

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

A/ TÓM TẮC KIẾN THỨC

1. Phương trình $\sin x = m$ (1)

Phương trình (1) vô nghiệm nếu $|m| > 1$, có nghiệm nếu $|m| \leq 1$

Với điều kiện $|m| \leq 1$, $\alpha \in R$ sao cho $\sin \alpha = m$ thì

$$\sin x = m \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases}$$

Nếu $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ và $\sin \alpha = m$ thì α gọi là $\arcsin m$ và ta có:

$$\sin x = m \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arcsin m + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin m + k2\pi \end{cases}$$

2. Phương trình $\cos x = m$ (2)

Điều kiện để (2) có nghiệm: $|m| \leq 1$, khi đó.

$$\cos x = m \Leftrightarrow x = \pm \alpha + k2\pi \text{ với } \cos \alpha = m$$

Nếu $\alpha \in [0; \pi]$ và $\cos \alpha = m$ thì $\alpha = \arccos m$

$$\text{Ví dụ: } \frac{\pi}{3} = \arccos \frac{1}{2}$$

$$\cos x = m \Leftrightarrow x = \arccos m + k2\pi$$

3. Phương trình $\tan x = m$ (3)

Điều kiện xác định $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$\tan x = m \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \text{ với } \tan \alpha = m$$

Nếu $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ và $\tan \alpha = m$ thì $\alpha = \arctan m$. Ta có:

$$\tan x = m \Leftrightarrow x = \arctan m + k\pi$$

4. Phương trình $\cot x = m$ (4)

Điều kiện xác định $x \neq k\pi$

$$\cot x = m \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \text{ với } \cot \alpha = m$$

Nếu $\alpha \in (0; \pi)$ và $\cot \alpha = m$ thì $\alpha = \operatorname{arccot} m$. Và:

$$\cot x = m \Leftrightarrow x = \operatorname{arccot} m + k\pi$$

B/ LUYỆN TẬP

14. Giải các phương trình sau:

$$a) \sin 4x = \sin \frac{\pi}{5}$$

$$b) \sin \left(\frac{x + \pi}{5} \right) = -\frac{1}{2}$$

$$c) \cos \frac{x}{2} = \cos \sqrt{2}$$

$$d) \cos \left(x + \frac{\pi}{18} \right) = \frac{2}{5}$$

Giải

$$a) \sin 4x = \sin \frac{\pi}{5} \leftrightarrow \begin{cases} 4x = \frac{\pi}{5} + k2\pi \\ 4x = \pi - \frac{\pi}{5} + k2\pi \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{20} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{5} + k\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$b) \sin \left(\frac{x + \pi}{5} \right) = -\frac{1}{2} \leftrightarrow \sin \left(\frac{x + \pi}{5} \right) = \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \leftrightarrow \begin{cases} \frac{x + \pi}{5} = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ \frac{x + \pi}{5} = \pi + \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{11\pi}{6} + 5k2\pi \\ x = \frac{29}{6}\pi + 5k2\pi \end{cases}$$

$$c) \cos \frac{x}{2} = \cos \sqrt{2} \leftrightarrow \frac{x}{2} = \pm \sqrt{2} + k2\pi \leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{2} + k4\pi$$

$$d) \cos \left(x + \frac{\pi}{18} \right) = \frac{2}{5} \leftrightarrow x + \frac{\pi}{18} = \pm \arccos \frac{2}{5} + k2\pi \leftrightarrow x = \pm \arccos \frac{2}{5} - \frac{\pi}{18} + k2\pi$$

15. Vẽ đồ thị của hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$ rồi chỉ ra trên đồ thị đó những điểm có hoành độ là nghiệm của các phương trình sau:

$$a) \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

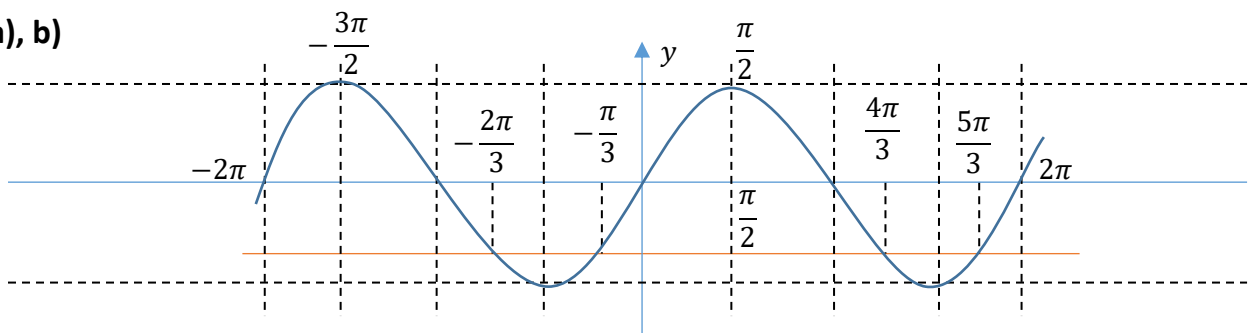
$$b) \sin x = 1$$

$$c) \cos x = \frac{1}{2}$$

$$d) \cos x = -1$$

Giải

a), b)

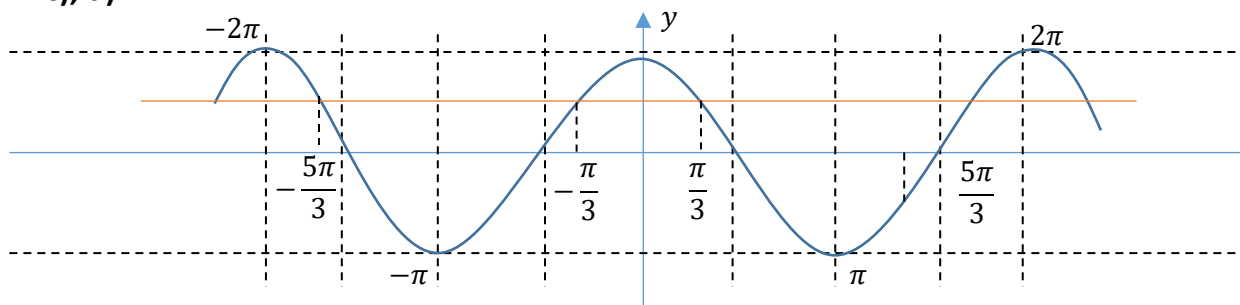


Trên đồ thị các điểm $\left(-\frac{2\pi}{3}; -\frac{\sqrt{3}}{2} \right); \left(-\frac{\pi}{3}; -\frac{\sqrt{3}}{2} \right); \left(\frac{4\pi}{3}; -\frac{\sqrt{3}}{2} \right); \left(\frac{5\pi}{3}; -\frac{\sqrt{3}}{2} \right); \dots$

là các điểm có hoành độ là nghiệm của phương trình $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Các điểm $\left(-\frac{3\pi}{2}; 1\right); \left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$ là các điểm có hoành độ là nghiệm của phương trình $\sin x = 1$

c), d)



Trên đồ thị các điểm $\left(-\frac{5\pi}{3}; \frac{1}{2}\right); \left(-\frac{\pi}{3}; \frac{1}{2}\right); \left(\frac{\pi}{3}; \frac{1}{2}\right); \left(\frac{5\pi}{3}; \frac{1}{2}\right); \dots$

là các điểm có hoành độ là nghiệm của phương trình $\cos x = \frac{1}{2}$.

Các điểm $(-\pi; -1); (\pi; -1)$ là các điểm có hoành độ là nghiệm của phương trình $\cos x = -1$

16. Tìm nghiệm của các phương trình sau trong khoảng đã cho:

$$a) \sin 2x = -\frac{1}{2} \text{ với } 0 < x < \pi \quad b) \cos(x - 5) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ với } -\pi < x < \pi$$

Giải

$$a) \sin 2x = -\frac{1}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \leftrightarrow \begin{cases} 2x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x = \pi + \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \end{cases}$$

Ta tìm $k \in \mathbb{Z}$ sao cho $0 < -\frac{\pi}{12} + k\pi < \pi$ hoặc $0 < \frac{7\pi}{12} + k\pi < \pi$

Với $k = 1$ ta có $0 < -\frac{\pi}{12} + \pi < \pi$

Với $k = 1$ ta có $0 < \frac{7\pi}{12} < \pi$

Vậy trong khoảng $(0; \pi)$ phương trình $\sin 2x = -\frac{1}{2}$ có các nghiệm:

$$x_1 = \frac{7\pi}{12} \quad \text{và} \quad x_2 = \frac{\pi}{12}$$

b) Phương trình $\cos(x - 5) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ có hai nghiệm $x_1 = 5 - \frac{\pi}{6} + k2\pi$ và

$x_2 = 5 + \frac{\pi}{6} + k2\pi$. Ta tìm các số nguyên k để $-\pi < x_1 < \pi$ hoặc $-\pi < x_2 < \pi$.

Với $k = -1$ thì có: $-\pi < 5 - \frac{\pi}{6} - 2\pi < \pi$ và $-\pi < 5 + \frac{\pi}{6} - 2\pi < \pi$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm không khoản $(-\pi; \pi)$ là

$$x_1 = 5 - \frac{13\pi}{6} \quad \text{và} \quad x_2 = 5 - \frac{11\pi}{6}$$

17. Số giờ có ánh sáng của một thành phố A ở vĩ độ 40° bắc trong ngày thứ t của một năm không nhuận được cho bởi hàm số

$$d(t) = 3\sin\left[\frac{\pi}{180}(t - 80)\right] + 12 \text{ với } t \in \mathbb{Z} \text{ và } 0 < t \leq 365$$

a) Thành phố A có đúng 12 giờ có ánh sáng vào ngày nào trong năm?

b) Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có ít giờ có ánh sáng nhất?

c) Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có nhiều giờ có ánh sáng nhất?

Giải

$$d(t) = 12 \Leftrightarrow 3\sin\left[\frac{\pi}{180}(t - 80)\right] = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{180}(t - 80) = k\pi \Leftrightarrow t = 80 + 182k$$

Với điều kiện $0 < t \leq 365$ ta có $t=80$ và $t=262$. Vậy thành phố A có 12 giờ sáng vào ngày thứ 80 và ngày thứ 262 của năm.

b) Thành phố có ít giờ ánh sáng nhất vào ngày thứ t sao cho

$$\sin\left[\frac{\pi}{180}(t - 80)\right] = -1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{180}(t - 80) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \rightarrow t = 353$$

c) Thành phố có nhiều giờ ánh sáng nhất vào ngày thứ t sao cho

$$\sin\left[\frac{\pi}{180}(t - 80)\right] = 1 \Leftrightarrow t = 80 + 91(4k + 1) \rightarrow t = 171$$

18. Giải các phương trình sau:

a) $\tan 3x = \tan \frac{3\pi}{5}$

b) $\tan(x - 15^\circ) = 5$

c) $\tan(2x - 1) = \sqrt{3}$

d) $\cot 2x = \cot\left(-\frac{1}{3}\right)$

e) $\cot\left(\frac{x}{4} + 20^\circ\right) = -\sqrt{3}$

f) $\cot 3x = \tan \frac{2\pi}{5}$

Giải

$$a) 3x = \frac{3\pi}{5} + k\pi \leftrightarrow x = \frac{\pi}{5} + k\frac{\pi}{3}$$

$$b) x - 15^\circ = \arctan 5 + k.180^\circ \leftrightarrow x \approx 93^\circ + k.180^\circ$$

$$c) \tan(2x - 1) = \tan \frac{\pi}{3} \leftrightarrow 2x - 1 = \frac{\pi}{3} + k\pi \leftrightarrow x = \frac{\pi + 3}{6} + k\frac{\pi}{2}$$

$$d) 2x = -\frac{1}{3} + k\pi \leftrightarrow x = -\frac{1}{6} + k\frac{\pi}{2}$$

$$e) \frac{x}{4} + 20^\circ = -30^\circ + k.180^\circ \leftrightarrow x = -200^\circ + k.720^\circ$$

$$f) \cot 3x = \cot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5} \right) \leftrightarrow x = \frac{\pi}{30} + k\frac{\pi}{3}$$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

1. Giải các phương trình sau:

$$a) \tan 3x = \tan \frac{3\pi}{5}$$

$$b) \tan(x - 15^\circ) = 5$$

$$c) \tan(2x - 1) = \sqrt{3}$$

$$d) \cot 2x = \cot \left(-\frac{1}{3} \right)$$

$$e) \cot \left(\frac{x}{4} + 20^\circ \right) = -\sqrt{3}$$

$$f) \cot 3x = \tan \frac{2\pi}{5}$$

2. Tìm nghiệm các phương trình sau trên khoảng đã cho:

$$a) \tan(2x - 15^\circ) = 1 \quad \text{với } -180^\circ < x < 90^\circ$$

$$b) \cot 3x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{với } -\frac{\pi}{2} < x < 0$$

3. Khi giải phương trình $\tan x = -\sqrt{3}$, bạn phương nhận thấy

$$-\sqrt{3} = \tan \left(-\frac{\pi}{3} \right) \text{ và viết } \tan x = -\sqrt{3} \leftrightarrow \tan x = \tan \left(-\frac{\pi}{3} \right) \leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi.$$

Cũng phương trình đó, bạn Quyên lấy $-\sqrt{3} = \tan \frac{2\pi}{3}$ nên giải như sau:

$$\tan x = \tan \frac{2\pi}{3} \leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$$

Theo em, ai giải đúng, ai giải sai?

4. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

$$a) y = \frac{1 - \cos x}{2\sin x + \sqrt{2}}$$

$$b) y = \frac{\sin(x - 2)}{\cos 2x - \cos x}$$

$$c) y = \frac{\tan x}{1 + \tan x}$$

$$d) y = \frac{1}{\sqrt{3} \cot 2x + 1}$$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. Tìm nghiệm của phương trình: $\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos(\pi + 3x) = 0$

$$A. x = k\pi; x = k\frac{\pi}{2}$$

$$B. x = k\frac{\pi}{4}; x = k2\pi$$

$$C. x = k\pi; x = k\frac{2\pi}{5}$$

$$D. x = k\frac{2\pi}{5}; x = k2\pi$$

2. Tìm nghiệm của phương trình: $\sin^2 x = \frac{1}{2}$

$$A. x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$$

$$B. x = \pm \frac{\pi}{4} + k\frac{2\pi}{3}$$

$$C. x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$$

$$D. x = k\frac{\pi}{4}$$

3. Tìm nghiệm của phương trình: $\cos\left(\frac{2x}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\frac{\pi}{3} = 0$

$$A. x = \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{2} + k2\pi$$

$$B. x = \frac{3\pi}{8} \pm \frac{\pi}{2} + k3\pi$$

$$C. x = \frac{3\pi}{8} \pm \pi + k3\pi$$

$$D. x = \frac{\pi}{8} \pm \pi + k2\pi$$

4. Tìm nghiệm của phương trình: $\tan\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cot g\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$

$$A. x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$$

$$B. x = \pi + k2\pi$$

$$C. x = k\pi$$

$$D. x = -\frac{\pi}{2} + k\pi$$

5. Tìm nghiệm của phương trình: $2\sin 2x - 5\cos x = 0$

$$A. x = \frac{\pi}{2} + k2\pi; x = \arcsin \frac{2}{5} + k2\pi$$

$$B. x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$C. x = 60^0 + k180^0$$

$$D. x = \arcsin \frac{4}{5} + k360^0; x = 90^0 + k360^0$$

6. Tìm nghiệm của phương trình: $\tan(2x + 1)\tan(3x - 1) = 1$

$$A. x = k\frac{\pi}{5}$$

$$B. x = 18^0 + k36^0$$

$$C. x = \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3}$$

$$D. x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{5}$$