1 Date le rette

$$r: \begin{cases} x+z-4=0 \\ x-y-z=0 \end{cases} \quad e \quad s: \begin{cases} x=1+t \\ y=2t \\ z=1-t \end{cases}$$

dimostrare che sono parallele e determinare la distanza.

19

DISTANZA FRA 2 RETTE

Prese due rette, sappiamo che esse sono parallele se, considerate la matrice dei parametri direttori $\vec{r}(l,m,n)$ e $\vec{s}(l',m',n')$, ~~tale che~~ questa avrà rango uguale a 1 (ovvero i parametri direttori sono proporzionali)

$$\boxed{\text{rang}\begin{pmatrix} l & m & n \\ l' & m' & n' \end{pmatrix} = 1}$$

CONDIZIONE PER IL PARALLELISMO DI DUE RETTE

Determiniamo pertanto i parametri direttori delle due rette.

La retta s è espressa secondo l'equazione parametrica $\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$, pertanto

i suoi parametri direttori saranno:

$\vec{s}(1,2,-1)$

La retta r è invece definita mediante la sua equazione cartesiana, tramite un sistema di due piani appartenenti al fascio di piani di cui r è asse.

In questo caso, per ricavare i parametri direttori, data la generica equazione cartesiana della retta $\begin{cases} ax+by+c+d=0 \\ a'x+b'y+c'+d'=0 \end{cases}$ si ottiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} l &= \det\begin{pmatrix} b & c \\ b' & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = 1 \\ m &= -\det\begin{pmatrix} a & c \\ a' & c' \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = +2 \\ n &= \det\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -1 \end{aligned}\right\}$$

Parametri direttori di r:

$\vec{r}(1,2,-1)$

$\vec{r}(1,2,-1)$
$\vec{s}(1,2,-1)$

le 2 rette hanno gli stessi parametri direttori (potevano anche essere proporzionali) pertanto le 2 rette sono parallele.
In generale due rette r ed s con parametri direttori $\vec{r}(l,m,n)$ ed $\vec{s}(l',m',n')$ sono parallele se:

$$\boxed{\text{rang}\begin{pmatrix} l & m & n \\ l' & m' & n' \end{pmatrix} = 1}$$

(Nel nostro caso, essendo uguali, sono linearmente dipendenti e il rango della matrice è proprio 1).

Una volta stabilito che le due rette sono parallele, il prossimo passo consiste nel determinare la distanza. Considerando la retta s, espressa in forma parametrica, possiamo ricavare un punto di questa retta ~~~~ imponendo $t=0$, poiché:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2t \\ z = 1-t \end{cases}$$

Imponendo $t=0$, troviamo il punto A della retta $A(x_0, y_0, z_0)$ tale che: $\boxed{A(1,0,1)}$

Una volta trovato questo punto, provvediamo a determinare un piano ortogonale alle due rette r ed s ~~~~ passante per A, secondo la seguente equazione:

$$l(x-x_0)+m(y-y_0)+n(z-z_0)=0$$

che nel nostro caso diventerà:

I PARAMETRI DI GIACITURA DI UN PIANO SONO I PARAMETRI DIRETTORI DI UNA QUALSIASI RETTA PERPENDICOLARE AL PIANO

$$1(x-1)+2(y-0)-1(z-1)=0$$
$$x-\cancel{1}+2y-z+\cancel{1}=0$$
$$\boxed{x+2y-z=0}$$

EQUAZIONE CARTESIANA DEL PIANO PASSANTE PER A E ORTOGONALE A r ED s.

Adesso provvederemo a trovare il punto di intersezione A' fra il piano appena trovato e la retta r, così da calcolare poi la distanza ~~~~ $\overline{AA'}$ fra le 2 rette.

$$\begin{cases} x+2y-z=0 \\ x+z-4=0 \\ x-y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2x-2z-z=0 \\ x+z-4=0 \\ y=x-z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x-3z=0 \\ x+z-4=0 \\ y=x-z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-z=0 \\ x+z-4=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=z \\ 2z=4 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=z \\ z=2 \\ y=0 \end{cases}$$

Il punto A', intersezione fra il piano ortogonale a r e s e la retta r, è $A'(2,0,2)$
Determiniamo adesso la distanza AA' con la formula:

$$AA' = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} = \sqrt{(2-1)^2+(0-0)^2+(2-1)^2} = \sqrt{2}$$

La distanza fra le rette r e s è pari a $d(\overline{AA'}) = \sqrt{2}$

② Determinare la distanza del punto $P(1,0,1)$ dalla retta

$$r: \begin{cases} x = z+1 \\ y = z \end{cases}$$

Un semplice metodo per determinare la distanza fra un punto ed una retta r è quello di considerare un piano ortogonale alla retta r e passante per il punto P.
Una volta identificata l'equazione cartesiana $ax+by+cz+d=0$ di tale piano ortogonale passante per P, basterà determinare il punto di intersezione fra il piano e la retta r, sia A tale punto, e calcolare la distanza fra i punti P e A.
Data la retta r, per determinare il piano ortogonale alla retta e passante per P bisogna conoscere i parametri direttori della retta (l,m,n):

$$\begin{cases} x = z+1 \\ y = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-z-1=0 \\ y-z=0 \end{cases}$$ Da cui si ottiene la matrice $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

In generale, data la retta in forma cartesiana, i parametri direttori si ricavano come segue:

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$$

$$l = \det\begin{pmatrix} b & c \\ b' & c' \end{pmatrix} \qquad m = -\det\begin{pmatrix} a & c \\ a' & c' \end{pmatrix} \qquad n = \det\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$$

Nel nostro caso, pertanto avremo:

$$l = \det\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 1 \qquad \vec{r}\,(1,-1,1)$$

$$m = -\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1$$

$$n = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

Possiamo allora determinare l'equazione cartesiana del piano ortogonale a r e passante per $P(1,0,1)$ come segue: $\vec{r}(1,-1,1)$

$$l(x-x_0)+m(y-y_0)+n(z-z_0)=0$$

$$1(x-1)-1(y-0)+1(z-1)=0$$

$$x-1-y+z-1=0$$

$\pi: \boxed{x-y+z-2=0}$ (EQUAZIONE CARTESIANA DEL PIANO ORTOGONALE AD R E PASSANTE PER P)

Per trovare la distanza del punto P da r, basta trovare il punto di intersezione A fra il piano π e la retta r e poi calcolare la distanza fra P e A:

$$\begin{cases} x-y+z-2=0 \\ x=z+1 \\ y=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-\cancel{z}+\cancel{z}-2=0 \\ x=z+1 \\ y=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ z=1 \\ y=1 \end{cases}$$

Punto di intersezione fra piano π e retta r: $A(2,1,1)$

Possiamo finalmente determinare ~~la~~ distanza fra P e A:

$$\overline{PA}=\sqrt{(x_A-x_P)^2+(y_A-y_P)^2+(z_A-z_P)^2}=\sqrt{(2-1)^2+(1-0)^2+(1-1)^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

La distanza fra il punto P e la retta r è proprio $\sqrt{2}$.

RETTE SGHEMBE E RETTA DI MINIMA DISTANZA, MINIMA DISTANZA

3) Considerate le rette $r: \begin{cases} x=2z \\ y=1 \end{cases}$ e $s: \begin{cases} x=1 \\ y=z \end{cases}$

Verificare che sono sghembe e determinare la retta di minima distanza e la minima distanza.

Per verificare che le rette r ed s siano sghembe (appartengano a piani diversi) bisogna ricordare che, in generale, date 2 rette:

$$I: \begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases} \qquad II: \begin{cases} \alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0 \\ \alpha' x+\beta' y+\gamma' z+\delta'=0 \end{cases}$$

queste risultano essere complanari se la seguente matrice ha determinante uguale a zero:

$$\det\begin{pmatrix} a & a' & \alpha & \alpha' \\ b & b' & \beta & \beta' \\ c & c' & \gamma & \gamma' \\ d & d' & \delta & \delta' \end{pmatrix} = 0$$

Nel nostro caso pertanto avremo:

$$r: \begin{cases} x-2z=0 \\ y-1=0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x-1=0 \\ y-z=0 \end{cases}$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$= -1 - 2 = -3 \neq 0$ Quindi le 2 rette sono sghembe.

Per determinare la retta di minima distanza fra le 2 rette r ed s bisogna conoscere i parametri direttori delle due rette e la retta passante per i punti generici delle 2 rette. Una volta trovata tale retta, infatti, con la condizione $ll'+mm'+nn'=0$ si potrà individuare la retta perpendicolare contemporaneamente alle 2 rette.

Iniziamo col determinare i parametri direttori delle due rette:
Ricordando che in generale, data una retta nella forma cartesiana, si possono determinare i parametri direttori come segue:

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases} \qquad l=\det\begin{pmatrix} b & c \\ b' & c' \end{pmatrix} \quad m=-\det\begin{pmatrix} a & c \\ a' & c' \end{pmatrix} \quad n=\det\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$$

Nel nostro caso avremo, per ciascuna retta:

$$r: \begin{cases} x=2z \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2z=0 \\ y-1=0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$l=\det\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad m=-\det\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad n=\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$l=2 \ ; \ m=0 \ ; \ n=1$$

$\boxed{\vec{r}(2,0,1)}$ PARAMETRI DIRETTORI

$$s: \begin{cases} x=1 \\ y=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ y-z=0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$l'=\det\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad m'=-\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad n'=\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$l'=0 \ ; \ m'=1 \ ; \ n'=1$$

$\boxed{\vec{s}(0,1,1)}$ PARAMETRI DIRETTORI

Troviamo adesso i punti generici delle rette r ed s per poter individuare la retta passante per tali punti. Successivamente si imporrà, usando i parametri direttori, che tale retta passante per i punti generici di r ed s sia perpendicolare a r ed s. In questo modo si individuerà la retta di minima distanza.

Punto generico di r: $R(2h,1,h)$
Punto generico di s: $S(1,k,k)$

In generale

Dati 2 punti $A(x_1,y_1,z_1)$ e $B(x_2,y_2,z_2)$, è possibile determinare l'equazione della retta passante per i 2 punti come:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

EQUAZIONE GENERICA RETTA PASSANTE PER 2 PUNTI $A(x_1,y_1,z_1)$ E $B(x_2,y_2,z_2)$

Presi allora i 2 punti generici $R(2h,1,h)$ e $S(1,k,k)$, determiniamo la retta passante per tali punti:

EQUAZIONE RETTA PASSANTE PER "R" ED "S"

$$\boxed{\frac{x-1}{1-2h}=\frac{y-k}{k-1}=\frac{z-k}{k-h}}$$

I parametri direttori di tale retta sono $(l'',m'',n'')\rightarrow(1-2h,k-1,k-h)$

Dobbiamo adesso determinare i valori di h e k per ottenere la retta perpendicolare alle rette r ed s passante per i punti R ed S.

Date 2 rette r_1 ed r_2, ~~supponendo~~ con parametri direttori rispettivamente (l,m,n) e (l',m',n'), sappiamo che le 2 rette sono perpendicolari se $ll'+mm'+nn'=0$.

Nel nostro caso abbiamo che la retta trovata, perpendicolare a r ed s e passante per i loro punti generici, deve essere perpendicolare contemporaneamente ad entrambe le rette.

Scriveremo allora:

$$\begin{cases} ll''+mm''+nn''=0 \\ l'l''+m'm''+n'n''=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(1-2h)+0(k-1)+1(k-h)=0 \\ 0(1-2h)+1(k-1)+1(k-h)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2-4h+k-h=0 \\ k-1+k-h=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -5h+k+2=0 \\ 2k-h-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=5h-2 \\ 10h-4-h-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=5h-2 \\ 9h-5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=5h-2 \\ h=\frac{5}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=\frac{7}{9} \\ h=\frac{5}{9} \end{cases}$$

Dunque la retta passante per i punti generici R ed S sarà perpendicolare alle rette r ed s quando $h=\frac{5}{9}$ ed $k=\frac{7}{9}$.

Possiamo allora sostituire $(h,k)\rightarrow\left(\frac{5}{9},\frac{7}{9}\right)$ all'equazione precedentemente trovata e ottenere l'equazione della retta di minima distanza fra r ed s.

$$\frac{x-1}{1-2h} = \frac{y-k}{k-1} = \frac{z-k}{k-h} \qquad (h,k) \to \left(\frac{5}{9}, \frac{7}{9}\right)$$

$$\frac{x-1}{1-\frac{10}{9}} = \frac{y-\frac{7}{9}}{\frac{7}{9}-1} = \frac{z-\frac{7}{9}}{\frac{7}{9}-\frac{5}{9}}$$

$$\frac{x-1}{-\frac{1}{9}} = \frac{y-\frac{7}{9}}{-\frac{2}{9}} = \frac{z-\frac{7}{9}}{\frac{2}{9}}$$

Moltiplichiamo tutti i membri per $\frac{1}{9}$

$$R(2h,1,h) \to \left(\frac{10}{9}, 1, \frac{5}{9}\right)$$

$$-(x-1) = \frac{y-\frac{7}{9}}{-2} = \frac{z-\frac{7}{9}}{2}$$

$$S(1,k,k) \to \left(1, \frac{7}{9}, \frac{7}{9}\right)$$

Infine per trovare la minima distanza basta calcolare la distanza dei punti R ed S trovati sostituendo $(h,k) \to \left(\frac{5}{9}, \frac{7}{9}\right)$.

$$\overline{RS} = \sqrt{\left(1-\frac{10}{9}\right)^2 + \left(\frac{7}{9}-1\right)^2 + \left(\frac{7}{9}-\frac{5}{9}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{81}+\frac{4}{81}+\frac{4}{81}} = \sqrt{\frac{3^2}{9^2}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

La minima distanza fra le rette r ed s è $\frac{1}{3}$.

IMPORTANTE!

Se l'esercizio avesse richiesto di verificare che le 2 rette sono sghembe e determinare direttamente la minima distanza (senza determinare la retta di minima distanza) il procedimento è diverso ne più semplice. Vedere successivo esercizio per approfondimento.

In questo caso, dopo aver verificato che le rette siano sghembe, si considera la distanza di un punto R qualsiasi della retta r e del piano π, piano parallelo alla retta r ne che contiene la retta s, identificato tramite l'equazione del fascio di piani con asse s". Ripetendo il precedente esercizio la minima distanza risulta essere sempre $\frac{1}{3}$

RETTE SGHEMBE E MINIMA DISTANZA

4) Considerate le rette $r: \begin{cases} x = 2z \\ y = 1 \end{cases}$ e $s: \begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases}$

Verificare che siano sghembe e determinare la minima distanza delle rette stesse.

- Per verificare che le rette r ed s siano sghembe (appartengano a piani diversi) basta dimostrare che non sono complanari.

In generale, date le rette

$$t: \begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases} \qquad h: \begin{cases} \alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0 \\ \alpha' x+\beta' y+\gamma' z+\delta'=0 \end{cases}$$

Queste risultano complanari se:

$$\det\begin{pmatrix} a & a' & \alpha & \alpha' \\ b & b' & \beta & \beta' \\ c & c' & \gamma & \gamma' \\ d & d' & \delta & \delta' \end{pmatrix} = 0.$$

Nel nostro caso, pertanto, per dimostrare che le rette sono sghembe basterà dimostrare che non sono complanari, ovvero che il determinante della seguente matrice risulti diverso da zero:

$$r: \begin{cases} x-2z=0 \\ y-1=0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x-1=0 \\ y-z=0 \end{cases}$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$= -1-2 = -3 \neq 0$ Il determinante risulta essere diverso da ϕ, pertanto le rette sono sghembe

Per ~~verificare~~ calcolare adesso la minima distanza verrà utilizzata la formula per la distanza di un piano da un punto, considerando come punto un punto di r e come piano un piano parallelo a r che contenga la retta s.

Consideriamo un generico punto di r come: $\boxed{R(2h,1,h) \to R(2,1,1)}$

e ricaviamo i parametri direttori di r, che verranno usati successivamente per la condizione di parallelismo fra un piano e r:

In generale, data la retta $\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$ è possibile trovare i parametri direttori come:

avendo la matrice $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$ $\quad l=\det\begin{pmatrix} b & c \\ b' & c' \end{pmatrix}$ $\quad m=-\det\begin{pmatrix} a & c \\ a' & c' \end{pmatrix}$ $\quad n=\det\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$

Nel nostro caso, potremo trovare i parametri direttori di r come segue:

$r: \begin{cases} x-2z=0 \\ y-1=0 \end{cases}$ $\quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$l=\det\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=2 \; ; \; m=-\det\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=0 \; ; \; n=\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=1$

$\boxed{\vec{r}(2,0,1)}$

Determiniamo adesso il piano π parallelo alla retta r e che contiene la retta s, tramite il "fascio di piani di asse s":

$s: \begin{cases} x=1 \\ y=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ y-z=0 \end{cases}$

$(x-1)+\lambda(y-z)=0$

$x-1+\lambda y-\lambda z=0$

$x+\lambda y-\lambda z-1=0$ Al variare di λ, si ottengono tutti i piani aventi s come asse.

I parametri di giacitura del piano saranno quindi $(a,b,c) \to (1,\lambda,-\lambda)$.

Fra tutti i piani del fascio considerati, determiniamo quello parallelo alla retta r tramite la condizione di parallelismo $al+bm+cn=0$, ottenendo:

$1 \cdot 2+\lambda\cdot 0-\lambda\cdot 1=0$

$2-\lambda=0$

$\lambda=2$

Il piano parallelo a r sarà quindi

$x-1+2y-2z=0$

$\boxed{x+2y-2z-1=0}$

Abbiamo così trovato che il modo più semplice per determinare la distanza minima fra 2 rette r e s consiste nel considerare un punto di r, ricavare il piano parallelo a r che contiene s e infine considerare la seguente formula per la distanza di un punto da un piano:

$R(2,1,1)$ $\qquad \pi: x+2y-2z-1=0$

$$d(R,\pi) = \left|\frac{ax_0+by_0+cz_0+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right| = \left|\frac{2+2-2-1}{\sqrt{1^2+2^2+(2)^2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$$

PIANO PASSANTE PER UNA RETTA E // UNA RETTA

(5) Determinare l'equazione del piano α passante per la retta $r: \begin{cases} x=2z-1 \\ y=z \end{cases}$ e parallelo alla retta $s: \begin{cases} x=t \\ y=1+t \\ z=1 \end{cases}$.

Per determinare il piano α passante per la retta r e parallelo alla retta s basta fare riferimento al fascio di piani con asse r e, fra i piani del fascio, imporre la condizione di parallelismo $al+bm+cn=0$, dove (a,b,c) sono i parametri di giacitura del fascio e (l,m,n) sono i parametri direttori della retta s:

$$r: \begin{cases} x-2z+1=0 \\ y-z=0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x=t \\ y=1+t \\ z=1 \end{cases}$$

$$(x-2z+1)+\lambda(y-z)=0$$

$$x-2z+1+\lambda y-\lambda z=0$$

$$\boxed{x+\lambda y-\lambda z+1=0}$$ FASCIO DI PIANI CON ASSE r

Tra i piani del fascio, ricerchiamo il piano parallelo alla retta s secondo la condizione di parallelismo: $\boxed{al+bm+cn=0}$

I parametri direttori della retta si possono facilmente trovare dall'equazione parametrica della retta, sono i coefficienti di t.

$\vec{s}(1,1,0)$

$\vec{s}(1,1,0)$

$1\cdot 1+\lambda\cdot 1-\lambda\cdot 0=0$

$1+\lambda=0$

$\lambda=-1$

Il piano α passante per r e parallelo alla retta s è $\alpha: x-y+z+1=0$

~~(4) Trovare il piano passante per P(1,1,1), parallelo ... di intersezione delle rette ... (x ... y=0)~~

DETERMINAZIONE RETTA PASSANTE PER P, PARALLELA AL PIANO α E INCIDENTE LA RETTA

(6) Calcolare la retta r passante per $P(1,-3,2)$, parallela al piano $\alpha: x-4y+z-1=0$ e incidente alla retta congiungente i punti $P_1(1,1,3)$ e $P_2(-1,0,1)$.

Per determinare la retta r l'idea principale consiste nel determinare due piani passanti per un suo punto e descriverla mediante questi.
Sappiamo che la retta r passa per un punto P ed è parallela al piano α; possiamo sfruttare le coordinate del punto e i parametri di giacitura di α per ricavare il piano parallelo a α e passante per P, secondo la seguente equazione:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

$$1\cdot(x-1)-4(y+3)+1\cdot(z-2)=0$$

Sfruttando $a=1$, $b=-4$, $c=1$ del piano α, si trova un piano parallelo ad α e passante per P.

$$x-1-4y-12+z-2=0$$

$$\pi: \boxed{x-4y+z-15=0}$$

PIANO π, PARALLELO AD α E PASSANTE PER P.

(*)

Determiniamo adesso un secondo piano, passante per P (come il piano π) e passante per P_1 e P_2. Scelto un punto generico $Q(x,y,z)$ sappiamo che la seguente matrice fa riferimento a tutti i punti Q appartenenti allo stesso piano (complanari) di P, P_1 e P_2:

$$\begin{array}{c} \overline{PQ} \\ \overline{PP_1} \\ \overline{PP_2} \end{array}\begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z-2 \\ 0 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

I 4 punti sono complanari se il determinante di questa matrice è nullo $(=0)$

TROVARE PIANO PARALLELO AD UN ALTRO E PASSANTE PER P - METODO ALTERNATIVO

(*) N.B.: Potevo ottenere il piano π, parallelo al piano $\alpha: x-4y+z-1=0$ e passante per P considerando il fascio di piani paralleli $x-4y+z+h=0$ e, imponendo il passaggio per P, avrei ottenuto:

$$1+12+2+h=0 \Rightarrow h=-15 \rightarrow \boxed{\pi: x-4y+z-15=0}$$

Calcoliamo allora tale determinante:

$$\det\begin{pmatrix} x-1 & y+3 & z-2 \\ 0 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = (x-1)\det\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - (y+3)\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} + (z-2)\det\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= -7(x-1) - 2(y+3) + 8(z-2) =$$

Si impone il determinante uguale a zero.

$$= -7x+7-2y-6+8z-16 = 0$$

$$\boxed{-7x - 2y + 8z - 15 = 0}$$

Abbiamo così individuato il secondo piano. Entrambi i piani sappiamo che passano per P, se ~~[illegible]~~ i 2 piani non sono paralleli allora il loro sistema ci fornisce la retta r.

Verifichiamo prima di tutto che ~~la retta~~ i 2 piani non sono paralleli, ricordando che i piani sono paralleli quando la matrice dei parametri di giacitura ha rango 1.

Considerando i piani

$$x-4y+z-15=0$$
$$+7x+2y-8z+15=0$$

$$\text{rango}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ +7 & +2 & -8 \end{pmatrix} = 2 \neq 1$$ i piani non sono paralleli.

$\det\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ +7 & +2 \end{pmatrix} = 2+28 = 30 \neq 0$ pertanto il rango della matrice è 2 e i piani non sono paralleli. Si tratta di un sistema lineare di 2 equazioni in 3 incognite, risolviamo rispetto a x e y ottenendo l'equazione di una retta in forma ridotta

$$\begin{cases} x-4y = -z+15 \\ 7x+2y = 8z-15 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x = \frac{\det\begin{pmatrix} -z+15 & -4 \\ 8z-15 & 2 \end{pmatrix}}{30} = \frac{-2z+30+32z-60}{30} = \frac{30z-30}{30} = z-1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -z+15 \\ 7 & 8z-15 \end{vmatrix}}{30} = \frac{8z-15+7z-105}{30} = \frac{15z-120}{30} = \frac{1}{2}z-4$$

$$\begin{cases} x = z-1 \\ y = \frac{1}{2}z-4 \end{cases}$$

Ricordando la retta in forma ridotta, possiamo trovare i parametri direttori:

$$\begin{cases} x = lz+p \\ y = mz+q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z-1 \\ y = \frac{1}{2}z-4 \end{cases} \quad l=1 \quad m=\frac{1}{2} \quad n=1 \quad \vec{r}\left(1, \frac{1}{2}, 1\right)$$

Riscrivendo opportunamente il sistema, una volta ricavati i parametri direttori, possiamo individuare l'equazione della retta:

$$\begin{cases} x = z-1 \\ y = \frac{1}{2}z-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+1 = z \\ y+4 = \frac{1}{2}z \end{cases}$$

$$\frac{x+1}{l} = \frac{y+4}{m} = \frac{z}{n}$$

$$\boxed{\frac{x+1}{1} = \frac{y+4}{\frac{1}{2}} = \frac{z}{1}}$$ EQUAZIONE DELLA RETTA r.

DISTANZA FRA 2 RETTE

7) Determinare la distanza delle rette:

$$r: \begin{cases} x=2z \\ y=-z-1 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x=2z \\ y=-z \end{cases}$$

Per calcolare la distanza fra le 2 rette bisogna prima di tutto ~~~~ verificare che queste siano parallele.

Basta pertanto ricavare i parametri direttori, notando che entrambe le rette sono in forma ridotta $\begin{cases} x=lz+p \\ y=mz+q \end{cases}$

Nel nostro caso, avremo quindi che i parametri direttori delle 2 rette saranno:

$$\vec{r}(2,-1,1) \qquad \vec{s}(2,-1,1)$$

I parametri direttori delle 2 rette sono uguali, quindi proporzionali, pertanto le 2 rette risultano avere la stessa direzione ed essere parallele. Per completezza, verifichiamo che

$$\text{rang}\begin{pmatrix} l & m & n \\ l' & m' & n' \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow \text{rang}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = -2+2=0 \qquad \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 2-2=0 \qquad \det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = -1+1=0$$

Le due rette saranno pertanto parallele.

Portiamo la prima retta, ~~~~ in forma parametrica, come segue:

$$\begin{cases} x=2z \\ y=-z-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2t \\ y=-1-t \\ z=t \end{cases}$$

Assegniamo a $t=0$ per determinare un punto della retta $r \rightarrow A(0,-1,0)$

Una volta trovato questo punto, determiniamo un piano ortogonale alla retta r ed s e passante per A:

$$l(x-x_0)+m(y-y_0)+n(z-z_0)=0 \Rightarrow 2(x-0)-(y+1)+(z-0)=0$$

$$\boxed{2x-y+z-1=0}$$

Mettendo a sistema le equazioni della retta s e il fascio trovato si identificherà pertanto un punto di intersezione B, come segue:

$$\begin{cases} 2x-y+z-1=0 \\ x=2z \\ y=-z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4z+z+z-1=0 \\ x=2z \\ y=-z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=\frac{1}{6} \\ x=\frac{1}{3} \\ y=-\frac{1}{6} \end{cases}$$

$A(0,-1,0)$

$B\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)$

Calcoliamo adesso la distanza AB:

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{3}-0\right)^2+\left(-1+\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{1}{6}-0\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{25}{36}+\frac{1}{36}}=\sqrt{\frac{4+25+1}{36}}=\sqrt{\frac{30}{36}}=\sqrt{\frac{5}{6}}$$

RIEPILOGO PROCEDURA - DISTANZA FRA 2 RETTE:

- Si determinano i parametri direttori di entrambe le rette e si verifica se sono parallele;
- Considerando la forma parametrica di una delle 2, si determina un suo punto.
- Si sfruttano i parametri direttori di una delle 2 (tanto è uguale, sono parallele) e il punto trovato e si trova il piano ortogonale da questa formula

$$l(x-x_0)+m(y-y_0)+n(z-z_0)=0$$

Ricordare che i parametri di giacitura di un piano sono i parametri direttori di una qualunque retta perpendicolare al piano

- Il piano trovato deve intersecare l'altra delle 2 rette per trovare un altro punto che intersecherà anch'esso il piano ortogonale.
- trovati i 2 punti, si applica la formula per la distanza fra 2 punti.

$A(x_1,y_1,z_1)$
$B(x_2,y_2,z_2)$

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

(8) Determinare l'equazione del piano α passante per la retta $r: \begin{cases} x = 2z - 1 \\ y = z \end{cases}$ e parallelo alla retta $s: \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 1 \end{cases}$

PIANO PASSANTE PER UNA RETTA E PARALLELO AD UN'ALTRA RETTA

Sapendo che il piano α passa per la retta r, possiamo considerare il fascio di piani con asse r e, tra questi piani, considerare quello parallelo alla retta s.

Scriviamo allora:

$$(x - 2z + 1) + \lambda(y - z) = 0$$

$$x - 2z + 1 + \lambda y - \lambda z = 0$$

$$x + \lambda y - \lambda z - 2z + 1 = 0$$

$$x + \lambda y + (-2 - \lambda) z + 1 = 0$$

Il piano α sarà parallelo alla retta s di parametri direttori $(l, m, n) \to (1, 1, 0)$ quando sarà valida la seguente condizione:

$$al + bm + cn = 0$$

$$1 \cdot 1 + \lambda \cdot 1 + (-2 - \lambda) \cdot 0 = 0$$

$$1 + \lambda = 0$$

$$\lambda = -1$$

Pertanto, avremo che il piano parallelo alla retta s e passante per la retta r è

$$x + \lambda y + (-2 - \lambda) z + 1 = 0 \quad \text{con } \lambda = -1$$

$$\boxed{x - y - z + 1 = 0}$$

PIANO α PARALLELO ALLA RETTA s E PASSANTE PER r

(9) Determinare la retta passante per $P(1,0,1)$ incidente alla retta $r: \begin{cases} x=z \\ y=z \end{cases}$ e parallela al piano $\pi: x-2y+z-1=0$

(36)

RETTA PASSANTE PER P, INCIDENTE ALLA RETTA E PARALLELA AL PIANO π

Si determinano due piani, il piano parallelo a π e passante per P e il piano che contenga la retta r e passante per P.

Cerco il piano // a π e passante per P:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$
$$1(x-1)-2(y-0)+1(z-1)=0$$
$$x-1-2y+z-1=0$$

$\boxed{x-2y+z-2=0}$ PIANO // A π E PASSANTE PER P

- Cerco il piano appartenente al fascio di piani di asse r e passante per P:

$$(x-z)+\lambda(y-z)=0$$
$$x-z+\lambda y-\lambda z=0$$
$$x+\lambda y+(-1-\lambda)z=0$$
$$x+\lambda y-(1+\lambda)z=0$$

IMPONIAMO IL PASSAGGIO PER P COSÌ DA RICAVARE λ:

$$1+\lambda\cdot 0-1-\lambda=0$$
$$1-1-\lambda=0$$
$$-\lambda=0$$
$$\boxed{\lambda=0}$$

$$x+0\cdot y-(1+0)z=0$$

$\boxed{x-z=0}$ PIANO CONTENENTE LA RETTA r E PASSANTE PER P

Dal sistema dei 2 piani trovati si determina la retta desiderata:

$$\begin{cases} x-2y+z-2=0 \\ x-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-z=2y+2 \\ x-z=0 \end{cases}$$

Questi 2 piani rappresentano una retta se non sono paralleli, ovvero se il rango della matrice dei rispettivi parametri di giacitura ha rango 2 (se il rango è 1 i piani sono paralleli e non rappresentano una retta).

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0+2 = 2 \neq 0$$

$$\text{rango}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

Possiamo determinare la retta:

$$\begin{cases} x+z=2y+2 \\ x-z=0 \end{cases} \Rightarrow \quad x = \frac{\begin{vmatrix} 2y+2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{-2y-2}{2} = -y-1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2y+2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{2} = \frac{0-2y-2}{2} = -y-1$$

$$\vec{v}_s(-1,1,-1)$$

$$\begin{cases} x=-y-1 \\ z=-y-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+1=-y \\ z+1=-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x-1=y \\ -z-1=y \end{cases}$$

$$\frac{-x-1}{l} = \frac{y}{m} = \frac{-z-1}{n}$$

$$\boxed{\frac{-x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{-z-1}{-1}}$$

$$\boxed{x+1 = y = z+1}$$

1) Determinare l'equazione cartesiana della superficie generata dalla rotazione della retta $r: \begin{cases} x=z \\ y=2z+1 \end{cases}$ intorno alla retta $s: \begin{cases} x=2z-1 \\ y=z \end{cases}$

ROTAZIONE RETTA ATTORNO ALTRA RETTA

Per poter considerare la superficie generata dalla rotazione della retta r attorno alla retta s bisogna prima verificare che le 2 rette siano sghembe, ovvero non siano complanari e non appartengano ad uno stesso piano.

Sappiamo che 2 rette sono sghembe quando non sono complanari e quindi non sono parallele e non hanno punti di intersezione.

Consideriamo i parametri direttori delle 2 rette:

$\vec{r}(1,2,1)$

$\vec{s}(2,1,1)$

Sappiamo che 2 rette sono parallele se:

$$\text{rang}\begin{pmatrix} l & m & n \\ l' & m' & n' \end{pmatrix} = 1$$

Calcoliamo pertanto il rango della matrice nel nostro caso:

$$\text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \qquad \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 1-4 = -3 \neq 0$$

Le rette non sono allora parallele.

Determiniamo se le rette hanno punti di intersezione:

$$\begin{cases} x=z \\ y=2z+1 \\ x=2z-1 \\ y=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=z \\ y=2z+1 \\ x=2z-1 \\ 2z+1=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=z \\ y=2z+1 \\ z=2z-1 \\ z=-1 \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{cases} x=z \\ y=2z+1 \\ z=1 \\ z=-1 \end{cases}\right\} \text{impossibile}$$

Le due rette pertanto non sono incidenti.

Abbiamo così visto che le rette non sono parallele, non hanno punti di intersezione e allora non saranno complanari ma saranno sghembe.

Una volta aver dimostrato che le rette r ed s sono sghembe, definiamo l'equazione cartesiana della superficie generata dalla rotazione della retta r attorno alla retta s.

Prendiamo un generico punto della retta r, che in questo caso sarà $R(h, 2h+1, h)$.
Ricordando che, data una retta di parametri direttori (l,m,n) e un punto $P(x_0,y_0,z_0)$ è possibile ricavare il piano ortogonale alla retta passante per P con:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$
$$l(x-x_0)+m(y-y_0)+n(z-z_0)=0$$

Ricorda relazione fra a,b,c e l,m,n per ottenere un piano ortogonale a $\vec{v}(l,m,n)$ passante per P

Nel nostro caso possiamo ricavare un piano ortogonale alla retta s (che non si muove) passante per il punto R della retta r (che si muove).
I parametri direttori della retta s sono $\vec{s}(2,1,1)$, il piano ortogonale alla retta s e passante per $R(h, 2h+1, h)$ è dato da:

$$l(x-x_0)+m(y-y_0)+n(z-z_0)=0 \Rightarrow 2(x-h)+1(y-2h-1)+1(z-h)=0$$

$$2x-2h+y-2h-1+z-h=0$$

$$\boxed{2x+y+z-5h-1=0}$$

PIANO ORTOGONALE ALLA RETTA S E PASSANTE PER R

Fissiamo un punto S qualsiasi sulla retta s e, calcolando la distanza fra i punti R ed S, imponiamo si tratti del raggio di una sfera di centro il punto S sulla retta s

$S(-1,0,0)$

$R(h, 2h+1, h)$

$$d(R,S)=\sqrt{(-1-h)^2+(2h+1)^2+h^2}=$$

$$=\sqrt{1+2h+h^2+4h^2+4h+1+h^2}=\sqrt{6h^2+6h+3}$$

$$d(R,S)=r=\sqrt{6h^2+6h+3}$$

Per ricavare la superficie generata dalla rotazione della retta r attorno alla retta s si dovrà ora determinare l'equazione della sfera di centro $S(-1,0,0)$ e raggio $r=\sqrt{6h^2+6h+3}$, che sappiamo essere in generale:

$$C(\alpha,\beta,\gamma)$$

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=r^2$$

Nel nostro caso avremo:

$$\boxed{(x+1)^2+(y-0)^2+(z-0)^2=6h^2+6h+3}$$

SFERA CON CENTRO IN S, PUNTO SULLA RETTA s E RAGGIO $r=\sqrt{6h^2+6h+3}$

Per determinare la superficie desiderata, basta mettere a sistema la sfera individuata e il piano ortogonale alla retta s e passante per il punto R:

$$\begin{cases}(x+1)^2+y^2+z^2=6h^2+6h+3\\ 2x+y+z-5h-1=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(x+1)^2+y^2+z^2=6\left(\frac{2x+y+z-1}{5}\right)^2+6\left(\frac{2x+y+z-1}{5}\right)-3\\ h=\frac{2x+y+z-1}{5}\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2+2x+1+y^2+z^2-6\left(\frac{2x+y+z-1}{5}\right)^2-\frac{12}{5}x-\frac{6}{5}y-\frac{6}{5}z+\frac{6}{5}+3=0\\ h=\frac{2x+y+z-1}{5}\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2-6\left(\frac{2x+y+z-1}{5}\right)^2+\ -\frac{2}{5}x-\frac{6}{5}y-\frac{6}{5}z+\frac{21}{5}=0\\ h=\frac{2x+y+z-1}{5}\end{cases}$$

DA CONTINUARE...

SUPERFICIE GENERATA ROTAZIONE RETTA INTORNO ALTRA RETTA

(11) Determinare l'equazione della superficie generata dalla rotazione della retta $r: \begin{cases} x=z \\ y=2z \end{cases}$ intorno alla retta $s: \begin{cases} x=1 \\ y=z \end{cases}$

Bisogna prima verificare che le 2 rette considerate siano sghembe. Due rette sono sghembe quando non sono complanari, ovvero non appartengono ad uno stesso piano. In particolare, per dimostrare che 2 rette ~~non~~ sono sghembe basta dimostrare che non sono fra loro parallele e che non hanno alcun punto di ~~…~~ intersezione.

~~Per dimostrare~~ In generale, dati i parametri direttori di 2 rette (l,m,n) e (l',m',n'), queste saranno parallele se $\text{rang}\begin{pmatrix} l & m & n \\ l' & m' & n' \end{pmatrix} = 1$.

Consideriamo allora i parametri direttori delle rette r ed s:

$\vec{r}(1,2,1)$

$\vec{s}(0,1,1)$

Verifichiamo che le rette non siano parallele:

$$\begin{pmatrix} l & m & n \\ l' & m' & n' \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

Il rango della matrice considerata sarà pertanto:

$$\text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

le 2 rette non sono parallele.

$$\begin{cases} x=z \\ y=2z \\ x=1 \\ y=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=z \\ y=2z \\ x=1 \\ 2z-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=z \\ y=2z \\ z=1 \\ z=0 \end{cases} \text{impossibile}$$

le due rette non hanno punti di intersezione.

Le due rette considerate sono allora sghembe.

Prendiamo ora un generico punto sulla retta r in movimento. Sia $R(h,2h,h)$ tale punto. Determiniamo il piano ortogonale alla retta s passante per R, ricordando che i parametri direttori di s sono: $\vec{s}(0,1,1)$

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

$$l(x-x_0)+m(y-y_0)+n(z-z_0)=0 \leftarrow$$ per il piano ortogonale al vettore $\vec{s}(l,m,n)$

$$0 \cdot (x-h) + 1 \cdot (y-2h) + 1 \cdot (z-h) = 0$$

$$y - 2h + z - h = 0$$

$$\boxed{y + z - 3h = 0}$$ PIANO ORTOGONALE ALLA RETTA s E PASSANTE PER R

$S(1,0,0)$

Consideriamo un punto S qualsiasi sulla retta s e imponiamo che questo sia il centro di una sfera di raggio $\delta(R,S)$.

Calcoliamo pertanto questa distanza per ricavare successivamente l'equazione della sfera:

$$\delta(R,S) = \sqrt{(1-h)^2 + (-2h)^2 + (-h)^2} = \sqrt{1 - 2h + h^2 + 4h^2 + h^2} = \sqrt{6h^2 - 2h + 1}$$

$R(h, 2h, h)$

$S(1,0,0)$

$$\delta(R,S) = \sqrt{6h^2 - 2h + 1}$$

L'equazione generica di una sfera di centro $C(\alpha, \beta, \gamma)$ e raggio r è:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = r^2$$

Nel nostro caso avremo:

$$(x-1)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = 6h^2 - 2h + 1$$

Dall'intersezione della sfera trovata e del piano ortogonale a s passante per R si trova la superficie desiderata. Scriveremo allora:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = 6h^2 - 2h + 1 \\ y + z - 3h = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 + y^2 + z^2 = 6\left(\frac{y+z}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{y+z}{3}\right) + 1 \\ h = \frac{y+z}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 1 + y^2 + z^2 = 6\left(\frac{y^2 + 2zy + z^2}{9}\right) \\ h = \frac{y+z}{3} \end{cases}$$

DA CONTINUARE

11 Determinare l'equazione cartesiana della sfera tangente in $A(0,0,1)$ alla retta $r: \begin{cases} x = z-1 \\ y = 0 \end{cases}$ ed avente centro sulla retta $s: \begin{cases} x = -2z \\ y = -z \end{cases}$

STERA TANGENTE IN UN PUNTO UNA RETTA IL CUI CENTRO APPARTIENE AD UN'ALTRA RETTA

Per determinare l'equazione della sfera bisogna conoscere le coordinate $C(\alpha,\beta,\gamma)$ del centro e il raggio.
Partendo dalla retta r tangente la sfera nel punto $A(0,0,1)$, sappiamo che il piano ortogonale alla retta tangente e passante per il punto A di tangenza passa per il centro della sfera. Una volta ricavato tale piano, dall'intersezione fra questo e la retta s passante per il centro otteniamo quest'ultimo.
Dalla distanza fra il centro e il punto A di tangenza si ottiene infine il raggio e si può determinare l'equazione della sfera.
Determiniamo il piano ortogonale alla retta r, di parametri direttori $\vec{r}(1,0,1)$, passante per $A(0,0,1)$ come segue:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

$$l(x-x_0)+m(y-y_0)+n(z-z_0)=0$$

$$1(x-0)+0\cdot(y-y_0)+1\cdot(z-1)=0$$

$\pi: \boxed{x+z-1=0}$ PIANO $\perp$ AD r e PASSANTE PER A

Determiniamo adesso, dall'intersezione del piano π e della retta s, le coordinate del centro:

$$\begin{cases} x+z-1=0 \\ x=-2z \\ y=-z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2z+z-1=0 \\ x=-2z \\ y=-z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=-1 \\ x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

$\boxed{C(\alpha,\beta,\gamma) \rightarrow C(2,1,-1)}$

È possibile adesso ricavare il raggio come $d(A,C)$

$$d(A,C) = \sqrt{(2-0)^2+(1-0)^2+(-1-1)^2} = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3$$

Una volta noti il centro $C(2,1,-1)$ e il raggio $d(A,C)=3$, possiamo fare riferimento all'equazione cartesiana generale della sfera:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=r^2$$

Che nel nostro caso diventa

$$\boxed{(x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=3^2}$$

$$x^2-4x+4+y^2-2y+1+z^2+2z+1=9$$

$$x^2+y^2+z^2-4x-2y+2z+6-9=0$$

$$\boxed{x^2+y^2+z^2-4x-2y+2z-3=0}$$

EQUAZIONE CARTESIANA DELLA SFERA DESIDERATA.

12) Determinare l'equazione della sfera avente centro sul piano $\alpha: x-y+z+1=0$ e tangente in $P(1,0,1)$ al piano $\beta: x+2y-z=0$

SFERA TANGENTE IN UN PUNTO UN PIANO AVENTE IL CENTRO IN UN ALTRO PIANO

Per determinare l'equazione cartesiana della sfera bisogna conoscere le coordinate $C(\alpha,\beta,\gamma)$ del centro e il raggio.
Per determinare il centro della sfera basta trovare il punto di intersezione fra il piano α che contiene il centro e la retta perpendicolare al piano β, tangente la sfera, nel punto P, e passante dal punto P stesso.
Per trovare questa retta basta ricordare che deve passare per il punto P e che i suoi parametri direttori sono equivalenti ai parametri di giacitura del piano β ortogonale. Avremo pertanto:

$\beta: x+2y-z=0$

$\vec{v}(l,m,n) \rightarrow \vec{v}(a,b,c) \rightarrow \vec{v}(1,2,-1)$

$P(x_0,y_0,z_0) \rightarrow P(1,0,1)$

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$$

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-0}{2} = \frac{z+1}{-1} = t$$

$$\begin{cases} x-1=t \\ \frac{y}{2}=t \\ z+1=-t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1+t \\ y=2t \\ z=1-t \end{cases}$$

Poniamo a sistema questa retta con il piano α per determinare un valore per t e di conseguenza le coordinate (x,y,z) del centro:

$$\begin{cases} x-y+z+1=0 \\ x=1+t \\ y=2t \\ z=1-t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+\cancel{t}-2t+1-\cancel{t}+1=0 \\ x=1+t \\ y=2t \\ z=1-t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2t+1+1+1=0 \\ x=1+t \\ y=2t \\ z=1-t \end{cases}$$

$$\begin{cases} t=+\frac{3}{2} \\ x=1+\frac{3}{2} \\ y=2\cdot\frac{3}{2} \\ z=1-\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=\frac{3}{2} \\ x=\frac{5}{2} \\ y=3 \\ z=-\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{C\left(\frac{5}{2},3,-\frac{1}{2}\right)}$$

Dalla distanza $\overline{AC}$ fra i punti $C\left(\frac{5}{2}, 3, -\frac{1}{2}\right)$ e il punto di tangenza $P(1,0,1)$ si determina il raggio della sfera:

$$d(A,C) = \sqrt{\left(\frac{5}{2}-1\right)^2 + (3-0)^2 + \left(-\frac{1}{2}-1\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4}+9+\frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{18}{4}+9} =$$

$$= \sqrt{\frac{9}{2}+9} = \sqrt{\frac{27}{2}} = \sqrt{\frac{3^3}{2}} = 3\sqrt{\frac{3}{2}}$$

La sfera avrà pertanto equazione:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2 = r^2$$

$$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+(y-3)^2+\left(z+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{27}{2}$$

$$\frac{26}{4}+9-\frac{27}{2}$$

$$\frac{26+36-54}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

$$x^2-5x+\frac{25}{4}+y^2-6y+9+z^2+z+\frac{1}{4} = \frac{27}{2}$$

$$x^2+y^2+z^2-5x-6y+z+\frac{25}{4}+9+\frac{1}{4}-\frac{27}{2} = 0$$

$$\boxed{x^2+y^2+z^2-5x-6y+z+2=0}$$

EQUAZIONE DELLA SFERA DI CENTRO $C\left(\frac{5}{2}, 3, -\frac{1}{2}\right)$ E RAGGIO $3\sqrt{\frac{3}{2}}$.

14

47

Determinare l'equazione della sfera tangente in $A(0,1,0)$ alla retta $r: \begin{cases} x=z \\ y=z+1 \end{cases}$ ed avente centro sulla retta $s: \begin{cases} x=1 \\ y=z \end{cases}$. Verificato che $O(0,0,0)$ appartiene alla sfera, determinare il piano tangente in O alla sfera.

SFERA TANGENTE IN UN PUNTO UNA RETTA ED AVENTE CENTRO SU UN'ALTRA RETTA. PROBLEMA DELL'ORIGINE.

Per determinare l'equazione della sfera servono le coordinate del suo centro e raggio.
Consideriamo il piano ortogonale alla retta r e passante per il punto di tangenza A, tale piano passerà per il centro della sfera. ~~Esso~~ Dall'intersezione fra questo piano e ~~il centro della sfera otteniamo~~ la retta s passante per il centro della sfera otteniamo le coordinate di tale centro. $\vec{r}(1,1,0)$ $A(0,1,0)$

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

$$l(x-0)+m(y-1)+n(z-0)=0$$

$$1(x-0)+1(y-1)+0(z-0)=0$$

$$\boxed{x+y-1=0}$$

PIANO $\perp$ ALLA RETTA r PASSANTE PER A.
TALE PIANO PASSERÀ ANCHE PER IL CENTRO DELLA SFERA. $C(\alpha,\beta,\gamma)$

$$\begin{cases} x+y-1=0 \\ x=1 \\ y=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+z-1=0 \\ x=1 \\ y=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \quad C(1,0,0)$$ centro della sfera.

Per ricavare il raggio della sfera basta considerare la distanza fra A e C:

$$d(A,C)=\sqrt{(1-0)^2+(0-1)^2+(0-0)^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

L'equazione della sfera sarà pertanto:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=r^2$$

$$(x-1)^2+(y-0)^2+(z-0)^2=2$$

$$x^2-2x+1+y^2+z^2=2 \qquad x^2+y^2+z^2-2x-1=0$$

$$x^2+y^2+z^2-2x+1-2=0$$

Notare che la sfera trovata non passa per l'origine $O(0,0,0)$, infatti:

$$x^2+y^2+z^2-2x-1=0$$
$$0^2+0^2+0^2-2\cdot 0-1=0$$
$$-1=0$$ pertanto $O(0,0,0)$ non appartiene alla sfera.

Se la sfera fosse stata del tipo $x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y-2\gamma z=r^2$ allora sarebbe passata per l'origine, in quel caso allora per trovare il piano tangente in O la sfera basterebbe considerare la retta che passa per O e per C, che possiamo trovare con l'equazione

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$ dove $O(x_1,y_1,z_1)\to O(0,0,0)$ e $C(x_2,y_2,z_2)$

Una volta trovata la retta si potrebbero sfruttare i parametri direttori e il punto $O(0,0,0)$ per determinare il piano ortogonale alla retta trovata, quindi avente come parametri di giacitura i parametri direttori (l,m,n) della retta, e passante per $O(0,0,0)$:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$
$$l(x-0)+m(y-0)+n(z-0)=0$$

13 Determinare centro e raggio della circonferenza
$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x-4y=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}$$

CIRCONFERENZA, CENTRO E RAGGIO NOTI SFERA E PIANO

Questa circonferenza è definita come intersezione di un piano $\pi: x+y-z$ e una sfera $x^2+y^2+z^2-2x-4y=0$.

Possiamo da subito determinare il centro della sfera ricordando che

$$x^2+y^2+z^2-2\alpha x-2\beta y-2\gamma z+\delta=0 \qquad C(\alpha,\beta,\gamma)$$

Nel nostro caso:

$$\begin{matrix} -2\alpha=-2 \\ -2\beta=-4 \\ -2\gamma=0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=1 \\ \beta=2 \\ \gamma=0 \end{cases} \qquad \boxed{C_s(1,2,0)}$$ CENTRO DELLA SFERA

Determiniamo la retta perpendicolare al piano e passante per il centro $C_s(1,2,0)$ della sfera, ricordando che i parametri direttori di tale retta sono proprio i parametri di giacitura del piano ad essa ortogonale.

I parametri di giacitura del piano $x+y-z=0$ sono $(1,1,-1)$.

La retta dovrà avere quindi parametri direttori $(l,m,n)\to(1,1,-1)$ e passare per il centro $C_s(1,2,0)$ della sfera:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-0}{-1}=t$$

$$\begin{cases} x-1=t \\ y-2=t \\ z-0=-t \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=0-t \end{cases}}$$

RETTA PERPENDICOLARE AL PIANO CHE SEZIONA LA SFERA E PASSANTE PER IL CENTRO DELLA SFERA STESSA.

Troviamo il centro della circonferenza come l'intersezione fra la retta trovata e il piano $x+y-z=0$:

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=0-t \\ x+y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=0-t \\ 1+t+2+t+t=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=0-t \\ 3t=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-1 \\ y=2-1 \\ z=0+1 \\ t=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \\ z=1 \\ t=-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 1 \\ t = -1 \end{cases} \qquad C_c(0,1,1)$$

Centro della circonferenza

• Per trovare adesso il raggio della circonferenza si può adoperare il teorema di Pitagora; calcolando la distanza $\delta(\pi, C_s)$ del piano dal centro della sfera, e ~~calcolando~~ trovando il raggio R della sfera dalla sua equazione, ~~...~~ si può trovare il cateto del triangolo formato che costituirà il raggio della circonferenza:

$$r_c = \sqrt{R^2 - \delta(\pi, C_s)} \,.$$

Calcoliamo prima ~~la~~ ~~...~~ il raggio R della sfera, ricordando che data la sfera

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma) = r^2$$

$$x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + y^2 - 2\beta y + \beta^2 + z^2 - 2\gamma z + \gamma^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = r^2$$

$$\delta = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - r^2 \qquad r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \delta}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + \delta = 0$$

Quindi, nel nostro caso:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - r^2 = 0 \implies \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = r^2 \quad \text{perché } \delta = 0$$

$$r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 0} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{5}$$

$$r_s = \sqrt{5}$$

Troviamo la distanza fra il centro della sfera $C_s(1,2,0)$ e il piano $\pi: x + y - z = 0$

$$\delta(\pi, C_s) = \left| \frac{a x_0 + b y_0 + c z_0 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right| = \left| \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 - 1 \cdot 0 + 0}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} \right| = \frac{1 + 2}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$

Troviamo adesso il raggio della circonferenza r_c:

$$r_c = \sqrt{r_s^2 - \delta^2(\pi, C_s)} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2} = \sqrt{5 - 3} = \sqrt{2}$$

La circonferenza avrà centro $C_c(0,1,1)$ e raggio $r_c = \sqrt{2}$

CIRCONFERENZA TANGENTE AD UNA RETTA IN UN PUNTO E PASSANTE PER UN ALTRO PUNTO

15 Determinare la circonferenza tangente all'asse y nel punto $P(0,1,0)$ e passante per il punto $Q(1,1,1)$.

Per trovare la circonferenza si dovranno individuare 2 piani particolari, la cui intersezione fornirà una retta passante per il centro. Da questa retta considerata si considererà un punto generico che dovrà avere medesima distanza dai punti P e Q.
Così facendo si determineranno le coordinate del centro C e si potrà calcolare il raggio della circonferenza calcolando la distanza di C da P o da Q.

- Determiniamo il piano ortogonale alla retta y e passante per il punto P:

retta y: $\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$ Parametri direttori retta y: $\vec{y}(0,1,0)$

Determiniamo il piano π: $P(0,1,0)$

$$0\cdot(x-0)+1\cdot(y-1)+0\cdot(z-0)=0$$

$\boxed{y-1=0}$ PIANO $\perp$ ALL'ASSE Y E PASSANTE PER P.

- Determiniamo il piano contenente l'asse y e passante per il punto $Q(1,1,1)$.
Scegliamo 2 punti qualsiasi sull'asse y, il cui punto generico è $Y(0,h,0)$.
Ad esempio i punti $A(0,1,0)$ e $B(0,2,0)$.
Per determinare il piano che passa per i punti A, B e Q consideriamo un generico punto $P(x,y,z)$ e calcoliamo il determinante della matrice, ponendolo uguale a zero:

$$\begin{array}{c} \overline{QP} \\ \overline{QA} \\ \overline{QB} \end{array} \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (x-1)\cdot 1 - (y-1)(1-1)+(z-1)(-1)=$$

$$= x-\cancel{1}-z+\cancel{1}=0$$

$$\boxed{x-z=0}$$

Consideriamo adesso la retta ottenuta intersecando i 2 piani, che sarà una retta passante per il centro della circonferenza.

$$\begin{cases} y-1=0 \\ x-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=z \end{cases} \qquad \vec{r}(1,0,1)$$

Consideriamo un punto generico di questa retta, ~~del suo~~ ovvero $C(h,1,h)$, e imponiamo che tale punto abbia la stessa distanza da P e da Q, tale distanza sarà il raggio della circonferenza.

$$Q(1,1,1)$$
$$P(0,1,0)$$

$$C(h,1,h)$$

$$\overline{CQ}=\overline{CP}$$

$$\sqrt{(h-1)^2+(1-1)^2+(h-1)^2}=\sqrt{(h-0)^2+(1-1)^2+(h-0)^2}$$

$$\sqrt{h^2-2h+1+h^2-2h+1}=\sqrt{h^2+h^2}$$

$$\cancel{\sqrt{}}\,2h^2-4h+2=\cancel{\sqrt{}}\,2h^2$$

$$\cancel{2h^2}-4h+2-\cancel{2h^2}=0$$
$$4h=2$$
$$h=\frac{1}{2}$$

Il centro avrà pertanto coordinate $C\left(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}\right)$

Determiniamo il raggio dalla distanza fra P e C:

$$d(P,C)=\sqrt{\left(\frac{1}{2}-0\right)^2+(1-1)^2+\left(\frac{1}{2}-0\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{2}{4}}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Determiniamo la sfera con centro C e raggio $r=\sqrt{\frac{1}{2}}$, che andrà intersecata col piano $x-z=0$ passante per il centro

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=r^2$$
$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$$
$$x^2-x+\frac{1}{4}+y^2-2y+1+z^2-z+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

$$\boxed{x^2+y^2+z^2-x-2y-z+1=0}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-x-2y-z+1=0 \\ x-z=0 \end{cases}$$

CIRCONFERENZA DESIDERATA

(16) Considerate nello spazio affine di dimensione 3 le rette $r: \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$, $s: \begin{cases} x+1=0 \\ z=0 \end{cases}$, $t: \begin{cases} y+1=0 \\ z+1=0 \end{cases}$, verificare che sono a due a due sghembe e determinare l'equazione cartesiana del luogo delle rette incidenti r, s, t.

DATE 3 RETTE DETERMINARE SE SONO SGHEMBE A 2 A 2 E DETERMINARE IL LUOGO DELLE RETTE INCIDENTI ALLE 3 RETTE

Considerando i parametri direttori di ciascuna retta avremo che:

$\vec{r} = (0,0,1)$
$\vec{s} = (0,1,0)$
$\vec{t} = (1,0,0)$

I parametri direttori di r non sono proporzionali a quelli di s e t, i parametri direttori di s e t non sono proporzionali, pertanto le 3 rette non sono parallele.

Si è dimostrato facilmente che le 3 rette non sono parallele.
Per dimostrare definitivamente che non sono complanari e quindi sono sghembe va dimostrato che non hanno punti di intersezione fra loro:

r e s $\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ x=-1 \\ z=0 \end{cases}$ impossibile — le rette r e s non hanno punti di intersezione

r e t $\rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ y=-1 \\ z=-1 \end{cases}$ impossibile — le rette r e t non hanno punti di intersezione

s e t $\rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ z=0 \\ y=-1 \\ z=-1 \end{cases}$ impossibile — le rette s e t non hanno punti di intersezione.

Pertanto le 3 rette sono a 2 a 2 sghembe.
Per determinare il luogo delle rette incidenti si prende un generico punto di r, ad esempio $R(0,0,h)$ e si determinano i piani passanti per R e con asse s e ~~passanti~~ passanti per R e con asse t.

$R(0,0,h)$

$\pi: (R, s) \quad x+1+\lambda z=0 \Rightarrow x+1+\lambda h \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{h}$

$\pi': (R, t) \quad y+1+\mu(z+1) \rightarrow 1+\mu(h+1) \Rightarrow \mu = -\frac{1}{h+1}$ (in R)

Interseco i 2 piani ottenuti e trovo

$$\begin{cases} x+1-\frac{z}{h}=0 \\ y+1-\frac{(z+1)}{h+1}=0 \end{cases}$$

Si può anche eliminare h da primo e sostituirlo

(17) Date le rette (54)

$$r_1: \begin{cases} x = z+3 \\ y = -2z+1 \end{cases} \qquad r_2: \begin{cases} x = z+2 \\ y = 1 - \frac{1}{2}z \end{cases} \qquad r_3: \begin{cases} x = -z-3 \\ y = -z \end{cases}$$

Trovare la retta incidente alle 3 rette e parallela al piano di $x+2y-z-1=0$.

PROBLEMA DI 3 RETTE DI CUI TROVARE LA RETTA INCIDENTE ALLE 3 E PARALLELA AD UN PIANO

Per determinare la retta incidente alle 3 rette e parallela al piano α si procederà per prima cosa a fissare un generico punto sulla retta r_1 e determinare due piani, con asse in r_2 e in r_3 rispettivamente, passanti per tale punto.
Una volta trovati questi due piani, dalla loro intersezione otterremo il luogo delle rette passanti per le 3 rette date. Imponendo la condizione di parallelismo quindi otterremo la retta desiderata.

$$R_1(h+3, -2h+1, h)$$

- Determiniamo il fascio di piani con asse r_2:

$$(x-z-2) + \lambda\left(y-1+\frac{1}{2}z\right) = 0$$

$$x-z-2+\lambda y - \lambda + \frac{1}{2}\lambda z = 0$$

$$x + \lambda y + \left(\frac{1}{2}\lambda - 1\right)z - 2 - \lambda = 0$$

Imponiamo il passaggio per il punto R_1:

$$h+3+\lambda(-2h+1) + \left(\frac{1}{2}\lambda - 1\right)h - 2 - \lambda = 0$$

$$\cancel{h}+3-2\lambda h + \cancel{\lambda} + \frac{1}{2}\lambda h - \cancel{h} - 2 - \cancel{\lambda} = 0$$

$$\lambda\left(-2h+\frac{1}{2}h\right) + 1 = 0 \Rightarrow \lambda\left(-\frac{3}{2}h\right) = -1 \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{2}{3h}}$$

$$x + \frac{2}{3h}y + \frac{3h+1}{3h}z - \frac{6h+2}{3h} = 0$$

$$\boxed{3hx + 2y + (-3h+1)z - 6h - 2 = 0}$$

PIANO CONTENENTE r_2 E PASSANTE PER R_1

- Determiniamo il fascio di piani con asse r_3:

$$x+z+3+\mu(y+z) = 0$$

$$x+z+3+\mu y + \mu z = 0$$

$$x + \mu y + (1+\mu)z + 3 = 0$$

Imponiamo il passaggio per R_1:

$$h+3+\mu(-2h+1) + (1+\mu)h + 3 = 0$$

$$h+3-2h\mu+\mu+h+h\mu+3 = 0$$

$$\mu(1+h-2h) = -2h-6$$

$$\mu(1-h) = -h-3 \Rightarrow \mu = -\frac{h+3}{1-h} = \frac{h+3}{h-1}$$

$$x+\mu y+(1+\mu)z+3=0 \qquad \text{per } \mu=\frac{h+3}{h-1}$$

$$x+\left(\frac{h+3}{h-1}\right)y+\left(1+\frac{h+3}{h-1}\right)z+3=0$$

$$x+\frac{h+3}{h-1}y+\frac{2h+2}{h-1}z+3=0$$

$$\boxed{(h-1)x+(h+3)y+(2h+2)z+(3h-3)=0}$$

Mettendo a sistema i 2 piani ottenuti si avranno tutte le rette, al variare di h, ~~parallele~~ incidenti le rette r_1, r_2, r_3.

$$\begin{cases} 3hx+2y+(-3h+1)z-6h-2=0 \\ (h-1)x+(h+3)y+(2h+2)z+(3h-3)=0 \end{cases}$$

Ricordando la condizione per cui una retta di parametri direttori (l,m,n) e un piano di parametri di giacitura (a,b,c) sono paralleli se e solo se $al+bm+cn=0$ (condizione di parallelismo), ricaviamo i parametri direttori delle rette sopra trovate:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} \qquad l=\det\begin{pmatrix} b & c \\ b' & c' \end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} 2 & -3h+1 \\ h+3 & 2h+2 \end{pmatrix}=4h+4-[-3h^2+9h+h+3]=$$

$$=4h+4+3h^2-9h-h-3$$

$$=3h^2-6h+1$$

$$m=-\det\begin{pmatrix} a & c \\ a' & c' \end{pmatrix}=-\det\begin{pmatrix} 3h & -3h+1 \\ h-1 & 2h+2 \end{pmatrix}=-\{6h^2+6h-[-3h^2+3h+h-1]\}=$$

$$=-\{6h^2+6h+3h^2-4h+1\}=$$

$$=-9h^2-2h-1$$

$$n=\det\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} 3h & 2 \\ h-1 & h+3 \end{pmatrix}=3h^2+9h-2h+2$$

$$=3h^2+7h+2$$

Imponiamo la condizione di parallelismo con il piano di: $x+2y-z-1=0$

$$al+bm+cn=0$$

$$1(3h^2-6h+1)+2(-9h^2-2h-1)-1(3h^2+7h+2)=0$$

$$\cancel{3h^2}-6h+1-18h^2-4h-2-\cancel{3h^2}-7h-2=0$$

$$-18h^2-17h-3=0$$

$$18h^2+17h+3=0 \qquad \Delta=289-4(54)=289-216=73$$

$$\boxed{h_{1,2}=\frac{-17\pm\sqrt{73}}{36}}$$

18) Determinare la sfera con centro sul piano $\pi: x-y+2z-3=0$, avente distanza minima dall'origine, e tangente alla retta $s: x=y=z+1$

56

STERA CON CENTRO SU UN PIANO, AVENTE DISTANZA MINIMA DALL'ORIGINE E TANGENTE UNA RETTA

Per determinare l'equazione della sfera bisogna determinare centro e raggio.

Determiniamo la retta perpendicolare al piano α e passante per l'origine $O(0,0,0)$.

Tale retta avrà come parametri direttori i parametri di giacitura del piano α pertanto $(a,b,c) \to (1,-1,2)$

$$\begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt \\ z=z_0+nt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0+t \\ y=0-t \\ z=0+2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=2t \end{cases} \qquad \frac{x}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{2}$$

$$x=-y=\frac{z}{2}$$

$\begin{cases} y=-x \\ z=2x \end{cases}$ RETTA PASSANTE PER O E PERPENDICOLARE AL PIANO π CHE CONTIENE IL CENTRO, TALE RETTA PASSA PER IL CENTRO

Dall'intersezione fra questa retta trovata e il piano π si determinano le coordinate del centro:

$$\begin{cases} x-y+2z-3=0 \\ y=-x \\ z=2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+x+4z-3=0 \\ y=-x \\ z=2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=-\frac{1}{2} \\ z=1 \end{cases} \qquad C\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)$$

Bisogna adesso determinare le coordinate del punto di ~~intersezione~~ tangenza fra la sfera e la retta s. Per determinarlo basta trovare il piano ortogonale alla retta s e passante per il centro e considerare l'intersezione di tale piano con la retta s:

$C\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right) \qquad s: \begin{cases} x=z+1 \\ y=z+1 \end{cases} \qquad \vec{s}(1,1,1)$

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$
$$l(x-x_0)+m(y-y_0)+n(z-z_0)=0$$
$$1\left(x-\frac{1}{2}\right)+1\left(y+\frac{1}{2}\right)+1(z-1)=0$$
$$x-\frac{1}{2}+y+\frac{1}{2}+z-1=0$$

$\Rightarrow \boxed{x+y+z-1=0}$ PIANO ORTOGONALE ALLA RETTA S E PASSANTE PER IL CENTRO. QUESTO PIANO DI CONSEGUENZA PASSA PER IL PUNTO DI TANGENZA FRA SFERA E RETTA S

Dall'intersezione fra questo piano e la retta s ottengo il punto di tangenza:

$$\begin{cases} x+y+z-1=0 \\ x=z+1 \\ y=z+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z+1+z+1+z-1=0 \\ \ldots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=-\frac{1}{3} \\ x=\frac{2}{3} \\ y=\frac{2}{3} \end{cases} \quad P\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$$

Abbiamo constatato che la sfera interseca la retta s nel punto $P\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$. (57)

Per determinare adesso l'equazione cartesiana della sfera di centro $C\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$ e di raggio $d(C,P)$ troviamo il raggio e poi utilizziamo la formula generale:

$$\frac{2}{3}-\frac{1}{2} \rightarrow \frac{4-3}{6} = \frac{1}{6}$$

$$\delta(C,P) = \sqrt{\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}-1\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{36}+\frac{49}{36}+\frac{16}{9}} = \sqrt{\frac{1+49+64}{36}} = \sqrt{\frac{114}{36}} =$$

$$= \sqrt{\frac{57}{18}} = \sqrt{\frac{19}{6}} = r$$

$$C(\alpha, \beta, \gamma) \qquad r = \sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\delta}$$

Determiniamo la sfera, ricordando che:

$$x^2+y^2+z^2-2\alpha x-2\beta y-2\gamma z+\delta=0$$

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2 = r^2$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+(z-1)^2 = \frac{19}{6}$$

$$1+\frac{1}{2}-\frac{19}{6} = \frac{6+3-19}{6} = \frac{-10}{6} = -\frac{5}{3}$$

$$x^2-x+\frac{1}{4}+y^2+y+\frac{1}{4}+z^2-2z+1-\frac{19}{6}=0$$

$$x^2+y^2+z^2-x+y-2z+\frac{1}{2}+1-\frac{19}{6}=0$$

$$\boxed{x^2+y^2+z^2-x+y-2z-\frac{5}{3}=0}$$

EQUAZIONE CARTESIANA DELLA SFERA DESIDERATA