17.01.2008

1) Sia $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo tale che
$$L(x,y,z) = (x+2z, x+2y+z, x).$$
determinare $\ker L$ e $\operatorname{Im} L$.

METODO 1 Determinazione diretta di $\ker L$ e $\operatorname{Im} L$

Il sottospazio $\ker L$ di $\mathbb{R}^3$ è costituito da tutti i vettori dello spazio vettoriale di partenza $\mathbb{R}^3$ che sono associati al vettore nullo dello spazio vettoriale di arrivo $\mathbb{R}^3$ tramite l'applicazione lineare L:

$$\cancel{\ker L = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (x+2z, x+2y+z, x) = (0,0,0)\}}$$

$$\ker L = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / L(x,y,z) = \bar{0}\} =$$
$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (x+2z, x+2y+z, x) = (0,0,0)\}$$

Risolvendo il seguente sistema riusciremo ad individuare (x,y,z):

$$\begin{cases} x+2z=0 \\ x+2y+z=0 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=0 \\ y=0 \\ x=0 \end{cases}$$

L'unico vettore del sottospazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ ad essere associato, tramite L, al vettore nullo è il vettore nullo stesso: $L(0,0,0) = \bar{0}$.

Questo vuol dire che: ~~Ker L = {0}~~
$\dim \ker L = 0$ perché $\ker L = \{\bar{0}\}$

Dal teorema delle dimensioni sappiamo che:

$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \ker L + \dim \operatorname{Im} L$ ma $\dim \ker L = 0$, pertanto
$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \operatorname{Im} L = 3$

Determiniamo adesso il sottospazio $\operatorname{Im} L$ di $\mathbb{R}^3$, costituito da tutti i vettori $w \in \mathbb{R}^3$ che sono immagine tramite l'applicazione lineare L, per qualche vettore $v \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathrm{Im}\,L = \{ w \in \mathbb{R}^3 \,/\, L(v) = w \text{ per qualche } v \in \mathbb{R}^3 \} =$$

$$= \{ (x+2z,\ x+2y+z,\ x) \in \mathbb{R}^3 \,/\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \} =$$

$$= \{ (x,x,x) + (0,2y,0) + (2z,z,0) \in \mathbb{R}^3 \} =$$

$$= \{ x(1,1,1) + y(0,2,0) + z(2,1,0) \in \mathbb{R}^3 \} = \langle (1,1,1),(0,2,0),(2,1,0) \rangle$$

$$\mathrm{Im}\,L = \langle (1,1,1),(0,2,0),(2,1,0) \rangle$$

$\dim \mathrm{Im}\,L = 3$ come volevasi dimostrare.

É UNA VERIFICA SULLE DIMENSIONI TROVATE

$\boxed{\text{METODO 2}}$ Considerando la matrice A_L associata alla base canonica di $\mathbb{R}^3$, calcolandone il rango e ricordando che $\mathrm{rango}(A_L) = \dim \mathrm{Im}\,L$.

UTILE SOLO PER DETERMINARE LE DIMENSIONI DI Ker L e Im L;

Considerando la base canonica C di $\mathbb{R}^3$; $\quad C = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$
e determinando attraverso i suoi vettori le immagini di L:

$$\boxed{\begin{aligned} L(1,0,0) &= (1,1,1) \\ L(0,1,0) &= (0,2,0) \\ L(0,0,1) &= (2,1,0) \end{aligned}}$$

Notare che $\mathrm{Im}\,L = \langle (1,1,1),(0,2,0),(2,1,0) \rangle$
(verificare se si tratta di una coincidenza)

Consideriamo la matrice associata alla base canonica C di $\mathbb{R}^3$:

$$A_L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matrice di L rispetto alla base canonica C di $\mathbb{R}^3$

Determiniamo il rango r di tale matrice, ricordando che $\dim \mathrm{Im}\,L = r$;

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{3+1} \cdot 1 \cdot \det(A_{L_{31}}) = (-1)^4 \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 4 \neq 0$$

Abbiamo trovato un minore di ordine 3 della matrice (in questo caso la matrice stessa) avente un determinante diverso da ϕ, pertanto tale matrice ha rango $r = 3$. $\quad \mathrm{Ker}\,L = \{\bar{0}\}$

$$\dim \mathrm{Im}\,L = r \Rightarrow \dim \mathrm{Im}\,L = 3$$

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \mathrm{Ker}\,L + \dim \mathrm{Im}\,L$$

$$3 = \dim \mathrm{Ker}\,L + 3 \Longrightarrow \dim \mathrm{Ker}\,L = 0$$

2) Sia $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito da:

$$L(x,y,z) = (3x,\ x+2y+z,\ x-y+4z)$$

determinare Ker L e Im L.

23.01.2007

$$\text{Ker } L = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, L(x,y,z) = \bar{0}\} =$$

$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, (3x,\ x+2y+z,\ x-y+4z) = (0,0,0)\} =$$

$$\begin{cases} 3x = 0 \\ x+2y+z=0 \\ x-y+4z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 2y+z=0 \\ -y+4z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ z=-2y \\ -y-8y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ z=-2y \\ -9y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ z=0 \\ y=0 \end{cases}$$

$$\text{Ker } L = \{(0,0,0)\} = \{\bar{0}\}$$

$\dim \text{Ker } L = 0$

Pertanto, sapendo che:

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \text{Ker } L + \dim \text{Im } L$$

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \text{Im } L = 3$$

Determino a questo punto il sottospazio Im L:

$$\text{Im } L = \{(3x,\ x+2y+z,\ x-y+4z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, L(x,y,z) = (3x,\ x+2y+z,\ x-y+4z) \text{ e } x,y,z \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{(3x,x,x) + (0,2y,-y) + (0,z,4z) \,/\, x,y,z \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{x(3,1,1) + y(0,2,-1) + z(0,1,4) \,/\, x,y,z \in \mathbb{R}\}$$

$$= \langle (3,1,1)\ (0,2,-1),\ (0,1,4) \rangle$$

$\dim \text{Im } L = 3$

Come ulteriore verifica, consideriamo la matrice associata ad L tramite la base canonica $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^3$:

$$L(x,y,z) = (3x,\ x+2y+z,\ x-y+4z)$$

$$\mathcal{C} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

$$L(1,0,0) = (3,1,1)$$
$$L(0,1,0) = (0,2,-1)$$
$$L(0,0,1) = (0,1,4)$$

ricordare che $\mathrm{Im}\, L = \langle(3,1,1),(0,2,-1),(0,1,4)\rangle$

Consideriamo pertanto la suddetta matrice:

$$A_L = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

determiniamo il rango:

$$\det\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 3 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = 3\cdot(8+1) = 27 \neq 0$$

Il rango di questa matrice sarà pertanto 3.

Ricordando che $\dim \mathrm{Im}\, L = r$, avremo verificato che $\dim \mathrm{Im}\, L = 3$.

Per verificare a questo punto che il nucleo $\mathrm{Ker}\, L$ ha dimensione zero basterà effettuare il semplice ragionamento:

$$\boxed{\begin{aligned} \dim \mathbb{R}^3 &= \dim \mathrm{Ker}\, L + \dim \mathrm{Im}\, L \\ \dim \mathrm{Ker}\, L &= \dim \mathrm{Im}\, L - \dim \mathbb{R}^3 \\ \dim \mathrm{Ker}\, L &= 3-3 \\ \dim \mathrm{Ker}\, L &= 0 \end{aligned}}$$

Da cui sappiamo che:

$$\mathrm{Ker}\, L = \{\bar{0}\}$$

3) Discutere il sistema lineare

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ kx-ky+z=0 \\ x-y+z=1 \end{cases}$$

al variare del parametro reale k e darne le eventuali soluzioni.

Per determinare le soluzioni del sistema lineare per x,y,z al variare del parametro k bisogna prima di tutto escludere quei valori di k che rendono nulla la matrice del sistema, mentre considerando:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & -k & +1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & -k & +1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -k & +1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^2 \cdot 2 \cdot \det\begin{pmatrix} -k & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 2\cdot(-k)+1 = 0$$

$$= -2k+2 = 0$$

$$2(1-k) = 0 \Rightarrow k = 1$$

È valido per ogni reale tranne il valore $k=1$ che rende nullo il determinante (che dovrà trovarsi al denominatore e non può essere nullo) e inoltre rende impossibile il sistema iniziale: $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$

$$\left.\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+z=0 \\ x-y+z=1 \end{cases}\right\} \text{IMPOSSIBILE!}$$

~~Troviamo le soluzioni:~~

$$\cancel{x = \frac{\det A_x}{\det A} = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -k & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}{2\cdot(1-k)} = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{2(1-k)} = \frac{(-1)^{2+3}\cdot 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}{2(1-k)} = \frac{-2}{2(1-k)} = -\frac{1}{1-}}$$

$$\cancel{A^2 = A^3 + A^2}$$

Troviamo allora le soluzioni:

$A^3 = A^3 - A^1$ La Place per colonne

$$x = \frac{\det A_x}{2(1-k)} = \frac{\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -k & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}}{2(1-k)} = \frac{\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -k & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}}{2(1-k)} = \frac{(-1)^{3+2}\cdot 1\cdot\det\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}}{2(1-k)} =$$

$$= \frac{(-1)^5(-2)}{2(1-k)} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}(1-k)} = \frac{1}{1-k}$$

$A_1 = A_1 -$

In alternativa, lo sviluppo di La Place poteva essere effettuato per righe, osservando che.

$$x = \frac{\det A_x}{2(1-k)} = \frac{\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -k & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}}{2(1-k)} = \frac{\det\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ 0 & -k & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}}{2(1-k)} = \frac{(-1)^{1+2}\cdot 2\cdot\det\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}}{2(1-k)} = \frac{+\cancel{2}}{\cancel{2}\,1-k} =$$

$$= \frac{1}{1-k}$$

$$y = \frac{\det A_y}{2(1-k)} = \frac{\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ k & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}}{2(1-k)} = \frac{0}{2(1-k)} = 0$$ perché vi sono 2 righe identiche!

$A^2 = A^1 + A^2$

$$z = \frac{\det A_z}{2(1-k)} = \frac{\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ k & -k & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}}{2(1-k)} = \frac{\det\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ k & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}}{2(1-k)} = \frac{(-1)^{2+1}\,k\det\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}}{2(1-k)} =$$

$$= \frac{(-1)^3\,k\cdot 2}{} = \frac{-\cancel{2}k}{\cancel{2}(1-k)} = -\frac{k}{1-k} = \frac{k}{k-1}$$

$$z = \frac{k}{k-1}$$

<u>Soluzione</u>: $\left(\frac{1}{1-k}, 0, \frac{k}{k-1}\right)$

4) Discutere il sistema lineare

$$\begin{cases} x+2y+z=1 \\ x+hy+z=1 \\ hx-y-z=0 \end{cases}$$

al variare del parametro reale h e darne le eventuali soluzioni.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & h & 1 \\ h & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Bisogna escludere i valori di h che rendono nullo il determinante della matrice A:

$A_2 = A_2 - A_1$

$$\det A = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & h & 1 \\ h & -1 & -1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & (h-2) & 0 \\ h & -1 & -1 \end{pmatrix} = (-1)^{2+2}\cdot(h-2)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ h & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= (h-2)(-1-h)$$

$$= -(h-2)(h+1) = 0$$

$$-(h^2-h-2)=0$$

$$-h^2+h+2=0$$

$$h^2-h-2=0$$

$$\Delta = b^2-4ac = 1-4\cdot(-2) = 1+8 = 9$$

$$h_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1\pm 3}{2} \left\langle \begin{matrix} -2 \\ 1 \end{matrix} \right.$$

Il determinante di A sarà uguale a zero per $h=-2$ e $h=1$

$\forall x \in \mathbb{R} - \{-2,1\}$

Troviamo adesso le soluzioni:

$A_2 = A_2 - A_1$

$$x = \frac{\det A_x}{\det A} = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & h & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}}{-(h-2)(h+1)} =$$

$$= \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & (h-2) & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}}{-(h-2)(h+1)} = \frac{(-1)^{2+2}(h-2)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}{-(h-2)(h+1)} = \frac{-\cancel{(h-2)}}{-\cancel{(h-2)}(h+1)} = \frac{1}{h+1}$$

$$y = \frac{\det A_y}{\det A} = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ h & 0 & -1 \end{pmatrix}}{-(h-2)(h+1)} = \frac{0}{-(h-2)(h+1)} = 0$$

$$z = \frac{\det A_z}{\det A} = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & h & 1 \\ h & -1 & 0 \end{pmatrix}}{-(h-2)(h+1)} = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & (h-2) & 0 \\ h & -1 & 0 \end{pmatrix}}{-(h-2)(h+1)} = \frac{(-1)^{2+2}(h-2)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ h & 0 \end{pmatrix}}{-(h-2)(h+1)} =$$

$$= \frac{\cancel{(h-2)}\cdot(-h)}{-\cancel{(h-2)}(h+1)} = \frac{h}{h+1}$$

Le soluzione del sistema, al variare del parametro h, sarà quindi data da:

$$S: \left(\frac{1}{h+1}, 0, \frac{h}{h+1}\right)$$

4) Discutere il sistema lineare:

17.01.2008

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ hx+y-z=0 \\ x+y+2z=0 \end{cases}$$

al variare del parametro reale h e dare le eventuali soluzioni.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ h & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^1 = A^1 - A^2$$

$$\det A = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ h & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ h-1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (-1)^{2+1}(h-1)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^3(h-1) = 1-h = 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$$

$$x = \frac{\det A_x}{\det A} = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}{1-h} = \frac{(-1)^{1+1}(+1)\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}{1-h} =$$

$$x = \frac{3}{1-h}$$

$$y = \frac{\det A_y}{\det A} = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ h & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}}{1-h} = \frac{(-1)^{2+1}\cdot 1\cdot\det\begin{pmatrix} h & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}{1-h} = \frac{(-1)\cdot(2h+1)}{1-h} =$$

$$= \frac{-(2h+1)}{1-h}$$

Continuare con retro

5) Discutere, ed eventualmente risolvere, il sistema lineare

$$\begin{cases} x+ky+z=1 \\ 2x-y-z=0 \\ x+y-kz=1 \end{cases}$$

al variare del parametro k, e dare un'interpretazione geometrica dei risultati (?)

Per risolvere il sistema determiniamo il determinante della matrice del sistema, che non può essere nullo.
Avremo pertanto che:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -k \end{pmatrix} = (-1)^{1+1}\cdot 1\cdot\det\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -k \end{pmatrix} + (-1)^{1+2}\cdot k\cdot\det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -k \end{pmatrix} + (-1)^{1+3}\cdot 1\cdot\det\begin{pmatrix} 2 & \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= k+1-k(-2k+1)+2+1 = \cancel{k}+1+2k^2-\cancel{k}+3 = 2k^2+4 = 2(k^2+2)$$

Questo determinante è sempre $\neq 0$, per qualsiasi valore di k. Pertanto $k \; \forall x\in\mathbb{R}$

$$x = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -k \end{pmatrix}}{2(k^2+2)} = \frac{\det\begin{pmatrix} 0 & k-1 & k+1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -k \end{pmatrix}}{2(k^2+2)} = \frac{(-1)^{3+1}\cdot 1\cdot\det\begin{pmatrix} k-1 & k+1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}{2(k^2+2)} =$$

$$= \frac{-(k-1)+k+1}{2(k^2+2)} = \frac{-\cancel{k}+1+\cancel{k}+1}{2(k^2+2)} = \frac{2}{2(k^2+2)} = \frac{1}{k^2+2}$$

$$y = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -k \end{pmatrix}}{2(k^2+2)} = \frac{\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & k+1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -k \end{pmatrix}}{2(k^2+2)} = \frac{(-1)^{1+3}(k+1)\cdot\det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{2(k^2+2)} = \frac{2(k+1)}{2(k^2+2)} =$$

$$= \frac{k+1}{k^2+2}$$

$$z = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{2(k^2+2)} = \frac{\det\begin{pmatrix} 0 & k-1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{2(k^2+2)} = \frac{(-1)^{3+3}\cdot 1\cdot\det\begin{pmatrix} 0 & k-1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}{2(k^2+2)} = \frac{-\cancel{2}(k-1)}{\cancel{2}(k^2+2)} = -\frac{k-1}{k^2+2}$$

Soluzione: $\left(\frac{1}{k^2+2}, \frac{k+1}{k^2+2}, -\frac{k-1}{k^2+2}\right)$

6

Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito da

$$L(x,y,z) = (x, x+2y, x+y+z)$$

a) Determinare Ker L e Im L.

b) Trovare gli eventuali autovalori e i relativi autospazi e dire, motivando la risposta, se è possibile diagonalizzare L.

a)

$$\text{Ker } L = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / L(x,y,z) = \bar{0}\} =$$

$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (x, x+2y, x+y+z) = (0,0,0)\} =$$

$$\begin{cases} x=0 \\ x+2y=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \qquad \text{Ker } L = \{(0,0,0)\} = \{\bar{0}\}$$

$$\dim \text{Ker } L = 0$$

Per il teorema della dimensione sappiamo che $\dim \mathbb{R}^3 = \dim \text{Ker } L + \dim \text{Im } L$, ovvero che $\dim \mathbb{R}^3 = \dim \text{Im } L = 3$ poiché $\dim \text{Ker } L = 0$.

$$\text{Im } L = \{w \in \mathbb{R}^3 / L(v) = w \text{ per qualche } v \in \mathbb{R}^3\} =$$

$$= \{(x, x+2y, x+y+z) \in \mathbb{R}^3\} =$$

$$= \{(x,x,x) + (0,2y,y) + (0,0,z) \in \mathbb{R}^3\} =$$

$$= \{x(1,1,1) + y(0,2,1) + z(0,0,1) \in \mathbb{R}^3\}$$

$$= \langle (1,1,1), (0,2,1), (0,0,1) \rangle$$

$$\text{Im } L = \langle (1,1,1), (0,2,1), (0,0,1) \rangle$$

$\dim \text{Im } L = 3$ come volevasi dimostrare.

b) Per determinare autovalori e autospazi bisogna ricavare la matrice associata ad L tramite una base di $\mathbb{R}^3$, ad esempio la base canonica:

$$C = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

$$L(1,0,0) = (1,1,1) \qquad A_L = M^C_C(L) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$L(0,1,0) = (0,2,1)$$
$$L(0,0,1) = (0,0,1)$$

Dalla matrice ottenuta si ricava il seguente sistema lineare, derivato dalla legge $Ax = \lambda x$:

$$\begin{cases} x = \lambda x \\ x + 2y = \lambda y \\ x + y + z = \lambda z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1-\lambda)x = 0 \\ x + (2-\lambda)y = 0 \\ x + y + (1-\lambda)z = 0 \end{cases} \quad \circledast$$

Si determina il polinomio caratteristico, calcolando il determinante della matrice associata al sistema lineare trovato, e si pone uguale a zero.

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = 0$$

$$\det\begin{pmatrix} (1-\lambda) & 0 & 0 \\ 1 & (2-\lambda) & 0 \\ 1 & 1 & (1-\lambda) \end{pmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot (1-\lambda) \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)[(2-\lambda)(1-\lambda)] =$$
$$= (1-\lambda)^2(2-\lambda) = 0$$

$$\boxed{\text{Autovalori trovati: } \lambda = 1,\ \lambda = 2}$$

$$p(\lambda) = 0$$
$$(1-\lambda)^2(2-\lambda) = 0 \quad \lambda = 1,\ \lambda = 2$$

Gli autovalori trovati sono proprio le soluzioni del polinomio caratteristico.

$$\boxed{\begin{aligned} Ma(2) &= 1 \\ Ma(1) &= 2 \end{aligned}}$$

Per ~~ogni~~ eigenvalue autovalore λ, determiniamo il corrispondente autospazio V_λ, sostituendo nel sistema lineare (*) il valore λ preso in considerazione:

Per $\lambda = 1$, avremo:

$$\begin{cases} \cancel{0x=0} \\ x+y=0 \\ x+y=0 \end{cases} \Rightarrow x=-y$$

$$V(1) = \langle(-\alpha, \alpha, 0)\rangle = \langle(-1,1,0)\rangle$$

$$M_g(1) = 1$$

Per $\lambda = 2$, avremo:

$$\begin{cases} -x=0 \\ x=0 \\ x+y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=z \end{cases}$$

?

NON SONO SICURO CHE SIA QUESTO IL RISULTATO.

$$V(2) = \langle(0,\alpha,\alpha)\rangle = \langle(0,1,1)\rangle$$

$$M_g(2) = 1$$

L'applicazione lineare L è diagonalizzabile se $M_g(\lambda) = M_a(\lambda)$ per ogni λ preso in considerazione.

Nel nostro esempio, avremo:

$$1 = M_g(1) \neq M_a(1) = 2$$
$$M_g(2) = M_a(2) = 1$$

L'applicazione lineare $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ considerata non è diagonalizzabile.

Inoltre:

$$\dim V_{(1)} + \dim V_{(2)} = M_g(1) + M_g(2) = 1+1 = 2 \neq \dim \mathbb{R}^3$$

8) Dato l'endomorfismo $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che:

$$L(x,y,z) = (2x,\ 3x+y,\ x+3y+4z)$$

a) Determinare la matrice di L rispetto alla rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.
b) Trovare la dimensione dell'immagine e del nucleo di L.
c) Trovare gli autovalori e gli autospazi.

a) Determiniamo la matrice dell'endomorfismo L dalla base canonica di $\mathbb{R}^3$:

$$L(1,0,0) = (2,3,1) \qquad\qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$
$$L(0,1,0) = (0,1,3)$$
$$L(0,0,1) = (0,0,4)$$

b) Per trovare la dimensione di $\operatorname{Ker} L$ e $\operatorname{Im} L$ è sufficiente calcolare il rango della matrice associata a L (sulla base canonica), poiché sappiamo che $\boxed{\operatorname{rang}(A) = \dim \operatorname{Im} L}$.

$$\operatorname{rang}(A) = (-1)^{1+1} \cdot 2 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot 4 = 8$$

Il determinante della matrice 3×3 è diverso da zero, questo equivale a dire che le 3 righe sono linearmente indipendenti e le 3 colonne sono linearmente indipendenti.

$$\boxed{\dim \operatorname{Im} L = 3}$$

Per il teorema della dimensione allora sappiamo che:

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \operatorname{Ker} L + \dim \operatorname{Im} L \quad \text{da cui segue che} \quad \boxed{\dim \operatorname{Ker} L = 0}$$

c) Ricordando la definizione di autovalore di una matrice e la relazione del polinomio caratteristico $p(\lambda) = |A - \lambda I| = 0$, avremo che:

$$\begin{cases} 2x = \lambda x \\ 3x + y = \lambda y \\ x + 3y + 4z = \lambda z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2-\lambda)x = 0 \\ 3x + (1-\lambda)y = 0 \\ x + 3y + (4-\lambda)z = 0 \end{cases}$$

Otteniamo la matrice:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 3 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il determinante di questa matrice e imponiamolo uguale a zero:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}(2-\lambda)\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 3 & 4-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)\left[(1-\lambda)(4-\lambda)\right] =$$

$$\boxed{p(\lambda) = (2-\lambda)(1-\lambda)(4-\lambda) = 0} \quad \begin{matrix} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 4 \end{matrix} \Bigg\} \text{ Autovalori della matrice} \quad \boxed{\begin{matrix} Ma(2) = 1 \\ Ma(1) = 1 \\ Ma(4) = 1 \end{matrix}}$$

Determiniamo l'autospazio relativo a ciascun autovalore:

- Per $\lambda_1 = 2$:

$$\begin{cases} 3x - y = 0 \\ x + 3y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3x \\ 10x + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3x \\ z = -\frac{10}{2}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3x \\ z = -5x \end{cases}$$

$$V_{(2)} = \langle(\alpha, 3\alpha, -5\alpha)\rangle = \langle(1, 3, -5)\rangle \qquad \boxed{Mg(2) = 1 = Ma(2)}$$

- Per $\lambda_2 = 1$:

$$\begin{cases} x=0 \\ 3x=0 \\ x+3y+3z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ \cancel{x}+3y+3z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-z \end{cases}$$

$V(1) = \langle (0,\alpha,-\alpha) \rangle = \langle (0,1,-1) \rangle$ $\boxed{M_g(1) = 1 = M_a(1)}$

- Per $\lambda_3 = 4$:

$$\begin{cases} -2x=0 \\ 3x-3y=0 \\ x+3y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

$V(4) = \langle (0,0,\alpha) \rangle = \langle (0,0,1) \rangle$ $M_g(4) = 1 = M_a(4)$

La matrice A é diagonalizzabile, una sua base é $B = \langle (1,3,-5), (0,1,-1), (0,0,1) \rangle$

Una matrice diagonale è la seguente:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

10) Considerati in $\mathbb{R}^4$ i sottospazi $U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 ; x+y+z=0\}$ e $V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x-2z=0, y+t=0\}$, determinare la dimensione ed una base per U, per V, per $U \cap V$ e per $U+V$ rispettivamente. (18.2)

DETERMINARE DIMENSIONE E BASE SOTTOSPAZ CON UNIONE E SOMMA

$x+y+z=0 \Rightarrow z=-x-y$

$U = \{(x,y,-x-y,t) / x,y,t \in \mathbb{R}\} = \langle (1,0,-1,0), (0,1,-1,0), (0,0,0,1) \rangle$

Base per U:

$B_U = \{(1,0,-1,0), (0,1,-1,0), (0,0,0,1)\}$

$\dim U = 3$

$x-2z=0 \Rightarrow x=2z$
$y+t=0 \Rightarrow y=-t$

$V = \{(2z,-t,z,t) / z,t \in \mathbb{R}\} = \langle (2,0,1,0), (0,-1,0,1) \rangle$

$\dim V = 2$

Base per V:

$B_V = \{(2,0,1,0), (0,-1,0,1)\}$

$U \cap V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+y+z=0, x-2z=0, y+t=0\}$

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-2z=0 \\ y+t=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ x=2z \\ y=-t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2z+y+z=0 \\ x=2z \\ y=-t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-3z \\ x=2z \\ t=3z \end{cases}$$

$U \cap V = \{(2z, -3z, z, 3z) / z \in \mathbb{R}\} = \langle (2,-3,1,3) \rangle$

$\dim U \cap V = 1$

$\dim(U+V) = 4$

Sappiamo, per il teorema di Grassmann, che:

$\dim U + \dim V = \dim(U \cap V) + \dim(U+V)$

$\dim(U+V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V) = 3+2-1 = 4$

(9) Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, trovare gli autospazi relativi agli autovalore e dire se é diagonalizzabile. (18)

$$\begin{cases} x+z=\lambda x \\ z=\lambda y \\ y=\lambda z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1-\lambda)x+z=0 \\ -\lambda y+z=0 \\ y-\lambda z=0 \end{cases}$$

$$A-\lambda I \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \qquad p(\lambda)=\det(A-\lambda I)=0$$

$$p(\lambda)=\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 0 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$=(1-\lambda)\lambda^2-(1-\lambda)=0$$

$$p(\lambda)=(1-\lambda)\left[\lambda^2-1\right]=0 \begin{cases} \lambda_1=1 \\ \lambda_2=1 \lor \lambda_3=-1 \end{cases}$$

$Ma(\lambda_1)=1$

$Ma(\lambda_2)=2$

$Ma(\lambda_3)=2$

Per $\lambda_1=\lambda_2=1$

$$\begin{cases} z=0 \\ -y+z=0 \\ y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=0 \\ y=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=0 \\ y=0 \end{cases}$$

$V_{(1)}=\langle(\alpha,0,0)\rangle=\langle(1,0,0)\rangle$

$\dim V_{(1)}=1$

$Mg(\lambda_1)=1=Ma(\lambda_1)$

$Mg(\lambda_2)=1\neq Ma(\lambda_2)$

Per $\lambda_3=-1$

$$\begin{cases} 2x+z=0 \\ y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=2x \\ y=-z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=2x \\ y=-2x \end{cases}$$

$V_{(3)}=\langle(\alpha,2\alpha,-2\alpha)\rangle=\langle(1,2,-2)\rangle$

$Mg(\lambda_3)=1=Ma(\lambda_3)$

Poiché $Mg(\lambda_2)\neq Ma(\lambda_2)$

la matrice A non é diagonalizzabile.