,1,-1)$ *

2. La dimensione di $\operatorname{Im} L$ corrisponde al rango di A, che come si nota è 2, dunque:
$\dim \operatorname{Im} L = 2 \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} L = 1$

$\downarrow$

n° colonne − rango(A)

②

3. Mettiamo a sistema i vettori di $\mathrm{Im}\,L$ e $\mathrm{Ker}\,L$, se sono linearmente indipendenti allora $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}\,L \oplus \mathrm{Im}\,L$, poiché hanno intersezione nulla

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = -1-1-1 = -3 \Rightarrow \text{linearmente indipendenti}$$

SISTEMI

Sistema omogeneo lineare
al variare del reale k.

- calcoliamo la matrice dei coefficienti.
- soluzioni
- sostituzione dei valori nella matrice.
- calcoliamo singolarmente le soluzioni
  - scegliamo un minore di due
  - calcoliamo il determinante
  - consideriamo le eq. corrispondenti.
  - "vettore"

Sistema al variare
di h e k in $\mathbb{R}$.

scriviamo la matrice associata.

calcoliamo il det e troviamo le soluzioni. (h)

x, y, z.

matrice estesa

consideriamo una sottomatrice e calcoliamone il determinante. (k)

consideriamo una sottomatrice di rango 2 della matrice iniziale per trovare le eq. corrispondenti.

al variare del parametro reale k
discutere la risolubilità del
sistema lineare e dare
un'interpretazione geometrica
del risultato.

$\left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} \begin{array}{l} =1 \\ =k \\ =1 \end{array}$

scriviamo la matrice associata

sottomatrice

matrice estesa

consideriamo una sottomatrice e calcoliamo il determinante (5)

consideriamo una sottomatrice di rango 2 della matrice iniziale per trovare le eq. corrispondenti.

"

$\left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} \begin{array}{l} =1 \\ =0 \\ =1 \end{array}$

matrice dei coefficienti

x, y, z

ENDOMORFISMO

$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito da $L(x,y,z)$. determinare $\ker L$, $\mathrm{Im} L$, e loro dimensioni ed una loro base.

- prendiamo le basi canoniche
- troviamo le basi di queste tre basi
- matrice delle immagini e determinante
- verificare le dipendenze lineari
- $\ker L$ e $\mathrm{Im} L$ e le dimensioni
- mettiamo

Consideriamo l'endomorfismo

Da fare in classe!

SISTEMA LINEARE OMOGENEO

Discutere ed eventualmente risolvere il sistema lineare al variare dei parametri

$$\begin{cases} kx + 2y + (k+1)z = 0 \\ x + (k+3)y = 0 \\ (k-1)x - (k+5)y - (k+1)z = 0 \end{cases}$$

Calcoliamo il determinante della matrice

$$\det \begin{pmatrix} k & 2 & (k+1) \\ 1 & (k+3) & 0 \\ (k-1) & -(k+5) & -(k+1) \end{pmatrix} = -k(k+3)(k+1) - (k+1)(k+5) - (k+1)(k+3)(k-1) + 2(k+1)$$

$$= -k^3 - k^2 - 3k^2 - 3k - k^2 - 5k - k - 5 - k^3 - 3k^2 + k + 3 + 2k + 2$$
$$= -2k^3 - 8k^2 - 6k = k^3 + 4k^2 + 3k$$

Troviamo le soluzioni del determinante:

$k(k^2 + 4k + 3)$

la prima soluzione si ha per $k_1 = 0$

Risolviamo $(k^2 + 4k + 3)$

$\Delta = 16 - 12 = 4 \Rightarrow$ 2 soluzioni reali e distinte

$$-\frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} \Rightarrow \begin{matrix} k_2 = -3 \\ k_3 = -1 \end{matrix}$$

Abbiamo quindi che per $k \neq \{0, -3, 1\}$ il determinante della matrice è diverso da zero, dunque il rango è uguale al numero di incognite del sistema, da ciò segue che l'unica soluzione ammissibile è la soluzione nulla $\bar{0} = (0,0,0)$

Nel caso in cui $K = \{0, -3, -1\}$, il determinante è zero, dunque se r è il rango ed n sono il numero di incognite, le soluzioni del sistema costituiscono un sottospazio di K^n di dimensione $n - r$ (Teorema 4 Pag. 106), in questo caso analizziamo le soluzioni per ogni K.

<u>$K=0$</u> $\det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & -5 & -1 \end{pmatrix} = 0$

Dato che il $\det = 0$ scegliamo un minore di ordine 2

$\det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = -2 \Rightarrow$ rango $= 2$

Consideriamo le equazioni corrispondenti, con coefficienti $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 0x + 2y + 1 \cdot z = 0 \\ 1 \cdot x + 3 \cdot y + 0 \cdot z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} z = -2y \\ x = -3y \end{matrix}$$

Si conclude che per $K=0$ le soluzioni sono date dal vettore $(-3y, y, -2y)$

$x - 5$

$$y = \frac{-3}{h-1}$$

$$z = \frac{3}{h-1}$$

$z =$

$k=-1$

$$\det\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Dato che il det = 0 scegliemo un minore di ordine 2

$$\det\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -4 \quad \Rightarrow \quad \text{rango} = 2$$

Consideriamo le equazioni corrispondenti:

$$\begin{cases} -x + 2y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Per $k=-1$ le soluzioni saranno date dal vettore $(0, 0, z)$

$k=-3$

$$\det\begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 2 \end{pmatrix} = 0$$

Consideriamo un minore di ordine 2

$$\det\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -2 \quad \Rightarrow \quad \text{rango} = 2$$

Consideriamo le equazioni corrispondenti

$$\begin{cases} -3x + 2y - 2z = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} 2y = 2z \\ x = 0 \end{matrix}$$

Per $k-3$ le soluzioni sono date dal vettore $(0, z, z)$

① $K(K-2)$

$\left.\begin{array}{l} K=0 \\ K=2 \end{array}\right\}$ analizziamo i casi

$\left.\begin{array}{l} K\neq 0 \\ K\neq 2 \end{array}\right\}$ il sistema è impossibile

$R=n$ una soluzione
$R<n$ ∞^{n-R} soluzioni

② $K=-2$ $(K+2)$

unica soluzione se e solo se $K\neq -2$ con il metodo di CRAMER

Determinante

$=0$ linearmente dipendenti

$\neq 0$ linearmente indipendenti

IMMAGINI

$\text{Dim} R = \text{Im} L \Rightarrow$ suriettiva

$\text{Dim} R \neq \text{Im} L \Rightarrow$ iniettiva $\Leftrightarrow \text{Ker} L = \{\vec{0}\}$

$U+W=\{(z_1,z_2,z_3,z_4)\in K^4 \mid (z_1,z_2,z_3,z_4)=$
$=(\underbrace{x_1,x_2,x_3,x_4}_{\in U})+(\underbrace{y_1,y_2,y_3,y_4}_{\in W})\}$

$(x_2+x_3,\ x_2,\ x_3,\ 0)+(y_1,\ y_2,\ -y_1,\ y_2)=$
$=(\underbrace{x_2+x_3+y_1}_{z_1},\ \underbrace{x_2+y_2}_{z_2},\ \underbrace{x_3-y_1}_{z_3},\ \underbrace{y_2}_{z_4})$ z_1,z_2,z_3,z_4 L.I.

$\dim_{K^4} U+W=4=\dim K^4$ $\quad U+W=K^4$

$\dim(U\cap W)=B_U+\dim B_W-\dim(U+W)$
$0 \quad = \quad 2+2-4$

Infatti $U\cap W=\{0,0,0,0\}$ ok!

c) $U=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in K^4 \mid x_1-x_2=0,\ x_2+2x_3-x_4=0\}$
$W=\langle(1,0,1,0),(1,2,0,1),(0,2,-1,1)\rangle$

$B_U=\{(0,0,1,2),(1,1,0,1)\}$ $\dim_{K^4}U=2$

Sottospazio di W: $1^o=2^o-3^o$

$B_W=\{(1,2,0,1),(0,2,-1,1)\}$ $\dim_{K^4}W=2$

$\alpha(1,2,0,1)+\beta(0,2,-1,1)=(\underbrace{\alpha}_{y_1},\ \underbrace{2\alpha+2\beta}_{y_2},\ \underbrace{-\beta}_{y_3},\ \underbrace{\alpha+\beta}_{y_4})$

relazioni: $4-2=2$ e sono: $y_2=2y_4$ e
$y_4=y_1-(y_3)$

$W=\{(y_1,y_2,y_3,y_4)\in K^4 \mid y_2=2y_4 \text{ e } y_4=y_1-y_3\}=$
$=\{(y_1,\ 2(y_1-y_3),\ y_3,\ y_1-y_3) \mid y_1,y_3\in K^4\}$

$\begin{cases} x_1-x_2=0 \\ x_2+2x_3-x_4=0 \\ x_2=2x_4 \\ x_4=x_1-x_3 \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=2x_4 \\ 2x_4+2x_3-x_4=0 \\ x_1-2x_4=0 \\ x_4=x_1-x_3 \end{cases}$

$\begin{cases} x_2=2x_4-2x_3 \\ x_4+2x_3=0 \\ x_1=2x_4 \\ x_4=2x_4-x_3 \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=4x_4-2x_3 \\ 2x_4+x_3=0 \\ x_1=2x_4 \\ x_4=x_3 \end{cases}$

$\begin{cases} x_2=4x_3-2x_3 \\ 2x_3+x_3=0 \\ x_1=2x_3 \\ x_4=x_3 \end{cases}$ $\begin{cases} x_3=0 \\ x_2=0 \\ x_1=0 \\ x_4=0 \end{cases}$ $W=\{(0,0,0,0)\}$
$\Rightarrow \dim(U+W)=4$
$\Rightarrow U+W=K^4$

$U+W=\{(z_1,z_2,z_3,z_4)\in K^4 \mid (z_1,z_2,z_3,z_4)=$
$=(\underbrace{x_1,x_2,x_3,x_4}_{\in U})+(\underbrace{y_1,y_2,y_3,y_4}_{\in W})\}$

$(x_2,\ x_2,\ x_3,\ x_2+2x_3)+(y_1,\ 2y_1-2y_3,\ y_3,\ y_1-y_3)=$
$=(\underbrace{x_2+y_1}_{z_1},\ \underbrace{x_2+2y_1-2y_3}_{z_2},\ \underbrace{x_3+y_3}_{z_3},\ \underbrace{x_2+2x_3+y_1-y_3}_{z_4})$

I vettori sono L.I. $\dim\ U+W=4$ ... K^4

Fotocopia 1)

4) $U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 - x_3 = 0\}$ e
$W = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 / y_1 - y_2 = 0\}$
Determinare $U \cap W$ e $U + W$

$B_U = \{(1, 0, 1), (0, 1, 0)\}$ $\dim_{\mathbb{R}^3} B_U = 2$
$B_W = \{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ $\dim_{\mathbb{R}^3} B_W = 2$

$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_1 = x_2 \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = x_3 \\ x_1 = x_2 \end{cases}$ posto $x_3 = t$

$U \cap W = \{(t, t, t) \cancel{/ t \in \mathbb{R}^3}\}$ $\dim_{\mathbb{R}^3} U \cap W = 1$

$\dim(U + W) = 2 + 2 - 1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$
$U + W = \mathbb{R}^3$

5) $U = \langle (1, 1, 0, 0), (0, 1, -1, 0), (1, 0, 1, 0) \rangle$ e
$W = \langle (-1, 0, 1, 0), (1, 1, -1, 1), (0, 1, 0, 1) \rangle$.
determinare $U + W$ e $U \cap W$

Sottospazio di U: il $2^\circ = 1^\circ - 3^\circ$
$B_U = \{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0)\}$ $\dim_{K^4} B_U = 2$
$\alpha(1, 1, 0, 0) + \beta(1, 0, 1, 0) = (\underset{a}{\alpha+\beta}, \underset{b}{\alpha}, \underset{c}{\beta}, \underset{d}{0})$

\# relazioni: $4 - 2 = 2$ e sono: $a = b + c$ e $d = 0$
$U = \{(a, b, c, d) \in K^4 / a = b + c,\ d = 0\} =$
$= \{(b + c, b, c, 0) / b$ e $c \in K^4\}$

Sottospazio di W: $1^\circ = 3^\circ - 2^\circ$
$B_W = \{(1, 1, -1, 1), (0, 1, 0, 1)\}$ $\dim_{K^4} W = 2$
$\alpha(1, 1, -1, 1) + \beta(0, 1, 0, 1) = (\underset{a}{\alpha}, \underset{b}{\alpha+\beta}, \underset{c}{-\alpha}, \underset{d}{\alpha+\beta})$
\# relazioni: $4 - 2 = 2$ e sono: $c = -a$ e $b = d$
$W = \{(a, b, c, d) \in K^4 / c = -a$ e $b = d\} =$
$= \{(a, b, -a, b) / a, b \in K^4\}$

$U \cap W$:

$\begin{cases} a = b + c \\ d = 0 \\ c = -a \\ b = d \end{cases}$ $\begin{cases} d = 0 \\ b = 0 \\ a = c \\ a = -c \end{cases}$ $\Rightarrow a = b = c = d = 0$

NON SI PUÒ APPLICARE LA RELAZIONE DI GRASSMAN XK'È L'INTERSEZIONE È COSTITUITO DAL SOLO VETTORE NULLO, SI PROCEDE X DEFINIZIONE:

DATO L'ENDOMORFISMO DETERMINARE KER-Im, BASI e dimensioni 8-10

CONSIDERATI I SOTTOSPAZI U e V DETERMINARE DIMENSIONE E BASE 12-13+1

PIANO PASSANTE PER UN PUNTO E CONTENENTE LA RETTA 15

PASSAGGIO DA CARTESIANA A PARAMETRICA ⇒ 14

PARALLELE, INCIDENTI E SGHEMBE 16-17

MINIMA DISTANZA FRA 2 RETTE SGHEMBE 18-19

DATE 2 RETTE, sono sghembe? trova la retta passante per (0,0,0) E INCIDENTE ALLE RETTE r ED S 20-21

Calcolo EQUAZIONE CARTESIANA del LUOGO DELLE RETTE INCIDENTI 22-23

DISTANZA DAL PUNTO ALLA RETTA D'EQUAZIONE 24

PARAMETRICA PASSANTE PER TRE O DUE PUNTI 25-26

DATE LE RETTE (verifica se sono sghembe) E INDIVIDUA RETTA DI MINIMA DISTANZA E LA MINIMA DISTANZA 27-28

DETERMINARE P_1 su r_1 e P_2 su r_2 tali CHE IL PUNTO MEDIO DEL SEGMENTO P_1P_2 APPARTENGA AD R $\{x=y=z-1\}$ 29

TROVARE LA RETTA INCIDENTE ALLE TRE RETTE r_1, r_2, r_3 E PARALLELA AD ALFA 30-

DETERMINARE la retta passante per P, parallela al piano α e incidente alla retta congiungente P_1 e P_2 32-33

DETERMINARE L'EQUAZIONE DELLA RETTA PASSANTE PER O ED INCIDENTE ALLA RETTA S, PERPENDICOLARE A T 34

DETERMINARE IL PIANO PASSANTE PER UN PUNTO E PARALLELO A α E CHE INTERSECA LA RETTA R 35

DETERMINARE LA RETTA PARALLELA AL PIANO E CHE FORMA UN ANGOLO CON L'ASSE Y. 36-37

DETERMINARE LA PROIEZIONE DI A SU R 38

SUPERFICI DI ROTAZIONE FRA DUE RETTE 39-40

A COSA DA LUOGO LA ROTAZIONE 41

DETERMINARE l'eq cartesiana della superficie generata dalla rotazione della retta r intorno alla retta s 42-43

Calcolare le soluzioni del sistema lineare omogeneo al variare del parametro reale K. Discutere il seguente sistema:

$$\begin{cases} Kx + 2y + (K+1)z = 0 \\ x + (K+3)y = 0 \\ (K-1)x - (K+5)y - (K+1)z = 0 \end{cases}$$

Calcoliamo il determinante della matrice dei coefficienti.

$$\det\begin{pmatrix} K & 2 & K+1 \\ 1 & K+3 & 0 \\ K-1 & -(K+5) & -(K+1) \end{pmatrix} = -K(K+3)(K+1) + 0 + (K+1)(-K-5) +$$
$$- (K+1)(K+3)(K-1) + 2(K+1) + 0 =$$
$$= -K^3 - K^2 - 3K^2 - 3K - K^2 - 5K - K - 5 +$$
$$- K^3 - 3K^2 + K + 3 + 2K + 2 =$$
$$= -2K^3 - 8K^2 - 6K$$

semplifichiamo moltiplicando per $-1/2$

$$K^3 + 4K^2 + 3K$$

troviamo le soluzioni del determinante

$K(K^2 + 4K + 3)$ $\qquad K_1 = 0$

$\Delta = 16 - 12 = 4 \Rightarrow$ 2 sol. reali e distinte

$\frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} \Rightarrow K_2 = -3$

$K_3 = -1$

- Per $K \neq 0, -3, -1$ il determinante della matrice dei coefficienti è diverso da 0 e in questo caso l'unica soluzione è la soluzione nulla $(0,0,0) \Rightarrow$ $\text{rang} = n°$ incognite

Sostituendo ogni volta i valori $K=0$, $K=-3$ e $K=-1$ nella matrice, calcoliamo singolarmente le soluzioni:

$\boxed{K=0}$

$$\det\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & -5 & -1 \end{pmatrix}}_{A} = 0$$

Scegliamo un minore di ordine 2

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = -2$$ essendo il determinante $\neq 0$, possiamo dire che il rango è 2.

Consideriamo le equazioni corrispondenti (prese nella $\text{mat}_{3\times3}$)

$$\begin{cases} 0\cdot x + 2\cdot y + 1\cdot z = 0 \\ 1\cdot x + 3\cdot y + 0\cdot z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = -2y \\ x = -3y \end{cases}$$

Per $K=0$ le soluzioni sono date dal vettore $(-3y, y, -2y)$

$\boxed{K=-1}$

$$\det\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}}_{A'} = 0$$

Scegliamo un minore di ordine 2

$$\det\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -4 \Rightarrow \text{rango} = 2$$

Consideriamo le equazioni corrispondenti

$$\begin{cases} -x + 2y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Per $K=-1$ le soluzioni sono date dal vettore $(0, 0, z)$

$\boxed{K=-3}$

$$A'' = \begin{pmatrix} +3 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \det(A'') = 0$$

$-3x + 2y - 2z = 0 \Rightarrow 2y = 2z$

Scegliamo minore di ordine 2

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} = -2 \Rightarrow \text{rango} = 2$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ -4x - 2y + 2z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$$ soluzioni $(0, z, z)$

DISCUTERE IL SISTEMA AL VARIARE DI h E K IN R

$$\begin{cases} x - 2y - z = -1 \\ x + 3y - 2z = -3 \\ hx + y + 4z = -k \end{cases}$$

Scriviamo la matrice associata:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ h & 1 & 4 \end{vmatrix} = 7(h+3)$$

$\Delta \neq 0$ per $h \neq -3$

$\forall h \in \mathbb{R} - \{-3\}$ il sistema ammette un'unica soluzione:

$$x = \frac{\det \begin{vmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -3 & 3 & -2 \\ -k & 1 & 4 \end{vmatrix}}{7(h+3)} \qquad y = \frac{\det \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & -2 \\ h & -k & 4 \end{vmatrix}}{7(h+3)}$$

$$z = \frac{\det \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -3 \\ h & 1 & -k \end{vmatrix}}{7(h+3)}$$

Per $h = -3$ il rango di $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

è lo stesso della matrice estesa $\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{matrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & -k \end{bmatrix}$

rango $(A' \; A'') =$ rango $(A' \; A'' B)$

consideriamo questa sottomatrice

A6

$$\det \begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & -K \end{vmatrix} = -4K + 3 - 12 - 2 - 3K - 24 = -7(K+5)$$

Tale determinante è $= 0$ per $K = -5$ e in questo caso il rango della matrice è uguale a due.

Per $K \neq -5$ la soluzione è incompatibile.

Per $K = -5$ e $h = 3$ abbiamo un insieme ∞ di soluzioni.

Possiamo considerare una sottomatrice di rango 2.

$$\begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{matrix}} & \begin{matrix} -1 \\ -2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} -3 & 1 \end{matrix} & 4 \end{vmatrix}$$

abbiamo quindi

$$\begin{cases} X - 2Y - Z = -1 \\ X + 3Y - 2Z = -3 \end{cases}$$

che rappresenta la retta i cui pt sono le infinite soluzioni del sistema

$$\begin{cases} X = 2Y + Z - 1 \\ 2Y + Z - 1 + 3Y - 2Z + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = 2Y + Z - 1 \\ 5Y - Z + 2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} X = 2Y - 5Y + Z + 1 \\ Z = 5Y + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = 2Y + Z - 1 \\ -Z = -5Y - 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} X = 7Y + 3 \\ Z = 5Y + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = 2Y + Z - 1 \\ Z = 5Y + 2 \end{cases}$$

3) DISCUTERE, AL VARIARE DEL PARAMETRO REALE K, LA RISOLUBILITA' DEL SISTEMA LINEARE

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x+2y+z=k \\ y+z=1 \end{cases}$$

E DATE UN'INTERPRETAZIONE GEOMETRICA DEL RISULTATO.

Scriviamo la matrice associata

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det A = 2-1-1=0$$

$\Rightarrow$ rango$(A) \neq 3$

se consideriamo la sottomatrice

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 1 \end{matrix} & 1 \end{pmatrix} \qquad \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2-1=1$$

$\Rightarrow$ rango di $A=2$

Consideriamo la matrice estesa

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & K \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

rango$(A^1 \ldots A^n)$ deve essere uguale a rango$(A^1 \ldots A^n\, B)$

Calcoliamo il determinante della sottomatrice

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & K \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \cancel{1}+2-\cancel{1}-K = 2-K$$

Tale determinante è 0 per $K=2$

Per $K \neq 2$ la soluzione è incompatibile

Possiamo considerare una sottomatrice di rango 2

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 1 \end{matrix} & 1 \end{pmatrix}$$

abbiamo quindi

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + 2y + z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 - y \\ 1 - y + 2y + z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 - y \\ z = 1 - y \end{cases}$$

← rappresenta la retta i cui pt sono le infinite soluzioni del sistema

2) DISCUTERE IL SISTEMA LINEARE

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ Kx-Ky+z=0 \\ x-y+z=1 \end{cases} \longrightarrow A\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & -k & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

AL VARIARE DEL PARAMETRO K E DARNE LE EVENTUALI SOLUZIONI

Calcoliamo il determinante della matrice dei coefficienti

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & -k & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \cancel{-k}+1-k+\cancel{k}-k+1=-2(k-1)$$

Per $K \neq +1$ il sistema ha un'unica soluzione e rappresenta un punto.

Per $K=1$ la matrice ha determinante nullo e le equazioni sono linearmente dipendenti: formano uno spazio di dimensione 1, descrivono cioè, una retta

$$x=\frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -k & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}{\det A}=\frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -k & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}{-2(k-1)}=\frac{-2(-1)}{-2(k-1)}=\frac{1}{k-1}$$

$$y=\frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{\det A}=0$$

$$z=\frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & -k & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}{\det A}=\frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{-2(k-1)}=\frac{-2k}{-2(k-1)}=\frac{k}{k-1}$$

SOLUZIONE: $\left(\frac{1}{k-1}, 0, \frac{k}{k-1}\right)$

A ME IL DET VIENE $-\lambda^3+2\lambda$ a me $-\lambda^3+2\lambda^2$

$\lambda^2(-\lambda+2)$

$\lambda=0$ $\lambda=2$

$ma(0)=2$ $ma(2)=1$ ....

e poi mi vengono

$\lambda(\lambda^2-2)=0$

$\left(\frac{1}{2}-2\right)=\frac{1-4}{2}=\frac{-3}{2}$ $\frac{9}{4}$

$\lambda=0$ $ma(0)=1$

$1-2$

$9+4$

$\lambda^2-2=0 \Rightarrow -2$ e 2 $ma(-2)=1$

e cmq quindi ci verrebbe $\lambda=\pm\sqrt{2}$

$ma(2)=1$

io il nucleo l'ho diverso infatti 3 non mi viene

e poi... dopo che calcolo $(A-0I)^2$ e trovo il nucleo $\langle -1,2,0\rangle$ e $\langle 0,-1,1\rangle$ che si fa? O—O"

$V(0)=\langle 0,-1,1\rangle$ E $V(2)=\langle 0,1,1\rangle$?

$(A-0I)^2 \Rightarrow$ $\lambda^2-2=0$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

quanto ti viene?

mmm.... nelle rette sghembe... come minchia si fa il pass da parametrica a CARTESIANA AHHHHHHHH

$\Delta=b^2-4ac=-4-2=8$

$\frac{\pm\sqrt{8}}{2}$

io ho fatto

$\begin{cases} t=y+1 \\ x=-2y-2 \\ z=1-y-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2y-2 \\ z=-y \end{cases}$ = cartesiana di t

e rotazione.... O-O"

Ps: ho fatto ma alla fine mi viene un casino assurdo T_T

nelle sghembe ho fatto (ANCORA) solo i punti $P_s\left(h-1, \frac{2h-1}{2}, h\right)$

e $P_r(-2t,-1-t,1-t)$

$\Delta=b^2-4ac$

$\lambda^2+2=0$

ci sono domande di JORDAN ????

PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA 27/09/2007

1) SIA $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ L'ENDOMORFISMO DEFINITO DA

$$L(x,y,z) = (x+y,\ x+2y+z,\ y+z)$$

DETERMINARE $\operatorname{Ker} L$, $\operatorname{Im} L$, LE LORO DIMENSIONI ED UNA LORO BASE.

Prendiamo le basi canoniche di $\mathbb{R}^3$:

$$c_1 = (1,0,0) \ , \ c_2 = (0,1,0) \ , \ c_3 = (0,0,1)$$

Troviamo le immagini per queste 3 basi:

$$L(c_1) = L(1,0,0) = (1,1,0)$$
$$L(c_2) = L(0,1,0) = (1,2,1)$$
$$L(c_3) = L(0,0,1) = (0,1,1)$$

Matrice delle immagini:

$$A \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det A = 0 \Rightarrow \text{le immagini sono linearmente dipendenti}$$
$$\quad L(c_1) \quad L(c_2) \quad L(c_3)$$

Verifichiamo la dipendenza lineare:

$$(x+y,\ x+2y+z,\ y+z) = \bar{0}$$

$$\begin{cases} x+y=0 \\ x+2y+z=0 \\ y+z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-y \\ 0=0 \\ z=-y \end{cases}$$

← Da questo troviamo che $L(c_2)$ è combinazione lineare di $L(c_1)$ e $L(c_3)$ $\Rightarrow L(c_2) \notin \operatorname{Im} L$

Troviamo inoltre $(-y, y, -y)$ e per definizione di

$$\operatorname{Ker} L = \{ v \in \mathbb{R}^3 \ / \ L(v) = \bar{0} \} = \{ (-1, 1, -1) \}$$

(54) $\operatorname{Im} L = \{ (1,1,0) \ , \ (0,1,1) \}$

dim Im L = 2 = rango (A)
dim Ker L = 1 = n° colonne − rango (A)

Mettiamo a sistema i vettori Ker L e Im L, se sono linearmente indipendenti ⇒ $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker} L \oplus \operatorname{Im} L$ poiché significa che l'intersezione è nulla.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -1-1-1 = -3 \Rightarrow \text{sono linearmente dipendenti}$$

CONSIDERATO L'ENDOMORFISMO $L: \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ TALE CHE $L(1) = x + x^2$, $L(x) = 1 + x^2$, $L(x^2) = 1 - x$

DETERMINARE $\ker L$, $\operatorname{Im} L$ E STABILIRE SE È $\mathbb{R}_2[x] = \ker L \oplus \operatorname{Im} L$.

$x^0 : v_1 = (0, 1, 1)$
$x : v_2 = (1, 0, 1)$
$x^2 : v_3 = (1, -1, 0)$

scritto in forma matriciale

$$\begin{array}{ccc} L(1) & L(x) & L(x^2) \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

$\det A = 0$, considerata la sottomatrice

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & 1 \end{matrix} & 0 \end{pmatrix}$$

possiamo vedere che il rango $= 2$

La $\dim(\operatorname{Im} L) = \text{rango} = 2$

$\dim(\ker L) = n^\circ \text{ colonne} - \text{rango} = 3 - 2 = 1$

Dipendenza lineare:

$$\alpha(L(1)) + \beta(L(x)) + \gamma(L(x^2)) = (0, 0, 0)$$
$$\alpha(0, 1, 1) + \beta(1, 0, 1) + \gamma(1, -1, 0) = (0, 0, 0)$$

$$\begin{cases} \beta + \gamma = 0 \\ \alpha - \gamma = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta = -\gamma \\ \alpha = \gamma \\ \alpha = \gamma \end{cases} \Rightarrow$$

$L(x^2)$ è linearmente dipendente da $L(1)$ e $L(x)$ per $\alpha = 1$, $\beta = -1$

$L(x^2) = L(x) - L(1)$

$L(x^2) = L(x - 1)$

$L(x^2) - L(x - 1) = \bar{0}$

$L(x^2 - x + 1) = 0$

$\ker L = \{x \mid x^2 - x + 1 = 0\}$ $\qquad v_1 = (1, -1, 1)$

$\operatorname{Im} L = \langle (0, 1, 1), (1, 0, 1) \rangle$

$\ker L = \langle (1, -1, 1) \rangle$

Mettiamo a sistema i vettori di base di kerL e ImL, essi sono
linearmente indipendenti $\Rightarrow R_2[x] = \ker L \oplus \mathrm{Im} L$
poiché significa che l'intersezione è nulla.

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -1 \neq 0$$

sono linearmente indipendenti poiché $\neq 0$ e la somma è diretta

CONSIDERATI IN $\mathbb{R}^4$ I SOTTOSPAZI

$$U = \{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z=0 \}$$

$$V = \{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x-2z=0 \,,\; y+t=0 \}$$

DETERMINARE LA DIMENSIONE ED UNA BASE PER $U, V, U\cap V, U+$

$\boxed{\text{BASE DI } U}$

$$U = \{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z=0 \}$$

$$x+y+z=0$$

che espressa in funzione di z:

$$z = -x-y$$

$$U = \{ (x,y,-x-y,t) \,/\, x,y,t \in \mathbb{R} \}$$

$$(x,y,-x-y,t) = x(1,0,-1,0) + y(0,1,-1,0) + t(0,0,0,1)$$

$$\Rightarrow B_U = \langle (\underset{x}{1},0,\underset{-z}{-1},0),(0,\underset{y}{1},\underset{-z}{-1},0),(0,0,0,\underset{t}{1}) \rangle$$

$\boxed{\text{BASE DI } V}$

$$V = \{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x-2z=0 \,,\; y+t=0 \}$$

$$\begin{cases} x-2z=0 \\ y+t=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=2z \\ y=-t \end{cases}$$

$$(x,y,z,t) = (2z,-t,z,t) = z(2,0,1,0) + t(0,-1,0,1)$$

$$\Rightarrow B_V = \langle (2,0,1,0),(0,-1,0,1) \rangle$$

$\boxed{\text{BASE DI } U\cap V}$

$$U\cap V = \{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z=0,\; x-2z=0,\; y+t=0 \}$$

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-2z=0 \\ y+t=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2z-t+z=0 \\ x=2z \\ y=-t \end{cases} \qquad \begin{cases} t=3z \\ x=2z \\ y=-3z \end{cases}$$

$$(x,y,z,t) = (2z,-3z,z,3z) = z(2,-3,1,3)$$

$$\Rightarrow B_{U\cap V} = \langle (2,-3,1,3) \rangle$$

$-2(k-1)$

$-2k+2$

$|$

$\boxed{\text{BASE DI } W}$

$W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid z + t = 0\}$

$z = -t$

$W = \{(x, y, -t, t) \mid x, y, t \in \mathbb{R}\}$

$\Rightarrow B_W = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,-1,1)\}$

$\boxed{\text{BASE DI } U \cap W}$

$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y - t = 0 \\ z + t = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y - t + y + t = 0 \\ x = y - t \\ z = -t \end{cases} \quad \begin{cases} y = \\ x = -t \\ z = -t \end{cases}$

$U \cap W = \{(-t, 0, -t, t) \mid y, t \in \mathbb{R}\}$

$\Rightarrow B_{U \cap W} = \{(-1, 0, -1, 1)\}$

$\boxed{\text{BASE DI } U + W}$

La base di $U+W$ è costituita dalle basi di U e W, dobbiamo verificare la dipendenza lineare:

$B_U = \{(1,1,2,0), (-1,0,-1,1)\}$

$B_W = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,-1,1)\}$

$\alpha(1,1,2,0) + \beta(-1,0,-1,1) + \gamma(1,0,0,0) + \delta(0,1,0,0) + \varepsilon(0,0,-1,1) = \bar{0}$

$\begin{cases} \alpha - \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \delta = 0 \\ 2\alpha - \beta - \varepsilon = 0 \\ \beta + \varepsilon = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = \beta - \gamma \\ \delta = 0 \\ \alpha = 0 \\ \varepsilon = -\beta \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma = \beta \\ \delta = 0 \\ \alpha = 0 \\ \varepsilon = -\beta \end{cases}$

$\Rightarrow B_{U+W} = \{(1,1,2,0), (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,-1,1)\}$

$\dim U+W = \dim U + \dim W - \dim U \cap W$

$4 = 2 + 3 - 1$

1C bis

$W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : z + t = 0\}$

$V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+y-z=0 \ , \ x-y+t=0\}$

$\boxed{\text{BASE DI U}}$

$U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x+y-z=0, \ x-y+t=0\}$

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y+t=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 2y - t \\ x = y - t \end{cases}$$

$U = \{(y-t, \ y, \ -t, \ 2y, \ t) \ / \ y, t \in \mathbb{R}\}$

$\Rightarrow B_U = \{(1,1,2,0), (-1,0,-1,1)\}$

... continua dietro ...

BASE DI U+V

La base di U+V è costituita dalle B_U e B_V, dobbiamo verificare che non vi sia dipendenza lineare tra i vettori di tali basi

$$\alpha\underset{B_U}{(1,0,-1,0)} + \beta\underset{B_U}{(0,1,-1,0)} + \gamma\underset{B_U}{(0,0,0,1)} + \delta\underset{B_V}{(2,0,1,0)} + \varepsilon\underset{B_V}{(0,-1,0,1)} = (0,0,0,0)$$

$$\begin{cases} \alpha + 2\delta = 0 \\ \beta - \varepsilon = 0 \\ -\alpha - \beta + \delta = 0 \\ \gamma + \varepsilon = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = -2\delta \\ \beta = \varepsilon \\ 2\delta - \varepsilon + \delta = 0 \\ \gamma = -\varepsilon \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = -2\delta \\ \beta = 3\delta \\ \varepsilon = 3\delta \\ \gamma = -3\delta \end{cases}$$

Il vettore $(2,0,1,0)$ che ha per coefficiente δ si può ottenere come combinazione lineare degli altri, cioè è linearm. dipendente e lo escludiamo da B_{U+V}

$$B_{U+V} = \langle (1,0,-1,0), (0,1,-1,0), (0,0,0,1), (0,-1,0,1) \rangle$$

VERIFICHIAMO IL TEOREMA DI GRASSMAN

$\dim(U) = 3$

$\dim(V) = 2$

$\dim(U \cap V) = 1$

$\dim(U + V) = 4$

Quindi

$$\dim(U+V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V)$$

è verificata.

DATI DUE SOTTOSPAZI U E W DI $\mathbb{R}^4$ GENERATI DA

$u_1 = (1, 0, 1, 0) \quad u_2 = (-1, 1, 0, 0)$

$w_1 = (1, 0, 0, 0) \quad w_2 = (0, 0, 0, -1) \quad w_3 = (1, 1, 0, 1)$

DIMOSTRARE CHE $\mathbb{R}^4$ E' SOMMA DIRETTA DI U E W, CIOE' CHE $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$

E' semplice verificare che i vettori u_1 e u_2 sono linearmente indipendenti e, sapendo per ipotesi che sono anche generatori, implica che u_1 e u_2 costituiscono una base di U.

Analogamente w_1, w_2 e w_3 sono una base di W.

Verifichiamo se u_1, u_2, w_1, w_2 e w_3 sono linearmente indipendenti

$$\alpha\underset{v_1}{(1,0,1,0)} + \beta\underset{v_2}{(-1,1,0,0)} + \gamma\underset{w_1}{(1,0,0,0)} + \delta\underset{w_2}{(0,0,0,-1)} + \varepsilon\underset{w_3}{(1,1,0,1)} =$$
$$= (\alpha - \beta + \gamma + \varepsilon, \beta + \varepsilon, \alpha, -\delta + \varepsilon) = (0,0,0,0)$$

$$\begin{cases} \alpha - \beta + \gamma + \varepsilon = 0 \\ \beta + \varepsilon = 0 \\ \alpha = 0 \\ -\delta + \varepsilon = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 + \varepsilon + \gamma + \varepsilon = 0 \\ \beta = -\varepsilon \\ \alpha = 0 \\ \delta = \varepsilon \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma = -2\varepsilon \\ \beta = -\varepsilon \\ \alpha = 0 \cdot \varepsilon \\ \delta = \varepsilon \end{cases}$$

Notiamo che w_3 è linearmente dipendente.

Possiamo ora procedere a verificare se $\boxed{\alpha \cdot u_1 + \beta \cdot u_2 + \gamma \cdot w_1 + \delta \cdot w_2 = (x, y, z, t)}$

$$\begin{cases} \alpha - \beta + \gamma = x \\ \beta = y \\ \alpha = z \\ -\delta = t \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma = x + y - z \\ \beta = y \\ \alpha = z \\ \delta = -t \end{cases}$$

$$\alpha \cdot v_1 + \beta \cdot v_2 + \gamma\, w_1 + \delta\, w_2 = z(1,0,1,0) + y(-1,1,0,0) +$$
$$+ (x + y - z)(1,0,0,0) + (-t)(0,0,0,-1) =$$
$$= (\cancel{z} - \cancel{y} + x + \cancel{y} - \cancel{z}, y, z, t) = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$$

$x - 2y + 1 = 0$

imponiamo $x = t$

andiamo a sostituire alle cartesiane

$t - 2y + 1 = 0$
$x = t$

$y = \frac{1+t}{2}$
$x = t$

$y = \frac{1}{2} + \frac{t}{2}$
$x = t$

PASSAGGIO DA PARAMETRICA A CARTESIANA

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = -t \end{cases}$$

$t = -z$

$$\begin{cases} x = 1 - 2z \\ y = -1 - z \\ z = -t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 - 2z \\ y = -1 - z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 1 + 2z = 0 \\ y + z + 1 = 0 \end{cases}$$ eq. cartesiana.

-1-

• Determinare l'equazione parametrica e cartesiana passante per il punto $P_1(1,1,1)$ e contenente la retta $r: \begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+t \\ z=-t \end{cases}$

ONSIDERIAMO IL FASCIO DI PIANI DI CENTRO LA RETTA r E IMPONIAMO IL ASSAGGIO PER IL PUNTO P_1.
RICAVIAMO L'EQUAZIONE CARTESIANA DALL'EQUAZIONE PARAMETRICA r. $(T=-z)$

$$\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+t \\ z=-t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-2z \\ y=-1-z \\ z=-t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2z-1=0 \\ y+z+1=0 \end{cases}$$ è l'eq cartesiana del piano.

Il generico piano del fascio con centro r ha equazione:

$a(x+2z-1)+b(y+z+1)=0$

Affinché sia passante per il punto $P_1(1,1,1)$:

$a(1+2-1)+b(1+1+1)=0$

$2a+3b=0 \qquad a=-3; \; b=2$

Sostituendo le due soluzioni trovate, otteniamo:

$-3(x+2z-1)+2(y+z+1)=0$

$-3x-6z+3+2y+2z+2=0$

$3x-4z+2y+5=0$ <u>è l'eq. cartesiana del piano.</u>

Per la parametrica troviamo due punti generici della retta.
Prendiamo due valori $T=0$ e $T=1$ e troviamo due punti distinti

$t=0 \quad \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \\ z=0 \end{cases}$

$(1,1,1)$

$t=1 \quad P_2 \begin{cases} x=3 \\ y=0 \\ z=-1 \end{cases}$

scriviamo ottengo adesso i tre punti P_0, P_1 e P_2 l'equazione parametrica del piano:

$$\begin{cases} x=x_0+lt+l't' \\ y=y_0+mt+m't' \\ z=z_0+nt+n't' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l=x_1-x_0 \\ m=y_1-y_0 \\ n=z_1-z_0 \end{cases} \begin{cases} l'=x_2-x_0 \\ m'=y_2-y_0 \\ n'=z_2-y_0 \end{cases}$$

$P_0(1,-1,0)$
$P_1(1,1,1)$
$P_2(3,0,-1)$

$$\begin{cases} x=1+2t' \\ y=-1+2t+t' \\ z=t-t' \end{cases}$$

$r: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-t \\ z = 1+t \end{cases}$ $\quad s: \begin{cases} x = 1-t \\ y = 3+t \\ z = -t \end{cases}$

SI DICONO PARALLELE SE I VERSORI TRA DI R ED S SONO LINEARMENTE DIPENDEN

In questo caso abbiamo i versori $(1,-1,1)$ e $(-1,1,-1)$ moltiplicando uno di essi per -1 otteniamo l'altro, quindi so linearmente dipendenti.

ETTE INCIDENTI: X

$r: \begin{cases} x=1 \\ y+z=0 \end{cases}$ $\quad s: \begin{cases} x+y=0 \\ z=-1 \end{cases}$

SI DICONO INCIDENTI SE MESSE A SISTEMA IL SISTEMA È VERIFICATO

$$\begin{cases} x=1 \\ y+z=0 \\ x+y=0 \\ z=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ z=1 \\ y=-1 \\ z=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=1 \\ z=-1 \end{cases}$$

Il sistema non è verificato in questo ca perché abbiamo due valori diversi per z.

ETTE SGHEMBE: /\

DUE RETTE SONO SGHEMBE SE NON SONO NÉ INCIDENTI NÉ PARALLELE.

$: \begin{cases} x-2z-1=0 \\ y-3z=0 \end{cases}$ $\quad s: \begin{cases} x-z-2=0 \\ y=2z-3 \end{cases}$

verifichiamo che siano incidenti:

$$\begin{matrix} x-2z-1=0 \\ y-3z=0 \\ x-z-2=0 \\ y=2z-3 \end{matrix} \quad \begin{cases} x-2z-1=0 \\ 2z-3-3z=0 \\ x-z-2=0 \\ y=2z-3 \end{cases} \quad \begin{cases} x+6-1=0 \\ z=-3 \\ x+3-2=0 \\ y=-6-3 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-5 \\ z=-3 \\ x=1 \\ y=-9 \end{cases}$$

non sono incidenti

erifichiamo che siano parallele:

$z=t$

$= 2t+1$

$= 3t$

$=t$

$$\begin{cases} x=t-2 \\ y=2t-3 \\ z=t \end{cases}$$

$(2,3,1)$

$(1,2,1)$

$\alpha(2,3,1) + \beta(1,2,1) = (0,0,0)$

$(2\alpha, 3\alpha, \alpha) + (\beta, 2\beta, \beta) = (0,0,0)$

$(2\alpha+\beta, 3\alpha+2\beta, \alpha+\beta) = (0,0,0)$

$$\begin{cases} 2\alpha+\beta=0 \\ 3\alpha+2\beta=0 \\ \alpha+\beta=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2\beta+\beta=0 \\ -3\beta+2\beta=0 \\ \alpha=-\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\beta=0 \\ 3\alpha+2\beta=0 \\ \alpha=0 \end{cases}$$

sono linearmente indipendenti quindi non sono parallele. 17

- non sono incidenti
- non sono parallele

$\Downarrow$

quindi sono sghembe.

$r: \begin{cases} x = z \\ y = 1-z \end{cases} \quad s: \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$

calcoliamo l'equazione parametrica, ponendo prima $z=t$, e poi $z=h$

$r: \begin{cases} x=t \\ y=1-t \\ z=t \end{cases} \quad s: \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=h \end{cases}$

avremo così i versori di r e s:

$(1,-1,1)$ e $(0,0,1)$

$P_r(t, 1-t, t)^{*}$ e $P_s(1, 2, h)^{\Delta}$

usiamo l'equazione della retta passante per due punti:

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{z-z_0}{z_1-z_0} \qquad x_0, y_0, z_0 \Rightarrow r \quad x_1, y_1, z_1 \Rightarrow s$$

sostituendo:

$$\frac{x-t}{1-t} = \frac{y-1+t}{\underbrace{2-1+t}_{1+t}} = \frac{z-t}{h-t} \quad \text{il versore della retta: } (1-t, 1+t, h-t)$$

applichiamo il versore della retta r al versore appena trovato, si fa la stessa cosa con il versore s e si mette a sistema.

$(1,-1,1)(1-t, 1+t, h-t) = (1-t, -1-t, h-t)$

$(0,0,1)(1-t, 1-t, h-t) = (0, 0, h-t)$

$\cancel{1}-t-\cancel{1}-t+h-t = 0$

$0+0+h-t =$

$\Rightarrow \begin{cases} -3t+h=0 \\ h-t=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3t-t=0 \\ h=-t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=\frac{0}{-4}=0 \\ h=-t \end{cases}$

$\begin{cases} t=0 \\ h=0 \end{cases}$

applichiamo adesso i versori appena trovati per h e t al punto generico di r e di s.

$P_r(t, 1-t, t)^{*} = (0, 1, 0)$

$P_s(1, 2, h)^{\Delta} = (1, 2, 0)$

$$\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2}$$

$$|RS| = \sqrt{(1-0)^2+(2-1)^2+(0-0)^2} = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}$$

Sostituiamo infine $h=0$ e $t=0$ all'equazione della retta passante per P_s e P_r.

$$\frac{x-t}{1-t} = \frac{y-1+t}{2-1+t} = \frac{z-t}{h-t}$$

$$\frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{0}$$

che messi a sistema rappresenta la retta di minima distanza fra le rette r ed s.

$$\begin{cases} x = y-1 \\ z=0 \end{cases}$$

TROVARE INOLTRE LA RETTA PASSANTE PER (0, 0, 0) E INCIDENTE ALLE RETTE R e S:

$$r: \begin{cases} x = 2z - 1 \\ y = z + 1 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} z = 2 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

verifichiamo se sono incidenti

$$\begin{cases} x = 2z - 1 \\ y = z + 1 \\ z = 2 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \\ z = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$ non sono incidenti

verifichiamo se sono parallele
trasformiamo le rette in parametriche, imponendo $z = h$ in r
$y = k$ in s

$$r: \begin{cases} x = 2h - 1 \\ y = h + 1 \\ z = h \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 1 - k \\ y = k \\ z = 2 \end{cases}$$

$(2, 1, 1)$ $\qquad (-1, 1, 0)$

verifichiamo la condizione di dipendenza lineare

$\alpha(2, 1, 1) + \beta(-1, 1, 0) = (0, 0, 0)$

$(2\alpha, \alpha, \alpha) + (-\beta, \beta, 0) = (0, 0, 0)$

$(2\alpha - \beta, \alpha + \beta, \alpha) = (0, 0, 0)$

$$\begin{cases} 2\alpha - \beta = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2\alpha = -\beta \\ \alpha = -\beta \\ \alpha = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{matrix}$$ non sono parallele.

le rette sono sghembe.

Abbiamo ora considerare il fascio di piani di centro la retta r e poi s e imporre il passaggio per l'origine.

$a(x-2z+1)+b(y-z-1)=0$

e affinché passi da $(0,0,0)$ sostituiamo.

$a(0-0+1)+b(0-0-1)=0$

$a-b=0$ la soluzione è $a=+1$ e $b=+1$

troviamo quindi $x-2z+1+y-z-1=0$

$x+y-3z=0$ ⇐ questa è la nostra equazione.

Consideriamo ora il piano a cui appartiene sia s che $(0,0,0)$

$a(z-2)+b(x+y-1)=0$

affinché passi da $(0,0,0)$ sostituiamo

$a(0-2)+b(0+0-1)=0$

$-2a-b=0$ la soluzione è $a=-1$ e $b=2$

troviamo quindi $-z+\cancel{2}+2x+2y-\cancel{2}=0$

$2x+2y-z=0$ ⇐ è la nostra equazione

l'intersezione dei due piani ci individua la retta voluta:

$$\begin{cases} x+y-3z=0 \\ 2x+2y-z=0 \end{cases}$$

INCIDENTI.

Date tre rette r, s, t

$r: \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ $s: \begin{cases} x+1=0 \\ z=0 \end{cases}$ $t: \begin{cases} y+1=0 \\ z+1=0 \end{cases}$

Dobbiamo calcolare il piano passante per un punto generico della retta r e contenere la retta s. $R(0,0,T)$ è il punto generico e dovrà quindi contenere o.

I versori sono $(0,0,1)$

Il piano generico ha equazione: $a(x+1)+b(z)=0$

di centro s

Per capire se passa da $R(0,0,t)$ dobbiamo sostituire:

$a(0+1)+b(T)=0$

$a+bT=0$

$a=-bT \Rightarrow a=-T$ $b=1$ essi sono i valori per cui si annulla l'equazione.

Sostituendo a e b avremo quindi l'equazione cartesiana:

$a(x+1)+b(z)=0$

$-T(x+1)+z=0$

$-xt-t+z=0$

$t=\dfrac{z}{x+1}$

Calcoliamo adesso l'equazione del piano passante per un punto generico di r contenente la retta T.

$(0,0,t)$

Il piano ha equazione $a(y+1)+b(z+1)=0$

Affinché passi per $(0,0,t)$ sostituiamo.

$(0+1)+b(t+1)=0$

$+tb+b=0$

$b=-1$
$a=t+1$ } sono le soluzioni che andranno a sostituire al sistema.

$t+1(y+1)-(z+1)=0$

$ty+t+y+\cancel{1}-z-\cancel{1}=0$ $ty+t=y-z$ $t(y+1)=y-z$ $t=\dfrac{y-z}{y+1}$

è l'equazione della retta passante per le tre rette date, cioè le luogo di incidenza delle rette

$$\frac{z}{x+1} = \frac{z-y}{y+1}$$

$P(1,0,1)$ $\quad r: \begin{cases} x = z+1 \\ y = z \end{cases}$

Calcoliamo i versori, attraverso l'equazione parametrica.

$z = t$

$$\begin{cases} x = t+1 \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$ il versore è $(1,1,1)$

Calcoliamo il piano ortogonale ad r passante per $P(\overset{x_0}{1},\overset{y_0}{0},\overset{z_0}{1})$

$$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$$

a, b, c sono i parametri di giacitura di r.

$\pi: x+y+z-2=0$ che si ottiene da $(x-1)+(y-0)+(z-1)=0$

$x-1+y+z-1=0$

$x+y+z-2=0$

Mettiamo ora a sistema π con la retta r.

$$\begin{cases} x = z+1 \\ y = z \\ x+y+z-2=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = z+1 \\ y = z \\ z+1+z+z-2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = z+1 \\ y = z \\ 3z-1=0 \end{cases} \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ y = \frac{1}{3} \\ z = \frac{1}{3} \end{cases} R$$

$$|\overline{RP}| = \sqrt{\left(\frac{4}{3}-1\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}-1\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{4}{9}\right)} = \frac{1}{3}\sqrt{6}$$

$P_0(0,1,0)$ $P_1(-1,1,0)$ $P_2(0,0,2)$

$x_0 y_0 z_0$ $x_1 y_1 z_1$ $x_2 y_2 z_2$

$$\begin{cases} x = x_0 + lt + l't' \\ y = y_0 + mt + m't' \\ z = z_0 + nt + n't' \end{cases} \quad \begin{cases} l = x_1 - x_0 \\ m = y_1 - y_0 \\ n = z_1 - z_0 \end{cases} \quad \begin{cases} l' = x_2 - x_0 \\ m' = y_2 - y_0 \\ n' = z_2 - z_0 \end{cases}$$

troviamo quindi i valori di (l, m, n) e (l', m', n')

$l = -1$ $\quad l' = 0$

$m = 0$ $\quad m' = -1$

$n = 0$ $\quad n' = 2$

troviamo l'equazione parametrica del piano: (ovvero primo sistema

$$\begin{cases} x = -t \\ y = 1 - t' \\ z = 2t' \end{cases}$$

Determiniamo adesso l'equazione Cartesiana della forma passante per i tre punti.

$ax + by + cz + d = 0$ passante per i tre punti.

$$a = \det\begin{pmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{pmatrix} \qquad a = \det\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$b = \det\begin{pmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 \end{pmatrix} \qquad b = \det\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2$$

$$c = \det\begin{pmatrix} x_1 - x_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & z_2 - z_0 \end{pmatrix} \qquad c = \det\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 1$$

$d = -2$

$d = -ax_0 - by_0 - cz_0$

$P_0(1,0,2)$ $P_1(-1,2,0)$ sono i punti

DETERMINARE LA PARAMETRICA DELLA RETTA PASSANTE PER 2 PUNTI

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases} \qquad \begin{cases} l = x_1 - x_0 \\ m = y_1 - y_0 \\ n = z_1 - z_0 \end{cases}$$

$l = -2$
$m = 2$
$n = -2$

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 0 + 2t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$$ eq. parametrica della retta passante per due punti

$a = y_1 - y_0$
$b = -(x_1 - x_0)$. formula per due punti nel piano.
$c = -ax_0 - by_0$

$a = 2$
$b = 2$
$c = -2$

$2x + 2y - 2 = 0$

i passa ora da parametrica a cartesiana

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 - t \end{cases} \qquad \begin{cases} t = x + 1 \\ y = -x + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -t = -x - 1 \\ y = 2 - t \end{cases} \qquad \begin{cases} t = x + 1 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$$ ⇐ eq. cartesiana della retta.

$$\begin{cases} t = x + 1 \\ y = 2 - t \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = x + 1 \\ y = 2 - x - 1 \end{cases}$$

DETERMINA. LA RETTA MINIMA DISTANZA E LA MINIMA DISTANZA <+

verifichiamo se sono incidenti:

$$r: \begin{cases} x=y \\ z=0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x=y+1 \\ z=-y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=y \\ z=0 \\ x=y+1 \\ z=-y \end{cases}$$ non sono incidenti

Verifichiamo se sono parallele:
trasformiamo da cartesiane in parametriche;
$y=h$ in r e $y=k$ in s

$$\begin{cases} x=h \\ z=0 \\ y=h \end{cases} \quad (1,1,0) \qquad s: \begin{cases} x=k+1 \\ z=-k \\ y=k \end{cases} \quad (1,1,-1)$$

verifichiamo la dipendenza lineare

$$\alpha(1,1,0)+\beta(1,1,-1)=(0,0,0)$$

$$(\alpha,\alpha,0)+(\beta,\beta,-\beta)=(0,0,0)$$

$$\begin{cases} \alpha+\beta=0 \\ \alpha+\beta=0 \\ -\beta=0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} \alpha=0 \\ \beta=0 \end{matrix}$$ r ed s sono indipendenti

non sono quindi parallele, sono mentre sghembe.
bbbiamo adesso ~~dover~~ determinare ~~laretta~~ di minima distanza e
a minima distanza.
Prendiamo due generici punti della retta r e s.
er la retta r avremo $R(h,h,0)$
r la retta s avremo $S(k+1,k,-k)$
cerviamo quindi l'equazione delle rette passante per
questi due punti.

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}$$

tal ....

$$\frac{x-h}{k+1-h} = \frac{y-h}{k-h} = \frac{z}{-k}$$

I versori sono $(k+1-h,\ k-h,\ -k)$

Mettiamo ora a sistema i versori della retta r applicati a quella della retta appena trovata, con quelli della retta s .....

$$\begin{cases} 1(k-h+1)+1(k-h)+0(-k)=0 & (1,1,0) \\ 1(k-h+1)+1(k-h)-1(-k)=0 & (1,1,-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2k-2h+1=0 \\ 3k-2h+1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k=\frac{2h-1}{2} \\ 3\left(\frac{2h-1}{2}\right)-2h+1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k= \\ \frac{6h-3}{2}-2h+1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k=\frac{2h-1}{2} \\ \frac{6h-3-4h+4}{2}=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k=\frac{2h-1}{2} \\ 2h=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k=\frac{2h-1}{2} \\ h=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} k=0 \\ h=\frac{1}{2} \end{cases} \quad *$$

* sostituendo h e k ai genera punti delle rette

$R\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right) \quad S(1,0,0)$.

La distanza minima tra r e s è uguale alla distanza $\overline{RS}$

$$|RS| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

La retta di minima distanza

tali che il punto medio del segmento P_1P_2 appartenga a (r)

$r: \{x = y = z-1\}$ $r_1: \begin{cases} x = 2y-1 \\ z = 1 \end{cases}$ $r_2: \begin{cases} x = y+1 \\ z = -1 \end{cases}$

troviamo l'equazione parametrica di r_1 imponendo $y = h$

$$r_1: \begin{cases} x = 2h-1 \\ y = h \\ z = 1 \end{cases} \qquad \text{versori } (2,1,0) = (r_1)$$

troviamo la parametrica di r_2 imponendo $y = k$

$$r_2: \begin{cases} x = k+1 \\ y = k \\ z = -1 \end{cases} \qquad (1,1,0) = (r_2)$$

I punti generici P_1 e P_2 sono quindi $P_1(2h-1, h, 1)$
$P_2(k+1, k, -1)$

punto medio del segmento $\Rightarrow \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right) =$

$$= \left(\frac{2h+k}{2}, \frac{h+k}{2}, \frac{1-1}{2}\right) = \underline{\left(\frac{2h+k}{2}, \frac{h+k}{2}, 0\right)};$$

tale punto deve giacere sulla retta $r: x=y=z-1$ quindi sostituiamo:

$$\frac{2h+k}{2} = \frac{h+k}{2} = -1$$

abbiamo quindi

$$\begin{cases} 2h+k = h+k \\ \frac{h+k}{2} = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2h-h+\cancel{k}-\cancel{k} = 0 \\ h+k = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} h = 0 \\ k = -2 \end{cases}$$ se andiamo a sostituire h e k ai punti P_1 e P_2 ed al punto medio troviamo

$P_1(-1, 0, 1)$ $P_2(-1, -2, -1)$ $P_M(-1, -1, 0)$

È PARALLELA AD α.

$$r_1:\begin{cases} x=z+3 \\ y=-2z+1\end{cases} \qquad r_2:\begin{cases} x=z+2 \\ y=1-1/2z\end{cases} \qquad r_3:\begin{cases} x=-z-3 \\ y=-z\end{cases}$$

$\alpha: x+2y-z-1=0$

ponendo $z=h$ un generico punto di r_1 è $P_1(h+3, -2h+1, h)$.

Calcoliamo il piano del fascio di piani centrato su r_2 e passante su R_1.

$a(x-z-2)+b(y-1+\frac{1}{2}z)=0$ se sostituiamo ad essa le coordinate si ha $a(\cancel{h}+3-\cancel{h}-2)+b(-2h+\cancel{1}-\cancel{1}+\frac{1}{2}h)=0$

$a-\frac{3}{2}hb=0$ una soluzione è $a=\frac{3}{2}h$ $b=1$ che sostituiti al piano del fascio di prima avremo π_1

$\pi_1: \frac{3}{2}h(x-z-2)+y-1+\frac{1}{2}z=0$

$x\frac{3}{2}h+y+z\left(-\frac{3}{2}h+\frac{1}{2}\right)-3h-1=0$ piano centrato su r_1 e passa per R

moltiplichiamo per due, per semplicità $\pi_1: x(3h)+2y+z(1-3h)-6h-2=$

Calcoliamo adesso il piano di fascio dei piani centrato su r_3 e passante per R_1.

$a(x+z+3)+b(y+z)=0$

$a(h+3+h+3)+b(-2h+1+h)=0$

$a(2h+6)+b(-h+1)=0$

$b=\dfrac{2h+6}{1-h}$ $a=-1$

$\pi_2: -x-z-3+\dfrac{2h+6}{1-h}(y+z)=0$

$-x+y\left(\dfrac{2h+6}{1-h}\right)+z\left(\dfrac{2h+6}{1-h}-1\right)-3=0$

moltiplichiamo tutto per $(1-h)$ per semplificare.

imponendo che $h \neq 1$ piano centrato su r_3 passante per R_1

$\pi_2: x(1-h) - y(2h+6) - z(3h+5) - 3h + 3 = 0$

Mettendo a sistema π_1 e π_2 troveremo l'insieme delle rette incidenti a r_1, r_2, r_3 al variare di h.

$$r_4 \begin{cases} x(3h) + 2y + z(1-3h) - 6h - 2 = 0 \\ x(1-h) - y(2h+6) - z(3h+5) - 3h + 3 = 0 \end{cases}$$

Troviamo adesso la retta perpendicolare α che ha dei parametri di giacitura $(-1, 2, -1)$ (Ps guarda α) passante per un punto di r_4 generico.
Possiamo sempre utilizzare R_1.

"generica retta passante per R_1" $\Rightarrow \dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}$

$r: \dfrac{x - h - 3}{l} = \dfrac{y + 2h - 1}{m} = \dfrac{z - h}{n}$ e l, m, n parametri di α.

r_5 $\dfrac{x - h - 3}{-1} = \dfrac{y + 2h - 1}{2} = \dfrac{z - h}{-1}$

retta passante per R_1 e $\perp$ ad α.

$$\begin{cases} x - h - 3 = \dfrac{y + 2h - 1}{2} \\ x - h - 3 = -z + h \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -z + 2h + 3 \\ y = -2z + 1 \end{cases}$$

Calcolando la condizione di perpendicolarità di r_4 e r_5.

mettendolo a sistema con r_4 troviamo la soluzione che desideravamo.

piano α, e incidente alla retta congiungente P_1 e P_2

$P(1,-3,2)$ $P_1(1,1,3)$ $P_2(-1,0,1)$ $\alpha: x-4y+z-1=0$

retta parallela ad α e passante per P:

$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$a(x-1)+b(y+3)+c(z-2)=0$

ricordando che a, b, c sono parametri di α.

$(x-1)-4(y+3)+(z-2)=0$

$x-1-4y-12+z-2=0$

$x-4y+z-15=0$ ← Piano parallelo ad α passante per il punto P

- S: retta per P_1 e P_2
- intersezione π e S mi da P

troviamo adesso il piano che contenga P_1, P_2, P per poi fare la intersezione dei due piani trovati

$P_1(0,4,1)$ $PP_2(-2,+3,-1)$
(P_1-P) (P_2-P)

$Q(x,y,z) \in$ al piano se PQ è linearmente dipendente da PP_1 e PP_2

$PQ(x-1, y+3, z-2)$
$(Q-P)$

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z-2 \\ 0 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -(x-1)4+(y-3)(-2)+0-(z-2)(-8)-(x-1)(3)-0=$$

$=-4x+4-2y-6+8z-16-3x+3=$

$=-7x-2y+8z-15$, è il det.

Ritroviamo il sistema H e il determinante.

$$\begin{cases} x-4y+z-15=0 \\ -7x-2y+8z-15=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-4y+z=15 \\ 7x+2y-8z=-15 \end{cases}$$

$$\text{rango}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 7 & 2 & -8 \end{pmatrix}=2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 2+28=30$$

$$\begin{cases} x-4y=-z+15 \\ 7x+2y=+8z-15 \end{cases}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -z+15 & -4 \\ 8z-15 & 2 \end{vmatrix}}{30}=\frac{-2z+30+32z-60}{30}=\frac{30z-30}{30}=z-1$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -z+15 \\ 7 & 8z-15 \end{vmatrix}}{30}=\frac{8z-15-7z+105}{30}=\frac{15z-120}{30}=\frac{1}{2}z-4$$

Mettiamo a sistema x e y:

$$\begin{cases} x=z-1 \\ y=\frac{1}{2}z-4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z=x+1 \\ y+4=\frac{1}{2}z \end{cases}$$

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y+4}{\frac{1}{2}}=\frac{z}{1} \qquad V\left(1,\tfrac{1}{2},1\right)$$

$$R(-1,-4,0)$$

oppure

$\Downarrow$

$$V\left(\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -8 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 7 & -8 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}\right)$$

ED INCIDENTE ALLA RETTA S E PERPENDICOLARE A T

$s: \begin{cases} x = -z \\ y = 2z + 1 \end{cases}$ $t: \begin{cases} x = 2z + 1 \\ y = z \end{cases}$

Equazione parametrica di s $z = k$

$s: \begin{cases} x = -k \\ y = 2k + 1 \\ z = k \end{cases}$ $S(-k, 2k+1, k)$ è il punto generico

Scriviamo la retta passante per S e O

$$\frac{x+k}{\underset{l}{+k}} = \frac{y-(2k+1)}{\underset{m}{-(2k+1)}} = \frac{y-k}{\underset{n}{-k}}$$

$r': \begin{cases} \dfrac{x+k}{k} = \dfrac{y-(2k+1)}{-(2k+1)} \quad (-2+1)\ (-1) \\ \dfrac{x+k}{k} = \dfrac{y-k}{-k} \quad +1 \end{cases}$ r' è la generica retta passante per (0,0,0) e incidente col s.

equazione parametrica di t $z = h$ $y =$

$t \begin{cases} x = 2h + 1 \\ y = h \\ z = h \end{cases}$ versori $(2, 1, 1)$

$k - (2k+1) + k - k$

$2k - 2k - 1 - k = 0$

imponiamo la perpendicolarità tra t ed r

$k + 1(-2k-1) + 1(k) = 0$

$= -1$

sostituendo il valore trovato col r' troviamo:

$\begin{cases} x = -z \\ y = z \end{cases}$ eq. retta passante per O(0,0,0) incidente a t

$\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-1}{1}$

$\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y+1}{1}$

$x = -1$

$y = -2+1 = -1$

$z = -1$

AD α E CHE INTERSECA LA RETTA r — 22

$P(2,1,1)$ $\alpha: x+y-z=0$ $r:(x=y=0)$

Il piano passante per un punto P e parallelo ad α sappiamo che è della forma $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$ con x_0, y_0, z_0 coefficienti di P, e a,b,c parametri di α.

$1(x-2)+1(y-1)-1(z-1)=0$

$x-2+y-\cancel{1}-z+\cancel{1}=0$

$x+y-z-2=0$ è l'eq. cartesiana del piano parallelo ad α e contenente P.

Consideriamo adesso il piano ortogonale a r contenente P.
con x_0, y_0, z_0 coefficienti di P, a,b,c parametri di r

$1(x-2)+1(y-1)+0(z-1)=0$

$x-2+y-1=0$

$x+y-3=0$ è l'eq cartesiana del piano ortogonale a r e contenente P.

Mettendo a sistema otteniamo:

$$\begin{cases} x+y-z-2=0 \\ x+y-3=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=3-y \\ 3-\cancel{y}+\cancel{y}-z-2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=3-y \\ z=1 \end{cases}$$

- CHE FORMA UN ANGOLO $\pi/4$ CON L'ASSE y.

$P(1,-1,2)$ $\quad \alpha: 2x+z+1=0$

I parametri di giacitura di α sono $(2,0,1)$ essi sono anche i parametri direttori della retta perpendicolare al piano. Quindi alla retta che vogliamo trovare.

Supponiamo che la generica retta passante per P ha eq.

$r: \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ $\qquad \frac{x-1}{l} = \frac{y+1}{m} = \frac{z-2}{n}$

a retta perpendicolare sarà del tipo: $lx+my+nz=0$

$2x+z=0=s$.

Imponendo la condizione di perpendicolarità tra r ed s, si ha

$a\cdot a' + b\cdot b' + c\cdot c' = 0$

dove a,b,c sono coefficienti di s e a',b',c' sono di r.

$2\cdot l + 0\cdot m + 1\cdot n = 0$

$2l+n=0$

$$\begin{cases} \frac{x-1}{l} = \frac{y+1}{m} \\ \frac{y+1}{m} = \frac{z-2}{n} \\ 2l+n=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-1)m = (y+1)l \\ (y+1)n = (z-2)m \\ 2l+n=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xm - m = yl + l \\ yn + n = zm - 2m \\ n = -2l \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} xm - m = yl + l \\ -2yl - 2l = zm - 2m \\ n = -2l \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = yl + l + m \,/m \\ -2yl - 2l = zm - 2m \\ n = -2l \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{l}{m}y + \frac{l}{m} + 1 \\ z = -\frac{2l}{m}y - \frac{2l}{m} + 2 \end{cases}$$

Imponendo $y=t$ si ha:

$$\begin{cases} x = \frac{l}{m}t + \frac{l}{m} + 1 \\ z = -\frac{2l}{m}t - \frac{2l}{m} + 2 \\ y = t \end{cases}$$

i cui parametri l, m, n direttori sono $\left(\frac{l}{m}, 1, -\frac{2l}{m}\right)$

la retta y ha parametri direttori $(0,1,0)$ l', m', n'

Imponiamo adesso che formino un angolo di $\frac{\pi}{4}$ di cui sappiamo la formula generale:

$$\cos\hat{rr'} = \frac{l \cdot l' + m \cdot m' + n \cdot n'}{\sqrt{l^2+m^2+n^2} \cdot \sqrt{l'^2+m'^2+n'^2}}$$

Sostituendo i valori:

$$\cos\hat{rr'} = \frac{\frac{l}{m} \cdot 0 + 1 \cdot 1 + \frac{2l}{m} \cdot 0}{\sqrt{\left(\frac{l}{m}\right)^2+(1)^2+\left(-\frac{2l}{m}\right)^2} \cdot \sqrt{(0)^2+(1)^2+(0)^2}} = \frac{1}{\frac{l^2}{m^2}+1+\frac{4l^2}{m^2}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{5l^2+m^2}{m^2}}}$$

deve valere $\cos\hat{ry} = \cos(\pi/4)$

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{5l^2+m^2}{m^2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \frac{1}{\left(\frac{5l^2+m^2}{m^2}\right)} = \frac{2}{4};$$

$$\frac{5l^2+m^2}{m^2} = 2; \quad 5l^2+m^2 = 2m^2 \Rightarrow \boxed{m = \sqrt{5}l}$$

sostituendolo all'espressione di r troviamo

$$\begin{cases} x = \frac{l}{\sqrt{5}l}y + \frac{l}{\sqrt{5}l} + 1 \\ z = -\frac{2l}{\sqrt{5}l}y - \frac{2l}{\sqrt{5}l} + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{y+1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \\ z = -\frac{2y+2-2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

è la soluzione

$A(2,-3)$ $r: \{x-2y+2=0$

Calcoliamo l'ortogonale a r.

$\frac{x-x_0}{\text{direttori}} = \frac{y-y_0}{\text{direttori}}$ $\Rightarrow$ parametri direttori sono i coefficiente di x e y dell'equazione. $\Rightarrow$ nel nostro caso rispettivamente sono 1 e -2

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{-2}$$

$$x-2 = \frac{-y-3}{-2}$$ moltiplico tutto per -2

$$-2x+4 = +y+3$$
$$2x-4 = -y-3$$
$$2x-4+y+3=0$$
$$2x+y-1=0$$

Mettiamo a sistema l'equazione trovata con la retta r trovando il punto di intersezione con A.

$$\begin{cases} 2x-y-1=0 \\ x-2y+2=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x-2y+2=0 \\ y=2x+1 \end{cases} \quad \begin{cases} x+4x-\cancel{2}+\cancel{2}=0 \\ y=2x+1 \end{cases}$$

$$5x=0$$
$$y=2x+1$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \quad A'(0,1)$$

$$r: \begin{cases} x = z \\ y = 1 - z \end{cases} \quad e \quad s: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

(data r e l'asse x ne faccio ruotare l'asse intorno H a cosa do luogo?.)

Calcoliamo le equazioni parametriche considerando i versori, nella prima poniamo $z = t$ ottenendo quindi:

$$r \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}$$ i versori sono $(1, -1, 1)$

Nella seconda poniamo $z = t$ ottenendo

$$s \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = t \end{cases}$$ i versori sono $(0, 0, 1)$ Δ

Consideriamo adesso un generico punto di r tangente alla circonferenza.

Per $t = 1$ troviamo $(t, 1-t, t)$ *

La condizione che ci permette di trovare un piano perpendicolare è A su cui giace la circonferenza è che i parametri di giacitura del piano coincidano con i versori della retta.

Calcoliamo il piano ortogonale alla retta s passante per r.

$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

dove x_0, y_0, z_0 sono le cordinate del punto generico *

$a(x - t) + b(y - 1 + t) + c(z - t) = 0$

dove a, b, c sono le cordinate del vettore giacitura della s. Δ

$0(x - t) + 0(y - 1 + t) + 1(z - t) = 0$

$z - t = 0$

$z = t$ è il piano calcolato

Determiniamo adesso il centro della sfera a partire da un generico punto della retta s $S(1, 2, t)$ e ponendo $t = 0$ otteniamo $S(1, 2, 0)$.

Mettiamo ora a sistema l'eq. della sfera e del piano la loro intersezione e quindi la ... consideriamo ...

$$\begin{cases} \dots \\ z=t \end{cases}$$

* dove x_0, y_0 e z_0 sono le coordinate del centro, sostituendo si f

$$\begin{cases} (x-1)^2+(y-2)^2+(z-0)^2=2^2 \\ z=t \end{cases}$$

* dove r = distanza tra il punto generico R e il centro

$$r=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2}$$

dove x_1, y_1 e z_1 sono coordinate del centro e x_0, y_0, z_0 del punto.

2; sostituendo alla formula, otteniamo

* sostituiamo r al sistema

$$r=\sqrt{(1-t)^2+(1+t)^2+t^2}$$

$$\begin{cases} (x-1)^2+(y-2)^2+(z-0)^2=(1-t)^2+(1+t)^2+t^2 \\ z=t \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-1)^2+(y-2)^2+(z-0)^2=1+\cancel{t^2}-\cancel{2t}+1+\cancel{t^2}+\cancel{2t}+t^2 \\ z=t \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-1)^2+(y-2)^2+z^2=t^2+2 \\ z=t \end{cases}$$

* a t si sostituisce z

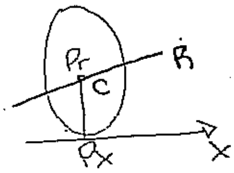
$$\begin{cases} (x-1)^2+(y-2)^2+\cancel{z^2}-\cancel{z^2}-2=0 \\ z=t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+1-2x+y^2+4-4y-2=0 \\ z=t \end{cases}$$

$x^2+y^2-2x-4y+3=0$ è la superficie della retta r intorno alla retta s

DATA UNA RETTA R E L'ASSE X A COSA DÀ LUOGO LA ROTAZIONE DELL'ASSE X INTORNO LA RETTA r? 41

$$r: \begin{cases} x-z=0 \\ y=1 \end{cases} \qquad x: \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$$



Eq parametrica di X ponendo $x=t$

$$\begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \qquad P_x(t,0,0) \text{ punto generico } x$$

Calcoliamo il piano passante per P_x

$$* \; a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$ * dove x_0, y_0, z_0 sono coordinate del punto P_x

Eq parametrica di r, ponendo $z=t$

$$\begin{cases} x=t \\ y=1 \\ z=t \end{cases} \qquad P_r(t,1,t) \text{ punto generico di } r$$

I parametri di giacitura di r sono $(1, 0, 1)$ (a, b, c) e sono gli stessi passanti per P_x, sostituendoli a * otteniamo $x-t+z=0$ piano su cui giace la circonferenza

$P_r(t,1,t)$ è centro della sfera per $t=0$

$C(0,1,0)$ e presa la sfera di centro C e raggio $r=CP_x$ si ha:

$$r=|CP_x|=\sqrt{(t-0)^2+(0-1)^2+(0-0)^2}=\sqrt{t^2+1}$$

Eq. sfera $x^2+(y-1)^2+z^2=t^2+1$

che messo a sistema con l'eq. del piano si ha:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2y-t^2=0 \\ x+z=t \end{cases}$$

$$x^2+y^2+z^2-2y-(x+z)^2=0$$

$$\cancel{x^2}+y^2+\cancel{z^2}-2y-\cancel{x^2}-\cancel{z^2}-2xz=0$$

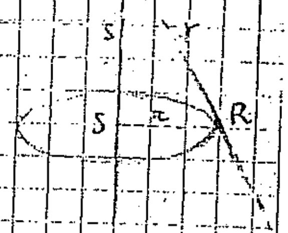
$$y^2-2y-2xz=0$$

5) DETERMINARE L'EQUAZIONE CARTESIANA DELLA SUPERFICIE GENERATA DALLA ROTAZIONE DELLA RETTA

$$r: \begin{cases} x = -y \\ z = 2y+1 \end{cases} \quad \text{INTORNO ALLA RETTA} \quad s: \begin{cases} x = 1 \\ z = y+1 \end{cases}$$

Calcoliamo le equazioni parametriche e i versori delle rette r ed s.

$$r: \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = 2t+1 \end{cases} \Rightarrow \text{versori}(r) = (-1, 1, 2)$$



$$s: \begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = t+1 \end{cases} \Rightarrow \text{versori}(s) = (0, 1, 1)$$

Consideriamo adesso un generico punto di r tangente alla circonferenza $R(-t, t, 2t+1)$

La condizione che ci permette di trovare un piano perpendicolare ad s su cui giace la circonferenza è che i parametri di giacitura del piano coincidano con i versori della retta.

Calcoliamo il piano ortogonale alla retta s passante per R.

$$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$$

con x_0, y_0, z_0 coordinate di R

e a, b, c parametri di giacitura di s

$$y + z - 3t - 1 = 0$$ ← EQ. CARTESIANA DEL PIANO DELLA CIRCONFERENZA

$t = 1 - z$

$\begin{cases} x = -2(1-z) \\ y = -1-(1-z) \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2+z \\ y = \cancel{-1}\,\cancel{-1}+z \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2+z \\ y = z \end{cases}$

$4h - 4$

$4h = 4$

$h = \frac{4}{4} = 1$

$4t + 4$

$4t = -4$

$t = -\frac{4}{1}$

Un generico punto di s è della forma $(1, t, t+1)$

Ponendo $t=0$ otteniamo $S(1, 0, 1)$

Calcoliamo l'equazione della sfera con centro S e raggio $r = \|SR\|$.

$$r = \|SR\| = \sqrt{(t-1)^2+(t)^2+(2t+1-1)^2} = \sqrt{1+8t^2}$$

la sfera è

$$(x-1)^2+(y-0)^2+(z-1)^2 = 1+8t^2$$ ← EQ. SFERA CENTRATA IN S

Mettendo a sistema il piano della circonferenza con la sfera, individuiamo la superficie generata dalla rotazione della retta r intorno alla retta s.

$$\begin{cases} (x-1)^2+y^2+(z-1)^2 = 1+8t^2 \\ y+z-3t-1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x-2z+1-8t^2=0 \\ t=\dfrac{y+z-1}{3} \end{cases}$$

$$x^2+y^2+z^2-2x-2z+1-\frac{8}{9}(y+z-1)^2=0$$

$$x^2+\left(1-\frac{8}{9}\right)y^2+\left(1-\frac{8}{9}\right)z^2-2x+\left(-2+\frac{16}{9}\right)z+1-\frac{8}{9}-\frac{16}{9}yz+\frac{16}{9}y=0$$

$$x^2+\frac{1}{9}y^2+\frac{1}{9}z^2-2x-\frac{2}{9}z-\frac{16}{9}yz+\frac{16}{9}y+\frac{1}{9}=0$$

$$9x^2+y^2+9z^2-18x-2z-16yz+16y+1=0$$ ← EQ. DELLA CIRCONFERENZA GENERATA.

$2t - 2 - \frac{1}{2}$ $\qquad -2 - \frac{1}{2} \qquad \frac{-4-1}{2}$

$2t - \frac{4-1}{2} \qquad 2t$

$\left(-\frac{5}{2}\right)^2 \qquad \frac{5\times 2}{2\times 2} \qquad \frac{25}{2}$

$2 \cdot 2t \cdot -\frac{5}{2} = \qquad 2 \cdot x \cdot -\frac{1}{2} \qquad -\frac{2x}{2}$

$1\,2\cancel{7}*$

$\frac{27}{54}$

$\frac{1}{4} + 1 - \frac{27}{2} =$

$= \frac{1+4-54}{4} = -\frac{49}{4}.$

$-4t = -x - y - z = 4t.$

$t = \frac{x+y+z+4}{4}$

$x^2 + \frac{1}{4} - x + y^2 + 1 + 2y + z^2 = 6t^2 - 12t + \frac{27}{2}$

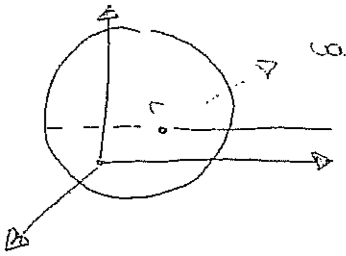
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - x + 2y - 6t^2 + 12t - \frac{49}{4} = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - x + 2y - 6 \cdot \left(\frac{x+y+z+4}{4}\right)^2 + 12 \cdot \left(\frac{x+y+z+4}{4}\right) \end{cases}$$

$C(\alpha, \beta, \gamma) \quad r = 2$

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = r^2$$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 2^2$$

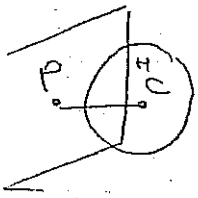
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 1 = 0$$



cabeh r e centro

SFERA DI CENTRO C TG AL PIANO π

$C(\underset{x_0}{\overset{\alpha}{1}}, \underset{y_0}{\overset{\beta}{1}}, \underset{z_0}{\overset{\gamma}{2}}) \qquad \pi: \underset{a}{x} + \underset{b}{y} + \underset{c}{z} + \underset{d}{2} = 0$



Per calcolare il raggio, dobbiamo calcolare la distanza dal centro della sfera e il piano:

$$r = d(C, P) = \left| \frac{a x_0 + b y_0 + c z_0 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right| = \frac{1+1+2+2}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

$$\underset{a}{1} \cdot x + \underset{b}{1} \cdot y + \underset{c}{1} \cdot z + \underset{d}{2} = 0 \qquad \delta = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - r^2$$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 12$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z - 6 = 0$$

[illegible] DI UNA [illegible] DI UNA [illegible]
E AVENTE CENTRO SU UNA RETTA.

$A(0,0,1)$ retta r: $\begin{cases} x = z-1 \\ y = 0 \end{cases}$ avente centro su s: $\begin{cases} x = -2z \\ y = -z \end{cases}$

Calcoliamo la stella di piani passanti per A la cui eq è

$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$

$a(x-0) + b(y-0) + c(z-1) = 0$

$ax + by + cz - c = 0$ *

Calcoliamo i parametri di giacitura del piano normale alla retta r, che coincidono con il versore r e calcolandoli l'equazione parametrica della retta ponendo $z = t$

$\begin{cases} x = t-1 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$ $(1,0,1)$ versore

Sostituendo a, b, c appena trovati a * avremo:

$x + z - 1 = 0$ $x + z = 1$

Mettiamo a sistema con la retta s.

$\begin{cases} x = -2z \\ y = -z \\ x + z - 1 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2 \\ y = +1 \\ 2 + z - 1 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases}$ centro $(2,1,-1)$

Adesso possiamo calcolare il raggio, calcolando la distanza tra il centro e il punto A.

$r = |AC| = \sqrt{(x_1-x_0)^2 + (y_1-y_0)^2 + (z_1-z_0)^2}$

$|AC| = \sqrt{(2-0)^2 + (1-0)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3$ $r = 3$

trovato il raggio adesso troviamo l'eq. della sfera

$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = r^2$

$(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 3^2$

$x^2 + 4 - 4x + y^2 + 1 - 2y + z^2 + 1 - 2z = 9$

$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 2z - 3 = 0$, eq. sfera.

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + z - \frac{1}{2} = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{6} \\ y = 5/6 \\ z = 2/3 \end{cases}$$

$C\left(-\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{2}{3}\right)$ centro circonferenza.

$$\begin{cases} \alpha & x^2+y^2+z^2-2y+z=0 \\ \pi & x+y-z=0 \end{cases}$$

Dall'eq della sfera $\alpha: x^2+y^2+z^2-2y+z=0$ possiamo calcolare il centro $\underline{C_\alpha}\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right)$ con a,b,c coeff di grado 1

$$C_\alpha\left(\underset{\alpha}{0}, \underset{\beta}{1}, \underset{\gamma}{-\frac{1}{2}}\right) \quad \underline{\text{centro sfera}}$$

Possiamo calcolare anche il raggio della sfera.

Dalla formula $\delta^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 - r_\alpha^2$ sapendo che $\delta = 0$

$\underline{r_\alpha^2} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \qquad r_\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$ <u>raggio sfera.</u>

Possiamo calcolare anche la distanza dal centro della sfera al piano della circonferenza.

$$d(C,\pi) = \left| \frac{ax_0+by_0+cz_0+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \right| \begin{matrix} \to x_0, y_0, z_0 \text{ di } C \\ \to a, b, c \text{ di } \pi \end{matrix}$$

$$d(C,\pi) = \frac{1+1/2}{\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \underline{\text{distanza}}$$

Possiamo calcolare il raggio della circonferenza attraverso Pitagora $\quad r = \sqrt{r_\alpha^2 - (d(C,\pi))^2} = \sqrt{\frac{5}{4} + \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ <u>raggio con Pitagora</u>

Per calcolare il centro della circonferenza calcoliamo la retta perpendicolare al piano e passante per il centro della sfera.

L'intersezione tra questa retta e il piano su cui giace la circonferenza individua il centro della circonferenza.

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n} \qquad x_0, y_0, z_0 \text{ di } C_\alpha$$

l, m, n parametri giacitura del piano.

$$\frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-\frac{1}{2}}{-1}$$

$$\begin{cases} x = y-1 \\ x = -z+\frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x-y+1=0 \\ x+z-\frac{1}{2}=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y+1=0 \\ x+z-\frac{1}{2}=0 \end{cases} \quad \text{retta} \perp \text{a } \pi \text{ passante per } C_\alpha$$

CIRCONFERENZA CON PUNTI A E B CHE SONO COME ESTREMI DEL SEGMENTO.

$A(\overset{x_0}{1},3)$ $B(\overset{y_0}{-3},5)$ $* \, C(x,y) = C\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

$^*C(x,y) \Rightarrow$ C è il punto medio tra A e B $C(A,B) = (\underset{x_2}{-1}, \underset{y_2}{4})$

Calcoliamo il raggio come la distanza dal centro a uno dei due estremi. (CA o CB)

$$|CA| = \sqrt{\overset{x_0 - x_2}{(1+1)^2} + \overset{y_0 - y_2}{(5-4)^2}} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

Calcoliamo l'equazione della circonferenza

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$$

$$(x+1)^2 + (y-4)^2 = 5$$

$$x^2+1+2x+y^2+16-8y-5=0 \qquad \gamma = 1+16-5=12$$

$$x^2+y^2+2x-8y+12=0$$

DETERMINARE LA CIRCONFERENZA TANGENTE ALL'ASSE Y NEL PUNTO P e PASSANTE PER IL PUNTO Q. 49

$P(\overset{x_0}{0}, \overset{y_0}{1}, \overset{z_0}{0})$ $Q(1,1,1)$

• procedimento. eh?

trovare le piano perpendicolare alla retta e passante per P,

trovare il piano che contiene la retta e il punto Q.

intersecare i due piani così si trova la retta su cui giace il centro

prendere un generico punto della nuova retta e imporre che la distanza di questo punto ai punti P e Q sia uguale.

$r: \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$ è l'eq dell'asse y. $\vec{v}(0,1,0)$ $0(x-0)+1(y-1)+0(z-0)=0$

$y-1=0$

Il fascio di piani centrato sull'asse y è $x+\lambda z=0$

imponendolo per $Q(1,1,1)$ troviamo $1+\lambda=0$ $\boxed{\lambda=-1}$ $x-z=0$

eq. cartesiana del piano su cui giace la circonferenza

trovare l'equazione della retta passante per P e Q

$$r: \begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt \\ z=z_0+nt \end{cases} \qquad \begin{aligned} l&=x_1-x_0=1 \\ m&=y_1-y_0=0 \\ n&=z_1-z_0=1 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x=t \\ y=1 \\ z=t \end{cases} \quad \text{la cui cartesiana è} \quad \begin{cases} x-z=0 \\ y-1=0 \end{cases}$$

calcoliamo il punto medio M tra P e Q.

$$M=\left(\frac{x_0+x_1}{2}, \frac{y_0+y_1}{2}, \frac{z_0+z_1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$$

Determiniamo adesso il piano π ortogonale a r (con parametri di giacitura $(1,0,1)$) e passante per M.

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \begin{array}{l} \to x_0,y_0,z_0 \text{ di } M \\ \to a,b,c \text{ di } r \end{array}$$

$$1\left(x-\frac{1}{2}\right)+0(y-1)+1\left(z-\frac{1}{2}\right)=0$$

$$x-\frac{1}{2}+z-\frac{1}{2}=0$$

$$x+z-\cancel{\frac{2}{2}}=0$$

$x+z-1$ ← eq su cui giace il centro della sfera

Generico centro sfera $C(\alpha,1,1-\alpha)$

Il raggio della sfera è uguale alla distanza tra C e il punto ~~an~~ in cui la circonferenza tange l'asse y.

$$r=|CP|=\sqrt{\alpha^2+(1-\alpha)^2}$$

L'equazione della sfera di centro C e raggio r è

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=r^2$$

$$(x-\alpha)^2+(y-1)^2+(z-1+\alpha)^2=\alpha^2+(1-\alpha)^2$$

$$x^2+\cancel{\alpha^2}-2\alpha x+y^2+1-2y+z^2-2(1-\alpha)z+1+\cancel{(1-\alpha)^2}=\cancel{\alpha^2}+\cancel{(1-\alpha)^2}$$

$$x^2+y^2+z^2-2y-2z-2\alpha x+2\alpha z=0$$

$$x^2+y^2+z^2-2y-2z-2\alpha\underbrace{(x-z)}_{\Downarrow}=0$$

Mettendolo a sistema la sfera con il piano π otteniamo la circonferenza

$$x^2+y^2+z^2-2y-2z-2\alpha(x-z)=0$$

$$x-z=0$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2y-2z-2\alpha(x-z)=0 \\ x=z \end{cases}$$

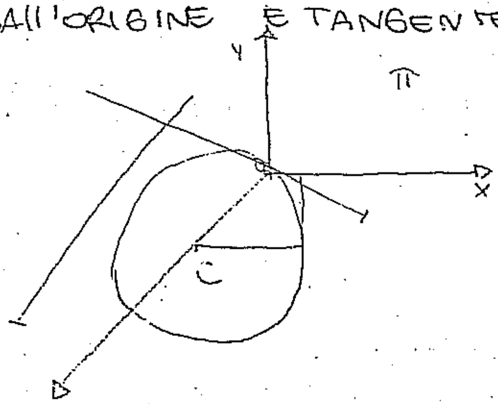
$$\begin{cases} z^2+y^2+z^2-2y-2z-2\alpha(z-z)=0 \\ x=z \end{cases} \quad \begin{cases} 2z^2+y^2-2y-2z=0 \\ x=z \end{cases}$$

DETERMINARE LA SFERA AVENTE CENTRO C ∈ π E AVENTE

DISTANZA MINIMA DALL'ORIGINE E TANGENTE ALLA RETTA S

$\pi : x - y + 2z - 3 = 0$

$s: x = y = z + 1$



Dobbiamo trovare l'eq. della retta ortogonale al piano π e passante per $O(0,0,0)$: $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ x_0, y_0, z_0 di O; a, b, c di π (par giacitura)

otteniamo $\frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}$

* i parametri di giacitura di un piano e di una retta ortogonale a questo devono essere uguali

che possiamo sdoppiare in

$x = -y$ e $z = 2x$

$$\begin{cases} x = -y \\ z = 2x \\ x - y + 2z - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = 2x \\ x + x + 4x - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = 2x \\ 6x - 3 = 0 \end{cases} = \begin{cases} y = -\frac{1}{2} \\ z = 1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

consideriamo adesso la stella di piano passanti per C.

$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

$a(x - \frac{1}{2}) + b(y + \frac{1}{2}) + c(z - 1) = 0$ *

consideriamo la parametrica di s, ponendo $z = t$

$$\begin{cases} x = y \\ x = z + 1 \\ z = t \end{cases} \quad \begin{cases} y = t + 1 \\ x = t + 1 \\ z = t \end{cases}$$ versori $(s) = (1, 1, 1)$

considerando a, b, c di * come componenti dei versori

$x - \cancel{\frac{1}{2}} + y + \cancel{\frac{1}{2}} + z - 1 = 0$

$x + y + z - 1 = 0$ ← piano ortogonale a s e passante per C

mettendolo in sistema con s otteniamo il punto di tangenza.

$$\begin{cases} x+y+z-1=0 \\ x=y \\ x=z+1 \end{cases} \qquad \begin{cases} z+1+z+\cancel{1}+z-\cancel{1}=0 \\ y=z+1 \\ x=z+1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3z+1=0 \\ y=z+1 \\ x=z+1 \end{cases} \to \begin{cases} z=-\frac{1}{3} \\ y=\frac{2}{3} \\ x=\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$S\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

Il raggio della sfera è

$$r=|CS|=\sqrt{(2/3-1/2)^2+(2/3+1/2)^2+(-1/3-1)^2}=$$

$$\sqrt{\left(\frac{4-3}{6}\right)^2+\left(\frac{4+3}{6}\right)^2+\left(\frac{-1-3}{3}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{7}{6}\right)^2+\left(\frac{-4}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{36}+\frac{49}{36}+\frac{16}{9}}=$$

$$=\sqrt{\frac{114}{36}}=\sqrt{\frac{19}{6}}$$

l'equazione della sfera è $(x-1/2)^2+(y+1/2)^2+(z-1)^2=19/6$

DETERMINARE LA SFERA CON CENTRO UN PUNTO $P \in \pi: x - y + 2z - 3 = 0$ AVENTE DISTANZA MINIMA DALL'ORIGINE $(0,0,0)$ E TANGENTE LA RETTA $s: x = y = z + 1$

Trovare la retta passante per $O(0,0,0)$ e perpendicolare al piano π che ha parametri di giacitura $(1,-1,2)$

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

con x_0, y_0, z_0 coordinate di O
e l, m, n parametri di giacitura di π

$$\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 2t \end{cases}$$ imponendo $t = -y$ otteniamo l'eq. cartesiana $$\begin{cases} x = -y \\ z = -2y \end{cases}$$

Mettendo questa retta a sistema con il piano, otteniamo il pt sul piano a distanza minima dall'origine

$$\begin{cases} x = -y \\ z = -2y \\ x - y + 2z = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -y \\ z = -2y \\ -y - y - 4y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1/2 \\ z = 1 \\ y = -1/2 \end{cases}$$

$$C\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$$

Tracciamo il piano perpendicolare alla retta s passante per C

$$s: \begin{cases} x = z + 1 \\ y = z + 1 \end{cases} \qquad \vec{s}\,(1,1,1)$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0)$$

con x_0, y_0, z_0 coordinate di C
e a, b, c parametri di giacitura di s

5) DETERMINARE LA SFERA TANGENTE IN $O(0,0,0)$ AL PIANO $x+y-z=0$ E PASSANTE PER $P(1,1,0)$. SCRIVERE INOLTRE LA EQUAZIONE DEL PIANO TANGENTE LA SFERA IN P.

1ª parte

Calcoliamo l'equazione della retta perpendicolare al piano α $x+y-z=0$ passante per l'origine.

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$

dove x_0, y_0, z_0 sono le coordinate di O e a, b, c i parametri di giacitura di α:

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-1}$$

$$r: \begin{cases} x=y \\ z=-y \end{cases} \quad \text{la cui eq. parametrica è} \quad \begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=-t \end{cases}$$

Il centro della sfera giacerà su r ed avrà coordinate

$$C(t, t, -t).$$

Per soddisfare la condizione di tangenza della sfera sul piano e il fatto che P deve essere contenuto (al più sulla superficie) deve sussistere:

$$d(O,C) \geq d(P,C)$$

$$|OC| = \sqrt{(t-0)^2+(t-0)^2+(-t-0)^2} = \sqrt{3}\,t$$

$$|PC| = \sqrt{(t-1)^2+(t-1)^2+(t-0)^2} = \sqrt{3t^2-2t+1}$$

$$T^2+1-2T+T^2+1-2T+T^2 = \sqrt{3T^2-4T+2}$$

$$\sqrt{3}\,t \geq \sqrt{3t^2-2t+1}$$

$$3t^2 \geq 3t^2-2t+1 \qquad 3T^2 \geq 3T^2-4T+2$$

$$t \geq \frac{1}{2} \qquad 4T \geq 2 \rightarrow T \geq \frac{1}{2}$$

L'equazione della sfera tangente in $O(0,0,0)$ al piano α e passante per $P(1,1,0)$ è:

$$(x-t)^2+(y-t)^2+(z+t)^2 = 3t^2 \qquad \text{con } t \geq 1/2$$

II^a PARTE

Per il piano tangere la sfera in P, questo deve essere ortogonale alla retta che congiunge P con il centro della sfera e $r=|PC|$, quindi $C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

Troviamo l'equazione della retta passante per P e C:

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{z-z_0}{z_1-z_0}$$

quindi $\dfrac{x-1}{\frac{1}{2}-1} = \dfrac{y-1}{\frac{1}{2}-1} = \dfrac{z}{-\frac{1}{2}}$

$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t$

$y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \Rightarrow$

$z = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t$

$$s: \begin{cases} x = y \\ z = y - 1 \end{cases}$$

la cui equazione parametrica è:

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t - 1 \end{cases}$$

L'equazione del piano ortogonale a s contenente il punto P è:

$$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$$

con x_0, y_0, z_0 coordinate di P

e a, b, c parametri di giacitura di s

$$x + y + z - 2 = 0$$ ← EQ. CARTESIANA DEL PIANO TANGENTE LA SFERA NEL PUNTO P

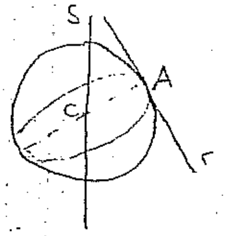
$x = \frac{1}{2}(1+t)$

$y = \frac{1}{2}(1+t) \qquad 2x = 2y \Rightarrow x = y$

$z = -\frac{1}{2}(1+t)$

EQUAZIONE DI UNA SFERA TANGENTE AD UN PUNTO DI UNA RETTA E AVENTE CENTRO SU UNA RETTA. 56

$A(0,0,1)$ $r: \begin{cases} x = z-1 \\ y=0 \end{cases}$ e avente centro $s: \begin{cases} x = -2z \\ y=-z \end{cases}$



Calcoliamo la stella di piani passanti per il punto A, la cui equazione è

$$\underset{\uparrow\ A_x}{a(x-x_0)} + \underset{\uparrow\ A_y}{b(y-y_0)} + \underset{\uparrow\ A_z}{c(z-z_0)}=0$$

$$a(x)+b(y)+c(z-1)=0$$

$$ax+by+cz-c=0$$

Calcoliamo l'equazione parametrica di r, imponendo $z=t$

$$r\begin{cases} x=t-1 \\ y=0 \\ z=t \end{cases}$$ i cui versori sono $(1,0,1)$

Alla stella di piani passanti per A sostituiamo i parametri di giacitura del versore di r, trovando così il piano ortogonale alla retta r contenente A.

$$x+z-1=0$$

Mettendo quest'equazione a sistema con s, otteniamo il centro della sfera

$$\begin{cases} x+z-1=0 \\ x=-2z \\ y=-z \end{cases} \quad \begin{cases} -2z+z-1=0 \\ x=-2z \\ y=-z \end{cases} \quad \begin{cases} z=-1 \\ x=2 \\ y=1 \end{cases} \quad C(2,1,-1)$$

Adesso possiamo calcolare il raggio $r=|CA|$

$$r=|CA|=\sqrt{(0+2)^2+(0-1)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{9}=3$$

l'equazione della sfera è
D7

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=r^2$$

$$(x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=9$$

$$x^2+y^2+z^2-4x-2y+2z-3=0$$

TROVARE LA CIRCONFERENZA CHE SI HA INTERSECANDO LA SFERA DI CENTRO $C(0,1,0)$ E RAGGIO $\overline{CX}$ (CON $X(h,0,0)$), ORTOGONALE A $r: \begin{cases} x-z=0 \\ y=0 \end{cases}$

Calcoliamo l'equazione parametrica di r, imponendo $z=t$

$$r: \begin{cases} x=z \\ y=0 \\ z=t \end{cases} \quad \begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=t \end{cases} \qquad \text{versori}(r) = (1,0,1)$$

Calcoliamo il piano contenente X e ortogonale a r:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

con x_0, y_0, z_0 coordinate di X

e a, b, c parametri di giacitura di r

ottenendo: $x-h+z=0$ ← EQ. PIANO ORTOGONALE A r CONTENENTE X

Calcoliamo il raggio della sfera:

$$\rho = |CX| = \sqrt{h^2+1}$$

L'equazione della sfera è:

$$(x-0)^2+(y-1)^2+(z-0)^2 = h^2+1$$

$$x^2+y^2+z^2-2x = h^2 \quad \text{← SFERA}$$

Messe a sistema le equazioni del piano e della sfera otteniamo la circonferenza:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x = h^2 \\ x-h+z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x = (x+z)^2 \\ h = x+z \end{cases}$$

$$\cancel{x^2}+y^2+\cancel{z^2}-2x-\cancel{x^2}-2xz-\cancel{z^2}=0$$

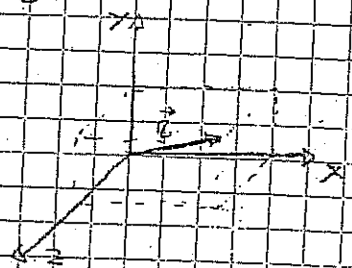
$$y^2-2xz-2x=0 \quad \text{← NON E' UNA CIRCONFERENZA}$$

CILINDRO CON GENERATRICI PARALLELE A $\vec{r}\,(2,1,1)$ E DIRETTRICE LA CIRCONFERENZA

$$\begin{cases} x^2+y^2=9 & \leftarrow \text{circonf} \\ z=1 & \leftarrow \text{piano} \end{cases}$$

Considerato $\vec{r}$ come versore applicato nell'origine $O(0,0,0)$.

Da questo possiamo ricavare l'equazione parametrica della retta generica parallela a $\vec{r}\,(2,1,1)$



$$\begin{cases} x = 2t + p \\ y = t + q \\ z = t \end{cases}$$

passiamo dall'equazione parametrica alla cartesiana, ponendo $t = z$

eq. cartesiana

$$\begin{cases} x = 2z + p & \leftarrow \text{rette generatrici} \\ y = z + q \end{cases}$$

Consideriamo i punti individuati da tali rette sul piano $z=1$, questi saranno della forma:

$$\begin{cases} x = 2 + p \\ y = 1 + q \end{cases}$$

Sostituiamo i valori di x e y trovati all'equazione della circonferenza

$$(2+p)^2 + (1+q)^2 = 9$$

sostituendo a questa i valori di p e q che ricaviamo dall'eq. cartesiana delle rette generatrici

$$\begin{cases} p = x - 2z \\ q = y - z \end{cases}$$

otteniamo

$$(2 + x - 2z)^2 + (1 + y - z)^2 = 9$$

$$(x-2z)^2 + (y-z)^2 + 4x - 8z + 2y + 2z = 4 \quad \leftarrow \text{EQ. CARTESIANA CILINDRO}$$

RETTE, PIANI, SFERE, CIRCONFERENZE

1. Esercizi

Esercizio 1. Dati i punti $A(1,0,1)$ e $B(2,1,1)$ trovare

(1) la loro distanza;
(2) il punto medio del segmento AB;
(3) la retta AB sia in forma parametrica, sia in forma cartesiana;
(4) i punti C della retta AB che verificano $\overline{AC} = 2\overline{AB}$, ovvero $\overline{AC} = 2\overline{BC}$.

Esercizio 2. Data la retta $r : \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+y+z=2 \end{cases}$ ed il punto $A(1,1,0)$, calcolare:

(1) una forma parametrica per r;
(2) un vettore parallelo ad r;
(3) la distanza tra A ed r;
(4) le equazioni parametriche e cartesiane della retta s per A parallela ad r;
(5) la distanza tra r ed s;
(6) la retta per A incidente ed ortogonale ad r;
(7) le rette per A incidenti r e formanti un angolo di $\pi/4$ con r;
(8) la retta per A incidente r e parallela al piano $\alpha : 2x+z=0$.

Verificare anche che $A \notin r$.

Esercizio 3. Stabilire se le rette $r : \begin{cases} x=1 \\ y+z=0 \end{cases}$ ed $s : \begin{cases} x+y=0 \\ z=1 \end{cases}$ sono incidenti, parallele, o sghembe. Ripetere l' esercizio con r e $t : \begin{cases} x+y=0 \\ z=-1 \end{cases}$ e con le rette s e t. Calcolare inoltre

(1) la distanza tra s e t;
(2) gli angoli tra le precedenti coppie di rette;
(3) la retta p per $A(2,2,-1)$ ortogonale ad r e ad s;
(4) l' unica retta q perpendicolare ad r e ad s ed incidente entrambe.

Esercizio 4. Determinare l' equazione del piano passante per $A(1,1,1)$ ed ortogonale al vettore $\mathbf{u} = (1,-1,2)$.

Esercizio 5. Determinare l' equazione del piano contenente i punti $A(1,1,0)$, $B(1,0,1)$, e $C(0,1,2)$. Stabilire se il punto $D(1,2,1)$ è un punto del piano. Stabilire se la retta $r : x = 1+t, y = 1+t, z = -3t$, è contenuta nel piano.

Esercizio 6. Determinare l' equazione del piano contenente il punto $A(1,1,1)$ e la retta $r : \begin{cases} x+2y+z=1 \\ -x+y-z=0 \end{cases}$

Esercizio 7. Dato il punto $A(1,0,-1)$ ed il piano $\pi : x+y=2$, determinare la retta r per A perpendicolare a π. Calcolare, inoltre, la retta s per A, parallela al piano π ed incidente l' asse x.

Esercizio 8. Verificare che la retta $r : x = 1+t, y = 2-t, z = 1+t$, ed il piano $\pi : x+2y+z=1$ sono paralleli, e calcolare la distanza $d(r,\pi)$.

Esercizio 9. Date le rette $r: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-t \\ z = 1+t \end{cases}$, $s: \begin{cases} x = 1-t \\ y = 3+t \\ z = -t \end{cases}$, e $t: \begin{cases} x+y=3 \\ x-y+z=0 \end{cases}$

(1) verificare che r ed s sono parallele e calcolare il piano che le contiene;
(2) verificare che r e t sono incidenti e calcolare il piano che le contiene;
(3) verificare che s e t sono sghembe e trovare la retta comune perpendicolare di s e t. Trovare inoltre la loro distanza, senza usare la comune perpendicolare;
(4) calcolare gli angoli tra il piano r, s e la retta t; tra il piano r, t e la retta s; tra i piani r, s ed r, t.

Esercizio 10. Trovare l' equazione dei piani contenenti la retta $r: \begin{cases} 2y - z = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$ e formanti un angolo di $\pi/3$ con l' asse y.

Esercizio 11. Calcolare l' equazione delle rette r, s per $A(1,1,-1)$ incidenti il piano $\alpha: x + 2y - 3z = 1$ secondo un angolo di $\pi/4$ e parallele al piano $\beta: 3x + z = 2$.

Esercizio 12. Calcolare l' equazione della sfera σ di centro $C(1,1,1)$ e raggio 2. L' origine del sistema di riferimento è interno, esterno o sulla sfera σ?

Esercizio 13. Data la sfera σ di equazione $x^2+y^2+z^2+2x-2y-4z+2=0$, determinare l' equazione del piano tangente a σ in $A(1,1,2)$.

Esercizio 14. Data la circonferenza

$$\gamma: \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 2z - 13 = 0 \end{cases}$$

determinarne centro e raggio. Determinare poi le tangenti a γ per $B(1,3,4)$.

Esercizio 15. Determinare la circonferenza γ per i punti $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, e $C(0,0,1)$. Trovare poi le sfera di raggio $\sqrt{10}$ contenenti γ.

Esercizio 16. Determinare le circonferenze tangenti all' asse z in $A(0,0,3)$ e verificanti una delle seguenti condizioni:

(1) passante per $B(1,2,1)$;
(2) di raggio 3 e centro sul piano $x - y = 0$;
(3) con centro sulla retta $r: x = 1+t, y = 2+t, z = 1-t$;
(4) con centro sulla retta $s: x = 1+t, y = 2-t, z = 3$, e di raggio minimo;
(5) tangente alla retta $t: x = y = z$.

Esercizio 17. Sia σ la sfera di centro $C(-1,0,2)$ e raggio $R = 3$. Trovare i piani per $r: \begin{cases} 3x + y - 5 = 0 \\ 2x - z - 1 = 0 \end{cases}$ che tagliano σ lungo una circonferenza di raggio 1.

Esercizio 18. Determinare la sfera di centro $C(1,1,2)$ tangente al piano $\alpha: x+y+z+2 = 0$.

Esercizio 19. Determinare la sfera di centro $C(1,2,1)$ tangente alla retta $r: x = t, y = 1-t, z = t$.

Esercizio 20. Determinare la circonferenza con centro sull' asse x, tangente alla retta $r: x = 1+t, y = 1-t, z = 2$, e di raggio minimo.

2. Soluzione di alcuni esercizi

Soluzione dell' Esercizio 1. (1)Il vettore $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A, y_B-y_A, z_B-z_A)=(1,1,0)$ e la distanza tra A e B è uguale al modulo del vettore di estremi A e B. Quindi, $\overline{AB}=\sqrt{1^2+1^2+0^2}=\sqrt{2}$.

(2) Il punto medio M verifica $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ da cui ricaviamo $x_M=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$, $y_M=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, $z_M=1$; ossia, $M(\frac{3}{2},\frac{1}{2},1)$.

(3) La retta per A e B è formata dai punti P per cui $\overrightarrow{AP}=t\,\overrightarrow{AB}$, $t\in\mathbb{R}$. Quindi abbiamo

$$r_{AB}:\begin{cases} x=1+t \\ y=0+t \\ z=1. \end{cases}$$

Eliminando la t dalle equazioni, ricaviamo la forma cartesiana della retta che corrisponde a scriverla come intersezione di due piani che la contengono. Dalla prima equazione, $t=x-1$, e quindi $r_{AB}:\begin{cases} x-y=1 \\ z=1. \end{cases}$

(4) La prima uguaglianza corrisponde ad uno dei due vettori $\overrightarrow{AC}=2\,\overrightarrow{AB}$, oppure $\overrightarrow{AC}=-2\,\overrightarrow{AB}$. Nel primo caso abbiamo il punto $C_1(3,2,1)$, mentre nel secondo abbiamo $C_2(-1,-2,1)$.

Soluzione dell' Esercizio 2. (1) Basta risolvere il sistema che definisce r. Abbiamo quindi $r: x=2, y=t, z=-2-t$.

(2) Un vettore parallelo ad r ha come entrate i coefficienti di t in una scrittura parametrica della retta r. Abbiamo quindi $\mathrm{v}=(0,1,-1)$. In alternativa, basta calcolare due punti della retta e scrivere un vettore che li ammette come estremi.

(3) Un punto $B\in r$ è ad esempio il punto $B(2,0,-2)$ che si ottiene dando il valore $t=0$ al parametro t in (1). Un altro punto di r è C tale che $\overrightarrow{BC}=\mathrm{v}$. La distanza tra r ed A è l' altezza del parallelogramma avente AB e BC come lati consecutivi. L' area di tale parallelogramma è data dal modulo del vettore $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{BC}=(1,-1,-2)\wedge(0,1,-1)=(3,1,1)$. Quindi, $d(A,r)=\frac{\sqrt{11}}{BC}=\sqrt{\frac{11}{2}}$. La distanza può essere calcolata anche come la distanza tra A e la proiezione ortogonale di A su r. La proiezione si calcola come l' intersezione tra il piano per A ortogonale ad r e la retta r.

(4) La retta s è parallela al vettore v, e passa per A. Quindi, $s: x=1, y=1+t, z=-t$. Una sua forma cartesiana è $s:\begin{cases} x=1 \\ y+z=1. \end{cases}$

(5) La distanza tra r ed s è uguale alla distanza tra A ed r e quindi vale $\sqrt{\frac{11}{2}}$.

$A\notin r$ perché le sue coordinate non sono soluzioni del sistema che definisce r.

Soluzione dell' Esercizio 3. Un vettore parallelo alla retta r è il vettore $\mathrm{v_r}=(0,1,-1)$, mentre uno parallelo ad s è $\mathrm{v_s}=(1,-1,0)$. Scritti i due vettori come righe di una matrice, è evidente che il rango di tale matrice è 2 e quindi i vettori sono l.i., e quindi r ed s non sono parallele. Per calcolare l' intersezione basta risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} x=1 \\ y+z=0 \\ x+y=0 \\ z=1. \end{cases}$$

Sostituendo i valori di x e z abbiamo due volte l' equazione $y = -1$, e quindi il sistema è compatibile ed ha l' unica soluzione $(1, -1, 1)$. Ne consegue che r ed s sono incidenti.

Un vettore parallelo alla retta t è $\mathbf{v}_t = (1, -1, 0)$ e quindi r e t non sono parallele. Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x = 1 \\ y + z = 0 \\ x + y = 0 \\ z = -1. \end{cases}$$

otteniamo $x = 1, y = 1, z = -1, 2 = 0$ e quindi il sistema non è compatibile. Quindi, r e t non sono neanche incidente, ossia sono sghembe. Osserviamo che, detto $AX = B$ il sistema che dà la loro intersezione, A ha rango 3, mentre $(A|B)$ ha rango 4, e questa condizione è equivalente all' essere due rette sghembe.

I vettori $\mathbf{v}_s$ e $\mathbf{v}_t$ sono l.d. perché sono proporzionali (in realtà sono uguali). Quindi, s e t sono parallele. Inoltre, è evidente che non sono la stessa retta (basta confrontare la terza coordinata dei loro punti), e quindi sono parallele e distinte.

(1) La distanza tra s e t è data dalla distanza tra un punto di s e la retta t (basta usare la stassa tecnica descritta nell' Esercizio 2(3)). Il risultato è 2.

(2) $\cos \hat{rs} = \frac{\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{v}_s}{|\mathbf{v}_r||\mathbf{v}_s|} = -\frac{1}{2}$, $\cos \hat{rt} = -\frac{1}{2}$, $\cos \hat{st} = 1$. Quindi, $\hat{rs} = \hat{rt} = 2\pi/3, \hat{st} = 0$.

(3) Poiché la retta p è ortogonale sia ad r sia ad s, un vettore parallelo a p è ortogonale ai vettori $\mathbf{v}_r, \mathbf{v}_s$ ed è allora parallelo al vettore $\mathbf{v}_r \wedge \mathbf{v}_s = (-1, -1, -1)$. Quindi $p : x = 2 - t, y = 2 - t, z = -1 - t$.

(4) Poiché r ed s sono incidenti, la retta cercata passa per il loro punto d' intersezione, ed è parallela al vettore $(-1, -1, -1)$. Quindi abbiamo $q : x = 1 - t, y = -1 - t, z = 1 - t$.

Soluzione dell' Esercizio 4. I punti del piano cercato sono tutti e soli i punti P che verificano la condizione $\mathbf{u} \cdot \vec{AP} = 0$. Abbiamo allora l' equazione $1(x-1) - 1(y+1) + 2(z-2) = 0$, ossia $x - y + 2z - 6 = 0$.

Soluzione dell' Esercizio 5. I punti A, B e C non sono allineati perché i vettori $\vec{AB} = (0, -1, 1)$ e $\vec{AC} = (-1, 0, 2)$ sono l.i. e questo gerantisce che esiste un solo piano α che li contiene. Tale piano è ortogonale al vettore $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = (-2, -1, -1)$ ed è allora formato dai punti che verificano la condizione $\vec{AP} \cdot \vec{AB} \wedge \vec{AC} = 0$, e quindi otteniamo l' equazione $\alpha : 2x + y + z = 3 = 0$.

Sostituendo le coordinate di D nell' equazione che definisce α otteniamo $2+2+1-3 = 0$ che è un' uguaglianza falsa, e quindi $D \notin \alpha$.

Calcoliamo l' intersezione tra r ed α. A tal fine, basta risolvere il sistema

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = -3t \\ 2x + y + z - 3 = 0. \end{cases}$$

Sostituendo nell' ultima equazione, otteniamo $2(1+t) + (1+t) - 3t - 3 = 0$ che è verificata per ogni valore di $t \in \mathbb{R}$. Quindi r ed α hanno infiniti punti in comune, ossia $r \subset \alpha$.

Soluzione dell' Esercizio 6. Il problema può essere risolto calcolando due punti di r ed il piano per i tre punti ottenuti, come fatto nell' Esercizio 5. Formuliamo il problema in v non sono paralleli, abbiamo che s e t non sono parallele. Per verificare se s e t sono incidenti, bisogna risolvere il sistema

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 3 + t \\ z = -t \\ x + y = 3 \\ x - y + z = 0. \end{cases}$$

Sostituendo nelle ultime due equazioni, abbiamo $4 = 3, -3t - 2 = 0$ e quindi il sistema non è compatibile. Poiché s e t non sono incidenti, né parallele, esse sono sghembe.

Un punto generico $P \in s$ ha coordinate $(1-t, 3+t, -t)$ mentre uno generale $Q \in t$ ha coordinate $(\tau, 3-\tau, 3-2\tau)$. Il vettore $\overrightarrow{PQ}$ deve essere ortogonale sia a $\mathbf{v}$, sia a $\mathbf{u}$, e quindi otteniamo il sistema $\begin{cases} 3t + 2 = 0 \\ 6\tau - 7 = 0 \end{cases}$ da cui otteniamo $t = -\frac{2}{3}, \tau = \frac{7}{6}$. La retta comune perpendicolare ad s e t passa per i punti $P(\frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \frac{2}{3}) \in s$ e $Q(\frac{7}{6}, \frac{11}{6}, \frac{4}{6}) \in t$. La distanza tra s e t è la distanza tra P e Q. Senza usare tali punti, la distanza tra le due rette è l' altezza del parallelepipedo avente per lati $\mathbf{v}, \mathbf{u}$ ed $\overrightarrow{AB}$ con $A(1,3,0) \in s$, e $B(0,3,3) \in t$. Il volume di tale parallelepidedo è il valore assoluto di $\mathbf{v} \wedge \mathbf{u} \cdot \overrightarrow{AB}$ mentre l' area della base è il modulo del vettore $\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$. Otteniamo allora $d(s,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

(4) Sia α l' angolo tra il piano rs e la retta t. Un vettore ortogonale al piano è $(0,1,1)$. Quindi, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ossia $\alpha = \pi/3$.

Un vettore ortogonale al piano rt è $(1,1,0)$. Quindi l' angolo β tra il piano rt e la retta s verifica $\sin\beta = 0$, ossia $\beta = 0$.

L' angolo ϕ tra i piani rs e rt verifica $\cos\phi = \frac{1}{2}$ ossia $\phi = \pi/3$.

Soluzione dell' Esercizio 10. Il fascio di piani di asse r ha equazione $a(2y - z - 1) + b(x - y - 2) = 0$ ossia $bx + (2a-b)y - az + (-a-2b) = 0$. Un vettore ortogonale al generico piano del fascio è $(b, 2a-b, -a)$. Un tale piano forma l' angolo richiesto con l' asse y se

$$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{|2a-b|}{\sqrt{5a^2 - 4ab + 2b^2}}.$$

Sviluppando i calcoli, si ottengono le soluzioni $a = b(2 \pm \sqrt{6})$ ed i piani di equazione $x + (3 \pm 2\sqrt{6})y - (2 \pm \sqrt{6})z + (-4 \mp \sqrt{6}) = 0$.

Soluzione dell' Esercizio 11. Le retta per A sono tutte del tipo $\begin{cases} x = 1 + lt \\ y = 1 + mt \\ z = -1 + nt \end{cases}$ e sono parallele al vettore (l, m, n). Un vettore ortogonale al piano α è $(1, 2, -3)$ e quindi la prima condizione è

$$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{|l + 2m - 3n|}{\sqrt{14}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

che semplificata diventa $(l + 2m - 3n)^2 = 7(l^2 + m^2 + n^2)$.

Un vettore ortogonale al piano β è $(3,0,1)$ ed il parallelismo con β viene scritto con la relazione $3l + n = 0$. Mettendo a sistema le due condizioni, otteniamo $l = m\frac{-20\pm7\sqrt{10}}{30}, n = -m\frac{-20\pm7\sqrt{10}}{10}$. Le rette vengono scritte assegnando un valore non nullo ad m.

modo diverso, e risolviamolo poi coerentemente: tra tutti i piani che contengono r, quale contiene il punto A?

I piani contenenti la retta r sono un fascio proprio di piani la cui equazione si scrive come $a(x+2y+z-1)+b(-x+y-z)=0$. Per imporre il passaggio per A sostituiamo le coordinate di A nell' equazione del fascio, e risolviamo l' equazione ottenuta: $3a-b=0$, da cui $b=3a$. Scelto $a=1$ (ricordiamo che l' equazione di un piano è unica a meno di un fattore di proporzionalità che, in questo caso, corrisponde alla scelta di a), otteniamo $-2x+5y-2z-1=0$.

Soluzione dell' Esercizio 7. Un vettore ortogonale a π è il vettore $\mathbf{v}=(1,1,0)$ avente le entrate uguali ai coefficienti delle incognite x, y e z nell' ordine. Tale vettore è parallelo alla retta r cercata, e quindi la retta r ha equazione parametrica $r: x=1+t, y=t, z=-1$.

Sia $B(t,0,0)$ il punto in cui la retta s interseca l' asse x. La retta s cercata è quella per cui il vettore $\overrightarrow{AB}$ è parallelo al piano π. Tale condizione è data da $\mathbf{v}\cdot \overrightarrow{AB}=0$, ossia $t-1=0$. Otteniamo allora $t=1$, $B(1,0,0)$, $\overrightarrow{AB}=(0,0,1)$ e quindi la retta s ha equazione $s: x=1, y=0$.

Soluzione dell' Esercizio 8. Il parallelismo tra r e π si ha quando un vettore parallelo ad r e quello ortogonale a π sono tra loro ortogonali. Un vettore parallelo ad r è $\mathbf{v}=(1,-1,1)$, mentre quello ortogonale a π è $\mathbf{u}=(1,2,1)$. Poiché $\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}=1-2+1=0$ abbiamo il parallelismo tra r e π. La distanza tra r e π è uguale alla distanza tra un punto $A\in r$ e π. Scelto $A(1,2,1)\in r$ la distanza

$$d(r,\pi)=d(A,\pi)=\frac{|1+4+1-1|}{\sqrt{1+4+1}}=\frac{5}{\sqrt{6}}.$$

Soluzione dell' Esercizio 9. (1) La retta r è parallela al vettore $\mathbf{u}=(1,-1,1)$ mentre la retta s è parallela al vettore $\mathbf{v}=(-1,1,-1)$. Poiché i vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono paralleli, le retta sono parallele. Il piano che contiene le due rette è quello che contiene i punti $A(1,2,1), B(0,3,0)\in r$ e $C(1,3,0)\in s$. Procedendo come nell' Esercizio 5, si ottiene il piano $y+z-3=0$.

(2) Per calcolare il punto d' intersezione tra r e t basta risolvere il sistema

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=2-t \\ z=1+t \\ x+y=3 \\ x-y+z=0. \end{cases}$$

Sostituendo nelle ultime due equazioni, otteniamo $3=3, 3t=0$. Quindi il sistema è compatibile, e l' unico punto d' intersezione è $(1,2,1)$ corrispondente al valore $t=0$ del parametro. Per calcolare il piano che le contiene, procediamo come nell' Esercizio 6. Il fascio di piani di asse t ha equazione $a(x+y-3)+b(x-y+z)=0$. Imponendo il passaggio per $B(0,3,0)\in r, B\neq A$, abbiamo $3b=0$, e quindi il piano che contiene le due rette si ottiene per $a=1, b=0$, ed ha equazione $x+y-3=0$.

(3) La retta t in forma parametrica si scrive come $t:\begin{cases} x=\tau \\ y=3-\tau \\ z=3-2\tau \end{cases}$ ed un vettore parallelo a t è $\mathbf{u}=(1,-1,-2)$. Un vettore parallelo a s è $\mathbf{v}=(-1,1,-1)$. Poiché $\mathbf{u}$ e

Soluzione dell' Esercizio 12. L' equazione della sfera è $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=4$, che semplificata diventa $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-1=0$. L' origine è interna alla sfera perché la distanza tra C e O è $\sqrt{3}<2=R$.

Soluzione dell' Esercizio 13. Il punto $A \in \sigma$ perché le sue coordinate soddisfano l' equazione di σ. Il centro di σ è $C(-1,1,2)$ ed il vettore $\overrightarrow{CA}=(2,0,0)$ è ortogonale al piano tangente a σ per A. Quindi il piano cercato ha equazione $2(x-1)=0$, ossia $x=1$.

Soluzione dell' Esercizio 14. Sia $\sigma: x^2+y^2+z^2-2x-2y+2z-13=0$ la sfera assegnata che taglia $\alpha: x+y-z=0$ lungo γ. Il centro di σ è $D(1,1,-1)$. Il centro di γ è la proiezione ortogonale di D su α. Un vettore ortogonale ad α è $\mathbf{v}=(1,1,-1)$, e quindi la retta p per D perpendicolare ad α ha equazione $p: x=1+t, y=1+t, z=-1-t$. Il centro di γ è allora il punto d' intersezione di p ed α. Scrivendo il sistema e risolvendolo otteniamo $t=-1$ e $C(0,0,0)$. Il raggio R_γ di γ è un cateto del triangolo rettangolo avente il raggio $R_\sigma=4$ di σ come ipotenusa, e il segmento $\overline{CD}=\sqrt{3}$ come altro cateto. Per il Teorema di Pitagora, $R_\gamma=\sqrt{13}$.

Il punto $B \in \alpha$ perché le sue coordinate soddisfano l' equazione del piano, e $\overline{BC}=\sqrt{26}>R_\gamma$. Quindi, esistono due rette tangenti distinte a γ per B. Una generica retta per B si scrive come $t: x=1+lt, y=3+mt, z=4+nt$, dove $\mathbf{u}=(l,m,n)$ è un vettore da determinarsi. Poiché t è tangente a γ, t è contenuta nel piano α, e quindi $\mathbf{u}\cdot(1,1,-1)=0$, ossia $l+m-n=0$. La condizione per la tangenza è che $d(C,t)=R_\gamma$. Ma la distanza tra C e t è

$$d(C,t)=\frac{|(l,m,n)\wedge \overrightarrow{CB}\,|}{|(l,m,n)|}=\frac{|(4m-3n,-4l+n,3l-m)|}{|(l,m,n)|}.$$

il prodotto vettoriale corrisponde all'area del parallelogramma

Mettendo a sistema le due condizioni e risolvendo, si ottengono $(l,m,n)=a(22\pm\sqrt{507},1,23\pm\sqrt{507})$. Scelto $a=1$, e sostituendo nell' espressione di t si ottengono le rette cercate.

vedi esercizio 2.3

Soluzione dell' Esercizio 15. Bisogna calcolare il piano π per i tre punti (esiste ed è unico perché i punti non sono allineati), ed una sfera per i tre punti. Il piano ha equazione $\pi: x+y+z=1$ (confronta con l' Esercizio 5). Sia ora $\sigma: x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0$ una sfera generica. L' appartenenza dei punti A, B e C si traduce nel sistema lineare

$$\begin{cases} 2a+d+1=0 \\ 2b+d+1=0 \\ 2c+d+1=0 \end{cases}$$

che ha ovviamente ∞^1 soluzioni, perché le sfere cercate hanno centro sulla retta che passa per il centro della circonferenza cercata ed ortogonale al piano π, e raggio opportuno. Le soluzioni, al variare di d, sono $a=b=c=-\frac{1+d}{2}$. Scelto $d=-1$, otteniamo la sfera $\sigma: x^2+y^2+z^2-1=0$. Quindi, la circonferenza cercata ha equazione

$$\gamma: \begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=1. \end{cases}$$

Osserviamo che il triangolo ABC è equilatero, e quindi il baricentro G del triangolo è anche il centro della circonferenza γ. Il punto G ha coordinate $G(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ e quindi il raggio della circonferenza è uguale a $R_\gamma=\overline{AG}=\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Le sfere di raggio $\sqrt{10}$ che contengono γ sono due simmetriche rispetto al piano π perché $\sqrt{10} > R_\gamma$. Si calcolano facilmente perché tutte le sfere che contengono γ hanno equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 - (1+d)x - (1+d)y - (1+d)z + d = 0$$

il cui raggio è $\sqrt{\frac{3(1+d)^2}{4} - d}$. Imponendo che il raggio valga $\sqrt{10}$ si ottiene l' equazione $3d^2 + 2d - 37 = 0$ che ha soluzioni $d = \frac{-1\pm 4\sqrt{7}}{3}$. Sostituendo nella precedente equazione si ottengono le sfere cercate.

<u>*Soluzione dell' Esercizio 16.*</u> L' asse z ha equazione cartesiana $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$, mentre una generica sfera ha equazione $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$. Perché l' asse z sia tangente alla sfera deve capitare che il sistema

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0 \end{cases}$$

abbia due soluzioni coincidenti, ossia l' equazione risolvente del sistema $z^2 + 2cz + d = 0$ ha il discriminante nullo. Quindi $c^2 - d = 0$.

Perché la sfera passi poi per $A(0,0,3)$ deve capitare che $9+6c+d = 0$. Quindi $c^2+6c+9 = 0$, ossia $c = -3$.

Le sfere che sono tangenti all' asse z in A sono quindi tutte e sole quelle di equazione

$$\sigma : x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by - 6z + 9 = 0$$

il cui centro è $C(-a, -b, 3)$ ed il cui raggio è $R = \sqrt{a^2 + b^2}$.

(1) Il piano che contiene l' asse z ed il punto B ha equazione $2x - y = 0$. Una sfera che passa per B verifica l' ulteriore condizione $2a + 4b + 9 = 0$. Scelta la soluzione $a = -\frac{1}{2}, b = -2$, abbiamo la sfera $x^2 + y^2 + z^2 - x - 4y - 6z + 9 = 0$. L' intersezione del piano e della sfera calcolati è la circonferenza cercata.

(2) Tra tutte le sfere che tagliano la circonferenza cercata, cerchiamo quella di raggio minimo, ossia quella il cui centro coincide con il centro della sfera. Il punto C si trova sul piano $x - y = 0$ se $b = a$. Inoltre il raggio della sfera è uguale al raggio della circonferenza, e quindi $a^2 + b^2 = 9$. Dalle due condizioni ricaviamo che $a = b = \pm\frac{3\sqrt{2}}{2}$. Il piano che contiene la circonferenza è $x - y = 0$, e quindi otteniamo le circonferenze cercate come intersezione del piano con le due sfere calcolate.

(3) Come nel caso precedente, cerchiamo la sfera di raggio minimo. Il centro della sfera appartiene alla retta se, e solo se, $t = -2, a = 1, b = 0$. Di conseguenza, il raggio è uguale a 1, e la sfera ha equazione $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6z + 9 = 0$, mentre il piano che contiene l' asse z ed il centro C è $y = 0$. L' intersezione delle due superfici è la circonferenza cercata.

(4) Cerchiamo sempre la sfera di raggio minimo. Questa volta, il punto C si trova sulla retta se $b = -a - 3$. Il raggio della sfera diventa allora $R = \sqrt{a^2 + (a+3)^2}$. Tale funzione è minima per $a = -\frac{3}{2}$. Quindi la sfera ha equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 3y - 6z + 9 = 0$, mentre il piano per C e per l' asse z ha equazione $x - y = 0$. La circonferenza è data dall' intersezione del piano con la sfera.

(5) Il piano che contiene le due rette ha equazione $x - y = 0$. Una delle sfere precedenti è tangente alla retta $x = y = z$ se il sistema

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \\ x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by - 6z + 9 = 0 \end{cases}$$

ha due soluzioni coincidenti, ossia se, e solo se, l' equazione $3t^2 + 2(a + b - 3)t + 9 = 0$ ha discriminante nullo. Quindi, $(a + b - 3)^2 = 27$. Scelto $a = 0$, otteniamo per b i possibili valori $b = 3 \pm 3\sqrt{3}$. Le due circonferenze si scrivono allora come

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 + 2(3 \pm 3\sqrt{3})y - 6z + 9 = 0. \end{cases}$$

Soluzione dell' Esercizio 17. Perché un piano α per r tagli la sfera lungo una circonferenza di raggio 1 bisogna che la distanza tra C ed α valga $d(C, \alpha) = \sqrt{8}$.

Per prima cosa, calcoliamo la distanza tra C ed r. Infatti, un piano α per r ha distanza da C che verifica $d(C, \alpha) \leq d(C, r)$.

Due punti di r sono $A(0, 5, -1)$ e $B(1, 2, -1)$. La distanza $d(C, r)$ vale allora

$$d(C, r) = \frac{|\vec{AB} \wedge \vec{AC}|}{|\vec{AB}|} = \frac{|(1, -3, 2) \wedge (1, 5, -3)|}{|(1, -3, 2)|} = \frac{|(-1, 5, 8)|}{\sqrt{14}} = \sqrt{\frac{45}{7}}.$$

Allora $d(C, r) < \sqrt{8}$ e quindi il piano non esiste.

In alternativa, si scrive l' equazione del fascio di piani di asse $r : a(3x + y - 5) + b(2x - z - 1) = 0$, e si calcola la distanza dal punto C ottenendo l' equazione

$$\frac{|-8a - 5b|}{\sqrt{(3a + 2b)^2 + a^2 + b^2}} = \sqrt{8}.$$

Tale equazione non ha radici reali, e quindi i piani non esistono.

Soluzione dell' Esercizio 18. La sfera cercata ha raggio uguale alla distanza tra C ed α e quindi, usando la formula, abbiamo $R = d(C, \alpha) = \frac{|1+1+2+2|}{\sqrt{1+1+1}} = 2\sqrt{3}$.

La sfera ha allora equazione $\sigma : (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = 12$ che semplificata diventa $\sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z - 6 = 0$.

Soluzione dell' Esercizio 19. Bisogna calcolare il raggio della sfera che è uguale alla distanza tra C ed r. Il punto $A(0, 1, 0) \in r$, ottenuto per $t = 0$, mentre $\mathbf{v} = (1, -1, 1)$ è parallelo alla retta r. Abbiamo allora che $d(C, r) = \frac{|\vec{AC} \wedge \mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|} = \sqrt{\frac{8}{3}}$.

La sfera ha allora equazione $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = \frac{8}{3}$.

Soluzione dell' Esercizio 20. Sia $C(a, 0, 0)$ il centro della circonferenza che stiamo calcolando. Il punto di tangenza è la proiezione di C su r. Il piano per C ortogonale ad r ha equazione $x - y - a = 0$, e la proiezione è il punto $A(1 + \frac{a}{2}, 1 - \frac{a}{2}, 2)$. Il raggio della circonferenza è $\overline{AC}$ e quindi abbiamo $R(a) = \sqrt{\frac{a^2}{2} - 2a + 6}$. Dobbiamo calcolare il minimo di questa funzione. Il punto che realizza il minimo coincide con il punto che realizza il minimo della funzione $f(a) = R^2(a) = \frac{a^2}{2} - 2a + 6$. $f'(a) = a - 2$, e quindi otteniamo

$a = 2$. Quindi, il centro è $C(2, 0, 0)$, il raggio è $R = 2$. Il piano per r e C è $x + y - 2 = 0$ e la sfera ha equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 4x = 0$. In conclusione, la circonferenza ha equazione

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 4x = 0. \end{cases}$$