REGOLA DI SARRUS
[VARIANTE "A STELLA" by Prof. D'Alba]

La regola di Sarrus consente di trovare il determinante di una matrice 3X3. È molto utile quando la matrice ha pochi "0" e quindi applicare il metodo di Laplace risulta lungo e complicato.

Esistono 2 varianti della regola di Sarrus:

- Variante "ad incrocio": la più utilizzata e semplice (forse...)
- Variante "a stella": meno utilizzata ma molto veloce ed utilizzata SOLO dagli studenti della prof D'Alba! (su Internet non si trova questa variante).

Vedremo adesso quest'ultima variante. Prendiamo una matrice 3X3:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

- Moltiplichiamo gli elementi della diagonale principale $(a \cdot e \cdot i)$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

- Moltiplichiamo gli elementi che formano le prime 3 punte della stella $(d \cdot h \cdot c)$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

- Moltiplichiamo gli elementi che formano le altre 3 punte della stella $(b \cdot f \cdot g)$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

- Sommiamo i 3 risultati ed otteniamo il primo risultato parziale

- Adesso moltiplichiamo gli elementi della diagonale secondaria $(g \cdot e \cdot c)$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

- Moltiplichiamo gli elementi che formano le prime 3 punte della stella $(b \cdot d \cdot i)$

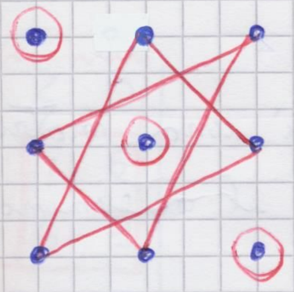
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

- Moltiplichiamo gli elementi che formano le altre 3 punte della stella $(a \cdot f \cdot h)$

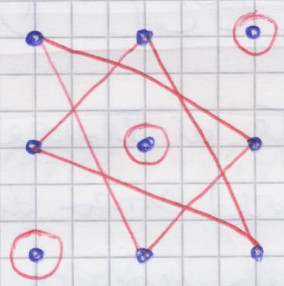
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

- Sommiamo i 3 risultati ed otteniamo il secondo risultato parziale
- Sottraiamo i 2 risultati parziali ed otteniamo il determinante

Bisogna notare che ogni elemento della matrice viene considerato una sola volta per il primo risultato ed una sola volta per il secondo risultato. I grafici seguenti visualizzano le 2 stelle a 6 punte che si formano:

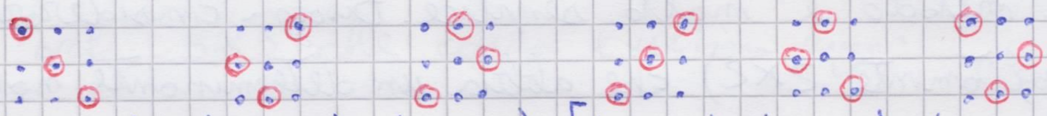


1° risultato parziale



2° risultato parziale

Esempi:



$$\det\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 8 & 1 \\ 4 & 8 & 5 \end{vmatrix} = (2\cdot8\cdot5)+(0\cdot8\cdot3)+(1\cdot1\cdot4)-\left[(3\cdot8\cdot4)+(1\cdot0\cdot5)+(2\cdot1\cdot8)\right] =$$

$$= 80+0+4-(96+0+16) = 84-112 = \boxed{-28}$$

$$\det\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 6 & 5 & 8 \end{vmatrix} = (3\cdot1\cdot8)+(1\cdot5\cdot1)+(5\cdot2\cdot6)-\left[(1\cdot1\cdot6)+(3\cdot2\cdot5)+(1\cdot5\cdot8)\right] =$$

$$= 24+5+60-(6+30+40) = 89-76 = \boxed{13}$$

$$\det\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 6 & 3 \end{vmatrix} = (3\cdot2\cdot3)+(1\cdot6\cdot1)+(4\cdot2\cdot4)-\left[(1\cdot2\cdot4)+(4\cdot1\cdot3)+(3\cdot2\cdot6)\right] =$$

$$= 18+6+32-(8+12+36) = 56-56 = \boxed{0}$$

METODO DEGLI ORLATI

Questo metodo consente di trovare il rango di una matrice (solitamente rettangolare) senza dover calcolare il determinante di tutti i minori della matrice.

Nota: il "minore" di una matrice è una sottomatrice quadrata della matrice di partenza.

Il metodo è molto semplice. Bisogna considerare un minore (solitamente 2X2) che abbia un determinante non nullo.

Appena si trova, bisogna "orlarlo" ovvero bisognerà calcolare il determinante dei minori 3X3 che contengono il minore 2X2 che avevamo considerato.

Se tutti i determinanti 3X3 sono nulli allora la matrice avrà rango 2. Altrimenti avrà rango 3.

Esempio:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 1 \\ 5 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

Consideriamo adesso un minore 2X2 con determinante non nullo.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & \boxed{4} & \boxed{6} \\ 0 & \boxed{4} & \boxed{1} \\ 5 & 8 & 9 \end{vmatrix} \qquad \det\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 24 = \boxed{-20}$$

Adesso consideriamo un "orlo" 3×3 e calcoliamo il determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 1 \\ 5 & 8 & 9 \end{vmatrix} \qquad \det\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \cancel{4}+\cancel{24}-\cancel{24}-\cancel{4} = \boxed{0}$$

(Ho applicato la regola di Sarrus)

Come si può notare, una parte della matrice non è stata orlata.
Serve un altro "orlo" 3×3 che copra l'ultima riga:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 1 \\ 5 & 8 & 9 \end{vmatrix} \qquad \det\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 1 \\ 5 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 72+20-120-16 = \boxed{-44}$$

Il rango della matrice è 3 perché c'è un orlo 3×3 che ha il determinante non nullo!

—

Altro esempio rapido:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 4 & 2 \\ 1 & 9 & 6 & 3 \end{vmatrix} \qquad \det\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 12-3 = \boxed{9}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 4 & 2 \\ 1 & 9 & 6 & 3 \end{vmatrix} \qquad \det\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 6 & 4 \\ 1 & 9 & 6 \end{vmatrix} = 72+18+12-12-72-18 = \boxed{0}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 4 & 2 \\ 1 & 9 & 6 & 3 \end{vmatrix} \qquad \det\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \\ 1 & 9 & 3 \end{vmatrix} = 36+9+6-6-36-9 = \boxed{0}$$

Il rango della matrice è 2.

PRODOTTO DI MATRICI

Il prodotto di 2 matrici si può eseguire solo se il numero di colonne della prima matrice è uguale al numero di righe della seconda matrice. Esempi:

$M_{2\times 3} \cdot M_{3\times 4}$ OK! Prodotto Possibile

$\underbrace{3 \quad 3}_{=}$

$M_{3\times 5} \cdot M_{2\times 4}$ NO! Prodotto Non possibile.

$\underbrace{5 \quad 2}_{\neq}$

Il prodotto solitamente è NON commutativo cioè $A \cdot B \neq B \cdot A$.
La matrice risultante ha lo stesso numero di righe della prima matrice e lo stesso numero di colonne della seconda.

Cioè:

$$M_{ij} \cdot M_{kl} \longrightarrow M_{il} \quad \text{con } \boxed{j = k}$$

Il prodotto si esegue così:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} (a\cdot e)+(b\cdot g) & (a\cdot f)+(b\cdot h) \\ (c\cdot e)+(d\cdot g) & (c\cdot f)+(d\cdot h) \end{pmatrix}$$

Il metodo viene spesso chiamato "riga per colonna".

Vediamolo passo passo:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{a \quad b} \\ c \quad d \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} e \\ g \end{matrix}} & \begin{matrix} f \\ h \end{matrix} \end{pmatrix} \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} (a\cdot e)+(b\cdot g) & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{a \quad b} \\ c \quad d \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \begin{matrix} e \\ g \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} f \\ h \end{matrix}} \end{pmatrix} \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} \ldots & (a\cdot f)+(b\cdot h) \\ \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a \quad b \\ \boxed{c \quad d} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} e \\ g \end{matrix}} & \begin{matrix} f \\ h \end{matrix} \end{pmatrix} \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} \ldots & \ldots \\ (c\cdot e)+(d\cdot g) & \ldots \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a \quad b \\ \boxed{c \quad d} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \begin{matrix} e \\ g \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} f \\ h \end{matrix}} \end{pmatrix} \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} \ldots & \ldots \\ \ldots & (c\cdot f)+(d\cdot h) \end{pmatrix}$$

Esempi:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} (1\cdot 3)+(0\cdot 1) & (1\cdot 0)+(0\cdot 1) \\ (2\cdot 3)+(1\cdot 1) & (2\cdot 0)+(1\cdot 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} (3\cdot 1)+(0\cdot 2) & (3\cdot 0)+(0\cdot 1) \\ (1\cdot 1)+(1\cdot 2) & (1\cdot 0)+(1\cdot 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \left[\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (1\cdot 1)+(5\cdot 4)+(3\cdot 2) & (1\cdot 5)+(5\cdot 2)+(3\cdot 4) & (1\cdot 3)+(5\cdot 4)+(3\cdot 3) \\ (4\cdot 1)+(2\cdot 4)+(4\cdot 2) & (4\cdot 5)+(2\cdot 2)+(4\cdot 4) & (4\cdot 3)+(2\cdot 4)+(4\cdot 3) \\ (2\cdot 1)+(4\cdot 4)+(3\cdot 2) & (2\cdot 5)+(4\cdot 2)+(3\cdot 4) & (2\cdot 3)+(4\cdot 4)+(3\cdot 3) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 27 & 27 & 32 \\ 20 & 40 & 32 \\ 24 & 30 & 31 \end{pmatrix}$$

BUON NATALE!

LS UNIPA

23
12
2013