

ĐẠO HÀM THEO CÔNG THỨC

A/ TÓM TẮT KIẾN THỨC

1) Định nghĩa đạo hàm tại một điểm bất kỳ (tại x)

Cho hàm số $y = f(x)$. Đạo hàm của hàm số f tại biến số x tương đương:

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

2) Quy tắc tính đạo hàm:

Cho $u(x)$, $v(x)$, $w(x)$, $y(x)$ là những hàm số có biến là x

a) $(u \pm v \pm w \pm \dots)' = u' \pm v' \pm w' \pm \dots$

b) $(au)' = au'$, với a là hằng số

c) $(uv)' = u'v + v'u$

$$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$$

d) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

e) $y'_x = y'_u \cdot u'_x$

Chứng minh:

* $(uv)' = u'v + v'u$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x)$$

$$= [u(x) + \Delta u] \cdot [v(x) + \Delta v] - u(x)v(x)$$

$$= \Delta u v(x) + \Delta v u(x)$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u v(x) + \Delta v u(x)}{\Delta x} = u'v + v'u$$

* $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \left(\frac{u}{v}\right)}{\Delta x} = \frac{\frac{u(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x} = \frac{\frac{u(x + \Delta x) \cdot v(x) - v(x + \Delta x) \cdot u(x)}{v(x + \Delta x) \cdot v(x)}}{\Delta x}$$

$$= \frac{\frac{[u(x) + \Delta u] \cdot v(x) - [v(x) + \Delta v] \cdot u(x)}{v(x + \Delta x) \cdot v(x)}}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta u \cdot v(x)}{\Delta x} - \frac{\Delta v \cdot u(x)}{\Delta x}}{v(x + \Delta x) \cdot v(x)} = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

* $y'_x = y'_u \cdot u'_x$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} = y'_u \cdot u'_x$$

Tính đạo hàm: $y = x^\alpha$

Áp dụng nhị thức Niu-tơn đối với $(x + \Delta x)^n$, ta có:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n = C_n^1 x^{n-1} \Delta x + C_n^2 x^{n-2} \Delta x^2 + \dots + C_n^1 x \Delta x^{n-1} + \Delta x^n$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = (C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} \Delta x + \dots + C_n^1 x \Delta x^{n-2} + \Delta x^{n-1}) = C_n^1 x^{n-1} = nx^{n-1}$$

Tính đạo hàm: $y = e^x$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{e^{(x+\Delta x)} - e^x}{\Delta x} = e^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x$$

Tính đạo hàm: $y = a^x$

Biến đổi $a^x = e^{x \ln a}$

$$y' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \ln a$$

Tính đạo hàm: $y = \log_a x$

hàm số $y = \log_a x$

Nghĩa là: $x = a^y$

Đạo hàm hai vế: $1 = y' a^y \ln a$

$$\text{Suy ra: } y' = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{a^{\log_a x} \ln a} = \frac{1}{x \ln a}$$

Tính đạo hàm: $y = \sin x$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}$$

$$\left(\text{theo công thức } \sin a - \sin b = 2 \sin \left(\frac{a-b}{2}\right) \cdot \cos \left(\frac{a+b}{2}\right) \right)$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \lim_{\frac{\Delta x}{2} \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$y' = \cos x$$

Tính đạo hàm: $y = \cos x$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$\left(\text{theo công thức } \cos a - \cos b = -2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \right)$$

$$y' = - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = - \lim_{\frac{\Delta x}{2} \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$= - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$y' = -\sin x$$

Tính đạo hàm: $y = \arcsin x$

Nghĩa là $x = \sin y$

Đạo hàm hai vế $1 = \cos y \cdot y'$

Suy ra : $y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

Tính đạo hàm: $y = \arccos x$

Nghĩa là $x = \cos y$

Đạo hàm hai vế $1 = -\sin y \cdot y'$

Suy ra : $y' = \frac{1}{-\sin y} = \frac{-1}{\sin(\arccos x)} = \frac{-1}{\sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)}} = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$

Tính đạo hàm: $y = \arctg x$

Nghĩa là $x = \operatorname{tg} y$

Đạo hàm hai vế $1 = \frac{1}{\cos^2 y} \cdot y' = (1 + \operatorname{tg}^2 y) \cdot y'$

Suy ra : $y' = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(\arctg x)} = \frac{1}{1 + x^2}$

Tính đạo hàm: $y = \operatorname{arccot} x$

Nghĩa là $x = \operatorname{cot} y$

Đạo hàm hai vế $1 = \frac{-1}{\sin^2 y} \cdot y' = -(1 + \cot g^2 y) \cdot y'$

Suy ra : $y' = \frac{-1}{1 + \cot g^2 y} = \frac{-1}{1 + \cot g^2(\operatorname{arccot} g x)} = \frac{-1}{1 + x^2}$

3) Bảng công thức đạo hàm

$(C)' = 0, C \text{ là hằng số}$ $(x)' = 1$ $(x\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(u\alpha)' = \alpha u' u^{\alpha-1}$ $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$ $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$(e^x)' = e^x$ $(a^x)' = a^x \ln a$	$(e^u)' = u' e^u$ $(a^u)' = u' a^u \ln a$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$ $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$
$(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$ $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ $(\operatorname{cot} g x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\sin u)' = u' \cos u$ $(\cos u)' = -u' \sin u$ $(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$ $(\operatorname{cot} g u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$
$(\operatorname{arcsin} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\operatorname{arccos} x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ $(\operatorname{arccot} g x)' = \frac{-1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arcsin} u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ $(\operatorname{arccos} u)' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$ $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}$ $(\operatorname{arccot} g u)' = \frac{-u'}{1+u^2}$

4. Quy tắc L'Hospital

Hàm số $\frac{u(x)}{v(x)}$ có dạng $\frac{0}{0}$ hay $\frac{\infty}{\infty}$, thì $\lim_{x \rightarrow a} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{u'(x)}{v'(x)}$

B/ LUYỆN TẬP

1. Tính đạo hàm của các hàm số sau đây tại điểm x_0 được cho kèm theo:

a) $y = 7 + x - x^2$, $x_0 = 1$;

b) $y = x^3 - 2x + 1$, $x_0 = 2$

c) $y = 2x^5 - 2x + 3$, $x_0 = 1$;

2. Tính đạo hàm của mỗi hàm số sau (a, b là hằng số)

a) $y = x^5 - 4x^3 + 2x - 3\sqrt{x}$

b) $y = \frac{1}{4} - \frac{1}{3}x + x^2 - 0,5x^4$

c) $y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + a^2$

d) $y = \frac{ax + b}{a + b}$

3. Tính đạo hàm của mỗi hàm số sau

a) $y = (x^7 + x)^2$

b) $y = (x^2 + 1)(5 - 3x^2)$

c) $y = \frac{2x}{x^2 - 1}$

d) $y = \frac{5x - 3}{x^2 + x + 1}$

d) $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$

f) $y = x(2x - 1)(3x + 2)$

4. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = (x - x^2)^{32}$

b) $y = \frac{1}{x\sqrt{x}}$

c) $y = \frac{1 + x}{\sqrt{1 - x}}$

d) $y = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

5. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x^3 - 2x}$

Giải bất phương trình $f'(x) \leq f(x)$

6. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$. Hãy giải bất phương trình:

a) $f'(x) > 0$

b) $f'(x) \leq 3$

7. Tính đạo hàm của mỗi hàm số sau:

a) $y = \frac{2x + 3}{x^2 - 5x + 5}$

b) $y = \frac{1}{(x^2 - x + 1)^5}$

$$c) y = (x + 1)(x + 2)^2(x + 3)^3 \qquad d) y = \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x}}$$

8. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số:

a) $y = \frac{x - 1}{x + 1}$, biết hoành độ tiếp điểm là $x_0 = 0$

b) $y = \sqrt{x + 2}$, biết tung độ tiếp điểm là $y_0 = 2$

9. Viết phương trình tiếp tuyến của parabol $y = x^2$, biết rằng tiếp tuyến đó đi qua điểm $A(0; -1)$.

10. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = 5\sin x - 3\cos x$

b) $y = \sin(x^2 - 3x + 2)$;

c) $y = \cos\sqrt{2x + 1}$

d) $y = \sin 3x \cos 5x$

e) $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

f) $y = \sqrt{\cos 2x}$

11. Chứng minh rằng hàm số $y = \sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x$ có đạo hàm bằng 0.

12. Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \tan \frac{x + 1}{2}$

b) $y = \cot \sqrt{x^2 + 1}$

c) $y = \tan^3 x + \cot 2x$

d) $y = \tan 3x - \cot 3x$

e) $y = \sqrt{1 + 2\tan x}$

f) $y = x \cot x$

13. Tính đạo hàm của mỗi hàm số sau:

a) $y = \frac{\sin x}{x} + \frac{x}{\sin x}$

b) $y = \frac{\sin^2 x}{1 + \tan 2x}$

c) $y = \tan(\sin x)$

d) $y = x \cot(x^2 - 1)$

e) $y = \cos^2 \sqrt{\frac{\pi}{4} - 2x}$

f) $y = x\sqrt{\sin 3x}$

14. Giải các phương trình $y' = 0$ trong mỗi trường hợp sau:

a) $y = \sin 2x - 2\cos x$

b) $y = 3\sin 2x + 4\cos 2x + 10x$

c) $y = \cos^2 x + \sin x$

d) $y = \tan x + \cot x$

15. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = (2x + 1)^\pi$

b) $y = \sqrt[5]{\ln^3 5x}$

c) $y = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$

d) $y = \left(\frac{x}{b}\right)^a \cdot \left(\frac{a}{x}\right)^b$ với $a > 0, b > 0$

16. Tính giá trị đạo hàm tại điểm đã cho:

a) $y = \log_3(\sin x)$ tại $x = \frac{\pi}{4}$

b) $y = \frac{2^x}{x^2}$ tại $x = 1$

Bài 17: Chứng minh đẳng thức

a) Cho hàm số: $y = x \cos x$

Chứng minh: $y'' + y + 2 \sin x = 0$

b) Cho hàm số: $y = e^x \sin x$

Chứng minh rằng: $y'' - 2y' + 2y = 0$

c) Cho hàm số: $y = x \tan x$

Chứng minh rằng $x^2 y'' - 2(x^2 + y^2)(1 + y) = 0$

Bài 18: Tính đạo hàm của các hàm số

a) $y = \cos^2 2x$

b) $y = \sin^2 5x$

c) $y = 3^{2x}$

d) $y = \ln \sqrt[n]{x}$

Bài 19: Tính đạo hàm của các hàm số

a) $y = \frac{5x - 3}{x^2 - 3x + 2}$

b) $y = \frac{-x - 2}{x^2 - x + 2}$

c) $y = \frac{3x - 1}{-x^2 - 3x + 2}$

d) $y = \frac{-x^2 + 3x - 1}{-x^2 - 3x + 2}$

e) $y = \frac{-2x^2 + 3x - 1}{x^2 - x + 2}$

f) $y = \frac{x^2 - 3x - 2}{-2x^2 - 3x + 1}$

Bài 20: Tính đạo hàm của các hàm số

a) $y = \log_2(\sin 2x) + \arccos(x^2 + 1) + e^{\cot g(x+1)}$

b) $y = \log_2(\arcsin(x^2 + 2x))$

Bài 21: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \frac{x+1}{x-1} \sqrt{x-2}$

b) $y = x^2 \arctg x$

c) $y = x \tg x$

d) $y = x^n \ln x$

e) $y = (\ln x)^n$

f) $y = (x^2 - 1)(5 - 4x^2)$

g) $y = \sin^n x \cdot \cos(mx)$

Bài 22: Tính các giới hạn

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^x - x^2}{x - 2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{\sin x}$

Bài 23: Tìm các giới hạn

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\ln(\sin x)}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x - \tg x}$

Bài 24: Tính đạo hàm các hàm số sau:

a) $y = \sqrt{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}$

b) $y = \frac{x+3}{\sqrt{x^2+1}}$

TRẮC NGHIỆM

1. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{4}{x-1}$ tại điểm với hoành độ $x = -1$ có phương trình là:

A. $y = -x - 3$

B. $y = -x + 2$

C. $y = x - 1$

D. $y = x + 2$

2. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{2x}}$ tại điểm với hoành độ $x = \frac{1}{2}$ có phương trình là:

A. $2x - 2y = -1$

B. $2x - 2y = 1$

C. $2x + 2y = 3$

D. $2x + 2y = -3$

3. Hàm số có đạo hàm bằng $2x + \frac{1}{x^2}$ là:

A. $y = \frac{x^3 + 1}{x}$

B. $y = \frac{x^3 + 5x - 1}{x}$

C. $y = \frac{3(x^2 + x)}{x^3}$

D. $y = \frac{2x^2 + x - 1}{x}$