DẠNG LƯỢNG GIÁC CỦA SỐ PHỨC

A/ TÓM TẮC KIẾN THỨC

1. Dạng lượng giác của số phức

Số phức dạng: $z = r(cos\varphi + isin\varphi)$, trong đó r > 0 là số thực, φ là góc lượng giác có số đo bằng rađian được gọi là dạng lượng giác của số phức. Số r là modun của z, φ là một acgument của z, còn số phức z=a+bi được gọi là dạng đại số của số phức.

2. Cách đưa số phức từ dạng đại số sang dạng lượng giác

Đưa số phức z=a+bi về dạng lượng giác $z = r(cos\varphi + isin\varphi)$ thì $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, φ là một acgument của z thì φ là một số thực sao cho cos$\varphi = \frac{a}{r}$, $sin\varphi = \frac{b}{r}. Só\ \varphi$ chính là số đo của góc lượng giác mà tia đầu là Ox, tia cuối là OM, trong đó M(a;b) là điểm biểu diễn số phức z=a+bi trên mặt phẳng phức.

3. Nhân và chia số phức dạng lượng giác.

Nếu $z_1 = r_1(cos\varphi_1 + isin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(cos\varphi_2 + isin\varphi_2)$

thì $z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + isin(\varphi_1 + \varphi_2)]$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[cos(\varphi_1 - \varphi_2) + isin(\varphi_1 - \varphi_2)$

4. Công thức Moa-vrơ

$$[r(cos\varphi + isin\varphi)]^n = r^n(cosn\varphi + isinn\varphi)$$

với r=1 thì

$$(cos\varphi + isin\varphi)^n = cosn\varphi + isinn\varphi$$

Ứng dụng vào lượng giác: Để tìm công thức biểu diễn cosnφ, sinnφ qua các lũy thừa của cosφ và sinφ, ta sử dụng khai triển Niu-tơn cho $(cos\varphi + isin\varphi)^n$ rồi đồng nhất phần thực với phần thực, phần ảo với phần ảo.

5. Căn bậc hai của số phức dưới dạng lượng giác

Số phức r(cosφ+isinφ) có hai căn bậc hai là

$$\sqrt{r}\left(cos\frac{\varphi}{2} + isin\frac{\varphi}{2}\right) \text{ và } \sqrt{r}\left(\cos(\frac{\varphi}{2} + \pi) + isin(\frac{\varphi}{2} + \pi)\right)$$

B/ LUYỆN TẬP

1. Hãy tìm dạng lượng giác của các số phức: $\overline{z}$; $-z$; $\frac{1}{\overline{z}}$; kz $(k \in R^*)$ trong mỗi trường hợp sau:

a) $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ b) $z=1+i\sqrt{3}$

2. Viết các số phức sau dưới dạng lượng giác

$a)$ $1-i\sqrt{3}$; $1+i$; $(1+i\sqrt{3})(1+i)$; $\dfrac{1-i\sqrt{3}}{1+i}$

3. Cho các số phức $\omega=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ và $\varepsilon=\dfrac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})$

chứng minh rằng: $z_0=\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}$, $z_1=z_0\varepsilon$, $z_2=z_0\varepsilon^2$ là các nghiệm của phương trình $z^3-\omega=0$

4. Tính: $\left(\sqrt{3}-i\right)^6$; $\left(\dfrac{i}{1+i}\right)^{2004}$; $\left(\dfrac{5+3i\sqrt{3}}{1-2i\sqrt{3}}\right)^{21}$

5. Cho các số phức $\omega=-\dfrac{1}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)$. Tìm các số nguyên dương n để ω^n là số thực

6. Viết dạng lượng giác của số phức z và các căm bậc hai của z cho mỗi trường hợp sau:

a) $|z|=3$ và một acgument của iz là $\dfrac{5\pi}{4}$

b) $|z|=\dfrac{1}{3}$ và một acgument của $\dfrac{\overline{z}}{1+i}$ là $-\dfrac{3\pi}{4}$

7. Viết dạng lượng giác của các số phức:

$a)$ $1-i\tan\dfrac{\pi}{5}$ $b)$ $\tan\dfrac{5\pi}{8}+i$