

GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

A/ TÓM TẮT KIẾN THỨC

1. Giới hạn của hàm số tại một điểm

a) *Giới hạn hữu hạn:*

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $(a; b)$, có thể trừ điểm $x_0 \in (a; b)$. Nếu với mọi dãy số $x_n = x_0$ ta đều có $\lim f(x_n) = L$ thì ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn là số L khi x dần đến x_0 . Khi đó ta kí hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ hoặc $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow x_0$.

b) *Giới hạn vô cực:*

Tương tự như các điều đã nêu trong phần a), nếu $\lim f(x) = \pm\infty$ thì ta nói $f(x)$ có giới hạn vô cực khi $x \rightarrow x_0$ và kí hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$ hay $f(x) \rightarrow \pm\infty$ khi $x \rightarrow x_0$.

2. Giới hạn của hàm số tại vô cực

Hàm số $f(x)$ xác định trong khoảng $(a; +\infty)$ nếu với mọi dãy số (x_n) với $x_n > a \forall n$, $\lim x_n = +\infty$ ta đều có:

$f(x_n) \rightarrow L$ hoặc $(+\infty, -\infty)$ ta nói hàm $f(x)$ có giới hạn là L hoặc $(+\infty, -\infty)$ khi x dần tới vô cực khi đó ta viết $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ (hay $\pm\infty$) hoặc $f(x) \rightarrow L$ (hay $\pm\infty$) khi $x \rightarrow +\infty$.

3. Một số định lý về giới hạn hữu hạn

$$a) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$c) \lim_{x \rightarrow x_0} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

$$d) \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right|$$

$$e) \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}$$

4. GIỚI HẠN MỘT BÊN

Định nghĩa 1: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $(x_0; b)$ $x_0 \in \mathbb{R}$. Với mọi dãy số (x_n) , $\forall x_n \in (x_0; b)$, $\lim x_n = x_0$ ta đều có $\lim f(x_n) = L$ thì L được gọi là giới hạn bên phải của $f(x)$ tại x_0 và kí hiệu

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L \text{ hoặc } f(x) \rightarrow L \text{ khi } x \rightarrow x_0^+$$

Định nghĩa 2: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $(a; x_0)$ $x_0 \in R$. Với mọi dãy số (x_n) , $\forall x_n \in (a; x_0)$, $\lim x_n = x_0$ ta đều có $\lim f(x_n) = L$ thì L được gọi là giới hạn bên trái của $f(x)$ tại x_0 và kí hiệu

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L \text{ hoặc } f(x) \rightarrow L \text{ khi } x \rightarrow x_0^-$$

Định lý: Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ thì hàm số $f(x)$ có giới hạn tại x_0 và $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$

Ghi chú: Các định nghĩa $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$,

$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$ tương tự như các định nghĩa 1 và định nghĩa 2.

5. CÁC DẠNG VÔ ĐỊNH

a) Dạng $\frac{0}{0}$ và $\frac{\infty}{\infty}$

Các bài toán tìm $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ mà $\lim f(x) = \lim g(x) = 0$ hoặc

$\lim f(x) = \lim g(x) = \infty$. Khi đó, để tìm giới hạn ta phải khử dạng vô định bằng cách phân tích $f(x)$ và $g(x)$ các thành nhân tử chung trước khi áp dụng các định lý giới hạn.

b) Dạng $0 \cdot \infty$

Các bài toán tìm $\lim f(x) \cdot g(x)$ khi mà $\lim f(x) = 0$ và $\lim g(x) = \infty$, khi đó ta phải biến đổi $f(x) \cdot g(x)$ thành biểu thức có dạng $\frac{0}{0}$ hoặc $\frac{\infty}{\infty}$

c) Dạng $\infty - \infty$

Tương tự như các dạng vô định nói trong mục a) và b).

6. GIỚI HẠN HÀM $A^{B(x)}$

Tính $\lim_{x \rightarrow a} A^{B(x)}$

Đặt $y = A^{B(x)}$

Lấy logarit Neper hai vế:

$$\ln y = B(x) \ln A$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \ln y = \lim_{x \rightarrow a} B(x) \ln A$$

$$\lim_{x \rightarrow a} y = e^{\lim_{x \rightarrow a} B(x) \ln A}$$

LUYỆN TẬP PHẦN 1

1. Tìm các giới hạn sau:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{5-x}}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3x - 4}{x + 1}$$

2. Tìm các giới hạn sau:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 + 7x + 11)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x - x^3}{(2x - 1)(x^4 - 3)}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -1} x \left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x} - 3}{9x - x^2}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -1} |x^2 - 4|$$

$$f) \lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{\frac{x^4 + 3x - 1}{2x^2 - 1}}$$

3. Tìm các giới hạn:

$$a) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - x + 7}{2x^3 - 1}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 + 7x^3 - 15}{x^4 + 1}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^6 + 2}}{3x^3 - 1}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^6 + 2}}{3x^3 - 1}$$

4. Tìm các giới hạn:

$$a) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{\frac{x^2 + 2x}{8x^2 - x + 3}}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x^2 - x + 2}$$

LUYỆN TẬP PHẦN 2

5. Tìm các giới hạn sau:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x - 1}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 5^-} \sqrt{5 - x} + 2x$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x - 3}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x - 3}$$

6. Tìm các giới hạn sau (nếu có):

$$a) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x - 2|}{x - 2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x - 2|}{x - 2}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x - 2|}{x - 2}$$

7. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + 2\sqrt{x}}{x - 2\sqrt{x}}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{4 - x^2}{\sqrt{2 - x}}$

c) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x^2 + 3x + 2}{\sqrt{x^5 + x^4}}$

d) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{x^2 - 7x + 12}}{\sqrt{9 - x^2}}$

8. Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} 2|x| - 1 & \text{với } x \leq -2 \\ \sqrt{2x^2 + 1} & \text{với } x > -2 \end{cases}$$

Tìm $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ (nếu có)

9. Tìm các giới hạn

a) $\lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} \frac{x^3 + 2\sqrt{2}}{x^2 - 2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{x^2 - 7x + 12}}{2x^2 - 3x - 9}$

c) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 16}{x^2 + 6x + 8}$

d) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-x} + x - 1}{\sqrt{x^2 - x^3}}$

10. Tìm các giới hạn

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\frac{2x^5 + x^3 - 1}{(2x^2 - 1)(x^3 + x)}}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2|x| + 3}{\sqrt{x^2 + x + 5}}$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x} + 2x}{2x + 3}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1) \sqrt{\frac{x}{2x^4 + x^2 + 1}}$

11. Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3 & \text{với } x \leq 2 \\ 4x - 3 & \text{với } x > 2 \end{cases}$$

Tìm $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ (nếu có)

12. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^3 - 5x^2 + 7)$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x^4 - 3x + 12}$

13. Tìm các giới hạn sau:

$$a) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x+1}{x-2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x+1}{x-2}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right)$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2-4} \right)$$

14. Tìm các giới hạn sau:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3-5}{x^2+1}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4-x}}{1-2x}$$

15. Tìm các giới hạn sau:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{2}{(x-1)^2} \cdot \frac{2x+1}{2x-3} \right]$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5}{(x-1)(x^2-3x+2)}$$

LUYỆN TẬP PHẦN 3

16. Tìm các giới hạn sau:

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-8}{x^2-4}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow (-3)^+} \frac{2x^2+5x-3}{(x+3)^2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow (-3)^-} \frac{2x^2+5x-3}{(x+3)^2}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^3+1}-1}{x^2+x}$$

17. Tìm các giới hạn sau:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2+x-10}{9-3x^3}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^2-7x+12}}{3|x|-17}$$

18. Tìm các giới hạn sau:

$$a) \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x^3+1) \sqrt{\frac{x}{x^2-1}}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2) \sqrt{\frac{x-1}{x^3+x}}$$

19. Tìm các giới hạn sau:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1}-x)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x-x^2}-1}{x^2-x}$$

20. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)$

b) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2}$

c) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{3 - \sqrt{x}}{9 - x}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{4 - x}}{x}$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - x^3 + 11}{2x - 7}$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2 \frac{\sqrt{x^4 + 4}}{x + 4}$

21. Tìm các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}} \frac{x^3 + \sqrt[3]{3}}{3 - x^2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 4x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x - 1}}{x^2 - x}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - 1}{3x}$

21. Tìm các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \sqrt{\frac{2x^3 + x}{x^5 - x^2 + 3}}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| + \sqrt{x^2 + x}}{x + 10}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^4 + x^2 - 1}}{1 - 2x}$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{2x^2 + 1} + x)$

Bài 22: Tìm các giới hạn

a) $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x)^{\frac{1}{x}}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}$

23. Tìm các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x}}{x^2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} x \frac{\sqrt{1 - x}}{2\sqrt{1 - x} + 1 - x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3 - x}{\sqrt{27 - x^3}}$

d) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^3 - 8}}{x^2 - 2x}$

BÀI TẬP ÔN

1. Tìm các giới hạn của hàm số

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + x - 3}{x^2 + 4x - 5}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \frac{2x^2 + 3x - 9}{4x^2 - 8x + 3}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x + 1}{\sqrt{x} - 3}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{x+7} - 3}$$

2. Tìm các giới hạn của hàm số

$$a) \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x^2 - x}{\sqrt[3]{x^3} + 2x - 1}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3x} + x}{3x + 5}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + x - 3}{x^4 - x^2 + 1}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{3}{x^2 - 4} - \frac{1}{x - 2} \right)$$

TRẮC NGHIỆM

$$1. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x-1}}{x^2 - x} \text{ là}$$

A. 2

B. 1

C. -2

D. -3/2

$$2. \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{\frac{x^2}{x^3 - x - 6}} \text{ là}$$

A. 1/2

B. 2

C. 3

D. -1

$$3. \lim_{x \rightarrow -4} \sqrt{\frac{x^2}{x^3 - x - 6}} \text{ là}$$

A. 5/4

B. 1

C. -5/4

D. -1

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 3}{x^6 + 5x^5}$ là

A. 2

B. 0

C. -3/5

D. -3

5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^5 + 7x^3 - 11}{x^5 + x^4 - 3x}$ là

A. 0

B. -3

C. 3

D. $-\infty$

6. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^5 + x^4 - 3}{3x^2 - 7}$ là

A. $-\infty$

B. -2

C. 0

D. $+\infty$

7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ là

A. 1

B. -1

C. 0

D. $+\infty$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - 1}{x}$ là

A. 1/2

B. -1/2

C. $+\infty$

D. 0