

ÔN TẬP PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

A/ LÝ THUYẾT

I. CÔNG THỨC CỘNG

$$\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$$

$$\operatorname{tg}(a - b) = \frac{\operatorname{tga} - \operatorname{tgb}}{1 + \operatorname{tga} \cdot \operatorname{tgb}}$$

$$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tga} + \operatorname{tgb}}{1 - \operatorname{tga} \cdot \operatorname{tgb}}$$

II. CÔNG THỨC NHÂN

1. Công thức nhân đôi

$$\sin 2a = 2 \sin a \cdot \cos a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tga}}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$$

$$\sin 3a = -4 \sin^3 a + 3 \sin a$$

$$\cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a$$

2. Công thức hạ bậc

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

$$\operatorname{tg}^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}$$

3. Công thức tính theo $\operatorname{tg} \frac{a}{2} = t$

$$\sin a = \frac{2t}{1 + t^2}; \quad \cos a = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}; \quad \operatorname{tga} = \frac{2t}{1 - t^2}$$

III. CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI

1. Công thức biến đổi tích thành tổng

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) + \cos(a + b)]$$

$$\sin a . \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)]$$

$$\sin a . \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a - b) + \sin(a + b)]$$

2. Công thức biến đổi tổng thành tích

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a + b}{2} . \cos \frac{a - b}{2}$$

$$\sin a - \sin b = 2 \sin \frac{a - b}{2} . \cos \frac{a + b}{2}$$

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a + b}{2} . \cos \frac{a - b}{2}$$

$$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a - b}{2} . \sin \frac{a + b}{2}$$

$$\operatorname{tga} + \operatorname{tgb} = \frac{\sin(a + b)}{\cos a . \cos b}$$

$$\operatorname{tga} - \operatorname{tgb} = \frac{\sin(a - b)}{\cos a . \cos b}$$

B/ LUYỆN TẬP

1. a, b là góc nhọn: $\cos a = \frac{1}{3}, \cos b = \frac{1}{4}$. Tính $\cos(a + b) . \cos(a - b)$.

Giải

$$\begin{aligned} \cos(a + b) . \cos(a - b) &= (\cos a . \cos b - \sin a . \sin b)(\cos a . \cos b + \sin a . \sin b) \\ &= \cos^2 a . \cos^2 b - \sin^2 a . \sin^2 b \end{aligned}$$

$$* \cos a = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin a = \sqrt{1 - \cos^2 a} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$* \cos b = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin b = \sqrt{1 - \cos^2 b} = \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\begin{aligned} \cos(a + b) . \cos(a - b) &= \cos^2 a . \cos^2 b - \sin^2 a . \sin^2 b \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 . \left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2 = -\frac{119}{144} \end{aligned}$$

2. Dùng công thức hạ bậc để giải các phương trình sau:

a) $\sin^2 4x + \sin^2 3x = \sin^2 2x + \sin^2 x$

$$b) \cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$$

Giải

$$a) \frac{1 - \cos 8x}{2} + \frac{1 - \cos 6x}{2} = \frac{1 - \cos 4x}{2} + \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$2\cos 7x \cos x = 2\cos 3x \cos x \Leftrightarrow \cos x [\cos 7x - \cos 3x] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos 7x = \cos 3x \end{cases} \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2}, x = k\frac{\pi}{5}$$

$$b) \frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{1 + \cos 4x}{2} + \frac{1 + \cos 6x}{2} + \frac{1 + \cos 8x}{2} = 2$$

$$\cos 3x \cos x + \cos 7x \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x \cos 2x \cos 5x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos 2x = 0 \\ \cos 5x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5} \end{cases}$$

TRẮC NGHIỆM

1. Tìm hệ thức sai trong các hệ thức sau:

$$a) \cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$b) \sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$$

$$c) \operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tga} + \operatorname{tgb}}{1 - \operatorname{tga} \cdot \operatorname{tgb}}$$

$$d) \operatorname{cotg}(a + b) = \frac{\operatorname{cotga} \cdot \operatorname{cotgb} + 1}{\operatorname{cotga} + \operatorname{cotgb}}$$

2. Tìm hệ thức sai trong các hệ thức sau:

$$a) \cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$

$$b) \sin(a - b) = \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a$$

$$c) \operatorname{tg}(a - b) = \frac{\operatorname{tga} - \operatorname{tgb}}{1 + \operatorname{tga} \cdot \operatorname{tgb}}$$

$$d) \operatorname{cotg}(a - b) = \frac{\operatorname{cotga} \cdot \operatorname{cotgb} - 1}{\operatorname{cotga} + \operatorname{cotgb}}$$

3. Chọn hệ thức sai trong các hệ thức sau:

a) $\sin 2a = 2\sin a \cdot \cos a$

b) $\cos 2a = \sin^2 a - \cos^2 a$

c) $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$

d) $\operatorname{tg} 2a = \frac{2\operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$

4. Chọn hệ thức sai trong các hệ thức sau:

a) $\sin^2 4a = \frac{1 - \cos 8a}{2}$

b) $\cos^2 \frac{a}{2} = \frac{1 + \cos a}{2}$

c) $\operatorname{tg}^2 2a = \frac{1 - \cos 4a}{1 + \cos 4a}$

d) $\cot g^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}$

5. Biểu thức $\cos \frac{\pi}{8}$ có giá trị bằng:

a) $\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$

b) $\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$

c) $\sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}}$

d) $\sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{2}}$

6. Chọn các hệ thức đúng:

a) $\begin{cases} \sin 3a = 4\sin^3 a - 3\sin a \\ \cos 3a = 3\cos a - 4\cos^3 a \end{cases}$

b) $\begin{cases} \sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a \\ \cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a \end{cases}$

c) $\begin{cases} \sin 3a = 3\sin^3 a - 4\sin a \\ \cos 3a = 4\cos a - 3\cos^3 a \end{cases}$

d) $\begin{cases} \sin 3a = 4\sin a - 3\sin^3 a \\ \cos 3a = 3\cos^3 a - 4\cos a \end{cases}$

7. Giá trị lớn nhất của biểu thức $\sin^4 x + \cos^4 x$ là:

A. 0

B. 1

C. 2

D. 1/2

8. Giá trị bé nhất của biểu thức $\sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$ là:

A. -2

B. $\sqrt{3}/2$

C. -1

D. 0

9. Tập giá trị của hàm số $y = 2\sin 2x + 3$ là:

A. [-1; 1]

B. [2; 3]

C. [-2; 3]

D. [1; 5]

10. Tập giá trị của hàm số $y = 1 - 2|\sin 3x|$ là:

- A. $[-1; 1]$ B. $[0; 1]$ C. $[-1; 0]$ D. $[-1; 3]$

11. Giá trị lớn nhất của biểu thức $y = \cos^2 x - \sin x$ là:

- A. 2 B. 0 C. $5/4$ D. 1

12. Tập giá trị của hàm số $y = 4\cos 2x - 3\sin 2x + 6$ là:

- A. $[3; 10]$ B. $[6; 10]$ C. $[-1; 13]$ D. $[1; 11]$

13. Khi x thay đổi trong khoảng $\left(\frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right)$ thì $y = \sin x$ lấy mọi giá trị thuộc:

- A. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$ B. $\left[-1; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ C. $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right]$ D. $[-1; 1]$

14. Khi x thay đổi trong khoảng $\left(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right)$ thì $y = \cos x$ lấy mọi giá trị thuộc:

- A. $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ B. $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ C. $\left[-\frac{1}{2}; 0\right]$ D. $\left[-1; \frac{1}{2}\right]$

15. Số nghiệm của phương trình $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$ thuộc đoạn $[\pi; 2\pi]$ là:

- A. 1 B. 2 C. 0 D. 3

16. Số nghiệm của phương trình $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$ thuộc đoạn $[\pi; 2\pi]$ là:

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 0

17. Nghiệm của phương trình $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = 2$ là:

- A. $\frac{\pi}{12}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{8}$ D. $\frac{\pi}{6}$

18. Số nghiệm của phương trình $\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 0$ thuộc đoạn $(\pi; 8\pi)$ là:

- A. 1 B. 3 C. 2 D. 4