

KHẢO SÁT HÀM SỐ

A/ TÓM TẮT KIẾN THỨC

1. Tính đơn điệu của hàm số

Đạo hàm thể hiện độ dốc của hàm số tại một điểm đang xét

$f'(x) < 0$: Hàm số nghịch biến

$f'(x) > 0$: Hàm số đồng biến

$f'(x) = 0$: Hàm số có thể có cực trị tại đây

2. Điều kiện đủ để hàm số có cực trị

x_0 là cực trị của hàm số $f(x)$ nếu $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) \neq 0 \end{cases}$

x_0 là cực tiểu của hàm số $f(x)$ nếu $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases}$

x_0 là cực đại của hàm số $f(x)$ nếu $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases}$

3. Tính lồi lõm và điểm uốn

x_0 là hoành độ của điểm uốn I trên đồ thị (C) nếu $f''(x_0) = 0$

Nếu $f''(x) < 0, \forall x \in (a, b) \Leftrightarrow$ Đường cong (C) lõm trong (a, b)

Nếu $f''(x) > 0, \forall x \in (a, b) \Leftrightarrow$ Đường cong (C) lồi trong (a, b)

4. Tiệm cận của hàm số

a) Đường tiệm cận đứng:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \Rightarrow (d): x = a$ là tiệm cận đứng của (C)

b) Đường tiệm cận ngang

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = h \Rightarrow (d): y = h$ là tiệm cận ngang của (C)

c) Đường tiệm cận xiên:

Cho (d): $y = ax + b, a \neq 0$

$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \Rightarrow (D): y = ax + b$ là tiệm cận xiên của (C).

+ Xác định a và b :

$$\begin{aligned} * \quad a &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \\ * \quad b &= \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax] \end{aligned}$$

5. Bảng biến thiên của hàm số

- Lập bảng biến thiên hàm số $f(x)$.

| x | $-\infty$ | x_1 | x_2 | | x_n | $+\infty$ |
|------|-----------|-------|-------|-------|-------|-----------|
| y' | | 0 | 0 | \pm | 0 | |
| y | | y_1 | | | y_n | |

Diagram showing the mapping of intervals from the y' row to the y row:

- Interval $(-\infty, x_1)$ maps to y_1 .
- Interval (x_1, x_2) maps to y_2 .
- Interval (x_2, x_n) maps to y_n .
- Interval $(x_n, +\infty)$ maps to $-\infty$.

6. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

Giá trị lớn nhất là giá trị lớn nhất của y trên đồ thị (C)

Giá trị nhỏ nhất là giá trị nhỏ nhất của y trên đồ thị (C)

Lưu ý: Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất khác với cực trị của hàm số, có thể trùng hoặc không trùng với các điểm cực trị. Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số được xác định qua bảng biến thiên.

7. Phép tịnh tiến hệ tọa độ.

Giả sử $I(x_0, y_0)$ là một điểm của mặt phẳng tọa độ với hệ tọa độ Oxy. Gọi IXY là hệ tọa độ mới có gốc tại điểm I và hai trục IX, IY theo thứ tự có cùng các vectơ đơn vị \vec{i}, \vec{j} với hai trục Ox, Oy.

Giả sử M là điểm bất kỳ thuộc mặt phẳng, (x, y) là tọa độ của M đối với hệ tọa độ Oxy và (X, Y) là tọa độ của M đối với hệ IXY.

Khi đó, công thức chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tiến theo vector \vec{OI} là:

$$\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}$$

8. Đồ thị hàm số

Đồ thị hàm số $f(x)$ được vẽ sau khi đã lập xong bảng biến thiên và các đường tiệm cận (nếu có).

9. Sự tiếp xúc của hai đường cong

Hai đường cong $y=f(x)$ và $y=g(x)$ gọi là tiếp xúc với nhau tại điểm $M(x_0, y_0)$ nếu chúng có tiếp điểm chung tại M. Điều này xảy ra khi và chỉ khi hệ phương trình sau đây có nghiệm:

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$$

Nghiệm của phương trình trên là hoành độ của tiếp điểm.

B/ LUYỆN TẬP

1. Xét chiều biến thiên của các hàm số sau:

a) $y = 2x^3 + 3x^2 + 1$

b) $y = x^3 - 3x^2 + x + 1$

c) $y = x + \frac{3}{x}$

d) $y = x - \frac{2}{x}$

e) $y = x^4 - 2x^2 - 5$

f) $y = \sqrt{4 - x^2}$

2. Chứng minh rằng:

a) Hàm số $y = \frac{x-2}{x+2}$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó.

b) Hàm số $y = \frac{-x^2 - 2x + 3}{x+1}$ nghịch biến trên mỗi khoảng xác định của nó.

3. Chứng minh rằng hàm số sau đây đồng biến trên R.

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 17x + 4$

b) $f(x) = x^3 + x - \cos x - 4$

4. Xét chiều biến thiên của các hàm số sau:

a) $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x - 5$

b) $y = -\frac{4}{3}x^3 + 6x^2 - 9x - \frac{2}{3}$

c) $y = \frac{x^2 - 8x + 9}{x - 5}$

d) $y = \sqrt{2x - x^2}$

e) $y = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$

f) $y = \frac{1}{x+1} - 2x$

5. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = \cos 2x - 2x + 3$ nghịch biến trên R.

6. Tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $y = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x - 1$

b) $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x - 10$

c) $f(x) = x + \frac{1}{x}$

d) $f(x) = |x|(x + 2)$

$$e) f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + 2$$

$$f) f(x) = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$$

7. Tìm cực trị của các hàm số sau:

$$a) y = x\sqrt{4 - x^2}$$

$$b) y = \sqrt{8 - x^2}$$

$$c) y = x - \sin 2x + 2$$

$$d) y = 3 - 2\cos x - \cos 2x$$

8. Tìm các hệ số a, b, c, d của hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ sao cho hàm số f đạt cực tiểu tại điểm $x=0, f(0)=0$ đạt cực đại tại điểm $x=1, f(1)=1$.

9. Xác định các hệ số a, b, c, d của hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ sao cho hàm số f đạt cực trị bằng 0 tại $x=-2$ và đồ thị của hàm số đi qua điểm $A(1; 0)$.

10. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

$$a) f(x) = x^2 + 2x - 5 \text{ trên đoạn } [-2; 3]$$

$$b) f(x) = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x - 4 \text{ trên đoạn } [-4; 0]$$

$$c) f(x) = x + \frac{1}{x} \text{ trên đoạn } (0; +\infty)$$

$$d) f(x) = -x^2 + 2x + 4 \text{ trên đoạn } [2; 4]$$

11. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

$$a) 2\sin^2 x + 2\sin x - 1$$

$$b) \cos^2 2x - \sin x \cos x + 4$$

12. Tìm cực trị của các hàm số sau:

$$a) f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

$$b) f(x) = \frac{x^3}{x + 1}$$

$$c) f(x) = \sqrt{5 - x^2}$$

$$d) f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$$

13. Tìm giá trị của m để hàm số $f(x) = \frac{x^2 + mx - 1}{x - 1}$ đạt cực trị và cực tiểu.

14. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

$$a) f(x) = \sqrt{3 - 2x} \text{ trên đoạn } [-3; 1]$$

$$b) f(x) = x + \sqrt{4 - x^2} \quad 0020$$

$$c) f(x) = x - \sin 2x \text{ trên đoạn } \left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$$

15. Xác định đỉnh I của mỗi parabol (P) sau đây. Viết công thức chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tiến theo vectơ \overrightarrow{OI} và viết phương trình của parabol (P) đối với hệ tọa độ.

$$a) y = 2x^2 - 3x + 1$$

$$b) y = \frac{1}{2}x^2 - x - 3$$

$$c) y = x - 4x^2$$

$$d) y = 2x^2 - 5$$

16. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

a) Xác định điểm I thuộc đồ thị (C) của hàm số đã cho, biết rằng hoành độ của điểm I là nghiệm của phương trình $f'(x)=0$.

b) Viết công thức chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tiến theo vectơ \overrightarrow{OI} và viết phương trình đường cong (C) đối với hệ tọa độ IXY. Từ đó suy ra rằng I là nghiệm của phương trình $f''(x)=0$

c) Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong (C) tại điểm I đối với hệ tọa độ Oxy. Chứng minh rằng trên khoảng $(-\infty; 1)$ đường cong (C) nằm phía dưới tiếp tuyến tại I của (C) và trên khoảng $(1; +\infty)$ đường cong (C) nằm phía trên tiếp tuyến đó.

17. Cho đường cong (C) có phương trình $y = 2 - \frac{1}{x+2}$ và điểm I(-2; 2).

Viết công thức chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tiến theo vectơ \overrightarrow{OI} và viết phương trình của đường cong (C) đối với hệ tọa độ IXY. Từ đó suy ra I là tâm đối xứng của (C).

18. Xác định tâm đối xứng của đồ thị mỗi hàm số sau đây:

$$a) y = \frac{2}{x-1} + 1$$

$$b) y = \frac{3x-2}{x+1}$$

19. Cho đường cong (C) và phương trình $y = ax + b + \frac{c}{x-x_0}$, trong đó $a \neq 0$,

$c \neq 0$, và điểm $I(x_0, y_0)$ thỏa mãn $y_0 = ax_0 + b$. Viết công thức chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tiến vectơ \overrightarrow{OI} và phương trình của (C) đối với hệ tọa độ IXY. Từ đó suy ra rằng I là tâm đối xứng của đường cong (C).

20. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị các hàm số sau:

$$a) y = \frac{x-2}{3x+2}$$

$$b) y = \frac{-2x-2}{x+3}$$

$$c) y = x + 2 - \frac{1}{x-3}$$

$$d) y = \frac{x^2-3x+4}{2x+1}$$

$$b) y = \frac{x+2}{x^2-1}$$

$$f) y = \frac{x}{x^3+1}$$

21. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị các hàm số sau:

$$a) y = \frac{2x-1}{x^2} + x - 3$$

$$b) y = \frac{x^3+2}{x^2-2x}$$

$$c) y = \frac{x^3+x+1}{x^2-1}$$

$$d) y = \frac{x^2+x+1}{-5x^2-2x+3}$$

22. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị các hàm số sau:

$$a) y = \sqrt{x^2-1}$$

$$b) 2x + \sqrt{x^2-1}$$

$$c) y = x + \sqrt{x^2+1}$$

$$d) y = \sqrt{x^2+x+1}$$

23. Tìm các tiệm cận của mỗi hàm số sau:

$$a) y = x + \sqrt{x^2-1}$$

$$b) y = \sqrt{x^2-4x+3}$$

$$c) y = \sqrt{x^2+4}$$

$$d) y = \frac{x^2+x+1}{x^2-1}$$

24. a) Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị (C) của hàm số:

$$y = \frac{x^2-2x+2}{x-3}$$

- b) Xác định giao điểm I của hai tiệm cận trên và viết công thức chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tiến theo vector \vec{OI} .
 c) Viết phương trình của đường cong (C) đối với hệ tọa độ IXY. Từ đó suy ra rằng I là tâm đối xứng của đường cong (C).

25. a) Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị (C) của hàm số:

$$y = \frac{x^2+x-4}{x+2}$$

- b) Xác định giao điểm I của hai tiệm cận trên và viết công thức chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tiến theo vector \vec{OI} .
 c) Viết phương trình của đường cong (C) đối với hệ tọa độ IXY. Từ đó suy ra rằng I là tâm đối xứng của đường cong (C).

26. a) Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị (C) của hàm số:

$$y = \frac{x^2 - 8x + 19}{x - 5}$$

- b) Xác định giao điểm I của hai tiệm cận trên và viết công thức chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tiến theo vector \overrightarrow{OI} .
c) Viết phương trình của đường cong (C) đối với hệ tọa độ IXY. Từ đó suy ra rằng I là tâm đối xứng của đường cong (C).

27. a) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số: $y = x^3 + 3x^2 - 4$

- b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại điểm uốn.
c) Chứng minh rằng điểm uốn là tâm đối xứng của đồ thị.

28. a) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 1$

- b) Tùy theo các giá trị của m, hãy biện luận số nghiệm của phương trình:

$$-x^3 + 3x^2 - 1 = m$$

29. Khảo sát và vẽ đồ thị các hàm số sau:

a) $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x - \frac{5}{3}$

b) $y = x^3 - 3x + 1$

c) $y = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x - \frac{2}{3}$

d) $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$

30. a) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số: $y = -x^4 + 2x^2 - 2$

- b) Tùy theo các giá trị của m, hãy biện luận số nghiệm của phương trình:

$$-x^4 + 2x^2 - 2 = m$$

31. Khảo sát và vẽ đồ thị của các hàm số sau:

a) $y = x^4 - 3x^2 + 2$

b) $y = -x^4 - 2x^2 + 1$

32. a) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$

- b) Tùy theo các giá trị của m, hãy biện luận số nghiệm của phương trình

$$x^3 - 3x^2 + m + 2 = 0$$

33. Cho hàm số: $y = (x + 1)(x^2 + 2mx + m + 2)$

- a) Tìm các giá trị của m để đồ thị của hàm số đã cho cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt
- b) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số với $m = -1$

34. Cho hàm số: $y = x^4 - (m + 1)x^2 + m$

- a) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số với $m = 2$.
- b) Chứng minh rằng đồ thị của hàm số luôn đi qua hai điểm cố định với mọi giá trị của m .

35. Cho hàm số: $y = x^4 - 2mx^2 + 2m$

- a) Tìm các giá trị của m sao cho hàm số có 3 cực trị
- b) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số với $m = 1/2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại hai điểm uốn.

36. a) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số: $y = \frac{x - 2}{2x + 1}$

- b) Chứng minh rằng giao điểm I của hai đường tiệm cận của đồ thị là tâm đối xứng của đồ thị.

37. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số:

a) $y = \frac{x + 1}{x - 1}$

b) $y = \frac{2x + 1}{1 - 3x}$

38. a) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số: $y = \frac{2x^2 + 5x + 4}{x + 2}$

- b) Chứng minh rằng giao điểm I của hai đường tiệm cận của đồ thị là tâm đối xứng của đồ thị.

c) Tùy theo giá trị của m , hãy biện luận số nghiệm của phương trình

$$\frac{2x^2 + 5x + 4}{x + 2} = 0$$

39. Khảo sát và vẽ đồ thị các hàm số sau:

$$a) y = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$$

$$b) y = \frac{2x^2 - x + 1}{1 - x}$$

$$c) y = \frac{2x^2 + 3x - 3}{x + 2}$$

$$d) y = -x + 2 \frac{1}{x - 1}$$

40. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{x + 1}{x - 2}$

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số đã cho tại giao điểm của đồ thị với trục tung.

c) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số đã cho, biết rằng tiếp tuyến đó song song với tiếp tuyến tại điểm A.

41. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = 1 - \frac{1}{x + 1}$

b) Từ đồ thị (C) suy ra cách vẽ đồ thị của hàm số $y = -1 + \frac{1}{x + 1}$

42. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = x - \frac{2}{x - 1}$

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số đã cho, biết rằng tiếp tuyến đó đi qua điểm A(3; 3).

43. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{x^2}{x + 1}$

b) Từ đồ thị (C) suy ra cách vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{x^2}{|x + 1|}$

44. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số: $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1$

b) Tìm các giao điểm của đường cong (C) và parabol (P): $g(x) = 2x^2 + 1$

c) Viết phương trình các tiếp tuyến của (C) và của (P) tại các giao điểm của chúng.

d) Xác định các khoảng trên đó (C) nằm phía trên hoặc dưới (P).

45. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y = \frac{2x - 1}{x + 1}$

b) Với các giá trị nào của m thì đường thẳng (d_m) có hệ số góc m và qua điểm A(-2; 2) cắt đồ thị hàm số đã cho

* Tại hai điểm phân biệt.

* Tại hai điểm thuộc hai nhánh của đồ thị.

46. Chứng minh rằng đồ thị của hai hàm số:

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x \quad \text{và} \quad g(x) = \frac{3x}{x+2} \quad \text{tiếp xúc với nhau.}$$

47. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y = \frac{x-1}{x+1}$

b) Chứng minh rằng giao điểm I của hai tiệm cận của đường cong đã cho là tâm đối xứng của nó.

48. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (H) của hàm số: $y = \frac{x+2}{2x+1}$

b) Chứng minh rằng đường thẳng $y=mx+m-1$ luôn đi qua một điểm cố định của đường cong (H) khi m biến thiên.

c) Tìm các giá trị của m sao cho đường thẳng đã cho cắt đường cong (H) tại hai điểm thuộc cùng một nhánh của (H).

49. Cho hàm số : $y = \frac{ax^2 - bx}{x-1}$

a) Tìm a, và b biết rằng đồ thị (C) của hàm số đã cho đi qua điểm $A\left(-1; \frac{5}{2}\right)$ và tiếp tuyến của (C) tại điểm $O(0; 0)$ có hệ số góc bằng -3 .

b) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số với các giá trị của a và b đã tìm được.

50. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y = \frac{2x^2 - x + 1}{x-1}$

b) Với các giá trị nào của m thì đường thẳng $y=m-x$ cắt đồ thị của hàm số đã cho tại hai điểm phân biệt ?

c) Gọi A và B là hai giao điểm đó. Tìm tập hợp các trung điểm M của đoạn thẳng AB khi m biến thiên.

51. Tìm các hệ số a và b sao cho parabol $y = 2x^2 + ax + b$ tiếp xúc với hypebol

$$y = \frac{1}{x} \quad \text{tại điểm} \quad M\left(\frac{1}{2}; 2\right)$$