ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

A/ TÓM TẮT KIẾN THỨC

1. Định lý (Diện tích hình học phẳng)

Cho hàm số y=f(x) liên tục, không âm trên khoảng I và a, b là hai số thực thuộc I (a<b) thì diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị của hàm số f(x), trục hoành và hai đường thẳng x=a, x=b là:

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

TỔNG QUÁT:

Nếu f(x) là một hàm bất kỳ (âm dương tuỳ ý) thì ta có:

$$S = \int_a^b |f(x)|dx$$

Nếu diện tích tạo bởi hai hàm f(x) và g(x) thì :

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$$

<u>Bài toán 1:</u>

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn [a;b]. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C): $y = f(x)$, trục hoành Ox và hai đường tung $x = a, x = b$.

a. Trường hợp 1:

$f(x) \geq 0 \ \ \forall x \in [a, b]$
Đồ thị (C) nằm phía trên trục Ox.
$Ta\ có \quad S = \int_a^b f(x)dx$

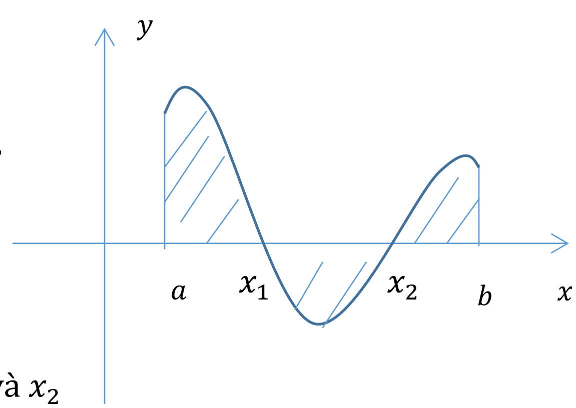
b. Trường hợp 2:

$f(x) \leq 0 \ \ \forall x \in [a, b]$
Đồ thị (C) nằm phía dưới trục Ox.
$Ta\ có \quad S = -\int_a^b f(x)dx$

c. Trường hợp 3:

Đồ thị (C) cắt Ox
Giả sử (C) cắt Ox tại hai điểm x_1 và x_2
$a < x_1 < x_2 < b$

$$Ta\ có \quad S = \int_a^{x_1} f(x)dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{b} f(x)dx$$



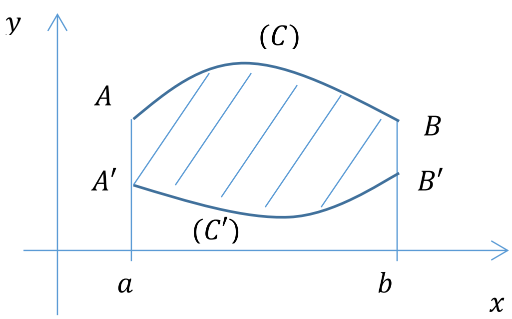
<u>Bài toán 2:</u>

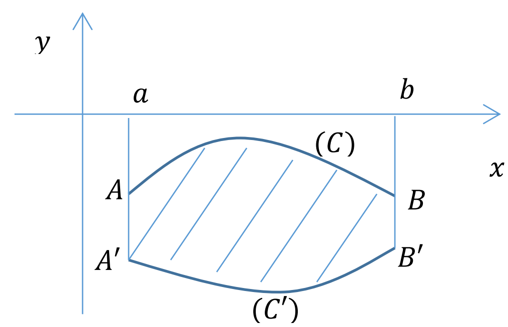
Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ xác định và liên tục trên đoạn [a;b] có đồ thị theo thứ tự là (C) và (C')

Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi (C), (C') và các đường thẳng $x = a$; $x = b$

a. Trường hợp 1:

(C) và (C') không có điểm chung treen đoạn $[a; b]$
Bài toán không mất tính tổng quát khi ta giả sử $f(x) > g(x), \forall x \in [a; b]$ nghĩa là (C) nằm về phía trên của (C')

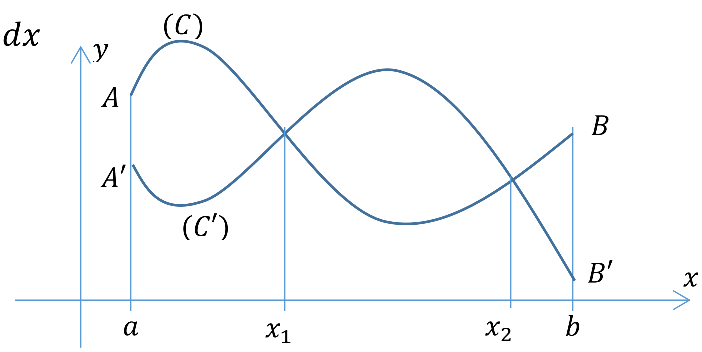




$Ta\ có: S = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$

b. Trường hợp 2:

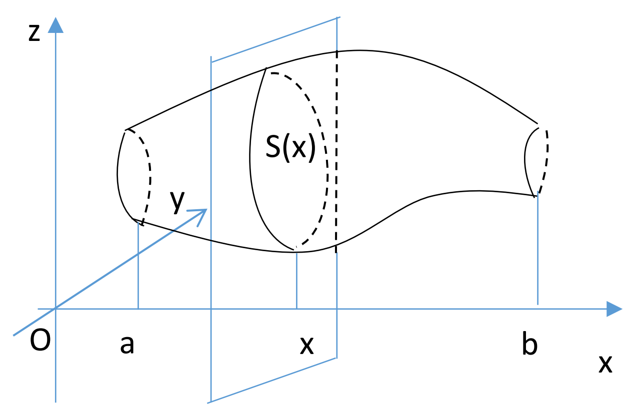
(C) và (C') cắt nhau trên đoạn [a;b], giả sử tại x_1 và x_2 mà $x_1 < x_2$



$$Ta\ có: S = \int_a^{x_1} [f(x) - g(x)]\, dx + \int_{x_1}^{x_2} [g(x) - f(x)]\, dx + \int_{x_2}^{b} [f(x) - g(x)]\, dx$$

2. Thể tích khối tròn xoay

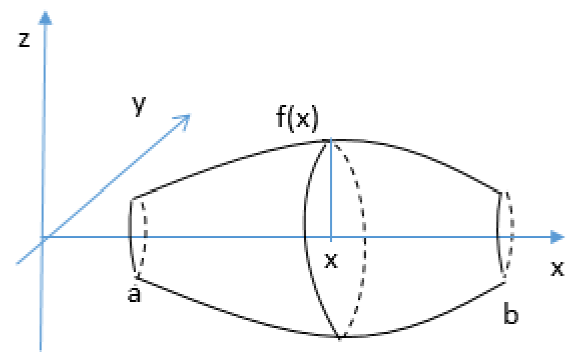
Một vật thể nằm trong không gian Oxyz. Gọi S(x) là diện tích của thiết diện vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x (a $\le x \le b$). Nếu S(x) là hàm số liên tục trên [a;b] thì thể tích V của phần vật thể trên giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với Ox tại các điểm có hoành độ a vf b là:



$$V = \int_a^b S(x)dx$$

Cho hàm số y=f(x) liên tục, không âm trên đoạn [a; b]. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số y=f(x), trục hoàng và hai đường thẳng x=a, x=b quay quanh trục hoành tạo nên khối tròn xoay có thể tích V được tính theo công thức:

$$V = \int_a^b S(x)dx = \int_a^b \pi R^2 dx = \int_a^b \pi f^2(x)dx$$



Tương tự, hàm số x=g(y) liên tục trên [c;d]. Hình giới hạn bởi đường cong x=g(y), trục tung và các đường thẳng y=c, y=d quay quanh trục tung tạo nên khối tròn xoay có thể tích là:

$$V = \int_a^b S(y)dy = \int_a^b \pi R^2 dy = \int_a^b \pi g^2(y)dy$$

B/ LUYỆN TẬP

1. Tính diện tích phẳng giới hạn bởi đồ thị y=sinx+1, trục hoành và hai đường thẳng x=0 và x=$7\pi/6$

2. Tính diện tích phẳng giới hạn bởi:

a) Đồ thị hàm số $y = cos^2x$, trục hoành, trục tung và đường thẳng x=π

b) Đồ thị hàm số y=$\sqrt{x}$ và y=$\sqrt[3]{x}$

c) Đồ thị hàm số $y = 2x^2$ và $y = x^4 - 2x^2$ trong miền x > 0.

3. Tính diện tích các hình phẳng giới hạn bởi:

a) Đồ thị các hàm số $y = x^2 - 4; y = -x^2 - 2x$ và đường thẳng x=-3; x=-2

b) Đồ thị của hai hàm số $y = x^2 - 4$ và $y = -x^2 - 2x$

c) Đồ thị hàm số $y = x^3 - 4x$, trục hoành, đường thẳng x=-2, và đương fthẳng x=4.

4. Tính thể tích của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng x=-1 và x=1, biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục 0x tại điểm có hoành độ $x\ (-1 \le x \le 1)$ là một hình vuông cạnh là $2\sqrt{1-x^2}$

5. Tính thể tích của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng x=0 và x=π, biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục 0x tại điểm có hoành độ x ($0 \le x \le \pi$) là một tam giác đều cạnh là $2\sqrt{sinx}$

6. Cho hình phẳng A giói hạn bởi các đường thẳng y=0, x=4 và $y = \sqrt{x} - 1$. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình A quanh trục hoành.

7. Cho hình phẳng B giới hạn bởi ác đường $x = \frac{2}{y}; y = 1$ và $y = 4$

Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình B quanh trục tung.

8. Cho hình phẳng B giới hạn bởi các đường $x = \sqrt{5}\,y^2$, x=0, y=-1 và y=1. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình B quanh trục tung.

9. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

a) Đồ thị hàm số y=x, y=1 và y=$x^2/4$ trong miền $x \geq 0$, $y \leq 1$.

b) Đồ thị hai hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 4, y = x^2$, trục tung và đường x=1

c) Đồ thị các hàm số $y = x\text{^}2, y = 4x - 4$ và $y = -4x - 4$

10. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

a) Đồ thị hai hàm số y=$x^2 + 1$ và $y = 3 - x$

b) Các đường có phương trình $x = y^3, y = 1$ và $x = 8$.

c) Đồ thị hai hàm số $y = \sqrt{x}, y = 6 - x$ và *trục hoành*

11. Tính thể tích của vật thể T nằm giữa hai mặt phẳng x=0 và x=π, biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($0 \leq x \leq \pi$) là một hình vuông cạnh $2\sqrt{sinx}.$

12. Cho hình phẳng A giới hạn bởi $y = x^2, y = 0, x = 0$ và $x = 2$. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình A quanh trục hoành.

13. Cho hình phẳng A giới hạn bởi y=cosx, y=0, x=0 và x=$\pi/4$. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay quanh hình A quanh trục hoành.

14. Cho hình phẳng A giới hạn bởi $y = xe^{\frac{x}{2}}, y = 0, x = 0$ và $x = \frac{\pi}{4}$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình A quanh trục hoành.

15. Cho hình phẳng B giới hạnbởi các đường x=$\sqrt{2sin2y}$, $x = 0, y = 0$ và $y = \pi/2$. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình B quanh trục tung.